ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία

Αντίστροφο Πρόβλημα Εντοπισμού Μαλακών Σκεδαστών Χωρίς Φάση σε Δύο Διαστάσεις

Χριστίνα Θάλεια Μάστουρα
Επιβλέπων Καθηγητής: Δρόσος Γκιντίδης - Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Φεβρουάριος 2021

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή της διπλωματικής μου εργασίας κ. Δρόσο Γκιντίδη τόσο για την καθοδήγηση και την πολύτιμη συμβολή του σε κάθε φάση της δημιουργίας της καθώς και την προτροπή και τη στήριξή του στο να ασχοληθώ περαιτέρω με τον τομέα της σκέδασης. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τα μέλη της τριμελούς μου επιτροπή τον καθηγητή κ. Αντώνιο Χαραλαμπόπουλο και τον αναπληρωτή καθηγητή κ. Κωνσταντίνο Χρυσαφίνο για τις συμβουλές τους για την παρούσα εργασία. Ιδιαίτερα, θα ήθελα να ευχαριστήσω την κα. Κυριακή Κυριάκη που από την πρώτη στιγμή που της εκδήλωσα το ενδιαφέρον μου για τον τομέα των Διαφορικών Εξισώσεων ενδιαφέρθηκε για μένα και με καθοδήγησε και είναι κάτι που δεν θα ξεχάσω. Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω τόσο την οικογένειά μου όσο και τους φίλους μου για την στήριξή τους σε αυτή μου την πορεία.

Περιεχόμενα

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία ασχολούμαστε με το Αντίστροφο Πρόβλημα Εντοπισμού για Δεδομένα χωρίς Φάση στις δύο διαστάσεις. Τα Αντίστροφα Προβλήματα Σκέδασης έχουν πολλές εφαρμογές όπως στη σεισμική απεικόνιση, σε ραντάρ και στην μαγνητική τομογραφία.

Στην εισαγωγή παρουσιάζουμε με συνοπτικό τρόπο βασικά σημεία από την Θεωρία Μέτρου και από την Θεωρία Τελεστών. Επίσης, παρουσιάζουμε την Θεωρία Riesz-Fredholm που χρησιμοποιούμε στην ανάλυσή μας. Τέλος, αναφερόμαστε στους χώρους συναρτήσεων που χρησιμοποιούμε στην παρούσα εργασία.

Στο δεύτερο κεφάλαιο μελετάμε το Ευθύ Πρόβλημα Σκέδασης Ακουστικών Κυμάτων. Στην αρχή θα αναφερθούμε στα δυναμικά απλού και διπλού στρώματος, τις σχέσεις συνέχειας και διαπήδησης για αυτά. Συνεχίζουμε, μελετώντας το Ευθύ Πρόβλημα Σκέδασης στις τρεις διαστάσεις. Τελικά, κάνουμε μία αναφορά στις σφαιρικές αρμονικές και μέσω αυτών διατυπώνουμε το Ευθύ Πρόβλημα Σκέδασης στις δυο διαστάσεις.

Το τελευταίο κεφάλαιο είναι αφιερωμένο στο Αντίστροφο Πρόβλημα Εντοπισμού για Δεδομένα χωρίς Φάση στις δύο διαστάσεις. Το βασικό χαρακτηριστικό του είναι η αδυναμία εντοπισμού του μαλακού σκεδαστή επειδή το μέτρο του πλάτους σκέδασης παραμένει αναλλοίωτο σε μετατοπίσεις. Στη πρώτη ενότητα αναλύουμε την παραγωγισιμότητα κατά Fréchet και κατά Gateaux. Στην δεύτερη ενότητα ασχολούμαστε με την μέθοδο ομαλοποίησης Tikhonov καθώς τα αντίστροφα προβλήματα σκέδασης είναι μη καλώς τοποθετημένα και μάλιστα μη γραμμικά για το λόγο αυτό χρησιμοποιούμε και μέθοδο τύπου Newton για να την γραμμικοποιήσουμε. Τέλος, διατυπώνουμε το Αντίστροφο Πρόβλημα Σκέδασης και παραθέτουμε το αριθμητικό του σχήμα.

Abstract

This work is about the Inverse Scattering Problem of Acoustic Waves for Phaseless Data in two dimensions. The Inverse Scattering Problems have many applications such as in seismic imaging, in radars, and in ultrasound tomography.

In the introduction we present briefly main points from Meassure Theory and Operators Theory. Also, we present the parts of Riesz-Fredholm Theory that we use in our analysis. We also do a brief introduction of the functional spaces that we use in this work.

In the second chapter we study the Direct Scattering Problem for Acoustic Waves. In the beggining we refer to single and double layer potentials, regularity and jump relations for them. We continue, by studying the Direct Scattering Problem in three dimensions. Finally, we make a quick introduction to spherical harmonics and by using them we state the Direct Scattering Problem in two dimensions.

The last chapter is dedicated to the Inverse Scattering Problem for Phaseless Data in two dimensions. This problem has as basic feature the inability to detect the location of the sound-soft object, because the modolus of the far field is invariant under translations. In the first section we discuss the Frechét and Gateaux differentiability. In the second section we deal with the Tikhonov regularization method because inverse scattering problems are ill-posed and also non linear and for that reason we use also a Newton type method to linearilize this problem. Finally, we state the Inverse Scattering Problem and we introduce its numerical sheme.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε συνοπτικά σε έννοιες από τη Θεωρία Τελεστών και τη Θεωρία Μέτρου. Στη συνέχεια, θα αναφερθούμε στη Θεωρία Riesz-Fredholm και στους ολοκληρωτικούς τελεστές που θα είναι βασικό εργαλείο για την ανάπτυξη της θεωρίας των Προβλημάτων Σκέδασης. Τέλος, θα παρουσιάσουμε εν συντομία τους συναρτησιακούς χώρους που θα χρησιμοποιηθούν στην μελέτη μας.

1.1 Βασικά Αποτελέσματα Θεωρίας Μέτρου και Θεωρίας Τελεστών

Σε αυτήν την ενότητα θα ασχοληθούμε συνοπτικά σε έννοιες από τη Θεωρία Τελεστών και τη Θεωρία Μέτρου.

1.1.1 Βασικά Αποτελέσματα Θεωρίας Μέτρου

Σε αυτήν την υποενότητα θα αναφερθούμε συνοπτικά σε αποτελέσματα από τη Θεωρία Μέτρου τα οποία θα μας είναι απαραίτητα στην μετέπειτα ανάλυσή μας.

Ορισμός 1.1 (σ-άλγεβρα). *Μία συλλογή Σ υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ καλείται* ***σ-άλγεβρα*** *αν ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες:*

i. $\mathbb{R}^n \in \Sigma$.

ii. Αν $A \in \Sigma$ *τότε* $A^c \in \Sigma$.

iii. Έστω ακολουθία συνόλων $(A_j)_j$ *του* Σ *δηλαδή* $A_j \in \Sigma$, $j = 1, 2, ...$ *τότε* $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j \in \Sigma$.

Από τα (i.) − (iii.) έχουμε επίσης:

iv. $\emptyset \in \Sigma$.

v. *Αν* $A, B \in \Sigma$ *τότε* $A \setminus B = A \cap B^c \in \Sigma$.

Ορισμός 1.2 (Θετικό μέτρο μ). *Με **μέτρο** μ σε μία σ-άλγεβρα Σ λέμε μία συνάρτηση* $\mu : \Sigma \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *που είναι αριθμήσιμα προσθετική υπό την έννοια*

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j),$$

όπου $A_j \in \Sigma$, $j = 1, 2, ...$ *και είναι ανά δύο ξένα δηλαδή* $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$.

Ορισμός 1.3 (Μέτρο Lebesgue). *Υπάρχει μία σ-άλγεβρα Σ υποσυνόλων του* $\mathbb{R}^n$ *και ένα θετικό μέτρο μ στην Σ με τις ακόλουθες ιδιότητες:*

i. *Κάθε ανοιχτό υποσύνολο του* $\mathbb{R}^n$ *ανήκει στη* Σ.

ii. *Αν* $A \subset B$, $B \in \Sigma$ *και* $\mu(B) = 0$ *τότε* $A \in \Sigma$ *και* $\mu(A) = 0$.

iii. *Αν* $A = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ a_j \leq x_j \leq b_j, \ j = 1, 2, ..., n\}$ *τότε* $A \in \Sigma$ *και*

$$\mu(A) = \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j) \ .$$

iv. *Το μ είναι αναλλοίωτο στις μεταφορές, δηλαδή για* $x \in \mathbb{R}^n$ *και* $A \in \Sigma$ *ισχύει ότι*

$$x + A = \{x + y \ : \ y \in A\} \in \Sigma \quad , \quad \mu(x + A) = \mu(A).$$

*Τα στοιχεία της Σ καλούνται **Lebesgue μετρήσιμα** υποσύνολα του* $\mathbb{R}^n$ *και το μ καλείται **μέτρο Lebesgue** στον* $\mathbb{R}^n$

Ορισμός 1.4 (Σχεδόν παντού (σ.π)). *Αν* $A \subset B \subset \mathbb{R}^n$ *και* $\mu(B) = 0$ *τότε οποιαδήποτε συνθήκη ισχύει στο σύνολο* $A \setminus B$ *λέμε ότι ισχύει **σχεδόν παντού** σε συντομογραφία (**σ.π.**) στο A. Τα αριθμήσιμα σύνολα έχουν μέτρο 0 στο* $\mathbb{R}^n$.

Ορισμός 1.5 (Μετρήσιμες κατά Lebesgue συναρτήσεις). *Έστω* $A \subset \mathbb{R}^n$ *μετρήσιμο η συνάρτηση* $f : A \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ *καλείται **μετρήσιμη συνάρτηση** αν το σύνολο*

$$\{x \in A \ : \ f(x) > a\}$$

είναι μετρήσιμο $\forall a \in \mathbb{R}$.

Θεώρημα 1.6 (Θεώρημα Lusin). *Αν η f είναι μετρήσιμη και* $f(x) = 0$ *για* $x \in A^c$ *όπου* $\mu(A) < \infty$, *και αν* $\epsilon > 0$, *τότε υπάρχει συνάρτηση* $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$ *τέτοια ώστε*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} g(x) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \tag{1.1}$$

και

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ f(x) \neq g(x)\}) < \epsilon \ . \tag{1.2}$$

Ορισμός 1.7. *Μια συνάρτηση s στον $\mathbb{R}^n$ καλείται* ***απλή συνάρτηση*** *αν η εικόνα της είναι ένα πεπερασμένο σύνολο πραγματικών αριθμών.*

Θεώρημα 1.8. *Δοθείσης πραγματικής συνάρτησης f με χωρίο $A \subset \mathbb{R}^n$ υπάρχει μία ακολουθία $\{s_j\}$ απλών συναρτήσεων που συγκλίνει κατά σημείο στην f στο A. Αν η f είναι φραγμένη, η $\{s_j\}$ μπορεί να επιλεχθεί έτσι ώστε η σύγκλιση να είναι ομοιόμορφη. Αν η f είναι μετρήσιμη, το κάθε s_j μπορεί να επιλεχθεί ώστε να είναι μετρήσιμο. Αν η f έχει μη αρνητικές τιμές, η ακολουθία $\{s_j\}$ μπορεί να επιλεχθεί ώστε να είναι αύξουσα ως προς τη μονοτονία σε κάθε σημείο.*

Θεώρημα 1.9 (Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης). *Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ μετρήσιμο και έστω $\{f_j\}$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων που ικανοποιούν την συνθήκη $0 \le f_1(x) \le f_2(x) \le \cdots$, $\forall\, x \in A$. Τότε*

$$\lim_{j\to\infty} \int_A f_j(x)\,dx = \int_A (\lim_{j\to\infty} f_j(x))\,dx\ .$$

Θεώρημα 1.10 (Λήμμα Fatou). *Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ μετρήσιμο και έστω $\{f_j\}$ ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων. Τότε*

$$\int_A (\liminf_{j\to\infty} f_j(x))\,dx \le \liminf_{j\to\infty} \int_A f_j(x)\,dx\ . \tag{1.3}$$

Θεώρημα 1.11 (Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης). *Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ μετρήσιμο και έστω $\{f_j\}$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων που συγκλίνουν σε ένα όριο με κατά σημείο σύγκλιση στο A. Αν υπάρχει συνάρτηση $g \in L^1(A)$ τέτοια ώστε $|f_j(x)| \le g(x)$, $\forall x \in A$, $\forall\, j$, τότε*

$$\lim_{j\to\infty} \int_A f_j(x)\,dx = \int_A (\lim_{j\to\infty} f_j(x))\,dx\ .$$

1.1.2 Βασικά Αποτελέσματα Θεωρίας Τελεστών

Σε αυτήν την υποενότητα θα αναφερθούμε συνοπτικά σε αποτελέσματα από τη Θεωρία Τελεστών τα οποία θα μας είναι απαραίτητα στην μετέπειτα ανάλυσή μας. Αν ο αναγνώστης επιθυμεί να εμβαθύνει περαιτέρω σε αποτελέσματα αυτής της υποενότητας παραπέμπεται στα [4], [8], [14].

Ορισμός 1.12. *Έστω $G \subset \mathbb{R}^n$ και u συνάρτηση ορισμένη στο G ορίζουμε τον* ***φορέα (support)*** *της u ως*

$$\mathrm{supp} u = \overline{\{x \in G : u(x) \neq 0\}}.$$

Ορισμός 1.13. 1. *Ένας μετρικός χώρος X καλείται* ***συμπαγής*** *αν κάθε ανοιχτό κάλυμμα του X έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα.*

2. *Ένας μετρικός χώρος X καλείται* ***συμπαγής*** *αν κάθε ακολουθία στοιχείων του X έχει συγκλίνουσα υπακολουθία και το όριο αυτής ανήκει στον X.*

Ορισμός 1.14. *Ένα σύνολο U ενός χώρου με νόρμα X καλείται* ***σχετικά συμπαγές*** *σύνολο αν η κλειστότητά του $\bar{U}$ είναι συμπαγές σύνολο στον X.*

Θεώρημα 1.15. *Έστω X χώρος Banach και $V \subset X$. Το V είναι σχετικά συμπαγές αν και μόνο αν είναι ολικά φραγμένο.*

Παρατήρηση 1.16. *Στο παραπάνω Θεώρημα το V είναι σχετικά συμπαγές αν είναι ολικά φραγμένο δηλαδή αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει πεπερασμένο σύνολο στοιχείων $\{x_1, \cdots, x_n\}$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in V$ να υπάρχει τουλάχιστον ένας δείκτης $j = j(x)$ ώστε*

$$\|x_j - x\| < \epsilon\,.$$

Ορισμός 1.17. *Έστω X και Υ χώροι με νόρμα γραμμικός τελεστής $A : X \to Y$, ακολουθία $(x_n)_n$ στοιχείων του X και $x \in X$. Ο τελεστής A είναι* ***συνεχής*** *αν*

$$\|x_n - x\|_X \to 0 \;\Rightarrow\; \|Ax_n - Ax\|_Y \to 0\,.$$

Ορισμός 1.18. *Έστω X και Υ χώροι με νόρμα και γραμμικός τελεστής $A : X \to Y$ η* ***νόρμα του A*** *είναι*

$$\|A\| = \sup_{\substack{x\neq 0\\ x\in X}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{\|x\|=1\\ x\in X}} \|Ax\| = \sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ x\in X}} \|Ax\|\,. \tag{1.4}$$

Ορισμός 1.19. *Έστω X και Υ χώροι με νόρμα, ένας γραμμικός τελεστής $A : X \to Y$, καλείται* ***φραγμένος*** *αν υπάρχει θετική σταθερά C ώστε*

$$\|Ax\| \leq C\|x\|\;,\; \forall\, x \in X\,.$$

Η νόρμα του A είναι η μικρότερη σταθερά C που ικανοποιεί αυτή την σχέση.

Αν $Y = \mathbb{C}$, ο τελεστής A καλείται ***φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό****. Ο χώρος X^* είναι ο χώρος των φραγμένων γραμμικών συναρτησιακών του χώρου που ορίζονται στον χώρο X και καλείται* ***δυϊκός χώρος*** *του X.*

Παρατήρηση 1.20. *Έστω X και Υ χώροι με νόρμα και γραμμικός τελεστής $A : X \to Y$. Ο χώρος των φραγμένων γραμμικών τελεστών από το X στο Υ συμβολίζεται με $B(X, Y)$. Αν $A \in B(X, Y)$ η νόρμα του A συμβολίζεται ως*

$$\|A\|_{B(X,Y)} = \sup_{\substack{\|x\|\leq 1\\ x\in X}} \|Ax\| \tag{1.5}$$

διαλέγοντας μία από τις τρεις επιλογές της (1.4).

Ορισμός 1.21. *Έστω X και Υ χώροι με νόρμα. Μία οικογένεια τελεστών $(A_\alpha)_{\alpha\in I} \subset B(X, Y)$ καλείται* ***κατά νόρμα φραγμένη (norm bounded)*** *αν*

$$\|A_\alpha\|_{B(X,Y)} < \infty, \;\; \forall \alpha \in I. \tag{1.6}$$

Ορισμός 1.22. *Έστω X και Y χώροι με νόρμα. Μία οικογένεια τελεστών $(A_\alpha)_{\alpha\in I} \subset B(X,Y)$ καλείται **σημειακά φραγμένη (pointwise bounded)** αν για κάθε $x \in X$ σταθερό*

$$\|A_\alpha x\|_Y < \infty, \ \ \forall \alpha \in I. \tag{1.7}$$

Ορισμός 1.23. *Έστω X και Y χώροι με νόρμα. Μία ακολουθία τελεστών $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B(X,Y)$ καλείται **κατά νόρμα συγκλίνουσα (norm convergent)** στον τελεστή $A \in B(X,Y)$ αν*

$$\|A_n - A\|_{B(X,Y)} \to 0, \tag{1.8}$$

καθώς $n \to \infty$.

Ορισμός 1.24. *Έστω X και Y χώροι με νόρμα. Μία ακολουθία τελεστών $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B(X,Y)$ καλείται **σημειακά συγκλίνουσα (pointwise convergent)** στον τελεστή $A \in B(X,Y)$ αν*

$$A_n x \to Ax\,, \ \ \forall\, x \in X \tag{1.9}$$

καθώς $n \to \infty$.

Θεώρημα 1.25 (Θεώρημα Banach-Steinhaus). *Έστω X, Y χώροι Banach και μία οικογένεια τελεστών $(A_\alpha)_{\alpha\in I} \subset B(X,Y)$ (όχι απαραίτητα αριθμήσιμη). Έστω, επίσης, ότι*

$$\sup_{i\in I} \|A_\alpha x\|_Y < \infty, \ \ \forall\, x \in X. \tag{1.10}$$

Τότε

$$\sup_{i\in I} \|A_\alpha\|_{B(X,Y)} < \infty\,. \tag{1.11}$$

Δηλαδή υπάρχει σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε

$$\|A_\alpha x\|_Y \le c\|x\|_X, \ \ \forall\, x \in X\ \forall \alpha \in I. \tag{1.12}$$

Παρατήρηση 1.26.

1. *Το Θεώρημα Banach-Steinhaus στη βιβλιογραφία αναφέρεται και ως **Αρχή Ομοιόμορφου Φράγματος** καθώς πηγαίνει από μία σημειακή εκτίμηση σε ομοιόμορφη εκτίμηση.*

2. *Ισχύει και το αντίστροφο αλλά προκύπτει από τον ορισμό. Δηλαδή, με X, Y χώροι Banach και μία οικογένεια τελεστών $(A_\alpha)_{\alpha\in I} \subset B(X,Y)$ (όχι απαραίτητα αριθμήσιμη) αν είναι κατά νόρμα φραγμένη είναι και σημειακά φραγμένη.*

3. *Η Αρχή Ομοιόμορφου Φράγματος ισχύει και αν ο Y είναι απλώς χώρος με νόρμα. Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο σύγγραμμα [8].*

Ορισμός 1.27. *Το σύνολο όλων των φραγμένων γραμμικών συναρτησιακών ενός χώρου με νόρμα X καλείται **δυϊκός** του X και συμβολίζεται X^*. Η νόρμα στον δυϊκό χώρο X^* ορίζεται $\forall\, f \in X^*$ ως*

$$\|f\|_{X^*} = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|_X}\ .$$

Με την νόρμα αυτή ο χώρος X^* είναι Banach.

Θεώρημα 1.28 (Θεώρημα Επέκτασης Hahn-Banach). *Έστω M υπόχωρος ενός χώρου με νόρμα X. Αν $g \in M^*$ υπάρχει $f \in X^*$ ώστε*

$$\|f\|_{X^*} = \|g\|_{M^*}$$

και

$$f(x) = g(x) \ \ , \ \forall \, x \in M \, .$$

Θεώρημα 1.29. *Έστω X και Y χώροι με νόρμα, ένας γραμμικός τελεστής $A : X \to Y$, ο A είναι συνεχής αν και μόνο αν είναι φραγμένος.*

Απόδειξη. **(Ευθύ)** Έστω ότι ο A είναι συνεχής. Θα αποδείξουμε ότι είναι φραγμένος, με απαγωγή σε άτοπο. Υποθέτουμε λοιπόν ότι ο A είναι συνεχής αλλά δεν είναι φραγμένος. Από την άρνηση του ορισμού έχουμε ότι:

$$\forall \, C > 0 \ \ \exists \, x \in X \ : \ \|Ax\|_Y \ > \ C\|x\|_X \ ,$$

και άρα,

$$\forall \, n \in \mathbb{N} \ \ \exists \, x_n \in X \ \ \|x_n\|_X = 1 \ : \ \|Ax\|_Y \ > \ n \, . \tag{1.13}$$

Η ακολουθία $\left(\frac{x_n}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο 0_X πράγματι

$$\left\|\frac{x_n}{\sqrt{n}}\right\| = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \|x_n\| = \frac{1}{\sqrt{n}} \to \ 0 \, .$$

Επειδή ο A είναι συνεχής

$$A\left(\frac{x_n}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} A x_n \ \to \ 0_Y \, .$$

Από σχέση (1.13) όμως έχουμε ότι

$$\left\|A\left(\frac{x_n}{\sqrt{n}}\right)\right\| = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \|Ax_n\| \ > \ \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \ \to \ \infty \, .$$

Άρα καταλήγουμε σε άτοπο.
(Αντίστροφο) Έστω ότι ο A είναι φραγμένος. Τότε υπάρχει θετική σταθερά C ώστε

$$\|Ax\| \leq C\|x\| \ , \ \forall \, x \in X \, .$$

Έστω ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο X και $x_n \to x$ με $x \in X$. Τότε

$$\|Ax_n - Ax\| = \|A(x_n - x)\| \leq C\|x_n - x\| \to \ 0$$

$$\Rightarrow \ \|Ax_n - Ax\| \to \ 0 \, .$$

Άρα ο A είναι συνεχής. □

Ορισμός 1.30. *Έστω X και Y χώροι με νόρμα, ένας γραμμικός τελεστής $A : X \to Y$, καλείται* ***συμπαγής*** *αν απεικονίζει οποιοδήποτε φραγμένο σύνολο του X σε ένα σχετικά συμπαγές σύνολο του Y.*

Ορισμός 1.31. *Έστω X και Y χώροι με νόρμα, ένας γραμμικός τελεστής $A : X \to Y$ είναι* ***πλήρως συνεχής*** *αν είναι συνεχής και συμπαγής.*

Θεώρημα 1.32. *Έστω X και Y χώροι με νόρμα, ένας γραμμικός τελεστής $A : X \to Y$ είναι συμπαγής αν και μόνο αν για κάθε φραγμένη ακολουθία $(x_n)_n$ του X, η ακολουθία $(Ax_n)_n$ του Y περιέχει συγκλίνουσα υπακολουθία.*

Θεώρημα 1.33. *Όλοι οι συμπαγείς γραμμικοί τελεστές είναι φραγμένοι.*

Απόδειξη. Έστω ότι ο συμπαγής γραμμικός τελεστής $A : X \to Y$ δεν είναι φραγμένος. Τότε, υπάρχει ακολουθία $(x_n)_n$ του X με $\|x_n\| = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε

$$\|Ax_n\| \geq n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{1.14}$$

Αφού A συμπαγής υπάρχει υπακολουθία της $(Ax_n)_n$ η $(Ax_{n_k})_k$ τέτοια ώστε

$$Ax_{n_k} \to y \in Y, \ k \to \infty \Rightarrow \|Ax_{n_k}\| \to \|y\|, \ k \to \infty$$

που είναι άτοπο λόγω της (1.14). □

Θεώρημα 1.34. *Όλοι οι συμπαγείς γραμμικοί τελεστές $A : X \to Y$ είναι πλήρως συνεχείς.*

Απόδειξη. Έστω ότι ο συμπαγής γραμμικός τελεστής $A : X \to Y$. Τότε από Θεώρημα (1.33) είναι και φραγμένος. Αφού είναι φραγμένος από Θεώρημα (1.29) είναι και συνεχής. Επομένως, ο A είναι συνεχής και συμπαγής. Άρα, ο A είναι πλήρως συνεχής. □

Θεώρημα 1.35. *Κάθε γραμμικός συνδυασμός συμπαγών γραμμικών τελεστών είναι συμπαγής τελεστής.*

Θεώρημα 1.36. *Έστω X,Y,Z χώροι με νόρμα και έστω $A : X \to Y$ και $B : X \to Z$ φραγμένοι γραμμικοί τελεστές. Τότε το γινόμενο $BA : X \to Z$ είναι συμπαγής τελεστής αν και μόνο αν ένας από τους δύο τελεστές ο A ή ο B είναι συμπαγής.*

Θεώρημα 1.37. *Έστω X χώρος με νόρμα και Y χώρος* Banach. *Έστω ακολουθία $A_n : X \to Y$ συμπαγών γραμμικών τελεστών που συγκλίνει ομοιόμορφα στον γραμμικό τελεστή $A : X \to Y$ δηλαδή $\|A_n - A\| \to 0, \ n \to \infty$. Τότε ο A είναι συμπαγής.*

Θεώρημα 1.38. *Έστω X και Y χώροι με νόρμα, ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής $A : X \to Y$ με εικόνα A(X) πεπερασμένης διάστασης.Τότε ο A είναι συμπαγής.*

Απόδειξη. Έστω $(x_n)_n$ φραγμένη ακολουθία στο X ώστε $\|x_n\| \leq C, \ \forall n \in \mathbb{N}$. Τότε, αφού

$$\|Ax_n\| \leq \|A\|\|x_n\| \leq C\|A\|$$

η ακολουθία (Ax_n) είναι φραγμένη στον πεπερασμένης διάστασης υπόχωρο A(X). Από θεώρημα Bolzano – Weierstrass κάθε φραγμένη ακολουθία σε χώρο με νόρμα πεπερασμένης διάστασης έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Άρα ο A είναι συμπαγής. □

Λήμμα 1.39 (Λήμμα Riesz). *Έστω X χώρος με νόρμα, $U \subset X$, $U \neq X$ κλειστός υπόχωρος και $\lambda \in (0, 1)$. Τότε υπάρχει $\psi \in X$ με $\|\psi\| = 1$ τέτοια ώστε*

$$\|\psi - \phi\| \geq \lambda, \ \forall \phi \in U \ \cdot$$

Απόδειξη. Υπάρχει $f \in X, f \notin U$ και αφού U κλειστός υπόχωρος

$$\mu := \inf_{\phi \in U} \|f - \phi\| > 0 \cdot$$

Διαλέγουμε $g \in U$ έτσι ώστε,

$$\mu \leq \|f - g\| \leq \frac{\mu}{\lambda}$$

και ορίζουμε

$$\psi = \frac{f - g}{\|f - g\|} \cdot$$

Τότε, αφού $\|\psi\| = 1,\ \forall \phi \in U$ και επειδή U υπόχωρος $g + \|f - g\|\phi \in U$ έχουμε

$$\|\psi - \phi\| = \frac{1}{\|f - g\|}\|f - (g + \|f - g\|\phi)\| \geq \frac{\beta}{\|f - g\|} \geq \lambda \cdot$$

□

Θεώρημα 1.40. *Έστω X χώρος με νόρμα. Ο ταυτοτικός τελεστής $I : X \to X$ είναι συμπαγής αν και μόνο αν ο X είναι χώρος πεπερασμένης διάστασης.*

Απόδειξη.

(Ευθύ) Έστω ότι ο I είναι συμπαγής αλλά ο X δεν έχει πεπερασμένη διάσταση. Διαλέγουμε $x_1 \in X με \|x_1\| = 1 \Rightarrow U_1 := \text{span}\ \{x_1\}$ είναι κλειστός υπόχωρος του X και από Λήμμα Riesz (1.39) υπάρχει $x_2 \in X,\ \|x_2\| = 1$ *με* $\|x_2 - x_1\| \geq \frac{1}{2}$. Τώρα έστω $U_2 := \text{span}\ \{x_1, x_2\}$ πάλι από Λήμμα Riesz (1.39) υπάρχει $x_3 \in X,\ \|x_3\| = 1$ *με* $\|x_3 - x_1\| \geq \frac{1}{2}$ και $\|x_3 - x_2\| \geq \frac{1}{2}$. Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο δημιουργούμε μία ακολουθία $(x_n)_n \in X,\ \|x_n\| = 1$ *με* $\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2}$, $\forall n \neq m$ η οποία επομένως δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία και άρα ο I δεν είναι συμπαγής άτοπο λόγω υπόθεσης.

(Αντίστροφο) Έστω X πεπερασμένης διάστασης τότε η εικόνα του I δηλαδή η I(X) είναι πεπερασμένης διάστασης και από Θεώρημα (1.38) έχουμε ότι ο I είναι συμπαγής. □

Ορισμός 1.41 (**Ενσφήνωση (Imbedding) χώρων με νόρμα**). *Λέμε ότι ο χώρος με νόρμα X* ***ενσφηνωμένος*** *στο χώρο με νόρμα Y και συμβολίζουμε την ενσφήνωση με $X \to Y$ αν ισχύουν τα ακόλουθα:*

i. ο X είναι υπόχωρος του Y,

ii. ο ταυτοτικός τελεστής $I : X \to Y$ με $Ix = x\ \ , \forall\, x \in X$ είναι συνεχής.

Λέμε ότι ο X είναι ***συμπαγώς ενσφηνωμένος*** *στον Y αν στη συνθήκη (ii.) ο ταυτοτικός τελεστής $I : X \to Y$ είναι συμπαγής.*

Παρατήρηση 1.42. *Η συνθήκη (ii.) της ενσφήνωσης λόγω του Θεωρήματος (1.29) ισοδυναμεί με την συνθήκη ο ταυτοτικός τελεστής $I : X \to Y$ να είναι φραγμένος δηλαδή να*

$$\exists\, C > 0\ :\ \|Ix\|_Y \leq\ C\|x\|_X\ ,\ \ \forall\, x \in X\ .$$

Ορισμός 1.43. *Έστω δύο χώροι με νόρμα X και Y και ένας μονοσήμαντος γραμμικός τελεστής $L : X \to Y$ με την ιδιότητα*

$$\|Lx\|_Y = \|x\|_X \quad , \ \forall \, x \in X$$

λέγεται ***ισομετρικά ισομορφικός*** *και οι χώροι X και Y λέγονται* ***ισομετρικά ισομορφικοί*** *και συμβολίζονται με $X \cong Y$.*

1.2 Θεωρία Riesz-Fredholm

Σε αυτήν την ενότητα θα αναπτύξουμε τη Θεωρία Riesz, τη Θεωρία Fredholm και θα αναλύσουμε βασικά της αποτελέσματα. Επίσης, θα ορίσουμε τους ολοκληρωτικούς τελεστές και θα παρουσιάσουμε κρίσιμες ιδιότητές τους. Αν ο αναγνώστης επιθυμεί να εμβαθύνει περαιτέρω στη Θεωρία Riesz-Fredholm και στους ολοκληρωτικούς τελεστές παραπέμπεται στα αναγνώσματα [6], [14].

1.2.1 Θεωρία Riesz

Σε αυτήν την υποενότητα θα αναπτύξουμε τη Θεωρία Riesz και θα αναλύσουμε βασικά της αποτελέσματα.

Στα επόμενα τρία θεωρήματα θεωρείται X χώρος με νόρμα, συμπαγής γραμμικός τελεστής $A : X \to Y$ και η εξίσωση

$$\phi - A\phi = f$$

, όπου $\phi \in X$ και $f \in X$. Ορίζεται, επίσης, ο τελεστής L ως

$$L := I - A$$

, όπου I ο ταυτοτικός τελεστής.

Θεώρημα 1.44 (Πρώτο Θεώρημα Riesz). *Ο πυρήνας* (nullspace) *του τελεστή L που ορίζεται ως*

$$N(L) = \{\phi \in X | L\phi = 0\}$$

είναι πεπερασμένης διάστασης.

Θεώρημα 1.45 (Δευτέρο Θεώρημα Riesz). *Η εικόνα* (range) *του τελεστή L που ορίζεται ως*

$$L(X) = \{L\phi | \phi \in X\}$$

είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος.

Ορίζουμε τους τελεστές $L^n,\ n \geq 1$ ως εξής:

$$L^0 = I,\ L^n = LL^{n-1}$$

μπορούν να γραφτούν στην μορφή

$$L^n = (I - A)^n = I - A_n$$

, όπου

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} A^k$$

είναι συμπαγείς από Θεώρημα(1.35) και Θεώρημα(1.36). Επίσης $\forall n \geq 1$ από Πρώτο Θεώρημα Riesz(1.44) οι πυρήνες $N(L^n)$ έχουν πεπερασμένη διάσταση και Δευτέρο Θεώρημα Riesz(1.45) οι εικόνες $L^n(X)$ είναι κλειστοί υπόχωροι.

Θεώρημα 1.46 (Τρίτο Θεώρημα Riesz). *Υπάρχει μοναδικά ορισμένος μη-αρνητικός αριθμός r που καλείται αριθμός* Riesz *για τον τελεστή A τέτοιος ώστε*

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & N(L^0) \subsetneqq N(L^1) \subsetneqq \cdots \subsetneqq N(L^r) \ = \ N(L^{r+1}) \ = \ \cdots , \\ X & = & L^0(X) \supsetneqq L^1(X) \supsetneqq \cdots \supsetneqq L^r(X) \ = \ L^{r+1}(X) \ = \ \cdots . \end{array}$$

Επομένως,

$$X \ = \ N(L^r) \oplus L^r(X).$$

Θεώρημα 1.47. *Ο τελεστής προβολής $P : X \to N(L^r)$ που ορίζεται από το ευθύ άθροισμα*

$$X \ = \ N(L^r) \oplus L^r(X)$$

είναι συμπαγής. Ο τελεστής

$$L - P = I - A - P$$

είναι μονοσήμαντος (injective).

Θεώρημα 1.48 (Θεώρημα Riesz). *Έστω X χώρος με νόρμα και έστω ένας συμπαγής γραμμικός τελεστής $A : X \to X$.Τότε ισχύει ένα από τα επόμενα:*
1. η ομογενής εξίσωση

$$\phi - A\phi = 0$$

έχει μη τετριμμένη λύση $\phi \in X$.
2. $\forall f \in X$ η μη ομογενής εξίσωση

$$\phi - A\phi = f$$

έχει μοναδική λύση $\phi \in X$.

Αν ο $I - A$ είναι μονοσήμαντος τότε, ο $(I - A)^{-1} : X \to X$ είναι φραγμένος.

Πόρισμα 1.48.1. *Έστω X χώρος με νόρμα και έστω ένας συμπαγής γραμμικός τελεστής $A : X \to X$. Αν η ομογενής εξίσωση*

$$\phi - A\phi = 0$$

έχει μόνο τη τετριμμένη λύση $\phi = 0,\ \phi \in X$ τότε $\forall f \in X$ η μη ομογενής εξίσωση

$$\phi - A\phi = f$$

έχει μοναδική λύση $\phi \in X$ και η λύση αυτή εξαρτάται με συνεχή τρόπο από την $f \in X$.

Θεώρημα 1.49. *Έστω X χώρος με νόρμα , ένας συμπαγής γραμμικός τελεστής $A : X \to X$ και έστω $I - A$ μονοσήμαντος. Τότε, ο αντίστροφος τελεστής $(I - A)^{-1}$ υπάρχει και είναι φραγμένος.*

Θεώρημα 1.50. *Έστω X χώρος με νόρμα και έστω ένας συμπαγής γραμμικός τελεστής $A : X \to X$ και έστω ότι ο $I - A$ δεν είναι μονοσήμαντος. Τότε ο πυρήνας $N(I - A)$ έχει πεπερασμένη διάσταση και η εικόνα $(I - A)(X) \subsetneqq X$ είναι γνήσιος υπόχωρος.*

Απόδειξη. Από την υπόθεση έχουμε ότι $N(L) \supsetneqq \{0\}$. Αυτό σημαίνει ότι $r > 0$ από Τρίτο Θεώρημα Riesz(1.46) προκύπτει ότι $L(X) \subsetneqq X$. □

Πόρισμα 1.50.1. *Έστω X χώρος με νόρμα και έστω ένας συμπαγής γραμμικός τελεστής $A : X \to X$. Αν η ομογενής εξίσωση*

$$\phi - A\phi = 0$$

έχει μόνο μη τετριμμένες λύσεις τότε, $\forall f \in X$ η μη ομογενής εξίσωση

$$\phi - A\phi = f$$

είτε δεν έχει λύση είτε η γενική της λύση έχει την μορφή

$$\phi \ = \ \phi^* + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \phi_k$$

, όπου με ϕ^* συμβολίζεται η ειδική λύση της μη ομογενούς, με $\phi_1, \cdots, \phi_m$ συμβολίζονται γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς εξίσωσης και είναι αυθαίρετοι $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ μιγαδικοί αριθμοί.

Θεώρημα 1.51 (Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz). *Έστω X χώρος Hilbert. Τότε, για κάθε φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό $F : X \to \mathbb{C}$ υπάρχει μοναδική $f \in X$ ώστε*

$$F(\phi) = (\phi, f) \quad , \quad \forall \phi \in X.$$

Ισχύει σε συτή τη περίπτωση ότι

$$\|F\|_{X^*} = \|f\|_X$$

και το f είναι μοναδικά ορισμένο από το $F \in X^*$.

Θεώρημα 1.52. *Έστω X και Y χώροι Hilbert και έστω ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής $A : X \to Y$. Τότε, υπάρχει μοναδικά ορισμένος γραμμικός τελεστής $A^* : Y \to X$ ώστε,*

$$(A\phi, \psi) = (\phi, A^*\psi) \quad , \quad \forall \phi \in X, \ \forall \psi \in Y.$$

Ο A^* καλείται ***συζυγής (adjoint)*** *του A και είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής που ικανοποιεί την σχέση*

$$\|A^*\| = \|A\|.$$

Θεώρημα 1.53. *Έστω X και Y χώροι Hilbert και έστω ένας συμπαγής γραμμικός τελεστής $A : X \to Y$. Τότε, ο γραμμικός τελεστής $A^* : Y \to X$ είναι, επίσης, συμπαγής.*

Λήμμα 1.54. *Έστω X χώρος Hilbert και έστω U ένας κλειστός υπόχωρός του. Τότε,*

$$U^{\perp\perp} \ = \ U.$$

Απόδειξη. Αφού U είναι κλειστός υπόχωρος, συνεπάγεται ότι $X = U \oplus U^{\perp}$ και $X = U^{\perp} \oplus U^{\perp\perp}$. Επομένως για $x \in X$ προκύπτει ότι,

$$x = \phi_1 + \phi_2 \quad , \quad \phi_1 \in U, \ \phi_2 \in U^{\perp},$$

$$x = \psi_1 + \psi_2 \quad , \quad \psi_1 \in U^{\perp\perp}, \ \psi_2 \in U^{\perp}.$$

Ειδικότερα,

$$(\phi_1 - \psi_1) + (\phi_2 - \psi_2) = 0$$

εύκολα προκύπτει ότι $U \subseteq U^{\perp\perp}$ και άρα,

$$(\phi_1 - \psi_1) = (\phi_2 - \psi_2) \in U^{\perp} \ , \ \phi_1 - \psi_1 \in U^{\perp\perp}.$$

Το μόνο στοιχείο που ανήκει στην τομή των δύο θα είναι το $\{0\}$ άρα $\phi_1 = \psi_1$ και επομένως έχουμε από τα παραπάνω ότι

$$U^{\perp\perp} = U.$$

$\square$

Θεώρημα 1.55. *Έστω X και Y χώροι Hilbert και έστω ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής $A : X \to Y$. Αν $N(A)$ ο πυρήνας του A, $A(X)$ η εικόνα του A και $A^* : Y \to X$ ο συζυγής του A τότε,*

$$A(X)^{\perp} \ = \ N(A^*) \quad , \quad N(A^*)^{\perp} \ = \ \overline{A(X)} \ .$$

Απόδειξη. Ισχύει ότι,

$$g \in A(X)^{\perp} \ \Leftrightarrow \ (A\phi, g) = 0 \ , \ \forall \phi \in X.$$

Αφού,

$$(A\phi, g) \ = \ (\phi, A^*g) \ , \ \forall \phi \in X \ \Rightarrow \ A^*g \ = \ 0 \ \Rightarrow \ g \in N(A^*) \ \Rightarrow \ A(X)^{\perp} \subseteqq N(A^*).$$

Λόγω του Λήμματος(1.54) αφού $A(X)^{\perp} \ = \ \overline{A(X)}^{\perp} \ = \ N(A^*)$ προκύπτει,

$$\overline{A(X)} \ = \ \overline{A(X)}^{\perp\perp} \ = \ N(A^*)^{\perp} \ .$$

$\square$

Ορισμός 1.56. *Έστω X χώρος Hilbert. Ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής $A : X \to X$ καλείται* ***αυτοσυζυγής (self-adjoint)*** *αν*

$$A \; = \; A^* \; \Leftrightarrow \; (A\phi, \psi) = (\phi, A\psi) \quad , \quad \forall \phi, \psi \in X.$$

Θεώρημα 1.57 (**Θεώρημα Hilbert – Schmidt**). *Έστω X χώρος Hilbert και έστω ένας συμπαγής, αυτοσυζυγής γραμμικός τελεστής $A : X \to X$. Τότε, αν $A \neq 0$ ο A έχει τουλάχιστον μία ιδιοτιμή διαφορετική του μηδενός, όλες οι ιδιοτιμές του A είναι πραγματικές και ο X έχει μία ορθοκανονική βάση που αποτελείται από τα ιδιοστοιχεία του A.*

1.2.2 Ολοκληρωτικοί τελεστές - Θεωρία Fredholm

Σε αυτήν την υποενότητα θα ασχοληθούμε με τους ολοκληρωτικούς τελεστές, θα αναπτύξουμε τη Θεωρία Fredholm και θα αναλύσουμε βασικά της αποτελέσματα.

Ορισμός 1.58. *Έστω X και Y χώροι με νόρμα. Η $\alpha(.,.) : X \times Y \to \mathbb{C}$ καλείται μια* ***μη εκφυλισμένη διγραμμική μορφή*** *αν είναι ταυτόχρονα*

1. *μη εκφυλισμένη, δηλαδή*

$$\forall 0 \neq \phi \in X \;\; \exists \psi \in Y \;:\; \alpha(\phi, \psi) \neq 0,$$

$$\forall 0 \neq \psi \in Y \;\; \exists \phi \in X \;:\; \alpha(\phi, \psi) \neq 0.$$

2. *διγραμμική, δηλαδή $\forall \phi_1, \phi_2, \phi \in X,\ \forall \psi_1, \psi_2, \psi \in Y,\ \forall \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2, \in \mathbb{C}$ ισχύει ότι,*

$$\alpha(\lambda_1 \phi_1 + \lambda_2 \phi_2, \psi) \; = \; \lambda_1 \; \alpha(\phi_1, \psi) + \lambda_2 \; \alpha(\phi_2, \psi),$$

$$\alpha(\phi, \mu_1 \psi_1 + \mu_2 \psi_2) \; = \; \mu_1 \; \alpha(\phi, \psi_1) + \mu_2 \; \alpha(\phi, \psi_2).$$

Παρατήρηση 1.59. *Στη συνέχεια θα θεωρούμε ότι οι διγραμμικές μορφές που χρησιμοποιούμε είναι μη εκφυλισμένες. Για το λόγο αυτό για ευκολία θα αναφερόμαστε σε αυτές ως διγραμμικές μορφές.*

Ορισμός 1.60. *Έστω X χώρος με νόρμα. Η διγραμμική μορφή $\alpha(.,.) : X \times X \to \mathbb{C}$ καλείται συμμετρική αν ισχύει ότι*

$$\alpha(u, v) = \alpha(v, u), \quad \forall u, v \in X. \tag{1.15}$$

Ορισμός 1.61. *Έστω H χώρος Hilbert. Μια διγραμμική μορφή $\alpha(.,.) : H \times H \to \mathbb{C}$ καλείται* ***συνεχής*** *αν υπάρχει σταθερά $c_1 > 0$ τέτοια ώστε*

$$|\alpha(u, v)| \leq c_1 \|u\|_H \|v\|_H, \quad \forall u, v \in H. \tag{1.16}$$

Ορισμός 1.62. *Έστω H χώρος Hilbert. Μια διγραμμική μορφή $\alpha(.,.) : H \times H \to \mathbb{C}$ καλείται* ***πιεστική*** *αν υπάρχει σταθερά $c_2 > 0$ τέτοια ώστε*

$$|\alpha(v, v)| \geq c_2 \|v\|_H^2, \quad \forall v \in H. \tag{1.17}$$

Ορισμός 1.63. *Έστω H χώρος Hilbert. Ένας γραμμικός τελεστής $A : H \to H$ καλείται* ***πιεστικός*** *αν υπάρχει σταθερά $c_2 > 0$ τέτοια ώστε*

$$\|Av\|_H \geq c_2 \|v\|_H, \quad \forall v \in H. \tag{1.18}$$

Ορισμός 1.64. *Έστω X και Y χώροι με νόρμα. Αν είναι εφοδιασμένοι με μία διγραμμική μορφή $< .,. >: X \times Y \to \mathbb{C}$ αποτελούν* ***δυϊκό σύστημα (dual system)*** *και συμβολίζεται με $< X, Y >$.*

Θεώρημα 1.65 (Lax-Milgram)**.** *Έστω H χώρος Hilbert και έστω $\alpha(.,.) : H \times H \to \mathbb{C}$ ένα συνεχές και πιεστικό διγραμμικό συναρτησιακό. Τότε για κάθε $f \in H^*$ υπάρχει μοναδικό $u \in H$ τέτοιο ώστε*

$$\alpha(u, v) = < f, v >, \quad \forall v \in H. \tag{1.19}$$

Αν επιπλέον η $\alpha(.,.)$ είναι συμμετρική ισχύει ότι

$$u \in H \quad \textit{και} \quad \frac{1}{2}\alpha(u,u) - < f, u > = \inf_{v \in H} \left[\frac{1}{2}\alpha(v,v) - < f, v > \right]. \tag{1.20}$$

Από εδώ και έπειτα θεωρούμε το συμπαγές σύνολο $G \subset \mathbb{R}^2$ να είναι $Jordan-$μετρήσιμο $(Jordan - measurable)$, με μη μηδενικό μέτρο και $C(G)$ ο χώρος $Banach$ των συνεχών μιγαδικών συναρτήσεων ορισμένων στο G εφοδιασμένος με την εξής νόρμα:

$$\|\phi\|_\infty := \max_{x \in G} |\phi(x)|.$$

Ορισμός 1.66. *Ορίζουμε τον* ***ολοκληρωτικό τελεστή*** *$A : C(G) \to C(G)$ ως εξής:*

$$(A\phi)(x) = \int_G K(x,y)\phi(y)\, dy\ , \quad x \in G \tag{1.21}$$

, όπου $K : G \times G \to \mathbb{C}$ είναι ***συνεχής πυρήνας****.*

Θεώρημα 1.67. *Ένας ολοκληρωτικός τελεστής A με συνεχή πυρήνα είναι συμπαγής τελεστής στον $C(G)$.*

Ορισμός 1.68. *Ο ολοκληρωτικός τελεστής $A : C(G) \to C(G)$ ορίζεται όπως στην σχέση (1.21) όμως ο πυρήνας K είναι* ***ασθενώς ιδιάζων*** *(weakly singular), δηλαδή ο K ορίζεται και είναι συνεχής $\forall x, y \in G, x \neq y$ και ισχύει ότι*

$$\exists M > 0\ ,\ \alpha \in (0, 2]\ :\ |K(x,y)| \leq M|x-y|^{\alpha - 2}\ \ ,\ \ \forall x \neq y \in G. \tag{1.22}$$

Αν το συμπαγές σύνολο $G \subset \mathbb{R}^n$ τότε η σχέση (1.22) γενικεύεται ως

$$\exists M > 0\ ,\ \alpha \in (0, n]\ :\ |K(x,y)| \leq M|x-y|^{\alpha - n}\ \ ,\ \ \forall x \neq y \in G. \tag{1.23}$$

Θεώρημα 1.69 (Arzelá – Ascoli). *Έστω συμπαγές σύνολο $G \subset \mathbb{R}^n$. Ένα σύνολο $K \subset C(G)$ είναι σχετικά συμπαγές (ως προς την νόρμα του $C(G)$) αν και μόνο αν είναι φραγμένο, ισοσυνεχές (equicontinuous), δηλαδή υπάρχει σταθερά C ώστε:*

$$|\phi(x)| \leq C\ ,\ \forall x \in G,\ \forall \phi \in K$$

και

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ :\ |x - y| < \delta \Rightarrow |\phi(x) - \phi(y)| < \epsilon\ ,\ \forall x, y \in G, \forall \phi \in K.$$

Θεώρημα 1.70. *Ένας ολοκληρωτικός τελεστής A με ασθενώς ιδιάζων πυρήνα είναι συμπαγής τελεστής στον $C(G)$.*

Απόδειξη. Το ολοκλήρωμα της (1.21) υπάρχει ως γενικευμένο ολοκλήρωμα αφού,

$$|K(x,y)\phi(y)| \leq M\|\phi\|_\infty |x-y|^{\alpha-2} \tag{1.24}$$

και αλλάζοντας σε πολικές συντεταγμένες με d η διάμετρος του G και x είναι η απόσταση από την αρχή έχουμε ότι

$$\int_G |x-y|^{\alpha-2}\,dy \leq 2\pi \int_0^d r^{\alpha-2} r\,dr = \frac{2\pi}{\alpha} d^\alpha, \tag{1.25}$$

όπου με $|\cdot|$ συμβολίζεται η Ευκλείδεια νόρμα. Ορίζουμε τις τμηματικά γραμμικές συνεχείς συναρτήσεις $\kappa_n : [0,\infty) \to \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$ ως

$$\kappa_n(\lambda) := \begin{cases} 0, & 0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2n} \\ 2n\lambda - 1, & \frac{1}{2n} \leq \lambda \leq \frac{1}{n} \\ 1, & \frac{1}{n} < \lambda < \infty \end{cases}$$

και τους συνεχείς πυρήνες $K_n : G \times G \to \mathbb{C}$ ως

$$K_n(x,y) := \begin{cases} \kappa_n(|x-y|)K(x,y), & x \neq y \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

Οι αντίστοιχοι ολοκληρωτικοί τελεστές $A_n : C(G) \to C(G)$ είναι συμπαγείς από το Θεώρημα (1.67). Επομένως,

$$\begin{array}{rcl} |(A\phi)(x) - (A_n\phi)(x)| & = & \left| \int_G [K(x,y) - K_n(x,y)\phi(y)\,dy \right| \\ & \leq & \int_{G_{x,1/n}} |K(x,y)| \|\phi\|_\infty\,dy \\ \text{από σχέση (1.24)} & \leq & 2\pi M \|\phi\|_\infty \int_0^{1/n} r^{\alpha-2} r\,dr \\ \text{από σχέση (1.25)} & = & M\|\phi\|_\infty \dfrac{2\pi}{\alpha} \left(\dfrac{1}{n}\right)^\alpha \ ,\ x \in G, \end{array}$$

όπου $G_{x,1/n} := \{y \in G \mid |y-x| \leq 1/n\}$. Από αυτή συνεπάγεται ότι,

$$A_n\phi \to A\phi\ ,\ n \to \infty$$

και άρα $A\phi \in C(G)$. Άρα προκύπτει ότι,

$$\|A - A_n\|_\infty \leq M\,\frac{2\pi}{\alpha}\left(\frac{1}{n}\right)^\alpha \to 0, \quad n \to \infty \tag{1.26}$$

Από το Θεώρημα(1.37) ο A είναι συμπαγής. □

Θεώρημα 1.71. *Το $< C(G), C(G) >$ είναι δυϊκό σύστημα με διγραμμική μορφή*

$$< \phi, \psi >:= \int_G \phi(x)\psi(x)\, dx \ , \quad \phi, \psi \in C(G). \tag{1.27}$$

Ορισμός 1.72. *Έστω το $< X, Y >$ δυϊκό σύστημα. Τότε δύο τελεστές $A : X \to X$, $A^* : Y \to Y$ καλούνται **συζυγείς** (adjoint) αν*

$$< A\phi, \psi >=< \phi, A^*\psi > \ , \quad \forall \phi \in X, \forall \psi \in Y$$

Θεώρημα 1.73. *Έστω το $< X, Y >$ δυϊκό σύστημα. Τότε αν ένας τελεστής $A : X \to X$ έχει συζυγή έναν $A^* : Y \to Y$, τότε ο A^* είναι μοναδικά ορισμένος και οι A, A^* είναι γραμμικοί.*

Θεώρημα 1.74. *Έστω K είτε συνεχής είτε ασθενώς ιδιάζων πυρήνας. Τότε, στο δυϊκό σύστημα $< C(G), C(G) >$ οι συμπαγείς ολοκληρωτικοί τελεστές που ορίζονται ως*

$$\begin{aligned} (A\phi)(x) &= \int_G K(x, y)\phi(y)\, dy \ , \quad x \in G & (1.28)\\ (A^*\psi)(x) &= \int_G K(y, x)\psi(y)\, dy \ , \quad x \in G & (1.29) \end{aligned}$$

είναι συζυγείς.

Απόδειξη.

$$\begin{aligned} < A\phi, \psi > &= \int_G (A\phi)(x)\psi(x)\, dx \\ &= \int_G \left(\int_G K(x, y)\phi(y)\, dy \right) \psi(x)\, dx \\ (\text{Θεώρημα } Fubini) &= \int_G \phi(y) \left(\int_G K(x, y)\psi(x)\, dx \right)\, dy \\ &= \int_G \phi(y)(A^*\psi)(y)\, dy \\ &= < \phi, A^*\psi >, \end{aligned}$$

όπου στην περίπτωση του ασθενούς ιδιάζοντος πυρήνα η αλλαγή στην σειρά ολοκλήρωσης έγινε χρησιμοποιώντας τους ολοκληρωτικούς τελεστές $A_n : C(G) \to C(G)$ και από την σχέση (1.26) έχουμε $\|A_n - A\|_\infty \to 0, \ n \to \infty$ όπως στο Θεώρημα(1.70). □

Λήμμα 1.75. *Έστω $< X, Y >$ ένα δυϊκό σύστημα. Τότε, για κάθε σύνολο γραμμικώς ανεξάρτητων στοιχείων $\phi_1, \cdots, \phi_n \in X$ υπάρχει ένα σύνολο $\psi_1, \cdots, \psi_n \in Y$ ώστε,*

$$< \phi_i, \psi_k >= \delta_{ik} \ \ , \quad i, k = 1, \cdots, n \ .$$

Όμοιος ισχυρισμός ισχύει αν ο ρόλος των X και Y εναλλαχθεί.

Θεώρημα 1.76 (Πρώτο Θεώρημα Fredholm). *Έστω $< X, Y >$ ένα δυϊκό σύστημα και έστω $A : X \to X$, $A^* : Y \to Y$ συμπαγείς συζυγείς τελεστές. Τότε οι πυρήνες των τελεστών $I - A$ και $I - A^*$ έχουν την ίδια πεπερασμένη διάσταση.*

Θεώρημα 1.77 (Δεύτερο Θεώρημα Fredholm). *Η μη ομογενής εξίσωση*

$$\phi - A\phi = f \ \mid \ \psi - A^*\psi = g$$

είναι επιλύσιμη αν και μόνο αν η συνθήκη

$$< f, \psi >= 0 \ \mid \ < \phi, g >= 0$$

ικανοποιείται για όλες τις λύσεις της συζυγούς ομογενής εξίσωσης

$$\psi - A^*\psi = 0 \ \mid \ \phi - A\phi = 0$$

Θεώρημα 1.78 (Θεώρημα Εναλλακτικότητας του Fredholm - Fredholm Alternative). *Έστω* $< X, Y >$ *ένα δυϊκό σύστημα και έστω* $A : X \to X$, $A^* : Y \to Y$ *συμπαγείς συζυγείς τελεστές. Τότε* ***είτε***

$$\begin{array}{lcl} N(I-A) = \{0\} & , & N(I-A^*) = \{0\} \\ (I-A)(X) = X & , & (I-A^*)(Y) = Y \end{array}$$

είτε

$$dimN(I-A) = dimN(I-A^*) \in \mathbb{N}$$

και

$$\begin{aligned} (I-A)(X) &= \{f \in X | < f, \psi >= 0, \ \ \psi \in N(I-A^*)\} \\ (I-A^*)(Y) &= \{g \in Y | < \phi, g >= 0, \ \ \phi \in N(I-A)\}. \end{aligned}$$

1.3 Χώροι Συναρτήσεων

Σε αυτή την ενότητα θα ασχοληθούμε, αρχικά, με τους χώρους Hölder και τους χώρους L^p. Θα μελετήσουμε κάποια σημαντικά αποτελέσματα χώρων Sobolev και στη συνέχεια θα αναφερθούμε σε μία ειδική περίπτωση χώρων Sobolev τους χώρους $H^p[0, 2\pi]$ οι οποίοι μας δίνουν αρμονικά αποτελέσματα και θα δούμε βασικές ιδιότητες και θεωρήματα για αυτούς.

1.3.1 Χώροι Hölder

Σε αυτήν την υποενότητα θα ορίσουμε τους χώρους Hölder και παρουσιάσουμε βασικά της αποτελέσματα για αυτούς. Αν ο αναγνώστης επιθυμεί να εμβαθύνει περαιτέρω παραπέμπεται στα αναγνώσματα [1], [2], [6].

Ορισμός 1.79. *Έστω* Ω *χωρίο του* $\mathbb{R}^n$ *και* $m \in \mathbb{N}$.

1. $C^m(\Omega)$ *είναι ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων* ϕ *με συνεχείς παραγώγους* $D^\alpha\phi$ *μέχρι τάξης* $|\alpha| \le m$ *στο* Ω.

2. $C_B^m(\Omega)$ *είναι ο χώρος των συναρτήσεων* $\phi \in C^m(\Omega)$ *με παραγώγους* $D^\alpha\phi$ *για* $0 \le |\alpha| \le m$ *φραγμένες στο* Ω. *Ο* $C_B^m(\Omega)$ *είναι Banach με τη νόρμα*

$$\|\phi\|_{C_B^m(\Omega)} = \max_{0\le|\alpha|\le m} \sup_{x\in\Omega} |D^\alpha\phi(x)| \tag{1.30}$$

3. $C^m(\bar{\Omega})$ *είναι ο χώρος των συναρτήσεων* $\phi \in C^m(\Omega)$ *με παραγώγους* $D^\alpha\phi$ *για* $0 \le |\alpha| \le m$ *φραγμένες και ομοιόμορφα συνεχείς στο* Ω. *Ο* $C^m(\bar{\Omega})$ *είναι κλειστός υπόχωρος του* $C_B^m(\Omega)$ *και είναι Banach με τη νόρμα*

$$\|\phi\|_{C^m(\bar{\Omega})} = \max_{0\le|\alpha|\le m} \sup_{x\in\Omega} |D^\alpha\phi(x)| \,. \tag{1.31}$$

4. *Ισχύει ότι* $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\Omega)$.

Ορισμός 1.80 (Χώροι Hölder). *Έστω* Ω *χωρίο του* $\mathbb{R}^n$ *και* $m \in \mathbb{N}$. *Αν* $0 < \lambda \le 1$ *ορίζουμε το χώρο* $C^{m,\lambda}(\bar{\Omega})$ $C^m(\bar{\Omega})$ *είναι ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων* ϕ *που για* $0 \le |\alpha| \le m$ *η* $D^\alpha\phi$ *ικανοποιεί τη συνθήκη Hölder για τον εκθέτη* λ *η οποία είναι, υπάρχει σταθερά* K *ώστε*

$$|D^\alpha\phi(x) - D^\alpha\phi(y)| \le K|x-y|^\lambda \,, \quad x, y \in \Omega \,. \tag{1.32}$$

Ο $C^{m,\lambda}(\bar{\Omega})$ *είναι Banach με τη νόρμα*

$$\|\phi\|_{C_B^{m,\lambda}(\bar{\Omega})} = \|\phi\|_{C^m(\bar{\Omega})} + \max_{0\le|\alpha|\le m} \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\ne y}} \frac{|D^\alpha\phi(x) - D^\alpha\phi(y)|}{|x-y|^\lambda} \,. \tag{1.33}$$

Για $0 < \nu < \lambda \le 1$

$$C^{m,\lambda}(\bar{\Omega}) \subsetneqq C^{m,\nu}(\bar{\Omega}) \subsetneqq C^m(\bar{\Omega}) \,.$$

Ορισμός 1.81 (Χώρος Hölder $C^{0,\alpha}(G)$). *Έστω* $G \subset \mathbb{R}^3$ *φραγμένο και κλειστό. Με* $C^{0,\alpha}(G)$, $0 < \alpha \le 1$ *συμβολίζουμε τον γραμμικό χώρο όλων των μιγαδικών συναρτήσεων* ϕ *ορισμένων στο* G *που ικανοποιούν την*

$$|\phi(x) - \phi(y)| \le C|x-y|^\alpha \tag{1.34}$$

, όπου C *θετική σταθερά που εξαρτάται από το* ϕ *και όχι από τα* x *και* y.

Αν το G *δεν είναι φραγμένο τότε, με* $\phi \in C^{0,\alpha}(G)$ *εννοούμε ότι η* ϕ *είναι φραγμένη και ικανοποιεί την (1.34).*

Ο χώρος $C^{0,\alpha}(G)$ *καλείται* ***χώρος Hölder*** *ή* ***χώρος των ομοιόμορφα Hölder συνεχών συναρτήσεων***. *Αν* $\phi \in C^{0,\alpha}(G)$, $0 < \alpha \le 1$ *τότε* ϕ *είναι ομοιόμορφα συνεχής στο* G.

Ορισμός 1.82 (Χώρος Hölder $C^{1,\alpha}(G)$). *Έστω $G \subset \mathbb{R}^3$ κλειστό και φραγμένο. Με $C^{1,\alpha}(G)$, $0 < \alpha \leq 1$ συμβολίζουμε τον* ***χώρο των ομοιόμορφα* Hölder *συνεχώς παραγωγίσιμων συναρτήσεων***, *δηλαδή όλων των συναρτήσεων για τις οποίες grad ϕ (ή Grad ϕ αν $G = \partial D$ που δηλώνει ότι είναι επιφανειακό) που ικανοποιεί την σχέση*

$$|grad\ \phi(x) - grad\ \phi(y)| \leq C|x-y|^\alpha \tag{1.35}$$

, για την οποία οι ϕ και grad ϕ θεωρούνται φραγμένες στην περίπτωση που το G είναι μη φραγμένο.

Θεώρημα 1.83. *Έστω $G \subset \mathbb{R}^3$ φραγμένο και κλειστό. Ο χώρος Hölder $C^{0,\alpha}(G)$ είναι Banach με τη νόρμα*

$$\|\phi\|_\alpha := \sup_{x\in G}|\phi(x)| \ + \ \sup_{\substack{x,y\in G\\ x\neq y}} \frac{|\phi(x)-\phi(y)|}{|x-y|^\alpha}. \tag{1.36}$$

Απόδειξη. Εύκολα διαπιστώνεται ότι η

$$|\phi|_\alpha = \sup_{\substack{x,y\in G\\ x\neq y}} \frac{|\phi(x)-\phi(y)|}{|x-y|^\alpha} \tag{1.37}$$

είναι ημινόρμα (έχει όλες τις ιδιότητες της νόρμας εκτός από την $\|\phi\|_\alpha = 0 \Leftrightarrow \ \phi = 0$) στον $C^{0,\alpha}(G)$. Τότε η $\| \ \cdot\|_\alpha$ είναι νόρμα, αφού $\|\phi\|_\infty = \sup_{x\in G}|\phi(x)|$ είναι νόρμα.

Μένει να δειχθεί ότι ο χώρος $C^{0,\alpha}(G)$ είναι πλήρης. Έστω $(\phi_n)_n$ ακολουθία *Cauchy* στον $C^{0,\alpha}(G)$ τότε είναι επίσης ακολουθία *Cauchy* στον $C(G)$ και άρα

$$\exists \phi \in C(G) \ : \ \|\phi_n - \phi\|_\infty \to 0 \ , \ n\to\infty.$$

Αφού $(\phi_n)_n$ είναι ακολουθία *Cauchy* στον $C^{0,\alpha}(G)$, δοσμένου $\epsilon > 0$ έχουμε ότι,

$$\epsilon > 0 \ \exists N(\epsilon) \in \mathbb{N} \ \ : \ |\phi_n - \phi_m| < \epsilon, \ \ \forall n,m \geq N(\epsilon)$$

και άρα

$$|[\phi_n(x) - \phi_m(x)] - [\phi_n(y) - \phi_m(y)]| \leq \epsilon|x-y|^\alpha \ , \ \ \forall n,m \geq N(\epsilon) \ , \ \forall x,y \in G \ .$$

Αφού $\phi_n \to \phi, n\to\infty$ ομοιόμορφα στο G, αφήνοντας το $m\to\infty$ έχουμε,

$$|[\phi_n(x) - \phi(x)] - [\phi_n(y) - \phi(y)]| \leq \epsilon|x-y|^\alpha \ , \ \ \forall n \geq N(\epsilon) \ , \ \forall x,y \in G \ .$$

Επομένως καταλήγουμε ότι,

$$\phi \in C^{0,\alpha}(G) \ , \ |\phi_n - \phi|_\alpha \leq \epsilon \ , \ n \geq N(\epsilon) \Rightarrow \|\phi_n - \phi\|_\alpha \to 0, n\to\infty.$$

□

Θεώρημα 1.84. *Έστω $G \subset \mathbb{R}^3$ φραγμένο και κλειστό. Ο χώρος Hölder $C^{1,\alpha}(G)$ είναι Banach με τη νόρμα*

$$\|\phi\|_\alpha := \sup_{x\in G}|\phi(x)| \ + \ \sup_{x\in G}|grad\ \phi(x)| \ + \ \sup_{\substack{x,y\in G\\ x\neq y}} \frac{|grad\ \phi(x) - grad\ \phi(y)|}{|x-y|^\alpha}. \tag{1.38}$$

Θεώρημα 1.85 (Θεώρημα Ενσφήνωσης για χώρους Hölder). *Έστω Ω χωρίο του $\mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{N}$ και $0 < \nu < \lambda \leq 1$. Ισχύουν οι ακόλουθες ενσφηνώσεις:*

1. $C^{m+1}(\bar{\Omega}) \to C^m(\bar{\Omega})$, *αν Ω είναι κυρτό και φραγμένο είναι συμπαγής.*
2. $C^{m,\nu}(\bar{\Omega}) \to C^m(\bar{\Omega})$, *αν Ω είναι και φραγμένο είναι συμπαγής.*
3. $C^{m,\lambda}(\bar{\Omega}) \to C^{m,\nu}(\bar{\Omega})$, *αν Ω είναι και φραγμένο είναι συμπαγής.*
4. $C^{m+1}(\bar{\Omega}) \to C^{m,1}(\bar{\Omega})$, *αν Ω είναι κυρτό.*
5. $C^{m+1}(\bar{\Omega}) \to C^{m,\lambda}(\bar{\Omega})$, *αν Ω είναι κυρτό.*

Πρόταση 1.86 (Ιδιότητα Ενσφήνωσης $C^{0,\alpha}(G)$). *Έστω $0 < \alpha < \beta \leq 1$ ισχύει η ακόλουθη ιδιότητα ενσφήνωσης (imbedding property)*

$$\forall\ \phi \in C^{0,\beta}(G)\ \Rightarrow\ \phi \in C^{0,\alpha}(G)$$

Πρόταση 1.87 (Ιδιότητα Ενσφήνωσης $C^{1,\alpha}(G)$). *Έστω $0 < \alpha < \beta \leq 1$ ισχύει η ακόλουθη ιδιότητα ενσφήνωσης (imbedding property)*

$$\forall\ \phi \in C^{1,\beta}(G)\ \Rightarrow\ \phi \in C^{1,\alpha}(G)$$

Θεώρημα 1.88 (Τελεστές Ενσφήνωσης $C^{0,\alpha}(G)$). *Έστω $0 < \alpha < \beta \leq 1$ και έστω G συμπαγές. Τότε οι τελεστές ενσφήνωσης (imbedding operators)*

$$I^{\beta}\ :\ C^{0,\beta}(G)\ \to\ C(G) \tag{1.39}$$

$$I^{\alpha,\beta}\ :\ C^{0,\beta}(G)\ \to\ C^{0,\alpha}(G) \tag{1.40}$$

είναι συμπαγείς.

Απόδειξη. Έστω K φραγμένο σύνολο στον $C^{0,\beta}(G)$ δηλαδή,

$$\|\phi\|_{\beta} \leq C\ ,\quad \forall \phi \in K\ .$$

Όπως και στο Θεώρημα(1.33) αν ένα σύνολο είναι συμπαγές είναι και φραγμένο άρα

$$|\phi(x)| \leq C\ ,\quad \forall x \in G,\ \forall \phi \in K$$

όπως στον Ορισμό (1.81) έχουμε για τον $C^{0,\beta}(G)$

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq C|x-y|^{\beta}\ ,\quad \forall x, y \in G,\ \forall \phi \in K\ . \tag{1.41}$$

Τότε, το K είναι φραγμένο και ισοσυνεχές και από Θεώρημα $Arzelá - Ascoli$(1.69) το K είναι σχετικά συμπαγές στον $C(G)$ άρα ο τελεστής $I^{\beta}\ :\ C^{0,\beta}(G)\ \to\ C(G)$ είναι συμπαγής σύμφωνα με τον Ορισμό(1.30).

Μένει να δειχθεί ότι το K είναι σχετικά συμπαγές στο $C^{0,\alpha}(G)$. Από την εξίσωση(1.41) έχουμε

$$\begin{aligned} |[\phi_n(x) - \phi(x)] - [\phi_n(y) - \phi(y)]| &= |[\phi_n(x) - \phi(x)] - [\phi_n(y) - \phi(y)]|^{\alpha/\beta} \\ &\cdot\ |[\phi_n(x) - \phi(x)] - [\phi_n(y) - \phi(y)]|^{1-\alpha/\beta} \\ &\leq (2C)^{\alpha/\beta}|x-y|^{\alpha}(2\|\phi - \psi\|_{\infty})^{1-\alpha/\beta},\ \ \forall x, y \in G,\ \forall \phi, \psi \in K \end{aligned}$$

και επομένως

$$|\phi - \psi|_a \leq (2C)^{\alpha/\beta} 2^{1-\alpha/\beta} \|\phi - \psi\|_\infty^{1-\alpha/\beta}, \quad \forall x, y \in G, \ \forall \phi, \psi \in K \ . \tag{1.42}$$

Αλλά από αυτό προκύπτει ότι κάθε ακολουθία του K συγκλίνει μέσα στον $C(G)$ άρα συγκλίνει και στον $C^{0,\alpha}(G)$ από Πρόταση(1.86). □

Θεώρημα 1.89 (Τελεστές Ενσφήνωσης $C^{1,\alpha}(G)$). *Έστω $0 < \alpha < \beta \leq 1$ και έστω G συμπαγές. Τότε οι τελεστές ενσφήνωσης (imbedding operators)*

$$I^\beta \ : \ C^{1,\beta}(G) \ \to \ C^1(G) \tag{1.43}$$

$$I^{\alpha,\beta} \ : \ C^{1,\beta}(G) \ \to \ C^{1,\alpha}(G) \tag{1.44}$$

είναι συμπαγείς.

1.3.2 Χώροι $L^p(\Omega)$

Σε αυτήν την υποενότητα θα ορίσουμε τους χώρους $L^p(\Omega)$ και παρουσιάσουμε βασικά της αποτελέσματα για αυτούς. Αν ο αναγνώστης επιθυμεί να εμβαθύνει περαιτέρω παραπέμπεται στα αναγνώσματα [1], [2], [4], [8].

Ορισμός 1.90 (Χώροι $L^p(\Omega)$). *Έστω Ω χωρίο του $\mathbb{R}^n$ και p θετικός πραγματικός αριθμός. Συμβολίζουμε με $L^p(\Omega)$ την κλάση όλων των μετρήσιμων συναρτήσεων u ορισμένων στο Ω όπου*

$$\int_\Omega |u(x)|^p \, dx < \ \infty \tag{1.45}$$

Ορισμός 1.91 (Νόρμα στον $L^p(\Omega)$). *Με $1 \leq p < \infty$ το συναρτησιακό $\| \cdot \|_p$ που ορίζεται ως*

$$\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \tag{1.46}$$

είναι η νόρμα του $L^p(\Omega)$.

Θεώρημα 1.92 (Θεώρημα Ενσφήνωσης για Χώρους $L^p(\Omega)$). *Έστω Ω χωρίο του $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p \leq q < \infty$ και $vol(\Omega) = \int_\Omega 1 \, dx < \infty$. Αν $u \in L^q(\Omega)$, τότε $u \in L^p(\Omega)$ και*

$$\|u\|_p \leq (vol(\Omega))^{(1/p)-(1/q)} \|u\|_q \ . \tag{1.47}$$

Άρα,

$$L^q(\Omega) \to L^p(\Omega) \ . \tag{1.48}$$

Αν $u \in L^\infty(\Omega)$, τότε

$$\lim_{p\to\infty} \|u\|_p = \|u\|_\infty \ . \tag{1.49}$$

Αν $u \in L^p(\Omega)$ *για* $1 \le p < \infty$ *και αν υπάρχει σταθερά* K *ώστε*

$$\|u\|_p \le K \ , \quad \forall \, p \in [1, \infty) \ , \tag{1.50}$$

τότε $u \in L^\infty(\Omega)$ *και*

$$\|u\|_\infty \le K \ . \tag{1.51}$$

Απόδειξη. Για τις περιπτώσεις που $p = q$ ή $q = \infty$ οι (1.47) και (1.48) ισχύουν με τετριμμένο τρόπο. Αν $1 \le p < q < \infty$ και $u \in L^q(\Omega)$, η ανισότητα Hölder μας δίνει ότι

$$\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \le \left(\int_\Omega |u(x)|^q \, dx \right)^{p/q} \left(\int_\Omega 1 \, dx \right)^{1-(p/q)}$$

από την οποία οι (1.47) και (1.48) προκύπτουν άμεσα. Αν $u \in L^\infty(\Omega)$, λαμβάνουμε από την (1.47) ότι

$$\limsup_{p \to \infty} \|u\|_p \le \|u\|_\infty \ . \tag{1.52}$$

Από την άλλη, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $A \subset \Omega$ με θετικό μέτρο $\mu(A)$ τέτοιο ώστε

$$|u(x)| \ge \|u\|_\infty - \epsilon \quad x \in A \ .$$

Άρα,

$$\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \ge \int_A |u(x)|^p \, dx \ge \mu(A)(\|u\|_\infty - \epsilon)^p$$

$$\Rightarrow \ \|u\|_p = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \ge \mu(A)^{1/p}(\|u\|_\infty - \epsilon)$$

από όπου προκύπτει ότι

$$\liminf_{p \to \infty} \|u\|_p \ge \|u\|_\infty \ . \tag{1.53}$$

Έτσι, από τις σχέσεις (1.52) και (1.53) προκύπτει ότι ισχύει η (1.49).
Υποθέτουμε ότι η (1.50) ισχύει για $1 \le p < \infty$. Αν $u \notin L^\infty(\Omega)$ δηλαδή αν δεν ισχύει η (1.51), τότε μπορούμε να βρούμε σταθερά $K_1 > K$ και $A \subset \Omega$ με $\mu(A) > 0$ τέτοια ώστε για $x \in A$

$$|u(x)| \ge K_1 \ .$$

Χρησιμοποιώντας το ίδιο σκεπτικό με το οποίο δείξαμε ότι ισχύει η (1.53) τώρα δείχνουμε ότι

$$\liminf_{p \to \infty} \|u\|_p \ge K_1$$

και έτσι καταλήγουμε σε άτοπο λόγω της (1.50). □

Πόρισμα 1.92.1. $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ *για* $1 \le p \le \infty$ *και οποιοδήποτε χωρίο* Ω.

Θεώρημα 1.93. *Ο χώρος* $L^p(\Omega)$ *είναι χώρος Banach αν* $1 \le p \le \infty$.

Θεώρημα 1.94. *Ο χώρος* $C_0(\Omega)$ *είναι πυκνός στον* $L^p(\Omega)$ *αν* $1 \le p < \infty$.

Θεώρημα 1.95. *Ο χώρος* $C_0^\infty(\Omega)$ *είναι πυκνός στον* $L^p(\Omega)$ *αν* $1 \le p < \infty$.

Θεώρημα 1.96 (Ανισότητα Hölder). *Με $1 \leq p < \infty$ και p' το συζυγή εκθέτη του p δηλαδή $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Αν $u \in L^p(\Omega)$ και $v \in L^{p'}(\Omega)$, τότε $uv \in L^1(\Omega)$ και*

$$\|uv\|_1 = \int_\Omega |u(x)v(x)|\, dx \leq \|u\|_p \|v\|_{p'} \; . \tag{1.54}$$

Πόρισμα 1.96.1. *Με $0 < p, q, r$ και $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. Αν $u \in L^p(\Omega)$ και $v \in L^q(\Omega)$, τότε $uv \in L^r(\Omega)$ και*

$$\|uv\|_r \leq \|u\|_p \|v\|_q \; . \tag{1.55}$$

Θεώρημα 1.97 (Ανισότητα Hölder για Μεικτές Νόρμες). *Έστω $0 < p_i \leq \infty$ και $0 < q_i \leq \infty$ για $1 \leq i \leq n$. Αν $u \in L^{\mathbf{p}}(\Omega)$ και $v \in L^{\mathbf{q}}(\Omega)$, τότε $uv \in L^{\mathbf{r}}(\Omega)$ όπου*

$$\frac{1}{r_i} = \frac{1}{p_i} + \frac{1}{q_i} \; , \quad 1 \leq i \leq n \; , \tag{1.56}$$

τότε έχουμε την ανισότητα Hölder

$$\|uv\|_{\mathbf{r}} \leq \|u\|_{\mathbf{p}} \|v\|_{\mathbf{q}} \; . \tag{1.57}$$

Οι n εξισώσεις της σχέσης (1.57) συχνά συμβολίζονται με τον πιο βολικό συμβολισμό

$$\frac{1}{\mathbf{r}} = \frac{1}{\mathbf{p}} + \frac{1}{\mathbf{q}} \; .$$

Απο την παραπάνω μορφή της ανισότητας Hölder μπορεί να προκύψει η ακόλουθη μορφή για γινόμενο k τέτοιων συναρτήσεων ως:

$$\left\| \prod_{j=1}^{k} u_j \right\|_{\mathbf{r}} \leq \prod_{j=1}^{k} \|u_j\|_{\mathbf{p}_j} \; , \quad \text{όπου } \; \frac{1}{\mathbf{r}} = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\mathbf{p}_j} \; . \tag{1.58}$$

Παρατήρηση 1.98. *Ένα χρήσιμο συμπέρασμα της ανισότητας Hölder είναι το ακόλουθο. Έστω $u_1, \cdots, u_k$ συναρτήσεις τέτοιες ώστε*

$$u_i \in L^{p_i}(\Omega) \;\; 1 \leq i \leq k, \;\; \text{με} \;\; \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_k} \leq 1.$$

Τότε το γινόμενο $u = u_1 u_2 \cdots u_k$ ανήκει στον $L^p(\Omega)$ και

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^{p_1}(\Omega)} \cdots \|u\|_{L^{p_k}(\Omega)}.$$

Ειδικότερα, αν $u \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ με $1 \leq p \leq q \leq \infty$, τότε

$$u \in L^r(\Omega) \; , \quad p \leq r \leq q$$

και ισχύει η ***ανισότητα παρεμβολής***

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq \|u\|^a_{L^p(\Omega)} \|u\|^{1-a}_{L^q(\Omega)} \; ,$$

όπου

$$\frac{1}{r} = \frac{a}{p} + \frac{1-a}{p} \quad (0 \leq a \leq 1).$$

Θεώρημα 1.99. *Έστω Ω χωρίο του $\mathbb{R}^n$ και $1 \le p < \infty$. Τότε ο $C_0(\Omega)$ είναι πυκνός στον $L^p(\Omega)$.*

Ορισμός 1.100 (Γραμμικό συναρτησιακό στον $L^p(\Omega)$). *Έστω Ω χωρίο του $\mathbb{R}^n$, $1 \le p < \infty$ και p' ο συζυγής εκθέτης του p. Κάθε στοιχείο $v \in L^{p'}(\Omega)$ ορίζει ένα γραμμικό συναρτησιακό L_v στον $L^p(\Omega)$ ως*

$$L_v(u) = \int_\Omega u(x)v(x)\,dx\ , \quad u \in L^p(\Omega)\ . \tag{1.59}$$

Από την ανισότητα Hölder $|L_v(u)| \le \|u\|_p \|v\|_{p'}$ άρα $L_v \in [L^p(\Omega)]^*$ και

$$\|L_v\|_{[L^p(\Omega)]^*} \le \|v\|_{p'}\ . \tag{1.60}$$

Θεώρημα 1.101 (Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz στον $L^p(\Omega)$). *Έστω Ω χωρίο του $\mathbb{R}^n$, $1 < p < \infty$, p' ο συζυγής εκθέτης του p και $L \in [L^p(\Omega)]^*$. Τότε υπάρχει $v \in L^{p'}(\Omega)$ ώστε*

$$L(u) = L_v(u) = \int_\Omega u(x)v(x)\,dx\ , \ \ \forall\, u \in L^p(\Omega)\ . \tag{1.61}$$

Επίσης $\|L_v\|_{[L^p(\Omega)]^*} = \|v\|_{p'}$ και άρα $[L^p(\Omega)]^* \cong L^{p'}(\Omega)$ δηλαδή ο $[L^p(\Omega)]^*$ είναι ισομετρικά ισομορφικός με τον $L^{p'}(\Omega)$.

Θεώρημα 1.102 (Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz στον $L^1(\Omega)$). *Έστω Ω χωρίο του $\mathbb{R}^n$ και $L \in [L^1(\Omega)]^*$. Τότε υπάρχει $v \in L^\infty(\Omega)$ ώστε*

$$L(u) = \int_\Omega u(x)v(x)\,dx\ , \ \ \forall\, u \in L^1(\Omega)\ . \tag{1.62}$$

Επίσης $\|L\|_{[L^1(\Omega)]^*} = \|v\|_\infty$ και άρα $[L^1(\Omega)]^* \cong L^\infty(\Omega)$ δηλαδή ο $[L^1(\Omega)]^*$ είναι ισομετρικά ισομορφικός με τον $L^\infty(\Omega)$.

1.3.3 Χώροι Sobolev

Σε αυτήν την υποενότητα θα ορίσουμε την έννοια των κατανομών και την κατά κατανομή (ή ασθενή) παράγωγο που θα χρησιμοποιήσουμε στη μελέτη μας και θα προχωρήσουμε στον ορισμό και την μελέτη των γενικών χώρων Sobolev $H^{m,p}$, $W^{m,p}$ και $W_0^{m,p}$. Αν ο αναγνώστης επιθυμεί να εμβαθύνει περαιτέρω παραπέμπεται στα αναγνώσματα [1], [2], [4].

Ένα σημείο στον $\mathbb{R}^n$ συμβολίζεται ως $x = (x_1, \cdots, x_n)$ με νόρμα $|x| = (\sum_{j=1}^n x_j^2)^{1/2}$. Το εσωτερικό γινόμενο των x και y είναι

$$x \cdot y = \sum_{j=1}^n x_j y_j\ .$$

Αν $a = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ είναι $n-$άδα μη αρνητικών ακεραίων α_j, καλούμε τον α πολυδείκτη (multi-index) και συμβολίζουμε με x^α τα μονώνυμα $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$, με βαθμό $|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$. Όμοια, αν $D_j = \partial/\partial x_j$ για $1 \le j \le n$, τότε με

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_1^{\alpha_1}$$

συμβολίζουμε τον διαφορικό τελεστή τάξης $|\alpha|$. Ισχύει ότι $D^{(0,\dots,0)}u = u$.

Ο **τύπος του Leibniz** με α και β πολυδείκτες και χωρίς βλάβη της γενικότητας $\beta \le \alpha$ είναι

$$D^\alpha(uv)(x) = \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta u(x) D^{\alpha-\beta} v(x)$$

για συναρτήσεις u και v που είναι $|\alpha|$ φορές συνεχώς παραγωγίσιμες σε περιοχή του x.

Ορισμός 1.103 (**Δοκιμαστικές Συναρτήσεις**). *Έστω χωρίο $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Μια ακολουθία $\{\phi_j\}_j$ συναρτήσεων $\phi_j \in C_0^\infty(\Omega)$, $\forall\ j$ υπό την έννοια του χώρου $\mathcal{D}(\Omega)$ στη συνάρτηση $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ αν ικανοποιούνται οι ακόλουθες συνθήκες:*

i. $\exists\ K \Subset \Omega\ :\ \operatorname{supp}(\phi_j - \phi) \subset K\ ,\ \forall\ j$,

ii. $\lim_{j\to\infty} D^\alpha \phi_j(x) = D^\alpha \phi(x)$ *ομοιόμορφα στο K για κάθε πολυδείκτη α.*

Υπάρχει τοπικά κυρτή τοπολογία στον διανυσματικό χώρο $C_0^\infty(\Omega)$ ως προς την οποία ένα γραμμικό συναρτησιακό T είναι συνεχές αν και μόνο αν $T(\phi_j) \to T(\phi)$ στο $\mathbb{C}$ οπουδήποτε $\phi_j \to \phi$ υπό την έννοια του χώρου $\mathcal{D}(\Omega)$. Εφοδιασμένος με την τοπολογία ο $C_0^\infty(\Omega)$ καλείται $\mathcal{D}(\Omega)$ που είναι ο χώρος των δοκιμαστικών συναρτήσεων στο Ω. Ο $\mathcal{D}(\Omega)$ δεν επιδέχεται νόρμα.

Ορισμός 1.104 (**Κατανομές Schwartz**). *Με $\mathcal{D}(\Omega)$ συμβολίζεται ο χώρος των δοκιμαστικών συναρτήσεων στο Ω και με $\mathcal{D}^*(\Omega)$ ο δυϊκός αυτού ο οποίος είναι ο χώρος των κατανομών (Schwartz) στο Ω. Οι ιδιότητες διανυσματικού χώρου και σύγκλισης του $\mathcal{D}^*(\Omega)$ θεμελιώνονται ως εξής:*
Έστω $S, T, T_j \in \mathcal{D}^*(\Omega)$ και $c \in \mathbb{C}$ τότε

$$\begin{aligned} (S+T)(\phi) &= S(\phi) + T(\phi)\ ,\quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega)\ , \\ (cT)(\phi) &= cT(\phi)\ ,\quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega)\ , \end{aligned}$$

$T_j \to T$ στο $\mathcal{D}^*(\Omega)$ αν και μόνο αν $T_j(\phi) \to T(\phi)$ στο $\mathbb{C}\ \forall\ \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Ορισμός 1.105 (**Τοπικά Ολοκληρώσιμες Συναρτήσεις**). *Μια συνάρτηση u ορισμένη σχεδόν παντού στο Ω καλείται **τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση** στο Ω υπό την προϋπόθεση ότι $u \in L^1(U)$ για κάθε ανοιχτό $U \Subset \Omega$. Σε αυτή την περίπτωση γράφουμε $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Σε κάθε $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ αντιστοιχεί μία κατανομή $T_u \in \mathcal{D}^*(\Omega)$ που ορίζεται ως:*

$$T_u(\phi) = \int_\Omega u(x)\phi(x)\,dx\ ,\quad \phi \in \mathcal{D}(\Omega)\ . \tag{1.63}$$

Το T_u είναι γραμμικό συναρτησιακό στον $\mathcal{D}(\Omega)$. Το T_u είναι συνεχές. Πράγματι, έστω $\phi_j \to \phi$ στο $\mathcal{D}(\Omega)$. Τότε υπάρχει $K \Subset \Omega$ τέτοιο ώστε $\operatorname{supp}(\phi_j - \phi) \subset K\ ,\ \forall\ j$. Άρα

$$|T_u(\phi_j) - T_u(\phi)| \le \sup_{x\in K} |\phi_j - \phi| \int_K |u(x)|\,dx \to 0,\ \text{αφού } \phi_j \to \phi\ .$$

$$\Rightarrow\ |T_u(\phi_j) - T_u(\phi)| \to 0\ \ \text{ομοιόμορφα στο } K.$$

Ορισμός 1.106 (Παράγωγοι Κατανομών). *Έστω $u \in C^1(\Omega)$ και $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Αφού η ϕ μηδενίζεται έξω από κάποιο συμπαγές υποσύνολο του Ω, έχουμε ολοκληρώνοντας κατά μέλη ως προς την μεταβλητή x_j*

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x_j} u(x)\right) \phi(x)\, dx = -\int_\Omega u(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\phi(x)\right)\, dx\ .$$

Όμοια, αν $u \in C^{|\alpha|}(\Omega)$, η ολοκλήρωση κατά μέλη γίνεται $|\alpha|$ φορές και έχει ως αποτέλεσμα

$$\int_\Omega (D^{|\alpha|}u(x))\phi(x)\, dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u(x)(D^{|\alpha|}\phi(x))\, dx\ .$$

Από αυτό προκύπτει ο ακόλουθος ορισμός για την ***παράγωγο** $D^\alpha T$ **μίας κατανομής*** *$T \in \mathcal{D}^*(\Omega)$:*

$$(D^\alpha T)(\phi) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \phi)\ . \tag{1.64}$$

Αφού $D^\alpha \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ όπου ισχύει ότι $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, το $D^\alpha T$ είναι γραμμικό συναρτησιακό στον $\mathcal{D}(\Omega)$. Μένει να δούμε ότι είναι συνεχές και άρα ότι είναι κατανομή στο Ω. Πράγματι, έστω $\phi_j \to \phi$ στο $\mathcal{D}(\Omega)$. Τότε

$$\operatorname{supp}(D^\alpha(\phi_j - \phi)) \subset \operatorname{supp}(\phi_j - \phi) \subset K$$

για κάποιο $K \Subset \Omega$. Επιπλέον,

$$D^\beta(D^\alpha(\phi_j - \phi)) = D^{\beta+\alpha}(\phi_j - \phi)$$

συγκλίνει στο 0 ομοιόμορφα στο K καθώς $j \to \infty$ για κάθε πολυ-δείκτη β. Άρα, $D^\alpha \phi_j \to D^\alpha \phi$ στο $\mathcal{D}(\Omega)$. Αφού $T \in \mathcal{D}^*(\Omega)$ προκύπτει ότι

$$D^\alpha T(\phi_j) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \phi_j) \to (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \phi) = D^\alpha T(\phi)$$

στο $\mathbb{C}$. Άρα, $D^\alpha T \in \mathcal{D}^*(\Omega)$.
Έχουμε δει ότι κάθε κατανομή στο $\mathcal{D}^*(\Omega)$ έχει παραγώγους όλων των τάεων στο $\mathcal{D}^*(\Omega)$ υπό την έννοια του ορισμού (1.64). Ακόμα, η απεικόνιση $D^\alpha : \mathcal{D}^*(\Omega) \to \mathcal{D}^*(\Omega)$ είναι συνεχής αν $T_j \to T$ στο $\mathcal{D}^*(\Omega)$ και $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, τότε

$$D^\alpha T_j(\phi) = (-1)^{|\alpha|} T_j(D^\alpha \phi) \to (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \phi) = D^\alpha T(\phi)\ .$$

Ορισμός 1.107 (Ασθενείς παράγωγοι). *Τώρα ορίζουμε το γεγονός μία συνάρτηση να είναι η ασθενής παράγωγος μίας άλλης συνάρτησης. Έστω $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Τότε μπορεί να υπάρχει ή μπορεί να μην υπάρχει μία συνάρτηση $v_\alpha \in L^1_{loc}(\Omega)$ τέτοια ώστε*

$$T_{v_\alpha} = D^\alpha T_u$$

στο $\mathcal{D}^*(\Omega)$. Αν υπάρχει τέτοια συνάρτηση v_α, τότε αυτή είναι μοναδική ως προς σύνολα μέτρου 0 και καλείται ***ασθενής ή κατά κατανομή μερική παράγωγος*** *της u και συμβολίζεται με $D^\alpha u$. Άρα για την $v_\alpha \in L^1_{loc}(\Omega)$ έχουμε ότι*

$$D^\alpha u = v_\alpha \tag{1.65}$$

υπό ασθενή (κατά κατανομή) έννοια και ικανοποιεί την συνθήκη

$$\int_\Omega u(x) D^\alpha \phi(x)\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v_\alpha(x)\phi(x)\, dx \ , \quad \forall\, \phi \in \mathcal{D}(\Omega)\ . \tag{1.66}$$

Αν η u είναι αρκετά ομαλή ώστε να έχει συνεχή μερική παράγωγο $D^\alpha u$ υπό την κλασσική συνήθη έννοια, τότε η $D^\alpha u$ είναι επίσης και ασθενής παράγωγος της u. Επίσης, είναι πιθανό η $D^\alpha u$ να υπάρχει υπό την ασθενή έννοια και να μην υπάρχει υπό την κλασσική έννοια.

Ορισμός 1.108 (Χώροι Sobolev). *Έστω Ω χωρίο του $\mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{N}$ και $1 \le p \le \infty$. Θεωρούμε τρεις διανυσματικούς χώρους για τους οποίους η $\|\cdot\|_{m,p}$ είναι νόρμα:*

1. *$H^{m,p}(\Omega) \equiv$ η πλήρωση του $\{u \in C^m(\Omega)\ :\ \|u\|_{m,p} < \infty\}$ ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_{m,p}$,*
2. *$W^{m,p}(\Omega) \equiv \{u \in L^p(\Omega)\ :\ D^\alpha u \in L^p(\Omega)\ ,\ 0 \le |\alpha| \le m\}$ όπου $D^\alpha u$ είναι η ασθενής (ή κατά κατανομή) μερική παράγωγος και*
3. *$W_0^{m,p}(\Omega) \equiv$ η κλειστότητα του $C_0^\infty(\Omega)$ στον χώρο $W^{m,p}(\Omega)$.*

Εφοδιασμένοι με τη κατάλληλη νόρμα $\|\cdot\|_{m,p}$ αυτοί οι χώροι καλούνται ***χώροι* Sobolev** *πάνω από το Ω. Ισχύει ότι $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$, αν $1 \le p < \infty$ ισχύει επίσης $W_0^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ αφού ο $C_0(\Omega)$ είναι πυκνός στον $L^p(\Omega)$. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ισχύει η παρακάτω αλυσίδα ενσφήνωσης*

$$W_0^{m,p}(\Omega) \to W^{m,p}(\Omega) \to L^p(\Omega)$$

Θεώρημα 1.109. *Έστω Ω χωρίο του $\mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{N}$ και $1 \le p \le \infty$. Ο $W^{m,p}(\Omega)$ είναι χώρος Banach.*

Πόρισμα 1.109.1. *Έστω Ω χωρίο του $\mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{N}$ και $1 \le p \le \infty$. Τότε*

$$H^{m,p}(\Omega) \subset W^{m,p}(\Omega)\ .$$

Θεώρημα 1.110. *Έστω Ω χωρίο του $\mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{N}$ και $1 \le p < \infty$. Τότε*

$$H^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)\ .$$

Κάποια βασικά αποτελέσματα στους χώρους $W^{m,p}(\Omega)$ μπορούν προκύψουν βλέποντας τον $W^{m,p}(\Omega)$ σαν κλειστό υπόχωρο ενός χώρου L^p σε μία ένωση ξένων αντιγράφων του Ω. Δοθέντων ακεραίων $n \ge 1$ και $m \ge 0$, έστω $N \equiv N(n,m)$ ο αριθμός των πολυδεικτών $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ τέτοιων ώστε $|\alpha| \le m$. Για κάθε τέτοιο πολυδείκτη α έστω Ω_α είναι ένα αντίγραφο του Ω σε ένα διαφορετικό αντίγραφο του $\mathbb{R}^n$, έτσι ώστε τα N χωρία Ω_α να είναι de facto ξένα μεταξύ τους. Έστω $\Omega^{(m)}$ η ένωση αυτών των N χωρίων

$$\Omega^{(m)} = \bigcup_{|\alpha| \le m} \Omega_\alpha\ .$$

Δοθείσης συνάρτησης $u \in W^{m,p}(\Omega)$, έστω U η συνάρτηση στον $\Omega^{(m)}$ που ταυτίζεται με την $D^\alpha u$ στον Ω_α. Η απεικόνιση, επομένως, $P : W^{m,p}(\Omega) \to L^p(\Omega^{(m)})$ που στέλνει $u \mapsto U$

είναι ισομετρία. Αφού ο $W^{m,p}(\Omega)$ είναι πλήρης, η εικόνα W της ισομετρίας P είναι κλειστός υπόχωρος του $L^p(\Omega^{(m)})$.

Θεωρώντας Ω, m και p σταθερά ορίζουμε επίσης το εσωτερικό γινόμενο

$$< u, v >= \int_\Omega u(x)v(x)\,dx \tag{1.67}$$

για κάθε u, v συναρτήσεις για τις οποίες το δεξί μέλος της (1.67) ορίζεται. Δοθέντος p έστω p' ο συζηγής εκθέτης του p όπου

$$p' = \begin{cases} \infty\,, & p = 1\,,\\ p/(p-1)\,, & 1 < p < \infty\,,\\ 1\,, & p = \infty\,. \end{cases}$$

Αρχικά, επεκτείνουμε το Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz για το χώρο $W^{m,p}(\Omega)$. Στην συνέχεια ορίζουμε τον δυϊκό του $W_0^{m,p}(\Omega)$ τον οποίο βλέπουμε ως υπόχωρο του $\mathcal{D}^*(\Omega)$. Τέλος, για $1 < p < \infty$ θα δούμε ότι ο δυϊκός του $W_0^{m,p}(\Omega)$ είναι η πλήρωση του $L^{p'}(\Omega)$ ως προς μία νόρμα ασθενέστερη από την κλασσική $L^{p'}-$νόρμα.

Θεώρημα 1.111 (Δυϊκός του $L^p(\Omega^{(m)})$). *Σε κάθε $L \in [L^p(\Omega^{(m)})]^*$, όπου $1 \le p < \infty$, αντιστοιχεί μοναδική $v \in L^{p'}(\Omega^{(m)})$ τέτοια ώστε για κάθε $u \in L^p(\Omega^{(m)})$*

$$L(u) = \int_{\Omega^{(m)}} u(x)v(x)\,dx = \sum_{|\alpha|\le m} \int_{\Omega_\alpha} u_\alpha(x)v_\alpha(x)\,dx = \sum_{|\alpha|\le m} < u_\alpha, v_\alpha >\,, \tag{1.68}$$

όπου u_α και v_α οι περιορισμοί των u και v, αντίστοιχα, στο Ω_α. Επιπλέον,

$$\|L\|_{[L^p(\Omega^{(m)})]^*} = \|v\|_{L^{p'}(\Omega^{(m)})}\,. \tag{1.69}$$

Άρα,

$$[L^p(\Omega^{(m)})]^* \equiv L^{p'}(\Omega^{(m)})\,. \tag{1.70}$$

Θεώρημα 1.112 (Δυϊκός του $W^{m,p}(\Omega)$). *Έστω $1 \le p < \infty$. Σε κάθε $L \in [W^{m,p}(\Omega)]^*$ υπάρχουν στοιχεία $v \in L^{p'}(\Omega^{(m)})$ τέτοια ώστε αν v_α ο περιορισμός της v στο Ω_α έχουμε για κάθε $u \in W^{m,p}(\Omega)$*

$$L(u) = \sum_{0\le|\alpha|\le m} < D^\alpha u, v_\alpha >\,. \tag{1.71}$$

Επιπλέον,

$$\|L\|_{[W^{m,p}(\Omega)]^*} = \inf \|v\|_{L^{p'}(\Omega^{(m)})} = \min \|v\|_{L^{p'}(\Omega^{(m)})}\,, \tag{1.72}$$

το infimum το παίρνουμε πάνω από, και το πιάνουμε στο σύνολο όλων των $v \in L^{p'}(\Omega^{(m)})$ για τα οποία ισχύει η (1.71) για κάθε $u \in W^{m,p}(\Omega)$.
Αν $1 < p < \infty$, το στοιχείο $v \in L^{p'}(\Omega^{(m)})$ που ικανοποιεί τις (1.71) και (1.72) είναι μοναδικό.

Έστω $1 \le p < \infty$ κάθε στοιχείο $L \in [W^{m,p}(\Omega)]^*$ είναι επέκταση του $W^{m,p}(\Omega)$ μίας κατανομής $T \in \mathcal{D}^*(\Omega)$. Για να δούμε ποια μορφή παίρνει αυτή η κατανομή, υποθέτουμε ότι το L δίνεται από την (1.71) για κάποιο $v \in L^{p'}(\Omega^{(m)})$ και ορίζουμε T και T_{v_α} στον $\mathcal{D}(\Omega)$ ως

$$T = \sum_{0\le|\alpha|\le m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha T_{v_\alpha} \;\;\text{και}\;\; T_{v_\alpha}(\phi) =< \phi, v_\alpha >\,,\;\; 0 \le |\alpha| \le m. \tag{1.73}$$

Θεώρημα 1.113 (Νορμικός Δυϊκός του $W_0^{m,p}(\Omega)$). *Έστω $1 \le p < \infty$, p' ο συζυγής εκθέτης του p και $m \ge 1$. Ο δυϊκός χώρος $[W_0^{m,p}(\Omega)]^*$ είναι ισομετρικά ισομορφικός με τον χώρο Banach $W^{-m,p'}(\Omega)$, δηλαδή $[W_0^{m,p}(\Omega)]^* \cong W^{-m,p'}(\Omega)$, αποτελείται από εκείνες τις κατανομές $T \in \mathcal{D}^*(\Omega)$ που ικανοποιούν την (1.73) και έχουν νόρμα*

$$\|T\| = \min\{\|v\|_{L^{p'}(\Omega^{(m)})} \ : \ v \ \ \textit{ικανοποιεί την } (1.73)\} \ . \tag{1.74}$$

Παρατήρηση 1.114. *1. Η πληρότητα του χώρου έπεται από τον ισομετρικό ισομορφισμό.*

2. Όταν ο $W_0^{m,p}(\Omega)$ είναι γνήσιο υποσύνολο του $W^{m,p}(\Omega)$, τα συνεχή γραμμικά συναρτησιακά στον $W^{m,p}(\Omega)$ δεν είναι πλήρως ορισμένα από τους περιορισμούς τους στον $C_0(\Omega)$ και άρα δεν είναι ορισμένα από τις κατανομές T που δίνονται από την (1.73).

Θεώρημα 1.115 (Η $(-\mathrm{m}, \mathrm{p}')-$νόρμα στον $L^{p'}(\Omega)$). *Υπάρχει κι άλλος χαρακτηρισμός του $W_0^{m,p}(\Omega)$ αν $1 < p < \infty$. Κάθε στοιχείο $v \in L^{p'}(\Omega)$ καθορίζει ένα στοιχείο $L_v \in [W_0^{m,p}(\Omega)]^*$ υπό την έννοια ότι*

$$L_v(\phi) =< u, v > , \tag{1.75}$$

αφού

$$|L_v(u)| = |< u, v >| \le \|v\|_{p'} \|u\|_p \le \|v\|_{p'} \|u\|_{m,p} \ . \tag{1.76}$$

Ορίζουμε την $(-\mathrm{m}, \mathrm{p}')-$νόρμα του $v \in L^{p'}(\Omega)$ να είναι η νόρμα του L_v δηλαδή

$$\|v\|_{-m,p'} = \|L\|_{[W_0^{m,p}(\Omega)]^*} = \sup_{u \in W_0^{m,p}(\Omega), \|u\|_{m,p} \le 1} |< u, v >| \ . \tag{1.77}$$

Έχουμε ότι $\|v\|_{-m,p'} \le \|v\|_{p'}$ και για κάθε $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ και $v \in L^{p'}(\Omega)$ προκύπτει ότι

$$|< u, v >| \le \|u\|_{m,p} \left| \left\langle \frac{u}{\|u\|_{m,p}}, v \right\rangle \right| \le \|u\|_{m,p} \|v\|_{-m,p'} \ , \tag{1.78}$$

η οποία είναι γενίκευση της ανισότητας Hölder.

Παρατήρηση 1.116. *1. Έστω*

$$V = \{L_v \ : \ v \in L^{p'}(\Omega)\} \ , \tag{1.79}$$

το οποίο είναι διανυσματικός υπόχωρος του $[W_0^{m,p}(\Omega)]^*$. Τότε το V είναι πυκνό στο $[W_0^{m,p}(\Omega)]^*$.

2. Έστω με $H^{-m,p'}(\Omega)$ συμβολίζουμε την πλήρωση του $L^{p'}(\Omega)$ ως προς την νόρμα $\|\cdot\|_{-m,p'}$. Τότε έχουμε

$$H^{-m,p'}(\Omega) \equiv [W_0^{m,p}(\Omega)]^* \equiv W^{-m,p'}(\Omega) \ . \tag{1.80}$$

Συγκεκριμένα, αντίστοιχα σε κάθε $v \in H^{-m,p'}(\Omega)$ υπάρχει μία κατανομή $T_v \in W^{-m,p'}(\Omega)$ τέτοια ώστε

$$T_v(\phi) = \lim_{n \to \infty} < \phi, v_n > , \ \ \forall \ \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

και υπάρχει ακολουθία $\{v_n\} \subset L^{p'}(\Omega)$ για την οποία

$$\lim_{n \to \infty} \|v_n - v\|_{-m,p'} = 0 \ .$$

Αντίστροφα, κάθε $T \in W^{-m,p'}(\Omega)$ ικανοποιεί την $T = T_v$ για κάποιο τέτοιο v. Επιπλέον, από την (1.78) έχουμε

$$|T_v(\phi)| \le \|\phi\|_{m,p} \|v\|_{-m,p'} \ . \tag{1.81}$$

3. *Με όμοια επιχειρήματα όπως προηγουμένως ο δυϊκός χώρος* $[W_0^{m,p}(\Omega)]^*$ *για* $1 < p < \infty$ *χαρακτηρίζεται ως η πλήρωση του* $L^{p'}(\Omega)$ *ως προς τη νόρμα*

$$\|v\|^*_{-m,p'} = \sup_{u \in W^{m,p}(\Omega), \|u\|_{m,p} \leq 1} | < u, v > | \,. \tag{1.82}$$

Ορισμός 1.117. *Έστω* $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ *και* $\forall\ x \neq 0$ *έστω* $\angle(x, v)$ *να είναι η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων θέσεως των* x *και* v*. Για δοθέντα* v, $\rho > 0$ *και* κ *που ικανοποιεί τη ανίσωση* $0 < \kappa \leq \pi$ *το σύνολο*

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ x = 0 \text{ ή } 0 < |x| \leq \rho, \ \angle(x, v) \leq \kappa/2\}$$

καλείται ***πεπερασμένος κώνος*** *ύψους* ρ*, άξονα κατεύθυνσης* v *και ανοίγματος γωνίας* κ *με κορυφή την αρχή των αξόνων. Ισχύει ότι*

$$x + C = \{x + y : y \in C\}$$

είναι ένας πεπερασμένος κώνος με κορυφή το x *με ίδιες διαστάσεις και ίδιο άξονα κατεύθυνσης με τον* C *και αποτελεί παράλληλη μεταφορά του* C.

Θεώρημα 1.118 (Τοπική Ισχυρή Συνθήκη Lipschitz). *Το* Ω *ικανοποιεί την τοπική ισχυρή συνθήκη Lipschitz αν υπάρχουν θετικές σταθερές* δ *και* M*, ένα τοπικά πεπερασμένο ανοικτό κάλυμμα* $\{U_j\}j$ *του συνόρου* $\partial\Omega$ *και για κάθε* j *μία πραγματική συνάρτηση* f_j *με* $(n-1)-$*το πλήθος μεταβλητές, τέτοια ώστε να ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες:*

i. *Για κάποιο πεπερασμένο* N*, κάθε συλλογή από* $N + 1$ *τέτοια σύνολα* U_j *έχει κενή τομή.*

ii. *Για κάθε ζεύγος σημείων* $x, y \in \Omega_\delta$ *με* $|x - y| < \delta$ *υπάρχει* j *τέτοιο ώστε*

$$x, y \in V_j \ \equiv \ \{x \in U_j | \ dist(x, \partial U_j) > \delta\}.$$

iii. *Κάθε συνάρτηση* f_j *ικανοποιεί μία συνθήκη Lipschitz με σταθερά* M *η οποία είναι με* $t = (t_1, \cdots, t_{n-1}), \ k = (k_1, \cdots, k_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$*, τότε*

$$|f_j(t) - f_j(k)| \leq M|t - k|.$$

iv. *Για κάποιο Cartesian σύστημα συντεταγμένων* $z_j = (z_{j,1}, \cdots, z_{j,n}) \in U_j$, $\Omega \cap U_j$ *αναπαριστάται από την ανισότητα*

$$z_{j,n} < f_j(z_{j,1}, \cdots, z_{j,n-1}).$$

Αν Ω είναι φραγμένο, τότε οι παράνω συνθήκες απλουστεύονται και ενώνονται σε μία συνθήκη το Ω να έχει τοπικά Lipschitz σύνορο, δηλαδή για κάθε σημείο x *του συνόρου του Ω θα πρέπει να υπάρχει περιοχή* U_x *της οποίας η τομή της με το σύνορο να είναι το γράφημα μίας Lipschitz συνεχούς συνάρτησης.*

Ορισμός 1.119 (Κωνική συνθήκη). *Έστω Ω χωρίο του* $\mathbb{R}^n$ *το Ω ικανοποιεί την κωνική συνθήκη αν υπάρχει πεπερασμένος κώνος* C *ώστε για κάθε* $x \in \Omega$ *η κορυφή του πεπερασμένου κώνου* C_x *περιέχεται στο Ω και συγκλίνει στη* C.

Λήμμα 1.120. *Αν το Ω χωρίο του $\mathbb{R}^n$ με $1 \le p \le n/(n-1)$ ικανοποιεί την κωνική συνθήκη τότε $W^{1,1}(\Omega) \to L^p(\Omega)$.*

Λήμμα 1.121. *Έστω Ω χωρίο του $\mathbb{R}^n$ με $n \ge 2$. Έστω $k \in \mathbb{N}$, $1 \le k \le n$ και $\kappa = (\kappa_1, \cdots, \kappa_k)$ με $1 \le \kappa_1 \le \cdots \le \kappa_k \le n$. Έστω S το σύνολο των $\binom{n}{k}$ αυτών των κ. Δοσμένου $x \in \mathbb{R}^n$ έστω $x_\kappa = (x_{\kappa_1}, \cdots, x_{\kappa_k}) \in \mathbb{R}^\kappa$ και $dx_\kappa = dx_{\kappa_1} \cdots dx_{\kappa_k}$. Για $\kappa \in S$ είναι E_κ το $k-$διάστατο επίπεδο του $\mathbb{R}^n$ με $E_\kappa = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ x_i = 0 \ , \ i \notin \kappa\}$ και Ω_κ η προβολή του Ω στο E_κ με $\Omega_\kappa = \{x \in E_\kappa \ : \ x_\kappa = y_\kappa \ , \ y \in \Omega\}$. Έστω $F_\kappa(x_\kappa) \in L^\lambda(\Omega_\kappa)$ με $\lambda = \binom{n-1}{k-1}$. Η συνάρτηση F ορίζεται ως*

$$F(x) = \prod_{\kappa \in S} F_\kappa(x_\kappa) \in \ L^1(\Omega) \tag{1.83}$$

και $\|F\|_{1,\Omega} \le \prod_{\kappa \in S} \|F_\kappa\|_{\lambda,\Omega_\kappa}$ όπου

$$\left(\int_\Omega |F(x)| \, dx\right)^\lambda \le \prod_{\kappa \in S} \int_{\Omega_\kappa} |F_\kappa(x_\kappa)|^\lambda \, dx_\kappa \ . \tag{1.84}$$

Θεώρημα 1.122 (Θεώρημα Ενσφήνωσης Sobolev για κωνική συνθήκη). *Έστω Ω χωρίο του $\mathbb{R}^n$ με $n \ge 2$. Έστω $k \in \mathbb{N}$, $1 \le k \le n$ και $\kappa = (\kappa_1, \cdots, \kappa_k)$ με $1 \le \kappa_1 \le \cdots \le \kappa_k \le n$ και Ω_κ η τομή του Ω με το $k-$διάστατο επίπεδο του $\mathbb{R}^n$. Έστω $j, m \in \mathbb{N}$, $j \ge 0$, $m \ge 1$ και $1 \le p < \infty$. Αν το Ω ικανοποιεί την κωνική συνθήκη τότε:*

1. *Αν είτε $mp > n$ είτε $m = n$ και$p = 1$ έχουμε την ενσφήνωση*

$$W^{j+m,p}(\Omega) \to C_B^j(\Omega) \ . \tag{1.85}$$

2. *Αν $1 \le k \le n$ τότε έχουμε τις ενσφηνώσεις*

   i.
$$W^{j+m,p}(\Omega) \to W^{j,q}(\Omega_\kappa) \ , \quad p \le q \le \infty \ , \tag{1.86}$$

   ii.
$$W^{m,p}(\Omega) \to L^q(\Omega) \ , \quad p \le q \le \infty \ .$$

3. *Αν $1 \le k \le n$ και $mp = n$ τότε έχουμε τις ενσφηνώσεις*

   i.
$$W^{j+m,p}(\Omega) \to W^{j,q}(\Omega_\kappa) \ , \quad p \le q < \ \infty \ , \tag{1.87}$$

   ii.
$$W^{m,p}(\Omega) \to L^q(\Omega) \ , \quad p \le q < \ \infty \ .$$

4. *Αν $mp < n$ και είτε $n - mp \le k \le n$ είτε $p = 1$ και $n - m \le k \le n$ τότε έχουμε τις ενσφηνώσεις*

   i.
$$W^{j+m,p}(\Omega) \to W^{j,q}(\Omega_\kappa) \ , \quad p \le q \le p^* = kp/(n-mp) \ , \tag{1.88}$$

ii.

$$W^{m,p}(\Omega) \to L^q(\Omega)\ ,\quad p \le q \le p^* = np/(n-mp)\ . \tag{1.89}$$

Οι σταθερές ενσφήνωσης για τις παραπάνω ενσφηνώσεις εξαρτώνται μόνο από τα n, m, p, q, j, k και τις διαστάσεις του κώνου C της κωνικής συνθήκης.

Παρατήρηση 1.123. *Οι παραπάνω ενσφηνώσεις μπορούν να δειχτούν για την ειδική περίπτωση όπου $j = 0$ καθώς η γενική περίπτωση προκύπτει εφαρμόζοντας αυτήν την ειδική περίπτωση στην παράγωγο $D^\alpha u$ της u για $|\alpha| \le j$. Για παράδειγμα, αν δείξουμε την ενσφήνωση $W^{m,p}(\Omega) \to L^q(\Omega)$, τότε για κάθε $u \in W^{j+m,p}(\Omega)$ έχουμε $D^\alpha u \in W^{m,p}(\Omega)$ για $|\alpha| \le j$ από όπου προκύπτει ότι $D^\alpha u \in L^q(\Omega)$. Άρα, $u \in W^{j,q}(\Omega)$ και*

$$\begin{aligned}
\|u\|_{j,q} &= \left(\sum_{|\alpha|\le j} \|D^\alpha u\|_{0,q}^q \right)^{1/q} \\
&\le K_1 \left(\sum_{|\alpha|\le j} \|D^\alpha u\|_{m,p}^p \right)^{1/p} \\
&\le K_2 \|u\|_{j+m,p}\ .
\end{aligned}$$

Ορισμός 1.124 (Ημινόρμες στους Sobolev). *Έστω Ω χωρίο του $\mathbb{R}^n$, $m, j \in \mathbb{N}$, $0 \le j \le m$ και $1 \le p < \infty$ τά συναρτησιακά $|\cdot|_{j,p}$ στον $W^{m,p}(\Omega)$ ορίζονται ως*

$$|u|_{j,p} = |u|_{j,p,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha|\le j} |D^\alpha u|^p \right)^{1/p}\ . \tag{1.90}$$

Ισχύει ότι $|u|_{0,p} = \|u\|_{0,p} = \|u\|_p$ στον $L^p(\Omega)$ και

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{j=0}^{m} |u|_{j,p}^p \right)^{1/p}\ . \tag{1.91}$$

Αν $1 \le j$ οι $|\cdot|_{j,p}$ είναι οι ημινόρμες των χώρων $W^{m,p}(\Omega)$. Η $|\cdot|_{j,p}$ είναι νόρμα στον $W_0^{m,p}(\Omega)$ και είναι ισοδύναμη με τη νόρμα $\|\cdot\|_{m,p}$ αν το Ω είναι φραγμένο.

1.3.4 Χώροι Sobolev $\mathrm{H}^{\mathrm{p}}[0, 2\pi]$

Στην συγκεκριμένη υποενότητα θα δούμε τους χώρους $\mathrm{H}^{\mathrm{p}}[0, 2\pi]$ θα παρουσιαστούν στοχευμένα αρμονικά αποτελέσματα αυτών και θα χρησιμοποιηθεί στοιχειώδης θεωρία σειρών *Fourier*. Αν ο αναγνώστης επιθυμεί να εμβαθύνει περαιτέρω παραπέμπεται στα αναγνώσματα [1], [2], [5], [13].

Ορισμός 1.125. *Δύο στοιχεία ϕ και ψ στον χώρο Hilbert X καλούνται* ***ορθογώνια*** *αν*

$$(\phi, \psi) = 0 \;\Leftrightarrow\; \phi \perp \psi \ .$$

Ένα υποσύνολο $V \subset X$ καλείται ***ορθογώνιο σύστημα*** *αν*

$$(\phi, \psi) = 0 \ \ , \ \ \forall\, \phi, \psi \in V, \ \phi \neq \psi \ .$$

Ένα ορθογώνιο σύστημα V καλείται ***ορθοκανονικό σύστημα*** *αν επιπλέον ισχύει*

$$\|\phi\| = 1 \ , \ \phi \in V \ .$$

Ένα πλήρες ορθοκανονικό σύστημα V καλείται ***ορθοκανονική βάση*** *του X. Το σύνολο*

$$V^{\perp} := \{\psi \in X \mid \psi \perp V\}$$

καλείται ***ορθογώνιο συμπλήρωμα*** *του V.*

Ορισμός 1.126. *Έστω X χώρος με νόρμα, $V \subset X$ και έστω $\phi \in X$. Ένα στοιχείο $v \in V$ καλείται* ***βέλτιστη προσέγγιση*** *του ϕ ως προς το V αν*

$$\|\phi - v\| = \inf_{u \in V} \|\phi - u\|.$$

Θεώρημα 1.127. *Έστω χώρος Hilbert X και έστω $V \subset X$. Ένα στοιχείο $v \in V$ είναι βέλτιστη προσέγγιση του $\phi \in X$ ως προς το V αν και μόνο αν $\phi - v \perp V$. Ισχύει ότι $\forall \phi \in X$ υπάρχει το πολύ μία βέλτιστη προσέγγιση ως προς το V.*

Θεώρημα 1.128. *Έστω χώρος Hilbert X και έστω πλήρες $V \subset X$. Για κάθε στοιχείο του X υπάρχει μοναδική βέλτιστη προσέγγιση ως προς το V.*

Θεώρημα 1.129. *Έστω $\{\phi_n\}_1^{\infty}$ στον χώρο Hilbert X. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

i. *Το $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι πλήρες.*

ii. *Κάθε $\phi \in X$ μπορεί να γραφτεί ως ανάπτυγμα σειράς Fourier ως*

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} (\phi, \phi_n)\phi_n \, .$$

iii. *Ισχύει η* ***εξίσωση*** **Parseval**

$$\|\phi\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(\phi, \phi_n)|^2 \ , \ \ \forall \phi \in X.$$

iv. *Το $\phi = 0$ είναι το μόνο στοιχείο $\phi \in X$ ώστε*

$$(\phi, \phi_n) = 0 \ \forall\, n \in \mathbb{N} \ .$$

Απόδειξη. [$i. \Rightarrow ii.$] Από Θεώρημα(1.127) και Θεώρημα(1.128) η

$$u_n = \sum_{j=1}^{n} (\phi, \phi_j)\phi_j \tag{1.92}$$

είναι η βέλτιστη προσέγγιση του $\phi \in X$ ως προς το $span\{\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n\}$. Το σύστημα $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι πλήρες, άρα υπάρχει $\tilde{u_n} \in span\{\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n\}$ τέτοιο ώστε

$$\|\tilde{u_n} - \phi\| \to 0, \quad n \to \infty \tag{1.93}$$

και αφού $\tilde{u_n}$ βέλτιστη προσέγγιση του ϕ έχουμε

$$\|u_n - \phi\| \leq \|\tilde{u_n} - \phi\|$$

και άρα μαζί με τη σχέση (1.93) συνεπάγεται ότι

$$u_n \to \phi \ , \ n \to \infty \ .$$

Άρα,

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} (\phi, \phi_n)\phi_n \, . \tag{1.94}$$

[$ii. \Rightarrow iii.$] Ισχύει ότι

$$\|u_n\|^2 = (u_n, u_n) = \sum_{j=1}^{n} |(\phi, \phi_j)|^2 \ .$$

Με $n \to \infty$ και από συνέχεια της νόρμας $\|\cdot\|$ όμοια με προηγουμένως προκύπτει το ζητούμενο.
[$iii. \Rightarrow iv.$] Από ιδιότητες της νόρμας $\|\cdot\|$ έχουμε ότι

$$\|\phi\| = 0 \Leftrightarrow \ \phi \equiv 0 \Rightarrow \ (\phi, \phi_n) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \ .$$

[$iv. \Rightarrow i.$] Έστω το σύνολο $V := \overline{span(\phi_n)}$ με $X \neq V$. Τότε, υπάρχει $\phi \in X$ που δεν ανήκει στο V. Αφού V κλειστός υπόχωρος του X, το σύστημα $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι πλήρες στο V. Άρα από Θεώρημα(1.128) η βέλτιστη προσέγγιση $v \in V$ του $\phi \in X$ ως προς το V ικανοποιεί τη σχέση

$$(v - \phi, \phi_n) = 0 \ \ , \ \ \forall n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow \ \ v = \phi$$

και καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $X = V$. □

Αρχικά, θεωρούμε ότι το ορθοκανονικό σύστημα

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{imt} \right)_{-\infty}^{\infty} \tag{1.95}$$

είναι πλήρες στον $L^2[0, 2\pi]$. Από Θεώρημα(1.129), για $\phi \in L^2[0, 2\pi]$ έχουμε υπό την έννοια της σύγκλισης μέσων τετραγώνων

$$\phi(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha_m e^{imt} \tag{1.96}$$

όπου οι συντελεστές $Fourier$ α_m δίνονται από την σχέση

$$\alpha_m = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \phi(t) e^{-imt}\, dt. \tag{1.97}$$

Με $(\cdot,\cdot)$ συμβολίζουμε το εσωτερικό γινόμενο στον L^2 με αντίστοιχη νόρμα $\|\cdot\|$ που δίνεται από την εξίσωση $Parseval$ όπως αναφέραμε στο $[iii.]$ του Θεωρήματος (1.129)

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\alpha_m|^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\phi(t)|^2\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\|\phi(t)\|^2 \end{aligned}$$

Ορισμός 1.130 (**Χώρος Sobolev** $\mathrm{H}^{\mathrm{p}}[0,2\pi]$). *Έστω $0 \le p < \infty$ ορίζουμε τον $H^p[0,2\pi]$ ως τον χώρο όλων των συναρτήσεων $\phi \in L^2[0,2\pi]$ για τις οποίες ισχύει*

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} (1+m)^p |\alpha_m|^2 < \infty\,, \tag{1.98}$$

όπου α_m συντελεστές Fourier της ϕ όπως αναφέρθηκαν στην σχέση (1.97). Ο χώρος $H^p = H^p[0,2\pi]$ καλείται ***χώρος* Sobolev** *και ισχύει ότι $H^0[0,2\pi] \equiv L^2[0,2\pi]$.*

Θεώρημα 1.131. *Ο $H^p[0,2\pi]$ είναι χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο*

$$(\phi,\psi)_p := \sum_{m=-\infty}^{\infty} (1+m^2)^p \alpha_m \overline{\beta_m}\ , \tag{1.99}$$

όπου α_m και β_m οι συντελεστές Fourier των ϕ και ψ αντίστοιχα. Τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι πυκνά στον $H^p[0,2\pi]$.

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι παρόμοιο με το Θεώρημα (1.88) που συναντήσαμε στους χώρους $H\ddot{o}lder$. Δηλαδή είναι θεώρημα που αφορά **τελεστές ενσφήνωσης σε χώρους Sobolev H^p.**

Θεώρημα 1.132 (**Θεώρημα Rellich**). *Αν $0 \le p < q < \infty$ τότε $H^q[0,2\pi]$ είναι πυκνός στον $H^p[0,2\pi]$ και ο τελεστής ενσφήνωσης (imbedding operator)*

$$I : H^q \to H^p \tag{1.100}$$

είναι συμπαγής.

Απόδειξη. Αφού,

$$(1+m^2)^p \ \le\ (1+m^2)^q\ ,\ \ 0 \le p < q < \infty \tag{1.101}$$

προκύπτει ότι $H^q \subset H^p$ και επίσης

$$\|\phi\|_p \ \le\ \|\phi\|_q\ \ ,\ \ \forall \phi \in H^q\ . \tag{1.102}$$

Ότι ο H^q είναι πυκνός στον H^p προκύπτει επειδή τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι πυκνά στον H^p από Θεώρημα(1.131).

Μένει να δειχθεί ότι ο τελεστής $I : H^q \to H^p$ είναι συμπαγής, για αυτό ορίζουμε τους τελεστή

$$I_n : H^q \to H^p \ , \ \forall n \in \mathbb{N}$$

με δράση

$$I_n\phi \ := \ \sum_{m=-n}^{n} \alpha_m f_m \ , \quad \forall \phi \in H^q, \ \forall n \in \mathbb{N} \tag{1.103}$$

, όπου α_m συντελεστές $Fourier$.

Τότε,

$$\begin{aligned}
\|(I_n - I)\phi\|_p^2 \quad &= \quad \sum_{|m|=n+1}^{\infty} (1+m^2)^p |\alpha_m|^2 \\
&\leq \quad \frac{1}{(1+n^2)^{q-p}} \sum_{|m|=n+1}^{\infty} (1+m^2)^q |\alpha_m|^2 \\
&\leq \quad \frac{1}{(1+n^2)^{q-p}} \|\phi\|_q^2 \\
\Leftrightarrow \ \|(I_n - I)\phi\|_p \quad &\leq \quad (1+n^2)^{\frac{p-q}{2}} \|\phi\|_p \leq (1+n^2)^{\frac{p-q}{2}} \|\phi\|_q \\
\Leftrightarrow \ \|(I_n - I)\phi\|_p \leq \|(I_n - I)\|_p \|\phi\|_p \quad &\leq \quad (1+n^2)^{\frac{p-q}{2}} \|\phi\|_p \\
\Leftrightarrow \ \|(I_n - I)\|_p \quad &\leq \quad (1+n^2)^{\frac{p-q}{2}} \ \to 0 \ \ , \ \ n \to \infty
\end{aligned}$$

λόγω της σχέσης (1.102) και επειδή ο κάθε τελεστής I_n έχει πεπερασμένης διάστασης εικόνα και από το Θεώρημα (1.38) I_n συμπαγής $\forall n \in \mathbb{N}$ και άρα από Θεώρημα (1.37) ο I είναι συμπαγής. □

Θεώρημα 1.133 (Θεώρημα Ενσφήνωσης Sobolev). *Έστω $p > \frac{1}{2}$ και $\phi \in H^p[0, 2\pi]$. Τότε η ϕ συμπίπτει σχεδόν παντού με μία συνεχή και 2π-περιοδική συνάρτηση. Η διαφορά της ϕ από αυτήν την συνάρτηση είναι μία συνάρτηση w μέτρου μηδέν $\|w\|_p = 0$.*

Ορισμός 1.134 (Χώρος H^{-p}). *Για $0 \leq p < \infty$ ο χώρος $H^{-p} = H^{-p}[0, 2\pi]$ ορίζεται να είναι ο δυϊκός του χώρου $H^p[0, 2\pi]$, δηλαδή ο χώρος όλων των φραγμένων γραμμικών συναρτησιακών ορισμένων στον $H^p[0, 2\pi]$.*

Θεώρημα 1.135 (Χαρακτηρισμός του χώρου H^{-p}). *Για $F \in H^{-p}[0, 2\pi]$ η νόρμα δίνεται από τον τύπο*

$$\|F\|_p = \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} (1+m^2)^{-p} |c_m|^2 \right]^{1/2} \tag{1.104}$$

, όπου $c_m = F(f_m)$.

Αντίστροφα, για κάθε ακολουθία $(c_m)_m$ στοιχείων του $\mathbb{C}$ που ικανοποιούν την συνθήκη

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} (1+m^2)^{-p} |c_m|^2 \ < \ \infty \tag{1.105}$$

υπάρχει ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό $F \in H^{-p}[0, 2\pi]$, με $F(f_m) = c_m$.

Θεώρημα 1.136. *Για $g \in L^2[0,2\pi]$ το* ***δυϊκό ζευγάρι*** *(duality pairing)*

$$G(\phi) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \phi(t)g(t)\,dt, \quad \phi \in H^p \tag{1.106}$$

ορίζει ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό στον $H^p[0,2\pi]$, δηλαδή $G \in H^{-p}[0,2\pi]$. Ειδικότερα, ο $L^2[0,2\pi]$ είναι υπόχωρος του δυϊκού χώρου $H^{-p}[0,2\pi]$ με $0 \leq p < \infty$ και τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι πυκνά στον $H^{-p}[0,2\pi]$.

Πόρισμα 1.136.1. *Ισχύει η σχέση ενσφήνωσης*

$$H^p[0,2\pi] \ \subseteq \ L^2[0,2\pi] \subseteq \ H^{-p}[0,2\pi] \ \ , \ \ 0 \leq p < \infty \tag{1.107}$$

και τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι πυκνά σε καθέναν από αυτούς τους χώρους.

Παρατήρηση 1.137.

1. *Το δυϊκό ζευγάρι μπορεί να επεκταθεί σε φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό στον H^{-p}. Ειδικότερα, για $\phi \in H^p[0,2\pi]$ και $g \in H^{-p}[0,2\pi]$ ορίζεται*

$$g(\phi) = \int_0^{2\pi} \phi(t)g(t)\,dt \ .$$

2. *Ο χώρος H^{-p} γίνεται χώρος Hilbert το εσωτερικό γινόμενο που ορίστηκε προηγουμένως να είναι ορισμένο από το $p \geq 0$ στο $p < 0$.*

3. *Γενικότερα, αν X χώρος με νόρμα και X^* ο δυϊκός του, τότε για δοσμένα $\phi \in X$ και $g \in X^*$ ορίζουμε το δυϊκό ζευγάρι $< g, \phi >$ ως*

$$< g, \phi >= g(\phi) \ , \quad \phi \in X, \ g \in X^*$$

Τώρα ορίζουμε τους χώρους *Sobolev* στο σύνορο ∂D ενός επίπεδου χωρίου $D \subset \mathbb{R}^2$ τους χώρους *Sobolev* στο χωρίο $D \subset \mathbb{R}^2$ και μελετάμε τις σχέσεις μεταξύ τους. Όμοια θα δουλεύαμε για χωρίο $D \subset \mathbb{R}^3$.

Για αυτό θεωρούμε ότι το χωρίο D είναι απλά συνεκτικό και φραγμένο ώστε το σύνορο ∂D να είναι κλάσης C^k, δηλαδή το ∂D να έχει μία $k-$φορές συνεχώς παραγωγίσιμη $2\pi-$περιοδική αναπαράσταση

$$\partial D \ = \ \{x(t) | t \in [0,2\pi), x \in C^k[0,2\pi]\} \ .$$

Ορισμός 1.138 (Χώρος Sobolev $H^p(\partial D)$). *Για $0 \leq p \leq k$ ορίζουμε τον χώρο Sobolev $H^p(\partial D)$ ως τον χώρο όλων των συναρτήσεων*

$$\phi \in L^2(\partial D) \ : \ \phi(x(t)) \in H^p[0,2\pi] \ .$$

Το εσωτερικό γινόμενο στον χώρο $H^p(\partial D)$ ορίζεται από το εσωτερικό γινόμενο του $H^p[0,2\pi]$ ως

$$(\phi,\psi)_{H^p(\partial D)} \ := \ (\phi(x(t)), \psi(x(t)))_{H^p[0,2\pi]} \ . \tag{1.108}$$

Ορισμός 1.139 (Χώρος Sobolev $H^1(D)$). *Ο χώρος Sobolev $H^1(D)$ για $D \subset \mathbb{R}^2$ φραγμένο με σύνορο ∂D κλάσης C^1 ορίζεται ως η πλήρωση του χώρου $C^1(\bar{D})$ ως προς τη νόρμα*

$$\|u\|_{H^1(D)} \ := \ \left[\int_D (|u(x)|^2 + |grad\ u(x)|^2)\, dx\right]^{1/2} . \tag{1.109}$$

Ισχύει ότι ο $H^1(D) \subset L^2(D)$ είναι υπόχωρος του $L^2(D)$.

Ο στόχος είναι να δούμε ότι όλες οι συναρτήσεις του $H^1(D)$ αν περιοριστούν στο σύνορο ∂D έχουν νόημα, δηλαδή όλες οι **συναρτήσεις ίχνους** από τον $H^1(D)$ στο σύνορο είναι καλά ορισμένες.

Θεώρημα 1.140 (Θεώρημα Dini). *Αν $(\phi_n)_1^\infty$ ακολουθία πραγματικών συνεχών συναρτήσεων που συγκλίνει σημειακά σε μία συνεχή συνάρτηση ϕ στο συμπαγές σύνολο D και αν*

$$\phi_n(x) \geq \phi_{n+1}(x) \ \ , \ \ \forall x \in D, \forall n = 1, 2, \cdots \ \Rightarrow \phi_n \to \phi \tag{1.110}$$

ομοιόμορφα στο D.

Θεώρημα 1.141 (Θεώρημα Ίχνους). *Έστω $D \subset \mathbb{R}^2$ απλά συνεκτικό φραγμένο χωρίο με σύνορο ∂D κλάσης C^2.Τότε ύπαρχει θετική σταθερά C ώστε,*

$$\|u\|_{H^{1/2}(\partial D)} \ \leq \ C\|u\|_{H^1(D)} \ \ , \ \ \forall u \in H^1(D) \ , \tag{1.111}$$

, δηλαδή αν $u \in H^1(D)$ ο περιορισμός της στο σύνορο $u \to u|_{\partial D}$ είναι καλά ορισμένος και φραγμένη απεικόνιση από τον $H^1(D)$ στον $H^{1/2}(\partial D)$.

Απόδειξη. Αρχικά θεωρούμε συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις u ορισμένες στη λωρίδα $\mathbb{R} \times [0, 1]$ που είναι $2\pi-$περιοδικές ως προς την πρώτη μεταβλητή. Έστω

$$Q := [0, 2\pi) \times [0, 1]$$

$$a_m(\eta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(t, \eta) e^{-imt}\, dt, \quad 0 \leq \eta \leq 1 \ . \tag{1.112}$$

Τότε από την εξίσωση $Parseval$ έχουμε

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} |a_m(\eta)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |u(t, \eta)|^2\, dt, \quad 0 \leq \eta \leq 1 \ . \tag{1.113}$$

Από Θεώρημα $Dini(1.140)$ αυτές οι σειρές συγκλίνουν ομοιόμορφα. Επομένως, ολοκληρώνοντας όρο προς όρο έχουμε,

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^1 |a_m(\eta)|^2\, d\eta = \frac{1}{2\pi}\|u(t, \eta)\|^2_{L^2(Q)} \ . \tag{1.114}$$

Όμοια έχουμε ότι,

$$\begin{aligned} a'_m(\eta) \ &= \ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial \eta}(t, \eta) e^{-imt}\, dt \\ ima_m(\eta) \ &= \ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial t}(t, \eta) e^{-imt}\, dt \end{aligned}$$

και χρησιμοποιώντας αυτές τις εξισώσεις προκύπτει ότι,

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_0^1 |a'_m(\eta)|^2\,d\eta = \frac{1}{2\pi}\left\|\frac{\partial u}{\partial \eta}\right\|^2_{L^2(Q)}$$
$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_0^1 m^2|a_m(\eta)|^2\,d\eta = \frac{1}{2\pi}\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L^2(Q)} \ .$$

Τώρα υποθέτουμε ότι $u(\cdot,1)=0$. Τότε από την ανισότητα $Cauchy-Schwarz$ και επειδή $a_m(1)=0,\ \forall m$ προκύπτει ότι,

$$\begin{aligned}
\|u(\cdot,0)\|^2_{H^{1/2}[0,2\pi]} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty}(1+m^2)^{1/2}|a_m(0)|^2 \\
&= 2\sum_{m=-\infty}^{\infty}(1+m^2)^{1/2}Re\int_1^0 a'_m(\eta)\overline{a_m(\eta)}\,d\eta \\
&= 2\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[\int_0^1 |a'_m(\eta)|^2\,d\eta\right]^{1/2}\left[(1+m^2)\int_0^1 |a_m(\eta)|^2\,d\eta\right]^{1/2} \\
&\leq 2\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_0^1 |a'_m(\eta)|^2\,d\eta\right]^{1/2}\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty}(1+m^2)\int_0^1 |a_m(\eta)|^2\,d\eta\right]^{1/2} \\
&= \frac{1}{\pi}\left\|\frac{\partial u}{\partial \eta}\right\|_{L^2(Q)}\left[\|u\|^2_{L^2(Q)}+\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L^2(Q)}\right]^{1/2} \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\left\|\frac{\partial u}{\partial \eta}\right\|^2_{L^2(Q)}\right]^{1/2}\left[\|u\|^2_{L^2(Q)}+\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L^2(Q)}\right]^{1/2} \\
&\leq \frac{1}{\pi}\left[\|u\|^2_{L^2(Q)}+\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L^2(Q)}+\left\|\frac{\partial u}{\partial \eta}\right\|^2_{L^2(Q)}\right]^{1/2}\left[\|u\|^2_{L^2(Q)}+\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L^2(Q)}+\left\|\frac{\partial u}{\partial \eta}\right\|^2_{L^2(Q)}\right]^{1/2} \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\|u\|^2_{L^2(Q)}+\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L^2(Q)}+\left\|\frac{\partial u}{\partial \eta}\right\|^2_{L^2(Q)}\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\|u\|^2_{H^1(Q)} \ .
\end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$\|u(\cdot,0)\|^2_{H^{1/2}[0,2\pi]} \leq \frac{1}{\pi}\|u\|^2_{H^1(Q)} \ . \tag{1.115}$$

Επιστρέφοντας στο χωρίο D διαλέγουμε παράλληλη λωρίδα

$$D_h := \{x+\eta h v(x) | x\in\partial D, \eta\in[0,1]\}$$

, όπου ν το εσωτερικό κάθετο διάνυσμα στο σύνορο ∂D, $h>0$ ώστε κάθε $y\in D_h$ αναπαριστάται με μοναδικό τρόπο μέσω προβολής στο ∂D υπό τη μορφή

$$y = x+\eta h v(x)\ ,\ x\in\partial D, \eta\in[0,1]\ .$$

Με ∂D_h συμβολίζουμε το εσωτερικό σύνορο του D_h. Παραμετρικοποιώντας το

$$\partial D := \{x(t)|0 \leq t \leq 2\pi\}$$

η παραμετρικοποίηση του D_h έχει τη μορφή

$$x(t,\eta) = x(t) + \eta h v(x(t)), \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \ 0 \leq \eta \leq 1 \ .$$

Η ανίσωση (1.115) δείχνει ότι $\forall u \in C^1(D_h)$ με $u = 0$ ∂D_h και άρα

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^{1/2}(\partial D)} = \|u(x(t))\|_{H^{1/2}[0,2\pi]} &\leq \frac{1}{\sqrt{\pi}}\|u(x(t,\eta))\|_{H^1(Q)} \\ &\leq C\|u\|_{H^1(D_h)} \end{aligned}$$

, όπου C είναι θετική σταθερά που εξαρτάται από τα φράγματα των παραγώγων της απεικόνισης $x(t,\eta)$ και της αντίστροφής της.

Τώρα επεκτείνουμε αυτήν την εκτίμηση για αυθαίρετο $u \in C^1(\bar{D})$. Για αυτό διαλέγουμε $g \in C^1(\bar{D})$ ώστε

$$g(y) = 0 \ , \ y \notin D_h$$

και

$$g(y) = f(\eta) \ , \ y = x + \eta h v(x) \in D_h$$

, όπου

$$f(\eta) := (1-\eta)^2(1+3\eta) \ .$$

Τότε για $f(0) = f'(0) = 1$ και $f(1) = f'(1) = 0$ έχουμε

$$\|u\|_{H^{1/2}(\partial D)} = \|gu\|_{H^{1/2}(\partial D)} \leq C\|gu\|_{H^1(D)} \leq C_1\|u\|_{H^1(D)}, \ \forall u \in C^1(\bar{D})$$

, όπου C_1 θετική σταθερά που εξαρτάται μόνο από τα φράγματα g και των πρώτων της παραγώγων.

Θεμελιώσαμε την επιθυμητή ανίσωση για $u \in C^1(\bar{D})$, δηλαδή ο τελεστής $A : u \mapsto u|_{\partial D}$ είναι φραγμένος από τον $C^1(\bar{D})$ στον $H^{1/2}(\partial D)$. Ισχύει ότι αν X πυκνός υπόχωρος ενός χώρου με νόρμα $\hat{X}$ και Y είναι χώρος *Banach* αν $A : X \to Y$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής τότε μπορεί να επεκταθεί σε ένα φραγμένο γραμμικό τελεστή $\hat{A} : \hat{X} \to Y$, όπου $\|\hat{A}\| = \|A\|$. Σύμφωνα με αυτό η επιθυμητή ανίσωση προκύπτει επεκτείνοντας τον τελεστή A από τον $C^1(\bar{D})$ στον $H^1(D)$. $\square$

Κεφάλαιο 2

Ευθύ Πρόβλημα Σκέδασης

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναφερθούμε στο Ευθύ Πρόβλημα Σκέδασης ώστε να θεμελιώσουμε το πρόβλημα και ώστε να μπορέσουμε να διατυπώσουμε το Αντίστροφο Πρόβλημα Σκέδασης στο επόμενο κεφάλαιο. Ξεκινάμε ορίζοντας τα δυναμικά απλού και διπλού στρώματος. Συνεχίζουμε, αναπτύσσοντας την θεωρία για το Ευθύ Πρόβλημα Σκέδασης στις τρεις διαστάσεις. Τελικά, ορίζοντας και χρησιμοποιώντας τις σφαιρικές αρμονικές διατυπώνουμε το Ευθύ Πρόβλημα Σκέδασης στις δύο διαστάσεις σύμφωνα με τα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν και στις τρεις διαστάσεις. Σε περίπτωση όπου ο αναγνώστης θέλει να ασχοληθεί πιο αναλυτικά με κάποια αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου παραπέμπεται στα αναγνώσματα [6],[7],[14].

2.1 Δυναμικά Απλού και Διπλού Στρώματος

Σε αυτήν την ενότητα θα δούμε αρχικά κάποιες βασικές ιδιότητες χωρίων και συνόρων. Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με ασθενώς ιδιάζοντες ολοκληρωτικούς τελεστές για επιφάνειες. Τελικά, θα ορίσουμε τα δυναμικά απλού και διπλού στρώματος και θα παρουσιάσουμε ιδιότητες αυτών.

2.1.1 Γεωμετρία Επιφανειών

Σε αυτήν την υποενότητα θα αναφερθούμε στην γεωμετρία των χωρίων και των συνόρων και θα δούμε βασικές τους ιδιότητες.

Αρχικά, θεωρούμε για αυτήν την ενότητα ότι το χωρίο $D \subset \mathbb{R}^3$ είναι ανοιχτό και φραγμένο, το συμπλήρωμά του $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ είναι συνεκτικό και ότι το σύνορο ∂D αποτελείται από ένα στοιχείο επιφάνειας κλάσης C^2. Γενικά, το σύνορο ∂D σε αυτή τη μελέτη αποτελείται από πεπερασμένο αριθμό, ασύνδετων κλειστών επιφανειών κλάσης C^2.

Η ιδιότητα ότι το σύνορο ∂D είναι κλάσης C^2 σημαίνει ότι για κάθε $x_0 \in \partial D$ υπάρχει U_{x_0} τρισδίαστατη περιοχή του x_0 ώστε η τομή $\partial D \cap U_{x_0}$ να απεικονίζεται με μονοσήμαντη απεικόνιση σε ένα ανοιχτό χωρίο $V \subset \mathbb{R}^2$ ώστε η απεικόνιση αυτή να είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη.

Παραθέτουμε στην συνέχεια κάποιους ορισμούς που θα χρησιμοποιήσουμε στις επόμενες ενότητες και κεφάλαια.

Ορισμός 2.1. *1.* ***Χωρίο*** *$D \subset \mathbb{R}^3$ ονομάζεται ένα ανοικτό και συνεκτικό σύνολο του $\mathbb{R}^3$.*

2. Ένα ***χωρίο*** *$D \subset \mathbb{R}^3$ είναι* ***κλάσης*** *C^k, $k \in \mathbb{N}$ αν για κάθε $x_0 \in \partial D$ υπάρχει U_{x_0} τρισδιάστατη περιοχή του x_0 ώστε να ισχύουν οι ιδιότητες:*

i. η τομή $\bar{D} \cap U_{x_0}$ να απεικονίζεται με μονοσήμαντη απεικόνιση στην μισή μοναδιαία μισή μπάλα

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1 \ , \ x_3 \geq 0\}$$

όπου τόσο αυτή η απεικόνιση όσο και η αντίστροφή της είναι $k-$φορές συνεχώς παραγωγίσιμες,

ii. η τομή $\partial D \cap U_{x_0}$ να απεικονίζεται με μοσήμαντη απεικόνιση στον ανοιχτό μοναδιαίο δίσκο

$$\{x \in \mathbb{R}^2 | \ |x| < 1 \ , \ x_3 = 0\} \ .$$

Αυτή η ιδιότητα πολλές φορές αντί να αναφερθεί ως, ***το χωρίο*** *D είναι* ***κλάσης*** *C^k αναφέρεται ως* ***το σύνορο*** *∂D είναι* ***κλάσης*** *C^k.*

3. Με $C^k(D)$ συμβολίζουμε τον γραμμικό χώρο των πραγματικών ή μιγαδικών συναρτήσεων ορισμένων στο χωρίο D που είναι $k-$φορές συνεχώς παραγωγίσιμες.

4. Με $C^k(\bar{D})$ συμβολίζουμε τον υπόχωρο του $C^k(D)$ που περιέχει όλες τις συναρτήσεις του $C^k(D)$ που μαζί με τις παραγώγους τους μέχρι $k-$τάξης μπορούν να επεκταθούν από το χωρίο D στην κλειστότητα του $\bar{D}$.

Θεώρημα 2.2. *Έστω ν το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα που κατευθύνεται προς το εξωτερικό του σύνορο ∂D. Αν το ∂D είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη επιφάνεια, τότε υπάρχει θετική σταθερά L ώστε*

$$|(\nu(y), x-y)| \leq L|x-y|^2 \ , \quad \forall x, y \in \partial D \tag{2.1}$$

και

$$|\nu(x) - \nu(y)| \leq L|x-y| \ , \quad \forall x, y \in \partial D \ . \tag{2.2}$$

Παρατήρηση 2.3. *Το προηγούμενο Θεώρημα έχει βασικό ρόλο στην διερεύνηση των σχέσεων συνέχειας (regularity relations) των δυναμικών απλού και διπλού στρώματος (single and double layer potentials). Με $(\cdot,\cdot)$ συμβολίσαμε το εσωτερικό γινόμενο όπως στο προηγούμενο κεφάλαιο.*

Παρατήρηση 2.4. *Όπως στην απόδειξη του τελευταίου αποτελέσματος στους χώρους Sobolev μπορούμε να πάρουμε παράλληλες επιφάνειες ∂D_h της ∂D μέσω της αναπαράστασης*

$$x \;=\; x_0 + h\,\nu(x_0), \quad x_0 \in \partial D\,, \tag{2.3}$$

όπου η παράμετρος h συμβολίζει την απόσταση της ∂D_h από την γεννήτορα επιφάνεια ∂D.

2.1.2 Ασθενώς Ιδιάζοντες Ολοκληρωτικοί Τελεστές για Επιφάνειες

Σε αυτήν την υποενότητα θα αναφερθούμε στους ασθενώς ιδιάζοντες ολοκληρωτικούς τελεστές και στις ιδιότητες αυτών.

Στο χώρο *Banach* $C(\partial D)$ των μιγαδικών συνεχών συναρτήσεων ορισμένων στην επιφάνεια ∂D εφοδιασμένη με τη νόρμα μέγιστο

$$\|\phi\|_\infty := \max_{x\in\partial D} |\phi(x)|$$

θεωρούμε τον ολοκληρωτικό τελεστή $A : C(\partial D) \to C(\partial D)$ που ορίζεται από

$$(A\phi)(x) := \int_{\partial D} K(x,y)\phi(y)ds(y) \quad , \quad x \in \partial D \tag{2.4}$$

, όπου K ο πυρήνας είναι είτε συνεχής είτε ασθενώς ιδιάζων όπως είδαμε στον Ορισμό(1.68) όπου τώρα $G = \partial D$ και με τις σχέσεις (1.22) και (1.23) ανάλογα αν μιλάμε για δύο ή περισσότερες διαστάσεις αντίστοιχα. Εδώ χρησιμοποιείται ο τύπος (1.22) στην απόδειξη του επόμενου θεωρήματος που είναι αντίστοιχο των Θεωρημάτων (1.67) και (1.70). Την απόδειξη δεν θα την δούμε αλλά θα υποδείξουμε δύο κρίσιμα σημεία της.

Θεώρημα 2.5. *Ο ολοκληρωτικός τελεστής A με συνεχή ή ασθενώς ιδιάζων πυρήνα είναι συμπαγής τελεστής στο $C(\partial D)$.*

Απόδειξη. Η βασική διαφορά σε σχέση με τις αποδείξεις των Θεωρημάτων (1.67) και (1.70) είναι η ανάγκη για πιστοποίηση της ύπαρξης του ολοκληρώματος (2.4) ως όριο ολοκληρωμάτων στην περίπτωση του ασθενούς ιδιάζοντος πυρήνα.

Γράφοντας

$$(\nu(x), \nu(y)) = 1 - (\nu(x), \nu(x) - \nu(y))$$

βλέπουμε από Θεώρημα(2.2)

$$\exists\ R \in (0,1]\ :\ (\nu(x), \nu(y)) \geq \frac{1}{2} \ \ ,\ \ \forall x, y \in \partial D, \tag{2.5}$$

όπου $|x - y| \leq R$.

Στην αλλαγή μεταβλητής σε πολικές συντεταγμένες (ρ,ϑ) πλέον το επιφανειακό στοιχείο ικανοποιεί την σχέση

$$ds(y) = \frac{\rho d\rho d\theta}{(\nu(x), \nu(y))} \tag{2.6}$$

□

Στο επόμενο θεώρημα θα επιβάλλουμε επιπλέον συνθήκες στον πυρήνα ώστε να εξασφαλίσουμε την συμπάγεια του ολοκληρωτικού τελεστή A στο χώρο *Hölder* $C^{0,\beta}(\partial D)$.

Θεώρημα 2.6. *Έστω G κλειστό χωρίο που περιέχει το ∂D στο εσωτερικό του. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση K ορίζεται και είναι συνεχής $\forall x \in G$, $\forall y \in \partial D$ με $x \neq y$ και ότι υπάρχουν θετική σταθερά $M > 0$ και $a \in (0, 2]$ ώστε*

$$|K(x, y)| \leq M|x - y|^{a-2} \quad , \quad \forall x \in G, \forall y \in \partial D, \ x \neq y \ . \tag{2.7}$$

Υποθέτουμε, επίσης, ότι υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε

$$|K(x_1, y) - K(x_2, y)| \leq M \sum_{j=1}^{m} |x_1 - y|^{a-2-j} |x_1 - x_2|^j \ , \ \ \forall x_1, x_2 \in G, \forall y \in \partial D \tag{2.8}$$

με $2|x_1 - x_2| \leq |x_1 - y|$. Τότε το γενικευμένο δυναμικό u ορίζεται ως

$$u(x) := \int_{\partial D} K(x, y)\phi(y) ds(y)\, , \quad x \in G, \tag{2.9}$$

όπου $\phi \in C(\partial D)$ η πυκνότητα του u, το u ανήκει στο χώρο Hölder $C^{0,\beta}(G)$

$$\begin{cases} \forall \beta \in (0, \alpha], & \alpha\nu \ 0 < \alpha < 1 \ , \\ \forall \beta \in (0, 1), & \alpha\nu \ \alpha = 1 \ , \\ \forall \beta \in (0, 1], & \alpha\nu \ 1 < \alpha < 2 \end{cases}$$

και ισχύει ότι

$$\|u\|_{\beta,G} \leq C_\beta \|\phi\|_{\infty,\partial D} \ , \tag{2.10}$$

για κάποια σταθερά C_β που εξαρτάται από το β.

Πόρισμα 2.6.1. *Έστω ότι πυρήνας K είναι ασθενώς ιδιάζων και ικανοποιεί τη συνθήκη (2.7) $\forall x_1, x_2 \in G$, $\forall y \in \partial D$ με $2|x_1 - x_2| \leq |x_1 - y|$. Τότε ο ολοκληρωτικός τελεστής $A : C^{0,\beta}(\partial D) \to C^{0,\beta}(\partial D)$ που ορίζεται από την σχέση (2.4) είναι συμπαγής για*

$$\begin{cases} \forall \beta \in (0, \alpha], & \alpha\nu \ 0 < \alpha < 1 \ , \\ \forall \beta \in (0, 1), & \alpha\nu \ \alpha = 1 \ , \\ \forall \beta \in (0, 1], & \alpha\nu \ 1 < \alpha < 2 \ . \end{cases}$$

Πρόταση 2.7. *Αν ο πυρήνας K είναι ορισμένος και συνεχής $\forall x, y \in \partial D$, $x \neq y$, και ικανοποιεί τις συνθήκες (2.7) και (2.8) στο σύνορο ∂D, τότε το δυναμικό u ορίζεται από σχέση (2.9) όπου $\phi \in C(\partial D)$ η πυκνότητα του u, το u ανήκει στο χώρο Hölder $C^{0,\beta}(\partial D)$ και ισχύει ότι*

$$\|u\|_{\beta,\partial D} \leq C_\beta \|\phi\|_{\infty,\partial D} \ , \tag{2.11}$$

για κάποια σταθερά C_β που εξαρτάται από το β.

Λήμμα 2.8. *Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση K ορίζεται και είναι συνεχής $\forall x \in D_{h_0}$ $\forall y \in \partial D$ με $x \neq y$ και ότι υπάρχει θετική σταθερά $M > 0$ ώστε*

$$|K(x,y)| \leq M|x-y|^{-2} \quad , \quad \forall x \in D_{h_0}, \forall y \in \partial D, \ x \neq y \ . \tag{2.12}$$

Υποθέτουμε, επίσης, ότι υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε

$$|K(x_1,y) - K(x_2,y)| \leq M \sum_{j=1}^{m} |x_1 - y|^{-2-j} |x_1 - x_2|^j \quad , \quad \forall x_1, x_2 \in D_{h_0}, \forall y \in \partial D \tag{2.13}$$

με $2|x_1 - x_2| \leq |x_1 - y|$,

$$\left| \int_{\partial D \setminus S_{z,r}} K(x,y) ds(y) \right| \leq M \quad , \quad \forall x_0 \in \partial D, \ x \ = \ x_0 + h\, \nu(x_0) \in D_{h_0}, \ 0 < r < R \, . \tag{2.14}$$

Τότε το δυναμικό u ορίζεται ως

$$u(x) := \int_{\partial D} K(x,y)[\phi(y) - \phi(x_0)] ds(y) \quad , \quad x \in D_{h_0} \, , \tag{2.15}$$

όπου $\phi \in C^{0,\alpha}(\partial D)$, $0 < \alpha < 1$ η πυκνότητα του u, το u ανήκει στο χώρο Hölder $C^{0,\alpha}(D_{h_0})$ και ισχύει ότι

$$\|u\|_{\alpha, D_{h_0}} \leq C \|\phi\|_{\alpha, \partial D} \, , \tag{2.16}$$

για κάποια σταθερά C.

Πρόταση 2.9. *Για πυρήνα K που είναι ορισμένος μόνο στο σύνορο ∂D όπως στη Πρόταση(2.7) διατυπώνουμε μία μεταβολή του Λήμματος(2.8) η οποία είναι*

$$\|u\|_{\alpha, \partial D} \leq C \|\phi\|_{\alpha, \partial D} \, , \tag{2.17}$$

για κάποια σταθερά C.

2.1.3 Δυναμικά Απλού και Διπλού Στρώματος

Σε αυτήν την υποενότητα θα ορίσουμε τα δυναμικά απλού και διπλού στρώματος καθώς και θα μελετήσουμε τις σχέσεις συνέχειας και διαπήδησης για αυτά.

Έστω μη αρνητικός αριθμός $k \geq 0$ είναι ο κυματικός αριθμός τότε η συνάρτηση

$$\Phi(x,y) := \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \quad , \quad x, y \in \mathbb{R}^3 \ , \ x \neq y \tag{2.18}$$

είναι λύση της **Εξίσωσης Helmholtz**

$$\Delta \Phi + k^2 \Phi = 0 \tag{2.19}$$

ως προς x με σταθερό y. Επειδή η Φ είναι με μορφή πόλου ιδιάζουσα για $x = y$, η συνάρτηση Φ καλείται **θεμελιώδης λύση της εξίσωσης Helmholtz**.

Από εδώ και πέρα θεωρούμε ότι η Φ ορίζεται για $k > 0$ από την σχέση (2.18) ενώ για την ειδική θεωρητική περίπτωση $k = 0$ έχουμε την θεμελιώδη λύση Φ_0 που ορίζεται ως

$$\Phi_0(x, y) := \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-y|} \quad , \quad x, y \in \mathbb{R}^3 \ , \ x \neq y \tag{2.20}$$

Ορισμός 2.10 (Δυναμικό Απλού Στρώματος). *Δοσμένης συνάρτησης $\phi \in C(\partial D)$ και με Φ θεμελιώδη λύση της εξίσωσης Helmholtz (2.19) η συνάρτηση*

$$u(x) := \int_{\partial D} \Phi(x, y)\phi(y)\, ds(y) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial D \tag{2.21}$$

καλείται ***ακουστικό δυναμικό απλού στρώματος*** **(acoustic single layer potential)**, *όπου ϕ είναι η πυκνότητα της u.*

Για $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial D$ η u είναι παραγωγίσιμη και αποτελεί λύση της εξίσωσης *Helmholtz* και μάλιστα αναλυτική όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο. Τώρα θα διερευνήσουμε την στις **ιδιότητες του επιφανειακού δυναμικού** για σημεία του συνόρου ∂D.

Αφού,

$$|\Phi(x, y)| \le \frac{1}{4\pi|x-y|} \quad , \quad x \neq y \tag{2.22}$$

άρα η σχέση (2.7) του Θεωρήματος(2.6) ικανοποιείται για $a = 1$ και άρα το δυναμικό απλού στρώματος είναι καλά ορισμένο $\forall x \in \partial D$.

Χρησιμοποιώντας την σχέση

$$\left|\frac{1}{|x_1-y|} - \frac{1}{|x_2-y|}\right| \le \frac{|x_1-x_2|}{|x_1-y||x_2-y|} \le \frac{2|x_1-x_2|}{|x_1-y|^2}$$

για

$$2|x_1-x_2| \le |x_2-y|$$

και την

$$\left|e^{ik|x_1-y|} - e^{ik|x_2-y|}\right| \le k|x_1-x_2|$$

βλέπουμε ότι η σχέση (2.8) του Θεωρήματος (2.6) ικανοποιείται για $m = 1$.

Επομένως το Θεώρημα(2.6) μπορεί να εφαρμοστεί για $a = 1$ και $m = 1$ και έτσι αποκτάμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2.11. *Το δυναμικό απλού στρώματος u με συνεχή πυκνότητα ϕ είναι ομοιόμορφα Hölder συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}^3$ και*

$$\|u\|_{a,\mathbb{R}^3} \le C_a\|\phi\|_{\infty,\partial D} \quad , \quad \forall\, 0 < a < 1 \tag{2.23}$$

για κάποια σταθερά C_a που εξαρτάται από το σύνορο ∂D και από το a.

Ορισμός 2.12. *Δοθείσης συνάρτησης $\psi \in C(\partial D)$ και με Φ θεμελιώδη λύση της εξίσωσης Helmholtz (2.19) η συνάρτηση*

$$v(x) := \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(y)} \psi(y)\, ds(y) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial D \tag{2.24}$$

καλείται ***ακουστικό δυναμικό διπλού στρώματος*** (**acoustic double layer potential**), *όπου ψ είναι η πυκνότητα της v. Με ν το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα που κατευθύνεται προς το εξωτερικό χωρίο $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$. Το δυναμικό διπλού-στρώματος v είναι λύση της εξίσωσης Helmholtz και μάλιστα αναλυτική στο $\mathbb{R}^3 \setminus \partial D$.*

Παρατήρηση 2.13. *Με τους δείκτες $+$ και $-$ συμβολίζουμε (αυτή θα είναι η ερμηνεία τους και για τα επόμενα θεωρήματα) ως τα όρια που παίρνουμε προσεγγίζοντας το σύνορο ∂D από το εσωτερικό του χωρίου $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ και από το εσωτερικό του χωρίου D αντίστοιχα και έχουμε*

$$v_+(x) = \lim_{\substack{y \to x \\ y \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}}} v(y) \quad \text{και} \quad v_-(x) = \lim_{\substack{y \to x \\ y \in D}} v(y)\ , \quad x \in \partial D\,. \tag{2.25}$$

Θεώρημα 2.14. *Το δυναμικό διπλού στρώματος v με συνεχή πυκνότητα ψ μπορεί να επεκταθεί με συνεχή τρόπο από το $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ στο $\mathbb{R}^3 \setminus D$ και από το D στο $\bar{D}$ με οριακές τιμές*

$$v_\pm(x) = \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(y)} \psi(y)\, ds(y) \pm \frac{1}{2}\psi(x)\ , \quad x \in \partial D\,, \tag{2.26}$$

όπου το ολοκλήρωμα υπάρχει ως γενικευμένο ολοκλήρωμα (improper integral).

Πόρισμα 2.14.1. *Για το δυναμικό διπλού στρώματος v με συνεχή πυκνότητα ψ, έχουμε την* ***σχέση διαπήδησης (jump relation)***

$$v_+ - v_- = \psi\ , \quad \text{στο} \ \ \partial D\ . \tag{2.27}$$

Θεώρημα 2.15. *Οι ευθείς τιμές (direct values) του δυναμικού διπλού στρώματος v με συνεχή πυκνότητα ψ*

$$v(x) := \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(y)} \psi(y)\, ds(y)\ , \quad x \in \partial D \tag{2.28}$$

είναι ομοιόμορφα Hölder στο σύνορο ∂D με

$$\|v\|_{a,\partial D} \le C_a \|\psi\|_{\infty,\partial D} \quad , \quad \forall 0 < a < 1 \tag{2.29}$$

για κάποια σταθερά C_a που εξαρτάται από το σύνορο ∂D και από το a.

Θεώρημα 2.16. *Το δυναμικό διπλού στρώματος v με ομοιόμορφα Hölder συνεχή πυκνότητα $\psi \in C^{0,a}(\partial D)$, $0 < a < 1$, είναι ομοιόμορφα Hölder συνεχής στο $\mathbb{R}^3 \setminus D$ και στο $\bar{D}$ με*

$$\|v\|_{a,\mathbb{R}^3 \setminus D} \le C_a \|\psi\|_{\infty,\partial D} \ \ \text{και} \ \ \|v\|_{a,\bar{D}} \le C_a \|\psi\|_{\infty,\partial D}\,, \tag{2.30}$$

για κάποια σταθερά C_a που εξαρτάται από το σύνορο ∂D και από το a.

Παρατήρηση 2.17. *Τώρα θα εξετάσουμε την παραγωγισιμότητα των επιφανειακών δυναμικών στο σύνορο.*

Θεώρημα 2.18. *Οι πρώτες παράγωγοι του δυναμικού απλού στρώματος u με ομοιόμορφα Hölder συνεχή πυκνότητα* $\phi \in C^{0,a}(\partial D)$, $0 < a < 1$, *μπορεί να επεκταθεί με ομοιόμορφα Hölder συνεχή τρόπο από το* $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ *στο* $\mathbb{R}^3 \setminus D$ *και από το* D *στο* $\bar{D}$ *με οριακές τιμές*

$$grad\ u_{\pm}(x) = \int_{\partial D} grad_x \Phi(x,y)\phi(y)\, ds(y) \mp \frac{1}{2}\nu(x)\phi(x) \quad , \quad x \in \partial D\,, \tag{2.31}$$

το ολοκλήρωμα υπάρχει με την έννοια των αρχικών τιμών Cauchy (Cauchy principal value). Επιπλέον, έχουμε τις εκτιμήσεις

$$\|grad\ u\|_{a,\mathbb{R}^3\setminus D} \leq C_a \|\phi\|_{\infty,\partial D} \;\; \text{και} \;\; \|grad\ u\|_{a,\bar{D}} \leq C_a \|\phi\|_{\infty,\partial D} \tag{2.32}$$

για κάποια σταθερά C_a *που εξαρτάται από το σύνορο* ∂D *και από το* a.

Πόρισμα 2.18.1. *Για το δυναμικό απλού στρώματος u με ομοιόμορφα Hölder συνεχή πυκνότητα* ϕ, *έχουμε την σχέση διαπήδησης*

$$grad\ u_+ - grad\ u_- = \nu\phi\ , \;\; \text{στο}\;\; \partial D\ . \tag{2.33}$$

Θεώρημα 2.19. *Για το δυναμικό απλού στρώματος u με συνεχή πυκνότητα* ϕ *έχουμε οριακές τιμές*

$$\frac{\partial u_{\pm}}{\partial \nu}(x) = \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(x)} \phi(y)\, ds(y) \mp \frac{1}{2}\phi(x) \quad , \quad x \in \partial D\,, \tag{2.34}$$

όπου

$$\frac{\partial u_{\pm}}{\partial \nu}(x) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{\partial u(x \pm h\,\nu(x))}{\partial \nu(x)} \tag{2.35}$$

κατανοείται υπό την έννοια της ομοιόμορφης σύγκλισης και όπου το ολοκλήρωμα της σχέσης (2.34) υπάρχει ως γενικευμένο ολοκλήρωμα.

Πόρισμα 2.19.1. *Για το δυναμικό απλού στρώματος u με ομοιόμορφα Hölder συνεχή πυκνότητα* ϕ, *έχουμε την σχέση διαπήδησης*

$$\frac{\partial u_+}{\partial \nu}(x) - \frac{\partial u_-}{\partial \nu}(x) = -\phi \quad , \quad \sigma\tau o \;\; \partial D\ . \tag{2.36}$$

Θεώρημα 2.20. *Για το δυναμικό διπλού στρώματος v με συνεχή πυκνότητα* ψ, *έχουμε την σχέση διαπήδησης*

$$\frac{\partial v_+}{\partial \nu} = \frac{\partial v_-}{\partial \nu} \quad , \quad \sigma\tau o \;\; \partial D\,, \tag{2.37}$$

υπό την έννοια

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \left[\frac{\partial v(x + h\,\nu(x))}{\partial \nu(x)} - \frac{\partial v(x - h\,\nu(x))}{\partial \nu(x)} \right] = 0 \quad , \quad x \in \partial D \tag{2.38}$$

ομοιόμορφα για $x \in \partial D$.

Παρατήρηση 2.21. 1. *Για $k \neq 0$ η διαφορά των δυναμικών διπλού στρώματος v με πυρήνες Φ και Φ_0 αντίστοιχα με συνεχή πυκνότητα ψ είναι ομοιόμορφα Hölder συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}^3$ από Θεώρημα(2.6) αφού η συνάρτηση*

$$\begin{aligned} K(x,y) : &= \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \Phi_0(x,y)}{\partial \nu(y)} \\ &= \frac{(\nu(y), x-y)}{4\pi |x-y|^3}[e^{ik|x-y|} - ik|x-y|e^{ik|x-y|} - 1] \end{aligned}$$

ικανοποιεί τις συνθήκες (2.7) και (2.8) για $a = 2$ και $m = 1$ σε όλο το $\mathbb{R}^3$.

2. *Για $k \neq 0$ η διαφορά των πρώτων παραγώγων (gradients) ως προς x των δυναμικών διπλού στρώματος v με πυρήνες Φ και Φ_0 αντίστοιχα με συνεχή πυκνότητα ψ είναι ομοιόμορφα Hölder συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}^3$ από Θεώρημα(2.6) αφού η συνάρτηση*

$$\begin{aligned} K(x,y) &:= grad_x \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(y)} - grad_x \frac{\partial \Phi_0(x,y)}{\partial \nu(y)} \\ &= (x-y)\frac{(\nu(y), x-y)}{4\pi |x-y|^5}[(3 - 3ik|x-y| + k^2|x-y|^2)e^{ik|x-y|} - 3] \\ &\quad + \frac{\nu(y)}{4\pi|x-y|^3}[(1 - ik|x-y|)e^{ik|x-y|} - 1] \end{aligned}$$

ικανοποιεί τις συνθήκες (2.7) και (2.8) για $a = 1$ και $m = 1$ σε όλο το $\mathbb{R}^3$.

Παρατήρηση 2.22. *Με Grad συμβολίζουμε το επιφανειακό gradient και με Div συμβολίζουμε την επιφανειακή απόκλιση (divergence).*

Θεώρημα 2.23. *Οι ευθείς τιμές (direct values) του δυναμικού διπλού στρώματος v που δίνεται από τη σχέση (2.28) με ομοιόμορφα Hölder συνεχή πυκνότητα $\psi \in C^{0,a}(\partial D)$, $0 < a < 1$, είναι ομοιόμορφα Hölder συνεχώς παραγωγίσιμη στο σύνορο ∂D με*

$$\|Grad\ v\|_{a,\partial D} \leq C_a \|\psi\|_{a,\partial D} \quad , \quad \forall 0 < a < 1 \tag{2.39}$$

για κάποια σταθερά C_a που εξαρτάται από το σύνορο ∂D και από το a.

Θεώρημα 2.24. *Οι πρώτες παράγωγοι του δυναμικού διπλού στρώματος v που δίνεται από τη σχέση (2.28) με ομοιόμορφα Hölder συνεχώς παραγωγίσιμη πυκνότητα $\psi \in C^{1,a}(\partial D)$, $0 < a < 1$, μπορεί να επεκταθεί με ομοιόμορφα Hölder συνεχή τρόπο από το $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ στο $\mathbb{R}^3 \setminus D$ και από το D στο $\bar{D}$ με οριακές τιμές*

$$\begin{aligned} grad\ v_{\pm}(x) &= k^2 \int_{\partial D} \Phi(x,y)\nu(y)\psi(y)\, ds(y) \\ &\quad - \int_{\partial D} grad_x \Phi(x,y) \times (Grad\ \psi(y) \times \nu(y))\, ds(y) \\ &\quad \pm \frac{1}{2} Grad\ \psi(x)\ , \quad x \in \partial D \end{aligned}$$

, το δεύτερο ολοκλήρωμα υπάρχει με την έννοια των αρχικών τιμών Cauchy (Cauchy principal value). Επιπλέον, έχουμε τις εκτιμήσεις

$$\|grad\ v\|_{a,\mathbb{R}^3\setminus D} \leq C_a\|\psi\|_{1,a,\partial D} \quad \textit{και} \quad \|grad\ v\|_{a,\bar{D}} \leq C_a\|\psi\|_{1,a,\partial D} \tag{2.40}$$

για κάποια σταθερά C_a που εξαρτάται από το σύνορο ∂D και από το a.

Παρατήρηση 2.25. *Τώρα θα ασχοληθούμε με* ***διανυσματικά δυναμικά****.*

Ορισμός 2.26. *Δοσμένου διανυσματικού πεδίου $\alpha \in C(\partial D)$ ορίζουμε το* ***διανυσματικό δυναμικό*** *A ως*

$$A(x) := \int_{\partial D} \Phi(x,y)\alpha(y)\, ds(y) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial D\ . \tag{2.41}$$

Θεώρημα 2.27. *Οι πρώτες παράγωγοι του διανυσματικού δυναμικού A με ομοιόμορφα Hölder συνεχώς παραγωγίσιμη πυκνότητα $\alpha \in C^{1,a}(\partial D)$, $0 < a < 1$, μπορεί να επεκταθούν με ομοιόμορφα Hölder συνεχή τρόπο από το $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ στο $\mathbb{R}^3 \setminus D$ και από το D στο $\bar{D}$ με οριακές τιμές*

$$curl\ A_{\pm}(x) = k^2 \int_{\partial D} curl_x\{\Phi(x,y)\alpha(y)\}\, ds(y) \mp \frac{1}{2}\nu(x) \times \alpha(x) \quad , \quad x \in \partial D\ , \tag{2.42}$$

$$div\ A_{\pm}(x) = k^2 \int_{\partial D} div_x\{\Phi(x,y)\alpha(y)\}\, ds(y) \mp \frac{1}{2}(\nu(x), \alpha(x)) \quad , \quad x \in \partial D \tag{2.43}$$

, όπου τα ολοκληρώματα υπάρχουν με την έννοια των αρχικών τιμών Cauchy (Cauchy principal values).

Επιπλέον έχουμε τις εκτιμήσεις

$$\|curl\ A\|_{a,\mathbb{R}^3\setminus D} \leq C_a\|\alpha\|_{a,\partial D} \quad , \quad \|curl\ A\|_{a,\bar{D}} \leq C_a\|\alpha\|_{a,\partial D}\ , \tag{2.44}$$

$$\|div\ A\|_{a,\mathbb{R}^3\setminus D} \leq C_a\|\alpha\|_{a,\partial D} \quad , \quad \|div\ A\|_{a,\bar{D}} \leq C_a\|\alpha\|_{a,\partial D}\ , \tag{2.45}$$

για κάποια σταθερά C_a που εξαρτάται από το σύνορο ∂D και από το a.

Πόρισμα 2.27.1. *Για το διανυσματικό δυναμικό A με ομοιόμορφα Hölder συνεχή πυκνότητα α, έχουμε τις σχέσεις διαπήδησης*

$$curl\ A_+ - curl\ A_- = -\nu \times \alpha \quad , \quad \sigma\tau o\ \ \partial D\ , \tag{2.46}$$

$$div\ A_+ - div\ A_- = -\nu \times \alpha \quad , \quad \sigma\tau o\ \ \partial D\ . \tag{2.47}$$

Θεώρημα 2.28. *Για το διανυσματικό δυναμικό A με συνεχή εφαπτομενική πυκνότητα α, έχουμε τις οριακές τιμές*

$$\nu(x) \times curl\ A_{\pm}(x) = \int_{\partial D} \nu(x) \times curl_x\{\Phi(x,y)\alpha(y)\}\, ds(y) \pm \frac{1}{2}\alpha(x) \quad , \quad x \in \partial D \tag{2.48}$$

, όπου

$$\nu(x) \times curl\ A_{\pm}(x) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} [\nu(x) \times curl\ A(x \pm h\nu(x))] \quad , \quad x \in \partial D, \tag{2.49}$$

κατανοείται υπό την έννοια της ομοιόμορφης σύγκλισης και όπου το ολοκλήρωμα της σχέσης (2.48) υπάρχει ως γενικευμένο ολοκλήρωμα.

Πόρισμα 2.28.1. *Για το διανυσματικό δυναμικό A με συνεχή εφαπτομενική πυκνότητα α, έχουμε τη σχέση διαπήδησης*

$$\nu \times curl\ A_+ - \nu \times curl\ A_- = \alpha \quad , \quad \sigma\tau o\ \ \partial D\ , \tag{2.50}$$

Θεώρημα 2.29 (Θεώρημα Gauss– Θεώρημα Απόκλισης). *Έστω α και $Div\ \alpha$ συνεχείς στο σύνορο ∂D και έστω ϕ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση στο σύνορο ∂D. Τότε*

$$\int_{\partial D} \phi Div\ \alpha\, ds\ +\ \int_{\partial D} (Grad\ \phi, \alpha)\, ds = 0 \tag{2.51}$$

και συγκεκριμένα

$$\int_{\partial D} Div\ \alpha\, ds = 0\ . \tag{2.52}$$

Θεώρημα 2.30. *Η απόκλιση του διανυσματικού δυναμικού A με συνεχή εφαπτομενική πυκνότητα α έχει συνεχή επιφανειακή απόκλιση $Div\ \alpha$ που μπορεί να εκφραστεί υπό την μορφή ενός δυναμικού απλού στρώματος ως*

$$div\ A(x) = \int_{\partial D} \Phi(x,y) Div\ \alpha(y) ds(y) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial D\ . \tag{2.53}$$

2.2 Ευθύ Πρόβλημα Σκέδασης στις Τρεις Διαστάσεις

Σε αυτή την ενότητα μελετάμε το Ευθύ Πρόβλημα Σκέδασης. Αρχικά, διατυπώνουμε το πρόβλημα και παρουσιάζουμε την απαραίτητη θεωρία για την θεμελίωσή του. Στην συνέχεια ορίζουμε τους τελεστές απλού και διπλού στρώματος όπου μέσω αυτών διατυπώνονται σημαντικά αποτελέσματα καθώς σε αυτούς στηρίζεται η τελεστική αντιμετώπιση του προβλήματος. Τέλος, διατυπώνονται τα εξωτερικά προβλήματα Dirichlet και Neumann καθώς και επισημαίνεται η σχέση μεταξύ των δύο.

2.2.1 Διατύπωση του Προβλήματος

Σε αυτήν την υποενότητα διατυπώνουμε το πρόβλημα και παρουσιάζουμε την απαραίτητη θεωρία για την θεμελίωσή του.

Έστω ακουστικό κύμα μικρού πλάτους που διαδίδεται σε ομογενές ισοτροπικό μέσο στον $\mathbb{R}^3$ το οποίο μέσω της ρευστομηχανικής το αντιμετωπίζουμε ως υγρό χωρίς ιξώδες. Έστω ακόμα $v = v(x,t)$ η ταχύτητα του πεδίου, $p = p(x,t)$ η πίεση, $\rho = \rho(x,t)$ η πυκνότητα και έστω $S = S(x,t)$ η ειδική εντροπία του υγρού. Τότε οι εξισώσεις που διέπουν την κίνηση είναι οι ακόλουθες

- την **εξίσωση Euler**
$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot grad)\, v + \frac{1}{\rho}\, grad\ p = 0\ ,$$
- με **εξίσωση συνέχειας**
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho v) = 0\ ,$$
- με **καταστατική εξίσωση**
$$p = g(\rho, S),$$
- και με **αδιαβατική υπόθεση**
$$\frac{\partial S}{\partial t} + v \cdot grad\ S = 0,$$

όπου g είναι μία συνάρτηση που εξαρτάται από την φύση του υγρού.

Στη στατική κατάσταση έχουμε $v_0 = 0$, p_0 =σταθερή, ρ_0 =σταθερή και S_0 =σταθερή. Έστω τώρα μικρές διαταραχές της αυτής της κατάστασης. Τότε, προκύπτουν οι αντίστοιχες γραμμικοποιημένες εξισώσεις

- την **εξίσωση Euler**
$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} grad\ p = 0\ ,$$
- με **εξίσωση συνέχειας**
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0\, div(v) = 0\ ,$$
- και με **καταστατική εξίσωση**
$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial \rho}(\rho_0, S_0)\, \frac{\partial \rho}{\partial t}\ .$$

Έτσι, έχουμε την **εξίσωση κύματος**
$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \Delta p\,,$$
όπου η **ταχύτητα του ήχου** c ορίζεται ως
$$c^2 = \frac{\partial g}{\partial \rho}(\rho_0, S_0)\ .$$

Από την γραμμικοποιημένη εξίσωση *Euler* προκύπτει ότι υπάρχει το δυναμικό της ταχύτητας $V = V(x,t)$ τέτοιο ώστε
$$v = \frac{1}{\rho_0}\, grad\ V$$
και
$$p = -\frac{\partial V}{\partial t}\ .$$

Το V ικανοποιεί, επιπλέον, την εξίσωση κύματος

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \Delta V \ .$$

Για χρονικά-αρμονικά ακουστικά κύματα (time - harmonic acoustic waves) της μορφής

$$V(x,t) = Re\left[u(x)e^{-i\omega t}\right],$$

με συχνότητα $\omega > 0$. Επομένως, το u το οποίο είναι μιγαδικό εξαρτώμενο από τον χώρο κομμάτι του δυναμικού της ταχύτητας V ικανοποιεί την εξίσωση

$$\Delta u + k^2 u = 0, \tag{2.54}$$

όπου ο κυματικός αριθμός k δίνεται από την θετική σταθερά $k = \omega/c$. Η εξίσωση (2.54) καλείται **ομογενής εξίσωση Helmholtz για ομογενές μέσο**.

Θα ασχοληθούμε με σκέδαση χρονικά-αρμονικών ακουστικών κυμάτων μέσω εξωτερικών προβλημάτων συνοριακών τιμών της εξίσωση *Helmholtz* σε ομογενή μέσα.

Χωρίζουμε τους σκεδαστές σε δύο κατηγορίες ανάλογα με την διαπερατότητά τους:

1. **Μη διαπερατούς** (**Impenetrable**).

2. **Διαπερατούς** (**Penetrable**).

Χωρίζουμε τους σκεδαστές σε δύο κατηγορίες ανάλογα με τις συνοριακές τους συνθήκες δηλαδή την εξίσωση που επιβάλλεται στο κύμα στο σύνορο του σκεδαστή:

1. **Ακουστικά-μαλακούς** (**Sound – soft**) - **Πρόβλημα Dirichlet**

   Καθορίζοντας τις τιμές της u στο σύνορο στην ουσία στο φυσικό πρόβλημα καθορίζουμε την πίεση του ακουστικού κύματος. Συγκεκριμένα, δοσμένου εισερχόμενου κύματος (*incoming wave*) u^i δοσμένου αντικειμένου D το συνολικό κύμα $u = u^i + u^s$, όπου u^s το σκεδαζόμενο κύμα (*scattered wave*) πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση στο εξωτερικό $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ του D η συνολική πίεση πρέπει να μηδενίζεται στο σύνορο δηλαδή

   $$u = 0 \ , \ \partial D$$

   .

2. **Ακουστικά-σκληρούς** (**Sound – hard**) - **Πρόβλημα Neumann**

   Καθορίζοντας τις τιμές της κάθετης παραγώγου της u στο σύνορο στην ουσία στο φυσικό πρόβλημα καθορίζουμε τη κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας του ακουστικού κύματος. Συγκεκριμένα, η συνολική κάθετη παράγωγος του κύματος $\partial u/\partial \nu$ όπου ν είναι το κάθετο διάνυσμα που κατευθύνεται στο εξωτερικό της επιφάνειας δηλαδή η συνολική κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας πρέπει να μηδενίζεται στο σύνορο δηλαδή

   $$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \ , \ \partial D$$

   .

Παρατήρηση 2.31. *1. Είδαμε ότι το συνολικό κύμα είναι υπέρθεση $u = u^i + u^s$ του εισερχόμενου κύματος u^i και του σκεδαζόμενου κύματος u^s στον $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$.*

*2. Αν ο σκεδαστής D είναι διαπερατός τότε οδηγούμαστε σε **πρόβλημα μετάδοσης (transmission problem)**. Αυτό προκύπτει γιατί στο εσωτερικό του σκεδαστή D έχουμε σταθερή πυκνότητα $\tilde{\rho}$ και ταχύτητα ήχου $\tilde{c}$ οι οποίες διαφέρουν από τις αντίστοιχες ρ και c στο εξωτερικό $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ του D. Το μεταδιδόμενο κύμα v στο D ο κυματικός αριθμός δίνεται από την θετική σταθερά $\tilde{k} = \omega/\tilde{c}$, ενώ το ολικό πεδίο στο εξωτερικό έχει κυματικό αριθμό k που δίνεται από την θετική σταθερά $k = \omega/c$ και ισχύει ότι $\tilde{k} \neq k$. Έτσι, η συνέχεια της πίεσης και της κάθετης ταχύτητας πάνω στην επιφάνεια οδηγεί στις **συνθήκες μετάδοσης (transmission conditions)***

$$u = v \;\; \textit{και} \;\; \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{1}{\tilde{\rho}}\frac{\partial v}{\partial \nu} \;\; \textit{στο} \;\; \partial D \,.$$

Η σφαιρικά συμμετρική λύση της εξίσωσης $Helmholtz$

$$\frac{e^{ik|x|}}{|x|}$$

ικανοποιεί τη συνθήκη

$$Re\left(\frac{e^{ik|x|}}{|x|}\right) = \frac{cos(k|x| - \omega t)}{|x|}\,,$$

τη **συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld (Sommerfeld radiation condition)**

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial u^s}{\partial r} - iku^s\right) = 0 \;\;,\;\; r = |x| \tag{2.55}$$

και αντιστοιχεί σε εξερχόμενο κύμα.

Διατύπωση προβλήματος

$$\begin{aligned}
\Delta u + k^2 u &= 0 \;\;, \mathbb{R}^3 \setminus \partial D \;\; \text{Εξίσωση } Helmholtz \\
u &= u^i + u^s \\
\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial u^s}{\partial r} - iku^s\right) &= 0 \;\;,\;\; r = |x| \quad \text{Συνθήκη Ακτινοβολίας } Sommerfeld
\end{aligned}$$

όπου u^i το **εισερχόμενο κύμα (incoming wave)** και u^s το **σκεδαζόμενο κύμα (scattered wave)** με συνοριακές συνθήκες είτε,

$$u = 0 \;\;,\;\; \partial D \quad (Dirichlet) \;\; (Sound - soft)$$

είτε,

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \;\;,\;\; \partial D. \;\; (Neumann) \;\; (Sound - hard)$$

Θεώρημα 2.32 (Θεώρημα Gauss). *Έστω φραγμένο χωρίο $D \subset \mathbb{R}^N$, $N = 2,3$, F διανυσματική απεικόνιση στον $\mathbb{R}^N$, ν το μοναδιαίο κάθετο που κατευθύνεται προς το εξωτερικό του χωρίου D και ∂D το σύνορο του D. Τότε,*

$$\iiint\limits_{D} div\, F\, dx \;=\; \iint\limits_{\partial D} F \cdot \nu\, dS, \quad x \in \mathbb{R}^N \tag{2.56}$$

Θεώρημα 2.33 (Πρώτο Θεώρημα Green). *Έστω D φραγμένο χωρίο κλάσης C^1 και με ν συμβολίζουμε το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο ∂D που κατευθύνεται προς το εξωτερικό του D. Τότε για $u \in C^1(\bar{D})$ και $v \in C^2(\bar{D})$ έχουμε,*

$$\int_D (u\Delta v + grad\ u \cdot grad\ v)\, dx = \int_{\partial D} u \frac{\partial v}{\partial \nu}\, ds\ . \tag{2.57}$$

Θεώρημα 2.34 (Δεύτερο Θεώρημα Green). *Έστω D φραγμένο χωρίο κλάσης C^1 και με ν συμβολίζουμε το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο ∂D που κατευθύνεται προς το εξωτερικό του D. Τότε για $u, v \in C^2(\bar{D})$ έχουμε,*

$$\int_D (u\Delta v - v\Delta u)\, dx = \int_{\partial D} \left(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu} \right) ds\ . \tag{2.58}$$

Θεώρημα 2.35. *Έστω D φραγμένο χωρίο κλάσης C^2 και με ν συμβολίζουμε το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο ∂D που κατευθύνεται προς το εξωτερικό του D. Υποθέτουμε $u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ είναι συνάρτηση που έχει κάθετη παράγωγο στο σύνορο υπό την έννοια του ορίου*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \lim_{h \to 0^+} \nu(x) \cdot grad\ u(x - h\nu(x)) \quad , \quad x \in \partial D \tag{2.59}$$

υπάρχει ομοιόμορφα στο σύνορο ∂D. Τότε έχουμε τον τύπο του Green

$$u(x) = \int_{\partial D} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\Phi(x,y) - u(y)\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(y)} \right) ds(y) - \int_D (\Delta u(y) + k^2 u(y))\Phi(x,y)\, dy\ ,\ x \in D, \tag{2.60}$$

όπου το ολοκλήρωμα στο D υπάρχει ως γενικευμένο ολοκλήρωμα. Ειδικότερα, αν u είναι λύση της εξίσωσης Helmholtz

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad , \quad \text{στο}\ \ D \tag{2.61}$$

*τότε έχουμε την **αναπαράσταση του** **Helmholtz***

$$u(x) = \int_{\partial D} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\Phi(x,y) - u(y)\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(y)} \right) ds(y)\ , \quad x \in D\,. \tag{2.62}$$

Θεώρημα 2.36 (Θεώρημα Αναλυτικότητας). *Αν u είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη λύση της εξίσωσης Helmholtz σε ένα χωρίο D, τότε η u είναι αναλυτική.*

Παρατήρηση 2.37. *1. Από το Θεώρημα Αναλυτικότητας (2.36) συνεπάγεται ότι αν η λύση u της εξίσωσης Helmholtz μηδενίζεται σε ανοιχτό υποσύνολο του χωρίου ορισμού της τότε μηδενίζεται παντού.*

2. *Από εδώ και πέρα αν λέμε ότι η u είναι λύση της εξίσωσης Helmholtz εννοούμε ότι η u είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη και άρα αναλυτική στο εσωτερικό του χωρίου ορισμού της.*

Θεώρημα 2.38 (**Θεώρημα Holmgren**). *Έστω D φραγμένο χωρίο κλάσης C^2 και με ν συμβολίζουμε το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο ∂D που κατευθύνεται προς το εξωτερικό του D. Υποθέτουμε $u \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ είναι λύση της εξίσωσης Helmholtz στο D τέτοια ώστε*

$$u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \;\;,\;\; \sigma\tau o\ \Gamma \tag{2.63}$$

για κάποιο ανοιχτό υποσύνολο $\Gamma \subset \partial D$. Τότε η u μηδενίζεται στο D.

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε την αναπαράσταση του *Helmholtz* (2.62) και την (2.63) έχουμε:

$$u(x) \;=\; \int_{\partial D \setminus \Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\Phi(x,y) - v\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(y)} \right) ds(y) + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\Phi(x,y) - v\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(y)} \right) ds(y).$$

Άρα,

$$u(x) \;=\; \int_{\partial D \setminus \Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\Phi(x,y) - v\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(y)} \right) ds(y), \;\; x \in (\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cup \Gamma \;.$$

Τότε από δεύτερο θεώρημα *Green* αν εφαρμόσουμε την σχέση (2.58) στην u και την $\Phi(x,\cdot)$, έχουμε ότι $u = 0$ στο $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$. Έστω $G \subset \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \;:\; \Gamma \cap \partial D \neq \emptyset$. Άρα, η u λύνει την εξίσωση *Helmholtz* στο $\mathbb{R}^3 \setminus \partial D \;\Rightarrow\; u = 0$ στο D, αφού D και G συνδέονται μέσα από το Γ. Αυτό προκύπτει από την αναλυτικότητα της $u = 0$ στο D μέσω διαδοχικών επικαλυπτόμενων σφαιρών στις οποίες η u είναι αναλυτική και άρα μεταφέρει τον μηδενισμό στο εσωτερικό της σφαίρας. □

Ορισμός 2.39 (**Ακτινοβόλος Λύση**). *Μία λύση της εξίσωσης Helmholtz της οποίας το χωρίο ορισμού περιέχει το εξωτερικό μίας σφαίρας είναι **ακτινοβόλος** (radiating) αν ικανοποιεί την συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld*

$$\lim_{r \to \infty} r \left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) = 0 \;\;,\;\; r = |x| \tag{2.64}$$

και το όριο υπάρχει ομοιόμορφα για όλες τις κατευθύνσεις $x/|x|$ στη μοναδιαία σφαίρα $\mathbb{S}^2$.

Θεώρημα 2.40. *Έστω D φραγμένο χωρίο ανοιχτό συμπλήρωμα ενός μη-φραγμένου χωρίου κλάσης C^2 και με ν συμβολίζουμε το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο ∂D που κατευθύνεται προς το εξωτερικό του D. Υποθέτουμε $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ είναι ακτινοβόλος λύση της εξίσωσης Helmholtz*

$$\Delta u + k^2 u = 0 \;\;, \sigma\tau o\;\; \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \tag{2.65}$$

συνάρτηση που έχει κάθετη παράγωγο στο σύνορο υπό την έννοια του ορίου

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \lim_{h \to 0^+} \nu(x) \cdot grad\; u(x + h\nu(x)) \;\;,\;\; x \in \partial D \;, \tag{2.66}$$

υπάρχει ομοιόμορφα στο σύνορο ∂D. Τότε έχουμε τον τύπο του Green

$$u(x) = \int_{\partial D} \left(u(y)\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\Phi(x,y) \right) ds(y) \;,\; x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \tag{2.67}$$

Πόρισμα 2.40.1. *Μία ακτινοβόλος λύση της εξίσωσης Helmholtz είναι πεπερασμένη κατά Sommerfeld δηλαδή ικανοποιεί την συνθήκη*

$$u(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right) \quad , \ |x| \to \infty \tag{2.68}$$

ομοιόμορφα προς όλες τις κατευθύνσεις $x/|x|$.

Ορισμός 2.41. *Μια λύση της Helmholtz ορισμένη στον $\mathbb{R}^3$ καλείται* ***ακέραια λύση*** *(entire solution) και αν επιπλέον είναι ακτινοβόλος έχει την ιδιότητα να μηδενίζεται στο σύνορο.*

Θεώρημα 2.42. *Μία ακτινοβόλος λύση u της Helmholtz έχει ασυμπτωτική συμπεριφορά ενός σφαιρικού εξερχόμενου κύματος*

$$u(x) = \frac{e^{ik|x|}}{|x|}\left[u_\infty(\hat{x}) + O\left(\frac{1}{|x|}\right)\right] \quad , \ |x| \to \infty \tag{2.69}$$

ομοιόμορφα για όλες τις κατευθύνσεις $x/|x|$ και η συνάρτηση u_∞ ορίζεται στην μοναδιαία σφαίρα $\mathbb{S}^2$ και καλείται ***πλάτος σκέδασης*** *ή* ***μακρινό πεδίο (far field pattern)*** *της u. Κάτω από τις υποθέσεις του Θεωρήματος (2.40) έχουμε,*

$$u_\infty(\hat{x}) = \frac{1}{4\pi}\int_{\partial D}\left[u(y)\frac{\partial e^{-ik\hat{x}\cdot y}}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u}{\partial \nu}(y)e^{-ik\hat{x}\cdot y}\right] ds(y) \ , \ \hat{x} \in \mathbb{S}^2 \tag{2.70}$$

Απόδειξη. Ισχύει ότι

$$|x-y| = \sqrt{|x|^2 - 2x\cdot y + |y|^2} = |x| - \hat{x}\cdot y + O\left(\frac{1}{|x|}\right)$$

προκύπτει ότι

$$\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} = \frac{e^{ik|x|}}{|x|}\left[e^{-ik\hat{x}\cdot y} + O\left(\frac{1}{|x|}\right)\right] \tag{2.71}$$

και

$$\frac{\partial}{\partial \nu(y)}\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} = \frac{e^{ik|x|}}{|x|}\left[\frac{\partial e^{-ik\hat{x}\cdot y}}{\partial \nu(y)} + O\left(\frac{1}{|x|}\right)\right] \tag{2.72}$$

ομοιόμορφα $\forall y \in \partial D$. Από την σχέση (2.18) που δίνει την συνάρτηση Φ δηλαδή την θεμελιώδη λύση της εξίσωσης *Helmholtz* και τις σχέσεις (2.71) και (2.72) προκύπτει μέσω του τύπου του *Green* (2.67) ότι

$$\begin{aligned}
u(x) &= \int_{\partial D}\left(u(y)\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\Phi(x,y)\right) ds(y)\\
&= \frac{1}{4\pi}\frac{e^{ik|x|}}{|x|}\int_{\partial D}\left(u(y)\frac{\partial e^{-ik\hat{x}\cdot y}}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u}{\partial \nu}(y)e^{-ik\hat{x}\cdot y}\right) ds(y) + \frac{e^{ik|x|}}{|x|}O\left(\frac{1}{|x|}\right)\\
&= \frac{e^{ik|x|}}{|x|}\left[u_\infty(\hat{x}) + O\left(\frac{1}{|x|}\right)\right]\\
\Leftrightarrow u(x) &= \frac{e^{ik|x|}}{|x|}\left[u_\infty(\hat{x}) + O\left(\frac{1}{|x|}\right)\right], \ |x| \to \infty \ ,\\
&\text{όπου}\\
u_\infty(\hat{x}) &= \frac{1}{4\pi}\int_{\partial D}\left(u(y)\frac{\partial e^{-ik\hat{x}\cdot y}}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u}{\partial \nu}(y)e^{-ik\hat{x}\cdot y}\right) ds(y) \ .
\end{aligned}$$

□

Λήμμα 2.43 (Λήμμα Rellich). *Έστω ένα φραγμένο σύνολο D, το οποίο αποτελεί ανοιχτό συμπλήρωμα ενός μη φραγμένου χωρίου και έστω $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D})$ λύση της εξίσωσης Helmholtz που ικανοποιεί την σχέση*

$$\lim_{r\to\infty} \int_{|x|=r} |u(x)|^2 \, ds = 0 \, . \tag{2.73}$$

Τότε $u = 0$ στο $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$.

Παρατήρηση 2.44. *Το Λήμμα Rellich(2.43) εξασφαλίζει την μοναδικότητα των λύσεων των εξωτερικών συνοριακών προβλημάτων μέσω των ακόλουθων δύο θεωρημάτων. Επίσης, θεμελιώνει την ένα-προς-ένα αντιστοιχία μεταξύ των ακτινοβόλων κυμάτων και του πλάτους σκέδασης.*

Θεώρημα 2.45. *Έστω φραγμένο σύνολο D, το οποίο αποτελεί ανοιχτό συμπλήρωμα ενός μη φραγμένου χωρίου και έστω ότι το σύνορο ∂D είναι κλάσης C^2 όπου το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα ν κατευθύνεται προς το εξωτερικό του D. Έστω, επίσης, $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ είναι ακτινοβόλος λύση της εξίσωσης Helmholtz με κυματικό αριθμό $k > 0$ η οποία έχει κάθετη παράγωγο υπό την έννοια της ομοιόμορφης σύγκλισης και για την οποία ισχύει*

$$Im \int_{\partial D} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} \, ds \geq 0 \, .$$

Τότε $u = 0$ στο $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$.

Θεώρημα 2.46. *Έστω φραγμένο σύνολο D είναι ανοιχτό συμπλήρωμα ενός μη φραγμένου χωρίου και έστω $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D})$ είναι ακτινοβόλος λύση της εξίσωσης Helmholtz για την οποία το πλάτος σκέδασης μηδενίζεται δηλαδή $u_\infty = 0$.*
Τότε $u = 0$ στο $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$.

2.2.2 Τελεστές Δυναμικών Απλού και Διπλού Στρώματος

Σε αυτήν την υποενότητα θα ορίσουμε τους τελεστές απλού και διπλού στρώματος που προκύπτουν κατά αντιστοιχία από τα δυναμικά απλού και διπλού στρώματος. Οι τελεστές αυτοί χρησιμοποιούνται στην επίλυση του προβλήματος και μέσω αυτών διατυπώνουμε, επιπλέον, σημαντικά αποτελέσματα.

Θυμίζουμε τα **δυναμικά απλού και διπλού στρώματος** ορίζονται ως:

$$u(x) := \int_{\partial D} \Phi(x,y)\phi(y)ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial D \ \textbf{Δυναμικό Απλού Στρώματος} \tag{2.74}$$

και

$$v(x) := \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(y)} \psi(y) ds(y), \;\; x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial D \;\; \textbf{Δυναμικό Διπλού Στρώματος}, \tag{2.75}$$

όπου φ και ψ συνεχείς πυκνότητες των u και v αντίστοιχα και Φ η θεμελιώδης λύση της εξίσωσης *Helmholtz*. Λόγω του προβλήματος στο οποίο εντάσσονται λέγονται ακουστικά δυναμικά απλού και διπλού στρώματος. Είναι λύσεις της εξίσωσης *Helmholtz* στο D και στο $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ και ικανοποιούν την συνθήκη ακτινοβολίας *Sommerfeld*. Από τους τύπους του *Green* (2.62) και (2.67) προκύπτει ότι κάθε λύση της εξίσωσης *Helmholtz* μπορεί να γραφτεί ως γραμμικός συνδυασμός ενός δυναμικού απλού και ενός διπλού στρώματος.

Για συνεχείς πυκνότητες η συμπεριφορά τους στο σύνορο περιγράφεται από τις σχέσεις διαπήδησης. Επιπλέον αν αντί για συνεχείς πυκνότητες είχαμε ομοιόμορφα *Hölder* συνεχείς πυκνότητες, η μελέτη σε χώρους *Hölder* θα χάριζε επιπλέον ομαλότητα στο πρόβλημα. Με $\|\cdot\|_\infty = \|\cdot\|_{\infty,G}$ συμβολίζουμε την *supremum* νόρμα για $G \subset \mathbb{R}^3$. Παραθέτουμε τα δύο ακόλουθα θεωρήματα που έχουν συμπτύξει τις έννοιες που έχουμε δει σε προηγούμενη ενότητα αλλά πλέον ενταγμένες στο πλαίσιο αυτού του προβλήματος.

Θεώρημα 2.47. *Έστω σύνορο ∂D κλάσης C^2 και έστω φ και ψ συνεχείς. Τότε το δυναμικό απλού στρώματος u με πυκνότητα φ είναι συνεχής στον $\mathbb{R}^3$ και*

$$\|u\|_{\infty,\mathbb{R}^3} \leq C\|\phi\|_{\infty,\partial D}$$

για σταθερά C που εξαρτάται από το σύνορο ∂D. Στο σύνορο έχουμε

$$u(x) := \int_{\partial D} \Phi(x,y)\phi(y) ds(y), \;\; x \in \partial D, \tag{2.76}$$

$$\frac{\partial u_\pm}{\partial \nu}(x) = \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(x)} \phi(y) ds(y) \mp \frac{1}{2}\phi(x) \;\;,\;\; x \in \partial D, \tag{2.77}$$

όπου

$$\frac{\partial u_\pm}{\partial \nu}(x) := \lim_{h \to 0^+} \nu(x) \cdot grad\; u(x \pm h\nu(x)) \;\;,\;\; x \in \partial D\,, \tag{2.78}$$

υπό την έννοια της ομοιόμορφης σύγκλισης στο σύνορο ∂D και όπου τα ολοκληρώματα υπάρχουν ως γενικευμένα ολοκληρώματα. Το δυναμικό διπλού στρώματος v με πυκνότητα ψ μπορεί να επεκταθεί με συνεχή τρόπο από το D στο $\bar{D}$ και από το $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ στο $\mathbb{R}^3 \setminus D$ με οριακές τιμές

$$v_\pm(x) = \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(y)} \psi(y) ds(y) \pm \frac{1}{2}\psi(x) \;\;,\;\; x \in \partial D, \tag{2.79}$$

όπου

$$v_\pm(x) := \lim_{h \to 0^+} v(x \pm h\nu(x)) \;\;,\;\; x \in \partial D \tag{2.80}$$

και όπου το ολοκλήρωμα υπάρχει ως γενικευμένο ολοκλήρωμα. Επιπλέον,

$$\|v\|_{\infty,\bar{D}} \leq C\|\psi\|_{\infty,\partial D} \;\; \textit{και} \;\; \|v\|_{\infty,\mathbb{R}^3\setminus D} \leq C\|\psi\|_{\infty,\partial D}\,, \tag{2.81}$$

για κάποια σταθερά C που εξαρτάται από το σύνορο ∂D και

$$\lim_{h \to 0^+} \left[\frac{\partial v}{\partial \nu}(x + h\nu(x)) - \frac{\partial v}{\partial \nu}(x - h\nu(x))\right] = 0, \;\; x \in \partial D, \tag{2.82}$$

ομοιόμορφα στο σύνορο ∂D.

Θυμόμαστε ότι οι νόρμες των χώρων *Hölder* για $G \subset \mathbb{R}^3$ στον $C^{0,\alpha}(G)$ δίνεται από τη σχέση (1.36)και στον $C^{1,\alpha}(G)$ δίνεται από τη σχέση (1.38). Επίσης ισχύει

$$\|\phi\|_{1,\alpha} := \|\phi\|_{1,\alpha,G} := \|\phi\|_\infty + \|grad\ \phi\|_{0,\alpha} \tag{2.83}$$

Επίσης, ισχύουν τα θεωρήματα ενσφήνωσης (*imbedding theorems*) (1.88) και (1.89).

Θεώρημα 2.48. *Έστω σύνορο ∂D κλάσης C^2 και $0 < \alpha < 1$. Τότε το δυναμικό απλού στρώματος u με πυκνότητα $\phi \in C(\partial D)$ είναι ομοιόμορφα Hölder συνεχής στον $\mathbb{R}^3$ και*

$$\|u\|_{\alpha,\mathbb{R}^3} \le c_\alpha \|\phi\|_{\infty,\partial D}$$

για σταθερά c_α που εξαρτάται από το σύνορο ∂D και το α.

Οι πρώτες παράγωγοι του δυναμικού απλού στρώματος u με πυκνότητα $\phi \in C^{0,\alpha}(\partial D)$ μπορούν να επεκταθούν με ομοιόμορφο Hölder συνεχή τρόπο από το D στο $\bar{D}$ και από το $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ στο $\mathbb{R}^3 \setminus D$ με συνοριακές τιμές

$$grad\ u_\pm(x) = \int_{\partial D} \psi(y) grad_x \Phi(x,y) ds(y) \mp \frac{1}{2}\phi(x)\nu(x) \quad , \quad x \in \partial D \tag{2.84}$$

, όπου

$$grad\ u_\pm(x) := \lim_{h \to 0^+} grad\ u(x \pm h\nu(x)) \quad , \quad x \in \partial D \tag{2.85}$$

και όπου το ολοκλήρωμα υπάρχει ως γενικευμένο ολοκλήρωμα. Επιπλέον,

$$\|grad\ u\|_{\alpha,\bar{D}} \le c_\alpha \|\phi\|_{\alpha,\partial D} \ \ \textit{και} \ \ \|grad\ u\|_{\alpha,\mathbb{R}^3\setminus D} \le c_\alpha \|\phi\|_{\alpha,\partial D} \tag{2.86}$$

για σταθερά c_α που εξαρτάται από το σύνορο ∂D και το α.

Για δυναμικό διπλού στρώματος v με πυκνότητα $\psi \in C^{0,\alpha}(\partial D)$ μπορεί να επεκταθεί με ομοιόμορφο Hölder συνεχή τρόπο από το D στο $\bar{D}$ και από το $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ στο $\mathbb{R}^3 \setminus D$ ώστε

$$\|v\|_{\alpha,\bar{D}} \le c_\alpha \|\psi\|_{\alpha,\partial D} \ \ \textit{και} \ \ \|v\|_{\alpha,\mathbb{R}^3\setminus D} \le c_\alpha \|\psi\|_{\alpha,\partial D} \,. \tag{2.87}$$

Οι πρώτες παράγωγοι του δυναμικού διπλού στρώματος v με πυκνότητα $\psi \in C^{1,\alpha}(\partial D)$ μπορούν να επεκταθούν με ομοιόμορφο Hölder συνεχή τρόπο από το D στο $\bar{D}$ και από το $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ στο $\mathbb{R}^3 \setminus D$ ώστε

$$\|grad\ v\|_{\alpha,\bar{D}} \le c_\alpha \|\psi\|_{1,\alpha,\partial D} \ \ \textit{και} \ \ \|grad\ v\|_{\alpha,\mathbb{R}^3\setminus D} \le c_\alpha \|\psi\|_{1,\alpha,\partial D} \tag{2.88}$$

για σταθερά c_α που εξαρτάται από το σύνορο ∂D και το α.

Ορισμός 2.49 (**Τελεστές Δυναμικών Απλού και Διπλού Στρώματος**). *Οι* ***τελεστές δυναμικού απλού και διπλού στρώματος (single and double layer potential operators)*** *S και K αντίστοιχα ορίζονται ως*

$$(S\phi)(x) := 2\int_{\partial D} \Phi(x,y)\phi(y)\, ds(y), \quad x \in \partial D\ , \tag{2.89}$$

$$(K\phi)(x) := 2\int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(y)}\phi(y)\, ds(y), \quad x \in \partial D\ . \tag{2.90}$$

*Οι **τελεστές των κάθετών τους παραγώγων** είναι οι K' και T αντίστοιχα, δηλαδή K' ο τελεστής κάθετης παραγώγου του S και T ο τελεστής κάθετης παραγώγου του K και ορίζονται ως*

$$(K'\phi)(x) := 2\int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(x)} \phi(y)\, ds(y), \quad x \in \partial D \ , \tag{2.91}$$

$$(T\phi)(x) := 2\frac{\partial}{\partial \nu(x)} \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(y)} \phi(y)\, ds(y), \quad x \in \partial D \ . \tag{2.92}$$

Θεώρημα 2.50. *Έστω σύνορο ∂D κλάσης C^2. Τότε οι τελεστές*

$$S, K, K' : C(\partial D) \to C^{0,a}(\partial D) \ ,$$

$$S, K : C^{0,a}(\partial D) \to C^{1,a}(\partial D) \ ,$$

και

$$T : C^{1,a}(\partial D) \to C^{0,a}(\partial D)$$

είναι φραγμένοι τελεστές.

Έστω η διγραμμική μορφή

$$< \phi, \psi >= \int_{\partial D} \phi(x)\psi(x)\, ds(x), \quad \forall \phi, \psi \in C(\partial D)$$

τότε ως προς αυτήν ο K και ο K′ είναι συζυγείς και ο S είναι αυτοσυζυγής, δηλαδή ισχύουν

$$< K\phi, \psi > = < \phi, K'\psi > \quad \text{και} \quad < S\phi, \psi > = < \phi, S\psi > \ . \tag{2.93}$$

Έστω v και w δυναμικά διπλού στρώματος με πυκνότητες $\phi, \psi \in C^{1,\alpha}(\partial D)$ αντίστοιχα. Από τις σχέσεις διαπήδησης του Θεωρήματος (2.47), το Δεύτερο Θεώρημα $Green$ (2.34) και την συνθήκη ακτινοβολίας του $Sommerfeld$ έχουμε ότι

$$\int_{\partial D} (T\phi)\psi\, ds = 2\int_{\partial D} \frac{\partial v}{\partial \nu}(w_+ - w_-)\, ds = 2\int_{\partial D} (v_+ - v_-)\frac{\partial w}{\partial \nu}\, ds = \int_{\partial D} \phi T\psi\, ds$$

ισοδύναμα,

$$< T\phi, \psi >=< \phi, T\psi > . \tag{2.94}$$

Άρα, ο T είναι αυτοσυζυγής.

Έστω u δυναμικό απλού στρώματος με πυκνότητα $\phi \in C(\partial D)$ και v δυναμικό διπλού στρώματος με πυκνότητα $\psi \in C^{1,\alpha}(\partial D)$ τότε

$$\int_{\partial D} (S\phi)(T\psi)\, ds = 4\int_{\partial D} u\frac{\partial v}{\partial \nu}\, ds = 4\int_{\partial D} (v_-)\frac{\partial u_-}{\partial \nu}\, ds = \int_{\partial D} [(K' + I)\phi][(K - I)\psi]\, ds$$

επομένως

$$< \phi, ST\psi >= \int_{\partial D} \phi(ST\psi)\, ds = \int_{\partial D} \phi[(K^2 - I)\psi]\, ds =< \phi, (K^2 - I)\psi >$$

$$\Leftrightarrow <\phi, ST\psi> = <\phi, (K^2 - I)\psi> \Leftrightarrow <\phi, [ST - (K^2 - I)]\psi> = 0, \quad \forall\phi \in C(\partial D), \forall\psi \in C^{1,\alpha}(\partial D)$$

και άρα

$$ST = K^2 - I \ . \tag{2.95}$$

Όμοια προκύπτει η συζυγής της σχέση

$$<TS\phi, \psi> = \int_{\partial D} (TS\phi)\psi \, ds = \int_{\partial D} [(K'^2 - I)\phi]\psi \, ds = <(K'^2 - I)\phi, \psi>$$

$$\Leftrightarrow <TS\phi, \psi> = <(K'^2 - I)\phi, \psi> \Leftrightarrow <[TS - (K'^2 - I)]\phi, \psi> = 0, \quad \forall\phi \in C(\partial D), \forall\psi \in C^{1,\alpha}(\partial D)$$

και άρα

$$TS = K'^2 - I \ . \tag{2.96}$$

Θεώρημα 2.51 (**Θεώρημα Lax**). *Έστω X και Y χώροι με νόρμα που και οι δύο είναι εφοδιασμένοι με ένα βαθμωτό γινόμενο $(\cdot,\cdot)$ και υποθέτουμε ότι υπάρχει θετική σταθερά C ώστε*

$$|(\phi, \psi)| \le C\|\phi\|\|\psi\|, \quad \forall \phi, \psi \in X \ . \tag{2.97}$$

Έστω $U \subset X$ υπόχωρος του X και έστω $A : U \to Y$ και $B : Y \to X$ φραγμένοι γραμμικοί τελεστές που ικανοποιούν την σχέση

$$(A\phi, \psi) = (\phi, B\psi), \quad \forall\phi \in U, \forall\psi \in Y \ . \tag{2.98}$$

Τότε, ο $A : U \to Y$ είναι φραγμένος ως προς την αντίστοιχη νόρμα που επάγεται από το βαθμωτό γινόμενο.

Απόδειξη. Συμβολίζουμε τις νόρμες από το βαθμωτό γινόμενο ως $\|\cdot\|_\beta$. Έστω, ο φραγμένος τελεστής $F : U \to X$ που δίνεται από την σχέση $F := BA$ με $\|F\| \le \|B\|\|A\|$. Τότε, από την σχέση (2.98) προκύπτει ότι ο F είναι αυτοσυζυγής δηλαδή

$$(F\phi, \psi) = (\phi, F\psi) \ , \ \forall\phi, \psi \in U.$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας την ανισότητα $Cauchy - Schwarz$ και με $\|\phi\|_\beta \le 1$ έχουμε,

$$\|F^n\phi\|_\beta^2 = (F^n\phi, F^n\phi) = (\phi, F^{2n}\phi) \le \|F^{2n}\phi\|_\beta \ , \ \forall\phi \in U, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Με επαγωγή προκύπτει ότι

$$\|F\phi\|_\beta \le \|F^{2^n}\phi\|_\beta^{2^{-n}} \ .$$

Από την σχέση (2.97) συνεπάγεται ότι $\|\phi\|_\beta \le \sqrt{C}\|\phi\|, \ \forall\phi \in X$. Άρα,

$$\|F\phi\|_\beta \le \left[\sqrt{C}\|F^{2^n}\phi\|\right]^{2^{-n}} \le \left[\sqrt{C}\|F\|^{2^n}\|\phi\|\right]^{2^{-n}} = [\sqrt{C}\|\phi\|]^{2^{-n}}\|F\| \ .$$

Με $n \to \infty$ και $\|\phi\|_\beta \le 1$ καταλήγουμε στην σχέση

$$\|F\phi\|_\beta \le \|F\|, \quad \forall\phi \in U \ .$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα $Cauchy - Schwarz$ και με $\|\phi\|_\beta \le 1$ έχουμε,

$$\|A\phi\|_\beta^2 = (A\phi, A\phi) = (\phi, F\phi) \le \|F\phi\|_\beta \le \|F\|$$

και άρα προκύπτει το ζητούμενο. □

Παρατήρηση 2.52. *Χρησιμοποιούμε το Θεώρημα Lax(2.51) για να δείξουμε τις ιδιότητες των επιφανειακών δυναμικών για χώρους Sobolev. Σημειώνουμε ότι:*

- $H^1_{loc}(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D})$ *είναι ο χώρος όλων συναρτήσεων* $u : \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \to \mathbb{C}$ *ώστε* $u \in H^1((\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap B)$ *για όλες τις ανοιχτές σφαίρες που περιέχουν το* $\bar{D}$

και για $0 \leq p < \infty$

- $H^p_{loc}(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D})$ *είναι ο χώρος όλων συναρτήσεων* $u : \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \to \mathbb{C}$ *ώστε* $u \in H^p((\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap B)$ *για όλες τις ανοιχτές σφαίρες που περιέχουν το* $\bar{D}$

αντίστοιχα για τους δυϊκούς τους δηλαδή για $0 \geq p > -\infty$.

Θεώρημα 2.53. *Έστω σύνορο* ∂D *κλάσης* C^2 *τότε ο τελεστής* $S : L^2(\partial D) \to H^1(\partial D)$ *είναι φραγμένος. Έστω επιπλέον ότι το σύνορο* ∂D *ανήκει στον* $C^{2,\alpha}$ *τότε οι τελεστές* $K, K' : L^2(\partial D) \to H^1(\partial D)$ *και* $T : H^1(\partial D) \to L^2(\partial D)$ *είναι φραγμένοι.*

Πόρισμα 2.53.1. *Έστω σύνορο* ∂D *κλάσης* C^2 *τότε ο τελεστής* $S : H^{-1/2}(\partial D) \to H^{1/2}(\partial D)$ *είναι φραγμένος. Έστω επιπλέον ότι το σύνορο* ∂D *ανήκει στον* $C^{2,\alpha}$ *τότε οι τελεστές* $K, K' : H^{-1/2}(\partial D) \to H^{1/2}(\partial D)$ *και* $T : H^{1/2}(\partial D) \to H^{-1/2}(\partial D)$ *είναι φραγμένοι.*

Πόρισμα 2.53.2. *Έστω σύνορο* ∂D *κλάσης* $C^{2,\alpha}$. *Τότε το δυναμικό απλού στρώματος* u *ορίζει φραγμένο γραμμικό τελεστή από τον* $H^{-1/2}(\partial D)$ *στον* $H^1(D)$ *και στον* $H^1_{loc}(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D})$, *δηλαδή οι τελεστές* $u : H^{-1/2}(\partial D) \to H^1(D)$ *και* $u : H^1(D) \to H^1_{loc}(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D})$ *είναι γραμμικοί και φραγμένοι. Επίσης, το δυναμικό διπλού στρώματος* v *ορίζει φραγμένο γραμμικό τελεστή από τον* $H^{1/2}(\partial D)$ *στον* $H^1(D)$ *και στον* $H^1_{loc}(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D})$, *δηλαδή οι τελεστές* $v : H^{1/2}(\partial D) \to H^1(D)$ *και* $v : H^1(D) \to H^1_{loc}(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D})$ *είναι γραμμικοί και φραγμένοι.*

Από την παραπάνω ανάλυση προκύπτει ότι οι σχέσεις διαπήδησης του ίχνους στο σύνορο και της κάθετη παραγώγου του ίχνους των δυναμικών απλού και διπλού στρώματος συνεχίζουν να ισχύουν για χώρους $Sobolev$.

Οι σχέσεις διαπήδησης του Θεωρήματος (2.47) μπορούν επίσης να επεκταθούν χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Lax(2.51) οι συνεχείς πυκνότητες σε πυκνότητες του χώρου L^2. Στο πλαίσιο εργασίας στον L^2, οι σχέσεις διαπήδησης (2.76), (2.78), (2.79) και (2.82) μπορούν να αντικατασταθούν από τις ακόλουθες για u δυναμικό απλού στρώματος και v δυναμικό διπλού στρώματος με πυκνότητες $\phi, \psi \in L^2(\partial D)$ αντίστοιχα οπότε έχουμε,

$$\lim_{h \to 0^+} \int_{\partial D} |2u(x \pm h\nu(x)) - (S\phi)(x)|^2 \, ds(x) = 0, \tag{2.99}$$

$$\lim_{h \to 0^+} \int_{\partial D} \left| 2\frac{\partial u}{\partial \nu}(x \pm h\nu(x)) - (K'\phi)(x) \pm \phi(x) \right|^2 ds(x) = 0, \tag{2.100}$$

$$\lim_{h \to 0^+} \int_{\partial D} |2v(x \pm h\nu(x)) - (K\phi)(x) \mp \phi(x)|^2 \, ds(x) = 0, \tag{2.101}$$

$$\lim_{h \to 0^+} \int_{\partial D} \left| \frac{\partial v}{\partial \nu}(x + h\nu(x)) - \frac{\partial v}{\partial \nu}(x - h\nu(x)) \right|^2 ds(x) = 0\ . \tag{2.102}$$

Επίσης, για την σχέση (2.84) του Θεωρήματος(2.48) έχουμε

$$\lim_{h \to 0^+} \int_{\partial D} \left| grad\ u(\cdot \pm h\nu) - \int_{\partial D} grad_x \Phi(\cdot, y)\phi(y)\, ds(y) \pm \frac{1}{2}\phi\nu \right|^2 ds(x) = 0\ . \tag{2.103}$$

2.2.3 Εξωτερικά Προβλήματα Dirichlet και Neumann

Σε αυτήν την υποενότητα θα διατυπώσουμε τα εξωτερικά προβλήματα Dirichlet και Neumann καθώς και θα μελετήσουμε τις σχέσεις μεταξύ αυτών.

Εξωτερικό Πρόβλημα Dirichlet

Δοσμένης συνεχούς συνάρτησης f στο σύνορο ∂D, να βρεθεί μία ακτινοβόλος λύση $u : C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ της εξίσωσης *Helmholtz*

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad \sigma\tau o \ \ \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$$

η οποία ικανοποιεί την συνοριακή συνθήκη

$$u = f, \quad \sigma\tau o \ \partial D$$

Θεώρημα 2.54. *Το εξωτερικό πρόβλημα Dirichlet έχει το πολύ μία λύση.*

Λήμμα 2.55. *Έστω $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ λύση της εξίσωσης Helmholtz στον $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ που ικανοποιεί την ομογενή συνοριακή συνθήκη $u = 0$ στο ∂D. Ορίζουμε τα σύνολα $D_R := \{y \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} : |y| < R\}$ και $S_R := \{y \in \mathbb{R} : |y| = R\}$ για αρκετά μεγάλη ακτίνα R. Τότε $grad\ u \in L^2(D_R)$ και*

$$\int_{D_R} |grad\ u|^2\, dx - k^2 \int_{D_R} |u|^2\, dx = \int_{S_R} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu}\, ds\ . \tag{2.104}$$

Για να εξετάσουμε την ύπαρξη λύσης του εξωτερικού προβλήματος *Dirichlet* ψάχνουμε λύση που να είναι συνδυασμός ενός δυναμικού απλού και ενός διπλού στρώματος της μορφής

$$u(x) = \int_{\partial D} \left[\frac{\Phi(x,y)}{\partial \nu(y)} - i\eta \Phi(x,y) \right] \phi(y)\, ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial D\ , \tag{2.105}$$

με πυκνότητα $\phi \in C(\partial D)$ και $\eta \neq 0$ παράμετρο σύζευξης που είναι πραγματικός αριθμός.

Το δυναμικό u σύμφωνα με τις σχέσεις διαπήδησης του Θεωρήματος(2.47) λύνει το εξωτερικό πρόβλημα *Dirichlet* στο $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ και η πυκνότητά του ϕ λύνει την ολοκληρωτική εξίσωση

$$(I + K - i\eta S)\phi = 2f, \tag{2.106}$$

όπου οι τελεστές $S, K : C(\partial D) \to C(\partial D)$ από Θεωρήματα (1.88) και (2.50) είναι συμπαγείς και $I + K - i\eta S : C(\partial D) \to C(\partial D)$. Για να βρούμε την λύση ϕ της (2.106) και άρα την u θα χρησιμοποιήσουμε την Θεωρία Riesz-Fredholm. Σύμφωνα, με αυτήν η λύση ϕ υπάρχει επειδή οι τελεστές είναι συμπαγείς. Μένει να δείξουμε ότι είναι και μοναδική και τότε ο τελεστής $I + K - i\eta S$ θα είναι μονοσήμαντος και άρα θα υπάρχει ο αντίστροφος. Επομένως, αν η λύση

ϕ είναι επιπλέον και μοναδική από Θεωρία Riesz-Fredholm έχουμε ακόμα ότι ο $I + K - i\eta S$ θα είναι αμφιμονοσήμαντος και ο αντίστροφός του $(I + K - i\eta S)^{-1} : C(\partial D) \to C(\partial D)$ θα είναι φραγμένος.

Αφού η λύση ϕ της (2.106) υπάρχει μπορούμε να υποθέσουμε ότι η ϕ είναι συνεχής λύση της ομογενούς

$$(I + K - i\eta S)\phi = 0. \tag{2.107}$$

Τότε, η u θα πρέπει να ικανοποιεί την συνοριακή συνθήκη

$$u_+ = 0, \quad \partial D.$$

Από Θεώρημα (2.54) το εξωτερικό πρόβλημα *Dirichlet* έχει το πολύ μία λύση άρα αφού υπάρχει θα είναι μοναδική και άρα λόγω της παραπάνω συνοριακής συνθήκης θα πρέπει

$$u = 0, \quad \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$$

και σύμφωνα με τις σχέσεις διαπήδησης του Θεωρήματος(2.47) έχουμε ότι

$$-u_- = \phi \;\; \text{και} \;\; -\frac{\partial u_-}{\partial \nu} = i\eta\phi, \quad \partial D. \tag{2.108}$$

Τότε, από τις (2.108) προκύπτει ότι

$$i\eta \int_{\partial D} |\phi|^2 \, ds \; = \; \int_{\partial D} \bar{\phi} \, (i\eta\phi) \, ds \; = \; \int_{\partial D} \bar{u}_- \frac{\partial u_-}{\partial \nu} \, ds. \tag{2.109}$$

Από Πρώτο Θεώρημα *Green* και Λήμμα (2.55) έχουμε

$$\int_{\partial D} \bar{u}_- \frac{\partial u_-}{\partial \nu} \, ds = \int_D |grad \; u|^2 \, dx - k^2 \int_D |u|^2 \, dx \, . \tag{2.110}$$

Παίρνοντας το φανταστικό μέλος της (2.110) από Θεώρημα(2.45) μέσω της (2.109) έχουμε ότι $\phi = 0$ στο ∂D.

Επομένως, η λύση u της μη ομογενούς εξίσωσης (2.106) είναι μοναδική και εξαρτάται συνεχώς από την f ως προς την *supremum* νόρμα. Επιπλέον, επειδή η ϕ εξαρτάται συνεχώς από τα συνοριακά δεδομένα f και ισχύουν οι σχέσεις συνέχειας του Θεωρήματος(2.47) προκύπτει ότι το εξωτερικό πρόβλημα *Dirichlet* είναι καλώς τοποθετημένο. Δηλαδή, μικρές διαταραχές στα δεδομένα f προκαλούν μικρές διαταραχές στη u στο $\mathbb{R}^3 \setminus D$ και μικρές διαταραχές των παραγώγων της σε κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ ως προς τη *supremum* νόρμα. Συνοψίζουμε τα παραπάνω στο ακόλουθο Θεώρημα.

Θεώρημα 2.56. *Το εξωτερικό πρόβλημα Dirichlet έχει μοναδική λύση και η λύση αυτή εξαρτάται με συνεχή τρόπο από τα συνοριακά δεδομένα ως προς την ομοιόμορφη σύγκλιση της λύσης στον* $\mathbb{R}^3 \setminus D$ *και όλων των παραγώγων της σε κλειστά υποσύνολα του* $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$.

Παρατήρηση 2.57. *Στην οριακή περίπτωση όπου* $\eta = 0$ *η λύση* ϕ *της μη ομογενούς (2.106) χάνει την μοναδικότητά της όταν ο κυματικός αριθμός* k *είναι μη-κανονικός κυματικός αριθμός ή αλλιώς εσωτερική αντίσταση. Δηλαδή, όταν υπάρχουν μη τετριμμένες λύσεις* u *της εξίσωσης Helmholtz στο εσωτερικό του* D *οι οποίες να ικανοποιούν την ομογενή συνοριακή συνθήκη Neumann,* $\partial u / \partial \nu$ *στο* ∂D.

Για να μπορέσουμε να εφαρμόσουμε τον τύπο αναπαράστασης του Green για την λύση του εξωτερικού προβλήματος Dirichlet, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε κάθετη παράγωγο. Το πρόβλημα είναι ότι υπό την υπόθεση ότι τα δοσμένα συνοριακά δεδομένα είναι απλώς συνεχή δεν εξασφαλίζεται η ύπαρξη της κάθετης παραγώγου. Για το λόγο αυτό χρειαζόμαστε επιπλέον ομαλότητα στα συνοριακά δεδομένα και συγκεκριμένα τη συνέχεια κατά Hölder.

Οι τελεστές $S, K : C^{1,a}(\partial D) \to C^{1,a}(\partial D)$ από Θεωρήματα (1.88) και (2.50) είναι συμπαγείς και $I+K-i\eta S : C^{1,a}(\partial D) \to C^{1,a}(\partial D)$. Από Θεωρία Riesz-Fredholm ο τελεστής $I+K-i\eta S$ είναι μονοσήμαντος συνεπώς αντιστρέφεται και ο αντίστροφός του $(I+K-i\eta S)^{-1} : C^{1,a}(\partial D) \to C^{1,a}(\partial D)$ είναι φραγμένος. Αν $f \in C^{1,a}(\partial D)$ τότε η $\phi \in C^{1,a}(\partial D)$ και εξαρτάται με συνεχή τρόπο από τα δεδομένα ως προς την νόρμα $\|\cdot\|_{1,\alpha}$.

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις συνέχειας του Θεωρήματος (2.48) για τις παραγώγους των δυναμικών απλού και διπλού στρώματος, από την (2.105) προκύπτει ότι $u \in C^{1,a}(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ και εξαρτάται με συνεχή τρόπο από τα δεδομένα τότε η $\partial u/\partial \nu \in C^{0,a}(\partial D)$ και δίνεται από την σχέση

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \mathcal{E} f\,, \tag{2.111}$$

όπου $\mathcal{E} := (T + i\eta(I - K'))(I + K - i\eta S)^{-1} : C^{1,a}(\partial D) \to C^{0,a}(\partial D)$ καλείται **Dirichlet σε Neumann απεικόνιση** μετατρέπει συνοριακά δεδομένα Dirichlet σε Neumann και είναι φραγμένη.

Για να δείξουμε ότι ο τελεστής $\mathcal{E}$ είναι μονοσήμαντος και έχει φραγμένο αντίστροφο αρκεί να δείξουμε ότι ο τελεστής $T+i\eta(I-K') : C^{1,a}(\partial D) \to C^{0,a}(\partial D)$ είναι μονοσήμαντος και έχει φραγμένο αντίστροφο. Όμως, επειδή ο T δεν είναι συμπαγείς δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τη Θεωρία Riesz-Fredholm και έτσι πρέπει να εξετάσουμε και το **συνοριακό πρόβλημα Neumann**.

Εξωτερικό Πρόβλημα Neumann

Δοσμένης συνεχούς συνάρτησης g στο σύνορο ∂D, να βρεθεί μία ακτινοβόλος λύση $u : C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ της εξίσωσης *Helmholtz*

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad \sigma\tau o \;\; \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$$

που ικανοποιεί την συνοριακή συνθήκη

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = g, \quad \sigma\tau o\; \partial D\;,$$

υπό την έννοια της ομοιόμορφης σύγκλισης στο σύνορο ∂D.

Η μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος Neumann προκύπτει από το Θεώρημα(2.45). Ψάχνουμε λύση που να είναι συνδυασμός ενός δυναμικού απλού και ενός διπλού στρώματος. Η ύπαρξη της κάθετης παραγώγου του δυναμικού διπλού στρώματος στην περίπτωση που θεωρούμε απλά συνεχή πυκνότητα διασφαλίζεται αν συμπεριλάβουμε τον τελεστή ομαλοποίησης με αποτέλεσμα η λύση που ψάχνουμε να έχει την μορφή

$$u(x) = \int_{\partial D} \left[\Phi(x,y)\phi(y) + i\eta \frac{\Phi(x,y)}{\partial \nu(y)} (S_0^2 \phi)(y) \right] ds(y), \quad \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}, \tag{2.112}$$

με πυκνότητα $\phi \in C(\partial D)$ και παράμετρο σύζευξης $\eta \neq 0$ να είναι πραγματικός αριθμός. Με S_0 συμβολίζουμε τον τελεστή δυναμικού απλού-στρώματος (2.89) για την οριακή θεωρητική περίπτωση που το $k = 0$. Τότε ο S_0^2 τελεστής που δρα πάνω στην φ είναι ο τελεστής ομαλοποίησης καθώς από Θεώρημα(2.50) η πυκνότητα $S_0^2\phi$ του δυναμικού διπλού στρώματος ανήκει στον $C^{1,a}(\partial D)$. Από το Θεώρημα(2.47) βλέπουμε ότι η (2.112) λύνει το εξωτερικό πρόβλημα Neumann και η πυκνότητά της είναι λύση της εξίσωσης

$$(I - K' - i\eta T S_0^2)\phi = -2g, \tag{2.113}$$

όπου οι τελεστές $K' + i\eta T S_0^2 : C(\partial D) \to C(\partial D)$ και $K' + i\eta T S_0^2 : C^{0,a}(\partial D) \to C^{0,a}(\partial D)$ σύμφωνα με τα Θεωρήματα (1.88) και (2.50) είναι συμπαγείς και άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε τη Θεωρία Riesz-Fredholm.

Έστω ϕ είναι συνεχής λύση της ομογενούς

$$(I - K' - i\eta T S_0^2)\phi = 0. \tag{2.114}$$

Το δυναμικό u, επομένως, ικανοποιεί την ομογενή συνοριακή συνθήκη Neumann

$$\frac{\partial u_+}{\partial \nu} = 0, \text{ στο } \partial D.$$

Τότε, λόγω της μοναδικότητας της λύσης του εξωτερικού προβλήματος Neumann προκύπτει ότι

$$u = 0, \text{ στο } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}.$$

Άρα, από τις σχέσεις διαπήδησης του Θεωρήματος(2.47) έχουμε ότι,

$$-u_- = i\eta S_0^2\phi \text{ και } -\frac{\partial u_-}{\partial \nu} = -\phi, \text{ στο } \partial D\,. \tag{2.115}$$

Τότε, από τις (2.115) προκύπτει ότι

$$i\eta \int_{\partial D} |S_0\phi|^2\, ds \;=\; \int_{\partial D} \phi\,(i\eta S_0^2\bar{\phi})\, ds \;=\; \int_{\partial D} \bar{u}_- \frac{\partial u_-}{\partial \nu}\, ds. \tag{2.116}$$

Από Πρώτο Θεώρημα *Green* και Λήμμα (2.55) έχουμε

$$\int_{\partial D} \bar{u}_- \frac{\partial u_-}{\partial \nu}\, ds = \int_D |grad\ u|^2\, dx - k^2 \int_D |u|^2\, dx\,. \tag{2.117}$$

Παίρνοντας το φανταστικό μέλος της (2.117) από Θεώρημα(2.45) μέσω της (2.116) έχουμε ότι $S_0\phi = 0$ στο ∂D.

Παρατήρηση 2.58. *Το δυναμικό απλού στρώματος με πυκνότητα ϕ για την οριακή κατάσταση όπου το $k = 0$ είναι συνεχές στον $\mathbb{R}^3$, αρμονικό στο D και στο $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$, μηδενίζεται στο ∂D και ασυμπτωτικά. Επομένως, από την Αρχή Μεγίστου-Ελαχίστου για αρμονικές συναρτήσεις έχουμε το δυναμικό απλού στρώματος μηδενίζεται στο $\mathbb{R}^3$ και από Θεώρημα(2.47) προκύπτει ότι $\phi = 0$.*

Επομένως, από Θεωρία Riesz-Fredholm ότι οι τελεστές $I-K'-i\eta TS_0^2 : C(\partial D) \to C(\partial D)$ και $I-K'-i\eta TS_0^2 : C^{0,a}(\partial D) \to C^{0,a}(\partial D)$ είναι μονοσήμαντοι και συνεπώς οι αντίστροφοι $(I-K'-i\eta TS_0^2)^{-1} : C(\partial D) \to C(\partial D)$ και $(I-K'-i\eta TS_0^2)^{-1} : C^{0,a}(\partial D) \to C^{0,a}(\partial D)$ αντίστοιχα υπάρχουν και είναι φραγμένοι. Έτσι, καταλήγουμε ότι υπάρχει λύση u στο εξωτερικό πρόβλημα Neumann για συνεχή συνοριακά δεδομένα g και η οποία εξαρτάται με συνεχή τρόπο από τα δεδομένα και ισχύουν οι σχέσεις συνέχειας του Θεωρήματος(2.47). Επομένως, το εξωτερικό πρόβλημα Neumann είναι καλώς τοποθετημένο. Δηλαδή, μικρές διαταραχές στα δεδομένα g προκαλούν μικρές διαταραχές στη u στο $\mathbb{R}^3 \setminus D$ και μικρές διαταραχές των παραγώγων της σε κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ ως προς τη *supremum* νόρμα. Συνοψίζουμε τα παραπάνω στο ακόλουθο Θεώρημα.

Θεώρημα 2.59. *Το εξωτερικό πρόβλημα Neumann έχει μοναδική λύση και η λύση αυτή εξαρτάται με συνεχή τρόπο από τα συνοριακά δεδομένα ως προς την ομοιόμορφη σύγκλιση της λύσης στο $\mathbb{R}^3 \setminus D$ και όλων της των παραγώγων σε κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$.*

Αν $g \in C^{0,a}(\partial D)$ τότε η $\phi \in C^{0,a}(\partial D)$ και εξαρτάται με συνεχή τρόπο από δεδομένα ως προς την νόρμα του $C^{0,a}(\partial D)$.

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις συνέχειας του Θεωρήματος(2.48) για τα δυναμικά απλού και διπλού στρώματος από την (2.112) έχουμε ότι $u \in C^{1,a}(\mathbb{R}^3 \setminus D)$, εξαρτάται με συνεχή τρόπο από τα δεδομένα και δίνεται από την σχέση

$$u = \mathcal{H}g\,, \tag{2.118}$$

όπου $\mathcal{H} := (S + i\eta(I+K)S_0^2)(I-K'-i\eta TS_0^2)^{-1} : C^{0,a}(\partial D) \to C^{1,a}(\partial D)$ καλείται **Neumann σε Dirichlet απεικόνιση** μετατρέπει συνοριακά δεδομένα Neumann σε Dirichlet και είναι φραγμένη. Ο τελεστής $\mathcal{H}$ είναι ο αντίστροφος του $\mathcal{E}$.

Θεώρημα 2.60. *Η Dirichlet σε Neumann απεικόνιση $\mathcal{E}$ που απεικονίζει τα συνοριακά δεδομένα μίας ακτινοβόλου λύσης της εξίσωσης Helmholtz στις κάθετές τους παραγώγους είναι μονοσήμαντος και φραγμένος τελεστής $\mathcal{E} : C^{1,a}(\partial D) \to C^{0,a}(\partial D)$ με φραγμένο αντίστροφο. Η λύση u του εξωτερικού προβλήματος Dirichlet ανήκει στο $C^{1,a}(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ όταν οι συνοριακές τιμές ανήκουν στο $C^{1,a}(\partial D)$ και η απεικόνιση των συνοριακών δεδομένων στη λύση του προβλήματος είναι συνεχής από το $C^{1,a}(\partial D)$ στο $C^{1,a}(\mathbb{R}^3 \setminus D)$.*

Παρατήρηση 2.61. *Υπάρχει δυνατότητα αντί να ψάχνουμε κλασικές λύσεις είτε σε χώρους συνεχών είτε ομοιόμορφα Hölder συνεχών συναρτήσεων των προβλημάτων συνοριακών τιμών για την εξίσωση Helmholtz μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια ασθενή θεώρηση του προβλήματος είτε υπό την L^2 έννοια είτε σε ένα πλαίσιο χώρων Sobolev. Αυτό οδηγεί σε αποτελέσματα για την ύπαρξη λύσης κάτω από ασθενέστερες υποθέσεις ομαλότητας για τα δοσμένα συνοριακά δεδομένα και την συνεχή τους εξάρτηση από τις διαφορετικές νόρμες.*

Παρατήρηση 2.62. *Σε ένα πλαίσιο χώρων Sobolev, η λύση του εξωτερικού προβλήματος Dirichlet πρέπει να ανήκει στον ενεργειακό χώρο $H^1_{loc}(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D})$ με συνοριακή συνθήκη $u = f$ στο ∂D. Η δοθείσα f πρέπει να ανήκει στον $H^{1/2}(\partial D)$ και να υπάρχει υπό την έννοια ενός τελεστή ίχνους. Αυτό απλοποιεί τα θέματα της μοναδικότητας αφού η (2.104) ισχύει για συναρτήσεις στον $H^1_{loc}(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D})$. Η ανάλυσή μας ενσωματώνει με φυσικό τρόπο τη μελέτη της ύπαρξης λύσης μέσω του συνδυασμού ενός δυναμικού απλού και ενός διπλού στρώματος (2.105) με πυκνότητα ϕ που να ανήκει στον $H^{1/2}(\partial D)$ και την ολοκληρωτική εξίσωση (2.106).*

Στο εξωτερικό πρόβλημα Neumann όταν $g \in H^{-1/2}(\partial D)$, τότε η συνοριακή συνθήκη $\partial u/\partial \nu = g$, ∂D υπάρχει υπό την έννοια ενός τελεστή ίχνους. Η ανάλυση για την ύπαρξη μέσω του συνδιασμού ενός δυναμικού απλού και ενός διπλού στρώματος (2.112) με πυκνότητα ϕ που να ανήκει στον $H^{-1/2}(\partial D)$ και η ολοκληρωτική εξίσωση (2.113) μπορούν να υπεισέλθουν σε αυτήν την ανάλυση με φυσικό τρόπο.

Από το Πόρισμα (2.53.1) προκύπτει ότι το πρόβλημα είναι καλά ορισμένο υπό την έννοια ότι η απεικόνιση των συνοριακών δεδομένων $f \in H^{1/2}(\partial D)$ στην λύση του προβλήματος $u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D})$ είναι συνεχής. Ανάλογα με το Θεώρημα(2.60), ο τελεστής της Dirichlet σε Neumann απεικόνισης $\mathcal{E}$ είναι μονοσήμαντος και φραγμένος από το $H^{1/2}(\partial D)$ στο $H^{-1/2}(\partial D)$ με φραγμένο αντίστροφο.

Παρουσιάζουμε τη λύση για την σκέδαση ενός επίπεδου κύματος

$$u^i(x) = e^{ikx\cdot d}$$

από μία ακουστικά μαλακή σφαίρα ($sound-soft\ ball$) με κέντρο την αρχή και ακτίνα R. Το μοναδιαίο διάνυσμα d περιγράφει την διεύθυνση διάδοσης του εισερχόμενου κύματος με ολική συνοριακή συνθήκη

$$u = 0, \ \text{στο}\ \partial D \ \Leftrightarrow \ u^i + u^s = 0 \ \text{στο}\ \partial D\,.$$

Εν γένει, για το πρόβλημα σκέδασης οι συνοριακές τιμές είναι τόσο ομαλές όσο ομαλό είναι και το σύνορο αφού είναι τέτοιες ώστε η u^i να είναι αναλυτική στο ∂D. Ειδικότερα, για χωρίο D κλάσης C^2 η ανάλυση συνέχειας επιτάσσει το σκεδαζόμενο κύμα u^s να ανήκει στον $C^{1,a}(\mathbb{R}^3 \setminus D)$. Έτσι, εφαρμόζοντας τον τύπο $Green$ (2.67) στο σκεδαζόμενο κύμα προκύπτει ότι

$$u^s(x) = \int_{\partial D} \left[u^s(y) \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u^s}{\partial \nu}(y) \Phi(x,y) \right] ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \tag{2.119}$$

από το Δεύτερο Θεώρημα $Green$ (2.34) και εφαρμόζοντάς τον στην ακέραια λύση u^i με $\Phi(x,\cdot)$ έχουμε,

$$0 = \int_{\partial D} \left[u^i(y) \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u^i}{\partial \nu}(y) \Phi(x,y) \right] ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}\,. \tag{2.120}$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις (2.119) και (2.120) και χρησιμοποιώντας την σχέση

$$u^i + u^s = 0 \ \text{στο}\ \partial D$$

προκύπτει το ακόλουθο θεώρημα. Παίρνουμε την αναπαράσταση του πλάτους σκέδασης με την βοήθεια της σχέσης (2.71).

Θεώρημα 2.63. *Για την σκέδαση ενός ακέραιου πεδίου u^i από ένα ηχητικά-μαλακό εμπόδιο D έχουμε*

$$u(x) = u^i(x) - \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \Phi(x,y)\, ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}, \tag{2.121}$$

και το μακρινό πεδίο του σκεδαζόμενου πεδίου u^s δίνεται από την σχέση

$$u_\infty(\hat{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\, e^{-ik\hat{x}\cdot y}\, ds(y), \quad \hat{x} \in \mathbb{S}^2. \tag{2.122}$$

Στην φυσική, η αναπαράσταση (2.121) για σκεδαζόμενο πεδίο που προκύπτει από δευτερεύουσες πηγές (*secondary sources*) είναι γνωστή ως **Αρχή του Huygens**.

Ορισμός 2.64 (Κυματική Συνάρτηση Herglotz). *Μία κυματική συνάρτηση της μορφής*

$$v(x) = \int_{\mathbb{S}^2} e^{ik \cdot d} g(d)\, ds(d)\,, \quad x \in \mathbb{R}^3, \tag{2.123}$$

όπου $g \in L^2(\mathbb{S}^2)$ καλείται ***κυματική συνάρτηση Herglotz*** *και η συνάρτηση g καλείται* ***πυρήνας Herglotz του v****.*

Παρατήρηση 2.65.

1. *Οι κυματικές συναρτήσεις Herglotz είναι ακέραιες λύσεις της εξίσωσης Helmholtz.*

2. *Για $g \in L^2(\mathbb{S}^2)$ η συνάρτηση*

$$v(x) = \int_{\mathbb{S}^2} e^{-ik \cdot d} g(d)\, ds(d)\,, \quad x \in \mathbb{R}^3, \tag{2.124}$$

ορίζει επίσης κυματική συνάρτηση Herglotz.

Θεώρημα 2.66. *Έστω $(d_n)_n$ ακολουθία μοναδιαίων διανυσμάτων η οποία είναι πυκνό σύνολο στην $\mathbb{S}^2$ και ορίζεται το σύνολο $\mathcal{F}$ των πλατών σκέδασης ως*

$$\mathcal{F} \; := \; \{u_\infty(\cdot, d_n) \, : \, n = 1, 2, \cdots\}. \tag{2.125}$$

Τότε $\mathcal{F}$ είναι πλήρες στον $L^2(\mathbb{S}^2)$ αν και μόνο αν δεν υπάρχει ιδιοσυνάρτηση Dirichlet στο D που να είναι κυματική συνάρτηση Herglotz.

2.3 Ευθύ Πρόβλημα Σκέδασης στις Δύο Διαστάσεις

Σε αυτήν την ενότητα διατυπώνουμε το Ευθύ Πρόβλημα Σκέδασης στις δύο διαστάσεις. Αρχικά, αναφέρουμε τις συναρτήσεις Bessel, Neumann και Hankel, καθώς και βασικές ιδιότητες αυτών. Στην συνέχεια ορίζουμε τις σφαιρικές αρμονικές στις τρεις και στις δύο διαστάσεις. Τέλος, διατυπώνουμε το Ευθύ Πρόβλημα Σκέδασης στις δύο διαστάσεις.

2.3.1 Συναρτήσεις Bessel, Neumann και Hankel

Σε αυτήν την υποενότητα θα ορίσουμε τις συναρτήσεις Bessel, Neumann και Hankel καθώς και θα μελετήσουμε βασικές ιδιότητες αυτών.

Συνάρτηση Bessel

Η διαφορική εξίσωση Bessel $n-$τάξης είναι η:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} + \left(1 - \frac{n^2}{r^2}\right) u = 0 \tag{2.126}$$

Στην εξίσωση αυτή για $r = 0$ οι συντελεστές απειρίζονται άρα αυτό αποτελεί ιδιάζον σημείο και μάλιστα κανονικό ιδιάζον σημείο. Δηλαδή, οι λύσεις κοντά σε αυτό το σημείο συμπεριφέρονται σχεδόν όπως οι λύσεις της εξίσωσης Euler η οποία είναι η

$$u'' + \frac{b}{r}u' + \frac{c}{r^2}u = 0$$

γιατί τα όρια

$$\lim_{r\to 0} \frac{r \cdot \frac{1}{r}}{1} = 1$$

$$\lim_{r\to 0} r^2 \cdot \frac{1 - \frac{n^2}{r^2}}{1} = -n^2$$

υπάρχουν.

Αναζητούμε λύση της μορφής

$$u(r) = r^s \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k \ , \ (a_0 \neq 0) \tag{2.127}$$

Παραγωγίζοντας κατάλληλα την (2.127) και αντικαθιστώντας στην (2.126) προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{aligned} k = 0 \quad &, \quad [s(s-1) + s - n^2]a_0 = 0 \\ k = 1 \quad &, \quad [(s+1)s + s + 1 - n^2]a_1 = 0 \\ k \geq 2 \quad &, \quad [(s+k)(s+k-1) + s + k - n^2]a_k + a_{k-2} = 0 \end{aligned}$$

Από την πρώτη εξίσωση έχουμε $s = \pm n$ χωρίς βλάβη της γενικότητας διαλέγουμε το $s = n$, από την δεύτερη εξίσωση προκύπτει $a_1 = 0$ και από την τρίτη έχουμε τον αναδρομικό τύπο

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{(s+k)^2 - n^2} \ , \ k = 2, 3, \cdots \tag{2.128}$$

και έτσι προσδιορίζουμε όλους τους συντελεστές. Για k περιττό $a_k = 0$ και επιλέγοντας $a_0 = \frac{2^{-n}}{n!}$ καταλήγουμε στην ειδική λύση

$$J_n(r) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\left(\frac{r}{2}\right)^{n+2j}}{j!\,(n+j)!} \tag{2.129}$$

Η (2.129) ονομάζεται συνάρτηση Bessel $n-$τάξης.

Αν το n είναι θετικός ακέραιος χρησιμοποιώντας την συνάρτηση Γ γάμμα που έχει την ιδιότητα $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ με $a_0 = \frac{2^{-n}}{\Gamma(n+1)}$ έχουμε συνάρτηση Bessel $n-$τάξης

$$J_n(r) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\left(\frac{r}{2}\right)^{n+2j}}{\Gamma(j+1)\Gamma(n+j+1)} \tag{2.130}$$

Οι J_n και J_{-n} είναι ζεύγος γραμμικώς ανεξάρτητων συναρτήσεων. Οι ρίζες της J_n είναι άπειρες το πλήθος $0 < r_1 < r_2 < \cdots$ απλές ρίζες δηλαδή, $\forall i = 1, 2, \cdots$, $J'_n(r_i) \neq 0$. Οι ρίζες των J_n και J_{n+1} διατάσσονται εναλλάξ δηλαδή, μεταξύ οποιονδήποτε δύο ριζών της J_n υπάρχει ακριβώς μία ρίζα της J_{n+1}.

Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

1. $J_n(-r) = (-1)^n J_n(r)$
2. $J'_0(r) = -J_1(r)$
3. $J_{n\pm 1}(r) = \frac{n}{r} J_n \mp J'_n(r)$
4. $J_{n-1} + J_{n+2} = \frac{2n}{r} J_n(r)$

Η ασυμπτωτική συμπεριφορά της συνάρτησης Bessel καθώς $r \to \infty$ είναι

$$J_n(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \cos\left(r - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(r^{-3/2}) \tag{2.131}$$

δηλαδή η ποσότητα $[J_n(r) - \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \cos\left(r - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)]r^{3/2}$ είναι φραγμένη για $r \to \infty$.

Για n ημιακέραιο δηλαδή $n = \kappa + \frac{1}{2}$ όπου κ ακέραιος και κάνοντας αλλαγή μεταβλητής $u = r^{-1/2} w$ η (2.126) μετατρέπεται σε

$$w'' + \left(1 - \frac{n^2 - (1/4)}{r^2}\right) w = 0$$

Για $n = 1/2$ γίνεται $w'' + w = 0$ με λύσεις

$$w(r) = A\cos r + B\sin r \Rightarrow u(r) = A\cos r/\sqrt{z} + B\sin r/\sqrt{r}$$

με συνάρτηση Bessel $J_{1/2}(r)$ είναι πεπερασμένη στο $r = 0$ για κατάλληλο Β. Άρα,

$$J_{1/2}(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \sin r \tag{2.132}$$

$$J_{-1/2}(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \cos r \tag{2.133}$$

και από τις ιδιότητες

$$J_{\kappa+\frac{1}{2}}(r) = (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi}} r^{\kappa+\frac{1}{2}} \left(r^{-1}\frac{d}{dz}\right)^{\kappa} \frac{\sin r}{r} \tag{2.134}$$

Συνάρτηση Neumann

Για μη ακέραιο n μία άλλη ειδική λύση της εξίσωσης Bessel $n-$τάξης (2.126) είναι η συνάρτηση Neumann η οποία ορίζεται ως

$$Y_n(r) = \frac{\cos n\pi}{\sin n\pi} J_n(r) - \frac{1}{\sin n\pi} J_{-n}(r) \tag{2.135}$$

Η ασυμπτωτική συμπεριφορά της συνάρτησης Neumann καθώς $r \to \infty$ είναι

$$Y_n(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \sin\left(r - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(r^{-3/2}) \tag{2.136}$$

δηλαδή η ποσότητα $[Y_n(r) - \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \sin\left(r - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)] r^{3/2}$ είναι φραγμένη για $r \to \infty$.

Συνάρτηση Hankel

Για μη ακέραιο n μία άλλη ειδική λύση της εξίσωσης Bessel $n-$τάξης (2.126) είναι η συνάρτηση Hankel η οποία ορίζεται με τη βοήθεια των (2.129) και (2.135) ως

$$H_n^{\pm}(r) = J_n(r) \pm i Y_n(r) \tag{2.137}$$

Η ασυμπτωτική συμπεριφορά της συνάρτησης Hankel καθώς $r \to \infty$ με τη βοήθεια των (2.131) και (2.136) είναι

$$H_n^{\pm}(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \exp\left[\pm i \left(r - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right] + O(r^{-3/2}) \tag{2.138}$$

δηλαδή η ποσότητα $[H_n^{\pm}(r) - \exp[\pm i\left(r - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)]] r^{3/2}$ είναι φραγμένη για $r \to \infty$.

2.3.2 Σφαιρικές Αρμονικές στις Τρεις Διαστάσεις

Σε αυτήν την υποενότητα ορίζουμε τις σφαιρικές αρμονικές στις τρεις και μέσω αυτών κάνουμε κάποιες παρατηρήσεις και παρουσιάζουμε κάποια αποτελέσματα για το Ευθύ Πρόβλημα Σκέδασης στις τρεις διαστάσεις.

Ορισμός 2.67. *Οι λύσεις της εξίσωσης Laplace $\Delta L = 0$ ονομάζονται* ***αρμονικές****. Τα ομογενή αρμονικά πολυώνυμα που περιορίζονται στην μοναδιαία σφαίρα $\mathbb{S}^2$ ονομάζονται* ***σφαιρικές αρμονικές n-τάξης****.*

Θεώρημα 2.68. *Υπάρχουν ακριβώς $2n+1$ γραμμικώς ανεξάρτητες σφαιρικές αρμονικές n-τάξης.*

Θα ασχοληθούμε με σφαιρικές αρμονικές της μορφής

$$Y_n^m(\theta, \phi) = f(\cos\theta)\ e^{im\phi}, \tag{2.139}$$

όπου η f ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση Legendre n-τάξης

$$(1-t^2)f''(t) - 2tf'(t) + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-t^2}\right] f(t) = 0, \tag{2.140}$$

όπου $m = -n, \cdots, n$ και $n = 0, 1, \cdots$. Οι λύσεις της εξίσωσης Legendre

$$(1-t^2)g''(t) - 2tg'(t) + n(n+1)g(t) = 0, \tag{2.141}$$

είναι τα **πολυώνυμα Legendre** $P_n(t)$ με $n = 0, 1, \cdots$ τα οποία αποτελούν πλήρες ορθοκανονικό σύστημα στον $L^2[-1, 1]$.
Παραγωγίζοντάς τα m-φορές παίρνουμε τις αντίστοιχες **συναρτήσεις Legendre** $P_n^m(t)$ με τύπο

$$P_n^m(t) \ = \ (1-t^2)^{m/2}\ \frac{d^m P_n(t)}{dt^m},\ m = 0, \cdots, n \tag{2.142}$$

που λύνουν την διαφορική εξίσωση Legendre (2.140) για $n = 0, 1, \cdots$. Έτσι οι σφαιρικές αρμονικές (2.139) παίρνουν την μορφή

$$Y_n^m(\theta, \phi) = P_n^m(\cos\theta)\ e^{im\phi}, \tag{2.143}$$

όπου $m = 0, \cdots, n$ και $n = 0, 1, \cdots$.

Θεώρημα 2.69. *Οι σφαιρικές αρμονικές*

$$Y_n^m(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}\ \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}}\ P_n^{|m|}(\cos\theta)\ e^{im\phi}, \tag{2.144}$$

όπου $m = -n, \cdots, n$ και $n = 0, 1, \cdots$ αποτελούν πλήρες ορθοκανονικό σύστημα στον $L^2(\mathbb{S}^2)$.

Θεώρημα 2.70 (Θεώρημα Άθροισης(Addition Theorem)). *Έστω Y_n^m με $m = -n, \cdots, n$ ένα ορθοκανονικό σύστημα $2n+1$ σφαιρικών αρμονικών n-τάξης. Τότε $\forall\ \hat{x} = x/|x|, \hat{y} = y/|y| \in \mathbb{S}^2$ έχουμε ότι*

$$\sum_{m=-n}^{n} Y_n^m(\hat{x})\overline{Y_n^m(\hat{y})} = \frac{2n+1}{4\pi}\ P_n(\cos\theta), \tag{2.145}$$

όπου θ είναι η γωνία μεταξύ των $\hat{x}$ και $\hat{y}$.

Τώρα θα ασχοληθούμε τις σφαιρικές συναρτήσεις Bessel. Ψάχνουμε λύσεις της εξίσωσης Helmholtz της μορφής

$$\begin{aligned} u(x) &= f(k|x|)Y_n\left(\frac{x}{|x|}\right) && (2.146)\\ \Leftrightarrow\ u(x) &= f(kr)Y_n(\hat{x}), \quad r=|x|,\ \hat{x}\in\mathbb{S}^2, && (2.147)\end{aligned}$$

όπου Y_n είναι σφαιρικές αρμονικές n-τάξης και f λύνει την σφαιρική διαφορική εξίσωση Bessel n-τάξης.

$$t^2f''(t)+2tf'(t)+\left[t^2-n(n+1)\right]f(t)=0, \quad n=0,1,\cdots. \tag{2.148}$$

Η $g(t)=t^{1/2}f(t)$ λύνει την διαφορική εξίσωση Bessel $[n+(1/2)]-$τάξης. Οι λύσεις τις εξίσωσης (2.148) είναι οι

$$j_n(t) := \sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^pt^{2p+n}}{p!\ 2^p\ 1\cdot 3\cdots(2p+2n+1)}, \tag{2.149}$$

οι οποίες καλούνται **σφαιρικές συναρτήσεις Bessel n-τάξης** είναι αναλυτικές $\forall t\in\mathbb{R}$ και οι

$$y_n(t) := \frac{(2n)!}{n!\ 2^n}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^pt^{2p-n-1}}{p!\ 2^p\ (-2n+1)(-2n+3)\cdot 3\cdots(2p-2n-1)}, \tag{2.150}$$

οι οποίες καλούνται **σφαιρικές συναρτήσεις Neumann n-τάξης** είναι αναλυτικές $\forall t\in(0,\infty)$. Οι σφαιρικές συναρτήσεις Bessel και Neumann n-τάξης είναι γραμμικώς ανεξάρτητες και αυτό φαίνεται από την Wronskian

$$W(j_n(t),y_n(t))=\begin{vmatrix} j_n(t) & y_n(t)\\ j_n'(t) & y_n'(t)\end{vmatrix}=j_n(t)y_n'(t)-j_n'(t)y_n(t) \tag{2.151}$$

η οποία ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση

$$\begin{aligned} W'+\frac{2}{t}\,W &= 0\\ \Rightarrow\ W(j_n(t),y_n(t)) &= c\,\frac{1}{t^2}.\end{aligned}$$

Για $t\to 0$ και από την (2.151) έχουμε ότι

$$W(j_n(t),y_n(t)) = \frac{1}{t^2} \Rightarrow j_n(t)y_n'(t)-j_n'(t)y_n(t) = \frac{1}{t^2}. \tag{2.152}$$

Τόσο για $f_n=j_n$ όσο και για $f_n=y_n$ ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις

$$\begin{aligned} f_{n+1}(t)+fn-1(t) &= \frac{2n+1}{t}\,f_n(t)\,, \quad n=1,2,\cdots && (2.153)\\ f_{n+1}(t) &= -t^n\,\frac{d(t^{-n}f_n(t))}{dt}\,, \quad n=0,1,\cdots && (2.154)\\ t^{n+1}\,f_{n-1}(t) &= \frac{d(t^{n+1}f_n(t))}{dt}\,, \quad n=1,2,\cdots. && (2.155)\end{aligned}$$

Ορισμός 2.71. *Οι συναρτήσεις*

$$h_n^{(1,2)}(t) \;:=\; j_n(t) \;\pm\; iy_n(t) \tag{2.156}$$

*ονομάζονται συναρτήσεις **Hankel πρώτου και δευτέρου είδους n-τάξης**.*

Έχουμε ότι ομοιόμορφα σε συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}$ προκύπτει η αναπαράσταση

$$j_n(t) \;:=\; \frac{t^n}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \quad n\to\infty \tag{2.157}$$

και ομοιόμορφα σε συμπαγή υποσύνολα του $(0,\infty)$ προκύπτει η αναπαράσταση

$$h_n^{(1)}(t) \;:=\; \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{it^{n+1}}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \quad n\to\infty\ . \tag{2.158}$$

ομοιόμορφα σε συμπαγή υποσύνολα του $(0,\infty)$.
Ο **τύπος του Stirling** ορίζεται ως

$$n! \;=\; \sqrt{2n\pi}\;\left(\frac{n}{e}\right)^n(1+O(1)), \quad n\to\infty. \tag{2.159}$$

Μέσω αυτού έχουμε

$$\begin{aligned} 2n! \;&=\; \sqrt{4n\pi}\;\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}(1+O(1)), \quad n\to\infty \\ \Leftrightarrow\; 2n! \;&=\; 2^{2n+(1/2)}\sqrt{2n\pi}\;\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}(1+O(1)), \quad n\to\infty \end{aligned}$$

Άρα τελικά

$$\frac{2n!}{n!} \;=\; 2^{2n+(1/2)}\;\left(\frac{n}{e}\right)^n(1+O(1)), \quad n\to\infty. \tag{2.160}$$

Επομένως, μέσω της (2.160) έχουμε ομοιόμορφα σε συμπαγή υποσύνολα του $(0,\infty)$ ότι

$$h_n^{(1)}(t) \;:=\; O\left(\frac{2n}{et}\right)^n, \quad n\to\infty\ . \tag{2.161}$$

Όπως αναφέραμε στην προηγούμενη ενότητα οι Bessel και οι Neumann εκφράζονται τριγωνομετρικά ως

$$j_0(t) \;=\; \frac{\sin t}{t} \;\;\text{και}\;\; y_0(t) \;=\; -\frac{\cos t}{t}\ .$$

Τότε από (2.156) έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\sin t\,\pm\,\cos t}{t} \;&=\; \frac{i}{t}(-i\sin t\,\pm\,\cos t) \;=\; \frac{-1}{it}(-i\sin t\,\pm\,\cos t) \;=\; \frac{1}{it}(i\sin t\,\mp\,\cos t) \\ \Rightarrow\; \frac{1}{it}(i\sin t\,+\,\cos t) \;&=\; \frac{e^{it}}{it} \quad\text{και}\quad \frac{1}{it}(i\sin t\,-\,\cos t) \;=\; \frac{e^{-it}}{-it} \\ \Rightarrow\; h_0^{(1)}(t) \;&=\; \frac{e^{it}}{it} \quad\text{και}\quad h_0^{(2)}(t) \;=\; \frac{e^{-it}}{-it}\ . \end{aligned}$$

Με επαγωγή από την (2.154) έχουμε τις **σφαιρικές συναρτήσεις Hankel πρώτου και δεύτερου είδους** αντίστοιχα

$$h_n^{(1)}(t) \;=\; (-i)^n\,\frac{e^{it}}{it}\,\left[1+\sum_{p=1}^{n}\frac{a_{pn}}{t^p}\right] \;\text{ και }\; h_n^{(2)}(t) \;=\; i^n\,\frac{e^{-it}}{-it}\,\left[1+\sum_{p=1}^{n}\frac{\bar{a}_{pn}}{t^p}\right], \tag{2.162}$$

όπου $(a_{pn})_{p=1}^{n}$ είναι μιγαδικοί συντελεστές. Από την (2.162) προκύπτει η

$$h_n^{(1)}(t) \;=\; (-i)^{n+1}\,\frac{e^{it}}{t}\,\left[1+\sum_{p=1}^{n}\frac{a_{pn}}{t^p}\right] \;\text{ και }\; h_n^{(2)}(t) \;=\; i^{n+1}\,\frac{e^{-it}}{t}\,\left[1+\sum_{p=1}^{n}\frac{\bar{a}_{pn}}{t^p}\right], \tag{2.163}$$

όπου $(a_{pn})_{p=1}^{n}$ είναι μιγαδικοί συντελεστές. Παρατηρώντας ότι

$$e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i \;\text{ και }\; e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

έχουμε ότι

$$\left(e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)^{n+1} = (-i)^{n+1} \;\text{ και }\; \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{n+1} = i^{n+1}$$

και άρα

$$e^{-i\frac{\pi}{2}(n+1)} = (-i)^{n+1} \;\text{ και }\; e^{i\frac{\pi}{2}(n+1)} = i^{n+1}. \tag{2.164}$$

Επομένως, από την (2.163) και την (2.164) προκύπτει ότι

$$h_n^{(1)}(t) \;=\; \frac{e^{i(t-\frac{\pi}{2}(n+1))}}{t}\,\left[1+\sum_{p=1}^{n}\frac{a_{pn}}{t^p}\right] \;\text{ και }\; h_n^{(2)}(t) \;=\; \frac{e^{-i(t-\frac{\pi}{2}(n+1))}}{t}\,\left[1+\sum_{p=1}^{n}\frac{\bar{a}_{pn}}{t^p}\right], \tag{2.165}$$

όπου $(a_{pn})_{p=1}^{n}$ είναι μιγαδικοί συντελεστές. Από την (2.165) προκύπτει η **ασυμπτωτική συμπεριφορά των σφαιρικών συναρτήσεων Hankel πρώτου και δεύτερου είδους**

$$h_n^{(1)}(t) \;=\; \frac{e^{i(t-\frac{\pi}{2}(n+1))}}{t}\,\left[1+O\left(\frac{1}{t}\right)\right] \;\text{ και }\; h_n^{(2)}(t) \;=\; \frac{e^{-i(t-\frac{\pi}{2}(n+1))}}{t}\,\left[1+O\left(\frac{1}{t}\right)\right], \;\; t\to\infty \tag{2.166}$$

και αντίστοιχα οι **παράγωγοι πρώτου και δεύτερου είδους**

$$h_n^{(1)\prime}(t) \;=\; \frac{e^{i(t-\frac{n\pi}{2})}}{t}\,\left[1+O\left(\frac{1}{t}\right)\right] \;\text{ και }\; h_n^{(2)\prime}(t) \;=\; \frac{e^{-i(t-\frac{n\pi}{2})}}{t}\,\left[1+O\left(\frac{1}{t}\right)\right], \;\; t\to\infty\,. \tag{2.167}$$

Παρατήρηση 2.72. *Το πραγματικό και το φανταστικό μέρος των (2.166) είναι οι ασυμπτωτικές συμπεριφορές των συναρτήσεων Bessel και Neumann αντίστοιχα. Ομοίως, οι (2.167) μας δίνουν τις ασυμπτωτικές συμπεριφορές αυτών.*

Ψάχνοντας λύση της εξίσωσης Helmholtz σε πολικές συντεταγμένες καταλήγουμε σε σφαιρικές κυματικές συναρτήσεις της μορφής που βλέπουμε στο ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2.73. *Έστω Y_n^m μία σφαιρική αρμονική n-τάξης με $m = -n, \cdots, n$. Τότε για $x \in \mathbb{R}^3$ και $\hat{x} = x/|x| \in \mathbb{S}^2$ η*

$$u_n^m(x) \;=\; j_n(k|x|)\, Y_n^m\left(\frac{x}{|x|}\right) \;=\; j_n(k|x|)\, Y_n^m(\hat{x}) \tag{2.168}$$

είναι ακέραια λύση της εξίσωσης Helmholtz και η

$$v_n^m(x) \;=\; h_n^{(1)}(k|x|)\, Y_n^m\left(\frac{x}{|x|}\right) \;=\; h_n^{(1)}\, Y_n^m(\hat{x}) \tag{2.169}$$

είναι ακτινοβόλος λύση της εξίσωσης Helmholtz στον $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Θεώρημα 2.74 (Θεώρημα Άθροισης για τη Θεμελιώδη Λύση). *Έστω Y_n^m με $m = -n, \cdots, n$ ένα ορθοκανονικό σύστημα $2n+1$ σφαιρικών αρμονικών n-τάξης. Τότε για $|x| > |y|$, $x, y \in \mathbb{R}^3$ και $\hat{x} = x/|x|, \hat{y} = y/|y| \in \mathbb{S}^2$ έχουμε ότι*

$$\Phi(x,y) \;=\; \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \;=\; ik\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=-n}^{n} h_n^{(1)}(k|x|)\, Y_n^m\left(\frac{x}{|x|}\right) j_n(k|y|)\, \overline{Y_n^m\left(\frac{y}{|y|}\right)} \tag{2.170}$$

$$\Leftrightarrow\; \Phi(x,y) \;=\; \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \;=\; ik\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=-n}^{n} h_n^{(1)}(k|x|)\, Y_n^m(\hat{x})\, j_n(k|y|)\, \overline{Y_n^m(\hat{y})}\,. \tag{2.171}$$

Τόσο η σειρά όσο και οι όρο προς όρο πρώτες παράγωγοί της συγκλίνουν απόλυτα και ομοιόμορφα για συμπαγή υποσύνολα που ισχύει $|x| > |y|$.

Παρατήρηση 2.75. *Μέσω της (2.171) και του Θεωρήματος (2.73) έχουμε ότι*

$$\Phi(x,y) \;=\; ik\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=-n}^{n} h_n^{(1)}(k|x|)\, Y_n^m(\hat{x})\, j_n(k|y|)\, \overline{Y_n^m(\hat{y})} \;=\; ik\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=-n}^{n} v_n^m(x)\, \overline{u_n^m(y)}\,. \tag{2.172}$$

Ορισμός 2.76. *Έστω Y_n^m με $m = -n, \cdots, n$ ένα ορθοκανονικό σύστημα $2n+1$ σφαιρικών αρμονικών n-τάξης. Για $x, z \in \mathbb{R}^3$, $r = |x|$ και $\hat{x} = x/|x|, \hat{z} = z/|z| \in \mathbb{S}^2$ έχουμε τον* ***τύπο Funk-Hecke***

$$\int_{\mathbb{S}^2} e^{-ik\,x\cdot\hat{z}} Y_n^m(\hat{z})\, ds(\hat{z}) \;=\; \frac{4\pi}{i^n}\, j_n(k|x|)\, Y_n^m\left(\frac{x}{|x|}\right), \tag{2.173}$$

$$\Leftrightarrow\; \int_{\mathbb{S}^2} e^{-ikr\,\hat{x}\cdot\hat{z}} Y_n^m(\hat{z})\, ds(\hat{z}) \;=\; \frac{4\pi}{i^n}\, j_n(kr)\, Y_n^m(\hat{x})\,. \tag{2.174}$$

Ορισμός 2.77. *Για $x \in \mathbb{R}^3$, $r = |x|$ και $\hat{x} = x/|x| \in \mathbb{S}^2$ έχουμε το* ***ανάπτυγμα Jacobi-Anger***

$$e^{ik\,x\cdot d} \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} i^n(2n+1) j_n(k|x|) P_n(\cos\theta), \tag{2.175}$$

$$\Leftrightarrow\; e^{ikr\,\hat{x}\cdot d} \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} i^n(2n+1) j_n(kr) P_n(\cos\theta), \tag{2.176}$$

όπου d το μοναδιαίο κάθετο, θ η γωνία μεταξύ x και d. Η σύγκλιση της σειράς είναι ομοιόμορφη σε συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^3$.

Παρατήρηση 2.78. *Το ανάπτυγμα Jacobi-Anger προκύπτει άμεσα από τις σχέσεις (2.173), (2.174) και το Θεώρημα (2.70).*

2.3.3 Σφαιρικές Αρμονικές στις Δύο Διαστάσεις

Σε αυτήν την υποενότητα ορίζουμε τις σφαιρικές αρμονικές στις δυο διαστάσεις και παρουσιάζουμε κάποια αποτελέσματα αντίστοιχα με την προηγούμενη υποενότητα.

Στις δύο διαστάσεις οι σφαιρικές αρμονικές n-τάξης είναι της μορφής

$$\tilde{Y}_n(\phi) \ := \ e^{\pm in\phi} \tag{2.177}$$

και γραμμικώς ανεξάρτητες μεταξύ τους. Αφού το n παίρνει τιμές $n = 0, 1 \cdots$ βλέπουμε ότι πάλι ισχύει το Θεώρημα (2.68) και στις δύο διαστάσεις. Η εξίσωση Bessel n-τάξης στις δύο διαστάσεις έχει την μορφή

$$t^2 f''(t) + t f'(t) + [t^2 - n^2]\, f(t) = 0, \quad n = 0, 1, \cdots . \tag{2.178}$$

Οι δύο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της εξίσωσης Bessel n-τάξης είναι οι

$$J_n(t) \ := \ \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!\,(n+p)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2p+n}, \tag{2.179}$$

με $n = 0, 1, \cdots$ οι οποίες καλούνται **σφαιρικές συναρτήσεις Bessel n-τάξης** είναι αναλυτικές $\forall t \in \mathbb{R}$ και οι

$$\begin{aligned} y_n(t) \ := \ & \frac{2}{\pi}\left[ln\frac{t}{2} + C\right] J_n(t) - \frac{1}{\pi}\sum_{p=0}^{n-1} \frac{(n-1-p)!}{p!} \left(\frac{t}{2}\right)^{-2p+n} \\ & -\frac{1}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!\,(n+p)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2p+n} [\psi(p+n) + \psi(p)], \ n = 1, 2, \cdots \end{aligned} \tag{2.180}$$

$$y_0(t) \ := \ \frac{2}{\pi}\left[ln\frac{t}{2} + C\right] J_0(t) - \frac{2}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!\,(n+p)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2p} \psi(p), \tag{2.181}$$

οι οποίες καλούνται **σφαιρικές συναρτήσεις Neumann n-τάξης** είναι αναλυτικές $\forall t \in (0, \infty)$. Στις σχέσεις (2.180) και (2.181) C είναι η **σταθερά Euler** και δίνεται από την σχέση

$$C \ := \ \lim_{p\to\infty} [\psi(p) - ln\, p] \tag{2.182}$$

όπου

$$\psi(p) \ := \ \sum_{m=1}^{p} \frac{1}{m}, \quad p = 1, 2, \cdots \tag{2.183}$$

$$\psi(0) \ := \ 0. \tag{2.184}$$

Οι σφαιρικές συναρτήσεις Bessel και Neumann n-τάξης είναι γραμμικώς ανεξάρτητες και αυτό φαίνεται από την Wronskian και εργαζόμενοι όπως στην προηγούμενη υποενότητα έχουμε

$$W(j_n(t), y_n(t)) = \begin{vmatrix} J_n(t) & Y_n(t) \\ J_n'(t) & Y_n'(t) \end{vmatrix} = J_n(t)Y_n'(t) - J_n'(t)Y_n(t) \tag{2.185}$$

η οποία ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση

$$\begin{aligned} W' + \frac{1}{t}\,W &= 0 \\ \Rightarrow\ W(J_n(t), Y_n(t)) &= c\,\frac{1}{t}. \end{aligned}$$

Για $t \to 0$ και από την (2.185) έχουμε ότι

$$W(J_n(t), Y_n(t)) \;=\; \frac{2}{\pi\, t} \;\Rightarrow\; J_n(t)Y_n'(t) - J_n'(t)Y_n(t) \;=\; \frac{2}{\pi\, t}\,. \tag{2.186}$$

Ομοίως με τη τριδιάστατη περίπτωση τόσο για $f_n = J_n$ όσο και για $f_n = Y_n$ ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις

$$f_{n+1}(t) + fn - 1(t) \;=\; \frac{2n}{t}\, f_n(t)\;, \quad n = 1, 2, \cdots \tag{2.187}$$

$$f_{n+1}(t) \;=\; -t^n\, \frac{d(t^{-n} f_n(t))}{dt}\;, \quad n = 0, 1, \cdots \tag{2.188}$$

$$t^n\, f_{n-1}(t) \;=\; \frac{d(t^n f_n(t))}{dt}\;, \quad n = 1, 2, \cdots\,. \tag{2.189}$$

Ορισμός 2.79. *Οι συναρτήσεις*

$$H_n^{(1,2)}(t) \;:=\; J_n(t) \;\pm\; iY_n(t) \tag{2.190}$$

ονομάζονται συναρτήσεις ***Hankel πρώτου και δευτέρου είδους n-τάξης****.*

Έχουμε ότι ομοιόμορφα σε συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}$ προκύπτει η αναπαράσταση

$$J_n(t) \;:=\; \frac{t^n}{n!\, 2^n}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \quad n \to \infty \tag{2.191}$$

και ομοιόμορφα σε συμπαγή υποσύνολα του $(0, \infty)$ προκύπτει η αναπαράσταση

$$H_n^{(1)}(t) \;:=\; \frac{(n-1)!\, 2^n}{\pi\, i t^{n+1}}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \quad n \to \infty\,. \tag{2.192}$$

ομοιόμορφα σε συμπαγή υποσύνολα του $(0, \infty)$. Με παρόμοιο χειρισμό με την τριδιάστατη περίπτωση προκύπτει η **ασυμπτωτική συμπεριφορά των σφαιρικών συναρτήσεων Hankel πρώτου και δεύτερου είδους**

$$H_n^{(1)}(t) \;=\; \sqrt{\frac{2}{\pi}}\;\frac{e^{i(t-(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2})}}{t^{1/2}}\;\left[1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right] \;\text{ και }\; H_n^{(2)}(t) \;=\; \sqrt{\frac{2}{\pi}}\;\frac{e^{-i(t-(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2})}}{t^{1/2}}\;\left[1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right],\; t \to \infty \tag{2.193}$$

και αντίστοιχα οι **παράγωγοι πρώτου και δεύτερου είδους**

$$H_n^{(1)'}(t) \ = \ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \ \frac{e^{i(t-(n-\frac{1}{2})\frac{\pi}{2})}}{t^{1/2}} \ \left[1+O\left(\frac{1}{t}\right)\right] \ \text{και} \ H_n^{(2)'}(t) \ = \ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \ \frac{e^{-i(t-(n-\frac{1}{2})\frac{\pi}{2})}}{t^{1/2}} \ \left[1+O\left(\frac{1}{t}\right)\right], \ t \to \infty \, . \tag{2.194}$$

Παρατήρηση 2.80. *Το πραγματικό και το φανταστικό μέρος των (2.193) είναι οι ασυμπτωτικές συμπεριφορές των συναρτήσεων Bessel και Neumann αντίστοιχα. Ομοίως, οι (2.194) μας δίνουν τις ασυμπτωτικές συμπεριφορές αυτών.*

2.3.4 Ευθύ Πρόβλημα Σκέδασης στις Δύο Διαστάσεις

Σε αυτήν την υποενότητα διατυπώνουμε το Ευθύ Πρόβλημα Σκέδασης στις δύο διαστάσεις και παραθέτουμε βασικά αποτελέσματα για την θεμελίωσή τους.

Η εξίσωση Helmholtz στις δύο διαστάσεις είναι η

$$\Delta u + k^2 u = 0 \ , \quad \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D} \tag{2.195}$$

με συνοριακή συνθήκη Dirichlet

$$u = 0 \ , \quad \Gamma = \partial D \tag{2.196}$$

Ψάχνουμε λύση της εξίσωσης Helmholtz σε δύο διαστάσεις της μορφής

$$u(x) = f(kr)e^{\pm in\phi} \tag{2.197}$$

σε πολικές συντεταγμένες όπου η f ικανοποιεί την εξίσωση Bessel n-τάξης στις δύο διαστάσεις έχει την μορφή

$$t^2 f''(t) + t f'(t) + \left[t^2 - n^2\right] f(t) = 0, \quad n = 0, 1, \cdots \, . \tag{2.198}$$

Η θεμελιώδης λύση της εξίσωσης Helmholtz στις δύο διαστάσεις είναι

$$\Phi(x,y) \ := \ \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x-y|) \, , \quad x \neq y \tag{2.199}$$

για σταθερό $y \in \mathbb{R}^2$ ικανοποιεί την εξίσωση Helmholtz στον $\mathbb{R}^2 \setminus \{y\}$.

Μέσω των σχέσεων (2.179) και (2.181)

$$\Phi(x,y) := \frac{1}{2\pi} \, ln \frac{1}{|x-y|} + \frac{i}{4} - \frac{1}{2\pi} \, ln \frac{k}{2} - \frac{C}{2\pi} + O\left(|x-y|^2 \, ln \frac{1}{|x-y|}\right), \ |x-y| \to 0 \tag{2.200}$$

Άρα έχει την ίδια συμπεριφορά με τις τρεις διαστάσεις.

Θεώρημα 2.81. *Έστω $e^{\pm in\phi}$ μία σφαιρική αρμονική n-τάξης. Τότε για $x \in \mathbb{R}^2$ η*

$$u_n(x) \;=\; J_n(k|x|)e^{\pm in\phi} \tag{2.201}$$

είναι ακέραια λύση της εξίσωσης Helmholtz και η

$$v_n(x) \;=\; H_n^{(1)}(k|x|)e^{\pm in\phi} \tag{2.202}$$

είναι ακτινοβόλος λύση της εξίσωσης Helmholtz στον $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Θεώρημα 2.82 (Θεώρημα Άθροισης για τη Θεμελιώδη Λύση). *Έστω $e^{\pm in\phi}$ με $n = 0, 1, \cdot$ ένα ορθοκανονικό σύστημα $2n+1$ σφαιρικών αρμονικών n-τάξης. Τότε για $|x| > |y|$, $x, y \in \mathbb{R}^2$ και $\hat{x} = x/|x|, \hat{y} = y/|y| \in \mathbb{S}^1$ με $r_x = |x|, r_y = |y|$ έχουμε ότι*

$$\Phi(x,y) = \frac{i}{4}H_0^{(1)}(k|x-y|) \;=\; \frac{i}{4}H_0^{(1)}(k|x|)J_0(k|y|) + 2\sum_{n=1}^{+\infty} H_n^{(1)}(k|x|)\, J_n(k|y|)e^{in\phi} \tag{2.203}$$

$$\Phi(x,y) = \frac{i}{4}H_0^{(1)}(k|x-y|) \;=\; \frac{i}{4}H_0^{(1)}(kr_x)J_0(kr_y) + 2\sum_{n=1}^{+\infty} H_n^{(1)}(kr_x)\, J_n(kr_y)e^{in\phi}. \tag{2.204}$$

Τόσο η σειρά όσο και οι όρο προς όρο πρώτες παράγωγοί της συγκλίνουν απόλυτα και ομοιόμορφα για συμπαγή υποσύνολα που ισχύει $|x| > |y|$.

Παρατήρηση 2.83. *Το*

$$2\sum_{n=1}^{+\infty} H_n^{(1)}(k|x|)\, J_n(k|y|)e^{in\phi}$$

στο προηγούμενο θεώρημα προκύπτει λόγω συμμετρίας και από ιδιότητες προηγούμενης υποενότητας ως

$$\frac{i}{4}H_0^{(1)}(k|x|)J_0(k|y|) + \sum_{n=1}^{+\infty} H_n^{(1)}(k|x|)\, J_n(k|y|)e^{in\phi} + \sum_{n=1}^{\infty} H_n^{(1)}(k|x|)\, J_n(k|y|)e^{-in\phi} =$$

$$\frac{i}{4}H_0^{(1)}(k|x|)J_0(k|y|) + \sum_{n=1}^{+\infty} H_n^{(1)}(k|x|)\, J_n(k|y|)e^{in\phi} - \sum_{n=-1}^{-\infty} H_n^{(1)}(k|x|)\, J_n(k|y|)e^{in\phi} =$$

$$\frac{i}{4}H_0^{(1)}(k|x|)J_0(k|y|) + 2\sum_{n=1}^{+\infty} H_n^{(1)}(k|x|)\, J_n(k|y|)e^{in\phi}.$$

Ορισμός 2.84. *Για $x \in \mathbb{R}^2$, $r = |x|$ και $\hat{x} = x/|x| \in \mathbb{S}^1$ έχουμε το* ***ανάπτυγμα Jacobi-Anger***

$$e^{ik\,x\cdot d} \;=\; J_0(k|x|) + 2\sum_{n=1}^{+\infty} i^n J_n(k|x|)e^{in\phi}, \tag{2.205}$$

$$\Leftrightarrow\; e^{ikr\,\hat{x}\cdot d} \;=\; J_0(kr) + 2\sum_{n=0}^{+\infty} i^n J_n(kr)e^{in\phi}, \tag{2.206}$$

όπου d το μοναδιαίο κάθετο, ϕ η γωνία μεταξύ x και d. Η σύγκλιση της σειράς είναι ομοιόμορφη σε συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$.

Παρατήρηση 2.85. *Το*
$$2\sum_{n=1}^{+\infty} i^n J_n(k|x|)e^{in\phi}$$
στο προηγούμενο ορισμό προκύπτει όπως πριν λόγω συμμετρίας και από ιδιότητες προηγούμενης υποενότητας ως

$$J_0(k|x|) + \sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(k|x|)e^{in\phi} + \sum_{n=1}^{+\infty} i^n J_n(k|x|)e^{-in\phi} =$$

$$J_0(k|x|) + \sum_{n=1}^{+\infty} i^n J_n(k|x|)e^{in\phi} - \sum_{n=-1}^{-\infty} i^n J_n(k|x|)e^{in\phi} =$$

$$J_0(k|x|) + 2\sum_{n=1}^{+\infty} i^n J_n(k|x|)e^{in\phi}.$$

Για φραγμένο $D \subset \mathbb{R}^2$ με C^2-ομαλό σύνορο Γ θεωρούμε ένα επίπεδο προσπίπτον κύμα
$$u^i(x) \;=\; e^{ikx\cdot\hat{d}}.$$
Το Ευθύ Πρόβλημα Σκέδασης στοχεύει στην εύρεση του ολικού πεδίου
$$u = u^i + u^s$$
ως λύση της εξίσωσης Helmholtz.
Θέτοντας $D_e = \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$
$$\Delta u + k^2 u = 0\ ,\quad \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D} \tag{2.207}$$
με συνοριακή συνθήκη Dirichlet
$$u = 0\ ,\quad \Gamma = \partial D. \tag{2.208}$$

Ορισμός 2.86 (Ακτινοβόλος Λύση). *Μία λύση της εξίσωσης Helmholtz της οποίας το χωρίο ορισμού περιέχει το εξωτερικό ενός κύκλου είναι* ***ακτινοβόλος*** *(radiating) αν ικανοποιεί την συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld*
$$\lim_{r\to\infty} r^{1/2}\left(\frac{\partial u^s}{\partial r} - iku^s\right) = 0\ ,\quad r = |x|. \tag{2.209}$$
και το όριο υπάρχει ομοιόμορφα για όλες τις κατευθύνσεις $\hat{x} = x/|x| \in \mathbb{S}^1$ στο μοναδιαίο κύκλο.

Θεώρημα 2.87. *Έστω D φραγμένο χωρίο ανοιχτό συμπλήρωμα ενός μη-φραγμένου χωρίου κλάσης C^2 και με ν συμβολίζουμε το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο ∂D που κατευθύνεται προς το εξωτερικό του D. Υποθέτουμε $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbb{R}^2 \setminus D)$ είναι ακτινοβόλος λύση της εξίσωσης Helmholtz*
$$\Delta u + k^2 u = 0\ \ , \text{στο}\ \ \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D} \tag{2.210}$$
συνάρτηση που έχει κάθετη παράγωγο στο σύνορο υπό την έννοια του ορίου
$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \lim_{h\to 0^+} \nu(x)\cdot grad\ u(x + h\nu(x))\ \ ,\quad x \in \partial D\ , \tag{2.211}$$

υπάρχει ομοιόμορφα στο σύνορο ∂D. Τότε έχουμε τον τύπο του Green

$$u(x) = \int_{\partial D} \left(u(y) \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \Phi(x,y) \right) ds(y) \ , \ x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D} \tag{2.212}$$

Πόρισμα 2.87.1. *Μία ακτινοβόλος λύση της εξίσωσης Helmholtz είναι πεπερασμένη κατά Sommerfeld δηλαδή ικανοποιεί την συνθήκη*

$$u(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right) \ , \ |x| \to \infty \tag{2.213}$$

ομοιόμορφα προς όλες τις κατευθύνσεις $\hat{x} = x/|x| \in \mathbb{S}^1$ στο μοναδιαίο κύκλο.

Ορισμός 2.88. *Μια λύση της Helmholtz ορισμένη στον $\mathbb{R}^2$ καλείται **ακέραια λύση** (**entire solution**) και αν επιπλέον είναι ακτινοβόλος έχει την ιδιότητα να μηδενίζεται στο σύνορο.*

Θεώρημα 2.89. *Μία ακτινοβόλος λύση u της Helmholtz έχει ασυμπτωτική συμπεριφορά ενός σφαιρικού εξερχόμενου κύματος*

$$u^s(x) = \frac{e^{ik|x|}}{\sqrt{|x|}} \left[u_\infty\left(\frac{x}{|x|}\right) + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \right] \ , \quad |x| \to \infty, \tag{2.214}$$

$$u^s(x) = \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}} \left[u_\infty(\hat{x}) + O\left(\frac{1}{r}\right) \right] \ , \quad r = |x| \to \infty, \tag{2.215}$$

*ομοιόμορφα για όλες τις κατευθύνσεις $\hat{x} = x/|x| \in \mathbb{S}^1$ στο μοναδιαίο κύκλο και η συνάρτηση u_∞ ορίζεται στο μοναδιαίο κύκλο $\mathbb{S}^1$ και καλείται **πλάτος σκέδασης** ή **μακρινό πεδίο** (**far field pattern**) της u. Κάτω από τις υποθέσεις του Θεωρήματος (2.87) έχουμε,*

$$u_\infty(\hat{x}) = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{8k\pi}} \int_{\partial D} \left[u(y) \frac{\partial e^{-ik\hat{x}\cdot y}}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) e^{-ik\hat{x}\cdot y} \right] ds(y) \ , \ \hat{x} \in \mathbb{S}^1 \tag{2.216}$$

Λήμμα 2.90 (**Λήμμα Rellich**)**.** *Έστω ένα φραγμένο σύνολο D, το οποίο αποτελεί ανοιχτό συμπλήρωμα ενός μη φραγμένου χωρίου και έστω $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D})$ λύση της εξίσωσης Helmholtz που ικανοποιεί την σχέση*

$$\lim_{r\to\infty} \int_{|x|=r} |u(x)|^2 \, ds = 0 \ . \tag{2.217}$$

Τότε $u = 0$ στο $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$.

Δυναμικό Απλού Στρώματος

$$u(x) := \int_{\partial D} \Phi(x,y)\phi(y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D \tag{2.218}$$

Ορισμός 2.91 (**Τελεστής Δυναμικού Απλού Στρώματος**)**.** *Ο τελεστής δυναμικού απλού στρώματος $S : L^2(\mathbb{S}^1) \to L^2(\mathbb{S}^1)$*

$$(S\phi)(x) := \int_{\partial D} \Phi(x,y)\phi(y) \, ds(y), \quad x \in \partial D \ , \tag{2.219}$$

Η λύση για την σκέδαση ενός επίπεδου κύματος

$$u^i(x) = e^{ikx\cdot d}$$

από μία ακουστικά μαλακός κύκλος με κέντρο την αρχή και ακτίνα R. Το μοναδιαίο διάνυσμα d περιγράφει την διεύθυνση διάδοσης του εισερχόμενου κύματος με ολική συνοριακή συνθήκη

$$u = 0, \;\text{ στο }\; \partial D \;\Leftrightarrow\; u^i + u^s = 0 \;\text{ στο }\; \partial D\ .$$

Εν γένει, για το πρόβλημα σκέδασης οι συνοριακές τιμές είναι τόσο ομαλές όσο ομαλό είναι και το σύνορο αφού είναι τέτοιες ώστε η u^i να είναι αναλυτική στο ∂D. Συγκεκριμένα για χωρίο D κλάσης C^2 η ανάλυση συνέχειας επιτάσσει το σκεδαζόμενο κύμα u^s να ανήκει στον $C^{1,a}(\mathbb{R}^2 \setminus D)$. Έτσι εφαρμόζοντας τον τύπο *Green* στο σκεδαζόμενο κύμα προκύπτει ότι

$$u^s(x) = \int_{\partial D} \left[u^s(y) \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u^s}{\partial \nu}(y) \Phi(x,y) \right] ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D} \tag{2.220}$$

από το Δεύτερο Θεώρημα *Green* (2.34) και εφαρμόζοντάς τον στην ακέραια λύση u^i με $\Phi(x,\cdot)$ έχουμε,

$$0 = \int_{\partial D} \left[u^i(y) \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u^i}{\partial \nu}(y) \Phi(x,y) \right] ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}\ . \tag{2.221}$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις (2.220) και (2.221) και χρησιμοποιώντας την σχέση

$$u^i + u^s = 0 \;\text{ στο }\; \partial D$$

προκύπτει το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2.92 (**Αρχή του Huygens**). *Για την σκέδαση ενός ακέραιου πεδίου u^i από ένα ακουστικά μαλακό σκεδαστή D έχουμε*

$$u(x) = u^i(x) - \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \Phi(x,y)\, ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}, \tag{2.222}$$

και το πλάτος σκέδασης του σκεδαζόμενου πεδίου u^s δίνεται από την σχέση

$$u_\infty(\hat{x}) = -\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{8k\pi}} \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) e^{-ik\hat{x}\cdot y}\, ds(y), \quad \hat{x} \in \mathbb{S}^1. \tag{2.223}$$

Ορισμός 2.93 (**Κυματική Συνάρτηση Herglotz**). *Μία κυματική συνάρτηση της μορφής*

$$v(x) = \int_{\mathbb{S}^1} e^{ik\cdot d} g(d)\, ds(d)\,, \quad x \in \mathbb{R}^2, \tag{2.224}$$

όπου $g \in L^2(\mathbb{S}^1)$ καλείται ***κυματική συνάρτηση Herglotz*** *και η συνάρτηση g καλείται* ***πυρήνας Herglotz του v****.*

Παρατήρηση 2.94.

1. *Οι κυματικές συναρτήσεις Herglotz είναι ακέραιες λύσεις της εξίσωσης Helmholtz.*

2. *Για $g \in L^2(\mathbb{S}^1)$ η συνάρτηση*

$$v(x) = \int_{\mathbb{S}^1} e^{-ik\cdot d} g(d)\, ds(d)\,, \quad x \in \mathbb{R}^2, \tag{2.225}$$

   ορίζει επίσης κυματική συνάρτηση Herglotz.

Θεώρημα 2.95. *Έστω $(d_n)_n$ ακολουθία μοναδιαίων διανυσμάτων η οποία είναι πυκνό σύνολο στην $\mathbb{S}^1$ και ορίζεται το σύνολο $\mathcal{F}$ των πλατών σκέδασης ως*

$$\mathcal{F} \;:=\; \{u_\infty(\cdot, d_n) \,:\, n = 1, 2, \cdots\}. \tag{2.226}$$

Τότε $\mathcal{F}$ είναι πλήρες στον $L^2(\mathbb{S}^1)$ αν και μόνο αν δεν υπάρχει ιδιοσυνάρτηση Dirichlet στο D που να είναι κυματική συνάρτηση Herglotz.

Κεφάλαιο 3

Αντίστροφο Πρόβλημα Σκέδασης

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε το Αντίστροφο Πρόβλημα Σκέδασης. Για να το κάνουμε αυτό αρχικά θα αναφερθούμε στις παραγώγους τελεστών και συγκεκριμένα με τις παραγώγους Fréchet και Gateaux. Στη συνέχεια λόγω της μη καλής τοποθέτησης του προβλήματος θα ασχοληθούμε με τη μέθοδο ομαλοποίησης Tikhonov και λόγω της μη γραμμικότητας με μία μέθοδο γραμμικοποίησης τύπου Newton. Τέλος, θα διατυπώσουμε το Αντίστροφο Πρόβλημα Σκέδασης για δεδομένα χωρίς φάση, θα δούμε ότι σε αυτό το πρόβλημα λόγω των δεδομένων δεν μπορεί να εντοπισθεί η θέση του σκεδαστή και θα παρουσιάσουμε τη μέθοδο ομαλοποίησης Tikhonov και τη μέθοδο γραμμικοποίησης τύπου Newton για αυτό το πρόβλημα.

3.1 Παράγωγοι Τελεστών

Σε αυτήν την ενότητα θα αναφερθούμε αρχικά σε έννοιες των Banach Αλγεβρών που θα χρησιμοποιήσουμε στη μελέτη μας. Έπειτα θα ορίσουμε τις παραγώγους Fréchet και Gateaux πρώτης τάξης αλλά και ανώτερης τάξης. Επίσης, θα παρουσιάσουμε βασικές ιδιότητες και αποτελέσματα αυτών καθώς και τη σχέση μεταξύ της παραγώγου Gateaux και της παραγώγου Fréchet.

3.1.1 Banach Άλγεβρες

Σε αυτήν την υποενότητα θα αναφερθούμε συνοπτικά σε βασικά αποτελέσματα των Banach Αλγεβρών που θα χρησιμοποιήσουμε στη μελέτη μας. Αν ο αναγνώστης επιθυμεί να εμβαθύνει περαιτέρω παραπέμπεται στο [18].

Ορισμός 3.1. *Έστω $\mathcal{A}$ διανυσματικός χώρος. Αν στον $\mathcal{A}$ ορίζεται ένα γινόμενο όπου $\forall x, y, z \in \mathcal{A}$ και $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ ικανοποιεί τις ιδιότητες* *i.* $x(yz) = (xy)z$ *προσεταιριστική,*

ii. $x(y+z) = xy + xz$ *δεξιά επιμεριστική,*

iii. $(y+z)x = yx + zx$ *αριστερή επιμεριστική,*

iv. $\lambda(yz) = (\lambda y)z$ *προσεταιριστική με βαθμωτή ποσότητα* λ

τότε $\mathcal{A}$ *καλείται* ***άλγεβρα***.
Αν επιπλέον η $\mathcal{A}$ *έχει νόρμα και ισχύει η σχέση*

$$\|xy\| \leq \|x\| \, \|y\| \; , \quad x, y \in \mathcal{A} \tag{3.1}$$

τότε η $\mathcal{A}$ *καλείται* ***norm-άλγεβρα***. *Αν ακόμα ο* $\mathcal{A}$ *με την νόρμα αυτή είναι πλήρης τότε λέμε ότι η* $\mathcal{A}$ *είναι* ***Banach άλγεβρα***. *Αν επιπροσθέτως υπάρχει* $e \in \mathcal{A}$ *τέτοιο ώστε*

$$xe \;=\; ex \;=\; x \; , \quad \forall \, x \in \mathcal{A}$$

τότε το e *καλείται* ***μονάδα*** *της* $\mathcal{A}$ *και τότε η* $\mathcal{A}$ *καλείται* ***Banach άλγεβρα με μονάδα***.

Παρατήρηση 3.2. *Δεν έχουν όλες οι άλγεβρες μονάδα.*

Πρόταση 3.3. *Έστω* $\mathcal{A}$ *είναι Banach άλγεβρα. Τότε, αν υπάρχει μονάδα* $e \in \mathcal{A}$ *είναι μοναδική.*

Πρόταση 3.4. *Έστω* $\mathcal{A}$ *είναι Banach άλγεβρα. Τότε το γινόμενο είναι συνεχές ως προς την νόρμα.*

Απόδειξη. Έστω $x_n \to x \;\Leftrightarrow\; \|x_n - x\| \to 0$ και $y_n \to y \;\Leftrightarrow\; \|y_n - y\| \to 0$. Τότε

$$\begin{array}{rcl}
\|x_n y_n - xy\| & = & \|x_n y_n - x y_n + x y_n - xy\| \\
\text{επιμεριστική} & = & \|(x_n - x) y_n + x(y_n - y)\| \\
\text{τριγωνική ανισότητα} & \leq & \|(x_n - x) y_n\| + \|x(y_n - y)\| \\
\text{σχέση (3.1)} & \leq & \|x_n - x\| \|y_n\| + \|x\| \|y_n - y\| \to \; 0 \\
\Rightarrow \; x_n y_n \;\to\; xy. & &
\end{array}$$

Άρα είναι συνεχές. $\square$

Ορισμός 3.5. *Έστω* $\mathcal{A}$ *είναι* ***Banach άλγεβρα με μονάδα*** $e \in \mathcal{A}$. *Ένα στοιχείο* $x \in \mathcal{A}$ *καλείται* ***αντιστρέψιμο*** *αν υπάρχει στοιχείο* $x^{-1} \in \mathcal{A}$ *τέτοιο ώστε*

$$x^{-1} x \;=\; x x^{-1} \;=\; e$$

και το στοιχείο $x^{-1} \in \mathcal{A}$ *καλείται* ***αντίστροφο στοιχείο του x*** *στην* $\mathcal{A}$.

Πρόταση 3.6. *Έστω* $\mathcal{A}$ *είναι Banach άλγεβρα με μονάδα* $e \in \mathcal{A}$ *και έστω* $x \in \mathcal{A}$. *Τότε, αν υπάρχει αντίστροφο στοιχείο* $x^{-1} \in \mathcal{A}$ *του* x *είναι μοναδικό.*

Θεώρημα 3.7. *Έστω $\mathcal{A}$ είναι Banach άλγεβρα με μονάδα $e \in \mathcal{A}$ και έστω $x \in \mathcal{A}$ με $\|x\| < 1$. Τότε, το στοιχείο $e - x$ είναι αντιστρέψιμο και*

$$(e - x)^{-1} \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} x^n. \tag{3.2}$$

Επιπλέον,

$$\|(e - x)^{-1}\| \ = \ \frac{1}{1 - \|x\|} \ . \tag{3.3}$$

Ορισμός 3.8. *Έστω $\mathcal{A}$ είναι Banach άλγεβρα με μονάδα $e \in \mathcal{A}$. Ένα γραμμικό συναρτησοειδές $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ καλείται **μιγαδικός ομομορφισμός** αν ισχύει η σχέση*

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y) \ , \ \ \forall \ x, y \in \mathcal{A}. \tag{3.4}$$

Πρόταση 3.9. *Έστω $\mathcal{A}$ είναι Banach άλγεβρα με μονάδα $e \in \mathcal{A}$ και έστω $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ καλείται μη τετριμμένος μιγαδικός ομομορφισμός. Τότε,*

i. $\phi(e) = 1$, *όπου* 1 *η μονάδα του* $\mathbb{C}$,

ii. $\phi(x) \neq 0$, *αν* x *αντιστρέψιμο,*

iii. $|\phi(x)| < 1$, *αν* $\|x\| < 1$.

Ορισμός 3.10. *Ένας διανυσματικός χώρος G με πράξη το γινόμενο καλείται **ομάδα** αν ικανοποιούνται τα παρακάτω αξιώματα:*

A1. Η πράξη είναι προσεταιριστική.

A2. Υπάρχει μονάδα $e \in G$.

A3. Για κάθε στοιχείο $x \in G$ υπάρχει αντίστροφο στοιχείο $x^{-1} \in G$ του x.

Πρόταση 3.11. *Έστω $\mathcal{A}$ είναι Banach άλγεβρα με μονάδα $e \in \mathcal{A}$, $x_0 \in \mathcal{A}$ αντιστρέψιμο και έστω $x \in \mathcal{A}$. Αν ισχύει ότι*

$$\|x - x_0\| \ < \ \frac{1}{\|x_0^{-1}\|} \tag{3.5}$$

τότε το στοιχείο x είναι αντιστρέψιμο $\mathcal{A}$. Επιπλέον,

$$\|x^{-1} - x_0^{-1}\| \ = \ \frac{\|x - x_0\|}{1 - \|x - x_0\| \, \|x_0^{-1}\|} \left\|x_0^{-1}\right\|^2 \ . \tag{3.6}$$

Πόρισμα 3.11.1. *Έστω $\mathcal{A}$ είναι Banach άλγεβρα με μονάδα $e \in \mathcal{A}$. Η ομάδα G των αντιστρέψιμων στοιχείων είναι ανοιχτό σύνολο. Επιπλέον, η απεικόνιση $\phi : G \to G$ με τύπο $\phi(x) = x^{-1}$ είναι συνεχής και ομομορφισμός.*

Πόρισμα 3.11.2. *Έστω $\mathcal{A}$ είναι Banach άλγεβρα με μονάδα $e \in \mathcal{A}$. Το σύνολο των αντιστρέψιμων στοιχείων είναι κλειστό σύνολο.*

3.1.2 Παράγωγοι Πρώτης Τάξης

Σε αυτήν την υποενότητα θα αναφερθούμε στις παραγώγους Fréchet και Gateaux πρώτης τάξης καθώς και στις σχέσεις μεταξύ αυτών. Αν ο αναγνώστης επιθυμεί να εμβαθύνει περαιτέρω σε κάποια αποτελέσματα παραπέμπεται στα αναγνώσματα [3], [17].

Έστω X και Y χώροι Banach και έστω $f \in C(X, Y)$, όπου $C(X, Y)$ ο χώρος των συνεχών απεικονίσεων $f : X \to Y$. Συγκεκριμένα, , Για συντομία θα χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $B(X, Y)$ για να συμβολίσουμε τον χώρο των φραγμένων γραμμικών τελεστών από τον X στον Y.

Ορισμός 3.12 (Παράγωγος Fréchet). *Έστω $U \subset X$ ανοιχτή περιοχή του $r_0 \in X$ και απεικόνιση $f : U \to Y$. Η f είναι* ***Fréchet παραγωγίσιμη*** *στο r_0 αν υπάρχει φραγμένος γραμμικός τελεστής $A : X \to Y$ τέτοιος ώστε*

$$\|f(r) - f(r_0) - A(r - r_0)\| = O(\|r - r_0\|). \tag{3.7}$$

Σε αυτή την περίπτωση συμβολίζουμε είτε $A = f'(r_0)$ είτε $A = \partial f(r_0)/\partial r$ και η $f'(r_0)$ (είτε η $\partial f(r_0)/\partial r$) καλείται ***Fréchet παράγωγος*** *της f στο r_0. Αν η απεικόνιση $r \mapsto f'(r_0)$ του $X \to B(X, Y)$ είναι συνεχής στο r_0 η f καλείται C^1 στο r_0.*

Ορισμός 3.13 (Παράγωγος Fréchet). *Έστω $U \subset X$ ανοιχτή περιοχή του $r_0 \in X$ και απεικόνιση $f : U \to Y$. Η f είναι* ***Fréchet παραγωγίσιμη*** *στο r_0 αν υπάρχει φραγμένος γραμμικός τελεστής $A : X \to Y$ τέτοιος ώστε*

$$\|f(r_0 + h) - f(r_0) - A(h)\| = O(\|h\|). \tag{3.8}$$

Σε αυτή την περίπτωση συμβολίζουμε είτε $A = f'(r_0)$ είτε $A = \partial f(r_0)/\partial r$ και η $f'(r_0)$ (είτε η $\partial f(r_0)/\partial r$) καλείται ***Fréchet παράγωγος*** *της f στο r_0. Αν η απεικόνιση $r \mapsto f'(r_0)$ του $X \to B(X, Y)$ είναι συνεχής στο r_0 η f καλείται C^1 στο r_0.*

Παρατήρηση 3.14. *Στους παραπάνω ορισμούς ο X μπορεί να είναι και απλά χώρος με νόρμα χωρίς να είναι απαραίτητα χώρος Banach. Ένας εναλλακτικός ορισμός της Fréchet παραγωγισιμότητας είναι ο ακόλουθος.*

Ορισμός 3.15 (Παράγωγος Fréchet). *Έστω X χώρος με νόρμα, Y χώρος Banach και έστω $U \subset X$ ανοιχτό που περιέχει το $r_0 \in U$. Η απεικόνιση $f : U \to Y$ είναι* ***Fréchet παραγωγίσιμη*** *στο r_0 αν υπάρχει φραγμένος γραμμικός τελεστής $\partial f/\partial r \in B(X, Y)$, περιοχή V του 0_X και απεικόνιση $f_1 : V \to Y$ τέτοιος ώστε*

$$f(r_0 + h) = f(r_0) + \partial f(r_0; h)/\partial r + f_1(h) \quad , \ \forall\, h \in V, \tag{3.9}$$

$$\text{με } f_1(h) = O(\|h\|) \quad , \ \forall\, h \in V. \tag{3.10}$$

Η $\partial f(r_0; h)/\partial r$ καλείται ***Fréchet παράγωγος*** *της f στο r_0.*

Παρατήρηση 3.16. *Το ότι το $h \in V$ στον παραπάνω ορισμό σημαίνει ότι στην οριακή περίπτωση παίρνουμε $h \to 0$.*

Πρόταση 3.17 (Κανόνας Αλυσίδας). *Έστω X, Y, Z χώροι Banach, $U \subset X$ και $V \subset Y$ ανοιχτά. Έστω επίσης $f \in C(U, Y)$, $g \in C(V, Z)$ και $f^{-1}(V) \subset U$. Τότε η $gf \in C(U, Z)$ παραγωγίζεται κατά Fréchet σύμφωνα με τον* ***κανόνα αλυσίδας*** *ως*

$$[gf(x)]' = g'(f(x)) \cdot f'(x). \tag{3.11}$$

Πρόταση 3.18 (Κανόνας Γινομένου). *Έστω X, Y χώροι Banach και $U \subset X$ ανοιχτό. Έστω επίσης $f \in C(U, \mathbb{R})$, $g \in C(U, Y)$ Fréchet παραγωγίσιμες. Τότε η*

$$h(x) = f(x) \cdot g(x)$$

παραγωγίζεται κατά Fréchet σύμφωνα με τον ***κανόνα γινομένου*** *ως*

$$h'(x) = f'(x)y \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)y. \tag{3.12}$$

Πρόταση 3.19. *Έστω X, Y χώροι Banach με $Y = Y_1 \times \cdots \times Y_n$ όπου Y_i χώρος Banach για κάθε $i = 1, \cdots, n$ και $U \subset X$ ανοιχτό. Έστω επίσης $f : U \to Y$ με $f = (f_1, \cdots, f_n)$. Αν $f_i : U \to Y_i$ για κάθε $i = 1, \cdots, n$ είναι Fréchet παραγωγίσιμη τότε η f είναι Fréchet παραγωγίσιμη και*

$$f'(x) = (f_1^{'}(x), \cdots, f_n^{'}(x)). \tag{3.13}$$

Ορισμός 3.20 (Παράγωγος Gateaux). *Η $f \in C(X, Y)$ είναι* ***Gateaux παραγωγίσιμη*** *στο r_0 αν υπάρχει τελεστής $df(r_0; h) \in B(X \times X, Y)$ τέτοιος ώστε σε περιοχή U του r_0 για $r_0 + \epsilon h \in U$*

$$\lim_{\epsilon \to 0} \|f(r_0 + \epsilon h) - f(r_0) - \epsilon df(r_0; h)\| = 0. \tag{3.14}$$

Η $df(r_0, h)$ καλείται παράγωγος Gateaux της f στο r_0 και γράφουμε

$$\frac{d}{d\epsilon} f(r_0 + \epsilon h)\bigg|_{\epsilon=0} = df(r_0; h). \tag{3.15}$$

Πρόταση 3.21. *Η παράγωγος Gateaux $df(r_0; h)$ της f στο r_0 έχει την εξής ιδιότητα για κάθε βαθμωτή ποσότητα β*

$$df(r_0; \beta h) = \beta df(r_0; h). \tag{3.16}$$

Πρόταση 3.22. *Έστω $f \in C(X, Y)$ Gateaux παραγωγίσιμη στο r_0 και $y^* \in Y^*$ τότε*

$$\frac{d}{d\epsilon} < y^*, f(r_0 + \epsilon h) >_{Y^* \times Y}\bigg|_{\epsilon=0} =< y^*, df(r_0; h) >_{Y^* \times Y} . \tag{3.17}$$

Πρόταση 3.23. *Έστω $f \in C(X, Y)$ Gateaux παραγωγίσιμη στο $r_0 + \epsilon h$ για $\epsilon \in [0, 1]$. Τότε*

$$f(r_0 + h) - f(r_0) = \int_0^1 df(r_0 + \epsilon h; h)\, d\epsilon. \tag{3.18}$$

Πρόταση 3.24. *Η παράγωγος Fréchet και η παράγωγος Gateaux αν υπάρχουν είναι μοναδικές.*

Θεώρημα 3.25. *Έστω $f \in C(X,Y)$ Fréchet παραγωγίσιμη στο r_0, τότε η f είναι Gateaux παραγωγίσιμη στο r_0.*

Θεώρημα 3.26. *Έστω $f \in C(X,Y)$ Gateaux παραγωγίσιμη στο r_0 και η παράγωγος Gateaux είναι*

i. γραμμική ως προς h δηλαδή $df(r_0;\cdot) \in B(X,Y)$,

ii. συνεχής ως προς r ως απεικόνιση $X \to B(X,Y)$

τότε η f είναι Fréchet παραγωγίσιμη στο r_0.

Πρόταση 3.27. *Απεικονίσεις με ομοιόμορφα φραγμένη παράγωγο Fréchet είναι ομοιόμορφα συνεχείς και άρα συνεχείς και φραγμένες.*

Ορισμός 3.28 (Μερική Παράγωγος Fréchet). *Έστω $f \in C^1(U,Y)$ με $U = U_1 \times \cdots \times U_n$ με $U_i \subset X_i$ ανοιχτό όπου X_i χώρος Banach για κάθε $i = 1,\cdots,n$. Η **μερική παράγωγος Fréchet** του $r \in U$ ως προς r_i συμβολίζεται $D_i f(r) \equiv \partial f(r)/\partial r_i \ \in B(X_i,Y)$ και ορίζεται ως*

$$f(r_1,\cdots,r_{i-1},r_i+h_i,r_{i+1},\cdots,r_n) - f(r_1,\cdots,r_n) = D_i f(r)h_i + O(\|h_i\|). \tag{3.19}$$

Αν η μερική παράγωγος Fréchet $D_i f(r)$ υπάρχει τότε $D_i f(r) \in B(X_i,Y)$. Τότε,

$$(\partial f/\partial r)h = f'(r)h = \sum_{i=1}^{n} D_i f(r)h_i\ . \tag{3.20}$$

Θεώρημα 3.29 (Θεώρημα Μέσης Τιμής). *Έστω $f,g \in C([a,b],X)$ είναι Fréchet παραγωγίσιμες και*

$$\|f'(t)\| \le g'(t)\ , \quad \forall\, t \in [a,b] \tag{3.21}$$

Τότε,

i. $\|f(b)-f(a)\| \le g(b)-g(a)$,

ii $\|f(b)-f(a)\| \le \sup\limits_{\psi\in[a,b]} \|f'(\psi)\||b-a|$.

Ορισμός 3.30 (Πολυγραμμικός Τελεστής). *Έστω $A : X_1 \times \cdots X_n \to Y$, όπου Y, X_i χώροι Banach για κάθε $i = 1,\cdots,n$. Ο A καλείται **πολυγραμμικός τελεστής** αν για κάθε στοιχείο $r = (r_1,\cdots,r_n) \in X_1 \times \cdots X_n$ και για κάθε $i = 1,\cdots,n$ ο $A(r_1,\cdots,r_n)$ είναι γραμμικός ως προς r_i κρατώντας όλες τις άλλες μεταβλητές σταθερές. Ο χώρος όλων των συνεχών πολυγραμμικών τελεστών συμβολίζεται με $B(X_1,\cdots,X_n;Y)$ και εφοδιασμένος με τη νόρμα*

$$|||A||| = \sup \frac{\|A(r_1,\cdots,r_n)\|}{\|r_1\|\cdots\|r_n\|} \tag{3.22}$$

είναι χώρος Banach. Ειδικότερα, αν $X_1 = \cdots = X_n = X$ τον συμβολίζουμε με $B_n(X,Y)$.

Λήμμα 3.31. *Έστω Y, X_i χώροι Banach για κάθε $i = 1,2$. Οι χώροι Banach $B(X_1,X_2;Y)$ και $B(X_1;B(X_2,Y))$ είναι ισομετρικά ισομορφικοί.*

Ορισμός 3.32 (Συμμετρική Πολυγραμμική Μορφή). *Μία πολυγραμμική μορφή* $f(h_1, \cdots, h_n) \in B_n(X,Y)$ *καλείται* ***συμμετρική*** *αν παραμένει αμετάβλητη κάτω από όλες τις δυνατές μεταθέσεις των δεικτών* $i = 1, \cdots, n$, $\sigma(1, \cdots, n)$.
Σε κάθε πολυγραμμική μορφή $f(h_1, \cdots, h_n) \in B_n(X,Y)$ *μπορούμε να αντιστοιχίσουμε μία συμμετρική πολυγραμμική μορφή* $symm\ f(h_1, \cdots, h_n) \in B_n(X,Y)$

$$symm\ f(h_1, \cdots, h_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma(i_1, \cdots, i_n)} f(h_{i_1}, \cdots, h_{i_n}). \tag{3.23}$$

Ισχύει ότι $symm\ f(h_1, \cdots, h_n) = f$ *αν και μόνο αν η* f *είναι συμμετρική.*

Πρόταση 3.33 (Ιδιότητα Πολικής Μορφής μιας Συμμετρικής Πολυγραμμικής Μορφής). *Για κάθε πολυγραμμική μορφή* $f(h_1, \cdots, h_n) \in B_n(X,Y)$ *η* ***πολική μορφή*** $f(h) = f(h, \cdots, h)$ *έχει την ιδιότητα*

$$symm\ f(h_1, \cdots, h_n) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \epsilon_1 \cdots \partial \epsilon_n} f\left(\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i h_i\right)\Bigg|_{\epsilon_1 = \cdots = \epsilon_n = 0}. \tag{3.24}$$

Πρόταση 3.34 (Ιδιότητα Πολικής Μορφής μιας Συμμετρικής Πολυγραμμικής Μορφής). *Αν οι πολικές μορφές δύο συμμετρικών πολυγραμμικών μορφών* $f(h_1, \cdots, h_n)$, $g(h_1, \cdots, h_n) \in B_n(X,Y)$ *είναι ίσες, τότε οι ίδιες οι πολυγραμμικές μορφές είναι ίσες*

$$f(h_1, \cdots, h_n) = g(h_1, \cdots, h_n).$$

Πρόταση 3.35. *Κάθε πολυγραμμική απεικόνιση είναι Gateaux παραγωγίσιμη.*

Παρατήρηση 3.36. *Δεν ισχύει γενικά ότι μία πολυγραμμική απεικόνιση είναι Fréchet παραγωγίσιμη.*

Πρόταση 3.37. *Έστω* $f \in C(X,Y)$ *με* $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ *πολυγραμμική. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

i. *η* f *είναι συνεχής σε κάθε* $r \in X$,

ii. *η* f *είναι συνεχής στο* $r = 0_X$,

iii. *η* f *είναι φραγμένη αν* $\forall\ r = (r_1, \cdots, r_n) \in X$ *υπάρχει σταθερά* $k > 0$ *τέτοια ώστε*

$$f(r_1, \cdots, r_n) \le k\|r_1\| \cdots \|r_n\|,$$

iv. *η* f *είναι Fréchet παραγωγίσιμη.*

3.1.3 Παράγωγοι Υψηλότερης Τάξης

Σε αυτήν την υποενότητα θα αναφερθούμε στις παραγώγους Fréchet και Gateaux ανώτερης τάξης καθώς και στις σχέσεις μεταξύ αυτών. Αν ο αναγνώστης επιθυμεί να εμβαθύνει περαιτέρω σε κάποια αποτελέσματα παραπέμπεται στα αναγνώσματα [3], [17].

Έστω X, Y χώροι Banach και $U \subset X$ ανοιχτό. Έστω επίσης $f \in C(U, Y)$ είναι Fréchet παραγωγίσιμος τελεστής.

Ορισμός 3.38 (**Δεύτερη Παράγωγος Fréchet**). *Ο f είναι* ***δύο φορές Fréchet παραγωγίσιμος*** *στο r αν $f' : X \to B(X, Y)$ είναι Fréchet παραγωγίσιμος στο r. Η παράγωγος Fréchet $f''(r)$ της $f'(r)$ ανήκει στον $B(X, B(X, Y)) = B_2(X, Y)$.*

Πρόταση 3.39. *Ο $f \in C^2(U, Y)$ αν ισχύουν τα ακόλουθα:*

i. ο f είναι δύο φορές Fréchet παραγωγίσιμος στο $r \in U$,

ii. ο $f'' : U \to B_2(X, Y)$ είναι συνεχής.

Πρόταση 3.40. *Αν η $f''(r)$ υπάρχει τότε είναι μοναδική και συμμετρική*

$$f''(r)(h_1, h_2) = f''(r)(h_2, h_1). \tag{3.25}$$

Ορισμός 3.41 (**n-οστή Παράγωγος Fréchet**). *Ο f είναι* ***n-φορές Fréchet παραγωγίσιμος*** *στο r αν $f^{(n-1)} : X \to B_{n-1}(X, Y)$ είναι Fréchet παραγωγίσιμος στο r. Η παράγωγος Fréchet $f^{(n)}(r)$ της $f^{(n-1)}(r)$ ανήκει στον $B(X, B_{n-1}(X, Y)) = B_n(X, Y)$.*

Πρόταση 3.42. *Ο $f \in C^n(U, Y)$ αν ισχύουν τα ακόλουθα:*

i. ο f είναι n-φορές Fréchet παραγωγίσιμος στο $r \in U$,

ii. ο $f^{(n)} : U \to B_n(X, Y)$ είναι συνεχής.

Πρόταση 3.43. *Αν η $f^{(n)}(r)$ υπάρχει τότε είναι μοναδική και n-γραμμική συμμετρική μορφή.*

Έστω X, Y χώροι Banach και $U \subset X$ ανοιχτό. Έστω επίσης $f \in C(U, Y)$ είναι Gateaux παραγωγίσιμος τελεστής.

Ορισμός 3.44 (**Δεύτερη Παράγωγος Gateaux**). *Ο f είναι* ***δύο φορές Gateaux παραγωγίσιμος*** *στο r αν $df(r;\cdot) : X \to B(X, Y)$ είναι Gateaux παραγωγίσιμος στο r. Η παράγωγος Gateaux $d^2 f(r; h_1, h_2)$ της $df(r; h_1)$ ανήκει στον $B(X, B(X, Y)) = B_2(X, Y)$. Μάλιστα,*

$$\begin{aligned}
d^2 f(r; h_1, h_2) &= d(df(r; h_1), h_2) \\
&\triangleq \frac{d}{d\epsilon_2} df(r + \epsilon_2 h_2; h_2)\bigg|_{\epsilon_2 = 0} \\
&= \frac{\partial^2}{\partial\epsilon_1 \partial\epsilon_2} f\left(r + \sum_{i=1}^{2} \epsilon_i h_i\right)\Bigg|_{\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0} \\
&= D_1 D_2 f\left(r + \sum_{i=1}^{2} \epsilon_i h_i\right)\Bigg|_{\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0},
\end{aligned}$$

όπου $D_i = \partial/\partial\epsilon_i$ με $i = 1, 2$.

Πρόταση 3.45. *Αν η δεύτερη παράγωγος Gateaux* $d^2 f(r; h_1, h_2)$ *υπάρχει τότε είναι συμμετρική γιατί οι τελεστές* $D_i = \partial/\partial\epsilon_i$ *με* $i = 1, 2$ *αντιμετατίθενται.*

Ορισμός 3.46 (n-οστή Παράγωγος Gateaux). *Ο* f *είναι* ***n-φορές Gateaux παραγωγίσιμος*** *στο* r *αν* $d^{n-1} f(r; h_1, \cdots, h_{n-2}, \cdot) : X \to B(X, Y)$ *είναι Gateaux παραγωγίσιμος στο* r. *Η παράγωγος Gateaux* $d^n f(r; h_1 \cdots, h_n)$ *της* $d^{n-1} f(r; h_1, \cdots, h_{n-1})$ *ανήκει στον* $B(X, B_{n-1}(X, Y)) = B_n(X, Y)$.
Μάλιστα,

$$\begin{aligned}
d^n f(r; h_1 \cdots, h_{n-1}, h_n) &= d(d^{n-1} f(r; h_1 \cdots, h_{n-1}), h_n) \\
&\triangleq \frac{d}{d\epsilon_n} d^{n-1} f(r + \epsilon_n h_n; h_1, \cdots, h_{n-1})\bigg|_{\epsilon_n = 0} \\
&\triangleq \frac{\partial^2}{\partial\epsilon_{n-1}\partial\epsilon_n} d^{n-2} f\left(r + \sum_{i=n-1}^{n} \epsilon_i h_i \; ; h_1, \cdots, h_{n-2}\right)\Bigg|_{\epsilon_{n-1} = \epsilon_n = 0} \\
&\cdots \\
&\triangleq \frac{\partial^{n-1}}{\partial\epsilon_2 \cdots \partial\epsilon_n} df\left(r + \sum_{i=2}^{n} \epsilon_i h_i \; ; h_1\right)\Bigg|_{\epsilon_2 = \cdots = \epsilon_n = 0} \\
&= \frac{\partial^n}{\partial\epsilon_1 \cdots \partial\epsilon_n} f\left(r + \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i h_i\right)\Bigg|_{\epsilon_1 = \cdots = \epsilon_n = 0} \\
&= D_1 \cdots D_n f\left(r + \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i h_i\right)\Bigg|_{\epsilon_1 = \cdots = \epsilon_n = 0},
\end{aligned}$$

όπου $D_i = \partial/\partial\epsilon_i$ *με* $i = 1, \cdots, n$.

Πρόταση 3.47. *Αν η n-οστή παράγωγος Gateaux* $d^n f(r; h_1 \cdots, h_n)$ *υπάρχει τότε είναι συμμετρική γιατί οι τελεστές* $D_i = \partial/\partial\epsilon_i$ *με* $i = 1, \cdots, n$ *αντιμετατίθενται.*

Θεώρημα 3.48. *Έστω* f *είναι n-φορές Fréchet παραγωγίσιμος σε περιοχή* U *του* r *και με* $f^{(n)}(r)(h_1, \cdots, h_n)$ *συμβολίζεται η n-οστή παράγωγος Fréchet του* f. *Τότε ο* f *είναι n-φορές Gateaux παραγωγίσιμος και*

$$d^n f(r; h_1 \cdots, h_n) \; = \; f^{(n)}(r)(h_1, \cdots, h_n). \tag{3.26}$$

Θεώρημα 3.49. *Έστω* f *είναι n-φορές Gateaux παραγωγίσιμος σε περιοχή* U *του* r *και με* $d^n f(r; h_1 \cdots, h_n) \in B_n(X, Y)$ *συμβολίζεται η n-οστή παράγωγος Gateaux του* f *και ως προς* r *είναι συνεχής από τη* U *στο* $B_n(X, Y)$. *Τότε ο* f *είναι n-φορές Fréchet παραγωγίσιμος και*

$$f^{(n)}(r)(h_1, \cdots, h_n) \; = \; d^n f(r; h_1 \cdots, h_n). \tag{3.27}$$

Πόρισμα 3.49.1. *Υπό τις υποθέσεις των Θεωρημάτων (3.48) και (3.49) οι παράγωγοι Fréchet* $f^{(k)}(r)(h_1, \cdots, h_n)$, $k = 2, \cdots, n$ *είναι συμμετρικές.*

Πόρισμα 3.49.2. *Έστω $f \in C(U,Y)$ όπου $U \subset X$ ανοιχτό και έστω το ευθύγραμμο τμήμα $[r, r+h] \subset U$. Έστω επίσης*

$$\left\| f(r+h) - f(r) - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} a_i(r) h^i \right\| = O(\|h\|^n), \tag{3.28}$$

όπου $h^i = (h, \cdots, h)$ το h εμφανίζεται $i-$φορες και

$$a_i(x)h^i = a_i(r; h, \cdots, h), \quad i = 1, \cdots, n$$

είναι συμμετρικός πολυγραμμικός τελεστής που ανήκει στον $B_i(X,Y)$, $i = 1, \cdots, n$ και ως προς r είναι συνεχής από το U στο $B_i(X,Y)$.
Τότε $f \in C^n(U,Y)$ και

$$f^{(i)}(r)(h_1, \cdots, h_i) = a_i(r; h_1, \cdots, h_i), \quad i = 1, \cdots, n. \tag{3.29}$$

Θεώρημα 3.50 (Θεώρημα Taylor Ασθενής Μορφή). *Έστω f είναι (n-1)-φορές Fréchet παραγωγίσιμος σε περιοχή U του r και η $f^{(n)}$ υπάρχει. Τότε,*

$$\left\| f(r+h) - f(r) - f'(r)h - \cdots - \frac{1}{n!} f^{(n)}(r) h^n \right\| = O(\|h\|^n). \tag{3.30}$$

Θεώρημα 3.51 (Θεώρημα Taylor). *Έστω $f \in C^{n+1}(U,Y)$, όπου $U \subset X$ ανοιχτό και έστω το ευθύγραμμο τμήμα $[r, r+h] \subset U$. Τότε,*

$$f(r+h) = f(r) + f'(r)h + \frac{1}{2!} f''(r)h^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(r)h^n + R_{n+1}(r;h), \tag{3.31}$$

όπου

$$R_{n+1}(r;h) = \int_0^1 \frac{(1-\epsilon)^n}{n!} f^{(n+1)}(r+\epsilon h) h^{n+1} \, d\epsilon. \tag{3.32}$$

το υπόλοιπο Taylor.

Θεώρημα 3.52. *Έστω X χώρος με νόρμα, Y χώρος Banach, $U \subset X$ ανοιχτό και $f \in C^2(U,Y)$ με φραγμένη δεύτερη παράγωγο δηλαδή υπάρχει σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε*

$$\left\| \frac{\partial^2 f(r;\cdot)}{\partial r^2} \right\| \leq c \ , \ \text{στο } U. \tag{3.33}$$

Αν επιπλέον $r + \epsilon h \in U$, $\forall \epsilon \in [0,1]$ τότε

$$f(r+h) = f(r) + \frac{\partial f(r;h)}{\partial r} + f_1(r;h) \tag{3.34}$$

όπου η απεικόνιση f_1 ικανοποιεί την σχέση

$$\|f_1(r;h)\| \leq \sup_{r \in U} \left\| \frac{\partial^2 f(r;\cdot)}{\partial r^2} \right\| \ \|h\|^2. \tag{3.35}$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα Taylor (3.51) για $n = 1$ από τις σχέσεις (3.31) και (3.32) έχουμε ότι

$$f(r+h) = f(r) + \frac{\partial f(r;h)}{\partial r} + \int_0^1 (1-\epsilon)\frac{\partial^2 f(r+\epsilon h;h)}{\partial r^2}\, d\epsilon. \tag{3.36}$$

από τη σχέση (3.33) στο U προκύπτει άμεσα ότι

$$\left\| \int_0^1 (1-\epsilon)\frac{\partial^2 f(r+\epsilon h;h)}{\partial r^2}\, d\epsilon \right\| \le \sup_{r\in U} \left\| \frac{\partial^2 f(r;\cdot)}{\partial r^2} \right\| \; \|h\|^2. \tag{3.37}$$

□

Θεώρημα 3.53. *Έστω X χώρος με νόρμα, Y χώρος Banach άλγεβρα με μονάδα $e \in Y$ και $U \subset X$ ανοιχτό. Έστω $f : U \to Y$ Fréchet παραγωγίσιμος στο $r_0 \in U$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει περιοχή U_0 του r_0 τέτοια ώστε για κάθε $r \in U_0$ το στοιχείο $f(r)$ να είναι αντιστρέψιμο στην Y με αντίστροφο στοιχείο το $f^{-1}(r)$ και η απεικόνιση $r \mapsto f^{-1}(r)$ είναι συνεχής στο r_0. Τότε $f^{-1}(r)$ είναι Fréchet παραγωγίσιμος στο r_0 με παράγωγο Fréchet που δίνεται από την σχέση*

$$\frac{\partial f^{-1}(r_0;h)}{\partial r} = -f^{-1}(r_0)\left(\frac{\partial f(r_0;h)}{\partial r}\right) f^{-1}(r_0). \tag{3.38}$$

Απόδειξη. Ορίζουμε

$$k(r_0;h) \;:=\; f^{-1}(r_0+h) - f^{-1}(r_0) + f^{-1}(r_0)\frac{\partial f(r_0;h)}{\partial r} f^{-1}(r_0). \tag{3.39}$$

Η ποσότητα $k(r_0;h)$ είναι καλώς ορισμένη καθώς για κάθε $r \in U_0$ το στοιχείο $f(r)$ να είναι αντιστρέψιμο στην Y και άρα τα $f^{-1}(r_0+h), f^{-1}(r_0)$ υπάρχουν και f Fréchet παραγωγίσιμος στο r_0 άρα το $\partial f(r_0;h)/\partial r$ ορίζεται.
Πολλαπλασιάζοντας από δεξιά και από αριστερά την σχέση (3.39) με $f(r_0)$ έχουμε

$$f(r_0)k(r_0;h)f(r_0) \;=\; f(r_0)[f^{-1}(r_0+h) - f^{-1}(r_0)]f(r_0) + \frac{\partial f(r_0;h)}{\partial r}.$$

Αφού είναι Fréchet παραγωγίσιμη στο r_0

$$\frac{\partial f(r_0;h)}{\partial r} \;=\; f(r_0+h) - f(r_0) + O(\|h\|).$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση έχουμε

$$f(r_0)k(r_0;h)f(r_0) \;=\; f(r_0)[f^{-1}(r_0+h) - f^{-1}(r_0)]f(r_0) + [f(r_0+h) - f(r_0)] + O(\|h\|)$$

Επιπλέον, αφού είναι f συνεχώς αντιστρέψιμη στο U_0 προκύπτει ότι

$$f(r_0)k(r_0;h)f(r_0) \;=\; O(\|h\|)$$

και άρα αφού $f^{-1}(y_0)$ υπάρχει πολλαπλασιάζοντας με αυτό προκύπτει ότι

$$k(r_0;h) \;=\; O(\|h\|).$$

Επειδή για κάθε $r \in U_0$ η απεικόνιση $r \mapsto f^{-1}(r)$ είναι συνεχής στο r_0 και από μοναδικότητα της παραγώγου Fréchet έχουμε ότι

$$\frac{\partial f^{-1}(r_0;h)}{\partial r} = -f^{-1}(r_0)\left(\frac{\partial f(r_0;h)}{\partial r}\right) f^{-1}(r_0).$$

$\square$

Τώρα θα ασχοληθούμε με την Fréchet παραγωγισιμότητα ολοκληρωτικών τελεστών για $G_1, G_2 \subset \mathbb{R}^3$, μ μέτρο στο G_2 και $V \subset X$ όπου X χώρος με νόρμα της μορφής

$$(A[r]\phi)(x) \; := \; \int_{G_2} f(x,y,r)\phi(y)\, d\mu(y)\;, \quad x \in G_1,\; r \in V. \tag{3.40}$$

Για $r \in V$ σταθερό και κατάλληλο πυρήνα f ο ολοκληρωτικός τελεστής A είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής $A : C(G_2) \to C(G_1)$. Μάλιστα, με σταθερό $r \in V$ για πυρήνα f συνεχή ή ασθενώς ιδιάζων ο A είναι συμπαγής. Θεωρούμε τον A ως μία απεικόνιση $V \to B(C(G_2), C(G_1))$. Τελικά, θα δούμε ότι η παράγωγος ενός τελεστή της μορφής (3.40) κάτω από κατάλληλες υποθέσεις περιορίζεται στην παραγώγιση του πυρήνα και δίνεται από τον τελεστή $\tilde{A}[r;h]$ της μορφής

$$(\tilde{A}[r;h]\phi)(x) \; := \; \int_{G_2} \frac{\partial f(x,y,r;h)}{\partial r}\phi(y)\, d\mu(y)\;, \quad x \in G_1,\; r \in V,\; h \in X. \tag{3.41}$$

Για το ακόλουθο θεώρημα τα χρησιμοποιήσουμε τον παρακάτω συμβολισμό. Έστω X_i, $i = 1, \cdots, n$ χώροι με νόρμα και $U_i \subset X_i$ για κάθε $i = 1, \cdots, n$. Έστω επίσης απεικόνιση $f : U_1 \times \cdots \times U_n \to \mathbb{C}$, όπου $(x_1, \cdots, x_n) \mapsto f(x_1, \cdots, x_n)$. Με $f_{x_1,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_n} : U_i \to \mathbb{C}$ συμβολίζουμε την απεικόνιση $x_i \mapsto f(x_1, \cdots, x_n)$ όπου οι δείκτες $x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n$ δείχνουν ποιες μεταβλητές παραμένουν σταθερές. Αν η $f_{x_1,\cdots,x_{i-1},x_{i+1}}$ είναι Fréchet παραγωγίσιμη συμβολίζουμε την παράγωγο Fréchet ως $\partial f / \partial x_i$ και την βλέπουμε ως απεικόνιση

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : U_1 \times \cdots \times U_n \to B(X_i, \mathbb{C}).$$

Θεώρημα 3.54. *Έστω $G_1, G_2 \subset \mathbb{R}^3$, μ μέτρο στο G_2, X χώρος Banach και $V \subset X$ ανοικτό και κυρτό. Ορίζουμε $\Delta_G := \{(x,y) | x = y,\; x \in G_1, y \in G_2\}$ με $r_0 \in V$ και $f : ((G_1 \times G_2) \setminus \Delta_G) \times V \to \mathbb{C}$ συνεχής με τις ιδιότητες:*

i. $\forall x \in G_1$, $\forall y \in G_2$ με $x \neq y$ σταθερά η $f_{x,y} : V \to \mathbb{C}$ είναι δύο φορές Fréchet παραγωγίσιμη,

ii. οι $f_{x,r} : G_2 \setminus \{x\} \to \mathbb{C}$ και $(\partial f / \partial r)_{x,r_0,h} : G_2 \setminus \{x\} \to \mathbb{C}$ είναι ολοκληρώσιμες $\forall x \in G_1$, $\forall r \in V$, $\forall h \in X$,

iii. οι ολοκληρωτικοί τελεστές $A[r]$ και $\tilde{A}[r_0;h]$ που δίνονται από τις σχέσεις (3.40) και (3.41) αντίστοιχα ανήκουν στο $B(C(G_2), C(G_1))$ $\forall r \in V$, $\forall h \in X$

iv. *υπάρχει Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση* $g : (G_1 \times G_2) \setminus \Delta_G \to \mathbb{R}$ *για την οποία υπάρχει σταθερά* $c > 0$ *τέτοια ώστε*

$$\int_{G_2} g(x,y)\, d\mu(y) \leq c\ , \quad \forall x \in G_1. \tag{3.42}$$

Επιπλέον, $\forall x \in G_1$, $\forall y \in G_2$, *με* $x \neq y$ *έχουμε την εκτίμηση*

$$\left| \frac{\partial^2 f(x,y,r;h)}{\partial r^2} \right| \leq g(x,y),\ \textit{ομοιόμορφα}\ \forall r \in V,\ \forall h \in X\ \textit{με}\ \|h\| \leq 1. \tag{3.43}$$

Τότε ως απεικόνιση $V \to B(C(G_2), C(G_1))$ *με* $r \mapsto A[r]$ *ο τελεστής* A *είναι Fréchet παραγωγίσιμος στο* r_0 *και η παράγωγος του* A *δίνεται από τη σχέση* $(\partial A/\partial r)(r_0; h) = \tilde{A}[r_0; h]$, *όπου ο* $\tilde{A}[r_0; h]$ *δίνεται από την σχέση (3.41).*

Απόδειξη. Για κάθε $h \in X$ επαρκώς μικρό έχουμε ότι $r_0 + h \in V$ αφού $r_0 \in V$ και από την κυρτότητα του V έχουμε ότι $r_0 + \epsilon h \in V$, $\forall \epsilon \in [0,1]$. Από το Θεώρημα (3.52) έχουμε

$$f(x,y,r_0+h) = f(x,y,r_0) + \frac{\partial f(x,y,r_0;h)}{\partial r} + f_1(x,y,r_0,h) \tag{3.44}$$

και

$$|f(x,y,r_0+h)| \leq \sup_{r \in V} \left\| \frac{\partial^2 f(x,y,r_0;\cdot)}{\partial r^2} \right\| \|h\|^2\ ,\ h \in X,\ (x,y) \in (G_1 \times G_2) \setminus \Delta_G. \tag{3.45}$$

Αφού

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2 f(x,y,r;h)}{\partial r^2} \right| &\leq g(x,y),\ \text{ομοιόμορφα}\ \forall r \in V,\ \forall h \in X\ \text{με}\ \|h\| \leq 1. \\ \Rightarrow \left\| \frac{\partial^2 f(x,y,r;\cdot)}{\partial r^2} \right\| &\leq g(x,y),\quad \forall r \in V. \end{aligned}$$

Άρα, η ολοκληρωσιμότητα του f_1 προκύπτει μέσω της ανισότητας

$$\begin{aligned} \int_{G_2} |f_1(x,y,r_0,h)|\, d\mu(y) &\leq \int_{G_2} \sup_{r \in V} \left\| \frac{\partial^2 f(x,y,r_0;\cdot)}{\partial r^2} \right\| \|h\|^2\, d\mu(y) \\ &\leq \|h\|^2 \left(\int_{G_2} g(x,y)\, d\mu(y) \right) \\ \text{σχέση (3.42)} &\leq c\|h\|^2. \end{aligned}$$

Γνωρίζουμε ότι όλοι οι όροι της (3.44) είναι ολοκληρώσιμοι στο G_2. Χρησιμοποιώντας αυτό και την γραμμικότητα του ολοκληρώματος έχουμε ότι

$$\begin{aligned} (A[r_0+h]\phi)(x) &= \int_{G_2} f(x,y,r_0+h)\phi(y)\, d\mu(y) \\ \text{σχέση (3.44)} &= \int_{G_2} f(x,y,r_0)\phi(y)\, d\mu(y) + \int_{G_2} \frac{\partial f(x,y,r_0;h)}{\partial r} \phi(y)\, d\mu(y) \\ &\quad + \int_{G_2} f_1(x,y,r_0,h)\phi(y)\, d\mu(y) \\ &= (A[r_0]\phi)(x)\ +\ (\tilde{A}[r_0;h]\phi)(x)\ +\ (A_1[r_0,h]\phi)(x), \end{aligned}$$

όπου ο τελεστής $(A_1[r_0,h]\phi)(x)$ σύμφωνα με τα παραπάνω ικανοποιεί την ανισότητα

$$|(A_1[r_0,h]\phi)(x)| \le c\|\phi\|_\infty \|h\|^2. \tag{3.46}$$

Επομένως, ως απεικόνιση $V \to B(C(G_2), C(G_1))$ με $r \mapsto A[r]$ ο τελεστής A είναι Fréchet παραγωγίσιμος στο r_0 και η παράγωγος Fréchet του A δίνεται από τη σχέση $(\partial A/\partial r)(r_0;h) = \widetilde{A}[r_0;h]$. $\square$

3.2 Μέθοδος Ομαλοποίησης Tikhonov

Σε αυτήν την ενότητα ξεκινάμε διατυπώνοντας τον ορισμό καλής τοποθέτηση του προβλήματος κατά Hadamard, τον ορισμό του σχήματος ομαλοποίησης για μη καλώς τοποθετημένα προβλήματα και κάποια βασικά του χαρακτηριστικά. Έπειτα, παρουσιάζουμε τη μέθοδο ομαλοποίησης Tikhonov για γραμμικούς και για μη γραμμικούς τελεστές. Στην δεύτερη περίπτωση χρειαζόμαστε και μία μέθοδο για να γραμμικοποιήσουμε το πρόβλημα και βλέπουμε την μέθοδο Newton συγκεκριμένα τον αλγόριθμο Levenberg-Marquardt και την ομαλοποιημένη μέθοδο Gauss-Newton. Χρειαζόμαστε ένα κριτήριο διακοπής τόσο για τη γραμμική όσο και για τη μη γραμμική περίπτωση το οποίο μας δίνεται από την Αρχή Χάσματος του Morozov. Αν ο αναγνώστης επιθυμεί να εμβαθύνει περαιτέρω σε κάποια αποτελέσματα παραπέμπεται στα αναγνώσματα [5], [7], [15].

3.2.1 Εισαγωγή

Σε αυτήν την υποενότητα ξεκινάμε διατυπώνοντας τον ορισμό καλής τοποθέτηση του προβλήματος κατά Hadamard, τον ορισμό του σχήματος ομαλοποίησης για μη καλώς τοποθετημένα προβλήματα και κάποια βασικά του χαρακτηριστικά. Κάνουμε, ακόμα, μία περιγραφή της Αρχής Χάσματος του Morozov και διατυπώνουμε το Θεώρημα Picard.

Ορισμός 3.55 (Καλή Τοποθέτηση Προβλήματος κατά Hadamard). *Έστω X, Y χώροι με νόρμα, $U \subset X$, $V \subset Y$ και τελεστής $A : U \to V$. Το πρόβλημα*

$$A(\phi) = f \tag{3.47}$$

καλείται ***καλώς τοποθετημένο*** *αν ο A είναι αμφιμονοσήμαντος και ο αντίστροφος τελεστής $A^{-1} : V \to U$ συνεχής. Σε κάθε άλλη περίπτωση είναι* ***μη καλώς τοποθετημένο****.*

Παρατήρηση 3.56. *Αν ο A είναι γραμμικός τελεστής και συνεχής από το Θεώρημα (1.29) είναι φραγμένος.*

Ένα κριτήριο για το πότε είναι κακώς τοποθετημένο το (3.47) βλέπουμε στο ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 3.57. *Έστω X, Y χώροι με νόρμα, $U \subset X$, $V \subset Y$ και πλήρως συνεχής γραμμικός τελεστής $A : U \to V$. Τότε η εξίσωση πρώτου είδους $A(\phi) = f$ είναι μη καλώς τοποθετημένη αν το U δεν είναι πεπερασμένης διάστασης.*

Απόδειξη. Έστω ότι ο αντίστροφος τελεστής $A^{-1} : V \to U$ υπάρχει και είναι συνεχής. Τότε ο ταυτοτικός τελεστής $I : U \to U$ με $I = A^{-1}A$, επειδή ο A είναι συμπαγής και ο A^{-1} είναι συνεχής, είναι συμπαγής από Θεώρημα (1.36). Όμως, από Θεώρημα (1.40) ο I είναι συμπαγής αν και μόνο αν το U είναι πεπερασμένης διάστασης. □

Σύμφωνα με τον ορισμό του Hadamard υπάρχουν τρία είδη μη καλής τοποθέτησης του προβλήματος (3.47) :

i. Ο A να μην είναι επί.

ii. Ο A να μην είναι μονοσήμαντος.

iii. Ο A^{-1} να μην είναι συνεχής.

Στη πρώτη περίπτωση η (3.47) δεν είναι επιλύσιμη για κάθε $f \in V$ (**δεν υπάρχει λύση**). Στη δεύτερη περίπτωση η (3.47) μπορεί να έχει περισσότερες από μία λύσεις (**η λύση δεν είναι μοναδική**). Στην τρίτη και τελευταία περίπτωση η λύση ϕ της (3.47) δεν έχει συνεχή εξάρτηση από τα δεδομένα f (**η λύση είναι ασταθής**).

Η τελευταία περίπτωση έχει εξέχουσα σημασία στη μελέτη των μη καλώς τοποθετημένων προβλημάτων. Η καλή τοποθέτηση ενός προβλήματος ως ιδιότητα εξαρτάται από τον ίδιο τον τελεστή A, τους χώρους X, Y και τις νόρμες αυτών. Μία πρώτη προσπάθεια για να θεραπεύσει το πρόβλημα της κάποιος μπορεί να σκεφτεί να αλλάξει τους χώρους X, Y και τις νόρμες τους. Αυτή η προσπάθεια αποτυγχάνει καθώς οι χώροι X, Y και τις νόρμες τους καθορίζονται από τις ανάγκες του προβλήματος και επομένως δεν αλλάζουν. Ειδικότερα, ο χώρος Y και η νόρμα του προκύπτει από τα δεδομένα f και τα σφάλματά τους.

Η μη καλή τοποθέτηση του προβλήματος (3.47) έχει επιπτώσεις και στην αριθμητική του επίλυση. Αυξάνοντας την ακρίβεια της προσέγγισης χάνουμε την ευστάθεια της λύσης. Όσο πιο πυκνή γίνεται διαμέριση αυξάνεται η ακρίβεια τόσο χάνεται η ευστάθεια της λύσης. Δηλαδή, μικρές διαταραχές στα δεδομένα επιφέρουν μεγάλες μεταβολές στην λύσης. Τέτοια προβλήματα είναι ευαίσθητα σε θόρυβο.

Παρατήρηση 3.58. *Θα υποθέσουμε τώρα από εδώ και κάτω μιλάμε **για χώρους με νόρμα** X, Y **και φραγμένο γραμμικό τελεστή** $A : X \to Y$ **ο οποίος είναι μονοσήμαντος**. Αυτή η υπόθεση δεν βλάπτει τη γενικότητα καθώς η μοναδικότητα για γραμμικές εξισώσεις μπορεί να επιτευχθεί με μεταβολές στο χώρο X.*

Προσπαθούμε να βρούμε την προσέγγιση ϕ^δ της λύσης ϕ του (3.47) ως λύση του διαταραγμένου προβλήματος από την γνώση των διαταραγμένων δεδομένων f^δ με επίπεδο σφάλματος

$$\|f^\delta - f\| \leq \delta. \tag{3.48}$$

Το f^δ δεν ανήκει κατ΄ ανάγκην στην εικόνα του A σε αντίθεση με το f. Για να είναι συμβατό το ακριβές πρόβλημα με το διαταραγμένο θα πρέπει η προσεγγιστική λύση ϕ^δ να εξαρτάται με συνεχή τρόπο από τα δεδομένα f^δ. Για να διασφαλιστεί η επιλυσιμότητα του προβλήματος αναζητούμε μία οικογένεια φραγμένων γραμμικών τελεστών $(R_\alpha)_\alpha$ όπου $R_\alpha : Y \to X$ και $\alpha > 0$ τέτοια ώστε να προσεγγίζει τον μη φραγμένο αντίστροφο $A^{-1} : A(X) \to X$ του A. Με $A(X)$ συμβολίζεται η εικόνα του A και αν ο A είναι επί ισχύει ότι $A(X) = Y$.

Ορισμός 3.59. *Έστω X, Y χώροι με νόρμα και μονοσήμαντο φραγμένο γραμμικό τελεστή $A : X \to Y$. Τότε μία οικογένεια φραγμένων γραμμικών τελεστών $(R_\alpha)_\alpha$ με $\alpha > 0$ όπου $R_\alpha : Y \to X$ για κάθε $\alpha > 0$ με την ιδιότητα της σημειακής σύγκλισης*

$$\lim_{\alpha \to 0} R_\alpha A\phi = \phi, \quad \forall \phi \in X \tag{3.49}$$

καλείται ***σχήμα ομαλοποίησης (regularization scheme)*** *για τον τελεστή A και η παράμετρος α καλείται* ***παράμετρος ομαλοποίησης (regularization parameter)***.

Παρατήρηση 3.60. *Η σχέση (3.49) μας δίνει επίσης μέσω της (3.47) τις σχέσεις*

$$A\phi = f \quad \Leftrightarrow \quad \phi = A^{-1}f \tag{3.50}$$
$$A\phi = f \quad \Leftrightarrow \quad R_\alpha A\phi = R_\alpha f \tag{3.51}$$

Από τις σχέσεις (3.50) και (3.51) έχουμε τελικά

$$\lim_{\alpha \to 0} R_\alpha f = A^{-1}f, \quad \forall f \in A(X). \tag{3.52}$$

Θεώρημα 3.61. *Έστω X, Y χώροι με νόρμα με $dimX = \infty$ και συμπαγή γραμμικό τελεστή $A : X \to Y$. Τότε ένα σχήμα ομαλοποίησης $(R_\alpha)_\alpha$ με $\alpha > 0$ δεν μπορεί να είναι ομοιόμορφα φραγμένο ως προς α και οι τελεστές $R_\alpha A$ δεν μπορούν να συγκλίνουν κατά νόρμα καθώς $\alpha \to 0$.*

Απόδειξη. Θα αντιμετωπίσουμε κάθε σκέλος του θεωρήματος ξεχωριστά.

- Το σχήμα ομαλοποίησης $(R_\alpha)_\alpha$ με $\alpha > 0$ δεν μπορεί να είναι ομοιόμορφα φραγμένο.

  Απόδειξη. Έστω ότι είναι ομοιόμορφα φραγμένο τότε υπάρχει σταθερά $C > 0$

  $$\|R_\alpha\|_{B(Y,X)} \leq C, \quad \forall \alpha > 0. \tag{3.53}$$

  Τότε από την σχέση (3.52) προκύπτει ότι

  $$\|A^{-1}f\|_X \leq C\|f\|_Y, \tag{3.54}$$

  άρα ο A^{-1} είναι φραγμένος. Όμως από (3.57) καταλήγουμε σε άτοπο αφού $dimX = \infty$. □

- Οι τελεστές $R_\alpha A$ δεν μπορούν να συγκλίνουν κατά νόρμα καθώς $\alpha \to 0$.

  Απόδειξη. Έστω ότι συγκλίνουν κατά νόρμα καθώς $\alpha \to 0$ τότε υπάρχει $\alpha > 0$ τέτοιο ώστε

  $$\|R_\alpha A - I\| < \frac{1}{2}. \tag{3.55}$$

Τώρα για κάθε $f \in A(X)$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \|A^{-1}f\|_X &= \|A^{-1}f - R_\alpha A A^{-1} f + R_\alpha f\|_X \\ &\le \|(R_\alpha A - I)A^{-1}f\|_X + \|R_\alpha f\|_X \\ &\le \|R_\alpha A - I\| \|A^{-1}f\|_X + \|R_\alpha\|_{B(Y,X)} \|f\|_Y \\ &\le \frac{1}{2}\|A^{-1}f\|_X + \|R_\alpha\|_{B(Y,X)}\|f\|_Y \qquad (3.55) \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\|A^{-1}f\|_X \le 2\|R_\alpha\|_{B(Y,X)}\|f\|_Y \qquad (3.56)$$

και άρα ο A^{-1} είναι φραγμένος. Όμως από (3.57) καταλήγουμε σε άτοπο αφού $dimX = \infty$. □

□

Το σχήμα ομαλοποίησης προσεγγίζει την ακριβή λύση ϕ μέσω της ομαλοποιημένης λύσης

$$\phi_\alpha^\delta := R_\alpha f^\delta. \qquad (3.57)$$

Το σφάλμα της προσέγγισης και η εκτίμησή του χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.48) και (3.51) είναι

$$\phi_\alpha^\delta - \phi = R_\alpha f^\delta - R_\alpha f + R_\alpha A\phi - \phi, \qquad (3.58)$$

$$\|\phi_\alpha^\delta - \phi\|_X \le \delta\|R_\alpha\|_{B(Y,X)} + \|(R_\alpha A - I)\phi\|_X. \qquad (3.59)$$

Στην εξίσωση (3.59) ο πρώτος όρος $\delta\|R_\alpha\|_{B(Y,X)}$ είναι το σφάλμα επιρροής των διαταραγμένων δεδομένων και ο δεύτερος όρος $\|(R_\alpha A - I)\phi\|_X$ είναι το σφάλμα προσέγγισης του A^{-1} από τον R_α.

Θα ασχοληθούμε, αρχικά, με τον πρώτο όρο. Από Θεώρημα (3.61) δεν μπορεί να εκτιμηθεί ομοιόμορφα ως προς α. Αυξάνεται καθώς $\alpha \to 0$ λόγω της μη καλής τοποθέτησης του προβλήματος. Η ευστάθεια θέλει τον όρο $\|R_\alpha\|_{B(Y,X)}$ να είναι μικρός δηλαδή η παράμετρος α να είναι μεγάλη.

Στη συνέχεια, θα ασχοληθούμε με το δεύτερο όρο. Από Θεώρημα (3.61) δεν μπορεί να εκτιμηθεί ομοιόμορφα ως προς ϕ. Ελαττώνεται καθώς $\alpha \to 0$ λόγω της (3.49). Η ακρίβεια της προσέγγισης θέλει τον όρο $\|(R_\alpha A - I)\phi\|_X$ να είναι μικρός δηλαδή η παράμετρος α να είναι μικρή.

Κάθε σχήμα ομαλοποίησης χρειάζεται μια στρατηγική επιλογής της παραμέτρου α η οποία εξαρτάται τόσο από τα δεδομένα f^δ ώστε να έχουμε μικρό ολικό σφάλμα προσέγγισης. Λόγω των παραπάνω η βέλτιστη επιλογή της παραμέτρου α είναι αυτή που κάνει το δεξί μέλος της (3.59) ελάχιστο.

Ορισμός 3.62. *Η στρατηγική για ένα ομαλοποιημένο σχήμα R_α, $\alpha > 0$ είναι η επιλογή της παραμέτρου ομαλοποίησης $\alpha = \alpha(\delta, f^\delta)$ που εξαρτάται από το επίπεδο σφάλματος δ και από τα δεδομένα f^δ καλείται* ***ομαλό*** *αν για κάθε $f \in A(X)$ και για κάθε $f^\delta \in Y$ με $\|f^\delta - f\| \le \delta$ έχουμε*

$$R_{\alpha(\delta, f^\delta)} f^\delta \to A^{-1}f, \ \textit{καθώς} \ \delta \to 0. \qquad (3.60)$$

Υπάρχουν δύο είδη επιλογών για την παράμετρο α οι a priori και οι a posteriori. Οι a priori εκτιμήσεις προκύπτουν από την τάξη ομαλότητας της λύσης του ακριβούς προβλήματος. Το μειονέκτημα αυτών είναι ότι σε αρκετά δεν ξέρουμε την ακριβή λύση οπότε δεν είναι δυνατή μια τέτοια εκτίμηση. Οι a posteriori εκτιμήσεις προκύπτουν από έλεγχο μέσω του επιπέδου σφάλματος δ και για αυτό το λόγω είναι προτιμητέες.

Μία a posteriori εκτίμηση που έπεται με φυσικό τρόπο από την δομή του προβλήματος έδωσε ο Morozov στη λεγόμενη **Αρχή Χάσματος (Descrepancy Principle) του Morozov**. Η οποία περιληπτικά αναφέρει ότι για το προσεγγιστικό πρόβλημα το αντίστοιχο σφάλμα $\|A\phi - f\|$ δεν πρέπει να είναι μικρότερο από την ακρίβεια μέτρησης των δεδομένων f^δ. Δηλαδή, ότι η παράμετρος ομαλοποίησης α πρέπει να επιλέγεται τέτοια ώστε

$$\|AR_{\alpha(\delta,f^\delta)}f^\delta - f^\delta\| = \gamma\delta, \tag{3.61}$$

όπου $\gamma \geq 1$ σταθερή παράμετρος. Αν το σχήμα ομαλοποίησης είναι διακριτό R_m με $m = 1, 2, \cdots$ παράμετρο ομαλοποίησης το m επιλέγεται να είναι ο μικρότερος θετικός ακέραιος για τον οποίο ισχύει

$$\|AR_m f^\delta - f^\delta\| \leq \gamma\delta, \tag{3.62}$$

όπου $\gamma \geq 1$ σταθερή παράμετρος.

Παρατήρηση 3.63. *Από εδώ και μετά θεωρούμε τον χώρο Hilbert και τον αυτοσυζυγή συμπαγή γραμμικό τελεστή $A : H \to H$. Θυμόμαστε κάποιες βασικές ιδιότητες του A. Οι ιδιοτιμές του A είναι πραγματικές και αν $A \neq 0$ τότε υπάρχει τουλάχιστον μία ιδιοτιμή του A διάφορη του μηδενός. Αν επιπλέον το πλήθος των ιδιοτιμών του δεν είναι πεπερασμένο τότε το πολύ αριθμήσιμο πλήθος ιδιοτιμών μπορεί να συσσωρεύεται στο 0. Επίσης, όλες οι μη μηδενικές ιδιοτιμές έχουν πεπερασμένη πολλαπλότητα και άρα οι αντίστοιχοι ιδιόχωροι είναι πεπερασμένης διάστασης. Τέλος, ιδιοστοιχεία που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι ορθογώνια μεταξύ τους.*

Εργαζόμενοι, όμοια, με το Θεώρημα (1.129) με $(\lambda_n)_n$ συμβολίζουμε την ακολουθία των μη μηδενικών ιδιοτιμών του A με τέτοια διάταξη ώστε

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq 0,$$

όπου εμφανίζονται τόσες φορές όση η πολλαπλότητά τους με αντίστοιχα ορθοκανονικά ιδιοστοιχεία $(\phi_n)_n$. Τότε για κάθε $\phi \in H$

$$\phi \ = \ \sum_{n=1}^{\infty}(\phi, \phi_n)\phi_n \ + \ P\phi, \tag{3.63}$$

όπου $P : H \to N(A)$ η ορθογώνια προβολή του H στον πυρήνα $N(A)$ του A. Επομένως, από την (3.63) έχουμε

$$A\phi \ = \ \sum_{n=1}^{\infty}(\phi, \phi_n)A\phi_n \ + \ AP\phi \tag{3.64}$$

$$\Rightarrow \ A\phi \ = \ \sum_{n=1}^{\infty}(\phi, \phi_n)\lambda_n\phi_n \tag{3.65}$$

Η παραπάνω καλείται **φασματική ανάλυση** του προβλήματος.

Ορισμός 3.64. *Έστω X, Y χώροι Hilbert και $A : X \to Y$ συμπαγής γραμμικός τελεστής και άρα επίσης $A^* : Y \to X$ συμπαγής γραμμικός τελεστής. Οι μη αρνητικές ιδιοτιμές του μη αρνητικού αυτοσυζυγή τελεστή $A^*A : X \to X$ καλούνται* ***ιδιάζουσες τιμές*** *του A.*

Θεώρημα 3.65. *Έστω X, Y χώροι Hilbert και $A : X \to Y$ συμπαγής γραμμικός τελεστής με $A \neq 0$ και άρα επίσης $A^* : Y \to X$ συμπαγής γραμμικός τελεστής. Έστω, επίσης, $(\mu_n)_n$ ακολουθία μη μηδενικών ιδιάζουσων τιμών με διάταξη ώστε*

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq 0$$

όπου εμφανίζονται τόσες φορές όση η πολλαπλότητά τους η οποία προκύπτει από την διάσταση των πυρήνων $N(\mu^2 I - A^*A)$. Τότε υπάρχει ορθοκανονικές ακολουθίες $(\phi_n)_n \subset X$ και $(\psi_n)_n \subset Y$ τέτοιες ώστε

$$A\phi_n = \mu_n \psi_n \quad \text{και} \quad A^*\psi_n = \mu_n \phi_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.66}$$

Για κάθε $\phi \in H$ η ανάλυση σε ιδιάζουσες τιμές είναι

$$\phi \; = \; \sum_{n=1}^{\infty} (\phi, \phi_n)\phi_n \; + \; P\phi, \tag{3.67}$$

όπου $P : H \to N(A)$ η ορθογώνια προβολή του H στον πυρήνα $N(A)$ του A. Από την (3.67) και την (3.66) έχουμε

$$A\phi \; = \; \sum_{n=1}^{\infty} (\phi, \phi_n)\mu_n \psi_n. \tag{3.68}$$

Κάθε σύστημα $(\mu_n, \phi_n, \psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με αυτές τις ιδιότητες καλείται ***ιδιάζον σύστημα*** *του A. Αν υπάρχουν μόνο πεπερασμένες το πλήθος ιδιάζουσες τιμές τότε τα αθροίσματα στις (3.67) και (3.68) γίνονται πεπερασμένα.*

Παρατήρηση 3.66. *Από Θεώρημα (1.129) μέσω της εξίσωσης Parseval, των σχέσεων (3.67), (3.68) και επειδή $(\phi_n)_n$, $(\psi_n)_n$ ορθοκανονικές έχουμε επίσης τις σχέσεις*

$$\|\phi\|^2 \; = \; \sum_{n=1}^{\infty} |(\phi, \phi_n)|^2 \; + \; \|P\phi\|^2, \tag{3.69}$$

$$\|A\phi\|^2 \; = \; \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^2 |(\phi, \phi_n)|^2. \tag{3.70}$$

Θεώρημα 3.67 (Θεώρημα Picard). *Έστω X, Y χώροι Hilbert και $A : X \to Y$ συμπαγής γραμμικός τελεστής με ιδιάζον σύστημα $(\mu_n, \phi_n, \psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Η εξίσωση πρώτου είδους*

$$A(\phi) = f \tag{3.71}$$

είναι επιλύσιμη αν και μόνο αν f ανήκει στο $N(A^*)^\perp$ και ικανοποιεί την σχέση

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2} |(f, \psi_n)|^2 \; < \; \infty. \tag{3.72}$$

Σε αυτήν την περίπτωση η λύση δίνεται από την

$$\phi \; = \; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} (f, \psi_n)\phi_n \,. \tag{3.73}$$

Παρατήρηση 3.68. *Θυμόμαστε από το Θεώρημα (1.55) ότι* $N(A^*)^\perp = \overline{A(X)}$.

Αν διαταράξουμε το δεξί μέλος της (3.71) με $f^\delta = f + \delta\psi_n$ τότε η διαταραγμένη λύση $\phi^\delta = \phi + (\delta\phi_n/\mu_n)$ και

$$\frac{\|\phi^\delta - \phi\|}{\|f^\delta - f\|} = \frac{\|\delta\phi_n\|/|\mu_n|}{\|\delta\psi_n\|} = \frac{1}{\mu_n},$$

επειδή $(\phi_n)_n$, $(\psi_n)_n$ ορθοκανονικές. Αφού $\mu_n \to 0$ τότε $1/\mu_n \to \infty$ καθώς $n \to \infty$ το $1/\mu_n$ μπορεί να γίνει αυθαίρετα μεγάλο. Όσο πιο γρήγορα η $(\mu_n)_n$ πάει στο μηδέν τόσο πιο έντονη είναι η μη καλή τοποθέτηση του προβλήματος. Για το λόγο αυτό θέλουμε να ελέγξουμε τον όρο $1/\mu_n$ για να ομαλοποιήσουμε το πρόβλημα.

Θεώρημα 3.69. *Έστω X, Y χώροι Hilbert και $A : X \to Y$ μονοσήμαντος συμπαγής γραμμικός τελεστής με ιδιάζον σύστημα $(\mu_n, \phi_n, \psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Έστω, επίσης, φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό $g : (0, +\infty) \times (0, \|A\|] \to \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε για κάθε $\alpha > 0$ υπάρχει $\tilde{c}(\alpha) > 0$ τέτοια ώστε*

$$|g(\alpha, \mu)| \leq \tilde{c}(\alpha)\mu \quad , \quad 0 < \mu \leq \|A\|, \tag{3.74}$$

$$\lim_{\alpha\to 0} g(\alpha, \mu) = 1 \quad , \quad 0 < \mu \leq \|A\|. \tag{3.75}$$

Τότε ο $R_\alpha \in B(Y, X)$, $\alpha > 0$ ορίζεται ως

$$R_\alpha f := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} g(\alpha, \mu_n)(f, \psi_n)\phi_n\,, \quad f \in Y \tag{3.76}$$

και περιγράφει ένα σχήμα ομαλοποίησης με

$$\|R_\alpha\|_{B(Y,X)} \leq \tilde{c}(\alpha)\,. \tag{3.77}$$

3.2.2 Μέθοδος Ομαλοποίησης Tikhonov για Γραμμικούς Τελεστές

Σε αυτήν την υποενότητα παρουσιάζουμε τη μέθοδο ομαλοποίησης Tikhonov για γραμμικούς τελεστές και την Αρχή Χάσματος του Morozov σε αυτήν την περίπτωση.

Θεώρημα 3.70. *Έστω X, Y χώροι Hilbert και $A : X \to Y$ συμπαγής γραμμικός τελεστής. Τότε για κάθε $\alpha > 0$ ο τελεστής $\alpha I + A^*A : X \to X$ είναι αμφιμονοσήμαντος και έχει φραγμένο αντίστροφο. Επιπλέον, αν ο A είναι μονοσήμαντος*

$$R_\alpha f := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} g(\alpha, \mu_n)(f, \psi_n)\phi_n\,, \quad f \in Y \tag{3.78}$$

και περιγράφει ένα σχήμα ομαλοποίησης με

$$\|R_\alpha\|_{B(Y,X)} \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\,. \tag{3.79}$$

Στο παραπάνω Θεώρημα αν ο A είναι μονοσήμαντος η λύση της

$$(\alpha I + A^*A)\phi_\alpha \;=\; A^*f \;. \tag{3.80}$$

ϕ_α είναι μοναδική και μάλιστα

$$\phi_\alpha \;=\; (\alpha I + A^*A)^{-1}A^*f \;=\; R_\alpha f \;. \tag{3.81}$$

$$\Rightarrow\;\phi_\alpha \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n}{\alpha+\mu_n^2}(f,\psi_n)\phi_n\,,\quad f\in Y\;. \tag{3.82}$$

Θέτοντας

$$g(\alpha,\mu_n) \;=\; \frac{\mu_n}{\alpha+\mu_n^2}\;,$$

έχουμε το αποτέλεσμα που θέλουμε από το θεώρημα.

Θεώρημα 3.71. *Έστω X, Y χώροι Hilbert και $A : X \to Y$ μονοσήμαντος συμπαγής γραμμικός τελεστής και $\alpha > 0$. Τότε για κάθε $f \in Y$ υπάρχει μοναδικό $\phi_\alpha \in X$ τέτοιο ώστε*

$$\|A\phi_\alpha - f\|^2 + \alpha\|\phi_\alpha\|^2 \;=\; \inf_{\phi\in X}\left[\|A\phi - f\|^2 + \alpha\|\phi\|^2\right]\;. \tag{3.83}$$

*Το $\phi_\alpha \in X$ που ελαχιστοποιεί το **συναρτησιακό Tikhonov** $F : X \times (0,+\infty) \to \mathbb{R}$*

$$F(\phi\,;\alpha) \;:=\; \|A\phi - f\|^2 + \alpha\|\phi\|^2 \tag{3.84}$$

είναι η μοναδική λύση της (3.80) και εξαρτάται με συνεχή τρόπο από τα δεδομένα f.

Παρατήρηση 3.72. *Το Θεώρημα (3.71) ισχύει και για φραγμένους τελεστές αυτό προκύπτει από το Θεώρημα Lax-Milgram (1.65) αφού ο $\alpha I + A^*A$ είναι αυστηρά πιεστικός.*

Παρατήρηση 3.73. *Η μέθοδος ομαλοποίησης Tikhonov στοχεύει στην ελαχιστοποίηση του συναρτησιακού Tikhonov έτσι ώστε το σφάλμα $\|A\phi - f\|^2$ να είναι μικρό λόγω του όρου ποινής $\alpha\|\phi\|^2$. Παρόλο που η Tikhonov δεν είναι μία μέθοδος με ποινή αν την δούμε από αυτήν τη σκοπιά θα κάνουμε δύο σημαντικές παρατηρήσεις. Πρώτον, αν δίνεται $\kappa > 0$ ελαχιστοποιούμε το $\|A\phi - f\|$ υπό τον περιορισμό $\|\phi\| \le \kappa$. Δεύτερον, αν δίνεται $\delta > 0$ ελαχιστοποιούμε το $\|\phi\|$ υπό τον περιορισμό $\|A\phi - f\| \le \delta$. Το πρώτο οδηγεί σε οιονεί λύσεις (quasi-solutions) ενώ το δεύτερο στην Αρχή Χάσματος του Morozov.*

Για διακριτό σχήμα ομαλοποίησης η Αρχή Χάσματος παίρνει την μορφή.

Θεώρημα 3.74 (Αρχή Χάσματος (Διακριτή Περίπτωση)). *Έστω X, Y χώροι Hilbert και $A : X \to Y$ μονοσήμαντος συμπαγής γραμμικός τελεστής με πυκνή εικόνα στον Y και έστω $f \in Y$ με $0 < \delta$. Τότε υπάρχει ένα $m \in \mathbb{N}$ μοναδική παράμετρος το οποίο είναι το μικρότερο δυνατό ώστε*

$$\|AR_mf - f\| \;\le\; \delta\,. \tag{3.85}$$

Από το δεύτερο σκέλος της παρατήρησης (3.73) έχουμε την Αρχή Χάσματος στην δικιά μας περίπτωση.

Θεώρημα 3.75 (Αρχή Χάσματος). *Έστω X, Y χώροι Hilbert και $A : X \to Y$ μονοσήμαντος συμπαγής γραμμικός τελεστής με πυκνή εικόνα στον Y και έστω $f \in Y$ με $0 < \delta \leq \|f\|$. Τότε υπάρχει μοναδική παράμετρος α τέτοια ώστε*

$$\|AR_\alpha f - f\| \;=\; \delta\,. \tag{3.86}$$

Έστω $G_{\phi_\alpha} : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$G_{\phi_\alpha}(\alpha) \;:=\; \|AR_\alpha f - f\|^2 - \delta^2\,. \tag{3.87}$$

Επειδή γενικά μπορεί $\delta \geq \|f\|$ η παράμετρος ομαλοποίησης που ικανοποιεί την (3.86) μπορεί να αποκτηθεί από τη μέθοδο Newton λύνοντας την εξίσωση $G_{\phi_\alpha}(\alpha) = 0$. Αφού ϕ_α μοναδική λύση της (3.80) γράφουμε

$$G_{\phi_\alpha}(\alpha) \;=\; \|A\phi_\alpha - f\|^2 - \delta^2 \tag{3.88}$$

και άρα

$$G'_{\phi_\alpha}(\alpha) \;=\; 2Re\left(A\frac{d\phi_\alpha}{d\alpha}, A\phi_\alpha - f\right) \tag{3.89}$$

$$(3.80)\;\Rightarrow G'_{\phi_\alpha}(\alpha) \;=\; -2\alpha\left(\frac{d\phi_\alpha}{d\alpha}, \phi_\alpha\right). \tag{3.90}$$

Παραγωγίζοντας την (3.80) προκύπτει η εξίσωση

$$(\alpha I + A^*A)\frac{d\phi_\alpha}{d\alpha} = -\phi_\alpha, \tag{3.91}$$

όπου πρέπει να λύνεται ως προς $d\phi_\alpha/d\alpha$ για τον υπολογισμό της (3.90).

Θεώρημα 3.76 (Αρχή Χάσματος για τη Μέθοδο Ομαλοποίησης Tikhonov). *Έστω X, Y χώροι Hilbert και $A : X \to Y$ μονοσήμαντος συμπαγής γραμμικός τελεστής με πυκνή εικόνα στον Y. Έστω, επίσης, $f \in A(X)$, $f^\delta \in Y$ που ικανοποιούν με $0 < \delta$ την*

$$\|f^\delta - f\| \leq \delta < \|f^\delta\|.$$

Τότε υπάρχει μοναδική παράμετρος $\alpha = \alpha(\delta)$ τέτοια ώστε

$$\|AR_{\alpha(\delta)}f^\delta - f^\delta\| \;=\; \delta\,. \tag{3.92}$$

και

$$R_{\alpha(\delta)}f^\delta \to A^{-1}f^\delta\;, \quad \delta \to 0\,. \tag{3.93}$$

Τώρα βλέπουμε το πρώτο μέρος της παρατήρησης (3.73) έχουμε τις οιονεί λύσεις στην δικιά μας περίπτωση.

Θεώρημα 3.77. *Έστω X, Y χώροι Hilbert και $A : X \to Y$ μονοσήμαντος συμπαγής γραμμικός τελεστής $\kappa > 0$. Τότε $f \in Y$ υπάρχει μοναδική στοιχείο ϕ_0 με $\|\phi_0\| \leq \kappa$ που ικανοποιεί τη σχέση*

$$\|A\phi_0 - f\| \;\leq\; \|A\phi - f\|\,, \quad \forall \phi \in X. \tag{3.94}$$

Το ϕ_0 είναι η οιονεί λύση της $A\phi = f$ με περιορισμό κ.

Η σχέση των οιονεί λύσεων με την μέθοδο ομαλοποίηση Tikhonov είναι η ακόλουθη.

Θεώρημα 3.78. *Έστω X, Y χώροι Hilbert και $A : X \to Y$ μονοσήμαντος συμπαγής γραμμικός τελεστής με πυκνή εικόνα στον Y και $f \notin V := \{A\phi : \|\phi\| \leq \kappa\}$. Τότε η οιονεί λύση ϕ_0 θεωρείται σταθερή με*

$$\|\phi_0\| = \kappa$$

και υπάρχει μοναδική παράμετρος $\alpha > 0$ τέτοια ώστε

$$(\alpha I + A^* A)\phi_0 \;=\; A^* f\,. \tag{3.95}$$

Θεώρημα 3.79 (Γενικευμένη Αρχή Χάσματος). *Έστω X, Y χώροι Hilbert και $A : X \to Y$ μονοσήμαντος συμπαγής γραμμικός τελεστής με πυκνή εικόνα στον Y και έστω $0 \neq f \in Y$ με $0 < \delta \leq \|f\|$. Τότε υπάρχει μοναδική παράμετρος α τέτοια ώστε*

$$\|AR_\alpha f - f\| \;=\; \delta \|R_\alpha f\|\,. \tag{3.96}$$

Θεώρημα 3.80 (Γενικευμένη Αρχή Χάσματος για τη Μέθοδο Ομαλοποίησης Tikhonov). *Έστω X, Y χώροι Hilbert και οικογένεια $(A_\delta)_\delta$ με $\delta \geq 0$ όπου $A_\delta : X \to Y$ μονοσήμαντοι συμπαγείς γραμμικοί τελεστές με πυκνή εικόνα στον Y που ικανοποιούν την σχέση*

$$\|A_\delta - A_0\| \leq \delta\,, \quad \delta > 0.$$

Έστω, επίσης, $0 \neq f \in Y$ και $(\alpha_\delta, \phi^\delta) \in \mathbb{R}^+ \times X$ οι ομαλοποιημένες λύσεις Tikhonov της $A_\delta \phi^\delta = f$ υπό την Γενικευμένη Αρχή Χάσματος δηλαδή

$$(\alpha_\delta I + A_\delta^* A_\delta)\phi_\delta \;=\; A_\delta^* f \tag{3.97}$$

και

$$\|A_\delta \phi_\delta - f\| \;=\; \delta \|\phi_\delta\|\,. \tag{3.98}$$

Τότε

i. αν η εξίσωση $A\phi_0 = f$ έχει μία λύση $\phi \in X$ τότε $\phi_\delta \to \phi$ καθώς $\delta \to 0$.

ii. αν η εξίσωση $A\phi_0 = f$ δεν έχει λύση τότε $\|\phi_\delta\| \to \infty$ καθώς $\delta \to 0$.

3.2.3 Μέθοδος Ομαλοποίησης Tikhonov για Μη Γραμμικούς Τελεστές

Σε αυτήν την υποενότητα παρουσιάζουμε τη μέθοδο ομαλοποίησης Tikhonov για μη γραμμικούς τελεστές και την Αρχή Χάσματος του Morozov. Σε αυτή την περίπτωση χρειαζόμαστε και μία μέθοδο για να γραμμικοποιήσουμε το πρόβλημα και βλέπουμε την μέθοδο Newton συγκεκριμένα τον αλγόριθμο Levenberg-Marquardt και την ομαλοποιημένη μέθοδο Gauss-Newton.

Για μη γραμμικά μη καλώς τοποθετημένα προβλήματα προσπαθούμε να προσεγγίσουμε τη λύση της μη γραμμικής εξίσωσης μέσω γραμμικοποίησης χρησιμοποιώντας μεθόδους τύπου Newton. Έτσι, παίρνουμε γραμμικές μη καλώς τοποθετημένες εξισώσεις στις οποίες μπορούμε να εφαρμόσουμε μέθοδο ομαλοποίησης Tikhonov. Δηλαδή, μέσω της γραμμικοποίησης καθιστούμε το πρόβλημα επιλύσιμο μέσω της μεθόδου Tikhonov.

Θεώρημα 3.81. *Έστω X χώρος με νόρμα, $U \subset X$ ανοιχτό, Y χώρος Banach και απολύτως συνεχής τελεστής $A : U \to Y$ ο οποίος είναι Fréchet παραγωγίσιμος στο $\phi \in U$. Τότε ο τελεστής $A'(\phi)$ της παραγώγου Fréchet στο ϕ είναι συμπαγής.*

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα(1.15) και την Παρατήρηση(1.16) για να δείξουμε ότι το σύνολο

$$V \ := \ \{A'(\phi)(h) : h \in X, \|h\| \leq 1\}$$

να είναι σχετικά συμπαγές. Για $\epsilon > 0$ δοθέν από τον ορισμό της παραγώγου Fréchet έχουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\|h\| \leq \delta$ το $\phi + h \in U$ και

$$\begin{aligned} \|A(\phi+h) - A(\phi) - A'(\phi)(h)\| &= O(\|h\|) && (3.99)\\ \|A(\phi+h) - A(\phi) - A'(\phi)(h)\| &\leq \frac{\epsilon\|h\|}{3} && (3.100) \end{aligned}$$

Αφού ο A είναι συμπαγής το σύνολο

$$K \ := \ \{A(\phi+h) : h \in X, \|h\| \leq 1\}$$

είναι σχετικά συμπαγές και άρα ολικά φραγμένο. Δηλαδή, υπάρχει πεπερασμένο σύνολο στοιχείων $\{h_1, \cdots, h_n\}$ με $\|h_i\| \leq 1, \ \forall i$ έτσι ώστε για κάθε $h \in X, \|h\| \leq 1$ να υπάρχει τουλάχιστον ένας δείκτης $j = j(h)$ τέτοιος ώστε

$$\|A(\phi+h) - A(\phi+h_j)\| \ < \ \frac{\epsilon\delta}{3}\,. \tag{3.101}$$

Έχουμε δει ότι αφού A είναι Fréchet παραγωγίσιμος στο $\phi \in U$ θα είναι και Gateaux παραγωγίσιμος και οι παράγωγοι θα ταυτίζονται. Χρησιμοποιώντας, λοιπόν, της ιδιότητες της παραγώγου Gateaux $dA(\phi;\delta h)$ στο $\phi \in U$ καταλήγουμε ότι

$$A'(\phi)(\delta h) \ = \ dA(\phi;\delta h) \ = \ \delta\, dA(\phi;h) \ = \ \delta\, A'(\phi)(h).$$

Επομένως, μέσω της τριγωνικής ανισότητας και των σχέσεων (3.100), (3.101) έχουμε

$$\delta \left\|A'(\phi)(h) - A'(\phi)(h_j)\right\| = \left\|A'(\phi)(\delta h) - A'(\phi)(\delta h_j)\right\| =$$

$$\begin{aligned}
&= \|A'(\phi)(\delta h) - A(\phi+\delta h) + A(\phi+\delta h) - A(\phi+\delta h_j) + A(\phi+\delta h_j) - A'(\phi)(\delta h_j)\| \\
&\le \frac{\epsilon\delta\|h\|}{3} + \frac{\epsilon\delta\|h_j\|}{3} + \|A(\phi+\delta h) - A(\phi+\delta h_j)\| \\
&\le \frac{\epsilon\delta}{3} + \frac{\epsilon\delta}{3} + \|A(\phi+\delta h) - A(\phi+\delta h_j)\| \\
&< \epsilon\delta\,.
\end{aligned}$$

Άρα,

$$\delta \left\|A'(\phi)(h) - A'(\phi)(h_j)\right\| \;<\; \epsilon\delta \;\Leftrightarrow\; \left\|A'(\phi)(h) - A'(\phi)(h_j)\right\| \;<\; \epsilon\,. \tag{3.102}$$

Επομένως, το V είναι ολικά φραγμένο και άρα σχετικά συμπαγές. Από ορισμό ο τελεστής $A'(\phi)$ είναι συμπαγής. □

Ορισμός 3.82. *Έστω H χώρος Hilbert και ακολουθία $(\phi_n)_n \subset H$. Η ϕ_n καλείται* ***ασθενώς συγκλίνουσα*** *σε ένα $\phi \in H$ αν*

$$\lim_{n\to+\infty} (\psi, \phi_n) = (\psi, \phi)\,, \quad \forall \psi \in H. \tag{3.103}$$

Συμβολίζουμε ότι η ϕ_n είναι ασθενώς συγκλίνουσα στη ϕ ως $\phi_n \rightharpoonup \phi$, $n \to +\infty$.

Παρατήρηση 3.83. *Αν η ϕ_n είναι συγκλίνει ισχυρά στη ϕ δηλαδή $\phi_n \to \phi$, $n \to +\infty$ τότε συγκλίνει και ασθενώς στη ϕ.*

Ορισμός 3.84. *Έστω X, Y χώροι Hilbert, $U \subset X$ και τελεστής $A : U \to Y$. Ο A καλείται* ***ασθενώς ακολουθιακά κλειστός τελεστής*** *αν για κάθε ακολουθία $(\phi_n)_n \subset U$ με $\phi_n \rightharpoonup \phi \in X$ και $A\phi_n \rightharpoonup g \in Y$ έχουμε ότι $\phi \in U$ και $A\phi = g$.*

Τώρα, θα δούμε πως τα αποτελέσματα που είχαμε για την Tikhonov και τις οιονεί λύσεις εφαρμόζονται σε μη καλώς τοποθετημένα μη γραμμικά προβλήματα. Αρχικά, ξεκινάμε από το αντίστοιχο θεώρημα με το Θεώρημα (3.71) δηλαδή του αντίστοιχου του Lax-Milgram.

Θεώρημα 3.85. *Έστω X, Y χώροι Hilbert, $U \subset X$, $A : U \to Y$ ασθενώς ακολουθιακά κλειστός τελεστής και παράμετρος ομαλοποίησης $\alpha > 0$. Τότε για κάθε $f \in Y$ υπάρχει $\phi_\alpha \in U$ τέτοιο ώστε*

$$\|A\phi_\alpha - f\|^2 + \alpha\|\phi_\alpha\|^2 \;=\; \inf_{\phi\in U}\left[\|A\phi - f\|^2 + \alpha\|\phi\|^2\right]\,. \tag{3.104}$$

Το $\phi_\alpha \in U$ ελαχιστοποιεί το ***συναρτησιακό Tikhonov*** *$F : X \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}$*

$$F(\phi\,;\alpha) \;:=\; \|A\phi - f\|^2 + \alpha\|\phi\|^2\,. \tag{3.105}$$

Αντίστοιχα για τις οιονεί λύσεις στη μη γραμμική περίπτωση έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 3.86. *Έστω X, Y χώροι Hilbert, $U \subset X$ συμπαγές, $A : U \to Y$ συνεχής τελεστής και παράμετρος ομαλοποίησης $\alpha > 0$. Τότε για κάθε $f \in Y$ υπάρχει $\phi_0 \in U$ τέτοιο ώστε*

$$\|A\phi_0 - f\|^2 \;=\; \inf_{\phi \in U} \left[\|A\phi - f\|^2\right] . \tag{3.106}$$

Το ϕ_0 είναι η οιονεί λύση της $A\phi = f$ ως προς U.

Προχωράμε τώρα στην αριθμητική επίλυση της

$$A\phi = f \tag{3.107}$$

μέσω μεθόδων τύπου Newton από γνώση των διαταραγμένων δεδομένων f^δ με επίπεδο σφάλματος που δίνεται από τη σχέση (3.48) και τελεστή Α απολύτως συνεχή και Fréchet παραγωγίσιμο. Η κλασσική μέθοδος Newton εφαρμοσμένη στα διαταραγμένα δεδομένα $A\phi^\delta = f^\delta$ στοχεύει στην επίλυση της γραμμικοποιημένης εξίσωσης

$$B_n h_n \;=\; f^\delta - A\phi_n^\delta , \tag{3.108}$$

όπου $h_n := \phi_{n+1}^\delta - \phi_n^\delta$ η βελτίωση και με $f_n^\delta := f^\delta - A\phi_n^\delta$

$$B_n h_n \;=\; f_n^\delta , \tag{3.109}$$

με

$$B_n \;:=\; A'(\phi_n^\delta) . \tag{3.110}$$

Από Θεώρημα (3.81) η γραμμικοποιημένη εξίσωση (3.108) κληρονομεί την μη καλή τοποθέτηση του προβλήματος από τη γραμμική εξίσωση (3.107) και άρα χρειάζεται ομαλοποίηση. Η μεθοδολογία που συζητήσαμε στην προηγούμενη ενότητα μπορούν να εφαρμοστούν και τώρα. Θεωρούμε ότι ο Α είναι μη γραμμικός τελεστής $A : X \to Y$ με X, Y χώρους Hilbert. Στη περίπτωση αυτή η ομαλοποιημένη λύση h_n της (3.108) όμοια με το Θεώρημα (3.70) δίνεται από τη σχέση

$$h_n \;=\; (\alpha_n I + B_n^* B_n)^{-1} B_n^* (f^\delta - A\phi_n^\delta) , \tag{3.111}$$

$$h_n \;=\; (\alpha_n I + B_n^* B_n)^{-1} B_n^* f_n^\delta . \tag{3.112}$$

Από Θεώρημα (3.70) μπορούμε να δούμε την (3.112) ως

$$h_n \;=\; R_{a_n} f_n^\delta , \tag{3.113}$$

όπου $R_{a_n} = (\alpha_n I + B_n^* B_n)^{-1} B_n^*$. Από το Θεώρημα (3.71) η βελτίωση h_n είναι η μοναδική λύση του προβλήματος ελαχιστοποίησης

$$\|B_n h_n - f^\delta + A\phi_\alpha^\delta\|^2 + \alpha_n \|h_n\|^2 \;=\; \inf_{h \in X} \left[\|B_n h - f^\delta + A\phi_\alpha^\delta\|^2 + \alpha_n \|h\|^2\right] , \tag{3.114}$$

με $f_\alpha^\delta := f^\delta - A\phi_\alpha^\delta$

$$\|B_n h_n - f_\alpha^\delta\|^2 + \alpha_n \|h_n\|^2 \;=\; \inf_{h \in X} \left[\|B_n h - f_\alpha^\delta\|^2 + \alpha_n \|h\|^2\right] . \tag{3.115}$$

Η μέθοδος αυτή είναι γνωστή ως **αλγόριθμος Levenberg-Marquardt**.

Για την σύγκλισή της επιλέγουμε την παράμετρο ομαλοποίησης α_n τέτοια ώστε

$$\|B_n h_n - f^\delta + A\phi_\alpha^\delta\| \;=\; \tau\|A\phi_n^\delta - f^\delta\|\,, \tag{3.116}$$

$$\|B_n h_n - f_\alpha^\delta\| \;=\; \tau\|f_n^\delta\|\,. \tag{3.117}$$

για $0 < \tau < 1$. Δηλαδή, η εξίσωση Newton ικανοποιείται μόνο μέχρι υπόλοιπα μεγέθους $\tau\|A\phi_n^\delta - f^\delta\|$. Επιπλέον, για την επιλογή της παραμέτρου ομαλοποίησης σε κάθε βήμα χρειαζόμαστε ένα κριτήριο τερματισμού το οποίο προκύπτει από την αρχή χάσματος. Δηλαδή, οι εκτελέσεις της μεθόδου σταματάνε στον πρώτο δείκτη $N := N(\delta, f^\delta)$ τέτοιο ώστε

$$\|A\phi_N^\delta - f^\delta\| \;\leq\; \gamma\delta\,, \tag{3.118}$$

με $f_N^\delta := f^\delta - A\phi_N^\delta$

$$\|f_N^\delta\| \;\leq\; \gamma\delta\,. \tag{3.119}$$

για κάποια σταθερή παράμετρο $\gamma \geq 1$. Κάτω από τις υποθέσεις ότι η (3.107) έχει μοναδική λύση ϕ και ότι ο A ικανοποιεί την συνθήκη που προκύπτει από το Θεώρημα Taylor (3.51) για $c > 0$

$$\|A(\phi_1) - A(\phi_2) - A'(\phi_1)(\phi_1 - \phi_2)\| \leq c\|\phi_1 - \phi_2\|\|A(\phi_1) - A(\phi_2)\|\,, \quad \forall\phi_1, \phi_2 \in U \tag{3.120}$$

όπου U περιοχή του ϕ ο αλγόριθμος Levenberg-Marquardt με παράμετρο ομαλοποίησης που δίνεται από την (3.116) και κριτήριο τερματισμού που δίνεται από την (3.118) με $\gamma\tau < 1$ τερματίζει έπειτα από πεπερασμένες το πλήθος εκτελέσεις $N^* := N^*(\delta, f^\delta)$ και

$$\phi_{N^*}^\delta \to \phi, \quad \delta \to 0.$$

Επομένως, επεκτείνοντας τον ορισμό στην περίπτωση των μη γραμμικών προβλημάτων η στρατηγική αυτή είναι ομαλή.

Αλλάζοντας τον όρο ποινής $\|h\|^2$ στην πρόβλημα ελαχιστοποίησης (3.114) της (3.111) οδηγεί σε μία άλλη αριθμητική μέθοδο την ομαλοποιημένη μέθοδο Gauss-Newton. Η η ομαλοποιημένη λύση h_n της (3.108) όμοια με το Θεώρημα (3.70) δίνεται από τη σχέση

$$h_n \;=\; (\alpha_n I + B_n^* B_n)^{-1}\left(B_n^*(f^\delta - A\phi_n^\delta) + \alpha_n(\phi_0 - \phi_n^\delta)\right)\,, \tag{3.121}$$

με $\phi_{n,0}^\delta := \phi_0 - \phi_n^\delta$

$$h_n \;=\; (\alpha_n I + B_n^* B_n)^{-1}\left(B_n^* f_n^\delta + \alpha_n\phi_{n,0}^\delta\right)\,. \tag{3.122}$$

Αντικαθιστώντας $g = h - (\phi_0 - \phi_n^\delta) = h - \phi_{n,0}^\delta$ από Θεώρημα (3.71) η βελτίωση h_n είναι η μοναδική λύση του προβλήματος ελαχιστοποίησης με $g_n := h_n - (\phi_0 - \phi_n^\delta) = h_n - \phi_{n,0}^\delta$

$$\|B_n h_n - f^\delta + A\phi_\alpha^\delta\|^2 + \alpha_n\|h_n - (\phi_0 - \phi_n^\delta)\|^2 \;=\; \inf_{h\in X}\left[\|B_n h - f^\delta + A\phi_\alpha^\delta\|^2 + \alpha_n\|h - (\phi_0 - \phi_n^\delta)\|^2\right]\,, \tag{3.123}$$

$$\|B_n h_n - f^\delta + A\phi_\alpha^\delta\|^2 + \alpha_n\|h_n - \phi_{n,0}^\delta\|^2 \;=\; \inf_{h\in X}\left[\|B_n h - f^\delta + A\phi_\alpha^\delta\|^2 + \alpha_n\|h - \phi_{n,0}^\delta\|^2\right]\,. \tag{3.124}$$

Ο όρος ποινής στην (3.123) σε σύγκριση με της (3.114) έχει μία επιπλέον ιδιότητα ομαλοποίησης καθώς αποτρέπει αριθμητικές εκτιμήσεις να αποκλίνουν πολύ από την αρχική εκτίμηση για τη λύση. Αυτό είναι ένα βασικό πλεονέκτημα ότι επιτρέπει a priori πληροφορίες για τη λύση στο αριθμητικό σχήμα.

Για την σύγκλισή της επιλέγουμε a priori η παράμετρος ομαλοποίησης α_n να έχει τις ιδιότητες

$$\alpha_{n+1} \leq \alpha_n \leq \tau\alpha_{n+1}\alpha_{n+1} \quad \text{και} \quad \lim \lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0 \tag{3.125}$$

για $\tau > 1$. Ειδικότερα, οι (3.125) ικανοποιούνται αν

$$\alpha_{n+1} = \frac{1}{\tau^n}\alpha_0\,. \tag{3.126}$$

Μπορεί ομοίως με πριν να δειχθεί ότι υπό κατάλληλες υποθέσεις μη γραμμικότητας για τον A η ομαλοποιημένη μέθοδος Gauss-Newton μέσω του κριτηρίου τερματισμού (3.118) που επάγει η αρχή χάσματος τερματίζει έπειτα από πεπερασμένες το πλήθος εκτελέσεις $N^* := N^*(\delta, f^\delta)$ και

$$\phi^\delta_{N^*} \to \phi, \quad \delta \to 0.$$

Επομένως, επεκτείνοντας τον ορισμό στην περίπτωση των μη γραμμικών προβλημάτων η στρατηγική αυτή είναι ομαλή.

3.3 Αντίστροφο Πρόβλημα Σκέδασης

Σε αυτήν την ενότητα θα διατυπώσουμε το Αντίστροφο Πρόβλημα Σκέδασης. Αρχικά, επειδή στα Αντίστροφα Προβλήματα Σκέδασης θέλουμε να βρούμε το σχήμα του σκεδαστή απαραίτητο εργαλείο είναι η παράγωγος χωρίου την οποία θα ορίσουμε και θα δούμε ένα βασικό θεώρημα για αυτήν. Στην συνέχεια θα παρουσιάσουμε το Αντίστροφο Πρόβλημα Σκέδασης για δεδομένα χωρίς φάση στις δύο διαστάσεις. Λόγω της μη καλής τοποθέτησης του προβλήματος βλέπουμε την μέθοδο ομαλοποίησης Tikhonov για αυτό το πρόβλημα και χρησιμοποιούμε την Αρχή Χάσματος του Morozov. Τέλος, για την γραμμικοποίηση του προβλήματος χρησιμοποιούμε μέθοδο τύπου Newton.

3.3.1 Παράγωγος Χωρίου

Σε αυτήν την υποενότητα επειδή στα Αντίστροφα Προβλήματα Σκέδασης θέλουμε να βρούμε το σχήμα του σκεδαστή απαραίτητο εργαλείο είναι η παράγωγος χωρίου την οποία θα ορίσουμε και θα δούμε ένα βασικό θεώρημα για αυτήν [12].

Με $X \subset \{\Gamma \in C^2 \ : \ \exists\, D \subset \mathbb{R}^2$ ανοικτό, φραγμένο και συνεκτικό τέτοιο ώστε $\Gamma = \partial D\}$
Για $\Gamma \in X$ και $\Gamma = \partial D$ θέτουμε $D^e = \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ θεωρούμε το ευθύ πρόβλημα σκέδασης:
Να βρεθεί το ολικό πεδίο $u \in C^2(D^e) \cap C(\overline{D^e})$ που είναι λύση της εξίσωσης Helmholtz

$$\Delta u + k^2 u = 0\ , \quad D^e \tag{3.127}$$

με συνοριακή συνθήκη Dirichlet

$$u = 0 \ , \quad \Gamma. \tag{3.128}$$

$$u = u^i + u^s$$

όπου

$$u^i(x) \ = \ e^{ikx\cdot\hat{d}}$$

επίπεδο προσπίπτον κύμα και το σκεδασμένο u^s ικανοποιεί την συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld

$$\lim_{r\to\infty} r^{1/2}\left(\frac{\partial u^s}{\partial r} - iku^s\right) = 0 \ , \quad r = |x|. \tag{3.129}$$

Η συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld είναι ισοδύναμη με την ασυμπτωτική συμπεριφορά της μορφής

$$u^s(x) = \frac{e^{ik|x|}}{\sqrt{|x|}}\left[u_\infty\left(\frac{x}{|x|}\right) + O\left(\frac{1}{|x|}\right)\right] \ , \quad |x| \to \infty, \tag{3.130}$$

όπου το πλάτος σκέδασης u_∞ ορίζεται στον μοναδιαίο κύκλο $\mathbb{S}^1$ στο $\mathbb{R}^2$ και $\hat{x} = x/|x| \in \mathbb{S}^1$.

Με $R > 0$ ορίζουμε

$$K_R \ = \ \{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ |y| < R\}$$

και $\bar{D} \subset K_R$, τότε έχουμε σύμφωνα και με η ακτινοβόλος λύση u^s της *Helmholtz* έχει ασυμπτωτική συμπεριφορά ενός κυκλικού εξερχόμενου κύματος

$$u^s(x) = \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}}\left[u_\infty\left(\hat{x}\right) + O\left(\frac{1}{r}\right)\right] \ , \quad r = |x| \to \infty$$

ομοιόμορφα για όλες τις κατευθύνσεις $\hat{x} = x/|x| \in \mathbb{S}^1$ και το πλάτος σκέδασης u_∞ ορίζεται στο μοναδιαίο κύκλο $\mathbb{S}^1$ ικανοποιεί την

$$u_\infty(\hat{x}) = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{8k\pi}}\int_{\partial D}\left[u^s(y)\frac{\partial e^{-ik\hat{x}\cdot y}}{\partial\nu(y)} - \frac{\partial u^s}{\partial\nu}(y)e^{-ik\hat{x}\cdot y}\right] ds(y) \ , \ \hat{x} \in \mathbb{S}^1.$$

είμαστε πλέον σε θέση να ορίσουμε τον τελεστή του πλάτους σκέδασης $F : X \to C(\mathbb{S}^1)$ ο οποίος αντιστοιχίζει σε κάθε σύνορο $\Gamma \in X$ το πλάτος σκέδασης u_∞ της αντίστοιχης λύσης του προβλήματος σκέδασης στο D^e.

Τώρα ορίζουμε την παράγωγο του F στο Γ σύμφωνα με τον Pironeau.

Ορισμός 3.87. *Για κάθε πραγματικό διανυσματικό πεδίο $\alpha \in C^2(\Gamma\,;\mathbb{R}^2)$ συμβολίζουμε με Γ_α το σύνολο*

$$\Gamma_\alpha \ := \ \{x + \alpha(x) \ : \ x \in \Gamma\} \tag{3.131}$$

το οποίο είναι C^2-σύνορο ενός χωρίου D_α δεδομένου ότι

$$\|\alpha\|_\infty := \max_{x\in\Gamma}|\alpha(x)|$$

είναι αρκετά μικρό. Ορίζουμε την ***παράγωγο χωρίου (domain derivative) του F στο Γ στην κατεύθυνση*** *α με $\epsilon > 0$ ως*

$$F'(\Gamma\,;\alpha) \ := \ \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\left[F(\Gamma_{\epsilon\alpha}) - F(\Gamma)\right] \ , \tag{3.132}$$

όπου το όριο υπάρχει ομοιόμορφα στην $\mathbb{S}^1$. Τότε η $F'(\Gamma\,;\cdot) : C^2(\Gamma\,;\mathbb{R}^2) \to C(\mathbb{S}^1)$ καλείται ***παράγωγο χωρίου (domain derivative) του F στο Γ.***

Θεώρημα 3.88. *Έστω $\Gamma \in C^2$, $\alpha \in C^2(\Gamma\,;\mathbb{R}^2)$ και $u^0 \in H^2_{loc}(D^e)$ είναι λύση του προβλήματος σκέδασης (3.127). Τότε η παράγωγος χωρίου $F'(\Gamma\,;\alpha)$ υπάρχει και δίνεται από το πλάτος σκέδασης u'_∞ του u', όπου $u \in C^2(D^e) \cap C(\overline{D^e})$ λύνει το εξωτερικό συνοριακό πρόβλημα*

$$\Delta u' + k^2 u' = 0\ ,\quad D^e \tag{3.133}$$

$$u' = -\nu \cdot \alpha \frac{\partial u^0}{\partial \nu}\ ,\quad \Gamma. \tag{3.134}$$

$$\lim_{r\to\infty} r^{1/2}\left(\frac{\partial u'}{\partial r}(x) - iku'(x)\right) = 0\ ,\quad r \to \infty \tag{3.135}$$

ομοιόμορφα για όλες τις κατευθύνσεις $\hat{x} = x/|x| \in \mathbb{S}^1$ όπου $\nu(x)$ το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα κατευθυνόμενο προς το εξωτερικό του D^e. στο $x \in \Gamma$.

Παρατήρηση 3.89. *Θα κάνουμε σκιαγράφηση της απόδειξης. Πρέπει να παρατηρήσουμε από το Θεώρημα (2.95) αφού $\frac{\partial u^0}{\partial \nu} \in C(\Gamma)$ είναι ένα κλασσικό εξωτερικό πρόβλημα συνοριακών τιμών. Αρχικά, παράγουμε μία μεταβολική εξίσωση στην περιοχή $D_R := K_R \cap D^e$, όπου $R > 0$ έχει επιλεγεί έτσι ώστε $\bar{D} \subset K_{R/2}$. Αυτός ο μεταβολικός συμβολισμός χρησιμοποιεί μη τοπική συνοριακή συνθήκη στο εξωτερικό σύνορο ∂K_R. Αυτό το κάνουμε για όλες τις περιοχές εξωτερικά του $\Gamma_{\epsilon\alpha}$. Με αλλαγή μεταβλητής τις μετατρέπουμε σε μεταβολικές εξισώσεις σε μία σταθερή περιοχή αναφοράς και μελετάμε το όριο του πηλίκου καθώς ϵ τείνει στο μηδέν.*

Περιγραφή Απόδειξης. Από Θεώρημα *Green* και την εξίσωση *Helmholtz* το ολικό πεδίο u^0 ικανοποιεί την σχέση

$$\iint_{D_R} (\nabla\bar{v}\cdot\nabla u^0 - k^2 u^0 \bar{v})\,dx \;=\; \int_{\partial K_R} \frac{\partial u^0}{\partial \nu}\bar{v}\,ds\,,\quad \forall v \in \tilde{H}^1_0(D_R), \tag{3.136}$$

όπου $\tilde{H}^1_0(D_R) := \{v \in H^1(D_R) \;:\; v|_\Gamma = 0\}$. Με $L : H^{1/2}(\partial K_R) \to H^{-1/2}(\partial K_R)$ συμβολίζουμε την απεικόνιση από *Dirichlet* σε *Neumann* $g \mapsto \partial w/\partial \nu$, όπου w λύνει το εξωτερικό πρόβλημα *Dirichlet* για την εξίσωση *Helmholtz* στην περιοχή $\{x \in \mathbb{R}^2 : |x| > R\} = \{x \in \mathbb{R}^2 : r > R\}\}$ με $w|_{\partial K_R} = g$. Με $L_0 : H^{1/2}(\partial K_R) \to H^{-1/2}(\partial K_R)$ ο τελεστής για την οριακή περίπτωση που $k > 0$. Τότε ο $-L_0$ είναι πιεστικός

$$-< L_0 g, g > \geq\; c\|g\|^2_{H^{1/2}(\partial K_R)}\,,\quad \forall g \in H^{1/2}(\partial K_R),$$

όπου $< \cdot,\cdot >$ συμβολίζουμε το δυϊκό ζεύγος $< \cdot,\cdot >_{H^{-1/2}(\partial K_R)\times H^{1/2}(\partial K_R)}$. Επομένως, ο $L - L_0$ είναι συμπαγής.

Ορίζουμε ως $S(u^0; v)$ την απεικόνιση

$$S(u^0;v) := \iint_{D_R} (\nabla\bar{v}\cdot\nabla u^0 - k^2 u^0\bar{v})\,dx - < Lu^0, v >\; ds\,,\quad \forall v \in \tilde{H}^1_0(D_R). \tag{3.137}$$

Από Θεώρημα *Green* και την (3.137), η λύση u^0 ικανοποιεί την σχέση

$$S(u^0;v) = \int_{\partial K_R} \frac{\partial u^0}{\partial \nu}\bar{v}\,ds - < Lu^0, v >= \int_{\partial K_R} \bar{v}\left[\left(\frac{\partial u^s}{\partial \nu} - Lu^s\right) + \left(\frac{\partial u^i}{\partial \nu} - Lu^i\right)\right]\,ds$$

από τον ορισμό του L και του $u^0 = u^s + u^i$. Άρα,

$$S(u^0; v) = \int_{\partial K_R} \bar{v} \left[\frac{\partial u^i}{\partial \nu} - Lu^i \right] ds\,, \quad \forall v \in \tilde{H}^1_0(D_R). \tag{3.138}$$

Μπορούμε να σπάσουμε τον S σε δύο πιεστικούς τελεστές

$$S_0(u; v) := \iint_{D_R} (\nabla \bar{v} \cdot \nabla u + u\bar{v})\, dx - < Lu, v >, \tag{3.139}$$

$$S_1(u; v) := -(k^2 + 1) \iint_{D_R} u\bar{v}\, dx + \int_{\partial K_R} \bar{v}(L_0 - L)u\, ds, \tag{3.140}$$

όπου $\forall u, v \in \tilde{H}^1_0(D_R)$. Αφού S_0 συνεχής και πιεστικός χρησιμοποιούμε το $Lax - Milgram$ και άρα υπάρχει μοναδικός ισομορφισμός $T_0 : \tilde{H}^1_0(D_R) \to \tilde{H}^1_0(D_R)$ ώστε

$$S_0(u; v) = (T_0 u, v)_{H^1}, \quad \forall u, v \in \tilde{H}^1_0(D_R). \tag{3.141}$$

Από Θεώρημα Αναπαράστασης του $Riesz$ υπάρχει φραγμένος τελεστής $T_1 : \tilde{H}^1_0(D_R) \to \tilde{H}^1_0(D_R)$ και στοιχείο $r \in \tilde{H}^1_0(D_R)$ ώστε

$$S_1(u; v) = (T_1 u, v)_{H^1}, \quad \forall u, v \in \tilde{H}^1_0(D_R) \tag{3.142}$$

και

$$S(u^0; v) = (r, v)_{H^1}, \quad \forall u, v \in \tilde{H}^1_0(D_R). \tag{3.143}$$

Ισχύει ότι $S(u^0; v) = S_0(u^0; v) + S_1(u^0; v)$ άρα

$$\begin{aligned} (r, v)_{H^1} &= (T_0 u^0, v)_{H^1} + (T_1 u^0, v)_{H^1}, \quad \forall v \in \tilde{H}^1_0(D_R) \\ \Rightarrow\ &\big((T_0 + T_1)u^0 - r, v\big)_{H^1} = 0, \quad \forall v \in \tilde{H}^1_0(D_R) \\ \Rightarrow\ &(T_0 + T_1)u^0 - r = 0 \end{aligned}$$

Αφού T_0 αντιστρέψιμος τελικά έχουμε

$$u^0 + T_0^{-1} T_1 u^0 = T_0^{-1} r \tag{3.144}$$

στον $\tilde{H}^1_0(D_R)$. Επειδή $L - L_0$ είναι συμπαγής και αφού η ενσφήνωση $I : \tilde{H}^1_0(D_R) \to L^2(D_R)$ είναι συμπαγής τότε με $T_1 : \tilde{H}^1_0(D_R) \to \tilde{H}^1_0(D_R)$ ο $IT_1 : \tilde{H}^1_0(D_R) \to L^2(D_R)$ συμπαγής αφού ο I είναι συμπαγής και ο T_1 φραγμένος. Όπου $IT_1 g = T_1 g$ στον $L^2(D_R)$. Άρα τελικά T_1 συμπαγής αφού για κάθε $g \in \tilde{H}^1_0(D_R)$ ισούται με συμπαγή τελεστή. Από μοναδικότητα λύσης του προβλήματος σκέδασης και από Θεώρημα Εναλλακτικότητας του $Fredholm$ η u^0 είναι λύση της (3.144) άρα και της (3.138) και εξαρτάται με συνεχή τρόπο από το δεξί της μέλος. Όταν βρεθεί η u^0 το πλάτος σκέδασης μπορεί να εκφραστεί ως

$$u_\infty(\hat{x}) = \int_{\partial K_R} u^s(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} e^{-ik\hat{x}\cdot y}\, ds(y) - < Lu^s, v >, \quad \hat{x} \in \mathbb{S}^1\,. \tag{3.145}$$

Αυτή η μοντελοποίηση του μεταβολικού προβλήματος με μη τοπικές συνοριακές συνθήκες μπορεί να γίνει για καθεμία από τις περιοχές D^e_ϵ εξωτερικά του $\Gamma_{\epsilon\alpha}$. Ορίζοντας $D_{R,\epsilon} := K_R \cap D^e_\epsilon$ βλέπουμε ότι η S σε αυτή τη περίπτωση δίνεται από την σχέση

$$S(u^\epsilon; v) := \iint_{D_{R,\epsilon}} (\nabla\bar{v}\cdot\nabla u^\epsilon - k^2 u^\epsilon \bar{v})\, dx - < Lu^\epsilon, v > \, ds\,, \quad \forall v \in \tilde{H}^1_0(D_{R,\epsilon}). \tag{3.146}$$

και επομένως εξαρτάται από το ϵ έμμεσα μέσω του χώρου $\tilde{H}^1_0(D_{R,\epsilon})$ στον οποίο ορίζεται. Όμως, θα πρέπει η u^ϵ ταυτόχρονα να είναι μοναδική λύση της αντίστοιχης με την (3.138) μεταβολικής εξίσωσης

$$S(u^\epsilon; v) \;=\; \int_{\partial K_R} \bar{v}\left[\frac{\partial u^i}{\partial \nu} - Lu^i\right] ds\,, \quad \forall v \in \tilde{H}^1_0(D_{R,\epsilon}). \tag{3.147}$$

Τώρα για δοθέν $\alpha \in C^2(\Gamma\,;\mathbb{R}^2)$ διαλέγουμε μία επέκταση $\alpha \in C^2(D^e\,;\mathbb{R}^2)$ με $\alpha(x) = 0,\ |x| \geq R/2$. Συμβολίζουμε με $\phi^\epsilon : D^e \to D^e_\epsilon$ την απεικόνιση

$$\phi^\epsilon(y) \;:=\; y + \epsilon\alpha(y), \quad y \in D^e.$$

Για μικρό $\epsilon > 0$ η ϕ^ϵ είναι διαφορομορφισμός που απεικονίζει το D_R στο $D_{R,\epsilon} := K_R \cap D^e_\epsilon$. Έστω τώρα $\psi^\epsilon : D^e_\epsilon \to D^e$ είναι η αντίστροφη απεικόνιση της ϕ^ϵ και άρα παραγωγίσιμη. Χρησιμοποιούμε την αλλαγή μεταβλητής

$$x = \phi^\epsilon(y)\,, \quad y = \psi^\epsilon(x) \;\; \text{και} \;\; \tilde{u}^\epsilon = u^\epsilon \circ \phi^\epsilon,$$

όπου J_{ϕ^ϵ} ο Ιακωβιανός πίνακας για την ϕ^ϵ με στοιχεία

$$(J_{\phi^\epsilon})_{i,j} \;:=\; \frac{\partial \phi^\epsilon_i(y)}{\partial y_j}\,, \quad i,j = 1,2$$

και $det\,(J_{\phi^\epsilon})$ η Ιακωβιανή ορίζουσα. Τότε, έχουμε ότι

$$\iint_{D_{R,\epsilon}} (\nabla\bar{v}\cdot\nabla u^\epsilon - k^2 u^\epsilon\bar{v})\, dx = \iint_{D_R}\left(\sum_{i,j=1}^{2} \beta^\epsilon_{i,j}\frac{\partial \tilde{u}^\epsilon}{\partial y_i}\frac{\partial(\bar{v}\circ\phi^\epsilon)}{\partial y_j} - k^2\tilde{u}^\epsilon(\bar{v}\circ\phi^\epsilon)\right) det\,(J_{\phi^\epsilon})\, dy\,, \tag{3.148}$$

όπου οι συντελεστές $\beta^\epsilon_{i,j}$ δίνονται από την σχέση

$$\beta^\epsilon_{i,j} = \sum_{l=1}^{2}\frac{\partial\psi^\epsilon_i}{\partial x_l}\frac{\partial\psi^\epsilon_j}{\partial x_l}, \quad i,j = 1,2.$$

Ορίζοντας $S^\epsilon : \tilde{H}^1_0(D_R)\times\tilde{H}^1_0(D_R) \to \mathbb{C}$ την

$$S^\epsilon(u; v) := \iint_{D_R}\left(\sum_{i,j=1}^{2}\beta^\epsilon_{i,j}\frac{\partial u}{\partial y_i}\frac{\partial\bar{v}}{\partial y_j} - k^2 u\bar{v}\right) det\,(J_{\phi^\epsilon})\, dy - < Lu, v >,\ \forall v \in \tilde{H}^1_0(D_R). \tag{3.149}$$

Τότε η $\tilde{u}^\epsilon \in \tilde{H}^1_0(D_R)$ είναι η μοναδική λύση της

$$S^\epsilon(\tilde{u}^\epsilon; v) = \int_{\partial K_R} \bar{v}\left[\frac{\partial u^i}{\partial\nu} - Lu^i\right] ds\,, \quad \forall v \in \tilde{H}^1_0(D_R). \tag{3.150}$$

Από τη σχέση (3.145) έπεται ότι

$$\frac{1}{\epsilon}(u^{\epsilon}_{\infty}(\hat{x})u_{\infty}(\hat{x})) = \int_{\partial K_R} \frac{1}{\epsilon}(\tilde{u}^{\epsilon}(y) - u^0(y))\frac{\partial}{\partial \nu(y)}e^{-ik\hat{x}\cdot y}\, ds(y) - \left\langle \frac{1}{\epsilon}L(\tilde{u}^{\epsilon} - u^0), v \right\rangle, \quad \hat{x} \in \mathbb{S}^1. \tag{3.151}$$

Μένει να δείξουμε ότι το όριο

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}(\tilde{u}^{\epsilon} - u^0) \tag{3.152}$$

υπάρχει στο $\tilde{H}^1_0(D_R)$ και να το υπολογίσουμε. Μέσω των σχέσεων

$$S(\tilde{u}^{\epsilon}; v) := \iint_{D_{R,\epsilon}} (\nabla\bar{v}\cdot\nabla\tilde{u}^{\epsilon} - k^2\tilde{u}^{\epsilon}\bar{v})\, dx - < Lu^{\epsilon}, v > \, ds\,, \quad \forall v \in \tilde{H}^1_0(D_{R,\epsilon}). \tag{3.153}$$

και

$$S^{\epsilon}(\tilde{u}^{\epsilon}; v) := \iint_{D_R} \left(\sum_{i,j=1}^{2} \beta^{\epsilon}_{i,j}\frac{\partial\tilde{u}^{\epsilon}}{\partial y_i}\frac{\partial\bar{v}}{\partial y_j} - k^2\tilde{u}^{\epsilon}\bar{v} \right) det\,(J_{\phi^{\epsilon}})\, dy - < L\tilde{u}^{\epsilon}, v >, \ \forall v \in \tilde{H}^1_0(D_R). \tag{3.154}$$

προκύπτει ότι

$$S\left(\frac{1}{\epsilon}(\tilde{u}^{\epsilon} - u^0); v\right) = -\frac{1}{\epsilon}[S^{\epsilon}(\tilde{u}^{\epsilon}; v) - S(\tilde{u}^{\epsilon}; v)], \quad \forall v \in \tilde{H}^1_0(D_R). \tag{3.155}$$

Θέλουμε στην (3.155) το δεξί μέλος να συγκλίνει καθώς $\epsilon \to 0$, το οποίο γράφεται ως

$$-\frac{1}{\epsilon}[S^{\epsilon}(\tilde{u}^{\epsilon}; v) - S(\tilde{u}^{\epsilon}; v)] = -\frac{1}{\epsilon}\iint_{D_R} \left(\sum_{i,j=1}^{2} (\beta^{\epsilon}_{i,j} det\,(J_{\phi^{\epsilon}}) - \delta_{ij})\frac{\partial\tilde{u}^{\epsilon}}{\partial y_i}\frac{\partial\bar{v}}{\partial y_j} - k^2(det\,(J_{\phi^{\epsilon}}) - 1)\tilde{u}^{\epsilon}\bar{v} \right) dy \tag{3.156}$$

για κάθε $v \in \tilde{H}^1_0(D_R)$, όπου δ_{ij} του *Kronecker*. Όμοια, ο Ιακωβιανός πίνακας του α έχει στοιχεία

$$(J_{\alpha})_{i,j} \ := \ \frac{\partial\alpha_i(y)}{\partial y_j}\,, \quad i, j = 1, 2$$

και $det\,(J_{\alpha})$ η Ιακωβιανή του ορίζουσα. Έχουμε τις σχέσεις

$$\begin{aligned}
det\,(J_{\phi^{\epsilon}}) &= det\,(I + \epsilon\, J_{\alpha}) = 1 + \epsilon\, det\,(J_{\alpha}) = 1 + \epsilon\, div\,\alpha + O(\epsilon^2),\\
J_{\psi^{\epsilon}} &= J^{-1}_{\phi^{\epsilon}} \circ \psi^{\epsilon} = I - \epsilon\, J_{\alpha} + O(\epsilon^2),\\
J^T_{\psi^{\epsilon}}\, J_{\psi^{\epsilon}} &= I - \epsilon(J_{\alpha} + J^T_{\alpha}) + O(\epsilon^2)\\
(J_{\psi^{\epsilon}})_{i,j} &= \delta_{ij} - \epsilon\frac{\partial\alpha_i}{\partial y_j} + O(\epsilon^2),
\end{aligned}$$

Άρα,

$$\beta^{\epsilon}_{i,j} = (J^T_{\psi^{\epsilon}}\, J_{\psi^{\epsilon}})_{i,j} = 1 - \epsilon\left(\frac{\partial\alpha_i}{\partial y_j} + \frac{\partial\alpha_j}{\partial y_i}\right) + O(\epsilon^2)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\epsilon}(det\,(J_{\phi^\epsilon})-1) &= div\,\alpha+\frac{1}{\epsilon}O(\epsilon^2)\to div\,\alpha\,, \quad \epsilon\to 0\\
\frac{1}{\epsilon}(\beta^\epsilon_{i,j}det\,(J_{\phi^\epsilon})-\delta_{ij}) &= \delta_{ij}\,div\,\alpha-\left(\frac{\partial\alpha_i}{\partial y_j}+\frac{\partial\alpha_j}{\partial y_i}\right)+\frac{1}{\epsilon}O(\epsilon^2)\to\delta_{ij}\,div\,\alpha-\left(\frac{\partial\alpha_i}{\partial y_j}+\frac{\partial\alpha_j}{\partial y_i}\right)
\end{aligned}$$

$$\text{καθώς}\ \ \epsilon\to 0,\quad \text{όπου}\quad \lim_{\epsilon\to 0}\frac{O(\epsilon^2)}{\epsilon^2}\to 0\,,\quad \epsilon\to 0.$$

Αφού το $\tilde{u}^\epsilon\to u^0$ στο $\tilde{H}^1_0(D_R)$ λόγω εξισώσεων συνέχειας, το δεξί μέλος της (3.155) δηλαδή το (3.156) συγκλίνει στο

$$\iint_{D_R}\left(\sum_{i,j=1}^{2}\left(\frac{\partial\alpha_i}{\partial y_j}+\frac{\partial\alpha_j}{\partial y_i}-div\,\alpha\,\delta_{ij}\right)\frac{\partial\tilde{u}^0}{\partial y_i}\frac{\partial\bar{v}}{\partial y_j}+k^2(div\,\alpha)\tilde{u}^0\bar{v}\right)dy,\quad\forall v\in\tilde{H}^1_0(D_R)\tag{3.157}$$

και ισοδύναμα στο

$$\iint_{D_R}\left[\nabla\bar{v}^T\left(J_\alpha+J_\alpha^T-(div\,\alpha)\,I\right)\nabla u^0+k^2(div\,\alpha)u^0\bar{v}\right]dy,\quad\forall v\in\tilde{H}^1_0(D_R).\tag{3.158}$$

Επομένως, το όριο (3.152) υπάρχει και για $\tilde{u}\in\tilde{H}^1_0(D_R)$ ορίζουμε

$$\tilde{u}\;=\;\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}(\tilde{u}^\epsilon-u^0).\tag{3.159}$$

Επεκτείνουμε το $\tilde{u}$ εξωτερικά του D_R λύνοντας το εξωτερικό πρόβλημα Dirichlet με συνοριακά δεδομένα $\tilde{u}$ στο ∂K_R. Τότε η $\tilde{u}$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$S(\tilde{u};v)\;=\;\iint_{D_R}\left[\nabla\bar{v}^T\left(J_\alpha+J_\alpha^T-(div\,\alpha)\,I\right)\nabla u^0+k^2(div\,\alpha)u^0\bar{v}\right]dy,\quad\forall v\in\tilde{H}^1_0(D_R)\tag{3.160}$$

όπου έχουμε

$$S(\tilde{u};v):=\iint_{D_R}(\nabla\bar{v}\cdot\nabla\tilde{u}-k^2\tilde{u}\bar{v})\,dx-<L\tilde{u},v>,\quad\forall v\in\tilde{H}^1_0(D_R).\tag{3.161}$$

Άρα, από σχέσεις συνέχειας το $\tilde{u}\in\tilde{H}^1_0(D_R)\cap H^2(D_R)$. Για $v\in\tilde{H}^1_0(D_R)\cap H^2(D_R)$ μέσω της παραγώγου γινομένου έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
&\nabla\bar{v}^T\left(J_\alpha+J_\alpha^T-(div\,\alpha)\,I\right)\nabla u^0=\\
&\qquad= div[(\alpha\cdot\nabla u^0)\nabla\bar{v}+(\alpha\cdot\nabla\bar{v})\nabla u^0-(\nabla\bar{v}\cdot\nabla u^0)\alpha]-(\alpha\cdot\nabla u^0)\Delta\bar{v}-(\alpha\cdot\nabla\bar{v})\Delta u^0\,.
\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα *Gauss* στον όρο με το *div* ξέροντας ότι το $\alpha=0$ κοντά στο ∂K_R και επειδή εσωτερικό σύνορο είναι το Γ το μοναδιαίο κάθετο σε αυτό είναι αντίθετο από του

∂K_R και έχουμε

$$\begin{aligned} S(\tilde{u};v) &= \iint_{D_R} k^2(div\,\alpha)u^0\bar{v} - (\alpha\cdot\nabla u^0)\Delta\bar{v} - (\alpha\cdot\nabla\bar{v})\Delta u^0\,dx \\ &\quad + \int_{\partial K_R} [(\alpha\cdot\nabla u^0)\nabla\bar{v} + (\alpha\cdot\nabla\bar{v})\nabla u^0 - (\nabla\bar{v}\cdot\nabla u^0)\alpha]\cdot\nu\,ds \\ &= \iint_{D_R} k^2(div\,\alpha)u^0\bar{v} - (\alpha\cdot\nabla u^0)\Delta\bar{v} - (\alpha\cdot\nabla\bar{v})\Delta u^0\,dx \\ &\quad - \int_{\Gamma} [(\alpha\cdot\nabla u^0)\nabla\bar{v} + (\alpha\cdot\nabla\bar{v})\nabla u^0 - (\nabla\bar{v}\cdot\nabla u^0)\alpha]\cdot\nu\,ds. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας ότι $v|_\Gamma$ και $u^0|_\Gamma$ αφού u^0 λύση της εξίσωσης *Helmholtz* $\Delta u^0 = -k^2 u^0$ και από Θεώρημα *Green* για το Δv καταλήγουμε ότι

$$S(\tilde{u};v) := k^2 \iint_{D_R} div\,(u^0\bar{v}\alpha)\,dx + \iint_{D_R} (\nabla\bar{v}\cdot\nabla(\alpha\cdot\nabla u^0) - k^2\bar{v}(\alpha\cdot\nabla u^0))\,dx. \qquad (3.162)$$

Εφαρμόζοντας ξανά το Θεώρημα *Gauss* έχουμε ότι

$$\iint_{D_R} (\nabla\bar{v}\cdot\nabla\tilde{u} - k^2\tilde{u}\bar{v})\,dx - < L\tilde{u}, v > = \iint_{D_R} (\nabla\bar{v}\cdot\nabla(\alpha\cdot\nabla u^0) - k^2\bar{v}(\alpha\cdot\nabla u^0))\,dx. \quad (3.163)$$

Αφού $\alpha\cdot u^0 = 0, \;\; |x| \geq R/2$ αυτό αποδεικνύει ότι

$$\begin{aligned} (\Delta + k^2)(\tilde{u} - \alpha\cdot\nabla u^0) &= 0 \;\; \text{ασθενώς στο } D_R \\ (\tilde{u} - \alpha\cdot\nabla u^0)\big|_\Gamma &= -(\alpha\cdot\nu)\frac{\partial u^0}{\partial\nu} \\ \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\nu}\bigg|_+ = L\tilde{u} &= \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\nu}\bigg|_-, \;\; \partial K_R\,. \end{aligned}$$

Δηλαδή ότι $\tilde{u}$ άρα και u' είναι C^2 στο D^e. Λόγω μοναδικότητας της λύσης επομένως $u' = \tilde{u} - \alpha\cdot\nabla u^0$ από το οποίο προκύπτει ότι

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}(u^\epsilon - u^0) = u', \quad H^{1/2}(\partial K_R), \qquad (3.164)$$

και άρα έχουμε

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}(u^\epsilon_\infty(\hat{x}) - u_\infty(\hat{x})) = u'_\infty(\hat{x}), \quad \forall\hat{x}\in\mathbb{S}^1. \qquad (3.165)$$

□

Παρατήρηση 3.90. *1. Από τις παρατηρήσεις μας, το Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz και το Θεώρημα Green προκύπτει ότι*

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}(u^\epsilon - u^0) = u'$$

ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του D^e.

2. *Το ∂K_R δεν είναι αναγκαίο να είναι σφαίρα σε αυτήν την απόδειξη αρκεί να είναι κλάσης C^2-σύνορο κάποιου φραγμένου χωρίου που περιέχει το $\bar{D}$ στο εσωτερικό του. Ωστόσο, συνηθίζεται το ∂K_R να θεωρείται σφαίρα.*

3. *Χρησιμοποιώντας αυτήν την απόδειξη κάνοντας κάποιες αλλαγές προκύπτει ένα παρόμοιο αποτέλεσμα για την παράγωγο Fréchet του F στο Γ*

$$\lim_{\|\alpha\|_{1,\infty}} \frac{1}{\|\alpha\|_{1,\infty}} \left[F(\Gamma_\alpha) - F(\Gamma) - F'(\Gamma;\alpha)\right] = 0 \tag{3.166}$$

ομοιόμορφα στη $\mathbb{S}^1$, όπου $F'(\Gamma;\alpha)$ η παράγωγος Fréchet του F στο Γ και με $\|\cdot\|_{1,\infty}$ συμβολίζουμε την νόρμα

$$\|\alpha\|_{1,\infty} := \max_{x\in\Gamma} |\alpha(x)| + \max_{x\in\Gamma} \sum_{i=1}^{2} |Grad\ a_i(x)|\ . \tag{3.167}$$

4. *Από το παραπάνω Θεώρημα ο τελεστής της παραγώγου $F'(\Gamma;\cdot)$ μπορεί να επεκταθεί σε έναν φραγμένο γραμμικό τελεστή $F'(\Gamma;\cdot) : C(\Gamma;\mathbb{R}^2) \to C(\mathbb{S}^1)$ είτε σε χώρους Sobolev ως $F'(\Gamma;\cdot) : H^{1/2}(\Gamma;\mathbb{R}^2) \to H^{1/2}(\mathbb{S}^1)$.*

Παρατήρηση 3.91. *Για να μπορέσουμε να επεκταθούμε σε χωρία με μη τετριμμένες επιφάνειες θα πρέπει να μην έχουμε $\alpha\cdot\nu = 0$ δηλαδή το α να μην είναι παντού κάθετο με το κάθετο κατευθυνόμενο προς το εξωτερικό της επιφάνειας. Συγκεκριμένα, θέλουμε το πλήθος των μηδενισμών να είναι το πολύ πεπερασμένο.*

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω παρατήρηση δηλαδή αν το πλήθος των μηδενισμών είναι το πολύ πεπερασμένο μπορούμε να δείξουμε την παρακάτω ιδιότητα για τον τελεστή της παραγώγου $F'(\Gamma;\cdot)$.

Λήμμα 3.92. *Ο τελεστή της παραγώγου $F'(\Gamma;\cdot)$ είναι μονοσήμαντος στο σύνολο*

$$\mathcal{N}_\alpha = \{\alpha \in C(\Gamma;\mathbb{R}^2) \mid \alpha\cdot\nu \text{ έχει πεπερασμένο πλήθος μηδενισμός στο } \Gamma\}. \tag{3.168}$$

3.3.2 Αντίστροφο Πρόβλημα Σκέδασης

Σε αυτήν την υποενότητα θα παρουσιάσουμε το Αντίστροφο Πρόβλημα Σκέδασης για δεδομένα χωρίς φάση στις δύο διαστάσεις. Το βασικό χαρακτηριστικό αυτού του προβλήματος είναι η αδυναμία εντοπισμού της θέσης του σκεδαστή επειδή τα δεδομένα δεν έχουν φάση. Λόγω της μη καλής τοποθέτησης του προβλήματος βλέπουμε την μέθοδο ομαλοποίησης Tikhonov για αυτό το πρόβλημα και χρησιμοποιούμε την Αρχή Χάσματος του Morozov. Τέλος, για την γραμμικοποίηση του προβλήματος χρησιμοποιούμε μέθοδο τύπου Newton.

Βασικό χαρακτηριστικό των Αντίστροφων Προβλημάτων Σκέδασης είναι η μη καλή τους τοποθέτηση. Επιπλέον, οι εξισώσεις που αντιμετοπίζουμε (3.175) είναι μη γραμμικές. Επομένως και σύμφωνα με τα προηγούμενα κεφάλαια και τις προηγούμενες ενότητες η στρατηγική επίλυσης που ακολουθούμε είναι η γραμμικοποίηση της μη γραμμικής εξίσωσης μέσω μεθόδου τύπου *Newton*. Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε μία μέθοδο ομαλοποίηση στην παρούσα εργασία θα χρησιμοποιήσουμε μέθοδο ομαλοποίησης *Tikhonov*. Κάποιες εφαρμογές των Αντίστροφων Προβλημάτων Σκέδασης είναι σε ραντάρ, σε σόναρ, στην ιατρική απεικόνιση όπως σε μαγνητικούς τομογράφους και σεισμική απεικόνιση.

Για φραγμένο $D \subset \mathbb{R}^2$ με C^2-ομαλό σύνορο Γ θεωρούμε ένα επίπεδο προσπίπτον κύμα

$$u^i(x) \;=\; e^{ikx\cdot\hat{d}}.$$

Το Ευθύ Πρόβλημα Σκέδασης στοχεύει στην εύρεση του ολικού πεδίου

$$u = u^i + u^s$$

ως λύση της εξίσωσης Helmholtz

$$\Delta u + k^2 u = 0 \;, \quad \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D} \tag{3.169}$$

με συνοριακή συνθήκη Dirichlet

$$u = 0 \;, \quad \Gamma \tag{3.170}$$

όπου το u^s ικανοποιεί την συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld

$$\lim_{r\to\infty} r^{1/2}\left(\frac{\partial u^s}{\partial r} - iku^s\right) = 0 \;, \quad r = |x| \tag{3.171}$$

με την ασυμπτωτική συμπεριφορά της μορφής

$$u^s(x) = \frac{e^{ik|x|}}{\sqrt{|x|}}\left[u_\infty\left(\frac{x}{|x|}\right) + O\left(\frac{1}{|x|}\right)\right] \;, \quad |x| \to \infty, \tag{3.172}$$

όπου το πλάτος σκέδασης u_∞ ορίζεται στον μοναδιαίο κύκλο $\Omega = \mathbb{S}^1$ στο $\mathbb{R}^2$ και $\hat{x} = x/|x| \in \Omega$.

Αφού Γ είναι C^2-ομαλό μπορούμε να υποθέσουμε ότι είναι ομοιομορφικό με το Ω και έχει αστεροειδή αναπαράσταση ως προς την αρχή

$$\Gamma := \Gamma_r \;=\; \{x_r = r(\hat{x})\hat{x} : \hat{x} \in \Omega\}, \tag{3.173}$$

όπου $r : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι C^2 και θετική απεικόνιση που αναπαριστά την ακτινική απόσταση από την αρχή. Άρα, για το συγκεκριμένο χωρίο εφαρμόζεται η κωνική συνθήκη.

Η λύση για το Ευθύ Πρόβλημα Σκέδασης (3.169)-(3.171) για σταθερό επίπεδο προσπίπτον κύμα u^i ορίζει τον τελεστή

$$F : C^2_+(\Omega) \to L^2(\Omega), \tag{3.174}$$

όπου $C^2_+(\Omega)$ ο κώνος των θετικών συναρτήσεων στο $C^2(\Omega)$ και απεικονίζει την $r \;\mapsto\; u_\infty$. Έτσι, δοθέντος του πλάτους σκέδασης u_∞, ως προς τον τελεστή F, το αντίστροφο πρόβλημα είναι ισοδύναμο με την επίλυση της εξίσωσης

$$F(r) = u_\infty \tag{3.175}$$

για r που αναπαριστά την συνοριακή καμπύλη Γ. Η εξίσωση αυτή είναι μη γραμμική.

Τα Αντίστροφα Προβλήματα Σκέδασης στοχεύουν στην εύρεση της θέσης και του σχήματος του μαλακού σκεδαστή. Αν μας δίνεται το πλάτος σκέδασης u_∞ τότε τα δεδομένα μας έχουν φάση και μπορούμε εντοπίσουμε και την θέση και το σχήμα του σκεδαστή [9]. Αν μας δίνεται το μέτρο του πλάτους σκέδασης $|u_\infty|$ τότε τα δεδομένα μας δεν έχουν φάση και μπορούμε εντοπίσουμε μόνο το σχήμα του σκεδαστή και όχι την θέση του [10]. Αυτό γιατί το $|u_\infty|$ παραμένει αναλλοίωτο κάτω από μετατοπίσεις του σκεδαστή [16]. Άρα, αν υπάρχει λύση αυτή δεν είναι μοναδική. Επομένως, το πρόβλημα είναι μη καλώς τοποθετημένο. Το τελευταίο είναι και το πρόβλημα που θα μελετήσουμε και θα αναλύσουμε στην παρούσα εργασία.

Για την σκέδαση ενός ακέραιου πεδίου u^i από μαλακό σκεδαστή D σύμφωνα με την Αρχή του Huygens έχουμε σχέση (2.222)

$$u(x) = u^i(x) - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\Phi(x,y)\,ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}, \tag{3.176}$$

και το πλάτος σκέδασης u_∞ του u^s δίνεται από την σχέση (2.223)

$$u_\infty(\hat{x}) = -\frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k}} \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) e^{-ik\hat{x}\cdot y}\,ds(y), \quad \hat{x} \in \Omega, \tag{3.177}$$

Η θεμελιώδης λύση της εξίσωσης Helmholtz είναι η

$$\Phi(x,y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x-y|), \quad x \neq y \tag{3.178}$$

με $y \in \mathbb{R}^2$ σταθερό για $\mathbb{R}^2 \setminus \{y\}$ και $H_0^{(1)}$ είναι η συνάρτηση Hankel μηδενικής τάξης και πρώτου είδους.

Η ασυμπτωτική συμπεριφορά της σφαιρικής συνάρτησης Hankel είναι

$$H_0^{(1)}(t) \;=\; \sqrt{\frac{2}{\pi}}\;\frac{e^{i(t-\frac{\pi}{4})}}{t^{1/2}}\;\left[1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right], \quad t \to \infty \tag{3.179}$$

και αντίστοιχα της παραγώγου της

$$H_0^{(1)\prime}(t) \;=\; \sqrt{\frac{2}{\pi}}\;\frac{e^{i(t+\frac{\pi}{4})}}{t^{1/2}}\;\left[1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right], \quad t \to \infty\,. \tag{3.180}$$

Παρατήρηση 3.93. *Το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της (3.179) είναι οι ασυμπτωτικές συμπεριφορές των συναρτήσεων Bessel και Neumann αντίστοιχα. Ομοίως, η (3.180) μας δίνει τις ασυμπτωτικές συμπεριφορές αυτών.*

Επομένως, ο τελεστής $F : C^2_+(\Omega) \to L^2(\Omega)$ με

$$F(r) = u_\infty \tag{3.181}$$

είναι Fréchet παραγωγίσιμος. Πράγματι, επειδή το πλάτος σκέδασης είναι ολοκληρωτικός τελεστής και δείξαμε ότι η Fréchet παράγωγος του τελεστή προκύπτει παραγωγίζοντας τον πυρήνα. Ο πυρήνας είναι Fréchet παραγωγίσιμος και άρα είναι και ο F. Η μη καλή τοποθέτηση του προβλήματος φαίνεται από το γεγονός ότι ο γραμμικός τελεστής της παραγώγου $F'(r) : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ είναι συμπαγής μέσω του Θεωρήματος (3.81). Η παράγωγος δίνεται από τη σχέση

$$F'(r)q = v_\infty, \tag{3.182}$$

όπου το v_∞ ικανοποιεί την εξίσωση Helmholtz

$$\Delta v + k^2 v = 0 \ , \quad \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D} \tag{3.183}$$

ικανοποιεί την συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld και έχει συνοριακή συνθήκη Dirichlet

$$v = -\nu \cdot x_q \frac{\partial u}{\partial \nu} \ , \quad \Gamma, \tag{3.184}$$

Δηλαδή, $x_q \in \Gamma$. Εφαρμόζοντας μέθοδο Newton, ομοίως με την μέθοδο που δείξαμε στις σχέσεις (3.87)-(3.91), στο αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης για δοθέν u_∞ η μη γραμμική εξίσωση (3.181) γραμμικοποιείται στην

$$F(r) + F'(r)q = u_\infty \tag{3.185}$$

η οποία λύνεται ως προς q για να βελτιώσει τη προσέγγιση ενός συνόρου που δίνεται από την παραμετρικοποίση r σε ένα νέο που δίνεται από την παραμετρικοποίηση $\tilde{r} = r + q$.

Η αδυναμία εντοπισμού του μαλακού σκεδαστή στο πρόβλημά μας έγκειται στο ότι το μέτρο του πλάτους σκέδασης $|u_\infty(\hat{x})|$ παραμένει αναλλοίωτο σε μετατοπίσεις του μαλακού σκεδαστή D [16]. Πράγματι, έστω $\hat{h} \in \mathbb{R}^2$ σταθερό μοναδιαίο διάνυσμα. Για το μετατοπισμένο χωρίο

$$D_\epsilon := \{x + \epsilon \hat{h} | x \in D\}$$

με σύνορο $\Gamma_\epsilon := \{x + \epsilon \hat{h} | x \in \Gamma\}$ το σκεδασμένο πεδίο u_ϵ^s δίνεται από την

$$u_\epsilon^s(x) = e^{ik\epsilon \hat{h}\cdot\hat{d}} u^s(x - \epsilon \hat{h}) \ , \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}_\epsilon, \tag{3.186}$$

προκύπτει από την ομογενή συνοριακή συνθήκη Dirichlet ότι

$$u_\epsilon^s = -u^i, \quad \Gamma_\epsilon. \tag{3.187}$$

Επειδή η $u^s(x - \epsilon \hat{h})$ έχει ασυμπτωτική συμπεριφορά

$$u^s(x - \epsilon \hat{h}) = e^{ik\epsilon \hat{h}\cdot\hat{x}} \frac{e^{ik|x|}}{\sqrt{|x|}} \left[u_\infty \left(\frac{x}{|x|} \right) + O\left(\frac{1}{|x|} \right) \right] \ , \quad |x| \to \infty, \tag{3.188}$$

προκύπτει ότι το πλάτος σκέδασης $u_{\infty,\epsilon}$ του σκεδασμένου πεδίου u_ϵ^s του μετατοπισμένου χωρίου D_ϵ είναι

$$u_{\infty,\epsilon}(\hat{x}) = e^{ik\epsilon \hat{h}\cdot(\hat{d}-\hat{x})} u_\infty(\hat{x}), \quad \hat{x} \in \Omega. \tag{3.189}$$

Επομένως, προκύπτει ότι

$$|u_{\infty,\epsilon}(\hat{x})|^2 = |u_\infty(\hat{x})|^2, \quad \hat{x} \in \Omega. \tag{3.190}$$

Δηλαδή, η μετατόπιση του χωρίου δεν εκφράζεται στα δεδομένα αφού το μέτρο του πλάτους σκέδασης του μετατοπισμένου σκεδαστή είναι ίσο με το μέτρο του πλάτους σκέδασης του αρχικού σκεδαστή. Για το λόγο αυτό δεν μπορούμε σε αυτό το πρόβλημα να εντοπίσουμε την θέση του μαλακού σκεδαστή. Άρα, η λύση του Αντίστροφου Προβλήματος Σκέδασης δεν είναι μοναδική. Αυτό το αποτέλεσμα φαίνεται καλύτερα στο παρακάτω Θεώρημα.

Θεώρημα 3.94. *Η λύση του Αντίστροφου Προβλήματος Σκέδασης δεν είναι μοναδική, αφού το μέτρο του πλάτους σκέδασης είναι αναλλοίωτο κάτω από μετατοπίσεις.*

Από το τύπο του Taylor, από την προηγούμενη ενότητα και την (3.186) προκύπτει ότι

$$v := \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon}(u^s_\epsilon - u^s) \tag{3.191}$$

υπάρχει και δίνεται από την

$$v := ikh \cdot d\, u^s - h \cdot grad\, u^s, \quad \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}. \tag{3.192}$$

Από τα παραπάνω, την συνθήκη Dirichlet και το $u^i + u^s = 0$, Γ προκύπτει το ακόλουθο Λήμμα.

Λήμμα 3.95. *Έστω $\hat{h} \in \mathbb{R}^2$. Η συνάρτηση v που δίνεται από την*

$$v = \hat{h} \cdot (iku^s \hat{d} - grad\, u^s) \ , \quad \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D} \tag{3.193}$$

ικανοποιεί την συνοριακή συνθήκη

$$v := -\hat{h} \cdot \nu \frac{\partial}{\partial \nu}(u^i + u^s) \ , \quad \Gamma \tag{3.194}$$

και έχει πλάτος σκέδασης ικανοποιεί την συνοριακή συνθήκη

$$v_\infty(\hat{x}) := ik\{\hat{h} \cdot (\hat{d} - \hat{x})\}u_\infty(\hat{x}) \ , \quad \hat{x} \in \Omega. \tag{3.195}$$

Η επίλυση του Αντίστροφου Προβλήματος δοθέντος του $|u_\infty|$ είναι ισοδύναμη με την επίλυση της

$$R(r) = |u_\infty|^2 , \tag{3.196}$$

όπου ο τελεστής $R : C^2_+(\Omega) \to L^2(\Omega)$ δίνεται από τη σχέση

$$R(r) = |F(r)|^2, \quad r \in C^2_+(\Omega). \tag{3.197}$$

Ο R είναι Fréchet παραγωγίσιμος αφού ο F είναι Fréchet παραγωγίσιμος και μάλιστα χρησιμοποιώντας τον κανόνα του γινομένου σχέση (3.11) που ισχύει για την παράγωγο Fréchet έχουμε ότι

$$\begin{aligned} R'(r)q &= [|F(r)|^2 q]' = [\overline{F(r)}F(r)q]' = \overline{\overline{F(r)}F'(r)q} + \overline{F(r)}F'(r)q \\ &= 2Re(\overline{F(r)}F'(r)q). \end{aligned}$$

Δηλαδή, ισοδύναμα

$$R'(r)q \ = \ 2Re(\overline{F(r)}F'(r)q). \tag{3.198}$$

Άρα, για αυτό το πρόβλημα η αντίστοιχη της (3.185) είναι η γραμμικοποίηση

$$|F(r)|^2 + 2Re(\overline{F(r)}F'(r)q) = |u_\infty|^2 \ . \tag{3.199}$$

Με
$$h = \frac{\partial u}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma}$$
ο τελεστής απλού στρώματος $S : L^2(\Gamma) \to L^2(\Gamma)$ ορίζεται ως

$$(Sh)(x) \ := \ \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y)\Phi(x,y)\, ds(y)\ , \quad x \in \Gamma, \tag{3.200}$$

και ο τελεστής του πλάτους σκέδασης $S_\infty : L^2(\Gamma) \to L^2(\Omega)$ ως

$$(S_\infty h)(\hat{x}) \ := \ \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k}} \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) e^{-ik\hat{x}\cdot y}\, ds(y)\ , \quad \hat{x} \in \Omega, \tag{3.201}$$

Τότε, από την ομογενή συνοριακή συνθήκη και τη σχέση (3.176) έχουμε ότι

$$Sh = u^i\big|_{\Gamma}\,. \tag{3.202}$$

και από τη σχέση (3.177) ότι
$$|S_\infty h|^2 = |u_\infty|^2. \tag{3.203}$$
Αντιστρόφως, αν Γ και h ικανοποιούν τις σχέσεις (3.202) και (3.203), τότε το Γ λύνει το Αντίστροφο Πρόβλημα Σκέδασης. Μία απόδειξη αυτού μπορούμε να δούμε σκεπτόμενοι τί μας δίνουν οι εξισώσεις (3.202) και (3.203). Αρχικά, από την (3.202) και την (3.176) προκύπτει η ομογενής συνοριακή συνθήκη *Dirichlet* για το ολικό πεδίο u στο σύνορο Γ. Από τις (3.176), (3.177) και (3.203) προκύπτει ότι το μέτρο του πλάτους σκέδασης του σκεδασμένου πεδίου u^s είναι το επιθυμητό. Έτσι, μπορούμε να διατυπώσουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 3.96. *Η επίλυση του Αντίστροφου Προβλήματος Σκέδασης είναι ισοδύναμη με την επίλυση του συστήματος εξισώσεων (3.202) και (3.203). Δηλαδή, τα δύο προβλήματα είναι ισοδύναμα.*

Παρατήρηση 3.97. *Ένα σημαντικό κέρδος της μεθόδου επίλυσης του προβλήματος μέσω ολοκληρωτικών τελεστών και των παραγώγων Fréchet τους είναι το μικρό υπολογιστικό τους κόστος. Αφού, οι πυρήνες των ολοκληρωτικών τελεστών είναι Fréchet παραγωγίσιμοι οι ίδιοι οι τελεστές είναι Fréchet παραγωγίσιμοι όπως είδαμε σε προηγούμενη ενότητα. Παρόλο που το πρόβλημα είναι μη γραμμικό και μη καλώς τοποθετημένο χρησιμοποιώντας μία μέθοδο τύπου Newton γραμμικοποιείται και μέσω μιας μεθόδου ομαλοποίησης όπως η μέθοδος Tikhonov θεραπεύεται η μη γραμμικότητα. Στην διακριτοποίηση του προβλήματος επίσης σημαντικό ρόλο στο υπολογιστικό κόστος παίζει το ότι έχουμε $2N+1$ γραμμικώς ανεξάρτητες σφαιρικές αρμονικές που το επιλύουν με N γνωστό.*

Για να μελετήσουμε περαιτέρω τις ολοκληρωτικές εξισώσεις (3.202) και (3.203) επειδή το σύνορο Γ είναι C^2-ομαλό σύμφωνα με τα προηγούμενα μπορούμε να έχουμε την $2\pi-$περιοδική αναπαράσταση με $t \in [0, 2\pi]$
$$r(t) := (r_1(t), r_2(t)) \tag{3.204}$$
με την θετική φορά και $|r'(t)| > 0$. Ο μοναδιαίος κύκλος $\Omega = \mathbb{S}^1$ παραμετρικοποιείται ως

$$\Omega = \{r_\infty(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]\}.$$

Με $v = |r'|h(r)$, ο τελεστής S που δίνεται από την (3.200) παραμετρικοποιείται από τον τελεστή $A : L^2[0, 2\pi] \to L^2[0, 2\pi]$ ως

$$(Av)(t) \ := \ \frac{i}{4}\int_0^{2\pi} H_0^{(1)}(k|r(t) - r(\tau)|)v(\tau)\, d\tau \ , \quad t \in [0, 2\pi], \tag{3.205}$$

και ο τελεστής S_∞ που δίνεται από την (3.201) παραμετρικοποιείται από τον τελεστή A_∞ : $L^2[0, 2\pi] \to L^2[0, 2\pi]$ αντίστοιχα ως

$$(A_\infty v)(t) \ := \ \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k}}\int_0^{2\pi} e^{-ikr_\infty(t)\cdot r(\tau)}v(\tau)\, d\tau \ , \quad t \in [0, 2\pi], \tag{3.206}$$

Το παραμετρικοποιημένο προσπίπτον κύμα και το μέτρο του πλάτους σκέδασης τα συμβολίζουμε με $w = u^i(r)$ και $|w_\infty| = |u_\infty(r_\infty)|$. Επιπλέον, για να δηλώσουμε την εξάρτηση από το r, δηλαδή την παραμετρικοποίση, θα χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό $A(r, v)$, $A_\infty(r, v)$ και $w(r)$. Δεδομένων αυτών η παραμετρικοποιημένη μορφή των εξισώσεων (3.202) και (3.203) δίνεται από τις

$$A(r, v) \ = \ w(r), \tag{3.207}$$
$$\overline{A_\infty(r, v)}A_\infty(r, v) \ = \ |w_\infty|^2. \tag{3.208}$$

Οι παράγωγοι Fréchet των $A(r, v)$, $A_\infty(r, v)$ και $w(r)$ υπάρχουν λόγω των προαναφερθέντων επιχειρημάτων. Χρησιμοποιώντας και τον κανόνα γινομένου (3.12) όμοια με την (3.198) έχουμε ότι

$$(\overline{A_\infty[r, v]}A_\infty[r, v])'q \ = \ 2Re(\overline{A_\infty[r, v]}A'_\infty[r, v]q). \tag{3.209}$$

Οι παράγωγοι Frechét των $A(r, v)$, $A_\infty(r, v)$ και $w(r)$ επομένως για $t \in [0, 2\pi]$ είναι

$$(A'[r, v]q)(t) = \frac{ik}{4}\int_0^{2\pi} v(\tau)H_0^{(1)'}(k|r(t) - r(\tau)|)\frac{|r(t) - r(\tau)| \cdot |q(t) - q(\tau)|}{|r(t) - r(\tau)|}\, d\tau, \tag{3.210}$$

$$(A'_\infty[r, v]q)(t) = -ik\,\frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k}}\int_0^{2\pi} v(\tau)e^{-ikr_\infty(t)\cdot r(\tau)}r_\infty(t) \cdot q(\tau)\, d\tau, \tag{3.211}$$

$$(w'[r]q)(t) = ike^{ik\hat{d}\cdot q(t)}. \tag{3.212}$$

Η γραμμικοποίηση των (3.207) και (3.208) οδηγεί ομοίως με τις (3.185) και (3.199) λόγω της γραμμικότητας των ολοκληρωτικών τελεστών ως προς v στις

$$A(r, g) + A'[r, v]q - w'[r]q \ = \ w(r) - A(r, v), \tag{3.213}$$
$$2Re\left(\overline{A_\infty(r, v)}(A_\infty(r, g) + A'_\infty[r, v]q)\right) \ = \ |w_\infty|^2 - |A_\infty(r, v)|^2. \tag{3.214}$$

Η διαδικασία της διακριτοποίηση ξεκινάει με μία αρχική επιλογή για το σύνορο Γ που παραμετρικοποιείται από το r και για την πυκνότητα v στην (3.207). Για να το πραγματοποιήσουμε αυτό χρειαζόμαστε μία μέθοδο τύπου Newton. Δοθέντων αυτών των προσεγγίσεων για τα r και v το γραμμικό σύστημα (3.213) και (3.214) πρέπει να λυθεί για q και g και να πάρουμε τις βλέπουμε βελτιώσεις $r + q$ για την παραμετρικοποίηση και $v + g$ για την πυκνότητα. Για να το πραγματοποιήσουμε αυτό χρειαζόμαστε τη μέθοδο ομαλοποίησης Tikhonov. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνει το τελευταίο βήμα μέχρι να ενεργοποιηθεί η κατάλληλη συνθήκη διακοπής δηλαδή στη δική μας περίπτωση η Αρχή Χάσματος του Morozov.

Για την μέθοδο τύπου Newton ορίζουμε τον τελεστή F του πλάτους σκέδασης που στέλνει το r στο w_∞ με $w_\infty = u_\infty(r_\infty)$ έχουμε ομοίως με την (3.198) την

$$\overline{F(r)}F(r) = |w_\infty|^2 \,. \tag{3.215}$$

Όμοια με την (3.185)

$$\overline{F(r)}F(r) - 2Re(\overline{F(r)}F'(r)q) = |w_\infty|^2 \,, \tag{3.216}$$

όπου $F'(r)$ η παράγωγος Fréchet του F. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.205), (3.206) και (3.207) μπορούμε να αναπαραστήσουμε τον F ως

$$\begin{aligned} F(r) &:= -A_\infty\left(r, [A(r,\cdot)]^{-1}w(r)\right) && (3.217)\\ \text{για συντομία συμβολίζουμε } F &:= -A_\infty A^{-1}w && (3.218)\end{aligned}$$

Μέσω του κανόνα αλυσίδας (3.11) και τον κανόνα γινομένου (3.12) η παράγωγος Fréchet του F δίνεται από την

$$F'[r]q = -A'_\infty[r, A^{-1}w]q + A_\infty A^{-1}A'[r, A^{-1}w]q - A_\infty A^{-1}w'[r]q. \tag{3.219}$$

Θεώρημα 3.98. *Έστω r δοθείσα παραμετρικοποίηση (3.204) και v λύση της (3.207) δηλαδή έχουμε ότι*

$$v = A^{-1}w. \tag{3.220}$$

Τότε η λύση της (3.216) ικανοποιεί το σύστημα εξισώσεων (3.213) και (3.214). Αντιστρόφως, αν q λύση του συστήματος εξισώσεων (3.213) και (3.214) τότε ικανοποιεί την (3.216).

Απόδειξη. (Ευθύ) Έστω q λύση της (3.216) δηλαδή

$$|A_\infty(r,v)|^2 - 2Re\left(\overline{A_\infty(r,v)}F'[r]q)\right) = |w_\infty|^2. \tag{3.221}$$

Ορίζουμε την απεικόνιση g ως

$$g \;:=\; -A^{-1}\left(A'[r, A^{-1}w]q - w'[r]q\right) \;=\; -A^{-1}\left(A'[r,v]q - w'[r]q\right). \tag{3.222}$$

Τότε

$$A(r,g) = -A'[r,v]q + w'[r]q \;\Leftrightarrow\; A(r,g) + A'[r,v]q - w'[r]q = 0 \tag{3.223}$$

και άρα

$$A_\infty(r,g) = -A'_\infty[r,v]q - F'[r]q \;\Leftrightarrow\; F'[r]q = -A_\infty(r,g) - A'_\infty[r,v]q. \tag{3.224}$$

Επομένως, η (3.221) μέσω της (3.224) γίνεται

$$2Re\left(\overline{A_\infty(r,v)}(A_\infty(r,g) + A'_\infty[r,v]q)\right) = |w_\infty|^2 - |A_\infty(r,v)|^2 \tag{3.225}$$

η οποία είναι η (3.214). Άρα, το ζεύγος (q,g) ικανοποιεί το σύστημα εξισώσεων (3.213) και (3.214).

(Αντίστροφο) Έστω ότι το ζεύγος (q, g) ικανοποιεί το σύστημα εξισώσεων (3.213) και (3.214). Τότε το ζεύγος (q, g) ικανοποιεί το σύστημα εξισώσεων (3.223) και (3.225). Από τον ορισμό της g (3.222) αντικαθιστώντας τον στην (3.225) παίρνουμε την (3.221). Από την (3.221) άμεσα προκύπτει ότι q ικανοποιεί την (3.216). □

Παρατήρηση 3.99. *Το Θεώρημα (3.98) μας λέει στην ουσία ότι το πρόβλημα (3.216) είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα του συστήματος εξισώσεων (3.213) και (3.214).*

Τώρα περνάμε στην μέθοδο ομαλοποίησης Tikhonov. Επειδή q είναι πραγματική ενώ g είναι μιγαδική σπάμε την τελευταία σε πραγματικό και φανταστικό μέρος. Η g δίνεται από την (3.222) για να ισχύει το Θεώρημα. Έτσι έχουμε

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix} Re\, g \\ Im\, g \\ g \end{pmatrix} = f. \tag{3.226}$$

Στην (3.226) ο $\mathcal{A}$ ορίζεται ως

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} Re\, A(r,\cdot) & Re\,(A'[r,v]-w'[r]) \\ Im\, A(r,\cdot) & Im\,(A'[r,v]-w'[r]) \\ 2Re\,(\overline{A_\infty(r,v)}A_\infty(r,\cdot)) & 2Re\,(\overline{A_\infty(r,v)}A'_\infty[r,v]) \end{pmatrix} \tag{3.227}$$

και

$$f = \begin{pmatrix} Re\,(w(r)-A(r,v)) \\ Im\,(w(r)-A(r,v)) \\ |w_\infty|^2 - |A_\infty(r,v)| \end{pmatrix}. \tag{3.228}$$

Επειδή όμως το πρόβλημα παραμένει μη καλώς τοποθετημένο χρειαζόμαστε μια μέθοδο ομαλοποίησης. Συγκεκριμένα, εδώ θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο Tikhonov στον $L^2 \times L^2 \times H^p$ και άρα αντί να λύσουμε το (3.226) λύνουμε το ομαλοποιημένο σύστημα

$$(\mathcal{A}^*\mathcal{A} + \mu_m \tilde{I}_p)\begin{pmatrix} Re\, g \\ Im\, g \\ g \end{pmatrix} = \mathcal{A}^* f. \tag{3.229}$$

Ο όρο ποινής της (3.229) δίνεται από την

$$\tilde{I}_p = \begin{pmatrix} I_0 & 0 & 0 \\ 0 & I_0 & 0 \\ 0 & 0 & I_p \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \mu_m = \rho^m \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \rho > 0. \tag{3.230}$$

Το κριτήριο διακοπής σύμφωνα με την Αρχή Χάσματος του $Morozou$ δίνεται από τη

$$\frac{\| |w_\infty|^2 - |A_\infty(r,v)|^2 \|_{L^2}}{\| |w_\infty| \|_{L^2}} \le \tau \tag{3.231}$$

για επαρκώς μικρή παράμετρο $\tau > 0$ που εξαρτάται από το επίπεδο θορύβου.

Βιβλιογραφία

1. Adams, R., A.: Sobolev Spaces. Academic Press, New York 1975.

2. Adams, R., A., and Fournier, J., F.: Sobolev Spaces. Academic Press, New York 2003.

3. Berger, M., S.: Nonlinearity and Functional Analysis. Academic Press, New York 1977.

4. Brezis, H.: Analyse Fonctionnelle, théorie et applications. Masson, Paris 1983.

5. Cakoni, F., and Colton, D.: Qualitative Methods in Inverse Scattering Theory. Springer, Berlin 2006.

6. Colton, D., and Kress, R.: Integral Equation Methods in Scattering Theory. Wiley Interscience Publication, New York 1983.

7. Colton, D., and Kress, R.: Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory. 3rd ed, Wiley Interscience Publication, New York 2013.

8. Conway, J., B.: A Course in Functional Analysis. 2nd ed, Springer-Verlang, New York 1990.

9. Gintides, D.: Local uniqueness for the inverse scattering problem in acoustics via the Faber-Krahn inequality. Inverse Problems, 21 (2005), 211-242.

10. Ivanyshyn, O.: Shape reconstruction of acoustic obstacles from the modulus of the far field pattern. Inverse Problems and Imaging, 1 (2007), 609-622.

11. Ivanyshyn, O., and Kress, R.: Identification of sound-soft 3D obstacles from phaseless data. Inverse Problems and Imaging, Volume 4, 1 (2010), 131-149.

12. Kirsch, A.: The domain derivative and two applications in inverse scattering theory. Inverse Problems, 9 (1993), 81-96.

13. Kravvaritis, C., and Yannacopoulos, N.: Variational Methods in Nonlinear Analysis. Walter de Gruyter, Berlin 2020

14. Kress, R.: Linear Integral Equations. 2nd ed, Springer, Berlin 1999.

15. Kress, R.: Numerical Analysis. Springer-Verlang, New York 1998.

16. Kress, R., and Rundell, W.: Inverse obstacle scattering with modulus of the far field pattern as data. Inverse problems in medical imaging and nondestructive testing, (Oberwolfach, 1996), (1997), 75-92.

17. Potthast, R.: Fréchet differentiability of boundary integral operators in inverse acoustic scattering. Inverse Problems, 10 (1994), 431-447.

18. Rudin, W.: Functional Analysis. 2nd ed, McGraw-Hill, New York 1991.