ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Οι Κβαντικές Ομάδες και η Κατασκευή Αναλλοίωτης Κρίκου μέσω της Κατηγορίας Άμματος (**Tangle**).

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

ΦΑΙΔΩΝΑ ΓΡΑΜΜΑΤΙΚΟΠΟΥΛΟΥ

Επιβλέπουσα : Σοφία Λαμπροπούλου
Καθηγήτρια Ε.Μ.Π.

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ
Αθήνα, Μάρτιος 2021

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Τομέας Μαθηματικών/ Άλγεβρας-Γεωμετρίας
Εφαρμοσμένες Μαθηματικές Επιστήμες

Οι Κβαντικές Ομάδες και η Κατασκευή Αναλλοίωτης Κρίκου μέσω της Κατηγορίας Άμματος (Tangle)

Μεταπτυχιακη Εργασια

του

ΦΑΙΔΩΝΑ ΓΡΑΜΜΑΤΙΚΟΠΟΥΛΟΥ

Επιβλέπουσα : Σοφία Λαμπροπούλου
Καθηγήτρια Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 5η Μαρτίου 2021.

(Υπογραφή)	*(Υπογραφή)*	*(Υπογραφή)*
....	....	....
Σ. Λαμπροπούλου	Α. Κοντογεώργης	Α. Κεχαγιάς
Καθηγήτρια Ε.Μ.Π.	Καθηγητής Ε.Κ.Π.Α.	Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Μάρτιος 2021

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Τομέας Μαθηματικών/ Άλγεβρας-Γεωμετρίας
Εφαρμοσμένες Μαθηματικές Επιστήμες

(Υπογραφή)

....

ΦΑΙΔΩΝ ΓΡΑΜΜΑΤΙΚΟΠΟΥΛΟΣ
Διπλωματούχος Μαθηματικός- Σ.Ε.Μ.Φ.Ε. / Ε.Μ.Π.
© 2021 – All rights reserved

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Τομέας Μαθηματικών/ Άλγεβρας-Γεωμετρίας
Εφαρμοσμένες Μαθηματικές Επιστήμες

Copyright ©-All rights reserved Φαίδων Γραμματικόπουλος, 2021.
Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Περίληψη

Στα μαθηματικά και τη θεωρητική φυσική, ο όρος ¨κβαντικές ομάδες’ (quantum groups) χρησιμοποιείται για να περιγράψει ένα είδος μη-μεταθετικών αλγεβρών με πρόσθετη δομή. Τον όρο εισηγήθηκε ο Drinfeld σε μία ομιλία του στο Διεθνές Συνέδριο Μαθηματικών στο Berkeley το 1986. Πιο συγκεκριμένα η αναφορά στις κβαντικές ομάδες περιγράφει μία ειδική περίπτωση Hopf αλγεβρών οι οποίες προκύπτουν ως μη-τετριμένες παραμορφώσεις ημιαπλών Lie αλγεβρών ή αλγεβρών κανονικών συναρτήσεων στις αντίστοιχες αλγεβρικές ομάδες. Η προσέγγιση αυτής της εργασίας έχει σκοπό να περιγράψει τη σύνδεση των κβαντικών ομάδων με την τοπολογία χαμηλών διαστάσεων. Αυτός ο συσχετισμός έγινε με την παράλληλη δημοσίευση εργασιών από δύο ξεχωριστές ερευνητικές ομάδες, αυτή των Yetter και Freyd καθώς και αυτή των Turaev και Reshetikhin. Η ερευνητική δουλειά που είχε προηγηθεί από τους Abe και Sweedler στην αναλυτική θεωρία των Hopf αλγεβρών έδωσε την δυνατότητα στον Drinfeld να ορίσει τις Hopf άλγεβρες πλεξίδων, η θεωρία των οποίων επεκτάθηκε με την συμβολή των Majid και Radford. Μέσω της εκτενώς θεμελειωμένης Θεωρίας Κατηγοριών και πιο ειδικά των Τανυστικών Κατηγοριών (επίσης γνωστές ως Μονοειδείς Κατηγορίες) που εισήχθησαν από τον Benabou το 1964 και υιοθετήθηκαν πολύ αργότερα στη δουλειά των Joyal και Street, ο Turaev αρχικά και κοντά του ο Yetter, συνέδεσαν την Κατηγορία Πλαισιωμένων Αμμάτων με τις Hopf άλγεβρες κορδελών και ως αποτέλεσμα αυτού, με την κατηγορία των αναπαραστάσεων της ειδικής κβαντικής ομάδας U_qpslp2qq. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να δοθεί μία νέα απόδειξη ύπαρξης και εύρεσης αναλλοίωτης κρίκου. Τέλος, καθοριστικό ρόλο στην ομαδοποίηση όλων αυτών των ερευνητικών αποτελεσμάτων έπαιξε ο Kassel πάνω στου οποίου την δουλειά βασίζεται ο κορμός αυτού του πονήματος.

Abstract

In mathematics and in theoretical physics the term "quantum groups" is being used to refer to a certain type of non-commutative algebras with additional structure. The term was introduced by Drinfeld in his speech during the International Congress of Mathematics, Berkeley 1986. More precisely his address to quantum groups describes a specific form of Hopf algebras which are derived as non-trivial deformations of semisimple Lie algebras or of the algebras of regular functions on corresponding algebraic groups. This report's approach is aimed to explain the connection between quantum groups and lower dimension topology. That kind of correlation has been achieved due to the scientific research of two separate research groups, that one of Yetter and Freyd and this of Turaev and Reshetikhin. Drinfeld took advantage of the analytic techniques and the theory in Hopf algebras that are being provided by Abe and Sweedler and he defined and introduced to us the concept of Braided Hopf algebras. While the Braided Hopf algebras theory was extended with the contribution of Majid and Radford, there were Joyal and Street those who were dealing with Tensor Categories which will become Braided Hopf algebras crucial counterpart in our way to topology. At first Turaev and after him Yetter, connected the Category of Framed Tangles ($\mathcal{FT}$) with Ribbon Hopf Algebras, and as a result of that they proved the relationship between $\mathcal{FT}$ and the category of $U_q(sl(2))$-modules. This results in a new proof of existence and finding of Link invariants. Finally, Kassel had a decisive role in the collection and grouping of all these mathematical discoveries and his book's line is the one that current master thesis had followed.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγικά

Ξεκινάμε παραθέτοντας κάποια χρήσιμα μαθηματικά εργαλεία που θα μας χρειαστούν στην συνέχεια της εργασίας και αφορούν κυρίως μαθηματικά αντικείμενα και αλγεβρικές κατασκευές με συνεπακόλουθες ιδιότητες. Σε αυτή την λογική θα εισαχθούν κυρίως βασικοί ορισμοί και αποτελέσματα της θεωρίας κατηγοριών, της θεωρίας που αναπτύσσεται για τα τανυστικά γινόμενα καθώς και ειδικά αποτελέσματα που αφορούν συγκεκριμένου τύπου άλγεβρες.

1.1 Θεωρία Κατηγοριών

Ορισμός 1.1.1. Μία κατηγορία $\mathfrak{A}$ αποτελειται από:

- Μία συλλογή $ob(\mathfrak{A})$ αντικειμένων του $\mathfrak{A}$
- Για κάθε Α, Β $\in ob(\mathfrak{A})$, μία συλλογή απεικονήσεων ή βελών ή μορφισμών $Hom_{\mathfrak{A}}(A,B)$ (συμβολίζεται και ως $\mathfrak{A}(A,B)$) από το A στο B
- Για κάθε $A, B, C \in ob(\mathfrak{A})$ μία συνάρτηση

$$Hom_{\mathfrak{A}}(B,C) \times Hom_{\mathfrak{A}}(A,B) \longrightarrow Hom_{\mathfrak{A}}(A,C)$$
$$(g,f) \longmapsto g \circ f$$

- Για κάθε $A \in ob(\mathfrak{A})$, ένα στοιχείο 1_A του $\mathfrak{A}(A,A)$ καλείται <u>ταυτοτικό</u> του A και ικανοποιεί τις σχέσεις:

  i) Προσεταιριστικότητα: $\forall f \in \mathfrak{A}(A,B)$, $g \in \mathfrak{A}(B,C)$ και $h \in \mathfrak{A}(\mathfrak{C},\mathfrak{D})$ ισχύει $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$
  ii) Ταυτοτικοί νόμοι: $\forall f \in \mathfrak{A}(A,B)$ έχουμε

$$f \circ 1_A = f = 1_B \circ f$$

- Μία απεικόνιση $s : Hom(\mathfrak{A}) \to ob(\mathfrak{A})$ που καλείται απεικόνιση αρχής και μία $b : Hom(\mathfrak{A}) \to ob(\mathfrak{A})$ που καλείται απεικόνιση πέρατος. Τότε η (ii):

$$f \circ id_{s(f)} = f = id_{b(f)} \circ f$$

  και η προσεταιριστικότητα ισχύει αν για τους μορφισμούς f, g, h έχουμε:

$$b(f) = s(g) \text{ και } b(g) = s(h)$$

Σημείωση 1.1.1. Θα λέμε ότι μία απεικόνιση $f \quad g$ περνά μέσα από το αντικείμενο $\mathfrak{C}$ (fuctors through) ή ότι το ακόλουθο διάγραμμα μετατίθεται αν $h \quad i \quad f \quad g$:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{A} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & \mathfrak{B} \arrow[d, "g"] \\
\mathfrak{C} \arrow[r, "i"'] & \mathfrak{D}
\end{tikzcd}$$

Γενικά ένα διάγραμμα λέγεται ότι μετατίθεται εαν όποτε υπάρχουν δύο δρόμοι από ένα αντικείμενο Χ σε ένα αντικείμενο Υ , τότε η απεικόνιση από το Χ στο Υ που προκύπτει συνθέτοντας από τον έναν δρόμο είναι ίση με την απεικόνιση που προκύπτει συνθέτοντας από το δεύτερο.

Παράδειγμα 1.1.0.1 (Είδη Κατηγοριών)**.** Οι πιο συνήθεις κατηγορίες είναι:

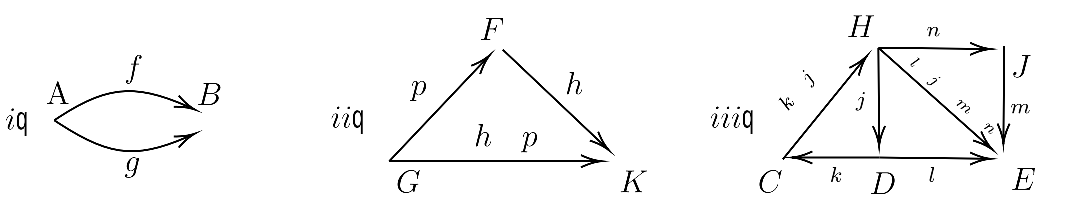
- Η κατηγορία των συνόλων **Set** με αντικείμενα τις συνολοθεωρητικές συναρτήσεις.
- Η κατηγορία **Grp** των ομάδων με αντικείμενα ομάδες και απεικονίσεις ομομορφισμούς ομάδων.
- Η κατηγορία $\mathbf{Vect_k}$ των διανυσματικών χωρών πάνω από σώμα k με αντικείμενα τις γραμμικές απεικονίσεις μεταξύ αυτών.
- Η κατηγορία **Top** των τοπολογικών χώρων με αντικείμενα τις συνεχείς συναρτήσεις μεταξύ αυτών.

Σημείωση 1.1.2 (Σχεδίαση Κατηγοριών)**.** Μία κατηγορία μπορεί να περιγραφτεί αναλυτικά ονομάζοντας τα αντικείμενα της, τους μορφισμοί της, τις συνθέσεις αυτών και τα μοναδιαία.

- Υπάρχει η κατηγορία Η χωρίς αντικείμενα και μορφισμούς
- Υπάρχει κατηγορία $\mathfrak{I}$ με ένα ακτικείμενο και μοναδικό μορφισμό σε αυτό τον ταυτοτικό. Συμβολίζεται:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{I} \arrow[loop above, "i"]
\end{tikzcd}$$

- Πιο περίπλοκα παραδείγματα κατηγοριών είναι τα ακόλουθα:



Κάποιες κατηγορίες δεν περιλαμβάνουν καθόλου μορφισμούς πέραν των ταυτοτικών. Αυτές καλούνται Διακριτές Κατηγορίες.

Τέλος θεμελειώδες στη Θεωρία Κατηγοριών είναι το:

Αξιώμα Δυϊσμού
Κάθε κατηγορικός ορισμός, θεώρημα και απόδειξη έχει ένα δυϊκό, που προκύπτει από το αρχικό αντιστρέφοντας τα βέλη.

Ορισμός 1.1.2. α) Ένας μορφισμός $f : A \longrightarrow B$ σε κατηγορία $\mathfrak{A}$ είναι ένας ισομορφισμός αν υπάρχει μορφισμός $g : B \to A$ τέτοιος ώστε:

$$g \circ f = 1_A \ , \ f \circ g = 1_B$$

β) Δοσμένων δύο κατηγοριών B και C υπάρχει η κατηγορία γινόμενο $\mathsf{B} \times \mathsf{C}$ όπου:

$$ob(\mathsf{B} \times \mathsf{C}) = ob(\mathsf{B}) \times ob(\mathsf{C})$$

$$(\mathsf{B} \times \mathsf{C})((B,C),(B',C')) = \mathsf{B}(B,C) \times \mathsf{C}(B',C')$$

Δηλαδή ένα αντικείμενο της κατηγορίας γινόμενο είναι ένα ζεύγος (B,C) όπου $B \in \mathsf{B}$, $C \in \mathsf{C}$, ενώ ένας μορφισμός $(B,C) \to (B',C')$ στο $\mathsf{B} \times \mathsf{C}$ είναι ένα ζεύγος (f,g) όπου $f : B \to B'$ και $g : C \to C'$

1.1.1 Συναρτητές (Functors)

Ορισμός 1.1.3. Έστω $\mathfrak{A}$ και $\mathfrak{B}$ δύο κατηγορίες. Ένας συναρτητής $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ αποτελείται από:

- Μία συνάρτηση $F_1 : ob(\mathfrak{A}) \to ob(\mathfrak{B})$ που αντιστοιχεί κάθε αντικείμενο της κατηγορίας $\mathfrak{A}$ σε κάποιο αντικείμενο της κατηγορίας $\mathfrak{B}$ ως:

$$A \to F(A) \in ob(\mathfrak{B}) \ , \ F_1 : A \to F(A)$$

- Για κάθε δύο αντικείμενα $A, A' \in ob(\mathfrak{A})$, μία συνάρτηση F_2 που αντιστοιχεί τον μεταξύ τους μορφισμό στον μορφισμό των αντικειμένων $F(A), F(A') \in ob(\mathfrak{B})$:

$$\mathfrak{A}(A, A') \to \mathfrak{B}(F(A), F(A')) \ , \ F_2 : f \to F(f)$$

ώστε να ικανοποιούνται τα αξιώματα:

$$F_2(f' \circ f) = F_2(f') \circ F_2(f), \quad F_2(1_A) = 1_{F_1(A)} \ , \ A \in \mathfrak{A}$$

Παρατήρηση 1.1.1. Μέσω της χρήσης των συναρτητών προκύπτουν οι κατηγορίες των κατηγοριών, όπου αντικείμενα είναι οι κατηγορίες και μορφισμοί οι συναρτητές. Αυτή η κατηγορία συμβολίζεται με **CAT**.

Παράδειγμα 1.1.1.1 (Συναρτητών)**.** Το πιο σύνηθες παράδειγμα συναρτητή είναι αυτοί που καλούνται επιλήσμονες συναρτητές (forgetfull functors):
i) Υπάρχει συναρτητής $U : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ που ορίζεται ως ακολούθως:

Εαν $\overline{H}, \overline{G}$ είναι ομάδες με $\overline{H} = \langle H, \ \rangle$ και $\overline{G} = \langle G, \ \rangle$.

Τότε αφού $\overline{H}, \overline{G} \in ob(\mathbf{Grp})$ έχουμε ότι: $U_1(\overline{G}) = G$, όπου G το υποκείμενο σύνολο χωρίς την δομή. Αν h ομομορφισμός $(h \in Hom_{\mathbf{Grp}}(\overline{G}, \overline{H}))$ τότε παρόμοια $U_2(h) = h$ όπου το h τώρα ορίζεται ως συνάρτηση μεταξύ συνόλων.

$$\begin{tikzcd}
\overline{G} = \langle G, \ \rangle \arrow[r, "U"] \arrow[d, "h"] & G \arrow[d, "U_2(h) = h"] \\
\overline{H} = \langle H, \ \rangle \arrow[r, "U"] & H
\end{tikzcd}$$

$$\mathbf{Grp} \qquad\qquad \mathbf{Set}$$

Ο U είναι όντως συναρτητής γιατί:

$$\overline{G} \longrightarrow \overline{H} \longrightarrow \overline{L} \quad \overline{G}, \overline{H}, \overline{L} \in ob(\mathbf{Grp})$$

Φαίνεται ότι $U_2(l \ h) = U_2(l) \ U_2(h)$ ισχύει κατα τετριμένο τρόπο αφού: $l \ h = l \ h$.
Τέλος έχουμε ότι:

$$U_2(1_{\overline{G}}) = 1_{U_1(\overline{G})} \equiv 1_{\overline{G}} = 1_G$$

ii) Παρόμοιο παράδειγμα μπορεί να δοθεί με συναρτητή $P : \mathbf{Ring} \longrightarrow \mathbf{Set}$ ή

αντίστοιχα $K : \mathbf{Ring} \longrightarrow \mathbf{Ab}$,όπου **Ab** είναι η κατηγορία των αβελιανών ομάδων ή ακόμα και $M : \mathbf{Ring} \to \mathbf{Mon}$ (Monoids) όπου:

$$\langle R, \ , \ \rangle \to \langle R, \ \rangle$$

$$\langle R, \ , \ \rangle \to \langle R, \ \rangle$$

διατηρώντας τους αρχικούς μορφισμούς του δακτυλίου. Σε αυτή την περίπτωση των επιλησμόνων συναρτητών «ξεχνάμε» ένα χαρακτηριστικό της δομής των αλγεβρικών αντικειμένων.
iii) Υπάρχει ένας συναρτητής «εμφύτευση» $U^1 : \mathbf{Ab} \to \mathbf{Grp}$ ορισμένος ως $U^1_1(A) = A$ για κάθε αβελιανή ομάδα A και $U^1_2(f) = f$ για κάθε ομομορφισμό f αβελιανών ομάδων. Βλέποντας τις αβελιανές ομάδες ως αντικείμενα της **Grp** είναι σαν να «ξεχνάμε» ότι έχουν μεταθετική ιδιότητα.

Παρατήρηση 1.1.2. Επομένως οι επιλήσμονες συναρτητές προκύπτουν «ξεχνώντας» ιδιότητες ή δομές επί των αντικειμένων. Ξεχνώντας ιδιότητα δεν μπορούμε να πάρουμε συναρτητή επί των αντικειμένων ενώ ξεχνώντας δομή δεν μπορούμε να κατασκευάσουμε συναρτητή επί των μορφισμών.

Παράδειγμα 1.1.1.2. Έστω G και H μονοειδή ειδομένα ως κατηγορίες με ένα αντικείμενο που συμβολίζονται με $\mathfrak{G}, \mathfrak{H}$ αντίστοιχα. Ένας συναρτητής $F : \mathfrak{G} \to \mathfrak{H}$ πρέπει να στέλνει το μοναδικό αντικείμενο της $\mathsf{G}(\ )$ στο μοναδικό αντικείμενο της $\mathfrak{H}(\ )$ διατηρόντας τη σύνθεση μορφισμών. Έτσι $F : \mathfrak{G} \to \mathfrak{H}$ αντιστοιχεί στις:

$$F_1 : G \to H, \quad \begin{matrix} G & Hom_{\mathfrak{G}}(\ ,\ ) \\ H & Hom_{\mathfrak{H}}(\ ,\ ) \end{matrix}$$

$$F_2(g \circ g') = F_2(g) \circ F_2(g'), \quad \forall\, g, g' \in \mathfrak{G} \quad F_2(1_{\mathfrak{G}}) = 1_{F_1(\mathfrak{G})}$$

Ελεύθεροι Συναρτητές:
Είναι οι συναρτητές που κατα μίαν έννοια είναι οι δυϊκοί των επιλησμόνων συναρτητών. Επι της ουσίας αντί να «ξεχνούν» κάποιες ιδιότητες ή δομές των αντικειμένων τις προσθέτουν. Λειτουργούν με παραπλήσιο τρόπο όπως η κατασκευή των ελεύθερων ομάδων (ή ελεύθερων διανυσματικών χώρων κτλ.).

Ορισμός 1.1.4. Έστω $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ δύο κατηγορίες. Ένας συναρτητής που πάει την κατηγορία $\mathfrak{A}$ με τα αντίθετα βέλη (μορφισμούς) στην $\mathfrak{B}$ καλείται ανταλλοίωτος (covariant) συναρτητής από την $\mathfrak{A}$ στη $\mathfrak{B}$ και είναι ο συναρτητής

$$F : \mathfrak{A}^{op} \to \mathfrak{B}$$

Ένας ανταλλοίωτος συναρτητής $H : \mathfrak{A}^{op} \to \mathbf{Set}$ με πεδίο τιμών την κατηγορία **Set** καλείται πρόδραγμα (presheaf).

Παράδειγμα 1.1.1.3. Δοσμένου διανυσματικού χώρου X παίρνουμε το δακτύλιο $C(X)$ των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων στο X. Οι πράξεις του δακτυλίου ορίζονται κατα σημείο.

$$p_1, p_2 : X \to \mathbb{R}$$

συνεχείς απεικονίσεις, τότε ορίζω:

$$p_1 + p_2 : X \to \mathbb{R} \quad (p_1 + p_2)(x) = p_1(x) + p_2(x)$$

Επομένως αν έχω μία συνεχής γραμμική απεικόνιση $f : X \to Y$ επάγεται ένας ομομορφισμός $C(f) : C(X) \to C(Y)$ ως εξής:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ C(X) & C(Y) \arrow[l, "C(f)"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Y \arrow[r, "q"] & \mathbb{R} \\ X \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "q \circ f"'] & \end{tikzcd}$$

Επομένως η C είναι ανταλλοίωτος συναρτητής από την **Top** στην **Ring**.

Σημείωση 1.1.3. Για συγκεκριμένες κλάσεις χώρων το πέρασμα από το X στο $C(X)$ δεν χάνει καμία πληροφορία (υπάρχει τρόπος να ανακατασκευάσουμε τον χώρο X μέσω της χρήσης του δακτυλίου $C(X)$). Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι «Η άλγεβρα είναι δυϊκή της γεωμετρίας».

Παράδειγμα 1.1.1.4. Έστω K σώμα και V, W διανυσματικοί χώροι πάνω από το σώμα K, μπορεί να κατασκευαστεί διανυσματικός χώρος:

$$Hom(V, W) \quad \{f \mid f : V \to W\}$$

όπου τα στοιχεία αυτού είναι γραμμικές απεικονήσεις.
Κάθε γραμμική απεικόνιση $g : V \to V'$ επάγει γραμμική απεικόνιση $g \ : Hom(V', W) \to Hom(V, W)$, ορίζοντας $q \in Hom(V', W)$ και παίρνοντας $g \ (q)$ ως σύνθεση:

$$V \longrightarrow V' \longrightarrow W$$

και ως κατ΄ επέκταση προκύπτει συναρτητής:

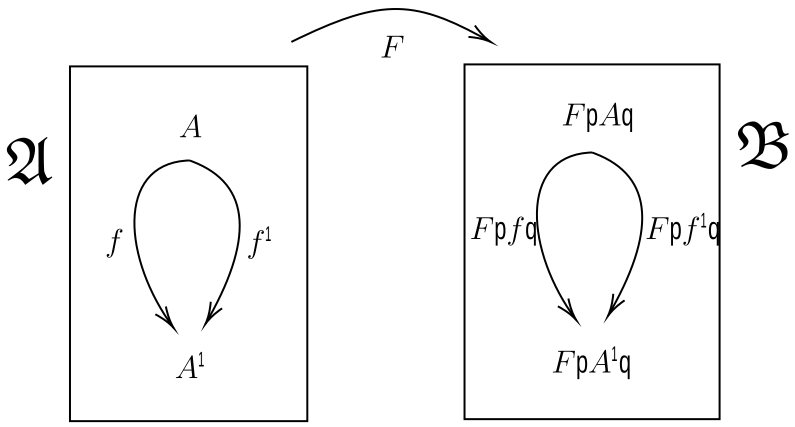
$$Hom(\ , W) : \mathbf{Vect}_K{}^{op} \longrightarrow \mathbf{Vect}_K$$

Ορισμός 1.1.5. Ένας συναρτητής $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ καλείται **πιστός** (faithfull) αν για κάθε A , $A' \in \mathfrak{A}$, η συνάρτηση

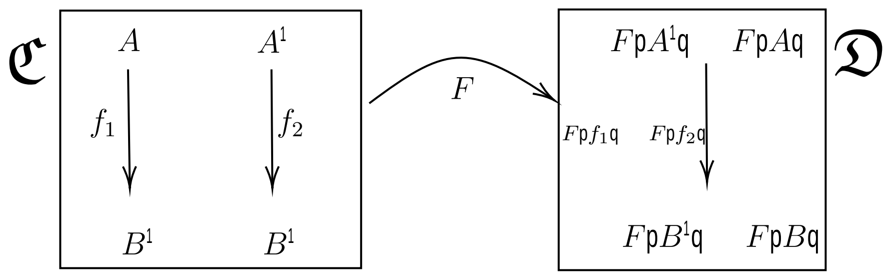
$$\mathfrak{A}(A, A') \longrightarrow \mathfrak{B}(F(A), F(A'))$$

$$f \longrightarrow F(f)$$

είναι 1-1. Αντίστοιχα πάλι καλείται **πλήρης** (full) αν είναι επί.
Σχηματικά έχουμε:



Σημείωση 1.1.4. Δεν σημαίνει ότι έχοντας κάποιον πιστό συναρτητή και διακεκριμένες απεικονίσεις f_1, f_2 τότε $F(f_1) \quad F(f_2)$:



Ορισμός 1.1.6. Έστω $\mathfrak{A}$ μία κατηγορία. Μία υποκατηγορία (subcategory) $\mathfrak{J}$ της $\mathfrak{A}$ αποτελείται από:

- Μία υποκλάση αντικειμένων $ob(\mathfrak{J})$ των αντικειμένων $ob(\mathfrak{A})$.
- Για κάθε $S, S' \in ob(\mathfrak{J})$ μία υποκλάση μορφισμών $Hom_{\mathfrak{J}}(S, S')$ των μορφισμών $Hom_{\mathfrak{A}}(S, S')$ τέτοια ώστε η $\mathfrak{J}$ να είναι κατηγορία (κλειστή ως προς τις πράξεις σύνθεση, ταυτοτικό).

Μία υποκατηγορία καλείται <u>πλήρης</u> αν για αυτήν ισχύει:

$$Hom_{\mathfrak{H}}(S, S') \quad Hom_{\mathfrak{A}}(S, S') \ , \ \forall \ S, S' \in ob(\mathfrak{J})$$

(Παράδειγμα: Η **Ab** είναι πλήρης υποκατηγορία της **Grp**.)

Παρατήρηση 1.1.3. Η εικόνα ενός συναρτητή δεν είναι αναγκαία υποκατηγορία της αρχικής:

$$A \xrightarrow{f} B \qquad B' \xrightarrow{g} C \qquad \xrightarrow{\quad F \quad} \qquad \begin{tikzcd} & Y \arrow[dr, "q"] & \\ X \arrow[ur, "p"] \arrow[rr, "q \quad p"'] & & Z \end{tikzcd}$$

ορίζοντας:

$$F(A) \quad X \ , \ F(B) \quad F(B') \quad Y \ , \ F(C) \quad Z$$

1.1.2 Φυσικοί Μετασχηματισμοί

Υπάρχει μία έννοια απεικονίσεων που σχετίζεται με τις επιμέρους απεικονίσεις μεταξύ συναρτητών. Τέτοιες απεικονίσεις καλούνται **φυσικοί μετασχηματισμοί**. Οι φυσικοί μετασχηματισμοί έχουν ισχύ μόνο όταν οι συναρτητές μεταφέρουν πληροφορία από και προς αντίστοιχες κατηγορίες:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{A} \arrow[r, shift left, "F"] \arrow[r, shift right, "G"'] & \mathfrak{B} \end{tikzcd}$$

Παράδειγμα 1.1.2.1. Έστω $\mathfrak{A}$ η διακριτή κατηγορία όπου αντικείμενα είναι οι φυσικοί αριθμοί $0, 1, 2, 3,$. Ένας συναρτητής F από το $\mathfrak{A}$ σε μία άλλη κατηγορία $\mathfrak{B}$ είναι επί της ουσίας μία ακολουθία $(F_0, F_1, F_2, \ )$ αντικειμένων της $\mathfrak{B}$. Έστω G άλλος συναρτητής από το $\mathfrak{A}$ στο $\mathfrak{B}$ αποτελούμενος από την ακολουθία $(G_0, G_1, G_2, \ )$. Κατά αυτόν τον τρόπο ορίζεται απεικόνιση από το F στο G ως μία ακολουθία

$$(F_0 \to G_0 \ , \ F_1 \to G_1 \ , \ F_2 \to G_2, \quad)$$

από μορφισμούς του $\mathfrak{B}$. Στη γενική περίπτωση, ο φυσικός μετασχηματισμός μεταξύ συναρτητών $\mathfrak{A} \overset{F}{\underset{G}{\to}} \mathfrak{B}$ αποτελείται από απεικονίσεις $a_A : F(A) \to G(A)$, μία για κάθε αντικείμενο $A \in \mathfrak{A}$.

Ορισμός 1.1.7. Έστω $\mathfrak{A}$ και $\mathfrak{B}$ κατηγορίες και έστω $\mathfrak{A} \underset{G}{\overset{F}{\rightrightarrows}} \mathfrak{B}$ συναρτητές F, G. Ένας **φυσικός μετασχηματισμός** $a : F \to G$ είναι μία οικογένεια $(F(A) \xrightarrow{a_A} G(A))_{A \in \mathfrak{A}}$ μορφισμών της $\mathfrak{B}$ τέτοια ώστε για κάθε μορφισμό $A \xrightarrow{f} A'$ στην $\mathfrak{A}$ το τετράγωνο:

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "a_A"'] & F(A') \arrow[d, "a_{A'}"] \\
G(A) \arrow[r, "G(f)"] & G(A')
\end{tikzcd} \tag{1.1}$$

να μετατίθεται. Οι απεικονίσεις a_A καλούνται συνιστώσες του a.

Σημείωση 1.1.5. i) Ο ορισμός του φυσικού μετασχηματισμού δίνεται με τέτοιον τρόπο ώστε για κάθε μορφισμό $A \xrightarrow{f} A'$ στην $\mathfrak{A}$ να είναι δυνατό να κατασκευαστεί ακριβώς μία απεικόνιση $F(A) \to G(A')$ στη $\mathfrak{B}$. Όταν $f = 1_A$ τότε η απεικόνιση είναι η a_A. Στη γενική περίπτωση το f είναι η διαγώνιος του τετραγώνου (1.1).

ii) Για να συμβολίσουμε τον φυσικό μετασχηματισμό από το $\mathfrak{A}$ στο $\mathfrak{B}$ γράφουμε:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{A} \arrow[r, bend left=50, "F"{name=U}] \arrow[r, bend right=50, "G"'{name=D}] & \mathfrak{B}
\arrow[from=U, to=D, phantom, "a \Downarrow"]
\end{tikzcd}$$

Παράδειγμα 1.1.2.2. Επιλέγουμε έναν φυσικο αριθμό n. Θα δείξουμε ότι η ορίζουσα $(n \times n)$-πίνακα μπορεί να κατανοηθεί ως φυσικός μετασχηματισμός.

Για κάθε μεταθετικό δακτύλιο R, ορίζω το μονοειδές των $n \times n$-πινάκων με εισόδους από το R, $M_n(R)$. Αν έχω έναν ομομορφισμό δακτυλίων $R \to S$ τότε επάγεται ομομορφισμός μονοειδών $M_n(R) \to M_n(S)$. Με αυτόν τον τρόπο ορίζεται συναρτητής $M_n : \mathbf{CRing} \to \mathbf{Mon}$. Επίσης τα στοιχεία του δακτυλίου R μπορούν να σταλούν σε ένα μονοειδές $U(R)$ μέσω του επιλήσμονα συναρτητή που «ξεχνάει» την μεταθετική πράξη: $U : \mathbf{CRing} \to \mathbf{Mon}$.

Κάθε $(n \times n)$-πίνακας X στο $M_n(R)$ έχει μία ορίζουσα $\det_R(X)$ που είναι κάποιο στοιχείο της R. Επομένως η $\det_R : M_n(R) \to U(R)$ είναι ένας ομομορφισμός μονοειδών και δια αυτού του τρόπου επάγεται ο φυσικός μετασχηματισμός:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{CRing} \arrow[r, bend left=50, "M_n(R)"{name=U}] \arrow[r, bend right=50, "U(R)"'{name=D}] & \mathbf{Mon}
\arrow[from=U, to=D, phantom, "\Downarrow \det_X(R)"]
\end{tikzcd}$$

Κατασκευή

Οι φυσικοι μετασχηματισμοί είναι σαν ένα είδος απεικονίσεων. Επομένως περιμένουμε να μπορούμε να τους συνθέσουμε. Άρα δοσμένων φυσικών μετασχηματισμών a , b έχουμε:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{A} \arrow[r, bend left=60, "F"] \arrow[r, "G" description] \arrow[r, bend right=60, "H"'] \arrow[r, phantom, shift left=3ex, "a \Downarrow"] \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "b \Downarrow"] & \mathfrak{B}
\end{tikzcd}$$

επομένως προκύπτει ότι υπάρχει η σύνθεση φυσικών μετασχηματισμών:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{A} \arrow[r, bend left=50, "F"] \arrow[r, bend right=50, "H"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow b\, a"] & \mathfrak{B}
\end{tikzcd}$$

Υπάρχει επίσης και ο ταυτοτικός φυσικός μετασχηματισμός:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{A} \arrow[r, bend left=50, "F"] \arrow[r, bend right=50, "F"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow 1_F"] & \mathfrak{B}
\end{tikzcd}$$

Παρατήρηση 1.1.4. Για κάθε δύο κατηγορίες $\mathfrak{A}$ και $\mathfrak{B}$, υπάρχει κατηγορία της οποία τα αντικείμενα είναι συναρτητές από το $\mathfrak{A}$ στο $\mathfrak{B}$ και μορφισμοί, οι φυσικοί μετασηματισμοί μεραξύ του. Αυτή καλείται Κατηγορία Συναρτητών από το $\mathfrak{A}$ στο $\mathfrak{B}$ και συμβολίζεται: $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$ ή $\mathfrak{B}^{\mathfrak{A}}$.

Παράδειγμα 1.1.2.3. Έστω *2* η διακριτή κατηγορία με δύο αντικείμενα. Ένας συναρτητής G από την *2* σε μία κατηγορία $\mathfrak{B}$ είναι ένα ζεύγος αντικειμένων της $\mathfrak{B}$. Επομένως ένας φυσικός μετασχηματισμός είναι ένα ζεύγος απεικονίσεων. Η κατηγορία συναρτητών είναι ισομορφική με την κατηγορία γινόμενο $\mathfrak{B} \quad \mathfrak{B}$ πράγμα που δικαιολογεί και τον εναλλακτικό ορισμός ως $\mathfrak{B}^{2}$.

Ορισμός 1.1.8. Έστω $\mathfrak{A}$ και $\mathfrak{B}$ δύο κατηγορίες. Ένας φυσικός ισομορφισμός μεταξύ συναρτητών από το $\mathfrak{A}$ στο $\mathfrak{B}$ είναι ένας ισομορφισμός στην $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$.

Ο ορισμός που προηγήθηκε είναι ισοδύναμος με το ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα 1.1.1. *Έστω $\mathfrak{A} \underset{G}{\overset{F}{\rightrightarrows}} \mathfrak{B}$ και a ο φυσικός μετασχηματισμός $a : F \to G$. Τότε ο a είναι φυσικός ισομορφισμός εάν και μόνο αν*

$$a_A : F(A) \longrightarrow G(A)$$

είναι ισομορφισμός για κάθε $A \in \mathfrak{A}$.

Σημείωση 1.1.6. Θα λέμε ότι δύο συναρτητές F ,G είναι ισομορφικοί αν υπάρχει φυσικός ισομορφισμός από τον έναν στον άλλον.

Ορισμός 1.1.9. Δοσμένων συναρτητών $\mathfrak{A} \underset{G}{\overset{F}{\rightrightarrows}} \mathfrak{B}$ λέμε ότι:

$$F(A) \cong G(A)$$

φυσικά στην A εάν F και G φυσικά ισομορφικοί.

Παρατήρηση 1.1.5. Η ιδέα του φυσικού ισομορφισμού μας οδηγεί σε μία άλλη ιδέα κεντρικής σημασίας την: «ισοδυναμία κατηγοριών». Δύο στοιχεία ενός συνόλου είναι είτε ίσα ή όχι. Δύο αντικείμενα μίας κατηγορίας είναι είτε ίσα είτε όχι, άλλα ισομορφικά ή και ούτε ισομορφικά.

- Όταν εφαρμόσουμε την ιδέα αυτή στην κατηγορία συναρτητών $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]$, η σωστή συνθήκη ομοιότητας δύο συναρτητών $\mathfrak{A} \underset{G}{\overset{F}{\rightrightarrows}} \mathfrak{B}$ είναι ο φυσικός ισομορφισμός τους.
- Για δύο κατηγορίες η ομοιότητα ως συνθήκη αν δινόταν από τη σχέση

$$\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B} \iff \begin{matrix} i) \, G \circ F = 1_{\mathfrak{A}} \\ ii) \, F \circ G = 1_{\mathfrak{B}} \end{matrix}$$

  όμως αυτή η συνθήκη ομοιότητας χάνει σε αυστηρότητα.

Ορισμός 1.1.10. Μία ισοδυναμία μεταξύ κατηγοριών $\mathfrak{A}$ και $\mathfrak{B}$ περιέχει ένα ζεύγος συναρτητών $\mathfrak{A} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathfrak{B}$ μαζί με τους φυσικούς ισομορφισμούς:

$$h : 1_{\mathfrak{A}} \to G \circ F \, , \; \epsilon : F \circ G \to 1_{\mathfrak{B}}$$

Εάν υπάρχει ισοδυναμία μεταξύ $\mathfrak{A}$ και $\mathfrak{B}$ λέμε ότι οι κατηγορίες είναι ισοδύναμες και γράφουμε: $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{B}$.

Υπάρχει ένας πολύ χρήσιμος εναλλακτικός χαρακτηρισμός των συναρτητών που είναι ισοδύναμοι. Πρώτα όμως χρειαζόμαστε έναν ορισμό:

Ορισμός 1.1.11. Ένας συναρτητής $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ καλείται **ουσιωδώς επί των αντικειμένων** (essentially surjective) εάν για κάθε $B \in \mathfrak{B}$, υπάρχει $A \in \mathfrak{A}$:

$$F(A) \cong B$$

Πρόταση 1.1.2. Ένας συναρτητής είναι μία ισοδυναμία εάν και μόνο αν είναι πλήρης, πιστός και ουσιωδώς επί των αντικειμένων.

Πόρισμα 1.1.2.1. *Έστω $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ ένας πιστός και πλήρης συναρτητής. Τότε η $\mathfrak{C}$ είναι ισοδύναμη με την υποκατηγορία $\mathfrak{C}'$ του $\mathfrak{D}$ της οποίας τα αντικείμενα είναι της μορφής $F(C)$ για κάποιο $C \in \mathfrak{C}$.*

Απόδειξη. Ο συναρτητής $F' : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}'$ ορισμένος ως $F'(C) \quad F(C)$ είναι πιστός και πλήρης καθώς η $\mathfrak{C}'$ είναι υποκατηγορία της $\mathfrak{D}$, επομένως η F είναι ουσιωδώς επί των αντικειμένων και άρα

$$\mathfrak{C} \quad \mathfrak{C}'$$

Σημείωση 1.1.7. Έστω $\mathbf{Set}_{\mathsf{H}}$ η κατηγορία των μη-κενών συνόλων. Τότε ο επιλήσμων συναρτητής $U : \mathfrak{A} \to \mathbf{Set}_{\mathsf{H}}$ είναι πλήρης και πιστός. Είναι γνωστό ότι σε κάθε μη-κενό σύνολο μπορεί να δοθεί τουλάχιστον μία δομή ομάδας, άρα ο U είναι ουσιωδώς επί των αντικειμένων και συνεπώς ο U είναι ισοδυναμία. Άρα το σύνολο $\mathfrak{A}$ επί της ουσίας είναι η κατηγορία των μη-κενών συνόλων.

Ορισμός 1.1.12 (Ελεύθερο αντικείμενο)**.** Έστω $(\mathfrak{C}, F)$ μία διακριτή κατηγορία. Έστω X σύνολο (καλείται βάση), $A \in ob(\mathfrak{C})$ και $i : X \to F(A)$ 1-1 απεικόνιση (κανονική εμφύτευση).
Λέμε ότι το A είναι ελεύθερο αντικείμενο στο X αν και μόνο αν ικανοποιεί την καθολική ιδιότητα:

$$\forall B \in ob(\mathfrak{C}) \quad \forall f : X \to F(B) \quad \exists g : A \to B \quad : f \quad (F(g) \quad i)$$

Αυτό αποδίδεται σχηματικά ως το ακόλουθο τρίγωνο που μετατίθεται:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & F(A) \arrow[d, "g"] \\
& F(B)
\end{tikzcd}$$

1.1.3 Συζυγείς Συναρτητές (Adjoint Functors)

Ορισμός 1.1.13. Έστω $\mathfrak{A} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathfrak{B}$ κατηγορίες και συναρτητές. Λέμε ότι ο F είναι αριστερός συζυγής του G, αντίστοιχα ο G δεξιός συζυγής του F και γράφουμε $F \dashv G$ εάν:

$$\mathfrak{B}(F(A), B) \cong \mathfrak{A}(A, G(B))$$

φυσικά στο $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{B}$

Παρατήρηση 1.1.6. Επομένως μία συζυγία μεταξύ F και G είναι μία επιλογή ενός φυσικού ισομορφισμού. «Φυσικά στο $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{B}$» σημαίνει ότι υπάρχει συγκεκριμένη 1-1 και επί αντιστοιχία για κάθε $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{B}$ που ικανοποιεί το **αξίωμα φυσικότητας** (naturality axiom).

Για να αντιληφθούμε αυτή την κατασκευή σκεφτόμαστε τα ακόλουθα:
Η αντιστοιχία μεταξύ απεικονίσεων $F(A) \to B$, $A \to G(B)$ για δοσμένα A, B ορίζεται ως:

$$\left(F(A) \xrightarrow{g} B\right) \longmapsto \left(A \xrightarrow{\bar{g}} G(B)\right)$$

$$\left(F(A) \xrightarrow{\bar{f}} B\right) \longleftarrow\!\shortmid \left(A \xrightarrow{f} G(B)\right)$$

έτσι ώστε $\bar{\bar{f}} = f$ και $\bar{\bar{g}} = g$.
Καλούμε τον $\bar{f}$ ανάστροφο του f και ομοίως για g. Το **αξίωμα φυσικότητας** έχει δύο μέρη:

$$i) \quad \overline{\left(F(A) \xrightarrow{g} B \xrightarrow{q} B'\right)} = \left(A \xrightarrow{\bar{g}} G(B) \xrightarrow{G(q)} G(B')\right)$$

όπου $\overline{g \circ q} = G(q) \circ \bar{g} \quad \forall\, g, q$

$$ii) \quad \overline{\left(A' \xrightarrow{p} A \xrightarrow{f} G(B)\right)} = \left(F(A') \xrightarrow{F(p)} F(A) \xrightarrow{\bar{f}} B\right)$$

Παράδειγμα 1.1.3.1 (Άλγεβρα: Ελεύθεροι $\dashv$ Επιλήσμονες)**.** Οι επιλήσμονες συναρτητές μεταξύ κατηγοριών αλγεβρικών δομών συνήθως έχουν αριστερούς συζυγείς:
(α) Έστω k σώμα.Υπάρχει μία συζυγία:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Vect_k} \arrow[d, shift left, "U"] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\ \mathbf{Set} \arrow[u, shift left, "F"] \end{tikzcd}$$

όπου U είναι ο επιλήσμων συναρτητής και F ο ελεύθερος συναρτητής που μετατρέπει τα σύνολα σε ελεύθερους διανυσματικούς χώρους πάνω από σώμα k. Επι της ουσίας δηλαδή, δοσμένου συνόλου S και διανυσματικού χώρου V οι γραμμικές απεικονίσεις $F(S) \to V$ είναι ουσιωδώς παρόμοια αντικείμενα με τις συναρτήσεις $S \to U(V)$.

Πιο συγκεκριμένα επιλέγοντας S , V και με δοσμένη γραμμική απεικόνιση $g : F(S) \to V$ ορίζω $\overline{g} : S \to U(V)$ ως $\overline{g}(s) = g(s)$, $s \in S$. Έτσι προκύπτει συνάρτηση:

$$\mathbf{Vect_k}(F(S), V) \to \mathbf{Set}(S, U(V))$$

$$g \mapsto \overline{g}$$

Από την άλλη μεριά, δοσμένης απεικόνισης $f : S \to U(V)$, ορίζω γραμμικές απεικονίσεις:

$$\overline{f} : F(S) \to V, \qquad \overline{f}\Big(\sum_{s \in S} \lambda_s s\Big) = \sum_{s \in S} \lambda_s f(s)$$

για όλους τους γραμμικούς συνδυασμούς $\sum \lambda_s s \in F(S)$. Οπότε προκύπτει συνάρτηση:

$$\mathbf{Set}(S, U(V)) \to \mathbf{Vect}_k(F(S), V)$$

$$f \mapsto \overline{f}$$

επομένως έχουμε:

$$\overline{\overline{g}}\Big(\sum_{s \in S} \lambda_s s\Big) = \sum_{s \in S} \lambda_s \overline{g}(s) = \sum_{s \in S} \lambda_s g(s) = g\Big(\sum_{s \in S} \lambda_s s\Big)$$

Για κάθε $\sum \lambda_s s \in F(S)$, άρα $\overline{\overline{g}} = g$ και ως επέκταση αυτού:

$$\overline{\overline{f}}(s) = \overline{f}(s) = f(s) \ \forall s \in S.$$

Επομένως έχουμε μία κανονική αμφί σχέση (συζυγίας) μεταξύ του $\mathbf{Vect_k}(F(S), V)$ και $\mathbf{Set}(S, U(V))$ για κάθε $S \in \mathbf{Set}$, $V \in \mathbf{Vect}_k$.

(β) Υπάρχει συζυγία μεταξύ των:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Ab} \arrow[d, shift left, "U"] \\
\mathbf{Grp} \arrow[u, shift left, "F"] \arrow[u, phantom, "\dashv"]
\end{tikzcd}$$

όπου πάλι εδώ ο U παίζει τον ρόλο του επιλήσμονα συναρτητή και για να ορίσουμε τον F αν G είναι μία ομάδα $F(G)$ είναι αβελιανοποίηση $G_{\mathbf{Ab}}$ της G.

Αυτή είναι επί της ουσίας μία αβελιανή ομάδα πηλίκο (Για την κατασκευή της $G_{\mathbf{Ab}}$, έστω G' η μικρότερη κανονική υποομάδα της G που περιέχει το $(xyx^{-1}y^{-1}) \ \forall \ x, y \in G$ και θεωρώ $G_{\mathbf{Ab}} = G/G'$).

Έτσι ορίζεται ο συναρτητής από την **Grp** στην **Ab** μέσω της $G_{\mathbf{Ab}}$:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Grp} \ni G \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "\forall\varphi"'] & G_{\mathbf{Ab}} \arrow[d, "\exists!\,\phi"] \\
& \forall A \in \mathbf{Ab}
\end{tikzcd}
\iff \mathbf{Ab}(G_{\mathbf{Ab}}, A) \cong \mathbf{Grp}(G, U(A))$$

όπου έχουμε την κανονική απεικόνιση $\eta : G \to G_{\mathbf{Ab}}$ και A είναι οποιαδήποτε αβελιανή ομάδα.

1.1.4 Τανυστικές Κατηγορίες (Tensor Categories)

Έστω κατηγορία $\mathfrak{C}$ και $\otimes$ ένας συναρτητής από την $\mathfrak{C} \times \mathfrak{C}$ στο $\mathfrak{C}$.
Αυτό σημαίνει ότι:

(α) Έχουμε ένα αντικείμενο $V \otimes W$ που αντιστοιχεί σε κάθε ζεύγος (V, W) αντικειμένων της κατηγορίας $\mathfrak{C}$.
(β) Έχουμε ένα μορφισμό $f \otimes g$ που αντιστοιχεί σε κάθε ζεύγος (f, g) μορφισμών της κατηγορίας $\mathfrak{C}$ τέτοιο ώστε:

$$s(f \otimes g) = s(f) \otimes s(g)\,, \quad b(f \otimes g) = b(f) \otimes b(g)$$

(γ) Εάν f' , g' είναι μορφισμοί τέτοιοι ώστε $s(f') = b(f)$ και $s(g') = b(g)$ τότε:

$$(f' \otimes g') \circ (f \otimes g) = (f' \circ f) \otimes (g' \circ g) \quad (1.2)$$

(δ) Και τέλος:

$$id_{V \otimes W} = id_V \otimes id_W \quad (1.3)$$

Η σχέση (1.2) συνεπάγει ότι:

$$f \otimes g = (f \otimes id_{b(g)}) \circ (id_{s(f)} \otimes g) = (id_{b(f)} \otimes g) \circ (f \otimes id_{s(g)}) \quad (1.4)$$

Παράδειγμα 1.1.4.1. Έστω $\mathfrak{C} = \mathbf{Vect}_k$. Τότε το συνήθες τανυστικό γινόμενο ορίζει έναν συναρτητή από το $\mathfrak{C} \times \mathfrak{C}$ στο $\mathfrak{C}$.

Κάθε συναρτητής $\otimes : \mathfrak{C} \times \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ θα καλείται τανυστικό γινόμενο. Έστω $\mathfrak{C}$ μία κατηγορία με τανυστικό γινόμενο $\otimes$. Ένας προσεταιριστικός περιορισμός για το $\otimes$ είναι ένας φυσικός ισομορφισμός:

$$a : \otimes(\otimes \times id) \to \otimes(id \times \otimes).$$

Αυτό επι της ουσίας σημαίνει ότι για κάθε τριπλέτα (U, V, W) αντικειμένων της $\mathfrak{C}$, υπάρχει ένας ισομορφισμός:

$$a_{U,V,W} : (U \otimes V) \otimes W \to U \otimes (V \otimes W) \quad (1.5)$$

Ώστε το ακόλουθο τετράγωνο:

$$\begin{tikzcd}
(U \otimes V) \otimes W \arrow[r, "a_{U,V,W}"] \arrow[d, "(f \otimes g) \otimes h"] & U \otimes (V \otimes W) \arrow[d, "f \otimes (g \otimes h)"] \\
(U' \otimes V') \otimes W' \arrow[r, "a_{U',V',W'}"] & U' \otimes (V' \otimes W')
\end{tikzcd} \tag{1.6}$$

να μετατίθεται όποτε f, g, h είναι μορφισμοι στην κατηγορία.

Ο προσεταιριστικός περιορισμός a λέμε ότι ικανοποιεί το **αξίωμα Πενταγώνου** αν το πενταγωνο διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
((U \otimes V) \otimes W) \otimes X \arrow[dd, "a_{U,V \otimes W,X}"] & (U \otimes (V \otimes W)) \otimes X \arrow[l, "a_{U,V,W} \otimes id_X"'] \arrow[dr, "a_{U \otimes V,W,X}"] & \\
& & (U \otimes V) \otimes (W \otimes X) \arrow[dl, "a_{U,V,W \otimes X}"] \\
U \otimes ((V \otimes W) \otimes X) \arrow[r, "id_U \otimes a_{V,W,X}"] & U \otimes (V \otimes (W \otimes X)) &
\end{tikzcd}$$

(1.7)

μετατίθεται για κάθε αντικείμενο $U, V, W, X \in \mathfrak{C}$.

Επιλέγοντας αντικείμενο I στην κατηγορία χαρακτηρίζουμε **αριστερό μοναδιαίο περιορισμό** (αντίστοιχα δεξιό) ως προς το αντικείμενο I τον φυσικό ισομορφισμό:

$$l : \otimes(I \times id) \to id \qquad \text{αντίστοιχα } r : \otimes(id \times I) \to id$$

Αυτό σημαίνει ότι για κάθε αντικείμενο $V \in \mathfrak{C}$ υπάρχει ένας ισομορφισμός:

$$l_V : I \otimes V \to V \qquad \text{αντίστοιχα } r_V : V \otimes I \to V \tag{1.8}$$

τέτοιος ώστε το τετράγωνο:

$$\begin{tikzcd}
I \otimes V \arrow[r, "l_V"] \arrow[d, "id_I \otimes f"] & V \arrow[d, "f"] \\
I \otimes V' \arrow[r, "l_{V'}"] & V'
\end{tikzcd} \qquad
\begin{tikzcd}
V \otimes I \arrow[r, "r_V"] \arrow[d, "id_I \otimes f"] & V \arrow[d, "f"] \\
V' \otimes I \arrow[r, "r_{V'}"] & V'
\end{tikzcd} \tag{1.9}$$

να μετατίθεται για κάθε μορφισμό f.

Δοσμένου προσεταιριστικού περιορισμού a, αριστερού και δεξιού μοναδιαίου περιορισμού l, r ως προς αντικείμενο I της κατηγορίας, λέμε ότι ικανοποιούν το **Αξίωμα Τριγώνου** εάν το τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd}
(V \otimes I) \otimes W \arrow[rr, "a_{V,I,W}"] \arrow[dr, "r_V \otimes id_W"'] & & V \otimes (I \otimes W) \arrow[dl, "id_V \otimes l_W"] \\
& V \otimes W &
\end{tikzcd} \tag{1.10}$$

μετατίθεται για κάθε ζεύγος αντικειμένων (V, W).

Ορισμός 1.1.14. Μία τανυστική κατηγορία $(\mathfrak{C}, \otimes, I, a, l, r)$ είναι μία κατηγορία $\mathfrak{C}$ η οποία είναι εφοδιασμένη με ένα τανυστικό γινόμενο $\otimes : \mathfrak{C} \times \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$, με ένα αντικείμενο I το οποίο καλείται μονάδα της τανυστικής κατηγορίας, με έναν προσεταιριστικό περιορισμό a, έναν αριστερό μοναδιαίο περιορισμό l και έναν δεξί μοναδιαίο περιορισμό r ως προς το αντικείμενο I, τέτοιους ώστε να ικανοποιείται το **Αξίωμα Πενταγώνου** (1.7) και το **Αξίωμα Τριγώνου** (1.10).

Μία τανυστική κατηγορία καλείται **αυστηρή (strict)** αν οι φυσικοί μετασχηματισμοί που εκφράζονται μέσα από τον προσεταιριστικό περιορισμό και τους μοναδιαίους περιορισμούς είναι όλοι ταυτοτικοί.

Λήμμα 1.1.3. *Έστω τανυστική κατηγορία $(\mathfrak{C}, \otimes, I, a, l, r)$. Τα τρίγωνα:*

$$\begin{tikzcd}
(I \otimes V) \otimes W \arrow[rr, "a_{I,V,W}"] \arrow[dr, "l_V \otimes id_W"'] & & I \otimes (V \otimes W) \arrow[dl, "l_{V \otimes W}"] \\
& V \otimes W &
\end{tikzcd}$$

και

$$\begin{tikzcd}
(V \otimes W) \otimes I \arrow[rr, "a_{I,V,W}"] \arrow[dr, "r_{V \otimes W}"'] & & V \otimes (W \otimes I) \arrow[dl, "id_V \otimes r_W"] \\
& V \otimes W &
\end{tikzcd}$$

μετατίθονται για κάθε ζεύγος (V, W) αντικειμένων του $\mathfrak{C}$.

Απόδειξη. Η απόδειξη βασίζεται στο ακόλουθο διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
 & & (U \otimes (I \otimes V)) \otimes W \arrow[drr, "id"] & & \\
((U \otimes I) \otimes V) \otimes W \arrow[urr, "a \otimes id_W"] \arrow[rr, "(r_U \otimes id_V) \otimes id_W"] \arrow[d, "a"] & & (U \otimes V) \otimes W \arrow[d, "a"] & & (U \otimes (I \otimes V)) \otimes W \arrow[ll, "(id_U \otimes l_V) \otimes id_W"'] \arrow[d, "a"] \\
(U \otimes I) \otimes (V \otimes W) \arrow[rr, "r_U \otimes id_{V \otimes W}"] \arrow[drr, "a"'] & & U \otimes (V \otimes W) & & U \otimes ((I \otimes V) \otimes W) \arrow[ll, "id_U \otimes (l_V \otimes id_W)"'] \arrow[dll, "id_U \otimes a"] \\
 & & U \otimes (I \otimes (V \otimes W)) \arrow[u, "id_U \otimes l_{V \otimes W}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Το εξωτερικό εξάγωνο μετατίθεται λόγω του Αξιώματος Πενταγώνου (1.7).
Η φυσικότητα του a εξασφαλίζει ότι τα δύο εσωτερικά τετράγωνα μετατίθενται ενώ η σχέση (1.10) του Αξιώματος Τριγώνου συνεπάγει ότι το άνω τετράγωνο και το κάτω αριστερά τρίγωνο μετατίθενται και ως επέκταση αυτού και το δεξιά κάτω τρίγωνο.
Συνεπώς αν θέσουμε $U \quad I$ παίρνουμε:

$$id_I \otimes (l_{V \otimes W} \quad a) \quad id_V \otimes (l_V \otimes id_W).$$

Η άνωθεν σχέση μαζί με την φυσικότητα του αριστερού μοναδιαίου περιορισμού (1.9) και το γεγονός ότι το l είναι ένας ισομορφισμός συνεπάγει ότι: $l_{V \otimes W} \quad a \quad l_V \otimes id_W$, σχέση που εκφράζει την μεταθετικότητα του άνω τριγώνου του λήμματος.
Με παρόμοιο τρόπο δουλεύουμε και για το κάτω τρίγωνο.

Λήμμα 1.1.4. *Έστω I η μονάδα της τανυστικής κατηγορίας. Για κάθε αντικείμενο V έχουμε ότι:*

$$l_{I \otimes V} \quad id_I \otimes l_V, \quad r_{V \otimes I} \quad r_V \otimes id_I, \quad l_I \quad r_I$$

Απόδειξη. Από φυσικότητα του (1.9) για l έχουμε ότι $l_V \quad l_{I \otimes V} \quad l_V \quad (id_I \otimes l_V)$. Αφού l_V είναι ένας ισομορφισμός προκύπτει η πρώτη ισότητα του λήμματος. Η δεύτερη είναι συνέπεια της φυσικότητας του r. Για να δειχθεί η τρίτη, από το Λήμμα 1.1.3 και την πρώτη ισότητα που δείχθηκε έχουμε:

$$l_I \otimes id_I \quad l_{I \otimes I} \quad a \quad (id_I \otimes l_I) \quad a$$

Από (1.10) παίρνουμε ότι $r_I \otimes id_I \quad (id_I \otimes l_I) \quad a$. Συνδιάζοντας τις δύο αυτές σχέσεις έχουμε: $l_I \otimes id_I \quad r_I \otimes id_I$. Από την τελευταία σχέση συνεπάγεται ότι: $l_I \quad r_I$, αφού r φυσικός ισομορφισμός.

1.1.5 Τανυστικοί Συναρτητές (Tensor Functors)

Ορισμός 1.1.15. (α) Έστω $(\mathfrak{C}, \otimes, I, a, l, r)$ και $(\mathfrak{D}, \otimes, I, a, l, r)$ τανυστικές κατηγορίες. Ένας τανυστικός συναρτητής από το $\mathfrak{C}$ στο $\mathfrak{D}$ είναι μία τριπλέτα (F, ϕ_0, ϕ_1) όπου $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ είναι συναρτητής, ϕ_0 είναι ένας ισομορφισμός από το I στο $F(I)$ και:

$$\phi_1 : F(U) \otimes F(V) \to F(U \otimes V)$$

είναι μία οικογένεια φυσικών μετασχηματισμών με δείκτες από τα ζεύγη (U, V) των αντικειμένων του $\mathfrak{C}$ ώστε τα διαγράμματα:

$$\begin{tikzcd}
(F(U) \otimes F(V)) \otimes F(W) \arrow[r, "a_{F(U),F(V),F(W)}"] \arrow[d, "\phi_1(U,V) \otimes id_{F(W)}"] & F(U) \otimes (F(V) \otimes F(W)) \arrow[d, "id_{F(U)} \otimes \phi_1(V,W)"] \\
F(U \otimes V) \otimes F(W) \arrow[d, "\phi_1(U \otimes V, W)"] & F(U) \otimes F(V \otimes W) \arrow[d, "\phi_1(U, V \otimes W)"] \\
F((U \otimes V) \otimes W) \arrow[r, "F(a_{U,V,W})"] & F(U \otimes (V \otimes W))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
I \otimes F(U) \arrow[r, "l_{F(U)}"] \arrow[d, "\phi_0(U, V) \otimes id_{F(W)}"] & F(U) \\
F(I) \otimes F(U) \arrow[r, "\phi_1(I, U)"] & F(I \otimes U) \arrow[u, "F(l_U)"]
\end{tikzcd} \qquad (1.12)$$

και

$$\begin{tikzcd}
F(U) \otimes I \arrow[r, "r_{F(U)}"] \arrow[d, "id_{F(U)} \otimes \phi_0"] & F(U) \\
F(U) \otimes F(I) \arrow[r, "\phi_1(U, I)"] & F(U \otimes I) \arrow[u, "F(r_U)"]
\end{tikzcd} \qquad (1.13)$$

μετατίθενται για όλα τα αντικείμενα $(U, V, W) \in \mathfrak{C}$. Ο τανυστικός συναρτητής (F, ϕ_0, ϕ_1) λέγεται ότι είναι αυστηρός αν οι ισομορφισμοί ϕ_0, ϕ_1 είναι ταυτοτικοί στη $\mathfrak{D}$.

(β) Ένας φυσικός τανυστικός μετασχηματισμός $\eta : (F, \phi_0, \phi_1) \to (F', \phi_0', \phi_1')$ μεταξύ τανυστικών συναρτητών από την $\mathfrak{C}$ στη $\mathfrak{D}$ είναι ένας φυσικός μετασχηματισμός $\eta : F \to F'$ τέτοιος ώστε τα ακόλουθα διαγράμματα να μετατίθονται για κάθε ζευγάρι (U, V) αντικειμένων της $\mathfrak{C}$:

$$\begin{tikzcd} & F(I) \arrow[dd, "\eta(I)"] \\ I \arrow[ur, "\phi_0"] \arrow[dr, "\phi'_0"'] & \\ & F'(I) \end{tikzcd} \quad \text{και} \quad \begin{tikzcd} F(U)\otimes F(V) \arrow[r, "\phi_1(U,V)"] \arrow[d, "\eta(U)\otimes\eta(V)"'] & F(U\otimes V) \\ F'(U)\otimes F'(V) \arrow[r, "\phi'_1(U,V)"'] & F'(U\otimes V) \arrow[u, "\eta(U\otimes V)"'] \end{tikzcd} \tag{1.14}$$

(γ) Μία τανυστική ισοδυναμία μεταξύ τανυστικών κατηγοριών είναι ένας τανυστικός συναρτητής $F : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$ τέτοιος ώστε να υπάρχει τανυστικός συναρτητής $F' : \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$ και φυσικοί τανυστικοί μετασχηματισμοί τέτοιοι ώστε :

$$\eta : id_{\mathfrak{D}} \Rightarrow FF' \quad \text{και} \quad \theta : F'F \Rightarrow id_{\mathfrak{C}}.$$

Σημείωση 1.1.8. Στην περίπτωση που υπάρχει μία τανυστική ισοδυναμία μεταξύ κατηγοριών $\mathfrak{C}$ και $\mathfrak{D}$, λέμε ότι είναι τανυστικά ισοδύναμες. Παρατηρώ ότι εαν (F, ϕ_0, ϕ_1) και (F', ϕ'_0, ϕ'_1) είναι τανυστικοί συναρτητές, τότε το ίδιο ισχύει και για την σύνθεση $(F'F,\ F'(\phi_0)\phi'_0,\ F'(\phi_1)\phi'_1)$.

Συμβολίζω με $\mathbf{Tens}(\mathfrak{C}, \mathfrak{D})$ την κατηγορία της οποίας τα αντικείμενα είναι τανυστικοί συναρτητές από το $\mathfrak{C}$ στο $\mathfrak{D}$ και της οποίας οι μορφισμοί είναι φυσικοί τανυστικοί μετασχηματισμοί.

1.1.6 Μετατροπή Τανυστικών Κατηγοριών σε Αυστηρές

Αφού το τανυστικό γινόμενο σε μία τανυστική κατηγορία είναι προσεταιριστικό μόνο ως προς ισομορφισμό, πρέπει να διατηρούμε τον έλεγχο των απαιτούμενων παρενθέσεων. Για να παρακάμψουμε αυτό το πρόβλημα λειτουργούμε ως ακολούθως:

Έστω δοσμένη τανυστική κατηγορία $(\mathfrak{C}, \otimes, I, a, l, r)$ και κατασκευάζουμε μία αυστηρή τανυστική κατηγορία $\mathfrak{C}^{str}$ η οποία είναι τανυστικά ισοδύναμη με το $\mathfrak{C}$.

Έστω $\mathbf{S}$ είναι η κλάση όλων των πεπερασμένων ακολουθιών $S = (V_1, V_2, \ldots, V_k)$ αντικειμένων της $\mathfrak{C}$, που περιελαμβάνει και την μηδενική ακολουθία $\emptyset$. Ο ακέραιος k ορίζει το μήκος της ακολουθίας $S = (V_1, V_2, \ldots, V_k)$. Το μήκος της κενής ακολουθίας είναι 0 από σύμβαση. Εάν $S = (V_1, V_2, \ldots, V_k)$ και $S' = (V_{k+1}, V_{k+2}, \ldots, V_{k+n})$ είναι μη-κενές ακολουθίες του $\mathbf{S}$, συμβολίζουμε με $S * S'$ την ακολουθία:

$$S * S' = (V_1, \ldots, V_k, V_{k+1}, \ldots, V_{k+n}) \tag{1.15}$$

που προκύπτει αν τοποθετήσουμε το S' μετά από το S. Επίσης συμφωνούμε ότι $S * \emptyset = S = \emptyset * S$. Σε κάθε ακολουθία $S \in \mathbf{S}$ αντιστοιχούμε ένα αντικείμενο $F(V)$ της $\mathfrak{C}$ που ορίζεται επαγωγικά ως:

$$F(\emptyset) = I, \quad F((V)) = V, \quad F(S * (V)) = F(S) \otimes V$$

Με άλλα λόγια,

$$F((V_1, V_2, \ldots, V_{k-1}, V_k)) = ((\cdots(V_1 \otimes V_2) \otimes \cdots) \otimes V_{K-1}) \otimes V_k \tag{1.16}$$

όπου όλες οι ανοιχτές παρενθέσεις τοποθετούνται εξ αριστερών του V_1.

Τώρα μπορούμε να ορίσουμε την κατηγορία $\mathfrak{C}^{str}$ της οποίας τα αντικείμενα είναι αντικείμενα της $\mathbf{S}$ δηλαδή πεπερασμένες ακολουθίες αντικειμένων της $\mathfrak{C}$ και οι μορφισμοί της δίνονται από:

$$Hom_{\mathfrak{C}^{str}}(S, S') = Hom_{\mathfrak{C}}(F(S), F(S'))$$

Κατα αυτόν τον τρόπο ορίζεται μία κατηγορία όπου οι ταυτότητες και οι συνθέσεις παίρνονται από το $\mathfrak{C}$.

Πρόταση 1.1.5. Οι κατηγορίες $\mathfrak{C}^{str}$ και $\mathfrak{C}$ είναι ισοδύναμες.

Απόδειξη. Η απεικόνιση F που ορίστηκε προηγουμένως στα αντικείμενα της $\mathfrak{C}^{str}$ επεκτείνεται σε συναρτητή $F : \mathfrak{C}^{str} \to \mathfrak{C}$ ο οποίος είναι ταυτοτικός στους μορφισμούς, επομένως πλήρης και πιστός. Αφού κάθε αντικείμενο της $\mathfrak{C}$ είναι ισομορφικό με την εικόνα μέσω του F ακολουθίας μήκους ένα τότε ο συναρτητής είναι ουσιωδώς επί των αντικειμένων. Από την Πρόταση 1.1.2. αποδεικνύεται το ζητούμενο.

Παρατηρώ ότι η σχέση $G(V) = (V)$ ορίζει ένα συναρτητή $G : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}^{str}$ ο οποίος είναι ο αντίστροφος του F. Πράγματι έχουμε ότι $FG = id_{\mathfrak{C}}$ και $\theta : GF \to id_{\mathfrak{C}^{str}}$ μέσω του φυσικού ισομορφισμού:

$$\theta(S) = id_{F(S)} : GF(S) \to S.$$

Τώρα μένει να εφοδιάσουμε την $\mathfrak{C}^{str}$ με δομή αυστηρής τανυστικής κατηγορίας. Ορίζω τανυστικό γινόμενο στα αντικείμενα της $\mathfrak{C}^{str}$ ως:

$$S \otimes S' = S S'$$

Είναι προφανώς προσεταιριστικός επί των αντικειμένων. Προκειμένου να ορίσω τα τανυστικό γινόμενο δύο μορφισμών της $\mathfrak{C}^{str}$ αρχικά κατασκευάζω έναν φυσικό ισομορφισμό:

$$\phi(S, S') : F(S) \otimes F(S') \to F(S S')$$

για κάθε ζεύγος (S, S') αντικειμένων της $\mathfrak{C}^{str}$. Αυτός ο ισομορφισμός ορίζεται με επαγωγή στο μήκος της ακολουθίας S'. Αρχικά θέτουμε:

$$\phi(\emptyset, S) = l_S \ , \ \phi(S, \emptyset) = r_S$$

. Έπειτα:

$$\phi(S, (V)) = id_{F(S) \otimes V} : F(S) \otimes V \to F(S \otimes (V))$$

και

$$\phi(S, S' (V)) = (\phi(S, S') \otimes id_V) \, a^{-1}_{F(S), F(S'), V} \qquad (1.17)$$

Λήμμα 1.1.6. *Εάν S, S^1, S^2 είναι αντικείμενα της $\mathfrak{C}^{str}$ έχουμε:*

$$\phi(S,S^1,S^2)\ \ (id_S \otimes \phi(S^1,S^2))\ \ a_{F(S),F(S^1),F(S^2)} \quad \phi(S\ \ S^1,S^2)\ \ (\phi(S,S^1)\otimes id_{S^2}).$$

Απόδειξη. Προχωράμε με επαγωγή στο μήκος του S^2. Εάν $S^2\ \ \emptyset$, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
&\phi(S,S^1)(id_S \otimes \phi(S^1,\emptyset))a_{F(S),F(S^1),F(S^2)}\\
&\quad \phi(S,S^1)(id_{F(S)} \otimes r_{F(S^1)})a_{F(S),F(S^1),I}\\
&\quad \phi(S,S^1)r_{F(S)\otimes F(S^1)}\\
&\quad r_{F(S\ \ S^1)}(\phi(S,S^1)\otimes id_I)\\
&\quad \phi(S\ \ S^1,\emptyset)(\phi(S,S^1)\otimes id_I).
\end{aligned}$$

Η πρώτη και η τελευταία ισότητα οφείλονται στον ορισμό, η δεύτερη οφείλεται στο Λήμμα 1.1.3 ενώ η τρίτη στην φυσικότητα του r.

Έστω V ένα αντικείμενο της κατηγορίας. Δείχνουμε ότι η ισότητα του Λήμματος για την τριπλέτα (S,S^1,S^2) συνεπάγεται ισότητα για $(S,S^1,S^2\ \ (V))$. Έχουμε:

$$\begin{aligned}
&\phi(S,S^1\ \ S^2\ \ (V))(id_S \otimes \phi(S^1,S^2\ \ (V)))a_{F(S),F(S^1),F(S^2\ \ (V))}\\
&\quad (\phi(S,S^1\ \ S^2)\otimes id_V)a^{1}_{F(S),F(S^1\ \ S^2),V}(id_S \otimes \phi(S,S^1)\otimes id_V)\\
&(id_S \otimes a^{1}_{F(S),F(S^1\ \ S^2),V})a_{F(S),F(S^1),F(S^2)\otimes V}\\
&\quad (\phi(S,S^1\ \ S^2)\otimes id_V)(id_S \otimes \phi(S^1,S^2)\otimes id_V)a^{1}_{F(S),F(S^1)\otimes F(S^2),V}\\
&(id_S \otimes a^{1}_{F(S^1),F(S^2),V})a_{F(S),F(S^1),F(S^2)\otimes V}\\
&\quad (\phi(S,S^1\ \ S^2)\otimes id_V)(id_S \otimes \phi(S,S^1)\otimes id_V)\\
&(a_{F(S),F(S^1),F(S^2)} \otimes id_V)a^{1}_{F(S)\otimes F(S^1),F(S^2)\otimes V}\\
&\quad (\phi(S\ \ S^1,S^2)\otimes id_V)(\phi(S,S^1)\otimes id_{S^2} \otimes id_V)a^{1}_{F(S)\otimes F(S^1),F(S^2),V}\\
&\quad (\phi(S\ \ S^1,S^2)\otimes id_V)a^{1}_{F(S\ \ S^1),F(S^2),V}(\phi(S,S^1)\otimes id_{S^2} \otimes id_V)\\
&\quad \phi(S\ \ S^1,S^2\ \ (V))(\phi(S,S^1)\otimes id_{S^2\ \ (V)}).
\end{aligned}$$

Η πρώτη και η τελευταία ισότητα προκύπτουν από την σχέση (1.17), η δεύτερη και η πέμπτη από την φυσικότητα του προσεταιριστικού περιορισμού, η τρίτη από το αξίωμα πενταγώνου (1.7) και τέλος η τέταρτη από επαγωγή της υπόθεσης.

Τώρα ορίζουμε το τανυστικό γινόμενο $f\ \ f^1$ δύο μορφισμών $f : S \to T$ και $f^1 : S^1 \to T^1$ της κατηγορίας $\mathfrak{C}^{str}$. Εξ ορισμού, ο f είναι μορφισμός από το $F(S)$ στο $F(T)$ και f^1 από το $F(S^1)$ στο $F(T^1)$ στη $\mathfrak{C}$. Το τανυστικό γινόμενο $f\ \ g \in \mathfrak{C}$ ορίζεται από το μεταθετικό τετράγωνο:

$$\begin{tikzcd}
F(S)\otimes F(S^1) \arrow[r, "\phi(S,S^1)"] \arrow[d, "f\otimes f^1"'] & F(S\ \ S^1) \arrow[d, "f\ \ f^1"] \\
F(T)\otimes F(T^1) \arrow[r, "\phi(T,T^1)"'] & F^1(T\ \ T^1)
\end{tikzcd} \qquad (1.18)$$

Θεώρημα 1.1.7. *Η κατηγορία $\mathfrak{C}^{str}$ εφοδιασμένη με το γινόμενο που περιγράφηκε προηγουμένως είναι μία τανυστική κατηγορία. Οι κατηγορίες $\mathfrak{C}$ και $\mathfrak{C}^{str}$ είναι τανυστικά ισοδύναμες.*

Απόδειξη. Εύκολα ελέγχεται ότι το τανυστικό γινόμενο είναι συναρτητής, ο οποίος μάλιστα λόγω κατασκευής είναι αυστηρά προσεταιριστικός και ως επέκταση αυτού η κατηγορία $\mathfrak{C}^{str}$ είναι αυστηρή τανυστική κατηγορία.

Προκειμένου να δείξουμε ότι η $\mathfrak{C}^{str}$ είναι τανυστικά ισοδύναμη με την $\mathfrak{C}$ πρέπει να εντοπίσουμε κατάλληλους τανυστικούς συναρτητές και φυσικούς τανυστικούς ισομορφισμούς. Αρχικά ισχυριζόμαστε ότι η τριπλέτα (F, id_I, ϕ) είναι τανυστικός συναρτητής από την $\mathfrak{C}^{str}$ στην $\mathfrak{C}$, όπου φ είναι ο φυσικός ισομορφισμός που ορίστηκε προηγουμένως. Παρατηρούμε ότι το Λήμμα 1.1.6. βρίσκεται σε αντιστοιχία με τη συνθήκη (1.11) του τανυστικού συναρτητή ενώ οι ορισμοί $\phi(S, ?)$ και $\phi(?, S)$ αντιστοιχούν στις συνθήκες (1.12-1.13). Ο συναρτητής G της Πρότασης 1.1.5 είναι αυστηρός τανυστικός συναρτητής και τέλος ο φυσικός ισομορφισμός θ είναι φυσικός τανυστικός ισομορφισμός.

1.2 Ιδιότητες Αλγεβρών

Σε αυτή την υποενότητα θα δοθούν κάποιοι κατηγορικοί ορισμοί Αλγεβρικών αντικειμένων και θα αποκτήσουμε εν σύντομια μία εποπτεία σε έννοιες που θα μας οδηγήσουν στην γρηγορότερη κατανόηση των Hopf αλγεβρών που θα αναλυθούν στο επόμενο κεφάλαιο.

Ορισμός 1.2.1. (α) Μία k άλγεβρα είναι μία τριπλέτα (A, μ, η) όπου A είναι ένας διανυσματικός χώρος πάνω από σώμα k, $\mu : A \otimes A \to A$ και $\eta : k \to A$ μορφισμοί k-διανυσματικών χώρων ώστε να μετατίθονται τα διαγράμματα:

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r, "I \otimes \mu"] \arrow[d, "\mu \otimes I"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] \\ A \otimes A \arrow[r, "\mu"] & A \end{tikzcd} \qquad (2.1)$$

$$\begin{tikzcd} & A \otimes A \arrow[dd, "\mu"] & \\ k \otimes A \arrow[ur, "\eta \otimes I"] \arrow[dr] & & A \otimes k \arrow[ul, "I \otimes \eta"'] \arrow[dl] \\ & A & \end{tikzcd} \qquad (2.2)$$

Το μ παίζει τον ρόλο του πολλαπλασιασμού, ενώ το η το ρόλο της μονάδας.

(β)Ένας **μορφισμός αλγεβρών** $f : (A, \mu_A, \eta_A) \to (B, \mu_B, \eta_B)$ είναι μία απεικόνιση δακτυλίου τέτοια ώστε:

$$\mu_B \circ (f \otimes f) = f \circ \mu_A \quad \text{και} \quad f \circ \eta_A = \eta_B$$

Ο χαρακτηρισμός και οι ιδιότητες των προτύπων που αποτελούν ουσιαστικά τη γενίκευση της έννοιας του διανυσματικού χώρου είναι πρωταρχικής σημασίας στη θεωρία αναπαραστάσεων η οποία θα αποτελέσει σημαντικό εργαλείο στην πορεία απόδειξης Θεωρημάτων και Προτάσεων που θα ακολουθήσουν.

Ορισμός 1.2.2. (α)Έστω $\mathcal{A}$ μία άλγεβρα. Ένα $\mathcal{A}-$ πρότυπο είναι ένα ζεύγος (M, μ_M) όπου M είναι διανυσματικός χώρος και $\mu_M : \mathcal{A} \otimes M \to M$ μία γραμμική απεικόνιση ώστε τα ακόλουθα διαγράμματα:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \arrow[r, "id \otimes \mu_M"] \arrow[d, "\mu_M \otimes id"] & \mathcal{A} \otimes M \arrow[d, "\mu_M"] \\
M \otimes \mathcal{A} \arrow[r, "\mu_M"] & M
\end{tikzcd} \qquad (2.3)$$

$$\begin{tikzcd}
k \otimes M \arrow[r, "\eta \otimes id"] \arrow[dr] & \mathcal{A} \otimes M \arrow[d, "\mu_M"] \\
 & M
\end{tikzcd} \qquad (2.4)$$

να μετατίθονται.

(β) Ένας μορφισμός $\mathcal{A}-$ προτύπων $f : (M, \mu_M) \to (M', \mu_{M'})$ είναι μία γραμμική απεικόνιση f από το M στο M' τέτοια ώστε:

$$\mu_{M'} \circ (id \otimes f) = f \circ \mu_M. \qquad (2.5)$$

Παρατήρηση 1.2.1. i) Με τον προηγούμενο ορισμό είναι προφανές ότι ένα αμφίπλευρο ιδεώδες είναι το $\mathcal{A}-$ πρότυπο με στοιχεία από την άλγεβρα που ικανοποιεί την σχέση:

$$\mu_{\mathcal{A}}(I \otimes \mathcal{A}) \subseteq I \supseteq \mu_{\mathcal{A}}(\mathcal{A} \otimes I)$$

και ξέρουμε ότι τότε υπάρχει μοναδική αλγεβρική δομή στον χώρο πηλίκο $\mathcal{A}/I$ ώστε η κανονική προβολή από τον $\mathcal{A}$ στον $\mathcal{A}/I$ να είναι μορφισμός αλγεβρών.

ii) Ένα $\mathcal{A}$-υποπρότυπο $(V', \mu_{V'})$ ενός προτύπου (V, μ_V) είναι ένας υπόχωρος του V με δομή προτύπου τέτοια ώστε ο περιορισμός του V' στο V να είναι μορφισμός προτύπων.

iii) Η δράση της άλγεβρας $\mathcal{A}$ στο πρότυπο (V, μ_V) ορίζει έναν μορφισμο αλγεβρών p από το $\mathcal{A}$ στους ενδομορφισμούς του V, $End(V)$:

$$p(a)(v) = av$$

Η p καλείται αναπαράσταση της $\mathcal{A}$ στο V. Τέλος αν $V_1, V_2, \ldots, V_n$ πρότυπα τότε το $V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ δέχεται δομή προτύπου κατα φυσικό τρόπο.

Ορισμός 1.2.3. Ένα $A-$πρότυπο V καλείται:

- Απλό πρότυπο εάν τα μοναδικά υποπρότυπα του είναι το $\{0\}$ και το V.
- Ημιαπλό πρότυπο εάν είναι ισομορφικό με ευθύ άθροισμα απλών προτύπων.
- Αδιάσπαστο (idecomposable) πρότυπο εάν δεν είναι ισομορφικό με το ευθύ άθροισμα δύο υποπροτύπων.

Σημείωση 1.2.1. Στην γλώσσα της θεωρίας αναπαραστάσεων το απλό πρότυπο είναι ανάλογο με την έννοια της ανάγωγης αναπαράστασης.

Ακολούθως δίνεται μία πρόταση που αφορά πρότυπα πεπερασμένης διάστασης, της οποίας η απόδειξη θα παραληφθεί. Αναλυτική απόδειξη μπορεί να βρεθεί στο [Kas12].

Πρόταση 1.2.1. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

i) Για κάθε ζεύγος $V^1 \subseteq V$ πεπερασμένης διάστασης $A-$πρότυπα, υπάρχει V^2 $A-$πρότυπο τέτοιο ώστε:
$$V = V^1 \oplus V^2$$

ii) Για κάθε ζεύγος $V^1 \subseteq V$ πεπερασμένης διάστασης $A-$πρότυπα, όπου V^1 είναι απλό, υπάρχει ι V^2 $A-$πρότυπο τέτοιο ώστε:

$$V = V^1 \oplus V^2$$

iii) Για κάθε ζεύγος $V^1 \subseteq V$ πεπερασμένης διάστασης $A-$πρότυπα υπάρχει A-γραμμική απεικόνιση
$$p : V \to V^1 : P^2 = P$$

iv) Για κάθε ζεύγος $V^1 \subseteq V$ πεπερασμένης διάστασης $A-$πρότυπα, όπου V^1 είναι απλό, υπάρχεο A-γραμμική απεικόνιση

$$p : V \to V^1 : p^2 = p$$

v) Κάθε πεπερασμένης διάστασης A-πρότυπο είναι ημιαπλό.

1.2.1 Ελεύθερη Άλγεβρα και Αφφινικό Επίπεδο

Γνωρίζουμε ότι έχοντας ένα αυθαίρετο σύνολο X μπορώ να παράξω τον ελεύθερο διανυσματικό χώρο $k\{X\}$ πάνω από σώμα k με βάση όλες τις αυθαίρετες λέξεις μορφής $x_{i_1}\cdots x_{i_p}$ του αλφαβήτου της X συμπεριλαμβανομένου και της κενής λέξης ?. Με απόλυτα φυσκό τρόπο μπορώ να δώσω στον ελεύθερο διανυσματικό χώρο δομή ελεύθερης άλγεβρας ορίζοντας ως πολλαπλασιασμό τον συνδιασμό αλληλουχίας των διαφόρων λέξεων (concatenation):

$$(x_{i_1}\cdots x_{i_p})(x_{i_{p+1}}\cdots x_{i_n}) = x_{i_1}\cdots x_{i_p}x_{i_{p+1}}\cdots x_{i_n}$$

Σύμφωνα με αυτόν τον πολλαπλασιασμό, μονάδα της ελεύθερης άλγεβρας ορίζεται η κενή λέξη $1 = ?$.

Για τη συνέχεια της ενότητας, με τον όρο ελεύθερες άλγεβρες θα αναφερόμαστε σε πεπερασμένα παραγώμενες ελεύθερες άλγεβρες. (δηλαδή από πεπερασμένο σύνολο X).

Πρόταση 1.2.2. Έστω X σύνολο. Δοσμένης άλγεβρας $\mathcal{A}$ και μίας συνολοθεωρητικής απεικόνισης $f : X \to \mathcal{A}$, υπάρχει μοναδικός μορφισμός αλγεβρών $\overline{f} : k\{X\} \to \mathcal{A}$ τέτοιος ώστε:

$$\overline{f}(x) = f(x), \quad \forall x \in \mathcal{A}$$

Απόδειξη. Αρκεί να δείξω ότι μπορώ να ορίσω την $\overline{f}$ για κάθε λέξη του X. Για την κενή λέξη $\overline{f}(\varnothing) = 1_{\mathcal{A}}$, διαφορετικά για $x_{i_1} \cdots x_{i_p}$ στοιχείο του X ορίζω:

$$\overline{f}(x_{i_1} \cdots x_{i_p}) = f(x_{i_1}) \cdots f(x_{i_p})$$

Παρατήρηση 1.2.2. Με άλλα λόγια η προηγούμενη πρόταση μπορεί να διατυπωθεί ως η ύπαρξη μίας 1-1 και επί αντιστοιχία μεταξύ:

$$Hom_{Alg}(k\{X\}, \mathcal{A}) \cong Hom_{Set}(X, \mathcal{A}) \quad (2.6)$$

Πιο συγκεκριμένα αν θεωρήσουμε ως X το πεπερασμένο σύνολο $\{x_1, \dots, x_n\}$, τότε $f \mapsto (f(x_1), \dots, f(x_n))$ επάγει την 1-1 και επί αντιστοιχία

$$Hom_{Alg}(k\{x_1, \dots, x_n\}, \mathcal{A}) \cong \mathcal{A}^n \quad (2.7)$$

Ένα άλλο σημαντικό συμπέρασμα είναι ότι κάθε άλγεβρα $\mathcal{A}$ είναι το σύνολο πηλίκο μίας ελεύθερης άλγεβρας $k\{X\}$ για κατάλληλο X. Συνεπώς, $\mathcal{A} \cong k\{X\}/I$ για κάποιο αμφίπλευρο ιδεώδες του $k\{X\}$, οπότε σε πλήρη αναλογία προκύπτει ότι για οποιαδήποτε άλγεβρα $\mathcal{A}'$ υπάρχει μία 1-1 και επί αντιστοιχία μορφισμών:

$$Hom_{Alg}(k\{X\}/I, A') \cong \{f \in Hom_{Set}(X, A') \mid \overline{f}(I) = 0\} \quad (2.8)$$

Ως συνέπεια αυτού αν θεωρήσουμε I το αμφίπλευρο ιδεώδες της $k\{x_1, \dots, x_n\}$ που παράγεται από στοιχεία μορφής $x_i x_j - x_j x_i$ όπου $1 \le i, j \le n$, τότε η άλγεβρα πηλίκο $k\{x_1, \dots, x_n\}/I$ είναι ισομορφική με την πολυωνυμική άλγεβρα $k[x_1, \dots, x_n]$ και άρα:

$$Hom_{Alg}(k[x_1, \dots, x_n], \mathcal{A}) \cong \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{A}^n \mid a_i a_j = a_j a_i \ \forall (i, j)\} \quad (2.9)$$

Τέλος αν περιοριστούμε στις μεταθετικές άλγεβρες προφανώς το προηγούμενο συμπέρασμα μεταφράζεται ως:

$$Hom_{Alg}(k[x_1, \dots, x_n], \mathcal{A}) \cong \mathcal{A}^n$$

και άρα για το υποκείμενο σύνολο κάθε μεταθετικής άλγεβρας $\mathcal{A}$ ισχύει:

$$Hom_{Alg}(k[x], \mathcal{A}) \cong \mathcal{A} \quad (2.10)$$

Ορισμός 1.2.4. Έστω μεταθετική άλγεβρα A.

- Η άλγεβρα $k[x]$ καλείται αφφινική γραμμή και το σύνολο $Hom_{Alg}(k[x], A)$ καλείται σύνολο $A-$σημείων της αφφινικής γραμμής.
- Η άλγεβρα $k[x^1, x^2]$ καλείται αφφινικό επίπεδο και ένα στοιχείο του $Hom_{Alg}(k[x^1, x^2], A)$ καλείται $A-$σημείο του αφφινικού επιπέδου.

Προφανώς έχουμε ότι:

$$Hom_{Alg}(k[x^1, x^2], A) = A^2 \quad (2.11)$$

1.2.2 Διαβαθμισμένες και Φιλτραρισμένες Άλγεβρες

Ορισμός 1.2.5. Μία άλγεβρα A είναι διαβαθμισμένη εάν υπάρχουν υπόχωροι $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ τέτοιοι ώστε:

$$A = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} A_i \quad \& \quad A_i A_j \subseteq A_{i+j} \quad \forall\, i, j \in \mathbb{N}$$

Τα στοιχεία του A_i καλούνται ομογενή βαθμού i. Κατα αυτόν τον τρόπο, ισχυριζόμαστε ότι η μονάδα της άλγεβρας βρίσκεται πάντα στο A_0.

Πρόταση 1.2.3. Έστω $A = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} A_i$ μία διαβαθμισμένη άλγεβρα και I ένα αμφίπλευρο ιδεώδες της που παράγεται από κάποιο ομογενές στοιχείο. Τότε:

$$I = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} I \cap A_i$$

και η άλγεβρα πηλίκο A/I είναι διαβαθμίζεται από υποχώρους:

$$(A/I)_i = A_i/(I \cap A_i) \quad \forall\, i \in \mathbb{N}$$

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι $I = \sum_{i\geq 0} I \cap A_i$. Το άθροισμα αναγκαστικά είναι ευθύ μιας και οι υπόχωροι A_i σχηματίζουν μεταξύ τους ευθύ άθροισμα. Επομένως μένει να δείξω ότι $I = \sum_{i\geq 0} I \cap A_i$. Το ιδεώδες I παράγεται από ομογενή στοιχεία x_i βαθμού d_i. Συνεπώς, εάν $x \in I$ τότε:

$$x = \sum_i a_i x_i b_i$$

για κάποια $a_i, b_i \in A$. Τώρα, $a_i = \sum_j a_i^j$ και $b_i = \sum_j b_i^j$ όπου τα a_i^j, b_i^j είναι ομογενή στοιχεία βαθμού j. Ως επέκταση αυτού προκύπτει ότι το:

$$x = \sum_{i,j,k} a_i^j x_i b_i^j$$

είναι άθροισμα ομογενών στοιχείων βαθμού $d_i + j + k$ του I. Αυτό συνεπάγεται ότι ο I είναι υπόχωρος του $\sum_{i\geq 0} I \cap A_i$ και αφού ο αντίστροφος εγκλεισμός είναι προφανής έχουμε το ζητούμενο.

Ορισμός 1.2.6. Μία άλγεβρα A καλείται φιλτραρισμένη εαν υπάρχει ακολουθία $\{0\} \subset F_0(A) \subset \dots \subset F_i(A) \subset \dots \subset A$ υποχώρων της, τέτοια ώστε:

$$A = \bigcup_{i \geq 0} F_i(A) \quad \& \quad F_i(A) \cdot F_j(A) \subset F_{i+j}(A)$$

Τα στοιχεία του $F_i(A)$ καλούνται βαθμού $\leq i$.

Σημείωση 1.2.2. i) Για κάθε φιλτραρισμένη άλγεβρα A υπάρχει διαβαθμισμένη άλγεβρα $S = gr(A)$ που ορίζεται ως:

$$S_i = F_i(A)/F_{i-1}(A)$$

ii) Φιλτράρουμε κάθε διαβαθμισμένη άλγεβρα $A = \bigoplus_{i \geq 0} A_i$ ως :

$$F_i(A) = \bigoplus_{0 \leq j \leq i} A_j, \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

iii) Έστω $A \supset \dots \supset F_i(A) \supset \dots \supset F_0(A)$ μία φιλτραρισμένη άλγεβρα και I ένα αμφίπλευρο ιδεώδες της A. Η άλγεβρα πηλίκο A/I φιλτράρεται από:

$$F_i(A/I) = F_i(A)/F_i(A) \cap I.$$

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε ότι:

$$gr(A/I) = \bigoplus_{i \geq 0} F_i(A)/(F_{i-1}(A) + F_i(A) \cap I)$$

1.2.3 Ore Επεκτάσεις και Noetherian Δακτύλιοι

Έστω R μία άλγεβρα και $R[t]$ το ελεύθερο $R-$πρότυπο που αποτελείται από πολυώνυμα μορφής:

$$P = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_0 t^0$$

με συντελεστές από το R. Εάν $a_n \neq 0$ λέμε ότι ο βαθμός του P που συμβολίζεται ως $deg(P)$ είναι ίσος με n και από σύμβαση θέτουμε $deg(0) = -\infty$. Ο στόχος της παραγράφου είναι να βρούμε όλες τις δομές άλγεβρας του $R[t]$ που είναι συμβατές με τη δομή άλγεβρας του R και τον βαθμού αυτού.

Ορισμός 1.2.7. Έστω R μία άλγεβρα και q ένας ενδομορφισμός του R. Μία $q-$διαίρεση στο R είναι ένας γραμμικός ενδομορφισμός δ του R τέτοιος ώστε:

$$\delta(ab) = q(a)\delta(b) + \delta(a)b \quad (2.12)$$

για κάθε $a, b \in R$. Παρατηρώ ότι $\delta(1) = 0$.

Θεώρημα 1.2.4. *(α) Υποθέτω ότι $R[t]$ έχει μία δομή άλγεβρας τέτοια ώστε ο φυσικός περιορισμός της R στο $R[t]$ να είναι μορφισμός αλγεβρών και επιπλέον να ισχύει $deg(PQ) = deg(P) + deg(Q)$ για κάθε ζεύγος (P, Q) στοιχείων του $R[t]$. Τότε η R δεν έχει διαιρέτες του μηδενός και υπάρχει μοναδικός επί ενδομορφισμός άλγεβρας q του R και μοναδική q-διαίρεση δ του R:*

$$ta = q(a)t + \delta(a), \quad \forall a \in R. \quad (2.13)$$

(β) Αντίστροφα, έστω R άλγεβρα χωρίς διαιρέτες του μηδενός. Δοσμένου επί ενδομορφισμού q του R και q-διαίρεσης δ του R, υπάρχει μοναδική αλγεβρική δομή στο $R[t]$ τέτοια ώστε ο περιορισμός R στο $R[t]$ να είναι μορφισμός αλγεβρών και η σχέση (2.13) να ισχύει για κάθε $a \in R$.

Απόδειξη. (α) Έστω a, b μη-μηδενικά στοιχεία του R και συνεπώς βαθμού 0 στο $R[t]$. Έχουμε ότι $deg(ab) = deg(a) + deg(b) = 0 \Rightarrow ab \neq 0$. Επομένως το R δεν έχει διαιρέτες του μηδενός.

Μένει να δείξουμε την ύπαρξη μοναδικών ενδομορφισμών q, δ. Παίρνω μη-μηδενικό στοιχείο $a \in R$ και θεωρώ το γινόμενο ta. Έχουμε ότι: $deg(ta) = deg(t) + deg(a) = 1$. Από τον ορισμό του $R[t]$ υπάρχει μοναδικά ορισμένο στοιχείο $q(a) \neq 0$ και $\delta(a)$ στο R τέτοια ώστε:

$$ta = q(a)t + \delta(a). \quad (2.14)$$

Αυτό ορίζει απεικονίσεις q και δ με μοναδικό τρόπο. Ο αριστερός πολλαπλασιασμός με t είναι γραμμικός άρα το ίδιο συμβαίνει με q, δ. Επιπλέον, q πρέπει να είναι επί. Επεκτείνουμε και τις δύο μεριές της εξίσωσης $(ta)b = t(ab)$ στο $R[t]$ με τη χρήση της (2.14):

$$q(a)q(b)t + q(a)\delta(b) + \delta(a)b = q(ab)t + \delta(ab) \quad (2.15)$$

και ως αποτέλεσμα αυτού έχουμε:

$$q(ab) = q(a)q(b) \quad \& \quad \delta(ab) = q(a)\delta(b) + \delta(a)b \quad (2.16)$$

(β) Πρέπει να γνωρίζουμε το γινόμενο ta για κάθε $a \in R$ ώστε να ορίσουμε πλήρως το γινόμενο στο $R[t]$. Συνεπώς η σχέση (2.14) ορίζει τη δομή άλγεβρας στο $R[t]$.

Τώρα πρέπει να αποδείξουμε την ύπαρξη της δομής άλγεβρας. Για αυτό το σκοπό θα εμφυτεύσουμε την $R[t]$ στη μεταθετική άλγεβρα $\mathbb{M}$ των απειροδιάστατων πινάκων με εισόδους από στοιχεία της άλγεβρας $End(R)$, όπου κάθε στήλη έχει πεπερασμένο αριθμό μη-μηδενικών εισόδων. Ο μοναδιαίος του $\mathbb{M}$ είναι ο άπειρος διαγώνιος πίνακας I με ταυτοτικούς ενδομορφισμούς στη διαγώνιο.

Δοσμένου στοιχείου $a \in R$, συμβολίζω με $\hat{a} \in End(R)$ τον αριστερό πολλαπλασιασμό με το a. Από την υπόθεση για q, δ προκύπτει ότι:

$$q\hat{a} = q(\hat{a})a \quad \& \quad \delta\hat{a} = q(\hat{a})\delta + \delta(\hat{a}) \quad (2.17)$$

Σε αυτό το σημείο ορίζω τον ακόλουθο απειροδιάστατο πίνακα:

$$T = \begin{pmatrix} \delta & 0 & 0 & 0 & \\ q & \delta & 0 & 0 & \\ 0 & q & \delta & 0 & \\ 0 & 0 & q & \delta & \\ 0 & 0 & 0 & q & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

ο οποίος είναι στοιχείο του $\mathcal{M}$ και με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να ορίσουμε γραμμική απεικόνιση $\Phi : R[t] \to \mathcal{M}$ ως:

$$\Phi\left(\sum_{i=0}^{n} a_i t^i\right) = \sum_{i=0}^{n} (\hat{a}_i I) T^i. \qquad (2.18)$$

Εάν e_i είναι το διάνυσμα στήλη για το οποίο ισχύει ότι στην $i-$οστή θέση έχει το μοναδιαίο ενδομορφισμό του R και σε όλες τις άλλες μηδενικά τότε αφού $\delta(1) = 0$, $q(1) = 1$ παίρνουμε ότι:

$$T(e_i) = e_{i+1} \qquad (2.19)$$

για κάθε $i \geq 1$. Έστω $P = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$ ένα στοιχείο του $R[t]$ τέτοιο ώστε $\Phi(P) = 0$. Θέλουμε να δείξουμε ότι όλα τα $a_0, \ldots, a_n$ είναι μηδέν. Εφαρμόζοντας στο $\Phi(P)$ το διάνυσμα στήλη e_1 έχουμε:

$$0 = \Phi(P)(e_1) = \sum_{i=0}^{n} (\hat{a}_i I) T^i(e_i) = \sum_{i=0}^{n} \hat{a}_i e_{i+1}.$$

και επομένως προκύπτει ότι $\hat{a}_i = 0 \ \forall i$. Αφού το R έχει μονάδα παίρνουμε ότι $a_i = 0 \ \forall\, i \Rightarrow P = 0$. Επομένως η Φ είναι επί.

Τέλος από τη σχέση (2.17) προκύπτει ότι

$$T(\hat{a} I) = (\widehat{q(a)} I) T + (\widehat{\delta(a)} I).$$

Έστω S η υπάλγεβρα του $\mathcal{M}$ που παράγεται από στοιχεία T, $\hat{a}I$ με a να τρέχει στο $\mathcal{M}$. Από την τελευταία σχέση είναι προφανές ότι η S είναι η εικόνα του $R[t]$ μέσω της Φ και λόγω του ότι αυτή είναι επί έχουμε έναν γραμμικό ισομορφισμό μεταξύ $R[t]$ και S. Αυτό μας επιτρέπει να υιοθετήσουμε τη δομή άγεβρας της S για την $R[t]$ και έτσι η απόδειξη είναι πλήρης.

Ορισμός 1.2.8. Η άλγεβρα που ορίζεται μέσα από το Θεώρημα 1.2.4 (β) συμβολίζεται ως $R[t, q, \delta]$ και καλείται Ore επέκταση των δεδομένων (R, q, δ)

Πρόταση 1.2.5. Έστω A δακτύλιος. Οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:

- Κάθε αριστερό ιδεώδες I του A είναι πεπερασμένα παραγώμενο, δηλαδή υπάρχουν $a_1, \ldots, a_n \in I : I = Aa_1 + \cdots + Aa_n$
- Κάθε αύξουσα ακολουθία $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq A$ αριστερών ιδεωδών του A είναι πεπερασμένη, δηλαδή υπάρχει ακέραιος $r : I_{r+i} = I_r \ \forall i \geq 0$

Σημείωση 1.2.3. Κάθε δακτύλιος A που ικανοποιεί έναν από τους δύο ισοδύναμους ισχυρισμούς της προηγούμενης πρότασης καλείται αριστερό **Noetherian**. Ο δακτύλιος A είναι δεξί Noetherian εάν ο αντίθετος δακτύλιος A^{op} είναι αριστερό. Καλείται Noetherian εαν είναι ταυτοχρόνως αριστερό και δεξί.

Πρόταση 1.2.6. Έστω $\phi : A \to B$ ένας επί μορφισμός δακτυλίων. Εαν το A είναι αριστερό Noetherian τότε είναι και το B.

Απόδειξη. Έστω J αριστερό ιδεώδες του B. Το αριστερό ιδεώδες $I = \phi^{-1}(J)$ του A παράγεται από στοιχεία $a_1, \ldots, a_n$. Συνεπώς, $J = \phi(\phi^{-1}(J))$ παράγεται από $\phi(a_1), \ldots, \phi(a_n)$.

Το σημαντικό αποτέλεσμα που συνδυάζει τις δύο προαναφερθείσες έννοιες είναι το ακόλουθο, το οποίο είναι ένα μη-μεταθετικό ανάλογο του Θεωρήματος Βάσης του Hilbert:

Θεώρημα 1.2.7. *Έστω R άλγεβρα, q ένας αυτομορφισμός του R και δ μία a διαίρεση του R. Εάν R είναι αριστερό Noetherian τότε το ίδιο είναι και η Ore επέκταση του $R[t, q, \delta]$.*

1.3 Τανυστικά Γινόμενα

Θεώρημα 1.3.1. *Δοσμένων διανυσματικών χώρων U, V υπάρχει διανυσματικός χώρος $U \otimes V$ και διγραμμική απεικόνιση $\phi_0(U, V) : U \times V \to U \otimes V$ τέτοια ώστε για κάθε διανυσματικό χώρο W, η γραμμική απεικόνιση:*

$$Hom(U \otimes V, W) \to Hom^{(2)}(U, V; W)$$

που δίνεται από $f \to f \circ \phi_0$ είναι γραμμικός ισομορφισμός (όπου $Hom^{(2)}(U, V; W)$ είναι ο χώρος των διγραμμικών απεικονίσεων από το $U \times V$ στο W). Ο διανυσματικός χώρος $U \otimes V$ καλείται τανυστικό γινόμενο των U και V και είναι μοναδικός ως προς τους ισομορφισμούς.

Για κάθε $u \in U$, $v \in V$ θεωρώ $u \otimes v = \phi_0(u, v)$. Αφού το ϕ_0 είναι διγραμμικό τότε οι ακόλουθες σχέσεις ισχύουν στον $U \otimes V$:

- $(u + u') \otimes v = u \otimes v + u' \otimes v \qquad (3.1)$
- $u \otimes (v + v') = u \otimes v + u \otimes v' \qquad (3.2)$
- $\lambda(u \otimes v) = (\lambda u) \otimes v = u \otimes (\lambda v) \qquad (3.3)$

όπου $u, u' \in U$, $v, v' \in V$ και $\lambda \in k$.

Πιο συγκεκριμένα μπορούμε να πούμε ότι κάθε στοιχείο του $U \otimes V$ είναι ένα πεπερασμένο άθροισμα μορφής:

$$\sum_{i=1}^{p} u_i \otimes v_i$$

όπου $u_1, \dots, u_n \in U$, $v_1, \dots, v_n \in V$.

Απόδειξη. Έστω διανυσματικός χώρος $k[U \times V]$ του οποίου η βάση είναι το σύνολο $U \times V$. Ορίζω το $U \otimes V$ ως το πηλίκο του $k[U \times V]$ με τον υπόχωρο που παράγεται από στοιχεία μορφής:

$$(u + u', v) - (u, v) - (u', v), \quad (u, v + v') - (u, v) - (u, v')$$
$$(\lambda u, u) - \lambda(u, v), \quad (u, \lambda v) - \lambda(u, v)$$

όπου $u, u' \in U$, $v, v' \in V$ και $\lambda \in k$. Η κλάση $(u, v) \in U \times V$ στο $U \otimes V$ συμβολίζεται με $\phi_0(u, v) = u \otimes v$. Από κατασκευής η ϕ_0 είναι διγραμμική. Όλα τα υπόλοιπα προκύπτουν εύκολα.

Πόρισμα 1.3.1.1. *Για κάθε τριπλέτα (U, V, W) διανυσματικών χώρων, υπάρχει ένας φυσικός ισομορφισμός:*

$$Hom(U \otimes V, W) \cong Hom(U, Hom(V, W))$$

Απόδειξη. Εάν ϕ είναι διγραμμική απεικόνιση από το $U \times V$ στο W και u τυχαίο διάνυσμα του U, τότε η $\phi(u, -)$ είναι γραμμική απεικόνιση από το V στο W. Οπότε θέτουμε αυτή την απεικόνιση ως το επιθυμητό ισομορφισμό.

Η ακόλουθες προτάσεις παρατίθενται χωρίς απόδειξη. Η αποδείξεις μπορούν να βρεθούν στο [Kas12].

Πρόταση 1.3.2. Έστω U, V, W διανυσματικοί χώροι. Υπάρχουν ισομορφισμοί

$$(U \otimes V) \otimes W \cong U \otimes (V \otimes W)$$

που ορίζεται από τη σχέση $\mapsto u \otimes (v \otimes w)$,

$$k \otimes V \cong V \cong V \otimes k$$

που ορίζεται από $\lambda \otimes v \mapsto \lambda v$ και $v \mapsto v \otimes 1$,

$$V \otimes W \cong W \otimes V$$

που δίνεται από τον τελεστή στροφής $\tau_{V,W}(u \otimes w) = w \otimes u$.

Σημείωση 1.3.1. Το τανυστικό γινόμενο επίσης μετατίθεται με το ευθύ άθροισμα χωρών. Έστω $(U_i)_{i\in I}$ οικογένεια διανυσματικών χώρων, τότε υπάρχει ο διανυσματικός χώρος $\bigoplus_{i\in I} U_i$ και γραμμικές απεικονίσεις $q_i : U_i \to \bigoplus_{i\in I} U_i$ τέτοιες ώστε για κάθε V διανυσματικό χώρο, η γραμμική απεικόνιση

$$Hom(\bigoplus_{i\in I} U_i, V) \to \prod_{i\in I} Hom(U_i, V) \qquad (3.4)$$

δίνεται από από $f \to (f \circ q_i)_i$ ισομορφισμό.

Πρόταση 1.3.3. Ισχύει ότι:

$$\bigoplus_{i\in I} U_i \otimes V = \bigoplus_{i\in I} (U_i \otimes V) \qquad (3.5)$$

1.3.1 Τανυστικά Γινόμενα Απεικονίσεων

Έστω $f : U \to U'$ και $g : V \to V'$ γραμμικές απεικονίσεις. Ορίζουμε το τανυστικό γινόμενο τους $f \otimes g : U \otimes V \to U' \otimes V'$ ως:

$$(f \otimes g)(u \otimes v) = f(u) \otimes g(v) \qquad (3.6)$$

για κάθε $u \in U, v \in V$. Αυτό γεννά μία γραμμική απεικόνιση:

$$\lambda : Hom(U, U') \otimes Hom(V, V') \to Hom(V \otimes U, U' \otimes V') \qquad (3.7)$$

ορισμένη από:

$$\lambda(f \otimes g)(v \otimes u) = f(u) \otimes g(v) \qquad (3.8)$$

Θεώρημα 1.3.4. *Η απεικόνιση λ είναι ένας ισομορφισμός αν τουλάχιστον ένα από τα ζεύγη (U, U'), (V, V') ή (U, V) αποτελείται από πεπερασμένης διάστασης διανυσματικούς χώρους.*

Απόδειξη. Υποθέτω ότι U, U' είναι πεπερασμένης διάστασης. Μπορώ να γράψω το $U = \bigoplus_{i\in I} ku_i$ όπου $\{u_i\}_{i\in I}$ είναι μία πεπερασμένη βάση του U. Ως συνέπεια του ισομορφισμού (3.4-3.5), η απεικόνιση λ γίνεται απεικόνιση από:

$$\prod_i Hom(ku_i, U') \otimes Hom(V, V') \to \prod_i Hom(V \otimes ku_i, U' \otimes V').$$

Επειδή το σύνολο I είναι πεπερασμένο μπορούμε να αντικαταστήσουμε το $\prod_i$ με $\bigoplus_i$. Εφαρμόζοντας τη σχέση (3.5) αρκεί να δείξουμε ότι η απεικόνιση:

$$\lambda : Hom(ku_i, U') \otimes Hom(V, V') \to Hom(V \otimes ku_i, U' \otimes V')$$

είναι ένας ισομορφισμός στην ειδική περίπτωση όπου $U = ku_i$.
Αφού το ku_i είναι διάστασης ένα, το προηγούμενο ισοδυναμεί με το να δείξουμε ότι

$$\lambda' : U' \otimes Hom(V, V') \to Hom(V, U' \otimes V') \qquad (3.9)$$

που ορίζεται ως:

$$\lambda'(u' \otimes f)(v) = u' \otimes f(v)$$

είναι ένας ισομορφισμός.

Από υπόθεση έχουμε $U' = \bigoplus_{i\in I'} ku'_i$ για κάποια πεπερασμένη βάση $\{u'_i\}_{i\in I'}$. Με τη χρήση της (3.5) και του γεγονότος ότι το ευθύ γινόμενο πάνω από πεπερασμένο σύνολο I' είναι ισοδύναμο με το ευθύ άθροισμα προκύπτει ότι:

$$U'\otimes Hom(V,V') \cong \bigoplus ku'_i \otimes Hom(V,V')$$

και

$$Hom(V,U'\otimes V') \cong \prod_{i\in I'} Hom(V,ku'_i\otimes V')$$

Αυτό μας επιτρέπει να σπάσουμε το λ' σε ευθύ γινόμενο απεικονίσεων:

$$\lambda' : ku'_i \otimes Hom(V,V') \to Hom(V,ku'_i\otimes V').$$

Στην ειδική περίπτωση που $\lambda'(u'_i\otimes f)(v) = u'_i\otimes f(v)$ είναι προφανώς ισομορφισμός. Επομένως το ίδιο ισχύει και για την απεικόνιση λ′ του (3.9), πράγμα που ολοκληρώνει την απόδειξη.

Παρατήρηση 1.3.1. Στην περίπτωση που περιορίσουμε το Θεώρημα επιλέγοντας $U' = V' = k$ ή $U = V' = k$, προκύπτουν δύο σημαντικά πορίσματα που περιέχουν την έννοια του δυϊκού διανυσματικού χώρου $V^* = Hom(V,k)$ του V (αντίστοιχα U):

Πόρισμα 1.3.4.1. *Η απεικόνιση $\lambda : U^*\otimes V^* \to (V\otimes U)^*$ είναι ένας ισομορφισμός αν U ή V είναι πεπερασμένης διάστασης*

Πόρισμα 1.3.4.2. *Η απεικόνιση $\lambda_{U,V} : V\otimes U^* \to Hom(U,V)$ για $u\in U, v\in V, a\in U^*$ που δίνεται ως:*

$$\lambda_{U,V}(v,a)(u) = a(u)v \qquad (3.10)$$

είναι ισομορφισμός εάν U ή V είναι πεπερασμένης διάστασης. Εάν συγκεκριμένα το V είναι πεπερασμένης διάστασης διανυσματικός χώρος τότε η απεικόνιση $\lambda_{V,V}$ είναι ένας ισομορφισμός:

$$V\otimes V^* \cong End(V)$$

Μία ακόμα συνέπεια των όσων προηγήθηκαν είναι και το επόμενο λήμμα:

Λήμμα 1.3.5. *Το ακόλουθο διάγραμμα μετατίθεται:*

$$\begin{tikzcd}
U'\otimes U^*\otimes V'\otimes V^* \arrow[r, "\lambda_{U,U'}\otimes\lambda_{V,V'}"] \arrow[d, "id\otimes\tau_{U^*,V'}\otimes id"] & Hom(U,U')\otimes Hom(V,V') \arrow[dd, "\lambda"] \\
U'\otimes V'\otimes U^*\otimes V^* \arrow[d, "id\otimes id\otimes\lambda"] & \\
U'\otimes V'\otimes (V\otimes U)^* \arrow[r, "\lambda_{V\otimes U,U'\otimes V'}"] & Hom(V\otimes U, U'\otimes V')
\end{tikzcd}$$

Παρατήρηση 1.3.2. Γνωρίζουμε ότι μία άλλη σημαντική πράξη μεταξύ γραμμικών ομομορφισμών είναι η σύνθεση:

$$(g, f) \to g \circ f$$

που είναι διγραμμική και που ορίζεται για μία τριπλέτα διανυσματικών χώρων (U, V, W) από την απεικόνιση:

$$Hom(V, W) \otimes Hom(U, V) \to Hom(U, W)$$

Μέσω της απεικόνισης λ, του Πορίσματος 1.3.4.2., τη χρήση της απεικόνισης εκτίμησης και κάποιων επιπλέων συνθηκών μπορούμε να εκφράσουμε τη σύνθεση με πιο κομψή μαθηματική μορφή.

Η απεικόνιση εκτίμησης δίνεται ως:

$$ev_V : V^* \otimes V \to k$$

και ορίζεται μέσω του τύπου:

$$ev_V(a \otimes v) = \langle a, v \rangle = a(u) \qquad (3.11)$$

για κάθε γραμμική μορφή a και κάθε διάνυσμα $v \in V$.

Λήμμα 1.3.6. *Το ακόλουθο τετράγωνο μετατίθεται:*

$$\begin{tikzcd}
W \otimes V^* \otimes V \otimes U \arrow[r, "id \otimes ev_V \otimes id"] \arrow[d, "\lambda_{V,W} \otimes \lambda_{U \otimes V}"] & W \otimes U \arrow[d, "\lambda_{U,W}"] \\
Hom(V, W) \otimes Hom(U, V) \arrow[r] & Hom(U, V)
\end{tikzcd}$$

1.3.2 Τανυστικό Γινόμενο Αλγερβών

Δοσμένων αλγεβρών A , B δίνουμε δομή άλγεβρας στο τανυστικό γινόμενο $A \otimes B$ ως

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = aa' \otimes bb' \qquad (3.12)$$

όπου $a, a' \in A$ και $b, b' \in B$. Καλούμε το $A \otimes B$ τανυστικό γινόμενο των αλγεβρών A και B του οποίου η μονάδα είναι το $1_A \otimes 1_B$. Ορίζοντας $i_A(a) = a \otimes 1$ και $i_B(b) = 1 \otimes b$, παίρνω τους μορφισμούς αλγεβρών $i_A : A \to A \otimes B$ και $i_B : B \to A \otimes B$. Προκύπτει ότι σύμφωνα με την (3.12) ισχύει το ακόλουθο:

$$i_A(a)i_B(b) = i_B(b)i_A(a) = a \otimes b \qquad (3.13)$$

για κάθε $a \in A$, $b \in B$. Το τανυστικό γινόμενο αλγεβρών υπόκειται στην ακόλουθη καθολική ιδιότητα:

Πρόταση 1.3.7. Έστω $f : A \to C$, $g : B \to C$ μορφισμοί αλγεβρών τέτοιοι ώστε για κάθε ζεύγος $(a, b) \in A \times B$, ισχύει η σχέση $f(a)g(b) = g(b)f(a)$ στο C. Τότε υπάρχει μοναδικός μορφισμός άλγεβρας $f \otimes g : A \otimes B \to C$ τέτοιος ώστε:

$$(f \otimes g) \circ i_A = f \quad \text{και} \quad (f \otimes g) \circ i_B = g$$

Με άλλα λόγια η πρόταση μας λέει ότι ο χώρος $Hom(A \otimes B, C)$ είναι το υποσύνολο εκείνο του $Hom_{Alg}(A, C) \times Hom_{Alg}(B, C)$ που περιέχει όλα τα ζεύγη μορφισμών (f, g) των οποίων η εικόνα μετατίθεται στο C. Επομένως εάν η C είναι μεταθετική έχουμε ότι:

$$Hom_{Alg}(A \otimes B, C) \cong Hom_{Alg}(A, C) \times Hom_{Alg}(B, C).$$

Απόδειξη. Κάθε στοιχείο του $A \otimes B$ είναι πεπερασμένο άθροισμα στοιχείων μορφής $a \otimes b$. Συνεπώς από την (3.12) εάν υπάρχει η $f \otimes g$ πρέπει να είναι της μορφής:

$$(f \otimes g)(a \otimes b) = (f \otimes g)(i_A(a))(f \otimes g)(i_B(b)) = f(a)g(b)$$

Αυτό αποδεικνύει και τη μοναδικότητα του ισχυρισμού. Όσο για την απεικόνιση $f \otimes g$ ελέγχεται ότι ο προηγούμενος τύπος είναι ένας μορφισμός άλγεβρας. Αυτό χρησιμοποιεί τη μεταθετική υπόθεση ως:

$$\begin{aligned}(f \otimes g)(a \otimes b)(f \otimes g)(a' \otimes b') &= f(a)g(b)f(a')g(b') \\ &= f(a)f(a')g(b)g(b') \\ &= f(aa')g(bb') \\ &= (f \otimes g)(aa' \otimes bb').\end{aligned}$$

1.3.3 Μερικές Αναστροφές και Ίχνη

Σε αυτή την ενότητα όλους τους διανυσματικούς χώρους τους θεωρούμε ως πεπερασμένης διάστασης.

Έστω V διανυσματικός χώρος με βάση $\{v_i\}$ και ο δυϊκός του V^* με βάση $\{v^i\}$. Με αυτές τις δύο βάσεις η απεικόνιση εκτίμησης μας δίνει:

$$ev_V(v^i \otimes v_j) = \langle v^i, v_j \rangle = \delta_{ij} \qquad (3.14)$$

Στόχος είναι να εκφράσουμε τον ισομορφισμό $\lambda_{U,V}$ με τους όρους των βάσεων. Έτσι θεωρώ γραμμική απεικόνιση $f : U \to V$ τέτοια ώστε:

$$f(u_j) = \sum_i f^i_j v_i \qquad (3.15)$$

όπου $(f^i_j)_{ij}$ βαθμωτά μεγέθη. Ισχύει ότι:

$$f = \lambda_{U,V}\Big(\sum_{ij} f^i_j v_i \otimes u^i\Big) \qquad (3.16)$$

πιο συγκεκριμένα επιλέγοντας ως f την ταυτοτική απεικόνιση του V τότε:

$$id_V = \lambda_{V,V}\Big(\sum_{i} v_i \otimes v^i\Big) \qquad (3.17)$$

Επομένως μπορούμε πια να ορίσουμε την απεικόνιση συνεκτίμησης (coevaluation) κάθε πεπερασμένης διάστασης διανυσματικού χώρου V ως τη γραμμική απεικόνιση $\delta_V : k \to V \otimes V^*$ που ορίζεται:

$$\delta_V(1) = \lambda^{-1}_{V,V}(id_V) = \sum_{i} v_i \otimes v^i \qquad (3.18)$$

και είναι εξ ορισμού ανεξάρτητη της επιλογής της βάσης.
Η ακόλουθη πρόταση προκύπτει άμεσα:

Πρόταση 1.3.8. Η σύνθεση απεικονίσεων:

$$k \otimes V \cong V \xrightarrow{\delta_V \otimes id_V} V \otimes V^* \otimes V \xrightarrow{id_V \otimes ev_V} V$$

είναι ισοδύναμη με την ταυτοτική απεικόνιση id_V. Ομοίως η:

$$V^* \xrightarrow{id_{V^*} \otimes \delta_V} V^* \otimes V \otimes V^* \xrightarrow{ev_V \otimes id_{V^*}} V^*$$

είναι η ταυτοτική απεικόνιση id_{V^*}.

Ορισμός 1.3.1. Έστω γραμμική απεικόνιση $f : U \to V$. Ορίζουμε την απεικόνιση αναστροφής $f^* : V^* \to U^*$ για κάθε $a \in V^*$, $u \in U$ ως:

$$\langle f^*(a), u \rangle = \langle a, f(u) \rangle \qquad (3.19)$$

Η f^* είναι εκείνη η μοναδική απεικόνιση για την οποία ισχύει ότι το τετράγωνο:

$$\begin{tikzcd}
V^* \otimes U \arrow[r, "f^* \otimes id_U"] \arrow[d, "id_{V^*} \otimes f"'] & U^* \otimes U \arrow[d, "ev_U"] \\
V^* \otimes V \arrow[r, "ev_V"] & k
\end{tikzcd} \qquad (3.20)$$

να μετατίθεται.

Σημείωση 1.3.2. Ένα σημαντικό αποτέλεσμα είναι ότι μπορούμε να εκφράσουμε την απεικόνιση αναστροφής ως συνδιασμό συνθέσεων μεταξύ των απεικονίσεων εκτίμησης-συνεκτίμησης:

$$V^* \xrightarrow{id_{V^*} \otimes \delta_U} V^* \otimes U \otimes U^* \xrightarrow{id_{V^*} \otimes f \otimes id_{U^*}} V^* \otimes V \otimes U^* \xrightarrow{ev_V \otimes id_{U^*}} U^*$$

Ορισμός 1.3.2. Έστω f μία γραμμική απεικόνιση από $V \otimes W$ στο $X \otimes Y$. Χρησιμοποιώντας τις βάσεις των διανυσματικών χώρων ορίζω τις μερικές αναστροφές ως τις απεικονίσεις:

$$f^{T_1} : X^* \otimes W \to V^* \otimes Y \quad \text{και} \quad f^{T_2} : V \otimes Y^* \to X \otimes W^*$$

Που αν έχουμε $f(u_i \otimes w_j) = \sum_{k,l} f_{ij}^{kl} x_k \otimes y_l$ ορίζονται ως:

$$f^{T_1}(x^i \otimes w_j) = \sum_{k,l} f_{kj}^{il} v^k \otimes y_l \tag{3.21}$$

και

$$f^{T_2}(v_i \otimes y^j) = \sum_{k,l} f_{il}^{kj} x_k \otimes w^l \tag{3.22}$$

από τις οποίες και προκύπτει ότι:

$$(f^{T_1})^{T_2} = (f^{T_2})^{T_1} = f^T$$

Παρατήρηση 1.3.3. Ο ισομορφισμός $\lambda_{V,V}$ του Πορίσματος 1.3.4.2. μας επιτρέπει να ορίσουμε το ίχνος ενός ενδομορφισμού του διανυσματικού χώρου πεπερασμένης διάστασης V. Το ίχνος $tr : End(V) \to k$ ορίζεται ως η σύνθεση των απεικονίσεων:

$$End(V) \xrightarrow{\lambda_{V,V}^{-1}} V^* \otimes V \xrightarrow{\tau_{V^*,V}} V \otimes V^* \xrightarrow{ev} k. \tag{3.23}$$

Πρόταση 1.3.9. Έστω f, g ενδομορφισμοί πεπερασμένης διάστασης διανυσματικού χώρουυ V.

- Το ίχνος ικανοποιεί τη σχέση:

$$tr(f \circ g) = tr(g \circ f) \tag{3.24}$$

- Εάν $(f_j^i)_{ij}$ είναι ο πίνακας της f στη βάση του V τότε:

$$tr(f) = \sum_i f_i^i \tag{3.25}$$

Παρατήρηση 1.3.4. Το ίχνος ενός ενδομορφισμού $f : V \to V$ μπορούμε με ανάλογο τρόπο να το ορίσουμε ως σύνθεση των απεικονίσεων:

$$k \xrightarrow{\delta} V \otimes V^* \xrightarrow{f \otimes id_{V^*}} V \otimes V^* \xrightarrow{\tau_{V,V^*}} V^* \otimes V \xrightarrow{ev} k$$

Τελειώνουμε την παράγραφο παρουσιάζοντας πως προκύπτουν τα μερικά ίχνη. Από το Θεώρημα 1.3.4. έχουμε ότι η απεικόνιση $f \otimes g \to \lambda(f \otimes g) \circ \tau_{U,V}$ είναι ένας ισομορφισμός $\overline{\lambda}$ από το $End(U) \otimes End(V)$ στο $End(U \otimes V)$. Κατά αυτόν τον τρόπο, ορίζω tr_1 και tr_2 μέσω του ακόλουθου μεταθετικού διαγράμματος.

$$\begin{tikzcd}
End(V) \arrow[d] & End(U \otimes V) \arrow[l, "tr_1"'] \arrow[r, "tr_2"] \arrow[d, "\overline{\lambda}"] & End(U) \arrow[d] \\
k \otimes End(V) & End(U) \otimes End(V) \arrow[l, "tr \otimes id"'] \arrow[r, "id \otimes tr"] & End(U) \otimes k
\end{tikzcd}$$

Ορισμός 1.3.3. Εάν $f(u_i \otimes v_j) = \sum_{k,l} f_{ij}^{kl} u_k \otimes v_l$ για κάποια βάση των U, V διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης τότε ορίζω τα μερικά ίχνη ως ακολούθως:

$$tr_1(f)(v_j) = \sum_{i,l} f_{ij}^{il} v_l \quad \text{και} \quad tr_2(f)(u_i) = \sum_{j,k} f_{ij}^{kj} u_k \qquad (3.26)$$

όπου $tr_1(tr_2(f)) = tr_2(tr_1(f)) = tr(f)$.

1.3.4 Τανυστικές και Συμμετρικές Άλγεβρες

Ορισμός 1.3.4. Έστω V ένας διανυσματικός χώρος.
Ορίζω $T^0(V) = k$, $T^1(V) = V$ και $T^n(V) = V^{\otimes n}$ (το τανυστικό γινόμενο n αντιγράφων του V) εάν $n > 1$. Ο κανονικός ισομορφισμός:

$$T^n(V) \otimes T^m(V) \cong T^{n+m}(V)$$

επάγει ένα προσεταιριστικό γινόμενο στον διανυσματικό χώρο $T(V) = \bigoplus_{n \geq 0} T^n(V)$ που δίνεται από:

$$(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)(x_{n+1} \otimes \cdots \otimes x_{n+m}) = x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes x_{n+1} \otimes \cdots \otimes x_{n+m} \qquad (3.27)$$

όπου τα $x_1, \ldots, x_{n+m} \in V$. Εφοδιασμένος με αυτό το γινόμενο ο διανυσματικός χώρος $T(V)$ παίρνει δομή άλγεβρας, η οποία καλείται **τανυστική άλγεβρα**.

Ορισμός 1.3.5. Έστω V διανυσματικός χώρος και $T(V)$ η τανυστική άλγεβρα του χώρου αυτού. Καλώ **συμμετρική άλγεβρα** τον χώρο πηλίκο $S(V) = T(V)/I(V)$, όπου το $I(V)$ είναι το αμφίπλευρο ιδεώδες που παράγεται από στοιχεία μορφής $xy - yx$ με τα x, y να τρέχουν στα διανύσματα του V.

Σημείωση 1.3.3. Μερικά αξιοσημείωτα αποτελέσματα πάνω στην θεωρία των τανυστικών αλγεβρών είναι τα ακόλουθα:

- Η άλγεβρα $T(V)$ είναι διαβαθμισμένη και το $T^n(V)$ ο υπόχωρος των ομογενών στοιχείων βαθμού n.
- Για κάθε άλγεβρα A και κάθε γραμμική απεικόνιση $f : V \to A$ υπάρχει μοναδικός μορφισμός αλγεβρών $\overline{f} : T(V) \to A$ τέτοιος ώστε $\overline{f} \circ i_V = f$ $(i_V : V \to V \otimes A)$. Δηλαδή:
$$Hom_{Alg}(T(V), A) \cong Hom(V, A)$$

Κεφάλαιο 2

Άλγεβρες Hopf

Οι Άλγεβρες $Hopf$ είναι το κεντρικό μαθηματικό αντικείμενο αυτής της εργασίας. Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε εκτενώς τη δομή τους, θεωρήματα και προτάσεις που τις αφορούν και κάποια σημαντικά παραδείγματα Hopf αλγεβρών.

2.1 Συνάλγεβρες και Διάλγεβρες

Έχουμε ήδη αναφέρει το σημαντικό ρόλο που παίζει το αξίωμα του Δυϊσμού στην κατηγορική κατασκευή μαθηματικών αντικειμένων και θεωρημάτων. Η έννοια της συνάλγεβρας δεν είναι τίποτα άλλο από τη δυϊκή δομή μίας άλγεβρας:

2.1.1 Δομή Συνάλγεβρας

Ορισμός 2.1.1. (α) Μία συνάλγεβρα είναι μία τριπλέτα (C, Δ, ϵ), όπου C είναι ένας διανυσματικός χώρος, $\Delta : C \to C \otimes C$ η γραμμική απεικόνιση που καλείται συμπολλαπλασιασμός (comultiplication), $\epsilon : C \to k$ η γραμμική απεικόνιση που καλείται συνταυτοτικό στοιχείο ή δυϊκή μονάδα (counit) και ικανοποιούν τις σχέσεις:

Συμπροσεταιριστικότητα

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"] & C \otimes C \arrow[d, "\Delta \otimes id"] \\
C \otimes C \arrow[r, "id \otimes \Delta"] & C \otimes C \otimes C
\end{tikzcd}$$

(1.1)

Συνταυτοτικό

$$\begin{tikzcd}
k \otimes C & C \otimes C \arrow[l, "\epsilon \otimes id"'] \arrow[r, "id \otimes \epsilon"] & C \otimes k \arrow[dl] \\
& C \arrow[ul] \arrow[u, "\Delta"] &
\end{tikzcd}$$

(1.2)

εάν επίσης το ακόλουθο τρίγωνο μετατίθεται τότε την ονομάζουμε συμμεταθετική συνάλγεβρα:

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "\Delta"'] \arrow[dr, "\Delta"] & \\
C \otimes C \arrow[rr, "\tau_{V,V}"] & & C \otimes C
\end{tikzcd}$$

(1.3)

(β) Αν έχω δύο συνάλγεβρες (C,Δ,ϵ), (C',Δ',ϵ') η γραμμική απεικόνιση $f : C \to C'$ είναι μορφισμός συναλγεβρών αν ισχύει ότι:

$$(f\otimes f)\circ(\Delta) = \Delta'\circ f \quad \text{και} \quad \epsilon = \epsilon'\circ f$$

Παράδειγμα 2.1.1.1. Κάποια βασικά παραδείγματα συναλγεβρών είναι τα ακόλουθα:

- (Συνάλγεβρα Σώμα) Το σώμα k έχει μία φυσική δομή συνάλγεβρας με $\Delta(1) = 1\otimes 1$ και $\epsilon(1) = 1$.
- (Αντίθετη Συνάλγεβρα) Για συνάλγεβρα (C,Δ,ϵ) προκύπτει η συνάλγεβρα (C,Δ^{op},ϵ), όπου $\Delta^{op} = \tau_{C,C}\circ\Delta$
- (Ελεύθερη Συνάλγεβρα) Έστω X σύνολο και $C = k\{X\} = \bigoplus_{x\in X} kx$ ο διανυσματικός χώρος ε βάση το X. Δίνουμε στον χώρο αυτό δομή συνάλγεβρας ως ακολούθως:
$$\Delta(x) = x\otimes x \qquad \epsilon(x) = 1, \quad x\in X$$
Αν πάρουμε τον δυϊκό χώρο αυτής της συνάλγεβρας τότε η C^* είναι η άλγεβρα των γραμμικών μορφών του C και καθορίζεται από τις τιμές στη βάση X. Έστω f, f' γραμμικές μορφές τότε:
$$(ff')(x) = \mu(f\otimes f')(x) = \bar{\lambda}(f\otimes f')(\Delta(x)) = f(x)f'(x)$$
- (Συνάλγεβρα Πινάκων) Έστω $A = M_n(k)$ η άλγεβρα πινάκων με στοιχεία εισόδου από σώμα k. Συμβολίζω με E_{ij} τους πίνακες με μηδενικά σε όλες τις εισόδους πλην της i γραμμής j στήλης όπου έχουν μονάδα. Οι E_{ij} αποτελούν βάση για $M_n(k)$. Έστω τώρα $\{x_{ij}\}$ βάση του A^*. Τότε η A^* έχει δομή συνάλγεβρας αν οριστεί:
$$\Delta(x_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} x_{ik}\otimes x_{kj}\,, \qquad \epsilon(x_{ij}) = \delta_{ij}$$
όπου:
$$\epsilon(x_{ij}) = x_{ij}(\eta(1)) = x_{ij}(\sum_k E_{kk}) = \sum_k \delta_{ik}\delta_{kj} = \delta_{ij}$$
και
$$\begin{aligned}\mu^*(x_{ij})(E_{kl}\otimes E_{mn}) &= x_{ij}(\mu(E_{kl}\otimes E_{mn}))\\ &= \delta_{lm}x_{ij}(E_{kn}) = \delta_{lm}\delta_{ik}\delta_{jn}\\ &= \sum_p \delta_{ik}\delta_{lp}\delta_{pm}\delta_{jn} = \sum_p x_{ip}(E_{kl})x_{pj}(E_{mn})\\ &= \bar{\lambda}(\sum_p x_{ip}\otimes x_{pj})(E_{kl}\otimes E_{mn})\end{aligned}$$
- (Τανυστικό Γινόμενο Συναλγεβρών) Το τανυστικό γινόμενο $C\otimes C'$ δύο συναλγεβρών (C,Δ,ϵ), (C',Δ',ϵ') έχει δομή συνάλγεβρας με συμπολλαπλασιασμό $(id\otimes\tau_{C,C'}\otimes id)\circ(\Delta\otimes\Delta')$ και συνταυτοτικό $\epsilon\otimes\epsilon'$.

Παρατήρηση 2.1.1. Από τα παραδείγματα (3-4) παρατηρείται μία σχέση μεταξύ των δυϊκών χώρων άλγεβρας-συνάλγεβρας και της συνεπακόλουθης αυτών δομής. Τελικά αυτές οι ιδιότητες γενικεύονται με τη μορφή των προτάσεων που ακολουθούν

Πρόταση 2.1.1. Ο δυϊκός διανυσματικός χώρος κάθε συνάλγεβρας είναι μία άλγεβρα.

Απόδειξη. Έστω (C, Δ, ϵ) συνάλγεβρα και $\lambda : C^* \otimes C^* \to (C \otimes C)^*$.
Θέτω $\bar{\lambda} = \lambda \circ \tau_{C^*, C^*}$ και ορίζω: $A = C^*$, $\mu = \Delta^* \circ \bar{\lambda}$, $\eta = \epsilon^*$. Είναι απλό να ελεγχθεί ότι κάτω από αυτές τις συνθήκες πράξεων η (A, μ, η) αποκτά δομή άλγεβρας.

Πρόταση 2.1.2. Ο δυϊκός διανυσματικός χώρος μίας πεπερασμένης άλγεβρας φέρει δομή συνάλγεβρας.

Απόδειξη. Έστω (A, Δ, η) πεπερασμένης διάστασης άλγεβρα. Τότε η απεικόνιση $\bar{\lambda} : A^* \otimes A^* \to (A \otimes A)^*$ είναι ισομορφισμός πράγμα που μας επιτρέπει να ορίσουμε το Δ ως $\Delta = \bar{\lambda}^{-1} \circ \mu^*$, ορίζω επίσης $\epsilon = \eta^*$. Η συμπροσεταιριστικότητα ισχύει καθώς το τρίγωνο:

$$\begin{tikzcd}
A^* \arrow[r, "\bar{\lambda}^{-1} \circ \mu^*"] \arrow[d, "\bar{\lambda}^{-1} \circ \mu^*"] & A^* \otimes A^* \arrow[d, "(\bar{\lambda}^{-1} \circ \mu^*) \otimes id"] \\
A^* \otimes A^* \arrow[r, "id \otimes (\bar{\lambda}^{-1} \circ \mu^*)"] & A^* \otimes A^* \otimes A^*
\end{tikzcd}$$

μετατίθεται. Ανάλογα δείχνεται και για το συνταυτοτικό στοιχείο.

Ορισμός 2.1.2. Έστω (C, Δ, ϵ) συνάλγεβρα. Ένας υπόχωρος I του C καλείται <u>συνιδεώδες</u> αν

$$\Delta(I) \subset I \otimes C + C \otimes I \quad \text{και} \quad \epsilon(I) = 0$$

Όταν I συνιδεώδες τότε Δ πέρνα μέσω απεικόνισης $\overline{\Delta}$ από το C/I στο:

$$C \otimes C/(I \otimes C + C \otimes I) \cong C/I \otimes C \otimes C/I$$

Ομοίως για $\bar{\epsilon} : C/i \to k$ τότε η τριπλέτα $(C/I, \overline{\Delta}, \bar{\epsilon})$ είναι μία συνάλγεβρα, η οποία καλείται <u>συνάλγεβρα πηλίκο</u>

Σημείωση 2.1.1. Με την πράξη του συμπολλαπλασιασμού στις συνάλγεβρες και ως επέκταση αυτών στις διάλγεβρες που θα δούμε παρακάτω, δημιουργείται μία δυσκολία στην ξεκάθαρη εποπτεία των τανυστικών γινομένων και των στοιχείων αυτών. Το πρόβλημα στη χρήση ή μη των κατάλληλων δεικτών έρχεται να απλοποιήσει και ουσιαστικά να λύσει η ακόλουθη σύμβαση.

Συμβολισμός:

Ο κανόνας του Sweedler (Sweedler's Sigma Notation) μας επιτρέπει να συμβολίζουμε ευκολότερα τις πράξεις συμπολλαπλασιασμού στην εκάστοτε συνάλγεβρα.

Έστω (C, Δ, ϵ) μία συνάλγεβρα και $x \in C$, $\Delta(x) \in C \otimes C$. Επομένως

$$\Delta(x) = \sum_{i} x_i^1 \otimes x_i^2$$

Σκοπός είναι να εξαφανίσουμε τους δείκτες, επομένως έχουμε:

$$\Delta(x) = \sum_{(x)} x^1 \otimes x^2$$

Κάτω από αυτή τη σύμβαση μπορούμε να αναπαραστήσουμε τη συμπροσεταιριστικότητα ως ακολούθως:

$$\sum_{(x)} \sum_{(x^1)} (x^1)^1 \otimes (x^1)^2 \otimes x^3 = \sum_{(x)} x^1 \otimes \sum_{(x^2)} (x^2)^1 \otimes (x^2)^2 = \sum_{(x)} x^1 \otimes x^2 \otimes x^3 \qquad (1.4)$$

Αν εφαρμόσουμε τον συμπολλαπλασιασμό στην (1.4) τότε παίρνουμε την έκφραση:

$$\sum_{(x)} \Delta(x^1) \otimes x^2 \otimes x^3 = \sum_{(x)} x^1 \otimes \Delta(x^2) \otimes x^3 = \sum_{(x)} x^1 \otimes x^2 \otimes \Delta(x^3) = \sum_{(x)} x^1 \otimes x^2 \otimes x^3 \otimes x^4$$

Γενικά ισχύει ότι $\Delta^{(n)} : C \to C^{\otimes(n+1)}$ και για $n \geq 1$ έχουμε $\Delta^{(1)} = \Delta$,

$$\Delta^{(n)} = (\Delta \otimes id_{C^{\otimes n-1}}) \circ \Delta^{(n-1)} = (id_{C^{\otimes n-1}} \otimes \Delta) \circ \Delta^{(n-1)}$$

Επομένως λόγω της σύμβασης θα έχουμε:

$$\Delta^{(n)}(x) = \sum_{(x)} x^{(1)} \otimes \cdots \otimes x^{(n+1)} \qquad (1.5)$$

Ομοίως το συνταυτοτικό στοιχείο ικανοποιεί τη σχέση:

$$\sum_{(x)} \epsilon(x^1)x^2 = x = \sum_{(x)} x^1 \epsilon(x^2) \qquad (1.6)$$

Άλλα παρόμοιο παραδείγματα χρήσης του συμβολισμού είναι η συμμεταθετική ιδιότητα και ο μορφισμός συναλγεβρών που διατυπώνονται αντίστοιχα παρακάτω:

$$\sum_{(x)} x^1 \otimes x^2 = \sum_{(x)} x^2 \otimes x^1$$

και αν $(f \otimes f) \circ \Delta = \Delta' \circ f$ ορίζει τον μορφισμό συναλγεβρών:

$$\sum_{(x)} f(x^1) \otimes f(x^2) = \sum_{(f(x))} f(x)^1 \otimes f(x)^2$$

2.1.2 Δομή Διάλγεβρας

Έστω H διανυσματικός χώρος εφοδιασμένος με δομή άλγεβρας (H, μ, η) και συνάλγεβρας (H, Δ, ϵ). Σε αυτή την παράγραφο θα επικεντρωθούμε σε δύο βασικές συνθήκες συμβατότητας μεταξύ των δύο δομών αυτών. Δίνουμε αρχικά στο $H \otimes H$ τις επαγόμενες δομές άλγεβρας και συνάλγεβρας τανυστικό γινόμενο που έχουν αναφερθεί.

Θεώρημα 2.1.3. *Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

- *Οι απεικονίσεις μ, η είναι μορφισμοί συνάλγεβρας.*
- *Οι απεικονίσεις Δ, ϵ είναι μορφισμοί άλγεβρας.*

Απόδειξη. Για να δειχθεί το ζητούμενο αρκεί να καταγράψουμε τα συμμεταθετικά διαγράμματα των παραπάνω ισχυρισμών. Το γεγονός ότι ο μ είναι μορφισμός συναλγεβρών είναι ισοδύναμο με τη συμμεταθετικότητα των δύο τετραγώνων:

$$\begin{tikzcd} H \otimes H \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "(id \otimes \tau \otimes id)(\Delta \otimes \Delta)"] & H \arrow[d, "\Delta"] \\ (H \otimes H) \otimes (H \otimes H) \arrow[r, "\mu \otimes \mu"] & H \otimes H \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H \otimes H \arrow[r, "\epsilon \otimes \epsilon"] \arrow[d, "\mu"] & k \otimes k \arrow[d, "id"] \\ H \arrow[r, "\epsilon"] & k \end{tikzcd}$$

Ομοίως το γεγονός ότι ο η είναι μορφισμός συναλγεβρών εκφράζεται από τη συμμεταθετικότητα των διαγραμμάτων:

$$\begin{tikzcd} k \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "id"] & H \arrow[d, "\Delta"] \\ k \otimes k \arrow[r, "\eta \otimes \eta"] & H \otimes H \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} k \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "id"'] & H \arrow[d, "\epsilon"] \\ & k \end{tikzcd}$$

Παίρνοντας τα ανάποδα βέλη και του ανάλογους μορφισμούς η απόδειξη ολοκληρώνεται:

$$\begin{tikzcd} H \otimes H & H \arrow[l, "\Delta"'] \\ (H \otimes H) \otimes (H \otimes H) \arrow[u, "(\mu \otimes \mu)(id \otimes \tau \otimes id)"] & H \otimes H \arrow[l, "\Delta \otimes \Delta"'] \arrow[u, "\mu"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H \otimes H & k \otimes k \arrow[l, "\eta \otimes \eta"'] \\ H \arrow[u, "\Delta"] & k \arrow[l, "\eta"'] \arrow[u, "id"'] \end{tikzcd}$$

αντίστοιχα για τον ε ως μορφισμό άλγεβρας έχω:

$$\begin{tikzcd} H \otimes H \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d, "\mu"] & k \otimes k \arrow[d, "id"] \\ H \arrow[r, "\epsilon \otimes \epsilon"] & k \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} k \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "id"'] & H \arrow[d, "\epsilon"] \\ & k \end{tikzcd}$$

Ορισμός 2.1.3. (α)Μία διάλγεβρα είναι μία πεντάδα $(H, \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$ όπου (H, μ, η) είναι άλγεβρα, (H, Δ, ϵ) είναι συνάλγεβρα και ικανοποιούνται οι συνθήκες του Θεωρήματος 2.1.3.
(β)Ένας μορφισμός διαλγεβρών είναι ταυτόχρονα μορφισμός αλγεβρών και μορφισμός συναλγεβρών για το εν λόγω υποκείμενο σύνολο.

Παρατήρηση 2.1.2. Έστω $(H, \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$ διάλγεβρα.
(α)Τότε οι:

$$H^{op} = (H, \mu^{op}, \eta, \Delta, \epsilon), \quad H^{cop} = (H, \mu, \eta, \Delta^{op}, \epsilon), \quad H^{opcop} = (H, \mu^{op}, \eta, \Delta^{op}, \epsilon)$$

είναι επίσης διάλγεβρες.
(β) Από τις προτάσεις 2.1.1. και 2.1.2. προκύπτει ότι αν επίσης H πεπερασμένος διανυσματικός χώρος, τότε ο H^* δυϊκός διανυσματικός χώρος της έχει δομή διάλγεβρας.

Παράδειγμα 2.1.2.1. Με βάση ήδη ορισμένες άλγεβρες-συνάλγεβρες παρατηρούμε ότι η δομή τους επεκτείνεται σε δομή διάλγεβρας ως ακολούθως:

- (Ελεύθερη Διάλγεβρα) Έστω ότι το τυχαίο σύνολο X που σχετίσαμε με τη συνάλγεβρα $k[X]$ έρχεται με δομή μονοειδούς, δηλαδή με μεταθετικό πολλαπλασιασμό $\mu : X \otimes X \to X$ και δεξιά και αριστερή μονάδα e. Τότε αυτό επάγει δομή άλγεβρας στην $k[X]$:

  $$\Delta(xy) = xy \otimes xy = (x \otimes x)(y \otimes y) = \Delta(x)\Delta(y)$$

  και $\epsilon(xy) = 1 = \epsilon(x)\epsilon(y)$ άρα Δ, ϵ μορφισμοί αλγεβρών και συνεπώς $k[X]$ διάλγεβρα. Αν επιπλέον X πεπερασμένο σύνολο τότε $k[X]^*$ έχει δομή διάλγεβρας.

- (Πολυωνιμική Διάλγεβρα) Έστω $M(n) = k[x_{11}, \ldots, x_{nn}]$, η πολυωνυμική άλγεβρα με n^2 μεταβλητές $\{x_{ij}\}_{1 \leq i,j \leq n}$ και ορίζω:

  $$\Delta(x_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} x_{ik} \otimes x_{kj} \quad \text{και} \quad \epsilon(x_{ij}) = \delta_{ij}$$

  Κατά αυτόν τον τρόπο η $\Delta : M(n) \to M(n) \otimes M(n)$ και $\epsilon : M(n) \to k$ είναι μορφισμοί αλγεβρών και έτσι εφοδιάζεται η $M(n)$ με δομή διάλγεβρας.

Θεώρημα 2.1.4. *Δοσμένου διανυσματικού χώρου V, υπάρχει μοναδική δομή διάλγεβρας στην τανυστική άλγεβρα $T(V)$ τέτοια ώστε $\Delta(v) = 1 \otimes v + v \otimes 1$ και $\epsilon(v) = 0$ για κάθε στοιχείο $v \in V$. Αυτή η διάλγεβρα είναι συμμεταθετική και για όλα τα $v_1, \ldots, v_n \in V$ έχουμε ότι:*

$$\epsilon(v_1 \cdots v_n) = 0 \qquad (1.7)$$

και

$$\Delta(v_1 \cdots v_n) = 1 \otimes v_1 \cdots v_n + \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{\sigma} v_{\sigma(1)} \cdots v_{\sigma(p)} \otimes v_{\sigma(p+1)} \cdots v_{\sigma(n)} + v_1 \cdots v_n \otimes 1 \qquad (1.8)$$

όπου το σ τρέχει σε όλες τις μεταθέσεις της συμμετρικής ομάδας S_n έτσι ώστε:

$$\sigma(1) < \sigma(2) < \cdots < \sigma(p) \text{ και } \sigma(p+1) < \sigma(p+2) < \cdots < \sigma(n)$$

Μία τέτοια μετάθεση σ καλείται $(p, n-p)$-ανακάτεμα (shuffle).

Απόδειξη. Από τον ορισμό και την καθολικότητα της τανυστικής άλγεβρας, υπάρχουν μοναδικοί μορφισμοί άλγεβρας $\Delta : T(V) \to T(V) \otimes T(V)$ και $\epsilon : T(V) \to k$ τέτοιοι ώστε οι περιορισμοί τους στο V να ικανοποιούν τους τύπους του θεωρήματος. Έστω $v_1, \dots, v_n \in V$. Η σχέση (1.7) είναι άμεση και τετριμένη συνέπεια του ορισμού της ε. Έστω $\Delta(v_1, \dots, v_n)$ κάνουμε επαγωγή στο n. Γνωρίζω ότι ισχύει για 1 και υποθέτω ότι ισχύει για $n-1 \geq 1$.

$$
\begin{aligned}
\Delta(v_1, \dots, v_n) &= \Delta(v_1 \cdots v_{n-1}) = \Delta(v_1 \cdots v_{n-1})(1 \otimes v_n + v_n \otimes 1) \\
&= \Big(1 \otimes v_1 \cdots v_{n-1} + \sum_{p=1}^{n-2} \sum_{\sigma} v_{\sigma(1)} \cdots v_{\sigma(p)} \otimes v_{\sigma(p+1)} \cdots v_{\sigma(n-1)} \\
&\quad + v_1 \cdots v_{n-1} \otimes 1\Big)(1 \otimes v_n + v_n \otimes 1) \\
&= 1 \otimes v_1 \cdots v_n + \sum_{p=1}^{n-2} \sum_{\sigma} v_{\sigma(1)} \cdots v_{\sigma(p)} \otimes v_{\sigma(p+1)} \cdots v_{\sigma(n-1)} v_n \\
+ v_1 \cdots v_{n-1} \otimes v_n + v_n \otimes v_1 \cdots v_{n-1} &+ \sum_{p=1}^{n-2} \sum_{\sigma} v_{\sigma(1)} \cdots v_{\sigma(p)} v_n \otimes v_{\sigma(p+1)} \cdots v_{\sigma(n-1)} \\
&+ v_1 \cdots v_n \otimes 1
\end{aligned}
$$

όπου το σ τρέχει σε όλο το $(p, n-1-p)$ ανακατέματα της S_{n-1}. Ξαναγράφοντας λοιπόν το τελευταίο άθροισμα έχουμε:

$$
\begin{aligned}
&1 \otimes v_1 \cdots v_n + \sum_{p=1}^{n-2} \sum_{\rho} v_{\rho(1)} \cdots v_{\rho(p)} \otimes v_{\rho(p+1)} \cdots v_{\rho(n-1)} v_n + v_1 \cdots v_{n-1} \otimes v_n \\
&+ v_n \otimes v_1 \cdots v_{n-1} + \sum_{p=1}^{n-2} \sum_{\tau} v_{\tau(1)} \cdots v_{\tau(p-1)} v_n \otimes v_{\tau(p)} \cdots v_{\tau(n-1)} + v_1 \cdots v_n \otimes 1
\end{aligned}
$$

όπου το ρ τρέχει σε όλο το $(p, n-1-p)$ ανακατέματα της S_{n-1} και τ τρέχει σε όλα τα $(p-1, n-p)$ ανακατέματα του συνόλου $\{1, \dots, n\} \setminus \{p\}$.

Παρατήρηση 2.1.3. Εάν το $\sigma \in S_n$ είναι ένα $(p, n-p)$-ανακάτεμα τότε είτε το $\sigma(n) = n$ και ως επέκταση αυτού ο περιορισμός $\rho \in S_{n-1}$ του σ είναι $(p-1, n-p)$-ανακάτεμα ή $\sigma(p) = n$ και άρα $\tau = \sigma$ που δρα στο σύνολο $\{1, \dots, n\} \setminus \{p\}$ είναι $(p-1, n-p)$-ανακάτεμα.

Η παρατήρηση ολοκληρώνει την απόδειξη του (1.8). Η συμμπροσεταιριστικότητα είναι αποτέλεσμα της χρήσης του (1.8) και εκτεταμένων πράξεων ενώ και η σχέση του συνταυτοτικού αποτέλεσμα πράξεων και με τα δύο (1.7-1.8). Τέλος η συμμεταθετικότητα του Δ είναι συνέπεια του γεγονότος ότι η μετάθεση

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & p & p+1 & p+2 & \cdots & n \\ p+1 & p+2 & \cdots & n & 1 & 2 & \cdots & p \end{pmatrix}
$$

αλλάζει τα $(p, n-p)$-ανακατέματα με τα $(n-p, p)$-ανακατέματα.

2.2 Θεωρία Αλγεβρών Hopf

2.2.1 Αντιποδικό και Συνέλιξη

Ορισμός 2.2.1. Δοσμένης μίας άλγεβρας (A, μ, η) και μίας συνάλγεβρας (C, Δ, ϵ) ορίζω μία διγραμμική απεικόνιση που καλείται **συνέλιξη** στον διανυσματικό χώρο $Hom(C, A)$. Εξ ορισμού αν οι f, g είναι γραμμικές απεικονίσεις τότε η συνέλιξη $f * g$ είναι η σύνθεση:

$$C \xrightarrow{\Delta} C \otimes C \xrightarrow{f \otimes g} A \otimes A \xrightarrow{\mu} A \qquad (2.1)$$

και με τη χρήση του κανόνα του Sweedler:

$$(f * g)(x) = \sum_{(x)} f(x^1)g(x^2) \qquad (2.2)$$

Πρόταση 2.2.1. (α) Η τριπλέτα $(Hom(C, A), *, \eta \circ \epsilon)$ είναι μία άλγεβρα.
(β)Η απεικόνιση $\lambda_{C,A} : A \otimes C^* \to Hom(C, A)$ του Πορίσματος 1.3.4.2. είναι μορφισμός αλγεβρών, όπου $A \otimes C^*$ είναι η άλγεβρα τανυστικό γινόμενο των A, C^*.

Απόδειξη. Από το (2.2), την προσεταιριστικότητα του γινομένου στο A και την συμπροσεταιριστικότητα του συμπολλαπλασιασμού στο C έχουμε:

$$((f * g) * h)(x) = \sum_{(x)} f(x^1)g(x^2)h(x^3) = (f * (g * h))(x)$$

πράγμα που δείχνει τη προσεταιριστικότητα της συνέλιξης. Η απεικόνιση $\eta \circ \epsilon$ είναι αριστερή μονάδα ως προς τη συνέλιξη:

$$((\eta\epsilon) * f)(x) = \sum_{(x)} \epsilon(x^1)f(x^2) = f\left(\sum_{(x)} \epsilon(x^1)x^2\right) = f(x)$$

ομοίως δείχνω ότι είναι και δεξιά μονάδα.
(β) Έστω $a, b \in A$ και $c, d \in C^*$. Τότε για κάθε $x \in C$ έχω:

$$\begin{aligned}
\lambda_{C,A}(a \otimes c) * \lambda_{C,A}(b \otimes d)(x) &= \sum_{(x)} c(x^1)d(x^2)ab \\
&= (cd)(x)ab \\
&= \lambda_{C,A}(ab \otimes cd)(x)
\end{aligned}$$

πράγμα που αποδεικνύει ότι η συνέλιξη διατηρείται ως πολλαπλασιασμός. Για την μονάδα ισχύει:

$$\lambda_{C,A}(1 \otimes \epsilon)(x) = \epsilon(x)1 = (\eta \circ \epsilon)(x)$$

Σημείωση 2.2.1. Εάν θέσουμε όπου $A \quad k$ η δομή άλγεβρας $(Hom(C, k), \quad, \eta \quad \epsilon)$ του δυϊκού διανυσματικού χώρου C είναι ίδια με τον τρόπο που ορίστηκε στην Πρόταση 2.1.1.

Ορισμός 2.2.2. Έστω $(H \;, \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$ μία διάλγεβρα. Ένας ενδομορφισμός S του H καλείται αντιποδικό για τη διάλγεβρα H αν:

$$S \quad id_H \quad id_H \quad S \quad \eta \quad \epsilon \qquad (2.3)$$

Μία διάλγεβρα εφοδιασμένη με αντιποδικό καλείται άλγεβρα Hopf. Ένας μορφισμός αλγεβρών Hopf είναι ο μορφισμός των υποκείμενων διαλγεβρών που μετατίθεται με τα αντιποδικά.

Παρατήρηση 2.2.1. (α) Μία διάλγεβρα δεν έχει απαραίτητα αντιποδικό αλλά αν εχει τότε έχει μοναδικό. Έστω S, S^1 δύο αντιποδικά, τότε:

$$S \quad S \quad (\eta\epsilon) \quad S \quad (id_H \quad S^1) \quad (S \quad id_H) \quad S^1 \quad (\eta\epsilon) \quad S^1 \quad S^1.$$

(β) Την Hopf άλγεβρα με το αντιποδικό S θα τη συμβολίζουμε με $(H \;, \mu, \eta, \Delta, \epsilon, S)$ Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Sweedler έχουμε:

$$\sum_{(x)} x^1 S(x^2) \quad \epsilon(x)1 \quad \sum_{(x)} S(x^1)x^2 \qquad (2.4)$$

για κάθε $x \in H$. Για κάθε Hopf άλγεβρα ισχύουν οι σχέσεις:

$$\sum_{(x)} x^{(1)} \otimes x^{(2)} \otimes S(x^{(3)}) \otimes x^{(4)} \otimes x^{(5)} \quad \sum_{(x)} x^{(1)} \otimes \epsilon(x^{(2)}) \otimes x^{(3)} \otimes x^{(4)}$$
$$\sum_{(x)} x^{(1)} \otimes x^{(2)} \otimes x^{(3)}$$

Πρόταση 2.2.2. Έστω H μία πεπερασμένης διάστασης άλγεβρα Hopf με αντιποδικό S. Τότε η H είναι μία άλγεβρα Hopf με αντιποδικό S .

Απόδειξη. Για κάθε $a \in H$ και $x \in H$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\sum_{(a)} a^1 S \; (a^2) \; (x) \quad & \sum_{(a)(x)} a^1(x^1)S \; (a^2)(x^2) \\
& \sum_{(a)(x)} a^1(x^1)a^2(Sx^2) \\
& a \quad \sum_{(x)} x^1 S(x^2) \\
& a(\eta\epsilon(x)) \\
& \epsilon \;\; \eta \;\; (a)(x)
\end{aligned}$$

Με αρκιβώς παραπλήσιο τρόπο λειτουργούμε για την απόδειξη της δεύτερης ισότητας.

Θεώρημα 2.2.3. *Έστω $(H, \mu, \eta, \Delta, \epsilon, S)$ μία Hopf άλγεβρα.*
(α) Το αντιποδικό S είναι μορφισμός διάλγεβρας από το H στο H^{opcop} και έχουμε:

$$S(xy) = S(y)S(x), \quad S(1) = 1 \qquad (2.5)$$

για κάθε $x, y \in H$ και

$$(S \otimes S)\Delta = \Delta^{op}S, \quad \epsilon \circ S = \epsilon \qquad (2.6)$$

(β) Εάν η H είναι μεταθετική ή συμμεταθετική τότε $S^2 = id_H$.

Απόδειξη. Θεωρώ απεικονίσεις $q, \rho \in Hom(H \otimes H, H)$:

$$q(x \otimes y) = S(y)S(x) \text{ και } \rho(x \otimes y) = S(xy)$$

όπου $x, y \in H$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $\rho = q$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\rho * \mu = \mu * q = \eta\epsilon$. Έχουμε:

$$\begin{aligned}(\rho * \mu)(x \otimes y) &= \sum_{(x \otimes y)} \rho((x \otimes y)')\mu((x \otimes y)'') = \sum_{(x)(y)} \rho(x' \otimes y')\mu(x'' \otimes y'') \\ &= \sum_{(x)(y)} S(x'y')x''y'' = \sum_{(xy)} S((xy)')(xy)'' = \eta\epsilon(xy).\end{aligned}$$

Από την άλλη έχουμε:

$$\begin{aligned}(\mu * q)(x \otimes y) &= \sum_{(x \otimes y)} \mu((x \otimes y)')q((x \otimes y)'') = \sum_{(x)(y)} x'y'S(y'')S(x'') \\ &= \sum_{(x)} x'\Big(\sum_{(y)} y'S(y'')\Big)S(x'') = \sum_{(x)} x'\epsilon(y)S(x'') \\ &= \eta\epsilon(x)\eta\epsilon(y) = \eta\epsilon(xy).\end{aligned}$$

Πράγμα που αποδεικνύει τη σχέση (2.5). Το να δείξουμε την (2.6) είναι ισοδύναμο με το να αποδείξουμε ότι: $\Delta \circ S = (S \otimes S) \circ \Delta^{op}$. Θέτω $r = \Delta \circ S$ και $n = (S \otimes S) \circ \Delta^{op}$. Αυτοί είναι γραμμικές απεικονίσεις από το H στο $H \otimes H$. Θα δείξουμε ότι $r = n$ που προκύπτει από το ότι $r * \Delta = \Delta * n = (\eta \otimes \eta)\epsilon$.

$$\begin{aligned}(r * \Delta)(x) &= \sum_{(x)} \Delta(S(x'))\Delta(x'') = \Delta\Big(\sum_{(x)} S(x')x''\Big) \\ &= \Delta(\eta\epsilon(x)) = ((\eta \otimes \eta)\epsilon)(x)\end{aligned}$$

για κάθε $x \in H$. Από την άλλη:

$$\begin{aligned}(\Delta * n)(x) &= \sum_{(x)} \Delta(x')(S \otimes S)(\Delta^{op}(x'')) = \sum_{(x)} (x' \otimes x'')(S(x'''') \otimes S(x''')) \\ &= \sum_{(x)} x'S(x'''') \otimes x''S(x''') = \sum_{(x)} x'S(x''') \otimes \epsilon(x'')1 \\ &= \sum_{(x)} x'\epsilon(x'')S(x''') \otimes 1 = \sum_{(x)} x'S(X'') \otimes 1 = \epsilon(x)1 \otimes 1 = ((\eta \otimes \eta)\epsilon)(x)\end{aligned}$$

Τέλος παίρνουμε ότι:

$$\epsilon(S(x)) = \epsilon S(\sum_{(x)} \epsilon(x^1)x^2) = \epsilon \sum_{(x)} \epsilon(x^1)S(x^2) = \epsilon(\eta\epsilon(x)) = \epsilon(x)$$

Η απόδειξη του (β) παραλείπεται. Μπορεί να βρεθεί στα [Rad76],[Abe04],[Taf71].

Παράδειγμα 2.2.1.1. Μερικά παραδείγματα Hopf αλγεβρών που γενικεύουν την ιδέα της διάλγεβρας είναι τα ακόλουθα:

- Έστω G μονοειδές και $k[G]$ η διάλγεβρα που περιγράφεται στο Παράδειγμα 2.1.2.1. (i). Τότε η $k[G]$ έχει αντοποδικό αν και μόνο αν κάθε $x \in G$ έχει αντίστροφο, δηλαδή αν και μόνο αν G είναι ομάδα:

$$x\,S(x) = S(x)\,x = \epsilon(x)1 = 1 \text{ για κάθε } x, y \in G \Rightarrow S(x) = x^{-1}.$$

- Η τανυστική άλγεβρα $H = T(V)$ είναι Hopf άλγεβρα με αντιποδικό $S(1) = 1$ και για κάθε $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ ως

$$S(v_1 v_2 \cdots v_n) = (-1)^n v_n \cdots v_2 v_1.$$

2.2.2 Πρότυπα Αλγεβρών Hopf

Έστω A μία άλγεβρα. Το τανυστικό γινόμενο $U \otimes V$ δύο A-προτύπων είναι ένα $A \otimes A$-πρότυπο που δίνεται από τη σχέση:

$$(a \otimes a')(u \otimes v) = au \otimes a'v$$

όπου $a, a' \in A$, $u \in U$, $v \in V$. Εάν τώρα η A διαθέτει και δομή διάλγεβρας $(A, \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$ τότε ο μορφισμός αλγεβρών $\Delta : A \to A \otimes A$ μας επιτρέπει να εφοδιάσουμε το $A \otimes A$-πρότυπο $U \otimes V$ με δομή A-προτύπου ως:

$$a(u \otimes v) = \Delta(a)(u \otimes v) = \sum_{(a)} a^1 u \otimes a^2 v.$$

ενώ αντίστοιχα το συνταυτοτικό ϵ εφοδιάζει κάθε διανυσματικό χώρο V με τετριμένη δομή A-προτύπου ως:

$$av = \epsilon(a)v, \quad a \in A, \ v \in V$$

Όλα αυτά μας δίνουν μία φυσική επέκταση της Πρότασης 1.3.2. για τα A-πρότυπα:

Πρόταση 2.2.4. Εάν A είναι μία διάλγεβρα, U, V και W A-πρότυπα και στο k δίνεται δομή τετριμένου A-προτύπου τότε οι κανονικοί ισομορφισμοί:

$$(U \otimes V) \otimes W \cong U \otimes (V \otimes W) \text{ και } k \otimes V \cong V \cong V \otimes k$$

είναι ισομορφισμοί A-προτύπων. Εάν επιπλέον η A είναι συμμεταθετική τότε και η $\tau_{V,W} : V \otimes W \to W \otimes V$ είναι ισομορφισμός A-προτύπων.

Παρατήρηση 2.2.2. Ένας αντιποδικός ενδομορφισμός μας επιτρέπει να δώσουμε μία φυσική δομή A-προτύπου στον διανυσματικό χώρο $Hom(V,V')$ όπου τα V,V' έχουν δομή A-προτύπων. Αρχικά παρατηρώ ότι:

$$(a\otimes a')f(v) = af(a'v) \qquad (2.7)$$

δίνει δομή $A\otimes A^{op}$-προτύπου στον $Hom(V,V')$.

$$((a\otimes a')(b\otimes b')f)(v) = (ab\otimes b'a')f(v) = abf(b'a'v)$$

$$= a((b\otimes b')f)(a'v) = ((a\otimes a')((b\otimes b')f))(v)$$

για κάθε $a,a',b,b'\in A$, $v\in V$ και $f\in Hom(V,V')$. Αν επιπλέον η A είναι μία Hopf άλγεβρα με αντιποδικό S τότε η απεικόνιση $(id\otimes S)\Delta: A\to A\otimes A^{op}$ μας επιτρέπει μέσω της σχέσης (2.7) να δώσουμε δομή A-προτύπου στην $Hom(V,V')$. Πιο συγκεκριμένα για $a\in A$, $v\in V$, και $f\in Hom(V,V')$ η δομή αυτή δίνεται από:

$$(af)(v) = \sum_{(a)} a' f(S(a'')v) \qquad (2.8)$$

Τέλος αν θέσουμε $V' = k$ τότε από την τετριμένη δομή A-προτύπου του k και τη σχέση (2.8) επάγεται δομή A-προτύπου στον V:

$$(af)(v) = f(S(a)v) \qquad (2.9)$$

άρα:

$$(af)(v) = \sum_{(a)} \epsilon(a')f(S(a'')v) = f(S(\sum_{(a)} \epsilon(a')a'')v) = f(S(a)v).$$

Πρόταση 2.2.5. Έστω $(A,\mu,\eta,\Delta,\epsilon,S)$ μία άλγεβρα Hopf και U,U',V,V' A-πρότυπα τέτοια ώστε τουλάχιστον ένα εκ των U ή U' και ένα εκ των V ή V' να είναι πεπερασμένης διάστασης διανυσματικός χώρος. Τότε η γραμμική απεικόνιση:

$$\lambda: Hom(U,U')\otimes Hom(V,V') \to Hom(V\otimes U, U'\otimes V')$$

είναι A-γραμμικό. Επιπλέον έχουμε ότι οι:

$$\tau_{U,V'}: U\otimes V' \to V'\otimes U \quad \text{και} \quad \lambda_{U,V}: V\otimes U \to Hom(U,V)$$

είναι A-γραμμικά.

Απόδειξη. Έστω $f:U\to U'$, $g:V\to V'$, $u\in U, v\in V$ και $a\in A$. Θα υπολογίσουμε τα $\lambda(a(f\otimes g))$ και $a\lambda(f\otimes g)$ για να ελέγξουμε αν το λ είναι A-γραμμικό:

$$\lambda(a(f\otimes g)) = \sum_{(a)} \lambda(a'f\otimes a''g)(v\otimes u) = \sum_{(a)} (a'f)(u)\otimes(a''g)(v)$$

$$= \sum_{(a)} (a')'f(S((a')'')u)\otimes (a'')'g(S((a'')'')v)$$

$$= \sum_{(a)} f(S(a'')u)\otimes a'''g(S(a'''')v)$$

Ομοίως από την άλλη μεριά:

$$\begin{aligned}
a\lambda(f\otimes g)(v\otimes u) &= \sum_{(a)} a_1\lambda(f\otimes g)(S(a_2)(v\otimes u))\\
&= \sum_{(a)} a_1\lambda(f\otimes g)(S(a_2)_1 v\otimes S(a_2)_2 u)\\
&= \sum_{(a)} a_1\lambda(f\otimes g)(S((a_2)_2)v\otimes S((a_2)_1)u)\\
&= \sum_{(a)} a_1\lambda(f\otimes g)(S(a_3)v\otimes S(a_2)u)\\
&= \sum_{(a)} a_1\cdot f(S(a_2)u)\otimes g(S(a_3)v)\\
&= \sum_{(a)} (a_1)_1 f(S(a_2)u)\otimes (a_1)_2 g(S(a_3)v)\\
&= \sum_{(a)} a_1 f(S(a_3)u)\otimes a_2 g(S(a_4)v).
\end{aligned}$$

αντικαθιστώντας το a_3 στο $\lambda(a(f\otimes g))$ με $\epsilon(a_3)$ και από (1.6) έχουμε ότι:

$$\lambda(a(f\otimes g)) = a\lambda(f\otimes g)$$

Για τις δύο ειδικές περιπτώσεις τ_{U^*,V^*}, $\lambda_{U,V}$ αντικαθιστουμε $U^* = V = k$ και $U = V^* = k$ αντίστοιχα και με τη χρήση Λήμματος 1.3.5. έχουμε το ζητούμενο.

Πρόταση 2.2.6. Έστω V ένα A-πρότυπο. Τότε η απεικόνιση εκτίμησης $ev_V : V^*\otimes V \to k$ είναι A-γραμμικό. Εάν επιπλέον ο διανυσματικός χώρος V είναι πεπερασμένης διάστασης τότε η απεικόνιση συνεκτίμησης $\delta_V : k \to V\otimes V^*$ και η σύνθεση:

$$Hom(V,W)\otimes Hom(U,V) \xrightarrow{\circ} Hom(U,W)$$

είναι A-γραμμικά επίσης.

Απόδειξη. Έστω $a\in A$, $v\in V$ και $c\in V^*$ τότε:

$$\begin{aligned}
ev_V(a(c\otimes v)) &= \sum_{(a)} ev_V(a_1 c\otimes a_2 v) = \sum_{(a)} (a_1 c)(a_2 v)\\
&= c\Big(\sum_{(a)} S(a_1)a_2 v\Big) = c(\epsilon(a)v) = \epsilon(a)c(v)
\end{aligned}$$

Από (2.4) και (2.9) συνεπάγεται ότι η απεικόνιση εκτίμησης είναι A-γραμμικό.

Η απεικόνιση δ_V είναι A-γραμμικό ως σύνθεση της μονάδας $\eta : k \to End(V)$ και του λ^{-1}_{V,V^*}. Η προηγούμενη πρόταση μας εξασφαλίζει ότι το τελευταίο είναι A-γραμμικό, όσο για το η έχουμε:

$$(a\eta(1))(v) = (a\, id_V)(v) = \sum_{(a)} a_1 id_V(S(a_2)v) = \sum_{(a)} a_1 S(a_2)v = \epsilon(a)v = (\eta(a1))(v)$$

για κάθε $v\in V$, $a\in A$. Τέλος για τη σύνθεση χρησιμοποιούμε το Λήμμα 1.3.6.

2.2.3 Συμπρότυπα και Σύνδραση

Αν αναλογιστούμε πάλι τη σημαντικότητα της δυϊκότητας των εννοιών, μπορούμε εύκολα να συμπεράνουμε ότι εφόσον οι άλγεβρες δρουν πάνω στα πρότυπα θα υπάρχει τρόπος με τον οποίο αντίστοιχα οι συνάλγεβρες συνδρούν πάνω στα συμπρότυπα.

Ορισμός 2.2.3. Έστω $(\mathcal{C}, \Delta, \epsilon)$ συνάλγεβρα.

(α) Ένα $\mathcal{C}$-συμπρότυπο είναι ένα ζεύγος (N, Δ_N) όπου ο N είναι ένας διανυσματικός χώρος και $\Delta_N : N \to C \otimes N$ η γραμμική απεικόνιση που καλείται σύνδραση του $\mathcal{C}$ στον N ώστε να ικανοποιείται ότι τα διαγράμματα:

Συμπροσεταιριστικότητα

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\Delta_N"] \arrow[d, "\Delta_N"] & \mathcal{C} \otimes N \arrow[d, "id \otimes \Delta_N"] \\ \mathcal{C} \otimes N \arrow[r, "\Delta \otimes id"] & \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} \otimes N \end{tikzcd} \qquad (2.10)$$

Συνταυτοτικό

$$\begin{tikzcd} k \otimes N & \mathcal{C} \otimes N \arrow[l, "\epsilon \otimes id"'] \\ & N \arrow[u, "\Delta"] \arrow[ul] \end{tikzcd} \qquad (2.11)$$

μετατίθενται.

(β) Έστω (N, Δ_N) και (N', Δ'_N) δύο $\mathcal{C}$-συμπρότυπα. Μία γραμμική απεικόνιση $f : N \to N'$ είναι ένας μορφισμός $\mathcal{C}$-συμπροτύπων εάν:

$$(id \otimes f) \circ \Delta_N = \Delta_{N'} \circ f \qquad (2.12)$$

(γ) Ένας υπόχωρος N' του $\mathcal{C}$-συμπροτύπου (N, Δ_N) καλείται υπο-συμπρότυπο του N εάν ισχύει:

$$\Delta_N(N') \subseteq \mathcal{C} \otimes N'.$$

Σημείωση 2.2.2. Επί της ουσίας ο τρόπος που ορίσαμε τα συμπρότυπα αφορά τα αριστερά συμπρότυπα. Με αντίστοιχο τρόπο ορίζονται τα δεξιά με απεικόνιση $\Delta'_N : N \otimes \mathcal{C} \to N$. Είναι προφανές ότι ένα δεξί $\mathcal{C}$-συμπρότυπο είναι ένα αριστερό συμπρότυπο στην αντίθετη συνάλγεβρα $\mathcal{C}^{op}$. Παρομοίως η σύνθεση μορφισμών συμπροτύπων είναι μορφισμός συμπροτύπων όπως και ο περιορισμός στο υπο-συμπρότυπο.

Παράδειγμα 2.2.3.1. Μερικά στοιχειώδη παραδείγματα που αφορούν τα συμπρότυπα και τη σύνδραση είναι τα ακόλουθα:

- Έστω $\mathcal{C}$ συνάλγεβρα και $\mathcal{C}^*$ ο δυϊκός διανυσματικός χώρος εφοδιασμένος με τη δομή άλγεβρας που αναφέρθηκε στην Πρόταση (2.1.1.). Εάν (N, Δ_N) είναι $\mathcal{C}$-συμπρότυπο τότε ο δυϊκός N^* διανυσματικός χώρος έχει τη δομή δεξιού $\mathcal{C}^*$-προτύπου που δίνεται από:

$$N^* \otimes \mathcal{C}^* \hookrightarrow (\mathcal{C} \otimes N)^* \xrightarrow{\Delta^*} N^* \qquad (2.13)$$

- Έστω A πεπερασμένης διάστασης άλγεβρα και A^* ο δυϊκός διανυσματικός με δομή συνάλγεβρας η οποία προκύπτει από την Πρόταση (2.1.2.). Εάν (M, μ_M) είναι δεξί A-πρότυπο τότε ο διανυσματικός χώρος M έχει τη δομή αριστερού A^*-συμπροτύπου:

$$M \xrightarrow{\mu_M^*} (M \otimes A)^* \xrightarrow{\lambda^{-1}} A^* \otimes M \qquad (2.14)$$

  δηλαδή πιο συγκεκριμένα, ο $(M, \mu_M^* \circ \lambda^{-1})$ είναι A^*-συμπρότυπο.

- (Τανυστικό Γινόμενο Συμπροτύπων) Έστω $(H, \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$ διάλγεβρα και M, N H-συμπρότυπα. Ορίζω $\Delta_{N \otimes M}$ έτσι ώστε:

$$\Delta_{M \otimes N} = (\mu \otimes id_{M \otimes N})(id_H \otimes \tau_{M,H} \otimes id_N)(\Delta_M \otimes \Delta_N) \qquad (2.15)$$

  Με αυτόν τον τρόπο το ζεύγος $(M \otimes N, \Delta_{M \otimes N})$ αποκτά δομή H-συμπροτύπου.

- (Ελεύθερο Συμπρότυπο) Έστω (C, Δ, ϵ) μία συνάλγεβρα. Το ελεύθερο C-συμπρότυπο ενός διανυσματικού χώρου V είναι το $(C \otimes V, \Delta \otimes id_V)$

- (Τετριμένο Συμπρότυπο) Έστω $(H, \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$ διάλγεβρα, M, N H-συμπρότυπα και V διανυσματικός χώρος. Η γραμμική απεικόνιση:

$$V = k \otimes V \xrightarrow{\eta \otimes id_V} H \otimes V \qquad (2.16)$$

  εφοδιάζει το V με δομή H-συμπροτύπου το οποίο καλούμε τετριμένο H-συμπρότυπο.

Η ακόλουθη πρόταση προκύπτει ως δυϊκός ισχυρισμός της Πρότασης 2.2.4.

Πρόταση 2.2.7. Έστω $(H, \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$ διάλγεβρα και M, N, P H-συμπρότυπα, k τετριμένο H-συμπρότυπο τότε οι κανονικοί ισομορφισμοί:

$$(M \otimes N) \otimes P \cong M \otimes (N \otimes P) \quad \text{και} \quad k \otimes M \cong M \cong M \otimes k$$

είναι ισομορφισμοί H-συμπροτύπων. Εάν επιπλέον η διάλγεβρα H είναι μεταθετική τότε η $\tau_{M.N} : M \otimes N \to N \otimes M$ είναι ισομορφισμός H-συμπροτύπων.

Παρατήρηση 2.2.3. Είναι θεμιτό να χρησιμοποιούμε για τα συμπρότυπα το ίδιο είδος σύμβασης με αυτού που εισήχθει ως κανόνας του Sweedler. Έστω (C, Δ, ϵ) μία συνάλγεβρα και (N, Δ_N) ένα C-συμπρότυπο. Θα γράφουμε:

$$\Delta_N(x) = \sum_{(x)} x_C \otimes x_N \qquad (2.17)$$

για κάθε $x \in N$. Επομένως η συμπροσεταιριστικότητα (2.10) μπορεί να γραφεί ως:

$$\sum_{(x)} (x_C)^1 \otimes (x_C)^2 \otimes x_N = \sum_{(x)} x_C \otimes (x_N)_C \otimes (x_N)_N \qquad (2.18)$$

για όλα τα $x \in N$. Ομοίως η (2.11) γίνεται:

$$\sum_{(x)} \epsilon(x_C) \otimes x_N = x \qquad (2.19)$$

Με ακριβώς ανάλογο τρόπο αν η f είναι γραμμική απεικόνιση $f : N \to N'$ μορφισμός C-συμπροτύπων εάν:

$$\sum_{(x)} x_C \otimes f(x_N) = \sum_{(x)} f(x)_C \otimes f(x)_{N'} \qquad (2.20)$$

Ορισμός 2.2.4. Έστω $(H, \mu_H, \eta_H, \Delta_H, \epsilon_H)$ διάλγεβρα και (A, μ_A, η_A) άλγεβρα. Λέμε ότι η A είναι μία H-άλγεβρα συμπρότυπο αν:

- Ο διανυσματικός χώρος A έχει δομή H-συμπροτύπου δοσμένη από απεικόνιση $\Delta_A : A \to H \otimes A$.
- Οι απεικονίσεις $\mu_A : A \otimes A \to A$, $\eta_A : k \to A$ είναι μορφισμοί H-συμπροτύπων όπου η άλγεβρα τανυστικό γινόμενα $A \otimes A$ και το σώμα k παίρνουν τη δομή συμπροτύπου με τον τρόπο που αναφέρθηκε στο Παράδειγμα 2.2.3.1. (iii).

Πρόταση 2.2.8. Έστω H μία διάλγεβρα και A μία άλγεβρα. Τότε η A είναι H-άλγεβρα συμπρότυπο εάν και μόνο αν:

- Ο διανυσματικός χώρος A γίνεται H-συμπρότυπο με απεικόνιση $\Delta_A : A \to H \otimes A$.
- Η απεικόνιση $\Delta_A : A \to H \otimes A$ είναι μορφισμός αλγεβρών.

Απόδειξη. Αρχικά δείχνω ότι ο μ_A είναι μορφισμός H-συμπροτύπων μέσω του μεταθετικού διαγράμματος:

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "\mu_A"] \arrow[d, "u"] & A \arrow[d, "\Delta_A"] \\ H \otimes (A \otimes A) \arrow[r, "id_H \otimes \mu_A"] & H \otimes A \end{tikzcd}$$

όπου $u = (\mu_H \otimes id \otimes id) \otimes (id_H \otimes \tau_{A,H} \otimes id_A) \otimes (\Delta_A \otimes \Delta_A)$. Το γεγονός ότι η_A είναι μορφισμός H-συμπροτύπων είναι ισοδύναμο με τη μεταθετικότητα του:

$$\begin{tikzcd} k \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d] & A \arrow[d, "\Delta_A"] \\ k \otimes k \arrow[r, "\eta_H \otimes \eta_A"] & H \otimes A \end{tikzcd}$$

Τέλος παρατηρούμε ότι τα δύο προηγούμενα διαγράμματα έχουν την ίδια έκφραση με τα διαγράμματα που προκύπτουν από το ότι η Δ_A είναι μορφισμός αλγεβρών:

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[r, "\Delta_A \otimes \Delta_A"] \arrow[d, "\mu_A"] & (H \otimes A) \otimes (H \otimes A) \arrow[d, "v"] \\
A \arrow[r, "\Delta_A"] & H \otimes A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
k \arrow[r] \arrow[d, "\eta_A"] & k \otimes k \arrow[d, "\eta_H \otimes \eta_A"] \\
A \arrow[r, "\Delta_A"] & H \otimes A
\end{tikzcd}$$

όπου $v = (\mu_H \otimes \mu_A) \circ (id \otimes \tau_{A \otimes H} \otimes id)$ και επιπλέον έχουμε ότι ισχύει:

$$(id \otimes \mu_A) \circ u = v \circ (\Delta_A \otimes \Delta_A).$$

Κεφάλαιο 3

Η Κβαντική Ομάδα $U_q(\mathfrak{sl}(2))$

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε εκτενώς την κατασκευή της κβαντικής ομάδας $U_q(sl(2))$ και των ιδιοτητών της ξεκινώντας από αναλυτικά αποτελέσματα και θεωρήματα σε ειδικές άλγεβρες πινάκων, ορίζοντας τις κβαντικά περιβάλλουσες άλγεβρες με βασικό σκοπό να καταλήξουμε στη θεωρία αναπαραστάσεων της. Οι αναπαραστασείς της $U_q(sl(2))$ θα συνδεθούν στο επόμενο κεφάλαιο με τις αναπαραστάσεις της επονομαζόμενης Κατηγορίας Άμματος.

3.1 Άλγεβρες Πινάκων

Για κάθε άλγεβρα $\mathcal{A}$ ορίζω την $M_2(\mathcal{A})$ να είναι η άλγεβρα 2×2 πινάκων με εισόδους από το $\mathcal{A}$. Ως σύνολο η $M_2(\mathcal{A})$ βρίσκεται σε 1-1 και επί αντιστοιχία με το σύνολο $\mathcal{A}^4$ των τετράδων του $\mathcal{A}$. Επάγεται φυσικός ισομορφισμός:

$$Hom_{Alg}(M(2), \mathcal{A}) \cong M_2(\mathcal{A}) \quad (3.1)$$

για κάθε μεταθετική άλγεβρα όπου $M(2)$ είναι η πολυωνιμκή άλγεβρα $k[a, b, c, d]$. Επί της ουσίας ο ισομορφισμός στέλενει τον επί μορφισμό αλγεβρών $f : M(2) \to \mathcal{A}$ στην:

$$\begin{pmatrix} f(a) & f(b) \\ f(c) & f(d) \end{pmatrix}$$

Ο πολλαπλασιασμός πινάκων είναι μία απεικόνιση $M_2(\mathcal{A}) \times M_2(\mathcal{A}) \to M_2(\mathcal{A})$ και θέλουμε να τον εκφράσουμε καθολικά στην $M(2)$. Το σύνολο $M_2(\mathcal{A}) \times M_2(\mathcal{A})$ βρίσκεται σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία με το $\mathcal{A}^8$ κι έτσι αναλόγως εισάγουμε την έννοια της πολυωνωμικής άλγεβρας:

$$M(2)^{\otimes 2} \cong k[a^1, a^2, b^1, b^2, c^1, c^2, d^1, d^2]$$

Σημείωση 3.1.1. Ξεκινάμε από ένα γενικό αποτέλεσμα για το πηλίκο μίας ελεύθερης άλγεβρας και τη σχέση του με το αντίστοιχο τανυστικό γινόμενο. Αυτό το αποτέλεσμα θα ειδικευθεί ώστε να δώσουμε στη συνέχεια μία δομή διάλγεβρας στις αντίστοιχες άλγεβρες πινάκων που μας απασχολούν.

Πρόταση 3.1.1. Έστω $\mathcal{A} = k\{X\}/I$ το πηλίκο της ελεύθερης άλγεβρα του συνόλου X. Δοσμένων δύο αντιγράφων X^1, X^2 του X και I^1, I^2 ιδεωδών των $k\{X^1\}$ και $k\{X^2\}$ αντίστοιχα, η άλγεβρα τανυστικό γινόμενο $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ είναι ισομορφική με την άλγεβρα:

$$\mathcal{A}^{\otimes 2} = k\{X^1 \coprod X^2\}/(I^1, I^2, X^1X^2 - X^2X^1)$$

όπου με $X^1 \coprod X^2$ συμβολίζουμε την ξένη ένωση των δύο αντιγράφων και όπου $X^1X^2 - X^2X^1$ είναι το αμφίπλευρο ιδεώδες που παράγεται από στοιχεία μορφής $x^1x^2 - x^2x^1$, $x^1 \in X^1$ και $x^2 \in X^2$.

Απόδειξη. Για κάθε $x \in X$ συμβολίζω ως το αντίστοιχο του αντίγραφο μέσα στον X^1 (ομοίως στον X^2) με x^1 (ομοίως με x^2). Θεωρώ $\phi^1(x) = x^1$, $\phi^2(x) = x^2$ που ορίζουν μορφισμούς άλγεβρας $\phi^1, \phi^2 : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^{\otimes 2}$. Αφού $x^1y^2 = y^2x^1$ από τον ορισμό της $\mathcal{A}^{\otimes 2}$, προκύπτει ότι:

$$\phi^1(x)\phi^2(y) = \phi^2(y)\phi^1(x) \text{ για κάθε ζεύγος } (x, y) \text{ στοιχείων του } X.$$

Γνωρίζουμε ότι υπάρχει μοναδικός μορφισμός άλγεβρας $\phi : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A}^{\otimes 2}$ ώστε $\phi(x \otimes y) = x^1y^2$.

Ανίστροφα, παίρνουμε έναν μορφισμό άλγεβρας $\psi : \mathcal{A}^{\otimes 2} \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ θέτοντας $\psi(x^1) = x \otimes 1$, $\psi(x^2) = 1 \otimes x$ όπου $x^1 \in X^1, x^2 \in X^2$. Εύκολα ελέγχεται ότι οι φ και ψ είναι αντίστροφος ο ένας του άλλου.

Πρόταση 3.1.2. Έστω $\Delta : M(2) \to M(2)^{\otimes 2}$ ο μορφισμός αλγεβρών ορισμένος ως:

$$\begin{array}{ll} \Delta(a) = a^1a^2 + b^1c^2 & \Delta(b) = a^1b^2 + b^1d^2 \\ \Delta(c) = c^1a^2 + d^1c^2 & \Delta(d) = c^1b^2 + d^1d^2 \end{array}$$

Τότε για κάθε μεταθετική άλγεβρα $\mathcal{A}$ ο μορφισμός Δ αντιστοιχεί στον πολλαπλασιασμό πινάκων της $M_2(\mathcal{A})$.

Θεωρώ την ομάδα αντιστρέψιμων πινάκων $GL_2(\mathcal{A})$ της $M_2(\mathcal{A})$.Όταν η $\mathcal{A}$ είναι μεταθετική ξέρουμε ότι ο πίνακας αντιστρέφεται αν η ορίζουσα είναι αντιστρέψιμη στο $\mathcal{A}$.

$$GL_2(\mathcal{A}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in M_2(\mathcal{A}) \mid \alpha\delta - \beta\gamma \in \mathcal{A}^* \right\}$$

και αντίστοιχα η $SL_2(\mathcal{A})$ είναι η υποομάδα της $GL_2(\mathcal{A})$ με ορίζουσα $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$.

Πρόταση 3.1.3. Ορίζω τις μεταθετικές άλγεβρες:

$$GL(2) = M(2)[t]/((ad - bc)t - 1)$$

και

$$SL(2) = M(2)/(ad - bc - 1) = GL(2)/(t - 1)$$

για κάθε μεταθετική άλγεβρα $\mathcal{A}$ υπάρχουν ισομορφισμοί:

$$Hom_{Alg}(GL(2), \mathcal{A}) \cong GL_2(\mathcal{A}) \text{ και } Hom_{Alg}(SL(2), \mathcal{A}) \cong SL_2(\mathcal{A})$$

που στέλνουν τον μορφισμό αλγεβρών f στον πίνακα

$$\begin{pmatrix} f(a) & f(b) \\ f(c) & f(d) \end{pmatrix}$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε για την $GL(2)$ καθώς αντίστοιχα αποδεικνύεται για την $SL(2)$. Έστω πίνακας $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \in GL_2(A)$. Αφού η A είναι μεταθετική, τότε υπάρχει μοναδικός μορφισμός αλγεβρών $f : M(2)[t] \to A$ τέτοιος ώστε:

$$f(a) = \alpha, \quad f(b) = \beta, \quad f(c) = \gamma, \quad f(d) = \delta \text{ και } f(t) = (\alpha\delta - \beta\gamma)^{-1}$$

Οπότε έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} f\big((ad - bc)t - 1\big) &= \big(f(a)f(d) - f(b)f(c)\big)f(t) - f(1) \\ &= (\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha\delta - \beta\gamma)^{-1} - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Πράγμα που συνεπάγεται ότι ο μορφισμός f περνάει μέσα από την άλγεβρα πηλίκο $GL(2)$. Τα υπόλοιπα είναι τετριμένα.

Σημείωση 3.1.2. Με απλούς υπολογισμούς πάνω στο αποτέλεσμα της Πρότασης 3.1.2. προκύπτει ότι:

$$\Delta(ad - bc) = (a^1d^1 - b^1c^1)(a^2d^2 - b^2c^2).$$

Έτσι περνάμε τη δομή ομάδας των $GL_2(A)$, $M_2(A)$ στις άλγεβρες $GL(2)$, $SL(2)$. Θεωρώ μεταθετικές άλγεβρες:

$$GL(2)^{\otimes 2} = M(2)^{\otimes 2}[t^1, t^2]/\big((a^1d^1 - b^1c^1)t^1 - 1, (a^2d^2 - b^2c^2)\big)$$

και

$$SL(2)^{\otimes 2} = GL(2)^{\otimes 2}/(t^1 - 1, t^2 - 1) = M(2)^{\otimes 2}/(a^1d^1 - b^1c^1 - 1, a^2d^2 - b^2c^2 - 1).$$

Πρόταση 3.1.4. Οι ακόλουθοι τύποι ορίζουν μορφισμούς άλγεβρας:

$$\Delta : GL(2) \to GL(2)^{\otimes 2} \text{ και } \Delta : SL(2) \to SL(2)^{\otimes 2}$$

Απόδειξη. Ο τύπος της Πρότασης 3.1.2. ορίζει έναν μορφισμό άλγεβρας $\Delta : M(2)[t] \to GL(2)^{\otimes 2}$ αρκεί να θέσουμε $\Delta(t) = t^1t^2$. Για να δειχθεί ότι το Δ περνάει μέσα από την $GL(2)$ ελέγχουμε την $\Delta((ad - bc)t - 1)$. Από τη Σημείωση 3.1.2. και τον ορισμό της $GL(2)^{\otimes 2}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \Delta((ad - bc)t - 1) &= (a^1d^1 - b^1c^1)(a^2d^2 - b^2c^2) - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Με παρόμοιο τρόπο δείχνεται και για την $SL(2)$.

3.1.1 Hopf Άλγεβρες $GL(2)$ και $SL(2)$

Σε αυτή την παράγραφο θα δούμε ότι οι άλγεβρες $GL(2), SL(2)$ εφοδιάζονται με φυσικό τρόπο με δομή άλγεβρας Hopf σύμφωνα και με όσα αναφέρθηκαν προηγουμένως.

Παρατήρηση 3.1.1. Σύμφωνα με τις Προτάσεις 3.1.1.-3.1.2. έχουμε ότι:

$$\begin{matrix} \Delta(a) & \Delta(b) \\ \Delta(c) & \Delta(d) \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \otimes \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}$$

και $\Delta(t) \quad t \otimes t$ για να δειχθεί ότι η Δ είναι συμπροσεταιριστική, αρκεί να ελέγξω για τους γεννήτορες a, b, c, d και t (όπου για t τετριμένο αφού είναι ομαδοειδές στοιχείο):

$$\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \otimes \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \quad \otimes \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \otimes \quad \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \otimes \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}$$

Έπειτα θεωρώ τις αντίστοιχες αλγεβρικές απεικονίσεις $\epsilon : GL(2) \to k, \epsilon : SL(2) \to k$ και τους μορφισμούς άλγεβρας:

$$S : GL(2) \to GL(2), \quad S : SL(2) \to SL(2)$$

που ορίζονται από τους τύπους:

$$\begin{matrix} \epsilon(a) & \epsilon(d) & \epsilon(t) & 1 & , & \epsilon(b) & \epsilon(c) & 0 \\ S(a) & (ad & bc)^{1} & d & , & S(b) & (ad & bc)^{1} \; b \\ S(d) & (ad & bc)^{1} & a & , & S(c) & (ad & bc)^{1} \; c \\ S(t) & t^{1} & (ad & bc) & & & & \end{matrix}$$

οπότε συγκεντρωτικά σε δομή πίνακα μας δίνουν:

$$\epsilon \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}, \qquad S \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \quad (ad \quad cb)^{1} \begin{matrix} d & b \\ c & a \end{matrix}$$

Τέλος η απόδειξη ότι το ϵ είναι μονάδα είναι προφανής όσο για το ότι το S είναι το αντιποδικό έγκειται στην ακόλουθη σχέση:

$$\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \quad \begin{matrix} S(a) & S(b) \\ S(c) & S(d) \end{matrix} \qquad \begin{matrix} S(a) & S(b) \\ S(c) & S(d) \end{matrix} \quad \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \epsilon(a) & \epsilon(b) \\ \epsilon(c) & \epsilon(d) \end{matrix}$$

3.1.2 Σύνδραση $SL(2)$ με Αφφινικό Επίπεδο

Θεώρημα 3.1.5. *Υπάρχει μοναδική δομή $M(2)$-άλγεβρας συμπρότυπο και $SL(2)$-άλγεβρας συμπρότυπο στο αφφινικό επίπεδο $A = k[x,y]$ έτσι ώστε:*

$$\Delta_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

δηλαδή ώστε να ικανοποιούνται οι σχέσεις:

$$\Delta_A(x) = a \otimes x + b \otimes y \quad \textit{και} \quad \Delta_A(y) = c \otimes x + d \otimes y \qquad (1.1)$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε κατα βάση το αποτέλεσμα της Πρότασης 2.2.8. Αρχικά παρατηρούμε ότι ο τύπος (1.1) ορίζει μορφισμό άλγεβρας:

$$\Delta_A : k[x,y] \to M(2) \otimes k[x.y].$$

Αφού η προβολή του $M(2)$ στο $SL(2)$ είναι μορφισμός άλγεβρας τότε το ίδιο ισχύει και για τη σύνθεση $k[x.y] \to SL(2) \otimes k[x,y]$.

Αυτό που μένει είναι να ελεγχθεί αν ο Δ_A ορίζει δομή συμπροτύπου, δηλαδή αν για κάθε $z \in k[x,y]$ έχουμε:

$$(id \otimes \Delta_A)\Delta_A(z) = (\Delta \otimes id)\Delta_A(z) \text{ και } (\epsilon \otimes id)\Delta_A(z) = 1 \otimes z \qquad (1.2)$$

όπου εδώ τα Δ, ϵ είναι αυτά που ορίσαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Αφού οι σχέσεις αποτελούνται μόνο από σύνθεση και πράξεις μορφισμών άλγεβρας τότε αρκεί να ελέγξω για $z = x$ και $z = y$. Οπότε έχουμε ότι:

$$(id \otimes \Delta_A)\Delta_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$= (\Delta \otimes id)\Delta_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

3.2 Κβαντικό Επίπεδο

Έχουμε ορίσει το αφφινικό επίπεδο, το οποίο υπόκειται στην τετριμένη σχέση μετάθεσης $xy = yx$. Σε αυτήν την ενότητα τροποποιούμε αυτή τη σχέση μετάθεσης σε μία νέα που εξαρτάται από μία παράμετρο q:

$$yx = q\, xy$$

Αυτή η νέα σχέση ορίζει το λεγόμενο κβαντικό επίπεδο και μέσω αυτού θα κατασκευάσουμε τις Hopf άλγεβρες $M_q(2), GL_q(2)$ και $SL_q(2)$ που είναι παραμορφώσεις μίας μεταβλητής των $M(2), GL(2)$ και $SL(2)$ αντιστοίχως. Αυτές είναι και τα στοιχειωδέστερα παραδείγματα κβαντικών ομάδων.

Ορισμός 3.2.1. Έστω q αντιστρέψιμο στοιχείο του σώματος k και έστω I_q αμφίπλευρο ιδεώδες της ελεύθερης άλγεβρας $k\langle x, y\rangle$ που γεννάται από στοιχείο $yx - qxy$. Ορίζω το κβαντικό επίπεδο (quantum plane) ως την άλγεβρα πηλίκο:

$$k_q[x, y] = k\langle x, y\rangle/(yx - qxy) = k\langle x, y\rangle/I_q \qquad (1.3)$$

όταν $q \neq 1$, η $k_q[x, y]$ δεν είναι μεταθετική.

Παρατήρηση 3.2.1. Εάν δώσουμε στην ελεύθερη άλγεβρα $k\langle x, y\rangle$ τη φυσική διαβάθμιση τότε το ιδεώδες I_q παράγεται από ομογενές στοιχείο βαθμού 2. Συνεπώς το κβαντικό επίπεδο έχει διαβάθμιση τέτοιοα ώστε οι γεννήτορες x, y να είναι βαθμού 1. Συμβολίζουμε με $k_q\langle x, y\rangle_n$ τον διανυσματικό υπόχωρο όλων των $n-$βαθμού στοιχείων του $k_q\langle x, y\rangle$

Πρόταση 3.2.1. (α) Εάν α είναι αυτομορφισμός του πολυωνυμικού δακτυλίου $k[x]$ ορισμένος ως $\alpha(x) = qx$ τότε η άλγεβρα $k_q[x, y]$ είναι ισομορφική με την Ore επέκταση $k[x][y, a, 0]$. Συνεπώς η $k_q[x, y]$ είναι Noetherian, δεν έχει διαιρέτες του μηδενός και το σύνολο των μονωνύμων $\{x^i y^j\}_{i,j\geq 0}$ είναι βάση για τον υποκείμενο διανυσματικό χώρο.
(β) Για κάθε ζεύγος (i, j) μη αρνητικών ακεραίων, έχουμε:

$$y^j x^i = q^{ij} x^i y^j \qquad (1.4)$$

(γ) Δοσμένης οποιασδήποτε $k-$άλγεβρας R, υπάρχει φυσική 1-1 και επί αντιστοιχία:

$$Hom_{Alg}(k_q[x, y], R) \cong \{(X, Y) \in R \times R \mid YX = qXY\} \qquad (1.5)$$

Ένα ζεύγος (X, Y) στοιχείων του R που υπόκειται στην σχέση $YX = qXY$ θα καλείται R-σημείο του κβαντικού επιπέδου.

Απόδειξη. (α) Χρησιμοποιούμε τη θεωρία των Ore επεκτάσεων που παρουσιάστηκε στην παράγραφο 1.2.3. και ορίζουμε μορφισμό άλγεβρα $\phi : k\langle x, y\rangle \to k[x][y, a, 0]$ ως $\phi(x) = x$, $\phi(y) = y$. Αφού:

$$\phi(y)\phi(x) - q\phi(x)\phi(y) = yx - qxy = \alpha(x)y - qxy = 0$$

τότε ο μορφισμός ϕ εξαφανίζεται στο ιδεώδες I_q, επομένως επεκτείνεται ο φ και ορίζεται ως μορφισμός άλγεβρας στο $k_q[x, y]$. Ο μορφισμός είναι επί αφού η επέκταση $k[x][y, \alpha, 0]$ παράγεται από τα x, y. Για να δειχθεί ότι είναι ισομορφισμός αρκεί να θεωρήσω απεικόνιση $\psi : k[x][y, \alpha, 0] \to k_q[x, y]$ έτσι ώστε $\psi \circ \phi = id$. Ορίζω ψ στη βάση $\{x^i y^j\}_{i,j\geq 0}$ του $k[x][y, \alpha, o]$ ως $\psi(x^i y^j) = x^i y^j$. Τα υπόλοιπα προκύπτουν ως πορίσματα των αποτελεσμάτων της παραγράφου 1.2.3.

Τέλος το (β) προκύπτει με επαγωγή ενώ το (γ) είναι άμεση συνέπεια της σχέσης 1-(2.8) και του Ορισμού 3.2.1.

3.2.1 Η Διάλγεβρα $M_q(2)$

Για αυτή την παράγραφο θα θεωρήσουμε ότι $q^2 \neq -1$. Ορίζω τώρα το q-ανάλογο της άλγεβρας $M(2)$ όπου στις παραμέτρους x, y προστίθεται η σχέση $yx = qxy$. Θεωρώ τις τέσσερεις μεταβλητές a, b, c, d που μετατίθεται με x και y και ορίζω x^1, y^1, x^2, y^2 χρησιμοποιώντας τις σχέσεις πίνακα:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ y^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad (1.6)$$

Θεώρημα 3.2.2. *Κάτω από τις προηγούμενες υποθέσεις έχουμε ότι υπάρχει μία ισοδυναμία μεταξύ:*

- *(i)Των σχέσεων $y^1x^1 = qx^1y^1$ και $y^2x^2 = qx^2y^2$*
- *(ii)Και των σχέσεων:*

$$ba = qab, \quad db = qbd, \qquad (1.7)$$
$$ca = qac, \quad dc = qcd, \qquad (1.8)$$
$$bc = cb, \quad ad - da = (q^{-1} - q)bc, \qquad (1.9)$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι η $(i) \Leftrightarrow (ii)$. Από (1.6) έχουμε ότι:

$$(cx + dy)(ax + by) = q(ax + by)(cx + dy)$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των x^2, y^2 και xy παίρνουμε ότι:

$$ca = qac, \; db = qbd, \; cb + qda = qad + q^2bc \qquad (1.10)$$

διαιρώντας την τελευταία σχέση με q έχουμε ότι:

$$ad - da = q^{-1}cb - qbc \qquad (1.11)$$

Με ανάλογο τρόπο δουλεύοντας με τα x^2, y^2 παίρνουμε τις άλλες τρεις σχέσεις. Το αντίστροφο προκύπτει με ανάλογους υπολογισμούς.

Ορισμός 3.2.2. (α) Η άλγεβρα $M_q(2)$ είναι το πηλίκο της ελεύθερης άλγεβρας $k\{a, b, c, d\}$ με το αμφίπλευρο ιδεώδες J_q που παράγεται από τις σχέσεις (1.7-1.9) του Θεωρήματος 3.2.2.

(β) Δοσμένης άλγεβρας R ορίζω τα R-σημεία του $M_q(2)$ ως μία τετράδα $(A, B, C, D) \in R^4$ τέτοια ώστε:

$$BA = qAB, \quad DB = qBD \qquad (1.12)$$
$$CA = qAC, \quad DC = qCD \qquad (1.13)$$
$$BC = CB, \quad AD - DA = (q^{-1} - q)BC \qquad (1.14)$$

Παρατήρηση 3.2.2. Από τον ορισμό της $M_q(2)$, το σύνολο των R-σημείων του $M_q(2)$ είναι ισομορφικό με το σύνολο $Hom_{Alg}(M_q(2), R)$. Ως επέκταση αυτού, μερικές φορές είναι πιο βολικό να γράφουμε ένα R-σημείο στη μορφή πίνακα:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \tag{1.15}$$

Έτσι, δοσμένου ενός R-σημείου m του $M_q(2)$ και μορφής (1.15), το στοιχείο:

$$det_q(m) = AD - q^{-1}BC = DA - qBC \tag{1.16}$$

καλείται **κβαντική ορίζουσα** του m.

Θεώρημα 3.2.3. *Υπάρχουν μορφισμοί αλγεβρών:*

$$\Delta : M_q(2) \to M_q(2) \otimes M_q(2) \quad \textit{και} \quad \epsilon : M_q(2) \to k$$

ορισμένοι κατά μοναδικό τρόπο ως:

$$\Delta(a) = a \otimes a + b \otimes c, \quad \Delta(b) = a \otimes b + b \otimes d \tag{1.17}$$

$$\Delta(c) = c \otimes a + d \otimes c, \quad \Delta(d) = c \otimes b + d \otimes d \tag{1.18}$$

$$\epsilon(a) = \epsilon(d) = 1, \quad \epsilon(b) = \epsilon(c) = 0 \tag{1.19}$$

Σημείωση 3.2.1. Το θεώρημα αποδεικνύεται με ανάλογο τρόπο όπως στην $M(2)$. Μερικές σημαντικές συνέπειες του θεωρήματος είναι:

- Εφοδιασμένη με αυτούς τους μορφισμούς η $M_q(2)$ παίρνει δομή διάλγεβρας που δεν είναι ούτε συμμεταθετική ούτε μεταθετική. Επιπλεόν έχουμε:

$$\Delta(det_q) = det_q \otimes det_q \;\text{ και }\; \epsilon(det_q) = 1 \tag{1.20}$$

- Μπορώ αντίστοιχα να ορίσω τις άλγεβρες:

$$GL_q(2) = M_q(2)[t]/(t\,det_q - 1) \;\text{ και }\; SL_q(2) = M_q(2)/(det_q - 1) = GL_q(2)/(t - 1)$$

  Οι οποίες υιοθετούν δομή διάλγεβρας από την $M_q(2)$ και γίνονται Hopf άλγεβρες με αντιποδικό S που ικανοποιεί τον τύπο:

$$\begin{pmatrix} S(a) & S(b) \\ S(c) & S(d) \end{pmatrix} = det_q^{-1} \begin{pmatrix} d & -qb \\ -q^{-1}c & a \end{pmatrix}$$

- (Σύνδραση με Κβαντικό Επίπεδο) Ως Πόρισμα των Θεωρημάτων 3.1.5-3.2.3 παίρνουμε ότι υπάρχουν μοναδικές δομές $M_q(2)$-άλγεβρας συμπρότυπο και $SL_q(2)$-άλγεβρας συμπρότυπο στο κβαντικό επίπεδο $k_q[x, y]$ ώστε:

$$\Delta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

3.3 Περιβάλλουσες Άλγεβρες

Ορισμός 3.3.1. (α) Μία άλγεβρα Lie L είναι ένας διανυσματικός χώρος με μία διγραμμική απεικόνιση $[\,,\,] : L \times L \to L$ που καλείται **αγκύλη Lie** που ικανοποιεί τις ακόλουθες δύο συνθήκες για κάθε $x, y, z \in L$:

- (αντισυμμετρική) $[x, y] = -[y, x]$
- (Ταυτότητα Jacobi) $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$

(β) Μία Lie υπάλγεβρα L' της Lie άλγεβρας L είναι ένας υπόχωρος της τέτοιος ώστε για κάθε ζεύγος $(x, y) \in L' \times L'$ να έχουμε ότι $[x, y] \in L'$. Ομοίως ένα ιδεώδες I της L είναι ο υπόχωρος της για τον οποίο ισχύει ότι:

$$\forall\, (x, y) \in L \times I \implies [x, y] \in L$$

(γ)Ένας μορφισμός Lie αλγεβρών $f : L \to L'$ είναι μία γραμμική απεικόνιση τέτοια ώστε:

$$f([x, y]) = [f(x), f(y)] \quad \forall\, x, y \in L$$

(δ) Μία άλγεβρα Lie είναι μεταθετική εάν η αγκύλη Lie της είναι μηδέν.

Παρατήρηση 3.3.1. Για κάθε άλγεβρα $\mathcal{A}$ μπορώ να θεωρήσω σχέση:

$$[a, b] = ab - ba \quad \forall\, a, b \in \mathcal{A}$$

Δείχνεται εύκολα ότι αυτή είναι αντισυμμετρική και ικανοποιεί την ταυτότητα Jacobi. Επίσης ικανοποιεί τη σχέση:

$$[a, bc] = [a, b]c + b[a, c] \text{ για κάθε } a, b, c \in \mathcal{A}$$

Αυτή η Lie άλγεβρα συμβολίζεται ως $L(\mathcal{A})$

Ορισμός 3.3.2. Σε κάθε άλγεβρα Lie L αντιστοιχώ μία άλγεβρα $U(L)$ η οποία καλείται **περιβάλλουσα άλγεβρα** και έναν μορφισμό αλγεβρών Lie $i_L : L \to L(U(L))$. Ορίζω την περιβάλλουσα άλγεβρα ως ακολούθως:

- Έστω $I(L)$ το αμφίπλευρο ιδεώδες της τανυστικής άλγεβρας $T(L)$ που παράγεται από στοιχεία μορφής: $xy - yx - [x, y]$ όπου $x, y \in L$. Ορίζω ως:

$$U(L) = T(L)/I(L)$$

- Ορίζω ως απεικόνιση i_L τη σύνθεση της κανονική εμφύτευσης της L στο $T(L)$ με τον κανονικό επιμορφισμό που στέλνει την $T(L)$ στην $U(L)$. Εξ ορισμού έχουμε ότι:

$$i_L([x, y]) = xy - yx$$

Θεώρημα 3.3.1. *Έστω L μία Lie άλγεβρα. Δοσμένης άλγεβρας $\mathcal{A}$ και τυχαίου μορφισμού Lie αλγεβρών $f : L \to L(\mathcal{A})$, υπάρχει μοναδικός μορφισμός αλγεβρών $\phi : U(L) \to \mathcal{A}$ τέτοιος ώστε: $\phi \circ i_L = f$.*

Μπορούμε με άλλα λόγια να διατυπώσουμε το Θεώρημα ως τον ισομορφισμό:

$$Hom_{Lie}(L, L(\mathcal{A})) \cong Hom(U(L), \mathcal{A})$$

Απόδειξη. Από τον ορισμό της τανυστικής άλγεβρας, η f επεκτείνεται στο μορφισμό άλγεβρας $\overline{f} : T(L) \to \mathcal{A}$ ορισμένη ως:

$$\overline{f}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = f(x_1) \cdots f(x_n), \quad \text{για } x_1, \ldots, x_n \in L$$

Η ύπαρξη της ϕ προκύπτει από το ότι $\overline{f}(I(L)) = \{0\}$. Για να αποδειχθεί αυτό, αρκεί να δείξουμε ότι $\overline{f}(x \otimes y - y \otimes x - [x, y])$ εξαφανίζεται για κάθε ζεύγος (x, y) στοιχείο του L.

$$\overline{f}(x \otimes y - y \otimes x - [x, y]) = f(x)f(y) - f(y)f(x) - f([x, y])$$

η οποία είναι μηδέν όταν η f είναι μορφισμός Lie αλγεβρών.

Η μοναδικότητα του φ έγκειται στο γεγονός ότι η L παράγει την $T(L)$ και μέσω αυτής την $U(L)$.

Πόρισμα 3.3.1.1. *(α) Για κάθε μορφισμό Lie αλγεβρών $f : L \to L'$, υπάρχει μοναδικός μορφισμός αλγεβρών $U(f) : U(L) \to U(L')$ έτσι ώστε: $U(f) \circ i_L = i_{L'} \circ f$. Επίσης έχουμε ότι $U(id_L) = id_{U(L)}$.*
(β) Εάν $f' : L' \to L''$ είναι άλλος μορφισμός Lie αλγεβρών τότε:

$$U(f' \circ f) = U(f') \circ U(f).$$

Απόδειξη. (α) Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 3.3.1. για $\mathcal{A}$ και για μορφισμό Lie αλγεβρών $i_{L'} \circ f$.

(β) Έχουμε:

$$U(f') \circ U(f) \circ i_L = U(f') \circ i_{L'} \circ f = i_{L''} \circ f' \circ f = U(f' \circ f) \circ i_L.$$

Το συμπέρασμα της μοναδικότητας του $U(f \circ f')$ προκύπτει από το (α), όπως και το ότι το $U(id_L)$ είναι η μονάδα του $U(L)$.

Πόρισμα 3.3.1.2. *Έστω L, L' Lie άλγεβρες και $L \oplus L'$ το ευθύ άθροισμα. Τότε:*

$$U(L \oplus L') \cong U(L) \otimes U(L').$$

Απόδειξη. Αρχικά κατασκευάζουμε έναν μορφισμό άλγεβρας:

$$\phi : U(L \oplus L') \to U(L) \otimes U(L')$$

Για κάθε $x \in L,\ x' \in L'$ θέτω:

$$f(x, x') = i_L(x) \otimes 1 + 1 \otimes i_{L'}(x')$$

Αυτός ο τύπος ορίζει γραμμική απεικόνιση $f : L \oplus L' \to U(L) \otimes U(L')$. Δείχνουμε τώρα ότι η f είναι μορφισμός Lie αλγεβρών. Για κάθε $x, y \in L,\ x', y' \in L'$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
[f(x,x'), f(y,y')] &= (i_L(x) \otimes 1 + 1 \otimes i_{L'}(x'))(i_L(y) \otimes 1 + 1 \otimes i_{L'}(y')) \\
&\quad - (i_L(y) \otimes 1 + 1 \otimes i_{L'}(y'))(i_L(x) \otimes 1 + 1 \otimes i_{L'}(x')) \\
&= [i_L(x), i_L(y)] \otimes 1 + 1 \otimes [i_{L'}(x'), i_{L'}(y')] \\
&= i_L([x,y]) \otimes 1 + 1 \otimes i_{L'}([x', y']) \\
&= f([x,y],[x',y']) = f([(x,x'),(y,y')]).
\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.3.1 παίρνουμε ένα μορφισμό άλγεβρας

$$\phi : U(L \oplus L') \to U(L) \otimes U(L')$$

Τώρα χρησιμοποιούμε την καθολική ιδιότητα του τανυστικού γινομένου δύο αλγεβρών προκειμένου να κατασκευάσουμε μορφισμό $\psi : U(L) \otimes U(L') \to U(L \oplus L')$. Οι συνθέσεις των κανονικών εμφυτεύσεων των L και L' αντίστοιχα στο $L \oplus L'$ με την απεικόνιση $i_{L \oplus L'}$ είναι μορφισμός Lie αλγεβρών. Επομένως από τη χρήση του Θεωρήματος υπάρχουν μορφισμοί αλγεβρών:

$$\psi_1 : U(L) \to U(L \oplus L') \text{ και } \psi_2 : U(L') \to U(L \oplus L')$$

τέτοιοι ώστε για κάθε $x \in L,\ x' \in L'$ να έχουμε:

$$\psi_1(x) = i_{L \oplus L'}(x, 0) \ \text{ και } \ \psi_2(x') = i_{L \oplus L'}(0, x').$$

Από την Πρόταση 1.3.7, ο τύπος $\psi(a \otimes a') = \psi_1(a)\psi_2(a')$ ορίζει μορφισμό άλγεβρας $\psi : U(L) \otimes U(L') \to U(L \oplus L')$ εάν δείξουμε ότι $\psi_1(a)\psi_2(a') = \psi_2(a')\psi_1(a)$. Για αυτό, παρατηρούμε ότι είναι αρκετό να δείξουμε πως τα $\psi_1(a)$ και $\psi_2(a')$ μετατίθενται όταν $a = x \in L$ και $a' = x' \in L'$.

$$\begin{aligned}
[\psi_1(x), \psi_2(x')] &= [i_{L \oplus L'}(x, 0), i_{L \oplus L'}(0, x')] \\
&= i_{L \oplus L'}([(x, 0), (0, x')]) \\
&= i_{L \oplus L'}([x, 0], [0, x']) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Έστω ο ενδομορφισμός $\psi \circ \phi : U(L \otimes L') \to U(L \otimes L')$. Έχουμε ότι για κάθε $x \in L,\ x' \in L'$:

$$\psi(\phi(x, x')) = \psi(x \otimes 1) + \psi(1 \otimes x') = i_{L \oplus L'}((x, 0) + (0, x')) = i_{L \oplus L'}(x, x').$$

Συνεπώς $\psi \circ \phi = id$. Με αντίστοιχο επιχείρημα δείχνουμε ότι $\phi \circ \psi = id$ και άρα η απόδειξη είναι πλήρης.

Παρατήρηση 3.3.2. Τα Πορίσματα 3.3.1.1-3.3.1.2 μας επιτρέπουν να εφοδιάσουμε με δομή Hopf άλγεβρας την περιβάλλουσα άλγεβρα $U(L)$. Ορίζουμε ως συμπολλαπλασιασμό $\Delta : U(L) \to U(L) \otimes U(L)$, την απεικόνιση

$$\Delta = \phi \circ U(\delta)$$

όπου $\delta : L \to L \oplus L$ είναι η διαγώνια απεικόνιση $x \to (x, x)$ και φ ο ισομορφισμός του Πορίσματος 3.3.1.1. Το συνταυτοτικό $\epsilon = U(0)$ όπου 0 είναι ο μηδενικός μορφισμός από το L στην Lie άλγεβρα $\{0\}$. Τέλος το αντιποδικό θα οριστεί ως $S = U(op)$ όπου $op : L \to L^{op}$ με $op(x) = -x$.

Η αντίθετη Lie άλγεβρα L^{op}ορίζεται από τον μεταθέτη $[\ ,\ ]^{op}$:

$$[x, y]^{op} = [y, x] = -[x, y].$$

Πρόταση 3.3.2. Η περιβάλλουσα άλγεβρα $U(L)$ είναι μία συμμεταθετική Hopf άλγεβρα με απεικονίσεις Δ, ϵ και S όπως ορίστηκαν προηγουμένως. Για $x_1, \ldots, x_n \in L$ έχουμε:

$$\Delta(x_1 \cdots x_n) = 1 \otimes x_1 \cdots x_n + \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{\sigma} x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(p)} \otimes x_{\sigma(p+1)} \cdots x_{\sigma(n)} + x_1 \cdots x_n \otimes 1$$

όπου το σ τρέχει στα (p, q) ανακατέματα της συμμετρικής ομάδας S_n και

$$S(x_1 \cdots x_n) = (-1)^n x_n \cdots x_2 x_1.$$

Απόδειξη. Από τη μεταθετικότητα των ακόλουθων διαγραμμάτων δείχνονται τα αξιώματα της προσεταιριστικότητας και του συνταυτοτικού:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\delta"] & L \otimes L \arrow[d, "id \otimes \delta"] \\ L \otimes L \arrow[r, "\delta \otimes id"] & L \otimes L \otimes L \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 0 \oplus L & L \oplus L \arrow[l, "0 \otimes id"'] \arrow[r, "id \otimes 0"] & L \oplus 0 \\ & L \arrow[ul] \arrow[u, "\delta"] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

ενώ η συμμεταθετικότητα οφείλεται στη μεταθετικότητα του τριγώνου:

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "\delta"'] \arrow[dr, "\delta"] & \\ L \oplus L \arrow[rr, "\tau"] & & L \oplus L \end{tikzcd}$$

Τέλος, ο τύπος του Δ προκύπτει από το Θεώρημα 2.1.4 ενώ εύκολα δείχνεται ότι κατά τον τρόπο που ορίστηκε το S ικανοποιεί τη σχέση 2-(2.4) και είναι αντιποδικό.

Για κάθε διανυσματικό χώρο V, συμβολίζω τη Lie άλγεβρα $L(End(V))$, όλων των ενδομορφισμών του V ως $\mathfrak{gl}(V)$. Όταν ο V είναι πεπερασμένης διάστασης n, τότε η $\mathfrak{gl}(V)$ είναι ισομορφική με την Lie άλγεβρα $\mathfrak{gl}(n) = L(M_n(k))$ των $n \times n$-πινάκων με εισόδους από σώμα k.

Ο μεταθέτης δύο πινάκων με μηδενικό ίχνος είναι μηδέν. Τον υπόχωρο της $\mathfrak{gl}(n)$ που αποτελείται από πίνακες μηδενικού ίχνους τον συμβολίζουμε με $\mathfrak{sl}(n)$ και αποτελεί μία Lie υπάλγεβρα της $\mathfrak{gl}(n)$. Αποδεικνύεται ότι:

- Οι ακόλουθοι πίνακες αποτελούν βάση για τη $\mathfrak{gl}(2)$:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  οι μεταθέτες αυτών υπολογίζονται:

$$[X,Y] = H, \quad [H,X] = 2X, \quad [H,Y] = -2Y, \quad [I,X] = [I,Y] = [I,H] = 0$$

- Από τον τρόπο ορισμού της $\mathfrak{sl}(2)$ φαίνεται ότι η $\{X,Y,H\}$ είναι βάση της και εξ αυτού η $\mathfrak{sl}(2)$ είναι ιδεώδες της $\mathfrak{gl}(2)$ ενώ υπάρχει ισομορφισμός Lie αλγεβρών:

$$\mathfrak{gl}(2) \cong \mathfrak{sl}(2) \oplus kI$$

- Η περιβάλλουσα άλγεβρα $U = U(\mathfrak{sl}(2))$ είναι ισομορφική με την άλγεβρα που γεννάται από τα στοιχεία X, Y, H και τις σχέσεις:

$$[X,Y] = H, \quad [H,X] = 2X, \quad [H,Y] = -2Y$$

- Οι ακόλουθες σχέσεις ισχύουν στην $U(\mathfrak{sl}(2))$:

$$\begin{aligned} X^p H^q &= (H-2p)^q X^p, \quad Y^p H^q = (H+2p)^q Y^p, \\ [X,Y^p] &= pY^{p-1}(H-p+1) = p(H+p-1)Y^{p-1}, \\ [X^P,Y] &= pX^{p-1}(H+p-1) = p(H-p+1)X^{p-1} \end{aligned}$$

Παραθέτουμε χωρίς απόδειξη το ακόλουθο Θεώρημα του οποίου η απόδειξη μπορεί να βρεθεί στα [Bou08],[Jac79]. Το (β) αποτελεί συνέπεια του (α) και ένας διαφορετικός τρόπος να δειχθεί είναι μέσω των Ore επεκτάσεων.

Θεώρημα 3.3.3. *Έστω L μία Lie άλγεβρα.*
(α) Η άλγεβρα $U(L)$ είναι φιλτραρισμένη ως πηλίκο της τανυστικής άλγεβρας $T(L)$ και η αντίστοιχη διαβαθμισμένη άλγεβρα είναι ισομορφική με τη συμμετρική άλγεβρα της L:

$$gr(U(L)) \cong S(L)$$

συνεπώς εάν $\{v_i\}$ είναι μία πλήρως διατεταγμένη βάση της L, $\{v_{i_1} \cdots v_{i_n}\}_{i_1 \leq \cdots \leq i_n \in I}$ είναι μία βάση της $U(L)$.
(β) Το σύνολο $\{X^i Y^j H^k\}_{i,j,k \in \mathbb{N}}$ είναι μία βάση του $U(\mathfrak{sl}(2))$.

3.3.1 Οι Αναπαραστάσεις της $U(\mathfrak{sl}(2))$

Ορισμός 3.3.3. Έστω V ένα U-πρότυπο και $\lambda \in k$ ένα βαθμωτό στοιχείο. Ένα διάνυσμα $v \neq 0$ του V καλείται **βάρους λ** εάν $Hv = \lambda v$. Εάν επιπλέον έχουμε ότι $Xv = 0$, τότε λέμε ότι το διάνυσμα v είναι **μέγιστο διάνυσμα βάρους** για βάρος λ.

Πρόταση 3.3.4. Κάθε μη-μηδενικό πεπερασμένης διάστασης $U-$ πρότυπο V, έχει κάποιο μέγιστο διάνυσμα βάρους.

Απόδειξη. Αφού το k είναι αλγεβρικά κλειστό και το V είναι πεπερασμένης διάστασης, τότε ο τελεστής H έχει ένα ιδιοδιάνυσμα $w \neq 0$ με ιδιοτιμή a : $Hw = aw$. Εάν $Xw = 0$, τότε το w είναι μέγιστο διάνυσμα βάρος και η απόδειξη είναι πλήρης. Διαφορετικά, θεωρώ την ακολουθία διανυσμάτων $X^n w$. Έχουμε ότι:

$$H(X^n w) = (a + 2n)(X^n w).$$

Συνεπώς, οι $(X^n w)_{n\geq 0}$ είναι ακολουθία ιδιοδιανυσμάτων του H με διακεκριμένες ιδιοτιμές. Αφού το V είναι πεπερασμένης διάστασης το H έχει πεπερασμένο αριθμό ιδιοτιμών άρα υπάρχει $n \in \mathbb{N}$: $X^n w \neq 0$, $X^{n+1} = 0$. Επομένως το διάνυσμα $X^n w$ είναι μέγιστο διάνυσμα βάρους.

Σημείωση 3.3.1. Έστω μέγιστο διάνυσμα βάρους v με βάρος λ. Για κάθε $p \in \mathbb{N}$ θεωρώ $v_p = \frac{1}{p!}Y^p v$. Από απλούς υπολογισμούς με τη χρήση του μεταθέτη αποδεικνύεται ότι:

$$Hv_p = (\lambda - 2p)v_p, \quad Xv_p = (\lambda - p + 1)v_{p-1}, \quad Yv_p = (p+1)v_{p+1}$$

Η απόδειξη του Θεωρήματος που ακολουθεί βασίζεται στη Σημείωση (μπορεί να δοθεί ως λήμμα) που προηγήθηκε και σε κάποια στοιχειώδη συμπεράσματα των διανυσματικών χώρων:

Θεώρημα 3.3.5. *(α) Έστω V πεπερασμένης διάστασης $U-$ πρότυπο που παράγεται από μέγιστο διάνυσμα βάρους v με βάρος λ. Τότε:*

- *Το βαθμωτό λ είναι ακέραιος ίσος με $dim(V) - 1$.*
- *Θεωρώντας $v_p = \frac{1}{p!}Y^p v$, έχουμε ότι $v_p = 0$ για $p > \lambda$ και επιπλέον $\{v = v_0, v_1, \ldots, v_\lambda\}$ είναι μία βάση του V.*
- *Κάθε άλλο διάνυσμα μέγιστου βάρους στο V είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του v και βάρους λ.*
- *Το πρότυπο V είναι απλό και ο τελεστής H που δρα στο V διαγωνοποιήσιμος με $(\lambda + 1)$ διακεκριμένες ιδιοτιμές $\{\lambda, \lambda - 2, \ldots, \lambda - 2\lambda = -\lambda\}$.*

(β) Κάθε απλό πεπερασμένης διάστασης U-πρότυπο παράγεται από μέγιστο διάνυσμα βάρους. Δύο πεπερασμένης διάστασης U-πρότυπα που παράγονται από μέγιστα διανύσματα βάρους που έχουν το ίδιο βάρος είναι ισομορφικά.

3.3.2 Κβαντική Περιβάλλουσα Άλγεβρα $U_q(\mathfrak{sl}(2))$

Επιλέγω ένα τυχαίο αντιστρέψιμο στοιχείο $q \in \mathbb{C}$ διαφορετικό των $1, -1$ και τέτοιο ώστε το κλάσμα $\frac{1}{q-q^{-1}}$ να είναι καλώς ορισμένο. Για κάθε ακέραιο n θεωρώ:

$$[n] = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}} = q^{n-1} + q^{n-3} + \cdots + q^{-n+1}$$

Παρατηρώ ότι εάν το q δεν είναι ρίζα της μονάδος τότε $[n] \neq 0$ για κάθε μη-μηδενικό ακέραιο. Αν q είναι ρίζα της μονάδος τότε υπάρχει d, ο μικρότερος ακέραιος: $q^d = 1$. Αφού υποθέτουμε ότι $q^2 \neq 1$ θα πρέπει $d > 2$. Ορίζω επίσης:

$$e = \begin{cases} d, & \text{εάν } d = 2k-1,\ k \in \mathbb{N} \\ d/2, & \text{εάν } d = 2k,\ k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Επομένως αν κάνουμε τη σύμβαση ότι $d = e = \infty$ όταν το q δεν είναι ρίζα της μονάδας τότε εύκολα ελέγχεται ότι ισχύει:

$$[n] = 0 \Leftrightarrow n \equiv 0 \mod e$$

Επίσης για $0 \leq k \leq n$ έχουμε τους συμβολισμούς:

$$[k]! = [1][2]\cdots[k], \quad [0]! = 1.$$

αντίστοιχα έχουμε ότι:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[k]![n-k]!}$$

Ορισμός 3.3.4. Ορίζω ως $U_q = U_q(\mathfrak{sl}(2))$ την άλγεβρα εκείνη που γεννάται από τις τέσσερεις μεταβλητές E, F, K, K^{-1} που ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$KK^{-1} = K^{-1}K = 1, \tag{3.1}$$

$$KEK^{-1} = q^2E, \quad KFK^{-1} = q^{-2}F, \tag{3.2}$$

$$[E, F] = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}} \tag{3.3}$$

Λήμμα 3.3.6. *Έστω $m \geq 0$ και $n \in \mathbb{Z}$. Στην U_q ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:*

$$E^mK^n = q^{-2mn}K^nE^m, \quad F^mK^n = q^{2mn}K^nF^m$$

$$\begin{aligned} [E, F^m] &= [m]F^{m-1}\frac{q^{-(m-1)}K - q^{m-1}K^{-1}}{q - q^{-1}} \\ &= [m]\frac{q^{m-1}K - q^{-(m-1)}K^{-1}}{q - q^{-1}}F^{m-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [E^m, F] &= [m]\frac{q^{-(m-1)}K - q^{m-1}K^{-1}}{q - q^{-1}}E^{m-1} \\ &= [m]E^{m-1}\frac{q^{m-1}K - q^{-(m-1)}K^{-1}}{q - q^{-1}} \end{aligned}$$

Ενώ οι δύο πρώτες σχέσεις του Λήμματος προκύπτουν από αναλυτικές πράξεις, οι επόμενες δύο προκύπτουν μέσω επαγωγής στο m.

Τώρα μπορούμε να περιγράψουμε κάποια βάση της U_q, δείχνοντας ότι η U_q προκύπτει μέσω επαναλαμβανόμενων Ore επεκτάσεων:

Πρόταση 3.3.7. Η άλγεβρα U_q είναι Noetherian χωρίς διαιρέτες του μηδενός. Το σύνολο t$E^iF^jK^l$u$_{i,j\mathsf{PN};l\mathsf{PZ}}$ είναι μία βάση της U_q.

Απόδειξη. Αρχικά ορίζω την A_0 $\quad k$rK, K ^{1}s. Ο στόχος είναι να κατασκευάσω μέσω αυτής δύο Ore επεκτάσεις A_1, A_2 , όπου A_1 € A_2 και η A_2 να είναι ισομορφική με το U_q.

Πρώτα παρατηρώ ότι η A_0 είναι Noetherian ως πολυωνυμική άλγεβρα. Η οικογένεια tK^lu$_{l\mathsf{PZ}}$ είναι βάση του A_0. Ορίζω αυτομορφισμό $a_1 : A_0$ Ñ A_0 ως:

$$a_1\mathsf{p}K\mathsf{q} \quad q^2K$$

Μέσω του αυτομορφισμού, φτιάχνω Ore έπεκταση A_1 $\quad A_0$r$F, a_1, 0$s όπου δέχεται βάση που αποτελείται από τα μονώνυμα tF^jK^lu$_{j\mathsf{PN},l\mathsf{PZ}}$.

Ορίζω απεικόνιση $\phi_1 : A_1$ Ñ A_0r$F, a_1, 0$s με $\phi_1\mathsf{p}K\mathsf{q} \quad K$, $\phi_1\mathsf{p}F\mathsf{q} \quad F$:

$$\phi_1\mathsf{p}F\mathsf{q}\phi_1\mathsf{p}K\mathsf{q} \quad q^2\phi_1\mathsf{p}K\mathsf{q}\phi_1\mathsf{p}F\mathsf{q} \quad FK \quad q^2KF \quad a_1\mathsf{p}K\mathsf{q}F \quad q^2FK \quad 0$$

επομένως η ϕ_1 ορίζει μορφισμό αλγεβρών.

Ο μορφισμός είναι επί αφού η A_0r$F, a_1, 0$s παράγεται από τα K^l, F^j όπου l P Z$, j$ P N. Για να δείξουμε ότι είναι ένας ισομορφισμός αρκεί να κατασκευάσω $\psi_1 : A_0$r$F, a_1, 0$s Ñ A_1 ώστε $\psi_1 \quad \phi_1 \quad id$. Για τον λόγο αυτό ορίζω ψ_1 στη βάση tF^jK^lu$_{j\mathsf{PN},l\mathsf{PZ}}$ του A_0r$F, a_1, 0$s ως:

$$\psi_1\mathsf{p}F^jK^l\mathsf{q} \quad F^jK^l$$

Έπειτα κατασκευάζω την Ore επέκταση A_2 $\quad A_1$rE, a_1, δs από αυτομορφισμό $a_1 : A_1$ Ñ A_1 ορισμένο ως:

$$a_1\mathsf{p}F^jK^l\mathsf{q} \quad q^{\ 2l}F^jK^l$$

και a_1-διαίρεση δ τέτοια ώστε:

$$\delta\mathsf{p}F\mathsf{q} \quad \frac{K \quad K^{\ 1}}{q \quad q^{\ 1}} \text{ και } \delta\mathsf{p}K\mathsf{q} \quad 0.$$

τότε στην A_2 ισχύει οι ακόλουθες σχέσεις:

$$EK \quad a_1\mathsf{p}K\mathsf{q}E \quad \delta\mathsf{p}K\mathsf{q} \quad q^{\ 2}KE$$

και

$$EF \quad a_1\mathsf{p}F\mathsf{q}E \quad \delta\mathsf{p}F\mathsf{q} \quad FE \quad \frac{K \quad K^{\ 1}}{q \quad q^{\ 1}}$$

Από αυτές τις σχέσεις συμπεραίνουμε ότι η A_2 είναι ισομορφική με την U_q. Όλα τα υπόλοιπα είναι αποτέλεσμα της εφαρμογής των Θεωρημάτων 1.2.4 (β)-1.2.7.

Παρατήρηση 3.3.3. Θα περίμενε κανείς να μπορούμε να ανακτήσουμε με φυσικό τρόπο την $U(\mathfrak{sl}(2))$ από την U_q θέτοντας όπου $q \to 1$, αυτό όμως δεν γίνεται κάτω από τον τρόπο που ορίσαμε την U_q. Για αυτό το λόγο δίνουμε μία ισοδύναμη παράσταση της U_q.

Πρόταση 3.3.8. *Η άλγεβρα U_q είναι ισομορφική με την άλγεβρα U_q^1 που παράγεται από της μεταβλητές E, F, K, K^{-1}, L και τις σχέσεις αυτών:*

$$KK^{-1} = K^{-1}K = 1, \tag{3.4}$$

$$KEK^{-1} = q^2E, \quad KFK^{-1} = q^{-2}F, \tag{3.5}$$

$$[E,F] = L, \quad (q - q^{-1})L = K - K^{-1}, \tag{3.6}$$

$$[L,E] = q(EK + K^{-1}E), \quad [L,F] = -q^{-1}(FK + K^{-1}F), \tag{3.7}$$

Απόδειξη. Θέτω

$$\phi(E) = E, \quad \phi(F) = F, \quad \phi(K) = K$$

και

$$\psi(E) = E, \quad \psi(F) = F, \quad \psi(L) = [E,F]$$

Είναι προφανές ότι η φ μας δίνει έναν καλώς ορισμένο μορφισμό αλγεβρών από το U_q στο U_q^1. Δείχνουμε ότι $\psi : U_q^1 \to U_q$ είναι καλώς ορισμένο. Αρκεί να ελέγξουμε αν κάτω από την εικόνα του μορφισμού οι σχέσεις (3.4-3.7) ισχύουν για την άλγεβρα U_q. Για τις (3.4-3.5) και την $[E,F] = L$ είναι προφανές ότι ισχύουν. Για τις υπόλοιπες σχέσεις έχω:

$$(q - q^{-1})\psi(L) = (q - q^{-1})[E,F] = K - K^{-1}.$$

που δείχνει την (3.6)(β) και:

$$\begin{aligned}
[\psi(L), \psi(E)] = [[E,F],E] &= \frac{1}{q - q^{-1}}[K - K^{-1}, E] \\
&= \frac{(q^2 - 1)EK + (q^2 - 1)K^{-1}E}{q - q^{-1}} \\
&= q(EK + K^{-1}E).
\end{aligned}$$

που δείχνει την (3.7)(α). Με παρόμοιο τρόπο δείχνεται το (3.7)(β). Με απλούς υπολογισμούς $\psi \circ \phi = id_{U_q}$ και $\phi \circ \psi = id_{U_q^1}$.

Πόρισμα 3.3.8.1. *Εάν $q = 1$, έχουμε ότι:*

$$U_1^1 \cong U[K]/(K^2 - 1) \text{ και } U \cong U_1^1/(K - 1).$$

Απόδειξη. Αρκεί να δείξω τον πρώτο ισομορφισμό. Το U_1^1 παράγεται από τα E, F, K, K^{-1}, L και τις σχέσεις (3.4-3.7) όπου όμως $q = 1$. Επομένως οι σχέσεις:

$$KK^{-1} = K^{-1}K = 1, \quad KEK^{-1} = E, \quad KFK^{-1} = F$$

δείχνουν ότι το K είναι κέντρο. Επιπλέον από την (3.6)(β) έχουμε:

$$K - K^{-1} = 0 \implies K^2 = 1$$

πράγμα που τελικά μας επιτρέπει να ορίσουμε τις σχέσεις (3.7) ως:

$$[L, E] = 2EK, \ [L, F] = -2FK$$

Έτσι παίρνουμε έναν ισομορφισμό $\phi^1 : U_q^1 \to U[K]/(K^2 - 1)$ στέλνοντας:

$$\phi^1(E) = XK, \ \phi^1(F) = Y, \ \phi^1(K) = K, \ \phi^1(L) = HK.$$

3.3.3 Οι Αναπαραστάσεις της U_q

Ο σκοπός είναι να εντοπίσουμε όλα τα πεπερασμένης διάστασης απλά U_q-πρότυπα. Θα περιοριστούμε στην βασική περίπτωση όπου το q δεν είναι ρίζα της μονάδος.

Για κάθε U_q-πρότυπο V και κάθε $\lambda \neq 0$, συμβολίζω με V^λ τον υπόχωρο όλων των v διανυσμάτων του V για τα οποία ισχύει $Kv = \lambda v$. Το βαθμωτό στοιχείο λ θα καλείται βάρος του V, εάν $V^\lambda \neq \{0\}$.

Λήμμα 3.3.9. *Έχουμε ότι $EV \subset V^{q^2\lambda}$ και $FV^\lambda \subset V^{q^{-2}\lambda}$.*

Απόδειξη. Για κάθε $v \in V^\lambda$ έχουμε ότι:

$$K(Ev) = q^2E(Kv) = q^2\lambda Ev \text{ και } K(Fv) = q^{-2}F(Kv) = q^{-2}\lambda Fv.$$

Ορισμός 3.3.5. Έστω V ένα U_q-πρότυπο και λ ένα βαθμωτό μέγεθος. Ένα στοιχείο $v \neq 0$ του V καλείται μέγιστο διάνυσμα βάρους για το βάρος λ, εάν $Ev = 0$ και $Kv = \lambda v$. Ένα U_q-πρότυπο είναι ένα πρότυπο μέγιστου βάρους με βάρος λ, εάν γεννάται από ένα μέγιστο διάνυσμα βάρους με βάρος λ.

Πρόταση 3.3.10. Κάθε μη-μηδενικό πεπερασμένης διάστασης U_q-πρότυπο V περιέχει ένα μέγιστο διάνυσμα βάρους. Επιπλέον,οι ενδομορφισμοί που επάγονται από τα E, F στο V είναι μηδενοδύναμοι.

Απόδειξη. Για το πρώτο κομμάτι της απόδειξης λειτουργούμε ακριβώς όπως στην απόδειξη της Πρότασης 3.3.4 και εκμεταλεύομαστε το Λήμμα 3.3.9 που μας εξασφαλίζει ότι στην αντίστοιχη $E^n w$ ακολουθία ιδιοδιανυσμάτων υπάρχουν διακεκριμένες ιδιοτιμές, επομένως αναγκαστικά $\exists\, n : E^n w = 0, \ E^{n-1} \neq 0$. Για να δείξουμε το δεύτερο ζητούμε αρκεί να δείξουμε ότι το 0 είναι η μοναδική πιθανή ιδιοτιμή. Έστω v μη-μηδενικό ιδιοδιάνυσμα για E με ιδιοτιμή $\lambda \neq 0$, τότε το ίδιο ισχύει και για το $K^n v$ με ιδιοτιμή $q^{-2n}\lambda$. Άρα ο ενδομορφισμός E θα έχει άπειρες διακεκριμένες ιδιοτιμές, άτοπο συνεπώς είναι μηδενοδύναμος. Ομοίως δουλεύουμε για το F.

Λήμμα 3.3.11. *Έστω v μέγιστο διάνυσμα βάρους με βάρος λ. Θέτω $v_0 = v$ και $v_p = \frac{1}{[p]!}F^p v$ για κάθε $p > 0$. Τότε:*

$$Kv_p = \lambda q^{-2p} v_p, \quad Ev_p = \frac{q^{-(p-1)}\lambda - q^{p-1}\lambda^{-1}}{q - q^{-1}} v_{p-1}, \quad Fv_{p-1} = [p]v_p.$$

Το προηγούμενο Λήμμα αποδεικνύεται με αναλυτικές πράξεις και χρήση του Λήμματος 3.3.6.

Τώρα ερχόμαστε στο κεντρικό αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου που είναι το U_q ανάλογο του Θεωρήματος 3.3.5 και δέχεται παραπλήσια απόδειξη με αυτή που παραλήφθηκε προηγουμένως.

Θεώρημα 3.3.12. *(α) Έστω V ένα πεπερασμένης διάστασης U_q-πρότυπο που γεννάται από μέγιστο διάνυσμα βάρους v με βάρος λ. Τότε:*

- *Το λ είναι βαθμωτό στοχείο της μορφής $\lambda = \epsilon q^n$ όπου $\epsilon = \pm 1$ και $n \in \mathbb{Z}$ με $dim(V) = n + 1$.*
- *Θέτοντας $v_p = \frac{1}{[p]!}F^p v$ έχουμε $v_p = 0\ \forall p > n$ και το $\{v_0, \dots, v_n\}$ αποτελεί βάση για το V.*
- *Ο τελεστής K που δρα στο V είναι διαγωνοποιήσιμος με $n + 1$ διακεκριμένες ιδιοτιμές $\{\epsilon q^n, \epsilon q^{n-2}, \dots, \epsilon q^{-n+2}, \epsilon^{-n+2}, \epsilon q^{-n}\}$.*
- *Κάθε άλλο μέγιστο διάνυσμα βάσης στο V είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του v με βάρους λ και το πρότυπο V είναι απλό.*

(β) Κάθε απλό πεπερασμένης διάστασης U_q-πρότυπο γεννάται από κάποιο μέγιστο διάνυσμα βάρους. Δύο U_q-πρότυπα που γεννιούνται από μέγιστα διανύσματα βάρους με ίδιο βάρος είναι ισομορφικά.

Απόδειξη. (α) Σύμφωνα με το Λήμμα 3.3.11, η ακολουθία $\{v_p\}_{p\geq 0}$ είναι ακολουθία ιδιοδιανυσμάτων για το K με διακεκριμένες ιδιοτιμές. Αφού το V είναι πεπερασμένης διάστασης θα πρέπει να υπάρχει κάποιο n τέτοιο ώστε $v_n \neq 0$, $v_{n+1} = 0$. Από τους τύπους το Λήμματος 3.3.11 έχουμε ότι $u_m = 0$, $\forall\, m > n$ και $v_m \neq 0\ \forall\, m \leq n$. Από το Λήμμα 3.3.11 πάλι έχουμε ότι:

$$0 = Ev_{n+1} = \frac{q^{-n}\lambda - q^{n}\lambda^{-1}}{q - q^{-1}} v_n.$$

Επομένως, $q^{-n}\lambda = q^n\lambda^{-1}$, το οποίο είναι ισοδύναμο με το $\lambda = \pm q^n$.

Οι σχέσεις του Λήμματος 3.3.11 εξασφαλίζουν ότι οποιοδήποτε στοιχείο του V, που παράγεται από το v ως πρότυπο, είναι γραμμικός συνδυασμός του συνόλου $\{v_i\}_{0\leq i\leq \lambda}$. Αφού για το λ δείξαμε ότι $\lambda = \pm q^n$, τότε $dimV = n + 1$ και το σύνολο $\{v_0, \dots, v_n\}$ αποτελεί βάση του V.Το ότι είναι διανωνοποιήσιμος ο K είναι πάλι συνέπεια του Λήμματος 3.3.11.

Έστω τώρα v' κάποιο άλλο μέγιστο διάνυσμα βάρους. Το v_i είναι ιδιοδιάνυσμα για τη δράση του K, συνεπώς είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο κάποιου v_i. Πάλι από το Λήμμα έχουμε ότι $Ev_i = 0 \Leftrightarrow i = 0$ και άρα είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του v.

Έστω V' κάποιο μη μηδενικό U_q-υποπρότυπο του V και έστω v' κάποιο μέγιστο διάνυσμα βάρους του V'. Τότε το v' είναι επίσης μέγιστο διάνυσμα βάρους για το V. Από το προηγούμενο ζητούμενο δείξαμε ότι v' πρέπει να είναι κάποιο βαθμωτό πολλπλάσιο του v και άρα $v \in V'$. Αφού το v παράγει την V τότε έχουμε ότι $V \subseteq V'$ πράγμα που δείχνει ότι το πρότυπο V είναι απλό.

(β) Έστω v μέγιστο διάνυσμα βάρους του V. Εάν το V είναι απλό, τότε το υποπρότυπο που παράγεται από το v θα είναι αναγκαστικά το ίδιο το V. Συνεπώς το V παράγεται από ένα μέγιστο διάνυσμα βάρους.

Εάν V, V^1 παράγονται από μέγιστα διανύσματα βάρους v, v^1 ιδίου βάρους λ, τότε η γραμμική απεικόνιση που στέλνει το $v_i \to v_i^1$ για κάθε i είναι ένας ισομορφισμός U-προτύπων.

Παρατήρηση 3.3.4. Το Θεώρημα 3.3.12 συνεπάγει ότι, πάνω από ισομορφισμούς, υπάρχει μοναδικό απλό U_q-πρότυπο διάστασης $n \quad 1$ που γεννάται από μέγιστο διάνυσμα βάρους για βάρος ϵq^n.

Συμβολίζουμε το πρότυπο αυτό με $V_{\epsilon,n}$ και τον μορφισμό αλγεβρών

$$\rho_{\epsilon,v} : U_q \to End(V_{\epsilon,q})$$

Παρατηρώ ότι οι τύποι του Λήμματος 3.3.11 μπορούν να γραφούν ως:

$$\begin{aligned} Kv_p &\quad \epsilon q^{n \quad 2p} v_p && (3.8) \\ Ev_p &\quad \epsilon [n \quad p \quad 1] v_{p \quad 1} && (3.9) \\ Fv_{p \quad 1} &\quad [p] v_p && (3.10) \end{aligned}$$

Ως ειδική περίπτωση έχουμε το $V_{\epsilon,0} \quad k$ όπου ο μορφισμός δίνεται:

$$\rho_{\epsilon,0}(K) \quad \epsilon, \quad \rho_{\epsilon,0}(E) \quad \rho_{\epsilon,0}(F) \quad 0$$

Για το $(n \quad 1)$-διάστασης πρότυπο $V_{\epsilon,n}$ οι γεννήτορες E, F και K δρουν μέσω τελεστών που μπορούν να αναπαραστηθούν στη βάση $\{v_0, v_1, \quad , v_n\}$ με τους πίνακες:

$$\rho_{\epsilon,n}(E) \quad \epsilon \begin{matrix} 0 & [n] & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & [n \quad 1] & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \end{matrix}, \qquad \rho_{\epsilon,n}(F) \quad \begin{matrix} 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & [2] & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & [n] & 0 \end{matrix}$$

και

$$\rho_{\epsilon,n}(K) \quad \epsilon \begin{matrix} q^n & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & q^{n \quad 2} & & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & q^{\quad n \quad 2} & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & q^{\quad n} \end{matrix}$$

3.4 Hopf Άλγεβρα $U_q(\mathfrak{sl}(2))$

Και σε αυτή την ενότητα θα περιοριστούμε στην περίπτωση όπου το q δεν είναι ρίζα της μονάδος. Βασικός στόχος είναι να δώσουμε μία δομή Hopf άλγεβρας στην άλγεβρα $U_q(\mathfrak{sl}(2))$ που περιγράφηκε προηγουμένως και να αναλύσουμε την έννοια της Ημιαπλότητας των U_q προτύπων.

Πρόταση 3.4.1. Οι ακόλουθες σχέσεις εφοδιάζουν την U_q με δομή Hopf άλγεβρας:

$$\Delta(E) = 1 \otimes E + E \otimes K, \quad \Delta(F) = K^{-1} \otimes F + F \otimes 1, \tag{4.1}$$
$$\Delta(K) = K \otimes K, \quad \Delta(K^{-1}) = K^{-1} \otimes K^{-1}, \tag{4.2}$$
$$\epsilon(E) = \epsilon(F) = 0, \quad \epsilon(K) = \epsilon(K^{-1}) = 1, \tag{4.3}$$
$$S(E) = -EK^{-1}, \quad S(F) = -KF, \quad S(K) = K^{-1}, \quad S(K^{-1}) = K \tag{4.4}$$

Απόδειξη. (α) Αρχικά δείχνω ότι το Δ ορίζει μορφισμό αλγεβρών από την U_q στην $U_q \otimes U_q$. Αρκεί να ελέγξω τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\Delta(K)\Delta(K^{-1}) = \Delta(K^{-1})\Delta(K) = 1, \tag{4.5}$$
$$\Delta(K)\Delta(E)\Delta(K^{-1}) = q^2\Delta(E), \tag{4.6}$$
$$\Delta(K)\Delta(F)\Delta(K^{-1}) = q^{-2}\Delta(F), \tag{4.7}$$
$$[\Delta(E), \Delta(F)] = \frac{\Delta(K) - \Delta(K^{-1})}{q - q^{-1}}. \tag{4.8}$$

Για την σχέση (4.5) είναι προφανές. Για την σχέση (4.6) έχω:

$$\begin{aligned}
\Delta(K)\Delta(E)\Delta(K^{-1}) &= (K \otimes K)(1 \otimes E + E \otimes K)(K^{-1} \otimes K^{-1}) \\
&= 1 \otimes KEK^{-1} + KEK^{-1} \otimes K \\
&= q^2(1 \otimes E + E \otimes K) \\
&= q^2\Delta(E).
\end{aligned}$$

Με παραπλήσιο τρόπο δείχνω την (4.7) ενώ τέλος η (4.8) προκύπτει ως:

$$\begin{aligned}
[\Delta(E), \Delta(F)] &= (1 \otimes E + E \otimes K)(K^{-1} \otimes F + F \otimes 1) \\
&\quad - (K^{-1} \otimes F + F \otimes 1)(1 \otimes E + E \otimes K) \\
&= K^{-1} \otimes EF + F \otimes E + EK^{-1} \otimes KF + EF \otimes K \\
&\quad - K^{-1} \otimes FE - K^{-1}E \otimes FK - F \otimes E - FE \otimes K \\
&= K^{-1} \otimes [E, F] + [E, F] \otimes K \\
&= \frac{K^{-1} \otimes (K - K^{-1}) + (K - K^{-1}) \otimes K}{q - q^{-1}} \\
&= \frac{\Delta(K) - \Delta(K^{-1})}{q - q^{-1}}
\end{aligned}$$

(β) Έπειτα πρέπει να ελέγξουμε αν η Δ ικανοποιεί το αξίωμα της συμπροσεταιριστικότητας. Αρκεί να δειχθεί για τους τέσσερεις γεννήτορες:

$$(\Delta \otimes id)\Delta(E) = (\Delta \otimes id)(1 \otimes E + E \otimes K) = 1 \otimes 1 \otimes E + 1 \otimes E \otimes K + E \otimes K \otimes K.$$

Ενώ από την άλλη μεριά έχουμε:

$$(id\otimes\Delta)\Delta(E) = (id\otimes\Delta)(1\otimes E + E\otimes K) = 1\otimes 1\otimes E + 1\otimes E\otimes K + E\otimes K\otimes K.$$

με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται και για τα υπόλοιπα.
(γ) Εύκολα ελέγχεται ότι το ϵ είναι μορφισμός αλγεβρών $\epsilon : U_q \to k$ και ότι ικανοποιεί το αξίωμα του ταυτοτικού.
(δ) Μένει να δειχθεί ότι το S είναι αντιποδικό για το U_q. Αρχικά ελέγχουμε αν το S είναι μορφισμός αλγεβρών από το $U_q \to U_q^{op}$, δηλαδή ότι επαληθεύονται οι σχέσεις:

$$S(K)S(K^{-1}) = S(K^{-1})S(K) = 1, \tag{4.9}$$
$$S(K)S(E)S(K^{-1}) = q^2S(E), \tag{4.10}$$
$$S(K)S(F)S(K^{-1}) = q^{-2}S(F), \tag{4.11}$$
$$[S(E), S(F)] = \frac{S(K)-S(K^{-1})}{q-q^{-1}}. \tag{4.12}$$

Δείχνουμε πως προκύπτει για τις σχέσεις (4.10) και (4.12):

$$S(K^{-1})S(E)S(K) = -K(EK^{-1})K^{-1} = -q^2EK^{-1} = q^2S(E)$$

και

$$\begin{aligned}[S(F), S(E)] &= KFEK^{-1} - EK^{-1}KF = [F, E] \\ &= \frac{K^{-1}-K}{q-q^{-1}} = \frac{S(K)-S(K^{-1})}{q-q^{-1}}.\end{aligned}$$

Τέλος δείχνουμε ότι το S είναι αντιποδικό. Αρκεί να το δείξουμε για τους γεννήτορες:

$$\begin{aligned}(S\ast id)(E) = \mu\circ(S\otimes id)(\Delta(E)) &= \mu(1\otimes E + S(E)\otimes K) \\ &= \mu(1\otimes E - EK^{-1}\otimes K) \\ &= E - EK^{-1}K = 0 = \eta\circ\epsilon(E)\end{aligned}$$

Ομοίως από την άλλη μεριά έχουμε:

$$\begin{aligned}(id\ast S)(E) = \mu\circ(id\otimes S)(\Delta(E)) &= \mu(1\otimes S(E) + E\otimes S(K)) \\ &= \mu(-1\otimes EK^{-1} + E\otimes K^{-1}) \\ &= -EK^{-1} + EK^{-1} = 0 = \eta\circ\epsilon(E)\end{aligned}$$

αντίστοιχα δείχνεται και για τους υπόλοιπους γεννήτορες

Σημείωση 3.4.1. Άξιο αναφοράς είναι ότι η Hopf άλγεβρα αυτή δεν είναι ούτε μεταθετική ούτε συμμεταθετική ενώ επίσης το τετράγωνο του αντιποδικού S δεν είναι ο ταυτοτικός μορφισμός. Πιο συγκεκριμένα ισχύει:

$$S^2(u) = KuK^{-1}, \qquad \forall\, u \in U_q$$

3.4.1 Ημιαπλότητα

Στόχος αυτής της παραγράφου είναι να δείξουμε ότι κάθε πεπερασμένης διάστασης U_q-πρότυπο παρίσταται ως ευθύ άθροισμα απλών U_q-προτύπων όταν το q δεν είναι ρίζα της μονάδος.

Πρόταση 3.4.2. Το στοιχείο:

$$C_q = EF + \frac{q^{-1}K + qK^{-1}}{(q-q^{-1})^2} = FE + \frac{qK + q^{-1}K^{-1}}{(q-q^{-1})^2}$$

καλείται κβαντικό στοιχείο Casimir και ανήκει στο *κέντρο* (Z_q) του U_q.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι το C_q μετατίθεται με τους γεννήτορες K, E, F. Η μετάθεση με το K είναι προφανής αφού $KEFK^{-1} = EF$. Όσο για το E έχουμε ότι:

$$EC_q = EFE + E\frac{qK + q^{-1}K^{-1}}{(q-q^{-1})^2} = EFE + \frac{q^{-1}K^{-1} + qK^{-1}}{(q-q^{-1})^2}E = C_qE.$$

Ανάλογο ισχυρισμό χρησιμοποιούμε και για το F.

Λήμμα 3.4.3. *Έστω U_q^K η υπάλγεβρα του U_q που αποτελείται από όλα τα στοιχεία του που μετατίθονται με το K. Κάθε στοιχείο του U_q ανήκει στο U_q^K αν και μόνο αν είναι μορφής:*

$$\sum_{i\geq 0} F^iP_iE^i \qquad (4.13)$$

όπου $P_0, P_1, \ldots$ είναι στοιχεία του $k[K, K^{-1}]$

Απόδειξη. Είναι συνέπεια του γεγονότος ότι το σύνολο $\{F^iK^lE^j\}_{i,j\in\mathbb{N};l\in\mathbb{Z}}$ αποτελεί βάση του U_q και του ότι: $K(F^iK^lE^j)K^{-1} = q^{2(j-i)}F^iK^lE^j$.

Λήμμα 3.4.4. *Έστω το αριστερό ιδεώδες $I = U_qE \cap U_q^K$ του U_q^K. Τότε έχουμε ότι:*

$$I = FU_q \cap U_q^K \quad \textit{και} \quad U_q^K = k[K, K^{-1}] \oplus I.$$

Απόδειξη. Έστω $u = \sum_{i\geq 0} F^iP_iE^i$ ένα στοιχείο του U_q. Εάν επίσης το u ανήκει στο U_qE τότε αναγκαστικά το $P_0 = 0$ και άρα το u ανήκει ταυτοχρόνως και στην $FU_q \cap U_q^K$ και αντιστρόφως. Αφού η μορφή (4.13) είναι μοναδική για κάθε στοιχείο του U_q^K τότε προκύπτει το ζητούμενο ευθύ άθροισμα.

Παρατήρηση 3.4.1. Από το γεγονός ότι $I = FU_q \cap U_q^K$ προκύπτει ότι το I είναι αμφίπλευρο ιδεώδες και ότι η προβολή $\phi : U_q^K \to k[K, K^{-1}]$ είναι μορφισμός αλγεβρών.

Αυτή η απεικόνιση φ καλείται *Harish-Chandra ομομορφισμός* και μας επιτρέπει να εκφράσουμε τη δράση του κέντρου Z_q σε ένα μέγιστο διάνυσμα βάρους.

Πρόταση 3.4.5. Έστω V ένα U_q-πρότυπο με μέγιστο βάρος λ. Τότε, για κάθε κεντρικό στοιχείο $z \in U_q$ και κάθε $v \in V$, έχουμε ότι:

$$zv = \phi(z)(\lambda)v.$$

Απόδειξη. Έστω v_0 ένα μέγιστο διάνυσμα βάρους που παράγει το V και έστω z κεντρικό στοιχείο του U_q. Το στοιχείο z μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$z = \phi(z) + \sum_{i>0} F^i P_i E^i.$$

Αφού $Ev_0 = 0$ και $Kv_0 = \lambda v_0$ παίρνουμε ότι $zv_0 = \phi(z)(\lambda)v_0$. Εάν v κάποιο τυχαίο στοιχείο του V, τότε έχουμε ότι $v = xv_0$ για κάποιο $x \in U_q$ συνεπώς:

$$zv = zxv_0 = xzv_0 = \phi(z)(\lambda)xv_0 = \phi(z)(\lambda)v.$$

Ως αποτέλεσμα της προηγούμενης πρότασης, το κεντρικό στοιχείο C_q μέσω του ομομορφισμού μας δίνει:

$$\phi(C_q) = \frac{qK + q^{-1}K^{-1}}{(q - q^{-1})^2}. \qquad (4.14)$$

και άρα η δράση του σε πρότυπο μέγιστου βάρους με βάρος λ είναι ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός με:

$$\frac{q\lambda + q^{-1}\lambda^{-1}}{(q - q^{-1})^2}$$

Λήμμα 3.4.6. *Υπάρχει κάποιο στοιχείο C που ανήκει στο κέντρο του U_q που δρα ως μηδενικό στο $V_{\epsilon,0}$ και ως μη-μηδενικό βαθμωτό στοιχείο στο $V_{\epsilon',n}$ όταν $n \in \mathbb{Z}$ και $\epsilon, \epsilon' = \pm 1$.*

Απόδειξη. Ορίζω:

$$C = C_q - \epsilon\frac{q + q^{-1}}{(q - q^{-1})^2}$$

Όμως το στοιχείο C_q δρα στο πρότυπο $V_{\epsilon,0}$ ως:

$$\epsilon\frac{q + q^{-1}}{(q - q^{-1})^2} - \epsilon\frac{q + q^{-1}}{(q - q^{-1})^2} = 0$$

και στο πρότυπο $V_{\epsilon',n}$ ως:

$$\epsilon'\frac{q^{n+1} + q^{-(n+1)}}{(q - q^{-1})^2} - \epsilon\frac{q + q^{-1}}{(q - q^{-1})^2}.$$

Αρκεί να δείξω ότι η τελευταία σχέση είναι διάφορη του 0. Έστω ότι είναι 0,τότε έχω:

$$q^{2n+2} - \epsilon\epsilon' q^{n+2} - \epsilon\epsilon' q^n + 1 = (q^{n+2} - \epsilon\epsilon')(q^n - \epsilon\epsilon') = 0.$$

Όμως η τελευταία ισότητα αντιβαίνει στις υποθέσεις, άτοπο.

Θεώρημα 3.4.7. *Όταν q δεν είναι ρίζα της μονάδος, κάθε πεπερασμένης διάστασης U_q πρότυπο είναι ημιαπλό.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι εάν V είναι κάποιο U_q-πρότυπο και V^1 είναι οποιοδήποτε υποπρότυπο του V, τότε υπάρχει άλλο υποπρότυπο V^2 τέτοιο ώστε το V να είναι ισομορφικό ως πρότυπο με το ευθύ άθροισμα $V^1 \oplus V^2$.

(i) Αρχικά δείχνουμε την ύπαρξη ενός τέτοιου υποπροτύπου V^2 στην περίπτωση που το V^1 είναι συνδιάστασης 1. Θα προχωρήσουμε κάνοντας επαγωγή στη διάσταση του V^1.

Εάν $dim(V^1) = 0$ επιλέγουμε $V^2 = V$. Εάν $dim(V^1) = 1$, τότε αναγκαστικά V^1 και V/V^1 είναι απλά πρότυπα διάστασης 1 με αντίστοιχα βάρη ϵ_1, ϵ_2. Εάν τα βάρη ϵ_1 και ϵ_2 είναι διαφορετικά, τότε υπάρχει βάση $\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ του V στην οποία το K δρα διαγώνια από το Θεώρημα 3.3.12. Αφού το Ev_i είναι ένα ιδιοδιάνυσμα για το K με ιδιοτιμή $\epsilon_i q^2 \neq \epsilon_j$, τότε πρέπει να έχουμε ότι $Ev_i = 0$ για $i = 1, 2$. Παρομοίως, ο F δρα με τετριμένο τρόπο στο V. Συνεπώς, το πρότυπο V είναι το ευθύ άθροισμα των προτύπων $V^1 = kv_1$ και $V^2 = kv_2$.

Διαφορετικά, υπάρχει βάση $\{v_1, v_2\}$ με $V^1 = kv_1$ τέτοια ώστε $Kv_1 = \epsilon v_1$ και $Kv_2 = \epsilon v_2 + av_1$. Ξανά έχουμε ότι το Ev_1 είναι ιδιοδιάνυσμα για το K και συνεπώς η ιδιοτιμή $\epsilon q^2 \neq \epsilon$ και άρα είναι μηδέν. Έστω $Ev_2 = \lambda v_1 + \mu v_2$, τότε έχουμε:

$$\epsilon\lambda v_1 + \mu(\epsilon v_2 + av_1) = KEv_2 = q^2EKv_2 = q^2E(\epsilon v_2 + av_1) = \epsilon q^2(\lambda v_1 + \mu v_2)$$

και από αυτό συνεπάγεται ότι $\mu\epsilon(q^2 - 1) = 0$ και $\lambda\epsilon(q^2 - 1) = \mu a$, που σημαίνει ότι $\lambda = \mu = 0$. Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι το F δρα ως 0 στο V. Αφού λοιπόν, το $[E, F]$ δρα ως 0, έχουμε ότι $K = K^{-1}$ στο V και πιο συγκεκριμένα έχουμε:

$$K^{-1}v_2 = \epsilon v_2 - av_1 \Rightarrow a = 0$$

Επομένως πάλι το K είναι διαγωνοποιήσιμος και άρα καταλήγουμε στο ίδιο συμπέρασμα με προηγουμένως.

Τώρα υποθέτουμε ότι $dim(V^1) = p > 1$ και ότι το ζητούμενο προς απόδειξη ισχύει για κάθε διάσταση $< p$. Επομένως είτε το V^1 είναι απλό ή όχι.

(α) Εάν το V^1 δεν είναι απλό τότε υπάρχει υποπρότυπο V_1 του V^1 τέτοιο ώστε $0 < dim(V_1) < dim(V^1) = p$. Έστω η κανονική προβολή $\pi : V \to \overline{V} = V/V_1$. Το πρότυπο $\overline{V^1} = \pi(V^1)$ είναι υποπρότυπο του $\overline{V}$ συνδιάστασης 1 και η διάσταση του είναι μικρότερη του p. Αυτό μας επιτρέπει μέσω της επαγωγικής υπόθεσης να βρούμε υποπρότυπο $\overline{V^2} \subset \overline{V}$ τέτοιο ώστε $\overline{V} = \overline{V^1} \oplus \overline{V^2}$. Μεταφέροντας τον ισομορφισμό στο V έχουμε ότι:

$$V = V^1 + \pi^{-1}(\overline{V^2}).$$

Αφού $dim(\overline{V^2}) = 1$, ο διανυσματικός χώρος V_1 είναι υποπρότυπο συνδιάστασης 1 του $\pi^{-1}(\overline{V^2})$. Επαναλαμβάνουμε την επαγωγική υπόθεση για να βρούμε υποπρότυπο V^2 του $\pi^{-1}(\overline{V^2})$ έτσι ώστε $\pi^{-1}(\overline{V^2}) = V_1 \oplus V^2$. Όμως $V = V^1 + V_1 + V^2$ και αφού το V_1 περιέχεται στο V^1 και επιπλεόν έχουμε ότι $dim(V) = dim(V^1) + dim(V^2)$ αυτό θα σημαίνει ότι είναι ευθύ άθροισμα, δηλαδή:

$$V = V^1 \oplus V^2.$$

(β) Υποθέτω ότι το υποπρότυπο V^1 είναι απλό διάστασης > 1. Το πρότυπο πηλίκο διάστασης 1 V/V^1 έχει βάρος $\epsilon = \pm 1$.

Θεωρώ τώρα τον τελεστή C του Λήμματος 3.4.6, ο οποίος αφού δρα ως 0 στο πρότυπο $V/V' \Rightarrow CV \subset V'$. Από την άλλη μεριά, το C δρα στο V' ως πολλαπλασιασμός με βαθμωτό στοιχείο $a \neq 0 \Rightarrow C/a \; V' = V'$. Επομένως η απεικόνιση C/a είναι προβολή του V επί του V' και κατ' επέκταση U_q γραμμικό αφού το στοιχείο C είναι κεντρικό.

Καταληκτικά αρκεί να επιλέξουμε το υποπρότυπο $V'' = ker(C/a)$ που πληρεί τις προϋποθέσεις.

<u>Γενική Περίπτωση:</u>

(ii) Τώρα παίρνουμε πεπερασμένης διάστασης πρότυπα $V' \subset V$ χωρίς κανέναν περιορισμό για τη συνδιάσταση. Θα αναχθούμε στην περίπτωση της συνδιάστασης-1 θεωρώντας τους διανυσματικούς χώρους $W' \subset W$ που ορίζονται ως ακολούθως:

Ο W (αντίστοιχα ο W') είναι υπόχωρος όλων των $Hom(V, V')$ των οποίων ο περιορισμός στο V' είναι ομοθεσία (αντίστοιχα μηδέν).

Εφοδιάζουμε τους W, W' με δομή U_q-προτύπων δίνοντας στο $Hom(V, V')$ τη δομή προτύπου που ορίστηκε στην Παρατήρηση 2.2.2.

Για $f \in W$, έστω $a : f(v) = av, \ \forall v \in V'$. Τότε για κάθε $x \in U_q$ και $v \in V'$, έχουμε:

$$(xf)(v) = \sum_{(x)} x' f(S(x'')v) = a \sum_{(x)} x' S(x'') v = a\epsilon(x)v.$$

Παρόμοιο επιχείρημα αποδεικνύει ότι το W' είναι επίσης υποπρότυπο.

Εφαρμόζοντας το (i) παίρνουμε ένα υποπρότυπο W'' διάστασης 1, τέτοιο ώστε $W = W' \oplus W''$. Αν f γεννήτορας της W'' εξ ορισμού δρα στο V' ως βαθμωτό $a \neq 0$. Ομοίως με προηγουμένως $f/a : V \to V'$, $V'' = ker(f)$ ο συμπληρωματικός υπόχωρος του V'. Τέλος μένει να δείξουμε ότι ο V'' είναι U_q-υποπρότυπο του V. Αφού ο W' είναι διάστασης 1 υποπρότυπο είναι απλό βάρους 1, συνεπώς για κάθε $x \in U_q \Rightarrow xf = \epsilon(x)f$ και αν $v \in V$ έχουμε:

$$K^{-1}f(Kv) = (K^{-1}f)(v) = \epsilon(K^{-1})f(v) = 0 \Rightarrow f(Kv) = 0 \Rightarrow KV'' \subset V''.$$

Ομοίως δείχνουμε για K^{-1}. Από την άλλη μεριά για $Kv \in V'$ έχουμε:

$$\begin{aligned} 0 &= \epsilon(E)f(Kv) = (Ef)(Kv) \\ &= f(S(E)Kv) = -Ef(K^{-1}Kv) = -f(Ev) = -Ef(v). \end{aligned}$$

Άρα $f(Ev) = 0$ και συνεπώς το V'' παραμένει σταθερό πάνω από τη δράση του E. Αντιστοίχως $FV'' \subset V''$ και άρα το V'' είναι υποπρότυπο.

3.4.2 Τύπος Clebsch-Gordan

Δοσμένων δύο πεπερασμένης διάστασης U_q-προτύπων ορίζω το τανυστικό γινόμενό τους στο οποίο δίνω δομή προτύπου από τη σχέση:

$$x(v \otimes v') = xv \otimes v' + v \otimes xv'$$

Ο κβαντικός τύπος Clebsch-Gordan ισχύει για πεπερασμένης διάστασης απλά U_q-πρότυπα. Αφού

$$V_{\epsilon,n} = V_{\epsilon,0} \otimes V_{1,n} = V_{1,n} \otimes V_{\epsilon,0}$$

μας αρκεί να περιοριστούμε στο $V_{1,n}$, το οποίο και θα συμβολίζεται V_n.

Θεώρημα 3.4.8. *Έστω $n \geq m$ δύο μη αρνητικοί ακέραιοι. Υπάρχει ισομορφισμός U_q-προτύπων:*

$$V_n \otimes V_m \cong V_{n+m} \oplus V_{n+m-2} \oplus \cdots \oplus V_{n-m}$$

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε p με $0 \leq p \leq m$, το πρότυπο $V_n \otimes V_m$ περιέχει ένα μέγιστο διάνυσμα βάρους με βάρος q^{n+m-2p}.

Αν συμβαίνει το τελευταίο, τότε υπάρχει μη-μηδενικός μορφισμός προτύπων από το V_{n+m-2p} στο $V_n \otimes V_m$. Το πρότυπο V_{n+m-2p} όμως είναι απλό, επομένως ο πυρήνας ενός τέτοιου μορφισμού είναι αναγκαστικά μηδέν, πράγμα που ουσιαστικά σημαίνει ότι είναι μία εμφύτευση του V_{n+m-2p} στον $V_n \otimes V_m$. Αφού τα υποπρότυπα V_{n+m-2p} είναι απλά με διακριτά μέγιστα βάρη, τότε το άθροισμα τους στο $V_n \otimes V_m$ είναι ευθύ. Συνεπώς το δεξί μέρος του τύπου εμφυτεύεται στο αριστερό. Συμπερασματικά, αρκεί να ελέγξουμε ότι και τα δύο μέρη έχουν την ίδια διάσταση. Η διάσταση του $V_{n+m} \oplus V_{n+m-2} \oplus \cdots \oplus V_{n-m}$ ισοδυναμεί με:

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{m}(n+m-2p+1) &= (n+1)(m+1)\\ &= dim(V_n)dim(V_m)\\ &= dim(V_n \otimes V_m).\end{aligned}$$

Το Θεώρημα ολοκληρώνεται με την χρήση του ακόλουθου λήμματος.

Λήμμα 3.4.9. *Έστω $v^{(n)}$ μέγιστο διάνυσμα βάρους για βάρος q^n στο V_n και $v^{(m)}$ αντίστοιχο με βάρος q^m στο V^m. Ορίζω $v_p^{(n)} = \frac{1}{[p]!}F^p v^{(n)}$ και $v_p^{(m)} = \frac{1}{[p]!}F^p v^{(m)}$ για $p \geq 0$. Τότε:*

$$v^{(n+m-2p)} = \sum_{i=0}^{p}(-1)^i \frac{[m-p+i]![n-i]!}{[m-p]![n]!} q^{i(m-2p+i+1)} v_i^{(n)} \otimes v_{p-i}^{(m)}$$

είναι ένα μέγιστο διάνυσμα βάρους $q^{(n+m-2p)}$ του $V_n \otimes V_m$.

Απόδειξη. Είναι προφανές ότι το $v_i^{(m)} \otimes v_{p-i}^{(m)}$ έχει βάρος $q^{n-2i+m-2(p-i)} = q^{n+m-2p}$. Επομένως αυτό που μένει είναι να δειχθεί ότι $Ev^{(n+m-2p)} = 0$. Εφαρμόζοντας τον τύπο $\Delta(E) = 1 \otimes E + E \otimes K$ έχουμε:

$$\begin{aligned}Ev^{(n+m-2p)} &= \sum_{i=0}^{p}(-1)^i \frac{[m-p+i]![n-i]!}{[m-p]![n]!} q^{i(m-2p+i+1)} v_i^{(n)} \otimes Ev_{p-i}^{(m)}\\ &+ \sum_{i=0}^{p}(-1)^i [m-p+i+1] \frac{[m-p+i]![n-i]!}{[m-p]![n]!} q^{i(m-2p+i+1)} Ev_i^{(n)} \otimes Kv_{p-i}^{(m)}\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τα Ev_p και Kv_p από τις σχέσεις (3.8-3.9) και εκτελώντας εκτενώς τις πράξεις έχουμε το ζητούμενο.

Κεφάλαιο 4

Hopf Άλγεβρες Κορδελών

Σε αυτό το κεφάλαιο εισάγοντας τις έννοιες της εξίσωσης Yang-Baxter και των R-πινάκων θα θεμελιώσουμε τη δομή της Πλεξιδοειδούς Hopf Άλγεβρας. Θα οριστεί η Κατηγορία Άμματος και η Κατηγορία Κορδέλας που θα μας δώσουν την απαραίτητη δομή που πρέπει να φέρουν οι συσχετιζόμενες με αυτές άλγεβρες.

Τελικά, αφού πρώτα εμηνεύσουμε την κατηγορική σημασία της κβαντική δυάδας του Drinfeld, θα εστιάσουμε στις Hopf-άλγεβρες κορδελών και μέσω αυτών θα δείξουμε τη σύνδεση μεταξύ της κατηγορίας U_q-προτύπων με αυτήν των Πλαισιωμένων Αμμάτων (Framed Tangles).

4.1 Πλεξιδοειδείς Διάλγεβρες

Θα ξεκινήσουμε ορίζοντας την εξίσωση Yang-Baxter της οποίας οι λύσεις καλούνται R-πίνακες. Μία Hopf Άλγεβρα με έναν R-πίνακα που ικανοποιεί κάποιες πρόσθετες συνθήκες θα ονομαστεί Πλεξιδοειδής Hopf άλγεβρα.

Ορισμός 4.1.1. Έστω V ένας διανυσματικός χώρος πάνω από ένα σώμα K. Ένας γραμμικός αυτομορφισμός c του $V \otimes V$ καλείται R-πίνακας εάν είναι λύση της εξίσωσης Yang-Baxter:

$$(c \otimes id_V)(id_V \otimes c)(c \otimes id_V) = (id_V \otimes c)(c \otimes id_V)(id_V \otimes c) \qquad (1.1)$$

η οποία ισχύει στην ομάδα αυτομορφισμών του $V \otimes V \otimes V$.

Λήμμα 4.1.1. *Εάν $c \in Aut(V \otimes V)$ είναι ένας R-πίνακας και λ ένα βαθμωτό στοιχείο, τότε οι λc, c^{-1} και $\tau_{V,V} \circ c \circ \tau_{V,V}$ είναι R-πίνακες.*

Απόδειξη. Αυτό προκύπτει από τις ταυτότητες:

$$(\lambda c \otimes id_V) = \lambda(c \otimes id_V), \quad (id_V \otimes \lambda c) = \lambda(id_V \otimes c)$$
$$(c^{-1} \otimes id_V) = (c \otimes id_V)^{-1}, \quad (id_V \otimes c^{-1}) = (id_V \otimes c)^{-1}$$
$$(c' \otimes id_V) = \sigma(id_V \otimes c)\sigma^{-1}, \quad (id_V \otimes c') = \sigma(c \otimes id_V)\sigma^{-1}$$

όπου $c' = \tau_{V,V} \circ c \circ \tau_{V,V}$ και σ αυτομορφισμός του $V \otimes V \otimes V$ ορισμένος ως:

$$\sigma(v_1 \otimes v_2 \otimes v_3) = v_3 \otimes v_2 \otimes v_1 \text{ για } v_1, v_2, v_3 \in V$$

.

Παρατήρηση 4.1.1. Για να λύσουμε την Yang-Baxter εξίσωση για το $V = V_{1,1} = V_1$, το οποίο είναι το απλό U_q-πρότυπο διάστασης 2, πρέπει να βρούμε τους U_q-αυτομορφισμούς του $V_1 \otimes V_1$, οι οποίοι είναι R-πίνακες.

Από το Θεώρημα Clebsch-Gordan 3.4.8 έχουμε ότι $V_1 \otimes V_1 \cong V_2 \oplus V_0$. Το Λήμμα 3.4.9 συνεπάγει ότι αν v_0 μέγιστο διάνυσμα βάρους και άρα $\{v_0, v_1 = Fv_0\}$ βάση του V_1, έχουμε ότι:

$$w_0 = v_0 \otimes v_0 \quad \text{και} \quad t = v_0 \otimes v_1 - q^{-1} v_1 \otimes v_0$$

είναι μέγιστα διανύσματα βάρους των αντίστοιχων βαρών q^2 και 1. Τέλος για να ολοκληρώσουμε το σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων που αποτελούν βάση για το $V_1 \otimes V_1$, θέτουμε:

$$w_1 = Fw_0 = q^{-1} v_0 \otimes v_1 + v_1 \otimes v_0 \quad \text{και} \quad w_2 = \frac{1}{[2]} F^2 w_0 = v_1 \otimes v_1$$

όπου $[2] = q + q^{-1}$

Πρόταση 4.1.2. Κάθε U_q-γραμμικός αυτομορφισμός ϕ του $V_1 \otimes V_1$ είναι διαγωνοποιήσιμος και μορφής $\phi(w_i) = \lambda w_i$, $(i = 0, 1, 2)$ και $\phi(t) = \mu t$, όπου λ και μ είναι μη-μηδενικά βαθμωτά.

Ο αυτομορφισμός ϕ είναι ένας R-πίνακας εάν και μόνο αν:

$$(\lambda - \mu)(q\lambda + q^{-1}\mu)(q^{-1}\lambda + q\mu) = 0$$

Απόδειξη. Αφού ϕ U_q-γραμμικό, τότε η εικόνα ενός μέγιστου διανύσματος βάρους μέσω του ϕ είναι ένα μέγιστο διάνυσμα βάρους ιδίου βάρους.

Έστω w_0 και t έχουν διαφορετικά βάρη ($q^2 \neq 1$) άρα υπάρχουν λ και μ τέτοια ώστε $\phi(w_0) = \lambda w_0$ και $\phi(t) = \mu t$.

Όσο για τα υπόλοιπα διανύσματα βάσης έχουμε ότι:

$$\phi(w_i) = \frac{1}{[i]} \phi(F^i w_0) = \frac{1}{[i]} F^i \phi(w_0) = \lambda w_i$$

για $i = 1, 2$. Αυτό ολοκληρώνει και το πρώτο σκέλος της Πρότασης.

Το δεύτερο σκέλος αποτελείται από αναλυτικούς υπολογισμούς. Αρχικά παρατηρούμε ότι ο πίνακας Φ της ϕ ως προς τη βάση $\{v_0 \otimes v_0, v_0 \otimes v_1, v_1 \otimes v_0, v_1 \otimes v_1\}$ δίνεται από:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \gamma & 0 \\ 0 & \gamma & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

όπου:

$$\alpha = \frac{q^{-1} + q\mu}{[2]}, \quad \beta = \frac{q\lambda + q^{-1}}{[2]}, \quad \gamma = \frac{\lambda - \mu}{[2]}$$

Οι αυτομορφισμοί $\phi \otimes id$ και $id \otimes \phi$ μπορούν να εκφραστούν αντιστοίχως μέσω $8 \quad 8$ πινάκων Φ_{12} και Φ_{23} στη βάση του $V \otimes V \otimes V$ που αποτελείται από τα στοιχεία:

$$\{v_0 \otimes v_0 \otimes v_0,\ v_0 \otimes v_0 \otimes v_1,\ v_0 \otimes v_1 \otimes v_0,\ v_0 \otimes v_1 \otimes v_1,$$
$$v_1 \otimes v_0 \otimes v_0,\ v_1 \otimes v_1 \otimes v_0,\ v_1 \otimes v_0 \otimes v_1,\ v_1 \otimes v_1 \otimes v_1\}$$

ως:

$$\Phi_{12} \quad \begin{matrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & \gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 & \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{matrix}, \quad \Phi_{23} \quad \begin{matrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{matrix}$$

Οπότε τώρα έχουμε:

$$\Phi_{12}\Phi_{23}\Phi_{12} \quad \Phi_{23}\Phi_{12}\Phi_{23} \quad \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K & \alpha\beta\gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha\beta\gamma & L & 0 & \alpha\beta\gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K & 0 & \alpha\beta\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\beta\gamma & 0 & M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha\beta\gamma & 0 & L & \alpha\beta\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha\beta\gamma & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

όπου $K \quad \alpha((\lambda \quad a)\lambda \quad \gamma^2)$, $L \quad \alpha\beta(\alpha \quad \beta)$ και $M \quad \beta(\gamma^2 \quad \lambda(\beta \quad \lambda))$.

Αν θεωρήσω ότι τα K, L, M είναι πολλαπλάσια του $\alpha\beta\gamma$ τότε έχουμε ότι:

$$\Phi_{12}\Phi_{23}\Phi_{12} \quad \Phi_{23}\Phi_{12}\Phi_{23} \quad \alpha\beta\gamma \quad \Psi$$

οπού Ψ ο μη-μηδενικός πίνακας που προκύπτει αν πάρουμε κοινό παράγοντα.
Άρα ο Φ είναι R πίνακας αν και μόνο αν $\alpha\beta\gamma \quad 0$ και η απόδειξη είναι πλήρης.

Μένει να δείξουμε ότι K, L, M πολλαπλάσιο του $\alpha\beta\gamma$. Όμως:

$$\lambda \quad \alpha \quad q\gamma, \qquad \lambda \quad \beta \quad q^{\ 1}\gamma, \qquad q^{\ 1}\lambda \quad \gamma \quad q^{\ 1}$$
$$q\lambda \quad \gamma \quad q\beta, \ \beta \quad \alpha \quad (q \quad q^{\ 1})\gamma.$$

Συνεπώς: $K \quad \alpha\gamma(q\lambda \quad \gamma)$, $L \quad (q \quad q^{\ 1})\alpha\beta\gamma$, $M \quad \beta\gamma(\gamma \quad q^{\ 1}\lambda) \quad q^{\ 1}\alpha\beta\gamma$.

Σημείωση 4.1.1. Συνοψίζοντας, οι $R-$ πίνακες του U_q-προτύπου $V_1 \otimes V_1$ ανήκουν σε έναν από τους τρεις τύπους που εξαρτόνται από την παράμετρο $\lambda \neq 0$:

- Εάν $\lambda = \mu$, ϕ είναι ομοθεσία.
- Εάν $q\lambda - q^{-1}\mu = 0$, τότε:

$$\Phi = q\lambda \begin{pmatrix} q^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q^{-1}-q & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^{-1} \end{pmatrix}$$

- Εάν $q^{-1}\lambda - q\mu = 0$, τότε:

$$\Phi = q^{-1}\lambda \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & q-q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}$$

Ορισμός 4.1.2. Μία $(H, \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$ διάλγεβρα καλείται quasi-συμμεταθετική (ή σχεδόν-συμμεταθετική) εφόσον υπάρχει αντιστρέψιμο στοιχείο R της άλγεβρας $H \otimes H$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in H$:

$$\Delta^{op}(x) = R\Delta(x)R^{-1} \quad (1.2)$$

Όπου $\Delta^{op} = \tau_{H,H} \circ \Delta$ ο αντίθετος συμπολλαπλασιασμός στο H. Ένα στοιχείο που ικανοποιεί αυτή τη συνθήκη καλείται καθολικός $R-$ πίνακας.

Σημείωση 4.1.2. Κάθε συμμεταθετική διάλγεβρα είναι σχεδόν-συμμεταθετική αν για καθολικό R-πίνακα πάρουμε τον $R = 1 \otimes 1$. Συνεπώς μπορούμε να βλέπουμε την quasi-συμμεταθετική διάλγεβρα ως μία διάλγεβρα της οποίας η συμμεταθετικότητα ελέγχεται από τον καθολικό R-πίνακα.

Εάν θέσω $R = \sum_i s_i \otimes t_i$ τότε η (1.2) μπορεί να εκφραστεί για όλα τα $x \in H$, ως:

$$\sum_{(x),i} x^{2}s_i \otimes x^{1}t_i = \sum_{(x),i} s_i x^{1} \otimes t_i x^{2} \quad (1.3)$$

Σε πλήρη αναλογία ορίζω την σχεδόν-συμμεταθετική Hopf άλγεβρα που η υποκείμενη διάλγεβρα της έχει καθολικό $R-$ πίνακα.

Σύμβαση:

Έστω H μία άλγεβρα και $X = \sum_i x_i^{(1)} \otimes \cdots \otimes x_i^{(p)} \in H^{\otimes p}$ $(p > 1)$. Για κάθε $p-$άδα $(k_1, \ldots, k_p)$ από διακεκριμένα στοιχεία του $\{1, \ldots, n\}$ $(n \geq p)$, συμβολίζω $X_{k_1 \cdots k_p}$ το στοιχείο του $H^{\otimes n}$ δοσμένο ως:

$$X_{k_1 \cdots k_p} := \sum_i y_i^{(1)} \otimes \cdots \otimes y_i^{(n)}$$

όπου $y_i^{(k_j)} = x_i^{(j)}$ για κάθε $j \leq p$ και $y_i^{(k)} = 1$ διαφορετικά.

Επομένως αν $R = \sum_i s_i \otimes t_i$, τότε:

$$R_{31} = \sum_i t_i \otimes 1 \otimes s_i.$$

Ορισμός 4.1.3. Μία σχεδόν-συμμεταθετική διάλγεβρα $(H,\mu,\eta,\Delta,\epsilon,R)$ ή μία σχεδόν-συμμεταθετική Hopf άλγεβρα $(H,\mu,\eta,\Delta,\epsilon,S,S^{-1},R)$ είναι πλεξιδοειδής άλγεβρα εάν ο καθολικός R-πίνακας R ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$(\Delta\otimes id_H)(R) = R_{13}R_{23} \qquad (1.4)$$

$$(id_H\otimes\Delta)(R) = R_{13}R_{12} \qquad (1.5)$$

Σημείωση 4.1.3. Εάν πάλι ορίσουμε $R=\sum_i s_i\otimes t_i$ τότε οι σχέσεις (1.4-1.5) μπορούν να εκφραστούν ως:

$$\sum_{i,(s_i)} (s_i)^1\otimes(s_i)^2\otimes t_i = \sum_{i,j} s_i\otimes s_j\otimes t_it_j$$

και

$$\sum_{i,(t_i)} s_i\otimes(t_i)^1\otimes(t_i)^2 = \sum_{i,j} s_is_j\otimes t_j\otimes t_i$$

Θεώρημα 4.1.3. *Έστω $(H,\mu,\eta,\Delta,\epsilon,R)$ μία πλεξιδοειδής διάλγεβρα:*
(α) Τότε ο καθολικός R-πίνακας R ικανοποιεί την εξίσωση:

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12} \qquad (1.6)$$

και έχουμε ότι:

$$(\epsilon\otimes id_H)(R) = 1 = (id_H\otimes\epsilon)(R). \qquad (1.7)$$

(β) Εάν επιπλεόν η H έχει αντιστρέψιμο αντιποδικό τότε:

$$(S\otimes id_H)R = R^{-1} = (id_H\otimes S^{-1})(R) \qquad (1.8)$$

και

$$(S\otimes S)(R) = R \qquad (1.9)$$

Χρησιμοποιώντας τις ως ανωτέρω συμβάσεις, σε κάθε πλεξιδοειδή Hopf άλγεβρα της οποίας ο καθολικός R-πίνακας είναι μορφής $R=\sum_i s_i\otimes t_i$ οι σχέσεις (1.6-1.8) είναι ισοδύναμες με:

$$\sum_{i,j,k} s_ks_j\otimes t_ks_i\otimes t_jt_i = \sum_{i,j,k} s_js_i\otimes s_ks_i\otimes t_kt_j \qquad (1.10)$$

$$\sum_i \epsilon(s_i)t_i = \sum_i s_i\epsilon(t_i) = 1 \qquad (1.11)$$

και

$$R^{-1} = \sum_i S(s_i)\otimes t_i = \sum_i s_i\otimes S^{-1}(t_i) \qquad (1.12)$$

Απόδειξη. (α) Η σχέση (1.4) και ο ορισμός του R μας δίνουν:

$$\begin{aligned} R_{12}R_{13}R_{23} &= R_{12}(\Delta\otimes id)(R) = (\Delta^{op}\otimes id)(R)R_{12} \\ &= (\tau_{H,H}\otimes id)(\Delta\otimes id)(R)R_{12} = (\tau_{H,H}\otimes id)(R_{12}R_{23})R_{12} \\ &= R_{23}R_{13}R_{12} \end{aligned}$$

Από την $(\epsilon\otimes id)\Delta = id$ και τη σχέση (1.4) παίρνουμε:

$$R = (\epsilon\otimes id\otimes id)(\Delta\otimes id)(R) = (\epsilon\otimes id\otimes id)(R_{13}R_{23}) = (\epsilon\otimes id)(R)\epsilon(1)R.$$

και αφού $\epsilon(1) = 1$ και το R αντιστρέψιμο παίρνουμε ότι $(\epsilon\otimes id)R = 1$. Με ανάλογο τρόπο, αξιοποιώντας τις $(id\otimes\epsilon)\Delta = id$ και (1.5) παίρνουμε ότι $(id\otimes\epsilon)(R) = 1$.

(β) Τώρα υποθέτω ότι η H έχει αντιστρέψιμο αντιποδικό S. Ξέρουμε ότι το αντιποδικό ικανοποιεί τη σχέση $\mu(S\otimes id)\Delta(x) = \epsilon(1)$ για κάθε $x\in H$. Αυτό συνεπάγεται ότι:

$$(\mu\otimes id)(S\otimes id\otimes id)(\Delta\otimes id)(R) = (\epsilon\otimes id)(R) = 1$$

Συνεπώς προκύπτει ότι:

$$1 = (\mu\otimes id)(S\otimes id\otimes id)(R_{13}R_{23}) = (S\otimes id)(R)S(1)R.$$

και αφού έχουμε $S(1) = 1$ τότε:

$$(S\otimes id)(R) = R^{-1}. \quad (1.13)$$

Ως απόρροια της Παρατήρησης 2.1.2, του Ορισμού 4.1.3 και τις (1.2) έχουμε ότι αν $(H,\mu,\eta,\Delta,\epsilon,S,S^{-1},R)$ πλεξιδοειδής Hopf άλγεβρα τότε ίδια δομή παίρνει και η:

$$(H,\mu,\eta,\Delta^{op},\epsilon,S^{-1},S,\tau_{H,H}(R))$$

Άρα για αυτήν η σχέση (1.13) γράφεται ως:

$$(S^{-1}\otimes id)(\tau_{H,H}(R)) = \tau_{H,H}(R)^{-1}$$

το οποίο είναι ισοδύναμο $(id\otimes S^{-1})(R) = R^{-1}$ επομένως τελικά έχουμε:

$$\begin{aligned}(S\otimes S)(R) &= (id\otimes S)(S\otimes id)(R) = (id\otimes S)(R^{-1})\\ &= (id\otimes S)(id\otimes S^{-1})(R) = (id\otimes id)(R) = R.\end{aligned}$$

4.1.1 Κατασκευή R-πινάκων

Σε αυτή την ενότητα σκοπός είναι να αποδείξουμε την ύπαρξη λύσης της Yang-Baxter εξίσωσης για κάθε πρότυπο πάνω από την πλεξιδοειδή διάλγεβρα (H,μ,η,Δ,R).

Έστω V,W δύο H πρότυπα. Ο καθολικός R πίνακας $R\in H\otimes H$ μας επιτρέπει να κατασκευάσουμε έναν ισομορφισμό H-προτύπων $c^R_{V,W}: V\otimes W\to W\otimes V$. Επί της ουσίας αυτός ο ισομορφισμός γενικεύει την ιδέα του τελεστή στροφής $\tau_{V,W}$ και ορίζεται για κάθε $v\in V,\ w\in W$ ως:

$$c^R_{V,W}(v\otimes w) = \tau_{V,W}(R(v\otimes w)) = \sum_i t_i w\otimes s_i v \quad (1.14)$$

όπου $R = \sum_i s_i\otimes t_i$. Από (1.12) $c^R_{V,W}$ είναι ένας ισομορφισμός με αντίστροφο ως:

$$(c^R_{V,W})^{-1}(w\otimes v) = R^{-1}(v\otimes w) = \sum_i S(s_i)v\otimes t_i w = \sum_i s_i v\otimes S^{-1}(t_i)w. \quad (1.15)$$

Όπου οι δύο τελευταίες ισότητες ισχύουν μόνο όταν η H έχει αντιστρέψιμο αντιποδικό.

Πρόταση 4.1.4. Κάτω από τις προηγούμενες υποθέσεις έχουμε ότι:
(α) Η απεικόνιση $c^R_{V,W}$ είναι ισομορφισμός H-προτύπων.
(β)Για κάθε τριάδα (U,V,W) H-προτύπων έχουμε ότι:

$$(c^R_{U\otimes V,W}) = (c^R_{U,W}\otimes id_V)(id_U\otimes c^R_{V,W}),\quad c^R_{U,V\otimes W} = (id_V\otimes c^R_{U,W})(c^R_{U,V}\otimes id_W)$$

και

$$(c^R_{V,W}\otimes id_U)(id_V\otimes c^R_{U,W})(c^R_{U,V}\otimes id_W) = (id_W\otimes c^R_{U,V})(c^R_{U,W}\otimes id_V)(id_U\otimes c^R_{V,W})$$

Απόδειξη. (α) Έχουμε ότι το $c^R_{V,W}$ είναι H-γραμμικό. Τώρα από την (1.2) για κάθε $x\in H$ έχουμε:

$$\begin{aligned} c^R_{V,W}(x(v\otimes w)) &= \tau_{V,W}(R\Delta(x)(v\otimes w)) = \tau_{V,W}(\Delta^{op}(x)R(v\otimes w)) \\ &= \Delta(x)\tau_{V,W}(R(v\otimes w)) = x\,(c^R_{V,W}(v\otimes w)). \end{aligned}$$

(β) Η πρώτη και η δεύτερη σχέση προκύπτουν με ανάλογο τρόπο για αυτό θα περιοριστούμε στην απόδειξη της δεύτερης. Για $u\in U$, $v\in V$, $w\in W$ παίρνουμε:

$$\begin{aligned} (id_V\otimes c^R_{U,W})(c^R_{U,V}\otimes id_W)(u\otimes v\otimes w) &= \sum_{i,j} t_i v\otimes t_j w\otimes s_j s_i u \\ &= \sum_i (t_i)^1 v\otimes (t_i)^2 w\otimes s_i u \\ &= \sum_i \Delta(t_i)(u\otimes w)\otimes s_i u \\ &= c^R_{U,V\otimes W}(u\otimes v\otimes w). \end{aligned}$$

Όσο για την τελευταία σχέση έχουμε ότι:

$$(c^R_{V,W}\otimes id_U)(id_V\otimes c^R_{U,W})(c^R_{U,V}\otimes id_W)(u\otimes v\otimes w) = \sum_{i,j,k} t_k t_j w\otimes s_k t_i v\otimes s_j s_i u$$

και

$$(id_W\otimes c^R_{U,V})(c^R_{U,W}\otimes id_V)(id_U\otimes c^R_{V,W})(u\otimes v\otimes w) = \sum_{i,j,k} t_j t_i w\otimes t_k s_i v\otimes s_k s_j u.$$

όπου λόγω τις (1.10) αφού τα δεξιά μέλη είναι ίσα άρα και τα αριστερά είναι ίσα.

Σημείωση 4.1.4. Θεωρώντας $U = V = W$ στο (β) της προηγούμενης Πρότασης συμπεραίνουμε ότι η $c^R_{V,V}$ είναι μία λύση της Yang-Baxter εξίσωσης για κάθε H-πρότυπο V. Παρατηρούμε επίσης ότι αν $R = 1\otimes 1$, τότε $c^R_{V,W} = \tau_{V,W}$ είναι η στροφή και αυτό επιβεβαιώνει και το γεγονός ότι ο τελεστής στροφής είναι ένας ισομορφισμός H-προτύπων για συμμεταθετική H.

4.2 Κβαντική Δυάδα Drinfeld

Στην προηγούμενη ενότητα δείξαμε ότι μία πλεξιδοειδής Hopf άλγεβρα παράγει μία λύση της εξίσωσης Yang-Baxter. Το πρόβλημα μας έγκειται πια στο πως θα βρεθούν αρκετές τέτοιες Hopf άλγεβρες. Την απάντηση σε αυτό δίνει η κατασκευή της κβαντικής δυάδας του Drinfeld, η οποία φτιάχνει πλεξιδοειδείς Hopf άλγεβρες από πεπερασμένης-διάστασης Hopf άλγεβρες με αντιστρέψιμο αντιποδικό.

4.2.1 Δισταυρωτό Γινόμενο

Η κατασκευή της κβαντικής δυάδας είναι μία ειδική περίπτωση της κατασκευής του δισταυρωτού γινομένου. Πιο συγκεκριμένα, το δισταυρωτό γινόμενο ομάδων γενικεύει την έννοια του ημιευθέως γινομένου ομάδων.

Έστω G μία ομάδα με υποομάδες H, K. Υποθέτω ότι για κάθε στοιχείο x στο G υπάρχει μοναδικό ζευγάρι $(y, z) \in H \times K$:

$$x = yz \qquad (2.1)$$

Αυτό μας επιτρέπει να αντιστοιχίσουμε σε κάθε ζευγάρι $(y, z) \in H \times K$ ένα μοναδικό στοιχείο $z \triangleright y \in H$ και ένα μοναδικό $z^y \in K$ με τρόπο τέτοιο ώστε:

$$zy = (z \triangleright y)z^y \qquad (2.2)$$

Έστω $y, y' \in H$ και $z, z' \in K$. Επεκτείνοντας τις σχέσεις προσεταιριστικότητας:

$$(zz')y = z(z'y) \text{ και } z(yy') = (zy)y'$$

παίρνουμε τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{aligned}
(zz') \triangleright y &= z \triangleright (z' \triangleright y) && (2.3)\\
(zz')^y &= z^{z' \triangleright y} z'^y && (2.4)\\
z \triangleright (yy') &= (z \triangleright y)(z^y \triangleright y') && (2.5)\\
z^{yy'} &= (z^y)^{y'} && (2.6)
\end{aligned}$$

Με παρόμοιο τρόπο επεκτείνουμε τις σχέσεις $z = z1$ και $y = 1y$, οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned}
z \triangleright 1 &= 1, \ (2.7) & z^1 &= z \ (2.8),\\
1 \triangleright y &= y, \ (2.9) & 1^y &= 1 \ (2.10)
\end{aligned}$$

Οι σχέσεις (2.3) και (2.9) σημαίνουν ότι η απεικόνιση $\alpha : K \times H \to H$ ορίζεται ως:

$$\alpha(z, y) = z \triangleright y$$

είναι η αριστερή δράση της ομάδας K πάνω στο σύνολο H. Ομοίως οι σχέσεις (2.6) και (2.8) μας δίνουν απεικόνιση $\beta : K \times H \to K$ ορίζεται ως:

$$\beta(z, y) = z^y$$

είναι η δεξιά δράση της ομάδας H πάνω στο σύνολο K.

Ορισμός 4.2.1. Ένα ζευγάρι (H, K) ομάδων καλείται αρμοστό (matched) εάν υπάρχει μία αριστερή δράση $\alpha : K \times H \to H$ και δέξια δράση $\beta : K \times H \to K$, τέτοιες ώστε για κάθε $y, y' \in H$ και $z, z' \in K$ έχουμε:

$$(zz')^y = z^{z' \triangleright y} z'^y \qquad (2.4)$$
$$z \triangleright (yy') = (z \triangleright y)(z^y \triangleright y') \qquad (2.5)$$
$$z^1 = z \qquad (2.8)$$
$$1^y = 1 \qquad (2.10)$$

όπου $\alpha(z, y) = z \triangleright y$ και $\beta(z, y) = z^y$.

Πρόταση 4.2.1. (α) Έστω (H, K) είναι ένα αρμοστό ζεύγος ομάδων. Τότε υπάρχει μοναδική δομή ομάδας στο συνολοθεωρητικό γινόμενο $H \times K$ που συμβολίζεται ως $H \bowtie K$ και έχει μονάδα το (1,1) και τέτοιο ώστε:

$$(y, z)(y', z') = (y(z \triangleright y'), z^{y'} z')$$

για κάθε $y, y' \in H$ και $z, z' \in K$. Αυτή η δομή ομάδας καλείται **δισταυρωτό γινόμενο** των H και K. Επιπλέον, οι ομάδες H, K μπορούν να ταυτιστούν πλήρως με τις υποομάδες $H \times \{1\}$ και $\{1\} \times K$ του $H \bowtie K$ καθώς και κάθε στοιχείο $(y, z) \in H \bowtie K$ μπορεί να γραφτεί κατα μοναδικό τρόπο ως γινόμενο ενός στοιχείο του $H \times \{1\}$ και ενός στοιχείου του $\{1\} \times K$:

$$(y, z) = (y, 1)(1, z)$$

όπου $y \in H$ και $z \in K$.

(β) Αντιστρόφως, έστω G μία ομάδα και H, K υποομάδες της G τέτοιες ώστε ο πολλαπλασιασμός στο G να επάγει μία συνολοθεωρητική 1-1 και επί απεικόνιση από το $G \times K$ στο G. Τότε το (H, K) είναι αναγκαστικά αρμοστό ζεύγος και οι 1-1 και επί απεικόνιση επάγει ισομορφισμό ομάδων από το $H \bowtie K$ επί του G.

Σημείωση 4.2.1. Η απόδειξη γίνεται με απλή χρήση του Ορισμού 4.2.1 και των σχέσεων (2.3-2.10). Γνωρίζουμε ότι η άλγεβρα ομάδα δέχεται φυσική δομή Hopf άλγεβρας συνεπώς τίθεται το ερώτημα αν μπορούμε να επεκτείνουμε την ιδέα του δισταυρωτού γινομένου από το αρμοστό ζεύγος ομάδων (H, K) σε δισταυρωτό γινόμενο αλγεβρών.

Για αυτό το λόγο χρειαζόμαστε να βρούμε το φυσικό ανάλογο της δράσης ομάδας αλλά στις άλγεβρες. Έστω ομάδα G που δρα στο σύνολο X με την απεικόνιση:

$$\alpha : G \times X \to X$$

Γραμμικοποιώντας, παίρνουμε μορφισμό συναλγεβρών:

$$\alpha : k[G \times X] \to k[X]$$

Επίσης γνωρίζουμε ότι επάγεται ισομορφισμός :

$$k[G] \otimes k[X] \cong k[G \times X]$$

Αυτό δείχνεται ορίζοντας $\psi : k[G] \otimes k[X] \to k[G \times X]$ ως:

$$\psi(x \otimes y) = (x, y)$$

όπου $\{x \otimes y\}_{(x,y) \in X \times Y}$ το στοιχείο της βάσης. Προφανώς:

$$(\psi \otimes \psi)(id \otimes \tau \otimes id)(\Delta \otimes \Delta)(x \otimes y) = (x, y) \otimes (x, y) = \Delta\psi(x \otimes y)$$

και $\epsilon\psi(x \otimes y) = 1 = \epsilon(x)\epsilon(y)$ δείχνουν ότι ο ψ είναι μορφισμός συναλγεβρών.

Συμπερασματικά, η δράση της ομάδας G στο σύνολο X επί της ουσίας γεννάει μία δράση της Hopf άλγεβρας $k[G]$ στη συνάλγεβρα $k[X]$ έτσι ώστε η απεικόνιση:

$$\psi \circ \alpha : k[G] \otimes k[X] \to k[X]$$

να είναι μορφισμός συναλγεβρών. Η $k[X]$ παίρνει δομή συνάλγεβρας-πρότυπο υπό την ακόλουθη έννοια:

Ορισμός 4.2.2. Έστω H μία διάλγεβρα και C μία συνάλγεβρα. Λέμε ότι η C είναι μία συνάλγεβρα-πρότυπο πάνω από το H, αν υπάρχει μορφισμός συναλγεβρών $H \otimes C \to C$ που να επάγει δομή $H-$προτύπου στο C.

Ορισμός 4.2.3. Ένα ζεύγος (X, A) διαλγεβρών καλείται αρμοστό εάν υπάρχει γραμμική απεικόνιση $\alpha : A \otimes X \to X$ και $\beta : A \otimes X \to A$ που μετατρέπει το X σε μία A-συνάλγεβρα πρότυπο και το A σε δεξί X-συνάλγεβρα πρότυπο, έτσι ώστε αν θέσουμε:

$$\alpha(a \otimes x) = a \triangleright x \quad \text{και} \quad \beta(a \otimes x) = a^x$$

οι ακόλουθες συνθήκες ικανοποιούνται:

$$\begin{aligned}
a \triangleright (xy) &= \sum_{(a)(x)} (a' \triangleright x')(a''^{x''} \triangleright y), \\
a \triangleright 1 &= \epsilon(a), \\
(ab)^x &= \sum_{(b)(x)} a^{b' \triangleright x'} b''^{x''}, \\
1^x &= \epsilon(x)1, \\
\sum_{(a)(x)} a'^{x'} \otimes a'' \triangleright x'' &= \sum_{(a)(x)} a''^{x''} \otimes a' \triangleright x'
\end{aligned}$$

για κάθε $a, b \in A$ και $x, y \in X$.

Θεώρημα 4.2.2. *Έστω (X, A) ένα αρμοστό ζεύγος διαλγεβρών. Τότε υπάρχει μοναδική δομή διάλγεβρας στον διανυσματικό χώρο $X \otimes A$, με μονάδα ίση με $1 \otimes 1$, τέτοια ώστε το γινόμενο της δίνεται από:*

$$(x \otimes a)(y \otimes b) = \sum_{(a)(y)} x(a' \triangleright y') \otimes a''^{y''} b,$$

ενώ ο συμπολλαλπλασιασμός και ο συνταυτοτικός μορφισμός ορίζονται ως:

$$\sum_{(a)(y)} (x' \otimes a') \otimes (x'' \otimes a'') \quad \text{και} \quad \epsilon(x \otimes a) = \epsilon(x)\epsilon(a)$$

για κάθε $x, y \in X$ και $a, b \in A$.

Εφοδιασμένος με αυτή τη δομή διάλγεβρας, ο $X \otimes A$ καλείται δισταυρωτό γινόμενο των X και A και συμβολίζεται με $X \bowtie A$.

Επιπλέον, οι 1-1 απεικονίσεις $i_X(x) = x \otimes 1$ και $i_A(a) = 1 \otimes a$ από το X και από το A αντίστοιχα στο $X \bowtie A$ είναι μορφισμοί διαλγεβρών. Επίσης έχουμε ότι:

$$x \otimes a = (x \otimes 1)(1 \otimes a)$$

για κάθε $a \in A$ και $x \in X$.

Εάν οι διάλγεβρες X και A έχουν αντιποδικά, τα οποία συμβολίζω αντίστοιχα ως S_X και S_A, τότε το δισταυρωτό γινόμενο είναι μία Hopf άλγεβρα με αντιποδικό S που δίνεται από τον τύπο:

$$S(x \otimes a) = \sum_{(x)(a)} S_A(a^{2}) \triangleright S_X(x^{2}) \otimes S_A(a^{1})^{S_X(x^{1})}.$$

Σημείωση 4.2.2. Η απόδειξη του Θεωρήματος είναι απλή και βασίζεται στην προσεκτική χρήση των σχέσεων του Ορισμού 4.2.3 και αναλυτικούς υπολογισμούς μέσω το κανόνα του Sweedler. Για να αποδείξουμε ότι το S είναι αντιποδικό δείχνουμε ότι:

$$\sum_{(x)(a)} (x^{1} \otimes a^{1}) S(x^{2} \otimes a^{2}) = \sum_{(x)(a)} S(x^{1} \otimes a^{1}) S(x^{2} \otimes a^{2})$$

Παρατήρηση 4.2.1. Σε αυτό το σημείο μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι αν η $(H, \mu, \eta, \Delta, \epsilon, S)$ είναι μία Hopf άλγεβρα και a, x στοιχεία της H, θέτοντας:

$$a \triangleright x = \sum_{(a)} a^{1} x S(a^{2}) \text{ και } x^{a} = \sum_{(a)} S(a^{1}) x a^{2} \qquad (2.11)$$

Η απεικόνιση $(a, x) \mapsto a \triangleright x$ εφοδιάζει το H με τη δομή αριστερής H-άλγεβρας πρότυπο και αυτή τη δράση την καλούμε αριστερή συζυγής αναπαράσταση της H. Αυτό δείχνεται βλέποντας αρχικά ότι η απεικόνιση δίνει δομή H-προτύπου στη H:

$$b \triangleright (a \triangleright x) = \sum_{(a)(b)} b^{1} a^{1} x S(a^{2}) S(b^{2}) = \sum_{(ba)} (ba)^{1} x S((ba)^{2}) = (ba) \triangleright x$$

για κάθε $a, b, x \in H$. Το ότι είναι άλγεβρα πρότυπο προκύπτει από:

$$a \triangleright 1 = \sum_{(a)} a^{1} S(a^{2}) = \epsilon(a) 1$$

και ότι:

$$\begin{aligned}\sum_{(a)} (a^{1} \triangleright x)(a^{2} \triangleright y) &= \sum_{(a)} a^{1} x S(a^{2}) a^{3} y S(a^{4}) = \sum_{(a)} a^{1} x \epsilon(a^{2}) y S(a^{3}) \\ &= \sum_{(a)} a^{1} x y S(a^{2}) = a \triangleright (xy).\end{aligned}$$

Με ανάλογο τρόπο, η απεικόνιση $(x, a) \mapsto x^{a}$ εφοδιάζει το H με δομή δεξιάς H-άλγεβρας πρότυπο και την καλούμε δεξιά συζυγής αναπαράσταση της H.

Λήμμα 4.2.3. *Θεωρώ Hopf άλγεβρα H με αντιστρέψιμο αντιποδικό S και μία άλγεβρα A που είναι αριστερή (αντίστοιχα δεξιά) H άλγεβρα πρότυπο. Δίνουμε στον δυϊκό διανυσματικό χώρο A^* την δομή αριστερού (αντ. δεξιού) H-προτύπου ως:*

$$\langle a, xf\rangle = \langle S^{-1}(x)a, f\rangle \ (\text{αντίστοιχα } \langle a, fx\rangle = \langle a, S^{-1}(x)f\rangle)$$

για κάθε $a \in A$, $x \in H$ και $f \in A^*$. Εάν η A είναι πεπερασμένης διάστασης τότε η συνάλγεβρα (A^{*op}) είναι H-συνάλγεβρα πρότυπο.

Πιο συγκεκριμένα ο συμπολλαπλασιασμός της πεπερασμένης συνάλγεβρας (A^{*op}) είναι ο:

$$\langle ab, f\rangle = \sum_{(f)} \langle b, f^1\rangle \langle a, f^2\rangle$$

Απόδειξη. Το να δείξουμε ότι η A^* είναι H πρότυπο είναι σχεδόν τετριμένο. Η ουσία της απόδειξης βρίσκεται στο να δειχτεί ότι η απεικόνιση από το $H \otimes A^*$ στο A^* είναι ο μορφισμός συνάλγεβρας που ορίζει δράση από το H στο A^*.

Αυτό δείχνεται από τις σχέσεις:

$$\epsilon(xf) = (xf)(1) = f(S^{-1}(x)1) = \epsilon(S^{-1}(x))f(1) = \epsilon(x)\epsilon(f)$$

και

$$\begin{aligned}
\langle a \otimes b, \sum_{(xf)} (xf)^1 \otimes (xf)^2\rangle &= \sum_{(xf)} \langle a, (xf)^1\rangle \langle b, (xf)^2\rangle = \langle ba, xf\rangle \\
&= \langle S^{-1}(x)(ba), f\rangle \\
&= \sum_{(x)(f)} \langle S^{-1}(x^2)b, f^2\rangle \langle S^{-1}(x^1)a, f^1\rangle \\
&= \sum_{(x)(f)} \langle a, x^1 f^1\rangle \langle b, x^2 f^2\rangle \\
&= \langle a \otimes b, \sum_{(x)(f)} x^1 f^1 \otimes x^2 f^2\rangle.
\end{aligned}$$

Πόρισμα 4.2.3.1. *Έστω $H = (H, \mu, \eta, \Delta, \epsilon, S, S^{-1})$ μία πεπερασμένης διάστασης Hopf άλγεβρα με αντιστρέψιμο αντιποδικό S. Υπάρχει μοναδική αριστερή (αντ. δεξιά) δομή H-συνάλγεβρας προτύπου στη δυϊκή της αντίθετης Hopf άλγεβρας $(H^{op})^* = (H^*, \Delta^*, \epsilon^*, (\mu^{op})^*, \eta^*, (S^{-1})^*, S^*)$ που δίνεται για $x, a \in H$ και $f \in H^*$ ως:*

$$\langle a, x f\rangle = \sum_{(x)} \langle S^{-1}(x^2)ax^1, f\rangle \quad (\text{αντ. } \langle a, f^x\rangle = \sum_{(x)} \langle x^2 a S^{-1}(x^1), f\rangle)$$

Παρατήρηση 4.2.2. Εφαρμόζοντας το Πόρισμα 4.2.3.1 στην Hopf άλγεβρα

$$(H^{*})^{cop} = (H^{*}, (\Delta^{op})^{*}, \epsilon^{*}, \mu^{*}, \eta^{*}, (S^{-1})^{*}, S^{*})$$

και εκμεταλευόμενοι της φυσικής ταύτισης των χώρων H^{**} και H, παίρνουμε ότι η H είναι δεξιά $(H^{*})^{cop}$-συνάλγεβρα πρότυπο. Από το Θέωρημα 2.2.3(α) έχουμε έναν ισομορφισμό μέσω της $S^{*}: (H^{*})^{cop} \to (H^{*})^{op}$ που επάγει μία δεξιά δράση της $(H^{*})^{op}$ στην H. Όλα αυτα οδηγούν στο ακόλουθο:

Πρόταση 4.2.4. Κάτω από τις υποθέσεις του Πορίσματος 4.2.3.1, υπάρχει μοναδική δομή δεξιάς $(H^{*})^{op}$-συνάλγεβρας πρότυπου στην H, που δίνεται για $a \in H$ και $f \in H^{*}$ ως:

$$a^{f} = \sum_{(a)} f(S^{-1}(a_{(3)})a_{(1)})a_{(2)}.$$

Απόδειξη. Έστω $f, g \in H^{*}$ και $a \in H$. Από το Πόρισμα 4.2.3.1 η δράση του $(H^{*})^{cop}$ στο H δίνεται από:

$$\begin{aligned}
\langle a^{f}, g\rangle &= \sum_{(f)} \langle a, f_{(2)} g S^{*}(f_{(1)})\rangle = \sum_{(f)(a)} \langle a_{(3)}, f_{(2)}\rangle \langle a_{(2)}, g\rangle \langle a_{(1)}, S^{*}(f_{(1)})\rangle \\
&= \sum_{(f)(a)} \langle S(a_{(1)}), f_{(1)}\rangle \langle a_{(3)}, f_{(2)}\rangle \langle a_{(2)}, g\rangle \\
&= \sum_{(a)} \langle \langle S(a_{(1)})a_{(2)}, f\rangle a_{(2)}, g\rangle = \sum_{(a)} \langle f(S(a_{(1)})a_{(2)})a_{(3)}, g\rangle
\end{aligned}$$

Επομένως προκύπτει ότι:

$$a^{f} = \sum_{(a)} f(S(a_{(1)})a_{(2)})a_{(3)}$$

Τέλος συνθέτοντας με $(S^{-1})^{*}$ παίρνουμε τη δεξιά δράση του $(H^{*})^{op}$ στην H που δίνεται από:

$$a^{(S^{-1})^{*}(f)} = a^{f \circ S^{-1}} = \sum_{(a)} f(S^{-1}(S(a_{(1)})a_{(3)}))a_{(2)} = \sum_{(a)} f(S^{-1}(a_{(3)})a_{(1)})a_{(2)}.$$

Ως αποτέλεσμα αυτών έχουμε ολοκληρώσει το κάδρο της απόδειξης του ακόλουθου Θεωρήματος που είναι το βασικό αποτέλεσμα πάνω στο οποίο θα στηριχθεί η κατασκευή της κβαντική δυάδας:

Θεώρημα 4.2.5. *Έστω $H = (H, \mu, \eta, \Delta, \epsilon, S, S^{-1})$ μία πεπερασμένης διάστασης Hopf άλγεβρα με αντιστρέψιμο αντιποδικό S. Θεωρώ την Hopf άλγεβρα*

$$X = (H^{*})^{op} = (H^{*}, \Delta^{*}, \epsilon, (\mu^{op})^{*}, \eta, (S^{-1})^{*}, S^{*}).$$

Έστω $\alpha: H \otimes X \to X$ και $\beta: H \otimes X \to H$ γραμμικές απεικονίσεις δοσμένες ως:

$$\alpha(a \otimes f) = a \rightharpoonup f = \sum_{(a)} f(S^{-1}(a_{(2)})?a_{(1)}) \qquad \beta(a \otimes f) = a^{f} = \sum_{(a)} f(S^{-1}(a_{(3)})a_{(1)})a_{(2)}$$

όπου $a \in H$ και $f \in X$. Τότε το (H, X) είναι αρμοστό ζεύγος Hopf αλγεβρών.

Σημείωση 4.2.3. Το πρώτο σκέλος της απόδεξης βασίζεται στη χρήση του Πορίσματος 4.2.3.1 και της Πρότασης 4.2.4. Το υπόλοιπο κομμάτι αφορά τη χρήση του κανόνα του Sweedler για αναλυτικούς υπολογισμούς ώστε να επαληθευθούν οι σχέσεις του Ορισμού 4.2.3. Τέλος το ? παίζει το ρόλο βουβής μεταβλητής.

4.2.2 Κατασκευή Κβαντικής Δυάδας

Έστω $H = (H, \mu, \eta, \Delta, \epsilon, S, S^{-1})$ μία πεπερασμένης διάστασης Hopf άλγεβρα με αντιστρέψιμο αντιποδικό S και $X = (H^{*op}) = (H^{*}, \Delta^{*}, \epsilon, (\mu^{op})^{*}, \eta, (S^{-1})^{*}, S^{*})$ η δυϊκή της Hopf άλγεβρα.

Ορισμός 4.2.4. Η κβαντική δυάδα $D(H)$ της Hopf άλγεβρας H είναι το δισταυρωτό γινόμενο των H και $X = (H^{*op})$:

$$D(H) = X \bowtie H = (H^{*op}) \bowtie H.$$

Παρατήρηση 4.2.3. Ως διανυσματικός χώρος ο $D(H) = X \otimes H$. Η μονάδα του $D(H)$ είναι το $1 \otimes 1$. Αν $f \in X$ και $a, b \in H$ τότε το συνταυτοτικό και ο συμπολλαπλασιασμός δίνονται ως:

$$\epsilon(f \otimes a) = \epsilon(a) f(1) \qquad (2.12)$$

και

$$\Delta(f \otimes a) = \sum_{(a)(f)} (f^1 \otimes a^1) \otimes (f^2 \otimes a^2) \qquad (2.13)$$

Λήμμα 4.2.6. *Ο πολλαπλασιασμός στο $D(H)$ δίνεται ως:*

$$(f \otimes a)(g \otimes b) = \sum_{(a)} fg(S^{-1}(a^3)?a^1) \otimes a^2 b \qquad (2.14)$$

όπου $f, g \in X$ και $a, b \in H$.

Απόδειξη. Από τον ορισμό του δισταυρωτού γινομένου έχουμε ότι το γινόμενο του $D(H)$ δίνεται ως:

$$(f \otimes a)(g \otimes b) = \sum_{(a)(g)} f(a^1 \ g^1) \otimes a^{2g^2} b.$$

Χρησιμοποιώντας την ανάλυση των τύπων του Θεωρήματος 4.2.5 για το δεξί μέλος έχουμε:

$$\begin{aligned}
&\sum_{(a)(g)} fg^1(S^{-1}(a^2)?a^1) \otimes g^2(S^{-1}(a^{41})a^3)a^4 b \\
&= \sum_{(a)} fg(S^{-1}(a^{41})a^3 S^{-1}(a^2)?a^1) \otimes a^4 b \\
&= \sum_{(a)} \epsilon(a^2) fg(S^{-1}(a^4)?a^1) \otimes a^3 b \\
&= \sum_{(a)} fg(S^{-1}(a^3)?a^1) \otimes a^2 b.
\end{aligned}$$

Παρατήρηση 4.2.4. (i) Η κβαντική δυάδα $D(H)$ περιέχει τις H και X ως Hopf υπάλγεβρες μέσω των εμφυτεύσεων:

$$i_H(a) = 1 \otimes a \quad \text{και} \quad i_X(f) = f \otimes 1.$$

Μέσω του τύπου (2.14) προκύπτει για κάθε $f \in X$ και $a \in H$ ότι:

$$f \otimes a = i_X(f) i_H(a)$$

(ii) Θεωρώ την απεικόνιση $\lambda_{H,H} : H \otimes X \to End(H)$ όπου για $a, b \in H$ και $f \in X$ έχω ότι: $\lambda_{H,H}(a \otimes f)(b) = f(b)a$. Αφού η H είναι πεπερασμένης διάστασης τότε ξέρουμε ότι η απεικόνιση $\lambda_{H,H}$ είναι ισομορφισμός, πράγμα που μας επιτρέπει να θέσουμε:

$$\rho = \lambda^{-1}_{H \otimes H}(id_H) \in H \otimes X$$

Με αυτόν τον τρόπο ορίζω τον καθολικό R πίνακα της κβαντικής δυάδας ως:

$$R = (i_H \otimes i_X)(\rho) \in D(H) \otimes D(H)$$

Όπου αν επιλέξουμε βάση $\{e_i\}_{i \in I}$ του διανυσματικού χώρου H μαζί με τη δυϊκή βάση $\{e^i\}_{i \in I} \in X$ τότε παίρνουνε:

$$\rho = \sum_{i \in I} e_i \otimes e^i \quad \text{και} \quad R = \sum_{i \in I} (1 \otimes e_i) \otimes (e^i \otimes 1) \qquad (2.15)$$

Θεώρημα 4.2.7. *Κάτω από τις προηγούμενες υποθέσεις, η Hopf άλγεβρα $D(H)$ εφοδιασμένη με το στοιχείο $R = \sum_{i \in I}(1 \otimes e_i) \otimes (e^i \otimes 1)$ είναι πλεξιδοειδής.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι το R ικανοποιεί τις συνθήκες (1.2) και (1.4-1.5), δηλαδή:
(i) Ο R είναι αντιστρέψιμος στο $D(H) \otimes D(H)$
(ii) $(\Delta \otimes id)(R) = R_{12}R_{23}$ και $(id \otimes \Delta)(R) = R_{13}R_{12}$
(iii) Για κάθε $f \in X$ και $a \in H$, έχουμε ότι:

$$\Delta^{op}(f \otimes a)R = R\Delta(f \otimes a).$$

(i) Ισχυριζόμαστε ότι ο αντίστροφος του R είναι ο:

$$\overline{R} = \sum_{i \in I} (1 \otimes e_i) \otimes ((e^i \circ S) \otimes 1).$$

Θεωρώ στοιχείο $\xi = b \otimes u \otimes c \otimes v \in H \otimes X \otimes H \otimes X$ και έχω:

$$\begin{aligned}
\langle R\overline{R}, \xi \rangle &= \sum_{i,j \in I} \langle (1 \otimes e_i e_j) \otimes (e^i (e^j \circ S) \otimes 1), b \otimes u \otimes c \otimes v \rangle \\
&= \epsilon(b) v(1) \sum_{(c)} \sum_{i \in I} e^i(c_1) \sum_{j \in I} e^j(S(c_2)) \, u(e_i e_j) \\
&= \epsilon(b) v(1) u\Big(\sum_{(c)} c_1 S(c_2)\Big) = \epsilon(b) v(1) \epsilon(c) u(1) \\
&= \langle 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1, \xi \rangle
\end{aligned}$$

Ομοίως προκύπτει ότι το $\overline{R}$ είναι αριστερός αντίστροφος του R.

(ii) Θα δείξω την πρώτη σχέση (ομοίως η δεύτερη). Αρκεί να δείξω ότι:

$$\sum_{i\in I,(e_i)} 1\otimes e_i^1\otimes 1\otimes e_i^2\otimes e^i\otimes 1 = \sum_{i,j\in I} 1\otimes e_i\otimes 1\otimes e_j\otimes e^ie^j\otimes 1.$$

Υπολογίζοντας το αριστερό μέλος για στοιχείο $\theta = a\otimes t\otimes b\otimes u\otimes c\otimes v$ που ανήκει στο $D(H)\otimes D(H)\otimes D(H)$ έχουμε:

$$\langle(\Delta\otimes id)(R),\theta\rangle = \Big\langle \sum_{i\in I,(e_i)} 1\otimes e_i^1\otimes 1\otimes e_i^2\otimes e^i\otimes 1,\theta\Big\rangle = \epsilon(a)\epsilon(b)v(1)\sum_{i\in I,(e_i)} e^i(c)t(e_i^1)u(e_i^2).$$

Σημειώνουμε ότι:

$$\sum_{(a)} a^1\otimes a^2 = \sum_{(a),i\in I,(e_i)} e^i(a)e_i^1\otimes e_i^2$$

Από εφαρμογή του συμπολλαπλασιασμού του H στο $a = \sum_{i\in I} e^i(a)e_i$ και χρήση της προηγούμενης σχέσης έχουμε: $\sum_{i\in I,(e_i)} e^i(c)t(e_i^1)u(e_i^2) = \sum_{(c)} t(c^1)u(c^2)$. Για το δεξιό μέλος έχουμε:

$$\begin{aligned}\langle R_{13}R_{23},\theta\rangle &= \epsilon(a)\epsilon(b)v(1)\sum_{i,j\in I} t(e_i)u(e_j)(e^ie^j)(c)\\ &= \epsilon(a)\epsilon(b)v(1)\sum_{(c)} t\Big(\sum_{i\in I} e^i(c^1)e_i\Big)u\Big(\sum_{j\in I} e^j(c^2)e_j\Big)\\ &= \epsilon(a)\epsilon(b)v(1)\sum_{(c)} t(c^1)u(c^2) = \langle(\Delta\otimes id)(R),\theta\rangle.\end{aligned}$$

(iii) Υπολογίζοντας με χρήση του κανόνα του Sweedler το $\Delta^{op}(f\otimes a)$ στο $\xi = b\otimes u\otimes c\otimes v$, προκύπτει ότι:

$$\langle\Delta^{op}(f\otimes a)R,\xi\rangle = \sum_{(a)(c)} f(bc^1)u(c^2a^1)v(a^2).$$

Ομοίως υπολογίζοντας το $R\Delta(f\otimes a)$ στο $\xi = b\otimes u\otimes c\otimes v$ έχουμε:

$$\langle R\Delta(f\otimes a),\xi\rangle = \sum_{(a)(c),i\in I,(e_i)} f(c^2S^{-1}(e_i^3)be_i^1)u(e_i^2a^1)e^i(c^1)v(a^2).$$

Εφαρμόζοντας $(\Delta\otimes id_H)\Delta$ στο $c = \sum_{i\in I} e^i(c)e_i$ παίρνουμε:

$$\sum_{(c)} c^1\otimes c^2\otimes c^3 = \sum_{i\in I,(e_i)} e^i(c)e_i^1\otimes e_i^2\otimes e_i^3$$

Το οποίο χρησιμοποιούμε στον υπολογισμό του $\langle R\Delta(f\otimes a),\xi\rangle$:

$$\begin{aligned}\langle R\Delta(f\otimes a),\xi\rangle &= \sum_{(a)(c)} f(c^4S^{-1}(c^3)bc^1)u(c^2a^1)v(a^2)\\ &= \sum_{(a)(c)} \epsilon(c^3)f(bc^1)u(c^2a^1)v(a^2)\\ &= \sum_{(a)(c)} f(bc^1)u(c^2a^1)v(a^2) = \langle\Delta^{op}(f\otimes a)R,\xi\rangle\end{aligned}$$

4.3 Κατηγορία Άμματος

Στόχος αυτής της παραγράφου είναι να δομήσουμε μία κατηγορική κατασκευή ισοτοπικής αναλλοιώτου των κρίκων φτιάχνοντας την αυστηρή τανυστική κατηγορία Άμματος. Κατόπιν θα γενικεύσουμε την ιδέα της περίπλεξης που συναντήσαμε στις πλεξιδοειδείς διάλγεβρες και έτσι θα επεκταθούμε στις πλεξιδοειδείς τανυστικές κατηγορίες.

4.3.1 Θεωρία Κρίκων και Αμμάτων

Ορισμός 4.3.1. Έστω $X = \mathbb{R}^2 \times [0,1]$ και πεπερασμένη ακολουθία σημειών $(M_1, \dots, M_n)$ του X, όπου $[M_1, \dots, M_n]$ η κλειστή κυρτή θήκη τους (αντίστοιχα (M_1, M_n) η ανοικτή). Ένα πολυγωνκό τόξο L στο X είναι μία ένωση:

$$L = \bigcup_{i=1}^{n-1} [M_i, M_{i+1}]$$

πεπερασμένου αριθμού ευθυγράμμων τμημάτων τέτοια ώστε:

$$(M_i, M_{i+1}) \cap (M_j, M_{j+1}) = \emptyset, \quad \text{εάν } i \neq j.$$

Τα σημεία $M_1, \dots, M_n$ καλούνται κορυφές του πολυγωνικού τόξου. Λέμε ότι το πολυγωνικό τόξο είναι απλό αν τα σημεία $M_1, \dots, M_{n-1}$ είναι όλα διακεκριμένα μεταξύ τους. Το πολυγωνικό τόξο είναι κλειστό εάν $M_1 = M_n$ και λέμε ότι το σύνορο ∂L είναι κενό. Σε αντίθετη περίπτωση όπου $M_1 \neq M_n$, θεωρούμε $\partial L = \{M_1, M_n\}$ και καλούμε αρχή το M_1 και πέρας το M_n.

Ορισμός 4.3.2. Ένας <u>κρίκος</u> L στο X είναι μία εμφύτευση πεπερασμένου αριθμού m απλών κλειστών πολυγωνικών τόξων. Τα κλειστά τόξα καλούνται συνεκτικές συνιστώσες του L και ο ακέραιος m καλείται τάξη του κρίκου.

(α) Δοσμένων διαδοχικών κορυφών M_i, M_{i+1} και σημείου $N \notin L$, $M_i \notin [N, M_{i+1}]$, $M_{i+1} \notin [M_i, N]$ και $[M_i, N, M_{i+1}] \cap L = [M_i, M_{i+1}]$, συμβολίζουμε ως L' τον κρίκο:

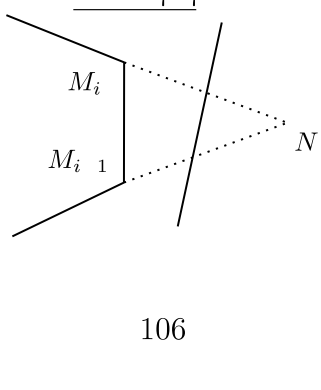
$$L' = (L \setminus [M_i, M_{i+1}]) \cup [M_i, N] \cup [N, M_{i+1}].$$

Λέμε ότι το L' προκύπτει από το L μέσω μίας **Δ-κινήσεως**.

(β) Δύο κρίκοι L και L' είναι (συνδυαστικά) ισοτοπικά και γράφουμε $L \sim_c L'$ εάν υπάρχουν κρίκοι $L = L_0, L_1, \dots, L_k = L'$ έτσι ώστε για κάθε i, ένας από τους δύο κρίκους L_i, L_{i+1} να προκύπτει από τον άλλο μέσω κάποιας Δ-κίνησης.

Η σχέση $\sim_c$ είναι μία σχέση ισοδυναμίας.

<u>Δ- κίνηση:</u>



Ορισμός 4.3.3. (α) Μία προβολή Π είναι μία ένωση πεπερασμένου αριθμού κλειστών πολυγωνικών τόξων στο R^2 τέτοια ώστε καμία κορυφή να μην βρίσκεται στο εσωτερικό οποιασδήποτε πλευράς.

(α) Ένα κανονικό σημείο διασταυρώσεως του Π είναι το σημείο της προβολής που βρίσκεται στο εσωτερικό ακριβώς δύο πλευρών. Μία προβολή κρίκου που έχει μόνο κανονικά σημεία διασταυρώσεως καλείται κανονική.

(γ) Δοσμένου σημείου διασταυρώσεως P, θεωρούμε το σύνολο E_P που αποτελείται από το ζεύγος πλευρών στο οποίο περιέχεται το P. Ένα διάγραμμα κρίκου είναι μία κανονική προβολή στο R^2 της οποία όλα τα σύνολα E_P είναι προσανατολισμένα.

(δ) Ένα γενικό διάγραμμα κρίκου είναι το διάγραμμα κρίκου εκείνο για το οποίο ισχύει ότι όλες οι διακεκριμένες κορυφές βίσκονται σε διαφορετικό ύψος και δεν αποτελείται από οριζόντιες ακμές. Μία γενική ισοτοπία μεταξύ δύο γενικών διαγραμμάτων κρίκου Π, Π^1 είναι μία ισοτοπία R^2 τέτοια ώστε $h\mathrm{p}1,\Pi\mathrm{q} \quad \Pi^1$ και $h\mathrm{p}t,\Pi\mathrm{q}$ να είναι γενικό διάγραμμα για κάθε $t \;\mathsf{P}\; \mathrm{r}0,1\mathrm{s}$

Ορισμός 4.3.4. Η τριπλέτα $\mathrm{p}L \quad , L \quad , L_0\mathrm{q}$ προσανατολισμένων κρίκων στο X είναι μία τριάδα Conway εάν μπορεί να αναπαρασταθεί από διαγράμματα κρίκων $D \quad , D \quad , D_0$ τα οποία συμπίπτουν εκτός δίσκου του R^2 και είναι αντίστοιχα ισοτοπικά με:

X  , X  , X_0 $\quad | \, |$

εντός του δίσκου.

Τώρα, για κάθε θετικό ακέραιο n θέτουμε $\mathrm{r}n\mathrm{s} \quad \mathrm{t}1,2, \quad ,n\mathrm{u}$ και ως σύμβαση θεωρούμε το $\mathrm{r}0\mathrm{s} \quad \mathrm{H}$.

Ορισμός 4.3.5. Έστω k και l μη-αρνητικοί ακέραιοι.

(α) Ένα άμμα (tangle) L τύπου $\mathrm{p}k,l\mathrm{q}$ είναι η ένωση πεπερασμένου αριθμού κατά ζεύγη-ξένων απλών προσανατολισμένων πολυγωνικών τόξων στο $X \quad \mathsf{R}^2 \quad \mathrm{r}0,1\mathrm{s}$ τέτοια ώστε το σύνορο $\mathsf{B}L$ να ικανοποιεί τη συνθήκη:

$$\mathsf{B}L \quad L \text{``} \mathrm{p}\mathsf{R}^2 \quad \mathrm{t}0,1\mathrm{uq} \qquad \mathrm{r}k\mathrm{s} \quad \mathrm{t}0\mathrm{u} \quad \mathrm{t}0\mathrm{u} \quad \text{''} \quad \mathrm{r}l\mathrm{s} \quad \mathrm{t}0\mathrm{u} \quad \mathrm{t}1\mathrm{u}$$

(β) Δοσμένου άμματος L τύπου $\mathrm{p}k,l\mathrm{q}$ ορίζω δύο πεπερασμένες ακολουθίες $s\mathrm{p}L\mathrm{q}$ και $b\mathrm{p}L\mathrm{q}$ που αποτελούνται από σύμβολα $\quad , \quad$. Εάν $k \quad 0$ τότε $s\mathrm{p}L\mathrm{q} \quad ?$ ως σύμβαση. Ομοίως $l \quad 0 \;\tilde{\mathrm{n}}\; b\mathrm{p}L\mathrm{q} \quad ?$. Γενικά ορίζω:

$$s\mathrm{p}L\mathrm{q} \quad \mathrm{p}\epsilon_1, \quad ,\epsilon_k\mathrm{q} \text{ και } b\mathrm{p}L\mathrm{q} \quad \mathrm{p}\eta_1, \quad ,\eta_l\mathrm{q}$$

όπου ϵ_i (αντίστοιχα η_i) εάν το σημείο $\mathrm{p}i,0,0\mathrm{q}$ (αντ. $\mathrm{p}i,0,1\mathrm{qq}$ είναι σημείο πέρατος (αντ. σημείο αρχής) του L. Σε διαφορετική περίπτωση έχουμε ϵ_i .

Ορισμός 4.3.6. (α) Μία ισοτοπία του $X \quad \mathsf{R}^2 \quad \mathrm{r}0,1\mathrm{s}$ είναι μία κατά τμήματα γραμμική απεικόνιση $h : \mathrm{r}0,1\mathrm{s} \quad X \;\tilde{\mathrm{N}}\; X$ τέτοια ώστε για κάθε $t \;\mathsf{P}\; I$, η απεικόνιση $h\mathrm{p}t, \quad \mathrm{q}$ να είναι ομοιομορφισμός του X, η οποία περιορίζεται στην ταυτοτική απεικόνιση στο σύνορο $\mathsf{B}X \quad \mathsf{R}^2 \quad \mathrm{t}0,1\mathrm{u}$ και τέτοια ώστε το $h\mathrm{p}0, \quad \mathrm{q}$ να είναι η ταυτοτική απεικόνιση του X.

(β) Δύο άμματα L, L^1 είναι ισοτοπικά και γράφουμε $L \quad_i L$ αν υπάρχει ισοτοπία h του X τέτοια ώστε $h\mathrm{p}1,L\mathrm{q} \quad L^1$.

Παρατήρηση 4.3.1. Με παρόμοιο τρόπο όπως και στους κρίκους ισχύουν τα ακόλουθα:

- Ορίζουμε διάγραμμα άμματος Π ως το πολυγωνικό τόξο στο R^2 ώστε καμία κορυφή να μη κείτεται μεταξύ οποιωνδήποτε ακμών και το σύνορο του BΠ να ικανοποιεί τη συνθήκη:

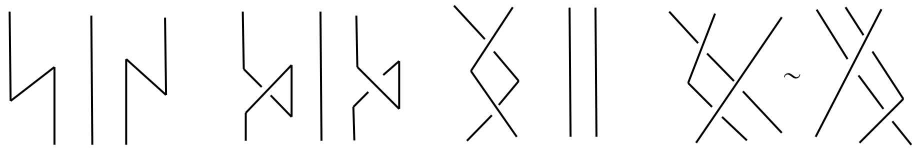
$$\mathsf{B}\Pi \quad \Pi \text{“} \mathsf{pR} \quad \mathsf{t}0,1\mathsf{uq} \qquad \mathsf{r}k\mathsf{s} \quad \mathsf{t}0\mathsf{u} \quad \mathsf{r}l\mathsf{s} \quad \mathsf{t}1\mathsf{u}$$

- Ένα κανονικό σημείο διασταυρώσεως του Π είναι σημείο της προβολής του άμματος που κείτεται στο εσωτερικό ακριβώς δύο ακμών.

- Για άμματα L, L^1 η σχέση $L \quad _c L$ που προκύπτει μέσω της Δ-πράξης ορίζει ανάλογη συνδυαστική ισοδυναμία μεταξύ αμμάτων. Αποδεικνύεται ότι:

$$L \quad _c L^1 \;\; \hat{\mathsf{o}} \;\; L \quad _i L^1$$

Θεώρημα 4.3.1. *Δύο κανονικά διαγράμματα αμμάτων αναπαριστούν ισοτοπικά άμματα στο* $\mathsf{R}^2 \quad \mathsf{r}0,1\mathsf{s}$ *εάν και μόνο αν προκύπτει το ένα από το άλλο μέσω πεπερασμένου αριθμού επίπεδων Δ-κινήσεων (R_0) και κινήσεων Reidemeister.*



R_0 R_I R_{II} R_{III}

Σημείωση 4.3.1. Κλείνουμε την παράγραφο με τον ορισμό πράξεων στα άμματα.

(α) Θεωρώ τις κατα τμήματα-γραμμικές απεικονίσεις a_1, a_2 από τον τοπολογικό χώρο $\mathsf{R}^2 \quad \mathsf{r}0,1\mathsf{s}$ στον εαυτό του ως:

$$a_1\mathsf{p}p,z\mathsf{q} \quad \mathsf{p}p,z\{2\mathsf{q} \;\text{ και }\; a_2\mathsf{p}p,\mathsf{p}z \quad 1\mathsf{q}\{2\mathsf{q}$$

όπου $p \;\mathsf{P}\; \mathsf{R}^2$, $z \;\mathsf{P}\; \mathsf{r}0,1\mathsf{s}$. Όταν T_1 και T_2 δύο προσανατολισμένα άμματα τέτοια ώστε $s\mathsf{p}T_1\mathsf{q} \quad b\mathsf{p}T_2\mathsf{q}$, τότε:

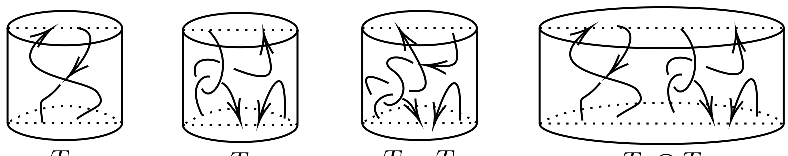
$$T_1 \quad T_2 \quad a_1\mathsf{p}T_2\mathsf{q} \text{”} a_2\mathsf{p}T_1\mathsf{q}$$

είναι ένα προσανατολισμένο άμμα με:

$$s\mathsf{p}T_1 \quad T_2\mathsf{q} \quad s\mathsf{p}T_2\mathsf{q} \;\text{ και }\; b\mathsf{p}T_1 \quad T_2\mathsf{q} \quad b\mathsf{p}T_1\mathsf{q}$$

Το άμμα $T_1 \quad T_2$ καλείται σύνθεση των T_1 και T_2 και προκύπτει τοποθετόντας το T_1 πάνω από το T_2 συγκολλώντας τα μεσσαία άκρα και πιέζοντας το όλο στο $\mathsf{R}^2 \quad \mathsf{r}0,1\mathsf{s}$.

(β) Αν T_1 άμμα τύπου $\mathsf{p}k_a, l_a\mathsf{q}$ και T_2 άμμα τύπου $\mathsf{p}k_b, l_b\mathsf{q}$ μπορώ να θεωρήσω το τανυστικό γινόμενο αμμάτων $T_1 \;\mathsf{b}\; T_2$ απλά τοποθετώντας το T_2 δεξιά του T_1 και συμπιέζοντας στο $\mathsf{R}^2 \quad \mathsf{r}0,1\mathsf{s}$ ώστε να προκύψει άμμα τύπου $\mathsf{p}k_a \quad k_b, l_a \quad l_b\mathsf{q}$.



T_1 T_2 $T_1 \circ T_2$ $T_1 \otimes T_2$

Ορισμός 4.3.7. Μία πλεξίδα L με n-νήματα είναι ένα άμμα (n, n) τέτοιο ώστε:

- $s(L) \quad b(L) \quad (\; , \; , \quad , \;)$
- Το L δεν περιέχει κλειστά πολυγωνικά τόξα.
- Για κάθε $z \in [0, 1]$, η τομή του L με το επίπεδο $\mathbb{R}^2 \quad \{z\}$ παίρνει ακριβώς n διακεκριμένα σημεία.

4.3.2 Κατασκευή Κατηγορίας OT

Ο πιο αποτλεσματικός τρόπος να κατανοήσει κανείς μία ομάδα G, είναι μέσω της παρουσίασης των γεννητόρων και των σχέσεων αυτών.

Αν F υποσύνολο του G και R είναι ένα σύνολο ζευγών λέξεων του αλφαβήτου F. Τότε (F, R) είναι μία παράσταση της ομάδας G εάν ικανοποιούνται οι συνθήκες:

- Το υποσύνολο F παράγει το G
- Δύο λέξεις a, b στο αλφάβητο του F αναπαριστούν το ίδιο στοιχείο στο G αν και μόνο αν κάποιος μπορεί να περάσει από το a στο b μέσω πράξεων που αντικαθιστούν μία υπολέξη μορφής c με μία μορφής d, όπου $(c, d) \in R$.

Ένας αντίστοιχος φορμαλισμός λειτουργεί στις τανυστικές κατηγορίες:

Ορισμός 4.3.8. Έστω $(\mathfrak{C}, \otimes, I)$ μία αυστηρή τανυστική κατηγορία και $\mathfrak{F}$ μία συλλογή μορφισμών της $\mathfrak{C}$.

- Κάθε λέξη τάξης 1 είναι μορφής $[f]$, όπου f είναι στοιχείο της $\mathfrak{F}$ ή μορφής $[id_V]$ όπου V είναι αντικείμενο της $\mathfrak{C}$.
- Ορίζουμε τους μορφισμούς της $\mathfrak{C}$ που αναπραστώνται από αυτά τα σύμβολα ως $\overline{[f]} \quad f$ και $\overline{[id_V]} \quad id_V$. Υποθέτω ότι ορίζονται όλες οι λέξεις τάξης $\leq n$ με $n \geq 1$, οι μορφισμοί που αναπαριστούν και οι υπολέξεις τους.
- Ορίζω τη λέξη τάξης $n \quad 1$ ως σύμβολο μορφής $a \quad b$ ή μορφής $a \otimes b$, όπου a, b λέξεις τάξης $\leq n$ και τον αντίστοιχο μορφισμό ως:

$$\overline{a \quad b} \quad \overline{a} \quad \overline{b} \quad \text{ή} \quad \overline{a \otimes b} \quad \overline{a} \otimes \overline{b}$$

όπου τα σύμβολα $\;$, $\otimes$ δηλώνουν τη σύνθεση και το τανυστικό γινόμενο στην τανυστική κατηγορία $\mathfrak{C}$. Οι υπολέξεις των $a \quad b$ και $a \otimes b$ περιλαμβάνουν την αυτή καθ' αυτή καθώς και τις υπολέξεις των a και b. Η κλάση των λέξεων της $\mathfrak{F}$ είναι η ένωση όλων των λέξεων θετικής τάξης.

Ορισμός 4.3.9. Δύο λέξεις a, a' της $\mathfrak{F}$ είναι ισοδύναμες εάν υπάρχουν λέξεις $a_0 \quad a, a_1, \quad , a_k \quad a'$ τέτοιες ώστε η λέξη $a_{i \; 1}$ να προκύπτει από την a_i αντικαθιστώντας κάποια υπολέξη x μίας εξ αυτών με μία λέξη y της άλλης, όπου x, y είναι τα δύο μέρη κάθε μίας από τις ακόλουθες σχέσεις:

- $([f] \quad [g]) \quad ([h] \quad [f] \quad ([g] \quad [h])$ $\qquad (3.1)$
- $[id_{b(f)}] \quad [f] \quad [f], \quad [f] \quad [id_{s(f)}] \quad [f]$ $\qquad (3.2)$

- $[id_V]\ [id_V]\quad [id_V]$ (3.3)
- $([f] \otimes [g]) \otimes [h]\quad [f] \otimes ([g] \otimes [h])$ (3.4)
- $[id_I] \otimes [f]\quad [f],\ [f] \otimes [id_I]\quad [f]$ (3.5)
- $[id_V] \otimes [id_W]\quad [id_{V \otimes W}]$ (3.6)
- $([f] \otimes [g])\ ([f^1] \otimes [g^1])\quad ([f]\ [f^1]) \otimes ([g]\ [g^1])$ (3.7)

όπου V, W είναι αντικείμενα της $\mathfrak{C}$ και f, f^1, g, g^1, h είναι στοιχεία του $\mathfrak{F}$. Γράφουμε $a \quad b$ εάν a, b είναι ισοδύναμες λέξεις.

Λήμμα 4.3.2. *(α) Εάν $f, g \in \mathfrak{F}$ τότε:*

$$([f] \otimes [id_{b(g)}])\ ([id_{s(f)}] \otimes [g])\quad ([id_{b(f)}] \otimes [g])\ ([f] \otimes [id_{s(g)}])$$

(β) Εάν $f_1, \quad, f_k \in \mathfrak{F}$ είναι μορφισμοί τέτοιοι ώστε: $b(f_i)\quad s(f_{i\ 1})$ για κάθε i, τότε:

$$([id_V] \otimes [f_1] \otimes [id_W])\ ([id_V] \otimes [f_2] \otimes [id_W]) \qquad ([id_V] \otimes [f_k] \otimes [id_W])$$

είναι ισοδύναμο με το $[id_V] \otimes ([f_1]\ [f_2] \qquad [f_k]) \otimes [id_W]$.
(γ) Κάθε λέξη στο $\mathfrak{F}$ είναι ισοδύναμη με μία λέξη μορφής $[id_V]$ ή της μορφής

$$([id_{V_1}] \otimes [f_1] \otimes [id_{W_1}])\ ([id_{V_2}] \otimes [f_2] \otimes [id_{W_2}]) \qquad ([id_{V_k}] \otimes [f_k] \otimes [id_{W_k}]).$$

Απόδειξη. (α) Από (3.2) και (3.7) έχω:

$$\begin{aligned}([f] \otimes [id_{b(g)}])\ ([id_{s(f)}] \otimes [g]) \quad & ([f]\ [id_{s(f)}]) \otimes ([id_{b(g)}]\ [g]) \\ & [f] \otimes [g] \\ & ([id_{b(f)}]\ [f]) \otimes ([g]\ [id_{(s(g))}]) \\ & ([id_{b(f)}] \otimes [g])\ ([f] \otimes [id_{s(g)}]).\end{aligned}$$

(β) Δείχνεται με επαγωγή στο k και χρήση των σχέσεων (3.1),(3.3),(3.7) και του (α).
(γ) Το αποδεικνύουμε με επαγωγή στην τάξη των λέξεων. Όταν η λέξη είναι τάξης 1, τότε είναι $[f]$ όπου $f \quad id_V$ ή $f \in \mathfrak{F}$. Και στις δύο περιπτώσεις αυτή είναι ισοδύναμη με $[id_I] \otimes [f] \otimes [id_I]$.

Έστω ότι ισχύει η υπόθεση για όλες τις λέξεις τάξης $\leq n$ και έστω a λέξη τάξης $\leq n \quad 1$. Εάν $a \quad b \quad c$ τότε από υπόθεση οι λέξεις b και c είναι ισοδύναμες με τα ταυτοτικά ή με μία λέξη της προηγούμενης μορφής, επομένως σε κάθε περίπτωση η a είναι ισοδύναμη με ταυτοτικό ή με μία λέξη μορφής:

$$([id_{V_1}] \otimes [f_1] \otimes [id_{W_1}]) \qquad [id_{V_{n\ 1}}] \otimes [f_{n\ 1}] \otimes [id_{W_{n\ 1}}])$$

Τώρα θεωρώ την περίπτωση όπου $a \quad b \otimes c$ και κοιτώ την περίπτωση όπου τα b, c δεν είναι ταυτοτικά. Τότε:

$$b \quad b_1 \qquad b_k \text{ και } c \quad c_1 \qquad c_l$$

όπου οι λέξεις $b_1, \dots, b_k, c_1, \dots, c_l$ είναι μορφής $[id_V] \otimes [f] \otimes [id_W]$ για κάποιο $f \in \mathfrak{F}$.

Θέτω $S = s(\overline{b_k})$ και $T = b(\overline{c_1})$ και από (3.2) και (α) έχω:

$$\begin{aligned} a \sim b \otimes c &= (b \otimes [id_S]^{\otimes l}) \otimes ([id_T]^{\otimes k} \otimes c) \\ &= (b_1 \otimes [id_T]) \circ \dots \circ (b_k \otimes [id_T]) \circ ([id_S] \otimes c_1) \circ \dots \circ ([id_S] \otimes c_l) \end{aligned}$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με τον ισχυρισμό λόγω:

$$b_i \otimes [id_T] = [id_V] \otimes [f] \otimes [id_{W \otimes T}] \text{ και } [id_S] \otimes c_i = [id_{S \otimes V}] \otimes [f] \otimes [id_W]$$

για κάποια $f, f' \in \mathfrak{F}$, όπου η τελευταία ισοδυναμία προκύπτει από το (3.6).

Παρατήρηση 4.3.2. Οι συνθέσεις και τα τανυστικά γινόμενα λέξεων είναι πράξεις που είναι συμβατές με την προαναφερθείσα σχέση ισοδυναμίας.

Συμβολίζω ως $M(\mathfrak{F})$ την κλάση των κλάσεων ισοδυναμίας των λέξεων της $\mathfrak{F}$. Ορίζω μία αυστηρή κατηγορία $\mathfrak{C}(\mathfrak{F})$ με αντικείμενα τα αντικείμενα της $\mathfrak{C}$ και όπου $M(\mathfrak{F})$ είναι η κλάση των μορφισμών της.

Η ταυτοτική απεικόνιση και οι απεικονίσεις αρχής και πέρατος δίνονται από:

$$id_V = [id_V], \quad s(a) = s(\overline{a}), \quad b(a) = b(\overline{a})$$

ενώ η σύνθεση και το τανυστικό γινόμενο λέξεων έχουν ήδη οριστεί.

Μία απεικόνιση που στέλνει μία λέξη a στο μορφισμό $\overline{a} \in \mathfrak{C}$ είναι ένας αυστηρός τανυστικός συναρτητής από το $\mathfrak{C}(\mathfrak{F})$ στο $\mathfrak{C}$. Όταν αυτός είναι μία ισοδυναμία κατηγοριών λέμε ότι η αυστηρή τανυστική κατηγορία $\mathfrak{C}$ είναι ελεύθερη στην κλάση $\mathfrak{F}$, ή υπό το πρίσμα της Πρότασης 1.1.2:

$$a \sim b \Leftrightarrow \overline{a} = \overline{b}, \quad \forall (a, b) \in \mathfrak{F} \times \mathfrak{F}.$$

Τέλος, λέμε ότι η $\mathfrak{F}$ παράγει την αυστηρή τανυστική κατηγορία $\mathfrak{C}$ εάν κάθε μορφισμός του $\mathfrak{C}$ μπορεί να αντληθεί από μορφισμούς του $\mathfrak{F}$ και ταυτοτικούς του $\mathfrak{C}$ εφαρμόζοντας πεπερασμένο αριθμό πράξεων.

Έστω R συλλογή των ζευγών (c, d) λέξεων του $\mathfrak{F}$ όπου $\overline{c} = \overline{d}$ στο $\mathfrak{C}$. Χρησιμοποιώντας το R ορίζουμε νέα σχέση ισοδυναμίας στο $M(\mathfrak{F})$ ως:

Δοσμένων στοιχείων $a, a' \in M(\mathfrak{F})$ λέω ότι τα a, a' είναι όμοια- $\mathrm{mod}\ R$ και γράφω $a \sim_R a'$, εάν υπάρχουν λέξεις $a = a_0, a_1, \dots, a_k = a'$ τέτοιες ώστε για κάθε i το a_{i+1} προκύπτει από το a_i αντικαθιστώντας υπολέξη c μίας εξ αυτών με υπολέξη d της άλλης όπου $(c, d) \in R$.

Ορισμός 4.3.10. Μία αυστηρή τανυστική κατηγορία $\mathfrak{C}$ παράγεται από το $\mathfrak{F}$ και από τις σχέσεις R εάν:

- Το σύνολο $\mathfrak{F}$ παράγει το $\mathfrak{C}$.
- Για κάθε ζεύγος (a, a') στοιχείων του $M(\mathfrak{F})$ έχουμε την ισοδυναμία:

$$a \sim_R a' \Leftrightarrow \overline{a} = \overline{a'}$$

Πρόταση 4.3.3. Έστω $\mathfrak{C}$ αυστηρή τανυστική κατηγορία που παράγεται από την οικογένεια μορφισμών $\mathfrak{F}$ και σχέσεις $\mathcal{R}$. Υποθέτω ότι υπάρχει αυστηρή τανυστική κατηγορία $\mathcal{D}$ και απεικόνιση $F_0 : Ob(\mathfrak{C}) \to Ob(\mathcal{D})$ τέτοια ώστε $F_0(I) = I$ και

$$F_0(V \otimes V') = F_0(V) \otimes F_0(V')$$

για κάθε ζεύγος (V, V') αντικειμένων του $\mathfrak{C}$ και έναν μορφισμό $g_f : F_0(s(f)) \to F_0(b(f))$ για κάθε μορφισμό $f \in \mathfrak{F}$.

Τότε υπάρχει μοναδικός αυστηρός τανυστικός συναρτητής $F : \mathfrak{C} \to \mathcal{D}$ τέτοιος ώστε $F(V) = F_0(V)$ για κάθε αντικείμενο $V \in \mathfrak{C}$ και $F(f) = g_f$ για κάθε μορφισμό $f \in \mathfrak{F}$, αν και μόνον αν για κάθε ζεύγος $(c, d) \in \mathcal{R}$ παίρνουμε ισοδύναμο μορφισμό στο $\mathcal{D}$ αφού αντικαταστήσουμε κάθε υπολέξη $[f]$ $(f \in \mathfrak{F})$ των c και d με g_f και κάθε υπολέξη $[id_V]$ με $id_{F_0(V)}$.

Ορισμός 4.3.11. Η κατηγορία $\mathcal{OT}$ των προσανατολισμένων αμμάτων είναι η κατηγορία που:

- Τα αντικείμενα της, $Ob(\mathcal{OT})$, είναι πεπερασμένες ακολουθίες συμβόλων $+, -$, περιελαμβανομένου και της κενής ακολουθίας $\emptyset$.
- Οι μορφισμοί της, $Hom_{\mathcal{OT}}$, είναι οι κλάσεις ισοτοπίας προσανατολισμένων αμμάτων.
- Για κάθε προσανατολισμένο άμμα L, θεωρούμε ως απεικονίσεις αρχής και πέρατος αντίστοιχα τις $s(L)$, $b(L)$ πεπερασμένες ακολουθίες του Ορισμού 4.3.5.
- Ως σύνθεση ορίζουμε τη σύνθεση αμμάτων της Σημείωσης 4.3.1
- Η ταυτοτική απεικόνιση $id : Ob(\mathcal{OT}) \to Hom_{\mathcal{OT}}$ ορίζεται ως:
  (i) $id_{\emptyset}$ είναι το κενό σύνολο $\emptyset$
  (ii) Αν $\epsilon \in Ob(\mathcal{OT})$ είναι μία πεπερασμένη ακολουθία μήκους n, τότε id_{ϵ} είναι η κλάση ισοτοπίας του άμματος L που προκύπτει ως ένωση των διαστημάτων:

$$\{1, 2, \dots, n\} \times \{0\} \times [0, 1].$$

- Ο προσεταιριστικός και ο ταυτοτικός νόμος ισχύουν λόγω του ακόλουθου Λήμματος

Λήμμα 4.3.4. *(α) Για κάθε άμμα L έχουμε ότι:*

$$id_{b(L)} \circ L = L = L \circ id_{s(L)}$$

(β) Έστω L_1, L_2, L_3, L_4 προσανατολισμένα άμματα με $b(L_1) = s(L_2)$ και $b(L_3) = s(L_4)$:

(i) Εάν $L_1 \simeq L_3$ και $L_2 \simeq L_4$, τότε $L_2 \circ L_1 \simeq L_4 \circ L_3$.

(ii) Εάν επιπλέον $b(L_2) = s(L_3)$, τότε $(L_3 \circ L_2) \circ L_1 = L_3 \circ (L_2 \circ L_1)$.

Απόδειξη. (α) Είναι προφανές από τον τρόπο ορισμού της ταυτοτικής απεικόνισης και τη χρήση της Δ-πράξης.

(β) (i) Προκύπτει άμεσα από τη χρήση των μετασχηματισμών Reidemeister.

(ii) Τα άμματα $(L_3 \quad L_2) \quad L_1$ και $L_3 \quad (L_2 \quad L_1)$ είναι ισοτοπικά μέσω ισοτοπίας $h(t,p,z) \quad (p, \phi_t(z))$ όπου $p \in \mathbb{R}^2$, $t, z \in [0,1]$ και $\phi : I \quad I \to I$ είναι συνεχής απεικόνιση που ορίζεται ως:

$$\phi_t(z) \quad \begin{cases} z(1 \quad \frac{t}{2}) & \text{εάν} \quad 0 \le z \le 1/2, \\ z \quad \frac{1}{4} & \text{εάν} \quad 1/2 \le z \le 3/4, \\ (1 \quad t)z \quad t & \text{εάν} \quad 3/4 \le z \le 1. \end{cases}$$

Παρατήρηση 4.3.3. Αν έχω $\epsilon \quad (\epsilon_1, \quad , \epsilon_k)$, $\epsilon' \quad (\epsilon_{k \quad 1}, \quad , \epsilon_l) \in Ob(\mathcal{OT})$ τότε ορίζω το τανυστικό τους γινόμενο ως:

$$\epsilon \otimes \epsilon' \quad (\epsilon_1, \quad , \epsilon_k, \epsilon_{k \quad 1}, \quad , \epsilon_l).$$

Επίσης θέτω $\emptyset \otimes \epsilon \quad \epsilon \quad \epsilon \otimes \emptyset$. Αυτή η πράξη είναι προφανώς προσεταιριστική. Το τανυστικό γινόμενο μορφισμών το ορίζω ως ακολούθως:

Αν $L, L' \in Hom_{\mathcal{OT}}$ κλάσεις ισοτοπίας προσανατολισμένων αμμάτων, τότε $L \otimes L'$ είναι η κλάση ισοτοπίας του άμματος που προκύπτει από το τανυστικό γινόμενο αμμάτων της Σημείωσης 4.3.1.

Αυτή η πράξη είναι καλώς ορισμένη μεταξύ ισοτοπιών, είναι προσεταιριστική στις κλάσεις ισοτοπίας των αμμάτων και ορίζει συναρτητή:

$$F : \mathcal{OT} \quad \mathcal{OT} \to \mathcal{OT}$$

Ως συμπέρασμα όλων αυτών έχουμε:

Πρόταση 4.3.5. Η κατηγορία άμματος $\mathcal{OT}$ εφοδιασμένη με το τανυστικό γινόμενο που ορίστηκε προηγουμένως είναι μία αυστηρή τανυστική κατηγορία, της οποίας η μονάδα I είναι το κενό σύνολο $\emptyset$.

Θεώρημα 4.3.6. *Η αυστηρή τανυστική κατηγορία $\mathcal{OT}$ παράγεται από τους μορφισμούς:*

$$”, \; Ð, \; “, \; Ð, \; X \;, \; X$$

και τις σχέσεις:

$$(Ó \; “) \; (” \; Ó) \quad Ó \quad (Ð \; Ó) \; (Ó \; Ð) \tag{3.8}$$

$$(Ò \; Ð) \; (Ð \; Ò) \quad Ò \quad (“ \; Ò) \; (Ò \; ”) \tag{3.9}$$

$$(“ \; Ò) \; (Ò \; “ \; ÓÒ) \; (Ò \; X \; Ò) \; (ÒÓ \; ” \; Ò) \; (Ò \; ”)$$

$$(Ò \; Ð) \; (ÒÓ \; Ð \; Ò) \; (Ò \; X \; Ò) \; (Ò \; Ð \; ÓÒ) \; (Ð \; Ò) \tag{3.10}$$

$$X \quad X \quad X \quad X \quad Ó \tag{3.11}$$

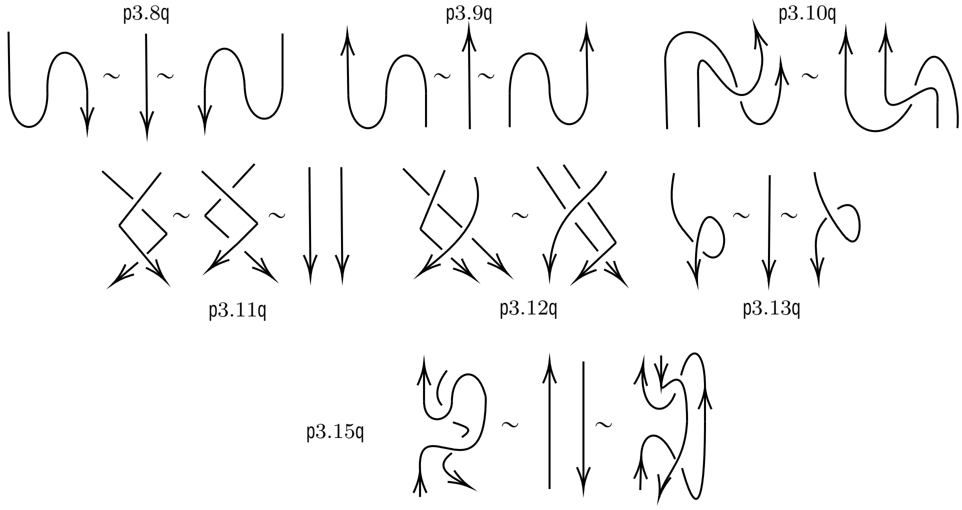
$$(X \; Ó) \; (Ó \; X) \; (X \; Ó) \quad (Ó \; X) \; (X \; Ó) \; (Ó \; X) \tag{3.12}$$

$$(Ó \; Ð) \; (X \; Ò) \; (Ó \; ”) \quad Ó \tag{3.13}$$

$$(“ \; ÓÒ) \; (Ò \; X \; Ò) \; (ÒÓ \; ”) \; (ÒÓ \; Ð) \; (Ò \; X \; Ò) \; (Ð \; ÓÒ) \quad ÓÒ \tag{3.14}$$

$$(ÒÓ \; Ð) \; (Ò \; X \; Ò) \; (Ð \; ÓÒ) \; (“ \; ÓÒ) \; (Ò \; X \; Ò) \; (ÒÓ \; ”) \quad ÒÓ \tag{3.15}$$

Η απόδειξη του Θεωρήματος 4.3.6 θα ολοκληρωθεί στην επόμενη ενότητα. Εδώ δίνουμε τη διαγραμματική απεικόνιση των σχέσεων (3.8-3.15). Η (3.14) παραλείπεται καθώς είναι ίδια με την (3.15) με ανεστραμμένα βέλη.



Παρατηρούμε ότι:

- Οι σχέσεις (3.8-3.10) προκύπτουν προκύπτουν καθαρά από ισοτοπίες διαγραμμάτων αμμάτων.
- Οι σχέσεις (3.11), (3.12), (3.13) προκύπτουν από ισοτοπίες διαγραμμάτων και από τους Reidemeister μετασχηματισμούς pR_{II}q, pR_{III}q και pR_Iq αντίστοιχα.
- Οι σχέσεις (3.14-3.15) προκύπτουν από ισοτοπίες διαγραμμάτων και από την pR_{II}q

4.3.3 Κατηγορία D_T

Αρχικά για να αποδείξουμε το προηγούμενο θεώρημα θα συστήσουμε την κατηγορία D_T των διαγραμμάτων άμματος που συμπίπτει με τα αντίστοιχα διαγράμματα κορδέλων (ribbons) ή αλλιώς διαγράμματα πλαισιωμένων αμμάτων.

Η κατηγορία D_T ορίζεται ακριβώς όπως η OT με τη μόνη διαφορά ότι τα άμματα του R^2 r0, 1s αντικαθίστανται από διαγράμματα άμματος του R r0, 1s.
Πιο συγκεκριμένα, τα αντικείμενα των κατηγοριών είναι τα ίδια, παρομοίως ορίζονται και οι απεικονίσεις ενώ οι μορφισμοί της D_T είναι ισοτοπικές κλάσεις διαγραμμάτων άμματος.

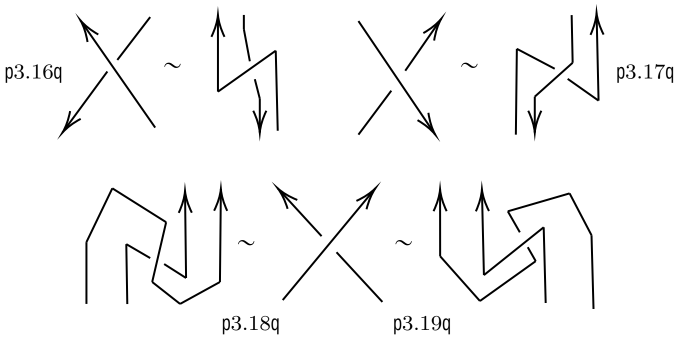
Επί της ουσίας, η κατηγορία OT είναι το πηλίκο της D_T ως προς τους μετασχηματισμούς Reidemeister. Τα στοιχειώδη διαγράμματα άμματος δίνονται ως:

Y , Y , Z ?, Z ?, T ?, T ?

Λήμμα 4.3.7. *Οι ακόλουθες σχέσεις ισχύουν στην κατηγορία* D_T *:*

Y pÒÓ Ð q pÒ X Òq p Ð ÓÒq p3.16q
T p " ÓÒq pÒ X Òq pÒÓ " q p3.17q
Z p " Òq pÒ " ÓÒq pÒ X Òq pÒÓ " Òq pÒ " q p3.18q
Z pÒ Ð q pÒÓ Ð Òq pÒ X Òq pÒ Ð ÓÒq p Ð Òq p3.19q

Απόδειξη. Βασιζόμαστε στην αναπαράσταση των σχέσεων από διαγράμματα και στις ισοτοπίες αυτών:



Λήμμα 4.3.8. *Δύο γενικά διαγράμματα αμμάτων είναι ισοτοπικά αν και μόνον αν προκύπτουν το ένα από το άλλο από πεπερασμένο αριθμό των ακόλουθων πράξεων:*
(A) Μία γενική ισοτοπία.
(B) Μία ισοτοπία που αλλάζει τη σειρά των κορυφών ανάλογα το ύψος.
(C) Έναν μετασχηματισμό Reidemeister R_0.
(E) Μία ισοτοπία διαγράμματος (3.16-3.19).

Πρόταση 4.3.9. Η αυστηρή τανυστική κατηγορία D_T παράγεται από τους μορφισμούς ", Ð, ", Ð, X , X , Y , Y , Z , Z , T , T και τις σχέσεις (3.8-3.9) και (3.16-3.19).

Απόδειξη. Θεωρώ ως $\mathfrak{F}$ το σύνολο των μορφισμών που συστήθηκαν στην Πρόταση.

- Αρχικά δείχνω ότι η $\mathfrak{F}$ παράγει την D_F. Αν Π το γενικό διάγραμμα άμματος, τότε σχηματίζω οριζόντιες γραμμές από κάθε κορυφή που δεν είναι τοπίκο ελάχιστο ή μέγιστο.

  Με αυτόν τον τρόπο χωρίζω το R r0, 1s σε λωρίδες, όπου ο περιορισμός στο Π κάθε μίας εξ αυτών περιέχει μόνο ένα σημείο διασταρώσεως ή ένα τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο. Δηλαδή είναι της μορφής id b f b id όπου το f P $\mathfrak{F}$. Στην κατηγορία D_F το διάγραμμα Π είναι η σύνθεση των περιορισμών και κατά αυτόν τον τρόπο η παράσταση του Π είναι μοναδική καθώς σε κάθε γενικό διάγραμμα Π αντιστοιχώ μοναδική λέξη a_Π του αλφαβήτου $\mathfrak{F}$ έτσι ώστε $\overline{a_\Pi}$ Π. Από Θεώρημα 4.3.1. προκύπτει το ζητούμενο.

- Σύμφωνα με τον Ορισμό 4.3.10 πρέπει να ελέγξουμε αν δοσμένου ζεύγους λέξεων $(a, a') \in \mathfrak{F} \times \mathfrak{F}$ έχουμε ότι

$$a \sim_{R} a' \Leftrightarrow \overline{a} = \overline{a'}$$

όπου R είναι το σύνολο των σχέσεων που δίνονται στην Πρόταση. Προφανώς εξ ορισμού, ισοδύναμες λέξεις θα αναπαριστούν ισοτοπικά διαγράμματα αμμάτων.

Από το Λήμμα 4.3.2 (γ) μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι a, a' είναι μορφής:

$$(id_{S_1}) \otimes (f_1) \otimes (id_{T_1}) \cdots (id_{S_1}) \otimes (f_k) \otimes (id_{T_k})$$

Όπου γεωμετρικά αυτό αντιστοιχεί με το να πούμε ότι $\overline{a} = \Pi$, $\overline{a'} = \Pi'$ είναι γενικά διαγράμματα άμματος και $a = a_{\Pi}$, $a' = a_{\Pi'}$. Από υπόθεση τα Π, Π' είναι ισοτοπικά διαγράμματα και άρα ικανοποιούν τις συνθήκες $(A) - (E)$.

Τέλος, για να δείξουμε ότι οι λέξεις a_{Π}, $a' = a_{\Pi'}$ είναι όμοιες $\mod R$ αρκεί να δείξουμε ότι οι προαναφερθείσες σχέσεις δεν αλλάζουν την κλάση ομοιότητας των λέξεων:
(A) Αν Π και Π' είναι γενικά ισοτοπικά τότε $a_{\Pi} = a_{\Pi'}$.
(B) Εάν Π και Π' διαφέρουν κατα μετασχηματισμό (B) τότε $a_{\Pi} = a_{\Pi'}$ λόγω της (3.7).
(C) Εάν Π και Π' διαφέρουν κατα μετασχηματισμό Reidemeister R_0 τότε $a_{\Pi} \sim_{R} a_{\Pi'}$ από (3.8-3.9).
(E) Προκύπτει από άμεσα από το Λήμμα 4.3.7.

Πόρισμα 4.3.9.1. *Η αυστηρή τανυστική κατηγορία D_F παράγεται από τους μορφισμούς $\cup, \overset{\leftarrow}{\cup}, \cap, \overset{\leftarrow}{\cap}, X_{+}, X_{-}$ και τις σχέσεις (3.8-3.10).*

Απόδειξη. Για να δειχθεί αρκεί να παρατηρήσουμε το ακόλουθο:

Παρατήρηση 4.3.4. Έστω $\mathfrak{C}$ αυστηρή τανυστική κατηγορία που παράγεται από σύνολο $\mathfrak{F}$ και σχέσεις R. Υποθέτω ότι υπάρχει υποσύνολο $\mathfrak{F}' \subset \mathfrak{F}$ τέτοιο ώστε $f' \in \mathfrak{F}'$ να είναι όμοιο $\mod R$ με λέξη $a(f) \in M(\mathfrak{F}_o)$, όπου $\mathfrak{F}_o = \mathfrak{F} \setminus \mathfrak{F}'$.

Συμβολίζω ως R_0 την ένωση ζευγών (c, d) του $\mathfrak{F}_o$. Προφανώς αν $a, a' \in M(\mathfrak{F}_o)$ είναι όμοιες $\mod R$, τότε είναι και όμοιες $\mod R_0 \Rightarrow \overline{a} = \overline{a'}$.
Αντιστρόφως, αν $\overline{a} = \overline{a'} \Rightarrow a \sim_{R_0} a'$ και αντικαθιστώντας κάθε $f \in \mathfrak{F}$ με $a(f) \in M(\mathfrak{F}_o)$ στην ομοιότητα, τότε έχουμε: $a \sim_{R_0} a'$.

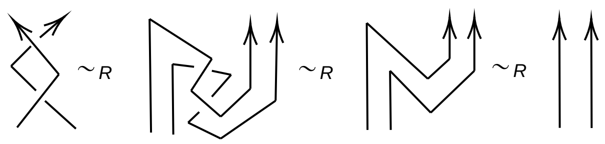
Γνωρίζουμε από το Λήμμα 4.3.7 ότι τα $Y_{+}, Y_{-}, Z_{+}, Z_{-}, T_{+}, T_{-}$ προκύπουν από συνδυασμό πράξεων των $\cup, \overset{\leftarrow}{\cup}, \cap, \overset{\leftarrow}{\cap}, X_{+}, X_{-}$. Από τη χρήση της Παρατήρησης4.3.4 στην Πρόταση 4.3.9 έχουμε ότι οι σχέσεις (3.16-3.17) εξαφανίζονται ενώ οι (3.18-3.19) μετατρέπονται στην (3.10).

Απόδειξη. (Θεωήρμα 4.3.6.)

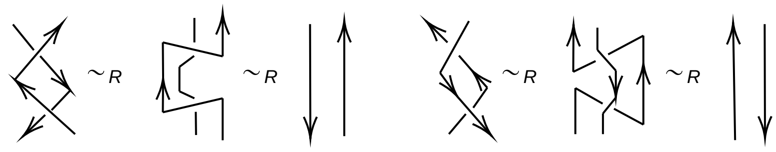
Αποδεικνύεται όπως και η Πρόταση 4.3.9. και καθώς κάθε άμμα αναπαριστάται ως προς τις ισοτοπίες με ένα γενικό διάγραμμα άμματος, τότε από το Πόρισμα 4.3.9. έχουμε το ένα κομμάτι της απόδειξης. Δηλαδή η **OT** παράγεται από το σύνολο $\mathfrak{F}_o$ και τους απαιτούμενους για το Θεώρημα μορφισμούς.

Έστω a, a^1 λέξεις τις $\mathfrak{F}_o$ έτσι ώστε $\overline{a}$, $\overline{a^1}$ να είναι ισοτοπικά άμματα. Από το Θεώρημα 4.3.1. προκύπτει ότι μπορεί κανείς να περάσει από το $\overline{a}$ στο $\overline{a^1}$ με πεπερασμένο αριθμό πράξεων που αποτελούνται από ισοτοπίες διαγραμμάτων ή κάποια εκ των μετασχηματισμών Reidemeister. Συνεπώς για την απόδειξη αρκεί να ελεγχθεί ότι οι R_I, R_{II} και R_{III} αφήνουν αναλλοίωτες τις κλάσεις ομοιότητας.

Για την R_{II} αρκεί να δείξω ότι λέξεις μορφής $L \quad L$ είναι σύμφωνες με την **||** και τον αντίστοιχο προσανατολισμό όπου L είναι μορφής X, Y, Z, T. Όταν $L \quad X$ δείχνεται από την (3.11). Όταν $L \quad Z$ προκύπτει από το ακόλουθο, όπου η πρώτη και τελευταία ισοδυναμία επάγονται από ισοτοπίες διαγραμμάτων ενώ η δεύτερη από την R_{II} και αναπαριστώνται από την (3.11):

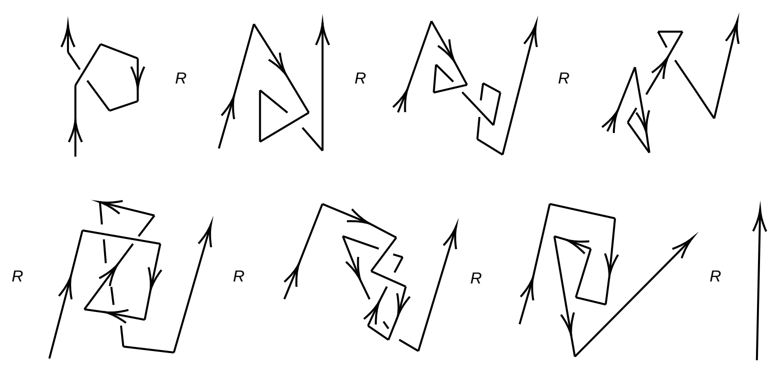


Όταν $L \quad Y$ ή T προκύπτει από τις σχέσεις (3.14-3.15):



Η R_{III} όταν ο προσανατολισμός των διαγραμμάτων είναι προς τα κάτω προκύπτει από την (3.12) και την αντίστροφη της. Στις υπόλοιπες περιπτώσεις λειτουργούμε εκφυλίζοντας τες στην προηγούμενη περίπτωση όπως κάναμε στην R_{II}.

Τέλος, για την R_I αν τα διαγράμματα που παριστάνουν αυτόν τον μετασχηματισμό έχουν προσανατολισμό προς τα κάτω τότε προκύπτει η (3.13). Το μόνο που μένει είναι τα ίδια διαγράμματα με προσανατολισμό προς τα πάνω. Πρέπει να δείξουμε ότι οι αντίστοιχες λέξεις είναι όμοιες με τις σχέσεις (3.8-3.15). Αυτό προκύπτει από το ακόλουθο σχήμα όπου 1η,3η,5η,7η είναι ισοτοπίες διαγραμμάτων, 2η είναι R_I, η 4η R_{III} και η 6η R_{II} εφαρμοσμένη δύο φορές:



4.3.4 Αναπαραστάσεις της $\mathcal{OT}$

Στην παράγραφο 1.1.6 κατασκευάσαμε μία αυστηρή τανυστική κατηγορία $\mathfrak{C}^{str}$ από κάθε τανυστική κατηγορία $\mathfrak{C}$. Εφαρμόζοντας αυτή την κατασκευή με ανάλογο τρόπο στην κατηγορία $\mathsf{Vect}_f(k)$ παίρνουμε την αυστηρή κατηγορία $\mathfrak{V}$ των πεπερασμένης διάστασης διανυσματικών χώρων πάνω από σώμα k.

Ορίζουμε μία αναπαράσταση της κατηγορίας άμματος $\mathcal{OT}$ να είναι ο αυστηρός τανυστικός συναρτητής $F : \mathcal{OT} \to \mathfrak{V}$. Το ενδιαφέρον μας έγκειται στο γεγονός ότι κάθε αναπαράσταση F της $\mathcal{OT}$ παράγει μία ισοτοπική αναλλοίωτη για προσανατολισμένους κρίκους με τιμές στο σώμα k.

Ορισμός 4.3.12. Έστω V πεπερασμένης διάστασης διανυσματικός χώρος. Ένας επαυξημένος R πίνακας του V είναι ένα ζεύγος (c, μ) όπου c είναι αυτομορφισμός του $V \otimes V$ που ικανοποιεί την Yang-Baxter εξίσωση και μ αυτομορφισμός του V τέτοιος ώστε:

$$c(\mu \otimes \mu) = (\mu \otimes \mu)c \qquad (3.20)$$
$$tr_2(c^{-1}(id_V \otimes \mu)) = id_V \qquad (3.21)$$
$$(\tau c^{-1})(id_V \otimes \mu)(c^{-1}\tau)(id_{V^*} \otimes \mu^{-1}) = id_{V^* \otimes V} \qquad (3.22)$$

όπου $\tau = \tau_{V,V}$

Θεώρημα 4.3.10. *Δοσμένου επαυξημένου R πίνακα (c, μ) και πεπερασμένης διάστασης διανυσματικού χώρου V, υπάρχει μοναδικός αυστηρός τανυστικός συναρτητής $F : \mathcal{OT} \to \mathfrak{V}$ τέτοιος ώστε $F((+)) = V$, $F((-)) = V^*$ και:*

$$F(X_+) = c, \quad F(\cup) = \delta_V, \quad F(\cup') = (id_{V^*} \otimes \mu^{-1})\delta_V \qquad (3.23.a)$$

τότε αναγκαστικά έχουμε:

$$F(X_-) = c^{-1}, \quad F(\cap) = e_V, \quad F(\cap') = e_V(\mu \otimes id_{V^*}) \qquad (3.23.b)$$

Απόδειξη. $(\Rightarrow)$ Έστω ότι $F : \mathcal{OT} \to \mathfrak{V}$ είναι αυστηρός τανυστικός συναρτητής. Θέτω $F((+)) = V$, $F((-)) = W$ και

$$F(\cup) = b : k \to V \otimes W, \quad F(\cup') = b' : k \to W \otimes V \qquad (3.23.c)$$
$$F(\cap) = d : W \otimes V \to k, \quad F(\cap') = d' : V \otimes W \to k \qquad (3.23.d)$$
$$F(X_+) = c_+, \quad F(X_-) = c_- : V \otimes V \to V \otimes V \qquad (3.23.e)$$

Από το Θεώρημα 4.3.6 έχουμε ότι οι 6 γραμμικές απεικονίσεις είναι συνδεδεμένες με τις σχέσεις που προκύπτουν εφαρμόζοντας F στις (3.8-3.15) και παίρνουμε αντιστοίχως τις $(3.24.a - 3.24.g)$ που ακολουθούν:

- $(id_V \otimes d)(b \otimes id_V) = id_V = (d' \otimes id_V)(id_V \otimes b')$
- $(id_W \otimes d')(b' \otimes id_W) = id_W = (d \otimes id_W)(id_W \otimes b)$

•

$$\mathrm{p}d \ \mathrm{b}\ id_{W\mathrm{b}W}\mathrm{qp}id_W \ \mathrm{b}\ d \ \mathrm{b}\ id_{V\mathrm{b}W\mathrm{b}W}\mathrm{qp}id_{W\mathrm{b}W} \ \mathrm{b}\ c \quad \mathrm{b}\ id_{W\mathrm{b}W}\mathrm{q}$$
$$\mathrm{p}id_{W\mathrm{b}W\mathrm{b}V} \ \mathrm{b}\ b \ \mathrm{b}\ id_W\mathrm{qp}id_{W\mathrm{b}W} \ \mathrm{b}\ b\mathrm{q}$$
$$\mathrm{p}id_{W\mathrm{b}W} \ \mathrm{b}\ d^1\mathrm{qp}id_{W\mathrm{b}W\mathrm{b}V} \ \mathrm{b}\ d^1 \ \mathrm{b}\ id_W\mathrm{qp}id_{W\mathrm{b}W} \ \mathrm{b}\ c \quad \mathrm{b}\ id_{W\mathrm{b}W}\mathrm{q}$$
$$\mathrm{p}id_W \ \mathrm{b}\ b^1 \ \mathrm{b}\ id_{V\mathrm{b}W\mathrm{b}W}\mathrm{qp}b^1 \ \mathrm{b}\ id_{W\mathrm{b}W}\mathrm{q}$$

- $c \quad c \quad c \quad c \quad id_{V\mathrm{b}V}$
- $\mathrm{p}c \ \mathrm{b}\ id_V\mathrm{qp}id_V \ \mathrm{b}\ c\mathrm{qp}c \ \mathrm{b}\ id_V\mathrm{q} \quad \mathrm{p}id_V \ \mathrm{b}\ c\mathrm{qp}c \ \mathrm{b}\ id_V\mathrm{qp}id_V \ \mathrm{b}\ c\mathrm{q}$
- $\mathrm{p}id_V \ \mathrm{b}\ d^1\mathrm{qp}c \quad \mathrm{b}\ id_W\mathrm{qp}id_V \ \mathrm{b}\ b\mathrm{q} \quad id_V$
- $gh \quad id_{V\mathrm{b}W}$ και $hg \quad id_{W\mathrm{b}V}$

όπου οι γραμμικές απεικονίσεις $g : W \ \mathrm{b}\ V \ \tilde{\mathrm{N}}\ V \ \mathrm{b}\ W$ και $h : V \ \mathrm{b}\ W \ \tilde{\mathrm{N}}\ W \ \mathrm{b}\ V$ ορίζονται ως:

$$g \quad \mathrm{p}d \ \mathrm{b}\ id_{V\mathrm{b}W}\mathrm{qp}id_W \ \mathrm{b}\ c \quad \mathrm{b}\ id_W\mathrm{qp}id_{W\mathrm{b}V} \ \mathrm{b}\ b\mathrm{q} \qquad \mathrm{p}3.24.h\mathrm{q}$$

και

$$h \quad \mathrm{p}id_{W\mathrm{b}V} \ \mathrm{b}\ d^1\mathrm{qp}id_W \ \mathrm{b}\ c \quad \mathrm{b}\ id_W\mathrm{qp}b^1 \ \mathrm{b}\ id_{V\mathrm{b}W}\mathrm{q} \qquad \mathrm{p}3.24.i\mathrm{q}$$

Η πληροφορία $\mathrm{p}V, W, b, b^1, d, d^1, c, c \ \mathrm{q}$ όπου V, W είναι πεπερασμένης διάστασης διανυσματικοί χώροι και b, b^1, d, d^1, c, c είναι γραμμικές απεικονίσεις που ικανοποιούν τις σχέσεις $\mathrm{p}3.24.a \quad 3.24.i\mathrm{q}$ καλείται πληροφορία αναπαράστασης (representation data) για την κατηγορία άμματος $\mathcal{OT}$.
(ð q Αντιστρόφως, από Πρόταση 4.3.3 και Θεώρημα 4.3.6 κάθε πληροφορία αναπαράστασης $\mathrm{p}V, W, b, b^1, d, d^1, c, c \ \mathrm{q}$ του $\mathcal{OT}$ παράγει μοναδικό συναρτητή $F : \mathcal{OT} \ \tilde{\mathrm{N}}\ \mathfrak{V}$ τέτοιος ώστε $F\mathrm{pp} \quad \mathrm{qq} \quad V$, $F\mathrm{pp} \quad \mathrm{qq} \quad W$ και τέτοιο ώστε να ισχύουν οι σχέσεις $\mathrm{p}3.23.c \quad 3.23.e\mathrm{q}$

Επί της ουσίας, με όσα προηγήθηκαν δείχνεται ότι το Θεώρημα 4.3.6 είναι συνέπεια της ακόλουθης πρότασης, η αποδειξη της οποίας μπορεί να βρεθεί αναλυτικά στα [Tur88],[Tur90],[FY89].

Πρόταση 4.3.11. Έστω $\mathrm{p}c, \mu\mathrm{q}$ ένας επαυξημένος R πίνακας σε πεπερασμένης διάστασης διανυσματικό χώρο V. Ορίζω b, b^1, d, d^1, c, c ως

$$b \quad \delta_V, \quad b^1 \quad \mathrm{p}id_V \ \mathrm{b}\ \mu \ ^1\mathrm{q}\delta_V \ , \quad d \quad ev_V, \quad d^1 \quad e_V \ \mathrm{p}\mu \ \mathrm{b}\ id_V \ \mathrm{q}$$

και $c \qquad c \ ^1$. Τότε η $\mathrm{p}V, V \ , b, b^1, d, d^1, c, c \ \mathrm{q}$ είναι πληροφορία αναπαράστασης της κατηγορίας $\mathcal{OT}$.

4.4 Πλεξιδοειδείς Κατηγορίες

Σε αυτή την ενότητα σκοπός είναι να επεκτείνουμε την ιδέα των Μονοειδών Κατηγοριών στις επονομαζόμενες Πλεξιδοειδείς Τανυστικές Κατηγορίες μέσω του ορισμού των Περιπλέξεων. Κατόπιν, θα επεκταθούμε στην Κατηγορική ερμηνεία αλγεβρικών εννοιών που έχουν ήδη εκφραστεί, όπως των καθολικών R πινάκων και της κβαντικής δυάδας του Drinfeld. Μέσα από αυτή τη διαδικασία, θα προετοιμάσουμε το έδαφος για τον ορισμό της Κατηγορίας Κορδελών και τη συσχέτιση τους με τις Hopf άλγεβρες κορδελών, στις οποίες θα εντάξουμε συγκεκριμένου τύπου κβαντικές ομάδες.

4.4.1 Περιπλέξεις (Braidings)

Έστω $\mathfrak{C}$ κατηγορία με τανυστικό γινόμενο $\otimes : \mathfrak{C} \times \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ και έναν προσεταιριστικό περιορισμό a. Συμβολίζω ως $\tau : \mathfrak{C} \times \mathfrak{C} \to \mathfrak{C} \times \mathfrak{C}$ τον συναρτητή στροφής ως

$$\tau(V, W) = (W, V)$$

για κάθε ζεύγος αντικειμένων της κατηγορίας. Ένας μεταθετικός περιορισμός c είναι ένας φυσικός ισομορφισμός $c : \otimes \to \otimes\tau$. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $(V, W) \in Ob(\mathfrak{C}) \times Ob(\mathfrak{C})$ έχουμε έναν ισομορφισμό:

$$c_{V,W} : V \otimes W \to W \otimes V$$

τέτοιο ώστε το τετράγωνο:

$$\begin{tikzcd}
V \otimes W \arrow[r, "c_{V,W}"] \arrow[d, "f \otimes g"'] & W \otimes V \arrow[d, "g \otimes f"] \\
V' \otimes W' \arrow[r, "c_{V',W'}"] & W' \otimes V'
\end{tikzcd} \qquad (4.1)$$

να μετατίθεται για κάθε μορφισμό f, g.

Ο μεταθετικός περιορισμός c ικανοποιεί το Αξίωμα Εξαγώνου εάν για κάθε $U, V, W \in \mathfrak{C}$, τα ακόλουθα δύο εξάγωνα διαγράμματα μετατίθονται :

$$(H1) : \begin{tikzcd}
& U \otimes (V \otimes W) \arrow[r, "c_{U,V \otimes W}"] & (V \otimes W) \otimes U \arrow[dr, "a_{V,W,U}"] & \\
(U \otimes V) \otimes W \arrow[ur, "a_{U,V,W}"] \arrow[dr, "c_{U,V} \otimes id_W"'] & & & V \otimes (W \otimes U) \\
& (V \otimes U) \otimes W \arrow[r, "a_{V,U,W}"] & V \otimes (U \otimes W) \arrow[ur, "id_V \otimes c_{U,W}"'] &
\end{tikzcd}$$

και

$$(H2) : \begin{tikzcd}
& (U \otimes V) \otimes W \arrow[r, "c_{U \otimes V,W}"] & W \otimes (U \otimes V) \arrow[dr, "a^{-1}_{W,U,V}"] & \\
U \otimes (V \otimes W) \arrow[ur, "a^{-1}_{U,V,W}"] \arrow[dr, "id_U \otimes c_{V,W}"'] & & & (W \otimes U) \otimes V \\
& U \otimes (W \otimes V) \arrow[r, "a^{-1}_{u,w,v}"] & (U \otimes W) \otimes V \arrow[ur, "c_{U,W} \otimes id_V"'] &
\end{tikzcd}$$

Ορισμός 4.4.1. Έστω $(\mathfrak{C}, \otimes, I, a, l, r)$ τανυστική κατηγορία.

(α) Μία περίπλεξη στο $\mathfrak{C}$ είναι ένας μεταθετικός περιορισμός που ικανοποιεί το Αξιώμα Εξαγώνου και συνεπώς τα (H1), (H2)

(β) Μία πλεξιδοειδής τανυστική κατηγορία $(\mathfrak{C}, \otimes, I, a, l, r, c)$ είναι μία τανυστική κατηγορία με περίπλεξη.

Παρατήρηση 4.4.1. Στην περίπτωση που c είναι περίπλεξη στην $\mathfrak{C}$, τότε το ίδιο ισχύει και για την c^{-1}. Όταν η τανυστική κατηγορία $\mathfrak{C}$ είναι αυστηρή τότε η μεταθετικότητα των (H1) και (H2) δίνεται από τις σχέσεις:

$$c_{U,V\otimes W} = (id_V \otimes c_{U,W})(c_{U,V} \otimes id_W) \qquad (4.2)$$

και

$$c_{U\otimes V,W} = (c_{U,W} \otimes id_V)(id_U \otimes c_{V,W}) \qquad (4.3)$$

Πρόταση 4.4.1. Για κάθε αντικείμενο V μίας πλεξιδοειδής τανυστικής κατηγορίας με μονάδα I έχουμε:

$$l_V c_{V,I} = r_V, \quad r_V c_{I,V} = l_V, \quad c_{I,V} = c_{V,I}^{-1}$$

Ενώ όταν η κατηγορία είναι αυστηρή έχουμε:

$$c_{I,V} = c_{V,I} = id_V. \qquad (4.4)$$

Απόδειξη. Θεωρώ το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
(V\otimes I)\otimes W \arrow[r, "a"] \arrow[d, "c\otimes id_W"'] \arrow[dr, "r_V\otimes id_W"] & V\otimes(I\otimes W) \arrow[r, "c"] \arrow[d, "id_V\otimes l_W"] & (I\otimes W)\otimes V \arrow[d, "l_W\otimes id_V"] \arrow[dr, "a"] & \\
{} & V\otimes W \arrow[r, "c"] & W\otimes V & I\otimes(W\otimes V) \arrow[dl, "id"] \\
(I\otimes V)\otimes W \arrow[r, "a"] \arrow[ur, "l_V\otimes id_W"'] & I\otimes(V\otimes W) \arrow[r, "id_I\otimes c"] \arrow[u, "l_{V\otimes W}"] & I\otimes(W\otimes V) \arrow[u, "l_{W\otimes V}"] &
\end{tikzcd}$$

Το εξωτερικό επτάγωνο μετατίθεται από την μεταθετικότητα του $(H1)$, το άνω τετράγωνο από τη φυσικότητα της περίπλεξης ενώ το κάτω τετράγωνο από τη φυσικότητα του l, τα άνω αριστερά και δεξιά τρίγωνα από το Αξίωμα Τριγώνου και τα κάτω αριστερά και δεξιά τρίγωνα από το Λήμμα 1.1.3. Συνεπώς, το μεσσαίο αριστερά τρίγωνο μετατίθεται, δηλαδή:

$$r_V \otimes id_W = (l_V \otimes id_W)(c_{V,I} \otimes id_W) = (l_V c_{V,I}) \otimes id_W.$$

Θέτοντας $W = I$ και εφαρμόζοντας τη φυσικότητα του r παίρνουμε την πρώτη ζητούμενη σχέση. Αντικαθιστώντας c^{-1} στη θέση του c και μέσω της $(H2)$ παίρνουμε τη δεύτερη. Η τελευταία προκύπτει ως συνέπεια των προηγουμένων.

4.4.2 Κατηγορική Ερμηνεία Yang-Baxter Εξίσωσης

Θα ξεκινήσουμε βλέποντας τη συσχέτιση της Yang-Baxter εξίσωσης με τις τανυστικές κατηγορίες πλεξίδων που συμπυκνώνεται στο ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 4.4.2. *Έστω U, V, W αντικείμενα σε μία τανυστική κατηγορία πλεξίδων. Τότε το ακόλουθο δωδεκάγωνο μετατίθεται:*

$$\begin{tikzcd}
 & (U\otimes V)\otimes W \arrow[dl, "c_{U,V}\otimes id_W"'] \arrow[dr, "a_{U,V,W}"] & \\
(V\otimes U)\otimes W \arrow[d, "a_{V,U,W}"] & & U\otimes(V\otimes W) \arrow[d, "id_U\otimes c_{V,W}"] \\
V\otimes(U\otimes W) \arrow[d, "id_V\otimes c_{U,W}"] & & U\otimes(W\otimes V) \arrow[d, "a^{-1}_{U,W,V}"] \\
V\otimes(U\otimes W) \arrow[d, "a^{-1}_{V,W,U}"] & & (U\otimes W)\otimes V \arrow[d, "c_{U,W}\otimes id_V"] \\
(V\otimes w)\otimes U\otimes id_U \arrow[d, "c_V{,}W"] & & (W\otimes U)\otimes V \arrow[d, "a_{W,U,V}"] \\
(W\otimes V)\otimes U \arrow[dr, "a_{W,V,U}"'] & & W\otimes(U\otimes V) \arrow[dl, "id_W\otimes c_{U,V}"] \\
 & W\otimes(V\otimes U) &
\end{tikzcd}$$

Εάν η κατηγορία $\mathfrak{C}$ είναι αυστηρή τότε η μεταθετικότητα του δωδεκαγώνου είναι ισοδύναμη με τη σχέση:

$$(c_{V,W}\otimes id_U)(id_V\otimes c_{U,W})(c_{U,V}\otimes id_W) = (id_W\otimes c_{U,V})(c_{U,V}\otimes id_V)(id_U\otimes c_{V,W}).$$

Η τελευταία συνεπάγεται ότι ο φυσικός ισομορφισμός $c_{V,V}$ είναι λύση της εξίσωσης Yang-Baxter για κάθε $V \in Ob(\mathfrak{C})$.

Απόδειξη. Επί της ουσίας χωρίζουμε το δωδεκάγωνο σε δύο εξάγωνα τύπου $(H2)$ και ένα τετράγωνο. Σύμφωνα με το $(H2)$, η σύνθεση μορφισμών με τη φορά του ρολογιού που ξεκινά από το $(U\otimes V)\otimes W$ και τελειώνει $W\otimes(U\otimes V)$ είναι ίση με $c_{U\otimes V,W}$. Ομοίως, με την αντίθετη φορά του ρολογιού η σύνθεση μορφισμών που ξεκινά από το $(V\otimes U)\otimes W$ και τελειώνει στο $(W\otimes V)\otimes U$ είναι ίση με $c_{V\otimes U,W}$.

Τέλος, το ακόλουθο τετράγωνο μετατίθεται καθώς είναι ειδική περίπτωση του μεταθετικού περιορισμού όπου $f = c_{U,V}$ και $g = id_W$:

$$\begin{tikzcd}
(U\otimes V)\otimes W \arrow[r, "c_{U\otimes V,W}"] \arrow[d, "c_{U,V}\otimes id_W"] & W\otimes(U\otimes V) \arrow[d, "id_W\otimes c_{U,V}"] \\
(V\otimes U)\otimes W \arrow[r, "c_{V\otimes U,W}"] & W\otimes(V\otimes U)
\end{tikzcd}$$

Ορισμός 4.4.2. Έστω $(A, \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$ διάλγεβρα. Ορίζω ως $\mathfrak{Rep}_A$ την κατηγορία των A-προτύπων, όπου αντικείμενα είναι οι αναπαραστάσεις της A και μορφισμοί οι A-γραμμικοί ομομορφισμοί.

Εάν U, V είναι A-πρότυπα τότε ο συμπολλαπλασιασμός μας επιτρέπει να δώσουμε δομή A-προτύπου $U \otimes V$ και το συνταυτοτικό δομή A-προτύπου στο k. Συνεπώς το τανυστικό γινόμενο είναι ο συναρτητής:

$$\otimes : \mathfrak{Rep}_A \times \mathfrak{Rep}_A \to \mathfrak{Rep}_A$$

για τον οποίο το $I = k$ είναι μονάδα.

Πρόταση 4.4.3. Έστω (A, Δ, ϵ) είναι μία άλγεβρα με συνήθη συμπολαπλασιασμό $\Delta : A \to A \otimes A$ και συνταυτοτικό $\epsilon : A \to k$. Είναι διάλγεβρα εάν και μόνο αν η κατηγορία $\mathfrak{Rep}_A$ εφοδιασμένη με το τανυστικό γινόμενο και τους περιορισμούς a, l, r για τους οποίους ισχύει:

$$a : (U \otimes V) \otimes W = U \otimes (V \otimes W) \text{ και } l(k \otimes V) = V = r(V \otimes k)$$

είναι τανυστική κατηγορία.

Απόδειξη. Έστω $(A, \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$ μία διάλγεβρα τότε από Πρόταση 2.2.4 προκύπτει ότι η $(\mathfrak{Rep}_A, \otimes, I = k, a, l, r)$ είναι τανυστική κατηγορία.

Αντιστρόφως, έστω $(A, \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$ μία άλγεβρα με συμπολλαπλασιασμό και συνταυτοτικό. Υποθέτω ότι η $(\mathfrak{Rep}_A, \otimes, I = k, a, l, r)$ είναι τανυστική κατηγορία.

Θεωρώ προσεταιριστικό περιορισμό $a_{A,A,A}$. Από την υπόθεση, είναι $A-$γραμμικός συνεπώς για $a, u, v, w \in A$ έχουμε:

$$a_{A,A,A}(a((u \otimes v) \otimes w)) = a a_{A,A,A}((u \otimes v) \otimes w).$$

Από τον ορισμό του προσεταιριστικού περιορισμού αυτό μπορεί να εκφραστεί ως:

$$((\Delta \otimes id)(\Delta(a)))(u(v \otimes v)) = ((id \otimes \Delta)(\Delta(a)))(u \otimes (v \otimes w)).$$

Θέτοντας $u = v = w = 1_A$ παίρνουμε:

$$(\Delta \otimes id)(\Delta(a)) = (id \otimes \Delta)(\Delta(a)).$$

Ομοίως l_A, r_A είναι $A-$γραμμικά αν και μόνο αν $(\epsilon \otimes id)(\Delta(a)) = a$ και $(id \otimes \epsilon)(\Delta(a)) = a$ αντιστοίχως για κάθε $a \in A$.

Η ακόλουθη πρόταση μας δείχνει τη σύνδεση μεταξύ μίας πλεξοειδής τανυστικής κατηγορίας και μίας πλεξιδοειδής Διάλγεβρας:

Πρόταση 4.4.4. Έστω $(H, \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$ μία διάλγεβρα. Η τανυστική κατηγορία $\mathfrak{Rep}_H$ είναι πλεξοειδής αν και μόνο αν η διάλγεβρα H είναι πλεξοειδής.

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Έστω $(H, \mu, \eta, \Delta, \epsilon, R)$ μία πλεξιδοειδής άλγεβρα με καθολικό R-πίνακα R. Στην ενότητα 4.1.1 ορίστηκε $c^R_{V,W} : V \otimes W \to W \otimes V$ ως:

$$c^R_{V,W}(v \otimes w) = \tau_{V,W}(R(v \otimes w))$$

όπου $v \in V$ και $w \in W$. Η Πρόταση 4.1.4 εξασφαλίζει ότι η οικογένεια c είναι περίπλεξη.
($\Leftarrow$) Έστω $(H, \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$ μία διάλγεβρα. Υποθέτω ότι υπάρχει περίπλεξη c στην τανυστική κατηγορία $\mathfrak{Rep}_H$. Ορίζω αντιστρέψιμο στοιχείο $R \in H \otimes H$ ως:

$$R = \tau_{H,H}(c_{H,H}(1 \otimes 1))$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι ο R είναι καθολικός R-πίνακας για το H.

Εάν v, w στοιχεία H-προτύπων V, W η φυσικότητα της περίπλεξης συνεπάγεται τη μεταθετικότητα του τετραγώνου:

$$\begin{tikzcd}
H \otimes H \arrow[r, "c_{H,H}"] \arrow[d, "\overline{v} \otimes \overline{w}"] & H \otimes H \arrow[d, "\overline{w} \otimes \overline{v}"] \\
V \otimes W \arrow[r, "c_{V,W}"] & W \otimes V
\end{tikzcd}$$

όπου $\overline{v} : H \to V$ και $\overline{w} : H \to W$ είναι H-γραμμικές απεικονίσεις ορισμένες ως $\overline{v}(1) = v$ και $\overline{w}(1) = w$. Αυτό συνεπάγεται ότι:

$$c_{V,W}(v \otimes w) = (\overline{w} \otimes \overline{v})c_{H,H}(1 \otimes 1) = \tau_{V,W}(\overline{v} \otimes \overline{w})(R) = \tau_{V,W}(R(v \otimes w)). \quad (4.5)$$

Εκφράζουμε την H-γραμμικότητα του $c_{H,H}$: για κάθε $a \in H$ έχουμε:

$$ac_{H,H}(1 \otimes 1) = c_{H,H}(a(1 \otimes 1)).$$

Από την (4.5) έχουμε ότι $\Delta(a)\tau_{H,H}(R) = \tau_{H,H}(R\Delta(a))$. Αυτό είναι ισοδύναμο με:

$$\Delta^{op}(a)R = R\Delta(a)$$

για κάθε $a \in H$. Η μεταθετικότητα των εξαγώνων $(H1), (H2)$ συνεπάγεται τις σχέσεις:

$$(id \otimes \Delta)(R) = R_{13}R_{12} \quad \text{και} \quad (\Delta \otimes id)(R) = R_{13}R_{23}$$

αντιστοίχως. Αυτό αποδεικνύει ότι ο R ικανοποιεί τις συνθήκες ώστε να ορίζεται δομή πλεξιδοειδής διάλγεβρας στην H.

4.4.3 Κατηγορική Ερμηνεία Κβαντικής Δυάδας

Ξεκινάμε με μία κατασκευή που σε κάθε αυστηρή τανυστική κατηγορία $(\mathfrak{C}, \otimes, I)$ αντιστοιχεί μία πλεξιδοειδής τανυστική κατηγορία $Z(\mathfrak{C})$ που καλείται κέντρο του $\mathfrak{C}$. Όταν $\mathfrak{C} = \mathfrak{Rep}(A)$, δηλαδή η κατηγορία των προτύπων πάνω από πεπερασμένης διάστασης Hopf άλγεβρα A με αντιστρέψιμο αντιποδικό, τότε $Z(\mathfrak{Rep}_A)$ είναι τανυστικά ισοδύναμη με την πλεξοειδή τανυστική κατηγορία $\mathfrak{Rep}_{D(A)}$ των προτύπων πάνω από την κβαντική δυάδα του A.

Ορισμός 4.4.3. Ένα αντικείμενο της $Z(\mathfrak{C})$ είναι ένα ζεύγος $(V, c_{-,V})$ όπου V είναι ένα αντικείμενο της $\mathfrak{C}$ και $c_{-,V}$ είναι οικογένεια φυσικών ισομορφισμών

$$c_{X,V} : X \otimes V \to V \otimes X$$

ορισμένη για κάθε αντικείμενο X στο $\mathfrak{C}$ έτσι ώστε για κάθε $X, Y \in Ob(\mathfrak{C})$ να έχουμε:

$$c_{X\otimes Y,V} = (c_{X,V} \otimes id_Y)(id_X \otimes c_{Y,V}) \qquad (4.6)$$

Ένας μορφισμός από το $(V, c_{-,V})$ στο $(W, c_{-,W})$ είναι ένας μορφισμός $f : V \to W$ στο $\mathfrak{C}$ έτσι ώστε για κάθε $X \in Ob(\mathfrak{C})$ να έχουμε:

$$(f \otimes id_X)c_{X,V} = c_{X,W}(id_X \otimes f) \qquad (4.7)$$

Η φυσικότητα του Ορισμού σημαίνει ότι για κάθε μορφισμό $f : X \to Y$ του $\mathfrak{C}$, μετατίθεται το τετράγωνο

$$\begin{tikzcd} X \otimes V \arrow[r, "c_{X,V}"] \arrow[d, "f\otimes id_V"] & V \otimes X \arrow[d, "id_V \otimes f"] \\ Y \otimes V \arrow[r, "c_{Y,V}"] & V \otimes Y \end{tikzcd} \qquad (4.8)$$

Είναι εμφανές ότι το id_V είναι μορφισμός στο $Z(\mathfrak{C})$ και ότι αν f, g είναι μορφισμοί που επιδέχονται σύνθεσης στο $Z(\mathfrak{C})$ τότε $g \circ f$ που ανήκει στο $\mathfrak{C}$ είναι μορφισμός στο $Z(\mathfrak{C})$. Συνεπώς η $Z(\mathfrak{C})$ είναι η κατηγορία όπου η μονάδα του $(V, c_{-,V})$ είναι το id_V.

Θεώρημα 4.4.5. *Έστω $(C, \otimes, I)$ μία αυστηρή τανυστική κατηγορία. Τότε η $Z(\mathfrak{C})$ είναι μία αυστηρή πλεξοειδής τανυστική κατηγορία όπου:*

(i) Η μονάδα είναι το (I, id)

(ii) Το τανυστικό γινόμενο των $(V, c_{-,V})$ και $(W, c_{-,W})$ δίνεται από:

$$(V, c_{-,V}) \otimes (W, c_{-,W}) = (V \otimes W, c_{-,V\otimes W})$$

όπου $c_{X,V\otimes W} : X \otimes V \otimes W \to V \otimes W \otimes X$ είναι ο μορφισμός του $\mathfrak{C}$ που ορίζεται για κάθε $X \in Ob(\mathfrak{C})$ ως:

$$c_{X,V\otimes W} = (id_V \otimes c_{X,W})(c_{X,V} \otimes id_W) \qquad (4.9)$$

(iii) Η εν λόγω περίπλεξη ορίζεται ως:

$$c_{V,W} : (V, c_{-,V}) \otimes (W, c_{-,W}) \to (W, c_{-,W}) \otimes (V, c_{-,V}).$$

Απόδειξη. Έστω $(V, c_{-,V})$ και $(W, c_{-,W})$ αντικείμενα του $\mathcal{Z}(\mathfrak{C})$. Αφού ο $c_{X,V\otimes W}$ είναι ισομορφισμός στην $\mathfrak{C}$ τότε το για κάθε $X, Y \in Ob(\mathfrak{C})$ έχουμε:

$$
\begin{aligned}
c_{X\otimes Y,V\otimes W} &= (id_V \otimes c_{X\otimes Y,W})(c_{X\otimes Y,V} \otimes id_W)\\
&= (id_V \otimes c_{X,W} \otimes id_Y)(id_{V\otimes X} \otimes c_{Y,W})\\
&\quad (c_{X,V} \otimes id_{Y\otimes W})(id_X \otimes c_{Y,V} \otimes id_W)\\
&= (id_V \otimes c_{X,W} \otimes id_Y)(c_{X,V} \otimes id_{W\otimes Y})\\
&\quad (id_{X\otimes V} \otimes c_{Y,W})(id_X \otimes c_{Y,V} \otimes id_W)\\
&= (c_{X,V\otimes W} \otimes id_Y)(id_X \otimes c_{Y,V\otimes W}).
\end{aligned}
$$

επομένως ο $(V \otimes W, c_{-,V\otimes W})$ είναι αντικείμενο του $\mathcal{Z}(\mathfrak{C})$. Έστω τώρα $f : (V, c_{-,V}) \to (W, c_{-,W})$ και $f' : (V', c_{-,V'}) \to (W', c_{-,W'})$ μορφισμοί του $\mathcal{Z}(\mathfrak{C})$. Έχουμε:

$$
\begin{aligned}
(f \otimes f' \otimes id_X)c_{X,V\otimes V'} &= (f \otimes id_{W'} \otimes id_X)(id_V \otimes f' \otimes id_X)\\
&\quad (id_V \otimes c_{X,V'})(c_{X,V} \otimes id_{V'})\\
&= (f \otimes id_{W'} \otimes id_X)(id_V \otimes c_{X,W'})\\
&\quad (id_V \otimes id_X \otimes f')(c_{X,V} \otimes id_{V'})\\
&= (id_W \otimes c_{X,W'})(f \otimes id_X \otimes id_{W'})\\
&\quad (c_{X,V} \otimes id_{W'})(id_X \otimes id_V \otimes f')\\
&= (id_W \otimes c_{X,W'})(id_{W'} \otimes c_{X,V})\\
&\quad (id_X \otimes f \otimes id_{W'})(id_X \otimes id_V \otimes f')\\
&= c_{X,W\otimes W'}(id_X \otimes f \otimes f').
\end{aligned}
$$

Επομένως ο $f \otimes f'$ είναι μορφισμός του $\mathcal{Z}(\mathfrak{C})$. Άρα το τανυστικό γινόμενο είναι καλώς ορισμένο στα αντικείμενα και στους μορφισμούς της $\mathcal{Z}(\mathfrak{C})$ και ικανοποιεί όλα τα απαραίτητα αξιώματα κάνοντας την αυστηρή τανυστική κατηγορία. Τέλος αρκεί να δείξουμε ότι είναι πλεξιδοειδής:

Ξεκινάμε δείχνοντας ότι ο $c_{V,W}$ είναι μορφισμός στην $\mathcal{Z}(\mathfrak{C})$. Για κάθε $X \in Ob(\mathfrak{C})$ έχουμε:

$$
\begin{aligned}
(c_{V,W} \otimes id_X)c_{X,V\otimes W} &= (c_{V,W} \otimes id_X)(id_V \otimes c_{X,W})(c_{X,V} \otimes id_W)\\
&= c_{V\otimes X,W}(c_{X,V} \otimes id_W) = (id_W \otimes c_{X,V})c_{X\otimes V,W}\\
&= (id_W \otimes c_{X,V})(c_{X,W} \otimes id_V)(id_X \otimes c_{V,W})\\
&= c_{X,W\otimes V}(id_X \otimes c_{V,W}).
\end{aligned}
$$

Ο μορφισμός $c_{V,W}$ είναι αντιστρέψιμος εξ ορισμού και φυσικός ως προς κάθε μορφισμό της $\mathfrak{C}$, συνεπώς μορφισμός της $\mathcal{Z}(\mathfrak{C})$. Οι ζητούμενες ιδιότητες (4.2), (4.3) για να είναι περίπλεξη προκύπτουν άμεσα από τις (4.6) και (4.9) αντιστοίχως.

Θεώρημα 4.4.6. *Για κάθε πεπερασμένης διάστασης Hopf άλγεβρα A με αντιστρέψιμο αντιποδικό, οι πλεξιδοοειδείς τανυστικές κατηγορίες $\mathcal{Z}(\mathfrak{Rep}_A)$ και $\mathfrak{Rep}_{D(A)}$ είναι ισοδύναμες.*

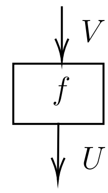
Σημείωση 4.4.1. Η απόδειξη βασίζεται στον ορισμό του σταυρωτού διπροτύπου και την ισοδυναμία των $D(H)$-προτύπων με τα σταυρωτά H διπρότυπα, όπου H πεπερασμένης διάστασης Hopf άλγεβρα. Αναλυτικά στα [JS91c],[Maj91b].

4.5 Κατηγορίες Κορδελών

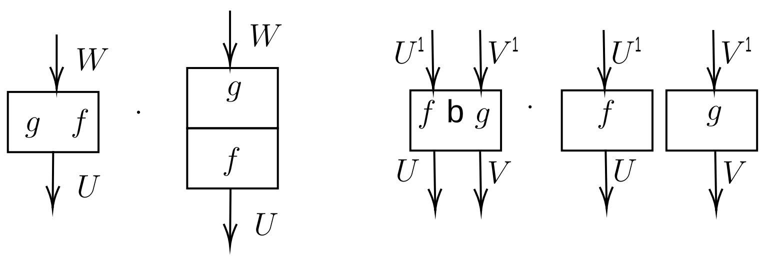
Σε αυτή την τελευταία ενότητα θα εισάγουμε την έννοια της Κατηγορίας Κορδελών. Από τις τελευταίες θα προκύψει η έννοια των Hopf αλγεβρών κορδελών και δείχνοτας ότι οι πεπερασμένες αναπαραστάσεις της $U_q(\mathfrak{sl}(2))$ δέχονται τέτοιου είδους δομή, θα τις συσχετίσουμε με την Κατηγορία των Διαγραμμάτων Άμματος D_F και συνεπώς των Πλαισιωμένων Αμμάτων (Framed Tangles) παίρνοντας αναλλοιώτους για αυτά.

4.5.1 Δυϊκότητα σε Τανυστικές Κατηγορίες

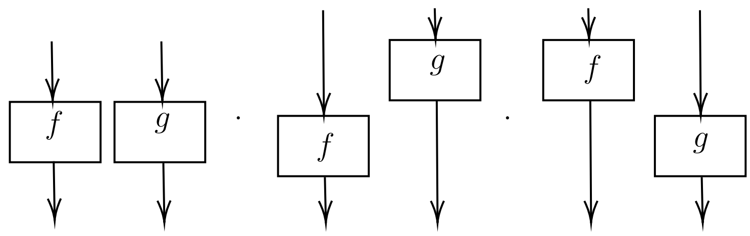
Έστω $\mathfrak{C}$ μία αυστηρή τανυστική κατηγορία. Αναπαριστούμε έναν μορφισμό ως ένα κουτί με δύο κάθετα βέλη με προσανατολισμό προς τα κάτω, όπου U, V είναι τα «χρώματα» των βελών και f το «χρώμα» του κουτιού:



Με παρόμοιο τρόπο αν έχουμε μορφισμούς $f : U \to V$, $g : V \to W$ μπορούμε να αναπαριστούμε τη σύνθεση αλλά και το τανυστικό γινόμενο αυτών ως ακολούθως:

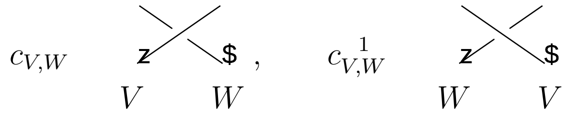


Το σύμβολο $=$ χρησιμοποιείται για να εκφράσει ότι οι αντίστοιχοι μορφισμοί είναι ίσοι στο $\mathfrak{C}$. Αν συμβολίσουμε και το ταυτοτικό ως $|$ τότε μπορούμε να αναπαραστήσουμε τη σχέση $f \otimes g = (f \circ id) \otimes (id \circ g) = (id \circ f) \otimes (g \circ id)$:



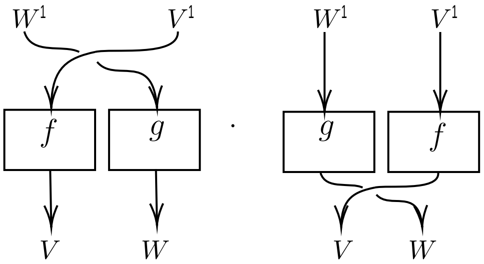
Αυτό οδηγεί στο «Αξίωμα Μερικής Ισοτοπίας»: Για κάθε εικόνα που αναπαριστά μορφισμούς της $\mathfrak{C}$, το κομμάτι της εικόνας που βρίσκεται αριστερά ή δεξιά από μία κάθετη γραμμή μπορεί να μετακινηθεί πάνω ή κάτω χωρίς να αλλάξει ο αντίστοιχος μορφισμός.

Υποθέτω τώρα ότι η τανυστική κατηγορία είναι πλεξοειδής με περίπλεξη c. Για κάθε ζεύγος (V, W) αντικειμένων της $\mathfrak{C}$ αναπαριστούμε το $c_{V,W}$ και το αντίστροφο του $c^{-1}_{V,W}$ ως:

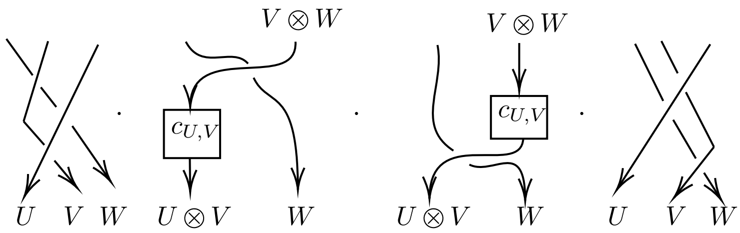


Επομένως η αντιστρεψιμότητα του $c_{V,W}$ μπορεί να οριστεί ως:

και αντίστοιχα η φυσικότητα του $c_{V,W}$ του διαγράμματος (4.1) θα δίνεται από:



Ενώ τέλος, η απόδειξη του Θεωρήματος 4.4.2 δίνεται από:



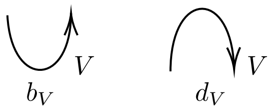
Ορισμός 4.5.1. Έστω $(\mathfrak{C}, \otimes, I)$ μία αυστηρή τανυστική κατηγορία. Είναι μία τανυστική κατηγορία με αριστερή δυϊκότητα εάν για κάθε $V \in Ob(\mathfrak{C})$ υπάρχει αντικείμενο V^* και μορφισμοί

$$b_V : I \to V \otimes V^* \quad \text{και} \quad d_V : V^* \otimes V \to I$$

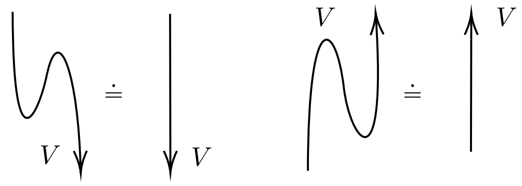
στην κατηγορία $\mathfrak{C}$ τέτοιοι ώστε:

$$(id_V \otimes d_V)(b_V \otimes id_V) = id_V \quad \text{και} \quad (d_V \otimes id_{V^*})(id_{V^*} \otimes b_V) = id_{V^*} \qquad (4.10)$$

Θέλουμε τώρα να δώσουμε την διαγραμματική εικόνα της (4.10), για το λόγο αυτό κάνουμε τη σύμβαση ότι τα βέλη με προσανατολισμό προς τα πάνω θα αναπαριστούν το δυϊκό αντικείμενο του μορφισμού.
Για τους μορφισμούς b_V, d_V έχουμε αντιστοίχως:



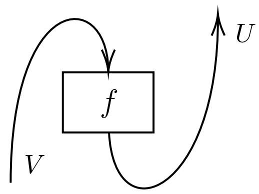
Απεικονίζοντας γραφικά την (4.10) παίρνουμε:



Με όσα προηγήθηκαν μπορούμε να επεκτείνουμε τη δυϊκότητα σε μορφή συναρτητή. Αρχικά ορίζουμε τον ανάστροφο μορφισμό $f^* : V^* \to U^*$ του $f : U \to V$ στο $\mathfrak{C}$:

$$f^* = (d_V \otimes id_{U^*})(id_{V^*} \otimes f \otimes id_{U^*})(id_{V^*} \otimes b_U) \qquad (4.11)$$

Από τη σύμβαση που έχουμε ορίσει, η προηγούμενη σχέση αναπαριστάται ως:



Πρόταση 4.5.1. Έστω $\mathfrak{C}$ μία αυστηρή τανυστική κατηγορία με αριστερή δυϊκότητα.

(α) Εάν $f : V \to W$ και $g : U \to V$ είναι μορφισμοί του $\mathfrak{C}$, τότε έχουμε ότι $(fg)^* = g^* f^*$ και $(id_V)^* = id_{V^*}$ για κάθε $V \in ob(\mathfrak{C})$.

(β) Για κάθε οικογένεια $U, V, W \in ob(\mathfrak{C})$, έχουμε τους ισομορφισμούς:

$$Hom(U \otimes V, W) \cong Hom(U, W \otimes V^*)$$

και

$$Hom(U^* \otimes V, W) \cong Hom(V, U \otimes W)$$

(γ) Για κάθε ζεύγος (V, W) αντικειμένων του $\mathfrak{C}$, τα αντικείμενα $(V \otimes W)^*$ και $W^* \otimes V^*$ είναι ισομορφικά.

Επί της ουσίας, η παραπάνω πρόταση συνεπάγει ότι η απεικόνιση $V \mapsto V^*$ μπορεί να επεκταθεί σε συναρτητή από την $\mathfrak{C}$ στην $\mathfrak{C}^{op}$ και ότι ο συναρτητής $- \otimes V$ είναι αριστερός συζυγής του συναρτητή $- \otimes V^*$.

Απόδειξη. (α) Προκύπτει άμεσα από τον γραφικό λογισμό που αναπτύχθηκε.

(β) Έστω $f \in Hom(U \otimes V, W)$ και $g \in Hom(U, W \otimes V^*)$. Ορίζω στοιχεία $f^\flat \in Hom(U, W \otimes V^*)$ και $g^\sharp \in Hom(U \otimes V, W)$ ως:

$$f^\flat = (f \otimes id_{V^*})(id_U \otimes b_V) \text{ και } g^\sharp = (id_W \otimes d_V)(g \otimes id_V).$$

Από τη σχέση (4.10) έχουμε ότι $(f^\flat)^\sharp = f$ και $(g^\sharp)^\flat = g$. Παρόμοια απόδειξη λειτουργεί και στο συζυγή τύπο.

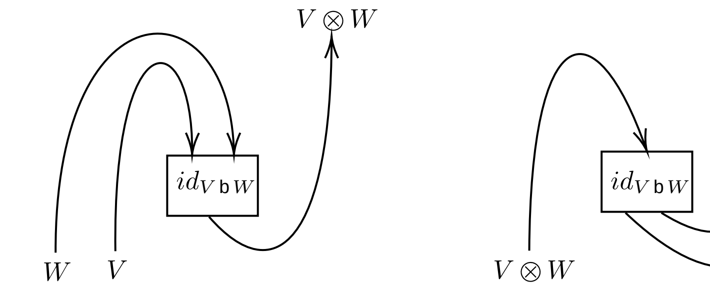
(γ) Ορίζω τον μορφισμό $\lambda_{V,W} : W \otimes V \to (V \otimes W)$ ως:

$$\lambda_{V,W} \quad (d_W \otimes id_{(V\otimes W)})(id_W \otimes d_V \otimes id_{W\otimes(V\otimes W)})(id_{W \otimes V} \otimes b_{V\otimes W}) \quad (4.12)$$

και τον μορφισμό $\lambda_{V,W}^{1} : (V \otimes W) \to W \otimes V$ ως:

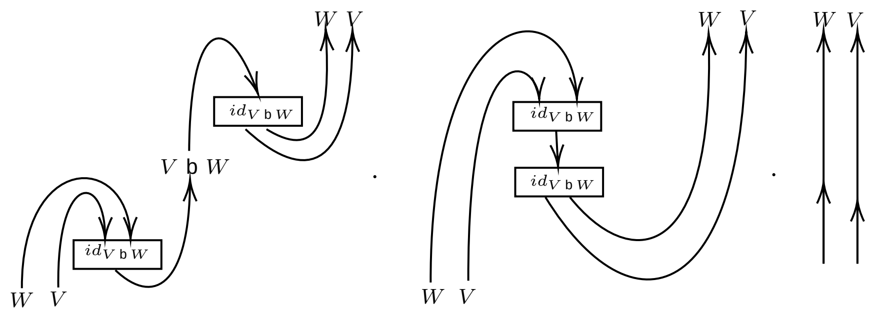
$$\lambda_{V,W}^{1} \quad (d_{V\otimes W} \otimes id_{W \otimes V})(id_{(V\otimes W) \otimes V} \otimes b_W \otimes id_V)(id_{(V\otimes W)} \otimes b_V) \quad (4.13)$$

Από την γραφική αναπαράσταση αυτών έχουμε ότι:

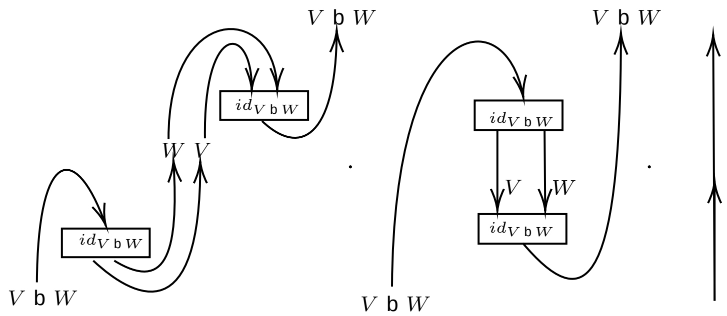


$\lambda_{V,W}$ $\lambda_{V,W}^{1}$

Η απόδειξη ότι $\lambda_{V,W}^{1} \quad \lambda_{V,W} \quad id_{W \otimes V}$ δίνεται ως:



Με ανάλογο τρόπο η απόδειξη ότι $\lambda_{V,W} \quad \lambda_{V,W}^{1} \quad id_{(V\otimes W)}$ δίνεται από:



Παρατήρηση 4.5.1. Υπάρχει ανάλογος συμβολισμός για τη δεξιά δυϊκότητα: Μία τανυστική κατηγορία $(\mathfrak{C}, \otimes, I)$ είναι τανυστική κατηγορία με δεξιά δυϊκότητα εαν για κάθε αντικείμενο $V \in \mathfrak{C}$ υπάρχει αντικείμενο V και μορφισμοί

$$b_V^1 : I \to V \otimes V \quad \text{και} \quad d_V^1 : V \otimes V \to I$$

στην κατηγορία $\mathfrak{C}$ έτσι ώστε

$$(d_V^1 \otimes id_V)(id_V \otimes b_V^1) \quad id_V \quad \text{και} \quad (id_V \otimes d_V^1)(b_V^1 \otimes id_V) \quad id_V \qquad (4.14)$$

Μπορούμε πάλι να επεκτείνουμε την $V \to V$ σε έναν συναρτητή ορίζοντας μορφισμό $f : W \to V$ για κάθε $f : V \to W$ ως:

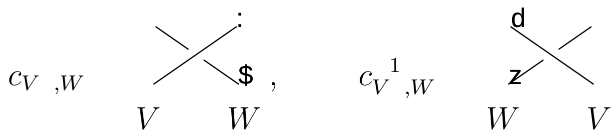
$$f \quad (id_V \otimes d_W^1)(id_V \otimes f \otimes id_W)(b_V^1 \otimes id_W). \qquad (4.15)$$

4.5.2 Στρέψη και Κβαντικό Ίχνος

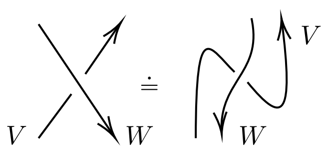
Πρόταση 4.5.2. Έστω $\mathfrak{C}$ αυστηρή τανυστική κατηγορία . Υποθέτω ότι είναι πλεξιδοειδής και έχει αριστερή δυϊκότητα. Έστω $V, W \in ob(\mathfrak{C})$ τότε έχουμε ότι:

$$c_{V,W} \quad (d_V \otimes id_{W \otimes V})(id_V \otimes c_{V,W}^1 \otimes id_V)(id_{V \otimes W} \otimes b_V).$$

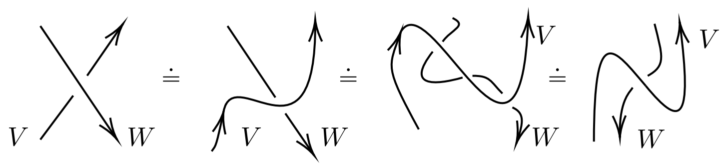
Απο σύμβαση έχουμε ότι τα $c_{V,W}$, $c_{V,W}^1$ αναπαριστώνται γραφικά από:



Απόδειξη. Η γραφική διατύπωση της Πρότασης δίνεται από:



Επομένως η γραφική απόδειξη είναι η ακόλουθη:



όπου η πρώτη ισότητα προκύπτει από το (4.10), η δεύτερη από την αντιστρεψιμότητα του $c_{V,W}$ και η τρίτη από τη φυσικότητα της περίπλεξης $c_{,W}$.

Ορισμός 4.5.2. Έστω $(\mathfrak{C}, \otimes, I)$ μία αυστηρή πλεξιδοειδής τανυστική κατηγορία με αριστερή δυϊκότητα.

(α) Μία στρέψη είναι μία οικογένεια $\theta_V : V \to V$ από φυσικούς ισομορφισμούς με δείκτες από αντικείμενα $V \in \mathfrak{C}$ έτσι ώστε:

$$\theta_{V \otimes W} = (\theta_V \otimes \theta_W) c_{W,V} c_{V,W} \qquad (4.15)$$

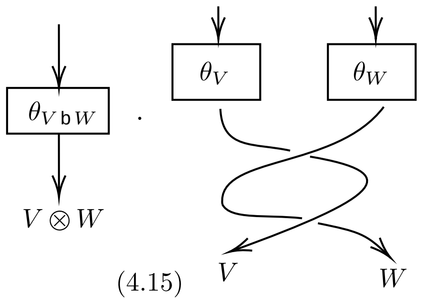
και

$$\theta_V = (\theta_V) \qquad (4.16)$$

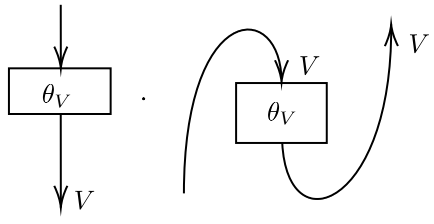
για κάθε $V, W \in ob(\mathfrak{C})$.

(β) Μία κατηγορία κορδελών είναι μία αυστηρή πλεξιδοειδής κατηγορία με αριστερή δυϊκότητα και στρέψη.

Σημείωση 4.5.1. Η φυσικότητα της στρέψης δηλώνει ότι για κάθε μορφισμό $f : V \to W$ έχουμε ότι $\theta_W f = f \theta_V$. Χρησιμοποιούμε τις γραφικές συμβάσεις που έχουν προηγηθεί στις σχέσεις (4.15-4.16):



(4.15)



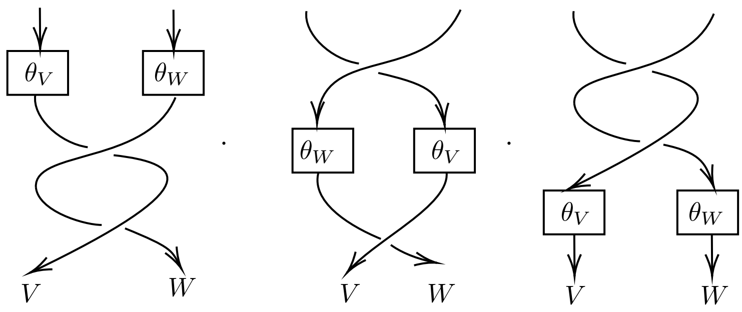
(4.15)

Λήμμα 4.5.3. *(α) Δοσμένων αντικειμένων V, W της $\mathfrak{C}$ έχουμε:*

$$\theta_{V \otimes W} = c_{W,V} c_{V,W} (\theta_V \otimes \theta_W) = c_{W,V} (\theta_W \otimes \theta_V) c_{V,W}. \qquad (4.17)$$

(β) Επίσης έχουμε $\theta_I = id_I$.

Απόδειξη. (α) Προκύπτει μέσω της φυσικότητας της περίπλεξης και της στρέψης:



(β) Χρησιμοποιώντας τη σχέση (4.15) όταν $V = W = I$ παίρνουμε:

$$\theta_{I \otimes I} = (\theta_I \otimes \theta_I) c_{I,I} c_{I,I}.$$

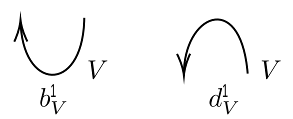
Σημείωση 4.5.2. Χρησιμοποιώντας την περίπλεξη και την στρέψη, μπορούμε να ορίσουμε μορφισμούς $b_V^1 : I \to V \otimes V$ και $d_V^1 : V \otimes V \to I$ για κάθε αντικείμενο V της κατηγορίας κορδελών $\mathfrak{C}$ ως:

$$b_V^1 = (id_V \otimes \theta_V)c_{V,V}\, b_V \tag{4.18}$$

και

$$d_V^1 = d_V c_{V,V}\, (\theta_V \otimes id_V). \tag{4.19}$$

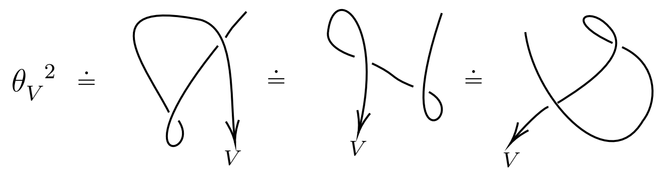
Τους οποίους αναπαριστούμε ως ακολούθως:



Λήμμα 4.5.4. *Για κάθε αντικείμενο V μίας κατηγορίας κορδελών έχουμε:*

$$\begin{aligned} {\theta_V}^2 &= (d_V \otimes id_V)(id_V \otimes c_{V,V}^{-1})(c_{V,V}\, b_V \otimes id_V) \\ &= (d_V c_{V,V} \otimes id_V)(id_V \otimes c_{V,V}\, b_V) \\ &= (id_V \otimes d_V c_{V,V})(c_{V,V}^{-1} \otimes id_V)(id_V \otimes b_V). \end{aligned}$$

Απόδειξη. Οι ισότητες του Λήμματος αναπαριστώνται ως ακολούθως:

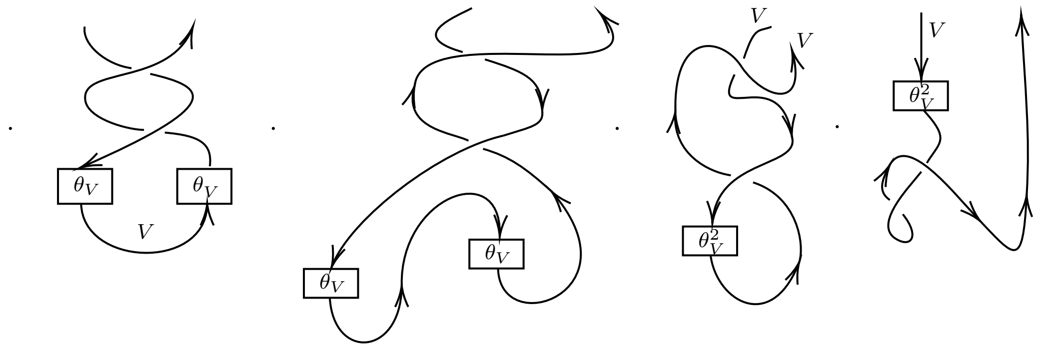


Από την εικόνα είναι προφανές ότι οι δύο τελευταίες ισότητες συνεπάγονται από τη φυσικότητα της περίπλεξης συνεπώς αρκεί να δείξω την πρώτη.

Από τη φυσικότητα της στρέψης και από το Λήμμα 4.5.3.(β) παίρνουμε ότι:

$$b_V = b_V\theta_I = \theta_{V\otimes V}\, b_V. \tag{4.20}$$

Συμβολίζουμε $f = b_V\theta_I$ και έχουμε ότι $\theta_{V\otimes V}\, b_V = (\theta_V^2 f \otimes id_V)b_V$, όπου $\theta_{V\otimes V} \doteq$



Η πρώτη ισότητα προκύπτει από την (4.15), η δεύτερη από την Πρόταση 4.5.2 και την (4.16), η τρίτη από την (4.10) και η τέταρτη από τη φυσικότητα της περίπλεξης. Τέλος, εφαρμόζοντας την (4.10) δύο φορές έχουμε ότι:

$$id_V = (id_V \otimes d_V)(b_V \otimes id_V) = (id_V \otimes d_V)\,(\theta^2 f \otimes id_V)(b_V \otimes id_V) = \theta_V^2 f.$$

Συνεπώς $f = {\theta_V}^2$.

Πρόταση 4.5.5. Κάτω από τις προηγούμενες υποθέσεις έχουμε ότι:

$$(d_V^{-1} \otimes id_V)(id_V \otimes b_V^{-1}) = id_V \qquad (4.21)$$

και

$$(id_V \otimes d_V^{-1})(b_V^{-1} \otimes id_V) = id_V \qquad (4.22)$$

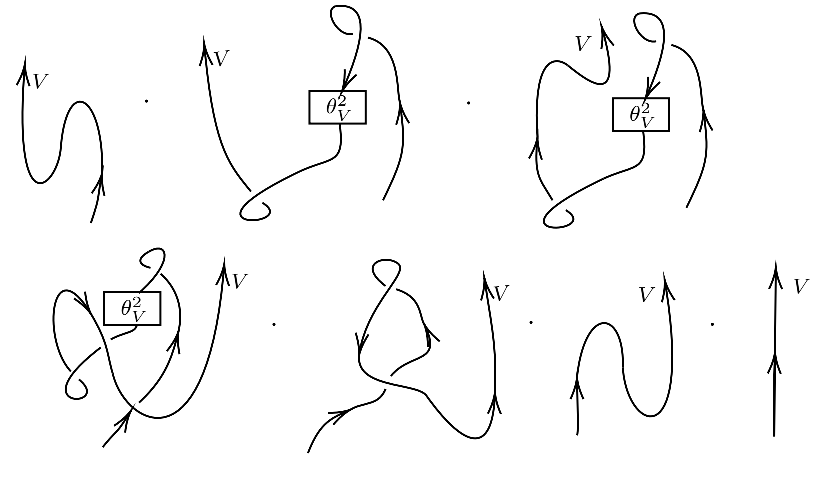
Απόδειξη. (α) από τις (4.18-4.19) και τη φυσικότητα του τανυστικού γινομένου έχουμε:

$$\begin{aligned}(d_v^{-1} \otimes id_V)(id_V \otimes b_V^{-1}) &\\ &= d_V c_{V,V}\,(\theta_V \otimes id_V \otimes id_V) \otimes id_V \; id_V \otimes (id_V \otimes \theta_V) c_{V,V}\, b_V \\ &= \theta_V g \theta_V\end{aligned}$$

όπου το g είναι ο τρίτος όρος του Λήμματος 4.5.4 . Συνεπώς έχουμε:

$$(d_V^{-1} \otimes id_V)(id_V \otimes b_V^{-1}) = \theta_V {\theta_V}^2 \theta_V = id_V.$$

(β) Η απόδειξη βασίζεται στο ακόλουθο σχήμα:



Η πρώτη ισότητα προκύπτει εξ ορισμού, η δεύτερη είναι από το (4.10), η τρίτη από τη φυσικότητα της περίπλεξης, η τέταρτη από το Λήμμα 4.5.4, η πέμπτη από την αντιστρεψιμότητα του $c_{V,V}$ και η τελευταία από το (4.10).

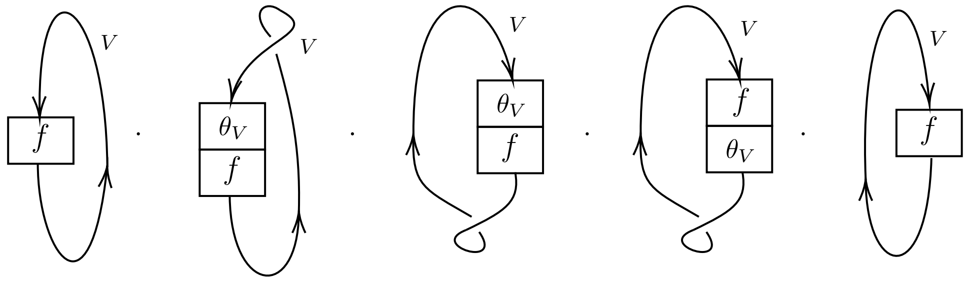
Ορισμός 4.5.3. Έστω $\mathfrak{C}$ είναι μία κατηγορία κορδελών με μονάδα I. Για κάθε αντικείμενο V του $\mathfrak{C}$ και κάθε ενδομορφισμό f του V, ορίζουμε το κβαντικό ίχνος $tr_q(f)$ της f ως στοιχείο:

$$tr_q(f) \quad d^{1}_V(f \otimes id_V \ )b_V \quad d_V c_{V,V} \ (\theta_V f \otimes id_V \ )b_V$$

του μονοειδούς $End(I)$, ως ένωση των μορφισμών:

$$I \xrightarrow{b_V} V \otimes V \ \xrightarrow{\theta_V f \otimes id_V} V \otimes V \ \xrightarrow{c_{V,V}} V \ \otimes V \xrightarrow{d_V} I$$

Σημείωση 4.5.3. Ο συμβολισμός που προηγήθηκε συμπίπτει με το συνήθες κβαντικό ίχνος όταν η κατηγορία $\mathfrak{C} \quad \mathfrak{Vect}_f(k)$. Η γραφική αναπαράσταση του $tr_q(f)$ δίνεται από το ακόλουθο σχήμα:



Αποδεικνύεται με αναλυτικές διαγραμματικές αναπαραστάσεις και το ακόλουθο:

Θεώρημα 4.5.6. *Δοσμένων ενδομορφισμών f, g σε μία κατηγορία κορδελών, έχουμε:*

(α) $tr_q(fg) \quad tr_q(gf)$ όπου f και g επιδέχονται σύνθεσης

(β) $tr_q(f \otimes g) \quad tr_q(f)tr_q(g)$

(γ) $tr_q(f) \quad tr_q(f \ ) \in End(I)$

Ορισμός 4.5.4. Έστω $\mathfrak{C}$ μία κατηγορία κορδελών με μονάδα I. Για κάθε αντικείμενο V του $\mathfrak{C}$ ορίζουμε την κβαντική διάσταση $\dim_q(V)$ ως το στοιχείο

$$\dim_q(V) \quad tr_q(id_V) \quad d^{1}_V b_V$$

του μονοειδούς $End(I)$.

Ως Πόρισμα του Θεωρήματος 4.5.6 και του Ορισμού 4.5.4 έχουμε:

Πόρισμα 4.5.6.1. *Έστω $V, W \ \in \mathfrak{C}$, όπου $\mathfrak{C}$ κατηγορία κορδελών. Τότε:*

$$\dim_q(V \otimes W) \quad \dim_q(V)\dim_q(W) \quad \textit{και} \quad \dim_q(V \ ) \quad \dim_q(V)$$

4.5.3 Κατηγορία $\mathcal{FT}$

Υπάρχει ένα είδος αμμάτων και ισοτοπιών όπου οι κατά-τμήματα γραμμικές απεικονίσεις αντικαθίστανται με λείες C^∞ απεικονίσεις και η συνοριακή συνθήκη του Ορισμού 4.3.5 (α) αντικαθίσταται από μία συνθήκη εγκαρσιότητας (transversality condition).

Αυτά τα λεία άμματα προβάλλονται σε λεία διαγράμματα αμμάτων. Δείχνεται ότι οι λείες ισοτοπικές κλάσεις λείων αμμάτων βρίσκονται σε 1-1 και επί αντιστοιχία με τις ισοτοπικές κλάσεις αμμάτων που έχουν οριστεί.

Ορισμός 4.5.5. Μία πλαισίωση (framing) ενός άμματος είναι μία επέκταση της εμφύτευσης $T : L \to X \times \mathbb{R}^2 \times [0,1]$ ορίζοντας το άμμα σε μία εμφύτευση $T_f : L \times [0,1] \to X$ έτσι ώστε:

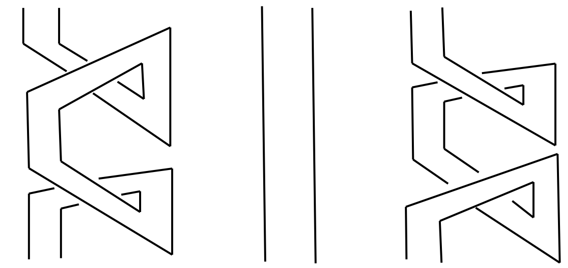
$$T_f(x,0) = T(x)$$

και εάν $x \in \partial L$ τότε $T_f(x,t) \in X$ για κάθε $t \in [0,1]$.

Παρατήρηση 4.5.2. Επί της ουσίας τα πλαισιωμένα άμματα είναι μία πάχυνση του ήδη υπάρχοντος άμματος και μπορεί κανείς να το σκεφτεί ως μία αμματοειδής κορδέλα, όπου η μία ακμή είναι το άμμα αυτό καθ' αυτό ενώ η άλλη ορίζεται ως μία μικρή μεταφορά κατα μήκους του C^∞ διανυσματικού πεδίου στο L που ορίστηκε μέσω της πλαισίωσης. Επομένως, η πλαισίωση άμματος είναι μία ομοτοπική κλάση κανονικών διανυσματικών πεδίων πάνω στο L, όπου δύο κανονικά διανυσματικά πεδία καλούνται ομοτοπικά εάν μπορεί να προκύψει το ένα μέσα από το άλλο μέσα στην κλάση διανυσματικών πεδίων. Έτσι επεκτείνεται η έννοια της ισοτοπίας αμμάτων σε άμματα με πλαισίωση. Η ισοτοπική κλάση αμμάτων με πλαισίωση καλείται πλαισιωμένα άμματα ή κορδέλες (framed tangles or ribbons).

Σημείωση 4.5.4. Υπάρχει ανάλογο του Θεωρήματος Reidemeister για τις κορδέλες. Σε αυτό δείχνεται ότι απλά πρέπει να αντικατασταθεί η σχέση R_I με την $R_{I'}$ που δίνεται ως ακολούθως:

$R_{I'}$:



Ορισμός 4.5.6. Η ομάδα πλεξίδων B_n, με n-νήματα, παράγεται από τους γεννήτορες $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ και για $n \geq 3$, $1 \leq i, j \leq n-1$ μπορεί να αναπαρασταθεί ως:

$$B_n = \left\langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1} \;\middle|\; \begin{cases} \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i & \text{εάν } |i-j| > 1 \\ \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} & \end{cases} \right\rangle$$

όπου:

σ_i = ÓÓ Ó X Ó ÓÓ και σ_i^{-1} = ÓÓ Ó X Ó ÓÓ .

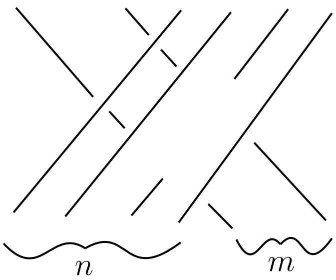
Σημείωση 4.5.5. Αφού τονίσαμε πως οι πλεξίδες είναι η ειδική περίπτωση των αμμάτων τύπου-(n, n), μπορούμε να επεκταθούμε σε μία κατηγορία, την κατηγορία πλεξίδων $\mathcal{B}$, με ακριβώς ανάλογο τρόπο όπως και η $\mathcal{OT}$.

Προκειμένου να δώσουμε περίπλεξη στην κατηγορία πλεξίδων, ορίζουμε τους ισομορφισμούς $c_{n,m} : n \otimes m \to m \otimes n$ για κάθε ζεύγος (n, m) μη-αρνητικών ακεραίων. Αυτό γίνεται ως: $c_{0,n} = id_n = c_{n,0}$ και για $n, m > 0$ θέτουμε:

$$c_{n,m} = (\sigma_m \sigma_{m-1} \cdots \sigma_1)(\sigma_{m+1}\sigma_m \cdots \sigma_2) \cdots (\sigma_{m+n-1}\sigma_{m+n-2} \cdots \sigma_n)$$

όπου $\sigma_1, \ldots, \sigma_{m+n-1}$ είναι γεννήτορες της B_{m+n}. Η πλεξίδα $c_{n,m}$ αναπαριστάται ως ακολούθως:

$c_{n,m}$:



Ελέγχοντας τις σχέσεις (4.2-4.3) και την $c_{n,m}(\sigma_i \otimes \sigma_j) = (\sigma_j \otimes \sigma_i)c_{n,m}$ που προκύπτει από την R_{III} δείχνεται ότι:

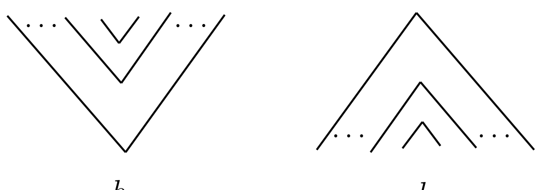
Θεώρημα 4.5.7. *Η οικογένεια ισομορφισμών $(c_{n,m})_{n,m \geq 0}$ είναι μία περίπλεξη για την κατηγορία $\mathcal{B}$.*

Ορισμός 4.5.7. Ορίζουμε την κατηγορία $\mathcal{FT}$ των πλαισιωμένων αμμάτων ή κορδελών ως εξής:

- Τα αντικείμενα της κατηγορίας $ob(\mathcal{FT}) = ob(\mathcal{OT})$
- Οι μορφισμοί $Hom_{\mathcal{FT}}$ είναι ισοτοπικές κλάσεις πλαισιωμένων αμμάτων
- Η σύνθεση, ο ταυτοτικός μορφισμός, το τανυστικό γινόμενο και η μονάδα ορίζονται με ακριβώς ανάλογο τρόπο όπως και στην $\mathcal{OT}$.
- Η περίπλεξη της κατηγορίας $\mathcal{B}$ ορίζει μία περίπλεξη στην $\mathcal{FT}$.

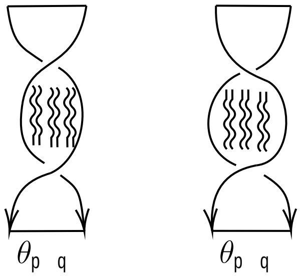
Τώρα, μπορούμε να εφοδιάσουμε την αυστηρή πλεξιδοειδής τανυστική κατηγορία $\mathcal{FT}$ με με μία αριστερή δυϊκότητα. Έστω $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in ob(\mathcal{FT})$, πεπερασμένη ακολουθία από σύμβολα .

Ορίζουμε το δυϊκό αντικείμενο $\epsilon = (\ \epsilon_n, \ldots, \ \epsilon_1)$. Η απεικονίσεις $b_\epsilon : ? \to \epsilon \otimes \epsilon$ και $d_\epsilon : \epsilon \otimes \epsilon \to ?$ είναι τα πλαισιωμένα άμματα που ικανοποιούν τη σχέση (4.10) και παριστάνονται ως ακολούθως : (ο προσανατολισμός των νημμάτων ορίζεται κατα μοναδικό τρόπο από τα της ακολουθίας ϵ)



b_ϵ d_ϵ

Τέλος, ορίζουμε την αντίστοιχη στρέψη στην αυστηρή πλεξιδοειδής τανυστική κατηγορία $\mathcal{FT}$ με τον ακόλουθο τρόπο:



Συνεπώς, η στρέψη ενός τυχαίου αντικειμένου θ_ϵ, $\epsilon \in ob(\mathcal{FT})$ θα προκύπτει από την παραπάνω διαγραμματική σύμβαση και τις σχέσεις (4.15-4.16).

Θεώρημα 4.5.8. *Έστω $\mathfrak{C}$ μία κατηγορία κορδελών και $V \in ob(\mathfrak{C})$. Τότε υπάρχει μοναδικός αυστηρός τανυστικός συναρτητής F_V από την $\mathcal{FT}$ στην $\mathfrak{C}$ που να διατηρεί την περίπλεξη, την αριστερή δυϊκότητα και την στρέψη, ώστε:*

$$F_V(\epsilon) = V : \epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n) \in ob(\mathcal{FT})$$

και

$$F_V(f) = g : f \in \mathcal{FT}(\epsilon, \epsilon'), \ g \in Hom(\mathfrak{C})$$

.

Η απόδειξη δίνεται αναλυτικά στα [Tur90],[Yet01].

Ορισμός 4.5.8. Μία πλεξιδοειδής Hopf άλγεβρα A είναι μία Hopf άλγεβρα κορδελών εάν υπάρχει κεντρικό στοιχείο $\theta \in A$ που να ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$\Delta(\theta) = (R_{21}R)^{-1}(\theta \otimes \theta), \quad \epsilon(\theta) = 1, \quad \text{και} \quad S(\theta) = \theta \qquad (5.1)$$

Πρόταση 4.5.9. Για κάθε Hopf άλγεβρα κορδελών A, η τανυστική κατηγορία $\mathfrak{Rep}_A$ είναι μία κατηγορία κορδελών με στρέψη θ_V, που δίνεται σε κάθε A-πρότυπο από τον πολλαπλασιασμό με τον αντίστροφο του κεντρικού στοιχείου θ.

Αντιστρόφως, εάν η A είναι μία πεπερασμένης διάστασης πλεξιδοειδής Hopf άλγεβρα και η πλεξιδοειδής κατηγορία $\mathfrak{Rep}_{fA}$ με αριστερή δυϊκότητα είναι κατηγορία κορδελών, τότε η A είναι Hopf άλγεβρα κορδελών.

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Έστω A μία Hopf άλγεβρα κορδελών με διακεκριμένο κεντρικό στοιχείο θ. Η περίπλεξη στην $\mathfrak{Rep}_A$ δίνεται από τις Προτάσεις 4.4.3-4.4.4 και η δυϊκότητα με τον τρόπο που ορίστικε στην παράγραφο 4.5.1.

Ορίζω στρέψη θ_V για κάθε $A-$πρότυπο V ως $\theta_V(v) = \theta^{-1}v$, όπου $v \in V$. Ο ενδομορφισμός θ_V είναι $A-$γραμμικός αυτομορφισμός αφού το θ είναι κέντρο και αντριστρέψιμο. Θα δείξουμε τις σχέσεις (4.15-4.16) χρησιμοποιώντας την (5.1), έχουμε:

$$\begin{aligned}(\theta_V \otimes \theta_W)c_{W,V}c_{V,W}(v \otimes w) &= (\theta^{-1} \otimes \theta^{-1})(R_{21}R)(v \otimes w) \\ &= \Delta(\theta^{-1})(v \otimes w) \\ &= \theta_{V \otimes W}(v \otimes w).\end{aligned}$$

και για την (4.16), για κάθε $v \in V$ και $a \in V^*$:

$$\begin{aligned} \langle (\theta_V)^*(a), v\rangle &= \langle a, \theta_V(v)\rangle = \langle a, \theta^{-1}v\rangle \\ &= \langle a, S(\theta^{-1})V\rangle = \langle \theta^{-1}a, v\rangle \\ &= \langle \theta_{V^*}\, a, v\rangle. \end{aligned}$$

(δ) Τώρα υποθέτουμε ότι η A είναι πεπερασμένης διάστασης και η $\mathfrak{Rep}_{\mathfrak{f}A}$ είναι μία κατηγορία κορδελών. Από την Πρόταση 4.4.3 έχουμε ότι η A είναι πλεξιδοειδής. Εφόσον υποθέσαμε ότι η A είναι πεπερασμένης διάστασης, τότε θεωρούμε το αριστερό A-πρότυπο A και την αντίστοιχη στρέψη θ_A. Ορίζουμε $\theta = \theta_A(1)^{-1}$. Από την φυσικότητα της στρέψης έχουμε για κάθε πεπερασμένης διάστασης A πρότυπο ότι:

$$\theta_V(v) = \theta_A(1)v = \theta^{-1}v$$

Από την A-γραμμικότητα του θ_A συνεπάγεται ότι το θ είναι κέντρο. Από την (4.15) προκύπτει ότι:

$$\Delta(\theta^{-1}) = (\theta^{-1} \otimes \theta^{-1})(R_{21}R)$$

ενώ η σχέση (4.16) συνεπάγεται ότι $S(\theta^{-1}) = \theta^{-1}$. Τέλος, $\epsilon(\theta) = 1$ προκύπτει από το Λήμμα 4.5.3 (β).

Ως αποτέλεσμα του Θεωρήματος 4.5.8 και της Πρότασης 4.5.9 μπορούμε να παράξουμε μία αναλλοίωτη κρίκου για κάθε Hopf άλγεβρα κορδελών. Το αποτέλεσμα αυτό περιγράφεται στο ακόλουθο Πόρισμα:

Πόρισμα 4.5.9.1. *Για κάθε Hopf άλγεβρα κορδελών A, υπάρχει μοναδικός αυστηρός τανυστικός συναρτητής $F_V : \mathcal{FT} \to \mathfrak{Rep}_A$, $V \in ob(\mathfrak{Rep}_A)$ που διατηρεί την περίπλεξη, την αριστερή δυϊκότητα και την στρέψη και τέτοιος ώστε:*

$$F_V(\epsilon) = V : \epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n) \in ob(\mathcal{FT}), \quad V \in ob(\mathfrak{Rep}_A)$$

και

$$F_V(f) = g : f \in \mathcal{FT}(\epsilon, \epsilon'), \; g \in Hom(\mathfrak{Rep}_A)$$

Καταληκτικά αν κανείς επεκτείνει την έννοια της κβαντικής δυάδας του Drinfeld σε άπειρες Hopf άλγεβρες μέσω του ορισμού της γενικής περιβάλλουσας άλγεβρας (**QUE**) μπορεί να δώσει δομή Hopf άλγεβρας κορδελών στα $U_q(sl(2))$-πρότυπα και να παράξει μέσω αυτών αναλλοιώτους κρίκων που συμπίπτουν τόσο με τιμές του Kaufmann-bracket όσο και του πολυωνύμου HOMFLY-PT.

Αναφορές

[Abe04] Eiichi Abe. *Hopf algebras*. Vol. 74. Cambridge university press, 2004.

[Bou08] Nicolas Bourbaki. *Lie groups and Lie algebras: chapters 7-9*. Vol. 3. Springer Science & Business Media, 2008.

[Dri90] Vladimir Guerchonovitch Drinfel'd. "Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation". In: *Yang-Baxter Equation in Integrable Systems*. World Scientific, 1990, pp. 264–268.

[Dri86] Vladimir Gershonovich Drinfeld. "Quantum groups". In: *Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI* 155 (1986), pp. 18–49.

[Dri89a] Vladimir Gershonovich Drinfeld. "Almost cocommutative Hopf algebras". In: *Algebra i analiz* 1.2 (1989), pp. 30–46.

[Dri89b] Vladimir Gershonovich Drinfeld. "Quasi-hopf algebras". In: *Algebra i Analiz* 1.6 (1989), pp. 114–148.

[Eti+16] Pavel Etingof et al. *Tensor categories*. Vol. 205. American Mathematical Soc., 2016.

[FY92] Peter Freyd and David N Yetter. "Coherence theorems via knot theory". In: *Journal of Pure and Applied Algebra* 78.1 (1992), pp. 49–76.

[Fre+90] Peter Freyd et al. "A new polynomial invariant of knots and links". In: *New Developments In The Theory Of Knots*. World Scientific, 1990, pp. 12–19.

[FY89] Peter J Freyd and David N Yetter. "Braided compact closed categories with applications to low dimensional topology". In: *Advances in mathematics* 77.2 (1989), pp. 156–182.

[Jac79] Nathan Jacobson. *Lie algebras*. 10. Courier Corporation, 1979.

[JS91a] André Joyal and Ross Street. "An introduction to Tannaka duality and quantum groups". In: *Category theory*. Springer. 1991, pp. 413–492.

[JS91b] André Joyal and Ross Street. "The geometry of tensor calculus, I". In: *Advances in mathematics* 88.1 (1991), pp. 55–112.

[JS91c] André Joyal and Ross Street. "Tortile Yang-Baxter operators in tensor categories". In: *Journal of Pure and Applied Algebra* 71.1 (1991), pp. 43–51.

[JS93] André Joyal and Ross Street. "Braided tensor categories". In: *Advances in Mathematics* 102.1 (1993), pp. 20–78.

[Kas12] Christian Kassel. *Quantum groups*. Vol. 155. Springer Science & Business Media, 2012.

[KT95] Christian Kassel and Vladimir Turaev. "Double construction for monoidal categories". In: *Acta Mathematica* 175.1 (1995), pp. 1–48.

[Kau90] Louis H Kauffman. "An invariant of regular isotopy". In: *Transactions of the American Mathematical Society* 318.2 (1990), pp. 417–471.

[Lei14] Tom Leinster. *Basic Category Theory*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2014. DOI: 10.1017/CBO9781107360068.

[Mac63] Saunders MacLane. "Natural associativity and commutativity". In: *Rice Institute Pamphlet-Rice University Studies* 49.4 (1963).

[Maj90a] Shahn Majid. "Physics for algebraists: Non-commutative and non-cocommutative Hopf algebras by a bicrossproduct construction". In: *Journal of Algebra* 130.1 (1990), pp. 17–64.

[Maj90b] Shahn Majid. "Quasitriangular Hopf algebras and Yang-Baxter equations". In: *International Journal of Modern Physics A* 5.01 (1990), pp. 1–91.

[Maj91a] Shahn Majid. "Doubles of quasitriangular Hopf algebras". In: *Communications in Algebra* 19.11 (1991), pp. 3061–3073.

[Maj91b] Shahn Majid. "Representations, duals and quantum doubles of monoidal categories". In: *Proceedings of the Winter School" Geometry and Physics"*. Circolo Matematico di Palermo. 1991, pp. 197–206.

[Ore33] Oystein Ore. "Theory of Non-Commutative Polynomials". In: *Annals of Mathematics* 34.3 (1933), pp. 480–508. ISSN: 0003486X. URL: http://www.jstor.org/stable/1968173.

[Rad76] David E Radford. "The order of the antipode of a finite dimensional Hopf algebra is finite". In: *American Journal of Mathematics* (1976), pp. 333–355.

[Rad93] David E Radford. "Solutions to the quantum Yang-Baxter equation and the Drinfeld double". In: *Journal of Algebra* 161.1 (1993), pp. 20–32.

[RT91] Nicolai Reshetikhin and Vladimir G Turaev. "Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups". In: *Inventiones mathematicae* 103.1 (1991), pp. 547–597.

[RT90] Nicolai Yu Reshetikhin and Vladimir G Turaev. "Ribbon graphs and their invaraints derived from quantum groups". In: *Communications in Mathematical Physics* 127.1 (1990), pp. 1–26.

[Rol76] Dale Rolfsen. "Knots and links, volume 7 of". In: *Mathematics Lecture Series* (1976), pp. 386–400.

[Saw96] Stephen Sawin. "Links, quantum groups and TQFTs". In: *Bulletin of the American Mathematical Society* 33.4 (1996), pp. 413–445.

[SL87] Woronowicz SL. "Twisted SU (2) group. An example of a non-commutative differential calculus". In: *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences* 23.1 (1987), pp. 117–181.

[Swe69] Moss E Sweedler. "Hopf Algebras WA Benjamin". In: *Inc., New York* (1969).

[Taf71] Earl J Taft. "The order of the antipode of finite-dimensional Hopf algebra". In: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 68.11 (1971), pp. 2631–2633.

[TW80] Earl J Taft and Robert Lee Wilson. "There exist finite-dimensional Hopf algebras with antipodes of arbitrary even order". In: *Journal of Algebra* 62.2 (1980), pp. 283–291.

[Tak81] Mitsuhiro Takeuchi. "Matched pairs of groups and bismash products of Hopf algebras". In: *Communications in Algebra* 9.8 (1981), pp. 841–882.

[Tur88] Vladimir G Turaev. "The Yang-Baxter equation and invariants of links". In: *Inventiones mathematicae* 92.3 (1988), pp. 527–553.

[Tur20] Vladimir G Turaev. *Quantum invariants of knots and 3-manifolds.* Vol. 18. Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2020.

[TV17] Vladimir G Turaev and Alexis Virelizier. *Monoidal categories and topological field theory.* Vol. 322. Springer, 2017.

[Tur90] Vladimir Georgievich Turaev. "Operator invariants of tangles, and R-matrices". In: *Mathematics of the USSR-Izvestiya* 35.2 (1990), p. 411.

[Wor87] Stanisław L Woronowicz. "Compact matrix pseudogroups". In: *Communications in Mathematical Physics* 111.4 (1987), pp. 613–665.

[Wor88] Stanisław L Woronowicz. "Tannaka-Krein duality for compact matrix pseudogroups. TwistedSU (N) groups". In: *Inventiones mathematicae* 93.1 (1988), pp. 35–76.

[XYZ19] Zhankui Xiao, Yuping Yang, and Yinhuo Zhang. "The diagram category of framed tangles and invariants of quantized symplectic group". In: *Science China Mathematics* (2019), pp. 1–12.

[Yet01] David N Yetter. *Functorial Knot Theory: Categories of Tangles, Coherence, Categorical Deformations and Topological Invariants.* Vol. 26. World Scientific, 2001.

[ZGB91] Rui Bin Zhang, Mark D Gould, and Anthony J Bracken. "Quantum group invariants and link polynomials". In: *Communications in mathematical physics* 137.1 (1991), pp. 13–27.