ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
Δ.Π.Μ.Σ. «ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ»

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ελπίδα Παπαδοπούλου

ΤΙΤΛΟΣ: Αρχή Μεγίστου, Θεωρία Ομαλότητας και Φασματικές ιδιότητες της αρνητικής Λαπλασιανής

Τριμελής Επιτροπή:

Γ. Σμυρλής	**Ν.Γιαννακάκης**	**Δ.Κοντοκώστας**
(επιβλέπων)	**Αναπλ. Καθηγ.**	**Επίκ. Καθηγ. ΕΜΠ**
Αναπλ.Καθηγ. ΕΜΠ	**ΕΜΠ**	

ΑΘΗΝΑ

ΜΑΡΤΙΟΣ 2021

Ευχαριστίες

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια του μεταπτυχιακού προγράμματος «Εφαρμοσμένες Μαθηματικές Επιστήμες» της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών Επιστημών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου. Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον εξαίρετο καθηγητή και επιβλέποντά μου κ. Σμυρλή Γεώργιο για την πολύτιμη υποστήριξη και την επιστημονική καθοδήγησή του σε όλη τη διάρκεια της διπλωματικής μου εργασίας. Επίσης, θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στα μέλη της επιτροπής τον αναπληρωτή καθηγητή κ. Γιαννακάκη Νικόλαο και τον επίκουρο καθηγητή κ. Κοντοκώστα Δημήτριο.

Εισαγωγή

Η εργασία αυτή έχει ως στόχο να παρουσιάσει συγκεκριμένες εκδοχές της Αρχής του Μεγίστου και της Θεωρίας Ομαλότητας Ασθενών Λύσεων Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων (Μ.Δ.Ε.), καθώς επίσης και τις βασικές φασματικές ιδιότητες του διαφορικού τελεστή $-\Delta$ με συνοριακές συνθήκες τύπου Dirichlet.

Στο Κεφ. 0 παρουσιάζονται προπαρασκευαστικά εργαλεία, απαραίτητα για τα επόμενα κεφάλαια. Στην πρώτη ενότητα γίνεται αναφορά στους χώρους συνεχών και διαφορίσιμων συναρτήσεων και ειδικότερα αυτών με συμπαγή φορέα. Ακολουθεί η δεύτερη παράγραφος στην οποία δίνονται οι ορισμοί των χώρων Sobolev $W^{m,2}(\Omega)$, όπου $m \geq 1$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ ανοικτό σύνολο και υπενθυμίζονται δύο βασικά θεωρήματα: το Θεώρημα Meyer-Serrin και το Θεώρημα Ενσφήνωσης του Sobolev. Τέλος, παρατίθεται ο τύπος του Green που αποτελεί το βασικό κίνητρο για να δοθεί ο ορισμός της ασθενούς λύσης της Μ.Δ.Ε.

$$-\Delta u(x) = f(x), \text{ σχεδόν παντού στο } \Omega,$$

όπου Δu η Λαπλασιανή της άγνωστης συνάρτησης u και $f \in L^2(\Omega)$.

Στο Κεφ. Ι διατυπώνονται και αποδεικνύονται οι Ασθενής και η Ισχυρή Αρχή του Μεγίστου για ελλειπτικούς συμμετρικούς γραμμικούς διαφορικούς τελεστές 2[ης] τάξης γενικής μορφής πάνω στον $C^2(\Omega)$, όπου $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ ανοικτό σύνολο. Η Αρχή Μεγίστου αποτελεί ένα από τα πιο γνωστά και χρήσιμα εργαλεία στην Ποιοτική Θεωρία των Διαφορικών Εξισώσεων. Μας εξασφαλίζει ότι συναρτήσεις μιας ή πολλών μεταβλητών που ικανοποιούν μια διαφορική ανίσωση σε ένα χωρίο Ω λαμβάνουν τη μέγιστη τιμή τους στο σύνορο του Ω. Η Ασθενής Αρχή Μεγίστου απαιτεί το Ω να είναι φραγμένο κι επιπλέον η εμπλεκόμενη λύση $u \in C^2(\Omega)$ της διαφορικής ανίσωσης να είναι συνεχής στο σύνορο του Ω. Στην Ισχυρή Αρχή του Μεγίστου δεν απαιτείται το Ω να είναι φραγμένο αλλά συνεκτικό και η εμπλεκόμενη λύση της διαφορικής ανίσωσης αρκεί να ορίζεται μόνο στο Ω. Το κλειδί για την απόδειξη της Ισχυρής Αρχής του Μεγίστου είναι το περίφημο *Λήμμα του Hopf*, που ήταν ένα εξαιρετικά πρωτοποριακό για την εποχή του αποτέλεσμα (E.Hopf, 1927). Οι αποδείξεις των παραπάνω αποτελεσμάτων είναι αρκετά απαιτητικές και βασίζονται σε μια σειρά αναλυτικών και τοπολογικών λημμάτων. Το Κεφ. Ι κλείνει με κάποια ενδιαφέροντα πορίσματα των δύο εκδοχών της Αρχής του Μεγίστου (π.χ. θεωρήματα σύγκρισης).

Στο Κεφ. ΙΙ, παρουσιάζεται η ομαλότητα των λύσεων στο εσωτερικό χωρίου Ω, για γραμμικές ελλειπτικές Μ.Δ.Ε. της μορφής

$$-\Delta u(x) = f(x), \quad \text{σχεδόν παντού στο } \Omega,$$

όπου Δu η Λαπλασιανή της άγνωστης συνάρτησης u και $f \in L^2(\Omega)$. Το ουσιώδες συστατικό της απόδειξης είναι η τεχνική των διαφορών πηλίκων που οφείλεται στον L.Nirenberg. Επιπλέον, διατυπώνεται η εξέχουσας σημασίας μη γραμμική εκδοχή της θεωρίας ομαλότητας στο σύνορο του Ω, που οφείλεται στον G.M.Lieberman (1988). Στην παρούσα εργασία, η θεωρία ομαλότητας αποτελεί βασικό εργαλείο για τη μελέτη των φασματικών ιδιοτήτων της $-\Delta$ με Dirichlet συνοριακές συνθήκες που παρουσιάζεται στο Κεφ. IV.

Στο Κεφ. III, αποδεικνύονται το κλασικό φασματικό θεώρημα για αυτοσυζυγείς συμπαγείς γραμμικούς τελεστές πάνω από απειροδιάστατους διαχωρίσιμους χώρους Hilbert, καθώς και min-max εκφράσεις για τις ιδιοτιμές τους. Οι φασματικές ιδιότητες των αυτοσυζυγών συμπαγών γραμμικών τελεστών αποτελούν τη βάση για τη μελέτη των φασματικών ιδιοτήτων γραμμικών ελλειπτικών διαφορικών τελεστών 2ης τάξης.

Στο Κεφ. IV, παρουσιάζονται θεμελιώδεις φασματικές ιδιότητες του διαφορικού τελεστή $-\Delta$ με συνοριακές συνθήκες τύπου Dirichlet, όπως: το διακριτό του συνόλου των ιδιοτιμών και κάποιες min-max εκφράσεις τους, το πρόσημο των ιδιοσυναρτήσεων, το θεώρημα του R. Courant για τα nodal domains των ιδιοσυναρτήσεων και το μονοδιάστατο του πρωταρχικού ιδιόχωρου.

<u>Περιεχόμενα</u>

0. Προαπαιτούμενα.

0.1. Χώροι συνεχών και διαφορίσιμων συναρτήσεων.

Έστω $N \in \mathbb{N}$ με $N \geq 1$ και $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ανοικτό σύνολο, όπου

$$\mathbb{R}^N = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) : x_j \in \mathbb{R},\ 1 \leq j \leq N\}.$$

Θέτουμε

$C(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \mid u \text{ συνεχής}\}$,

$C(\bar{\Omega}) = \{u \in C(\Omega) \mid \text{η } u \text{ έχει συνεχή επέκταση στο } \bar{\Omega}\}$.

Εάν $u : \Omega \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη, γράφουμε $\partial_j u = \frac{\partial u}{\partial x_j}$, $1 \leq j \leq N$ και θέτουμε $\nabla u = (\partial_1 u,\ \partial_2 u,\ \ldots, \partial_N u)$.

Θεωρούμε το γραμμικό χώρο

$$C^1(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \mid u \text{ διαφορίσιμη με } \partial_j u \in C(\Omega), 1 \leq j \leq N\}.$$

Για κάθε *πολυδείκτη* $a = (a_1, a, \ldots, a_N) \in \mathbb{N}^N$ ορίζεται το *μήκος* του α:

$$|a| = \sum_{i=1}^{N} a_i\ .$$

Ειδικότερα, εάν $\{e_1, e, \ldots, e_N\}$ η φυσική βάση του $\mathbb{N}^N$, τότε

$$|e_j| = 1, \quad D^{e_j} u = \partial_j u, \text{ για } u \in C^1(\Omega),\ 1 \leq j \leq N\,.$$

Εάν α, β πολυδείκτες, προφανώς $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$.

Επιπλέον, για $a = (a_1, a, \ldots, a_N)$, $\beta = (\beta_1, \beta, \ldots, \beta_N)$ με $a_i \geq \beta_i$, $1 \leq i \leq N$, ισχύει $|a - \beta| = |\alpha| - |\beta|$.

Έστω $k \geq 1$. Θέτουμε

$$C^k(\Omega) = \{u \in C(\Omega) : \text{η } u \text{ έχει συνεχείς μερικές παραγώγους στο } \Omega \text{ τάξης } \leq k\}.$$

Έστω $u \in C^k(\Omega)$. Για $a = (a_1, a, \ldots, a_N)$ με $|a| \leq k$, θέτουμε

$$D^a u = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{a_1} \ldots\ \partial_{x_N}^{a_N}} u\,.$$

Εάν $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^N$ με $|\alpha| + |\beta| \leq k$, ισχύει

$$D^{\alpha+\beta} u = D^\alpha\big(D^\beta u\big) = D^\beta(D^\alpha u).$$

Ειδικότερα, για $|a| + 1 \leq k$, ισχύει $\partial_j\,(D^\alpha u) = D^{a+e_j} u$, $1 \leq j \leq N$.

Πρόταση 0.1.1: $\forall\, k \geq 1, \quad C^{k+1}(\Omega) = \{\, u \in C^k(\Omega)\colon\ D^a u \in C^1(\Omega),\ |a| \leq k \,\}$.

Απόδειξη: Έστω $u \in C^{k+1}(\Omega)$. Προφανώς, $u \in C^k(\Omega)$.

Τότε, για $|a| \leq k, \quad 1 \leq j \leq N,$

$$\begin{aligned} |a + e_j| \leq k+1 \quad &\Rightarrow \text{ υπάρχει η } D^{a+e_j} \text{ στο } \Omega \text{ και είναι συνεχής} \\ &\Rightarrow \text{ υπάρχει η } \partial_j D^a \text{ στο } \Omega \text{ και είναι συνεχής} \\ &\Rightarrow D^a \in C^1(\Omega),\ |a| \leq k. \end{aligned}$$

Αντίστροφα, έστω $u \in C^k(\Omega)$ τέτοια ώστε $D^\beta u \in C^1(\Omega)$, για όλα τα $|\beta| \leq k$.

Επιλέγουμε πολυδείκτη α με $|\alpha| = k+1$.

Τότε, $a_i \geq 1$ για κάποιο $i \in \{1, 2, \ldots, N\} \Rightarrow |a - e_i| = k \Rightarrow D^{a-e_i}u \in C^1(\Omega)$

$\Rightarrow \partial_i D^{a-e_i}u \in C(\Omega) \Rightarrow D^a u \in C(\Omega)$. ■

Πρόταση 0.1.2: Έστω $k \geq 1$, $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι για κάθε μπάλα B με $B \subset \overline{B} \subset \Omega$, ισχύει $u_{|_B} \in C^k(B)$. Τότε, $u \in C^k(\Omega)$.

Απόδειξη: Εργαζόμαστε με επαγωγή στο $k \geq 1$.

- $k = 1$. Έστω $u : \Omega \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε ανοικτή μπάλα B με $B \subset \overline{B} \subset \Omega$ ισχύει, $u_{|_B} \in C^1(B)$.

Έστω $x_0 \in \Omega$. Επιλέγουμε ανοικτή μπάλα B με $x_0 \in B \subset \overline{B} \subset \Omega$.

Τότε, $u_{|_B} \in C^1(B) \Rightarrow u_{|_B}$ διαφορίσιμη στο x_0 και $\partial_j\, u|_B$ συνεχής στο x_0,

για $1 \leq j \leq N \Rightarrow u$ διαφορίσιμη στο x_0 και $\partial_j\, u$ συνεχής στο x_0,

για $1 \leq j \leq N$. Άρα, $u \in C^1(\Omega)$.

- Υποθέτουμε ότι η Πρόταση ισχύει για κάποιο $k \geq 1$.

Έστω $u : \Omega \to \mathbb{R}$ ώστε για κάθε ανοικτή μπάλα B με $B \subset \overline{B} \subset \Omega$ ισχύει $u_{|_B} \in C^{k+1}(B)$. Τότε, $u \in C^k(\Omega)$, λόγω της επαγωγικής υπόθεσης.

Για κάθε ανοικτή μπάλα με $B \subset \overline{B} \subset \Omega$, έχουμε

$u_{|_B} \in C^{k+1}(B) \xRightarrow{\text{Πρόταση } 0.1.1} D^a u_{|_B} \in C^1(B)$, για όλα τα $|a| \leq k$. Από την περίπτωση $k = 1$ προκύπτει ότι $D^a u \in C^1(\Omega)$, για όλα τα $|a| \leq k$. Από την Πρόταση 0.1.1 έπεται ότι $u \in C^{k+1}(\Omega)$. ■

Επιπλέον θα χρειαστούμε τους παρακάτω χώρους:

Για $k \geq 1$,

$C^k(\bar{\Omega}) = \{u \in C^k(\Omega)|$ η $D^a u$ έχει συνεχή επέκταση στο $\bar{\Omega}$, για όλα τα $|a| \leq k\}$,

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(\Omega), \qquad C^\infty(\bar{\Omega}) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(\bar{\Omega}) .$$

Τέλος, θα χρειαστούμε τους χώρους συνεχών/διαφορίσιμων συναρτήσεων με συμπαγή φορέα.

Εάν $u \in C(\Omega)$, *ο φορέας* της u είναι το σύνολο

$$suppu = \overline{\{ x \in \Omega:\ u(x) \neq 0 \}} .$$

Θέτουμε

$$C_c(\Omega) = \{ u \in C(\Omega) :\ suppu \text{ συμπαγές υποσύνολο του } \Omega \},$$

$$C_c^k(\Omega) = C^k(\Omega) \cap C_c(\Omega), \quad k \geq 1,$$

$$C_c^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_c(\Omega).$$

0.2. Χώροι Sobolev $W^{m,2}(\Omega)$.

Έστω $N \in \mathbb{N}$ $με$ $N \geq 1$ και $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ανοικτό σύνολο.

Θέτουμε

$$L^2(\Omega) = \left\{ u: \Omega \to \mathbb{R}:\ u \text{ μετρήσιμη με } \left||u|\right|_2 < \infty \right\},$$

όπου

$$\left||u|\right|_2 = \left(\int_\Omega |u(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

και dx το μέτρο Lebesgue στο Ω.

<u>Ορισμός 0.2.1:</u> Έστω $u, v \in L^2(\Omega)$ και $\alpha \in \mathbb{N}^N$. Θα λέμε ότι η v είναι $\alpha -$ *ασθενής* ή *γενικευμένη μερική παράγωγος της* u ανν

$$\int_\Omega u(x) D^a \varphi(x) dx = (-1)^{|a|} \int_\Omega v(x) \varphi(x)\, dx, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Συμβολισμός: $v = D^a u$.

Εάν η u έχει ασθενή παράγωγο $D^a u$, αυτή είναι σχεδόν παντού μοναδική.

Ειδικότερα, εάν $a = e_j$, γράφουμε $D^a u = \partial_j u,\ 1 \le j \le N$ και

$$\nabla u = (\partial_1 u,\ \partial_2 u,\ \ldots, \partial_N u).$$

Έστω m φυσικός αριθμός με $m \ge 1$.

Ορισμός 0.2.2: Ο *χώρος Sobolev*

$$W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$$

είναι ο γραμμικός χώρος των συναρτήσεων $u \in L^2(\Omega)$ που έχουν γενικευμένες μερικές παραγώγους $D^a u,\ |a| \le m$ που ανήκουν στον $L^2(\Omega)$.

Ο χώρος $H^m(\Omega)$ είναι χώρος Hilbert ως προς το εσωτερικό γινόμενο

$$< u, v >_{m,2} = \sum_{|a| \le m} \int_{\Omega} D^a u(x) D^a v(x) dx$$

και ως προς την αντίστοιχη νόρμα

$$||u||_{m,2} = \sum_{|a| \le m} \int_{\Omega} |D^a u(x)|^2\ dx .$$

Ειδικότερα, ο χώρος Sobolev

$$W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$$

είναι ο γραμμικός χώρος των συναρτήσεων $u \in L^2(\Omega)$ που έχουν γενικευμένες μερικές παραγώγους $\partial_1 u,\ \partial_2 u,\ \ldots, \partial_N u$ που ανήκουν στον $L^2(\Omega)$.

Ο χώρος $H^1(\Omega)$ είναι χώρος Hilbert ως προς το εσωτερικό γινόμενο

$$< u, v >_{1,2} = \int_{\Omega} u(x) v(x) dx + \int_{\Omega} (\nabla u(x),\ \nabla v(x))_{\mathbb{R}^N}\, dx$$

και ως προς την αντίστοιχη νόρμα

$$||u||_{1,2} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \right)^{1/2},$$

όπου $(\cdot\,,\cdot)_{\mathbb{R}^N}$ το ευκλείδιο εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^N$.

Ορισμός 0.2.3: Ο χώρος Sobolev $W_0^{m,2}(\Omega)$ είναι η $||\cdot||_{m,2}-$ κλειστότητα του $C_c^\infty(\Omega)$ μέσα στον $W^{m,2}(\Omega)$.

Στο χώρο $W_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$, οι εκφράσεις

$$\int_{\Omega} (\nabla u(x),\ \nabla v(x))_{\mathbb{R}^N}\, dx, \qquad \left(\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

ορίζουν αντίστοιχα εσωτερικό γινόμενο ισοδύναμο με το $<\cdot,\cdot>_{1,2}$ και νόρμα ισοδύναμη με την $||\cdot||_{1,2}$.

<u>**Θεώρημα 0.2.4 (*Meyer-Serrin*):**</u> Για κάθε $u \in W^{m,2}(\Omega)$, υπάρχει ακολουθία $(u_n) \subset C^{\infty}(\Omega) \cap W^{m,2}(\Omega)$ τέτοια ώστε

$$\lim_{n\to\infty} ||u_n - u||_{m,2} = 0 .$$

<u>**Ορισμός 0.2.5:**</u> Το Ω έχει σύνορο $\partial\Omega$ *κλάσης* $C^k (k \geq 1)$ ανν για κάθε $z \in \partial\Omega$, $\exists$ ανοικτά σύνολα V_z , W_z , $h_z: V_z \to W_z$ αμφιδιαφόριση και $\eta_z \in C^k(\mathbb{R}^{N-1})$ ώστε

$z \in V_z$, $\quad h_z\,(V_z \cap \partial\Omega) = \{ (x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}, x_N) \colon x_N = \eta_z(x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}) \}$

και

$h_z\,(V_z \cap \Omega) = \{ (x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}, x_N) \colon x_N > \eta_z(x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}) \}$.

Πρακτικά, το $\partial\Omega$ είναι κλάσης C^k ανν τοπικά και ως προς κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων το $\partial\Omega$ είναι το γράφημα μιας συνάρτησης $\eta \in C^k(\mathbb{R}^{N-1})$ και το Ω βρίσκεται ''πάνω'' από το γράφημα της η. Η δεύτερη απαίτηση δεν επιτρέπει τοπικά το Ω να ''κείται'' και προς τις δύο ''πλευρές'' του $\partial\Omega$.

Το $\partial\Omega$ είναι κλάσης C^{∞} ανν είναι κλάσης C^k, $\forall k \geq 1$.

Π.χ. κάθε ανοικτή μπάλα στον $\mathbb{R}^N$ έχει σύνορο κλάσης C^{∞}, ενώ το σύνορο του συνόλου

$$\Omega = \{ x \in \mathbb{R}^N : |x| < 2, \qquad |x| \neq 1 \}$$

δεν είναι κλάσης C^1 *(*το Ω ''κείται'' και προς τις δύο ''πλευρές'' του συνόρου του).

<u>**Θεώρημα 0.2.6 (Θεώρημα Ενσφήνωσης Sobolev):**</u> Υποθέτουμε ότι το Ω είναι ανοικτό και φραγμένο με σύνορο κλάσης C^1 και $m \geq 1, k \geq 1$. Τότε:

- **(i)** $W^{m,2}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ με συμπαγή ενσφήνωση.
- **(ii)** Εάν $m > k + N/2$, τότε $W^{m,2}(\Omega) \subset C^k(\Omega)$ με συμπαγή ενσφήνωση.

<u>**Σχόλιο:**</u> <u>Το Θ. Ενσφήνωσης του Sobolev ισχύει για το χώρο $W_0^{m,2}(\Omega)$, **για τυχαίο** ανοικτό και φραγμένο σύνολο $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.</u>

Για μια λεπτομερή παρουσίαση της θεωρίας των χώρων Sobolev παραπέμπουμε στο σύγγραμμα του Brezis[1].

0.3. Τύπος του Green - Ασθενείς λύσεις.

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) ανοικτό σύνολο με σύνορο $\partial\Omega$ κλάσης C^1.

Για κάθε $z \in \partial\Omega$, συμβολίζουμε με $n(z) = (n_1(z), n_2(z), \dots, n_N(z))$ το μοναδιαίο διάνυσμα της εξωτερικής καθέτου στο z.

Εάν $u, \varphi \in C^1(\bar{\Omega})$, ισχύει *ο τύπος της παραγοντικής ολοκλήρωσης*:

$$\int_\Omega u(x)\partial_j\varphi(x)dx = -\int_\Omega \partial_j u(x)\varphi(x)dx + \int_{\partial\Omega} u(z)\varphi(z)n_j(z)dz\,,$$

για $1 \leq j \leq N$.

Ειδικότερα, αν $\varphi \in C_c^1(\Omega)$, τότε η φ επεκτείνεται σε συνάρτηση $\overline{\varphi} \in C^1(\bar{\Omega})$ ώστε $\overline{\varphi}\,|_{\partial\Omega}$=0. Εφαρμόζοντας τον παραπάνω τύπο με $\overline{\varphi}$ στη θέση της φ, παίρνουμε

$$\int_\Omega u(x)\partial_j\varphi(x)dx = -\int_\Omega \partial_j u(x)\varphi(x)dx \quad , \quad 1 \leq j \leq N.$$

Εάν $u \in C^2(\Omega)$, ορίζεται στο Ω *η Λαπλασιανή* Δu της u:

$$\Delta u(x) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} \quad , \quad x \in \Omega.$$

Εφαρμόζοντας τον 2ο τύπο της παραγοντικής ολοκλήρωσης παίρνουμε τον *τύπο του Green*:

$$\int_\Omega \Delta u(x)\varphi(x)dx = -\int_\Omega (\nabla u(x), \nabla\varphi(x))_{\mathbb{R}^N} dx, \qquad \forall\ \varphi \in C_c^1(\Omega).$$

Έστω $u \in C^2(\Omega)$ κλασική λύση της Μερικής Διαφορικής Εξίσωσης (Μ.Δ.Ε.)

$$-\Delta u(x) = f(x), \qquad x \in \Omega,$$

όπου $f \in C(\Omega)$.

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της Μ.Δ.Ε. με $\varphi \in C_c^1(\Omega)$, ολοκληρώνοντας πάνω στο Ω κι εφαρμόζοντας τον τύπο του Green παίρνουμε

$$\int_{\Omega} (\nabla u(x), \nabla \varphi(x))_{\mathbb{R}^N} dx = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx, \quad \forall\ \varphi\ \in C_c^1(\Omega).$$

Παρατηρούμε ότι η παραπάνω ισότητα έχει νόημα για πολύ ευρύτερες κλάσεις συναρτήσεων u, f. Συγκεκριμένα, έχει νόημα για $u\ \in W^{1,2}(\Omega),\ f \in L^2(\Omega)$.

Με κίνητρο τα παραπάνω δίνουμε τον παρακάτω Ορισμό:

Ορισμός 0.3.1: Έστω $f \in L^2(\Omega)$. **Ασθενής λύση** της Μ.Δ.Ε.

$$-\Delta u(x) = f(x), \quad \text{σχεδόν παντού στο } \Omega,$$

είναι μια συνάρτηση $u\ \in W^{1,2}(\Omega)$ που ικανοποιεί

$$\int_{\Omega} (\nabla u(x), \nabla \varphi(x))_{\mathbb{R}^N} dx = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx, \quad \forall\ \varphi\ \in C_c^1(\Omega)\,,$$

όπου οι μερικές παράγωγοι που εμφανίζονται μέσα στο ∇u λαμβάνονται με την ασθενή έννοια.

Σημ. ότι αν $\varphi\ \in C_c^1(\Omega)$, οι $\varphi, \nabla\varphi$ είναι φραγμένες στο Ω, οπότε τα παραπάνω ολοκληρώματα ορίζονται.

Αποδεικνύεται ότι εάν $u\ \in W^{1,2}(\Omega)$ ασθενής λύση της Μ.Δ.Ε.

$$-\Delta u(x) = f(x), \quad \text{σχεδόν παντού στο } \Omega,$$

τότε

$$\int_{\Omega} (\nabla u(x), \nabla v(x))_{\mathbb{R}^N} dx = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx, \quad \forall\ v\ \in W_0^{1,2}(\Omega)\,.$$

I. Αρχή Μεγίστου.

Η Αρχή Μεγίστου αποτελεί ένα από τα πιο γνωστά και χρήσιμα εργαλεία στην Ποιοτική Θεωρία των Διαφορικών Εξισώσεων και γενικεύει το παρακάτω γνωστό αποτέλεσμα του λογισμού συναρτήσεων μιας μεταβλητής: "εάν $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη με $u'' > 0$ στο (a, b), τότε η u λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της μόνο στα άκρα του διαστήματος." Γενικά, μας εξασφαλίζει ότι συναρτήσεις μιας ή πολλών μεταβλητών που ικανοποιούν μια διαφορική ανίσωση σε ένα χωρίο Ω λαμβάνουν τη μέγιστη τιμή τους στο σύνορο του Ω. Με αυτόν τον τρόπο λαμβάνουμε άνω και κάτω φράγματα για τις λύσεις διαφορικών ανισώσεων, χωρίς απαραίτητα να γνωρίζουμε αναλυτικές εκφράσεις των λύσεων αυτών.

Η Αρχή Μεγίστου για αρμονικές συναρτήσεις ήταν ήδη γνωστή στον Gauss από το 1839. Το επόμενο πρωτοποριακό για την εποχή του αποτέλεσμα οφείλεται στον Hopf (1927)[12] και αφορά κλασικές λύσεις γραμμικών ελλειπτικών διαφορικών ανισώσεων δεύτερης τάξης. Πιο πρόσφατα, αποδείχθηκαν επεκτάσεις της Αρχής του Μεγίστου από πολλούς ερευνητές. Χαρακτηριστικά αναφέρουμε τους Gilbarg-Trudinger[11], Pucci[20], Serrin[23] και Vazquez[25] (μη γραμμική εκδοχή). Για μια εμπεριστατωμένη μελέτη πάνω στην Αρχή Μεγίστου παραπέμπουμε στο βιβλίο των Pucci – Serrin [21]. Για πιό σύντομες παρουσιάσεις παραπέμπουμε στα βιβλία των Gasinski-Papageorgiou[10] (κεφ. 6) και Motreanu-Motreanu-Papageorgiou[17] (κεφ.8).

Στο παρόν κεφάλαιο αποδεικνύονται η Ασθενής και η Ισχυρή εκδοχή της Αρχής του Μεγίστου για γραμμικούς ελλειπτικούς διαφορικούς τελεστές δεύτερης τάξης γενικής μορφής.

Ξεκινάμε με δύο κλασικά αποτελέσματα από το λογισμό συναρτήσεων πολλών μεταβλητών. Με $<\cdot,\cdot>$ συμβολίζουμε το ευκλείδιο εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$.

Πρόταση I.1: Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ανοικτό σύνολο, με $N \geq 1$, $I \subseteq \mathbb{R}$ ένα διάστημα και $\gamma \in C^1(I, \Omega)$.

- Εάν $\varphi \in C^1(\Omega)$ τότε για κάθε $t \in I$, ισχύει $\frac{d}{dt}\varphi(\gamma(t)) = < \nabla\varphi(\gamma(t)),\ \gamma'(t) >$. (1)
- Εάν $\varphi \in C^2(\Omega)$, $\gamma \in C^2(I, \Omega)$ τότε για κάθε $t \in I$, ισχύει

$$\frac{d}{dt}\ [\varphi(\gamma(t)] =< \nabla^2\varphi(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t), \gamma'(t) > + < \nabla\varphi(\gamma(t)),\ \gamma''(t) >, \tag{2}$$

όπου $\nabla^2\varphi$ ο Εσσιανός πίνακας της φ.

Απόδειξη: Εάν $F = (F_j)_{j=1}^N \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ τότε για $\forall\, j,\ \forall\, t \in I$,

$\frac{d}{dt}[F_j(\gamma(t))] = < \nabla F_j(\gamma(t)),\ \gamma'(t) >$ = (j – γραμμή του $J_F(\gamma(t))$)$\gamma'(t)$,

όπου J_F είναι ο Ιακωβιανός πίνακας. Έτσι, $\frac{d}{dt}F(\gamma(t)) = J_F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t), \forall\, t \in I$.

Εφαρμόζοντας την παραπάνω σχέση για $F = \nabla\varphi$, προκύπτει ότι $\forall\, t \in I$,

$$\frac{d}{dt}[\nabla\varphi(\gamma(t))] = \nabla^2\varphi(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2}\varphi(\gamma(t)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}[< \nabla\varphi(\gamma(t)),\ \gamma'(t) >] =$$

$$= < \frac{d}{dt}\nabla\varphi(\gamma(t)),\ \gamma'(t) > + < \nabla\varphi(\gamma(t)),\ \gamma''(t) > =$$

$$=< \nabla^2\varphi(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t), \gamma'(t) > + < \nabla\varphi(\gamma(t)),\ \gamma''(t) >. \qquad \blacksquare$$

Πρόταση Ι.2: Έστω $\varphi \in C^2(\Omega)$ η οποία λαμβάνει τοπικό μέγιστο σε κάποιο $x_0 \in \Omega$. Τότε

$$\nabla\varphi(x_0) = 0,\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j^2}(x_0) \le 0,\ 1 \le j \le N.$$

Απόδειξη: Επιλέγουμε $\delta > 0$ με $B[x_0, \delta] \subset \Omega$ και $\varphi(x) \le \varphi(x_0)$, για κάθε $x \in B[x_0, \delta]$.

Έστω $h \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. Ορίζουμε

$$\gamma: I = [-\frac{\delta}{|h|}, \frac{\delta}{|h|}] \to B[x_0, \delta] \subset \Omega, \text{ με } \gamma(t) = x_0 + th,\ t \in I.$$

Είναι φανερό ότι η απεικόνιση $t \to \varphi(\gamma(t))$ έχει μέγιστο στο $0 \in I$, οπότε

$$\frac{d}{dt}[\varphi(x_0 + th)]|_{t=0} = 0,\ \frac{d^2}{dt^2}[\varphi(x_0 + th)]|_{t=0} \le 0$$

ή από τις (1), (2),

$$< \nabla\varphi(x_0), h > = 0,\ < \nabla^2\varphi(x_0)h, h > \le 0 \text{ για κάθε } h \in \mathbb{R}^N.$$

Θέτοντας στις παραπάνω σχέσεις $h = e_j$, $1 \le j \le N$, όπου (e_j) είναι η φυσική βάση του $\mathbb{R}^{Nx1}$ παίρνουμε ότι

$$< \nabla\varphi(x_0),\ e_j > = 0,\ < \nabla^2\varphi(x_0)e_j, e_j > \le 0,\ \forall\, j$$

$$\Rightarrow \nabla\varphi(x_0) = 0,\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j^2}(x_0) \le 0. \qquad \blacksquare$$

Στη συνέχεια, ορίζουμε το γραμμικό διαφορικό τελεστή L 2ης τάξης με

$$Lu(x) = -\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^N b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + a_0(x)u(x),\ \ x \in \Omega,$$

όπου Ω ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$ με $N \geq 2$ και $u \in C^2(\Omega)$.

Υποθέτουμε ότι ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες:

***H(L)*:**

i. $a_{ij} \in C(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall\, i, j$.

ii. υπάρχει $c_0 > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in \Omega$ και για κάθε $\xi = (\xi_\iota)_{\iota=1}^N \in \mathbb{R}^N$,
$$\sum_{i,j} a_{ij}(x)\, \xi_\iota \xi_j \geq c_0 |\xi|^2.$$

iii. $b_i, a_0 \in C(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, για $1 \leq i \leq N$.

Στην απόδειξη της επόμενης πρότασης, θα χρησιμοποιήσουμε τους παρακάτω συμβολισμούς για έναν πίνακα A τύπου $N \times N$:

A_k = η k –γραμμή του A, $A^{(m)}$ = η m - στήλη του A, A_{km} = το km –τάξης στοιχείο του A,

για όλα τα k, m με $1 \leq k, m \leq N$.

Πρόταση I.3: Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ανοικτό και φραγμένο. Υποθέτουμε ότι ο τελεστής L ικανοποιεί τις υποθέσεις $H(L)$ με $a_0 \equiv 0$ και $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ έτσι ώστε $Lu(x) < 0$, για κάθε $x \in \Omega$. Τότε, η συνάρτηση u λαμβάνει μέγιστη τιμή μόνο στο σύνορο $\partial\Omega$.

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι για κάποιο $x_0 \in \Omega$, ισχύει $\max_{\bar{\Omega}} u = u(x_0)$.

Θεωρούμε το συμμετρικό πίνακα $A = (a_{ij}(x_0))_{i,j}$. Υπάρχει ορθογώνιος πίνακας $U = (\beta_{ij})$ τέτοιος ώστε

$$UAU^T = diag(d_k)_{k=1}^N, \quad d_k \in \mathbb{R},\ 1 \leq k \leq N.$$

Ισχυρισμός: Για όλα τα $k, m \in \{1,2,\dots,N\}$, ισχύει

$$\sum_{i,j} a_{ij}(x_0)\, \beta_{ki}\beta_{mj} = \delta_{km} d_k\ . \tag{3}$$

Πράγματι,

$$(UAU^T)_{km} = (UA)_k (U^T)^{(m)} = (UA)_k \cdot \begin{pmatrix} \beta_{m1} \\ \beta_{m2} \\ \vdots \\ \beta_{mN} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^N (UA)_{kj}\, \beta_{mj} = \sum_{j=1}^N [\, U_k A^{(j)}]\beta_{mj} =$$
$$= \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \beta_{ki}\, a_{ij}(x_0)\, \beta_{mj},$$

ενώ $(UAU^T)_{km} = [diag(d_1, d_2, \dots, d_N)]_{km} = \delta_{km} d_k$, οπότε αληθεύει ο ισχυρισμός.

Τώρα η (3) σε συνδυασμό με τη συνθήκη $H(L)(\text{ii})$ δίνει

$d_k = \sum_{i,j} a_{ij}(x_0)\, \beta_{ki}\beta_{kj} \geq c_0 \sum_{i=1}^{N} \beta^2{}_{ki} \;\geq 0 \;\Rightarrow\; d_k \geq 0,$ με $1 \leq k \leq N$. (4)

Έστω $v \overset{\text{def}}{=} x_0 + U(x - x_0) \Leftrightarrow x = x_0 + \; U^{-1}(v - x_0).$

Έχουμε ότι $u = u(x_1, x_2, \dots, x_N) = u(v_1, v_2, \dots, v_N)$ και

$v_k = \; x_{0k} + \sum_{j=1}^{N} \beta_{kj}(\, x_j - x_{0j}) \;\;\Rightarrow\;\; \frac{\partial v_k}{\partial x_i} = \beta_{ki\,,}$ για όλα τα $i, k \in \{1, \dots, N\}.$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας προκύπτει ότι για κάθε i,

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial v_k}\frac{\partial v_k}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial v_k}\beta_{ki} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k=1}^{N} \beta_{ki}\, \frac{\partial}{\partial x_j}\,(\frac{\partial u}{\partial v_k}) = \sum_{k=1}^{N} \beta_{ki} \sum_{m=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial v_k \partial v_m}\beta_{mj}$$

$$\Rightarrow \sum_{i,j} a_{ij}(x_0)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \sum_{i,j} a_{ij}(x_0)\sum_{k,m}\frac{\partial^2 u}{\partial v_k \partial v_m}(x_0)\beta_{ki}\beta_{mj} =$$

$$= \sum_{k,m}[\sum_{i,j} a_{ij}(x_0)\beta_{ki}\beta_{mj}]\,\frac{\partial^2 u}{\partial v_k \partial v_m}(x_0) = \sum_{k,m} \delta_{km} d_k \,\frac{\partial^2 u}{\partial v_k \partial v_m}(x_0) = \sum_{k=1}^{N} d_k \,\frac{\partial^2 u}{\partial {v_k}^2}(x_0) \leq 0$$

(βλ. (3)). Σημ. ότι η u λαμβάνει μέγιστη τιμή στο $x_0 \in \Omega$, οπότε $\frac{\partial^2 u}{\partial {v_k}^2}(x_0) \leq 0$ (βλ. Πρόταση I.2) και $d_k \geq 0$, για κάθε k με $1 \leq k \leq N$ (βλ. (4)).

Επιπλέον $\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0) = 0$ για κάθε i, επειδή το u λαμβάνει μέγιστη τιμή στο $x_0 \in \Omega$.

Συνοψίζοντας, $Lu(x_0) = -\sum_{i,j} a_{ij}(x_0)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) \geq 0$, άτοπο. ■

Θεώρημα I.4(Ασθενής Αρχή Μεγίστου, V1): Έστω Ω ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$. Υποθέτουμε ότι ο L ικανοποιεί τις υποθέσεις του $H(L)$ με $a_0 \equiv 0$ και $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ έτσι ώστε $Lu(x) \leq 0$, για κάθε $x \in \Omega$. Τότε $\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$ και $\lambda > 0$. Ορίζουμε $u_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon e^{\lambda x_1}$, $\forall\, x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \bar{\Omega}$.

Έχουμε ότι $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(e^{\lambda x_1}\right) = \lambda \delta_{i1} e^{\lambda x_1}$, $\forall\, i$

$\Rightarrow \;\; \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(e^{\lambda x_1}\right) = \lambda \delta_{i1} \frac{\partial}{\partial x_j}(e^{\lambda x_1}) = \lambda^2 \delta_{i1}\delta_{j1} e^{\lambda x_1}$

$\Rightarrow \;\; \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(e^{\lambda x_1}\right) = \lambda^2 \begin{cases} e^{\lambda x_1}, & i = j = 1 \\ \;\;0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$

Έτσι, για κάθε $x \in \Omega$, $Lu_\varepsilon(x) = Lu(x) + \varepsilon L\big(e^{\lambda x_1}\big)(x) =$

$$= Lu(x) + \varepsilon\big[-\lambda^2 a_{11}(x) e^{\lambda x_1} + \lambda b_1(x) e^{\lambda x_1}\big] \leq 0 + \varepsilon e^{\lambda x_1}[b_1(x) - \lambda a_{11}(x)].$$

Εφαρμόζοντας την υπόθεση $H(L)(\mathrm{ii})$ για $\xi_i = e_i$, παίρνουμε ότι

$$a_{ii}(x) \geq c_0,\ \forall\, x \in \Omega,\ \forall\, i \in \{1,2,\dots,N\}.$$

[Εδώ (e_i) είναι η φυσική βάση του $\mathbb{R}^N$.]

Επομένως, $\forall\, x \in \Omega$, $Lu_\varepsilon(x) \leq \varepsilon e^{\lambda x_1}\,[\|\, \widehat{b_1}\,\|_\infty - \lambda c_0]$, όπου $\|\, b_1\,\|_\infty = sup_{x \in \Omega}|b_1(x)|$.

Επιλέγοντας $\lambda > \frac{\|\widehat{b_1}\|_\infty}{c_0}$, παίρνουμε ότι $\forall \varepsilon > 0$, $Lu_\varepsilon(x) < 0, \forall\, x \in \Omega$.

Λόγω της Πρότασης Ι.3,

$$\forall\, \varepsilon > 0,\quad \exists\, x_\varepsilon \in \partial\Omega \text{ έτσι ώστε } u_\varepsilon(x) \leq u_\varepsilon(x_\varepsilon),\ \forall\, x \in \bar{\Omega}. \tag{5}$$

Επειδή το σύνορο $\partial\Omega$ του Ω είναι συμπαγές (υπενθυμίζουμε ότι το Ω είναι φραγμένο σύνολο), χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0^+} x_0$, για κάποιο $x_0 \in \partial\Omega$.

Είναι φανερό ότι $\forall\, x \in \overline{\Omega}$, $u_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon e^{\lambda x_1} \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0^+} u(x)$ και

$$u_\varepsilon(x_\varepsilon) = u(x_\varepsilon) + \varepsilon e^{\lambda {x_\varepsilon}^{(1)}} \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0^+} u(x_0) + 0 \cdot e^{\lambda {x_0}^{(1)}} = u(x_0),$$

όπου ${x_\varepsilon}^{(1)}, {x_0}^{(1)}$ η 1η συντεταγμένη του x_ε, x_0 αντίστοιχα.

Παίρνοντας στην (5) το όριο καθώς το $\varepsilon \downarrow 0^+$, συμπεραίνουμε ότι $u(x) \leq u(x_0)$, $\forall\, x \in \overline{\Omega}$.

Έτσι, καταλήγουμε στο ότι $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$. ∎

<u>Παρατήρηση:</u> Στο Θεώρημα Ι.4, η υπόθεση ότι το Ω είναι φραγμένο δεν μπορεί να παραληφθεί.

<u>Παράδειγμα:</u> Για $N = 2$, θέτουμε $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x| > 1\}$, $u(x) = \ln|x|, x \in \overline{\Omega}$.

Είναι εύκολο να δειχθεί ότι $\begin{cases} -\Delta u(x) = 0, & \forall\, x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$,

αλλά $\max_{x \in \overline{\Omega}} u(x) > 0 = \max_{x \in \partial\Omega} u(x)$.

<u>Θεώρημα Ι.5 (Ασθενής Αρχή Μεγίστου, V2) (γενίκευση Θεωρήματος Ι.4):</u> Έστω Ω ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$. Υποθέτουμε ότι ο L ικανοποιεί τις υποθέσεις $H(L)$ με $\alpha_0 \geq 0$ και $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ έτσι ώστε $Lu(x) \leq 0$, για κάθε $x \in \Omega$. Τότε,

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+,$$

όπου $u^+ = \max(u, 0)$.

Απόδειξη: Θέτουμε $V = \{ x \in \Omega | \, u(x) > 0\}$. Είναι φανερό ότι το V είναι ανοικτό υποσύνολο του Ω και $\overline{V} \subseteq \{ x \in \overline{\Omega} \mid u(x) \geq 0\}$.

1η περίπτωση: $V \neq \emptyset$. Ορίζουμε τον τελεστή $L_1 u(x)= Lu(x) - a_0(x)u(x), u \in C^2(\Omega), x \in \Omega$. Είναι φανερό ότι ο τελεστής L_1 δεν έχει όρο μηδενικής τάξης $''a_0''$ και $\forall \, x \in V$,

$$L_1 u(x) = Lu(x) - a_0(x)u(x) \leq -a_0(x)u(x) \leq 0.$$

Από το Θεώρημα 1 έχουμε ότι

$$\max_{\overline{V}} u = \max_{\partial V} u. \tag{6}$$

Αλλά

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\overline{V}} u. \tag{7}$$

Πράγματι, έστω $x \in \overline{\Omega} \backslash \overline{V}$. Τότε, υπάρχει ακολουθία $(x_n) \subseteq \Omega$ με $x_n \to x$.

Επιπλέον, επειδή $x \notin \overline{V}$, $\exists \, U$ ανοικτό $\ni x$ με $U \cap V = \emptyset$.

Αλλά $x_n \to x$, οπότε $x_n \in U$ τελικώς $\Rightarrow$ $x_n \in \Omega \backslash V$ τελικώς $\Rightarrow u(x_n) \leq 0$ τελικώς

$\Rightarrow u(x) = \lim_n u(x_n) \leq 0 \leq \max_{\overline{V}} u$. Η τελευταία ισχύει $\forall \, x \in \overline{\Omega} \backslash \overline{V}$, ενώ προφανώς ισχύει

$\forall \, x \in \overline{V}$. Επομένως, $\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\overline{V}} u \overset{\overline{V} \subseteq \overline{\Omega}}{\Longrightarrow} \max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\overline{V}} u$.

Επιπρόσθετα,

$$\max_{\partial V} u \leq \max_{\partial \Omega} u^+ . \tag{8}$$

Πράγματι, $\partial V \subseteq \overline{\Omega} \backslash V = (\Omega \cup \partial \Omega) \backslash V \subseteq (\Omega \backslash V) \cup \partial \Omega$. Τότε,

$\forall \, x \in \Omega \backslash V$, $u(x) \leq 0 \leq \max_{\partial \Omega} u^+$, ενώ $\forall \, x \in \partial \Omega$, $u(x) \leq u^+(x) \leq \max_{\partial \Omega} u^+$.

Συνεπώς, $\forall \, x \in \partial V$, $u(x) \leq \max_{\partial \Omega} u^+ \Rightarrow \max_{\partial V} u \leq \max_{\partial \Omega} u^+$.

Από τις σχέσεις (6),(7),(8), προκύπτει ότι

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\overline{V}} u = \max_{\partial V} u \leq \max_{\partial \Omega} u^+. \tag{9}$$

Τέλος, επιλέγουμε $x \in \partial \Omega$.

- εάν $u(x) \geq 0$, τότε $u^+(x) = u(x) \leq \max_{\overline{\Omega}} u$.
- εάν $u(x) < 0$, τότε $u^+(x) = 0 \leq \max_{\overline{V}} u = \max_{\overline{\Omega}} u$ $\big($βλ. $(7)\big)$.

Επομένως,

$u^+(x) \leq \max_{\overline{\Omega}} u \, , \forall \, x \in \partial \Omega \;\; \Rightarrow \;\; \max_{\partial \Omega} u^+ \leq \max_{\overline{\Omega}} u \underset{(9)}{\Longrightarrow} \max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial \Omega} u^+$.

2η περίπτωση: $V = \emptyset$. Τότε, $\forall\, x \in \Omega,\ \ u(x) \leq 0\ \Rightarrow \forall\, x \in \overline{\Omega},\ u(x) \leq 0$ και $u^+(x) = 0$

$\Rightarrow \max\limits_{\overline{\Omega}} u\ \leq 0 = \max\limits_{\partial\Omega} u^+$. ■

Πόρισμα I.6: Έστω Ω ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$. Υποθέτουμε ότι ο L ικανοποιεί τις υποθέσεις $H(L)$ με $\alpha_0 \geq 0$ και $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ έτσι ώστε

$$\begin{cases} Lu(x) \leq Lv(x), \forall\, x \in \Omega \\ \quad u|_{\partial\Omega} \leq v|_{\partial\Omega}. \end{cases}$$

Τότε, $u(x) \leq v(x), \forall\, x \in \bar{\Omega}$.

Απόδειξη: Θέτουμε $w = u - v$. Τότε, $Lw \leq 0$ στο Ω. Από το Θεώρημα I.5 προκύπτει ότι

$$\max_{\overline{\Omega}} w \leq \max_{\partial\Omega} w^+ = 0 \Rightarrow w(x) \leq 0, \forall\, x \in \bar{\Omega}. \qquad ■$$

Πόρισμα I.7: Έστω Ω ανοικτό και φραγμένο σύνολο του $\mathbb{R}^N$. Υποθέτουμε ότι ο L ικανοποιεί τις υποθέσεις $H(L)$ με $\alpha_0 \geq 0$. Θεωρούμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών του Dirichlet

$$\begin{cases} Lw(x) = h(x), \quad x \in \Omega \\ \quad w|_{\partial\Omega} = g \end{cases} \quad \textit{(P)}$$

όπου $h \in C(\Omega), g \in C(\Omega)$. Τότε το *(P)* έχει το πολύ μία λύση που ανήκει στο $C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.

Απόδειξη: Έστω $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ δύο λύσεις του *(P)*. Τότε $Lu = Lv$ στο Ω και $u|_{\partial\Omega} = v|_{\partial\Omega}$. Από το Πόρισμα I.6 προκύπτει ότι

$$u \leq v \text{ και } v \leq u \text{ στο } \overline{\Omega} \Rightarrow u = v \text{ στο } \overline{\Omega}. \qquad ■$$

Πόρισμα I.8: Κάτω από τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος I.5, υποθέτουμε επιπλέον ότι $Lu = 0$ στο Ω. Τότε $\max\limits_{\overline{\Omega}}|u| = \max\limits_{\partial\Omega}|u|$.

Απόδειξη: Έστω $L(\pm u)(x) = 0, \forall\, x \in \Omega$. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα I.5 έχουμε

$$\begin{cases} \max\limits_{\overline{\Omega}} u = \max\limits_{\partial\Omega} u^+ \\ \max\limits_{\overline{\Omega}}(-u) = \max\limits_{\partial\Omega}(-u)^+ = \max\limits_{\partial\Omega} u^- \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \max\limits_{\overline{\Omega}}|u| \leq \max\limits_{\partial\Omega}|u| \Rightarrow \max\limits_{\overline{\Omega}}|u| = \max\limits_{\partial\Omega}|u|$. ■

Στη συνέχεια θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε το ευρέως γνωστό *Λήμμα του Hopf*. Θα χρειαστούμε δύο Λήμματα για την απόδειξή του.

Λήμμα I.9: Έστω Ω ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$ και $u \in C(\overline{\Omega})$, η οποία λαμβάνει μέγιστη τιμή σε κάποιο $x_0 \in \partial\Omega$. Υποθέτουμε επιπλέον ότι

- η u είναι διαφορίσιμη στο x_0
- υπάρχει μία ανοικτή μπάλα $B \subseteq \Omega$ τέτοια ώστε $x_0 \in \partial\Omega \cap \partial B$.

Τότε $\frac{\partial u}{\partial n}(x_0) \geq 0$, όπου n το μοναδιαίο διάνυσμα της εξωτερικής καθέτου του συνόρου ∂B της μπάλας B στο x_0 .

<u>Απόδειξη:</u> Επιλέγουμε μία μπάλα $B = B(x_1, r)$ $(r > 0,\ x_1 \in \Omega)$, τέτοια ώστε $x_0 \in \partial\Omega \cap \partial B$.

Τότε $n = \frac{x_0 - x_1}{|x_0 - x_1|}$. Αρκεί να δείξουμε ότι $< \nabla u(x_0),\ x_0 - x_1 > \geq 0$

ή $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left[\, u\big((1-t)x_0 + tx_1\big)\right]_{t=0} \leq 0$.

Αλλά η τελευταία ισχύει, διότι η απεικόνιση $[0,1] \ni t \mapsto u\big((1-t)x_0 + tx_1\big) \in \mathbb{R}$

λαμβάνει μέγιστη τιμή στο $t_0 = 0$. ■

<u>Λήμμα I. 10:</u> Έστω Ω ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$. Υποθέτουμε ότι ο L ικανοποιεί τις υποθέσεις $H(L)$ με $\alpha_0 \geq 0$. Υποθέτουμε ότι $B(\overline{x}, r) \subseteq \Omega$, για κάποιο $\overline{x} \in \Omega$ και $r > 0$. Τότε υπάρχει $w \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ τέτοια ώστε

- $Lw(x) \leq 0,\quad \forall\, x \in B(\overline{x}, r) \setminus \overline{B(\,\overline{x}, r/2)}$
- $w(x) = 0,\quad \forall\, x \in \partial B(\overline{x}, r)$
- $w(x) > 0,\quad \forall\, x \in B(\overline{x}, r)$
- $\dfrac{\partial \mathrm{w}}{\partial n_x}(x) < 0,\quad \forall\, x \in \partial B(\overline{x}, r)$,

όπου n_x το μοναδιαίο διάνυσμα της εξωτερικής καθέτου του συνόρου $\partial B(\overline{x}, r)$ στο $x \in \partial B(\overline{x}, r)$.

<u>Απόδειξη:</u> Έστω $\mu > 0$. Ορίζουμε

$$v(x) = exp[-\mu|x - \overline{x}|^2],\ \ w(x) = v(x) - exp(-\mu r^2),\ x \in \mathbb{R}^N.$$

Είναι φανερό ότι $w \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ κι επιπλέον

$\forall\, x \in \partial B(\overline{x}, r)$, $w(x) = e^{-\mu r^2} - e^{-\mu r^2} = 0$,

$\forall\, x \in B(\overline{x}, r)$, $w(x) = exp[-\mu|x - \overline{x}|^2] - \exp[-\mu r^2] > 0$.

Επιλέγουμε στη συνέχεια $\zeta \in \partial B(\overline{x}, r)$. Τότε, $n_\zeta = \frac{\zeta - \overline{x}}{|\zeta - \overline{x}|}$ και

$\frac{\partial w}{\partial n_\zeta}(\zeta) =< \nabla w(\zeta), n_\zeta > = \frac{1}{|\zeta - \overline{x}|}\sum_{j=1}^N \partial_j w(\zeta)(\,\zeta_j - \bar{x}_j)=$

$= \frac{1}{|\zeta-\bar{x}|}(-2\mu)\ \sum_{j=1}^{N}\left(\zeta_j - \bar{x}_j\right)^2 v(x) =\ -2\mu\ |\zeta - \overline{x}|\ e^{-\mu r^2} < 0.$

Απομένει να δείξουμε ότι

$$Lw(x) \leq 0, \quad \forall\, x \in B(\overline{x}, r) \setminus \overline{B(\,\overline{x}, r/2)}\,.$$

Έχουμε, $\forall\, i, j\ \in \{1,2, \dots, N\}, \forall\, x \in \mathbb{R}^N$,

$\partial_j v(x) = -2\mu\left(x_j - \bar{x}_j\right)v(x),\ \ \partial_i\left(x_j - \bar{x}_j\right) =\ \delta_{ij}\,,$

$\partial_{ij} v(x) = -2\mu[\delta_{ij} v(x) - 2\mu\left(x_j - \bar{x}_j\right)(x_i - \bar{x}_i)\ v(x)] = [4\mu^2(x_i - \bar{x}_i)\ (x_j - \bar{x}_j) - 2\mu\delta_{ij}]v(x)$

$\Longrightarrow \forall\, x \in \Omega,\ \ -\sum_{i,j} a_{ij}(x)\partial_{ij}\, v(x) = \left[-4\mu^2 \sum_{i,j} a_{ij}(x)(x_i - \bar{x}_i)\left(x_j - \bar{x}_j\right) + 2\mu \sum_{i,j} \delta_{ij} a_{ij}(x)\right]v(x) =$

$= \left[-4\mu^2 \sum_{i,j} a_{ij}(x)(x_i - \bar{x}_i)\left(x_j - \bar{x}_j\right) + 2\mu \sum_{i=1}^{N} a_{ii}(x)\right]v(x)$

και

$$\sum_{i=1}^{N} b_i\,(x)\partial_i\, v(x) = -2\mu \sum_{i=1}^{N} b_i\,(x)\,(x_i - \bar{x}_i)v(x)$$

$\Rightarrow\ \ Lv(x) = [-4\mu^2 \sum_{i,j} a_{ij}(x)(x_i - \bar{x}_i)\left(x_j - \bar{x}_j\right) + 2\mu \sum_{i=1}^{N}(a_{ii}(x) - b_i(x)(x_i - \bar{x}_i))]v(x) + + a_0(x)v(x)$

$\xRightarrow{H(L)(\mathrm{ii})} Lv(x) \leq [-4\mu^2 c_0|x - \bar{x}|^2 + 2\mu \mathrm{tr}A(x) - 2\mu \sum_{i=1}^{N} b_i(x)\,(x_i - \bar{x}_i) + a_0(x)]\ v(x)$

$\Rightarrow Lv(x) \leq \left[-4\mu^2 c_0|x - \bar{x}|^2 + 2\mu \mathrm{tr}A(x) + 2\mu\left\|\hat{b}(x)\right\|_2|x - \bar{x}| + \|a_0\|_\infty\right] v(x),$

όπου $A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j}$, $\mathrm{tr}A(x) =\ \sum_{i=1}^{N} a_{ii}(x), \hat{b}(x) = (b_i(x))_{i=1}^{N}\,,\ \left\|\hat{b}(x)\right\|_2 = (\sum_{i=1}^{N}(\,|b_i(x)|^2)^{\frac{1}{2}}.$

Ξέρουμε ότι $a_{ij} \in L^\infty(\Omega), b_i \in L^\infty(\Omega)$, οπότε και η $x \longmapsto \mathrm{tr}A(x)$ ανήκει στον $L^\infty(\Omega)$.

Συνεπώς, $\forall\, x \in \Omega$,

$Lv(x) \leq \left[-4\mu^2 c_0|x - \bar{x}|^2 + 2\mu\|\mathrm{tr}A(\cdot)\|_\infty + 2\mu\left\|\hat{b}\right\|_2|x - \bar{x}| + \|a_0\|_\infty\right] v(x),$

όπου $\left\|\hat{b}(x)\right\||_2 = (\sum_{i=1}^{N}(\,\|b_i\|_\infty^2)^{\frac{1}{2}}.$

Με βάση τα παραπάνω κι επειδή $a_0\ \geq 0$ έχουμε, $\forall\, x \in B(\overline{x}, r) \setminus \overline{B(\,\overline{x}, r/2)},$

$$Lw(x) = Lv(x) - a_0(x)e^{-\mu r^2} \leq$$

$$\leq \left[-4\mu^2 c_0|x - \bar{x}|^2 + 2\mu\|trA(\cdot)\|_\infty + 2\mu\left\|\hat{b}\right\|_2|x - \bar{x}| + \|a_0\|_\infty\right] v(x)$$

$$\leq [-\mu^2 c_0 r^2 + 2\mu(r\left\|\hat{b}\right\|_2 + \|trA(\cdot)\|_\infty) + \|\alpha_0\|_\infty]v(x).$$

Από την τελευταία έπεται ότι για $\mu > 0$ αρκετά μεγάλο ,

$$Lw(x) \leq 0, \quad \forall\, x \in B(\overline{x}, r) \setminus \overline{B(\overline{x}, r/2)}$$

και ολοκληρώνεται η απόδειξη του Λήμματος I.10. ■

<u>Λήμμα I. 11 (*Λήμμα του Hopf*):</u>

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ανοικτό, $B \subseteq \Omega$ ανοικτή μπάλα, $x_0 \in \partial B \cap \partial\Omega$ και $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ έτσι ώστε

- Η u είναι διαφορίσιμη στο x_0
- $u(x) < u(x_0)$, $\forall\, x \in \Omega$.

Υποθέτουμε ότι ικανοποιούνται οι $H(L)$ κι επιπλέον

--είτε $\alpha_0 \equiv 0$

--είτε $\alpha_0 \geq 0,\ u(x_0) \geq 0$.

Τέλος, υποθέτουμε ότι $Lu(x) \leq 0, \quad \forall\, x \in \Omega$.

Τότε $\frac{\partial u}{\partial n}(x_0) > 0$, όπου n το μοναδιαίο διάνυσμα της εξωτερικής καθέτου του ∂B στο x_0.

<u>Απόδειξη:</u> Έστω $B = B(\bar{x}, r)$, $\bar{x} \in \Omega$ και $r > 0$. Επιλέγουμε $w \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ όπως στο Λήμμα I.10. Θέτουμε $D = B(\overline{x}, r) \setminus \overline{B(\overline{x}, r/2)}$. Το D είναι ανοικτό, φραγμένο $\subseteq \Omega$,

$u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$ και $\forall\, x \in \partial B(\overline{x}, r/2), \quad u(x) < u(x_0), \quad w(x) > 0$.

Επειδή το $\partial B(\overline{x}, r/2)$ είναι συμπαγές, η συνάρτηση

$$\partial B(\overline{x}, r/2) \ni x \longmapsto \frac{u(x_0) - u(x)}{w(x)},$$

που είναι συνεχής και θετική, λαμβάνει ελάχιστη τιμή $m > 0$.

Επιλέγουμε $0 < \varepsilon < m$. Τότε,

$$\forall\, x \in \partial B(\overline{x}, r/2), \quad u(x) + \varepsilon w(x) < u(x_0),$$

ενώ

$$\forall\, x \in \partial B(\overline{x}, r), \quad u(x) + \varepsilon w(x) = u(x) < u(x_0).$$

(Σημ. ότι $w = 0$ πάνω στο $\partial B(\overline{x}, r)$). Συνεπώς,

$$u(x) + \varepsilon w(x) < u(x_0)\,, \quad \forall\, x \in \partial D = \partial B(\overline{x}, r) \cup \partial B(\overline{x}, r/2).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $v(x) = u(x) + \varepsilon w(x) - u(x_0), \quad x \in \overline{D}.$

Τότε, $\max_{\partial D} v < 0 \Longrightarrow \max_{\partial D} v^+ = 0.$

Επιπροσθέτως, $\forall\, x \in D$,

$$Lv(x) = Lu(x) + \varepsilon Lw(x) - a_0(x)u(x_0) \leq -a_0(x)u(x_0) \leq 0.$$

(Υπενθυμίζουμε ότι $Lu \leq 0$ στο Ω, $Lw \leq 0$ στο D και $a_0 \equiv 0$ ή $a_0 \geq 0$, $u(x_0) \geq 0$.)

Από το Θεώρημα Ι.5 προκύπτει ότι

$$\max_{D} v \leq \max_{\partial D} v^+ = 0 \Longrightarrow \forall\, x \in \overline{D}\,, v(x) \leq 0 = v(x_0) \Longrightarrow \max_{\overline{D}} v = v(x_0) \text{ και } x_0 \in \partial D.$$

Από το Λήμμα 1 προκύπτει ότι $\frac{\partial v}{\partial n}(x_0) \geq 0 \Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial n}(x_0) \geq -\varepsilon \frac{\partial w}{\partial n}(x_0) > 0.$

(Σημ. ότι $\frac{\partial w}{\partial n}(x_0) < 0$, διότι $x_0 \in \partial \mathrm{B}(\bar{x}, r)$). ■

Στη συνέχεια θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε την *Ισχυρή Αρχή του Μεγίστου*.

Θα χρειαστούμε κάποια τοπολογικά προαπαιτούμενα.

Εάν $\bar{x} \in \mathbb{R}^N, r > 0$, θέτουμε $B(\bar{x}, r) = \{x \in \mathbb{R}^N |\ |x - \bar{x}| < r\}$ και

$\overline{B(\bar{x}, r)} = B[\bar{x}, r] = \{x \in \mathbb{R}^N |\ |x - \bar{x}| \leq r\}$.

<u>Λήμμα Ι.12</u>: $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{R}^N,\ r_1, r_2 > 0,\ B[z_1 + z_2, r_1 + r_2] = B[z_1, r_1] + B[z_2, r_2].$

<u>Απόδειξη:</u> Επιλέγουμε $z \in B[z_1 + z_2, r_1 + r_2]$ και θέτουμε

$$J_1 = z_1 + \frac{r_1}{r_1 + r_2}[z - (z_1 + z_2)], \quad J_2 = z_2 + \frac{r_2}{r_1 + r_2}[z - (z_1 + z_2)].$$

Είναι φανερό ότι $J_1 + J_2 = z$ και $|J_1 - z_1| \leq r_1$, $|J_2 - z_2| \leq r_2$. Δείξαμε λοιπόν ότι

$$B[z_1 + z_2, r_1 + r_2] \subseteq B[z_1, r_1] + B[z_2, r_2].$$

Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι και $B[z_1 + z_2, r_1 + r_2] \supseteq B[z_1, r_1] + B[z_2, r_2].$ ■

--Εάν $V \subseteq \mathbb{R}^N$ ανοικτό, τότε $\bar{V} = V \cup \partial V$.

--Εάν $V \subseteq \mathbb{R}^N$ανοικτό και $\bar{x} \in V$, τότε η απόσταση $d(\bar{x}, V^c) = \inf\{|\bar{x} - x| : x \in V^c\}$ είναι θετική.

--Εάν $K \subseteq \mathbb{R}^N$ συμπαγές με $K \subseteq V$,τότε η απόσταση $d(K, V^c) = \inf\{|\bar{x} - x| : \bar{x} \in K, x \in V^c\}$ είναι επίσης θετική.

<u>Λήμμα Ι.13:</u> Εάν $K \subset V \subseteq \mathbb{R}^N$, με K συμπαγές και V ανοικτό, υπάρχει $\rho > 0$ ώστε $K + B[0, \rho] \subseteq V$.

<u>Απόδειξη:</u> Επιλέγουμε $0 < \rho < d(K, V^c)$. ■

<u>Λήμμα Ι.14</u>: Έστω $V \subseteq \mathbb{R}^N$ ανοικτό και $\bar{z} \in V$.Θέτουμε $r_0 = d(\bar{z}, V^c)$. Τότε,

$r_0 = \max\{r > 0 | B(\bar{z}, r) \subseteq V\}$ και $\partial B(\bar{z}, r_0) \cap \partial V \neq \emptyset$.

<u>Απόδειξη:</u> Ισχύει $B(\bar{z}, r_0) \subseteq V$, επειδή $|z - \bar{z}| < r_0 \Longrightarrow z \notin V^c \Longrightarrow z \in V$.

Εάν $r > 0$ τέτοιο ώστε $B(\bar{z}, r) \subseteq V$, τότε $\forall\, z \in V^c \Longrightarrow z \notin B(\bar{z}, r) \Longrightarrow |z - \bar{z}| \geq r$.

Έτσι, $r_0 = d(\bar{z}, V^c) \geq r$. Άρα,

$$r_0 = \max\{r > 0 | \; B(\bar{z}, r) \subseteq V\}. \tag{10}$$

Τέλος, υποθέτουμε αντιθέτως ότι $\partial B(\bar{z}, r_0) \cap \partial V = \emptyset$. Επειδή $\partial B(\bar{z}, r_0) \subseteq \overline{B(\bar{z}, r_0)} \subseteq \bar{V} = V \cup \partial V$, πρέπει

$\partial B(\bar{z}, r_0) \subseteq V \Longrightarrow B[\bar{z}, r_0] = B(\bar{z}, r_0) \cup \partial B(\bar{z}, r_0) \subseteq V$ και $B[\bar{z}, r_0]$ συμπαγές

$\xRightarrow{\text{Λήμμα } I.13} \exists \rho > 0 | \; B[\bar{z}, r_0] + B[0, \rho] \subseteq V \xRightarrow{\text{Λήμμα } I.12} B[\bar{z}, r_0 + \rho] \subseteq V$, άτοπο λόγω της (10). ■

<u>Λήμμα Ι.15:</u> Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ανοικτό και *συνεκτικό* και V ανοικτό με $\emptyset \neq V \subsetneq \Omega$. Τότε, υπάρχει ανοικτή μπάλα $B \subseteq V$, τέτοια ώστε $\partial B \cap \partial V \cap \Omega \neq \emptyset$.

<u>Απόδειξη:</u> Αρχικά παρατηρούμε ότι $\partial V \cap \Omega \neq \emptyset$.

Πράγματι, εάν $\partial V \cap \Omega = \emptyset$, έχουμε ότι $\Omega \cap \bar{V} = \Omega \cap (V \cup \partial V) = V$. Έπεται ότι το V είναι σχετικά ανοικτό και κλειστό στο Ω με $V \neq \emptyset$, $V \neq \Omega$, γεγονός που αντιφάσκει με τη *συνεκτικότητα* του Ω.

<u>Ισχυρισμός:</u> $\exists\, \bar{z} \in V$ τέτοιο ώστε $d(\bar{z}, \partial\Omega) > d(\bar{z}, \partial V)$.

Πράγματι: Επιλέγουμε $z_1 \in \partial V \cap \Omega$ και θέτουμε $\delta = d(z_1, \partial\Omega) > 0$.

Επειδή $z_1 \in \partial V \subseteq \bar{V}$, $\exists\, \bar{z} \in B\left(z_1, \frac{\delta}{3}\right) \cap V$. Τώρα, $\forall\, z \in \partial\Omega$, έχουμε ότι

$$|z - \bar{z}| \geq |z - \bar{z}_1| - |z_1 - \bar{z}| \geq \delta - |z_1 - \bar{z}| > 2|z_1 - \bar{z}| \geq 2d(\bar{z}, \partial V)$$

$\Longrightarrow d(\overline{z}, \partial\Omega) \geq 2\, d(\overline{z}, \partial V) > d(\overline{z}, \partial V)$ κι επομένως ο ισχυρισμός αληθεύει.

Στη συνέχεια, θέτουμε $r_0 = d(\overline{z}, V^c)$. Από το Λήμμα I.14 προκύπτει ότι

$$B = B(\overline{z}, r_0) \subseteq V,\ \ \partial B \cap \partial V \neq \emptyset.$$

Επιλέγουμε $z_0 \in \partial B \cap \partial V$. Τότε, $z_0 \in \partial V \subseteq \bar{V} \subseteq \bar{\Omega}$ και

$$|\bar{z} - z_0| = r_0 = d(z_0, V^c) \leq d(z_0, \partial V) < d(\overline{z}, \partial\Omega),$$

εξαιτίας του ισχυρισμού. Αυτό έχει ως επακόλουθο ότι $z_0 \notin \partial\Omega$ και επειδή

$z_0 \in \bar{\Omega}$, συμπεραίνουμε ότι $z_0 \in \Omega$. Άρα, $z_0 \in \partial B \cap \partial V \cap \Omega$. ■

<u>Λήμμα I.16:</u> Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ανοικτό, συνεκτικό και $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ *μη σταθερή,* τέτοια ώστε $\max\limits_{\Omega} u = M$. Θέτουμε $V = \{x \in \Omega |\ u(x) < M\}$. Τότε,

$\exists$ ανοικτή μπάλα $B \subseteq V$ και $x_0 \in \partial B \cap \partial V \cap \Omega$, έτσι ώστε $u(x) < M = u(x_0), \forall\, x \in V$.

<u>Απόδειξη:</u> Οι υποθέσεις δίνουν ότι $\emptyset \neq V \subsetneq \Omega$ και $u(x) = M,\ \ \forall\, x \in \Omega\backslash V$.

Από το Λήμμα I. 15, $\exists$ ανοικτή μπάλα B τέτοια ώστε $B \subseteq V, \partial B \cap \partial V \cap \Omega \neq \emptyset$.

Επιλέγουμε $x_0 \in \partial B \cap \partial V \cap \Omega$. Τότε,

$$x_0 \in \Omega\backslash V \Longrightarrow u(x_0) = M \text{ και}$$

$$\forall\, x \in V,\ u(x) < M = u(x_0).$$ ■

<u>Θεώρημα I.17 (Ισχυρή Αρχή Μεγίστου, V1):</u>

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ανοικτό και συνεκτικό. Υποθέτουμε ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες $H(L)$ και $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ έτσι ώστε

- **i.** $Lu(x) \leq 0,\ \ \forall\, x \in \Omega.$
- **ii.** $\max\limits_{\Omega} u = M.$

Υποθέτουμε επιπλέον ότι είτε $\alpha_0 \equiv 0$ είτε $\alpha_0 \geq 0, M \geq 0$. Τότε, η u είναι σταθερή, δηλ. $u \equiv M$ στο Ω.

<u>Απόδειξη:</u> Έστω αντιθέτως ότι η u δεν είναι σταθερή. Θέτουμε $V = \{x \in \Omega |\ u(x) < M\} \neq \emptyset$.

Από το Λήμμα I.16, $\exists$ μπάλα B με $B \subseteq V$ και $x_0 \in \partial B \cap \partial V \cap \Omega$, έτσι ώστε

$$u(x) < u(x_0) = M,\ \ \ \forall\, x \in V.$$

Είναι φανερό ότι $u|_{\bar{V}} \in C^2(V) \cap C(\bar{V})$ και u διαφορίσιμη στο $x_0 \in \partial V$ (σημ. ότι $x_0 \in \Omega$ και $u \in C^2(\Omega)$.)

Από το *Λήμμα του Hopf* προκύπτει ότι $\frac{\partial u}{\partial n}(x_0) > 0$, όπου n είναι το μοναδιαίο διάνυσμα της εξωτερικής καθέτου του ∂B στο x_0.

Αλλά $x_0 \in \Omega$ $\mathit{και}$ $\max\limits_{\Omega} u = u(x_0) \Longrightarrow \nabla u(x_0) = 0$, άτοπο. ∎

Η υπόθεση «$u \in C(\bar{\Omega})$» στο Θεώρημα Ι.17 **μπορεί να παραλειφθεί**.

Πιο συγκεκριμένα έχουμε το ακόλουθο:

<u>Θεώρημα Ι.18 (Ισχυρή Αρχή Μεγίστου,V2):</u>

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ανοικτό και συνεκτικό. Υποθέτουμε ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες $H(L)$ και $u \in C^2(\Omega)$, έτσι ώστε

- **i.** $Lu(x) \leq 0, \ \forall\, x \in \Omega.$
- **ii.** $\max\limits_{\Omega} u = M.$

Υποθέτουμε επιπλέον ότι είτε $\alpha_0 \equiv 0$ είτε $\alpha_0 \geq 0, M \geq 0$. Τότε, η u είναι σταθερή, δηλ. $u \equiv M$ στο Ω.

<u>Απόδειξη:</u> Θέτουμε $\Sigma = \{x \in \Omega |\ u(x) = M\}$. Το Σ είναι μη κενό και *σχετικά* κλειστό στο Ω. Θα δείξουμε ότι το Σ είναι και *σχετικά* ανοικτό στο Ω.

Επιλέγουμε $x_1 \in \Sigma$ και $r > 0|\ B[x_1, r] \subseteq \Omega$. Θέτουμε $B = B(x_1, r)$. Τότε $\bar{B} \subseteq \Omega$,

$u|_{\bar{B}} \in C^2(B) \cap C(\bar{B})$ και $\forall\, x \in B, u(x) \leq M = u(x_1) \Longrightarrow \max\limits_{B} u = M.$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Ι.17 για $\Omega = B$, έχουμε ότι $u = M$, στο $B \Longrightarrow x_1 \in B \subseteq \Sigma \Longrightarrow$ Σ σχετικά ανοικτό στο Ω. Λόγω *συνεκτικότητας* του Ω, παίρνουμε $\Sigma = \Omega \Longrightarrow u \equiv M$, στο Ω. ∎

<u>Σχόλιο:</u> Η υπόθεση «$\alpha_0 \geq 0$» **δεν** μπορεί να παραληφθεί στο Θεώρημα Ι.18.

<u>Παράδειγμα:</u>

$\Omega = (0, \pi)$, $Lu = -u'' - u$, $u(t) = \sin t, t \in \Omega$. Τότε, $Lu(t) = 0, \forall\, t \in \Omega$ και $\max\limits_{\Omega} u = 1 > 0$.

Στη συνέχεια παίρνουμε κάποια *αποτελέσματα σύγκρισης*, ως πορίσματα της Ασθενούς και της Ισχυρής Αρχής Μεγίστου.

<u>Πόρισμα Ι.19:</u> Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ανοικτό και συνεκτικό. Υποθέτουμε ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες $H(L)$ με $a_0 \geq 0$ και $u \in C^2(\Omega)$ έτσι ώστε $Lu(x) \leq 0, u(x) \leq 0, \forall\, x \in \Omega$. Τότε, είτε $u \equiv 0$, στο Ω είτε $u < 0$, στο Ω.

Απόδειξη: Εάν $u(x_0) = 0$ για κάποιο $x_0 \in \Omega$, έχουμε $\max_{\Omega} u = 0 = u(x_0) \overset{\Theta.I.18}{\Longrightarrow} \eta\ u$ είναι σταθερή $\Longrightarrow u \equiv 0$, στο Ω. ■

Πόρισμα Ι.20: Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ανοικτό, φραγμένο και συνεκτικό. Υποθέτουμε ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες $H(L)$ με $a_0 \geq 0$ και $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, έτσι ώστε

$$Lu \leq 0, \text{ στο } \Omega, \qquad u|_{\partial\Omega} \leq 0.$$

Τότε είτε $u \equiv 0$, στο Ω είτε $u < 0$, στο Ω.

Απόδειξη: Από το Θεώρημα Ι. 5 παίρνουμε ότι $\max_{\bar{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+ = 0 \Longrightarrow u \leq 0$, στο Ω. Το συμπέρασμα έπεται τώρα από το Πόρισμα Ι.19. ■

Πόρισμα Ι.21: Έστω Ω, L όπως στο Πόρισμα Ι.20 και $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ έτσι ώστε $Lu \leq Lv$, στο Ω και $u|_{\partial\Omega} \leq v|_{\partial\Omega}$. Τότε, είτε $u \equiv v$ είτε $u < v$, στο Ω.

Απόδειξη: Θέτουμε $w = u - v$ και εφαρμόζουμε το Πόρισμα Ι.20. ■

ΙΙ. Ομαλότητα ασθενών λύσεων

Η θεωρία ομαλότητας ασθενών λύσεων αποτελεί έναν από τους σημαντικότερους υποκλάδους της Ποιοτικής Θεωρία Μ.Δ.Ε., για τον οποίο η βιβλιογραφία είναι πλούσια σε εξαιρετικής σημασίας ερευνητικά αποτελέσματα. Με τη θεωρία ομαλότητας έχουν ασχοληθεί πολλοί εξέχοντες μαθηματικοί του 20ου αιώνα, όπως: Nirenberg[18], Evans[8], Krylov[14] , Ladyzhenskaya - Uraltseva[15], Caffarelli[2], DiBenedetto[6] και Tolksdorf[24] (ομαλότητα στο εσωτερικό του χωρίου για μη γραμμικές Μ.Δ.Ε.), Lieberman [16] (ομαλότητα στο σύνορο του χωρίου για μη γραμμικές Μ.Δ.Ε).

Στην παρούσα εργασία, η θεωρία ομαλότητας αποτελεί βασικό εργαλείο για τη μελέτη των φασματικών ιδιοτήτων της αρνητικής Λαπλασιανής με Dirichlet συνοριακές συνθήκες (βλ. κεφάλαιο IV).

Παρακάτω, παρουσιάζεται η ομαλότητα των λύσεων μόνο στο εσωτερικό του χωρίου και για γραμμικές ελλειπτικές Μ.Δ.Ε. που καθοδηγούνται από την αρνητική Λαπλασιανή. Το ουσιώδες συστατικό της απόδειξης είναι η μεταβολή των μεταθέσεων, η οποία είναι γνωστή και ως τεχνική των διαφορικών πηλίκων (βλ. και Brezis[1], IX.6). Η μέθοδος αυτή οφείλεται στον Louis Nirenberg (1925 – 2020), έναν από τους σημαντικότερους μαθηματικούς του 20ου αιώνα.

Συμβολισμός: Εάν Ω, Ω' ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ με $\overline{\Omega'}$ συμπαγές υποσύνολο του Ω, γράφουμε $\Omega' \subset\subset \Omega$.

Θεώρημα ΙΙ.1: Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N (N \geq 1)$ ανοικτό και $u \in W^{1,2}(\Omega)$ μία ασθενής λύση της Μ.Δ.Ε.

$$-\Delta u(x) = f(x), \;\; \text{σ.π. στο } \Omega,$$

όπου $f \in L^2(\Omega)$. Τότε, για κάθε $\Omega' \subset\subset \Omega$, έχουμε $u \in W^{2,2}(\Omega')$ και

$$\|u\|_{W^{2,2}(\Omega')} \leq c\big(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)}\big)$$

και η σταθερά c εξαρτάται μόνο από την απόσταση $d(\Omega', \partial\Omega)$.

Επιπλέον, $-\Delta u(x) = f(x)$, σ.π. στο Ω.

Για την απόδειξη του Θεωρήματος ΙΙ.1, θα χρειαστούμε κάποια προπαρασκευαστικά λήμματα.

Έστω $\Omega' \subset \Omega$ ανοικτό σύνολο και $g \in L^2(\Omega')$.

Ορίζουμε $\bar{g}(x) = \begin{cases} g(x), & x \in \Omega' \\ 0, & x \in \Omega \backslash \Omega' \end{cases}$. Τότε, $\bar{g} \in L^2(\Omega)$.

Λήμμα ΙΙ. 2: **(α)** Έστω $\varphi \in C_c^1(\Omega')$. Τότε, $\bar{\varphi} \in C_c^1(\Omega)$ και

$$supp\, \bar{\varphi} = supp\, \varphi, \qquad \nabla \bar{\varphi} = \overline{\nabla \varphi}\,.$$

(β) Εάν $u \in W^{1,2}(\Omega)$, τότε $u|_{\Omega'} \in W^{1,2}(\Omega')$.

Απόδειξη: **(α)** Επειδή Ω' ανοικτό, προφανώς η $\bar{\varphi}$ είναι διαφορίσιμη στα σημεία του Ω' και ισχύει

$$\nabla \bar{\varphi}(x) = \nabla \varphi(x), \quad \forall\, x \in \Omega'.$$

Έστω $x_0 \in \Omega \backslash \Omega'$. Τότε, $x_0 \in \Omega \backslash supp\varphi = V$ και το V είναι ανοικτό.

Έστω $x \in V$.

- εάν $x \in \Omega \backslash \Omega'$, τότε $\bar{\varphi}(x) = 0$.
- εάν $x \in \Omega'$, τότε $x \in \Omega' \cap V \subset \Omega' \backslash supp\varphi$, οπότε $\bar{\varphi}(x) = \varphi(x) = 0$.

Επομένως, $\bar{\varphi}(x) = 0$, για όλα τα $x \in V$ και άρα $\bar{\varphi}$ διαφορίσιμη στο x_0 με $\nabla \bar{\varphi}(x_0) = 0$.

Επιπλέον, από τον ορισμό της $\bar{\varphi}$ προκύπτει ότι

$$\{x \in \Omega\colon \bar{\varphi}(x) \neq 0\} = \{x \in \Omega'\colon \varphi(x) \neq 0\}$$

και συνεπώς $supp\, \bar{\varphi} = supp\, \varphi$.

(β) Έστω $u \in W^{1,2}(\Omega)$ και $\varphi \in C_c^1(\Omega')$. Τότε, για όλα τα $1 \leq k \leq N$,

$$\int_{\Omega'} u(\partial_k \varphi) = \int_{\Omega} u\overline{\partial_k \varphi} = \int_{\Omega} u(\partial_k \bar{\varphi}) = -\int_{\Omega} (\partial_k u)\bar{\varphi} = -\int_{\Omega'} (\partial_k u)\varphi.$$

■

Στη συνέχεια, έστω $G \subset\subset \Omega$, $h \in \mathbb{R}$ με $0 < |h| < d(G, \partial\Omega)$ και $g \in L^2(\Omega)$.

Για $1 \leq i \leq N$, ορίζουμε

$$\Delta_i^h g(x) = \frac{g(x + he_i) - g(x)}{h}, \qquad x \in G,$$

όπου e_i είναι το i -διάνυσμα της φυσικής βάσης του $\mathbb{R}^N$.

Σημειώνουμε ότι $\forall\, x \in G$, έχουμε ότι $x + he_i \in G + he_i \subset \Omega$, για $0 < |h| < d(G, \partial\Omega)$.

Παρατηρήσεις: **(α)** Εάν g διαφορίσιμη στο $x \in G$, τότε $\Delta_i^h g(x) \overset{h \to 0}{\longrightarrow} \partial_i g(x)$.

(β) Αν $g \in C^1(\Omega)$ και $G \subset\subset \Omega$, $0 < |h| < d(G, \partial\Omega)$, τότε

$\Delta_i^h g \in C^1(G)$, για $1 \leq i \leq N$ και $\partial_k (\Delta_i^h g) = \Delta_i^h (\partial_k g)$ στο G, για $1 \leq k \leq N$.

Λήμμα II.3: Έστω $G \subset\subset \Omega$, $0 < |h| < d(G, \partial\Omega)$, $1 \leq i \leq N$, $g \in L^2(\Omega)$. Τότε,

$$\Delta_i^h g \in L^2(G).$$

Απόδειξη: Έχουμε

$$\int_G |\Delta_i^h g(x)|^2 dx \leq \frac{2}{h^2} \left\{ \int_G |g(x + he_i)|^2 dx + \int_G |g(x)|^2 dx \right\} =$$

$$= \frac{2}{h^2}\left\{\int_{G+he_i}|g(x)|^2\,dx + \int_G \ |g(x)|^2 dx\right\} \ \leq \frac{4}{h^2}\int_\Omega |g(x)|^2 dx < \infty$$

$$\Rightarrow \qquad \Delta_i^h g \in L^2(G). \qquad \blacksquare$$

<u>Λήμμα ΙΙ.4:</u> Έστω $\Omega' \subset\subset \Omega'' \subset\subset \Omega,\ \ 0 < |h| < \min\{d(\Omega', \partial\Omega''),\ d(\Omega'', \partial\Omega)\}, u \in L^2(\Omega)$, $v \in L^2(\Omega'), 1 \leq i \leq N.$ Τότε,

$$\int_{\Omega'}[\Delta_i^h u(x)]v(x)dx = -\int_{\Omega''} u(x)[\ \Delta_i^{-h}\ \bar{v}(x)\ ]dx\,,$$

όπου

$$\bar{v}(x) = \begin{cases} 0, & x \in \Omega\backslash\Omega' \\ v(x), & x \in \Omega' \end{cases}.$$

Επιπλέον, $\forall\ \varphi\ \in C_c^1(\Omega')$, $\quad \int_{\Omega'}(\Delta_i^h u)\varphi \xrightarrow{h\to 0} -\int_{\Omega'} u\partial_i\varphi$.

<u>Απόδειξη:</u> Έστω $1 \leq i \leq N$. Λόγω του Λήμματος ΙΙ.3, ισχύει

$$\Delta_i^h u \in L^2(\Omega'), \qquad \Delta_i^{-h}\bar{v} \in L^2(\Omega'').$$

Επιπλέον, $\Omega' + he_i \subset \Omega'',\quad \Omega'' - he_i \subset \Omega$ και

$$x - he_i \in \Omega\backslash\Omega', \qquad \forall\ x \in \Omega''\backslash(\Omega' +\ he_i).$$

Έχουμε

$$\int_{\Omega'} u(x + h\,e_i)v(x)dx = \int_{\Omega'+he_i} u(x)v(x - he_i)dx = \int_{\Omega''} u(x)\,\bar{v}(x - he_i)dx$$

και

$$\int_{\Omega'} u(x)v(x)dx = \int_{\Omega''} u(x)\bar{v}(x)dx\ .$$

Συνεπώς,

$$\int_{\Omega'} \Delta_i^h u(x)v(x)dx = -\int_{\Omega''} u(x)\Delta_i^{-h}\bar{v}\,(x)dx.$$

Έστω $\varphi\ \in C_c^1(\Omega')$ και $0 < |h| < \min\{d(\Omega', \partial\Omega''), d(\Omega'', \partial\Omega)\}$. Έχουμε

$$\int_{\Omega'} \Delta_i^h u(x)\varphi(x)dx = -\int_{\Omega''} u(x)\Delta_i^{-h}\ \bar{\varphi}(x)dx$$

και $\forall\ x \in \Omega''$,

$$\Delta_i^{-h}\,\bar{\varphi}(x) = -\frac{1}{h}[\bar{\varphi}(x-he_i)-\bar{\varphi}(x)] = -\frac{1}{h}\int_0^h \partial_i\bar{\varphi}(\,x-se_i)ds$$

$$\Rightarrow \left|\Delta_i^{-h}\,\bar{\varphi}(x)\right| \le \frac{1}{|h|}|h|\|\partial_i\bar{\varphi}\|_\infty = \|\partial_i\varphi\|_\infty \ .$$

Ταυτόχρονα,

$$\Delta_i^{-h}\,\bar{\varphi}(x) \xrightarrow{h\to 0} \partial_i\,\bar{\varphi}(x) = \overline{\partial_\iota\varphi}\,(x), \qquad \forall\, x\in\Omega''\ .$$

Από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Συγκλίσεως του Lebesgue προκύπτει ότι

$$\int_{\Omega'}(\Delta_i^h u)\varphi \xrightarrow{h\to 0} -\int_{\Omega''} u\overline{\partial_\iota\varphi} = -\int_{\Omega'} u\partial_i\varphi.$$

■

<u>Λήμμα ΙΙ.5:</u> Εάν $\Omega' \subset\subset \Omega,\ 0<|h|<d(\Omega',\partial\Omega)$ και $u\in W^{1,2}(\Omega)$, τότε

$$\Delta_i^h u\in L^2(\Omega'),\quad \left\|\Delta_i^h u\right\|_{L^2(\Omega')} \le \|\partial_i u\|_{L^2(\Omega)}, \qquad \text{για όλα τα } 1\le i\le N.$$

<u>Απόδειξη:</u> Λόγω πυκνότητας του $C^\infty(\Omega)\cap\ W^{1,2}(\Omega)$ στο $W^{1,2}(\Omega)$, αρκεί να αποδειχθεί για $u\in C^\infty(\Omega)\cap\ W^{1,2}(\Omega)$.

Έστω $u\in W^{1,2}(\Omega)\cap C^\infty(\Omega)$. Για όλα τα $x\in\Omega'$,

$$u(x+he_i)-u(x) = h\int_0^1 \partial_i u(\,x+she_i)ds \quad\Longrightarrow$$

$$|\,u(x+he_i)-u(x)| \le |h|\int_0^1 |\partial_i u(\,x+she_i|\;ds \le^{Holder}$$

$$\le\quad |h|\left\{\int_0^1 |\partial_i u(\,x+she_i)|^2 ds\right\}^{1/2} \Rightarrow$$

$$|\,u(x+he_i)-u(x)|^2 \le |h|^2\int_0^1 |\partial_i u(\,x+she_i)|^2 ds.$$

Έπεται ότι

$$\int_{\Omega'}|\,u(x+he_i)-u(x)|^2\,dx \le^{Fubini} |h|^2\int_0^1\ \left[\int_{\Omega'}\quad |\partial_i u(\,x+she_i)|^2 dx\ \right]ds.$$

Αλλά για $0\le s\le 1$, έχουμε ότι $\Omega'+she_i\subset\Omega$, οπότε

$$\int_{\Omega'}|\,\partial_i u(x+she_i)|^2\,dx = \int_{\Omega'+she_i}|\partial_i u(x)|^2 dx \le \|\partial_i u\|_{L^2(\Omega)}^2\ .$$

Επομένως,

$$\int_{\Omega'} | u(x+he_i) - u(x)|^2 \, dx \leq |h|^2 \|\partial_i u\|^2_{L^2(\Omega)} \quad \Rightarrow \quad \left\|\Delta_i^h u\right\|^2_{L^2(\Omega')} \leq \|\partial_i u\|^2_{L^2(\Omega)}. \quad \blacksquare$$

Λήμμα ΙΙ.6: Έστω $u \in L^2(\Omega), \Omega' \subset\subset \Omega, \;\; 0 < \delta < d(\Omega', \partial\Omega), \; 1 \leq i \leq N$ ώστε

$$\sup_{0<|h|<\delta} \left\|\Delta_i^h u\right\|_{L^2(\Omega')} = K < \infty. \tag{11}$$

Τότε, η u έχει γενικευμένη i-μερική παράγωγο $\partial_i u \in L^2(\Omega')$.

Επομένως, εάν η (11) ισχύει για όλα τα $1 \leq i \leq N$, τότε $u \in W^{1,2}(\Omega')$.

Απόδειξη: Ορίζουμε $T_u \colon C_c^1(\Omega') \to \mathbb{R}$ με $T_u(\varphi) = -\int_{\Omega'} u \partial_i \varphi, \; \varphi \in C_c^1(\Omega')$. Λόγω του Λήμματος ΙΙ.4, έχουμε, για όλα τα $\varphi \in C_c^1(\Omega')$,

$$|T_u(\varphi)| = \lim_{h\to 0} \left| \int_{\Omega'} \Delta_i^h u \varphi \right| \leq^{(11)} K \|\varphi\|_{L^2(\Omega')} .$$

Έπεται ότι το T_u είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό πάνω στον $\left(C_c^1(\Omega'), \|\cdot\|_{L^2(\Omega')}\right)$ με $\|T_u\| \;\leq K$.

Λόγω πυκνότητας και σύμφωνα με το Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz, $\exists \; g \in L^2(\Omega)$ τέτοιο ώστε $\forall \; \varphi \; \in C_c^1(\Omega')$,

$$T_u(\varphi) = \int_{\Omega'} g\varphi, \quad \|g\|_{L^2(\Omega')} = \|T_u\| \leq K.$$

Τότε, $\forall \; \varphi \; \in C_c^1(\Omega'), \;\; \int_{\Omega'} g\varphi = -\int_{\Omega'} u \partial_i \varphi \;\; \Rightarrow$ η $g \in L^2(\Omega')$ είναι η γενικευμένη i-μερική παράγωγος της u στο Ω', δηλ. $g = \partial_i u$ σ.π. στο Ω', με τη γενικευμένη έννοια.

Επιπλέον, $\|\partial_i u\|_{L^2(\Omega')} = \|g\|_{L^2(\Omega')} \leq K < \infty$. $\blacksquare$

Λήμμα ΙΙ.7: Έστω $\Omega' \subset\subset \Omega'' \subset\subset \Omega$ και $h \; \in \; \mathbb{R}$ ώστε

$$0 < |h| < \min\{d(\Omega', \partial\Omega''), d(\Omega'', \partial\Omega)\}.$$

Εάν $u \in W^{1,2}(\Omega)$, τότε για όλα τα $1 \leq i \leq N$, ισχύει $\Delta_i^h u \in W^{1,2}(\Omega')$ και

$$\partial_k\left(\Delta_i^h u\right) = \Delta_i^h(\partial_k u), \;\; 1 \leq k \leq N, \quad \text{στο} \;\; \Omega'.$$

(Οι μερικές παράγωγοι λαμβάνονται με τη γενικευμένη έννοια).

Απόδειξη: Έστω $\varphi \; \in C_c^1(\Omega')$ και $1 \leq i, \; k \leq N$. Έχουμε

$$\int_{\Omega'} \Delta_i^h u \, (\partial_k \varphi) =^{\text{Λήμμα ΙΙ.4}} -\int_{\Omega''} u \, [\, \Delta_i^{-h} \left(\overline{\partial_k \varphi}\right)]$$

$$= -\int_{\Omega''} u \;\, [\, \Delta_i^{-h} \, (\partial_k \bar{\varphi})] = -\int_{\Omega''} u \, [\partial_k\big(\, \Delta_i^{-h} \, \bar{\varphi}\big)].$$

Αλλά, $\Delta_i^{-h} \, \bar{\varphi} \; \in \; C_c^1(\Omega'')$.

[Πράγματι, θέτουμε C= $(supp\ \varphi + he_i) \cup supp\ \varphi$. Τότε, C συμπαγές και

$$C \subseteq (\Omega' + he_i) \cup \Omega' \subseteq \Omega''.$$

Επιπλέον, $\forall\, x \in \Omega'' \backslash C$, έχουμε

$$x,\ x - he_i \in \Omega \ \backslash supp\ \varphi = \Omega \backslash \ supp\ \bar{\varphi} \quad (\text{βλ. Λήμμα II. 2(α)}),$$

οπότε $\Delta_i^{-h}\ \bar{\varphi}(x) = 0$ και άρα $supp\ (\Delta_i^{-h}\bar{\varphi}\ ) \subseteq C$.]

Ταυτόχρονα, $u|_{\Omega''} \in W^{1,2}(\Omega'')$ (βλ. Λήμμα II. 2(β)).

Επομένως,

$$\int_{\Omega'} \Delta_i^h u\, (\partial_k \varphi) = \int_{\Omega''} (\partial_k u)\ \ \Delta_i^{-h}\ \bar{\varphi} \ =^{\text{Λήμμα } II.4}$$

$$= -\int_{\Omega'} \Delta_i^h (\partial_k u) \bar{\varphi}$$

$$= -\int_{\Omega'} \Delta_i^h (\partial_k u) \varphi. \qquad \blacksquare$$

<u>Λήμμα II.8:</u> Έστω $\eta \in C^1(\Omega),\ u \in W^{1,2}(\Omega)$. Τότε, $\eta u \in W^{1,2}(\Omega)$ και

$$\nabla(\eta u) = \eta \nabla u + u \nabla \eta.$$

Εάν επιπλέον $\eta \in C_c^1(\Omega)$, τότε $\eta u \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

<u>Απόδειξη:</u> Έστω $\varphi \in C_c^1(\Omega)$ και $1 \le k \le N$. Τότε, $\eta\, \varphi \in C_c^1(\Omega)$ και

$$\int_\Omega (\eta \partial_k u)\varphi = \int_\Omega (\partial_k u)(\eta\varphi) = -\int_\Omega u\ \partial_k(\eta\varphi) = -\int_\Omega u\ (\eta \partial_k \varphi + \varphi \partial_k \eta)$$

$$= -\int_\Omega u\, \eta \partial_k \varphi - \int_\Omega u\, \varphi \partial_k \eta$$

$$\Rightarrow \int_\Omega (\eta \partial_k u + u \partial_k \eta\ )\varphi = -\int_\Omega u\, \eta \partial_k \varphi\ .$$

Συνεπώς, ισχύει το πρώτο συμπέρασμα του λήμματος.

Υποθέτουμε στη συνέχεια ότι $\eta \in C_c^1(\Omega)$. Επιλέγουμε $(\varphi_n) \subseteq C^\infty(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega)$ ώστε

$$||\varphi_n - u||_{L^2(\Omega)} \to 0, \quad ||\nabla\varphi_n - \nabla u||_{L^2(\Omega,\ \mathbb{R}^N)} \to 0\ .$$

Προφανώς, $\eta\varphi_n \in C_c^1(\Omega),\ n \ge 1$ και

$$\begin{aligned} |\nabla(\eta\varphi_n) - \nabla(\eta u)|^2 \quad &= |\eta\nabla\varphi_n + \varphi_n \nabla\eta - \eta\nabla u - u\nabla\eta\ |^2 \\ &= |\eta(\nabla\varphi_n - \nabla u) + (\varphi_n - u)\nabla\eta\ |^2 \\ &\le 2||\eta||_\infty^2\ |\nabla\varphi_n - \nabla u|^2 + 2||\nabla\eta||_\infty^2\ |\varphi_n - u|^2, \quad n \ge 1\ . \end{aligned}$$

Οπότε έχουμε

$$\int_{\Omega} |\eta\varphi_n - \eta\varphi|^2 \le ||\eta||_\infty^2 \, ||\varphi_n - u||_{L^2(\Omega)}^2 \to 0,$$

και

$$\int_{\Omega} |\nabla(\eta\varphi_n) - \nabla(\eta u)|^2 \le 2||\eta||_\infty^2 \int_{\Omega} |\nabla\varphi_n - \nabla u|^2 + 2||\nabla\eta||_\infty^2 \int_{\Omega} |\varphi_n - u|^2 \to 0.$$

Έπεται ότι $||\, \eta\varphi_n - \eta u \,||_{W^{1,2}(\Omega)} \to 0$ και άρα $\eta \; u \in W_0^{1,2}(\Omega)$. ■

Λήμμα ΙΙ.9: Έστω $\eta \in C_c^1(\Omega), w \in W^{1,2}(\Omega)$, $0 \le \eta \le 1$, $A > 0$. Υποθέτουμε ότι

$$\int_{\Omega} \big(\nabla w, \nabla(\eta^2 w)\big) \le A \, \|\nabla(\eta^2 w)\|_{L^2(\Omega)}\,, \tag{12}$$

όπου $(\cdot,\cdot)$ το ευκλείδιο εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^N$. Τότε,

$$\int_{\Omega} \eta^2 |\nabla w|^2 \le 4\,A^2 + 10 \sup_{\Omega} |\nabla\eta|^2 \, \|w\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Απόδειξη: Έστω $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Έχουμε (βλ. Λήμμα ΙΙ.8),

$$\big(\nabla w, \nabla(\eta^2 w)\big) = (\nabla w, 2\eta w \nabla\eta + \eta^2 \nabla w) = \eta^2 |\nabla w|^2 + 2(\eta\nabla w, w\nabla\eta),$$

οπότε

$$\int_{\Omega} \eta^2 |\nabla w|^2 \le^{(12)} A\|\nabla(\eta^2 w)\|_{L^2(\Omega)} + 2\int_{\Omega} |\eta\nabla w||w\nabla\eta| \le^{Ανίσωση\ Young}$$

$$\le \frac{A^2}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2}\|\nabla(\eta^2 w)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon\int_{\Omega} \eta^2 |\nabla w|^2 + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega} w^2 |\nabla\eta|^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad (1-\varepsilon)\int_{\Omega} \eta^2 |\nabla w|^2 \le \frac{A^2}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2}\|\nabla(\eta^2 w)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\sup|\nabla\eta|^2}{\varepsilon}\|w\|_{L^2(\Omega)}^2\,. \tag{13}$$

Αλλά,

$$|\nabla(\eta^2 w)|^2 = |2\eta w \nabla\eta + \eta^2 \nabla w|^2 \le 8\eta^2 |w|^2 |\nabla\eta|^2 + 2\eta^4 |\nabla w|^2 \le$$

$$\le 8|w|^2|\nabla\eta|^2 + 2\eta^2|\nabla w|^2$$

(σημ. ότι $0 \le \eta \le 1$). Έτσι, από τη σχέση (13) προκύπτει ότι

$$(1-\varepsilon)\int_{\Omega} \eta^2 |\nabla w|^2 \le \frac{A^2}{2\varepsilon} + 4\varepsilon\int_{\Omega} |\nabla\eta|^2 w^2 + \varepsilon\int_{\Omega} \eta^2|\nabla w|^2 + \frac{1}{\varepsilon}\sup_{\Omega}|\nabla\eta|^2 \, \|w\|_{L^2(\Omega)}^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-2\varepsilon)\int_{\Omega} \eta^2 |\nabla w|^2 \le \frac{A^2}{2\varepsilon} + \left(4\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\right)\sup_{\Omega}|\nabla\eta|^2 \, \|w\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Θέτοντας $\varepsilon = \frac{1}{4}$, παίρνουμε τη ζητούμενη ανισότητα.

$\blacksquare$

<u>Απόδειξη Θεωρήματος ΙΙ.1:</u> Έστω $\Omega' \subset\subset \Omega$. Επιλέγουμε Ω'', Ω''', G ανοικτά τέτοια ώστε

$$\Omega' \subset\subset \Omega'' \subset\subset \Omega''' \subset\subset G \subset\subset \Omega$$

και θέτουμε $\delta = \min\{d(\Omega', \partial\Omega''), d(\Omega'', \partial\Omega'''), d(\Omega''', \partial G), d(G, \partial\Omega)\}$.

Τότε, $\delta < d(G, \partial\Omega) \leq d(\Omega''', \partial\Omega)$.

Έστω $1 \leq i \leq N$ και $0 < |h| < \delta$.

Επιπλέον, επιλέγουμε $\eta \in C_c^1(\Omega'')$ με $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta|_{\Omega'} = 1$.

Θέτουμε $w = \Delta_i^h u$, $v = \eta^2 w$.

Εφαρμόζοντας το Λήμμα ΙΙ.7 για την τριάδα $\Omega'' \subset\subset \Omega''' \subset\subset \Omega$, παίρνουμε

$$w \in W^{1,2}(\Omega''), \quad \partial_k w = \Delta_i^h(\partial_k u), \text{ στο } \Omega'', \ 1 \leq k \leq N. \tag{14}$$

Επιπλέον, $v = \eta^2 w \in W_0^{1,2}(\Omega'')$ (βλ. Λήμμα ΙΙ. 8). Θέτουμε $\bar{v}(x) = \begin{cases} v(x), x \in \Omega'' \\ 0, x \in \Omega \setminus \Omega'' \end{cases}$.

Τότε, $\bar{v} \in W^{1,2}(\Omega)$ και από το Λήμμα ΙΙ. 7, εφαρμόζοντάς το για την τριάδα $\Omega''' \subset\subset G \subset\subset \Omega$, παίρνουμε

$$\Delta_i^{-h}\bar{v} \in W^{1,2}(\Omega'''), \quad \partial_k\left(\Delta_i^{-h}\bar{v}\right) = \Delta_i^{-h}(\partial_k \bar{v}), \text{ στο } \Omega''', \ 1 \leq k \leq N. \tag{15}$$

Στην πραγματικότητα, $\Delta_i^{-h}\bar{v} \in W_0^{1,2}(\Omega''')$ (βλ. Λήμμα ΙΙ. 8).

Έχουμε

$$\int_{\Omega''} (\nabla w, \nabla v) = \sum_{k=1}^{N} \int_{\Omega''} (\partial_k w, \partial_k v) =^{(14)} \sum_{k=1}^{N} \int_{\Omega''} \left(\Delta_i^h(\partial_k u), \partial_k v\right)$$

Εφαρμόζοντας το Λήμμα ΙΙ.4 για την τριάδα $\Omega'' \subset\subset \Omega''' \subset\subset \Omega$, έχουμε

$$\sum_{k=1}^{N} \int_{\Omega''} \left(\Delta_i^h(\partial_k u), \partial_k v\right) = -\sum_{k=1}^{N} \int_{\Omega'''} \partial_k u \, \Delta_i^{-h}(\partial_k \bar{v}) =^{(15)} -\sum_{k=1}^{N} \int_{\Omega'''} \partial_k u \, (\partial_k \Delta_i^{-h}\bar{v}) =$$

$$= -\int_{\Omega'''} \left(\nabla u, \nabla(\Delta_i^{-h}\bar{v})\right).$$

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση $\Delta_i^{-h}\bar{v} \in W_0^{1,2}(\Omega''')$ ως δοκιμαστική συνάρτηση στο Ω''', καταλήγουμε στο ότι η τελευταία παράσταση ισούται με

$$-\int_{\Omega'''} f \, \Delta_i^{-h}\bar{v} \leq \|f\|_{L^2(\Omega''')} \left\|\Delta_i^{-h}\bar{v}\right\|_{L^2(\Omega''')} \leq^{\text{Λήμμα } II.5} \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla\bar{v}\|_{L^2(\Omega)}$$

$$= \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega'')}.$$

Συνοψίζοντας, έχουμε ότι $\int_{\Omega''} (\nabla w, \nabla(\eta^2 w) \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla(\eta^2 w)\|_{L^2(\Omega'')}$.

Εφαρμόζοντας το Λήμμα ΙΙ.9 για Ω'', έχουμε

$$\int_{\Omega''} \eta^2 |\nabla w|^2 \leq 4\, \|f\|^2_{L^2(\Omega)} + 10 \sup_{\Omega''} |\nabla \eta|^2\, \|w\|^2_{L^2(\Omega'')} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega'} \left|\nabla \Delta_i^h u\right|^2 \leq 4\, \|f\|^2_{L^2(\Omega)} + 10 \sup_{\Omega''} |\nabla \eta|^2 \left\|\Delta_i^h u\right\|^2_{L^2(\Omega'')} \leq^{\text{Λήμμα } II.5 (\Omega'' \subset\subset \Omega)}$$

$$\leq 4\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + 10 \sup_{\Omega''} |\nabla \eta|^2\, \|u\|^2_{L^2(\Omega'')} \Rightarrow \sup_{0<|h|<\delta} \int_{\Omega'} \left|\nabla \Delta_i^h u\right|^2 = K < \infty\,, \qquad 1 \leq i \leq N.$$

Αλλά τότε, για όλα τα $1 \leq k \leq N,\ 1 \leq i \leq N$,

$$\sup_{0<|h|<\delta} \left\|\Delta_i^h\, (\partial_k u)\right\|_{L^2(\Omega')} = \sup_{0<|h|<\delta} \left\|\partial_k\left(\Delta_i^h u\right)\right\|^2_{L^2(\Omega')} \leq K < \infty \quad \Rightarrow^{\text{Λήμμα } II.6}$$

$$\Rightarrow \quad \partial_k u \in W^{1,2}(\Omega'), \qquad 1 \leq k \leq N \quad \Rightarrow \quad u \in W^{2,2}(\Omega'). \qquad \blacksquare$$

<u>Πόρισμα ΙΙ.10:</u> Εάν $f \in H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)\ (m \geq 0)$ και u ασθενής λύση της Μ.Δ.Ε.

$$-\Delta u(x) = f(x), \ \text{σ.π. στο } \Omega,$$

τότε $u \in H^{m+2}(\Omega'),\ \forall\, \Omega' \subset\subset \Omega$.

<u>Απόδειξη:</u> Σημειώνουμε ότι $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$. Χρησιμοποιούμε επαγωγή στο m.

- Για $m = 0$, ισχύει λόγω του Θεωρ. ΙΙ.1.
- Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάποιο $m \geq 0$.

'Εστω $f \in H^{m+1}(\Omega)$ και u ασθενής λύση της Μ.Δ.Ε.

$$-\Delta u(x) = f(x), \ \text{σ.π. στο } \Omega.$$

Επιλέγουμε ανοικτό σύνολο Ω'' με $\Omega' \subset\subset \Omega'' \subset\subset \Omega$. Από το Θεώρ. ΙΙ.1 προκύπτει ότι $u \in H^2(\Omega'')$.

<u>Ισχυρισμός:</u> Για κάθε $1 \leq k \leq N$, η $\partial_k u$ είναι μία ασθενής λύση της Μ.Δ.Ε.

$$-\Delta w(x) = \partial_k f(x), \ \text{σ.π. στο } \Omega''.$$

Πράγματι, έστω $\varphi \in C_c^1(\Omega'')$. Τότε,

$$\int_{\Omega''} (\nabla(\partial_k u), \nabla\varphi) = \sum_{j=1}^N \int_{\Omega''} \partial_j(\partial_k u)\partial_j \varphi =^{u \in W^{2,2}(\Omega'')} \sum_{j=1}^N \int_{\Omega''} u \partial_j^2 \partial_k \varphi =$$

$$= \sum_{j=1}^N \int_{\Omega''} \partial_j^2 u \partial_k \varphi = \int_{\Omega''} \Delta u \partial_k \varphi = -\int_{\Omega''} f \partial_k \varphi \ = \ \int_{\Omega''} \partial_k f\ \varphi.$$

[Υπενθυμίζουμε ότι $f \in H^{m+1}(\Omega) \subset H^1(\Omega)$.]

Επομένως, η $\partial_k u$ είναι ασθενής λύση της Μ.Δ.Ε. $-\Delta w(x) = \partial_k f(x)$, σ.π. στο Ω''.

Αλλά $f \in H^{m+1}(\Omega) \Rightarrow \partial_k f \in H^m(\Omega)$, $1 \leq k \leq N$ και η επαγωγική υπόθεση οδηγεί στο γεγονός ότι

$$\partial_k u \in H^{m+2}(\Omega'), \quad 1 \leq k \leq N.$$

Επομένως, $u \in H^{m+3}(\Omega') = H^{(m+1)+2}(\Omega')$. ∎

Κάτω από ισχυρές συνθήκες ομαλότητας πάνω στο σύνορο $\partial\Omega$ του Ω, παίρνουμε αποτελέσματα ισχυρής ομαλότητας των λύσεων πάνω στο $\partial\Omega$. Το παρακάτω θεώρημα αποτελεί μια πολύ ειδική περίπτωση ενός σπουδαίου γενικού αποτελέσματος ομαλότητας του G.M.Lieberman [16] (παρατίθεται χωρίς απόδειξη):

Θεώρημα ΙΙ.11: Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ φραγμένο ανοικτό και συνεκτικό σύνολο με σύνορο $\partial\Omega$ κλάσης C^2 και $f: \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *τύπου Καραθεοδωρή*, δηλ.

- Για όλα σχεδόν τα $x \in \Omega$, η συνάρτηση $\mathbb{R} \ni t \mapsto f(x,t)$ είναι συνεχής.
- Για κάθε $t \in \mathbb{R}$, η συνάρτηση $\Omega \ni x \mapsto f(x,t)$ είναι μετρήσιμη.

Υποθέτουμε επιπλέον ότι υπάρχει $c > 0$ ώστε για όλα σχεδόν τα $x \in \Omega$ και για όλα τα $t \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$|f(x,t)| \leq c\,(1 + |t|\,).$$

Έστω $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ μια ασθενής λύση του Προβλήματος Συνοριακών Τιμών

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f\big(x, u(x)\big), & \text{σ.π. στο } \Omega, \\ \qquad\qquad u|_{\partial\Omega} = 0\,. & \end{cases}$$

Τότε, $u \in C^1(\bar{\Omega}\,)$.

III. Φασματικές ιδιότητες συμπαγών αυτοσυζυγών γραμμικών τελεστών σε χώρους Hilbert.

Στο κεφάλαιο αυτό αποδεικνύονται το κλασικό φασματικό θεώρημα για αυτοσυζυγείς συμπαγείς γραμμικούς τελεστές πάνω από απειροδιάστατους διαχωρίσιμους χώρους Hilbert, καθώς και min-max εκφράσεις για τις ιδιοτιμές τους. Το εν λόγω φασματικό θεώρημα αποτελεί την απειροδιάστατη γενίκευση του γνωστού αποτελέσματος της Γραμμικής Άλγεβρας που διατυπώνεται ως εξής: ''ένας πραγματικός συμμετρικός πίνακας τύπου $n \times n$ $(n \geq 2)$ έχει πραγματικές ιδιοτιμές και υπάρχει ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$ που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του πίνακα.'' Σημειώνουμε ότι το αποτέλεσμα αυτό της Γραμμικής Άλγεβρας δεν επεκτείνεται για φραγμένους γραμμικούς τελεστές σε απειροδιάστατους χώρους Hilbert (υπάρχουν τελεστές χωρίς ιδιοτιμές!). Οι φασματικές ιδιότητες των αυτοσυζυγών συμπαγών γραμμικών τελεστών αποτελούν τη βάση για τη μελέτη των φασματικών ιδιοτήτων γραμμικών ελλειπτικών διαφορικών τελεστών 2^{ης} τάξης (βλ. κεφ. IV παρακάτω).

Έστω X χώρος Banach επί του $\mathbb{R}$. Θέτουμε

$$L(X) = \{A : X \longrightarrow X : \ A \text{ φραγμένος γραμμικός τελεστής}\}.$$

<u>Ορισμός III.1:</u> Ένας τελεστής $A \in L(X)$ λέγεται *συμπαγής* εάν απεικονίζει φραγμένα σύνολα του X σε σχετικώς συμπαγή, δηλ. σε σύνολα με συμπαγή κλειστή θήκη..

<u>Πρόταση III.2</u>: Υποθέτουμε ότι ο X είναι ανακλαστικός. Για έναν τελεστή $A \in L(X)$ τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

(i) ο A είναι συμπαγής

(ii) ο A είναι πλήρως συνεχής, δηλαδή για κάθε $(x_n) \subseteq X$ με $x_n \xrightarrow{w} x$, έχουμε

$$Ax_n \to Ax.$$

<u>Απόδειξη:</u> $(i) \Rightarrow (ii)$. Υποθέτουμε το αντίθετο, ότι $\exists (x_n) \subseteq X$ τέτοιο ώστε

$$x_n \xrightarrow{w} x, \ Ax_n \nrightarrow Ax.$$

Τότε, περνώντας σε υπακολουθίες, μπορούμε να βρούμε $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε

$$\|Ax_n - Ax\| \geq \varepsilon, \forall\, n \geq 1. \tag{16}$$

Επειδή ο A είναι συμπαγής και x_n είναι $\|\cdot\|$- φραγμένη, έχουμε ότι το σύνολο $\overline{\{A(x_n)\}}$ είναι συμπαγές. Επομένως, περνώντας σε υπακολουθίες μπορούμε να γράψουμε ότι

$$Ax_n \to y, \text{ για κάποιο } y \in X.$$

Ταυτόχρονα, επειδή ο A είναι γραμμικός και φραγμένος, το γεγονός ότι $x_n \overset{w}{\to} x$, συνεπάγεται ότι $Ax_n \overset{w}{\to} Ax$.

Επομένως, $y = Ax$, οπότε, $Ax_n \to Ax$, το οποίο έρχεται σε αντίφαση με την σχέση (16).

$(ii) \Rightarrow (i)$: Αρκεί να αποδείξουμε ότι το $\overline{A(B_X)}$ είναι συμπαγές, όπου $B_X = \{x \in X: \|x\| \leq 1\}$.

Έστω $(x_n) \subseteq B_X$. Λόγω ανακλαστικότητας του X, και περνώντας σε υπακολουθίες μπορούμε να γράψουμε ότι $x_n \overset{w}{\to} x$, για κάποιο $x \in B_X$. Επειδή ο A είναι πλήρως συνεχής, παίρνουμε

$$Ax_n \to Ax. \qquad \blacksquare$$

Πρόταση III.3: Έστω $A \in L(X)$ και $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ $(n \geq 1)$ διακεκριμένες ιδιοτιμές του A και $e_1, e_2, \dots, e_n$ αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα. Τότε, τα διανύσματα αυτά είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Απόδειξη: Με επαγωγή στο n.

- Για $n = 1$, είναι προφανές.
- Υποθέτουμε ότι ισχύει για n και έστω $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}$ διακεκριμένες ιδιοτιμές και $e_1, e_2, \dots, e_n, e_{n+1}$ αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα.
  Υποθέτουμε ότι $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1} \in \mathbb{C}$ έτσι ώστε

$$\sum_{j=1}^{n+1} a_j e_j = 0. \tag{17}$$

Τότε,

$$0 = (A - \lambda_{n+1} I)\left(\sum_{j=1}^{n+1} a_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} a_j \left(\lambda_j - \lambda_{n+1}\right) e_j$$

$$\xRightarrow{\text{ΥΠΟΘΕΣΗ}} a_j\left(\lambda_j - \lambda_{n+1}\right) = 0, \qquad 1 \leq j \leq n$$

$$\Rightarrow a_j = 0,\ 1 \leq j \leq n. \qquad \blacksquare$$

Από τη σχέση (17) προκύπτει άμεσα ότι $a_{n+1} = 0$.

Συμβολισμός: $\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}: \lambda \text{ ιδιοτιμή του } A\}$.

Πρόταση III.4: Έστω $A \in L(X)$ συμπαγής και $\varepsilon > 0$. Θέτουμε

$$\sigma_p^{\varepsilon}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}: \lambda \text{ είναι ιδιοτιμή του } A \text{ με } |\lambda| \geq \varepsilon\}.$$

Τότε, $\dim\{\lambda \in \sigma_p^{\varepsilon}(A) \oplus E_\lambda < \infty\}$, όπου E_λ ο αντίστοιχος $\lambda -$ ιδιόχωρος.

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι αυτό δεν ισχύει. Τότε, μπορούμε να επιλέξουμε μία άπειρη ακολουθία γραμμικώς ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων $e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$ τα οποία αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots \in \sigma_p^{\varepsilon}(A)$.

Θέτουμε $F_n = [e_1, e_2, \dots, e_n], n \geq 1$. Τότε,

$$\forall\, n \geq 2,\ F_{n-1} \subsetneq F_n \overset{*}{\Rightarrow} \exists\ x_n \in F_n \text{ έτσι ώστε}$$

$$\|x_n\| = 1, \qquad d(x_n, F_{n-1}) = 1.$$

Τώρα, $\forall\, n \geq 1$,

$$(A - \lambda_n I)(x_n) \in (A - \lambda_n I)(F_n) \subseteq F_{n-1}$$

$$\Rightarrow A\left(\frac{1}{\lambda_n} x_n\right) - x_n = f_{n-1} \in F_{n-1}\,.$$

Θέτουμε $y_n = \frac{1}{\lambda_n} x_n,\ n \geq 1$. Τότε $\forall\, f \in F_{n-1}$,

$$\|A(y_n) - f\| = \|x_n + f_{n-1} - f\| \geq d(x_n, F_{n-1}) = 1$$

$$\Rightarrow\ d(A(y_n),\ F_{n-1}) \geq 1,\ \forall\, n \geq 1.$$

Τώρα, $\forall\, n > m \Rightarrow n - 1 \geq m \Rightarrow A(y_m) \in A(F_m) \subseteq F_m \subset F_{n-1}$, έτσι

$$\|A(y_n) - A(y_m)\| \geq d(A(y_n),\ F_{n-1}) \geq 1.$$

Επομένως, η $\big(A(y_n)\big)$ δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, με $\|y_n\| = \frac{1}{\lambda_n} \leq \frac{1}{\varepsilon}$, $\forall\, n$

Άτοπο, διότι ο A είναι συμπαγής (από Πρόταση ΙΙΙ.1). ■

* Για την απόδειξη της παραπάνω Πρότασης χρησιμοποιήσαμε το ακόλουθο Λήμμα.

Λήμμα ΙΙΙ.5: Έστω X ένας χώρος Banach και $F \subsetneqq X$ με $dimF < \infty$. Τότε, $\exists\, x \in X$ τέτοιο ώστε

$$\|x\| = 1, \qquad d(x, F) = 1.$$

Απόδειξη:

$$F \subsetneq X \Rightarrow \exists\, z \in X \setminus F \Rightarrow d(z, F) = d > 0.$$

Επιλέγουμε $f_n \subseteq F$ τέτοιο ώστε $\|z - f_n\| \longrightarrow d$. Επειδή $dimF < \infty$, περνώντας σε υπακολουθίες μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$f_n \longrightarrow f \in F,$$

οπότε $d = \|z - f\|$.

Θέτουμε,

$$x = \frac{1}{d}(z - f) \Rightarrow \|x\| = 1.$$

Τότε, $\forall\, g \in F$,

$$\|x-g\| = \left\|\frac{1}{d}(z-f)-g\right\| = \frac{\|z-f-dg\|}{d} \geq \frac{d}{d} = 1$$

$$\Rightarrow 1 = \|x\| \geq d(x,F) \geq 1. \qquad \blacksquare$$

Σε ό,τι ακολουθεί, ο H είναι διαχωρίσιμος χώρος Hilbert.

Ορισμός ΙΙΙ.6: Ένας τελεστής $A \in L(H)$ λέγεται *αυτοσυζυγής*, εάν $\forall\, u, v \in H$

$$< Au, v > = < u, Av >,$$

όπου $<\cdot,\cdot>$ είναι το εσωτερικό γινόμενο στον H.

Πρόταση ΙΙΙ.7: Έστω $A \in L(H)$ αυτοσυζυγής.

(i) Όλες οι ιδιοτιμές του A είναι πραγματικές.

(ii) Εάν $\lambda \neq \mu$ ιδιοτιμές με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα u, v, τότε $< u, v > = 0$.

Απόδειξη:

(i) Έστω $\lambda \in \mathbb{C}$ μία ιδιοτιμή και e ένα $\lambda -$ ιδιοδιάνυσμα. Τότε

$$\bar{\lambda}\,\|e\|^2 = \bar{\lambda} < e, e > = < e, \lambda e > = < e, Ae > = < Ae, e > = \lambda\,\|e\|^2$$

$$\overset{e\neq 0}{\Longrightarrow} \bar{\lambda} = \lambda \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}.$$

(ii) Έστω λ, μ ιδιοτιμές του A και u, v αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα. Υποθέτουμε ότι $\lambda \neq \mu$. Τότε

$$\lambda < u, v > = < \lambda u, v > = < Au, v > = < u, Av > = < u, \mu v >$$

$$= \bar{\mu} < u, v > = \mu < u, v >$$

$$\Rightarrow (\lambda - \mu) < u, v > = 0$$

$$\overset{\lambda\neq\mu}{\Longrightarrow} < u, v > = 0. \qquad \blacksquare$$

Λήμμα ΙΙΙ.8: Έστω $A \in L(H)$ συμπαγής αυτοσυζυγής και θετικός, δηλαδή

$$< Au, u > > 0, \ \forall\, u \neq 0.$$

Θέτουμε, $\lambda_1 = \sup\{< Au, u >: u \in H, \|u\| = 1\} > 0$. Τότε, $\exists\, u_1 \in H$ με $\|u_1\| = 1$ τέτοιο ώστε

$$0 < < Au_1, u_1 > = \lambda_1, \qquad Au_1 = \lambda_1 u_1$$

Απόδειξη: Επιλέγουμε $(u_n) \in H$ τέτοια ώστε

$$\|u_n\| = 1,\ n \geq 2\ \ ,\ < Au_n, u_n > \to \lambda_1.$$

Περνώντας σε υπακολουθίες και λόγω της Πρότασης III.2, μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$u_n \overset{w}{\to} u_1, \quad Au_n \to Au_1,$$

για κάποιο $u_1 \in H$.

Τότε,

$$\|u_1\| \leq \lim_n \|u_n\| = 1, \qquad \lambda_1 = \lim_n < Au_n, u_n > = < Au_1, u_1 >.$$

Θέτουμε $S = \lambda_1 Id_H - A$. Τότε, $\forall\, x \in H$,

$$< Sx, x > = \lambda_1 \|x\|^2 - < Ax, x > \geq 0 \text{ και}$$

$$< Su_1, u_1 > = \lambda_1 \|u_1\|^2 - < Au_1, u_1 > = \lambda_1 (\|u_1\|^2 - 1) \leq 0.$$

Έστω $t > 0,\ h \in H$. Τότε,

$$0 \leq < S(u_1 + th), u_1 + th > =$$

$$= < Su_1, u_1 > + t^2 < Sh, h > + t < Su_1, h > + t < Sh, u_1 >$$

$$\leq t^2 < Sh, h > + 2t < Su_1, h >$$

(Υπενθυμίζουμε ότι ο S είναι αυτοσυζυγής και $< Su_1, u_1 > \leq 0$)

$$\Rightarrow 0 \leq t < Sh, h > + 2 < Su_1, h >, \qquad \forall\, t > 0.$$

Για $t \downarrow 0^+$, έχουμε $0 \leq < Su_1, h >,\ \forall\, h \in H$

$$\Rightarrow Su_1 = 0 \ \Rightarrow\ Au_1 = \lambda_1 u_1.$$

Επιπλέον,

$$\lambda_1 = < Au_1,\ u_1 > = \lambda_1 \|u_1\|^2 \ \Rightarrow\ \|u_1\| = 1. \qquad \blacksquare$$

Λήμμα III.9: Έστω $A \in L(H)$ αυτοσυζυγής και V γραμμικώς υπόχωρος του H έτσι ώστε $A(V) \subset V$. Τότε $A(V^\perp) \subset V^\perp$.

Απόδειξη: $\forall\, u \in V^\perp,\ \forall\, x \in V$, έχουμε $Ax \in V$ και

$$< Au, x > = < u, Ax > = 0. \qquad \blacksquare$$

Πρόταση III.10: Έστω $A \in L(H)$ συμπαγής αυτοσυζυγής και θετικός. Υποθέτουμε ότι $dimH = \infty$. Τότε,

(i) υπάρχει μία φθίνουσα ακολουθία θετικών ιδιοτιμών $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \cdots > 0$ (πιθανώς πεπερασμένη) και μία αντίστοιχη ορθοκανονική ακολουθία ιδιοδιανυσμάτων $u_1, u_2, u_3, \dots$ έτσι ώστε

- $\forall\, n \geq 1,\ Au_n = \lambda_n u_n,\ < Au_n, u_n >= \lambda_n$
- $\forall\, n \geq 2,\ \lambda_n = \max\{< Ax, x >:\ \|x\| = 1,\ x \in < u_1, \dots, u_{n-1} >^{\perp}\}$
- $\lambda_1 = \max\{< Ax, x >:\ \|x\| = 1\}$

(ii) $\sigma_p(A) = \{\lambda_n : n \geq 1\}$ και (u_n) μία ορθοκανονική βάση του H. Επιπλέον, $\lambda_n \downarrow 0$.

<u>Απόδειξη:</u> (i) Λόγω του Λήμματος ΙΙΙ.8, $\exists\, u_1 \in H$ τέτοιο ώστε

$$\|u_1\| = 1,\quad Au_1 = \lambda_1 u_1,\ \lambda_1 = < Au_1, u_1 > \text{ και}$$

$$\lambda_1 = \max\{< Ax, x >:\ \|x\| = 1\} > 0.$$

Τότε,

$$A([u_1]) \subset [u_1] \xRightarrow{\text{Λήμμα III.9}} A([u_1]^{\perp}) \subset [u_1]^{\perp}.$$

Εφαρμόζοντας το Λήμμα ΙΙΙ.8 στον τελεστή

$$A|[u_1]^{\perp} :\ [u_1]^{\perp} \to [u_1]^{\perp},$$

μπορούμε να βρούμε $u_2 \in [u_1]^{\perp}$ τέτοιο ώστε $\|u_2\| = 1$ και

$< Au_2, u_2 >= \lambda_2 = \max\{< Ax, x >:\ \|x\| = 1, x \in [u_1]^{\perp}\},\quad Au_2 = \lambda_2 u_2.$

Αλλά, $A([u_1, u_2]) \subset [u_1, u_2] \xRightarrow{\text{Λήμμα III.9}} A([u_1, u_2]^{\perp}) \subset [u_1, u_2]^{\perp}.$

Τότε, εφαρμόζουμε το Λήμμα ΙΙΙ.8 στον τελεστή

$$A|[u_1, u_2]^{\perp} :\ [u_1, u_2]^{\perp} \to [u_1, u_2]^{\perp}$$

και επιλέγουμε $u_3 \in [u_1, u_2]^{\perp}$ έτσι ώστε $\|u_3\| = 1$ και

$Au_3 = \lambda_3 u_3,\quad < Au_3, u_3 >= \lambda_3 = \max\{< Ax, x >:\ \|x\| = 1, x \in [u_1, u_2]^{\perp}\}.$

Συνεχίζουμε με αυτό τον τρόπο και επιλέγουμε επαγωγικά τις επιθυμητές ακολουθίες $(\lambda_n)_{n\geq 1}, (u_n)_{n\geq 1}$.

(ii) **<u>Ισχυρισμός 1</u>:** $\inf\limits_{n\geq 1} \lambda_n = 0$

[Υποθέτουμε το αντίθετο, δηλαδή $\inf\limits_{n\geq 1} \lambda_n = \varepsilon > 0$. Τότε,

$$[u_1, u_2, \dots, u_n, \dots] \subseteq \bigoplus_{n\geq 1} E_{\lambda_n} \subseteq \bigoplus_{\lambda \in \sigma_p^{\varepsilon}(A)} E_{\lambda}$$

$$\xRightarrow{\text{Πρόταση III.4}} \dim[u_1, u_2, \dots, u_n, \dots] < \infty$$

Άτοπο, διότι η (u_n) είναι ορθοκανονική ακολουθία και $dimH = \infty$].

Επειδή $(\lambda_n) \downarrow$ και $\inf_n \lambda_n = 0,$ τότε $\lambda_n \downarrow 0.$

Ισχυρισμός 2: $\overline{[u_1, u_2, \dots,]}^{\|\cdot\|} = H.$

Υποθέτουμε το αντίθετο $\Rightarrow\ \exists\, z \in H$ έτσι ώστε $\|z\| = 1$ και $z \in [u_1, u_2, \dots]^{\perp}$.

Τότε, $\forall\, n \geq 2,\ z \in [u_1, u_2, \dots, u_{n-1}]^{\perp}$, οπότε

$$< Az, z > \leq \lambda_n, \qquad \forall\, n \geq 2$$

$$\xRightarrow{\text{Ισχυρισμός 1}} < Az, z > = 0, \text{ άτοπο}$$

επειδή ο A είναι θετικός].

Ισχυρισμός 3: $\sigma_p(A) = \{\lambda_n : n \geq 1\}$

[Υποθέτουμε το αντίθετο, δηλαδή $\exists\, \lambda \in \sigma_\rho(A)$ με $\lambda \neq \lambda_n, \forall\, n \geq 1.$ Έστω $u \in E_\lambda$ με $\|u\| = 1.$ Λόγω της Πρότασης III.7(ii), $u \in [u_n : n \geq 1]^{\perp}$. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με τον Ισχυρισμό 2].

■

Πρόταση III.11: Για κάθε $n \geq 1$, θέτουμε

$$\mathcal{F}_n = \{F \text{ γραμμικός υπόχωρος του } H : dimF = n\}.$$

Τότε, $\forall\, n \geq 1$,

$$\lambda_n = \max_{F \in \mathcal{F}_n} \min\{< Ax, x > : x \in F, \|x\| = 1\}.$$

Θα χρειαστεί να αποδείξουμε το ακόλουθο Λήμμα.

Λήμμα III.12: Έστω V, F γραμμικοί υπόχωροι του H με $dimV = k < \infty$ και $dimF > k$. Τότε,

$$F \cap V^{\perp} \neq 0.$$

Απόδειξη: Υποθέτουμε $F \cap V^{\perp} = 0.$ Έστω $P : H \longrightarrow V$ προβολή. Τότε,

$$\ker(P|_F) = F \cap V^{\perp} = 0 \Rightarrow dimF \leq dimV = k,$$

άτοπο.

■

Απόδειξη της Πρότασης III.11: Έστω $n \geq 2$ και $F \in \mathcal{F}_n$. Επιλέγουμε

$$u \in F \cap [u_1, u_2, \dots, u_{n-1}]^{\perp} \text{ έτσι ώστε } \|u\| = 1 \text{ (Λήμμα III.12)}.$$

Τότε, $\min_{x \in F, \|x\|=1} < Ax, x > \leq < Au, u > \leq \lambda_n, \forall\, F \in \mathcal{F}_n$,

$$\Rightarrow \max_{F \in \mathcal{F}_n} \min_{x \in F, \|x\|=1} < Ax, x > \leq \lambda_n.$$

Τώρα, θέτουμε $F_n = [u_1, u_2, u_3, \dots, u_n] \in \mathcal{F}_n$.

Τότε $\forall\, x \in F_n$, με $\|x\| = 1$,

$$x = \sum_{j=1}^{n} < x, u_j > u_j\,, \qquad 1 = \|x\|^2 = \sum_{j=1}^{n} | < x, u_j > |^2$$

$$\Rightarrow < Ax, x > = < \sum_{j=1}^{n} < x, u_j > Au_j, x > =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j < x, u_j >^2 \geq \lambda_n \sum_{j=1}^{n} < x, u_j >^2 = \lambda_n$$

$$\Rightarrow \min_{x \in F, \|x\|=1} < Ax, x > \geq \lambda_n$$

$$\Rightarrow \max_{F \in \mathcal{F}_n} \min_{x \in F, \|x\|=1} < Ax, x > \geq \lambda_n.$$

Επιπλέον, έστω $x \in H$ με $\|x\| = 1$. Θέτουμε $F = [x]$ και έστω $z \in F$ με $\|z\| = 1$. Τότε,

$z = ax$ με $|a| = 1$ και $< Az, z > = a^2 < Ax, x > = < Ax, x >$.

Άρα, $\lambda_1 \leq \max_{F \in \mathcal{F}_1} \min_{x \in F, \|x\|=1} < Ax, x >$.

Τέλος, $\lambda_1 = \max < Ax, x >, \|x\| = 1$ με $\lambda_1 \leq \max_{F \in \mathcal{F}_1} \min_{x \in F, \|x\|=1} < Ax, x >$.

■

<u>Πόρισμα III.13:</u> Για κάθε $n \geq 2$,

$$\lambda_n = \max\{< Ax, x >: \|x\| = 1, x \in [u_1, \dots, u_{n-1}]^{\perp}\}$$
$$= \min\{< Ax, x >: \|x\| = 1, x \in [u_1, \dots, u_n]\}$$

με το μέγιστο και το ελάχιστο να επιτυγχάνονται μόνο στο E_{λ_n}.

Επιπλέον, $\lambda_1 = \max_{\|x\|=1,\ x \in F} < Ax, x >$ με το μέγιστο να επιτυγχάνεται μόνο στο E_{λ_1}.

<u>Απόδειξη:</u> Η έκφραση “max” έχει αναφερθεί στην Πρόταση III.10. Η έκφραση “min” προκύπτει από την απόδειξη της Πρότασης III.11. Το γεγονός ότι το “max” επιτυγχάνεται μόνο στο E_{λ_n} προκύπτει από την απόδειξη της Πρότασης III.10.

Απομένει να δείξουμε ότι το min της αποδεικτέας λαμβάνεται μόνο πάνω στον E_{λ_n}.

Έστω $z \in [u_1, u_2, \dots, u_n] = F_n$ με $\|z\| = 1$ τέτοιο ώστε

$$\lambda_n = < Az, z > = \min\{< Ax, x >: x \in F_n, \|x\| = 1\}.$$

Θέτω $S = A - \lambda_n I$. Τότε $\forall\, x \in F_n, < Sx, x > \geq 0$ και $< Sz, z > = 0$.

Επιλέγουμε $t > 0, h \in F_n$. Τότε για

$$x = z + th, \qquad 0 \leq < Sx, x > = < Sz + tSh, z + th >$$

$$= t^2 < Sh, h > +2t < Sz, h >$$

$$\Rightarrow 0 \leq t < Sh, h > \ + 2 < Sz, h >, \forall\, t > 0.$$

Για $t \downarrow 0^+, < Sz, h > = 0, \forall\, h \in F_n$

$$\Rightarrow Sz \in F_n^{\perp}, \text{όπου}$$

$$Sz \in S([u_1, u_2, \dots, u_n]) \subset [u_1, u_2, \dots, u_n] = F_n$$

(Υπενθυμίζουμε ότι $u_1, u_2, \dots, u_n$ είναι ιδιοδιανύσματα του A).

Επομένως, $Sz = 0 \Rightarrow Az = \lambda_n z \Rightarrow z \in E_{\lambda_n}$.

■

<u>Παρατήρηση III.14:</u> Οι εκφράσεις "max" και "min" στο Πόρισμα III.13 μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$\lambda_1 = \max_{|x|=1} < Ax, x >$$

$\forall\, n \geq 2$,

$$\lambda_n = \max\left\{< Ax, x >: \|x\| = 1, x \in \overline{\bigoplus_{j=n}^{\infty} E_{\lambda_j}}\right\}$$

$$= \max\left\{\frac{<Ax,x>}{|x|^2} : x \neq 0, x \in \overline{\bigoplus_{j=n}^{\infty} E_{\lambda_j}}\right\}$$

και

$$\lambda_n = \min\left\{< Ax, x >: \|x\| = 1, x \in \bigoplus_{j=1}^{n} E_{\lambda_j}\right\}$$

$$= \min\left\{\frac{<Ax,x>}{|x|^2} : x \neq 0, x \in \bigoplus_{j=1}^{n} E_{\lambda_j}\right\}.$$

<u>IV. Φασματικές ιδιότητες του διαφορικού τελεστή $-\Delta$ με συνοριακές συνθήκες τύπου Dirichlet.</u>.

Οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις των γραμμικών ελλειπτικών διαφορικών τελεστών 2ης τάξεως έχουν πολλές και σημαντικές ιδιότητες. Γενικά η βιβλιογραφία είναι πλούσια προς αυτή την κατεύθυνση. Ενδεικτικά αναφέρουμε τα συγγράμματα των Courant & Hilbert [3], [4], Di Benedetto [7], Evans [9], Jost [13], Protter & Weinberger[19] και Renardy & Rogers [22].

Εδώ θα αναφερθούν ορισμένες από αυτές, για την περίπτωση της αρνητικής Λαπλασιανής με Dirichlet συνοριακές συνθήκες.

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ ανοικτό, φραγμένο και συνεκτικό. Θεωρούμε το πρόβλημα ιδιοτιμών

$$P_\lambda : \begin{cases} -\Delta u(x) = \lambda u(x), & \text{σ.π. στο } \Omega \\ \qquad u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

<u>Ορισμός IV.1:</u> Ένας πραγματικός αριθμός $\lambda \epsilon \mathbb{R}$, τέτοιος ώστε το P_λ να έχει τουλάχιστον μία μη τετριμμένη ασθενή λύση $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, ονομάζεται *ιδιοτιμή του $-\Delta$ με συνοριακές συνθήκες Dirichlet* [$-\Delta^D$ για συντομία].

Εάν το $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι μία ιδιοτιμή του $-\Delta^D$ και $u \in W_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$ είναι μία ασθενής λύση του P_λ, τότε η u ονομάζεται λ *−ιδιοσυνάρτηση* του $-\Delta^D$.

<u>Πρόταση IV.2:</u> Όλες οι ιδιοτιμές του $-\Delta^D$ είναι μια αύξουσα ακολουθία θετικών αριθμών $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_k \leq \cdots$ τέτοια ώστε $\lambda_k \xrightarrow{k\to+\infty} +\infty$.

Επιπλέον, υπάρχει μία ορθοκανονική βάση του $H_0^1(\Omega)$

$$u_1, u_2, \dots, u_k, \dots$$

που ικανοποιεί τα ακόλουθα:

(i) $\forall\ k \geq 1$, $\eta\ u_k$ είναι $\lambda_k -$ ιδιοσυνάρτηση του $-\Delta^D$.

(ii) $\frac{1}{\lambda_1} = \max\left\{\int_\Omega u^2 : u \in H_0^1(\Omega),\ \|\nabla u\|_{L^2} = 1\right\}$,

$\frac{1}{\lambda_k} = \max\ \{\int_\Omega u^2 : u \in H_0^1(\Omega),\ \|\nabla u\|_{L^2} = 1, u \in [u_1, u_2, \dots, u_{k-1}]^\perp\},\ k \geq 2.$

Επιπρόσθετα, $\forall\ k \geq 1$, $\quad \frac{1}{\lambda_k} = \int_\Omega u_k^2$.

(iii) Για $k \geq 1$,

$$\frac{1}{\lambda_k} = \max_{F \in \mathcal{F}_k} \min\ \{\int_\Omega u^2 : u \in H_0^1(\Omega),\ \|\nabla u\|_{L^2} = 1, u \in F\},$$

όπου $\mathcal{F}_k = \{F < H_0^1(\Omega) : dimF = k\}$.

__Απόδειξη:__ Αρχικά υπενθυμίζουμε ότι ο χώρος Sobolev $H = H_0^1(\Omega)$ είναι χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο

$$< u, v > = \int_\Omega \big(\nabla u(x), \nabla v(x)\big)_{\mathbb{R}^N}\, dx\,, \qquad u, v \in H$$

και με αντίστοιχη νόρμα

$$\|u\|_H = \|\nabla u\|_{L^2} = \left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Επιπλέον, υπενθυμίζουμε ότι για κάθε $h \in L^2(\Omega)$, το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$(P_h) : \begin{cases} -\Delta u(x) = h(x), & \text{σ.π. στο } \Omega \\ \quad u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

έχει μία μοναδική (σχεδόν παντού) ασθενή λύση $u_h \in H_0^1(\Omega)$.

Ορίζεται ο τελεστής $T : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ με $T(h) = u_h$.

Είναι φανερό ότι ο T είναι γραμμικός.

__Ισχυρισμός 1:__ Ο T είναι συμπαγής.

[Πράγματι, έστω $(h_n) \subseteq L^2(\Omega)$ έτσι ώστε $h_n \xrightarrow{(w)} h$. Θέτουμε

$$u_n = T(h_n) = u_{h_n}, \qquad n \geq 1.$$

Τότε $\forall\, n \geq 1$, η u_n είναι μία ασθενής λύση του (P_{h_n}). Παίρνοντας την (u_n) ως μία δοκιμαστική συνάρτηση έχουμε

$$\|\nabla u_n\|_{L^2}^2 = \int_\Omega h_n u_n \leq \|h_n\|_{L^2}\, \|u_n\|_{L^2}.$$

Λόγω της ανισότητας Poincare και επειδή $\sup\limits_n \|h_n\|_2 < \infty$, έχουμε ότι η (u_n) είναι φραγμένη στο $H_0^1(\Omega)$. Περνώντας σε υπακολουθίες, μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$u_n \xrightarrow{(w)} u, \text{ στο } H_0^1(\Omega). \tag{18}$$

Από το Θεώρημα Ενσφήνωσης του Sobolev προκύπτει ότι

$$u_n \longrightarrow u, \text{ στο } L^2(\Omega). \tag{19}$$

Επιστρέφοντας στο πρόβλημα $(P_{h_n}), n \geq 1$ και χρησιμοποιώντας τις $u_n - u,\ n \geq 1$, ως δοκιμαστικές συναρτήσεις έχουμε

$$\int_\Omega (\nabla u_n, \nabla u_n - \nabla u) = \int_\Omega h_n(u_n - u) \xrightarrow{(19),\ n\to\infty} 0.$$

Επιπλέον,

$$\int_\Omega (\nabla u, \nabla u_n - \nabla u) \xrightarrow{(18),\ n\to\infty} 0.$$

Συνεπώς,

$$\|\nabla u_n - \nabla u\|_{L^2}^2 = \int_\Omega (\nabla u_n, \nabla u_n - \nabla u) - \int_\Omega (\nabla u, \nabla u_n - \nabla u) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Το τελευταίο σε συνδυασμό με τη σχέση (19) δείχνει ότι $u_n \to u$ ισχυρά στο $H_0^1(\Omega)$ και ολοκληρώνεται η απόδειξη του Ισχυρισμού 1].

Τώρα θέτουμε $A = T \circ e \colon H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$, όπου $e \colon H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ είναι ο τελεστής που ορίζεται ως εξής: $e(u) = u$, για κάθε $u \in H_0^1(\Omega)$. Ο e είναι συμπαγής λόγω του Θεωρήματος Ενσφήνωσης του Sobolev. Με βάση τον Ισχυρισμό 1 ο A είναι επίσης συμπαγής.

<u>Ισχυρισμός 2:</u> Ο A είναι αυτοσυζυγής και θετικός.

[Έστω $h_1, h_2 \in H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$. Θέτω $u_1 = Ah_1 = Th_1,\ u_2 = Ah_2 = Th_2$.

Από τον ορισμό του τελεστή T, οι u_1, u_2 είναι οι ασθενείς λύσεις των προβλημάτων συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} -\Delta u_1 = h_1 \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} -\Delta u_2 = h_2 \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases},$$

αντίστοιχα.

Παίρνοντας ως δοκιμαστική συνάρτηση την h_2 (αντίστοιχα την h_1), έχουμε

$$\int_\Omega (\nabla u_1, \nabla h_2) = \int_\Omega h_1 h_2$$

και

$$\int_\Omega (\nabla u_2, \nabla h_1) = \int_\Omega h_2 h_1.$$

Έπεται ότι

$$\int_\Omega (\nabla u_1, \nabla h_2) = \int_\Omega (\nabla u_2, \nabla h_1)$$

δηλαδή,

$$< Ah_1, h_2 > = < Ah_2, h_1 >.$$

Επομένως, ο A είναι συζυγής.

Επιπλέον, για κάθε $h \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$,

$$< Ah, h > = < h, h > = \int_\Omega (\nabla h, \nabla h) =$$

$$= \int_\Omega h\, h = \int_\Omega h^2 > 0.]$$

Στη συνέχεια, επιλέγουμε μία ιδιοτιμή λ του $(-\Delta^D)$ και $u \in H_0^1$ μία $\lambda -$ ιδιοσυνάρτηση. Τότε

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = \lambda u(x),\ \sigma.\pi. \text{στο } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}.$$

Παίρνοντας την u ως δοκιμαστική συνάρτηση, προκύπτει ότι

$$\|\nabla u\|_{L^2}^2 = \lambda \int_\Omega u^2$$

$$\overset{\neq 0}{\Rightarrow} \lambda > 0.$$

Επιπλέον, για κάθε $h \ \in H_0^1(\Omega)$ (παίρνοντας την h ως δοκιμαστική συνάρτηση), προκύπτει ότι

$$\int_\Omega \big(\nabla u(x), \nabla h(x)\big)_{\mathbb{R}^N} dx = \lambda \int_\Omega u(x)h(x)dx$$

$$\Leftrightarrow < u, h >_{H_0^1} = \lambda < Au, h >_{H_0^1}$$

$$\Leftrightarrow Au = \frac{1}{\lambda}\, u,$$

δηλαδή, το $\frac{1}{\lambda}$ είναι μία ιδιοτιμή του A και η u είναι $\frac{1}{\lambda}$ −ιδιοδιάνυσμα.

Τα παραπάνω σε συνδυασμό με τις Προτάσεις III.10, III.11 ολοκληρώνουν την απόδειξη της Πρότασης IV.2.

■

Πόρισμα IV.3: Οι ιδιοτιμές $\{\lambda_k\}_{k\geq 1}$ του $(-\Delta^D)$ δίνονται από τις ακόλουθες παραστάσεις:

(A)

$$\lambda_1 = \min\{\frac{\|\nabla u\|_{L^2}^2}{\int_\Omega u^2} : \ u \ \in H_0^1, u \neq 0\}$$

$$= min\ \{\ \|\nabla u\|_{L^2}^2 : u \ \in H_0^1, \textstyle\int_\Omega u^2 = 1\}$$

(Πηλίκο Rayleigh)

$$\lambda_k = \min\{\frac{\|\nabla u\|_{L^2}^2}{\int_\Omega u^2} : \ u \ \in H_0^1, u \ \in \ [u_1, u_2, \dots, u_{k-1}]^\perp\}$$

$$= \min\{\ \|\nabla u\|_{L^2}^2 \ : \ u \ \in \ [u_1, u_2, \dots, u_{k-1}]^\perp, \textstyle\int_\Omega u^2 = 1\},$$

για $k \geq 2$.

Με άλλα λόγια,

$$\lambda_k = \min\left\{\frac{\|\nabla u\|_{L^2}^2}{\int_\Omega u^2} : u \in \overline{\bigoplus_{J=k}^{\infty} E_J}\right\}, \qquad k \geq 2,$$

όπου $E_j = \lambda_j$ −ιδιοχώρος.

Τα παραπάνω "ελάχιστα" επιτυγχάνονται μόνο στους αντίστοιχους ιδιοχώρους.

Παράλληλα, $\lambda_k = \frac{1}{\int_\Omega u_k^2}$, $k \geq 1$.

(Β) Για $k \geq 1$,

$$\lambda_k = \max\left\{\frac{\|\nabla u\|_{L^2}^2}{\int_\Omega u^2} : u \in [u_1, u_2, \dots, u_k]\right\}$$

$$= \max\{\|\nabla u\|_{L^2}^2 : u \in [u_1, u_2, \dots, u_k], \int_\Omega u^2 = 1\}$$

$$= \max\{\frac{\|\nabla u\|_{L^2}^2}{\int_\Omega u^2} : u \in \bigoplus_{j=1}^{k} E_j\}$$

και τα "μέγιστα" επιτυγχάνονται μόνο στους αντίστοιχους ιδιοχώρους.

(Γ) Για $k \geq 1$,

$$\lambda_k = \min_{F \in \mathcal{F}_k} \max\left\{\frac{\|\nabla u\|_{L^2}^2}{\int_\Omega u^2} : u \in F \setminus \{0\}\right\}$$

$$= \min_{F \in \mathcal{F}_k} \max\left\{\|\nabla u\|_{L^2}^2 : u \in F, \int_\Omega u^2 = 1\right\},$$

όπου $\mathcal{F}_k = \{F < H_0^1(\Omega) : dimF = k\}$, $k \geq 1$.

<u>Πρόταση IV.4:</u> Έστω $u_0 \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i)Η u_0 είναι λ_1 −ιδιοσυνάρτηση του $(-\Delta^D)$.

(ii) $\|\nabla u_0\|_{L^2}^2 = \lambda_1 \int_\Omega u_0^2$.

<u>Απόδειξη:</u> <u>(i)→(ii)</u>. Προκύπτει άμεσα, παίρνοντας την u_0 ως δοκιμαστική συνάρτηση στο πρόβλημα

$$\begin{cases} -\Delta u_0 = \lambda_1 u_0 \\ u|_{\partial\Omega} = 0\,. \end{cases}$$

<u>(ii) →(i).</u> Θεωρούμε το C^1 −συναρτησιακό $\varphi\colon H_0^1 \to R$ με

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \frac{\lambda_1}{2}\int_\Omega u^2\,,\; u \in H_0^1\,.$$

Τότε, $\forall\, u, h \in H_0^1$,

$$< \varphi'(u), h > = \int_\Omega (\nabla u, \nabla h) - \lambda_1 \int_\Omega uh.$$

Λόγω του πηλίκου Rayleigh (Πόρισμα IV.3, (A)), έχουμε,

$$\varphi(u) \geq 0,\; \forall\, u \in H_0^1.$$

Αλλά $\varphi(u_0) = 0$, οπότε το u_0 είναι ολικό ελάχιστο του φ

$$\Rightarrow \varphi'(u_0) = 0$$

$$\Rightarrow \forall\, h \in H_0^1, \int_\Omega (\nabla u, \nabla h) = \lambda_1 \int_\Omega uh$$

$$\overset{u_0 \neq 0}{\Longrightarrow} u_0 \text{ είναι } \lambda_1 - \text{ιδιοσυνάρτηση.}$$ ■

<u>Πρόταση IV.5:</u> Κάθε ιδιοσυνάρτηση του $(-\Delta^D)$ ανήκει στο $C^\infty(\Omega)$.

Θα χρειαστούμε το ακόλουθο λήμμα.

<u>Λήμμα IV.6:</u> Έστω $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση τέτοια ώστε

$$\forall\; \omega \subset\subset \Omega, \qquad \forall\, m \geq 1, \qquad u \in W^{m,2}(\omega).$$

Τότε, $u \in C^\infty(\Omega)$.

<u>Απόδειξη:</u> Έστω $k \geq 1$. Επιλέγουμε ανοικτή μπάλα B με $B \subset \overline{B} \subset \Omega$ και $m > k + \frac{N}{2}$. Προφανώς το B είναι ανοικτό, φραγμένο με σύνορο κλάσης C^1, οπότε $u_{|_B} \in W^{m,2}(B) \subset C^k(B)$ (βλ. Θ. 0.2.6). Από την Πρόταση 0.1.2, προκύπτει ότι $u \in C^k(\Omega)$. Άρα,

$$u \in \bigcap_{k\geq 1} C^k(\Omega) = C^\infty(\Omega).$$

■

Απόδειξη της Πρότασης IV.5: Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ μία ιδιοτιμή και u μία λ −ιδιοσυνάρτηση του $-\Delta^D$. Τότε, $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ και u ασθενής λύση του Προβλήματος Συνοριακών Τιμών

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = \lambda u(x), & \text{σχεδόν παντού στο } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}.$$

Ισχρισμός: $\forall\, m \geq 1,\ \forall\, \omega \subset\subset \Omega, u \in W^{2m,2}(\omega)$.

Για να το αποδείξουμε, θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή.

- Για $m = 1$, ο ισχυρισμός ισχύει. Πράγματι, $u \in W^{1,2}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ και u είναι ασθενής λύση της Μερικής Διαφορικής Εξίσωσης
$$-\Delta u(x) = \lambda u(x), \text{σχεδόν παντού στο } \Omega.$$
Από τη Θεωρία Ομαλότητας (βλ. Θ.ΙΙ.1) έπεται ότι
$$u \in W^{2,2}(\omega), \qquad \forall\, \omega \subset\subset \Omega.$$
- Υποθέτουμε ότι ο ισχυρισμός ισχύει για $m \geq 1$. Έστω $\omega \subset\subset \Omega$. Επιλέγουμε ω' τέτοιο ώστε $\omega \subset\subset \omega' \subset\subset \Omega$. Έχουμε ότι
$$u|_{\omega'} \in W^{2m,2}(\omega')$$
(από επαγωγική υπόθεση) και u ασθενής λύση της Μερικής Διαφορικής Εξίσωσης $-\Delta u(x) = \lambda u(x)$, σχεδόν παντού στο ω'.

Πάλι από τη Θεωρία Ομαλότητας (βλ. Πόρισμα ΙΙ. 10) παίρνουμε ότι

$$u|_{\omega} \in W^{2m+2,2}(\omega)$$
$$\Rightarrow \text{ο ισχυρισμός ισχύει και για } m+1.$$

Τώρα, από τον ισχυρισμό συνεπάγεται ότι $\forall\, \omega \subset\subset \Omega$,

$$u \in \bigcap_{m \geq 1} W^{2m,2}(\omega) \subset \bigcap_{m \geq 1} W^{m,2}(\omega)$$

$$\xRightarrow{\text{Λήμμα } IV.6} u \in C^{\infty}(\Omega). \qquad \blacksquare$$

Για την συνέχεια, θα χρειαστούμε κάποια βασικά αποτελέσματα από τη θεωρία των χώρων Sobolev.

Σε ό,τι ακολουθεί, το $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ είναι ανοικτό, φραγμένο και συνεκτικό με σύνορο $\Gamma = \partial\Omega$ κλάσης C^1.

<u>Θεώρημα IV.7 (Θεώρημα Ίχνους):</u> Έστω σ το επιφανειακό μέτρο στο Γ. Τότε $\exists\ \gamma: W^{1,2}(\Omega) \to L^2(\Gamma)$ φραγμένος γραμμικός τελεστής τέτοιος ώστε

- $ker\gamma = W_0^{1,2}(\Omega)$
- $\forall\, u \in W^{1,2}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}),\ \ \gamma(u) = u|_\Gamma$.

<u>Πρόταση IV.8:</u> Έστω $f \in C^1(\mathbb{R})$ έτσι ώστε

$$f(0) = 0, \qquad f' \in L^\infty(\mathbb{R}).$$

Τότε για κάθε $u \in W^{1,2}(\Omega)$, έχουμε

$$f \circ u \in W^{1,2}(\Omega)$$

και για κάθε $1 \le i \le N$,

$$\partial_i(f \circ u)(x) = f'\big(u(x)\big)\partial_i u(x) \text{ σχεδόν παντού στο } \Omega.$$

<u>Απόδειξη:</u> Επειδή $f' \epsilon L^\infty(R)$, $\exists\, M > 0$ τέτοιο ώστε

$$\|f'\|_\infty = M, \qquad |f(t) - f(s)| \le M|t - s|, \qquad \forall\ t, s \in \mathrm{R}.$$

Έστω $u \in W^{1,2}(\Omega)$. Επιλέγουμε $(\varphi_n) \subset C^\infty(\Omega) \cap W^{1,2}(\Omega)$ έτσι ώστε

$$\varphi_n \xrightarrow{L^2} u, \quad \partial_i\varphi_n \xrightarrow{L^2} \partial_i u, \qquad 1 \le i \le N \ \ (\text{βλ. Θ. } 0.2.4)\,.$$

Σταθεροποιούμε $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$. Τότε για όλα τα n, i έχουμε

$$f \circ \varphi_n \in C_c^1(\Omega)$$

(υπενθυμίζουμε ότι $f(0) = 0$) και

$$\int_\Omega f(\varphi_n(x))\partial_i\psi(x)dx = -\int_\Omega \partial_i\big[f\big(\varphi_n(x)\big)\big]\psi(x)dx =$$

$$= -\int_\Omega f'\,\big(\varphi_n(x)\big)\partial_i\varphi_n(x)\psi(x)dx\,.$$

Περνώντας σε υπακολουθίες μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$\varphi_n(x) \longrightarrow u(x), \text{σχεδόν παντού στο } \Omega,$$

$$\partial_i \varphi_n(x) \to \partial_i u(x), \qquad \text{σχεδόν παντού στο } \Omega, \qquad 1 \leq i \leq N$$

και για κάποιο $w \in L_+^2(\Omega)$,

$$|\varphi_n(x)| \leq w(x), \qquad |\partial_i \varphi_n(x)| \leq w(x), \text{σχεδόν παντού στο } \Omega,$$

για όλα τα $n \geq 1$, $1 \leq i \leq N$.

Έχουμε

$$\left|f\big(\varphi_n(x)\big)\partial_i \psi(x)\right| \leq M|\varphi_n(x)||\partial_i \psi(x)|$$

$$\leq M\, w(x)|\partial_i \psi(x)|,$$

$$\left| f'\big(\varphi_n(x)\big)\partial_i \varphi_n(x)\psi(x)\right| \leq M|\partial_i \varphi_n(x)||\psi(x)|$$

$$\leq M w(x)|\psi(x)|,$$

για όλα τα $n \geq 1, 1 \leq i \leq N$ και σχεδόν για όλα τα $x \in \Omega$.

Επιπλέον,

$$f\big(\varphi_n(x)\big)\partial_i \psi(x) \to f\big(u(x)\big)\partial_i \psi(x), \text{σχεδόν παντού στο } \Omega,$$

$$f'\big(\varphi_n(x)\big)\partial_i \varphi_n(x)\psi(x) \to f'\big(u(x)\big)\partial_i u(x)\psi(x), \text{ σχεδόν παντού στο } \Omega,$$

για όλα τα $1 \leq i \leq N$.

Λόγω του Θεωρήματος της Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebesgue, προκύπτει ότι

$$\lim_n \int_\Omega f\big(\varphi_n(x)\big)\partial_i \psi(x)\, dx = \int_\Omega f\big(u(x)\big)\partial_i \psi(x)\, dx,$$

$$\lim_n \int_\Omega f'\big(\varphi_n(x)\big)\partial_i \varphi_n(x)\psi(x)\, dx = \int_\Omega f'\big(u(x)\big)\partial_i u(x)\psi(x)\, dx.$$

Επιπλέον,

$$\int_\Omega f\big(u(x)\big)\partial_i \psi(x)\, dx = -\int_\Omega f'\big(u(x)\big)\partial_i u(x)\psi(x) dx,$$

$1 \leq i \leq N$, για όλα τα $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$.

$\blacksquare$

<u>Πρόταση IV.9:</u> Για κάθε $u \in W^{1,2}(\Omega)$, έχουμε $u^{\pm} \in W^{1,2}(\Omega)$ και

$$\nabla u^{+} = \mathcal{X}_{\{u>0\}} \nabla u, \;\; \nabla u^{-} = -\mathcal{X}_{\{u<0\}} \nabla u.$$

Επιπλέον, οι απεικονίσεις $W^{1,2}(\Omega) \ni u \mapsto u^{\pm} \in W^{1,2}(\Omega)$ είναι συνεχείς.

<u>Απόδειξη:</u>

Για σταθερό $\varepsilon > 0$, ορίζουμε $f_\varepsilon : R \to R$,

$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} \sqrt{t^2+\varepsilon^2} - \varepsilon, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}.$$

Τότε,

$$f_\varepsilon \in C^1(R), \qquad f_\varepsilon(0) = 0,$$

$$|f_\varepsilon'| \leq 1, \qquad f_\varepsilon(t) \xrightarrow{\varepsilon\to 0^+} t^+ = \max\{t, 0\}.$$

Τότε, $f_\varepsilon\left(u(x)\right) \xrightarrow{\varepsilon\to 0^+} u^+(x)$, σχεδόν παντού στο Ω.

Επιπλέον,

$$f_\varepsilon'(t) \xrightarrow{\varepsilon\to 0^+} \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

Έτσι,

$$f_\varepsilon'(u(x)) \xrightarrow{\varepsilon\to 0^+} \mathcal{X}_{\{u>0\}}(x), \text{σχεδόν παντού στο } \Omega.$$

Σταθεροποιούμε $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, $\varepsilon > 0$, $1 \leq i \leq N$.

Η Πρόταση IV.8 εξασφαλίζει ότι $f_\varepsilon \circ u \in W^{1,2}(\Omega)$ και

$$\int_\Omega f_\varepsilon\big(u(x)\big)\partial_i\varphi(x)dx = -\int_\Omega f_\varepsilon'\big(u(x)\big)\partial_i u(x)\varphi(x)dx\,.$$

Επιπλέον, για σχεδόν όλα τα $x \in \Omega$,

$$\left|f_\varepsilon\big(u(x)\big)\partial_i\varphi(x)\right| \le |u(x)|\,|\partial_i\varphi(x)|,$$

$$\left|f_\varepsilon'\big(u(x)\big)\partial_i u(x)\varphi(x)\right| \le |\partial_i u(x)|\,|\varphi(x)|.$$

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα της Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebesgue συμπεραίνουμε

$$\int_\Omega u^+(x)\,\partial_i\varphi(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\Omega f_\varepsilon\big(u(x)\big)\partial_i\varphi(x)dx =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\Omega f_\varepsilon'\big(u(x)\big)\partial_i u(x)\varphi(x)dx =$$

$$= -\int_\Omega \mathcal{X}_{\{u>0\}}(x)\,\partial_i u(x)\varphi(x)dx$$

$$\Rightarrow u^+ \in W^{1,2}(\Omega)$$

και

$$\partial_i u^+ = \mathcal{X}_{\{u>0\}}\partial_i u$$

$\Rightarrow$ για σχεδόν όλα τα $x \in \Omega$,

$$\partial_i u^+(x) = \begin{cases} \partial_i u(x), & u(x) > 0 \\ 0, & u(x) \le 0 \end{cases}.$$

Τέλος, έστω $(u_n) \subset \mathrm{W}^{1,2}(\Omega),\ u \in W^{1,2}(\Omega)$ ώστε

$$u_n \xrightarrow{L^2(\Omega)} u, \qquad \nabla u_n \xrightarrow{L^2(\Omega,\mathbb{R}^N)} \nabla u.$$

Περνώντας σε υπακολουθίες μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$u_n(x) \longrightarrow u(x), \qquad \nabla u_n(x) \longrightarrow \nabla u(x), \qquad \sigma.\pi.\ \sigma\tau o\ \Omega$$

και ότι για κάποια $w \in L^2_+(\Omega)$,

$$|u_n(x)| \le w(x), \qquad |\nabla u_n(x)| \le w(x), \qquad n \ge 1, \qquad \sigma.\pi.\sigma\tau o\,\Omega.$$

Διαπιστώνεται εύκολα ότι

$$u_n^+(x) \longrightarrow u^+(x),\ \nabla u_n^+(x) \longrightarrow \nabla u^+(x),\ \sigma.\pi.\ \sigma\tau o\ \Omega.$$

[Για τη δεύτερη σύγκλιση χρησιμοποιούμε τις ισότητες

$$\nabla u_n^+ = \nabla u_n\,\mathcal{X}_{\{u>0\}}\,, \qquad \nabla u^+ = \nabla u\,\mathcal{X}_{\{u>0\}}\,.\ ]$$

Επιπλέον,

$$
\begin{aligned}
|u_n^+(x) - u^+(x)|^2 &\leq |u_n(x) - u(x)|^2 \\
&\leq 2\,|u_n(x)|^2 + 2\,|u(x)|^2 \\
&\leq 4\,w(x)^2\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|\nabla u_n^+(x) - \nabla u^+(x)|^2 &\leq 2\,|\nabla u_n^+(x)|^2 + 2\,|\nabla u^+(x)|^2 \\
&\leq 2\,|\nabla u_n(x)|^2 + 2\,|\nabla u(x)|^2 \\
&\leq 4\,w(x)^2\,,
\end{aligned}
$$

$\forall\, n \geq 1,\ \ \sigma.\pi.\ \ \sigma\tau o\ \ \Omega.$

Η απόδειξη ολοκληρώνεται με χρήση του Θεωρήματος Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebesgue. ■

<u>Πρόταση IV.10:</u> $\gamma(u^{\pm}) = [\gamma(u)]^{\pm}$.

<u>Απόδειξη:</u> Αρχικά παρατηρούμε ότι $\forall\, \varphi \in C\,(\bar{\Omega})$,

$$\gamma(\varphi^{\pm}) = \varphi^{\pm}|_{\Gamma} = (\varphi|_{\Gamma})^{\pm} = \big(\gamma(\varphi)\big)^{\pm}.$$

Στη συνέχεια, έστω $u \in W^{1,2}(\Omega)$. Επιλέγουμε $(\varphi_n) \subset C^{\infty}(\bar{\Omega})$ ώστε

$$\varphi_n \to u, \text{ στον } W^{1,2}(\Omega).$$

Λόγω της Πρότασης IV.9, έχουμε ότι και

$$\varphi_n^{\pm} \to u^{\pm}, \text{ στον } W^{1,2}(\Omega).$$

Επειδή ο τελεστής ίχνους

$$\gamma\colon W^{1,2}(\Omega) \to L^2(\Gamma)$$

είναι συνεχής, παίρνουμε ότι

$$\gamma(\varphi_n) \to \gamma(u),\ \ \gamma(\varphi_n^{\pm}) \to \gamma(u^{\pm}) \quad \sigma\tau o\nu \quad L^2(\Gamma),$$

ενώ

$$\gamma(\varphi_n^{\pm}) = \big(\gamma(\varphi_n)\big)^{\pm} \to \big(\gamma(u)\big)^{\pm} \quad \text{στον} \quad L^2(\Gamma).$$

Έπεται άμεσα ότι $\gamma(u^{\pm}) = \big(\gamma(u)\big)^{\pm}$. ■

<u>Πόρισμα IV.11:</u> Εάν $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, τότε $u^{\pm} \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

<u>Απόδειξη</u>: Από τις Πρότασεις IV.9, IV.10 παίρνουμε $u^{\pm} \in W^{1,2}(\Omega)$ και

$$\gamma(u^{\pm}) = \big(\gamma(u)\big)^{\pm} = 0^+ = 0.$$ ■

<u>Πρόταση IV.12:</u> Κάθε πρωταρχική ιδιοσυνάρτηση του $-\Delta^D$ έχει σταθερό πρόσημο, δηλαδή, εάν u είναι μία λ_1 −ιδιοσυνάρτηση του $-\Delta^D$ τότε

$$\text{είτε} \quad u(x) > 0, \ \forall\, x \in \Omega \qquad \text{είτε} \quad u(x) < 0, \ \forall\, x \in \Omega.$$

<u>Απόδειξη:</u> Έστω u μία λ_1 −ιδιοσυνάρτηση του $-\Delta^D$. Γνωρίζουμε ότι $u \in C^{\infty}(\Omega)$ (βλ. Πρόταση IV.5). Υποθέτουμε ότι η u δεν έχει σταθερό πρόσημο. Τότε,

$$u^+ \not\equiv 0, \qquad u^- \not\equiv 0.$$

Λόγω του Πορίσματος IV.3, ισχύει

$$\lambda_1 = \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_2^2}.$$

Αλλά, λόγω της Πρότασης IV.9, έχουμε ότι

$$\|\nabla u\|_2^2 = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 = \int_{\{u>0\}} |\nabla u|^2 + \int_{\{u\le 0\}} |\nabla u|^2$$

$$= \int_{\Omega} |\nabla u^+|^2 + \int_{\Omega} |\nabla u^-|^2$$

$$= \|\nabla u^+\|_2^2 + \|\nabla u^-\|_2^2 \ ,$$

ενώ

$$\|u\|_2^2 = \int_{\Omega} |u|^2 = \int_{u>0} |u|^2 + \int_{u\le 0} |u|^2$$

$$= \int_\Omega (u^+)^2 \ + \ \int_\Omega (u^-)^2$$

$$= \|u^+\|_2^2 + \|u^-\|_2^2 \ .$$

Επομένως,

$$\lambda_1 = \frac{\|\nabla u^+\|_2^2 + \|\nabla u^-\|_2^2}{\|u^+\|_2^2 + \|u^-\|_2^2}$$

$$\Rightarrow (\|\nabla u^+\|_2^2 - \lambda_1 \|u^+\|_2^2) + (\|\nabla u^-\|_2^2 - \lambda_1 \|u^-\|_2^2) = 0.$$

Λόγω του Πορίσματος IV.3, κάθε όρος στις παρενθέσεις είναι μη αρνητικός, οπότε

$$\|\nabla u^+\|_2^2 = \lambda_1 \|u^+\|_2^2 \ , \qquad \|\nabla u^-\|_2^2 = \lambda_1 \|u^-\|_2^2.$$

Ταυτόχρονα, $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, οπότε από το Πόρισμα IV.11 προκύπτει ότι

$$u^\pm \in W_0^{1,2}(\Omega)\setminus\{0\}.$$

Από τις Προτάσεις IV.4, IV.5 έπεται ότι οι συναρτήσεις $u^\pm$ είναι $\lambda_1 -$ ιδιοσυναρτήσεις του $-\Delta^D$ και ότι $u^\pm \in C^\infty(\Omega)$. Τώρα έχουμε ότι

$$-\Delta u^+(x) = \lambda_1 u^+(x), \ -\Delta u^-(x) = \lambda_1 u^-(x), \ \ \forall\, x \in \Omega$$

$$\Rightarrow \ \Delta u^\pm \leq 0, \ \text{στο}\ \Omega\,, \ \ u^\pm \not\equiv 0, \ \ u^\pm \geq 0.$$

Θέτουμε $\varphi = -u^\pm \in C^\infty(\Omega)$. Τότε,

$$-\Delta\varphi \leq 0, \quad \varphi \not\equiv 0, \quad \varphi \leq 0 \quad \text{στο} \quad \Omega.$$

Η Ισχυρή Αρχή Μεγίστου (βλ. Πόρισμα I.9) δίνει

$$\varphi < 0 \ \text{ στο } \ \Omega \ \Rightarrow \ u^\pm > 0, \text{στο } \ \Omega\,,$$

$$\Rightarrow u > 0 \text{ και } u < 0 \text{ στο } \Omega\,,$$

Άτοπο!

Επομένως,

$$u^+ \equiv 0 \quad \text{ή} \quad u^- \equiv 0$$

$$\Rightarrow \text{είτε} \quad u \leq 0, \qquad \text{στο} \quad \Omega \quad \text{είτε} \quad u \geq 0 \quad \text{στο} \quad \Omega.$$

- Εάν $u \leq 0$, στο Ω τότε

$$-\Delta u = \lambda u \leq 0, \qquad u \not\equiv 0, \qquad \text{στο } \Omega,$$

οπότε η Ισχυρή Αρχή Μεγίστου δίνει

$$u < 0, \ \text{στο } \Omega.$$

- Εάν $u \geq 0$, στο Ω, τότε για $\varphi = -u$, έχουμε

$$-\Delta\varphi = \Delta u = -\lambda u = \lambda\varphi \leq 0, \ \text{στο } \Omega,$$

$$\varphi \not\equiv 0, \ \varphi \leq 0, \ \text{στο } \Omega,$$

οπότε η Ισχυρή Αρχή Μεγίστου δίνει

$$\varphi < 0 \quad \text{στο } \Omega$$

$$\Rightarrow u > 0, \ \text{στο } \Omega. \qquad \blacksquare$$

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι το Ω είναι ανοικτό, φραγμένο και συνεκτικό με σύνορο $\partial\Omega$ κλάσης C^2.

<u>Πρόταση IV.13:</u> Κάθε μη πρωταρχική ιδιοσυνάρτηση του $-\Delta^D$ έχει μεταβλητό πρόσημο.

Θα χρειαστεί να αποδείξουμε το ακόλουθο Λήμμα.

<u>Λήμμα IV.14 (Ταυτότητα Picone):</u>

Έστω $\varphi,\ \psi \in C^1(\Omega)$ έτσι ώστε $\varphi \geq 0$, $\psi > 0$, στο Ω. Θέτουμε

$$L(\varphi,\psi) = |\nabla\varphi|^2 + \frac{\varphi^2}{\psi^2}\,|\nabla\psi|^2 - 2\frac{\varphi}{\psi}\,(\nabla\varphi,\nabla\psi),$$

$$R(\varphi,\psi) = |\nabla\varphi|^2 - \left(\nabla\left(\frac{\varphi^2}{\psi}\right),\nabla\psi\right).$$

Τότε $R(\varphi,\psi) = L(\varphi,\psi) \geq 0$, στο Ω.

Επιπλέον, εάν $R(\varphi,\psi) = 0$, στο Ω, τότε $\exists\, c \in \mathbb{R}$ ώστε $\varphi = c\psi$.

<u>Απόδειξη:</u> $\forall\, x \in \Omega$,

$$0 \ \leq \ |\psi(x)\nabla\varphi(x) - \varphi(x)\nabla\psi(x)|^2 =$$

$$= \psi(x)^2\,|\nabla\varphi(x)|^2 + \varphi(x)^2|\nabla\psi(x)|^2 - 2\varphi(x)\psi(x)\big(\nabla\varphi(x),\nabla\psi(x)\big)$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq \frac{|\psi(x)\nabla\varphi(x) - \varphi(x)\nabla\psi(x)|^2}{\psi(x)^2} =$$

$$= |\nabla\varphi(x)|^2 + \frac{\varphi(x)^2}{\psi(x)} |\nabla\psi(x)|^2 - 2\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \big(\nabla\varphi(x), \nabla\psi(x)\big) = L\,(\varphi,\psi)(x)$$

$$\Rightarrow L(\varphi,\psi) \geq 0, \ \text{ στο } \ \Omega.$$

Εάν $L(\varphi,\psi) = 0$, στο Ω, τότε

$$\psi\nabla\varphi - \varphi\nabla\psi = 0 \quad \text{ στο } \ \Omega$$

$$\Rightarrow \quad \nabla\left(\frac{\varphi}{\psi}\right) = 0, \text{στο } \ \Omega$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\varphi}{\psi} = c \ \in \ \mathbb{R}, \ \text{ στο } \ \Omega.$$

(Σημ. ότι το Ω είναι ανοικτό και συνεκτικό).

Επιπλέον, $\forall\, x \ \in \ \Omega$,

$$\nabla\left(\frac{\varphi^2}{\psi}\right)(x) = \frac{2\varphi(x)\psi(x)\nabla\varphi(x) - \varphi(x)^2\nabla\psi(x)}{\psi(x)^2}$$

$$= 2\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\ \nabla\varphi(x) - \frac{\varphi(x)^2}{\psi(x)^2}\ \nabla\psi(x)$$

$$\Rightarrow \quad R(\varphi,\psi)(x) = |\nabla\varphi(x)|^2 - 2\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \big(\nabla\varphi(x), \nabla\psi(x)\big) + \frac{\varphi(x)^2}{\psi(x)^2}\ |\nabla\psi(x)|^2$$

$$= L(\varphi,\psi)(x). \qquad \blacksquare$$

<u>Απόδειξη της Πρότασης IV.13:</u> Επειδή το $\partial\Omega$ είναι κλάσης C^2, η θεωρία ομαλότητας πάνω στο σύνορο (βλ. Θ.II.11) σε συνδυασμό με την Πρόταση IV.5, μας εξασφαλίζουν ότι όλες οι ιδιοσυναρτήσεις του $-\Delta^D$ ανήκουν στο σύνολο

$$C^\infty(\Omega) \cap C_0^1(\bar{\Omega}),$$

όπου

$$C_0^1(\bar{\Omega}) = \{\, u \ \in \ C^1(\bar{\Omega}) \colon \ u|\partial\Omega = 0 \,\}.$$

Συνεπώς, λόγω της Πρότασης IV.12, μπορούμε να βρούμε μία λ_1 −ιδιοσυνάρτηση $u_1 \in C^\infty(\Omega) \cap C_0^1(\bar{\Omega})$ του $-\Delta^D$, ώστε $u_1(x) > 0,\ \forall\, x \in \Omega$.

Διαιρώντας με $\|\nabla u_1\|_2$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|\nabla u_1\|_2 = 1$.

Στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι υπάρχει λ −ιδιοσυνάρτηση u του $-\Delta^D$ τέτοια ώστε

$$\lambda > \lambda_1, \qquad u(x) > 0, \qquad \forall\, x \in \Omega.$$

Μπορούμε πάλι να υποθέσουμε ότι $\|\nabla u\|_2 = 1$.

Η u είναι ασθενής λύση του Προβλήματος Συνοριακών Τιμών

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = \lambda u(x), & \sigma.\pi.\ \text{στο}\ \Omega \\ \qquad u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

δηλαδή $\forall\ h \in H_0^1(\Omega)$, ισχύει

$$\int_\Omega \big(\nabla u(x), \nabla h(x)\big)dx = \lambda \int_\Omega u(x)h(x)dx \ \ (*)$$

Θέτουμε $h = \frac{u_1^2}{u}$. Τότε, $h \in C^1(\bar{\Omega})$ και $h|_{\partial\Omega} = 0 \ \Rightarrow\ h \in H_0^1(\Omega)$. Εφαρμόζοντας την (*) για $h = \frac{u_1^2}{u}$, παίρνουμε

$$\int_\Omega \left(\nabla u(x), \nabla\left(\frac{u_1^2}{u}\right)(x)\right)dx = \lambda \int_\Omega u_1(x)^2 dx.$$

Επειδή η u_1 είναι λ_1 −ιδιοσυνάρτηση, έχουμε ότι

$$1 = \|\nabla u_1\|_2^2 = \lambda_1 \|\nabla u_1\|_2^2 \ \ \Rightarrow \int_\Omega u_1(x)^2 dx = \frac{1}{\lambda_1}$$

$$\Rightarrow \int_\Omega \left(\nabla u, \nabla\left(\frac{u_1^2}{u}\right)\right)dx = \frac{\lambda}{\lambda_1}.$$

Ταυτόχρονα, λόγω του Λήμματος IV. 14,

$$\int_\Omega \left(\nabla u, \nabla\left(\frac{u_1^2}{u}\right)\right)dx \leq \int_\Omega |\nabla u|^2 = \|\nabla u\|_2^2 = 1.$$

Συνεπώς, $\frac{\lambda}{\lambda_1} \leq 1$ (άτοπο!)

Επομένως, δεν υπάρχει μη πρωταρχική ιδιοσυνάρτηση του $-\Delta^D$ με σταθερό πρόσημο. ■

Σχόλιο: Από την Πρόταση IV. 13 προκύπτει ότι εάν u μη πρωταρχική ιδιοσυνάρτηση του $-\Delta^D$, τότε το σύνολο $\{x \in \Omega: u(x) \neq 0\}$ έχει 2 τουλάχιστον συνεκτικές συνιστώσες, π.χ. τα σύνολα $\{x \in \Omega: u(x) > 0\}$, $\{x \in \Omega: u(x) < 0\}$.

Ορισμός IV. 15: Έστω u ιδιοσυνάρτηση του $-\Delta^D$. Κάθε συνεκτική συνιστώσα του συνόλου $\{x \in \Omega: u(x) \neq 0\}$ λέγεται **nodal domain** της u.

Από το παραπάνω σχόλιο προκύπτει ότι κάθε μη πρωταρχική ιδιοσυνάρτηση του $-\Delta^D$ έχει 2 τουλάχιστον nodal domains. Στην πραγματικότητα, έχουμε το παρακάτω αποτέλεσμα του Courant[3]:

Θεώρημα IV. 16: Κάθε λ_n – ιδιοσυνάρτηση του $-\Delta^D$ $(n \geq 1)$ έχει το πολύ n στο πλήθος nodal domains.

Η απόδειξη του Θ.IV.16, βασίζεται σε μια άλλη εξαιρετικά σημαντική ιδιότητα των ιδιοσυναρτήσεων $-\Delta^D$ που είναι γνωστή στη βιβλιογραφία ως **Unique Continuation Property** (παρατίθεται χωρίς απόδειξη, βλ. π.χ. De Figueiredo – Gossez[5]):

Θεώρημα IV. 17: Εάν u ιδιοσυνάρτηση του $-\Delta^D$, τότε το σύνολο $\{x \in \Omega: u(x) = 0\}$ έχει κενό εσωτερικό.

Απόδειξη του Θ. IV.16: Έστω u λ_n – ιδιοσυνάρτηση του $-\Delta^D$ $(n \geq 1)$ και ας υποθέσουμε αντιθέτως ότι έχει $n+1$ στο πλήθος (διαφορετικές μεταξύ τους) nodal domains Ω_1, Ω_2, $\ldots, \Omega_n, \Omega_{n+1}$. Τα σύνολα αυτά, ως συνεκτικές συνιστώσες, θα είναι ξένα ανά δύο.

Για κάθε $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, θέτουμε $\psi_j = u\mathcal{X}_{\Omega_j}$. Τότε, $\psi_j \in H_0^1(\Omega)$ και $\nabla\psi_j = (\nabla u)\mathcal{X}_{\Omega_j}$, $j = 1,2, \ldots, n$. Επιπλέον, αποδεικνύεται εύκολα ότι για κάθε $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, η ψ_j είναι λ_n – ιδιοσυνάρτηση του $-\Delta^D$ και συνεπώς

$$\left\|\nabla\psi_j\right\|_2^{\,2} = \lambda_n \left\|\psi_j\right\|_2^{\,2} .$$

Επειδή τα σύνολα $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n, \Omega_{n+1}$ είναι ξένα ανά δύο, έχουμε ότι

$$\int_{\Omega} (\nabla\psi_i(x), \nabla\psi_j(x))\, dx = \int_{\Omega} \psi_i(x)\psi_j(x)\, dx = 0, \qquad \text{για όλα τα } i,j \text{ με } i \neq j.$$

Συνεπώς, για όλα τα $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$\|\sum_{j=1}^{n} a_j \nabla\psi_j\|_2^2 = \sum_{j=1}^{n} a_j^2 \left\|\nabla\psi_j\right\|_2^2 = \lambda_n \sum_{j=1}^{n} a_j^2 \left\|\psi_j\right\|_2^2 = \lambda_n \|\sum_{j=1}^{n} a_j \psi_j\|_2^2 .$$

Έστω $u_1, u_2, \dots$, ορθοκανονική βάση του $H_0^1(\Omega)$ αποτελούμενη από ιδιοσυναρτήσεις του $-\Delta^D$. Θεωρούμε το παρακάτω ομογενές γραμμικό σύστημα με αγνώστους $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ που αποτελείται από $n-1$ εξισώσεις:

$$\sum_{j=1}^{n} < \psi_j , u_i > a_j = 0, \quad 1 \leq i \leq n-1 ,$$

όπου $< \psi_j, \ u_i > = \int_{\Omega} (\nabla\psi_j(x), \nabla u_i(x))\, dx$.

Επειδή στο παραπάνω ομογενές γραμμικό σύστημα το πλήθος των αγνώστων είναι μεγαλύτερο από το πλήθος των εξισώσεων, το σύστημα θα έχει *μη μηδενική λύση* $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Θέτουμε

$$w = \sum_{j=1}^{n} a_j \psi_j .$$

Τότε, $w \neq 0$, $< w, \ u_i > = 0$, $1 \leq i \leq n-1$ και $\left\|\nabla w\right\|_2^2 = \lambda_n \left\|w\right\|_2^2$.

Από την Πρόταση IV.3 (A) έπεται ότι η w είναι ιδιοσυνάρτηση του $-\Delta^D$. Αλλά $w(x) = 0$, $\forall\, x \in \Omega_{n+1}$, γεγονός που αντίκειται στην Unique Continuation Property (Θ. IV. 17). ■

Κλείνουμε με ένα αποτέλεσμα που αφορά στη διάσταση του πρωταρχικού ιδιόχωρου του $-\Delta^D$.

<u>Πρόταση IV.18:</u> Η πρωταρχική ιδιοτιμή λ_1 του $-\Delta^D$ είναι απλή, δηλαδή ο αντίστοιχος ιδιόχωρος είναι μονοδιάστατος.

<u>Απόδειξη:</u> Επιλέγουμε μια λ_1 −ιδιοσυνάρτηση u_1 του $-\Delta^D$ τέτοια ώστε

$$u \in C_0^1(\bar{\Omega}), \ u > 0, \ \text{στο } \Omega, \quad \|\nabla u\|_2 = 1.$$

Επιπλέον, έστω w μια τυχαία λ_1 −ιδιοσυνάρτηση του $-\Delta^D$. Λόγω της Πρότασης IV.12 και της θεωρίας ομαλότητας στο σύνορο (βλ. Θ.ΙΙ.11), μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$w \in C_0^1(\bar{\Omega}), \quad w > 0, \text{ στο } \Omega.$$

Επιπλέον, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|\nabla w\|_2 = 1$.

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση ${w^2}/{u_1} \in C_0^1(\bar{\Omega}) \subset H_0^1(\Omega)$ ως δοκιμαστική συνάρτηση στο Πρόβλημα Συνοριακών Τιμών

$$\begin{cases} -\Delta u_1(x) = \lambda u_1(x), & \sigma.\pi. \text{ στο } \Omega \\ \quad u_1|_{\partial\Omega} = 0 & \end{cases}$$

συμπεραίνουμε ότι

$$\int_\Omega \left(\nabla u_1, \nabla\left(\frac{w^2}{u_1}\right)\right) = \lambda_1 \int_\Omega w^2 = \|\nabla w\|_2^2$$

$$\Rightarrow \int_\Omega R(w, u_1)(x)dx = 0$$

(βλ. Λήμμα IV.14).

Αλλά $R(w, u_1) \geq 0$, στο Ω, οπότε $R(w, u_1) = 0$, στο Ω κι επομένως

$\exists\, c \in \mathbb{R}$ ώστε $w = c\, u_1$, στο Ω (βλ. Λήμμα IV.14).

Συνεπώς, ο λ_1 −ιδιοχώρος ισούται με $[u_1]$ και άρα είναι μονοδιάστατος. ■

Βιβλιογραφία

1. Brezis, H: Συναρτησιακή ανάλυση, Θεωρία και Εφαρμογές, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π. (1997).

2. Caffarelli, L.: Interior a priori estimates for solutions of fully nonlinear equations, *Ann. of Math. 130* (1989), 189-213.

3. Courant, R., Hilbert, D.: Methods of Mathematical Physics, vol. I. Interscience Publishers, New York (1953).

4. Courant, R. & Hilbert, D.: Methods of Mathematical Physics, vol. II, Wiley,New York(1989).

5. De Figueiredo, D.G. and Gossez, J.-P.: Strict monotonicity of eigenvalues and unique continuation, *Comm. Partial Differential Equations 17* (1992), no. 1-2, 339–346.

6. Di Benedetto, E.: C^{1+a} -local regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations. *Nonlin. Anal*. **7** (1983) , 827–850.

7. Di Benedetto, E. : Partial Differential Equations, BirkhÄauser Verlag, Boston, MA (1995).

8. Evans,L: Classical solutions of fully nonlinear, convex, second-order elliptic equations, *Comm. Pure Appl. Math*. 35 (1982), 333-363.

9. Evans,L.: Partial Differential Equations, Vol. 9 of Graduate Studies in Math, AMS, Providence, RI (1998).

10. Gasinski, L. and Papageorgiou, N.S.: Nonlinear Analysis, Chapman Hall/CRC, Boca Raton (2006).

11. Gilbarg, D., Trudinger, N.S.: Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Springer, Berlin (2001).

12. Hopf,E.: Elementare Bemerkungen uber die Losungen partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus, *Sitzungsberichte Preussische Akademie der Wissenschaften*, Berlin (1927), 147–152.

13. Jost, J. : Partial Differential Equations, Vol. 214 of Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York (2002).

14. Krylov, N.V.: Lectures on Elliptic and Parabolic Equations in Sobolev spaces, Graduate Texts in Mathematics 96, American Math. Soc. (1996)

15. Ladyzhenskaya, O.A., Uratseva, N.N.: Linear and Quasilinear Elliptic Equations. Academic, New York (1968).

16. Lieberman, G.M.: Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic equations. *Nonlin. Anal*. **12** (1988), 1203–1219.

17. Motreanu, D., Motreanu, V. and Papageorgiou, N.S.: Topological and Variational Methods with Applications to Nonlinear Boundary Value Problems, Springer (2014).

18. Nirenberg, L.: On nonlinear elliptic Partial Differential Equations and Holder continuity, *Comm. Pure Appl. Math*. 6 (1953), 103-156.

19. Protter, M. & Weinberger, H. : Minimax Principles in Differential Equations, Prentice Hall, New York (1967).

20. Pucci, C.: Maggiorazione della soluzione di un problema al contorno di tipo misto, relativo a una equazione a derivate parziale, lineare, del secondo ordere, *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.* (1952).

21. Pucci, P., Serrin, J.: The Maximum Principle, Birkhäuser, Basel (2007).

22. Renardy, M. & Rogers, R. : A First Graduate Course in Partial Differential Equations, Springer-Verlag, New York (1993).

23. Serrin, J.: On the strong maximum principle for quasilinear second order differential inequalities, *J. Functional Anal.*, **5** (1970), 184–193.

24. Tolksdorf, P.: Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations, *J. Differ. Equat.* **51** (1984), 126–150.

25. Vázquez, J. L.: A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations, *Appl. Math. Optim.* **12** (1984), 191–202.