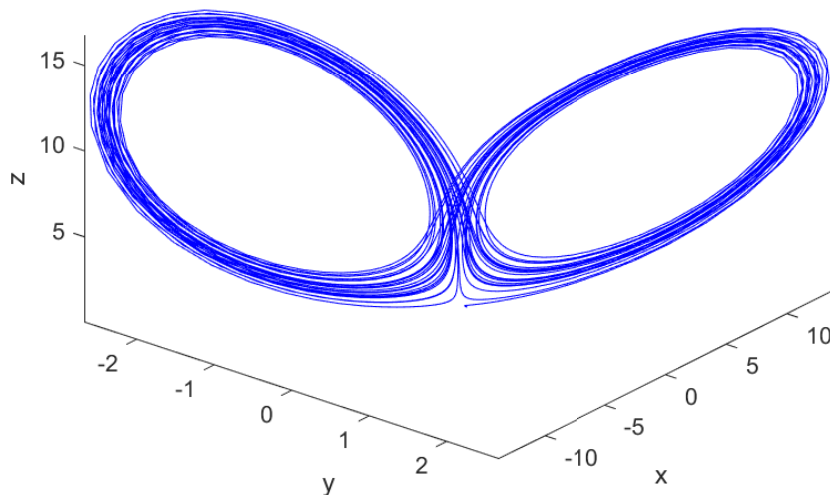




**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**

**Αναλυτική και Αριθμητική Μελέτη της Χαοτικής Δυναμικής Συμπεριφοράς
Βιολογικού Μοντέλου για την Περιγραφή της Μετακίνησης της Πρωτεΐνης Tlr4
στο Εσωτερικό του Κυττάρου**

Ανδρέας Σοφianos



Διπλωματική Εργασία
ΔΠΜΣ : Εφαρμοσμένες Μαθηματικές Επιστήμες

Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Αθήνα
29/06/2021



**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**

**Αναλυτική και Αριθμητική Μελέτη της Χαστικής Δυναμικής Συμπεριφοράς
Βιολογικού Μοντέλου για την Περιγραφή της Μετακίνησης της Πρωτεΐνης Tlr4
στο Εσωτερικό του Κυττάρου**

Ανδρέας Σοφινός

**Επιβλέπων
Βασίλειος Ρόθος
Καθηγητής ΑΠΘ**

Διπλωματική Εργασία
ΔΠΜΣ : Εφαρμοσμένες Μαθηματικές Επιστήμες

Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Αθήνα
29/06/2021



**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**

**Αναλυτική και Αριθμητική Μελέτη της Χαστικής Δυναμικής Συμπεριφοράς
Βιολογικού Μοντέλου για την Περιγραφή της Μετακίνησης της Πρωτεΐνης Tlr4
στο Εσωτερικό του Κυττάρου**

Ανδρέας Σοφιανός

Τριμελής Επιτροπή

**Βασίλειος Ρόθος
Καθηγητής ΑΠΘ**

**Κωνσταντίνος Σιέττος
Αν. Καθηγητής
Πανεπιστήμιο Νάπολης
Φεντερίκο ΙΙ**

**Πέτρος Στεφανέας
Επ. Καθηγητής ΕΜΠ**

Διπλωματική Εργασία
ΔΠΜΣ : Εφαρμοσμένες Μαθηματικές Επιστήμες

Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Αθήνα
29/06/2021

Τι κάνει τη φύση να
συμπεριφέρεται έτσι; Πιστεύω πως
οφείλεται στο ότι η φύση είναι απλή
και γι' αυτό πολύ όμορφη!

Ρίτσαρντ Φάινμαν

Αφιερώνεται

Στη Μυρτώ,
Στους Γονείς μου
Στα Αδέρφια μου

Ευχαριστίες

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία δε θα είχε πραγματοποιηθεί χωρίς τη στήριξη και την ελευθερία στην επιλογή του θέματος από τον επιβλέποντα κ. Βασίλειο Ρόθο Καθηγητή του Αριστοτέλειου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης. Θα ήθελα να ευχαριστήσω επίσης τον κ. Κωνσταντίνο Σιέττο Αναπληρωτή Καθηγητή στο Πανεπιστήμιο της Νάπολης για το άνοιγμα νέων επιστημονικών οριζόντων, τη δυνατότητα να παρουσιάσω πλευρές της παρούσας Διπλωματικής σε διάφορα ενδιαφέροντα συνέδρια και την επιστημονική του καθοδήγηση τα τελευταία 2 χρόνια.

Ευχαριστώ επίσης τους Κώστα Καλούδη Διδάκτορα του Πανεπιστημίου Αιγαίου και Άγγελο Γαλάρη υπ.Διδάκτορα του Πανεπιστημίου της Νάπολης. Τους ευχαριστώ για τις επιστημονικές συζητήσεις μας και για τη βοήθεια σε διάφορες φάσεις του Μεταπτυχιακού. Πιο συγκεκριμένα θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Κ.Καλούδη για τις ουσιαστικές παρατηρήσεις του πάνω στο κείμενο της Διπλωματικής Εργασίας που χωρίς αυτές θα ήταν σίγουρα φτωχότερη.

Κυριώς θα ήθελα να ευχαριστήσω τη Μυρτώ Αρβανίτη για τη βοήθεια, τη στήριξη, τις συζητήσεις μας για κάθε προβληματισμό μου και φυσικά την υπομονή της όλα αυτά τα χρόνια. Τους γονείς μου για τις συμβουλές και την χωρίς όρους στήριξή τους σε κάθε στροφή. Τα αδέρφια μου Χρήστο για τις συζητήσεις μας και Αγγελική για την πιο νεανική νότα που προσδίδει.

Φυσικά όλους αυτούς που έκαναν αυτό το μεταπτυχιακό ταξίδι σε αυτές τις πρωτόγνωρες συνθήκες να αξίζει, να είναι όμορφο και να υπερβαίνει τις δυσκολίες.

Αναλυτική και Αριθμητική Μελέτη της Χαοτικής Δυναμικής Συμπεριφοράς Βιολογικού Μοντέλου για την Περιγραφή της Μετακίνησης της Πρωτεΐνης Tlr4 στο Εσωτερικό του Κυττάρου

Ανδρέας Σοφιανός

Περίληψη

Το Μοντέλο του Λόρενζ έχει αποτελέσει πηγή έμπνευσης και εξονυχιστικής μελέτης σε πολλές εργασίες προπτυχιακού και μεταπτυχιακού επιπέδου. Ίσως σε μικρότερο βαθμό να έχουν απασχολήσει τα παρόμοια με το Λόρενζ μοντέλα που απαντώνται στη βιβλιογραφία με τον όρο Lorenz-like Συστήματα. Η παρούσα Διπλωματική Εργασία επιχειρεί να παρουσιάσει και να μελετήσει πολλά από τα συμπεράσματα της ανάλυσης των προηγούμενων συστημάτων σε ένα όμοιο με το Λόρενζ Μοντέλο, αυτό της περιγραφής της μετακίνησης της πρωτεΐνης tlr4 στο εσωτερικό του κυττάρου.

Η μελέτη μας αποτελεί την πρώτη εκτεταμένη ανάλυση από μαθηματική σκοπιά του συγκεκριμένου βιολογικού μοντέλου. Παρουσιάζουμε συνοπτικά το Μοντέλο του Λόρενζ και τα όμοια με αυτό καθώς παρέχουν τη μεθοδολογική βάση προσέγγισης του βιολογικού μοντέλου μας. Διερευνάται η δυνατότητα το εν λόγω μοντέλο μέσω πιθανού μετασχηματισμού ομοιότητας να αναχθεί σε κάποιο εκ των Λόρενζ, Τσεν, Λου ή Ζου. Παρουσιάζεται η ανάλυση της ευστάθειας του συστήματος, η αριθμητική και αναλυτική ανάλυση διακλάδωσης μίας και δύο παραμέτρων. Αυτή η διερεύνηση υποδεικνύει την ύπαρξη ομοκλιτικής διακλάδωσης η οποία εντοπίζεται αριθμητικά. Η ομοκλιτική διακλάδωση οδηγεί στην εμφάνιση ομοκλιτικής έκρηξης η οποία αποδεικνύεται ότι γεννά το σύνολο της χαοτικής συμπεριφοράς του συστήματος. Τέλος παρουσιάζεται συνοπτικά η αναλυτική εύρεση της ομοκλιτικής τροχιάς με τη χρήση της μεθόδου των απροσδιόριστων συντελεστών.

Ανεξάρτητα από πλευρές της έρευνας που βρίσκονται σε εξέλιξη η παρούσα Διπλωματική Εργασία παρουσιάζει το μοντέλο με πληρότητα, εκτεταμένα και στην αλληλοσυσχέτισή του με τα όμοια με αυτό μοντέλα. Τυχόν λάθη και παραλείψεις βαραίνουν αποκλειστικά το γράφοντα.

Analytical and Numerical Analysis on the Chaotic Behaviour of the Biological Model that Describes the Trafficking of the Tlr4 Protein in the Cell

Ανδρέας Σοφιανός

Abstract

The Lorenz Model has been a source of inspiration and in-depth study in many undergraduate and postgraduate theses. Lorenz-like models found in bibliography entitled Lorenz-like Systems may have been less concerned. This Thesis attempts to present and study many of the conclusions of the analysis of the previous systems in a similar model to the Lorenz one, that describes the movement of the TLR4 protein within the cell.

Our study is the first extensive mathematical analysis of this biological model. We briefly present the Lorenz Model and the Lorenz - like ones as they provide the methodological basis for approaching our biological model. The possibility of this model being reduced to one of Lorenz, Chen, Lü or Zhou through a possible similarity transformation is explored. The stability analysis of the system is presented along with the numerical and analytical analysis of the branching of one and two parameters. This research indicates the existence of homoclinic branching which is located numerically. Homoclinic branching leads to the occurrence of a homoclinic explosion which proves that gives birth to the chaotic behavior of the system. Finally, the detailed finding of the homoclinic trajectory using the method of undetermined coefficients is presented.

Regardless of the aspects of the research that are in progress, this Thesis presents the model in full, extensively and in its interrelation with similar models. Any mistakes and omissions are the sole responsibility of the writer.

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	14
1.1	Η Γοητεία του Χάους	14
1.2	Ιστορική Αναδρομή	15
1.3	Φιλοσοφικές και Μεθοδολογικές Παρατηρήσεις	17
2	Μαθηματικές Έννοιες	20
2.1	Δυναμικά Συστήματα	21
2.1.1	Δυναμικά Συστήματα	23
2.1.2	Μη Γραμμικά Δυναμικά Συστήματα	24
2.2	Διακλαδώσεις	26
2.2.1	Είδη Διακλαδώσεων	27
2.3	Πολλαπλότητες και Ελκυστές	31
2.4	Χάος και Μετάβαση στο Χάος	32
2.4.1	Ομοκλινική και Ετεροκλινική Τροχία	33
2.4.2	Ομοκλινική Διακλάδωση	33
2.4.3	Ομοκλινική Έκρηξη	34
2.4.4	Τα Θεωρήματα του Σίλνικοφ	35
2.5	Αριθμητικές Μέθοδοι	37
2.5.1	Αριθμητική Ολοκλήρωση	38
2.5.2	Αριθμητική Συνέχιση	40
3	Το Μοντέλο του Λόρενζ	42
3.1	Η Ιστορία πίσω από τις Τρεις Εξισώσεις του Λόρενζ	42
3.2	Το Μοντέλο του Λόρενζ	44
3.2.1	Ανάλυση του Συστήματος	46
3.2.2	Ομοκλινική Διακλάδωση και Μετάβαση στο Χάος	49
4	Το Μοντέλο Μετακίνησης της Πρωτεΐνης Tlr4 στο Εσωτερικό του Κυττάρου	54
4.1	Βιολογική Περιγραφή του Μοντέλου	54
4.2	Μαθηματική Περιγραφή του Μοντέλου	57

5	Συστήματα Lorenz Like Τριών Διαφορικών Εξισώσεων	61
5.1	Συστήματα Lorenz-like	61
5.2	Το Μοντέλο του Τσεν (Chen)	62
5.3	Το Μοντέλο του Λου (Lü)	64
5.4	Το Μοντέλο του Ζου (Zhou)	65
5.5	Μετασχηματισμοί Ομοιότητας	67
5.5.1	Το Μοντέλο του Τσεν (Chen)	68
5.5.2	Το Μοντέλο του Λου (Lü)	69
5.5.3	Το Μοντέλο Μετακίνησης της Πρωτεΐνης Tlr4	70
5.6	Μεθοδολογικά Συμπεράσματα	72
6	Ανάλυση Ευστάθειας και Διακλαδώσεων του Συστήματος Μετακίνησης της Πρωτεΐνης Tlr4 στο Εσωτερικό του Κυττάρου	75
6.1	Σημεία Ισορροπίας και Ανάλυση Ευστάθειας	75
6.1.1	Σημεία Ισορροπίας του Συστήματος	75
6.1.2	Ανάλυση Ευστάθειας του Συστήματος	78
6.2	Ανάλυση Διακλάδωσης Αντρόνοφ-Χοφφ (Andronov-Hopf)	83
6.3	Αριθμητική Ανάλυση Διακλάδωσης Μίας-Παραμέτρου	84
6.4	Αριθμητική Ανάλυση Διακλάδωσης Δύο-Παραμέτρων	88
6.5	Ομοκλινική Έκρηξη και Μετάβαση στο Χάος	91
6.5.1	Αριθμητική Συνέχιση των Ευσταθών και Ασταθών Πολλαπλοτήτων στη Μία Διάσταση	92
6.5.2	Αριθμητική Συνέχιση της Ομοκλινικής Τροχίας της Αρχής	96
6.5.3	Ομοκλινική Έκρηξη	98
6.5.4	Αναλυτικός Υπολογισμός της Ομοκλινικής Τροχίας με τη Μέθοδο Απροσδιόριστων Συντελεστών	101
7	Συμπεράσματα	108
A'	Αριθμητικό Πακέτο MatCont	111

Πρόλογος

Το θέμα της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας βρίσκεται σε άμεση σύνδεση με το προσωπικό ενδιαφέρον για μία σειρά από μαθήματα στο επιστημονικό αντικείμενο των Δυναμικών Συστημάτων (γραμμικών και μη), της Θεωρίας Διακλαδώσεων και της Θεωρίας του Χάους που παρακολούθησα κατά τα προπτυχιακά και μεταπτυχιακά μου χρόνια.

Ο πυρήνας της Διπλωματικής Εργασίας περιλαμβάνει το σύνολο σχεδόν της ερευνητικής συνεργασίας που είχα με τον κ.Κωνσταντίνο Σιέττο Αναπληρωτή Καθηγητή του Πανεπιστημίου της Νάπολης σχετικά με τη διερεύνηση της χαοτικής συμπεριφοράς του βιολογικού μαθηματικού μοντέλου της μετακίνησης της πρωτεΐνης $tlr4$ στο εσωτερικό του κυττάρου. Η παρούσα εργασία πραγματοποιήθηκε τον πρώτο χρόνο του μεταπτυχιακού, παράλληλα με τις παρακολουθήσεις των μαθημάτων του προγράμματος και ολοκληρώθηκε τον Οκτώβριο του 2020. Πλευρές αυτής της συνεργασίας έχουν παρουσιαστεί από τον γράφοντα στα συνέδρια Dynamics Days Europe, 6th Dynamics Days Central Asia και 13th Chaotic Modeling and Simulation International Conference.

Η παρουσίαση πλευρών αυτής της δουλειάς δεν θα είχε πάρει τη μορφή μιας Μεταπτυχιακής Διπλωματικής Εργασίας χωρίς την συμβολή του επιβλέποντα κ.Βασίλειου Ρόθου Καθηγητή του Αριστοτέλειου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης. Η βοήθεια και η ελευθερία που μου παραχώρησε για να δουλέψω ήταν καθοριστικές για την ενίσχυση της ερευνητικής δουλειάς, την διαμόρφωσή της, τον εμπλουτισμό της, καθώς και την ολόπλευρη και αναλυτική παρουσίαση που πρέπει να έχει το επιστημονικό αντικείμενο όταν συγκροτεί μία διπλωματική εργασία.

Υπάρχουν αρκετές πλευρές που προέκυψαν από τη μελέτη και θα μπορούσαν να αποτελέσουν αντικείμενο μελλοντικής έρευνας. Ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι σχετικές αναφορές του πρώτου κεφαλαίου καθώς και η ανάλυση που γίνεται στις τελευταίες ενότητες του έκτου. Τα αντίστοιχα κομμάτια και αντικείμενα μελέτης είναι ιδιαίτερα φτωχά στην ελληνική βιβλιογραφία. Στην παρούσα Διπλωματική Εργασία εκτιμάμε ότι παρατίθεται μία πλήρης βιβλιογραφία για τη μελέτη των λεγόμενων Lorenz-like Συστη-

μάτων, κάτι που μπορεί να φανεί χρήσιμο σε μελλοντικούς προπτυχιακούς και μεταπτυχιακούς φοιτητές που θα ήθελαν να καταπιαστούν με το θέμα. Παρουσιάζουμε τέλος τη διάρθρωση της Διπλωματικής Εργασίας.

Στο **1ο Κεφάλαιο** δίνονται ορισμένες γενικές παρατηρήσεις σχετικά με τα δυναμικά συστήματα και τη θεωρία του χάους. Παρουσιάζεται η ιστορική εξέλιξη των απόψεων και των διαφόρων μαθηματικών θεωριών μέχρι την τελική διαμόρφωση της Θεωρίας του Χάους τη δεκαετία του '70 και του '80. Η ενότητα 1.3 καταπιάνεται με μία σύντομη αναφορά στις φιλοσοφικές και μεθοδολογικές προεκτάσεις μέσα από παρατηρήσεις και τοποθετήσεις των διαφόρων εμπλεκόμενων στη διαμόρφωση της Θεωρίας του Χάους. Αφειρητά για αυτή την προσθήκη στάθηκαν τα ενδιαφέροντα άρθρα πάνω στο θέμα των Ομότιμων Καθηγητών Ευτύχη Μπιτσάκη και Τάσου Μπούντη καθώς και το αντίστοιχο κεφάλαιο της Διπλωματικής Εργασίας με τίτλο «*Η Επιστήμη των Μαθηματικών υπό την Οπτική του Διαλεκτικού Υλισμού: μία Οντολογική-Γνωσιολογική Θεώρηση*» του Βασίλη Λιόση.

Στο **2ο Κεφάλαιο** παραθέτουμε την απαραίτητη μαθηματική εισαγωγή στις έννοιες που χρησιμοποιούμε στη συνέχεια της διπλωματικής εργασίας. Η παρουσίαση αυτή είναι σύντομη και προσαρμοσμένη στις συγκεκριμένες ανάγκες που γεννήθηκαν κατά τη διερεύνηση του εν λόγω μοντέλου αποφεύγοντας να πλατιάσουμε με έννοιες που κάποιος μπορεί εύκολα να βρει σε ένα καλό εγχειρίδιο δυναμικών συστημάτων.

Το **3ο Κεφάλαιο** καταπιάνεται με το Μοντέλο του Λορενζ. Το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων του Λόρενζ αποτελεί και το βασικό μεθοδολογικό πλαίσιο σύμφωνα με το οποίο γίνεται η προσέγγιση και ανάλυση του μοντέλου της μετακίνησης της πρωτεΐνης tlr4 στο εσωτερικό του κυττάρου. Αρχικά δίνουμε το απαραίτητο ιστορικό πλαίσιο γέννησης του Μοντέλου του Λόρενζ, παρουσιάζουμε σύντομα την μαθηματική ανάλυση του μοντέλου και τέλος παραθέτουμε τα αποτελέσματα της έρευνας σχετικά με τη μετάβαση από την ασταθή στην ευσταθή χαοτική συμπεριφορά.

Στο **4ο Κεφάλαιο** δίνουμε το φυσικό περιεχόμενο του Μοντέλου Μετακίνησης της Πρωτεΐνης tlr4 στο εσωτερικό του κυττάρου μέσα από την ανάλυση του συστήματος των τριών διαφορικών εξισώσεων που το περιγράφουν. Η παρουσίαση του Μοντέλου από τη βιολογική του σκοπιά καθώς και η συσχέτισή του με το φαινόμενο της σήψης στον ανθρώπινο οργανισμό κρίνεται απαραίτητη για την πληρέστερη παρουσίαση του θέματος. Αναφέρουμε και εδώ ότι η παρουσίαση αυτή γίνεται από έναν μη ειδικό στο πεδίο της κυτταρικής βιολογίας και χωρίς να προχωράμε σε βάθος σε αυτή την πλευρά του μοντέλου. Εξαρχής η πρόθεσή μας ήταν να σταθούμε στην μαθηματική ανάλυση του μοντέλου και το μηχανισμό που οδηγεί στην

χαοτική συμπεριφορά.

Μία πολύ σημαντική πλευρά που αφορά την οικογένεια των όμοιων με το Λόρενζ Μοντέλων ή αλλιώς Lorenz-like Systems (όπως απαντώνται στην Αγγλική βιβλιογραφία), δίνεται στο **5ο Κεφάλαιο**. Παρουσιάζουμε γενικά την έννοια των όμοιων με το Λόρενζ μοντέλων και αναλύουμε τα βασικά εξ αυτών. Επιλέξαμε να παρουσιάσουμε εδώ τις πληροφορίες σχετικά με αυτά τα μοντέλα έτσι ώστε να κάνουμε και μία σύντομη παρουσίαση των ομοιοτήτων τους καθώς και την δυνατότητα κάτω από προϋποθέσεις να μεταβούμε από το ένα στο άλλο. Η μετάβαση αυτή γίνεται κάτω από συγκεκριμένους μετασχηματισμούς ομοιότητας και για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων. Περιγράφοντας αυτό το πλαίσιο θα μπορέσουμε να παρουσιάσουμε και την διερεύνηση που κάναμε για το αν το μοντέλο μας είναι κάποιο από τα τρία βασικά Lorenz-like Μοντέλα. Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα είναι αρνητική και παρουσιάζεται εκτενώς στην αντίστοιχη ενότητα του 5ου Κεφαλαίου.

Το **6ο Κεφάλαιο** αποτελεί και το βασικό κομμάτι της μαθηματικής ανάλυσης του Μοντέλου Μετακίνησης της Πρωτεΐνης Tr4 στο εσωτερικό του κυττάρου. Αφορά την πρωτόλεια έρευνα που έγινε στο εν λόγω μοντέλο σχετικά με την μελέτη των διακλαδώσεων του συστήματος και το μηχανισμό που οδηγεί στη χαοτική συμπεριφορά. Αποδεικνύεται ότι η Χαοτική συμπεριφορά οφείλεται στο μηχανισμό της Ομοκλινικής Έκρηξης.

Στο **7ο Κεφάλαιο** συνοψίζονται όλα τα παραπάνω συμπεράσματα που προέκυψαν από τη μελέτη μας.

Τέλος στο **Παράρτημα** αναφέρουμε σε συντομία τα βασικά στοιχεία του Πακέτου MatCont και μία συνοπτική παρουσίαση της εν λόγω βιβλιογραφίας που μπορεί να φανεί χρήσιμη σε κάποιον που θα ήθελε να μάθει το πακέτο.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Εκεί που αρχίζει το χάος σταματούν οι κλασικές επιστήμες. Γιατί, όσο καιρό ο κόσμος είχε φυσικούς που ερευνούσαν τους νόμους της φύσης έπασχε από μία σημαντική άγνοια σχετικά με την αταξία στην ατμόσφαιρα, στη στροβιλώδη θάλασσα, στις αυξομειώσεις των πληθυσμών που ζούσαν σε άγρια κατάσταση, στις ταλαντώσεις της καρδιάς και του εγκεφάλου. Η μη κανονική πλευρά της φύσης, η ασυνεχής και ασταθής πλευρά - αυτές έχουν γίνει γρίφοι για την επιστήμη ή ακόμα χειρότερα τερατωδίες.

Τζέιμς Γκλέικ

1.1 Η Γοητεία του Χάους

Με αυτά τα λόγια ο Τζέιμς Γκλέικ επιχειρεί να αποτυπώσει την τομή που επέφερε η θεωρία του χάους στην συνείδηση των ανθρώπων [1]. Η επίδραση της Θεωρίας του Χάους, των Φράκταλς και των Δυναμικών Συστημάτων ξεφεύγει του αποκλειστικού ενδιαφέροντος της επιστημονικής κοινότητας. Η επίδραση των εννοιών και των συμπερασμάτων τους αγγίζει ένα κομμάτι κόσμου που συνεχώς διευρύνεται. Σημαντικό ρόλο σε αυτό αποτέλεσαν ορισμένα πολύ ενδιαφέροντα βιβλία εκλαϊκευσης των εννοιών αυτών όπως τα [1, 2, 3, 4].

Ένα από τα πιο γοητευτικά χαρακτηριστικά της «νέας» αυτής επιστήμης είναι ότι βρίσκεται σε μία διαρκή κίνηση. Τα φαινόμενα που ερμηνεύει ή καλείται να ερμηνεύσει διαρκώς αλλάζουν, εξελίσσονται, κάτι που προσεγγίζει πιο γλαφυρά την πραγματική ζωή. Ίσως οι έννοιες αυτές απο μόνες τους να προκαλούν το ενδιαφέρον και να συναρπάζουν τον αναγνώστη. Το πραγματικό όμως ενδιαφέρον βρίσκεται αν κοιτάξουμε πίσω από την «κουρ-

τίνα», στον συναρπαστικό κόσμο που ανοίγεται με τη μαθηματική μελέτη της Θεωρίας του Χάους, των Φράκταλς και των Δυναμικών Συστημάτων.

Η εφαρμογή αυτών των εννοιών ξεπερνάει τα στενά όρια της απλής μαθηματικής μελέτης και όπως κάθε «καλή» επιστημονική θεωρία απαντάει σε προηγούμενα ερωτήματα, γεννάει νέα και βρίσκει εφαρμογές στη ζωή. Οι εφαρμογές της θεωρίας του χάους βρίσκονται κυριολεκτικά παντού, στη φυσική, στη βιολογία, στη μηχανική, στις κοινωνικές επιστήμες, στην ιστορία, στη μοντελοποίηση συστημάτων, σε πολύπλοκα συστήματα και σε πολλούς άλλους ακόμα τομείς [5, 79]. Είτε κάποιος αποφασίσει να βουτήξει σε αυτή τη γωνιά της γνώσης είτε να καθίσει αναπαυτικά στο σαλόνι του με κάποιο από τα πολλά βιβλία εκλαϊκευμένης επιστήμης το σίγουρο είναι ότι θα ξεκινήσει ένα συναρπαστικό ταξίδι.

1.2 Ιστορική Αναδρομή

Στην παραπάνω ανάλυση έχει ενδιαφέρον να προσθέσουμε μία συνοπτική παρουσίαση της ιστορικής διαδρομής των εννοιών του νετερμινισμού, της τυχαιότητας και της πρόβλεψης. Αποτελούν έννοιες που επηρεάστηκαν θεμελιωδώς από την επιστήμη της θεωρίας του χάους. Για μια πιο αναλυτική παρουσίαση κάποιος μπορεί να δει στο [6] μαζί με τη σχετική βιβλιογραφία. Η ανάλυση που ακολουθεί βασίζεται σε μεγάλο βαθμό στην εν λόγω εργασία.

Η αρχαιοελληνική σκέψη αποτελεί ένα μεγάλο κεφάλαιο για τις έννοιες αυτές. Επιλέγουμε να παρουσιάσουμε τις απόψεις για τα συγκεκριμένα θέματα του Πλάτωνα, του Αριστοτέλη και του Δημόκριτου. Ο Πλάτωνας στην κοσμολογία του, δίνει μία έμμεση ιδέα για το πώς αντιλαμβάνονταν τη σύνδεση τάξης και χάους. Στην αρχή, κατά τον Πλάτωνα, υπάρχει το «παράδειγμα» δηλαδή ένα πρότυπο, ένα αιώνιο και ακαθόριστο «κάτι». Αυτό ακριβώς το ακαθόριστο «κάτι» μπαίνει σε τάξη και ρυθμό από το Θεό, κάτι που σημαίνει πως βρισκόταν σε αταξία και σε χαοτική κατάσταση. Ο Αριστοτέλης έχει μια διαφορετική αντίληψη για τα πράγματα. Ο Αριστοτέλης δίνει πρωταγωνιστικό ρόλο στην αιτία. Κατά τον Αριστοτέλη οφείλουμε να εξηγήσουμε την ύπαρξη του αισθητού κόσμου και την αρχή της κίνησης. Ο Αριστοτέλης προσπαθεί να δώσει το δικό του πρότυπο μέσα από την έννοια της εντελέχειας, δηλαδή δίνει μια ερμηνεία του κόσμου τελολογική. Ο Δημόκριτος δεχόταν ότι η κίνηση των ατόμων είναι προδιαγεγραμμένη και ότι δεν παρεκκλίνει από την ευθεία. Αυτή η αντίληψη οδηγούσε σε μια «αυστηρή» αιτιοκρατία. Όπως διδάσκουν οι ατομικοί (το απόφθεγμα συνήθως αποδίδεται στο Λεύκιππο), τίποτα δε γίνεται τυχαία, αλλά από κάποια αιτία

και υπό την πίεση κάποιας ανάγκης.

Η επόμενη κομβική χρονική περίοδος που καθόρισε την επιστημονική σκέψη περιλαμβάνει μεγάλους επιστήμονες όπως οι Καρτέσιος, Λάιμπνιτς, Νεύτωνας, Λαπλάς και το μεγάλο κεφάλαιο στην θεωρία του χάους που ακούει στο όνομα Πουανκαρέ.

Ο Καρτέσιος ήταν αυτός που άνοιξε το δρόμο για την αναγωγική αντίληψη των πραγμάτων. Όταν λέμε αναγωγική αντίληψη εννοούμε εκείνη τη μεθοδολογική αρχή η οποία θεωρεί εφικτή και αναγκαία την πλήρη αναγωγή ανώτερων φαινομένων σε κατώτερα. Σύμφωνα με τον Καρτέσιο προϋπόθεση γνώσης του κόσμου είναι η γνώση πρώτα απ' όλα των επιμέρους τμημάτων του. Όταν το μέρος γίνεται γνωστό τότε με μια διαδικασία ολοκλήρωσης γίνεται γνωστό και το όλο. Αυτή του η άποψη διατυπώνεται στο δεύτερο κανόνα της Μεθόδου, σύμφωνα με τον οποίο πρέπει «να διαιρώ την καθεμιά από τις δυσκολίες που θα εξετάζω σε όσα τεμάχια είναι δυνατόν και χρειάζεται για να τη λύσω καλύτερα». Ο Νεύτωνας με τη σειρά του μπορεί να μη διατύπωσε τις απόψεις του με το συστηματικό τρόπο που το έκαναν άλλοι επιστήμονες, όμως το επιστημονικό του έργο επηρέασε βαθιά τις διάφορες επιστήμες. Διατυπώνοντας το νόμο της παγκόσμιας έλξης, ενίσχυσε την αντίληψη τόσο της αιτιοκρατίας όσο και του αναγωγισμού.

Ο Λαπλάς στη συνέχεια ήταν εκείνος που με πολύ χαρακτηριστικό τρόπο διατύπωσε ένα συλλογισμό από τον οποίο αναδύεται ένας μηχανιστικός ντετερμινισμός. Σύμφωνα με αυτήν την άποψη: «Την τωρινή κατάσταση του σύμπαντος πρέπει να τη θεωρούμε αποτέλεσμα της προηγούμενης και αιτία της κατάστασης που θα ακολουθήσει. Μια διάνοια που σε ορισμένη στιγμή θα γνώριζε όλες τις δυνάμεις που εμψυχώνουν τη φύση και τη θέση των όντων που την αποτελούν και αρκετά πλατιά για να υποβάλλει αυτά τα δεδομένα στη μαθηματική ανάλυση, θ' αγκάλιαζε μέσα στον ίδιο τύπο τις κινήσεις των μεγαλύτερων σωμάτων του σύμπαντος και τις κινήσεις του ελαφρότερου ατόμου. Τίποτα δε θα ήταν αβέβαιο γι' αυτήν, και το μέλλον, όπως και το παρελθόν, θα ήταν παρόν μπροστά στα μάτια της» [7].

Ο Πουανκαρέ ήταν αυτός που έβαλε τα θεμέλια της Θεωρίας του Χάους. Η επίδρασή του φαίνεται και σε αρκετά από τα επόμενα κεφάλαια της Διπλωματικής Εργασίας. Ο Πουανκαρέ το 1887 προσπαθώντας να λύσει το πρόβλημα των τριών σωμάτων ανακάλυψε πως οι εξισώσεις της κλασικής μηχανικής ήταν αδύνατο να λυθούν με τις μέχρι τότε γνωστές μαθηματικές μεθόδους. Με άλλα λόγια απέδειξε ότι και στα απλούστερα των προβλημάτων της Μηχανικής και της Αστρονομίας, υπάρχουν στο χώρο των φάσεων τους, δηλαδή στο χώρο όλων των δυνατών θέσεων και ταχυτήτων του συστήματος της κλασικής μηχανικής- περιοχές όπου οι λύσεις

εξαρτώνται και μάλιστα με τρόπο αποφασιστικό από τις αρχικές συνθήκες. Η συμπεριφορά δηλαδή ενός συστήματος αργά ή γρήγορα θα μεταβληθεί όταν μεταβληθούν και οι αρχικές συνθήκες. Το συμπυκνωμένο συμπέρασμα του Πουανκαρέ έχει ως εξής: «Αν μπορούσαμε να ξέρουμε επακριβώς τους νόμους της φύσης και την κατάσταση του σύμπαντος στην αρχική του στιγμή, θα μπορούσαμε να προβλέψουμε επακριβώς την κατάσταση αυτού του ίδιου σύμπαντος σε μια μεταγενέστερη χρονική στιγμή. Αλλά ακόμα κι αν οι φυσικοί νόμοι δεν είχαν άλλα μυστικά από εμάς, θα μπορούσαμε να ξέρουμε την αρχική κατάσταση μόνο κατά προσέγγιση. Αν αυτό μας επέτρεπε να προβλέψουμε τη μεταγενέστερη κατάσταση με τον ίδιο βαθμό προσέγγισης θα μπορούσαμε να πούμε ότι το φαινόμενο υπόκειται σε νόμους. Όμως το ζήτημα δεν είναι πάντα έτσι: υπάρχει περίπτωση οι πολύ λεπτές διαφορές στις αρχικές συνθήκες, να παράγουν πολύ μεγάλες διαφορές στα τελικά φαινόμενα. Η πρόβλεψη τότε γίνεται αδύνατη και θα έχουμε το φαινόμενο της τύχης» [8].

1.3 Φιλοσοφικές και Μεθοδολογικές Παρατηρήσεις

Η Θεωρία του Χάους προκάλεσε μία επιστημονική τομή με άμεσες φιλοσοφικές και μεθοδολογικές προεκτάσεις. Οι συζητήσεις αυτές έφεραν στην επιφάνεια θεμελιώδη ερωτήματα που αποτελούν για αιώνες πεδίο αντιπαράθεσης στην φιλοσοφία. Χωρίς να θέλουμε να μπούμε σε βάθος σε αυτές τις αναζητήσεις θα σταθούμε στην πιο προβεβλημένη αυτών των συζητήσεων πλευρά που αποτελεί αυτή της αποδοχής ή μη του ντετερμινισμού στη θεωρία του χάους και τη σχέση του με την ικανότητα πρόβλεψης.

Όπως θα φανεί στη συνέχεια, αν και είναι δύσκολο να ομαδοποιηθούν οι απόψεις διάφορων επιστημόνων, η τάση είναι η αποδοχή του ντετερμινισμού για τις περισσότερες των περιπτώσεων. Η βασική προέκταση αυτής της παραδοχής αφορά στην δυνατότητα πρόβλεψης ή στην ερμηνεία αυτής της αδυναμίας. Σε όλες τις περιπτώσεις η μαθηματική τοποθέτηση αντικατοπτρίζεται σε μία τάση είτε προς ένα φιλοσοφικό ρεαλισμό είτε προς τον αγνωστικισμό. Δεν επιχειρούμε να θίξουμε στο ελάχιστο ένα τέτοιο πρόβλημα καθώς αποτελεί ένα ξεχωριστό πεδίο επιστημονικής έρευνας που μπορεί να τροφοδοτήσει με την αντίστοιχη μεθοδολογία την ερμηνεία τέτοιων αποτελεσμάτων.

Ένα «φιλοσοφικό παράδοξο» που αναδεικνύει ορισμένες δυσκολίες στην προσέγγιση και την ερμηνεία χαοτικών φαινομένων είναι το ακόλουθο: Στην ερμηνεία πολλών χαοτικών φαινομένων πολλές φορές τονίζεται η αδυναμία πρόβλεψης και η αποσύνδεση του ντετερμινισμού με την δυνατότητα

πρόβλεψης. Την ίδια στιγμή όμως η μελέτη τέτοιων φαινομένων από τη Θεωρία του Χάους παρέχει πιο ακριβή αποτελέσματα από την εφαρμογή των κλασικών μεθόδων - χαρακτηριστικό τέτοιο παράδειγμα είναι φαινόμενα που περιγράφονται με τη βοήθεια χρονοσειρών καθώς και άλλες περιπτώσεις υψηλής ευαισθησίας στις αρχικές συνθήκες. Κλείνουμε αυτή τη μικρή ενότητα παραθέτοντας τις απόψεις διαφόρων επιστημόνων στο φιλοσοφικό ερώτημα για το τί είναι τελικά η Θεωρία του Χάους.

- Ο **Τ.Μπούντης** αναφέρει, «Φαίνεται ότι ο κόσμος είναι κατά κύριο λόγο αιτιοκρατικός και περιγράφεται από ντετερμινιστικά συστήματα εξισώσεων, η ομορφιά του όμως και τα απρόοπτα και γοητευτικά μυστικά του δε θα λείψουν ποτέ, αφού θα είναι πάντοτε κρυμμένα μέσα στις χαοτικές περιοχές της μη γραμμικής μαθηματικής περιγραφής του» [9].
- Ο **Θ.Χριστίδης** υποστηρίζει ότι, «Οι νόμοι που ορίζουν την κίνηση του συστήματος είναι ασφαλώς αιτιοκρατικοί, αλλά η εξέλιξη του συστήματος δεν καθορίζεται μόνον από την αναγκαιότητα πλέον, αλλά, καθώς, είπαμε, στα σημεία διακλάδωσης οι τυχαίες διακυμάνσεις καθορίζουν την επιλογή ανάμεσα σε περισσότερες δυνατές καταστάσεις, στην εξέλιξη του συστήματος φαίνεται να εμπλέκεται και ο παράγοντας τύχη» [10].
- Ο **Ι.Στιούαρτ** γράφει στο βιβλίο του «Παίζει ο Θεός ζάρια;», «Η λαμπρότατη φωτεινή ακτίνα την οποία εκπέμπει το χάος, εστιάζεται πάνω στη φύση της πολυπλοκότητας. Ξέρουμε τώρα ότι οι απλές εξισώσεις μπορεί να έχουν απλές ή πολύπλοκες λύσεις. Οι πολύπλοκες εξισώσεις μπορεί να έχουν απλές ή πολύπλοκες λύσεις. Εκείνο που ελέγχει τη σχέση ανάμεσα στην εξίσωση και στη λύση, ανάμεσα στο μοντέλο και στη συμπεριφορά του, δεν είναι η μορφή, αλλά η σημασία της εξίσωσης. Πού μας οδηγεί άραγε ο φανός του χάους; Δεν ξέρουμε. Ποιο είναι το μέλλον του χάους; Χάνεται μέσα στο σκοτάδι» [11].
- Ο **Ι.Πριγκοζίν** αποτελεί ίσως τον κατεξοχήν επιστήμονα ο οποίος εκτός της σημαντικής συμβολής του στη μαθηματική θεμελίωση της θεωρίας του χάους, έχει καθοριστική συμβολή και στην φιλοσοφική συζήτηση γύρω από αυτή. Τα δύο κύρια έργα του γραμμένα και με την Βελγίδα Φιλόσοφο Ισαμπέλ Στέντζερς είναι το «Το Τέλος της Βεβαιότητας» [3] και «Τάξη Μέσα από το Χάος» [12]. Χαρακτηριστικά αναφέρει, «Καμία διατύπωση των νόμων της φυσικής δε θα κατορθώσει ποτέ να ικανοποιήσει την ανάγκη μας να κατανοήσουμε τη φύση, αν δε λαμβάνει υπόψη τον

εποικοδομητικό ρόλο του χρόνου» ενώ σε άλλο σημείο «...οι μη αναστρέψιμες διαδικασίες περιγράφουν θεμελιώδεις ιδιότητες της φύσης. Μας επιτρέπουν να κατανοήσουμε το σχηματισμό δομών έκλυσης μακράν της ισορροπίας. Οι εν λόγω διαδικασίες δε θα ήταν δυνατές σε ένα κόσμο που θα ρυθμιζόταν από τους αναστρέψιμους νόμους της κλασικής ή της κβαντικής μηχανικής. Οι δομές έκλυσης προϋποθέτουν το βέλος του χρόνου. Επιπλέον, δε θα μπορούσαμε να κατανοήσουμε την εμφάνισή τους με προσεγγίσεις τις οποίες θα εισαγάγαμε εμείς στους νόμους που είναι αναστρέψιμοι ως προς το χρόνο. ... Όταν μελετούμε ασταθή συστήματα, οφείλουμε να διατυπώνουμε τους νόμους της δυναμικής σε στατιστικό επίπεδο. Αυτό βέβαια μεταβάλλει ριζικά την περιγραφή μας για τη φύση, αφού τα θεμελιώδη αντικείμενα της φυσικής δεν είναι πλέον τροχιές ή κυματοσυναρτήσεις αλλά πιθανότητες».

- Τέλος μία διαφορετική άποψη σε σχέση με τους προηγούμενους επιστήμονες εκφράζει ο **Ε.Μπιτσάκης** στο [13], ο οποίος τονίζει, «Η εμφάνιση των χαοτικών φαινομένων συνιστά, συνεπώς, όχι την αναίρεση της μηχανιστικής αιτιοκρατίας, αλλά την ανάδειξη του χαρακτήρα και των ορίων ισχύος της. Με τα χαοτικά φαινόμενα αναδεικνύεται η ανάγκη για διεύρυνση των κατηγοριών της αιτιότητας και της αιτιοκρατίας», ενώ σε άλλο σημείο, «Τέλος, τα χαοτικά φαινόμενα δεν σηματοδοτούν την κατάρρευση του ντετερμινισμού: αναδεικνύουν τα όρια της κλασικής, γραμμικής αιτιοκρατίας».

Κεφάλαιο 2

Μαθηματικές Έννοιες

Στο Κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε το απαραίτητο εννοιολογικό και μαθηματικό πλαίσιο που θα χρειαστούμε στην συνέχεια της εργασίας μας. Δε θα σταθούμε σε μία γενική παρουσίαση όλων των εννοιών που συναντάμε στη Θεωρία των Δυναμικών Συστημάτων, των Μη Γραμμικών Δυναμικών Συστημάτων, της Θεωρίας Διακλαδώσεων ή της Μαθηματικής Θεωρίας του Χάους. Θα σταθούμε περισσότερο στις έννοιες που θα συναντήσουμε στην ανάλυση του μαθηματικού μοντέλου της μετακίνησης πρωτεΐνης που θα ακολουθήσει. Ο αναγνώστης μπορεί να βρει μία αναλυτική παρουσίαση για όλα τα παραπάνω σε πληθώρα βιβλίων και εγχειριδίων. Τα συγκεκριμένα πεδία αποτελούν κλάδους των μαθηματικών με μεγάλη ανάπτυξη και η σχετική βιβλιογραφία είναι τεράστια. Μέρος της βιβλιογραφίας που παραθέτουμε αποτελείται από εισαγωγικά βιβλία τα οποία παραλείπουν όλο το «βαρύ» φορμαλισμό που συνοδεύει αυτές τις μαθηματικές έννοιες κάτι που είναι ιδιαίτερα χρήσιμο στους μη μαθηματικούς που θα ήθελαν να αποκτήσουν μία εικόνα των εν λόγω πεδίων.

Ενδεικτικά αναφερόμαστε στο βιβλίο του Στρόγκατζ [14] που αποτελεί μία όμορφη και κατανοητή εισαγωγή στο αντικείμενο των δυναμικών συστημάτων. Στα βιβλία των Γουίγκινς και Χέλ [15],[16] για μια πιο αυστηρή μαθηματική διατύπωση των εν λόγω εννοιών. Σε ότι αφορά τη Θεωρία Διακλαδώσεων αναφέρουμε το βιβλίο του Κουζνέτσοφ [17] για μια αυστηρή διατύπωση της Θεωρίας. Χρησιμοποιήσαμε ακόμα τις σημειώσεις των διδασκόντων του Μεταπτυχιακού Μαθήματος «Δυναμικά Συστήματα» [18] κύριων Ν.Σταυρακάκη και Β.Ρόθου, το πολύ ενδιαφέρον βιβλίο στην ελληνική βιβλιογραφία του Αν.Καθηγητή Δ.Σούρλα [19] καθώς και τα συνοπτικά Κεφάλαια 4 και 5 του βιβλίου των Άλστομ και Μάρει [20].

2.1 Δυναμικά Συστήματα

Η σημασία των δυναμικών συστημάτων και η ιστορική τους εξέλιξη παρουσιάστηκε στην Ενότητα 1.2. Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε στοχευμένα τις βασικές έννοιες γύρω από την Θεωρία των Δυναμικών Συστημάτων συνοδευμένη από τον αντίστοιχο μαθηματικό φορμαλισμό.

Διακρίνουμε δύο τύπους Δυναμικών Συστημάτων (εφεξής Δ.Σ.), τα Δ.Σ Διαφορικών Εξισώσεων και αυτά των Επαναλαμβανόμενων Απεικονίσεων (Iterated Maps) που τα συναντάμε με τη μορφή εξισώσεων διαφορών. Η βασική διαφορά των δύο κατηγοριών βρίσκεται στην χρονική περιγραφή των μοντέλων στα οποία αναφέρονται. Οι Διαφορικές Εξισώσεις αναφέρονται σε συνεχή χρόνο ενώ οι επαναλαμβανόμενες απεικονίσεις σε συστήματα διακριτού χρόνου. Η σημασία και των δύο κατηγοριών είναι τεράστια τόσο στην πρακτική όσο και στην θεωρητική εφαρμογή τους για την μελέτη και εξέλιξη διαφόρων φαινομένων.

Η ενασχόλησή μας στην παρούσα Δ.Ε αφορά την κατηγορία Δ.Σ. Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων. Διαφορικών εξισώσεων δηλαδή όπου υπάρχει μόνο μία ανεξάρτητη μεταβλητή και συγκεκριμένα αυτή του χρόνου. Μία γενική περίπτωση συστήματος συνήθων διαφορικών εξισώσεων παρουσιάζεται στην εξίσωση (2.1)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n) \\ &: \\ &: \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Το παραπάνω σύστημα θα καλείται γραμμικό αν όλες οι εξαρτημένες μεταβλητές στα δεξιά μέλη εμφανίζονται ως δυνάμεις πρώτης τάξης. Διαφορετικά μπορούμε να πούμε ότι το σύστημα είναι γραμμικό αν επιδέχεται γενική λύση που είναι γραμμικός συνδυασμός των επιμέρους λύσεων του συστήματος (από μία πιο Φυσική ερμηνεία, αν ισχύει η Αρχή της Υπέρθεσης ή Αρχή της Επαλληλίας). Ένα σύστημα που παρουσιάζει σχέσεις γινομένων, ημιτόνων, τετραγωνικές, κυβικές και άλλες ονομάζεται μη γραμμικό. Επιπρόσθετα το σύστημά μας καλείται αυτόνομο αν δεν εξαρτάται ευθέως από το χρόνο. Στην αντίθετη περίπτωση είναι χρονικά εξαρτώμενο.

Η γεωμετρική και ποιοτική αντιμετώπιση τέτοιων συστημάτων αποτελεί μία πραγματικά ριζοσπαστική ιδέα που σε μεγάλο βαθμό οφείλεται στον μεγάλο μαθηματικό Ανρί Πουανκαρέ. Η βασική σκέψη είναι πως μπορούμε να εξάγουμε πληροφορία για το σύστημα απευθείας από τα ποιοτικά χαρακτηριστικά του χωρίς να το λύσουμε αναλυτικά. Βασικές έννοιες για αυτή την μελέτη αποτελούν αυτές του Χώρου των Φάσεων, του Διανυσμα-

τικού Πεδίου, της Τροχιάς κ.α. Οι έννοιες αυτές παρατίθενται εδώ στην γενική περίπτωση του προβλήματος αρχικών τιμών της εξίσωσης (2.2).

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (2.2)$$

Ορισμός 1 (Διευθύνον Πεδίο). Ονομάζουμε το σύνολο όλων των ευθύγραμμων τμημάτων της διαφορικής εξίσωσης, που αποτελούν τις κλίσεις dx/dt . Τα ευθύγραμμα τμήματα ονομάζονται διευθύνοντα στοιχεία.

Ορισμός 2 (Τροχιά). Η γραφική παράσταση μία λύσης της εξίσωσης (2.2) που διέρχεται από το σημείο x_0 , δηλαδή το υποσύνολο του επιπέδου $t - x$ που ορίζεται από τη σχέση $\{(t, \phi(t, x_0))\}$ ονομάζεται τροχιά που διέρχεται από το x_0 .

Ορισμός 3 (Διανυσματικό Πεδίο). Το σύνολο όλων των διανυσμάτων που παράγει η εξίσωση (2.2) ονομάζεται διανυσματικό πεδίο της διαφορικής εξίσωσης (ουσιαστικά πρόκειται για τη συνάρτηση $f(\mathbf{x})$).

Ορισμός 4 (Διάγραμμα Φάσης). Το σύνολο των γραφικών παραστάσεων των λύσεων μαζί με το διευθύνον πεδίο. Αντίστοιχα ο Χώρος των Φάσεων μπορεί να είναι μίας, δύο ή τριών διαστάσεων.

Ορισμός 5 (Σημείο Ισορροπίας). Ένα σημείο $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}$ ονομάζεται σημείο ισορροπίας του συστήματος (2.2) αν ισχύει $f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$.

Μία σημαντική επισήμανση που μας βοηθάει να γενικεύσουμε τη μελέτη αυτή είναι η δυνατότητα που έχουμε να αντιμετωπίζουμε τα μη αυτόνομα συστήματα ως αυτόνομα με την αύξηση κατά μία μονάδα της διάστασης του συστήματος. Η διαδικασία αυτή γίνεται με την αλλαγή των παραμέτρων και αντιμετωπίζοντας το χρόνο ως ξεχωριστή παράμετρο. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί αυτό του Εξαναγκασμένου Αρμονικού Ταλαντωτή $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F \cos t$. Θέτοντας $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$ και $x_3 = t$ η προηγούμενη εξίσωση γίνεται,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{m}(-kx_1 - bx_2 + F \cos(x_3)) \\ \dot{x}_3 &= 1 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Η εξίσωση αυτή πλέον αποτελεί ένα αυτόνομο σύστημα ικανό να αντιμετωπιστεί με τις μεθόδους που θα περιγραφούν στη συνέχεια.

Τέλος αναφέρουμε ότι η δυσκολία που αντιμετωπίζουμε με τα μη γραμμικά δυναμικά συστήματα έγκειται στο γεγονός ότι δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε την αρχή της επαλληλίας σε αυτά. Πιο απλά δε μπορούμε να τα σπάσουμε σε μικρότερα κομμάτια και να τα επιλύσουμε με αποτέλεσμα να καταφεύγουμε σε άλλες πιο σύνθετες μεθόδους.

2.1.1 Δυναμικά Συστήματα

Ο πλούτος της δυναμικής συμπεριφοράς ενός συστήματος είναι στενά δεμένος με την διάστασή του. Για παράδειγμα ενώ σε δυναμικά συστήματα μίας διάστασης η συμπεριφορά είναι αρκετά περιορισμένη - έχουμε μόνο σημεία ισορροπίας να χαρακτηρίζουν το σύστημα - στις δύο διαστάσεις η συμπεριφορά εμπλουτίζεται - σημεία ισορροπίας, οριακοί κύκλοι (κλειστές περιοδικές τροχιές) - καθώς υπάρχει μεγαλύτερο περιθώριο στην κίνηση του συστήματος. Στις τρεις διαστάσεις δε μαζί με την αυξημένη πολυπλοκότητα της γεωμετρίας του συστήματος έχουμε και τη δυνατότητα εμφάνισης χαοτικής συμπεριφοράς. Το πιο αντιπροσωπευτικό παράδειγμα για την κατανόηση αυτής της συμπεριφοράς είναι η μελέτη των γραμμικών δυναμικών συστημάτων στις δύο διαστάσεις.

Στην γενικότερη περίπτωση η μορφή ενός γραμμικού Δ.Σ στις δύο διαστάσεις δίνεται από την εξίσωση (2.4).

$$\dot{x} = Ax \tag{2.4}$$

όπου ο A είναι ένας 2×2 πίνακας. Το σύστημα αυτό είναι γραμμικό - δηλαδή η λύση του μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των επιμέρους λύσεων - ενώ παρατηρούμε ότι το $\tilde{0}$ είναι πάντα σημείο ισορροπίας του συστήματος. Το σύστημα μπορεί να αναπαρασταθεί μέσω των τροχιών του στο χώρο των φάσεων κατασκευάζοντας έτσι το φασικό του πορτραίτο. Στην κατασκευή του φασικού πορτραίτου από την Γραμμική Άλγεβρα μπορούμε να μετασχηματίσουμε το σύστημα της εξίσωσης (2.4) στην κανονική του μορφή $\dot{y} = Jy$ μέσω ενός μετασχηματισμού $\dot{x} = Py$. Ο πίνακας P καθορίζεται με τέτοιο τρόπο ώστε ο πίνακας $J = P^{-1}AP$ να είναι μία από τις παρακάτω Τζόρνταν (Jordan) μορφές.

$$J_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad J_2 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

$$J_3 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \quad J_4 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mu \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

όπου $\lambda_{1,2}, \alpha, \beta, \mu$ είναι πραγματικές σταθερές και καθορίζουν τις ιδιοτιμές πραγματικές ή φανταστικές των παραπάνω πινάκων. Έτσι ο J_1 έχει ένα ζεύγος πραγματικών διακεκριμένων ιδιοτιμών, ο J_2 έχει δύο συζυγείς μιγαδικές ιδιοτιμές και οι J_3, J_4 έχουν μία διπλή ιδιοτιμή.

Σχετικά με την ευστάθεια του συστήματος της εξίσωσης (2.4) αναφέρουμε τα εξής,

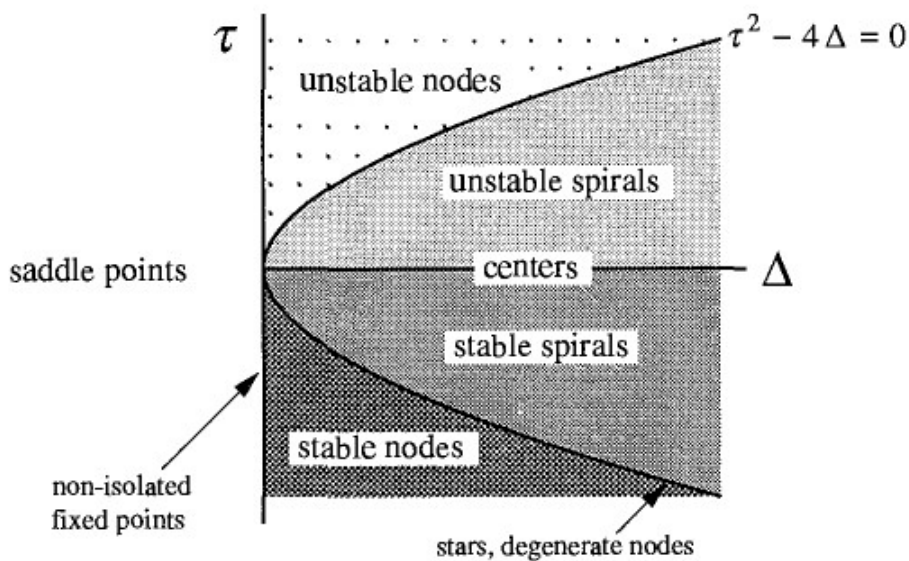
Ορισμός 6 (Ευστάθεια Λιαπούνοφ). Έστω x ένα σημείο ισορροπίας του συστήματος. Τότε το x ονομάζεται (α.) **ευσταθές** αν για κάθε $\epsilon > 0$ υ-

πάρχει $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ έτσι ώστε η σχέση $|x(0) - x| < \delta$ να συνεπάγεται ότι $|x(t) - x| < \epsilon$ για κάθε $t \geq 0$, (β.) **ασυμπτωτικά ευσταθές** αν είναι ευσταθές και επιπλέον $\lim_{x \rightarrow \infty} |x(t) - x| = 0$, (γ.) **ασταθές** αν δεν είναι ευσταθές.

Σε συνδυασμό με τις ιδιοτιμές του πίνακα A θα λέγαμε ότι,

Ορισμός 7 (Ευστάθεια βάση Ιδιοτιμών). Το σημείο ισορροπίας x είναι, (α.) **ασυμπτωτικά ευσταθές** αν τα πραγματικά μέρη των ιδιοτιμών του A είναι όλα αρνητικά, (β.) **ευσταθές** αν ο A έχει τουλάχιστον ένα ζεύγος φανταστικών ιδιοτιμών πολλαπλότητας 1 και για τις υπόλοιπες ιδιοτιμές ισχύει η περίπτωση (α), (γ.) **ασταθές** σε όλες τις άλλες περιπτώσεις.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω παραθέτουμε την αρκετά κατατοπιστική εικόνα από το βιβλίο του Στρόγκατζ [14] σχετικά με την κατηγοριοποίηση των σημείων ισορροπίας ενός γραμμικού δυναμικού συστήματος στις δύο διαστάσεις.



Σχήμα 2.1: Η κατηγοριοποίηση των Σημείων Ισορροπίας ενός γραμμικού συστήματος όπως παρατίθεται στο [14].

Η κατηγοριοποίηση γίνεται εύκολα με βάση τη σχέση $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta})$ όπου $\Delta = \lambda_1 \cdot \lambda_2$ και $\tau = \lambda_1 + \lambda_2$. Ως προς το δικό μας ενδιαφέρον αναφέρουμε ότι η περίπτωση της ευσταθούς σπείρας προκύπτει για την περίπτωση μιγαδικών ιδιοτιμών με αρνητικά πραγματικά μέρη.

2.1.2 Μη Γραμμικά Δυναμικά Συστήματα

Στην περίπτωση των μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων η δυναμική συμπεριφορά είναι πολύ πιο πλούσια από αυτή των γραμμικών. Ένα ακόμα

ιδιαίτερο χαρακτηριστικό είναι ότι εδώ πλέον η εύρεση αναλυτικής λύσης στην πλειοψηφία των περιπτώσεων καθίσταται αδύνατη. Η αντιμετώπισή τους γίνεται μέσα από ένα μεγάλο εύρος τεχνικών και θεωρημάτων τόσο για την προσέγγιση των λύσεων όσο και για την απόδειξη της ύπαρξης και της μοναδικότητας αυτών.

Ένας από τους βασικούς τρόπους αντιμετώπισης τέτοιων περιπτώσεων είναι μέσω της μεθόδου της γραμμικοποίησης. Το μη γραμμικό σύστημα μέσω του Ιακωβιανού του πίνακα προσεγγίζεται από ένα γραμμικό κοντά στο σημείο ισορροπίας που θέλουμε να εξετάσουμε. Αποδεικνύεται ότι τα δύο συστήματα για μία μικρή γειτονιά στο σημείο ισορροπίας είναι τοπολογικά ισοδύναμα (αναλυτικότερα μπορεί κάποιος να δει το Θεώρημα Χάρτμαν [19]). Έτσι το αρχικό μη γραμμικό σύστημα,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (2.5)$$

θα περιγράφεται από το τοπολογικά ισοδύναμό του (προηγουμένως έγινε αναφορά στις κανονικές μορφές ενός δυναμικού συστήματος),

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{J}_A \mathbf{u} \quad (2.6)$$

όπου ο πίνακας \mathbf{J}_A είναι ο Ιακωβιανός πίνακας,

$$\mathbf{J}_A = \begin{pmatrix} \partial P/\partial x & \partial P/\partial y \\ \partial Q/\partial x & \partial Q/\partial y \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Ιδιαίτερη σημασία για την ανάλυση των διακλαδώσεων έχει και η κατηγοριοποίηση των σημείων ισορροπίας των μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων σε υπερβολικά και μη. Δίνουμε επιπλέον τον ορισμό τους.

Ορισμός 8 (Υπερβολικό Σημείο Ισορροπίας). Ονομάζεται ένα σημείο ισορροπίας αν το πραγματικό μέρος όλων των ιδιοτιμών του Ιακωβιανού πίνακα είναι μη μηδενικό. Εάν το πραγματικό μέρος έστω και μίας εκ των ιδιοτιμών του Ιακωβιανού είναι μηδέν τότε το σημείο ισορροπίας ονομάζεται μη υπερβολικό ή εκφυλισμένο.

2.2 Διακλαδώσεις

Η έννοια διακλάδωση, σημαίνει «διχάλωση» και χρησιμοποιείται με την ευρεία έννοια για να προσδιορίσει όλες τις δυνατές ποιοτικές αναδιοργανώσεις ή μεταμορφώσεις διαφόρων αντικειμένων, που ανακύπτουν από μεταβολές παραμέτρων από τις οποίες εξαρτώνται.

V.I.Arnold

Τα παραπάνω λόγια μεταφρασμένα από τον Θ.Β.Χριστακόπουλο ανήκουν στον V.I.Arnold έναν από τους θεμελιωτές της Θεωρίας των Μη Γραμμικών Δυναμικών Συστημάτων. Τα λόγια αυτά περιγράφουν σε μεγάλο βάθος και με απουσία μαθηματικού φορμαλισμού την έννοια της Διακλάδωσης.

Η ποιοτική αλλαγή του συστήματος κάτω από τη μεταβολή των παραμέτρων αποτελεί και το κύριο αντικείμενο μελέτης της Θεωρίας των Διακλαδώσεων. Κάτω από τέτοιες αλλαγές σημεία ισορροπίας μπορούν να δημιουργηθούν ή να καταστραφούν, ευστάθειες σημείων ισορροπίας μπορούν να αλλάξουν, περιοδικές τροχιές μπορούν να δημιουργηθούν. Χαοτική συμπεριφορά μπορεί επίσης να δημιουργηθεί κάτω από τέτοιες ποιοτικές αλλαγές. Στην περίπτωση του μοντέλου μας ένα τέτοιο σημείο αποτελεί αυτό της ομοκλινικής διακλάδωσης. Η ανάγκη για τη μελέτη των διακλαδώσεων ενός συστήματος προκύπτει από το γεγονός ότι οι παράμετροι που υπεισέρχονται στις εξισώσεις είτε δεν μπορούν να προσδιοριστούν επακριβώς, είτε είναι συναρτήσεις κάποιας μεταβλητής όπως για παράδειγμα του χρόνου (με συνήθως μία αργή μεταβολή τους).

Από την ανάλυση των προηγούμενων εννοιών μπορούμε να πούμε ότι για την παραμετρική διαφορική εξίσωση,

$$\dot{x} = f(x, \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}^k, k \geq 1, x \in \mathbb{R}^n, n \geq 1 \quad (2.8)$$

τα σημεία ισορροπίας και οι διευθύνσεις της ροής συνιστούν την ποιοτική δομή της ροής. Η Θεωρία Διακλαδώσεων μελετάει τις ποιοτικές μεταβολές της ροής κάτω από τη μεταβολή των παραμέτρων $\lambda \in \mathbb{R}^k$. Τα σημεία όπου παρατηρείται αλλαγή στην ποιοτική δομή ονομάζονται σημεία διακλάδωσης. Η γραφική παράσταση των σημείων ισορροπίας ως συνάρτηση της παραμέτρου ονομάζεται διάγραμμα διακλάδωσης και περιγράφει τη δυναμική της εξίσωσης $\dot{x} = F(x, \lambda)$. Τα σημεία διακλάδωσης παρατηρούνται

εκεί που ικανοποιείται το σύστημα :

$$F(x, \lambda) = 0$$

$$\frac{\partial F(x, \lambda)}{\partial t} \tag{2.9}$$

Το Θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα εργαλεία για τη μελέτη διαταραχών γύρω από σημεία ισορροπίας και κατ' επέκταση για τη θεωρία των διακλαδώσεων. Παρουσιάζουμε για το λόγο αυτό το αντίστοιχο Θεώρημα.

Θεώρημα 1 (Πεπλεγμένων Συναρτήσεων). Έστω ότι $F \in C^1(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ με $F(0, 0) = 0$ και $\frac{\partial F(x, \lambda)}{\partial x}|_{(0,0)} \neq 0$. Τότε υπάρχουν σταθερές $\delta > 0, \eta > 0$ και μία συνάρτηση $\psi \in C^1(B_\delta(\mathbb{R}^k), \mathbb{R})$ έτσι ώστε $\psi(0) = 0$ και $F(\lambda, \psi(\lambda)) = 0$ για κάθε $\lambda \in B_\delta(\mathbb{R}^k)$ όπου $B_\delta(\mathbb{R}^k) = \{\lambda \in \mathbb{R}^k : \|\lambda\| < \delta\}$.

Επιπλέον, αν υπάρχει $(\lambda_0, x_0) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}$ έτσι ώστε $\|\lambda_0\| < \delta, |x_0| < \eta$ και ικανοποιεί την εξίσωση $F(x_0, \lambda_0) = 0$ τότε $x_0 = \psi(\lambda_0)$.

Το Θεώρημα αυτό μας εξασφαλίζει πότε η σχέση $F(x, y) = 0$ είναι μία συνάρτηση. Πότε δηλαδή μπορεί η σχέση αυτή να λυθεί πλήρως ως προς y συναρτήσει του x , παρέχοντας μοναδική λύση ως προς y . Η αντιμετώπιση που επιχειρεί το Θεώρημα είναι μόνο τοπική. Με διαφορετικά λόγια από τον παραπάνω αυστηρό ορισμό μας λέει ότι δοθέντος ενός σημείου (x_0, y_0) , τέτοιο ώστε $F(x_0, y_0) = 0$, κάτω από ποιές συνθήκες θα υπάρχει μία περιοχή του σημείου (x_0, y_0) έτσι ώστε σ' αυτή την περιοχή η σχέση που ορίζεται από την $F(x, y) = 0$ να είναι επίσης μία συνάρτηση. Για την ποιοτική ισοδυναμία συστημάτων στα σημεία ισορροπίας που θέλουμε να εξετάσουμε κάποιος μπορεί να δει αναλυτικά στο [18].

2.2.1 Είδη Διακλαδώσεων

Παρουσιάζουμε συνοπτικά τα είδη διακλαδώσεων που εμφανίζονται στο σύστημά μας. Η θεωρητική τους παρουσίαση μέσα από τους ορισμούς και τις παραδοχές που κάνουμε αποσκοπούν να δώσουν μία πληρέστερη εικόνα στα αποτελέσματα της ανάλυσης για το μοντέλο μετακίνησης της πρωτεΐνης tlr4 στο εσωτερικό του κυττάρου. Δίνουμε ξεχωριστά τις Διακλαδώσεις Διχάλας/Τρίαινας, Αντρόνοφ-Χοπφ, Ομοκλινική (θα παρουσιαστεί σε επόμενη ενότητα) και Μπογκντάνοφ-Τέικενς.

Διακλάδωση Διχάλας (Pitchfork)

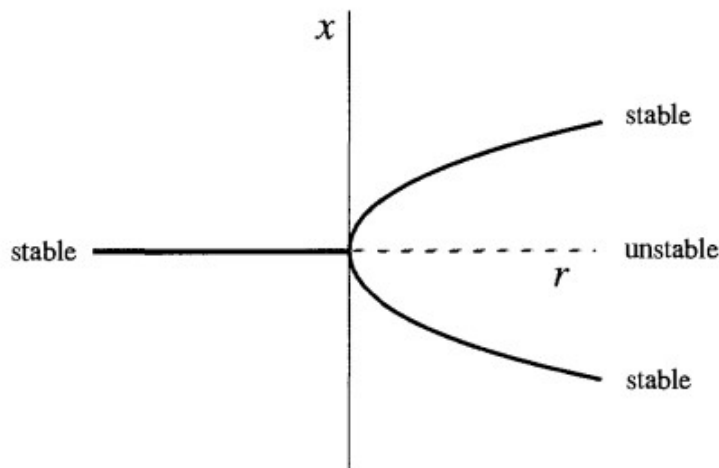
Η Διακλάδωση Διχάλας ή Τρίαινας είναι κοινή σε φυσικά προβλήματα που παρουσιάζουν κάποιο είδος συμμετρίας. Σε αυτή την περίπτωση σημεία

ισορροπίας τείνουν να εμφανιστούν ή να εξαφανιστούν κατά συμμετρικά ζεύγη. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι και το μοντέλο μετακίνησης της πρωτεΐνης tIr4 στο εσωτερικό του κυττάρου. Η ανάλυσή του παρουσιάζεται στην Ενότητα 6.1.1 του Κεφαλαίου 6 με το αντίστοιχο διάγραμμα της συγκεκριμένης διακλάδωσης.

Υπάρχουν δύο διαφορετικά είδη διακλάδωσης τρίαϊνας, η υπερκρίσιμη και η υποκρίσιμη. Δίνουμε εδώ την περίπτωση της Υπερκρίσιμης Διακλάδωσης Τρίαϊνας μέσω του παραδείγματος της εξίσωσης (2.10).

$$\dot{x} = rx - x^3 \quad (2.10)$$

Κάτω από τη μεταβολή της παραμέτρου r έχουμε τη δημιουργία ενός συμμετρικού ζεύγους σημείων ισορροπίας $x = \pm\sqrt{r}$ καθώς η παράμετρος διέρχεται από το 0. Το σημείο $r = 0$ αποτελεί και ένα σημείο διακλάδωσης για το σύστημα. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο διάγραμμα που παραθέτουμε εδώ από την ανάλυση που γίνεται στο [14]



Σχήμα 2.2: Διακλάδωση Τρίαϊνας όπου διακρίνεται το σημείο διακλάδωσης (αρχή των αξόνων) και στη συνέχεια η αλλαγή ευστάθειας της αρχής με τους δύο συμμετρικούς ευσταθείς κλάδους.

Με αντίστοιχο τρόπο μπορεί κάποιος να αντιμετωπίσει την περίπτωση της Υποκρίσιμης Διακλάδωσης Τρίαϊνας. Χαρακτηριστική περίπτωση αποτελεί το σύστημα της εξίσωσης $\dot{x} = rx + x^3$.

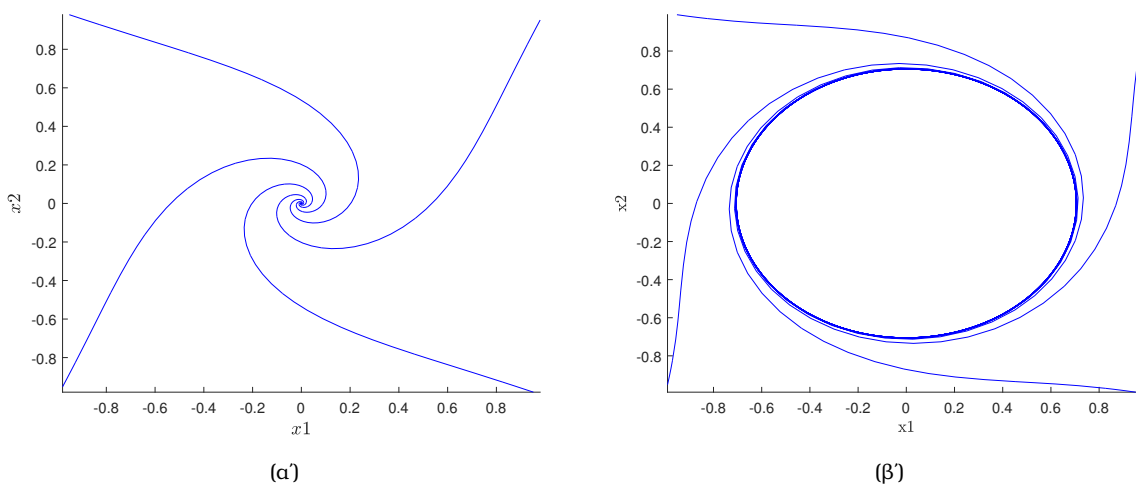
Διακλάδωση Αντρόνοφ-Χοπφ (Andronov-Hopf)

Ένα κομβικό ερώτημα στο πεδίο των διακλαδώσεων είναι πότε χάνει ένα σημείο ισορροπίας την ευστάθειά του κάτω από τη μεταβολή των παραμέτρων. Η ευστάθεια καθορίζεται από το αρνητικό πρόσημο των ιδιοτιμών του Ιακωβιανού πίνακα. Πιο συγκεκριμένα θα εξετάσουμε την περίπτωση όπου

οι ιδιοτιμές είναι συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί. Σε αυτή την περίπτωση η αλλαγή στην ευστάθεια πραγματοποιείται όταν οι ιδιοτιμές περνούν από τον άξονα των φανταστικών τιμών [14, 19] με αποτέλεσμα την αλλαγή του προσήμου των πραγματικών τους μερών. Η δημιουργία ή η εξαφάνιση μίας περιοδικής τροχιάς κατά την αλλαγή ευστάθειας ενός στάσιμου σημείου ονομάζεται Διακλάδωση Αντρόνοφ-Χοιφ.

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα διακλάδωσης Αντρόνοφ-Χοιφ καθώς η παράμετρος λ μεταβάλλεται είναι το ακόλουθο σύστημα με τα αντίστοιχα φασικά πορτραίτα του.

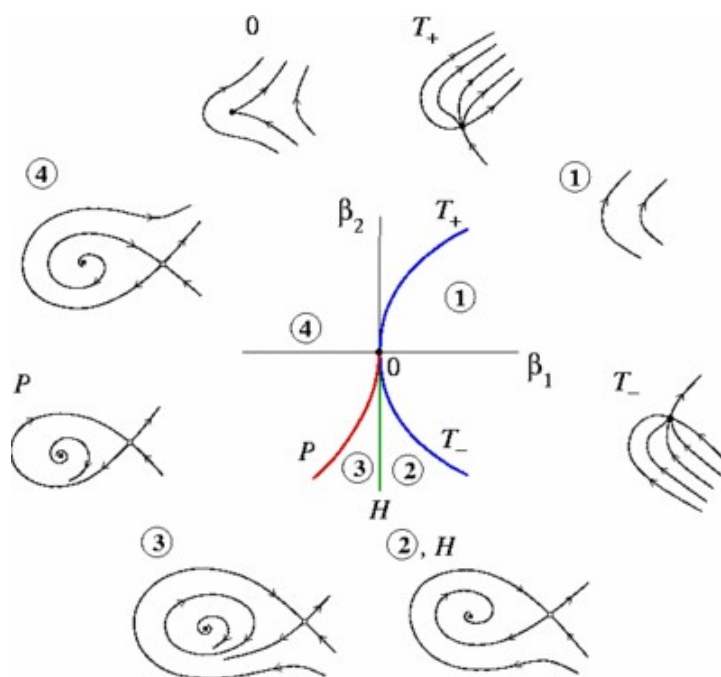
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + x_1(\lambda - x_1^2 - x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + x_2(\lambda - x_1^2 - x_2^2) \end{aligned} \tag{2.11}$$



Σχήμα 2.3: Ο χώρος των φάσεων διακλάδωσης Αντρόνοφ-Χοιφ για διάφορες τιμές του λ

Διακρίνουμε δύο είδη διακλαδώσεων Αντρόνοφ-Χοιφ την Υπερκρίσιμη και την Υποκρίσιμη. Η πρώτη περίπτωση αντιστοιχεί στην εμφάνιση ενός οριακού κύκλου από ένα ευσταθές σημείο ισοροπίας. Η δεύτερη περίπτωση είναι ελαφρώς πιο σύνθετη. Προκύπτει όταν ένας οριακός κύκλος διακλαδώνεται σε ένα σημείο ισοροπίας, άλλον οριακό κύκλο ή κάποιο άλλο είδος ελκυστή.

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως ένας οριακός κύκλος είναι μία κλειστή απομονωμένη περιοδική τροχιά, δηλαδή μια ομαλή συνεχής καμπύλη, η οποία είναι τοπολογικά ισοδύναμη με κύκλο, εφ' όσον μπορεί να μετασχηματιστεί σε αυτόν μετά από συνεχείς και διαφορίσιμους μετασχηματισμούς των μεταβλητών του συστήματος [19].



Σχήμα 2.4: Η διαδικασία δημιουργίας της Διακλάδωσης Μπογκντάνοφ-Τέικενς. Στο γράφημα διακρίνονται τα διάφορα στάδια της εξέλιξης του συστήματος.

Διακλάδωση Μπογκντάνοφ-Τέικενς (Bogdanov-Takens)

Η Διακλάδωση Μπογκντάνοφ-Τέικενς είναι η διακλάδωση ενός σημείου ισορροπίας σε μία οικογένεια αυτόνομων διαφορικών εξισώσεων δύο παραμέτρων όπου το κρίσιμο σημείο ισορροπίας έχει μια μηδενική ιδιοτιμή αλγεβρικής πολλαπλότητας δύο.

Η λειτουργία της διακλάδωσης αυτής είναι πολύ σημαντική για ένα δυναμικό σύστημα. Η διαδικασία που παρατηρείται στην εξέλιξη της διακλάδωσης αυτής, μπορεί να γίνει κατανοητή αν ξεκινήσουμε από γειτονικές παραμέτρους ως προς την παράμετρο διακλάδωσης. Έτσι για γειτονικές τιμές των παραμέτρων το σύστημα εμφανίζει δύο σημεία ισορροπίας, ένα σαγματικό και ένα μη. Αυτά τα δύο σημεία ισορροπίας συγκρούονται και εξαφανίζονται μέσω μίας διακλάδωσης σάγματος-κομβού. Το μη σαγματικό σημείο ισορροπίας υπόκειται σε μία διακλάδωση Αντρόνοφ-Χοιφ η οποία «γεννάει» έναν οριακό κύκλο. Ο οριακός κύκλος εκφυλίζεται σε μία ομοκλινική τροχιά που συγκλίνει στο σαγματικό σημείο και εξαφανίζεται μέσω μίας σαγματικής ομοκλινικής διακλάδωσης. Η όλη διαδικασία παρουσιάζεται αναλυτικά στο γράφημα (2.4) από το αντίστοιχο λήμμα στο διακτυακό τόπο Scholarpedia των Τζ.Γκουγκενχάιμερ και Γ.Α.Κουζνέτσοφ [21]

2.3 Πολλαπλότητες και Ελκυστές

Οι έννοιες των ασταθών, ευσταθών πολλαπλοτήτων και των ελκυστών αποτελούν ουσιώδεις έννοιες που καθορίζουν τη συμπεριφορά των δυναμικών συστημάτων σε όλες τις πτυχές της κίνησης στο χώρο των φάσεων (ευστάθεια, περιδικές τροχιές, χαοτική συμπεριφορά). Αν και οι ορισμοί που παρουσιάζουμε αποτελούν καθάρα αυστηρά μαθηματικές διατυπώσεις - σε αντίθεση μιας πιο γεωμετρικής παρουσίασης που θα μπορούσαμε να ακολουθήσουμε - το κρίναμε απαραίτητο. Περισσότερο διαισθητικά/γεωμετρικά θα μπορούσαμε να πούμε ότι αν οι τροχιές στο χώρο των φάσεων κινούνται προς το σημείο ισορροπίας καθώς ο χρόνος τείνει στο άπειρο τότε οι τελευταίες βρίσκονται πάνω σε μία ευσταθή πολλαπλότητα. Αντίθετα αν οι τροχιές απομακρύνονται από το κρίσιμο σημείο καθώς ο χρόνος απειρίζεται τότε θα λέμε ότι κινούνται πάνω σε μία ασταθή πολλαπλότητα. Αντίστοιχα ένας ελκυστής είναι ένα κλειστό αναλλοίωτο σύνολο το οποίο έλκει προς το μέρος του τις γειτονικές τροχιές, οι οποίες βρίσκονται στην περιοχή της ευστάθειας ή στην περιοχή έλξης του. Χαρακτηριστικές περιπτώσεις αποτελούν για παράδειγμα ένα ευσταθές σημείο ισορροπίας που έλκει όλες τις τροχιές (μίας γειτονιάς) προς το μέρος του ή ο χαοτικός ελκυστής του Λόρενζ που διαμορφώνει ένα χώρο έλξης για τις τροχιές (αναλυτικά παρουσιάζονται στο Κεφάλαιο 3). Δίνουμε τώρα τις αυστηρές μαθηματικές διατυπώσεις.

Για ένα σημείο ισορροπίας $x_0 \in X$ ορίζουμε τις έννοιες της ευσταθούς και ασταθούς πολλαπλότητας.

Ορισμός 9 (Ευσταθής Πολλαπλότητα). *Ευσταθής πολλαπλότητα του σημείου ισορροπίας x_0 ορίζουμε το σύνολο,*

$$W^s(x_0) = \{x^* \in X : x(t_0) = x^*, x(t) = S(t - t_0)x^* \rightarrow x_0, t \rightarrow \infty\} \quad (2.12)$$

Ορισμός 10 (Ασταθής Πολλαπλότητα). *Ασταθής πολλαπλότητα του σημείου ισορροπίας x_0 ορίζουμε το σύνολο,*

$$W^u(x_0) = \{x^* \in X : x(t_0) = x^*, x(t) = S(t - t_0)x^* \rightarrow x_0, t \rightarrow -\infty\} \quad (2.13)$$

Έχουμε ορίσει ως $S(t)$ μία οικογένεια απεικονίσεων $S(t) : X \rightarrow X, t \geq 0, S(t)x_0 = x(t)$. Η απεικόνιση αυτή περιγράφει μαθηματικά την εξέλιξη του φαινομένου.

Δίνουμε επίσης την αυστηρή μαθηματική διατύπωση και για την έννοια του ελκυστή. Έννοια απαραίτητη για την ολοκληρωμένη αντίληψη (διαισθητική, γεωμετρική, αυστηρά μαθηματική) της ανάλυσης που θα ακολουθήσει.

Ορισμός 11 (Ελκυστής). Έστω (X, d) μετρικός χώρος με μετρική d . Το σύνολο $A \subset X$ λέγεται ελκυστής για την ημιομάδα $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, αν έχει τις παρακάτω ιδιότητες,

1. Το A είναι αναλλοίωτο σύνολο, δηλαδή ισχύει η σχέση $S(t)A = A, t \geq 0$.
2. Υπάρχει μία ανοικτή περιοχή U του A τέτοια ώστε, για κάθε $x_0 \in U$, η $S(t)x_0$ να συγκλίνει στο A , καθώς το $t \rightarrow \infty$, δηλαδή να ισχύει,

$$d(S(t)x_0, A) \rightarrow 0, \quad s.t \quad t \rightarrow \infty \quad (2.14)$$

Η προηγούμενη απόσταση αποτελεί την απόσταση σημείου ως προς ένα σύνολο.

Η έννοιες των πολλαπλοτήτων όπως θα φανεί και στα Κεφάλαια 3 και 6 είναι πολύ σημαντικές για την ανάλυση του συστήματός μας. Το πιο σημαντικό είναι ότι οι πολλαπλότητες θα παίξουν καθοριστικό ρόλο για την μετάβαση του συστήματος από την ασταθή στην ευσταθή χαοτική συμπεριφορά. Τα χαρακτηριστικά της μετάβασης στο Χάος παρουσιάζονται στην επόμενη υποενότητα.

2.4 Χάος και Μετάβαση στο Χάος

Η παρουσίαση των εννοιών του Χάους έγινε εκτενώς στο Κεφάλαιο 1. Είδαμε ότι μια σειρά από ερωτήματα που αναδύονται στη μελέτη του δεν περιορίζονται μόνο στη μαθηματική μελέτη του φαινομένου αλλά έχουν τεράστιες φιλοσοφικές προεκτάσεις και διαχρονικά έχουν αποτελέσει αντικείμενο αντιπαραθέσεων στο πεδίο της Φιλοσοφίας της Επιστήμης.

Μπορούμε να συνοψίσουμε ότι τα χαοτικά συστήματα παρουσιάζουν ορισμένα κοινά χαρακτηριστικά στην πλειοψηφία των περιπτώσεών τους. Αυτά είναι:

- Μακροπρόθεσμη Απεριοδική Συμπεριφορά
- Ευαισθησία στις Αρχικές Συνθήκες
- Μορφοκλασματική Δομή

Ένα αρκετά δύσκολο ερώτημα για να απαντηθεί είναι αν η χαοτική συμπεριφορά που παρατηρούμε είναι προϊόν πραγματικής απεριοδικής συμπεριφοράς ή αν μακροπρόθεσμα (για μεγάλο χρόνο πχ 10^{100}) εμφανίζει περιοδική συμπεριφορά.

Διάφορες μέθοδοι υπάρχουν για την αναζήτηση χαοτικής συμπεριφοράς όπως ο έλεγχος της ευαισθησίας που παρουσιάζει το σύστημα στις αρχικές

συνθήκες, η ύπαρξη διπλασιασμών περιόδου στο σύστημα, η χρήση των εκθετών Λιαπούνοφ - ένα σύστημα είναι χαοτικό αν τουλάχιστον ένας από τους εκθέτες Λιαπούνοφ είναι θετικός. Αυτό σημαίνει πως δύο τροχιές που ξεκινούν κοντά η μία στην άλλη πάνω στον παράξενο ελκυστή θα αποκλίνουν με την πάροδο του χρόνου. Τέλος μία άλλη αναλυτική μέθοδος για την διερεύνηση χαοτικής συμπεριφοράς παρέχεται μέσω των αναλυτικών κριτηρίων του Σίλνικοφ για την περίπτωση αυτόνομων συστημάτων που παρουσιάζονται στην συνέχεια.

2.4.1 Ομοκλιτική και Ετεροκλιτική Τροχία

Θεωρούμε το ακόλουθο αυτόνομο σύστημα τριών διαφορικών εξισώσεων,

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^3 \quad (2.15)$$

όπου το διανυσματικό πεδίο $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ανήκει στις συναρτήσεις κλάσης $C^r, r \geq 2$. Θεωρούμε ακόμα ένα σημείο ισορροπίας του συστήματος E έστω για παράδειγμα η αρχή των αξόνων και δύο επιπλέον σημεία ισορροπίας E_1 και E_2 .

Ορίζουμε ως Ομοκλιτική Τροχιά $\gamma(t)$ του συστήματος μια κλειστή τροχιά του (2.15) η οποία είναι διπλά ασυμπτωτική στο E και για την οποία ισχύει,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \gamma(t) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \gamma(t) = E \quad (2.16)$$

Με αντίστοιχο τρόπο ορίζουμε και την Ετεροκλιτική Τροχιά $\delta(t)$. Σε αυτή τη περίπτωση έχουμε δύο σημεία ισορροπίας E_1 και E_2 τα οποία συνδέονται μεταξύ τους μέσω μιας τροχιάς. Η τροχιά αυτή τείνει ασυμπτωτικά στο ένα σημείο ισορροπίας για τον εμπρόσθιο χρόνο και αντίστροφα στο δεύτερο σημείο ισορροπίας για τον οπίσθιο χρόνο. Θα ισχύει,

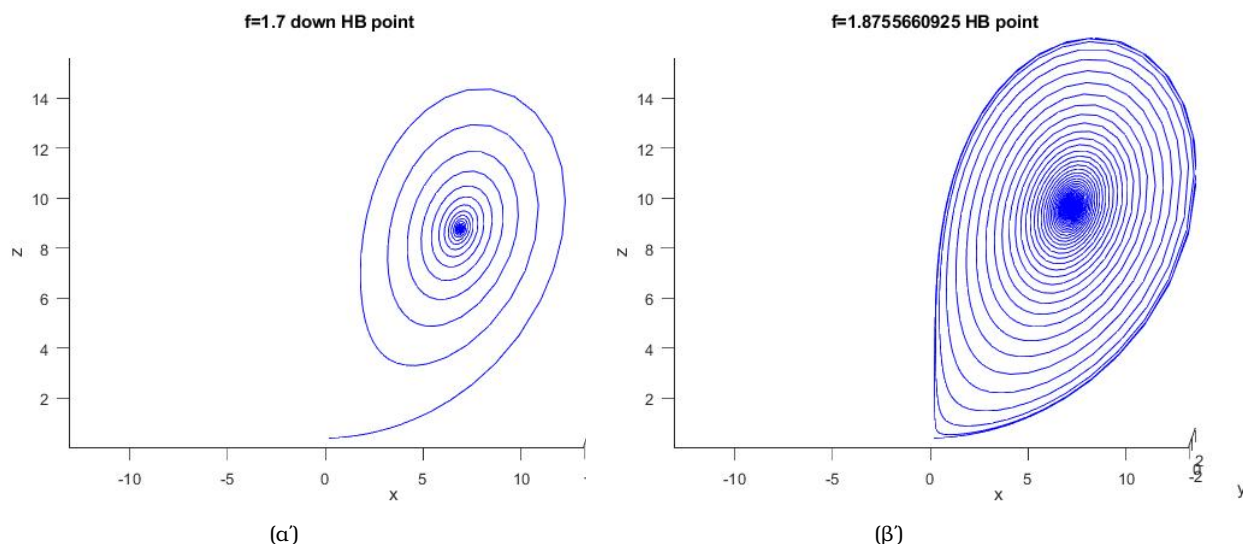
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \delta(t) = E_1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \delta(t) = E_2 \quad (2.17)$$

2.4.2 Ομοκλιτική Διακλάδωση

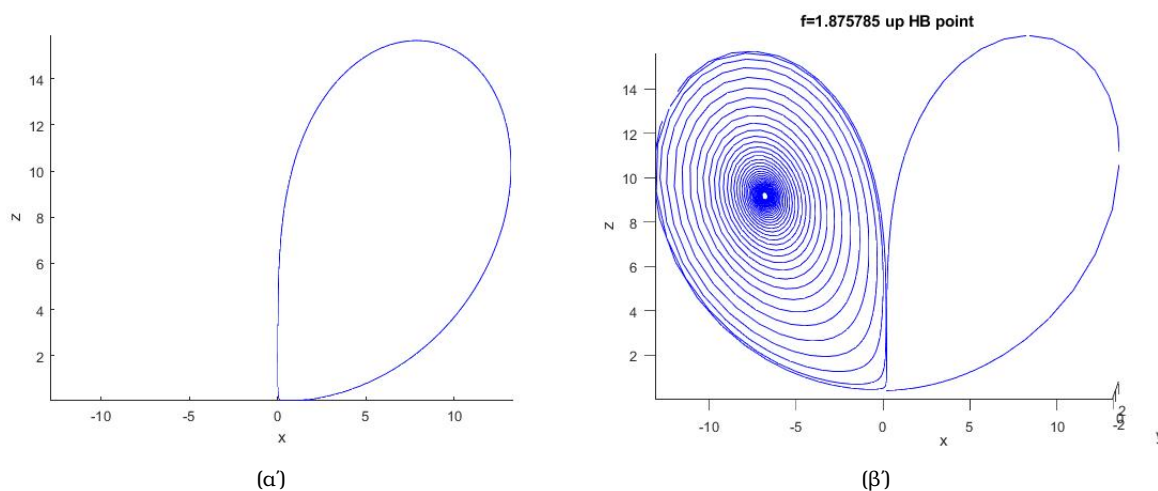
Παραθέτουμε εδώ την έννοια της Ομοκλιτικής Διακλάδωσης μιας και κρίνουμε απαραίτητο να δωθούν πρώτα οι ορισμοί των ευσταθών και ασταθών πολλαπλοτήτων καθώς και των ομοκλιτικών και ετεροκλιτικών τροχιών. Ομοκλιτική Διακλάδωση προκύπτει όταν οι ευσταθείς και ασταθείς πολλαπλότητες προσεγγίζουν η μία την άλλη και τελικά τέμνονται κάτω από τη μεταβολή μιας παραμέτρου. Η συμπεριφορά αυτή απορρέει από την σχέση μεταξύ των ασταθών και ευσταθών πολλαπλοτήτων με υπερβολικά σημεία

ισορροπίας του συστήματος. Ομοκλινική είναι η διακλάδωση όταν η τομή αυτή αφορά το ίδιο υπερβολικό σημείο ισορροπίας.

Παρουσιάζουμε ένα χαρακτηριστικό γράφημα από το χώρο των φάσεων του συστήματος μετακίνησης της πρωτεΐνης tlr4 όπου παρατηρείται ομοκλινική διακλάδωση.



Σχήμα 2.5: Η ευσταθής σπείρα πριν την ομοκλινική διακλάδωση και καθώς αυτή προσεγγίζει το σημείο διακλάδωσης.



Σχήμα 2.6: Η ομοκλινική τροχιά και η εναλλαγή του σημείου έλξης με το πέρασμα του σημείου διακλάδωσης.

2.4.3 Ομοκλινική Έκρηξη

Για την ολοκληρωμένη παρουσίαση του φαινομένου της Ομοκλινικής Έκρηξης (Homoclinic Explosion) παρουσιάζουμε αρχικά την έννοια των Σαγματικών Συστημάτων (Saddle Systems). Πρόκειται για συστήματα που υπόκεινται ομοκλινική τροχιά σε ένα σαγματικό τους σημείο ισορροπίας.

Θεωρούμε το παρακάτω σύστημα της μορφής:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda_1 x + P_\mu(x, y, z) \\ \dot{y} &= -\lambda_2 y + Q_\mu(x, y, z) \\ \dot{z} &= -\lambda_3 z + R_\mu(x, y, z) \end{aligned} \quad (2.18)$$

όπου $\lambda_{1,2,3} > 0$ και P_μ, Q_μ, R_μ είναι αναλυτικές συναρτήσεις οι οποίες εξαφανίζονται μαζί με τις πρώτες παραγώγους τους στην αρχή των αξόνων. Η ομοκλινική τροχιά προκύπτει στην αρχή των αξόνων για $\mu = 0$. Η διαδικασία σχηματισμού της ομοκλινικής τροχιάς είναι ίδια με αυτή που παρουσιάζεται στα σχήματα (2.4,2.5,2.6). Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση όπου το παραπάνω σύστημα εμφανίζει μία \mathbb{Z}_2 συμμετρία και πιο συγκεκριμένα την $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$. Αποδεικνύεται, κάποιος μπορεί να δει αναλυτικά το εν λόγω Θεώρημα στο [22], ότι η παρουσία της συμμετρίας στο ομοκλινικό σαγματικό σύστημα της εξίσωσης (2.18) μπορεί να εξηγήσει την πολυπλοκότητα της συμπεριφοράς του συστήματος. Η πολυπλοκότητα αυτή σχετίζεται με την αντίστοιχη απεικόνιση Πουανκαρέ του συστήματος. Η συμπεριφορά αυτή που εμφανίζεται σε σχέση με τις παραμέτρους εμφανίζεται ξαφνικά για την τιμή $\mu = 0$ στην αρχή των αξόνων και ονομάζεται Ομοκλινική Έκρηξη. Δίνουμε ορισμένα επιπλέον στοιχεία για τη σχέση της ομοκλινικής έκρηξης με τις ευσταθείς και ασταθείς πολλαπλότητες στην υποενότητα 6.5.3.

2.4.4 Τα Θεωρήματα του Σίλνικοφ

Τα Θεωρήματα του Σίλνικοφ για τα συστήματα συνεχών διαφορικών εξισώσεων παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον και αποτελούν ένα πολύ δυνατό εργαλείο για την μελέτη της χαοτικής συμπεριφοράς ενός συστήματος. Τόσο η ομοκλινική όσο και η ετεροκλινική εκδοχή του θεωρήματος παρέχει αναλυτικά κριτήρια για την ύπαρξη χάους σε μη γραμμικά συστήματα. Τα θεωρήματα αυτά αφορούν κυρίως υπερβολικά σημεία ισορροπίας και λέμε κυρίως γιατί πρόσφατα δόθηκε και μία αντίστοιχη απόδειξη για την περίπτωση μη υπερβολικών σημείων ισορροπίας [23]. Η ύπαρξη των προϋποθέσεων του Θεωρήματος Σίλνικοφ υποδεικνύει μία χαοτική συμπεριφορά που ονομάζεται Απεικόνιση «Πετάλου» του Σμέιλ. Παρακάτω δίνονται οι δύο εκδοχές του Θεωρήματος Σίλνικοφ με τις απαραίτητες εισαγωγικές παραδοχές που πρέπει να κάνουμε για την πληρέστερη παρουσίασή τους.

Θεωρούμε ότι το υπερβολικό σημείο ισορροπίας Z_e είναι Σαγματική Σφαίρα αν οι ιδιοτιμές της Ιακωβιανής $A = Df$ υπολογισμένη στο συγκεκριμένο σημείο ισορροπίας δίνονται ως,

$$\gamma, \quad \rho \pm i\omega, \quad \rho\gamma < 0, \quad \omega \neq 0 \quad (2.19)$$

όπου γ, ω, ρ είναι πραγματικές σταθερές. Με αυτή την αφετηρία διατυπώνουμε τις δύο εκδοχές του Θεωρήματος Σίλνικοφ.

Ομοκλινικό Θεώρημα Σίλνικοφ. *Αν ικανοποιούνται οι ακόλουθες δύο συνθήκες,*

1. Το σημείο ισορροπίας Z_e είναι Σαγματική Σπείρα και ισχύει,

$$|\gamma| > |\rho| > 0 \quad (2.20)$$

2. Υπάρχει μία ομοκλινική τροχιά με βάση το σημείο ισορροπίας Z_e .

Τότε θα ισχύουν τα ακόλουθα,

1. Η Απεικόνιση Σίλνικοφ, ορίζεται στην περιοχή γύρω από την ομοκλινική τροχιά του συστήματος και περιλαμβάνει ένα μετρήσιμο πλήθος «Πετάλων» του Σμέιλι για το αντίστοιχο διακριτό σύστημα.
2. Για κάθε επαρκώς μικρή διαταραχή g της f η οποία ανήκει στην κλάση συναρτήσεων C^1 , το διαταραγμένο σύστημα,

$$\frac{dZ}{dt} = g(Z), \quad Z \in \mathbb{R}^3 \quad (2.21)$$

διαθέτει τουλάχιστον ένα πεπερασμένο αριθμό «Πετάλων» του Σμέιλι για το αντίστοιχο σύστημα που ορίζεται η Απεικόνιση Σίλνικοφ κοντά στην ομοκλινική τροχιά.

3. Τόσο το αρχικό σύστημα (2.15) όσο και το διαταραγμένο (2.21) υπόκεινται σε Χαοτική Συμπεριφορά αυτή του «Πετάλου» του Σμέιλι.

Ετεροκλινικό Θεώρημα Σίλνικοφ. Υποθέτουμε ότι έχουμε δύο σημεία ισορροπίας τα οποία συμβολίζουμε Z_e^1 και Z_e^2 αντίστοιχα. Υποθέτουμε ακόμα ότι αυτά τα σημεία ισορροπίας είναι Σαγματικές Σπείρες των οποίων οι ιδιοτιμές δίνονται από γ_k και $\rho_k \pm i\omega_k$ όπου $k = 1, 2$. Υποθέτουμε ότι ικανοποιούνται οι ακόλουθες συνθήκες Σίλνικοφ,

1. Οι ιδιοτιμές ικανοποιούν τις παρακάτω ανισώσεις,

$$\begin{aligned} |\gamma_k| > |\rho_k| > 0, \quad k = 1, 2, \quad \omega \neq 0 \\ \rho_1 \rho_2 > 0, \quad \text{or} \quad \gamma_1 \gamma_2 > 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

2. Υπάρχει μία ετεροκλινική τροχιά που συνδέει τα σημεία ισορροπίας Z_e^1 και Z_e^2 .

Τότε θα ισχύουν τα ακόλουθα,

1. Η Απεικόνιση Σίβνικοφ που ορίζεται σε μία γειτονιά της ετεροκλιτικής τροχιάς, περιλαμβάνει ένα μετρήσιμο πλήθος «Πετάλων» του Σμέιτλ για το αντίστοιχο διακριτό σύστημα.

2. Για κάθε επαρκώς μικρή διαταραχή g της f η οποία ανήκει στην κλάση συναρτήσεων C^1 , το διαταραγμένο σύστημα,

$$\frac{dZ}{dt} = g(Z), \quad Z \in \mathbb{R}^3 \quad (2.23)$$

διαθέτει τουλάχιστον ένα πεπερασμένο αριθμό «Πετάλων» του Σμέιτλ για το αντίστοιχο σύστημα που ορίζεται η Απεικόνιση Σίβνικοφ κοντά στην ετεροκλιτική τροχιά.

3. Τόσο το αρχικό σύστημα (2.15) όσο και το διαταραγμένο (2.23) υπόκεινται σε Χαοτική Συμπεριφορά αυτή του «Πετάλου» του Σμέιτλ.

2.5 Αριθμητικές Μέθοδοι

Οι αριθμητικές μέθοδοι αποτελούν ένα από τα πιο σημαντικά πεδία των εφαρμοσμένων μαθηματικών τόσο γενικά όσο και πιο συγκεκριμένα στην μελέτη συστημάτων διαφορικών εξισώσεων (μερικών ή συνήθων). Στην πλειοψηφία των περιπτώσεων η εύρεση αναλυτικής λύσης για ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων είναι κάτι που δεν είναι εφικτό. Ως απόρροια για την πλειοψηφία των περιπτώσεων η αριθμητική επίλυση του συστήματος είναι η μόνη διέξοδος. Η αριθμητική μέθοδος, μας δίνει μία προσεγγιστική λύση για το πρόβλημά μας μέσω μίας κατάλληλης διακριτοποίησης του χώρου και του χρόνου. Υπάρχουν διάφορες μέθοδοι αριθμητικής επίλυσης με διαφορετική ικανότητα η κάθε μία να συγκλίνει σε μία όσο το δυνατόν καλύτερη προσέγγιση της λύσης. Θα περιοριστούμε σε περιπτώσεις που θα φανούν χρήσιμες στη συνέχεια της παρούσας εργασίας αποφεύγοντας μία γενική παρουσίαση του θέματος που κάποιος μπορεί να βρει σε ένα οποιοδήποτε βιβλίο αριθμητικής ανάλυσης.

Η παρουσίαση των εννοιών της Αριθμητικής Ολοκλήρωσης και της Αριθμητικής Συνέχισης (Numerical Continuation στην Αγγλική βιβλιογραφία) κρίνονται απαραίτητες για την κατανόηση των αριθμητικών μεθόδων πίσω από τα αποτελέσματα που παίρνουμε με τη χρήση του Πακέτου Matcont [24, 25]. Αποτελούν τα βασικά εργαλεία για την παρουσίαση τόσο των πορτραίτων φάσεων (για το σύστημά μας και το μοντέλο του Λόρενζ) όσο και των διαγραμμάτων διακλαδώσεων και την παρακολούθηση της ποιοτικής συμπεριφοράς του συστήματος κάτω από την μεταβολή των παραμέτρων.

Αφειρηρία της παρουσιάσής μας αποτελεί το αυτόνομο σύστημα των συνήθων διαφορικών εξισώσεων που παρουσιάσαμε στις εξισώσεις (2.1) και (2.15).

2.5.1 Αριθμητική Ολοκλήρωση

Είναι γνωστό ότι μία οποιαδήποτε διαφορική εξίσωση - σαν συνάρτηση μίας άγνωστης συνάρτησης και των παραγώγων της - μπορεί να μετατραπεί σε ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης. Το σύστημα αυτό εφοδιασμένο με τις αντίστοιχες αρχικές συνθήκες αποτελεί τη γνωστή διατύπωση ενός Προβλήματος Αρχικών Τιμών. Ένα τέτοιο πρόβλημα αρχικών τιμών στη γενική του μορφή παρουσιάζεται στην εξίσωση (2.24)

$$\begin{aligned} \vec{x}' &= \vec{f}(\vec{x}(t)), \quad t \geq 0, \quad \vec{x}, \vec{f} \in \mathbb{R} \\ \vec{x}(0) &= \vec{x}_0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

Μία τέτοια μορφή προβλήματος αρχικών τιμών στο χώρο των τριών διαστάσεων αποτελεί τόσο το μοντέλο του Λόρενζ όσο και το μοντέλο της πρωτεΐνης tlr4. Το βασικό εργαλείο για την προσέγγιση των λύσεων των συστημάτων μας, αποτελούν οι μέθοδοι αριθμητικής ολοκλήρωσης. Ενδεικτικά αναφέρουμε την Μέθοδο του Όιλερ για ιστορικούς κυρίως λόγους καθώς και την Μέθοδο των Ρούνγκε-Κούτα που αποτελεί και το βασικό εργαλείο πίσω από τις συναρτήσεις επίλυσης συστημάτων διαφορικών εξισώσεων που χρησιμοποιεί το Matlab. Στο τέλος της υποενότητας δίνουμε το χαρακτηριστικό παράδειγμα της διαφορικής εξίσωσης $y' = \sin(t)^2 y$ το οποίο επιλύεται με τις δύο μεθόδους και συγκρίνεται με την ακριβή λύση.

Μέθοδος του Όιλερ

Η Μέθοδος του Όιλερ παρουσιάζεται στην εξίσωση (2.25)

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n + \Delta t \vec{f}(\vec{x}_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.25)$$

Η ιδέα της μεθόδου είναι ο υπολογισμός μίας άγνωστης καμπύλης μίας διαφορικής εξίσωσης, όπου ξεκινώντας από ένα δεδομένο σημείο υπολογίζουμε την κλίση της εφαπτόμενης της καμπύλης στο σημείο εφόσον είναι γνωστό το σημείο της καμπύλης. Προχωράμε λοιπόν πάνω στην καμπύλη κάνοντας μικρά βήματα μέσω της εφαπτόμενης της η οποία θεωρούμε ότι για μικρά βήματα μένει πάνω στην καμπύλη. Σε γενικές γραμμές, η προσεγγιστική αυτή καμπύλη δεν αποκλίνει πολύ από την αρχική ακριβή λύση, και το σφάλμα μεταξύ των δύο καμπυλών μπορεί να γίνει μικρό, αν το μέγεθος του βήματος είναι αρκετά μικρό και το διάστημα του υπολογισμού είναι πεπερασμένο.

Στην πραγματικότητα τα σφάλματα που προκύπτουν από την εφαρμογή της Μεθόδου είναι ένα τοπικό σφάλμα $O(\Delta t^2)$ για κάθε βήμα και ένα ολικό σφάλμα $O(\Delta t)$. Η μέθοδος αυτή παρουσιάζει μειονέκτηματα σε σχέση με άλλες μεθόδους καθώς χάνει σε ακρίβεια για το ίδιο χρονικό βήμα, ενώ αδυνατεί να αντιμετωπίσει πολύ δύσκαμπτες (stiff) εξισώσεις. Στην πράξη χρησιμοποιείται ως αφετηρία για την κατασκευή άλλων πιο περίπλοκων μεθόδων.

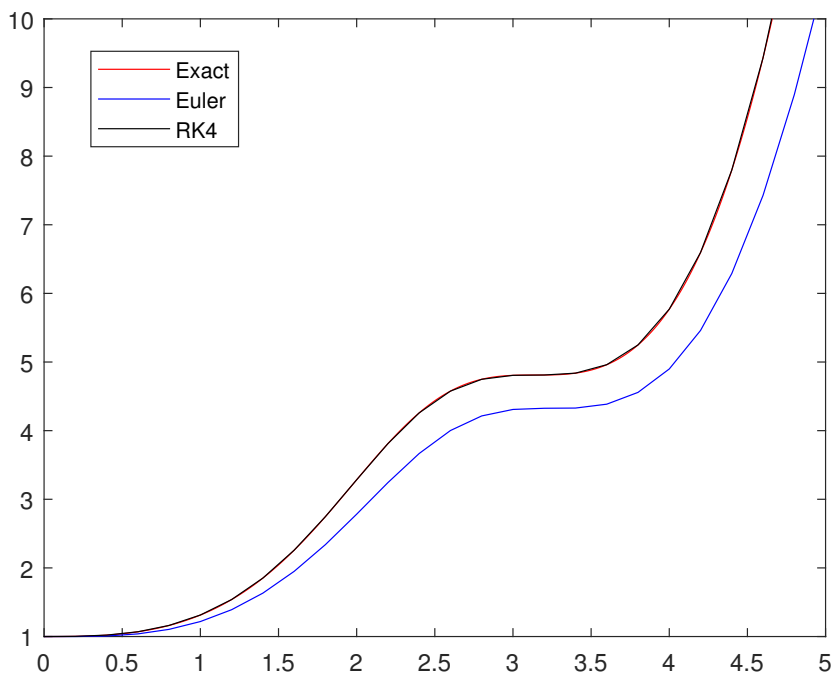
Μέθοδος Ρούνγκε-Κούτα 4ης Τάξης

Η Μέθοδος των Ρούνγκε-Κούτα αποτελεί μία από τις πιο ευρέως διαδεδομένες μεθόδους για την επίλυση συστημάτων διαφορικών εξισώσεων. Η Μέθοδος παρουσιάζεται στο επόμενο σύστημα εξισώσεων (2.26).

$$\begin{aligned}
 k_1 &= \Delta t f(t_n, x_n) \\
 k_2 &= \Delta t f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, x_n + \frac{k_1}{2}\right) \\
 k_3 &= \Delta t f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, x_n + \frac{k_2}{2}\right) \\
 k_4 &= \Delta t f(t_n + \Delta t, x_n + k_3) \\
 x_{n+1} &= x_n + \frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{1}{3}k_3 + \frac{1}{6}k_4
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

Το σύστημα (2.26) αποτελεί την Μέθοδο Ρούνγκε-Κούτα 4ης τάξης και αποτελείται από τέσσερις εκτιμήσεις παραγώγων σε κάθε χρονικό βήμα. Η τελική τιμή είναι αποτέλεσμα του συνδυασμού αυτών των εκτιμήσεων. Προσεγγίζει κάθε επόμενο βήμα διαμέσου μίας ακολουθίας ιδανικών βημάτων. Ένα πρώτο πλεονέκτημά της είναι η ικανότητά της να αντιμετωπίζει και αρκετά δύσκαμπτες εξισώσεις. Η σύγκλιση και η ευστάθεια της μεθόδου είναι κατά πολύ καλύτερη αυτών της Μεθόδου Όιλερ. Αυτό φαίνεται και από το γεγονός ότι το τοπικό σφάλμα της είναι τέταρτης τάξης $O(\Delta t^4)$ ως προς το χρόνο. Χαρακτηριστικά παραδείγματα εφαρμογής της συγκεκριμένης μεθόδου στην παρούσα Δ.Ε είναι τα φασικά πορτρέτα που δίνονται τόσο για το Μοντέλο του Λόρενζ όσο και για το Μοντέλο της Πρωτεΐνης tlr4.

Στην παρακάτω γραφική παράσταση παρουσιάζεται η επίλυση της διαφορικής εξίσωσης $y' = \sin(t)^2 y$ τόσο με τη μέθοδο Ρούνγκε-Κούτα 4ης Τάξης όσο και με τη Μέθοδο του Όιλερ σε σύγκριση με την ακριβή λύση της. Είναι φανερό η μεγαλύτερη ικανότητα σύγκλισης της Μεθόδου Ρούνγκε-Κούτα σε σχέση με την Όιλερ για το ίδιο χρονικό βήμα.



Σχήμα 2.7: Η αναλυτική λύση της επίλυσης της διαφορικής εξίσωσης $y' = \sin(t)^2 y$ και η σύγκριση αυτής με τις μεθόδους Όιλερ και Ρούνγκε-Κούτα 4ης τάξης.

2.5.2 Αριθμητική Συνέχιση

Η Αριθμητική Συνέχιση αποτελεί ένα πολύ ισχυρό εργαλείο όχι μόνο για τον αριθμητικό υπολογισμό λύσεων διαφορικών συστημάτων - σαν συνέχεια των προηγούμενων δύο μεθόδων - αλλά και για την σημαντική πληροφορία που μας παρέχει για την ποιοτική συμπεριφορά του συστήματος κάτω από την αλλαγή των παραμέτρων. Η βασική λογική πίσω από τη Μέθοδο της Αριθμητικής Συνέχισης συνοψίζεται στη συνέχεια.

Θεωρούμε μία λεία συνάρτηση,

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (2.27)$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε την ακολουθία των σημείων που αποτελούν λύση της εξίσωσης (2.27) κάτω από συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων για τις οποίες ισχύει,

$$\mathbf{F}(\vec{x}, \vec{\mu}) = 0 \quad (2.28)$$

Η ακολουθία των σημείων που προκύπτει αντιστοιχεί σε μία συγκεκριμένη συμπεριφορά του συστήματος. Τα αποτελέσματα που παίρνουμε σε αρκετές περιπτώσεις περιέχουν σημεία διακλάδωσης για το σύστημα, κάτι που συνεπάγεται την αλλαγή στην ευστάθεια και την συμπεριφορά του.

Για την περαιτέρω παρουσίαση της Μεθόδου δίνουμε στο σημείο αυτό το Implicit Function Theorem. Το Θεώρημα αυτό αποτελεί απαραίτητη προ-

ϋπόθεση για την διατύπωση της μεθόδου μήκους τόξου που παραθέτουμε στη συνέχεια. Παρουσιάζουμε λοιπόν μία όχι και τόσο αυστηρή διατύπωσή του.

Θεωρούμε όπως και προηγουμένως μία συνεχή συνάρτηση,

$$\mathbf{F}(x) = 0, \quad \mathbf{F} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (2.29)$$

Συμβολίζουμε με $\mathbf{F}_x(x_0)$ τον Ιακωβιανό πίνακα υπολογισμένο σε μία λύση \vec{x}_0 . Ο πίνακας αυτός θα έχει n γραμμές και $n + 1$ στήλες. Αν ισχύει,

$$\text{Rank}(\mathbf{F}_x(x_0)) = n \quad (2.30)$$

ή ισοδύναμα

$$\dim(N(\mathbf{F}_x(x_0))) = 1 \quad (2.31)$$

όπου με N έχουμε δηλώσει τον Null Space, τότε το Θεώρημα εγγυάται ότι εκεί υπάρχει μία μοναδική οικογένεια λύσεων $x(s)$ όπου $s \in \mathbb{R}$ και $\delta > 0$ τέτοια ώστε να ισχύει,

$$x(0) = x_0, \quad \mathbf{F}(x(s)) = 0, \quad |s| < \delta \quad (2.32)$$

Από τις πιο χαρακτηριστικές περιπτώσεις μεθόδου αριθμητικής συνέχισης είναι αυτή της «Αριθμητικής Συνέχισης Μήκους Τόξου». Θεωρούμε ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες του Implicit Function Theorem για μία συγκεκριμένη λύση \mathbf{x}_0 , δηλαδή ισχύει,

$$\text{Rank}(\mathbf{F}_x(\mathbf{x}_0)) = n \quad (2.33)$$

τότε υπάρχει μία οικογένεια λύσεων $\mathbf{x}(t)$ τέτοια ώστε να ικανοποιεί την εξίσωση (2.27). Η κάθε επόμενη λύση δίνεται από την παρακάτω σχέση όπου με Δs συμβολίζεται το μήκος του επόμενου βήματος.

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_x(\mathbf{x}_1) &= 0 \\ (\vec{x}_1 - \vec{x}_0)^T \dot{\vec{x}}_0 &= \Delta s \end{aligned} \quad (2.34)$$

Το $\dot{\vec{x}}_0$ είναι ένα «κενό» διάνυσμα του Ιακωβιανού πίνακα $\mathbf{F}_x(\mathbf{x}_0)$.

Κεφάλαιο 3

Το Μοντέλο του Λόρενζ

Όπως ήδη έχουμε περιγράψει, το σπέρμα της Θεωρίας του Χάους είχε εμφυτευτεί στην παγκόσμια επιστημονική κοινότητα από τον Πουανκαρέ. Απέμενε το να βρεθεί ένας συνεχιστής (ή συνεχιστές) των προβληματισμών και των συμπερασμάτων του, κάτι που πραγματοποιήθηκε. Σε αυτή την πορεία εξέλιξης της Θεωρίας του Χάους ξεχωρίζουν, ο Αμερικανός μαθηματικός Μπίρκοφ ο οποίος επέκτεινε τα αποτελέσματα του Πουανκαρέ σε δυναμικά συστήματα διακριτού χρόνου που περιγράφονταν από αλγεβρικές μη γραμμικές απεικονίσεις, ο Αμερικανός τοπολόγος Σμέιλ που χρησιμοποίησε απλά γεωμετρικά παραδείγματα για να δείξει ότι ένα μεγάλο πλήθος διδιάστατων ντετερμινιστικών απεικονίσεων εμπεριέχουν λύσεις με ιδιότητες τόσο τυχαίες όσο και η ρίψη ενός νομίσματος, ο Αμερικανός Ε. Λόρενζ που δημοσίευσε μια εργασία στην οποία περιγραφόταν η διαπίστωση ότι οι λύσεις ενός απλού ντετερμινιστικού μοντέλου τριών διαφορικών εξισώσεων συγκεντρώνονται σε ένα πολύπλοκο σύνολο στο χώρο των φάσεων που πήρε το όνομα παράξενος ελκυστής και ο επίσης Αμερικανός Μαθηματικοφυσικός Φάινγκενμπάουμ που έδειξε με τη βοήθεια απλών μη γραμμικών απεικονίσεων τη δυνατότητα μετάβασης στο Χάος μέσω μιας ακολουθίας διακλαδώσεων με «παγκόσμια» χαρακτηριστικά. Παρακάτω στεκόμαστε κυρίως στους δύο τελευταίους που παρουσιάζουν και το μεγαλύτερο ενδιαφέρον για το παρόν Κεφάλαιο.

3.1 Η Ιστορία πίσω από τις Τρεις Εξισώσεις του Λόρενζ

Ο Λόρενζ έχοντας ως κύριο αντικείμενο μελέτης την πρόβλεψη του καιρού είχε κατασκευάσει ένα μοντέλο ακριβώς για αυτόν το σκοπό. Πίστευε σε ένα σύμπαν που δούλευε όπως και ο μηχανισμός ενός ρολογιού. Αυτό που κλόνισε το δόγμα του ήταν ένα τυχαίο γεγονός. Έδωσε στον υπολογιστή του δυο φορές τα δεδομένα του με μια ελάχιστη διαφοροποίηση στους αριθμούς, τέτοια που κανένας μέχρι τότε δε θα μπορούσε να υποθέσει ότι θα ήταν

δυνατό να οδηγήσουν σε μια διαφορετική εκτίμηση. Το αποτέλεσμα ήταν κάτι παραπάνω από εντυπωσιακό. Ελάχιστη διαφοροποίηση στα αρχικά δεδομένα, άλλαζε δραματικά τη συμπεριφορά του μοντέλου. Στην αρχική φάση εξέλιξης η συμπεριφορά ήταν σχεδόν πανομοιότυπη. Από ένα όμως σημείο κι έπειτα η εξέλιξη των δυο μοντέλων απέκλινε κατά τρόπο εντυπωσιακό. Έτσι το πρώτο συμπέρασμα που φαινόταν να προκύπτει αβίαστα ήταν πως η μακροπρόθεσμη πρόβλεψη του καιρού είναι αδύνατη.

Ο Λόρενζ δεν αρκέστηκε σε αυτό το εντυπωσιακό συμπέρασμα. Επιθυμούσε να δώσει στα συμπεράσματα του και μαθηματική στήριξη. Για να περιγράψει την πολυπλοκότητα που είχε ανακαλύψει, κατασκεύασε ένα σύστημα με μόλις τρεις εξισώσεις οι οποίες ήταν μη γραμμικές. Με τις τρεις αυτές εξισώσεις περιέγραφε το εξής μηχανικό μοντέλο: ένα ορισμένο είδος υδατοτροχών που αποτελούσαν το μηχανικό ανάλογο του περιστρεφόμενου κύκλου της μεταφοράς θερμότητας. Στην κορυφή, στάζει νερό σε δοχεία που κρέμονται από το πλαίσιο ενός τροχού. Καθένα από τα δοχεία έχει σταθερή διαρροή από μια μικρή οπή. Έτσι έχουμε τα εξής ενδεχόμενα: σε περίπτωση που η ροή του νερού είναι μικρή, τα πάνω δοχεία δεν γεμίζουν ποτέ τόσο γρήγορα ώστε να υπερνικηθεί η τριβή. Το άλλο ενδεχόμενο είναι η ροή να είναι πιο γρήγορη οπότε το βάρος αρχίζει να στρέφει τον τροχό. Η περιστροφή μπορεί να γίνει συνεχής. Αλλιώς, αν η ροή είναι τόσο γρήγορη ώστε τα βαριά δοχεία να περάσουν από το κάτω μέρος και ν' αρχίσουν να ανεβαίνουν από την άλλη πλευρά, τότε ο τροχός μπορεί να επιβραδυνθεί, να σταματήσει και να αντιστρέψει την περιστροφή του, γυρνώντας πρώτα απ' τη μια και μετά απ' την άλλη πλευρά.

Οι τρεις εξισώσεις με τις τρεις μεταβλητές που περιέγραφαν πλήρως την κίνηση αυτού του συστήματος έδωσαν μέσω του υπολογιστή τις μεταβαλλόμενες τιμές της τριάδας των μεταβλητών, που αναπαριστώμενες από τον Λόρενζ με τέτοιο τρόπο όπως τις συντεταγμένες που ορίζουν ένα σημείο στο τρισδιάστατο χώρο, δημιούργησαν μια περίεργη μορφή, ένα είδος διπλής έλικας σε τρεις διαστάσεις. Οι βάσεις για αυτό που σήμερα ονομάζουμε παράξενο ελκυστή είχαν τεθεί. Το πιο ενδιαφέρον όμως απ' όλα ήταν πως από τη μια παρατηρούσαμε μια καθαρή αταξία αφού κανένα σημείο ή ομάδα σημείων δεν επαναλαμβανόταν και από την άλλη παρατηρούσαμε μια τάξη νέου είδους αφού το σχήμα χαρακτηριζόταν από μια αρμονία.

Ο Φάινγκενμπαουμ από την πλευρά του έλεγξε μια ολόκληρη κατηγορία εξισώσεων και βρήκε μια κλίμακα καθολικής ισχύος στους μετασχηματισμούς διπλασιασμού περιόδου που παρουσιάζονταν. Οι εξισώσεις που μελέτησε εφαρμόζονται σε ποικίλα φαινόμενα όπως τα ηλεκτρικά κυκλώματα, τα οπτικά συστήματα, τις συσκευές στερεάς κατάστασης, τους επιχειρησια-

κούς κύκλους, τους πληθυσμούς και τη μάθηση. Ο Φάιγκενμπάουμ έδειξε ότι οι λεπτομέρειες των διαφορετικών συστημάτων δεν επηρεάζουν και ότι ο διπλασιασμός περιόδου αποτελεί κοινό χαρακτηριστικό του τρόπου με τον οποίο η τάξη διαλύεται σε χάος. Υπολόγισε μερικούς παγκόσμιους αριθμούς που αναπαριστούσαν λόγους στην κλίμακα των σημείων μετάβασης κατά τη διάρκεια της διαδικασίας διπλασιασμού. Ανακάλυψε πως όταν ένα σύστημα δρα επαναληπτικά επάνω στον εαυτό του, τότε θα παρουσιάσει μεταβολή σε αυτά τα παγκόσμια σημεία κατά μήκος της κλίμακας.

Κλείνοντας αυτή τη γενική περιγραφή, κατά την οποία σκιαγραφήσαμε τη γένεση της Θεωρίας του Χάους, ας δούμε τέλος τι παραπάνω πρόσθεσε (η ΘτΧ) στα δυναμικά μοντέλα της επιστήμης. Μέχρι πριν από σαράντα χρόνια περίπου οι επιστήμονες χειρίζονταν δυο είδη δυναμικών συστημάτων. Το ένα είδος αφορούσε συστήματα ντετερμινιστικά, μικρού αριθμού αλληλεπιδράσεων-συνιστωσών (βαθμών ελευθερίας). Η εξέλιξη αυτών των συστημάτων θεωρούνταν απόλυτα προβλέψιμη. Το άλλο είδος ήταν συστήματα στοχαστικά μεγάλου ή άπειρου αριθμού βαθμών ελευθερίας. Για τη μελέτη τους απαιτούνταν η χρήση της θεωρίας των πιθανοτήτων. Η δε εξέλιξή τους θεωρούνταν τυχαία και απρόβλεπτη. Η Θεωρία του Χάους όμως πρόσθεσε κι ένα τρίτο μοντέλο. Τα χαρακτηριστικά αυτού του νέου μοντέλου είχαν ως εξής: α) αφορούσε αποκλειστικά μη γραμμικά δυναμικά συστήματα β) ήταν εν γένει ολιγοδιάστατο γ) ήταν ντετερμινιστικό δ) είχε μη προβλέψιμη συμπεριφορά και ε) η συμπεριφορά του επηρεαζόταν αποφασιστικά από τις αρχικές συνθήκες.

Οι επόμενες ενότητες παρουσιάζουν την μαθηματική περιγραφή του Μοντέλου του Λόρενζ. Η μαθηματική του περιγραφή κρίθηκε αναγκαίο να παρουσιαστεί ξεχωριστά καθώς παρουσιάζει σημαντικές ομοιότητες με αυτή του Κεφαλαίου 6 και συμβάλλει στην πληρέστερη κατανόησή του.

3.2 Το Μοντέλο του Λόρενζ

Η παρουσίαση του Μοντέλου του Λόρενζ έγινε με την ιστορική δημοσίευση της εργασίας του «Deterministic nonperiodic flow» που δημοσιεύτηκε στο περιοδικό *Journal of atmospheric sciences* το 1963 [26], καθώς και με την γενίκευση των συμπερασμάτων του στην εργασία «The nature and theory of the general circulation of the atmosphere» το 1967 [27]. Οι εργασίες αυτές αποτελούν δύο από τα μεγάλα ορόσημα στη διαμόρφωση της Θεωρίας του Χάους όπως την ξέρουμε σήμερα.

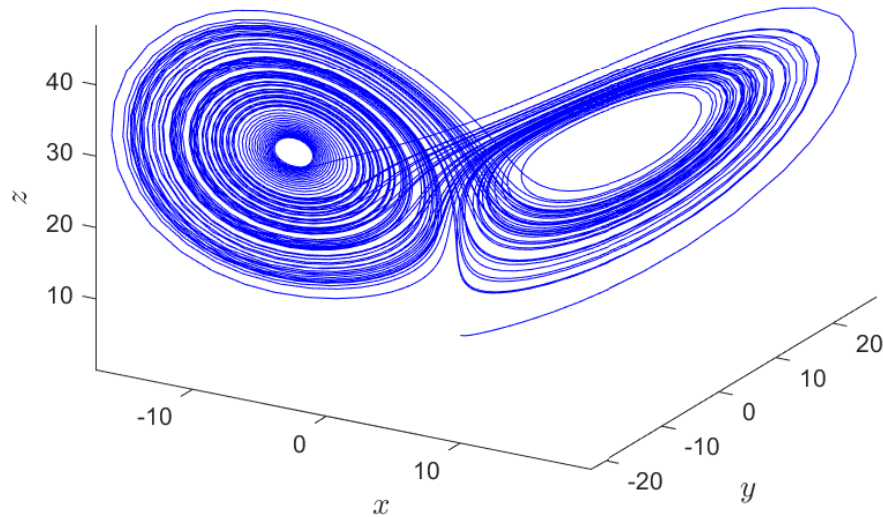
Περνάμε τώρα στην παρουσίαση του μαθηματικού μοντέλου του Λόρενζ. Το Μοντέλο που κατασκεύασε αποτελεί ένα απλοποιημένο μοντέλο ενός

μεταδιδόμενου ρευστού. Πρόκειται για ένα αρκετά απλό σύστημα που παρουσιάζει όμως μία πολύ μεγάλη ποικιλία στην συμπεριφορά του. Το Μοντέλο του αποτελείται από ένα σύστημα τριών διαφορικών εξισώσεων και παρουσιάζεται στην εξίσωση (3.1).

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= -bz + xy\end{aligned}\tag{3.1}$$

Το παραπάνω σύστημα αποτελεί το πλέον διάσημο αυτόνομο χαοτικό σύστημα τριών διαφορικών εξισώσεων. Το σύστημα αυτό αποτελεί μία αρκετά απλοποιημένη μορφή της ατμόσφαιρας και τις μεταβλητότητας του καιρού. Πιο συγκεκριμένα το x αποτελεί το ποσοστό της μεταδιδόμενης αναταραχής, το y μετρά την οριζόντια μεταβολή της θερμοκρασίας και το z μετρά την κατακόρυφη μεταβολή της. Σε ότι αφορά τις παραμέτρους το σ είναι ο αριθμός του Prandtl, το r είναι ο αριθμός του Rayleigh και το b είναι ένας βαθμωτός παράγοντας. Ο αριθμός του Prandtl σχετίζεται με το ιξώδες του ρευστού και ο αριθμός του Rayleigh με τη διαφορά της θερμοκρασίας μιας στήλης του ρευστού. Η συνήθης μελέτη του Μοντέλου του Λόρενζ αλλά και αυτή την οποία εφάρμοσε και ο ίδιος είναι για τιμές των παραμέτρων $\sigma = 10$, $b = 8/3$ καθώς η τιμή της παραμέτρου r μεταβάλλεται.

Ο Λόρενζ ανακάλυψε ότι αυτό το απλοποιημένο σύστημα παρουσιάζει μία εξαιρετικά πολύπλοκη δυναμική για ένα μεγάλο εύρος της παραμέτρου r . Για συγκεκριμένες τιμές οι λύσεις μπορούν να ταλαντώνονται απεριοδικά, χωρίς να επαναλαμβάνονται, παραμένοντας όμως σε μία φραγμένη περιοχή του χώρου. Οι τροχιές που φαίνονται στο γράφημα (3.1) αποτελούν ένα περίπλοκο σύνολο που πλέον είναι γνωστό με την ονομασία Παράξενος Ελκυστής ή Ελκυστής Λόρενζ. Το σύνολο αυτό αποτελεί μία δομή φράκταλ διάστασης μεταξύ 2 και 3. Μια πιο λογοτεχνική ερμηνεία του μοντέλου του Λόρενζ είναι αυτή του «Φαινομένου της Πεταλούδας», σύμφωνα με το οποίο μία πεταλούδα σε ένα μέρος του κόσμου ανοιγοκλείνοντας τα φτερά της μπορεί να προκαλέσει μία καταιγίδα στην άλλη άκρη του πλανήτη.



Σχήμα 3.1: Ο διάσημος χαοτικός ελκυστής του Συστήματος Λόρενζ.

Στις ενότητες που ακολουθούν στεκόμαστε αναλυτικά στη δυναμική συμπεριφορά του συστήματος αυτών των τριών διαφορικών εξισώσεων.

3.2.1 Ανάλυση του Συστήματος

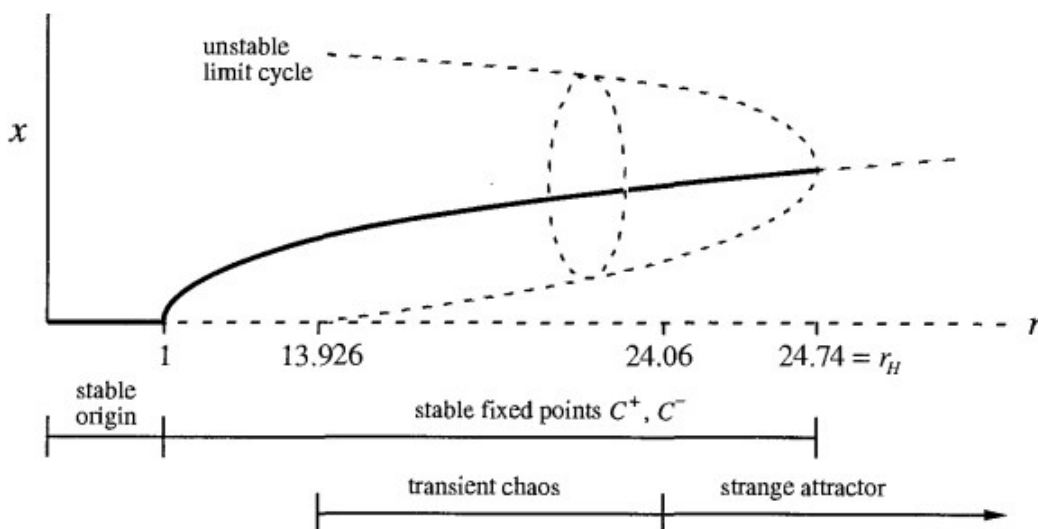
Η βασική εισαγωγή για την ποιοτική κατανόηση του Μοντέλου του Λόρενζ έγινε στην προηγούμενη ενότητα και στο εισαγωγικό κομμάτι. Το Μοντέλο του Λόρενζ έχει απασχολήσει τους επιστήμονες για δεκαετίες και έχει τροφοδοτήσει με πλήθος αποτελεσμάτων την έρευνα κάτι που φαίνεται (ενδεικτικά μόνο) στις σχετικές εργασίες που αναφέρουμε εδώ [28, 29, 30, 31]. Περνάμε κατευθείαν στα βασικά συμπεράσματα της μαθηματικής ανάλυσης του μοντέλου.

- Το Σύστημα παρουσιάζει συμμετρία κάτω από το μετασχηματισμό $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$. Οι εξισώσεις παραμένουν αμετάβλητες πράγμα που σημαίνει ότι οι λύσεις του συστήματος είναι είτε συμμετρικές είτε έχουν συμμετρική λύση.
- Το Σύστημα Λόρενζ είναι μη διατηρητικό και η ροή είναι συστολική κατ' όγκο αφού $\operatorname{div} \mathbf{F} = -(\sigma + b + 1) < 0$ όπου \mathbf{F} είναι το διανυσματικό πεδίο ($\mathbf{F} = \sigma(y - x)\mathbf{i} + (rx - y - xz)\mathbf{j} + (xy - bz)\mathbf{k}$). Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι ο όγκος στο χώρο των φάσεων συρρικνώνεται εκθετικά γρήγορα.

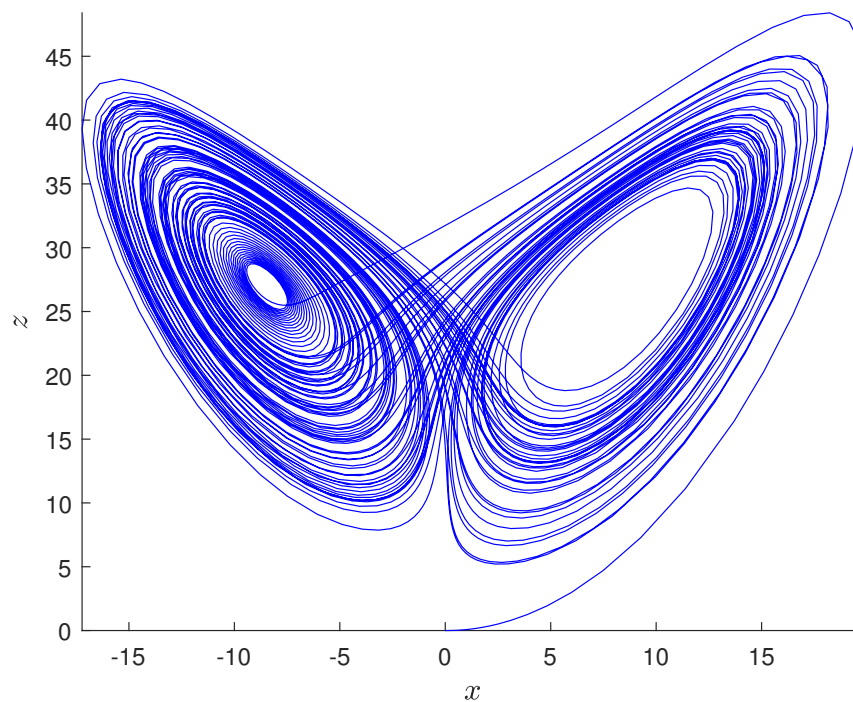
- Για $0 < r < 1$ η Αρχή $(0, 0, 0)$ αποτελεί το μοναδικό σημείο ισορροπίας και είναι ένας ολικός ελκυστής.
- Για $r > 1$ έχουμε την εμφάνιση δύο συμμετρικών σημείων ισορροπίας μέσω μίας διακλάδωσης τρίαυνας. Ιστορικά τα σημεία αυτά είχαν συμβολιστεί από το Λόρενζ C^+, C^- και είναι ίσα με:

$$C^\pm = (\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1).$$
- Στο σημείο $r = r_{hom} \approx 13.93$ έχουμε την εμφάνιση μιας ομοκλινικής διακλάδωσης και το σύστημα εισέρχεται σε μία περιοχή μεταβατικού χάους (αναλυτικά θα σταθούμε στην επόμενη ενότητα).
- Για $0 < r < r_H$ η Αρχή είναι ασταθής και τα σημεία ισορροπίας C^\pm είναι και τα δύο ευσταθή.
- Για την τιμή $r > r_H$ τα σημεία ισορροπίας C^\pm χάνουν την ευστάθειά τους με την απορρόφηση ενός ασταθούς οριακού κύκλου από μία υποκρίσιμη διακλάδωση Χοιφ.
- Για τιμή της παραμέτρου μεγαλύτερης από την τιμή της στη διακλάδωση Χοιφ $r_H = \frac{\sigma(\sigma+b+3)}{\sigma-b-1} \approx 24.74$ έχουμε την εμφάνιση χαοτικής συμπεριφοράς. Η απериοδική συμπεριφορά που εμφανίζεται συνοδεύεται από το διάσημο ελκυστή Λόρενζ όπως αυτός φαίνεται στο γράφημα (3.1) στις τρεις διαστάσεις ή στην προβολή του στις δύο διαστάσεις στο χώρο των μεταβλητών (x, z) στο γράφημα (3.3).

Η ευστάθεια του συστήματος και τα διαστήματα μετάβασης στη χαοτική συμπεριφορά φαίνονται στο παρακάτω διάγραμμα από το [14].

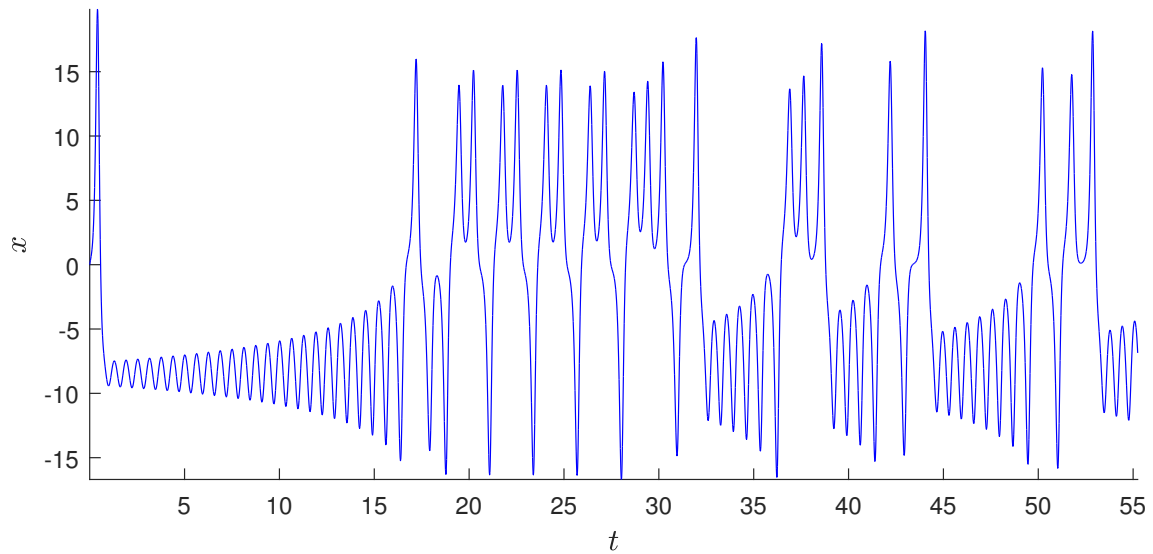


Σχήμα 3.2: Το συνολικό διάγραμμα διακλάδωσης του Συστήματος Λόρενζ, με τις φάσεις μετάβασης στην ευσταθή χαοτική συμπεριφορά.



Σχήμα 3.3: Η προβολή του χαοτικού ελκυστή στο επίπεδο $x - z$.

Στο διάγραμμα 3.2 φαίνονται τα δύο σημεία ισορροπίας (η ευσταθής αρχή των αξόνων και τα ευσταθή σημεία ισορροπίας C^\pm) και ο ασταθής οριακός κύκλος. Φαίνεται επίσης η μεταβατική περιοχή για τις τιμές της παραμέτρου $r \in (13.926, 24.06)$, η οποία ονομάζεται μεταβατικό χάος (transient chaos) ή προταραχώδης περιοχή (preturbulence region) ή σαγματικό χάος (saddle chaos). Η διαδικασία αυτή οδηγεί τελικά στην εμφάνιση της ευσταθούς χαοτικής συμπεριφοράς μέσω των δύο παράξενων ελκυστών. Παραθέτουμε επίσης τον διάσημο Παράξενο Ελκυστή του Λόρενζ καθώς και την απεριοδική συμπεριφορά, όπως αυτή είναι πιο εύκολο να παρατηρηθεί στο διάγραμμα $x - t$ (3.4) για τιμή της παραμέτρου $r = 28$. Με την εμφάνιση του Ελκυστή του Λόρενζ (ή αλλιώς Χαοτικού Ελκυστή ή Παράξενου Ελκυστή) οι τροχιές τυλίγονται γύρω από τα σημεία ισορροπίας C^\pm με τυχαίο και απρόβλεπτο τρόπο. Μπορούμε να πούμε ότι οι τροχιές είναι απεριοδικές, παραμένουν μόνιμα στον ελκυστή, η μορφή τους είναι ανεξάρτητη των αρχικών συνθηκών και ο τελεστής έχει φράκταλ δομή. Η μελέτη αυτού του «Παράξενου Ελκυστή» αλλά και η ονομασία του έγινε από τους Ρούλ και Τεϊκενς στο [32]. Συνοψίζοντας, παραθέτουμε τα λόγια του Καθηγητή Τ.Μπούνη τα οποία αποτυπώνουν την φιλοσοφική προέκταση του θέματος «η θεωρία του Χάους συνδέει διαλεκτικά το προβλέψιμο και το απρόβλεπτο, το κανονικό και το τυχαίο, ανακαλύπτοντας τάξη μέσα στη χαοτική συμπεριφορά συστημάτων που περιγράφονται από ντετερμινιστικές



Σχήμα 3.4: Η απεριοδική συμπεριφορά του συστήματος όταν αυτό βρίσκεται στη χαοτική περιοχή.

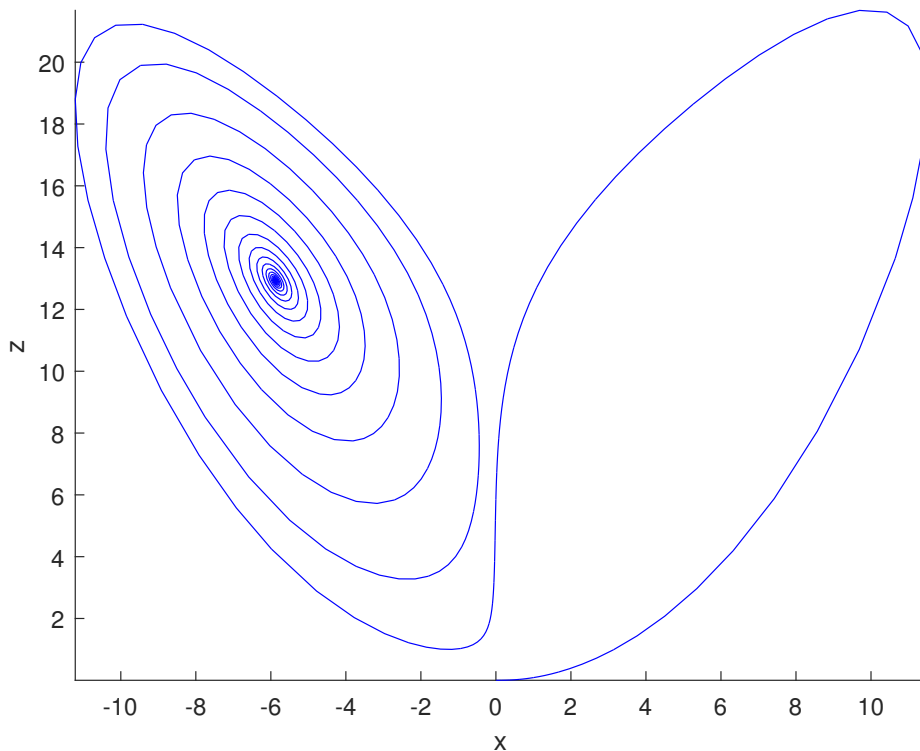
μη γραμμικές εξισώσεις» [9].

3.2.2 Ομοκλιτική Διακλάδωση και Μετάβαση στο Χάος

Ένα από τα σημαντικότερα στοιχεία της μελέτης του συστήματος του Λόρενζ είναι η διαδικασία μετάβασής του στην ευσταθή χαοτική συμπεριφορά. Η μετάβαση αυτή συμβαίνει με την οριοθέτηση της ομοκλιτικής διακλάδωσης που πραγματοποιείται για την τιμή της παραμέτρου $r \approx 13.9265$. Θα σταθούμε λοιπόν σε αυτά τα δύο βασικά στοιχεία, την ομοκλιτική διακλάδωση και την μετάβαση στο χάος μέσω μίας προταραχώδους περιοχής.

Ο αναλυτικός υπολογισμός της ομοκλιτικής τροχιάς στο Μοντέλο του Λόρενζ έχει απασχολήσει μία πληθώρα ερευνητικών εργασιών. Η σύνδεση μιας αριθμητικής απόδειξης με την αναλυτική τεκμηριώνει τη σημασία της ομοκλιτικής διακλάδωσης και της αντίστοιχης τροχιάς για την μελέτη της χαοτικής συμπεριφοράς. Ιστορικά ο αναλυτικός υπολογισμός της ομοκλιτικής τροχιάς του συστήματος του Λόρενζ περιλαμβάνει: τα αναλυτικά αποτελέσματα από τον Μπέλικχ το 1984 [33], την εργασία του Λεόνουφ το 1988 [34] αλλά και την εισαγωγή από μέρος του της «Τεχνικής του Ψαρέματος» για ένα Σαγματικό σημείο ισορροπίας [35], την αντιμετώπιση του μοντέλου του Λόρενζ ως Χαμιλτονιανό σύστημα από τους Λι και Ζανγκ [36], την εργασία των Βακάκη και Αζεζ με τη χρήση της προσέγγισης Πάντε [37] καθώς και τη χρήση της Μεθόδου των Απροσδιόριστων Συντελεστών από τον Τσεν στο [38]. Η μέθοδος αυτή παρουσιάζεται αρκετά αναλυτικά στο [39] και αποτελεί την διαδικασία που εφαρμόζουμε και εμείς στο δικό μας μοντέλο. Στο παρακάτω γράφημα παρουσιάζεται η Ομοκλιτική Τροχιά του

Μοντέλου του Λόρενζ κοντά στην προσεγγιστική τιμή που δίνεται στις παραπάνω εργασίες. Δεν αποτελεί την παρουσίαση της ομοκλικής τροχιάς μέσω της μεθόδου της ομοτοπίας, καθώς αυτή θα γίνει αναλυτικά στο Κεφάλαιο 6 για το δικό μας μοντέλο. Αποτελεί λοιπόν μία προσεγγιστική αναπαράστασή της μέσω αριθμητικής ολοκλήρωσης.



Σχήμα 3.5: Η προσέγγιση της ομοκλικής τροχιάς στο Μοντέλο Λόρενζ μέσω αριθμητικής ολοκλήρωσης.

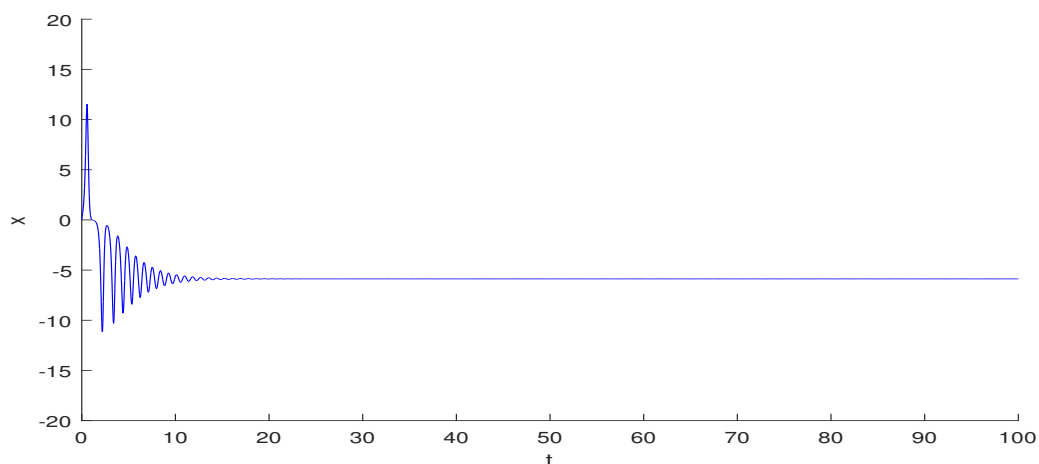
Το δεύτερο σημαντικό στοιχείο που απορρέει από τη μελέτη, αφορά τη μετάβαση στη χαοτική συμπεριφορά μέσω μίας προταραχώδους περιοχής όπου ακόμα το χάος παραμένει ασταθές. Καθώς η μεταβλητή r αυξάνεται η χαοτική συμπεριφορά γίνεται κυρίαρχη. Στις εργασίες [40, 41, 42] γίνεται αναλυτική μελέτη της συμπεριφοράς των ευσταθών και ασταθών πολλαπλοτήτων πριν, κατά τη διάρκεια και μετά την ομοκλική διακλάδωση. Εκεί παρουσιάζεται εκτενώς η ανακατανομή των πολλαπλοτήτων, η οπτικοποίησή τους, ενώ μελετάται επίσης και η περιοδική ή μη συμπεριφορά του συστήματος μετά το $r = r_{hom}$.

Συμπερασματικά αναφέρουμε τα εξής, η ομοκλική διακλάδωση που συμβαίνει στο σημείο $r \approx 13.9265$ δεν «γεννάει» απλά ένα συμμετρικό ζεύγος ομοκλικών τροχιών. Αποτελεί την αρχή για ένα πλήθος σαγματικών περιοδικών και ομοκλικών τροχιών. Οι τροχιές αυτές συγκεντρώνονται σε μία γειτονική περιοχή αυτής των ομοκλικών τροχιών (για $r \approx 13.9265$).

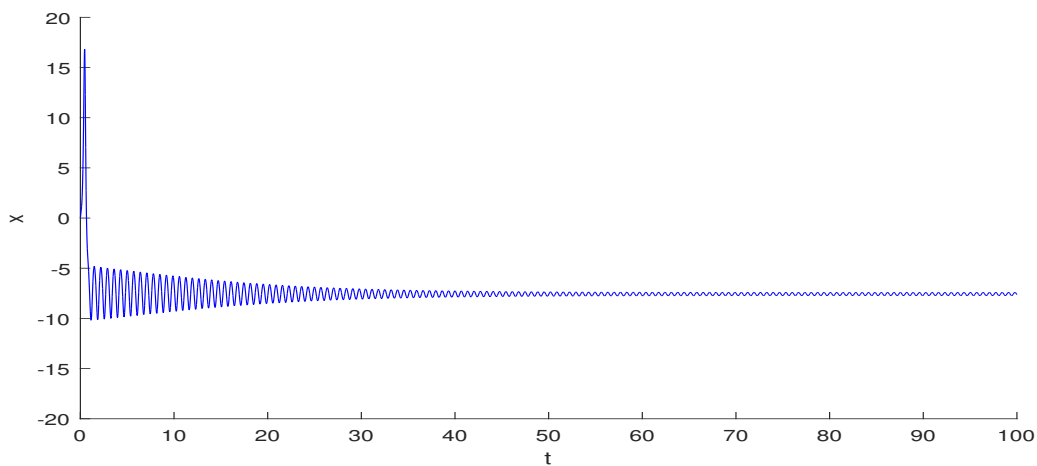
Επειδή ακριβώς η ομοκλινική διακλάδωση γεννάει το σύνολο της χαοτικής συμπεριφοράς του συστήματος αναφέρεται στην βιβλιογραφία ως Ομοκλινική Έκρηξη και το σημείο $r \approx 13.9265$ ως Σημείο Ομοκλινικής Έκρηξης.

Η χαοτική συμπεριφορά του συστήματος που εγείρεται μετά την ομοκλινική έκρηξη, αποτελεί μια χαοτική συμπεριφορά σαγματικού τύπου. Το χάος ακόμα δεν έχει κυριαρχήσει (παραμένει ασταθές) και τα σημεία ισορροπίας C^\pm αποτελούν τις μοναδικές περιοχές έλξης του συστήματος. Η μελέτη της συμπεριφοράς του συστήματος σε αυτή τη φάση της εξέλιξης του παρουσιάζεται στην εργασία των Κάπλαν και Γιόρκ [43], επιπρόσθετα η μελέτη αυτού του μαθηματικού συνόλου για την περιοχή έλξης παρουσιάζεται και από τους Ρούλ και Τέικενς [32]. Η μετάβαση αυτή συντελείται μέχρι την τιμή $r = r_{het} \approx 24.0579$ όπου πλέον η χαοτική συμπεριφορά γίνεται κυρίαρχη.

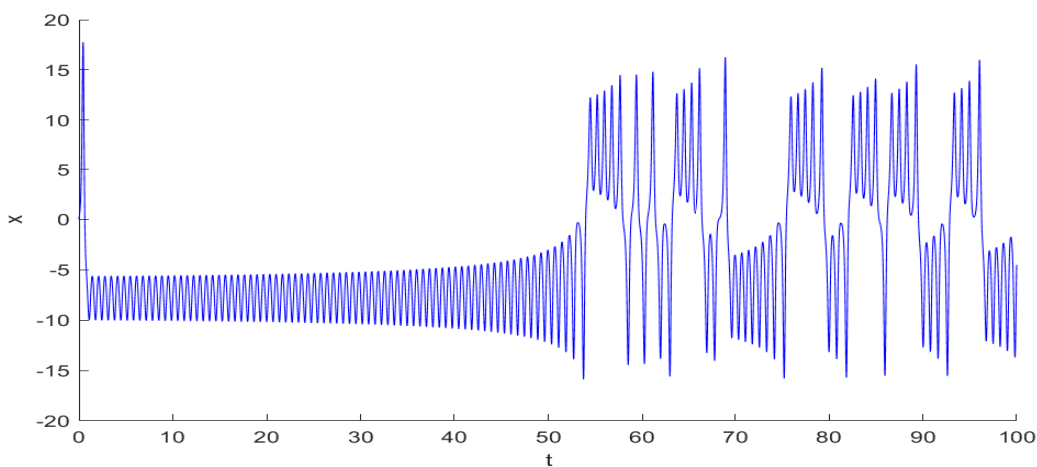
Στα παρακάτω διαγράμματα φαίνεται αυτή η μετάβαση προς την ευσταθή χαοτική συμπεριφορά. Το χάος κάνει έντονη την παρουσία του για τιμές της παραμέτρου $r > 22$. Καθώς η τιμή περνάει την $r > 24$, η χαοτική συμπεριφορά γίνεται κυρίαρχη κάτι που πλέον είναι ορατό για $r \approx 27$ που έχουμε πάρει ως παράδειγμα αλλά και για την τιμή $r = 28$ που αναφέραμε στα γραφήματα (3.3) και (3.4) της προηγούμενης ενότητας.



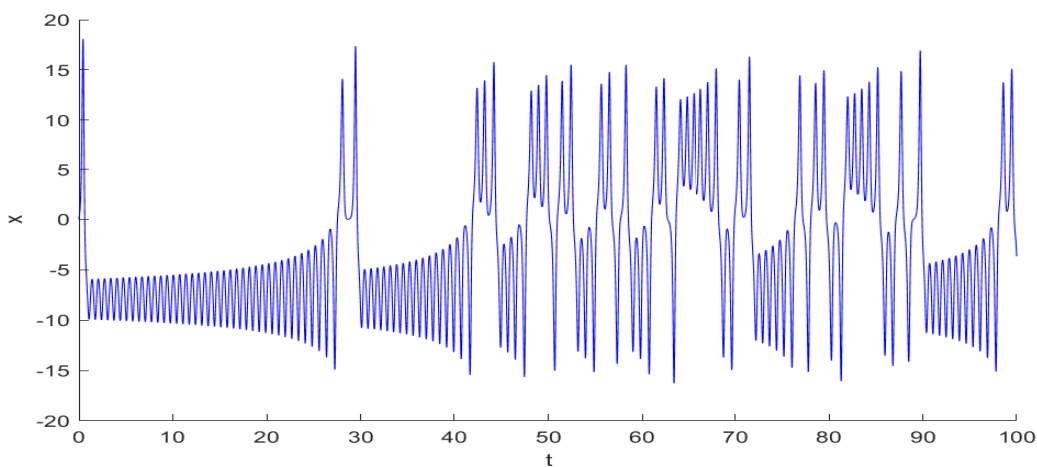
Σχήμα 3.6: Η τροχιά συγκλίνει γρήγορα στο ένα από τα δύο σημεία ισορροπίας.



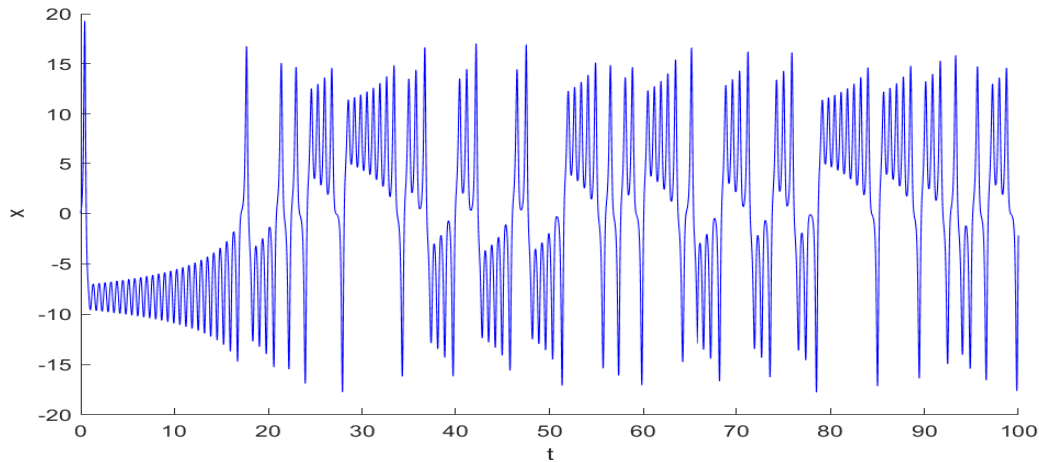
Σχήμα 3.7: Η τροχιά εξακολουθεί να συγκλίνει. Παρατηρείται όμως μία μικρή αύξηση του πλάτους.



Σχήμα 3.8: Παρατηρούμε ότι το πλάτος της τροχιάς μεγαλώνει σταδιακά και για $t \approx 55$ παρατηρείται μία απεριοδική συμπεριφορά.



Σχήμα 3.9: Η εμφάνιση της απεριοδικής συμπεριφοράς για $r \approx 22$ γίνεται σε μικρότερο χρόνο από την προηγούμενη τιμή.



Σχήμα 3.10: Για $r \approx 27$ έχουμε την εμφάνιση ισχυρής χαοτικής συμπεριφοράς κάτι που φαίνεται και από την ισχυρή απεριοδική συμπεριφορά της μεταβλητής $x(t)$ της τροχιάς.

Επισημαίνουμε εδώ ότι τα παραπάνω συμπεράσματα για το μοντέλο του Λόρενζ παρουσιάστηκαν επιγραμματικά. Αποφύγαμε να προβούμε στους αναλυτικούς υπολογισμούς και στις αριθμητικές αποδείξεις των συμπερασμάτων αυτών για δύο λόγους. Πρώτον γιατί το μοντέλο του Λόρενζ δεν αποτελεί το βασικό αντικείμενο της παρούσας μελέτης και δεύτερον γιατί οι παραπάνω διαδικασίες εφαρμόζονται στο μοντέλο της μετακίνησης της πρωτεΐνης tlr4 στο εσωτερικό του κυττάρου, που αποτελεί και το βασικό αντικείμενο μελέτης. Η ανάλυση αυτή παρουσιάζεται εκτενώς στο Κεφάλαιο 6.

Κεφάλαιο 4

Το Μοντέλο Μετακίνησης της Πρωτεΐνης Tlr4 στο Εσωτερικό του Κυττάρου

4.1 Βιολογική Περιγραφή του Μοντέλου

Η αναλυτική και αριθμητική περιγραφή της χαοτικής συμπεριφοράς του Μοντέλου της Μετακίνησης της Πρωτεΐνης Tlr4 στο εσωτερικό του κυττάρου αποσκοπεί να συνεισφέρει στη μαθηματική μελέτη του φαινομένου. Η μελέτη αυτή αφορά τη σχέση μεταξύ των ενδοκυτταρικών ταλαντώσεων της εν λόγω πρωτεΐνης κατά τη διάρκεια του φαινομένου της σήψης. Μία όσο το δυνατόν πιο ολοκληρωμένη μαθηματική περιγραφή της δυναμικής συμπεριφοράς της μετακίνησης της πρωτεΐνης αυτής θα μας δείξει τις διάφορες καταστάσεις του συστήματος όπως είναι η ευστάθειά του, οι περιοδικές ή οι χαοτικές συμπεριφορές του. Η σημασία της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας και σε μεγάλο βαθμό η πρωτοτυπία της, βρίσκεται στο γεγονός ότι η μετακίνηση της πρωτεΐνης tlr4 στο εσωτερικό των διαφόρων συστατικών του κυττάρου αποτελεί ένα κλειδί στην αναγνώριση των gram-negative βακτηρίων που αποτελούν το χαρακτηριστικό γνώρισμα κατά την μόλυνση του οργανισμού στο φαινόμενο της σήψης. Η συσχέτιση μεταξύ των διαφόρων ταλαντώσεων της πρωτεΐνης tlr4 κατά τα διάφορα στάδια της σήψης στον οργανισμό βρίσκονται κάτω από εργαστηριακή μελέτη [44].

Η πρωτεΐνη Tlr4 παίζει επίσης ένα σημαντικό ρόλο στο ανοσοποιητικό σύστημα του ανθρώπινου οργανισμού. Το εγγενές ανοσοποιητικό σύστημα του οργανισμού αποτελεί μία αρχαία και ταυτόχρονα επαναστατική στρατηγική άμυνας που απαντάται συνολικά στα σπονδυλωτά και αποτελείται από ένα σύνολο μικροοργανισμών και λειτουργιών που στο σύνολό τους προστατεύουν από τους διάφορους οργανισμούς. Το ανοσοποιητικό σύστημα είναι γεμάτο από ένα πλήθος ταλαντώσεων που προκαλούν διάφορες παραμέτρους και είναι απαραίτητες για την κατάλληλη αντιμετώπιση και απόκριση αυ-

τών στις διάφορες διεγέρσεις. Αυτή η προειδοποίηση για τα εισερχόμενα μικρόβια από το εγγενές ανοσοποιητικό σύστημα είναι θεμελιακή για το χτίσιμο της άμυνας του οργανισμού ενάντια σε μολύνσεις. Ο οργανισμός αντιδρά στη διέγερση που δέχεται από την εισβολή μικροοργανισμών αναπτύσσοντας άμεσους μηχανισμούς άμυνας [45] με τους οποίους επιδιώκει να ελαχιστοποιήσει τη δυναμική εξέλιξη διαφόρων απειλών από μολύνσεις και μικρόβια. Τέτοιοι αμυντικοί μηχανισμοί αναπτύσσονται μέσω των *germline-encoded pattern recognition receptors (PRRs)* οι οποίοι τοποθετούνται τόσο στον εξωτερικό όσο και στον εσωτερικό χώρο του κυττάρου για τον εντοπισμό μικροβίων που λειτουργούν ως δείκτες μολύνσεων [46]. Το μοντέλο της αναγνώρισης μικροβιακών μοτίβων προτάθηκε από τον Τσάρλ Τζ. Τζάναγουέι και περιγράφει τα χαρακτηριστικά του ανοσοποιητικού συστήματος: την ικανότητα να διαχωρίζει τα μόρια του οργανισμού από αυτά εξωτερικών παραγόντων και την ικανότητα να ενεργοποιεί και να προσαρμόζει την απόκριση του ανοσοποιητικού συστήματος [47]. Οι περισσότεροι από τους μηχανισμούς PRRs μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε πέντε οικογένειες βασιζόμενες στην πρωτεϊνική ομολογία του πεδίου τους. Μία από αυτές τις οικογένειες αποτελούν και οι Toll-like υποδοχείς [48].

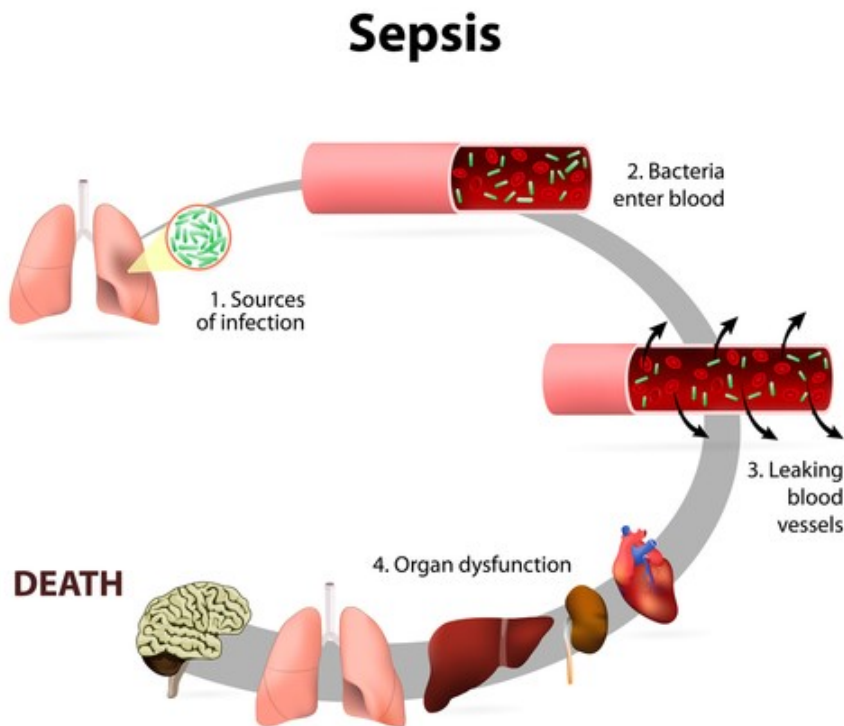
Οι υποδοχείς Toll-like αποτελούν μία κλάση πρωτεϊνών που παίζουν έναν ουσιαστικό ρόλο για το εγγενές ανοσοποιητικό σύστημα [49]. Συνήθως προέρχονται από τα Σέντινελ Κύτταρα (*sentinel cells*), κύτταρα που βρίσκονται στην πρώτη γραμμή άμυνας του οργανισμού, όπως οι μακροφάγοι και τα Δενδριτικά Κύτταρα (*dendritic cells*), τα οποία αναγνωρίζουν μόρια που προέρχονται από μικρόβια [50]. Στη γενική τους περίπτωση οι υποδοχείς toll-like αποτελούν έναν αρχαίο επαναστατικό μηχανισμό που συντηρούν και κανονικοποιούν την αντιμικροβιακή άμυνα σε φυτά, ασπόνδυλα και θηλαστικά [51, 52]. Οι υποδοχείς toll-like στα θηλαστικά αποτελούν μοτίβα υποδοχέων αναγνώρισης που είναι κρίσιμοι για την ενεργοποίηση του εγγενούς ανοσοποιητικού [53]. Οι υποδοχείς toll-like είναι υπεύθυνοι για την αναγνώριση παθογόνων μοριακών μοτίβων τα αποκαλούμενα και ως PAMPs [54]. Ο ρόλος των PAMPs είναι πολύ σημαντικός για την έναρξη της μετακίνησης της πρωτεΐνης tlr4 [55]. Συνολικά η οικογένεια των υποδοχέων toll-like καθορίζουν το σύνολο σχεδόν των αποκρίσεων του ανοσοποιητικού συστήματος [56]. Οι υποδοχείς αυτοί ευθύνονται για την αναγνώριση και μίας σειράς άλλων παθογόνων οργανισμών αλλά και πρωτεϊνών.

Πιο συγκεκριμένα η πρωτεΐνη tlr4 ως μέλος της οικογένειας των toll-like υποδοχέων, είναι μία πρωτεΐνη που ανήκει στα μοτίβα αναγνώρισης (PRR) που ενημερώνουν για διάφορες «εισβολές» στον οργανισμό. Η πρωτεΐνη tlr4 είναι πιο γνωστή για την αναγνώριση του Λιποπολυσακχαρόδους μο-

ρίου (LPS), ένα από τα κύρια συστατικά των gram-negative βακτηρίων [57]. Τα Λιποπολυσακχαρώδη μόρια είναι ένα από τα κύρια συστατικά στοιχεία της εξωτερικής μεμβράνης των gram-negative βακτηρίων και αναγνωρίζονται στον οργανισμό από τα μοτίβα αναγνώρισης των υποδοχέων tlr4 καθώς και από άλλες λειτουργίες του οργανισμού όπως αναφέρονται στα [58, 59, 60]. Υπάρχουν αρκετά στοιχεία στις παραπάνω έρευνες που τεκμηριώνουν και εμπλουτίζουν τις γνώσεις μας για το ρόλο της πρωτεΐνης tlr4 στον οργανισμό.

Είναι φανερό ότι ο ρόλος της πρωτεΐνης tlr4 είναι κρίσιμος για την αναγνώριση στον οργανισμό της σήψης και άλλων βακτηρίων [61]. Μία άμεση απόκριση του ανοσοποιητικού συστήματος στην «εισβολή» των gram-negative βακτηρίων είναι ουσιώδης για την αντιμετώπιση μιας μόλυνσης του οργανισμού αλλά και την έγκαιρη αποτροπή μιας έξαρσης που θα μπορούσε να θέσει σε απειλή τη ζωή του ίδιου του οργανισμού. Η Σήψη αποτελεί μια τέτοια μόλυνση που σε πολλές των περιπτώσεων μπορεί να αποβεί μοιραία για τη ζωή του ασθενούς. Δίνοντας έναν ορισμό θα μπορούσαμε να πούμε ότι Σήψη καλείται το σύνολο των μεταβολών στον μεταβολισμό και την αιμοδυναμική που είναι αποτέλεσμα γενικευμένης φλεγμονώδους αντίδρασης του ανθρώπινου οργανισμού σε λοιμώδη παράγοντα (βακτήριο, ιό, μύκητα ή παράσιτο). Έχει συχνή κατάληξη το θάνατο μέσω ανεπάρκειας πολλών οργάνων (Σύνδρομο πολυοργανικής ανεπάρκειας) και μη αναστρέψιμη πτώση της αρτηριακής πίεσης (σηπτικό σοκ) [62, 63]. Πολλές φορές ένα σηπτικό σοκ οδηγεί στην απώλεια της ζωής του ασθενούς κάτι που αναλύεται εκτενώς και στην έρευνα των Όπαλ και Χούμπερ στο [64]. Η μελέτη του φαινομένου της σήψης έχει δείξει ότι παρουσιάζει δύο στάδια στα οποία εκδηλώνεται, την αρχική φλεγμονή και την ύστερη χρονικά αντιφλεγμονώδη απόκριση του οργανισμού [65]. Στην Εικόνα (4.1) που έχει παρθεί από το « Ο Κύκλος της Σήψης » παρουσιάζεται συνοπτικά η διαδικασία της σήψης στον ανθρώπινο οργανισμό.

Οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι μία απόκριση του οργανισμού αντίστοιχη των διαφόρων σταδίων της σήψης και πιο συγκεκριμένα από την «εισβολή» των gram-negative βακτηρίων στον οργανισμό είναι αναγκαία. Σε αυτή τη δυναμική εξέλιξη του φαινομένου έχει παρατηρηθεί και η αύξηση στην παραγωγή της πρωτεΐνης tlr4 μέσω της αντίστοιχης αύξησης στην παραγωγή του mRNA καθώς επίσης και από την αύξηση της συγκέντρωσής της στην επιφάνεια του κυττάρου κυρίως στα αρχικά στάδια της σήψης τόσο στους ανθρώπους όσο και στα πειραματικά μοντέλα που έχουν χρησιμοποιηθεί.



Σχήμα 4.1: Ο κυκλος της σήψης: α. κάποιου είδους μόλυνση προσβάλλει τον οργανισμό, β. βακτήρια εισέρχονται στο αίμα, γ. τα αιμοφόρα αγγεία διαρρέουν τα βακτήρια, δ. πολλαπλή δυσλειτουργία οργάνων, ε. απώλεια ζωής ως ακραία εκδοχή του φαινομένου.

Ως προς την έρευνα, μπορούμε να πούμε ότι ακόμα βρισκόμαστε στην αρχή της κατανόησης της πολυπλοκότητας της κυτταρικής βιολογίας και των λειτουργιών που συντελούνται στο εσωτερικό του κυττάρου. Η κατανόηση της συμπεριφοράς της πρωτεΐνης *tlr4* είναι σημαντική για την απόκτηση βαθύτερης γνώσης στο εν λόγω πεδίο. Η Διπλωματική Εργασία αποσκοπεί να συμβάλει και αυτή με τη σειρά της στην βαθύτερη κατανόηση της μετακίνησης της συγκεκριμένης πρωτεΐνης αξιοποιώντας το μοντέλο που περιγράφει τα πειραματικά δεδομένα.

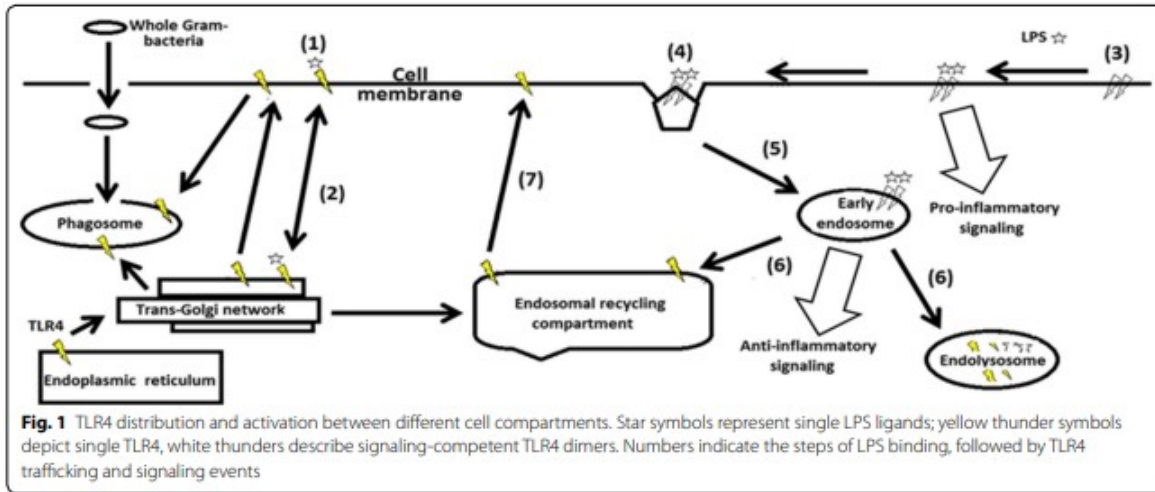
4.2 Μαθηματική Περιγραφή του Μοντέλου

Ένα από τα πιο σημαντικά αποτελέσματα της αναλυτικής και αριθμητικής μελέτης που θα παρουσιάσουμε για το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων που περιγράφουν τη μετακίνηση της πρωτεΐνης *tlr4* είναι η παρουσία χαοτικής συμπεριφοράς η οποία αναδύεται από την ομοκλινική διακλάδωση του συστήματος. Η εμφάνιση του χάους είναι ένα αποτέλεσμα η μελέτη του οποίου μπορεί να οδηγήσει στην καλύτερη κατανόηση της μετακίνησης της πρωτεΐνης *tlr4* και επακόλουθα της διαδικασίας της σήψης.

Η χαοτική συμπεριφορά εμφανίζεται αρκετά συχνά σε απλά μη γραμμικά δυναμικά συστήματα. Είναι αποδεδειγμένο ότι η ελάχιστη διάσταση για ένα αυτόνομο, συνεχές σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων που εμφανίζει χαοτική συμπεριφορά είναι τρεις [14, 19]. Όπως θα αναφερθούμε και εκτεταμένα στο επόμενο Κεφάλαιο, από την εμφάνιση του Μοντέλου του Λόρενζ [26] πολλά τρισδιάστατα διαφορικά συστήματα έκαναν την εμφάνισή τους τροφοδοτώντας με πλήθος συμπερασμάτων την έρευνα. Ένα επιπρόσθετο συμπέρασμα της μελέτης τους είναι ότι το χάος μπορεί να προέλθει μέσα από διάφορους παράγοντες όπως Διακλαδώσεις Διπλασιασμού Περιόδου, Ομοκλινικής Έκρηξης, Ομοκλινικών και Ετεροκλινικών Θεωρημάτων Σίλνικοφ. Όπως επισημάναμε στο Κεφάλαιο 2 τα Θεωρήματα του Σίλνικοφ αποτελούν ένα ισχυρό εργαλείο για τη μελέτη του χάους. Αντίστοιχα οι ποιοτικές αλλαγές που μπορούν να επέλθουν στις πολλαπλότητες του συστήματος μέσω της ομοκλινικής έκρηξης είναι τόσο ισχυρές που οδηγούν ένα σύστημα σε χαοτική συμπεριφορά και αναλύονται στο Κεφάλαιο 6.

Στην παρούσα Διπλωματική Εργασία αξιοποιώντας το γεγονός ότι το σύστημά μας ανήκει στα επονομαζόμενα Σαγματικά Συστήματα [22], αποδεικνύουμε ότι υπόκειται στο μαθηματικό φαινόμενο της Ομοκλινικής Έκρηξης. Αναλύεται η χαοτική συμπεριφορά και μελετάται αριθμητικά ο χαοτικός ελκυστής του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων που περιγράφουν την μετακίνηση της πρωτεΐνης tlr4 στο εσωτερικό του κυττάρου. Γίνεται η αριθμητική ανάλυση της διακλάδωσης του συστήματος και παρουσιάζονται τα συμπεράσματα αυτής. Η αριθμητική ανάλυση και η προσομοίωση των αποτελεσμάτων γίνεται με το Πακέτο MatCont [24, 25] αριθμητικής συνέχισης και ολοκλήρωσης του Matlab.

Παρουσιάζουμε το Μοντέλο της Μετακίνησης της Πρωτεΐνης Tlr4 στο Εσωτερικό του Κυττάρου όπως παρουσιάστηκε αρχικά στην εργασία των Σταν-Σοριάνο-Καμάργκο με τίτλο « *A mathematical model relates intracellular TLR4 oscillations to sepsis progression* » και παρατίθεται στο [44]. Η προσομοίωση του μοντέλου περιγράφει την μετακίνηση της πρωτεΐνης tlr4 μεταξύ των endosomal recycling compartment (ERC) και του trans-Golgi network (TGN) από και προς την επιφάνεια του κυττάρου και μεταξύ των πρώιμων Ενδοσωμάτων-Ενδολυσοσωμάτων (early endosomes-endolysosome (EE)). Η μετακίνηση αυτή παρουσιάζεται στην παρακάτω εικόνα η οποία παρατίθεται αρχικά στο [44].



Σχήμα 4.2: Η περιγραφή γίνεται εντός της εικόνας από το [44].

Το δυναμικό σύστημα που περιγράφεται από τις τρεις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις παρουσιάζεται στην εξίσωση (4.1).

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= f x(t) - y(t) z(t) \\
 \dot{y}(t) &= x(t) - (b + a) y(t) \\
 \dot{z}(t) &= x(t) y(t) - (g - s) z(t)
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

Οι μεταβλητές x, y, z περιγράφουν τη συγκέντρωση της πρωτεΐνης tlr4 στις διάφορες περιοχές του συστήματος. Έτσι έχουμε ότι: η μεταβλητή x περιγράφει τη συγκέντρωση της πρωτεΐνης στα (TGN) και (ERC), η μεταβλητή y περιγράφει τη συγκέντρωση στα (EE) και η z τη συγκέντρωση στην επιφάνεια του κυττάρου. Η φυσική περιγραφή της συγκέντρωσης υποδεικνύει ότι οι μεταβλητές δεν μπορούν να πάρουν αρνητικές τιμές κάτι που στην περίπτωση του μαθηματικού μοντέλου μπορούμε να το δεχτούμε για τους ρυθμούς μεταβολής της συγκέντρωσης αλλά και συνολικά. Αντίστοιχα για τις παραμέτρους αναφέρουμε τα εξής: η παράμετρος f αποτελεί το ρυθμό παραγωγής της πρωτεΐνης tlr4 από το mRNA, η b το ρυθμό μετακίνησης από τα Λυσοσώματα (lisosomes) στα Ενδοσώματα (endosomes), η παράμετρος a περιγράφει το ρυθμό μετακίνησης της πρωτεΐνης tlr4 αναδρομικά από και προς τα (ERC) και τα Ενδοσώματα, η g το ρυθμό με τον οποίο μετακινείται η πρωτεΐνη από την επιφάνεια του κυττάρου στο δίκτυο Τρανς-Γκόλτζι (TGN) και τέλος η παράμετρος s περιγράφει το ρυθμό με τον οποίο η πρωτεΐνη tlr4 μετακινείται από την επιφάνεια στο σύστημα των Ενδοσωμάτων.

Επιχειρούμε ακόμα μία ποιοτική περιγραφή των τριών διαφορικών εξισώσεων για μία πληρέστερη διαισθητική εικόνα του προβλήματος. Η πρώτη διαφορική εξίσωση $\dot{x}(t) = f x(t) - y(t) z(t)$ περιγράφει τη ροή της πρωτεΐνης tlr4 η οποία επηρεάζεται από την κατανομή της TRAM μεταξύ των ERC και μετά την ενεργοποίηση της πρωτεΐνης tlr4 από τα LPS. Ο εισδοχέας (adap-

tor) TRAM συμβάλλει στην περίπλοκη αμφίδρομη μετακίνηση της tlr4 μεταξύ του Ενδοσωμικού συστήματος. Αυτός είναι ο κύριος παράγοντας που δίνει τη δυνατότητα στην προ-φλεγμονώδη κατάσταση να κυριαρχήσει ως συμπεριφορά. Είναι η βασική εξίσωση που αφορά την παραγωγή της πρωτεΐνης, κάτι που εκφράζεται μέσω του παράγοντα $fx(t)$. Ο παράγοντας αυτός εκφράζει επίσης και την συγκέντρωση της πρωτεΐνης στα (TGN) και (ERC). Η δεύτερη διαφορική εξίσωση $y'(t) = x(t) - (b+a)y(t)$ εκφράζει το πέρασμα και την έναρξη του αντιφλεγμονώδους μηχανισμού. Αυτή η φάση γίνεται κυρίαρχη περίπου 30 λεπτά μετά την ενεργοποίηση των LPS και ως αποτέλεσμα η μετακίνηση της πρωτεΐνης tlr4 γίνεται αμφίδρομα από το (ERC) στα (EE). Η δεύτερη εξίσωση λοιπόν δείχνει ότι ο ρυθμός της συγκέντρωσης στα EE συντελείται σε βάρος του ρυθμού συγκέντρωσης στα (TGN) και (ERC). Τέλος η τρίτη διαφορική εξίσωση $z'(t) = x(t)y(t) - (g - s)z(t)$, περιγράφει το ρυθμό συγκέντρωσης της πρωτεΐνης tlr4 στην επιφάνεια του κυττάρου και μας πληροφορεί ότι αυτή εξαρτάται από τις «πηγές» της πρωτεΐνης στα TGN, ERC και EE. Καθώς αυτές οι πηγές αλλάζουν, η πρωτεΐνη αποτρέπεται σε πολλές περιπτώσεις από το να σχηματίσει συστάδες στην επιφάνεια του κυττάρου, τόσο η προερχόμενη από τα TGN (παράμετρος g) όσο και αυτή από τα EE (παράμετρος s).

Για λόγους που θα γίνουν κατανοητοί στα επόμενα δύο κεφάλαια, τροποποιούμε το σύστημα της εξίσωσης (4.1) συγχωνεύοντας τις παραμέτρους εντός των παρενθέσεων. Επιτυγχάνουμε έτσι να κάνουμε το σύστημά μας πιο συμπαγές ως προς τον χειρισμό του στα κεφάλαια της ανάλυσης ευστάθειας και ισορροπίας του. Επιτυγχάνουμε επίσης να το χειριστούμε πιο εύκολα στους μετασχηματισμούς ομοιότητας για την εξαγωγή συμπερασμάτων ως προς την ομοιότητά του με άλλα συστήματα. Για το λόγο αυτό θέτουμε $c = b + a$ και $d = g - s$ και το σύστημα παίρνει τη μορφή,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= fx(t) - y(t)z(t) \\ \dot{y}(t) &= x(t) - cy(t) \\ \dot{z}(t) &= x(t)y(t) - dz(t) \end{aligned} \tag{4.2}$$

Κεφάλαιο 5

Συστήματα Lorenz Like Τριών Διαφορικών Εξισώσεων

5.1 Συστήματα Lorenz-like

Από την εμφάνιση του Μοντέλου του Λόρενζ πλήθος επιστημόνων έχει προσπαθήσει να διερευνήσει την δυνατότητα κάποιου είδους κανονικής μορφής για το σύνολο των αυτόνομων τετραγωνικών συστημάτων τριών διαφορικών εξισώσεων. Πλήθος τέτοιων συστημάτων έχουν μελετηθεί, όπως είναι το Μοντέλο του Τσεν (Chen) [66], το Μοντέλο του Λου (Lü) [67], το μοντέλο του Ζου (Zhou) [68], μοντέλα που προέρχονται από το Γενετήσιο Σύστημα (Genesis System) [69], καθώς και πολλά ακόμα τροποποιημένα μοντέλα του Λόρενζ ή και το Γενικευμένο Μοντέλο του Λόρενζ [70]. Το ερώτημα που έχει απασχολήσει είναι αν η ομοιότητα που υπάρχει αποτελεί μία εγγενή ιδιότητα των συστημάτων αυτών η οποία μπορεί να αναχθεί σε ένα γενικό μοντέλο που με κατάλληλη εκλογή των παραμέτρων να μας δίνει τα διάφορα συστήματα. Σίγουρα με μία πρώτη ματιά μπορούμε να πούμε ότι μεταξύ αυτών των συστημάτων πρέπει να υπάρχει μία γραμμή που να συνδέει την προφανή τους ομοιότητα. Θα δείξουμε ότι το σύστημα μας κάτω από συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων εμπίπτει στην περίπτωση του μοντέλου του Λου, καθώς επίσης και γιατί δεν μπορεί να γίνει αυτή η αναγωγή με αποτέλεσμα να πρέπει να το μελετήσουμε διεξοδικά ως ένα ξεχωριστό σύστημα. Στην Ενότητα 5.6 θα αναφερθούμε εκτενώς.

Επικεντρώνουμε την μελέτη και την παρουσίαση των σχετικών αποτελεσμάτων συγκεκριμένα για τα Μοντέλα των Τσεν, Λου και Ζου. Με αφορμή την ανάλυση που παρουσιάζεται για αυτά τα μοντέλα στη βιβλιογραφία [71] (τόσο για την ομοκλινική τροχιά όσο και για τους μετασχηματισμούς ομοιότητας), πραγματοποιήσαμε και την αντίστοιχη μελέτη στο δικό μας σύστημα που παρουσιάζεται στο Κεφάλαιο 6.

Παίρνοντας υπόψιν μας τα γραμμικά μέρη μέσω του πίνακα $A = [a_{i,j}]_{3 \times 3}$

των συστημάτων αυτών μπορούμε να πούμε ότι για τις κλασικές τιμές των παραμέτρων όπου εμφανίζεται χαοτική συμπεριφορά ισχύουν τα ακόλουθα,

- το Σύστημα του Λόρενζ ικανοποιεί τη σχέση $a_{12}a_{21} = \sigma r > 0$.
- το Σύστημα του Τσεν ικανοποιεί τη σχέση $a_{12}a_{21} = a(c - a) < 0$.
- το Σύστημα του Λου ικανοποιεί τη σχέση $a_{12}a_{21} = 0$.
- το Σύστημα του Ζου ικανοποιεί τη σχέση $a_{12}a_{21} = ab > 0$ για το πρώτο σύνολο των παραμέτρων και $a_{12}a_{21} = ab < 0$ για το δεύτερο.
- το Σύστημα της πρωτεΐνης Tlr4 ικανοποιεί τη σχέση $a_{12}a_{21} = 0$.

Βασισμένη σε αυτά και άλλα στοιχεία η έρευνα έχει δείξει μία δυναμική σχέση μεταξύ των Μοντέλων του Λόρενζ και του Τσεν καθώς και μία σχέση μετάβασης μεταξύ των δύο για το Μοντέλο του Λου.

Γύρω από τα τέσσερα αυτά μοντέλα - και κυρίως από τα τρία πρώτα - έχει γίνει αρκετή συζήτηση σχετικά με το κατά πόσο είναι ισοδύναμα ή όχι. Η συζήτηση αφορά την πιθανότητα ενός καθολικού συστήματος που να αναπαράγει όλες τις επιμέρους συμπεριφορές για διαφορετικές τιμές των παραμέτρων. Οι χειρισμοί γίνονται μέσω διαφόρων μετασχηματισμών ομοιότητας που σε ένα βαθμό έχουν καταφέρει να εκφράσουν μία ισοδυναμία κάτω από συγκεκριμένες υποθέσεις για τις παραμέτρους. Οι συζητήσεις είναι πότε συμβιβαστικές και πότε απόλυτες ως προς την ισοδυναμία των συστημάτων. Ενδεικτικά αναφέρουμε τις εργασίες των Λεόννοφ-Κουζνέτσοφ [71] και των Αλγκάμπα-Σάντσεζ-Μερίνο-Λούις [72, 73].

Η μελέτη μας βασίζεται στις παραπάνω εργασίες και αποσκοπεί να παρουσιάσει την τεχνική πίσω από τις προσπάθειες εξαγωγής των επιμέρους ισοδυναμιών. Παρουσιάζουμε συνοπτικά στοιχεία για τη συμπεριφορά, την ευστάθεια και τους χαοτικούς ελκυστές των τριών συστημάτων (Τσεν-Λου-Ζου) καθώς και τους μετασχηματισμούς ομοιότητας για τα δύο από αυτά (Τσεν-Λου) με το Μοντέλο του Λόρενζ. Η εφαρμογή τους στο δικό μας σύστημα γίνεται και αυτή στην Ενότητα 5.5.

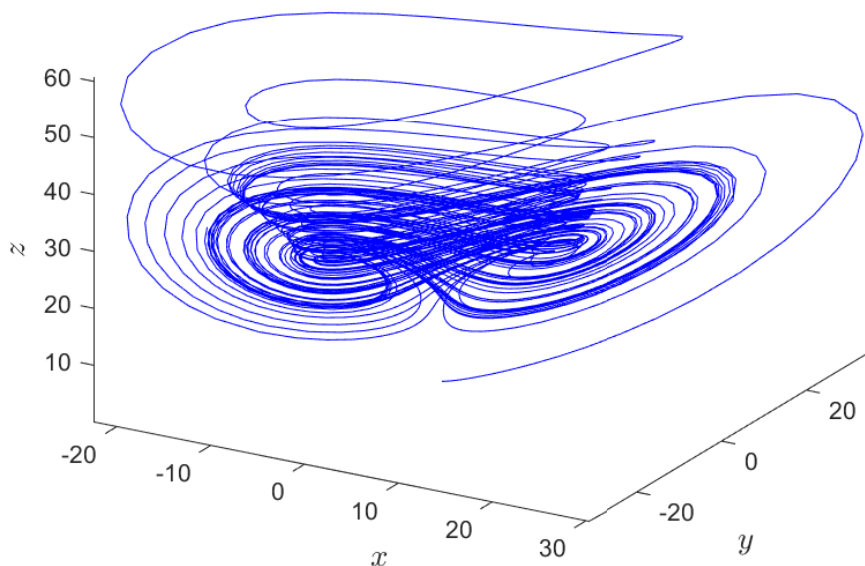
5.2 Το Μοντέλο του Τσεν (Chen)

Το 1999 οι Τσεν και Ουέτα δημοσιεύουν την εργασία τους «*Ένας Ακόμα Χαοτικός Ελκυστής*» [66]. Σηματοδοτούν με αυτόν τον τρόπο την εμφάνιση ενός ακόμα χαοτικού μοντέλου που απασχόλησε τους επιστήμονες με πλήθος ερευνητικών εργασιών μετά την εμφάνισή του. Το Μοντέλο του Τσεν

περιγράφεται από τις ακόλουθες διαφορικές εξισώσεις.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(y - x) \\ \dot{y} &= (c - a)x + cy - xz \\ \dot{z} &= -bz + xy \end{aligned} \quad (5.1)$$

όπου $a, b, c \in \mathbb{R}$ και ισχύει $2c > a$. Το σύστημα αυτό για τις τιμές των παραμέτρων $a = 35$, $b = 3$, $c = 28$ εμφανίζει χαοτική συμπεριφορά, με τον χαρακτηριστικό χαοτικό ελκυστή του Τσεν να παρουσιάζεται στο γράφημα (5.1).



Σχήμα 5.1: Ο χαοτικός ελκυστής του Μοντέλου του Τσεν.

Η ανάλυση της ευστάθειας του συστήματος μας τροφοδοτεί με τα ακόλουθα συμπεράσματα,

- Το σύστημα παρουσιάζει τρία σημεία ισορροπίας, τα $E_1 = (0, 0, 0)$ και $E_{2,3} = (\pm\sqrt{b(2c - a)}, \pm\sqrt{b(2c - a)}, (2c - a))$.
- Η ευστάθεια της αρχής καθορίζεται από την εξίσωση του πολυωνύμου $\beta^2 + (a - c)\beta - a(2c - a) = 0$ για την περίπτωση του πρώτου σημείου ισορροπίας.
- Η ευστάθεια των επιπλέον δύο σημείων ισορροπίας δίνεται από τις ακόλουθες ιδιοτιμές $\lambda_1 = -(a + b - c)/3 + \alpha$ και $\lambda_{2,3} = -(a + b - c)/3 + \beta \pm \gamma i$. Τα α, β, γ δίνονται από τις σχέσεις της Μεθόδου του Καρντάνο.

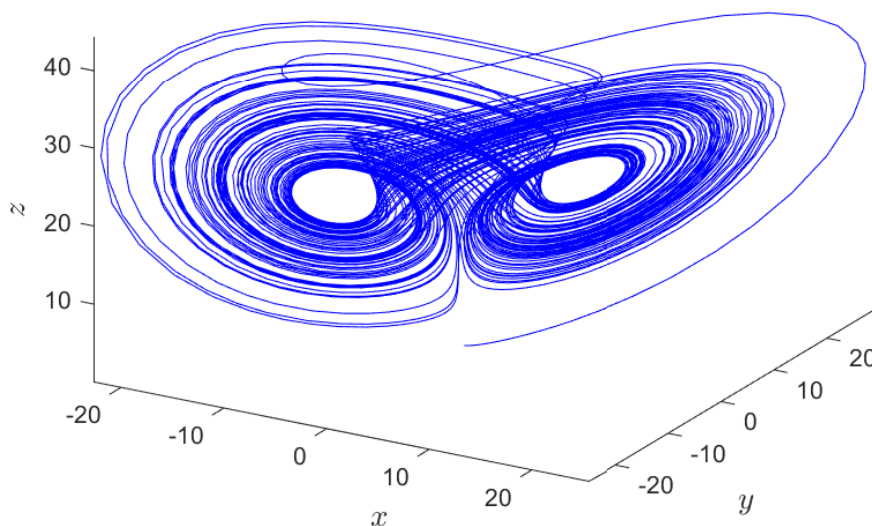
- Στην περίπτωση του συστήματος του Τσεν αποδεικνύεται ότι πληρούνται οι προϋποθέσεις των Θεωρημάτων Σίλνικοφ.

5.3 Το Μοντέλο του Λου (Lü)

Το 2001 οι Λου και Τσεν δημοσιεύουν ένα νέο χαοτικό ελκυστή [67] ο οποίος αναπαριστούσε την μετάβαση από το σύστημα του Τσεν σε αυτό του Λόρενζ και αντίστροφα. Το Μοντέλο του Λου περιγράφεται από τις ακόλουθες διαφορικές εξισώσεις.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(y - x) \\ \dot{y} &= cy - xz \\ \dot{z} &= -bz + xy \end{aligned} \tag{5.2}$$

όπου $a, b \in \mathbb{R}^+$ και $c \in \mathbb{R}$. Το σύστημα αυτό για τις τιμές των παραμέτρων $a = 36$, $b = 3$, $c = 20$ εμφανίζει χαοτική συμπεριφορά, με τον χαρακτηριστικό του χαοτικό ελκυστή να φαίνεται στο γράφημα (5.2).



Σχήμα 5.2: Ο χαοτικός ελκυστής του Μοντέλου του Λου.

Η ανάλυση της ευστάθειας του συστήματος μας τροφοδοτεί με τα ακόλουθα συμπεράσματα,

- Το σύστημα παρουσιάζει τρία σημεία ισορροπίας, τα $E_1 = (0, 0, 0)$ και $E_{2,3} = (\pm\sqrt{bc}, \pm\sqrt{bc}, c)$.

- Η ευστάθεια της αρχής καθορίζεται από την εξίσωση $(\lambda + a)(\lambda + b)(\lambda - c) = 0$. Πράγμα που σημαίνει ότι έχει τρεις πραγματικές ρίζες, δύο αρνητικές και μία θετική. Επομένως η Αρχή θα είναι ένα Σαγματικό σημείο ισορροπίας.
- Η ευστάθεια των επιπλέον δύο σημείων ισορροπίας δίνεται από τις ακόλουθες ιδιοτιμές $\lambda_1 = -(a + b - c)/3 + \alpha$ και $\lambda_{2,3} = -(a + b - c)/3 + \rho \pm \omega i$. Τα α, ρ, ω δίνονται από τις σχέσεις της Μεθόδου του Καρντάνο.
- Για τις προαναφερθείσες τιμές των παραμέτρων για τα σημεία ισορροπίας και τις ιδιοτιμές τους έχουμε,

$$\begin{aligned}
 E_1 &= (0, 0, 0) \\
 (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &= (-36, -3, 25) \\
 E_2 &= (7.745967, 7.745967, 20) \\
 (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &= (-22.651612, 1.825806 \pm 13.688730i) \\
 E_3 &= (-7.745967, -7.745967, 20) \\
 (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &= (-22.651612, 1.825806 \pm 13.688730i)
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

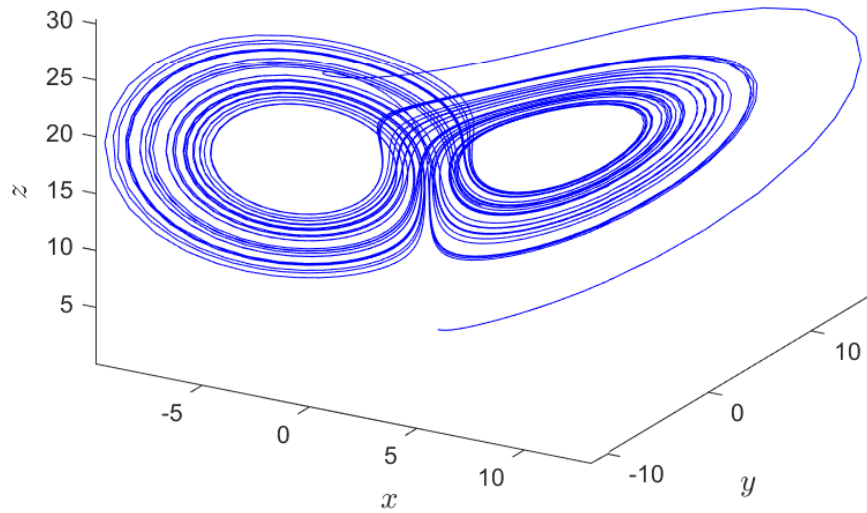
- Κάτω από συγκεκριμένες παραδοχές το Μοντέλο του Λου πληρεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Σιλνικοφ που εξηγεί την εμφάνιση χαοτικής συμπεριφοράς.

5.4 Το Μοντέλο του Ζου (Zhou)

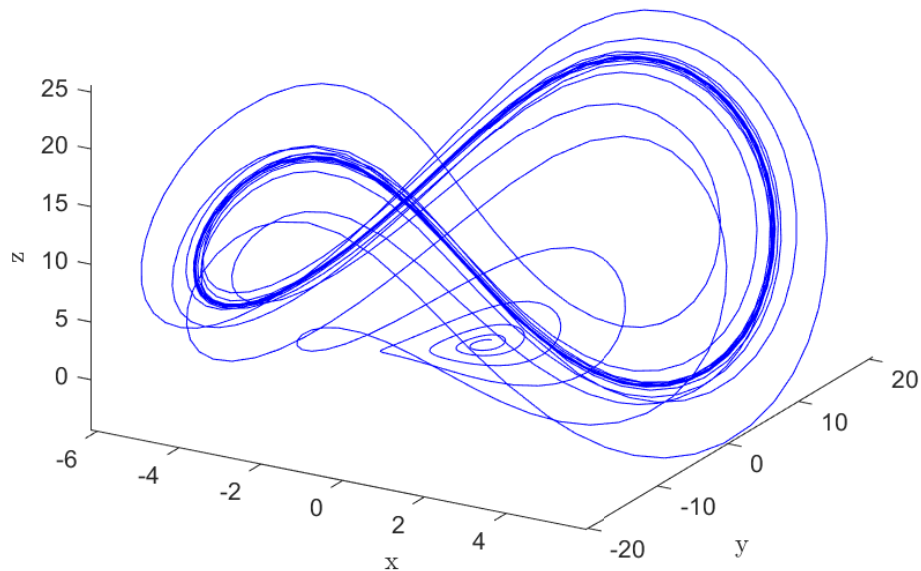
Το 2008 οι Ζου-Χου-Λου-Παν (Zhou, Hu, Lu, Pan) δημοσιεύουν μία ανάλυση ενός χαοτικού μοντέλου η οποία τεκμηριώνει ότι το μοντέλο αυτό αποτελεί όντως ένα καινούριο χαοτικό σύστημα. Το Μοντέλο του Ζου [68] περιγράφεται από τις ακόλουθες τρεις διαφορικές εξισώσεις.

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= a(y - x) \\
 \dot{y} &= bx - xz \\
 \dot{z} &= cz + xy
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

όπου $a, b, c \in \mathbb{R}$. Το σύστημα αυτό παρουσιάζει χαοτική συμπεριφορά για δύο διαφορετικές τριάδες των παραμέτρων και στις γραφικές παραστάσεις (5.3, 5.4) παρουσιάζεται ο χαοτικός ελκυστής για τις δύο περιπτώσεις των παραμέτρων, $(a, b, c) = (10, 16, -1)$ και $(a, b, c) = (-0.7, 16, -1)$.



Σχήμα 5.3: Ο χαοτικός ελκυστής του Μοντέλου του Ζου για τις τιμές των παραμέτρων $a = 10$, $b = 16$, $c = -1$.



Σχήμα 5.4: Ο χαοτικός ελκυστής του Μοντέλου του Ζου για τις τιμές των παραμέτρων $a = -0.7$, $b = 16$, $c = -1$.

Η ανάλυση της ευστάθειας του συστήματος μας τροφοδοτεί με τα ακόλουθα συμπεράσματα,

- Το σύστημα παρουσιάζει τρία σημεία ισορροπίας, τα $E_1 = (0, 0, 0)$ και $E_{2,3} = (\pm\sqrt{-bc}, \pm\sqrt{-bc}, c)$.
- Η ευστάθεια της αρχής καθορίζεται από την εξίσωση $(\lambda - c)(\lambda^2 + a\lambda - ab) = 0$. Πράγμα που σημαίνει ότι έχει τρεις πραγματικές ρίζες οι οποίες δίνονται από τις σχέσεις $\lambda_1 = c$ και $\lambda_{2,3} = -a/2 \pm (\sqrt{a^2 + 4ab})/2$. Οι ιδιοτιμές αυτές κάτω από περιπτώσεις μπορούν να καταστήσουν την αρχή Σαγματική Σπείρα.
- Η ευστάθεια των επιπλέον δύο σημείων ισορροπίας δίνεται από τις ακόλουθες ιδιοτιμές $\lambda_1 = -(a - c)/3 + \gamma$ και $\lambda_{2,3} = -(a - c)/3 + \rho \pm \omega i$. Τα α, ρ, ω δίνονται από τις σχέσεις της Μεθόδου του Καρνάνο.
- Η διερεύνηση του συστήματος για την ετεροκλινική τροχιά στην πρώτη τριάδα των τιμών των παραμέτρων δίνει για τα δύο τελευταία σημεία ισορροπίας,

$$\begin{aligned}
 E_2 &= (4, 4, 16) \\
 (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &= (-11.223725, 0.111862 \pm 5.338400i) \\
 E_3 &= (-4, -4, 16) \\
 (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &= (-11.223725, 0.111862 \pm 5.338400i)
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

ενώ για την ομοκλινική τροχιά θα ισχύει,

$$\begin{aligned}
 E_1 &= (0, 0, 0) \\
 (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &= (-1, 0.35 \pm 3.328287i)
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

- Κάτω από συγκεκριμένες παραδοχές για το συγκεκριμένο μοντέλο πληρούνται και εδώ οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Σίλνικοφ που ερμηνεύει την εμφάνιση χαοτικής συμπεριφοράς.

5.5 Μετασχηματισμοί Ομοιότητας

Οι Λεόνοφ και Αλγκάμπα (αναφορά στην Ενότητα 5.1) θεώρησαν τους μετασχηματισμούς που παρουσιάζουμε στις παρακάτω υποενότητες. Οι μετασχηματισμοί αυτοί αποτελούν μία γραμμική βαθμονόμηση και λειτουργούν ως ομοθετικοί μετασχηματισμοί μεταξύ των μοντέλων Τσεν και Λου με το Λόρενζ. Για το μοντέλο της πρωτεΐνης tlr4 παρουσιάζουμε την αντίστοιχη διερεύνηση που κάναμε για να αποφανθούμε αν το μοντέλο μας είναι ίδιο με του Λου ή όχι.

5.5.1 Το Μοντέλο του Τσεν (Chen)

Για το Μοντέλο του Τσεν,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a(y - x) \\ \dot{y} &= (c - a)x + cy - xz \\ \dot{z} &= -bz + xy\end{aligned}\quad (5.7)$$

εφαρμόζουμε τους παρακάτω γραμμικούς μετασχηματισμούς,

$$x \rightarrow hX, y \rightarrow hY, z \rightarrow hZ, \tau \rightarrow ht \quad (5.8)$$

όπου με πεζά έχουμε συμβολίσει το παρόν σύστημα και με κεφαλαία το ζητούμενο σύστημα που θέλουμε να εξάγουμε από τους μετασχηματισμούς (δηλαδή το Λόρενζ). Κάτω από το μετασχηματισμό αυτό, το σύστημα γίνεται (στη γενική του μορφή),

$$\begin{aligned}\dot{X} &= \frac{a}{h}(Y - X) \\ \dot{Y} &= \frac{(c - a)}{h}X + \frac{c}{h}Y - XZ \\ \dot{Z} &= -\frac{b}{h}Z + XY\end{aligned}\quad (5.9)$$

Θα παρουσιάσουμε τη μορφή που παίρνει το σύστημα του Τσεν για δύο περιπτώσεις της παραμέτρου h , όπου $h = -c$ και $h = a$.

$$h = c$$

Θα έχουμε,

$$\begin{aligned}\dot{X} &= -\frac{a}{c}(Y - X) \\ \dot{Y} &= \left(\frac{a}{c} - 1\right)X - Y - XZ \\ \dot{Z} &= \frac{b}{c}Z + XY\end{aligned}\quad (5.10)$$

Το σύστημά μας εμπίπτει στο σύστημα του Λόρενζ κάτω από τις σχέσεις για τις παραμέτρους, $\sigma \rightarrow -\frac{a}{c}, \rho \rightarrow \frac{a}{c} - 1, \beta \rightarrow \frac{b}{c}, \sigma + \rho = -1$.

$$h = a$$

Αντίστοιχα για αυτή την περίπτωση θα έχουμε,

$$\begin{aligned}\dot{X} &= (Y - X) \\ \dot{Y} &= \left(\frac{c}{a} - 1\right)X + \frac{c}{a}Y - XZ \\ \dot{Z} &= -\frac{b}{a}Z + XY\end{aligned}\quad (5.11)$$

Όπου πλέον η ισοδυναμία θα ισχύει για $\sigma \rightarrow 1, \rho \rightarrow \frac{c}{a}-1, \beta \rightarrow \frac{b}{a}, \sigma + \rho = \frac{c}{a}$.

5.5.2 Το Μοντέλο του Λου (Lü)

Για το Μοντέλο του Λου,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a(y - x) \\ \dot{y} &= cy - xz \\ \dot{z} &= -bz + xy\end{aligned}\tag{5.12}$$

εφαρμόζουμε τους αντίστοιχους γραμμικούς μετασχηματισμούς της εξίσωσης (5.8) και παίρνουμε την ακόλουθη γενική περίπτωση,

$$\begin{aligned}\dot{X} &= \frac{a}{h}(Y - X) \\ \dot{Y} &= \frac{c}{h}Y - XZ \\ \dot{Z} &= -\frac{b}{h}Z + XY\end{aligned}\tag{5.13}$$

Αντίστοιχα και εδώ παρουσιάζουμε τη μορφή που παίρνει το σύστημα του Λου για δύο περιπτώσεις όπου $h = -c$ και $h = a$.

$$h = -c$$

Θα έχουμε,

$$\begin{aligned}\dot{X} &= -\frac{a}{c}(Y - X) \\ \dot{Y} &= -Y - XZ \\ \dot{Z} &= \frac{b}{c}Z + XY\end{aligned}\tag{5.14}$$

Το σύστημά μας εμπίπτει στο σύστημα του Λόρενζ κάτω από τις σχέσεις για τις παραμέτρους, $\sigma \rightarrow -\frac{a}{c}, \rho \rightarrow 0, \beta \rightarrow -\frac{b}{c}$.

$$h = a$$

Αντίστοιχα για αυτή την περίπτωση θα έχουμε,

$$\begin{aligned}\dot{X} &= Y - X \\ \dot{Y} &= \frac{c}{a}Y - XZ \\ \dot{Z} &= -\frac{b}{a}Z + XY\end{aligned}\tag{5.15}$$

Όπου πλέον η ισοδυναμία θα ισχύει για $\sigma \rightarrow 1, \rho \rightarrow 0, \beta \rightarrow \frac{b}{a}, \frac{c}{a} \rightarrow 1$ όπου το πηλίκο $\frac{c}{a}$ ως συντελεστής του Y θα πρέπει να είναι μονάδα για να ισχύει η ισοδυναμία με το Λόρενζ.

5.5.3 Το Μοντέλο Μετακίνησης της Πρωτεΐνης Tr4

Περνάμε τώρα στην περίπτωση του Μοντέλου της Μετακίνησης της Πρωτεΐνης Tr4 στο εσωτερικό του κυττάρου. Θέλουμε και εδώ να διερευνήσουμε τη δυνατότητα ισοδυναμίας του Μοντέλου μας με το Μοντέλο του Λόρενζ. Ως πρώτη παρατήρηση, το Μοντέλο μας εμφανίζει ομοιότητες με αυτό του Λου και όχι του Λόρενζ. Απο την προηγούμενη ανάλυση όμως γνωρίζουμε ότι το Λου μπορεί να αναχθεί στο Λόρενζ κάτω από κατάλληλες παραδοχές για τις παραμέτρους. Τονίζουμε προκαταβολικά και εδώ (αναλυτικά θα σταθούμε στην Ενότητα 5.6) ότι η μελέτη του συστήματός μας γίνεται για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων που ερμηνεύουν μία συγκεκριμένη βιολογική συμπεριφορά. Επαναφέρουμε το σύστημα της εξίσωσης (4.2) για μία πληρέστερη παρουσίαση του θέματος.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= fx - yz \\ \dot{y} &= x - cy \\ \dot{z} &= -dz + xy\end{aligned}\tag{5.16}$$

Παρουσιάζουμε πρώτα την γενική περίπτωση του μετασχηματισμένου συστήματος για τους μετασχηματισμούς $x \rightarrow hX, y \rightarrow hY, z \rightarrow hZ, \tau \rightarrow ht$. Μέσω αυτής της γενικής μορφής επιδιώκουμε να «φέρουμε» το σύστημά μας σε μορφή πιο κοντά σε αυτή του Λου. Στη συνέχεια επιλέγουμε τις κατάλληλες αλλαγές για τη μεταβλητή h .

$$\begin{aligned}\dot{X} &= \frac{f}{h}X - YZ \\ \dot{Y} &= \frac{1}{h}X - \frac{c}{h}Y \\ \dot{Z} &= -\frac{d}{h}Z + XY\end{aligned}\tag{5.17}$$

Σε αυτό το σημείο διακρίνουμε δύο κύριες περιπτώσεις για την τιμή της παραμέτρου μετασχηματισμού h . Αυτές είναι η $h = f$ και η $h = c$, διακρίνουμε και μία τρίτη περίπτωση την $h = d$ η οποία όμως κατά τη μελέτη δεν παρουσίασε ιδιαίτερο ενδιαφέρον και για το λόγο αυτό δεν την παραθέτουμε. Επικεντρώνουμε στην πρώτη περίπτωση για $h = f$ καθώς αυτή παρουσιάζει και το μεγαλύτερο ενδιαφέρον. Όπως παρουσιάζουμε στο Κεφάλαιο 6 η παράμετρος f είναι η παράμετρος διακλάδωσης στη μελέτη που γίνεται. Στο τέλος της παρούσας ενότητας παρουσιάζουμε επιπλέον τις απαραίτητες προϋποθέσεις για τις παραμέτρους έτσι ώστε τα δύο συστήματα - το Λου και το δικό μας - να είναι ισοδύναμα.

Παρουσιάζουμε τις δύο εκδοχές του μετασχηματισμένου συστήματος για

$h = f$ στην εξίσωση (5.18) και για $h = c$ στην εξίσωση (5.19).

$$\begin{aligned}\dot{X} &= X - YZ \\ \dot{Y} &= \frac{1}{f}X - \frac{c}{f}Y \\ \dot{Z} &= -\frac{d}{f}Z + XY\end{aligned}\tag{5.18}$$

$$\begin{aligned}\dot{X} &= \frac{f}{c}X - YZ \\ \dot{Y} &= \frac{1}{c}X - Y \\ \dot{Z} &= -\frac{d}{c}Z + XY\end{aligned}\tag{5.19}$$

Για να το φέρουμε σε μορφή ακόμα πιο συγγενική ως προς το Λου πραγματοποιούμε τον ακόλουθο επιπρόσθετο μετασχηματισμό $X \rightarrow Y$. Πρόκειται για αλλαγή που δεν επηρεάζει το σύστημα καθώς είναι στην ουσία μία διαφορετική ονομασία των δύο μεταβλητών.

$$\begin{aligned}\dot{X} &= \frac{1}{f}(Y - cX) \\ \dot{Y} &= Y - XZ \\ \dot{Z} &= -\frac{d}{f}Z + XY\end{aligned}\tag{5.20}$$

$$\begin{aligned}\dot{X} &= \frac{1}{c}Y - X \\ \dot{Y} &= \frac{f}{c}Y - XZ \\ \dot{Z} &= -\frac{d}{c}Z + XY\end{aligned}\tag{5.21}$$

Για την περίπτωση $h = f$ θα προχωρήσουμε σε δύο επιπλέον μετασχηματισμούς για το σύστημά μας (5.17) σε αυτή μας τη διερεύνηση. Οι μετασχηματισμοί θα είναι οι $x' \rightarrow cx, z' \rightarrow cz$ και $x' \rightarrow cx, z \rightarrow cz'$. Ως αποτέλεσμα τα συστήματα των εξισώσεων (5.20) και (5.21) γίνονται,

$$\begin{aligned}\dot{X}' &= \frac{c}{f}(Y - X') \\ \dot{Y} &= y - \frac{1}{c^2}X'Z' \\ \dot{Z}' &= -\frac{d}{f}Z' + X'Y\end{aligned}\tag{5.22}$$

και,

$$\begin{aligned}\dot{X}' &= \frac{c}{f}(Y - X') \\ \dot{Y} &= Y - X'Z' \\ \dot{Z}' &= -\frac{d}{f}Z' + \frac{1}{c^2}X'Y\end{aligned}\tag{5.23}$$

Σε όλες τις περιπτώσεις των προηγούμενων συστημάτων παίρνουμε μετασχηματισμένα συστήματα με τον ίδιο αριθμό παραμέτρων με αυτές του Λου. Η διαφορά έγκειται στις θέσεις που εμφανίζονται οι παράμετροι μεταξύ των μετασχηματισμένων συστημάτων και του Λου. Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει μία αντιστοιχία ένα-προς-ένα για τις παραμέτρους, καθώς επίσης ότι έχουμε και γινόμενα μεταξύ των παραμέτρων και των μη γραμμικών όρων κάτι που στο μοντέλο του Λου απουσιάζει. Στο τελευταίο αυτό μοντέλο οι παράμετροι πολλαπλασιάζουν μόνο τους γραμμικούς όρους του συστήματος.

Επιπρόσθετα θα μπορούσαμε να πούμε ότι τα μετασχηματισμένα συστήματα των εξισώσεων (5.22,5.23) οδηγούν σε εμφανώς πολυπλοκότερα συστήματα. Ένα ακόμα χαρακτηριστικό είναι ότι σε καμία από τις περιπτώσεις αυτές δεν έχουμε μία μείωση των παραμέτρων κάτι που είναι και ένα από τα ζητούμενα αυτής της μεθόδου. Σε αντιστοιχία με την προαναφερθείσα βιβλιογραφία η ισοδυναμία μεταξύ του μετασχηματισμένου συστήματος της εξίσωσης (5.20) και του Λου μπορεί να γίνει κάτω από την ακόλουθη υπόθεση για τις παραμέτρους.

$$c_{Lu} = 1, c_{tlr4} = 1, \alpha = \frac{1}{f} \quad \text{and} \quad b = \frac{d}{f}\tag{5.24}$$

Ο παραπάνω συνδυασμός των παραμέτρων καθιστά τα δύο συστήματα ισοδύναμα κάτι που επιβεβαιώθηκε αριθμητικά με τη χρήση του Πακέτου MatCont. Αποφύγαμε να παρουσιάσουμε εδώ την ισοδυναμία μέσω των αντίστοιχων διαγραμμάτων γιατί αποτελούν ουσιαστικά δύο ίδιες εικόνες της τροχιάς (όμοια με αυτή του εξωφύλλου). Κάποιος μπορεί εύκολα να το επιβεβαιώσει ολοκληρώνοντας αριθμητικά το μετασχηματισμένο σύστημα καθώς και αυτό του Λου για τις τιμές των παραμέτρων που δίνονται από την εξίσωση (5.24).

5.6 Μεθοδολογικά Συμπεράσματα

Για τα δύο προηγούμενα συστήματα (Τσεν και Λου) έχουν προταθεί κατά καιρούς διάφοροι μετασχηματισμοί εκτός των δύο που παρουσιάσαμε. Η λογική πίσω από αυτούς είναι ίδια με τη διαδικασία που ακολουθήσαμε σε

όλη την Ενότητα 5.5. Αντίστοιχα μπορεί κάποιος να επιβάλει μία σειρά από διαφορετικούς μετασχηματισμούς και για το δικό μας σύστημα.

Στην πραγματικότητα όμως και πιο συγκεκριμένα για το δικό μας σύστημα οι παράμετροι παίζουν σημαντικό ρόλο στην βιολογική συμπεριφορά του. Επειδή ακριβώς πρόκειται για σύστημα που περιγράφει ένα συγκεκριμένο αριθμό ασθενών που παρουσιάζουν το μικρόβιο της σήψης στον οργανισμό τους οι παράμετροι αποτελούν κάτι το ουσιαστικό για το σύστημα. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η παραδοχή για την παράμετρο $c \neq 1$ και η ανάλυση διακλάδωσης μίας παραμέτρου για $c = 4.8$ είναι κάτι το ουσιώδες στο μοντέλο μας. Με αφορμή όμως την εν λόγω συζήτηση προχωρήσαμε και στην παρουσίαση των διαγραμμάτων διακλάδωσης για δύο παραμέτρους αυτές των f, c . Η αντίστοιχη παρουσίαση γίνεται στην Ενότητα 6.4. Καταλήγουμε λοιπόν ότι πρόκειται για δύο διαφορετικά συστήματα για την εν λόγω μελέτη.

Οι διάφορες εργασίες που έχουν δημοσιευτεί εκφράζουν μία μεγάλη διασπορά στις απόψεις περί ισοδυναμίας ή μη των διαφόρων συστημάτων. Ως πιο χαρακτηριστικές αναφέρουμε αυτές των Λεόνουφ και Κουζνέτσοφ από τη μία και των Αλγκάμπα κ.α από την άλλη. Ιδιαίτερα η άποψη των Αλγκάμπα κ.α. όπως παρουσιάζεται στα [72, 73] εκφράζει μία αρκετά απλοποιημένη άποψη σχετικά με την ισοδυναμία των Συστημάτων Λου και Τσεν με το σύστημα του Λόρενζ. Χαρακτηριστικά αναφέρουν «Έχουμε δείξει ότι το σύστημα του Τσεν αποτελεί ειδική περίπτωση του συστήματος του Λόρενζ» ενώ σε άλλο σημείο σχετικά με το μοντέλο του Λου αναφέρουν «θα δείξουμε ότι υπάρχει ομοθετικός μετασχηματισμός που μετατρέπει το σύστημα του Λου σε αυτό του Λόρενζ με αποτέλεσμα η δυναμική συμπεριφορά του συστήματος του Λου παρουσιάζεται και από το σύστημα του Λόρενζ. Ως εκ τούτου όλα τα αποτελέσματα που έχουν προκύψει για το σύστημα του Λου (στις διάφορες έρευνες ΣτΣ) μπορούν να εξαχθούν κατά τριτοβάθμιο τρόπο από το σύστημα του Λόρενζ».

Δεν θα επιχειρήσουμε να ασκήσουμε κριτική στις παραπάνω φράσεις. Η εμφάνιση των διαφόρων χαοτικών συστημάτων έδωσε τεράστια ώθηση στη μελέτη της Θεωρίας του Χάους συμπληρώνοντας διάφορα κομμάτια του πάζλ που έλειπαν από τη μέχρι πρότινος ανάλυση που είχε γίνει στο Μοντέλο του Λόρενζ. Μία ακόμα πλευρά αφορά την Φυσική ή όποια άλλη πλευρά της φύσης καλούνται κάθε φορά να ερμηνεύσουν τα εν λόγω συστήματα (για παράδειγμα το εν λόγω σύστημα που μελετά αυτή η Διπλωματική Εργασία αποτελεί ένα βιολογικό μοντέλο).

Κλείνουμε αυτό το Κεφάλαιο παραθέτοντας τα λόγια δύο μεγάλων μαθηματικών της Θεωρίας του Χάους και των Διακλαδώσεων όπως παρατίθενται

στο [71], αυτά των Γ.Α.Λεόνοφ και Ν.Β.Κουζνέτσοφ:

«Όπως ανέφερε ένας εκ των κριτών της συγκεκριμένης δημοσίευσης “Αν έπρεπε να δίνουμε διαφορετικά ονοματα για κάθε ένα χωρικό επίπεδο που θα μπορούσαμε να πάρουμε στο τρισδιάστατο χώρο των παραμέτρων του Συστήματος του Λόρενζ, τότε θα είχαμε ένα σοβαρό πρόβλημα”. Από την άλλη θα θέλαμε εδώ να θυμήσουμε το Κλασσικό 16ο Πρόβλημα του Χίλμπερτ (και πιο συγκεκριμένα το δεύτερο μέρος του) για τον αριθμό και τις αμοιβαίες σχέσεις των οριακών κύκλων για πολυωνυμικά συστήματα δύο διαστάσεων, όπου ένα από τα βασικά καθήκοντα είναι η εξεύρεση απλούστερων μοντέλων μίας συγκεκριμένης κλάσης, με το μέγιστο αριθμό οριακών κύκλων. Μπορούμε να υιοθετήσουμε το αντίστοιχο χαοτικό ανάλογο αυτού του προβλήματος για τον αριθμό και την αμοιβαία σχέση για παράδειγμα των χαοτικών ελκυστών σε τριών διαστάσεων πολυωνυμικά συστήματα. Πολλά τέτοια συστήματα έχουν ανακαλυφθεί και μελετηθεί τα τελευταία χρόνια. Ένα από τα ελκυστικά χαρακτηριστικά των συστημάτων του Τσεν και του Λου είναι η ομοιότητά του στη μετάβαση προς το Χάος με αυτό του Λόρενζ και επίσης το γεγονός ότι είναι απλούστερα σε σχέση με το τελευταίο καθώς περιέχουν δύο παραμέτρους και ως εκ τούτου είναι απλούστερα.»

και ακόμα,

«Ενώ διάφοροι τίτλοι όπως “*Το Σύστημα του Τσεν είναι μία ειδική περίπτωση του Συστήματος του Λόρενζ*” ή “*Το Σύστημα του Λου είναι ειδική περίπτωση αυτής του Λόρενζ*” μπορούν να οδηγήσουν στο συμπέρασμα ότι η μελέτη των συστημάτων αυτών είναι περιττή, εμείς σημειώνουμε ότι τα Συστήματα των Τσεν και Λου ώθησαν στην ανάπτυξη νέων μεθόδων για την ανάλυση των χαοτικών συστημάτων».

Κεφάλαιο 6

Ανάλυση Ευστάθειας και Διακλαδώσεων του Συστήματος Μετακίνησης της Πρωτεΐνης Tlr4 στο Εσωτερικό του Κυττάρου

6.1 Σημεία Ισορροπίας και Ανάλυση Ευστάθειας

Η ανάλυση της ευστάθειας του συστήματος αποτελεί το θεμέλιο λίθο όλης της περαιτέρω μελέτης του μοντέλου περιγραφής της μετακίνησης της πρωτεΐνης Tlr4 στο εσωτερικό του κυττάρου. Η μελέτη της ευστάθειας, η γνώση της συμπεριφοράς του συστήματος κοντά στα σημεία ισορροπίας και η συμπεριφορά του σε μικρές διαταραχές είναι καθοριστικά. Η σημασία τους δεν έγκειται μόνο στη μαθηματική μελέτη και ανάλυση του προβλήματος αυτή καθαυτή. Δεν γίνεται για μία γενική και αφηρημένη προσέγγιση του προβλήματος. Η σημασία της βρίσκεται, στην ανάγκη κατανόησης ενός φυσικού φαινομένου με αποτελέσματα ορατά στην πραγματική ζωή. Μας δίνει την ικανότητα να κατανοήσουμε σε ακόμα μεγαλύτερο βάθος το ίδιο το φαινόμενο της σήψης στον ανθρώπινο οργανισμό. Να κατανοήσουμε την εξέλιξή του, τους παράγοντες από τους οποίους επηρεάζεται καθώς και να καθορίσουμε τις ενεργειες (και με τη μαθηματική έννοια του όρου) στις οποίες μπορούμε να προβούμε για να αποτρέψουμε ή να επιβραδύνουμε την εξέλιξή του. Στα συμπεράσματα της παρούσας Μεταπτυχιακής Διπλωματικής Εργασίας θα δοθεί μία αναλυτική παρουσίαση των παράπανω απόψεων.

6.1.1 Σημεία Ισορροπίας του Συστήματος

Θεωρούμε το μετασχηματισμένο σύστημα (4.2) του 4^{ου} Κεφαλαίου όπου έχουμε θέσει $c = b + a$ και $d = g - s$. Το μετασχηματισμένο σύστημα

παρουσιάζεται και στην εξίσωση (6.1) για λόγους πληρότητας της ανάλυσης.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= fx(t) - y(t)z(t) \\ \dot{y}(t) &= x(t) - cy(t) \\ \dot{z}(t) &= x(t)y(t) - dz(t) \end{aligned} \quad (6.1)$$

Αρχικά παρατηρούμε ότι το σύστημά μας εμφανίζει μια συμμετρία ως προς τον άξονα z . Αποτέλεσμα είναι, οι εξισώσεις μας να παραμένουν αμετάβλητες κάτω από το μετασχηματισμό $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$. Όπως θα φανεί και στη συνέχεια άμεση συνέπεια της παραπάνω ιδιότητας είναι η συμμετρία των λύσεών μας, καθώς και το γεγονός ότι τα όποια σημεία διακλαδώσεων παρουσιάζουν και τα αντίστοιχα συμμετρικά τους.

Ένα επιπλέον χαρακτηριστικό αυτής της συμμετρίας είναι η δυνατότητα εμφάνισης Διακλάδωσης Τρίαυνας/Διχάλας. Όπως αποδεικνύουμε στη συνέχεια του παρόντος κεφαλαίου το σύστημά μας κάτω από συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων υπόκειται σε Διακλάδωση Τρίαυνας.

Η εύρεση των σημείων ισορροπίας του συστήματος βρίσκεται από την επίλυση του συστήματος $f(\vec{x}, \vec{a}) = 0$ για $t \rightarrow 0$. Έτσι για τα σημεία ισορροπίας θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x'(t) = 0 \\ y'(t) = 0 \\ z'(t) = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} fx(t) - y(t)z(t) = 0 \\ x(t) - cy(t) = 0 \\ x(t)y(t) - dz(t) = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} fcy(t) - y(t)z(t) = 0 \\ x(t) = cy(t) \\ cy^2 - dz(t) = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} y(t)(fc - z(t)) = 0 \\ x(t) = cy(t) \\ cy^2(t) - dz(t) = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (6.2)$$

Από την εξίσωση $y(t)(fc - z(t)) = 0$ παίρνουμε τις εξής δύο περιπτώσεις $y(t) = 0$ και $z(t) = fc$. Έτσι θα έχουμε τις παρακάτω λύσεις για το σύστημά μας,

$$y(t) = 0 \Rightarrow x(t) = 0 \quad \text{and} \quad z(t) = 0 \quad (6.3)$$

και αντίστοιχα,

$$z(t) = fc \Rightarrow y(t) = \pm\sqrt{fd} \quad \text{and} \quad x(t) = \pm c\sqrt{fd} \quad (6.4)$$

Ως αποτέλεσμα των παραπάνω συνοψίζουμε τα τρία σημεία ισορροπίας στην εξίσωση (6.5).

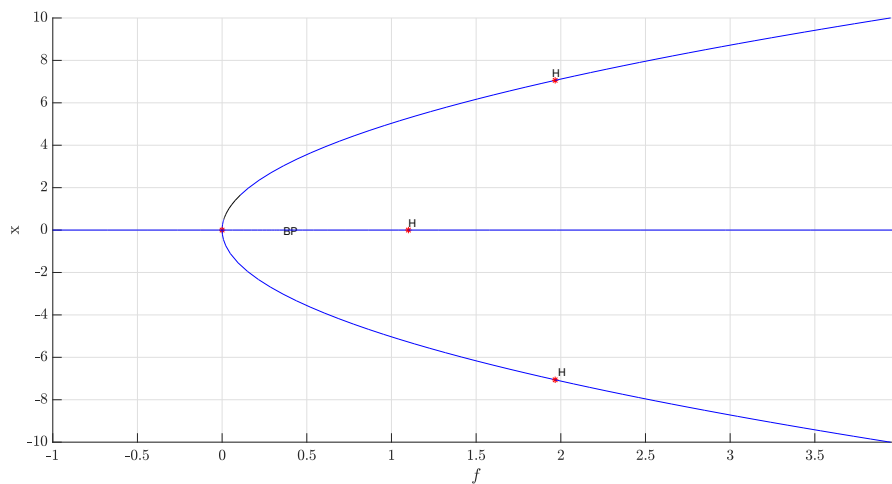
$$(x^*, y^*, z^*) = \begin{cases} E_0 &= (0, 0, 0) \\ E_1 &= (c\sqrt{fd}, \sqrt{fd}, fc) \\ E_2 &= (-c\sqrt{fd}, -\sqrt{fd}, fc) \end{cases} \quad (6.5)$$

Από τη φύση των σημείων ισορροπίας συμπεραίνουμε ότι αυτά θα ορίζονται για συγκεκριμένες τιμές των κύριων παραμέτρων μας f, c, d . Η ποσότητα κάτω από τη ρίζα είναι αυτή που καθορίζει την εμφάνιση, την ύπαρξη και τον εξαφανισμό των σημείων ισορροπίας μας. Με δεδομένες τις θετικές τιμές των παραμέτρων c, d για τις οποίες έχουμε θεωρήσει ($c = 4.8, d = 1.1$), ο καθοριστικός παράγοντας για τα σημεία ισορροπίας είναι οι τιμές της παραμέτρου f . Αποτέλεσμα είναι τα σημεία ισορροπίας E_1, E_2 να ορίζονται για $f > 0$. Αν η υπόθεση αυτή ισχύει, τότε έχουμε την εμφάνιση δύο συμμετρικών σημείων ισορροπίας εκτός της αρχής των αξόνων E_0 . Για τιμές $f < 0$ η αρχή των αξόνων αποτελεί το μοναδικό σημείο ισορροπίας του συστήματος.

Συνοψίζουμε τα προηγούμενα συμπεράσματα στο παρακάτω θεώρημα. Η μορφή των Θεωρημάτων που παρουσιάζουμε δεν έχουν τόσο την αυστηρή έννοια που δίνουν οι μαθηματικοί όσο το να αποτελέσουν σημεία τα οποία συνοψίζουν αποτελέσματα στην ανάλυσή μας. Στην εικόνα (6.1) φαίνεται το διάγραμμα της Διακλάδωσης Τρίαινας.

Θεώρημα 2. Για τιμή της παραμέτρου $f > 0$ έχουμε την εμφάνιση μίας Διακλάδωσης Τρίαινας/Διχάλας στην Αρχή των Αξόνων. Πιο συγκεκριμένα:

- Αν $f < 0$ το μοναδικό Σημείο Ισορροπίας είναι η Αρχή των Αξόνων.
- Αν $f = 0$ μία Διακλάδωση Τρίαινας εμφανίζεται στην Αρχή των Αξόνων.
- Αν $f \geq 0$ έχουμε την εμφάνιση ενός συμμετρικού ζεύγους Σημείων Ισορροπίας, καθώς η Αρχή των Αξόνων παραμένει Σημείο Ισορροπίας του συστήματος.



Σχήμα 6.1: Το Διάγραμμα της Διακλάδωσης Τρίαινας. Παρατηρούμε ότι για $f > 0$ έχουμε εκτός της αρχής των αξόνων δύο επιπλέον συμμετρικά σημεία ισορροπίας. Στο Διάγραμμα Διακλάδωσης φαίνονται και τα συμμετρικά σημεία της Διακλάδωσης Αντρόνοφ-Χοφ. Από αυτά τα σημεία στη συνέχεια θα γίνει και η αριθμητική ανάλυση διακλάδωσης μίας παραμέτρου.

6.1.2 Ανάλυση Ευστάθειας του Συστήματος

Για την ανάλυση της ευστάθειας των σημείων ισορροπίας προσεγγίζουμε το σύστημά μας μέσω του αντίστοιχου γραμμικού συστήματος που προκύπτει από τη μέθοδο της γραμμικοποίησης. Ο υπολογισμός της Ιακωβιανής δίνεται στην εξίσωση (6.6),

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial P}{\partial z} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} & \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & -z & -y \\ 1 & -c & 0 \\ y & x & -d \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

Τα ιδιοδιανύσματα του Ιακωβιανού πίνακα J δίνονται από το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $\det(J - \lambda I) = 0$. Υπολογίζουμε αρχικά τα ιδιοδιανύσματα για το σημείο ισορροπίας E_0 της αρχής των αξόνων. Ο υπολογισμός των ιδιοδιανυσμάτων για τα άλλα δύο σημεία ισορροπίας είναι όμοιος καθώς έχουν την ίδια χαρακτηριστική εξίσωση. Θα δώσουμε μία γενική μορφή για τη χαρακτηριστική εξίσωση και στη συνέχεια θα την προσαρμόσουμε στο εκάστοτε σημείο ισορροπίας που θέλουμε να μελετήσουμε. Για την τιμή της παραμέτρου $f > 0$ για την οποία έχουμε τρία σημεία ισορροπίας, η γενική μορφή της χαρακτηριστικής εξίσωσης γίνεται,

$$\det \begin{vmatrix} f - \lambda & -z & -y \\ 1 & -c - \lambda & 0 \\ y & x & -d - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(f - \lambda)(-c - \lambda)(-d - \lambda) - z(d + \lambda) - y(x - y(-c - \lambda)) = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda^3 - (f - c - d)\lambda^2 - (fc + fd - cd - z - y^2)\lambda - (fcd - zd - xy - y^2c) = 0$$

Για συντομία υιοθετούμε τον παρακάτω συμβολισμό,

$$\lambda^3 - p\lambda^2 - q\lambda - m = 0 \quad (6.7)$$

Όπου,

$$\begin{aligned} p &= (f - c - d) \\ q &= (fc + fd - cd - z - y^2) \\ m &= (fcd - zd - xy - y^2c) \end{aligned} \quad (6.8)$$

Θεωρώντας ότι $\lambda = \mu - \frac{(-p)}{3}$ και με αντικατάσταση του λ στην χαρακτηριστική εξίσωση παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \left(\mu + \frac{p}{3}\right)^3 - p\left(\mu + \frac{p}{3}\right)^2 - q\left(\mu + \frac{p}{3}\right) - m &= 0 \\ \mu^3 + \left(-\frac{p^2}{3} - q\right)\mu + \left(-\frac{2p^3}{27} - \frac{1}{3}qp - m\right) &= 0 \end{aligned} \quad (6.9)$$

Τελικώς θα έχουμε,

$$\mu^3 + r\mu + s = 0 \quad (6.10)$$

Όπου, $r = -\frac{p^2}{3} - q$ και $s = -\frac{2p^3}{27} - \frac{1}{3}qp - m$ ενώ ορίζουμε τη διακρίνουσα της παραπάνω εξίσωσης μέσω της (6.11) ως:

$$\Delta = \left(\frac{s}{2}\right)^2 + \left(\frac{r}{3}\right)^3 \quad (6.11)$$

Συνοψίζουμε τις περιπτώσεις για τις ρίζες του πολυωνύμου ανάλογα με το πρόσημο της διακρίνουσας που έχουμε ορίσει στην εξίσωση (6.11) στο παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 1. Η Διακρίνουσα Δ του κυβικού πολυωνύμου, καθορίζει το είδος των τριών ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης (6.10).

1. Αν $\Delta > 0$ τότε υπάρχει μία πραγματική ρίζα $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ και δύο μιγαδικές ρίζες $\lambda_{2,3} \in \mathbb{C}$.
2. Αν $\Delta = 0$ τότε υπάρχουν τρεις πραγματικές ρίζες $\lambda_{1,2,3} \in \mathbb{R}$ εκ των οποίων δύο τουλάχιστον είναι ίσες, $\lambda_2 = \lambda_3$.
3. Αν $\Delta < 0$ τότε υπάρχουν τρεις διακριτές πραγματικές ρίζες, $\lambda_{1,2,3} \in \mathbb{R}$.

Η γενική μορφή των τριών ριζών του πολυωνύμου (6.7) παρουσιάζεται παρακάτω,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{p}{3} + \frac{\left(\frac{p^2}{9} + \frac{q}{3}\right)}{W_\mu} + W_\mu \\ \lambda_2 &= \frac{p}{3} - \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{p^2}{9} + \frac{q}{3}\right)}{W_\mu} - \frac{1}{2}W_\mu - i\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\left(\frac{p^2}{9} + \frac{q}{3}\right)}{W_\mu} - W_\mu\right) \\ \lambda_3 &= \frac{p}{3} - \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{p^2}{9} + \frac{q}{3}\right)}{W_\mu} - \frac{1}{2}W_\mu + i\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\left(\frac{p^2}{9} + \frac{q}{3}\right)}{W_\mu} - W_\mu\right) \end{aligned} \quad (6.12)$$

Όπου,

$$W_\mu = \sqrt[3]{\frac{m}{2} + \frac{qp}{6} + \frac{p^3}{27} + \sqrt{\left(\frac{m}{2} + \frac{qp}{6} + \frac{p^3}{27}\right)^2 - \left(\frac{p^2}{2} + \frac{q}{3}\right)^3}} \quad (6.13)$$

Αν χρησιμοποιήσουμε τα αναλυτικά αποτελέσματα της Μεθόδου του Καρ-

ντάνο τότε έχουμε την ακόλουθη μορφή για τις τρεις ρίζες του πολυωνύμου,

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \sqrt[3]{\left(-\frac{s}{2} + \sqrt{\Delta}\right)} - \frac{1}{3} \frac{r}{\sqrt[3]{\left(-\frac{s}{2} + \sqrt{\Delta}\right)}} \\ \mu_2 &= \frac{r}{6\sqrt[3]{\left(-\frac{s}{2} + \sqrt{\Delta}\right)}} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{\left(-\frac{s}{2} + \sqrt{\Delta}\right)} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{3} \frac{r}{\sqrt[3]{\left(-\frac{s}{2} + \sqrt{\Delta}\right)}} + \sqrt[3]{\left(-\frac{s}{2} + \sqrt{\Delta}\right)}\right) \\ \mu_3 &= \frac{r}{6\sqrt[3]{\left(-\frac{s}{2} + \sqrt{\Delta}\right)}} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{\left(-\frac{s}{2} + \sqrt{\Delta}\right)} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{3} \frac{r}{\sqrt[3]{\left(-\frac{s}{2} + \sqrt{\Delta}\right)}} + \sqrt[3]{\left(-\frac{s}{2} + \sqrt{\Delta}\right)}\right)\end{aligned}\quad (6.14)$$

Ως αποτέλεσμα τα ιδιοδιανύσματα θα δίνονται από,

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{p}{3} + \mu_1 \\ \lambda_2 &= \frac{p}{3} + \mu_2 \\ \lambda_3 &= \frac{p}{3} + \mu_3\end{aligned}\quad (6.15)$$

Αν αντικαταστήσουμε τα r, s στην εξίσωση (6.11) και κάνουμε χρήση της εξίσωσης (6.14) τότε παίρνουμε τα ίδια αποτελέσματα για τις ιδιοτιμές με αυτά των εξισώσεων (6.12). Για την περίπτωση μας προσαρμόζουμε τα αποτελέσματά μας στις τιμές των παραμέτρων c και d ($c = 4.8, d = 1.1$). Παρουσιάζουμε στη συνέχεια τα αποτελέσματα για το κάθε σημείο ισορροπίας ξεχωριστά.

Σημείο Ισορροπίας $E_0 = (0, 0, 0)$

Για το Σημείο Ισορροπίας $E_0 = (0, 0, 0)$ ο Ιακωβιανός πίνακας γίνεται,

$$J = \begin{bmatrix} f & -z & -y \\ 1 & -c & 0 \\ y & x & -d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 \\ 1 & -c & 0 \\ 0 & 0 & -d \end{bmatrix}\quad (6.16)$$

Ως αποτέλεσμα για τα ιδιοδιανύσματα θα έχουμε :

$$\det \begin{vmatrix} f - \lambda & 0 & 0 \\ 1 & -c - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -d - \lambda \end{vmatrix} = 0\quad (6.17)$$

$$\begin{aligned}(f - \lambda)(-c - \lambda)(-d - \lambda) &= 0 \Rightarrow \\ (f - \lambda) = 0 \quad or \quad (-c - \lambda) = 0 \quad or \quad (-d - \lambda) = 0\end{aligned}\quad (6.18)$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι για το πρώτο σημείο ισορροπίας παίρνουμε τα ακόλουθα τρία ιδιοδιανύσματα,

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= f \\ \lambda_2 &= -d \\ \lambda_3 &= -c\end{aligned}\tag{6.19}$$

Από τις αρχικές παραδοχές που κάναμε για το μοντέλο μας οι τιμές των παραμέτρων c, d είναι θετικές. Ως εκ τούτου παίρνουμε τις εξής περιπτώσεις για τις τιμές της παραμέτρου f ,

- Αν $f > 0$ τότε $\lambda_1 > 0$ και $\lambda_{2,3} < 0$, με αποτέλεσμα το σημείο ισορροπίας E_0 της αρχής των αξόνων να είναι ένας Σαγματικός Κόμβος.
- Αν $f < 0$ τότε $\lambda_1 < 0$ και $\lambda_{2,3} < 0$, με αποτέλεσμα το σημείο ισορροπίας E_0 να είναι ένας Ευσταθής Κόμβος.

Σημείο Ισορροπίας $E_2 = (c\sqrt{fd}, \sqrt{fd}, fc)$

Για τον υπολογισμό των ιδιοδιανυσμάτων του δεύτερου σημείου ισορροπίας $E_2 = (c\sqrt{fd}, \sqrt{fd}, fc)$ χρειάζεται να λύσουμε το κυβικό πολυώνυμο που αποτελεί την χαρακτηριστική εξίσωση του Ιακωβιανού πίνακα. Θα κάνουμε χρήση απευθείας της γενικής μορφής του χαρακτηριστικού πολυωνύμου όπως δίνεται στην εξίσωση (6.7) που την εφαρμόζουμε στην περίπτωση του σημείου ισορροπίας $E_2 = (c\sqrt{fd}, \sqrt{fd}, fc)$. Έτσι από τις εξισώσεις (6.12) ή (6.15) των ιδιοδιανυσμάτων θα έχουμε,

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{p}{3} + \mu_1 = \frac{f - c - d}{3} + \mu_1 \\ \lambda_2 &= \frac{p}{3} + \mu_2 = \frac{f - c - d}{3} + \mu_2 \\ \lambda_3 &= \frac{p}{3} + \mu_3 = \frac{f - c - d}{3} + \mu_3\end{aligned}\tag{6.20}$$

όπου στο δεξί μέλος της εξίσωσης (6.20) ο παράγοντας μ θα δίνεται από τις σχέσεις της εξίσωσης (6.21):

$$\begin{aligned}\mu_1 &= W\mu - \frac{\left(\frac{cd}{3} - \frac{(c+d-f)^2}{9}\right)}{W\mu} \\ \mu_2 &= -\frac{1}{2}W\mu + \frac{\left(\frac{cd}{3} - \frac{(c+d-f)^2}{9}\right)}{W\mu} + \frac{i\sqrt{3}}{2}W\mu \\ \mu_3 &= -\frac{1}{2}W\mu + \frac{\left(\frac{cd}{3} - \frac{(c+d-f)^2}{9}\right)}{W\mu} - \frac{i\sqrt{3}}{2}W\mu\end{aligned}\tag{6.21}$$

έχουμε θέσει,

$$W\mu = \sqrt[3]{(W\mu)_1 + (W\mu)_2} \quad (6.22)$$

όπου για λόγους συντομίας έχουμε συμβολίσει,

$$\begin{aligned} (W\mu)_1 &= \sqrt{\left(\frac{(c+d-f)^3}{27} - \frac{cd(c+d-f)}{6} + cdf\right)^2 + \left(\frac{cd}{3} - \frac{(c+d-f)^2}{9}\right)^3} \\ (W\mu)_2 &= -\frac{(c+d-f)^3}{27} + \frac{cd(c+d-f)}{6} - cdf \end{aligned} \quad (6.23)$$

Αν αντικαταστήσουμε τις παραμέτρους c, d με τις τιμές τους ($c = 4.8, d = 1.1$), παίρνουμε τις ακόλουθες δύο περιπτώσεις:

- Αν $f > f_{hopf}$ το σημείο ισορροπίας E_2 είναι Σαγματική Σπείρα.
- Αν $f < f_{hopf}$ το σημείο ισορροπίας E_2 είναι Ευσταθής Σπείρα.

Εύκολα μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι για το δεύτερο σημείο ισορροπίας έχουμε ένα ιδιοδιάνυσμα $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ και δύο μιγαδικές ιδιοτιμές $\lambda_{2,3} \in \mathbb{C}$. Τα αποτελέσματα αυτά μπορούν να αποτελέσουν την αρχή για τη διερεύνηση του Σίλνικοφ Χάος μέσω του Θεωρήματος Σίλνικοφ και πιο συγκεκριμένα της Ομοκλινικής Εκδοχής του Θεωρήματος. Στην αρχική μας διερεύνηση αναζητήσαμε μια τέτοιας μορφής χαοτική συμπεριφορά αλλά για λόγους που τεκμηριώνουμε σε επόμενα κεφάλαια καταλήξαμε στην περίπτωση της Ομοκλινικής Έκρηξης και της μετάβασης από μία χαοτικά ασταθή περιοχή σε μία ευσταθή με την εμφάνιση των δύο ισχυρών χαοτικών ελκυστών.

Σημείο Ισορροπίας $E_3 = (-c\sqrt{fd}, -\sqrt{fd}, fc)$

Με τον ίδιο τρόπο αναλύουμε και υπολογίζουμε από την χαρακτηριστική εξίσωση τα ιδιοδιανύσματα για το τρίτο σημείο ισορροπίας $E_3 = (-c\sqrt{fd}, -\sqrt{fd}, fc)$. Όπως φαίνεται και από την παρακάτω εξίσωση (6.24) τα δύο συμμετρικά σημεία ισορροπίας έχουν τα ίδια ιδιοδιανύσματα.

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{(f-c-d)}{3} + W\mu - \frac{\left(\frac{cd}{3} - \frac{(c+d-f)^2}{9}\right)}{W\mu} \\ \lambda_2 &= \frac{(f-c-d)}{3} - \frac{1}{2}W\mu + \frac{\left(\frac{cd}{3} - \frac{(c+d-f)^2}{9}\right)}{W\mu} + \frac{i\sqrt{3}}{2}W\mu \\ \lambda_3 &= \frac{(f-c-d)}{3} - \frac{1}{2}W\mu + \frac{\left(\frac{cd}{3} - \frac{(c+d-f)^2}{9}\right)}{W\mu} - \frac{i\sqrt{3}}{2}W\mu \end{aligned} \quad (6.24)$$

6.2 Ανάλυση Διακλάδωσης Αντρόνοφ-Χοπφ (Andronov-Hopf)

Δίνουμε στην ενότητα αυτή την απόδειξη των συνθηκών που πρέπει να πληρούν οι παράμετροι του συστήματος για την εμφάνιση της Διακλάδωσης Αντρόνοφ-Χοπφ. Η Διακλάδωση Αντρόνοφ-Χοπφ σηματοδοτεί την εμφάνιση οριακών κύκλων στο σύστημά μας.

Χρησιμοποιούμε τη μορφή θεωρήματος-απόδειξης για να συνοψίσουμε τα συμπεράσματα που αφορούν την εν λόγω διακλάδωση.

Θεώρημα 3. Το σύστημα υπόκειται σε Διακλάδωση Αντρόνοφ-Χοπφ στο Σημείο Διακλάδωσης $f = \frac{c+d}{3}$.

Απόδειξη. Ο υπολογισμός των Σημείων Διακλάδωσης Αντρόνοφ-Χοπφ για τις συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων συνοψίζεται παρακάτω. Αρχικά υπολογίζουμε το σημείο διακλάδωσης για το σημείο ισορροπίας $E_2 = (c\sqrt{fd}, \sqrt{fd}, fc)$. Η χαρακτηριστική εξίσωση δίνεται από την εξίσωση (6.25):

$$\lambda^3 + (-(f - c - d))\lambda^2 + (cd)\lambda + 2fcd = 0 \quad (6.25)$$

Η εμφάνιση του Σημείου Διακλάδωσης Αντρόνοφ-Χοπφ γίνεται όταν ένα ζεύγος ιδιοδιανυσμάτων περνάει τον άξονα των φανταστικών αριθμών. Ως αποτέλεσμα οι ιδιοτιμές θα πρέπει να ικανοποιούν τις σχέσεις, $\lambda_1 = a$ όπου $a \in \mathbb{R}$ και $\lambda_{2,3} = \pm ib$ όπου $ib \in \mathbb{C}$. Η χαρακτηριστική εξίσωση γράφεται ως το γινόμενο των τριών αυτών ριζών. Έτσι θα έχουμε:

$$\pm(\lambda^2 + b^2)(\lambda - a) = 0 \quad (6.26)$$

Από τις εξισώσεις (6.25) και (6.26) παίρνουμε το ακόλουθο σύστημα:

$$\begin{aligned} a &= f - c - d \\ b^2 &= cd \\ ab^2 &= -2fcd \end{aligned} \quad (6.27)$$

Αντικαθιστώντας την πρώτη και τη δεύτερη εξίσωση στην τρίτη θα έχουμε:

$$-(f - c - d)cd = 2fcd \Rightarrow f = \frac{c + d}{3} \quad (6.28)$$

Η τελική εξίσωση, $f = (c + d)/3$ δίνει και τα σημεία διακλάδωσης σε συνάρτηση με τις παραμέτρους f, c, d του συστήματος.

Σε αντιστοιχία υπολογίζουμε το Σημείο Διακλάδωσης Αντρόνοφ-Χοπφ για το τρίτο σημείο ισορροπίας $E_3 = (-c\sqrt{fd}, -\sqrt{fd}, fc)$ το οποίο αναμένουμε να είναι συμμετρικό. Παρόμοια η χαρακτηριστική εξίσωση θα είναι:

$$\lambda^3 + (-(f - c - d))\lambda^2 + (cd)\lambda + 2fcd = 0 \quad (6.29)$$

Αντίστοιχα χρειαζόμαστε ένα ζεύγος καθαρά φανταστικών ιδιοτιμών. Η χαρακτηριστική εξίσωση δίνεται ως γινόμενο των ιδιοτιμών και φαίνεται στην εξίσωση (6.30),

$$\pm(\lambda^2 + b^2)(\lambda - a) = 0 \quad (6.30)$$

Από τις εξισώσεις (6.29) και (6.30) και το αντίστοιχο σύστημα έχουμε:

$$f = \frac{c + d}{3} \quad (6.31)$$

Από τις εξισώσεις (6.28) και (6.31) μπορούμε να εξάγουμε τη συνθήκη ύπαρξης Διακλάδωσης Αντρόνοφ-Χοπφ κατά τη μεταβολή δύο παραμέτρων και συγκεκριμένα των f και c κρατώντας σταθερή την παράμετρο d στην τιμή $d = 1.1$. Το Διάγραμμα Διακλάδωσης Αντρόνοφ-Χοπφ δύο παραμέτρων όπως φαίνεται και από την εξίσωση (6.32) είναι μία ευθεία γραμμή στο χώρο των παραμέτρων (c, f) .

$$f = \frac{c + d}{3} \Rightarrow f = \frac{1}{3}c + 0.36 \quad (6.32)$$

□

6.3 Αριθμητική Ανάλυση Διακλάδωσης Μίας-Παραμέτρου

Για την καλύτερη μελέτη του συστήματός μας, παρουσιάζουμε εδώ την ανάλυση διακλάδωσης μίας παραμέτρου. Θεωρούμε ως παράμετρο διακλάδωσης την παράμετρο f . Θέτουμε τις υπόλοιπες παραμέτρους του συστήματος σταθερές, στις τιμές, $c = 4.8$, $d = 1.1$, $b = 3.6$ και $a = 1.2$. Για την ανάλυση των διακλαδώσεων του συστήματος κατασκευάζουμε με αριθμητική συνέχιση τόσο το διάγραμμα ισοροπίας του συστήματος όσο και το διάγραμμα διακλάδωσης των οριακών κύκλων.

Όπως δείξαμε στο Κεφάλαιο 6.1.1 το σύστημα υπόκειται σε Διακλάδωση Τρίαινας για τιμή της παραμέτρου $f > 0$. Η τιμή αυτή συνδέεται και με την εμφάνιση ενός συμμετρικού ζεύγους σημείων ισοροπίας ως προς τον άξονα z ή τον άξονα της παραμέτρου. Αυτό σημαίνει ότι το σημείο ισοροπίας E_0 της αρχής των αξόνων είναι ένα Σημείο Διακλάδωσης καθώς η παράμετρος f αυξάνεται. Στους δύο συμμετρικούς κλάδους ισοροπίας που προκύπτουν, παρατηρούμε και τα αντίστοιχα συμμετρικά Σημεία Διακλάδωσης Αντρόνοφ-Χοπφ.

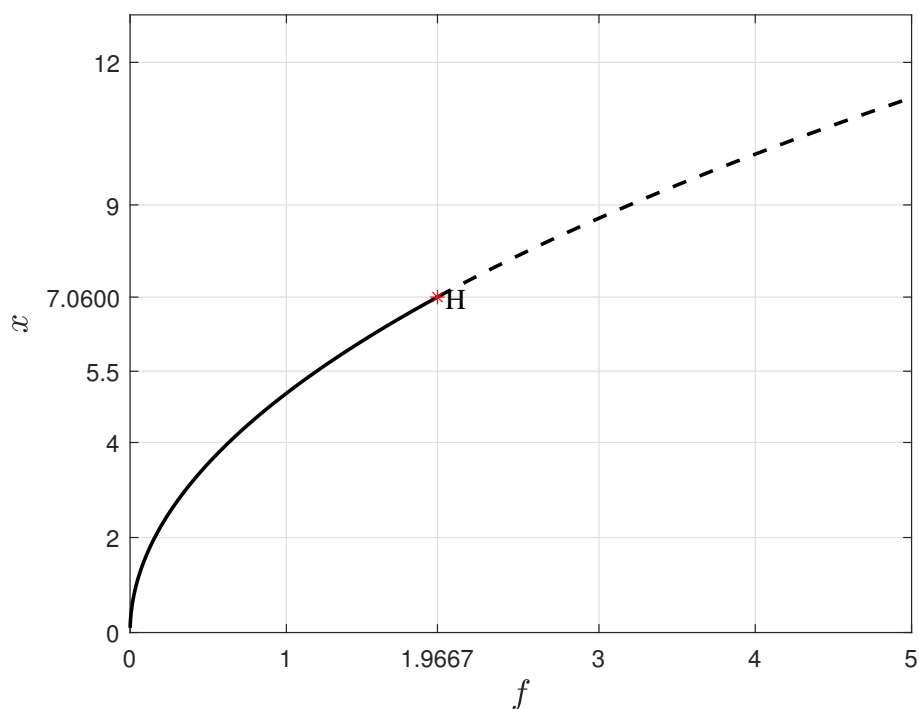
Στο σημείο αυτό τονίζουμε ότι η ανάλυση που προηγήθηκε στα Κεφάλαια 6.1.1 και 6.1.2 για την ευστάθεια των σημείων ισοροπίας και την εμφάνιση του σημείου διακλάδωσης Αντρόνοφ-Χοπφ επιβεβαιώνεται και αριθμητικά με τη χρήση του MatCont (Πακέτο Αριθμητικής Συνέχισης Διακλαδώσεων

του Matlab [24],[25]) από την πληροφορία που δίνει για τα ιδιοδιανύσματα και τον εκθέτη Lyapunov. Παρατηρούμε ότι τα προηγούμενα αναλυτικά αποτελέσματα στα οποία καταλήξαμε συμπίπτουν.

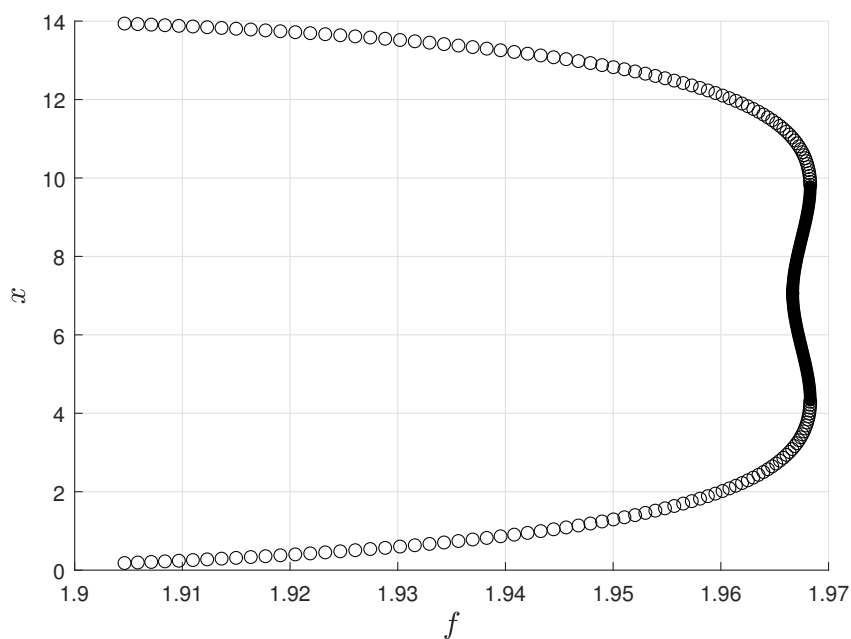
Με βάση τα αποτελέσματα της αριθμητικής ανάλυσης θα έχουμε: το πρώτο Σημείο Ισορροπίας $(0, 0, 0)$, θα είναι Ευσταθής Κόμβος ($\lambda_{1,2,3} < 0$) για $f < 0$ και Σαγματικό Σημείο ($\lambda_1 > 0, \lambda_{2,3} < 0$) για $f > 0$. Το δεύτερο Σημείο Ισορροπίας $(c\sqrt{fd}, \sqrt{fd}, fc)$, είναι Ευσταθής Σπείρα/Κόμβος ($\lambda_1 \in \mathbb{R}, \lambda_{2,3} \in \mathbb{C} \lambda_1 < 0, Re(\lambda_{2,3}) < 0$) για $f < f_{Hopf}$ και Σαγματική Σπείρα ($\lambda_1 \in \mathbb{R}, \lambda_{2,3} \in \mathbb{C}$ και $\lambda_1 < 0, Re(\lambda_{2,3}) > 0$) για $f > f_{Hopf}$. Τέλος το τρίτο Σημείο Ισορροπίας $(-c\sqrt{fd}, -\sqrt{fd}, fc)$, είναι Ευσταθής Σπείρα/Κόμβος $\lambda_1 \in \mathbb{R}, \lambda_{2,3} \in \mathbb{C}$ και $\lambda_1 < 0, Re(\lambda_{2,3}) < 0$ για $f < f_{Hopf}$ και Σαγματική Σπείρα $\lambda_1 \in \mathbb{R}, \lambda_{2,3} \in \mathbb{C}$ και $\lambda_1 < 0, Re(\lambda_{2,3}) > 0$ για $f > f_{Hopf}$.

Για το Σημείο Διακλάδωσης Αντρόνοφ-Χοιφ από τον αναλυτικό υπολογισμό του στο Κεφάλαιο 6.1.2 θα έχουμε ότι αυτό εντοπίζεται στην τιμή $f_{Hopf} = \frac{4.8+1.1}{3} \approx 1.96667$. Η τιμή αυτή επιβεβαιώνεται και αριθμητικά όπως φαίνεται στα παρακάτω διαγράμματα. Για την τιμή της παραμέτρου f_{Hopf} οι τιμές των μεταβλητών του συστήματος είναι $x \approx \pm 7.06, y \approx \pm 1.4708, z \approx 9.44$. Παρατηρούμε επίσης ότι για $f < f_{Hopf}$ παίρνουμε έναν Ευσταθή κλάδο για τα Σημεία Ισορροπίας ενώ για $f > f_{Hopf}$ ο κλάδος αυτός είναι Ασταθής. Τα ίδια συμπεράσματα έχουμε εντοπίσει και στην προηγούμενη παράγραφο.

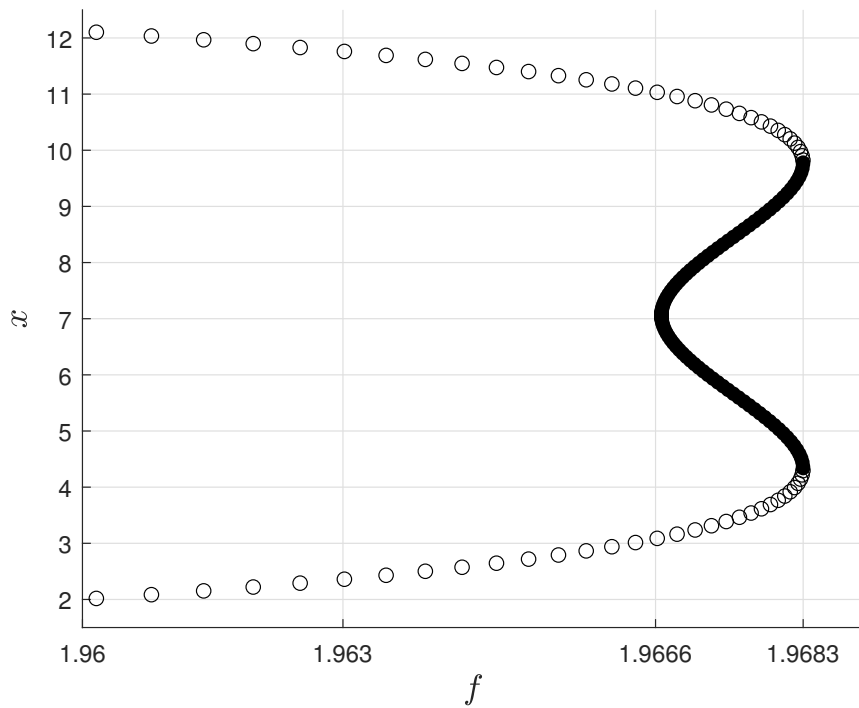
Συνοψίζουμε τα παραπάνω αποτελέσματα στα επόμενα διαγράμματα.



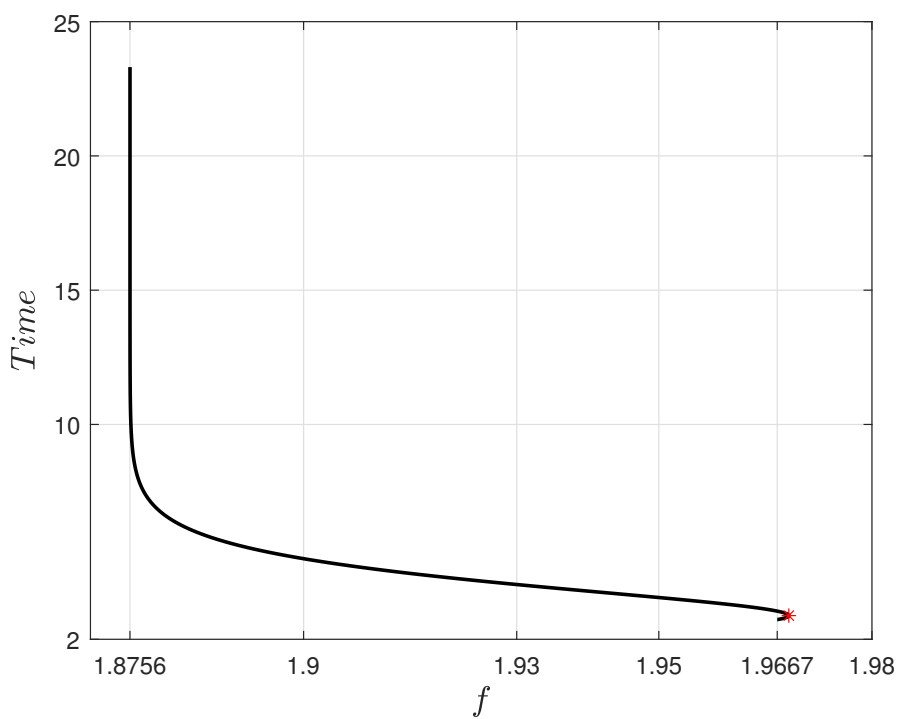
Σχήμα 6.2: Το διάγραμμα ισορροπίας για το σημείο E_2 . Διακρίνονται ο ευσταθής και ο ασταθής κλάδος της ισορροπίας του συστήματος, οι οποίοι διαχωρίζονται από το Σημείο Χοιφ.



Σχήμα 6.3: Το διάγραμμα διακλάδωσης μίας παραμέτρου των οριακών κύκλων. Παρατηρούμε την αλλαγή στην ευστάθεια των οριακών κύκλων που σηματοδοτούνται από ένα Σημείο Οριακού Κύκλου (LPC) για την τιμή $f_{LPC} \approx 1.9683$. Οι ευσταθείς οριακοί κύκλοι συμβολίζονται με γεμάτες τελείες σε αντίθεση με τους ασταθείς οριακούς κύκλους που συμβολίζονται με ανοιχτές τελείες.



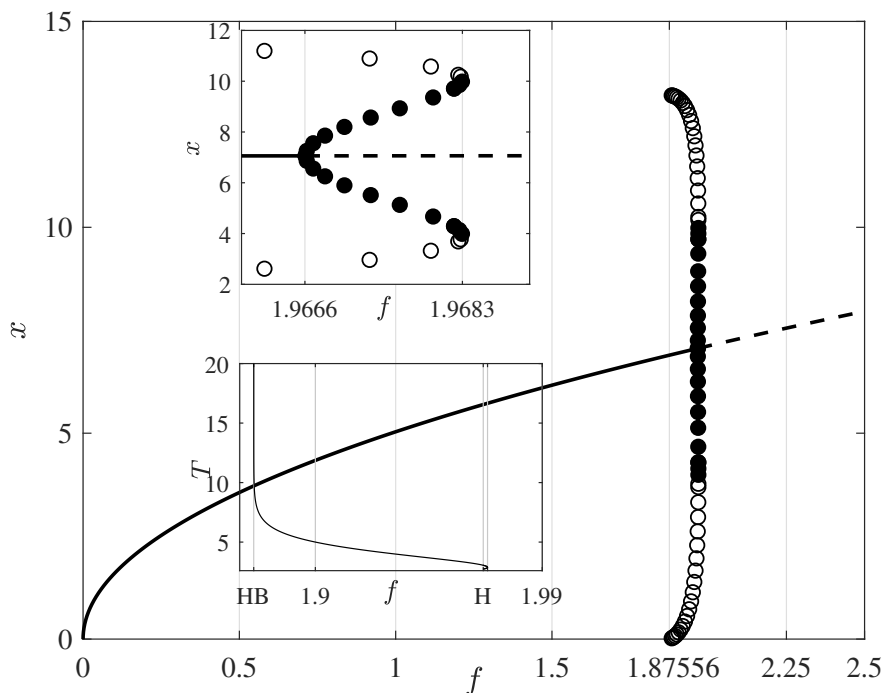
Σχήμα 6.4: Μεγενθυμένη η περιοχή όπου έχουμε την εναλλαγή μεταξύ των ευσταθών και ασταθών οριακών κύκλων.



Σχήμα 6.5: Το διάγραμμα της περιόδου των οριακών κύκλων ως συνάρτηση της παραμέτρου f . Ο απειρισμός της περιόδου καθώς η τιμή της f πλησιάζει την $f_{hom} \approx 1.87556$ ήταν και η πρώτη ένδειξη για την ύπαρξη ομοκλινικής τροχιάς.

Δίνουμε ακόμα το συνολικό διάγραμμα διακλάδωσης μίας παραμέτρου

με ενσωματωμένες τις προηγούμενες πληροφορίες.



Σχήμα 6.6: Διάγραμμα διακλάδωσης μίας παραμέτρου.

6.4 Αριθμητική Ανάλυση Διακλάδωσης Δύο-Παραμέτρων

Για την αριθμητική ανάλυση διακλάδωσης δύο παραμέτρων μελετάμε το σύστημά μας κάτω από τη μεταβολή των παραμέτρων f και c . Επιλέξαμε αυτές τις παραμέτρους, λόγω της σημασίας τους και της θέσης τους στο μοντέλο των τριών διαφορικών εξισώσεων.

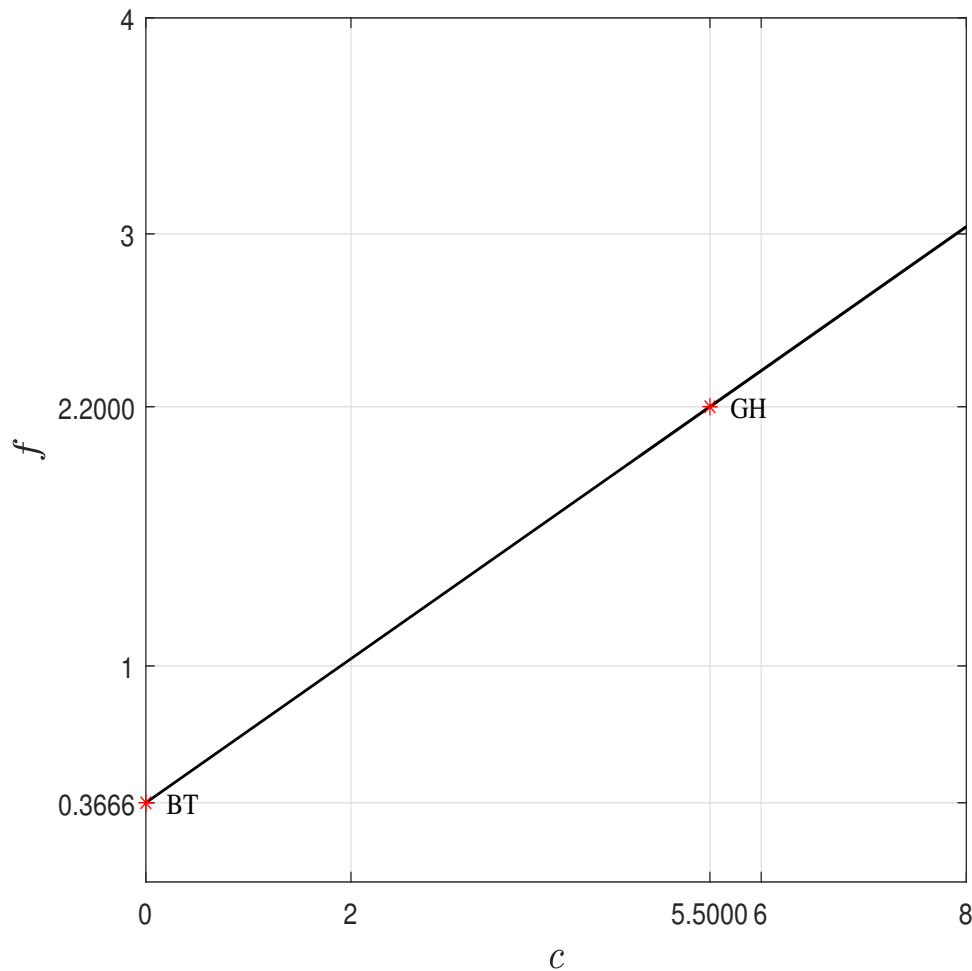
Από την προηγούμενη ανάλυση έχουμε δύο σημεία από τα οποία και θα ξεκινήσουμε την αριθμητική συνέχιση του μοντέλου μας. Αυτά είναι το Σημείο Διακλάδωσης Αντρόνοφ-Χοφ και το Οριακό Σημείο Διακλάδωσης των Οριακών Κύκλων (LPC of Limit Cycles).

Από την εξίσωση $f = (c + d)/3$ παίρνουμε το σημείο διακλάδωσης Αντρόνοφ-Χοφ. Μπορούμε λοιπόν να εντοπίσουμε αυτό το σημείο διακλάδωσης ως ένα γεωμετρικό τόπο πάνω στο χώρο των παραμέτρων (c, f) . Όπως φαίνεται και από το Διάγραμμα (6.7) πρόκειται για μία ευθεία. Η ευθεία αυτή δίνεται εύκολα από την εξίσωση,

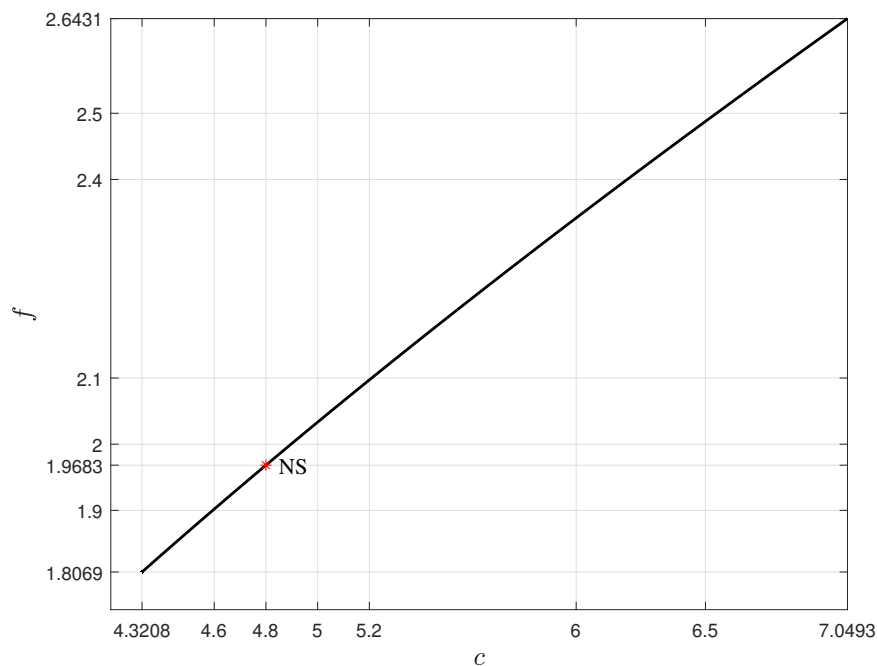
$$f = f(c) \Rightarrow f = \alpha_1 c + \alpha_2 \quad (6.33)$$

Έχουμε θέσει $\alpha_1 = 1/3$ και $\alpha_2 = d/3 = 0.36$. Στη συνέχεια δίνουμε το διάγραμμα διακλάδωσης δύο παραμέτρων με τη χρήση της μεθόδου της

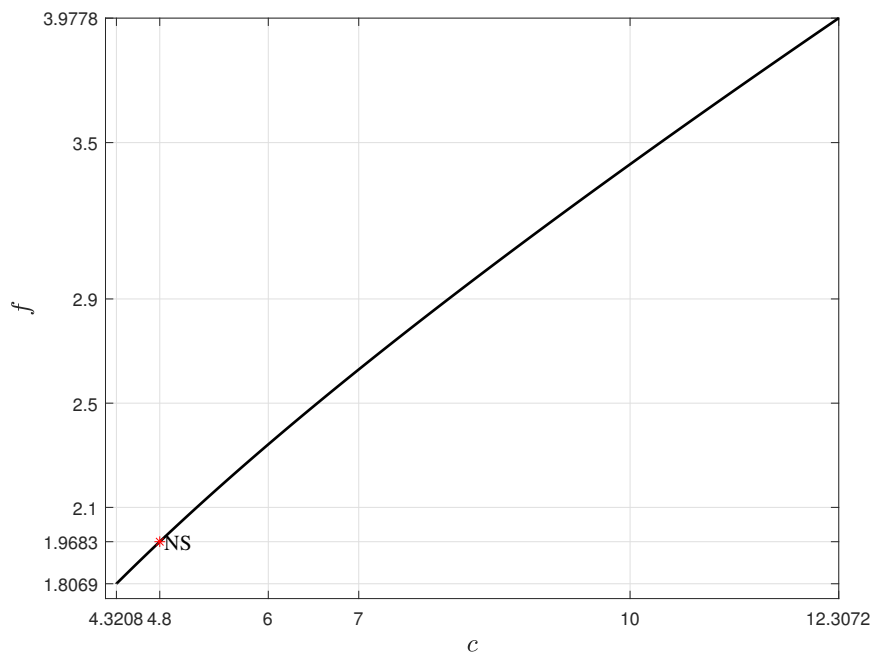
αριθμητικής συνέχισης τόσο για το Σημείο Χοιφ όσο και για το Οριακό Σημείο των Οριακών Κύκλων.



Σχήμα 6.7: Διάγραμμα διακλάδωσης δύο παραμέτρων της Διακλάδωσης Αντρόνοφ-Χοιφ κάτω από τη μεταβολή των παραμέτρων f και c . Στο διάγραμμα φαίνονται ένα Σημείο Μπογκντάνοφ - Τεϊκενς για τις τιμές των παραμέτρων $f = 0.36661$, $c = 3.31879e-07$ και των μεταβλητών $x = 0.01212$, $y = 0.63223$, $z = 0.01379$. Φαίνεται επίσης ένα Γενικευμένο Σημείο Χοιφ για $f = 2.2000022$, $c = 5.5000065$ και για τις μεταβλητές $x = 8.55600$, $y = 1.55563$, $z = 12.100002$.



Σχήμα 6.8: Το διάγραμμα διακλάδωσης δύο μεταβλητών για το Οριακό Σημείο των Οριακών Κύκλων κάτω από τη μεταβολή των παραμέτρων f, c . Η παράμετρος d είναι σταθερή στην τιμή $d = 1.1$. Εκτελέσαμε την αριθμητική συνέχεια και για τις δύο κατευθύνσεις ως προς το χρόνο με μέγιστο βήμα 0.01. Το αποτέλεσμα δείχνει επίσης και το σημείο ενός Ουδέτερου Σαγματικού Σημείου των Οριακών Κύκλων για τις τιμές $f = 1.9682988, c = 4.8000000$.



Σχήμα 6.9: Το ίδιο διάγραμμα διακλάδωσης δύο παραμέτρων όπως και στο διάγραμμα (6.8) με αριθμητική συνέχεια ως προς τις δύο κατευθύνσεις στο χρόνο με μέγιστο βήμα 0.08. Εντοπίζουμε και εδώ το ίδιο Ουδέτερο Σαγματικό Σημείο των Οριακών Κύκλων.

6.5 Ομοκλινική Έκρηξη και Μετάβαση στο Χάος

Ένα από τα βασικά χαρακτηριστικά του Μοντέλου Μετακίνησης της Πρωτεΐνης Tr4 είναι η Χαοτική Συμπεριφορά που εμφανίζει για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων.

Σε προηγούμενα κεφάλαια δώσαμε αρκετές ενδείξεις για την εμφάνιση αυτής της χαοτικής συμπεριφοράς. Αναφερθήκαμε για παράδειγμα στην αρχική αποτυχημένη προσπάθεια να δείξουμε ότι η χαοτική συμπεριφορά οφείλεται στην Απεικόνιση «Πετάλου» του Σμέιλ. Όπως προκύπτει από την ευστάθεια του συστήματος και από το σημείο ισορροπίας στο οποίο προκύπτει η ομοκλινική τροχιά, δεν πληρούνται οι προϋποθέσεις του Ομοκλινικού Θεωρήματος Σίλνικοφ. Αυτό σημαίνει ότι δεν μπορούμε να αναζητήσουμε χαοτική συμπεριφορά σε αυτό το μηχανισμό. Μία αναλυτική εκδοχή του σχετικού Θεωρήματος βρίσκεται στο Κεφάλαιο 2.3.2 των εισαγωγικών μαθηματικών εννοιών.

Όπως θα δείξουμε η χαοτική συμπεριφορά του συστήματος οφείλεται στο φαινόμενο της Ομοκλινικής Έκρηξης. Το φαινόμενο αυτό σηματοδοτείται από την Ομοκλινική Διακλάδωση που προκύπτει για την τιμή της παραμέτρου $f_{hom} \approx 1.87556$.

Το φαινόμενο της Ομοκλινικής Έκρηξης και η Μετάβαση στη Χαοτική Συμπεριφορά παρατηρήθηκε αρχικά στο Μοντέλο του Λόρενζ. Οι πρώτες αναλύσεις βρίσκονται στις ιστορικές δημοσιεύσεις των Σπάροου, Τζ.Γιόρκ, Ε.Γιόρκ [74],[42].

Αναφέρουμε ξανά ορισμένα απαραίτητα συμπεράσματα για την σωστή κατανόηση του φαινομένου τα οποία αναπτύξαμε στο Κεφάλαιο (6.1.2) σχετικά με την ανάλυση ευστάθειας του συστήματος. Όπως δείξαμε το σημείο ισορροπίας E_0 στην αρχή των αξόνων παραμένει συνεχώς σημείο ισορροπίας. Για $f < 0$ η αρχή είναι ευσταθής με τρία αρνητικά ιδιοδιανύσματα, για $f = 0$ έχουμε την εμφάνιση μίας Διακλάδωσης Τρίαινας κατά την οποία η αρχή των αξόνων μετατρέπεται σε Σαγματικό Σημείο. Για $f > 0$ η Αρχή έχει μία ασταθή πολλαπλότητα μίας διάστασης $W^u(0)$ και μία ευσταθή πολλαπλότητα δύο διαστάσεων $W^s(0)$. Η ύπαρξη των δύο επιπλέον σημείων ισορροπίας για $f > 0$ συνεισφέρουν στην τοπολογία του πεδίου όπως αυτό διαμορφώνεται από το σύνολο των πολλαπλοτήτων.

Στην παρούσα εργασία δεν θα μπορούμε στην ανάλυση των πολλαπλοτήτων και το πώς αυτές διαμορφώνουν γεωμετρικά το χώρο γύρω από τα σημεία ισορροπίας. Η ανάλυση αυτή ξεφεύγει των τοπολογικών γνώσεων του γράφοντα - είναι μία διαδικασία που χρειάζεται βαθιά γνώση στο πεδίο της τοπολογίας - καθώς και από το περιεχόμενο, την έκταση και τον απαιτο-

ύμενο χρόνο μίας διπλωματικής εργασίας σε μεταπτυχιακό επίπεδο με όχι αυτό τον προσανατολισμό. Στην ανάλυσή μας για τον εντοπισμό της χαοτικής συμπεριφοράς θα επικεντρώσουμε στο στενό εύρος τιμών της παραμέτρου f μετά το σημείο της ομοκλινικής διακλάδωσης για $f_{hom} \approx 1.87556$. Θα δείξουμε ότι αυτό το σημείο σηματοδοτεί το φαινόμενο της Ομοκλινικής Έκρηξης το οποίο με τη σειρά του διαμορφώνει μία προ-διαταραγμένη περιοχή μέσω ενός συμμετρικού ζεύγους σαγματικών περιοδικών τροχιών. Ο αριθμός αυτών των τροχιών αυξάνεται συνεχώς σε μία κοντινή περιοχή στο σημείο που σηματοδοτεί την Ομοκλινική Έκρηξη. Παρατηρήσαμε επίσης ότι οι τροχιές αυτές είναι αντίστοιχες (προσαρμοσμένες στο δικό μας μοντέλο) με αυτές που παρατηρούνται στο Μοντέλο του Λόρενζ μετά την τιμή της παραμέτρου $\rho_{hom} = 13.9265$.

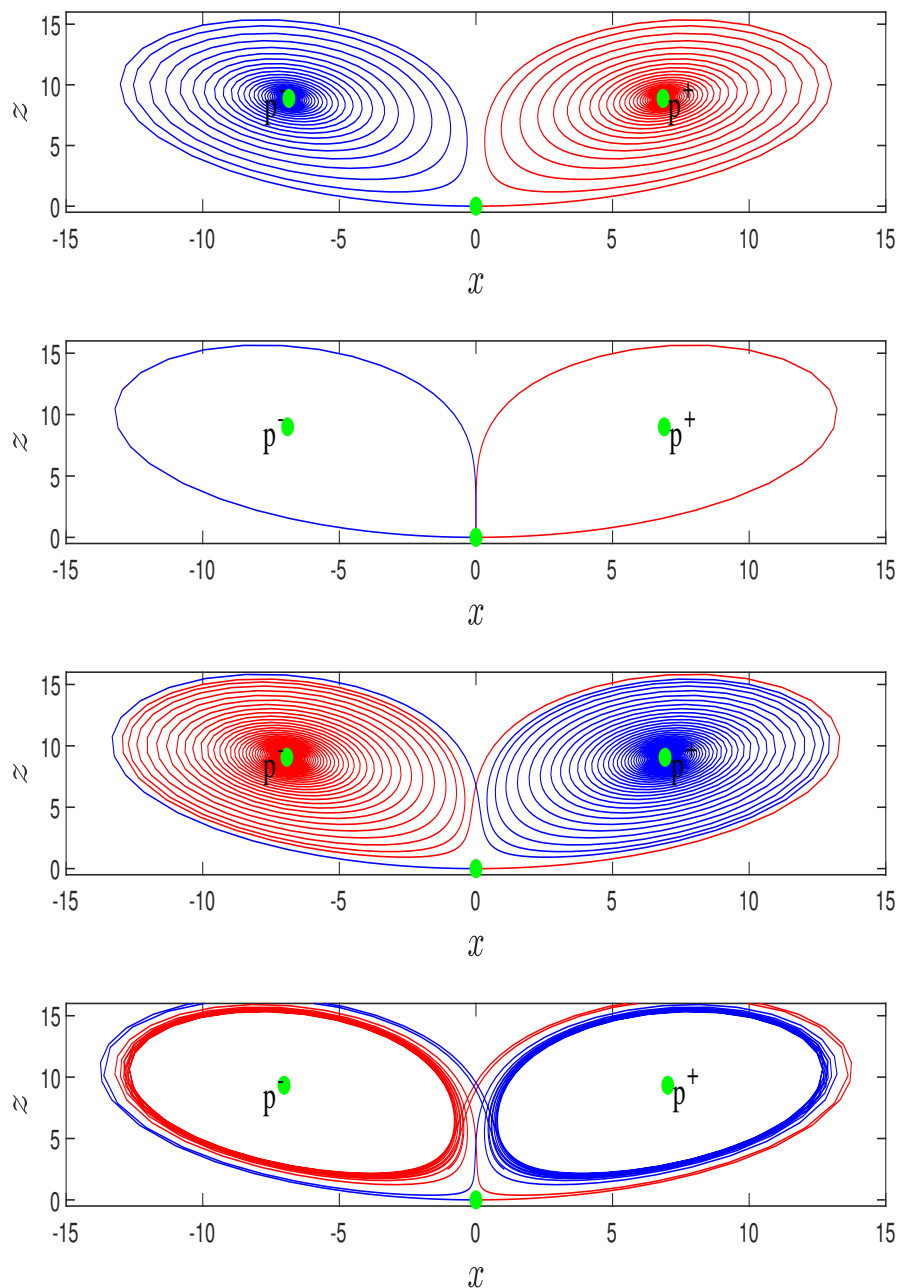
Στη συνέχεια παρουσιάζουμε τόσο αριθμητικά όσο και αναλυτικά την ύπαρξη της Ομοκλινικής Διακλάδωσης για την αρχή των αξόνων και για την τιμή της παραμέτρου $f_{hom} \approx 1.87556$. Η ύπαρξη της Ομοκλινικής Τροχιάς αποδεικνύεται αριθμητικά μέσω της μεθόδου της αριθμητικής συνέχισης με τη χρήση του MatCont και της Μεθόδου της Ομοτοπίας που εφαρμόζει. Η αναλυτική λύση δίνεται μέσω της Μεθόδου Απροσδιόριστων Συντελεστών που αρχικά εισήχθει από τον Ζου στο [38]. Από την ανάλυση, φαίνεται ότι για το σύστημά μας, το σημείο της ομοκλινικής διακλάδωσης σηματοδοτεί την έναρξη του φαινομένου της Ομοκλινικής Έκρηξης. Η Ομοκλινική Έκρηξη, αποτελεί και το γεννήτορα όλης της χαοτικής συμπεριφοράς του συστήματός μας. Η συμπεριφορά αυτή γίνεται κυρίαρχη για $f \approx 1.945$.

6.5.1 Αριθμητική Συνέχιση των Ευσταθών και Ασταθών Πολλαπλοτήτων στη Μία Διάσταση

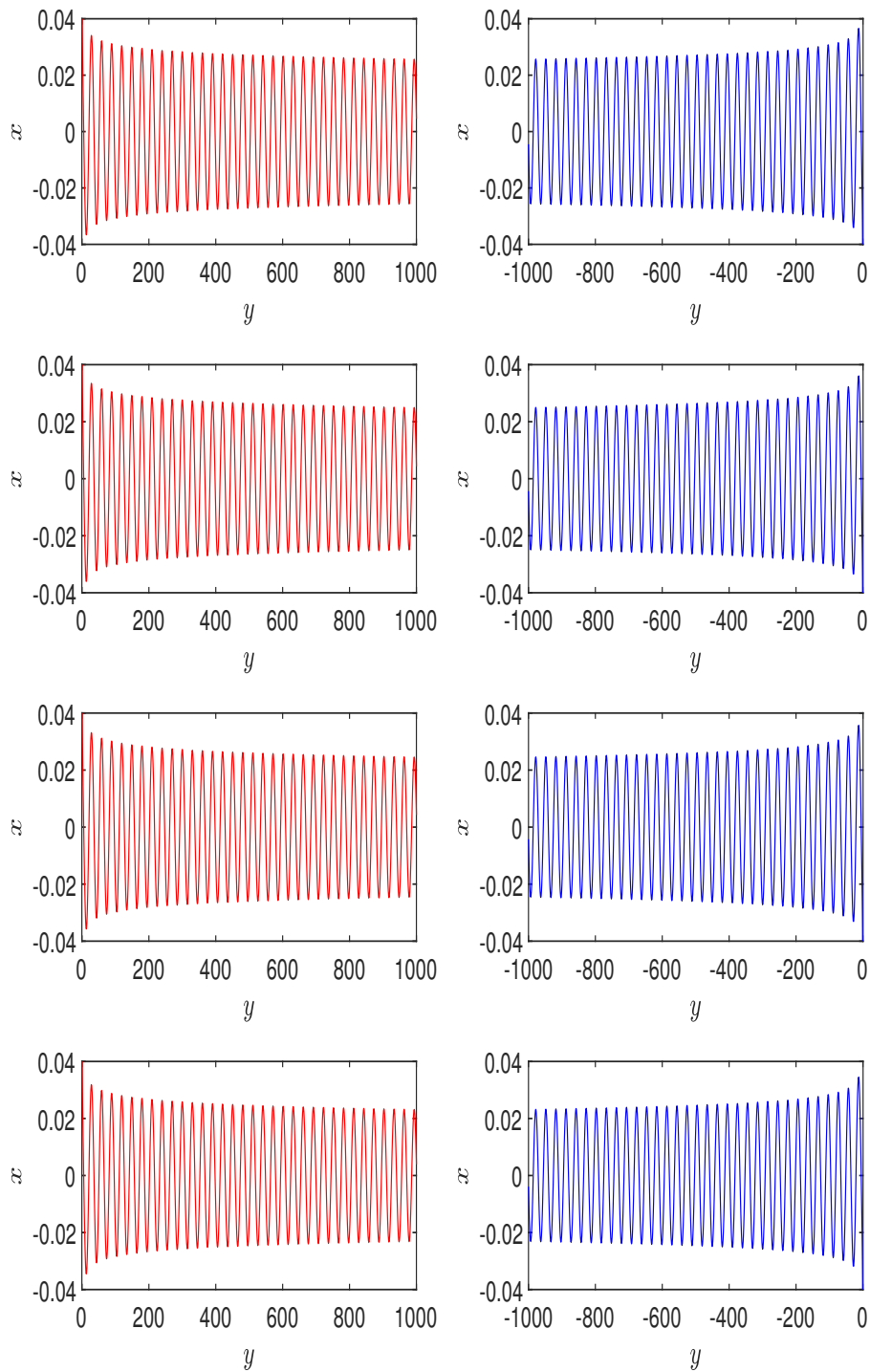
Παρουσιάζουμε εδώ τη συμπεριφορά των ευσταθών και ασταθών πολλαπλοτήτων κατά την μετάβαση από το Σημείο Ομοκλινικής Διακλάδωσης. Όπως αναφέραμε και στην παραπάνω εισαγωγή του Κεφαλαίου 6.5 δεν θα αναπαραστήσουμε στην ολότητά τους τις πολλαπλότητες. Θα σταθούμε στην αναπαράστασή τους στη μία διάσταση (μέσω των τροχιών του συστήματος) και πώς αυτές αλλάζουν καθώς περνάμε από την προηγούμενη ευσταθή κατάσταση, στο σημείο ομοκλινικής διακλάδωσης και στη συνέχεια στην προ-ταραχώδη περιοχή.

Στα επόμενα διαγράμματα φαίνεται η συμπεριφορά των ασταθών και ευσταθών πολλαπλοτήτων στη μία διάσταση. Παρατηρούμε ότι, στην περίπτωση της ασταθούς πολλαπλότητας παρατηρείται μία ανακατανομή των τροχιών που κινούνται πάνω σε αυτή. Οι τροχιές αντικατοπτρίζουν έμμεσα, την ανακατανομή των ασταθών πολλαπλοτήτων, κάτι που γίνεται ιδιαίτερα

ορατό στην ακόλουθη γραφική παράσταση. Στην περίπτωση των ευσταθών πολλαπλοτήτων επειδή χρειάστηκε να πάμε πιο μακριά από το Σημείο Ισοροπίας της Αρχής για να τις αναπαραστήσουμε φαίνεται σε μεγάλη κλίμακα να μην επηρεάζονται. Επισημαίνουμε ξανά, ότι και σε αυτή την πλευρά της ανάλυσης τα αποτελέσματα είναι αρκετά όμοια με αυτά στο Μοντέλο του Λόρενζ.



Σχήμα 6.10: Η ανακατανομή της ασταθούς πολλαπλότητας στη μία διάσταση, όπως αυτή αντικατοπτρίζεται μέσω των τροχιών, καθώς το σύστημα διέρχεται από το σημείο της ομοκλινικής διακλάδωσης. Τα σημεία ισορροπίας σημειώνονται με πράσινες τελείες. Τα τέσσερα διαδοχικά γραφήματα αντιστοιχούν σε τέσσερις διαφορετικές τιμές της παραμέτρου f . Η πρώτη για $f = 1.85$, η δεύτερη για f_{hom} , η τρίτη για $f = 1.89$ και η τέταρτη για $f = 1.945$ που αντιστοιχεί και στην ύπαρξη ισχυρής χαοτικής συμπεριφοράς.

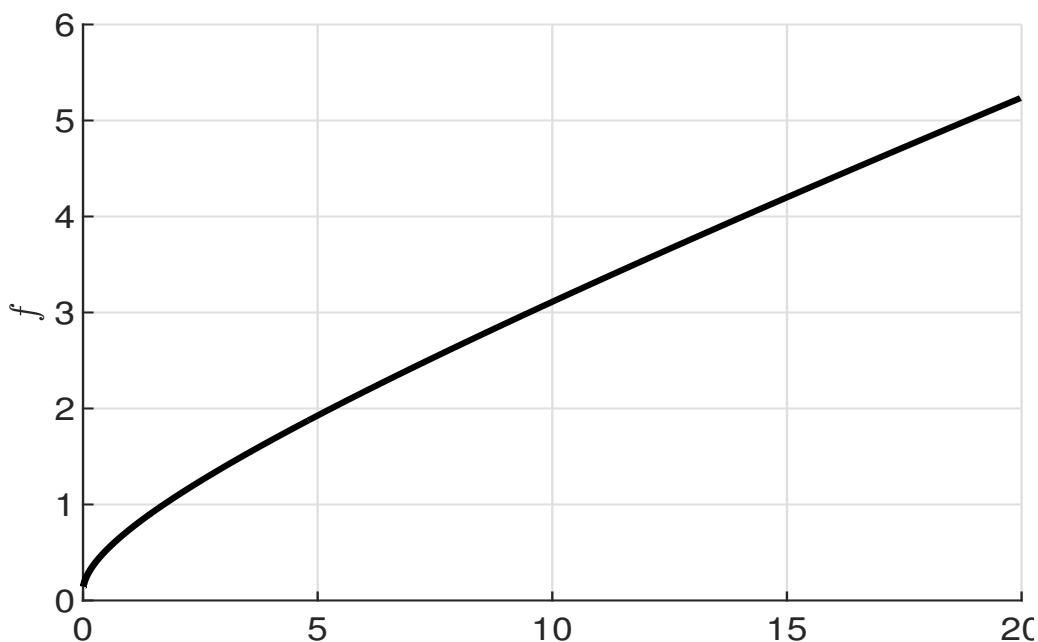


Σχήμα 6.11: Οι τροχιές πάνω στην ευσταθή πολλαπλότητα για τις αντίστοιχες τιμές της παραμέτρου f μακριά από το σημείο ομοκλινικής διακλάδωσης. Έχουμε απεικονίσει τις τροχιές τόσο για τις θετικές (κόκκινη τροχιά) όσο και για τις αρνητικές (μπλε τροχιά) τιμές των x, y .

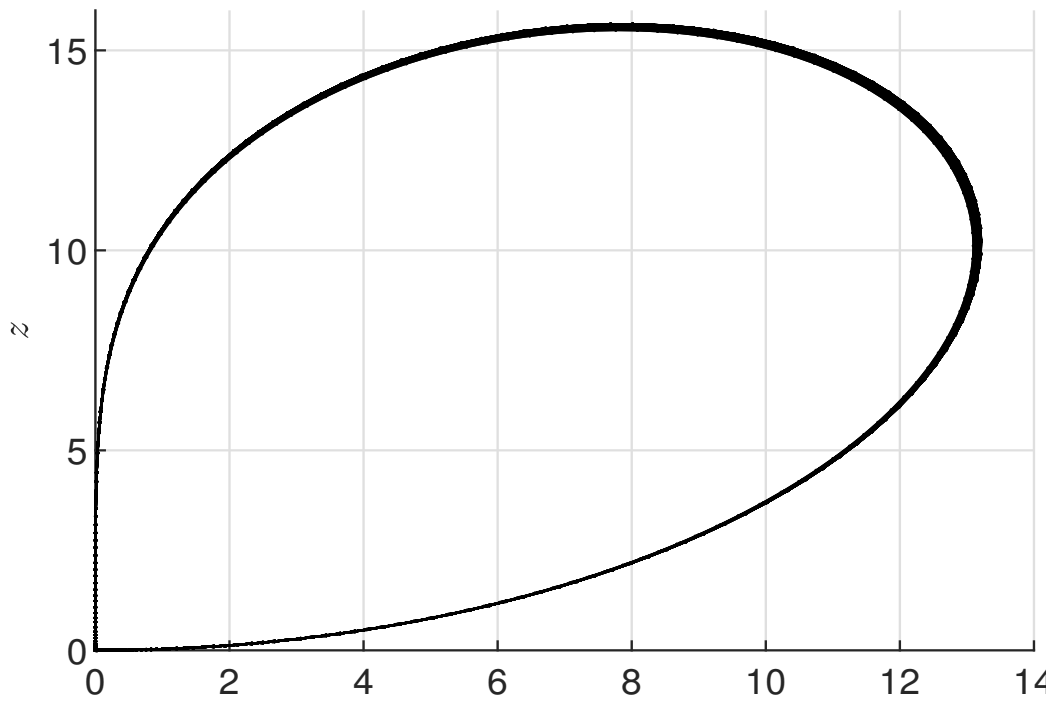
6.5.2 Αριθμητική Συνέχιση της Ομοκλιτικής Τροχιάς της Αρχής

Η αριθμητική προσέγγιση της ομοκλιτικής τροχιάς έγινε με τη χρήση της Μεθόδου Ομοτοπίας την οποία και χρησιμοποιεί το MatCont. Σύμφωνα με αυτή προσεγγίζουμε μέσω αριθμητικής ολοκλήρωσης την ασταθή πολλαπλότητα και βρίσκουμε από τη διαδικασία αυτή ένα σημείο ικανοποιητικά κοντά στον ευσταθή ιδιοχώρο που παράγουν τα ευσταθή ιδιοδιανύσματα. Η διαδικασία αυτή γίνεται ώστε στη συνέχεια να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε το σημείο αυτό ως αρχή για την εφαρμογή της αριθμητικής συνέχισης σε μία περιοχή πολύ κοντά στο Σαγματικό Σημείο Ισορροπίας (στην προκειμένη η αρχή των αξόνων). Από τον εντοπισμό του σημείου αυτού, μπορούμε πλέον να προχωρήσουμε στην αριθμητική συνέχιση της ομοκλιτικής τροχιάς η οποία και μας δίνει την οικογένεια των ομοκλιτικών τροχιών.

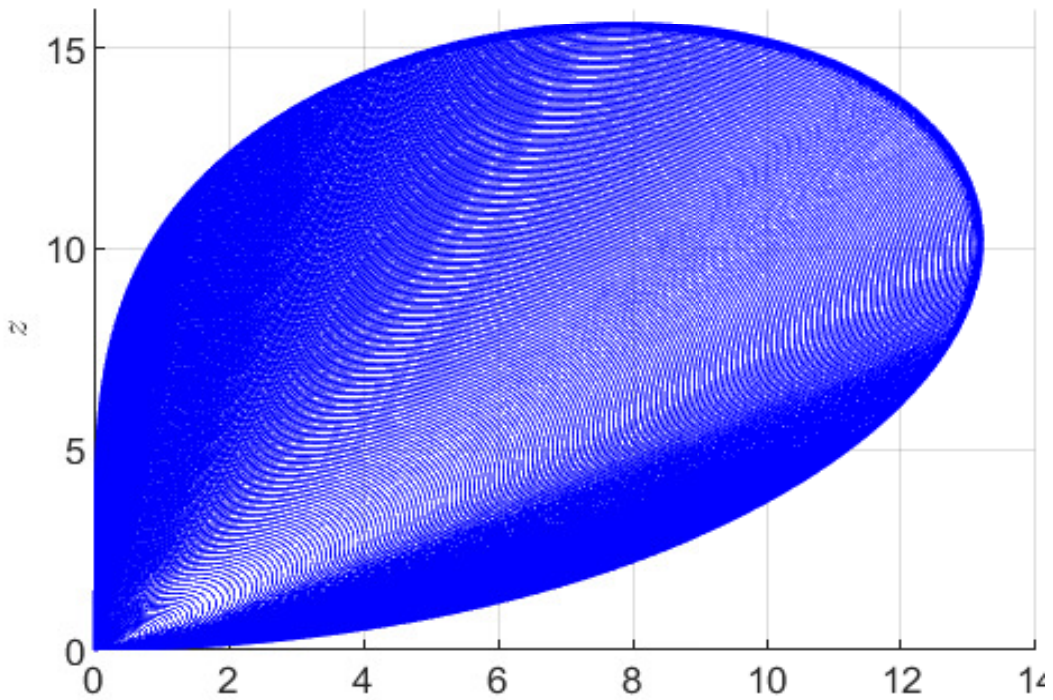
Στη γραφική παράσταση (6.10) παρουσιάσαμε τα συμμετρικά ζεύγη των ομοκλιτικών τροχιών για τις θετικές και αρνητικές τιμές της μεταβλητής x (αντίστοιχη είναι και η εικόνα για τη μεταβλητή y). Στην ενότητα αυτή παρουσιάζουμε το διάγραμμα διακλάδωσης των ομοκλιτικών τροχιών στο χώρο των παραμέτρων (c, f) όπου έχουμε θέσει την τρίτη παράμετρο σταθερή στην τιμή $d = 1.1$. Για τις ίδιες τιμές παρουσιάζουμε και την οικογένεια των ομοκλιτικών τροχιών στο χώρο των φάσεων και συγκεκριμένα στο επίπεδο (x, z) .



Σχήμα 6.12: Το διάγραμμα διακλάδωσης της ομοκλιτικής τροχιάς στο χώρο των παραμέτρων (c, f) .



Σχήμα 6.13: Η οικογένεια των ομοκλινικών τροχιών που προκύπτουν από την αριθμητική συνέχιση πίσω στο χρόνο για το χώρο των παραμέτρων (x, z) . Αντίστοιχα παίρνουμε για την εμπρόσθια στο χρόνο αριθμητική συνέχιση.

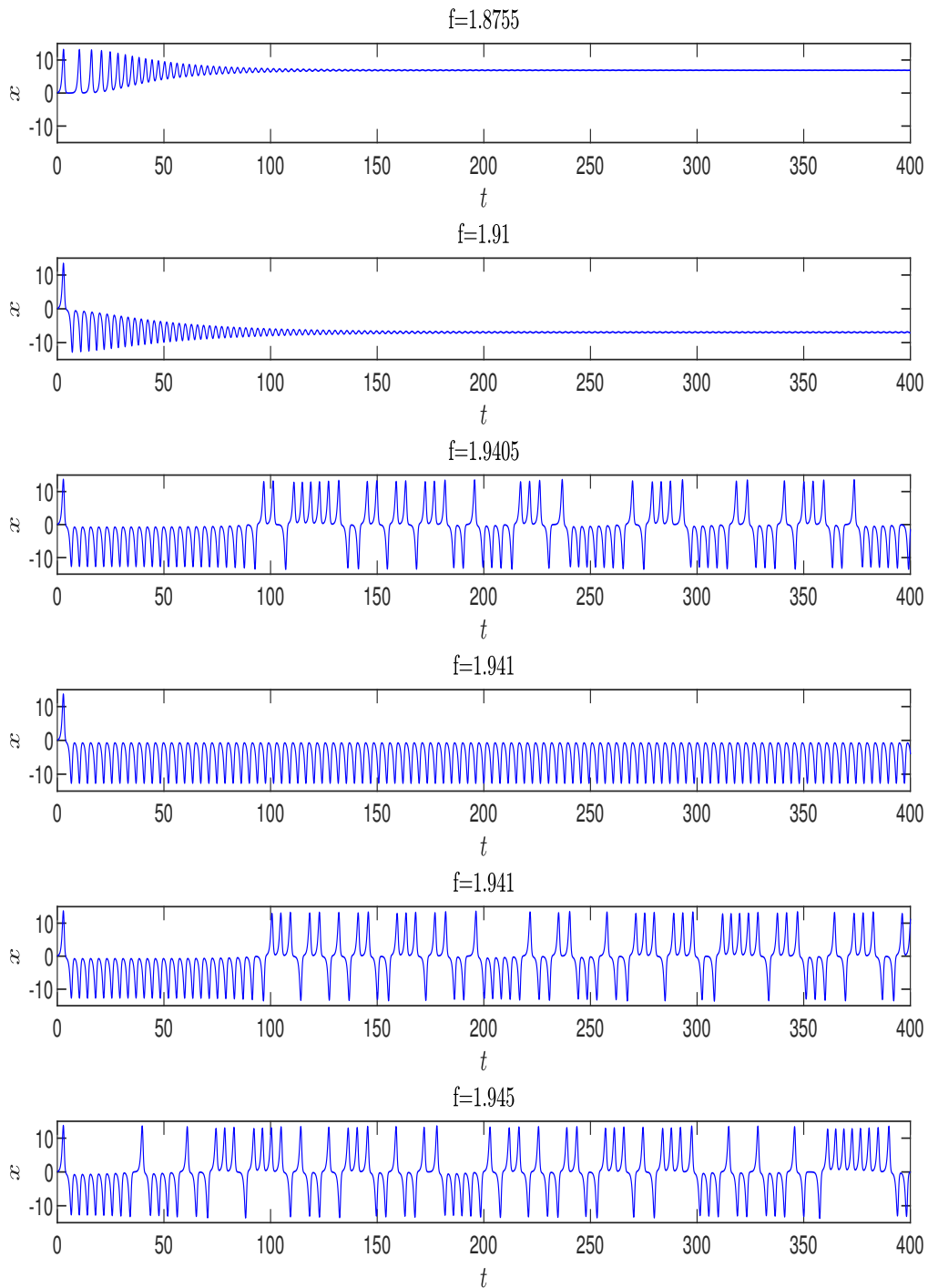


Σχήμα 6.14: Η οικογένεια των ομοκλινικών τροχιών τόσο κατά την εμπρόσθια όσο και κατά την οπίσθια αριθμητική συνέχιση.

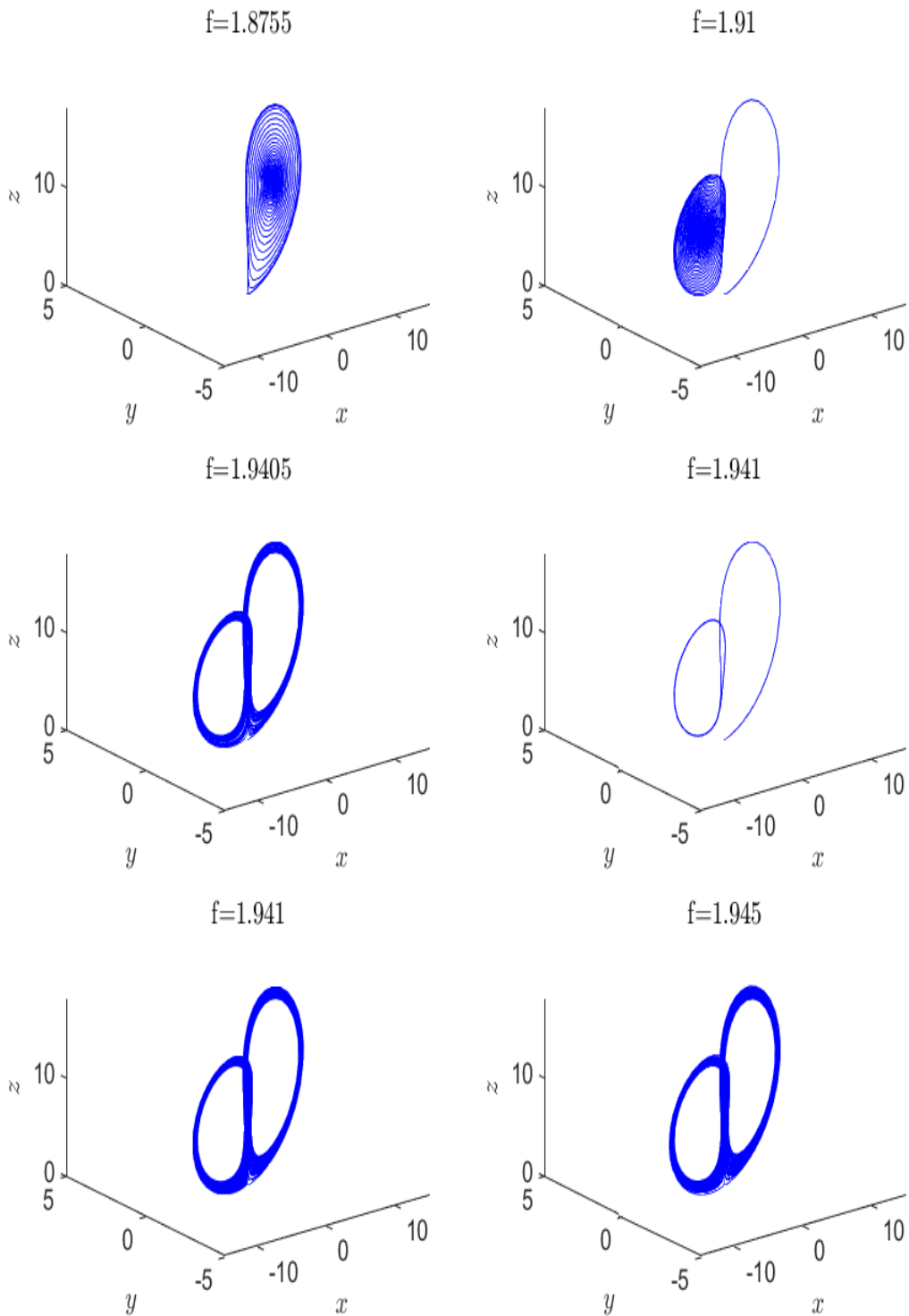
6.5.3 Ομοκλινική Έκρηξη

Όπως δείξαμε στις προηγούμενες υποενότητες για τις τιμές των παραμέτρων $c = 4.8$, $d = 1.1$, $f = 1.8755660794$ το σαγματικό σημείο της αρχής των αξόνων υφίσταται μία ομοκλινική διακλάδωση. Ως αποτέλεσμα το σύστημά μας αποτελεί ένα είδος Συστημάτων Σαγματικού Τύπου με το είδος συμμετρίας να είναι αυτό του άξονα z ($(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$). Για μία εκτενέστερη μελέτη στα συστήματα σαγματικού τύπου μπορεί ο ενδιαφερόμενος να ανατρέξει στα [22],[75]. Όπως αναφέραμε και στην εισαγωγή του Κεφαλαίου 6.5 μετά την Διακλάδωση Τρίαινας η αρχή των αξόνων μετατρέπεται σε σαγματικό σημείο με μίας διάστασης ασταθή πολλαπλότητα $W^u(0)$ και δύο διαστάσεων ευσταθή πολλαπλότητα $W^s(0)$. Η ανακατάταξη των πολλαπλοτήτων που πραγματοποιείται μετά την ομοκλινική διακλάδωση στο σημείο f_{hom} σηματοδοτεί και την μετάβαση στη χαοτική συμπεριφορά του συστήματός μας. Η διαδικασία, της μετάβασης από την ασθενή στην ισχυρή χαοτική συμπεριφορά, ονομάζεται Ομοκλινική Έκρηξη. Μία παρόμοια ανάλυση για το μοντέλο του Λόρενζ με τη σχετική βιβλιογραφία βρίσκεται στα [40],[41], ενώ για μία αυστηρή μαθηματική παρουσίαση του φαινομένου ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στα [43],[76].

Για την παράμετρο f_{hom} έχουμε την εμφάνιση ενός συμμετρικού ζεύγους ομοκλινικών τροχιών. Για το εύρος των τιμών της παραμέτρου f μεταξύ $f \approx (1.87551, 1.94500)$ αυτό το χαοτικό σάγμα (chaotic saddle), αποτελεί ένα είδος προ-διαταραγμένης (preturbulence) δυναμικής περιοχής, με τη διαταραχή να κορυφώνεται γύρω από την τιμή $f \approx 1.94500$. Σε όλο αυτό το εύρος τιμών η χαοτική συμπεριφορά παραμένει ασταθής μέχρι να κορυφωθεί με την εμφάνιση δύο ισχυρών χαοτικών ελκυστών στην τιμή $f \approx 1.94500$. Πλέον η χαοτική συμπεριφορά γίνεται κυρίαρχη. Η μετάβαση στην χαοτική συμπεριφορά για το σύστημά μας φαίνεται στα παρακάτω διαγράμματα.



Σχήμα 6.15: Η μετάβαση στην ισχυρή χαοτική συμπεριφορά του συστήματος σε ένα στενό εύρος της παραμέτρου f . Το διάγραμμα δείχνει τη συνιστώσα x της τροχιάς σαν συνάρτηση του χρόνου, όπου παρατηρούμε την ταλαντωτική της συμπεριφορά. Φαίνεται ότι υπάρχει μία μετάβαση από μία ευσταθή κατάσταση στο πρώτο διάγραμμα, σε έναν οριακό κύκλο, σε μία ασταθή χαοτική συμπεριφορά και τελικά σε μία ισχυρή χαοτική συμπεριφορά. Η τελευταία εκφράζεται μέσω της ισχυρής απεριοδικής συμπεριφοράς της $x(t)$.



Σχήμα 6.16: Τα φασικά πορτραίτα του συστήματος σε αντιστοιχία με τις γραφικές παραστάσεις (6.15).

6.5.4 Αναλυτικός Υπολογισμός της Ομοκλιτικής Τροχιάς με τη Μέθοδο Απροσδιόριστων Συντελεστών

Παρέχουμε μία αναλυτική απόδειξη της ύπαρξης της ομοκλιτικής τροχιάς στο σημείο ισορροπίας $E_0 = (0, 0, 0)$. Η Αρχή αποτελεί ένα Σαγματικό σημείο ισορροπίας και για την τιμή της παραμέτρου f_{hom} έχουμε την εμφάνιση μίας ομοκλιτικής διακλάδωσης. Η απόδειξη της ύπαρξης της ομοκλιτικής τροχιάς γίνεται με τη Μέθοδο Απροσδιόριστων Συντελεστών όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενες ενότητες και η οποία περιγράφεται αναλυτικά στα [39, 66]. Ακολουθήσαμε την ίδια διαδικασία που έχει ακολουθηθεί σε μία πληθώρα Lorenz-like συστημάτων στη βιβλιογραφία. Παρουσιάζουμε σύντομα, τη σύγκλιση της μεθόδου των εκθετικών σειρών, κάτι που αποδεικνύει και τη λογική πίσω από την χρήση της μεθόδου. Η αντίστοιχη περιγραφή περιέχεται στα [77, 78].

$$\begin{aligned} x &= \dot{y} + cy \\ \dot{x} &= \ddot{y} + c\dot{y} \\ z &= -\frac{\ddot{y}}{y} + (f - c)\frac{\dot{y}}{y} + fc \\ \dot{z} &= -\frac{\ddot{y} \cdot y - \dot{y} \dot{y}}{y^2} + (f - c)\frac{\dot{y}y - \dot{y}^2}{y^2} \end{aligned} \tag{6.34}$$

Από το παραπάνω σύστημα μπορούμε εύκολα να πάρουμε την εξίσωση (6.35),

$$y[\ddot{y} + (d + c - f)\dot{y} - (f - c)d\dot{y} - fcdy] + \dot{y}[-\ddot{y} + (f - c)\dot{y} + y^3] + cy^4 = 0 \tag{6.35}$$

Την ίδια στιγμή που στη βιβλιογραφία η αναζήτηση ομοκλιτικής τροχιάς, αναζητεί την συνάρτηση $x(t)$, η δομή του συστήματος καθώς και η συζήτηση στο Κεφαλαίο 5 μας οδηγούν σε μία δομή τέτοια, έτσι ώστε να αναζητήσουμε πρωταρχικά την συνάρτηση $y(t)$. Ως αποτέλεσμα έχουμε η αναζήτηση της ομοκλιτικής τροχιάς να ανάγεται στην αναζήτηση κατάλληλης συνάρτησης $y(t)$ η οποία να είναι διπλά ασυμπτωτική στην Αρχή των Αξόνων ως προς το χρόνο. Θέλουμε να ικανοποιείται η ακόλουθη σχέση,

$$y(t) \longrightarrow 0, \quad for \quad t \longrightarrow \pm\infty \tag{6.36}$$

Θα προσεγγίσουμε την αρνητική ημιτροχιά (της ομοκλιτικής τροχιάς) για $t < 0$. Η προσέγγιση θα γίνει μέσω της ακόλουθης εκθετικής σειράς,

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k e^{\mu_k t}, \quad t < 0, \tag{6.37}$$

Έχουμε υποθέσει ότι το $\mu > 0$ είναι μία απροσδιόριστη σταθερά και οι d_k όπου ($k = 1, 2, 3, \dots$) είναι οι απροσδιόριστοι συντελεστές, τέτοιοι ώστε $e^{\mu kt} \rightarrow 0$ καθώς $t \rightarrow -\infty$. Οι παράγωγοι σε μορφή εκθετικών της προηγούμενης σχέσης που θα αντικαταστήσουμε στην αρχική εξίσωση (6.35), δίνονται από την (6.38).

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \mu \sum_{k=1}^{\infty} k d_k e^{\mu kt} \\ \ddot{y}(t) &= \mu^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 d_k e^{\mu kt} \\ \dddot{y}(t) &= \mu^3 \sum_{k=1}^{\infty} k^3 d_k e^{\mu kt} \end{aligned} \quad (6.38)$$

Από τις εξισώσεις (6.37), (6.38) μπορούμε να εξάγουμε κάθε όρο στην εξίσωση (6.35), ως αποτέλεσμα η τελευταία μπορεί να ξαναγραφεί στην πιο σύνθετη μορφή,

$$\begin{aligned} & \mu^3 \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{j=1}^{k-1} j^3 d_j d_{k-j} e^{\mu kt} + (d + c - f) \mu^2 \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{j=1}^{k-1} j^2 d_j d_{k-j} e^{\mu kt} \\ & - (f - c) d \mu \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{j=1}^{k-1} j d_j d_{k-j} e^{\mu kt} - f c d \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{j=1}^{k-1} d_j d_{k-j} e^{\mu kt} + \\ & - \mu^3 \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{j=1}^{k-j} j^2 (k - l) d_j d_{k-j} e^{\mu kt} + (f - c) \mu^2 \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{j=1}^{k-1} j (k - j) d_j d_{k-j} e^{\mu kt} \\ & + \mu \sum_{k=4}^{\infty} \sum_{m=3}^{k-1} \sum_{n=2}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} j d_j d_{n-j} d_{m-n} d_{k-m} e^{\mu kt} + c \sum_{k=4}^{\infty} \sum_{m=3}^{k-1} \sum_{n=2}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} d_j d_{n-j} d_{m-n} d_{k-m} e^{\mu kt} \\ & = 0 \end{aligned} \quad (6.39)$$

Θα προσπαθήσουμε να απλοποιήσουμε την προηγούμενη σχέση και για το λόγο αυτό θα κάνουμε τις παρακάτω παραδοχές.

$$\begin{aligned} H_1 &:= \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{j=1}^{k-1} [2\mu^3 j^3 + (d + 2c - 2f) \mu^2 j^2 - \mu^3 j^2 k + (f - c) \mu^2 j k \\ & - (f - c) d \mu j - f c d] d_j d_{k-j} e^{\mu kt} \\ H_2 &:= \sum_{k=4}^{\infty} \sum_{m=3}^{k-1} \sum_{n=2}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} [\mu j + c] d_j d_{n-j} d_{m-n} d_{k-m} e^{\mu kt} \end{aligned} \quad (6.40)$$

Ως αποτέλεσμα η εξίσωση (6.39) μετασχηματίζεται στην ακόλουθη μορφή,

$$H_1 + H_2 = 0 \quad (6.41)$$

Η μορφή αυτή είναι απλούστερη και πιο εύκολη στο χειρισμό της. Τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε τους απροσδιόριστους συντελεστές συγκρίνοντας τους συντελεστές του εκθετικού με της ίδιας τάξης όρους. Παραθέτουμε τα αντίστοιχα αποτελέσματα για τους όρους μέχρι και τον $k = 6$.

• **Για $\kappa=1$** , δεν υπάρχει περίπτωση

• **Για $\kappa=2$** , παίρνουμε :

$$\begin{aligned} H_1 &= (2\mu^3 + (d + 2c - 2f)\mu^2 - 2\mu^3 + 2(f - c)\mu^2 - (f - c)d\mu - fcd)d_1d_1 \\ H_2 &= 0 \end{aligned} \quad (6.42)$$

Θέτουμε ξανά, $H_1 + H_2 = 0 \Rightarrow (2\mu^3 + (d + 2c - 2f)\mu^2 - 2\mu^3 + 2(f - c)\mu^2 - (f - c)d\mu - fcd)d_1^2 + 0 = 0$ με αποτέλεσμα να παίρνουμε :

$$(d\mu^2 - d(f - c)\mu - fcd)d_1^2 = 0 \quad (6.43)$$

Προκύπτει ότι $d_1 \neq 0$. Διαφορετικά θα πρέπει d_k να είναι μηδέν, κάτι που δεν το θέλουμε (όλοι οι υπόλοιποι όροι θα είναι μηδέν). Έτσι θα πρέπει $(d\mu^2 - d(f - c)\mu - fcd) = 0$. Τότε παίρνουμε,

$$\mu_{1,2} = \frac{d(f - c) \pm d(f + c)}{2d} \Rightarrow \mu = f \quad or \quad \mu = -c \quad (6.44)$$

Η μοναδική επιτρεπτή τιμή με βάση τις υποθέσεις που έχουμε κάνει είναι η $\mu = f$ καθώς θέλουμε $\mu > 0$. Με αυτό τον τρόπο έχουμε προσδιορίσει την μέχρι πρότινος απροσδιόριστη σταθερά.

• **Για $\kappa=3$** ,

$$\begin{aligned} H_1 &= (3\mu^3 + (5d + c - f)\mu^2 - 3d(f - c)\mu - 2fcd)d_1d_2 \\ H_2 &= 0 \end{aligned} \quad (6.45)$$

Ξανά θέλουμε $H_1 + H_2 = 0$. Αν αντικαταστήσουμε την τιμή $\mu = f$ που μόλις υπολογίσαμε παίρνουμε,

$$(2f^3 + 2df^2 + cf^2 + fcd)d_1d_2 = 0 \quad (6.46)$$

Με δεδομένο ότι το πρώτο μέρος της εξίσωσης δεν μπορεί να είναι μηδέν, συμπεραίνουμε ότι θα πρέπει $d_2 = 0$.

• **Για $\kappa=4$** παίρνουμε:

$$\begin{aligned} H_1(j=1) &= (-2\mu^3 + (d-2c+2f)\mu^2 - d(f-c)\mu - fcd)d_1d_3 \\ H_1(j=2) &= (4d\mu^2 - 2d(f-c)\mu - fcd)d_2^2 \\ H_1(j=3) &= (18\mu^3 + (9d+6c-6f)\mu^2 - 3d(f-c)\mu - fcd)d_3d_1 \\ H_2 &= (\mu+c)d_1^4 \end{aligned} \quad (6.47)$$

Όπου η εξίσωση $H_1+H_2=0$ με $H_1(j=2)=0$ μετασχηματίζεται στην:

$$(16\mu^3 + (10d+4c-4f)\mu^2 - 4d(f-c)\mu - 2fcd)d_3d_1 + (\mu+c)d_1^4 = 0 \quad (6.48)$$

Από όπου παίρνουμε και την τελική σχέση για τον συντελεστή d_3 ,

$$d_3 = -\frac{(\mu+c)d_1^3}{(16\mu^3 + (10d+4c-4f)\mu^2 - 4d(f-c)\mu - 2fcd)} \quad (6.49)$$

• **Για $\kappa=5$** παίρνουμε:

$$\begin{aligned} H_1(j=1) &= (2\mu^3 + (d+2c-2f)\mu^2 - 5\mu^3 + 5(f-c)\mu^2 \\ &\quad - d(f-c)\mu - fcd)d_1d_4 \\ H_1(j=2) &= (16\mu^3 + 4(d+2c-2f)\mu^2 - 20\mu^3 + 10(f-c)\mu^2 \\ &\quad - 2d(f-c)\mu - fcd)d_2d_3 \\ H_1(j=3) &= (54\mu^3 + 9(d+2c-2f)\mu^2 - 45\mu^3 + 15(f-c)\mu^2 \\ &\quad - 3d(f-c)\mu - fcd)d_3d_2 \\ H_1(j=4) &= (128\mu^3 + 16(d+2c-2f)\mu^2 - 80\mu^3 + 20(f-c)\mu^2 \\ &\quad - 4d(f-c)\mu - fcd)d_4d_1 \\ H_2 &= (5\mu+4c)d_1^3d_2 \end{aligned} \quad (6.50)$$

Από τα προηγούμενα, προκύπτει ότι οι σχέσεις με το d_2 είναι μηδέν. Αν αντικαταστήσουμε $\mu=f$, η εξίσωση που μένει από τη σχέση $H_1+H_2=0$ είναι:

$$\begin{aligned} (130\mu^3 + 17(d+2c-2f)\mu^2 - 85\mu^3 + 25(f-c)\mu^2 - 5d(f-c)\mu - 2fcd)d_1d_4 &= 0 \\ (36f^3 + 12df^2 + 9cf^2 + 3fcd)d_1d_4 &= 0 \end{aligned} \quad (6.51)$$

Είναι εύκολο να παρατηρήσουμε από την προηγούμενη εξίσωση ότι $d_1 \neq 0$ και $(36f^3 + 12df^2 + 9cf^2 + 3fcd) \neq 0$. Τελικώς θα πρέπει $d_4=0$.

• Για $\kappa=6$ παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
 H_1(j=1) &= (2\mu^3 + (d + 2c - 2f)\mu^2 - 6\mu^3 + 6(f - c)\mu^2 \\
 &\quad - d(f - c)\mu - fcd)d_1d_5 \\
 H_1(j=2) &= 0 \\
 H_1(j=3) &= (54\mu^3 + 9(d + 2c - 2f)\mu^2 - 54\mu^3 + 18(f - c)\mu^2 \\
 &\quad - 3d(f - c)\mu - fcd)d_3d_3 \\
 H_1(j=4) &= 0 \\
 H_1(j=5) &= (250\mu^3 + 25(d + 2c - 2f)\mu^2 - 150\mu^3 + 30(f - c)\mu^2 \\
 &\quad - 5d(f - c)\mu - fcd)d_5d_1 \\
 H_2 &= (6\mu + 4c)d_1^3d_3
 \end{aligned} \tag{6.52}$$

Η εξίσωση $H_1 + H_2 = 0$ μετασχηματίζεται όπως παρουσιάζεται παρακάτω:

$$\begin{aligned}
 (96\mu^3 + (26d + 16c - 16f)\mu^2 - 6d(f - c)\mu - 2fcd)d_1d_5 + (9d\mu^2 \\
 - 3d(f - c)\mu - fcd)d_3^2 + (6\mu + 4c)d_1^3d_3 = 0
 \end{aligned} \tag{6.53}$$

Τελικά θα πάρουμε:

$$d_5 = -\frac{(9d\mu^2 - 3d(f - c)\mu - fcd)d_3^2 + (6\mu + 4c)d_1^3d_3}{(96\mu^3 + (26d + 16c - 16f)\mu^2 - 6d(f - c)\mu - 2fcd)d_1} \tag{6.54}$$

Από την προηγούμενη ανάλυση είναι φανερό ότι κάθε άρτιος συντελεστής $d_{2k} = 0$ είναι μηδέν. Η σχέση αυτή αποδεικνύεται επαγωγικά και παρουσιάζεται αναλυτικά στο [39]. Παρουσιάζουμε τις σχέσεις των υπολογισμών για τους περιττούς συντελεστές. Γράφουμε την εξίσωση $H_1 + H_2 = 0$ ως $H_k^1 + H_k^2 + d_{2k+1}H_k^3 = 0$, όπου οι όροι της τελευταίας θα είναι:

$$\begin{aligned}
 H_k^1 &= \sum_{j=3}^{2k-1} (2\mu^3 j^3 + (d + 2c - 2f)\mu^2 j^2 - \mu^3 j^2(2k + 2) \\
 &\quad + (f - c)\mu^2 j(2k + 2) - d(f - c)\mu j - fcd)d_j d_{2k+2-j}
 \end{aligned} \tag{6.55}$$

$$H_k^2 = \sum_{m=3}^{2k+1} \sum_{n=2}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} (\mu j + c)d_j d_{n-j} d_{m-n} d_{2k+2-m} \tag{6.56}$$

$$\begin{aligned}
 d_{2k+1}H_k^3 &= (2\mu^3 + (d + 2c - 2f)\mu^2 - \mu^3(2k + 2) + (f - c)\mu^2(2k + 2) \\
 &\quad - d(f - c)\mu - fcd)d_1 + (2(2k + 1)^3\mu^3 \\
 &\quad + (d + 2c - 2f)\mu^2(2k + 1)^2 - \mu^3(2k + 1)^2(2k + 2) \\
 &\quad + (f - c)\mu^2(2k + 1)(2k + 2) - d(f - c)(2k + 1)\mu - fcd)d_1
 \end{aligned} \tag{6.57}$$

Οι περιττοί απροσδιόριστοι συντελεστές τελικά δίνονται από την παρακάτω σχέση:

$$d_{2k+1} = -\frac{H_k^1 + H_k^2}{H_k^3} \quad (6.58)$$

Συνοψίζουμε τα αποτελέσματά μας στις επόμενες σχέσεις, οι οποίες μας δίνουν τις συνθήκες που περιγράφουν το αρνητικό τμήμα της ομοκλινικής τροχιάς.

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k e^{\mu k t}, \quad t < 0 \quad (6.59)$$

Όπου

$$\begin{aligned} \mu &= f \\ d_{2k} &= 0 \\ d_{2k+1} &= -\frac{H_k^1 + H_k^2}{H_k^3} \end{aligned} \quad (6.60)$$

Με τον ίδιο τρόπο κατασκευάζουμε και το δεύτερο μέρος της ομοκλινικής τροχιάς για $t > 0$. Ως αποτέλεσμα για τα δύο τμήματα θα έχουμε,

$$y(t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} d_k e^{-\mu k t}, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \\ \sum_{k=1}^{\infty} d_k e^{\mu k t}, & t < 0 \end{cases} \quad (6.61)$$

Αντικαθιστώντας στην (6.34) παίρνουμε εύκολα τις αντίστοιχες σχέσεις για τα $x(t), z(t)$. Οι σχέσεις αυτές θα είναι,

$$x(t) = \begin{cases} -\mu k \sum_{k=1}^{\infty} d_k e^{-\mu k t} + c \sum_{k=1}^{\infty} d_k e^{-\mu k t}, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \\ \mu k \sum_{k=1}^{\infty} d_k e^{\mu k t} + c \sum_{k=1}^{\infty} d_k e^{\mu k t}, & t < 0 \end{cases} \quad (6.62)$$

και,

$$z(t) = \begin{cases} (-\mu^2 k^2 \sum_{k=1}^{\infty} d_k e^{-\mu k t} - (f - c) \mu k \sum_{k=1}^{\infty} d_k e^{-\mu k t}) (\sum_{k=1}^{\infty} d_k e^{-\mu k t})^{-1} + f c, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \\ (-\mu^2 k^2 \sum_{k=1}^{\infty} d_k e^{\mu k t} + (f - c) \mu k \sum_{k=1}^{\infty} d_k e^{\mu k t}) (\sum_{k=1}^{\infty} d_k e^{\mu k t})^{-1} + f c, & t < 0 \end{cases} \quad (6.63)$$

Οι εξισώσεις (6.61), (6.62) και (6.63) αποτελούν την αναλυτική εκδοχή της ομοκλινικής τροχιάς.

Σχετικά με τη Σύγκλιση της Ομοκλινικής Τροχιάς

Στην προηγούμενη ανάλυση και πιο συγκεκριμένα στις εξισώσεις (6.61), (6.62), (6.63) δίνονται οι συντεταγμένες για το κάθε τμήμα των ομοκλινικών τροχιών (θετικό και αρνητικό). Από τις εξισώσεις (6.59), (6.60) προκύπτει ότι κάθε d_k

εκφράζεται μέσω της ποσότητας d_1 . Για να συγκλίνουν οι τροχιές, θέλουμε για $t = 0$ να επιστρέφουν πίσω στο ζητούμενο σημείο ισορροπίας (στην προκειμένη περίπτωση στην αρχή των αξόνων). Επακόλουθα, θέλουμε οι $(x(t), y(t), z(t)) \rightarrow (0, 0, 0)$ για $t \rightarrow 0^+$ (αντίστοιχα και για το αρνητικό τμήμα της τροχιάς). Ο καθορισμός των d_k εξαρτάται μόνο από την τιμή του συντελεστή d_1 . Η τελευταία αυτή παράμετρος μπορεί να υπολογιστεί από την συνέχεια των εξισώσεων (6.61) που θέλουμε να πληρείται στην αρχή των αξόνων. Ως αποτέλεσμα για την αρχή των αξόνων και για το χρόνο να είναι $t = 0$ παίρνουμε:

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k = 0 \tag{6.64}$$

Όταν $c = 4.8, d = 1.1, f = 1.87556$ και $y_0 = 0$ οι πρώτοι επτά όροι έχουν ως εξής: $|d_2| = 0, |d_3| = 0.0119, |d_1^3|, |d_4| = 0, |d_5| = 0.000039156, |d_1^5|, |d_6| = 0$ και $|d_7| = 0.00000017306, |d_1^7|$. Από το αντίστοιχο πολυώνυμο παίρνουμε ότι ο πρώτος συντελεστής θα είναι $d_1 = 9.7931$ (έχουμε κρατήσει τη μικρότερη ρίζα των πολυωνύμων). Αποδεικνύεται επαγωγικά ότι κάθε όρος έχει ένα άνω φράγμα το οποίο προσεγγιστικά δίνεται από την σχέση, $|d_k| < 10^{-k+1} |d_1^k|$.

Ως εκ τούτου υπάρχει μία σταθερά L , τέτοια ώστε $|d_k| < L$. Αντίστοιχα, $\sum_{k=1}^{\infty} |d_k| e^{k\beta t} \leq L \sum_{k=1}^{\infty} e^{k\beta t}$ συγκλίνει για $(0, +\infty)$. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται και η σύγκλιση για $\sum_{k=1}^{\infty} d_k e^{k\beta t}$ για $(-\infty, 0)$. Αποφύγαμε να παρουσιάσουμε τους αναλυτικούς υπολογισμούς για τα προηγούμενα αποτελέσματα σχετικά με την σύγκλιση της σειράς της εξίσωσης (6.37) και (6.38). Κάποιος μπορεί να δει αναλυτικά στο [39].

Συνοψίζουμε τα αποτελέσματά μας στην ακόλουθη πρόταση: Για τις ακόλουθες τιμές των παραμέτρων $c = 4.8, d = 1.1, f = 1.87556, d_1 = 9.7931$ και για $d_k \leq L$ τέτοιο ώστε οι σειρές να συγκλίνουν, το σύστημα εμφανίζει μία ομοκλινική τροχιά στο σαγματικό σημείο ισορροπίας που αποτελεί η αρχή των αξόνων.

Κεφάλαιο 7

Συμπεράσματα

Το Σύστημα του Λόρενζ αποτέλεσε ορόσημο για την ανάπτυξη, εδραίωση και την είσοδο της Θεωρίας του Χάους στην επιστημονική σκηνή. Αποτελέσε ένα σημείο σταθμό για την ανάπτυξη της Θεωρίας του Χάους. Δεν είναι τυχαίες οι διατυπώσεις επιστημόνων που θεωρούν ότι η Σχετικότητα, η Κβαντική Φυσική και η Επιστήμη του Χάους αποτελούν τις τρεις πιο σημαντικές επιστημονικές θεωρίες του προηγούμενου αιώνα. Ειδικά για την τελευταία η εφαρμογή της επεκτείνεται σε όλες της σφαίρες της καθημερινής ζωής, από τον καιρό, την κλιματική αλλαγή, πληθυσμιακές αλλαγές, οικονομικά μοντέλα, προσπάθειες γίνονται και για την μοντελοποίηση πλευρών των κοινωνικών επιστημών όπως η γεωπολιτική, η ιστορία, κοινωνικές συμπεριφορές, διεπιστημονικότητα στην ακαδημία και εκατοντάδες άλλες πλευρές [79]. Είναι χαρακτηριστική, σχετικά με τα παραπάνω, μελέτη που έγινε από οργανισμούς των ΗΠΑ και δημοσιεύονται στην εφημερίδα Καθημερινή (5/5/1996) με τίτλο *Η CIA προβλέπει τους πολέμους του έτους 2000*.

Η εμφάνιση του Συστήματος του Λόρενζ έδωσε το έναυσμα για την ανάπτυξη πολλών ακόμα χαοτικών δυναμικών συστημάτων. Η μελέτη τους οδήγησε στην εμφάνιση νέων μεθόδων - αναλυτικών, αριθμητικών, προσομοιώσεων - που συμπλήρωσαν την εικόνα για τη γνώση αυτών των μοντέλων. Όπως είδαμε ανεξάρτητα από επιστημονικές αντιπαραθέσεις και διαφορετικές απόψεις - πολλές φορές απλοποιημένες - η σημασία των λεγόμενων Lorenz-like Συστημάτων είναι αδιαμφισβήτητη. Η διερεύνηση αυτή βρίσκεται σε μία αέναη εξέλιξη προσεγγίζοντας συνεχώς την αντικειμενική πραγματικότητα που υπάρχει και περιμένει να την ανακαλύψουμε.

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία είχε ως στόχο να μελετήσει αρκετές από τις παραπάνω πλευρές των αναλύσεων που έχουν παρουσιαστεί διαχρονικά στο πεδίο των Lorenz-like Συστημάτων. Συνδυάζοντας μία σειρά από μεθόδους όπως αυτές παρουσιάζονται στα Κεφάλαια 5 και 6 παρουσιάσαμε μία διεξοδική ανάλυση της συμπεριφοράς ενός βιολογικού μοντέλου η σημασία του οποίου περιγράφεται στο Κεφάλαιο 4. Η μελέτη των σημείων

ισορροπίας, της ευστάθειας, των διακλαδώσεων μίας και δύο παραμέτρων, των πολλαπλοτήτων στη μία διάσταση καθώς και η αριθμητική και αναλυτική μελέτη της ομοκλινικής τροχιάς μαζί με τις αντίστοιχες προσομοιώσεις συμπλήρωσαν την εικόνα που μέχρι τώρα υπήρχε για το συγκεκριμένο μοντέλο.

Η μελέτη μας για πρώτη φορά στο εν λόγω μοντέλο αποδεικνύει την ύπαρξη της Ομοκλινικής Έκρηξης ως τον κύριο μηχανισμό που οδηγεί το σύστημα στην χαοτική συμπεριφορά. Αποδείξαμε ότι το σύστημα περιγραφής της μετακίνησης της πρωτεΐνης *tlr4* μεταβαίνει στη χαοτική συμπεριφορά μέσω μιας προταραχώδους περιοχής. Σε αυτή τη φάση το σύστημα περνά δια μέσου μίας ασταθούς χαοτικής συμπεριφοράς στην τελική του κατάσταση, που αποτελεί μία ευσταθή ισχυρή χαοτική συμπεριφορά με την αντίστοιχη εμφάνιση ενός ισχυρού χαοτικού ελκυστή. Η μετάβαση αυτή, όπως αναφέραμε, συχνά αποκαλείται και διαρκές χάος.

Η πληρέστερη κατανόηση του μαθηματικού μοντέλου περιγραφής της βιολογικής συμπεριφοράς της πρωτεΐνης *tlr4* συμβάλει στην καλύτερη κατανόηση του φαινομένου της σήψης. Η βαθύτερη κατανόηση της σήψης και των μηχανισμών αποτροπής της, θα συμβάλει στη μείωση της θνησιμότητας και στην ικανότητα πρόληψης της εν λόγω μόλυνσης. Η αλληλοσυμπλήρωση των δύο πεδίων επιβεβαιώνει και εδώ την αναγκαία χρήση των μαθηματικών μοντέλων για την προσομοίωση της πραγματικότητας. Η αύξηση αυτής της ικανότητας καθώς και η αξιοποίησή της, θα βελτιώσει πολλές πλευρές της ζωής του ανθρώπου με το παράδειγμα εδώ να αφορά μία σημαντική απειλή για την υγεία του.

Η Διπλωματική αυτή Εργασία δεν επιδιώκει να εξαντλήσει το θέμα. Δεν θα μπορούσε άλλωστε να επιτύχει κάτι τέτοιο στα στενά χρονικά όρια μίας μεταπτυχιακής διπλωματικής εργασίας. Θεωρούμε όμως ότι πέτυχε σε ικανοποιητικό βαθμό να σκιαγραφήσει τη συμπεριφορά του συστήματος και να αποκαλύψει νέες πτυχές, κυρίως αυτές της χαοτικής συμπεριφοράς του. Αποτελεί επίσης μία εφ' όλης της ύλης παρουσίαση της μελέτης ενός Lorenz-like Συστήματος αξιοποιώντας το σύνολο σχεδόν της αντίστοιχης βιβλιογραφίας.

Κλείνουμε το κείμενο της Διπλωματικής Εργασίας με τα εύστοχα λόγια του Φυσικού και Φιλόσοφου Ε.Μπιτσάκη [13]

« Φύσις κρύπτεσθαι φιλεί. Ο σοφός της Εφέσου αναζητούσε το Λόγο πίσω από την απαιτηλή, χαώδη μορφή των φαινομένων. Η επιστήμη στις μέρες μας αναζητεί την τάξη μέσα στο χάος, τις κρυμμένες μορφές, τις λανθάνουσες σχέσεις και δυναμικότητες. Αυτό που ήταν άγνωστο γίνεται φανερό στην πορεία και το κρυμμένο δεν είναι το απροσπέλαστο 'πράγμα καθ'αυτό' του

Κάντ. Πίσω από τα φαινόμενα η επιστήμη θα ανιχνεύσει το κρυμμένο και θα το αναδείξει - αν όχι στο επίπεδο της εποπτείας, τουλάχιστον στο επίπεδο της θεωρητικής γνώσης.

Στην αφετηρία της η Φυσική αντιμετώπισε απλά φαινόμενα όπως η πτώση ή η κίνηση, τα οποία απέκοψε από το σύνολο των καθορισμών τους. Οι στατικοί, ανιστορικοί νόμοι ήταν η πρώτη συγκομιδή. Στην πορεία διατυπώθηκαν νόμοι δυναμικοί και εξελικτικοί, όπου υπεισέρχεται πλέον η παράμετρος του χρόνου. Σήμερα συληθαμβάνουμε το προσιτό μέρος του Σύμπαντος ως ολότητα που εκδιπλώνει μορφές και δομές στο χωρόχρονο, ακολουθώντας το βέλος του χρόνου. Οι επιστήμες της πολυπλοκότητας είναι νέοι κλάδοι που επιχειρούν να προχωρήσουν πέρα από τη γραμμική αιτιότητα. Πρόκειται για την ανάδυση μιας νέας επιστημονικής Ηπείρου».

Παράρτημα Α΄

Αριθμητικό Πακέτο MatCont

Το μαθηματικό υπόβαθρο του Πακέτου MatCont (στο εξής MatCont) αποτελεί η Θεωρία Διακλαδώσεων. Η Θεωρία των Διακλαδώσεων όπως αναφέραμε και στην Ενότητα 2.2 αντιμετωπίζει πολύ αποτελεσματικά τα συνεχή δυναμικά συστήματα (στην προκειμένη περίπτωση) και μας παρέχει σημαντικές πληροφορίες για την ποιοτική μεταβολή των δυναμικών συστημάτων κάτω από την αλλαγή των παραμέτρων. Το βασικό στοιχείο του MatCont καθώς και άλλων τέτοιων πακέτων είναι η μέθοδος της Αριθμητικής Συνέχισης κάτω από την αλλαγή μίας ή και περισσότερων παραμέτρων του συστήματος.

Η ιστορία των Πακέτων Αριθμητικής Συνέχισης ξεκινάει τη δεκαετία του 1980 με τα πιο γνωστά εξ αυτών να είναι το LINBLF, το LOCA και το AUTO. Σχετικά με το τελευταίο μπορούμε να πούμε ότι αποτελεί ένα πολύ ισχυρό εργαλείο αριθμητικής συνέχισης μέχρι και τις μέρες μας, ενώ τις τελευταίες δεκαετίες έχουν εμφανιστεί και ορισμένα πιο φιλικά περιβάλλοντα για τη χρήση του όπως το XPPAUT. Άλλα λογισμικά ανάλυσης διακλαδώσεων αποτελούν τα DsTool, COCO και CONTENT.

Αυτή την περίοδο το MatCont παρουσιάζει τη μεγαλύτερη λειτουργικότητα και απήχηση σε σχέση με όλα τα προηγούμενα. Ουσιαστικά αποτελεί ένα πακέτο αριθμητικής συνέχισης της Matlab. Η χρήση του μπορεί να γίνει τόσο μέσα από τη γραμμή εντολών CL_MatCont όσο και μέσα από το αντίστοιχο περιβάλλον GUI MatCont. Με την πρώτη να αποτελεί πιο δύσκολη επιλογή αλλά να παρέχει μεγαλύτερη ευελιξία ενώ η δεύτερη να αποτελεί το μοναδικό χειρισμό για τις Μεθόδους Ομοτοπίας που χρησιμοποιούνται στην εύρεση ομοκλινικών και ετεροκλινικών τροχιών μεταξύ σαγματικών σημείων ή σαγματικών κόμβων.

Το MatCont αναπτύχθηκε από τον Β.Γκοβάερτς από το Πανεπιστήμιο της Γάνδης στο Βέλγιο και από τον Γιούρι Κουζνέτσοφ του Πανεπιστημίου της Ουτρέχτης στην Ολλανδία. Πιο πρόσφατα από τον Χ.Μάιγιερ του Πανεπιστημίου του Τβέντε επίσης στην Ολλανδία, ο οποίος έχει εργαστεί για

πολλά χρόνια πάνω στην βελτίωση του πακέτου.

Παρακάτω συνοψίζουμε ορισμένα από τα κύρια χαρακτηριστικά του MatCont ως λογισμικού αριθμητικής μελέτης συνεχών δυναμικών συστημάτων με τη χρήση του Matlab.

- Αριθμητική Συνέχιση 12 διαφορετικών τύπων καμπύλων, ορισμένες εκ των οποίων καμπύλες διακλάδωσης, περιοδικές τροχιές, ομοκλινικές και ετεροκλινικές τροχιές.
- Αριθμητική Ολοκλήρωση με διάφορες μεθόδους καθώς και Απεικονίσεις Πουανκαρέ.
- Ανίχνευση και Εντοπισμό των σημείων διακλάδωσης για 23 διαφορετικά είδη διακλαδώσεων ισορροπίας ή περιοδικών τροχιών.
- Υπολογισμό των συντελεστών κανονικών μορφών για 21 τύπους διακλαδώσεων που συνδέονται με μερικές παραγώγους μέχρι 6ης τάξης.
- Υπολογισμό της φάσης απόκρισης για περιοδικές τροχιές.
- Μεθόδους Ομοτοπίας για τον υπολογισμό ομοκλινικών τροχιών ως προς σαγματικό σημείο ή σαγματικό κόμβο καθώς και τον υπολογισμό ετεροκλινικών τροχιών.

Πολλές από τις παραπάνω δυνατότητες δεν παρέχονται από άλλα πακέτα και για το λόγο αυτό έχουν κάνει τόσο δημοφιλή τη χρήση του MatCont. Η χρήση του αφορά ένα μεγάλο πλήθος επιστημονικών πεδίων όπου εφαρμόζονται συνεχή ή και διακριτά συστήματα εξισώσεων καθώς και στην συνήθη εκδοχή μερικών διαφορικών εξισώσεων. Παραθέτουμε επιπλέον ορισμένες από τις βασικές βιβλιογραφικές πηγές στις οποίες μπορεί να ανατρέξει κάποιος για περισσότερες πληροφορίες καθώς και τη σχετική βιβλιογραφία σε αυτά [80, 81, 82, 83, 84].

Πιο συγκεκριμένα παρουσιάζουμε τα βασικά αρχεία του MatCont που χρησιμοποιήσαμε τόσο για την εκμάθηση του πακέτου όσο και για την εφαρμογή του στα διάφορα στάδια της μελέτης. Τα παραθέτουμε και ως αναφορές στη βιβλιογραφία [85, 86, 87, 88, 89] και ως υπερσυνδέσμους για την πιο εύκολη χρήση τους. Τα εγχειρίδια που χρησιμοποιήσαμε είναι: ως εισαγωγή στο πακέτο το Tutorial i, για την ανάλυση διακλάδωσης από σημείο ισορροπίας το Tutorial ii, για τις διακλαδώσεις δύο παραμέτρων το Tutorial iv ενώ τέλος για την αριθμητική συνέχιση ομοκλινικών τροχιών το Tutorial v.

Βιβλιογραφία

- [1] James Gleick. *Chaos: Making a new science*. Open Road Media, 2011.
- [2] John Briggs and F David Peat. *Turbulent mirror: An illustrated guide to chaos theory and the science of wholeness*. HarperCollins Publishers, 1989.
- [3] Ilya Prigogine and Isabelle Stengers. *The end of certainty*. Simon and Schuster, 1997.
- [4] Heinz-Otto Peitgen and Peter H Richter. *The beauty of fractals: images of complex dynamical systems*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [5] Christos H Skiadas and Charilaos Skiadas. *Handbook of applications of chaos theory*. CRC Press, 2017.
- [6] Vasilis Liosis. *Dialectic Materialism and Mathematics*. UOA, 2006.
- [7] Pierre-Simon Laplace. *A philosophical essay on probabilities*. Courier Corporation, 2012.
- [8] Henri Poincaré and Francis Maitland. *Science and method*. Courier Corporation, 2003.
- [9] Anastasios Bountis. *Luck or Certainty. The Dialectics of Chaos Theory*. Outopia, 1999.
- [10] Thanos Xristidis. *Chaos and Probabilistic Determinism*. Vantias, 1997.
- [11] Ian Stewart. *Does God play dice?: The new mathematics of chaos*. Penguin UK, 1997.
- [12] Ilya Prigogine and Isabelle Stengers. *Order out of chaos: Man's new dialogue with nature*. Verso Books, 2018.
- [13] Eftichios Bitsakis. *Chaos, Fractals and Theory of Catastroph, a Deterministic Implementation*. Outopia, 1999.

- [14] Steven H Strogatz. *Nonlinear dynamics and chaos with student solutions manual: With applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. CRC press, 2018.
- [15] Stephen Wiggins. *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*, volume 2. Springer Science & Business Media, 2003.
- [16] Jack K Hale and Hüseyin Koçak. *Dynamics and bifurcations*, volume 3. Springer Science & Business Media, 2012.
- [17] Yuri A Kuznetsov. *Elements of applied bifurcation theory*, volume 112. Springer Science & Business Media, 2013.
- [18] N.Stavrakakis. *Notes on Dynamical Systems*. National Technical University, Athens, 2006.
- [19] D.Sourlas. *Dynamical Systems and its Application with the use of Maple*. University of Patras, Department of Physics, 2015.
- [20] Karl Johan Aaström and Richard M Murray. *Feedback systems*. Princeton university press, 2010.
- [21] John Guckenheimer and Yuri A Kuznetsov. Bogdanov-takens bifurcation. Available at http://www.scholarpedia.org/article/Bogdanov-Takens_bifurcation (2007/01/09).
- [22] David M Drysdale. Homoclinic bifurcations. 1994.
- [23] Baoying Chen and Tianshou Zhou. Šil'nikov homoclinic orbits in two classes of 3d autonomous nonlinear systems. *International Journal of Modern Physics B*, 25(20):2697–2712, 2011.
- [24] Annick Dhooge, Willy Govaerts, and Yu A Kuznetsov. Matcont: a matlab package for numerical bifurcation analysis of odes. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 29(2):141–164, 2003.
- [25] Annick Dhooge, Willy Govaerts, Yu A Kuznetsov, Hil Gaétan Ellart Meijer, and Bart Sautois. New features of the software matcont for bifurcation analysis of dynamical systems. *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, 14(2):147–175, 2008.
- [26] Edward N Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of atmospheric sciences*, 20(2):130–141, 1963.

- [27] Edward N Lorenz and Edward N Lorenz. *The nature and theory of the general circulation of the atmosphere*, volume 218. World Meteorological Organization Geneva, 1967.
- [28] Hongwei Li and Miao Wang. Hopf bifurcation analysis in a lorenz-type system. *Nonlinear Dynamics*, 71(1):235–240, 2013.
- [29] Clark Robinson. Nonsymmetric lorenz attractors from a homoclinic bifurcation. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 32(1):119–141, 2000.
- [30] Luis A Sanchez. Convergence to equilibria in the lorenz system via monotone methods. *Journal of Differential Equations*, 217(2):341–362, 2005.
- [31] Peter Swinnerton-Dyer. Bounds for trajectories of the lorenz equations: an illustration of how to choose liapunov functions. *Physics Letters A*, 281(2-3):161–167, 2001.
- [32] David Ruelle and Floris Takens. On the nature of turbulence. *Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg-RCP25*, 12:1–44, 1971.
- [33] Vladimir Nikolaevich Belykh. Bifurcation of separatrices of a saddle of the lorenz system. *Differentsial'nye Uravneniya*, 20(10):1666–1674, 1984.
- [34] GA Leonov. Estimation of loop-bifurcation parameters for a saddle-point separatrix of a lorenz system. *Differ. Equ*, 24(6):634–638, 1988.
- [35] GA Leonov. General existence conditions of homoclinic trajectories in dissipative systems. lorenz, shimizu-morioka, lu and chen systems. *Physics Letters A*, 376(45):3045–3050, 2012.
- [36] Jibin Li and Jianming Zhang. New treatment on bifurcations of periodic solutions and homoclinic orbits at high r in the lorenz equations. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 53(4):1059–1071, 1993.
- [37] AF Vakakis and MFA Azeez. Analytic approximation of the homoclinic orbits of the lorenz system at $\sigma=10$, $b=8/3$ and $\rho=13.926\dots$ *Nonlinear Dynamics*, 15(3):245–257, 1998.
- [38] Tianshou Zhou, Yun Tang, and Guanrong Chen. Chen's attractor exists. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 14(09):3167–3177, 2004.

- [39] Juan Song, Yanmin Niu, and Xiong Li. The existence of homoclinic orbits in the lorenz system via the undetermined coefficient method. *Applied Mathematics and Computation*, 355:497–515, 2019.
- [40] Hinke M Osinga, Bernd Krauskopf, and Eusebius J Doedel. Visualizing the transition to chaos in the lorenz system. 2006.
- [41] Eusebius J Doedel, Bernd Krauskopf, and Hinke M Osinga. Global invariant manifolds in the transition to preturbulence in the lorenz system. *Indagationes Mathematicae*, 22(3-4):222–240, 2011.
- [42] James A Yorke and Ellen D Yorke. Metastable chaos: The transition to sustained chaotic behavior in the lorenz model. *Journal of Statistical Physics*, 21(3):263–277, 1979.
- [43] James L Kaplan and James A Yorke. Preturbulence: a regime observed in a fluid flow model of lorenz. *Communications in Mathematical Physics*, 67(2):93–108, 1979.
- [44] Razvan C Stan, Francisco G Soriano, and Maristela M de Camargo. A mathematical model relates intracellular tlr4 oscillations to sepsis progression. *BMC research notes*, 11(1):1–5, 2018.
- [45] Shizuo Akira, Satoshi Uematsu, and Osamu Takeuchi. Pathogen recognition and innate immunity. *Cell*, 124(4):783–801, 2006.
- [46] Himanshu Kumar, Taro Kawai, and Shizuo Akira. Pathogen recognition by the innate immune system. *International reviews of immunology*, 30(1):16–34, 2011.
- [47] Charles A Janeway. Approaching the asymptote? evolution and revolution in immunology. In *Cold Spring Harbor symposia on quantitative biology*, volume 54, pages 1–13. Cold Spring Harbor Laboratory Press, 1989.
- [48] Sky W Brubaker, Kevin S Bonham, Ivan Zanoni, and Jonathan C Kagan. Innate immune pattern recognition: a cell biological perspective. *Annual review of immunology*, 33:257–290, 2015.
- [49] Ruslan Medzhitov, Paula Preston-Hurlburt, and Charles A Janeway. A human homologue of the drosophila toll protein signals activation of adaptive immunity. *Nature*, 388(6640):394–397, 1997.
- [50] Kiyoshi Takeda and Shizuo Akira. Microbial recognition by toll-like receptors. *Journal of dermatological science*, 34(2):73–82, 2004.

- [51] Ruslan Medzhitov and Charles A Janeway Jr. An ancient system of host defense. *Current opinion in immunology*, 10(1):12–15, 1998.
- [52] Ruslan Medzhitov and Charles A Janeway. Self-defense: the fruit fly style. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 95(2):429–430, 1998.
- [53] Elizabeth B Kopp and Ruslan Medzhitov. The toll-receptor family and control of innate immunity. *Current opinion in immunology*, 11(1):13–18, 1999.
- [54] Charles A Janeway Jr and Ruslan Medzhitov. Innate immune recognition. *Annual review of immunology*, 20(1):197–216, 2002.
- [55] Harald Husebye, Øyvind Halaas, Harald Stenmark, Gro Tunheim, Øystein Sandanger, Bjarne Bogen, Andreas Brech, Eicke Latz, and Terje Espevik. Endocytic pathways regulate toll-like receptor 4 signaling and link innate and adaptive immunity. *The EMBO journal*, 25(4):683–692, 2006.
- [56] Akanksha Chaturvedi and Susan K Pierce. How location governs toll-like receptor signaling. *Traffic*, 10(6):621–628, 2009.
- [57] ANDERS Waage, PETTER Brandtzaeg, ALFRED Halstensen, P Kierulf, and TERJE Espevik. The complex pattern of cytokines in serum from patients with meningococcal septic shock. association between interleukin 6, interleukin 1, and fatal outcome. *The Journal of experimental medicine*, 169(1):333–338, 1989.
- [58] Beom Seok Park, Dong Hyun Song, Ho Min Kim, Byong-Seok Choi, Hayyoung Lee, and Jie-Oh Lee. The structural basis of lipopolysaccharide recognition by the tlr4-md-2 complex. *Nature*, 458(7242):1191–1195, 2009.
- [59] Yoshinori Nagai, Sachiko Akashi, Masakazu Nagafuku, Masato Ogata, Yoichiro Iwakura, Shizuo Akira, Toshio Kitamura, Atsushi Kosugi, Masao Kimoto, and Kensuke Miyake. Essential role of md-2 in lps responsiveness and tlr4 distribution. *Nature immunology*, 3(7):667–672, 2002.
- [60] Theresa L Gioannini, Athmane Teghanemt, DeSheng Zhang, Nathan P Coussens, Wendie Dockstader, S Ramaswamy, and Jerrold P Weiss. Isolation of an endotoxin-md-2 complex that produces toll-like receptor 4-dependent cell activation at picomolar

- concentrations. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 101(12):4186–4191, 2004.
- [61] Hironori Tsujimoto, Satoshi Ono, Philip A Efron, Philip O Scumpia, Lyle L Moldawer, and Hidetaka Mochizuki. Role of toll-like receptors in the development of sepsis. *Shock*, 29(3):315–321, 2008.
- [62] Donald E Fry. Sepsis syndrome. *The American Surgeon*, 66(2):126, 2000.
- [63] Arthur P Wheeler and Gordon R Bernard. Treating patients with severe sepsis. *New England Journal of Medicine*, 340(3):207–214, 1999.
- [64] Steven M Opal and Christian E Huber. Bench-to-bedside review: Toll-like receptors and their role in septic shock. *Critical care*, 6(2):1–12, 2002.
- [65] David L Williams, Tuanzhu Ha, Chuanfu Li, John H Kalbfleisch, John Schweitzer, William Vogt, and I William Browder. Modulation of tissue toll-like receptor 2 and 4 during the early phases of polymicrobial sepsis correlates with mortality. *Critical care medicine*, 31(6):1808–1818, 2003.
- [66] Guanrong Chen and Tetsushi Ueta. Yet another chaotic attractor. *International Journal of Bifurcation and chaos*, 9(07):1465–1466, 1999.
- [67] Jinhua Lü and Guanrong Chen. A new chaotic attractor coined. *International Journal of Bifurcation and chaos*, 12(03):659–661, 2002.
- [68] Wuneng Zhou, Yuhua Xu, Hongqian Lu, and Lin Pan. On dynamics analysis of a new chaotic attractor. *Physics Letters A*, 372(36):5773–5777, 2008.
- [69] Stephen Wiggins. *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*, volume 2. Springer Science & Business Media, 2003.
- [70] Yuming Chen and Qigui Yang. The nonequivalence and dimension formula for attractors of lorenz-type systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 23(12):1350200, 2013.
- [71] Gennady A Leonov and Nikolay V Kuznetsov. On differences and similarities in the analysis of lorenz, chen, and lu systems. *Applied Mathematics and Computation*, 256:334–343, 2015.

- [72] Antonio Algaba, Fernando Fernández-Sánchez, Manuel Merino, and Alejandro J Rodríguez-Luis. Chen's attractor exists if lorenz repulsor exists: The chen system is a special case of the lorenz system. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 23(3):033108, 2013.
- [73] Antonio Algaba, Fernando Fernández-Sánchez, Manuel Merino, and Alejandro J Rodríguez-Luis. The lü system is a particular case of the lorenz system. *Physics Letters A*, 377(39):2771–2776, 2013.
- [74] C Sparrow. The lorenz equations. *Edited by Arun V. Holden*, page 111, 1982.
- [75] C Sparrow and Paul Glendinning. Local and global behavior near homoclinic orbits. *Journal of Statistical Physics*, 35(5):645–696, 1984.
- [76] James A Yorke and Ellen D Yorke. Metastable chaos: The transition to sustained chaotic behavior in the lorenz model. *Journal of Statistical Physics*, 21(3):263–277, 1979.
- [77] MM El-Dessoky, MT Yassen, E Saleh, and ES Aly. Existence of heteroclinic and homoclinic orbits in two different chaotic dynamical systems. *Applied Mathematics and Computation*, 218(24):11859–11870, 2012.
- [78] Qiong He and Hai-Yun Xiong. Shilnikov chaos and hopf bifurcation in three-dimensional differential system. *Optik*, 127(19):7648–7655, 2016.
- [79] Peter Turchin. *Historical dynamics: Why states rise and fall*. Princeton University Press, 2018.
- [80] Annick Dhooge, Willy Govaerts, Yu A Kuznetsov, Hil Gaétan Ellart Meijer, and Bart Sautois. New features of the software matcont for bifurcation analysis of dynamical systems. *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, 14(2):147–175, 2008.
- [81] A Dhooge, W Govaerts, Yu A Kuznetsov, W Mestrom, AM Riet, and B Sautois. Matcont and cl matcont: Continuation toolboxes in matlab. *Universiteit Gent, Belgium and Utrecht University, The Netherlands*, 2006.
- [82] Niels Neiryneck. *Advances in numerical bifurcation software: MatCont*. PhD thesis, Ghent University, 2019.

- [83] Annick Dhooge, Willy Govaerts, and Yu A Kuznetsov. Matcont: a matlab package for numerical bifurcation analysis of odes. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 29(2):141–164, 2003.
- [84] W Govaerts, Yu A Kuznetsov, R Khoshsiar Ghaziani, and HGE Meijer. Cl matcontm: A toolbox for continuation and bifurcation of cycles of maps. *Universiteit Gent, Belgium, and Utrecht University, The Netherlands*, 2008.
- [85] Yu A Kuznetsov. tutorial i: Using matcont for numerical integration of odes, 2011.
- [86] Yu A Kuznetsov. tutorial ii: One-parameter bifurcation analysis of equilibria with matcont. 2011.
- [87] Yu A Kuznetsov and N Neiryneck. tutorial iii: One-parameter bifurcation analysis of limit cycles with matcont. 2011.
- [88] Yu A Kuznetsov. tutorial iv: Two-parameter bifurcation analysis of equilibria and limit cycles with matcont. 2011.
- [89] Yu A Kuznetsov. tutorial v: Continuation of homoclinic orbits with matcont. 2010.

Φωτογραφία Εξωφύλλου: Ο χαοτικός ελκυστής του μοντέλου περιγραφής της μετακίνησης της πρωτεΐνης tlr4 στο εσωτερικό του κυττάρου.