



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο  
Αθήνα, Ιούνιος 2021

Σχετικιστική Δυναμική Φορτισμένων Σωματιδίων  
σε Τοροειδείς Διατάξεις Ελεγχόμενης  
Θερμοπυρηνικής Σύντηξης  
*Δυναμική των runaway electrons*

Μιχάλης Μάριος Σκυλλάς  
Επιβλέπων Καθηγητής: Κομίνης Ιωάννης

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών  
Κατεύθυνση: Φυσικού Εφαρμογών

Τριμελής Επιτροπή:

Κομίνης Ιωάννης, Επίκουρος Καθηγητής, ΣΕΜΦΕ  
Κόκκορης Μιχαήλ, Καθηγητής, ΣΕΜΦΕ  
Αλεξόπουλος Θεόδωρος, Καθηγητής, ΣΕΜΦΕ

## Ευχαριστίες

Στο τέλος των προπτυχιακών μου σπουδών το οποίο επέρχεται με την ολοκλήρωση της διπλωματικής μου εργασίας θέλω να απευθύνω τις πιο θερμές ευχαριστίες μου στον επιβλέποντα καθηγητή μου κο. Κομίνη Ιωάννη για τη συνεργασία μας, καθώς και τους συνεργάτες του, κους. Αναστασίου Γεώργιο και Αντώνενα Ιωάννη, για την πολύτιμη βοήθεια που μου παρείχαν κατά τη διάρκεια της εκπόνησης της εργασίας αυτής. Είμαι ευγνώμων για την ευκαιρία που μου δόθηκε να εργαστώ σε ένα τόσο ενδιαφέρον θέμα, με μεγάλη ελευθερία πρωτοβουλιών παρέχοντάς μου συνολικά μία εμπειρία η οποία με ωρίμασε ακαδημαϊκά σε όλα τα μέτωπα και που θα με συνοδεύει στα επόμενα χρόνια. Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω από καρδιάς την οικογένειά μου για όλη τη στήριξη που μου προσέφεραν, υλική και ψυχολογική, κατά το πέρασμα των 5 τελευταίων χρόνων.

Μιχάλης Μάριος Σκυλλάς  
Αθήνα, Ιούνιος 2021

Μιχαήλ Μάριος Σκυλλάς

---

© (2021) Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο. All rights Reserved. Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς το συγγραφέα. Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σ' αυτό το έγγραφο εκφράζουν το συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευτεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

## Περίληψη

Τα τελευταία 30 χρόνια πολλά πειράματα σύντηξης έχουν αναδείξει την ανάγκη μελέτης της κινηματικής και δυναμικής των runaway electrons, λόγω της καταστροφικής τους συμπεριφοράς και της δυσκολίας τους να ελεγχθούν. Με εφελθτήριο το γεγονός αυτό, η εργασία αυτή πραγματεύεται την αναλυτική και ποιοτική μελέτη της δυναμικής του συστήματος ενός σχετικιστικού φορτισμένου σωματιδίου σε αξονοσυμμετρικό μαγνητικό πεδίο ισορροπίας στην προσέγγιση του Large Aspect Ratio σε τοροειδή γεωμετρία. Εναρκτήριο υπόθεση η οποία γίνεται είναι το ότι η κίνηση του σωματιδίου ταυτίζεται με αυτήν του γυρόκεντρου (Guiding Center), το οποίο αποτελεί την ομώνυμη προσέγγιση (Guiding Center Approximation). Αμέσως μετά γίνεται η μετάβαση στην κανονική Χαμιλτονιανή περιγραφή. Στη συνέχεια δίνεται έμφαση στη σχέση μεταξύ σχετικιστικής και μη σχετικιστικής Χαμιλτονιανής, η οποία αποδεικνύεται πάρα πολύ χρήσιμη. Ακολουθεί ο αναλυτικός υπολογισμός του τροχιακού φάσματος συχνοτήτων μέσω κανονικών μετασχηματισμών σε μεταβλητές δράσεων και γωνιών, οι οποίοι είναι δυνατοί λόγω της ολοκληρωσιμότητας της Χαμιλτονιανής. Τα αποτελέσματα αυτά επαληθεύονται μέσω της προαναφερθείσας σχέσης των Χαμιλτονιανών των 2 μοντέλων λόγω της τοπολογικής ισοδυναμίας που αυτή αναδεικνύει. Στο τέλος γίνεται διερεύνηση του σχετικιστικού μοντέλου σε σχέση με τις σταθερές της κίνησης, προς απόκτηση μίας καθαρής εικόνας των σχετικιστικών τροχιών, στην προβολή στο πολοειδές επίπεδο (Configuration Space). Μετά τη διερεύνηση αυτή, γίνεται μία ειδικότερη μελέτη που αφορά αποκλειστικά τις τροχιές των runaway electrons των οποίων οι διαφορές στις τροχιές μέσω του σχετικιστικού μοντέλου δύνανται να αποδειχθούν υψηλής σημασίας. Στο φάσμα ενεργειών των σχετικιστικών σωματιδίων αυτών, η αποτυχία του κλασικού μοντέλου είναι ότι προβλέπει μικρότερες και στενότερες τροχιές από το σχετικιστικό, συνεπώς τέτοια σωματίδια που εθεωρούντο ακίνδυνα σε ένα πείραμα σύντηξης, να είναι επικίνδυνα καθώς μπορεί οι τροχιές τους να διαπερνούν τοιχώματα του αντιδραστήρα το οποίο εξυπακούεται πως είναι φαινόμενο προς αποφυγή για τα πειράματα.

**Λέξεις Κλειδιά:** Πυρηνική σύντηξη, Runaway electrons, Αξονοσυμμετρικό μαγνητικό πεδίο, Large Aspect Ratio, Σχετικιστική Hamiltonian, Αναγωγή κινήσεων, Configuration Space, Συχνότητα κίνησης, Τροχιακό φάσμα

## Abstract

For the last 30 years many nuclear fusion experiments, have shown the necessity, for a systematic study of the kinematics and dynamics of the runaway electrons due to their destructive behaviour and mitigation difficulty. With this fact as a starting point, this thesis discusses the analytical and qualitative study of the dynamics of the system of a relativistic charged particle in an axisymmetric magnetic field equilibrium under the large aspect ratio approximation in toroidal geometry. The starting hypothesis made is that the particle motion is identical to that of the guiding center which is the approximation that bears the same name (Guiding Center Approximation). Immediately after, we formulate the canonical Hamiltonian description of the Guiding Center and the relation between the relativistic and non-relativistic Hamiltonians is established and its profound importance is emphasised for the later sections of this thesis. We then proceed to the analytical calculation of the orbital spectrum frequency by means of canonical transformations to Action - Angle variables, which are theoretically possible due to the integrability of the relativistic Hamiltonian. These results are validated by the aforementioned relation between the two Hamiltonians, which is a consequence of their topological equivalence. Towards the end of the thesis, an investigation of the relativistic model takes place, through the use of the motion invariants in order to obtain a clear view of the relativistic orbits on the projection on the poloidal plane (Configuration Space). After this general investigation of the configuration space, a more specific study takes place in regards to runaway electrons, whose orbital differences in the context of special relativity can be of great significance. The failure of the classical model, in the context of the runways' energy spectrum, is the prediction of tighter and smaller orbits. These could potentially prove to be hazardous for a fusion experiment since, orbits which were seen as harmless, through the relativistic corrections, ultimately come in contact with the material of the plasma vessel which is naturally to be avoided in any experiment.

**Keywords:** Nuclear fusion, Runaway electrons, Axisymmetric magnetic field, Large Aspect Ratio, Relativistic Hamiltonian, Motion Reduction, Configuration Space, Motion Frequency, Relativistic Orbital Spectrum

# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Εισαγωγή</b>	<b>1</b>
1.1	Πυρηνική Σύντηξη . . . . .	1
1.1.1	Η Αντίδραση D - D . . . . .	1
1.1.2	Η Αντίδραση D - T . . . . .	2
1.2	Περιγραφή πλάσματος . . . . .	4
1.3	Μαγνητική Συγκράτηση Πλάσματος . . . . .	5
1.4	Διατάξεις Μαγνητικής Συγκράτησης Πλάσματος . . . . .	7
1.4.1	Levitated Dipole (LDX) . . . . .	7
1.4.2	Stellarator . . . . .	7
1.4.3	Tokamak . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Runaway Electrons</b>	<b>10</b>
2.1	Ορισμός . . . . .	10
2.2	Μηχανισμοί Μετατροπής Ηλεκτρονίων σε Runaways . . . . .	11
2.2.1	Πηγή Dreicer . . . . .	11
2.2.2	Φαινόμενο Compton και αποδιέγερση Τριτίου . . . . .	12
2.2.3	Θερμή Ουρά . . . . .	13
2.3	Ιδιότητες των Runaway Electrons . . . . .	14
2.4	Επίδραση των runaways στα πειράματα σύντηξης . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Τοπολογία Μαγνητικού Πεδίου - Αξονοσυμμετρική Ισορροπία</b>	<b>21</b>
3.1	Καμπυλόγραμμα Συστήματα Συντεταγμένων . . . . .	21
3.2	Αναπαράσταση μαγνητικού πεδίου σε τοροειδή τοπολογία . . . . .	25
3.3	Μαγνητοϋδροδυναμική Ισορροπία και Γενική Αναπαραστάση του Μαγνητικού Πεδίου Ισορροπίας . . . . .	28
3.4	Αξονοσυμμετρικό Μαγνητικό Πεδίο Ισορροπίας . . . . .	30
3.5	Αξονοσυμμετρικό Μαγνητικό Πεδίο στην Προσέγγιση Large Aspect Ratio (LAR) . . . . .	36
<b>4</b>	<b>Λαγκρανζιανή και Χαμιλτονιανή περιγραφή της σχετικιστικής κίνησης του Γυρόκεντρου (Guiding Center)</b>	<b>41</b>
4.1	Υπολογισμός της Lagrangian σχετικιστικού Guiding Center . . . . .	41
4.2	Μετάβαση στην Κανονική Χαμιλτονιανή Περιγραφή . . . . .	46

<b>5</b>	<b>Αναλυτικός Υπολογισμός Μεταβλητών Δράσεων-Γωνιών και Τροχιακού Φάσματος Συχνοτήτων</b>	<b>50</b>
5.1	Κανονικοί Μετασχηματισμοί προς μεταβλητές Drift Orbit Deviation . . . . .	50
5.2	Μετάβαση σε Δράσεις & Γωνίες . . . . .	52
5.3	Full & Zero Drift Width Hamiltonians . . . . .	53
5.4	Υπολογισμός Δράσεων & Γωνιών στο Zero Drift Width . . . . .	54
5.5	Εξισώσεις Κίνησης & Αναγωγή . . . . .	61
5.5.1	Σχέση Σχετικιστικής και Μη Σχετικιστικής Χαμιλτονιανής . . . . .	61
5.5.2	Εξισώσεις Κίνησης . . . . .	61
5.5.3	Σύνоро Κλειστών/Ανοιχτών Τροχιών . . . . .	63
5.5.4	Συχνότητες . . . . .	64
<b>6</b>	<b>Ανάλυση Τροχιών Runaway Electrons</b>	<b>66</b>
6.1	Αναλυτική Εξαγωγή των Διαγραμμάτων από τη Χαμιλτονιανή . . . . .	66
6.1.1	Δεξιό Τοίχωμα (Right Wall) . . . . .	67
6.1.2	Αριστερό Τοίχωμα (Left Wall) . . . . .	68
6.1.3	Μαγνητικός Άξονας (Magnetic Axis) . . . . .	69
6.1.4	Σύνоро Κλειστών/Ανοιχτών Τροχιών . . . . .	69
6.2	Κατασκευή και Ερμηνεία των Διαγραμμάτων . . . . .	69
6.3	Μελέτη και Ανάλυση των Διαγραμμάτων . . . . .	73
6.3.1	Σταθερό $\mu$ . . . . .	74
6.3.2	Σταθερό $P_z$ . . . . .	75
6.3.3	Σταθερός λόγος $\mu/P_z$ . . . . .	77
6.3.4	Σταθερό $\alpha$ . . . . .	79
<b>7</b>	<b>Σύνοψη - Συμπεράσματα - Επεκτάσεις</b>	<b>81</b>
7.1	Σύνοψη - Συμπεράσματα . . . . .	81
7.2	Επεκτάσεις . . . . .	82
<b>A'</b>	<b>Μετασχηματισμοί από S.I. σε Φυσικές Μονάδες (Natural Units)</b>	<b>83</b>
A'.1	Μετασχηματισμός Βασικών Μεγεθών . . . . .	83
A'.2	Μετασχηματισμός της Σχετικιστικής Χαμιλτονιανής . . . . .	85
	<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>86</b>

## Σχήματα

1.1	Μέση ενεργός διατομή συναρτήσει της θερμοκρασίας για τις αντιδράσεις $D - D$ και $D - T$ . Σχήμα δανεισμένο από [1] . . . . .	2
1.2	Τα πεδία σε μία διάταξη tokamak κύριο (τοροειδές) και επαγόμενο (πολοειδές), μαζί με το τελικό ελικοειδές πεδίο που είναι η υπέρθεση των 2 μαγνητικών πεδίων. Δανεισμένο από [2]. . . . .	6
1.3	Γραφικό σχήμα της διάταξης του Wendelstein 7-X δανεισμένο από [3] στο οποίο απεικονίζονται όλα τα μέρη της διάταξης και το πλάσμα. . . . .	7
1.4	Μία τυπική διάταξη Tokamak με τους μετασχηματιστές τα πηνία τοροειδούς πεδίου και την εγκάρσια διατομή. Σχήμα δανεισμένο από [1]. . . . .	8
1.5	Ένας αντιδραστήρας tokamak με όλα τα μέρη που τον απαρτίζουν μέχρι και το κομμάτι παραγωγής ηλεκτρισμού και διανομής στο ηλεκτρικό δίκτυο. Σχήμα δανεισμένο από [4]. . . . .	9
2.1	Δύναμη τριβής εξαρτώμενη από την ορμή του ηλεκτρονίου μέσα στο πλάσμα σε σύγκριση με το ηλεκτρικό πεδίο $E$ . Σχήμα δανεισμένο από [5] . . . . .	10
2.2	Συνεισφορά των runaways στην αριθμητική πυκνότητα, πυκνότητα ενέργειας και πυκνότητα ρεύματος. Οι τιμές του διαγράμματος αντιστοιχούν σε $T_k = 2$ , $ E_{  }  = 0.5 \text{ V/m}$ , $r = 1 \text{ m}$ και $I = 1 \text{ MA}$ . Δανεισμένο από [1]. . . . .	15
2.3	Κανονικοποιημένο φάσμα ακτίνων $\gamma$ όπως ανιχνεύθηκαν στο πείραμα RFX-mod με και χωρίς rotational μαγνητικές διαταραχές (ρυθμός (2,1)). Δανεισμένο από [7]. . . . .	16
2.4	Απλοποιημένο μοντέλο προσομοίωσης αποτελούμενο από ένα στρώμα 10 cm άνθρακα και άλλο ένα 50 cm μολυβδαίνιου. Δανεισμένο από [10]. . . . .	17
2.5	Εναπόθεση ενέργειας στα στρώματα για ενέργεια 300 MeV και γωνία πρόσπτωσης $1^\circ$ . Δανεισμένο από [10]. . . . .	18
2.6	Εναπόθεση ενέργειας στα στρώματα για ενέργεια 300 MeV και γωνία πρόσπτωσης $5^\circ$ . Δανεισμένο από [10]. . . . .	18
2.7	Συγκεντρωτικό διάγραμμα με την εναπόθεση ενέργειας για τις διαφορετικές ενέργειες κατά την πρόσπτωση με παράμετρο τη γωνία πρόσπτωσης. Αριστερά για τον άνθρακα, δεξιά για το μολυβδαίνιο. Δανεισμένο από [10]. . . . .	19
2.8	Εναποτιθέμενη ενέργεια στα συστήματα divertor για το σύμπλεγμα τοροειδών ψυκτικών σωλήνων. Δανεισμένο από [10]. . . . .	19
2.9	Εναποτιθέμενη ενέργεια στα συστήματα divertor για το σύμπλεγμα πολοειδών ψυκτικών σωλήνων. Δανεισμένο από [10]. . . . .	19

5.1	Διαγράμματα συχνοτήτων συναρτήσει της ενέργειας για διάφορες τιμές των παραμέτρων $\mu$ και $\psi_0$ . Το πρώτο ζευγάρι είναι συγκεντρωτικό για bounce και transit ενώ το δεύτερο αφορά μόνο bounce. . . . .	59
5.2	Διαγράμματα συχνοτήτων συναρτήσει της ενέργειας για διάφορες τιμές των παραμέτρων $\mu$ και $\psi_0$ . Τα διαγράμματα αυτά αφορούν αποκλειστικά transit τροχιές. . . . .	60
6.1	Διαγράμματα $\mu, P_\zeta$ των τύπων των τροχιών των runaways για διάφορες ενέργειες. Διακρίνονται, το σύνορο μεταξύ κλειστών και ανοιχτών τροχιών, η κίτρινη περιοχή που ορίζεται ανάμεσα στις παραβολές του δεξιού και αριστερού τοιχώματος και αντιστοιχεί σε ηλεκτρόνια που προσκρούουν στα τοιχώματα καθώς και η καμπύλη του μαγνητικού άξονα. . . . .	70
6.2	Διάγραμμα τύπων τροχιών των runaways για ενέργεια 350 MeV. . . . .	71
6.3	Διαγράμματα των τύπων των τροχιών των runaways για $E = 50$ MeV (6.3i, 6.3ii), $\mu = 10^{-5}$ και 100 MeV (6.3iii, 6.3iv), $\mu = 5 \cdot 10^{-5}$ . Τα πράσινα σημεία στα διαγράμματα $\mu - P_\zeta$ αντιπροσωπεύουν τροχιές με ίδιο $\mu$ . Οι εν λόγω τροχιές απεικονίζονται στα διαγράμματα δεξιά με το τοίχωμα να βρίσκεται και να αντιπροσωπεύεται από τον κύκλο κόκκινου χρώματος. . . . .	74
6.4	Διαγράμματα των τύπων των τροχιών των runaways για $E = 50$ MeV (6.4i, 6.4ii), $P_\zeta = -0.0478$ και $E = 100$ MeV (6.4iii, 6.4iv), $P_\zeta = -0.0478$ . Τα πράσινα σημεία στα διαγράμματα $\mu - P_\zeta$ αντιπροσωπεύουν τροχιές με ίδιο $P_\zeta$ . Οι εν λόγω τροχιές απεικονίζονται στα διαγράμματα δεξιά με το τοίχωμα να βρίσκεται στο $r = a = 2 m$ και να αντιπροσωπεύεται από τον κύκλο κόκκινου χρώματος. . . . .	76
6.5	Διαγράμματα των τύπων των τροχιών των runaways για $E = 50$ MeV (6.5i, 6.5ii), $\frac{\mu}{P_\zeta} = 0.0003$ και $E = 100$ MeV (6.5iii, 6.5iv), $\frac{\mu}{P_\zeta} = 0.001$ . Τα πράσινα σημεία στα διαγράμματα $\mu - P_\zeta$ αντιπροσωπεύουν τροχιές με ίδιο $\frac{\mu}{P_\zeta}$ . Οι εν λόγω τροχιές απεικονίζονται στα διαγράμματα δεξιά με το τοίχωμα να βρίσκεται στο $r = a = 2 m$ και να αντιπροσωπεύεται από τον κύκλο κόκκινου χρώματος. . . . .	78
6.6	Διαγράμματα των τύπων των τροχιών των runaways για $E = 50$ MeV (6.6i, 6.6ii), $\alpha = \frac{\mu}{P_\zeta^2} = 0.01$ και $E = 100$ MeV (6.6iii, 6.6iv), $\frac{\mu}{P_\zeta^2} = 0.05$ . Τα πράσινα σημεία στα διαγράμματα $\mu - P_\zeta$ αντιπροσωπεύουν τροχιές με ίδιο $\alpha = \frac{\mu}{P_\zeta^2}$ . Οι εν λόγω τροχιές απεικονίζονται στα διαγράμματα δεξιά με το όριο του τοιχώματος να βρίσκεται στο $r = a = 2 m$ και να αντιπροσωπεύεται από τον κύκλο κόκκινου χρώματος. . . . .	79



# 1 Εισαγωγή

## 1.1 Πυρηνική Σύντηξη

Η θερμοπυρηνική σύντηξη αποτελεί είδος πυρηνικής αλληλεπίδρασης όπως είναι και η πυρηνική σχάση, η οποία τείνει να είναι πιο γνωστή. Η ενέργεια που παράγεται από τη σύντηξη μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας σε εργοστάσια με τεράστιο βασικό φορτίο. Οι διαδικασίες της σύντηξης αφορούν συστήματα στο άλλο άκρο του φάσματος των ατομικών μαζών απ' ό,τι στη σχάση. Στη δεύτερη κυρίως γίνεται λόγος για τη διάσπαση βαρέων πυρήνων όπως αυτόν του  $^{235}\text{U}$ . Η σύντηξη αφορά την ένωση ελαφρών πυρήνων, κυρίως ισοτόπων του υδρογόνου, δηλαδή, το πρώτιο  $^1_1\text{H}$ , το δευτέριο  $^2_1\text{H}$  ( $D$ ) και το τρίτιο  $^3_1\text{H}$  ( $T$ ). Η σύντηξη υδρογόνου μάλιστα είναι η κύρια διαδικασία διαμέσου της οποίας παράγει ενέργεια ο ήλιος.

Τα κύρια προτερήματα της σύντηξης είναι τρία: αποθέματα καυσίμου, περιβαλλοντικές επιπτώσεις και ασφάλεια. Ως προς τα αποθέματα των καυσίμων για τις 2 αντιδράσεις ενδιαφέροντος οι οποίες συμβαίνουν αρκετά συχνά για παραγωγή ηλεκτρισμού, τα συστατικά που απαιτούνται για αυτές είναι αφενός καθαρό δευτέριο και μίγμα δευτερίου και τριτίου σε ίση αναλογία. Το δευτέριο συναντάται στο νερό των ωκεανών σε αναλογία 1 ατόμου δευτερίου για κάθε 6700 άτομα πρωτίου και η εξαγωγή του μάλιστα είναι χαμηλού κόστους. Αν όλο το δευτέριο ήταν να διατεθεί σε αντιδραστήρες σύντηξης, με έναν κανονικό κύκλο ατμού θα παραχθεί αρκετή ενέργεια ώστε να τροφοδοτήσει όλη τη Γη για 2 δισεκατομμύρια χρόνια δεδομένου του τωρινού ρυθμού κατανάλωσής της [1].

Οι δύο δημοφιλέστερες αντιδράσεις σύντηξης για την παραγωγή ηλεκτρισμού είναι οι λεγόμενες  $D - T$  και  $D - D$ , όπως ονομάζονται από τα αντιδρώντα στοιχεία. Υπάρχουν συγκεκριμένα χαρακτηριστικά της κάθε μίας τα οποία δύνανται να ελκύουν την επιστημονική κοινότητα. Αναλυτικά οι αντιδράσεις είναι οι κάτωθι.

### 1.1.1 Η Αντίδραση $D - D$

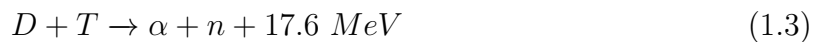
Αυτή είναι η πιο πολυπόθητη αντίδραση καθώς υπάρχει απεριόριστο και φθηνό καύσιμο στον ωκεανό και επιπλέον αποδίδει όλη την ενέργεια σε φορτισμένα σωματίδια, πράγμα που καθιστά εφικτή την αποφυγή κύκλου ατμού για την παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας, ο οποίος μειώνει σημαντικά τη συνολική απόδοση. Ωστόσο είναι η αντίδραση αυτή είναι η πιο δύσκολη στο να ξεκινήσει και να λάβει χώρα. Η συγκεκριμένη αποτελείται από 2 ισοπίθανους κλάδους που είναι οι ακόλουθοι:



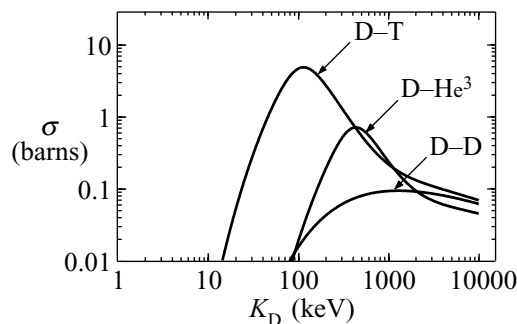
Οι κλάδοι αυτοί παράγουν ενέργεια 0.82 και 1.01 MeV ανά νουκλεόνιο αντίστοιχα που μακροσκοπικά ισοδυναμεί με  $78 \cdot 10^6$  και  $96 \cdot 10^6$  MJ/kg δευτερίου. Η δυσκολία της αντίδρασης αυτής να γίνει είναι ο κύριος λόγος που δεν αποτελεί την κύρια εστία της έρευνας στη σύντηξη.

### 1.1.2 Η Αντίδραση D - T

Η αντίδραση αυτή περιλαμβάνει τη σύντηξη ενός πυρήνα δευτερίου και ενός πυρήνα τριτίου. Είναι πιο εύκολο να συμβεί η προκειμένη αλληλεπίδραση παρά η προηγούμενη αλλά εξακολουθεί να είναι αρκετά δυσκολότερη να εκκινηθεί σε σχέση με τη σχάση ουρανίου. Σε ό,τι αφορά την παραγωγή ενέργειας, η αντίδραση αυτή εκλύει σημαντικές ποσότητες. Η αντίδραση γράφεται ως εξής:



Η αντιστοιχία είναι 3.52 MeV ανά νουκλεόνιο και μακροσκοπικά είναι  $338 \cdot 10^6$  MJ/kg. Παρά τα όποια προβλήματα ανακύπτουν λόγω του ηλεκτρικά ουδέτερου χαρακτήρα του νετρονίου και του τριτίου, όλη η ερευνητική κοινότητα έχει εστιάσει σε αυτήν καθώς είναι η ευκολότερη στην εκκίνηση.



Σχήμα 1.1: Μέση ενεργός διατομή συναρτήσει της θερμοκρασίας για τις αντιδράσεις  $D - D$  και  $D - T$ . Σχήμα δανεισμένο από [1]

Η αντίδραση  $D - T$  εκλύει περισσότερη ενέργεια από την αντίδραση  $D - D$ . Το κύριο πλεονέκτημα της ωστόσο δεν είναι αυτό, αλλά η συχνότητα με την οποία συμβαίνει, και συνεπώς είναι ευκολότερη η κατασκευή ενός τέτοιου αντιδραστήρα. Όπως γίνεται φανερό από το σχήμα 1.1 όχι μόνο η ενεργός διατομή είναι 2 τάξεις μεγέθους μεγαλύτερη αλλά και η θερμοκρασία στην οποία μεγιστοποιείται είναι η μικρότερη. Το τρίτιο είναι ισότοπο με χρόνο ημιζωής 12 χρόνια, οπότε είναι ανύπαρξτο στη Γη, συνεπώς το λαμβάνει κανείς από το

φθηνό  ${}^6_3\text{Li}$  μέσω αντιδράσεων σχάσης του οποίου τα αποθέματα υπολογίζεται ότι επαρκούν για 20,000 χρόνια.

Η πυρηνική σύντηξη δεν παράγει  $\text{CO}_2$  ούτε κάποιο άλλο αέριο που επιδεινώνει το φαινόμενο του θερμοκηπίου ή είναι επιβλαβές για την ανθρώπινη υγεία ή για την ατμόσφαιρα. Το κύριο προϊόν της σύντηξης είναι το αβλαβές ευγενές αέριο ήλιο. Η μόνη ανησυχία ανακύπτει από το παραπροϊόν το οποίο είναι το νετρόνιο υψηλής ενέργειας που μετατρέπεται σε θερμικό κατά τη διέλευση του στο περίβλημα της συσκευής σύντηξης. Κατά τη διέλευση αυτή μέσα στην ύλη το νετρόνιο εναποθέτει την ενέργεια του στα άτομα του υλικού, μετατρέποντας ορισμένα από αυτά σε ραδιενεργά τα οποία έχουν μικρό χρόνο ζωής, της τάξης των 100 χρόνων. Κοιτώντας κανείς τη γενική εικόνα, αντιλαμβάνεται την ευκαιρία που προσφέρει αυτός ο τρόπος παραγωγής ενέργειας.

Το τελευταίο μείζον πλεονέκτημα της σύντηξης αφορά την ασφάλεια και την ανησυχία, εφόσον πρόκειται για πυρηνική διαδικασία, ειδικά στο ευρύ κοινό, έπειτα από τα συμβάντα των Three Mile Island και Chernobyl. Εντούτοις στην περίπτωση της σύντηξης, οι ίδιοι οι νόμοι της φυσικής απαγορεύουν κάτι τέτοιο να λάβει χώρα. Η σύντηξη δε χρειάζεται πυροδότηση αλυσιδωτής αντίδρασης σε μία ογκώδη μάζα καυσίμου, αντίθετα, πρέπει να διατίθεται καύσιμο στον αντιδραστήρα με σταθερό ρυθμό για να καταναλωθεί όπως πρέπει. Το αποτέλεσμα αυτού είναι ότι οι ποσότητες του καυσίμου ανά πάσα στιγμή στον αντιδραστήρα σύντηξης δεν ξεπερνούν ποτέ τη μάζα μερικών γραμματοσήμετων, οπότε το meltdown είναι αδύνατο να συμβεί. Ακόμη και να υπήρχε τρόπος η ενέργεια στον αντιδραστήρα να ξέφευγε, η ίδια η αντίδραση παύει εκ φυσικού της να συμβαίνει, σε πάρα πολύ υψηλές ενέργειες, αποκλείοντας μια ανεξέλεγκτη εγγενώς εξέλιξη όπως στην περίπτωση της σχάσης.

Όπως κάθε τι στον κόσμο αυτό, τίποτα δεν είναι τέλει και η σύντηξη δεν αποτελεί εξαίρεση του κανόνα αυτού. Παρά τα ελκυστικά της χαρακτηριστικά, τη σύντηξη μαστίζουν και σοβαρά προβλήματα, επιστημονικού, τεχνολογικού και οικονομικού χαρακτήρα. Είναι σαφές πως το επιστημονικό πεδίο της πυρηνικής σύντηξης δεν είναι το πιο απλό κι εύκολο. Η θερμοκρασία λειτουργίας του καυσίμου ώστε να λάβει χώρα η αντίδραση  $D - T$  φτάνει τα  $150 \cdot 10^6 K$ , η οποία είναι μεγαλύτερη από αυτή στο κέντρο του ήλιου. Υπό τέτοιες συνθήκες εξυπακούεται ότι το καύσιμο έχει μετατραπεί εξ ολοκλήρου σε πλάσμα. Πρωτεύον πρόβλημα λοιπόν, είναι να βρεθεί τρόπος να συγκρατηθεί το πλάσμα και μία λύση είναι η έξυπνη τοποθέτηση μαγνητικών πεδίων στο χώρο. Η επιστημονική κοινότητα εργάζεται ακατάπαυστα τα τελευταία 60 χρόνια για την επίλυση αυτού του απαιτητικού έργου.

Δυστυχώς ακόμα και μηχανικά ή τεχνολογικά εμπόδια που καλείται να αντιμετωπίσει η κοινότητα έχουν ίδιο βαθμό δυσκολίας με τα προαναφερθέντα επιστημονικά. Αρχικά είναι αναγκαία η ανάπτυξη υλικών χαμηλής ενεργοποίησης, τα οποία δε θα μετατρέπονται σε ραδιενεργά όταν το νετρόνιο υψηλής ενέργειας διέρχεται μέσα από τα υλικά αυτά. Επιπλέον

τα μαγνητικά πεδία έχουν τέτοια ένταση και διαμόρφωση που χρειάζονται νέους και καινοτόμους υπεραγωγίσιμους μαγνήτες να τα παράξουν, οι οποίοι αναπτύσσονται τα τελευταία χρόνια. Ένα πεδίο έρευνας ακόμη είναι και η βελτιστοποίηση της θέρμανσης του πλάσματος στην αρμόζουσα θερμοκρασία.

Το τελευταίο μειονέκτημα το οποίο προσάπτεται σε αυτή τη μορφή ενέργειας αφορά στα οικονομικά μίας τέτοιας εγκατάστασης αντιδραστήρα. Σκεπτόμενος κανείς πρώτα το μέγεθος και την έκταση μίας τέτοιας εγκατάστασης και αναλογιζόμενος όλα τα παραπάνω περί των αναγκαίων υλικών και μηχανημάτων, αμέσως διαπιστώνει ότι το κόστος υλοποίησης θα είναι στην ίδια τάξη μεγέθους με αυτό ενός αντιδραστήρα σχάσης, το οποίο μεταφράζεται σε αυξημένα κόστη για τον καταναλωτή. Ευτυχώς αυτό αντισταθμίζεται από τα χαμηλά κόστη για τα καύσιμα και την προστασία του περιβάλλοντος, τα οποία θα μειώσουν το κόστος της ηλεκτρικής ενέργειας για τον καταναλωτή.

Συνολικά τα πλεονεκτήματα που χαρακτηρίζουν τη θερμοπυρηνική σύντηξη υπερτερούν σε σχέση με τα μειονεκτήματα. Τα ζητήματα που τίθενται προς αντιμετώπιση σταδιακά επιλύονται λόγω της ραγδαίας και ταχείας προόδου της κοινότητας καθώς και λόγω της ανάπτυξης του πιο μεγαλεπίβολου project θερμοπυρηνικής σύντηξης, το ITER το οποίο αναμένεται να ολοκληρωθεί το 2025 και θα αποτελέσει το μεγαλύτερο αντιδραστήρα σύντηξης.

### 1.2 Περιγραφή πλάσματος

Πριν μιλήσει κανείς για τη μαγνητική συγκράτηση, είναι καλύτερο να οριστεί η έννοια του πλάσματος. Το πλάσμα είναι ένα πλήρως ιονισμένο αέριο του οποίου η συμπεριφορά καθορίζεται από μεγάλης κλίμακας ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία (σε αντίθεση με τις μικρής κλίμακας συγκρούσεις Coulomb πλησιέστερου γείτονα). Μία συνέπεια αυτού είναι η υψηλή ηλεκτρική αγωγιμότητα του πλάσματος, η οποία θα φαινόταν σε κάποιον σαν έκπληξη δεδομένου του ότι η αριθμητική πυκνότητα των ηλεκτρονίων είναι 8 τάξεις μεγέθους μικρότερη από ένα συμβατικό αγωγό όπως ο χαλκός. Η αγωγιμότητα του πλάσματος μπορεί να είναι 40 φορές μεγαλύτερη από αυτή του χαλκού. Η αιτία πίσω από το "παράδοξο" των αγωγιμοτήτων είναι ότι σε υψηλές θερμοκρασίες και χαμηλές (αριθμητικές) πυκνότητες δε λαμβάνουν χώρα συγκρούσεις Coulomb μεταξύ ιόντων και ηλεκτρονίων επομένως υπάρχει ελάχιστη αντίσταση στη ροή του ρεύματος. Αξίζει να σημειωθεί πως η υψηλή αγωγιμότητα συνεπάγεται ότι το εσωτερικό του πλάσματος θωρακίζεται από DC ηλεκτρικά πεδία ως ένα μεγάλο βαθμό. Από την άλλη τα DC μαγνητικά πεδία μπορούν να εισχωρήσουν στο πλάσμα. Αυτά τα πεδία είναι υπεύθυνα για τη μαγνητική συγκράτηση του πλάσματος.

Ένα τέτοιο ιδιαίζον σύστημα του οποίου τα χαρακτηριστικά αποτελούν πτυχές τόσο της συμπεριφοράς των δύο πληθυσμών σωματιδίων από τα οποία αποτελείται όσο και της συλλογικής δυναμικής που προέρχεται από τις αλληλεπιδράσεις των σωματιδίων αυτών, θα πρέπει

να περιγράφεται από ένα μοντέλο το οποίο να μπορεί να συμβιβαστεί και να αναδεικνύει αυτόν ακριβώς το χαρακτήρα. Η Μαγνητοϋδροδυναμική θεωρία είναι η κατάλληλη για την αντιμετώπιση του πλάσματος σαν ιονισμένο ρευστό που συνυπάρχει και αλληλεπιδρά με ηλεκτρομαγνητικά πεδία. Στο πλαίσιο αυτό καλούνται να συμβιβαστούν και συνδυαστούν οι εξισώσεις που διέπουν τα ρευστά με τις εξισώσεις του ηλεκτρομαγνητισμού. Ο συνδυασμός αυτός καταλήγει στην εξίσωση μεταβολής της ορμής:

$$mn \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p + \vec{j} \times \vec{B} \quad (1.4)$$

Με την αριθμητική πυκνότητα να συμβολίζεται με  $n$ ,  $\vec{j}$  η πυκνότητα ρεύματος,  $\rho$  η πυκνότητα φορτίου,  $p$  η κινητική πίεση του πλάσματος και  $\vec{v}$  η ταχύτητα του ρευστού. Για τη συγκράτηση του πλάσματος στη σύντηξη είναι αναγκαίο στη μόνιμη κατάσταση (δηλαδή όταν για κάθε μέγεθος όλες οι χρονικές παράγωγοι είναι μηδενικές) το πλάσμα να βρίσκεται σε κατάσταση μαγνητοϋδροδυναμικής ισορροπίας. Σε αυτήν την κατάσταση η κινητική πίεση και η πίεση οφειλόμενη στις ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις πρέπει να προκαλούν ισορροπία δυνάμεων στο πλάσμα. Κατά συνέπεια η συνθήκη μαγνητοϋδροδυναμικής ισορροπίας που πηγάζει από την παραπάνω εξίσωση είναι:

$$\nabla p = \vec{j} \times \vec{B} \quad (1.5)$$

Μάλιστα μία από τις σημαντικότερες παραμέτρους ενός πλάσματος ορίζεται ως μία ποσότητα που χαρακτηρίζει το πόσο καλά συγκρατεί το πλάσμα ένα μαγνητικό πεδίο και είναι ο λόγος της κινητικής προς την μαγνητική πίεση. Η συγκεκριμένη παράμετρος καλείται βήτα του πλάσματος και δίνεται από τη σχέση:

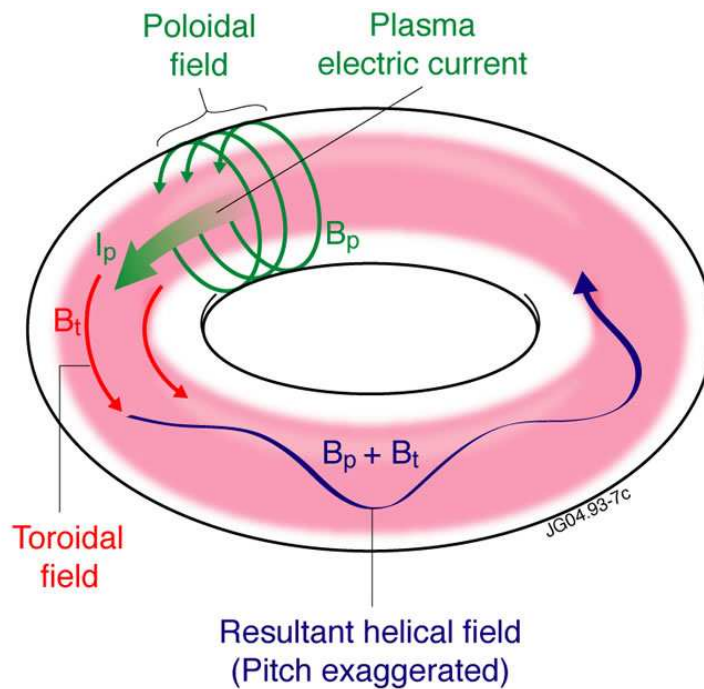
$$\beta = \frac{p}{B^2/2\mu_0} = \frac{2\mu_0 p}{B^2} \quad (1.6)$$

### 1.3 Μαγνητική Συγκράτηση Πλάσματος

Υπογραμμίζεται και υπενθυμίζεται πως η απλούστερη τοπολογία στην οποία όλα τα παραπάνω θα μπορούν να κατασκευαστούν και να εφαρμοστούν σε πείραμα αλλά και θεωρητικά, λόγω της φύσης του μαγνητικού πεδίου είναι η τοροειδής. Συγκεκριμένα η τοπολογία αυτή υπερέχει των υπολοίπων γιατί αφενός οι μαγνητικές γραμμές δεν εξέρχονται από έναν δεδομένο όγκο και αφετέρου είναι κλειστές. Οι τροχιές των σωματιδίων φυσικά ακολουθούν τις μαγνητικές γραμμές, επομένως αυτή είναι η απλούστερη τοπολογία στην οποία να επιτυγχάνεται περιορισμός του πλάσματος. Για αυτό και στις επόμενες ενότητες οι υπολογισμοί γίνονται σε τοροειδείς συντεταγμένες.

Η μαγνητική συγκράτηση του πλάσματος επιτυγχάνεται, κατά κύριο λόγο, σε τοροειδείς διατάξεις. Εξωτερικά πηνία διαρρέονται από πολοειδές ρεύμα υψηλής έντασης δημιουργούν

το τοροειδές μαγνητικό πεδίο, το οποίο εξαναγκάζει τους 2 πληθυσμούς σωματιδίων στο πλάσμα να κινηθούν κατά μήκος των μαγνητικών γραμμών τουτέστιν, τα εξαναγκάζει σε τοροειδή κίνηση. Ως εκ τούτου τα κινούμενα αυτά φορτία αποτελούν ένα μικρό τοροειδές ρεύμα το οποίο επάγει ένα αντίστοιχα μικρό πολοειδές μαγνητικό πεδίο. Τα παραπάνω συνοψίζονται πολύ πιο παραστατικά στο σχήμα 1.2. Το πολοειδές μαγνητικό πεδίο παίζει και αυτό επικουρικό ρόλο στη μαγνητική συγκράτηση.



Σχήμα 1.2: Τα πεδία σε μία διάταξη tokamak κύριο (τοροειδές) και επαγόμενο (πολοειδές), μαζί με το τελικό ελικοειδές πεδίο που είναι η υπέρθεση των 2 μαγνητικών πεδίων. Δανεισμένο από [2].

Προηγουμένως δόθηκε ιδιαίτερη έμφαση στο υψηλό της θερμοκρασίας το οποίο είναι αναγκαία συνθήκη για να πετύχουμε αντιδράσεις σύντηξης. Το προαναφερθέν ρεύμα βοηθάει στη θέρμανση του πλάσματος. Ωστόσο, τελικά ερχόμαστε αντιμέτωποι με το γεγονός πως όσο αυξάνεται η θερμοκρασία του πλάσματος, η αντίσταση του μειώνεται, συνεπώς μειώνεται και ο ρυθμός αύξησης της θερμοκρασίας του. Για αυτό χρησιμοποιούνται εξωτερικές πηγές θέρμανσης. Οι δύο διαδεδομένοι τρόποι θέρμανσης είναι από τη μία, η υψίσυχη θέρμανση η οποία κάνει χρήση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων μεγάλης ισχύος τα οποία μέσω συντονισμών μεταφέρουν την ενέργεια τους στο πλάσμα και από την άλλη η έγχυση δεσμών ουδέτερων σωματιδίων στο πλάσμα το οποίο διαπερνούν τα ουδέτερα σωματίδια και μέσω συγκρούσεων μεταδίδουν την ενέργεια τους.

## 1.4 Διατάξεις Μαγνητικής Συγκράτησης Πλάσματος

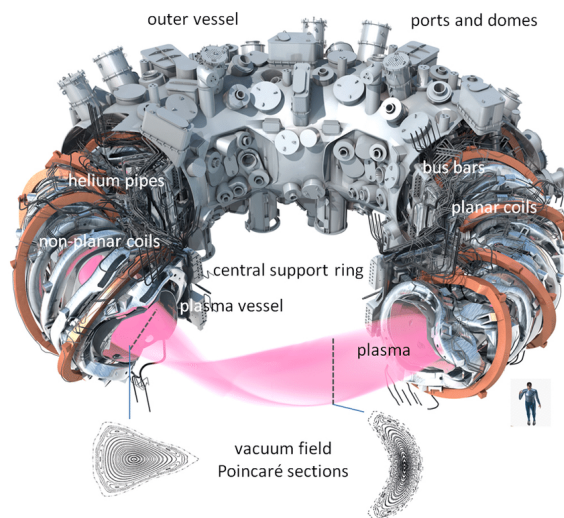
Το κεφάλαιο αυτό πραγματεύεται τις κυριότερες και πιο δημοφιλείς στην κοινότητα διατάξεις που έχουν αναδειχθεί ως αυτές με τα περισσότερα πλεονεκτήματα ενώ παράλληλα διαθέτουν το χαρακτηριστικό ότι είναι ρεαλιστική η κατασκευή τους.

### 1.4.1 Levitated Dipole (LDX)

Το LDX ουσιαστικά αποτελείται από ένα αιωρούμενο πηνίο το οποίο φέρει τοροειδές ρεύμα. Χαρακτηρίζεται από μία πιο απλή διάταξη του πηνίου από ότι στο tokamak, γεγονός το οποίο είναι και το κύριο πλεονέκτημά του. Παρόλα αυτά η αιώρηση του πηνίου αποτελεί τεχνολογική πρόκληση. Ένα άλλο πρόβλημα είναι ότι δε μπορεί να χρησιμοποιηθεί δευτέριο και τρίτιο σαν καύσιμα καθώς πρέπει να προστατευτεί το υπεραγώγιμο και αιωρούμενο πηνίο. Το LDX δοκιμάστηκε σαν concept ως πείραμα στο MIT και τα αποτελέσματα έδειξαν ότι δεν υπερισχύει του tokamak.

### 1.4.2 Stellarator

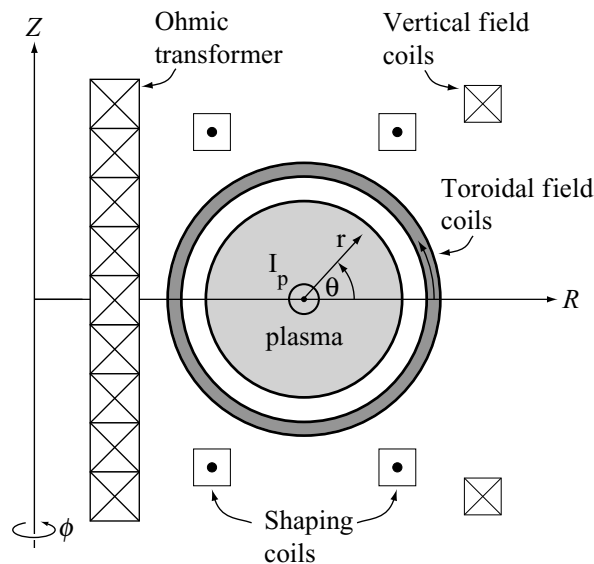
Το stellarator είναι αυτή τη στιγμή ο κύριος ανταγωνιστής του tokamak. Είναι μία ελικοειδής – τοροειδής συσκευή της οποίας η γεωμετρία είναι από μόνη της τρισδιάστατη και εξασφαλίζει λειτουργία σε μόνιμη κατάσταση. Δύο ιδέες πολλά υποσχόμενες για υψηλή απόδοση είναι η συνδεδεμένη κατοπτρική συμμετρία (linked-mirror symmetry [1]) και η οιονεί – αξονική συμμετρία (quasi-axisymmetric stellarator [1]). Τα μεγαλύτερα προβλήματα που αντιμετωπίζει το stellarator αυτή τη στιγμή είναι η αυξημένη τεχνολογική του πολυπλοκότητα και το κόστος το οποίο προβλέπεται στη σχεδίαση και κατασκευή modular υπεραγώγιμων πηνίων. Χαρακτηριστική περίπτωση Stellarator αποτελεί το πείραμα Wendelstein-7X το οποίο εικονίζεται στο σχήμα 1.3 από κάτω.



Σχήμα 1.3: Γραφικό σχήμα της διάταξης του Wendelstein 7-X δανεισμένο από [3] στο οποίο απεικονίζονται όλα τα μέρη της διάταξης και το πλάσμα.

### 1.4.3 Tokamak

Το tokamak είναι ένας αξονοσυμμετρικός τόρος με τοροειδές μαγνητικό πεδίο, μέτρια πίεση πλάσματος και ένα σχετικά μικρό τοροειδές ρεύμα. Αυτή τη στιγμή είναι η επικρατέστερη διάταξη μαγνητικής συγκράτησης για τον πρώτο αντιδραστήρα σύντηξης που θα υλοποιηθεί για παραγωγή ενέργειας λόγω της εξαιρετικής του απόδοσης. Λόγω αυτής της απόδοσης, υπάρχουν ήδη πάρα πολλές πειραματικές διατάξεις tokamak ανά τον κόσμο.



Σχήμα 1.4: Μία τυπική διάταξη Tokamak με τους μετασχηματιστές τα πηνία τοροειδούς πεδίου και την εγκάρσια διατομή. Σχήμα δανεισμένο από [1].

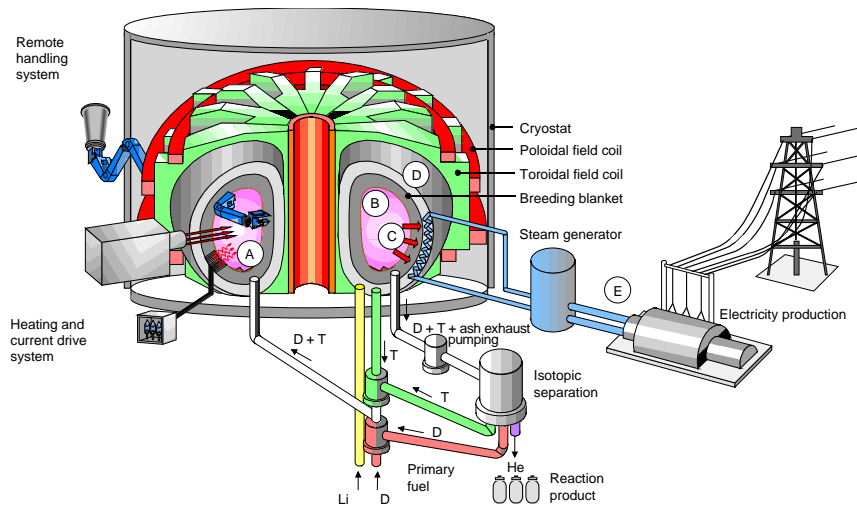
Στο σχήμα 1.4 μπορεί να διακρίνει κανείς πως το tokamak διαθέτει 4 βασικά συστήματα με μαγνήτες. Πρώτα είναι τα πηνία για το τοροειδές πεδίο, έπειτα είναι ο ωμικός μετασχηματιστής, που επάγει το τοροειδές ρεύμα στο πλάσμα που απαιτείται για ισορροπία και ωμική θέρμανση. Το τρίτο σύστημα είναι υπεύθυνο για το κατακόρυφο πεδίο το οποίο απαιτείται για την ισορροπία δυνάμεων στην τοροειδή διεύθυνση. Τέλος το τέταρτο σύστημα είναι τα λεγόμενα πηνία σχηματισμού, τα οποία παράγουν μία μη κυκλική εγκάρσια διατομή για να βελτιωθούν τα όρια της ευστάθειας της μαγνητοϋδροδυναμικής κατάστασης ισορροπίας και να αντιμετωπιστούν προβλήματα ατελειών πλάσματος - τοιχώματος [1].

Συνολικά το tokamak χαρακτηρίζεται από πολυάριθμα πλεονεκτήματα και κάποια σοβαρά προβλήματα. Τα κύρια πλεονεκτήματα όπως έχει ήδη αναφερθεί έχουν να κάνουν με την εξαιρετική απόδοση. Η καλή συγκράτηση επιτρέπει στο πλάσμα να θερμανθεί σε υψηλές θερμοκρασίες κάνοντας χρήση μόνο ενός μέτριου ποσού εξωτερικής θέρμανσης. Επιπροσθέτως οι τιμές που προκύπτουν για το  $\beta$  είναι στην περιοχή του ενδιαφέροντος για αντιδραστήρα. Για παράδειγμα στο JET (Joint European Torus) με τοροειδές πεδίο 3.6 T, και εξωτερική ισχύ θέρμανσης  $P = 25MW$ , για έναν παλμό μερικών δευτερολέπτων επιτεύχθηκαν τιμές θερμοκρασιών ιόντων και ηλεκτρονίων αντίστοιχα  $T_i = 28 keV$ ,  $T_e = 14 keV$ , παραμέτρου βήτα  $\beta = 0.018$  και χρόνου συγκράτησης  $\tau_E = 0.9s$  [1].



Μπορεί αυτό να είναι ένα αξιοθαύμαστο αποτέλεσμα υπάρχουν ακόμα διάφορα προβλήματα, τα οποία προσπαθεί η ερευνητική κοινότητα να αντιμετωπίσει. Πρώτα από όλα, η ανάγκη για πολύ ισχυρό τοροειδές μαγνητικό πεδίο αυξάνει την πολυπλοκότητα και το κόστος. Οι περισσότεροι σχεδιασμοί όπως περιγράφησαν πριν κάνουν χρήση πιο αδύναμου πεδίου έναντι χαμηλού συντελεστή ασφαλείας, ο οποίος ορίζεται ως ο ρυθμός μεταβολής της τοροειδούς ροής με μεταβολή της πολοειδούς ροής. Το δεύτερο πρόβλημα πηγάζει από το γεγονός ότι χρειάζεται το tokamak να λειτουργεί σε συσκευή μόνιμης κατάστασης. Αυτή η απαίτηση είναι ασύμβατη με τον ωμικό μετασχηματιστή που δε μπορεί να οδηγεί ένα εναλλασσόμενο ρεύμα για ένα αόριστο χρονικό διάστημα.

Για το τέλος της ενότητας παρατίθεται ένα σχήμα με το πώς θα είναι και θα λειτουργεί ένας αντιδραστήρας tokamak σαν εργοστάσιο παραγωγής ηλεκτρισμού.



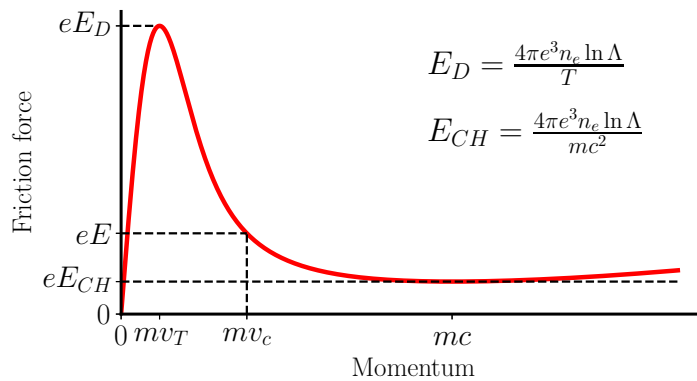
Σχήμα 1.5: Ένας αντιδραστήρας tokamak με όλα τα μέρη που τον απαρτίζουν μέχρι και το κομμάτι παραγωγής ηλεκτρισμού και διανομής στο ηλεκτρικό δίκτυο. Σχήμα δανεισμένο από [4].

## 2 Runaway Electrons

### 2.1 Ορισμός

Ήδη από την προηγούμενη ενότητα έχει καταστεί σαφές πως το πλάσμα αποτελείται από πληθυσμούς ηλεκτρονίων και ιόντων. Οι ταχύτητες των πληθυσμών κάθε είδους χαρακτηρίζεται από μία συγκεκριμένη συνάρτηση κατανομής. Στα ηλεκτρόνια συγκεκριμένα, υπάρχει μία μικρή μερίδα του πληθυσμού η οποία ξεχωρίζει στη συμπεριφορά της και μελετάται μόνη της καθώς η επίδρασή της στα πειράματα σύντηξης όπως θα δούμε είναι μεγάλη.

Το κλάσμα του πληθυσμού των ηλεκτρονίων αυτό λοιπόν, μέσω κάποιων μηχανισμών που θα περιγραφούν σύντομα, υφίστανται πέραν ενός κατωφλίου στην ταχύτητά τους, απεριόριστη επιτάχυνση σε υπερ-σχετικιστικές ταχύτητες, με αποτέλεσμα να έχουν την ικανότητα να διαφύγουν από την κίνηση την οποία του επιβάλλει το μαγνητικό πεδίο συγκράτησης σε αντίθεση με το κύριο μέρος των ηλεκτρονίων που αποτελεί τον όγκο του πλάσματος. Λόγω της διαφυγής αυτής που τα χαρακτηρίζει, ονομάζονται runaway electrons.



Σχήμα 2.1: Δύναμη τριβής εξαρτώμενη από την ορμή του ηλεκτρονίου μέσα στο πλάσμα σε σύγκριση με το ηλεκτρικό πεδίο  $E$ . Σχήμα δανεισμένο από [5]

Στο σχήμα 2.1 παρουσιάζεται η φυσική εξήγηση του μηχανισμού παραγωγής runaway electrons που συνίσταται στο γεγονός πως η δύναμη τριβής για ταχέα ηλεκτρόνια μειώνεται όσο αυξάνεται η ταχύτητά τους. Τότε μπορούν να επιταχυνθούν συνεχώς από ένα ηλεκτρικό πεδίο. Στην ουρά μίας κατανομής Maxwell υπάρχουν 2 κρίσιμες τιμές για το ηλεκτρικό πεδίο. Η πρώτη είναι το κρίσιμο πεδίο Connor - Hastie με το οποίο ηλεκτρόνια με ορμή μεγαλύτερη από μία αντίστοιχη κρίσιμη τιμή μετατρέπονται σε runaways και όλα τα ηλεκτρόνια μετατρέπονται σε runaways όταν το ηλεκτρικό πεδίο ξεπεράσει το πεδίο Dreicer.

Σημειώνεται πάντως πως η κατανομή των ταχυτήτων των runaways δεν είναι Maxwell καθώς οι συγκρούσεις είναι πιο σπάνιες και οι χρονικές κλίμακες που αφορούν το πλάσμα σύντηξης και τη συγκράτησή του, δεν επιτρέπουν την αποκατάσταση τέτοιας κατανομής [5].

## 2.2 Μηχανισμοί Μετατροπής Ηλεκτρονίων σε Runaways

### 2.2.1 Πηγή Dreicer

Με την πάροδο του χρόνου όλο και περισσότερα μέλη της επιστημονικής κοινότητας ξεκίνησαν να διερευνούν το ζήτημα των runaways και κυρίως επικεντρώθηκαν στους μηχανισμούς της δημιουργίας τους δηλαδή του ρυθμού ανάπτυξης του πληθυσμού τους.

Η πρώτη απόπειρα έγινε από τον Dreicer, ο οποίος εξήγαγε τη φερώνυμη κρίσιμη προαναφερθείσα τιμή του ηλεκτρικού πεδίου πάνω από την οποία έχουμε μόνο runaways [6]. Ο υποκείμενος μηχανισμός που ενέπλεξε σε αυτή τη διαδικασία ο Dreicer και απέδειξε ότι καταλήγει στο αποτέλεσμα αυτό είναι μία διαδικασία διάχυσης στην ουρά της κατανομής Maxwell δηλαδή στα ηλεκτρόνια με ταχύτητες  $v > c\sqrt{\frac{E_C}{E}}$  υποστηρίζοντας πως τα συγκεκριμένα μετατρέπονται σε runaways στο χρονικό διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών συγκρούσεων (το αντίστροφο της συχνότητας σύγκρουσης). Αυτή η προσπάθεια ήταν κάθε άλλο παρά τέλεια και ακριβής καθώς όπως υπογραμμίστηκε σε προηγούμενη παράγραφο η κατανομή δεν είναι Maxwell. Παρά τα ελαττώματά της, η θεώρηση αυτή, υπέδειξε τη σωστή κατεύθυνση για τη διερεύνηση του μηχανισμού σε μεγαλύτερο βάθος και μεγαλύτερη ακρίβεια.

Τελικά οι Connor και Hastie το 1975 κατορθώνουν να εξάγουν την πιο ακριβή και γενική έκφραση για το ρυθμό μεταβολής του πληθυσμού των runaways εντός ενός πλαισίου που λαμβάνει υπόψιν του σχετικιστικά φαινόμενα και το ενεργό φορτίο των ιόντων του πλάσματος. Για πληρότητα γράφεται η περίπλοκη σχέση τους [5]:

$$\frac{d}{dt}n_{re} = Cn \frac{4\pi e^4 n \ln \Lambda}{T\sqrt{mT}} \left(\frac{E}{E_D}\right)^{-h(\alpha, Z)} \exp\left[-\lambda(\alpha)\frac{E_D}{4E} - \left(2\frac{E_D}{E}\right)^{1/2} \gamma(\alpha, Z)\right] \quad (2.1)$$

$$\alpha = \frac{E}{E_C} \quad (2.2)$$

$$h(\alpha, Z) = \frac{1}{16(\alpha - 1)} \left[ \alpha(Z + 1) - Z + 7 + 2\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha - 1}}(1 + Z)(\alpha - 2) \right] \quad (2.3)$$

$$\lambda(\alpha) = 8\alpha \left[ \alpha - \frac{1}{2} - \sqrt{\alpha(\alpha - 1)} \right] \quad (2.4)$$

$$\gamma(\alpha, Z) = \sqrt{\frac{(Z + 1)\alpha^2}{8(\alpha - 1)}} \left[ \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(1 - \frac{2}{\alpha}\right) \right] \quad (2.5)$$

Στην πρώτη σχέση  $n$  είναι η αριθμητική πυκνότητα των ηλεκτρονίων,  $m$  η μάζα του ηλεκτρονίου,  $e$  το φορτίο του και  $\ln \Lambda$  ο λογάριθμος Coulomb.

Τέλος, οι υπολογισμοί της συγκεκριμένης πηγής runaways σε tokamak θα πρέπει να περιλαμβάνουν μία διάκριση μεταξύ trapped και passing ηλεκτρονίων. Αριθμητικά ευρέθη πως αυτό οδηγεί σε μείωση κατά έναν παράγοντα  $1 - 0.5\sqrt{2\epsilon}$ , με  $\epsilon$  το αντίστροφο aspect ratio (λόγος μείζονος ακτίνας προς την ελάχισονα ακτίνα του τόρου) [5].

### 2.2.2 Φαινόμενο Compton και αποδιέγερση Τριτίου

Δύο ραδιενεργά φαινόμενα είναι ικανά να μετατρέψουν ηλεκτρόνια σε runaways: Η Ακτινοβολία  $\gamma$  από τα διεγερμένα άτομα των τοιχωμάτων και η ραδιενεργή αποδιέγερση του τριτίου μέσα στον όγκο του πλάσματος.

Τα τοιχώματα του αντιδραστήρα σύντηξης γίνονται ραδιενεργά υπό την επιρροή της ροής νετρονίων της αντίδρασης  $D-T$  και οι εκπεμπόμενες ακτίνες  $\gamma$  της τάξης των MeV δημιουργούν έναν αρχικό πληθυσμό (σπόρο, seed) runaway ηλεκτρονίων μέσω σκέδασης Compton στα ηλεκτρόνια του όγκου του πλάσματος. Ο ρυθμός μεταβολής της πυκνότητας του σπόρου αυτής συναρτήσει του χρόνου δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\frac{dn_{seed}}{dt} = n_e \Gamma \sigma \quad (2.6)$$

όπου  $\Gamma$  είναι η ροή ακτίνων  $\gamma$ ,  $\sigma$  είναι η ενεργός διατομή της σκέδασης Compton και  $n_e$  είναι η πυκνότητα του κυρίου όγκου των ηλεκτρονίων (bulk). Η ενεργός διατομή της σκέδασης Compton μέσω της σχέσης Klein - Nishina βρίσκεται να είναι στην ίδια τάξη μεγέθους ή μικρότερη από την ενεργό διατομή της σκέδασης Thomson  $\sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_e^2 = 6.6 \cdot 10^{-29} m^2$  [5]. Θεωρείται  $P$  η παραγόμενη ισχύ από την αντίδραση σε MW και υπενθυμίζεται πως από κάθε αντίδραση εκλύονται 17.6 MeV. Τότε είναι:

$$\frac{1}{n_e} \frac{dn_{seed}}{dt} = \Gamma \sigma [s^{-1}] \leq \frac{P[MW]}{17.6 \cdot 1.6022 \cdot 10^{-19}} \cdot \frac{6.6 \cdot 10^{-29}}{S[m^2]} \approx 2.3 \cdot 10^{-11} \frac{P[MW]}{S[m^2]} \quad (2.7)$$

με  $S$  να είναι η επιφάνεια του τοιχώματος του αντιδραστήρα. Σημειώνεται πως ο λόγος  $\frac{P[MW]}{S[m^2]}$  για τα δεδομένα του ITER είναι κοντά στη μονάδα καθώς είναι από τις παραμέτρους του πειράματος η ισχύς σύντηξης προσεγγίζει τα 500 MW και το εμβαδόν του τόρου είναι γύρω στα  $490 m^2$ .

Μία όμοια εφαρμογή της ίδιας λογικής, αλλά για το τρίτιο το οποίο έχει χρόνο ημίσειας ζωής 12.5 χρόνια και η πυκνότητα του στο πλάσμα σύντηξης είναι περίπου  $n_T \approx \frac{n_e}{2}$ , δίνει το εξής αποτέλεσμα:

$$\frac{1}{n_T} \frac{dn_{seed}}{dt} \approx 1.8 \cdot 10^{-9} [s^{-1}] \quad (2.8)$$

Αυτό, δείχνει ξεκάθαρα ότι η γρήγορη διαδικασία που δημιουργεί ταχέα ηλεκτρόνια είναι η αποδιέγερση του τριτίου και όχι η σκέδαση Compton. Κανείς από τους 2 αυτούς μηχανισμούς

δεν είναι όσο ταχύς στην παραγωγή runaways όσο ο τελευταίος που θα αναφερθεί αμέσως μετά που καλείται μηχανισμός της "θερμής ουράς".

### 2.2.3 Θερμή Ουρά

Η ταχεία διανομή αερίου υψηλού  $Z$  σε μια μαγνητική επιφάνεια τείνει να δημιουργεί μία ηλεκτρονιακή κατανομή δύο συνιστωσών, εκ των οποίων η μία αποτελείται από τα αρχικά θερμά ηλεκτρόνια και δευτερεύοντα ψυχρά ηλεκτρόνια, παραγόμενα από τον ιονισμό του προστιθέμενου αερίου. Σε μεγάλες συσκευές όπως είναι αυτές των πειραμάτων σύντηξης αγνοείται το βάθος διείσδυσης του αερίου. Όλα τα θερμά ηλεκτρόνια επιβραδύνονται και χάνουν ενέργεια και μεταβαίνουν στον ψυχρό πληθυσμό λόγω τριβής εκ συγκρούσεων, αλλά παίρνει περισσότερο για τα θερμά ηλεκτρόνια να επιβραδυνθούν από ότι για τα ψυχρά καθώς η συχνότητα συγκρούσεων μειώνεται με την ενέργεια. Η επιζήσασα ουρά του θερμού Maxwellian προ-απόσβεσης πληθυσμού είναι πολύ επιρρεπής σε διαφυγές. Η περιγραφή αυτή υποθέτει πως ο ρυθμός ψύξης είναι μικρότερος από τη συχνότητα σύγκρουσης θερμού ηλεκτρονίου με θερμό, στην οποία περίπτωση ο πληθυσμός προ-απόσβεσης παραμένει σε κατανομή Maxwell κατά την ψύξη, και η παραμορφωμένη ουρά του είναι μία απλή διαταραχή.

Διακρίνει κανείς δύο σενάρια τα οποία αφορούν το ποσό προσμίξεων που εγχέονται στο πλάσμα. Στην περίπτωση έγχυσης μεγάλης ποσότητας προσμίξεων, ο θερμός πληθυσμός φέρει το περισσότερο ρεύμα κατά τη διάρκεια ολόκληρης της απόσβεσης, λόγω της περιοριστικά μικρής αγωγιμότητας του ψυχρού υποβάθρου. Το ηλεκτρικό πεδίο τότε αυξάνεται με την επιβράδυνση του θερμού πληθυσμού, όπου τότε η δύναμη τριβής έχει ήδη καταστεί ανίκανη να εξισορροπήσει την ώθηση του ηλεκτρικού πεδίου για τα ηλεκτρόνια τα οποία αποτελούν το ρεύμα. Η ενέργεια των τελευταίων αυξάνεται συνεχώς ενόσω η πυκνότητά τους πέφτει και ασυμπτωτικά πλησιάζει μία πεπερασμένη τιμή όσο τα ηλεκτρόνια αυτά διαμορφώνονται σε μία κατανομή δέσμης και προσεγγίζουν σχετικιστικές ενέργειες. Το ηλεκτρικό πεδίο μειώνεται και προσεγγίζει το κρίσιμο επίπεδο μακροπρόθεσμα. Αυτή η περίπτωση αντιπροσωπεύει μία κατάσταση ταχείας μετατροπής σε runaways στο οποίο αυτά φέρουν όλο το ρεύμα του πλάσματος μετά την απόσβεση, όσο η ενέργεια τους παραμένει κάτω από την κλίμακα των MeV.

Στο δεύτερο σενάριο όπου οι εγχέομενες απώλειες είναι σε μετριοπαθή ποσότητα, η αγωγιμότητα του όγκου του πλάσματος παραμένει αρκετά υψηλή ώστε, τα ηλεκτρόνια τα οποία το αποτελούν να φέρουν ένα σημαντικό μέρος του συνολικού ρεύματος. Ο αγωγίμος όγκος χαμηλώνει αρχικά το ηλεκτρικό πεδίο, που διευκολύνει την επιβράδυνση του θερμού πληθυσμού. Ο ψυχρός πληθυσμός ψύχεται λόγω ακτινοβολητικών απωλειών και ως εκ τούτου αυξάνεται το ηλεκτρικό πεδίο. Αν η πυκνότητα των επιζησάντων θερμών ηλεκτρονίων είναι πολύ χαμηλή ώστε να φέρει το συνολικό ρεύμα την ώρα που το ηλεκτρικό πεδίο είναι αρκετά ισχυρό ώστε να αποτρέπει την επιβράδυνσή τους, τότε το ψυχρό ωμικό πλάσμα οφείλει να το φέρει. Σε αυτήν την περίπτωση το μακράς διαρκείας ισχυρό ηλεκτρικό πεδίο επιταχύνει

τα επιζήσαντα θερμά ηλεκτρόνια σε υπερ-σχετικιστικές ενέργειες μέχρι νέοι παράγοντες να ανακόψουν αυτήν την αύξηση ενέργειας. Το σενάριο αυτό αντιπροσωπεύει την κατάσταση του "σπόρου θερμής ουράς". Ο επιταχυνόμενος πληθυσμός μπορεί έπειτα να πολλαπλασιαστεί μέσω μηχανισμού χιονοστιβάδας [5].

### 2.3 Ιδιότητες των Runaway Electrons

Για μία πρώτη ματιά στο πόσο σημαντικά είναι τα runaways μπορεί κάποιος να προβεί σε υπολογισμό της πυκνότητάς τους στο πλάσμα, την πυκνότητα ενέργειάς τους και την πυκνότητα παράλληλου ρεύματος. Για τους υπολογισμούς αυτούς θεωρείται ότι τα ηλεκτρόνια του πλάσματος περιγράφονται από μία κατανομή Maxwell. Άπαξ και οριστικοποιηθεί η συνθήκη που διαχωρίζει τα runaways από τα υπόλοιπα ηλεκτρόνια στο πλάσμα, οι υπολογισμοί ενδιαφέροντος γίνονται άμεσα.

Ένα σημείο στο οποίο αξίζει να σταθούμε πριν τις πράξεις είναι το γεγονός ότι τα runaways όπως περιγράφηκε πριν γεννιούνται κυρίως από τη ταχεία ουρά της κατανομής Maxwell, επομένως για την κρίσιμη ταχύτητα και την θερμική ταχύτητα στο πλάσμα θα ισχύει:

$$\frac{v_c}{v_{Te}} \gg 1 \quad (2.9)$$

Αυτό μας επιτρέπει όταν προκύψει το ολοκλήρωμα πιθανότητας της Maxwell στον υπολογισμό διάφορων ποσοτήτων  $\Phi\left(\frac{v_c}{v_{Te}}\right)$ , να γίνει το ανάπτυγμά του για μεγάλα ορίσματα:

$$\Phi(\zeta) \approx 1 - e^{-\frac{\zeta^2}{\sqrt{\pi}\zeta}}, \quad \zeta \gg 1 \quad (2.10)$$

Η πρώτη ποσότητα που λογαριάζεται είναι η αριθμητική πυκνότητα, μάλιστα το κλάσμα ως όλα τα ηλεκτρόνια [1]:

$$\frac{n_R}{n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}v_{Te}} \int_{v_c}^{\infty} e^{-\frac{v_{\parallel}^2}{v_{Te}^2}} dv_{\parallel} = \frac{1}{2}(1 - \Phi) \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\zeta^2}}{\zeta} \quad (2.11)$$

Όπου:

$$\zeta = \frac{v_c}{v_{Te}} = 8.8 \sqrt{\frac{n_{20}}{|E_{\parallel}| T_k}} \quad (2.12)$$

Το επόμενο κλάσμα αφορά αυτό της πυκνότητας ενέργειας των ηλεκτρονίων το οποίο αποδίδεται στα runaways. Υποθέτουμε πως όλα τα runaways επιταχύνονται σε σχετικιστικές ταχύτητες ώστε η πυκνότητα ενέργειάς τους να είναι  $n_R m_e c^2/2$ . Τότε:

$$\frac{U_R}{3nT_e/2} \approx \frac{n_R m_e c^2/2}{3nT_e/2} = \left(\frac{m_e c^2}{3T_e}\right) \left(\frac{n_R}{n}\right) \quad (2.13)$$

Η τελευταία ποσότητα είναι το ποσοστό της συνολικής πυκνότητας ρεύματος φερόμενης

από τα runaways. Πάλι, με την υπόθεση ότι επιταχύνονται σε σχετικιστικές ταχύτητες η πυκνότητα ρεύματος τους είναι:  $J_R = -en_Rc$ :

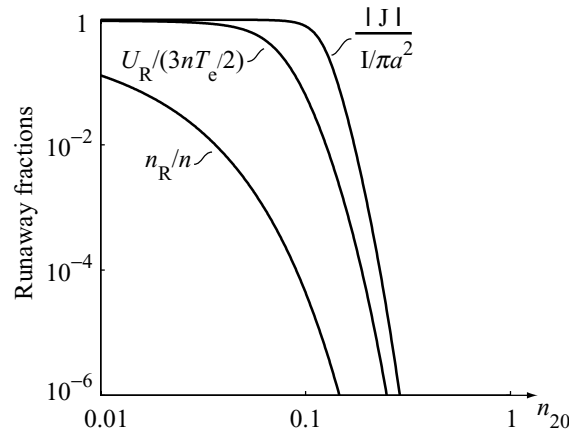
$$\frac{|J_R|}{\frac{I}{\pi r^2}} = \left( \frac{\pi r^2 enc}{I} \right) \left( \frac{n_R}{n} \right) \quad (2.14)$$

Τα κλάσματα τα οποία αναφέρθηκαν είναι τα ακόλουθα:

$$f_n = \frac{n_R}{n_R + n} \quad (2.15)$$

$$f_U = \frac{U_R}{U_R + 3nT_e/2} \quad (2.16)$$

$$f_J = \frac{|J_R|}{|J_R| + I/\pi r^2} \quad (2.17)$$



Σχήμα 2.2: Συνεισφορά των runaways στην αριθμητική πυκνότητα, πυκνότητα ενέργειας και πυκνότητα ρεύματος. Οι τιμές του διαγράμματος αντιστοιχούν σε  $T_k = 2$ ,  $|E_{||}| = 0.5 \text{ V/m}$ ,  $r = 1 \text{ m}$  και  $I = 1 \text{ MA}$ . Δανεισμένο από [1].

Είναι προφανές πως αυτά εξαρτώνται από τις ποσότητες που υπολογίστηκαν και κατ' επέκταση τα παραπάνω κλάσματα εξαρτώνται από το λόγο  $\frac{n_R}{n}$ . Το διάγραμμα του σχήματος 2.2 αποκαλύπτει ότι για πυκνότητες ηλεκτρονίων στο πλάσμα  $n_{20} \approx 1$  η πυκνότητα των runaways είναι αγνοήσιμη με:

$$\frac{n_R}{n} \approx 8 \cdot 10^{-35} \quad (2.18)$$

Για πυκνότητες ηλεκτρονίων  $n_{20} \approx 0.1$  τα runaways αρχίζουν και συνεισφέρουν σημαντικά στην πυκνότητα ρεύματος και ήδη κυριαρχούν την πυκνότητα ενέργειας. Για πυκνότητες  $n_{20} \approx 0.01$  κυριαρχούν και στην πυκνότητα ρεύματος.

Από αυτήν την ανάλυση μπορεί κανείς να καταλήξει στο συμπέρασμα πως η κυριαρχία των runaways μπορεί να αποφευχθεί αν τα πειράματα σύντηξης και οι αντιδραστήρες λειτουργούν

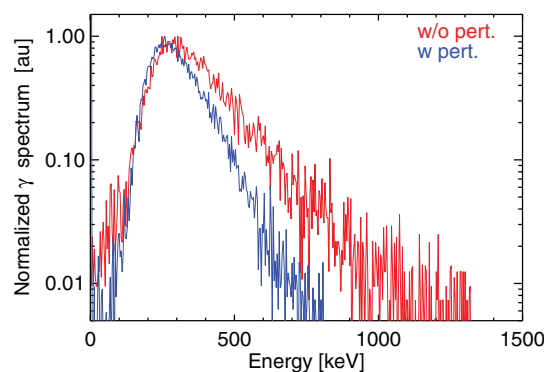
σε μεγάλες πυκνότητες. Τα ερωτήματα που ανακύπτουν λοιπόν, από αυτή τη μελέτη, είναι το ποια είναι η σημασία αυτού του πληθυσμού σωματιδίων και αν είναι επιθυμητά στο πείραμα και για ποιο λόγο. Σε αυτά δίνονται οι απαντήσεις στην επόμενη ενότητα.

## 2.4 Επίδραση των runaways στα πειράματα σύντηξης

Ο λόγος που κανείς αναρωτιέται για τα runaways είναι απλός. Όπως έχει τονιστεί αυτά επιταχύνονται σε υπερσχετικιστικές ταχύτητες που σημαίνει ότι αποκτούν τεράστια ποσά ενέργειας. Αυτά τα ποσά ενέργειας δεν τα διατηρούν για πάντα. Εντούτοις συνεχίζουν τις αλληλεπιδράσεις τους με τα σωματίδια των άλλων πληθυσμών ή διαφεύγουν από το πλάσμα και κινούνται στον υπόλοιπο χώρο. Η κίνηση αυτή στον υπόλοιπο χώρο, αναπόφευκτα θα καταλήξει στο να αλληλεπιδρούν με την ύλη των τοιχωμάτων του αντιδραστήρα, τα οποία εκτίθενται στο πλάσμα.

Τώρα λοιπόν υπεισέρχεται το θέμα της αλληλεπίδρασής τους με την ύλη. Σαν λεπτόνια, είναι γνωστό πως κατά τη διέλευσή τους στην ύλη, τα ηλεκτρόνια χάνουν εκθετικά ενέργεια με το βάθος διείσδυσης. Οι μηχανισμοί που κρύβονται πίσω από αυτό είναι γνωστοί και περιλαμβάνουν ελαστικές σχεδάζσεις με τους πυρήνες, ακτινοβολία πέδησης (Bremsstrahlung), δίδυμη γένεση έπειτα από συγκρούσεις με πυρήνες, συγκρούσεις με δέσμια ηλεκτρόνια αλλά και ελεύθερα στο πλάσμα.

Έχοντας στο πίσω μέρος του μυαλού του κανείς τη θεωρία, στο πείραμα θα πρέπει να υπάρχουν τα κατάλληλα διαγνωστικά εργαλεία ώστε να παρατηρηθούν τα runaways μέσω αυτών και κατ'έπείτα να ανιχνευθεί και η ενέργειά τους ώστε να υπάρχει μία πλήρης εικόνα του ενεργειακού τους φάσματος.



Σχήμα 2.3: Κανονικοποιημένο φάσμα ακτίνων  $\gamma$  όπως ανιχνεύθηκαν στο πείραμα RFX-mod με και χωρίς rotational μαγνητικές διαταραχές (ρυθμός (2,1)). Δανεισμένο από [7].

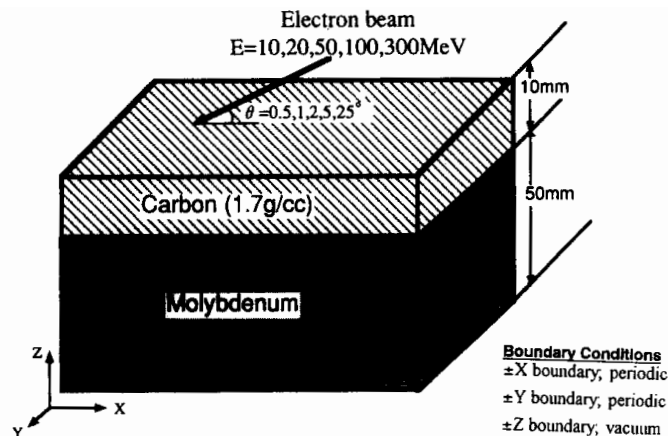
Έτσι και έγινε εν τέλει, μέλη της κοινότητας σε ποικίλα πειράματα όπως στο πείραμα RFX-mod (Σχήμα 2.3) ξεκίνησαν διαγνωστικές μελέτες προκειμένου να γίνει πειραματική εξακρίβωση του φάσματος των runaways, ώστε έπειτα να γίνει καταγραφή της έκτασης των



ζημιών που μπορούν να προκαλέσουν είτε στη διαδικασία της διατήρησης του πλάσματος αυτού καθ' αυτού είτε στα υλικά των αντιδραστήρων. Σύμφωνα με το άρθρο ανασκόπησης [5] τα runaways έχουν ένα ευρύ φάσμα ενεργειών το οποίο ξεκινάει από τις εκατοντάδες keV, όπως φανερώνει το φάσμα στο σχήμα 2.3 και μπορεί να φτάσει μέχρι και πάνω από τα 100 MeV τα οποία ανιχνεύονται μέσω των πολύ ενεργητικών ακτίνων  $\gamma$  που εκπέμπουν λόγω bremsstrahlung και ακτινοβολίας συγχρότρου, κατά την οποία ακτινοβόληση μεταβάλλεται το pitch angle [8].

Παράλληλα υπάρχει και δραστηριότητα στο πεδίο των κινήσεων των runaways σε διαταραγμένα πεδία για έλεγχο της απόκρισής τους για διάφορα είδη διαταραχών αλλά και διάφορους ρυθμούς αυτών. Στο πείραμα TEXTOR [9] για παράδειγμα, βρέθηκε πως όλα τα σωματίδια μένουν μέσα στο πλάσμα παρουσία του Dynamic Ergodic Divertor σε όλους τους ρυθμούς καθώς ακριβώς κάτω από το τοίχωμα του πλάσματος υπάρχει μία άθικτη επιφάνεια ροής. Μάλιστα στο συγκεκριμένο πείραμα, μελετήθηκε και η κανονικότητα και πολυπλοκότητα των τροχιών παρουσία των διαταραχών και βρέθηκε πως runaways με μεγαλύτερες ενέργειες είχαν πιο κανονικές τροχιές και αισθάνονταν λιγότερο τα στοχαστικά μαγνητικά πεδία.

Παρόλα αυτά, τέτοια ποσά ενέργειας φαντάζουν τρομακτικά λόγω του τι δύνανται να προκαλέσουν στον αντιδραστήρα κατά την εναπόθεσή τους και συνεπώς δόθηκε νέα αρχή για έρευνα που αφορά ακριβώς αυτό, πάλι μέσω θεωρίας ή προσομοιώσεων και διαγνωστικών από πειράματα.

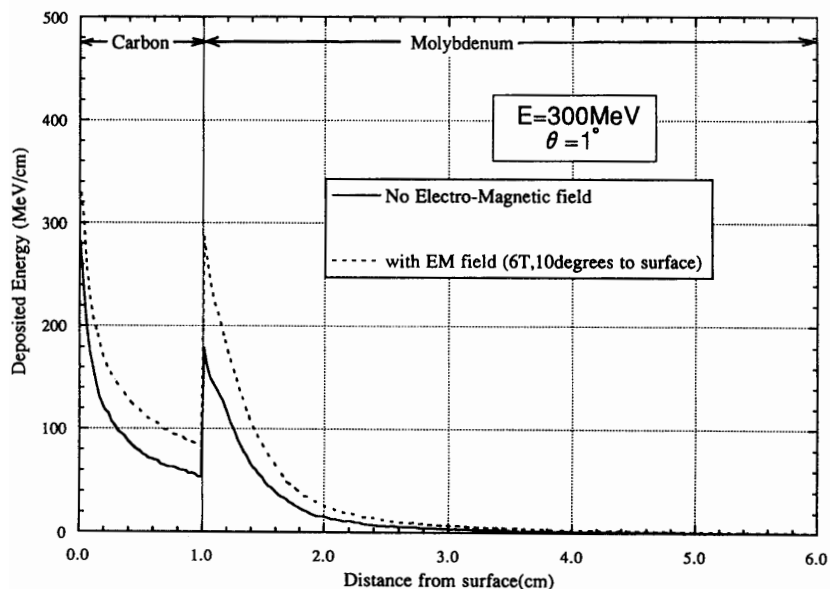


Σχήμα 2.4: Απλοποιημένο μοντέλο προσομοίωσης αποτελούμενο από ένα στρώμα 10 cm άνθρακα και άλλο ένα 50 cm μολυβδαινίου. Δανεισμένο από [10].

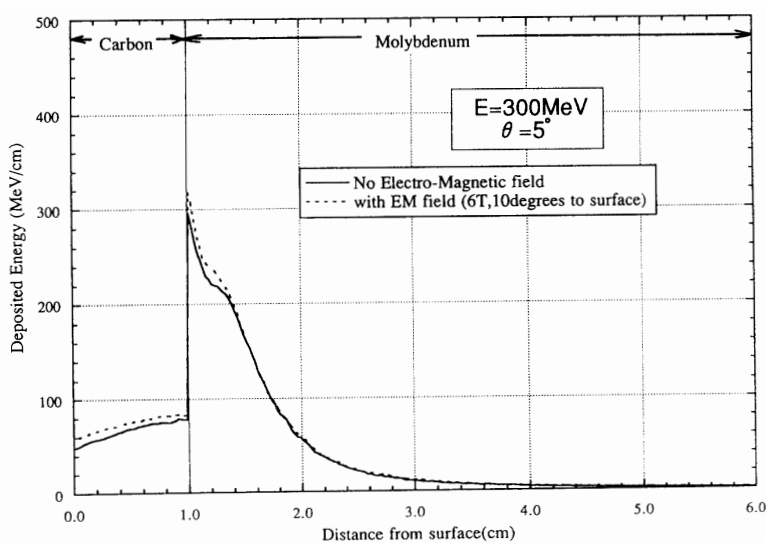
Ήδη από το 1993 έγινε σημαντική πρόοδος στις προσομοιώσεις. Συγκεκριμένα, για runaways διαφόρων ενεργειών, γινόταν επιλογή μίας γωνίας πρόσπτωσης πάνω σε ένα απλοποιημένο μοντέλο που αντιπροσωπεύει την ύλη που εκτίθεται στο πλάσμα όπως φαίνεται στο σχήμα 2.4 και αποτελείται από 2 στρώματα άνθρακα και μολυβδαινίου.

Η εναπόθεση της ενέργειας των runaways λοιπόν διακρίνεται σε 2 περιπτώσεις, μία χωρίς

την επίδραση ηλεκτρομαγνητικού πεδίου και μία με την επίδρασή του (ένταση 6 T) όπως φαίνεται στα κάτωθι σχήματα 2.5 και 2.6 για ηλεκτρόνια 300 MeV.

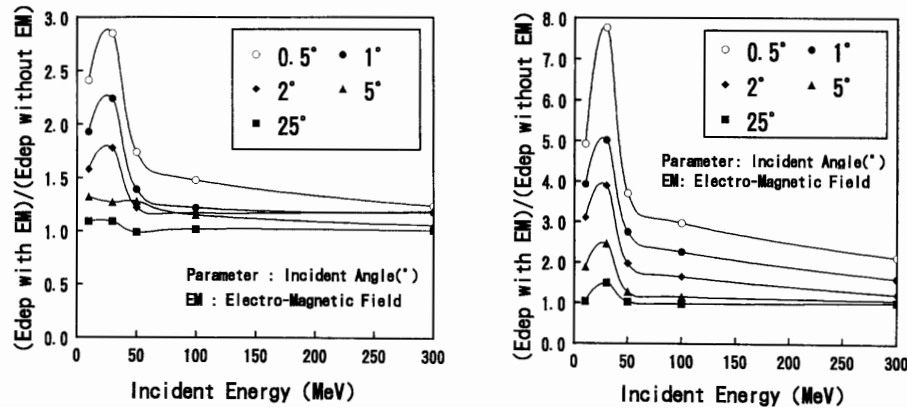


Σχήμα 2.5: Εναπόθεση ενέργειας στα στρώματα για ενέργεια 300 MeV και γωνία πρόσπτωσης  $1^\circ$ . Δανεισμένο από [10].



Σχήμα 2.6: Εναπόθεση ενέργειας στα στρώματα για ενέργεια 300 MeV και γωνία πρόσπτωσης  $5^\circ$ . Δανεισμένο από [10].

Συγκεντρωτικά για όλες τις ενέργειες και γωνίες πρόσπτωσης η συγκεκριμένη μελέτη βρίσκει πως όσο μεγαλύτερη είναι η ενέργεια τόσο μικρότερη η μεταβολή των φαινομένων με την αλλαγή της γωνίας πρόσπτωσης (σχήμα 2.7).



Σχήμα 2.7: Συγκεντρωτικό διάγραμμα με την εναπόθεση ενέργειας για τις διαφορετικές ενέργειες κατά την πρόσπτωση με παράμετρο τη γωνία πρόσπτωσης. Αριστερά για τον άνθρακα, δεξιά για το μολυβδαίνιο. Δανεισμένο από [10].

Το καταστροφικό αποτέλεσμα των runaways ξεκίνησε να γίνεται εμφανές από την ενέργεια που προβλέπεται, από προσομοιώσεις, να εναποτίθεται στους τύπους συστημάτων divertor του ITER, στα τοροειδή και πολοειδή ψυκτικά συμπλέγματα σωλήνων, σε σχέση με το ενεργειακό κατώφλι πέραν του οποίου προκαλείται σε αυτά, διάβρωση και ζημιά. (Σχήματα 2.8 και 2.9)

Toroidal coolant tube assembly	Peak deposited energy $E_{dep}$ (MeV/cm)		Damage threshold <sup>a</sup> (MJ/m <sup>2</sup> )	
	with EM	without EM	with EM	without EM
Divertor models				
Type A	281	169	30.3	50.2
Type B	283	167	30.1	50.9
Type C	256	143	33.2	59.5

<sup>a</sup> Damage threshold value of ITER/CDA divertor: 30 MJ/m<sup>2</sup>.

Σχήμα 2.8: Εναποτιθέμενη ενέργεια στα συστήματα divertor για το σύμπλεγμα τοροειδών ψυκτικών σωλήνων. Δανεισμένο από [10].

Poloidal coolant tube assembly	Peak deposited energy $E_{dep}$ (MeV/cm)		Damage threshold <sup>a</sup> (MJ/m <sup>2</sup> )	
	with EM	without EM	with EM	without EM
Divertor models				
Type A	189.6	176.0	44.9	48.2
Type B	180.6	174.3	47.2	48.8
Type C	189.1	150.6	45.0	56.4

<sup>a</sup> Damage threshold value of ITER/CDA divertor: 30 MJ/m<sup>2</sup>.

Σχήμα 2.9: Εναποτιθέμενη ενέργεια στα συστήματα divertor για το σύμπλεγμα πολοειδών ψυκτικών σωλήνων. Δανεισμένο από [10].

Στο εγγύς παρελθόν, μετά από μελέτες ακολούθησε η επιβεβαίωση όσων προέβλεψαν οι παραπάνω προσομοιώσεις. Ειδικότερα αναφέρεται πως, στα παρόντα πειράματα και μάλιστα στο ITER, το ρεύμα 15 MA του πλάσματος μπορεί να τερματιστεί μέσα σε ορισμένα milliseconds. Αυτό μπορεί να οδηγήσει στη δημιουργία τεράστιων τοροειδών ηλεκτρικών πεδίων τα

οποία μπορούν να γεννήσουν ρεύματα από runaways και να κατευθύνουν ροές θερμότητας στα εξαρτήματα που εκτίθενται στο πλάσμα και να ασκήσουν τρομερές δυνάμεις στο δοχείο όπου περιέχεται το πλάσμα [11]. Αυτά έχουν τη δυνατότητα να προκαλέσουν σημαντικό επιφανειακό λιώσιμο και διάβρωση καθώς και να καταστρέψουν αρκετά στηρικτικές δομές και ψυκτικά κανάλια. Αιτία ανησυχίας είναι και οι υψηλότερες θερμοκρασίες που παρατηρούνται στις διεπιφάνειες μεταξύ στηρικτικών δομών και υλικών επίστρωσης, διότι είναι δυνατό, να προκληθεί ως και αποκόλληση των επιστρώσεων αυτών από τις στηρικτικές δομές [12].

Αφού πλέον έχει γίνει σαφής ο ρόλος και η επίδραση των runaways στα πειράματα πυρηνικής σύντηξης, τονίζεται ότι ο στόχος της παρούσας εργασίας είναι να μελετηθούν σε μία πιο θεωρητική βάση ορισμένα τους χαρακτηριστικά. Κυρίως θα χρησιμοποιηθεί η Χαμιλτονιανή περιγραφή της κίνησης των runaways με κανονικές μεταβλητές ώστε να αποκαλυφθεί το τροχιακό φάσμα τους ως σχετικιστικά σωματίδια. Με αυτόν τον τρόπο καθίσταται δυνατή η εύρεση των τροχιών των σωματιδίων ανάλογα με την ενέργειά τους και μάλιστα η σύγκριση αυτών με το μη-σχετικιστικό μοντέλο [13], το οποίο μπορεί να φανερώσει νέες μη τετριμμένες μεταβολές στην μορφή των εν λόγω τροχιών. Επιπλέον, μπορούν να υπολογιστούν οι συχνότητες της κίνησης των runaways σε όλους τους βαθμούς ελευθερίας και η εξάρτησή τους από κινητικά και ενεργειακά χαρακτηριστικά. Οι παραπάνω υπολογισμοί εξυπηρετούν τη διερεύνηση του ρόλου της συντονιστικής επίδρασης διαφόρων τύπων υφιστάμενων διαταραχών στη δυναμική των runaways. Στο θεωρητικό μοντέλο θα χρησιμοποιηθούν και ποσότητες σχετικές με το πείραμα, κυρίως του ITER.

## 3 Τοπολογία Μαγνητικού Πεδίου - Αξονοσυμμετρική Ισορροπία

### 3.1 Καμπυλόγραμμα Συστήματα Συντεταγμένων

Η μετάβαση από το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων σε καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων και συγκεκριμένα στο τοροειδές σύστημα συντεταγμένων, γίνεται ορίζοντας συναρτήσεις μετασχηματισμού  $\vec{r}(\psi, \theta, \zeta)$  με  $\vec{r} = (x, y, z)$ . Πρώτα είναι ανάγκη να οριστεί μία συναλλοίωτη βάση:

$$\vec{e}_\psi = \partial_\psi \vec{r} \quad \vec{e}_\theta = \partial_\theta \vec{r} \quad \vec{e}_\zeta = \partial_\zeta \vec{r} \quad (3.1)$$

Η Ιακωβιανή του μετασχηματισμού είναι η ορίζουσα:

$$\mathcal{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \psi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \psi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \psi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix} \quad (3.2)$$

Αναπτύσσεται η ορίζουσα ως προς την πρώτη στήλη:

$$\mathcal{J} = \frac{\partial x}{\partial \psi} \left( \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial y}{\partial \psi} \left( \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\partial x}{\partial \zeta} \right) + \frac{\partial z}{\partial \psi} \left( \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial y}{\partial \zeta} - \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial y}{\partial \theta} \right) \quad (3.3)$$

Το παραπάνω μπορεί να γραφεί στη μορφή ενός εσωτερικού γινομένου διανυσμάτων:

$$\mathcal{J} = \left( \frac{\partial x}{\partial \psi}, \frac{\partial y}{\partial \psi}, \frac{\partial z}{\partial \psi} \right) \cdot \left( \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \theta}, - \left( \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\partial x}{\partial \zeta} \right), \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial y}{\partial \zeta} - \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial y}{\partial \theta} \right) \quad (3.4)$$

Από τη σχέση ορισμού (3.1) το πρώτο διάνυσμα βάσης αντικαθίσταται στη σχέση και το δεύτερο μέρος ξαναγράφεται:

$$\mathcal{J} = \vec{e}_\psi \cdot \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix} = \vec{e}_\psi \cdot (\vec{e}_\theta \times \vec{e}_\zeta) \quad (3.5)$$

Όμοια δουλειά μπορεί να γίνει και για τον αντίστροφο μετασχηματισμό αφού οριστεί η ανταλλοίωτη βάση:

$$\vec{e}^\psi = \nabla\psi \quad \vec{e}^\theta = \nabla\theta \quad \vec{e}^\zeta = \nabla\zeta \quad (3.6)$$

με Ιακωβιανή ορίζουσα την εξής:

$$\mathcal{J}^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\psi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial y} & \frac{\partial\psi}{\partial z} \\ \frac{\partial\theta}{\partial x} & \frac{\partial\theta}{\partial y} & \frac{\partial\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial\zeta}{\partial x} & \frac{\partial\zeta}{\partial y} & \frac{\partial\zeta}{\partial z} \end{vmatrix} \quad (3.7)$$

Με απολύτως όμοιες πράξεις καταλήγουμε σε αντίστοιχη έκφραση για την αντίστροφη Ιακωβιανή ορίζουσα του αντίστροφου μετασχηματισμού:

$$\mathcal{J}^{-1} = \nabla\psi \cdot (\nabla\theta \times \nabla\zeta) \quad (3.8)$$

Η διαφορική απόσταση σε αυτό το σύστημα συντεταγμένων δίνεται από:

$$ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = \vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta d\alpha d\beta = \vec{e}^\alpha \cdot \vec{e}^\beta d\alpha d\beta \quad (3.9)$$

Για το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι γνωστό πως ισχύει για τη συναλλοίωτη και ανταλλοίωτη βάση αντίστοιχα:

$$\vec{e}_\alpha \times \vec{e}_\beta = \mathcal{J} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \vec{e}^\gamma \quad \vec{e}^\alpha \times \vec{e}^\beta = \mathcal{J}^{-1} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \vec{e}_\gamma \quad (3.10)$$

μέσω της οποίας σχέσης ορίζεται ο μετρικός τανυστής:

$$g_{\alpha\beta} = \vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta \quad g^{\alpha\beta} = \vec{e}^\alpha \cdot \vec{e}^\beta \quad (3.11)$$

Ο μετρικός τανυστής είναι πολύ χρήσιμος καθώς επιτρέπει το ανέβασμα και το κατέβασμα δεικτών κατά βούληση ως εξής:

$$\vec{v} = v^\alpha \vec{e}_\alpha = v_\alpha \vec{e}^\alpha = g_{\alpha\beta} v^\beta \vec{e}^\alpha \quad (3.12)$$

Ο συσχετισμός της Ιακωβιανής ορίζουσας με το διαφορικό στοιχείο όγκου μπορεί να γίνει εύκολα ως εξής. Είναι δεδομένο πως το διάνυσμα θέσης  $\vec{r} = \vec{r}(x, y, z)$ . Σε ένα μετασχηματισμό η κάθε συντεταγμένη του διανύσματος θέσης είναι συνάρτηση των 3 συντεταγμένων του νέου συστήματος δηλαδή:

$$\vec{r} = \vec{r}(x, y, z) = \vec{r}(x(\psi, \theta, \zeta), y(\psi, \theta, \zeta), z(\psi, \theta, \zeta)) \quad (3.13)$$

Συνεπώς για το διαφορικό  $d\vec{r}$  είναι δυνατό μέσω της (3.1) να γραφεί ότι:

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \psi} d\psi + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \zeta} d\zeta = \vec{e}_\psi d\psi + \vec{e}_\theta d\theta + \vec{e}_\zeta d\zeta \quad (3.14)$$

Για τα διαφορικά στοιχεία επιφάνειας, διατηρείται προφανώς η μία μεταβλητή σταθερή και τότε ορίζονται ως εξής:

$$d\vec{S}_\zeta = d\vec{r}_\psi \times d\vec{r}_\theta = (\vec{e}_\psi \times \vec{e}_\theta) d\psi d\theta \quad (3.15)$$

Παρατηρεί κανείς όμως:

$$\nabla \zeta \cdot \mathcal{J} d\psi d\theta = \nabla \zeta \cdot \vec{e}_\psi \cdot (\vec{e}_\theta \times \vec{e}_\zeta) d\psi d\theta = (\vec{e}_\psi \times \vec{e}_\theta) d\psi d\theta = d\vec{S}_\zeta \quad (3.16)$$

Αυτο θα ισχύει κυκλικά και για τις υπόλοιπες διαφορικές επιφάνειες:

$$d\vec{S}_\theta = \nabla \theta \cdot \mathcal{J} d\psi d\zeta \quad (3.17)$$

$$d\vec{S}_\psi = \nabla \psi \cdot \mathcal{J} d\theta d\zeta \quad (3.18)$$

Το διαφορικό στοιχείο στοιχείο όγκου με τη βοήθεια της (3.5) λοιπόν θα δίνεται από το εξής:

$$dV = (\vec{e}_\psi d\psi) \cdot ((\vec{e}_\theta d\theta) \times (\vec{e}_\zeta d\zeta)) = \vec{e}_\psi \cdot (\vec{e}_\theta \times \vec{e}_\zeta) d\psi d\theta d\zeta = \mathcal{J} d\psi d\theta d\zeta \quad (3.19)$$

Για την ολοκλήρωση των πρώτων αυτών γενικών εισαγωγικών στοιχείων διαφορικής γεωμετρίας για γενικά καμπυλόγραμμα συστήματα συντεταγμένων μένει να γίνει αναφορά και ορισμένοι υπολογισμοί που αφορούν τους διαφορικούς τελεστές.

Για αρχή έχουμε τη βαθμίδα ενός βαθμωτού να είναι πολύ απλά:

$$\nabla f = \vec{e}^\alpha \partial_\alpha f \quad (3.20)$$

Κάθε διάνυσμα μπορεί να αναλυθεί στις συνιστώσες του παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο με κάθε συντεταγμένη του εκάστοτε συστήματος συντεταγμένων και πολλαπλασιάζοντας το εσωτερικό αυτό γινόμενο με την ισοδύναμη έκφραση του εξωτερικού γινομένου της κάθε συντεταγμένης. Πιο φανερό γίνεται μέσα από τη μαθηματική γραφή:

$$\vec{v} = \mathcal{J}[(\vec{v} \cdot \nabla \psi) \nabla \psi + (\vec{v} \cdot \nabla \theta) \nabla \theta + (\vec{v} \cdot \nabla \zeta) \nabla \zeta] \quad (3.21)$$

Με άλλα λόγια τα στοιχεία στις παρενθέσεις αποτελούν τις προβολές σε κάθε διεύθυνση ενός συστήματος συντεταγμένων και τα διανύσματα της κάθε συντεταγμένης θα αντικατασταθούν από το εξωτερικό γινόμενο των άλλων 2 ορθογωνίων διανυσμάτων της βάσης:

$$\vec{v} = \mathcal{J}[(\vec{v} \cdot \nabla \psi) \nabla \theta \times \nabla \zeta + (\vec{v} \cdot \nabla \theta) \nabla \zeta \times \nabla \psi + (\vec{v} \cdot \nabla \zeta) \nabla \psi \times \nabla \theta] \quad (3.22)$$

Επομένως η απόκλιση του διανύσματος αυτού εξ ορισμού θα είναι:

$$\nabla \cdot \vec{v} = \mathcal{J}^{-1} \partial_\alpha (\mathcal{J} \vec{v} \cdot \nabla \alpha) \quad (3.23)$$

Μένει ο στροβιλισμός διανύσματος ο οποίος δίνεται από το εξής με το  $\nabla$  να αντικαθίσταται από την (3.20):

$$\nabla \times \vec{v} = \left( \nabla \psi \frac{\partial}{\partial \psi} \right) \times \vec{v} + \left( \nabla \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \times \vec{v} + \left( \nabla \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \times \vec{v} \quad (3.24)$$

Κάθε όρος αναπτύσσεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \left( \nabla \psi \frac{\partial}{\partial \psi} \right) \times \vec{v} &= \left( \nabla \psi \frac{\partial}{\partial \psi} \right) \times (v_\psi \nabla \psi + v_\theta \nabla \theta + v_\zeta \nabla \zeta) = \\ &= \nabla \psi \times \frac{\partial (F_\psi \nabla \psi)}{\partial \psi} + \nabla \psi \times \frac{\partial (F_\theta \nabla \theta)}{\partial \theta} + \nabla \psi \times \frac{\partial (F_\zeta \nabla \zeta)}{\partial \zeta} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Ο πρώτος όρος της τελευταίας εξίσωσης είναι:

$$\begin{aligned} \nabla \psi \times \frac{\partial (F_\psi \nabla \psi)}{\partial \psi} &= \cancel{\nabla \psi \times \nabla \psi} \frac{\partial F_\psi}{\partial \psi} + \nabla \psi \times \frac{\partial (\nabla \psi)}{\partial \psi} F_\psi = \nabla \psi \times \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \hat{z} \right) F_\psi = \\ &= \nabla \psi \times \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \hat{z} \right) F_\psi = \nabla \psi \times \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \psi} \right) \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \psi} \right) \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \psi} \right) \hat{z} \right) F_\psi \end{aligned} \quad (3.26)$$

Άρα καταλήγουμε στο:

$$\nabla \psi \times \frac{\partial (F_\psi \nabla \psi)}{\partial \psi} = \nabla \psi \times \left( \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{z}}{\partial z} \right) F_\psi = 0 \quad (3.27)$$

Επιστρέφοντας στην προηγούμενη έκφραση με όμοιο τρόπο βγαίνουν και οι επόμενοι όροι:

$$\left( \nabla \psi \frac{\partial}{\partial \psi} \right) \times \vec{v} = \nabla \psi \times \nabla \theta \frac{\partial F_\theta}{\partial \psi} + \nabla \psi \times \nabla \zeta \frac{\partial F_\zeta}{\partial \psi} \quad (3.28)$$

Άρα για τους άλλους δύο όρους στον αρχικό υπολογισμό του στροβιλισμού:

$$\left( \nabla \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \times \vec{v} = \nabla \theta \times \nabla \psi \frac{\partial F_\psi}{\partial \theta} + \nabla \theta \times \nabla \zeta \frac{\partial F_\zeta}{\partial \theta} \quad (3.29)$$

$$\left( \nabla \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \times \vec{v} = \nabla \zeta \times \nabla \psi \frac{\partial F_\psi}{\partial \zeta} + \nabla \zeta \times \nabla \theta \frac{\partial F_\theta}{\partial \zeta} \quad (3.30)$$



Συνολικά λοιπόν αντικαθιστώντας τα προηγούμενα 3 έχουμε για το στροβιλισμό ενός διάνυσματος:

$$\nabla \times \vec{v} = \left( \frac{\partial F_\zeta}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial \zeta} \right) \nabla \theta \times \nabla \zeta + \left( \frac{\partial F_\zeta}{\partial \psi} - \frac{\partial F_\psi}{\partial \zeta} \right) \nabla \psi \times \nabla \zeta + \left( \frac{\partial F_\theta}{\partial \psi} - \frac{\partial F_\psi}{\partial \theta} \right) \nabla \psi \times \nabla \theta \quad (3.31)$$

Μπορεί κανείς τελικώς να γράψει και έκφραση για τη Laplacian παίρνοντας την απόκλιση αλλά για ένα διάνυσμα  $\vec{v} = \nabla f$ . Τότε είναι  $v_\beta = \partial_\beta f$  και  $v^\alpha = g^{\alpha\beta} \partial_\beta f$ . Τελικά λοιπόν:

$$\nabla^2 f = \mathcal{J}^{-1} \partial_\alpha (\mathcal{J} g^{\alpha\beta} \partial_\beta f) \quad (3.32)$$

### 3.2 Αναπαράσταση μαγνητικού πεδίου σε τοροειδή τοπολογία

Σε αυτήν την ενότητα θα αναπτυχθεί μία αναπαράσταση μαγνητικού πεδίου η οποία θα αναδεικνύει τον Hamiltonian χαρακτήρα των τροχιών, καθώς και τη χρησιμότητά της, για την περιγραφή τροχιών και μαγνητοϋδροδυναμικής ισορροπίας. [14]

Η θεώρηση ξεκινάει λαμβάνοντας το μαγνητικό πεδίο να περιγράφεται  $\vec{B}(\vec{r}(\psi, \theta, \zeta))$ , με τη μεταβλητή  $\psi$  να είναι η ροή διερχόμενη μέσα από επιφάνεια σταθερού  $\zeta$  και μεταβλητού  $\theta$ . Ουσιαστικά με αύξηση του εμβαδού μέσω της γωνίας  $\theta$ , αυξάνεται το  $\psi$ , επομένως και η ροή. Αντίστοιχα, ορίζεται η ροή διερχόμενη από επιφάνεια σταθερού  $\theta$  και μεταβλητού  $\zeta$ ,  $\psi_p$ .

$$2\pi\psi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}_\zeta = \iint \vec{B} \cdot \nabla \zeta \cdot \mathcal{J} d\psi d\theta \quad (3.33)$$

$$2\pi\psi_p = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S}_\theta = \iint \vec{B} \cdot \nabla \theta \cdot \mathcal{J} d\psi d\zeta \quad (3.34)$$

Είναι γνωστό από τη διανυσματική ανάλυση πως ένα πεδίο δίχως απόκλιση μπορεί να γραφεί ως ο στροβιλισμός ενός άλλου διανυσματικού πεδίου. Για το μαγνητικό πεδίο ισχύει απόλυτα αυτό:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B} = \nabla \times \vec{F} \quad (3.35)$$

Το πεδίο  $\vec{F} = \vec{F}(\psi, \theta, \zeta)$  αναπτύσσεται σε συνιστώσες στην ανταλλοιώτη βάση  $(\nabla\psi, \nabla\theta, \nabla\zeta)$ ,  $\vec{F} = (f_\psi, f_\theta, f_\zeta)$ . Έστω βαθμωτή συνάρτηση  $G = G(\psi, \theta, \zeta)$  τέτοια ώστε:

$$f_\theta = \frac{\partial G}{\partial \theta} \quad (3.36)$$

$$f_\zeta = \frac{\partial G}{\partial \zeta} \quad (3.37)$$

Έπεται τότε ότι:

$$\frac{\partial f_\theta}{\partial \zeta} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\partial G}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial G}{\partial \zeta} = \frac{\partial f_\zeta}{\partial \theta} \quad (3.38)$$

Στην ίδια βάση για το  $G$  είναι:

$$\nabla G = \frac{\partial G}{\partial \psi} \nabla \psi + \frac{\partial G}{\partial \theta} \nabla \theta + \frac{\partial G}{\partial \zeta} \nabla \zeta \quad (3.39)$$

Μέσω της (3.39) και του ορισμού του  $F$  προκύπτει:

$$\vec{F} = \nabla G - \left( f_\psi - \frac{\partial G}{\partial \psi} \right) \nabla \psi \quad (3.40)$$

Στην ποσότητα που πολλαπλασιάζει το  $\nabla \psi$  αποδίδεται το όνομα  $V$  και τότε:

$$\vec{F} = \nabla G - V \cdot \nabla \psi \quad (3.41)$$

Το μαγνητικό πεδίο μέσω του στροβιλισμού θα γράφεται:

$$\vec{B} = \nabla \times (\nabla G) - \nabla \times (V \cdot \nabla \psi) = -\nabla \times (V \cdot \nabla \psi) \quad (3.42)$$

Ισχύει από τη διανυσματική ανάλυση:

$$\nabla \times (f \cdot g) = f \cdot (\nabla \times g) + (\nabla f) \times g \quad (3.43)$$

Εφαρμόζοντας την (3.43) στο τελευταίο αποτέλεσμα για το μαγνητικό πεδίο δίνει:

$$\vec{B} = -\left( V \cdot (\nabla \times (\nabla \psi)) + \nabla V \times \nabla \psi \right) = \nabla \psi \times \nabla V \quad (3.44)$$

Το  $V$  επιλέγεται να είναι μια συνάρτηση της εξής μορφής [14]:

$$V = \theta - \frac{\zeta}{q(\psi)} + \lambda(\psi, \theta, \zeta) \quad (3.45)$$

Όπου:

$$q(\psi) = \frac{d\psi}{d\psi_p} \quad (3.46)$$

και τότε:

$$\nabla V = \left( \frac{\zeta}{q^2(\psi)} \frac{dq}{d\psi} + \frac{\partial \lambda}{\partial \psi} \right) \nabla \psi + \left( 1 + \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} \right) \nabla \theta + \left( -\frac{1}{q(\psi)} + \frac{\partial \lambda}{\partial \zeta} \right) \nabla \zeta \quad (3.47)$$

Αντικαθιστώντας το ως άνω στο μαγνητικό πεδίο, λαμβάνουμε:

$$\vec{B} = \left( 1 + \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} \right) \nabla \psi \times \nabla \theta - \left( \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} - \frac{1}{q(\psi)} \right) \nabla \zeta \times \nabla \psi \quad (3.48)$$

Σε αυτό το σημείο μπορούν να γίνουν αναλυτικότερα ορισμένοι υπολογισμοί που αφορούν τη ροή. Συγκεκριμένα για την τοροειδή ροή:

$$2\pi\psi = \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} \int_{\psi} \left( \left(1 + \frac{\partial\lambda}{\partial\theta}\right) \nabla\psi \times \nabla\theta - \left(\frac{\partial\lambda}{\partial\zeta} - \frac{1}{q(\psi)}\right) \nabla\zeta \times \nabla\psi \right) \nabla\zeta \mathcal{J} d\psi d\theta \quad (3.49)$$

Ο πρώτος όρος από τον ορισμό της αντίστροφης Ιακωβιανής (3.8) θα απλοποιηθεί με την Ιακωβιανή του ολοκληρώματος. Ο δεύτερος όρος είναι μηδενικός λόγω του τριπλού γινομένου που εμφανίζεται:

$$\begin{aligned} \cancel{2\pi\psi} &= \int_{\psi} \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} \left(1 + \frac{\partial\lambda}{\partial\theta}\right) d\theta d\psi = \int_{\psi} (2\pi + \lambda(\psi, \theta_0 + 2\pi, \zeta) - \lambda(\psi, \theta_0, \zeta)) d\psi = \cancel{2\pi\psi} + \\ &+ \int_{\psi} \lambda(\psi, \theta_0 + 2\pi, \zeta) - \lambda(\psi, \theta_0, \zeta) d\psi \end{aligned} \quad (3.50)$$

Άρα για κάθε  $\psi$  θα πρέπει το  $\lambda$  να είναι περιοδική συνάρτηση του  $\theta$ . Όμοια από την πολοειδή ροή έχουμε:

$$2\pi\psi_p = \int_{\psi} \int_{\zeta_0}^{\zeta_0+2\pi} \left(\frac{1}{q(\psi)} - \frac{\partial\lambda}{\partial\zeta}\right) d\zeta d\psi = \int_{\psi} \left(\frac{2\pi}{q(\psi)} - \lambda(\psi, \theta, \zeta_0 + 2\pi) + \lambda(\psi, \theta, \zeta_0)\right) d\psi \quad (3.51)$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του  $q$  (3.46):

$$\begin{aligned} \cancel{2\pi\psi_p} &= 2\pi \int_{\psi} d\psi_p + \int_{\psi} (-\lambda(\psi, \theta, \zeta_0 + 2\pi) + \lambda(\psi, \theta, \zeta_0)) d\psi = \cancel{2\pi\psi_p} \\ &+ \int_{\psi} (-\lambda(\psi, \theta, \zeta_0 + 2\pi) + \lambda(\psi, \theta, \zeta_0)) d\psi \end{aligned} \quad (3.52)$$

Με ίδια επιχειρήματα λοιπόν το  $\lambda$  πρέπει να είναι περιοδική συνάρτηση και της γωνίας  $\zeta$ . Λόγω των περιοδικοτήτων αυτών μπορεί να γίνει η υπόθεση ότι το  $\lambda$  είναι 0. Αυτή η επιλογή απλοποιεί τη μορφή του μαγνητικού πεδίου, συγκεκριμένα η (3.48) γίνεται:

$$\vec{B} = \nabla\psi \times \nabla\theta + \nabla\zeta \times \frac{\nabla\psi}{q(\psi)} \quad (3.53)$$

Σημειώνεται το εξής:

$$\vec{e}_{\psi} \cdot \nabla\psi_p = \frac{\partial\psi_p}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial\psi} + \frac{\partial\psi_p}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial\psi} + \frac{\partial\psi_p}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial\psi} = \frac{d\psi_p}{d\psi} = \frac{1}{q(\psi)} \quad (3.54)$$

Τελικά:

$$\nabla\psi \cdot \vec{e}_{\psi} \cdot \nabla\psi_p = \frac{\nabla\psi}{q(\psi)} \quad (3.55)$$

Αντικαθιστώντας την (3.55) στην (3.53):

$$\vec{B} = \nabla\psi \times \nabla\theta + \nabla\zeta \times \nabla\psi_p \quad (3.56)$$

Με 2 χρήσεις της προηγούμενης διανυσματικής ταυτότητας το μαγνητικό πεδίο γίνεται:

$$\vec{B} = \nabla \times (\psi\nabla\theta - \psi_p\nabla\zeta) = \nabla \times \vec{A} \quad (3.57)$$

Επομένως το διανυσματικό δυναμικό είναι:

$$\vec{A} = \psi\nabla\theta - \psi_p\nabla\zeta \quad (3.58)$$

### 3.3 Μαγνητοϋδροδυναμική Ισορροπία και Γενική Αναπαράσταση του Μαγνητικού Πεδίου Ισορροπίας

Παρουσία μόνο μαγνητικού πεδίου, η ασκούμενη δύναμη σε ένα διαφορικό όγκο είναι:

$$d\vec{F}_m = dq \cdot \vec{v} \times \vec{B} \quad (3.59)$$

Διαιρώντας με τον όγκο  $dV$  μεταβαίνουμε στην ίδια έκφραση αλλά για τις πυκνότητες:

$$\vec{f}_m = \rho \cdot \vec{v} \times \vec{B} = \vec{j} \times \vec{B} \quad (3.60)$$

Η δύναμη που ασκείται στην επιφάνεια που καλύπτει τον προαναφερθέντα όγκο λόγω πίεσης  $p$  είναι:

$$F_p = \int p dS \quad (3.61)$$

Η ισορροπία δυνάμεων οδηγεί στη συνθήκη:

$$\int \vec{f}_m dV = \int p dS = \int \nabla p dV \quad (3.62)$$

Καταλήγει κανείς μέσω της (3.60):

$$\nabla p = \vec{j} \times \vec{B} \quad (3.63)$$

Επιλέγει κανείς την πίεση να είναι συνάρτηση  $p = p(\psi)$  από την προηγούμενη σχέση:

$$\vec{j} \times \vec{B} = \frac{\partial p}{\partial \psi} \nabla\psi \Rightarrow \vec{j} \perp \nabla\psi, \vec{B} \perp \nabla\psi \quad (3.64)$$

Οπότε η πυκνότητα ρεύματος μπορεί να γραφεί σαν ένα εξωτερικό γινόμενο:

$$\vec{j} = \nabla\psi \times \nabla W \quad (3.65)$$

Το  $W$  είναι μία συνάρτηση  $W = W(\psi, \theta, \zeta) = \bar{I}'(\psi)\theta + \bar{g}'(\psi)\zeta + \alpha(\psi, \theta, \zeta)$ , όπου το  $\alpha$  είναι αυθαίρετη συνάρτηση των τριών μεταβλητών. Από τον ορισμό του  $W$  παίρνει κανείς το διαφορικό:

$$\nabla W = \left( \frac{\partial \bar{I}'}{\partial \psi} \theta + \frac{\partial \bar{g}'}{\partial \psi} \zeta + \frac{\partial \alpha}{\partial \psi} \right) \nabla \psi + (\bar{I}'(\psi) + \alpha'_\theta) \nabla \theta + (\bar{g}'(\psi) + \alpha'_\zeta) \nabla \zeta \quad (3.66)$$

Η πυκνότητα ρεύματος με βάση τα τελευταία γράφεται:

$$\vec{j} = (\bar{I}'(\psi) + \alpha'_\theta) \nabla \psi \times \nabla \theta + (\bar{g}'(\psi) + \alpha'_\zeta) \nabla \psi \times \nabla \zeta \quad (3.67)$$

Με όμοια λογική με το  $\lambda$  ορίζονται τα τοροειδή και πολοειδή ρεύματα:

$$2\pi \bar{I} = \iint \vec{j} d\vec{S}_\zeta \quad (3.68)$$

$$2\pi \bar{g} = \iint \vec{j} d\vec{S}_\theta \quad (3.69)$$

Η ίδια αυτή λογική θα οδηγήσει στο γεγονός ότι το  $\alpha(\psi, \theta, \zeta)$  είναι περιοδική συνάρτηση των  $\theta$  και  $\zeta$ . Αυτό οδηγεί στη χρήση άλλης μίας αυθαίρετης συνάρτησης των τριών μεταβλητών  $\sigma$ :

$$I(\psi, \theta, \zeta) = \bar{I}(\psi) + \sigma'_\theta \quad (3.70)$$

$$g(\psi, \theta, \zeta) = \bar{g}(\psi) + \sigma'_\zeta \quad (3.71)$$

$$\delta(\psi, \theta, \zeta) = \sigma'_\psi - \alpha(\psi, \theta, \zeta) \quad (3.72)$$

Χρειάζεται η  $\sigma$  να είναι περιοδική ως προς  $\theta$  και  $\zeta$  ώστε η μέση τιμή των  $I$  και  $g$  ως προς τις δύο γωνίες αυτές να ισούνται με τα αντίστοιχα  $\bar{I}, \bar{g}$ . Από την ηλεκτρομαγνητική θεωρία είναι γνωστό πως:

$$\vec{j} = \nabla \times \vec{B} \quad (3.73)$$

Μέσα από τη σχέση (3.31) για το στροβιλισμό που δώθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο και προκειμένου να ικανοποιείται η προηγούμενη σχέση γίνεται η υπόθεση πως το μαγνητικό πεδίο έχει τη μορφή:

$$\vec{B} = g \nabla \zeta + I \nabla \theta + \delta \nabla \psi \quad (3.74)$$

Μέσω των (3.70), (3.71) και (3.72) γίνεται:

$$\vec{B} = (\bar{g}(\psi) + \sigma'_\zeta) \nabla \zeta + (\bar{I}(\psi) + \sigma'_\theta) \nabla \theta + (\sigma'_\psi - \alpha) \nabla \psi \quad (3.75)$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω έκφραση και αντικαθιστώντας την κάθε παράγωγο στην (3.31) καταλήγει κανείς στην έκφραση για το  $\vec{j}$  όπως στην (3.67). Συνεπώς η υπόθεση για το μαγνητικό πεδίο είναι σωστή και το μαγνητικό πεδίο αυτό είναι και μοναδικό, από το αντίστοιχο θεώρημα που διέπει τις λύσεις των εξισώσεων του Maxwell.

### 3.4 Αξονοσυμμετρικό Μαγνητικό Πεδίο Ισορροπίας

Η μετάβαση στην ειδικότερη περίπτωση ενός αξονοσυμμετρικού μαγνητικού πεδίου ισορροπίας πραγματοποιείται λαμβάνοντας αφενός ότι το  $\lambda = 0$ , αφετέρου ότι όλες οι προαναφερθείσες συναρτήσεις, που εμπλέκονται στον ορισμό του μαγνητικού πεδίου, είναι ανεξάρτητες της γωνίας  $\zeta$  [15]. Χρησιμοποιώντας την (3.56) και την (3.55) βρῖσκει κανείς:

$$\frac{\vec{B} \cdot \nabla \zeta}{\vec{B} \cdot \nabla \theta} = \frac{\nabla \zeta \cdot (\nabla \psi \times \nabla \theta)}{\nabla \theta \cdot (\nabla \zeta \times \nabla \psi_p)} = \frac{\nabla \zeta \cdot (\nabla \psi \times \nabla \theta)}{\nabla \theta \cdot (\nabla \zeta \times \nabla \psi)} q(\psi) = q(\psi) \quad (3.76)$$

Στην (3.76) πολλαπλασιάζεται σε αριθμητή και παρονομαστή ο όρος  $\vec{B} \cdot d\vec{r}$ :

$$\frac{\vec{B} \cdot d\vec{r} \cdot \vec{B} \cdot \nabla \zeta}{\vec{B} \cdot d\vec{r} \cdot \vec{B} \cdot \nabla \theta} = \frac{|\vec{B}|^2 \cdot d\vec{r} \cdot \nabla \zeta}{|\vec{B}|^2 \cdot d\vec{r} \cdot \nabla \theta} = \frac{d\vec{r} \cdot \nabla \zeta}{d\vec{r} \cdot \nabla \theta} = \frac{d\zeta}{d\theta} = q(\psi) \quad (3.77)$$

Παραγωγίζοντας τις (3.70) και (3.71):

$$\frac{\partial I}{\partial \zeta} = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \zeta \partial \theta} \quad (3.78)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \zeta \partial \theta} \quad (3.79)$$

Επομένως είναι ξεκάθαρο ότι οι 2 παράγωγοι των ποσοτήτων  $I, g$  ισούνται και υπενθυμίζοντας ότι έχει γίνει η υπόθεση πως αυτές οι ποσότητες είναι ανεξάρτητες της γωνίας  $\zeta$  οι παράγωγοι είναι ίσες με 0, καθιστώντας το  $g = g(\psi)$ . Σε αυτόν τον τύπο ισορροπίας γίνεται η θεώρηση  $\sigma = \alpha = 0 \Rightarrow \delta = 0$ . Τελικά στην αξονοσυμμετρική ισορροπία έχουμε:

$$I = I(\psi) = \bar{I}(\psi) \quad (3.80)$$

$$g = g(\psi) = \bar{g}(\psi) \quad (3.81)$$

$$\delta = 0 \quad (3.82)$$

Σε αυτό το σημείο πραγματοποιείται μετασχηματισμός από το καρτεσιανό στο κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων  $(X, Z, \phi)$ . Σημειώνονται οι εξισώσεις του ευθέως και του αντίστροφου μετασχηματισμού:

$$x = X \cos \phi \quad X = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3.83)$$

$$y = X \sin \phi \quad \phi = \arctan \frac{y}{x} \quad (3.84)$$

$$z = Z \quad Z = z \quad (3.85)$$

Το μοναδιαίο διάνυσμα  $\hat{\phi}$  είναι το ακόλουθο:

$$\hat{\phi} = \frac{\left. \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \right|_{X,Z}}{\left| \left. \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \right|_{X,Z} \right|} = \frac{(-X \sin \phi, X \cos \phi, 0)}{X} = \frac{(-y, x, 0)}{X} \quad (3.86)$$

Ισχύει επίσης:

$$\nabla \phi = \left( \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = \left( \frac{-y}{X^2}, \frac{x}{X^2}, 0 \right) = \frac{(-y, x, 0)}{X^2} \quad (3.87)$$

Τα τελευταία συνοψίζονται στο εξής:

$$\nabla \phi = \frac{\hat{\phi}}{X} \quad (3.88)$$

Η επιβολή της τοροειδούς συμμετρίας, η οποία χαρακτηρίζει τις διατάξεις σύντηξης, γίνεται μέσω της καθετότητας του  $\nabla \phi$  στα  $\nabla \psi, \nabla \theta$ . Οι γωνίες  $\zeta$  και  $\phi$  συνδέονται μέσω της σχέσης [16]:

$$\zeta = \phi - \nu(\psi, \theta) \quad (3.89)$$

Η  $\nu(\psi, \theta)$  είναι κατά βάση άγνωστη συνάρτηση η οποία εξαρτάται από την κατάσταση ισορροπίας και αναδεικνύει τη γενικότερη σχέση που διέπει τις δύο γωνίες. Μέσω της (3.89) το διάνυσμα βάσης  $\nabla \zeta$  γίνεται:

$$\nabla \zeta = \nabla \phi - \nabla \nu(\psi, \theta) \quad (3.90)$$

Ο διαφορικός τελεστής μέσω κανόνων αλυσίδας στις μεταβλητές  $\psi, \theta$  είναι:

$$\nabla = \left( \left( \frac{\partial}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \right), \left( \frac{\partial}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} \right), \left( \frac{\partial}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \right) \quad (3.91)$$

Καταλήγοντας έτσι στο εξής:

$$\nabla \zeta = \nabla \phi - \frac{\partial \nu}{\partial \psi} \nabla \psi - \frac{\partial \nu}{\partial \theta} \nabla \theta \quad (3.92)$$

Για το σύστημα  $(\psi, \theta, \phi)$  η Ιακωβιανή  $\mathcal{J}'$  σύμφωνα με την (3.5) είναι  $\mathcal{J}' = \vec{e}_\psi \cdot (\vec{e}_\theta \times \vec{e}_\phi)$  και για την αντίστροφη από την (3.8) ισχύουν τα ίδια και μέσω της (3.89) έχει κανείς για την  $\mathcal{J}$ :

$$\frac{1}{\mathcal{J}} = \left( \nabla\phi - \frac{\partial\nu}{\partial\psi}\nabla\psi - \frac{\partial\nu}{\partial\theta}\nabla\theta \right) \cdot (\nabla\psi \times \nabla\theta) \quad (3.93)$$

Οι τελευταίοι δύο όροι είναι μηδέν λόγω βασικών ιδιοτήτων του εξωτερικού γινομένου οπότε:

$$\frac{1}{\mathcal{J}} = \nabla\phi \cdot (\nabla\psi \times \nabla\theta) = \frac{1}{\mathcal{J}'} \Rightarrow \mathcal{J} = \mathcal{J}' = \vec{e}_\psi \cdot (\vec{e}_\theta \times \vec{e}_\phi) \quad (3.94)$$

Η εξίσωση (3.56) συνεπάγεται πως  $\vec{B} \cdot \nabla\psi = 0$ , άρα το εσωτερικό γινόμενο με το  $\nabla\zeta$  μέσω της (3.89) δίνει:

$$\vec{B} \cdot \nabla\zeta = \vec{B} \cdot \nabla\phi - \frac{\partial\nu}{\partial\theta}\vec{B} \cdot \nabla\theta \quad (3.95)$$

Επικαλούμενος κανείς την τοροειδή συμμετρία που αναφέρθηκε προηγούμενα καθώς και τη μορφή του μαγνητικού πεδίου ισορροπίας της εξίσωσης (3.74) λαμβάνει για την προβολή του μαγνητικού πεδίου ως προς το διάνυσμα βάσης  $\nabla\phi$ :

$$\vec{B} \cdot \nabla\phi = g\nabla\zeta \cdot \nabla\phi = g \left( \nabla\phi - \frac{\partial\nu}{\partial\psi}\nabla\psi - \frac{\partial\nu}{\partial\theta}\nabla\theta \right) \cdot \nabla\phi = g|\nabla\phi|^2 = \frac{g}{X^2} \quad (3.96)$$

Από την άλλη, η προβολή στο  $\nabla\theta$  μέσω της (3.53) και της (3.46) είναι:

$$\vec{B} \cdot \nabla\theta = \frac{(\nabla\zeta \times \nabla\psi) \cdot \nabla\theta}{q} = \frac{1}{\mathcal{J}q} \quad (3.97)$$

Επιλύεται η (3.95) ως προς την παράγωγο της άγνωστης συνάρτησης  $\nu$ :

$$\frac{\partial\nu}{\partial\theta} = \frac{\vec{B} \cdot \nabla\phi}{\vec{B} \cdot \nabla\theta} - \frac{\vec{B} \cdot \nabla\zeta}{\vec{B} \cdot \nabla\theta} \quad (3.98)$$

Ο πρώτος λόγος των προβολών δίνεται από τις (3.96) και (3.97) ενώ ο δεύτερος λόγος αναγνωρίζεται ότι είναι η εξίσωση (3.76) από την αρχή αυτής της ενότητας.

$$\frac{\partial\nu}{\partial\theta} = \frac{gq\mathcal{J}}{X^2} - q \quad (3.99)$$

Συνεπώς, η εκάστοτε μορφή ισορροπίας που υπογραμμίστηκε ότι περιγράφεται από τις συναρτήσεις  $g, q$ , οι οποίες επίσης καθορίζουν το μαγνητικό πεδίο και τις συντεταγμένες του, καθορίζει τελικά και τη επακριβώς και τη μορφή της συνάρτησης που συνδέει τη γενική συντεταγμένη  $\zeta$  με την τοροειδή γωνία  $\phi$ . Για μαγνητικό πεδίο της μορφής (3.74) σε αξονοσυμμετρική ισορροπία τότε χρησιμοποιώντας την (3.89):

$$\vec{B} = g\nabla\zeta + I\nabla\theta + \delta\nabla\psi = g\nabla\phi + \left( I - g\frac{\partial\nu}{\partial\theta} \right) \nabla\theta + \left( \delta - g\frac{\partial\nu}{\partial\psi} \right) \nabla\psi \quad (3.100)$$



Για κάθε διάνυσμα βάσης ισχύει πως:

$$\nabla\psi = \frac{\vec{e}_\psi}{|\vec{e}_\psi|^2} \quad (3.101)$$

Με αυτή τη λογική το μαγνητικό πεδίο ξαναγράφεται:

$$\vec{B} = g \frac{\vec{e}_\phi}{|\vec{e}_\phi|^2} + \left( I - g \frac{\partial\nu}{\partial\theta} \right) \frac{\vec{e}_\theta}{|\vec{e}_\theta|^2} + \left( \delta - g \frac{\partial\nu}{\partial\psi} \right) \frac{\vec{e}_\psi}{|\vec{e}_\psi|^2} \quad (3.102)$$

Από όπου άμεσα αντλούμε τις εξής πληροφορίες:

$$B^\phi = \frac{B_\phi}{|\vec{e}_\phi|^2} = \frac{g}{|\vec{e}_\phi|^2} \quad (3.103)$$

$$B^\theta = \frac{B_\theta}{|\vec{e}_\theta|^2} = \frac{I - g \frac{\partial\nu}{\partial\theta}}{|\vec{e}_\theta|^2} \quad (3.104)$$

$$B^\psi = \frac{B_\psi}{|\vec{e}_\psi|^2} = \frac{\delta - g \frac{\partial\nu}{\partial\psi}}{|\vec{e}_\psi|^2} \quad (3.105)$$

Είναι χρήσιμο να σημειωθεί πως για  $\alpha = \psi, \theta, \zeta$  και οι άλλες δύο συντεταγμένες μένουν σταθερές τότε:

$$\vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}^\alpha = \left( \frac{\partial x}{\partial \alpha} \hat{x} + \frac{\partial y}{\partial \alpha} \hat{y} + \frac{\partial z}{\partial \alpha} \hat{z} \right) \left( \frac{\partial \alpha}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial \alpha}{\partial z} \hat{z} \right) = \left( \frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial z} \right) = 1 \quad (3.106)$$

Επιστρέφοντας λοιπόν στο (3.53) και μέσω της (3.106):

$$\vec{B} = \nabla\psi \times \nabla\theta + \nabla\zeta \times \nabla\psi_p = (\vec{e}_\zeta \cdot \nabla\zeta) \cdot \nabla\psi \times \nabla\theta + (\vec{e}_\theta \cdot \nabla\theta) \cdot \nabla\zeta \times \nabla\psi_p \quad (3.107)$$

Αυτό προφανώς από τον ορισμό της Ιακωβιανής δίνει:

$$\vec{B} = \frac{\vec{e}_\zeta}{\mathcal{J}} + \frac{\vec{e}_\theta}{\mathcal{J}q} \quad (3.108)$$

Ισοδύναμα στην ίδια έκφραση του μαγνητικού πεδίου επικαλείται η εξίσωση (3.92):

$$\vec{B} = \nabla\psi \times \nabla\theta + \left( \nabla\phi - \frac{\partial\nu}{\partial\psi} \nabla\psi - \frac{\partial\nu}{\partial\theta} \nabla\theta \right) \times \nabla\psi_p \quad (3.109)$$

Κάνοντας αναγωγή ομοίων όρων:

$$\vec{B} = \nabla\psi \times \nabla\theta \left( 1 + \frac{1}{q} \frac{\partial\nu}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{q} \nabla\phi \times \nabla\psi \quad (3.110)$$

Εφαρμόζοντας την ίδια τεχνική με πριν:

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \vec{e}_\phi \cdot \nabla\phi \cdot (\nabla\psi \times \nabla\theta) \left(1 + \frac{1}{q} \frac{\partial\nu}{\partial\theta}\right) + \vec{e}_\theta \cdot \nabla\theta \cdot \left(\frac{1}{q} \nabla\phi \times \nabla\psi\right) = \\ &= \frac{\vec{e}_\phi}{\mathcal{J}} \left(1 + \frac{1}{q} \frac{\partial\nu}{\partial\theta}\right) + \frac{\vec{e}_\theta}{\mathcal{J}}\end{aligned}\quad (3.111)$$

Η συνθήκη ισορροπίας γράφεται:

$$\vec{j} \times \vec{B} = \frac{\partial p}{\partial\psi} \nabla\psi = \frac{\partial p}{\partial\psi_p} \cdot \nabla\psi_p \quad (3.112)$$

Αναπτύσσονται τα εξωτερικά γινόμενα, γράφοντας τα δύο διανύσματα στη συναλλοίωτη μορφή τους:

$$(j^\psi \vec{e}_\psi + j^\theta \vec{e}_\theta + j^\phi \vec{e}_\phi) \times (B^\psi \vec{e}_\psi + B^\theta \vec{e}_\theta + B^\phi \vec{e}_\phi) = \frac{\partial p}{\partial\psi} \nabla\psi \quad (3.113)$$

Γίνονται οι πράξεις στο αριστερό μέρος της εξίσωσης:

$$((j^\phi B^\psi - j^\psi B^\phi) \vec{e}_\phi \times \vec{e}_\psi + (j^\phi B^\theta - j^\theta B^\phi) \vec{e}_\phi \times \vec{e}_\theta + (j^\psi B^\theta - j^\theta B^\psi) \vec{e}_\psi \times \vec{e}_\theta) = \frac{\partial p}{\partial\psi} \nabla\psi \quad (3.114)$$

Πολλαπλασιάζεται εσωτερικά και στα δύο μέλη της εξίσωσης το  $\vec{e}_\psi$  και ως εκ τούτου απομένει μόνο ένας όρος:

$$(j^\phi B^\theta - j^\theta B^\phi) \vec{e}_\psi \cdot (\vec{e}_\phi \times \vec{e}_\theta) = \mathcal{J} (j^\phi B^\theta - j^\theta B^\phi) = \frac{\partial p}{\partial\psi} \nabla\psi \cdot \vec{e}_\psi = \frac{\partial p}{\partial\psi} \quad (3.115)$$

Συνδυάζοντας τις (3.96) και την (3.103) γίνεται φανερό ότι:

$$|\vec{e}_\phi|^2 = X^2 \quad (3.116)$$

$$B^\phi = \frac{g}{X^2} \quad (3.117)$$

Επίσης από την (3.108):

$$B^\theta = \frac{1}{\mathcal{J}q} \quad (3.118)$$

Πολλαπλασιάζοντας με  $\nabla\phi$  το νόμο Maxwell (3.73) και μέσω του γεγονότος, ότι από την τοροειδή συμμετρία ισχύει πως  $\nabla\phi \perp \vec{e}_\psi$  και  $\nabla\phi \perp \vec{e}_\theta$  θα προκύψει το ακόλουθο τριπλό γινόμενο:

$$j^\phi = \nabla\phi \cdot (\nabla \times \vec{B}) = \nabla \cdot (\vec{B} \times \nabla\phi) = \nabla \cdot ((\nabla\psi \times \nabla\theta) \times \nabla\phi + (\nabla\zeta \times \nabla\psi_p) \times \nabla\phi) \quad (3.119)$$

Σημειώνεται η διανυσματική ταυτότητα:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C} \quad (3.120)$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα (3.120) η συνιστώσα της πυκνότητας ρεύματος γίνεται:

$$j^\phi = \nabla \cdot (\nabla\zeta \times \nabla\psi_p) \times \nabla\phi = \nabla \cdot \left( (\nabla\zeta \cdot \nabla\phi)\nabla\psi_p - \left( \nabla\zeta \cdot \frac{\nabla\phi}{q} \right) \nabla\phi \right) \quad (3.121)$$

Ο εναπομείνας όρος λόγω της (3.92) είναι:

$$j^\phi = \nabla \cdot ((\nabla\zeta \cdot \nabla\phi)\nabla\psi_p) = \nabla \cdot (|\nabla\phi|^2 \nabla\psi_p) = \nabla \cdot \left( \frac{\nabla\psi_p}{X^2} \right) \quad (3.122)$$

Για τη συνιστώσα  $j^\theta$  γίνεται όμοια εργασία με τη διαφορά ότι το μαγνητικό πεδίο θεωρείται της μορφής (3.74), με την επιβολή της αξονοσυμμετρικής ισορροπίας, για  $\delta = 0$ :

$$\begin{aligned} j^\theta &= \nabla\theta \cdot (\nabla \times \vec{B}) = \nabla \cdot ((g\nabla\zeta + I\nabla\theta) \times \nabla\theta) = \nabla g \cdot (\nabla\zeta \times \nabla\theta) = -\nabla g \cdot \left( \frac{\nabla\psi}{\mathcal{J}} \right) \\ &= -\frac{1}{\mathcal{J}} \frac{\partial g}{\partial \psi} = -\frac{g'}{\mathcal{J}} \end{aligned} \quad (3.123)$$

Ακολουθεί η αντικατάσταση των (3.96), (3.97), (3.122) και (3.123) στην (3.115):

$$\mathcal{J} \left( -\frac{g'}{\mathcal{J}} \frac{g}{X^2} - \nabla \cdot \left( \frac{\nabla\psi}{qX^2} \right) \frac{1}{\mathcal{J}q} \right) = \frac{\partial p}{\partial \psi} \quad (3.124)$$

Απλοποιώντας τις Ιακωβιανές και μεταφέροντας κάθε όρο στο δεξί μέρος της εξίσωσης καταλήγει κανείς στην εξίσωση Grad - Shafranov:

$$\nabla \cdot \left( \frac{\nabla\psi}{qX^2} \right) + q(\psi) \frac{\partial p(\psi)}{\partial \psi} + \frac{\partial g(\psi)}{\partial \psi} \frac{q(\psi)g(\psi)}{X^2} = 0 \quad (3.125)$$

Η Grad - Shafranov είναι απόρροια της συνθήκης ισορροπίας στο πλάσμα (3.63), ειδικότερα για αξονοσυμμετρική ισορροπία. Επομένως, οι συναρτήσεις  $(g, p, q)$  επιβάλλεται να επιλεγούν κατάλληλα σε συνδυασμό με το σύστημα συντεταγμένων του μαγνητικού πεδίου  $(\psi, \theta, \phi)$ , ώστε να ικανοποιείται η Grad - Shafranov, προκειμένου να πετύχει κανείς ισορροπία.

### 3.5 Αξονοσυμμετρικό Μαγνητικό Πεδίο στην Προσέγγιση Large Aspect Ratio (LAR)

Σε αυτήν την ενότητα λαμβάνονται σαν υπόθεση, όλα τα προηγούμενα αποτελέσματα περί αξονοσυμμετρικής ισορροπίας και πιο συγκεκριμένα ενδιαφέρουν οι (3.103), (3.105) και (3.104) και οι ισοδύναμες αντίστοιχες τους, (3.117), (3.108) και το γεγονός ότι  $B^\psi = 0$ . Από αυτές, παρήχθησαν νέες εξισώσεις οι οποίες πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα, δηλαδή η (3.99). Η δεύτερη αφορά την ίδια συνάρτηση και προκύπτει μέσω της  $B^\psi$  συνδυάζοντας τη συνθήκη για  $\delta = 0$ . Τότε:

$$\frac{\delta^0 - g \frac{\partial \nu}{\partial \psi}}{|\vec{e}_\psi|^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \nu}{\partial \psi} = 0 \quad (3.126)$$

Πέρα από την ισχύ των εξισώσεων αυτών, υπογραμμίστηκε πως ο ορισμός μίας κατάστασης αξονοσυμμετρικής ισορροπίας περιλαμβάνει και τον καθορισμό του συστήματος συντεταγμένων, δηλαδή τις συναρτήσεις  $\psi, \theta, \phi$  και τη συνάρτηση του παράγοντα ασφαλείας  $q = \frac{d\psi}{d\psi_p}$ . Η επιλογή τους δεν είναι αυθαίρετη διότι και αυτές οι συναρτήσεις με τη σειρά τους πρέπει να είναι κατάλληλες ώστε να ικανοποιείται η Grad - Shafranov (3.125). Αυτό μπορεί να γίνει επιλέγοντας 2 από τις  $g, p, q$  και επιβάλλοντας στην τρίτη να ικανοποιεί την Grad - Shafranov. Μία λύση λοιπόν της διαφορικής εξίσωσης αυτής αποδεικνύεται ότι είναι [17]:

$$X = R + r \cos \theta - \Delta(r) \quad (3.127)$$

$$Z = r \cos \theta \quad (3.128)$$

$$\phi = \phi \quad (3.129)$$

Η συνάρτηση  $\Delta(r)$  προκύπτει κατά τη λύση της Grad - Shafranov η οποία εξαρτάται από τη μεταβλητή  $r$  και από την πίεση του πλάσματος, και ουσιαστικά υποδηλώνει τη μετακίνηση του μαγνητικού άξονα στο χώρο. Σε αυτό το σημείο γίνεται μία υπόθεση για το  $\psi$  η οποία θα επαληθευτεί στην πορεία της ενότητας.

$$\psi = \frac{r^2}{2} \quad (3.130)$$

Το aspect ratio  $r/R$  του τόρου λειτουργεί ως παράμετρος τάξης στη θεώρηση του LAR αφού  $r \ll R \Rightarrow \epsilon \ll 1$  όπου μάλιστα κανονικοποιούμε και ως προς τη μεγάλη ακτίνα ( $R = 1$ ) και γενικά αγνοούνται όροι τάξης μεγαλύτερης του 2. Στο LAR προσεγγιστικά λοιπόν θα είναι  $\Delta = 0$  και  $g = 1$ .

Επομένως το σετ λύσεων της (3.125) θα είναι:

$$X = 1 + r \cos \theta \quad (3.131)$$

$$Z = r \cos \theta \quad (3.132)$$

$$\phi = \phi \quad (3.133)$$

Μέσω του μετασχηματισμού προς το κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων  $(X, Z, \phi)$  δύνανται να υπολογιστούν οι  $\theta = \theta(x, y, z), \phi = \phi(x, y, z)$  καθώς και το  $r = r(x, y, z)$ . Από την (3.130) μπορούμε να γράψουμε:

$$\psi(x, y, z) = \frac{r^2}{2} \Rightarrow \nabla\psi = r\nabla r \quad (3.134)$$

Έχει ξαναχρησιμοποιηθεί πιο πριν το ότι κάθε διάνυσμα βάσης γράφεται:

$$\vec{e}_\alpha = \left( \frac{\partial x}{\partial \alpha}, \frac{\partial y}{\partial \alpha}, \frac{\partial z}{\partial \alpha} \right) \quad (3.135)$$

Κάθε μία από αυτές τις συνιστώσες μέσω κανόνων αλυσίδας μπορεί κανείς να τις εκφράσει συναρτήσει μεταβλητών άλλου συστήματος, εν προκειμένω, στο κυλινδρικό και έστω μία μεταβλητή  $i$  κάποια από τις  $x, y, z$  τότε:

$$\frac{\partial i}{\partial \alpha} = \frac{\partial i}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial \alpha} + \frac{\partial i}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial \alpha} + \frac{\partial i}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \quad (3.136)$$

Με αντικατάσταση λοιπόν και χρησιμοποιώντας τις (3.83), (3.84), (3.131) και (3.132):

$$\vec{e}_\theta = (-r \cos \phi \sin \theta, -r \sin \phi \sin \theta, r \cos \theta) \quad (3.137)$$

$$\vec{e}_r = (\cos \theta \cos \phi, \sin \phi \cos \theta, \sin \theta) \quad (3.138)$$

Εύκολα παρατηρεί κανείς πως:

$$|\vec{e}_\theta| = r \Rightarrow \vec{e}_\theta = r\hat{\theta} \quad (3.139)$$

$$|\vec{e}_r| = 1 \Rightarrow \vec{e}_r = \hat{r} \quad (3.140)$$

$$\vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_r = 0 \Rightarrow \vec{e}_\theta \perp \vec{e}_r \quad (3.141)$$

Λόγω της τοροειδούς συμμετρίας λοιπόν θα ισχύει ότι:

$$\vec{e}_\phi \perp \vec{e}_\theta, \quad \vec{e}_\phi \perp \vec{e}_r \quad (3.142)$$

Συνεπώς τα συστήματα  $(r, \theta, \phi)$  και  $(\psi, \theta, \phi)$  είναι ορθοκανονικά και μάλιστα μπορεί να γραφεί πως:

$$\nabla\theta = \frac{\hat{\theta}}{r} \quad (3.143)$$

$$\nabla r = \hat{r} \quad (3.144)$$

Μέσω της (3.88):

$$\vec{e}_\phi = X\hat{\phi} \quad (3.145)$$

Από την (3.94):

$$J = \vec{e}_\psi \cdot (\vec{e}_\theta \times \vec{e}_\phi) = \vec{e}_\phi \cdot (\vec{e}_\psi \times \vec{e}_\theta) = X \quad (3.146)$$

Το μαγνητικό πεδίο για LAR γίνεται πλέον να υπολογιστεί μέσω των (3.117), (3.118):

$$B^\phi = \frac{1}{X^2} \quad (3.147)$$

$$B^\theta = \frac{1}{Xq} \quad (3.148)$$

$$B^\psi = 0 \quad (3.149)$$

Σε πλήρη γραφή δηλαδή:

$$\vec{B} = \frac{1}{X}\vec{e}_\phi + \frac{1}{Xq}\vec{e}_\theta \quad (3.150)$$

Το οποίο άμεσα συνεπάγεται μέσω των προηγούμενων αποτελεσμάτων για διανύσματα βάσης ότι:

$$B_\phi = 1 \quad (3.151)$$

$$B_\theta = \frac{r^2}{Xq} \quad (3.152)$$

$$B_\psi = 0 \quad (3.153)$$

Δηλαδή:

$$\vec{B} = \nabla\phi + \frac{r^2}{Xq}\nabla\theta \quad (3.154)$$

Η επαλήθευση της υπόθεσης (3.130) γίνεται μέσω της (3.33), όπου θα υπολογιστεί η τορροειδής ροή, με αντικατάσταση των (3.154), (3.92):

$$\begin{aligned}
 \iint \vec{B} \cdot \nabla \zeta \cdot \mathcal{J} d\psi d\theta &= \int_r \int_0^{2\pi} \left( \nabla \phi + \frac{r^2}{Xq} \nabla \theta \right) \cdot \left( \nabla \phi - \frac{\partial \nu}{\partial \psi} \nabla \psi - \frac{\partial \nu}{\partial \theta} \nabla \theta \right) Xr d\theta dr \\
 &= \int_r \int_0^{2\pi} \left( |\nabla \phi|^2 Xr - \frac{r^2}{Xq} \frac{\partial \nu}{\partial \theta} |\nabla \theta|^2 Xr \right) d\theta dr = \int_r \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{X^2} Xr - \frac{r^2}{Xq} \left( \frac{q}{X} - q \right) \frac{1}{r^2} Xr \right) \\
 &= \int_r \int_0^{2\pi} \left( \frac{r}{X} - \frac{r}{X} + r \right) d\theta dr = \int_r \int_0^{2\pi} r d\theta dr = 2\pi \frac{r^2}{2} \Rightarrow 2\pi \psi = 2\pi \frac{r^2}{2} \Rightarrow \psi = \frac{r^2}{2}
 \end{aligned} \tag{3.155}$$

Ομοίως μπορεί κανείς να δείξει για την πολοειδή ροή:

$$\psi_p = \int_r \frac{r}{q} dr \tag{3.156}$$

Λαμβάνοντας το μέτρο του μαγνητικού πεδίου για αξονοσυμμετρική ισορροπία και LAR έχουμε:

$$\vec{B} = \nabla \phi + \frac{r^2}{Xq} \nabla \theta \Rightarrow |\vec{B}|^2 = |\nabla \phi|^2 + \frac{r^4}{X^2 q^2} |\nabla \theta|^2 = \frac{1}{X^2} + \frac{r^2}{X^2 q^2} \tag{3.157}$$

Στο LAR κανονικοποιώντας ως προς τη μεγάλη ακτίνα του τόρου, η παράμετρος τάξης πλέον είναι η μικρή ακτίνα  $r$  και μάλιστα  $r \ll 1$  επομένως από την τελευταία έκφραση αγνοείται ο όρος τάξης  $r^2$  και τότε:

$$|\vec{B}| = \frac{1}{X} \tag{3.158}$$

Αλλα μέσω της (3.131) ισχύει πως:

$$X(1 - r \cos \theta) = 1 - r^2 \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \frac{1}{X} = |\vec{B}| = 1 - r \cos \theta \tag{3.159}$$

Δηλαδή το μέτρο του μαγνητικού πεδίου σε αξονοσυμμετρική ισορροπία και LAR είναι κανονικοποιημένο ως προς το μέτρο του, επί του μαγνητικού άξονα και είναι:

$$|\vec{B}| = 1 - r \cos \theta \tag{3.160}$$

Η εξίσωση της πυκνότητας ρεύματος για όταν απλά περιορίστηκε η πίεση να είναι  $p = p(\psi)$  (3.67), μέσω των επιπλέον περιορισμών που αναπτύχθηκαν, δηλαδή για αξονοσυμμετρική ισορροπία και LAR, μετασχηματίζεται με τη βοήθεια των (3.139), (3.143) και του αποτελέσματος πως το  $g = 1$ .

$$\vec{j} = \frac{X}{r} \frac{\partial I}{\partial r} \nabla \phi \tag{3.161}$$

Από το νόμο του Maxwell είναι με αντικατάσταση του (3.154):

$$\vec{j} = \nabla \times \vec{B} = \frac{X}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r^2}{Xq} \right) \nabla \phi \quad (3.162)$$

Εξισώνοντας τις (3.161) και (3.162):

$$I = \frac{r^2}{Xq} \stackrel{r \leq 1}{\implies} I = 0 \quad (3.163)$$

Τελικά λοιπόν για αξονοσυμμετρική ισορροπία και LAR η συνάρτηση ισορροπίας  $I(\psi)$  είναι προσεγγιστικά μηδέν.



## 4 Λαγκρανζιανή και Χαμιλτονιανή περιγραφή της σχετικιστικής κίνησης του Γυρόκεντρου (Guiding Center)

### 4.1 Υπολογισμός της Lagrangian σχετικιστικού Guiding Center

Γενικά για την ανάλυση που θα ακολουθήσει ο χρόνος κανονικοποιείται στο αντίστροφο της κυκλοτρονικής συχνότητας στο μαγνητικό άξονα,  $\omega_0^{-1}$ , με  $\omega_0 = \frac{eB}{m}$ . Το μήκος είναι κανονικοποιημένο στη μεγάλη ακτίνα του τόρου  $R_0$ , ενώ το μαγνητικό πεδίο κανονικοποιείται στο μέτρο του επί του μαγνητικού άξονα. Τελικά η ενέργεια κανονικοποιείται, ως εκ τούτου στο  $m\omega_0^2 R_0^2$ . Η μετάβαση σε αυτό το φυσικό σύστημα μονάδων και πίσω στο S.I. αναλύεται σε μεγαλύτερο βάθος στο παράρτημα Α'.

Η Lagrangian ενός σχετικιστικού σωματιδίου το οποίο βρίσκεται υπό την επίδραση ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, σε φυσικές μονάδες είναι η ακόλουθη:

$$L = (\vec{A}(\vec{x}, t) + \gamma\vec{v}) \cdot \dot{\vec{x}} - H(\vec{v}, \vec{x}) \quad (4.1)$$

Σε σύγκριση με τη μη σχετικιστική περιγραφή, η Lagrangian δεν αλλάζει παρά μόνο στην ταχύτητα που πολλαπλασιάζεται με τον παράγοντα Lorentz. Η Hamiltonian από την άλλη που εκφράζει την ολική ενέργεια, στη σχετικότητα λαμβάνεται υπόψη και η ενέργεια της μάζας ηρεμίας, είναι:

$$H = \gamma mc^2 + e\Phi = mc^2 \sqrt{1 + \frac{\gamma^2 v^2}{(mc^2)^2}} + e\Phi \xrightarrow{\text{Natural Units}} H = \sqrt{1 + \gamma^2 v^2} + \Phi(\vec{x}, t) \quad (4.2)$$

Η σχέση που συνδέει τη Lagrangian με τη Hamiltonian είναι:

$$L = p_i \dot{q}^i - H(q, p, t) \quad (4.3)$$

Από αυτήν εξάγουμε αμέσως ότι:

$$\vec{p} = \vec{A}(\vec{x}, t) + \gamma\vec{v} \quad (4.4)$$

Για ό,τι αφορά το μαγνητικό πεδίο  $\vec{B}$  στο χώρο, θεωρούμε το μοναδιαίο διάνυσμα που ορίζεται από αυτό:

$$\hat{b} = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} \quad (4.5)$$

Δύναται να οριστούν δύο μοναδιαία διανύσματα  $\hat{e}_1, \hat{e}_2$  κάθετα στο  $\hat{b}$  και κάθετα μεταξύ τους με  $\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \hat{b}$ , δηλαδή το σύστημα  $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{b})$  να είναι ορθοκανονικό.

Στο επίπεδο  $(\hat{e}_1, \hat{e}_2)$  ορίζουμε 2 νέα μοναδιαία διανύσματα τα οποία σχηματίζουν με τα προαναφερθέντα γωνία  $\xi$ .

$$\hat{a} = \cos \xi \hat{e}_1 - \sin \xi \hat{e}_2 \quad (4.6)$$

$$\hat{c} = -\sin \xi \hat{e}_1 - \cos \xi \hat{e}_2 \quad (4.7)$$

Προφανώς από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι:

$$\hat{c} \times \hat{a} = \sin^2 \xi \hat{e}_1 \times \hat{e}_2 - \cos^2 \xi \hat{e}_2 \times \hat{e}_1 = (\sin^2 \xi + \cos^2 \xi) \hat{b} = \hat{b} \quad (4.8)$$

Όμοια:

$$\hat{a} \times \hat{b} = \hat{c} \quad (4.9)$$

Με άλλα λόγια το σύστημα  $(\hat{a}, \hat{c}, \hat{b})$  είναι ορθοκανονικό. Συμφέρει να αναλυθεί η ταχύτητα του σωματιδίου σε μία συνιστώσα παράλληλη με το μαγνητικό πεδίο και μία κάθετη σε αυτό. Το προηγούμενο γράφεται ως εξής:

$$\vec{v} = v_{\parallel} \hat{b} + w \hat{c} \quad (4.10)$$

Σε αυτό το σημείο βολεύει να οριστεί το διάνυσμα του γυροκέντρου  $\vec{X}$  ενός σωματιδίου:

$$\vec{x} = \vec{X} + \vec{\rho}_L \quad (4.11)$$

όπου  $\rho_L$  η ακτίνα Larmor. Το γυρόκεντρο (4.11) και η ταχύτητα (4.10) εισάγονται στη Lagrangian (4.1):

$$L = (\vec{A}(\vec{x}, t) + \gamma v_{\parallel} \hat{b} + \gamma w \hat{c}) \cdot \left( \dot{\vec{X}} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\gamma w}{B} \hat{a} \right) \right) - H \quad (4.12)$$

Το ανάπτυγμα Taylor γύρω από το γυρόκεντρο  $\vec{X}$  του διανυσματικού δυναμικού είναι:

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \vec{A}(\vec{X}, t) + (\vec{x} - \vec{X}) \frac{\partial \vec{A}}{\partial \vec{x}} \Big|_{\vec{x}=\vec{X}} = \vec{A}(\vec{X}, t) + \frac{\gamma w \hat{a}}{B} \frac{\partial \vec{A}(\vec{X}, t)}{\partial \vec{x}} \quad (4.13)$$

Στο δεύτερο όρο μπορεί να συμπυχθεί η συμβολογραφία αναγνωρίζοντας το εσωτερικό γινόμενο:

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \vec{A}(\vec{X}, t) + \frac{\gamma w}{B} (\hat{a} \cdot \nabla) \vec{A}(\vec{X}, t) \quad (4.14)$$

Είναι προφανές πως χρειάζεται η Lagrangian να είναι εκπεφρασμένη σε ποσότητες μετρημένες στο γυρόκεντρο και για αυτό το ανάπτυγμα του διανυσματικού δυναμικού (4.14) αντικαθίσταται στη (4.12):

$$L = \left( \vec{A}(\vec{X}, t) + \frac{\gamma w}{B} (\hat{a} \cdot \nabla) \vec{A}(\vec{X}, t) + \gamma v_{\parallel} \hat{b} + \gamma w \hat{c} \right) \cdot \left( \dot{\vec{X}} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\gamma w \hat{a}}{B} \right) \right) - H \quad (4.15)$$

Γίνονται κάποιες από τις επιμεριστικές στην ως άνω έκφραση:

$$\begin{aligned} L = & (\vec{A} + \gamma v_{\parallel} \hat{b} + \gamma w \hat{c}) \cdot \dot{\vec{X}} + \gamma^2 v_{\parallel} \hat{b} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{w \hat{a}}{B} \right) + \gamma^2 w \hat{c} \frac{d}{dt} \left( \frac{w \hat{a}}{B} \right) + \gamma \vec{A} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{w \hat{a}}{B} \right) \\ & + \gamma^2 \left( \frac{w \hat{a}}{B} \cdot \nabla \right) \vec{A} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{w \hat{a}}{B} \right) + \gamma \left( \frac{w \hat{a}}{B} \cdot \nabla \right) \vec{A} \cdot \dot{\vec{X}} - H \end{aligned} \quad (4.16)$$

Το  $w$  σχετίζεται γραμμικά με την ακτίνα Larmor, η οποία θεωρείται μικρή, σε σχέση με την ανομοιογένεια του μαγνητικού πεδίου, επομένως οι όροι με το τετράγωνο της συνιστώσας της ταχύτητας που είναι κάθετη στο μαγνητικό πεδίο είναι αμελητέοι ( $w^2 \ll 1$ ). Ισχύει επίσης η προσέγγιση πως όλες οι χρονικές μεταβολές των μεγεθών είναι πολύ πιο αργές από τη χρονική μεταβολή της γυρογωνίας,  $\dot{\xi}$ . Επομένως ο όρος  $\gamma w \hat{c} \cdot \dot{\vec{X}}$  μπορεί να παραλειφθεί. Τέλος στην προηγούμενη έκφραση και στις επόμενες το διανυσματικό δυναμικό υπολογίζεται στο  $(\vec{X}, t)$ .

$$\begin{aligned} L = & (\vec{A} + \gamma v_{\parallel} \hat{b}) \cdot \dot{\vec{X}} + \gamma^2 v_{\parallel} \hat{b} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{w \hat{a}}{B} \right) + \gamma^2 w \hat{c} \frac{d}{dt} \left( \frac{w \hat{a}}{B} \right) + \gamma \vec{A} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{w \hat{a}}{B} \right) \\ & + \gamma^2 \left( \frac{w \hat{a}}{B} \cdot \nabla \right) \vec{A} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{w \hat{a}}{B} \right) + \gamma \left( \frac{w \hat{a}}{B} \cdot \nabla \right) \vec{A} \cdot \dot{\vec{X}} - H \end{aligned} \quad (4.17)$$

Είναι γεγονός ότι η Lagrangian είναι αναλλοίωτη σε μετασχηματισμούς βαθμίδας (gauge invariant), δηλαδή αν πραγματοποιηθεί ένας μετασχηματισμός:

$$L \longrightarrow L + \frac{dS}{dt} \quad (4.18)$$

Όπου το  $\frac{dS}{dt}$  είναι ακριβές ή τέλει διαφορικό, οι εξισώσεις κίνησης που παράγονται από τη Lagrangian μένουν αναλλοίωτες. Επιλέγοντας το  $S$  να είναι η εξής ποσότητα:

$$S = -\frac{\gamma w \hat{a}}{B} \cdot \vec{A} \quad (4.19)$$

έχουμε

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{\gamma \dot{w}}{B} \hat{a} \cdot \vec{A}(\vec{X}, t) - \frac{\gamma w}{B} \dot{\hat{a}} \cdot \vec{A}(\vec{X}, t) - \frac{\gamma w}{B} \hat{a} \cdot \dot{\vec{A}}(\vec{X}, t) \quad (4.20)$$

και παρατηρώντας ότι

$$\dot{\hat{a}} = -\dot{\xi} \sin \xi \hat{e}_1 - \dot{\xi} \cos \xi \hat{e}_2 = \dot{\xi} \hat{c} \quad (4.21)$$

και

$$\dot{\vec{A}} = \frac{d\vec{A}}{dt} = (\dot{\vec{X}} \cdot \nabla) \vec{A} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (4.22)$$

το διαφορικό του  $S$  (4.20) μέσω των (4.21) και (4.22) γίνεται:

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{\gamma \dot{w}}{B} \hat{a} \cdot \vec{A} - \frac{\gamma w}{B} \dot{\xi} \hat{c} \cdot \vec{A} - \frac{\gamma w}{B} \hat{a} \cdot (\dot{\vec{X}} \cdot \nabla) \vec{A} - \frac{\gamma w}{B} \hat{a} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (4.23)$$

Μαζί με τις χρονικές παραγώγους που περιέχονταν στην προηγούμενη έκφραση ο μετασχηματισμός βαθμίδας λοιπόν είναι:

$$\begin{aligned} L \rightarrow L + \frac{dS}{dt} &= (\vec{A} + \gamma v_{\parallel} \hat{b}) \cdot \dot{\vec{X}} + \cancel{\gamma^2 v_{\parallel} \hat{b} \frac{\dot{w} \hat{a}}{B}} + \cancel{\gamma^2 v_{\parallel} \hat{b} \frac{w \dot{\xi} \hat{c}}{B}} + \cancel{\gamma^2 w \hat{e} \cdot \frac{\dot{w} \hat{a}}{B}} + \gamma^2 w \hat{c} \frac{w \dot{\xi} \hat{c}}{B} \\ &+ \frac{\gamma^2 w (\hat{a} \cdot \nabla) \vec{A}}{B} \cdot \frac{(\dot{w} \hat{a})}{B} + \frac{\gamma^2 w^2 \dot{\xi} (\hat{a} \cdot \nabla) \vec{A} \cdot \hat{c}}{B^2} - \frac{\gamma w}{B} \hat{a} (\dot{\vec{X}} \cdot \nabla) \vec{A} + \vec{A} \cdot \cancel{\frac{\gamma \dot{w} \hat{a}}{B}} + \vec{A} \cdot \cancel{\frac{\gamma w \dot{\xi} \hat{c}}{B}} \\ &+ \frac{\gamma w}{B} (\hat{a} \cdot \nabla) \vec{A} \cdot \dot{\vec{X}} - \cancel{\frac{\gamma \dot{w} \hat{a}}{B} \vec{A}} - \cancel{\frac{\gamma w \dot{\xi} \hat{c}}{B} \vec{A}} - \frac{\gamma w}{B} \hat{a} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - H \end{aligned} \quad (4.24)$$

ή

$$\begin{aligned} L &= (\vec{A} + \gamma v_{\parallel} \hat{b}) \cdot \dot{\vec{X}} + \frac{\gamma^2 w^2 \dot{\xi}}{B} + \frac{\gamma^2 w^2 \dot{\xi} (\hat{a} \cdot \nabla) \vec{A} \cdot \hat{c}}{B^2} + \frac{\gamma^2 w \dot{w}}{B^2} (\hat{a} \cdot \nabla) \vec{A} \cdot \hat{a} + \frac{\gamma w}{B} (\hat{a} \cdot \nabla) \vec{A} \cdot \dot{\vec{X}} \\ &- \frac{\gamma w}{B} \hat{a} \cdot (\dot{\vec{X}} \cdot \nabla) \vec{A} - \frac{\gamma w}{B} \hat{a} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - H \end{aligned} \quad (4.25)$$

Στο σύστημα συντεταγμένων  $(\hat{c}, \hat{a}, \hat{b})$ , μέσω της ταυτότητας Binet - Cauchy, δεδομένου ότι  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$  και  $\hat{b} = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|}$  αποδεικνύεται ότι:

$$(\hat{a} \cdot \nabla) \vec{A} \cdot \hat{c} - (\hat{c} \cdot \nabla) \vec{A} \cdot \hat{a} = -B \quad (4.26)$$

Πραγματοποιούμε ένα δεύτερο μετασχηματισμό βαθμίδας, μέσω του βαθμωτού  $S'$ , το οποίο ορίζεται ως εξής:

$$S' = -\frac{\gamma^2 w^2}{2B^2} (\hat{a} \cdot \nabla) \vec{A} \cdot \hat{a} \quad (4.27)$$

του οποίου το διαφορικό είναι:

$$\frac{dS'}{dt} = -\frac{\gamma^2 w \dot{w}}{B^2} (\hat{a} \cdot \nabla) \vec{A} \cdot \hat{a} - \frac{\gamma^2 w^2}{2B^2} (\hat{a} \cdot \nabla) \frac{d\vec{A}}{dt} \cdot \hat{a} - \frac{\gamma^2 w^2 \dot{\xi}}{2B^2} (\hat{a} \cdot \nabla) \vec{A} \cdot \hat{c} - \frac{\gamma^2 w^2 \dot{\xi}}{2B^2} (\hat{c} \cdot \nabla) \vec{A} \cdot \hat{a} \quad (4.28)$$

Ο όρος του ως άνω διαφορικού παραλείπεται γιατί είναι γινόμενο μίας ήδη μικρής ποσότητας ( $w^2$ ) και της αργής χρονικής παραγώγου του διανυσματικού δυναμικού. Επομένως ο μετασχηματισμός βαθμίδας είναι:

$$\begin{aligned} L \rightarrow L + \frac{dS'}{dt} &= (\vec{A} + \gamma v_{\parallel} \hat{b}) \cdot \dot{\vec{X}} + \frac{\gamma^2 w^2 \dot{\xi}}{B} + \frac{\gamma^2 w^2}{2B^2} \dot{\xi} (\hat{a} \cdot \nabla) \vec{A} \cdot \hat{c} + \frac{\gamma^2 w^2}{2B^2} \dot{\xi} (\hat{a} \cdot \nabla) \vec{A} \cdot \hat{c} \\ &+ \frac{\gamma^2 w \dot{w}}{B^2} (\hat{a} \cdot \nabla) \vec{A} \cdot \hat{a} + \frac{\gamma w}{B} (\hat{a} \cdot \nabla) \vec{A} \cdot \dot{\vec{X}} - \frac{\gamma w}{B} \hat{a} (\dot{\vec{X}} \cdot \nabla) \vec{A} - \frac{\gamma w}{B} \hat{a} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - H \\ &- \frac{\gamma^2 w \dot{w}}{B^2} (\hat{a} \cdot \nabla) \vec{A} \cdot \hat{a} - \frac{\gamma^2 w^2 \dot{\xi}}{2B^2} (\hat{a} \cdot \nabla) \vec{A} \cdot \hat{c} - \frac{\gamma^2 w^2 \dot{\xi}}{2B^2} (\hat{c} \cdot \nabla) \vec{A} \cdot \hat{a} \end{aligned} \quad (4.29)$$

Με τη βοήθεια της (4.26) λοιπόν ο τέταρτος και ο τελευταίος όρος συνδυάζονται και δίνουν το αντίθετο μισό του δεύτερου, δηλαδή θα μείνει το μισό του δεύτερου τελικά οπότε:

$$L = (\vec{A} + \gamma v_{\parallel} \hat{b}) \cdot \dot{\vec{X}} + \frac{\gamma^2 w^2 \dot{\xi}}{2B} + \frac{\gamma w}{B} (\hat{a} \cdot \nabla) \vec{A} \cdot \dot{\vec{X}} - \frac{\gamma w}{B} \hat{a} (\dot{\vec{X}} \cdot \nabla) \vec{A} - \frac{\gamma w}{B} \hat{a} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - H \quad (4.30)$$

Υπενθυμίζονται οι παραδοχές πως οι χρονικές μεταβολές των  $\vec{A}$  και  $\dot{\vec{X}}$  είναι αργές σε σχέση με αυτήν της γυρογωνίας. Με άλλα λόγια:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \ll \dot{\xi} \quad (4.31)$$

$$\dot{\vec{X}} \ll \dot{\xi} \quad (4.32)$$

Αυτό σε συνδυασμό με το γεγονός ότι το  $w$  είναι πολύ μικρή ποσότητα, οδηγεί στη θεωρηση των όρων με τα γινόμενα, του  $w$  με όποια από τις 2 χρονικές παραγώγους ως αμελητέων. Έτσι καταλήγει κανείς στη Lagrangian :

$$L = (\vec{A} + \gamma v_{\parallel} \hat{b}) \cdot \dot{\vec{X}} + \frac{\gamma^2 w^2 \dot{\xi}}{2B} - H \quad (4.33)$$

Για λόγους πληρότητας αναφέρεται πως στη Hamiltonian μπορεί να γίνει στο ηλεκτρικο δυναμικό, ό,τι έγινε και με το ανάπτυγμα Taylor του διανυσματικού δυναμικού.

$$\Phi(\vec{x}, t) = \Phi(\vec{X}, t) + \frac{\gamma w}{B} \hat{a} \cdot \nabla \Phi(\vec{x}, t) \Big|_{\vec{x}=\vec{X}}^0 = \Phi(\vec{X}, t) \quad (4.34)$$

Ο όρος που σημειώθηκε είναι 0, λόγω του γεγονότος ότι έχουμε υποθέσει μηδενικό ηλεκτρικό πεδίο ( $\vec{E} = 0$ ) και επειδή το μαγνητικό πεδίο είναι χρονοανεξάρτητο προκύπτει το ότι  $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0$ . Τελικά για το  $\nabla \Phi = 0$ :

$$\vec{E} = -\nabla \Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \Big|_{\vec{x}=\vec{X}}^0 \Rightarrow \nabla \Phi = 0 \quad (4.35)$$

Είναι φανερό από τη Lagrangian (4.33) πως η ποσότητα που πολλαπλασιάζει την παράγωγο της γυρογωνίας, από τις εξισώσεις Euler - Lagrange, είναι μια σταθερά την οποία θέτουμε:

$$\mu = \frac{\gamma^2 w^2}{2B} \quad (4.36)$$

Θέτοντας

$$\rho_{\parallel} = \frac{\gamma v_{\parallel}}{B} \quad (4.37)$$

η Lagrangian που δίνει την κίνηση ενός σχετικιστικού σωματιδίου στην προσέγγιση guiding center είναι:

$$L = (\vec{A} + \rho_{\parallel} \vec{B}) \cdot \dot{\vec{X}} + \mu \dot{\xi} - H \quad (4.38)$$

με τη Hamiltonian (4.2) να παίρνει τη μορφή:

$$H = \sqrt{1 + \rho_{\parallel}^2 B^2} + 2\mu B + \Phi \quad (4.39)$$

## 4.2 Μετάβαση στην Κανονική Χαμιλτονιανή Περιγραφή

Ως αφετηρία έχει κανείς τη Lagrangian για φορτισμένο σχετικιστικό σωματίδιο όπως παρήχθη στην προηγούμενη ενότητα, η οποία είναι η ακόλουθη:

$$L = (\vec{A} + \rho_{\parallel} \vec{B}) \cdot \vec{v} + \mu \dot{\xi} - H \quad (4.40)$$

με τη Hamiltonian να είναι η

$$H = \sqrt{1 + v^2\gamma^2} + \Phi \quad (4.41)$$

Ο όρος εντός της ρίζας είναι ο εξής:

$$v^2\gamma^2 = \rho_{\parallel}^2 B^2 + 2\mu B \quad (4.42)$$

Το διανυσματικό δυναμικό και το μαγνητικό πεδίο εκφράζονται σε μαγνητικές συντεταγμένες από τις σχέσεις

$$\vec{A} = \psi\nabla\theta - \psi_p\nabla\zeta \quad (4.43)$$

$$\vec{B} = g\nabla\zeta + I\nabla\theta + \delta\nabla\psi \quad (4.44)$$

Οι ποσότητες  $\psi$  και  $\psi_p$  είναι η τοροειδής και πολοειδής ροή αντίστοιχα,  $\theta$  και  $\zeta$  είναι η πολοειδής και τοροειδής γωνιακή συντεταγμένη αντίστοιχα και οι  $g$ ,  $I$  και  $\delta$  είναι οι συναρτήσεις ισορροπίας. Το μαγνητικό πεδίο αφού δίνεται από το  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$  παρέχει μία ανταλλοίωτη περιγραφή του πεδίου. Η συνάρτηση  $\delta$  είναι συνήθως αρκετά μικρή και εκφράζει τη μη-ορθογωνιότητα του συστήματος συντεταγμένων. Στην παρούσα μελέτη θα θεωρηθεί αξονοσυμμετρική ισορροπία, ως εκ τούτου οι συναρτήσεις ισορροπίας  $I$  και  $\delta$  θα είναι συναρτήσεις της πολοειδούς ροής  $\psi_p$  και της γωνίας  $\theta$  ενώ για τον παράγοντα θα ισχύει Lorentz  $\gamma = \gamma(\psi_p, \theta, \rho_{\parallel}; \mu)$ .

Εισάγονται στην περιγραφή διαταραχές πεδίου της μορφής:

$$\delta\vec{B} = \nabla \times \alpha\vec{B}, \quad \alpha = \alpha(\psi_p, \theta, \zeta, t) \quad (4.45)$$

Λόγω της διαταραχής (4.45) το διανυσματικό δυναμικό (4.43) μεταβάλλεται ως εξής:

$$\vec{A} \longrightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \delta\vec{B} = (\psi + \alpha I)\nabla\theta + (\alpha g - \psi_p)\nabla\zeta + \alpha\delta\nabla\psi \quad (4.46)$$

Αντικαθιστώντας το διαταραγμένο διανυσματικό δυναμικό στη Lagrangian (4.40) με  $L = L(\rho_{\parallel}, \psi_p, \theta, \zeta, \dot{\rho}_{\parallel}, \dot{\psi}_p, \dot{\theta}, \dot{\zeta})$  έχουμε

$$L = ((\psi + \alpha I)\nabla\theta + (\alpha g - \psi_p)\nabla\zeta + \alpha\delta\nabla\psi + \rho_{\parallel}(g\nabla\zeta + I\nabla\theta + \delta\nabla\psi)) \cdot \vec{v} + \mu\dot{\xi} - H \quad (4.47)$$

Υπενθυμίζεται η βασική σχέση για τη χρονική παράγωγο, για ποσότητες χωρίς ρητή εξάρτηση από το χρόνο, η οποία θα χρησιμοποιηθεί αμέσως στη Lagrangian (4.47):

$$\dot{f} = \vec{v} \cdot \nabla f \quad (4.48)$$

Πολλαπλασιάζοντας εσωτερικά με την ταχύτητα στην Lagrangian (4.47) προκύπτει ότι:

$$L = (\psi + \alpha I)\dot{\theta} + (\alpha g - \psi_p)\dot{\zeta} + \alpha \delta \dot{\psi} + \rho_{||}(g\dot{\zeta} + I\dot{\theta} + \delta\dot{\psi}) + \mu\dot{\xi} - H \quad (4.49)$$

και

$$L = (\psi + \alpha I)\dot{\theta} + (\alpha g - \psi_p)\dot{\zeta} + \alpha \delta \dot{\psi} + \rho_{||}g\dot{\zeta} + \rho_{||}I\dot{\theta} + \rho_{||}\delta\dot{\psi} + \mu\dot{\xi} - H \quad (4.50)$$

Ομαδοποιώντας τους όρους ανά χρονική παράγωγο παίρνουμε την έκφραση:

$$L = (-\psi_p + (\rho_{||} + \alpha)g)\dot{\zeta} + (\psi + (\rho_{||} + \alpha)I)\dot{\theta} + (\rho_{||}\delta + \alpha\delta)\dot{\psi} + \mu\dot{\xi} - H \quad (4.51)$$

Για τη χρονική παράγωγο του  $\psi$  με κανόνα αλυσίδας εμφανίζεται ο παράγοντας ασφαλείας  $q$ :

$$\dot{\psi} = \frac{d\psi}{dt} = \frac{d\psi}{d\psi_p} \frac{d\psi_p}{dt} = q \frac{d\psi_p}{dt} = q\dot{\psi}_p \quad (4.52)$$

Το αποτέλεσμα της (4.52) αντικαθίσταται στην (4.51):

$$L = (-\psi_p + (\rho_{||} + \alpha)g)\dot{\zeta} + (\psi + (\rho_{||} + \alpha)I)\dot{\theta} + (\rho_{||}q\delta + \alpha q\delta)\dot{\psi}_p + \mu\dot{\xi} - H \quad (4.53)$$

Έχει τονιστεί στην αρχή ότι η συνάρτηση  $\delta$  είναι μικρή σαν ποσότητα και σε συνδυασμό με το  $\alpha$  το οποίο εισήχθη ως διαταραχή και πολλαπλασιάζει το πεδίο, θα πρέπει να είναι μικρή ποσότητα επίσης άρα το γινόμενο τους είναι 'δεύτερης τάξης' όρος άρα η Lagrangian τελικά γίνεται:

$$L = (-\psi_p + (\rho_{||} + \alpha)g)\dot{\zeta} + (\psi + (\rho_{||} + \alpha)I)\dot{\theta} + \rho_{||}q\delta\dot{\psi}_p + \mu\dot{\xi} - H \quad (4.54)$$

Πλέον, μπορούν να γραφούν αναλυτικά οι εξισώσεις Euler - Lagrange αλλά πριν από αυτές γίνεται επισήμανση για τις συναρτησιακές εξαρτήσεις των συναρτήσεων ισορροπίας και των παραμέτρων  $\alpha$  και  $\gamma$  από τις μεταβλητές του συστήματος συντεταγμένων. Συγκεκριμένα είναι  $\delta = \delta(\psi_p, \theta)$ ,  $g = g(\psi_p)$ ,  $I = I(\psi_p, \theta)$ ,  $\gamma = \gamma(\psi_p, \rho_{||}, \theta; \mu)$  και  $\alpha = \alpha(\psi_p, \theta, \zeta, t)$ .

Οι εξισώσεις Euler - Lagrange για κάθε μεταβλητή που είναι  $\delta$  το πλήθος είναι

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{\partial L}{\partial q} \quad (4.55)$$

Αποδεικνύεται κατά τη λύση των εξισώσεων αυτών για την εξαγωγή των εξισώσεων κίνησης πως η συνάρτηση ισορροπίας  $\delta$  δεν αλλάζει την πολυειδή προβολή της κίνησης καθώς δεν γεννά τορροειδή μετάπτωση [7], [14].

Άρα είναι θεμιτό να αγνοηθούν οι όροι που εμπλέκουν το  $\delta$  από τις εκφράσεις ισορροπίας και τις εξισώσεις κίνησης για διευκόλυνση.



Τότε όμως η Lagrangian αποκτά Hamiltonian μορφή με κανονικές μεταβλητές οι οποίες είναι οι εξής

$$P_\theta = \psi + (\rho_{||}\gamma + \alpha)I, \quad \theta \quad (4.56)$$

$$P_\zeta = (\rho_{||}\gamma + \alpha)g - \psi_p, \quad \zeta \quad (4.57)$$

## 5 Αναλυτικός Υπολογισμός Μεταβλητών Δράσεων-Γωνιών και Τροχιακού Φάσματος Συχνοτήτων

### 5.1 Κανονικοί Μετασχηματισμοί προς μεταβλητές Drift Orbit Deviation

Στο προηγούμενο κεφάλαιο αποδείχθηκε ότι τα ζευγάρια κανονικών μεταβλητών είναι τα ακόλουθα:

$$P_\theta = \psi + (\rho_{||} + \alpha)I, \quad \theta \quad (5.1)$$

$$P_\zeta = (\rho_{||} + \alpha)g - \psi_p, \quad \zeta \quad (5.2)$$

Το  $\alpha$  προέρχεται από τις διαταραχές που προσθέτουμε το πεδίο οι οποίες είναι της μορφής:

$$\delta B = \nabla \times \alpha B \quad (5.3)$$

Στην παρούσα εργασία όμως αντικείμενο ενδιαφέροντος αποτελεί η μελέτη για το αδιατάρακτο σύστημα επομένως για  $\alpha = 0$  τα προηγούμενα ζεύγη είναι:

$$P_\theta = \psi + \rho_{||}I, \quad \theta \quad (5.4)$$

$$P_\zeta = \rho_{||}g - \psi_p, \quad \zeta \quad (5.5)$$

Η Hamiltonian γράφεται συναρτήσει των κανονικών μεταβλητών, λύνοντας ως προς το  $\rho_{||}$  και αντικαθιστώντας στην (4.39):

$$H(P_\zeta, \zeta, P_\theta, \theta, \mu, \xi) = \sqrt{1 + \frac{(P_\zeta + \psi_p(P_\zeta, P_\theta))^2}{g^2(\psi(P_\zeta, P_\theta))}} B^2 + 2\mu B(\psi(P_\zeta, P_\theta), \theta) \quad (5.6)$$

Μέσω της γεννήτριας συνάρτησης  $\bar{F}$  μεταβαίνουμε στις νέες barred μεταβλητές, οι οποίες είναι οι μεταβλητές απόκλισης τροχιάς ολίσθησης (Drift Orbit Deviation) και καταλήγουμε στο Large Aspect Ratio cylindrical equilibrium, όπως αναπτύχθηκε στο κεφάλαιο 3.

Η γεννήτρια συνάρτηση του κανονικού μετασχηματισμού που θέλουμε να πραγματοποιήσουμε είναι η ακόλουθη:

$$\bar{F}(P_\theta, \bar{\theta}, P_\zeta, \bar{\zeta}, \mu, \bar{\xi}) = -\bar{\theta}(P_\theta - P_{\theta 0}) - \bar{\zeta} \left( P_\zeta + \int^{P_\theta} \frac{dP'_\theta}{q(\psi(P'_\theta, P_\zeta))} \right) - \bar{\xi}\mu \quad (5.7)$$

Από τις εξισώσεις του κανονικού μετασχηματισμού τα ζεύγη των νέων κανονικών μεταβλητών είναι:

$$\bar{P}_\theta = P_\theta - P_{\theta 0} \quad (5.8)$$

$$\bar{\theta} = \theta - \frac{\bar{\zeta}}{q(\psi(P_\theta, P_\zeta))} \quad (5.9)$$

$$\bar{P}_\zeta = P_\zeta + \int^{P_\theta} \frac{dP'_\theta}{q(\psi(P'_\theta, P_\zeta))} \quad (5.10)$$

$$\zeta = \bar{\zeta} \left( 1 + \int^{P_\theta} \frac{\partial q^{-1}}{\partial \psi} \frac{\partial \psi(P'_\theta, P_\zeta)}{\partial P_\zeta} dP'_\theta \right) \quad (5.11)$$

$$\bar{\mu} = \mu \quad (5.12)$$

$$\bar{\xi} = \xi \quad (5.13)$$

Υπενθυμίζεται πως κατά την προσέγγιση LAR ισχύει ότι:  $g = 1$ ,  $I = 0$ ,  $\delta = 0$ ,  $B = 1 - r \cos \theta$  και  $r = \sqrt{2\psi}$  και οι κανονικές μεταβλητές γράφονται ως  $P_\theta = \psi$  και  $P_\zeta = \rho_{||} - \psi_p(P_\theta)$ , ώστε  $\bar{P}_\zeta = \rho_{||}$  και  $\bar{\zeta} = \zeta$ .

Στη χαμηλότερη τάξη ως προς  $\epsilon$  όπου  $\epsilon$  είναι το αντίστροφο aspect ratio θα ισχύει

$$\bar{P}_\zeta = P_\zeta + \int^{P_\theta} \frac{dP'_\theta}{q(\psi(P'_\theta, P_\zeta))} = \rho_{||} - \psi_p + \int^{P_\theta} \frac{dP'_\theta}{q(\psi(P'_\theta, P_\zeta))} \quad (5.14)$$

Έχουμε ότι  $P_\theta = \psi$ :

$$\bar{P}_\zeta = \rho_{||} - \psi_p + \int^\psi \frac{d\psi'}{\partial \psi' / \partial \psi_p} = \rho_{||} - \psi_p + \int^{\psi_p} d\psi'_p = \rho_{||} - \psi_p + \psi_p = \rho_{||} \quad (5.15)$$

Και ταυτόχρονα:

$$\bar{P}_\zeta = P_\zeta + \psi_p(P_{\theta 0} + \bar{P}_\theta) \quad (5.16)$$

Πραγματοποιώντας ένα ανάπτυγμα Taylor του  $\psi_p$  γύρω από το  $\psi_0$  έχουμε:

$$\bar{P}_\zeta = P_\zeta + \psi_p(P_{\theta 0}) + \frac{d\psi_p}{d\psi} \bar{P}_\theta = P_\zeta + \psi_p(P_{\theta 0}) + q^{-1} \bar{P}_\theta = \rho_{||0} + q^{-1}(P_{\theta 0}) \bar{P}_\theta \quad (5.17)$$

Από αυτήν έπεται ότι

$$\psi = \psi_0 + q(\psi_0)(\rho_{||} - \rho_{||0}) = P_{\theta 0} + q(\psi_0)(\bar{P}_\zeta - P_{\zeta 0} - \psi_p(\psi_0)) \quad (5.18)$$

## 5.2 Μετάβαση σε Δράσεις & Γωνίες

Στις νέες κανονικές μεταβλητές η Hamiltonian γράφεται ως εξής:

$$H(\bar{P}_\zeta, \bar{\zeta}, \bar{P}_\theta, \bar{\theta}; \bar{\mu}) = \left( 1 + \bar{P}_\zeta^2 B^2(\psi(P_{\theta 0} + \bar{P}_\theta), \theta = \frac{\zeta}{q} = \frac{\bar{\zeta}}{q(\psi(P_{\theta 0} + \bar{P}_\theta))} + \bar{\theta}) + 2\bar{\mu}B(\psi(P_{\theta 0} + \bar{P}_\theta), \frac{\bar{\zeta}}{q(\psi(P_{\theta 0} + \bar{P}_\theta))} + \bar{\theta}) \right)^{1/2} \quad (5.19)$$

Η κανονική ορμή  $\bar{P}_\theta$  δεν υπάρχει στη Hamiltonian άρα η συζυγής της γωνία  $\bar{\theta}$  είναι ξανά μία προσθετική σταθερά η οποία μπορεί να παραλειφθεί. Η δράση μπορεί να υπολογιστεί από τον ορισμό της:

$$J_\zeta^{(b,t)} = \frac{1}{2\pi} \oint \bar{P}_\zeta(\bar{\zeta}; E, \bar{\mu}, \gamma\rho_{||0}, P_{\theta 0}) d\bar{\zeta} \quad (5.20)$$

Οι δύο δείκτες (b,t) σηματοδοτούν τα δύο είδη των τροχιών, παγιδευμένες (bounce, banana orbits) και απαγίδευτες (transit, passing orbits), ενώ η ενέργεια  $E$  κάθε τροχιάς είναι σταθερή ισούται με τη Hamiltonian.

Οι αντίστοιχες συχνότητες υπολογίζονται από τη σχέση

$$\hat{\omega}_\zeta^{(b,t)} = \frac{\partial H}{\partial J_\zeta^{(b,t)}} \quad (5.21)$$

Η γεννήτρια συνάρτηση  $\hat{F}$  είναι αυτή που παρέχει τον κανονικό μετασχηματισμό από τις Drift Orbit Deviation variables στις μεταβλητές δράσης - γωνίας.

$$\hat{F}(\bar{\zeta}, \bar{\theta}, \bar{\xi}; J_\zeta, J_\theta, J_\xi) = \bar{\xi}J_\xi + \bar{\theta}J_\theta + \int^{\bar{\zeta}} \bar{P}_\zeta(\bar{\zeta}'; J_\zeta, J_\theta, J_\xi) d\bar{\zeta}' \quad (5.22)$$

Τα ζεύγη των κανονικών μεταβλητών που προκύπτουν μετά το μετασχηματισμό είναι τα κάτωθι:

$$\begin{aligned} (\bar{P}_\zeta, \bar{\zeta}) &\rightarrow (J_\zeta, \hat{\zeta}) \\ (\bar{P}_\theta, \bar{\theta}) &\rightarrow (J_\theta, \hat{\theta}) \\ (\bar{\mu}, \bar{\xi}) &\rightarrow (J_\xi, \hat{\xi}) \end{aligned}$$

Από τη γεννήτρια συνάρτηση του κανονικού μετασχηματισμού, οι δράσεις στα  $\theta$  και  $\xi$  ισο-

ύνται με τις προηγούμενες κανονικές ορμές ενώ οι γωνίες όχι λόγω του τελευταίου ολοκληρωτικού όρου στην (5.22).

Για τις συχνότητες των άλλων δύο βαθμών ελευθερίας μέσω των εξισώσεων κίνησης και του θεωρήματος πεπλεγμένων συναρτήσεων ισχύει:

$$\hat{\omega}_\theta = \frac{\partial H}{\partial J_\theta} = -\frac{\partial H}{\partial J_\zeta} \frac{\partial J_\zeta}{\partial J_\theta} \quad (5.23)$$

$$\hat{\omega}_\xi = \frac{\partial H}{\partial J_\xi} = -\frac{\partial H}{\partial J_\zeta} \frac{\partial H}{\partial J_\xi} \quad (5.24)$$

Ισοδύναμα διαιρώντας με τον πρώτο όρο από κάθε κλάσμα που είναι οι συχνότητες  $\hat{\omega}_\zeta^{(b,t)}$ :

$$\frac{\hat{\omega}_\theta}{\hat{\omega}_\zeta^{(b,t)}} = -\frac{\partial J_\zeta^{(b,t)}}{\partial J_\theta} \quad (5.25)$$

$$\frac{\hat{\omega}_\xi}{\hat{\omega}_\zeta^{(b,t)}} = -\frac{\partial J_\zeta^{(b,t)}}{\partial J_\xi} \quad (5.26)$$

Οι συχνότητες συνδέονται ως εξής:

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\omega}_\theta}{\hat{\omega}_\zeta^{(b,t)}} &= -\frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial}{\partial J_\theta} \bar{P}_\zeta(\bar{\zeta}; E, \bar{\mu}, \rho_{||0}) d\bar{\zeta}' = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial \bar{P}_\zeta}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial J_\theta} \\ &= \frac{1}{2\pi} \oint \frac{dt}{d\bar{\zeta}} \frac{\partial E}{\partial \bar{P}_\theta} d\bar{\zeta}' = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{d\bar{\theta}}{dt} dt = \frac{1}{2\pi} (\Delta \bar{\theta})_{T_\zeta} \end{aligned} \quad (5.27)$$

Ενώ με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι:

$$\frac{\hat{\omega}_\xi}{\hat{\omega}_\zeta^{(b,t)}} = \frac{1}{2\pi} (\Delta \bar{\xi})_{T_\zeta} \quad (5.28)$$

### 5.3 Full & Zero Drift Width Hamiltonians

Προχωράμε στον υπολογισμό της Full Width Drift Hamiltonian για LAR equilibrium. Σε αυτό το σημείο αντικαθίσταται το μαγνητικό πεδίο από την έκφρασή του στο LAR equilibrium.

$$H_{FDW} = \sqrt{1 + \gamma^2 \rho_{||}^2 \left[ 1 - \sqrt{2\psi} \cos \left( \frac{\zeta}{q(\psi)} \right) \right]^2} + 2\mu \left[ 1 - \sqrt{2\psi} \cos \left( \frac{\zeta}{q(\psi)} \right) \right] \quad (5.29)$$

$$H_{FDW} = \sqrt{1 + \rho_{\parallel}^2 \left[ 1 - 2\sqrt{2\psi} \cos\left(\frac{\zeta}{q(\psi)}\right) + 2\psi \cos\left(\frac{\zeta}{q(\psi)}\right)^2 \right] + 2\mu \left[ 1 - \sqrt{2\psi} \cos\left(\frac{\zeta}{q(\psi)}\right) \right]} \quad (5.30)$$

$$H_{FDW} = \sqrt{1 + \rho_{\parallel}^2 + \rho_{\parallel}^2 \left[ -2\sqrt{2\psi} \cos\left(\frac{\zeta}{q(\psi)}\right) + 2\psi \cos\left(\frac{\zeta}{q(\psi)}\right)^2 \right] + 2\mu \left[ 1 - \sqrt{2\psi} \cos\left(\frac{\zeta}{q(\psi)}\right) \right]} \quad (5.31)$$

$$H_{FDW} = \sqrt{1 + \rho_{\parallel}^2 + 2\mu \left( 1 - \sqrt{2\psi} \cos\left(\frac{\zeta}{q(\psi)}\right) + \frac{\rho_{\parallel}^2}{2\mu} \left[ -2\sqrt{2\psi} \cos\left(\frac{\zeta}{q(\psi)}\right) + 2\psi \cos\left(\frac{\zeta}{q(\psi)}\right)^2 \right] \right)} \quad (5.32)$$

$$H_{FDW} = \sqrt{1 + \rho_{\parallel}^2 + 2\mu \left( 1 - \sqrt{2\psi} \cos\left(\frac{\zeta}{q(\psi)}\right) \left[ 1 + \frac{\rho_{\parallel}^2}{\mu} - \frac{\rho_{\parallel}^2}{2\mu} \sqrt{2\psi} \cos\left(\frac{\zeta}{q(\psi)}\right) \right] \right)} \quad (5.33)$$

Για την προσέγγιση Zero Drift Width ουσιαστικά υπολογίζουμε το μαγνητικό πεδίο σε μία επιφάνεια ροής  $\psi_0$ .

$$H_{ZDW} = \sqrt{1 + \rho_{\parallel}^2 + 2\mu \left( 1 - \sqrt{2\psi_0} \cos\left(\frac{\zeta}{q(\psi_0)}\right) \left[ 1 + \frac{\rho_{\parallel}^2}{\mu} - \frac{\rho_{\parallel}^2}{2\mu} \sqrt{2\psi_0} \cos\left(\frac{\zeta}{q(\psi_0)}\right) \right] \right)} \quad (5.34)$$

Μάλιστα αν θεωρήσουμε ότι ο λόγος  $\rho_{\parallel}^2/\mu \ll 1$ , δηλαδή για σωματίδια με μεγάλο pitch angle  $\alpha$ , παίρνουμε την Hamiltonian:

$$H'_{ZDW} = \sqrt{1 + \rho_{\parallel}^2 + 2\mu \left( 1 - \sqrt{2\psi_0} \cos\left(\frac{\zeta}{q(\psi_0)}\right) \right)} \quad (5.35)$$

## 5.4 Υπολογισμός Δράσεων & Γωνιών στο Zero Drift Width

Η Hamiltonian για το Zero Width Drift μπορεί να γραφτεί στη γενική μορφή:

$$H = \sqrt{1 + \bar{P}_{\zeta}^2 \left[ 1 - \sigma \sqrt{2\psi_0} \cos\left(\frac{\bar{\zeta}}{q(\psi_0)}\right) \right]^2 + 2\mu \left[ 1 - \sqrt{2\psi_0} \cos\left(\frac{\bar{\zeta}}{q(\psi_0)}\right) \right]} \quad (5.36)$$

Το  $\sigma$  είναι 0 ή 1 ανάλογα για το αν θεωρούμε την προσέγγιση των μεγάλων pitch angles ή όχι, αντίστοιχα. Λύνουμε την εξίσωση  $H = E$  ως προς  $\bar{P}_{\zeta}$  ώστε να υπολογιστεί η δράση.

Ισχύει λοιπόν ότι:

$$\gamma = \sqrt{1 + \bar{P}_\zeta^2 \left[ 1 - \sigma \sqrt{2\psi_0} \cos \left( \frac{\bar{\zeta}}{q(\psi_0)} \right) \right]^2 + 2\mu \left[ 1 - \sqrt{2\psi_0} \cos \left( \frac{\bar{\zeta}}{q(\psi_0)} \right) \right]} \quad (5.37)$$

$$\gamma^2 = 1 + \bar{P}_\zeta^2 \left[ 1 - \sigma \sqrt{2\psi_0} \cos \left( \frac{\bar{\zeta}}{q(\psi_0)} \right) \right]^2 + 2\mu \left[ 1 - \sqrt{2\psi_0} \cos \left( \frac{\bar{\zeta}}{q(\psi_0)} \right) \right] \quad (5.38)$$

$$\bar{P}_\zeta^2 = \frac{\gamma^2 - 1 - 2\mu \left[ 1 - \sqrt{2\psi_0} \cos \left( \frac{\bar{\zeta}}{q(\psi_0)} \right) \right]}{\left[ 1 - \sigma \sqrt{2\psi_0} \cos \left( \frac{\bar{\zeta}}{q(\psi_0)} \right) \right]^2} \quad (5.39)$$

Άρα τελικά:

$$\bar{P}_\zeta = \sqrt{\frac{\gamma^2 - 1 - 2\mu \left[ 1 - \sqrt{2\psi_0} \cos \left( \frac{\bar{\zeta}}{q(\psi_0)} \right) \right]}{\left[ 1 - \sigma \sqrt{2\psi_0} \cos \left( \frac{\bar{\zeta}}{q(\psi_0)} \right) \right]^2}} = \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1 - 2\mu \left[ 1 - \sqrt{2\psi_0} \cos \left( \frac{\bar{\zeta}}{q(\psi_0)} \right) \right]}}{1 - \sigma \sqrt{2\psi_0} \cos \left( \frac{\bar{\zeta}}{q(\psi_0)} \right)} \quad (5.40)$$

Επομένως η δράση είναι:

$$J_\zeta = \frac{1}{2\pi} \oint \bar{P}_\zeta d\bar{\zeta} \quad (5.41)$$

$$J_\zeta = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1 - 2\mu \left[ 1 - \sqrt{2\psi_0} \cos \left( \frac{\bar{\zeta}}{q(\psi_0)} \right) \right]}}{1 - \sigma \sqrt{2\psi_0} \cos \left( \frac{\bar{\zeta}}{q(\psi_0)} \right)} d\bar{\zeta} \quad (5.42)$$

Αρχικά ορίζουμε νέα μεταβλητή  $\chi = \bar{\zeta}/2q$

$$J_\zeta = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1 - 2\mu \left[ 1 - \sqrt{2\psi_0} \cos 2\chi \right]}}{1 - \sigma \sqrt{2\psi_0} \cos 2\chi} 2q d\chi \quad (5.43)$$

Ακολούθως χρησιμοποιούμε την ταυτότητα  $\cos 2\chi = 1 - 2\sin^2 \chi$  εκτελούμε τις αντίστοιχες πράξεις στην ολοκληρωτέα ποσότητα.

$$J_\zeta = \frac{q(\psi_0)}{\pi} \oint \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1 - 2\mu + 2\mu\sqrt{2\psi_0} - 4\mu\sqrt{2\psi_0} \sin^2 \chi}}{1 - \sigma\sqrt{2\psi_0} + 2\sigma\sqrt{2\psi_0} \sin^2 \chi} d\chi \quad (5.44)$$

Ορίζοντας την παράμετρο παγίδευσης trapping parameter  $k'$  λύνοντας ως προς το ημίτονο στη ρίζα ( $r = \sqrt{2\psi_0}$ ).

$$k' = \frac{\gamma^2 - 1 - 2\mu(1 - r)}{4\mu r} \quad (5.45)$$

Πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε όλους τους όρους της ρίζας εκτός από το ημίτονο με  $4\mu r$  έχουμε

$$J_\zeta = \frac{q(\psi_0)}{\pi} \oint \frac{\sqrt{\frac{\gamma^2-1-2\mu+2\mu r}{4\mu r} 4\mu r - 4\mu r \sin^2 \chi}}{1 - \sigma r + 2\sigma r \sin^2 \chi} d\chi \quad (5.46)$$

$$J_\zeta = \frac{2q(\psi_0)\sqrt{\mu r}}{\pi} \oint \frac{\sqrt{k' - \sin^2 \chi}}{1 - \sigma r + 2\sigma r \sin^2 \chi} d\chi \quad (5.47)$$

$$J_\zeta = \frac{2q(\psi_0)\sqrt{\mu r}}{\pi(1 - \sigma r)} \oint \frac{\sqrt{k' - \sin^2 \chi}}{1 + \frac{2\sigma r}{1 - \sigma r} \sin^2 \chi} d\chi \quad (5.48)$$

Τα άκρα του ολοκληρώματος για παγιδευμένες (trapped) τροχιές είναι  $\chi_{min,max} = \sin^{-1}(\mp\sqrt{k'})$  ενώ αντίστοιχα για απαγίδευτες (passing) τροχιές για  $k \geq 1$  τα άκρα θα γίνουν  $\chi_{min,max} = \sin^{-1}(\mp\sqrt{k'}) = \mp\frac{\pi}{2}$ . Επίσης εισάγεται η παράμετρος  $\eta = \frac{-2\sigma r}{1 - \sigma r}$ .

$$J_\zeta^{(b)} = \frac{2q(\psi_0)\sqrt{\mu r}\sqrt{k'}}{\pi(1 - \sigma r)} \int_{-\sin^{-1}(\sqrt{k'})}^{\sin^{-1}(\sqrt{k'})} \frac{\sqrt{1 - k'^{-1} \sin^2 \chi}}{1 - \eta \sin^2 \chi} d\chi \quad (5.49)$$

$$J_\zeta^{(t)} = \frac{2q(\psi_0)\sqrt{\mu r}\sqrt{k'}}{\pi(1 - \sigma r)} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1 - k'^{-1} \sin^2 \chi}}{1 - \eta \sin^2 \chi} d\chi \quad (5.50)$$

Τα ολοκληρώματα αυτά εφόσον είναι κατά μήκος όλης της τροχιάς λόγω συμμετρίας εκατέρωθεν του άξονα ολοκλήρωσης αναγκάζουν τη δράση να είναι το διπλάσιο των εικονιζομένων για τις κλειστές τροχιές. Μάλιστα άλλος ένας ίδιος πολλαπλασιαστικός παράγοντας εμφανίζεται λόγω αρτιότητας της ολοκληρωτέας ποσότητας και για τις 2 περιπτώσεις. Επομένως είναι:

$$J_\zeta^{(b)} = \frac{8q(\psi_0)\sqrt{\mu r}\sqrt{k'}}{\pi(1 - \sigma r)} \int_0^{\sin^{-1}(\sqrt{k'})} \frac{\sqrt{1 - k'^{-1} \sin^2 \chi}}{1 - \eta \sin^2 \chi} d\chi \quad (5.51)$$

$$J_\zeta^{(t)} = \frac{4q(\psi_0)\sqrt{\mu r}\sqrt{k'}}{\pi(1 - \sigma r)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1 - k'^{-1} \sin^2 \chi}}{1 - \eta \sin^2 \chi} d\chi \quad (5.52)$$

Τελικά τα ολοκληρώματα αυτά υπολογίζονται και οι δράσεις λαμβάνουν τη μορφή:

$$J_\zeta^{(b)} = \frac{8q(\psi_0)\sqrt{\mu r}\sqrt{k'}}{\pi(1 - \sigma r)} \left[ \frac{(\eta k' - 1)\Pi(\eta k', k') + K(k')}{\eta\sqrt{k'}} \right] \quad (5.53)$$

$$J_\zeta^{(t)} = \frac{4q(\psi_0)\sqrt{\mu r}\sqrt{k'}}{\pi(1 - \sigma r)} \left[ \frac{(\eta k' - 1)\Pi(\eta, k'^{-1}) + K(k'^{-1})}{\eta k'} \right] \quad (5.54)$$



Τελικά με τις απλοποιήσεις λαμβάνει κανείς τις τελικές εκφράσεις:

$$J_{\zeta}^{(b)} = \frac{8q(\psi_0)\sqrt{\mu r}}{\pi\eta(1-\sigma r)} [(\eta k' - 1)\Pi(\eta k', k') + K(k')] \quad (5.55)$$

$$J_{\zeta}^{(t)} = \frac{4q(\psi_0)\sqrt{\mu r}}{\pi\eta(1-\sigma r)} \left[ \frac{(\eta k' - 1)\Pi(\eta, k'^{-1}) + K(k'^{-1})}{\sqrt{k'}} \right] \quad (5.56)$$

Τα πλήρη ελλειπτικά ολοκληρώματα πρώτου ( $K$ ) και τρίτου ( $\Pi$ ) είδους των παραπάνω σχέσεων χρησιμοποιούν τη σημειογραφία για το ελλειπτικό μέτρο όπως στο [18].

Για να βρούμε τη χαρακτηριστική συχνότητα εκμεταλλευόμαστε την εξίσωση κίνησης:

$$\frac{d\bar{\zeta}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \bar{P}_{\zeta}} = \frac{\partial \gamma}{\partial (\bar{P}_{\zeta})} \quad (5.57)$$

Με αντιστροφή έχουμε:

$$\frac{dt}{d\bar{\zeta}} = \frac{\partial (\bar{P}_{\zeta})}{\partial \gamma} = \frac{\partial (\bar{P}_{\zeta})}{\partial k'} \frac{\partial k'}{\partial \gamma} \quad (5.58)$$

Αποδείχθηκε πρωτύτερα ότι:

$$\bar{P}_{\zeta} = \left[ \frac{\gamma^2 - 1 - 2\mu \left[ 1 - \sqrt{2\psi_0} \cos\left(\frac{\bar{\zeta}}{q(\psi_0)}\right) \right]}{\left[ 1 - \sigma \sqrt{2\psi_0} \cos\left(\frac{\bar{\zeta}}{q(\psi_0)}\right) \right]^2} \right]^{1/2} \quad (5.59)$$

Εισάγοντας τον ίδιο συμβολισμό όπως όταν υπολογιζόταν το ολοκλήρωμα για τη δράση, χρησιμοποιώντας την ίδια τριγωνομετρική ταυτότητα με πριν παίρνουμε:

$$\bar{P}_{\zeta} = \frac{2\sqrt{\mu r}}{1-\sigma r} \frac{\sqrt{k' - \sin^2 \chi}}{1 - \eta \sin^2 \chi} \quad (5.60)$$

Επομένως:

$$\frac{\partial (\bar{P}_{\zeta})}{\partial \gamma} = \frac{2\sqrt{\mu r}}{(1-\sigma r)(1-\eta \sin^2 \chi)} \frac{1}{2\sqrt{k' - \sin^2 \chi}} \frac{\partial k'}{\partial \gamma} \quad (5.61)$$

Η τελευταία παράγωγος υπολογίζεται από την (5.45) ως εξής

$$\frac{\partial (\bar{P}_{\zeta})}{\partial \gamma} = \frac{\sqrt{\mu r}}{(1-\sigma r)(1-\eta \sin^2 \chi)} \frac{1}{\sqrt{k' - \sin^2 \chi}} \frac{\gamma}{2\mu r} \quad (5.62)$$

$$\frac{\partial (\bar{P}_{\zeta})}{\partial \gamma} = \frac{\gamma}{2(1-\sigma r)(1-\eta \sin^2 \chi)\sqrt{k'}} \frac{1}{\sqrt{1 - k'^{-1} \sin^2 \chi}} \frac{1}{\sqrt{\mu r}} \quad (5.63)$$

Τελικά επανερχόμαστε στην εξίσωση κίνησης και γράφουμε:

$$\frac{dt}{d\bar{\zeta}} = \frac{\gamma}{2(1-\sigma r)\sqrt{\mu r}\sqrt{k'}} \frac{1}{\sqrt{1 - k'^{-1} \sin^2 \chi}(1 - \eta \sin^2 \chi)} \quad (5.64)$$

Λύνουμε ως προς  $dt$  και από τη σχέση μεταξύ  $\bar{\zeta}$  και  $\chi$  παίρνουμε:

$$dt = \frac{2q\gamma}{2(1-\sigma r)\sqrt{\mu r}\sqrt{k'}} \frac{d\chi}{\sqrt{1-k'^{-1}\sin^2\chi}(1-\eta\sin^2\chi)} \quad (5.65)$$

Αντίστοιχα, όπως στον υπολογισμό των δράσεων ολοκληρώνοντας γύρω από μία τροχιά παίρνουμε την περίοδο των κινήσεων (bounce και transit) με τα ίδια επιχειρήματα για τα όρια ολοκλήρωσης.

Λύνοντας απευθείας ως προς τη συχνότητα έχουμε:

$$\hat{\omega}_\zeta^{(b)} = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi(1-\sigma r)\sqrt{\mu r}\sqrt{k'}}{q\gamma} \left[ \int_{-\sin^{-1}(\sqrt{k'})}^{\sin^{-1}(\sqrt{k'})} \frac{1}{\sqrt{1-k'^{-1}\sin^2\chi}(1-\eta\sin^2\chi)} d\chi \right]^{-1} \quad (5.66)$$

$$\hat{\omega}_\zeta^{(t)} = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi(1-\sigma r)\sqrt{\mu r}\sqrt{k'}}{q\gamma} \left[ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-k'^{-1}\sin^2\chi}(1-\eta\sin^2\chi)} d\chi \right]^{-1} \quad (5.67)$$

Γίνονται οι διπλασιασμοί των ολοκληρωμάτων λόγω αρτιότητας των ολοκληρωτέων ποσοτήτων καθώς και για τις κλειστές τροχιές για την κάλυψη της πλήρους και όχι της μισής τροχιάς:

$$\hat{\omega}_\zeta^{(b)} = \frac{\pi(1-\sigma r)\sqrt{\mu r}\sqrt{k'}}{2q\gamma} \left[ \int_0^{\sin^{-1}(\sqrt{k'})} \frac{1}{\sqrt{1-k'^{-1}\sin^2\chi}(1-\eta\sin^2\chi)} d\chi \right]^{-1} \quad (5.68)$$

$$\hat{\omega}_\zeta^{(t)} = \frac{\pi(1-\sigma r)\sqrt{\mu r}\sqrt{k'}}{q\gamma} \left[ \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-k'^{-1}\sin^2\chi}(1-\eta\sin^2\chi)} d\chi \right]^{-1} \quad (5.69)$$

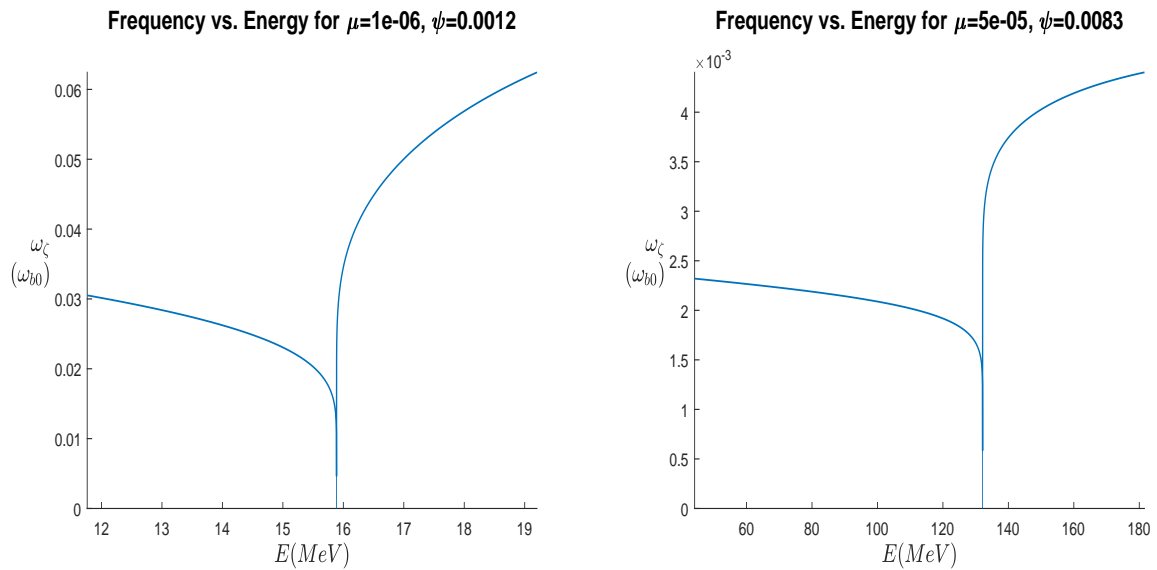
Τελικά αντικαθιστώντας τα ολοκληρώματα λαμβάνουμε:

$$\hat{\omega}_\zeta^{(b)} = \frac{\pi(1-\sigma r)\sqrt{\mu r}\sqrt{k'}}{2q\gamma\Pi(\eta k', k')} \quad (5.70)$$

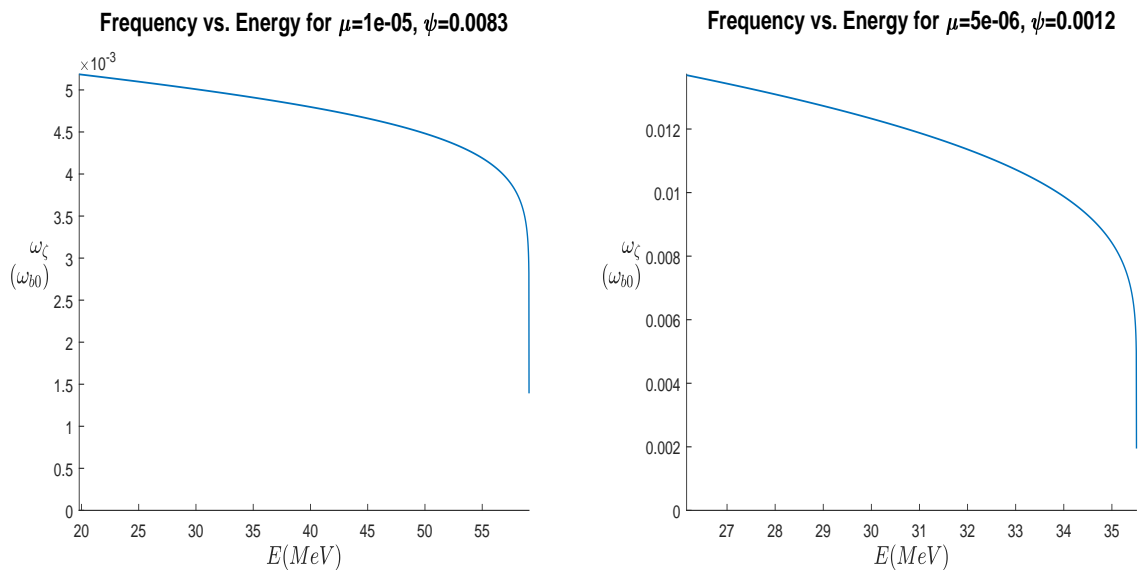
$$\hat{\omega}_\zeta^{(t)} = \frac{\pi(1-\sigma r)\sqrt{\mu r}\sqrt{k'}}{q\gamma\Pi(\eta, k'^{-1})} \quad (5.71)$$

Οι παραπάνω σχέσεις συμπυκνώνουν την εξάρτηση των συχνοτήτων από την ενέργεια, τη θέση και τη μαγνητική ροπή των σωματιδίων. Η σχέση αυτή είναι πιο περίπλοκη από την αντίστοιχη σχέση για το μη σχετικιστικό της ανάλογο καθώς υπεισέρχεται το  $\gamma$  το οποίο ισοδυναμεί με την ενέργεια, καθώς επίσης το trapping parameter αναβαθμίζεται από μία πρωτοβάθμια, σε μία δευτεροβάθμια σχέση με την ενέργεια. Παρακάτω, παρήχθησαν διαγράμματα των συχνοτήτων συναρτήσει της ενέργειας, εκατέρωθεν του συνόρου αλλά και

διαγράμματα τα οποία διατρέχουν το σύνορο. Σημειώνεται πως οι συχνότητες μετριοούνται σε μονάδες  $\omega_{b,0} = \frac{\sqrt{\mu r}}{q}$ .

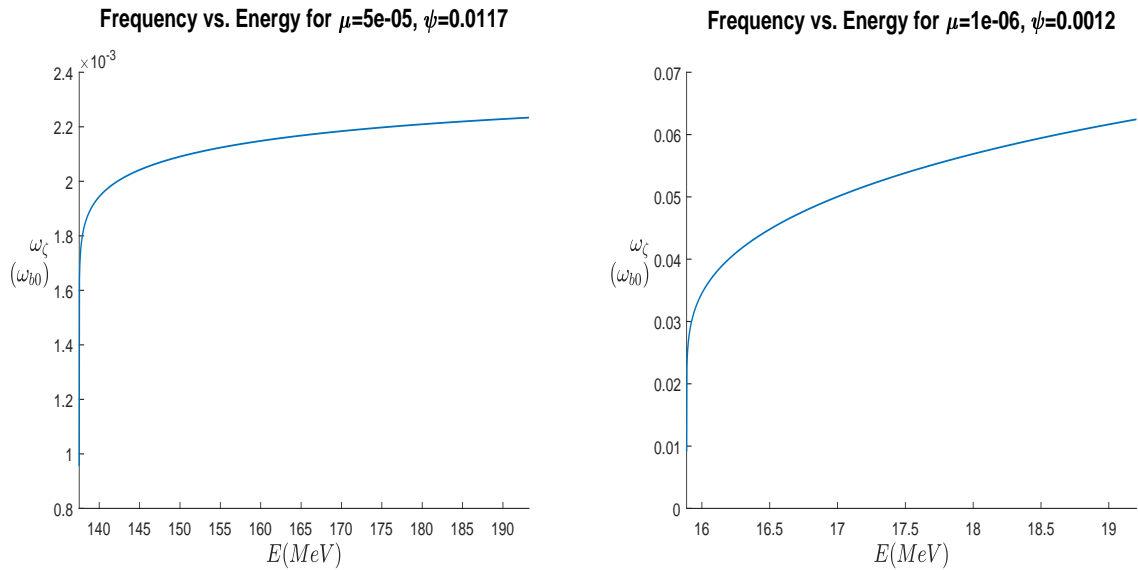


- (i) Συγκεντρωτικό διάγραμμα για  $\mu = 10^{-6}$  και  $\psi = 0.0012$ . (ii) Συγκεντρωτικό διάγραμμα για  $\mu = 5 \cdot 10^{-5}$  και  $\psi_0 = 0.0083$ .



- (iii) Διάγραμμα συχνοτήτων bounce τροχιών για  $\mu = 10^{-5}$  και  $\psi_0 = 0.0083$ . (iv) Διάγραμμα συχνοτήτων bounce τροχιών για  $\mu = 5 \cdot 10^{-6}$  και  $\psi_0 = 0.0012$ .

Σχήμα 5.1: Διαγράμματα συχνοτήτων συναρτήσει της ενέργειας για διάφορες τιμές των παραμέτρων  $\mu$  και  $\psi_0$ . Το πρώτο ζευγάρι είναι συγκεντρωτικό για bounce και transit ενώ το δεύτερό αφορά μόνο bounce.



(i) Διάγραμμα για τροχιές transit με  $\mu = 5 \cdot 10^{-5}$  και  $\psi_0 = 0.0117$ . (ii) Διάγραμμα για τροχιές transit με  $\mu = 1 \cdot 10^{-6}$  και  $\psi_0 = 0.0012$ .

Σχήμα 5.2: Διαγράμματα συχνοτήτων συναρτήσει της ενέργειας για διάφορες τιμές των παραμέτρων  $\mu$  και  $\psi_0$ . Τα διαγράμματα αυτά αφορούν αποκλειστικά transit τροχιές.

Ένα άμεσο συμπέρασμα που μπορεί να εξαχθεί παρατηρώντας τα διαγράμματα είναι πως στις κλειστές τροχιές λαμβάνουμε το αναμενόμενο, δηλαδή από μία συγκεκριμένη μέγιστη συχνότητα αναφοράς που αντιστοιχεί σε ισχυρά παγιδευμένα σωματίδια έχουμε μείωση μέχρι τη μηδενική συχνότητα της διαχωρίζουσας. Το πόσο απότομη θα είναι η μείωση εξαρτάται από την επιλογή των  $\mu, \psi_0$ . Στο σύνολο η συχνότητα μηδενίζεται πάρα πολύ απότομα.

Οι ανοιχτές τροχιές διατηρούν τη συμπεριφορά που θα ανέμενε κανείς, δηλαδή από το μηδέν των συχνοτήτων ξεκινάνε μία άνοδο έως μία τιμή την οποία τείνουν να φτάσουν ασυμπτωτικά. Στα πρώτα δύο διαγράμματα οι δύο συμπεριφορές αυτές συνοψίζονται πλήρως.

Ένα ενδιαφέρον αποτέλεσμα από την ανάλυση αυτή μέσω των διαγραμμάτων είναι η αποκάλυψη του εύρους των ενεργειών, το οποίο ανάλογα με τις προαναφερθείσες παραμέτρους αλλάζει δραστηρικά, αλλά παρόλα αυτά, προέκυψε μία αρκετά καθαρή εικόνα για ποικίλα ενεργειακά εύρη, τα οποία διαφέρουν και σε έκταση και σε κλίμακα με χαρακτηριστικά παραδείγματα τα σχήματα 5.1i και 5.1ii. Σε αυτά βλέπει κανείς πως οι ενέργειες στο μεν κυμαίνονται από 12 έως 19 MeV ενώ στο δε, ξεκινάμε περίπου από τα 50 και καταλήγουμε στα 180 MeV.

## 5.5 Εξισώσεις Κίνησης & Αναγωγή

### 5.5.1 Σχέση Σχετικιστικής και Μη Σχετικιστικής Χαμιλτονιανής

Η Hamiltonian, για σχετικιστικό σωματίδιο λοιπόν είναι (ενδιαφέρουν αμιγώς μαγνητικά πεδία άρα το ηλεκτρικό δυναμικό είναι μηδενικό):

$$H = \sqrt{1 + \rho_{\parallel}^2 B^2 + 2\mu B} \quad (5.72)$$

Αξίζει να ελεγχθεί το κατά πόσο η Hamiltonian ανάγεται σε αυτή στο μη σχετικιστικό όριο και επίσης αξίζει να συσχετιστούν οι 2 Hamiltonians.

Για  $\gamma$  περίπου 1, ο σχετικιστικός και μη σχετικιστικός ορισμός του  $\rho_{\parallel}$  ταυτίζονται. Με την προσέγγιση του ορίου μπορούμε δίκαια να θεωρήσουμε ότι ο όρος εντός της ρίζας είναι πολύ μικρότερος από το 1, που αντιστοιχεί στην ενέργεια μάζας ηρεμίας και άρα μπορούμε να πραγματοποιήσουμε μια διωνυμική προσέγγιση ως προς τον γραμμικό όρο δηλαδή:  $(1+x)^a \approx 1 + ax$ :

$$H = 1 + \frac{1}{2}(\rho_{\parallel}^2 B^2 + 2\mu B) = 1 + \frac{\rho_{\parallel}^2 B^2}{2} + \mu B \quad (5.73)$$

Εκτελώντας την πράξη στην παρένθεση και αναγνωρίζοντας ότι στο μη σχετικιστικό όριο η ενέργεια είναι  $E - 1$  έχουμε:

$$H - 1 = \frac{\rho_{\parallel}^2 B^2}{2} + \mu B = H_{NR} \quad (5.74)$$

όπου  $H_{NR}$  είναι η μη σχετικιστική Hamiltonian. Είναι επίσης πολύ χρήσιμο προτού προχωρήσει κανείς να συσχετίσει τις 2 Hamiltonians:

$$H = \sqrt{1 + 2H_{NR}} \quad (5.75)$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί να αντιστραφεί σε περίπτωση που αυτό χρειαστεί, λύνοντας ως προς την  $H_{NR}$ :

$$H_{NR} = \frac{H^2 - 1}{2} \quad (5.76)$$

### 5.5.2 Εξισώσεις Κίνησης

Από τον ορισμό του  $\gamma$  αν λύσει κανείς ως προς το λόγο  $v^2/c^2$  βρίσκει:

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2} \quad (5.77)$$

Αν αντικατασταθεί το παραπάνω στη ρίζα της προηγούμενης έκφρασης βγαίνει το εξής:

$$\sqrt{1 + \frac{v^2\gamma^2}{c^2}} = \sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}\gamma^2} = \sqrt{1 + \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2}\gamma^2} = \sqrt{1 + \gamma^2 - 1} = \sqrt{\gamma^2} = \gamma \quad (5.78)$$

Άρα η Hamiltonian και κατ' επέκταση η ενέργεια ισούται μέσω της (5.78) με:

$$E = H = \gamma \quad (5.79)$$

Με παραγωγή ως προς τη μη σχετικιστική Hamiltonian στην (5.75) παίρνουμε και μέσω της (5.79):

$$\frac{\partial H}{\partial H_{NR}} = \frac{2}{2\sqrt{1 + 2H_{NR}}} = \frac{1}{H} = \frac{1}{\gamma} \quad (5.80)$$

Για τη σχετικιστική Hamiltonian οι εξισώσεις κίνησης είναι οι ακόλουθες:

$$\dot{P}_\zeta^{rel} = -\frac{\partial H}{\partial \zeta^{rel}} = 0 \quad (5.81)$$

$$\dot{\zeta}^{rel} = \frac{\partial H}{\partial P_\zeta^{rel}} = \frac{1}{\gamma}(P_\zeta^{rel} + P_\theta^{rel}) \left(1 - \sqrt{2P_\theta^{rel}} \cos \theta^{rel}\right)^2 \quad (5.82)$$

$$\dot{P}_\theta^{rel} = -\frac{\partial H}{\partial \theta^{rel}} = \frac{1}{\gamma} \left( -\sqrt{2P_\theta^{rel}} \left( (P_\zeta^{rel} + P_\theta^{rel})^2 \left(1 - \sqrt{2P_\theta^{rel}} \cos \theta^{rel}\right) + \mu^{rel} \right) \right) \quad (5.83)$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta}^{rel} = \frac{\partial H}{\partial P_\theta^{rel}} = \frac{1}{\gamma} & \left( -\frac{\cos \theta^{rel}}{\sqrt{2P_\theta^{rel}}} \left( (P_\zeta^{rel} + P_\theta^{rel})^2 \left(1 - \sqrt{2P_\theta^{rel}} \cos \theta^{rel} + \mu^{rel}\right) \right) + \right. \\ & \left. + (P_\zeta^{rel} + P_\theta^{rel}) \left(1 - \sqrt{2P_\theta^{rel}} \cos \theta^{rel}\right)^2 \right) \end{aligned} \quad (5.84)$$

$$\dot{\mu}^{rel} = -\frac{\partial H}{\partial \xi^{rel}} = 0 \quad (5.85)$$

$$\dot{\xi}^{rel} = \frac{\partial H}{\partial \mu^{rel}} = \frac{1}{\gamma} \left(1 - \sqrt{2P_\theta^{rel}} \cos \theta^{rel}\right) \quad (5.86)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις κίνησης είναι φανερό πως φέρουν ομοιότητες με τις αντίστοιχες του μη σχετικιστικού μοντέλου λόγω του γεγονότος πως πέρα από τη διαίρεση με τον παράγοντα Lorentz, οι συναρτησιακές σχέσεις μεταξύ ρυθμών μεταβολής των μεταβλητών και των συζυγών τους θέσεων ή ορμών είναι ίδιες. Η διαίρεση με τον παράγοντα Lorentz μάλιστα αποτελεί κίνητρο να γίνει χρήση του κανόνα αλυσίδας μεταξύ των 2 Hamiltonians.

Η εκτέλεση αυτού του κανόνα αλυσίδας αποσκοπεί στη συσχέτιση των ρυθμών μεταβολής κάθε κανονικής μεταβλητής των 2 Hamiltonians, συνεπώς για λόγους σαφήνειας οι μεταβλητές που αντιστοιχούν στη σχετικιστική θα φέρουν τον ανάλογο δείκτη.

$$\dot{\zeta}^{rel} = \frac{\partial H}{\partial P_{\zeta}^{rel}} = \frac{\partial H_{NR}}{\partial P_{\zeta}^{rel}} \cdot \frac{\partial H}{\partial H_{NR}} = \frac{\partial H_{NR}}{\partial P_{\zeta}} \cdot \frac{\partial H}{\partial H_{NR}} \cdot \frac{\partial P_{\zeta}}{\partial P_{\zeta}^{rel}} = \dot{\zeta} \frac{1}{\gamma} = \frac{\dot{\zeta}}{\gamma} \quad (5.87)$$

$$\dot{P}_{\zeta}^{rel} = \dot{P}_{\zeta} = 0 \quad (5.88)$$

$$\dot{P}_{\theta}^{rel} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -\frac{\partial H_{NR}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial H}{\partial H_{NR}} = \frac{\dot{P}_{\theta}}{\gamma} \quad (5.89)$$

$$\dot{\theta}^{rel} = \frac{\partial H}{\partial P_{\theta}^{rel}} = \frac{\partial H_{NR}}{\partial P_{\theta}^{rel}} \cdot \frac{\partial H}{\partial H_{NR}} = \frac{\partial H_{NR}}{\partial P_{\theta}} \cdot \frac{\partial H}{\partial H_{NR}} = \frac{\dot{\theta}}{\gamma} \quad (5.90)$$

$$\dot{\mu}^{rel} = \dot{\mu} = 0 \quad (5.91)$$

$$\dot{\xi}^{rel} = \frac{\partial H}{\partial \mu^{rel}} = \frac{\partial H_{NR}}{\partial \mu^{rel}} \cdot \frac{\partial H}{\partial H_{NR}} = \frac{\dot{\xi}}{\gamma} \quad (5.92)$$

Τα 2 αυτά σέτ εξισώσεων αναδεικνύουν την αναγωγή της μίας κίνησης στην άλλη καθώς όλες οι παράγωγοι της μη σχετικιστικής Hamiltonian στο πρώτο σέτ ταυτίζονται με τις παραγώγους της σχετικιστικής και απλά διαιρούνται με το  $\gamma$ , το οποίο ισούται με την Hamiltonian και υπάρχει εκεί λόγω της ίδιας της μορφής της, ως ρίζας.

### 5.5.3 Σύνορο Κλειστών/Ανοιχτών Τροχιών

Το σύνορο μεταξύ κλειστών και ανοιχτών τροχιών παραμένει αμετάβλητο, στο πέρασμα από τη μη σχετικιστική θεώρηση στη σχετικιστική. Αυτό εύκολα φαίνεται μέσω του ορισμού του trapping parameter.

$$k' = \frac{\gamma^2 - 1 - 2\mu(1-r)}{4\mu r} = \frac{2E_{NR} - 2\mu(1-r)}{4\mu r} = \frac{E_{NR} - \mu(1-r)}{2\mu r} = k \quad (5.93)$$

Μάλιστα, η ισοδυναμία των συνόρων μπορεί να αποδειχθεί πιο άμεσα από τη σχέση των 2 Hamiltonians (5.75) και ιδιαιτέρως μέσω της παραγώγου  $\frac{\partial H}{\partial H_{NR}} = \frac{1}{\gamma}$ .

Οι δύο αυτές σχέσεις αποδεικνύουν άμεσα πως τα κρίσιμα σημεία της μη σχετικιστικής Hamiltonian ταυτίζονται με της σχετικιστικής και ο λόγος είναι απλούστατα γιατί όπως αποδείχθηκε και στην προηγούμενη υποενότητα, οι εξισώσεις κίνησης των 2 Hamiltonians είναι άρρηκτα συνδεδεμένες. Με άλλα λόγια, θεωρώντας τις Hamiltonians συναρτήσεις των  $(P_{\theta}, \theta)$  και για τα κρίσιμα σημεία είναι:

$$\nabla H = \frac{\partial H}{\partial H_{NR}} \nabla H_{NR} = \frac{1}{\gamma} \nabla H_{NR} = \nabla H_{NR} = 0 \quad (5.94)$$

Το επόμενο βήμα είναι να βρεθούν τα  $(P_\theta, \theta)$  για τα οποία ισχύει η ως άνω εξίσωση. Μέσω των εξισώσεων κίνησης όπως παρήχθησαν οι λύσεις της εξίσωσης είναι:

$$P_\theta = -P_\zeta \quad (5.95)$$

$$\theta = 0, \pm\pi \quad (5.96)$$

Σε αυτά τα σημεία λοιπόν (τα οποία καλούνται και X-Points) βρίσκεται η διαχωρίζουσα (separatrix), η οποία αποτελεί το ισοδύναμο του συνόρου μεταξύ κλειστών και ανοιχτών τροχιών αλλά στο φασικό χώρο  $(P_\theta, \theta)$ . Τότε η τιμή της ενέργειας για τις 2 Hamiltonians είναι:

$$H_{NR}^{sep} = \mu(1+r) \quad (5.97)$$

$$H_{rel}^{sep} = \sqrt{1+2\mu(1+r)} = \sqrt{1+2H_{NR}^{sep}} \quad (5.98)$$

Ουσιαστικά αυτό που φαίνεται εδώ είναι πως πέραν του κοινού X-Point, οι τιμές της ενέργειας στη διαχωρίζουσα, για τις 2 αυτές περιπτώσεις συνδέονται μέσω μίας 1-1 και επί απεικόνισης, το οποίο κατ' επέκταση σημαίνει πως υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη σχέση μεταξύ των 2 διαχωριζουσών. Αυτό ισχύει καθολικά από τη γενική σχέση που συνδέει τις Hamiltonians αλλά περιορίζοντας κανείς τη σκοπιά του κανείς μόνο στο X-Point αναδεικνύεται ο λόγος που το σύνορο μένει αναλλοίωτο στη μετάβαση από τη μία θεώρηση στην άλλη.

#### 5.5.4 Συχνότητες

Λαμβάνοντας υπόψη τα αποτελέσματα του αναλυτικού υπολογισμού του τροχιακού φάσματος συχνοτήτων όπως πραγματοποιήθηκε στην προηγούμενη ενότητα, καθώς και το συσχετισμό των 2 μοντέλων όπως αναπτύχθηκε στις υποενότητες αυτής της ενότητας, αντιλαμβάνεται κανείς πως η μόνη διαφορά με το αρχικό μη σχετικιστικό μοντέλο είναι πως οι συχνότητες διαιρούνται με τον παράγοντα Lorentz. Άμεσα από τις (5.70) και (5.71) προκύπτει ότι:

$$\hat{\omega}_\zeta^{(b,t)} = \frac{\hat{\omega}_{\zeta, NR}^{(b,t)}}{\gamma} \quad (5.99)$$

Το αποτέλεσμα αυτό δεν πρέπει να προκαλεί έκπληξη καθώς είναι η εκδήλωση του φαινομένου της διαστολής του χρόνου όπως προβλέπει η ειδική σχετικότητα. Αφού έγινε η αναλυτική διαδικασία υπολογισμού της συχνότητας από τη σχετικιστική Hamiltonian δίχως να ληφθεί υπόψη, η αναγωγή της μίας κίνησης στην άλλη, αξίζει, τώρα, να διερευνηθεί η δυνατότητα που προσφέρεται από αυτήν.



Γράφουμε την εξίσωση κίνησης ακολουθούμενη από μερικές πράξεις:

$$\frac{d\bar{\zeta}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \bar{P}_\zeta} = \frac{\partial H}{\partial H_{NR}} \frac{\partial H_{NR}}{\partial \bar{P}_\zeta} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial H_{NR}}{\partial \bar{P}_\zeta} \quad (5.100)$$

Η σχέση αυτή υποδηλώνει πως, μετά από ένα μετασχηματισμό σε δράσεις και γωνίες, η συχνότητα στο σχετικιστικό μοντέλο είναι μία συρρίκνωση αυτής του μη-σχετικιστικού κατά έναν παράγοντα  $\gamma$  όπως πριν δηλαδή κυριολεκτικά η σχέση θα είναι:

$$\hat{\omega}_\zeta^{(b,t)} = \frac{\hat{\omega}_{\zeta,NR}^{(b,t)}}{\gamma} \quad (5.101)$$

Εκτελώντας αναλυτικότερα τις πράξεις μέσω της  $H_{NR}$  μπορούμε να επιβεβαιώσουμε το αποτέλεσμα:

$$\frac{dt}{d\bar{\zeta}} = \gamma \frac{\partial \bar{P}_\zeta}{\partial H_{NR}} = \gamma \frac{\partial}{\partial E} \left( \frac{2\sqrt{\mu r} \sqrt{k - \sin^2 \chi}}{(1-r)(1-\eta \sin^2 \chi)} \right) = \frac{\gamma}{2\mu r} \frac{\partial}{\partial k} \left( \frac{2\sqrt{\mu r} \sqrt{k - \sin^2 \chi}}{(1-r)(1-\eta \sin^2 \chi)} \right) \quad (5.102)$$

και

$$dt = \gamma \frac{2qd\chi}{2(1-r)\sqrt{\mu r}\sqrt{k}(1-\eta \sin^2 \chi)\sqrt{1-k^{-1}\sin^2 \chi}} \quad (5.103)$$

Δηλαδή με εκτέλεση των ίδιων βημάτων από εδώ και πέρα για κλειστές και ανοιχτές τροχιές παράγεται το αποτέλεσμα των (5.70) και (5.71).

$$\hat{\omega}_\zeta^{(b,t)} = \frac{\hat{\omega}_{\zeta,NR}^{(b,t)}}{\gamma} \quad (5.104)$$

Για τους άλλους δύο βαθμούς ελευθερίας μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει την (5.80):

$$\hat{\omega}_\theta = \frac{\partial H}{\partial J_\theta} = \frac{\partial H}{\partial H_{NR}} \frac{\partial H_{NR}}{\partial J_\theta} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial H_{NR}}{\partial J_\theta} = \frac{\hat{\omega}_{\theta,NR}}{\gamma} \quad (5.105)$$

$$\hat{\omega}_\xi = \frac{\partial H}{\partial J_\xi} = \frac{\partial H}{\partial H_{NR}} \frac{\partial H_{NR}}{\partial J_\xi} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial H_{NR}}{\partial J_\xi} = \frac{\hat{\omega}_{\xi,NR}}{\gamma} \quad (5.106)$$

Τέλος για τους λόγους των συχνοτήτων, κατ' αναλογία με τις (5.23) και (5.24) θα έχουμε

$$\frac{\hat{\omega}_\theta}{\hat{\omega}_\zeta^{(b,t)}} = \frac{\frac{\hat{\omega}_{\theta,NR}}{\gamma}}{\frac{\hat{\omega}_{\zeta,NR}^{(b,t)}}{\gamma}} = \frac{\hat{\omega}_{\theta,NR}}{\hat{\omega}_{\zeta,NR}^{(b,t)}} = -\frac{\partial J_\zeta^{(b,t)}}{\partial J_\theta} \quad (5.107)$$

$$\frac{\hat{\omega}_\xi}{\hat{\omega}_\zeta^{(b,t)}} = \frac{\frac{\hat{\omega}_{\xi,NR}}{\gamma}}{\frac{\hat{\omega}_{\zeta,NR}^{(b,t)}}{\gamma}} = \frac{\hat{\omega}_{\xi,NR}}{\hat{\omega}_{\zeta,NR}^{(b,t)}} = -\frac{\partial J_\zeta^{(b,t)}}{\partial J_\xi} \quad (5.108)$$

## 6 Ανάλυση Τροχιών Runaway Electrons

Στην ενότητα αυτή θα εξαχθούν αναλυτικά και θα παρουσιαστούν διαγράμματα στο επίπεδο  $\mu - P_\zeta$  για σταθερή ενέργεια των οποίων η ερμηνεία αποδεικνύεται εξαιρετικά χρήσιμη καθώς λειτουργεί σαν χάρτης του οποίου κάθε σημείο καθορίζει το είδος και την τοποθεσία της τροχιάς. Η σημασία ενός τέτοιου εργαλείου στη μελέτη της δυναμικής των runaways είναι αδιαμφισβήτητη διότι καθίσταται διαισθητική πλέον η σύνδεση μεταξύ κινητικών και δυναμικών χαρακτηριστικών  $(\mu, P_\zeta, E)$  με την τοπολογία της τροχιάς.

### 6.1 Αναλυτική Εξαγωγή των Διαγραμμάτων από τη Χαμιλτονιανή

Σε αυτό το σημείο θα ξεκινήσει η διαδικασία παραγωγής των απαραίτητων εξισώσεων που δίνουν τις καμπύλες των ζητούμενων διαγραμμάτων. Η διαδικασία είναι παρόμοια με αυτή που συναντάται στη βιβλιογραφία για μη σχετικιστικά σωματίδια όπως στο [14] και θα πραγματοποιηθεί σε φυσικές μονάδες. Ο στόχος είναι να αποκτηθεί μία σχέση της μορφής:

$$\mu = f(P_\zeta, E, \psi) \quad (6.1)$$

με το  $\psi_w$  να είναι η επιφάνεια ροής στο τοίχωμα της διάταξης δηλαδή στο  $r = a$ .

$$\psi_w = \frac{|a|^2}{2|R_0|^2} = \frac{2^2}{2 \cdot 6.2^2} \frac{[m_e][\omega_0][R_0]^2}{[e]} = 0.052 \frac{[m_e][\omega_0][R_0]^2}{[e]} \quad (6.2)$$

Ως σημείο αφετηρίας χρησιμοποιείται η Hamiltonian (5.6) στην οποία αντικαθίστανται οι σχέσεις που ισχύουν στο Large Aspect Ratio.

$$H = \sqrt{1 + (P_\zeta + \psi_p)^2 B^2 + 2\mu B} \quad (6.3)$$

Πλέον η Hamiltonian θα αντιμετωπίζεται και θα συμβολίζεται ως η ενέργεια. Επιλύοντας την παραπάνω σχέση ως προς τη μαγνητική ροπή

$$\mu = \frac{E^2 - 1}{2B} - \frac{(P_\zeta + \psi_p)^2 B}{2} \quad (6.4)$$

Αμέσως φαίνεται ότι πρόκειται οι μορφές που θα έχουν οι καμπύλες στα σχήματα να είναι παραβολές, λόγω της τετραγωνικής συναρτησιακής εξάρτησης από το  $P_\zeta$ . Πριν προχωρήσουμε σε περαιτέρω ανάλυση της σχέσης αυτής, είναι σκόπιμο να γίνουν λίγοι μετασχηματισμοί για λόγους ευκολίας.

Για αρχή γίνεται η αντικατάσταση:

$$E_0 = \frac{E^2 - 1}{2} \quad (6.5)$$

με αποτέλεσμα η μαγνητική ροπή να εκφράζεται ως εξής

$$\mu = \frac{E_0}{B} - \frac{(P_\zeta + \psi_p)^2 B}{2} \quad (6.6)$$

Αντικαθιστώντας το μέτρο του μαγνητικού πεδίου βάσει της προσέγγισης LAR έχουμε

$$\mu = \frac{E_0}{B_0(1 - r \cos \theta)} - \frac{(P_\zeta + \psi_p)^2 B_0(1 - r \cos \theta)}{2} \quad (6.7)$$

Υπενθυμίζεται πως όλα τα μεγέθη εκφράζονται σε natural units επομένως σημειώνονται 2 πράγματα. Η ποσότητα  $B_0$  είναι 1 και η ποσότητα  $r$  στην πραγματικότητα διαιρείται με το  $R_0$ . Συνεπώς για τις ακραίες τιμές του μαγνητικού πεδίου, ορίζουμε την παράμετρο  $\epsilon$  (inverse aspect ratio):

$$r_{max,NU} = \frac{a}{R_0} = \epsilon \quad (6.8)$$

Οι ακραίες τιμές αυτές είναι για  $\theta = 0, \pi$  και αντιστοιχούν στο δεξιό και αριστερό τοίχωμα (right wall (RW) and left wall (LW)) ενώ και ενδιαφέρει και η τιμή στο μαγνητικό άξονα. Πολλαπλασιάζοντας με το  $\frac{B_0}{E_0}$  προκύπτει

$$\frac{\mu B_0}{E_0} = \frac{1}{1 - \epsilon \cos \theta} - \frac{(P_\zeta + \psi_w)^2 (1 - \epsilon \cos \theta)}{2E_0} \quad (6.9)$$

και

$$\frac{\mu B_0}{E_0} = \frac{1}{1 - \epsilon \cos \theta} - \frac{\left(\frac{P_\zeta}{\psi_w} + 1\right)^2 \psi_w^2 (1 - \epsilon \cos \theta)}{2E_0} \quad (6.10)$$

### 6.1.1 Δεξιό Τοίχωμα (Right Wall)

Σε αυτή και στις επόμενες υποενότητες θα υπολογιστούν σημαντικές χαρακτηριστικές ποσότητες που αφορούν τις παραβολές (σημεία μηδενισμού, μέγιστο) για το δεξιό και το αριστερό τοίχωμα καθώς και για το μαγνητικό άξονα, ξεκινώντας από το δεξιό τοίχωμα.

Στο δεξιό τοίχωμα η τιμή της γωνίας  $\theta$  είναι μηδέν. Συνεπώς η συνάρτηση έχει μορφή:

$$\frac{\mu_{RW} B_0}{E_0} = \frac{1}{1 - \epsilon} - \frac{\left(\frac{P_\zeta}{\psi_w} + 1\right)^2 \psi_w^2 (1 - \epsilon)}{2E_0} \quad (6.11)$$

Τα σημεία μηδενισμού της παραβολής είναι:

$$\frac{\mu_{RW}B_0}{E_0} = 0 \quad (6.12)$$

ή ισόδυναμα:

$$\frac{\left(\frac{P_\zeta}{\psi_w} + 1\right)^2 \psi_w^2 (1 - \epsilon)}{2E_0} = \frac{1}{1 - \epsilon} \quad (6.13)$$

$$\left(\frac{P_\zeta}{\psi_w} + 1\right)^2 = \frac{2E_0}{\psi_w^2 (1 - \epsilon)^2} \quad (6.14)$$

και τελικά:

$$\frac{P_\zeta^{R1,R2}}{\psi_w} = -1 \pm \frac{\sqrt{2E_0}}{\psi_w (1 - \epsilon)} \quad (6.15)$$

Για την εύρεση του μεγίστου πολύ απλά:

$$\frac{d\left(\frac{\mu_{RW}B_0}{E_0}\right)}{d\left(\frac{P_\zeta}{\psi_w}\right)} = 0 \Rightarrow \frac{P_\zeta}{\psi_w} = -1 \Rightarrow P_\zeta = -\psi_w \quad (6.16)$$

και η τιμή της συνάρτησης στο σημείο του μεγίστου είναι:

$$\frac{\mu_{RW,max}B_0}{E_0} = \frac{1}{1 - \epsilon} \quad (6.17)$$

### 6.1.2 Αριστερό Τοίχωμα (Left Wall)

Στο αριστερό τοίχωμα η τιμή της γωνίας  $\theta$  είναι  $\pi$ . Τότε έχουμε το εξής:

$$\frac{\mu_{LW}B_0}{E_0} = \frac{1}{1 + \epsilon} - \frac{\left(\frac{P_\zeta}{\psi_w} + 1\right)^2 \psi_w^2 (1 + \epsilon)}{2E_0} \quad (6.18)$$

Επομένως με όμοια εργασία όπως πριν για τα σημεία μηδενισμού έχουμε:

$$\frac{P_\zeta^{L1,L2}}{\psi_w} = -1 \pm \frac{\sqrt{2E_0}}{\psi_w (1 + \epsilon)} \quad (6.19)$$

Αντίστοιχα το σημείο στο οποίο αποκτά τη μέγιστή της τιμή η παραβολή αυτή είναι δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{d\left(\frac{\mu_{LW}B_0}{E_0}\right)}{d\left(\frac{P_\zeta}{\psi_w}\right)} = 0 \Rightarrow \frac{P_\zeta}{\psi_w} = -1 \Rightarrow P_\zeta = -\psi_w \quad (6.20)$$

και η τιμή αυτή θα είναι

$$\frac{\mu_{LW,max}B_0}{E_0} = \frac{1}{1 + \epsilon} \quad (6.21)$$

### 6.1.3 Μαγνητικός Άξονας (Magnetic Axis)

Στο μαγνητικό άξονα, ουσιαστικά, ισχύει ότι βρίσκεται κανείς στην επιφάνεια μηδενικής ροής ( $\psi_p = 0$ ), άρα η συνάρτηση τροποποιείται ως εξής:

$$\frac{\mu_0 B_0}{E_0} = 1 - \frac{\left(\frac{P_\zeta}{\psi_w}\right)^2 \psi_w^2}{2E_0} \quad (6.22)$$

Σε αυτήν την περίπτωση είναι πολύ εύκολο να υπολογιστούν τα σημεία μηδενισμού και το μέγιστο απο τις σχέσεις

$$\frac{P_\zeta^{01,02}}{\psi_w} = \pm \frac{\sqrt{2E_0}}{\psi_w} \quad (6.23)$$

και

$$\frac{\mu_{0,max}B_0}{E_0} \stackrel{P_\zeta=0}{=} 1 \quad (6.24)$$

αντίστοιχα.

### 6.1.4 Σύνορο Κλειστών/Ανοιχτών Τροχιών

Για τον προσδιορισμό του συνόρου στο επίπεδο  $\mu, P_\zeta$ , αρχικά μεταβαίνει κανείς στις τιμές όπου εντοπίζεται η διαχωρίζουσα δηλαδή στο  $\rho_{||} = 0 \Rightarrow P_\zeta = -\psi_w$  καθώς και στις γωνίες  $\theta = -\pi, \pi$ .

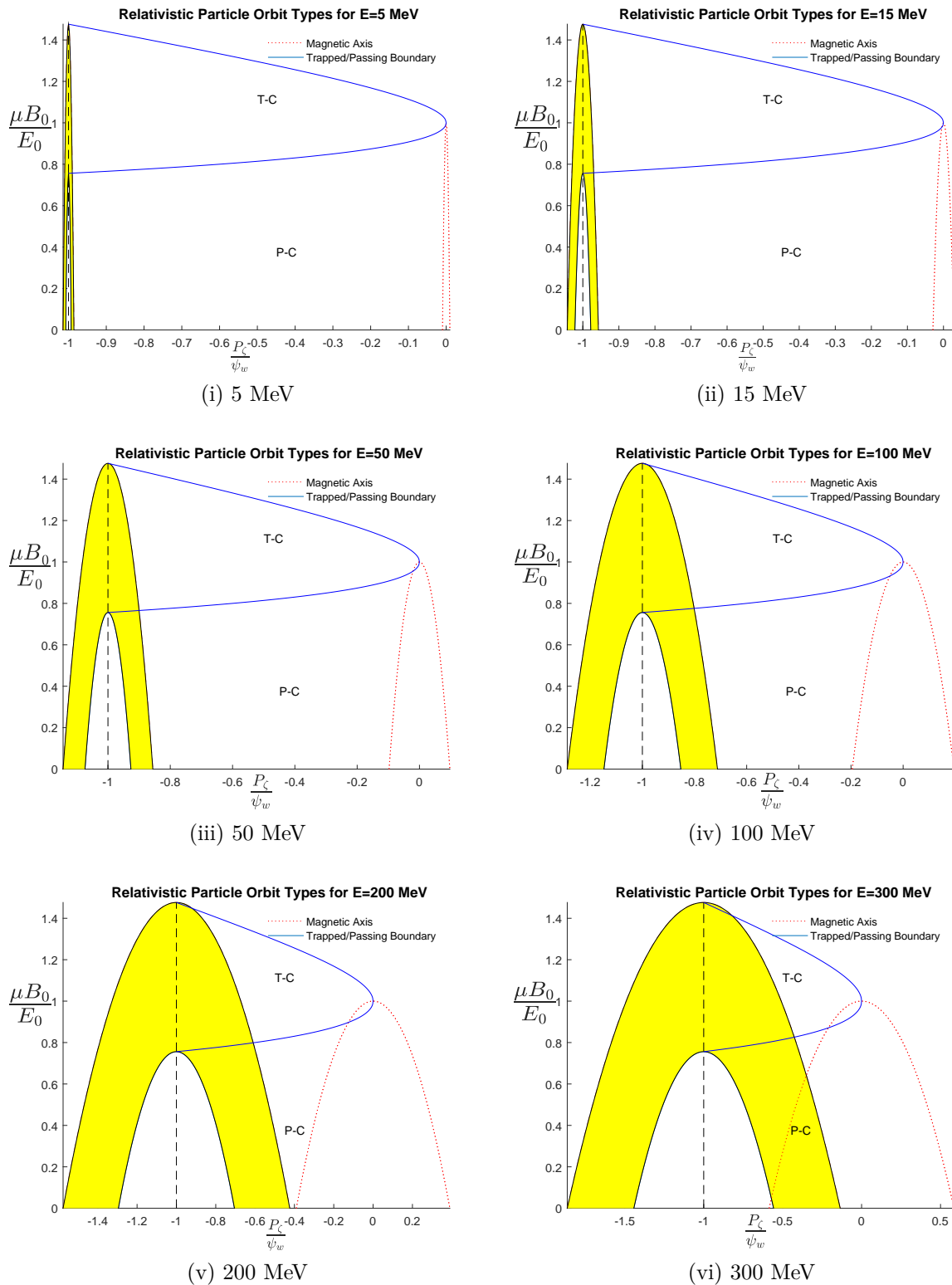
Τότε η συνάρτηση γίνεται:

$$\frac{\mu_{T/P}B_0}{E_0} = \frac{1}{1 \pm r} = \frac{1}{1 \pm \sqrt{2\psi_p}} = \frac{1}{1 \mp \sqrt{-P_\zeta}} = \frac{1}{1 \mp \sqrt{-\frac{P_\zeta}{\psi_w}\psi_w}} \quad (6.25)$$

Το (-) αντιστοιχεί στον άνω κλάδο της καμπύλης του συνόρου και το (+) στον κάτω, όπως θα φανεί και στα σχήματα παρακάτω.

## 6.2 Κατασκευή και Ερμηνεία των Διαγραμμάτων

Αναφέρθηκε προηγούμενα πως συμφέρει αντί να σχεδιαστεί η καμπύλη  $\mu = f(P_\zeta)$ , να σχεδιαστεί η ίδια ολίγον μετασχηματισμένη ως  $\frac{\mu B_0}{E_0} = f\left(\frac{P_\zeta}{\psi_w}\right)$ . Ακολουθούν τα αποτελέσματα της κατασκευής των διαγραμμάτων για ποικίλες ενέργειες.



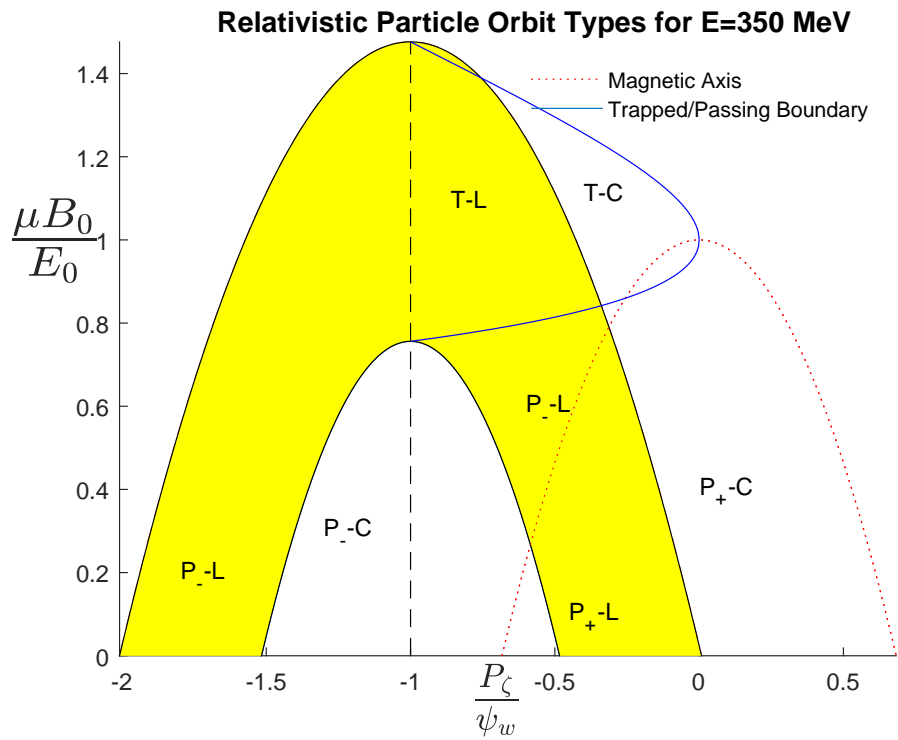
Σχήμα 6.1: Διαγράμματα  $\mu, P_z$  των τύπων των τροχιών των runaways για διάφορες ενέργειες. Διακρίνονται, το σύνορο μεταξύ κλειστών και ανοιχτών τροχιών, η κίτρινη περιοχή που ορίζεται ανάμεσα στις παραβολές του δεξιού και αριστερού τοιχώματος και αντιστοιχεί σε ηλεκτρόνια που προσκρούουν στα τοιχώματα καθώς και η καμπύλη του μαγνητικού άξονα.

Η ιδιαίτερη χρησιμότητα των διαγραμμάτων αυτών αναδεικνύεται, αν μελετήσει κανείς λεπτομερώς ένα από αυτά, το οποίο θα λειτουργήσει ως μία γενική περίπτωση. Κάθε καμπύλη που υπάρχει σε ένα διάγραμμα  $\mu - P_\zeta$  είναι ουσιαστικά μία απεικόνιση:

$$\mu = f(P_\zeta; E) \quad (6.26)$$

στην οποία η ενέργεια αποτελεί μία παράμετρο της οποίας η τιμή, έχει νόημα να δοθεί εξ αρχής. Αυτό μπορεί να το φανταστεί κανείς σα να ήταν στην πραγματικότητα μία τρισδιάστατη καμπύλη στο χώρο  $(\mu, P_\zeta, E)$  όπου παίρνει τομές σε επίπεδα  $(\mu, P_\zeta)$  για διάφορες τιμές της ενέργειας.

Η μελέτη αυτών των διαγραμμάτων προσφέρει συνολική εποπτεία και αποτελεί χρήσιμο εργαλείο για τη στοχευμένη μελέτη τροχιών ορισμένων ενεργειών οι οποίες παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τα runaways όπως για παράδειγμα τροχιές που βρίσκονται κοντά στο τοίχωμα.



Σχήμα 6.2: Διάγραμμα τύπων τροχιών των runaways για ενέργεια 350 MeV.

Μέσω του παραδείγματος του σχήματος 6.2 είναι δυνατό να αναλύσουμε τις διάφορες περιοχές που προκύπτουν στο διάγραμμα ως προς τη δυναμική και τα χαρακτηριστικά των περιοχών

Είναι δυνατό τώρα να προχωρήσει κανείς σε έναν αρχικό χαρακτηρισμό των τροχιών ο οποίος θα αφορά το αν είναι είτε συγκρατούμενες ή Confined - C, και σε αυτές στις οποίες το

σωματίδιο χτυπάει στο τοίχωμα και «χάνεται» για αυτό και καλούνται Lost - L. Διακρίνουμε τα σωματίδια σε 2 κατηγορίες, αυτά που κινούνται ομόρροπα με το μαγνητικό πεδίο και αντίρροπα ή ισοδύναμα για την πρώτη περίπτωση  $v_{||} > 0 \Rightarrow \rho_{||} > 0$  (co-moving) και για τη δεύτερη  $v_{||} < 0 \Rightarrow \rho_{||} < 0$  (counter-moving). Το πρόσημο της ταχύτητας χρησιμοποιείται σαν δείκτης στις ετικέτες των χωρίων. Το σύνορο μεταξύ συγκρατούμενων και μη, τροχιών για co-moving σωματίδια προκύπτει όταν η τροχιά έρχεται σε επαφή με το τοίχωμα στη δεξιά του μεριά. Αντίστοιχα για τα counter-moving σωματίδια το ίδιο σύνορο προκύπτει όταν η τροχιά τους έρχεται σε επαφή με την αριστερή μεριά του τοιχώματος. Με άλλα λόγια τα δύο αυτά σύνορα αντιπροσωπεύονται από τις δύο παραβολές εκατέρωθεν της κίτρινης περιοχής.

Προσθέτοντας στην περιγραφή το σύνορο παγιδευμένων/απαγίδευτων τροχιών (Trapped/Passing Boundary), μπορεί να γίνει μία επιπλέον διάκριση στις τροχιές σε παγιδευμένες (banana orbits) και απαγίδευτες. Στο σύνορο αυτό ισχύει ότι  $\psi = -P_{\zeta}$  για αυτό συμπληρώνεται η παραβολή με την κατακόρυφη ευθεία. Όσες τροχιές περιέχονται στο χωρίο που ορίζουν αυτές οι παραβολές του συνόρου μαζί με την κατακόρυφη ευθεία είναι παγιδευμένες (Trapped - T) και όσες είναι εκτός αυτού είναι απαγίδευτες (Passing - P). Ένα πρώτο συμπέρασμα που μπορεί να εξαχθεί με αυτές τις πληροφορίες είναι ακριβώς ότι εντός του χωρίου του συνόρου, υπάρχει μία περιοχή με τροχιές που είναι παγιδευμένες και συγκρατούμενες (T-C) και υπάρχει και μία περιοχή αμέσως μετά τη μία παραβολή της δεξιάς μεριάς του τοιχώματος όπου από εκεί και έπειτα είναι παγιδευμένες αλλά έρχονται σε επαφή με το τοίχωμα και συνεπώς χάνονται (T-L).

Έχει μείνει να διευκρινιστεί πώς καθορίζεται από το διάγραμμα ποιες περιοχές αφορούν απαγίδευτες τροχιές (Passing) σωματιδίων τα οποία είναι co-moving και counter-moving. Για να το βρει αυτό κανείς αρκεί να ανακαλέσει ότι στην επίλυση των εξισώσεων  $\mu = 0$  στις δύο ρίζες που προέκυψαν ουσιαστικά η ρίζα με το + αφορά τα σωματίδια με  $\rho_{||} > 0$  και αντίστοιχα το - αντιστοιχεί στα σωματίδια με  $\rho_{||} < 0$ . Ως εκ τούτου είναι δυνατό να οριστεί το αντίστοιχο εύρος για το κάθε ένα είδος σωματιδίων.

Πιο συγκεκριμένα είναι:

$$-1 + \frac{\sqrt{2E_0}}{\psi_w(1-\epsilon)} < \frac{P_{\zeta}}{\psi_w} < \frac{\sqrt{2E_0}}{\psi_w} \quad \text{Co-Passing} \quad (6.27)$$

$$-1 - \frac{\sqrt{2E_0}}{\psi_w(1-\epsilon)} < \frac{P_{\zeta}}{\psi_w} < -\frac{\sqrt{2E_0}}{\psi_w} \quad \text{Counter-Passing} \quad (6.28)$$

Με αυτήν την τελική διευκρίνιση, είναι κανείς σε θέση να ταξινομήσει τα είδη των τροχιών ανάλογα με την περιοχή του διαγράμματος χρησιμοποιώντας την ακόλουθη σημειογραφία, η οποία δόθηκε πιο περιγραφικά στις προηγούμενες παραγράφους, δηλαδή οι παγιδευμένες τροχιές θα συμβολίζονται με  $T - C/L$  ανάλογα με το αν είναι παγιδευμένες που έρχονται ή δεν έρχονται σε επαφή με το τοίχωμα, ενώ οι απαγίδευτες με  $P_{\pm} - C/L$  όπου το πρόσημο



καθορίζεται από το πρόσημο του  $\rho_{\parallel}$  το οποίο προσδιορίζεται με πιο πρακτικό τρόπο από τα εύρη παραπάνω. Στη συνήθη περίπτωση επικάλυψης των 2, έχει κανείς 2 τροχιές, η πρώτη που αντιστοιχεί στα Counter-Passing θα είναι Confined και η δεύτερη που αντιστοιχεί στα Co-Passing θα είναι Lost. Λόγω του προσήμου του  $v_{\parallel}$  οι μεν ολισθαίνουν προς το μαγνητικό άξονα και οι δε ολισθαίνουν απομακρυνόμενες από αυτόν.

Στη συνέχεια εστιάζουμε στις τροχιές ενδιαφέροντος των runaways, οι οποίες δεν είναι άλλες από αυτές που πλησιάζουν το τοίχωμα.

### 6.3 Μελέτη και Ανάλυση των Διαγραμμάτων

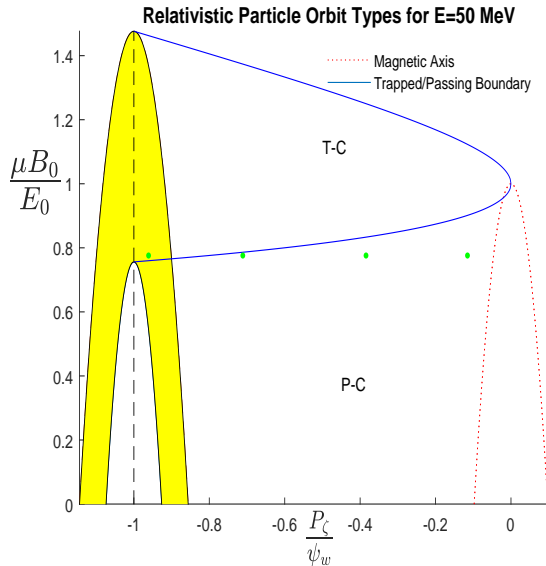
Σε αυτήν την ενότητα θα παρουσιαστούν ζευγάρια διαγραμμάτων εκ των οποίων το ένα θα είναι ένα διάγραμμα  $\mu - P_{\zeta}$  πάνω στο οποίο θα έχει γίνει επιλογή συγκεκριμένων σημείων. Το άλλο διάγραμμα θα απεικονίζει τις τροχιές, στις οποίες αντιστοιχούν τα σημεία στο προηγούμενο διάγραμμα, στο Configuration Space  $(\psi, \theta)$ . Η διερεύνηση χαρακτηριστικών σημείων γίνεται για σταθερό  $\mu$ , σταθερό  $P_{\zeta}$ , σταθερό  $\frac{\mu}{P_{\zeta}}$  και σταθερό  $\alpha = \frac{\mu}{P_{\zeta}^2}$  το οποίο αποτελεί μία πολύ αδρή εκτίμηση του pitch angle το οποίο αποτελεί μία δυναμικά μεταβλητή ποσότητα καθώς ορίζεται ως:

$$\tan \theta_p = \frac{v_{\perp}^2}{v_{\parallel}^2} = \frac{\mu}{(P_{\zeta} + \psi)^2} \quad (6.29)$$

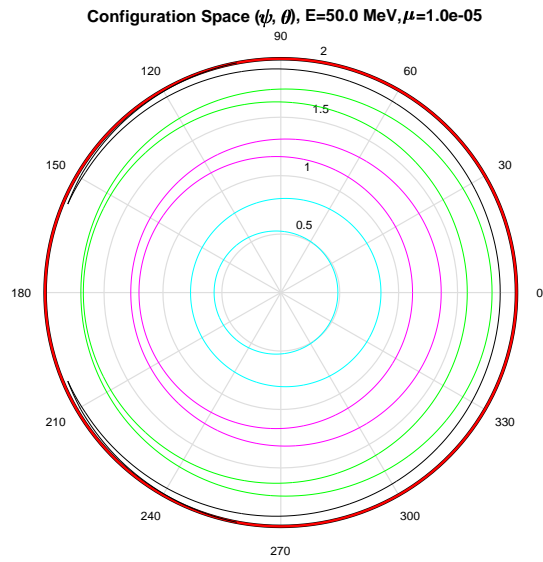
Τα συγκεκριμένα διαγράμματα παρήχθησαν σε κλίμακες ενέργειας που έχουν παρατηρηθεί από διαγνωστικά μηχανήματα σε πειράματα, δηλαδή στα 50 και 100 MeV. Από το σύνολο των παραχθέντων διαγραμμάτων θα παρουσιαστούν όσα παρουσιάζουν ενδιαφέρον για τη δυναμική των runaway electrons.

### 6.3.1 Σταθερό $\mu$

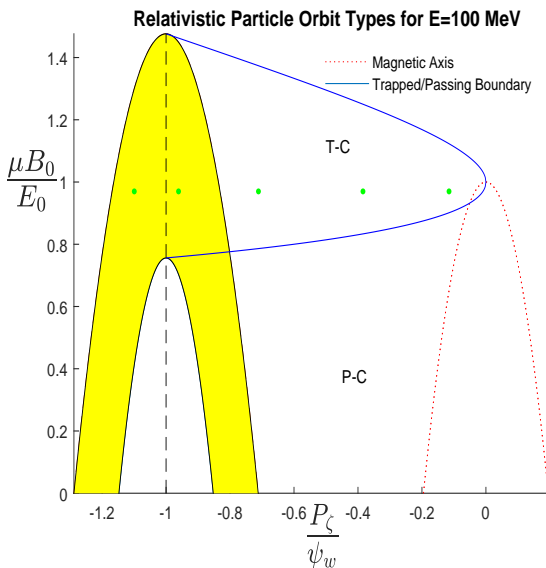
Σε αυτήν την υποκατηγορία διαγραμμάτων ουσιαστικά γίνεται επιλογή σημείων πάνω σε μία οριζόντιο ευθεία του επιπέδου  $\mu - P_\zeta$ . Καθώς διατρέχει κανείς τέτοιες ευθείες από το μαγνητικό άξονα προς τα τοιχώματα, η διαφοροποίηση της δυναμικής των τροχιών αποτυπώνεται στα παρακάτω 2 ζευγάρια σχημάτων.



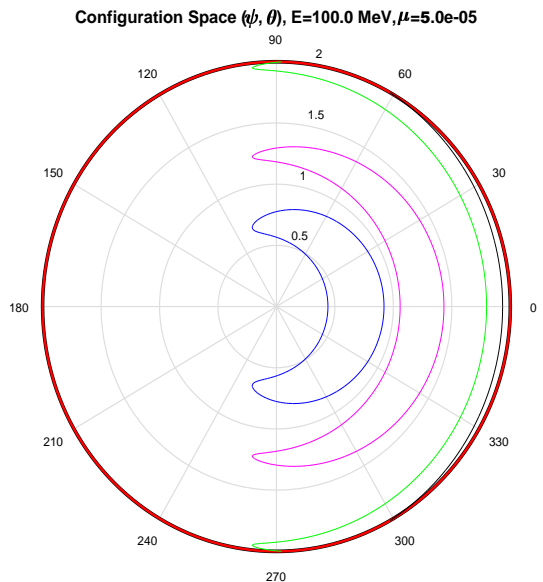
(i) διάγραμμα  $\mu - P_\zeta$  τύπων τροχιών με 50 MeV



(ii) Αναπαράσταση Τροχιών στο Configuration Space



(iii) διάγραμμα  $\mu - P_\zeta$  τύπου τροχιών με 100 MeV



(iv) Αναπαράσταση Τροχιών στο Configuration Space

Σχήμα 6.3: Διαγράμματα των τύπων των τροχιών των runaways για  $E = 50$  MeV (6.3i, 6.3ii),  $\mu = 10^{-5}$  και 100 MeV (6.3iii, 6.3iv),  $\mu = 5 \cdot 10^{-5}$ . Τα πράσινα σημεία στα διαγράμματα  $\mu - P_\zeta$  αντιπροσωπεύουν τροχιές με ίδιο  $\mu$ . Οι εν λόγω τροχιές απεικονίζονται στα διαγράμματα δεξιά με το τοίχωμα να βρίσκεται και να αντιπροσωπεύεται από τον κύκλο κόκκινου χρώματος.

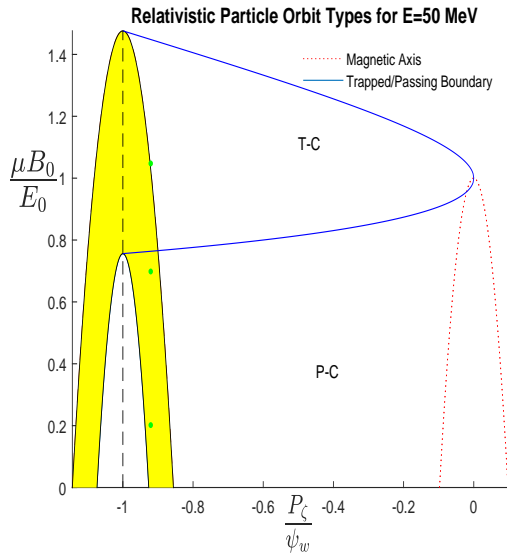
Η επιβεβαίωση της χρησιμότητας των παραπάνω διαγραμμάτων ως προς την εποπτεία της δυναμικής των τροχιών φαίνεται κιόλας από το πρώτο ζευγάρι των σχημάτων 6.3i και 6.3ii. Ξεκινώντας από το δεξιότατο σημείο και το αμέσως αριστερά του, αναμένονται τροχιές απαγίδευτες, η πρώτη πιο κοντά στο κέντρο καθώς είναι πιο κοντά στο μαγνητικό άξονα ( $\psi = 0$ ) και η δεύτερη σε μεγαλύτερη απόσταση. Η τρίτη τροχιά παρατηρεί κανείς πως είναι πάρα πολύ κοντά στο σύνορο απαγίδευτων και παγιδευμένων τροχιών αλλά από την πλευρά των απαγίδευτων. Το αναμενόμενο σχήμα λοιπόν είναι αυτό της απαγίδευτης τροχιάς αλλά με μία εμφανή τάση προς τη μετατροπή σε «μπανάνα» (παγιδεύμενη). Πράγματι αυτό ακριβώς λαμβάνει κανείς αν κοιτάξει στο διπλανό σχήμα την πράσινη τροχιά. Τέλος το αριστερότερο των σημείων, σηματοδοτεί πως η τροχιά που αντιπροσωπεύει είναι παγιδευμένων τροχιών, πολύ κοντά και αυτή στο σύνορο δηλαδή θα είναι μια «μπανάνα» σημαντική γωνιακή έκταση. Όμως ανήκει στην περιοχή των τροχιών που χάνονται, δηλαδή έρχονται σε επαφή με το τοίχωμα. Κατά μήκος της μαύρης τροχιάς όντως, υπάρχει σημαντική επαφή με το τοίχωμα και δε φαίνεται ολόκληρη.

Για το δεύτερο ζεύγος σχημάτων 6.3iii και 6.3iv η δυναμική στα συγκεκριμένα σημεία όπως επιλέχθηκαν είναι πιο ομοιογενής καθώς όλα εκτός από ένα περιέχονται στην περιοχή των κλειστών τροχιών. Τα πρώτα τρία σημεία λοιπόν από δεξιά αναμένονται να είναι μπανάνες οι οποίες θα ξεκινούν από μία μικρή απόσταση από το κέντρο και όσο πάμε αριστερά θα απομακρύνονται από το κέντρο και θα στενεύουν. Από τις 2 τελευταίες αναμένεται η μία που είναι εντός του συνόρου αλλά στις τροχιές που αγγίζουν το τοίχωμα, να φαίνεται μονάχα ένα μέρος της όπως και γίνεται τελικά καθώς η μαύρη τροχιά φαίνεται πολύ κοντά στο τοίχωμα στα δεξιά του πολικού διαγράμματος. Η δε πέμπτη τροχιά που είναι ανοιχτή δε φαίνεται καν καθώς εντοπίζεται πέραν του ορίου του τοιχώματος.

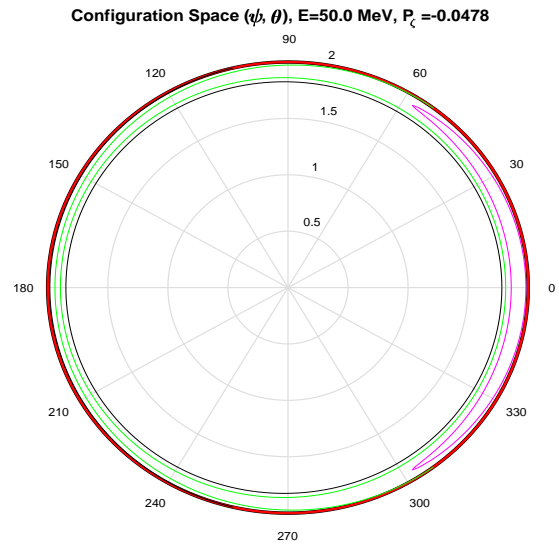
### 6.3.2 Σταθερό $P_z$

Σε αυτήν την οικογένεια διαγραμμάτων κινούμαστε κατακόρυφα στο επίπεδο  $\mu, P_z$ . Σε αυτήν την περίπτωση αναμένονται περισσότερες αλλαγές σε μία οικογένεια σημείων κάθε φορά καθώς υπάρχουν σχεδόν πάντα τροχιές εκατέρωθεν του συνόρου και αυτό που είναι περισσότερο μεταβλητό ανά ομάδα σημείων, είναι η απόσταση από τα τοιχώματα και το μαγνητικό άξονα.

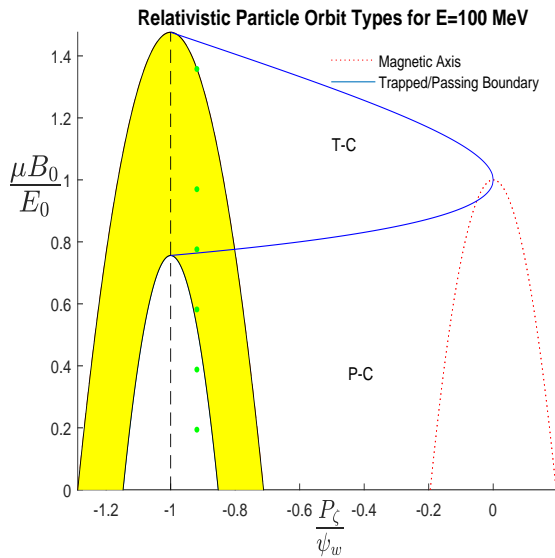
Στα ακόλουθα σχήματα θα δοθεί έμφαση περισσότερο σε τροχιές κοντά στον τοίχο και για τις 2 ομάδες σε αρκετά ακραίες τιμές του  $P_z$ . Οι τροχιές αυτές έχουν ένα ιδιαίτερο ενδιαφέρον καθώς προφανώς, είναι αυτές οι οποίες έρχονται σε επαφή με το τοίχωμα οπότε αξίζει να έχει κανείς στο νου πως κάθε τροχιά θα μπορούσε να αντιστοιχεί σε ένα runaway electron.



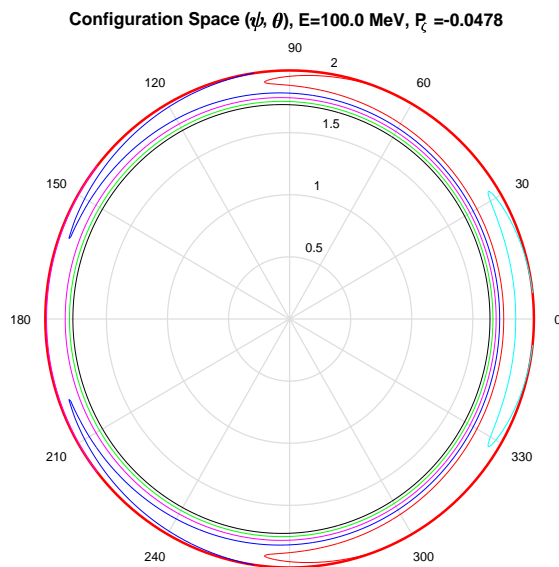
(i) διάγραμμα  $\mu - P_\zeta$  τύπων τροχιών με 50 MeV



(ii) Αναπαράσταση Τροχιών στο Configuration Space



(iii) διάγραμμα  $\mu - P_\zeta$  τύπου τροχιών με 100 MeV



(iv) Αναπαράσταση Τροχιών στο Configuration Space

Σχήμα 6.4: Διαγράμματα των τύπων των τροχιών των runaways για  $E = 50$  MeV (6.4i, 6.4ii),  $P_\zeta = -0.0478$  και  $E = 100$  MeV (6.4iii, 6.4iv),  $P_\zeta = -0.0478$ . Τα πράσινα σημεία στα διαγράμματα  $\mu - P_\zeta$  αντιπροσωπεύουν τροχιές με ίδιο  $P_\zeta$ . Οι εν λόγω τροχιές απεικονίζονται στα διαγράμματα δεξιά με το τοίχωμα να βρίσκεται στο  $r = a = 2$  m και να αντιπροσωπεύεται από τον κύκλο κόκκινου χρώματος.

Στο πρώτο ζεύγος σχημάτων 6.4i και 6.4ii παρατηρεί κανείς πως και τα τρία σημεία βρίσκονται εντός της κίτρινης ζώνης, γεγονός που σημαίνει ότι και οι 3 τροχιές έρχονται σε επαφή με το τοίχωμα. Πράγματι, η θέση αυτή επαληθεύεται στο διπλανό σχήμα όπου το υψηλότερο σημείο αντιστοιχεί στην παγιδευμένη τροχιά με ροζ χρώμα η οποία μόλις που έρχεται σε επαφή με το τοίχωμα και, το οποίο φαίνεται να βρίσκεται ακριβώς πάνω στην παραβολή της δεξιάς πλευράς του τοιχώματος. Το μεσαίο σημείο αντιστοιχεί στις πράσινες τροχιές οι οποίες είναι ανοιχτές και είναι αρκετά κοντά στο σύνορο ανοιχτών και κλειστών τροχιών, το οποίο φαίνεται από την ελάχιστη απόσταση που έχει η μία από την άλλη στο αριστερό μέρος του πολικού διαγράμματος. Τέλος το χαμηλότερο σημείο αντιστοιχεί σε ανοιχτές τροχιές όπως και τις πράσινες. Εδώ εντοπίζεται μόνο η μία ( $P_-$ - Confined) καθώς η δεύτερη βρίσκεται πέραν του τοιχώματος ( $P_+$ -Lost).

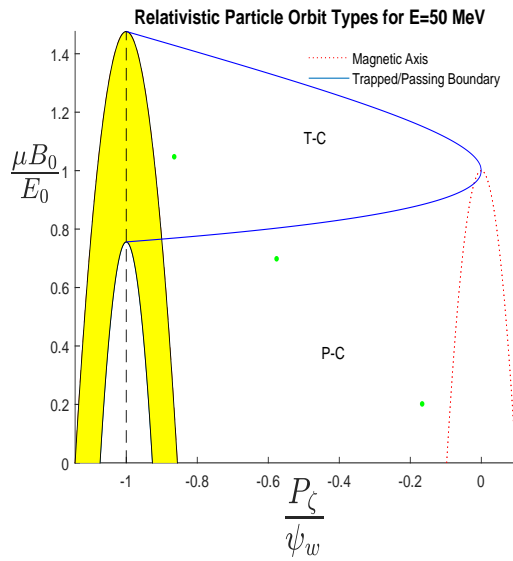
Στο δεύτερο ζεύγος σχημάτων αναμένονται παγιδευμένες τροχιές για τρεις μεγαλύτερες τιμές του  $\mu$  καθώς πλησιάζουμε στο σύνορο παγιδευμένων/απαγιδευτων τροχιών. Σημειώνεται πως όλες οι τροχιές αυτές έχουν επαφή με το τοίχωμα όπως άλλωστε φαίνεται στις αναπαραστάσεις των τροχιών με μπλε, κόκκινο και τυρκουάζ χρώμα αντίστοιχα. Η πρώτη ανοιχτή τροχιά ανήκει στην κίτρινη ζώνη επομένως στο Configuration Space εμφανίζεται μόνο η Counter-Passing Confined. Ενώ οι τελευταίες δύο τροχιές βρίσκονται στην περιοχή όπου έχουμε μόνο Counter-Passing Confined τροχιές όπως και φαίνεται δεξιά τελικά από τις καμπύλες με πράσινο και μαύρο χρώμα.

### 6.3.3 Σταθερός λόγος $\mu/P_z$

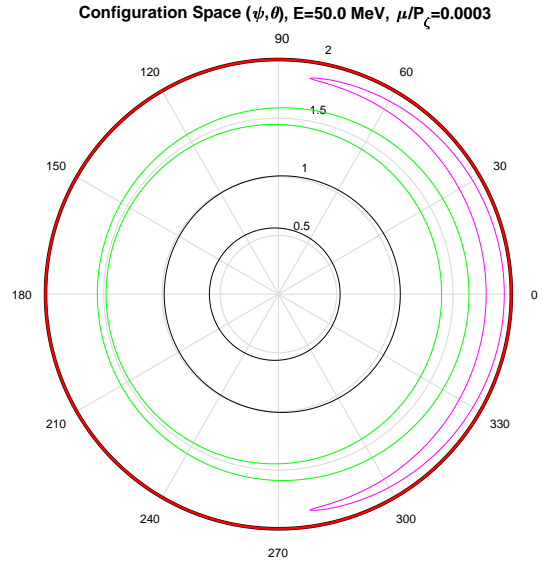
Σε αυτήν την υποενότητα τα σημεία επιλέγονται στο επίπεδο  $\mu - P_z$ , πάνω σε ευθεία με πεπερασμένη μη μηδενική κλίση. Αυτό περιμένει κανείς να οδηγήσει σε συνδυασμούς τροχιών, που έχουν εμφανιστεί σε προηγούμενα διαγράμματα, σε ένα ενιαίο διάγραμμα. Παρατίθενται στην επόμενη σελίδα λοιπόν τα εν λόγω σχήματα.

Στην ενέργεια  $E = 50$  MeV (σχήματα 6.5i και 6.5ii), έχει επιλεγεί ο λόγος να είναι  $\frac{\mu}{P_z} = 0.0003$  που όπως φαίνεται είναι αντιστοιχεί σε μία ευθεία η οποία θα δώσει ένα ζεύγος ανοιχτών τροχιών. Η τρίτη τροχιά είναι κλειστή και αρκετά κοντά στο σύνορο του τοιχώματος.

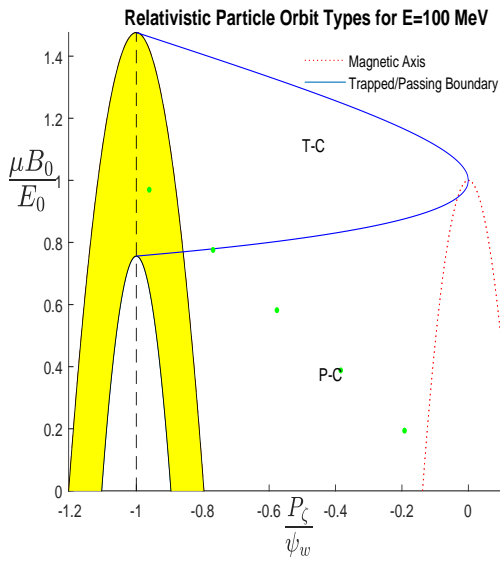
Στην ενέργεια των 100 MeV (σχήματα 6.5iii και 6.5iv), ο λόγος είναι  $\frac{\mu}{P_z} = 0.001$  και καθώς το  $\mu$  αυξάνεται με αντίστοιχη μείωση του  $P_z$  οι τροχιές είναι ανοιχτές με τα γνωστά ζεύγη να εμφανίζονται με χρώματα, μαύρο, πράσινο, ροζ και μπλε. Μάλιστα το μπλε είναι ελάχιστα κάτω από το σύνορο απαγιδευτων/παγιδευτων τροχιών, περίπτωση που συναντήσαμε και προηγούμενα. Τέλος η κόκκινη τροχιά είναι μία παγιδευμένη και Lost τροχιά καθώς είναι εμφανής η επαφή με το τοίχωμα.



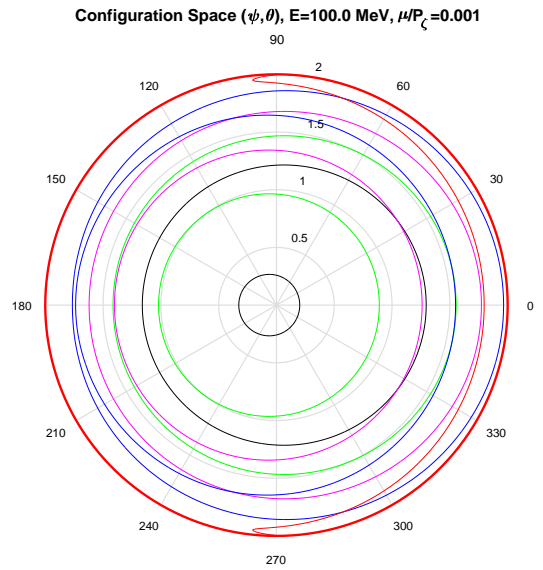
(i) διάγραμμα  $\mu - P_\zeta$  τύπων τροχιών με 50 MeV



(ii) Αναπαράσταση Τροχιών στο Configuration Space



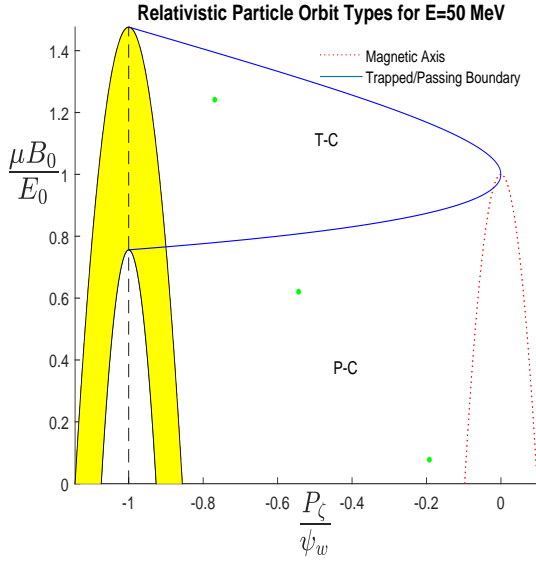
(iii) διάγραμμα  $\mu - P_\zeta$  τύπου τροχιών με 100 MeV



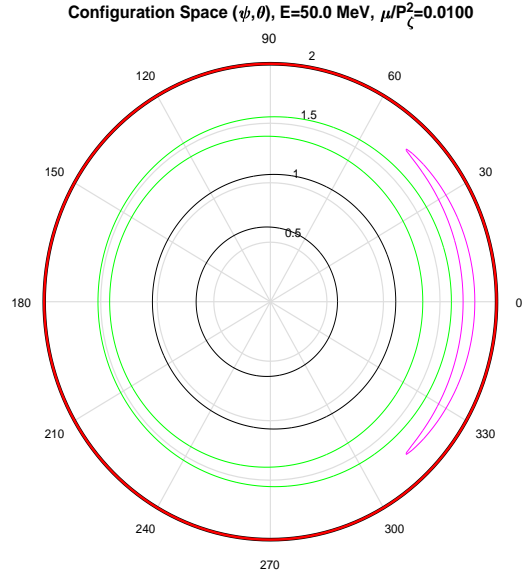
(iv) Αναπαράσταση Τροχιών στο Configuration Space

Σχήμα 6.5: Διαγράμματα των τύπων των τροχιών των runaways για  $E = 50$  MeV (6.5i, 6.5ii),  $\frac{\mu}{P_\zeta} = 0.0003$  και  $E = 100$  MeV (6.5iii, 6.5iv),  $\frac{\mu}{P_\zeta} = 0.001$ . Τα πράσινα σημεία στα διαγράμματα  $\mu - P_\zeta$  αντιπροσωπεύουν τροχιές με ίδιο  $\frac{\mu}{P_\zeta}$ . Οι εν λόγω τροχιές απεικονίζονται στα διαγράμματα δεξιά με το τοίχωμα να βρίσκεται στο  $r = a = 2$  m και να αντιπροσωπεύεται από τον κύκλο κόκκινου χρώματος.

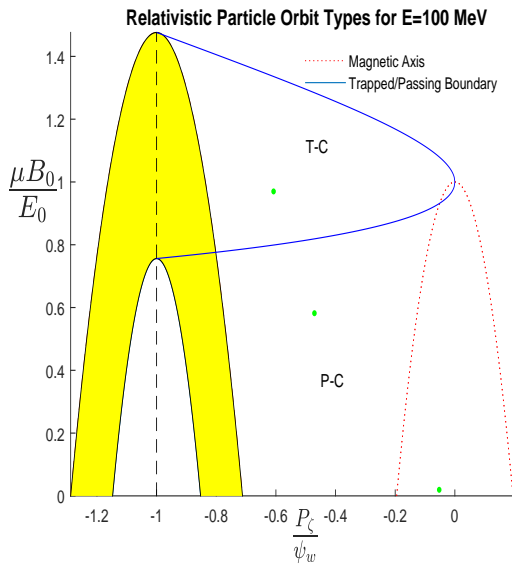
6.3.4 Σταθερό  $\alpha$



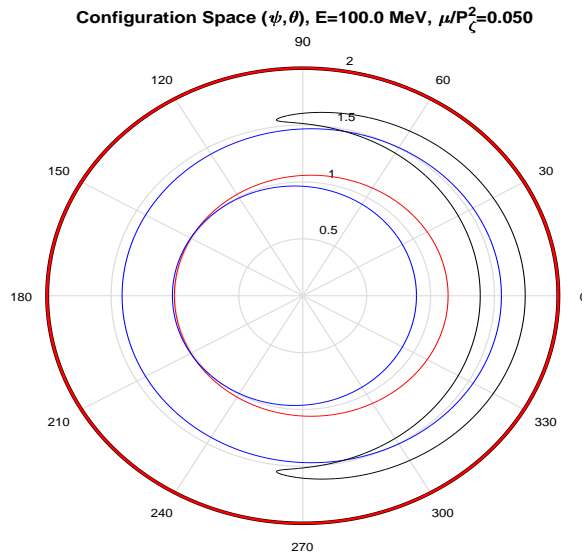
(i) διάγραμμα  $\mu - P_\zeta$  τύπων τροχιών με 50 MeV



(ii) Αναπαράσταση Τροχιών στο Configuration Space



(iii) διάγραμμα  $\mu - P_\zeta$  τύπου τροχιών με 100 MeV



(iv) Αναπαράσταση Τροχιών στο Configuration Space

Σχήμα 6.6: Διαγράμματα των τύπων των τροχιών των runaways για  $E = 50$  MeV (6.6i, 6.6ii),  $\alpha = \frac{\mu}{P_\zeta^2} = 0.01$  και  $E = 100$  MeV (6.6iii, 6.6iv),  $\frac{\mu}{P_\zeta^2} = 0.05$ . Τα πράσινα σημεία στα διαγράμματα  $\mu - P_\zeta$  αντιπροσωπεύουν τροχιές με ίδιο  $\alpha = \frac{\mu}{P_\zeta^2}$ . Οι εν λόγω τροχιές απεικονίζονται στα διαγράμματα δεξιά με το όριο του τοιχώματος να βρίσκεται στο  $r = a = 2$  m και να αντιπροσωπεύεται από τον κύκλο κόκκινου χρώματος.

Η τελευταία διερεύνηση αφορά το λόγο  $\frac{\mu}{P_z^2}$  ο οποίος είναι μία αδρή εκτίμηση του pitch angle των runaways, το οποίο δε μένει σταθερό κατά μήκος μίας τροχιάς. Το πρώτο ζεύγος σχημάτων με  $E = 50$  MeV απαρτίζεται από σχήματα τροχιών με  $\alpha = 0.01$ , ενώ το δεύτερο με  $E = 100$  MeV χαρακτηρίζεται από  $\alpha = 0.05$ .

Μία παρατήρηση σχετικά με τα σημεία είναι πως οι διαφορές των τροχιών κατά μήκος σταθερού  $\frac{\mu}{P_z}$  και  $\frac{\mu}{P_z^2}$  είναι, αρκετά μικρές. Ποιοτικά δηλαδή, δε θα υπάρχουν σημαντικές αλλαγές καθώς διατρέχει κανείς μία παραβολή ή μια ευθεία στο επίπεδο  $\mu - P_z$ . Συνεπώς και για τα δύο ζεύγη διαγραμμάτων σε αυτήν την περίπτωση συναντά κανείς παρόμοιες ομάδες τροχιών. Ειδικότερα πρόκειται για Confined τροχιές οι οποίες είναι η μία παγιδευμένη και οι άλλες 2 ανοιχτές. Μία διαφορά που παρατηρείται και αφορά την κόκκινη τροχιά η οποία βρίσκεται σε περιοχή μη επικάλυψης Passing και Counter-Passing και συνεπώς αναπαριστά μία μόνο τροχιά στο Configuration Space

Η συγκριτική μελέτη των τροχιών στο επίπεδο  $\mu - P_z$  και στο Configuration Space προσφέρει σημαντική εποπτεία σε σχέση με τη δυναμική και την τοπολογία των τροχιών. Μέσα από αυτά τα διαγράμματα, καλλιεργείται η διαίσθηση της συστηματικής αναγνώρισης τροχιών και εξαγωγής δεδομένων για αυτές. Αυτό μπορεί να αποβεί πολύ χρήσιμο εργαλείο για συγκεκριμένα είδη τροχιών, τα οποία παρουσιάζουν ιδιαίτερο επιστημονικό ενδιαφέρον, για διαφορετικό λόγο το καθένα. Στην περίπτωση αυτής της εργασίας, τα είδη τροχιών που αξίζει να μελετηθούν προσεκτικά και με συστηματικότητα είναι εκείνα τα οποία προβλέπουν ότι η τροχιά θα έρθει σε επαφή με το τοίχωμα, καθώς τότε γνωρίζει κανείς άμεσα, ότι το ηλεκτρόνιο σε εκείνη την τροχιά είναι επικίνδυνο και πρέπει να αναχαιτηθεί η πορεία του.



## 7 Σύνοψη - Συμπεράσματα - Επεκτάσεις

### 7.1 Σύνοψη - Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία μελετήθηκε η σχετικιστική δυναμική φορτισμένων σωματιδίων σε τοροειδείς διατάξεις ελεγχόμενης θερμοπυρηνικής σύντηξης. Οι τοροειδείς διατάξεις χρησιμοποιούνται για την μαγνητική συγκράτηση πλάσματος τόσο υψηλής θερμοκρασίας ώστε να είναι εφικτές οι επιθυμητές πυρηνικές αντιδράσεις για την παραγωγή ενέργειας. Η πολύπλοκη γεωμετρία του μαγνητικού πεδίου περιγράφεται κατάλληλα σε μαγνητικές συντεταγμένες, ενώ η κίνηση των φορτισμένων σωματιδίων μέσα σε αυτό περιγράφεται με την προσέγγιση του guiding center. Σύμφωνα με αυτή, η θεώρηση ήπιας χωρικής ανομοιογένειας του μαγνητικού πεδίου, δηλαδή ανομοιογένειας με χαρακτηριστικό μήκος πολύ μεγαλύτερο από την ακτίνα Larmor, επιτρέπει την μείωση των βαθμών ελευθερίας του συστήματος, λόγω απαλοιφής της γωνίας της κυκλοτρονικής περιστροφής.

Οι σχετικές εξισώσεις κίνησης μπορούν να γραφούν σε Χαμιλτονιανή μορφή με τον κατάλληλο ορισμό σχετικών κανονικών ορμών. Επιπλέον, στην περίπτωση αξονοσυμμετρικών μαγνητικών πεδίων, όπως αντιστοιχούν σε καταστάσεις ισορροπίας, στις οποίες σχεδιάζεται να λειτουργούν οι διατάξεις τύπου tokamak, το Χαμιλτονιανό σύστημα είναι ολοκληρώσιμο και η κίνηση των σωματιδίων προσδιορίζεται πλήρως από τρεις σταθερές της κίνησης.

Στην εργασία αυτή, χρησιμοποιήθηκε η προσέγγιση του guiding center για την σχετικιστική κίνηση ηλεκτρονίων για τη μελέτη υπερταχέων ηλεκτρονίων αναφερόμενων και ως runaway electrons, τα οποία παράγονται κατά τη λειτουργία αντιδραστήρων σύντηξης, λόγω της μείωσης του ρυθμού συγκρούσεων με την αύξηση της ταχύτητάς τους, γεγονός που επιτρέπει την επιτάχυνσή τους σε πολύ μεγάλες ταχύτητες. Συνέπεια αυτής της επιτάχυνσης είναι η διαφυγή των runaway electrons, η πρόσκρουσή τους στα τοιχώματα της διάταξης και η, συχνά καταστροφική, εναπόθεση ενέργειας στα υλικά που έρχονται σε επαφή με το πλάσμα.

Η σχετικιστική κίνηση του guiding center μελετήθηκε χρησιμοποιώντας τον Χαμιλτονιανό φορμαλισμό, επιτρέποντας την λεπτομερή ποιοτική και ποσοτική ανάλυση των χαρακτηριστικών των τροχιών. Συγκεκριμένα, μέσω κατάλληλων κανονικών μετασχηματισμών υπολογίστηκαν αναλυτικά οι μεταβλητές Δράσεων-Γωνιών του συστήματος και οι συχνότητες κίνησης σε όλους τους βαθμούς ελευθερίας για παγιδευμένες (τροχιές «μπανάνες») και απαγιδευτές τροχιές. Επιπλέον, χαρτογραφήθηκε η τοπολογία των τροχιών στον χώρο των τριών σταθερών της κίνησης ως προς την θέση τους σε σχέση με τον μαγνητικό άξονα και τα τοιχώματα της συσκευής. Η συνολική εποπτεία που παρέχουν τα σχετικά διαγράμματα

επιδείχθηκε με την παρουσίαση χαρακτηριστικών τροχιών σε πολοειδείς τομές του configuration space, αναδεικνύοντας την σημασία της παρούσας ανάλυσης για την πρόβλεψη της πρόσκρουσης των runaway electrons σε συγκεκριμένες θέσεις του τοιχώματος με βάση τα κινητικά τους χαρακτηριστικά.

## 7.2 Επεκτάσεις

Η παρούσα ανάλυση της σχετικιστικής κίνησης σε αξονοσυμμετρικά τοροειδή μαγνητικά πεδία, για τα οποία το αντίστοιχο Χαμιλτονιανό σύστημα είναι ολοκληρώσιμο, παρέχει τη βάση πάνω στην οποία μπορεί να μελετηθεί η κίνηση υπό την επίδραση μη-αξονοσυμμετρικών διαταραχών. Οι τελευταίες αντιστοιχούν σε μαγνητικές διαταραχές ή/και ηλεκτρομαγνητικά κύματα οι οποίες καθιστούν το σύστημα μη-ολοκληρώσιμο, με αποτέλεσμα την πολύπλοκη και χαοτική δυναμική των runaway electrons. Οι διαταραχές τροποποιούν σημαντικά τα κινητικά χαρακτηριστικά αλλά και τις ιδιότητες συγκράτησης των σωματιδίων, ενώ συνεπάγονται σημαντική τροποποίηση των σχετικών συναρτήσεων κατανομής. Η έκφραση του συστήματος σε μεταβλητές Δράσεων-Γωνιών αποτελεί το πρώτο βήμα για την εφαρμογή της Κανονικής Μεθόδου των Διαταραχών για τη μελέτη των σχετικών διαταραγμένων (σχεδόν-ολοκληρώσιμων) συστημάτων. Επιπλέον, η αναλυτική γνώση των αδιατάρακτων συχνοτήτων (τροχιακό φάσμα) επιτρέπει την a priori γνώση των περιοχών του φασικού χώρου όπου λαμβάνει χώρα η συντονιστική επίδραση κάθε διαταραχής με τον πληθυσμό των σωματιδίων. Τέλος, η συστηματική χαρτογράφηση των τροχιών του αδιατάρακτου συστήματος, υποδεικνύει τις τιμές των κινηματικών μεγεθών οι οποίες είναι επίφοβες ως προς την πρόσκρουση με τα τοιχώματα, υπό την επίδραση διαταραχών. Τα παραπάνω μπορούν να χρησιμοποιηθούν, όχι μόνο για την πρόβλεψη, αλλά και για την αντιμετώπιση του σχετικού προβλήματος μέσω της σκοπούμενης εισαγωγής επιπλέον κατάλληλων διαταραχών.

# Α' Μετασχηματισμοί από S.I. σε Φυσικές Μονάδες (Natural Units)

## Α'.1 Μετασχηματισμός Βασικών Μεγεθών

Προκειμένου τα δεδομένα όλων των προσομοιώσεων να μπορούν ερμηνευθούν όσο το δυνατόν ευκολότερα καθώς και να διευκολυνθεί η μετάβαση και αντιστοίχιση από την πειραματικά μετρούμενη ποσότητα στη θεωρητική τιμή, εισάγεται ένα νέο φυσικό σύστημα μονάδων. Οι βασικές του μονάδες αποτελούνται από το χρόνο το μήκος και την ενέργεια. Η μονάδα μέτρησης του χρόνου  $[T]$  σε αυτό είναι η αντίστροφη κυκλοτρονική συχνότητα επί του μαγνητικού άξονα  $[\omega_0]^{-1}$ , η μονάδα μήκους  $[L]$  είναι η μεγάλη ακτίνα της τοροειδούς διάταξης  $[R_0]$ . Τέλος η ενέργεια μετριέται σε  $[m_e][\omega_0]^2[R_0]^2$  το οποίο σημαίνει ότι κανονικοποιεί κανείς ως προς τη μάζα του ηλεκτρονίου.

Σημειώνεται πως οι παράμετροι που αφορούν τη διάταξη (ελάσσονα ακτίνα, μείζονα ακτίνα, μαγνητικό πεδίο επί του μαγνητικού άξονα) ταυτίζονται με αυτές του ITER οι οποίες συνοπτικά είναι οι ακόλουθες:

$$a = 2 \text{ m} \quad (\text{A'.1})$$

$$R_0 = 6.2 \text{ m} \quad (\text{A'.2})$$

$$B_0 = 5.3 \text{ T} \quad (\text{A'.3})$$

Από τα δύο τελευταία υπολογίζεται αρχικά η κυκλοτρονική συχνότητα ηλεκτρονίου στο μαγνητικό άξονα.

$$\omega_0 = \frac{eB_0}{m_e} = \frac{1.6022 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 5.3 \text{ T}}{9.31 \cdot 10^{-31} \text{ kg}} = 9.308 \cdot 10^{11} \text{ Hz} \quad (\text{A'.4})$$

Οι τιμές των μεγεθών σε μία μονάδα μέτρησης είναι αδιάστατες και θα συμβολίζονται με  $|\cdot|$ .

### • Κυκλοτρονική Συχνότητα

$$\omega = |\omega| [s^{-1}] \Rightarrow \omega_{NU} = \frac{|\omega|}{|\omega_0|} [\omega_0] \quad (\text{A'.5})$$

• **Μαγνητικό Πεδίο**

$$B_0 = \frac{m_e \omega_0}{e} \Rightarrow B_{0,NU} = 1 \frac{[m_e][\omega_0]}{[e]} \quad (A'.6)$$

• **Ταχύτητα**

$$v = |v_0| \frac{[m]}{[s]} = \frac{|v_0| |\omega_0^{-1}|}{|R_0|} \Rightarrow v_{NU} = \frac{|v_0|}{|\omega_0| |R_0|} [\omega_0][R_0] \quad (A'.7)$$

• **Ενέργεια**

$$\begin{aligned} E_{SI} &= |E_0| [MeV] = |E_0| \cdot 1.6022 \cdot 10^{-13} [J] = |E_0| \frac{1.6022 \cdot 10^{-13}}{|m_e| |R_0|^2 |\omega_0|^2} [m_e][\omega_0]^2 [R_0]^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow E_{NU} = 1.76 \cdot 10^{17} \frac{|E_0|}{|\omega_0|^2 |R_0|^2} [m_e][\omega_0]^2 [R_0]^2 = \frac{1.76 \cdot 10^{17}}{(9.308 \cdot 10^{11} \cdot 6.2)^2} |E_0| [m_e][\omega_0]^2 [R_0]^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow E_{NU} = 5.282 \cdot 10^{-9} |E_0| \end{aligned} \quad (A'.8)$$

Η ένταση του μαγνητικού πεδίου σε ένα σημείο του χώρου γενικά θα δίνεται από το εξής:

$$B = b \cdot B_0 \quad (A'.9)$$

όπου το  $b$  είναι η συνάρτηση που δίνει την τιμή του σε κάποιο σημείο με κανονικοποίηση στο  $B_0$  που είναι η ένταση του πεδίου στο μαγνητικό άξονα, όπως στην προσέγγιση ισορροπίας Large Aspect Ratio η μορφή του  $b$  είναι προκαθορισμένη και είναι η εξής:

$$b = 1 - \frac{|r|}{|R_0|} \cos \theta \quad (A'.10)$$

• **Μαγνητική Ροπή**

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{m_e v_{\perp}^2}{2B} = \frac{m_e v_{\perp}^2}{2b B_0} = \frac{m_e v_{\perp}^2}{2b \frac{m_e \omega_0}{e}} = \frac{e v_{\perp}^2}{2b \omega_0} = \frac{v_{\perp}^2 [e][m_e]^2}{2b [\omega_0][s]^2} = \frac{|v_{\perp}|^2 |\omega_0|^{-2} [e][R_0]^2}{2b |R_0|^2 [\omega_0][\omega_0]^{-2}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mu_{NU} = \frac{|v_{\perp}|^2}{2b |R_0|^2 |\omega_0|^2} [e][\omega_0][R_0]^2 \end{aligned} \quad (A'.11)$$

• Μαγνητική Ροή

$$\psi = B_0 \frac{r^2}{2} = \frac{m_e \omega_0 r^2}{e} = 1 \frac{r^2 [m_e][\omega_0]}{2 [e]} = \frac{1}{2} \frac{|r^2| [m_e][\omega_0][R_0]^2}{|R_0|^2 [e]} \Rightarrow \psi_{NU} = \frac{|r|^2 [m_e][\omega_0][R_0]^2}{2 |R_0|^2 [e]} \quad (A'.12)$$

A'.2 Μετασχηματισμός της Σχετικιστικής Χαμιλτονιανής

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \sqrt{m_e^2 c^4 + c^2 e^2 \gamma^2 \rho_{||}^2 B^2 + 2\mu B m_e c^2} = \sqrt{m_e^2 c^4 + c^2 e^2 \gamma^2 \rho_{||}^2 b^2 B_0^2 + 2\mu b B_0 m_e c^2} \Rightarrow \\ \mathcal{H} &= \sqrt{m_e^2 c^4 + c^2 e^2 \gamma^2 \rho_{||}^2 b^2 \frac{m_e^2 \omega_0^2}{e^2} + 2\mu b B_0 m_e c^2} = \sqrt{m_e^2 c^4 + c^2 \gamma^2 \rho_{||}^2 m_e^2 \omega_0^2 b^2 + 2\mu b B_0 m_e c^2} \Rightarrow \end{aligned} \quad (A'.13)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \left( 1^2 \cdot [m_e]^2 \frac{|c|^4}{|\omega_0|^4 |R_0|^4} [\omega_0]^4 [R_0]^4 + 1^2 \cdot [m_e]^2 \cdot 1^2 \cdot [\omega_0]^2 \gamma^2 |\rho_{||NU}|^2 [R_0]^2 b^2 \frac{|c|^2}{|\omega_0|^2 |R_0|^2} [\omega_0]^2 [R_0]^2 + \right. \\ &\quad \left. 2 |\mu_{NU}| [e][\omega_0][R_0]^2 \cdot 1 \cdot \frac{[m_e][\omega_0]}{[e]} \cdot 1 \cdot [m_e] \frac{|c|^2}{|\omega_0| |R_0|^2} [\omega_0]^2 [R_0]^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (A'.14)$$

Τελικά:

$$\mathcal{H}_{NU} = \sqrt{\frac{|c|^4}{|\omega_0|^4 |R_0|^4} + \frac{|c|^2 \gamma^2 |\rho_{||NU}|^2 b^2}{|\omega_0|^2 |R_0|^2} + 2 |\mu_{NU}| b \frac{|c|^2}{|\omega_0|^2 |R_0|^2} [m_e][\omega_0]^2 [R_0]^2} \Rightarrow \quad (A'.15)$$

$$\mathcal{H}_{NU} = \sqrt{\frac{|c|^4}{|\omega_0|^4 |R_0|^4} + \frac{|c|^2 |P_{\zeta} + \psi_{NU}|^2 b^2}{|\omega_0|^2 |R_0|^2} + 2 |\mu_{NU}| b \frac{|c|^2}{|\omega_0|^2 |R_0|^2} [m_e][\omega_0]^2 [R_0]^2} \quad (A'.16)$$

Σε MeV η ενέργεια είναι:

$$E[MeV] = \frac{\mathcal{H}_{NU}}{1.76 \cdot 10^{17}} |\omega_0|^2 |R_0|^2 = 1.893 \cdot 10^8 \mathcal{H}_{NU} \quad (A'.17)$$

## Βιβλιογραφία

- [1] Freidberg, J. P. *Plasma Physics and Fusion Energy*. Cambridge University Press, 2007.
- [2] Twarog, D. and Stankiewicz, R. and Drozdowicz, K. “Test of the European Transport Solver in the frame of Integrated Tokamak Modelling”, 12 2011.
- [3] Klinger, T. and Alonso, A. and Bozhenkov, S. and Burhenn, R. *et al.* “Performance and properties of the first plasmas of Wendelstein 7-X”. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 59:014018, 01 2017.
- [4] Magaud, P. and Marbach, G. and Cook, I. *Nuclear Fusion Reactors*. Elsevier, New York, 2004.
- [5] Breizman, B. and Aleynikov, P. and Hollmann, E. and Lehnen, M. ‘Physics of runaway electrons in tokamaks’. *Nuclear Fusion*, 59, 04 2019.
- [6] Dreicer, H. “Electron and Ion Runaway in a Fully Ionized Gas. I”. *Phys. Rev.*, 115:238–249, Jul 1959.
- [7] Gobbin, M. and Valisa, M. and White, R. and Cester, D. *et al.* “Runaway electron mitigation by applied magnetic perturbations in RFX-mod tokamak plasmas”. *Nuclear Fusion*, 57:016014, 01 2017.
- [8] Bakhtiari, M. and Kramer, G. and Whyte, D.G. “Momentum-space study of the effect of bremsstrahlung radiation on the energy of runaway electrons in tokamaks”. *Physics of Plasmas*, 12, 10 2005.
- [9] Wingen, A. and Abdullaev, S. and Finken, K. and Jakubowski, M. and Spatschek, K. “Influence of stochastic magnetic fields on relativistic electrons”. *Nuclear Fusion*, 46:941–952, 11 2006.
- [10] Kunugi, T. “Effects of runaway electrons on plasma facing components”. *Fusion Engineering and Design*, 23(4):329–339, 1994.
- [11] Boozer, A. H. “Plasma steering to avoid disruptions in ITER and tokamak power plants”, 2021.

- [12] Hassanein, A. and Sizyuk, T. “Comprehensive simulation of vertical plasma instability events and their serious damage to ITER plasma facing components”. *Νυσλευρ Φυσιον*, 48(11):115008, 09 2008.
- [13] Antonenas, Y. and Anastassiou, G. and Kominis, Y. “Analytical calculation of the orbital spectrum of the guiding centre motion in axisymmetric magnetic fields”. *Journal of Plasma Physics*, 87(1), 01 2021.
- [14] White, R. *The Theory of Toroidally Confined Plasmas*. Cambridge University Press, 01 2013.
- [15] White R. B., Chance M. S. “Hamiltonian Guiding Center Drift Orbit Calculation for Plasmas of Arbitrary Cross Section”. *Phys. Fluids*, **27**(10), 1984.
- [16] Li, M. and Breizman, B. and Zheng, L. “Canonical straight field line magnetic flux coordinates for tokamaks”. *Journal of Computational Physics*, 326, 09 2016.
- [17] Shafranov, V. D. “Plasma Equilibrium in a Magnetic Field”. *Reviews of Plasma Physics*, 2:103, 01 1966.
- [18] Gradshteyn, I. S. and Ryzhik, I. M. *Table of integrals, series, and products*. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2007.