



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Εφαρμοσμένων μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Τομέας Φυσικής

Έγγραφο σκοτεινής ύλης μέσω κινητικής
ανάμειξης σε σκοτεινούς αστέρες και
επίγειους ανιχνευτές.

Διπλωματική Εργασία
της
Χριστιάνα Βασιλάκη

Επιβλέπων: Χ. Κούβαρης
Καθηγητής

Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή:
Χ. Κούβαρης Ν. Ήργες Κ. Αναγνωστόπουλος
Καθηγητής ΣΕΜΦΕ Καθηγητής ΣΕΜΦΕ Καθηγητής ΣΕΜΦΕ

Αθήνα Ιούλιος 2021



National Technical University of Athens
School of Applied Mathematical and Physical Sciences
Department of Physics

Dark matter via kinetic mixing in dark stars and earth-based detectors

Diploma thesis
of
Christiana Vasilaki

Supervisor: C. Kouvaris

Examination Committee:

C. Kouvaris N. Irges K. Anagnostopoulos

Athens, July 2021

Abstract

In the search for particle dark matter, a subject of considerable interest in the past decades has been the extension of the Standard Model with an extra $U(1)_D$ symmetry, whose force carrier is a massive dark photon. This introduces a new kinetic mixing term into the Lagrangian and provides a communication channel between the visible and dark sector. The kinetic mixing term induces a coupling between the dark photon and Standard Model particles, which could potentially lead to direct or indirect detection in an experiment. In this thesis, the interactions considered were the elastic scattering of a dark matter particle with a proton mediated by a massive dark photon and the Compton-like absorption of a dark photon by an electron followed by the emission of an ordinary photon. Additionally, the dark photon model was examined in the context of dark stars, which are compact objects comprised of asymmetric self-interacting dark matter. In this case, the ordinary photon can acquire a medium-induced mass inside the dark star through a Higgs-like mechanism, which results in a coupling between the photon and dark sector particles. Lastly, the elastic scattering cross-section for dark matter-proton interaction and the corresponding differential rate of events for a direct detection experiment were calculated.

Keywords: dark matter - kinetic mixing - dark photon - direct detection - dark stars

Περίληψη

Στην έρευνα της σκοτεινής ύλης τις τελευταίες δεκαετίες ένα θέμα ιδιαίτερου ενδιαφέροντος έχει αποτελέσει η επέκταση του Καθιερωμένου Προτύπου με μια επιπλέον συμμετρία $U(1)_D$, με φορέα πεδίου ένα σκοτεινό φωτόνιο με μάζα. Η συμμετρία που προκύπτει εισάγει ένα νέο κινητικό όρο ανάμειξης στην Λαγκραντζιανή, που παρέχει μια γέφυρα επικοινωνίας μεταξύ της σκοτεινής και ορατής ύλης. Η κινητική ανάμειξη εισάγει σε μία σταθερά σύζευξης μεταξύ του σκοτεινού φωτονίου και των σωματιδίων του Καθιερωμένου Προτύπου, που μπορούσε ενδεχομένως να οδηγήσει σε έμμεση ή άμεση ανίχνευση σκοτεινής ύλης σε ένα πείραμα. Οι αλληλεπιδράσεις του μοντέλου που μελετήθηκαν περιλαμβάνουν την ελαστική σκέδαση ενός σκοτεινού σωματιδίου από ένα πρωτόνιο με την ανταλλαγή ενός σκοτεινού φωτονίου και μια διαδικασία σαν σκέδαση Compton με ένα σκοτεινό φωτόνιο. Επιπλέον, το μοντέλο του σκοτεινού εξετάστηκε στο πλαίσιο των σκοτεινών αστέρων, τα οποία είναι συμπαγή σώματα που αποτελούνται από ασύμμετρη self-interacting σκοτεινή ύλη. Σε αυτήν την περίπτωση, το φωτόνιο μπορεί να αποκτήσει μια επαγόμενη μάζα μέσα στο σκοτεινό αστέρι μέσω ενός μηχανισμού Higgs, το οποίο οδηγεί σε μια σύζευξη μεταξύ του φωτονίου και των σωματιδίων της σκοτεινής ύλης. Τέλος, υπολογίστηκε η ενεργός διατομή σκέδασης για αλληλεπίδραση σκοτεινής ύλης-πρωτονίου και ο αντίστοιχος διαφορικός ρυθμός γεγονότων για ένα πείραμα άμεσης ανίχνευσης.

Λεξείς κλειδιά: σκοτεινή ύλη - κινητική ανάμειξη - σκοτεινό φωτόνιο - σκοτεινοί αστέρες - έμμεση ανίχνευση

*To the memory of my grandfather
1945-2021*

Acknowledgments

I am grateful to my thesis advisor Dr. Christoforos Kouvaris for his valuable guidance throughout the research process. I would also like to thank my friends and family for their support.

.....

Χριστιάνα Βασιλάκη

© (2021) Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο. All rights Reserved. Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς το συγγραφέα. Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σ' αυτό το έγγραφο εκφράζουν το συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευτεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Contents

List of Figures	vi
1 Introduction	1
1.1 Evidence for Dark Matter	1
1.1.1 Galactic scale	1
1.1.2 Galaxy-cluster scale	3
1.1.3 Cosmological scale	5
1.2 Dark Matter Searches	9
1.2.1 Direct Detection	9
1.2.2 Indirect Detection	9
1.2.3 Collider Searches	10
2 Introduction to Cosmology	11
2.1 Standard Cosmological Model	11
2.2 Thermodynamics and Boltzmann equation	13
2.2.1 Equilibrium Thermodynamics	14
2.2.2 Boltzmann Equation	15
2.3 Big Bang Nucleosynthesis	17
2.3.1 Deuterium synthesis	17
2.3.2 Neutron abundance	18
2.3.3 Light element abundances	19
2.4 Recombination	19
3 Dark Matter	21
3.1 Dark matter candidates	21
3.2 Thermal Freeze-out	22
3.2.1 Hot Dark Matter	23
3.2.2 Cold Dark Matter	24
3.3 Alternatives to the WIMP paradigm	25
3.3.1 Self-Interacting Dark Matter	25
3.3.2 Asymmetric Dark Matter	26
4 Dark matter via Kinetic Mixing	27
4.1 Dark photon and Kinetic mixing	27
4.2 Kinetic Mixing in Dark Stars	31
4.2.1 SM photon mass in a Dark Star	31
4.2.2 Mixed mass matrix	33
4.3 Feynman Rules	35
4.4 DM-proton scattering, $\chi p \rightarrow \chi p$	36
4.5 Compton-like process, $e^- A' \rightarrow e^- \gamma$	40
5 Direct Detection of DM	44
5.1 Principles of direct detection	44
5.1.1 DM-nucleus kinematics	45
5.1.2 Dark matter distribution	45
5.1.3 Differential Event Rates	47

5.1.4	Cross-sections and Nuclear Form factor	47
5.2	Event Rates for DM-proton scattering	49
5.2.1	DM-proton scattering cross-section	49
5.2.2	Differential rate of events	50
6	Conclusions	54
A	Scattering kinematics	55
B	Gamma matrix Traces	57
C	Extended Greek abstract - Περίληψη στην Ελληνική γλώσσα	58
	References	82

List of Figures

1.1	<i>Rotational velocities for seven galaxies, as a function of distance from the galactic center. Figure from: [1].</i>	2
1.2	<i>Observed strong gravitational lensing effects in the Abell 370 cluster in the Hubble Space Telescope image. Credits: NASA, ESA, and J. Lotz and the HFF Team. . .</i>	4
1.3	<i>the Bullet cluster (a) a color image from the Magellan images of the colliding cluster (b) the X-ray brightness of the hot gas from the Chandra X-ray coded in yellow, red and blue contours. Green contours represent the distribution of the gravitating matter, from weak gravitational lensing measurements. Figure from: [2].</i>	5
1.4	<i>Results from the Planck 2018 data release (a) Planck all-sky map of the intensity of the CMB (b) power spectrum of the CMB. Credit: European Space Agency, Planck Collaboration.</i>	6
1.5	<i>Schematic representation of dark matter detection channels.</i>	9
3.1	<i>The mass range for several proposed dark matter particle candidates. Figure from [3].</i>	21
3.2	<i>$Y = n_X/T^3$ of non-relativistic massive stable dark particles X as a function of $x = m_X/T$. Figure from: [4].</i>	25
4.1	<i>Feynmann one-loop diagram showing the kinetic mixing of the SM photon, A with a dark photon A', where Ψ and Ψ' are heavy particles charged under both SM $U(1)$ and the dark $U(1)_D$ forces.</i>	28
4.2	<i>Tree level diagram for the scattering of a DM particle χ with a SM particle with the exchange of a dark photon A'.</i>	29
4.3	<i>Current bounds on the kinetic mixing parameter ϵ (here denoted by κ) depending on the mass of the dark photon for $m_{A'} > 1$ MeV from collider/fixed target experiments, including bounds from supernovae and $(g - 2)_e$. Figure from [5].</i>	30
4.4	<i>Feynman diagrams for dark matter particle χ production channels in the dark photon model.</i>	30
4.5	<i>DM-proton scattering diagram.</i>	36
4.6	<i>Feynman diagrams for the Compton-like process $e^- A' \rightarrow e^- \gamma$.</i>	40
5.1	<i>The Lewin-Smith parameterisation of the Helm form factor, F^2 for a Xenon nucleus as a function of momentum transfer, q.</i>	48
5.2	<i>Dark matter search upper bounds for the WIMP-nucleon σ_{SI} elastic scattering cross-section with a 90% confidence level from a One Tonne\timesYear Exposure of XENON1T. Figure from [6].</i>	49
5.3	<i>Free DM-proton scattering cross-section, σ_p as a function of DM particle mass, m_χ, for a dark photon of mass $m_{A'} = 5$ GeV and a kinetic mixing parameter with the visible photon $\kappa = 2 \times 10^{-6}$.</i>	50
5.4	<i>Differential scattering rate $\frac{dR}{dE_R}$ as a function of recoil energy E_R for DM-proton scattering mediated by a dark photon of mass $m_{A'} = 5$ GeV with $\alpha_D = 10^{-4}$ and a kinetic mixing parameter $\kappa = 2 \times 10^{-6}$ with the ordinary photon. The differential rate is plotted for DM particle masses $m_\chi = 5$ GeV, 10 GeV, 20 GeV. The calculations are performed for a detector with Xenon target nuclei.</i>	51

- 5.5 Differential scattering rate $\frac{dR}{dE_R}$ as a function of recoil energy E_R for DM-proton scattering mediated by a dark photon of mass $m_{A'} = 5 \text{ GeV}$ with $\alpha_D = 10^{-5}$ and a kinetic mixing parameter $\kappa = 2 \times 10^{-6}$ with the ordinary photon. The differential rate is plotted for DM particle masses (top) : $m_\chi = 5 \text{ GeV}, 10 \text{ GeV}, 20 \text{ GeV}$ and (bottom) : $m_\chi = 30 \text{ GeV}, 50 \text{ GeV}, 100 \text{ GeV}$. The calculations are performed for a detector with Xenon target nuclei. 52

Chapter 1

Introduction

One of the most extraordinary discoveries of the twentieth century was that the majority of the matter in the Universe is of unknown nature. Based on current cosmological measurements, no more than 5% of the mass-energy of the Universe can be attributed to ordinary matter, while nearly 27% corresponds to this unknown form of matter known as Dark Matter (DM) [7]. The remaining 68% correspond to Dark Energy, which is a hypothesized substance driving the accelerated expansion of the Universe. The nature of dark matter and dark energy are among the greatest puzzles of modern cosmology and astrophysics. The main focus of this thesis is DM.

Even though it is the most abundant form of matter in the Universe, DM has only been observed through its gravitational effects with ordinary matter. After decades of research, its fundamental properties are still a mystery. The existence of dark matter is the most compelling evidence for the existence of new physics beyond the Standard Model (SM) of particle physics. The detection of the elusive DM particle would reveal new physics and hopefully lead to a rapid development of our knowledge of the Universe and particle physics.

This Chapter begins by presenting evidence for DM at different astronomical and cosmological scales, from early indications in the 1930s to more recent compelling evidence. Lastly, an overview of the current experimental methods used in the search for DM particle is presented.

1.1 Evidence for Dark Matter

1.1.1 Galactic scale

In the 1970s the strongest evidence for the existence of Dark Matter (DM) emerged from its gravitational interactions with baryonic matter in the Milky way and the neighboring Andromeda galaxy and motivated the decades-long research for the elusive dark particle. Most spiral galaxies, such as the Milky way and Andromeda, consist of a central bulge surrounded by a flat galactic disk which contains most of the stars. Among the first indications for the existence of DM came from the measurement of the rotation curves of stars in such galaxies. A rotation curve is a measurement of the orbital velocity of stars around the center of the galaxy as a function of their distance from the galactic center.

Since stars rarely collide and move in an almost circular orbit around the disk, one can assume that their motion is dictated by centripetal and gravitational forces. From standard Newtonian dynamics, balancing the centripetal and gravitational force acting on a star with mass m orbiting at radial distance r from the galactic center,

$$\frac{mu_r^2}{r} = G \frac{M_r m}{r^2}, \quad (1.1)$$

which gives the orbital velocity

$$u_r = \sqrt{\frac{GM_r}{r}}, \quad (1.2)$$

where G is the gravitational constant and M_r is the total enclosed mass interior to r . Since most of the stars are located in the galactic disk, for radial distances $r > r_{\text{disk}}$ the mass M_r should remain constant, which suggests that the orbital velocity falls off as $u_r \propto 1/\sqrt{r}$. Therefore, according to (1.2) the orbital velocity is expected to decrease for increasingly larger radial distances from the galactic center.

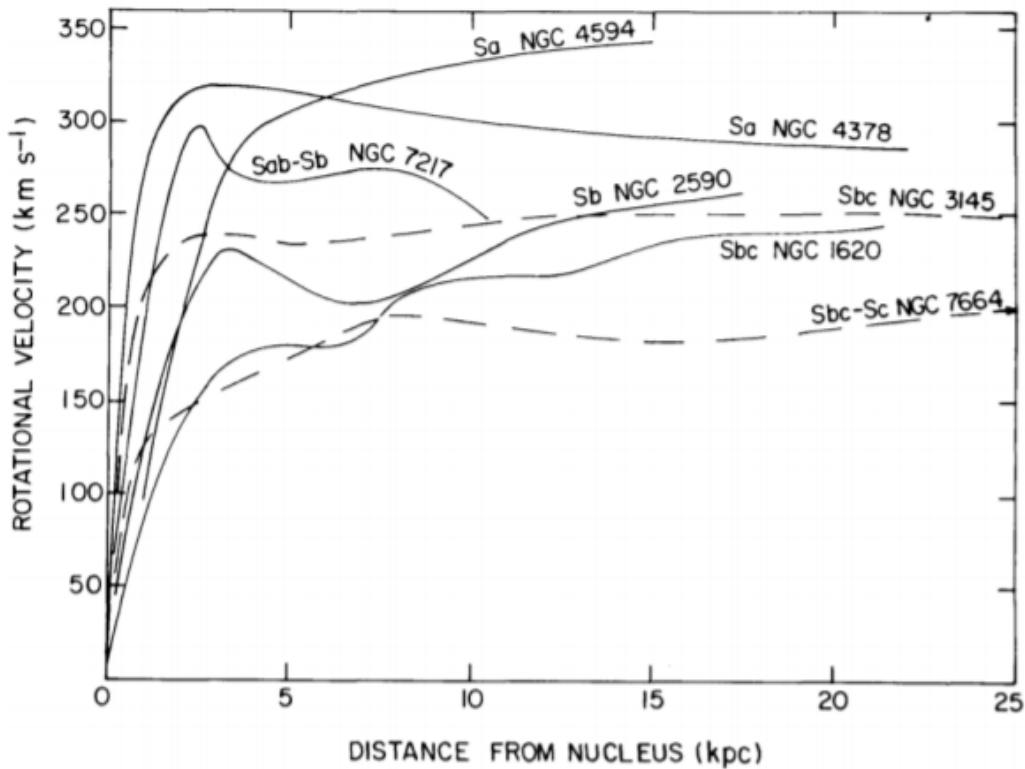


Figure 1.1: *Rotational velocities for seven galaxies, as a function of distance from the galactic center.* Figure from: [1].

In the 1970s Vera Rubin and among other notable astronomers obtained the first rotation curve measurements from several galaxies including the Andromeda galaxy, also known as M31. They estimated the rotation velocity of stars orbiting a galaxy at various radial distances, r , from the Doppler shift of the 21 cm hydrogen line. Their findings were surprising, as their observations revealed that for a very large number of galaxies the galactic rotation curves are almost flat for large radial distances, as presented in Figure 1.1. Instead of falling off as $\frac{1}{\sqrt{r}}$, as expected if the most of the mass is concentrated inside the bulge, the flat rotation curve require $M_r \propto r$ for large radii. As a consequence, either a invisible mass component that increases linearly with distance must be present, or our existing theory of gravity must be modified. Apart from the numerous efforts to explain this discrepancy with modified gravity theories, most astronomers in the 1980s were convinced that a non-luminous form of matter, known as Dark Matter, exists and surrounds galaxies and clusters.

The rotation curves can be used to infer information about the distribution of mass in the galaxy and in particular DM distribution. DM must be present in much larger radii than the observed galactic disk. By taking into account that in the outer parts of the galaxy $M_r \propto r$, the DM density is approximately given by

$$\rho_{DM} \sim \frac{r}{r^3} \sim \frac{1}{r^2}. \quad (1.3)$$

Unlike baryonic matter which is concentrated in the galactic disk, DM is distributed in a spherically symmetric DM halo surrounding the galaxy.

1.1.2 Galaxy-cluster scale

Coma cluster

Before the pioneering findings of Rubin, the first hints towards the existence of DM came in 1930s from the astronomer Fritz Zwicky. While he was studying redshifts of various galaxy clusters, he noticed that several galaxies in the Coma Cluster were moving too rapidly to be bound to the cluster, if one accounts only for the gravity of visible stellar matter in the system [8]. He proceeded to calculate the mass of the galaxy cluster using two distinct methods. In the first method he used the virial theorem, which states that for a stable, self-gravitating spherical distribution of objects, the total kinetic energy T of the system and the total gravitational potential energy U are related through

$$T = -\frac{U}{2}. \quad (1.4)$$

Assuming a spherical distribution of galaxies in the cluster, the kinetic and potential energy can be approximated by,

$$T \simeq \frac{1}{2}M\langle u^2 \rangle, \quad U \simeq -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}, \quad (1.5)$$

where M is the total mass of the system, R is the radius of the cluster, $\langle u^2 \rangle$ is the velocity dispersion of galaxies in the cluster. Therefore, using the virial theorem, the total mass of the galaxy cluster is given by

$$M = \frac{5}{3}\frac{\langle u^2 \rangle R}{G}. \quad (1.6)$$

The mass of the cluster can be estimated using values for $\langle u^2 \rangle$ from redshift measurements.

The second method Zwicky used to estimate the mass of the cluster relied on the total luminosity. He estimated that the total mass of Coma is given by the product of the number of observed galaxies and the average mass of a typical galaxy in the system. Zwicky's, as well as, subsequent measurements conclude that the estimated mass from the virial theorem required account for the observed velocity dispersion turns out to be at least a factor of ten larger than one would expect from the luminosity [9]. Zwicky concluded that this discrepancy implies that dark matter is present in much greater amount than luminous matter [10].

Gravitational lensing

According to Einstein's theory of General Relativity, a gravitating mass can deflect light, and can thus act as a gravitational lens. This gives rise to the phenomenon known as gravitational lensing. Light from distant objects, such as galaxies and quasars, is bent towards the regions of large mass as the result of intervening matter. Over the past decades, numerous lensing observations have provided further evidence for the existence of DM both in galaxies and in clusters of galaxies. There are three types of gravitational lensing observations: strong, weak and microlensing.

In the 'strong-lensing' regime, the lens mass is concentrated enough to produce visible distortions of the background object such as multiple images and arcs. In addition, if the lensing is perfectly symmetrical, a complete or almost-complete circle of light is produced called an Einstein Ring. In Figure 1.2, the effects of strong lensing can be seen in the Hubble Space Telescope image of Abell 370 cluster. The gravitational lens produces multiple arcs and arclets which are images of distant galaxies. Studying Abell 370 and its images gives astronomers a unique window into the distribution of visible and DM in galaxy clusters and the universe. Although strong lensing is a rare event, it is a very powerful probe of DM. The strong lensing effect can be used to determine the gravitating mass in a cluster, and help reconstruct detailed maps of the distributions of DM in the cluster.

In weak lensing, the lens mass is not concentrated enough in one place to form multiple images or arcs, but causes general distortion. In this lensing regime, the distortions of the distant objects are much smaller and can only be detected by analyzing the shape distortions of a large number of objects. In the late 1990s, weak lensing observations from the Sloan Digital Sky Survey, provided further evidence that galaxies, including the Milky Way, are embedded in a large DM halo [11].



Figure 1.2: *Observed strong gravitational lensing effects in the Abell 370 cluster in the Hubble Space Telescope image.* Credits: NASA, ESA, and J. Lotz and the HFF Team.

In the microlensing regime, the amount of light received from the background object changes in time as it passes in front of the gravitational lens. A temporary pulse-like increase in the luminosity flux of the background object is observed, because it is magnified by the gravity of the intervening matter. Only physically small sources, such as stars, can be affected by microlensing. Larger background sources, such as galaxies, have only a small fraction of their light magnified by the small lens. One of the first candidates for DM that were considered early on were Massive Compact Halo Objects (MACHOs), which are objects composed of baryonic matter that emit little to no electromagnetic radiation, such as rogue planets, brown dwarfs or black holes in the galactic halo. While the existence of these objects is not controversial, microlensing surveys conducted in early 2000's concluded that although MACHOs may contribute to the DM mass in galaxies, their abundance is not sufficient to explain the required DM mass in the Universe [12].

X-rays

Galaxy clusters contain a non-negligible amount of hot X-rays emitting gas. The mass of the cluster can be estimated using X-ray imaging of hot intra-cluster gas. Assuming the hot gas is in hydrodynamical equilibrium, the gas particles move in the gravitational field of the cluster with velocities according to the mass of the cluster. If the density and temperature of the intra-cluster are known, then the cluster mass M as a function of distance from the center r , can be derived from hydrostatic equilibrium equation [13]

$$M(< r) = -\frac{kr}{\mu m_p G} T_{gas}(r) \left(\frac{d \ln \rho_{gas}(r)}{d \ln r} + \frac{d \ln T_{gas}(r)}{d \ln r} \right),$$

where k Boltzmann constant, m_p is the mass of the proton, μ is the mass the mass of the gas in units of m_p .

X-ray measurements have been used to measure the baryonic and dark matter content of several galaxy clusters. In particular, results from the Chandra X-Ray Observatory conclude that the mass of dark matter in galaxy clusters is ~ 5 to 10 times that of the baryonic matter [14].

Bullet Cluster

The Bullet cluster, located 3.8 billion light years away from Earth, has been proven to be an important astronomical probe for astrophysical research and DM in particular. Gravitational lensing measurements of this system, provide the most compelling evidence for the existence of DM, as opposed to modified theories of Newtonian Dynamics [2]. The Bullet Cluster formed through a collision of two clusters moving at large velocities. As the clusters collided, stars and

galaxies from each cluster passed each other without interaction, since they mainly interact through gravity. The gas from each cluster, interacted strongly with that in the other, producing the bullet like image presented in Figure 1.3b.

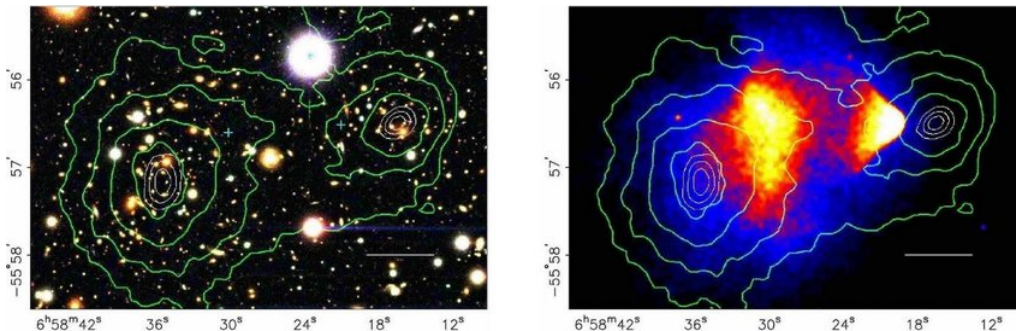


Figure 1.3: *the Bullet cluster (a) a color image from the Magellan images of the colliding cluster (b) the X-ray brightness of the hot gas from the Chandra X-ray coded in yellow, red and blue contours. Green contours represent the distribution of the gravitating matter, from weak gravitational lensing measurements. Figure from: [2].*

In Figure 1.3b, the yellow, red and blue contours represent the X-ray brightness of the gas from the Chandra X-ray satellite, while the green contours show the distribution of the gravitating matter, obtained from weak gravitational lensing measurements. X-ray measurements determined that the majority of the baryonic mass content of the colliding cluster is in the form of hot gas, with a smaller stellar mass contribution. As seen in Figure 1.3, there is a separation between the gravitating matter and the gas, which provides strong evidence that the majority of mass in the cluster is in the form of DM. The study of the Bullet Cluster not only provided some of the most compelling observational evidence for the existence of DM to date, but also that DM does not interact strongly with ordinary matter, or with itself.

1.1.3 Cosmological scale

Cosmic Microwave Background (CMB)

At the largest scales, the Cosmic Microwave Background (CMB) serves as an excellent probes for DM and cosmology in general. The CMB was firstly predicted by G. Gamow in 1946, and later in 1964 discovered accidentally by Penzias and Wilson. Shortly after the Big Bang, the Universe consisted of a dense primordial plasma of charged particles and photons. As the Universe expanded, the plasma grew cooler. When the temperature of the radiation was of order 10^4 K, which corresponds to energies of order \sim eV, free electrons and protons combined to form neutral hydrogen, which is known as the epoch of recombination. Before this epoch, since the binding energy of the hydrogen atom is 13.6 eV, any hydrogen produced was ionized by photons. Shortly after recombination occurred, photons decoupled from the rest of the cosmic plasma, as their scattering with electrons, which kept them in thermal equilibrium, became smaller than the expansion rate of the Universe. The number density of free electrons plummeted during the epoch of recombination, as electrons combine with protons to form neutral hydrogen and as a result their scattering rate with photons decreased. At this time, at redshift $z \simeq 1100$, the Universe became transparent to electromagnetic radiation, and photons were able to travel freely in the Universe for the first time. The photons released from this process comprise today the CMB. This is known as the epoch of last scattering, at which typical CMB photon underwent its last scattering off an electron.

In the decades following its discovery, three satellites were launched to map the CMB with increasing levels of accuracy and sensitivity. The first mission was NASA's Cosmic Background Explorer (COBE). In 1992 their results revealed that the CMB is a nearly perfect black body, aside from some small temperature fluctuations, suggesting that the early universe was not completely smooth. The following missions were NASA's Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) in 2001 and ESA's Planck in 2009, which measured the anisotropies in the CMB with greater precision. In Figure 1.4a the Planck map of the CMB from the Planck 2018 data release is presented.

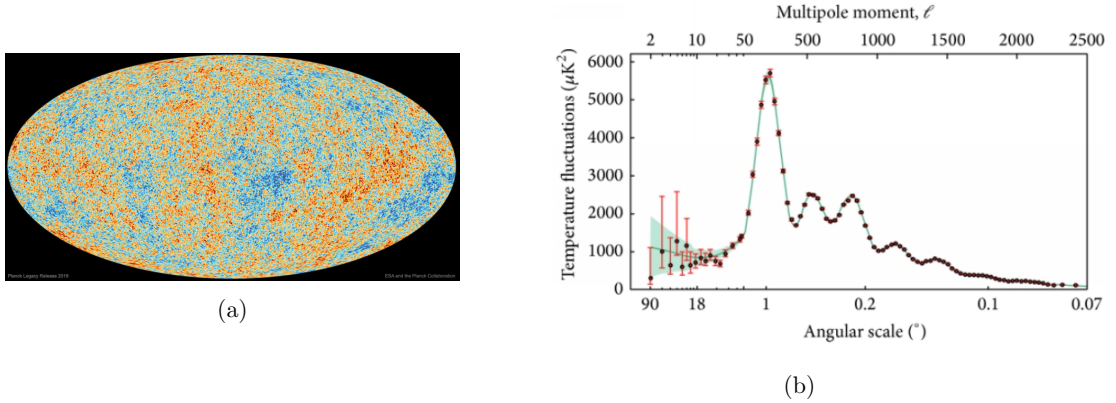


Figure 1.4: Results from the Planck 2018 data release (a) Planck all-sky map of the intensity of the CMB (b) power spectrum of the CMB. Credit: European Space Agency, Planck Collaboration.

As measured by modern instruments, the spectrum of CMB is that of a near-perfect blackbody, with a mean temperature

$$\langle T \rangle = 2.7255 \pm 0.0006 \text{ K.} \quad (1.7)$$

The temperature fluctuations at a given point in the sky are defined as

$$\frac{\delta T}{T}(\theta, \phi) = \frac{T(\theta, \phi) - \langle T \rangle}{\langle T \rangle}, \quad (1.8)$$

where $T(\theta, \phi)$ is temperature of a given point (θ, ϕ) on the celestial sphere. The fluctuations in the CMB have been detected up to $\frac{\delta T}{T} \sim 10^{-5}$, which means that across the CMB the temperature variations are $30 \pm 5 \mu\text{K}$.

For a temperature fluctuation of angular size $\delta\theta$, the angular diameter distance to the last scattering surface is given by

$$d_A = \frac{l}{\delta\theta}, \quad (1.9)$$

where l is the temperature fluctuation proper size. The angular diameter distance can be approximated by

$$d_A \approx \frac{d_{\text{hors}}(t_0)}{z_{\text{ls}}}, \quad (1.10)$$

where $d_{\text{hors}}(t_0) \approx 14,000 \text{ Mpc}$ is the present-day horizon distance, and $z_{\text{ls}} \approx 1100$ is the redshift at the last scattering epoch, which results in an angular diameter distance $d_A \approx 13 \text{ Mpc}$. Therefore, the proper size of the fluctuation at the time of the last scattering is approximately given by

$$l = d_A(\delta\theta) = 0.22 \text{ Mpc} \left(\frac{\delta\theta}{1^\circ} \right). \quad (1.11)$$

Usually, the fluctuations are expanded in spherical harmonics according to

$$\frac{\delta T}{T}(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (1.12)$$

where the Y_{lm} are the usual spherical harmonic functions.

Cosmologists are interested in the statistical properties of the temperature fluctuations rather than the positions of hot and cold spots in the CMB. The correlation function, $C(\theta)$ gives a statistical measure of the fluctuations. For any two points in the CMB separated by angle θ , their directions relative to an observer are represented by vectors \hat{r} and \hat{r}' so that $\cos \theta = \hat{r} \cdot \hat{r}'$. The correlation function is defined as

$$C(\theta) \equiv \left\langle \frac{\delta T}{T}(\hat{r}) \frac{\delta T}{T}(\hat{r}') \right\rangle_{r \cdot r' = \cos \theta}, \quad (1.13)$$

where the triangular brackets indicate averaging over all pairs of points separated by the angle θ . Using the expansion of the temperature fluctuations in spherical harmonics, the correlation function can be expressed as

$$C(\theta) = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) C_l P_l(\cos \theta), \quad (1.14)$$

where P_l are the Legendre polynomials. Consequently, the measured correlation function can be expanded in terms of its multipole moments C_l . A C_l term can be thought of as a measure of the temperature fluctuation on the angular scale $\theta \sim 180^\circ/l$.

Typically, the power spectrum of the temperature fluctuations is plotted, which is given by

$$\Delta_T^2 \equiv \frac{l(l+1)}{2\pi} C_l \langle T \rangle^2. \quad (1.15)$$

The power spectrum from the Planck mission 2018 data release is presented in Figure 1.4b. In the power spectrum, a sharp peak is present at $\theta \approx 1^\circ$ ($l \approx 180$). Interestingly, a patch of the last scattering surface with physical size equal to the Hubble distance at that time has an angular size as seen from Earth $\theta_H \approx 1^\circ$.

As it turns out the large scale fluctuations $\theta > \theta_H$ have a different origin from the small scale fluctuations $\theta < \theta_H$. In order to explain these anisotropies in the CMB, cosmologists turned to the gravitational influence of DM in the early Universe.

The large-scale fluctuations in the CMB, with angular size $\theta > \theta_H$, can be explained by the gravitational influence of a non-uniform distribution of DM at the time of the last scattering. During this time, DM dominated the energy density of the Universe with, $\epsilon_{\text{DM}} > \epsilon_\gamma > \epsilon_{\text{baryons}}$ [15]. Therefore the gravitational potential of the Universe during this epoch was primarily determined by the distribution of non-baryonic DM. If the distribution of DM in the early Universe is not completely uniform, DM density fluctuations could give rise to fluctuations in the gravitational potential. As a consequence, a CMB photon in a deeper potential well at the time of the last scattering, loses energy once emitted and is thus red-shifted. Therefore, cooler spots on the CMB temperature map correspond to a deeper potential well. Similarly, photons at a potential maximum, when emitted gain energy and are consequently blue-shifted. This effect was extensively studied by Rainer Sachs and Arthur Wolfe in 1967, and was named after them as the Sachs-Wolfe effect.

The origin of the small-scale fluctuations with angular sizes $\theta < \theta_H$, are due to acoustic oscillations. Before the epoch of photon decoupling, the photons and baryonic contents of the Universe existed in a single photon-baryon fluid. DM decoupled from the rest of the plasma, interacts with the photon-baryon fluid through the gravitational force. Additionally, the photons give rise to radiation pressure in the baryon-photon fluid. The fluid finds itself in a gravitational potential well supplied by the DM. The fluid is then compressed by gravity, and thus its pressure starts to rise until it reverses the compression and causes the fluid to expand outward. As the fluid expands, its pressure drops due to the expansion of the Universe, until gravity takes over again. The resulting inward and outward oscillations of the fluid are called acoustic oscillations. The cycle of compression and expansion of the fluid continues until the photons decouple from the plasma. The energy density of a CMB photon depends on whether it was emitted while the photon-baryon fluid expanding or contracting. If the photon-baryon fluid happens to be at maximum compression at the time of decoupling, then the photon energy density will be higher, and thus since $\epsilon = \alpha T^4$, the emitted photons will have temperatures higher than average.

Structure formation and DM

One of the strongest, yet simplest, arguments in favour of non-baryonic dark matter comes from observations of the structure of the Universe. As revealed by the maps of the CMB the early universe was very smooth, with temperature anisotropies 1 part in 10^5 . However, in our current

mapping of the Universe it appears very inhomogeneous today. The temperature fluctuations in the CMB translate to density fluctuations of baryonic matter given by

$$\frac{\delta\rho_b}{\rho_b} < 10^{-4}. \quad (1.16)$$

The growth of structure is explained by overdense regions which accumulated more matter due to their gravitational influence. Thus a region starting out with a tiny overdensity, over billions of years became much denser. In this way, small scale fluctuations eventually grow and hierarchically assemble to form larger structures. However, in models without DM the initial perturbations are too small to explain the structure formation observed today. The presence of DM in the early universe before the epoch of recombination means that perturbations in the DM density, allow baryonic matter to collapse faster at the epoch of recombination, and thus eventually making structure formation possible.

1.2 Dark Matter Searches

As discussed in the previous section, the presence of vast amounts of DM in the Universe is required to explain phenomena at several astronomical and cosmological scales, ranging from galactic rotation curves to the CMB. Although DM is the most abundant form of matter in our universe, it has only been observed through its gravitational interactions with ordinary matter and its fundamental properties, such as its mass or couplings, remain a mystery. Currently, the experimental search for the elusive DM particle, consists of three methods: direct detection, indirect detection and collider searches. The possible DM detection channels are shown in Figure 1.5, where the arrow denotes the direction of time, and the circle represents an unknown interaction between the DM and SM particles. This thesis focuses on direct detection.

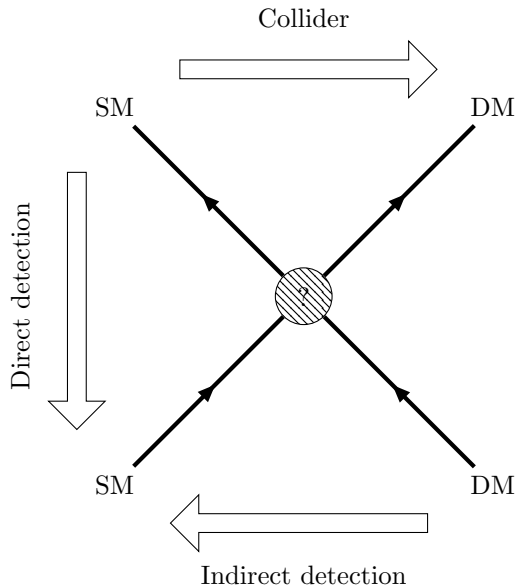


Figure 1.5: *Schematic representation of dark matter detection channels.*

1.2.1 Direct Detection

Dark particles in the galactic halo which interact weakly with visible matter can potentially produce an observable signal in an earth-based detector. This is the basic principle of the direct approach to DM detection. DM is expected to be traveling at non-relativistic speeds, and as dark particles from the Milky Way's halo pass through the earth-based detector, their interaction with the target particles can be detected through the amount of energy deposited in the detector.

There are several direct detection experiments that search for such a signature. Most experiments are based on the detection of DM scattering off nuclei. In order to obtain the DM signal, the experiment requires an extremely low background, as there are several known scattering events that can leave signatures in the detector, such as γ -backgrounds from the environment. Over the years there have been a few reported DM signals, such as the annually modulated signal from the DAMA/LIBRA experiment [16]. This type of annual variation is expected in a DM signal due to the motion of the Earth around the Sun with respect to the galactic halo. Although the sources of such signals remain undetermined, direct detection experiments have managed to strongly constrain the DM-nucleus scattering cross-section. These limits can be applied to any DM model to obtain bounds for the coupling and dark particle mass by calculating the corresponding scattering cross section.

1.2.2 Indirect Detection

The indirect approach is based on the detection of annihilation or decay of DM particles producing SM particles in the final states. Typically, a telescope or an earth-based detector is used to search

for a flux of particles which can arise as products of DM annihilations or decays, such as γ -rays, neutrinos, positrons, anti-protons, and look for an excess flux over the expected astrophysical background. The rate of annihilation, Γ_{ann} is proportional to the square of the DM number density and the thermally averaged annihilation cross-section [17]

$$\Gamma_{\text{ann}} \propto \frac{\rho_{\text{DM}}^2}{m_\chi^2} \langle \sigma_{\text{ann}} u \rangle. \quad (1.17)$$

While the rate of DM particle decay Γ_{dec} is proportional to the DM number density and inversely proportional to its decay time according to

$$\Gamma_{\text{dec}} \propto \frac{\rho_{\text{DM}}}{m_\chi} \frac{1}{\tau_{\text{dec}}}, \quad (1.18)$$

where ρ_{DM} is DM density, m_χ is the mass of dark particle χ , $\langle \sigma_{\text{ann}} u \rangle$ thermally averaged annihilation cross-section and τ_{dec} is the decay time of the DM particle. Since both rates depend on the number density of DM, indirect detection sites include places with large expected DM density such as the galactic center. Additionally, one can distinguish between the products of decay and annihilation, due to the different dependencies of Γ_{dec} and Γ_{ann} .

There are several indirect detection experiments, both terrestrial and space-based, searching for specific annihilation or decay products, which have put limits on certain DM properties. Among the most stringent constraints on the DM annihilation cross section (or lifetime) have been derived from γ -ray observations, from telescopes such as Fermi large area telescope (Fermi-LAT) [18].

1.2.3 Collider Searches

In the third approach to DM detection, searches include the production of DM either directly from SM particle interaction or through the decay of intermediary particles in colliders. Since DM can pass through a particle collider undetected, it will be registered as missing energy and momentum. Therefore, collider searches are based on the detection of the visible counterpart of SM-DM interaction, such as the production of hadronic jets and charged leptons. Additionally, DM can be potentially produced in high-energy particle collisions. For instance, if DM possesses significant couplings to nuclear matter, it can be produced in a proton-proton collision at the Large Hadron Collider (LHC).

Chapter 2

Introduction to Cosmology

In the previous Chapter, the early indications for the existence of DM, as well as, the modern measurements that further point towards the presence of vast amounts of non-baryonic DM in the Universe were presented. Although the idea of its existence became commonplace in the 1980s, even today little is known about its nature and its production mechanisms. Before we can proceed to further explore DM, it is necessary to understand the Universe as observed today.

The purpose of this Chapter is to introduce the basic principles of cosmology and thermodynamics of the Universe. This chapter begins with a brief description of the standard cosmological model, which includes an introduction to the main cosmological parameters and the energy budget of the Universe, and a short description of their evolution throughout the history of the Universe. This is followed by a summary of the main principles of thermodynamics that are relevant in cosmology, including equilibrium thermodynamics and brief description of the Boltzmann equation and its role in non-equilibrium processes. Lastly, two important epochs in the very early Universe are explored, namely Big Bang Nucleosynthesis and Recombination.

2.1 Standard Cosmological Model

Our current best description of the Universe is given by the Standard Λ CDM cosmological model, where Λ denotes the cosmological constant and CDM stands for cold dark matter. In this picture, the Universe began in a Hot Big Bang and in the very early stages went through a period exponentially accelerating expansion, known as inflation. This generated the initial perturbations which eventually grew into the structures observed today. Following the epoch of inflation, the Universe continued to expand at a decreased rate. Today the Universe is dominated by non-baryonic cold (i.e. non-relativistic) dark matter and dark energy. The latter is associated with the cosmological constant and is driving the late-time accelerated expansion of the Universe.

The Universe observed today, at large scales, is homogeneous and isotropic, hence the geometry of spacetime can be approximately described by the Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) metric,

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right), \quad (2.1)$$

where K describes the curvature of spacetime. According to modern CMB anisotropies measurements, the Universe is approximately flat and therefore, to high accuracy $K = 0$. The parameter, $a(t)$ in (2.1) is the scale factor, which characterizes the relative expansion of the Universe. By convention, the present-day scale factor is defined as $a(t_0) = a_0 = 1$, where $t_0 \approx 13.8$ Gyr [7] is the time elapsed since the Big Bang (i.e. the age of the Universe). Rather than expressing quantities in terms of cosmic time, it is helpful to work in terms of redshift z , which is defined as follows

$$1 + z \equiv \frac{a_0}{a} = \frac{1}{a}, \quad (2.2)$$

using the convention $a_0 = 1$.

Spacetime and the constituents of the Universe are related through Einstein's field equations of General Relativity, which are several partial differential equations, summarized into one tensor equation [4],

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (2.3)$$

$G_{\mu\nu}$ denotes the Einstein tensor defined as

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (2.4)$$

where $R_{\mu\nu}$ is the Ricci tensor which depends on the metric and its derivatives and $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ is the Ricci scalar. G is Newton's constant and $T_{\mu\nu}$ is the energy-momentum tensor which describes the energy content of the Universe. For an isotropic and smooth universe the energy-momentum tensor is given by

$$T_{\nu}^{\mu} = \text{diag}(-\rho, P, P, P), \quad (2.5)$$

where ρ is the energy density and P is the pressure. Typically, the pressure is expressed in terms of the energy density through the equation of state,

$$P = w\rho. \quad (2.6)$$

For non-relativistic matter, $w = 0$ since it has effectively zero pressure, and typically this type of matter is referred to as 'dust'. For ultra-relativistic matter, such as photons, $w_r = \frac{1}{3}$. Lastly, for dark energy $w_{\Lambda} = -1$.

Solving independently for the time-like and space-like components of Einstein equations given by (2.3), for a flat FLRW Universe, one obtains the first and second Friedmann equation respectively, given by

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3}, \quad (2.7)$$

and

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (2.8)$$

In the first Friedmann equation, the term $\dot{a}/a \equiv H$, is defined as the Hubble rate which is the rate at which the Universe expands. Typically, H is expressed in units of velocity (km s^{-1}) per distance (Mpc^{-1}). The present-day value of H , is called the Hubble constant, given by

$$H_0 \equiv H(t_0) = 100h \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}, \quad (2.9)$$

where $h = 0.674$ [7] is the Hubble parameter.

Modern cosmological observations suggest that the total energy density of the Universe consists of several components. For a flat Universe, the total energy density is given by critical density, ρ_{cr} , which is defined as follows

$$\rho_{\text{cr}} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}. \quad (2.10)$$

The total energy density of the Universe, $\rho(t) = \rho_m(t) + \rho_r(t) + \rho_{\Lambda}$, consists of a time independent component, ρ_{Λ} from the cosmological constant associated with dark energy, and a time-dependent component from matter and radiation, $\rho_m(t)$ and $\rho_r(t)$ respectively, where the matter content is dominated by CDM.

Typically, it is useful to work in terms of the density parameter, which is defined as the ratio of the energy density to the critical density of a component of the Universe,

$$\Omega_s \equiv \frac{\rho_s}{\rho_{\text{cr}}}, \quad (2.11)$$

where the subscript s denotes a constituent of the Universe (baryons, CDM, radiation, etc). For a flat Universe the sum of the energy densities must be equal to one. Current observations suggest that the present day Universe is dominated by dark energy and CDM, with $\Omega_{\Lambda} \approx 0.69$, $\Omega_{\text{CDM}} \approx 0.26$, and for baryonic matter $\Omega_b \approx 0.05$ [7].

In addition to the present-day values of the energy densities, cosmologists are also interested in the evolution of the energy density throughout the history of the Universe. The combination of the first and second Friedmann equation, given by (2.7) and (2.8) respectively, results in the following equation

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0. \quad (2.12)$$

The solution of (2.12) combined with the equation of state (2.6) gives the evolution of the energy density in terms of the scale factor [19],

$$\rho(t) = a^{-3(1+w)} \rho_0. \quad (2.13)$$

Additionally, by substituting (2.13) into the first Friedmann equation given by (2.7), one can obtain the evolution of the scale factor as a function of time,

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2/3(1+w)}, \quad (2.14)$$

for $w \neq -1$. Therefore using (2.14) and (2.13), one can obtain the evolution of the energy density of each component of the Universe and the scale factor as a function of time if the Universe is dominated by that component. For non-relativistic matter, such as CDM and baryons, the evolution of the energy density and the matter-dominated scale factor are given by,

$$\rho_m(t) \propto a^{-3}, \quad a(t) \propto t^{2/3}, \quad (2.15)$$

using $w_m = 0$ for non-relativistic matter. Similarly, for radiation energy density and a radiation dominated Universe,

$$\rho_r(t) \propto a^{-4}, \quad a(t) \propto t^{1/2}, \quad (2.16)$$

using $w_r = 1/3$. Lastly, the energy density of dark energy and the scale factor for a dark energy dominated Universe are given by [19],

$$\rho_\Lambda = \text{constant}, \quad a(t) \propto e^{H_0 t}. \quad (2.17)$$

Therefore, as the Universe evolves the time-dependence of the scale factor changes and can consequently reveal the composition of the energy budget at a given cosmic time. In the very early Universe, the dominant component was radiation and at that time $a(t) \propto t^{1/2}$. At a later time in the early Universe, known the epoch of matter-radiation equality, the energy density of radiation was equal that of matter. Eventually, the energy budget of the Universe, became dominated by non-relativistic matter, during which $a(t) \propto t^{2/3}$. At relatively recent cosmological times, the scale factors appears to be growing faster than $t^{2/3}$ [4], suggesting that a different component dominates the Universe's energy budget, which became known as dark energy.

Given the evolution of the energy density of each component with time, the Hubble rate can be expressed as [20]

$$H^2 = H_0^2 \left[\Omega_\Lambda + \Omega_m a^{-3} + \Omega_r a^{-4} \right], \quad (2.18)$$

where $a_0 = 1$.

2.2 Thermodynamics and Boltzmann equation

In order to explore the thermal history of the Universe, in addition to the evolution of the cosmological parameters, it is equally important to understand the equations of statistical mechanics that govern matter and radiation. The thermal distribution of particles is described by the phase space distribution $f(\vec{x}, \vec{p}, t)$, which is defined so that in a phase-space volume element $d^3x d^3p / (2\pi)^3$, the number of particles is given by $dN = f d^3x d^3p / (2\pi)^3$ [4]. The number density n_s , energy density ρ_s and pressure P_s of a given particle species s , are expressed in terms of its phase space distribution as follows [20]

$$n_s = \frac{g_s}{(2\pi)^3} \int f_s(\vec{x}, \vec{p}, t) d^3p, \quad (2.19)$$

$$\rho_s = \frac{g_s}{(2\pi)^3} \int E_s f_s(\vec{x}, \vec{p}, t) d^3p, \quad (2.20)$$

$$P_s = \frac{g_s}{(2\pi)^3} \int \frac{p^2}{3E_s} f_s(\vec{x}, \vec{p}, t) d^3p, \quad (2.21)$$

where g_s is the number of internal degrees of freedom of the particle species s , $E_s = \sqrt{p^2 + m_s^2}$ is the energy and m_s the mass of the particle species. These parameters which depend on the distribution function can be explored for equilibrium and non-equilibrium processes.

2.2.1 Equilibrium Thermodynamics

In thermodynamic equilibrium, the distribution function depends on the energy E , the chemical equilibrium μ , and the temperature T , and it is given by

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/T} \pm 1} \quad (2.22)$$

where the plus sign holds for fermions and minus sign for bosons, and the corresponding distributions are known as the Fermi-Dirac and Bose-Einstein distributions, respectively. For phenomena taking place in the early Universe the chemical potential can be assumed to be small compared to the temperature. Therefore, for equilibrium processes in the early Universe we assume that $\mu = 0$. In this way, the entropy density s , can be expressed as

$$s = \frac{\rho + P}{T}. \quad (2.23)$$

It is useful to determine the expressions for the number density, energy density and pressure given by (2.19), (2.20) and (2.21) respectively, using the equilibrium distributions for bosons and fermions given by (2.22) in the relativistic and the non-relativistic limit.

In the relativistic limit, $m_s \ll T$ and hence the mass of the species can be neglected. In thermal equilibrium, the number density, energy density and the pressure of a relativistic particle species are given by

$$n_s^{(0)} = \frac{2g_s}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{p^2}{e^{p/T} \pm 1} dp = \begin{cases} \frac{3}{4\pi^2} \zeta(3) g_s T^3, & \text{for fermions} \\ \frac{1}{\pi^2} \zeta(3) g_s T^3, & \text{for bosons} \end{cases} \quad (2.24)$$

$$\rho_s^{(0)} = \frac{2g_s}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{p^3}{e^{p/T} \pm 1} dp = \begin{cases} \frac{7}{8} \frac{\pi^2}{30} g_s T^4, & \text{for fermions} \\ \frac{\pi^2}{30} g_s T^4, & \text{for bosons} \end{cases} \quad (2.25)$$

$$P_s^{(0)} = \frac{\rho_s^{(0)}}{3}, \quad (2.26)$$

where the (0) denotes the use of the equilibrium distributions given by (2.22).

In the non-relativistic limit, where $m_s \gg T$, the energy of the particle $E \simeq m_s$ and hence $E \gg T$. Without chemical potential, in the expression for the equilibrium distribution given by (2.22) the exponential term $e^{E/T}$ becomes very large and the ± 1 can be ignored. Therefore, in this limit there is no distinction between fermions and bosons. In this way, the equilibrium number density, energy density and pressure for a non-relativistic particle species are given by [19]

$$n_s^{(0)} = g_s \left(\frac{m_s T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-m_s/T}, \quad (2.27)$$

$$\rho_s^{(0)} = m_s n_s^{(0)}, \quad (2.28)$$

$$P_s^{(0)} = T n_s^{(0)} \ll \rho_s^{(0)}. \quad (2.29)$$

Therefore, for non-relativistic particles in thermal equilibrium the number and energy densities are exponentially suppressed, and the pressure is effectively zero.

2.2.2 Boltzmann Equation

In the early Universe, most of its constituents were in thermal equilibrium. However several departures from equilibrium have determined much of its early history, as well as, the observed abundances of species in the Universe today. In non-equilibrium thermodynamics, the evolution of the distribution function must be determined. This can be obtained from the Boltzmann equation, which can be expressed as

$$\hat{L}[f] = \hat{C}[f], \quad (2.30)$$

where \hat{C} is the collision operator and \hat{L} is the Liouville operator. The latter in its covariant form is given by [4]

$$\hat{L}_{\text{cov}} = p^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha p^\beta p^\gamma \frac{\partial}{\partial p^\alpha}, \quad (2.31)$$

For a homogeneous and isotropic Universe as described by the FLRW metric, the phase space distribution $f(\vec{x}, \vec{p}, t)$ only depends on the energy and time and becomes $f(E, t)$. Therefore the covariant Liouville operator can be rewritten as follows [21]

$$\hat{L}_{\text{cov}} = \frac{\partial f}{\partial t} - H \frac{p^2}{E} \frac{\partial f}{\partial E}. \quad (2.32)$$

Using the definition for the number density given by (2.19),

$$g_s \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \hat{L}_{\text{cov}} = \dot{n} + 3Hn. \quad (2.33)$$

Therefore the Boltzmann equation can be rewritten as

$$\dot{n} + 3Hn = \frac{g_s}{(2\pi)^3} \int \hat{C}[f] d^3 p. \quad (2.34)$$

The right hand side of the equation contains the collision term, which in this context refers to direct particle interactions, such as scattering, pair creation etc. We assume a 2-to-2 interaction among particles of type 1 and 2 that form particles of type 3 and 4 according to the reaction,

$$(1)_{\vec{p}_1} + (2)_{\vec{p}_2} \leftrightarrow (3)_{\vec{p}_3} + (2)_{\vec{p}_4}, \quad (2.35)$$

where the subscripts indicate particle momenta. If we are interested in obtaining the evolution of n_1 from the Boltzmann equation, we have to compute the collision term $C[f_1(\vec{p})]$. In this calculation, the type 1 particles that get scattered away from momentum p_1 by the forward reaction have to be subtracted and the particles of type 1 that get scattered to momentum p_1 by the reverse reaction have to be added. Summing over all other momenta, the collision term can be expressed as [4],

$$C[f_1] = \sum_{\vec{p}_2, \vec{p}_3, \vec{p}_4}^{\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_3 + \vec{p}_4} \delta_D^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) |\mathcal{M}|^2 [f_3 f_4 (1 \pm f_1)(1 \pm f_2) - f_1 f_2 (1 \pm f_3)(1 \pm f_4)], \quad (2.36)$$

where the Dirac delta function ensures that energy and momentum are conserved. The term $|\mathcal{M}|^2$ is the scattering amplitude squared of the interaction, which we assume it's the same for both the forward and reverse reaction. The scattering rate additionally depends on the product of the distribution functions, specifically, on $f_1 f_2$ and $f_3 f_4$, for the forward and reverse reaction respectively. The factors $1 \pm f$, emerge due to quantum effects, particularly due stimulated emission and the Pauli exclusion principle. The plus sign applies when the particle is a boson and the minus when it is a fermion. In the case of fermions, the Pauli exclusion principle ensures that if the state of a fermion of type 1 with momentum \vec{p}_1 is occupied, the term $(1 - f_1)$ is zero, and the reverse reaction cannot occur. If the particle of type 1 is a boson, and the state again is occupied, then the reaction is enhanced from the term $(1 + f_1)$, since bosons are more likely to occupy the same state.

The sum over the momenta can be rewritten as integrals over phase space. The phase-space

integrals are over the three components of momentum and the energy. However since we require the energy to be $E_s = \sqrt{p^2 + m^2}$, the integral can be expressed as

$$\int d^3p \int_0^\infty dE \delta_D^{(1)}(E^2 - p^2 - m^2) = \int d^3p \int_0^\infty dE \frac{\delta_D^{(1)}(E^2 - p^2 - m^2)}{2E} = \int \frac{d^3p}{2E}. \quad (2.37)$$

Therefore, the phase-space volume element is $d\Pi_i = d^3p_i/(2\pi)^3 2E_i$. In this way, the collision term becomes

$$C[f_1(\vec{p})] = \frac{1}{E_1} d\Pi_2 d\Pi_3 d\Pi_4 \delta_D^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) (2\pi)^4 |\mathcal{M}|^2 \times [f_3 f_4 (1 \pm f_1)(1 \pm f_2) - f_1 f_2 (1 \pm f_3)(1 \pm f_4)]. \quad (2.38)$$

Using the expression above for the collision term, the Boltzmann equation for a 2-to-2 interaction for the evolution of n_1 becomes

$$\dot{n}_1 + 3Hn_1 = g_1 d\Pi_1 d\Pi_2 d\Pi_3 d\Pi_4 (2\pi)^4 \delta_D^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) |\mathcal{M}|^2 \times [f_3 f_4 (1 \pm f_1)(1 \pm f_2) - f_1 f_2 (1 \pm f_3)(1 \pm f_4)]. \quad (2.39)$$

This equation can be further simplified by considering systems where the temperature is smaller than $E - \mu$. In this limit, in the distribution given by (2.22) the exponential becomes large and the term ± 1 can be ignored. The distribution in this case can be expressed as,

$$f(E) \rightarrow e^{\mu/T} e^{-E/T}, \quad (2.40)$$

which is known as the Boltzmann distribution of a classical dilute gas. In this way, the term in the square brackets in (2.39) becomes

$$[f_3 f_4 (1 \pm f_1)(1 \pm f_2) - f_1 f_2 (1 \pm f_3)(1 \pm f_4)] \rightarrow e^{-(E_1 + E_2)} [e^{(\mu_3 + \mu_4)/T} - e^{(\mu_1 + \mu_2)/T}]. \quad (2.41)$$

This expression be further simplified, using the definition for the number density. By substituting the simplified distribution given by (2.40), into the definition (2.19)

$$n_s = \frac{g_s}{(2\pi)^3} e^{\mu_s/T} \int d^3p e^{-E_s/T}. \quad (2.42)$$

Additionally, the equilibrium number density for a species, with $\mu_s = 0$ can be expressed as,

$$n_s^{(0)} = \frac{g_s}{(2\pi)^3} \int d^3p e^{-E_s/T}. \quad (2.43)$$

The resulting $n_s^{(0)}$ for a relativistic and a non-relativistic species in equilibrium are given by (2.24) and (2.27) respectively. For instance for a photon, since $\mu_\gamma = 0$, $n_\gamma = n_\gamma^{(0)} = 2T^3/\pi^2$. With the definitions (2.42) and (2.43), the term $e^{\mu_i/T}$ can be expressed as $n_i/n_i^{(0)}$. Therefore, for equation (2.41) we have

$$e^{(\mu_3 + \mu_4)/T} - e^{(\mu_1 + \mu_2)/T} = \frac{n_3 n_4}{n_3^{(0)} n_4^{(0)}} - \frac{n_1 n_2}{n_1^{(0)} n_2^{(0)}}. \quad (2.44)$$

Lastly, to further simplify the collision term, we can define the thermally averaged cross section as

$$\langle \sigma u \rangle \equiv \frac{1}{n_1^{(0)} n_2^{(0)}} g_1 d\Pi_1 d\Pi_2 d\Pi_3 d\Pi_4 e^{-(E_1 + E_2)/T} (2\pi)^4 |\mathcal{M}|^2 \delta_D^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4). \quad (2.45)$$

With the above simplifications and assumptions, the Boltzmann equation becomes

$$\dot{n}_1 + 3Hn_1 = n_1^{(0)} n_2^{(0)} \langle \sigma u \rangle \left[\frac{n_3 n_4}{n_3^{(0)} n_4^{(0)}} - \frac{n_1 n_2}{n_1^{(0)} n_2^{(0)}} \right]. \quad (2.46)$$

By substituting the definition of the Hubble rate, the equation can be expressed as,

$$a^{-3} \frac{d(n_1 a^3)}{dt} = n_1^{(0)} n_2^{(0)} \langle \sigma u \rangle \left[\frac{n_3 n_4}{n_3^{(0)} n_4^{(0)}} - \frac{n_1 n_2}{n_1^{(0)} n_2^{(0)}} \right]. \quad (2.47)$$

The Boltzmann equation for a 2-to-2 interaction, has been reduced to a simple ordinary differential equation for the number density of a particle species as a function of time. This equation will be used later in this chapter to calculate the species abundances during the epoch of Big Bang Nucleosynthesis and Recombination.

According to the Boltzmann equation, when the reaction rate is very large, the only way to maintain the equality is for [4]

$$\frac{n_3 n_4}{n_3^{(0)} n_4^{(0)}} = \frac{n_1 n_2}{n_1^{(0)} n_2^{(0)}}. \quad (2.48)$$

This relation is known as nuclear statistical equilibrium (NSE) and the Saha equation.

2.3 Big Bang Nucleosynthesis

Given the cosmological and thermodynamics background of the previous sections, phenomena at the early stages of the Universe can be explored. At the very early Universe, when the temperature was ~ 1 MeV, relativistic particles: electrons, positrons and photons were in thermal equilibrium, while neutrinos had already decoupled from the rest of the cosmic plasma. At the same time, for the non-relativistic baryons, by comparing their number density to that of photons we find [4]

$$\eta_b \equiv \frac{n_b}{n_\gamma} = 6.010^{-10} \left(\frac{\Omega_b h^2}{0.022} \right). \quad (2.49)$$

Therefore, baryons are outnumbered by photons in the Universe. During that epoch there were no neutral atoms or even bound nuclei, since photons in the primordial plasma immediately destroyed any atom or nucleus produced. The energy required to break up the nucleus into its individual protons and neutrons is known as the nuclear binding energy, and it's the same energy that is released when the individual protons and neutrons combined to form the nucleus. A nucleus with Z protons and $N = A - Z$ neutrons has a binding energy, B which is given by

$$B \equiv Zm_p + (A - Z)m_n - m_N, \quad (2.50)$$

where m_p, m_n and m_N are the masses of the proton, neutron and nucleus respectively.

Eventually, the temperature of the Universe dropped below the typical nuclear binding energies, in the epoch known as Big Bang Nucleosynthesis (BBN), during which light nuclei were able to be efficiently produced. At first, protons and neutrons are combined to form deuterium D at a cosmic time $t_{\text{nuc}} \approx 300\text{s}$ after the Big Bang, and heavier elements such as helium followed. In this section, the Boltzmann equation and the number density relations derived in the previous section can be used to approximately obtain the abundances of some elements in the early Universe.

2.3.1 Deuterium synthesis

Deuterium is produced by the fusion of a proton and a neutron, and is accompanied by the emission of a photon that carries away the released energy. The production equation:

$$n + p \leftrightarrow D + \gamma, \quad (2.51)$$

The corresponding binding energy of deuterium is given by

$$B_D = m_n + m_p - m_D = 2.22\text{MeV}, \quad (2.52)$$

according to (2.50). The Saha equation given by (2.48) for this interaction becomes

$$\frac{n_D}{n_n n_p} = \frac{n_D^{(0)}}{n_n^{(0)} n_p^{(0)}}, \quad (2.53)$$

where we have used that $n_\gamma = n_\gamma^{(0)} = 2T^3/\pi^2$. Substituting the expression for the equilibrium number densities (2.43), leads to

$$\frac{n_D}{n_n n_p} = \frac{g_D}{g_n g_p} \left(\frac{2\pi m_D}{m_n m_p T} \right)^{3/2} e^{[m_n + m_p - m_D]/T}. \quad (2.54)$$

This expression can be simplified by setting $m_D \simeq 2m_p \simeq 2m_n$. However, this approximation cannot be used in the exponential term, as small differences can be important. The argument of the exponential is equal to the binding energy divided by the temperature. Therefore, using the above simplifications and the fact that $g_D = 3$, $g_p = g_n = 2$, the Saha equation becomes

$$\frac{n_D}{n_n n_p} = \frac{3}{4} \left(\frac{4\pi}{m_p T} \right)^{3/2} e^{B_D/T}. \quad (2.55)$$

Furthermore, since the neutron and proton densities are proportional to the baryon density, using the expression for the ratio of baryon to photon number density we have $n_n \simeq n_p = \eta_b n_\gamma$, where $n_\gamma = 2T^3/\pi^2$, and the Saha equation can be approximated as

$$\frac{n_D}{n_b} \sim \eta_b \left(\frac{T}{m_p} \right)^{3/2} e^{B_D/T}. \quad (2.56)$$

While the term B_D/T remains relatively small, the ratio of deuterium to neutron abundance primarily depends on the baryon-to-photon ratio η_b , which is very small. Therefore, until the temperature drops below the nuclear binding energy, deuterium production is largely suppressed. This can be attributed to the large amount of photons present in the Universe that break up any deuterium formed. When the temperature of the Universe was above 0.1 MeV most baryons were in the form of protons and neutrons. After the temperature dropped below this limit, deuterium and helium were able to be produced without being immediately destroyed by energetic photons.

2.3.2 Neutron abundance

Neutrons can be converted into protons according to the reactions $n + \nu_e \leftrightarrow p + e^-$ and $n + e^- \leftrightarrow p + \bar{\nu}_e$ which involve two leptons. Such reactions kept neutrons and protons in thermal equilibrium until $T \sim 1$ MeV. The ratio of the equilibrium neutron to proton abundance is given by

$$\frac{n_n^{(0)}}{n_p^{(0)}} = \frac{g_n}{g_p} \left(\frac{m_n}{m_p} \right)^{3/2} e^{-(m_n - m_p)/T}, \quad (2.57)$$

where the equilibrium number densities were obtained from the non-relativistic number density given by (2.42). This expression can be further simplified, using that $g_p = g_n$ and thus the first term is equal to one. Additionally, their mass ratio is $\left(\frac{m_n}{m_p} \right)^{3/2} = 1.002$, so this term can be neglected. Therefore the ratio becomes

$$\frac{n_n^{(0)}}{n_p^{(0)}} = e^{-Q/T}, \quad (2.58)$$

where $m_n - m_p = Q = 1.293$ MeV. According to (2.58) the neutron and proton abundances are equal at high temperatures.

The evolution of the neutron abundance can be obtained from the Boltzmann equation. Assuming an interaction in which the neutron is converted into a proton, which involves two leptons, $n + l \leftrightarrow p + l$. Therefore, assuming that $n_l^{(0)} = n_l$ for the leptons, the Boltzmann equation given by (2.47), becomes

$$a^{-3} \frac{d(n_n a^3)}{dt} = n_l^{(0)} \langle \sigma u \rangle \left[\frac{n_p n_n^{(0)}}{n_p^{(0)}} - n_n \right], \quad (2.59)$$

where $n_l^{(0)} \langle \sigma u \rangle = \lambda_{np}$ is the rate for neutron to proton conversion. In order, to compute the neutron abundance using the Boltzmann equation is useful to define

$$X_n \equiv \frac{n_n}{n_n + n_p}. \quad (2.60)$$

By expressing n_n as $(n_n + n_p)X_n$ and substituting for the neutron-to-proton ratio given by (2.58), the Boltzmann equation becomes,

$$\frac{dX_n}{dt} = \lambda_{np} \left[(1 - X_n) e^{-Q/T} - X_n \right], \quad (2.61)$$

which is a differential equation for X_n with respect to time. By introducing the variable $x \equiv Q/T$, and taking into account that $T \propto a^{-1}$, the differential equation as a function of x becomes,

$$\frac{dX_n}{dx} = \frac{x\lambda_{np}}{H(x=1)} \left[e^{-x} - X_n(1 + e^{-x}) \right]. \quad (2.62)$$

Equation (2.62) can be integrated numerically to obtain the neutron abundance as a function of temperature and thus time. In this way, when $T = Q$ the interaction rate is slightly larger than the expansion rate of the Universe during that time. When $T < Q$, the conversion rate decreases as $\propto T^3$ while the expansion rate falls as $\propto T^2$. This indicates a departure from the equilibrium description. Using the equations above, at the beginning of BBN at temperature T_{nuc} the neutron abundance turns out to be [4]

$$X_n(T_{\text{nuc}}) = 0.11. \quad (2.63)$$

2.3.3 Light element abundances

Light element abundances can be estimated approximately by assuming that their production starts immediately after the the temperature drops to T_{nuc} . For instance, considering the deuterium abundance, equation (2.56) becomes.

$$\ln \eta_b + \frac{3}{2} \ln (T_{\text{nuc}}/m_p) \sim -\frac{B_D}{T_{\text{nuc}}}. \quad (2.64)$$

For deuterium production to be efficient the term B_D/T_{nuc} has to be of order unity, which suggests that deuterium production takes place at $T_{\text{nuc}} \sim 0.07$ MeV.

Deuterium's binding energy is smaller than that of helium. Therefore, ${}^4\text{He}$ production immediately follows that of deuterium, and almost all remaining neutrons are captured in helium nuclei. Since ${}^4\text{He}$ contains two neutrons, the final ${}^4\text{He}$ abundance is estimated to double the neutron abundance at T_{nuc} and thus the helium mass fraction is approximately 0.22.

2.4 Recombination

Following BBN, baryonic matter in the Universe is in the form of protons, electrons and photons tightly coupled, helium nuclei, as well as, trace amounts of heavier nuclei. The photons were kept in equilibrium with the rest of the cosmic plasma through their Compton scattering with free electrons. When the Compton scattering rate became smaller than the Hubble rate, the photons decoupled from the plasma. This decoupling occurred at $T \sim 1$ eV after a sudden decrease in the number of free electrons. Above this temperature, since the binding energy of a neutral Hydrogen atom is $\epsilon_0 = 13.6$ eV, any hydrogen produced was ionized immediately by an energetic photon, according to the high proton-to-baryon ratio.

Electrons and protons interact to form neutral Hydrogen according to the following equation,



where the forward reaction is known as radiative recombination, and the reverse reaction is the photo-ionization of a neutral hydrogen atom. As long as the two reactions remain balanced the Saha equation holds and can be expressed as

$$\frac{n_e n_p}{n_H} = \frac{n_e^{(0)} n_p^{(0)}}{n_H^{(0)}}. \quad (2.66)$$

The fractional ionization factor is given by,

$$X_e \equiv \frac{n_e}{n_e + n_H} = \frac{n_p}{n_p + n_H}, \quad (2.67)$$

where the second equality is obtained by setting $n_e = n_p$, which ensures the neutrality of the Universe. Assuming that the baryonic content of the Universe consists mostly of electrons and

protons, if $X_e = 1$ then baryonic matter is fully ionized, while for $X_e = 0$, the baryonic content consists of neutral atoms.

The Saha equation expressed in terms of the fractional ionization becomes,

$$\frac{X_e^2}{1 - X_e} = \frac{1}{n_e + n_H} \left[\left(\frac{m_e T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-[m_e + m_p - m_H]/T} \right], \quad (2.68)$$

where the equilibrium number densities are given by (2.42), and the small differences between the masses of the proton and hydrogen have been neglected in the prefactor. Additionally, the term in the exponential can be expressed as $m_e + m_p - m_H = \epsilon_0$. Therefore, according to the Saha equation, only when the temperature drops well beneath ϵ_0 can recombination occur.

The Boltzmann equation for the electron number density can be expressed as,

$$\begin{aligned} a^{-3} \frac{d(n_e a^3)}{dt} &= n_e^{(0)} n_p^{(0)} \langle \sigma u \rangle \left[\frac{n_H}{n_H^{(0)}} - \frac{n_e^2}{n_e^{(0)} n_p^{(0)}} \right] \\ &= n_b \langle \sigma u \rangle \left[(1 - X_e) \left(\frac{m_e T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{\epsilon_0/T} - X_e^2 n_b \right]. \end{aligned} \quad (2.69)$$

In terms of the fractional ionization the Boltzmann equation becomes [4]

$$\frac{dX_e}{dt} = \left[(1 - X_e) \beta - X_e^2 n_b \alpha_2 \right], \quad (2.70)$$

where β is the ionization rate given by

$$\beta \equiv \langle \sigma u \rangle \left(\frac{m_e T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-\epsilon_0/T}, \quad (2.71)$$

and α_2 is the recombination rate given by

$$\alpha_2 \equiv \langle \sigma u \rangle = 9,78 \frac{\alpha^2}{m_e^2} \left(\frac{\epsilon_0}{T} \right)^{1/2} \ln \left(\frac{\epsilon_0}{T} \right). \quad (2.72)$$

By integrating numerically equation (2.70) the evolution of X_e as a function of time can be obtained. Similarly to the importance of the neutron-to-protons ratio to the light element production and their present-day abundance, the evolution of the free electron abundance leads to several observable phenomena in cosmology today. The photon decoupling as a consequence of the sudden decrease in free electrons, leads to the CMB observed today.

Additionally, by comparing the scattering rate of photons from electrons, which is $n_e \sigma_T = X_e n_b \sigma_T$, to the expansion rate of the Universe, the epoch of decoupling can be determined z_{dec} . It turns out that X_e is equal to unity at large redshift $z \gg 1000$, and during that time the expansion of the Universe is much smaller than the scattering rate, and thus the photons remain tightly coupled to baryons. When $X_e \sim 10^{-2}$, which occurred at approximately $z_{\text{dec}} \sim 1000$, the photons decouple from the plasma which coincides with the epoch of recombination.

Chapter 3

Dark Matter

The purpose of this Chapter is to give a brief introduction to particle dark matter. This includes the main characteristics a DM particle candidate should have in order to be consistent with the current observations in astrophysical and cosmological scales. In addition to the DM properties, the thermal freeze-out production mechanism is discussed for hot and cold DM, including Weakly Interacting Massive Particles (WIMPs). Lastly, alternatives to the CDM paradigm are discussed, including self-interacting and asymmetric dark matter.

3.1 Dark matter candidates

The absence of direct observational evidence for DM has motivated the development of various DM models with a wide range of ideas about its nature and fundamental properties. Potential DM particle candidates with a wide range of masses have been proposed, as presented in Figure 3.1. More specifically, the mass range spans across 90 orders of magnitude for bosons, and 70 for fermions. Although the specific DM properties that any existing or future DM model features can be fundamentally different, in order to fit current observations a potential DM candidate should possess certain characteristics [22].

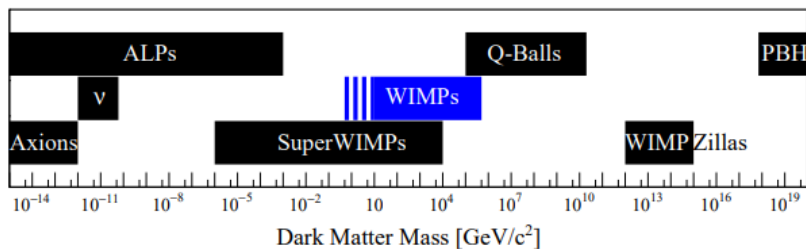


Figure 3.1: *The mass range for several proposed dark matter particle candidates.* Figure from [3].

To begin with, the particle candidate *should be dark*. This means that it should be non-luminous and not interact electromagnetically, since DM today only been observed through its gravitational interaction with visible matter. Secondly, in order to explain the long-lived DM structures observed today, such as DM halos, the candidate *should be stable on cosmological time scales*. Moreover, as suggested by the observations of the Bullet Cluster, DM *should be collisionless* on the large scales. Lastly, the candidate *should be cold*, meaning non-relativistic, which is required for structure formation at large scales.

A DM candidate that has been considered, until recently, that satisfies the requirements mentioned above is the SM neutrino, since it interacts weakly with the rest of baryonic matter. Although neutrinos could contribute to the DM abundance, they have been ruled out as the main DM component. First of all, their abundance is not enough to explain the observed DM abundance, since according to the constraints that have been placed on the neutrino mass $m_\nu < 0.23$ eV, the corre-

sponding density parameter turns out to be $\Omega_\nu h^2 = 0.0072$ [23]. Secondly, due to their low mass, neutrinos are relativistic, even after their decoupling from the primordial cosmic plasma. This type of DM is called hot dark matter. However, hot dark matter cannot constitute the main component of DM as it prevents the formation structure at small-scales, since sufficient local density fluctuations cannot be generated.

After neutrinos and MACHOS have been ruled out as dominant DM component, we can conclude that DM candidate *should be non-baryonic*. This suggests that the SM of particle physics should be extended, as it does not provide a suitable DM candidate. Non-baryonic DM hypothesis is supported by BBN measurements, and current CMB power spectrum studies. Therefore, the most widely studied DM models contain new particles or group of particles.

A well-motivated class of models for non-baryonic DM which was developed early on are Weakly Interacting Massive Particles (WIMPs), as they arise naturally in several beyond the SM theories. This is a widely studied model with masses in the range $1 - 10^5$ GeV, and cross sections in the weak interaction scale. In this model, WIMPs are thermally produced during the very early stage of the Universe through a process known as *thermal freeze-out*, which is briefly described in the following section.

3.2 Thermal Freeze-out

As was previously mentioned, in the very early Universe, most of its constituents are tightly coupled and are in thermal equilibrium. However, throughout its early history there have been several departures from thermal equilibrium, such as the photon decoupling and primordial nucleosynthesis, which have provided an explanation for the origin of species in the early Universe. Once a species is decoupled from the rest of the plasma, its number density decreases as a^{-3} and its momenta as a^{-1} .

Thermal decoupling of a species depends on the relation between the rate at which the Universe is expanding, i.e the Hubble rate H , and the interaction rate of the process that keeps the species in equilibrium Γ . For instance, in the photon decoupling case that interaction was Compton scattering. When $\Gamma \gg H$, the interaction is very efficient and the species remains tightly coupled to the rest of the cosmic plasma. However, due to the accelerated expansion of the Universe, eventually Γ becomes smaller than H . When $\Gamma \simeq H$, the interaction is no longer efficient. If that interaction is the annihilation of a species and is no longer efficient then the species is said to *freeze-out* and the left-over particles are called *relics*. Species that were in thermal equilibrium with the rest of the primordial plasma and later freeze-out are said to be thermally produced. If the species freezes-out when relativistic it is called a *hot thermal relic*, whereas it is referred to as a *cold thermal relic* if it freezes out when non-relativistic.

In the generic thermal freeze-out scenario, we assume a stable (or at least very long-lived) massive DM particle X , which is kept in thermal equilibrium with the rest of the primordial plasma through its annihilation and production according to the reaction $X\bar{X} \leftrightarrow \psi\bar{\psi}$, with a SM particle ψ . The SM particle is assumed to be very light and tightly coupled to the rest of the cosmic plasma and therefore $n_\psi = n_\psi^{(0)}$.

Assuming that the thermal distribution the dark particle follows have a zero chemical potential, which is a good approximation for this early in the history of the Universe, the equilibrium number density is given by

$$n_{\text{rel}} \propto T^3 \text{ for } m \ll T, \quad (3.1)$$

$$n_{\text{non-rel}} \propto (mT)^{3/2} e^{-m/T} \text{ for } m \gg T, \quad (3.2)$$

depending on whether the species is relativistic or not. A non-relativistic particle species, such as particles in the WIMP paradigm, according to (3.2) if the species remained in thermal equilibrium indefinitely, then its abundance would be suppressed by the Boltzmann factor $e^{-m/T}$. As the Universe expands and cools, their number density would exponentially decrease, and therefore their present-day abundance would be completely depleted. However, if the species freezes-out when the term m/T is not much greater than 1, then the species could have a significant relic abundance [21].

The evolution of the number density of the DM particle X , can be obtained by numerically integrating the Boltzmann equation similarly to how it was used to explore BBN and Recombination. The Boltzmann equation for the annihilation of the dark particles into the SM particles can be expressed as

$$\frac{dn_X}{dt} + 3Hn_X = \langle\sigma u\rangle\left[(n_X^{(0)})^2 - (n_X)^2\right]. \quad (3.3)$$

In order to solve this equation it is often convenient to define Y as the number density per entropy density

$$Y \equiv \frac{n_X}{s}. \quad (3.4)$$

Since the entropy per comoving volume is conserved, meaning that $sa^3 = \text{constant}$, equation (3.3) by substituting for Y becomes,

$$\frac{dY}{dt} = s\langle\sigma u\rangle[Y_{\text{EQ}}^2 - Y^2], \quad (3.5)$$

where $Y_{\text{EQ}} \equiv n_X^{(0)}/s$. Additionally, it is useful to define

$$x \equiv m_X/T, \quad (3.6)$$

where x can replace the time variable in the Boltzmann equation. As mentioned previously, the energy content of the very early Universe was dominated by radiation, during that epoch the variable x is related to cosmic time t through

$$t = \frac{x^2}{2H(m_X)}. \quad (3.7)$$

After introducing the change of variable, the Boltzmann equation becomes

$$\frac{dY}{dx} = -\frac{x\langle\sigma u\rangle s}{H(m)}[Y^2 - Y_{\text{EQ}}^2]. \quad (3.8)$$

Finally, by expressing $H(T) = x^{-2}H(m)$, the Boltzmann equation is given by

$$\frac{x}{Y_{\text{EQ}}}\frac{dY}{dx} = -\frac{\Gamma_A}{H(T)}\left[\left(\frac{Y}{Y_{\text{EQ}}}\right)^2 - 1\right], \quad (3.9)$$

where

$$\Gamma_A = n_X^{(0)}\langle\sigma u\rangle. \quad (3.10)$$

According to equation (3.9), the evolution of Y depends on the relationship between the rate of annihilations Γ_A and the expansion rate of the Universe H as indicated by the term Γ_A/H . When $\Gamma_A/H \lesssim 1$, the number density of the dark particles is reduced and annihilations freeze out, which happens at $x = x_f$. Therefore, we expect that [20]

$$Y \simeq Y_{\text{EQ}} \text{ for } x \leq x_f, \quad (3.11)$$

$$Y \simeq Y_{\text{EQ}}(x_f) \text{ for } x \geq x_f. \quad (3.12)$$

3.2.1 Hot Dark Matter

DM particles which freeze-out while the species is relativistic are known as hot thermal relics. For this class of particles freeze-out occurs when $x_f \lesssim 3$.

The equilibrium number density for a relativistic species can be expressed as

$$n_{\text{rel}}^{(0)} = \frac{\zeta(3)}{\pi^2}g_{\text{eff}}T^3, \quad (3.13)$$

where g_{eff} is the effective number of degrees of freedom, in particular $g_{\text{eff}} = g$ for bosons and $g_{\text{eff}} = \frac{3g}{4}$ for fermions. The corresponding entropy density using (2.23) is obtained by substituting the expression for the energy density and pressure for a relativistic particle species given by (2.25) and (2.26) respectively and it is given by

$$s = \frac{2\pi^2}{45}g_{\text{eff}}T^3, \quad (3.14)$$

where g_{*s} is the effective number of degrees of freedom for the entropy density. Therefore, the equilibrium ratio of the number density to the entropy density is given by

$$Y_{\text{EQ}}(x) = \frac{45\zeta(3)}{2\pi^4} \frac{g_{\text{eff}}}{g_{*s}} \simeq 0.278 \frac{g_{\text{eff}}}{g_{*s}}, \quad (3.15)$$

which is a constant. Therefore, the final freeze-out abundance at $x \rightarrow \infty$, Y_∞ , is equal to the equilibrium value of Y at freeze out

$$Y_\infty = Y_{\text{EQ}}(x_f) = 0.278 \frac{g_{\text{eff}}}{g_{*s}}. \quad (3.16)$$

The present day density parameter for hot thermal relics is given by [20]

$$\Omega_{X,0} h^2 = 7.83 \times 10^{-2} \frac{g_{\text{eff}}}{g_{*s}} \left(\frac{m_X}{\text{eV}} \right). \quad (3.17)$$

3.2.2 Cold Dark Matter

When a species freezes-out while non-relativistic the species is known as a cold thermal relic, in which case $x_f \gtrsim 3$. As previously mentioned, a very promising candidate for CDM are WIMPs.

The Boltzmann equation given by (3.8) can be expressed as

$$\frac{dY}{dx} = -\frac{\lambda}{x^2} [Y^2 - Y_{\text{EQ}}^2], \quad (3.18)$$

where

$$\lambda \equiv \frac{x \langle \sigma u \rangle s}{H(m_X)}. \quad (3.19)$$

Equation (3.18) can be integrated numerically to track the evolution of Y . However, using reasonable approximations the final freeze-out abundance Y_∞ can be roughly estimated. As previously mentioned, due to the Boltzmann factor, the equilibrium densities for non-relativistic particles species decreases significantly as the temperature drops. After freeze-out, dark X particles cannot annihilate to maintain equilibrium and Y much larger than Y_{EQ} during late cosmological times. Therefore, for large x at late times equation (3.18) becomes

$$\frac{dY}{dx} \simeq -\frac{\lambda Y^2}{x^2} \text{ for } (x \gg 1). \quad (3.20)$$

By integrating this equation from x_f at freeze-out to $x = \infty$, the final freeze-out abundance can be approximated as

$$Y_\infty \simeq \frac{x_f}{\lambda}. \quad (3.21)$$

The numerical solution to (3.18) as a function of x is shown in Figure 3.2 where the dotted line represents the equilibrium abundance. It turns out that the dark species abundance coincide with the equilibrium one until $x \sim 10$ and then they level off to a constant [4]. Additionally, as can be seen from Figure 3.2, a species with a larger cross-section, meaning a larger λ , freezes-out at a later time and therefore according to (3.21) has a smaller relic abundance.

The corresponding energy density today depends on the final freeze-out abundance according to [4]

$$\rho_{X,0} \simeq \frac{m_X Y_\infty T_0^3}{30}, \quad (3.22)$$

where T_0 is the temperature of the Universe today. By the dividing with the critical density and substituting the approximate expression for Y_∞ from (3.21), the present-day DM density parameter is given by

$$\Omega_{X,0} = \frac{x_f}{\lambda} \frac{m_X T_0^3}{30 \rho_{\text{cr}}}. \quad (3.23)$$

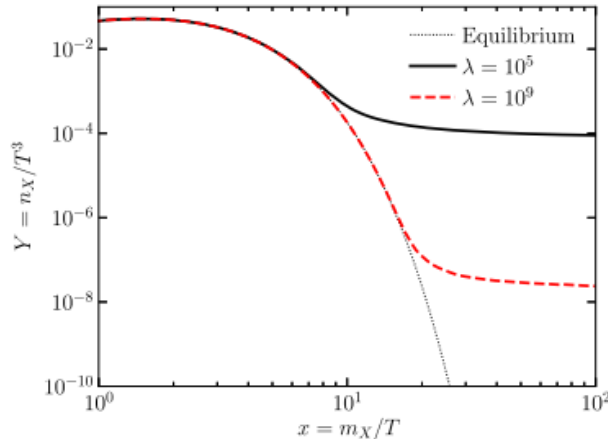


Figure 3.2: $Y = n_X/T^3$ of non-relativistic massive stable dark particles X as a function of $x = m_X/T$. Figure from: [4].

An interesting example of the present-day relic density for CDM is the one provided for WIMPs. By setting $m_X = 100$ GeV and $\langle\sigma u\rangle = 10^{-26}$ cm², for which it turns out that $x_f = 23.8$, the WIMP relic density becomes [24]

$$\Omega_{X,0}h^2 \simeq 0.12 \left(\frac{x_f}{23.8}\right) \left(\frac{86.3}{g_*(x_f)}\right)^{1/2} \left(\frac{2 \times 10^{-26} \text{cm}^2}{\langle\sigma u\rangle}\right). \quad (3.24)$$

The WIMP relic abundance does not explicitly depend on the mass of the particle and primarily depends on the cross section. This density provides the correct relic abundance for DM by assuming a massive particle species with cross sections typical of electroweak interactions. This is typically referred to as the ‘*WIMP miracle*’.

3.3 Alternatives to the WIMP paradigm

On the large scales, observations suggest that DM particles are cold, collisionless, and interact with ordinary matter through gravity. Despite the success of the Collisionless Cold Dark Matter (CCDM) paradigm, there are several problems that arise especially on small scales. Since the 1990s, several discrepancies have been revealed between CDM simulations and astrophysical observations. A recent review for CDM problems on small scales is provided by [25].

First of all, gravity-only CDM simulations predict a greater number of satellite galaxies than the observed number of dwarf galaxies around the Milky Way and nearby isolated galaxies. This discrepancy is known as the *missing satellites problem*. A suggested solution to this problem is that the missing dwarf galaxies have failed to form stars and therefore they cannot be observed. However, this solution leads to the second problem with the CDM paradigm on small scales, the so-called *too-big-to-fail* problem. The satellites predicted by Λ CDM cosmology are too massive to have failed to form stars, and therefore should contain visible stars. Lastly, measurements of rotation curves of disk galaxies suggest a constant ‘cored’ density profile towards the center, $\rho_{\text{dm}} \propto r^0$, while gravity-only CDM simulations show that the mass density increases with decreasing distance to the center as $\rho_{\text{dm}} \propto r^{-1}$ [26], which is known as the *core-cusp problem*.

3.3.1 Self-Interacting Dark Matter

A promising alternative to the CCDM paradigm is self-interacting dark matter, which was proposed in the early 2000s, in order to solve the core-cusp and missing satellites problems [27]. In this picture, DM particles can elastically scatter off each other [28]. In most models the dark species are charged under a new dark gauge force and their self-interactions are mediated by a new dark gauge boson. Typically, in order to solve the problems on small scales the required scattering cross section is $\sigma_{\text{scatter}}/m_{DM} \sim 1$ cm²/g, where m_{DM} is the DM particle mass.

Most self-interacting models assume a light force mediator, with a mass m_ϕ much smaller than the DM particle mass. Typically for long-range interactions, models use a Yukawa potential

$$V_\chi(r) = \alpha_D \frac{\pm e^{m_\phi r}}{r}, \quad (3.25)$$

where α_D is the dark fine structure constant.

3.3.2 Asymmetric Dark Matter

Another promising alternative to the Λ CDM paradigm is Asymmetric Dark Matter (ADM). The motivation for the development of such models is the observation that the density of DM is 5 times greater than that of visible matter (VM)

$$\Omega_{DM} \simeq 5\Omega_{VM}. \quad (3.26)$$

The similarity between the densities could potentially reveal a common origin or a strong connection between the physics and the cosmological evolution of the two forms of matter [29]. The density of VM observed today can be attributed to the baryon asymmetry of the universe. In the early universe at some point a tiny excess of baryons was developed over anti-baryons. This means that present-day baryons are the leftover baryons after all anti-baryons annihilated. Similarly, in the ADM models, the observed DM density is assumed to originate from an asymmetry between DM particles and antiparticles generated at some point in the early history of the Universe. DM anti-particles are hence depleted and no further annihilations can occur because DM consists only of particles. Additionally, in most ADM models, the asymmetries in the abundances of DM and VM are related through processes occurring in the very early universe which later decoupled.

Similarly to ordinary matter described by the SM of particle physics, DM may consist of several stable particles of a dark gauge group. The specific components that make up the DM content may vary between different ADM models. However, there are two features that must be present in every ADM model. Firstly, a dark global quantum number that is globally or approximately conserved, in order to define an asymmetry in DM. Secondly, an interaction through which DM particles and antiparticles annihilate [29].

In contrast to ADM hypothesis, in the WIMP scenarios the similarity between the DM and VM densities is assumed to be a coincidence. Additionally, as the WIMP hypothesis is very strongly constrained by both direct and indirect detection bounds, ADM provides a well-motivated alternative to thermal production scenario. Although the indirect detection channel is not accessible for ADM, since there are no anti-particles left in this scenario, direct detection and collider searches can test many ADM models.

ADM coupled with sufficient self-interactions could potentially lead to the formation of compact objects, known as *dark stars* [30].

Chapter 4

Dark matter via Kinetic Mixing

Motivated by the absence of DM interactions with ordinary matter, a hypothesis that has been widely studied in recent decades is the existence of a *dark sector*, which consists of a group of particles charged under new forces, but neutral under SM strong, weak and electromagnetic forces. In addition to interacting gravitationally, visible and dark sectors may interact through *portal* interactions. One postulates messenger particles from the dark sectors that are charged under the hidden and the visible gauge groups so that they are able to mediate between both sectors.

A subject of considerable interest in both theoretical and experimental investigations in the past decades, has been a simple extension of the SM by introducing an extra dark $U(1)_D$ force, mediated by a new particle, the *dark photon*. This provides a communication channel through the kinetic mixing between the ordinary and dark photon.

This Chapter begins with an introduction to the dark photon model and kinetic mixing. The dark photon model is later discussed in the context of dark stars. This is followed by a brief introduction to Feynman rules for the calculation of scattering amplitudes. Lastly, we compute the scattering amplitude for the elastic scattering of DM particle with protons and for a Compton-like process between an electron and a dark photon.

4.1 Dark photon and Kinetic mixing

Although unrelated to DM problem, the idea of a new force under which SM particles are neutral emerged in the early 1980s by Holdom [31]. During the past couple of decades, this hidden force has provided new theoretical and experimental directions in the search for particle DM. The extension of the SM by the addition of the dark $U(1)_D$ mediated by a dark photon, also known as “hidden photon”, was originally proposed in [32], [33]. The models can contain a massless dark photon, with an unbroken $U(1)_D$. In this thesis, we will consider that $U(1)_D$ is broken leading to a massive dark photon through an unspecified dark Higgs mechanism.

In a theory that includes two $U(1)$ groups a kinetic mixing term arises between the gauge bosons of the two groups [31]. The kinetic mixing between two $U(1)$ gauge groups that establishes a communication channel between the dark and the visible gauge sector. The dark photon acting as a mediator between the dark and visible sector is known as the “vector portal”, since it is a spin-1 particle. However, other viable portals have been proposed mediated by dark particles of different spins, such as the “scalar portal” mediated by scalar DM particle or “neutrino portal” mediated by a dark fermionic field like a right-handed neutrino [34].

Here we assume that the dark sector consists of a Dirac fermion χ with mass m_χ , and a massive dark photon, A' with a mass $m_{A'}$. The Lagrangian of the model is the SM Lagrangian, \mathcal{L}_{SM} ,

with the addition of dark sector Lagrangian, \mathcal{L}_D

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_{SM}. \quad (4.1)$$

The dark sector Lagrangian is given by

$$\mathcal{L}_D = \bar{\chi}\gamma^\mu D_\mu\chi - m_\chi\bar{\chi}\chi - \frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_A^2 A'_\mu A'^\mu + \frac{\kappa}{2}F'_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (4.2)$$

where D_μ is the covariant derivative

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_D A'_\mu. \quad (4.3)$$

Here g_D is the coupling between the dark photon and the dark sector. Lastly, the kinetic terms for the gauge boson contain $F_{\mu\nu}$ which is the field strength tensor for the gauge boson of a $U(1)$ symmetry, and it is given by

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (4.4)$$

Additionally, in this model the massive dark photon is kinetically mixed with the QED photon A , through the term $\frac{\kappa}{2}F'_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, where κ is the dimensionless kinetic mixing parameter. A possible kinetic mixing mechanism is shown in Figure 4.1, in which kinetic mixing is generated at arbitrarily high energies from loop diagrams involving heavy messenger particles Ψ and Ψ' , which are charged under both groups [34]. The kinetic mixing parameter is expected to be very small $\kappa \sim 10^{-3}$ or smaller [31].

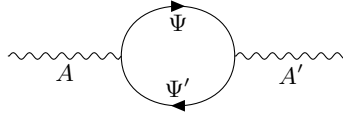


Figure 4.1: *Feynmann one-loop diagram showing the kinetic mixing of the SM photon, A with a dark photon A' , where Ψ and Ψ' are heavy particles charged under both SM $U(1)$ and the dark $U(1)_D$ forces.*

The kinetic terms \mathcal{L}_{kin} of the dark and visible photon fields can be expressed as

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{kin} &= -\frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\kappa}{2}F'_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} F_{\mu\nu} & F'_{\mu\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\kappa \\ -\kappa & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F^{\mu\nu} \\ F'^{\mu\nu} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Similarly to the mass mixing matrix, this kinetic mixing matrix which appears in \mathcal{L}_{kin} has to be normalized and diagonalized, so that

$$\begin{pmatrix} 1 & -\kappa \\ -\kappa & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

By introducing a unitary transformation matrix T , \mathcal{L}_{kin} becomes

$$\mathcal{L}_{kin} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} F_{\mu\nu} & F'_{\mu\nu} \end{pmatrix} T T^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -\kappa \\ -\kappa & 1 \end{pmatrix} T T^{-1} \begin{pmatrix} F^{\mu\nu} \\ F'^{\mu\nu} \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

One possible transformation T is

$$T : A_\mu \mapsto A_\mu + \kappa A'_\mu, \quad A'_\mu \mapsto A'_\mu. \quad (4.8)$$

In terms of the field strength this transformation translates to

$$T : F_{\mu\nu} \mapsto F_{\mu\nu} + \kappa F'_{\mu\nu}, \quad F'_{\mu\nu} \mapsto F'_{\mu\nu}. \quad (4.9)$$

Although the parameter κ arises at arbitrarily high energy scales, charges may be shifted by κ down to arbitrarily low energies [31]. In this way, using the transformation T , the kinetic mixing

term in \mathcal{L}_{kin} is eliminated by shifting the visible photon field by $\kappa A'^\mu$ while leaving the dark photon field invariant. This leads to a transformation matrix

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \kappa \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

which gives to $\mathcal{O}(\kappa^2)$

$$T^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -\kappa \\ -\kappa & 1 \end{pmatrix} T = \mathbb{I}. \quad (4.11)$$

Performing the transformation T given by (4.9), \mathcal{L}_{kin} becomes,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{kin} &= -\frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} - \frac{1}{4}(F_{\mu\nu} + \kappa F'_{\mu\nu})(F^{\mu\nu} + \kappa F'^{\mu\nu}) + \frac{\kappa}{2}F'_{\mu\nu}(F^{\mu\nu} + \kappa F'^{\mu\nu}) \\ &= -\frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \mathcal{O}(\kappa^2). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Therefore the kinetic mixing term has been eliminated to $\mathcal{O}(\kappa^2)$ and the dark sector Lagrangian \mathcal{L}'_D becomes

$$\mathcal{L}'_D = \bar{\chi}\gamma^\mu D_\mu\chi - m_\chi\bar{\chi}\chi - \frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_{A'}^2 A'_\mu A'^\mu, \quad (4.13)$$

where D_μ is given by (4.3). Apart from the elimination of the kinetic mixing term, the dark sector Lagrangian remains the same. The covariant derivative of the dark particle remains unchanged by the transformation and therefore is no coupling between the ordinary photon and the dark fermion χ .

However, once the kinetic mixing term is eliminated, a coupling between the dark photon and SM particles is induced. The Lagrangian of any Dirac fermion ψ with mass m , for instance an electron, is given by

$$\mathcal{L}_{\text{fermion}} = i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi. \quad (4.14)$$

In this case, the covariant derivative D_μ given by

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu - ie\kappa A'_\mu, \quad (4.15)$$

where the second equality is obtained after performing transformation T given by (4.8). This induces a coupling between the fermion and the dark photon, $g_D = e\kappa$. The coupling provides interactions between the dark and visible sectors, which could potentially lead to direct or indirect DM detection in an experiment. As presented in Figure 4.2, such interactions include scattering between the dark particle and SM particles with the exchange of a dark photon. This type of interaction is considered later in this Chapter and in Chapter 5 in the context of direct detection experiments.

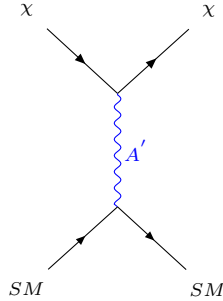


Figure 4.2: Tree level diagram for the scattering of a DM particle χ with a SM particle with the exchange of a dark photon A' .

The interaction strength between particles of the visible and the dark sectors is modulated by the kinetic mixing parameter κ . This parameter is expected very small and covers about ten orders of magnitude, in the $10^{-12} - 10^{-2}$ range [34]. Experimental searches have placed bounds on the

kinetic mixing parameter depending on the mass of the dark photon $m_{A'}$. Typically, the limits are categorized depending on the mass of the dark photon, the first category is for $m_{A'}$ larger than twice the mass of the electron ~ 1 MeV and the second is for smaller dark photon masses. Additionally, for masses $m_{A'} > 1$ MeV, the limits are usually categorized for visible and invisible dark photons. A dark photon is described as visible if it can decay into visible SM charged states and as invisible if it decays into dark sector particles.

The current experimental bounds on the dark photon and the kinetic mixing parameter for $m_{A'} > 1$ MeV are presented in Figure 4.3. For large values of the kinetic mixing parameter $\kappa > 10^{-3}$, collider experiments are more sensitive for dark photon masses up to several tens of GeV, while for relatively small values of the kinetic mixing parameter $10^{-7} < \kappa < 10^{-3}$ the constraints are stronger for dark photon masses less than a few GeV. A region of parameter space that has not been excluded yet and that many future experiments aim to probe is for a dark photon with mass about 100 MeV or larger and kinetic mixing parameter in the range $10^{-6} - 10^{-4}$ [5].

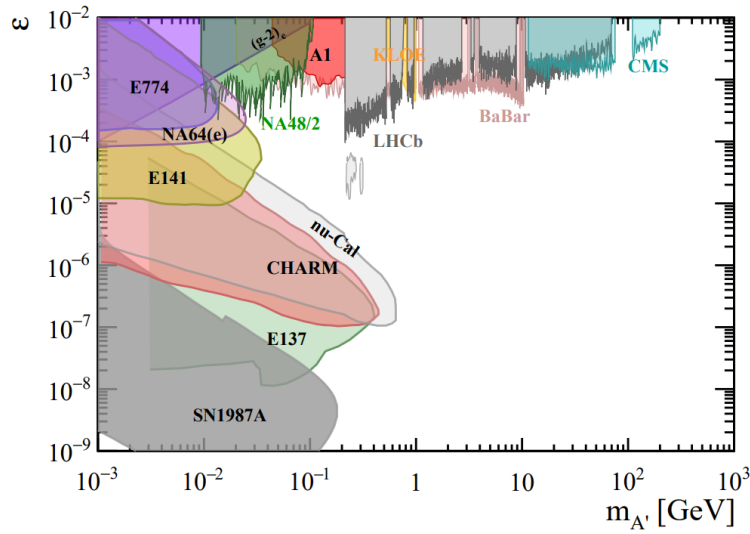


Figure 4.3: Current bounds on the kinetic mixing parameter ϵ (here denoted by κ) depending on the mass of the dark photon for $m_{A'} > 1$ MeV from collider/fixed target experiments, including bounds from supernovae and $(g - 2)_e$. Figure from [5].

Lastly, the dark photon model provides two potential channels for dark matter production, presented in Figure 4.4. The specific production channel depends on the dark photon mass and the DM particle mass. When $m_{A'} < 2m_\chi$, the dominant process through which the dark particles are produced is their annihilation into two dark photons [35], which is shown in Figure 4.4b. If $m_{A'} > 2m_\chi$, the dark particles are produced through the s-channel annihilation into SM particles with the exchange of a virtual dark photon, presented in Figure 4.4a.

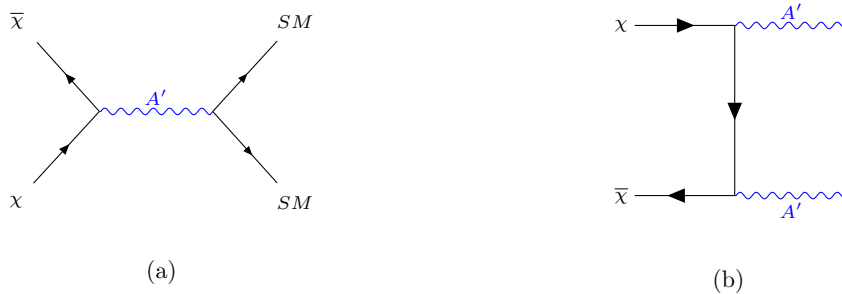


Figure 4.4: Feynman diagrams for dark matter particle χ production channels in the dark photon model.

4.2 Kinetic Mixing in Dark Stars

Kinetic mixing can also be explored in the context of dark stars. As mentioned previously, dark stars are compact objects comprised of ADM with sufficient self-interactions. The Lagrangian of the model in the dark star \mathcal{L}_\star can be expressed as

$$\mathcal{L}_\star = \mathcal{L}_{D\star} + \mathcal{L}_\phi + \mathcal{L}_{SM}, \quad (4.16)$$

where \mathcal{L}_{SM} is the SM Lagrangian and $\mathcal{L}_{D\star}$ is the dark sector Lagrangian inside the dark star and it is given by

$$\mathcal{L}_{D\star} = \bar{\chi}\gamma^\mu D_\mu\chi - m_\chi\bar{\chi}\chi - \frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_{A'}^2 A'_\mu A'^\mu + \frac{1}{2}m_D^2 A_\mu A^\mu + \frac{\kappa}{2}F'_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (4.17)$$

where the covariant derivative D_μ given by (4.3). This dark sector Lagrangian is almost the same as \mathcal{L}_D outside the dark star given by (4.2), apart from the dark particle χ which in this case is an asymmetric Dirac fermion and the addition of the ordinary photon mass term $\frac{1}{2}m_D^2 A_\mu A^\mu$. It is possible to show that the ordinary photon can acquire mass inside the dark star through a Higgs-like mechanism. This can be achieved with the addition of a complex scalar field ϕ . The Lagrangian of ϕ , \mathcal{L}_ϕ , is given by

$$\mathcal{L}_\phi = |D_\mu\phi|^2 - \mu_\phi^2|\phi|^2 - \lambda|\phi|^4 + g_\phi\phi\bar{\chi}\chi, \quad (4.18)$$

where μ_ϕ is the mass of the scalar, the term $\lambda|\phi|^4$ is related to potential ϕ self-interactions, g_ϕ is the coupling between ϕ and the dark particle χ and the covariant derivative is given by

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu. \quad (4.19)$$

Similarly to the case outside the dark star, the kinetic mixing term in $\mathcal{L}_{D\star}$ can be eliminated by performing the transformation T given by equation (4.8). Once the kinetic mixing term is eliminated the covariant derivative is given by (4.15) and the kinetic terms of the Lagrangian remain the same as (4.12). However due to the medium-induced photon mass, the Lagrangian that includes the mass terms for the dark and visible photon fields \mathcal{L}_{mass} becomes

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{mass} &= \frac{1}{2}m_{A'}^2 A'_\mu A'^\mu + \frac{1}{2}m_D^2 (A_\mu + \kappa A'_\mu)(A^\mu + \kappa A'^\mu) \\ &= \frac{1}{2}m_{A'}^2 A'_\mu A'^\mu + \frac{1}{2}m_D^2 A_\mu A^\mu + \kappa m_D^2 A'_\mu A^\mu + \mathcal{O}(\kappa^2). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Therefore, the photon field shift results in a mixed mass term $\kappa m_D^2 A'_\mu A^\mu$ in \mathcal{L}_{mass} . The transformation T results in the following dark sector Lagrangian inside the dark star

$$\mathcal{L}_{D\star} = \bar{\chi}\gamma^\mu D_\mu\chi - m_\chi\bar{\chi}\chi - \frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_{A'}^2 A'_\mu A'^\mu + \frac{1}{2}m_D^2 A_\mu A^\mu + \kappa m_D^2 A'_\mu A^\mu, \quad (4.21)$$

ignoring higher order terms in κ . Overall, by shifting the visible photon field by $\kappa A'_\mu$, the kinetic mixing term is eliminated and a mixing mass term is induced.

4.2.1 SM photon mass in a Dark Star

In this subsection Higgs-like mechanism through which the SM photon can acquire mass inside the dark star is discussed. The complex scalar field ϕ couples to the dark particle through the interaction term $-g_\phi\phi\bar{\chi}\chi$ and to the SM photon through the kinetic term $|D_\mu\phi|^2$ in \mathcal{L}_ϕ given by (4.18). Inside the dark star, since the DM density is non-zero, it has non-zero vacuum expectation value $\langle\bar{\chi}\chi\rangle \neq 0$. By defining

$$\gamma \equiv g_\phi\langle\bar{\chi}\chi\rangle, \quad (4.22)$$

the Lagrangian of ϕ can be expressed as

$$\mathcal{L}_\phi = (D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) - V(\phi), \quad (4.23)$$

where the potential term $V(\phi)$ is given by

$$V(\phi) = \mu_\phi^2\phi\phi^* + \lambda(\phi\phi^*)^2 - \gamma\phi. \quad (4.24)$$

Outside the dark star, $\langle \bar{X}X \rangle = 0$ and thus $\gamma = 0$. In this case, the potential minimum is at $\phi = 0$ and the photon remains massless. On the other hand, inside the dark star $\gamma \neq 0$ and the shifted ϕ potential acquires a non-zero vacuum expectation value.

The complex scalar ϕ can be expressed in terms of the real scalars ϕ_1, ϕ_2 as

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2), \quad (4.25)$$

$$\phi^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2). \quad (4.26)$$

In order to find the potential minimum

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \phi} &= 0 \\ \mu_\phi^2 \phi^* + 2\lambda(\phi\phi^*)\phi^* - \gamma &= 0. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Substituting for ϕ and ϕ^* equation (4.27) becomes

$$(\phi_1 - i\phi_2) \left[\frac{\mu_\phi^2}{\sqrt{2}} + \frac{\lambda(\phi_1^2 + \phi_2^2)}{\sqrt{2}} \right] - \gamma = 0. \quad (4.28)$$

By separating the equation into the real and imaginary parts

$$\phi_1 \left[\frac{\mu_\phi^2}{\sqrt{2}} + \frac{\lambda(\phi_1^2 + \phi_2^2)}{\sqrt{2}} \right] - \gamma = 0, \quad (4.29)$$

$$\phi_2 \left[\frac{\mu_\phi^2}{\sqrt{2}} + \frac{\lambda(\phi_1^2 + \phi_2^2)}{\sqrt{2}} \right] = 0, \quad (4.30)$$

which is a system of two equations for real variables ϕ_1 and ϕ_2 . Solving this system with the using Mathematica, it turns out that the minimum of $V(\phi)$ is at $\phi_2 = 0$ and $\phi_1 = u$, where u is a constant that depends λ, μ_ϕ and γ and is given by

$$u = \frac{2 \times 3^{1/3} \lambda \mu_\phi^2 - \left(2\sqrt{3} \sqrt{\lambda^3 (27\gamma^2 \lambda + 2\mu_\phi^6)} - 18\gamma\lambda^2 \right)^{2/3}}{2^{5/6} \times 3^{2/3} \lambda^3 \sqrt{\sqrt{3} \sqrt{\lambda^3 (27\gamma^2 \lambda + 2\mu_\phi^6)} - 9\gamma\lambda^2}}. \quad (4.31)$$

Therefore, the minimum of the potential occurs at

$$\langle \phi \rangle = \langle \phi^* \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}u. \quad (4.32)$$

By expanding about the potential minimum, ϕ can be expressed as

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(u + h), \quad (4.33)$$

where h is a Higg-like scalar. By substituting this expression for ϕ , the kinetic term of \mathcal{L}_ϕ becomes

$$\begin{aligned} (D_\mu \phi)^* (D^\mu \phi) &= (\partial_\mu + ieA_\mu + ie\kappa A'_\mu) \frac{1}{\sqrt{2}}(u + h) (\partial^\mu - ieA^\mu - ie\kappa A'^\mu) \frac{1}{\sqrt{2}}(u + h) \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu h)^2 + \frac{1}{2}e^2 u^2 A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}e^2 A_\mu A^\mu h^2 + e^2 A_\mu A^\mu u h + e^2 \kappa A_\mu A^{\mu'} + e^2 A_{\mu'} A^{\mu} + \dots \end{aligned} \quad (4.34)$$

Overall, in the Lagrangian a Higg-like scalar h is introduced alongside with a massive photon with mass $m_D = eu$. Outside the dark star $\gamma = 0$ and according to equation (4.31) $u = 0$. Therefore the SM photon can only have a medium-induced mass inside the dark star, as expected.

4.2.2 Mixed mass matrix

Similarly to the diagonalization of the kinetic mixing matrix in the previous section, the mixed mass matrix should be normalized and diagonalized. The Lagrangian that contains the mass terms for the dark and visible photon, \mathcal{L}_{mass} can be expressed as

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{mass} &= \frac{1}{2} (A_\mu \quad A'_\mu) \begin{pmatrix} m_D^2 & \kappa m_D^2 \\ \kappa m_D^2 & m_{A'}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^\mu \\ A'^\mu \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} (A_\mu \quad A'_\mu) P P^{-1} \begin{pmatrix} m_D^2 & \kappa m_D^2 \\ \kappa m_D^2 & m_{A'}^2 \end{pmatrix} P P^{-1} \begin{pmatrix} A^\mu \\ A'^\mu \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (4.35)$$

By introducing the diagonalization matrix P , the diagonalized mass term of the Lagrangian, $\mathcal{L}_{mass,diag}$ can be expressed as

$$\mathcal{L}_{mass,diag} = \frac{1}{2} (\Phi_\mu \quad \Phi'_\mu) \begin{pmatrix} m_\Phi^2 & 0 \\ 0 & m_{\Phi'}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi^\mu \\ \Phi'^\mu \end{pmatrix}, \quad (4.36)$$

where the diagonal fields Φ and Φ' are linear combinations of A and A' . The diagonalization condition is given by

$$P^{-1} \begin{pmatrix} m_D^2 & \kappa m_D^2 \\ \kappa m_D^2 & m_{A'}^2 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} m_\Phi^2 & 0 \\ 0 & m_{\Phi'}^2 \end{pmatrix}. \quad (4.37)$$

The eigenvalues of the diagonalization matrix P are given by

$$\begin{aligned}m_\Phi^2 &= \frac{1}{2} \left(m_{A'}^2 + m_D^2 - \sqrt{m_{A'}^4 + 4k^2 m_D^2 - 2m_{A'}^2 m_D^2 + m_D^4} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(m_{A'}^2 + m_D^2 - |m_{A'}^2 - m_D^2| \right) + \mathcal{O}(\kappa^2),\end{aligned}\quad (4.38)$$

$$\begin{aligned}m_{\Phi'}^2 &= \frac{1}{2} \left(m_{A'}^2 + m_D^2 + \sqrt{m_{A'}^4 + 4k^2 m_D^2 - 2m_{A'}^2 m_D^2 + m_D^4} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(m_{A'}^2 + m_D^2 + |m_{A'}^2 - m_D^2| \right) + \mathcal{O}(\kappa^2).\end{aligned}\quad (4.39)$$

If $m_D^2 < m_{A'}^2$, then, $m_{\Phi'}^2 = m_{A'}^2$, and $m_\Phi^2 = m_D^2$. Using the eigenvalues and computing the corresponding eigenvectors, the matrix P becomes

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\kappa m_D^2}{m_{A'}^2 - m_D^2} \\ \frac{\kappa m_D^2}{m_{A'}^2 - m_D^2} & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.40)$$

Therefore using

$$(\Phi_\mu \quad \Phi'_\mu) = (A_\mu \quad A'_\mu) P, \quad (4.41)$$

and neglecting terms higher κ terms, A'^μ A^μ can be expressed as linear combinations of Φ and Φ' as follows

$$A'^\mu = \Phi'^\mu + \frac{\kappa m_D^2}{m_{A'}^2 - m_D^2} \Phi^\mu, \quad (4.42)$$

$$A^\mu = \Phi^\mu - \frac{\kappa m_D^2}{m_{A'}^2 - m_D^2} \Phi'^\mu. \quad (4.43)$$

Similarly for the dark and visible photon field strengths,

$$F'^{\mu\nu} = F_{\Phi'}^{\mu\nu} + \frac{\kappa m_D^2}{m_{A'}^2 - m_D^2} F_\Phi^{\mu\nu}, \quad (4.44)$$

$$F^{\mu\nu} = F_\Phi^{\mu\nu} - \frac{\kappa m_D^2}{m_{A'}^2 - m_D^2} F_{\Phi'}^{\mu\nu}. \quad (4.45)$$

Lastly, substituting equations (4.42 - 4.45) in the dark sector Lagrangian given by (4.21),

$$\mathcal{L}_{D^*} = \bar{\chi} \gamma^\mu D_\mu \chi - m_\chi \bar{\chi} \chi - \frac{1}{4} F_{\Phi'\mu\nu} F_{\Phi'}^{\mu\nu} - \frac{1}{4} F_{\Phi\mu\nu} F_\Phi^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_{\Phi'}^2 \Phi'_\mu \Phi'^\mu + \frac{1}{2} m_\Phi^2 \Phi_\mu \Phi^\mu, \quad (4.46)$$

where the covariant derivative is given by

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_D \Phi'_\mu - \frac{ig_D \kappa m_D^2}{m_{A'}^2 - m_D^2} \Phi_\mu. \quad (4.47)$$

Therefore, the kinetic mixing term and the mixed mass term have been eliminated, while a coupling $\sim \frac{g_D \kappa m_D^2}{m_{A'}^2 - m_D^2}$ is induced between the visible photon and the DM particle χ , since to leading order $A_\mu \simeq \Phi_\mu$ according to (4.43). This coupling of the visible photon to the DM particle means that asymmetric dark stars can produce a spectrum of detectable photons via dark Bremsstrahlung, as was discussed in [36].

Similarly to the case outside the dark star, we can find the coupling of the diagonal fields Φ and Φ' to SM particles. The Lagrangian of a SM Dirac fermion, $\mathcal{L}_{\text{fermion}}$, for instance an electron, is given by

$$\mathcal{L}_{\text{fermion}} = i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi, \quad (4.48)$$

where the covariant derivative is given by

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu - ie\kappa A'_\mu = \partial_\mu - ie\left[1 + \frac{\kappa^2 m_D^2}{m_{A'}^2 - m_D^2}\right]\Phi_\mu - ie\left[\kappa - \frac{\kappa^2 m_D^2}{m_{A'}^2 - m_D^2}\right]\Phi'_\mu. \quad (4.49)$$

which gives the coupling between the electron and the Φ , Φ' .

By setting $m_D = 0$, we obtain the same expressions for the couplings outside the dark star, in which case the coupling between the dark particle and the visible photon vanishes, while the dark photon still couples to the SM particles.

4.3 Feynman Rules

In the following sections we study the interactions between particles in the dark and visible sector in the dark photon model. In order to calculate the cross section of an interaction, such as in Figure (4.2), we have to introduce the Feynman rules for the interactions between the incoming DM particle and the dark photon and their respective propagators.

Additionally we require standard QED Feynman rules for the propagator of a fermion, a photon and a fermion-photon vertex, which are given by

$$\text{---}\xrightarrow{p}\text{---} = \frac{i}{\not{p} - m} \text{---}\xrightarrow{q}\text{---} = \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2} \text{---}\xrightarrow{\quad}\text{---} = -ie\gamma^\mu.$$

where the photon propagator is given in the Feynmann gauge. In general the photon propagator is given by

$$i\Delta_{\mu\nu}(q) = \frac{-i}{q^2} \left[g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right]. \quad (4.50)$$

The term $q_\mu q_\nu$ does not contribute to a gauge invariant observable, so that we can choose the Feynman gauge with $\xi = 1$.

The relevant Feynmann rules for the dark sector particles are:

1. Dark photon propagator

$$\text{---}\xrightarrow{q}\text{---} = \frac{-i}{q^2 - m_{A'}^2} \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{m_{A'}^2} \right)$$

2. Fermionic dark matter - dark photon vertex

$$\text{---}\xrightarrow{\chi} \text{---} = -ig_D \gamma^\mu.$$

4.4 DM-proton scattering, $\chi p \rightarrow \chi p$

In this section we compute the cross-section for the scattering between an incoming DM particle χ and a proton with the exchange of a dark photon, as presented in Figure 4.5. The scattering cross-section for this interaction will be used in Chapter 5 to calculate the event rate in a direct detection experiment.

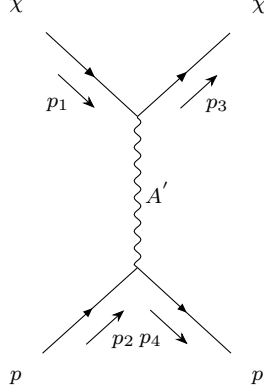


Figure 4.5: DM-proton scattering diagram.

In addition to the Feynman rules mentioned in the previous section for propagators and vertex factors, the multiplicative factors for external lines for spin- $\frac{1}{2}$ fermions are the spinors u and \bar{u} for incoming and out-going fermion respectively [37]. Therefore, the DM-proton scattering amplitude \mathcal{M} , can be expressed as

$$i\mathcal{M} = [\bar{u}_{\sigma_4}(p_4)ig_p\gamma_\mu u_{\sigma_2}(p_2)] \frac{-i\left(g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{m_{A'}^2}\right)}{q^2 - m_{A'}^2} [\bar{u}_{\sigma_3}(p_3)ig_D\gamma_\nu u_{\sigma_1}(p_1)], \quad (4.51)$$

where $g_p = e\kappa$ the coupling between the dark photon and the proton and g_D is the DM-dark photon coupling. By re-arranging the terms, we obtain

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \frac{g_p g_D}{q^2 - m_{A'}^2} [\bar{u}_{\sigma_4}(p_4)\gamma_\mu u_{\sigma_2}(p_2)] g^{\mu\nu} [\bar{u}_{\sigma_3}(p_3)\gamma_\nu u_{\sigma_1}(p_1)] - [\bar{u}_{\sigma_4}(p_4)\gamma_\mu u_{\sigma_2}(p_2)] \frac{q^\mu q^\nu}{m_{A'}^2} [\bar{u}_{\sigma_3}(p_3)\gamma_\nu u_{\sigma_1}(p_1)] \\ &= \frac{g_p g_D}{q^2 - m_{A'}^2} [\bar{u}_{\sigma_4}(p_4)\gamma_\mu u_{\sigma_2}(p_2)] [\bar{u}_{\sigma_3}(p_3)\gamma_\mu u_{\sigma_1}(p_1)] - \frac{1}{m_{A'}^2} [\bar{u}_{\sigma_4}(p_4)\not{q}u_{\sigma_2}(p_2)] [\bar{u}_{\sigma_3}(p_3)\not{q}u_{\sigma_1}(p_1)]. \end{aligned} \quad (4.52)$$

The second term in the scattering amplitude which depends on $q^\mu q^\nu$ vanishes, since

$$\bar{u}_{\sigma_4}(p_4)\not{q}u_{\sigma_2}(p_2) = \bar{u}_{\sigma_4}(p_4)(\not{p}_2 - \not{p}_4)u_{\sigma_2}(p_2) = m\bar{u}_{\sigma_4}(p_4)u_{\sigma_2}(p_2) - m\bar{u}_{\sigma_4}(p_4)u_{\sigma_2}(p_2) = 0, \quad (4.53)$$

where the third equality is obtained using Dirac's equations satisfied by the spinor u and the adjoint spinor $\bar{u} = u^\dagger\gamma^0$ given by

$$\bar{u}(\not{p} - m) = 0, \quad (\not{p} - m)u = 0. \quad (4.54)$$

Therefore, the DM-proton scattering amplitude can be expressed as

$$\mathcal{M} = \frac{g_p g_D}{q^2 - m_{A'}^2} [\bar{u}_{\sigma_4}(p_4)\gamma^\mu u_{\sigma_2}(p_2)] [\bar{u}_{\sigma_3}(p_3)\gamma_\mu u_{\sigma_1}(p_1)]. \quad (4.55)$$

We are interested in the unpolarized scattering cross section. The unpolarized scattering amplitude $|\overline{\mathcal{M}}|^2$ is obtained by summing over the spin or polarization of the final states and averaging over the spin or polarization of the initial states. Therefore, the spin-averaged scattering amplitude is given by [37]

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{1}{(2s_A + 1)(2s_B + 1)} \sum_{\text{all spin states}} |\mathcal{M}|^2, \quad (4.56)$$

where s_A, s_B are spins of the incoming particles. For the DM-proton scattering, both incoming particles have spin $\frac{1}{2}$ and therefore the prefactor of the spin-averaged scattering amplitude is equal to $\frac{1}{4}$. Using equation (4.55), the spin-averaged scattering amplitude for this interaction can be expressed as

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \sum_{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4} \frac{1}{4} |\mathcal{M}|^2 = \frac{g_p^2 g_D^2}{4(q^2 - m_{A'}^2)^2} L^{\mu\nu} \tilde{L}_{\mu\nu}^{DM}, \quad (4.57)$$

where $L^{\mu\nu}$ is the proton tensor and $\tilde{L}_{\mu\nu}^{DM}$ is the DM tensor. The tensor associated with the dark photon-proton vertex is given by

$$L^{\mu\nu} = \sum_{\sigma_2, \sigma_4} [\bar{u}_{\sigma_4}(p_4) \gamma^\mu u_{\sigma_2}(p_2)] [\bar{u}_{\sigma_4}(p_4) \gamma^\nu u_{\sigma_2}(p_2)]^*, \quad (4.58)$$

with a similar expression for $\tilde{L}_{\mu\nu}^{DM}$. The tensor expressions can be considerably simplified using trace techniques. the second term in square brackets in equation (4.58) can be expressed as

$$[u^\dagger(p_4) \gamma^0 \gamma^\nu u(p_2)]^\dagger = [u^\dagger(p_2) \gamma^{\nu\dagger} \gamma^0 u(p_2)] = [\bar{u}(p_2) \gamma^\nu u(p_4)], \quad (4.59)$$

where in the third equality we have used that $\gamma^{\nu\dagger} \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^\nu$. Therefore, the proton tensor becomes,

$$L^{\mu\nu} = \sum_{\sigma_2, \sigma_4} [\bar{u}_{\sigma_4}(p_4) \gamma^\mu u_{\sigma_2}(p_2)] [\bar{u}_{\sigma_2}(p_2) \gamma^\nu u_{\sigma_4}(p_4)]. \quad (4.60)$$

The expression for the proton tensor can be further simplified using Casimir's trick given by [38]

$$\sum_{\text{all spins}} [\bar{u}_a \Gamma_1 u_b] [\bar{u}_a \Gamma_2 u_b]^* = \text{Tr}[\Gamma_1 (\not{p}_b + m_b) \bar{\Gamma}_2 (\not{p}_a + m_a)]. \quad (4.61)$$

Therefore, the photon tensor can be calculated as follows

$$\begin{aligned} L^{\mu\nu} &= \text{Tr} \left[\gamma^\mu (\not{p}_2 + m_p) \gamma^\nu (\not{p}_4 + m_p) \right] \\ &= \text{Tr}(\gamma^\mu \not{p}_2 \gamma^\nu \not{p}_4) + m_p^2 \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) \\ &= 4 \left(p_2^\mu p_4^\nu + p_4^\mu p_2^\nu - (p_2 \cdot p_4) g^{\mu\nu} + m_p^2 g^{\mu\nu} \right) \\ &= 4 \left(p_2^\mu p_4^\nu + p_4^\mu p_2^\nu + \frac{1}{2} q^2 g^{\mu\nu} \right), \end{aligned} \quad (4.62)$$

where the second and third equalities are obtained using the trace identities for gamma-matrices presented in Appendix B.

Similarly for the DM tensor, by applying Casimir's trick, $\tilde{L}_{\mu\nu}^{DM}$ can be calculated as follows

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{\mu\nu}^{DM} &= \sum_{\sigma_1, \sigma_3} [\bar{u}_{\sigma_3}(p_3) \gamma_\mu u_{\sigma_1}(p_1)] [\bar{u}_{\sigma_1}(p_1) \gamma_\nu u_{\sigma_3}(p_3)] \\ &= \text{Tr}(\gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu \not{p}_3) + m_\chi^2 \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) \\ &= \text{Tr} \left[\gamma_\mu (\not{p}_1 + m_\chi) \gamma_\nu (\not{p}_3 + m_\chi) \right] \\ &= 4 \left(p_{\mu 1} p_{\nu 3} + p_{\mu 3} p_{\nu 1} - (p_1 \cdot p_3) g_{\mu\nu} + m_\chi^2 g_{\mu\nu} \right) \\ &= 4 \left(p_{\mu 1} p_{\nu 3} + p_{\mu 3} p_{\nu 1} + \frac{1}{2} q^2 g_{\mu\nu} \right). \end{aligned} \quad (4.63)$$

Substituting the expressions for the tensors into equation (4.57) for the spin-average amplitude, we obtain

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{g_p^2 g_D^2}{4(q^2 - m_{A'}^2)^2} \left(2(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) + 2(p_2 \cdot p_3)(p_1 \cdot p_4) + \frac{1}{4} q^4 + q^2 [(p_1 \cdot p_3) + (p_2 \cdot p_4)] \right), \quad (4.64)$$

which can be re-written as

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{g_p^2 g_D^2}{4(q^2 - m_{A'}^2)^2} \left(2(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) + 2(p_2 \cdot p_3)(p_1 \cdot p_4) + q^2 (m_p^2 + m_\chi^2) \right). \quad (4.65)$$

The expression for the spin-averaged scattering amplitude can be simplified further using the relations for the Mandelstam variables s, t and u as defined in Appendix A in the case of elastic scattering

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{4g_p^2 g_D^2}{(q^2 - m_{A'}^2)^2} \left(2(m_p E_1^T) \frac{s - m_p^2 - m_\chi^2}{2} + 2m_p E_3^T \frac{m_p^2 + m_\chi^2 - u}{2} + t(m_p^2 + m_\chi^2) \right) \\ &= \frac{2g_p^2 g_D^2}{(q^2 - m_{A'}^2)^2} \left((s - m_p^2 - m_\chi^2)^2 + (m_p^2 + m_\chi^2 - u)^2 + 2t(m_p^2 + m_\chi^2) \right). \end{aligned} \quad (4.66)$$

By substituting for u in terms of s and t , the spin averaged scattering amplitude becomes

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{2g_p^2 g_D^2}{(t - m_{A'}^2)^2} \left((s - m_p^2 - m_\chi^2)^2 + (t + s - m_p^2 - m_\chi^2)^2 + 2t(m_p^2 + m_\chi^2) \right) \\ &= \frac{2g_p^2 g_D^2}{(t - m_{A'}^2)^2} \left(2(s - m_p^2 - m_\chi^2)^2 + 2st + t^2 \right) \\ &= \frac{32\pi^2 \alpha \alpha_D \kappa^2}{(t - m_{A'}^2)^2} \left(2(s - m_p^2 - m_\chi^2)^2 + 2st + t^2 \right), \end{aligned} \quad (4.67)$$

where α is the fine structure constant, $g_p = e\kappa$ is the dark photon - proton coupling, $\alpha_D = \frac{g_D^2}{4\pi}$ is the dark fine structure constant.

The differential scattering cross-section in the center of mass frame is given by

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{CM} = \frac{|\overline{\mathcal{M}}|^2}{64\pi^2 s} = \alpha \alpha_D \kappa^2 \frac{(2(s - m_p^2 - m_\chi^2)^2 + 2st + t^2)}{s(t - m_{A'}^2)^2}. \quad (4.68)$$

The non-relativistic scattering cross-section for fixed momentum transfer $|\vec{q}| = \alpha m_p$, using the non-relativistic expression for $s \simeq (m_\chi + m_p)^2$, can be expressed as

$$\bar{\sigma}_p = \frac{|\overline{\mathcal{M}}|^2_{(q=\alpha m_p)}}{16\pi(m_\chi + m_p)^2} = \frac{\mu_{\chi p}^2 |\overline{\mathcal{M}}|^2_{(q=\alpha m_p)}}{16\pi m_\chi^2 m_p^2} \quad (4.69)$$

where $\mu_{\chi p}$ is the DM-proton reduced mass given by

$$\mu_{\chi p} = \frac{m_\chi m_p}{m_\chi + m_p}. \quad (4.70)$$

In the non-relativistic limit, the spin-averaged scattering amplitude can be expressed as,

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{32\pi^2 \alpha \alpha_D \kappa^2}{(q^2 + m_{A'}^2)^2} \left(8m_p^2 m_\chi^2 + 2(m_\chi + m_p)^2 (\alpha m_p)^2 + (\alpha m_p)^4 \right) \\ &\simeq \frac{(16\pi)^2 \alpha \alpha_D \kappa^2}{(q^2 + m_{A'}^2)^2} m_p^2 m_\chi^2, \end{aligned} \quad (4.71)$$

where we have ignored terms $\mathcal{O}(\alpha^2)$. Therefore, the spin-averaged scattering amplitude at fixed momentum transfer and the corresponding cross-section can be expressed as,

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2_{(q=\alpha m_p)} \simeq \frac{(16\pi)^2 \alpha \alpha_D \kappa^2}{(\alpha^2 m_p^2 + m_{A'}^2)^2} m_p^2 m_\chi^2 \quad (4.72)$$

$$\bar{\sigma}_p \simeq \frac{16\pi \alpha \alpha_D \kappa^2 \mu_{\chi p}^2}{(\alpha^2 m_p^2 + m_{A'}^2)^2} \quad (4.73)$$

The expression above can be further simplified by considering the case of a heavy or a light mediator

$$\bar{\sigma}_p = \begin{cases} \frac{16\pi \alpha \alpha_D \kappa^2 \mu_{\chi p}^2}{m_{A'}^4} & m_{A'} \gg \alpha m_p \\ \frac{16\pi \alpha \alpha_D \kappa^2 \mu_{\chi p}^2}{(\alpha m_p)^4} & m_{A'} \ll \alpha m_p \end{cases} \quad (4.74)$$

Alternately, the non-relativistic scattering cross-section can be expressed in terms of the free scattering cross-section, $\sigma_p^{q=0}$ which is given by

$$\sigma_p^{q=0} = \frac{16\pi\alpha\alpha_D\kappa^2\mu_{\chi p}^2}{m_{A'}^4}. \quad (4.75)$$

In this case the scattering cross-section is given by

$$\sigma_p = \frac{\sigma_p^{q=0}m_{A'}^4}{(q^2 + m_{A'}^2)^2}. \quad (4.76)$$

The final expression for the scattering cross-section for the DM-proton scattering is given by (4.76), which will be used along with (4.75) in the next Chapter to calculate the rate of events for this interaction in a direct detection experiment.

4.5 Compton-like process, $e^- A' \rightarrow e^- \gamma$

In this section we compute the differential scattering cross-section for the Compton-like process $e^- A' \rightarrow e^- \gamma$, during this process a dark photon is absorbed by an electron, which in turn emits a visible photon. Although this interaction cannot be used in direct detection experiments, it could be relevant in neutrino experiments or a future lepton-photon collider [39].

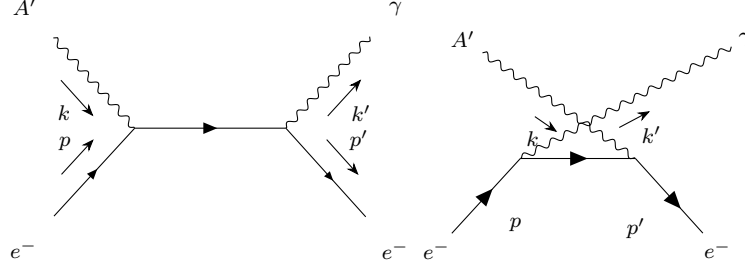


Figure 4.6: Feynman diagrams for the Compton-like process $e^- A' \rightarrow e^- \gamma$.

The two lowest-order Feynman diagrams for the Compton-like process are shown in Figure 4.6. The multiplicative factor for external photon line is the polarization vector ϵ_μ and ϵ_μ^* for incoming and out-going photons respectively [37]. Similarly, we treat the dark photon as a massive spin-1 vector particle. By taking into account the Feynman rules, the scattering amplitudes \mathcal{M}_1 and \mathcal{M}_2 for the diagrams in Figure 4.6 left and right respectively, are given by

$$-i\mathcal{M}_1 = \bar{u}(p')\epsilon_\nu'^*(ie\gamma^\nu)\frac{i(\not{p} + \not{k} + m_e)}{(p+k)^2 - m_e^2}(ie\kappa\gamma^\mu)\epsilon_\mu u(p), \quad (4.77)$$

$$-i\mathcal{M}_2 = \bar{u}(p')\epsilon_\mu ie\kappa\gamma^\mu\frac{i(\not{p} - \not{k}' + m_e)}{(p-k')^2 - m_e^2}(ie\gamma^\nu)\epsilon_\nu'^* u(p). \quad (4.78)$$

By re-arranging the terms, the scattering amplitudes are expressed as

$$\mathcal{M}_1 = e^2\kappa\epsilon_\nu'^*\epsilon_\mu\bar{u}(p')\left[\frac{\gamma^\nu(\not{p} + \not{k} + m_e)\gamma^\mu}{(p+k)^2 - m_e^2}\right]u(p), \quad (4.79)$$

and

$$\mathcal{M}_2 = e^2\kappa\epsilon_\mu\epsilon_\nu'^*\bar{u}(p')\left[\frac{\gamma^\mu(\not{p} - \not{k}' + m_e)\gamma^\nu}{(p-k')^2 - m_e^2}\right]u(p). \quad (4.80)$$

The scattering amplitudes for the two diagrams can be combined into $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$ to give

$$\mathcal{M} = e^2\kappa\epsilon_\nu'^*\epsilon_\mu\bar{u}(p')\left[\frac{\gamma^\nu(\not{p} + \not{k} + m_e)\gamma^\mu}{(p+k)^2 - m_e^2} + \frac{\gamma^\mu(\not{p} - \not{k}' + m_e)\gamma^\nu}{(p-k')^2 - m_e^2}\right]u(p). \quad (4.81)$$

The scattering amplitude \mathcal{M} can be written in the form

$$\mathcal{M} = \epsilon_\nu'^*\epsilon_\mu T^{\nu\mu}, \quad (4.82)$$

where the tensor $T^{\nu\mu}$ is given by

$$T^{\nu\mu} = e^2\kappa\bar{u}(p')\left[\frac{\gamma^\nu(\not{p} + \not{k} + m_e)\gamma^\mu}{(p+k)^2 - m_e^2} + \frac{\gamma^\mu(\not{p} - \not{k}' + m_e)\gamma^\nu}{(p-k')^2 - m_e^2}\right]u(p). \quad (4.83)$$

Similarly to the previous interaction, we are interested in the unpolarized scattering cross-section given by (4.56). For the sum over the photon polarization we use the completeness relation for the photon given by

$$\sum \epsilon_\nu^*\epsilon_\nu \rightarrow -g_{\nu\nu'}. \quad (4.84)$$

For the massive dark photon the completeness relation is that of a massive vector particle, which is given by [37]

$$\sum \epsilon_\mu^* \epsilon_\mu = -g_{\mu\mu'} + \frac{k_\mu k_{\mu'}}{m_{A'}^2}, \quad (4.85)$$

where the sum is over the three polarization states.

Using the completeness relations and Casimir's trick given by (4.61) for the tensor $T^{\nu\mu}$, the spin-averaged scattering amplitude can be expressed as

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{e^4 \kappa^2}{6} (-g_{\nu\nu'}) \left(-g_{\mu\mu'} + \frac{k_\mu k_{\mu'}}{m_{A'}^2} \right) \text{Tr} \left[\left(\frac{\gamma^\nu (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\mu}{s - m_e^2} + \frac{\gamma^\mu (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma^\nu}{u - m_e^2} \right) (\not{p} + m_e) \times \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{\gamma^{\nu'} (\not{p}' + \not{k} + m_e) \gamma^{\mu'}}{s - m_e^2} + \frac{\gamma^{\mu'} (\not{p}' - \not{k}' + m_e) \gamma^{\nu'}}{u - m_e^2} \right) (\not{p}' + m_e) \right]. \end{aligned} \quad (4.86)$$

In this case the incoming particles are the dark photon and the electrons with spins 1 and $\frac{1}{2}$ respectively and therefore the prefactor of the spin-averaged scattering amplitude is $\frac{1}{6}$ according to 4.56. The trace of $|\overline{\mathcal{M}}|^2$ is separated into four terms *I-IV* which are calculated using the trace identities presented in Appendix B as follows:

$$\begin{aligned} \text{I} &= \frac{-g_{\nu\nu'}}{(s - m_e^2)^2} \left(-g_{\mu\mu'} + \frac{k_\mu k_{\mu'}}{m_{A'}^2} \right) \text{Tr} \left[\gamma^\nu (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\mu (\not{p} + m_e) \gamma^{\mu'} (\not{p}' + \not{k} + m_e) \gamma^{\nu'} (\not{p}' + m_e) \right] \\ &= \frac{1}{(s - m_e^2)^2} \left(g_{\mu\mu'} - \frac{k_\mu k_{\mu'}}{m_{A'}^2} \right) \text{Tr} \left[(\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\mu (\not{p} + m_e) \gamma^{\mu'} (\not{p}' + \not{k} + m_e) (-2\not{p}' + 4m_e) \right] \\ &= \frac{2}{(s - m_e^2)^2} \left(g_{\mu\mu'} - \frac{k_\mu k_{\mu'}}{m_{A'}^2} \right) \text{Tr} \left[(\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\mu (\not{p} + m_e) \gamma^{\mu'} (2m_e(\not{p} + \not{k}) - m_e \not{p}' + 2m_e^2 - (\not{p} + \not{k})\not{p}') \right] \\ &= \frac{2}{(s - m_e^2)^2} \left(g_{\mu\mu'} - \frac{k_\mu k_{\mu'}}{m_{A'}^2} \right) \text{Tr} \left[\gamma^\mu (\not{p} + m_e) \gamma^{\mu'} \left(2m_e(m_e^2 + 2(k \cdot p) + m_{A'}^2) + 4m_e^2(\not{p} + \not{k}) - m_e^2 \not{p}' \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - m_e \not{p}'(\not{p} + \not{k}) - m_e(\not{p} + \not{k})\not{p}' - (\not{p} + \not{k})\not{p}'(\not{p} + \not{k}) + 2m_e^3 \right) \right] \\ &= \frac{2}{(s - m_e^2)^2} \left(g_{\mu\mu'} - \frac{k_\mu k_{\mu'}}{m_{A'}^2} \right) \text{Tr} \left[\gamma^\mu \not{p} \gamma^{\mu'} \left(4m_e^2(\not{p} + \not{k}) - m_e^2 \not{p}' - (\not{p} + \not{k})(\not{p}' + \not{p}'\not{k}) \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.87)$$

Because $(g_{\mu\mu'} - \frac{k_\mu k_{\mu'}}{m_{A'}^2})g^{\mu\mu'} = 0$, any trace term $\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^{\mu'})$ vanishes. Using the trace identities presented in Appendix B and substituting for the Mandelstam variables, the term *I* becomes

$$\begin{aligned} \text{I} &= \frac{1}{(s - m_e^2)^2} \left[8m_{A'}^2 \left(6m_e^2 - (p \cdot p') \right) + 8 \left(8m_e^4 - 4m_e^2(k \cdot p') + 4(k \cdot p)(k \cdot p') - 4m_e^2(p \cdot p') + 4(k \cdot p)(p \cdot p') \right) \right] \\ &\quad + \frac{1}{m_{A'}^2 (s - m_e^2)^2} \left[8 \left(-8m_e^2(k \cdot p)^2 + 4(k \cdot p)^2(p \cdot p') \right) \right] \\ &= \frac{16m_e^2 m_{A'}^2 + 4(m_e^4 + 8m_e^2 s - s^2 + 2m_e^2 u - 2su)}{(s - m_e^2)^2} \\ &\quad + \frac{4(-4m_e^6 + 9m_e^4 s - 6m_e^2 s^2 + s^3 + m_e^4 u - 2m_e^2 su + s^2 u)}{(s - m_e^2)^2 m_{A'}^2}. \end{aligned} \quad (4.88)$$

Similarly, the second term II can be calculated as follows,

$$\begin{aligned}
II &= \frac{-g_{\nu\nu'}}{(s-m_e^2)(u-m_e^2)} \left(-g_{\mu\mu'} + \frac{k_\mu k_{\mu'}}{m_{A'}^2} \right) \text{Tr} \left[\gamma^\nu (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\mu (\not{p} + m_e) \gamma^{\nu'} (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma^{\mu'} (\not{p}' + m_e) \right] \\
&= \frac{8}{m_{A'}^2 (s-m_e^2)(u-m_e^2)} \left[4m_e^2 (k \cdot k') (k \cdot p) - 2m_e^2 (k \cdot p)^2 - 2m_e^2 (k \cdot p) (k \cdot p') \right. \\
&\quad \left. - 2(k \cdot p) (k \cdot p') (k' \cdot p) + 2(k \cdot p) (k' \cdot p') - 2(k \cdot k') (k \cdot p) (p \cdot p') \right] \\
&\quad + \frac{8}{(s-m_e^2)(u-m_e^2)} \left[2m_e^4 + 3m_e^2 (k \cdot p) + m_e^2 (k \cdot p') - 4m_e^2 (k' \cdot p) - (k \cdot p') (k' \cdot p) \right. \\
&\quad \left. - 2m_e^2 (k' \cdot p') + (k \cdot p) (k' \cdot p') + 2m_e^2 (p \cdot p') + 3(k \cdot k') (p \cdot p') - 4(k \cdot p) (p \cdot p') + 4(k' \cdot p) (p \cdot p') \right] \\
&= \frac{-8m_{A'}^4 + 4m_{A'}^2 (-4m_e^2 + 2(s+u)) + 4(5m_e^4 + m_e^2(s+u) + su)}{m_{A'}^2 (s-m_e^2)(u-m_e^2)} \\
&\quad + \frac{4(4m_e^6 - 5m_e^4(s+u) + m_e^2(s^2+u^2) + 6m_e^2 su - s^2 u - su^2)}{m_{A'}^2 (s-m_e^2)(u-m_e^2)}
\end{aligned} \tag{4.89}$$

The third term III is equal to the second term II ,

$$\begin{aligned}
III &= \frac{-g_{\nu\nu'}}{(s-m_e^2)(u-m_e^2)} \left(-g_{\mu\mu'} + \frac{k_\mu k_{\mu'}}{m_{A'}^2} \right) \text{Tr} \left[\gamma^\mu (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma^\nu (\not{p} + m_e) \gamma^{\mu'} (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma^{\nu'} (\not{p}' + m_e) \right] \\
&= II
\end{aligned} \tag{4.90}$$

Lastly,

$$\begin{aligned}
IV &= \frac{-g_{\nu\nu'}}{(u-m_e^2)^2} \left(-g_{\mu\mu'} + \frac{k_\mu k_{\mu'}}{m_{A'}^2} \right) \text{Tr} \left[\gamma^\mu (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma^\nu (\not{p} + m_e) \gamma^{\nu'} (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma^{\mu'} (\not{p}' + m_e) \right] \\
&= \frac{16 \left[2m_e^2 (k \cdot k') (k \cdot p') - 2m_e^2 (k \cdot p) (k \cdot p') + 2(k \cdot k') (k \cdot p') (k' \cdot p) \right]}{m_{A'}^2 (u-m_e^2)^2} \\
&\quad + \frac{16 \left[3m_e^4 - 3m_e^2 (k' \cdot p) + m_e^2 (k' \cdot p') + (k' \cdot p) (k' \cdot p') - m_e^2 (p \cdot p') \right]}{(u-m_e^2)^2} \\
&= \frac{16m_e^2 m_{A'}^2}{(u-m_e^2)^2} - \frac{4(-m_e^4 - 2m_e^2 s - 8m_e^2 u + 2su + u^2)}{(u-m_e^2)^2} - \frac{4(4m_e^6 - m_e^4 s - 9m_e^4 u + 2m_e^2 su + 6m_e^2 u^2 - su^2 - u^3)}{m_{A'}^2 (u-m_e^2)^2}
\end{aligned} \tag{4.91}$$

Once the above terms I-IV are combined, the terms proportional to $\frac{1}{m_{A'}^2}$ cancel and the spin averaged scattering amplitude can be expressed as

$$\begin{aligned}
|\overline{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{e^4 \kappa^2}{6} \left[-\frac{16m_{A'}^4}{(s-m_e^2)(u-m_e^2)} + m_{A'}^2 \left(\frac{8(-4m_e^2 + 2(s+u))}{(s-m_e^2)(u-m_e^2)} + \frac{16m_e^2}{(s-m_e^2)^2} + \frac{16m_e^2}{(u-m_e^2)^2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{16(2m_e^4 + m_e^2(s+u))}{(s-m_e^2)(u-m_e^2)} + \frac{8(m_e^4 + m_e^2(s+u) - su)}{(s-m_e^2)^2} + \frac{8(m_e^4 + m_e^2(s+3u) - su)}{(u-m_e^2)^2} \right].
\end{aligned} \tag{4.92}$$

In the limit $m_{A'} \rightarrow 0$ and $\kappa = 1$,

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{2e^4 \kappa^2}{3} \left[\frac{2(2m_e^4 + m_e^2(s+u))}{(s-m_e^2)(u-m_e^2)} + \frac{m_e^4 + m_e^2(s+u) - su}{(s-m_e^2)^2} + \frac{m_e^4 + m_e^2(s+3u) - su}{(u-m_e^2)^2} \right] \tag{4.93}$$

which agrees, up to a number of polarizations factor, with regular Compton Scattering.

Therefore the spin-averaged scattering amplitude for the Compton-like process can be expressed

as

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}}|^2 = & \frac{64\pi^2 \alpha^2 \kappa^2}{3} \left[\frac{4m_e^4 + 2(m_e^2 + m_{A'}^2)(s + u) - 4m_e^2 m_{A'}^2 - 2m_{A'}^4}{(s - m_e^2)(u - m_e^2)} \right. \\ & \left. + \frac{m_e^4 + m_e^2(3s + u) + 2m_e^2 m_{A'}^2 - su}{(s - m_e^2)^2} + \frac{m_e^4 + m_e^2(s + 3u) + 2m_e^2 m_{A'}^2 - su}{(u - m_e^2)^2} \right]. \end{aligned} \quad (4.94)$$

Overall, the differential scattering cross-section in the center of mass frame is given by

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{CM} = & \frac{|\overline{\mathcal{M}}|^2}{64\pi^2 s} = \frac{\alpha^2 \kappa^2}{3s} \left[\frac{4m_e^4 + 2(m_e^2 + m_{A'}^2)(s + u) - 4m_e^2 m_{A'}^2 - 2m_{A'}^4}{(s - m_e^2)(u - m_e^2)} + \frac{m_e^4 + m_e^2(3s + u) + 2m_e^2 m_{A'}^2 - su}{(s - m_e^2)^2} \right. \\ & \left. + \frac{m_e^4 + m_e^2(s + 3u) + 2m_e^2 m_{A'}^2 - su}{(u - m_e^2)^2} \right]. \end{aligned} \quad (4.95)$$

Chapter 5

Direct Detection of DM

Dark particles from the galactic halo as they pass through earth, they can elastically scatter off baryonic particles in an earth-based detector. The direct detection of DM was first proposed in the 1980s by Goodmann and Witten [40]. They discussed the detection of WIMPs scattering elastically with atomic nuclei, which has been the basis for most direct detection experiments over the past decades. Although, WIMPs are very promising DM candidates, a definitive WIMP-nucleus signal has not been observed. Direct and indirect detection experiments have placed very strong constraints on WIMP-nucleus scattering cross-section. Due the lack of WIMP signal and the strong bounds placed on its cross-section, experimental searches are looking for alternatives to the WIMP paradigm. For instance, DM-proton scattering mediated by massive dark photon kinetically mixed with the ordinary photon.

The purpose of this Chapter is to introduce the principles of direct detection and the calculation of the rate of events in an earth-base detector. This is applied to the case of DM-proton scattering mediated by a massive dark photon, which was studied in the previous Chapter.

5.1 Principles of direct detection

In general, direct detection experiments measure the recoil energy E_R , transferred to the baryonic counterpart of the scattering interaction. The signal generated in direct detection experiments can be categorized by the form in which the recoil energy induced by DM-nucleus scattering is deposited in the detector. First of all, losses to heat lead to atomic motion and in solid materials give rise to phonons. Secondly, the available recoil energy can ionize the target atoms, leading to free electrons. Lastly, the recoil energy can excite the target atom, which can lead to scintillation light of a narrow emission spectrum [3].

In order to detect a DM signal, it should to be distinguishable from background processes, which can leave similar signatures in the detector. An important background source is electronic recoil background. Electronic recoils of atomic electrons in the target material can be induced via electromagnetic interactions with γ -rays from the environment or β -particles from the detector. Furthermore, the most crucial background source in a direct detection experiment is the nuclear recoil background, as signatures from such interactions are almost identical to a WIMP signal. This type of background source includes neutron-induced nuclear recoils, which can be induced by either spontaneous fission reactions in the detector or by cosmic ray muons from the environment. Therefore, direct detection experiments require an extremely low background. In order to achieve this, most experiments are built underground with materials which have low intrinsic radioactive contamination and use effective shielding system to minimize external background sources [3].

The DM signal is expected to be uniformly distributed throughout the detector. Furthermore, the signal should be annually modulated meaning that there should be a seasonal variation in the signal at different times of the year. This due to the motion of the Earth around the Sun, as the system moves through the DM halo.

5.1.1 DM-nucleus kinematics

Consider a DM particle of mass m_χ and a target nucleus of mass m_N at rest in the lab frame. The objective is to calculate the differential rate $\frac{dR}{dE_R}$ where R is the rate of events and E_R is the nuclear recoil energy in the lab frame. Initially, assuming elastic scattering, the incident DM particle with velocity v , scatters off the stationary earth-based target, resulting in momentum transfer q . In terms of the momentum transfer, the recoil energy is given by

$$E_R = \frac{|q|^2}{2m_N}. \quad (5.1)$$

In the lab frame, following the scattering, the DM particle scatters at angle θ' with velocity v' and the target scatters at angle θ with energy E_R . The relationship between the nuclear recoil energy and the velocity of the DM particle in the lab frame can be calculated straightforwardly by considering energy and momentum conservation. Energy conservation gives

$$\frac{1}{2}m_\chi v^2 = \frac{1}{2}m_\chi v'^2 + E_R. \quad (5.2)$$

By applying momentum conservation in the x and y direction respectively, the following equations are obtained,

$$m_\chi v = m_\chi v' \cos \theta' + \sqrt{2m_N E_R} \cos \theta, \quad (5.3)$$

$$0 = m_\chi v' \sin \theta' + \sqrt{2m_N E_R} \sin \theta. \quad (5.4)$$

The measurable quantities in a detector are θ and E_R . By eliminating v' and θ' , from the equations (5.3) and (5.4), the resulting expression for E_R in the lab frame is

$$E_R = \frac{2\mu u^2 \cos^2 \theta}{m_N}, \quad (5.5)$$

where $\mu = \frac{m_N m_\chi}{m_N + m_\chi}$ is the reduced mass of the dark particle and the target. Maximizing with respect to θ lower bound for recoil energy,

$$E_R \leq \frac{2\mu u^2}{m_N}. \quad (5.6)$$

Therefore, we can find the minimum velocity of the incoming dark particle u_{\min} , required for nuclear scattering with recoil energy E_R and it is given by

$$u_{\min} = \sqrt{\frac{E_R m_N}{2\mu^2}}. \quad (5.7)$$

5.1.2 Dark matter distribution

In order to interpret the DM signal in a direct detection experiment, it is necessary to understand the distribution and kinematics of the dark particles in the Milky Way's DM halo. Although the exact distribution is unknown, it can be modeled using gravity-based observations and DM simulations. In the simplest model, assuming that DM is a collision-less gas with an isotropic velocity distribution, the pressure in terms of the matter density is given by [3]

$$p(r) = \rho(r)\sigma^2, \quad (5.8)$$

where σ^2 is the velocity dispersion. Assuming hydrostatic equilibrium, the gravitational pull towards the center of the DM halo balances the pressure, the density profile can be expressed as

$$\rho(r) = \frac{\sigma^2}{2\pi G r^2}. \quad (5.9)$$

A density profile inversely proportional to r^2 leads to approximately correct flat galactic rotation curves.

In a direct detection experiment, we are interested in the density of DM in the local neighborhood around the solar radius R_0 . The local DM density ρ_0 can be derived from the rotation curve of the Milky way. Although there is a large uncertainty in the measurement of this quantity, the most commonly adopted value for the local DM density is $\rho_0 \simeq 0.3 \text{ GeV/cm}^3$.

Usually the velocity distribution of the DM particles in the DM halo is described by the *Standard halo model*. In this model, the main assumption is that DM is distributed in an isotropic and isothermal sphere in the DM halo and follows a Maxwell Boltzmann velocity distribution. In this picture, the velocity distribution $f(u)$ gives the fraction of DM particles with velocities in an element du

$$f(u, u_E) = \frac{1}{N} \exp - \frac{(\vec{u} + \vec{u}_E)^2}{u_0^2} \quad (5.10)$$

where $u_0 \simeq 220 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ is the typical circular velocity for a DM particle in the Sun's neighborhood at solar radius $R_0 \simeq 8.0 \text{ kpc}$ and N is the normalization constant determined by

$$N = \int f(u, u_E) d^3u. \quad (5.11)$$

In equation (5.10), \vec{u}_E refers to the velocity with which the Earth moves with respect to the DM halo, which is given by [3]

$$u_E = u_\odot + u_\oplus \cos(\theta) [\omega(t - t_0)], \quad (5.12)$$

where $u_\odot = u_0 + 12 \text{ km/s}$ the velocity of sun with respect to the local circular velocity, $u_\oplus = 30 \text{ km/s}$ is the orbital velocity of the Earth around the Sun and $\theta \approx 60^\circ$ is the inclination angle measured between the Earth's orbit and the galactic plane [3]. Additionally, $\omega = 2\pi/T$ is the angular frequency with the period $T = 1 \text{ y}$ and the phase $t_0 = 2 \text{ June}$, which is the day of the year at which u_\odot and u_\oplus add up maximally. Throughout the year the signal is expected to have seasonal variations, as in the summer u_\odot and u_\oplus are parallel and in the winter they are anti-parallel. Although the annual modulation of the signal is a key feature of DM signal that several DM direct detection experiments depend on, the modulated part of the signal is expected to be very small. In this thesis, we make the assumption that $u_E \approx \text{constant} = 247 \text{ km/s}$, which is obtained by setting $t = t_0$ in equation (5.12).

In principle, $f(u, u_E)$ is a truncated Maxwell Boltzmann distribution due to the cut-off escape velocity u_{esc} , above which the DM particles will escape. DM particles with velocities above $u_{\text{esc}} = \sqrt{2\phi}$, where ϕ is the gravitational potential of the galaxy, are no longer bound by the galaxy and therefore escape the gravitational field of the DM halo. The escape velocity is estimated to be $u_{\text{esc}} = 544 \text{ km/s}$, which was obtained by studying samples of high velocity stars [41]. Additionally, as mentioned previously, DM particles are required to have a minimum velocity u_{min} given by (5.7) in order to induce a DM-nucleus scattering with a nuclear recoil of energy E_R .

Therefore, in the Standard halo model a truncated Maxwell Boltzmann distribution is assumed for the velocity distribution of the DM particles in the galactic halo. By taking into account, the minimum velocity and the cut-off escape velocity, the velocity distribution can be expressed as

$$f(\vec{u}) = \begin{cases} \frac{1}{N} e^{-u^2/u_0^2}, & u \leq u_{\text{esc}} \\ 0, & u > u_{\text{esc}} \end{cases}, \quad (5.13)$$

where $u_i = |\vec{u}_i|$ and the normalization condition becomes,

$$N = \int_{u_{\text{min}}}^{\infty} f(u) d^3u. \quad (5.14)$$

In order to take into account the relative motion of the Earth in the DM halo, \vec{u} can be substituted by $\vec{u} + \vec{u}_E$. In this case the normalization constant is given by,

$$N = \pi^{3/2} u_0^3 \left(\text{erf} \left(\frac{u_{\text{esc}}}{u_0} \right) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{u_{\text{esc}}}{u_0} e^{-\frac{u_{\text{esc}}^2}{u_0^2}} \right), \quad (5.15)$$

where $\text{erf}(x)$ is the error function.

Lastly, it should be noted that there are large uncertainties in the parameters that describe the DM distribution in the galaxy. As discussed in [42] there are several astrophysical uncertainties in DM direct detection experiments, such as the exact values of the local DM density ρ_0 , the local circular velocity u_0 , the escape velocity u_{esc} among others. Furthermore, the exact velocity and densities distributions of DM in the galaxy are still unknown. Although these uncertainties are present in the results and conclusions from direct detection experiments, usually a common value is adopted, in order to compare results from different experiments.

5.1.3 Differential Event Rates

The quantity of interest in a direct detection experiment is the differential event rate $\frac{dR}{dE_R}$. It is typically expressed in units of the number of events per kg detector mass per day runtime per keV energy, which is also known as a *differential rate unit* (dru) [43]. By integrating the differential event rate from the minimum energy to the upper energy threshold, one can obtain the total event rate R , which is the number of events per kg detector mass per day. Lastly, the total number of expected events in the detector is given by the product of the total event rate with the *exposure* of the experiment, which is obtained by multiplying the target mass with the runtime of the experiment.

The scattering rate R for nuclei in the detector scattering with DM particles is given by

$$R = N_T n_\chi \sigma u, \quad (5.16)$$

where N_T is the number of target nuclei in the detector, $n_\chi = \rho_\chi/m_\chi$ is the number density of DM particles in the galactic halo, σ the scattering cross section for DM-nucleus interaction, u is the velocity of the incoming DM particles. Using this expression, the differential event rate is given by

$$\frac{dR}{dE_R} = \frac{\rho_\chi}{m_N m_\chi} \left\langle u \frac{d\sigma}{dE_R} \right\rangle, \quad (5.17)$$

where $\frac{d\sigma}{dE_R}$ is the differential scattering cross-section and the term in triangular brackets is averaged over the velocities of the DM particles. Using the velocity distribution the differential scattering rate can be expressed as

$$\frac{dR}{dE_R} = N_T \frac{\rho_\chi}{m_\chi} \int_{u_{\text{min}}}^{\infty} u f(\vec{u} + \vec{u}_E) \frac{d\sigma}{dE_R} d^3u, \quad (5.18)$$

where $f(\vec{u} + \vec{u}_E)$ is given by (5.13). Since the velocity distribution is zero for velocities $|\vec{u} + \vec{u}_E| \leq u_{\text{esc}}$, the the upper integration bound can be set to infinity.

In order to obtain the total number of expected events one must integrate equation (5.4), from the threshold energy E_{low} , to the upper bound of the energy, E_{high} which corresponds to DM particles with velocities u_{esc} ,

$$N = T \int_{E_{\text{low}}}^{E_{\text{high}}} dE_R \epsilon(E_R) \frac{dR}{dE_R}, \quad (5.19)$$

where T is the run-time of the experiment, ϵ is the detector efficiency which is usually energy dependent.

5.1.4 Cross-sections and Nuclear Form factor

The interaction between the dark particle and the target can be classified as either elastic or inelastic and as spin-dependent (SD) or spin-independent (SI). Depending on the target material, the detector can be sensitive to either SD or SI interactions. In general, the differential scattering cross-section can be expressed including contribution from SD and SI terms as

$$\frac{d\sigma}{dE_R} = \frac{m_N}{2u^2 \mu_{\chi N}^2} [\sigma_{SI} F_{SI}^2(E_R) + \sigma_{SD} F_{SD}^2(E_R)], \quad (5.20)$$

where $\mu_{\chi N}$ is the DM-nucleus reduced mass, σ_{SI} and σ_{SD} are the SI and SD scattering cross-sections respectively, and their corresponding nuclear form factors are F_{SI} and F_{SD} , which depend

on the recoil energy. At small momentum transfer, $q = \sqrt{2m_N E_R}$, the corresponding de Broglie wavelength $\lambda_{dB} = h/q$, is large compared to the nuclear radius and the DM particle scatters off the entire nucleus, in which case the form factor is equal to unity. On the other hand, at large momentum transfer, λ_{dB} becomes smaller than the nuclear radius, in which case only part of the nucleus participates in the interaction. This relationship between the momentum transfer and the nuclear radius is accounted for in the differential scattering rate calculation by the finite form factor.

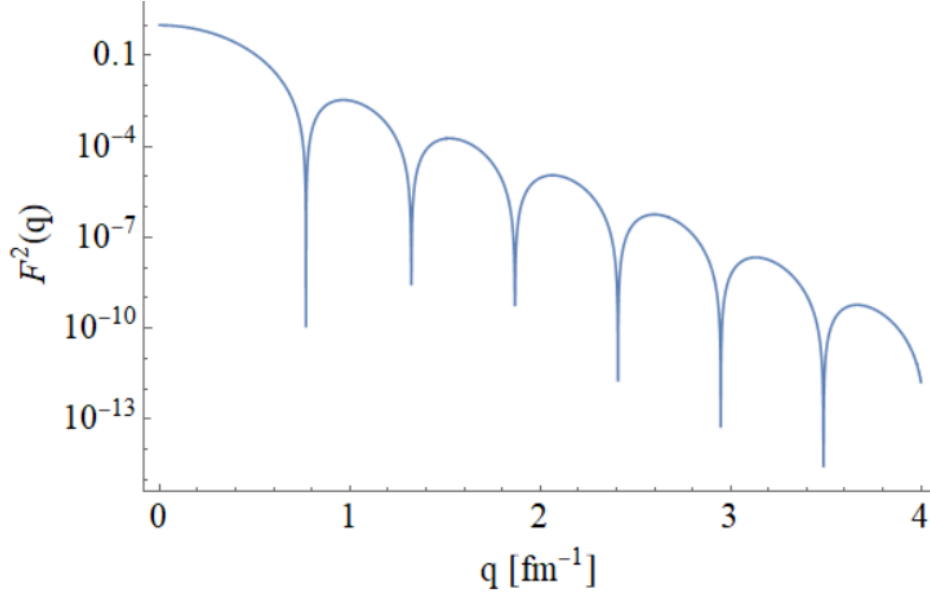


Figure 5.1: The Lewin-Smith parameterisation of the Helm form factor, F^2 for a Xenon nucleus as a function of momentum transfer, q .

In SI interactions the form factor is commonly given by the Lewin-Smith parameterisation of the Helm form factor [43]

$$F^2(q) = \left(\frac{3j_1(qR)}{qR} \right)^2 e^{-q^2 s^2}, \quad (5.21)$$

where

$$j_1(x) = \frac{\sin(x)}{x^2} - \frac{\cos(x)}{x}, \quad (5.22)$$

where j_1 is a spherical Bessel function, $q = \sqrt{2m_N E_R}$ is the momentum transfer, and R is the nuclear radius given by

$$R = \sqrt{c^2 + \frac{7}{3}\pi\alpha^2 - 5s^2}, \quad (5.23)$$

with $\alpha \approx 0.52$ fm, $s \approx 0.9$ fm and $c \approx 1.23A^{1/3} - 0.60$ fm.

The form factor given by (5.21) is plotted in Figure 5.1 for a Xenon nucleus, Xe with $Z = 54$ and $A = 131$, as function of momentum transfer q . As expected, for small momentum transfer q , the form factor is close to unity and then decreases for increasingly larger q , effectively modeling the loss of coherence in the scattering between the DM particle and the nucleus.

In SD interactions the DM particle couples to unpaired nuclear spins. In this case the SD scattering cross-section σ_{SD} is proportional to

$$\sigma_{SD} \propto [a_p \langle S_p \rangle + a_n \langle S_n \rangle]^2 \frac{J+1}{J}, \quad (5.24)$$

according to [44], where J is the total nuclear spin, $\langle S_p \rangle$ and $\langle S_n \rangle$ are the expectation values of the total spin operators for proton and neutrons respectively and a_p , a_n the corresponding proton and neutron couplings to the DM particle.

For a target nucleus with Z protons and $A-Z$ neutrons, the SI cross section σ_{SI} , is given by [45]

$$\sigma_{SI} = \frac{\mu_{\chi N}^2}{\mu_{\chi p}^2} \frac{[Zf_p + (A-Z)f_n]^2}{f_p^2} \sigma_p^{SI}, \quad (5.25)$$

where $\mu_{\chi p}$ is the DM-proton reduced mass, f_p and f_n is the DM coupling strength to the proton and neutron respectively and σ_p^{SI} is the DM-proton scattering cross-section. A typical assumption is that $f_p \approx f_n$, in which case the SI scattering cross-section becomes

$$\sigma_{SI} = A^2 \frac{\mu_{\chi N}^2}{\mu_p^2} \sigma_p^{SI}. \quad (5.26)$$

Therefore, for DM particles that couple equally to protons and neutrons, the scattering cross-sections scales as A^2 in SI interactions. This A^2 scaling means that a detector with heavier target nuclei has higher expected event rate. However, heavier targets lead to lower recoil energy given by (5.6) and therefore, it becomes increasingly harder to detect.

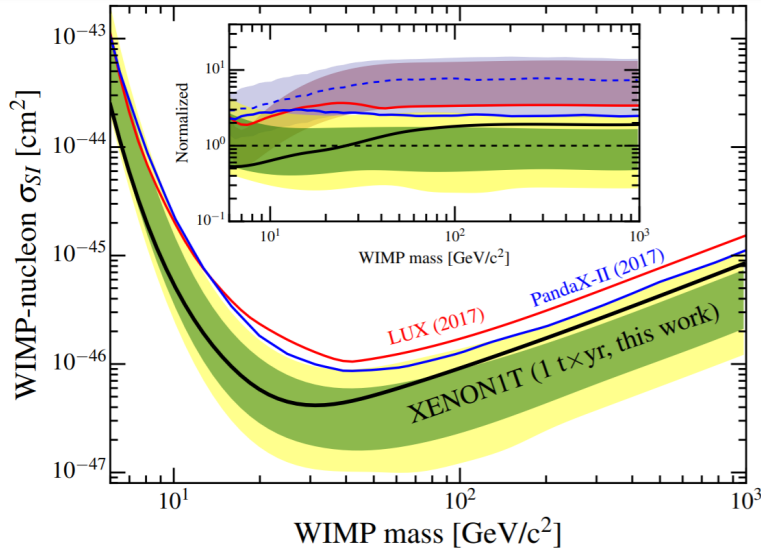


Figure 5.2: Dark matter search upper bounds for the WIMP-nucleon σ_{SI} elastic scattering cross-section with a 90% confidence level from a One Tonne \times Year Exposure of XENON1T. Figure from [6].

Currently, the strongest constraints for the DM-nucleus, in particular WIMP-nucleon SI scattering cross-section are provided by the XENON1T direct detection experiment. The constraints from the 2018 results from 1 tonne \times 1 year of exposure are presented in Figure 5.2. They have excluded values down to $\sigma_{SI} \sim 10^{-44} - 10^{-46}$ cm² for dark matter particles with masses larger than 6 GeV, with a minimum of 4.1×10^{-47} cm², for $m_\chi = 30$ GeV [6].

5.2 Event Rates for DM-proton scattering

The purpose of this section is to calculate the differential rate of events for the DM-proton scattering mediated by a massive dark photon of mass $m_{A'}$, which was studied in Chapter 4. In general, the differential rate of events is given by

$$\frac{dR}{dE_R} = N_T \frac{\rho_\chi}{m_\chi} \int_{u_{\min}}^{\infty} u f(\vec{u} + \vec{u}_E) \frac{d\sigma}{dE_R} d^3u. \quad (5.27)$$

5.2.1 DM-proton scattering cross-section

Since the DM-proton scattering is an SI interaction, the differential scattering cross-section given by (5.20) becomes

$$\frac{d\sigma}{dE_R} = \frac{m_N}{2u^2 \mu_{\chi N}^2} \sigma_{SI} F_{SI}^2, \quad (5.28)$$

where $F_{SI}^2 = F^2(q)$ is described by the Helm form factor, given by (5.21). Additionally, since there is no coupling to the neutrons in this case, $f_n = 0$. Therefore the SI cross-section, σ_{SI} given by (5.25), becomes

$$\sigma_{SI} = \frac{\mu_{\chi N}^2}{\mu_{\chi p}^2} Z^2 \sigma_p, \quad (5.29)$$

where σ_p is the DM-proton scattering cross-section as derived in Chapter 4, given by

$$\sigma_p = \frac{\sigma_p^{q=0} m_{A'}^4}{(q^2 + m_{A'}^2)^2}, \quad (5.30)$$

with the free scattering cross-section, $\sigma_p^{q=0}$ given by

$$\sigma_p^{q=0} = \frac{16\pi\alpha\alpha_D\kappa^2\mu_{\chi p}^2}{m_{A'}^4}. \quad (5.31)$$

Overall, in the case of DM-proton scattering, because there is no coupling to the neutrons, the differential rate of events scales as Z^2 .

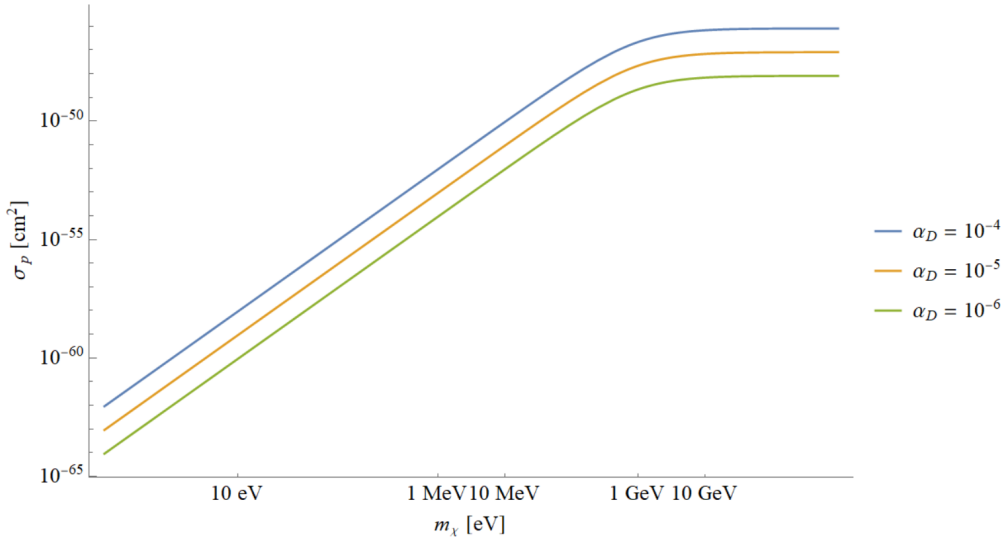


Figure 5.3: Free DM-proton scattering cross-section, σ_p as a function of DM particle mass, m_χ , for a dark photon of mass $m_{A'} = 5$ GeV and a kinetic mixing parameter with the visible photon $\kappa = 2 \times 10^{-6}$.

The free-scattering DM-proton cross-section as obtained from (5.31) for $q = 0$, as a function the dark matter mass, m_χ is plotted in Figure 5.3, for several values for dark fine structure constant α_D for a dark photon of mass 5 GeV and a kinetic mixing parameter $\kappa = 2 \times 10^{-6}$. The values for the dark photon mass and kinetic mixing parameter were chosen from the region of parameter space with $m_{A'}$ of a few GeV with kinetic mixing parameter in the range $10^{-4} - 10^{-6}$, which is a region has not been excluded from existing bounds, as can be seen from Figure 4.3 and will be probed in future experiments [5]. As can be seen from Figure 5.3, the free scattering cross-section increases linearly with the DM mass up to $m_\chi \simeq m_p$ and then attains a constant value. Depending on the dark fine structure constant, the free-scattering cross-section for DM particles with masses of a few GeV are in the range $\sigma_p \sim 10^{-46} - 10^{-49}$ cm², which have not yet been excluded from direct detection experiments, as can be from Figure 5.2.

5.2.2 Differential rate of events

By substituting (5.29) and (5.28) into (5.27), the expression for differential event rate becomes

$$\frac{dR}{dE_R} = N_T \frac{\rho_\chi Z^2 m_N}{2\mu_{\chi p}^2 m_\chi} \sigma_p F^2(E_R) \int_{u_{\min}}^{\infty} \frac{f(\vec{u} + \vec{u}_E)}{u} d^3u. \quad (5.32)$$

The velocity integral can be performed analytically and give a function $g(u_{\min})$, which is defined as

$$g(u_{\min}) = \int_{u_{\min}}^{\infty} \frac{f(\vec{u} + \vec{u}_E)}{u} d^3u. \quad (5.33)$$

By setting $x_{esc} = u_{esc}/u_0$, $x_{min} = u_{min}/u_0$ and $x_e = u_e/u_0$ where $u_i = |\vec{u}_i|$, the velocity integral becomes according to [42], if $x_e + x_{min} < x_{esc}$

$$g(u_{min}) = g_1 \equiv \frac{\pi^{1/2} u_0^2}{2N x_e} \left[\text{Erf}(x_{min} + x_e) - \text{Erf}(x_{min} - x_e) - \frac{4x_e}{\sqrt{\pi}} e^{-x_{esc}^2} \right]. \quad (5.34)$$

If $x_{min} > |x_{esc} - x_e|$ and $x_e + x_{esc} > x_{min}$ then

$$g(u_{min}) = g_2 \equiv \frac{\pi^{1/2} u_0^2}{2N x_e} \left[\text{Erf}(x_{esc}) + \text{Erf}(x_e - x_{min}) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x_{esc}^2} (x_{esc} + x_e - x_{min}) \right], \quad (5.35)$$

where N is the normalization constant given by (5.15). In all other cases, $g(u_{min}) = 0$. Overall, the velocity integral function can be expressed as

$$g(u_{min}) = g_1 \Theta(x_{esc} - x_e - x_{min}) + g_2 \Theta(x_{esc} + x_e - x_{min}) \Theta(x_{min} - x_{esc} + x_e), \quad (5.36)$$

where $\Theta(x)$ is the Heaviside step function.

Therefore using the function $g(u_{min})$, the differential event rate becomes

$$\frac{dR}{dE_R} = N_T \frac{\rho_0 Z^2 m_N}{2\mu_{\chi p}^2 m_\chi} \sigma_p F^2(E_R) g(u_{min}), \quad (5.37)$$

with $\rho_\chi \sim \rho_0$ the local DM density. N_T can be expressed as number of particles per kg detector mass, as $N_T = \frac{N_A}{A}$, where $N_A = 6.022 \times 10^{23}$ is Avogadro's number and A is the mass-number of the target material, in particular for Xenon $A = 131.293$.

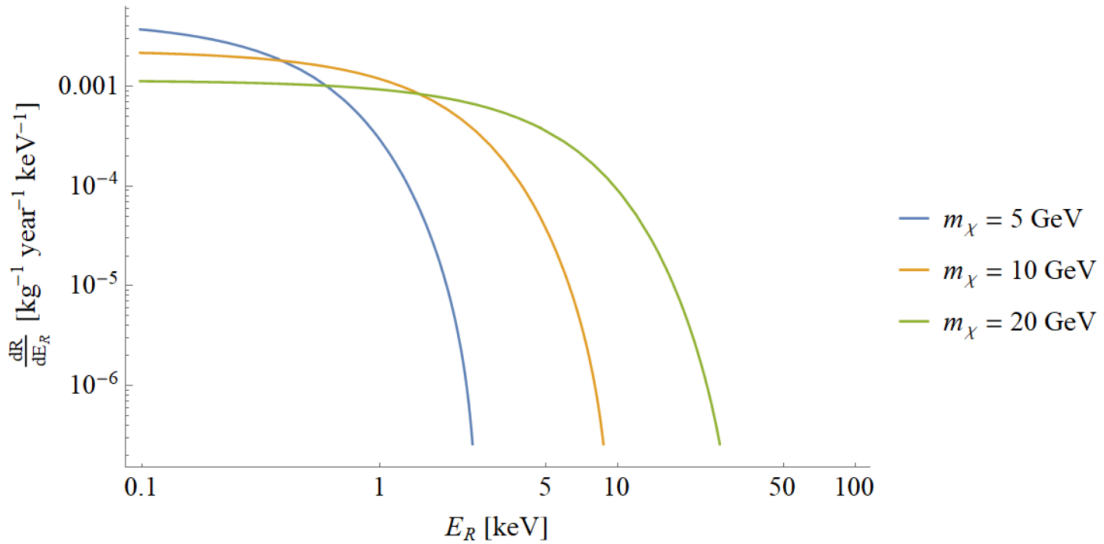


Figure 5.4: Differential scattering rate $\frac{dR}{dE_R}$ as a function of recoil energy E_R for DM-proton scattering mediated by a dark photon of mass $m_{A'} = 5$ GeV with $\alpha_D = 10^{-4}$ and a kinetic mixing parameter $\kappa = 2 \times 10^{-6}$ with the ordinary photon. The differential rate is plotted for DM particle masses $m_\chi = 5$ GeV, 10 GeV, 20 GeV. The calculations are performed for a detector with Xenon target nuclei.

In Figure 5.4 the differential scattering rate $\frac{dR}{dE_R}$ is plotted as a function of recoil energy E_R , for DM-proton scattering mediated by a dark photon of mass $m_{A'} = 5$ GeV with mixing parameter $\kappa = 2 \times 10^{-6}$ with the visible photon and $\alpha_D = 10^{-4}$, for a detector with Xenon target nuclei. The scattering rate is plotted for DM masses: $m_\chi = 5$ GeV, 10 GeV, 20 GeV with corresponding free-scattering DM-proton cross-sections 5.71×10^{-47} cm², 6.73×10^{-47} cm² and 7.35×10^{-47} cm²

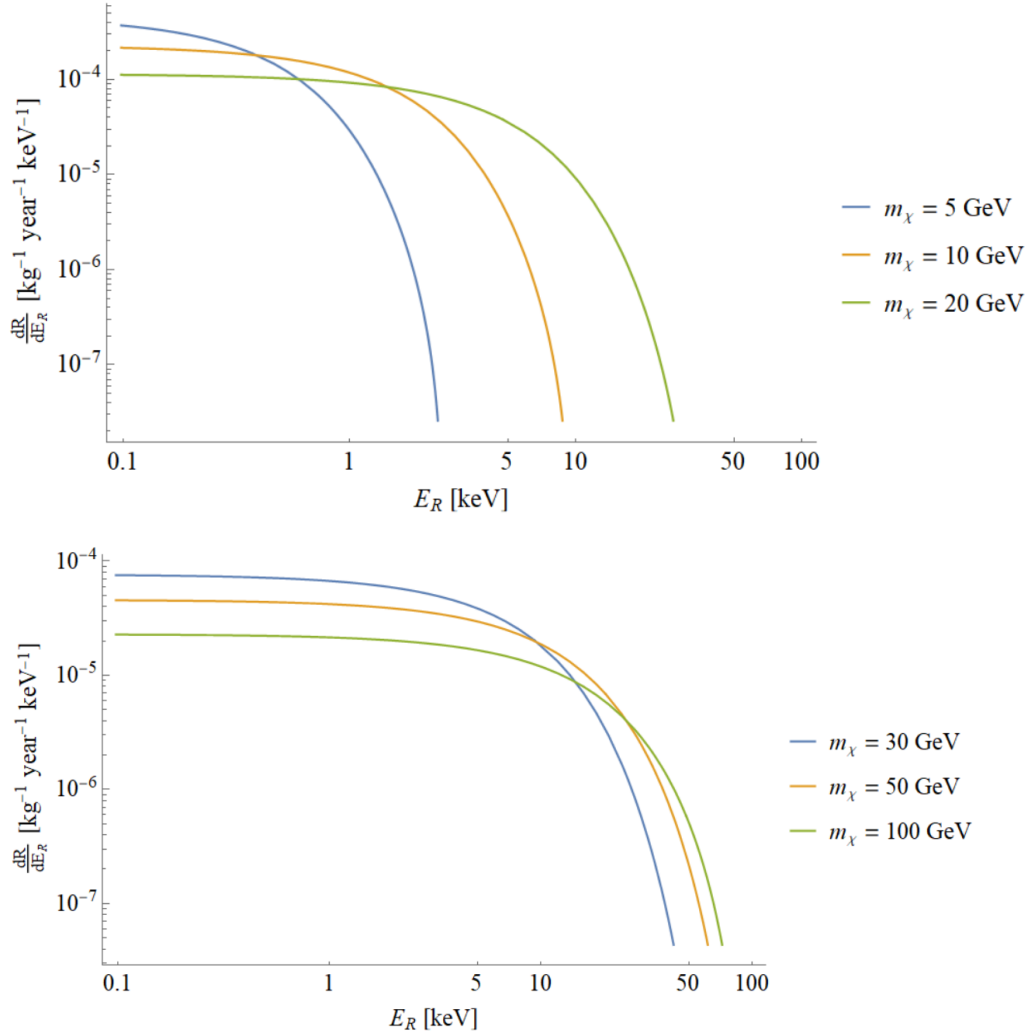


Figure 5.5: Differential scattering rate $\frac{dR}{dE_R}$ as a function of recoil energy E_R for DM-proton scattering mediated by a dark photon of mass $m_{A'} = 5$ GeV with $\alpha_D = 10^{-5}$ and a kinetic mixing parameter $\kappa = 2 \times 10^{-6}$ with the ordinary photon. The differential rate is plotted for DM particle masses (top) : $m_\chi = 5$ GeV, 10 GeV, 20 GeV and (bottom) : $m_\chi = 30$ GeV, 50 GeV, 100 GeV. The calculations are performed for a detector with Xenon target nuclei.

respectively, which have not been excluded yet from direct detection experiments, as can be seen from Figure 5.2.

In Figure 5.5 the differential scattering rate $\frac{dR}{dE_R}$ is plotted as a function of recoil energy E_R , for DM-proton scattering mediated by a dark photon of mass $m_{A'} = 5$ GeV with mixing parameter $\kappa = 2 \times 10^{-6}$ with the visible photon and $\alpha_D = 10^{-5}$, for a detector with Xenon target nuclei. The scattering rate is plotted for DM masses: in the top Figure $m_\chi = 5$ GeV, 10 GeV, 20 GeV with corresponding free-scattering cross-sections in the range 5.71×10^{-48} - 7.35×10^{-48} cm² and in the bottom Figure, $m_\chi = 30$ GeV, 50 GeV, 100 GeV with corresponding free-scattering cross-sections in the range 7.56×10^{-48} - 7.90×10^{-48} cm², which have not been excluded yet from direct detection experiments.

The differential rate of events decreases exponentially as the recoil energy increases for any DM particle mass, as can be seen from Figures 5.4 and 5.5. This can be partially attributed to the nuclear form factor $F^2(E_R)$, which decreases with increasing transfer momentum $q = \sqrt{2m_N E_R}$, as can be seen from Figure 5.21, indicating the loss of coherence. Additionally, the minimum velocity function $g(u_{\min})$ decreases, as for larger nuclear recoil energies there are less DM particles available

with the minimum required velocity to induce such recoil energy.

Additionally, for smaller DM masses there is a higher differential rate of events at lower recoil energies. This is expected as the minimum velocity of an incoming DM particle which can induce a recoil energy E_R is smaller. However, it should be noted the typical detection energy threshold of about ~ 1 keV for experiments such as the XENON1T, therefore events at such low recoil energies cannot be detected.

Moreover, as can be seen from Figures 5.4 and 5.5, the differential rate has a cut-off recoil energy after which $\frac{dR}{dE_R} = 0$, which increases for a larger DM particle mass. This can be attributed to the upper recoil energy bound that results from the minimum velocity of the DM particle. If $m_\chi \ll m_N$, then $\mu_N \approx m_\chi$, in which case the minimum velocity of DM can be expressed as $u_{min} = \sqrt{m_N E_R / 2m_\chi^2}$. If the velocity of the DM particle is larger than $u_{esc} + u_e$, then $g(u_{min}) = 0$ and therefore

$$\frac{dR}{dE_R} = 0, \text{ for } E_R > \frac{2m_\chi^2(u_{esc} + u_e)^2}{m_N}, \quad (5.38)$$

which gives an upper energy bound for the recoil energy. Therefore according to 5.38, the cut-off energy increases for larger DM masses, as expected. At lower DM masses, the maximum recoil energy that can be observed is decreased while at the same time their differential scattering rate is large for smaller recoil energies and therefore DM particles with small masses are more difficult to detect experimentally.

Lastly, typically in direct detection experiments we are interested in the expected total number of events which can be obtained by integrating the differential scattering rate according to 5.19, however this included in this work.

Chapter 6

Conclusions

Although the presence of vast amounts of Dark Matter (DM) on astronomical and cosmological scales has been firmly established from astrophysical observations, its fundamental properties are still unknown. Since particles from Standard Model (SM) cannot consist the main component of DM, several models have proposed ideas to extend the SM in order to explain DM. A well-motivated hypothesis is the existence of a dark sector, which consists of a group of particles charged under new forces, but neutral under SM forces. In addition to interacting gravitationally, visible and dark sectors may interact through portal interactions. In this thesis, we explored the vector portal case, in which the portal arises from the kinetic mixing between the SM electromagnetic U(1) gauge group and an additional U(1)_D dark gauge group, which is mediated by a massive dark photon.

The kinetically mixed dark photon offers a wide range of possible models for DM. In this work, the dark sector comprised of a kinetically mixed massive dark photon and a Dirac fermion. The elimination of the kinetic mixing term, by shifting the visible photon field, results in a coupling between the dark photon and SM particles. This coupling provides a wide range of interactions channels between the visible and dark sectors, through which DM could be potentially detected experimentally. In this work, we calculated the interaction cross-section for a DM-proton elastic scattering mediated by a massive dark photon and the differential scattering cross-section for a Compton-like absorption of a dark photon by an electron.

Furthermore, the dark photon model was examined in the case of asymmetric dark stars. We showed that the SM photon can acquire a medium induced mass through a Higgs-like mechanism. This results in a coupling between the SM photon and the dark sector particles inside the dark star.

Lastly, the principles of direct detection were introduced and discussed in the context of the dark photon model. In this work, we studied and calculated the differential rate of events for the DM-proton elastic scattering mediated by a massive dark photon with interaction cross-sections in the range $\sim 10^{-47} - 10^{-48} \text{ cm}^2$, which have not yet been excluded from direct detection for most DM particle masses. In future work, the total number of expected events can be computed by integrating the calculated differential scattering rate. Apart from the interaction with protons, in this model the DM particle can also scatter off electrons with the exchange of a dark photon, inducing electron recoils in a direct detection experiment. This effect becomes more significant for smaller dark matter masses and can be included in a future work.

Appendix A

Scattering kinematics

Consider a 2-to-2 body scattering, $p_1 + p_2 \rightarrow p_3 + p_4$, in which two particles with four-momenta p_1 and p_2 and masses m_1 and m_2 scatter to particles with four-momenta p_3 and p_4 and masses m_3 and m_4 . In this case, each momentum should satisfy the relations given below

$$\begin{aligned} p_i^2 &= m_i^2 \\ p_1 + p_2 &= p_3 + p_4, \end{aligned} \tag{A-1}$$

where the second equation expresses the conservation of four-momentum. In two-body scattering processes, it is convenient to introduce the Lorentz invariants known as the Mandelstam variables, which are defined as follows

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 \\ t &= (p_1 - p_3)^2 = (p_2 + p_4)^2 \\ u &= (p_1 - p_4)^2 = (p_2 - p_3)^2 \end{aligned} \tag{A-2}$$

Using the conservation of four-momentum, the Mandelstam variables are related through each other according to

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2. \tag{A-3}$$

In the case of 2-to-2 $p_1 + p_2 \rightarrow p_3 + p_4$ elastic scattering, the Mandelstam variables can be expressed as

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 \\ &= m_2^2 + m_1^2 + 2m_2 E_1^T \end{aligned} \tag{A-4}$$

$$\begin{aligned} t &= (p_1 - p_3)^2 = (p_2 + p_4)^2 \\ &= 2m_2^2 + 2m_2 E_4^T \end{aligned} \tag{A-5}$$

$$\begin{aligned} u &= (p_1 - p_4)^2 = (p_2 - p_3)^2 \\ &= m_1^2 + m_2^2 - 2m_2 E_3^T \end{aligned} \tag{A-6}$$

For elastic scattering, the Mandelstam variables are related through

$$s + u + t = 2(m_1^2 + m_2^2). \tag{A-7}$$

Additionally, using the definitions for the Mandelstam variables in the elastic scattering case and that $q^2 = t$ where q is the momentum transfer, the invariant scalar products between the four-momenta of the particles can be expressed as follows

$$p_2 \cdot p_4 = -\frac{1}{2}q^2 + m_2^2 \tag{A-8}$$

$$p_1 \cdot p_3 = -\frac{1}{2}q^2 + m_1^2 \quad (\text{A-9})$$

$$p_1 \cdot p_4 = m_2 E_1^T + \frac{q^2}{2} = \frac{m_2^2 + m_1^2 - u}{2} \quad (\text{A-10})$$

$$p_3 \cdot p_4 = m_2 E_3^T - \frac{q^2}{2} = \frac{s - m_2^2 - m_1^2}{2} \quad (\text{A-11})$$

Appendix B

Gamma matrix Traces

The 4×4 Dirac γ -matrices satisfy the commutation algebra

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \quad (\text{B-1})$$

where $g^{\mu\nu}$ is the metric tensor. In the Dirac-Pauli representation,

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B-2})$$

where $\sigma = (\mathbb{I}, \vec{\sigma})$ and $\bar{\sigma} = (\mathbb{I}, -\vec{\sigma})$, here \mathbb{I} is the 2×2 identity matrix and the σ_i are the Pauli matrices. In principle most trace identities involving the product γ -matrices can be computed using equation B-1 without ever explicitly calculating a matrix product. It is often useful to define the following relations:

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \gamma_\mu &= 4 \\ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu &= -2\gamma^\nu \\ \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma_\mu &= 4g^{\alpha\beta} \\ \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma_\mu &= -2\gamma^\gamma \gamma^\beta \gamma^\alpha. \end{aligned} \quad (\text{B-3})$$

Additionally, using the notation, $\not{a} \equiv \gamma^\mu a_\mu$, the following relations can be also be useful

$$\begin{aligned} \gamma_\mu \not{a} \gamma^\mu &= -2\not{a} \\ \gamma_\mu \not{a} \not{b} \gamma^\mu &= 4a \cdot b \\ \gamma_\mu \not{a} \not{b} \not{c} \gamma^\mu &= -2\not{c} \not{b} \not{a} \end{aligned} \quad (\text{B-4})$$

The trace theorems can be summarized below

$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu} \quad (\text{B-5})$$

$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} - g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda}). \quad (\text{B-6})$$

$$\text{Tr}(\text{ odd no of } \gamma \text{ matrices}) = 0, \quad (\text{B-7})$$

$$\text{Tr}(\not{a} \not{b}) = 4a \cdot b, \quad (\text{B-8})$$

$$\text{Tr}(\not{a} \not{b} \not{c} \not{d}) = 4[(a \cdot b)(c \cdot d) - (a \cdot c)(b \cdot d) + (a \cdot d)(b \cdot c)].$$

Appendix C

Extended Greek abstract - Περίληψη στην Ελληνική γλώσσα

1 Εισαγωγή

Η ανακάλυψη στα τέλη του 20^{ου} αιώνα ότι η πλειοψηφία της ύλης είναι άγνωστης προέλευσης, έφερε μεγάλες αλλαγές στην αντίληψη μας για το Σύμπαν. Σύμφωνα με σύγχρονες κοσμολογικές μελέτες, η βαρυονική ύλη δεν μπορεί να αποτελεί παραπάνω από το 5% της συνολικής πυκνότητας ενέργειας του Σύμπαντος, καθώς το 27% αυτής της ποσότητας αντιστοιχεί στη λεγόμενη Σκοτεινή Ύλη, και το υπόλοιπο 68% στη Σκοτεινή Ενέργεια.

Η παρούσα διπλωματική διατριβή επικεντρώνεται σε αυτή την θεματική, και συγκεκριμένα στην Σκοτεινή Ύλη, που τα τελευταία χρόνια κέντρισε το ενδιαφέρον της επιστημονικής κοινότητας. Ακόμα κι αν στη φύση αποτελεί τη πιο άφθονη μορφή ύλης, έχει παρατηρηθεί μόνο μέσω βαρυτικών αλληλεπιδράσεων με την βαρυονική. Ακόμα και μετά απο χρόνια έρευνας, οι θεμελιώδεις ιδιότητες της παραμένουν άγνωστες.

Στο πρώτο κεφάλαιο της διπλωματικής, παρουσιάστηκαν αρχικά οι ενδείξεις για την ύπαρξη αυτής της μορφής ύλης σε διάφορες κοσμολογικές κλίμακες, από τις πρώτες ενδείξεις τη δεκαετία του 1930 ως σύγχρονες παρατηρήσεις. Στη συνέχεια παρουσιάστηκαν σύντομα οι μέθοδοι για την πειραματική ανίχνευση του σκοτεινού σωματιδίου.

1.1 Ενδείξεις για την ύπαρξη Σκοτεινής Ύλης

Οι πιο ισχυρές ενδείξεις για την ύπαρξη της σκοτεινής ύλης σε γαλαξιακή κλίμακα προέκυψαν από την μελέτη της βαρυτικής αλληλεπίδρασης της με τη βαρυονική ύλη στον γαλαξία μας καθώς και σε γειτονικούς, την δεκαετία του 1970. Συγκεκριμένα, μετρήθηκε η τροχιακή ταχύτητα των αστέρων γύρω από το κέντρο του γαλαξία συναρτήσει της απόστασης τους από το κέντρο. Η μελέτη κυρίως αφορούσε σπειροειδείς γαλαξίες, στους οποίους οι περισσότεροι αστέρες βρίσκονται στον δίσκο του γαλαξία. Σύμφωνα με την Νευτώνια φυσική, και εφόσον τα περισσότερα αστέρια βρίσκονται στο κέντρο, σε αποστάσεις μεγαλύτερες από τον δίσκο η τροχιακή ταχύτητα θα έπρεπε να μειώνεται καθώς αυξάνεται η απόσταση από το κεντρο του γαλαξία.

Όμως, η Νευτώνια πρόβλεψη δεν ήταν σύμφωνη με τα αποτελέσματα μελέτη της Vera Rubin και άλλων αστρονόμων τη δεκαετία του 1970. Συγκεκριμένα, παρατήρησαν ότι η τροχιακή ταχύτητα σε μεγάλες αποστάσεις από το κέντρο παραμένει σταθερή, που σημαίνει ότι υπάρχει σημαντικό κομμάτι της μάζας του γαλαξία που αυξάνεται με την απόσταση από το κέντρο του. Παρά τις προσπάθειες να εξηγηθεί αυτή η απόκλιση χρησιμοποιώντας τροποποιημένες θεωρίες βαρύτητας, απο τη δεκαετία του 1980 και μετά, οι επιστήμονες αποδέχτηκαν ότι πρέπει να υπάρχει κάποια άλλη, μη ορατή μορφή ύλης στους γαλαξίες. Πιο συγκεκριμένα, η βαρυονική ύλη, δηλαδή κυρίως τα αστέρια είναι κατανεμημένα

στον δίσκο του γαλαξία, ενώ η σκοτεινή ύλη βρίσκεται σε ένα συμμετρικό θόλο (halo) που περιβάλλει τον γαλαξία.

Ακόμα και πριν από τις μελέτες της Rubin, οι πρώτες υποδείξεις ήρθαν τη δεκαετία του 1930 από τα πειράματα του αστρονόμου Fritz Zwicky. Μελετώντας το σύμπλεγμα γαλαξιών Coma, παρατήρησε ότι οι ταχύτητες μερικών γαλαξιών ήταν πολύ μεγαλύτερες από τις αναμενόμενες, δεδομένου της μάζας του συμπλέγματος και της αντίστοιχης ταχύτητας διαφυγής. Γι' αυτό τον λόγο, υπολόγησε την μάζα του συμπλέγματος αυτού με δύο διαφορετικές μεθόδους. Χρησιμοποιώντας την κινητική μέθοδο μέσω του θεωρήματος virial και στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τη μέθοδο που βασίζεται στην αναμενόμενη φωτεινότητα των γαλαξιών. Από τις μετρήσεις του Zwicky καθώς και ακόλουθες μετρήσεις, η μάζα που προκύπτει από τη πρώτη μέθοδο είναι τουλάχιστον 10 φορές μεγαλύτερη από την μάζα που προκύπτει λαμβάνοντας υπόψη μόνο τη ορατή ύλη στο σύμπλεγμα. Με βάση αυτό, ο Zwicky συμπέρανε ότι πρέπει να υπάρχει σκοτεινή ύλη στους γαλαξίες σε πολύ μεγαλύτερες ποσότητες από ότι η ορατή.

Επιπλέον, από τις μετρήσεις με τη μέθοδο του gravitational lensing έχουν προκύψει διάφορες ενδείξεις για την ύπαρξη σκοτεινής ύλης στη κλίμακα των γαλαξιών, καθώς και των συμπλεγμάτων γαλαξιών. Σύμφωνα με τη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας του Einstein, η ύλη μπορεί να εκτρέπει ακτίνες φωτός, λειτουργώντας ως βαρυτικός φακός. Φως από μακρινά αντικείμενα όπως γαλαξίες εκτρέπεται προς την περιοχή του βαρυτικού φακού. Συγκεκριμένα σε έντονα φαινόμενα gravitational lensing, που αφορούν μεγάλα αντικείμενα που δρουν ως βαρυτικούς φακούς όπως συμπλέγματα γαλαξιών, μπορεί να προσδιοριστεί η μάζα του συστήματος και να βρεθεί η κατανομή της σκοτεινής ύλης στο σύμπλεγμα.

Ένας άλλος τρόπος που ανιχνεύεται η ύπαρξη σκοτεινής ύλης σε συμπλέγματα γαλαξιών είναι μέσω μετρήσεων με ακτίνες X. Τα συμπλέγματα γαλαξιών περιέχουν ένα μεγάλο κομμάτι αερίου σε υψηλή θερμοκρασία που εκπέμπει ακτίνες X, με βάση το οποίο μπορεί να μετρηθεί η μάζα του συστήματος. Από τέτοιες μελέτες, όπως από το Chandra X-ray Observatory προκύπτει ότι η ποσότητα σκοτεινής ύλης σε συμπλέγματα γαλαξιών πρέπει να είναι 5-10 φορές μεγαλύτερη από τη βαρυονική.

Ένα γεγονός ήρθε να ισχυροποιήσει περισσότερο από κάθε άλλο τις υπόνοιες μας για την ύπαρξη της σκοτεινής ύλης. Το 2006 οι αστρονόμοι, παρατηρώντας δύο συγκρουόμενα συμπλέγματα του συμπλέγματος Bullet, διαπίστωσαν ότι ενώ αλληλεπίδρασαν έντονα τα αέρια από το καθένα, τα αστέρια και οι γαλαξίες πέρασαν χωρίς αλληλεπίδραση. Από μετρήσεις των ακτίνων X, κατέληξαν στο γεγονός ότι η πλειοψηφία της βαρυονικής μάζας του συμπλέγματος είναι στη μορφή αερίου. Κατόπιν, με τη βοήθεια του gravitational lensing προσδιορίστηκε η κατανομή της μάζας στο σύστημα, που δεν συνέπιπτε με τις εικόνες από τις μετρήσεις των ακτίνων X. Η μελέτη του συμπλέγματος Bullet, παρέχει μια από τις πιο σημαντικές ενδείξεις για την ύπαρξη σκοτεινής ύλης, καθώς και ότι η σκοτεινή ύλη δεν αλληλεπιδρά σε μεγάλο βαθμό με την ορατή ύλη, αλλά ούτε και με τον εαυτό της.

Σε κοσμολογικές κλίμακες, η ύπαρξη σκοτεινής ύλης επιβεβαιώνεται με τις μελέτες της Κοσμικής Ακτινοβολίας Υποβάθρου (Cosmic Microwave Background CMB). Μετά από το Big Bang, το σύμπαν αποτελούνταν από ένα πλάσμα φορτισμένων σωματιδίων και φωτονίων. Καθώς το σύμπαν διαστέλλονταν, η θερμοκρασία του πλάσματος γινόταν μικρότερη. Όταν η θερμοκρασία του σύμπαντος ήταν περίπου 10^4 K -που αντιστοιχεί σε ενέργειες της τάξης των eV-, τα πρωτόνια και ηλεκτρόνια συνδέθηκαν για να δημιουργήσουν το ουδέτερο άτομο του υδρογόνου. Η εποχή αυτή είναι γνωστή ως recombination. Πριν από αυτή την εποχή, εφόσον η ενεργειακή συνδεση του υδρογόνου είναι 13.6 eV, οποιοδήποτε παραγόμενο άτομο υδρογόνου καστρεφόταν από ενεργητικά φωτόνια. Λίγο αργότερα από την εποχή του recombination, τα φωτόνια αποσυζεύχτηκαν από το υπόλοιπο πλάσμα, καθώς η πυκνότητα των ελεύθερων φωτονίων μειώθηκε δραματικά με αποτέλεσμα να μειωθεί ο ρυθμός σκεδάσης τους με τα φωτόνια που τα κρατούσε σε θερμική ισορροπία σε σχέση με την διαστολή του Σύμπαντος. Σε αυτή τη κοσμολογική περίοδο, τα φωτόνια ήταν πλέον ελεύθερα να ταξιδεύουν στο Σύμπαν. Τα φωτόνια που απελευθερώθηκαν από αυτή τη διαδικασία αποτελούν το CMB σήμερα και η εποχή αυτή είναι γνωστή ως η εποχή του last scattering, κατά την οποία το τυπικό CMB φωτόνιο σχεδιάστηκε από ηλεκτρόνιο για τελευταία φορά.

Στις δεκαετίες που ακολούθησαν μετά την ανακάλυψη του, η χαρτογράφηση του CMB ξεκίνησε με αποστολές από τρεις δορυφόρους, με αυξανόμενα επίπεδα ακριβείας. Η πρώτη αποστολή της NASA, του Cosmic Background Explorer (COBE), το 1992, διαπίστωσε ότι CMB περιγράφεται σχεδόν από ένα ιδανικό μέλαν σώμα, εκτός από κάποιες μικρές θερμοκρασιακές μεταβολές. Οι επόμενες

αποστολές, και συγκεκριμένα η αποστολή Planck της ESA, το 2009 μέτρησε τις ανισοτροπίες με πολύ μεγαλύτερη ακρίβεια. Οι μεταβολές στην θερμοκρασία που έχουν μετρηθεί είναι περίπου $\frac{\delta T}{T} \sim 10^{-5}$, που αντιστοιχεί σε διαφορές $30 \pm 5 \mu\text{K}$. Οι ανισοτροπίες που παρουσιάζονται μπορούν να εξηγηθούν με την βαρυτική επίδραση μεγάλης ποσότητας σκοτεινής ύλης στο πρώιμο Σύμπαν.

Τέλος, η ύπαρξη της σκοτεινής ύλης προκύπτει από παρατηρήσεις της δομής του σύμπαντος σε μεγάλες κλίμακες. Η ανάπτυξη δομών σήμερα προέκυψε από περιοχές με μεγαλύτερη πυκνότητα καθώς συσώρεσαν περισσότερη ύλη με το χρόνο λόγω της βαρυτικής της επίδρασης. Επομένως μικρές ανισοτροπίες τελικώς δημιουργούν ιεραρχικά μεγαλύτερες δομές. Όμως, σε μοντέλα που δεν λαμβάνουν υπόψη την σκοτεινή ύλη, οι αρχικές ανισοτροπίες είναι πολύ μικρές για να εξηγήσουν τις δομές που παρατηρούνται σήμερα. Η ύπαρξη μεγάλης ποσότητας σκοτεινής ύλης στο πρώιμο σύμπαν και συγκεκριμένα ανισοτροπίες στην πυκνότητα της σκοτεινής ύλης βοήθησαν στη ανάπτυξη δομών που παρατηρούνται σήμερα στο σύμπαν.

1.2 Ανίχνευση Σκοτεινής ύλης

Η υπόθεση της παρουσίας μεγάλης ποσότητας σκοτεινής ύλης στο Σύμπαν είναι απαραίτητη για να εξηγήσει φαινόμενα όπως οι τροχιακές ταχύτητες αστέρων στο γαλαξία και το CMB. Παρόλα αυτά, η σκοτεινή ύλη έχει παρατηρηθεί μόνο μέσω της βαρυτικής της αλληλεπίδρασης με την βαρυονική. Σήμερα οι πειραματικές έρευνες για την ανίχνευση του σκοτεινού σωματιδίου βασίζονται σε τρεις μεθόδους : άμεση ανίχνευση, έμμεση ανίχνευση και ανίχνευση σε επιταχυντές.

Σύμφωνα με την μέθοδο της άμεσης ανίχνευσης, η σκέδαση σκοτεινών σωματιδίων από το γαλαξία με την ορατή ύλη μπορεί να δημιουργήσει ένα μετρήσιμο σήμα σε έναν επίγειο ανιχνευτή. Καθώς τα σκοτεινά σωματίδια κινούνται με μη σχετικισικές ταχύτητες, μια πιθανή αλληλεπίδραση με σωματίδια του στόχου μπορεί να ανιχνευθεί μέσω της ενέργειας που εναποτίθεται στον ανιχνευτή. Κυρίως τα πειράματα ασχολούνται με την ελαστική σκέδαση πυρήνων με σκοτεινά σωματίδια. Ακόμα και αν δεν έχει προκύψει σήμα από σκοτεινά σωματίδια, τέτοιου είδους πειράματα έχουν θέσει όρια για την ενεργό διατομή της σκέδασης μεταξύ του πυρήνα και του σκοτεινού σωματιδίου.

Η έμμεση προσέγγιση βασίζεται στην ανίχνευση προϊόντων από την αλληλο-εξουδετέρωση ή διάσπαση σκοτεινών σωματιδίων. Τέτοιου είδους πειράματα περιλαμβάνουν συνήθως ένα τηλεσκόπιο ή έναν επίγειο ανιχνευτή που ψάχνει για μια ροή σωματιδίων που μπορεί να προκύψουν ως προϊόντα τέτοιων αντιδράσεων, όπως νετρίνα, ακτίνες-γ, αντι-πρωτόνια και άλλα.

Τέλος, η τρίτη μέθοδος βασίζεται στην παραγωγή σκοτεινών σωματιδίων, από αλληλεπιδράσεις σωματιδίων του Καθιερωμένου Προτύπου (ΚΠ) ή από την διάσπαση ενδιάμεσων σωματιδίων στους επιταχυντές. Συνήθως σε τέτοιου είδους πειράματα, το σκοτεινό σωματίδιο καταγράφεται ως αγνοούμενη ενέργεια ή ορμή (missing energy).

2 Εισαγωγή στην κοσμολογία

Τη δεκαετία του 1980, η σκοτεινή ύλη έγινε απόδεκτη ως η πιο άφθονη μορφή ύλης στο σύμπαν, όμως ακόμα και σήμερα η φύση της και οι μηχανισμοί παραγωγής της παραμένουν άγνωστοι. Για τη περαιτέρω διερεύνηση της, χρειάζεται πρώτα να κατανοήσουμε το Σύμπαν όπως παρατηρείται σήμερα, και τη εξέλιξη του.

2.1 Standard Cosmological Model

Η καλύτερη περιγραφή του σύμπαντος δίνεται από λεγόμενο Standard Λ CDM κοσμολογικό μοντέλο, όπου το Λ υποδηλώνει τη κοσμολογική σταθερά και CDM σημαίνει cold dark matter, δηλαδή κρύα (μη-σχετικιστική) σκοτεινή ύλη. Σε αυτό το πλαίσιο, το σύμπαν ξεκίνησε με τη Μεγάλη Έκρηξη και στα πρώτα στάδια εκθετικής επιταχυνόμενης διαστολής, γνωστή ως inflation. Η εποχή αυτή δημιούργησε τις αρχικές μεταβολές στη πυκνότητα, που τελικώς οδήγησαν στις δομές που παρατηρούμε σήμερα. Έπειτα, το σύμπαν συνέχισε να διαστέλλεται με ένα μειωμένο ρυθμό. Σήμερα, το σύμπαν κυρίως αποτελείται από μη-βαρυονική κρύα σκοτεινή ύλη και σκοτεινή ενέργεια. Η τελευταία συσχετίζεται με την κοσμολογική σταθερά και υποκινεί τη επιταχυνόμενη διαστολή του σύμπαντος.

Το σύμπαν σήμερα σε μεγάλες κοσμολογικές κλίμακες είναι ομογενές και ισοτροπικό, και επομένως η γεωμετρία του χωροχρόνου περιγράφεται από τη Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) μετρική. Επιπλέον, σύμφωνα με συγχρονες κοσμολογικές μετρήσεις το σύμπαν μπορεί να θεωρηθεί με μεγάλη ακρίβεια επίπεδο. Ο χωροχρόνος και τα συστατικά του σύμπαντος συσχετίζονται μέσω των εξισώσεων της γενικής θεωρίας της σχετικότητας του Einstein. Λύνοντας τις εξισώσεις αυτές για ένα επίπεδο FLRW σύμπαν προκύπτουν οι εξισώσεις Friedmann

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3}, \quad (2.1)$$

και

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (2.2)$$

όπου G είναι η σταθερά του Νεύτωνα, P η πίεση, ρ η πυκνότητα ενέργειας και $a(t)$ είναι το λεγόμενο scale factor, που χαρακτηρίζει την σχετική διαστολή του Σύμπαντος. Από σύμβαση, η τιμή του στο σήμερα είναι $a_0 = 1$. Στη πρώτη εξίσωση Friedmann ο όρος $\dot{a}/a \equiv H$ αντιστοιχεί στον ρυθμό Hubble, κατά τον οποίο το σύμπαν διαστέλλεται. Η τιμή του H στο σήμερα είναι η λεγόμενη σταθερά του Hubble, για την οποία ισχύει $H_0 \equiv H(t_0) = 100h \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$.

Σύμφωνα με σύγχρονες κοσμολογικές παρατηρήσεις, η πυκνότητα ενέργειας του σύμπαντος αποτελείται από διάφορα συστατικά. Για επίπεδο σύμπαν η ολική πυκνότητα ενέργειας δίνεται από την κριτική πυκνότητα,

$$\rho_{\text{cr}} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}. \quad (2.3)$$

Η ολική πυκνότητα ενέργειας $\rho(t) = \rho_m(t) + \rho_r(t) + \rho_\Lambda$, αποτελείται από ένα τμήμα που είναι ανεξάρτητο του χρόνου, ρ_Λ και ένα τμήμα που εξαρτάται από τον χρόνο, $\rho_m(t) + \rho_r(t)$, όπου ρ_Λ η πυκνότητα ενέργειας από τη κοσμολογική σταθερά και $\rho_m(t), \rho_r(t)$ η πυκνότητα ενέργειας της ύλης και της ακτινοβολίας αντίστοιχα. Συνήθως, χρησιμοποιείται η παράμετρος πυκνότητας για κάθε συνιστώσα, που ορίζεται ως

$$\Omega_s \equiv \frac{\rho_s}{\rho_{\text{cr}}}, \quad (2.4)$$

όπου το s συμβολίζει ένα συστατικό του σύμπαντος. Για επίπεδο σύμπαν πρέπει το άθροισμα των παραμέτρων πυκνότητας να είναι ίσο με τη μονάδα. Σύμφωνα με πρόσφατες μετρήσεις, $\Omega_\Lambda \approx 0.69$, $\Omega_{\text{CDM}} \approx 0.26$, και για την βαρυονική ύλη $\Omega_b \approx 0.05$ [7].

Οι δύο εξισώσεις Friedmann μπορούν να συνδυαστούν και προκύπτει ότι

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0. \quad (2.5)$$

Η παραπάνω εξίσωση, μαζί με την εξίσωση κατάστασης $P = w\rho$, συνδυάζονται για να δώσουν την εξέλιξη της ενέργειας πυκνότητας και του scale factor για μια συνιστώσα του σύμπαντος. Συγκεκριμένα

για μη-σχετικιστική ύλη, η πυκνότητα ενέργειας και το αντίστοιχο scale factor αν το σύμπαν αποτελούνταν κυρίως από ύλη, δίνονται από την

$$\rho_m(t) \propto a^{-3}, \quad a(t) \propto t^{2/3}. \quad (2.6)$$

Για την πυκνότητα ενέργειας της ακτινοβολίας και το scale factor για σύμπαν με κύριο συστατικό την ακτινοβολία,

$$\rho_r(t) \propto a^{-4}, \quad a(t) \propto t^{1/2}, \quad (2.7)$$

Τέλος η πυκνότητα ενέργειας της σκοτεινής ενέργειας και το scale factor για ένα σύμπαν κυριαρχούμενο από αυτό το συστατικό προκύπτει ότι [19],

$$\rho_\Lambda = \text{constant}, \quad a(t) \propto e^{H_0 t}. \quad (2.8)$$

Επομένως καθώς το σύμπαν εξελίσσεται, η εξάρτηση του scale factor με τον χρόνο αλλάζει και συνεπώς μπορεί να φανερώσει την σύσταση του σύμπαντος σε μια δεδομένη κοσμολογική στιγμή.

2.2 Θερμοδυναμική και η εξίσωση Boltzmann

Για την κατανόηση της θερμικής ιστορίας του σύμπαντος, εκτός από την εξέλιξη των κοσμολογικών παραμέτρων, απαραίτητη είναι η γνώση των εξισώσεων της στατιστικής μηχανικής. Η θερμική κατανομή σωματιδίων περιγράφεται από την συνάρτηση $f(\vec{x}, \vec{p}, t)$, που ορίζεται έτσι ώστε σε όγκο $d^3x d^3p / (2\pi)^3$ ο αριθμός σωματιδίων δίνεται από την $dN = f d^3x d^3p / (2\pi)^3$ [4]. Με βάση αυτόν τον ορισμό, η αριθμητική πυκνότητα σωματιδίων n_s , πυκνότητα ενέργειας ρ_s και πίεση P_s για ένα δεδομένο είδος σωματιδίων s , δίνονται από τις [20]

$$n_s = \frac{g_s}{(2\pi^3)} \int f_s(\vec{x}, \vec{p}, t) d^3p, \quad (2.9)$$

$$\rho_s = \frac{g_s}{(2\pi^3)} \int E_s f_s(\vec{x}, \vec{p}, t) d^3p, \quad (2.10)$$

$$P_s = \frac{g_s}{(2\pi^3)} \int \frac{p^2}{3E_s} f_s(\vec{x}, \vec{p}, t) d^3p, \quad (2.11)$$

όπου g_s είναι ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας, και η ενέργεια $E_s = \sqrt{p^2 + m_s^2}$ όπου m_s η μάζα.

Σε θερμοδυναμική ισορροπία, η f εξαρτάται από την ενέργεια, το χημικό δυναμικό μ , και την θερμοκρασία T , και δίνεται από την

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/T} \pm 1} \quad (2.12)$$

όπου το θετικό πρόσημο αντιστοιχεί σε φερμιόνια και το αρνητικό για μποζόνια. Για φαινόμενα που συμβαίνουν στα πρώτα στάδια του σύμπαντος το χημικό δυναμικό μπορεί να τεθεί $\mu = 0$, υποθέτοντας ότι είναι πολύ μικρότερο από την ενέργεια. Με αυτόν τον τρόπο ορίζεται η πυκνότητα εντροπίας s ως

$$s = \frac{\rho + P}{T}. \quad (2.13)$$

Είναι χρήσιμο οι παραπάνω παράμετροι να μελετηθούν για τις κατανομές ισορροπίας στο σχετικιστικό και στο μη-σχετικιστικό όριο. Στι σχετικιστικό όριο, $m_s \ll T$, και για σε θερμοδυναμική ισορροπία προκύπτει ότι

$$n_s^{(0)} = \frac{2g_s}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{p^2}{e^{p/T} \pm 1} dp = \begin{cases} \frac{3}{4\pi^2} \zeta(3) g_s T^3, & \text{για φερμιόνια} \\ \frac{1}{\pi^2} \zeta(3) g_s T^3, & \text{για μποζόνια} \end{cases} \quad (2.14)$$

$$\rho_s^{(0)} = \frac{2g_s}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{p^3}{e^{p/T} \pm 1} dp = \begin{cases} \frac{7}{8} \frac{\pi^2}{30} g_s T^4, & \text{για φερμιόνια} \\ \frac{\pi^2}{30} g_s T^4, & \text{για μποζόνια} \end{cases} \quad (2.15)$$

$$P_s^{(0)} = \frac{\rho_s^{(0)}}{3}, \quad (2.16)$$

όπου (0) συμβολίζει την χρήση των κατανομών σε θερμική ισορροπία. Στο μη-σχετικιστικό όριο, $E \simeq m_s$, συνεπώς $E \gg T$. Σε αυτό το όριο δεν υπάρχει διαχωρισμός μεταξύ μποζονίων και φερμιονίων, και με αυτόν τον τρόπο οι παράμετροι δίνονται από τις σχέσεις [19]

$$n_s^{(0)} = g_s \left(\frac{m_s T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-m_s/T}, \quad (2.17)$$

$$\rho_s^{(0)} = m_s n_s^{(0)}, \quad (2.18)$$

$$P_s^{(0)} = T n_s^{(0)} \ll \rho_s^{(0)}. \quad (2.19)$$

Επομένως για ένα μη-σχετικιστικό είδος σωματιδίων σε θερμική ισορροπία, η αριθμητική πυκνότητα και η πυκνότητα ενέργειας είναι περιορισμένες λόγω του εκθετικού και η πίεση μπορεί να θεωρηθεί μηδενική.

Στις πρώιμες φάσεις του σύμπαντος, τα περισσότερα συστατικά του βρίσκονταν σε θερμική ισορροπία. Όμως, διάφορες παρεκκλίσεις από την θερμική ισορροπία έχουν καθορίσει σημαντικό κομμάτι της εξέλιξης του σύμπαντος, καθώς και τις αφθονίες διάφορων συστατικών που παρατηρούμε σήμερα. Σε κατάσταση εκτός της θερμικής ισορροπίας, η εξέλιξη της κατανομής f πρέπει να προσδιοριστεί από την εξίσωση Boltzmann, που δίνεται από τη σχέση

$$\hat{L}[f] = \hat{C}[f], \quad (2.20)$$

όπου \hat{C} ο τελεστής των κρούσεων (δηλαδή των αλληλεπιδράσεων), και \hat{L} ο τελεστής Liouville. Ο τελευταίος σε συναλλοίωτη (covariant) μορφή δίνεται από [4]

$$\hat{L}_{\text{cov}} = p^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha p^\beta p^\gamma \frac{\partial}{\partial p^\alpha}, \quad (2.21)$$

Για ένα FLRW σύμπαν και χρησιμοποιώντας τη σχέση για την αριθμητική πυκνότητα ενός είδους σωματιδίων προκύπτει

$$g_s \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \hat{L}_{\text{cov}} = \dot{n} + 3Hn. \quad (2.22)$$

Επομένως, η εξίσωση Boltzmann γίνεται

$$\dot{n} + 3Hn = \frac{g_s}{(2\pi)^3} \int \hat{C}[f] d^3 p. \quad (2.23)$$

Ο όρος των κρούσεων αναφέρεται σε αλληλεπιδράσεις σωματιδίων όπως η σκέδαση. Υποθέτοντας μια 2-to-2 αλληλεπίδραση, $(1)_{\vec{p}_1} + (2)_{\vec{p}_2} \leftrightarrow (3)_{\vec{p}_3} + (4)_{\vec{p}_4}$, τότε ο όρος για να υπολογίσουμε την πυκνότητα για το πρώτο είδος σωματιδίου γράφεται ως [4],

$$C[f_1] = \sum_{\vec{p}_2, \vec{p}_3, \vec{p}_4}^{\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_3 + \vec{p}_4} \delta_D^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) |\mathcal{M}|^2 [f_3 f_4 (1 \pm f_1)(1 \pm f_2) - f_1 f_2 (1 \pm f_3)(1 \pm f_4)]. \quad (2.24)$$

Ο όρος $|\mathcal{M}|^2$ είναι το scattering amplitude squared της αλληλεπίδρασης. Οι παράγοντες $1 \pm f$ προκύπτουν από κβαντικά φαινόμενα. Συγκεκριμένα το θετικό πρόσημο εφαρμόζεται για μποζόνια, που σημαίνει ότι αν μια κατάσταση είναι κατειλημμένη τότε η αντίδραση ευνοείται καθώς τα μποζόνια είναι πιο πιθανό να βρίσκονται στην ίδια κατάσταση. Το αρνητικό πρόσημο αντιστοιχεί σε φερμιόνια, και εκφράζει την απαγορευτική αρχή του Pauli, ότι δύο όμοια φερμιόνια δεν θα καταλάβουν την ίδια κατάσταση.

Εκφράζοντας τα αθροίσματα των ορμών ως ολοκληρώματα ως προς τον χώρο των φάσεων προκύπτει

$$C[f_1(\vec{p})] = \frac{1}{E_1} d\Pi_2 d\Pi_3 d\Pi_4 \delta_D^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) (2\pi)^4 |\mathcal{M}|^2 \times [f_3 f_4 (1 \pm f_1)(1 \pm f_2) - f_1 f_2 (1 \pm f_3)(1 \pm f_4)]. \quad (2.25)$$

Χρησιμοποιώντας αυτή τη σχέση, η εξίσωση Boltzmann, για μια αλληλεπίδραση 2-to-2 για την εξέλιξη της n_1 του πρώτου είδους σωματιδίου δίνεται από την σχέση

$$\dot{n}_1 + 3Hn_1 = g_1 d\Pi_1 d\Pi_2 d\Pi_3 d\Pi_4 (2\pi)^4 \delta_D^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) |\mathcal{M}|^2 \times [f_3 f_4 (1 \pm f_1)(1 \pm f_2) - f_1 f_2 (1 \pm f_3)(1 \pm f_4)]. \quad (2.26)$$

Για συστήματα όπου η θερμοκρασία είναι πολύ μικρότερη από $E - \mu$, η εξίσωση μπορεί να απλοποιηθεί αρκετά, καθώς σε αυτή τη περίπτωση η κατανομή γράφεται ως

$$f(E) \rightarrow e^{\mu/T} e^{-E/T}. \quad (2.27)$$

Με αυτόν τον τρόπο,

$$[f_3 f_4 (1 \pm f_1)(1 \pm f_2) - f_1 f_2 (1 \pm f_3)(1 \pm f_4)] \rightarrow e^{-(E_1+E_2)} [e^{(\mu_3+\mu_4)/T} - e^{(\mu_1+\mu_2)/T}]. \quad (2.28)$$

Επιπλέον, ο όρος $e^{\mu_i/T}$ μπορεί να εκφραστεί ως $n_i/n_i^{(0)}$ και η εξίσωση γράφεται ως

$$e^{(\mu_3+\mu_4)/T} - e^{(\mu_1+\mu_2)/T} = \frac{n_3 n_4}{n_3^{(0)} n_4^{(0)}} - \frac{n_1 n_2}{n_1^{(0)} n_2^{(0)}}. \quad (2.29)$$

Τέλος, για να απλοποιηθεί ο όρος με τις αλληλεπιδράσεις, ορίζεται το thermally averaged cross section ως

$$\langle \sigma u \rangle \equiv \frac{1}{n_1^{(0)} n_2^{(0)}} g_1 d\Pi_1 d\Pi_2 d\Pi_3 d\Pi_4 e^{-(E_1+E_2)/T} (2\pi)^4 |\mathcal{M}|^2 \delta_D^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4). \quad (2.30)$$

Με τις παραπάνω απλοποιήσεις η εξίσωση Boltzmann γίνεται,

$$\dot{n}_1 + 3Hn_1 = n_1^{(0)} n_2^{(0)} \langle \sigma u \rangle \left[\frac{n_3 n_4}{n_3^{(0)} n_4^{(0)}} - \frac{n_1 n_2}{n_1^{(0)} n_2^{(0)}} \right]. \quad (2.31)$$

Αντικαθιστώντας τον ορισμό για τον ρυθμό Hubble,

$$\alpha^{-3} \frac{d(n_1 \alpha^3)}{dt} = n_1^{(0)} n_2^{(0)} \langle \sigma u \rangle \left[\frac{n_3 n_4}{n_3^{(0)} n_4^{(0)}} - \frac{n_1 n_2}{n_1^{(0)} n_2^{(0)}} \right]. \quad (2.32)$$

Αν ο ρυθμός αντίδρασης είναι πολύ μεγάλος, για να έχουμε ισορροπία πρέπει [4]

$$\frac{n_3 n_4}{n_3^{(0)} n_4^{(0)}} = \frac{n_1 n_2}{n_1^{(0)} n_2^{(0)}}. \quad (2.33)$$

Η σχέση αυτή είναι γνωστή ως nuclear statistical equilibrium (NSE) και ως εξίσωση Saha.

2.3 Big Bang Nucleosynthesis

Στις πρώιμες φάσεις του Σύμπαντος, όταν η θερμοκρασία ήταν της τάξης ~ 1 MeV, σχετικιστικά σωματίδια όπως ηλεκτρόνια, πρωτόνια και φωτόνια ήταν σε θερμική ισορροπία. Την ίδια εποχή τα φωτόνια έχουν πολύ μεγαλύτερη αριθμητική πυκνότητα από τα βαρυόνια:

$$\eta_b \equiv \frac{n_b}{n_\gamma} = 6.010^{-10} \left(\frac{\Omega_b h^2}{0.022} \right). \quad (2.34)$$

Σε αυτή την περίοδο, δεν υπάρχουν ουδέτερα άτομα ή δέσμιμοι πυρήνες, καθώς φωτόνια από το πλάσμα καταστρέφουν ότι άτομο ή πυρήνα παράγεται. Η ενέργεια σύνδεσης είναι εκείνη που χρειάζεται για να διασπαστεί ο πυρήνας στα επιμέρους νετρόνια και πρωτόνια και η ίδια ενέργεια απελευθερώνεται όταν τα δομικά συστατικά συνδυάζονται για να δημιουργήσουν τον πυρήνα. Όταν η θερμοκρασία του σύμπαντος έγινε μικρότερη από τις τυπικές πυρηνικές ενέργειες σύνδεσης, σε μια εποχή γνωστή ως Big Bang Nucleosynthesis (BBN), ελαφρείς πυρήνες μπορούσαν να παραχθούν αποτελεσματικά. Αρχικά, σχηματίστηκε το δευτέριο D σε χρόνο περίπου $t_{\text{mic}} \approx 300$ s μετά από το Big Bang, βαρύτεροι πυρήνες όπως του ηλίου ακολούθησαν.

Το δευτέριο παράγεται σύμφωνα με την αντίδραση $n + p \leftrightarrow D + \gamma$, όπου η ενέργεια που ελευθερώνεται μέσω ενός φωτονίου. Η αντίστοιχη ενέργεια σύνδεσης είναι $B_D = m_n + m_p - m_D = 2.22$ MeV. Για αυτή την αλληλεπίδραση η εξίσωση Saha γίνεται

$$\frac{n_D}{n_n n_p} = \frac{n_D^{(0)}}{n_n^{(0)} n_p^{(0)}} \quad (2.35)$$

Χρησιμοποιώντας τις κατανομές σε θερμική ισορροπία η εξίσωση γράφεται ως

$$\frac{n_D}{n_n n_p} = \frac{3}{4} \left(\frac{4\pi}{m_p T} \right)^{3/2} e^{B_D/T}. \quad (2.36)$$

Τέλος, χρησιμοποιώντας ότι $n_n \simeq n_p = \eta_b n_\gamma$, όπου $n_\gamma = 2T^3/\pi^2$, η εξίσωση αυτή μπορεί να γραφτεί προσεγγιστικά ως

$$\frac{n_D}{n_b} \sim \eta_b \left(\frac{T}{m_p} \right)^{3/2} e^{B_D/T}. \quad (2.37)$$

Όταν ο όρος B_D/T παραμένει σχετικά μικρός, η αφθονία του δευτερίου σε σχέση με του νετρονίου κυρίως εξαρτάται από η_b που είναι πολύ μικρό. Επομένως, μέχρι η θερμοκρασία να γίνει μικρότερη του B_D , η παραγωγή δευτερίου δεν ευνοείται καθώς καταστρέφονται από φωτόνια.

Με παρόμοιο τρόπο μπορεί να προσδιοριστεί η αφθονία των νετρονίων και η εξέλιξη τους. Τα νετρόνια μπορούν να μετατραπούν σε πρωτόνια σύμφωνα με τις αντιδράσεις $n + \nu_e \leftrightarrow p + e^-$ και $n + e^- \leftrightarrow p + \bar{\nu}_e$. Τέτοιου είδους αντιδράσεις κρατούσαν τα νετρόνια και τα πρωτόνια σε θερμική ισορροπία μέχρι $T \sim 1$ MeV. Η αφθονία του πλήθους των νετρονίων προς αυτό των πρωτονίων σε θερμική ισορροπία μπορεί να εκφραστεί ως

$$\frac{n_n^{(0)}}{n_p^{(0)}} = e^{-Q/T}, \quad (2.38)$$

όπου $m_n - m_p = Q = 1.293$ MeV, και επομένως η αφθονία τους είναι περίπου ίδια σε μεγάλες θερμοκρασίες.

Η εξέλιξη της αφθονίας των νετρονίων μπορεί να βρεθεί από την εξίσωση Boltzmann. Υποθέτοντας ότι η αντίδραση περιλαμβάνει δύο λεπτόνια με $n_l^{(0)} = n_l$, η εξίσωση Boltzmann γίνεται

$$a^{-3} \frac{d(n_n a^3)}{dt} = n_l^{(0)} \langle \sigma u \rangle \left[\frac{n_p n_n^{(0)}}{n_p^{(0)}} - n_n \right], \quad (2.39)$$

όπου $n_l^{(0)} \langle \sigma u \rangle = \lambda_{np}$ είναι ο ρυθμός μετατροπής νετρονίων σε πρωτόνια. Χρησιμοποιώντας την παράμετρο,

$$X_n \equiv \frac{n_n}{n_n + n_p}, \quad (2.40)$$

η εξίσωση Boltzmann γράφεται ως

$$\frac{dX_n}{dt} = \lambda_{np} \left[(1 - X_n) e^{-Q/T} - X_n \right]. \quad (2.41)$$

Τέλος, εισάγοντας την παράμετρο $x \equiv Q/T$,

$$\frac{dX_n}{dx} = \frac{x \lambda_{np}}{H(x=1)} \left[e^{-x} - X_n (1 + e^{-x}) \right]. \quad (2.42)$$

Ολοκληρώνοντας τη παραπάνω εξίσωση, βρίσκεται η αφθονία των ηλεκτρονίων συναρτήσει της θερμοκρασίας, και συνεπώς του χρόνου. Με αυτόν τον τρόπο, όταν $T = Q$, ο ρυθμός αλληλεπίδρασης είναι μεγαλύτερος από τον ρυθμό διαστολής του σύμπαντος εκείνη την χρονική στιγμή. Όταν $T < Q$, ο ρυθμός αλληλεπίδραση είναι $\propto T^3$ ενώ ο ρυθμός διαστολής είναι $\propto T^2$. Τέλος, στην αρχή του BBN η θερμοκρασία ήταν $T_{\text{nuc}} \sim 0.07$, που αντιστοιχεί σε αφθονία νετρονίων $X_n(T_{\text{nuc}}) = 0.11$ [4].

Τέλος, η αφθονία των ελαφρών πυρήνων μπορεί να προσεγγιστεί θεωρώντας ότι η παραγωγή τους ξεκινά όταν η θερμοκρασία πέφτει στη T_{nuc} . Για παράδειγμα η αφθονία του δευτερίου υπολογίζεται

$$\ln \eta_b + \frac{3}{2} \ln (T_{\text{nuc}}/m_p) \sim -\frac{B_D}{T_{\text{nuc}}}. \quad (2.43)$$

Για να είναι αποτελεσματική η παραγωγή δευτερίου, πρέπει ο όρος B_D/T_{nuc} να είναι περίπου ίσος με την μονάδα, που υποδεικνύει $T_{\text{nuc}} \sim 0.07$ MeV. Επειδή η ενέργεια σύνδεσης του δευτερίου είναι μικρότερη του ηλίου, η παραγωγή ${}^4\text{He}$ ακολουθεί αυτή του δευτερίου.

2.4 Recombination

Μετά την εποχή του BBN, η βαρυονική ύλη στο σύμπαν ήταν στη μορφή πρωτονίων, ηλεκτρονίων, φωτονίων ισχυρά συζευγμένων, και κυρίως πυρηνών ηλίου. Όταν ο ρυθμός της σκέδασης Compton γίνεται μικρότερος από τον ρυθμό Hubble, τότε τα φωτόνια αποσυζευγονται από το υπόλοιπο κοσμικό πλάσμα. Αυτό συνέβη όταν $T \sim 1$ eV, έπειτα από μια ξαφνική μείωση των ελεύθερων ηλεκτρονίων. Πάνω από αυτή τη θερμοκρασία, εφόσον η ενέργεια σύνδεσης του υδρογόνου είναι $\epsilon_0 = 13.6$ eV, άτομα υδρογόνου που παράγονται, ιονίζονται από φωτόνια.

Τα ηλεκτρόνια και τα πρωτόνια αλληλεπιδρούν για να δημιουργήσουν ουδέτερο υδρογόνο σύμφωνα με την αλληλεπίδραση $e^- + p \leftrightarrow H + \gamma$. Όσο οι αντιδράσεις παραμένουν ισορροπημένες, ισχύει η εξίσωση του Saha και μπορεί να εκφραστεί ως

$$\frac{n_e n_p}{n_H} = \frac{n_e^{(0)} n_p^{(0)}}{n_H^{(0)}}. \quad (2.44)$$

Ορίζουμε την παράμετρο

$$X_e \equiv \frac{n_e}{n_e + n_H} = \frac{n_p}{n_p + n_H}, \quad (2.45)$$

που προκύπτει θέτοντας $n_e = n_p$, για να εξασφαλιστεί η ηλεκτρική ουδετερότητα του σύμπαντος, εάν υποθέσουμε ότι η βαρυονική ύλη αποτελείται από πρωτόνια και ηλεκτρόνια. Τότε για $X_e = 1$ είναι τελείως ιονισμένη, ενώ για $X_e = 0$, η βαρυονική ύλη αποτελείται μόνο από ουδέτερα άτομα. Η εξίσωση Saha χρησιμοποιώντας την παράμετρο X_e , γράφεται ως

$$\frac{X_e^2}{1 - X_e} = \frac{1}{n_e + n_H} \left[\left(\frac{m_e T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-[m_e + m_p - m_H]/T} \right], \quad (2.46)$$

όπου $m_e + m_p - m_H = \epsilon_0$. Συνεπώς, το recombination μπορεί να συμβεί όταν η θερμοκρασία πέφτει κάτω από ϵ_0 . Η εξίσωση Boltzmann για την αφθονία των ηλεκτρονίων μπορεί να εκφραστεί ως [4]

$$\frac{dX_e}{dt} = \left[(1 - X_e)\beta - X_e^2 n_b \alpha_2 \right], \quad (2.47)$$

όπου β είναι ο ρυθμός ιονισμού

$$\beta \equiv \langle \sigma u \rangle \left(\frac{m_e T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-\epsilon_0/T}, \quad (2.48)$$

και α_2 είναι ο ρυθμός του recombination

$$\alpha_2 \equiv \langle \sigma u \rangle = 9,78 \frac{\alpha^2}{m_e^2} \left(\frac{\epsilon_0}{T} \right)^{1/2} \ln \left(\frac{\epsilon_0}{T} \right). \quad (2.49)$$

Ολοκληρώνοντας την εξίσωση Boltzmann, μπορεί να βρεθεί η παράμετρος X_e συναρτήσει του χρόνου. Η εξέλιξη της αριθμητικής πυκνότητας των ελεύθερων ηλεκτρονίων οδηγεί σε διαφορά παρατηρησιμα φαινόμενα στην κοσμολογία σήμερα. Η αποσύζευξη των φωτονίων από το πλάσμα ως αποτέλεσμα της μείωσης στην αφθονία των ηλεκτρονίων, οδηγεί στο CMB που παρατηρούμε στο σήμερα.

3 Σκοτεινή Ύλη

3.1 Υποψήφια σωματίδια σκοτεινής ύλης

Η απουσία άμεσης παρατήρησης σκοτεινής ύλης, οδήγησε στην ανάπτυξη διάφορων μοντέλων με ένα μεγάλο φάσμα ιδεών για τη φύση και τις θεμελιώδεις ιδιότητες του σκοτεινού σωματιδίου. Παρόλα αυτά, για να συμφωνούν με τις προϋπάρχουσες παρατηρήσεις που βασίζονται σε βαρυτικά φαινόμενα, οποιοδήποτε υποψήφιο σκοτεινό σωματίδιο πρέπει να έχει κάποια συγκεκριμένα χαρακτηριστικά [22].

Αρχικά το σωματίδιο πρέπει να είναι σκοτεινό, δηλαδή να μην αλληλεπιδρά ηλεκτρομαγνητικά. Δεύτερον, πρέπει να είναι σταθερό σε κοσμολογικές κλίμακες για να εξηγήει τα halos σκοτεινής ύλης στους γαλαξίες και άλλες δομές. Επιπλέον πρέπει να είναι μη-βαρυονικό, καθώς βαρυονικά υποψήφια σωματίδια σκοτεινής ύλης όπως τα νετρόνια έχουν ήδη αποκλειστεί ως κυρίαρχα σκοτεινά σωματίδια. Τέλος, το μεγαλύτερο κομμάτι της σκοτεινής ύλης πρέπει να είναι κρύο, δηλαδή να μην είναι σχετικιστικό, που είναι απαραίτητο για την δημιουργία δομής σε μεγάλες κλίμακες.

Μια κατηγορία μοντέλων μη-βαρυονικής σκοτεινής ύλης που αναπτύχθηκαν νωρίς είναι τα λεγόμενα Weakly Interacting Massive Particles (WIMPs), καθώς προκύπτουν σε διάφορες θεωρίες πέρα από το Standard Model. Οι τυπικές μάζες είναι στην κλίμακα $1 - 10^5$ GeV, με ενεργό διατομή στη κλίμακα των ασθενών αλληλεπιδράσεων. Σε αυτό το μοντέλο, τα WIMPs παράγονται θερμικά στα πολύ αρχικά στάδια του σύμπαντος μέσω της διαδικασίας του *thermal freeze-out*.

3.2 Thermal Freeze-out

Η θερμική αποσύζευξη (thermal freeze-out) ενός είδους σωματιδίων εξαρτάται από την σχέση μεταξύ του ρυθμού διαστολής του Σύμπαντος, δηλαδή τον ρυθμό Hubble H , και το ρυθμό αλληλεπίδρασης της διαδικασίας που κρατά τα σωματίδια σε θερμική ισορροπία, Γ . Όταν $\Gamma \gg H$, η αλληλεπίδραση είναι αποδοτική και τα σωματίδια παραμένουν στενά συζευγμένα με το υπόλοιπο κοσμικό πλάσμα. Όμως, λόγω της επιταχυνόμενης διαστολής του σύμπαντος, τελικώς το Γ γίνεται μικρότερο από το H . Όταν $\Gamma \simeq H$, η αλληλεπίδραση δεν είναι πλέον αποδοτική. Εάν η αλληλεπίδραση είναι η εξαύλωση των σωματιδίων, τότε όταν δεν είναι πλέον αποδοτική λέμε ότι το είδος έκανε freeze out και τα σωματίδια που έμειναν λέγονται relics. Αν το σωματίδιο κάνει freezes-out όταν ήταν σχετικιστικό, τότε λέγεται hot thermal relic. Αντιθέτως αν ήταν μη-σχετικιστικό λέγεται cold thermal relic.

Στο γενικό σενάριο του thermal freeze-out, θεωρούμε ένα σταθερό (ή με πολύ μεγάλο χρόνο ημιζωής σε κοσμολογικές κλίμακες) σκοτεινό σωματίδιο, X , που διατηρείται σε θερμική ισορροπία με το υπόλοιπο πλάσμα μέσω της εξαύλωσης και παραγωγής σύμφωνα με την αντίδραση $X\bar{X} \leftrightarrow \psi\bar{\psi}$, με ένα σωματίδιο του ΚΠ ψ . Το ΚΠ σωματίδιο, υποθέτουμε ότι έχει πολύ μικρή μάζα και είναι στενά συζευγμένο με το κοσμικό πλάσμα ώστε $n_\psi = n_\psi^{(0)}$.

Θεωρώντας ότι $\mu = 0$, οι πυκνότητες σε θερμική ισορροπία δίνονται από τις σχέσεις

$$n_{\text{rel}} \propto T^3 \text{ για } m \ll T, \quad (3.1)$$

$$n_{\text{non-rel}} \propto (mT)^{3/2} e^{-m/T} \text{ για } m \gg T, \quad (3.2)$$

ανάλογα με το αν το σωματίδιο είναι σχετικιστικό ή όχι. Ένα είδος σωματιδίου μη-σχετικιστικό, όπως τα WIMPs, αν παρέμενε σε θερμική ισορροπία, τότε η αφθονία του θα ήταν πολύ μικρή λόγω του παράγοντα Boltzmann $e^{-m/T}$. Καθώς το σύμπαν διαστέλλεται, η πυκνότητα των WIMPs μειώνεται εκθετικά και επομένως η αφθονία τους σήμερα θα ήταν σχεδόν μηδενική. Όμως αν το είδος κάνει freeze-out όταν ο όρος m/T δεν είναι πολύ μεγαλύτερος της μονάδας τότε θα έχει παρατηρήσιμο relic abundance σήμερα.

Η εξέλιξη της πυκνότητας των σκοτεινών σωματιδίων X , μπορεί να βρεθεί ολοκληρώνοντας την εξίσωση Boltzmann

$$\frac{dn_X}{dt} + 3Hn_X = \langle \sigma u \rangle \left[(n_X^{(0)})^2 - (n_X)^2 \right]. \quad (3.3)$$

Συνήθως εισάγεται η παράμετρος που ορίζεται ως $Y \equiv \frac{n_X}{s}$. Εφόσον $sa^3 = \text{σταθερά}$, η εξίσωση Boltzmann ως προς την παράμετρο Y εκφράζεται ως

$$\frac{dY}{dt} = s \langle \sigma u \rangle [Y_{\text{EQ}}^2 - Y^2], \quad (3.4)$$

όπου $Y_{\text{EQ}} \equiv n_X^{(0)}/s$. Επιπλέον, είναι χρήσιμο να αντικατασταθεί ο χρόνος με την παράμετρο $x \equiv m_X/T$, και η εξίσωση Boltzmann γίνεται

$$\frac{dY}{dx} = -\frac{x\langle\sigma u\rangle s}{H(m)}[Y^2 - Y_{\text{EQ}}^2] \quad (3.5)$$

Τέλος, εκφράζοντας $H(T) = x^{-2}H(m)$,

$$\frac{x}{Y_{\text{EQ}}}\frac{dY}{dx} = -\frac{\Gamma_A}{H(T)}\left[\left(\frac{Y}{Y_{\text{EQ}}}\right)^2 - 1\right], \quad (3.6)$$

όπου

$$\Gamma_A = n_X^{(0)}\langle\sigma u\rangle. \quad (3.7)$$

Σύμφωνα με την παραπάνω εξίσωση, η εξέλιξη της παραμέτρου Y εξαρτάται από την σχέση μεταξύ του ρυθμού εξαύλωσης Γ_A και του ρυθμού Hubble H . Όταν $\Gamma_A/H \lesssim 1$ το n_X μειώνεται και το σωματίδιο κάνει freeze out, όταν $x = x_f$. Επομένως περιμένουμε ότι [20]

$$Y \simeq Y_{\text{EQ}} \text{ for } x \leq x_f, \quad (3.8)$$

$$Y \simeq Y_{\text{EQ}}(x_f) \text{ for } x \geq x_f. \quad (3.9)$$

Για θερμή σκοτεινή ύλη, η διαδικασία του freeze-out συμβαίνει για $x_f \lesssim 3$. Σε αυτή τη περίπτωση η πυκνότητα σε θερμική ισορροπία δίνεται από τη σχέση

$$n_{\text{rel}}^{(0)} = \frac{\zeta(3)}{\pi^2} g_{\text{eff}} T^3, \quad (3.10)$$

όπου g_{eff} effective αριθμός βαθμών ελευθερίας, που ισούται με $g_{\text{eff}} = g$ για μποζόνια και $g_{\text{eff}} = \frac{3g}{4}$ για φερμιόνια. Η αντίστοιχη πυκνότητα εντροπίας δίνεται από την σχέση

$$s = \frac{2\pi^2}{45} g_{\star s} T^3, \quad (3.11)$$

όπου $g_{\star s}$ είναι ο αριθμός βαθμών ελευθερίας για την s . Επομένως

$$Y_{\text{EQ}}(x) = \frac{45\zeta(3)}{2\pi^4} \frac{g_{\text{eff}}}{g_{\star s}} \simeq 0.278 \frac{g_{\text{eff}}}{g_{\star s}}, \quad (3.12)$$

που είναι μια σταθερά. Συνεπώς, η τελική αφθονία στο $x \rightarrow \infty$, Y_∞ , είναι ίση με την τιμή σε ισορροπία του Y την εποχή του freeze out, δηλαδή

$$Y_\infty = Y_{\text{EQ}}(x_f) = 0.278 \frac{g_{\text{eff}}}{g_{\star s}}. \quad (3.13)$$

Για κρύα σκοτεινή ύλη η διαδικασία του freeze-out συμβαίνει για $x_f \gtrsim 3$. Σε αυτή τη περίπτωση η εξίσωση Boltzmann εκφράζεται ως

$$\frac{dY}{dx} = -\frac{\lambda}{x^2}[Y^2 - Y_{\text{EQ}}^2], \quad (3.14)$$

όπου $\lambda \equiv \frac{x\langle\sigma u\rangle s}{H(m_X)}$. Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να ολοκληρωθεί για να βρεθεί η εξέλιξη του Y . Όμως επειδή για μεγάλο x , το Y θα είναι πολύ μεγαλύτερο του Y_{EQ} , η εξίσωση Boltzmann γράφεται ως

$$\frac{dY}{dx} \simeq -\frac{\lambda Y^2}{x^2} \text{ για } (x \gg 1). \quad (3.15)$$

Ολοκληρώνοντας τη σχέση αυτή από x_f στο freeze-out έως $x = \infty$, η τελική αφθονία μπορεί να προσεγγιστεί ως

$$Y_\infty \simeq \frac{x_f}{\lambda}. \quad (3.16)$$

Τελικώς προκύπτει ότι το Y του σκοτεινού σωματιδίου συμπίπτει με αυτό σε θερμική ισορροπία μέχρι $x \sim 10$, και στη συνέχεια γίνεται σταθερά [4].

Συγκεκριμένα για τα WIMPs, η σημερινή relic density, θέτοντας $m_X = 100$ GeV και $\langle\sigma u\rangle = 10^{-26}$ cm², για τα οποία προκύπτει ότι $x_f = 23.8$, δίνεται από τη σχέση [24]

$$\Omega_{X,0}h^2 \simeq 0.12 \left(\frac{x_f}{23.8}\right) \left(\frac{86.3}{g_*(x_f)}\right)^{1/2} \left(\frac{2 \times 10^{-26} \text{cm}^2}{\langle\sigma u\rangle}\right). \quad (3.17)$$

Η παράμετρος πυκνότητας δίνει την σωστή αφθονία της σκοτεινής ύλης, θεωρώντας ένα σκοτεινό σωματίδιο με ενεργό διατομή τυπική των ασθενών αλληλεπιδράσεων, αυτό συνήθως αναφέρεται ως ‘*WIMP miracle*’.

3.3 Εναλλακτικές των WIMPs

Στις μεγάλες κλίμακες οι αστρονομικές και κοσμολογικές παρατηρήσεις υποδεικνύουν ότι τα σκοτεινά σωματίδια είναι κρύα, δεν συγχρύνονται και αλληλεπιδρούν με την ορατή ύλη μέσω της βαρύτητας. Όμως παρόλες τις επιτυχίες του μοντέλου του Collisionless Cold Dark Matter (CCDM), παρουσιάζονται διάφορα προβλήματα στις μικρές κλίμακες. Από την δεκαετία του 1990, έχουν παρουσιαστεί διάφορες αποκλίσεις μεταξύ προσομοιώσεων με CDM και των παρατηρήσεων.

Αρχικά, προσομοιώσεις CDM που λαμβάνουν υπόψη μόνο τη βαρύτητα προβλέπουν ένα μεγαλύτερο αριθμό γαλαξιών δορυφόρων από αυτούς που έχουν παρατηρηθεί γύρω από τον γαλαξία μας και από κοντινούς γαλαξίες. Αυτή η ασυμφωνία είναι γνωστή ως *missing satellites problem*. Μια λύση που προτάθηκε για αυτό το πρόβλημα είναι ότι οι γαλαξίες που λείπουν από τις παρατηρήσεις δεν έχουν καταφέρει να δημιουργήσουν αστέρια και επομένως δεν γίνονται ορατοί. Όμως, αυτή η λύση οδηγεί στο δεύτερο πρόβλημα με το CDM, το λεγόμενο *too-big-to-fail*, καθώς οι δορυφόροι γαλαξίες που προκύπτουν από τη Λ CDM κοσμολογία είναι πολύ μεγάλοι ώστε να μην έχουν καταφέρει να δημιουργήσουν αστέρια. Τέλος, από τις μετρήσεις των rotation curves γαλαξιών προκύπτει ότι η πυκνότητα προς το κέντρο είναι σταθερή “cored” $\rho_{\text{dm}} \propto r^0$, ενώ CDM προσομοιώσεις που λαμβάνουν υπόψη τη βαρύτητα προβλέπουν ότι η πυκνότητα αυξάνεται καθώς πλησιάζουμε το κέντρο ως $\rho_{\text{dm}} \propto r^{-1}$ [26], το οποίο είναι γνωστό ως *core-cusp problem*.

Μια εναλλακτική στο CCDM που προτάθηκε στις αρχές της δεκατίας του 2000, είναι το λεγόμενο self-interacting dark matter. Σε αυτό το μοντέλο, τα σκοτεινά σωματίδια μπορούν να σκεδαστούν ελαστικά το ένα από το άλλο. Συνήθως, για να λυθούν τα προβλήματα που προαναφέρθηκαν, τα σκοτεινά σωματίδια πρέπει να έχουν μια ενεργό διατομή της τάξης $\sigma_{\text{scatter}}/m_{DM} \sim 1$ cm²/g, όπου m_{DM} είναι η μάζα του σωματιδίου.

Μια άλλη εναλλακτική είναι το λεγόμενο Asymmetric Dark Matter (ADM). Η ανάπτυξη τέτοιων μοντέλων ξεκίνησε από τη παρατήρηση ότι η πυκνότητα της σκοτεινής ύλης είναι 5 φορές μεγαλύτερη από εκείνη της ορατής ύλης (visible matter (VM)), δηλαδή $\Omega_{DM} \simeq 5\Omega_{VM}$. Η ομοιότητα μεταξύ των πυκνοτήτων μπορεί να υποδεικνύει μια κοινή προέλευση ή μια στενή σύνδεση στην κοσμολογική εξέλιξη των δύο μορφών ύλης [29].

Η σημερινή πυκνότητα της ορατής ύλης αποδίδεται στην ασυμμετρία των βαρυονίων στο σύμπαν. Στο πρώιμο σύμπαν δημιουργήθηκε ένα πλεόνασμα βαρυονίων σε σχέση με τα αντι-βαρυόνια, με αποτέλεσμα τα βαρυόνια που παρατηρούμε σήμερα να είναι εκείνα που απέμειναν αφού εξαυλώθηκαν όλα τα αντίστοιχα αντι-βαρυόνια. Αντίστοιχα, στα μοντέλα ADM, η πυκνότητα της σκοτεινής ύλης σήμερα προκύπτει από μια αρχική ασυμμετρία μεταξύ των σκοτεινών σωματιδίων και αντισωματιδίων στις πρώιμες φάσεις του σύμπαντος. Επιπλέον, στα περισσότερα μοντέλα οι ασυμμετρίες των δύο μορφών ύλης θεωρούνται ότι έχουν μια κοινή προέλευση. Όπως και η ορατή ύλη περιγράφεται από το ΚΠ της σωματιδιακής φυσικής, έτσι και η σκοτεινή ύλη μπορεί να αποτελείται από διάφορα σταθερά σωματίδια.

Τέλος, ένα μοντέλο ADM σε συνδυασμό με self-interactions μπορεί να οδηγήσει στη δημιουργία συμπαγών σωμάτων, τους λεγόμενους σκοτεινούς αστέρες (*dark stars*) [30].

4 Σκοτεινή ύλη μέσω κινητικής ανάμειξης

Η μη αλληλεπίδραση της σκοτεινής ύλης με την βαρυονική έχει οδηγήσει στην ανάπτυξη μοντέλων που αποτελούνται από ένα *dark sector*. Πρόκειται για μια συλλογή σωματιδίων επηρεαζόμενα από νέες δυνάμεις αλλά ουδέτερα στις αλληλεπιδράσεις του ΚΠ. Ένα θέμα ιδιαίτερου ενδιαφέροντος τόσο για θεωρητικές όσο και για πειραματικές έρευνες τις τελευταίες δεκαετίες είναι η επέκταση του ΚΠ, εισάγοντας μια σκοτεινή $U(1)_D$ δύναμη, με φορέα πεδίου το σκοτεινό φωτόνιο (*dark photon*) με κινητική ανάμειξη με το φωτόνιο του ΚΠ.

4.1 Σκοτεινό φωτόνιο και κινητική ανάμειξη

Στη παρούσα διπλωματική, θεωρούμε ένα σκοτεινό φωτόνιο με μάζα που προκύπτει από κάποιο σκοτεινό μηχανισμό Higgs. Επιπλέον, σε μια θεωρία με δύο $U(1)$, ένας όρος κινητικής ανάμειξης προκύπτει μεταξύ των δύο μποζονίων βαθμίδας [31]. Η κινητική ανάμειξη λειτουργεί ως γέφυρα επικοινωνίας μεταξύ του σκοτεινού και του ορατού sector. Υποθέτουμε ότι ο dark sector αποτελείται από ένα Dirac φερμιόνιο χ με μάζα m_χ , και ένα σκοτεινό φωτόνιο A' με μάζα $m_{A'}$. Η Λαγκρατζιανή του μοντέλου είναι το άθροισμα εκείνης του ΚΠ, \mathcal{L}_{SM} , και εκείνης του dark sector, \mathcal{L}_D , δηλαδή $\mathcal{L} = \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_{SM}$, όπου

$$\mathcal{L}_D = \bar{\chi}\gamma^\mu D_\mu\chi - m_\chi\bar{\chi}\chi - \frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_{A'}^2 A'_\mu A'^\mu + \frac{\kappa}{2}F'_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (4.1)$$

όπου $D_\mu = \partial_\mu - ig_D A'_\mu$ είναι η συναλλοίωτη παράγωγος, με g_D τη σταθερά σύζευξης μεταξύ του A' και του χ . Επιπλέον ο όρος $\frac{\kappa}{2}F'_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ εκφράζει την κινητική ανάμειξη, όπου κ είναι η αδιάστατη παράμετρος ανάμειξης που αναμένεται να είναι της τάξης $\kappa \sim 10^{-3}$ ή μικρότερη [31]. Οι κινητικοί όροι για το σκοτεινό και ορατό φωτόνιο μπορούν να εκφραστούν ως

$$\mathcal{L}_{kin} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} F_{\mu\nu} & F'_{\mu\nu} \\ -\kappa & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F^{\mu\nu} \\ F'^{\mu\nu} \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Ο πίνακας της κινητικής ανάμειξης πρέπει να διαγωνοποιηθεί και να κανονικοποιηθεί. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με τη χρήση ενός μετασχηματισμού T . Ένας πιθανός μετασχηματισμός είναι ο

$$T : A_\mu \mapsto A_\mu + \kappa A'_\mu, \quad A'_\mu \mapsto A'_\mu. \quad (4.3)$$

Με αυτόν τον τρόπο, ο όρος της κινητικής ανάμειξης απαλείφεται αλλάζοντας το πεδίο του ορατού φωτονίου κατά $\kappa A'_\mu$ και αφήνοντάς το πεδίου του σκοτεινού φωτονίου αμετάβλητο. Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό η \mathcal{L}_{kin} γίνεται

$$\mathcal{L}_{kin} = -\frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \mathcal{O}(\kappa^2). \quad (4.4)$$

Επομένως η \mathcal{L}'_D γίνεται

$$\mathcal{L}'_D = \bar{\chi}\gamma^\mu D_\mu\chi - m_\chi\bar{\chi}\chi - \frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_{A'}^2 A'_\mu A'^\mu, \quad (4.5)$$

όπου $D_\mu = \partial_\mu - ig_D A'_\mu$. Εκτός από την απαλοιφή του ανάμεικτου όρου, ο μετασχηματισμός οδηγεί σε μια σύζευξη μεταξύ του σκοτεινού φωτονίου και των σωματιδίων του ΚΠ. Συγκεκριμένα, η Λαγκρατζιανή ενός Dirac φερμιονίου ψ μάζας m -για παράδειγμα ενός ηλεκτρονίου- είναι $\mathcal{L}_{fermion} = i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi$. Σε αυτή τη περίπτωση, η συναλλοίωτη παράγωγος D_μ δίνεται από την $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu - i\kappa A'_\mu$ όπου η δεύτερη ισότητα προκύπτει μετά από τον μετασχηματισμό, συνεπώς υπάρχει σύζευξη μεταξύ ενός φερμιονίου και σκοτεινού φωτονίου $g_D = e\kappa$. Η σύζευξη οδηγεί σε αλληλεπιδράσεις μεταξύ των σωματιδίων σκοτεινής και ορατής ύλης, που μπορούν να ανιχνευτούν σε πειράματα.

4.2 Κινητική ανάμειξη σε σκοτεινούς αστέρες

Η κινητική ανάμειξη μπορεί να διερευνηθεί στη περίπτωση των σκοτεινών αστέρων. Σε αυτή τη περίπτωση, $\mathcal{L}_* = \mathcal{L}_{D*} + \mathcal{L}_\phi + \mathcal{L}_{SM}$ όπου \mathcal{L}_{SM} είναι η Λαγκρατζιανή του ΚΠ και \mathcal{L}_{D*} του dark sector στον σκοτεινό αστέρα δίνεται από

$$\mathcal{L}_{D*} = \bar{\chi}\gamma^\mu D_\mu\chi - m_\chi\bar{\chi}\chi - \frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_{A'}^2 A'_\mu A'^\mu + \frac{1}{2}m_D^2 A_\mu A^\mu + \frac{\kappa}{2}F'_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (4.6)$$

Η διαφορά με την Λαγκρατζιανή εκτός του αστεριού είναι πρώτον ότι το χ ανήκει στο μοντέλο της ασύμμετρης σκοτεινής ύλης, και δεύτερον ο όρος μάζας του ορατού φωτονίου $\frac{1}{2}m_D^2 A_\mu A^\mu$. Ο όρος μπορεί να προκύψει από ένα μηχανισμό Higgs εισάγοντας complex scalar field, ϕ . Η Λαγκρατζιανή του ϕ , \mathcal{L}_ϕ δίνεται από τη σχέση

$$\mathcal{L}_\phi = |D_\mu \phi|^2 - \mu_\phi^2 |\phi|^2 - \lambda |\phi|^4 + g_\phi \phi \bar{\chi} \chi, \quad (4.7)$$

όπου μ_ϕ είναι η μάζα του βαθμωτού πεδίου, g_ϕ είναι η σταθερά σύζευξης μεταξύ του ϕ και του χ , και η συναλλοίωτη παράγωγος $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$. Το ϕ συζευγνύεται με το χ μέσω του όρου αλληλεπίδρασης $-g_\phi \phi \bar{\chi} \chi$, και με το φωτόνιο του ΚΠ μέσω του κινητικού όρου $|D_\mu \phi|^2$ στη \mathcal{L}_ϕ . Στο εσωτερικό του σκοτεινού αστέρα, εφόσον η πυκνότητα της σκοτεινής ύλης είναι μη μηδενική, έχει μη μηδενική vacuum expectation value, $\langle \bar{\chi} \chi \rangle \neq 0$. Θέτοντας $\gamma \equiv g_\phi \langle \bar{\chi} \chi \rangle$, η Λαγκρατζιανή $\mathcal{L}_\phi = (D_\mu \phi)^* (D^\mu \phi) - V(\phi)$, όπου το δυναμικό $V(\phi)$ δίνεται

$$V(\phi) = \mu_\phi^2 \phi \phi^* + \lambda (\phi \phi^*)^2 - \gamma \phi. \quad (4.8)$$

Εκτός του σκοτεινού αστέρα, $\langle \bar{\chi} \chi \rangle = 0$ και συνεπώς $\gamma = 0$. Σε αυτή τη περίπτωση το ελάχιστο του δυναμικού είναι στο $\phi = 0$ και το φωτόνιο παραμένει άμαζο. Απο την άλλη, στο εσωτερικό του αστέρα, $\gamma \neq 0$, και το ϕ αποκτά μη-μηδενική vacuum expectation value.

Το ϕ μπορεί να εκφραστεί μέσω των πραγματικών βαθμωτών ϕ_1, ϕ_2 ως $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)$, και $\phi^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2)$. Για το ελάχιστο του δυναμικού

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \phi} &= 0 \\ \mu_\phi^2 \phi^* + 2\lambda (\phi \phi^*) \phi^* - \gamma &= 0 \\ (\phi_1 - i\phi_2) \left[\frac{\mu_\phi^2}{\sqrt{2}} + \frac{\lambda(\phi_1^2 + \phi_2^2)}{\sqrt{2}} \right] - \gamma &= 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Τελικώς το ελάχιστο του δυναμικού $V(\phi)$ προκύπτει για $\phi_2 = 0$ και $\phi_1 = u$, όπου το u είναι μια σταθερά που εξαρτάται από τα λ, μ_ϕ και το γ . Επομένως, το ελάχιστο προκύπτει για $\langle \phi \rangle = \langle \phi^* \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}u$. Για διαταραχές γύρω από το ελάχιστο το ϕ εκφράζεται ως $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(u + h)$, όπου το h είναι ένα Higg-like scalar. Αντικαθιστώντας για το ϕ στον κινητικό όρο της \mathcal{L}_ϕ ,

$$\begin{aligned} (D_\mu \phi)^* (D^\mu \phi) &= (\partial_\mu + ieA_\mu + iekA'_\mu) \frac{1}{\sqrt{2}}(u + h) (\partial^\mu - ieA^\mu - iekA'_\mu) \frac{1}{\sqrt{2}}(u + h) \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu h)^2 + \frac{1}{2}e^2 u^2 A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}e^2 A_\mu A^\mu h^2 + e^2 A_\mu A^\mu u h + e^2 \kappa A_\mu A^\mu u' + e^2 A_{\mu\nu} A^{\mu\nu} + \dots \end{aligned} \quad (4.10)$$

Τελικώς προκύπτει ένα φωτόνιο με μάζα $m_D = eu$. Εκτός του αστεριού $\gamma = 0$, και σε αυτή τη περίπτωση ισχύει $u = 0$.

Όπως και στην περίπτωση εκτός του αστέρα, ο ανάμεικτος κινητικός όρος μπορεί να απαλειφθεί με τον μετασχηματισμό T . Όμως, λόγω της μάζας του φωτονίου εμφανίζεται ένας ανάμεικτος όρος μάζας. Η Λαγκρατζιανή που περιέχει τους όρους μάζας του σκοτεινού και ορατού φωτονίου \mathcal{L}_{mass} μετά το μετασχηματισμό γίνεται

$$\mathcal{L}_{mass} = \frac{1}{2} m_{A'}^2 A'_\mu A'^\mu + \frac{1}{2} m_D^2 A_\mu A^\mu + \kappa m_D^2 A'_\mu A^\mu + \mathcal{O}(\kappa^2) \quad . \quad (4.11)$$

Η διαγωνιοποίηση του πίνακα των μαζών γίνεται με τη χρήση του πίνακα διαγωνιοποίησης P , ώστε η διαγωνοποιημένη Λαγκρατζιανή μαζών $\mathcal{L}_{mass,diag}$ να δίνεται από τη σχέση

$$\mathcal{L}_{mass,diag} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Phi_\mu & \Phi'_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{\Phi}^2 & 0 \\ 0 & m_{\Phi'}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi^\mu \\ \Phi'^\mu \end{pmatrix} \quad , \quad (4.12)$$

όπου Φ and Φ' είναι γραμμικοί συνδυασμοί των A και A' . Υπολογίζοντας τις ιδιοτιμές του P προκύπτει ότι αν $m_D^2 < m_{A'}^2$ τότε, $m_{\Phi'}^2 = m_{A'}^2$ και $m_{\Phi}^2 = m_D^2$. Χρησιμοποιώντας τις ιδιοτιμές μπορούν να υπολογιστούν τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα και ο πίνακας P ισούται με

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\kappa m_D^2}{m_{A'}^2 - m_D^2} \\ \frac{\kappa m_D^2}{m_{A'}^2 - m_D^2} & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

Επομένως, τα A'^{μ} και A^{μ} γίνονται

$$A'^{\mu} = \Phi'^{\mu} + \frac{\kappa m_D^2}{m_{A'}^2 - m_D^2} \Phi^{\mu}, \quad (4.14)$$

$$A^{\mu} = \Phi^{\mu} - \frac{\kappa m_D^2}{m_{A'}^2 - m_D^2} \Phi'^{\mu}. \quad (4.15)$$

Με παρόμοιες εκφράσεις για τα $F_{\Phi\mu\nu}$ και $F_{\Phi'\mu\nu}$. Αντικαθιστώντας τις σχέσεις τη Λαγκρατζιανή του dark sector στον σκοτεινό αστέρα προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}_{D^*} = \bar{\chi}\gamma^{\mu}D_{\mu}\chi - m_{\chi}\bar{\chi}\chi - \frac{1}{4}F_{\Phi'\mu\nu}F_{\Phi'}^{\mu\nu} - \frac{1}{4}F_{\Phi\mu\nu}F_{\Phi}^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_{\Phi'}^2\Phi'_{\mu}\Phi'^{\mu} + \frac{1}{2}m_{\Phi}^2\Phi_{\mu}\Phi^{\mu}, \quad (4.16)$$

όπου η συναλλοίωτη παράγωγος δίνεται από τη σχέση $D_{\mu} = \partial_{\mu} - ig_D\Phi'_{\mu} - \frac{ig_D\kappa m_D^2}{m_{A'}^2 - m_D^2}\Phi_{\mu}$. Επομένως, οι ανάμεικτοι κινητικοί όροι και των μαζών έχουν απαλειφθεί, όμως εμφανίζεται σύζευξη $\sim \frac{g_D\kappa m_D^2}{m_{A'}^2 - m_D^2}$ μεταξύ του ΚΠ φωτονίου και του χ , εφόσον σε πρώτη τάξη $A_{\mu} \simeq \Phi_{\mu}$.

Αντίστοιχα με την περίπτωση εκτός του σκοτεινού αστέρα, μπορεί να βρεθεί η σταθερά σύζευξης μεταξύ των Φ and Φ' και των σωματιδίων του ΚΠ. Για ένα Dirac φερμιονιο, $\mathcal{L}_{\text{fermion}} = i\bar{\psi}\gamma^{\mu}D_{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi$, όπου η συναλλοίωτη παράγωγος δίνεται από τη σχέση

$$D_{\mu} = \partial_{\mu} - ieA_{\mu} - ie\kappa A'_{\mu} = \partial_{\mu} - ie\left[1 + \frac{\kappa^2 m_D^2}{m_{A'}^2 - m_D^2}\right]\Phi_{\mu} - ie\left[\kappa - \frac{\kappa m_D^2}{m_{A'}^2 - m_D^2}\right]\Phi'_{\mu}. \quad (4.17)$$

που δίνει τη σταθερά σύζευξης για το φερμιόνιο και τα Φ , Φ' . Θέτοντας $m_D = 0$, προκύπτουν οι ίδιες σχέσεις με εκτός του αστέρα, δηλαδή το σκοτεινό φωτόνιο συζευγνύεται με τα ΚΠ σωματίδια, αλλά το ΚΠ φωτόνιο δεν αλληλεπιδρά με το σκοτεινό σωματίδιο.

4.3 Feynman Rules

Στις επόμενες ενότητες του κεφαλαίου μελετώνται οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ των σωματιδίων σκοτεινής και ορατής ύλης στο μοντέλο του σκοτεινού φωτονίου. Για να υπολογισθεί η ενεργός διατομή μιας τέτοιας αλληλεπίδρασης εισάγονται οι κανόνες Feynman:

1. Διαδότης του σκοτεινού φωτονίου

$$\begin{array}{c} \text{~~~~~} \\ \xrightarrow{q} \end{array} = \frac{-i}{q^2 - m_{A'}^2} \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_{\mu}q_{\nu}}{m_{A'}^2} \right)$$

2. Φερμιονική σκοτεινή ύλη - σκοτεινό φωτόνιο vertex

$$\begin{array}{c} \chi \\ \nearrow \\ \chi \longrightarrow \text{---} \\ \searrow \\ \text{~~~~~} \\ A' \end{array} = -ig_D\gamma^{\mu}.$$

4.4 Σκέδαση: $\chi p \rightarrow \chi p$

Σε αυτή την ενότητα υπολογίζεται η ενεργός διατομή για την σκέδαση ενός σκοτεινού σωματιδίου χ με ένα πρωτόνιο με την ανταλλαγή ενός σκοτεινού φωτονίου, όπως φαίνεται στο Σχήμα ???. Από το διάγραμμα Feynman, το πλάτος σκέδασης (scattering amplitude) \mathcal{M} μπορεί να εκφραστεί ως

$$i\mathcal{M} = [\bar{u}_{\sigma_4}(p_4)ig_p\gamma_{\mu}u_{\sigma_2}(p_2)] \frac{-i\left(g^{\mu\nu} - \frac{q^{\mu}q^{\nu}}{m_{A'}^2}\right)}{q^2 - m_{A'}^2} [\bar{u}_{\sigma_3}(p_3)ig_D\gamma_{\nu}u_{\sigma_1}(p_1)], \quad (4.18)$$

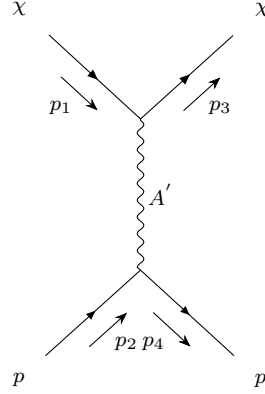


Figure 1: Διάγραμμα για την σκέδαση σκοτεινού σωματιδίου με πρωτόνιο με την ανταλλαγή ενός σκοτεινού φωτονίου

όπου $g_p = ek$ είναι η σταθερά σύζευξης μεταξύ του σκοτεινού φωτονίου και του πρωτονίου και g_D μεταξύ του σκοτεινού φωτονίου και του χ . Οι όροι ανάλογοι με $q^\mu q^\nu$ απαλείφονται και προκύπτει ότι

$$\mathcal{M} = \frac{g_p g_D}{q^2 - m_{A'}^2} [\bar{u}_{\sigma_4}(p_4) \gamma^\mu u_{\sigma_2}(p_2)] [\bar{u}_{\sigma_3}(p_3) \gamma_\mu u_{\sigma_1}(p_1)]. \quad (4.19)$$

Ενδιαφερόμαστε για τη μη-πολωμένη ενεργό διατομή. Το μη-πολωμένο πλατος σκέδασης, $|\overline{\mathcal{M}}|^2$, προκύπτει αθροίζοντας όλα τα spin ή πολώσεις των τελικών καταστάσεων και παίρνοντας τον μέσο όρο των spin ή πολώσεων των αρχικών καταστάσεων [37]

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{1}{(2s_A + 1)(2s_B + 1)} \sum_{\text{all spin states}} |\mathcal{M}|^2, \quad (4.20)$$

όπου s_A, s_B είναι τα spin των αρχικών σωματιδίων. Για την σκέδαση χ με το πρωτόνιο και τα δύο σωματίδια έχουν spin $\frac{1}{2}$, και συνεπώς ο πρώτος όρος είναι ίσος με $\frac{1}{4}$. Επομένως το $|\overline{\mathcal{M}}|^2$ δίνεται από τη σχέση

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \sum_{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4} \frac{1}{4} |\mathcal{M}|^2 = \frac{g_p^2 g_D^2}{4(q^2 - m_{A'}^2)^2} L^{\mu\nu} \tilde{L}_{\mu\nu}^{DM}, \quad (4.21)$$

Ο τένσορας για το vertex σκοτεινού φωτονίου-πρωτονίου δίνεται από

$$L^{\mu\nu} = \sum_{\sigma_2, \sigma_4} [\bar{u}_{\sigma_4}(p_4) \gamma^\mu u_{\sigma_2}(p_2)] [\bar{u}_{\sigma_4}(p_4) \gamma^\nu u_{\sigma_2}(p_2)]^*, \quad (4.22)$$

με παρόμοια έκφραση για το $\tilde{L}_{\mu\nu}^{DM}$. Η έκφραση για το $L^{\mu\nu}$ μπορεί να απλοποιηθεί χρησιμοποιώντας το 'κόλπο' του Casimir [38]

$$\sum_{\text{all spins}} [\bar{u}_a \Gamma_1 u_b] [\bar{u}_a \Gamma_2 u_b]^* = \text{Tr}[\Gamma_1 (\not{p}_b + m_b) \Gamma_2 (\not{p}_a + m_a)]. \quad (4.23)$$

Επομένως, το $L^{\mu\nu}$ μπορεί να υπολογισθεί ως

$$\begin{aligned} L^{\mu\nu} &= \text{Tr} \left[\gamma^\mu (\not{p}_2 + m_p) \gamma^\nu (\not{p}_4 + m_p) \right] \\ &= 4 \left(p_2^\mu p_4^\nu + p_4^\mu p_2^\nu + \frac{1}{2} q^2 g^{\mu\nu} \right), \end{aligned} \quad (4.24)$$

χρησιμοποιώντας τις σχέσεις για τα traces των γ -πινάκων που παρουσιάζονται στο Παράρτημα B. Αντίστοιχα για το $\tilde{L}_{\mu\nu}^{DM}$,

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{\mu\nu}^{DM} &= \sum_{\sigma_1, \sigma_3} [\bar{u}_{\sigma_3}(p_3) \gamma_\mu u_{\sigma_1}(p_1)] [\bar{u}_{\sigma_1}(p_1) \gamma_\nu u_{\sigma_3}(p_3)] \\ &= \text{Tr} \left[\gamma_\mu (\not{p}_1 + m_\chi) \gamma_\nu (\not{p}_3 + m_\chi) \right] \\ &= 4 \left(p_{\mu 1} p_{\nu 3} + p_{\mu 3} p_{\nu 1} + \frac{1}{2} q^2 g_{\mu\nu} \right) \end{aligned} \quad (4.25)$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις για τους τένσορες στο πλάτος σκέδασης, το $|\overline{\mathcal{M}}|^2$ δίνεται από τη σχέση

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{g_p^2 g_D^2}{4(q^2 - m_{A'}^2)^2} \left(2(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) + 2(p_2 \cdot p_3)(p_1 \cdot p_4) + q^2(m_p^2 + m_\chi^2) \right). \quad (4.26)$$

Η έκφραση για το $|\overline{\mathcal{M}}|^2$ μπορεί να απλοποιηθεί χρησιμοποιώντας τις σχέσεις για τις μεταβλητές Mandelstam s, t και u όπως ορίζονται στο Παράρτημα Α για την περίπτωση της ελαστικής σκέδασης. Με αυτό τον τρόπο, το $|\overline{\mathcal{M}}|^2$ γίνεται

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{32\pi^2 \alpha \alpha_D \kappa^2}{(t - m_{A'}^2)^2} \left(2(s - m_p^2 - m_\chi^2)^2 + 2st + t^2 \right), \quad (4.27)$$

όπου α είναι η σταθερά λεπτής υφής και $\alpha_D = \frac{g_D^2}{4\pi}$ είναι η σκοτεινή σταθερά λεπτής υφής.

Η διαφορική ενεργός διατομή σκέδασης στο σύστημα κέντρου μάζας δίνεται από τη σχέση

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{CM} = \frac{|\overline{\mathcal{M}}|^2}{64\pi^2 s} = \alpha \alpha_D \kappa^2 \frac{\left(2(s - m_p^2 - m_\chi^2)^2 + 2st + t^2 \right)}{s(t - m_{A'}^2)^2}. \quad (4.28)$$

Η μη σχετικιστική ενεργός διατομή σκέδασης για σταθερή μεταφερόμενη ορμή $|\vec{q}| = \alpha m_p$, προκύπτει χρησιμοποιώντας τη μη-σχετικιστική έκφραση $s \simeq (m_\chi + m_p)^2$ ως

$$\bar{\sigma}_p = \frac{|\overline{\mathcal{M}}|^2_{(q=\alpha m_p)}}{16\pi(m_\chi + m_p)^2} = \frac{\mu_{\chi p}^2 |\overline{\mathcal{M}}|^2_{(q=\alpha m_p)}}{16\pi m_\chi^2 m_p^2}, \quad (4.29)$$

όπου $\mu_{\chi p} = \frac{m_\chi m_p}{m_\chi + m_p}$ είναι ανηγμένη μάζα του σκοτεινού σωματιδίου και του πρωτονίου. Στο μη-σχετικιστικό όριο, το $|\overline{\mathcal{M}}|^2$ δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{32\pi^2 \alpha \alpha_D \kappa^2}{(q^2 + m_{A'}^2)^2} \left(8m_p^2 m_\chi^2 + 2(m_\chi + m_p)^2 (\alpha m_p)^2 + (\alpha m_p)^4 \right) \\ &\simeq \frac{(16\pi)^2 \alpha \alpha_D \kappa^2}{(q^2 + m_{A'}^2)^2} m_p^2 m_\chi^2, \end{aligned} \quad (4.30)$$

όπου αγνοούμε όρους $\mathcal{O}(\alpha^2)$. Επομένως προκύπτει ότι

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2_{(q=\alpha m_p)} \simeq \frac{(16\pi)^2 \alpha \alpha_D \kappa^2}{(\alpha^2 m_p^2 + m_{A'}^2)^2} m_p^2 m_\chi^2 \quad (4.31)$$

$$\bar{\sigma}_p \simeq \frac{16\pi \alpha \alpha_D \kappa^2 \mu_{\chi p}^2}{(\alpha^2 m_p^2 + m_{A'}^2)^2} \quad (4.32)$$

Η έκφραση για την ενεργό διατομή μπορεί να υπολογισθεί για την περίπτωση ανάλογα με την μάζα του σκοτεινού φωτονίου

$$\bar{\sigma}_p = \begin{cases} \frac{16\pi \alpha \alpha_D \kappa^2 \mu_{\chi p}^2}{m_{A'}^4} & m_{A'} \gg \alpha m_p \\ \frac{16\pi \alpha \alpha_D \kappa^2 \mu_{\chi p}^2}{(\alpha m_p)^4} & m_{A'} \ll \alpha m_p \end{cases} \quad (4.33)$$

Εναλλακτικά η μη-σχετικιστική ενεργός διατομή σκέδασης μπορεί να εκφραστεί μέσω την ελεύθερης ενεργού διατομής σκέδασης $\sigma_p^{q=0}$ που δίνεται από τη σχέση

$$\sigma_p^{q=0} = \frac{16\pi \alpha \alpha_D \kappa^2 \mu_{\chi p}^2}{m_{A'}^4}. \quad (4.34)$$

Με αυτόν τον τρόπο η ενεργός διατομή σκέδασης γίνεται

$$\sigma_p = \frac{\sigma_p^{q=0} m_{A'}^4}{(q^2 + m_{A'}^2)^2}. \quad (4.35)$$

4.5 Compton-like διαδικασία, $e^- A' \rightarrow e^- \gamma$

Σε αυτή την ενότητα υπολογίζεται η διαφορική ενεργός διατομή σκέδασης για την Compton-like διαδικασία $e^- A' \rightarrow e^- \gamma$, κατά την οποία ένα σκοτεινό φωτόνιο απορροφάται από ένα ηλεκτρόνιο το οποίο στη συνέχεια εκπέμπει ένα ορατό φωτόνιο. Τα δύο διαγράμματα Feynman μικρότερης

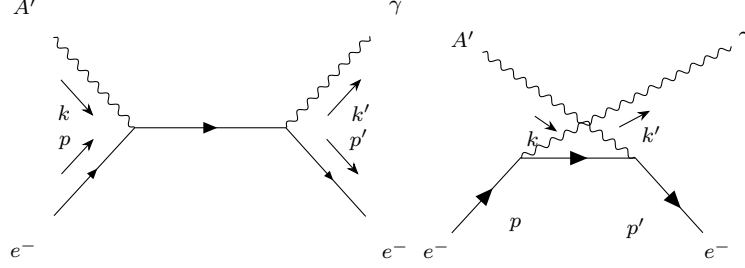


Figure 2: Διάγραμματα Feynman για τη Compton-like διαδικασία $e^- A' \rightarrow e^- \gamma$

τάξης για τη Compton-like διαδικασία παρουσιάζονται στο Σχήμα 2. Για μια εξωτερική γραμμή φωτονίου χρησιμοποιείται το διάνυσμα πόλωσης ϵ_μ και ϵ_μ^* για εισερχόμενα και εξερχόμενα φωτόνια αντίστοιχα [37]. Σε αυτή τη περίπτωση μεταχειριζόμαστε το σκοτεινό φωτόνιο ως ένα spin-1 vector με μάζα. Λαμβάνοντας υπόψη τους κανόνες Feynman rules, για τα πλάτη σκέδασης \mathcal{M}_1 και \mathcal{M}_2 για τα διαγράμματα του Σχήματος 2 αριστερά και δεξιά αντίστοιχα, προκύπτει ότι

$$-i\mathcal{M}_1 = \bar{u}(p')\epsilon_\nu'^*(ie\gamma^\nu)\frac{i(\not{p} + \not{k} + m_e)}{(p+k)^2 - m_e^2}(iek\gamma^\mu)\epsilon_\mu u(p), \quad (4.36)$$

$$-i\mathcal{M}_2 = \bar{u}(p')\epsilon_\mu(iek\gamma^\mu)\frac{i(\not{p} - \not{k}' + m_e)}{(p-k')^2 - m_e^2}(ie\gamma^\nu)\epsilon_\nu'^* u(p). \quad (4.37)$$

Το πλάτος σκέδασης για τα δύο διαγράμματα συνδυάζονται $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$ και προκύπτει ότι

$$\mathcal{M} = e^2 \kappa \epsilon_\nu'^* \epsilon_\mu \bar{u}(p') \left[\frac{\gamma^\nu (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\mu}{(p+k)^2 - m_e^2} + \frac{\gamma^\mu (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma^\nu}{(p-k')^2 - m_e^2} \right] u(p). \quad (4.38)$$

Το πλάτος σκέδασης \mathcal{M} μπορεί να γραφτεί στη μορφή $\mathcal{M} = \epsilon_\nu'^* \epsilon_\mu T^{\nu\mu}$. Όπως και στη προηγούμενη ενότητα ενδιαφερόμαστε για την μη-πολωμένη ενεργό διατομή σκέδασης. Για το άθροισμα πάνω στις πολώσεις του φωτονίου χρησιμοποιούμε τη completeness relation

$$\sum \epsilon_\nu^* \epsilon_\nu \rightarrow -g_{\nu\nu'}. \quad (4.39)$$

Για το σκοτεινό φωτόνιο με μάζα η completeness relation είναι εκείνη ενός διανυσματικού σωματιδίου με μάζα, που δίνεται από τη σχέση [37]

$$\sum \epsilon_\mu^* \epsilon_\mu = -g_{\mu\mu'} + \frac{k_\mu k_{\mu'}}{m_{A'}^2}, \quad (4.40)$$

όπου το άθροισμα είναι πάνω στις τρεις καταστάσεις πόλωσης ενός σωματιδίου με μάζα. Χρησιμοποιώντας τις completeness relations και το κόλπο του Casimir για τον τένσορα $T^{\nu\mu}$, το $|\mathcal{M}|^2$ εκφράζεται ως

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 = & \frac{e^4 \kappa^2}{6} (-g_{\nu\nu'}) \left(-g_{\mu\mu'} + \frac{k_\mu k_{\mu'}}{m_{A'}^2} \right) \text{Tr} \left[\left(\frac{\gamma^\nu (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\mu}{s - m_e^2} + \frac{\gamma^\mu (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma^\nu}{u - m_e^2} \right) (\not{p} + m_e) \times \right. \\ & \left. \left(\frac{\gamma^{\mu'} (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^{\nu'}}{s - m_e^2} + \frac{\gamma^{\nu'} (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma^{\mu'}}{u - m_e^2} \right) (\not{p}' + m_e) \right] \end{aligned} \quad (4.41)$$

Σε αυτή τη περίπτωση τα εισερχόμενα σωματίδια είναι το σκοτεινό φωτόνιο και το ηλεκτρόνιο με spin 1 και $\frac{1}{2}$ αντίστοιχα, και επομένως ο πολλαπλασιαστικός όρος μπροστά είναι $\frac{1}{6}$. Για τον υπολογισμό οι όροι

του trace του $|\overline{\mathcal{M}}|^2$ χωρίζονται σε τέσσερις όρους $I-IV$, και υπολογίζονται ξεχωριστά χρησιμοποιώντας τις σχέσεις των Παραρτημάτων Α και Β.

$$\begin{aligned} I &= \frac{-g_{\nu\nu'}}{(s-m_e^2)^2} \left(-g_{\mu\mu'} + \frac{k_\mu k_{\mu'}}{m_{A'}^2} \right) \text{Tr} \left[\gamma^\nu (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\mu (\not{p} + m_e) \gamma^{\nu'} (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^{\mu'} (\not{p}' + m_e) \right] \\ &= \frac{16m_e^2 m_{A'}^2 + 4(m_e^4 + 8m_e^2 s - s^2 + 2m_e^2 u - 2su)}{(s-m_e^2)^2} \\ &\quad + \frac{4(-4m_e^6 + 9m_e^4 s - 6m_e^2 s^2 + s^3 + m_e^4 u - 2m_e^2 su + s^2 u)}{(s-m_e^2)^2 m_{A'}^2} \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned} II &= \frac{-g_{\nu\nu'}}{(s-m_e^2)(u-m_e^2)} \left(-g_{\mu\mu'} + \frac{k_\mu k_{\mu'}}{m_{A'}^2} \right) \text{Tr} \left[\gamma^\nu (\not{p} + \not{k} + m_e) \gamma^\mu (\not{p} + m_e) \gamma^{\nu'} (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma^{\mu'} (\not{p}' + m_e) \right] \\ &= \frac{-8m_{A'}^4 + 4m_{A'}^2(-4m_e^2 + 2(s+u)) + 4(5m_e^4 + m_e^2(s+u) + su)}{m_{A'}^2 (s-m_e^2)(u-m_e^2)} \\ &\quad + \frac{4(4m_e^6 - 5m_e^4(s+u) + m_e^2(s^2+u^2) + 6m_e^2 su - s^2 u - su^2)}{m_{A'}^2 (s-m_e^2)(u-m_e^2)} \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} III &= \frac{-g_{\nu\nu'}}{(s-m_e^2)(u-m_e^2)} \left(-g_{\mu\mu'} + \frac{k_\mu k_{\mu'}}{m_{A'}^2} \right) \text{Tr} \left[\gamma^\mu (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma^\nu (\not{p} + m_e) \gamma^{\mu'} (\not{p} - \not{k} + m_e) \gamma^{\nu'} (\not{p}' + m_e) \right] \\ &= II \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned} IV &= \frac{-g_{\nu\nu'}}{(u-m_e^2)^2} \left(-g_{\mu\mu'} + \frac{k_\mu k_{\mu'}}{m_{A'}^2} \right) \text{Tr} \left[\gamma^\mu (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma^\nu (\not{p} + m_e) \gamma^{\nu'} (\not{p} - \not{k}' + m_e) \gamma^{\mu'} (\not{p}' + m_e) \right] \\ &= \frac{16m_e^2 m_{A'}^2}{(u-m_e^2)^2} - \frac{4(-m_e^4 - 2m_e^2 s - 8m_e^2 u + 2su + u^2)}{(u-m_e^2)^2} - \frac{4(4m_e^6 - m_e^4 s - 9m_e^4 u + 2m_e^2 su + 6m_e^2 u^2 - su^2 - u^3)}{m_{A'}^2 (u-m_e^2)^2} \end{aligned} \quad (4.45)$$

Συνδιάζοντας τους όρους $I-IV$, οι όροι ανάλογοι $\frac{1}{m_{A'}^2}$ απαλείφονται και το $|\overline{\mathcal{M}}|^2$ εκφράζεται ως

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{e^4 \kappa^2}{6} \left[-\frac{16m_{A'}^4}{(s-m_e^2)(u-m_e^2)} + m_{A'}^2 \left(\frac{8(-4m_e^2 + 2(s+u))}{(s-m_e^2)(u-m_e^2)} + \frac{16m_e^2}{(s-m_e^2)^2} + \frac{16m_e^2}{(u-m_e^2)^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{16(2m_e^4 + m_e^2(s+u))}{(s-m_e^2)(u-m_e^2)} + \frac{8(m_e^4 + m_e^2(s+u) - su)}{(s-m_e^2)^2} + \frac{8(m_e^4 + m_e^2(s+3u) - su)}{(u-m_e^2)^2} \right]. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Για το όριο $m_{A'} \rightarrow 0$ και $\kappa = 1$, το αποτέλεσμα συμφωνεί μέχρι τον αριθμό των πολώσεων με το αποτέλεσμα για την κανονική σκέδαση Compton. Επομένως, $|\overline{\mathcal{M}}|^2$ μπορεί να εκφραστεί ως

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{64\pi^2 \alpha^2 \kappa^2}{3} \left[\frac{4m_e^4 + 2(m_e^2 + m_{A'}^2)(s+u) - 4m_e^2 m_{A'}^2 - 2m_{A'}^4}{(s-m_e^2)(u-m_e^2)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{m_e^4 + m_e^2(3s+u) + 2m_e^2 m_{A'}^2 - su}{(s-m_e^2)^2} + \frac{m_e^4 + m_e^2(s+3u) + 2m_e^2 m_{A'}^2 - su}{(u-m_e^2)^2} \right]. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Σε αυτή τη περίπτωση η διαφορική ενεργός διατομή σκέδασης στο σύστημα του κέντρου μάζας δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{CM} &= \frac{|\overline{\mathcal{M}}|^2}{64\pi^2 s} = \frac{\alpha^2 \kappa^2}{3s} \left[\frac{4m_e^4 + 2(m_e^2 + m_{A'}^2)(s+u) - 4m_e^2 m_{A'}^2 - 2m_{A'}^4}{(s-m_e^2)(u-m_e^2)} + \frac{m_e^4 + m_e^2(3s+u) + 2m_e^2 m_{A'}^2 - su}{(s-m_e^2)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{m_e^4 + m_e^2(s+3u) + 2m_e^2 m_{A'}^2 - su}{(u-m_e^2)^2} \right] \end{aligned} \quad (4.48)$$

5 Άμεση ανίχνευση Σκοτεινής ύλης

Σκοτεινά σωματίδια από τον γαλακτικό θόλο, όπως περνούν από τη Γή, μπορούν να σκεδαστούν ελαστικά από βαρυονικά σωματίδια σε έναν επίγειο ανιχνευτή. Τα πειράματα άμεσης ανίχνευσης τις τελευταίες δεκαετίες έχουν κυρίως επικεντρωθεί στη ελαστική σκέδαση WIMPs από ατομικούς πυρήνες. Αν και δεν έχει ανιχνευθεί ακόμα ένα τέτοιο σήμα, τα πειράματα έχουν καταφέρει να προσδιορίσουν ισχυρά όρια τα οποία περιορίζουν την τιμή της ενεργού διατομής για την σκέδαση WIMP από πυρήνα. Όμως λόγω της απουσίας σήματος και των ισχυρών περιορισμών για WIMPs, οι πειραματικές έρευνες ψάχνουν και για εναλλακτικές των συγκεκριμένων σωματιδίων. Ένα παράδειγμα είναι η σκέδαση σκοτεινού σωματιδίου με πρωτόνιο με την ανταλλαγή ενός σκοτεινού φωτονίου με κινητική ανάμειξη με το ΚΠ φωτόνιο.

5.1 Εισαγωγή στην άμεση ανίχνευση

Γενικά, τα πειράματα άμεσης ανίχνευσης μετρούν την ενέργεια ανάκρουσης (recoil) E_R , που μεταφέρεται στο βαρυονικό κομμάτι της αλληλεπίδρασης. Το σήμα που δημιουργείται κατηγοριοποιείται ανάλογα με την μορφή με την οποία εναποτίθεται η ενέργεια στον ανιχνευτή, συγκεκριμένα: θερμότητα (φωνόνια), φορτίο (ηλεκτρόνια) και φως (φωτόνια). Επιπλέον, για να ανιχνευθεί το σήμα πρέπει να μπορεί να διακριθεί από τις διαδικασίες υποβάθρου, όπως ανακρούσεις ατομικών ηλεκτρονίων και ανακρούσεις πυρήνων που μπορούν να προκύψουν από πυρηνική σχάση. Επομένως, τέτοιου είδους πειράματα χρειάζονται να έχουν ένα πολύ χαμηλό υπόβαθρο. Για αυτόν τον σκοπό, τα περισσότερα πειράματα είναι υπόγεια κατασκευασμένα με υλικά με χαμηλά επίπεδα ενδογενούς ραδιενέργειας και ένα αποδοτικό σύστημα προάσπισης για την ελαχιστοποίηση των εξωτερικών πηγών θορύβου [3].

Το σήμα αναμένεται να είναι ομοιόμορφα κατανομημένο στον ανιχνευτή. Επιπλέον, αναμένεται να παρατηρηθεί ετήσια μεταβολή στο σήμα λόγω της κίνησης της Γης γύρω από τον Ήλιο όπως κινείται το σύστημα μέσα στο γαλακτικό θόλο.

Θεωρούμε ένα σκοτεινό σωματίδιο μάζας m_χ και τους πυρήνες του στόχου μάζας m_N που ηρεμούν στο σύστημα του εργαστηρίου. Ο σκοπός των πειραμάτων είναι να μετρηθεί ο διαφορικός ρυθμός $\frac{dR}{dE_R}$ όπου R είναι ο ρυθμός γεγονότων και E_R είναι η πυρηνική ενέργεια ανάκρουσης. Στο σύστημα του εργαστηρίου, θεωρούμε ένα εισερχόμενο σκοτεινό σωματίδιο με ταχύτητα v που σκεδάζεται ελαστικά από το σταθερό στόχο, οδηγώντας σε μεταφορά ορμής q , που δίνεται από τη σχέση $E_R = \frac{|q|^2}{2m_N}$. Στο σύστημα αυτό, μετά τη σκέδαση, το σκοτεινό σωματίδιο σκεδάζεται σε γωνία θ' με ταχύτητα v' και ο πυρήνας σε γωνία θ . Η ενέργεια ανάκρουσης συναρτήσε της μάζας των σωματιδίων και την αρχική ταχύτητα του σκοτεινού σωματιδίου μπορεί να βρεθεί χρησιμοποιώντας τις σχέσεις διατήρησης ενέργειας και ορμής. Με αυτόν τον τρόπο προκύπτει ότι

$$E_R = \frac{2\mu v^2 \cos^2 \theta}{m_N}, \quad (5.1)$$

όπου $\mu = \frac{m_N m_\chi}{m_N + m_\chi}$ είναι η ανηγμένη μάζα. Μεγιστοποιώντας ως προς το θ προκύπτει κατώφλι ενέργειας $E_R \leq \frac{2\mu v^2}{m_N}$. Επομένως, με βάση αυτό για ενέργεια ανάκρουσης E_R το εισερχόμενο σκοτεινό σωματίδιο πρέπει να έχει μεγαλύτερη ενέργεια από την ελάχιστη u_{\min} , που δίνεται από τη σχέση

$$u_{\min} = \sqrt{\frac{E_R m_N}{2\mu^2}}. \quad (5.2)$$

Για την ερμηνεία του σήματος από σκοτεινή ύλη σε πειράματα άμεσης ανίχνευσης είναι απαραίτητη η γνώση για την κατανομή και κινηματική των σκοτεινών σωματιδίων στο γαλακτικό θόλο. Εάν και η ακριβής κατανομή είναι άγνωστη, μπορεί να μοντελοποιηθεί χρησιμοποιώντας παρατηρήσεις και προσομοιώσεις σκοτεινής ύλης που βασίζονται στη βαρύτητα. Όμως σε πειράματα άμεσης ανίχνευσης έχει σημασία η πυκνότητα της σκοτεινής ύλης στην τοπική περιοχή κοντά στην ηλιακή ακτίνα από το κέντρο του γαλαξία, R_0 . Συνήθως η τιμή που υιοθετείται για την τοπική πυκνότητα σκοτεινής ύλης είναι $\rho_0 \simeq 0.3 \text{ GeV}/\text{cm}^3$, εάν και υπάρχει μεγάλη αβεβαιότητα στη μέτρηση.

Συνήθως η κατανομή της ταχύτητας των σωματιδίων σκοτεινής ύλης περιγράφεται από το λεγόμενο *Standard halo model*. Σε αυτό το μοντέλο, θεωρείται ότι η σκοτεινή ύλη είναι κατανομημένη σε μια

ισοτροπική και ισόθερμη σφαίρα και ακολουθεί μια κατανομή ταχυτήτων Maxwell Boltzmann που δίνεται από τη σχέση

$$f(u, u_E) = \frac{1}{N} \exp - \frac{(\vec{u} + \vec{u}_E)^2}{u_0^2}, \quad (5.3)$$

όπου $u_0 \simeq 220 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ είναι η τυπική κυκλική ταχύτητα για ένα σκοτεινό σωματίδιο στη περιοχή του Ήλιου σε ακτίνα $R_0 \simeq 8.0 \text{ kpc}$, και $N = \int f(u, u_E) d^3u$ η σταθερά κανονικοποίησης. Η \vec{u}_E αναφέρεται στην ταχύτητα με την οποία η Γη κινείται σχετικά με το σύστημα του γαλαξία. Εάν και η ταχύτητα αλλάζει μέσα στον χρόνο λόγω της περιφοράς γύρω από τον Ήλιο, η μεταβολές στο σήμα αναμένονται να είναι μικρές σε σχέση με το υπόλοιπο σήμα και επομένως μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $u_E \approx \text{constant} = 247 \text{ km/s}$.

Στη πραγματικότητα η $f(u, u_E)$ είναι μια συντετημένη κατανομή Maxwell Boltzmann λόγω της μέγιστης ταχύτητας διαφυγής, u_{esc} καθώς και την ελάχιστη ταχύτητα που πρέπει να έχουν για να προκαλέσουν σκέδαση με ενέργεια ανακρούσης E_R . Σκοτεινά σωματίδια με ταχύτητες πάνω από τη ταχύτητα διαφυγής $u_{\text{esc}} = 544 \text{ km/s}$ διαφεύγουν από τη βαρυτική έλξη του θόλου. Επομένως λαμβάνοντας τα παραπάνω υπόψη η κατανομή εκφράζεται ως

$$f(\vec{u}) = \begin{cases} \frac{1}{N} e^{-u^2/u_0^2}, & u \leq u_{\text{esc}} \\ 0, & u > u_{\text{esc}} \end{cases}, \quad (5.4)$$

όπου $u_i = |\vec{u}_i|$ και η σταθερά κανονικοποίησής γίνεται

$$N = \int_{u_{\text{min}}}^{\infty} f(u) d^3u = \pi^{3/2} u_0^3 \left(\text{erf} \left(\frac{u_{\text{esc}}}{u_0} \right) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{u_{\text{esc}}}{u_0} e^{-\frac{u_{\text{esc}}^2}{u_0^2}} \right), \quad (5.5)$$

όπου η δεύτερη ισότητα προκύπτει αντικαθιστώντας το \vec{u} με $\vec{u} + \vec{u}_E$ στην κατανομή.

Τέλος, πρέπει να σημειωθεί ότι υπάρχουν πολλές αβεβαιότητες στις μετρήσεις των παραμέτρων που περιγράφουν την κατανομή της σκοτεινής ύλης στο γαλαξία [42]. Όμως συνήθως στα πειράματα άμεσης ανίχνευσης υιοθετείται μια κοινή τιμή για τις παραμέτρους ώστε να μπορεί να γίνει σύγκριση μεταξύ των διαφόρων πειραμάτων.

Η ποσότητα ενδιαφέροντος σε ένα πείραμα άμεσης ανίχνευσης είναι ο διαφορικός ρυθμός γεγονότων $\frac{dR}{dE_R}$. Συνήθως εκφράζεται σε μονάδες γεγονότων ανά kg μάζα ανιχνευτή ανά ημέρα λειτουργίας ανα keV ενέργειας, γνωστό ως *differential rate unit* (dru) [43]. Ο ρυθμός σκέδασης είναι $R = N_T n_\chi \sigma u$, για πυρήνες στον ανιχνευτή που σκεδάζονται από σκοτεινά σωματίδια, όπου N_T είναι ο αριθμός των πυρήνων, $n_\chi = \rho_\chi / m_\chi$, σ είναι η ενεργός διατομή για τη σκέδαση και u είναι η ταχύτητα των εισερχόμενων σκοτεινών σωματιδίων. Χρησιμοποιώντας την κατανομή ταχυτήτων ο διαφορικός ρυθμός σκέδασης μπορεί να εκφραστεί ως

$$\frac{dR}{dE_R} = N_T \frac{\rho_\chi}{m_\chi} \int_{u_{\text{min}}}^{\infty} u f(\vec{u} + \vec{u}_E) \frac{d\sigma}{dE_R} d^3u, \quad (5.6)$$

όπου $\frac{d\sigma}{dE_R}$ είναι η διαφορική ενεργός διατομή σκέδασης. Για τον ολικό αριθμό των αναμενόμενων γεγονότων, ολοκληρώνεται ο διαφορικός ρυθμός από το κατώφλι ενέργειας E_{low} του ανιχνευτή έως τη μέγιστη ενέργεια E_{high} που αντιστοιχεί σε σκοτεινά σωματίδια με ταχύτητες u_{esc} . Με αυτόν τον τρόπο ο αριθμός των γεγονότων δίνεται από τη σχέση

$$N = T \int_{E_{\text{low}}}^{E_{\text{high}}} dE_R \epsilon(E_R) \frac{dR}{dE_R}, \quad (5.7)$$

όπου είναι ο χρόνος λειτουργίας, ϵ είναι η απόδοση του ανιχνευτή που συνήθως εξαρτάται από την ενέργεια.

Η αλληλεπίδραση μεταξύ των σκοτεινών σωματιδίων και του στόχου μπορεί να κατηγοριοποιηθεί ως ελαστική ή μη-ελαστική και ως spin-dependent (SD) ή spin-independent (SI). Ανάλογα με το υλικό του ανιχνευτή μπορεί να είναι ευαίσθητη είτε SD ή SI αλληλεπιδράσεις. Στη πιο γενική μορφή η διαφορική ενεργός διατομή της σκέδασης μπορεί να εκφραστεί ως

$$\frac{d\sigma}{dE_R} = \frac{m_N}{2u^2 \mu_{\chi N}^2} [\sigma_{SI} F_{SI}^2(E_R) + \sigma_{SD} F_{SD}^2(E_R)], \quad (5.8)$$

όπου $\mu_{\chi N}$ είναι η ανηγμένη μάζα, σ_{SI} και σ_{SD} είναι οι SI και SD ενεργές διατομές σκέδασης αντίστοιχα και F_{SI} και F_{SD} είναι οι αντίστοιχοι form factors. Για μικρή μεταφορά ορμής $q = \sqrt{2m_N E_R}$, το αντίστοιχο μήκος κύματος de Broglie $\lambda_{dB} = h/q$, είναι μεγάλο σε σχέση με την πυρηνική ακτίνα και επομένως το σκοτεινό σωματίδιο σχεδάζεται με ολόκληρο τον πυρήνα. Στην περίπτωση αυτή ο form factor είναι ίσος με την μονάδα. Από την άλλη, για μεγάλο q , το λ_{dB} γίνεται μικρότερο από την πυρηνική ακτίνα, και σε αυτή τη περίπτωση μόνο ένα τμήμα του πυρήνα συμμετέχει στην αλληλεπίδραση και ο form factor είναι μικρότερος από την μονάδα. Αυτή η σχέση μεταξύ της μεταφερόμενης ορμής και της πυρηνικής ακτίνας λαμβάνεται υπόψη με τη χρήση του form factor στον υπολογισμό της διαφορικής ενεργούς διατομής.

Για SD αλληλεπιδράσεις το σκοτεινό σωματίδιο συζευγνύεται με ασύζευκτα πυρηνικά spin. Σε αυτή τη περίπτωση η ενεργός διατομή σκέδαση είναι $\sigma_{SD} \propto \frac{J+1}{J}$, [44], όπου J είναι ο ολικός αριθμός πυρηνικών spin.

Για ένα πυρήνα στόχου με Z πρωτόνια και $A - Z$ νετρόνια, η SI ενεργός διατομή σ_{SI} , δίνεται από την [45]

$$\sigma_{SI} = \frac{\mu_{\chi N}^2}{\mu_{\chi p}^2} \frac{[Zf_p + (A - Z)f_n]^2}{f_p^2} \sigma_p^{SI}, \quad (5.9)$$

όπου $\mu_{\chi p}$ είναι η ανηγμένη μάζα, f_p και f_n είναι η σταθερά σύζευξης του σκοτεινού σωματιδίου με τα πρωτόνια και νετρόνια αντίστοιχα, και σ_p^{SI} είναι η ενεργός διατομή για τη σκέδαση του σκοτεινού σωματιδίου από το πρωτόνιο. Μια τυπική παραδοχή είναι ότι $f_p \approx f_n$, και σε αυτή τη περίπτωση

$$\sigma_{SI} = A^2 \frac{\mu_{\chi N}^2}{\mu_p^2} \sigma_p^{SI}. \quad (5.10)$$

Επομένως, για σκοτεινά σωματίδια που συζευγνύονται το ίδιο με πρωτόνια και νετρόνια, η ενεργός διατομή είναι ανάλογη με A^2 , συνεπώς ανιχνευτές με βαρύτερους πυρήνες ως στόχους οδηγούν σε μεγαλύτερο αριθμό αναμενόμενων γεγονότων. Όμως για στόχους με μεγαλύτερη μάζα οδηγούν σε μικρότερη ενέργεια ανάκρουσης που είναι δυσκολότερο να ανιχνευτεί.

Για τις SI αλληλεπιδράσεις ο form factor συνήθως δίνεται από την παραμετροποίηση Lewin-Smith του the Helm form factor [43],

$$F^2(q) = \left(\frac{3j_1(qR)}{qR} \right)^2 e^{-q^2 s^2}, \quad (5.11)$$

όπου j_1 είναι μια σφαιρική συνάρτηση Bessel, $q = \sqrt{2m_N E_R}$ και $R = \sqrt{c^2 + \frac{7}{3}\pi\alpha^2 - 5s^2}$ είναι η πυρηνική ακτίνα με $\alpha \approx 0.52$ fm, $s \approx 0.9$ fm και $c \approx 1.23A^{1/3} - 0.60$ fm.

5.2 Ρυθμός γεγονότων για $\chi p \rightarrow \chi p$ σκέδαση

Ο σκοπός της ενότητας είναι ο υπολογισμός του διαφορικού ρυθμού γεγονότων για την σκέδαση σκοτεινού σωματιδίου με πρωτόνιο με την ανταλλαγή ενός σκοτεινού φωτονίου μάζας $m_{A'}$. Εφόσον η αλληλεπίδραση είναι SI, η διαφορική ενεργός διατομή για τη σκέδαση εκφράζεται ως

$$\frac{d\sigma}{dE_R} = \frac{m_N}{2u^2 \mu_{\chi N}^2} \sigma_{SI} F_{SI}^2, \quad (5.12)$$

όπου $F_{SI}^2 = F^2(q)$ δίνεται από τον Helm form factor. Επιπλέον, εφόσον δεν υπάρχει σύζευξη με τα νετρόνια $f_n = 0$ και επομένως το σ_{SI} δίνεται από τη σχέση

$$\sigma_{SI} = \frac{\mu_{\chi N}^2}{\mu_{\chi p}^2} Z^2 \sigma_p, \quad (5.13)$$

όπου σ_p είναι η ενεργός διατομή της σκέδασης που υπολογίστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο ως

$$\sigma_p = \frac{\sigma_p^{q=0} m_{A'}^4}{(q^2 + m_{A'}^2)^2}, \quad (5.14)$$

όπου η ελεύθερη ενεργός διατομή δίνεται από τη σχέση

$$\sigma_p^{q=0} = \frac{16\pi\alpha_D\kappa^2\mu_{\chi p}^2}{m_{A'}^4}. \quad (5.15)$$

Γενικά, για τη συγκεκριμένη σκέδαση, επειδή δεν υπάρχει σύζευξη με τα νετρώνια, ο διαφορικός ρυθμός γεγονότων είναι ανάλογος του Z^2 . Η ελεύθερη ενεργός διατομή για την σκέδαση σκοτεινού

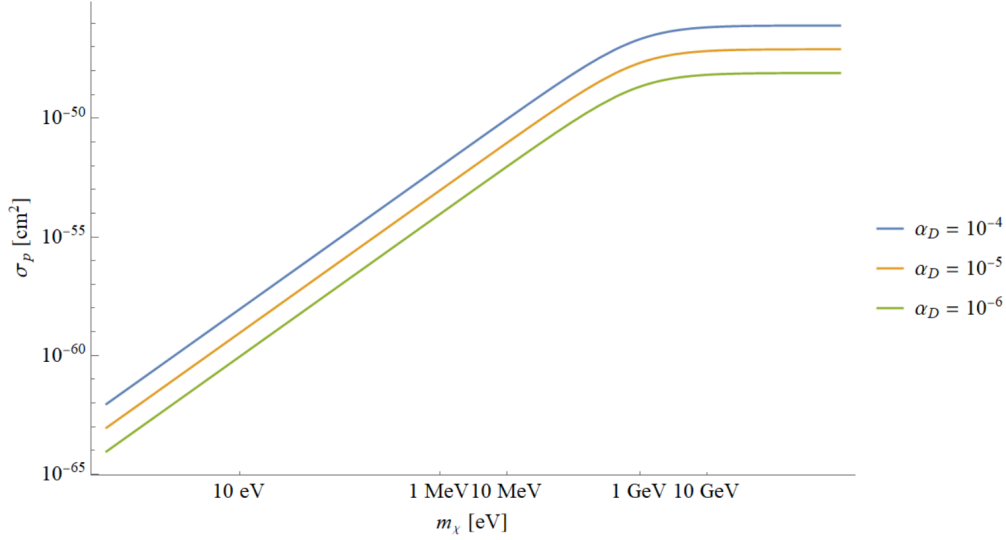


Figure 3: Ελεύθερη ενεργός διατομή για τη σκέδαση σκοτεινού σωματιδίου από πρωτόνιο, σ_p συναρτήσει της μάζας του σκοτεινού σωματιδίου m_χ για σκοτεινό φωτόνιο μάζας $m_{A'} = 5 \text{ GeV}$ και παράμετρο κινητικής ανάμειξης $\kappa = 2 \times 10^{-6}$.

σωματιδίου από πρωτόνιο παρουσιάζεται στο Σχήμα 3, συναρτήσει της μάζας m_χ για διάφορες τιμές της σταθεράς σύζευξης μεταξύ του χ και του σκοτεινού φωτονίου g_D . Η ενεργός διατομή της σκέδασης αυξάνεται γραμμικά με την μάζα μέχρι $m_\chi \simeq m_p$ που στη συνέχεια γίνεται σταθερή με την μάζα.

Αντικαθιστώντας (5.13) και (5.12) στην έκφραση για το διαφορικό ρυθμό γεγονότων προκύπτει ότι

$$\frac{dR}{dE_R} = N_T \frac{\rho_\chi Z^2 m_N}{2\mu_{\chi p}^2 m_\chi} \sigma_p F^2(E_R) \int_{u_{\min}}^{\infty} \frac{f(\vec{u} + \vec{u}_E)}{u} d^3u. \quad (5.16)$$

Το ολοκλήρωμα ταχυτήτων μπορεί να υπολογισθεί αναλυτικά και να δώσει μια συνάρτηση $g(u_{\min}) = \int_{u_{\min}}^{\infty} \frac{f(\vec{u} + \vec{u}_E)}{u} d^3u$. Θέτοντας $x_{esc} = u_{esc}/u_0$, $x_{min} = u_{min}/u_0$ και $x_e = u_e/u_0$ όπου $u_i = |\vec{u}_i|$, ο υπολογισμός σύμφωνα με [42] δίνει αν $x_e + x_{min} < x_{esc}$,

$$g(u_{min}) = g_1 \equiv \frac{\pi^{1/2} u_0^2}{2N x_e} \left[\text{Erf}(x_{min} + x_e) - \text{Erf}(x_{min} - x_e) - \frac{4x_e}{\sqrt{\pi}} e^{-x_{esc}^2} \right]. \quad (5.17)$$

Εάν $x_{min} > |x_{esc} - x_e|$ και $x_e + x_{esc} > x_{min}$,

$$g(u_{min}) = g_2 \equiv \frac{\pi^{1/2} u_0^2}{2N x_e} \left[\text{Erf}(x_{esc}) + \text{Erf}(x_e - x_{min}) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x_{esc}^2} (x_{esc} + x_e - x_{min}) \right], \quad (5.18)$$

όπου N είναι η σταθερά κανονικοποίησης. Σε κάθε άλλη περίπτωση, $g(u_{min}) = 0$. Γενικά, η συνάρτηση του ολοκληρώματος της ταχύτητας

$$g(u_{min}) = g_1 \Theta(x_{esc} - x_e - x_{min}) + g_2 \Theta(x_{esc} + x_e - x_{min}) \Theta(x_{min} - x_{esc} + x_e), \quad (5.19)$$

όπου $\Theta(x)$ είναι η Heaviside συνάρτηση βήματος. Επομένως, χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση $g(u_{min})$, ο διαφορικός ρυθμός γεγονότων γίνεται

$$\frac{dR}{dE_R} = N_T \frac{\rho_0 Z^2 m_N}{2\mu_{\chi p}^2 m_\chi} \sigma_p F^2(E_R) g(u_{min}), \quad (5.20)$$

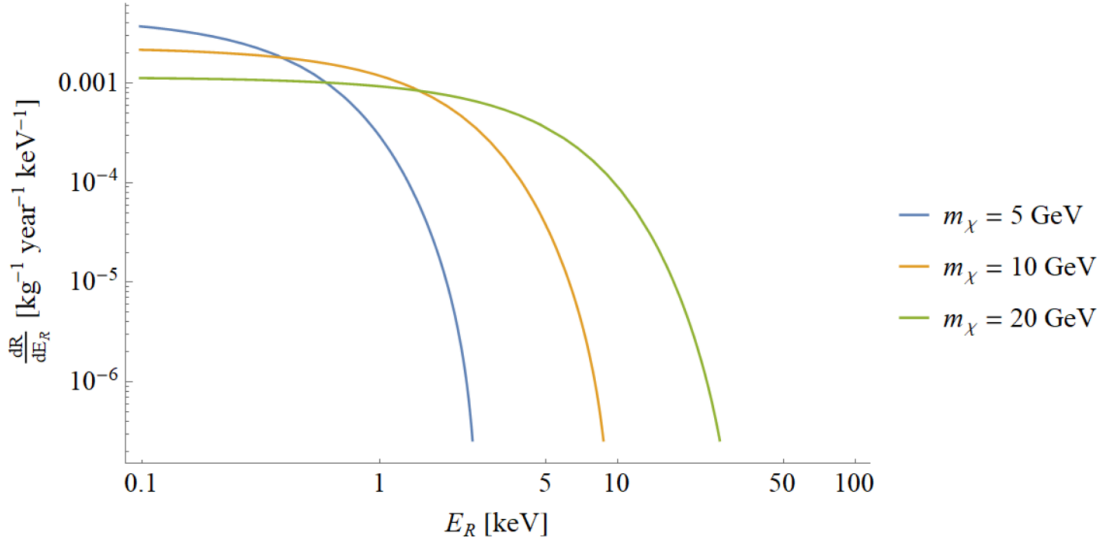


Figure 4: Ο διαφορικός ρυθμός σκέδασης $\frac{dR}{dE_R}$ συναρτήσει της ενέργειας ανάκρουσης E_R για τη σκέδαση σκοτεινού σωματιδίου από πρωτόνιο με την ανταλλαγή ενός σκοτεινού φωτονίου μάζας $m_{A'} = 5 \text{ GeV}$ και παράμετρο κινητικής ανάμειξης $\kappa = 2 \times 10^{-6}$.

με $\rho_\chi \sim \rho_0$. Το N_T μπορεί να εκφραστεί ως αριθμός σωματιδίων ανά kg μάζας ανιχνευτή ως $N_T = N_A/A$, όπου $N_A = 6.022 \times 10^{23}$ είναι ο αριθμός του Avogadro και A ο ατομικός αριθμός του πυρήνα.

Στο Σχήμα 4, ο διαφορικός ρυθμός σκέδασης $\frac{dR}{dE_R}$ παρουσιάζεται συναρτήσει της ενέργειας ανάκρουσης E_R , για τη σκέδαση σκοτεινού σωματιδίου με πρωτόνιο με την ανταλλαγή ενός σκοτεινού φωτονίου μάζας $m_{A'} = 5 \text{ GeV}$ με παράμετρο κινητικής ανάμειξης με το ορατό φωτόνιο $\kappa = 2 \times 10^{-6}$ για μάζες του σκοτεινού σωματιδίου $m_\chi = 5 \text{ GeV}$, 10 GeV , 20 GeV για ανιχνευτή με Ξενο. Όπως ήταν αναμενόμενο, ο διαφορικός ρυθμός σκέδασης μειώνεται καθώς αυξάνεται η ενέργεια ανάκρουσης για κάθε μάζα του σκοτεινού σωματιδίου. Αυτό εν μέρει οφείλεται στο form factor $F^2(E_R)$, που μειώνεται με αυξανόμενο $q = \sqrt{2m_N E_R}$ καθώς και στην μείωση της συνάρτησης $g(u_{\min})$ σε μεγαλύτερες E_R καθώς υπάρχουν λιγότερα σωματίδια με την απαιτούμενη ελάχιστη ενέργεια για να προκαλέσουν σκέδαση με τέτοια ενέργεια ανάκρουσης.

Επιπλέον, η ενέργεια μετά από την οποία $\frac{dR}{dE_R} = 0$, αυξάνεται για μεγαλύτερες μάζες του σκοτεινού σωματιδίου. Εάν $m_\chi \ll m_N$, τότε $\mu_N \approx m_\chi$, σε αυτή τη περίπτωση η ελάχιστη ταχύτητα γίνεται $u_{\min} = \sqrt{m_N E_R / 2m_\chi^2}$. Εάν η ταχύτητα είναι μεγαλύτερη από $u_{\text{esc}} + u_e$, τότε $g(u_{\min}) = 0$ και συνεπώς προκύπτει το άνω όριο

$$\frac{dR}{dE_R} = 0, \text{ for } E_R > \frac{2m_\chi^2(u_{\text{esc}} + u_e)^2}{m_N}. \quad (5.21)$$

Για μικρότερες μάζες του σκοτεινού σωματιδίου, η μέγιστη ενέργεια ανάκρουσης μειώνεται και συνεπώς τα γεγονότα παρατηρούνται σε αρκετά χαμηλές ενέργειες που δημιουργούν δυσκολίες για την πειραματική ανίχνευση.

References

- [1] Vera C. Rubin, W. Kent Ford, Jr., and Norbert Thonnard. Extended rotation curves of high-luminosity spiral galaxies. IV. Systematic dynamical properties, Sa through Sc. *Astrophys. J. Lett.*, 225:L107–L111, 1978.
- [2] Douglas Clowe, Marusa Bradac, Anthony H. Gonzalez, Maxim Markevitch, Scott W. Randall, Christine Jones, and Dennis Zaritsky. A direct empirical proof of the existence of dark matter. *Astrophys. J. Lett.*, 648:L109–L113, 2006.
- [3] Marc Schumann. Direct Detection of WIMP Dark Matter: Concepts and Status. *J. Phys. G*, 46(10):103003, 2019.
- [4] Scott Dodelson. *Modern Cosmology*. Academic Press, Amsterdam, 2003.
- [5] Marco Fabbrichesi, Emidio Gabrielli, and Gaia Lanfranchi. The Dark Photon. 5 2020.
- [6] E. Aprile et al. Dark Matter Search Results from a One Ton-Year Exposure of XENON1T. *Phys. Rev. Lett.*, 121(11):111302, 2018.
- [7] N. Aghanim et al. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters. *Astron. Astrophys.*, 641:A6, 2020.
- [8] Gianfranco Bertone and Dan Hooper. History of dark matter. *Rev. Mod. Phys.*, 90(4):045002, 2018.
- [9] S. M. Faber and J. S. Gallagher. Masses and mass-to-light ratios of galaxies. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 17(1):135–187, 1979.
- [10] F. Zwicky. Republication of: The redshift of extragalactic nebulae. *General Relativity and Gravitation*, 41(1):207–224, January 2009.
- [11] Philippe Fischer et al. Weak lensing with SDSS commissioning data: The Galaxy mass correlation function to $1h^{-1}$ Mpc. *Astron. J.*, 120:1198–1208, 2000.
- [12] C. Alcock, R. A. Allsman, D. R. Alves, T. S. Axelrod, A. C. Becker, D. P. Bennett, K. H. Cook, N. Dalal, A. J. Drake, K. C. Freeman, and et al. The macho project: Microlensing results from 5.7 years of large magellanic cloud observations. *The Astrophysical Journal*, 542(1):281–307, Oct 2000.
- [13] A. Castillo-Morales and S. Schindler. Clusters of galaxies in x-rays: Dark matter. pages 47–50, 2003.
- [14] Laurence P. David, Christine Jones, and William Forman. The universal gas mass fraction in clusters of galaxies. *The Astrophysical Journal*, 748(2):120, Mar 2012.
- [15] B. Ryden. *Introduction to cosmology*. Cambridge University Press, 1970.
- [16] R. Bernabei et al. First results from DAMA/LIBRA and the combined results with DAMA/NaI. *Eur. Phys. J. C*, 56:333–355, 2008.
- [17] Stefano Profumo. *Astrophysical Probes of Dark Matter*. 1 2013.
- [18] A. A. Abdo et al. Constraints on Cosmological Dark Matter Annihilation from the Fermi-LAT Isotropic Diffuse Gamma-Ray Measurement. *JCAP*, 04:014, 2010.
- [19] Igor Tkachev. *Cosmology and Dark Matter*. 2017.

- [20] Antonio Riotto. Inflation and the theory of cosmological perturbations. *ICTP Lect. Notes Ser.*, 14:317–413, 2003.
- [21] Edward W. Kolb and Michael S. Turner. *The Early Universe*, volume 69. 1990.
- [22] Stefano Profumo, Leonardo Giani, and Oliver F. Piattella. An introduction to particle dark matter, 2019.
- [23] Karsten Jedamzik and Maxim Pospelov. Big Bang Nucleosynthesis and Particle Dark Matter. *New J. Phys.*, 11:105028, 2009.
- [24] Maira Dutra. *Origins for dark matter particles : from the “WIMP miracle” to the “FIMP wonder”*. PhD thesis, Orsay, LPT, 2019.
- [25] James S. Bullock and Michael Boylan-Kolchin. Small-Scale Challenges to the Λ CDM Paradigm. *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, 55:343–387, 2017.
- [26] David H. Weinberg, James S. Bullock, Fabio Governato, Rachel Kuzio de Naray, and Annika H. G. Peter. Cold dark matter: Controversies on small scales. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 112(40):12249–12255, 2015.
- [27] David N. Spergel and Paul J. Steinhardt. Observational evidence for selfinteracting cold dark matter. *Phys. Rev. Lett.*, 84:3760–3763, 2000.
- [28] Sean Tulin and Hai-Bo Yu. Dark Matter Self-interactions and Small Scale Structure. *Phys. Rept.*, 730:1–57, 2018.
- [29] KALLIOPI PETRAKI and RAYMOND R. VOLKAS. Review of asymmetric dark matter. *International Journal of Modern Physics A*, 28(19):1330028, Jul 2013.
- [30] Chris Kouvaris and Niklas Grønlund Nielsen. Asymmetric Dark Matter Stars. *Phys. Rev. D*, 92(6):063526, 2015.
- [31] Bob Holdom. Two U(1)’s and Epsilon Charge Shifts. *Phys. Lett. B*, 166:196–198, 1986.
- [32] Maxim Pospelov, Adam Ritz, and Mikhail B. Voloshin. Secluded WIMP Dark Matter. *Phys. Lett. B*, 662:53–61, 2008.
- [33] Maxim Pospelov. Secluded U(1) below the weak scale. *Phys. Rev. D*, 80:095002, 2009.
- [34] Alessandra Filippi and Marzio De Napoli. Searching in the dark: the hunt for the dark photon. *Rev. Phys.*, 5:100042, 2020.
- [35] Maíra Dutra, Manfred Lindner, Stefano Profumo, Farinaldo S. Queiroz, Werner Rodejohann, and Clarissa Siqueira. MeV Dark Matter Complementarity and the Dark Photon Portal. *JCAP*, 03:037, 2018.
- [36] Andrea Maselli, Chris Kouvaris, and Kostas D. Kokkotas. Photon spectrum of asymmetric dark stars. *International Journal of Modern Physics D*, 30(01):2150003, Dec 2020.
- [37] Alan D. Martin Francis Halzen. *Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics*. Wiley, 1984.
- [38] David Griffiths. *Introduction to elementary particles*. 2008.
- [39] Sankha S. Chakrabarty and Igal Jaeglé. Search for dark photon, axion-like particles, dark scalar, or light dark matter in Compton-like processes. 3 2019.
- [40] Mark W. Goodman and Edward Witten. Detectability of Certain Dark Matter Candidates. *Phys. Rev. D*, 31:3059, 1985.
- [41] Martin C. Smith et al. The RAVE Survey: Constraining the Local Galactic Escape Speed. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 379:755–772, 2007.
- [42] Christopher McCabe. The Astrophysical Uncertainties Of Dark Matter Direct Detection Experiments. *Phys. Rev. D*, 82:023530, 2010.
- [43] J. D. Lewin and P. F. Smith. Review of mathematics, numerical factors, and corrections for dark matter experiments based on elastic nuclear recoil. *Astropart. Phys.*, 6:87–112, 1996.

-
- [44] Teresa Marrodán Undagoitia and Ludwig Rauch. Dark matter direct-detection experiments. *J. Phys. G*, 43(1):013001, 2016.
- [45] Joachim Kopp, Thomas Schwetz, and Jure Zupan. Global interpretation of direct Dark Matter searches after CDMS-II results. *JCAP*, 02:014, 2010.