



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**  
**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**  
**ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ, ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ**

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**  
**ΣΩΤΗΡΟΠΟΥΛΟΣ Χ. ΧΡΙΣΤΟΔΟΥΛΟΣ**

**Γενικευμένη Θεωρία Φλεξοηλεκτρικών Υλικών**

**Επιβλέπων Αθανάσιος Ζήσης**  
**Καθηγητής Τομέα Μηχανικής της Σ.Ε.Μ.Φ.Ε**

**Αθήνα, 2021**

Copyright ©Χριστόδουλος Χ. Σωτηρόπουλος

Ιούνιος 2021

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ' ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Η έγκριση της παρούσας διπλωματικής εργασίας υπό της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου δεν υποδηλοί αποδοχή των γνώμων του συγγραφέως.

(Ν. 5343/1932, Άρθρο 20)

## *Πρόλογος*

Η διπλωματική μου εργασία εκπονήθηκε στον Τομέα Μηχανικής της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών το ακαδημαϊκό έτος 2020-2021.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους Καθηγητές και Καθηγήτριες της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του ΕΜΠ, των οποίων την διδασκαλία έτυχα καθ' όλη την διάρκεια φοίτησης μου στη Σχολή!

Θέλω να ξεχωρίσω και να εκφράσω ιδιαίτερες ευχαριστίες στον Καθηγητή μου κύριο Χ. Γεωργιάδη, για την εμπιστοσύνη του προς εμένα και τον χρόνο που μου την εξέφρασε, την γνώση και κυρίως τα κίνητρα που μου μετέδωσε και στον Καθηγητή μου κύριο Α. Ζήση για την αμέριστη βοήθεια του, την αδιάκοπη και ουσιαστική του στήριξη, τη γνώση, την άποψη και αποδοτική συνεργασία! Ευχαριστώ θερμότατα και τους δυο για την πολύτιμη βοήθεια και στήριξη τους, αποτελούν για εμένα, ως Καθηγητές μου αλλά και ως άνθρωποι, έμπνευση στο "χτίσιμο" της επαγγελματικής μου και όχι μόνο ζωής.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς και την αδερφή μου, για την απaráμιλλη στήριξή τους όλα αυτά τα χρόνια και σε αυτούς αφιερώνω την Διπλωματική μου Εργασία!

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Πρόλογος.....	σελίδα ii
Περίληψη.....	σελίδα vi
Abstract.....	σελίδα vii
Εισαγωγή Διπλωματικής Εργασίας.....	σελίδες viii - x

## 1<sup>ο</sup> Κεφάλαιο

Βασικές Θεωρίες Ηλεκτρομαγνητισμού και Ελαστικότητας.....	σελίδες 1 - 25
1.1 Διηλεκτρικά υλικά.....	σελίδες 1 - 2
1.2 Το φαινόμενο της πόλωσης στα διηλεκτρικά υλικά.....	σελίδες 3 - 6
1.3 Ενέργεια ηλεκτροστατικού συστήματος.....	σελίδες 7 - 9
1.4 Στοιχεία της θεωρίας ελαστικότητας.....	σελίδες 10 - 18
1.4.1 Τάσεις.....	σελίδες 10 - 14
1.4.2 Παραμόρφωση: μετατοπίσεις και τροπές.....	σελίδες 15 - 18
1.5 Εξισώσεις ισορροπίας.....	σελίδες 19 - 21
1.6 Αρχή των δυνατών έργων.....	σελίδες 22 - 25

## 2<sup>ο</sup> Κεφάλαιο

Εισαγωγή στη Θεωρία Ελαστικών Διηλεκτρικών Υλικών του Tourin.....	σελίδες 26 - 41
2.1 Εισαγωγή.....	σελίδες 26 - 27
2.2 Εξισώσεις πιεζοηλεκτρισμού.....	σελίδες 28 - 31
2.3 Θεωρία Μεταβολών του Tourin.....	σελίδες 32 - 41

### **3<sup>ο</sup> Κεφάλαιο**

<b>Θεωρία Ελαστικών Διηλεκτρικών Υλικών του Mindlin.....σελίδες</b>	<b>42 - 51</b>
<b>3.1 Εισαγωγή.....σελίδες</b>	<b>42 - 44</b>
<b>3.2 Η θεωρία μεταβολών του Mindlin.....σελίδες</b>	<b>45 - 48</b>
<b>3.3 Κεντροσυμμετρικά υλικά: Κύβος.....σελίδες</b>	<b>49 - 51</b>

### **4<sup>ο</sup> Κεφάλαιο**

**Εισαγωγή στη Γενική Διπολική Θεωρία Βαθμίδας**

<b>των Tourin και Mindlin.....σελίδες</b>	<b>52 - 71</b>
<b>4.1 Εισαγωγή.....σελίδες</b>	<b>52 - 53</b>
<b>4.2 Αρχές και βασικές εξισώσεις θεωρίας βαθμίδας.....σελίδες</b>	<b>54 - 59</b>
<b>4.3 Εισαγωγή Θεωρίας Βαθμίδας Τροπής στα Ελαστικά</b>	
<b>Διηλεκτρικά Υλικά-Φλεξοηλεκτρικά Υλικά.....σελίδες</b>	<b>60 - 71</b>

### **5<sup>ο</sup> Κεφάλαιο**

<b>Γενικευμένη Θεωρία Φλεξοηλεκτρικών Υλικών.....σελίδες</b>	<b>72- 91</b>
<b>5.1 Εισαγωγή.....σελίδες</b>	<b>72 - 73</b>
<b>5.2 Ηλεκτρική Ενθαλπία των φλεξοηλεκτρικών υλικών.....σελίδες</b>	<b>74 – 80</b>
<b>5.3 Παραμορφωσιακή ενέργεια και συνοριακές συνθήκες.....σελίδες</b>	<b>81 – 91</b>

## **6<sup>ο</sup> Κεφάλαιο**

**Επίπεδη Παραμόρφωση στα Πλαίσια της Γενικευμένης Θεωρίας.....σελίδες 92 - 110**

**6.1 Επίπεδη παραμόρφωση σε καρτεσιανές συντεταγμένες.....σελίδες 92 - 100**

**6.2 Επίπεδη παραμόρφωση σε πολικές συντεταγμένες.....σελίδες 101 - 110**

**Γενικά Συμπεράσματα.....σελίδα 111**

**Βιβλιογραφία.....σελίδες 112 - 117**

# Γενικευμένη Θεωρία Φλεξοηλεκτρικών Υλικών

Σωτηρόπουλος Χ. Χριστόδουλος

Τομέας Μηχανικής

ΣΕΜΦΕ, ΕΜΠ

## Περίληψη Διπλωματικής Εργασίας

Η Διπλωματική αυτή Εργασία διαπραγματεύεται τα φλεξοηλεκτρικά υλικά, συνδυάζοντας ταυτόχρονα όλα τα δεδομένα από τις ήδη υπάρχουσες θεωρίες και αυτό είναι το στοιχείο που την χαρακτηρίζει.

Κίνητρο της επιλογής του θέματος ήταν η πλήρης και επαρκής εξήγηση των ηλεκτρομηχανικών ιδιοτήτων που εμφανίζουν τα φλεξοηλεκτρικά υλικά.

Στην Εργασία γίνεται αναλυτική αναφορά στους βασικότερους νόμους των διηλεκτρικών υλικών στο πλαίσιο της Θεωρίας του Ηλεκτρομαγνητισμού, καθώς και στην Κλασική Θεωρία Ελαστικότητας, στην Θεωρία Μεταβολών του Tourin, στην Θεωρία Μεταβολών του Mindlin και στην Θεωρία Βαθμίδας. Στη συνέχεια, συνδέοντας κατάλληλα τα δεδομένα από τις προαναφερθείσες θεωρίες, η Εργασία καταλήγει στη σύνθεση μιας γενικευμένης θεωρίας των φλεξοηλεκτρικών υλικών.

Η Διπλωματική αυτή Εργασία πετυχαίνει την εκπόνηση μιας γενικευμένης θεωρίας που πλαισιώνει σε όλο τους το φάσμα τα φλεξοηλεκτρικά υλικά και στοχεύει σε μελλοντική επίλυση σύνθετων προβλημάτων της Μηχανικής με επίκεντρο τα φλεξοηλεκτρικά υλικά.

# **Generalized Theory of Flexoelectric Materials**

**Sotiropoulos Ch. Christodoulos**

**Engineering Department**

**School of Applied Mathematical and Physical Sciences, NTUA**

## **Abstract**

This Diploma Thesis deals with flexoelectric materials, combining at the same time all the data from the already existing theories and that is its main characteristic.

The motivation for choosing this topic was to establish a complete and sufficient explanation of the electromechanical properties of flexoelectric materials.

The Thesis provides a detailed account of the basic laws of dielectric materials in the context of the Theory of Electromagnetism, as well as the Classical Theory of Elasticity, Toupin's Variational Principle, Mindlin's enhanced Variational Principle, and the Dipolar Gradient Elasticity Theory. Then, by properly linking the data from the aforementioned theories, the Thesis concludes with the synthesis of a generalized theory of flexoelectric materials.

This Diploma Thesis succeeds in the elaboration of a generalized theory that frames the whole range of flexoelectric materials and aims at future solution of complex problems of Engineering based on flexoelectric materials.



## Εισαγωγή Διπλωματικής Εργασίας

Η Διπλωματική μου Εργασία έχει ως αντικείμενο μελέτης την έννοια της παραμορφωσιακής ενέργειας, των συνοριακών συνθηκών αλλά και τον αντίστοιχων καταστατικών εξισώσεων που αφορούν στα φλεξοηλεκτρικά υλικά. Χαρακτηριστικό της Εργασίας αυτής είναι ότι, το κίνητρο και ο στόχος της συμπορεύονται, κατά μία έννοια ταυτίζονται.

Μέχρι τώρα, καταξιωμένοι επιστήμονες σε παγκόσμιο επίπεδο, είχαν ασχοληθεί στα επιστημονικά τους άρθρα με την έννοια της παραμορφωσιακής ενέργειας των ελαστικών διηλεκτρικών υλικών και ειδικότερα των φλεξοηλεκτρικών υλικών, προσεγγίζοντας την είτε μέσω της κλασσικής θεωρίας ελαστικότητας μεμονωμένα, ή σε συνδυασμό αυτής με το φαινόμενο της πόλωσης των διηλεκτρικών υλικών, είτε μεμονωμένα μέσω της θεωρίας βαθμίδας. Κάθε μία από αυτές τις προσεγγίσεις παραλείπει ορισμένα χαρακτηριστικά των φλεξοηλεκτρικών υλικών και συνεπώς δεν τα πλαισιώνει επαρκώς. Δηλαδή, έως τώρα, δεν έχει διατυπωθεί μία γενική θεωρία των διηλεκτρικών ελαστικών υλικών που να μπορεί να εξηγήσει όλες τις ιδιότητες και τα φαινόμενα που δημιουργούνται σε αυτά.

Για την εκπόνηση της Εργασίας αντλήθηκαν στοιχεία από σχετικά άρθρα επιστημόνων των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και της Μηχανικής, που αφορούν στην παραμορφωσιακή ενέργεια και στις συνοριακές συνθήκες που διέπουν ανά περίπτωση το ελαστικό διηλεκτρικό υλικό. Τα στοιχεία αυτά αναλύθηκαν, τοποθετήθηκαν με σειρά, με στόχο αφενός την συγκεντρωτική τους καταγραφή και αφετέρου την θεμελίωση μίας γενικότερης θεωρίας που θα επεξηγεί όλα τα ηλεκτρομηχανικά φαινόμενα των φλεξοηλεκτρικών υλικών.

Αναλυτικότερα, η πρώτη προσπάθεια περιγραφής των ιδιοτήτων των ελαστικών διηλεκτρικών υλικών έγινε από το επιστημονικό άρθρο του Toupin, R.A., το 1956 με τίτλο "The elastic dielectric". Το άρθρο αυτό αναφέρθηκε για πρώτη φορά στην εξάρτηση της παραμορφωσιακής ενέργειας ενός ελαστικού διηλεκτρικού υλικού από την πόλωση, με απώτερο στόχο να εξηγήσει ένα καινούργιο για την εποχή φαινόμενο που παρατηρείται στα υλικά αυτά, με την ονομασία πιεζοηλεκτρισμός. Με το πέρασμα των ετών παρατηρήθηκε ότι, η θεωρία μεταβολών όπως ονομάστηκε του Toupin δεν επαρκούσε για να εξηγήσει ολόκληρο το πλήθος των φαινομένων που εμφανίζονταν στα ελαστικά διηλεκτρικά μέσα. Αυτό βέβαια δεν μείωνε την ισχύ της θεωρίας η οποία και αποτέλεσε τη βάση για πολλές μελλοντικές θεωρίες πάνω στα ελαστικά

διηλεκτρικά μέσα. Μία από αυτές τις θεωρίες που ξεχώρισε και επανέφερε στο προσκήνιο τα υλικά αυτά ήταν η θεωρία μεταβολών του Mindlin, R.D, η οποία παρουσιάστηκε το έτος 1968 στο επιστημονικό του άρθρο με τίτλο "Polarization gradient in elastic dielectrics". Η θεωρία αυτή αποτέλεσε επέκταση της θεωρίας του Toupin, εισάγοντας στην συνάρτηση της παραμορφωσιακής ενέργειας των ελαστικών διηλεκτρικών μέσων και την εξάρτησή της από τη βαθμίδα της πόλωσης. Η θεωρία αυτή είχε ως στόχο να πάει ένα βήμα παρακάτω την θεωρία του Toupin, προκειμένου να εξηγήσει χαρακτηριστικά των υλικών που η κλασική θεωρία συνεχούς μέσου ως τότε αδυνατούσε να εξηγήσει.

Παράλληλα, την ίδια χρονική περίοδο και συγκεκριμένα το 1964 οι Toupin και Mindlin πρότειναν από κοινού τη γνωστή διπολική θεωρία βαθμίδας, σε μια προσπάθεια προσομοίωσης της μηχανικής συμπεριφοράς στερεών υλικών με μικροδομή. Η θεωρία αυτή παρουσιάστηκε στα επιστημονικά άρθρα το 1963 με τίτλο "A dynamical theory of elastic dielectrics" και το 1964 με τίτλο "Micro-Structure in linear elasticity". Στην θεωρία τους αυτή και συγκεκριμένα σε μια από τις υποκατηγορίες της με την ονομασία διπολική θεωρία βαθμίδας τροπής, οι ίδιοι εισήγαγαν στην συνάρτηση της παραμορφωσιακής ενέργειας την έννοια της βαθμίδας της τροπής. Από τότε και με την ταυτόχρονη ανάπτυξη της νανοτεχνολογίας ανακαλύφθηκε ότι το φαινόμενο του πιεζοηλεκτρισμού και ευρύτερα των ηλεκτρομηχανικών φαινομένων δεν εμφανίζεται αποκλειστικά στα πιεζοηλεκτρικά υλικά. Πράγματι, ορισμένα ελαστικά διηλεκτρικά υλικά εμφάνισαν φαινόμενα πόλωσης χωρίς τα ίδια να διατηρούν πιεζοηλεκτρικές ιδιότητες. Εξαιτίας αυτού, εγκαινιάστηκε το φαινόμενο της νανοκλίμακας με την ονομασία φλεξοηλεκτρισμός. Ο φλεξοηλεκτρισμός στηρίζεται στη αρχή αλληλεπίδρασης όχι μόνο της τροπής με την πόλωση όπως γίνονταν στην κλασική θεωρία, αλλά και στην αλληλεπίδραση της βαθμίδας τροπής με το φαινόμενο της πόλωσης. Το φαινόμενο του φλεξοηλεκτρισμού μπόρεσε να δικαιολογήσει τα ηλεκτρομηχανικά φαινόμενα που εμφανίζονταν σε μη πιεζοηλεκτρικά υλικά. Πράγματι, με βάση τον φλεξοηλεκτρισμό η συνάρτηση παραμορφωσιακής ενέργειας ενός ελαστικού διηλεκτρικού μέσου εξαρτάται πλέον από την τροπή, την βαθμίδα της τροπής αλλά και την πόλωση.

Ακολούθησαν πολλά επιστημονικά άρθρα τα οποία στηρίχθηκαν στην παραπάνω θεωρία με σκοπό να εξηγήσουν αλλά και να επιλύσουν ποικίλα προβλήματα μηχανικής βασισμένα σε τέτοιου είδους υλικά. Ορισμένα από αυτά τα επιστημονικά άρθρα που ξεχώρισαν ήταν το

“Insights into Flexoelectric Solids from Strain–Gradient Elasticity” το 2014 από τους Sheng, M. Prashant, K. P, το “Mixed finite elements for flexoelectric solids” το 2017 από τους Deng, Q., Deng, F., Yu, W., Shen, S και το “A 3D mixed finite element for flexoelectricity” το 2017 επίσης από τους Deng, Q., Deng, F., Shen, S.

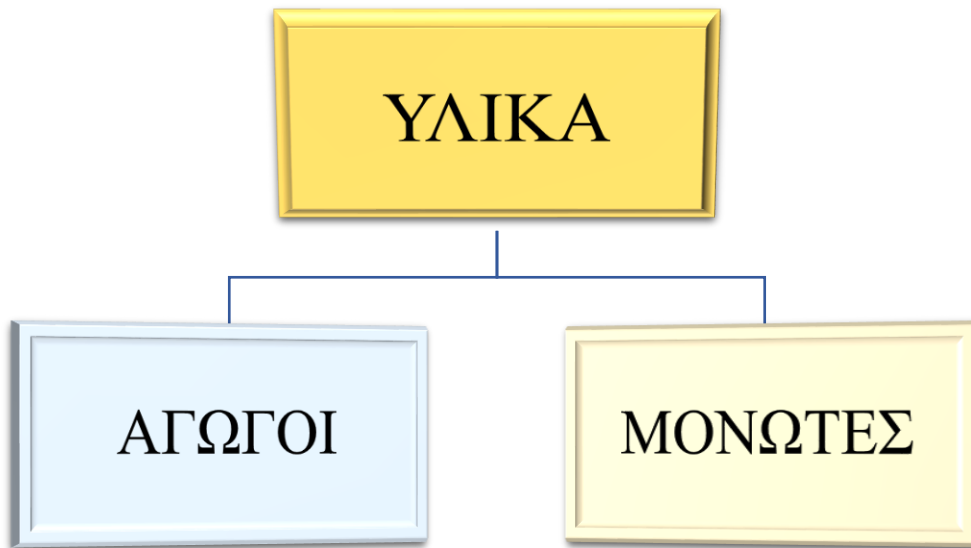
Σε όλα τα προαναφερθέντα επιστημονικά άρθρα ωστόσο δεν περιλαμβάνεται στην συνάρτηση της παραμορφωσιακής ενέργειας η βαθμίδα της πόλωσης όπως είχε πρώτα προτείνει ο Mindlin το 1968. Αυτό έχει ως συνέπεια την παράλειψη εξήγησης ορισμένων ηλεκτρομηχανικών αλληλεπιδράσεων στα φλεξοηλεκτρικά υλικά με κυριότερο το φαινόμενο του αντίστροφου φλεξοηλεκτρισμού, το οποίο η θεωρία του Mindlin καλύπτει πλήρως. Για το λόγο αυτό, στην παρούσα διπλωματική εργασία παρουσιάζονται αναλυτικά και κατά χρονολογική σειρά όλες οι προαναφερθείσες θεωρίες με στόχο αφενός την συγκεντρωτική τους καταγραφή και αφετέρου τη πρόταση μιας γενικευμένης θεωρίας στηριζόμενης στην θεωρία μεταβολών του Mindlin επαυξημένη αυτή τη φορά όμως, με όλα τα στοιχεία της θεωρίας του φλεξοηλεκτρισμού. Ανάλογο εγχείρημα είχε επιχειρήσει το 2006 ένα επιστημονικό άρθρο των Maranganti, R., Sharma, P., Sharma, N. D με τίτλο “Electromechanical coupling in nonpiezoelectric materials due to nanoscale nonlocal size effects” στο οποίο θεωρείται ότι η παραμορφωσιακή ενέργεια είναι ανάλογη της τροπής, της βαθμίδας της τροπής, της πόλωσης και της βαθμίδας της πόλωσης, στο οποίο άρθρο ωστόσο παραλείπονται κάποιοι όροι για λόγους απλούστευσης. Αντιθέτως στην εργασία αυτή εξάγεται η πιο γενική σχέση της παραμορφωσιακής ενέργειας των φλεξοηλεκτρικών υλικών καθώς και οι αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες που τα διέπουν.

# Κεφάλαιο 1

## Βασικές Θεωρίες Ηλεκτρομαγνητισμού και Ελαστικότητας

### 1.1 Διηλεκτρικά υλικά

Όλα τα αντικείμενα που βρίσκονται γύρω μας αποτελούνται από μία πλούσια συλλογή υλικών. Τα υλικά αυτά διακρίνονται ανάλογα με τις ηλεκτρικές τους ιδιότητες σε δύο τεράστιες επιμέρους κατηγορίες κάθε μία εκ των οποίων έχει τα δικά της μοναδικά χαρακτηριστικά. Συνοπτικά, η κατηγοριοποίηση αυτή φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί



**Σχήμα 1:** Κατηγορίες υλικών ως προς τις ηλεκτρικές τους ιδιότητες.

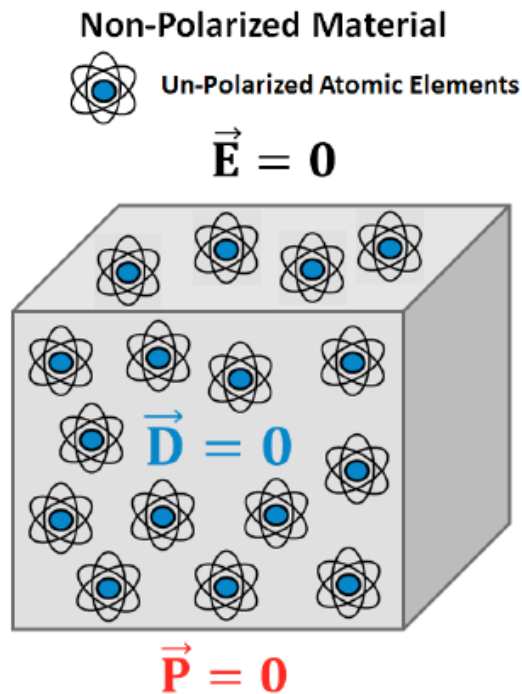
Τα υλικά που ανήκουν στην κατηγορία των αγωγών έχουν ένα "απεριόριστο" απόθεμα ηλεκτρονίων που κινούνται ελεύθερα προς κάθε κατεύθυνση στο εσωτερικό τους. Τα ηλεκτρόνια αυτά είναι γνωστά και ως ελεύθερα ηλεκτρόνια. Αντιθέτως στα διηλεκτρικά υλικά, γνωστά και ως μονωτές, δεν υπάρχουν ελεύθεροι φορείς ηλεκτρικού φορτίου. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι, όλα τα ηλεκτρόνια είναι προσκολλημένα σε συγκεκριμένα άτομα ή μόρια, έχοντας μόνο την δυνατότητα ελάχιστης μετατόπισης και κατά επέκταση ταλάντωσης.

Η ισχυρή αυτή σύνδεση των ηλεκτρονίων δικαιολογεί και μία από τις σημαντικότερες ιδιότητες των διηλεκτρικών υλικών. Η ιδιότητα αυτή ονομάζεται ηλεκτρική μόνωση και ουσιαστικά υποδηλώνει την απαγόρευση αγωγής ηλεκτρικού ρεύματος από τα συγκεκριμένα υλικά.

Η ηλεκτρική μόνωση ως ιδιότητα καθιστά ευρεία την χρήση των διηλεκτρικών υλικών σε διάφορους τομείς της τεχνολογίας, με έμφαση στην ανάπτυξη πυκνωτών. Ωστόσο, μία εξίσου σημαντική ιδιότητα των διηλεκτρικών υλικών είναι η ηλεκτρική διπολική πόλωση και συνδέεται με το φαινόμενο του πιεζοηλεκτρισμού, γνωστό για τις σύγχρονες εφαρμογές του στους τομείς της επιστήμης των υλικών και της μηχανικής και για το οποίο θα αναφερθούμε με μεγαλύτερη λεπτομέρεια σε επόμενο κεφάλαιο.

## 1.2 Το φαινόμενο της πόλωσης στα διηλεκτρικά υλικά

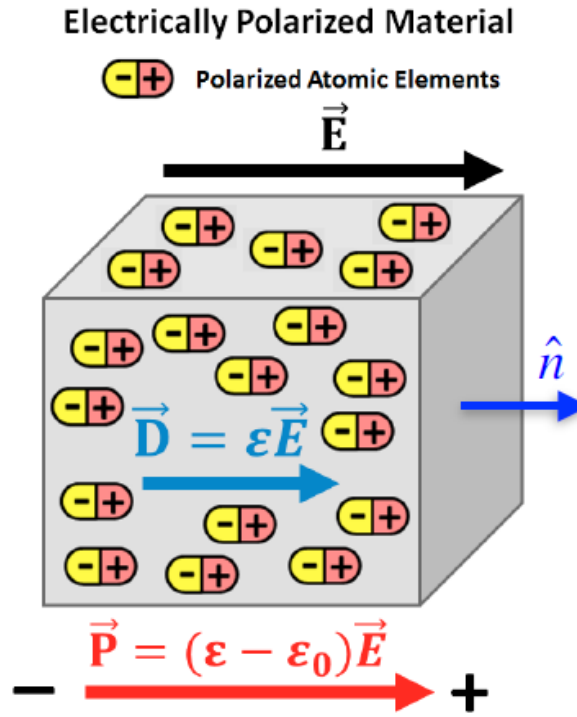
Στη γενική περίπτωση κάθε διηλεκτρικό υλικό αποτελείται από μόρια. Τα μόρια αυτά είναι δυνατό να έχουν από μόνα τους κάποια μόνιμη εσωτερική ηλεκτρική διπολική ροπή, ή και όχι, ανάλογα με το είδος του υλικού, αλλά και άλλες εσωτερικές συνθήκες που ξεφεύγουν από το αντικείμενο της παρούσας εργασίας. Το μέγεθος της πυκνότητας ηλεκτρικής διπολικής ροπής αποτελεί το άθροισμα όλων των ηλεκτρικών διπολικών ροπών διαιρεμένων προς τον όγκο του υλικού στον θεωρούμενο όγκο ελέγχου ενός συνεχούς διηλεκτρικού υλικού. Από μακροσκοπική σκοπιά η συνολική πυκνότητα ηλεκτρικής διπολικής ροπής του υλικού θα είναι μηδενική, γεγονός που απεικονίζεται στο Σχήμα 2.



**Σχήμα 2:** Ατομική αναπαράσταση διηλεκτρικού μέσου χωρίς πόλωση.

Στην συνέχεια και όταν το υλικό αυτό τοποθετηθεί στο εσωτερικό ενός εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου, ανάλογα με τη φύση του υλικού και τους χημικούς μοριακούς δεσμούς, θα αναπτύξει στοιχειώδεις και προσανατολισμένες ηλεκτρικές διπολικές ροπές σε κάθε μόριό του.

Αθροιζόμενες αυτές οι νέες ηλεκτρικές διπολικές ροπές συνιστούν μια μακροσκοπική ηλεκτρική διπολική ροπή, η οποία θα ακολουθεί τον προσανατολισμό του εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.



**Σχήμα 3:** Ατομική αναπαράσταση διηλεκτρικού μέσου με πόλωση.

Με βάση τα παραπάνω, το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό ενός διηλεκτρικού υλικού συνδιαμορφώνεται τόσο από το εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο όσο και από το ίδιο το υλικό. Επιπλέον, σύμφωνα με το Σχήμα 3, στην δεξιά επιφάνεια του υλικού συσσωρεύεται θετικό ηλεκτρικό φορτίο, ενώ στην αριστερή πλευρά αρνητικό ηλεκτρικό φορτίο. Με τον τρόπο αυτό αναπτύσσεται στις επιφάνειες του υλικού μία επιφανειακή πυκνότητα δέσμιων φορτίων.

Τα φορτία αυτά αποκαλούνται δέσμια καθώς αποτελούν το θετικό και αρνητικό αντίστοιχα κομμάτι των προσανατολισμένων εσωτερικών διπόλων.

Η επιφανειακή αυτή πυκνότητα θα δίνεται από τον τύπο

$$\sigma_b = \mathbf{P} \cdot \hat{n} \quad (1.1)$$

όπου  $\hat{n}$  είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 3, ενώ το  $\mathbf{P}$  είναι το διάνυσμα πυκνότητας της ηλεκτρικής διπολικής ροπής. Επιπλέον, επειδή η πόλωση μπορεί να μην είναι ομοιόμορφη μέσα στο υλικό τότε αναπτύσσεται και κάποια χωρική πυκνότητα δέσμιων φορτίων η οποία δίνεται από τον τύπο

$$\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad (1.2)$$

Τώρα, σύμφωνα με τον νόμο του Gauss και λαμβάνοντας υπόψιν όχι μόνο τα δέσμια φορτία αλλά και τα τυχόν ελευθέρα φορτία του υλικού λαμβάνουμε την εξής σχέση

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho_f + \rho_b}{\varepsilon_0} \Rightarrow \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_f - \nabla \cdot \mathbf{P} \\ &\Rightarrow \nabla \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_f \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Στην (1.3) το σύμβολο  $\mathbf{D}$  ονομάζεται διάνυσμα ηλεκτρικής μετατόπισης και ο ορισμός του δίνεται ως εξής

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (1.4)$$



Η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε διηλεκτρικό υλικό. Ωστόσο, υπάρχει μια μεγάλη κατηγορία υλικών που έχουν μία επιπλέον ιδιότητα. Αυτή ορίζει πώς το διάνυσμα της πόλωσης εξαρτάται ανάλογα από το εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο. Στην περίπτωση αυτή το υλικό χαρακτηρίζεται ως γραμμικό και οι σχέσεις που το χαρακτηρίζουν αναλύονται παρακάτω στις (1.5) και (1.6)

$$\begin{aligned} \mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E} &\Rightarrow \mathbf{D} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} , \\ &\Rightarrow \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} . \end{aligned} \tag{1.5}$$

Το  $\chi_e$  ονομάζεται ηλεκτρική επιδεκτικότητα και το  $\varepsilon$  ονομάζεται διαπερατότητα ή δεκτικότητα του μέσου, ενώ επίσης έχουμε και την σχετική διαπερατότητα ή δεκτικότητα του υλικού η οποία παίρνει τη μορφή

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 1 + \chi_e \tag{1.6}$$

Κάθε σημείο του όγκου ενός διηλεκτρικού υλικού μπορεί να χαρακτηριστεί από μία τιμή της πυκνότητας διπολικής ροπής ή και ακριβέστερα της πόλωσης Το διάνυσμα της πόλωσης κατά συνέπεια εξαφανίζεται εκτός του διηλεκτρικού υλικού. Στη συνέχεια, θα δούμε πως το διάνυσμα πόλωσης, αλλά και η βαθμίδα της πόλωσης, θα αποτελούν ανεξάρτητες μεταξύ τους μεταβλητές στο εσωτερικό ενός διηλεκτρικού υλικού ενώ παράλληλα θα μηδενίζονται επίσης εκτός αυτού.

### 1.3 Ενέργεια ηλεκτροστατικού συστήματος

Έστω ότι έχουμε μία χωρική πυκνότητα φορτίου  $\rho$  τότε η αποθηκευμένη ενέργεια του συστήματος η οποία ισοδυναμεί ουσιαστικά με την ενέργεια που απαιτήθηκε για να δημιουργηθεί το σύστημα δίνεται από την σχέση (1.7)

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int \rho V d\tau \quad (1.7)$$

Η σχέση (1.7) μετασχηματίζεται κατάλληλα με στόχο να εισάγουμε μέσα σε αυτή το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Gauss για αυθαίρετο όγκο που περιέχει όλη την κατανομή φορτίου έχουμε

$$\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} \quad (1.8)$$

Συνεπώς η σχέση (1.7) παίρνει την μορφή

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int (\nabla \cdot \mathbf{E}) V d\tau \quad (1.9)$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τη γενική σχέση ολοκλήρωσης κατά μέλη που δίνεται από την (1.10)

$$\int_V f (\nabla \cdot \mathbf{A}) d\tau = - \int_V \mathbf{A} \cdot (\nabla f) d\tau + \oint_S f \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a} \quad (1.10)$$

Στην (1.10) τα  $\mathbf{A}$ ,  $f$  αποτελούν αυθαίρετες συναρτήσεις.

Έτσι, η σχέση (1.9) πλέον παίρνει την μορφή

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \left[ -\int \mathbf{E} \cdot (\nabla V) d\tau + \oint V \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \right]. \quad (1.11)$$

Η σχέση (1.11), χρησιμοποιώντας την σχέση σύνδεσης ηλεκτρικού πεδίου και ηλεκτρικού δυναμικού  $\nabla V = -\mathbf{E}$  θα μετατραπεί στην σχέση

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \left( -\int_V E^2 d\tau + \oint_S \mathbf{V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \right) \quad (1.12)$$

Το ερώτημα που προκύπτει εδώ είναι, το ποιος θα πρέπει να είναι ο όγκος ολοκλήρωσης. Η απάντηση στο ερώτημα αυτό είναι, πως ο όγκος ολοκλήρωσης πρέπει να είναι τέτοιος ώστε να περιέχει την κατανομή φορτίου. Επειδή στο πρώτο ολοκλήρωμα η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι θετική σημαίνει ότι αυξάνοντας τα όρια του όγκου η τιμή του ολοκληρώματος συνεχώς θα αυξάνει. Για το λόγο αυτό το επιφανειακό ολοκλήρωμα θα φθίνει κατά έναν παράγοντα  $1/r$  έτσι ώστε η εσωτερική ενέργεια να παραμένει σταθερή.

Θεωρώντας λοιπόν τον χώρο ολοκλήρωσης ως ολόκληρο τον χώρο, δηλαδή  $r \rightarrow \infty$  η εξίσωση (1.12) θα λάβει την τελική μορφή

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{V_{\text{ολικο}}} \epsilon_r E^2 d\tau = \frac{1}{2} \int \mathbf{D} \mathbf{E} d\tau \quad (1.13)$$

Είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι η σχέση (1.13) αναφέρεται στην ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο εσωτερικό ενός διηλεκτρικού υλικού. Συγκεκριμένα, με αυτό εννοείται η ενέργεια που δαπανήθηκε για την συγκρότηση του υλικού αυτού χωρίς αυτό να έχει πολωθεί.

Κοινώς, θα πρέπει να διαχωριστεί η εσωτερικά αποθηκευμένη ενέργεια σε δύο επιμέρους κατηγορίες:

1. την εσωτερική πυκνότητα ενέργειας λόγω διαμόρφωσης ενός ηλεκτροστατικού συστήματος όπως αυτή δίνεται στη σχέση (1.13).
2. την εσωτερική πυκνότητα ενέργειας λόγω παραμόρφωσης.

Το έργο από τους ελκυστές που είναι κατανεμημένοι διάσπαρτα στην επιφάνεια ενός ελαστικού σώματος, μαζί με το έργο από τις καθολικές δυνάμεις, αποθηκεύονται στο εσωτερικό του σώματος με την μορφή ενέργειας την οποία από εδώ και στο εξής θα αποκαλούμε ενέργεια τροπής ή παραμορφωσιακή ενέργεια. Για ένα ιδανικό ελαστικό σώμα η αφαίρεση τέτοιων φορτίων θα οδηγήσει στην πλήρη επαναφορά του σώματος στην αρχική του κατάσταση, το οποίο και πλέον θα φέρει αποκλειστικά την εσωτερική του ενέργεια και όχι την παραμορφωσιακή ενέργεια.

## 1.4 Στοιχεία της θεωρίας ελαστικότητας

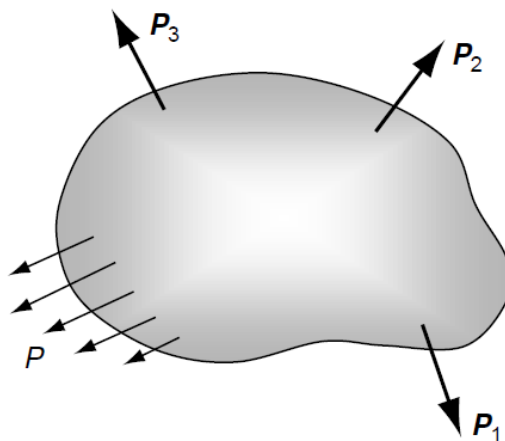
### 1.4.1 Τάσεις

Όταν ένα σώμα υποβάλλεται σε εξωτερικό φορτίο, τότε στο εσωτερικό του σώματος προκαλούνται εσωτερικές δυνάμεις. Ακολουθώντας τις βασικές αρχές της επιστήμης συνεχούς μέσου, οι αυτές δυνάμεις διασπείρονται στο εσωτερικό του σώματος. Για την μελέτη των δυνάμεων κρίνεται αναγκαίο να τις κατηγοριοποιήσουμε σε δύο βασικές κατηγορίες:

1. Δυνάμεις διανεμημένες σε τμήματα της επιφάνειας ενός σώματος (surface forces)
2. Δυνάμεις διανεμημένες σε όλη την έκταση του σώματος γνωστές και ως καθολικές δυνάμεις (body forces)

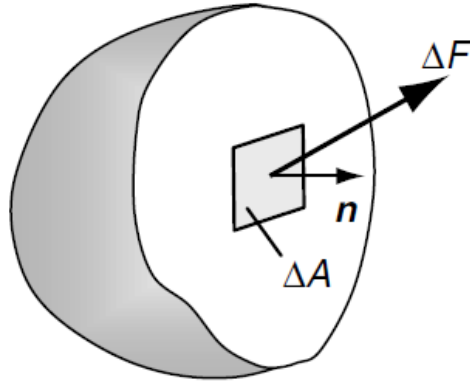
Οι καθολικές δυνάμεις είναι ανάλογες της μάζας ενός σώματος και προέρχονται από έναν εξωτερικό του σώματος παράγοντα. Μερικά από τα πιο χαρακτηριστικά παραδείγματα καθολικών δυνάμεων είναι αυτά της δύναμης του βάρους, των μαγνητικών δυνάμεων και της αδράνειας. Τέλος, οι δυνάμεις αυτές συμβολίζονται κάνοντας χρήση των δεικτών με  $f_j$ .

Οι επιφανειακές δυνάμεις δρουν πάνω σε τμήμα της επιφάνειας ενός σώματος και προέρχονται από την επαφή με ένα άλλο σώμα.



Σχήμα 4: Σώμα υπό εξωτερική φόρτιση.

Θεωρούμε ένα στοιχείο επιφάνειας  $\Delta A$  που βρίσκεται είτε στο εσωτερικό είτε στην επιφάνεια του σώματος. Ο προσανατολισμός της στοιχειώδους αυτής επιφάνειας καθορίζεται από το μοναδιαίο διάνυσμα  $n$ . Η συνιστώσα δύναμη και συνιστώσα ροπή συμβολίζονται αντίστοιχα με  $\Delta F$  και  $\Delta M$ .



**Σχήμα 5:** Αναπαράσταση εσωτερικής δύναμης σε στοιχειώδη επιφάνεια  $\Delta A$  στο εσωτερικό σώματος.

Η έννοια της τάσεως έχει νόημα καθώς η επιφάνεια  $\Delta A$  τείνει να μηδενιστεί. Έτσι, καταλήγουμε στις εξής σχέσεις

$$\lim_{\Delta S \rightarrow \infty} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA} = T_i^{(n)}, \quad (1.14)$$

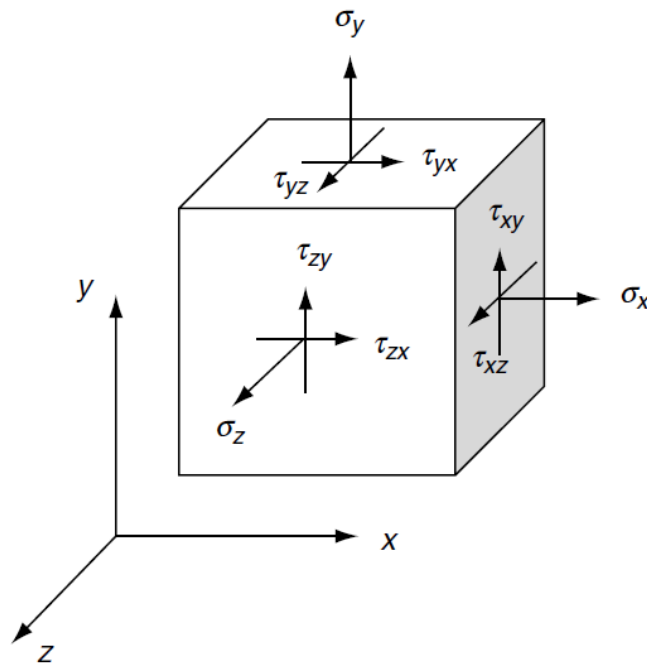
$$\lim_{\Delta S \rightarrow \infty} \frac{\Delta M}{\Delta A} = 0,$$

όπου το διάνυσμα  $T_i^{(n)}$  καλείται ελκυστής (traction) ή διάνυσμα τάσης. Σε περίπτωση που στην δεύτερη σχέση της (1.15) το δεύτερο μέλος δεν είναι μηδενικό τότε είναι αναγκαία η εισαγωγή της θεωρίας διπολικών ροπών η οποία θα αναλυθεί σε επόμενη ενότητα.

Ο ελκυστής δεν μπορεί να περιγράψει στοιχεία του σώματος που βρίσκονται στην ίδια θέση αλλά έχοντας διαφορετικό προσανατολισμό. Για τον λόγο αυτό, ο προσδιορισμός της τασιακής κατάστασης σε ένα σημείο του σώματος απαιτεί την εισαγωγή του τανυστή τάσης. Συνεπώς, το διάνυσμα τάσης θα περιέχει τις συνιστώσες του τανυστή τάσης όπως δείχνει η παρακάτω σχέση

$$\begin{aligned}
 T^{(1)} &= \sigma_x e_1 + \tau_{xy} e_2 + \tau_{xz} e_3, \\
 T^{(2)} &= \tau_{yx} e_1 + \sigma_y e_2 + \tau_{yz} e_3, \\
 T^{(3)} &= \tau_{zx} e_1 + \tau_{zy} e_2 + \sigma_z e_3.
 \end{aligned}
 \tag{1.15}$$

Όπου τα  $e_1, e_2, e_3$  είναι τα μοναδιαία διανύσματα καθενός άξονα του συστήματος συντεταγμένων, ενώ οι εννέα ποσότητες  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$  αποτελούν τις συνιστώσες του τανυστή τάσης. Συγκεκριμένα ο τανυστής τάσης παρουσιάζεται λεπτομερώς:



**Σχήμα 6:** Ανάλυση τανυστή τάσης στις επιφάνειες ενός κυβικού ελαστικού σώματος.

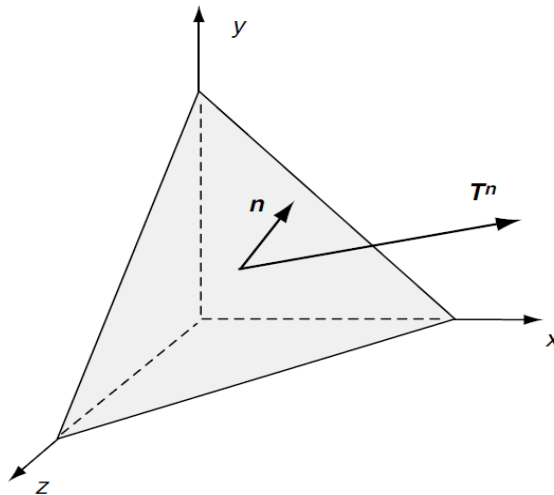
Επιπλέον, σε μορφή πίνακα έχουμε

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

Στο σημείο αυτό πρέπει να αναφερθεί πως οι διαγώνιες συνιστώσες  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  καλούνται ορθές ή κύριες τάσεις, ενώ οι υπόλοιπες έξι συνιστώσες  $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$  καλούνται διατμητικές. Επιπλέον, ο τανυστής τάσης εξαιτίας της ισότητας των αντιδιαγώνιων συνιστωσών του είναι συμμετρικός και συνεπώς ισχύει ότι

$$\sigma_{ji} = \sigma_{ij} \quad (1.17)$$

Τέλος, θα παρουσιάσουμε την σχέση σύνδεσης του διανύσματος τάσης με τον τανυστή τάσης. Για τον λόγο αυτό θεωρούμε ένα τετράεδρο του οποίου η μία πλευρά χαρακτηρίζεται από το μοναδιαίο διάνυσμα  $n$ . Σχεδιάζουμε και το διάνυσμα τάσης όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



**Σχήμα 7:** Απεικόνιση τετραέδρου και του ελκυστή τάσης  $T^n$ .



Το μοναδιαίο διάνυσμα  $n$  μπορεί να εκφραστεί ως

$$n = n_x e_1 + n_y e_2 + n_z e_3 \quad (1.18)$$

Το διάνυσμα τάσης μπορεί να εκφρασθεί σε αναλυτική μορφή

$$T^{(n)} = n_x T_x^{(n)} + n_y T_y^{(n)} + n_z T_z^{(n)}, \quad (1.19)$$

στην οποία σχέση αν τοποθετήσουμε τα στοιχεία της σχέσης (1.15) μετατρέπεται

$$\begin{aligned} T^{(n)} &= (\sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z) e_1 + \\ &+ (\tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{zy} n_z) e_2 + \\ &+ (\tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z) e_3, \end{aligned} \quad (1.20)$$

ή γραμμένη με την χρήση δεικτών

$$T_i^{(n)} = \sigma_{ji} n_j. \quad (1.21)$$

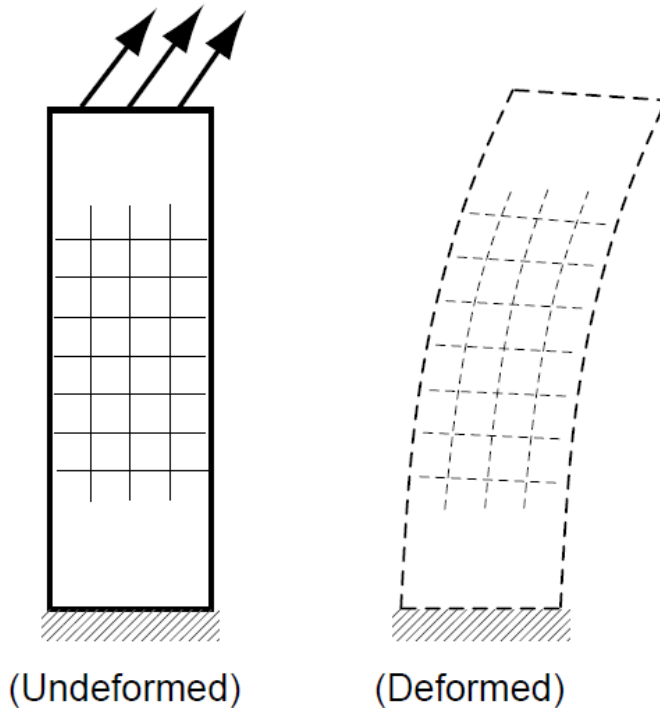
Η σχέση (1.21) είναι ιδιαίτερα χρήσιμη και θα χρησιμοποιηθεί στις επόμενες ενότητες.

## 1.4.2 Παραμόρφωση: μετατοπίσεις και τροπές

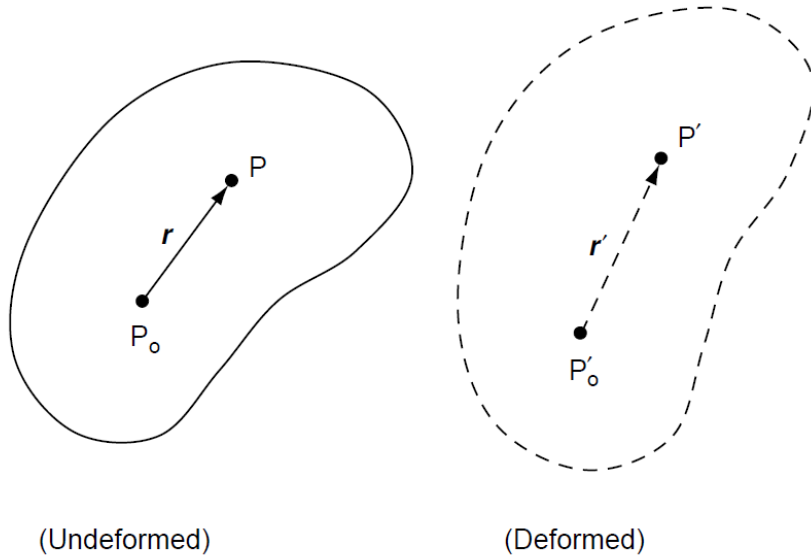
Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε τις βασικές εξισώσεις που διέπουν την κινηματική παραμόρφωσης ενός υλικού. Υποβάλλοντας ένα ελαστικό υλικό σε εξωτερική καταπόνηση τότε αυτό παραμορφώνεται. Οι παραμορφώσεις αυτές περιγράφονται μέσω των σχετικών μετατοπίσεων μεταξύ γειτονικών στοιχείων του υλικού.

Έστω, δύο γειτονικά στοιχεία του υλικού με αντίστοιχους συμβολισμούς  $P_0$  και  $P$ . Ορίζουμε το διάνυσμα που ενώνει τα σημεία αυτά ως  $r$ . Επιβάλλοντας στο σώμα εξωτερικό φορτίο τότε αυτό θα παραμορφωθεί και συνεπώς τα προαναφερθέντα σημεία θα αλλάξουν την θέση τους μέσα στο υλικό. Ανάλογα φυσικά θα αλλάξει και το διάνυσμα που συνδέει τα δύο νέα σημεία. Συνεπώς, έχουμε τους νέους συμβολισμούς  $P', P'_0$  και  $r'$  αντίστοιχα.

Στα δύο σχήματα που ακολουθούν παρουσιάζεται η παραπάνω διαδικασία τόσο σε μακροσκοπικό όσο και σε μικροσκοπικό επίπεδο:



**Σχήμα 8:** Απεικόνιση ελαστικού σώματος πριν και μετά την παραμόρφωση.



**Σχήμα 9:** Μεταβολή των θέσεων των σημείων  $P, P_0$  κατόπιν παραμόρφωσης του ελαστικού σώματος.

Χρησιμοποιώντας το Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων ορίζονται τα διανύσματα μετατόπισης των σημείων  $P_0$  και  $P$  ως  $u_0$  και  $u$  αντίστοιχα. Για τα διανύσματα αυτά ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις για τις τρεις διαστάσεις

$$u = u^0 + \frac{\partial u}{\partial x} r_x + \frac{\partial u}{\partial y} r_y + \frac{\partial u}{\partial z} r_z ,$$

$$v = v^0 + \frac{\partial v}{\partial x} r_x + \frac{\partial v}{\partial y} r_y + \frac{\partial v}{\partial z} r_z , \quad (1.22)$$

$$w = w^0 + \frac{\partial w}{\partial x} r_x + \frac{\partial w}{\partial y} r_y + \frac{\partial w}{\partial z} r_z .$$

Ομοίως για τη μεταβολή του διανύσματος  $\Delta r$  έχουμε τις εξής σχέσεις

$$\begin{aligned}\Delta r_x &= \frac{\partial u}{\partial x} r_x + \frac{\partial u}{\partial y} r_y + \frac{\partial u}{\partial z} r_z, \\ \Delta r_y &= \frac{\partial v}{\partial x} r_x + \frac{\partial v}{\partial y} r_y + \frac{\partial v}{\partial z} r_z, \\ \Delta r_z &= \frac{\partial w}{\partial x} r_x + \frac{\partial w}{\partial y} r_y + \frac{\partial w}{\partial z} r_z.\end{aligned}\tag{1.23}$$

Οι σχέσεις (1.23) γράφονται με τη χρήση δεικτών

$$\Delta r_i = u_{i,j} r_j\tag{1.24}$$

Ο τανυστής  $u_{i,j}$  είναι ο τανυστής κλίσης μετατόπισης και αναλυτικά γράφεται ως εξής

$$u_{i,j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}\tag{1.25}$$

Ο τανυστής κλίσης της μετατόπισης μπορεί να χωριστεί σύμφωνα με τη γνωστή ταυτότητα σε άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού τανυστή.

Έτσι, έχουμε την σχέση

$$u_{i,j} = e_{ij} + \omega_{ij} \quad (1.26)$$

Με βάση την (1.26) ορίζονται δύο νέοι τανυστές οι οποίοι καλούνται τανυστής τροπής και τανυστής στροφής αντίστοιχα. Οι σχέσεις σύνδεσης των τανυστών αυτών δίνονται παρακάτω

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{j,i} + u_{i,j}), \quad (1.27)$$

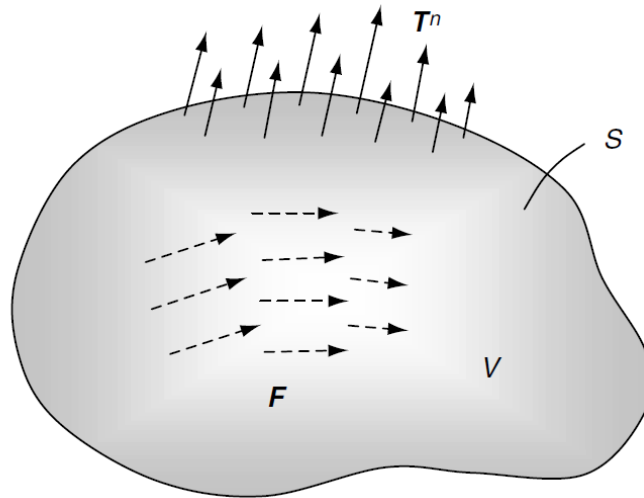
$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(u_{j,i} - u_{i,j}).$$

Συγκεκριμένα, θα μας απασχολήσει η πρώτη από τις δύο σχέσεις (1.27), η οποία θα χρησιμοποιηθεί εκτενέστερα σε επόμενη ενότητα.

## 1.5 Εξισώσεις ισορροπίας

Το τασικό πεδίο σε ένα ελαστικό σώμα μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο. Στην επιστήμη της Μηχανικής και των Μαθηματικών οι μεταβολές ενός πεδίου περιγράφονται μέσω των διαφορικών εξισώσεων. Έτσι, στην ενότητα αυτή θα περιγράψουμε και θα παρουσιάσουμε τις διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας οι οποίες περιγράφουν την μεταβολή του τασικού πεδίου που εφαρμόζεται σε ένα σώμα.

Αρχικά, θα θεωρήσουμε ένα τμήμα όγκου  $V$  ενός σώματος το οποίο περικλείεται από την επιφάνεια  $S$ . Το τμήμα αυτό όγκου θα ονομάζεται όγκος ελέγχου. Οι καθολικές δυνάμεις ανά μονάδα όγκου που κατανέμονται στον όγκο  $V$  παριστάνονται με το σύμβολο  $f$ , ενώ οι ελκυστές που είναι κατανεμημένοι επάνω στην επιφάνεια  $S$  παριστάνονται με το σύμβολο  $T_i^{(n)}$ .



**Σχήμα 10:** Απεικόνιση ελαστικού σώματος όγκου  $V$  και με σύνορο την επιφάνεια  $S$  στο οποίο δρα ο ελκυστής τάσης και οι καθολικές δυνάμεις  $F$  ή  $f_j$ .

Εάν το σώμα βρίσκεται σε ισορροπία, τότε θα πρέπει το άθροισμα όλων των δυνάμεων που ασκούνται στον θεωρούμενο όγκο του υλικού να μηδενίζεται. Σύμφωνα με αυτά γράφουμε

$$\int_V f_i dV + \int_S T_i^{(n)} dS = 0 \quad (1.28)$$

Από τον ορισμό του ελκυστή τάσης  $T_i^{(n)} = \sigma_{ji} n_j$  το επιφανειακό ολοκλήρωμα στην παραπάνω σχέση παίρνει την μορφή

$$\int_S T_i^{(n)} dS = \int_S \sigma_{ji} n_j dS \quad (1.29)$$

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας το θεώρημα απόκλισης των Green και Gauss έχουμε

$$\int_S \sigma_{ji} n_j dS = \int_V \sigma_{ji,j} dV \quad (1.30)$$

Τοποθετώντας τις σχέσεις (1.16) και (1.17) στην σχέση (1.15) λαμβάνουμε

$$\int_V (f_j + \sigma_{ji,j}) dV = 0 \quad (1.31)$$

Για τον λόγο ότι, κάθε στοιχείο του σώματος βρίσκεται σε ισορροπία, ο όγκος ολοκλήρωσης στις σχέσεις που προηγήθηκαν είναι αυθαίρετος και επομένως η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση θα πρέπει να μηδενίζεται. Έτσι, σε κάθε σημείο του σώματος θα πρέπει να ισχύει η εξής σχέση ισορροπίας

$$\sigma_{ji,j} + f_j = 0 \quad (1.32)$$

Η εξίσωση ισορροπίας (1.19) εξαιτίας της συμμετρίας του τανυστή τάσης μπορεί εκ νέου να γραφτεί και ως εξής

$$\sigma_{ij,j} + f_j = 0 \quad (1.33)$$

Τέλος, είναι απαραίτητο να αναφερθεί ότι σε περίπτωση όπου έχουμε κινούμενο σώμα τότε η παραπάνω εξίσωση ισορροπίας λαμβάνει την πιο γενική της μορφή

$$\sigma_{ij,j} + f_j = \rho \ddot{u}_j \quad (1.34)$$

Όπου το  $\rho$  συμβολίζει την πυκνότητα μάζας ενώ με  $f$  συμβολίζονται οι καθολικές δυνάμεις.



## 1.6 Αρχή των δυνατών έργων

Τα ενεργειακά θεωρήματα βρίσκουν εφαρμογή σε χρήσιμες προσεγγιστικές μεθόδους ανάλυσης των κατασκευών όπως η μέθοδος Rayleigh-Ritz και η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων. Η αρχή των δυνατών έργων (ΑΔΕ) αποτελεί τη βάση των περισσότερων αυτών ενεργειακών θεωρημάτων και για το λόγο αυτό θα κάνουμε μια σύντομη αναφορά.

Ένα αυθαίρετο, δυνατό πεδίο μετατοπίσεων που εφαρμόζεται πάνω σε ένα σημείο ενός υλικού σώματος αποτελεί ένα σύνολο από πλασματικές μετατοπίσεις τέτοιες ώστε οι δυνάμεις που ασκούνται στο συγκεκριμένο σημείο να παραμένουν σταθερές. Το έργο που προκαλούν οι δυνάμεις αυτές, ονομάζεται δυνατό έργο. Για ένα σώμα σε στατική ισορροπία, το δυνατό έργο είναι μηδενικό γιατί η συνισταμένη των δυνάμεων μηδενίζεται σε κάθε τμήμα του σώματος που βρίσκεται σε ισορροπία. Η σχέση αυτή ισχύει και αντίστροφα καθώς αν το συνολικό δυνατό έργο είναι μηδενικό τότε το σώμα αυτό βρίσκεται σε στατική ισορροπία.

Με βάση αυτά θεωρούμε στην συνέχεια ένα αυθαίρετο πεδίο μετατοπίσεων το οποίο θα δίνεται από την σχέση

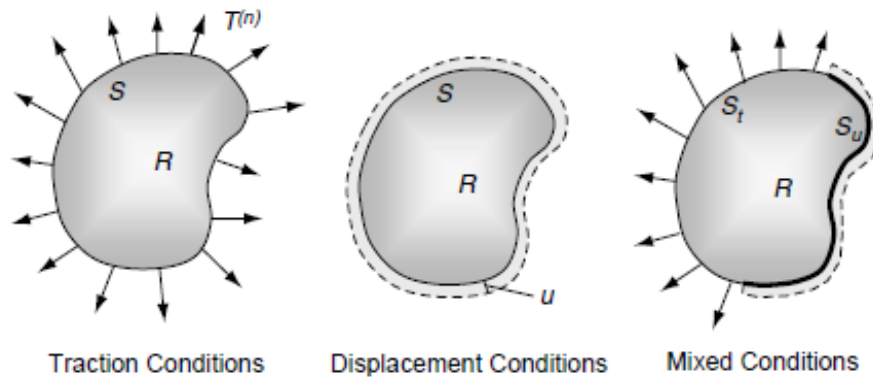
$$\delta u_i = (\delta u_x, \delta u_y, \delta u_z) \quad (1.35)$$

Ενώ παράλληλα οι αντίστοιχες δυνατές τροπές θα δίνονται από την σχέση ορισμού

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{j,i} + u_{i,j}) \quad (1.36)$$

Ο ορισμός αυτός δεν είναι άλλος από τον (1.27) που γνωρίσαμε στην παράγραφο των παραμορφώσεων.

Θεωρούμε τώρα, το κλασικό ελαστικό πρόβλημα ενός στερεού σε ισορροπία στο οποίο ασκούνται επιφανειακές τάσεις κατά το σύνορο του  $S_t$  ή σε τμήμα αυτού και με δεδομένες συνθήκες μετατοπίσεων καταναμημένες στο υπόλοιπο σύνορο  $S_u$  όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



**Σχήμα 11:** Απεικόνιση συνθηκών τάσεων, μετατοπίσεων και συνδυασμό αυτών που δρουν σε ένα ελαστικό σώμα.

Στην συνέχεια θεωρούμε ότι το σώμα υποβάλλεται σε δυνατό διαφορίσιμο πεδίο μετατοπίσεων  $\delta u_i$  συμβιβαστό με την κατάσταση στήριξης του σώματος, δηλαδή  $\delta u_i = 0$  στο σύνορο  $S_u$  όπως προκύπτει άμεσα από τη διαμόρφωση της ισορροπίας. Το πεδίο δυνατών μετατοπίσεων μπορεί να θεωρηθεί, όπως προαναφέραμε, ως ένα αυθαίρετο πεδίο συνεπές ωστόσο με απειροστές τροπές.

Το δυνατό έργο που δημιουργείται από τις επιφανειακές και καθολικές δυνάμεις συμβολίζεται με  $\delta W$  και αποδεικνύεται ότι πλαισιώνεται από τον εξής τύπο

$$\delta W = \int_{S_t} T_i^n \delta u_i dS + \int_V f \delta u_i dV_i \quad (1.37)$$

Λαμβάνοντας υπόψιν το θεώρημα Green-Gauss, την γραμμικοποιημένη σχέση τροπών και μετατοπίσεων και την γνωστή σχέση ορισμού του ελκυστή (1.21) μπορούμε να αναλύσουμε την σχέση (1.37) ως εξής

$$\begin{aligned}
\delta W &= \int_S T_i^n \delta u_i dS + \int_V f_i \delta u_i dV = \int_S \sigma_{ij} n_j \delta u_i dS + \int_V f_i \delta u_i dV \\
&= \int_V (\sigma_{ij} \delta u_i)_{,j} dV + \int_V f_i \delta u_i dV = \int_V (\sigma_{ij,j} \delta u_i + \sigma_{ij} \delta u_{i,j}) dV + \int_V f_i \delta u_i dV \quad (1.38) \\
&= \int_V (-f_i \delta u_i + \sigma_{ij} \delta e_{ij}) dV + \int_V f_i \delta u_i dV = \int_V \sigma_{ij} \delta e_{ij} dV
\end{aligned}$$

Θεωρώντας την ύπαρξη της παραμορφωσιακής ενέργειας η οποία ορίζεται από την συνάρτηση  $U$  των τροπών ως

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U(e)}{\partial e_{ij}} \quad (1.39)$$

Από την σχέση (1.39) προκύπτει επιπλέον ότι

$$\int_V \sigma_{ij} \delta e_{ij} dV = \int_V \frac{\partial U(e)}{\partial e_{ij}} \delta e_{ij} dV = \delta \int_V U dV \quad (1.40)$$

Επειδή οι εξωτερικές δυνάμεις παραμένουν σταθερές κατά την διάρκεια των δυνατών μετατοπίσεων και ο όγκος  $V$  παραμένει σταθερός, ο τελεστής του διαφορικού  $\delta$  μπορεί να τοποθετηθεί μπροστά από το ολοκλήρωμα.

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1.40) και (1.38) προκύπτει η τελική σχέση

$$\delta \left( \int_V U dV - \int_{S_i} T_i^n \delta u_i dS - \int_V f_i \delta u_i dV \right) = \delta(U_T - W) = 0 \quad (1.41)$$

Η σχέση (1.41) αποτελεί την θεμελιώδη έκφραση της αρχής των δυνατών έργων. Η ποσότητα  $(U_T - W)$  στην πραγματικότητα απεικονίζει την συνολική δυναμική ενέργεια του σώματος και για το λόγο αυτό η σχέση (1.41) ερμηνεύεται ως το γεγονός ότι η διαφορά στη δυναμική ενέργεια από την επιβολή ενός πεδίου μετατοπίσεων θα είναι μηδενική.

Πιο συγκεκριμένα η Αρχή των Δυνατών Έργων μπορεί σε γενικότερο πλαίσιο να διατυπωθεί με την παρακάτω πρόταση :

Εάν ένα παραμορφώσιμο στερεό βρίσκεται αρχικώς σε ισορροπία και παραμένει σε ισορροπία μετά την επιβολή ενός επιπλέον πεδίου ιδεατών μετατοπίσεων, τότε το εξωτερικό δυνατό έργο  $\delta W$  που παράγεται από τις εξωτερικές δυνάμεις είναι ίσο με το εσωτερικό δυνατό έργο του στερεού που δεν είναι άλλο από την παραμορφωσιακή ενέργεια αυτού, η οποία παράγεται από τις ήδη υφιστάμενες τάσεις στο εσωτερικό του κατά τις αναπτυσσόμενες δυνατές τροπές.

Πρέπει να σημειωθεί ότι, η αρχή αυτή είναι έγκυρη για ελαστικά υλικά συμπεριλαμβάνοντας τόσο την γραμμική όσο και τη μη γραμμική παραμορφωσιακή συμπεριφορά του υλικού. Η αρχή των δυνατών έργων παρέχει μια άνετη μέθοδο παραγωγής εξισώσεων ισορροπίας και συνοριακών συνθηκών για πληθώρα ειδικών θεωριών των ελαστικών σωμάτων όπως των ράβδων, δοκών, πλακών και κελυφών.

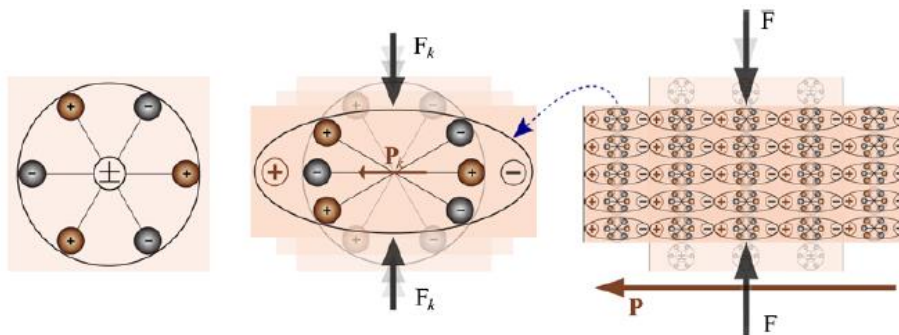
Τέλος, η αρχή των δυνατών έργων όπως θα δούμε στα επόμενα κεφάλαια επεκτείνεται στα πλαίσια της Θεωρίας Βαθμίδας καθώς υπεισέρχεται σε αυτή (1.37) και ένας όρος που αφορά στις διπολικές τάσεις.

## Κεφάλαιο 2

# Εισαγωγή στη Θεωρία Ελαστικών Διηλεκτρικών Υλικών του Tourin

### 2.1 Εισαγωγή

Το ευθύ πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο, το οποίο συναντάται έντονα στα ελαστικά διηλεκτρικά μέσα, είναι ένα φυσικό φαινόμενο ευρέως διαδεδομένο στην τεχνολογία. Η κλαστική θεωρία συνεχούς μέσου, την οποία εισήγαγε ο Γάλλος μαθηματικός Augustin-Louis Cauchy για πρώτη φορά τον 19<sup>ο</sup> αιώνα, χρησιμοποίησε το φαινόμενο αυτό για την παραγωγή κρυσταλλικών ταλαντωτών, φίλτρων αλλά και μετατροπέων. Ο ευθύς πιεζοηλεκτρισμός αναφέρεται στην παραγωγή ηλεκτρικού πεδίου ως αποτέλεσμα της υποβολής ενός ελαστικού διηλεκτρικού υλικού σε εξωτερικές φορτίσεις. Πιο συγκεκριμένα, πριν την επιβολή των εξωτερικών φορτίσεων στο σώμα όλα τα θετικά και αρνητικά φορτία εντός αυτού αλληλοεξουδετερώνονται μετατρέποντας έτσι το σώμα σε ηλεκτρικά ουδέτερο. Παρόλα αυτά, με την ύπαρξη εξωτερικών φορτίων η εσωτερική κατανομή φορτίου αλλάζει με τέτοιον τρόπο ώστε να απομακρύνει τα θετικά από τα αρνητικά φορτία. Ως αποτέλεσμα αυτού, είναι η δημιουργία ηλεκτρικών διπόλων στο εσωτερικό του υλικού. Η δημιουργία αυτών των διπόλων είναι αυτή που θεμελιώνει την έννοια της πόλωσης. Η πόλωση πλέον, παράγει ένα ηλεκτρικό πεδίο το οποίο μετατρέπει την μηχανική ενέργεια σε ηλεκτρική ενέργεια. Τα παραπάνω βήματα περιγράφονται στο ακόλουθο σχήμα



**Σχήμα 12:** Τα τρία στάδια δημιουργίας του πιεζοηλεκτρικού φαινομένου.

Ορισμένα υλικά μάλιστα, εμφανίζουν και το αντίστροφο φαινόμενο του πιεζοηλεκτρισμού κατά το οποίο, η εφαρμογή εξωτερικού ηλεκτρικού δυναμικού μέσω ηλεκτροδίων στο σώμα, έχει ως άμεσο αποτέλεσμα την παραγωγή τροπής. Με τον τρόπο αυτό ηλεκτρική ενέργεια μετατρέπεται σε μηχανική ενέργεια ή γνωστή και ως εσωτερική παραμορφωσιακή ενέργεια.

Το φαινόμενο του πιεζοηλεκτρισμού στηρίζεται εν γένει στην αλληλεπίδραση μεταξύ μηχανικής τροπής και ενός ηλεκτρικού μεγέθους. Το μέγεθος αυτό μπορεί να είναι η ηλεκτρική μετατόπιση των πολωμένων διηλεκτρικών υλικών, το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο ή ακόμη και η ηλεκτρική πόλωση. Τη συσχέτιση του φαινομένου του πιεζοηλεκτρισμού με τη θεωρία ελαστικών μέσων εισήγαγε ο Tourin R.A εγκαινιάζοντας την έννοια των ηλεκτρικά πολωμένων ελαστικών διηλεκτρικών μέσων. Στο επιστημονικό του άρθρο [13] έκανε μια εκτεταμένη αναφορά στα ελαστικά διηλεκτρικά υλικά που εμφανίζουν το φαινόμενο του πιεζοηλεκτρισμού, καθώς επίσης εξήγαγε και την σχέση εσωτερικής παραμορφωσιακής ενέργειας αυτών. Το ηλεκτρικό μέγεθος που επέλεξε ο Tourin να συνδυάσει με τη μηχανική τροπή ήταν η πόλωση από την οποία και εξαρτάται άμεσα η συνάρτηση της παραμορφωσιακής ενέργειας.

Για τον λόγο αυτό λοιπόν, στην 2<sup>η</sup> υποενότητα καταγράφουμε τις σημαντικότερες εξισώσεις που αφορούν στα ελαστικά διηλεκτρικά υλικά παρμένες από την θεωρία ελαστικότητας και τη θεωρία του ηλεκτρομαγνητισμού. Κατόπιν στην 3<sup>η</sup> υποενότητα αναπτύσσεται εκτεταμένα η συνάρτηση της παραμορφωσιακής ενέργειας καθώς και οι αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες που προκύπτουν εξ αυτής, όπως αυτές διατυπώθηκαν από τον Tourin στην θεωρία μεταβολών.

## 2.2 Εξισώσεις πιεζοηλεκτρισμού στην κλασική θεωρία

Για την περιγραφή της κλασικής θεωρίας γραμμικά ελαστικών διηλεκτρικών υλικών θα χρησιμοποιήσουμε τις εξής αλληλεξαρτώμενες ποσότητες, των οποίων οι βασικές εξισώσεις αναπτύχθηκαν αναλυτικότερα στο 1<sup>ο</sup> Κεφάλαιο.

Οι ποσότητες αυτές δίνονται συνοπτικά:

$u_i$  Διάνυσμα Μηχανικής Μετατόπισης

$e_{ij}$  Τανυστής Τροπής

$\sigma_{ij}$  Τανυστής Τάσης

$E_i$  Διάνυσμα Ηλεκτρικού Πεδίου

$D_i$  Διάνυσμα Ηλεκτρικής Μετατόπισης

$P_i$  Διάνυσμα Πόλωσης

$\varphi$  Ηλεκτρικό Δυναμικό

Οι ανωτέρω ποσότητες συνδέονται μεταξύ τους μέσω ποικίλων νόμων της θεωρίας ελαστικότητας και του ηλεκτρομαγνητισμού. Οι νόμοι αυτοί συνοψίζονται στους ακόλουθους τέσσερις τύπους

1. Η εξίσωση ισορροπίας ενός παραμορφωσίμου σώματος.

$$\sigma_{ij,j} + f_j = \rho \ddot{u}_j \quad (2.1)$$

Όπου το  $\rho$  συμβολίζει την πυκνότητα μάζας ενώ με  $f_j$  συμβολίζονται οι καθολικές δυνάμεις και οι τελείες πάνω από το διάνυσμα της μετατόπισης συμβολίζουν παραγωγή ως προς τον χρόνο.

2. Οι εξισώσεις του ηλεκτροστατικού πεδίου.

$$D_{i,i} = 0 \quad (2.2)$$

και

$$E_i = -\varphi_{,i} \quad (2.3)$$

3. Η σχέση ορισμού του τανυστή τροπής

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{j,i} + u_{i,j}) \quad (2.4)$$

4. Οι καταστατικές εξισώσεις. (\* Καταστατικές εξισώσεις ονομάζονται οι εξισώσεις που συνδέουν κατάλληλα τις τροπές και τις τάσεις ενός σώματος. Οι εξισώσεις αυτές προκύπτουν από την μηχανική συμπεριφορά ενός σώματος).

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}^E e_{kl} - \varepsilon_{kij} E_k \quad (2.5)$$

$$D_i = \varepsilon_{jkl} e_{kl} - \varepsilon_{jk}^S E_k \quad (2.6)$$

$$P_i = D_i - \varepsilon_0 E_i \quad (2.7)$$



Η σχέση (2.5) αποτελεί την γενικευμένη μορφή του νόμου του Hooke στον οποίο έχουμε προσθέσει και την εξάρτηση του τανυστή τάσης από το ηλεκτρικό πεδίο. Επιπλέον, αναφέρουμε ότι ο τανυστής άρτιας τάξης  $c_{ijkl}^E$  αποτελεί ένα μητρώο με 81 συνιστώσες. Ο αριθμός των ανεξάρτητων συνιστωσών μπορεί να μειωθεί ώστε ο τανυστής να περιγράψει την ισότροπη συμπεριφορά του υλικού.

Με παρόμοιο τρόπο η σχέση (2.6) αποτελεί τον καταστατικό νόμο που συνδέει το διάνυσμα πόλωσης με τον τανυστή τροπής και το ηλεκτρικό πεδίο.

Τέλος, η σχέση (2.7) δεν είναι καινούργια καθώς πρόκειται για τον ορισμό του διανύσματος της πόλωσης όπως αυτός δόθηκε στην ενότητα (1.2) και συγκεκριμένα από την σχέση (1.4).

Επιπλέον, οι σταθερές που εμφανίζονται στους παραπάνω καταστατικούς νόμους ορίζονται ως εξής

$c_{ijkl}^E$  είναι η σταθερά ελαστικής ακαμψίας

$\varepsilon_{ijk}$  είναι πιεζοηλεκτρική τασική σταθερά

$\varepsilon_{jk}^S$  είναι η δεκτικότητα του διηλεκτρικού υλικού

$\varepsilon_0$  είναι η δεκτικότητα του κενού

Στην συνέχεια, στην εξίσωση (2.1) αντικαθιστούμε τον τανυστή τάσης σύμφωνα με την σχέση (2.5) καθώς και το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου αντικαθίσταται από το ηλεκτρικό δυναμικό σύμφωνα με την σχέση ορισμού (2.3).

$$c_{ijkl}^E u_{k,li} + \varepsilon_{kij} \varphi_{,ki} + f_j = \rho \ddot{u}_j \quad (2.8)$$

Στην σχέση (2.6) γράφουμε τον τανυστή της τροπής ως την παράγωγο του διανύσματος μετατόπισης και αντικαθιστούμε εκ νέου το διάνυσμα ηλεκτρικού πεδίου με το ηλεκτρικό δυναμικό. Τέλος παραγωγίζουμε ολόκληρη την σχέση (2.6) προκειμένου να οδηγηθούμε στην εξίσωση (2.2) η οποία και θα λάβει την μορφή

$$\varepsilon_{kij} u_{i,jk} - \varepsilon_{ij}^S \varphi_{,ij} = 0 \quad (2.9)$$

Οι εξισώσεις (2.8) και (2.9) θα αποτελέσουν τη βάση της θεωρίας μεταβολών των Tourin και Mindlin που αναπτύσσονται στη συνέχεια.

### 2.3 Θεωρία μεταβολών του Tourin

Ο Richard A. Tourin γεννημένος το 1926 ήταν ένας Αμερικάνος φυσικός, εφαρμοσμένος μαθηματικός και μηχανικός ο οποίος πέρασε το μεγαλύτερο μέρος της καριέρας του στο IBM (International Business Machines Corporation-ιδρύθηκε στις 16 Ιουνίου του 1911). Ο Richard A. Tourin έμεινε γνωστός για την προσφορά του σε διάφορους τομείς της μηχανικής συνεχούς μέσου. Σημαντικότερος εξ αυτών αποτέλεσε ο τομέας των ηλεκτρικά πολωμένων ελαστικών διηλεκτρικών μέσων, τα οποία και παρουσιάστηκαν λεπτομερώς στο επιστημονικό του άρθρο [13]. Συγκεκριμένα στο άρθρο αυτό, ο Tourin παρουσίασε για πρώτη φορά την θεωρία μεταβολών που διέπει τα ελαστικά διηλεκτρικά υλικά. Ένα εξίσου σημαντικό θέμα που ανέπτυξε ο Tourin, μαζί με την βοήθεια του Mindlin, ήταν η διπολική θεωρία βαθμίδας στα επιστημονικά άρθρα τους κατά την περίοδο 1962-1964, την οποία θα μελετήσουμε αναλυτικότερα σε επόμενο κεφάλαιο. Το φυσικό νόημα της θεωρίας μεταβολών για τα ελαστικά διηλεκτρικά υλικά στηρίζεται στο γεγονός ότι το άθροισμα της ηλεκτροστατικής και μηχανικής ενέργειας ενός συστήματος αποτελούμενου από ένα σώμα και του εξωτερικού του σώματος περιβάλλοντος χώρου θα πρέπει να είναι ελάχιστο. Η μέθοδος αυτή του Tourin βασισμένη σε εξισώσεις ισορροπίας για τα διηλεκτρικά ελαστικά σώματα έδωσε μια πιο μακροσκοπική προσέγγιση των σχέσεων ενέργειας. Έτσι λοιπόν, ο Tourin προχώρησε στο διαχωρισμό της πυκνότητας ενέργειας ( $W$ ) ενός διηλεκτρικού υλικού σε δύο επιμέρους πυκνότητες ενέργειας. Στην αποθηκευμένη ενέργεια λόγω παραμόρφωσης και πόλωσης ( $W^L$ ) και στην υπολειπόμενη πυκνότητα ενέργειας που είναι αποθηκευμένη σε κάθε ηλεκτροστατικό σύστημα σύμφωνα με τους νόμους του Maxwell. Έτσι για την συνολική παραμορφωσιακή ενέργεια έχουμε

$$W = W^L(e_{ij}, P_i) + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varphi_i \varphi_i \quad (2.10)$$

Στην συνέχεια όρισε την ηλεκτρική ενθαλπία ενός διηλεκτρικού ελαστικού μέσου

$$H = W - E_i D_i \quad (2.11)$$

Τοποθετώντας τις σχέσεις (2.10), (2.7) και (2.3) στην σχέση (2.11) βρίσκουμε

$$H = W^L(e_{ij}, P_i) - \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varphi_i \varphi_i + \varphi_i P_i \quad (2.12)$$

Θεωρούμε ένα σώμα όγκου  $V$  με σύνορο την επιφάνεια  $S$  η οποία και το διαχωρίζει από τον εξωτερικό χώρο  $V'$ . Τον συνολικό όγκο μάλιστα θα τον συμβολίσουμε με  $V^* = V + V'$  προκειμένου να είναι ξεκάθαρος ο χώρος στον οποίο αναφέρονται οι ακόλουθες εξισώσεις.

Για ένα τέτοιο σύστημα, η αρχή των δυνατών έργων με την ύπαρξη καθολικών δυνάμεων και του εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου θα δίνεται από την σχέση

$$-\delta \int_{V^*} H dV + \int_{V^*} (f_i \delta u_i + E_i^0 \delta P_i) dV + \int_S t_i \delta u_i dS = 0 \quad (2.13)$$

Στην (2.13) οι μεταβολές  $\delta u_i$ ,  $\delta P_i$ , και  $\delta \varphi$  θεωρούνται ανεξάρτητες μεταξύ τους. Επιπλέον, ισχύει ότι  $V^* = V + V'$  και ότι  $t_i$  (συνχά στη βιβλιογραφία συμβολίζεται και ως  $T_i^n$ ) είναι ο ελκυστής της τάσης κατά την επιφάνεια  $S$  που αποτελεί και το εξωτερικό σύνορο του σώματος. Τέλος, με  $E_i^0$  έχουμε συμβολίσει ένα αυθαίρετο εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο.

Η στοιχειώδης μεταβολή την ηλεκτρικής ενθαλπίας θα δίνεται σύμφωνα με τα ανωτέρω από την σχέση

$$\delta H = \frac{\partial W^L}{\partial e_{ij}} \delta e_{ij} + \frac{\partial W^L}{\partial P_i} \delta P_i - \varepsilon_0 \varphi_i \delta \varphi_i + \varphi_i \delta P_i + P_i \delta \varphi_i \quad (2.14)$$

στην οποία έχουμε χρησιμοποιήσει τους ορισμούς του ταυυστή τάσης  $\sigma_{ij}$  και του διανύσματος ενός τοπικού εσωτερικού ηλεκτρικού πεδίου  $E_i^L$  (Local) όπως φαίνεται στην σχέση (2.15)

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W^L}{\partial e_{ij}}, \quad E_i^L = -\frac{\partial W^L}{\partial P_i} \quad (2.15)$$

Σημειώνουμε επιπλέον ότι ισχύει η συμμετρία του ταυυστή τάσης  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$  και από τον κανόνα παραγωγής γινομένου προκύπτουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} \delta e_{ij} &= \delta u_{j,i} = (\sigma_{ij} \delta u_j)_i - \sigma_{ij,i} \delta u_j, \\ \varphi_i \delta \varphi_i &= (\varphi_i \delta \varphi)_i - \varphi_{,ii} \delta \varphi, \\ P_i \delta \varphi_i &= (P_i \delta \varphi)_i - P_{i,i} \delta \varphi. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Τότε από την ενσωμάτωση των (2.15) και (2.16) στη στοιχειώδη μεταβολή της ηλεκτρικής ενθαλπίας (2.14) ενός συνεχούς μέσου θα πάρουμε την σχέση

$$\delta H = -\sigma_{ij,j} \delta u_i - (E_i^L - \varphi_{,i}) \delta P_i - (-\varepsilon_0 \varphi_{,ii} + P_{i,i}) \delta \varphi + [\sigma_{ij} \delta u_i + (-\varepsilon_0 \varphi_{,i} + P_i) \delta \varphi]_i \quad (2.17)$$

Αναφέροντας ξανά ότι  $V^* = V + V'$  και ότι  $u_i$  και  $P_i$  δεν υπάρχουν στον  $V'$  και κατόπιν εφαρμόζοντας το θεώρημα Gauss βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
 -\delta \int_{V^*} HdV &= \int_V \left[ \sigma_{ij,i} \delta u_j + (E_i^L - \varphi_{,i}) \delta P_i + (-\varepsilon_0 \varphi_{,ii} + P_{i,i}) \delta \varphi \right] dV \\
 &\quad - \int_S n_i \left[ \sigma_{ij,i} \delta u_j + (-\varepsilon_0 \varphi_{,i} + P_{i,i}) \delta \varphi \right] dS
 \end{aligned}
 \tag{2.18}$$

Κατά αναλογία για τον όγκο  $V'$  μπορούμε να γράψουμε

$$-\delta \int_{V'} HdV = -\int_{V'} \varepsilon_0 \varphi_{,ii} \delta \varphi dV - \int_S \varepsilon_0 n_i \varphi_{,i} \delta \varphi dS
 \tag{2.19}$$

Επομένως, η (2.13) παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned}
 &\int_V \left[ (\sigma_{ij,i} + f_j) \delta u_j + (E_i^L - \varphi_{,i} + E_i^0) \delta P_i + (-\varepsilon_0 \varphi_{,ii} + P_{i,i}) \delta \varphi \right] dV - \\
 &\quad - \int_{V'} \varepsilon_0 \varphi_{,ii} \delta \varphi dV + \\
 &\quad + \int_S \left[ (t_j - n_i \sigma_{ij}) \delta u_j + n_i (\varepsilon_0 \llbracket \varphi_{,i} \rrbracket - P_i) \delta \varphi \right] dS = 0
 \end{aligned}
 \tag{2.20}$$

Η αγκύλη  $\llbracket \varphi_{,i} \rrbracket$  υποδηλώνει την διαφορά των τιμών της περικλειόμενης ποσότητας στις επιφάνειες  $S_1$  και  $S_2$ . Οι επιφάνειες  $S_1$  και  $S_2$  είναι λείες επιφάνειες και χαρακτηρίζονται από την εξής σχέση ορισμού  $S_1 \cup S_2 = S$ .

Οι Euler σχέσεις των συνοριακών συνθηκών για το συνεχές μέσο χωρίζονται σε όρους που αφορούν στον όγκο  $V$  και σε όρους που αφορούν στον όγκο  $V'$ . Λόγω της ανεξαρτησίας των μεταβολών  $\delta u_i$ ,  $\delta P_i$ , και  $\delta \varphi$  οι συνοριακές διαμορφώνονται ως ακολούθως

- Για τον όγκο  $V$

$$\begin{aligned}\sigma_{ij,i} + f_j &= 0, \\ E_i^L - \varphi_{,i} + E_i^0 &= 0, \\ -\varepsilon_0 \varphi_{,ii} + P_{i,i} &= 0.\end{aligned}\tag{2.21}$$

- Για τον όγκο  $V'$

$$\varphi_{,ii} = 0\tag{2.22}$$

- Οι φυσικές συνοριακές συνθήκες

$$\begin{aligned}t_j &= n_i \sigma_{ij}, \\ n_i (-\varepsilon_0 \llbracket \varphi_{,i} \rrbracket + P_i) &= 0.\end{aligned}\tag{2.23}$$

Στη σχέση (2.23) σημειώνουμε ότι ο όρος  $n_i (-\varepsilon_0 \llbracket \varphi_{,i} \rrbracket + P_i)$  εκφράζει το επιφανειακό φορτίο.

Η πυκνότητα ενέργειας λόγω της παραμόρφωσης και της πόλωσης μπορεί πλέον να πάρει την απλούστερη μορφή

$$W^L = \frac{1}{2} a_{ij}^S P_i P_j + \frac{1}{2} c_{ijkl}^P e_{ij} e_{kl} + f_{kij} e_{ij} P_k\tag{2.24}$$

Επιπλέον, κάνοντας χρήση των ορισμών της σχέσης (2.15)

$$\begin{aligned}
 -E_j^L &= a_{ij}^S P_k + f_{jkl} e_{kl} , \\
 \sigma_{ij} &= f_{kij} P_k + c_{ijkl}^P e_{kl} .
 \end{aligned}
 \tag{2.25}$$

Οι εξισώσεις (2.16), (2.21), (2.22) και (2.25) μαζί με τις συνοριακές συνθήκες (2.23) αποτελούν τη γραμμική μορφή της εξίσωσης ισορροπίας των ελαστικών διηλεκτρικών όπως αυτή δόθηκε από τον Tourin.

Στην συνέχεια θα εξετάσουμε τις σχέσεις που διέπουν τις νέες σταθερές  $a_{ij}^S, f_{ijk}$  και  $c_{ijkl}^P$  αλλά και τον τρόπο σύνδεσης αυτών με τις σταθερές της προηγούμενης υποενότητας.

Από την σχέση (2.3) και την δεύτερη σχέση στην (2.21) και παραλείποντας τον όρο  $E_i^0$  λαμβάνουμε την συνθήκη  $E_i^L = -E_i$ . Για το λόγο αυτό η σχέση (2.25) παίρνει την μορφή

$$E_j = a_{jk}^S P_k + f_{jkl} e_{kl}
 \tag{2.26}$$

Ο λόγος της πόλωσης  $P$  ως προς τον όρο  $\varepsilon_0 E$  εκφράζει την ηλεκτρική επιδεκτικότητα  $\chi_e$ .

Έτσι, η σταθερά  $a_{jk}^S$  είναι ανάλογη της αμοιβαίας επιδεκτικότητας σε συνεχή τροπή ( $\chi_{ij}^S$ ) σύμφωνα με την ακόλουθη σχέση

$$a_{jk}^S = \varepsilon_0^{-1} \chi_{ij}^S
 \tag{2.27}$$



Με αντικατάσταση της (2.27) στην (2.26) έχουμε

$$E_j = \varepsilon_0^{-1} \chi_{ij}^S P_k + f_{jkl} e_{kl} \quad (2.28)$$

Συμβολίζουμε την επιδεκτικότητα σε συνεχή τροπή με  $\eta_{ij}^S$ , και την ορίζουμε με βάση τον τύπο

$$\eta_{ij}^S \chi_{jk}^S = \delta_{ik} \quad (2.29)$$

Πολλαπλασιάζοντας στο σημείο αυτό κατά μέλη την σχέση (2.28) με τον όρο  $\varepsilon_0 \eta_{mj}^S$  λαμβάνουμε

$$\varepsilon_0 \eta_{mj}^S E_j = P_m + \varepsilon_0 \eta_{mj}^S f_{jkl} e_{kl} \quad (2.30)$$

Ακόμη, απαλείφοντας το διάνυσμα πόλωσης ανάμεσα στις σχέσεις (2.30) και (2.7) προκύπτει το αποτέλεσμα

$$D_i = -\varepsilon_0 \eta_{ij}^S f_{jkl} e_{kl} + \varepsilon_0 (\delta_{ij} + \eta_{ij}^S) E_j \quad (2.31)$$

Συγκρίνοντας αντίστοιχα τους όρους της σχέσης (2.31) με αυτούς της (2.6) παρατηρούμε ότι

$$\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_0 \eta_{ij}^S f_{jkl} , \quad (2.32)$$

$$f_{jkl} = -\varepsilon_0^{-1} \chi_{ij}^S \varepsilon_{ikl} .$$

Και

$$\varepsilon_{ij}^S = \varepsilon_0 (\delta_{ij} + \eta_{ij}^S), \quad (2.33)$$

$$\eta_{ij}^S = \varepsilon_0^{-1} \varepsilon_{ij}^S - \delta_{ij}.$$

Για την εύρεση του όρου  $c_{ijkl}^P$  ως προς τον όρο  $c_{ijkl}^E$  που συναντήσαμε στις κλασσικές εξισώσεις πιεζοηλεκτρισμού, αρχικά αντικαθιστούμε την έκφραση του διανύσματος της πόλωσης  $P_i$  σε συνάρτηση με τους όρους  $E_i$  και  $e_{ij}$  στην σχέση (2.30)

$$\sigma_{ij} = f_{mij} (\varepsilon_0 \eta_{mk}^S E_k - \varepsilon_0 \eta_{mn}^S f_{nkl} e_{kl}) + c_{ijkl}^P e_{kl} \quad (2.34)$$

Η οποία με βάση την (2.32) παίρνει και την ισοδύναμη μορφή

$$\sigma_{ij} = (c_{ijkl}^P - \varepsilon_0 \eta_{mn}^S f_{mij} f_{nkl}) e_{kl} - q_{kij} E_k \quad (2.35)$$

Συγκρίνοντας την (2.35) με την (2.5), λαμβάνουμε ότι

$$c_{ijkl}^E = c_{ijkl}^P - \varepsilon_0 \eta_{mn}^S f_{mij} f_{nkl} \quad (2.36)$$

Ή αντιστρόφως από την σχέση (2.32) έχουμε

$$c_{ijkl}^P = c_{ijkl}^E + \varepsilon_0^{-1} \chi_{mn}^S q_{mij} q_{nkl} \quad (2.37)$$

Με την βοήθεια των εκφράσεων των σταθερών  $a_{jk}^S$ ,  $c_{ijkl}^P$  και  $f_{ijk}$  είμαστε έτοιμοι να ελαχιστοποιήσουμε τις εξισώσεις ισορροπίας (2.21) και τις δύο καταστατικές εξισώσεις (2.25) στην κλασική εξίσωση των  $u_i$  και  $\varphi$  που περιεγράφηκε στο τέλος της προηγούμενης ενότητας μέσω της απαλοιφής του όρου της πόλωσης.

Αρχικά, για να λύσουμε την σχέση (2.25) ως προς την πόλωση  $P_i$  κάνουμε χρήση της αναλογίας μεταξύ των σταθερών  $a_{ij}^S$  και  $\varepsilon_0 \eta_{ij}^S$ . Έτσι, κατόπιν πολλαπλασιασμού, παίρνουμε την σχέση

$$P_i = -\varepsilon_0 \eta_{ij}^S (E_j^L + f_{jkl} e_{kl}) \quad (2.38)$$

Αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση στο 2<sup>ο</sup> μέρος της σχέσης (2.25) αποκτούμε την σχέση

$$\sigma_{ij} = -f_{kij} \varepsilon_0 \eta_{km}^S (E_m^L + f_{mpq} e_{pq}) + c_{ijkl}^P e_{kl} \quad (2.39)$$

Από την δεύτερη εξίσωση ισορροπίας έχουμε  $E_i^L = \varphi_{,i}$  και ξανά παραλείποντας το πεδίο  $E_i^0$  και παράλληλα χρησιμοποιώντας την σχέση (2.4) έχουμε

$$\sigma_{ij} = (c_{ijkl}^P - \varepsilon_0 \eta_{mn}^S f_{mij} f_{nkl}) u_{k,li} - \varepsilon_0 \eta_{mn}^S f_{kij} \varphi_{,mi} \quad (2.40)$$

Στην συνέχεια, από το 1<sup>ο</sup> μέρος της (2.32) και από την σχέση (2.36) καταλήγουμε

$$\sigma_{ij,i} + f_j = c_{ijkl}^E u_{k,li} + \varepsilon_{kij} \varphi_{,ki} + f_j \quad (2.41)$$

Η σχέση που προκύπτει είναι το αριστερό μέλος της (2.8) όπως αναμένονταν. Στην συνέχεια, από την (2.38) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
 P_{i,i} &= -\varepsilon_0 \eta_{ij}^S (E_{j,i}^L + f_{jkl} e_{kl,i}) \\
 &= -\varepsilon_0 \eta_{ij}^S \varphi_{,ij} - \varepsilon_0 \eta_{ij}^S f_{jkl} u_{k,li}
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

Με βάση αυτά το αριστερό μέλος της τελευταίας εξίσωσης ισορροπίας (2.21) μετατρέπεται στην

$$-\varepsilon_0 \varphi_{,ii} + P_{i,i} = -\varepsilon_0 \eta_{ij}^S f_{jkl} u_{k,li} - \varepsilon_0 (\delta_{ij} + \eta_{ij}^S) \varphi_{,ij} \tag{2.43}$$

ή από τις πρώτες σχέσεις των (2.32) και (2.33) τελικώς λαμβάνουμε την ισοδύναμη σχέση

$$-\varepsilon_0 \varphi_{,ii} + P_{i,i} = \varepsilon_{ikl} u_{k,li} - \varepsilon_{ij}^S \varphi_{,ij} \tag{2.44}$$

Παρατηρούμε τελικά ότι το 2<sup>ο</sup> μέλος της (2.44) ταυτίζεται με το αριστερό μέλος την σχέσης (2.9) όπως αναμένονταν.

## Κεφάλαιο 3

### Θεωρία Ελαστικών Διηλεκτρικών Υλικών του Mindlin

#### 3.1 Εισαγωγή

Η κοιλότητα συντονισμού ( γνωστή και ως αντηχείο) είναι ένα κομμάτι κυματοδηγού κλεισμένο από δύο μεταλλικές πλάκες. Όταν η μετάδοση των κυμάτων γίνεται κατά τη διαμήκη διεύθυνση μέσα στον κυματοδηγό τότε δημιουργούνται στάσιμα κύματα μέσα στο αντηχείο τα οποία έχοντας την κατάλληλη διέγερση μπορούν να συντονιστούν. Δηλαδή, οποιοσδήποτε χώρος περικλειόμενος από αγωγή τοιχώματα πρέπει να έχει μία τουλάχιστον συχνότητα συντονισμού. Έτσι, ένας εντελώς κλειστός κυματοδηγός οποιουδήποτε σχήματος μπορεί να χαρακτηριστεί ως μια κοιλότητα συντονισμού με το δικό της σύστημα καταστάσεων και κατά επέκταση τις δικές της συχνότητες συντονισμού. Κάθε κοιλότητα συντονισμού παρουσιάζει άπειρο το πλήθος συχνοτήτων συντονισμού. Ο καθορισμός αυτών των συχνοτήτων είτε για τη θεμελιώδη είτε για οποιαδήποτε διεγερμένη κατάστασή της αποτελεί ένα δύσκολο εγχείρημα, το οποίο και κλιμακώνεται όσο τα σχήματα γίνονται πολυπλοκότερα. Φυσικά, στα απλούστερα σχήματα των κοιλοτήτων αυτών δηλαδή στις σφαίρες, στα ορθογώνια πρίσματα και στις πλάκες, η προσέγγιση των συχνοτήτων συντονισμού είναι ιδιαίτερα ακριβής.

Από την δημιουργία των πρώτων πιεζοηλεκτρικών αντηχείων δηλαδή κοιλοτήτων ηλεκτρομαγνητικού συντονισμού φτιαγμένων από πιεζοηλεκτρικά διηλεκτρικά υλικά, από τον Cady το 1918, οι ηλεκτρονικοί ταλαντωτές και τα ηλεκτρονικά φίλτρα βασίζονταν σχεδόν εξ ολοκλήρου στους πιεζοηλεκτρικούς κρυστάλλους, εξαιτίας της απαίτησης των παραπάνω κυκλωμάτων για ακρίβεια στις συχνότητες αλλά και για τον πλήρη έλεγχο αυτών. Ορθογώνια πρίσματα, κύλινδροι και κυρίως πλάκες αποτελούμενες από πιεζοηλεκτρικούς κρυστάλλους και επικαλυπτόμενα από αγωγή ηλεκτρόδια για την εφαρμογή εναλλασσόμενης τάσης υψηλής συχνότητας, λειτουργούν ως μηχανικές κοιλότητες οι οποίες βρίσκουν άμεση εφαρμογή στα προαναφερθέντα κυκλώματα. Σε όλες τις παραπάνω εφαρμογές των πιεζοηλεκτρικών υλικών, η κλασική θεωρία του πιεζοηλεκτρισμού είναι απολύτως ικανή να τις ερμηνεύσει.

Κατά τη δεκαετία 1950-1960 δημιουργήθηκε ένα ιδιαίτερο ενδιαφέρον για την προσπάθεια σύνδεσης της κλασικής θεωρίας με φαινόμενα που εμφανίζονται στη δομή ενός υλικού. Ο απώτερος σκοπός της σύνδεσης αυτής ήταν να ενώσει το χάσμα που υπήρχε μεταξύ της κλασικής θεωρίας και των δυναμικών θεωριών των κρυσταλλικών πλεγμάτων.

Η θεωρία του Born-von Karman για τα μονοατομικά κρυσταλλικά πλέγματα αξιοποιούσε την κλασική θεωρία προκειμένου να δικαιολογήσει τους περιορισμούς στις συχνότητες των διαδιδόμενων στο υλικό κυμάτων. Ωστόσο οι νεότερες θεωρίες για τα μονοατομικά κρυσταλλικά πλέγματα στα οποία εμφανίζεται πλέον και το φαινόμενο του πιεζοηλεκτρισμού, δεν μπορούσαν να αξιοποιήσουν με παρόμοιο τρόπο την κλασική θεωρία προκειμένου να εξηγήσουν τους περιορισμούς στις συχνότητες των διαδιδόμενων κυμάτων. Τη λύση στο πρόβλημα ασυμφωνίας μεταξύ των δύο θεωριών, έδωσε ο Mindlin.

Ο Raymond David Mindlin γεννήθηκε στην Νέα Υόρκη στις 17 Σεπτεμβρίου του 1906 ενώ απεβίωσε στις 22 Νοεμβρίου 1987. Ο Mindlin ήταν ένας Αμερικανός μηχανικός, καθηγητής εφαρμοσμένων επιστημών στο Πανεπιστήμιο Columbia. Ο ίδιος απέδειξε ότι οι περιορισμοί στις συχνότητες των χαμηλής συχνότητας διαδιδόμενων κυμάτων μπορούν εκ νέου να επαληθευτούν εισάγοντας την έννοια της βαθμίδας της πόλωσης στη συνάρτηση της παραμορφωσιακής ενέργειας ενός ελαστικού διηλεκτρικού υλικού. Πράγματι ο Mindlin στηριζόμενος στην θεωρία μεταβολών του Tourin κατάφερε να δημιουργήσει μία επαυξημένη θεωρία η οποία όχι μόνο έρχεται σε άμεση συμφωνία με τις νεότερες θεωρίες για τα κρυσταλλικά πλέγματα αλλά μπορεί επίσης να δικαιολογήσει και όλα τα προαναφερθέντα φαινόμενα και εφαρμογές της κλασικής θεωρίας. Ένα από τα σημαντικότερα φαινόμενα που εξηγεί αυτή η θεωρία του Mindlin, είναι η ύπαρξη ηλεκτρομηχανικής αλληλεπίδρασης ακόμα και σε ισότροπα κεντροσυμμετρικά υλικά γεγονός που δεν εξηγούνταν από την κλασική θεωρία.

Πιο συγκεκριμένα, οι κλασικές εξισώσεις που διέπουν τα ελαστικά διηλεκτρικά υλικά, έτσι όπως τις διατύπωσε ο Tourin φανερώνουν όπως προαναφέραμε, κάποια αδυναμία στην κλασική θεωρία συνεχούς μέσου. Η δεύτερη σχέση της (2.21)  $E_i^L - \varphi_i + E_i^0 = 0$  αποτελεί την εξίσωση ισορροπίας ενδομοριακών δυνάμεων η οποία προέρχεται από τις θεμελιώδεις εξισώσεις των ηλεκτρικών δυνάμεων.

Στηριζόμενοι στην εγκυρότητα της παραπάνω εξίσωσης, είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι δεν υπάρχει κάποια συνοριακή συνθήκη που να πηγάζει από αυτή. Παρόλα αυτά η εξίσωση είναι άμεσα συνδεδεμένη με κάθε μία από τις μεταβλητές  $u_i$ ,  $\varphi$  και  $P_i$ , εκ των οποίων όμως μόνο τα  $u_i$  και  $\varphi$  συνδέονται με τις συνοριακές συνθήκες.

Δεν υπάρχει, συνεπώς σταθερά για τη μεταβολή της πόλωσης  $\delta P_i$  στο επιφανειακό ολοκλήρωμα στην σχέση (2.20) έτσι ώστε να συμπληρώσει τον αντίστοιχο όρο στο ολοκλήρωμα του όγκου. Αυτή η απουσία του όρου μπορεί να δικαιολογηθεί κατά τον Mindlin, από εξάρτηση της παραμορφωσιακής ενέργειας  $W^L$  αποκλειστικά και μόνο από το διάνυσμα της πόλωσης  $P_i$  και τον τανυστή τροπής  $e_{ij}$  και όχι από την βαθμίδα πόλωσης  $P_{j,i}$ .

Έτσι λοιπόν, το 1971 ο Mindlin αναδιατύπωσε την θεωρία μεταβολών του Tourin, εισάγοντας μια ιδιαίτερα κρίσιμη συνιστώσα, αυτή της βαθμίδας της πόλωσης. Με τον τρόπο αυτό εισήγαγε και ταυτόχρονα συσχέτισε την έννοια της βαθμίδας (grad) της πόλωσης μεταξύ των άλλων ανεξάρτητων μεταβλητών του συναρτησιακού της ενέργειας. Κατάφερε συνεπώς να δώσει μια πιο εμπειρισταωμένη ανάλυση των κεντροσυμμετρικών και ισότροπων υλικών, εξηγώντας το φαινόμενο τα ηλεκτρομηχανικά φαινόμενα τα οποία εμφανίζονται σε αυτά.

Στο πλαίσιο αυτό στην δεύτερη υποενότητα παρουσιάζεται με μεγάλη λεπτομέρεια η ανάπτυξη των συνοριακών συνθηκών που διέπουν ένα ελαστικό διηλεκτρικό μέσο όπως αυτές διαμορφώνονται στην πλέον επαυξημένη από τον Mindlin, θεωρία μεταβολών.

Τέλος, στην τρίτη υποενότητα του κεφαλαίου, παρουσιάζονται οι αλληλένδετες εκφράσεις των σταθερών που εμφανίζονται στην έκφραση την παραμορφωσιακής ενέργειας για τα κεντροσυμμετρικά υλικά καθώς και οι ανάλογες καταστατικές σχέσεις.

### 3.2 Η θεωρία μεταβολών του Mindlin

Η επέκταση της θεωρίας μεταβολών του Mindlin βασίζεται πάνω στη συνεισφορά της βαθμίδας της πόλωσης στην συνολική ηλεκτρική ενθαλπία ενός διηλεκτρικού. Για το λόγο αυτό η σχέση (2.10) θα λάβει τη μορφή

$$W = W^L(e_{ij}, P_i, P_{j,i}) - \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varphi_{,i} \varphi_{,i} + \varphi_i P_i \quad (3.1)$$

Επιπλέον, εισάγουμε τη κινητική ενέργεια του σώματος και επομένως η σχέση (2.13) γίνεται

$$-\delta \int_{t_2}^{t_1} dt \int_{V^*} \left( \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i - H \right) dV + \int_{t_2}^{t_1} dt \left[ \int_{V^*} (f_i \delta u_i + E_i^0 \delta P_i) dV + \int_S t_i \delta u_i dS \right] = 0 \quad (3.2)$$

για ανεξάρτητες μεταβολές των  $u_i$ ,  $\varphi$  και  $P_i$  μέσα στο χρονικό διάστημα από  $t_0$  και  $t_1$ .

Προστίθεται επίσης ο νέος όρος

$$E_{ij} = \frac{\partial W^L}{\partial P_{j,i}} \quad (3.3)$$

Καθώς και δύο ολοκληρώσεις

$$\frac{1}{2} \delta \int_{t_0}^{t_1} \dot{u}_i \dot{u}_i dt = \int_{t_0}^{t_1} \dot{u}_i \delta \dot{u}_i dt = \dot{u}_i \delta u_i \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \ddot{u}_i \delta u_i dt = - \int_{t_0}^{t_1} \ddot{u}_i \delta u_i dt \quad (3.4)$$



$$\int_V E_{ij} \delta P_{j,i} dV = \int_V [E_{ij} \delta P_j)_i - E_{ij,j} \delta P_j] dV = \int_S E_{ij,i} \delta P_j dV \quad (3.5)$$

Με βάση τις σχέσεις (3.4), (3.5) και (2.18) η σχέση (3.2)

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} dt \int_V [(\sigma_{ij,i} + f_j - \rho \ddot{u}_j) \delta u_j + (E_{ij,i} + E_j^L - \varphi_{,j} + E_j^0) \delta P_i + (-\varepsilon_0 \varphi_{,ii} + P_{i,i}) \delta \varphi] dV \\ & - \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{V'} \varepsilon_0 \varphi_{,ii} \delta \varphi dV \\ & + \int_{t_0}^{t_1} dt \int_S [(t_j - n_i \sigma_{ij}) \delta u_j - n_i E_{ij} \delta P_j + n_i (\varepsilon_0 [\varphi_{,i}] - P_i) \delta \varphi] dS = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Επομένως, οι εξισώσεις Euler καταλήγουν να είναι

- Για τον όγκο  $V$

$$\sigma_{ij,i} + f_j = \rho \ddot{u}_j ,$$

$$E_{ij} + E_j^L - \varphi_{,i} + E_j^0 = 0 , \quad (3.7)$$

$$-\varepsilon_0 \varphi_{,ii} + P_{i,i} = 0 .$$

- Για τον όγκο  $V'$

$$\varphi_{,ii} = 0 \quad (3.8)$$

- Και οι συνοριακές συνθήκες

$$\begin{aligned}
t_j &= n_i \sigma_{ij} , \\
n_i E_{ij} &= 0 , \\
n_i \left( -\varepsilon_0 \llbracket \varphi_i \rrbracket + P_i \right) &= 0 .
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Η πυκνότητα ενέργειας λόγω της παραμόρφωσης της πόλωσης και της βαθμίδας της πόλωσης μπορεί πλέον να πάρει την μορφή

$$\begin{aligned}
W^L &= +b_{ij}^0 P_{j,i} + \frac{1}{2} a_{ij}^{SG} P_i P_j + \frac{1}{2} b_{ijkl}^{PS} P_{j,i} P_{l,k} + \frac{1}{2} c_{ijkl}^P e_{ij} e_{kl} + \\
&+ d_{ijkl}^P P_{j,i} e_{kl} + f_{ijk}^G P_i e_{jk} + j_{ijk}^S P_i P_{k,j}
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Οι πάνω δείκτες  $S, P$  και  $G$  , υποδεικνύουν την τροπή (Strain), την πόλωση (Polarization) και τη βαθμίδα της πόλωσης (Gradient Polarization) αντίστοιχα.

Αντικαθιστώντας την (3.10) στις (2.15) και (3.3), βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
-E_j^L &= a_{jk}^{SG} P_k + j_{jkl}^S P_{l,k} + f_{jkl}^G e_{kl} , \\
E_{ij} &= j_{kij}^S P_k + b_{ijkl}^{PS} P_{l,k} + d_{ijkl}^P e_{kl} + b_{ij}^0 , \\
\sigma_{ij} &= f_{kij}^G P_k + c_{ijkl}^P e_{kl} + d_{klj}^P P_{l,k} .
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Οι συνοριακές συνθήκες (3.7) και (3.8), οι καταστατικές εξισώσεις (3.11) και η σχέση ορισμού του τανυστή τροπής (1.36) όπως αναμενόταν οδηγούν στις εξισώσεις της αναπτυγμένης θεωρίας. Επιπλέον, από τη μορφή του επιφανειακού ολοκληρώματος στην σχέση (3.6), μπορεί να δικαιολογηθεί ποιες από τις συνοριακές συνθήκες (εκτός των (3.9)) είναι αποδεκτές. Τέλος, μπορούμε να προσδιορίσουμε είτε το επιφανειακό φορτίο  $n_i(-\varepsilon_0 \llbracket \varphi_i \rrbracket + P_i)$  είτε το ηλεκτρικό δυναμικό  $\varphi$  ενώ παράλληλα είναι σημαντικό να τονιστεί ότι τόσο το δυναμικό  $\varphi$  όσο και το διάνυσμα πόλωσης  $P_i$  μπορούν ταυτόχρονα να καθοριστούν πλήρως γεγονός που δεν μπορούσε να συμβεί στην κλασική θεωρία.

### 3.3 Κεντροσυμμετρικά υλικά: Κύβος

Μία από τις πρωτοποριακές ιδιότητες της πλέον επαυξημένης θεωρίας των ελαστικών διηλεκτρικών είναι η ύπαρξη ηλεκτρομηχανικής αλληλεπίδρασης ακόμα και στα υλικά με κεντροσυμμετρικές φυσικές ιδιότητες. Αυτό μπορεί να αποδειχθεί παρατηρώντας τον τύπο της παραμορφωσιακής ενέργειας  $W^L$  όπως αυτός δίνεται στην σχέση (3.10). Για κεντροσυμμετρικά υλικά θα ισχύει  $f_{ijk} = j_{ijk} = 0$  καθώς δεν υπάρχουν κεντροσυμμετρικοί τανυστές περιττής τάξης. Παρόλα αυτά, παραμένει ο τανυστής  $d_{ijkl}$  όπου αναπαριστά την σταθερά ηλεκτρομηχανικής σύζευξης/αλληλεπίδρασης η οποία εμφανίζεται στην θεωρία του Mindlin που αναπτύξαμε στην προηγούμενη υποενότητα, χωρίς ωστόσο να εμφανίζεται στην κλασική θεωρία.

Ως ένα απλό παράδειγμα κεντροσυμμετρικής κρυσταλλογραφίας, θα θεωρήσουμε ένα κυβικό σύστημα σημείων  $m\bar{3}m$  του οποίου οι γεννήτορες δίνονται από τα μητρώα

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Εφαρμόζοντας τους παραπάνω γεννήτορες στους συντελεστές της σχέσης (3.10), βρίσκουμε

$$f_{ijk} = 0, j_{ijk} = 0 \quad (3.13)$$

$$a_{ij} = a\delta_{ij}, b_{ij}^0 = b_0\delta_{ij}$$

$$\begin{aligned}
b_{ijkl} &= b\delta_{ijkl} + b_{12}\delta_{ij}\delta_{kl} + b_{44}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + b_{77}(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}), \\
c_{ijkl} &= c\delta_{ijkl} + c_{12}\delta_{ij}\delta_{kl} + c_{44}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}), \\
d_{ijkl} &= d\delta_{ijkl} + d_{12}\delta_{ij}\delta_{kl} + d_{44}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}).
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Όπου οι συντελεστές  $a_{11}, b_0, b_{pq}, c_{pq}$  και  $d_{pq}$  είναι σταθερές και τα  $b, c$  και  $d$  ορίζονται

$$\begin{aligned}
b &= b_{11} - b_{12} - 2b_{44}, \\
c &= c_{11} - c_{12} - 2c_{44}, \\
d &= d_{11} - d_{12} - 2d_{44}.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Στις σχέσεις (3.13) και (3.14), το  $\delta_{ij}$  είναι το δέλτα του Kronecker και  $\delta_{ijkl}$  είναι ο μοναδιαίος τανυστής 4<sup>ης</sup> τάξης. Η εισαγωγή των σχέσεων (3.13) και (3.14) στις σχέσεις της (3.11) θα την μετατρέψουν ως εξής

$$\begin{aligned}
-E_i^L &= a_{11}P_i, \\
E_{ij} &= +b\delta_{ijkl}P_{l,k} + b_{12}\delta_{ij}P_{k,k} + b_{44}(P_{j,i} + P_{i,j}) + b_{77}(P_{j,i} - P_{i,j}) + \\
&\quad + d\delta_{ijkl}e_{kl} + d_{12}\delta_{ij}e_{kk} + 2d_{44}e_{ij} + b_0\delta_{ij}, \\
\sigma_{ij} &= +d\delta_{ijkl}P_{l,k} + d_{12}\delta_{ij}P_{k,k} + d_{44}(P_{j,i} + P_{i,j}) + \\
&\quad + c\delta_{ijkl}e_{kl} + c_{12}\delta_{ij}e_{kk} + 2c_{44}e_{ij}.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Η εξίσωση κίνησης προκύπτει εισάγοντας τις σχέσεις (3.16) στις σχέσεις (3.7) και παράλληλα χρησιμοποιώντας την σχέση  $e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{j,i} + u_{i,j})$  στο αποτέλεσμα τους

$$\begin{aligned}
& +c\delta_{ijkl}u_{l,ki} + c_{12}u_{k,kj} + c_{44}(u_{j,i} + u_{i,j}) + \\
& +d\delta_{ijkl}P_{l,ki} + d_{12}P_{k,kj} + d_{44}(P_{j,ii} + P_{i,ji}) + f_j = \rho\ddot{u}_j , \\
& +d\delta_{ijkl}u_{l,ki} + d_{12}u_{k,kj} + d_{44}(u_{j,ii} + u_{i,ji}) - a_{11}P_j - \varphi_{,j} + \\
& +b\delta_{ijkl}P_{l,ki} + b_{12}P_{k,kj} + b_{44}(P_{j,ii} + P_{i,ji}) + b_{77}(P_{j,ii} + P_{i,ji}) + E_j^0 = 0 , \\
& -\varepsilon_0\varphi_{,ii} + P_{i,i} = 0
\end{aligned} \tag{3.17}$$

## Κεφάλαιο 4

# Εισαγωγή στη Γενική Διπολική Θεωρία Βαθμίδας των Tourin και Mindlin

### 4.1 Εισαγωγή

Η διπολική θεωρία βαθμίδας εισήχθη από τους Tourin (1962) και Mindlin (1964) σε μια προσπάθεια να προσομοιώσει τη μηχανική συμπεριφορά στερεών υλικών με μικροδομή. Η θεωρία αυτή βασίζεται στη γενική άποψη ότι το συνεχές μέσο αποτελείται από στοιχειώδη παραμορφώσιμα σωματίδια, τα μακρό-μέσα. Η συμπεριφορά αυτή γίνεται εύκολα αντιληπτή αν κάθε ένα από αυτά τα μακρό-μέσα θεωρηθεί ως συλλογή μικρότερων υπό-σωματιδίων, τα μικρό-μέσα. Με τον τρόπο αυτό, κάθε σωματίδιο του συνεχούς μέσου εμπεριέχει ένα «εσωτερικό» πεδίο μετατοπίσεων, το οποίο αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά ως προς ένα σύστημα εσωτερικών συντεταγμένων. Σύμφωνα με τα ανωτέρω, η κατώτατης τάξης γενικευμένη θεωρία (διπολική θεωρία βαθμίδας), η οποία είναι γραμμική ως προς την κινηματική ανάλυση της θεωρούμενης μικροδομής, προκύπτει αν λάβουμε μόνο τον πρώτο όρο της δυναμοσειράς. Επιπλέον, λόγω της εν γένει εξάρτησης της παραμορφωσιακής ενέργειας από βαθμίδες συγκεκριμένων πεδίων, όπως η (δεύτερη) βαθμίδα της μετατοπίσεως (τύπος I, στη θεωρία του Mindlin), η βαθμίδα της τροπής (τύπος II), ή η βαθμίδα της στροφής (θεωρία τάσεων ζεύγους), εισάγονται νέες σταθερές του υλικού, που υποδεικνύουν την παρουσία χαρακτηριστικού «εσωτερικού» μεγέθους στην συμπεριφορά του. Το χαρακτηριστικό αυτό μέγεθος μπορεί να συνδεθεί με το μέγεθος της μικροδομής του υλικού. Έτσι, ενσωματώνονται φαινόμενα κλίμακας (size effects) στην ανάλυση τάσεων, κάτι που δεν μπορεί να επιτευχθεί με την κλασική θεωρία. Μέσω των θεωριών βαθμίδας, μπορούν να περιγραφούν συνεχή μέσα με περιοδική δομή, όπως είναι π.χ. τα κρυσταλλικά πλέγματα, οι κρυσταλλίτες ενός πολυκρυσταλλικού υλικού ή οι κόκκοι ενός κοκκώδους υλικού.

Ιστορικά, ιδέες που διέπουν τις γενικευμένες θεωρίες συνεχούς μέσου είχαν ήδη αρχίσει να εμφανίζονται από τον 19ο αιώνα με τις εργασίες των Cauchy (1851), Voigt (1887) και των αδελφών E. and F. Cosserat (1909). Όμως το ζήτημα γενικεύτηκε και έφτασε στην ωριμότητα

του στις δεκαετίες του 1960 και 1970 με τις εργασίες των Toupin (1962), Mindlin (1964), Green and Rivlin (1964), Bleustein (1967), Mindlin και Eshel (1968), Eringen (1968), και Germain (1973). Σε μια σύντομη ιστορική αναδρομή τώρα, θα πρέπει να τονιστεί ότι η θεωρία των Toupin και Mindlin και συναφείς προς αυτήν ιδέες (Bleustein, 1967, Mindlin and Eshel, 1968) χρησιμοποιήθηκαν από νωρίς σε εφαρμογές (π.χ. Weitsman, 1966, Day και Weitsman 1966, Cook και Weitsman, 1966, Eshel and Rosenfeld 1970). Πιο πρόσφατα χρησιμοποιήθηκαν για την ανάλυση διαφόρων προβλημάτων σε περιοχές όπως Διάδοση Κυμάτων (Vardoulakis and Georgiadis, 1996, Georgiadis et al., 2000, Georgiadis and Velgaki, 2003, Georgiadis et al., 2004, Charalambopoulos and Gergidis, 2008), Μηχανική των Θραύσεων (Vardoulakis et al. 1996, Zhang et al., 1998, Chen et al., 1998, Chen et al., 1999, Shi et al., 2000, Georgiadis, 2003, Paulino et al., 2003, Radi and Gei, 2004, Grentzelou and Georgiadis, 2005, 2008, Wei, 2006, Karlis et al., 2007, Radi, 2007, 2008, Gourgiotis and Georgiadis, 2007, 2008, 2009, Georgiadis and Gourgiotis, 2008, Aravas and Giannakopoulos, 2009), Πλαστικότητα (Vardoulakis and Frantziskonis, 1992, Fleck et al., 1994, Vardoulakis και Sulem, 1995, Begley και Hutchinson, 1998, Fleck και Hutchinson, 1997, 1998, Gao et al. 1999, Huang et al., 2000, 2004; Hwang et al., 2002), Μηχανική των Ατελειών (Lazar and Maugin, 2005), Προβλήματα Ευστάθειας (Exadaktylos and Vardoulakis, 1998, Papargyri- Beskou, 2003) και Μηχανικής των Κατασκευών (Vardoulakis and Giannakopoulos, 2006, Giannakopoulos and Stamoulis, 2007, Papargyri-Beskou and Beskos, 2008).

Επιπλέον, έχουν αναπτυχθεί προχωρημένες αριθμητικές μέθοδοι για να αντιμετωπίσουν προβλήματα που αναλύονται βάσει της θεωρίας Toupin-Mindlin (Oden et al. 1970, Shu et al., 1999, Amanatidou and Aravas, 2002, Engel et al., 2002, Tsepoura et al., 2002, Polyzos et al., 2003, Giannakopoulos et al., 2006, Tsamasphyros et al., 2007, Markolefas et al. 2008, 2009). Βάσει των μέχρι σήμερα αποτελεσμάτων συμπεραίνεται ότι η θεωρία Toupin-Mindlin επεκτείνει το εύρος ισχύος της έννοιας του συνεχούς σε μία προσπάθεια γεφύρωσης του χάσματος μεταξύ των κλασικών θεωριών συνεχούς μέσου και των θεωριών κρυσταλλικού πλέγματος.



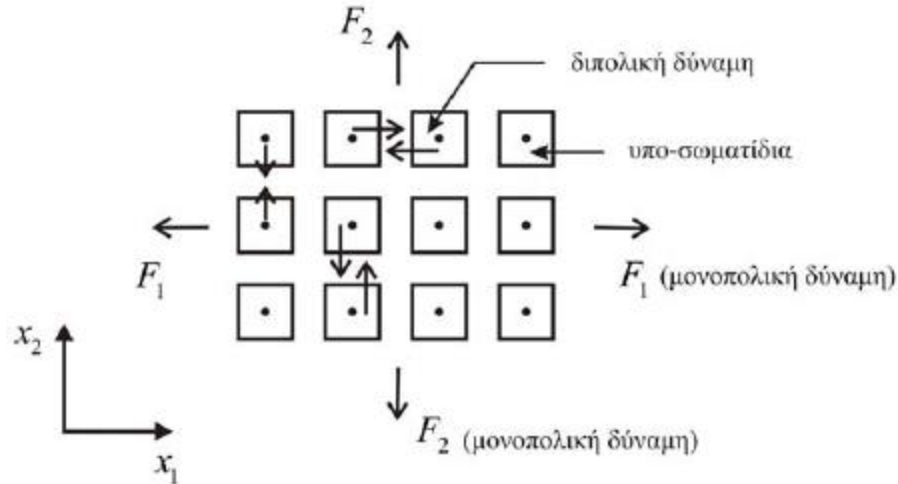
## 4.2 Αρχές και βασικές εξισώσεις θεωρίας βαθμίδας

Στην υποενότητα αυτή, θα παρουσιάσουμε τις βασικές αρχές και εξισώσεις της ελαστοστατικής διπολικής θεωρίας βαθμίδας μικρών τροπών και μετατοπίσεων. Αρχικά, χρησιμοποιούμε την κατάλληλα διαμορφωμένη έκφραση του πρώτου νόμου της θερμοδυναμικής ως προς ένα ορθοκανονικό, καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων

$$\rho \dot{E} = \sigma_{ij} \delta e_{ij} + m_{ijk} \delta u_{k,ij} \quad (4.1)$$

Όπου  $\rho$  είναι η πυκνότητα της μάζας του συνεχούς,  $E$  είναι η εσωτερική ενέργεια ανά μονάδα μάζας,  $e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{j,i} + u_{i,j})$  είναι ο γραμμικός τανυστής τροπής,  $u_i$  το διάνυσμα μετατόπισης,  $\sigma_{ij}$  είναι ο μονοπολικός τανυστής τάσεως (τανυστής τάσεως Cauchy, σύμφωνα με τον Mindlin),  $m_{ijk}$  ο διπολικός (ή διπλός) τανυστής τάσεως, ενώ η υπερκείμενη τελεία δηλώνει παραγωγή ως προς τον χρόνο. Επίσης οι εξισώσεις όπως και στις προηγούμενες παραγράφους γράφονται σε μορφή δεικτών και υπακούουν στην σύμβαση αθροίσεως.

Η έκφραση (4.1) προκύπτει αν θεωρήσει κανείς το ανάπτυγμα του όρου  $\rho \dot{E}$  σε σειρά που περιέχει ανωτέρας τάξεως παραγώγους βαθμίδας και μετατόπισης. Οι πρόσθετοι όροι μπορούν να γίνουν ιδιαίτερα σημαντικοί, για παράδειγμα, στην περιοχή σημείων συγκέντρωσης τάσεων, όπου η βαθμίδα της μετατόπισης υφίσταται έντονες μεταβολές. Για το λόγο αυτό, η έκφραση που προκύπτει από την νέα θεωρία μπορεί να θεωρηθεί ότι δίνει καλύτερη περιγραφή της συμπεριφοράς του υλικού, σε σχέση με την αντίστοιχη κλασική ( $\rho \dot{E} = \sigma_{ij} \delta e_{ij}$ ), όπου δεν λαμβάνονται υπόψιν οι διπολικές τάσεις.



**Σχήμα 13:** Υλικό με μικροδομή: μονοπολικές (εξωτερικές) και διπολικές (εσωτερικές) δυνάμεις δρουν σε ένα σύνολο μικρο-μέσων.

Ο τανυστής διπολικών τάσεων ο οποίος είναι και τρίτης τάξης τανυστής, προκύπτει από την θεώρηση ύπαρξης πολυπολικών δυνάμεων, οι οποίες είναι αντιπαράλληλες δυνάμεις και δρουν μεταξύ των μικρομέσων από τα οποία αποτελείται το συνεχές μέσο με μικροδομή. Όπως διατυπώθηκε από τους Green and Rivlin (1964) και Jaunzemis (1967), η έννοια των πολυπολικών δυνάμεων προκύπτει άμεσα από τη γενίκευση την μηχανικής ισχύος  $M$ , η οποία περιέχει ανώτερης τάξης παραγώγους του πεδίου ταχύτητας, δηλαδή  $M = F_q \dot{u}_q + F_{pq} (\partial_p \dot{u}_q) + F_{rpq} (\partial_r \partial_p \dot{u}_q) + \dots$ , όπου  $F_q$  είναι οι συνήθεις μονοπολικές δυνάμεις του κλασσικού συνεχούς μέσου και  $(F_{qp}, F_{rpq}, \dots)$  είναι οι πολυπολικές δυνάμεις του γενικευμένου συνεχούς μέσου. Με τον τρόπο αυτό, η συνισταμένη δύναμη που εφαρμόζεται σε ένα σύνολο υποσωματιδίων μπορεί να θεωρηθεί ότι αναλύεται σε ένα άθροισμα εξωτερικών και εσωτερικών δυνάμεων, όπου οι εσωτερικές δυνάμεις είναι αυτοϊσορροπούμενες. Όμως τέτοιες αυτοϊσορροπούμενες πολυπολικές δυνάμεις παράγουν μη μηδενικές τάσεις, τις λεγόμενες πολυπολικές τάσεις. Αυτό σημαίνει ότι ένα στοιχείο κατά μήκος ενός τμήματος του συνεχούς ή της επιφάνειας αυτού, μπορεί να μεταβιβάσει, εκτός του συνήθους ελκυστή, ένα ακόμη διάνυσμα, τον διπλό ελκυστή (dipolar traction). Επιπλέον, η αρχή τάσεων Euler-Cauchy διευρύνεται, ώστε να περιλαμβάνει πρόσθετους διπολικούς ελκυστές.

Με βάση αυτά, θα αναπτύξουμε στην συνέχεια τις εξισώσεις συνοριακών συνθηκών που διέπουν ένα τέτοιο ‘γενικευμένο’ συνεχές μέσο.

Αρχικά θεωρούμε ότι, η πυκνότητα παραμορφωσιακής ενέργειας  $W^L$  σε ένα τρισδιάστατο συνεχές μέσο είναι μια θετικά ορισμένη συνάρτηση της μορφής

$$W^L \equiv W^L(e_{ij}, \kappa_{ijk}) \quad (4.2)$$

Όπου  $\kappa_{kji} = \partial_k \partial_j u_i = \partial_j \partial_k u_i$  είναι η δεύτερη παράγωγος της μετατόπισης,  $e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{j,i} + u_{i,j})$  είναι ο τανυστής τροπής και  $P_i$  είναι το διάνυσμα πόλωσης. Επίσης οι τανυστές τροπής και στροφών δίνονται από την σχέση (1.27). Βάσει των παραπάνω ισχύουν οι σχέσεις συμμετρίας  $e_{ij} = e_{ji}, \kappa_{ijk} = \kappa_{jik}$  και  $\omega_{ji} = -\omega_{ij}$ .

Επιπλέον, για το κινηματικό πεδίο  $(e_{ij}, \kappa_{ijk})$  ισχύουν οι σχέσεις συμβιβαστού (Mindlin, 1964)

$$\begin{aligned} e_{mik} e_{nij} \partial_i \partial_j e_{kl} &= 0, \\ e_{mij} \partial_i \kappa_{jkl} &= 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

όπου το  $e_{ijk}$  είναι το σύμβολο εναλλαγής Levi-Civita.

Οι μονοπολικές και διπολικές τάσεις μπορούν να οριστούν, ως μερικές παραγωγίσεις της πυκνότητας παραμορφωσιακής ενέργειας ως προς τον τανυστή τροπής και τη βαθμίδα αυτού αντίστοιχα

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W^L}{\partial e_{ij}} = \sigma_{ji} , \quad (4.4)$$

$$m_{ijk} = \frac{\partial W^L}{\partial e_{jk,i}} = m_{jik} .$$

Από τις σχέσεις αυτές προκύπτουν και οι σχέσεις συμμετρίας  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ ,  $m_{ijk} = m_{jik}$ . Οι καταστατικές σχέσεις εξασφαλίζουν μία-προς-μία αντιστοιχία μεταξύ των μεγεθών  $\sigma_{ij}$  και  $e_{ij}$ , και των  $m_{ijk}$  και  $\kappa_{ijk}$  αν ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες (Georgiadis and Grentzelou, 2006) :

1. Οι παράγωγοι  $(\partial^2 W^L / \partial e_{ij} e_{lm})$ ,  $(\partial^2 W^L / \partial \kappa_{kij} e_{qlm})$  και  $(\partial^2 W^L / \partial e_{ij} \kappa_{qlm})$  είναι συνεχείς γύρω από «σημείο»  $(e_{ij}^*, \kappa_{kij}^*)$ ,
2. Οι ορίζουσες  $|\partial^2 W^L / \partial e_{ij} e_{lm}|$ ,  $|\partial^2 W^L / \partial \kappa_{kij} e_{qlm}|$  είναι διάφορες του μηδενός στην περιοχή του  $(e_{ij}^*, \kappa_{kij}^*)$ .

Παρόλο που η γενική έκφραση (4.2) επιτρέπει εξίσου την μη γραμμική καταστατική συμπεριφορά ενός υλικού, στην παρούσα διπλωματική εργασία επικεντρώνουμε το ενδιαφέρον μας μόνο στη γραμμική και ισότροπη καταστατική συμπεριφορά. Έτσι, στα πλαίσια γραμμικών καταστατικών νόμων, η πυκνότητα της παραμορφωσιακής ενέργειας λαμβάνει, στη γενική περίπτωση, την εξής τετραγωνική μορφή

$$W^L = +\frac{1}{2} c_{ijkl}^P e_{ij} e_{kl} + \frac{1}{2} h_{ijklmn} \kappa_{jki} \kappa_{lmn} + p_{ijklm} \kappa_{jki} e_{lm} \quad (4.5)$$

Όπου  $c_{ijkl}^P, h_{ijklmn}$ , και  $p_{ijklm}$  είναι οι τανυστές των σταθερών του υλικού. Ο αριθμός των ανεξάρτητων συνιστωσών των  $c_{ijkl}^P$  και  $h_{ijklmn}$ , οι οποίοι είναι άρτιας τάξης, μπορεί να μειωθεί ώστε οι τανυστές να περιγράφουν ισότροπη συμπεριφορά του, ενώ ο περιττής τάξης τανυστής  $p_{ijklm}$  οδηγεί πάντα σε κάποια μορφής ανισοτροπία για το υλικό, δηλαδή σε προτιμητέες κατευθύνσεις στην απόκριση του υλικού. Στη γενική περίπτωση οι τανυστές  $(c_{ijkl}^P, h_{ijklmn}, p_{ijklm})$  θεωρούνται συνεχώς διαφορίσιμες συναρτήσεις της θέσης, περιλαμβάνοντας έτσι την ύπαρξη ανομοιογένειας στο υλικό.

Είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι ο «μικτός» όρος  $(p_{ijklm} e_{jk,i} e_{lm})$  στις περισσότερες εργασίες παραλείπεται. Επιπλέον, έρευνα (Georgiadis et al., 2004) σε εφαρμογή της ελαστικής διπολικής θεωρίας ελαστικότητας (η θεωρία περιλαμβάνει μία συγκεκριμένη μορφή των καταστατικών εξισώσεων με τέσσερις ανεξάρτητες σταθερές του υλικού και μελετά τη διάδοση κυμάτων Rayleigh) έδειξε ότι ο όρος αυτός παρουσιάζει τελικά πολύ μικρή επιρροή.

Η περίπτωση παράλειψης του όρου  $(p_{ijklm} e_{jk,i} e_{lm})$  στην (4.5) αποτελεί την επιλογή των Mindlin και Eshel στη θεμελιώδη εργασία (Mindlin and Eshel, 1968) και δείχνει, επίσης, να είναι το αντικείμενο μελέτης στις περισσότερες από τις πρόσφατες εργασίες με θέμα την προσέγγιση βαθμίδας. Στη συνέχεια, οι τάσεις μπορούν να οριστούν με το συνήθη τρόπο, ως μεταβολές της πυκνότητας παραμορφωσιακής ενέργειας  $W^L$ .

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}^P e_{kl} ,$$

$$m_{ijk} = h_{ijklmn} \kappa_{mnl} .$$
(4.6)

Λόγω των συμμετριών που εμφανίζουν οι τανυστές των τάσεων, καθώς και των συνθηκών αντιστρεψιμότητας των καταστατικών σχέσεων, οι τανυστές των σταθερών του υλικού παρουσιάζουν τις ακόλουθες συμμετρίες

$$c_{ijkl}^P = c_{klij}^P = c_{jikl}^P = c_{ijlk}^P ,$$

$$h_{ijklmn} = h_{lmnijk} = h_{jiklmn} = h_{ijkmnl} .$$
(4.7)

Επιπλέον, σημειώνεται ότι για ισότροπο υλικό, οι καταστατικές εξισώσεις γράφονται (Mindlin, 1964)

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} e_{qq} + 2\mu e_{ij} ,$$

$$m_{ijk} = +\frac{1}{2} d_1 (\kappa_{qqi} \delta_{jk} + 2\kappa_{jqq} \delta_{ij} + \kappa_{qqj} \delta_{ki}) + d_2 (\kappa_{iqq} \delta_{jk} + \kappa_{jqq} \delta_{ik}) + 2d_3 \kappa_{qqk} \delta_{ij} + 2d_4 \kappa_{ijk} + d_5 (\kappa_{kji} + \kappa_{kij}) .$$
(4.8)

όπου  $\lambda$  και  $\mu$  είναι οι γνωστές σταθερές του Lamé, και  $d_\alpha$  με  $(\alpha = 1, 2, 3, 4, 5)$  είναι οι επιπρόσθετες σταθερές του υλικού που περιγράφουν τη μικροδομή.

### 4.3 Εισαγωγή της πόλωσης στη θεωρία βαθμίδας τροπής για τα ελαστικά διηλεκτρικά υλικά-Φλεξοηλεκτρικά υλικά

Ένα λιγότερα διαδεδομένο φαινόμενο από αυτό του πιεζοηλεκτρισμού είναι αυτό της φλεξοηλεκτρικότητας ή φλεξοηλεκτρισμού το οποίο προκύπτει από την αμφίδρομη αλληλεξάρτηση της βαθμίδας της πόλωσης (Polarization Gradient) με τη βαθμίδα τροπής (strain gradient). Το φαινόμενο αυτό μελετήθηκε πρωτίτως σε υγρά κρύσταλλα και λίγο αργότερα σε μεμβράνες με διπλές στρώσεις λιπιδίων. Πιστεύονταν μάλιστα πως το φαινόμενο απαντάται και σε πιο σκληρά υλικά με μη κεντροσυμμετρικά πλέγματα. Ωστόσο, στα υλικά αυτά ήταν δύσκολο να μετρηθούν οι φλεξοηλεκτρικές σταθερές λόγω των τεραστίων τιμών της βαθμίδας τροπής που απαιτούνταν για να είναι μετρήσιμες σε μακροσκοπικό επίπεδο. Το πρόβλημα αυτό ξεπεράστηκε με την εισαγωγή της νανοτεχνολογίας η οποία επέτρεπε τη μελέτη του φαινομένου για πιο προσιτές τιμές της βαθμίδας παραμόρφωσης.

Πρέπει να αναφερθεί πως ο φλεξοηλεκτρισμός δεν αποτελεί υποκατηγορία του πιεζοηλεκτρισμού στη νάνο κλίμακα, αλλά αντιθέτως είναι δύο διαφορετικά φαινόμενα. Σε αντίθεση με τον πιεζοηλεκτρισμό ο φλεξοηλεκτρισμός συναντάται σε κάθε διηλεκτρικό υλικό ανεξάρτητα από την κρυσταλλική του δομή. Μάλιστα η ύπαρξη της φλεξοηλεκτρικότητας προσδίδει επιπλέον ηλεκτρομηχανικές ιδιότητες οι οποίες εναλλακτικά είναι μη υπαρκτές. Το πρώτο θεωρητικό μοντέλο αναπτύχθηκε από τον Tagansten στο οποίο υποστηρίχθηκε αρχικά ότι, η φλεξοηλεκτρικότητα προκύπτει ως αποτέλεσμα της ανυπαρξίας συμμετρικότητας στο πλέγμα, ενώ τελικά έδειξε και την εξάρτηση του φαινομένου από την ανακατανομή των ατόμων. Πράγματι αυτή η εξάρτηση της ανακατανομής των ατόμων, όπως για παράδειγμα στο  $\text{BaTiO}_3$  (Τιτανιούχο Βάριο που είναι ένα Σιδηροηλεκτρικό υλικό), έδειξε πως τα αποτελέσματα της πιεζοηλεκτρικότητας ενισχύονται με την ύπαρξη φλεξοηλεκτρικότητας.

Στηριζόμενοι στα προαναφερθέντα, οι εξισώσεις που διέπουν τη φλεξοηλεκτρικότητα σαν φαινόμενο, θα αναχθούν από την θεωρία βαθμίδας τροπής την οποία εισήγαγαν για πρώτη φορά οι Tourin και Mindlin. Για το λόγο αυτό, στην παρούσα θεωρία η πυκνότητα της παραμορφωσιακής ενέργειας ενός διηλεκτρικού μέσου θα εξαρτάται αφενός από την τροπή και από τη βαθμίδα αυτής και αφετέρου από το φαινόμενο της πόλωσης.

Έτσι, στην περίπτωση της θεωρίας βαθμίδας τροπής, θεωρούμε τη σχέση (4.2) για την πυκνότητα παραμορφωσιακής ενέργειας, αλλά πλέον ο τανυστής  $\kappa_{kji}$  αποτελεί τη βαθμίδα του τανυστή της τροπής, δηλαδή  $\kappa_{kji} = \partial_k e_{ij}$ . Η θεωρία βαθμίδας τροπής είναι ο τύπος II (FORM II) στην εργασία του Mindlin (1964). Προφανώς, ισχύει η σχέση συμμετρίας  $\kappa_{ijk} = \kappa_{jik}$ . Οι τάσεις μπορούν να οριστούν όπως στις σχέσεις (4.4) και, ανάλογα, ο τανυστής των διπολικών τάσεων παρουσιάζει παρόμοια συμπεριφορά με τον  $\kappa_{ijk}$  ανωτέρω, δηλαδή  $m_{ijk} = m_{jik}$ . Τονίζουμε ότι όλες οι βασικές εξισώσεις που αναφέρονται στη γενική θεωρία των Toupin και Mindlin που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη ενότητα (4.2) και όλες οι ενεργειακές θεωρήσεις, καθώς και τα αποτελέσματα που δόθηκαν προηγουμένως, ισχύουν επίσης και για τη διπολική θεωρία βαθμίδας τροπής (τύπος II), αρκεί να τηρούνται οι κατάλληλες συμμετρίες για όλους τους τανυστές.

Σύμφωνα με τις παραπάνω ενότητες, η ηλεκτρική ενθαλπία ενός ελαστικού, διηλεκτρικού, συνεχούς μέσου θα δίνεται από την σχέση

$$W = W^L(e_{ij}, e_{jk,i}, P_i) + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varphi_{,i} \varphi_{,i} \quad (4.9)$$

Στην συνέχεια ορίζεται η ηλεκτρική ενθαλπία όπως έχουμε δείξει στα προηγούμενα κεφάλαια

$$H = W - E_i D_i \quad (4.10)$$

Όπου  $W$  είναι η συνολική πυκνότητα ενέργειας και τα  $E_i^L$  και  $D_i$  είναι τα διανύσματα του ηλεκτρικού πεδίου και της ηλεκτρικής μετατόπισης αντίστοιχα.



Επιπλέον, ο τύπος της ηλεκτρικής μετατόπισης είναι

$$D_i = \varepsilon_0 E_i + P_i \quad (4.11)$$

Σύμφωνα λοιπόν με την παραπάνω σχέση της ηλεκτρικής ενθαλπίας, κάνοντας την κατάλληλη αντικατάσταση θα λάβουμε την αναλυτική της μορφή

$$\begin{aligned} H &= W - E_i D_i \Leftrightarrow \\ H &= W^L(e_{ij}, e_{jk,i}, P_i) + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varphi_i \varphi_i - E_i D_i \\ &= W^L(e_{ij}, e_{jk,i}, P_i) + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varphi_i \varphi_i - E_i (P_i + \varepsilon_0 E_i) \\ &= W^L(e_{ij}, e_{jk,i}, P_i) + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varphi_i \varphi_i + \varphi_i (P_i - \varepsilon_0 \varphi_i) \\ &= W^L(e_{ij}, e_{jk,i}, P_i) + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varphi_i \varphi_i + \varphi_i P_i - \varepsilon_0 \varphi_i \varphi_i \\ &= W^L(e_{ij}, e_{jk,i}, P_i) - \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varphi_i \varphi_i + \varphi_i P_i \end{aligned} \quad (4.12)$$

Στην περίπτωση αυτή η μεταβολή της ηλεκτρικής ενθαλπίας θα δίνεται από τον τύπο

$$\delta H = \delta W^L(e_{ij}, e_{jk,i}, P_i) - \varepsilon_0 \varphi_i \delta \varphi_i + P_i \delta \varphi_i + \varphi_i \delta P_i \quad (4.13)$$

Στην συνέχεια, αντικαθιστούμε την μεταβολή της παραμορφωσιακής ενέργειας

$$\delta W^L(e_{ij}, e_{jk,i}, P_i) = \sigma_{ij} \delta e_{ij} + m_{ijk} \delta e_{ij,k} - E_i^L \delta P_i = \sigma_{ij} \delta u_{i,j} + m_{ijk} \delta u_{k,ij} - E_i^L \delta P_i + E_{ij} \delta P_{j,i} \quad (4.14)$$

στην σχέση (4.13) προκειμένου να εξάγουμε την τελική σχέση της ηλεκτρικής ενθαλπίας

$$\delta H = \sigma_{ij} \delta u_{i,j} + m_{ijk} \delta u_{k,ij} - E_i^L \delta P_i - \varepsilon_0 \varphi_{,i} \delta \varphi_{,i} + P_i \delta \varphi_{,i} + \varphi_{,i} \delta P_i \quad (4.15)$$

Θεωρούμε τώρα ένα συνεχές μέσο όγκου  $V$  με σύνορο μια επιφάνεια  $S$  η οποία και το διαχωρίζει από εξωτερικό χώρο  $V'$ . Ο συνολικός όγκος μάλιστα μπορεί να συμβολισθεί ως  $V^* = V + V'$ .

Για ένα τέτοιο σύστημα, βασιζόμενοι στη θεωρία βαθμίδας τροπής από τους Tourin και Midlin οδηγούμαστε στην γενική σχέση

$$\begin{aligned} \delta \int_{V^*} H dV &= \int_{V^*} (f_i \delta u_i + E_i^0 \delta P_i) dV + \int_{V^*} [\sigma_{ij} \delta u_{i,j} + m_{ijk} \delta u_{k,ij} - E_i^L \delta P_i] dV + \\ &+ \int_{V^*} (-\varepsilon_0 \varphi_{,i} \delta \varphi_{,i} + P_i \delta \varphi_{,i} + \varphi_{,i} \delta P_i) dV \end{aligned} \quad (4.16)$$

Για την παραπάνω εξίσωση θα θεωρήσουμε ότι οι ποσότητες  $u_i, P_i$  και  $\varphi$  θα είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Επιπλέον έχουμε συμβολίσει με  $E_i^0$  το εξωτερικό του διηλεκτρικού υλικού ηλεκτρικό πεδίο.

Η εξίσωση αυτή εξαιτίας των παρακάτω κανόνων παραγωγίσις πολλαπλασιασμού

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ij} \delta u_{i,j} &= (\sigma_{ij} \delta u_i)_{,j} - \sigma_{ij,j} \delta u_i , \\
 m_{ijk} \delta u_{k,ij} &= (m_{ijk} \delta u_{k,i})_{,j} - m_{ijk,j} \delta u_{k,i} = (m_{ijk} \delta u_{k,i})_{,j} - (m_{ijk,j} \delta u_k)_{,i} + m_{ijk,ij} \delta u_k , \\
 -\varepsilon_0 \varphi_{,i} \delta \varphi_{,i} &= (-\varepsilon_0 \varphi_{,i} \delta \varphi)_{,i} - (-\varepsilon_0 \varphi_{,ii} \delta \varphi) = (-\varepsilon_0 \varphi_{,i} \delta \varphi)_{,i} + \varepsilon_0 \varphi_{,ii} \delta \varphi , \\
 P_{,i} \delta \varphi_{,i} &= (P_{,i} \delta \varphi)_{,i} - P_{,ii} \delta \varphi .
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

θα πάρει την μορφή

$$\begin{aligned}
 \delta \int_{V^*} H dV &= - \int_{V^*} (f_k \delta u_k + E_i^0 \delta P_i) dV + \int_{V^*} [(\sigma_{kj} \delta u_k)_{,j} - \sigma_{kj,j} \delta u_k] dV + \\
 &+ \int_{V^*} [(m_{ijk} \delta u_{k,i})_{,j} - (m_{ijk,j} \delta u_k)_{,i} + m_{ijk,ij} \delta u_k] dV - \\
 &- \int_{V^*} [E_i^L \delta P_i] dV - \int_S \varepsilon_0 \varphi_{,i} n_i \delta \varphi dS + \int_{V^*} \varepsilon_0 \varphi_{,ii} \delta \varphi dV + \\
 &+ \int_S (P_i \delta \varphi) n_i dS - \int_{V^*} P_{,ii} \delta \varphi dV + \int_{V^*} \varphi_{,i} \delta P_i
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Έχοντας δεδομένη την σχέση (4.18) και παράλληλα στηριζόμενοι στην ανεξαρτησία των ποσοτήτων  $u_i, P_i$  και  $\varphi$ , μπορούμε πλέον να εξάγουμε τις συνοριακές συνθήκες για το συνεχές μέσο. Το άθροισμα των όρων καθενός εκ των ανωτέρω ανεξάρτητων ποσοτήτων θα πρέπει να μηδενίζεται προκειμένου να εξαχθούν οι συνοριακές συνθήκες.

Στο πλαίσιο αυτό θα κατηγοριοποιήσουμε τις συνοριακές συνθήκες σε συνθήκες που αφορούν τον όγκο  $V$  του σώματος και αυτές που αφορούν την εξωτερική επιφάνεια  $S$  του όγκου. Κάθε μία από τις προαναφερθείσες κατηγορίες θα χωριστεί σε τρεις κατηγορίες κάθε μία εκ των οποίων θα αναφέρεται σε μία από τις ποσότητες  $u_i, P_i$  και  $\varphi$ .

### 1. Όροι Όγκου $\delta V$

➤ Μηχανικοί όροι  $\delta u_k$

$$\begin{aligned}
 & -\int_{V^*} \sigma_{kj,j} \delta u_k dV + \int_{V^*} m_{ijk,ij} \delta u_k dV - \int_{V^*} f_k \delta u_k dV = 0 \\
 & \Rightarrow \int_{V^*} (m_{ijk,ij} - \sigma_{kj,j} - f_k) \delta u_k dV = 0,
 \end{aligned}
 \tag{4.19}$$

$$\Rightarrow m_{ijk,ij} - \sigma_{kj,j} - f_k = 0,$$

$$\Leftrightarrow \sigma_{kj,j} - m_{ijk,ij} + f_k = 0.$$

➤ Όροι Πόλωσης  $\delta P_i$

$$\begin{aligned}
 & -\int_{V^*} E_i^L \delta P_i dV + \int_{V^*} \varphi_i \delta P_i - \int_{V^*} E_i^0 \delta P_i dV = 0, \\
 & \Rightarrow +\int_{V^*} (\varphi_i - E_i^0 - E_i^L) \delta P_i dV = 0,
 \end{aligned}
 \tag{4.20}$$

$$\Rightarrow E_i^0 + E_i^L - \varphi_i = 0.$$

➤ Όροι Ηλεκτρικού Δυναμικού  $\delta\varphi$

Στον όγκο  $V$

$$\int_{V^*} \varepsilon_0 \varphi_{,ii} \delta\varphi dV - \int_{V^*} P_{i,i} \delta\varphi dV = 0 ,$$

$$\Rightarrow \int_{V^*} (\varepsilon_0 \varphi_{,ii} - P_{i,i}) \delta\varphi dV = 0 , \quad (4.21)$$

$$\Rightarrow \varepsilon_0 \varphi_{,ii} - P_{i,i} = 0 \Leftrightarrow P_{i,i} - \varepsilon_0 \varphi_{,ii} = 0 .$$

Στον όγκο  $V'$

$$\varepsilon_0 \varphi_{,ii} = 0 ,$$

$$\Rightarrow \varphi_{,ii} = 0 . \quad (4.22)$$

## 2. Επιφανειακοί Όροι

➤ Μηχανικοί όροι  $\delta u_k$

$$\int_S n_j \sigma_{jk} \delta u_k dS + \int_S n_i m_{ijk} \partial_j \delta u_k dS - \int_S n_j m_{ijk,i} \delta u_k dS = 0 \quad (4.23)$$

Στη συνέχεια ακολουθεί η ανάλυση των όρων της σχέσης (4.23)

**2<sup>ος</sup> Όρος:**

Ο δεύτερος όρος της σχέσης (4.23) αναλύεται με χρήση κατάλληλων τελεστών

$$n_i m_{ijk} \delta u_{k,j} = n_i m_{ijk} \partial_j \delta u_k = n_i m_{ijk} D_j \delta u_k + n_i m_{ijk} n_j D \delta u_k \quad (4.24)$$

Όπου οι τελεστές  $D_i$  και  $D$  ορίζονται ως εξής

$$D_i \equiv (\delta_{il} - n_l n_i) \partial_l, D \equiv n_l \partial_l \quad (4.25)$$

Αναπτύσσοντας, στο σημείο αυτό, τον πρώτο όρο στο δεξί μέλος της σχέσης (4.24)

$$n_i m_{ijk} D_j \delta u_k = D_j (n_i m_{ijk} \delta u_k) - n_i D_j m_{ijk} \delta u_k - (D_j n_i) m_{ijk} \delta u_k \quad (4.26)$$

Η παραπάνω σχέση προκύπτει από τον κανόνα παραγώγισης γινομένου, ο οποίος και αναγράφεται αναλυτικά στην σχέση (4.27)

$$D_j (n_i m_{ijk} \delta u_k) = (D_j n_i) m_{ijk} \delta u_k + n_i D_j m_{ijk} \delta u_k + n_i m_{ijk} D_j \delta u_k \quad (4.27)$$

Στο σημείο αυτό αναλύουμε τον 1<sup>ο</sup> όρο του δεξιού μέλους της σχέσης (4.26) και προκύπτει ότι

$$D_j (n_i m_{ijk} \delta u_k) = (D_l n_l) n_j n_l m_{ijk} \delta u_k + n_q e_{qpm} \partial_p (e_{mlj} n_l n_i m_{ijk} \delta u_k) \quad (4.28)$$

Συνεπώς, αντικαθιστώντας τις σχέσεις (4.26) και (4.28), στη σχέση (4.24) έχουμε

$$m_{ijk} n_j \delta u_{k,i} = n_j m_{ijk} \partial_i \delta u_k = (D_l n_l) n_j n_l m_{ijk} \delta u_k + n_q e_{qpm} \partial_p (e_{mlj} n_l n_i m_{ijk} \delta u_k) - n_i D_j m_{ijk} \delta u_k - (D_j n_i) m_{ijk} \delta u_k + n_i m_{ijk} n_j D \delta u_k \quad (4.29)$$

Επιπλέον, τοποθετούμε την σχέση (4.29) στην σχέση (4.23) και κατά συνέπεια λαμβάνουμε τα ολοκληρώματα

$$\begin{aligned}
& + \int_S \sigma_{jk} n_j \delta u_k dS - \int_S m_{ijk,i} n_j \delta u_k dS + \int_S n_i m_{ijk} n_j D \delta u_k dS - \\
& - \int_S n_i D_j m_{ijk} \delta u_k dS - \int_S (D_j n_i) m_{ijk} \delta u_k dS + \\
& + \int_S (D_l n_l) n_j n_i m_{ijk} \delta u_k dS + \int_S n_q e_{qpm} \partial_p (e_{mlj} n_l n_i m_{ijk} \delta u_k) dS = 0
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Σύμφωνα με το θεώρημα Stokes το τελευταίο επιφανειακό ολοκλήρωμα για ομαλό σύνορο θα μηδενίζεται. Η επιφάνεια  $S$  έχει σύνορο την καμπύλη  $C$  η οποία προέρχεται από την τομή δύο τμημάτων της  $S$  δηλαδή των επιφανειών  $S_1$  και  $S_2$ . Έτσι το θεώρημα Stokes δίνει

$$\int_S n_q e_{qpm} \partial_p (e_{mlj} n_l n_i m_{ijk} \delta u_k) dS = \oint_C \llbracket n_i \mu_j m_{ijk} \rrbracket \delta u_k dS \tag{4.31}$$

Όπου το  $\mu_j = e_{mlj} s_m n_l$  και το  $s_m$  αποτελούν τις εφαπτομενικές συνιστώσες του μοναδιαίου διανύσματος της καμπύλης. Οι παρενθέσεις στην σχέση (4.31) υποδηλώνουν ότι η εσωτερική σε αυτές ποσότητα αναφέρεται στη διαφορά των τιμών μεταξύ των επιφανειών  $S_1$  και  $S_2$ . Θυμίζουμε ότι  $S_1 \cup S_2 = S$ .

Τέλος, χρησιμοποιώντας την παρακάτω ταυτότητα

$$m_{ijk,i} n_j = n_j D_i m_{ijk} + n_i n_j D m_{ijk} \tag{4.32}$$

Καταλήγουμε στην τελική μορφή της σχέσης (4.30) που είναι

$$\int_S \left[ n_j \sigma_{jk} - n_i n_j D m_{ijk} - 2n_j D_i m_{ijk} + (n_i n_j D_l n_l - D_j n_i) m_{ijk} \right] \delta u_k dS + \int_S n_i n_j m_{ijk} D \delta u_k dS + \oint_C \left[ n_i \mu_j m_{ijk} \right] \delta u_k dS \quad (4.33)$$

Επομένως, οι επιφανειακές συνοριακές συνθήκες είναι

$$\begin{aligned} \sigma_{jk,j} - m_{ijk,ij} + f_k &= 0, \\ \tilde{P}_k &= n_j \sigma_{jk} - n_i n_j D m_{ijk} - 2n_j D_i m_{ijk} + (n_i n_j D_l n_l - D_j n_i) m_{ijk}, \\ \tilde{P}_k &= n_j (\sigma_{jk} - \partial_i m_{ijk}) - D_j (n_i m_{ijk}) + (D_l n_l) n_i n_j m_{ijk} \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$n_i n_j m_{ijk} = \tilde{R}_k,$$

$$\left[ n_i \mu_j m_{ijk} \right] = \tilde{E}_k.$$

➤ Όροι Πόλωσης  $\delta P_i$

-Δεν υπάρχουν επιφανειακοί όροι ως προς το διάνυσμα πόλωσης.

➤ Όροι Ηλεκτρικού Δυναμικού  $\delta \varphi$

$$(P_i - \varepsilon_0 \varphi_{,i}) n_i = 0 \quad (4.35)$$



Στην θεωρία βαθμίδας, σε αντίθεση με την θεωρία του Mindlin, η παραμορφωσιακή ενέργεια θα εξαρτάται από την τροπή, την βαθμίδα της τροπής αλλά και την πόλωση. Για τον λόγο αυτό η σχέση που θα αποδίδει την παραμορφωσιακή ενέργεια θα είναι

$$W^L = \frac{1}{2} a_{ij}^{SG} P_i P_j + \frac{1}{2} c_{ijkl}^P e_{ij} e_{kl} + f_{ijk}^G P_i e_{jk} + \frac{1}{2} h_{ijklmn} e_{jk,i} e_{mn,l} + q_{ijkl} e_{jk,i} P_l + p_{ijklm} e_{jk,i} e_{lm} \quad (4.36)$$

Παρατηρούμε, ότι στην σχέση (4.36) δεν εμφανίζεται η έκφραση πλέον της δεύτερης παραγώγου της μετατόπισης. Αυτό οφείλεται στον ορισμό της βαθμίδας τροπής όπως αυτή δόθηκε στην σχέση ορισμού  $\kappa_{ijk} = \partial_i e_{jk} = e_{jk,i}$ .

Επιπλέον, λόγω των σχέσεων ορισμού

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W^L}{\partial e_{ij}} = \sigma_{ji} ,$$

$$m_{ijk} = \frac{\partial W^L}{\partial e_{jk,i}} = m_{jik} , \quad (4.37)$$

$$E_i^L = -\frac{\partial W^L}{\partial P_i} .$$

Τοποθετώντας στην (4.37) την γενική έκφραση της παραμορφωσιακής ενέργειας όπως δόθηκε στην (4.36) θα πρέπει να ισχύουν οι εξής σχέσεις

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ij} &= c_{ijkl}^P e_{kl} + f_{kij}^G P_k + p_{lmkij} e_{mk,l} \\
 m_{ijk} &= h_{ijklmn} e_{mn,l} + q_{ijkl} P_l + p_{ijklm} e_{lm} \\
 -E_i^L &= a_{ij}^{SG} P_j + f_{ijk} e_{jk} + q_{klj} e_{li,k}
 \end{aligned}
 \tag{4.38}$$

Οι εξισώσεις της (4.38) αποτελούν τις καταστατικές εξισώσεις για τη θεωρία βαθμίδας τροπής μαζί με την προσθήκη του διανύσματος πόλωσης. Το σημαντικό με αυτές τις εξισώσεις είναι να τις συγκρίνουμε με τις αντίστοιχες καταστατικές εξισώσεις που εξάγαμε στην θεωρία μεταβολών του Mindlin (3.11) αλλά και να παρατηρήσουμε τους όρους που εμφανίζονται σε κάθε περίπτωση. Στο επόμενο κεφάλαιο θα στηριχτούμε στην θεωρία των φλεξοηλεκτρικών υλικών και θα την συνδυάσουμε με την θεωρία μεταβολών του Mindlin η οποία συνέδεσε την τροπή με τη βαθμίδα της πόλωσης περιγράφοντας έτσι ένα νέο φαινόμενο του αντίστροφου φλεξοηλεκτρισμού.

## Κεφάλαιο 5

### Γενικευμένη Θεωρία Φλεξοηλεκτρικών Υλικών

#### 5.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό, θα συνδυάσουμε τη θεωρία των φλεξοηλεκτρικών υλικών που αναπτύχθηκε στο 4<sup>ο</sup> κεφάλαιο, με την θεωρία βαθμίδας της πόλωσης του Mindlin που δόθηκε στο κεφάλαιο 3. Πιο συγκεκριμένα, δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός που να απαγορεύει την εξάρτηση της συνάρτησης της παραμορφωσιακής ενέργειας από την τροπή, την βαθμίδα της τροπής, την πόλωση και τη βαθμίδα της πόλωσης. Πράγματι, στόχος του κεφαλαίου αυτού είναι η προσπάθεια ανάπτυξης της πιο γενικευμένης θεωρίας των φλεξοηλεκτρικών υλικών, η οποία θα ενσωματώνει και θα γενικεύει όλα όσα προαναφέρθηκαν στις προηγούμενες θεωρίες. Η θεωρία του Mindlin κατάφερε αφενός να συνδέσει τη βαθμίδα της πόλωσης με την τροπή και αφετέρου να εξηγήσει το φαινόμενο του αντίστροφου φλεξοηλεκτρισμού. Παράλληλα η θεωρία που αναπτύχθηκε στην υποενότητα (4.3) περιγράφει τον ευθύ φλεξοηλεκτρισμό. Η ένωση των παραπάνω δύο θεωριών θα μπορέσει να δημιουργήσει μια γενική θεωρία η οποία θα εξηγεί τα φαινόμενα και του πιεζοηλεκτρισμού αλλά και του φλεξοηλεκτρισμού στα διηλεκτρικά υλικά και κατά επέκταση τα φλεξοηλεκτρικά υλικά. Η ενσωμάτωση του ευθύ φλεξοηλεκτρισμού στην θεωρία του Mindlin έχει αποτελέσει αντικείμενο μελέτης πολλών επιστημονικών άρθρων, με κυριότερο εξ αυτών το επιστημονικό άρθρο των Maranganti, R., Sharma, P., Sharma, N. D., 2006.-Electromechanical coupling in nonpiezoelectric materials due to nanoscale nonlocal size effects: Green's function solution and embedded inclusions. Στο προαναφερθέν επιστημονικό άρθρο γίνεται μια πολύ καλή προσέγγιση της γενικευμένης θεωρίας. Ωστόσο παραλείπεται από την μία, η πιθανή συσχέτιση της βαθμίδας της πόλωσης με την βαθμίδα της τροπής και από την άλλη παραλείπονται οι αλληλεπιδράσεις των τροπών με τις αντίστοιχες βαθμίδες τους. Στην παρούσα εργασία έχουμε προσπαθήσει να ενσωματώσουμε όλους τους όρους και από τις δύο θεωρίες. Επιπλέον πρέπει να τονισθεί ότι η γενικευμένη θεωρία δεν αποτελεί απλά μία υποθετική προσέγγιση. Αντιθέτως μπορεί να ερμηνεύσει φυσικά φαινόμενα τα οποία καμία από τις παραπάνω θεωρίες δεν μπορεί να εξηγήσει μεμονωμένα.

Ένα από τα φαινόμενα αυτά είναι η εμφάνιση του φαινομένου του πιεζοηλεκτρισμού σε υλικά μη πιεζοηλεκτρικά όπως το NaCl (Χλωριούχο Νάτριο γνωστό και ως αλάτι) το οποίο αναπαρίσταται με ένα εδροκεντρωμένο κυβικό κρυσταλλικό πλέγμα. Πράγματι, μέσα από μελέτες το χλωριούχο νάτριο εμφανίζει το φαινόμενο του πιεζοηλεκτρισμού όταν σε αυτό υφίστανται βαθμίδες τροπής μέσω, για παράδειγμα, λυγίσματος ή ανομοιογενούς εφελκυσμού. Είναι λοιπόν εμφανές ότι στην παραπάνω περίπτωση η εμφάνιση του πιεζοηλεκτρικού φαινομένου δεν βασίζεται στην κλασική θεωρία του πιεζοηλεκτρισμού.

Δεν είναι συνεπώς παράλογο να θεωρήσει κανείς ότι, κάθε διηλεκτρικό υλικό μπορεί να εμφανίσει πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο. Ωστόσο, για να συμβαίνει αυτό θα πρέπει να υπάρχει ένα κοινό χαρακτηριστικό για όλα τα διηλεκτρικά υλικά. Αυτό το κοινό χαρακτηριστικό δεν είναι άλλο από την ύπαρξη αλληλεξάρτησης της βαθμίδας της πόλωσης με την τροπή. Η προσπάθεια επεξήγησης της παραπάνω θεώρησης οδήγησε στην σύνδεση των θεωριών του Mindlin και των φλεξοηλεκτρικών υλικών ή καλύτερα πλέον της θεωρίας του αντίστροφου φλεξοηλεκτρισμού και του ευθύ φλεξοηλεκτρισμού.

Με βάση τα παραπάνω, στην επόμενη υποενότητα θα επιχειρήσουμε να εξάγουμε την γενικευμένη σχέση της παραμορφωσιακής ενέργειας ενός διηλεκτρικού μέσου. Τέλος, στην τελευταία υποενότητα θα εξάγουμε αφενός τις γενικευμένες συνοριακές συνθήκες και αφετέρου τις τελικές καταστατικές σχέσεις οι οποίες και θα προσαρμοστούν κατάλληλα για την ιδιαίτερη περίπτωση των ισότροπων κεντροσυμμετρικών διηλεκτρικών υλικών.

## 5.2 Ηλεκτρική Ενθαλπία των φλεξοηλεκτρικών υλικών

Στην υποενότητα αυτή, στηριζόμενοι σε όλα τα στοιχεία που προέκυψαν από τα προηγούμενα κεφάλαια, θα αναπτύξουμε την γενικότερη θεωρία των ελαστικών διηλεκτρικών υλικών σύμφωνα με την οποία η παραμορφωσιακή του ενέργεια θα εξαρτάται από την τροπή, την πόλωση αλλά και τις βαθμίδες αυτών. Επομένως, η παραμορφωσιακή ενέργεια θα λαμβάνει την εξής μορφή

$$W = W^L(e_{ij}, e_{jk,i}P_i, P_{j,i}) + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varphi_{,i} \varphi_{,i} \quad (5.1)$$

Στην συνέχεια ορίζεται η ηλεκτρική ενθαλπία όπως έχουμε δείξει στα προηγούμενα κεφάλαια

$$H = W - E_i D_i \quad (5.2)$$

Όπου  $W$  είναι η συνολική πυκνότητα ενέργειας  $E_i^L$  και  $D_i$  είναι τα διανύσματα του εσωτερικού ηλεκτρικού πεδίου και της ηλεκτρικής μετατόπισης αντίστοιχα.

Επιπλέον, ο τύπος της ηλεκτρικής μετατόπισης είναι

$$D_i = \varepsilon_0 E_i + P_i \quad (5.3)$$

Σύμφωνα λοιπόν με την παραπάνω σχέση της ηλεκτρικής ενθαλπίας, κάνοντας την κατάλληλη αντικατάσταση, θα λάβουμε την αναλυτική της μορφή

$$\begin{aligned}
 H &= W - E_i D_i \Leftrightarrow \\
 H &= W^L(e_{ij}, e_{jk,i} P_i, P_{j,i}) + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varphi_i \varphi_i - E_i D_i \\
 &= W^L(e_{ij}, e_{jk,i} P_i, P_{j,i}) + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varphi_i \varphi_i - E_i (P_i + \varepsilon_0 E_i) \\
 &= W^L(e_{ij}, e_{jk,i} P_i, P_{j,i}) + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varphi_i \varphi_i + \varphi_i (P_i - \varepsilon_0 \varphi_i) \\
 &= W^L(e_{ij}, e_{jk,i} P_i, P_{j,i}) + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varphi_i \varphi_i + \varphi_i P_i - \varepsilon_0 \varphi_i \varphi_i \\
 &= W^L(e_{ij}, e_{jk,i} P_i, P_{j,i}) - \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varphi_i \varphi_i + \varphi_i P_i \tag{5.4}
 \end{aligned}$$

Επομένως καταλήγουμε στην κρίσιμη σχέση

$$H = W^L(e_{ij}, e_{jk,i} P_i, P_{j,i}) - \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varphi_i \varphi_i + \varphi_i P_i \tag{5.5}$$

Με βάση την (5.5) η στοιχειώδης μεταβολή της ηλεκτρικής ενθαλπίας θα δίνεται ως εξής

$$\delta H = \delta W^L - \varepsilon_0 \varphi_i \delta \varphi_i + P_i \delta \varphi_i + \varphi_i \delta P_i \tag{5.6}$$

Παράλληλα η (5.6) ισχύει εξαιτίας του κανόνα παραγώγισης που φαίνεται στην (5.7)

$$\delta\left(-\frac{1}{2}\varepsilon_0\varphi_i\varphi_i\right)=-\frac{1}{2}\varepsilon_0\left[\varphi_i\delta\varphi_i+\varphi_i\delta\varphi_i\right]=-\frac{2}{2}\varepsilon_0\varphi_i\delta\varphi_i=-\varepsilon_0\varphi_i\delta\varphi_i \quad (5.7)$$

Συνεχίζουμε ορίζοντας τους πλέον σημαντικότερους τανυστές. Αρχικά ο τανυστής τάσης που αποτελεί την μερική παράγωγο της παραμορφωσιακής ενέργειας ως προς τον τανυστή τροπής, ο τανυστής διπολικής τάσης που αποτελεί την μερική παράγωγο της παραμορφωσιακής ενέργειας ως προς την βαθμίδα του τανυστή τροπής, το διάνυσμα του εσωτερικού ηλεκτρικού πεδίου το οποίο παρέρχεται από την μερική παραγωγή της παραμορφωσιακής ενέργειας ως προς το διάνυσμα της πόλωσης και τέλος η βαθμίδα του ηλεκτρικού πεδίου ως μερική παράγωγος της παραμορφωσιακής ενέργειας ως προς τη βαθμίδα του διανύσματος της πόλωσης.

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W^L}{\partial e_{ij}} = \sigma_{ji} ,$$

$$m_{ijk} = \frac{\partial W^L}{\partial e_{jk,i}} = m_{jik} ,$$

(5.8)

$$E_i^L = -\frac{\partial W^L}{\partial P_i} ,$$

$$E_{ij} = \frac{\partial W^L}{\partial P_{j,i}} .$$

Αναλύοντας την μεταβολή της παραμορφωσιακής ενέργειας έχουμε

$$\begin{aligned}\delta W^L(e_{ij}, e_{jk,i}, P_i, P_{j,i}) &= \sigma_{ij} \delta e_{ij} + m_{ijk} \delta e_{jk,i} - E_i^L \delta P_i + E_{ij} \delta P_{j,i} = \\ &= \sigma_{ij} \partial_i \delta u_j + m_{ijk} \partial_i \partial_j \delta u_k - E_i^L \delta P_i + E_{ij} \partial_i \delta P_j\end{aligned}\quad (5.9)$$

Επομένως, η τελική έκφραση της ενθαλπίας θα είναι

$$\delta H = \sigma_{ij} \partial_i \delta u_j + \partial_i \partial_j m_{ijk} \delta u_k - E_i^L \delta P_i + E_{ij} \partial_i \delta P_j - \varepsilon_0 \varphi_{,i} \delta \varphi_{,i} + P_i \delta \varphi_{,i} + \varphi_{,i} \delta P_i \quad (5.10)$$

Θεωρούμε τώρα ένα σώμα όγκου  $V$  με σύνορο μια επιφάνεια  $S$  η οποία και το διαχωρίζει από τον εξωτερικό χώρο  $V'$ . Ο συνολικός όγκος μάλιστα μπορεί να συμβολισθεί ως  $V^* = V + V'$ .

Για ένα τέτοιο σύστημα, βασιζόμενοι στην αρχή του Tourpin και την επέκταση αυτής από τον Midlin οδηγούμαστε στην γενική σχέση

$$\begin{aligned}\delta \int_{V^*} H dV &= \int_{V^*} (f_i \delta u_i + E_i^0 \delta P_i) dV + \int_{V^*} \delta W^L(e_{ij}, e_{jk,i}, P_i, P_{j,i}) dV + \\ &+ \int_{V^*} (-\varepsilon_0 \varphi_{,i} \delta \varphi_{,i} + P_i \delta \varphi_{,i} + \varphi_{,i} \delta P_i) dV\end{aligned}\quad (5.11)$$

Για την παραπάνω εξίσωση θα θεωρήσουμε ότι οι ποσότητες  $u_i, P_i$  και  $\varphi$  θα είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Επιπλέον έχουμε συμβολίσει με  $E_i^0$  το εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο.

Στο πλαίσιο ανάπτυξης της παραπάνω σχέσης, με στόχο την εξαγωγή των εξισώσεων ισορροπίας που διέπουν το παραπάνω σώμα, αποτελεί ανάγκη η σωστή διαμόρφωση της σχέσης που δίνει την πυκνότητα ενέργειας.



Για τον λόγο αυτό εργαζόμαστε ξεχωριστά με κάθε όρο της σχέσης (5.11), ξεκινώντας από τον 2<sup>ο</sup> όρο για τον οποίο έχουμε ότι

$$\int_{V^*} \delta W^L(e_{ij}, e_{jk,i}, P_i, P_{j,i}) dV = \int_{V^*} (\sigma_{ij} \partial_i \delta u_j + m_{ijk} \partial_i \partial_j \delta u_k - E_i^L \delta P_i + E_{ij} \partial_i \delta P_j) dV \quad (5.12)$$

Χρησιμοποιώντας τις παρακάτω σχέσεις παραγώγισης

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} \delta u_{i,j} &= (\sigma_{ij} \delta u_j)_i - \sigma_{ij,i} \delta u_j, \\ m_{ijk} \delta u_{k,ji} &= (m_{ijk} \delta u_{k,j})_i - m_{ijk,i} \delta u_{k,j} = (m_{ijk} \delta u_{k,j})_i - (m_{ijk,i} \delta u_k)_j + m_{ijk,ij} \delta u_k, \\ E_{ij} \delta P_{j,i} &= (E_{ij} \delta P_j)_i - E_{ij,i} \delta P_j. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Η σχέση (5.12) παίρνει την μορφή

$$\begin{aligned} \int_{V^*} \delta W^L(e_{ij}, e_{ij,k}, P_i, P_{j,i}) dV &= \int_{V^*} [(\sigma_{ij} \delta u_j)_i - \sigma_{ij,i} \delta u_j] dV + \\ &+ \int_{V^*} [(m_{ijk} \delta u_{k,j})_i - (m_{ijk,i} \delta u_k)_j + m_{ijk,ij} \delta u_k] dV \\ &- \int_{V^*} [E_i^L \delta P_i] dV + \int_{V^*} [(E_{ij} \delta P_j)_i - E_{ij,i} \delta P_j] dV \end{aligned} \quad (5.14)$$

Επιπλέον, με χρήση του νόμου Gauss λαμβάνουμε την τελική σχέση για τον 2<sup>ο</sup> όρο της σχέσης (5.11)

$$\begin{aligned}
 \int_{V^*} \delta W^L(e_{ij}, e_{ij,k}, P_i, P_{j,i}) dV &= \int_S n_j \sigma_{jk} \delta u_k dS - \int_{V^*} \sigma_{jk,j} \delta u_k dV + \int_S n_i m_{ijk} \partial_j \delta u_k dS - \\
 &- \int_S n_j m_{ijk,i} \delta u_k dS + \int_{V^*} m_{ijk,ij} \delta u_k dV - \int_{V^*} E_i^L \delta P_i dV + \quad (5.15) \\
 &+ \int_S E_{ij} n_i \delta P_j dS - \int_{V^*} E_{ij,i} \delta P_j dV
 \end{aligned}$$

Στην συνέχεια θα αναπτύξουμε τον 3<sup>ο</sup> όρο της (5.11) που δίνεται παρακάτω

$$\int_{V^*} (-\varepsilon_0 \varphi_{,i} \delta \varphi_{,i} + P_i \delta \varphi_{,i} + \varphi_{,i} \delta P_i) dV \quad (5.16)$$

Στην (5.16) εφαρμόζοντας κατάλληλα τους κανόνες παραγώγισης

$$\begin{aligned}
 -\varepsilon_0 \varphi_{,i} \delta \varphi_{,i} &= (-\varepsilon_0 \varphi_{,i} \delta \varphi)_{,i} - (-\varepsilon_0 \varphi_{,ii} \delta \varphi) = (-\varepsilon_0 \varphi_{,i} \delta \varphi)_{,i} + \varepsilon_0 \varphi_{,ii} \delta \varphi, \\
 P_i \delta \varphi_{,i} &= (P_i \delta \varphi)_{,i} - P_{i,i} \delta \varphi.
 \end{aligned} \quad (5.17)$$

Και παράλληλα χρησιμοποιώντας το νόμο του Gauss έχουμε

$$-\int_S \varepsilon_0 \varphi_{,i} n_i \delta \varphi dS + \int_{V^*} \varepsilon_0 \varphi_{,ii} \delta \varphi dV + \int_S (P_i \delta \varphi) n_i dS - \int_{V^*} P_{i,i} \delta \varphi dV + \int_{V^*} \varphi_{,i} \delta P_i \quad (5.18)$$

Πλέον αντικαθιστώντας τις σχέσεις (5.15) και (5.18) στη σχέση (5.11) παίρνουμε την τελική έκφραση της ηλεκτρικής ενθαλπίας

$$\begin{aligned}
\delta \int_{V^*} HdV &= \int_S n_j \sigma_{jk} \delta u_k dS - \int_{V^*} \sigma_{jk,j} \delta u_k dV + \int_S n_i m_{ijk} \partial_j \delta u_k dS - \\
&- \int_S n_j m_{ijk,i} \delta u_k dS + \int_{V^*} m_{ijk,ij} \delta u_k dV - \int_{V^*} E_i^L \delta P_i dV + \\
&+ \int_S E_{ij} n_i \delta P_j dS - \int_{V^*} E_{ij,i} \delta P_j dV - \int_S \varepsilon_0 \varphi_{,i} n_i \delta \varphi dS + \tag{5.19} \\
&+ \int_{V^*} \varepsilon_0 \varphi_{,ii} \delta \varphi dV + \int_S (P_i \delta \varphi) n_i dS - \int_{V^*} P_{i,i} \delta \varphi dV + \\
&+ \int_{V^*} \varphi_{,i} \delta P_i - \int_{V^*} f_k \delta u_k dV - \int_{V^*} E_i^0 \delta P_i dV
\end{aligned}$$

Η σχέση (5.19) αποτελεί την πιο αναλυτική έκφραση της ηλεκτρικής ενθαλπίας. Μέσω της σχέσης αυτής θα προκύψουν όλες οι συνοριακές συνθήκες όπως αυτές θα παρουσιαστούν στην επόμενη ενότητα αυτού του κεφαλαίου.

### 5.3 Παραμορφωσιακή Ενέργεια και Συνοριακές Συνθήκες

Όπως έχουμε προαναφέρει, οι ποσότητες  $u_i$ ,  $P_i$  και  $\varphi$  είναι ανεξάρτητες και για το λόγο αυτό θα κατηγοριοποιήσουμε τις συνοριακές συνθήκες σε συνθήκες που αφορούν τον όγκο  $V$  του σώματος και αυτές που αφορούν την εξωτερική επιφάνεια  $S$  του όγκου. Κάθε μία από τις προαναφερθείσες κατηγορίες θα χωριστεί σε τρεις κατηγορίες, κάθε μία εκ των οποίων θα αναφέρεται σε μία από τις ποσότητες  $u_i$ ,  $P_i$  και  $\varphi$ .

#### 1. Όροι Όγκου

➤ Μηχανικοί όροι  $\delta u_k$

$$-\int_{V^*} \sigma_{jk,j} \delta u_k dV + \int_{V^*} m_{ijk,ij} \delta u_k dV - \int_{V^*} f_k \delta u_k dV = 0$$

$$\Rightarrow \int_{V^*} (m_{ijk,ij} - \sigma_{jk,j} - f_k) \delta u_k dV = 0,$$

(5.20)

$$\Rightarrow m_{ijk,ij} - \sigma_{jk,j} - f_k = 0,$$

$$\Leftrightarrow \sigma_{jk,j} - m_{ijk,ij} + f_k = 0.$$

➤ Όροι Πόλωσης  $\delta P_i$

$$-\int_{V^*} E_i^L \delta P_i dV - \int_{V^*} E_{ij,j} \delta P_i dV + \int_{V^*} \varphi_i \delta P_i - \int_{V^*} E_i^0 \delta P_i dV = 0$$

$$\Rightarrow + \int_{V^*} (\varphi_i - E_j^0 - E_j^L - E_{ij,i}) \delta P_j dV = 0$$

(5.21)

$$\Rightarrow +E_j^0 + E_j^L + E_{ij,j} - \varphi_i = 0$$

➤ Όροι Ηλεκτρικού Δυναμικού  $\delta\varphi$

Στον όγκο  $V$

$$\begin{aligned} \int_{V^*} \varepsilon_0 \varphi_{,ii} \delta\varphi dV - \int_{V^*} P_{i,i} \delta\varphi dV &= 0 \\ \Rightarrow \int_{V^*} (\varepsilon_0 \varphi_{,ii} - P_{i,i}) \delta\varphi dV &= 0 \quad (5.22) \\ \Rightarrow \varepsilon_0 \varphi_{,ii} - P_{i,i} = 0 &\Leftrightarrow P_{i,i} - \varepsilon_0 \varphi_{,ii} = 0 \end{aligned}$$

Στον όγκο  $V'$

$$\varepsilon_0 \varphi_{,ii} = 0 \quad (5.23)$$

## 2. Επιφανειακοί Όροι

Αρχικά θα ασχοληθούμε με τους μηχανικούς όρους

$$\int_S n_j \sigma_{jk} \delta u_k dS + \int_S n_i m_{ijk} \partial_j \delta u_k dS - \int_S n_j m_{ijk,i} \delta u_k dS = 0 \quad (5.24)$$

Ακολουθεί η μαθηματική ανάλυση των όρων σχέσης (5.24). Συγκεκριμένα για τον 2<sup>ο</sup> όρο έχουμε

$$n_i m_{ijk} \delta u_{k,j} = n_i m_{ijk} \partial_j \delta u_k = n_i m_{ijk} D_j \delta u_k + n_i m_{ijk} n_j D \delta u_k \quad (5.25)$$

Όπου έχουμε κάνει χρήση των τελεστών  $D_i$  και  $D$  οι οποίοι ορίζονται ως εξής

$$D_i \equiv (\delta_{il} - n_l n_i) \partial_l, \quad D \equiv n_l \partial_l \quad (5.26)$$

Αναπτύσσοντας στο σημείο αυτό, τον 2<sup>ο</sup> όρο στα δεξιά της σχέσης (5.25).

$$n_i m_{ijk} D_j \delta u_k = D_j (n_i m_{ijk} \delta u_k) - n_i D_j m_{ijk} \delta u_k - (D_j n_i) m_{ijk} \delta u_k \quad (5.27)$$

Αφού ισχύει ο κανόνας παραγώγισης

$$D_j (n_i m_{ijk} \delta u_k) = (D_j n_i) m_{ijk} \delta u_k + n_i D_j m_{ijk} \delta u_k + n_i m_{ijk} D_j \delta u_k \quad (5.28)$$

Αναλύουμε τώρα τον 1<sup>ο</sup> όρο του δεξιού μέλους της σχέσης (5.27) και προκύπτει ότι

$$D_j (n_i m_{ijk} \delta u_k) = (D_l n_l) n_j n_i m_{ijk} \delta u_k + n_q e_{qpm} \partial_p (e_{mlj} n_l n_i m_{ijk} \delta u_k) \quad (5.29)$$

Συνεπώς, αντικαθιστώντας τις σχέσεις (5.27) και (5.29) στη σχέση (5.25) έχουμε

$$\begin{aligned} m_{ijk} n_j \delta u_{k,i} = n_j m_{ijk} \partial_i \delta u_k = & (D_l n_l) n_j n_i m_{ijk} \delta u_k + n_q e_{qpm} \partial_p (e_{mlj} n_l n_i m_{ijk} \delta u_k) - \\ & - n_i D_j m_{ijk} \delta u_k - (D_j n_i) m_{ijk} \delta u_k + n_i m_{ijk} n_j D \delta u_k \end{aligned} \quad (5.30)$$

Στο σημείο αυτό τοποθετούμε την σχέση (5.30) στην σχέση (5.24) και παίρνουμε τα ολοκληρώματα

$$\begin{aligned}
& \int_S \sigma_{jk} n_j \delta u_k dS - \int_S m_{ijk,i} n_j \delta u_k dS + \int_S n_i m_{ijk} n_j D \delta u_k dS - \\
& - \int_S n_i D_j m_{ijk} \delta u_k dS - \int_S (D_j n_i) m_{ijk} \delta u_k dS + \\
& + \int_S (D_l n_l) n_j n_i m_{ijk} \delta u_k dS + \int_S n_q e_{qpm} \partial_p (e_{mlj} n_l n_i m_{ijk} \delta u_k) dS = 0
\end{aligned} \tag{5.31}$$

Σύμφωνα με το θεώρημα Stokes το τελευταίο επιφανειακό ολοκλήρωμα για ομαλό σύνορο θα μηδενίζεται. Η επιφάνεια  $S$  έχει σύνορο την καμπύλη  $C$  η οποία προέρχεται από την τομή δύο τμημάτων της  $S$ , δηλαδή των επιφανειών  $S_1$  και  $S_2$ . Έτσι, το θεώρημα Stokes δίνει την επόμενη σχέση ολοκληρωμάτων

$$\int_S n_q e_{qpm} \partial_p (e_{mlj} n_l n_i m_{ijk} \delta u_k) dS = \oint_C \llbracket n_i \mu_j m_{ijk} \rrbracket \delta u_k dS \tag{5.32}$$

Όπου το  $\mu_j = e_{mlj} s_m n_l$  και το  $s_m$  αποτελούν τις εφαπτομενικές συνιστώσες του μοναδιαίου διανύσματος της καμπύλης. Οι παρενθέσεις στην σχέση (5.32) υποδηλώνουν ότι η εσωτερική σε αυτές ποσότητα είναι η διαφορά των τιμών μεταξύ των επιφανειών  $S_1$  και  $S_2$ . Τέλος, χρησιμοποιώντας την παρακάτω ταυτότητα

$$m_{ijk,i} n_j \delta u_k = n_j D_i m_{ijk} + n_i n_j D m_{ijk} \tag{5.33}$$

καταλήγουμε στην τελική μορφή της σχέσης (5.31) που είναι

$$\begin{aligned}
 & \int_S \left[ n_j \sigma_{jk} - n_i n_j D m_{ijk} - 2n_j D_i m_{ijk} + (n_i n_j D_l n_l - D_j n_i) m_{ijk} \right] \delta u_k dS + \\
 & + \int_S n_i n_j m_{ijk} D \delta u_k dS + \oint_C \left[ n_i \mu_j m_{ijk} \right] \delta u_k dS = 0
 \end{aligned} \tag{5.34}$$

Λαμβάνοντας υπόψιν τα αποτελέσματα της προηγούμενης ανάλυσης, οι επιφανειακές συνοριακές συνθήκες θα διακρίνονται στις εξής τρεις κατηγορίες

➤ Μηχανικοί όροι  $\delta u_k$

$$\begin{aligned}
 & \sigma_{jk,j} - m_{ijk,i} + f_k = 0, \\
 & \tilde{P}_k = n_j \sigma_{jk} - n_i n_j D m_{ijk} - 2n_j D_i m_{ijk} + (n_i n_j D_l n_l - D_j n_i) m_{ijk}, \\
 & \text{ή} \\
 & \tilde{P}_k = n_j (\sigma_{jk} - \partial_i m_{ijk}) - D_j (n_i m_{ijk}) + (D_l n_l) n_i n_j m_{ijk}, \\
 & \tilde{R}_k = n_i n_j m_{ijk}, \\
 & \tilde{E}_k = \left[ n_i \mu_j m_{ijk} \right].
 \end{aligned} \tag{5.35}$$

➤ Όροι Πόλωσης  $\delta P_i$

$$n_j E_{ij} = 0 \tag{5.36}$$



➤ Όροι Ηλεκτρικού Δυναμικού  $\delta\varphi$

$$(P_i - \varepsilon_0 \varphi_i) n_i = 0 \quad (5.37)$$

Η πυκνότητα της παραμορφωσιακής ενέργειας, ή απλώς παραμορφωσιακή ενέργεια, λαμβάνει, στην πιο γενική περίπτωση, την εξής τετραγωνική μορφή

$$\begin{aligned} W^L = & b_{ij}^0 P_{j,i} + \frac{1}{2} a_{ij}^{SG} P_i P_j + \frac{1}{2} b_{ijkl}^{PS} P_{j,i} P_{l,k} + \frac{1}{2} c_{ijkl}^P e_{ij} e_{kl} + d_{ijkl}^P P_{j,i} e_{kl} + f_{ijk}^G P_i e_{jk} + \\ & + j_{ijk}^S P_i P_{k,j} + \frac{1}{2} h_{ijklmn} e_{jk,i} e_{mn,l} + q_{ijkl} e_{jk,i} P_l + p_{ijklm} e_{jk,i} e_{lm} + z_{ijklm} e_{jk,i} P_{m,l} \end{aligned} \quad (5.38)$$

Όπου, οι άνω δείκτες  $S$ ,  $G$  και  $P$  εκφράζουν τις ποσότητες της τροπής (Strain), της βαθμίδας της πόλωσης (Gradient Polarization) και της πόλωσης (Polarization) αντίστοιχα, ενώ ταυτόχρονα δηλώνουν την ανεξαρτησία του εκάστοτε όρου από αυτές.

Η παραπάνω έκφραση της παραμορφωσιακής ενέργειας ενός συνεχούς μέσου περιλαμβάνει την τροπή, τη βαθμίδα της τροπής, την πόλωση και τη βαθμίδα της πόλωσης καθώς και όλους τους πιθανούς τρόπους αλληλεπίδρασης των ποσοτήτων αυτών. Πρόκειται για μια σχέση η οποία περιλαμβάνει όλες τις υποκατηγορίες που αναπτύξαμε στα προηγούμενα κεφάλαια. Στην συνέχεια και με βάση την (5.38) θα εξάγουμε τις αντίστοιχες καταστατικές εξισώσεις στην πιο γενική μορφή τους. Έτσι, τοποθετώντας την (5.38) στους ορισμούς της (5.8) θα λάβουμε τα εξής

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = & c_{ijkl} e_{kl} + d_{kl ij} P_{l,k} + f_{kij} P_k + p_{lmkij} e_{mk,l} \\ m_{ijk} = & h_{ijklmn} e_{mn,l} + q_{ijkl} P_l + p_{ijklm} e_{lm} + z_{ijkl} P_{m,l} \\ -E_i^L = & a_{ij} P_j + f_{ijk} e_{jk} + q_{jkli} e_{kl,j} + j_{ijk} P_{k,j} \\ E_{ij} = & b_{ij}^0 + j_{kij} P_k + b_{ijkl} P_{l,k} + d_{ijkl} e_{kl} + z_{klmij} e_{lm,k} \end{aligned} \quad (5.39)$$

Επιπλέον, επειδή τα κεντροσυμμετρικά υλικά δεν εμφανίζουν το φαινόμενο του πιεζοηλεκτρισμού θα πρέπει όλοι οι τανυστές περιττής τάξης, δηλαδή οι τανυστές  $f_{ijk}^G$ ,  $J_{ijk}^S$ ,  $P_{ijklm}$  και  $z_{ijklm}$  που εμφανίζονται στις (5.38) και (5.39), να είναι μηδενικοί.

Για τον λόγο αυτό, η παραπάνω σχέση της (5.38) μπορεί να μειωθεί για κεντροσυμμετρικά υλικά και να λάβει την εξής μορφή

$$\begin{aligned}
 W^L = & b_{ij}^0 P_{j,i} + \frac{1}{2} a_{ij}^{SG} P_i P_j + \frac{1}{2} b_{ijkl}^{PS} P_{j,i} P_{l,k} + \frac{1}{2} c_{ijkl}^P e_{ij} e_{kl} \\
 & + d_{ijkl}^P P_{j,i} e_{kl} + \frac{1}{2} h_{ijklmn} e_{jk,i} e_{mn,l} + q_{ijkl} e_{jk,i} P_l
 \end{aligned} \tag{5.40}$$

Ενώ παράλληλα οι καταστατικές σχέσεις της (5.39) αντίστοιχα θα μειωθούν στις

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ij} &= c_{ijkl}^P e_{kl} + d_{kl ij}^P P_{l,k} \\
 m_{ijk} &= h_{ijklmn} e_{mn,l} + q_{ijkl} P_l \\
 -E_i^L &= a_{ij} P_j + q_{jkli} e_{kl,j} \\
 E_{ij} &= b_{ij}^0 + b_{ijkl} P_{l,k} + d_{ijkl} e_{kl}
 \end{aligned} \tag{5.41}$$

Επιπλέον, για ένα ισότροπο υλικό οι τανυστές 4<sup>ης</sup> τάξης  $(d_{ijkl}^P, q_{ijkl}, c_{ijkl}^P, b_{ijkl}^{PS})$  έχουν τρεις ανεξάρτητες μεταβλητές, ενώ οι τανυστές 2<sup>ης</sup> τάξης  $(b_{ij}^0, a_{ij}^{SG})$  έχουν μόνο δύο ανεξάρτητες μεταβλητές.

Με βάση τα παραπάνω η απλούστερη δυνατή μορφή καταστατικών εξισώσεων προκύπτει θεωρώντας μία ισότροπη περιγραφή της παραμορφωσιακής ενέργειας η οποία και δίνεται από την εξής συνάρτηση

$$\begin{aligned}
W^L &= \frac{1}{2} \lambda e_{ii} e_{jj} + \mu e_{ij} e_{ij} + \frac{1}{2} c (\lambda e_{kk,i} e_{ll,i} + 2 \mu e_{jk,i} e_{jk,i}) + \\
&+ \frac{1}{2} a^{SG} P_i P_j + (q'_1 e_{jj,i} P_i + q'_2 e_{ij,i} P_j) + \\
&+ b^0 P_{j,i} + \frac{1}{2} (b_1 P_{i,i} P_{j,j} + b_2 P_{j,i} P_{j,i} + b_3 P_{j,i} P_{i,j}) + (d_1 P_{i,i} e_{jj} + d'_2 P_{j,i} e_{ij})
\end{aligned} \tag{5.42}$$

Για την εξαγωγή της σχέσης (5.42) έχουμε χρησιμοποιήσει τους ορισμούς όλων των ανωτέρω τανυστών 4<sup>ης</sup> τάξης όπως παρουσιάζουμε στην συνέχεια. Συγκεκριμένα για τον τανυστή 4<sup>ης</sup> τάξης  $c_{ijkl}^P = c_{jikl}^P = c_{klij}^P$  έχουμε

$$\begin{aligned}
c_{ijkl}^P e_{ij} e_{kl} &= \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} e_{ij} e_{kl} + \mu_1 \delta_{ik} \delta_{jl} e_{ij} e_{kl} + \mu_2 \delta_{il} \delta_{jk} e_{ij} e_{kl} \\
&= \lambda e_{ii} e_{jj} + \mu_1 e_{ij} e_{kj} + \mu_2 e_{ij} e_{jl} \\
&= \lambda e_{ii} e_{jj} + \mu_1 e_{ij} e_{ij} + \mu_2 e_{ij} e_{ij} \\
&= \lambda e_{ii} e_{jj} + 2 \mu e_{ij} e_{ij}
\end{aligned} \tag{5.43}$$

όπου  $\mu = \mu_1 = \mu_2$  για ισότροπα υλικά ενώ για να μεταβούμε από την δεύτερη στην τρίτη σειρά στηριχθήκαμε στην σχέση συμμετρίας  $e_{ij} = e_{ji}$ . Ακολουθούν οι επιπλέον τανυστές  $b_{ijkl}^{PS}$  και  $d_{ijkl}^P$ .

$$\begin{aligned}
b_{ijkl}^{PS} P_{j,i} P_{l,k} &= [b_1 \delta_{ij} \delta_{kl} P_{j,i} P_{l,k} + b_2 \delta_{ik} \delta_{jl} P_{j,i} P_{l,k} + b_3 \delta_{il} \delta_{jk} P_{j,i} P_{l,k}] \\
&= [b_1 \delta_{ij} \delta_{kl} P_{j,i} P_{l,k} + b_2 \delta_{ik} \delta_{jl} P_{j,i} P_{l,k} + b_3 \delta_{il} \delta_{jk} P_{j,i} P_{l,k}] \\
&= [b_1 P_{i,i} P_{j,j} + b_2 P_{i,j} P_{i,j} + b_3 P_{j,i} P_{l,j}] \\
&= [b_1 P_{i,i} P_{j,j} + b_2 P_{i,j} P_{i,j} + b_3 P_{j,i} P_{i,j}]
\end{aligned} \tag{5.44}$$

$$\begin{aligned}
d_{ijkl}^P P_{j,i} e_{kl} &= \left[ d_1 \delta_{ij} \delta_{kl} P_{j,i} e_{kl} + d_2 \delta_{ik} \delta_{jl} P_{j,i} e_{kl} + d_3 \delta_{il} \delta_{jk} P_{j,i} e_{kl} \right] \\
&= \left[ d_1 P_{i,i} e_{jj} + d_2 P_{j,k} e_{kj} + d_3 P_{j,l} e_{jl} \right] \\
&= \left[ d_1 P_{i,i} e_{jj} + d_2 P_{j,i} e_{ij} + d_3 P_{j,i} e_{ij} \right] \\
&= \left[ d_1 P_{i,i} e_{jj} + (d_2 + d_3) P_{j,i} e_{ij} \right] \\
&= \left[ d_1 P_{i,i} e_{jj} + d'_2 P_{j,i} e_{ij} \right]
\end{aligned} \tag{5.45}$$

Όπου  $(d_2 + d_3) = d'_2$  και  $d_1, d_2, d_3$  αποτελούν σταθερές του υλικού. Τέλος για τον τανυστή  $q_{ijkl}$  έχουμε παρόμοια

$$\begin{aligned}
q_{ijkl} e_{jk,i} P_l &= \left[ q_1 \delta_{ij} \delta_{kl} e_{jk,i} P_l + q_2 \delta_{ik} \delta_{jl} e_{jk,i} P_l + q_3 \delta_{il} \delta_{jk} e_{jk,i} P_l \right] \\
&= \left[ q_1 e_{ik,i} P_k + q_2 e_{ji,i} P_j + q_3 e_{jj,i} P_i \right] \\
&= \left[ q_1 e_{ij,i} P_j + q_2 e_{ji,i} P_j + q_3 e_{jj,i} P_i \right] \\
&= \left[ q'_1 e_{kk,i} P_i + q'_2 e_{ij,i} P_j \right]
\end{aligned} \tag{5.46}$$

όπου τα  $q_1, q_2$  και  $q_3$  ονομάζονται φλεξοηλεκτρικές σταθερές και έχοντας ορίσει  $q'_1 = q_3$  και  $q'_2 = q_1 + q_2$  (λόγω της συμμετρίας  $e_{ij} = e_{ji}$  οι δύο όροι αθροίζονται). Είναι εμφανές ότι η εισαγωγή των (5.43) έως και (5.46) στην σχέση της παραμορφωσιακής ενέργειας (5.40) θα δώσει τη ισότροπη μορφή που παρουσιάστηκε στην σχέση (5.42).

Επιπλέον, το  $c$  είναι η πρόσθετη μηχανική σταθερά, γνωστή και ως συντελεστής βαθμίδας (gradient coefficient), με διαστάσεις [μήκος]<sup>2</sup>.

Στην εργασία των Georgiadis et al. (2004) αποδείχθηκε ότι η συνθήκη  $c > 0$  αποτελεί απαραίτητη προϋπόθεση για να υφίσταται ευστάθεια των εξισώσεων πεδίου στη γενική περίπτωση, που περιλαμβάνει και φαινόμενα αδράνειας.

Επιπλέον, ο περιορισμός για θετικά ορισμένη πυκνότητα παραμορφωσιακής ενέργειας απαιτεί να ισχύουν οι εξής ανισοτικές σχέσεις για τις σταθερές του υλικού (Georgiadis et al., 2004).

$$(3\lambda + 2\mu) > 0, \mu > 0 \quad c > 0 \quad (5.47)$$

Στο σημείο αυτό, παραθέτουμε την απλούστερη μορφή των καταστατικών εξισώσεων όπως αυτές προκύπτουν από την σχέση (5.42) για ισότροπα και κεντροσυμμετρικά μέσα.

$$\begin{aligned} \sigma_{jk} &= \frac{\partial W^L}{\partial e_{jk}} = (\lambda e_{ll} \delta_{jk} + 2\mu e_{jk}) + (d_1 P_{l,l} \delta_{jk} + d_2 P_{k,j}) \\ m_{ijk} &= \frac{\partial W^L}{\partial e_{jk,i}} = c (\lambda e_{ll,i} \delta_{jk} + 2\mu e_{jk,i}) + (q_1' \delta_{jk} P_i + q_2' \delta_{ij} P_k) \\ -E_i^L &= \frac{\partial W^L}{\partial P_i} = a P_i + q_1' e_{kk,i} + q_2' e_{ji,j} \\ E_{ij} &= \frac{\partial W^L}{\partial P_{j,i}} = b_0 + (b_1 P_{k,k} \delta_{ij} + b_2 P_{j,i} + b_3 P_{i,j}) + (d_1 \delta_{ij} e_{kk} + d_2 e_{ij}) \end{aligned} \quad (5.48)$$

Οι καταστατικές εξισώσεις των ισότροπων μέσων θα αποτελέσουν την βάση του επόμενου κεφαλαίου στο οποίο θα αναλύσουμε την έννοια της επίπεδης παραμόρφωσης στο πλαίσιο της γενικευμένης θεωρίας φλεξοηλεκτρικών υλικών. Προκειμένου να συμβεί αυτό, θα πρέπει να παραθέσουμε τις παραπάνω καταστατικές σχέσεις της (5.48) στη διανυσματική τους μορφή.

Έτσι θα έχουμε

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma} &= \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} + \mu[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] + [d_1(\nabla \cdot \mathbf{P})\mathbf{I} + d'_2 \nabla \mathbf{P}] \\
\mathbf{m} &= c \left\{ \lambda \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} + \mu [\nabla(\nabla \mathbf{u}) + \nabla((\nabla \mathbf{u})^T)] \right\} + q'_1 \mathbf{P} \otimes \mathbf{I} + q'_2 \mathbf{I} \otimes \mathbf{P} \\
-\mathbf{E}^L &= a\mathbf{P} + q'_1 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \frac{q'_2}{2} [\nabla^2 \mathbf{u} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})] \\
\mathbf{E} &= b_0 + [b_1(\nabla \cdot \mathbf{P})\mathbf{I} + b_2(\nabla \mathbf{P}) + b_3(\nabla \mathbf{P})^T] + \left[ d_1 \mathbf{I}(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \frac{d'_2}{2} ((\nabla \mathbf{u}) + (\nabla \mathbf{u})^T) \right]
\end{aligned} \tag{5.49}$$

Τέλος, με αντικατάσταση των εκφράσεων του μονοπολικού και διπολικού τανυστή τάσης της (5.48) στην πρώτη σχέση της (5.35), θα προκύψει η γενική εξίσωση ισορροπίας των πιεζοηλεκτρικών υλικών στην οποία και έχουμε θεωρήσει μηδενικές καθολικές δυνάμεις.

$$\begin{aligned}
\sigma_{jk,j} - m_{ijk,ij} &= 0 \\
\Rightarrow \partial_j (\lambda e_{ll} \delta_{jk} + 2\mu e_{jk}) + \partial_j (d_1 P_{l,l} \delta_{jk} + d_2 P_{k,j}) - \\
&\quad - \partial_j \partial_i [c(\lambda e_{ll,i} \delta_{jk} + 2\mu e_{jk}) + (q'_1 \delta_{jk} P_i + q'_2 \delta_{ij} P_k)] = 0 \\
\Rightarrow \lambda u_{l,lk} + \mu u_{j,kj} + \mu u_{k,jj} - c \lambda u_{l,liik} - c \mu u_{j,kij} - c \mu u_{k,jij} + \\
&\quad + d_1 P_{l,lk} + d'_2 P_{k,jj} - q'_1 P_{i,ik} - q'_2 P_{k,ii} = 0 \\
\Rightarrow (1 - c \nabla^2) [(1 - 2\nu) \nabla^2 u_j + \partial_j (u_{k,k})] + d_1 P_{l,lk} + d'_2 P_{k,jj} - q'_1 P_{i,ik} - q'_2 P_{k,ii} = 0 \\
\dot{\eta} \\
(1 - c \nabla^2) [(1 - 2\nu) \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})] + (d_1 - q'_1) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{P}) + (d'_2 - q'_2) \nabla^2 \mathbf{P} = 0
\end{aligned} \tag{5.50}$$

Η τελική έκφραση της (5.50) θα αποτελέσει τη βάση για την εξαγωγή των εξισώσεων ισορροπίας στο πρόβλημα της επίπεδης παραμόρφωσης που αναπτύσσεται λεπτομερώς στο επόμενο κεφάλαιο.

## Κεφάλαιο 6

### Επίπεδη Παραμόρφωση στα Πλαίσια της Γενικευμένης Θεωρίας

#### 6.1 Επίπεδη παραμόρφωση σε καρτεσιανές συντεταγμένες

Οι διάφορες εξισώσεις που συναντάμε στη θεωρία ελαστικότητας είναι εν γένει πολύπλοκες, γεγονός που καθιστά τα τρισδιάστατα προβλήματα ιδιαίτερα απαιτητικά ως προς την επίλυσή τους. Για το λόγο αυτό, σε πολλές καταστάσεις τα τρισδιάστατα προβλήματα μπορούν να απλοποιηθούν σε διδιάστατα (ή επίπεδα) προβλήματα.

Εάν τώρα μία από τις διαστάσεις του σώματος (έστω κατά τον  $z$  άξονα) είναι πολύ μεγάλη σε σύγκριση με τις υπόλοιπες δύο, τότε η τροπή κατά την διεύθυνση αυτή μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα. Η κατάσταση αυτή καλείται επίπεδη παραμόρφωση (plane strain). Στην περίπτωση αυτή η ανάλυση του προβλήματος μπορεί να γίνει σε ένα «αποκομμένο» επίπεδο μοναδιαίου πάχους κατά τον άξονα  $z$  εφόσον η φόρτιση είναι ομοιόμορφη κατά τον άξονα αυτόν.

Έτσι, στην παρούσα ενότητα θα παρουσιάσουμε τις βασικές εξισώσεις της επίπεδης παραμόρφωσης όπως αυτές προκύπτουν σύμφωνα με τα αποτελέσματα του 5<sup>ου</sup> κεφαλαίου, ενώ στην δεύτερη υποενότητα θα αναπτύξουμε τις αντίστοιχες εξισώσεις των διδιάστατων προβλημάτων της επίπεδης παραμόρφωσης σε πολικές συντεταγμένες.

Στο πλαίσιο αυτό λοιπόν, θεωρούμε ένα πεδίο μετατοπίσεων για ένα σώμα που καταλαμβάνει περιοχή στο  $(x, y)$ - επίπεδο υπό συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης.

$$u_x = u_x(x, y), u_y = u_y(x, y), u_z = 0 \quad (6.1)$$

Σύμφωνα με την σχέση (1.27) η οποία αναφέρεται στην γενική τρισδιάστατη περίπτωση, εξάγουμε τις εκφράσεις των μετατοπίσεων για την επίπεδη παραμόρφωση.

$$\begin{aligned}
e_{xx} &= \frac{1}{2}(u_{x,x} + u_{x,x}) = u_{x,x} \equiv \frac{\partial u_x}{\partial x} \equiv \partial_x u_x \\
e_{yy} &= \frac{1}{2}(u_{y,y} + u_{y,y}) = u_{y,y} \equiv \frac{\partial u_y}{\partial y} \equiv \partial_y u_y \\
e_{xy} = e_{yx} &= \frac{1}{2}(u_{y,x} + u_{x,y}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \equiv \frac{1}{2}(\partial_x u_y + \partial_y u_x) \\
e_{zz} = e_{zx} = e_{zy} &= 0
\end{aligned} \tag{6.2}$$

Στην περίπτωση αυτή από την σχέση (5.42) η συνάρτηση της παραμορφωσιακής ενέργειας για ισότροπο σώμα παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned}
W^L &= \frac{\lambda}{2}(e_{xx} + e_{yy})^2 + \mu(e_{xx}^2 + 2e_{xy}^2 + e_{yy}^2) + \\
&+ \left(\frac{\lambda c}{2}\right)\left[(e_{xx,x} + e_{yy,x})^2 + (e_{xx,y} + e_{yy,y})^2\right] + \\
&+ \mu c\left[(e_{xx,x})^2 + 2(e_{xy,x})^2 + (e_{yy,x})^2 + (e_{xx,y})^2 + 2(e_{xy,y})^2 + (e_{yy,y})^2\right] + \frac{1}{2}a^{SG}(P_x^2 + P_y^2) + \\
&+ \left[q'_1 P_x (e_{xx,x} + e_{yy,x}) + q'_1 P_y (e_{xx,y} + e_{yy,y}) + q'_2 P_x (e_{xx,x} + e_{yx,y}) + q'_2 P_y (e_{xy,x} + e_{yy,y})\right] + \tag{6.3} \\
&+ (b^0 P_{x,x} + b^0 P_{y,y}) \\
&+ \left[\frac{1}{2}b_1(P_{x,x} + P_{y,y}) + b_2(P_{x,x}^2 + P_{y,y}^2 + P_{x,y}^2 + P_{y,x}^2) + b_3(P_{x,x}^2 + 2P_{x,y}P_{y,x} + P_{y,y}^2)\right] + \\
&+ \left[d_1(e_{xx} + e_{yy})(P_{x,x} + P_{y,y}) + d'_2(P_{x,x}e_{xx} + e_{xy}(P_{x,y} + P_{y,x}) + P_{y,y}e_{yy})\right]
\end{aligned}$$

Όπου  $P_x$  και  $P_y$  είναι οι συνιστώσες του διανύσματος της πόλωσης και έχοντας δεδομένο ότι η  $P_z$  συνιστώσα είναι μηδενική στην επίπεδη παραμόρφωση. Η σχέση (6.3) μπορεί εκ νέου να γραφτεί και συναρτήσει των μετατοπίσεων, παίρνοντας τότε την μορφή που εμφανίζεται στην επόμενη σχέση (6.4).



$$\begin{aligned}
W^L = & \frac{\lambda}{2} (u_{x,x} + u_{y,y})^2 + \mu (u_{x,x}^2 + 2u_{x,y}^2 + u_{y,y}^2) + \\
& + \left( \frac{\lambda c}{2} \right) \left[ (u_{x,xx} + u_{y,yy})^2 + (u_{x,xy} + u_{y,yy})^2 \right] + \\
& + \mu c \left[ (u_{x,xx})^2 + 2(u_{x,yy})^2 + (u_{y,yy})^2 + (u_{x,xy})^2 + 2(u_{x,yy})^2 + (u_{y,yy})^2 \right] + \frac{1}{2} a^{SG} (P_x^2 + P_y^2) + \\
& + \left[ q'_1 P_x (u_{x,xx} + u_{y,yy}) + q'_1 P_y (u_{x,xy} + u_{y,yy}) + q'_2 P_x (u_{x,xx} + u_{y,yy}) + q'_2 P_y (u_{x,xy} + u_{y,yy}) \right] + \quad (6.4) \\
& + (b^0 P_{x,x} + b^0 P_{y,y}) \\
& + \left[ \frac{1}{2} b_1 (P_{x,x} + P_{y,y}) + b_2 (P_{x,x}^2 + P_{y,y}^2 + P_{x,y}^2 + P_{y,x}^2) + b_3 (P_{x,x}^2 + 2P_{x,y} P_{y,x} + P_{y,y}^2) \right] + \\
& + \left[ d_1 (u_{x,x} + u_{y,y}) (P_{x,x} + P_{y,y}) + d'_2 \left( P_{x,x} u_{x,x} + \frac{1}{2} (u_{x,y} + u_{y,x}) (P_{x,y} + P_{y,x}) + P_{y,y} u_{y,y} \right) \right]
\end{aligned}$$

Σε συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης, ο συμμετρικός τανυστής των τάσεων  $\sigma_{ij}$  έχει τρεις ανεξάρτητες συνιστώσες του επιπέδου  $(x, y)$ , οι οποίες θα εξαχθούν από την γενική καταστατική εξίσωση  $\sigma_{ij} = (\lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}) + (d_1 P_{k,k} \delta_{ij} + d'_2 P_{j,i})$  η οποία και αναφέρεται στην γενικότερη τρισδιάστατη περίπτωση ισότροπων σωμάτων. Σημειώνουμε επιπλέον ότι τα  $\lambda, \mu$  είναι οι γνωστές σταθερές του Lamé.

Έτσι για την επίπεδη παραμόρφωση ισχύουν

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} = & 2\mu e_{xx} + \lambda \delta_{xx} e_{kk} + \left( d_1 (P_{x,x} \delta_{xx} + P_{y,y} \delta_{yy}) + d'_2 P_{x,x} \right) \\
= & 2\mu e_{xx} + \lambda e_{kk} + \left( d_1 P_{x,x} + d_1 P_{y,y} + d'_2 P_{x,x} \right) \\
= & 2\mu e_{xx} + \lambda (e_{xx} + e_{yy}) + \left( d_1 P_{x,x} + d_1 P_{y,y} + d'_2 P_{x,x} \right) \quad (6.5) \\
= & (2\mu + \lambda) e_{xx} + \lambda e_{yy} + (d_1 + d'_2) P_{x,x} + d_1 P_{y,y} \\
= & (2\mu + \lambda) u_{x,x} + \lambda u_{y,y} + (d_1 + d'_2) P_{x,x} + d_1 P_{y,y}
\end{aligned}$$

ενώ ομοίως καταλήγουμε για τις σχέσεις των υπολοίπων συνιστωσών

$$\begin{aligned}
 \sigma_{yy} &= (2\mu + \lambda)e_{yy} + \lambda e_{xx} + (d_1 + d'_2)P_{y,y} + d_1 P_{x,x} \\
 \sigma_{yy} &= (2\mu + \lambda)u_{y,y} + \lambda u_{x,x} + (d_1 + d'_2)P_{y,y} + d_1 P_{x,x} \\
 \sigma_{xy} &= 2\mu e_{xy} + d'_2 P_{y,x} \\
 \sigma_{xy} &= \mu(u_{y,x} + u_{x,y}) + d'_2 P_{y,x} \\
 \sigma_{yx} &= 2\mu e_{yx} + d'_2 P_{x,y} \\
 \sigma_{yx} &= \mu(u_{y,x} + u_{x,y}) + d'_2 P_{x,y}
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

Στη συνέχεια, και με παρόμοιο τρόπο θα ορίσουμε τον τανυστή διπολικών τάσεων  $m_{ijk}$ , οι συνιστώσες του οποίου εντός του επιπέδου  $(x, y)$ , θα γραφτούν συναρτήσει των μετατοπίσεων σύμφωνα με την καταστατική εξίσωση  $m_{ijk} = c(\lambda e_{ll,i} \delta_{jk} + 2\mu e_{jk,i}) + (q'_1 \delta_{jk} P_i + q'_2 \delta_{ij} P_k)$ . Έτσι οι έξι ανεξάρτητες συνιστώσες του διπολικού τανυστή τάσης θα είναι οι εξής.

$$\begin{aligned}
 m_{xxx} &= c \left[ \lambda(u_{x,x} + u_{y,y}) + (2\mu u_{x,x}) \right]_{,x} + (q'_1 + q'_2) P_x \\
 m_{yyy} &= c \left[ \lambda(u_{x,x} + u_{y,y}) + (2\mu u_{y,y}) \right]_{,y} + (q'_1 + q'_2) P_y \\
 m_{xxy} &= c \mu (u_{x,y} + u_{y,x})_{,x} + q'_2 P_y \\
 m_{xyy} &= c \left[ \lambda(u_{x,x} + u_{y,y}) + (2\mu u_{y,y}) \right]_{,x} + q'_1 P_x \\
 m_{yxx} &= c \left[ \lambda(u_{x,x} + u_{y,y}) + (2\mu u_{x,x}) \right]_{,y} + q'_1 P_y \\
 m_{yyx} &= c \mu (u_{x,y} + u_{y,x})_{,y} + q'_2 P_x
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

Επιπλέον, η τρίτη καταστατική εξίσωση της σχέσης (5.48) στην επίπεδη παραμόρφωση θα δώσει τις εξής συνιστώσες του εσωτερικού ηλεκτρικού πεδίου

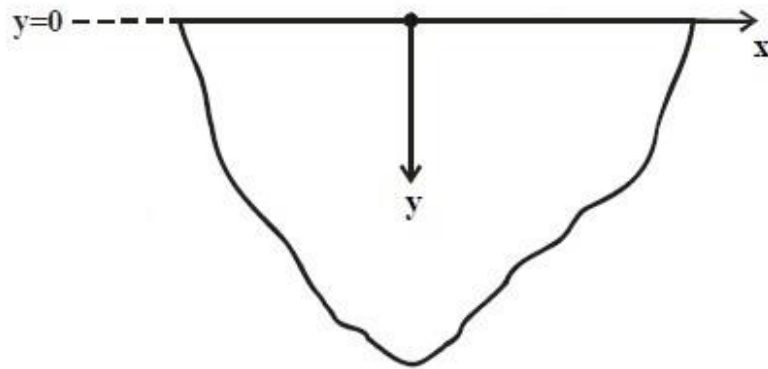
$$\begin{aligned}
-E_x^L &= aP_x + q'_1 e_{jj,x} + q'_2 e_{jx,j} \\
-E_x^L &= aP_x + q'_1 (e_{xx,x} + e_{yy,x}) + q'_2 (e_{xx,x} + e_{yx,y}) \\
-E_x^L &= aP_x + (q'_1 + q'_2) e_{xx,x} + q'_1 e_{yy,x} + q'_2 e_{yx,y} \\
-E_x^L &= aP_x + (q'_1 + q'_2) u_{x,xx} + q'_1 u_{y,yx} + \frac{q'_2}{2} (u_{y,xy} + u_{x,yy})
\end{aligned} \tag{6.8}$$

$$\begin{aligned}
-E_y^L &= aP_y + q'_1 e_{jj,y} + q'_2 e_{jy,j} \\
-E_y^L &= aP_y + q'_1 (e_{xx,y} + e_{yy,y}) + q'_2 (e_{xy,x} + e_{yy,y}) \\
-E_y^L &= aP_y + (q'_1 + q'_2) e_{yy,y} + q'_1 e_{xx,y} + q'_2 e_{xy,x} \\
-E_y^L &= aP_y + (q'_1 + q'_2) u_{y,yy} + q'_1 u_{x,xy} + \frac{q'_2}{2} (u_{y,xx} + u_{x,yy})
\end{aligned}$$

Ομοίως η τέταρτη και τελευταία καταστατική σχέση της (5.48) θα δώσει τις εξής συνιστώσες στο επίπεδο  $(x, y)$

$$\begin{aligned}
E_{xx} &= b^0 + (b_1 + b_2 + b_3) P_{x,x} + b_1 P_{y,y} + (d_1 + d'_2) e_{xx} + d_1 e_{yy} \\
\Rightarrow E_{xx} &= b^0 + (b_1 + b_2 + b_3) P_{x,x} + b_1 P_{y,y} + (d_1 + d'_2) u_{x,x} + d_1 u_{y,y} \\
E_{yy} &= b^0 + (b_1 + b_2 + b_3) P_{y,y} + b_1 P_{x,x} + (d_1 + d'_2) e_{yy} + d_1 e_{xx} \\
\Rightarrow E_{yy} &= b^0 + (b_1 + b_2 + b_3) P_{y,y} + b_1 P_{x,x} + (d_1 + d'_2) u_{y,y} + d_1 u_{x,x} \\
E_{xy} &= b^0 + (b_2 P_{x,y} + b_3 P_{y,x}) + d_2^P e_{xy} \\
\Rightarrow E_{xy} &= b^0 + (b_2 P_{x,y} + b_3 P_{y,x}) + \frac{d_2^P}{2} (u_{x,y} + u_{y,x}) \\
E_{yx} &= b^0 + (b_2 P_{y,x} + b_3 P_{x,y}) + d_2^P e_{yx} \\
\Rightarrow E_{yx} &= b^0 + (b_2 P_{y,x} + b_3 P_{x,y}) + \frac{d_2^P}{2} (u_{x,y} + u_{y,x})
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Το επόμενο βήμα στην υποενοότητα αυτή είναι να παρουσιάσουμε τις επιφανειακές συνοριακές συνθήκες (5.35), (5.36) και (5.37) εκφρασμένες στο πλαίσιο της επίπεδης παραμόρφωσης. Αρχικά για τη δεύτερη σχέση της (5.35) ορίζουμε μια ποσότητα θεμελιώδους σημασίας στη θεωρία βαθμίδας τροπής, την ολική τάση (total stress). Η ποσότητα αυτή συνδέεται άμεσα με τον μονοπολικό ελκυστή τάσεων  $\tilde{P}_k^{(n)}$  (Georgiadis 2003, Georgiadis and Grentzelou, 2006). Για να ορίσουμε τις ολικές τάσεις, οι οποίες εμφανίζονται στα προβλήματα συνοριακών τιμών θεωρούμε το επίπεδο  $(x, y)$  με μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα  $\mathbf{n}_y = (0, \pm 1)$ . Ένα τέτοιο επίπεδο απεικονίζεται και στο παρακάτω σχήμα



**Σχήμα 14:** Διδιάστατη απεικόνιση ημι-χώρου και των μοναδιαίων διανυσμάτων του επιπέδου  $(x, y)$

Έτσι, οι ολικές τάσεις, στο επίπεδο αυτό ορίζονται ως

$$\tilde{P}_x^{(n)} = t_{yx} = \sigma_{yx} - \frac{\partial m_{xyx}}{\partial x} - \frac{\partial m_{yyx}}{\partial y} - \frac{\partial m_{yxx}}{\partial x},$$

$$\tilde{P}_y^{(n)} = t_{yy} = \sigma_{yy} - \frac{\partial m_{xyy}}{\partial x} - \frac{\partial m_{yyy}}{\partial y} - \frac{\partial m_{yyx}}{\partial x}.$$

**(6.10)**

Η (6.10) μπορεί να γραφθεί συναρτήσει των συνιστωσών του πεδίου μετατοπίσεων αντικαθιστώντας τις αντίστοιχες εκφράσεις του μονοπολικού και διπολικού τανυστή τάσης όπως αυτές δόθηκαν στις σχέσεις (6.5), (6.6) και (6.7).

$$\begin{aligned}\tilde{P}_x^{(n)} &= \mu(u_{x,y} + u_{y,x}) - [c\mu\nabla^2(u_{x,y} + u_{y,x})] - [c\lambda(u_{x,y} + u_{y,x})_{,yx}] - \\ &\quad - 2c\mu(u_{x,x})_{,yx} + d'_2 P_{x,y} - q'_1 P_{y,x} \\ \tilde{P}_y^{(n)} &= \lambda(u_{y,y} + u_{x,x}) + 2\mu(u_{y,y}) - [c\lambda\nabla^2(u_{x,x} + u_{y,y})] - [2c\mu\nabla^2(u_{y,y})] + \\ &\quad + (d_1 + d'_2)P_{y,y} + d_1 P_{x,x} - q'_1(P_{x,x} + P_{y,y}) - q'_2 P_{y,y}\end{aligned}\tag{6.11}$$

Όπου  $\nabla^2$  είναι ο τελεστής Laplace σε διδιάστες καρτεσιανές συντεταγμένες και ορίζεται  $\nabla^2 = \partial_x^2(\ ) + \partial_y^2(\ )$ .

Επιπλέον από την γενική μορφή της εξίσωσης ισορροπίας στην πρώτη σχέση της (5.35) προκύπτουν οι κατωτέρω εξισώσεις ισορροπίας στο επίπεδο  $(x, y)$  στις οποίες απουσιάζουν οι καθολικές δυνάμεις. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned}\partial_x \sigma_{xx} + \partial_y \sigma_{yx} - \partial_x^2 m_{xxx} - \partial_y^2 m_{yyx} - \partial_x \partial_y (m_{yxx} + m_{xyx}) &= 0 \\ \partial_x \sigma_{xy} + \partial_y \sigma_{yy} - \partial_x^2 m_{xxx} - \partial_y^2 m_{yyy} - \partial_x \partial_y (m_{yxy} + m_{xyy}) &= 0\end{aligned}\tag{6.12}$$

Σε πιο αναλυτική μορφή, αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των συνιστωσών του μονοπολικού και διπολικού τανυστή, λαμβάνουμε το ακόλουθο σύστημα συζευγμένων μερικών διαφορικών εξισώσεων ως προς τις συνιστώσες του πεδίου μετατοπίσεων  $(u_x, u_y)$ .

$$\begin{aligned}
& (1-c\nabla^2) \left[ 2(1-\nu)(u_{x,x} + u_{y,y})_{,x} - (1-2\nu)(u_{y,x} - u_{x,y})_{,y} \right] + \\
& + \left[ (d_1 + d'_2 - q'_1 - q'_2) P_{x,xx} + (d'_2 - q'_2) P_{x,yy} + (d_1 - q'_1) P_{y,yx} \right] = 0
\end{aligned} \tag{6.13}$$

$$\begin{aligned}
& (1-c\nabla^2) \left[ 2(1-\nu)(u_{x,x} + u_{y,y})_{,y} + (1-2\nu)(u_{y,x} - u_{x,y})_{,x} \right] + \\
& + \left[ (d_1 + d'_2 - q'_1 - q'_2) P_{y,yy} + (d'_2 - q'_2) P_{y,xx} + (d_1 - q'_1) P_{x,yx} \right] = 0
\end{aligned}$$

Για τις άλλες δύο συνοριακές συνθήκες της (5.35) έχουμε, αρχικά για το  $\tilde{R}_k = n_i n_j m_{ijk}$

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_x &= m_{yyx} \\
\Rightarrow \tilde{R}_x &= c\mu \frac{\partial}{\partial y} (u_{x,y} + u_{y,x}) + q'_2 P_x
\end{aligned} \tag{6.14}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_y &= m_{yyy} \\
\Rightarrow \tilde{R}_y &= c \frac{\partial}{\partial y} \left[ \lambda (u_{x,x} + u_{y,y}) + (2\mu u_{y,y}) \right] + (q'_1 + q'_2) P_y
\end{aligned}$$

και έπειτα για το  $\tilde{E}_k = \llbracket n_i \mu_j m_{ijk} \rrbracket$

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_x &= \llbracket n_y \mu_x m_{yxx} + n_y \mu_y m_{yyx} \rrbracket \\
\Rightarrow \tilde{E}_x &= \llbracket \mu_x m_{yxx} + \mu_y m_{yyx} \rrbracket
\end{aligned} \tag{6.15}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_y &= \llbracket n_y \mu_x m_{yxy} + n_y \mu_y m_{yyy} \rrbracket \\
\Rightarrow \tilde{E}_y &= \llbracket \mu_x m_{yxy} + \mu_y m_{yyy} \rrbracket
\end{aligned}$$

Τέλος, από την (5.36) και την (5.37) αντίστοιχα προκύπτουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned} E_{iy} &= 0 \Rightarrow \\ E_{xy} &= 0 \\ E_{yy} &= 0 \end{aligned} \quad (6.16)$$

Και

$$\begin{aligned} (P_y - \varepsilon_0 \varphi_{,y}) n_y &= 0 \Rightarrow \\ (P_y - \varepsilon_0 \varphi_{,y}) &= 0 \Rightarrow \\ P_y &= \varepsilon_0 \varphi_{,y} \end{aligned} \quad (6.17)$$

Οι σχέσεις (6.11), (6.13), (6.14), (6.15), (6.16) και (6.17) αποτελούν τις συνοριακές συνθήκες που εξάγαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο (Κεφάλαιο 5<sup>ο</sup>) εκφρασμένες για κεντροσυμμετρικά και ισότροπα μέσα στα πλαίσια του γενικού διδιάστατου προβλήματος της επίπεδης παραμόρφωσης, χρησιμοποιώντας το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Στην επόμενη υποενότητα ακολουθούμε παρόμοια διαδικασία προκειμένου να παρουσιάσουμε τα ανωτέρω αποτελέσματα και σε πολικές συντεταγμένες.

## 6.2 Επίπεδη παραμόρφωση σε πολικές συνταγμένες

Στην περίπτωση αυτή το πεδίο των μετατοπίσεων γράφεται ως

$$u_r \equiv u_r(r, \theta) \neq 0, \quad u_\theta \equiv u_\theta(r, \theta) \neq 0, \quad u_z = 0 \quad (6.18)$$

Σχετικά με την κινηματική περιγραφή του ελαστικού υλικού, ισχύουν οι κατωτέρω εκφράσεις για τις συνιστώσες του τανυστή τροπής

$$e_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad e_{r\theta} = e_{\theta r} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right), \quad e_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \quad (6.19)$$

Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση της παραμορφωσιακής ενέργειας θα δίνεται από τον τύπο (5.42) ο οποίος για πολικές συντεταγμένες θα παίρνει την μορφή

$$\begin{aligned} W^L = & \frac{\lambda}{2} (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 + \frac{\mu}{4} [(\nabla \mathbf{u}) + (\nabla \mathbf{u})^T]^2 + \\ & + \left( \frac{c}{2} \right) \left[ \lambda (\nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}))^2 + 2\mu (\nabla (\nabla \mathbf{u}))^2 \right] + \\ & + \frac{1}{2} a^{SG} \mathbf{P} \mathbf{P}^T + (b^0 \nabla \mathbf{P}) + q_1' \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{P} + q_2' \nabla^2 \mathbf{u} \mathbf{P}^T + \\ & + \frac{1}{2} \left[ b_1 (\nabla \cdot \mathbf{P})^2 + b_2 ((\nabla \mathbf{P})^T)^2 + b_3 (\nabla \mathbf{P})^T \nabla \mathbf{P} \right] + \\ & + d_1 (\nabla \cdot \mathbf{P}) (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \frac{d_2'}{2} (\nabla \mathbf{P})^T [(\nabla \mathbf{u}) + (\nabla \mathbf{u})^T] \end{aligned} \quad (6.20)$$



Επίσης, για τις συνιστώσες του τανυστή μονοπολικών τάσεων έχουμε τις σχέσεις

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= (\lambda + 2\mu)u_{r,r} + \frac{\lambda}{r}(u_r + u_{\theta,\theta}) + \left[ \left( (d_1 + d'_2)P_{r,r} + \frac{d_1}{r}(P_r + P_{\theta,\theta}) \right) \right] \\
\sigma_{\theta\theta} &= \frac{(\lambda + 2\mu)}{r}(u_r + u_{\theta,\theta}) + \lambda u_{r,r} + \left[ \frac{(d_1 + d'_2)}{r}(P_r + P_{\theta,\theta}) + d_1 P_{r,r} \right] \\
\sigma_{r\theta} &= \frac{\mu}{r}(u_{r,\theta} - u_{\theta,r}) + \mu u_{\theta,r} + d'_2 P_{\theta,r} \\
\sigma_{\theta r} &= \frac{\mu}{r}(u_{r,\theta} - u_{\theta,r}) + \mu u_{\theta,r} + \frac{d'_2}{r}(P_{r,\theta} - P_{\theta,r})
\end{aligned} \tag{6.21}$$

Οι οποίες προκύπτουν από τη γνωστή καταστατική σχέση  $\boldsymbol{\sigma} = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} + \mu[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] + (d_1(\nabla \cdot \mathbf{P})\mathbf{I} + d'_2 \nabla \mathbf{P})$  μέσω κατάλληλης αντικατάστασης των δεικτών των πολικών συντεταγμένων. Επιπλέον, οι συνιστώσες του διπολικού τανυστή τάσεων θα προκύπτουν από την σχέση  $\mathbf{m} = c \left\{ \lambda \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} + \mu [\nabla(\nabla \mathbf{u}) + \nabla((\nabla \mathbf{u})^T)] \right\} + q'_1 \mathbf{P} \otimes \mathbf{I} + q'_2 \mathbf{I} \otimes \mathbf{P}$ .

$$\begin{aligned}
m_{rrr} &= c(\lambda + 2\mu)u_{r,rr} + \frac{c\lambda}{r}(u_{r,r} + u_{\theta,\theta r}) - \frac{c\lambda}{r^2}(u_{\theta,\theta} + u_r) + (q'_1 + q'_2)P_r \\
m_{rr\theta} &= \frac{c\mu}{r}(u_{r,\theta r} - u_{\theta,r}) + \frac{c\mu}{r^2}(u_{\theta} - u_{r,\theta}) + c\mu u_{\theta,rr} + q'_2 P_{\theta} \\
m_{r\theta\theta} &= \frac{c(\lambda + 2\mu)}{r}(u_{r,r} - u_{\theta,\theta r}) - \frac{c(\lambda + 2\mu)}{r^2}(u_{\theta,\theta} + u_r) + c\lambda u_{r,rr} + q'_1 P_r \\
m_{\theta rr} &= \frac{c(\lambda + 2\mu)}{r}u_{r,r\theta} + \frac{c\lambda}{r^2}(u_{r,\theta} + u_{\theta,\theta\theta}) - \frac{2c\mu}{r} \left( \frac{1}{r}u_{\theta,\theta} - \frac{1}{r}u_{\theta} + u_{\theta,r} \right) + q'_1 P_{\theta} \\
m_{\theta\theta r} &= \frac{c\mu}{r^2}(u_{r,\theta\theta} + u_{\theta,r\theta} - 2u_r) - \frac{c\mu}{r} \left( 2u_{r,r} - \frac{3}{r}u_{\theta,\theta} \right) + q'_2 P_r \\
m_{\theta\theta\theta} &= \frac{c(\lambda + 2\mu)}{r^2}(u_{\theta,\theta\theta} + u_{r,\theta}) + \frac{c\lambda}{r}u_{r,r\theta} + \frac{2c\mu}{r^2}(u_{r,\theta} - u_{\theta}) + \frac{2c\mu}{r}u_{\theta,r} + (q'_1 + q'_2)P_{\theta}
\end{aligned} \tag{6.22}$$

Η συνοριακή συνθήκη  $\tilde{P}_k = n_j \sigma_{jk} - n_i n_j D m_{ijk} - 2n_j D_i m_{ijk} + (n_i n_j D_l n_l - D_j n_i) m_{ijk}$  μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$\tilde{\mathbf{P}}^{(n)} = \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\sigma} - \nabla \cdot \mathbf{m}) - \overset{s}{\nabla} \cdot (\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}) + \left( \overset{s}{\nabla} \cdot \mathbf{n} \right) \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}) \quad (6.23)$$

όπου έχουμε ορίσει,  $\overset{s}{\nabla} = (\mathbf{I} - \mathbf{nn}) \cdot \nabla$  είναι ο επιφανειακός ελκυστής βαθμίδας,  $\mathbf{I}$  είναι ο μοναδιαίος τανυστής και  $\nabla$  είναι ο τελεστής βαθμίδας, οποίος σε πολικές συντεταγμένες ορίζεται ως  $\nabla(\ ) = \mathbf{e}_r \partial_r(\ ) + \mathbf{e}_\theta r^{-1} \partial_\theta(\ )$ . Επιπλέον, σημειώνουμε ότι για το διάνυσμα βάσης ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις

$$\partial_\theta \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\theta, \partial_\theta \mathbf{e}_\theta = -\mathbf{e}_r, \partial_r \mathbf{e}_r = 0, \partial_r \mathbf{e}_\theta = 0 \quad (6.24)$$

Στην περίπτωση της επίπεδης παραμόρφωσης, οι τανυστές μονοπολικής και διπολικής τάσης λαμβάνουν την ακόλουθη μορφή

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \sigma_{rr} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \sigma_{\theta r} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_r + \sigma_{r\theta} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\theta + \sigma_{\theta\theta} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + \sigma_{zz} \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z \\ \mathbf{m} &= m_{rrr} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + m_{r\theta r} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_r + m_{r\theta\theta} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\theta + m_{r\theta\theta} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + \\ & m_{\theta\theta\theta} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + m_{\theta rr} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + m_{\theta r\theta} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\theta + m_{\theta\theta r} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_r + \\ & m_{\theta zz} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z + m_{zr\theta} \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\theta + m_{rzz} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z + m_{zzr} \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_r + \\ & m_{z\theta z} \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_z + m_{zz\theta} \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_\theta \end{aligned} \quad (6.25)$$

Εξετάζουμε τώρα την περίπτωση όπου το σύνορο του σώματος ορίζεται από το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_r$ . Στην περίπτωση αυτή ο επιφανειακός ελκυστής βαθμίδας λαμβάνει την μορφή  $\overset{s}{\nabla}(\ ) = \mathbf{e}_\theta r^{-1} \partial_\theta(\ )$ . Επίσης ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
\mathbf{n} \cdot \mathbf{m} &= m_{rrr} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + m_{rr\theta} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\theta + m_{r\theta r} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_r + m_{r\theta\theta} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + m_{rzz} \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z \\
\mathbf{n} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{m}) &= \left[ \partial_r m_{rrr} + \frac{1}{r} \partial_\theta m_{\theta rr} + \frac{1}{r} m_{rrr} - \frac{2}{r} m_{\theta r\theta} \right] \mathbf{e}_r \\
&\quad \left[ \partial_r m_{rr\theta} + \frac{1}{r} \partial_\theta m_{\theta r\theta} + \frac{1}{r} m_{\theta r\theta} - \frac{1}{r} m_{\theta\theta\theta} \right] \mathbf{e}_\theta \\
\overset{s}{\nabla} \cdot (\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}) &= \frac{1}{r} [\partial_\theta m_{r\theta r} + m_{rrr} - m_{r\theta\theta}] \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} [\partial_\theta m_{r\theta\theta} + 2m_{rr\theta}] \mathbf{e}_\theta \\
\overset{s}{\nabla} \cdot \mathbf{n} &= \frac{1}{r}
\end{aligned} \tag{6.26}$$

Τοποθετώντας την σχέση (6.26) στην (6.23), προκύπτουν οι ολικές τάσεις ως εξής

$$\begin{aligned}
P_r^{(n)} \equiv t_{rr} &= \sigma_{rr} - \frac{\partial m_{rrr}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial m_{\theta rr}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial m_{r\theta r}}{\partial \theta} - \frac{1}{r} m_{rrr} + \frac{2}{r} m_{\theta\theta r} + \frac{1}{r} m_{r\theta\theta} \\
P_\theta^{(n)} \equiv t_{r\theta} &= \sigma_{r\theta} - \frac{\partial m_{rr\theta}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial m_{r\theta\theta}}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial m_{\theta r\theta}}{\partial \theta} - \frac{1}{r} m_{\theta rr} - \frac{2}{r} m_{rr\theta} + \frac{1}{r} m_{\theta\theta\theta}
\end{aligned} \tag{6.27}$$

Σημειώνουμε στο σημείο αυτό ότι, οι συμβολισμοί  $t_{rr}$  και  $t_{r\theta}$  που αντιστοιχούν στο μοναδιαίο διάνυσμα  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_r$ , δεν αποτελούν συνιστώσες κάποιου τανυστή.

Οι εξισώσεις πεδίου στηριζόμενοι στην εξίσωση (5.50), μπορούν να γραφτούν σε συμπαγή μορφή ως

$$\begin{aligned}
& (1-c\nabla^2)\left[(1-2\nu)\nabla\cdot(\nabla\mathbf{u})+\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u})\right]+(d_1-q'_1)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{P})+(d'_2-q'_2)\nabla^2\mathbf{P}=0 \\
& \Rightarrow (1-c\nabla^2)\left[s_r\mathbf{e}_r+s_\theta\mathbf{e}_\theta\right]+(d_1-q'_1)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{P})+(d'_2-q'_2)\nabla^2\mathbf{P}=0 \\
& \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} & \left[ s_r - c \left( \nabla^2 s_r - \frac{s_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} s_{\theta,\theta} \right) \right] + (d_1 - q'_1) \left[ P_{r,rr} - \frac{1}{r^2} P_{\theta,\theta} + \frac{1}{r} P_{r,r} - \frac{1}{r^2} P_r \right] + \\ & + (d'_2 - q'_2) \left[ \nabla^2 P_r - \frac{1}{r^2} P_r - \frac{2}{r^2} P_{\theta,\theta} \right] \end{aligned} \right\} \mathbf{e}_r + \quad (6.28) \\
& + \left\{ \begin{aligned} & \left[ s_\theta - c \left( \nabla^2 s_\theta - \frac{s_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} s_{r,\theta} \right) \right] + (d_1 - q'_1) \left[ P_{r,r\theta} + \frac{1}{r} P_{\theta,\theta\theta} + \frac{1}{r} P_{r,\theta} \right] + \\ & + (d'_2 - q'_2) \left[ \nabla^2 P_\theta - \frac{1}{r^2} P_\theta + \frac{2}{r^2} P_{r,\theta} \right] \end{aligned} \right\} \mathbf{e}_\theta = 0
\end{aligned}$$

Η τελευταία σχέση μπορεί να αναλυθεί στις δύο τελικές εξισώσεις ισορροπίας

$$\begin{aligned}
s_r - c \left( \nabla^2 s_r - \frac{s_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} s_{\theta,\theta} \right) + (d_1 - q'_1) \left[ P_{r,rr} - \frac{1}{r^2} P_{\theta,\theta} + \frac{1}{r} P_{r,r} - \frac{1}{r^2} P_r \right] + (d'_2 - q'_2) \left[ \nabla^2 P_r - \frac{1}{r^2} P_r - \frac{2}{r^2} P_{\theta,\theta} \right] &= 0 \\
s_\theta - c \left( \nabla^2 s_\theta - \frac{s_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} s_{r,\theta} \right) + (d_1 - q'_1) \left[ P_{r,r\theta} + \frac{1}{r} P_{\theta,\theta\theta} + \frac{1}{r} P_{r,\theta} \right] + (d'_2 - q'_2) \left[ \nabla^2 P_\theta - \frac{1}{r^2} P_\theta + \frac{2}{r^2} P_{r,\theta} \right] &= 0
\end{aligned} \quad (6.29)$$

όπου οι παραπάνω ποσότητες  $s_r$ ,  $s_\theta$  ορίζονται αναλυτικά ως

$$\begin{aligned}
s_r &= 2(1-\nu)\partial_r \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_r \right) - (1-\nu)\partial_\theta \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_\theta \right) \\
s_\theta &= 2(1-\nu)\partial_\theta \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_r \right) + (1-\nu)\partial_r \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_\theta \right)
\end{aligned} \quad (6.30)$$

Επιπλέον, από την εξίσωση  $-\mathbf{E}^L = a\mathbf{P} + q'_1 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \frac{q'_2}{2} [\nabla^2 \mathbf{u} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})]$  θα πάρουμε για την επίπεδη παραμόρφωση τις εξής συνιστώσες του εσωτερικού ηλεκτρικού πεδίου στο επίπεδο

$$\begin{aligned} -E_r^L &= aP_r + \left( q'_1 + \frac{q'_2}{2} \right) \left( u_{r,rr} - \frac{u_{\theta,\theta}}{r^2} + \frac{u_{r,r}}{r} - \frac{u_r}{r^2} \right) + \frac{q'_2}{2} \left( \nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} u_{\theta,\theta} \right) \\ -E_\theta^L &= aP_\theta + \left( q'_1 + \frac{q'_2}{2} \right) \left( u_{r,r\theta} + \frac{u_{\theta,\theta\theta}}{r} + \frac{u_{r,\theta}}{r} \right) + \frac{q'_2}{2} \left( \nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} u_{r,\theta} \right) \end{aligned} \quad (6.31)$$

Η σχέση  $\mathbf{E} = b_0 + \left[ b_1(\nabla \cdot \mathbf{P})\mathbf{I} + b_2(\nabla \mathbf{P}) + b_3(\nabla \mathbf{P})^\top \right] + \left[ d_1 \mathbf{I}(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \frac{d'_2}{2} \left( (\nabla \mathbf{u}) + (\nabla \mathbf{u})^\top \right) \right]$  θα δώσει τις παρακάτω συνιστώσες εκφρασμένες σε πολικές συντεταγμένες.

$$\begin{aligned} E_{rr} &= b_0 + b_1 \left[ P_{r,r} + \frac{1}{r}(P_{\theta,\theta} + P_r) \right] + (b_2 + b_3)P_{r,r} + (d_1 + d'_2)u_{r,r} + \frac{d_1}{r}(u_{\theta,\theta} + u_r) \\ E_{\theta\theta} &= b_0 + b_1 \left[ P_{r,r} + \frac{1}{r}(P_{\theta,\theta} + P_r) \right] + \left( \frac{b_2 + b_3}{r} \right) (P_{\theta,\theta} + P_r) + \left( \frac{d_1 + d'_2}{r} \right) (u_r + u_{\theta,\theta}) + d_1 u_{r,r} \\ E_{r\theta} &= b_0 + b_2 P_{\theta,r} + \frac{b_3}{r} (P_{r,\theta} - P_\theta) + \frac{d'_2}{2} \left[ u_{\theta,r} + \frac{1}{r} (u_{r,\theta} - u_\theta) \right] \\ E_{\theta r} &= b_0 + \frac{b_2}{r} (P_{r,\theta} - P_\theta) + b_3 P_{\theta,r} + \frac{d'_2}{2} \left[ u_{\theta,r} + \frac{1}{r} (u_{r,\theta} - u_\theta) \right] \end{aligned} \quad (6.32)$$

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε τις υπόλοιπες συνοριακές συνθήκες της (5.35) εκφρασμένες και αυτές σε πολικές συντεταγμένες.

Αρχικά για την  $\tilde{R}_k = n_i n_j m_{ijk}$  έχουμε

$$\begin{aligned}\tilde{R}_r &= n_r n_r m_{rrr} \\ \Rightarrow \tilde{R}_r &= c(\lambda + 2\mu)u_{r,rr} + \frac{c\lambda}{r}(u_{r,r} + u_{\theta,\theta r}) - \frac{c\lambda}{r^2}(u_{\theta,\theta} + u_r) + (q'_1 + q'_2)P_r\end{aligned}\tag{6.33}$$

$$\begin{aligned}\tilde{R}_\theta &= n_r n_r m_{rr\theta} \\ \Rightarrow \tilde{R}_\theta &= \frac{c\mu}{r}(u_{r,\theta r} - u_{\theta,r}) + \frac{c\mu}{r^2}(u_\theta - u_{r,\theta}) + c\mu u_{\theta,rr} + q'_2 P_\theta\end{aligned}$$

Ενώ για το  $\tilde{E}_k = \llbracket n_i \mu_j m_{ijk} \rrbracket$  θα έχουμε

$$\begin{aligned}\tilde{E}_r &= n_r \mu_r m_{rrr} + n_r \mu_\theta m_{r\theta r} \\ \Rightarrow \tilde{E}_r &= \mu_r m_{rrr} + \mu_\theta m_{r\theta r}\end{aligned}\tag{6.34}$$

$$\begin{aligned}\tilde{E}_\theta &= n_r \mu_r m_{rr\theta} + n_r \mu_\theta m_{r\theta\theta} \\ \Rightarrow \tilde{E}_\theta &= \mu_r m_{rr\theta} + \mu_\theta m_{r\theta\theta}\end{aligned}$$

Τέλος, από τις συνοριακές συνθήκες για την πόλωση (5.36) και το ηλεκτρικό δυναμικό (5.37) αντίστοιχα καταλήγουμε στις εξής σχέσεις

$$\begin{aligned}n_r E_{ir} &= 0 \Rightarrow \\ E_{rr} &= 0 \\ E_{\theta r} &= 0\end{aligned}\tag{6.35}$$

$$\begin{aligned}
(P_r - \varepsilon_0 \varphi_{,r}) n_r &= 0 \Rightarrow \\
(P_r - \varepsilon_0 \varphi_{,r}) &= 0 \Rightarrow \\
P_r &= \varepsilon_0 \varphi_{,r}
\end{aligned}
\tag{6.36}$$

Οι σχέσεις (6.29), (6.27), (6.33) και (6.34) είναι και οι ζητούμενες συνοριακές συνθήκες όπως αυτές παρουσιάστηκαν στην σχέση (5.35) ενός φλεξοηλεκτρικού υλικού, διαμορφωμένες κατάλληλα για το πρόβλημα της επίπεδης παραμόρφωσης με τη χρήση πολικού συστήματος συντεταγμένων.

Οι σημαντικότερες σχέσεις που εξάγαμε στο παρόν κεφάλαιο για τα φλεξοηλεκτρικά υλικά σε επίπεδη παραμόρφωση συνοψίζονται στις ακόλουθες δύο σελίδες.

## ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

### ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

#### ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

$$(1-c\nabla^2)\left[2(1-\nu)(u_{x,x}+u_{y,y})_{,x}-(1-2\nu)(u_{y,x}-u_{x,y})_{,y}\right]+\left[(d_1+d'_2-q'_1-q'_2)P_{x,xx}+(d'_2-q'_2)P_{x,yy}+(d_1-q'_1)P_{y,yy}\right]=0$$

$$(1-c\nabla^2)\left[2(1-\nu)(u_{x,x}+u_{y,y})_{,y}+(1-2\nu)(u_{y,x}-u_{x,y})_{,x}\right]+\left[(d_1+d'_2-q'_1-q'_2)P_{y,yy}+(d'_2-q'_2)P_{y,xx}+(d_1-q'_1)P_{x,xx}\right]=0$$

#### ΟΛΙΚΕΣ ΤΑΣΕΙΣ

$$\tilde{P}_x^{(n)} = \mu(u_{x,y}+u_{y,x})-\left[c\mu\nabla^2(u_{x,y}+u_{y,x})\right]-\left[c\lambda(u_{x,y}+u_{y,x})_{,yx}\right]-2c\mu(u_{x,x})_{,yx}+d'_2P_{x,y}-q'_1P_{y,x}$$

$$\tilde{P}_y^{(n)} = \lambda(u_{y,y}+u_{x,x})+2\mu(u_{y,y})-\left[c\lambda\nabla^2(u_{x,x}+u_{y,y})\right]-\left[2c\mu\nabla^2(u_{y,y})\right]+(d_1+d'_2)P_{y,y}+d_1P_{x,x}-q'_1(P_{x,x}+P_{y,y})-q'_2P_y$$

#### ΥΠΟΛΟΠΕΣ ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

$$\begin{aligned}\tilde{R}_x &= m_{yyx} & \tilde{E}_x &= \left[\mu_x m_{yyx} + \mu_y m_{yyx}\right] \\ \tilde{R}_y &= m_{yyy} & \tilde{E}_y &= \left[\mu_x m_{yyy} + \mu_y m_{yyy}\right]\end{aligned}$$

#### ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΠΟΛΩΣΗΣ    ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ

$$E_{xy} = 0$$

$$E_{yy} = 0$$

$$P_y = \varepsilon_0\varphi_{,y}$$

#### ΚΑΤΑΣΤΑΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

$$\sigma_{jk} = (\lambda e_{ll}\delta_{jk} + 2\mu e_{jk}) + (d_1 P_{l,l}\delta_{jk} + d'_2 P_{k,j})$$

$$m_{ijk} = c(\lambda e_{ll,i}\delta_{jk} + 2\mu e_{jk,i}) + (q'_1\delta_{jk}P_i + q'_2\delta_{ij}P_k)$$

$$-E_i^L = aP_i + q'_1 e_{kk,i} + q'_2 e_{ji,j}$$

$$E_{ij} = b_0 + (b_1 P_{k,k}\delta_{ij} + b_2 P_{j,i} + b_3 P_{i,j}) + (d_1\delta_{ij}e_{kk} + d'_2 e_{ij})$$

#### ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΙΑΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

$$\begin{aligned}W^L &= \frac{\lambda}{2}(u_{x,x}+u_{y,y})^2 + \mu(u_{x,x}^2 + 2u_{x,y}^2 + u_{y,y}^2) + \left(\frac{\lambda c}{2}\right)\left[(u_{x,xx}+u_{y,yy})^2 + (u_{x,xy}+u_{y,yy})^2\right] + \\ &+ \mu c\left[(u_{x,xx})^2 + 2(u_{x,yy})^2 + (u_{y,yy})^2 + (u_{x,yy})^2 + 2(u_{x,yy})^2 + (u_{y,yy})^2\right] + \frac{1}{2}a^{SG}(P_x^2 + P_y^2) + \\ &+ \left[q'_1 P_x(u_{x,xx}+u_{y,yy}) + q'_1 P_y(u_{x,xy}+u_{y,yy}) + q'_2 P_x(u_{x,xx}+u_{y,yy}) + q'_2 P_y(u_{x,xy}+u_{y,yy})\right] + \\ &+ (b^0 P_{x,x} + b^0 P_{y,y}) + \left[\frac{1}{2}b_1(P_{x,x} + P_{y,y}) + b_2(P_{x,x}^2 + P_{y,y}^2 + P_{x,y}^2 + P_{y,x}^2) + b_3(P_{x,x}^2 + 2P_{x,y}P_{y,x} + P_{y,y}^2)\right] + \\ &+ \left[d_1(u_{x,x}+u_{y,y})(P_{x,x}+P_{y,y}) + d'_2\left(P_{x,x}u_{x,x} + \frac{1}{2}(u_{x,y}+u_{y,x})(P_{x,y}+P_{y,x}) + P_{y,y}u_{y,y}\right)\right]\end{aligned}$$



## ΠΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

### ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

#### ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

$$s_r - c \left( \nabla^2 s_r - \frac{s_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} s_{r,\theta} \right) + (d_1 - q'_1) \left[ P_{r,rr} - \frac{1}{r^2} P_{\theta,\theta} + \frac{1}{r} P_{r,r} - \frac{1}{r^2} P_r \right] + (d'_2 - q'_2) \left[ \nabla^2 P_r - \frac{1}{r^2} P_r - \frac{2}{r^2} P_{\theta,\theta} \right] = 0$$

$$s_\theta - c \left( \nabla^2 s_\theta - \frac{s_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} s_{r,\theta} \right) + (d_1 - q'_1) \left[ P_{r,r\theta} + \frac{1}{r} P_{\theta,\theta\theta} + \frac{1}{r} P_{r,\theta} \right] + (d'_2 - q'_2) \left[ \nabla^2 P_\theta - \frac{1}{r^2} P_\theta + \frac{2}{r^2} P_{r,\theta} \right] = 0$$

#### ΟΛΙΚΕΣ ΤΑΣΕΙΣ

$$P_r^{(n)} \equiv t_{rr} = \sigma_{rr} - \frac{\partial m_{rrr}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial m_{\theta rr}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial m_{r\theta r}}{\partial \theta} - \frac{1}{r} m_{rrr} + \frac{2}{r} m_{\theta\theta r} + \frac{1}{r} m_{r\theta\theta}$$

$$P_\theta^{(n)} \equiv t_{r\theta} = \sigma_{r\theta} - \frac{\partial m_{rr\theta}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial m_{r\theta\theta}}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial m_{\theta r\theta}}{\partial \theta} - \frac{1}{r} m_{\theta rr} - \frac{2}{r} m_{rr\theta} + \frac{1}{r} m_{\theta\theta\theta}$$

#### ΥΠΟΛΟΙΠΕΣ ΜΗΧΑΝΙΚΕΣ ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

$$\tilde{R}_r = m_{rrr}$$

$$\tilde{E}_r = m_{rrr} + m_{r\theta r}$$

$$\tilde{R}_\theta = m_{r\theta\theta}$$

$$\tilde{E}_\theta = m_{r\theta\theta} + m_{r\theta\theta}$$

#### ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΠΟΛΩΣΗΣ    ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ

$$E_{rr} = 0$$

$$P_r = \varepsilon_0 \varphi_{,r}$$

$$E_{\theta r} = 0$$

#### ΚΑΤΑΣΤΑΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} + \mu \left[ \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right] + \left[ d_1 (\nabla \cdot \mathbf{P}) \mathbf{I} + d'_2 \nabla \mathbf{P} \right]$$

$$\mathbf{m} = c \left\{ \lambda \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} + \mu \left[ \nabla (\nabla \mathbf{u}) + \nabla \left( (\nabla \mathbf{u})^T \right) \right] \right\} + q'_1 \mathbf{P} \otimes \mathbf{I} + q'_2 \mathbf{I} \otimes \mathbf{P}$$

$$-\mathbf{E}^L = a \mathbf{P} + q'_1 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \frac{q'_2}{2} \left[ \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right]$$

$$\mathbf{E} = b_0 + \left[ b_1 (\nabla \cdot \mathbf{P}) \mathbf{I} + b_2 (\nabla \mathbf{P}) + b_3 (\nabla \mathbf{P})^T \right] + \left[ d_1 \mathbf{I} (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \frac{d'_2}{2} \left( (\nabla \mathbf{u}) + (\nabla \mathbf{u})^T \right) \right]$$

#### ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΙΑΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

$$W^L = \frac{\lambda}{2} (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 + \frac{\mu}{4} \left[ (\nabla \mathbf{u}) + (\nabla \mathbf{u})^T \right]^2 + \left( \frac{c}{2} \right) \left[ \lambda (\nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}))^2 + 2\mu (\nabla (\nabla \mathbf{u}))^2 \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} a^{SG} \mathbf{P} \mathbf{P}^T + (b^0 \nabla \mathbf{P}) + q'_1 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{P} + q'_2 \nabla^2 \mathbf{u} \mathbf{P}^T + \frac{1}{2} \left[ b_1 (\nabla \cdot \mathbf{P})^2 + b_2 \left( (\nabla \mathbf{P})^T \right)^2 + b_3 (\nabla \mathbf{P})^T \nabla \mathbf{P} \right] +$$

$$+ d_1 (\nabla \cdot \mathbf{P}) (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \frac{d'_2}{2} (\nabla \mathbf{P})^T \left[ (\nabla \mathbf{u}) + (\nabla \mathbf{u})^T \right]$$

## Γενικά Συμπεράσματα

Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετήθηκαν κατά χρονολογική σειρά οι θεωρίες που αφορούν στα διηλεκτρικά υλικά.

Αρχικά, παρουσιάστηκε το φαινόμενο του πιεζοηλεκτρισμού που συναντάται σε ορισμένα διηλεκτρικά υλικά, καθώς και οι θεμελιώδεις σχέσεις που τον χαρακτηρίζουν.

Έπειτα παρουσιάστηκε, η θεωρία μεταβολών του Tourin, ως η πρώτη προσπάθεια επεξήγησης του φαινομένου από την σκοπιά της μηχανικής. Τη θεωρία του Tourin λίγο αργότερα επέκτεινε ο Mindlin, εντάσσοντας σε αυτήν, την έννοια της βαθμίδας πόλωσης με στόχο να καλύψει ατέλειες της μέχρι τότε κλασικής θεωρίας.

Στην συνέχεια αναπτύχθηκε η θεωρία βαθμίδας τροπής η οποία με την σειρά της στήριξε τα πρώτα βήματα επεξήγησης του φαινομένου του φλεξοηλεκτρισμού.

Όλες οι παραπάνω θεωρίες κρίνονταν αναγκαίο να είναι καταγεγραμμένες συγκεντρωτικά γεγονός που επιτεύχθηκε στην παρούσα διπλωματική εργασία.

Στην συνέχεια, ως αποτέλεσμα της συνένωσης των παραπάνω θεωριών δημιουργήθηκε μια "νέα" γενικευμένη θεωρία των φλεξοηλεκτρικών υλικών.

Στόχος της γενικευμένης αυτής θεωρίας ήταν η διαμόρφωση των γενικότερων σχέσεων της παραμορφωσιακής ενέργειας, των συνοριακών συνθηκών, αλλά και των καταστατικών εξισώσεων. Με τον τρόπο αυτό η γενικευμένη θεωρία των φλεξοηλεκτρικών υλικών αφενός θα δώσει μια πιο ακέραιη μηχανική σκοπιά απέναντι στα φλεξοηλεκτρικά υλικά καθώς εξηγεί με μεγαλύτερη σαφήνεια τις ηλεκτρομηχανικές αλληλεπιδράσεις και αφετέρου μπορεί σε μελλοντικό χρόνο να θέσει τα θεμέλια για τη διατύπωση και φυσικά την επίλυση σύνθετων προβλημάτων της μηχανικής.

## **ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ**

- Amanatidou, E., Aravas, N. 2002. Mixed finite element formulation of strain-gradient elasticity problems. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 191, pp. 1723-1751
- Anagnostou, D. S., 2014. Προβλήματα συγκεντρωμένων φορτίων και Συναρτήσεις Green στην Θεωρία Ελαστικότητας Τύπου Βαθμίδας. Διδακτορική διατριβή στον Τομέα Μηχανικής (Επιβλέπων Καθηγητής Χ. Γεωργιάδης ΣΕΜΦΕ ΕΜΠ).
- Aravas, N., 2005. Καρτεσιανοί τανυστές.
- Barber, J.R., 1992. *Elasticity*. Kluwer, Academic Publishers, Dordrecht
- Bleustein, Jol., 1967. A note on the boundary conditions of Toupin's strain-gradient theory. *Int. J. Solids struct.* 3, pp. 1053-1057
- David, J. G., 1999. *Introduction to Electrodynamics*, Third Edition.
- Deng, Q., Deng, F., Shen, S., 2017. A 3D mixed finite element for flexoelectricity *J. Appl, Mech.*
- Deng, Q., Deng, F., Yu, W., Shen, S., 2017. Mixed finite elements for flexoelectric solids, Vol. 84, *J. Appl Mech*, pp. 081004
- Eringen, A. C., 1968. Theory of micropolar elasticity. In : Liebowitz, H. (Ed.), *Fractur – An Advanced Treatise*, Vol, 2, Academic Press, New York, pp. 621-729

- Eringen, A. C., 1971. “Tension Analysis” in continuum Physics, Vol. 1, pp. 1 – 155, Academic Press.
- Exadaktylos, G. E., Vardoulakis I., 1998. Surface instability in gradient elasticity with surface energy. *Int. J. Solids Struct.* 35, pp. 2251-2281
- Georgiadis, H. G., 2003. Προχωρημένη Μηχανική των Υλικών.
- Gourgiotis, P. A., 2009. Προβλήματα Εξαρμώσεων και Ρωγμών στα πλαίσια Γενικευμένων Θεωριών Συνεχούς Μέσου. Διδακτορική Διατριβή στον Τομέα Μηχανικής (Επιβλέπων Καθηγητής Χ. Γεωργιάδης ΣΕΜΦΕ ΕΜΠ).
- Gourgiotis, P. A., Georgiadis, H. G., 2014. Torsional and SH surface waves in an isotropic and homogeneous elastic half-space characterized by the Toupin-Mindlin gradient theory.
- Gourgiotis, P. A, Zisis, Th, Georgiadis, H. G., 2017 On concentrated surface loads and Green’s functions in the Toupin-Mindlin theory of strain gradient elasticity. *Int. J. Solids Struct.* 35, pp. 130-131, 153-171
- Green, A. E., Rivlin, R. S., 1964. Multipolar continuum mechanics. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 17, pp. 113-147
- Grentzelou, C. G., Georgiadis, H. G., 2008. Balance laws and energy release rates for cracks in dipolar gradient elasticity. *Int. J. Solids Struct.* 45, pp. 551-567

- Jackson, J. D., 1999. Classical Electrodynamics, Third Edition.
- Kasap, S. O., 2002. Principles of Electronic Materials and Devices, Second Edition.
- Lee, P. C. Y., Haines, D. W., 1969. Piezoelectric Crystals and electro-elasticity.
- Logan, D. J. 2006. Applied Mathematics, Third Edition.
- Maranganti, R., Sharma, P., Sharma, N. D., 2006. Electromechanical coupling in nonpiezoelectric materials due to nanoscale nonlocal size effects: Green's function solution and embedded inclusions, Phys. Rev. B, 74, p. 014110
- Martin, H. Sadd, 2005. Elasticity - Theory, Applications and Numerics.
- Mindlin, R.D., Tiersten, H.F., 1962. Effects of couple-stresses in linear elasticity. Arch. Ration. Mech. Anal. 11, pp. 415-448
- Mindlin, R.D., 1964. Micro-Structure in linear elasticity. Arch. Ration. Mech. Anal. 16, pp. 51-78
- Mindlin, R.D., Eshel, N.N., 1968. On first-gradient theories in linear elasticity. Int. J. Solids Struct.4, pp. 109-124

- Mindlin, R.D., 1968. Polarization gradient in elastic dielectrics. *Int. J. Solids Struct.* 4, pp. 637-642
- Mindlin, R.D., 1972. A continua theory of diatomic elastic dielectric. *Int. J. Solids Struct.* 8, pp. 369-383
- Mindlin, R.D., 1972. Coupled elastic and electromagnetic fields in diatomic, dielectric continuum. *Int. J. Solids Struct.* 8, pp. 401-408
- Schwartz, J., 1969. Solutions of the equations of equilibrium of elastic dielectrics: stress functions, concentrated force, surface energy, *Int. J. Solids struct.* 5.
- Sharma, N., Landis, C., and Sharma, P., 2010, Piezoelectric thin-film superlattices without using piezoelectric materials, *J. Appl. Phys.*, 108(2), p.024304
- Sharma, N., Maranganti, P., and Sharma, P., 2007, On the possibility of piezoelectric nanocomposites without using piezoelectric materials, *J. Mech. Phys. Rev. B*, 77(12), p. 125424
- Sheng, M. Prashant, K. P., 2014. Insights into Flexoelectric Solids from Strain–Gradient Elasticity, *J. App. Mech.*, Vol. 81, p.081004-1
- Sheng, M., Prashant, K. P., 2015. Defects in flexoelectric solids, *J. Mech. Phys. Solids.* 84, pp. 95 – 115

- Tiersten, H.F., 1968. Elastic surface waves guided by thin films J. Appl. Phys. 40, 770
- Tiersten, H.F., Bluestein, J. L., 1973. Generalized Elastic Continuum R.D. Mindlin and Applied Mechanics (Ed. By G. Herrmann) Pergamon Press, pp. 67-103
- Tiersten, H.F. 1963. Wave propagation in an infinite piezoelectric plate, J. Acoust. Soc. Amer. Vol. 35, 234
- Toupin, R.A., 1956. The elastic dielectric, J. Ration. Mh. Anal. 5, pp. 849-915
- Toupin, R.A., 1962. Perfectly elastic materials with couple stresses. Arch. Ration. Mech. Anal. 11, pp. 385-414
- Toupin, R.A., 1963. A dynamical theory of elastic dielectrics, Int. J. Engng. Sei. Vol. 1, pp. 101-126
- Vardoulakis, I., 2008. Εισαγωγή στην Μηχανική Συνεχούς Μέσου.
- Ymeri, H. M., 1997. Toupin's variational principle and electric free enthalpy for dielectric bodies, Electrical. Engng. 80 pp. 163-167
- Zhen – bang, K., 2009. Internal energy variational energy principles and governing equations in electroelastic analysis, Int. J. Solids Struct. 45, pp. 902 - 911