ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Διπλωματική Εργασία

Ημιθετικοί Πίνακες: Αλγεβρική Θεωρία & Εφαρμογές με Χρήση MATLAB

Δημήτριος Πλυτάς

Επιβλέπων:
Παναγιώτης Ψαρράκος, Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, 2021

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Διπλωματική Εργασία

Ημιθετικοί Πίνακες: Αλγεβρική Θεωρία & Εφαρμογές με Χρήση MATLAB

Δημήτριος Πλυτάς

Μέλη Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής:
Παναγιώτης Ψαρράκος, Καθηγητής Ε.Μ.Π.
Βασίλειος Κανελλόπουλος, Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.
Αλέξανδρος Αρβανιτάκης, Επίκ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, 2021

Ευχαριστίες

Σε αυτό το σημείο, επιθυμώ να εκφράσω τις ευχαριστίες μου σε όλους όσους διαδραμάτισαν σημαντικό ρόλο στην εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας, καθώς και στην ολοκλήρωση των σπουδών μου.

Πρωτίστως, λοιπόν, ευχαριστώ τον επιβλέποντα καθηγητή, κ. Παναγιώτη Ψαρράκο, για την ευκαιρία που μου έδωσε να ασχοληθώ με ένα ιδιαιτέρως ενδιαφέρον θέμα, καθώς και για την πολύτιμη καθοδήγησή του.

Έπειτα, ευχαριστώ όλους τους καθηγητές από τους οποίους διδάχθηκα, κατά τα φοιτητικά μου χρόνια, για τις γνώσεις που με βοήθησαν να αποκτήσω.

Τέλος, ευχαριστώ την οικογένειά μου για την συμπαράστασή της κατά την διάρκεια των σπουδών μου.

Περίληψη

Η διπλωματική εργασία αποτελείται από δύο μέρη: το θεωρητικό και το πρακτικό. Το θεωρητικό περιλαμβάνει τα κεφάλαια 1, 2, 3, 4, 5 και το πρακτικό περιλαμβάνει το κεφάλαιο 6.

Το $1^{ο}$ κεφάλαιο περιλαμβάνει θεμελιώδεις έννοιες της γραμμικής άλγεβρας, οι οποίες είναι απαραίτητες στον αναγνώστη προκειμένου να να είναι σε θέση να μελετήσει και κατανοήσει το περιεχόμενο των επομένων κεφαλαίων. Έμφαση δίδεται στην θεωρία των διανυσμάτων και των πινάκων.

Το $2^{ο}$ κεφάλαιο περιέχει την βασική θεωρία των ημιθετικών πινάκων. Πιο συγκεκριμένα, ξεκινά με ορισμούς και ιδιότητες και συνεχίζει με ανάλυση θεωρίας στην οποία τα αθροίσματα και γινόμενα των ημιθετικών πινάκων, τα μοτίβα προσήμου των ημιθετικών πινάκων, καθώς και οι κατ' ελάχιστον ημιθετικοί πίνακες και οι περιττά ημιθετικοί πίνακες διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο.

Το $3^{ο}$ κεφάλαιο περιέχει περαιτέρω θεωρία των ημιθετικών πινάκων. Πιο συγκεκριμένα, περιλαμβάνει θεωρία σχετική με γραμμικούς διατηρητές των ημιθετικών πινάκων, δίδοντας έμφαση σε μία συγκεκριμένη μορφή αυτών.

Το $4^{ο}$ κεφάλαιο περιέχει μία ανάλυση των ιδιοτήτων γεωμετρικής απεικόνισης των ημιθετικών πινάκων.

Το $5^{ο}$ κεφάλαιο αποτελεί ένα περιεκτικό εκπαιδευτικό υλικό του MATLAB. Αποσκοπεί στην εξοικείωση του αναγνώστη με το MATLAB και στην προετοιμασία του προκειμένου να κατανοήσει τις εφαρμογές του επομένου κεφαλαίου και να χρησιμοποιήσει / επεκτείνει τον κώδικά τους (ο οποίος παρατίθεται στο Παράρτημα).

Το $6^{ο}$ κεφάλαιο περιέχει δύο εφαρμογές, με χρήση MATLAB, οι οποίες εδράζονται στο $2^{ο}$ και $3^{ο}$ κεφάλαιο αντιστοίχως. Αποβλέπει στην καθιέρωση της αντίληψης ότι η αλγεβρική θεωρία δύναται να συνδεθεί με πρακτικές εφαρμογές και να υποστηριχθεί από αυτές.

Λέξεις - κλειδιά: άλγεβρα, διάνυσμα, πίνακας, ημιθετικός, MATLAB.

Abstract

The diploma thesis consists of two parts: the theoretical one and the practical one. The theoretical part contains the chapters 1, 2, 3, 4, 5 and the practical part contains the chapter 6.

The 1st chapter contains fundamental concepts of linear algebra, which are necessary for the reader in order for him to be able to study and understand the content of the next chapters. Emphasis is given on the theory of vectors and matrices.

The 2nd chapter contains the basic theory of semipositive matrices. More specifically, it starts with definitions and properties and continues with theory analysis in which sums and products of semipositive matrices, sign patterns of semipositive matrices, as well as minimally semipositive matrices and redundantly semipositive matrices play an important role.

The 3rd chapter contains further theory of semipositive matrices. More specifically, it contains theory related to linear preservers of semipositive matrices, emphasizing a specific form of theirs.

The 4th chapter contains an analysis of the geometric mapping properties of semipositive matrices.

The 5th chapter is a comprehensive tutorial of MATLAB. It has the intention to familiarize the reader with MATLAB and to prepare him so as to understand the applications of the next chapter and use / extend their code (which is given in the Appendix).

The 6th chapter contains two applications, using MATLAB, which are based on the 2nd and 3rd chapter respectively. It has the intention to establish the perception that the algebraic theory can be associated with practical applications and can be supported by them.

Keywords: algebra, vector, matrix, semipositive, MATLAB.

Πίνακας περιεχομένων

(συνέχεια)

Πίνακας συμβόλων

$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$: το σύνολο των πραγματικών αριθμών και το σύνολο των μιγαδικών αριθμών αντιστοίχως.

$\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$, $\mathbb{C}^{\mathbf{n}}$: το σύνολο των διανυσμάτων - στηλών με n - το πλήθος - πραγματικούς αριθμούς ως συνιστώσες και το σύνολο των διανυσμάτων - στηλών με n - το πλήθος - μιγαδικούς αριθμούς ως συνιστώσες αντιστοίχως.

$\mathbb{R}_{+}^{n}$: το σύνολο των διανυσμάτων με n - το πλήθος - μη αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς ως συνιστώσες.

$M_{m,n}(\mathbb{F})$: το σύνολο των πινάκων διαστάσεως mxn των οποίων κάθε στοιχείο ανήκει στο σύνολο $\mathbb{F}$ - π.χ., το $M_{m,n}(\mathbb{R})$ είναι το σύνολο των πινάκων διαστάσεως mxn των οποίων κάθε στοιχείο ανήκει στο σύνολο $\mathbb{R}$ (δηλαδή είναι πραγματικός αριθμός).

$M_n(\mathbb{F}) = M_{n,n}(\mathbb{F})$: το σύνολο των πινάκων διαστάσεως nxn των οποίων κάθε στοιχείο ανήκει στο σύνολο $\mathbb{F}$ - π.χ., το $M_n(\mathbb{R}) = M_{n,n}(\mathbb{R})$ είναι το σύνολο των πινάκων διαστάσεως nxn των οποίων κάθε στοιχείο ανήκει στο σύνολο $\mathbb{R}$ (δηλαδή είναι πραγματικός αριθμός).

A^{T}: ο ανάστροφος (πίνακας) ενός πίνακα A.

A^{-1}: ο αντίστροφος (πίνακας) ενός πίνακα A.

A^{+}: ο Moore - Penrose αντίστροφος (πίνακας) ενός πίνακα A.

$A^{\#}$: αντίστροφος ομάδας (πίνακας) ενός πίνακα A.

$A > B, A \geq B$: για τους πίνακες (με πραγματικούς αριθμούς ως στοιχεία) A, B, κάθε στοιχείο του πίνακα $A - B$ είναι θετικός αριθμός και μη αρνητικός αριθμός αντιστοίχως.

$x > y, x \geq y$: για τα διανύσματα (με πραγματικούς αριθμούς ως συνιστώσες) x, y, κάθε συνιστώσα του διανύσματος $x - y$ είναι θετικός αριθμός και μη αρνητικός αριθμός αντιστοίχως.

$\mathrm{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$: ο διαγώνιος πίνακας ο οποίος έχει τα στοιχεία $d_1, d_2, \dots, d_n$ στην κύρια διαγώνιο.

$\det(A)$ ή $|A|$: η ορίζουσα ενός πίνακα A.

$\mathrm{rank}(A)$: ο βαθμός ενός πίνακα A.

I: ταυτοτικός πίνακας.

e: το διάνυσμα - στήλη του οποίου όλες οι συνιστώσες είναι ίσες με 1.

$\mathbb{O}$: μηδενικός πίνακας, δηλαδή πίνακας του οποίου όλα τα στοιχεία είναι ίσα με 0.

$\mathrm{null}(A)$: ο μηδενοχώρος ενός πίνακα A.

$\emptyset$: το κενό σύνολο.

$R(A)$: ο χώρος στηλών ενός πίνακα A.

$S_{+}(A) = \{x \in \mathbb{R}^{n} : x \geq 0 \text{ και } Ax > 0\}$.

$\mathbb{R}_+(A) = AS_+(A)$, $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$.

$K_+(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0 \text{ και } Ax \geq 0\}$, $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$.

(συνέχεια)

$A \oslash B = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \in M_{m+p,n}(\mathbb{R})$, $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{p,n}(\mathbb{R})$.

$A \ominus B = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \in M_{m,n+q}(\mathbb{R})$, $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{m,q}(\mathbb{R})$.

1. ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

Το 1ο κεφάλαιο περιέχει θεμελιώδεις έννοιες γραμμικής άλγεβρας.

1.1 Περί διανυσμάτων

Ως διάνυσμα ορίζεται μία διατεταγμένη πεπερασμένη λίστα αριθμών η οποία αναπαρίσταται στην εξής μορφή:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}.$$

Τα στοιχεία ενός διανύσματος, $a_1, a_2, \ldots, a_m$, καλούνται **συνιστώσες**. Ως **μέγεθος** ή **μήκος** ενός διανύσματος ορίζεται το πλήθος των συνιστωσών του, m. Επίσης, δύο διανύσματα είναι ίσα όποτε είναι ισομήκη και είναι ίσες οι αντίστοιχες συνιστώσες τους.

Το **άθροισμα** δύο διανυσμάτων (ίδιου μήκους) συνιστά ένα ισόμηκες διάνυσμα το οποίο προκύπτει προσθέτοντας τις αντίστοιχες συνιστώσες. Με την αντίστοιχη λογική προκύπτει και η **διαφορά** δύο διανυσμάτων. Για παράδειγμα: $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Επίσης, είναι δυνατός ο **πολλαπλασιασμός διανύσματος με αριθμό**, οπότε το αποτέλεσμα είναι ένα ισόμηκες διάνυσμα του οποίου η εκάστοτε συνιστώσα είναι ίση με το γινόμενο του αριθμού επί την αντίστοιχη συνιστώσα του αρχικού διανύσματος. Για παράδειγμα:

$$2 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να επισημανθεί πως ένα διάνυσμα σε κατακόρυφη μορφή, όπως όλα τα προηγούμενα, καλείται **διάνυσμα - στήλη**. Αντιστοίχως, ένα διάνυσμα σε οριζόντια μορφή καλείται **διάνυσμα - γραμμή**. Όλα τα προηγούμενα ισχύουν, αντιστοίχως, και για τα διανύσματα - γραμμή. Μάλιστα, είναι δυνατό ένα διάνυσμα - στήλη να καταστεί διάνυσμα - γραμμή, και το αντίστροφο, με χρήση του αναστρόφου τελεστή («Τ») οπότε και προκύπτει το **ανάστροφο διάνυσμα**. Για παράδειγμα:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}^T = [3\ 1] \text{ και } [3\ 1]^T = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Επιπλέον, ένα διάνυσμα - στήλη είναι διαστάσεως mx1, δεδομένου ότι αποτελείται από m - το πλήθος - γραμμές και 1 στήλη και, αντιστοίχως, ένα διάνυσμα - γραμμή είναι διαστάσεως 1xn, δεδομένου ότι αποτελείται από 1 γραμμή και n - το πλήθος - στήλες (ισχύει ότι $m, n = 1, 2, \ldots$ και, μάλιστα, το διάνυσμα συνιστά έναν αριθμό στην περίπτωση κατά την οποία αληθεύει ότι $m = 1$ ή ότι $n = 1$ αντιστοίχως).

Επίσης, είναι δυνατός ο **πολλαπλασιασμός διανυσμάτων** συμβατών διαστάσεων, δηλαδή διαστάσεων 1xn και mx1 με $m = n$, οπότε το αποτέλεσμα είναι ένα διάνυσμα διαστάσεως 1x1 (δηλαδή ένας αριθμός). Αυτό το αποτέλεσμα προκύπτει αθροίζοντας τα γινόμενα των αντιστοίχων συνιστωσών των δύο διανυσμάτων. Για παράδειγμα:

$$[3\ 1]\ \cdot \begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix} = 3\cdot(-1) + 1\cdot(-2) = -5.$$

Επιπροσθέτως, θεωρώντας (ισομήκη) διανύσματα $v_1, v_2, \ldots, v_n$ και αριθμούς $c_1, c_2, \ldots, c_n$, το (ισόμηκες) διάνυσμα $b = c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n$ καλείται **γραμμικός συνδυασμός** των διανυσμάτων $v_1, v_2, \ldots, v_n$ και οι αριθμοί $c_1, c_2, \ldots, c_n$ καλούνται **βάρη**. Για παράδειγμα, έστω τα εξής διανύσματα: $v_1 = \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix}-2\\-1\end{bmatrix}$. Τότε, το διάνυσμα $b = \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$ είναι γραμμικός συνδυασμός τους μιας και επαληθεύει την εξής σχέση: $b = 2v_1 - v_2 + v_3$.

Ακόμη, θεωρώντας (ισομήκη) διανύσματα $v_1, v_2, \ldots, v_n$, τα διανύσματα αυτά καλούνται **γραμμικώς ανεξάρτητα** όποτε η μοναδική λύση για τους αριθμούς $c_1, c_2, \ldots, c_n$ στην εξίσωση $c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n = \mathbf{0}$[1] είναι η τετριμμένη λύση $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$. Αντιστοίχως, όποτε ένας τουλάχιστον αριθμός εκ των $c_1, c_2, \ldots, c_n$ είναι διάφορος του μηδενός, τα διανύσματα καλούνται **γραμμικώς εξαρτημένα**. Με άλλα λόγια, τα γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα είναι αυτά τα οποία δεν διέπονται από σχέσεις εξάρτησης, ενώ τα γραμμικώς εξαρτημένα διανύσματα είναι εκείνα για τα οποία αληθεύει ότι τουλάχιστον ένα εξ' αυτών αποτελεί γραμμικό συνδυασμό των υπολοίπων. Για παράδειγμα, έστω τα εξής διανύσματα: $v_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$. Τότε, τα διανύσματα v_1 και v_2 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα μεταξύ τους, όπως και τα v_1 και v_3 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα μεταξύ τους. Όμως, τα διανύσματα v_1, v_2 και v_3 είναι γραμμικώς εξαρτημένα μεταξύ τους μιας και αληθεύει η εξής σχέση: $v_3 = v_1 + v_2$.

Τέλος, **βάση** ενός διανυσματικού χώρου - δηλαδή μίας μαθηματικής δομής που αποτελείται από ορισμένα διανύσματα - ονομάζεται ένα σύνολο γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων που παράγουν τον διανυσματικό χώρο αυτόν. Με άλλα λόγια, το σύνολο $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ είναι βάση του διανυσματικού χώρου V εάν ισχύουν, ταυτοχρόνως, οι επόμενες τρεις συνθήκες.

- $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$.
- Τα διανύσματα $v_1, v_2, \ldots, v_k$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.
- Για κάθε διάνυσμα $v \in V$, υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ έτσι ώστε να αληθεύει ότι $v = \lambda_1v_1 + \lambda_2v_2 + \cdots + \lambda_kv_k$ (δηλαδή ότι κάθε διάνυσμα του V δύναται να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $v_1, v_2, \ldots, v_k$).[2]

Για παράδειγμα, το σύνολο το οποίο αποτελείται από τα διανύσματα $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^3$.

1.2 Περί πινάκων

Ως **πίνακας** ορίζεται μία δομή διαστάσεως mxn η οποία περιέχει αριθμούς ως στοιχεία και αναπαρίσταται στην εξής μορφή:

[1] Εδώ: το μηδενικό διάνυσμα έχει ίσο μήκος με τα διανύσματα $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

[2] Η k - άδα των πραγματικών αριθμών είναι μοναδική για κάθε διάνυσμα v.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Οι **γραμμές** του πίνακα είναι οι m - το πλήθος - οριζόντιες λίστες αριθμών, δηλαδή τα διανύσματα - γραμμή, $[a_{11}\ a_{12}\ a_{13} \ldots a_{1n}], [a_{21}\ a_{22}\ a_{23} \ldots a_{2n}], \ldots, [a_{m1}\ a_{m2}\ a_{m3} \ldots a_{mn}]$, και οι **στήλες** του πίνακα είναι οι n - το πλήθος - κατακόρυφες λίστες αριθμών, δηλαδή τα διανύσματα - στήλη,

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Όπως παρατηρείται, το στοιχείο a_{ij} βρίσκεται στην i - οστή γραμμή και στην j - οστή στήλη.

Ως **μέγεθος** ενός πίνακα ορίζεται το ζεύγος των αριθμών m και n. Επίσης, δύο πίνακες είναι ίσοι όποτε έχουν το ίδιο μέγεθος και είναι ίσα τα αντίστοιχα στοιχεία τους. Η διαγώνιος, δε, στην οποία βρίσκονται τα στοιχεία $a_{11}\ a_{22}\ a_{33} \ldots a_{mn}$ θεωρείται η **κύρια διαγώνιος** του πίνακα.

Ακόμη, ως **βαθμός** ενός πίνακα ορίζεται το μέγιστο πλήθος των γραμμικώς ανεξάρτητων στηλών / γραμμών του. Για παράδειγμα, έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ και ο πίνακας $B = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Τότε ισχύει ότι ο βαθμός του πίνακα A είναι 2 μιας και ο πίνακας A διαθέτει έως 2 γραμμικώς ανεξάρτητες γραμμές / στήλες δεδομένου ότι δεν υπάρχει γραμμή / στήλη η οποία να δύναται να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός της άλλης, ενώ ο βαθμός του πίνακα B είναι 1 μιας και ο πίνακας B διαθέτει έως 1 γραμμικώς ανεξάρτητη γραμμή / στήλη δεδομένου ότι η μία γραμμή / στήλη αποτελεί γραμμικό συνδυασμό της άλλης. Επίσης, εάν όλες οι στήλες ενός πίνακα είναι γραμμικώς ανεξάρτητες (μεταξύ τους), τότε ο πίνακας έχει **μέγιστο βαθμό στηλών** και, αντιστοίχως, εάν όλες οι γραμμές ενός πίνακα είναι γραμμικώς ανεξάρτητες (μεταξύ τους), τότε ο πίνακας έχει **μέγιστο βαθμό γραμμών**. Μάλιστα, εάν ένας πίνακας έχει και μέγιστο βαθμό στηλών και μέγιστο βαθμό γραμμών, τότε το πλήθος των στηλών του ισούται με το πλήθος των γραμμών του. Στο προηγούμενο παράδειγμα, παρεμπιπτόντως, ο πίνακας A έχει μέγιστο βαθμό στηλών και μέγιστο βαθμό γραμμών.

Επιπλέον, ως **μηδενοχώρος** ενός πίνακα A ορίζεται το σύνολο όλων των διανυσμάτων - λύσεων, x, της εξίσωσης $Ax = 0$. Το σύνολο αυτό είναι μη κενό μιας και περιέχει οπωσδήποτε το μηδενικό διάνυσμα (τετριμμένη λύση). Εάν, μάλιστα, περιέχει μόνο το μηδενικό διάνυσμα, τότε ο μηδενοχώρος είναι τετριμμένος. Για παράδειγμα, έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$ και ο πίνακας $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Ο μηδενοχώρος του πίνακα A προκύπτει επιλύοντας την εξίσωση $Ax = \mathbf{0}$, δηλαδή την $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, δηλαδή το σύστημα των εξής δύο εξισώσεων:

$$2x_1 + x_2 = 0$$

$$-4x_1 - 2x_2 = 0$$

Επομένως, μιας και από το σύστημα προκύπτει η εξίσωση $x_2 = -2x_1$, ο μηδενοχώρος του πίνακα A περιέχει κάθε διάνυσμα της μορφής $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} =$, όπου το x_1 είναι πραγματικός αριθμός. Από την άλλη, ο μηδενοχώρος του πίνακα B προκύπτει επιλύοντας την εξίσωση $Bx = 0$, δηλαδή την $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, δηλαδή το σύστημα των εξής δύο εξισώσεων:

$$2x_1 + x_2 = 0$$

$$x_1 + 2x_2 = 0$$

Επομένως, μιας και από το σύστημα προκύπτει η εξίσωση $x_1 = x_2 = 0$, ο μηδενοχώρος του πίνακα B περιέχει μόνο το μηδενικό διάνυσμα (τετριμμένη λύση), δηλαδή το διάνυσμα $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ εν προκειμένω και, συνεπώς, είναι τετριμμένος.

Το **άθροισμα** δύο πινάκων (ίδιου μεγέθους) συνιστά έναν πίνακα ίδιου μεγέθους ο οποίος προκύπτει προσθέτοντας τα αντίστοιχα στοιχεία. Με την αντίστοιχη λογική προκύπτει και η **διαφορά** δύο πινάκων. Για παράδειγμα:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ και } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Επίσης, είναι δυνατός ο **πολλαπλασιασμός πίνακα με αριθμό**, οπότε το αποτέλεσμα είναι ένας πίνακας ίδιου μεγέθους του οποίου το εκάστοτε στοιχείο είναι ίσο με το γινόμενο του αριθμού επί το αντίστοιχο στοιχείο του αρχικού πίνακα. Για παράδειγμα:

$$2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ακόμη, είναι δυνατός ο **πολλαπλασιασμός πινάκων** συμβατών διαστάσεων, δηλαδή διαστάσεων mxq και qxn, οπότε το αποτέλεσμα είναι ένας πίνακας διαστάσεως mxn. Αυτό το αποτέλεσμα προκύπτει βάσει του εξής: το στοιχείο στην i - οστή γραμμή και στην j - οστή στήλη του πίνακα - γινομένου ισούται με το άθροισμα των γινομένων των αντιστοίχων στοιχείων της i - οστής γραμμής του πρώτου πίνακα και της j - οστής στήλης του δεύτερου πίνακα. Για παράδειγμα:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \\ 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 & 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Σε αυτό το σημείο, θα πραγματοποιηθεί αναφορά σε ειδικούς τύπους πινάκων.

Κατ' αρχάς, ως **ανάστροφος** ενός πίνακα διαστάσεως mxn ορίζεται ο πίνακας που προκύπτει καθιστώντας τις γραμμές του αρχικού πίνακα ως στήλες και τις στήλες του ως γραμμές (χρήση του αναστρόφου τελεστή, «T») και ο οποίος, επομένως, θα είναι διαστάσεως nxm. Για παράδειγμα, ισχύει ότι:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix} \text{ και } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Έπειτα, ως **τετραγωνικός** ορίζεται ο πίνακας διαστάσεως mxn για τον οποίο ισχύει ότι $m = n$, δηλαδή ο πίνακας που έχει ίδιο πλήθος γραμμών και στηλών. Για παράδειγμα, ο εξής πίνακας είναι τετραγωνικός: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

Ένας τετραγωνικός πίνακας ο οποίος πληροί την ιδιότητα του να ισούται με τον ανάστροφό του, δε, καλείται **συμμετρικός**. Για παράδειγμα, ο επόμενος πίνακας είναι συμμετρικός:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Επίσης, ένας τετραγωνικός πίνακας ο οποίος έχει ίσα με 0 όλα τα στοιχεία του εκτός από εκείνα που βρίσκονται στην κύρια διαγώνιό του καλείται **διαγώνιος**. Για παράδειγμα, είναι διαγώνιος ο εξής πίνακας: $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

Ακόμη, ένας τετραγωνικός πίνακας λέγεται **βαθμωτός** εάν είναι διαγώνιος και τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου του είναι ίσα μεταξύ τους. Για παράδειγμα, είναι βαθμωτός ο εξής πίνακας:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Επιπλέον, ως **ταυτοτικός** ορίζεται ο βαθμωτός πίνακας του οποίου τα στοιχεία στην κύρια διαγώνιο είναι ίσα με 1. Για παράδειγμα, ο εξής πίνακας είναι ταυτοτικός:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Επιπροσθέτως, έστω ένας nxn πίνακας, A, για τον οποίο υπάρχει ένας, επίσης, nxn πίνακας, B, τέτοιος ώστε να αληθεύει ότι $AB = BA = I$[3]. Τότε ο A καλείται **αντιστρέψιμος** και ο B καλείται **αντίστροφος** του A. Για παράδειγμα, έστω οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Τότε, αληθεύει ότι ο A είναι αντιστρέψιμος πίνακας και ο πίνακας B είναι ο αντίστροφός του.

Σε αυτό το σημείο, θα πραγματοποιηθεί αναφορά σε μερικές βασικές έννοιες που σχετίζονται με τους πίνακες.

Κατ' αρχάς, ας θεωρηθεί ο nxn πίνακας γενικής μορφής, έστω A:

[3] Ο ταυτοτικός πίνακας I θα είναι ίδιου μεγέθους με τους A, B.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Είναι δυνατό να τού αντιστοιχηθεί ένας αριθμός ο οποίος καλείται **ορίζουσα**. Μάλιστα, ισχύουν τα ακόλουθα.

- Εάν αληθεύει ότι $A = [a]$ (ισχύει ότι $n = 1$), τότε αληθεύει ότι $\det(A) = a$.
- Εάν αληθεύει ότι $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ (ισχύει ότι $n \geq 2$), τότε αληθεύει ότι $\det(A) = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{1n}M_{1n}$[4], όπου η ελάσσων ορίζουσα M_{ij} είναι η ορίζουσα που προκύπτει αφαιρώντας την i-οστή γραμμή και την j - οστή στήλη.

Για παράδειγμα, ο πίνακας $[3]$ έχει ορίζουσα ίση με 3, ο πίνακας $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ έχει ορίζουσα ίση με $1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$ και ο πίνακας $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ έχει ορίζουσα ίση με $1 \cdot (1 \cdot 0 - 0 \cdot 1) - 0 \cdot (0 \cdot 0 - 0 \cdot 1) + 1 \cdot (0 \cdot 1 - 1 \cdot 1) = -1$.

Ας παρατηρηθεί, επίσης, πως η ορίζουσα ενός (τετραγωνικού) πίνακα είναι μηδενική σε καθεμία από τις εξής περιπτώσεις: ο πίνακας έχει μηδενική γραμμή / στήλη, ο πίνακας έχει δύο ίσες γραμμές / στήλες.

Θα πρέπει να επισημανθεί, τέλος, ότι ένας (τετραγωνικός) πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν έχει μη μηδενική ορίζουσα[5] και ότι, εάν είναι αντιστρέψιμος όντως, ο αντίστροφός του δύναται να υπολογιστεί με χρήση της ορίζουσας. Πράγματι, εάν ένας πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, δηλαδή η ορίζουσά του είναι διάφορη του μηδενός, τότε ο αντίστροφός του υπολογίζεται από τον τύπο $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}C^T$, όπου το στοιχείο c_{ij} του πίνακα C προκύπτει, με χρήση των ελασσόνων οριζουσών, από την σχέση $c_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$. Για παράδειγμα, έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$. Τότε ισχύει ότι $\det(A) = 2$ και, επομένως, ο πίνακας αυτός είναι αντιστρέψιμος. Έπειτα, για τον υπολογισμό του αντιστρόφου του, υπολογίζονται οι ποσότητες $c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}$: $c_{11} = 2, c_{12} = -2, c_{21} = 0, c_{22} = 1$. Οπότε, ισχύει ότι $C = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ και, επομένως, ότι $C^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. Συνεπώς, ο αντίστροφος πίνακας είναι ο $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, δηλαδή ο πίνακας $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

[4] Ο υπολογισμός της ορίζουσας δύναται να πραγματοποιηθεί με χρήση αναπτύγματος είτε ως προς γραμμή (εδώ: ως προς την πρώτη γραμμή) είτε ως προς στήλη.

[5] Περαιτέρω, αληθεύει το εξής: ένας (τετραγωνικός) πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν έχει μη μηδενική ορίζουσα και, έχει μη μηδενική ορίζουσα αν και μόνο αν το σύστημα $Ax = 0$ έχει μοναδική λύση το μηδενικό διάνυσμα και, το συγκεκριμένο σύστημα έχει λύση το μηδενικό διάνυσμα αν και μόνο αν οι στήλες του πίνακα A είναι γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα.

Έπειτα, ένα διάνυσμα, έστω x, το οποίο έχει n - το πλήθος - συνιστώσες λέγεται **ιδιοδιάνυσμα** του nxn πίνακα A, όταν ικανοποιεί την εξής σχέση για κάποιον αριθμό λ : $Ax = \lambda x$. Μάλιστα, όταν το x δεν είναι το μηδενικό διάνυσμα, τότε η τιμή λ λέγεται **ιδιοτιμή** του πίνακα A. Επιπλέον, ο αριθμός λ είναι ιδιοτιμή του πίνακα A αν και μόνο αν ικανοποιεί την εξής εξίσωση (ως προς την μεταβλητή λ): $\det(\lambda I - A) = 0$. Μάλιστα, η συγκεκριμένη εξίσωση καλείται **χαρακτηριστική εξίσωση** του πίνακα A και το πολυώνυμο βαθμού n της μεταβλητής $\lambda, X_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$, καλείται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** του πίνακα A. Για παράδειγμα, έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμό του είναι το $X_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$, δηλαδή το $X_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & -1 \\ -2 & \lambda & 2 \\ 1 & -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 2)^2$ και η χαρακτηριστική εξίσωσή του είναι η $\det(\lambda I - A) = 0$, δηλαδή η $\lambda(\lambda - 2)^2 = 0$. Έπειτα, οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι η 0 και και η 2 (διπλή). Τέλος, είναι δυνατός ο υπολογισμός των ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν σε κάθε ιδιοτιμή. Πράγματι για την ιδιοτιμή 0, τα ιδιοδιανύσματα θα προκύψουν από την επίλυση της εξίσωσης $Ax = 0$, δηλαδή της εξίσωσης $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, δηλαδή του συστήματος των τριών εξισώσεων:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$

$$2x_1 + 0x_2 - 2x_3 = 0$$

$$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$$

Επομένως, μιας και από το σύστημα προκύπτουν οι εξισώσεις $x_1 = -x_2$ και $x_1 = x_3$, πρόκειται για ιδιοδιανύσματα της μορφής $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, όπου το x_1 είναι πραγματικός αριθμός διάφορος του μηδενός. Για την ιδιοτιμή 2, δε, τα ιδιοδιανύσματα, θα προκύψουν από την επίλυση της εξίσωσης $Ax = 2x$, δηλαδή της εξίσωσης $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, δηλαδή του συστήματος των τριών εξισώσεων:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 2x_1 => -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$

$$2x_1 + 0x_2 - 2x_3 = 2x_2 => 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0$$

$$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2x_3 => -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$

Επομένως, μιας και από το σύστημα προκύπτουν οι εξισώσεις $x_1 = x_3$ και $x_2 = 0$, πρόκειται για ιδιοδιανύσματα της μορφής $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, όπου το x_1 είναι πραγματικός αριθμός διάφορος του μηδενός.

Σε αυτό το σημείο, θα δοθούν δύο ακόμη σημαντικοί ορισμοί. Δεδομένου ενός mxn πίνακα A, ορίζεται ως **χώρος στηλών** το σύνολο όλων των δυνατών γραμμικών συνδυασμών των στηλών του και, αντιστοίχως, ως **χώρος γραμμών** το σύνολο όλων των δυνατών γραμμικών συνδυασμών των γραμμών του. Για παράδειγμα, έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Ο χώρος στηλών του αποτελείται από τα διανύσματα της μορφής $b_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 + 2b_2 \\ 3b_1 - b_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$ (b_1, b_2: αριθμοί). Ο χώρος γραμμών του αποτελείται από τα διανύσματα της μορφής $b_1[1 \quad 2] + b_2[3 \; -1] + b_3[0 \quad 1] = [b_1 + 3b_2 \quad 2b_1 - b_2 + b_3]$ (b_1, b_2, b_3: αριθμοί).

Με χρήση προηγουμένων εννοιών, τώρα, θα οριστεί η έννοια του **ομοίου** πίνακα: ένας nxn πίνακας, A, είναι όμοιος προς έναν nxn πίνακα, B, εάν υπάρχει αντιστρέψιμος nxn πίνακας, S, τέτοιος ώστε να ισχύει ότι $B = SAS^{-1}$. Είναι γεγονός ότι όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο και τις ίδιες ιδιοτιμές. Για παράδειγμα, ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ είναι όμοιος προς τον πίνακα $B = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ μιας και υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας, δηλαδή πίνακας με μη μηδενική ορίζουσα, $S = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, τέτοιος ώστε να ισχύει ότι $B = SAS^{-1}$. Πράγματι, $\det(S) = 1$, $S^{-1} = \frac{1}{\det(S)} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ και

$$SAS^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = B.$$

Επίσης, ένας **πίνακας μετάθεσης**, έστω P, ο οποίος είναι τετραγωνικός, προκύπτει με μετάθεση των γραμμών του αντιστοίχου ταυτοτικού πίνακα σύμφωνα με κάποια μετάθεση των αριθμών $1, \ldots, n$. Επομένως, κάθε γραμμή / στήλη περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο ίσο με 1 και όλα τα υπόλοιπα στοιχεία της είναι ίσα με 0. Κάθε τέτοιος πίνακας αναπαριστά μία μετάθεση στοιχείων και δύναται να χρησιμοποιηθεί για μετάθεση των γραμμών ενός πίνακα A (με χρήση του πολλαπλασιασμού PA) ή για μετάθεση των στηλών ενός πίνακα A (με χρήση του πολλαπλασιασμού AP). Κάθε δυνατή μετάθεση συνδέεται με έναν μοναδικό πίνακα μετάθεσης. Για παράδειγμα, ο πίνακας $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ είναι ένας πίνακας μετάθεσης, ο οποίος συνδέεται με την εξής μετάθεση των γραμμών του 3x3 ταυτοτικού πίνακα: $(1 \to 3, 2 \to 2, 3 \to 1)$.

Επιπλέον, ως **υποπίνακας** ενός πίνακα A ορίζεται ένας πίνακας ο οποίος προκύπτει από τον A με επιλογή ενός συνόλου γραμμών και ενός συνόλου στηλών, δηλαδή των αντιστοίχων στοιχείων, έτσι ώστε τα (αντίστοιχα) στοιχεία να έχουν τις ίδιες σχετικές σχέσεις μεταξύ τους όπως στον πίνακα A. Για παράδειγμα, έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 7 & 9 \end{bmatrix}$. Ένας υποπίνακάς του είναι εκείνος που προκύπτει επιλέγοντας την πρώτη και την τρίτη στήλη καθώς και την πρώτη και την δεύτερη γραμμή: $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$.

Τέλος, ας παρατηρηθεί ότι ένας αριθμός δύναται να θεωρηθεί ως ένα 1x1 διάνυσμα (όπως έχει θιγεί στο υποκεφάλαιο 1.1) ή ένας 1x1 πίνακας και, επίσης, ένα διάνυσμα δύναται να θεωρηθεί ως ένας mx1 πίνακας (εάν πρόκειται για διάνυσμα - στήλη) ή ένας 1xn πίνακας (εάν πρόκειται για διάνυσμα - γραμμή).

1.3 Δύο ειδικότερα αποτελέσματα της γραμμικής άλγεβρας

Κατ' αρχάς, από το σημείο αυτό και έπειτα, οι ανισότητες διανυσμάτων και πινάκων θα αναφέρονται και σε ανισότητα κατά στοιχείο.

Θεώρημα των Εναλλακτικών

Έστω ένας πίνακας $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Τότε ισχύει μόνο ένα από τα αμέσως επόμενα.

(1) Υπάρχει διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$, με $x \geq 0$, τέτοιο ώστε $Ax > 0$.
(2) Υπάρχει διάνυσμα $y \in \mathbb{R}^m$, με $y \geq 0$ και $y \neq 0$, τέτοιο ώστε $y^T A \leq 0$. ■

Για την ειδική περίπτωση κατά την οποία ισχύει ότι $m = n$ και ο πίνακας A είναι συμμετρικός, ισχύει το αμέσως επόμενο Πόρισμα.

Πόρισμα

Έστω ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$ και έστω, επίσης, ότι ο πίνακας αυτός είναι συμμετρικός. Τότε ισχύει μόνο ένα από τα αμέσως επόμενα.

(1) Υπάρχει διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$, με $x \geq 0$, τέτοιο ώστε $Ax > 0$.
(2) Υπάρχει διάνυσμα $y \in \mathbb{R}^m$, με $y \geq 0$ και $y \neq 0$, τέτοιο ώστε $Ay \leq 0$. ■

2. ΗΜΙΘΕΤΙΚΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ: ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

Το 2ο κεφάλαιο περιέχει την βασική θεωρία αναφορικά με τους ημιθετικούς πίνακες.

2.1 Ορισμοί & βασικές ιδιότητες

Κατ' αρχάς, ένας πίνακας $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ είναι **θετικός**, $A > 0$, δηλαδή όλα τα στοιχεία του είναι αυστηρώς μεγαλύτερα του μηδενός, αν και μόνο αν ισχύει ότι $Ax > 0$ για κάθε μη μηδενικό διάνυσμα $x \geq 0$ με $x \in R^n$.

Έπειτα, ένας πίνακας $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ είναι **ημιθετικός** αν και μόνο αν υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα $x \geq 0$ με $x \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε να ισχύει ότι $Ax > 0$[6].

<u>Ορισμός 2.1.1</u>

Έστω ένας πίνακας $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ και έστω, επίσης, τα εξής δύο σύνολα:

$S_+(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0 \text{ και } Ax > 0\}$ και $\mathbb{R}_+(A) = AS_+(A)$.

Βεβαίως, $\mathbb{R}_+(A) \subseteq \mathbb{R}_+^m$ (και του εσωτερικού του), $S_+(A) \subseteq \mathbb{R}_+^n$, οι μη αρνητικοί ορθοστάτες[7] στον $\mathbb{R}^m$ και $\mathbb{R}^n$ αντιστοίχως. Ισχύει ότι $\mathbb{R}_+(A) \neq \emptyset$ αν και μόνο αν ισχύει πως $S_+(A) \neq \emptyset$. Εάν αληθεύει ότι $S_+(A) \neq \emptyset$, τότε ο πίνακας A καλείται ημιθετικός. ■

Ας παρατηρηθεί ότι, λόγω συνέχειας, εάν ο πίνακας A είναι ημιθετικός, τότε υπάρχει διάνυσμα $x > 0$ με $x \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $Ax > 0$.

<u>Ορισμός 2.1.2</u>

Δύναται να διατυπωθούν οι αμέσως επόμενοι ορισμοί.

- Ένας πίνακας $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ καλείται **ημιαρνητικός** εάν ο πίνακας $-A$ είναι ημιθετικός.
- Ένας πίνακας $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ καλείται **ημι - μη - αρνητικός** εάν υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα $x \geq 0$ τέτοιο ώστε να ισχύει ότι $Ax \geq 0$.
- Ένας πίνακας $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ καλείται **ημι - μη - θετικός** εάν ο πίνακας $-A$ είναι ημι - μη - αρνητικός. ■

<u>Παρατήρηση 2.1.1</u>

Παρατηρείται ότι εάν ο πίνακας A είναι ημιθετικός, τότε το σύνολο $S_+(A)$ είναι ένας μη κενός κώνος στο $\mathbb{R}_+^n$ και το σύνολο $\mathbb{R}_+(A)$ είναι ένας μη κενός κώνος στο $\mathbb{R}_+^m$. ■

Ας επισημανθεί, σε αυτό το σημείο, ότι υπάρχουν και «αριστερές» εκδοχές των παραπάνω εννοιών, σύμφωνα με τις οποίες τα διανύσματα, κατά τον πολλαπλασιασμό, τίθενται στα αριστερά. Για παράδειγμα, αναφορικά με την έννοια του **αριστερού ημιθετικού πίνακα**, νοείται πως υπάρχει διάνυσμα $y \geq 0$ τέτοιο ώστε να ισχύει ότι $y^T A > 0$. Ισοδυνάμως, ο πίνακας A^T είναι ημιθετικός.

---

[6] Παλαιότερος ορισμός περιοριζόταν σε θετικό διάνυσμα x (αντί μη μηδενικό).

[7] Ένας **ορθοστάτης** είναι το ανάλογο, στον n - διάστατο χώρο, του τεταρτημορίου στο επίπεδο. Πρόκειται για την τομή των n - το πλήθος - αμοιβαίως ορθογωνίων ημιδιαστημάτων.

Ορισμός 2.1.3

Ένας πίνακας $C \in M_{r,m}(\mathbb{R})$ καλείται **θετικής γραμμής** εάν ο $C \geq 0$ έχει τουλάχιστον ένα θετικό στοιχείο σε κάθε γραμμή του. Ένας πίνακας $B \in M_{n,s}(\mathbb{R})$ καλείται **μονότονος** εάν για (κάθε) διάνυσμα $x \in R^s$, η ιδιότητα $Bx \geq 0$ συνεπάγεται ότι $x \geq 0$. Εάν $s = n$, τότε ο πίνακας B είναι αντιστρέψιμος και ισχύει ότι $B^{-1} \geq 0$. Τέλος, εάν ο πίνακας $A \geq 0$ είναι αντιστρέψιμος, τότε οι πίνακες A και A^T είναι πίνακες θετικής γραμμής. ■

Θεώρημα 2.1.1

Εάν ένας πίνακας $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ είναι ημιθετικός, τότε ο πίνακας CAB είναι ημιθετικός όταν ο πίνακας $C \in M_{r,m}(\mathbb{R})$ είναι πίνακας θετικής γραμμής και ο πίνακας $B \in M_n(\mathbb{R})$ είναι μονότονος.

Απόδειξη

Εάν ο πίνακας A είναι ημιθετικός, τότε ας θεωρηθεί διάνυσμα $x \in S_+(A)$. Εάν επιλεχθεί διάνυσμα $u = B^{-1}x \in \mathbb{R}^q$ τέτοιο ώστε να ισχύει ότι $Bu = x$, τότε ισχύει ότι $u \geq 0$. Έπειτα, αληθεύει ότι $CABu = CAx = Cy$ με $y > 0$. Δεδομένου ότι ο C είναι πίνακας θετικής γραμμής, προκύπτει ότι $Cy > 0$. Επομένως, ισχύει ότι $u \in S_+(CAB)$, το οποίο σημαίνει ότι ο πίνακας CAB είναι ημιθετικός. ■

Παρατήρηση 2.1.2

Εάν θεωρηθεί ένας πίνακας $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ με $A \geq 0$, τότε ο πίνακας αυτός είναι ημιθετικός αν και μόνο αν είναι πίνακας θετικής γραμμής. Επίσης, εάν ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$ είναι μονότονος, τότε είναι ημιθετικός. ■

Επιπροσθέτως, έστω ότι ο συμβολισμός P_n συμβολίζει το σύνολο των nxn πινάκων μετάθεσης, ο συμβολισμός D_n συμβολίζει το σύνολο των αντιστρέψιμων nxn διαγωνίων πινάκων και, επίσης, ο συμβολισμός D_n^+ συμβολίζει το σύνολο των θετικών διαγωνίων πινάκων στο D_n. Ισχύει ότι τα σύνολα P_n και D_n^+ περιέχονται στο σύνολο των πινάκων οι οποίοι είναι, ταυτοχρόνως, θετικής γραμμής και μονότονοι. Το ίδιο ισχύει και για τους **μονώνυμους** πίνακες, $P_n D_n^+$, δηλαδή για τους nxn πίνακες που έχουν ακριβώς ένα θετικό στοιχείο σε κάθε γραμμή και στήλη.

Πόρισμα 2.1.1

Έστω ένας πίνακας $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, καθώς και ένας πίνακας $P \in P_m$ και ένας πίνακας $Q \in P_n$. Τότε, ο πίνακας PAQ είναι ημιθετικός αν και μόνο αν ο πίνακας A είναι ημιθετικός.

Απόδειξη

Επειδή ισχύει ότι $A = P^T(PAQ)Q^T$, αρκεί να δειχθεί ότι εάν ο πίνακας A είναι ημιθετικός τότε συνεπάγεται ότι ο πίνακας PAQ είναι ημιθετικός. Πράγματι, δεδομένου ότι ο P είναι πίνακας θετικής γραμμής και ο Q είναι μονότονος πίνακας, αυτό έπεται από το Θεώρημα 2.1.1. ■

Πόρισμα 2.1.2

Έστω ένας πίνακας $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, καθώς και ένας πίνακας $D \in D_m^+$ και ένας πίνακας $E \in D_n^+$. Τότε, ο πίνακας DAE είναι ημιθετικός αν και μόνο αν ο πίνακας A είναι ημιθετικός.

Απόδειξη

Επειδή ισχύει ότι $A = D^{-1}(DAE)E^{-1}$, αρκεί να δειχθεί ότι εάν ο πίνακας A είναι ημιθετικός τότε συνεπάγεται ότι ο πίνακας DAE είναι ημιθετικός. Καθώς ο πίνακας D είναι πίνακας θετικής γραμμής και ο πίνακας E είναι μονότονος, αυτό έπεται από το Θεώρημα 2.1.1. ■

Παρατήρηση 2.1.3

Εάν θεωρηθεί πίνακας $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ και, επίσης, πίνακες R και S οι οποίοι είναι μονώνυμοι πίνακες καταλλήλου μεγέθους, τότε ο πίνακας RAS είναι ημιθετικός αν και μόνο αν ο πίνακας A είναι ημιθετικός. Αυτό έπεται από τα δύο προηγούμενα γεγονότα. ■

Μερικά βασικά επακόλουθα του ορισμού του ημιθετικού πίνακα, με χρήση της έννοιας του συνόλου $S_+(A)$, είναι τα αμέσως επόμενα.

Έστω ότι ο συμβολισμός $E_{ij} \in M_n(\mathbb{R})$ συμβολίζει πίνακα του οποίου το (i,j) στοιχείο ισούται με 1 και όλα τα υπόλοιπα στοιχεία του είναι ίσα με 0. Εάν ένας πίνακας $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ είναι ημιθετικός και ισχύει ότι $B_t = A + tE_{ij}$, τότε αληθεύει ότι $S_+(B_{t_1}) \subseteq S_+(B_{t_2})$ για αριθμούς $t_1 \leq t_2$ έτσι ώστε ο πίνακας B_t να είναι ημιθετικός για κάθε αριθμό $t \geq 0$. Επίσης, εάν ο πίνακας A είναι ημιθετικός, τότε κάθε γραμμή του πρέπει να περιέχει τουλάχιστον ένα θετικό στοιχείο, αλλιώς ισχύει ότι $S_+(A) = \emptyset$.

Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να επισημανθεί πως, στους ημιθετικούς πίνακες, οι γραμμές και οι στήλες διαδραματίζουν διαφορετικούς και ουσιαστικώς διττούς ρόλους. Ας πραγματοποιηθεί αναφορά, λοιπόν, σε έναν υποπίνακα του πίνακα $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ ο οποίος (υποπίνακας) προκύπτει με διαγραφή μίας στήλης (γραμμής) και συνιστά έναν **υποπίνακα διαγεγραμμένης στήλης (γραμμής)** του πίνακα A.

Θεώρημα 2.1.2

Έστω ένας πίνακας $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$.

(1) Εάν υπάρχει ένας υποπίνακας διαγεγραμμένης στήλης του πίνακα A ο οποίος είναι ημιθετικός, τότε ο πίνακας A είναι ημιθετικός.
(2) Εάν ο πίνακας A είναι ημιθετικός, τότε κάθε μη κενός υποπίνακας διαγεγραμμένης γραμμής του A είναι ημιθετικός.

Απόδειξη

(1) Εάν υπάρχει ο ημιθετικός υποπίνακας διαγεγραμμένης στήλης του πίνακα A, έστω πίνακας B, τότε δύναται να υποτεθεί, από το Πόρισμα 2.1.1., ότι ο πίνακας B καταλαμβάνει τις πρώτες k - το πλήθος - στήλες του πίνακα A. Τότε, με διάνυσμα $x \in S_+(B) \subseteq \mathbb{R}^k$, ισχύει πως το διάνυσμα $[x \quad 0]^T \in S_+(A)$ (το οποίο είναι μη μηδενικό διάνυσμα όπως και το x). Η επαύξηση είναι με $n - k$ - το πλήθος -μηδενικά.
(2) Εάν ο πίνακας B αποτελεί έναν (τυχαίο) μη κενό υποπίνακα διαγεγραμμένης γραμμής του ημιθετικού πίνακα A, τότε ισχύει ότι $S_+(A) \subseteq S_+(B)$, έτσι ώστε το $S_+(B)$ είναι μη κενό σύνολο και ο πίνακας B είναι ημιθετικός. ■

Παρατήρηση 2.1.4

Δεδομένου ότι ένας πίνακας $A \in M_{m,1}(\mathbb{R})$ με θετικά στοιχεία (δηλαδή, μία θετική στήλη) είναι ημιθετικός, από το Θεώρημα 2.1.2 (1) έπεται ότι κάθε πίνακας με μία θετική στήλη είναι ημιθετικός. ∎

Ορισμός 2.1.4

Εάν ο πίνακας A είναι ημιθετικός, αλλά κανένας κατάλληλος, υποπίνακας διαγεγραμμένης στήλης του πίνακα A δεν είναι ημιθετικός, τότε ο πίνακας A καλείται **κατ΄ ελάχιστον ημιθετικός**. Αυτό δύναται να συμβεί μόνο όταν $m \geq n$. ∎

Ακόμη, σε συσχέτιση με το Θεώρημα 2.1.2 (2), δύναται να προστεθούν γραμμές σε έναν ημιθετικό πίνακα προκειμένου να παραχθεί ένας «υψηλότερος» ημιθετικός πίνακας. Βεβαίως, ένας υποπίνακας διαγεγραμμένης γραμμής του πίνακα A δύναται να είναι ημιθετικός ακόμη κι όταν ο πίνακας A δεν είναι ημιθετικός.

Σε αυτό το σημείο, ας αναφερθούν ορισμένες συνθήκες που ισοδυναμούν με την έννοια του ημιθετικού πίνακα.

Θεώρημα 2.1.3

Οι αμέσως παρακάτω συνθήκες σχετικώς με έναν πίνακα $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ είναι ισοδύναμες.

(1) Ο πίνακας A είναι ημιθετικός.
(2) Ο κώνος που παράγεται από τις στήλες του πίνακα A τέμνει τον θετικό ορθοστάτη στο $\mathbb{R}^m$.
(3) Υπάρχει διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε να ισχύει ότι $x > 0$ και $Ax > 0$.
(4) Το σύνολο $S_+(A)$ είναι μη κενό, δηλαδή περιέχει μη κενό εσωτερικό.
(5) Υπάρχει διάνυσμα $b \in \mathbb{R}^m$, με $b > 0$, τέτοιο ώστε το σύστημα $Ax = b$ έχει μία θετική λύση.
(6) Υπάρχει ένας θετικός διαγώνιος πίνακας D, τέτοιος ώστε ο πίνακας AD έχει θετικά αθροίσματα γραμμής.
(7) Υπάρχουν θετικοί διαγώνιοι πίνακες D και E, τέτοιοι ώστε ο πίνακας EAD έχει σταθερά θετικά αθροίσματα γραμμής.
(8) Ο πίνακας A^T δεν είναι ημι - μη - θετικός.

Απόδειξη

Κάθε στοιχείο του συνόλου $S_+(A)$ δίδει έναν γραμμικό συνδυασμό των στηλών του πίνακα A ο οποίος βρίσκεται στον θετικό ορθοστάτη, οπότε η συνθήκη (1) συνεπάγεται την συνθήκη (2).

Μία επαρκώς μικρή «διατάραξη» των συντελεστών του γραμμικού συνδυασμού δείχνει ότι η συνθήκη (2) συνεπάγεται την συνθήκη (3).

Ένα διάνυσμα x όπως αυτό στην συνθήκη (3) βρίσκεται στο εσωτερικό του συνόλου $S_+(A)$, οπότε η συνθήκη (3) συνεπάγεται την συνθήκη (4).

Με επιλογή ενός διανύσματος b μέσα στην εικόνα του εσωτερικού του $S_+(A)$, προκύπτει ότι η συνθήκη (4) συνεπάγεται την συνθήκη (5).

Θεωρώντας, ως θετικό διαγώνιο πίνακα, τον πίνακα $D = \mathrm{diag}(x)^{-1}$, προκύπτει ότι η συνθήκη (5) συνεπάγεται την συνθήκη (6).

Εάν το διάνυσμα b αποτελείται από τα διανύσματα αθροίσματος γραμμής του πίνακα AD, τότε, θεωρώντας τον πίνακα $E = \mathrm{diag}(b)^{-1}$, προκύπτει ότι η συνθήκη (6) συνεπάγεται την συνθήκη (7).

Λόγω της συνθήκης (7), ικανοποιείται η πρώτη εναλλακτική του Θεωρήματος των Εναλλακτικών. Το γεγονός ότι η δεύτερη εναλλακτική δεν δύναται να ικανοποιηθεί συνιστά την συνθήκη (8).

Το ότι η συνθήκη (8) συνεπάγεται την συνθήκη (1) αποτελεί ακόμη μία εφαρμογή του Θεωρήματος των Εναλλακτικών. ■

Όπως έχει φανεί, το ότι το σύνολο $S_+(A)$ είναι μη κενό σημαίνει ότι περιέχει μη κενό εσωτερικό. Μία αντίστοιχη συνθήκη δεν είναι έτσι για ημι - μη - αρνητικούς ή ημι - μη - θετικούς πίνακες.

Παράδειγμα 2.1.1

Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Τότε ο πίνακας A είναι ημι - μη - αρνητικός (χρήση του διανύσματος $x = [1 \quad 1]^T$), αλλά όχι ημιθετικός. Εάν ληφθεί διάνυσμα της μορφής $x = [x_1 \quad x_2]^T$, τότε προκύπτει ότι $Ax = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - x_1 \end{bmatrix}$. Εάν ισχύει ότι $x \geq 0, \neq 0$, τότε τουλάχιστον μία συνιστώσα του διανύσματος Ax είναι αρνητική, εκτός εάν αληθεύει πως $x_1 = x_2$ οπότε και $Ax = 0$. Το σύνολο $\{x: x_1 = x_2 \geq 0\}$ περιέχει κενό εσωτερικό στο $\mathbb{R}^2$. ■

Παράδειγμα 2.1.2

Έστω ένας πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Τότε ο πίνακας A είναι ημιθετικός, δεδομένου ότι $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in S_+(A)$, αλλά ο πίνακας A^T δεν είναι ημιθετικός. Επομένως, δύναται να είναι ημιθετικός αλλά όχι αριστερός ημιθετικός (ή το αντίστροφο). ■

Ορισμός 2.1.5

Εάν ένας πίνακας A είναι ημιθετικός και αριστερός ημιθετικός, τότε καλείται **συμμετρικά ημιθετικός**. Ένας συμμετρικός πίνακας που είναι ημιθετικός είναι, βεβαίως, συμμετρικά ημιθετικός. Από την άλλη, ένας συμμετρικά ημιθετικός πίνακας δεν είναι οπωσδήποτε συμμετρικός. ■

Παρατηρείται ότι εάν ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$ είναι ημιθετικός και αντιστρέψιμος, τότε ο πίνακας A^{-1} είναι ημιθετικός επίσης.

Θεώρημα 2.1.4

Ας υποτεθεί ότι ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$ είναι αντιστρέψιμος. Τότε ο A είναι ημιθετικός αν και μόνο αν ο πίνακας A^{-1} είναι ημιθετικός.

Απόδειξη

Λόγω του Θεωρήματος 2.1.3 (3), ένας ημιθετικός πίνακας A είναι τέτοιος ώστε υπάρχουν διανύσματα $x, y > 0$ με $y = Ax$. Τότε, ισχύει πως $x = A^{-1}y$. Και αντιστρόφως. ■

Τέλος, ας επισημανθεί ότι δεν απαιτείται ένας τετραγωνικός ημιθετικός πίνακας να είναι αντιστρέψιμος - για παράδειγμα, ο αμέσως επόμενος πίνακας είναι τετραγωνικός αλλά όχι αντιστρέψιμος:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.2 Αθροίσματα & γινόμενα ημιθετικών πινάκων

Έστω δύο πίνακες $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ οι οποίοι είναι ημιθετικοί. Τότε, ορίζοντας τον πίνακα - άθροισμα $A + B$, τίθενται τα εξής δύο ερωτήματα: (1) εάν το προκύπτον αυτό άθροισμα συνιστά ημιθετικό πίνακα, και (2) ποιοί πίνακες στο σύνολο $M_{m,n}(\mathbb{R})$ δύναται να παραχθούν κατ' αυτόν τον τρόπο.

Επίσης, έστω δύο πίνακες $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ και $B \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ οι οποίοι είναι ημιθετικοί. Τότε, ορίζοντας τον πίνακα - γινόμενο AB, τίθενται τα εξής δύο ερωτήματα: (1) εάν το προκύπτον αυτό γινόμενο συνιστά ημιθετικό πίνακα, και (2) ποιοί πίνακες στο σύνολο $M_{m,p}(\mathbb{R})$ δύναται να παραχθούν κατ' αυτόν τον τρόπο.

Ισχύει το εξής: τόσο το άθροισμα όσο και το γινόμενο δύο ημιθετικών πινάκων δεν είναι απαραιτήτως ημιθετικός πίνακας.

Παράδειγμα 2.2.1

Έστω οι πίνακες $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Τότε οι πίνακες A, A^T και B είναι ημιθετικοί, δεδομένου ότι

$$A\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, A^T\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ και } B > 0.$$

Ωστόσο, ο πίνακας $A + A^T = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$ δεν είναι ημιθετικός, καθώς δεν υπάρχει μη αρνητικός συνδυασμός των στηλών του που να δύναται να είναι θετικός.

Επίσης, ο πίνακας $AB = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ δεν είναι ημιθετικός, δεδομένου ότι έχει μία αρνητική γραμμή. ■

Προκειμένου να δοθούν επαρκείς συνθήκες ώστε το γινόμενο ή το άθροισμα ημιθετικών πινάκων να συνιστά ημιθετικό πίνακα, θα πρέπει να αξιοποιηθούν οι έννοιες των συνόλων $S_+(A)$ και $R_+(A)$.

Σε αυτό το σημείο, λοιπόν, δύναται να δοθεί μία γενική επαρκής συνθήκη προκειμένου ένα γινόμενο ημιθετικών πινάκων να αποτελεί ημιθετικό πίνακα.

Θεώρημα 2.2.1

Έστω τρεις ημιθετικοί πίνακες, $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $C \in M_{r,m}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n,s}(\mathbb{R})$.

(1) Εάν αληθεύει πως το σύνολο $R_+(B) \cap S_+(A) \neq \emptyset$, τότε ο πίνακας AB είναι ημιθετικός.
(2) Εάν αληθεύει πως το σύνολο $A(R_+(B) \cap S_+(A) \cap R_+(C)) \neq \emptyset$, τότε ο πίνακας CAB είναι ημιθετικός.

Απόδειξη

(1) Εάν αληθεύει πως το σύνολο $R_+(B) \cap S_+(A) \neq \emptyset$, τότε υπάρχει διάνυσμα $u \in R_+(B) \cap S_+(A)$. Τότε, ισχύει ότι $u = Bx > 0$ για κάποιο $x \geq 0$, και ότι $Au > 0$ επίσης. Επομένως, ισχύει πως $ABx = Au > 0$ και, συνεπώς, ο πίνακας AB είναι ημιθετικός.
(2) Εάν αληθεύει πως το σύνολο $A(R_+(B) \cap S_+(A) \cap R_+(C)) \neq \emptyset$, τότε υπάρχει διάνυσμα $z \in A(R_+(B) \cap S_+(A) \cap R_+(C))$. Τότε, ισχύει ότι $z = Au$, όπου το διάνυσμα $u \in R_+(B) \cap S_+(A) \cap R_+(C)$. Καθώς αληθεύει πως $u \in R_+(B) \cap S_+(A)$, όπως στο (1), ισχύει ότι $u = Bx > 0$ για κάποιο $x \geq 0$. Έπεται ότι $CABx = CAu = Cz > 0$ και, συνεπώς, ο πίνακας CAB είναι ημιθετικός. ■

Βεβαίως, είναι δυνατό το ενδεχόμενο τουλάχιστον ένας από τους πίνακες A και B να μην είναι ημιθετικός ή να είναι και οι δύο ημιθετικοί και, οι επαρκείς συνθήκες του Θεωρήματος 2.2.1 να μην ικανοποιούνται, αλλά ο πίνακας AB να είναι ημιθετικός ωστόσο.

Παράδειγμα 2.2.2

Ας θεωρηθούν οι εξής πίνακες:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Θα πρέπει να παρατηρηθεί ότι, καθώς οι πίνακες A και B δεν είναι ημιθετικοί, ισχύει ότι $R_+(B) \cap S_+(A) = \emptyset$. Ωστόσο, ο πίνακας AB είναι ημιθετικός. ■

Όπως φαίνεται, δεν είναι εφικτός ο άμεσος χαρακτηρισμός ενός πίνακα AB ως ημιθετικού βάσει των επιμέρους χαρατηριστικών των πινάκων A και B. Η αλληλεπίδραση των χαρακτηριστικών αυτών διαδραματίζει τον ρόλο - «κλειδί».

Έστω ότι λαμβάνεται κάποιος πίνακας από το σύνολο $M_{m,n}(\mathbb{R})$ και ζητείται να απαντηθεί το ερώτημα για το εάν αυτός ο πίνακας αποτελεί το γινόμενο δύο ημιθετικών πινάκων. Προκειμένου να διαπιστωθεί το τί συμβαίνει, είναι χρήσιμο το αμέσως επόμενο λήμμα.

Λήμμα 2.2.1

Για $m \geq 2$, $n \geq 1$, έστω ένας πίνακας $C \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Εάν το σύνολο $\{v_1, w\} \subseteq \mathbb{R}^m$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο και το διάνυσμα $v_2 \in \mathbb{R}^n$ είναι τέτοιο ώστε το σύνολο $\{Cv_2, w\}$ να είναι γραμμικώς ανεξάρτητο, τότε υπάρχουν πίνακες $A \in M_m(\mathbb{R})$ και $B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ τέτοιοι ώστε να αληθεύει ότι $Av_1 = w$ (το διάνυσμα $v_1 \in \mathbb{R}^m$), $Bv_2 = w$ και $C = AB$.

Απόδειξη

Επιλέγεται πίνακας $A \in M_m(\mathbb{R})$ ο οποίος είναι αντιστρέψιμος έτσι ώστε να ισχύει ότι $Av_1 = w$ και $Aw = Cv_2 \neq 0$. Τίθεται πίνακας $B = A^{-1}C$, έτσι ώστε να ισχύει ότι $C = AB$. Προκύπτει ότι $Bv_2 = A^{-1}Cv_2 = w$ και εκπληρώνονται οι διατυπωθείσες απαιτήσεις. ■

Θεώρημα 2.2.2

Για $\mathrm{m} \geq 2$, $\mathrm{n} \geq 1$, έστω ένας πίνακας $\mathrm{C} \in \mathrm{M}_{\mathrm{m,n}}(\mathbb{R})$. Τότε υπάρχουν πίνακες $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{\mathrm{m}}(\mathbb{R})$ και $\mathrm{B} \in \mathrm{M}_{\mathrm{m,n}}(\mathbb{R})$, ημιθετικοί, έτσι ώστε να αληθεύει ότι $\mathrm{C} = \mathrm{AB}$.

Απόδειξη

Εάν ισχύει ότι $\mathrm{rank(C)} \geq 1$, τότε δύναται να επιλεχθούν θετικά διανύσματα v_1, v_2 και w έτσι ώστε να ικανοποιείται η υπόθεση του Λήμματος 2.2.1. Η θετικότητα αυτών των διανυσμάτων σημαίνει ότι οι πίνακες Α και Β είναι ημιθετικοί, πράγμα που ολοκληρώνει την απόδειξη του παρόντος Θεωρήματος.

Εάν ισχύει ότι $\mathrm{rank(C)} = 0$ (και ότι $\mathrm{m} \geq 2$), τότε δύναται να επιλεχθούν πίνακες Α και Β,

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

οι οποίοι έχουν το απαιτούμενο μέγεθος, έτσι ώστε να ισχύει ότι $\mathrm{C} = \mathrm{AB}$. Αφού και οι δύο πίνακες, Α, Β, έχουν θετικές στήλες, έπεται ότι είναι ημιθετικοί. ■

Παρατήρηση 2.2.1

- Η απαίτηση ότι $\mathrm{m} \geq 2$ στο Θεώρημα 2.2.2 είναι αναγκαία. Πράγματι, ας υποτεθεί πίνακας $\mathrm{C} \in \mathrm{M}_{1,\mathrm{n}}(\mathbb{R})$ (δηλαδή $\mathrm{m} = 1$), και ότι όλα τα στοιχεία στον πίνακα C είναι αρνητικά. Εάν ισχύει ότι $\mathrm{C} = \mathrm{AB}$ και, δεδομένου ότι ο πίνακας Α είναι 1x1 (μιας και λήφθηκε $\mathrm{m} = 1$), τότε είτε το μοναδικό στοιχείο του πίνακα Α είναι αρνητικό, οπότε ο πίνακας Α δεν είναι ημιθετικός, είτε όλα τα στοιχεία του πίνακα Β είναι αρνητικά και, επομένως, ο πίνακας Β δεν είναι ημιθετικός.
- Γενικώς, ωστόσο, εάν αληθεύει ότι $\mathrm{C} \in \mathrm{M}_{1,\mathrm{n}}(\mathbb{R})$ (δηλαδή $\mathrm{m} = 1$), με $\mathrm{n} \geq 2$, τότε είτε ο πίνακας C έχει μερικά θετικά στοιχεία και είναι, από μόνος του, ημιθετικός οπότε και η παραγοντοποίηση $\mathrm{C} = \mathrm{CI}$ αποτελεί μία ημιθετική παραγοντοποίηση του πίνακα C, είτε ισχύει ότι $\mathrm{C} \leq 0$. Εάν ισχύει ότι $\mathrm{C} \leq 0$, τότε δύναται να επιλεχθούν κατάλληλοι ημιθετικοί πίνακες Α και Β οι οποίοι ικανοποιούν την σχέση $\mathrm{AB} = \mathrm{C}$. Ένα σχετικό παράδειγμα προκύπτει βάσει των πινάκων $\mathrm{A} = [1 \quad -1]$ και $\mathrm{B} > 0$ με $\mathrm{B} \in \mathrm{M}_{2,\mathrm{n}}(\mathbb{R})$ έτσι ώστε να ισχύει ότι $\mathrm{AB} = \mathrm{C}$ με τους πίνακες Α και Β να είναι ημιθετικοί.
- Προφανώς, εάν ισχύει ότι $\mathrm{m}, \mathrm{n} = 1$ και $\mathrm{C} \leq 0$, τότε δεν είναι δυνατό το ενδεχόμενο $\mathrm{C} = \mathrm{AB}$ με τους πίνακες $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ να είναι ημιθετικοί.
- Όμως, όπως φαίνεται και από την δεύτερη κουκίδα, εάν ισχύει ότι $\mathrm{m} = 1, \mathrm{n} = 2$, τότε είναι δυνατό το ενδεχόμενο $\mathrm{C} = \mathrm{AB}$ με ημιθετικούς πίνακες $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{1,2}(\mathbb{R})$ και $\mathrm{B} \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Για παράδειγμα, ας υποτεθεί πίνακας $\mathrm{C} = [-\mathrm{c}]$ με $\mathrm{C} > 0$. Τότε, αυτός ο πίνακας δύναται να γραφεί ως γινόμενο των εξής δύο ημιθετικών πινάκων για παράδειγμα:

$$\mathrm{A} = [1 \quad -1], \mathrm{B} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 - \mathrm{c} \end{bmatrix}.$$ ■

Το Θεώρημα 2.2.2 και η αμέσως προηγούμενη παρατήρηση οδηγούν στο αμέσως παρακάτω Θεώρημα.

Θεώρημα 2.2.3

Ας υποτεθεί πίνακας $C \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Τότε, υπάρχει $k \geq 1$ και πίνακες $A \in M_{m,k}(\mathbb{R})$ και $B \in M_{k,n}(\mathbb{R})$, ημιθετικοί και οι δύο, έτσι ώστε να αληθεύει ότι $C = AB$. Ειδικότερα, όμως, εάν ισχύει ότι $m = 1$ και ο πίνακας C δεν έχει θετικά στοιχεία, τότε πρέπει να ισχύει ότι $k \geq 2$.

Απόδειξη

Κατ' αρχάς, ας ληφθεί η περίπτωση κατά την οποία ισχύει ότι $m = k \geq 2$ (και $n \geq 1$). Αυτή η περίπτωση συμπίπτει με τα λεγόμενα του Θεωρήματος 2.2.2, οπότε επαληθεύεται ο προς απόδειξη ισχυρισμός.

Έπειτα, ας ληφθεί η περίπτωση κατά την οποία ισχύει ότι $m \geq 2$ και $k = 1$ (και $n \geq 2$). Αυτή η περίπτωση συνδέεται με το Θεώρημα 2.2.2 και, από αυτό κατ' ουσίαν, επαληθεύεται ο προς απόδειξη ισχυρισμός. Θα πρέπει να επισημανθεί ότι ο ισχυρισμός δεν αληθεύει στην περίπτωση κατά την οποία ισχύει ότι $m \geq 2$ και $k = 1$ και $n = 1$. Πράγματι, ας θεωρηθεί πίνακας $C \in M_{m,1}(\mathbb{R})$ (δηλαδή $n = 1$), και ότι όλα τα στοιχεία στον πίνακα C είναι αρνητικά. Εάν ισχύει ότι $C = AB$ και, δεδομένου ότι ο πίνακας B είναι 1x1 (μιας και λήφθηκε $k = n = 1$), τότε είτε το μοναδικό στοιχείο του πίνακα B είναι αρνητικό, οπότε ο πίνακας B δεν είναι ημιθετικός, είτε όλα τα στοιχεία του πίνακα A είναι αρνητικά και, επομένως, ο πίνακας A δεν είναι ημιθετικός.

Σε αυτό το σημείο, ας ληφθεί η περίπτωση κατά την οποία ισχύει ότι $m = 1$ (και $n \geq 1$). Θα αποδειχθεί ότι, προκειμένου, για έναν πίνακα $C \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, δηλαδή πίνακα $C \in M_{1,n}(\mathbb{R})$, να υπάρχει $k \geq 1$ και πίνακες $A \in M_{m,k}(\mathbb{R})$, δηλαδή $A \in M_{1,k}(\mathbb{R})$, και $B \in M_{k,n}(\mathbb{R})$, ημιθετικοί και οι δύο, έτσι ώστε να αληθεύει ότι $C = AB$, απαιτείται να ισχύει ότι $k \geq 2$ - δηλαδή ότι δεν αληθεύει ο συγκεκριμένος ισχυρισμός όταν $k = 1$. Έστω, λοιπόν, προς απαγωγή σε άτοπο, ότι ο εν λόγω ισχυρισμός αληθεύει για $k = 1$: για έναν (οποιοδήποτε) πίνακα $C \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, δηλαδή πίνακα $C \in M_{1,n}(\mathbb{R})$, υπάρχει $k = 1$ και πίνακες $A \in M_{m,k}(\mathbb{R})$ και $B \in M_{k,n}(\mathbb{R})$, δηλαδή πίνακες $A \in M_{1,1}(\mathbb{R})$ και $B \in M_{1,n}(\mathbb{R})$, ημιθετικοί και οι δύο, έτσι ώστε να αληθεύει ότι $C = AB$. Ας υποτεθεί, λοιπόν, πίνακας $C \in M_{1,n}(\mathbb{R})$ ο οποίος πληροί την ιδιότητα $C \leq 0$. Εάν ισχύει ότι $C = AB$ και, δεδομένου ότι ο πίνακας A είναι 1x1, τότε τουλάχιστον ένας από τους δύο πίνακες, A και B, δεν είναι ημιθετικός. Επομένως, αποδείχθηκε το άτοπο και, συνεπώς, αληθεύει ότι εάν ισχύει ότι $m = 1$ και ο πίνακας C δεν έχει θετικά στοιχεία, τότε πρέπει να ισχύει ότι $k \geq 2$ προκειμένου να επαληθεύεται ο προς απόδειξη ισχυρισμός. ■

Σε αυτό το σημείο, θα πρέπει να επισημανθεί πως ισχύουν παρόμοιες επαρκείς συνθήκες για το άθροισμα δύο ημιθετικών πινάκων.

Λήμμα 2.2.2

Εάν οι πίνακες $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ είναι ημιθετικοί, τότε ισχύει ότι $S_+(A) \cap S_+(B) \subseteq S_+(A + B)$.

Απόδειξη

Έστω ότι οι πίνακες A, B είναι ημιθετικοί και έστω, επίσης, κάποιο διάνυσμα $x \in S_+(A) \cap S_+(B)$. Τότε ισχύει ότι $(A + B)x = Ax + Bx > 0$ και, επομένως, αληθεύει ότι $x \in S_+(A + B)$. ■

Θεώρημα 2.2.4

Εάν δύο πίνακες $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{M}_{\mathrm{m,n}}(\mathbb{R})$ είναι ημιθετικοί και ισχύει ότι $\mathrm{S}_+(\mathrm{A}) \cap \mathrm{S}_+(\mathrm{B}) \neq \emptyset$, τότε το άθροισμα $\mathrm{A} + \mathrm{B}$ αποτελεί έναν ημιθετικό πίνακα.

Απόδειξη

Προκύπτει, άμεσα, από το Λήμμα 2.2.2. ■

Βεβαίως, και πάλι, η συνθήκη επάρκειας δεν είναι αναγκαία.

Παράδειγμα 2.2.3

Ας θεωρηθούν οι εξής πίνακες:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \mathrm{A} + \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρείται ότι, καθώς οι πίνακες A και B δεν είναι ημιθετικοί, ισχύει ότι $\mathrm{S}_+(\mathrm{A}) \cap \mathrm{S}_+(\mathrm{B}) = \emptyset$. Ωστόσο, ο πίνακας $\mathrm{A} + \mathrm{B}$ είναι ημιθετικός. ■

Σε αυτό το σημείο, τίθεται το ερώτημα σχετικώς με το ποιοί πίνακες προκύπτουν ως το άθροισμα δύο ημιθετικών πινάκων. Σε αυτή την περίπτωση, δεν υπάρχει ευελιξία ως προς τις διαστάσεις των προσθετέων πινάκων: πρέπει να είναι ίσες με τη διάσταση του επιθυμητού πίνακα - αθροίσματος. Αυτό σημαίνει πως υπάρχουν δύο περιορισμοί.

Θεώρημα 2.2.5

Ας υποτεθεί πίνακας $\mathrm{C} \in \mathrm{M}_{\mathrm{m,n}}(\mathbb{R})$, με $\mathrm{n} \geq 2$. Τότε, υπάρχουν ημιθετικοί πίνακες $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{M}_{\mathrm{m,n}}(\mathbb{R})$ τέτοιοι ώστε να ισχύει ότι $\mathrm{C} = \mathrm{A} + \mathrm{B}$.

Απόδειξη

Κατ' αρχάς, ας επιλεχθεί ένας πίνακας A τέτοιος ώστε όλα τα στοιχεία της πρώτης στήλης του να είναι ίσα με 1, η δεύτερη στήλη του να προκύπτει από την δεύτερη στήλη του πίνακα C έχοντας αφαιρέσει το 1 από κάθε στοιχείο και, τέλος, όλες οι άλλες στήλες να είναι όπως οι στήλες του πίνακα C. Έπειτα, ας τεθεί η πρώτη στήλη του πίνακα B ως η πρώτη στήλη του πίνακα C έχοντας αφαιρέσει το 1 από κάθε στοιχείο, ας τεθεί ίσο με 1 κάθε στοιχείο στην δεύτερη στήλη και, τέλος, ας τεθούν ίσα με 0 τα στοιχεία όλων των υπολοίπων στηλών. Τότε ισχύει ότι $\mathrm{C} = \mathrm{A} + \mathrm{B}$ και οι πίνακες A και C είναι ημιθετικοί μιας και καθένας τους έχει μία θετική στήλη. ■

Παρατήρηση 2.2.2

Η απαίτηση ότι $\mathrm{n} \geq 2$ στο Θεώρημα 2.2.5 είναι αναγκαία. Πράγματι, εάν ισχύει ότι $\mathrm{n} = 1$ και ότι ο πίνακας C περιέχει ένα αρνητικό στοιχείο τότε, με δεδομένο ότι $\mathrm{C} = \mathrm{A} + \mathrm{B}$, ο πίνακας A ή ο πίνακας B πρέπει να περιέχει ένα αρνητικό στοιχείο στην ίδια θέση, μία αρνητική γραμμή επομένως (αφού $\mathrm{n} = 1$), και να μην είναι ημιθετικός συνεπώς. Επομένως, όταν ισχύει ότι $\mathrm{n} = 1$, ο πίνακας C αποτελεί το άθροισμα δύο ημιθετικών πινάκων αν και μόνο αν είναι ημιθετικός από μόνος του. ■

Αν και καθίσταται ευκόλως κατανοητό το πότε ένας πίνακας αποτελεί το άθροισμα δύο ημιθετικών πινάκων, δεν ισχύει το ίδιο όταν απαιτείται οι προσθετέοι πίνακες να είναι και αριστεροί ημιθετικοί και (δεξιοί) ημιθετικοί. Για τα αθροίσματα, ο μηδενικός πίνακας οποιουδήποτε μεγέθους, αποτελεί ένα εύκολο αντιπαράδειγμα: εάν ισχύει ότι $A + B = \mathbb{O}$ και οι πίνακες A, B είναι και αριστεροί ημιθετικοί και ημιθετικοί, τότε ισχύει ότι $A = -B$ έτσι ώστε ο πίνακας A είναι αριστερός ημιαρνητικός και (δεξιός) ημιαρνητικός επίσης - ωστόσο, τότε ο πίνακας A είναι ημιθετικός και αριστερός ημιαρνητικός και, επομένως, αριστερός ημι - μη - θετικός επίσης, πράγμα που έρχεται σε αντίθεση με το Θεώρημα των Εναλλακτικών.

2.3 Περαιτέρω δομή & μοτίβα προσήμου των ημιθετικών πινάκων

Έστω δύο πίνακες $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ και $B \in M_{p,n}(\mathbb{R})$. Τότε, δύναται να σχηματισθεί ο εξής πίνακας:

$$A \oslash B = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \in M_{m+p,n}(\mathbb{R}).$$

Λόγω του Θεωρήματος 2.1.2, προκειμένου ο πίνακας $A \oslash B$ να είναι ημιθετικός, πρέπει και οι δύο πίνακες, A και B, να είναι ημιθετικοί. Εάν, λοιπόν, και οι δύο αυτοί πίνακες είναι ημιθετικοί πράγματι, τότε τίθεται το ερώτημα σχετικώς με το τί περαιτέρω απαιτείται προκειμένου ο πίνακας $A \oslash B$ να είναι ημιθετικός.

Λήμμα 2.3.1

Για δύο πίνακες $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ και $B \in M_{p,n}(\mathbb{R})$, ισχύει ότι $S_+(A \oslash B) = S_+(A) \cap S_+(B)$.

Απόδειξη

Όπως δύναται να παρατηρηθεί, ισχύει ότι κάποιο διάνυσμα $x \in S_+(A \oslash B)$ αν και μόνο αν αληθεύουν (ταυτοχρόνως) τα εξής: $x \geq 0, Ax > 0$ και $Bx > 0$. ■

Από το αμέσως προηγούμενο, έπεται ένα χρήσιμο Θεώρημα.

Θεώρημα 2.3.1

Εάν δύο πίνακες $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ και $B \in M_{p,n}(\mathbb{R})$ είναι ημιθετικοί, τότε ο πίνακας $A \oslash B$ είναι ημιθετικός αν και μόνο αν ισχύει ότι $S_+(A) \cap S_+(B) \neq \emptyset$.

Απόδειξη

Εξ' ορισμού, ο πίνακας $A \oslash B$ είναι ημιθετικός όταν $S_+(A \oslash B) \neq \emptyset$. Το αποτέλεσμα προκύπτει από το Λήμμα 2.3.1. ■

Σε αυτό το σημείο, παρατηρείται πως, εάν αληθεύει ότι $p = m$, η συνθήκη στο Θεώρημα 2.3.1 είναι η ίδια με την επαρκή συνθήκη στο Θεώρημα 2.2.4 ώστε ο πίνακας $A + B$ να είναι ημιθετικός. Δύναται να προκύψει η εξής διαπίστωση: εάν οι πίνακες $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ είναι ημιθετικοί και, επίσης, ο πίνακας $A \oslash B$ είναι ημιθετικός, τότε ο πίνακας $A + B$ είναι ημιθετικός. Αυτή η διαπίστωση προκύπτει γράφοντας, για παράδειγμα, τον πίνακα $A + B$ ως $[I \quad I](A \oslash B)$ και εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2.2.1 (1). Επομένως, τα γινόμενα, τα αθροίσματα και ο τελεστής $\oslash$ συνδέονται στενά.

Επιπλέον, το Θεώρημα 2.3.1 δείχνει το πώς μειώνεται ο ημιθετικός κώνος καθώς προστίθενται γραμμές. Εάν προστεθούν θετικές γραμμές, τότε δεν προκύπτει καμμία μείωση καθώς ο ημιθετικός κώνος που εφαρμόζεται σε μία θετική γραμμή είναι ολόκληρος ο μη αρνητικός ορθοστάτης εκτός από το μηδενικό διάνυσμα. Δύναται να προκύψει η εξής διαπίστωση: εάν υποτεθούν πίνακες $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ και $B \in M_{p,n}(\mathbb{R})$ με $B > 0$, τότε ο πίνακας $A \oslash B$ είναι ημιθετικός αν και μόνο αν ο πίνακας A είναι ημιθετικός.

Σε αυτό το σημείο, τίθεται το εύλογο ερώτημα σχετικώς με το τί συμβαίνει με τους πίνακες της μορφής $[A \quad B]$. Ας υποτεθούν, λοιπόν, πίνακες $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ και $B \in M_{m,q}(\mathbb{R})$ και ας θεωρηθεί ο πίνακας $A \ominus B = [A \quad B]$. Είναι σημαντικό το Θεώρημα 2.3.2.

<u>Θεώρημα 2.3.2</u>

Έστω δύο πίνακες $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ και $B \in M_{m,q}(\mathbb{R})$. Εάν ο πίνακας A ή ο πίνακας B είναι ημιθετικός, τότε ο πίνακας $A \ominus B$ είναι ημιθετικός επίσης.

<u>Απόδειξη</u>

Εάν ο πίνακας A είναι ημιθετικός, τότε ας θεωρηθεί διάνυσμα $x \in S_+(A)$ και ας οριστεί διάνυσμα $y = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+q}$. Τότε ισχύει ότι $y \geq 0$ και ότι $(A \ominus B)y = Ax > 0$ και, επομένως, ο πίνακας $A \ominus B$ είναι ημιθετικός. Είναι παρόμοια η απόδειξη για όταν ο πίνακας B είναι ημιθετικός. ■

Από το Πόρισμα 2.1.1., εάν οποιοδήποτε υποσύνολο των στηλών του πίνακα $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ σχηματίζει έναν ημιθετικό πίνακα, τότε έπεται, από το Θεώρημα 2.3.2, ότι ο πίνακας A είναι ημιθετικός. Αυτό έχει αναφερθεί, ήδη, στο Θεώρημα 2.1.2 (1). Δεδομένου ότι ένα θετικό διάνυσμα - στήλη είναι ένας (τετριμμένος) ημιθετικός πίνακας, μία ξεχωριστή περίπτωση αναφέρεται στην Παρατήρηση 2.1.4. Δύναται να προκύψει η εξής διαπίστωση: εάν ένας πίνακας $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ έχει θετική στήλη, τότε είναι ημιθετικός.

Η αμέσως προηγούμενη διαπίστωση διαθέτει μία ενδιαφέρουσα γενίκευση. Λέγεται ότι ένας πίνακας $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ έχει μία **θετική εμπρόσθια όψη** εάν είναι εφικτό να μετατεθούν οι στήλες του έτσι ώστε, σε κάθε γραμμή, να υπάρχει ένα μη μηδενικό στοιχείο και το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο να είναι θετικό. Αυτά τα θετικά στοιχεία καλούνται **εμπρόσθια θετικά**. Βεβαίως, ένας πίνακας με θετική στήλη έχει θετική εμπρόσθια όψη, αλλά δύναται να υπάρξει θετική εμπρόσθια όψη χωρίς θετική στήλη.

<u>Παράδειγμα 2.3.1</u>

Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Τότε η εναλλαγή των στηλών υπ’ αριθμόν 2 και 3 δίδει τον πίνακα

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

έτσι ώστε ο πίνακας A να έχει θετική εμπρόσθια όψη. Εύκολα διαπιστώνεται ότι ο πίνακας A' είναι ημιθετικός καθώς

$$\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix} \in S_+(A')$$

και, επομένως, ο πίνακας A είναι ημιθετικός σύμφωνα με το Πόρισμα 2.1.1. ■

Ακόμη, θα πρέπει να επισημανθεί πως η ύπαρξη θετικής εμπρόσθιας όψης, όπως και θετικής στήλης, είναι πάντοτε επαρκής αναφορικά με το να είναι ένας πίνακας ημιθετικός.

Θεώρημα 2.3.3

Εάν ένας πίνακας $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ έχει θετική εμπρόσθια όψη, τότε είναι ημιθετικός.

Απόδειξη

Εάν ο πίνακας A δύναται να υποστεί μεταθέσεις έτσι ώστε να προκύψει ένας πίνακας A' ο οποίος έχει θετική εμπρόσθια όψη, τότε, από το Πόρισμα 2.1.1, αρκεί να δειχθεί ότι ο πίνακας A' είναι ημιθετικός, καθώς η ιδιότητα του ημιθετικού δεν μεταβάλλεται λόγω μεταθέσεων. Εάν ο πίνακας A' έχει z - το πλήθος - μηδενικές στήλες ως τις πρώτες z - το πλήθος - στήλες του, τότε ας τεθούν τα πρώτα z - το πλήθος - στοιχεία του διανύσματος v ίσα με 0. Επίσης, ας τεθούν τα υπόλοιπα d - το πλήθος - στοιχεία του v ως $x^d, x^{d-1}, \dots, x$, όπου το x είναι ένας σταθερός αριθμός που θα συγκεκριμενοποιηθεί μετέπειτα. Κάθε γραμμή του γινομένου $A'v$ θα είναι ένα πολυώνυμο βαθμού ίσου με d ή μικρότερου από d του οποίου το πρώτο στοιχείο είναι θετικό (μιας και, καθώς ο πίνακας A έχει θετική εμπρόσθια όψη, το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο κάθε γραμμής είναι θετικό και δεν υπάρχουν μηδενικές γραμμές). Δεδομένου ότι ο συντελεστής του μονωνύμου με τον μεγαλύτερο βαθμό σε καθένα από αυτά τα πολυώνυμα είναι θετικός, το όριο καθώς το x τείνει στο άπειρο - για όλα αυτά τα πολυώνυμα - είναι το άπειρο. Επομένως, υπάρχει κάποιος αριθμός $x > 0$ ώστε καθένα από αυτά τα πολυώνυμα να είναι μεγαλύτερο του μηδενός, πράγμα που συνεπάγεται ότι ο πίνακας A' είναι ημιθετικός και, επομένως, ο πίνακας A είναι ημιθετικός. ■

Σε αυτό το σημείο, αξίζει να πραγματοποιηθεί αναφορά σε έναν αλγόριθμο ο οποίος διεξάγει έλεγχο ύπαρξης θετικής εμπρόσθιας όψης σε έναν πίνακα.

Αλγόριθμος PF

Προκειμένου να αποφανθεί κανείς για το εάν ένας mxn πίνακας A έχει θετική εμπρόσθια όψη, θα πρέπει να ελεγχθεί, κατ' αρχάς, το εάν ο πίνακας έχει μη μηδενική γραμμή. Εάν έχει, τότε ο πίνακας αυτός δεν έχει θετική εμπρόσθια όψη. Εάν δεν έχει, τότε ας κατασκευαστεί μία ακολουθία πινάκων με $A_1 = A$. Ο πίνακας A_2 κατασκευάζεται διαγράφοντας τις στήλες 0 στον πίνακα A_1. Έπειτα, για $k > 1$, κατασκευάζεται ο πίνακας A_{k+1}, αναδρομικώς, βάσει της παρακάτω διαδικασίας.

1. Διαπιστώνεται εάν ο πίνακας A_k περιέχει στήλη δίχως αρνητικό στοιχείο. Εάν όλες οι p - το πλήθος - στήλες του πίνακα A_k περιέχουν αρνητικό στοιχείο, ο πίνακας δεν έχει θετική εμπρόσθια όψη. Αλλιώς, επιλέγεται μία j - οστή στήλη του πίνακα A_k, ας συμβολιστεί με α_{kj}, η οποία έχει μη αρνητικά στοιχεία. Ο πίνακας A_{k+1} σχηματίζεται διαγράφοντας την j - οστή στήλη του πίνακα A_k, όπως και κάθε γραμμή στον πίνακα A_k στον οποίο η α_{kj} περιέχει ένα θετικό στοιχείο (παραλείποντας τον υπόλοιπο πίνακα) και επαναλαμβάνεται το βήμα 1, εκτός εάν αυτή η διαγραφή επιφέρει την απώλεια ολόκληρου του πίνακα. Σε

αυτή την περίπτωση, ο πίνακας A_k τίθεται ως ο «τελικός πίνακας» και πραγματοποιείται μετάβαση στο βήμα 2.

2. Ορίζεται μία συνάρτηση $C(\alpha_{kj})$ η οποία δέχεται το διάνυσμα α_{kj} και επιστρέφει την αρχική στήλη του πίνακα A η οποία σχετίζεται με το α_{kj}.
3. Εάν ο πίνακας A έχει r - το πλήθος - στήλες με μηδενικά αποκλειστικώς, τότε οι πρώτες r - το πλήθος - στήλες του πίνακα A' τίθενται ίσες με 0. Έπειτα, η επόμενη στήλη τίθεται ως $C(\alpha_{3j})$, η επόμενη στήλη ως $C(\alpha_{4j})$, ..., και η επόμενη στήλη ως $C(\alpha_{kj})$, όπου ο A_k είναι ο τελικός πίνακας. Εάν υπάρχουν στήλες του πίνακα A οι οποίες δεν έχουν απεικονιστεί μέσω της συνάρτησης C και είναι μη μηδενικές, τότε τίθενται σε μία αυθαίρετη διάταξη μετά την $C(\alpha_{kj})$ στήλη. Επισημαίνεται ότι αυτή η διαδικασία πρέπει να τερματίσει σε n - το πλήθος - βήματα το πολύ, καθώς ολόκληρος ο πίνακας θα έχει «διαγραφεί» μετά από n - το πλήθος - επαναλήψεις του βήματος 1. ■

Θα πρέπει να αναφερθεί πως ο αλγόριθμος τερματίζει (στον A') αν και μόνο αν ο πίνακας A έχει θετική εμπρόσθια όψη.

Συνεχίζοντας, ως **μοτίβο προσήμου** του πίνακα $A = [a_{ij}] \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, νοείται ένας mxn πίνακας, S, προσήμων $(+,-,0)$ τέτοιος ώστε: αληθεύει ότι το στοιχείο $a_{ij} > 0$ ($<, = 0$ αντιστοίχως) αν και μόνο αν αληθεύει ότι το στοιχείο στην θέση (i,j) του πίνακα S είναι $+(-,0$ αντιστοίχως). Το μοτίβο προσήμου δύναται να θεωρηθεί ως το χαρακτηριστικό του συνόλου όλων των πινάκων με αυτό το μοτίβο προσήμου αφ' ενός και ως το αντικείμενο που μπορεί να χειριστεί κανείς όπως έναν πίνακα σε πολλές καταστάσεις αφ' ετέρου. Επισημαίνεται ότι η ιδέα μίας θετικής εμπρόσθιας όψης έχει νόημα για ένα μοτίβο προσήμου όπως, επίσης, και για έναν πίνακα. Σε αυτό το σημείο, τίθεται το ερώτημα σχετικώς με το ποιά μοτίβα προσήμου απαιτούν την ιδιότητα του ημιθετικού (σχετικώς, δηλαδή, με το εάν όλοι οι πίνακες ενός συγκεκριμένου μοτίβου προσήμου είναι ημιθετικοί). Βεβαίως, είναι γνωστό ότι εκείνοι με θετική εμπρόσθια όψη είναι ημιθετικοί. Είναι ενδιαφέρον το γεγονός ότι είναι οι μοναδικοί.

Θεώρημα 2.3.4

Ένα mxn μοτίβο προσήμου απαιτεί την ιδιότητα του ημιθετικού αν και μόνο αν έχει θετική επρόσθια όψη.

Απόδειξη

Το Θεώρημα 2.3.3 δίδει επάρκεια. Οπότε, το μόνο που χρειάζεται να δειχθεί είναι ότι εάν ένα μοτίβο προσήμου απαιτεί την ιδιότητα του ημιθετικού, τότε έχει θετική εμπρόσθια όψη. Προκειμένου να δειχθεί αυτό, ας υποτεθεί ότι ο πίνακας $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ δεν έχει θετική εμπρόσθια όψη.

Το πρώτο ενδεχόμενο είναι αυτό κατά το οποίο ο πίνακας A έχει μηδενική γραμμή, οπότε ο πίνακας A^T έχει μηδενική στήλη και, επομένως, είναι ημι - μη - θετικός (καθώς, εάν ο πίνακας A^T έχει μία i - οστή στήλη με μηδενικά, το διάνυσμα που έχει το 1 ως i - οστό στοιχείο και μηδενικά οπουδήποτε αλλού θα δημιουργήσει ένα μηδενικό διάνυσμα), άρα ο πίνακας A δεν είναι ημιθετικός.

Το δεύτερο ενδεχόμενο είναι εκείνο κατά το οποίο σε κάποιο σημείο του αλγορίθμου PF, υπάρχει αρνητικό στοιχείο σε κάθε στήλη στον πίνακα A_k (ένας pxq πίνακας). Ας οριστεί το $C(\alpha_{kj})$ όπως στο βήμα 2 του αλγορίθμου PF. Κατασκευάζεται ένα διάνυσμα - γραμμή v^T το οποίο έχει το 0 στην i - οστή θέση εάν η i - οστή γραμμή του πίνακα A διαγράφηκε προηγουμένως στον αλγόριθμο ή το 1 αλλιώς. Επιλέγεται ένας πίνακας B που να έχει το ίδιο μοτίβο προσήμου με τον πίνακα A, αλλά έτσι ώστε τα αθροίσματα στήλης για οποιαδήποτε στήλη με αρνητικό στοιχείο να είναι μηδενικά. Επομένως, $v^T B = 0$, αλλά το v^T είναι μη μηδενικό καθώς εάν κάθε στοιχείο ήταν ίσο με 0 τότε κάθε γραμμή θα είχε διαγραφεί και αυτός ο αλγόριθμος θα είχε τερματίσει. Συνεπώς, ο πίνακας B είναι αριστερός ημι - μη - θετικός και, επομένως, μη ημιθετικός - άρα, το μοτίβο προσήμου του πίνακα A δεν απαιτεί την ιδιότητα του ημιθετικού. ■

Τέλος, είναι δυνατό να διερωτηθεί κανείς σχετικώς με το ποιά μοτίβα προσήμου επιτρέπουν την ιδιότητα του ημιθετικού, δηλαδή σχετικώς με το εάν υπάρχουν ημιθετικοί πίνακες στην κλάση του μοτίβου προσήμου.

Θεώρημα 2.3.5

Ένα mxn μοτίβο προσήμου επιτρέπει την ιδιότητα του ημιθετικού αν και μόνο αν κάθε γραμμή περιέχει τουλάχιστον ένα $+$.

Απόδειξη

Κατ' αρχάς, εάν ένα mxn μοτίβο προσήμου επιτρέπει την ιδιότητα του ημιθετικού, τότε κάθε γραμμή περιέχει τουλάχιστον ένα $+$. Αυτό προκύπτει βάσει του εξής: εάν ο πίνακας A είναι ημιθετικός, τότε κάθε γραμμή του πρέπει να περιέχει τουλάχιστον ένα θετικό στοιχείο, αλλιώς $S_+(A) = \emptyset$ (βλ. υποκεφάλαιο 2.1).

Από την άλλη, εάν κάθε γραμμή ενός mxn μοτίβου προσήμου περιέχει τουλάχιστον ένα $+$, τότε ο πίνακας αυτός (μοτίβο προσήμου) επιτρέπει την ιδιότητα του ημιθετικού. Πράγματι, εάν υπάρχει (τουλάχιστον) ένα $+$, τότε είναι δυνατό να επιλεχθεί ένας αντίστοιχος πίνακας A με ένα «μεγάλο» θετικό στοιχείο σε κάθε γραμμή του και με όλα τα υπόλοιπα στοιχεία του να είναι επαρκώς «μικρά» έτσι ώστε να αληθεύει ότι $Ae > 0$. ■

2.4 Φασματική θεωρία ημιθετικών πινάκων

Εάν θεωρηθούν μόνο τετραγωνικοί πίνακες $A \in M_n(\mathbb{R})$, είναι φυσικό να διερωτηθεί κανείς ως προς το τί το ξεχωριστό υπάρχει σχετικώς με τα φάσματα των ημιθετικών πινάκων, δηλαδή είτε σχετικώς με το πλειοσύνολο[8] των ιδιοτιμών απλώς είτε, ακριβέστερα, σχετικώς με τη δομή

[8] Το **πλειοσύνολο** αποτελεί μία τροποποίηση της έννοιας του συνόλου έτσι ώστε, σε αντίθεση με το τί ισχύει στα σύνολα, να επιτρέπονται οι πολλαπλές εμφανίσεις καθενός από τα στοιχεία του. Ο θετικός ακέραιος αριθμός που εκφράζει το πλήθος των εμφανίσεων κάθε στοιχείου καλείται **(πολλαπλότητα)** αυτού του στοιχείου στο πλειοσύνολο. Επομένως, υπάρχει ένα άπειρο πλήθος πλειοσυνόλων που περιέχουν μόνο μερικά στοιχεία, για παράδειγμα τα a και b, αλλά διαφοροποιούνται ως προς τις πολλαπλότητες των στοιχείων αυτών. Για παράδειγμα, το σύνολο $\{a, b\}$ περιέχει μόνο τα στοιχεία a και b, καθένα από τα οποία έχει πολλαπλότητα ίση με 1 εάν το $\{a, b\}$ αντιμετωπισθεί ως πλειοσύνολο, ενώ στο πλειοσύνολο $\{a, a, b\}$ το στοιχείο a έχει πολλαπλότητα ίση με 2 και το στοιχείο b έχει πολλαπλότητα ίση με 1.

της κλάσης ομοιότητας. Είναι ενδιαφέρον το γεγονός ότι δεν υπάρχει τίποτα το ξεχωριστό, πράγμα που θα δειχθεί σε αυτό το υποκεφάλαιο. Σχεδόν όλοι οι πίνακες στο $M_n(\mathbb{R})$ είναι όμοιοι προς έναν ημιθετικό πίνακα.

Κατ' αρχάς, ας σημειωθεί ότι ισχύει πως κάθε μη βαθμωτός πίνακας στο σύνολο $M_n(\mathbb{R})$ είναι όμοιος προς έναν πραγματικό πίνακα με θετική την πρώτη στήλη.

<u>Θεώρημα 2.4.1</u>

Εκτός από τους μη θετικούς βαθμωτούς πίνακες, κάθε πίνακας στο σύνολο $M_n(\mathbb{R})$ είναι όμοιος προς έναν ημιθετικό πίνακα.

<u>Απόδειξη</u>

Εάν ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$ δεν είναι βαθμωτός, τότε, δεδομένου ότι κάθε μη βαθμωτός πίνακας στο σύνολο $M_n(\mathbb{R})$ είναι όμοιος προς έναν πραγματικό πίνακα με θετική την πρώτη στήλη (όπως προαναφέρθηκε), υπάρχει πίνακας, έστω B, με θετική στήλη εντός της κλάσης ομοιότητάς του. Σύμφωνα, όμως, με την διαπίστωση ότι εάν ένας πίνακας $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ έχει θετική στήλη τότε είναι ημιθετικός (βλ. υποκεφάλαιο 2.3), προκύπτει το συμπέρασμα ότι αυτός ο πίνακας (δηλαδή ο πίνακας B) είναι ημιθετικός. Επομένως, αποδείχθηκε, κατ' αρχάς, ότι κάθε μη βαθμωτός πίνακας στο σύνολο $M_n(\mathbb{R})$ είναι όμοιος προς έναν ημιθετικό πίνακα. Επίσης, δεδομένου ότι κάθε θετικός διαγώνιος πίνακας είναι ημιθετικός, οι θετικοί βαθμωτοί πίνακες είναι, επίσης, ημιθετικοί. Τελικώς, λοιπόν, αποδείχθηκε, πράγματι, ότι εκτός από τους μη θετικούς βαθμωτούς πίνακες, κάθε πίνακας στο σύνολο $M_n(\mathbb{R})$ είναι όμοιος προς έναν ημιθετικό πίνακα. ■

Τέλος, ας αναφερθεί η εξής πληροφορία: με δεδομένο θετικό αριθμό n και υποθέτοντας ότι το $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ είναι ένα πλειοσύνολο μιγαδικών αριθμών το οποίο αποτελεί το φάσμα ενός πραγματικού πίνακα, ισχύει ότι το πλειοσύνολο Λ αποτελεί το φάσμα ενός ημιθετικού πίνακα στο $M_n(\mathbb{R})$, εκτός εάν $n = 1$ και $\lambda_1 \leq 0$.

2.5 Κατ' ελάχιστον ημιθετικοί πίνακες & περιττά ημιθετικοί πίνακες

Κατ' αρχάς, υπενθυμίζεται ότι ένας πίνακας $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ είναι κατ' ελάχιστον ημιθετικός εάν είναι ημιθετικός και κανένας υποπίνακας διαγεγραμμένης στήλης δεν είναι ημιθετικός (βλ. Ορισμό 2.1.4). Αλλιώς, ένας ημιθετικός πίνακας καλείται **περιττά ημιθετικός**. Αυτές οι δύο έννοιες δύναται να θεωρηθούν σε όρους του συνόλου $S_+(A)$. ■

<u>Λήμμα 2.5.1</u>

Εάν ένας πίνακας $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ είναι ημιθετικός, τότε είναι περιττά ημιθετικός αν και μόνο αν υπάρχουν διανύσματα στο σύνολο $S_+(A)$ με συνιστώσες ίσες με 0. Η j - οστή στήλη δύναται να διαγραφεί από τον πίνακα A έτσι ώστε να προκύψει ένας ημιθετικός (υπο)πίνακας αν και μόνο αν υπάρχει διάνυσμα στο σύνολο $S_+(A)$ του οποίου η j - οστή συνιστώσα είναι ίση με 0. Αντιστοίχως, ένας πίνακας A είναι κατ' ελάχιστον ημιθετικός αν και μόνο αν όλες οι συνιστώσες των διανυσμάτων στο σύνολο $S_+(A)$ είναι θετικές.

Απόδειξη

Υπάρχει ένα διάνυσμα $x \in S_+(A)$ για το οποίο ισχύει ότι $x_j = 0$ αν και μόνο αν η j - οστή στήλη του πίνακα A είναι περιττή ως προς την ιδιότητα του ημιθετικού στον πίνακα A. Και οι δύο ισχυρισμοί του Λήμματος έπονται από αυτό. ■

Παράδειγμα 2.5.1

Ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

είναι ημιθετικός, καθώς αληθεύει ότι $e = [1 \quad 1 \quad 1]^T \in S_+(A)$. Αλλά, με διαγραφή της στήλης υπ' αριθμόν 2 ή 3 προκύπτει (υπο)πίνακας με μία γραμμή με μη θετικούς αριθμούς και, επομένως, κανένας από τους δύο αυτούς (υπο)πίνακες διαγεγραμμένης στήλης δεν είναι ημιθετικός (βλ. Παρατήρηση 2.1.2). Έπειτα, με διαγραφή της στήλης υπ' αριθμόν 1 προκύπτει ένας (υπο)πίνακας με τον τετραγωνικό υποπίνακα $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$. Δεδομένου αυτού, ισχύει ότι και αυτός ο (υπο)πίνακας διαγεγραμμένης στήλης δεν είναι ημιθετικός επίσης. Επομένως, ο πίνακας A είναι κατ' ελάχιστον ημιθετικός. ■

Ας παρατηρηθεί, επίσης, ότι για τον προαναφερθέντα πίνακα A, ισχύει ότι

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 \end{bmatrix},$$

οπότε ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και αληθεύει, μάλιστα, ότι $A^{-1} \geq 0$.

Συνεχίζοντας, ένας ημιθετικός πίνακας ενδέχεται να έχει οποιαδήποτε διαφορά ανάμεσα στο πλήθος των γραμμών και στο πλήθος των στηλών. Στην προσπάθεια για κατανόηση της ξεχωριστής δομής των κατ' ελάχιστον ημιθετικών πινάκων, ένα σημαντικό γεγονός είναι ότι δεν είναι δυνατό να υπάρχουν περισσότερες στήλες απ' ό, τι γραμμές. Πρωτίστως, όμως, παρατηρείται ότι οποιοσδήποτε ημιθετικός πίνακας με έναν μη τετριμμένο μηδενοχώρο πρέπει να είναι περιττά ημιθετικός.

Λήμμα 2.5.2

Ας υποτεθεί ότι ένας πίνακας $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ είναι ημιθετικός και, επίσης, πως ισχύει ότι $\mathrm{null}(A) \neq \{0\}$ (δηλαδή ο μηδενοχώρος του πίνακα A είναι μη τετριμμένος). Τότε, ο πίνακας αυτός είναι περιττά ημιθετικός.

Απόδειξη

Έστω διάνυσμα $x \neq 0$ το οποίο αποτελεί στοιχείο του $\mathrm{null}(A)$ και διάνυσμα $y \in S_+(A)$ και, επίσης, ας οριστεί διάνυσμα $y(t) = y + tx$ (t: μη αρνητικός αριθμός). Όπως παρατηρείται, ισχύει ότι $Ay(t) = Ay > 0$. Εάν ισχύει ότι $y \ngtr 0$, τότε η απόδειξη ολοκληρώνεται με χρήση του Λήμματος 2.5.1. Εάν ισχύει ότι $y > 0$, τότε αληθεύει πως $y(t) \geq 0$ για επαρκώς μικρό μη αρνητικό αριθμό t, δηλαδή υπάρχει αριθμός $T > 0$ έτσι ώστε για $0 \leq t \leq T$ να ισχύει ότι $y(t) \geq 0$. Δεδομένου ότι δύναται να υποτεθεί, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι το διάνυσμα x έχει μερικά αρνητικά στοιχεία (αλλιώς, το x αντικαθίσταται με το $-x$), υπάρχει ένας αριθμός

$t > 0$ έτσι ώστε να αληθεύει ότι $y(t) \geq 0$ και $y(t) \ngtr 0$. Τότε, όμως, το διάνυσμα $y(t) \in S_+(A)$ έχει μηδενικά στοιχεία, έτσι ώστε, με χρήση του Λήμματος 2.5.1, ο πίνακας A είναι περιττά ημιθετικός. ■

Παρατήρηση 2.5.1

Παρατηρείται ότι εάν ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$ είναι αντιστρέψιμος και ισχύει ότι $A^{-1} \geq 0$, τότε ο πίνακας A^{-1} είναι πίνακας θετικής γραμμής (δεν είναι δυνατό κάποια γραμμή να είναι μηδενική, καθώς θα ισχύει ότι $\mathrm{rank}(A^{-1}) = n$). Επιπλέον, εάν ο πίνακας A^{-1} είναι πίνακας θετικής γραμμής και ληφθεί διάνυσμα $x > 0$, με $x \in \mathbb{R}^n$, τότε ισχύει ότι $A^{-1}x > 0$. ■

Έπεται, από το Λήμμα 2.5.2, ότι δύναται να διαγραφούν στήλες από έναν περιττά ημιθετικό πίνακα έτσι ώστε να προκύψει ένας ημιθετικός πίνακας με γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες[9]. Ένας τέτοιος ημιθετικός πίνακας ενδέχεται να είναι κατ' ελάχιστον ημιθετικός.

Παράδειγμα 2.5.2

Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Τότε, ο πίνακας αυτός είναι ημιθετικός με γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες και, επίσης, περιττά ημιθετικός καθώς και οι δύο στήλες του είναι θετικές. ■

Το βασικό επακόλουθο του Λήμματος 2.5.2 είναι το αμέσως παρακάτω.

Θεώρημα 2.5.1

Εάν ένας πίνακας $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ είναι κατ' ελάχιστον ημιθετικός, τότε έχει γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες, έτσι ώστε $n \leq m$.

Απόδειξη

Οι γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες έπονται από το Λήμμα 2.5.2 και, ύστερα, έπεται και το ότι $n \leq m$. ■

Ένα επιπλέον χρήσιμο γεγονός έχει απόδειξη παρόμοια με εκείνη του Λήμματος 2.5.2, αν και είναι ανεξάρτητο.

Λήμμα 2.5.3

Έστω ένας ημιθετικός πίνακας $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Ο πίνακας αυτός είναι κατ' ελάχιστον ημιθετικός αν και μόνο αν, για διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$, το να αληθεύει πως $Ax > 0$ συνεπάγεται ότι αληθεύει πως $x > 0$.

[9] Όπως έχει θιγεί σε υποσημείωση του υποκεφαλαίου 1.2, ισχύει ότι $\mathrm{null}(A) = \{0\}$ αν και μόνο αν ο πίνακας A έχει γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες. Πράγματι, δεδομένου ότι το διάνυσμα Ax αποτελεί έναν γραμμικό συνδυασμό των στηλών του πίνακα A, δηλαδή δεδομένου ότι $Ax = x_1c_1 + x_2c_2 + \cdots + x_nc_n$ όπου $c_1, c_2, \ldots, c_n$ είναι οι στήλες του πίνακα A, προκύπτει ότι ισχύει πως η εξίσωση $Ax = \mathbf{0}$ έχει μη τετριμμένη λύση ($x \neq 0$) αν και μόνο αν οι στήλες του πίνακα A είναι γραμμικώς εξαρτημένες.

Απόδειξη

Ας υποτεθούν τα εξής: ο πίνακας A είναι κατ' ελάχιστον ημιθετικός, ισχύει ότι $Ax > 0$ και το διάνυσμα $x \in \mathbb{R}$ έχει μη θετικό στοιχείο. Εάν ισχύει ότι $x \geq 0$, τότε ισχύει και ότι $x \in S_+(A)$ και, από το Λήμμα 2.5.1, ο πίνακας A είναι περιττά ημιθετικός, πράγμα που συνιστά αντίφαση. Επιπλέον, εάν το διάνυσμα x έχει αρνητικό στοιχείο, τότε ας επιλεχθεί διάνυσμα $u > 0$, με $u \in S_+(A)$. Τότε, υπάρχει διάνυσμα $w = tu + (1-t)x$, με $0 < t < 1$ για το οποίο ισχύει ότι $w \geq 0$ και τουλάχιστον ένα στοιχείο του είναι ίσο με 0. Όμως, δεδομένου ότι ισχύει πως $Aw = tAu + (1-t)Ax > 0$, προκύπτει αντίφαση, από το Λήμμα 2.5.1, και πάλι. Συνεπώς, η ευθεία συνεπαγωγή επιβεβαιώνεται.

Από την άλλη, εάν αληθεύει το ότι το $Ax > 0$ συνεπάγεται ότι $x > 0$, τότε το γεγονός ότι ο πίνακας A είναι ημιθετικός σημαίνει ότι $S_+(A) \neq \emptyset$ και ότι δεν υπάρχει διάνυσμα στο σύνολο $S_+(A)$ που να έχει συνιστώσα ίση με 0. Συνεπώς, από το Λήμμα 2.5.1 και πάλι, ο πίνακας A είναι κατ' ελάχιστον ημιθετικός και η απόδειξη ολοκληρώνεται. ■

Όπως παρατηρείται, το Λήμμα 2.5.3 περιγράφει κάτι διαφορετικό απ' ό, τι το Λήμμα 2.5.1. Σε αυτό το σημείο, δύναται να δοθεί ένας σημαντικός χαρακτηρισμός των τετραγωνικών κατ' ελάχιστον πινάκων.

Πόρισμα 2.5.1

Έστω ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$. Τότε, ο πίνακας αυτός είναι κατ' ελάχιστον ημιθετικός αν και μόνο αν υπάρχει ο αντίστροφός του, A^{-1}, και ισχύει ότι $A^{-1} \geq 0$.

Απόδειξη

Ας υποτεθεί ότι ο πίνακας A είναι κατ' ελάχιστον ημιθετικός. Από το Θεώρημα 2.5.1 σε συνδυασμό με υποσημείωση του υποκεφαλαίου 1.2, έπεται ότι είναι αντιστρέψιμος. Δεδομένου ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος λοιπόν, θα ισχύει ότι κάθε διάνυσμα στο $\mathbb{R}^n$ βρίσκεται στον χώρο στηλών του πίνακα A. Έστω ότι $y \in \mathbb{R}^n$, $y > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε $Ax = y$. Από το Λήμμα 2.5.3, ισχύει ότι $x > 0$. Αυτό σημαίνει πως το ότι $y > 0$ συνεπάγεται ότι $A^{-1}y = x > 0$ και, επειδή το $y > 0$ είναι αυθαίρετο, συνεπάγεται και το ότι $A^{-1} \geq 0$. Αντιστρόφως, ας υποτεθεί ότι $A^{-1} \geq 0$ και ας επιλεχθεί διάνυσμα $z > 0$. Τότε, ισχύει ότι $w = A^{-1}z > 0$ και $Aw = z > 0$, έτσι ώστε ο πίνακας A είναι ημιθετικός. Όμως, εάν ισχύει ότι $Ax = y > 0$, τότε ισχύει ότι $x = A^{-1}y > 0$ και, από το Λήμμα 2.5.3, προκύπτει ότι ο πίνακας A είναι κατ' ελάχιστον ημιθετικός. ■

Στην περίπτωση κατά την οποία ισχύει ότι $m > n$, ο πίνακας $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ ενδέχεται να είναι κατ' ελάχιστον ημιθετικός. Είναι γεγονός ότι, σε αυτή την περίπτωση, ο πίνακας A θα έχει μέγιστο βαθμό στηλών και, επομένως, αριστερούς αντιστρόφους[10]. Ωστόσο, σε αντίθεση με

[10] Στην περίπτωση ενός mxn πίνακα, έστω A, δύναται να θεωρηθούν οι έννοιες του **αριστερού αντιστρόφου** (πίνακα), έστω L, και του **δεξιού αντιστρόφου** (πίνακα), έστω R, οι οποίοι ικανοποιούν τις εξής αντίστοιχες σχέσεις: $LA = I$ και $AR = I$ (οι πίνακες L και R είναι διαστάσεως nxm, ο ταυτοτικός πίνακας είναι διαστάσεως nxn στην πρώτη σχέση και διαστάσεως mxm στην δεύτερη). Έπειτα, αληθεύει ότι ένας mxn πίνακας, A, έχει αριστερό αντίστροφο αν και μόνο αν ισχύει ότι $\text{rank}(A) = n$ (μέγιστος βαθμός στηλών) και $m > n$. Αντιστοίχως, αληθεύει ότι ένας mxn πίνακας, A, έχει δεξιό αντίστροφο αν και μόνο αν ισχύει ότι $\text{rank}(A) = m$ (μέγιστος βαθμός γραμμών) και $m < n$.

την περίπτωση των τετραγωνικών πινάκων στην οποία απαιτείται ο αντίστροφος να είναι μη αρνητικός (βλ. Πόρισμα 2.5.1), δεν απαιτείται κάθε αριστερός αντίστροφος να είναι μη αρνητικός.

<u>Παράδειγμα 2.5.3</u>

Ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in M_{2,1}(\mathbb{R})$ είναι κατ' ελάχιστον ημιθετικός και ο πίνακας $L = [2 \quad -1] \in M_{1,2}(\mathbb{R})$ είναι ένας αριστερός αντίστροφος ο οποίος δεν είναι μη αρνητικός. Ωστόσο, ο πίνακας A έχει μη αρνητικούς αριστερούς αντιστρόφους επίσης, όπως είναι ο $M = [1/2 \quad 1/2] \in M_{1,2}(\mathbb{R})$. Επίσης, εάν θεωρηθεί πίνακας $A = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \in M_{2,1}(\mathbb{R})$, τότε ο πίνακας αυτός δεν είναι ημιθετικός, αλλά ο πίνακας M εξακολουθεί να αποτελεί έναν μη αρνητικό αριστερό αντίστροφο του πίνακα A. Αυτό σημαίνει ότι οι μη τετραγωνικοί κατ' ελάχιστον ημιθετικοί πίνακες ενδέχεται να μην χαρακτηρίζονται με ιδιαιτέρως ξεκάθαρο τρόπο (όπως οι τετραγωνικοί κατ' ελάχιστον ημιθετικοί πίνακες στο Πόρισμα 2.5.1). ■

Όμως, εξακολουθεί να υπάρχει ένα ισχυρό αποτέλεσμα.

<u>Θεώρημα 2.5.2</u>

Έστω ότι ένας πίνακας $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ είναι ημιθετικός. Τότε, είναι κατ' ελάχιστον ημιθετικός αν και μόνο αν έχει μη αρνητικό αριστερό αντίστροφο.

<u>Απόδειξη</u>

Κατ΄αρχάς, ας υποτεθεί ότι ο πίνακας A είναι ημιθετικός και έχει μη αρνητικό αριστερό αντίστροφο, L. Ας υποτεθεί, επίσης, ότι $x \in S_+(A)$ έτσι ώστε $y = Ax > 0$. Τότε, ισχύει ότι $0 < Ly = LAx = x$ έτσι ώστε, από το Λήμμα 2.5.1, προκύπτει ότι ο πίνακας A είναι κατ' ελάχιστον ημιθετικός καθώς δεν υπάρχει συνιστώσα διανύσματος στο σύνολο $S_+(A)$ ίση με 0.

Από την άλλη, ας υποτεθεί ότι ο πίνακας A είναι κατ' ελάχιστον ημιθετικός, έτσι ώστε έχει αριστερούς αντιστρόφους βάσει του Θεωρήματος 2.5.1. Έστω ότι ο πίνακας A_j προκύπτει από τον πίνακα A με διαγραφή της j - οστής στήλης του, $j = 1,2,\dots,n$. Δεδομένου ότι ο πίνακας A είναι κατ' ελάχιστον ημιθετικός, δεν υπάρχει πίνακας από αυτούς που να είναι ημιθετικός. Από το Θεώρημα των Εναλλακτικών και επειδή ο πίνακας A είναι κατ' ελάχιστον ημιθετικός, υπάρχει διάνυσμα $y_j \in \mathbb{R}^m$, $y_j \geq 0, \neq 0$ με $y_j^T A_j \leq 0$. Επίσης, έστω $L \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ να είναι ο πίνακας εκείνος του οποίου η j - οστή γραμμή είναι το y_j^T έτσι ώστε $L \geq 0$. Τότε, είναι γεγονός ότι τα στοιχεία εκτός διαγωνίου του πίνακα LA θα είναι μη θετικά. Έστω διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$, $x > 0$, τέτοιο ώστε να αληθεύει ότι $Ax > 0$ (ο οποίος πίνακας Ax υπάρχει καθώς ο πίνακας A είναι κατ' ελάχιστον ημιθετικός), και ισχύει ότι $LAx > 0$. Τότε, είναι γεγονός πως θα ισχύει ότι $B = (LA)^{-1} \geq 0$. Δεδομένου ότι $L \geq 0$, ισχύει ότι $BL \geq 0$ επίσης. Όμως, αληθεύει πως $(BL)A = B(LA) = (LA)^{-1}(LA) = I$, οπότε ο πίνακας A έχει μη αρνητικό αριστερό αντίστροφο. ■

Η έννοια της μονοτονικότητας για τους πίνακες έχει αναφερθεί στον Ορισμό 2.1.3. Επιπλέον, θα μπορούσε κάποιος να ονομάσει εκείνη στο Λήμμα 2.5.3 ως ισχυρή μονοτονικότητα (για πίνακες που δεν είναι κατ' ανάγκη τετραγωνικοί): ο πίνακας $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ είναι **ισχυρά μονότονος** εάν για $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύει πως το ότι $Ax > 0$ συνεπάγεται ότι $x > 0$.

Παρατηρείται, σε αυτό το σημείο, πως η κατανόηση σχετικώς με τους κατ' ελάχιστον ημιθετικούς πίνακες δύναται να συνοψισθεί στις δύο επόμενες ισοδυναμίες.

Κατ' αρχάς, λοιπόν, ας υποτεθεί ότι ένας πίνακας $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{\mathrm{m,n}}(\mathbb{R})$ είναι ημιθετικός. Τότε, οι επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες.

- Ο πίνακας A είναι κατ' ελάχιστον ημιθετικός.
- Ο πίνακας A έχει μη αρνητικό αριστερό αντίστροφο.
- Ο πίνακας A είναι ισχυρά μονότονος.

Έπειτα, στην περίπτωση των τετραγωνικών πινάκων, με υπενθύμιση του Ορισμού 2.1.3, είναι δυνατή η επόμενη διατύπωση.

Έστω πίνακας $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{\mathrm{n}}(\mathbb{R})$. Τότε, οι επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες.

- Ο πίνακας A είναι κατ' ελάχιστον ημιθετικός.
- Υπάρχει ο πίνακας A^{-1} και ισχύει ότι $\mathrm{A}^{-1} \geq 0$.
- Ο πίνακας A είναι μονότονος.

Τέλος, δεδομένου ότι έχουν συζητηθεί, ήδη, τα μοτίβα προσήμου τα οποία επιτρέπουν ή απαιτούν την ιδιότητα του ημιθετικού (βλ. υποκεφάλαιο 2.3), θα πραγματοποιηθεί αναφορά στα αντίστοιχα αποτελέσματα για τους περιττά ημιθετικούς πίνακες[11].

Τα μοτίβα προσήμου τα οποία επιτρέπουν την ιδιότητα του περιττά ημιθετικού είναι εκείνα με ένα + σε κάθε γραμμή και για τα οποία υπάρχει μία στήλη η οποία δεν περιέχει το μοναδικό + της οποιασδήποτε γραμμής.

Τα μοτίβα προσήμου τα οποία απαιτούν την ιδιότητα του περιττά ημιθετικού, από την άλλη, είναι εκείνα με μία θετική εμπρόσθια όψη, έτσι ώστε υπάρχει μία στήλη η οποία δεν περιέχει κάποιο από τα εμπρόσθια θετικά στοιχεία. Προκειμένου να απαιτηθεί η ιδιότητα του περιττά ημιθετικού, ένα μοτίβο προσήμου πρέπει να έχει μία θετική εμπρόσθια όψη και κάθε στήλη πρέπει να απαλείφει οποιαδήποτε θετική εμπρόσθια όψη. Επομένως, πρέπει να υπάρχει μία θετική εμπρόσθια όψη και, επίσης, κάθε στήλη πρέπει να περιέχει ένα εμπρόσθιο θετικό στοιχείο το οποίο είναι το μοναδικό + στην γραμμή του.

[11] Αναφορικά με τους κατ' ελάχιστον ημιθετικούς πίνακες: η θεωρία επί των μοτίβων προσήμου που επιτρέπουν ή απαιτούν την ιδιότητα του κατ' ελάχιστον ημιθετικού είναι εξαιρετικά πολύπλοκη για να περιγραφεί και, επίσης, περιέχει περιπτώσεις οι οποίες δεν είναι επαρκώς κατανοητές.

3. ΗΜΙΘΕΤΙΚΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ: ΠΕΡΑΙΤΕΡΩ ΘΕΩΡΙΑ

Το 3ο κεφάλαιο περιέχει περαιτέρω θεωρία αναφορικά με τους ημιθετικούς πίνακες.

3.1 Γραμμικοί διατηρητές

Ας υποτεθεί μία κλάση πινάκων, $\mathrm{E} \in \mathrm{M}_{\mathrm{m,n}}(\mathbb{F})$. Εάν ο $\mathrm{L}\colon \mathrm{M}_{\mathrm{m,n}}(\mathbb{F}) \to \mathrm{M}_{\mathrm{m,n}}(\mathbb{F})$ είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός έτσι ώστε να αληθεύει πως $\mathrm{L}(\mathrm{E}) \subseteq \mathrm{E}$, τότε ο L καλείται **γραμμικός διατηρητής** της κλάσης E. Η κατανόηση των γραμμικών διατηρητών της κλάσης E δύναται να προσφέρει εμβάθυνση της γνώσης επί της κλάσεως αυτής. Συχνά, πραγματοποιούνται πρόσθετες υποθέσεις προκειμένου να προκύψουν σαφή αποτελέσματα, όπως: «επί» ($\mathrm{L}(\mathrm{E}) = \mathrm{E}$), «εντός» ($\mathrm{L}(\mathrm{E}) \subset \mathrm{E}$), «αντιστρέψιμος» (ο L είναι αντιστρέψιμος), «μίας ειδικής μορφής» (π.χ., $\mathrm{L}(\mathrm{X}) = \mathrm{RXS}$, $\mathrm{R} \in \mathrm{M}_{\mathrm{n}}(\mathbb{F})$ και $\mathrm{S} \in \mathrm{M}_{\mathrm{m}}(\mathbb{F})$ αντιστρέψιμοι).

Εδώ, υπάρχει ενδιαφέρον για τους γραμμικούς διατηρητές της κλάσης των ημιθετικών πινάκων και της κλάσης των κατ' ελάχιστον ημιθετικών πινάκων, στο σύνολο $\mathrm{M}_{\mathrm{m,n}}(\mathbb{F})$. Θα είναι εφικτή η χρήση μερικών αποτελεσμάτων που έχουν αναπτυχθεί ήδη.

Κατ' αρχάς, ας θεωρηθούν διατηρητές ημιθετικών πινάκων της εξής μορφής:

$\mathrm{L}(\mathrm{X})\colon \mathrm{M}_{\mathrm{m,n}}(\mathbb{R}) \to \mathrm{M}_{\mathrm{m,n}}(\mathbb{R})$, με $\mathrm{L}(\mathrm{X}) = \mathrm{RXS}$ για καθορισμένους $\mathrm{R} \in \mathrm{M}_{\mathrm{m}}(\mathbb{R})$ και $\mathrm{S} \in \mathrm{M}_{\mathrm{n}}(\mathbb{R})$. (3.1.1)

Είναι γνωστό, ήδη, ότι εάν ο πίνακας R είναι θετικής γραμμής και ο πίνακας S είναι μονότονος, τότε ένας τέτοιος μετασχηματισμός διατηρεί την ιδιότητα του ημιθετικού (βλ. Θεώρημα 2.1.1).

Σε αυτό το σημείο, τίθεται το ερώτημα για το εάν υπάρχουν άλλα ενδεχόμενα. Πρωτίστως, υπάρχει ένα θεώρημα - έπειτα, δίδεται μία άλλη απόδειξη.

<u>Θεώρημα 3.1.1</u>

Έστω ένας γραμμικός τελεστής, L, επί του $\mathrm{M}_{\mathrm{m,n}}(\mathbb{R})$ της μορφής (3.1.1). Τότε, ο L είναι ένας «εντός» γραμμικός διατηρητής των ημιθετικών πινάκων αν και μόνο αν είτε ο πίνακας R είναι θετικής γραμμής και ο πίνακας S είναι μονότονος είτε ο πίνακας $-\mathrm{R}$ είναι θετικής γραμμής και ο πίνακας $-\mathrm{S}$ είναι μονότονος.

<u>Απόδειξη</u>

Απαιτείται μόνο η επιβεβαίωση του γεγονότος ότι εάν ο L είναι ένας «εντός» γραμμικός διατηρητής των ημιθετικών πινάκων τότε είτε ο πίνακας R είναι θετικής γραμμής και ο πίνακας S είναι μονότονος είτε ο πίνακας $-\mathrm{R}$ είναι θετικής γραμμής και ο πίνακας $-\mathrm{S}$ είναι μονότονος.

Κατ' αρχάς, ας παρατηρηθεί ότι ένας πίνακας βαθμού 1, xy^{T}, είναι ημιθετικός αν και μόνο αν ισχύει ότι $\mathrm{x} > 0$ και ότι το διάνυσμα y έχει τουλάχιστον μία θετική συνιστώσα ή ότι $\mathrm{x} < 0$ και ότι το διάνυσμα y έχει τουλάχιστον μία αρνητική συνιστώσα.

Εάν αληθεύει ότι $\mathrm{X} = \mathrm{xy}^{\mathrm{T}}$, με $\mathrm{x} > 0$ και τουλάχιστον μία συνιστώσα του διανύσματος y να είναι θετική, τότε ο πίνακας X είναι ημιθετικός και ο πίνακας $\mathrm{L}(\mathrm{X}) = \mathrm{RXS} = (\mathrm{Rx})(\mathrm{S}^{\mathrm{T}}\mathrm{y})^{\mathrm{T}}$ είναι ημιθετικός, από υπόθεση. Δεδομένου ότι το $\mathrm{x} > 0$ είναι αυθαίρετο αλλιώς, προκύπτει ότι είτε

$Rx > 0$ είτε $Rx < 0$, δηλαδή ότι είτε ο πίνακας R είναι θετικής γραμμής είτε ο πίνακας $-R$ είναι θετικής γραμμής.

Ας υποτεθεί το πρώτο. Τότε, ο πίνακας $S^T y$ έχει τουλάχιστον ένα θετικό στοιχείο για κάθε διάνυσμα y το οποίο έχει τουλάχιστον μία θετική συνιστώσα. Προκύπτει, λοιπόν, ότι εάν ο πίνακας $S^T y$ δεν έχει θετικά στοιχεία, τότε το διάνυσμα y δεν έχει θετικές συνιστώσες και, επομένως, ο πίνακας S^T είναι μονότονος. Όμως, δεδομένου ότι ο πίνακας S είναι τετραγωνικός, πρέπει να είναι μονότονος.

Η περίπτωση κατά την οποία ο πίνακας $-R$ είναι θετικής γραμμής παράγει, ομοίως, το αποτέλεσμα ότι ο πίνακας $-S$ είναι μονότονος. ■

Υπενθυμίζεται, σε αυτό το σημείο, ότι ένας πίνακας $B \in M_n(\mathbb{R})$ είναι μονώνυμος εάν αληθεύει ότι $B \geq 0$ και ότι έχει ακριβώς ένα θετικό στοιχείο σε κάθε γραμμή και στήλη (βλ. υποκεφάλαιο 2.1). Αυτό είναι το ίδιο όπως το να ισχυριστεί κανείς ότι ο πίνακας αυτός είναι της μορφής $B = QE$ με $Q \in P_n$ και $E \in D_n^+$ (βλ. υποκεφάλαιο 2.1) ή της μορφής $B = DP$ με $D \in D_n^+$ και $P \in P_n$. Το σημαντικό χαρακτηριστικό των μονωνύμων πινάκων είναι ότι αποτελούν την τομή των πινάκων θετικής γραμμής και των μονοτόνων πινάκων στο $M_n(\mathbb{R})$ (βλ. υποκεφάλαιο 2.1).

Λήμμα 3.1.1

Ένας πίνακας $B \in M_n(\mathbb{R})$ είναι μονώνυμος αν και μόνο αν είναι και πίνακας θετικής γραμμής και μονότονος.

Απόδειξη

Προφανώς, ένας μονώνυμος πίνακας είναι και πίνακας θετικής γραμμής και μονότονος. Ακόμη, δεδομένου ότι είναι μονότονος, τότε είναι και αντίστροφος μη αρνητικός (από τις τελευταίες ισοδύναμες συνθήκες του υποκεφαλαίου 2.5).

Από την άλλη, ας υποτεθεί ότι ο πίνακας X είναι πίνακας θετικής γραμμής και μονότονος. Τότε, ο πίνακας αυτός είναι αντίστροφος μη αρνητικός επίσης. Έστω, ακόμη, το διάνυσμα e_i το οποίο έχει την i - οστή συνιστώσα ίση με 1 και κάθε άλλη συνιστώσα ίση με 0. Δεδομένου ότι ο πίνακας X είναι πίνακας θετικής γραμμής, πρέπει να οδηγεί κάθε διάνυσμα e_i σε ένα μη αρνητικό άθροισμα του διανύσματος e_j, δηλαδή να ισχύει ότι $Xe_i = \sum r_{ji}\, e_j$ για κάποια $r_{ji} \geq 0$. Καθώς ο πίνακας X είναι αντίστροφος μη αρνητικός, πρέπει να ισχύει ότι, για κάθε διάνυσμα e_j, υπάρχει διάνυσμα $v_j \geq 0$ έτσι ώστε να αληθεύει πως $Xv_j = e_j$. Ας επισημανθεί, ωστόσο, ότι αυτό είναι αδύνατο εκτός εάν, για κάποια διανύσματα e_i, ισχύει ότι $Xe_i = r_{ji}e_j$. Εάν αυτό δεν ίσχυε, τότε το Xv_j θα είχε πάντοτε μία θετική συνιστώσα η οποία δεν θα ήταν η j - οστή. Επομένως, για κάθε e_j, υπάρχει e_i έτσι ώστε να αληθεύει ότι $Xe_i = r_{ji}e_j$. Αυτό είναι το ίδιο όπως το να ισχυριστεί κανείς ότι ο πίνακας X έχει ακριβώς ένα θετικό στοιχείο σε κάθε γραμμή και στήλη, και έτσι ο πίνακας X είναι μονώνυμος. ■

Με αυτό, είναι δυνατό να χαρακτηριστούν οι «επί» διατηρητές των ημιθετικών πινάκων.

Θεώρημα 3.1.2

Ένας γραμμικός τελεστής επί του $M_{m,n}(\mathbb{R})$ της μορφής (3.1.1) είναι ένας «επί» γραμμικός διατηρητής των ημιθετικών πινάκων αν και μόνο αν και οι πίνακες R και S είναι μονώνυμοι ή οι πίνακες $-R$ και $-S$ είναι μονώνυμοι.

Απόδειξη

Ας υποτεθεί ότι ο L είναι ένας «επί» διατηρητής των ημιθετικών πινάκων. Είναι γεγονός ότι ο L συνιστά μία αντίστροφη απεικόνιση, πράγμα το οποίο σημαίνει πως οι πίνακες R και S πρέπει να είναι αντιστρέψιμοι, και $L^{-1}(A) = R^{-1}AS^{-1}$. Δεδομένου ότι ο L είναι ένας «επί» διατηρητής των ημιθετικών πινάκων, και αυτός και ο αντίστροφός του είναι «εντός» διατηρητές των ημιθετικών πινάκων. Επομένως, οι πίνακες R και S πρέπει να είναι και πίνακες θετικής γραμμής και αντίστροφοι μη αρνητικοί (ή οι πίνακες $-R$ και $-S$) και, άρα, μονώνυμοι.

Αντιστρόφως, εάν οι πίνακες R και S είναι μονώνυμοι, δηλαδή είναι και πίνακες θετικής γραμμής και μονότονοι (από το Λήμμα 3.1.1), τότε ο $L(A) = RAS$ είναι ένας «εντός» διατηρητής των ημιθετικών πινάκων (από το Θεώρημα 3.1.1), όπως είναι και ο $L^{-1}(A) = R^{-1}AS^{-1}$. Επομένως, ο L είναι ένας «επί» διατηρητής των ημιθετικών πινάκων. (Ομοίως, αποδεικνύεται το ζητούμενο και στην περίπτωση υπόθεσης των μονωνύμων πινάκων $-R$ και $-S$) ■

Πλέον, αφού έχουν χαρακτηριστεί οι γραμμικοί διατηρητές των ημιθετικών πινάκων, «εντός» και «επί», της μορφής (3.1.1), θα θιγούν οι γραμμικοί διατηρητές των κατ' ελάχιστον ημιθετικών πινάκων αυτής της μορφής. Ας επισημανθεί ότι οι «επί» διατηρητές των ημιθετικών πινάκων, αυτής της μορφής, είναι «επί» διατηρητές των κατ' ελάχιστον ημιθετικών πινάκων επίσης. Δεν ισχύει το ίδιο για τους «εντός» διατηρητές των κατ' ελάχιστον ημιθετικών πινάκων.

Πρωτίστως, χρειάζεται ένα ιδιαίτερο δεδομένο, το οποίο δεν έχει εμφανή σύνδεση με τους ημιθετικούς ή τους κατ' ελάχιστον ημιθετικούς πίνακες: θεωρώντας μη μηδενικά διανύσματα $v \in \mathbb{R}^n$ και $w \in \mathbb{R}^m$ και ότι $n > m$, εάν το διάνυσμα v έχει και μία θετική συνιστώσα και μία αρνητική συνιστώσα τότε υπάρχει ένας πίνακας $B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ μεγίστου βαθμού γραμμών έτσι ώστε να ισχύει ότι $B \geq 0$ και $Bv = w$ - το ίδιο αληθεύει εάν ισχύει ότι $0 \neq v \geq 0$ και $w > 0$.

Σε αυτό το σημείο, θα πρέπει να υπενθυμιστεί ότι, προκειμένου ένας πίνακας $B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ να είναι κατ' ελάχιστον ημιθετικός, είναι απαραίτητο να ισχύει πως $m \geq n$. Είναι βολικό να θεωρηθούν γραμμικοί διατηρητές κατ' ελάχιστον ημιθετικών πινάκων της μορφής (3.1.1) στις δύο δυνατές περιπτώσεις: $m > n$ και $m = n$.

- 1η Περίπτωση: $m > n$

Θεώρημα 3.1.3

Έστω, L, γραμμικός τελεστής επί του $M_{m,n}(\mathbb{R})$, με $m > n > 1$, της μορφής (3.1.1). Τότε:

(1) ο L είναι ένας «εντός» διατηρητής των κατ' ελάχιστον ημιθετικών πινάκων αν και μόνο αν ο πίνακας R είναι μονώνυμος και ο πίνακας S είναι μονότονος ή ο πίνακας $-R$ είναι μονώνυμος και ο πίνακας $-S$ είναι μονότονος.

(2) ο L είναι ένας «επί» διατηρητής των κατ' ελάχιστον ημιθετικών πινάκων αν και μόνο αν και ο πίνακας R και ο πίνακας S είναι μονώνυμοι ή και ο πίνακας $-R$ και ο πίνακας $-S$ είναι μονώνυμοι.

Απόδειξη

(1) Κατ' αρχάς, ας υπενθυμιστεί ότι ένας πίνακας A είναι κατ' ελάχιστον ημιθετικός αν και μόνο αν είναι ημιθετικός και έχει μη αρνητικό αριστερό αντίστροφο (από τις προτελευταίες ισοδύναμες συνθήκες του υποκεφαλαίου 2.5). Τώρα, ας υποτεθεί ότι ο πίνακας A είναι κατ' ελάχιστον ημιθετικός και ότι ο πίνακας B είναι ένας αριστερός αντίστροφός του. Τότε, εάν ο πίνακας R είναι μονώνυμος και ο πίνακας S είναι αντίστροφος μη αρνητικός, ο πίνακας $S^{-1}BR^{-1}$ είναι μη αρνητικός καθώς κάθε πίνακας είναι μη αρνητικός. Επιπλέον, αυτό σχηματίζει έναν αριστερό αντίστροφο για τον πίνακα RAS. Δεδομένου ότι ο πίνακας R είναι πίνακας θετικής γραμμής και ο πίνακας S είναι αντίστροφος μη αρνητικός, καθίσταται γνωστό το ότι ο πίνακας RAS είναι ημιθετικός. Επομένως, ο πίνακας RAS είναι κατ' ελάχιστον ημιθετικός. Εάν ο πίνακας S ληφθεί ως μονώνυμος επίσης, τότε δύναται να ληφθεί κάθε κατ' ελάχιστον πίνακας B στην εικόνα του L, καθώς δύναται να τεθεί πίνακας $A = R^{-1}BS^{-1}$ ο οποίος είναι κατ' ελάχιστον ημιθετικός εάν ο πίνακας B είναι κατ' ελάχιστον ημιθετικός, έτσι ώστε να αληθεύει ότι $L(A) = B$.
<u>Αντιστρόφως</u>, ας υποτεθεί ότι ο $L(A)$ διατηρεί τους κατ' ελάχιστον ημιθετικούς πίνακες λαμβάνοντας υπ' όψιν την έννοια του «εντός». Πρωτίστως, παρατηρείται ότι οι πίνακες R και S πρέπει να είναι αντιστρέψιμοι. Εάν δεν ήταν, τότε ο πίνακας RAS δεν θα είχε μέγιστο βαθμό στηλών και, επομένως, δεν θα ήταν δυνατό να έχει αριστερό αντίστροφο. Τώρα, ας υποτεθεί ότι ούτε ο πίνακας R ούτε ο πίνακας $-R$ είναι αντίστροφος μη αρνητικός. Τότε υπάρχει διάνυσμα $v \ngtr 0$ και $v \nleq 0$ έτσι ώστε να ισχύει ότι $Rv \geq 0$. Έστω ότι $w \ngtr 0$, και ας θεωρηθεί πίνακας Sw. Έστω ένας nxm πίνακας $B \geq 0$ τέτοιος ώστε να ισχύει ότι $Bv = Sw$. Ένας τέτοιος πίνακας πρέπει να υπάρχει, από το προαναφερθέν ιδιαίτερο δεδομένο. Ας επιλεχθεί, ακόμη, μία βάση $\{v_i\}$ για το $\mathbb{R}^m$, ξεκινώντας με $v_1 = v$ και $v_2 > 0$, και έστω $z_i = Bv_i$. Παρατηρείται ότι $z_2 > 0$, καθώς $B \geq 0$, με μέγιστο βαθμό γραμμών. Ας επιλεχθεί ένας mxn πίνακας A τέτοιος ώστε να ισχύει ότι $Az_i = v_i$. Τότε ο πίνακας A είναι ένας δεξιός αντίστροφος του πίνακα B, και ο πίνακας A είναι ημιθετικός, καθώς ισχύει ότι $Az_2 = v_2$. Επομένως, ο πίνακας A είναι κατ' ελαχιστον ημιθετικός. Όμως, αληθεύει ότι $RASw = RABv = RAz_1 = Rv \geq 0$ ενώ $w \ngtr 0$. Συνεπώς, ο πίνακας RAS δεν είναι κατ' ελάχιστον ημιθετικός και, άρα, ο πίνακας R ή ο πίνακας $-R$ πρέπει να είναι αντίστροφος μη αρνητικός.

(2) Ας υποτεθεί ότι ο πίνακας R είναι αντίστροφος μη αρνητικός και ότι ο πίνακας S δεν ήταν αντίστροφος μη αρνητικός. Τότε υπάρχει κάποιο διάνυσμα $u \geq 0$ τέτοιο ώστε να ισχύει ότι $S^{-1}u = w \ngtr 0$. Ας τεθεί διάνυσμα $z \geq 0$ τέτοιο ώστε να ισχύει ότι $Rz \geq 0$. Ένα τέτοιο διάνυσμα υπάρχει, δεδομένου ότι ο πίνακας R είναι αντίστροφος μη αρνητικός. Έπειτα, ας επιλεχθεί κάποιος nxm πίνακας $B \geq 0$ με μέγιστο βαθμό γραμμών τέτοιος ώστε να ισχύει ότι $Bz = u$. Παρατηρείται ότι ένας τέτοιος πίνακας πρέπει να υπάρχει, από το προαναφερθέν ιδιαίτερο δεδομένο. Τώρα, ας επιλεχθεί μία βάση $\{u_i\}$ για το $\mathbb{R}^n$ ξεκινώντας με $u_1 = u$. Καθώς ο πίνακας B έχει μέγιστο βαθμό γραμμών, υπάρχουν γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα z_i τέτοια ώστε να ισχύει ότι $Bz_i = u_i$ με $z_1 = z$. Ας τεθεί ως A ο

mxn πίνακας τέτοιος ώστε να ισχύει ότι $Au_i = z_i$. Τότε ο πίνακας A είναι ένας δεξιός αντίστροφος του πίνακα B και ο πίνακας A είναι ημιθετικός, καθώς ισχύει ότι $Au = z$. Επομένως, ο πίνακας A είναι κατ' ελάχιστον ημιθετικός. Ωστόσο, αληθεύει πως $RASw = RAu = Rz \geq 0$ παρά το γεγονός ότι $w \ngeq 0$. Επομένως, ο πίνακας RAS δεν είναι δυνατό να είναι κατ' ελάχιστον ημιθετικός και, έτσι, ο πίνακας S πρέπει να είναι αντίστροφος μη αρνητικός. Μία παρόμοια απόδειξη δείχνει πως εάν ο πίνακας $-R$ είναι αντίστροφος μη αρνητικός, τότε είναι και ο πίνακας $-S$. Τελικώς, πρέπει να δειχθεί πως ο πίνακας R είναι πίνακας θετικής γραμμής, δηλαδή πως ισχύει ότι $R \geq 0$, δεδομένου ότι ο πίνακας R είναι αντιστρέψιμος. Ας υποτεθεί ότι ο πίνακας R είχε ένα αρνητικό στοιχείο. Έστω πως ήταν το στοιχείο στην θέση (i, j). Ας επιλεχθεί ένας mxn πίνακας A τέτοιος ώστε, εκτός από την j - οστή γραμμή, κάθε γραμμή έχει ακριβώς ένα στοιχείο το οποίο είναι ίσο με 1 και κάθε άλλο στοιχείο της είναι ίσο με 0 και, επίσης, κάθε στήλη έχει τουλάχιστον ένα στοιχείο ίσο με 1. Αυτό είναι εφικτό λόγω του γεγονότος ότι $m > n$. Εάν, έπειτα, επιλεχθεί να είναι θετική η j - οστή γραμμή του πίνακα A, τότε ο πίνακας A θα είναι κατ' ελάχιστον ημιθετικός, καθώς θα ισχύει ότι $A \geq 0$ με ένα θετικό στοιχείο σε κάθε γραμμή, πράγμα που τον καθιστά ημιθετικό, και κανένας υποπίνακας διαγεγραμμένης στήλης δεν θα μπορούσε να είναι ημιθετικός, καθώς τότε θα είχε μία μηδενική γραμμή. Παρατηρείται ότι, καθιστώντας κάθε στοιχείο της j - οστής γραμμής του πίνακα A αρκετά μεγάλο, «εξαναγκάζεται» η i - οστή γραμμή του πίνακα A να είναι οποιοδήποτε διάνυσμα $v < 0$, αρκεί οι συνιστώσες του διανύσματος v να είναι αρκετά μεγάλοι αριθμοί. Τώρα, ας επιλεχθεί ένα διάνυσμα $w < 0$ τέτοιο ώστε να αληθεύει πως $wS < 0$. Πρέπει να υπάρχει ένα τέτοιο διάνυσμα, καθώς ο πίνακας R είναι αντίστροφος μη αρνητικός και, επομένως, είναι και ο πίνακας S, πράγμα το οποίο σημαίνει ότι ο πίνακας S είναι ημιθετικός. Ας επιλεχθεί πίνακας A τέτοιος ώστε να ισχύει ότι $v = rw$ για κάποιο αρκετά μεγάλο βαθμωτό μέγεθος r. Τότε ο πίνακας RAS θα έχει μία αρνητική i - οστή γραμμή και, επομένως, δεν θα είναι δυνατό να είναι ημιθετικός. Επομένως, ο πίνακας R πρέπει να είναι πίνακας θετικής γραμμής και, άρα, είναι μονώνυμος.

Τώρα, ας υποτεθεί ότι ο $L(A) = RAS$ είναι ένας «επί» γραμμικός διατηρητής των κατ' ελάχιστον ημιθετικών πινάκων. Ο L πρέπει να είναι αντιστρέψιμος όπως δείχθηκε προηγουμένως και, επομένως, οι $L^{-1}(A) = R^{-1}AS^{-1}$ και $L(A) = RAS$ είναι «εντός» γραμμικοί διατηρητές. Αυτό σημαίνει ότι ο πίνακας R είναι μονώνυμος και ο πίνακας S είναι και αντίστροφος μη αρνητικός και πίνακας θετικής γραμμής και, συνεπώς, μονώνυμος επίσης. ■

Δύναται να προκύψει η εξής διαπίστωση: εάν θεωρηθούν πίνακες $C \in M_{r,m}(\mathbb{R})$ και $B \in M_{n,s}(\mathbb{R})$, τότε ο πίνακας CA (AB) είναι ημιθετικός, για κάθε πίνακα $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ ο οποίος είναι ημιθετικός αν και μόνο αν ο πίνακας C είναι πίνακας θετικής γραμμής (ο πίνακας B είναι μονότονος).

- 2η Περίπτωση: $m = n$

Δεν είναι απαραίτητο το να είναι μονώνυμος ο πίνακας R. Χρειάζεται μόνο ο πίνακας R να είναι μονότονος λόγω του Πορίσματος 2.5.1. (η έννοια του κατ' ελάχιστον ημιθετικού είναι ισοδύναμη με εκείνη του αντίστροφου μη αρνητικού, πράγμα που ισοδυναμεί με την μονοτονικότητα, και η μονοτονικότητα είναι closed under γινόμενο). Αυτή θα έπρεπε να συγκριθεί με την περίπτωση μη τετραγώνου.Θα πρέπει να υπάρξει σύγκριση με την περίπτωση μη τετραγώνου. Η διατήρηση της ιδιότητας του ημιθετικού θα προκύψει αυτομάτως. Αυτό αποκαλύπτεται στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.3. όταν ο πίνακας A με μία διαγεγραμμένη γραμμή ζητείται να είναι κατ' ελάχιστον ημιθετικός. Αυτό δεν θα μπορούσε να συμβεί εάν ίσχυε ότι $m = n$. Τελικώς, αληθεύει το αμέσως επόμενο.

Έστω, L, γραμμικός τελεστής επί του $M_n(\mathbb{R})$ της μορφής (3.1.1). Τότε:

- ο L είναι ένας «εντός» διατηρητής των κατ' ελάχιστον ημιθετικών πινάκων αν και μόνο αν οι πίνακες R και S είναι μονότονοι ή οι πίνακες $-R$ και $-S$ είναι μονότονοι.
- ο L είναι ένας «επί» διατηρητής των κατ' ελάχιστον ημιθετικών πινάκων αν και μόνο οι πίνακες R και S είναι μονώνυμοι ή οι πίνακες $-R$ και $-S$ είναι μονώνυμοι.

3.2 Πρόσθετη θεωρία γραμμικών διατηρητών

Εάν ζητηθεί, απλώς, ο $L: M_{m,n}(\mathbb{R}) \to M_{m,n}(\mathbb{R})$ να είναι ένας «επί» γραμμικός διατηρητής των ημιθετικών πινάκων, χωρίς απαίτηση για ειδική μορφή, προκύπτει ότι η μορφή (3.1.1) είναι απαραίτητη για γραμμική, «επί» διατήρηση των ημιθετικών πινάκων. Αλλά αυτό απαιτεί απόδειξη. Κατ' αρχάς, χρειάζονται κάποια λήμματα.

Λήμμα 3.2.1

Εάν ο $L: M_{m,n}(\mathbb{R}) \to M_{m,n}(\mathbb{R})$ είναι ένας «επί» γραμμικός διατηρητής των ημιθετικών πινάκων, τότε ο $L(X)$ είναι ημιθετικός αν και μόνο αν ο πίνακας X είναι ημιθετικός.

Απόδειξη

Το αποτέλεσμα προκύπτει απί τον ορισμό ενός «επί» διατηρητή και από το γεγονός ότι η κλάση των ημιθετικών πινάκων σχηματίζει μία βάση. ■

Λήμμα 3.2.2

Εάν ο $L: M_{m,n}(\mathbb{R}) \to M_{m,n}(\mathbb{R})$ είναι ένας «επί» γραμμικός διατηρητής των ημιθετικών πινάκων, τότε είναι και ένας «επί» γραμμικός διατηρητής των αριστερών ημιθετικών πινάκων.

Απόδειξη

Κατ' αρχάς, ας παρατηρηθεί ότι ο L είναι ένας «επί» διατηρητής του συνόλου των πινάκων που δεν είναι αριστεροί ημι - μη - θετικοί, καθώς αυτό είναι το ίδιο όπως το σύνολο των πινάκων που είναι ημιθετικοί, από το Θεώρημα των Εναλλακτικών. Όμως, ο L πρέπει να είναι αντιστρέψιμος, καθώς το σύνολο των ημιθετικών πινάκων περιέχει μία βάση για το $M_{m,n}$, έτσι ώστε ο L πρέπει, στην πραγματικότητα, να είναι ένας «επί» διατηρητής των αριστερών ημι - μη - θετικών πινάκων. Ο L είναι ένας ομοιομορφισμός, καθώς ο ίδιος και ο αντίστροφός του είναι συνεχείς, και το σύνολο των αριστερών ημι - μη - θετικών πινάκων είναι το «κλείσιμο» του συνόλου των αριστερών ημιαρνητικών πινάκων και, επομένως, ο L πρέπει να είναι ένας «επί» διατηρητής των αριστερών ημιαρνητικών πινάκων επίσης. Όμως, το σύνολο των αριστερών ημιαρνητικών πινάκων είναι ακριβώς το αρνητικό του συνόλου των αριστερών ημιθετικών πινάκων και, επομένως, εάν το ένα διατηρείται υπό την έννοια του «επί» από μία γραμμική απεικόνιση τότε το ίδιο πρέπει να συμβαίνει και με το άλλο. Συνεπώς, ο L διατηρεί τους αριστερούς ημιθετικούς πίνακες. ■

Η προηγούμενη αιτιολόγηση δύναται να χρησιμοποιηθεί προκειμένου να δειχθεί ότι μία γραμμική απεικόνιση η οποία διατηρεί μία κλάση πινάκων πρέπει να διατηρεί και άλλες επίσης. Τώρα που καθίσταται αντιληπτό το γεγονός ότι οι «επί» γραμμικοί διατηρητές των ημιθετικών πινάκων είναι διατηρητές των αριστερών ημιθετικών πινάκων επίσης, είναι δυνατό να «μεταφερθεί» κάθε γεγονός σχετικώς με τις στήλες των πινάκων αφότου ο L έχει εφαρμοσθεί σε αυτές, στις γραμμές επίσης. Προκειμένου να δειχθεί ότι ένας «επί» γραμμικός διατηρητής των ημιθετικών πινάκων διατηρεί τους μη αρνητικούς πίνακες επίσης, χρειάζεται μία παρατήρηση σχετικώς με την σχέση ανάμεσα στους μη αρνητικούς πίνακες και στους ημιθετικούς πίνακες (η οποία θα μπορούσε να είχε πραγματοποιηθεί ήδη).

Λήμμα 3.2.3

Ένας πίνακας $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ πληροί την ιδιότητα $A \geq 0$ αν και μόνο αν, για κάθε ημιθετικό πίνακα $B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, ο πίνακας $B + A$ είναι ημιθετικός επίσης.

Απόδειξη

Κατ' αρχάς ας υποτεθεί ότι ο πίνακας A είναι μη αρνητικός. Τότε, για κάθε διάνυσμα $v \geq 0$, ισχύει ότι $Av \geq 0$. Επομένως, εάν ισχύει ότι $Bv > 0$, τότε ισχύει ότι $(A + B)v = Av + Bv > 0$ και, επομένως, ο πίνακας $A + B$ είναι ημιθετικός επίσης.

Αντιστρόφως, ας υποτεθεί ότι ο πίνακας A δεν είναι μη αρνητικός. Τότε, ο ο πίνακας A έχει ένα αρνητικό στοιχείο. Ας υποτεθεί ότι αυτό βρίσκεται στην θέση (i, j). Ας επιλεχθεί πίνακας B έτσι ώστε η j - οστή στήλη του πίνακα αυτού είναι θετική και όλα τα υπόλοιπα στοιχεία είναι αρνητικά και μεγαλύτερα, κατ' απόλυτη τιμή, από κάθε στοιχείο του πίνακα A. Επιπλέον, ας ληφθεί το στοιχείο στην θέση (i, j) του πίνακα B να είναι μικρότερο, κατ' απόλυτη τιμή, από το στοιχείο στην θέση (i, j) του πίνακα A. Τότε ο πίνακας B είναι ημιθετικός καθώς έχει μία θετική στήλη, αλλά ο πίνακας $A + B$ δεν είναι ημιθετικός καθώς κάθε στοιχείο του στην i - οστή γραμμή πρέπει να είναι αρνητικό. ■

Τώρα είναι εφικτό να αντιληφθεί κανείς ότι οι «επί» γραμμικοί διατηρητές των ημιθετικών πινάκων είναι «επί» γραμμικοί διατηρητές των μη αρνητικών πινάκων επίσης.

Λήμμα 3.2.4

Εάν ο $L: M_{m,n}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{m,n}(\mathbb{R})$ είναι ένας «επί» γραμμικός διατηρητής των ημιθετικών πινάκων, τότε είναι, επίσης, ένας «εντός» γραμμικός διατηρητής της μη αρνητικότητας, δηλαδή εάν ισχύει ότι $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ και $A \geq 0$ τότε αληθεύει πως $L(A) \geq 0$.

Απόδειξη

Έστω ότι $A \geq 0$. Τότε για οποιονδήποτε ημιθετικό πίνακα B, ο πίνακας $A + B$ είναι ημιθετικός και, επομένως, και ο $L(A + B) = L(A) + L(B)$ είναι ημιθετικός. Παρατηρείται, ακόμη, ότι ο $L(B)$ είναι ημιθετικός. Επιπλέον, για κάθε ημιθετικό πίνακα C, υπάρχει ημιθετικός πίνακας B τέτοιος ώστε να αληθεύει πως $L(B) = C$. Συνεπώς, για κάθε ημιθετικό πίνακα C, ο $L(A) + C$ είναι ημιθετικός. Από το προηγούμενο λήμμα, τότε, αληθεύει πως $L(A) \geq 0$. ■

Τώρα είναι γνωστό ότι εάν ληφθεί ο πίνακας E_{ij}, ένα στοιχείο της βάσης του $M_{m,n}(\mathbb{R})$, και εφαρμοσθεί ένας «επί» γραμμικός διατηρητής L των ημιθετικών πινάκων σε αυτούς, τότε αληθεύει πως $L(E) \geq 0$. Επιπλέον, οποιοδήποτε γεγονός σχετικώς με τις στήλες του $L(E_{ij})$ προκύπτει από αυτό εφαρμόζεται, επίσης, και στις γραμμές του. Έπειτα, προκύπτει ένα γενικό αποτέλεσμα σχετικώς με την διατήρηση των ημιθετικών πινάκων.

Θεώρημα 3.2.1

Ας υποτεθεί $L: M_{m,n}(\mathbb{R}) \to M_{m,n}(\mathbb{R})$. Τότε ο L είναι ένας «επί» γραμμικός διατηρητής των ημιθετικών πινάκων αν και μόνο αν ο L είναι της μορφής (3.1.1) για κάποιους μονώνυμους πίνακες R και S.

Απόδειξη

Είναι γνωστό, ήδη, το αντίστροφο. Τώρα, ας υποτεθεί ότι ο L είναι ένας «επί» γραμμικός διατηρητής των ημιθετικών πινάκων. Πρωτίστως, είναι γνωστό ότι $L(E_{ij}) \geq 0$, από το προηγούμενο λήμμα και την αντιστρεψιμότητα του L. Ας υποτεθεί ότι ο $L(E_{ij})$ έχει θετικά στοιχεία σε περισσότερες, από μία, γραμμές. Επισημαίνεται ότι ο $L(\sum_i E_{ij})$ πρέπει να είναι ημιθετικός καθώς ο $\sum_i E_{ij}$ είναι ημιθετικός (είναι ο πίνακας του οποίου τα στοιχεία στην j - οστή γραμμή είναι ίσα με 1 και τα τα στοιχεία οπουδήποτε αλλού είναι ίσα με 0). Ωστόσο, ο $L(\sum_{i \neq k} E_{ij})$ δεν είναι δυνατό να είναι ημιθετικός για οποιοδήποτε k, καθώς ο $\sum_{i \neq k} E_{ij}$ δεν είναι ημιθετικός, και ο L είναι ένας «επί» διατηρητής των ημιθετικών πινάκων. Τώρα, κάθε $L(E_{ij})$ πρέπει να έχει ένα θετικό στοιχείο σε τουλάχιστον μία γραμμή. Εάν κάποιο είχε θετικά στοιχεία σε δύο γραμμές, θα υπήρχε ένα E_{kj} το οποίο θα είχε θετικά στοιχεία μόνο στις γραμμές που κάποιο άλλο E_{ij} έχει ένα θετικό στοιχείο ήδη. Όμως, τότε, ο $L(\sum_{i \neq k} E_{ij})$ θα ήταν ημιθετικός, καθώς κάθε γραμμή θα είχε ένα θετικό στοιχείο και κανένα στοιχείο δεν θα ήταν αρνητικό, οπότε το άθροισμα κάθε στήλης θα ήταν θετικό. Επομένως, κάθε $L(E_{ij})$ δύναται να έχει θετικά στοιχεία σε μία γραμμή μόνο. Από το γεγονός ότι ο L είναι ένας διατηρητής των αριστερών ημιθετικών πινάκων επίσης, κάθε $L(E_{ij})$ δύναται να έχει θετικά στοιχεία σε μία στήλη μόνο επίσης. Συνεπώς, κάθε $L(E_{ij})$ είναι ένας πίνακας με ακριβώς ένα θετικό στοιχείο, το οποίο δεν είναι δυνατό να «μοιραστεί» με κανέναν άλλο $L(E_{kl})$, λόγω της αντιστρεψιμότητας του L.

Έπειτα, ας υποτεθεί ότι οι $L(E_{ij})$ με καθορισμένα j «στέλνονται» σε πίνακες με το θετικό στοιχείο σε διαφορετικές στήλες. Τότε, ας θεωρηθεί ένας πίνακας A με μία μικρή θετική j - οστή στήλη και μεγάλα αρνητικά στοιχεία οπουδήποτε αλλού. Εάν τα στοιχεία στην j - οστή στήλη του πίνακα A δεν «αποσταλούν» στην ίδια στήλη του L(A), τότε θα προκύψει ένας πίνακας του οποίου τα θετικά στοιχεία δεν βρίσκονται όλα στην ίδια στήλη. Δεδομένου ότι μπορεί κανείς να καταστήσει τα αρνητικά στοιχεία όσο μεγάλα επιθυμεί, είναι δυνατό να «εξαναγκάσει» τον L(A) να μην είναι ημιθετικός, παρά το γεγονός ότι ο πίνακας A ήταν. Επομένως, όλα τα στοιχεία στην ίδια στήλη του πίνακα A πρέπει να «αποσταλούν» στην ίδια στήλη του L(A). Και πάλι, αυτό πρέπει να αληθεύει και για τις γραμμές.

Το προηγούμενο, τώρα, «εξαναγκάζει» τον L να είναι μία σύνθεση πολλαπλασιασμού Hadamard με κάποιον θετικό πίνακα, και μετάθεσης γραμμών και στηλών. Δεδομένου ότι οι πίνακες μετάθεσης είναι όλοι μονώνυμοι, είναι δυνατό να υποτεθεί ότι ο L είναι, απλώς, πολλαπλασιασμός Hadamard με κάποιον θετικό πίνακα, έτσι ώστε να αληθεύει ότι $L(E_{ij}) = r_{ij}E_{ij}$.

Ας θεωρηθεί ο εξής πίνακας:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρείται ότι ο πίνακας A είναι ημιθετικός αν και μόνο αν ισχύει ότι $x < 1$. Τότε αληθεύει το εξής:

$$L(A) = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & r_{i,j} & -xr_{i,j+1} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & -xr_{i+1,j} & r_{i+1,j+1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας $L(A)$ είναι ημιθετικός αν και μόνο αν ο πίνακας A είναι ημιθετικός, επομένως ο πίνακας $L(A)$ είναι ημιθετικός αν και μόνο αν ισχύει ότι $x < 1$. Δεδομένου ότι όλες οι άλλες στήλες, εκτός από τις υπ' αριθμόν j και $j + 1$, είναι μηδενικές και, επίσης, όλες οι άλλες γραμμές των υπ' αριθμόν j και $j + 1$, εκτός από εκείνες υπ' αριθμόν i και $i + 1$, είναι θετικές, το εάν ο $L(A)$ είναι ημιθετικός εξαρτάται εντελώς από αυτά τα τέσσερα στοιχεία. Θέτοντας $x = 1$, προκύπτει ότι πρέπει να είναι $r_{i,j} = ar_{i,j+1}$ και $r_{i+1,j} = ar_{i+1,j+1}$. Αυτό, όμως, δύναται να επαναλαμβάνεται για κάθε ζεύγος στηλών και γραμμών ώστε ανακαλύπτεται το εξής: ο αριθμός με τον οποίο πολλαπλασιάζεται ένα στοιχείο κάποιας στήλης είναι ένας καθορισμένος λόγος με τον αριθμό με τον οποίο πολλαπλασιάζεται το στοιχείο μίας διαφορετικής στήλης στην ίδια γραμμή. Αυτό συνιστά, απλώς, πολλαπλασιασμό από τα δεξιά με έναν θετικί διαγώνιο πίνακα. Και πάλι, είναι δυνατό να εφαρμοσθεί το γεγονός ότι ο L πρέπει να διατηρεί τους αριστερούς ημιθετικούς πίνακες προκειμένου να δειχθεί πως ο λόγος των γραμμών πρέπει, επίσης, να βρίσκεται εντός μίας καθορισμένης αναλογίας, και έτσι ο L είναι, απλώς, πολλαπλασιασμός από τα αριστερά και από τα δεξιά με θετικούς διαγώνιους πίνακες. Αυτοί, όμως, είναι μονώνυμοι πίνακες επίσης, επομένως κάθε «επί» γραμμικός διατηρητής των ημιθετικών πινάκων δύναται να γραφεί ως $L(A) = RAS$ για μονώνυμους πίνακες R και S. ■

Για τους «εντός» γραμμικούς διατηρητές των ημιθετικών πινάκων, η αναγκαιότητα της ειδικής μορφής (3.1.1) δεν ακολουθεί.

Παράδειγμα 3.2.1

Ας θεωρηθεί η γραμμική απεικόνιση $L: M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ η οποία δίδεται ως εξής:

$$L\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & b \\ a & b-a \end{bmatrix}.$$

Αυτή η απεικόνιση διατηρεί τους ημιθετικούς πίνακες και δεν είναι ούτε της μορφής (3.1.1) ούτε αντιστρέψιμη. Προκειμένου το όρισμα A να είναι ημιθετικός πίνακας, είτε ο αριθμός a είτε ο αριθμός b πρέπει να είναι θετικός. Εάν ισχύει ότι $a > 0$, η πρώτη στήλη του $L(A)$ είναι θετική και, επομένως, ο $L(A)$ είναι ημιθετικός. Εάν ισχύει ότι $b > 0$ και $a \leq 0$, τότε η δεύτερη στήλη του $L(A)$ είναι θετική, και ο $L(A)$ είναι ημιθετικός. Συνεπώς, ο L διατηρεί τους ημιθετικούς πίνακες. Δεδομένου ότι

$$L\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

ο L μπορεί να αυξήσει τον βαθμό και, επομένως, δεν δύναται να είναι της μορφής (3.1.1).

Πιο γενικά, ας θεωρηθεί η απεικόνιση στο $M_{m,n}(\mathbb{R})$ η οποία δίδεται ως εξής:

$$L([a_{ij}]) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} - a_{11} & \dots & a_{1n} - \sum_{k=1}^{n-1} a_{1k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{11} & a_{12} - a_{11} & \dots & a_{1n} - \sum_{k=1}^{n-1} a_{1k} \end{bmatrix}.$$

Δεδομένου ότι κάθε ημιθετικός πίνακας έχει ένα θετικό στοιχείο στην πρώτη γραμμή, ο $L([a - ij])$ έχει μία θετική στήλη, έτσι ώστε διατηρείται η ιδιότητα του ημιθετικού. Όμως, καθώς ο L δύναται να αυξήσει τον βαθμό, ο L δεν είναι της μορφής (3.1.1). ■

4. ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΗΜΙΘΕΤΙΚΩΝ ΠΙΝΑΚΩΝ

Το 4^o κεφάλαιο περιέχει θεωρία σχετικώς με την Γεωμετρία των ημιθετικών πινάκων.

4.1 Εισαγωγικές έννοιες

Ας θεωρηθεί το ακόλουθο σύνολο, το οποίο αποτελεί το «κλείσιμο» του συνόλου $S_+(A)$.

Ορισμός 4.1.1

Για πίνακα $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, ας οριστεί το σύνολο $K_+(A) = \{x \in \mathbb{R}^n: x \geq 0 \text{ και } Ax \geq 0\}$. Ας επισημανθεί ότι ο πίνακας A είναι ημιθετικός αν και μόνο αν το σύνολο $AK_+(A)$ περιέχει ένα θετικό διάνυσμα, οπότε και το $K_+(A)$ αναφέρεται ως ο **ημιθετικός κώνος** του A. ■

Είναι γεγονός ότι πολλά από τα αποτελέσματα αναφορικά με το σύνολο $K_+(A)$ ισχύουν για αυθαίρετο πίνακα $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ - ωστόσο, υπάρχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον για την περίπτωση των ημιθετικών πινάκων. Στόχο αποτελούν ο υπολογισμός και η μελέτη του συνόλου $K_+(A)$ θεωρώντας το ως έναν κυρτό κώνο στο $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ (ένα σύνολο καλείται **κυρτό** όταν ισχύει το εξής: λαμβάνοντας δύο οποιαδήποτε σημεία του, όλα τα σημεία του ευθυγράμμου τμήματος που συνδέει τα δύο σημεία ανήκουν στο σύνολο). Ως εκ τούτου, θα πρέπει να παρατεθούν μερικές βασικές πληροφορίες σχετικώς με τους γενικευμένους αντιστρόφους και τους κώνους.

Ο **Moore - Penrose** αντίστροφος ενός πίνακα $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ συμβολίζεται με A^+, και ο **αντίστροφος ομάδας** του A συμβολίζεται με $A^\#$. Οι ιδιότητες που τους ορίζουν είναι, αντιστοίχως, οι εξής: $AA^+A = A$, $A^+AA^+ = A^+$, $(AA^+)^T = AA^+$, $(A^+A)^T = A^+A$ και, $AA^\#A = A$, $A^\#AA^\# = A^\#$, $AA^\# = A^\#A$.

Ας συμβολιστεί με $R(A)$ ο **χώρος στηλών** του πίνακα A και με $\text{null}(A)$ ο **μηδενοχώρος** του. Ενώ ο Moore - Penrose αντίστροφος υπάρχει για όλους τους πίνακες A, ο αντίστροφος ομάδας ενός τετραγωνικού πίνακα $A \in M_n(\mathbb{R})$ υπάρχει αν και μόνο αν αληθεύει ότι $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^2)$ ή ισοδυνάμως ότι $\text{null}(A) = \text{null}(A^2)$. Είναι γνωστό, επίσης, ότι ο αντίστροφος ομάδας υπάρχει αν και μόνο αν ο χώρος στηλών του πίνακα A και ο μηδενοχώρος του πίνακα A αποτελούν συμπληρωματικούς υποχώρους του $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ (δηλαδή, το ευθύ άθροισμά τους δίδει το $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ ως αποτέλεσμα - το $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ θεωρείται ως το ευθύ άθροισμα των υποχώρων $R(A)$ και $\text{null}(A)$ εάν ισχύει ότι $\mathbb{R}^{\mathbf{n}} = R(A) + \text{null}(A)$ και $R(A) \cap \text{null}(A) = \{0\}$ ή αλλιώς αν και μόνο αν για κάθε διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$ υπάρχουν μοναδικά διανύσματα $r \in R(A)$ και $n \in \text{null}(A)$ έτσι ώστε να αληθεύει ότι $x = r + n$).

Ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$ καλείται **ακτινικά συμμετρικός** εάν ισχύει ότι $R(A) = R(A^T)$ ή ισοδυνάμως ότι $A^+ = A^\#$. Επιπλέον, ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις: $R(A^+) = R(A^T)$, $\text{null}(A^+) = \text{null}(A^T)$, $R(A^\#) = R(A)$, $\text{null}(A^\#) = \text{null}(A)$.

Σε αυτό το σημείο, θα πρέπει να επισημανθεί το εξής: το τοπολογικό εσωτερικό του $\mathbb{R}^n_+$ περιλαμβάνει όλα τα θετικά διανύσματα στο $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ και συμβολίζεται με $\text{int}\,\mathbb{R}^n_+$. Είναι δυνατή, λοιπόν, η χρήση είτε του «$x > 0$» είτε του «$x \in \text{int}\,\mathbb{R}^n_+$».

Επιπροσθέτως, το **δυϊκό σύνολο** ενός συνόλου $S \subseteq \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ είναι το σύνολο $S^* = \{z \in \mathbb{R}^n : z^T y \geq 0$ για όλα τα διανύσματα $y \in S\}$.

Ακόμη, ένα μη κενό κυρτό σύνολο $K \subseteq \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ θεωρείται **κώνος** εάν ισχύει ότι $\alpha K \subseteq K$ για όλα τα $\alpha \geq 0$. Ένας κώνος, K, καλείται **αρμόζων** εάν αληθεύουν τα εξής: είναι *κλειστός* (στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$), είναι *οριοθετημένος* (δηλαδή ισχύει ότι $K \cap (-K) = \{0\}$), είναι *συμπαγής* (δηλαδή το τοπολογικό εσωτερικό του K, int K, είναι μη κενό).

Από την άλλη, ένας **πολυεδρικός κώνος** $K \subseteq \mathbb{R}^{\boldsymbol{m}}$ είναι ένας κώνος ο οποίος αποτελείται από όλους τους μη αρνητικούς γραμμικούς συνδυασμούς ενός πεπερασμένου συνόλου διανυσμάτων στο $\mathbb{R}^{\mathbf{m}}$, οι οποίοι καλούνται **γεννήτορες** του K. Συνεπώς, ο K είναι πολυεδρικός κώνος αν και μόνο αν αληθεύει ότι $K = X\mathbb{R}_+^{\mathbf{n}}$ για πίνακα $X \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ - όταν, δε, ισχύει ότι $m = n$ και ο πίνακας X είναι αντιστρέψιμος, τότε ο $K = X\mathbb{R}_+^{\mathbf{n}}$ καλείται **απλοϊκός κώνος** στο $\mathbb{R}_+^{\mathbf{n}}$. Επισημαίνεται, ακόμη, ότι οι απλοϊκοί κώνοι στο $\mathbb{R}^n$ είναι αρμόζοντες κώνοι.

Επιπλέον, ένα κώνος K καλείται **οξύς** εάν αληθεύει ότι $p^T q \geq 0$ για όλα τα διανύσματα $p, q \in K$. Σε όρους του δυϊκού του, η οξύτητα ισοδυναμεί με την συμπερίληψη $K \subseteq K^*$. Μία δυϊκή ιδέα είναι εκείνη της αμβλύτητας: ένας κώνος K καλείται **αμβλύς** εάν αληθεύει ότι $K^* \subseteq K$. Ένας κώνος K καλείται **αυτοδυϊκός**, δε, εάν είναι και οξύς και αμβλύς. Παράδειγμα αυτοδυϊκού κώνου αποτελεί ο $\mathbb{R}_+^n$.

Τέλος, δύο θεμελιώδη αποτελέσματα, τα οποία συνδέονται με τα προηγούμενα, είναι τα ακόλουθα.

Κατ' αρχάς, θεωρώντας πίνακα $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ και διάνυσμα $b \in \mathbb{R}^{\mathbf{m}}$, το σύστημα γραμμικών εξισώσεων $Ax = b$ έχει λύση αν και μόνο αν αληθεύει ότι $AA^+ b = b$. Σε αυτή την περίπτωση, μάλιστα, η γενική λύση είναι της μορφής $x = A^+ b + z$, όπου $z \in \mathrm{null}(A)$.

Έπειτα, θεωρώντας ότι το $K \subseteq \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ είναι ένα κλειστό κυρτό σύνολο και, επίσης, διάνυσμα $b \notin K$, τότε υπάρχουν διάνυσμα $c \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ και πραγματικός αριθμός α έτσι ώστε να αληθεύει το εξής: $c^T b < \alpha \leq c^T x$ για όλα τα διανύσματα $x \in K$.

4.2 Κώνοι που συνδέονται με τους ημιθετικούς πίνακες

Κατ' αρχάς, ας αναφερθεί το ακόλουθο Θεώρημα.

Θεώρημα 4.2.1

Ένας πίνακας $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ είναι ημιθετικός αν και μόνο αν υπάρχουν θετικοί πίνακες $X \in M_n(\mathbb{R})$ και $Y \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ έτσι ώστε να αληθεύουν τα εξής: ο πίνακας X είναι αντιστρέψιμος και $A = YX^{-1}$.

Απόδειξη

Έστω ότι ο πίνακας A είναι ημιθετικός, δηλαδή υπάρχουν θετικά διανύσματα $x \in \mathrm{int}\, \mathbb{R}_+^n$ και $y \in \mathrm{int}\, \mathbb{R}_+^m$ έτσι ώστε να ισχύει πως $Ax = y$. Ας οριστούν, έπειτα, οι πίνακες $X = xe^T + \varepsilon I \in M_n(\mathbb{R})$ και $Y = ye^T + \varepsilon A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, όπου το e συμβολίζει όλα τα διανύσματα, καταλλήλου μήκους, με κάθε συνιστώσα ίση με 1 και, επίσης, η ποσότητα $\varepsilon > 0$ επιλέγεται επαρκώς μικρή προκειμένου να ισχύει ότι $Y > 0$. Ακολούθως, το αποτέλεσμα προκύπτει από τα εξής δύο γεγονότα: $AX = Y$ και ο πίνακας $X > 0$ είναι αντιστρέψιμος καθώς οι ιδιοτιμές του είναι οι ε και $e^T x + \varepsilon$.

Για το αντίστροφο, ας υποτεθεί ότι υπάρχουν θετικοί πίνακες $X \in M_n(\mathbb{R})$ και $Y \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ έτσι ώστε να αληθεύει πως $A = YX^{-1}$. Ακόμη, ας θεωρηθεί διάνυσμα $u \in \operatorname{int} \mathbb{R}^n_+$ και ας τεθεί διάνυσμα $v = Xu \in \operatorname{int} \mathbb{R}^n_+$. Τότε, αληθεύει πως $Av = YX^{-1}v = Yu \in \operatorname{int} \mathbb{R}^m_+$ και, επομένως, ο πίνακας A είναι ημιθετικός. ∎

Από την άλλη, το επόμενο Θεώρημα δείχνει ότι οι ημιθετικοί πίνακες συμπεριφέρονται ως μη αρνητικοί πίνακες επί πολυεδρικών υπο - κώνων του $\mathbb{R}^n_+$.

<u>Θεώρημα 4.2.2</u>

Ένας πίνακας $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ είναι ημιθετικός αν και μόνο αν υπάρχουν αρμόζων πολυεδρικός κώνος $K_1 \subseteq \mathbb{R}^n_+$ και πολυεδρικός κώνος $K_2 \subseteq \operatorname{int} \mathbb{R}^m_+ \cup \{0\}$, έτσι ώστε να αληθεύει ότι $AK_1 = K_2$.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω ότι ο πίνακας A είναι ημιθετικός. Ας θεωρηθούν οι πίνακες X και Y του Θεωρήματος 4.2.1, έτσι ώστε να αληθεύει ότι $A = YX^{-1}$, και έστω ότι ισχύουν τα εξής: $K_1 = X\mathbb{R}^n_+$ και $K_2 = Y\mathbb{R}^n_+$. Καθώς, ο πίνακας X είναι θετικός και αντιστρέψιμος, ο K_1 είναι απλοϊκός και, επομένως, αρμόζων κώνος στο $\mathbb{R}^n_+$. Καθώς ισχύει ότι $Y > 0$, ο K_2 είναι πολυεδρικός κώνος στο $\operatorname{int} \mathbb{R}^m_+ \cup \{0\}$. Επίσης, αληθεύει πως $AK_1 = YX^{-1}X\mathbb{R}^n = K_2$.

Για το αντίστροφο, ας υποτεθεί ότι υπάρχουν ένας αρμόζων κώνος $K_1 \subseteq \mathbb{R}^n_+$ και ένας πολυεδρικός κώνος $K_2 \subseteq \operatorname{int} \mathbb{R}^m_+ \cup \{0\}$, έτσι ώστε να αληθεύει ότι $AK_1 = K_2$. Καθώς ο $K_1 \subseteq \mathbb{R}^n_+$ είναι αρμόζων κώνος, είναι συμπαγής και υπάρχει διάνυσμα $x \in \operatorname{int} K_1 \subseteq \operatorname{int} \mathbb{R}^n_+$ επομένως. Έπεται ότι $Ax \in K_2 \backslash \{0\} \subseteq \operatorname{int} \mathbb{R}^m_+$. Συνεπώς, ο πίνακας A είναι ημιθετικός. ∎

Έπειτα, το επόμενο Θεώρημα σχετίζεται με το σύνολο $K_+(A)$ και το δυϊκό σύνολό του, $K_+(A)^*$.

<u>Θεώρημα 4.2.3</u>

Έστω ένας πίνακας $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Τότε αληθεύει ότι $K_+(A)^* = A^T(\mathbb{R}^m_+) + \mathbb{R}^n_+$.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω διάνυσμα $y = A^T u + v$, όπου $u \in \mathbb{R}^m_+$ και $v \in \mathbb{R}^n_+$, και έστω διάνυσμα $x \in K_+(A)$. Τότε, αληθεύει πως $x \geq 0$ και $Ax \geq 0$. Ισχύει ότι $x^T y = x^T(A^T u + v) = (Ax)^T u + x^T v \geq 0$, έτσι ώστε να αληθεύει ότι $A^T(\mathbb{R}^m_+) + \mathbb{R}^n_+ \subseteq K_+(A)^*$.

Αντιστρόφως, έστω διάνυσμα $y \in K_+(A)^*$. Ας υποτεθεί ότι $y \notin A^T(\mathbb{R}^m_+) + \mathbb{R}^n_+$. Τότε, από το τελευταίο αποτέλεσμα του υποκεφαλαίου 4.1, υπάρχει ένα διάνυσμα p και ένας αριθμός α έτσι ώστε να αληθεύει το εξής: $p^T y < \alpha \leq p^T(A^T u + v)$ για όλα τα διανύσματα $u \in \mathbb{R}^m_+$ και $v \in \mathbb{R}^n_+$. Θέτοντας $u = 0$ και $v = 0$, προκύπτει ότι $\alpha \leq 0$. Αντικαθιστώντας το u με το tu και το v με το tv, για $t > 0$, προκύπτει ότι $\alpha \leq tp^T(A^T u + v)$ για όλα τα διανύσματα $u \in \mathbb{R}^m_+$ και $v \in \mathbb{R}^n_+$. Τότε, ισχύει ότι $\frac{\alpha}{t} \leq p^T(A^T u + v)$ για όλα τα διανύσματα $u \in \mathbb{R}^m_+$ και $v \in \mathbb{R}^n_+$. Θεωρώντας ότι $t \to \infty$, προκύπτει ότι $p^T y < \alpha \leq 0 \leq p^T(A^T u + v)$ για όλα τα διανύσματα

$u \in \mathbb{R}^m_+$ και $v \in \mathbb{R}^n_+$. Θέτοντας $u = 0$ και $v = 0$ χωριστά, προκύπτει ότι $p^T v \geq 0$ για όλα τα διανύσματα $v \geq 0$ και $(Ap)^T u \geq 0$ για όλα τα διανύσματα $u \geq 0$, πράγμα το οποίο δείχνει ότι $p \geq 0$ και $Ap \geq 0$, δηλαδή $p \in K_+(A)$. Καθώς ισχύει ότι $p^T y < 0$, προκύπτει αντίφαση ως προς το ότι $y \in K_+(A)^*$. ■

Πόρισμα 4.2.1

Έστω ότι ο πίνακας $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ είναι ημιθετικός. Τότε αληθεύει ότι το $K_+(A)$ αποτελεί έναν αρμόζοντα πολυεδρικό κώνο στο $\mathbb{R}^n$.

Απόδειξη

Κατ' αρχάς, το $K_+(A)$ είναι ένα κυρτό σύνολο το οποίο είναι κλειστό υπό μη αρνητική κλίμακα. Δεδομένου ότι ο πίνακας A είναι ημιθετικός, το σύνολο $K_+(A)$ περιέχει θετικό διάνυσμα. Ως εκ τούτου, το $K_+(A)$ συνιστά έναν μη τετριμμένο κώνο στο $\mathbb{R}^n$. Έστω, τώρα, διάνυσμα $x \in \operatorname{int} \mathbb{R}^n_+$ έτσι ώστε να ισχύει ότι $Ax \in \operatorname{int} \mathbb{R}^m_+$ και έστω, επίσης, πίνακες X και Y και κώνοι K_1 και K_2 όπως στην Απόδειξη του Θεωρήματος 4.2.2 έτσι ώστε να αληθεύει ότι $AK_1 = K_2$. Επομένως, ο K_1 είναι ένας απλοϊκός και, συνεπώς, ένας αρμόζων πολυεδρικός κώνος ο οποίος περιέχεται στο $K_+(A)$. Έπεται ότι το $K_+(A)$ περιέχει έναν συμπαγή κώνο και, επομένως, ο $K_+(A)$ είναι συμπαγής. Επίσης, ισχύει ότι $K_+(A) \subseteq \mathbb{R}^n_+$ και, επομένως, ο K είναι οριοθετημένος. Τελικώς, το $K_+(A)$ αποτελεί ένα κλειστό σύνολο. Συνεπώς, αποτελεί έναν αρμόζοντα κώνο στο $\mathbb{R}^n$. Έπειτα, αληθεύει ότι ένα οποιοδήποτε μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ συνιστά έναν πολυεδρικό κώνο αν και μόνο αν το δυϊκό σύνολό του συνιστά έναν πολυεδρικό κώνο. Από το Θεώρημα 4.2.3, ισχύει ότι $K_+(A)^* = [A^T I_n]\mathbb{R}^n_+$, δηλαδή ο $K_+(A)^*$ είναι ο κώνος ο οποίος γεννάται από τις n - το πλήθος - στήλες του πίνακα A^T και από τις στήλες του nxn ταυτοτικού πίνακα. Έπεται ότι ο ${K_A}^*$ και, επομένως, και ο $K_+(A)$ είναι πολυεδρικοί κώνοι. ■

Το επόμενο Πόρισμα παρέχει μία αναγκαία και ικανή συνθήκη προκειμένου ο κώνος $K_+(A)$ να είναι αυτοδυϊκός.

Πόρισμα 4.2.2

Έστω ότι ο πίνακας $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ είναι ημιθετικός. Τότε ο κώνος $K_+(A)$ είναι οξύς. Ο κώνος $K_+(A)$ είναι αμβλύς αν και μόνο αν ισχύει ότι $A \geq 0$. Ο κώνος $K_+(A)$ είναι αυτοδυϊκός αν και μόνο αν ισχύει ότι $A \geq 0$.

Απόδειξη

Έστω καθορισμένο διάνυσμα $x \in K_+(A)$ και αυθαίρετο διάνυσμα $y \in K_+(A)$. Τότε, ισχύει ότι $x \geq 0$ και $y \geq 0$ έτσι ώστε να αληθεύει ότι $x^T y \geq 0$, πράγμα το οποίο δείχνει πως $x \in K_+(A)^*$. Επομένως, ο $K_+(A)$ είναι ένας οξύς κώνος. Έπειτα, έστω ότι $A \geq 0$. Τότε, ισχύουν τα εξής: $K_+(A) = \mathbb{R}^n_+$ και, επομένως, $K_+(A)^* = \mathbb{R}^n_+$. Συνεπώς, $K_+(A)^* \subseteq K_+(A)$, δηλαδή ο κώνος $K_+(A)$ είναι αμβλύς.

Αντιστρόφως, έστω ότι ο κώνος $K_+(A)$ είναι αμβλύς, δηλαδή $K_+(A)^* \subseteq K_+(A)$. Τότε, ισχύει ότι $A^T(R^m_+) + R^n_+ \subseteq K_+(A) \subseteq R^n_+$, έτσι ώστε για κάθε διάνυσμα $u \in R^m_+$ και για κάθε διάνυσμα $v \in R^n_+$ να αληθεύει ότι $A^T u + v \geq 0$. Θέτοντας $v = 0$, προκύπτει ότι $A^T u \geq 0$ για κάθε διάνυσμα $u \in R^m_+$. Αυτό σημαίνει ότι $A^T \geq 0$, δηλαδή $A \geq 0$. ■

Τέλος, είναι σημαντικό το επόμενο Θεώρημα.

<u>Θεώρημα 4.2.4</u>

Έστω πίνακες $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ και έστω ότι ισχύει πως $null(A) \subseteq null(B)$. Ας θεωρηθούν οι επόμενες συνθήκες:

a) $BA^{+} \geq 0$.
b) $Ax \geq 0 => Bx \geq 0$.
c) $B(K_{+}(A)) \subseteq R_{+}^{n}$.
d) $K_{+}(A) \subseteq K_{+}(B)$.
e) Υπάρχει πίνακας $W \geq 0$ έτσι ώστε να ισχύει ότι $B = WA$.

Τότε, αληθεύει ότι a) => b) => c) => d) => e).

Περαιτέρω, ας υποτεθεί ότι ισχύει πως $AA^{+} \geq 0$. Τότε, όλες οι προηγούμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες.

<u>Απόδειξη</u>

a) => b). Έστω διάνυσμα $y = Ax \geq 0$. Τότε, ισχύει ότι $x = A^{+}y + z$, για $z \in null(A) \subseteq null(B)$. Επομένως, αληθεύει ότι $Bx = BA^{+}y \geq 0$, καθώς $BA^{+} \geq 0$.

b) => c). Έστω διάνυσμα $x \in K_{+}(A)$ έτσι ώστε να ισχύει ότι $x \geq 0$ και $Ax \geq 0$. Τότε, αληθεύει ότι $Bx \geq 0$ και, επομένως, ισχύει το c).

c) => d). Έστω διάνυσμα $x \in K_{+}(A)$ έτσι ώστε να ισχύει ότι $x \geq 0$. Τότε, αληθεύει ότι $Bx \geq 0$ και, επομένως, $x \in K_{+}(B)$.

d) => e). Έστω ότι $K_{+}(A) \subseteq K_{+}(B)$. Τότε, ισχύει ότι $\left(K_{+}(B)\right)^{*} \subseteq \left(K_{+}(A)\right)^{*}$ έτσι ώστε, από το Θεώρημα 4.2.3, προκύπτει η εξής συμπερίληψη: $B^{T}(\mathbb{R}_{+}^{m}) + \mathbb{R}_{+}^{n} \subseteq A^{T}(\mathbb{R}_{+}^{m}) + \mathbb{R}_{+}^{n}$. Ειδικότερα, για κάθε διάνυσμα $u \in \mathbb{R}_{+}^{m}$, υπάρχει διάνυσμα $v \in \mathbb{R}_{+}^{m}$ έτσι ώστε να ισχύει ότι $B^{T}u = A^{T}v$. Υπό προϋποθέσεις, όμως, είναι δυνατή η εύρεση πίνακα V έτσι ώστε να αληθεύει πως $V \geq 0$ και $B^{T} = A^{T}V$. Κατόπιν, θέτοντας $V = W^{T}$, προκύπτει το e).

Περαιτέρω, ας υποτεθεί ότι ισχύει πως $AA^{+} \geq 0$. Τότε, αληθεύει πως $BA^{+} = WAA^{+} \geq 0$, πράγμα το οποίο δείχνει πως e) => a) και, ως εκ τούτου, αποδεικνύεται ότι οι συνθήκες είναι ισοδύναμες. ■

5. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟ MATLAB

Το 5ο κεφάλαιο περιέχει μία εισαγωγή στο MATLAB παρουσιάζοντας τις βασικές πληροφορίες σχετικώς με την εκμάθηση και την χρήση του.

5.1 Αριθμοί & αριθμητικοί τελεστές

Κατ' αρχάς, είναι γεγονός πως το MATLAB χειρίζεται ορισμένους **τύπους αριθμών**: ακέραιο, πραγματικό, μιγαδικό. Επίσης, χειρίζεται την μαθηματική απροσδιοριστία ($\frac{0}{0}$ για παράδειγμα), καθώς και το μαθηματικό άπειρο ($\frac{2}{0}$ για παράδειγμα).

Επιπλέον, το MATLAB χειρίζεται ορισμένους **αριθμητικούς τελεστές**. Πρόκειται για σύμβολα που σηματοδοτούν συγκεκριμένες πράξεις ανάμεσα στους αντίστοιχους δύο τελεστέους: «$+$» (πρόσθεση), «$-$» (αφαίρεση), «$*$» (πολλαπλασιασμός), «$/$» (διαίρεση), «$^\wedge$» (ύψωση σε δύναμη). Το MATLAB πραγματοποιεί τις πράξεις σε μία αριθμητική παράσταση, δε, σύμφωνα με τους γνωστούς κανόνες προτεραιότητας. Ενδεικτικά παραδείγματα είναι τα εξής: $1+2$ (αποτέλεσμα: 3), $3.1456-1.2231$ (αποτέλεσμα: 1.9225), $2*1.2231$ (αποτέλεσμα: 2.4462), $8/2.22$ (αποτέλεσμα: 3.6036), $3^\wedge2$ (αποτέλεσμα: 9), $(1-2*3^2/2)*(1.0000+2.0000\mathrm{i})$ (αποτέλεσμα: $-8.0000-16.0000\mathrm{i}$).

5.2 Μεταβλητές & απόδοση τιμών

Είναι γεγονός πως το MATLAB επιτρέπει την χρήση **μεταβλητών** με σκοπό την **απόδοση τιμών - αποθήκευση δεδομένων** και, ακολούθως, τον πιο εύκολο χειρισμό των τελευταίων. Ως προς τα ονόματα μεταβλητών που επιτρέπεται να χρησιμοποιήσει κάποιος, υπάρχει ο εξής βασικός κανόνας: πρέπει να αρχίζουν με γράμμα (του αγγλικού αλφαβήτου) και να περιέχουν μόνο γράμματα, αριθμούς και υποπαύλες. Επίσης, θα πρέπει να μην είναι ονόματα τυπικών εντολών της MATLAB. Τέλος, η διαφοροποίηση γράμματος από πεζό σε κεφαλαίο ή το αντίστροφο συνιστά την ύπαρξη διαφορετικής μεταβλητής (για παράδειγμα, οι μεταβλητές $\mathrm{ab}, \mathrm{Ab}, \mathrm{aB}, \mathrm{AB}$ είναι διαφορετικές ανά δύο).

Επίσης, η απόδοση τιμής σε μία μεταβλητή πραγματοποιείται με χρήση του συμβόλου «=». Πιο συγκεκριμένα, η τιμή, η οποία βρίσκεται στα δεξιά του συγκεκριμένου συμβόλου, αποδίδεται στην μεταβλητή, η οποία βρίσκεται στα αριστερά του. Είναι χαρακτηριστικά τα εξής παραδείγματα: $\mathrm{a}=0$ (η τιμή 0 αποδίδεται στην μεταβλητή a), $\mathrm{a}=\mathrm{a}-1$ (η τιμή -1 αποδίδεται στην μεταβλητή a).

5.3 Διανύσματα

Κατ' αρχάς, το MATLAB χειρίζεται **διανύσματα** και, ακόμη, επιτρέπει την απόδοση διανύσματος τιμών σε μεταβλητή.

Προκειμένου να κατασκευαστεί ένα **διάνυσμα - γραμμή**, οι συνιστώσες του θα πρέπει να γραφούν χωριζόμενες με κενό ή με το σύμβολο «,» και περικλειόμενες από αγκύλες. Είναι εφικτή, μάλιστα, η χρήση του συμβόλου «:» προκειμένου να αποδοθούν τιμές με συνοπτικό τρόπο (από κάποια αρχική τιμή έως και κάποια τελική τιμή, βάσει κάποιου αριθμητικού βήματος το οποίο ισούται με 1 εάν δεν εμφανίζεται). Από την άλλη, προκειμένου να κατασκευαστεί ένα **διάνυσμα - στήλη**, οι συνιστώσες του θα πρέπει να γραφούν χωριζόμενες με το σύμβολο «;»[12] και περικλειόμενες από αγκύλες. Ακόμη, είναι δυνατή η αναστροφή ενός διανύσματος - γραμμή, οπότε θα καταστεί διάνυσμα - στήλη, με χρήση του συμβόλου «'» (ομοίως, είναι δυνατή και η αναστροφή ενός διανύσματος - στήλη, το οποίο θα καταστεί διάνυσμα - γραμμή). Είναι ενδεικτικά τα εξής παραδείγματα: $\mathrm{a} = [0,1,2]$ (η τιμή $0\ 1\ 2$ αποδίδεται στην μεταβλητή a), $\mathrm{a} = [0\ 1\ 2]$ (η τιμή $0\ 1\ 2$ αποδίδεται στην μεταβλητή a), $\mathrm{a} = [0{:}\,2{:}\,6]$ (η τιμή $0\ 2\ 4\ 6$ αποδίδεται στην μεταβλητή a), $\mathrm{a} = [0{:}\,2]'$ (η τιμή $0\ 1\ 2$, σε κατακόρυφη μορφή, αποδίδεται στην μεταβλητή a), $\mathrm{a} = [0;1;2]$ (η τιμή $0\ 1\ 2$, σε κατακόρυφη μορφή, αποδίδεται στην μεταβλητή a).

Επιπλέον, είναι εφικτές οι εξής **πράξεις μεταξύ διανυσμάτων** (καταλλήλων διαστάσεων): πρόσθεση («+»), αφαίρεση («−»), πολλαπλασιασμός («*»), πολλαπλασιασμός ανά στοιχείο («.*»), διαίρεση ανά στοιχείο («./»), ύψωση σε δύναμη ανά στοιχείο («.^»). Ενδεικτικά παραδείγματα είναι τα αμέσως επόμενα δεδομένης της κατασκευής των διανυσμάτων, $\mathrm{a} = [0\ 1]$ και $\mathrm{b} = [1\ 2]$: $\mathrm{a} + \mathrm{b}$ (αποτέλεσμα: $1\ 3$), $\mathrm{a} - \mathrm{b}$ (αποτέλεσμα: $-1\ -1$), $\mathrm{a} * \mathrm{b}'$ (αποτέλεσμα: 2), $\mathrm{a}.* \mathrm{b}$ (αποτέλεσμα: 0 2), $\mathrm{a}./\mathrm{b}$ (αποτέλεσμα: 0 0.5000), $\mathrm{a}.\hat{}\mathrm{b}$ (αποτέλεσμα: 0 1).

Ακόμη, είναι εφικτός ο πολλαπλασιασμός διανύσματος με αριθμό. Για παράδειγμα, δεδομένης της κατασκευής του διανύσματος $\mathrm{a} = [0\ 1]$, η πράξη $-1 * \mathrm{a}$ επιφέρει το αποτέλεσμα $0\ -1$.

Τέλος, προκειμένου να ληφθεί μία συγκεκριμένη συνιστώσα διανύσματος, πρέπει να γραφεί το όνομά του και η αντίστοιχη θέση εντός παρενθέσεων. Για παράδειγμα, δεδομένης της κατασκευής του διανύσματος $\mathrm{a} = [0\ 1]$, η εντολή $\mathrm{a}(2)$ επιφέρει το αποτέλεσμα 1.

5.4 Πίνακες

Κατ' αρχάς, το MATLAB χειρίζεται **πίνακες** και, ακόμη, επιτρέπει την απόδοση πίνακα τιμών σε μεταβλητή.

Προκειμένου να κατασκευαστεί ένας πίνακας, τα στοιχεία του θα πρέπει να γραφούν ανά γραμμή χωριζόμενα με κενό ή με το σύμβολο «,» και, έπειτα, η μετάβαση στην επόμενη γραμμή συμβαίνει χρησιμοποιώντας το σύμβολο «;». Ακόμη, είναι δυνατή η χρήση του συμβόλου «:», η οποία είναι όμοια με εκείνη στην περίπτωση των διανυσμάτων. Ένα σχετικό παράδειγμα είναι το εξής: η απόδοση $\mathrm{A} = [3\ 2\ 1;4\ 2\ 0]$ και η απόδοση $\mathrm{A} = [3{:}-1{:}\,1;4{:}\ -2{:}\,0]$ παράγουν τον εξής 2x3 πίνακα:

$$\begin{matrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{matrix}.$$

[12] Παρεμπιπτόντως, το συγκεκριμένο σύμβολο έχει και έναν δεύτερο ρόλο: όταν χρησιμοποιείται στο τέλος μίας εντολής, το αποτέλεσμα της εντολής αυτής δεν παρουσιάζεται στην οθόνη.

Ακόμη, είναι δυνατή η αναστροφή ενός πίνακα, με χρήση του συμβόλου «'». Ένα συναφές παράδειγμα είναι το αμέσως επόμενο. Η απόδοση $A = [3\ 2\ 1; 4\ 2\ 0]'$ παράγει τον εξής 3x2 πίνακα:

$$\begin{matrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{matrix}.$$

Επιπλέον, είναι εφικτές οι εξής **πράξεις μεταξύ πινάκων** (καταλλήλων διαστάσεων): πρόσθεση («$+$»), αφαίρεση («$-$»), πολλαπλασιασμός («$*$»), πολλαπλασιασμός ανά στοιχείο («$.*$»), διαίρεση ανά στοιχείο («$./$»), ύψωση σε δύναμη ανά στοιχείο («$.\,\hat{}$»). Ενδεικτικά παραδείγματα είναι τα αμέσως επόμενα δεδομένης της κατασκευής των 2x3 πινάκων, $A = [0\ 1\ 2; 3\ 2\ 1]$ και $B = [1\ 2\ 1; 3\ 1\ 1]$.

Κατ΄αρχάς, η πράξη $A + B$ παράγει τον εξής 2x3 πίνακα:

$$\begin{matrix} 1 & 3 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \end{matrix}.$$

Έπειτα, η πράξη $A - B$ παράγει τον εξής 2x3 πίνακα:

$$\begin{matrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}.$$

Επίσης, η πράξη $A * B'$ παράγει τον 2x2 πίνακα,

$$\begin{matrix} 4 & 3 \\ 8 & 12 \end{matrix},$$

ενώ η πράξη $A' * B$ παράγει τον 3x3 πίνακα,

$$\begin{matrix} 9 & 3 & 3 \\ 7 & 4 & 3 \\ 5 & 5 & 3 \end{matrix}.$$

Ακόμη, η πράξη $A.* B$ παράγει τον εξής 2x3 πίνακα:

$$\begin{matrix} 0 & 2 & 2 \\ 9 & 2 & 1 \end{matrix}.$$

Από την άλλη, η πράξη $A./B$ παράγει τον εξής 2x3 πίνακα:

$$\begin{matrix} 0 & 0.5000 & 2.0000 \\ 1.0000 & 2.0000 & 1.0000 \end{matrix}.$$

Επίσης, η πράξη $A.\hat{}B$ παράγει τον εξής 2x3 πίνακα:

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 2 \\ 27 & 2 & 1 \end{matrix}.$$

Ακόμη, είναι εφικτός ο πολλαπλασιασμός πίνακα με αριθμό. Για παράδειγμα, δεδομένης της κατασκευής του 3x2 πίνακα, $A = [0\ 1; 2\ 3; 1\ 0]$, η πράξη $2 * A$ παράγει τον εξής 3x2 πίνακα:

$$\begin{matrix} 0 & 2 \\ 4 & 6. \\ 2 & 0 \end{matrix}$$

Τέλος, προκειμένου να ληφθεί ένα συγκεκριμένο στοιχείο πίνακα, πρέπει να γραφεί το όνομά του και οι αντίστοιχες δύο συντεταγμένες (αριθμός γραμμής και αριθμός στήλης) εντός παρενθέσεων. Για παράδειγμα, δεδομένης της κατασκευής του 3x2 πίνακα, $\mathrm{A} = [0\ 1; 2\ 3; 1\ 0]$, η εντολή $\mathrm{A}(3,2)$ επιφέρει το αποτέλεσμα 0.

5.5 Έλεγχος συνθήκης

Υπάρχουν ορισμένες περιπτώσεις κατά τις οποίες θα πρέπει να ελεγχθεί μία **συνθήκη** - η οποία περιέχει **τελεστή συσχέτισης** - και, αναλόγως της αληθοτιμής της (1 όταν είναι αληθής, 0 όταν είναι ψευδής), εκτελείται μία αντίστοιχη ομάδα εντολών. Το MATLAB υποστηρίζει τους εξής τελεστές συσχέτισης: «==» (ίσον), «~ =» (όχι ίσον), «<» (μικρότερο), «<=» (μικρότερο ή ίσον), «>» (μεγαλύτερο), «>=» (μεγαλύτερο ή ίσον). Μερικά συναφή παραδείγματα, δεδομένης της απόδοσης $\mathrm{b} = 0$, είναι τα εξής: $\mathrm{b} == 0$ (αληθής συνθήκη), $\mathrm{b} >= 0$ (αληθής συνθήκη), $\mathrm{b} <= 0$ (αληθής συνθήκη), $\mathrm{b} > 0$ (ψευδής συνθήκη), $\mathrm{b} < 0$ (ψευδής συνθήκη), $\mathrm{b} \sim = 0$ (ψευδής συνθήκη).

Επίσης, το MATLAB παρέχει τους εξής **λογικούς τελεστές** για την κατασκευή σύνθετων συνθηκών: «&» (και), «|» (ή), «~» (όχι). Μερικά σχετικά παραδείγματα, δεδομένων των αποδόσεων $\mathrm{b} = 0$ και $\mathrm{c} = 1$, είναι τα εξής: $\mathrm{b} == 0\ \&\ \mathrm{c} == 1$ (αληθής συνθήκη), $\mathrm{b} == 0\ \&\ \mathrm{c} < 1$ (ψευδής συνθήκη), $\mathrm{b} > 0\ \&\ \mathrm{c} == 1$ (ψευδής συνθήκη), $\mathrm{b} > 0\ \&\ \mathrm{c} > 1$ (ψευδής συνθήκη), $\mathrm{b} == 0 \mid \mathrm{c} == 1$ (αληθής συνθήκη), $\mathrm{b} == 0 \mid \mathrm{c} < 1$ (αληθής συνθήκη), $\mathrm{b} > 0 \mid \mathrm{c} == 1$ (αληθής συνθήκη), $\mathrm{b} > 0 \mid \mathrm{c} > 1$ (ψευδής συνθήκη), $\sim\mathrm{b} == 0$ (ψευδής συνθήκη).

Επιπροσθέτως, υπάρχουν συγκεκριμένες δομές κώδικα που υποστηρίζουν τις περιπτώσεις ελέγχου συνθήκης.

Μία τέτοια δομή κώδικα συντάσσεται με τον τρόπο που φαίνεται στο αμέσως επόμενο παράδειγμα:

$$\boldsymbol{if}\ \ b == 1$$
$$b = b * 2;$$
$$\boldsymbol{end}$$

Στο προηγούμενο παράδειγμα, θα ελεγχθεί εάν η τιμή της μεταβλητής b ισούται με 1 και, εάν αυτό είναι αληθές, θα διπλασιαστεί η τιμή της (δηλαδή θα καταστεί ίση με 2).

Μία περαιτέρω δομή κώδικα συντάσσεται με τον τρόπο που φαίνεται στο αμέσως επόμενο παράδειγμα:

$$\textbf{\textit{if}}\ b == 1$$
$$b = b * 2;$$
$$\textbf{\textit{else}}$$
$$b = 0;$$
$$\textbf{\textit{end}}$$

Στο προηγούμενο παράδειγμα, θα ελεγχθεί εάν η τιμή της μεταβλητής b ισούται με 1 και, εάν αυτό είναι αληθές, θα διπλασιαστεί η τιμή της (δηλαδή θα καταστεί ίση με 2), αλλιώς (εάν αυτό είναι ψευδές, δηλαδή εάν δεν ισούται με 1) η τιμή της θα τεθεί ίση με 0.

Μία πιο σύνθετη δομή κώδικα, τέλος, συντάσσεται όπως παρουσιάζεται στο αμέσως επόμενο παράδειγμα:

$$\textbf{\textit{if}}\ b == 1$$
$$b = b * 2;$$
$$\textbf{\textit{else}}$$
$$\textbf{\textit{if}}\ b > 1$$
$$b = b * 3;$$
$$\textbf{\textit{else}}$$
$$b = b * 4;$$
$$\textbf{\textit{end}}$$
$$\textbf{\textit{end}}$$

Στο προηγούμενο παράδειγμα, θα ελεγχθεί εάν η τιμή της μεταβλητής b ισούται με 1 και, εάν αυτό είναι αληθές, θα διπλασιαστεί η τιμή της (δηλαδή θα καταστεί ίση με 2), αλλιώς (εάν αυτό είναι ψευδές, δηλαδή εάν δεν ισούται με 1) τότε θα ελεγχθεί εάν είναι μεγαλύτερη του 1. Εάν είναι μεγαλύτερη του 1 τότε θα τριπλασιαστεί η τιμή της, αλλιώς (εάν είναι μικρότερη του 1) θα τετραπλασιαστεί η τιμή της.

Τέλος, είναι εφικτή η σύνταξη περαιτέρω επιπέδων ένθετων συνθηκών.

5.6 Βρόγχοι επανάληψης

Υπάρχουν ορισμένες περιπτώσεις κατά τις οποίες θα πρέπει να εκτελεστεί μία ομάδα εντολών επανειλημμένως. Σε αυτές τις περιπτώσεις, είναι βολική η χρήση **βρόγχου επανάληψης**.

Επιπλέον, υπάρχουν συγκεκριμένες δομές κώδικα που υποστηρίζουν τις περιπτώσεις βρόγχου επανάληψης.

Η πρώτη δομή κώδικα συντάσσεται με τον τρόπο που φαίνεται στο αμέσως επόμενο παράδειγμα:

$$\boldsymbol{for}\ \ i = 1{:}\,2{:}\,7$$

$$j = j * 2;$$

$$\boldsymbol{end}$$

Στο προηγούμενο παράδειγμα, η τιμή της μεταβλητής j θα υποστεί διπλασιασμό τέσσερις φορές.

Η δεύτερη δομή κώδικα συντάσσεται όπως παρουσιάζεται στο αμέσως επόμενο παράδειγμα:

$$\boldsymbol{while}\ \ i > 2$$

$$i = i/2;$$

$$\boldsymbol{end}$$

Στο προηγούμενο παράδειγμα, η τιμή της μεταβλητής i θα υφίσταται υποδιπλασιασμό όσο είναι μεγαλύτερη του 2 (δηλαδή, οι υποδιπλασιασμοί θα παύσουν μόλις η τιμή της μεταβλητής i καταστεί ίση με το 2 ή μικρότερη του 2).

Τέλος, είναι εφικτή η σύνταξη περαιτέρω επιπέδων ένθετων βρόγχων επανάληψης.

5.7 M - αρχεία

Κατ' αρχάς, επισημαίνεται ότι, στα προηγούμενα υποκεφάλαια, υποτέθηκε η προοπτική σύνταξης κώδικα στο **παράθυρο εντολών** του περιβάλλοντος εργασίας του MATLAB (στο οποίο εμφανίζεται το σύμβολο «$\gg$»).

Ωστόσο, είναι δυνατή η εκτέλεση ομάδας εντολών που έχει αποθηκευθεί σε αρχείο - πράγμα το οποίο καθιστά πιο εύκολη και άμεση την σύνταξη, συντήρηση και τροποποίηση του συνολικού κώδικα στις περιπτώσεις κατά τις οποίες εκείνος είναι εκτενής ή πολύπλοκος. Τέτοιου είδους αρχεία ονομάζονται **m - αρχεία**. Τα πιο δημοφιλή από αυτά είναι τα **script m - αρχεία** και τα **function m - αρχεία**. Τα αρχεία αυτά επιτρέπεται να λαμβάνουν μόνο όνομα το οποίο διέπεται από τους ίδιους κανόνες που διέπουν και τα ονόματα των μεταβλητών. Το όνομα ενός τέτοιου αρχείου, μάλιστα, συνοδεύεται από την εξής κατάληξη: «$.\mathrm{m}$». Επιπλέον, τα αποτελέσματα από την εκτέλεση ενός τέτοιου αρχείου δύναται να παρουσιάζονται στο παράθυρο εντολών.

Ένα script m - αρχείο περιέχει γραμμές εντολών. Επομένως, δίδει στον χρήστη την δυνατότητα να εκτελεί τον συνολικό κώδικα σε ένα μόνο βήμα - πληκτρολογώντας το όνομα του αρχείου στο παράθυρο εντολών, για παράδειγμα.

Ένα function m - αρχείο, από την άλλη, χρησιμεύει στην υλοποίηση συνάρτησης και θα πρέπει το όνομά του να ταυτίζεται με το όνομα της συνάρτησης. Πιο συγκεκριμένα, δέχεται ορισμένες παραμέτρους εισόδου και επιστρέφει ορισμένες παραμέτρους εξόδου. Τόσο οι παράμετροι εισόδου όσο και οι παράμετροι εξόδου δύναται να είναι αριθμοί ή διανύσματα ή πίνακες.

Είναι ενδεικτικό το αμέσως επόμενο παράδειγμα, στο οποίο παρουσιάζεται η υλοποίηση συνάρτησης που δέχεται έναν αριθμό / ένα διάνυσμα αριθμών / έναν πίνακα αριθμών και, επιστρέφει τον αντίθετο και τον αντίστροφό του / το διάνυσμα των αντιθέτων και το διάνυσμα των αντιστρόφων / τον πίνακα των αντιθέτων και τον πίνακα των αντιστρόφων:

$$\textbf{\textit{function}}\ \ [o, i] = Num(n)$$

$$o = -n;$$

$$i = 1./n;$$

$$\textbf{\textit{end}}$$

5.8 Δημοφιλείς τυπικές εντολές

Είναι γεγονός ότι το MATLAB παρέχει μεγάλο πλήθος τυπικών εντολών. Το υποκεφάλαιο αυτό αναφέρει ορισμένες δημοφιλείς εντολές παρέχοντας, ταυτοχρόνως, μία συνοπτική περιγραφή για καθεμία τους. Παρεμπιπτόντως, είναι δυνατή η εμφάνιση, στο παράθυρο εντολών, πλήρους περιγραφής για το πώς δύναται να χρησιμοποιηθεί μία τυπική εντολή, εάν πληκτρολογηθεί το όνομα αυτής μετά την λέξη **help**.

- **abs**. *Απόλυτη τιμή.*
- **break**. *Έξοδος από βρόγχο επανάληψης.*
- **clc**. *Διαγραφή εντολών από το παράθυρο εντολών.*
- **clear**. *Διαγραφή μεταβλητών / συναρτήσεων από την μνήμη.*
- **cos**. *Συνημίτονο.*
- **cot**. *Συνεφαπτομένη.*
- **det**. *Ορίζουσα (τετραγωνικού) πίνακα.*
- **diag**. *Διαγώνιος πίνακας & διαγώνιοι πίνακα.*
- **disp**. *Εμφάνιση δεδομένων.*
- **exp**. *Εκθετική συνάρτηση.*
- **eye**. *Ταυτοτικός πίνακας.*
- **format**. *Προσδιορισμός παρουσίασης αριθμητικών δεδομένων.*
- **imag**. *Φανταστικό μέρος μιγαδικού αριθμού.*
- **input**. *Εισαγωγή δεδομένων από το πληκτρολόγιο.*
- **inv.** *Αντίστροφος (πίνακας) (τετραγωνικού) πίνακα.*
- **length**. *Μήκος διανύσματος.*
- **log**. *Φυσικός λογάριθμος.*
- **num2str**. *Μετατροπή αριθμητικού δεδομένου σε συμβολοσειρά.*
- **ones**. *Αριθμός ίσος με* 1 */ διάνυσμα με κάθε συνιστώσα ίση με* 1 */ πίνακας με κάθε στοιχείο ίσο με* 1.
- **rand**. *Ομοιόμορφα κατανεμημένοι ψευδοτυχαίοι αριθμοί.*
- **randperm**. *Τυχαία μετάθεση.*
- **real**. *Πραγματικό μέρος μιγαδικού αριθμού.*
- **round**. Στρογγυλοποίηση στον πλησιέστερο δεκαδικό ή ακέραιο αριθμό.
- **sin**. *Ημίτονο.*
- **size**. *Διάσταση αριθμού / διανύσματος / πίνακα.*

- **sqrt**. *Τετραγωνική ρίζα*.
- **tan**. *Εφαπτομένη*.
- **zeros**. *Αριθμός ίσος με* 0 */ διάνυσμα με κάθε συνιστώσα ίση με* 0 */ πίνακας με κάθε στοιχείο ίσο με* 0.

6. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ MATLAB

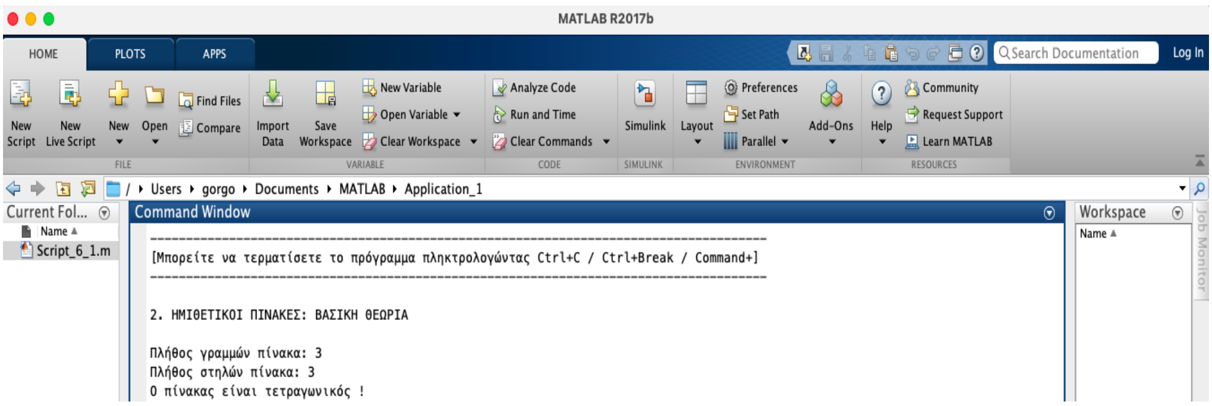
Το $6^{ο}$ κεφάλαιο περιέχει εφαρμογές, με χρήση του MATLAB, επί αλγεβρικής θεωρίας που αναπτύχθηκε σε προηγούμενα κεφάλαια.

6.1 $1^{η}$ εφαρμογή

Η $1^{η}$ εφαρμογή εδράζεται στην θεωρία που αναπτύχθηκε στο $2^{ο}$ κεφάλαιο, δηλαδή στην βασική θεωρία επί των ημιθετικών πινάκων. Η εφαρμογή, της οποίας ο συνολικός κώδικας περιέχεται σε ένα script m - αρχείο, στο Script_6_1.m, παρουσιάζεται και εξηγείται θεωρώντας ένα ενδεικτικό παράδειγμα χρήσης της. Θα πρέπει να παρατηρηθεί πως η εφαρμογή έχει δυναμικό χαρακτήρα: αντί να υποστηρίζει μία προκαθορισμένη χρήση (δηλαδή μία χρήση βάσει προκαθορισμένων δεδομένων), δίδει την δυνατότητα στον χρήστη να εισάγει τα δεδομένα που επιθυμεί κάθε φορά και να λαμβάνει τα αντίστοιχα αποτελέσματα.

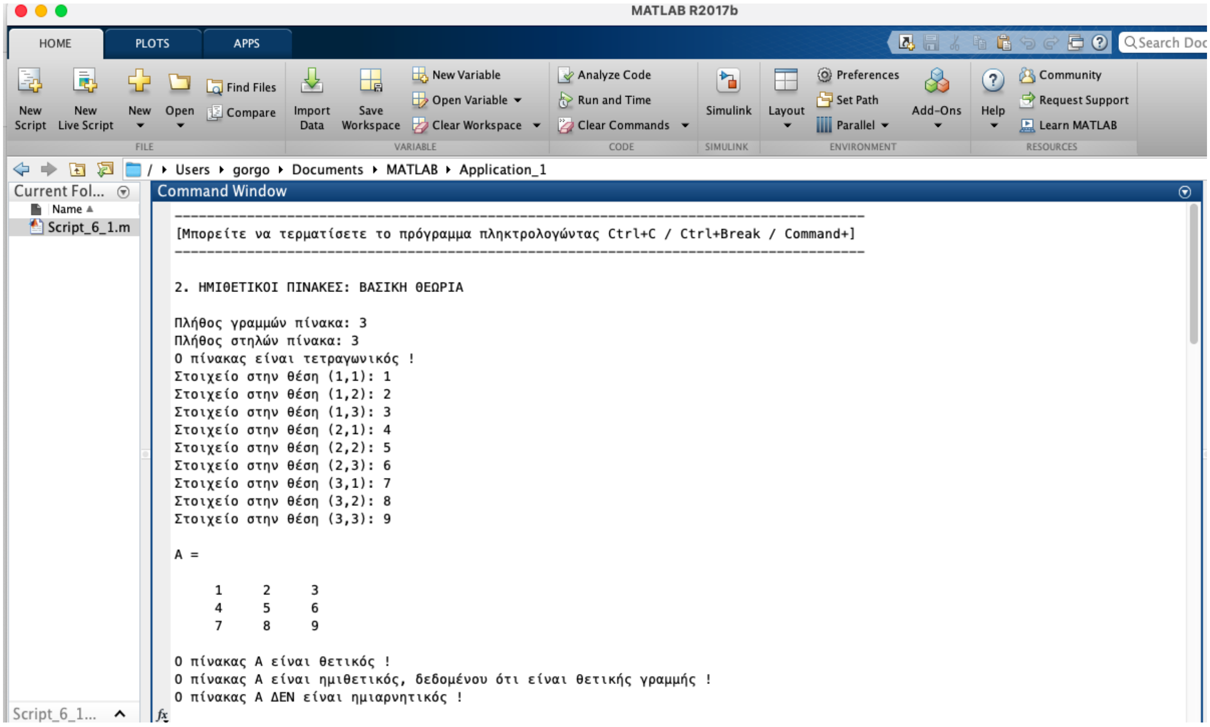
Κατ' αρχάς, αφού ο χρήστης εισαχθεί στο περιβάλλον του MATLAB, «ενεργοποιήσει» τον φάκελο που περιέχει το συγκεκριμένο script m - αρχείο και το «τρέξει», εμφανίζεται το μήνυμα ότι ο ίδιος δύναται, οποτεδήποτε, να τερματίσει την εφαρμογή (πρόγραμμα) πληκτρολογώντας είτε Ctrl+C είτε Ctrl+Break είτε Command+. Ακόμη, εμφανίζεται μήνυμα που αναδεικνύει το γεγονός ότι η τρέχουσα εφαρμογή συνδέεται με το $2^{ο}$ κεφάλαιο, δηλαδή με την βασική θεωρία των ημιθετικών πινάκων.

Ακολούθως, ο χρήστης καλείται να πληκτρολογήσει το πλήθος γραμμών και, έπειτα, το πλήθος στηλών για τον πίνακα τον οποίο επιθυμεί να θέσει υπό διερεύνηση. Στο ενδεικτικό παράδειγμα, όπως φαίνεται στην εικόνα 6.1.1, ο χρήστης πληκτρολόγησε την τιμή 3 για πλήθος γραμμών και για πλήθος στηλών επίσης. Δεδομένου αυτού του γεγονότος, μάλιστα, εμφανίστηκε στην οθόνη το μήνυμα ότι ο συγκεκριμένος πίνακας είναι τετραγωνικός.



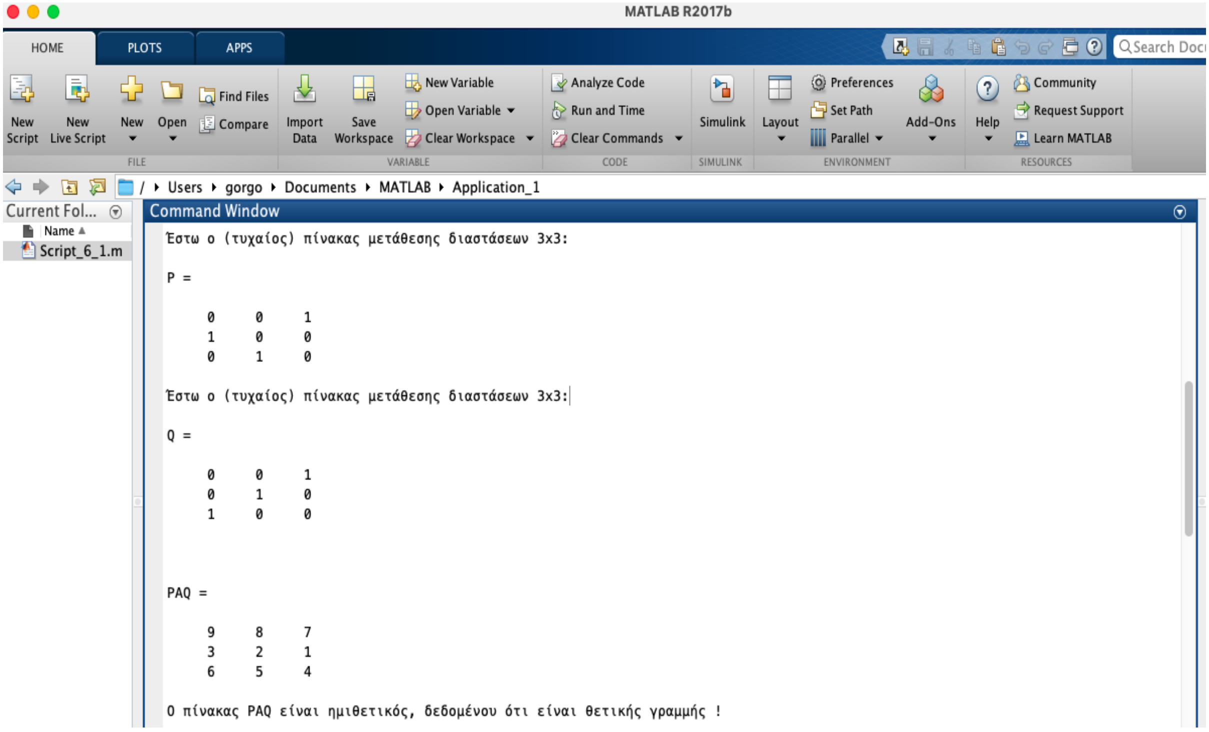
Εικόνα 6.1.1

Έπειτα, ο χρήστης καλείται να εισάγει τα στοιχεία του πίνακα, ένα - ένα, γραμμή - γραμμή. Στο ενδεικτικό παράδειγμα, όπως φαίνεται στην εικόνα 6.1.2, ο χρήστης πληκτρολόγησε τις εξής τιμές με την σειρά: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Βάσει των συναφών εισαγωγών από πλευράς χρήστη, η εφαρμογή - αφού διερευνήσει τον συγκεκριμένο πίνακα πραγματοποιώντας τους σχετικούς ελέγχους που πηγάζουν από την αντίστοιχη αλγεβρική θεωρία - αποφαίνεται για το εάν ο πίνακας είναι θετικός, ημιθετικός, ημιαρνητικός. Για το εν λόγω παράδειγμα, η εφαρμογή αποφαίνεται ότι ο πίνακας είναι θετικός, ημιθετικός και μη ημιαρνητικός εμφανίζοντας και το σχετικό μήνυμα, πράγμα που αναδεικνύεται στην εικόνα 6.1.2.



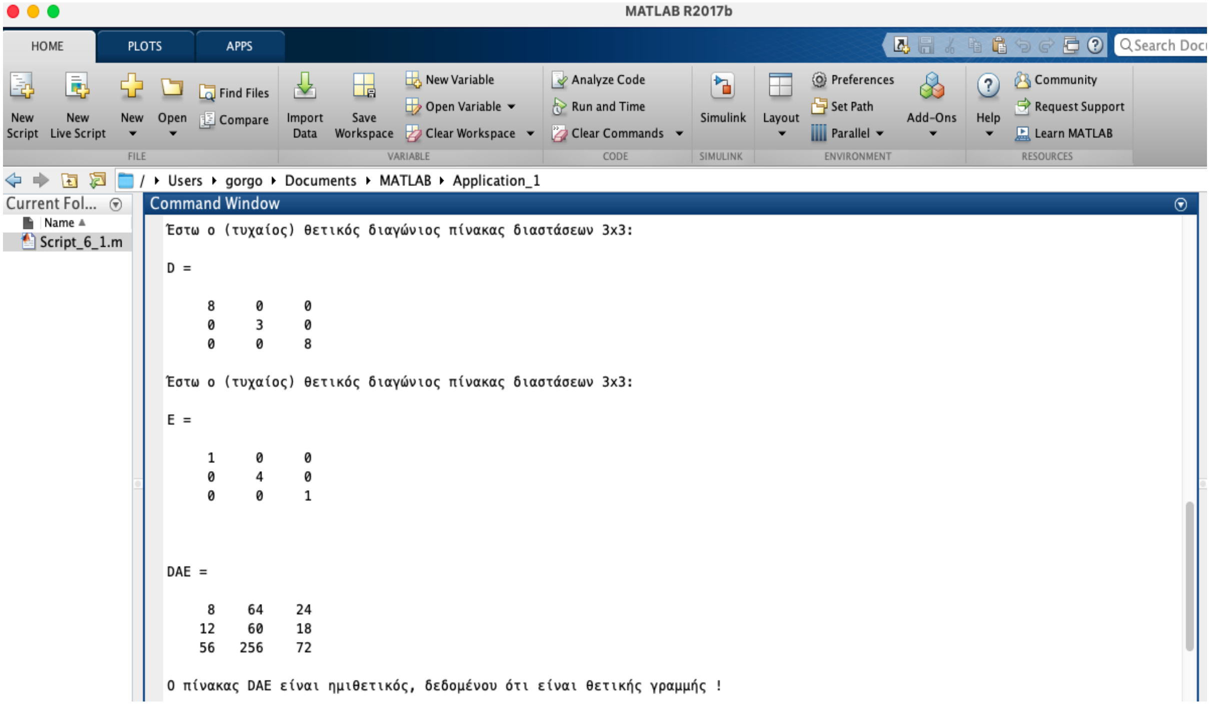
Εικόνα 6.1.2

Ακολούθως, η εφαρμογή παράγει δύο τυχαίους πίνακες μετάθεσης, P και Q. Ο πίνακας P είναι διαστάσεως mxm (m: πλήθος γραμμών εισαχθέντος πίνακα, A, από πλευράς χρήστη) και ο πίνακας Q είναι διαστάσεως nxn (n: πλήθος στηλών εισαχθέντος πίνακα, A, από πλευράς χρήστη). Στο ενδεικτικό παράδειγμα, και ο πίνακας P και ο πίνακας Q είναι διαστάσεως 3x3. Μετά την παραγωγή των δύο αυτών τυχαίων πινάκων μετάθεσης, οι οποίοι και εμφανίζονται στην οθόνη, η εφαρμογή υπολογίζει και εμφανίζει τον πίνακα PAQ. Επιπλέον, ελέγχει το εάν αυτός είναι ημιθετικός ή όχι και εξάγει το αντίστοιχο μήνυμα στην οθόνη. Στο ενδεικτικό παράδειγμα, επιβεβαιώνεται ότι ο πίνακας PAQ είναι ημιθετικός. Όλα τα προηγούμενα παρουσιάζονται στην εικόνα 6.1.3.



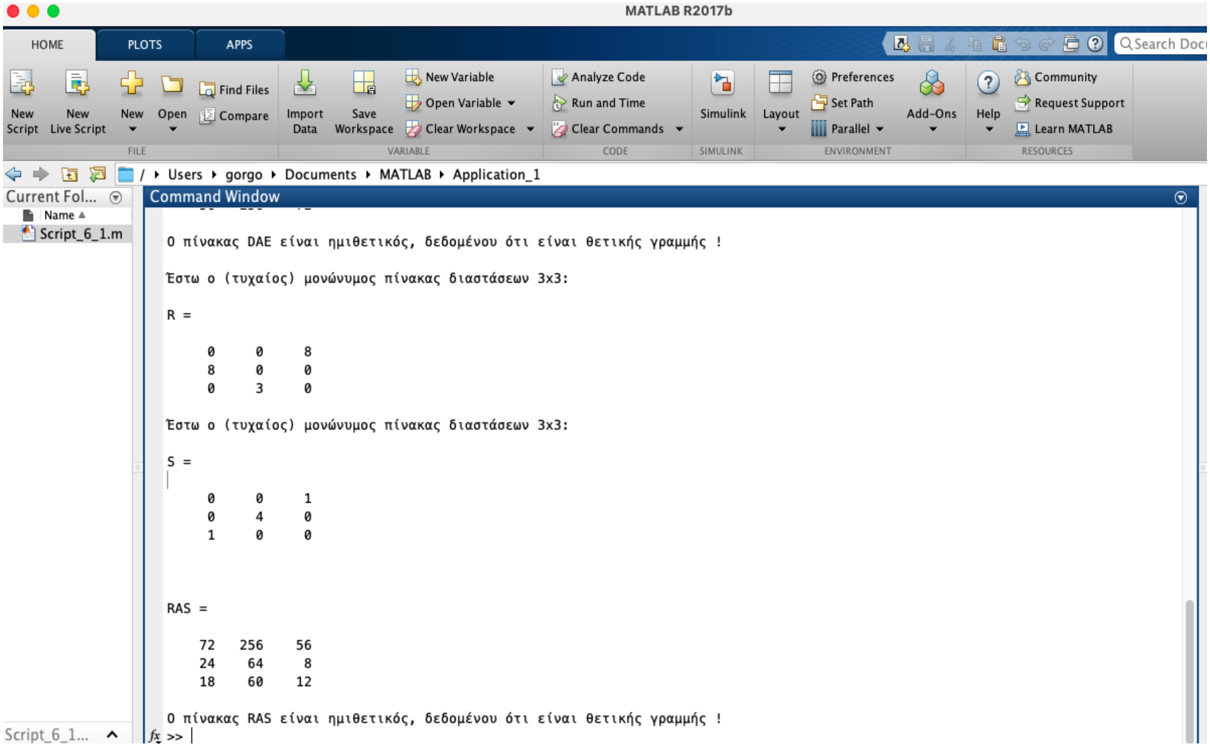
Εικόνα 6.1.3

Κατόπιν, παράγει ένα τυχαίο διάνυσμα μήκους m με θετικούς ακεραίους ως συνιστώσες και, βάσει αυτού, έναν τυχαίο θετικό διαγώνιο πίνακα διαστάσεως mxm, D. Ομοίως, δημιουργεί ένα τυχαίο διάνυσμα μήκους n με θετικούς ακεραίους ως συνιστώσες και, βάσει αυτού, έναν τυχαίο θετικό διαγώνιο πίνακα διαστάσεως nxn, E. Στο ενδεικτικό παράδειγμα, οι πίνακες D και E είναι διαστάσεως 3x3. Μετά την δημιουργία των δύο αυτών θετικών διαγωνίων πινάκων, οι οποίοι και εξάγονται στην οθόνη, η εφαρμογή υπολογίζει και εμφανίζει τον πίνακα DAE. Επιπροσθέτως, ελέγχει το εάν αυτός είναι ημιθετικός ή όχι και εμφανίζει το αντίστοιχο μήνυμα στην οθόνη. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, διαπιστώνεται, πράγματι, ότι ο πίνακας DAE είναι ημιθετικός. Όλα τα ανωτέρω αναδεικνύονται στην εικόνα 6.1.4.



Εικόνα 6.1.4

Έπειτα, η εφαρμογή παράγει δύο τυχαίους μονωνύμους πίνακες, διαστάσεως mxm και nxn αντιστοίχως. Ο πρώτος μονώνυμος πίνακας, R, παράγεται ως γινόμενο των τυχαίων mxm πινάκων P (πίνακας μετάθεσης) και D (θετικός διαγώνιος) και, επομένως, είναι διαστάσεως mxm επίσης. Ο δεύτερος μονώνυμος πίνακας, S, παράγεται ως γινόμενο των τυχαίων nxn πινάκων Q (πίνακας μετάθεσης) και E (θετικός διαγώνιος) και, συνεπώς, είναι διαστάσεως nxn επίσης. Στο ενδεικτικό παράδειγμα, παράγονται και εμφανίζονται οι εξής δύο μονώνυμοι πίνακες: ο R και ο S διαστάσεως 3x3 έκαστος. Τελικώς, η εφαρμογή υπολογίζει και εμφανίζει τον πίνακα RAS και, ακόμη, ελέγχει το εάν είναι ημιθετικός ή όχι. Στο ενδεικτικό παράδειγμα, επιβεβαιώνεται ότι ο πίνακας RAS είναι ημιθετικός. Χαρακτηριστική των προηγουμένων είναι η εικόνα 6.1.5.



Εικόνα 6.1.5

<u>Βελτιστοποίηση εφαρμογής - πρόβλεψη και αποτροπή σφαλμάτων χρήστη</u>

Σε αυτό το σημείο, θα πρέπει να επισημανθεί ότι η εφαρμογή προνοεί για την ορθή εισαγωγή δεδομένων από πλευράς χρήστη και την συνακόλουθη δημιουργία ορθών αποτελεσμάτων (δηλαδή προβλέπει και αποτρέπει τα λογικά σφάλματα χρήστη). Με άλλα λόγια, εάν ο χρήστης εισαγάγει κάποιο μη αποδεκτό δεδομένο, όπως αρνητικό ή μηδενικό πλήθος γραμμών ή στηλών, τότε η εφαρμογή εμφανίζει μήνυμα σφάλματος, διευκρινίζοντας για το τί σφάλμα ακριβώς πρόκειται και πώς δύναται να διορθωθεί, και ζητεί την εκ νέου εισαγωγή του συγκεκριμένου δεδομένου από τον χρήστη. Αυτή η διαδικασία πραγματοποιείται όσο ο χρήστης εισάγει μη αποδεκτό δεδομένο και παύει μόλις εισαγάγει αποδεκτή τιμή οπότε και τού επιτρέπεται να συνεχίσει περαιτέρω με την χρήση της εφαρμογής. Τα επόμενα είναι τα μηνύματα σφάλματος χρήστη που υποστηρίζει η εφαρμογή.

- ***«Απαιτείται πλήθος στηλών μεγαλύτερο ή ίσο με*** 1 ***!»***. Εμφανίζεται εάν ο χρήστης εισάγαγει πλήθος στηλών μικρότερο του 1.
- ***«Απαιτείται ακέραιο πλήθος στηλών !»***. Εμφανίζεται εάν ο χρήστης εισάγαγει μη ακέραιο αριθμό ως πλήθος στηλών.
- ***«Απαιτείται πλήθος γραμμών μεγαλύτερο ή ίσο με*** 1 ***!»***. Εμφανίζεται εάν ο χρήστης εισάγαγει πλήθος γραμμών μικρότερο του 1.
- ***«Απαιτείται ακέραιο πλήθος γραμμών !»***. Εμφανίζεται εάν ο χρήστης εισάγαγει μη ακέραιο αριθμό ως πλήθος γραμμών.
- ***«Μην πληκτρολογείτε αρνητικό στοιχείο πίνακα !»***. Εμφανίζεται εάν ο χρήστης εισάγαγει αρνητικό στοιχείο, δεδομένου ότι η εφαρμογή υποστηρίζει την κατασκευή πίνακα $A \geq 0$.

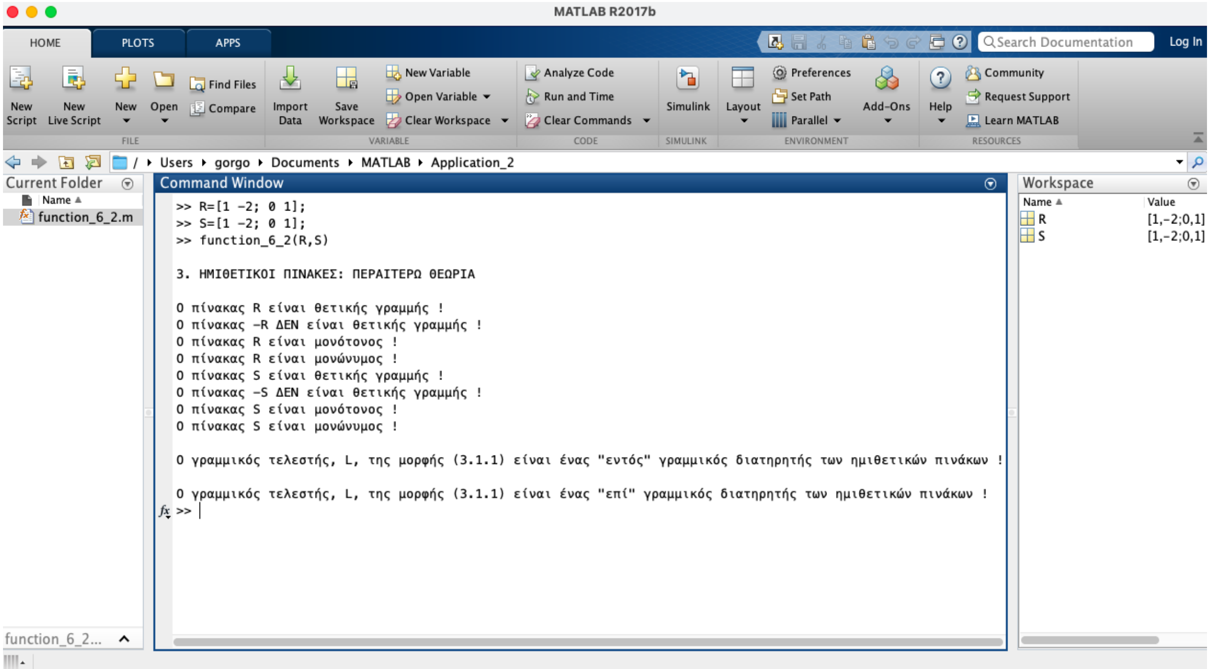
6.2 2η εφαρμογή

Η 2η εφαρμογή βασίζεται στην θεωρία που αναπτύχθηκε στο 3ο κεφάλαιο, δηλαδή στην περαιτέρω θεωρία επί των ημιθετικών πινάκων. Η εφαρμογή, της οποίας ο συνολικός κώδικας περιέχεται σε ένα function m - αρχείο, στο function_6_2.m, παρουσιάζεται και εξηγείται θεωρώντας ένα ενδεικτικό παράδειγμα χρήσης της.

Κατ' αρχάς, αφού ο χρήστης εισαχθεί στο περιβάλλον του MATLAB και «ενεργοποιήσει» τον φάκελο που περιέχει το συγκεκριμένο function m - αρχείο, θα πρέπει να καλέσει την συνάρτηση θέτοντάς της, ως παραμέτρους εισόδου, δύο πίνακες, R και S (δηλαδή να πληκτρολογήσει στο παράθυρο εντολών το όνομά της με το όνομα των δύο πινάκων - παραμέτρων εισόδου που έχει ορίσει προηγουμένως).

Έπειτα, εμφανίζεται μήνυμα σχετικώς με το ότι η τρέχουσα εφαρμογή συνδέεται με το 3ο κεφάλαιο, δηλαδή με την περαιτέρω θεωρία των ημιθετικών πινάκων. Ακολούθως, πραγματοποιούνται έλεγχοι για το εάν καθένας εκ των πινάκων R, - R, S, - S είναι θετικής γραμμής, μονότονος, μονώνυμος και εμφανίζονται αντίστοιχα μηνύματα στην οθόνη. Τελικώς, η εφαρμογή διενεργεί έλεγχο για το εάν ο γραμμικός τελεστής, L, της μορφής (3.1.1) είναι, αφ' ενός, ένας «εντός» γραμμικός διατηρητής των ημιθετικών πινάκων και, αφ' ετέρου, ένας «επί» γραμμικός διατηρητής των ημιθετικών πινάκων και, εάν ναι, εμφανίζει το αντίστοιχο μήνυμα / τα αντίστοιχα μηνύματα.

Χαρακτηριστική των προηγουμένων είναι η εικόνα 6.2.1, η οποία συνδέεται με κλήση της συνάρτησης με τους πίνακες $R = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ και $S = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ως παραμέτρους εισόδου. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, επιβεβαιώνεται ότι οι δύο αυτοί πίνακες είναι θετικής γραμμής, μονότονοι, μονώνυμοι και ότι, επίσης, ο γραμμικός τελεστής, L, της μορφής (3.1.1) είναι και ένας «εντός» γραμμικός διατηρητής των ημιθετικών πινάκων και ένας «επί» γραμμικός διατηρητής των ημιθετικών πινάκων.



Εικόνα 6.2.1

Μηνύματα σφάλματος χρήστη

Σε αυτό το σημείο, θα πρέπει να επισημανθεί ότι η εφαρμογή απαιτεί, σύμφωνα με την σχετική θεωρία, οι πίνακες που θα τεθούν ως παράμετροι εισόδου κατά την κλήση της συνάρτησης να είναι τετραγωνικοί. Ακόμη, απαιτεί ο πίνακας R να έχει ισάριθμες ή περισσότερες γραμμές / στήλες απ' ό,τι ο πίνακας S. Εάν ο χρήστης καλέσει την συνάρτηση με παραμέτρους εισόδου που δεν ικανοποιούν τα προηγούμενα, τότε εμφανίζονται τα ακόλουθα μηνύματα σφάλματος χρήστη (και τίποτα περαιτέρω).

- ***«Απαιτείται ο πίνακας R να έχει ισάριθμες ή περισσότερες γραμμές / στήλες απ' ό,τι ο πίνακας S !»***. Εμφανίζεται εάν ο χρήστης καλέσει την συνάρτηση θέτοντάς της, ως παραμέτρους εισόδου, πίνακες R και S και ο πίνακας R έχει λιγότερες γραμμές / στήλες απ' ό,τι ο πίνακας S.
- ***«Απαιτείται ο πίνακας S να είναι τετραγωνικός !»***. Εμφανίζεται εάν ο χρήστης καλέσει την συνάρτηση θέτοντάς της, ως παράμετρο εισόδου, S, έναν πίνακα που δεν είναι τετραγωνικός.
- ***«Απαιτείται ο πίνακας R να είναι τετραγωνικός !»***. Εμφανίζεται εάν ο χρήστης καλέσει την συνάρτηση θέτοντάς της, ως παράμετρο εισόδου, R, έναν πίνακα που δεν είναι τετραγωνικός.

Βιβλιογραφία

Ξενόγλωσση

Anton, H. & Rorres, C., 9th ed. (2005). *Elementary Linear Algebra*. United Stated of America: John Wiley & Sons (Wiley).

Beilina, L., Karchevskii, E. & Karchevskii, M., (2017). *Numerical Linear Algebra: Theory and Applications*. New York: Springer.

Berman, A. & Ward, R. C., (1977). Stability and Semipositivity of Real Matrices. *Bulletin of the American Mathematical Society,* 83(2), pp. 262-263.

Boyd, S. & Vandenberghe, L., (2018). *Introduction to Applied Linear Algebra: Vectors, Matrices, and Least Squares*. United Kingdom: Cambridge University Press.

DeFranza, J. & Gagliardi, D., (2009). *Introduction to Linear Algebra with Applications*. United Stated of America: McGraw Hill.

Erdman, J. M., (2014). *Exercises and Problems in Linear Algebra*. Portland State University.

Johnson, L. W., Riess R. D. & Arnold J. T., 5th ed. (2002). *Introduction to Linear Algebra*. United Stated of America: Pearson Education.

Johnson, C. R., Smith R. L. & Tsatsomeros M. J. *Matrix Positivity*.

Lang, S., 2nd ed. (1986). *Introduction to Linear Algebra*. New York: Springer-Verlag.

Lipschutz, S. & Lipson, M., 4th ed. (2018). *Linear Algebra*. United Stated of America: McGraw Hill.

Matthews, K. R, (2013). *Elementary Linear Algebra*. Department of Mathematics, University of Queensland.

Meyer C. D., (2010). *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. United Stated of America: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM).

Shores, T. S., (2000). *Applied Linear Algebra and Matrix Analysis*. Department of Mathematics, University of Nebraska-Lincoln.

Treil, S., (2014). *Linear Algebra Done Wrong*. Department of Mathematics, Brown University.

Ελληνική

Γεωργίου, Γ. & Ξενοφώντος, Χ., (2007). *Εισαγωγή στη MATLAB*. Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής, Πανεπιστήμιο Κύπρου.

Παπαγεωργίου, Γ. Σ., Τσίτουρας Χ. Γ. & Φαμέλης, Ι. Θ., (2004). *Σύγχρονο Μαθηματικό Λογισμικό MATLAB - MATHEMATICA*. Αθήνα: Εκδόσεις Συμεών.

Τσαγράκης, Ι. Α., (2009). *Γραμμική Άλγεβρα. Μέρος 5: Διανυσματικοί Υπόχωροι - Γραμμική Ανεξαρτησία - Βάσεις & Διάσταση Δ.Χ.* Τμήμα Επιστήμης Υπολογιστών, Πανεπιστήμιο Κρήτης.

(συνέχεια)

Φελλούρης, Α. Γ., 6η έκδ. (2001). *Γραμμική Άλγεβρα και Αναλυτική Γεωμετρία*.

Ηλεκτρονική

MathBootCamps (2020). *Linear Combinations of Vectors: The Basics*. Διαθέσιμο στην διεύθυνση: https://www.mathbootcamps.com/linear-combinations-vectors/ (Πρόσβαση: 22 Νοεμβρίου 2020).

ScienceDirect (2020). *Left Inverse*. Διαθέσιμο στην διεύθυνση: https://www.sciencedirect.com/topics/engineering/left-inverse (Πρόσβαση: 29 Νοεμβρίου 2020).

Stat Trek (2020). *Statistics Dictionary*. Διαθέσιμο στην διεύθυνση: https://stattrek.com/statistics/dictionary.aspx?definition=scalar-matrix (Πρόσβαση: 26 Νοεμβρίου 2020).

Wikipedia (2020). *Multiset*. Διαθέσιμο στην διεύθυνση: https://en.wikipedia.org/wiki/Multiset (Πρόσβαση: 27 Νοεμβρίου 2020).

Wikipedia (2020). *Permutation matrix*. Διαθέσιμο στην διεύθυνση: https://en.wikipedia.org/wiki/Permutation_matrix (Πρόσβαση: 27 Νοεμβρίου 2020).

Παράρτημα

Script_6_1.m

```
clear all
clc

disp('-----------------------------------------------------------------------------------')
disp('[Μπορείτε να τερματίσετε το πρόγραμμα πληκτρολογώντας Ctrl+C / Ctrl+Break / Command+]')
disp('-----------------------------------------------------------------------------------')
disp(' ')

disp('2. ΗΜΙΘΕΤΙΚΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ: ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ')
disp(' ')

flag1=0;
while flag1==0
   m=input('Πλήθος γραμμών πίνακα: ');
   if m>=1
      if round(m)==m
         flag1=1;
         flag2=0;
         while flag2==0
            n=input('Πλήθος στηλών πίνακα: ');
            if n>=1
               if round(n)==n
                  flag2=1;
               else
                  disp('Απαιτείται ακέραιο πλήθος στηλών !')
               end
            else
               disp('Απαιτείται πλήθος στηλών μεγαλύτερο ή ίσο με 1 !')
            end
         end
      else
         disp('Απαιτείται ακέραιο πλήθος γραμμών !')
      end
   else
      disp('Απαιτείται πλήθος γραμμών μεγαλύτερο ή ίσο με 1 !')
   end
end

if m==n
  disp('Ο πίνακας είναι τετραγωνικός !')
end

A=rand(m,n);
for i=1:m
   for j=1:n
```

```
        flag=0;
        while flag==0
            A(i,j)=input(['Στοιχείο στην θέση (',num2str(i),',',num2str(j),'): ']);
            if A(i,j)>=0
              flag=1;
            else
              disp('Μην πληκτρολογείτε αρνητικό στοιχείο πίνακα !')
            end
        end
    end
end
A
count_flag1=0;
for i=1:m
   for j=1:n
      if A(i,j)<=0
          count_flag1=count_flag1+1;
          break;
      end
   end
end
if count_flag1==0
    disp('Ο πίνακας Α είναι θετικός !')
else
    disp('Ο πίνακας Α ΔΕΝ είναι θετικός !')
end

count_of_pos=0;
for i=1:m
   for j=1:n
      if A(i,j)>0
          count_of_pos=count_of_pos+1;
          break;
      end
   end
end
if count_of_pos==m
    disp('Ο πίνακας Α είναι ημιθετικός, δεδομένου ότι είναι θετικής γραμμής !')
else
    disp('Ο πίνακας Α ΔΕΝ είναι ημιθετικός, δεδομένου ότι ΔΕΝ είναι θετικής γραμμής !')
end

count_of_pos=0;
for i=1:m
    for j=1:n
        if -A(i,j)>0
          count_of_pos=count_of_pos+1;
          break;
        end
    end
```

```
end
if count_of_pos==m
   disp('Ο πίνακας A είναι ημιαρνητικός !')
else
   disp('Ο πίνακας A ΔΕΝ είναι ημιαρνητικός !')
end

disp(' ')
I1=eye(m);
P=I1(randperm(m),:);
I2=eye(n);
Q=I2(randperm(n),:);
disp(['Έστω ο (τυχαίος) πίνακας μετάθεσης διαστάσεων ',num2str(m),'x',num2str(m),':'])
P
disp(['Έστω ο (τυχαίος) πίνακας μετάθεσης διαστάσεων ',num2str(n),'x',num2str(n),':'])
Q
disp(' ')
PAQ=P*A*Q
count_of_pos=0;
for i=1:m
     for j=1:n
        if PAQ(i,j)>0
           count_of_pos=count_of_pos+1;
           break;
        end
     end
end
if count_of_pos==m
     disp('Ο πίνακας PAQ είναι ημιθετικός, δεδομένου ότι είναι θετικής γραμμής !')
else
     disp('Ο πίνακας PAQ ΔΕΝ είναι ημιθετικός, δεδομένου ότι ΔΕΝ είναι θετικής γραμμής
!')
end

disp(' ')
v1=round(10*rand(m,1)+1);
D=diag(v1);
v2=round(10*rand(n,1)+1);
E=diag(v2);
disp(['Έστω ο (τυχαίος) θετικός διαγώνιος πίνακας διαστάσεων
',num2str(m),'x',num2str(m),':'])
D
disp(['Έστω ο (τυχαίος) θετικός διαγώνιος πίνακας διαστάσεων
',num2str(n),'x',num2str(n),':'])
E
disp(' ')
DAE=D*A*E
count_of_pos=0;
for i=1:m
     for j=1:n
```

```
        if DAE(i,j)>0
            count_of_pos=count_of_pos+1;
            break;
        end
    end
end
if count_of_pos==m
    disp('O πίνακας DAE είναι ημιθετικός, δεδομένου ότι είναι θετικής γραμμής !')
else
    disp('O πίνακας DAE ΔΕΝ είναι ημιθετικός, δεδομένου ότι ΔΕΝ είναι θετικής γραμμής !')
end

disp(' ')
R=P*D;
S=Q*E;
disp(['Έστω ο (τυχαίος) μονώνυμος πίνακας διαστάσεων ',num2str(m),'x',num2str(m),':'])
R
disp(['Έστω ο (τυχαίος) μονώνυμος πίνακας διαστάσεων ',num2str(n),'x',num2str(n),':'])
S
disp(' ')
RAS=R*A*S
count_of_pos=0;
for i=1:m
    for j=1:n
        if RAS(i,j)>0
            count_of_pos=count_of_pos+1;
            break;
        end
    end
end
if count_of_pos==m
    disp('O πίνακας RAS είναι ημιθετικός, δεδομένου ότι είναι θετικής γραμμής !')
else
    disp('O πίνακας RAS ΔΕΝ είναι ημιθετικός, δεδομένου ότι ΔΕΝ είναι θετικής γραμμής !')
end
```

Function_6_2.m

```
function [] = function_6_2(R,S)

  disp('3. ΗΜΙΘΕΤΙΚΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ: ΠΕΡΑΙΤΕΡΩ ΘΕΩΡΙΑ')
  disp(' ')

  s1=size(R);
  s2=size(S);

  flag_R_pos_row=false;
  flag_minus_R_pos_row=false;
  flag_R_monot=false;
  flag_minus_R_monot=false;
  flag_R_mononymos=false;
  flag_minus_R_mononymos=false;

  flag_S_pos_row=false;
  flag_minus_S_pos_row=false;
  flag_S_monot=false;
  flag_minus_S_monot=false;
  flag_S_mononymos=false;
  flag_minus_S_mononymos=false;

  flag_R_square=false;
  flag_S_square=false;
  flag_m_n=false;
  if s1(1)==s1(2)
     flag_R_square=true;
  end
  if s2(1)==s2(2)
     flag_S_square=true;
  end
  if flag_R_square==true
    if flag_S_square==true
       if s1(1)>=s2(1)
          flag_m_n=true;
       end
    end
  end

  if flag_R_square==true
     if flag_S_square==true
        if flag_m_n==true

           count_of_pos_1=0;
           for i=1:s1(1)
              for j=1:s1(2)
                 if R(i,j)>0
                    count_of_pos_1=count_of_pos_1+1;
```

```
        break;
      end
   end
end
if count_of_pos_1==s1(1)
   flag_R_pos_row=true;
   disp('Ο πίνακας R είναι θετικής γραμμής !')
else
   disp('Ο πίνακας R ΔΕΝ είναι θετικής γραμμής !')
end

count_of_pos_2=0;
for i=1:s1(1)
   for j=1:s1(2)
      if -R(i,j)>0
        count_of_pos_2=count_of_pos_2+1;
        break;
      end
   end
end
if count_of_pos_2==s1(1)
   flag_minus_R_pos_row=true;
   disp('Ο πίνακας -R είναι θετικής γραμμής !')
else
   disp('Ο πίνακας -R ΔΕΝ είναι θετικής γραμμής !')
end
if flag_R_pos_row==true
   if det(R)~=0
      R_inv=inv(R);
      R_check=R_inv>=0;
      if R_check==ones(s1(1),s1(2))
         flag_R_monot=true;
         disp('Ο πίνακας R είναι μονότονος !')
      end
   end
end
if flag_minus_R_pos_row==true
   if det(-R)~=0
       minus_R_inv=inv(-R);
       minus_R_check=minus_R_inv>=0;
       if minus_R_check==ones(s1(1),s1(2))
          flag_minus_R_monot=true;
          disp('Ο πίνακας -R είναι μονότονος !')
       end
   end
end
if flag_R_pos_row==true
   if flag_R_monot==true
       flag_R_mononymos=true;
       disp('Ο πίνακας R είναι μονώνυμος !')
```

```
    end
end
if flag_minus_R_pos_row==true
    if flag_minus_R_monot==true
        flag_minus_R_mononymos=true;
        disp('Ο πίνακας -R είναι μονώνυμος !')
    end
end

count_of_pos_1=0;
for i=1:s2(1)
    for j=1:s2(2)
      if S(i,j)>0
        count_of_pos_1=count_of_pos_1+1;
        break;
      end
    end
end
if count_of_pos_1==s2(1)
    flag_S_pos_row=true;
    disp('Ο πίνακας S είναι θετικής γραμμής !')
else
    disp('Ο πίνακας S ΔΕΝ είναι θετικής γραμμής !')
end
count_of_pos_2=0;
for i=1:s2(1)
    for j=1:s2(2)
      if -S(i,j)>0
        count_of_pos_2=count_of_pos_2+1;
        break;
      end
    end
end
if count_of_pos_2==s2(1)
    flag_minus_S_pos_row=true;
    disp('Ο πίνακας -S είναι θετικής γραμμής !')
else
    disp('Ο πίνακας -S ΔΕΝ είναι θετικής γραμμης !')
end
if flag_S_pos_row==true
    if det(S)~=0
      S_inv=inv(S);
      S_check=S_inv>=0;
      if S_check==ones(s2(1),s2(2))
         flag_S_monot=true;
         disp('Ο πίνακας S είναι μονότονος !')
      end
    end
end
if flag_minus_S_pos_row==true
```

```
            if det(-S)~=0
                minus_S_inv=inv(-S);
                minus_S_check=minus_S_inv>=0;
                if minus_S_check==ones(s2(1),s2(2))
                    flag_minus_S_monot=true;
                    disp('Ο πίνακας -S είναι μονότονος !')
                end
            end
        end
        if flag_S_pos_row==true
            if flag_S_monot==true
                flag_S_mononymos=true;
                disp('Ο πίνακας S είναι μονώνυμος !')
            end
        end
        if flag_minus_S_pos_row==true
            if flag_minus_S_monot==true
                flag_minus_S_mononymos=true;
                disp('Ο πίνακας -S είναι μονώνυμος !')
            end
        end

    else
        disp('Απαιτείται ο πίνακας R να έχει ισάριθμες η΄ περισσότερες γραμμές / στήλες
απ΄ ό,τι ο πίνακας S !')
    end
  else
    disp('Απαιτείται ο πίνακας S να είναι τετραγωνικός !')
  end
else
   disp('Απαιτείται ο πίνακας R να είναι τετραγωνικός !')
end
disp(' ')

if flag_R_square==true
  if flag_S_square==true
    if flag_m_n==true
        if flag_R_pos_row==true
            if flag_S_monot==true
                disp('Ο γραμμικός τελεστής, L, της μορφής (3.1.1) είναι ένας «εντός»
γραμμικός διατηρητής των ημιθετικών πινάκων !')
            end
        else
            if flag_minus_R_pos_row==true
                if flag_minus_S_monot==true
                    disp('Ο γραμμικός τελεστής, L, της μορφής (3.1.1) είναι ένας «εντός»
γραμμικός διατηρητής των ημιθετικών πινάκων !')
                end
            end
        end
```

```
        end
      end
   end
   disp(' ')

   if flag_R_square==true
     if flag_S_square==true
        if flag_m_n==true
           if flag_R_mononymos==true
              if flag_S_mononymos==true
                 disp('Ο γραμμικός τελεστής, L, της μορφής (3.1.1) είναι ένας «επί» γραμμικός
διατηρητής των ημιθετικών πινάκων !')
              end
           else
              if flag_minus_R_mononymos==true
                 if flag_minus_S_mononymos==true
                    disp('Ο γραμμικός τελεστής, L, της μορφής (3.1.1) είναι ένας «επί»
γραμμικός διατηρητής των ημιθετικών πινάκων !')
                 end
              end
           end
        end
     end
   end

end
```