ΣΑΒΒΑΣ ΠΑΠΑΪΑΚΩΒΟΥ

Διαχείριση περιορισμών εφαρμόζοντας επάλληλες βηματικές τροποποιήσεις, κατά την βελτιστοποίηση με εξελικτικούς αλγόριθμους τύπου Covariance Matrix Adaptation και Particle Swarm Optimization

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Τομέας: Βιομηχανικής Διοίκησης & Επιχειρησιακής Έρευνας

Επιβλέπων: Αθανάσιος Τόλης, Αναπληρωτής Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα 2021

Ευχαριστίες

Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω από καρδιάς τους ανθρώπους που με βοήθησαν στη ολοκλήρωση αυτής της διπλωματικής εργασίας.

Η παρούσα διπλωματική εκπονήθηκε στα πλαίσια προπτυχιακών σπουδών στη σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου υπό την επίβλεψη του κυρίου Α. Τόλη στον τομέα Βιομηχανικής Διοίκησης & Επιχειρησιακής Έρευνας.

Θα ήθελα να πω ένα μεγάλο ευχαριστώ στον επιβλέποντα καθηγητή μου Α. Τόλη για την καθοδήγηση, τις συμβουλές και την υποστήριξη που μου παρείχε σε όλη τη διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής αυτής. Ήμουν τυχερός που είχα ένα επιβλέποντα καθηγητή σαν αυτόν, ο οποίος παρά τον περιορισμένο του χρόνο, έδειχνε ενδιαφέρον για τη δουλειά μου, μου απαντούσε αμέσως και ανά πάσα στιγμή σε ότι απορία και δυσκολία είχα και με εμπιστεύθηκε για την εκπόνηση αυτής της διπλωματικής.

Επίσης, η διπλωματική αυτή εργασία δεν θα είχε ολοκληρωθεί χωρίς τη διαρκή υποστήριξη, βοήθεια και αγάπη από την οικογένειά μου και τους φίλους μου, που στάθηκαν μαζί μου και μου έδιναν δύναμη καθ’ όλη τη διάρκεια και με στήριξαν σε όλες τις δυσκολίες που είχα να αντιμετωπίσω.

<u>Υπεύθυνη δήλωση</u> για λογοκλοπή και για κλοπή πνευματικής ιδιοκτησίας:

Έχω διαβάσει και κατανοήσει τους κανόνες για τη λογοκλοπή και τον τρόπο σωστής αναφοράς των πηγών που περιέχονται στον οδηγό συγγραφής Διπλωματικών Εργασιών. Δηλώνω ότι, από όσα γνωρίζω, το περιεχόμενο της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας είναι προϊόν δικής μου εργασίας και υπάρχουν αναφορές σε όλες τις πηγές που χρησιμοποίησα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτή τη Διπλωματική εργασία είναι του συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις της Σχολής Μηχανολόγων Μηχανικών ή του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Σάββας Παπαϊακώβου

Περιεχόμενα

Περίληψη

Γενικά, από τα αρχαία χρόνια ο άνθρωπος καθημερινά βρίσκεται αντιμέτωπος με όλων των ειδών προβλημάτων βελτιστοποίησης, όπως η μετακίνηση από ένα σημείο Α σε ένα σημείο Β στον ελάχιστο δυνατόν χρόνο και με τη λιγότερη δυσκολία ή τη δημιουργία του προγράμματος παραγωγής ενέργειας μιας ολόκληρης χώρας με το λιγότερο δυνατόν κόστος. Κάποια από αυτά είναι αρκετά απλά και κάποια εξαιρετικά περίπλοκα και δύσκολα στην επίλυσή τους, δηλαδή στην εύρεση της βέλτιστης λύσης. Με την πάροδο των χρόνων και την ανάπτυξη της τεχνολογίας, η ανάγκη των ανθρώπων για επίλυση, ολοένα και περισσοτέρων περίπλοκων προβλημάτων βελτιστοποίησης γίνεται φανερή.

Ένας από τους λόγους που τα προβλήματα βελτιστοποίησης, τώρα, γίνονται ολοένα και πιο πολύπλοκα είναι, εκτός των πιο σύνθετων αντικειμενικών συναρτήσεων, οι περίπλοκες συναρτήσεις των περιορισμών στις οποίες υπόκεινται τα προβλήματα του σήμερα. Οι περιορισμοί αυτοί μπορεί να είναι περιορισμοί ανισότητας δηλαδή να μην γίνονται δεκτές λύσεις από ένα επίπεδο και μετά. Για παράδειγμα μια γεννήτρια σε ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα δεν μπορεί να παράξει ενέργεια περισσότερη από ένα συγκεκριμένο επίπεδο το οποίο εξαρτάται από το πόσο παρήγαγε στην προηγούμενη ώρα, άσχετα από το αν έχει φτάσει ή όχι στη μέγιστη παραγωγή της. Το άλλο είδος περιορισμών είναι οι περιορισμοί ισότητας στους οποίους λύσεις γίνονται δεκτές μόνο αν βρίσκονται πάνω σε ένα συγκεκριμένο επίπεδο, όπως για παράδειγμα η κάλυψη της ωριαίας ανάγκης για ηλεκτρική ενέργεια κάθε ώρα κατά την οποία η παραγωγή μας δεν πρέπει να είναι ούτε μικρότερη αλλά ούτε και μεγαλύτερη αυτής της ανάγκης. Για αυτόν τον λόγο, πολλά από τα πιο σύνθετα προβλήματα πλέον, λύνονται με τη χρήση στοχαστικών μεθόδων βελτιστοποίησης.

Δύο από αυτές τις μεθόδους είναι ο αλγόριθμος Covariance Matrix Adaptation – CMA και ο Particle Swarm Optimization – PSO. Ο πρώτος δουλεύει με το να ενημερώνει τον πίνακα συνδιακυμάνσεων του εκάστοτε προβλήματος έτσι ώστε το περίγραμμα της πολυμεταβλητής κανονικής κατανομής, στην οποία να ανήκει, να μεταφέρεται και να αλλάζει με σκοπό στο τέλος να φτάσει στη θέση του ολικού βέλτιστου. Ο δεύτερος μιμείται τη διαδικασία με την οποία κινείται ένα σμήνος στην οποία όλα μαζί τα επιμέρους ”άτομα” του σμήνους καταλήγουν στο επιθυμητό τελικό προορισμό ακολουθώντας το ένα το άλλο.

Σκοπός, επομένως, της διπλωματικής αυτής εργασίας είναι να γίνει μια προσπάθεια έτσι ώστε οι περιορισμοί του εκάστοτε προβλήματος να μπορούν να αντιμετωπιστούν πιο εύκολα και ως ακολούθως να έχουμε καλύτερες λύσεις σε προβλήματα βελτιστοποίησης. Αυτό προσπαθούμε να το επιτύχουμε εφαρμόζοντας μια τροποποιημένη μορφή της μεθόδου αντιμετώπισης περιορισμών Feasibility Rules – FR σε συνδυασμό με τους αλγόριθμους CMA και PSO. Η τροποποιημένη αυτή μέθοδος μετατρέπει για έναν αριθμό επαναλήψεων του αλγορίθμου τους περιορισμούς ανισότητας σε περιορισμούς ισότητας και προσπαθεί να βρει τη βέλτιστη λύση στα όρια των περιορισμών ανισότητας, με την υπόθεση ότι η βέλτιστη λύση βρίσκεται συνήθως κάπου εκεί, με βάση την μέχρι τώρα εμπειρία που έχουμε.

Για τον έλεγχο της αποτελεσματικότητάς της, η μέθοδος εφαρμόζεται σε κάποια από τα προβλήματα ελαχιστοποίησης του διαγωνισμού του συνεδρίου επιχειρησιακής έρευνας CEC2010. Για τα προβλήματα αυτά μέχρι και σήμερα δεν έχει βρεθεί σίγουρα μια βέλτιστη λύση.

Abstract

In general, since ancient times man has been faced daily with all sorts of optimization problems such as moving from point A to point B in the shortest possible time and with the least amount of effort or creating the energy program of an entire country with the least possible cost. Some of them are pretty simple and straight forward and some extremely complex and difficult to solve, that is, to find the best solution. With the passage of time and the development of technology, the need of people to solve more and more complex optimization problems becomes apparent.

One of the reasons that optimization problems are now becoming increasingly complex is, in addition to the more complex objective functions, the complex constraint functions to which today's problems are subject. These constraints can be inequality constraints, i.e. solutions cannot be accepted from one point onwards. For example, a generator in a finite period of time cannot produce more energy than one specific level which depends on how much it produced in the previous hour, regardless from whether or not it has reached its maximum production. The other type of constraint is the equality constraints in which solutions are accepted only if they are at a certain level, such as meeting the hourly need for electricity every hour during which our output must be neither lower nor higher of this need. For this reason, many of the most complex problems now are solved using stochastic optimization methods.

Two of these methods are the Covariance Matrix Adaptation - CMA algorithm and the Particle Swarm Optimization - PSO. The first works by updating the covariance matrix of the problem so that the contour of the multivariate normal distribution, to which it belongs, is transferred and changed in order to eventually reach the position of the global optimum. The second mimics the process by which a swarm moves in which all of the "individuals" of the swarm end up in the desired final destination following one another.

So the purpose of this dissertation is to make an effort so that the constraints of each problem can be addressed more easily and as a result to have better solutions to optimization problems. We try to achieve this by applying a modified form of the Feasibility Rules - FR method in conjunction with the CMA and PSO algorithms. This modified method converts inequality constraints to equality constraints for a number of iterations of the algorithm and tries to find the optimal solution on the limits of these constraints assuming that the optimal solution is usually somewhere there, based on our experience so far.

To test its effectiveness, the method is applied to some of the minimization problems of the operational research competition of the CEC2010 conference. To date, no optimal solution has been found for these problems.

1. Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται αρχικά μια εισαγωγή στη βελτιστοποίηση και στις βασικές έννοιες και χαρακτηριστικά που την απαρτίζουν. Ακολούθως, αναφέρεται η βασική διαφοροποίηση των μεθόδων βελτιστοποίησης και αναλύονται, εν συντομία, μερικές από αυτές. Έπειτα γίνεται μια πιο εις βάθος ανάλυση στους αλγόριθμους στοχαστικής βελτιστοποίησης αφού και ο CMA ανήκει σε αυτή την κατηγορία. Στο τέλος αυτού του κεφαλαίου επεξηγείται ο στόχος της παρούσας εργασίας.

1.1 Βελτιστοποίηση: Βασικές Έννοιες

Χρήση της βελτιστοποίησης γίνεται επί καθημερινής βάσεως σε πολλούς τομείς της ζωής μας όπως στη βιομηχανία για σχεδιασμό προϊόντων, διεργασιών και υπηρεσιών, στον προγραμματισμό και διάθεση πόρων, είτε στη βιομηχανία, είτε στις μεταφορές και γενικά όπου έχουμε διαθέσιμους πόρους που μπορούν να διανεμηθούν με διάφορους τρόπους. Επίσης σημαντικό ρόλο έχει η βελτιστοποίηση στα οικονομικά και στον κόσμο των ηλεκτρονικών υπολογιστών και του ελέγχου. Στόχος της βελτιστοποίησης είναι να παρέχει στον εκάστοτε χρήστη που τη χρησιμοποιεί απαραίτητες πληροφορίες, που αλλιώς δεν μπορεί να έχει, έτσι ώστε να πάρει την όσο το δυνατόν καλύτερη απόφαση που μπορεί.

Η βελτιστοποίηση χρησιμοποιείται για την εύρεση της, όσο το δυνατόν, πιο σωστής και καλύτερης λύσης ενός προβλήματος μέσα από ένα σύνολο πιθανών λύσεων χωρίς, βέβαια, να παραβιάζονται οι περιορισμοί που πιθανόν να έχει το εκάστοτε πρόβλημα.

Όταν αναφερόμαστε στην “καλύτερη λύση” ενός προβλήματος βελτιστοποίησης εννοούμε το διάνυσμα των μεταβλητών απόφασης του προβλήματος το οποίο δεν παραβιάζει τους περιορισμούς του προβλήματος και ελαχιστοποιεί μια συνάρτηση κόστους (cost function) ή μεγιστοποιεί μια συνάρτηση καταλληλότητας (fitness function).

Αυτές οι συναρτήσεις ονομάζονται αντικειμενικές συναρτήσεις και ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης μπορεί να είναι πολυκριτηριακό δηλαδή να αποτελείται από πολλές αντικειμενικές συναρτήσεις (Multi Objective Optimization Problem) ή μονοκριτηριακό δηλαδή από μία μόνο (Single Objective Optimization Problem). Στην περίπτωση που το πρόβλημά μας είναι πολυκριτηριακό μερικές φορές οι αντικειμενικές συναρτήσεις που το απαρτίζουν είναι ανταγωνιστικές, δηλαδή, η βελτίωση της μιας χειροτερεύει τις υπόλοιπες. Σε αυτή την περίπτωση υπολογίζεται ένα σύνολο εξίσου καλών λύσεων οι οποίες κυριαρχούν στις υπόλοιπες λύσεις του προβλήματος, δηλαδή, έχουν καλύτερο αποτέλεσμα από τις υπόλοιπες ως προς κάθε συνάρτηση. Το σύνολο των λύσεων αυτών ονομάζεται μέτωπο Pareto.

Αρχικά, είναι χρήσιμο να εκφράσουμε τη συνάρτηση ενός προβλήματος βελτιστοποίησης – ελαχιστοποίησης.

$$min\,\vec{f}\,(\vec{x}) = min\left[f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_N(\vec{x})\right] \qquad \textbf{Εξ. 1-1}$$

Στη σχέση 1.1, το $\vec{f}$ συμβολίζει το διάνυσμα των αντικειμενικών συναρτήσεων, με $\vec{x}$ συμβολίζεται το διάνυσμα των μεταβλητών απόφασης του προβλήματος πλήθους n και $f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_N(\vec{x})$ είναι η επιμέρους αντικειμενικές συναρτήσεις.

Στην περίπτωση που το πρόβλημα υπόκειται σε περιορισμούς αυτοί παρουσιάζονται στις σχέσεις 1.2.

$$h_j(\vec{x}) = 0 \qquad j = 1\,, k$$

$$g_i(\vec{x}) \le 0 \qquad i = 1\,, m \qquad \textbf{Εξ. 1-2}$$

Με $g_i(\vec{x})$ συμβολίζουμε τις συναρτήσεις των περιορισμών ανισότητας που έχουν πλήθος m και με $h_j(\vec{x})$ συμβολίζουμε τις συναρτήσεις των περιορισμών ισότητας με πλήθος k.

Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω το διάνυσμα $\vec{x} = [x_1, x_2, \dots, x_p]$, στο οποίο αναφερόμαστε και ως άτομο, περιέχει τις μεταβλητές απόφασης του προβλήματος. Το διάνυσμα του οποίου ο συνδυασμός των μεταβλητών απόφασης δίνει την καλύτερη τιμή στην εκάστοτε αντικειμενική συνάρτηση θεωρείται ως η λύση του προβλήματος. Οι μεταβλητές αυτές μπορεί να είναι είτε διακριτές είτε συνεχείς και η κάθε μια από αυτές χαρακτηρίζεται από ένα κατώτατο και ένα ανώτατο όριο x_{pL} και x_{pU} αντίστοιχα. Τα όρια αυτά ορίζουν έτσι τον χώρο αναζήτησης της λύσης του προβλήματος. Τέτοιου είδους περιορισμοί, σαν τα όρια των μεταβλητών απόφασης, ονομάζονται side constraints και δεν εμπίπτουν στην ίδια κατηγορία με τους κύριους περιορισμούς τους προβλήματος που αναφέραμε και παραπάνω. Στη γενική περίπτωση οι συναρτήσεις περιορισμών και οι αντικειμενικές συναρτήσεις μπορούν να είναι είτε γραμμικές είτε μη-γραμμικές.

Κατά τη βελτιστοποίηση δύο παράγοντες παίζουν κυρίαρχο ρόλο. Η εξερεύνηση (exploration) και η εκμετάλλευση (exploitation). Η εξερεύνηση είναι η δοκιμή λύσεων σε όσο το δυνατόν μεγαλύτερο κομμάτι του χώρου αναζήτησης ενώ η εκμετάλλευση είναι η δοκιμή λύσεων σε μια συγκεκριμένη περιοχή του χώρου αναζήτησης με σκοπό την εύρεση της καλύτερης λύσης σε αυτή την περιοχή. Για την εύρεση της καλύτερης δυνατής λύσης, όσο πιο κοντά στη βέλτιστη, είναι απαραίτητη η αξιοποίηση, σε όσο μεγαλύτερο βαθμό γίνεται, και των δύο αυτών παραγόντων. Αρχικά με καλή εξερεύνηση να βρούμε την περιοχή του χώρου που βρίσκεται η βέλτιστη λύση και έπειτα με χρήση της εκμετάλλευσης να βρούμε τη βέλτιστη αυτή λύση στην περιοχή αυτή. Ένα πρόβλημα που δημιουργείται όμως στα προβλήματα βελτιστοποίησης είναι ότι οι δύο αυτοί παράγοντες είναι αντικρουόμενοι, δηλαδή, όσο πιο πολύ βάρος δίνεις στον ένα τόσο πιο λίγο δίνεις στον άλλο. Και λόγω του πεπερασμένου χρόνου που έχουμε για λύση των προβλημάτων αυτός είναι ένας λόγος που τις περισσότερες φορές στα προβλήματα αυτά δεν βρίσκουμε τη βέλτιστη λύση, αλλά προσπαθούμε να βρούμε μια όσο το δυνατόν πιο κοντά σε αυτή στο λιγότερο δυνατόν χρόνο.

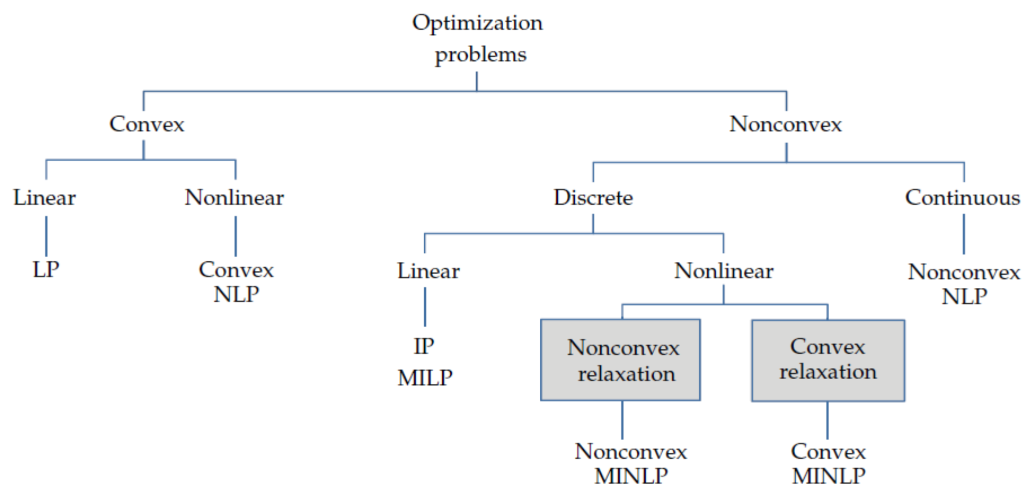
Επίσης, ένα άλλο εμπόδιο που έχουμε να αντιμετωπίσουμε λύνοντας τα προβλήματα αυτά είναι στις περιπτώσεις όπου οι αντικειμενικές μας συναρτήσεις περιέχουν πολλά ακρότατα (multimodal functions). Το εμπόδιο που εμφανίζεται σε αυτές τις περιπτώσεις είναι ότι υπάρχει ο κίνδυνος "εγκλωβισμού" σε μια περιοχή που περιέχει ένα τοπικό ακρότατο, δηλαδή, μεγάλη εκμετάλλευση της περιοχής αυτής και όχι επαρκής εξερεύνησης άλλων περιοχών. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα υποβέλτιστες λύσεις (sub-optimal solutions).

Με βάση αυτά, η ποιότητα της λύσης μιας μεθόδου βελτιστοποίησης κρίνεται από τον χρόνο που απαιτήθηκε για τον εντοπισμό της λύσης αυτής και από την πορεία σύγκλισης, δηλαδή από τις καλύτερες λύσεις που έχουν βρεθεί κάθε στιγμή της αναζήτησης.

1.2 Μέθοδοι Βελτιστοποίησης

Αρχικά, οι μέθοδοι βελτιστοποίησης μπορούν να ταξινομηθούν σε τρεις κύριες κατηγορίες.

Η πρώτη κατηγορία είναι οι αιτιοκρατικές (deterministic) και βασίζονται σε μαθηματικό προγραμματισμό. Αυτές δηλαδή, επιλύουν με χρήση της παραγώγου της αντικειμενικής συνάρτησης. Τα πλεονεκτήματα αυτών των μεθόδων είναι: η βελτιστοποίηση αποδεικνύεται μαθηματικά σε ορισμένους αλγορίθμους [1], μπορούν να εφαρμοστούν σε προβλήματα μεγάλης κλίμακας [1], δεν έχουν συγκεκριμένες παραμέτρους για συγκεκριμένο πρόβλημα [2] και επιπλέον, μερικές από αυτές τις μεθόδους είναι υπολογιστικά γρήγορες. Ωστόσο, αυτές οι μέθοδοι μπορούν να συγκλίνουν σε τοπικό βέλτιστο και εξαρτώνται από την αρχικοποίηση που θα γίνει στις μεταβλητές απόφασης του εκάστοτε προβλήματος. Καθώς μπαίνουμε περισσότερο σε βάθος, μπορούμε να δούμε ότι για τις μαθηματικές μεθόδους το κύριο μειονέκτημα είναι ότι αποτυγχάνουν να βρουν το ολικό βέλτιστο σε προβλήματα με μη ομαλές ή μη κυρτές αντικειμενικές συναρτήσεις. Μερικές από αυτές είναι, ο γραμμικός προγραμματισμός (LP) για την επίλυση κυρτών γραμμικών προβλημάτων και ο μη-γραμμικός προγραμματισμός (NLP) που χρησιμοποιείται σε κυρτά μη-γραμμικά και μη-κυρτά συνεχή προβλήματα. Αλγόριθμοι για τη λύση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού είναι η μέθοδος Simplex [3], ο Ellipsoid Algorithm [4] και Interior-Point Algorithms [5]. Μερικοί αλγόριθμοι για την επίλυση προβλημάτων μη γραμμικού προγραμματισμού με περιορισμούς είναι ο Interior-Point Algorithms [5], Sequential quadratic programming (SQP) [6] και Trust-region reflective [7]. Επίσης, ο γραμμικός προγραμματισμός μικτού ακεραίου (MILP) [8] για επίλυση μη-κυρτών διακριτών γραμμικών προβλημάτων καθώς και ο μη-γραμμικός προγραμματισμός μικτού ακεραίου (MINLP) [9], [10] για τα μη-κυρτά διακριτά μη-γραμμικά προβλήματα όπως φαίνονται στο **Error! Not a valid bookmark self-reference.**.



Σχ. 1-1

Η δεύτερη κατηγορία των μεθόδων βελτιστοποίησης είναι οι στοχαστικές και οι αλγόριθμοί τους βασίζονται στην τεχνητή νοημοσύνη, όπως τα τεχνητά νευρωνικά δίκτυα και τους στοχαστικούς εξελικτικούς αλγόριθμους. Οι στοχαστικές μέθοδοι συχνά χρησιμοποιούν αρχές φυσικής επιλογής και είναι κατάλληλες για αναζήτηση μη γραμμικών, ασυνεχών και μεγάλων διαστάσεων χώρων [11]. Ένα πλεονέκτημα αυτών των τεχνικών είναι ότι δεν εξαρτώνται από την παράγωγο των αντικειμενικών συναρτήσεων που μπορεί να είναι δύσκολο να βρεθούν ή η ίδια η αντικειμενική συνάρτηση να είναι μη διαφορίσιμη. Επίσης, ο μεγάλος αριθμός παραμέτρων και η μεγάλη περιοχή εφικτών λύσεων, που μπορεί να περιέχει μεγάλο αριθμό τοπικών βέλτιστων, καθιστούν τις στοχαστικές μεθόδους πιο ελκυστικές για τον χειρισμό συγκεκριμένων προβλημάτων. Επιπρόσθετα, είναι αλγόριθμοι γενικής χρήσης, αντιμετωπίζουν τα προβλήματα ως «μαύρο κουτί». Αν και οι στοχαστικές μέθοδοι φαίνεται να είναι αποτελεσματικές στην επίλυση συγκεκριμένων προβλημάτων, οι λύσεις που λαμβάνονται δεν είναι οι βέλτιστες και χρειάζονται μεγάλο χρόνο υπολογισμού [12] άρα είναι και πιο κοστοβόρες. Επιπλέον, ο μεγάλος αριθμός αυθαίρετων ή ειδικών παραμέτρων για το πρόβλημα [2] καθιστά δυσκολότερη τη ρύθμιση αυτών των μεθόδων. Κάποιοι από αυτούς τους αλγόριθμους είναι ο CMA [13], η PSO [14], η DE [15] [16], η ACO [17], η HS [18] και πολλές άλλοι.

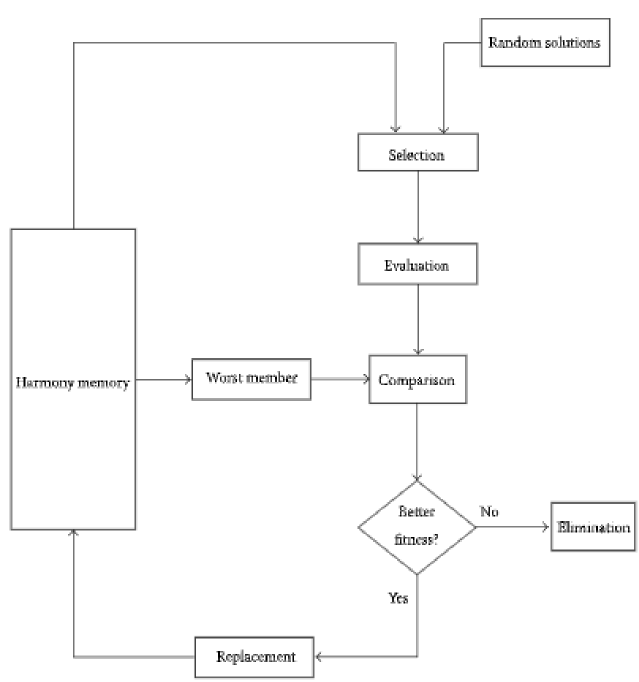
Η τρίτη κατηγορία είναι οι υβριδικές μέθοδοι, οι οποίες συνδυάζουν δύο ή περισσότερους αλγόριθμους από τις μεθόδους που αναφέρθηκαν προηγουμένως. Οι υβριδικές μέθοδοι ενσωματώνουν δύο ή περισσότερους αλγόριθμους βελτιστοποίησης για να συνδυάσουν τα πλεονεκτήματά τους και να ξεπεράσουν τις αδυναμίες που έχει ο κάθε ένας ξεχωριστά στην επίλυση των προβλημάτων βελτιστοποίησης. Σε αυτές τις μεθόδους, γενικά, χρησιμοποιείται μια στοχαστική μέθοδος πρώτα, για εξερεύνηση του χώρου και εύρεση της βέλτιστης περιοχής και έπειτα με χρήση μιας μαθηματικής/αιτιοκρατικής μεθόδου ως τοπικού βελτιστοποιητή για περισσότερη και καλύτερη εκμετάλλευση της περιοχής και βελτίωση των αποτελεσμάτων της στοχαστικής μεθόδου. Οι υβριδικές μέθοδοι που συνδυάζουν δύο ή περισσότερες τεχνικές βελτιστοποίησης είναι πιο αποτελεσματικές στην εξεύρεση σχεδόν βέλτιστης λύσης σε αρκετά προβλήματα με μη ομαλές και μη κυρτές αντικειμενικές συναρτήσεις. Μερικές υβριδικές μέθοδοι για παράδειγμα, είναι: GA-SA [19], EP-SQP [12] κ.λπ.

1.3 Αλγόριθμοι Στοχαστικής Βελτιστοποίησης

1.3.1 Harmony Search (HS)

Πρώτα προτάθηκε το 2001 [18], η μέθοδος Harmony Search (HS) εμπνέεται από τις βασικές αρχές του αυτοσχεδιασμού των μουσικών στην αρμονία. Τα τελευταία χρόνια, έχει χρησιμοποιηθεί με επιτυχία σε τομείς όπως η βελτιστοποίηση συναρτήσεων, η μηχανολογική σχεδίαση κτιρίων, η βελτιστοποίηση δικτύου αγωγών και τη βελτιστοποίηση συστημάτων ταξινόμησης δεδομένων.

Όπως γνωρίζουμε, όταν οι μουσικοί συνθέτουν την αρμονία, συνήθως δοκιμάζουν διάφορους πιθανούς συνδυασμούς των μουσικών τόνων που είναι αποθηκευμένοι στη μνήμη τους. Αυτή η αναζήτηση για την τέλεια αρμονία είναι πράγματι ανάλογη με τη διαδικασία εύρεσης των βέλτιστων λύσεων σε προβλήματα μηχανικής. Το Σχ. 1-2 δείχνει το διάγραμμα ροής της βασικής μεθόδου HS, στην οποία εμπλέκονται τέσσερα βασικά στάδια.



Σχ. 1-2 [20]

Ο αλγόριθμος HS βασίζεται σε τέσσερις βασικές σταθερές. Η πρώτη είναι η Harmony Memory Size (HMS) που είναι, ουσιαστικά, το μέγεθος της βάσης δεδομένων που περιέχει τις καλύτερες λύσεις που έχουν βρεθεί μέχρι εκείνη τη στιγμή. Η δεύτερη είναι η Harmony Memory Consideration Rate (HMCR) που είναι η πιθανότητα να δημιουργηθεί ένα νέο άτομο. Η Τρίτη είναι η Pitch Adjustment Rate (PAR) που είναι η πιθανότητα να μεταβληθούν οι τιμές των μεταβλητών απόφασης ενός νέου ατόμου. Και τέλος το Bandwidth που είναι το εύρος στο οποίο οι τιμές των μεταβλητών απόφασης μπορούν να αλλάξουν.

Η εκμετάλλευση επιτυγχάνεται μέσω της Pitch Adjustment Rate και του Bandwidth ενώ η εξερεύνηση από την Harmony Memory Consideration Rate.

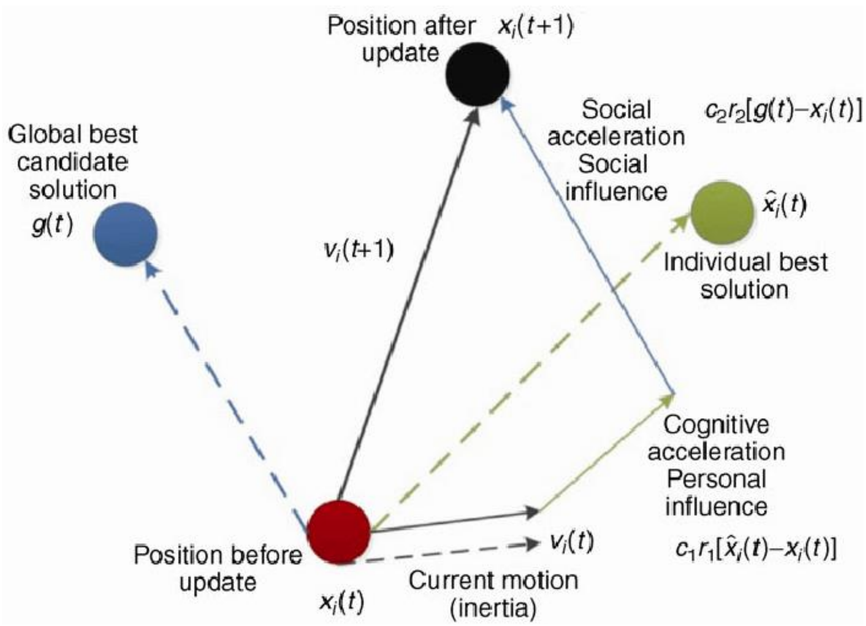
1.3.2 Particle Swarm Optimization (PSO)

Αρχικά, το Swarm Intelligence (SI) το οποίο ερευνά τη συλλογική συμπεριφορά αποκεντρωμένων, αυτο-οργανωμένων συστημάτων, φυσικών ή τεχνητών είναι μέρος του Evolutionary Computation (EC) που είναι μέρος Computational Intelligence (CI) το οποίο συνδέεται άμεσα με το Artificial Intelligence (AI). Τα τυπικά συστήματα SI αποτελούνται από έναν πληθυσμό απλών παραγόντων ή ομάδων που αλληλοεπιδρούν τοπικά μεταξύ τους και με το περιβάλλον τους. Η έμπνευση προέρχεται συχνά από τη φύση, ειδικά από τα βιολογικά συστήματα [21].

Τα σωματίδια σε ένα σύστημα SI ακολουθούν πολύ απλούς κανόνες. Δεν υπάρχει κεντρική δομή ελέγχου που να υπαγορεύει τον τρόπο συμπεριφοράς των μεμονωμένων σωματιδίων. Οι πραγματικές συμπεριφορές των σωματιδίων είναι τοπικές και σε κάποιο βαθμό τυχαίες. Ωστόσο, οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ αυτών των σωματιδίων οδηγούν στην εμφάνιση “ευφυούς” παγκόσμιας συμπεριφοράς, η οποία είναι άγνωστη στα επιμέρους σωματίδια. Γνωστά παραδείγματα SI περιλαμβάνουν αποικίες μυρμηγκιών, σμήνη πτηνών, κοπάδια ζώων, ανάπτυξη βακτηρίων και ομάδες ψαριών.

Στην υπολογιστική επιστήμη, η Particle Swarm Optimization (PSO) είναι μια υπολογιστική μέθοδος που χρησιμοποιεί το SI και βελτιστοποιεί ένα πρόβλημα προσπαθώντας επαναληπτικά να βελτιώσει μια υποψήφια λύση σε σχέση με ένα δεδομένο μέτρο ποιότητας. Αρχικά προτάθηκε από τους Kennedy, J. και Eberhart, R. [22]. Επιλύει ένα πρόβλημα έχοντας έναν πληθυσμό υποψήφιων λύσεων, που ονομάζονται σωματίδια, τα οποία μετακινούνται στον χώρο αναζήτησης σύμφωνα με απλούς μαθηματικούς τύπους με βάση τη θέση και την ταχύτητα του κάθε σωματιδίου. Η κίνηση κάθε σωματιδίου βασίζεται στην ταχύτητα του καθενός η οποία επηρεάζεται και μεταβάλλεται από την τοπικά καλύτερη γνωστή θέση του, αλλά καθοδηγείται επίσης και από την πιο καλή γνωστή θέση όλων των σωματιδίων στον χώρο αναζήτησης. Αυτό αναμένεται να οδηγήσει το σμήνος των σωματιδίων προς τις καλύτερες λύσεις.

Οι βασικές μεταβλητές στις οποίες βασίζεται η PSO είναι το PBEST που είναι ανά πάσα στιγμή η καλύτερη γνωστή θέση που έφτασε το κάθε σωματίδιο, το GBEST που είναι η καλύτερη γνωστή θέση μεταξύ όλων των σωματιδίων και τέλος το V που είναι η ταχύτητα με βάση την οποία αλλάζει σε κάθε επανάληψη η θέση του κάθε σωματιδίου και τα κατευθύνει σε έτσι ώστε ολόκληρο το σμήνος να καταλήξει στη βέλτιστη θέση (λύση) που μπορεί να φτάσει.



Σχ. 1-3

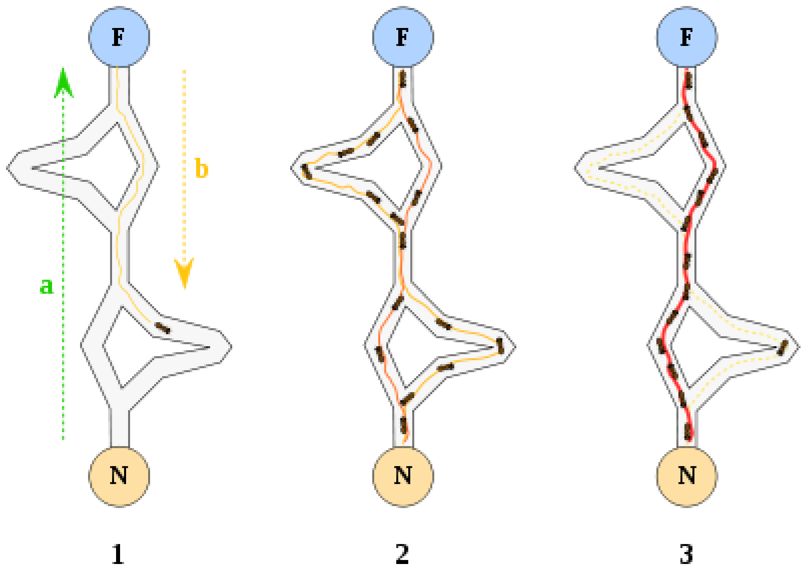
1.3.3 Ant Colony Optimization (ACO)

Ο αλγόριθμος Ant Colony Optimization (ACO), ο οποίος αναπτύχθηκε από τους Dorigo M., Colorni A. Και Maniezzo V. το 1991 [17] , χρησιμοποιεί και αυτός το Swarm Intelligence (SI) όπως και η PSO και αποτελεί και αυτός μια στοχαστική μέθοδο βελτιστοποίησης.

Η μέθοδος αυτή είναι εμπνευσμένη από τις δράσεις μιας αποικίας μυρμηγκιών. Τα τεχνητά “μυρμήγκια” εντοπίζουν βέλτιστες λύσεις καθώς κινούνται σε ένα χώρο παραμέτρων που αντιπροσωπεύει όλες τις πιθανές λύσεις. Τα πραγματικά μυρμήγκια καθορίζουν φερομόνες που οδηγούν ο ένας τον άλλον σε πόρους ενώ εξερευνούν το περιβάλλον τους. Τα προσομοιωμένα “μυρμήγκια” καταγράφουν επίσης τις θέσεις τους και την ποιότητα των λύσεων τους, έτσι ώστε σε μεταγενέστερες επαναλήψεις όλο και περισσότερα μυρμήγκια να εντοπίζουν καλύτερες λύσεις.

Στην ACO, οι διαδρομές που ακολουθούν τα μυρμήγκια αποτελούν το σύνολο των πιθανών λύσεων. Βέλτιστη λύση είναι η διαδρομή με τη μεγαλύτερη ποσότητα φερομόνης, δηλαδή η διαδρομή που ακολουθήθηκε περισσότερο από όλες.

Σε κάθε κόμβο της διαδρομής το κάθε "μυρμήγκι" εξετάζει τις πιθανές κατευθύνσεις που μπορεί να ακολουθήσει. Η πιθανότητα να ακολουθήσει μια διαδρομή αυξάνεται με την ποσότητα της "φερομόνης" που έχει αυτή η διαδρομή. Έτσι σε κάθε επανάληψη όλο και περισσότερα "μυρμήγκια" θα επιλέγουν μια διαδρομή.



Σχ. 1-4

1.3.4 Evolutionary Algorithms

Οι Εξελικτικοί αλγόριθμοι (ΕΑ) είναι ακόμα μια στοχαστική μέθοδος βελτιστοποίησης η οποία βασίζεται στη θεωρία εξέλιξης των ειδών του Δαρβίνου [23].

Στη θεωρία του, ο Δαρβίνος πρότεινε έναν μηχανισμό εξέλιξης: τη φυσική επιλογή η οποία βασίστηκε σε μερικές βασικές παρατηρήσεις. Η πρώτη ήταν ότι στους ζωντανούς οργανισμούς πολλά χαρακτηριστικά κληρονομούνται ή μεταβιβάζονται από τον γονέα στον απόγονο. Η δεύτερη ήταν ότι παράγονται περισσότεροι απόγονοι από ότι μπορούν να επιβιώσουν. Οι οργανισμοί είναι σε θέση να παράγουν περισσότερους απογόνους από ό,-τι μπορεί να υποστηρίξει το περιβάλλον τους. Έτσι, υπάρχει ανταγωνισμός για περιορισμένους πόρους σε κάθε γενιά. Η τρίτη ήταν ότι οι απόγονοι διαφέρουν στα κληρονομικά χαρακτηριστικά τους. Οι απόγονοι σε οποιαδήποτε γενιά θα είναι ελαφρώς διαφορετικοί μεταξύ τους στα χαρακτηριστικά τους (χρώμα, μέγεθος, σχήμα κ.λπ.). Με βάση αυτές τις παρατηρήσεις ο Δαρβίνος κατέληξε στα εξής συμπεράσματα:

- Σε έναν πληθυσμό, ορισμένα άτομα θα έχουν κληρονομήσει χαρακτηριστικά που τους βοηθούν να επιβιώσουν και να αναπαραχθούν, δεδομένων των συνθηκών του περιβάλλοντός τους.

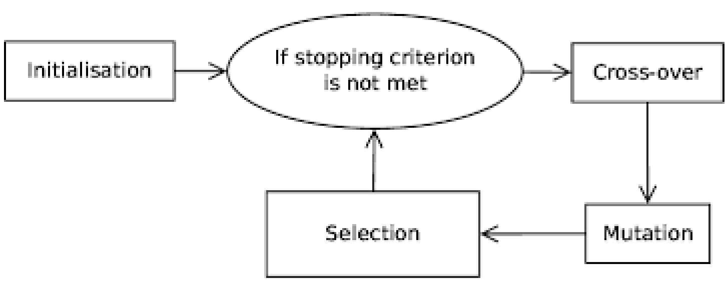
- Τα άτομα με τα χρήσιμα χαρακτηριστικά θα αφήσουν περισσότερους απογόνους στην επόμενη γενιά από τους συνομηλίκους τους, καθώς τα χαρακτηριστικά τα καθιστούν πιο αποτελεσματικά στην επιβίωση και την αναπαραγωγή.

- Επειδή τα χρήσιμα χαρακτηριστικά είναι κληρονομικά και επειδή οι οργανισμοί με αυτά τα χαρακτηριστικά αφήνουν περισσότερους απογόνους, τα χαρακτηριστικά αυτά θα τείνουν να γίνουν πιο συνηθισμένα (υπάρχουν σε μεγαλύτερο μέρος του πληθυσμού) στην επόμενη γενιά.

- Με τις γενιές, ο πληθυσμός θα προσαρμοστεί στο περιβάλλον του (καθώς τα άτομα με χαρακτηριστικά που βοηθούν σε αυτό το περιβάλλον έχουν σταθερά μεγαλύτερη αναπαραγωγική επιτυχία από τους συνομηλίκους τους).

Έτσι και στους εξελικτικούς αλγόριθμους, κάθε άτομο κάθε γενιάς αξιολογείται με κριτήρια καταλληλότητας και τα πιο κατάλληλα άτομα διασταυρώνονται, δηλαδή συνδυάζουν τα γονίδιά τους για να δημιουργήσουν απογόνους. Αυτοί οι απόγονοι πιθανόν να μεταλλαχτούν δηλαδή κάποια από τα γονίδιά τους να αλλάξουν. Με αυτόν τον τρόπο αυξάνονται οι πιθανότητες παραγωγής κατάλληλων απογόνων με μεγαλύτερες πιθανότητες επιβίωσης. Στο τέλος στόχος είναι η εύρεση του καλύτερου ατόμου από όλες τις γενιές που ολοκληρώθηκαν.

Υποσύνολα των εξελικτικών αλγόριθμων είναι οι στρατηγικές εξέλιξης (Evolutionary Strategies - ES), οι γενετικοί αλγόριθμοι (Genetic Algorithms – GA), ο γενετικός προγραμματισμός (Genetic Programming – GP) και ο εξελικτικός προγραμματισμός (Evolutionary Programming – EP)



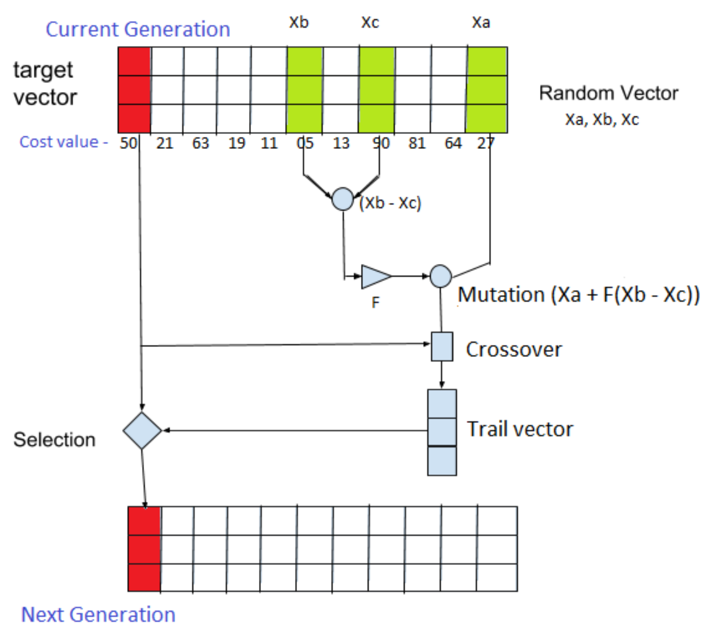
Σχ. 1-5

1.3.5 Differential Evolution

Ο αλγόριθμος Differential Evolution (DE), που παρουσιάστηκε για πρώτη φορά από τους Storn and Price [15] το 1995, είναι μια στοχαστική τεχνική αναζήτησης βάσει πληθυσμού. Λόγω της απλότητας και του χαμηλού υπολογιστικού κόστους, η DE εφαρμόζεται συχνά σε διάφορα προβλήματα που σχετίζονται με την ενέργεια, την επιχειρησιακή έρευνα και την βιομηχανική παραγωγή, την ρομποτική, την επεξεργασία εικόνας, τη χημική μηχανική, τη βιοϊατρική και μηχανική και τη βιοπληροφορική και πολλά άλλα όπως αναλύονται στο [16].

Η DE λειτουργεί μέσω των ίδιων υπολογιστικών βημάτων όπως χρησιμοποιείται από έναν τυπικό εξελικτικό αλγόριθμο (Evolutionary Algorithm-EA). Ωστόσο, η DE διαφέρει σημαντικά από τους γνωστούς EA όπως τον Evolution Strategies (ES) και τον Evolutionary Programming (EP) λαμβάνοντας υπόψη το γεγονός ότι μεταλλάσσει τα βασικά διανύσματα (δευτερεύοντες γονείς) με κλιμακωτές διαφορές από διαφορετικά μέλη από τον τρέχων πληθυσμό. Καθώς οι επαναλήψεις περνούν, αυτές οι διαφορές τείνουν να προσαρμόζονται στο περιβάλλον – χώρο αναζήτησης. Σε σύγκριση με άλλους EA, η DE είναι πιο απλή και εύκολη στην εφαρμογή.

Η αρχική επανάληψη ενός τυπικού αλγόριθμου DE αποτελείται από τέσσερα βασικά βήματα – την αρχικοποίηση (initialization), την μετάλλαξη (mutation), τον ανασυνδυασμό ή διασταύρωση (crossover) και την επιλογή (selection), εκ των οποίων, μόνο τα τρία τελευταία βήματα επαναλαμβάνονται σε όλες τις επαναλήψεις. Επίσης, η DE έχει τρεις κύριες παραμέτρους ελέγχου: Πρώτος είναι ο παράγοντας μετάλλαξης F ο οποίος κλιμακώνει τα διανύσματα διαφορών από διαφορετικά μέλη του πληθυσμού έτσι ώστε να δημιουργεί νέες υποψήφιες λύσεις χρησιμοποιώντας τις πληροφορίες των λύσεων στον τρέχοντα πληθυσμό. Δεύτερη είναι η σταθερά crossover Cr. Μέσω της διασταύρωσης (crossover), σχηματίζεται ο απόγονος σε κάθε μια επανάληψη του αλγόριθμου. Η διασταύρωση (crossover) πραγματοποιείται σε καθεμία από τις μεταβλητές απόφασης όταν ένας τυχαία παραγόμενος αριθμός μεταξύ του 0 και 1 είναι μικρότερος ή ίσος με την προκαθορισμένη παράμετρο Cr. Η τρίτη παράμετρος είναι το μέγεθος πληθυσμού NP.



Σχ. 1-6

Η DE λειτουργεί σαν ένας άπληστος αλγόριθμος και λαμβάνει υπόψη μόνο τις καλύτερες λύσεις σε κάθε γενιά. Επομένως, εάν το νέο δοκιμαστικό διάνυσμα - απόγονος αποδώσει ίση ή χαμηλότερη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης, αντικαθιστά το αντίστοιχο διάνυσμα – γονέα στην επόμενη επανάληψη. Διαφορετικά, ο γονέας διατηρείται στον πληθυσμό της επόμενης γενιάς.

1.4 Μέθοδοι Χειρισμού προβλημάτων Βελτιστοποίησης με Περιορισμούς

Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω τα προβλήματα βελτιστοποίησης πολλές φορές υπόκεινται σε περιορισμούς. Αυτοί οι περιορισμοί καθιστούν την εύρεση του ολικού βέλτιστου πιο δύσκολη. Για παράδειγμα, μπορεί να καθιστούν διάφορες συναρτήσεις μη γραμμικές και να αυξάνουν τον αριθμό τοπικών βέλτιστων. Επιπλέον, μπορεί να οδηγούν σε ένα χώρο λύσεων με χωριστές, επομένως μη κυρτές, εφικτές περιοχές. Αυτό μπορεί να μετατρέπει το εκάστοτε πρόβλημα μας σε ένα πρόβλημα μη ομαλής βελτιστοποίησης με σύνθετα μη γραμμικά και μη κυρτά χαρακτηριστικά. Έτσι, όταν χρησιμοποιούμε στοχαστικές μεθόδους βελτιστοποίησης για επίλυση προβλημάτων με περιορισμούς μια μέθοδος αντιμετώπισης και χειρισμού των περιορισμών είναι αναγκαία να συμπεριληφθεί.

Δύο από τις πιο διαδεδομένες και βασικές μεθόδους αντιμετώπισης και χειρισμού των περιορισμών διαφόρων προβλημάτων βελτιστοποίησης είναι οι Συναρτήσεις Ποινής (Penalty Functions) και η Υπεροχή των Εφικτών Λύσεων (Superiority of Feasible Solutions - SF) η οποία γίνεται με βάση τους τρεις κανόνες επιτευξιμότητας (Feasibility Rules – FR).

1.4.1 Penalty Function

Οι μέθοδοι ποινών είναι μια συγκεκριμένη κατηγορία αλγορίθμων για την επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης με περιορισμούς.

Μια μέθοδος ποινής αντικαθιστά ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης με περιορισμούς από μια σειρά προβλημάτων χωρίς περιορισμούς των οποίων οι λύσεις συγκλίνουν ιδανικά με τη λύση του αρχικού περιορισμένου προβλήματος. Τα προβλήματα χωρίς περιορισμούς σχηματίζονται προσθέτοντας έναν όρο, που ονομάζεται συνάρτηση ποινής, στην αντικειμενική συνάρτηση που αποτελείται από μια παράμετρο ποινής πολλαπλασιαζόμενη με ένα μέτρο παραβίασης των περιορισμών. Το μέτρο παραβίασης είναι μη μηδενικό όταν παραβιάζονται οι περιορισμοί και είναι μηδέν στην περιοχή όπου δεν παραβιάζονται περιορισμοί.

Μέθοδος Εξωτερικής Ποινής:

$$\Psi(x) = f(x) + \lambda \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} g_i(x) + \sum_{i=1}^{p} h_j(x)\right) \qquad \textbf{Εξ. 1-3}$$

Όπου Ψ(x) η νέα αντικειμενική συνάρτηση, f(x) η αντικειμενική συνάρτηση, λ ο συντελεστής ποινής (penalty factors – coefficients) και

$$g_i(x) = (\max(g_i(\vec{x}), 0))^{\beta} \quad \textbf{Εξ. 1-4}$$

$$h_j(x) = \left(\max\left(\left|h_j(\vec{x}) - \delta\right|, 0\right)\right)^{\gamma} \quad \textbf{Εξ. 1-5}$$

Όπου οι συντελεστές β και γ (συνήθως 1 ή 2)

Έτσι μετατρέπεται το πρόβλημα από f(x) με περιορισμούς σε Ψ(x) χωρίς περιορισμούς.

Οι συναρτήσεις ποινής χωρίζονται σε δύο μεγάλες βασικές κατηγορίες. Τις στατικές συναρτήσεις ποινής και τις δυναμικές. Στις στατικές συναρτήσεις ποινής οι συναρτήσεις g(x) και h(x) πολλαπλασιάζονται με σταθερούς συντελεστές ποινής (r_i) και (c_j), διαφορετικούς του λ, καθ' όλη την επαναληπτική διαδικασία.

$$\boldsymbol{\Psi(x) = f(x) + \lambda \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} r_i \cdot g_i(x) + \sum_{i=1}^{p} c_j \cdot h_j(x)\right)} \quad \textbf{Εξ. 1-6}$$

Στις δυναμικές ο συντελεστής ποινής μεταβάλλεται κατά τη διάρκεια των επαναλήψεων.

$$\boldsymbol{\Psi(x) = f(x) + (Ct)^{a} \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} g_i(x) + \sum_{i=1}^{p} h_j(x)\right)^{\beta}} \quad \textbf{Εξ. 1-7}$$

Όπου C, α και β σταθερές και t ο συντελεστής των επαναλήψεων.

Άλλες προσεγγίσεις των δυναμικών συναρτήσεων ποινής είναι οι πολυωνιμικές, οι εκθετικές και οι υβριδικές που είναι ο συνδυασμός των δύο. Αυτές οι προσεγγίσεις έχουν την εξής μορφή:

$$\boldsymbol{\Psi(x) = f(x) + \left(r(t) \cdot \sum_{i=1}^{m} g_i^2(x) + c(t) \cdot \sum_{i=1}^{p} h_j^2(x)\right)} \quad \textbf{Εξ. 1-8}$$

Όπου στις πολυωνιμικές έχουμε:

$$\boldsymbol{r(t) = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 + \cdots}$$

$$\boldsymbol{c(t) = b_0 + b_1 \cdot t + b_2 \cdot t^2 + \cdots} \quad \textbf{Εξ. 1-9}$$

Στις εκθετικές:

$$\boldsymbol{r(t) = e^{at}}$$

$$\boldsymbol{c(t) = e^{bt}} \quad \textbf{Εξ. 1-10}$$

Και στις υβριδικές:

$$\boldsymbol{r(t) = e^{a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 + \cdots}}$$

$$\boldsymbol{c(t) = e^{b_0 + b_1 \cdot t + b_2 \cdot t^2 + \cdots}}$$

Οι συντελεστές r(t) και c(t) είναι οι συντελεστές ποινής και τα α, b σταθερές που ορίζει ο χρήστης για το εκάστοτε πρόβλημα.

1.4.2 Superiority of Feasible Solutions with Feasibility Rules – SF with FR

Μεταξύ των μεθόδων αντιμετώπισης και χειρισμού των περιορισμών η SF με την χρήση των τριών κανόνων επιτευξιμότητας (Feasibility Rules – FR) είναι από τις πιο διαδεδομένες. Όπως υποδηλώνει το όνομά της, αυτή η μέθοδος προτιμά εφικτές λύσεις. Για να είμαστε συγκεκριμένοι, το FR περιγράφεται από τρεις κανόνες ως εξής:

- Μια εφικτή λύση θεωρείται καλύτερη από μια ανέφικτη.
- Συγκρίνονται δύο εφικτές λύσεις με βάση τις τιμές της αντικειμενικής συνάρτησής τους και επιλέγεται αυτή με την μικρότερη αν έχουμε πρόβλημα ελαχιστοποίησης ή τη μεγαλύτερη για πρόβλημα μεγιστοποίησης.
- Δύο ανέφικτες λύσεις συγκρίνονται ανάλογα με τον βαθμό παραβίασης των περιορισμών και επιλέγεται αυτή με το μικρότερο.

Όπως περιγράφεται παραπάνω, η FR έχει μεγάλη προτίμηση στις εφικτές λύσεις. Ως αποτέλεσμα, είναι ικανή να παρακινήσει τον πληθυσμό στην εφικτή περιοχή σχετικά γρήγορα. Επιπλέον, είναι εύκολο να εφαρμοστεί και δεν περιλαμβάνει πρόσθετες παραμέτρους [24]. Αυτά τα πλεονεκτήματα διευκολύνουν τις επιτυχημένες εφαρμογές της σε διαφορετικά πεδία [25] [26]. Ωστόσο, όλα έχουν τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματά τους. Λόγω της προτίμησής της για εφικτές λύσεις, η FR διατρέχει υψηλό κίνδυνο πρόωρης σύγκλισης. Ο πληθυσμός είναι επιρρεπής να παραμείνει σε τοπικό βέλτιστο.

1.5 Στόχος Διπλωματικής Εργασίας

Στόχος της διπλωματικής εργασίας είναι να εξετάσουμε αν ο συνδυασμός CMA με τροποποιημένη FR και PSO με τροποποιημένη FR μπορεί να επιλύει προβλήματα βελτιστοποίησης υπό περιορισμούς και σε τι βαθμό και με τι συχνότητα.

Τα προβλήματα στα οποία θα εξετάσουμε τον αλγόριθμό μας θα είναι συναρτήσεις 6, 9, 12, 16, 17 και 18 του συνεδρίου CEC2010.

Αρχικά θα τροποποιήσουμε τον κώδικα του αλγορίθμου CMA για να τον προσαρμόσουμε στα προβλήματα του συνεδρίου.

Έπειτα τροποποιούμε τη μέθοδο FR και την εισάγουμε στον κώδικά μας με τις νέες συναρτήσεις.

Για επαρκή και ικανοποιητική σύγκριση των αποτελεσμάτων και για σωστή εξαγωγή συμπερασμάτων δημιουργούμε ένα νέο κώδικα με την CMA και γίνεται χρήση της απλής FR. Επίσης προγραμματίζεται και ένας αλγόριθμος απλής PSO με χρήση και πάλι της απλής FR.

Τέλος, συγκρίνουμε όλες τις μεθόδους με τον συνδυασμό CMA και τροποποιημένης FR και PSO με τροποποιημένη FR στα προαναφερθέντα προβλήματα του συνεδρίου και εξάγουμε τα συμπεράσματά μας.

2. Βιβλιογραφική Ανασκόπηση

Το CMA-ES είναι μια ελκυστική επιλογή για μη γραμμική βελτιστοποίηση, εάν οι “κλασικές” μέθοδοι αναζήτησης, π.χ. η μέθοδος quasi-Newton, αποτυγχάνουν λόγω του μη κυρτού και τραχιού τοπίου αναζήτησης (π.χ. αιχμηρές στροφές, ασυνέχειες, ακραίες τιμές, θόρυβος και τοπικά βέλτιστα).

Η CMA-ES ξεπερνά τυπικά προβλήματα που συχνά σχετίζονται με εξελικτικούς αλγόριθμους όπως:

- Κακή απόδοση σε κακώς κλιμακωτές και εξαιρετικά μη διαχωρίσιμες αντικειμενικές συναρτήσεις.
- Η εγγενής ανάγκη χρήσης μεγάλων πληθυσμών. Ένας τυπικός, ωστόσο περίπλοκος, για διάγνωση λόγος για την αποτυχία των αλγορίθμων αναζήτησης βάσει πληθυσμού είναι ο εκφυλισμός του πληθυσμού σε έναν υποχώρο. Αυτό αποτρέπεται συνήθως από μη προσαρμοστικά συστατικά στον αλγόριθμο ή με μεγάλο μέγεθος πληθυσμού (σημαντικά μεγαλύτερο από τις διαστάσεις του προβλήματος). Στη CMA-ES, το μέγεθος του πληθυσμού μπορεί να επιλεγεί ελεύθερα, επειδή τα ποσοστά εκμάθησης $c1$ και $c\mu$ αποτρέπουν τον εκφυλισμό ακόμη και για μικρά μεγέθη πληθυσμού. Τα μικρά μεγέθη πληθυσμού συνήθως οδηγούν σε γρηγορότερη σύγκλιση, ενώ μεγάλα μεγέθη πληθυσμού συμβάλλουν στην αποφυγή τοπικών βέλτιστων.
- Πρόωρη σύγκλιση του πληθυσμού. Ο έλεγχος μεγέθους βημάτων αποτρέπει τον πληθυσμό να συγκλίνει πρόωρα.

Επομένως, η CMA-ES είναι εξαιρετικά ανταγωνιστική σε ένα αρκετά σημαντικό αριθμό αντικειμενικών συναρτήσεων [27] [28] [29] [30] και εφαρμόστηκε με επιτυχία σε πολλά προβλήματα του πραγματικού κόσμου.

Λόγω αυτών των πλεονεκτημάτων που έχει η CMA-ES σε σχέση με άλλους εξελικτικούς αλγορίθμους και σε συνδυασμό με τα θετικά των εξελικτικών αλγορίθμων που έχει εγγενή η CMA ως στρατηγική εξέλιξης (evolutionary strategy – ES), που όπως προαναφέρθηκε είναι μέρος των εξελικτικών αλγορίθμων, την κάνει μια ελκυστική επιλογή για επίλυση πιο περίπλοκων προβλημάτων.

Λόγω της ραγδαίας ανάπτυξης της τεχνολογίας που βιώνουμε στις μέρες μας αλλά και των καινούριων αναγκών που δημιουργούνται από αυτή, αλλά και από πολλές άλλες πτυχές της μοντέρνας μας ζωής, η απαίτηση για επίλυση περίπλοκων προβλημάτων βελτιστοποίησης και ειδικά προβλημάτων που υπόκεινται σε περιορισμούς γίνεται ολοένα και μεγαλύτερη. Μερικές από τις δυσκολίες που εμφανίζονται όταν προσπαθούμε να επιλύσουμε τέτοια προβλήματα είναι [31]:

- Οι μη γραμμικές, μη πολυωνιμικές, μη κυρτές αντικειμενικές συναρτήσεις των προβλημάτων.
- Οι τραχιές επιφάνειες.
- Το μεγάλο μέγεθος του χώρου αναζήτησης.
- Οι μη διαχωρίσιμες μεταβλητές απόφασης (Εξάρτηση μεταξύ τους).
- Ill-Conditioned Problems (Μικρές μεταβολές προκαλούν μεγάλες αλλαγές – Μεγάλες καμπυλότητες).

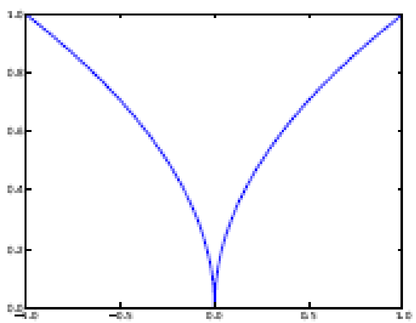
Παρακάτω μπορούμε να δούμε ότι εκτός από θεωρητικό ενδιαφέρον τέτοια προβλήματα εμφανίζονται σε πλήθος πρακτικών εφαρμογών. Διάφορα παραδείγματα περιλαμβάνουν διαχείριση ρίσκου στα χρηματοοικονομικά [32], [33], [34], τη γεωργία [35], υβριδικά δυναμικά συστήματα [36], μοντέλο ελέγχου πρόβλεψης [37], ελεγχόμενες διαταραχές για δεδομένα πίνακα [38] και βελτιστοποίηση των δικτύων εναλλακτών θερμότητας [39]. Επιπλέον, στο διαγωνισμό CEC 2011 περιέχεται ένα πρόβλημα κοστολόγησης μετάδοσης ηλεκτρικής ενέργειας το οποίο βασίζεται στο IEEE 30 bus system [40]. Ένα άλλο παράδειγμα είναι ένα πρόβλημα από την περιοχή της χημείας. Ο προσδιορισμός της χημικής σύστασης ενός σύνθετου μίγματος υπό συνθήκες χημικής ισορροπίας. Αυτό το πρόβλημα περιγράφεται λεπτομερώς στο [41]. Τέλος, μπορούμε να δούμε στο [42] όπου το πρόβλημα του σχεδιασμού σύνθετων συστημάτων, όπως οχήματα αεροδιαστημικής, μπορεί να μετατραπεί σε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης με περιορισμούς υπό αβεβαιότητα.

Συνεχίζοντας, έχουν προταθεί πολλές προσεγγίσεις χειρισμού περιορισμών για χρήση σε εξελικτικούς αλγόριθμους (EAs). Μια λίστα με αναφορές σε τεχνικές χειρισμού περιορισμών που χρησιμοποιούνται με EA συντάχθηκε από τον Coello Coello και περιέχει περισσότερες από χίλιες καταχωρήσεις. Μεταξύ των πιο διαδεδομένων εφαρμοσμένων προσεγγίσεων είναι αλγόριθμοι που βασίζονται σε άμεσο επαναπροσδιορισμό των αδύνατων υποψηφίων λύσεων, αλγόριθμοι με συναρτήσεις ποινής ή πολυκριτηριακές μεθόδοι. Στο [43] μπορούμε να δούμε μια ολοκληρωμένη επισκόπηση.

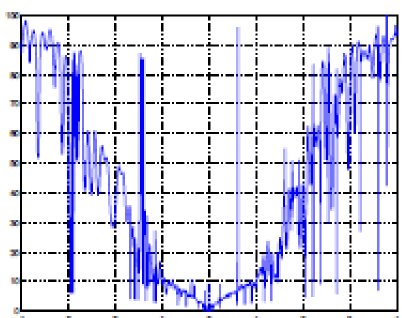
Παρά την ισχυρή τους απόδοση σε βελτιστοποίηση που αφορούν “black – box” ασκήσεις συγκριτικής αξιολόγησης που εστιάζονται σε πραγματικά προβλήματα τα οποία δεν υπόκεινται σε περιορισμούς [44], λίγη έρευνα έχει γίνει σχετικά με τεχνικές χειρισμού των περιορισμών σε προβλήματα βελτιστοποίησης για CMA-ES [45].

Μερικές δουλειές που έχουν γίνει πάνω σε αυτόν τον τομέα, δηλαδή τη χρήση της CMA-ES για επίλυση περίπλοκων προβλημάτων βελτιστοποίησης τα οποία υπόκεινται σε περιορισμούς αναφέρονται παρακάτω. Μια πολύ καλή προσπάθεια έγινε στο [45] όπου οι συγγραφείς ως στόχο τους είχαν να αναπτύξουν έναν απλό και στιβαρό χειρισμό περιορισμών για χρήση με τη CMA-ES και την ενσωμάτωσή του στο (1 + 1) -CMA-ES. Επίσης στο [42] έχουμε τη χρήση της CMA-ES για τον σχεδιασμό οχήματος αεροδιαστημικής ο οποίος εκφράζεται ως ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης με μη γραμμικούς περιορισμούς υπό αβεβαιότητα. Το [46] ασχολείται με την ανάπτυξη μιας CMSA-ES για την επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης με γραμμικούς περιορισμούς. Ο προτεινόμενος αλγόριθμος αναφέρεται ως Linear Constraint CMSAES(lcCMSA-ES). Χρησιμοποιεί έναν ειδικά κατασκευασμένο φορέα μετάλλαξης μαζί με επισκευή με προβολή για την ικανοποίηση των περιορισμών. Τέλος στο [47] η CMA-ES ως βάση του αλγορίθμου, που προτείνεται, σε συνδυασμό με ένα τοπικό βελτιστοποιητή και με χρήση δυναμικής συνάρτησης ποινής, όπως στο [48], λύνονται 9 προβλήματα βελτιστοποίησης υπό περιορισμούς.

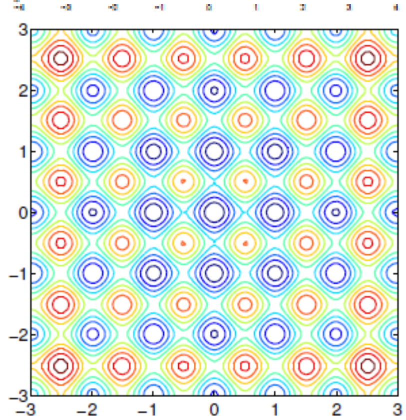
Όπως βλέπουμε δεν υπάρχει στη βιβλιογραφία αρκετή δουλειά πάνω στην επίλυση προβλημάτων υπό περιορισμούς με χρήση της CMA-ES και πόσο μάλλον σε συνδυασμό με την FR ως τεχνική αντιμετώπισης των περιορισμών.



Σχ. 2-1 - Non-Linear, Non-Quadratic, Non-Convex Objective Function



Σχ. 2-2 - Rugged Objective Function



Σχ. 2-3 - Non - Separable Objective Function

3. Προσαρμογή Πίνακα Συνδιακύμανσης – Στρατηγική Εξέλιξης (Covariance Matrix Adaptation - Evolution Strategy CMA-ES)

Η CMA-ES είναι μια μέθοδος βελτιστοποίησης που προτάθηκε στο [29]. Η Covariance matrix adaptation evolution strategy (CMA-ES) είναι μια συγκεκριμένη μέθοδος για αριθμητική βελτιστοποίηση. Οι στρατηγικές εξέλιξης (ES) είναι στοχαστικές και δεν χρειάζονται τη χρήση των παραγώγων της αντικειμενικής συνάρτησης για την αριθμητική βελτιστοποίηση μη γραμμικών ή μη κυρτών συνεχών προβλημάτων βελτιστοποίησης. Ανήκουν στην κατηγορία των εξελικτικών αλγορίθμων και του εξελικτικού υπολογισμού. Ένας εξελικτικός αλγόριθμος βασίζεται σε γενικές γραμμές στην αρχή της βιολογικής εξέλιξης όπως αναφέρθηκε και παραπάνω.

Σε μια στρατηγική εξέλιξης, οι νέες υποψήφιες λύσεις λαμβάνονται από μια κανονική κατανομή πολλών μεταβλητών σε ολόκληρο τον χώρο των πραγματικών αριθμών (Rn). Ο ανασυνδυασμός (Recombination) ισοδυναμεί με την επιλογή μιας νέας μέσης τιμής της κατανομής. Η μετάλλαξη (Mutation) ισοδυναμεί με την προσθήκη ενός τυχαίου διανύσματος, μιας διαταραχής, με μηδενική μέση τιμή. Οι εξαρτήσεις μεταξύ των μεταβλητών στην κατανομή αντιπροσωπεύονται από έναν πίνακα συνδιακύμανσης ή συνδιασποράς (Covariance Matrix). Η Προσαρμογή Πίνακα Συνδιακύμανσης (CMA) είναι μια μέθοδος ενημέρωσης του πίνακα συνδιακύμανσης αυτής της κατανομής. Η ενημέρωση του πίνακα συνδιακύμανσης γίνεται από το μέγεθος – βήματος (step-size) στο οποίο ορίζεται ως η γενική τυπική απόκλιση της κατανομής και ελέγχει τον ρυθμό σύγκλισης του πίνακα. Έτσι οι συνολικές παράμετροι της CMA είναι μέση τιμή, ο πίνακας συνδιακύμανσης και η τυπική απόκλιση της κανονικής κατανομής πολλών μεταβλητών κάθε γενιάς $N(m,C,\sigma)$ [49]. Στη CMA το διάνυσμα της μέσης τιμής m αντιπροσωπεύει ουσιαστικά το διάνυσμα της καλύτερης λύσης. Το μέγεθος βήματος ελέγχει βασικά την απόσταση την οποία θα μετακινηθεί η κατανομή. Και ο πίνακας συνδιακύμανσης είναι αυτός που δίνει το σχήμα της κατανομής στο χώρο [31].

Η προσαρμογή του πίνακα συνδιακύμανσης ισοδυναμεί με εκμάθηση ενός μοντέλου δεύτερης τάξης της αντικειμενικής συνάρτησης παρόμοια με την προσέγγιση του αντίστροφου Εσσιανού πίνακα (Hessian Matrix) στη μέθοδο quasi-Newton. Σε αντίθεση με τις περισσότερες κλασικές μεθόδους, γίνονται λιγότερες υποθέσεις σχετικά με τη φύση της αντικειμενικής συνάρτησης. Μόνο η κατάταξη μεταξύ των υποψηφίων λύσεων απαιτείται για την εκμάθηση της υποψήφιας κατανομής.

3.1 Κανονική Κατανομή Πολλαπλών Μεταβλητών – Multivariate Normal Distribution

Στη θεωρία των πιθανοτήτων και της στατιστικής, η κανονική κατανομή πολλαπλών μεταβλητών ή κατανομή Γκάους πολλαπλών μεταβλητών είναι μια γενίκευση της μονοδιάστατης (μιας μεταβλητής) κανονικής κατανομής σε υψηλότερες διαστάσεις. Η

σπουδαιότητά της προέρχεται κυρίως από το κεντρικό [50] οριακό θεώρημα. Η κανονική κατανομή πολλαπλών μεταβλητών χρησιμοποιείται συχνά για να περιγράψει, οποιοδήποτε σύνολο (πιθανώς) συσχετισμένων τυχαίων πραγματικών μεταβλητών, καθεμία από τις οποίες συσσωρεύεται γύρω από μια μέση τιμή.
Μια κανονική κατανομή πολλαπλών μεταβλητών είναι, ουσιαστικά, ένα διάνυσμα σε πολλές κανονικά κατανεμημένες μεταβλητές, έτσι ώστε οποιοσδήποτε γραμμικός συνδυασμός των μεταβλητών να κατανέμεται επίσης κανονικά. Εκτός από το κεντρικό οριακό θεώρημα, έχει, επίσης, εφαρμογές στη μηχανική εκμάθηση (machine learning), όπου η κανονική κατανομή πολλαπλών μεταβλητών χρησιμοποιείται για την προσέγγιση των ορισμένων χαρακτηριστικών. Για παράδειγμα, στην ανίχνευση προσώπων σε εικόνες στη βελτιστοποίηση, αλλά και άλλες πολλές [50]. Η κανονική κατανομή πολλαπλών μεταβλητών είναι χρήσιμη για την ανάλυση της σχέσης μεταξύ πολλαπλών κανονικά κατανεμημένων μεταβλητών, και επομένως έχει μεγάλη εφαρμογή στη βιολογία και τα οικονομικά όπου η σχέση μεταξύ περίπου κανονικών μεταβλητών παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον. Για παράδειγμα, μια από τις πρώτες χρήσεις της κατανομής πολλαπλών μεταβλητών ήταν στην ανάλυση της σχέσης μεταξύ του ύψους ενός πατέρα και του ύψους του μεγαλύτερου γιου τους, επιλύοντας μια ερώτηση που έθεσε ο Δαρβίνος στο On the Origin of Species [51].

Ένα τυχαίο διάνυσμα $x = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ είναι πολυμεταβλητά κανονικό αν οποιοσδήποτε γραμμικός συνδυασμός των τυχαίων μεταβλητών $X_1, X_2, \dots, X_n$ είναι κανονικά κατανεμημένος, δηλαδή αν:

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \cdots + \alpha_n X_n$$

έχει κανονική κατανομή για κάθε τιμή των σταθερών $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

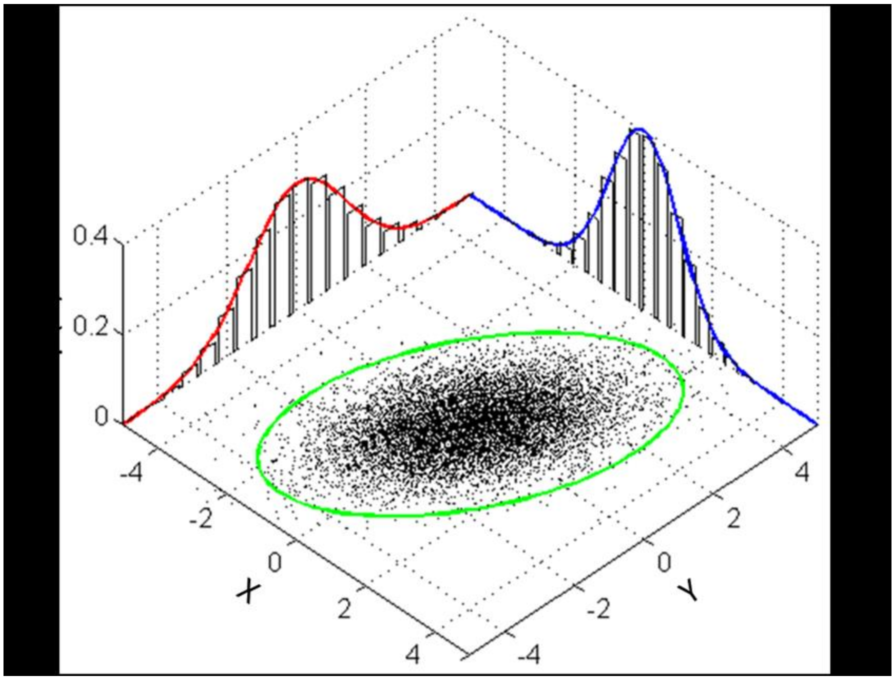
Ισοδύναμα, οι κανονικές κατανομές πολλών μεταβλητών μπορούν να θεωρηθούν ως γραμμικός μετασχηματισμός μιας συλλογής ανεξάρτητων τυπικών κανονικών τυχαίων μεταβλητών, που σημαίνει ότι αν z είναι ένα άλλο τυχαίο διάνυσμα του οποίου τα στοιχεία είναι όλες τυπικές τυχαίες μεταβλητές, υπάρχει ένας πίνακας A και διάνυσμα μ τέτοια ώστε:

$$x = Az + \mu \qquad \textbf{Εξ. 3-1}$$

Και αν το x είναι πολυμεταβλητά κανονικό διάνυσμα υπάρχει ένα διάνυσμα μέσων τιμών μ το οποίο

$$\mu = \left(E(X_1), E(X_2), \dots, E(X_n)\right) \qquad \textbf{Εξ. 3-2}$$

Και όπου $E(X)$ η μέση τιμή του X.



Σχ. 3-1 – Κανονική Κατανομή Πολλών Μεταβλητών

3.2 Πίνακας Συνδιακύμανσης – Covariance Matrix

Αρχικά θα αναφερθούμε στη διαφορά της διακύμανσης (variance) και της συνδιακύμανσης (covariance). Η διακύμανση μετρά τη μεταβολή μιας μεμονωμένης τυχαίας μεταβλητής (όπως το ύψος ενός ατόμου σε έναν πληθυσμό), ενώ η συνδιακύμανση είναι ένα μέτρο του πόσο δύο τυχαίες μεταβλητές ποικίλλουν μαζί (όπως το ύψος ενός ατόμου και το βάρος ενός ατόμου σε έναν πληθυσμό). Η συνάρτηση της διακύμανσης δίνεται από τη

Εξ. **3-3**$\sigma_x^2 = \frac{1}{n-1}$ i=**1*nxi*−*x***⧉⧉2⧉⧉
Εξ. 3-3.

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \qquad \textbf{Εξ. 3-3}$$

Όπου n είναι ο αριθμός των δειγμάτων (π.χ. ο αριθμός των ατόμων στον πλυθησμό) και $\overline{x}$ η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής x η οποία αναπαρίσταται με ένα διάνυσμα.
Η συνδιακύμανση δύο τυχαίων μεταβλητών x, y δίνεται από τη
Εξ. **3-4**.

$\sigma(x,y) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$ **Εξ. 3-4**

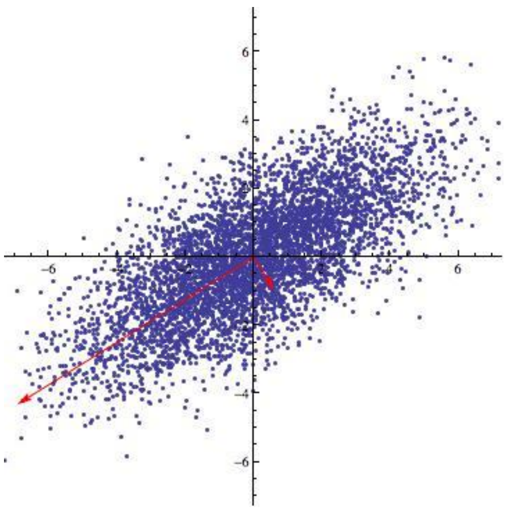
Ο πίνακας συνδιακύμανσης (C) είναι ένας θετικός τετραγωνικός συμμετρικός πίνακας του οποίου τα στοιχεία δίνονται από τη

Εξ. **3-5**.

$C_{i,j} = \sigma(x_i, x_j)$ **Εξ. 3-5**

Όπου το $C \in R^{dxd}$ και το d η διάσταση του εκάστοτε προβλήματος. Τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα είναι οι διακυμάνσεις και τα υπόλοιπα στοιχεία του οι συνδιακυμάνσεις μεταξύ των μεταβλητών. Έτσι ο πίνακας συνδιακύμανσης εκφράζεται ως:

$C = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})^T$ **Εξ. 3-6**



Σχ. 3-2 - Plot of Covariance Matrix

3.3 Αποσύνθεση σε Ιδιοδιανύσματα Πίνακα Συνδιακύμανσης – Eigendecomposition of Covariance Matrix

Παρακάτω επεξηγείται αναλυτικά η αποσύνθεση σε ιδιοδιανύσματα ενός θετικού, ορισμένου πίνακα [13].

Ο πίνακας συνδιακύμανσης $C \in R^{dxd}$ χαρακτηρίζεται από το ότι για όλα τα $x \in R^n \setminus \{0\}$ υπάρχει $x^T Cx > 0$. Ο πίνακας C έχει μια ορθογωνική βάση από ιδιοδιανύσματα, $B = [b_1, \dots, b_n]$ με αντίστοιχες ιδιοτιμές, $d_{1,\dots}^2, d_n^2 > 0$. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε b_i υπάρχει

$Cb_i = d_i^2 b_i$ **Εξ. 3-7**

Από την $\boldsymbol{Cbi}= d_i^2 b_i$

Εξ. 3-7 εξάγουμε το συμπέρασμα ότι τα ιδιοδιανύσματα δεν περιστρέφονται από τον πίνακα C.

Έτσι με βάση αυτό η αποσύνθεση του πίνακα C σε ιδιοδιανύσματα είναι:

$C = BD^2B^T$ **Εξ. 3-8**

Όπου

B ένας ορθογωνικός πίνακας που χαρακτηρίζεται ως: $B^T B = BB^T = I$

D^2 ένας διαγώνιος πίνακας με τις ιδιοτιμές του C ως τα διαγώνια στοιχεία του:

$D^2 = DD = diag(d_1, \dots, d_n)^2 = diag(d_1^2, \dots, d_n^2)$

Και D ο διαγώνιος πίνακας με τις τετραγωνικές ρίζες των ιδιοτιμών του C ως τα διαγώνια στοιχεία του.

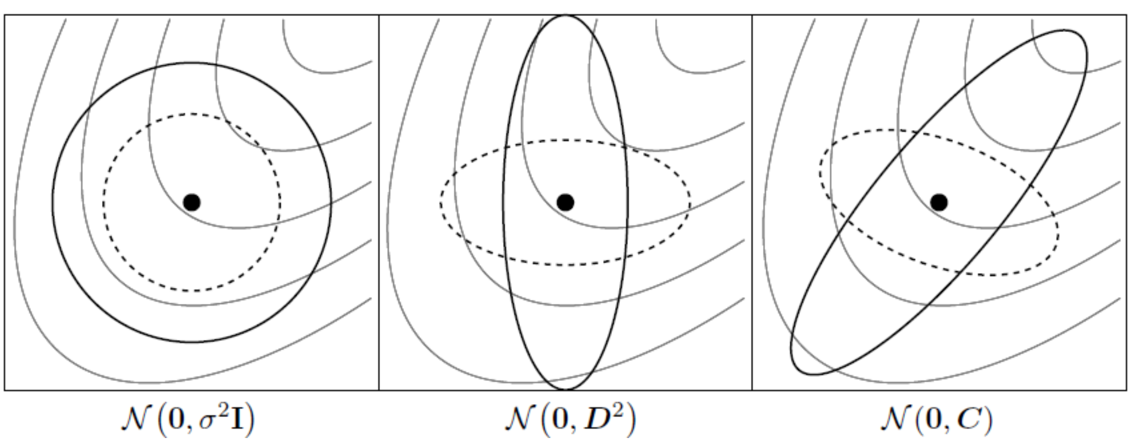
Έτσι: $C^{\frac{1}{2}} = BDB^T$ **Εξ. 3-9**

Τελικά, δεδομένης της αποσύνθεσης Εξ. 3-6, μετά από απλούς υπολογισμούς βρίσκουμε τον αντίστροφο πίνακα C^{-1}.

$$C^{-1} = BD^{-2}B^T = B\, diag\left(\frac{1}{d_1^2}, \dots, \frac{1}{d_n^2}\right)B^T$$

Και από τη Εξ. 3-7 έχουμε:

$$C^{-\frac{1}{2}} = BD^{-1}B^T = B\, diag\left(\frac{1}{d_1}, \dots, \frac{1}{d_n}\right)B^T$$



Σχ. 3-3 [13]

3.4 CMA – Multivariate Normal Distribution – Covariance Matrix

Στη CMA – ES η κατανομή αναζήτησης, P, είναι μια κανονική κατανομή πολλαπλών μεταβλητών. Λαμβάνοντας υπόψη όλες τις διακυμάνσεις και συνδιακυμάνσεις, η κανονική κατανομή έχει τη μεγαλύτερη εντροπία όλων των κατανομών στον R^n. Αυτό την κάνει ιδιαίτερα ελκυστική υποψήφιο για τυχαιοποιημένη αναζήτηση. Οι τυχαιοποιημένοι αλγόριθμοι αναζήτησης (randomized search algorithms) θεωρούνται ισχυροί σε ένα τραχύ τοπίο αναζήτησης, που μπορεί να περιλαμβάνει ασυνέχειες, (αιχμηρές) κορυφογραμμές ή τοπικά βέλτιστα. Η CMA έχει σχεδιαστεί ειδικά για να αντιμετωπίσει, επιπλέον, αδιαχώριστα προβλήματα.
Ο τελικός στόχος της CMA είναι να προσεγγίσει το περίγραμμα της αντικειμενικής συνάρτησης. Στις κυρτές-τετραγωνικές συναρτήσεις ισοδυναμεί με την προσέγγιση του αντίστροφου Εσσιανού πίνακα, παρόμοια με μια μέθοδο quasi-Newton. Στο Σχ. 3-3 η κατανομή που φαίνεται με γεμάτη γραμμή στο δεξιά σχήμα ακολουθεί το περίγραμμα της αντικειμενικής συνάρτησης καλύτερα, και είναι εύκολο να δούμε ότι θα βοηθήσει περισσότερο στην προσέγγιση του βέλτιστου.

3.5 CMA – Δειγματοληψία

Στη στρατηγική εξέλιξης CMA, ένας πληθυσμός νέων σημείων αναζήτησης (άτομα, απόγονοι) δημιουργείται από τη δειγματοληψία μιας κανονικής κατανομής πολλών μεταβλητών. Η βασική εξίσωση για τη δειγματοληψία των σημείων αναζήτησης είναι [13]:

$$x_k^{(g+1)} \sim m^{(g)} + \sigma^{(g)} N\left(0, C^{(g)}\right) \qquad for\ k = 1, \dots, \lambda \qquad \textbf{Εξ. 3-10}$$

Όπου:

- Το $\sim$ δηλώνει την ίδια κατανομή στην αριστερή και τη δεξιά πλευρά.
- g ο αριθμός της γενιάς με $g = 0,1,2, \dots G$
- $N\left(0, C^{(g)}\right)$ μια κανονική κατανομή πολλών μεταβλητών με μηδενική μέση τιμή και πίνακα συνδιακύμανσης $C^{(g)}$.
- $x_k^{(g+1)}$ ο κ-στος απόγονος από τη γενιά $g + 1$.
- $m^{(g)}$ η μέση τιμή της κατανομής αναζήτησης τη γενιά g.
- $\sigma^{(g)}$ η γενική τυπική απόκλιση, το μέγεθος του βήματος, τη γενιά g.
- $C^{(g)}$ ο πίνακας συνδιακυμάνσεων τη γενιά g.
- λ το μέγεθος του πληθυσμού ή το μέγεθος του δείγματος ή ο αριθμός των απογόνων.

3.6 Επιλογή και Ανασυνδυασμός – Selection and Recombination

Η νέα μέση τιμή $m^{(g+1)}$ της κατανομής αναζήτησης είναι σταθμισμένος μέσος όρος από μ επιλεγμένα άτομα από το δείγμα $x_1^{(g+1)}, \dots, x_\lambda^{(g+1)}$.
Η νέα μέση τιμή δίνεται:

$$m^{(g+1)} = \sum_{i=1}^{\mu} w_i x_{i:\lambda}^{(g+1)} \qquad \text{Εξ. 3-11}$$

Και $\sum_{i=1}^{\mu} w_i = 1, \quad w_1 \geq w_2 \geq \dots \geq w_\mu \geq 0$ Εξ. 3-12

Όπου

- $\mu \leq \lambda$ ο αριθμός των επιλεγμένων ατόμων ή το μέγεθος πληθυσμού των γονιών.
- $w_{i=1\dots\mu}$ είναι θετικοί σταθμισμένοι συντελεστές για τον ανασυνδυασμό.
- $x_{i:\lambda}^{(g+1)}$ το ι-στο καλύτερο άτομο από $x_1^{(g+1)}, \dots, x_\lambda^{(g+1)}$.

Η Εξ. 3-12 εφαρμόζει "επιλογή περικοπής" επιλέγοντας τα μ καλύτερα άτομα ($\mu < \lambda$) από τα λ άτομα του πληθυσμού των απογόνων. Η εκχώρηση των διαφορετικών βαρών w_i είναι επίσης ένας μηχανισμός επιλογής. Η Εξ. 3-12 εφαρμόζει ένα σταθμισμένο ενδιάμεσο ανασυνδυασμό λαμβάνοντας υπόψη $\mu > 1$ άτομα για ένα σταθμισμένο μέσο όρο.
Η τιμή μ_{eff} μπορεί να ονομαστεί ως μάζα απόκλισης ενεργής επιλογής (variance effective selection mass).
Η μ_{eff} δίνεται από την Εξ. 3-13 παρακάτω:

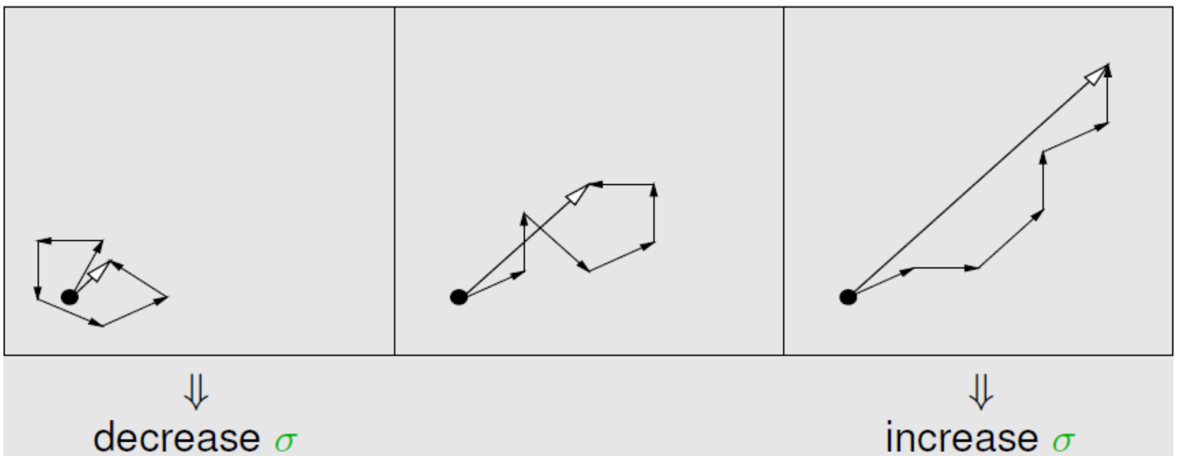
$$\mu_{eff} = \left(\sum_{i=1}^{\mu} w_i^2\right)^{-1} \qquad \textbf{Εξ. 3-13}$$

Συνήθως, τιμές της τάξης του $\mu_{eff} \approx \frac{\lambda}{4}$ υποδεικνύουν λογικές τιμές για τους σταθμισμένους συντελεστές του ανασυνδυασμού $w_{i=1\dots\mu}$.

3.7 Έλεγχος Μεγέθους Βήματος – Step Size Control

Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω το μέγεθος βήματος είναι μια από τις τρεις βασικές παραμέτρους του αλγορίθμου CMA-ES. Στον αλγόριθμο το μέγεθος βήματος ενημερώνεται συνεχώς με το πέρας των επαναλήψεων και αυτό γίνεται για δύο βασικούς λόγους [13]. Ο ένας είναι ότι ένα γενικό μέγεθος βήματος δεν μπορεί να προβλεφθεί καλά από την αρχή. Ο δεύτερος είναι ότι ο ρυθμός εκμάθησης για την ενημέρωση του πίνακα συνδιακύμανσης είναι πολύ μικρός για να επιτύχουμε καλούς ρυθμούς αλλαγής το μέγεθος του βήματος.
Για τον έλεγχο του μεγέθους βήματος χρησιμοποιούμε το μονοπάτι εξέλιξης, δηλαδή ένα σύνολο διαδοχικών βημάτων. Η μέθοδος ονομάζεται cumulative path length control, cumulative step-size control, or cumulative step length adaptation (CSA).
Για την ενημέρωση του μεγέθους βήματος γίνεται χρήση του μονοπατιού εξέλιξης και ο έλεγχος γίνεται ως ακολούθως βλέπε Σχ. 3-4:

- Αν το μονοπάτι εξέλιξης είναι μικρό τότε το μέγεθος βήματος μειώνεται γιατί σημαίνει ότι τα διαδοχικά βήματα είναι τόσο μεγάλα που εξουδετερώνουν το ένα το άλλο.
- Όταν το μονοπάτι εξέλιξης είναι μακρύ και τα διανύσματα των βημάτων έχουν στο γενικό την ίδια κατεύθυνση και φορά τότε το μέγεθος βήματος θα πρέπει να μεγαλώσει αφού αυτό σημαίνει ότι η ίδια απόσταση θα μπορούσε να καλυφθεί με λιγότερα μεγαλύτερα βήματα.



Σχ. 3-4 [31]

Ο υπολογισμός του μήκους του μονοπατιού εξέλιξης φαίνεται παρακάτω στην εξίσωση Εξ. 3-14. $p_\sigma^{(g+1)} = (1-c_\sigma)p_\sigma^{(g)} + \sqrt{c_\sigma(2-c_\sigma)\mu_{eff}}C^{(g)^{-\frac{1}{2}}}\frac{m^{(g+1)}-m^{(g)}}{\sigma^{(g)}}$ Εξ. 3-14

Όπου

- $p_\sigma^{(g+1)}$ το μήκος του μονοπατιού εξέλιξης και στην αρχή έχει την τιμή 0.
- c_σ σταθερά εκμάθησης του μεγέθους βήματος και είναι ≤1.
- $\sqrt{c_\sigma(2-c_\sigma)\mu_{eff}}$ μια σταθερά κανονικοποίησης.
- $C^{(g)^{-\frac{1}{2}}} = B^{(g)}D^{(g)^{-1}}B^{(g)^T}$ η αποσύνθεση σε ιδιοδιανύσματα του πίνακα συνδιακύμανσης όπως αναφέραμαμε και παρπάνω στη γενιά g.

Τέλος το μέγεθος βήματος δίνεται από την Εξ. 3-15. Για περισσότερες πληροφορίες για το πώς καταλήγουμε σε αυτές τις εξισώσεις βρίσκονται στο [13].

$$\sigma^{(g+1)} = \sigma^{(g)}e^{\left(\frac{c_\sigma}{d_\sigma}\left(\frac{\left\|p_\sigma^{(g+1)}\right\|}{E\|N(0,I)\|}-1\right)\right)}$$ **Εξ. 3-15**

3.8 Ενημέρωση του Πίνακα Συνδιακύμανσης – Adaptation of Covariance Matrix

Εδώ θα μπούμε σε περισσότερο βάθος για το πώς ενημερώνεται ο πίνακας συνδιακύμανσης, καθώς περνούν οι γενιές του αλγόριθμου.

Αρχικά θα ξεκινήσουμε με το μονοπάτι εξέλιξης (evolution path) του πίνακα συνδιακύμανσης. Το μονοπάτι εξέλιξης είναι το μονοπάτι αναζήτησης το οποίο ο πίνακας ακολουθεί καθώς περνούν οι επαναλήψεις. Μπορεί να εκφραστεί και ως τα συνεχόμενα βήματα της μέσης τιμής m όπως αναφέρθηκε και παραπάνω. Σημειώνεται ότι το μονοπάτι εξέλιξης που χρησιμοποιούμε για την ενημέρωση του πίνακα συνδιακύμανσης διαφέρει από το μονοπάτι που αναφέραμε παραπάνω για την ενημέρωση του μεγέθους βήματος.

Η εξίσωση του μονοπατιού εξέλιξης του πίνακα συνδιακύμανσης δίνεται στην Εξ. 3-16.

$$p_c^{(g+1)} = (1-c_c)p_c^{(g)} + h_\sigma^{(g)}\sqrt{c_c(2-c_c)\mu_{eff}}\frac{m^{(g+1)}-m^{(g)}}{\sigma^{(g)}} \qquad \textbf{Εξ. 3-16}$$

Όπου:

- $p_c^{(g+1)}$ το μήκος του μονοπατιού εξέλιξης και στην αρχή έχει την τιμή 0.
- c_c σταθερά εκμάθησης του πίνακα συνδιακύμανσης και είναι ≤1.
- $\sqrt{c_c(2-c_c)\mu_{eff}}$ μια σταθερά κανονικοποίησης.
- h_σ η συνάρτηση Heaviside η οποία καθυστερεί την ενημέρωση του p_c αν το $\|p_\sigma\|$ είναι πολύ μεγάλο.
- Το h_σ δίνεται ως ακολούθως:

$$h_\sigma = \begin{cases} 1 \; if \; \frac{\|p_\sigma\|}{\sqrt{1-(1-c_\sigma)^{2(g+1)}}} < \left(1.4+\frac{2}{n+1}\right)E\|N(0,I)\| \\ 0 - \; otherwise \end{cases} \qquad \text{Εξ. 3-17}$$

Για την ενημέρωση του πίνακα συνδιακύμανσης επίσης κάνουμε χρήση των Rank – μ και Rank – One Updates [13] του πίνακα.

Πρώτα θα κοιτάξουμε την Rank – One Update.

Στην Rank – One Update γίνεται ενημέρωση του πίνακα συνδιακύμανσης λαμβάνοντας υπόψιν μας μόνο την πληροφορία που έχουμε από την προηγούμενη επανάληψη/γενιά. Το πλεονέκτημά της είναι ότι μειώνει τον αριθμό των αναγκαίων αξιολογήσεων αντικειμενικής συνάρτησης [31]. Επίσης για τον υπολογισμό του νέου πίνακα συνδιακύμανσης και την εξαγωγή της σχέσης γίνεται χρήση επίσης και του μονοπατιού εξέλιξης του πίνακα που ορίσαμε προηγουμένως.

Η εξίσωση της Rank – One Update του πίνακα συνδιακύμανσης είναι:

$$C^{(g+1)} = (1-c_1)C^{(g)} + c_1 p_c^{(g+1)} {p_c^{(g+1)}}^T \qquad \textbf{Εξ. 3-18}$$

Με

- c_1 σταθερά εκμάθησης της Rank – One Update του πίνακα συνδιακύμανσης.

Στην Rank – μ Update η ενημέρωση του πίνακα συνδιακύμανσης γίνεται χρησιμοποιώντας πληροφορία και από προηγούμενες επαναλήψεις έτσι αυξάνουμε την πιθανή εκμάθηση σε μεγάλους πληθυσμούς και μπορούμε να μειώσουμε τις αναγκαίες επαναλήψεις/γενιές που κάνουμε [31].

$$C^{(g+1)} = \left(1 - c_\mu\right)C^{(g)} + c_\mu \sum_{i=1}^{\mu} w_i y_{i:\lambda}^{(g+1)} \, y_{i:\lambda}^{(g+1)^T}$$ **Εξ. 3-19**

Όπου

- c_μ σταθερά εκμάθησης της Rank – μ Update του πίνακα συνδιακύμανσης.
- $y_{i:\lambda}^{(g+1)} = \frac{x_{i:\lambda}^{(g+1)} - m^{(g)}}{\sigma^{(g)}}$

Τέλος για την ολοκληρωμένη ενημέρωση του πίνακα συνδιακύμανσης χρησιμοποιείται ο συνδυασμός όλων των παραπάνω. Έτσι, με αυτόν τον τρόπο εκμεταλλευόμαστε όλα τα πλεονεκτήματα που έχει να δώσει η κάθε μέθοδος.

Άρα η εξίσωση της ενημέρωσης του πίνακα συνδιακύμανσης σε κάθε γενιά είναι:

$$C^{(g+1)} = \left(1 - c_1 - c_\mu\right)C^{(g)} + c_1\left(p_c^{(g+1)} p_c^{(g+1)^T} + \delta(h_\sigma)C^{(g)}\right) + c_\mu \sum_{i=1}^{\mu} w_i y_{i:\lambda}^{(g+1)} \, y_{i:\lambda}^{(g+1)^T}$$ **Εξ. 3-20**

Για τις παραπάνω σταθερές δίνονται οι σχέσεις παρακάτω:

- $\lambda = 4 + [3 \ln n]$ **Εξ. 3-21**
- $\mu = \left[\frac{\lambda}{2}\right]$ **Εξ. 3-22**
- $w_i = \frac{w_i^{'}}{\sum_{j=1}^{\mu} w_j^{'}}$ **Εξ. 3-23**
- $w_i^{'} = \ln\left(\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2}\right) - \ln i \ , i = 1, \dots, \lambda$ **Εξ. 3-24**
- $c_\sigma = \frac{\mu_{eff} + 2}{n + \mu_{eff} + 5}$ **Εξ. 3-25**
- $c_c = \frac{4 + \frac{\mu_{eff}}{n}}{n + 4 + \frac{2\mu_{eff}}{n}}$ **Εξ. 3-26**
- $c_1 = \frac{2}{(n+1.3)^2 + \mu_{eff}}$ **Εξ. 3-27**

- $c_\mu = min\left(1 - c_1, a_\mu \frac{\mu_{eff} - 2 + \frac{1}{\mu_{eff}}}{(n+2)^2 + a_\mu \frac{\mu_{eff}}{2}}\right), \mu\varepsilon\ a_\mu = 2$ **Εξ. 3-28**

3.9 Ψευδοκώδικας CMA-ES

1. $Initialize\ m, \sigma, \lambda, \mu, G$
2. $\text{Initialize } C = I, p_\sigma = 0, p_c = 0, g = 0$
3. $while\ g \leq G$
4. $Sampling: x_k^{(g+1)} \sim m^{(g)} + \sigma^{(g)} N\left(0, C^{(g)}\right)$
5. $Evaluate: f\left(x_k^{(g+1)}\right)$
6. $Sort\ x_k^{(g+1)}\ in\ ascending\ order\ based\ on\ step\ 5$
7. $Update\ mean:\ m^{(g+1)} = \sum_{i=1}^{\mu} w_i x_{i:\lambda}^{(g+1)}$
8. $Step\ Size\ Control\ Update:$
9. $p_\sigma^{(g+1)} = (1 - c_\sigma) p_\sigma^{(g)} + \sqrt{c_\sigma (2 - c_\sigma) \mu_{eff}}\, C^{(g)^{-\frac{1}{2}}} \frac{m^{(g+1)} - m^{(g)}}{\sigma^{(g)}}$
10. $\sigma^{(g+1)} = \sigma^{(g)} e^{\left(\frac{c_\sigma}{d_\sigma}\left(\frac{\left\|p_\sigma^{(g+1)}\right\|}{E\|N(0,I)\|} - 1\right)\right)}$
11. $Covariance\ Matrix\ Update$
12. $p_c^{(g+1)} = (1 - c_c) p_c^{(g)} + h_\sigma^{(g)} \sqrt{c_c (2 - c_c) \mu_{eff}} \frac{m^{(g+1)} - m^{(g)}}{\sigma^{(g)}}$
13. $C^{(g+1)} = \left(1 - c_1 - c_\mu\right) C^{(g)} + c_1 \left(p_c^{(g+1)} p_c^{(g+1)^T} + \delta(h_\sigma) C^{(g)}\right) +$
    $c_\mu \sum_{i=1}^{\mu} w_i y_{i:\lambda}^{(g+1)}\ y_{i:\lambda}^{(g+1)^T}$
14. end

4. Βελτιστοποίηση Σμήνους Σωματιδίων (Particle Swarm Optimization – PSO)

Στο παρόν κεφάλαιο θα αναλύσουμε σε περισσότερο βάθος τις αρχές λειτουργίας του αλγορίθμου PSO και θα δώσουμε τις απαραίτητες συναρτήσεις που τον απαρτίζουν.
Η μέθοδος Particle Swarm Optimization (PSO) χρησιμοποιεί την ιδέα της κοινωνικής συναναστροφής για την επίλυση προβλημάτων. Προτάθηκε το 1995 από τους James Kennedy και Russ Eberhart στο [22]. Εφαρμόζεται πλέον ευρέως για την επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης πολλών διαστάσεων.
Στην PSO, ένα σμήνος από n άτομα επικοινωνούν άμεσα ή έμμεσα μεταξύ τους έτσι ώστε να αντλήσουν την όσο το δυνατόν καλύτερη πληροφορία, που μπορούν να αποκτήσουν, για τον χώρο αναζήτησης με απώτερο σκοπό τη σύγκλισή τους στο ολικό βέλτιστο.
Η PSO χαρακτηρίζεται από την απλότητά της και από το ότι είναι μια ισχυρή μέθοδος αναζήτησης.
Στην υπολογιστική επιστήμη, η PSO είναι μια υπολογιστική μέθοδος που βελτιστοποιεί ένα πρόβλημα προσπαθώντας επαναληπτικά να βελτιώσει μια υποψήφια λύση σε σχέση με ένα δεδομένο μέτρο ποιότητας. Επιλύει ένα πρόβλημα έχοντας έναν πληθυσμό υποψήφιων λύσεων, τα οποία ονομάζονται σωματίδια, και μετακινώντας αυτά τα σωματίδια στον χώρο αναζήτησης σύμφωνα με απλούς μαθηματικούς τύπους με βάση τη θέση και την ταχύτητα του κάθε σωματιδίου. Η κίνηση κάθε σωματιδίου επηρεάζεται από την τοπικά πιο καλή γνωστή θέση του, αλλά καθοδηγείται επίσης και προς την πιο καλή γνωστή θέση ολόκληρου του σμήνους των σωματιδίων στον χώρο αναζήτησης. Έτσι αναμένεται το σμήνος να μετακινείται σε καλύτερες λύσεις με το πέρας των επαναλήψεων. Καθώς ο αλγόριθμος βρίσκει καινούριες καλύτερες θέσεις τότε αυτές οι θέσεις θα καθοδηγήσουν το σμήνος [14].
Η PSO δεν κάνει χρήση των παραγώγων του εκάστοτε προβλήματος που βελτιστοποιείται, πράγμα που σημαίνει ότι η PSO δεν απαιτεί το πρόβλημα βελτιστοποίησης να είναι διαφοροποιήσιμο όπως απαιτείται από άλλες κλασικές μεθόδους βελτιστοποίησης.

4.1 Χαρακτηριστικά Σωματιδίων

Μια ιδιαιτερότητα του αλγόριθμου PSO η οποία τον κάνει να διαφέρει πολύ από άλλους εξελικτικούς αλγορίθμους όπως η CMA είναι ότι τα σωματίδια δεν χάνονται και ούτε καταστρέφονται κάθε γενιά αλλά ούτε παράγονται άλλα καινούρια.
Τα σωματίδια στην PSO αποτελούνται ουσιαστικά από 3 διανύσματα και 2 τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης [14].
Το πρώτο διάνυσμα είναι το τρέχον διάνυσμα θέσης του σωματιδίου: $\vec{x}$
Το δεύτερο διάνυσμα είναι το διάνυσμα της βέλτιστης θέσης του κάθε σωματιδίου μέχρι στιγμής: $\vec{P}_{best}$
Και το τρίτο διάνυσμα είναι το διάνυσμα της ταχύτητας του κάθε σωματιδίου στην τρέχουσα επανάληψη: $\vec{v}$

Οι τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης τις οποίες περιέχει το κάθε σωματίδιο είναι οι τιμές που προκύπτουν από την αξιολόγηση των διανυσμάτων $\vec{x}$ και $\vec{P}_{best}$. Δηλαδή η του κάθε σωματίδιου στην τρέχουσα επανάληψη και η καλύτερη θέση που έχει πετύχει το κάθε σωματίδιο σε όλες τις γενιές μέχρι τώρα.

4.2 Αρχικοποίηση Αλγορίθμου

Για την αρχικοποίηση του αλγορίθμου ο χρήστης θέτει τιμές στις μεταβλητές/σταθερές του προβλήματος $\varphi_1, \varphi_2, \omega, G, A$ και $g = 0$.

Έπειτα αρχικοποιείται ο πληθυσμός των σωματιδίων με βάση τα άνω και κάτω όρια των μεταβλητών απόφασης που απαρτίζουν τα διανύσματα των σωματιδίων ($\vec{x}_i = x_{i,1,} x_{i,2,} \dots, x_{i,n}$) και μιας τυχαίας τιμής από την ομοιόμορφη κατανομή. Η Εξ. 4-1 δίνει την αρχικοποίηση του πληθυσμού σε κάθε επανάληψη g.

$$p_i^g = LB_i + U_i(0,1) + (UB_i - LB_i)\ for\ i = 1,2, \dots, A \qquad \textbf{Εξ. 4-1}$$

Μετά αξιολογούμε τον αρχικό πληθυσμό, που παράχθηκε, με την αντικειμενική συνάρτηση και θέτουμε ως P_{best-i} τον αρχικό πληθυσμό p_i^g. Επίσης βρίσκουμε το G_{best} ως το διάνυσμα το οποίο δίνει τη μικρότερη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης και αποθηκεύουμε τα $f(P_{best-i})$ και $f(G_{best})$.

Τέλος αρχικοποιούμε την ταχύτητα των σωματιδίων ως: $v_i^g = 0.1 \cdot p_i^g$. Η αρχικοποίηση της ταχύτητας μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους και εξαρτάται από τον χρήστη.

Τέλος διορθώνεται η ταχύτητα με βάση τα μέγιστα και ελάχιστα όρια της V_{min}, V_{max}.

4.3 Ενημέρωση θέσης και ταχύτητας σωματιδίων και εύρεση των βέλτιστων θέσεων

Στον αλγόριθμο PSO η ενημέρωση της θέσης των σωματιδίων σε κάθε επανάληψη εξαρτάται αποκλειστικά από την ταχύτητα που έχει το κάθε σωματίδιο σε αυτή την επανάληψη όπως βλέπουμε στην Εξ. 4.2.

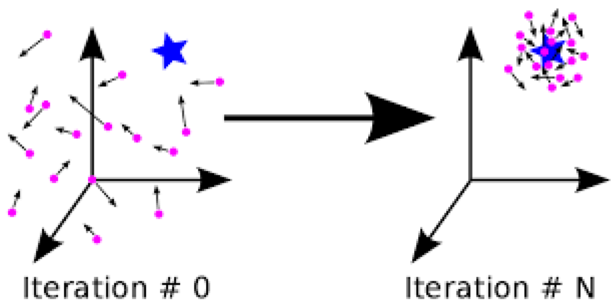
$$p_i^{g+1} = p_i^g + v_i^{g+1} \qquad \textbf{Εξ. 4-2}$$

Ενώ η ταχύτητα δίνεται από τη σχέση:

$$v_i^{g+1} = \omega v_i^g + \varphi_1 U_i(0,1)\left(P_{best-i} - p_i^g\right) + \varphi_2 U_i(0,1)(G_{best} - p_i^g) \qquad \textbf{Εξ. 4-3}$$

Σε αυτή τη σχέση οι παράμετροι $\omega, \varphi_1, \varphi_2$ καθορίζουν πώς μαθαίνουν τα σωματίδια. Η παράμετρος ω καθορίζει σε πόσο ποσοστό τα σωματίδια θα διατηρήσουν την προηγούμενη ταχύτητά τους, δηλαδή πόσο θα λαμβάνουν υπόψιν τους τις πληροφορίες που απόκτησαν από τις προηγούμενες επαναλήψεις. Οι παράμετροι φ_1, φ_2 είναι οι ρυθμοί εκμάθησης των σωματιδίων από την καλύτερη δική τους θέση και την καλύτερη γενικά θέση, αντίστοιχα. Δηλαδή πόσο θα ακολουθούν τη δική τους καλύτερη πορεία ή την καλύτερη πορεία του σμήνους.

Στο Σχ. 4-1 βλέπουμε με ροζ κουκκίδες βλέπουμε γραφικά τις θέσεις των σωματιδίων και με τα διανύσματα τις ταχύτητες που έχουν σε κάθε επανάληψη.



Σχ. 4-1

Μετά την ενημέρωση της ταχύτητας των σωματιδίων και έπειτα των θέσεων τους ακολουθεί η αξιολόγησή τους με βάση την αντικειμενική συνάρτηση και η εύρεση των P_{best-i} και G_{best}.

Το P_{best-i} είναι το διάνυσμα του σωματιδίου το οποίο όταν εφαρμοστεί στην αντικειμενική συνάρτηση δίνει την μικρότερη τιμή αντικειμενικής συνάρτησης που έχει πετύχει μέχρι εκείνη τη στιγμή το κάθε σωματίδιο.

$$P_{best-i} = \begin{cases} p_i^{g+1} \; if \; f\left(p_i^{g+1}\right) < \; f(P_{best-i}) \\ \qquad\qquad P_{best-i} \end{cases} \qquad \textbf{Εξ. 4-4}$$

Το G_{best} είναι το διάνυσμα του σωματιδίου το οποίο όταν εφαρμοστεί στην αντικειμενική συνάρτηση δίνει την μικρότερη τιμή αντικειμενικής συνάρτησης που έχουν πετύχει μέχρι εκείνη τη στιγμή όλα τα σωματίδια του σμήνους.

$$G_{best} = \begin{cases} p_i^{g+1} \; if \; f\left(p_i^{g+1}\right) < \; f(G_{best}) \\ \qquad\qquad G_{best} \end{cases} \qquad \textbf{Εξ. 4-5}$$

4.4 Ψευδοκώδικας PSO

Για τον αλγόριθμο PSO θα παραθέσουμε τον ψευδοκώδικα πρώτα και μετά θα βασιστούμε σε αυτό για να αναλύσουμε σε περισσότερο βάθος τον αλγόριθμο.

1. $Set\ parameters: \varphi_1, \varphi_2, \omega, G$
2. $Initialize: g = 0$

3. $Initialize\ population: p_i^g = LB_i + U_i(0,1) + (UB_i - LB_i)\ for\ i = 1,2,\dots,A$

4. $Evaluate: f(p_i^g)$

5. $Set\ P_{best-i} = p_i^g\ and\ \min\left(f(P_{best-i})\right) = f(G_{best})\ and\ for\ that\ i\ P_{best-i} = G_{best}$

6. $f\left(p_i^g\right) = f(P_{best-i})$

7. $Initialize\ Velocity: v_i^g = 0.1 \cdot p_i^g$

8. $Correct\ Velocity\ based\ on\ V_{min}, V_{max}$

9. $while\ g \leq G$

10. $if\ f\left(p_i^{g+1}\right) < f(P_{best-i})\ then\ P_{best-i} = p_i^{g+1}\ and\ f(P_{best-i}) = f\left(p_i^{g+1}\right)$

11. $if\ f\left(p_i^{g+1}\right) < f(G_{best})\ then\ G_{best} = p_i^{g+1}\ and\ f(G_{best}) = f\left(p_i^{g+1}\right)$

12. $Update\ Velocity: v_i^{g+1} = \omega v_i^g + \varphi_1 U_i(0,1)\left(P_{best-i} - p_i^g\right) + \varphi_2 U_i(0,1)(G_{best} - p_i^g)$

13. $Correct\ Velocity\ based\ on\ V_{min}, V_{max}$

14. $Update\ Population: p_i^{g+1} = p_i^g + v_i^{g+1}$

15. $Evaluate: f(p_i^{g+1})$

16. end

4.5 Ρύθμιση Παραμέτρων PSO

A: Ο αριθμός σωματιδίων που περιέχει το σμήνος. Συνήθως 10 – 50.

G, g: Ο μέγιστος αριθμός επαναλήψεων και ο τρέχων αριθμός επαναλήψεων, αντίστοιχα.

φ_1, φ_2: Οι ρυθμοί εκμάθησης των σωματιδίων από την καλύτερη δική τους θέση και την καλύτερη γενικά θέση, αντίστοιχα. Συνήθως $\varphi_1 + \varphi_2 = 4$.

ω: Ο συντελεστής αδράνειας ο οποίος αρχικοποιείται στην τιμή 1 και με την πάροδο των επαναλήψεων μειώνεται.

UB_i, LB_i: Τα άνω και κάτω όρια των μεταβλητών απόφασης που απαρτίζουν κάθε σωματίδιο. Εξαρτάται από το εκάστοτε πρόβλημα.

V_{min}, V_{max}: Τα άνω και κάτω όρια των ταχυτήτων κάθε σωματιδίου. Εξαρτάται από το εκάστοτε πρόβλημα και τον χρήστη.

$U_i(0,1)$: Τυχαία τιμή από το 0 – 1 από ομοιόμορφη κατανομή.

5. Τροποποιημένη μορφή της μεθόδου αντιμετώπισης περιορισμών FR

Σε αυτή την εργασία χρησιμοποιήσαμε μια τροποποιημένη μορφή της μεθόδου αντιμετώπισης περιορισμών Feasibility Rules (FR).

Όπως αναφέραμε και παραπάνω η μέθοδος FR αποτελείται από τρεις βασικούς κανόνες:

- Μια εφικτή λύση θεωρείται καλύτερη από μια ανέφικτη.
- Συγκρίνονται δύο εφικτές λύσεις με βάση τις τιμές της αντικειμενικής συνάρτησής τους και επιλέγεται αυτή με τη μικρότερη αν έχουμε πρόβλημα ελαχιστοποίησης ή τη μεγαλύτερη για πρόβλημα μεγιστοποίησης.
- Δύο ανέφικτες λύσεις συγκρίνονται ανάλογα με τον βαθμό παραβίασης των περιορισμών και επιλέγεται αυτή με τον μικρότερο.

Η κλασσική μορφή των περιορισμών ενός προβλήματος περιγράφονται από την Εξ. 1-2. Στην τροποποιημένη μορφή της μεθόδου αντιμετώπισης περιορισμών μετατρέπουμε τις συναρτήσεις των περιορισμών ανισότητας (Π.Α) σε περιορισμούς ισότητας (Π.Ι). Ο τρόπος με το οποίο το πετυχαίνουμε αυτό είναι μετατρέποντας τη συνάρτηση:
$g(\vec{x}) \leq 0$ σε $|g(\vec{x})| < \varepsilon$.

Όπου $\varepsilon \ll 1$ ένας πολύ μικρός θετικός πραγματικός αριθμός.

Με αυτό τον τρόπο μετατρέπουμε όλους τους Π.Α σε Π.Ι με σκοπό να κινούμαστε ΠΑΝΩ στις επιφάνειες των περιορισμών.
Ο λόγος που το κάνουμε αυτό είναι ο εξής: Όταν αναζητούμε σε ολόκληρο το πεδίο ο αλγόριθμος έχει να εξετάσει έναν εξαιρετικά μεγάλο αριθμό τιμών ειδικά σε πιο περίπλοκα προβλήματα. Ενώ αν μπορούσαμε να κινούμαστε πάνω στις επιφάνειες των περιορισμών θα περιορίζαμε κατά πολύ το πεδίο αναζήτησης με την ελπίδα να επιταχύνουμε την επίλυση. Έχει παρατηρηθεί ότι σε ένα πολύ μεγάλο ποσοστό μη γραμμικών προβλημάτων το ολικό ακρότατο είναι πάνω στην επιφάνεια περιορισμού ή πολύ κοντά σε αυτή. Οπότε με τη λογική αυτή, αν βρίσκαμε μία πολύ καλή τιμή πάνω στην επιφάνεια, μετά θα μπορούσε ο αλγόριθμος να αναλάβει και να ψάξει εκεί κοντά για κάτι καλύτερο. Ουσιαστικά βελτιώνουμε πολύ την εκμετάλλευση (exploitation).
Βέβαια, έχοντας πάντα το ε πολύ μικρό απαλήφουμε εντελώς την εξερεύνηση (exploration) και κινδυνεύουμε πολύ σε εγκλωβισμό τοπικών ακροτάτων. Έτσι εφαρμόζουμε τρεις μεθόδους, των οποίων οι συναρτήσεις φαίνονται παρακάτω, με τις οποίες το ε μεταβάλλεται με το πέρας των επαναλήψεων. Στη γενική μορφή το ε ξεκινά από ένα μεγάλο αριθμό και καταλήγει στις τελευταίες επαναλήψεις σε έναν πολύ μικρό.
Συναρτήσεις μεταβολής ε:
Η πρώτη μέθοδος έχει την μορφή μιας φθίνουσας αποσβενώμενης ημιτονοειδής συνάρτησης.

$$\varepsilon_{g+1} = \left(\left(\varepsilon_{max} e^{(-ag)} \cos(bg)\right) - c(g^d)\right) + \varepsilon_{max}$$ **Εξ. 5-1**

Όπου

a, b, c, d συντελεστές που αλλάζουν με βάση το εκάστοτε πρόβλημα για βελτίωση της μεθόδου.

ε_{max} η αρχική μεγάλη πραγματική θετική τιμή του ε.

g η εκάστοτε γενιά.

ε_{g+1} η τιμή του ε την επόμενη γενιά.

Η δεύτερη μέθοδος είναι μια γραμμικά φθίνουσα συνάρτηση.

$$\varepsilon_{g+1} = \varepsilon_{max} - \frac{\varepsilon_{max}}{(G/g)}$$ **Εξ. 5-2**

Όπου

G ο μέγιστος αριθμός επαναλήψεων.

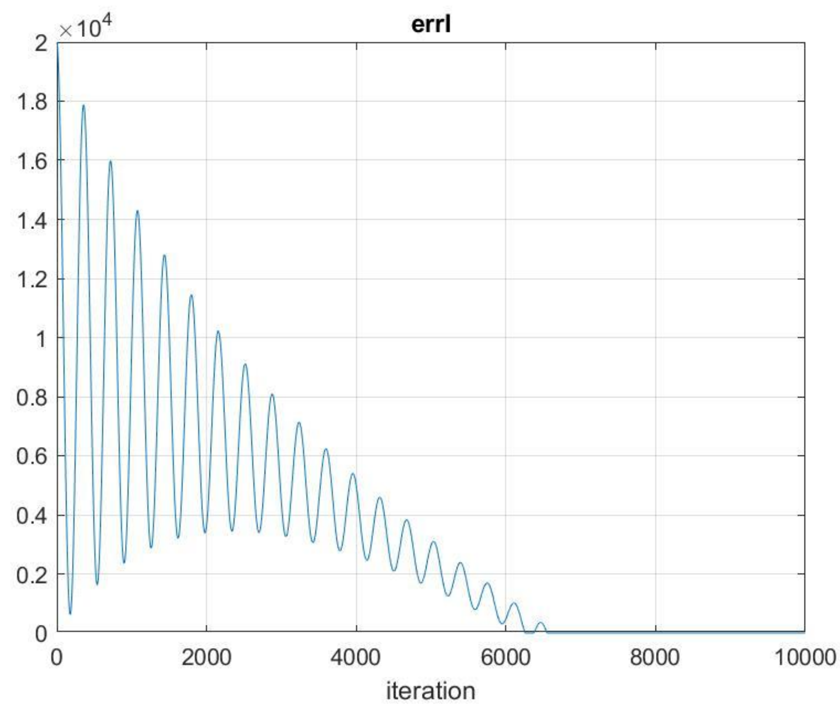
Και η τρίτη μέθοδος το φθίνον κομμάτι μιας παραβολής.

$$\varepsilon_{g+1} = \varepsilon - zg^r$$ **Εξ. 5-3**

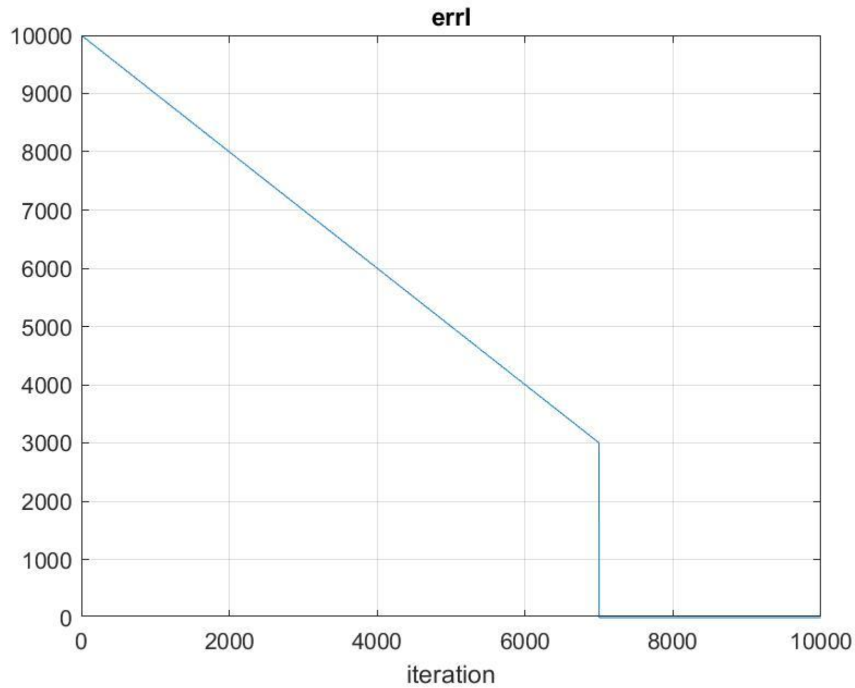
Όπου

z, r συντελεστές που αλλάζουν με βάση το εκάστοτε πρόβλημα για βελτίωση της μεθόδου. Ωστόσο, λύνοντας το πρόβλημα έτσι μέχρι την τελευταία επανάληψη θα ήταν σαν να λύναμε ένα διαφορετικό πρόβλημα από ότι είχαμε αρχικά. Έτσι για τις τελευταίες επαναλήψεις επαναφέρουμε το πρόβλημα στην αρχική του μορφή και το λύνουμε με την κανονική απλή FR.

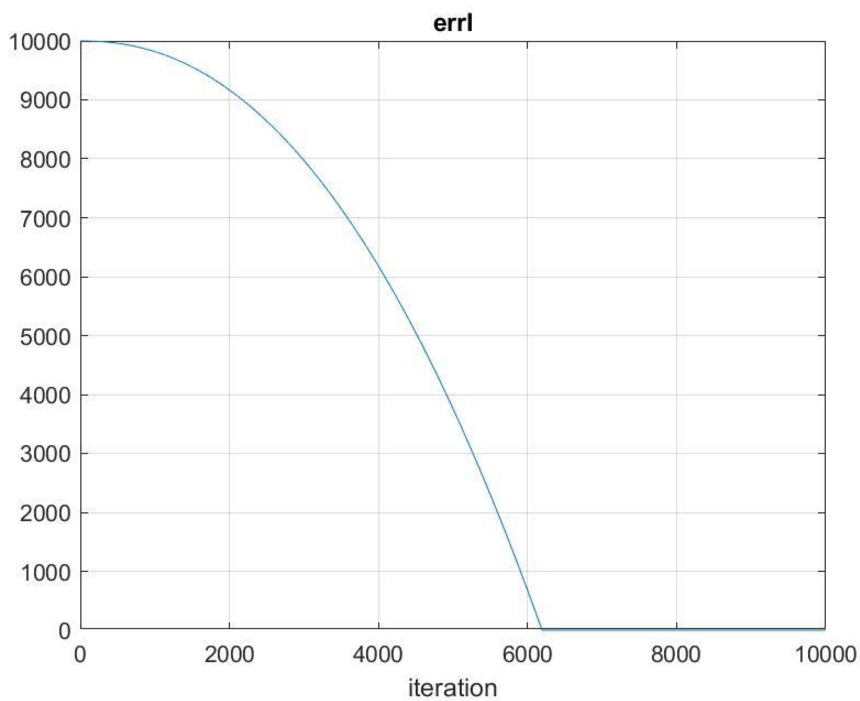
Στο Σχ. 5-1, Σχ. 5-2 και Σχ. 5-3 φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των τριών συναρτήσεων μεταβολής του ε συναρτήσει των επαναλήψεων.



Σχ. 5-1


errl
10000
9000
8000
7000
6000
5000
4000
3000
2000
1000
0
0
2000
4000
6000
8000
10000
iteration

Σχ. 5-2


errl
10000
9000
8000
7000
6000
5000
4000
3000
2000
1000
0
0
2000
4000
6000
8000
10000
iteration

Σχ. 5-3

6. Προβλήματα Συνεδρίου CEC2010

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παραθέσουμε τις συναρτήσεις των προβλημάτων του συνεδρίου CEC2010 των οποίων προσπαθήσαμε να επιλύσουμε [52].

Πρόβλημα 6

$$Min\ f(x) = \max(z)$$
$$z = x - o,\ y = (x + 483.6106156535 - o)M - 483.6106156535$$
$$h_1(x) = \frac{1}{D}\sum_{i=1}^{D}\left(-y_i sin\left(\sqrt{|y_i|}\right)\right) = 0$$
$$h_2(x) = \frac{1}{D}\sum_{i=1}^{D}\left(-y_i cos\left(0.5\sqrt{|y_i|}\right)\right) = 0$$
$$x \in [-600,600]^D$$

Πρόβλημα 9

$$Min\ f(x) = \sum_{i=1}^{D-1}(100(z_i^2 - z_{i+1})^2 + (z_i - 1)^2)$$
$$z = x + 1 - o,\ y = x - o$$
$$h(x) = \sum_{i=1}^{D}\left(ysin\left(\sqrt{|y_i|}\right)\right) = 0$$
$$x \in [-500,500]^D$$

Πρόβλημα 12

$$Min\ f(x) = \sum_{i=1}^{D}\left(z_i \sin\left(\sqrt{|z_i|}\right)\right)$$
$$z = x - o$$
$$h(x) = \sum_{i=1}^{D-1}(z_i^2 - z_{i+1})^2 = 0$$
$$g(x) = \sum_{i=1}^{D}(z - 100cos(0.1z) + 10) \leq 0$$
$$x \in [-1000,1000]^D$$

Πρόβλημα 16

$$Min\ f(x) = \sum_{i=1}^{D} \frac{z_i^2}{4000} - \prod_{i=1}^{D} cos\left(\frac{z_i}{\sqrt{i}}\right) + 1$$

$$z = x - o$$

$$g_1(x) = \sum_{i=1}^{D} [z_i^2 - 100\cos(\pi z_i) + 10] \leq 0$$

$$g_2(x) = \prod_{i=1}^{D} z_i \leq 0$$

$$h_1(x) = \sum_{i=1}^{D} \left(z_i \sin\left(\sqrt{|z_i|}\right)\right) = 0$$

$$h_2(x) = \sum_{i=1}^{D} \left(-z_i \sin\left(\sqrt{|z_i|}\right)\right) = 0$$

$$x \in [-10,10]^D$$

Πρόβλημα 17

$$Min\ f(x) = \sum_{i=1}^{D-1} (z_i - z_{i+1})^2$$

$$z = x - o$$

$$g_1(x) = \prod_{i=1}^{D} z_i \leq 0$$

$$g_2(x) = \sum_{i=1}^{D} z_i \leq 0$$

$$h(x) = \sum_{i=1}^{D} \left(z_i \sin\left(4\sqrt{|zi|}\right)\right) = 0$$

$$x \in [-10,10]^D$$

Πρόβλημα 18

$$Min\ f(x) = \sum_{i=1}^{D-1} (z_i - z_{i+1})^2$$

$$g(x) = \frac{1}{D}\sum_{i=1}^{D}\left(-z_i \sin\left(\sqrt{|z_i|}\right)\right) \leq 0$$

$$h(x) = \frac{1}{D}\sum_{i=1}^{D}\left(z_i \sin\left(\sqrt{|z_i|}\right)\right) \leq 0$$

$$x \in [-50,50]^D$$

7. Πειραματικά Αποτελέσματα και Συμπεράσματα

Τα πειράματα έγιναν σε MATALAB 2018.
Για τη διεξαγωγή των πειραμάτων μας και για τους δύο αλγορίθμους χρησιμοποιήσαμε πληθυσμό ατόμων $N = 10$ και συνολικό αριθμό επαναλήψεων $1E3 * N^2$.
Επίσης ως σφάλμα ασφαλείας e χρησιμοποιήθηκε η τιμή $1E - 5$.
Και για τους δύο αλγορίθμους δείχνουμε τα αποτελέσματα μετά από 10 "τρεξίματα" του αλγόριθμου.

7.1 Αποτελέσματα

Παρακάτω παραθέτουμε τους πίνακες με τα αποτελέσματα για κάθε αλγόριθμο.
Στους πίνακες μπορούμε να δούμε για κάθε run της κάθε μεθόδου την καλύτερη λύση της (καλύτερο "άτομο") καθώς και την τιμή που δίνουν οι μεταβλητές απόφασης αυτής της λύσης στην αντικειμενική συνάρτηση και στις συναρτήσεις περιορισμών.

Πρόβλημα 6 – PSO με τροποποιημένη FR Μέθοδος 1										
Run	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Μεταβλητές Απόφασης	-322.65	-218.05	-75.37	-569.56	479.98	-555.27	-433.91	119.99	-469.31	159.59
	178.39	-341.90	-186.07	221.13	298.57	586.37	-298.19	-473.55	170.96	384.91
	-445.25	385.94	-217.55	118.81	-365.81	-206.18	-438.46	-343.69	266.73	491.49
	472.29	205.76	459.37	467.91	-153.84	-579.55	400.55	-48.99	-419.99	-576.29
	-375.56	-203.43	-427.48	122.35	232.04	501.36	559.73	192.02	522.69	-363.90
	224.84	-317.68	317.15	217.10	93.35	-44.21	571.97	200.68	417.39	-532.02
	-414.53	-24.35	-316.31	367.12	-315.91	71.14	114.94	-356.13	456.89	137.94
	369.81	335.56	167.39	-495.56	232.52	198.10	-597.59	561.49	5.00	31.61
	-203.63	106.33	356.61	-183.49	-427.53	451.12	124.21	-335.28	-365.73	372.84
	387.09	125.26	-89.91	-223.66	-350.87	-489.85	-20.99	526.86	-596.66	-127.45
Objective Function's Value	4.72E+02	3.86E+02	4.59E+02	4.68E+02	4.80E+02	5.86E+02	5.72E+02	5.61E+02	5.23E+02	4.91E+02
Equality Constraint 1	1.72E+02	1.74E+02	2.18E+02	2.11E+02	1.46E+02	2.45E+02	2.29E+02	1.60E+02	1.69E+02	1.80E+02
Equality Constraint 2	4.5E+02	4.3E+02	5.2E+02	5.1E+02	3.9E+02	5.7E+02	5.4E+02	4.0E+02	4.2E+02	4.6E+02

Πίνακας 1

Πρόβλημα 6 – PSO με τροποποιημένη FR Μέθοδος 2										
Run	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Μεταβλητές Απόφασης	-503.85	191.36	-283.38	-0.96	-366.78	380.04	-19.71	459.84	-137.01	481.42
	-190.72	-349.77	-235.07	-516.89	597.33	-420.76	229.71	443.30	417.35	-426.04
	381.56	465.94	-521.91	-492.69	520.61	0.51	37.61	-523.99	178.74	177.17
	-470.41	412.12	63.28	4.43	205.65	-465.63	67.65	-208.17	447.12	369.94
	-66.10	-94.41	-153.09	-464.27	34.42	198.84	495.45	-247.65	346.97	-314.66
	-64.78	-374.78	502.93	79.18	-62.96	-196.62	151.75	253.65	-389.44	-284.17
	238.54	-338.28	541.31	593.26	-208.12	234.25	498.10	-291.18	-194.04	289.01
	286.35	-180.10	204.25	579.09	-553.47	39.92	-514.93	31.31	33.03	257.96
	356.17	139.82	-496.20	-187.48	-80.87	331.16	-218.63	-321.69	-597.39	-361.03
	121.83	110.25	55.93	433.29	-189.12	27.31	-569.09	351.40	-227.52	47.45
Objective Function's Value	3.82E+02	4.66E+02	5.41E+02	5.93E+02	5.97E+02	3.80E+02	4.98E+02	4.60E+02	4.47E+02	4.81E+02
Equality Constraint 1	1.83E+02	2.31E+02	1.56E+02	2.44E+02	1.82E+02	1.89E+02	1.98E+02	1.95E+02	2.14E+02	1.57E+02
Equality Constraint 2	4.6E+02	5.5E+02	4.0E+02	5.7E+02	4.7E+02	4.7E+02	4.9E+02	4.8E+02	5.2E+02	4.1E+02

Πίνακας 2

Πρόβλημα 6 – PSO με τροποποιημένη FR Μέθοδος 3										
Run	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Μεταβλητές Απόφασης	-494.50	-548.51	254.25	509.31	-220.53	445.93	231.78	-78.99	591.35	-487.23
	296.56	490.71	-185.55	-452.95	127.85	-367.30	253.72	299.97	-202.67	263.44
	125.89	-122.07	424.86	389.43	-189.34	-35.21	103.67	-186.06	-477.58	-284.55
	128.31	562.70	170.56	392.66	35.05	-136.25	-242.23	-22.93	214.58	584.45
	297.97	-531.31	346.52	-111.74	-555.46	-243.92	246.58	-108.87	98.30	-181.37
	-301.95	487.33	341.57	-576.39	0.79	95.17	174.90	-55.90	476.02	-573.95
	208.81	39.51	-367.04	144.62	524.49	-157.07	-497.04	164.20	-474.85	105.36
	-299.72	483.55	170.43	-534.33	-579.04	195.11	113.02	-253.25	122.08	378.33
	-203.64	141.01	-326.33	-96.14	18.72	-183.16	-166.36	-287.70	-324.47	279.38
	411.62	-525.53	-557.82	413.22	593.98	547.09	-88.70	505.39	113.55	-75.95
Objective Function's Value	4.12E+02	5.63E+02	4.25E+02	5.09E+02	5.94E+02	5.47E+02	2.54E+02	5.05E+02	5.91E+02	5.84E+02
Equality Constraint 1	2.03E+02	1.99E+02	1.53E+02	2.01E+02	2.21E+02	2.22E+02	1.89E+02	1.71E+02	1.54E+02	2.07E+02
Equality Constraint 2	5.0E+02	4.8E+02	4.0E+02	4.9E+02	5.3E+02	5.3E+02	4.8E+02	4.4E+02	4.1E+02	5.1E+02

Πίνακας 3

Πρόβλημα 6 – PSO κανονική FR										
Run	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Μεταβλητές Απόφασης	403.99	488.98	578.01	-251.19	-220.51	-271.53	261.67	-271.16	-231.70	-392.61
	411.26	558.47	10.50	552.93	-598.93	494.16	443.87	540.62	385.03	-20.14
	193.52	439.28	-94.30	-429.26	-44.86	-493.49	326.17	-270.12	197.05	187.25
	-252.43	97.12	-313.23	-442.62	-560.00	223.22	-322.84	-498.37	519.79	-397.98
	-289.57	-565.91	-375.24	406.75	291.81	388.27	2.88	-573.10	-237.43	121.99
	-557.38	341.67	215.28	-281.91	362.71	-309.91	-579.74	162.35	-548.87	589.06
	316.34	-547.58	-445.36	438.48	-348.56	85.99	258.34	287.28	-269.05	138.64
	-103.61	25.11	-231.06	366.01	492.28	-301.99	342.89	130.44	597.37	99.08
	137.61	-50.70	572.16	-313.52	415.32	-160.25	126.81	-109.88	-52.14	-127.61
	454.12	-594.10	278.05	-204.69	146.82	478.74	-415.17	558.47	-564.38	-134.34
Objective Function's	4.54E+02	5.58E+02	5.78E+02	5.53E+02	4.92E+02	4.94E+02	4.44E+02	5.58E+02	5.97E+02	5.89E+02
Equality Constraint 1	1.97E+02	1.45E+02	2.71E+02	2.26E+02	1.78E+02	2.26E+02	2.22E+02	2.28E+02	1.58E+02	2.29E+02
Equality Constraint 2	403.99	488.98	578.01	-251.19	-220.51	-271.53	261.67	-271.16	-231.70	-392.61

Πίνακας 4

Πρόβλημα 9 – PSO με τροποποιημένη FR Μέθοδος 1										
Run	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Μεταβλητές Απόφασης	-246.12	83.11	93.02	-14.90	-20.45	233.92	-216.64	12.06	-195.46	-77.36
	-68.64	-255.79	0.82	-365.13	300.60	279.66	32.37	-77.22	91.64	81.00
	272.31	-83.10	107.69	-112.87	-112.11	132.75	23.71	-119.58	137.38	64.29
	276.04	-239.02	302.36	-76.59	-214.61	-107.38	256.07	-42.37	273.19	119.18
	-190.97	104.62	-206.94	-84.10	221.03	-216.43	-103.37	254.15	89.46	-10.06
	93.76	97.91	57.40	-80.07	-60.73	46.05	205.01	-200.07	108.35	174.18
	-215.77	282.33	48.62	346.81	201.34	-115.43	95.45	-71.76	47.66	-145.56
	-228.97	61.65	-36.89	-116.46	-242.98	-127.92	-22.72	138.33	115.18	205.39
	-216.99	157.35	-282.53	207.91	4.69	18.45	-99.95	-3.63	-232.47	-42.27
	401.62	-15.07	112.09	253.47	-25.75	-189.32	-41.57	211.02	-234.27	-226.95
Objective Function's	2.20E+12	2.07E+12	9.11E+11	2.81E+12	2.68E+12	2.28E+12	2.15E+11	1.18E+12	4.75E+11	4.50E+11
Equality Constraint 1	-1.03E-03	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	-2.70E-04	0.00E+00	2.20E-04	0.00E+00	0.00E+00

Πίνακας 5

Πρόβλημα 9 – PSO με τροποποιημένη FR Μέθοδος 2										
Run	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Μεταβλητές Απόφασης	-282.81	-20.30	41.37	-43.25	199.00	210.81	-128.85	-137.77	-167.12	-55.14
	-52.95	-33.14	210.47	-102.54	156.10	-238.31	131.15	117.64	-23.33	-140.33
	162.04	81.14	12.10	157.84	215.31	201.08	14.97	15.63	-70.02	-37.92
	125.68	-115.69	-123.16	46.96	186.53	-121.59	-47.44	11.79	213.05	325.38
	-85.66	264.53	200.97	-215.71	166.78	6.79	-161.94	121.86	96.25	119.96
	48.32	233.98	-132.65	150.55	-193.59	-140.79	94.35	31.08	175.36	6.24
	-142.66	64.49	-34.15	-71.45	-155.73	51.66	106.67	-177.56	-1.84	-118.72
	-114.87	52.30	-24.99	209.94	-319.50	30.75	197.50	142.24	27.02	-122.49
	-75.67	188.45	-52.42	-143.09	-264.87	9.43	-182.54	-132.85	156.70	6.20
	338.49	-382.19	20.68	-17.51	213.77	125.48	39.49	92.84	-231.56	24.40
Objective Function's	6.50E+11	8.68E+11	9.72E+11	9.19E+11	2.77E+12	1.52E+12	5.80E+11	3.61E+11	2.26E+11	3.70E+11
Equality Constraint 1	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00

Πίνακας 6

Πρόβλημα 9 – PSO με τροποποιημένη FR Μέθοδος 3										
Run	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Μεταβλητές Απόφασης	-284.62	-41.78	-127.21	40.59	-98.55	39.73	12.51	-243.08	-51.80	-49.10
	309.03	154.46	36.13	-87.62	5.88	147.17	-59.66	56.61	197.66	153.74
	43.45	-33.56	-3.72	-150.22	-85.75	-26.37	23.01	33.43	229.57	-55.62
	28.59	242.83	-98.87	194.97	159.29	12.33	-76.46	-29.14	-195.34	31.07
	-75.96	-142.83	242.72	21.56	61.82	18.48	66.55	352.26	133.19	-44.52
	249.50	67.27	266.75	27.36	7.32	72.01	-144.45	-159.45	-218.02	243.01
	10.28	-113.72	-280.18	-65.23	79.87	57.35	54.11	192.54	6.96	-52.39
	-14.50	-143.52	-169.27	34.46	10.21	-174.70	130.40	-113.41	111.75	-88.92
	-243.97	-18.11	237.28	-91.34	12.78	49.27	192.16	167.37	-165.24	-36.89
	-59.93	112.47	-19.13	128.31	-33.10	-115.80	-65.03	-197.35	132.04	-127.61
Objective Function's	1.99E+12	3.33E+11	2.04E+12	3.91E+10	1.26E+10	1.73E+11	8.34E+11	2.00E+12	2.69E+12	1.86E+11
Equality Constraint 1	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	7.60E-04

Πίνακας 7

Πρόβλημα 9 – PSO κανονική FR										
Run	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Μεταβλητές Απόφασης	113.53	-76.56	-9.47	41.96	-85.85	-100.61	-262.57	133.59	-226.91	-106.47
	-234.92	-328.31	-73.38	-132.73	68.19	61.74	66.63	-187.83	217.65	201.55
	172.65	119.24	-21.12	-110.70	-224.00	109.06	-46.47	-18.50	223.27	47.11
	10.49	-1.51	236.18	86.74	-141.32	-36.56	-82.90	-84.38	9.97	-6.82
	17.55	274.36	-155.17	118.16	45.31	193.76	253.46	-4.31	139.05	1.00
	38.77	58.53	160.35	172.33	64.28	114.39	138.11	305.83	-37.02	63.28
	-4.86	254.63	321.47	108.51	254.62	-29.94	-138.84	159.50	-369.12	74.51
	-15.97	-164.88	-87.86	15.12	-258.23	-123.39	-40.10	-242.50	158.01	100.76
	-262.21	-307.67	-224.43	74.94	139.78	88.66	85.94	-116.26	27.75	139.51
	197.87	229.66	-121.68	-183.70	229.52	-195.00	174.56	143.32	22.44	-340.10
Objective Function's	6.8E+11	1.9E+12	9.9E+11	5.1E+10	1.1E+12	2.2E+11	7.0E+11	6.6E+11	3.8E+12	5.0E+11
Equality Constraint 1	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	-2.1E-04	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00

Πίνακας 8

Πρόβλημα 12 – PSO με τροποποιημένη FR Μέθοδος 1										
Run	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Μεταβλητές Απόφασης	-36.84	157.90	35.55	-203.14	-37.50	124.55	38.31	-91.26	-120.18	-75.66
	29.32	-21.36	-201.86	-298.11	65.49	-342.85	-28.00	-188.00	-184.88	-349.26
	-56.91	-127.34	179.87	112.58	17.09	-5.16	-232.05	70.44	-10.10	204.76
	85.92	7.44	49.38	15.27	73.90	-49.70	-60.20	101.30	160.00	324.55
	72.53	107.02	75.05	-124.01	-106.69	-338.67	-254.01	86.33	9.41	-35.43
	-23.95	86.63	-28.45	-244.64	31.26	-406.70	-187.09	-90.77	-73.83	-390.22
	-54.28	-184.50	66.19	-200.36	-136.65	-272.74	142.38	-89.30	-125.54	17.11
	113.96	-151.90	185.77	-21.71	-86.13	-155.13	-139.78	146.92	198.79	260.56
	-51.46	101.01	-13.19	148.79	-59.00	-348.80	122.68	-266.28	-19.44	-383.84
	-872.59	-726.73	-49.04	-608.59	-520.76	-518.10	-795.63	-771.76	-727.17	99.47
Objective Function's	-4.2E+02	-3.5E+02	5.5E+01	-4.5E+02	-2.4E+02	-7.1E+02	-5.4E+02	-4.5E+02	-3.6E+02	-1.1E+02
Equality Constraint 1	2.4E+08	5.5E+09	1.2E+09	9.0E+09	1.3E+09	4.5E+10	1.2E+10	3.5E+09	1.6E+09	4.1E+10
Inequality Constraint 1	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00

Πίνακας 9

Πρόβλημα 12 – PSO με τροποποιημένη FR Μέθοδος 2										
Run	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Μεταβλητές Απόφασης	235.27	-358.46	-329.08	-141.39	134.18	-43.30	-202.85	176.30	49.39	-248.03
	-222.52	-330.51	-287.90	94.25	-263.37	-335.99	-104.35	-81.16	-264.06	54.20
	-74.81	6.00	-88.48	-183.48	199.33	302.08	-157.30	-205.15	-123.67	-42.65
	134.90	-420.06	333.57	37.20	-74.78	0.31	-19.28	134.58	219.54	-52.88
	38.70	215.47	78.98	-32.87	-92.71	-108.06	-212.85	82.54	-82.82	-231.58
	148.36	-336.96	-346.97	-254.98	-302.58	28.98	66.24	-275.61	-337.56	196.42
	139.18	265.31	-60.98	12.55	-247.73	-163.19	-254.68	-119.92	-259.68	-37.25
	-26.77	335.49	-188.71	229.26	-47.26	-244.06	-136.76	173.90	-94.31	117.74
	-226.52	-422.63	169.91	-187.56	-215.16	-232.01	-265.80	202.42	18.93	149.66
	-12.87	-928.53	-713.30	-349.62	-717.19	-671.42	-107.00	-543.63	-536.64	-129.21
Objective Function's	6.0E+01	-8.3E+02	-5.1E+02	-2.1E+02	-5.4E+02	-4.9E+02	-3.3E+02	-2.0E+02	-4.3E+02	-3.3E+01
Equality Constraint 1	8.4E+09	1.0E+11	3.7E+10	5.5E+09	9.1E+09	2.2E+10	1.4E+10	8.9E+09	1.2E+10	1.6E+10
Inequality Constraint 1	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00

Πίνακας 10

Πρόβλημα 12 – PSO με τροποποιημένη FR Μέθοδος 3										
Run	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Μεταβλητές Απόφασης	-73.60	182.07	-41.25	194.79	47.73	-6.23	-135.13	137.32	-116.74	-171.89
	-62.05	-245.92	-78.53	168.34	-198.73	-161.01	35.95	-380.02	18.87	-376.29
	-105.93	402.51	59.25	-184.69	13.03	-91.49	340.84	105.03	-214.73	-294.33
	-62.44	-63.12	87.23	92.39	12.65	115.55	-356.47	113.20	201.82	-7.58
	-130.99	-298.80	-26.66	102.22	-175.81	110.56	-208.56	142.83	-311.01	-214.29
	-251.09	-410.37	-97.97	-252.76	-167.19	-249.01	-107.26	-372.29	-509.96	-289.58
	-181.84	-203.23	4.86	-56.29	-125.84	102.72	24.12	-146.65	-459.64	-23.04
	-79.49	-130.55	36.11	-42.21	108.36	230.85	318.58	-107.49	-175.76	74.01
	-167.34	-200.84	-25.75	140.13	-200.26	-24.65	-109.12	30.41	-508.69	16.81
	-678.32	482.21	-64.29	-704.06	-918.30	426.11	-353.62	-2.72	-710.85	-523.93
Objective Function's	-5.2E+02	-4.3E+01	-1.4E+01	-2.7E+02	-6.1E+02	1.6E+02	-1.6E+02	-1.6E+02	-1.0E+03	-5.6E+02
Equality Constraint 1	2.9E+09	4.1E+10	3.5E+07	7.9E+09	2.1E+09	2.3E+09	3.6E+10	1.9E+10	1.4E+11	2.6E+10
Inequality Constraint 1	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00

Πίνακας 11

Πρόβλημα 12 – PSO κανονική FR										
Run	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Μεταβλητές Απόφασης	106.34	268.23	33.79	-179.15	-43.62	152.33	-11.04	-9.14	-119.00	51.53
	-242.67	41.14	-19.08	-294.65	4.65	151.34	-104.11	-161.00	175.95	-118.12
	378.21	-260.10	52.21	137.14	-28.43	-121.31	127.87	-52.70	-281.24	84.56
	-243.33	83.14	61.33	157.02	30.50	269.74	10.47	138.92	-317.96	-34.97
	-303.58	23.20	-7.43	-99.78	14.07	27.93	-266.32	126.48	-153.27	137.40
	-291.42	66.88	-88.28	-309.44	-66.25	85.90	-349.06	-11.88	-141.51	-53.41
	238.22	157.76	-35.53	-287.99	-35.58	-291.00	-161.91	-100.97	83.91	-70.69
	-300.96	-117.62	28.92	395.59	10.04	23.49	-138.02	38.22	-257.57	-39.43
	-213.33	125.59	-18.04	246.67	-27.58	-90.09	-76.56	-11.26	25.32	47.59
	-546.93	252.01	-633.48	353.29	-589.63	-219.97	-612.13	-367.92	-665.78	-156.75
Objective Function's Value	-4.5E+02	1.4E+02	-2.8E+02	7.6E+01	-2.7E+02	1.9E+00	-4.9E+02	-1.2E+02	-5.8E+02	-2.4E+01
Equality Constraint 1	5.1E+10	1.5E+10	7.8E+06	3.2E+10	5.4E+07	1.4E+10	1.1E+10	8.1E+08	3.7E+10	6.7E+08
Inequality Constraint 1	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00

Πίνακας 12

Πρόβλημα 16 – PSO με τροποποιημένη FR Μέθοδος 1										
Run	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Μεταβλητές Απόφασης	1.22	2.32	0.57	-1.61	-0.05	1.07	2.03	0.18	-1.36	0.35
	1.67	0.71	-0.85	4.63	-0.58	3.38	-1.29	-0.07	3.56	0.40
	-1.61	-2.43	2.66	0.54	3.50	-0.11	3.22	-0.57	1.84	-2.17
	2.56	2.14	1.70	-0.37	2.11	-4.54	-1.58	2.76	-1.67	6.77
	-1.80	-1.16	0.19	-2.13	-1.34	-0.31	2.23	1.26	-1.28	1.80
	-0.13	-4.47	0.00	2.33	-1.45	4.95	0.38	-0.77	-4.80	3.26
	1.26	5.33	-2.46	-2.00	0.53	3.77	-3.45	-1.25	2.75	-1.57
	-3.04	-1.32	-5.16	1.52	-2.26	0.09	-1.66	1.12	4.26	-2.10
	3.68	4.88	4.01	0.23	1.85	-3.30	1.32	1.80	-0.09	-4.79
	0.87	-2.99	3.86	-0.01	-0.03	0.89	3.02	-0.52	1.32	1.40
Objective Function's Value	9.2E-03	2.3E-02	2.3E-02	1.4E-02	9.4E-03	2.4E-02	1.9E-02	3.6E-03	2.2E-02	2.5E-02
Equality Constraint 1	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00
Equality Constraint 2	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00
Inequality Constraint 1	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00
Inequality Constraint 2	8.4E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	2.7E+00	2.9E+01	0.0E+00	1.0E-02	0.0E+00	1.3E+00

Πίνακας 13

Πρόβλημα 16 – PSO με τροποποιημένη FR Μέθοδος 2										
Run	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Μεταβλητές Απόφασης	-0.44	-0.16	3.70	2.17	-2.13	0.26	1.30	-1.20	2.01	-3.03
	1.42	1.93	-1.19	5.28	2.57	-3.51	-3.12	0.01	-0.49	0.88
	1.40	3.71	-4.85	-0.58	2.85	-0.57	-4.68	2.23	-1.47	2.77
	-1.66	-2.36	-3.28	5.37	2.93	1.84	5.10	-0.29	3.58	-3.11
	1.01	2.88	2.90	0.60	7.96	3.53	1.60	-0.11	0.81	2.34
	-2.07	2.79	1.25	0.01	0.29	-1.66	-1.34	-1.18	-1.70	2.92
	1.37	-1.27	-0.61	-4.14	-7.89	4.94	1.32	-1.20	1.15	0.53
	1.73	1.48	0.55	0.88	0.35	2.55	0.14	0.07	2.47	-0.79
	5.14	-4.02	2.31	-3.93	-1.20	4.59	5.29	1.20	-0.12	3.14
	-3.83	0.48	3.96	-1.44	-0.20	-6.34	-2.43	2.43	-2.91	-1.12
Objective Function's Value	1.5E-02	2.0E-02	2.5E-02	2.8E-02	4.7E-02	2.9E-02	2.3E-02	7.9E-03	8.1E-03	1.8E-02
Equality Constraint 1	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00
Equality Constraint 2	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00
Inequality Constraint 1	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00
Inequality Constraint 2	5.6E+01	6.6E+02	5.9E+02	0.0E+00	4.8E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00

Πίνακας 14

Πρόβλημα 16 – PSO με τροποποιημένη FR Μέθοδος 3										
Run	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Μεταβλητές Απόφασης	4.74	1.04	-3.52	2.26	-3.36	-3.98	-0.72	-0.25	-0.83	2.76
	-5.65	-0.08	3.93	-3.56	-0.90	2.99	-0.49	0.61	3.15	-1.57
	0.22	-0.15	4.54	-0.14	-2.65	5.55	-1.01	-0.82	-1.65	1.71
	3.20	-0.46	0.91	2.28	6.83	4.10	1.82	4.92	0.27	3.06
	-0.62	-5.44	1.37	3.69	0.26	-4.17	-1.16	-0.87	0.39	-4.43
	3.82	-3.13	5.04	-3.52	-0.45	5.31	2.70	-1.59	-0.36	1.28
	-0.98	-0.81	-3.79	-1.34	-0.81	-1.28	1.33	-0.40	2.21	1.37
	-1.09	5.38	2.73	4.78	0.90	-0.29	3.13	2.39	1.01	-0.33
	0.91	3.52	-4.75	0.17	2.05	1.14	1.21	-0.04	-1.50	1.91
	0.70	3.68	-1.73	-0.52	-1.32	-5.81	-3.37	-2.77	0.43	0.92
Objective Function's Value	2.7E-02	2.8E-02	4.0E-02	2.2E-02	2.0E-02	4.5E-02	7.7E-03	9.6E-03	5.7E-03	1.4E-02
Equality Constraint 1	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00
Equality Constraint 2	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00
Inequality Constraint 1	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00
Inequality Constraint 2	9.9E+01	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00

Πίνακας 15

Πρόβλημα 16 – PSO κανονική FR										
Run	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Μεταβλητές Απόφασης	2.35	0.84	2.32	4.55	0.55	-0.80	-4.91	2.67	-0.96	-2.04
	2.82	-5.58	1.04	-3.57	-0.45	3.99	4.22	0.76	0.47	3.86
	1.15	4.50	-1.10	-3.25	-1.06	-0.75	-2.19	-0.55	-1.84	-1.88
	2.96	6.45	-0.59	-3.75	0.78	-5.68	-3.36	0.99	2.16	-2.68
	-2.30	-1.08	-0.60	-0.71	0.56	-3.27	0.43	-3.95	-0.69	-2.52
	-4.23	-1.22	-2.09	3.93	1.22	2.46	5.52	0.89	1.51	0.00
	-0.66	-2.06	4.58	2.56	0.32	3.93	5.67	0.38	0.05	1.12
	-2.67	-3.40	-0.57	2.49	0.26	-2.57	-3.09	1.79	1.30	2.20
	-0.28	3.87	0.50	3.82	1.22	4.94	-0.88	0.90	4.84	4.08
	4.67	0.76	-1.75	-1.85	0.41	3.23	1.58	1.92	-3.97	1.33
Objective Function's Value	2.3E-02	3.8E-02	8.8E-03	3.0E-02	9.5E-04	3.5E-02	4.0E-02	9.5E-03	1.1E-02	1.8E-02
Equality Constraint 1	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00
Equality Constraint 2	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00
Inequality Constraint 1	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00
Inequality Constraint 2	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00

Πίνακας 16

Πρόβλημα 17 – PSO με τροποποιημένη FR Μέθοδος 1										
Run	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Μεταβλητές Απόφασης	0.45	0.53	0.39	-1.20	-2.16	1.40	4.95	-1.85	-0.77	3.69
	-1.03	1.76	-0.10	-2.28	-0.31	-1.25	3.23	1.70	0.64	3.22
	-1.23	2.55	0.25	0.04	2.56	-5.81	0.93	-2.80	0.11	-3.24
	-0.93	1.75	1.90	1.84	2.19	0.20	-1.29	1.94	-1.48	-1.12
	-1.04	0.40	2.50	0.55	3.06	-0.61	-2.42	1.77	-2.97	0.94
	-0.43	-1.86	0.18	4.35	-1.81	4.65	-2.01	-0.67	-1.91	-2.23
	3.71	-1.74	-2.04	-0.62	-0.74	4.41	-2.57	-0.51	-3.42	1.60
	-0.60	0.86	1.59	-1.17	1.13	4.41	-2.22	-0.56	-0.58	0.09
	-0.45	-0.80	-1.58	0.17	0.64	2.30	-1.10	-0.01	3.54	-0.28
	1.86	-0.70	-1.29	-0.99	-2.75	-4.84	1.97	3.15	5.85	-1.41
Objective Function's Value	5.0E+01	1.7E+01	3.6E+01	6.1E+01	6.9E+01	1.6E+02	2.8E+01	6.8E+01	4.3E+01	9.8E+01
Equality Constraint 1	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00
Inequality Constraint 1	0.0E+00	0.0E+00	1.2E-01	7.6E+00	0.0E+00	0.0E+00	4.8E+02	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00
Inequality Constraint 2	0.0E+00	6.8E-01	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	2.8E+00	0.0E+00	1.1E-01	0.0E+00	0.0E+00

Πίνακας 17

Πρόβλημα 17 – PSO με τροποποιημένη FR Μέθοδος 2										
Run	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Μεταβλητές Απόφασης	1.39	-2.54	4.05	-0.06	-5.07	-0.21	-5.05	2.24	-2.63	-1.49
	2.93	3.36	1.01	0.93	1.27	-6.10	-5.42	-2.84	0.12	0.79
	1.64	1.70	5.99	1.55	-0.56	3.35	-0.66	0.96	-0.38	4.05
	2.83	-0.43	0.33	-0.86	-0.40	0.89	-0.72	-1.25	6.92	0.49
	0.32	0.51	2.48	-2.96	2.99	3.18	2.28	6.54	-1.75	-1.12
	-2.98	1.65	-5.76	-1.66	3.29	-0.66	3.10	-1.06	-1.81	-0.11
	-1.68	2.26	-3.25	-2.54	0.29	4.26	0.79	-5.43	3.12	-3.36
	0.13	0.66	-4.66	5.04	1.22	0.89	4.42	2.03	-1.26	-4.03
	-3.14	-0.66	-0.80	-1.28	-0.21	-2.53	2.09	-1.44	-0.98	1.44
	1.98	-3.24	4.21	3.09	-0.68	0.80	3.84	0.15	-3.57	5.46
Objective Function's Value	4.5E+01	5.5E+01	2.2E+02	9.4E+01	6.5E+01	2.2E+02	5.7E+01	2.8E+02	1.8E+02	9.2E+01
Equality Constraint 1 Violation	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00
Inequality Constraint 1 Violation	2.2E+02	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	2.5E+03	3.6E+02	7.9E+01	0.0E+00
Inequality Constraint 2 Violation	1.4E+00	1.2E+00	1.5E+00	0.0E+00	1.0E-01	1.8E+00	2.6E+00	0.0E+00	0.0E+00	6.0E-02

Πίνακας 18

Πρόβλημα 17 – PSO με τροποποιημένη FR Μέθοδος 3										
Run	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Μεταβλητές Απόφασης	-2.80	-5.10	1.50	3.39	-0.92	0.82	-2.72	1.83	-3.35	0.93
	0.05	-1.95	-0.27	-0.09	1.07	4.24	-2.50	3.34	-3.84	0.32
	-0.53	-3.27	-1.82	0.53	0.17	7.42	-0.53	-0.82	0.64	0.59
	0.57	5.16	0.05	0.93	0.79	1.20	0.83	-1.13	-0.29	3.87
	-1.89	-1.11	-0.05	-0.87	-0.24	-1.26	-1.25	-4.22	6.06	0.67
	-2.21	-0.18	-0.59	0.26	0.24	-4.40	-1.36	-2.93	-3.30	0.84
	0.36	-1.00	0.15	-0.78	-1.38	-3.62	3.27	0.42	-0.74	-0.40
	1.14	0.29	1.29	1.11	0.82	-0.96	0.78	0.86	5.76	-1.41
	4.14	4.40	0.73	0.09	1.28	0.58	-0.98	0.40	-0.45	-1.94
	0.70	2.47	1.08	-2.88	0.19	-3.26	4.42	4.29	-2.44	-1.65
Objective Function's Value	5.5E+01	1.5E+02	1.8E+01	4.2E+01	1.7E+01	1.1E+02	5.5E+01	4.1E+01	2.6E+02	2.4E+01
Equality Constraint 1 Violation	0.0E+00	0.0E+00	6.4E-04	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00
Inequality Constraint 1	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	4.0E-05	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00
Inequality Constraint 2	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00

Πίνακας 19

Πρόβλημα 17 – PSO κανονική FR										
Run	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Μεταβλητές Απόφασης	4.75	-4.95	6.01	3.23	-0.55	4.11	-2.17	-5.77	6.26	6.29
	0.22	-2.81	3.78	-1.01	-2.84	3.40	-0.30	4.51	-4.37	2.45
	0.00	-1.80	0.57	-1.46	1.57	-2.62	1.08	7.26	-1.83	-1.02
	-0.69	-3.59	-4.21	4.19	-0.86	1.66	3.37	2.91	-4.02	-5.39
	-1.01	0.89	-3.92	-0.99	2.27	0.11	1.42	-1.68	0.02	-3.24
	-0.65	-1.55	3.50	-2.83	-0.34	-1.23	1.36	-0.34	-0.30	-3.74
	-0.27	2.12	1.61	1.49	3.40	0.41	-1.04	1.04	2.73	-5.21
	-3.65	7.98	-2.16	-1.70	0.80	-1.55	-1.40	-3.96	2.19	0.10
	-0.36	0.84	-3.22	-0.92	0.34	-2.74	-3.43	-4.71	-0.69	7.90
	1.53	3.50	-1.78	-0.42	-1.74	-1.25	3.15	2.53	1.09	-1.11
Objective Function's Value	6.8E+01	1.2E+02	1.1E+02	1.2E+02	9.9E+01	7.1E+01	4.5E+01	1.9E+02	1.8E+02	2.8E+02
Equality Constraint 1 Violation	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00
Inequality Constraint 1 Violation	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00
Inequality Constraint 2 Violation	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00

Πίνακας 20

Πρόβλημα 18 – PSO με τροποποιημένη FR Μέθοδος 1										
Run	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Μεταβλητές Απόφασης	24.54	-13.22	17.77	-13.52	10.13	1.53	-12.63	-1.93	-15.99	-17.67
	-6.12	-12.36	12.50	-2.89	2.24	12.22	-1.80	1.37	-0.07	-21.03
	-7.06	-2.52	9.99	-11.49	-21.51	1.89	-8.95	-3.82	6.47	-10.20
	-20.67	6.74	10.25	12.40	-12.72	-5.69	21.62	11.84	6.34	-29.76
	-20.57	3.49	4.60	-0.03	14.18	5.75	4.97	-10.89	0.27	-2.44
	29.51	4.39	-0.26	16.58	8.25	-6.52	-1.80	7.11	18.34	-23.79
	5.20	12.58	-7.50	3.36	6.33	-6.09	16.69	9.83	17.08	21.18
	-37.81	11.60	7.04	-5.00	13.55	9.05	1.70	1.95	-22.40	37.79
	1.52	-6.02	-27.21	-10.46	-4.20	2.40	-16.66	-14.23	-5.64	28.46
	28.70	-8.50	-17.89	-0.54	-11.74	-13.97	-15.62	1.25	-7.93	-7.26
Objective Function's Value	9.1E+03	6.3E+02	1.5E+03	1.5E+03	1.6E+03	9.2E+02	2.3E+03	1.8E+03	2.9E+03	5.5E+03
Equality Constraint 1 Violation	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00
Inequality Constraint 1	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00

Πίνακας 21

Πρόβλημα 18 – PSO με τροποποιημένη FR Μέθοδος 2										
Run	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Μεταβλητές Απόφασης	-1.80	-12.54	-24.06	24.11	-16.85	-6.93	-0.39	1.55	3.12	-9.21
	15.08	-20.60	24.36	26.35	0.19	2.72	-11.39	29.46	-4.72	14.18
	16.78	-3.62	-4.72	-2.81	-4.98	-11.86	21.46	-2.53	11.82	7.64
	12.69	11.13	-3.88	-18.50	-4.91	-18.70	18.74	-22.19	7.76	10.65
	7.58	6.71	-12.58	-0.98	-11.74	-28.39	-1.44	-5.73	-9.81	14.73
	1.65	8.49	-14.38	-18.42	-6.79	26.38	7.45	-9.77	3.79	-5.80
	-18.35	-7.48	-11.45	-13.92	7.82	-17.88	-1.32	-18.99	-29.84	5.83
	-19.88	7.45	-3.23	-7.79	18.91	-10.25	-5.85	-20.28	-19.86	-7.00
	-1.13	9.90	-8.04	-18.13	10.34	13.68	-7.53	7.45	-0.97	-20.86
	-11.40	7.72	30.22	11.29	-0.07	34.84	-26.10	26.92	34.54	-10.87
Objective Function's Value	1.1E+03	1.0E+03	4.5E+03	2.5E+03	9.0E+02	6.5E+03	2.5E+03	3.5E+03	3.7E+03	1.5E+03
Equality Constraint 1 Violation	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00
Inequality Constraint 1 Violation	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00

Πίνακας 22

Πρόβλημα 18 – PSO με τροποποιημένη FR Μέθοδος 3										
Run	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Μεταβλητές Απόφασης	6.03	13.20	7.93	0.90	6.86	41.72	18.81	10.65	19.35	30.11
	16.22	25.43	-5.59	-18.56	-9.66	40.02	-8.98	12.25	-38.27	18.76
	30.98	-0.89	-1.83	-20.47	7.19	-2.46	4.55	30.29	-3.71	17.60
	10.76	3.34	27.58	-12.88	7.12	16.05	-12.62	-3.55	22.52	9.68
	9.63	-19.81	0.16	8.65	-12.21	-6.36	0.54	13.53	-8.60	3.18
	-9.92	-16.65	-8.41	-5.62	6.92	22.57	-13.50	-18.55	-0.01	-12.18
	-14.77	-10.33	-14.93	15.00	-6.09	-44.21	11.32	-23.70	4.66	-13.15
	-39.61	-8.40	1.56	20.92	9.04	-27.77	15.09	6.30	28.47	-26.03
	-5.33	4.92	-14.39	10.58	-0.72	-23.90	15.63	-7.83	-27.28	-22.64
	4.77	6.44	-10.58	-0.16	-7.71	-27.90	-28.70	-23.53	12.48	-15.23
Objective Function's Value	3.3E+03	1.6E+03	2.3E+03	1.8E+03	2.0E+03	7.8E+03	4.6E+03	4.0E+03	1.2E+04	8.6E+02
Equality Constraint 1	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00
Inequality Constraint 1	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00

Πίνακας 23

Πρόβλημα 18 – PSO κανονική FR										
Run	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Μεταβλητές Απόφασης	-23.24	-0.22	-16.38	5.85	4.61	15.04	17.79	-31.99	33.68	-17.67
	-16.24	13.97	-1.97	16.78	-8.40	-9.51	1.41	-12.95	-8.33	-8.34
	12.06	-7.99	12.37	-13.40	7.29	-42.98	-0.29	-10.99	7.63	4.26
	10.35	-13.91	23.82	-2.94	26.02	-14.64	-15.66	1.75	4.51	0.84
	15.26	-7.68	19.03	-10.38	20.84	-20.64	16.79	20.71	-4.16	18.24
	0.32	-7.49	11.66	2.85	21.04	-0.97	15.30	12.66	-3.75	22.79
	-0.01	2.51	-15.41	-10.91	-18.12	21.79	11.87	35.00	14.18	14.04
	17.27	-21.47	3.66	-3.81	-8.09	19.82	-10.43	-16.41	-20.79	-8.69
	-12.01	16.40	-25.88	15.12	-22.96	-8.36	-21.62	15.73	-31.36	-15.37
	-2.24	20.56	-12.97	-10.27	-25.33	35.39	-15.13	-22.73	-1.29	-18.44
Objective Function's Value	2.2E+03	3.1E+03	2.4E+03	2.5E+03	2.5E+03	6.1E+03	2.4E+03	6.9E+03	5.2E+03	1.3E+03
Equality Constraint 1 Violation	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00
Inequality Constraint 1	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00

Πίνακας 24

Problem 06 – CMA με τροποποιημένη FR Μέθοδος 1										
Run	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Μεταβλητές Απόφασης	-322.20	51.15	-38.05	193.62	61.13	35.60	163.48	63.45	477.34	199.32
	418.69	41.37	43.43	-176.79	175.33	270.76	59.60	334.12	157.98	252.53
	106.53	-13.67	43.27	-184.95	314.73	41.07	149.12	252.64	189.62	-170.59
	-151.60	-57.17	-26.06	106.41	-230.31	-88.61	93.39	-16.43	255.03	-292.49
	-402.23	-40.62	-38.16	532.83	-506.95	-434.68	-74.59	-473.02	-50.70	-196.30
	41.85	-46.47	25.34	122.69	-197.17	239.06	20.75	52.80	-27.59	52.59
	557.44	2.80	16.56	199.79	34.05	171.49	-226.47	283.85	-202.64	450.48
	117.99	-24.28	-2.31	255.81	32.34	213.67	-9.43	47.67	-77.34	28.21
	538.40	40.27	-10.58	-13.59	138.00	504.92	-168.59	-247.43	-53.97	-194.73
	-375.72	29.41	-23.25	223.06	292.98	306.37	19.21	-33.89	546.40	-275.76
Objective Function's Value	5.7E+02	5.3E+01	4.9E+01	5.2E+02	3.2E+02	5.1E+02	1.5E+02	3.3E+02	5.4E+02	4.6E+02
Equality Constraint 1	1.6E+02	1.5E+02	1.5E+02	1.6E+02	1.3E+02	1.4E+02	1.5E+02	1.3E+02	1.4E+02	1.5E+02
Equality Constraint 2	4.1E+02	4.1E+02	4.1E+02	4.2E+02	3.7E+02	3.9E+02	4.0E+02	3.6E+02	3.8E+02	3.9E+02

Πίνακας 25

Problem 06 – CMA με τροποποιημένη FR Μέθοδος 2										
Run	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Μεταβλητές Απόφασης	12.98	217.62	3.23	-257.55	191.50	55.42	-0.83	598.37	-7.17	-1.28
	-8.57	256.11	-0.02	155.21	-388.66	271.71	1.83	143.54	-9.69	7.41
	-7.66	-313.12	-2.89	250.00	35.13	-336.96	-1.08	440.18	7.44	2.18
	15.47	-38.26	3.00	256.65	-195.73	125.50	-0.78	-487.29	-12.39	11.94
	-3.67	-179.46	2.56	-145.52	-169.92	-108.18	2.54	247.24	7.66	-5.95
	-15.17	74.91	1.64	147.49	378.39	-228.93	-1.42	187.84	8.29	0.48
	21.63	389.92	1.62	-228.00	-262.73	221.60	2.55	377.51	-11.22	5.15
	47.88	-124.53	-1.89	358.24	-285.69	-52.31	-1.19	-265.77	6.92	-5.12
	27.22	-374.26	3.87	-478.92	58.95	69.81	2.04	-14.93	-6.48	-3.48
	37.50	-394.17	-1.61	-283.80	298.54	21.63	2.33	15.27	3.86	7.64
Objective Function's Value	4.4E+01	4.0E+02	1.1E+01	3.5E+02	3.8E+02	2.6E+02	1.2E+01	6.0E+02	1.3E+01	1.4E+01
Equality Constraint 1	1.5E+02	1.5E+02	1.5E+02	1.5E+02	1.5E+02	1.4E+02	1.5E+02	1.4E+02	1.5E+02	1.5E+02
Equality Constraint 2	4.1E+02	4.0E+02	4.1E+02	3.9E+02	4.1E+02	2.6E+02	4.1E+02	3.5E+02	4.1E+02	4.1E+02

Πίνακας 26

Problem 06 – CMA με τροποποιημένη FR Μέθοδος 3										
Run	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Μεταβλητές Απόφασης	-99.61	367.39	-135.26	61.13	158.37	350.42	382.73	0.74	-2.15	-0.64
	67.99	219.16	317.17	175.33	333.85	55.26	-420.37	2.04	2.76	-3.27
	19.95	179.49	92.89	314.73	-4.92	-193.98	410.77	2.37	5.39	1.32
	-36.90	286.89	203.66	-230.31	-110.94	118.82	70.90	2.66	-2.35	5.43
	-6.77	-249.87	-265.38	-506.95	-278.70	390.80	-88.14	2.54	2.37	0.92
	39.03	-43.23	40.13	-197.17	-53.86	397.00	0.73	2.76	-1.34	-1.03
	-33.52	137.55	184.07	34.05	58.28	133.93	63.85	-0.38	-0.59	-1.38
	51.07	-341.36	192.40	32.34	106.53	231.51	-165.17	-1.16	4.35	-3.71
	249.78	297.07	-352.62	138.00	-143.55	68.51	309.37	2.83	-1.27	-2.12
	78.89	26.13	344.17	292.98	273.14	317.49	60.19	1.92	-3.83	-0.56
Objective Function's Value	2.4E+02	3.7E+02	3.3E+02	3.2E+02	3.3E+02	3.9E+02	4.2E+02	8.8E+00	1.1E+01	7.8E+00
Equality Constraint 1	1.5E+02	1.4E+02	1.4E+02	1.3E+02	1.4E+02	1.5E+02	1.4E+02	1.5E+02	1.5E+02	1.5E+02
Equality Constraint 2	4.0E+02	3.7E+02	3.8E+02	3.7E+02	3.9E+02	4.0E+02	3.7E+02	4.1E+02	4.1E+02	4.1E+02

Πίνακας 27

Problem 06 – CMA κανονική FR										
Run	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Μεταβλητές Απόφασης	-32.18	4.08	-25.15	2.77	1.60	-332.56	-0.05	81.52	-1.15	8.30
	111.84	-0.53	9.76	-0.45	0.94	-98.08	9.64	143.67	-1.88	-9.54
	78.18	13.71	-6.21	-1.21	-1.58	424.20	-6.11	49.44	-0.48	15.06
	135.01	6.81	-5.54	-0.48	5.29	255.61	-17.25	34.46	0.86	22.59
	-120.72	10.04	9.87	-6.42	1.74	79.98	0.26	122.51	-2.28	-13.67
	1.93	2.42	4.82	-1.64	-0.19	220.10	-12.00	191.82	2.42	-0.58
	-41.75	5.14	-8.51	0.08	0.46	-417.41	-12.55	85.93	0.82	9.60
	26.95	-5.21	-9.42	1.93	4.47	276.25	4.33	-150.09	2.84	-7.43
	70.23	-7.16	-19.35	-0.32	3.52	143.83	-5.89	119.06	-2.81	-6.83
	19.64	6.21	-20.50	-2.71	-1.27	545.90	-36.77	178.26	0.69	7.18
Objective Function's Value	1.3E+02	1.9E+01	9.9E+00	9.3E+00	4.1E+02	5.4E+02	2.0E+00	1.9E+02	1.0E+01	2.1E+01
Equality Constraint 1	1.5E+02	1.5E+02	1.5E+02	1.5E+02	1.5E+02	1.4E+02	1.5E+02	1.5E+02	1.5E+02	1.5E+02
Equality Constraint 2	3.9E+02	4.1E+02	4.1E+02	4.1E+02	9.7E+00	3.8E+02	4.1E+02	4.0E+02	4.1E+02	4.1E+02

Πίνακας 28

Problem 09 – CMA με τροποποιημένη FR Μέθοδος 1										
Run	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Μεταβλητές Απόφασης	-41.79	-40.99	-5.22	-50.56	-40.49	-44.08	-38.74	-45.59	-27.52	-37.55
	-35.46	-42.79	6.10	-22.03	-37.20	-40.89	-38.15	-9.38	15.67	-16.31
	-47.72	-41.21	9.06	-47.62	-47.77	-47.51	-50.77	-48.80	-1.65	-41.76
	94.83	95.39	27.65	93.06	95.90	101.44	97.72	90.82	78.98	95.64
	30.32	31.88	32.94	15.33	32.40	16.04	30.58	32.21	38.60	42.81
	99.05	97.51	35.78	89.76	98.56	86.44	96.69	77.95	35.43	83.31
	30.90	40.78	33.07	30.68	30.83	31.41	34.60	8.47	33.01	14.53
	-30.77	-22.99	-18.51	-27.02	-30.56	-13.11	-35.78	-40.35	21.45	-30.11
	-45.86	-50.00	-27.20	-25.42	-46.89	-30.41	-42.49	-27.52	-54.19	-33.99
	28.37	14.36	28.49	18.55	26.90	17.33	26.84	38.15	-39.37	11.90
Objective Function's Value	1.4E+03	2.6E+06	5.2E+09	3.5E+07	4.3E+03	2.8E+07	1.8E+05	1.1E+08	3.7E+09	3.5E+07
Equality Constraint 1	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00

Πίνακας 29

Problem 09 – CMA με τροποποιημένη FR Μέθοδος 2										
Run	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Μεταβλητές Απόφασης	-43.94	-41.19	-41.02	-33.58	-38.50	-15.39	-50.09	-21.07	-33.51	-43.42
	-29.73	-45.76	-29.02	-38.41	-42.15	-21.51	-8.80	-5.29	-26.56	-36.71
	-46.07	-29.21	-47.79	-35.45	-35.10	-38.82	-49.29	-31.24	-35.60	-46.55
	93.69	94.50	85.53	93.43	80.00	103.78	78.25	96.91	74.07	88.68
	35.22	33.52	30.85	23.51	28.65	36.36	25.60	29.82	33.13	38.11
	96.33	91.14	100.25	97.81	82.16	53.37	73.33	54.46	81.52	102.44
	28.27	28.01	27.65	30.50	25.95	33.50	22.82	26.30	34.43	35.65
	-35.17	-23.04	-23.89	-33.98	-29.99	-38.72	-30.63	-40.71	-21.44	-31.73
	-46.96	-48.35	-49.50	-53.98	-23.95	-26.95	-10.84	-41.10	-39.17	-42.16
	26.58	14.39	28.60	22.63	28.24	24.21	8.12	28.37	33.93	19.07
Objective Function's Value	2.9E+05	1.9E+07	1.2E+06	5.2E+06	4.5E+07	4.9E+08	2.9E+08	5.1E+08	3.0E+07	5.5E+05
Equality Constraint 1	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00

Πίνακας 30

Problem 09 – CMA με τροποποιημένη FR Μέθοδος 3										
Run	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Μεταβλητές Απόφασης	-33.45	-40.31	-49.49	-26.79	-23.65	-49.73	-39.66	1.68	110.54	-34.60
	-34.32	-29.33	12.64	-32.17	-17.57	-41.94	-34.64	-3.46	-79.47	-24.50
	-50.70	-44.18	-2.37	8.76	-38.77	-41.13	-46.28	-31.01	-16.69	-58.00
	92.80	79.37	53.71	57.39	94.37	84.07	85.02	40.64	104.34	85.85
	33.26	4.40	31.78	18.36	36.37	37.91	31.90	34.31	-125.67	39.40
	98.05	102.97	97.73	54.51	100.24	105.59	99.74	43.29	56.30	91.45
	28.41	39.36	4.18	-30.14	31.30	29.64	26.88	56.58	28.27	36.02
	-31.62	-18.27	-25.39	3.98	-25.61	-20.39	-28.45	-34.26	11.14	-28.68
	-45.35	-24.57	-38.77	-11.41	-45.74	-48.70	-40.55	-17.95	-12.61	-45.96
	21.48	25.63	-13.43	54.94	-7.49	24.28	32.75	28.82	30.28	21.63
Objective Function's Value	5.3E+05	8.3E+07	1.4E+09	3.4E+09	2.5E+07	4.1E+06	7.0E+05	2.3E+09	1.2E+11	4.6E+06
Equality Constraint 1	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00

Πίνακας 31

Problem 09 – CMA κανονική FR										
Run	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Μεταβλητές Απόφασης	-26.63	-40.63	-25.21	-34.93	-44.64	-39.28	25.35	-7.89	-7.02	-10.39
	-22.40	4.89	-36.22	-36.84	-36.11	6.76	18.21	-8.07	-20.22	-36.68
	-13.94	-11.74	-21.77	-26.81	-49.15	-23.60	-32.25	-36.78	-46.61	-18.33
	77.82	40.01	77.79	71.67	105.09	58.93	47.68	88.80	95.16	75.93
	11.16	34.25	0.30	28.74	30.78	32.69	38.99	22.59	5.75	27.46
	82.00	64.38	81.00	76.00	95.50	46.28	103.23	83.88	63.59	84.49
	-0.35	1.84	24.86	-1.63	12.42	-8.70	-29.05	25.53	36.94	1.04
	-11.05	4.24	-27.21	0.86	-29.69	-31.27	8.08	-31.58	-7.65	-4.63
	-41.73	-29.13	-16.26	-21.80	-30.56	11.32	-18.67	-46.14	-28.40	-46.52
	29.22	27.36	16.79	25.30	25.53	31.60	-46.72	-13.55	3.28	-2.32
Objective Function's Value	3.1E+08	1.7E+09	2.7E+08	3.3E+08	1.9E+07	2.7E+09	4.9E+09	2.0E+08	3.9E+08	3.4E+08
Equality Constraint 1	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00

Πίνακας 32

Problem 12 – CMA με τροποποιημένη FR Μέθοδος 1										
Run	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Μεταβλητές Απόφασης	18.35	18.35	18.35	18.35	18.35	18.35	18.35	18.35	18.35	18.35
	-58.99	-58.99	-58.99	-58.99	-58.99	-58.99	-58.99	-58.99	-58.99	-58.99
	33.33	33.33	33.33	33.33	33.33	33.33	33.33	33.33	33.33	33.33
	20.16	20.16	20.16	20.16	20.16	20.16	20.16	20.16	20.16	20.16
	-10.73	-10.73	-10.73	-10.73	-10.73	-10.73	-10.73	-10.73	-10.73	-10.73
	-90.85	-90.85	-90.85	-90.85	-90.85	-90.85	-90.85	-90.85	-90.85	-90.85
	-12.07	-12.07	-12.07	-12.07	-12.07	-12.07	-12.07	-12.07	-12.07	-12.07
	59.72	59.72	59.72	59.72	59.72	59.72	59.72	59.72	59.72	59.72
	-37.44	-37.44	-37.44	-37.44	-37.44	-37.44	-37.44	-37.44	-37.44	-37.44
	25.96	25.96	25.96	25.96	25.96	25.96	25.96	25.96	25.96	25.96
Objective Function's Value	-3.9E-03	-3.9E-03	-3.9E-03	-3.9E-03	-3.9E-03	-3.9E-03	-3.9E-03	-3.9E-03	-3.9E-03	-3.9E-03
Inequality Constraint 1	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00
Equality Constraint 1	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00

Πίνακας 33

Problem 12 – CMA με τροποποιημένη FR Μέθοδος 2										
Run	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Μεταβλητές Απόφασης	18.35	18.35	18.35	18.35	18.35	18.35	18.35	18.35	18.35	18.35
	-58.99	-58.99	-58.99	-58.99	-58.99	-58.99	-58.99	-58.99	-58.99	-58.99
	33.33	33.33	33.33	33.33	33.33	33.33	33.33	33.33	33.33	33.33
	20.16	20.16	20.16	20.16	20.16	20.16	20.16	20.16	20.16	20.16
	-10.73	-10.73	-10.73	-10.73	-10.73	-10.73	-10.73	-10.73	-10.73	-10.73
	-90.85	-90.85	-90.85	-90.85	-90.85	-90.85	-90.85	-90.85	-90.85	-90.85
	-12.07	-12.07	-12.07	-12.07	-12.07	-12.07	-12.07	-12.07	-12.07	-12.07
	59.72	59.72	59.72	59.72	59.72	59.72	59.72	59.72	59.72	59.72
	-37.44	-37.44	-37.44	-37.44	-37.44	-37.44	-37.44	-37.44	-37.44	-37.44
	25.96	25.96	25.96	25.96	25.96	25.96	25.96	25.96	25.96	25.96
Objective Function's Value	-3.9E-03	-3.9E-03	-3.9E-03	-3.9E-03	-3.9E-03	-3.9E-03	-3.9E-03	-3.9E-03	-3.9E-03	-3.9E-03
Inequality Constraint 1	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00
Equality Constraint 1	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00

Πίνακας 34

Problem 12 – CMA με τροποποιημένη FR Μέθοδος 3										
Run	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Μεταβλητές Απόφασης	18.35	18.35	18.35	18.35	18.35	18.35	18.35	18.35	18.35	18.35
	-58.99	-58.99	-58.99	-58.99	-58.99	-58.99	-58.99	-58.99	-58.99	-58.99
	33.33	33.33	33.33	33.33	33.33	33.33	33.33	33.33	33.33	33.33
	20.16	20.16	20.16	20.16	20.16	20.16	20.16	20.16	20.16	20.16
	-10.73	-10.73	-10.73	-10.73	-10.73	-10.73	-10.73	-10.73	-10.73	-10.73
	-90.85	-90.85	-90.85	-90.85	-90.85	-90.85	-90.85	-90.85	-90.85	-90.85
	-12.07	-12.07	-12.07	-12.07	-12.07	-12.07	-12.07	-12.07	-12.07	-12.07
	59.72	59.72	59.72	59.72	59.72	59.72	59.72	59.72	59.72	59.72
	-37.44	-37.44	-37.44	-37.44	-37.44	-37.44	-37.44	-37.44	-37.44	-37.44
	25.96	25.96	25.96	25.96	25.96	25.96	25.96	25.96	25.96	25.96
Objective Function's Value	-3.9E-03	-3.9E-03	-3.9E-03	-3.9E-03	-3.9E-03	-3.9E-03	-3.9E-03	-3.9E-03	-3.9E-03	-3.9E-03
Inequality Constraint 1	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00
Equality Constraint 1	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00

Πίνακας 35

Problem 12 – CMA κανονική FR										
Run	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Μεταβλητές Απόφασης	18.35	18.35	18.35	18.35	18.35	18.35	18.35	18.35	18.35	18.35
	-58.99	-58.99	-58.99	-58.99	-58.99	-58.99	-58.99	-58.99	-58.99	-58.99
	33.33	33.33	33.33	33.33	33.33	33.33	33.33	33.33	33.33	33.33
	20.16	20.16	20.16	20.16	20.16	20.16	20.16	20.16	20.16	20.16
	-10.73	-10.73	-10.73	-10.73	-10.73	-10.73	-10.73	-10.73	-10.73	-10.73
	-90.85	-90.85	-90.85	-90.85	-90.85	-90.85	-90.85	-90.85	-90.85	-90.85
	-12.07	-12.07	-12.07	-12.07	-12.07	-12.07	-12.07	-12.07	-12.07	-12.07
	59.72	59.72	59.72	59.72	59.72	59.72	59.72	59.72	59.72	59.72
	-37.44	-37.44	-37.44	-37.44	-37.44	-37.44	-37.44	-37.44	-37.44	-37.44
	25.96	25.96	25.96	25.96	25.96	25.96	25.96	25.96	25.96	25.96
Objective Function's Value	-3.9E-03	-3.9E-03	-3.9E-03	-3.9E-03	-3.9E-03	-3.9E-03	-3.9E-03	-3.9E-03	-3.9E-03	-3.9E-03
Inequality Constraint 1	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00
Equality Constraint 1	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00

Πίνακας 36

Problem 16 – CMA με τροποποιημένη FR Μέθοδος 1										
Run	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Μεταβλητές Απόφασης	0.37	0.36	0.31	0.38	0.46	1.11	0.39	1.87	0.34	0.37
	0.43	0.43	0.41	-0.83	0.16	1.97	0.37	-1.74	0.26	0.43
	-0.42	-0.42	-0.55	-1.04	-0.39	-0.42	-0.57	-1.00	-0.35	-0.42
	0.98	1.00	1.16	0.76	0.31	1.69	1.07	0.21	0.85	0.98
	0.32	0.32	0.27	-1.46	0.33	-0.12	0.28	0.71	0.12	0.32
	0.46	0.46	0.47	-0.05	1.18	0.28	0.45	-0.12	0.52	0.46
	0.99	0.96	0.97	2.20	1.14	1.97	0.91	0.99	1.08	0.99
	0.31	0.31	0.28	1.19	0.35	-2.27	0.10	0.32	0.33	0.31
	0.63	0.64	0.66	1.21	0.63	0.50	0.52	-0.86	0.40	0.63
	-0.36	-0.36	-0.38	1.31	-0.41	0.21	-0.01	2.36	0.04	-0.36
Objective Function's Value	-1.5E-11	1.5E-06	-2.3E-05	3.3E-04	4.6E-05	7.5E-04	-4.6E-05	6.6E-04	-1.9E-05	-1.5E-10
Inequality Constraint 1	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00
Inequality Constraint 2	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00
Equality Constraint 1	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	3.1E-06	0.0E+00	7.6E-06	0.0E+00	9.0E-06	0.0E+00
Equality Constraint 2	3.0E-13	8.3E-06	9.4E-06	2.9E-06	0.0E+00	4.0E-06	0.0E+00	8.7E-07	0.0E+00	5.4E-12

Πίνακας 37

Problem 16 – CMA με τροποποιημένη FR Μέθοδος 2										
Run	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Μεταβλητές Απόφασης	0.37	0.37	0.37	0.37	0.37	0.37	0.37	0.37	0.37	0.37
	0.43	0.43	0.43	0.43	0.43	0.43	0.43	0.43	0.43	0.43
	-0.42	-0.42	-0.42	-0.42	-0.42	-0.42	-0.42	-0.42	-0.42	-0.42
	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98
	0.32	0.32	0.32	0.32	0.32	0.32	0.32	0.32	0.32	0.32
	0.46	0.46	0.46	0.46	0.46	0.46	0.46	0.46	0.46	0.46
	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99
	0.31	0.31	0.31	0.31	0.31	0.31	0.31	0.31	0.31	0.31
	0.63	0.63	0.63	0.63	0.63	0.63	0.63	0.63	0.63	0.63
	-0.36	-0.36	-0.36	-0.36	-0.36	-0.36	-0.36	-0.36	-0.36	-0.36
Objective Function's Value	-2.7E-11	3.5E-11	-2.4E-11	-9.1E-11	1.1E-10	2.6E-10	6.0E-11	1.3E-10	2.3E-10	-4.0E-11
Inequality Constraint 1	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00
Inequality Constraint 2	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00
Equality Constraint 1	0.0E+00	5.5E-13	0.0E+00	0.0E+00	4.5E-12	1.1E-11	2.4E-12	5.1E-12	6.7E-12	1.1E-13
Equality Constraint 2	3.5E-13	0.0E+00	1.8E-12	1.5E-12	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00

Πίνακας 38

Problem 16 – CMA με τροποποιημένη FR Μέθοδος 3										
Run	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Μεταβλητές Απόφασης	0.38	0.37	0.37	0.37	0.37	0.37	0.37	0.37	-1.44	0.37
	0.64	0.43	0.43	0.43	0.43	0.43	0.43	0.43	-6.05	0.44
	1.31	-0.42	-0.42	-0.42	-0.42	-0.42	-0.42	-0.42	3.88	-0.42
	1.19	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	0.98	-4.46	0.98
	0.22	0.32	0.32	0.32	0.32	0.32	0.32	0.32	-2.04	0.32
	0.47	0.46	0.46	0.46	0.46	0.46	0.46	0.46	7.71	0.46
	0.92	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99	-3.06	0.97
	0.02	0.31	0.31	0.31	0.31	0.31	0.31	0.31	-0.53	0.31
	0.58	0.63	0.63	0.63	0.63	0.63	0.63	0.63	-4.78	0.63
	-2.08	-0.36	-0.36	-0.36	-0.36	-0.36	-0.36	-0.36	6.40	-0.35
Objective Function's Value	1.9E-04	-1.1E-11	-1.6E-11	1.4E-10	-3.3E-11	4.7E-11	-1.1E-10	-1.8E-10	6.8E-03	1.0E-06
Inequality Constraint 1	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00
Inequality Constraint 2	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00
Equality Constraint 1	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	3.8E-12	0.0E+00	1.7E-12	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00
Equality Constraint 2	4.7E-06	1.9E-12	8.4E-13	0.0E+00	4.8E-13	0.0E+00	4.6E-12	6.6E-12	1.9E-01	7.1E-06

Πίνακας 39

Problem 16 – CMA κανονική FR										
Run	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Μεταβλητές Απόφασης	0.32	0.42	0.32	0.40	0.42	0.32	0.42	0.32	0.32	0.32
	0.37	0.51	0.37	0.49	0.51	0.37	0.51	0.36	0.37	0.37
	-0.50	-0.32	-0.50	-0.36	-0.32	-0.50	-0.32	0.00	-0.50	-0.50
	0.90	1.09	0.90	1.06	1.09	0.90	1.09	0.89	0.90	0.90
	0.24	0.44	0.24	0.40	0.44	0.24	0.44	0.22	0.24	0.24
	0.37	0.00	0.37	0.54	0.00	0.37	0.00	0.36	0.37	0.37
	0.90	1.11	0.90	1.07	1.11	0.90	1.11	0.88	0.90	0.90
	0.21	0.43	0.21	0.00	0.43	0.21	0.43	0.20	0.21	0.21
	0.53	0.75	0.53	0.71	0.75	0.53	0.75	0.51	0.53	0.53
	0.00	-0.23	0.00	-0.27	-0.23	0.00	-0.23	-0.47	0.00	0.00
Objective Function's Value	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00
Inequality Constraint 1	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00
Inequality Constraint 2	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00
Equality Constraint 1	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00
Equality Constraint 2	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00

Πίνακας 40

Problem 17 – CMA με τροποποιημένη FR Μέθοδος 1										
Run	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Μεταβλητές Απόφασης	-0.63	-0.85	-0.64	-0.63	-0.63	-0.63	-0.63	-0.63	-0.63	-0.61
	0.34	0.33	0.32	0.33	0.33	0.33	0.33	0.33	0.33	0.35
	0.41	0.55	0.36	0.40	0.40	0.40	0.40	0.40	0.40	0.39
	0.47	0.68	0.80	0.46	0.46	0.46	0.46	0.46	0.46	0.43
	-0.51	-0.23	-0.11	-0.51	-0.51	-0.51	-0.51	-0.51	-0.51	-0.55
	0.28	0.39	0.48	0.29	0.29	0.29	0.29	0.29	0.29	0.27
	0.41	0.25	0.13	0.41	0.41	0.41	0.41	0.41	0.42	0.42
	0.91	0.66	0.41	0.92	0.92	0.92	0.92	0.92	0.92	0.92
	-0.43	-0.54	-0.45	-0.43	-0.43	-0.43	-0.43	-0.43	-0.43	-0.41
	0.81	0.81	0.76	0.81	0.81	0.81	0.81	0.81	0.81	0.86
Objective Function's Value	1.2E-04	2.3E-01	7.0E-01	6.0E-30	5.7E-30	4.9E-09	0.0E+00	1.2E-21	5.1E-30	3.5E-03
Inequality Constraint 1	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	5.3E-43	6.1E-38	0.0E+00	3.4E-48	0.0E+00	2.2E-34	0.0E+00
Inequality Constraint 2	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	1.8E-04	0.0E+00	4.3E-03	0.0E+00
Equality Constraint 1	0.0E+00	9.3E-06	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	5.3E-08	0.0E+00	6.3E-06	1.0E-05

Πίνακας 41

Problem 17 – CMA με τροποποιημένη FR Μέθοδος 2										
Run	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Μεταβλητές Απόφασης	-0.63	-0.63	-0.63	-0.63	-0.63	-0.63	-0.58	-0.63	-0.63	-0.63
	0.33	0.33	0.33	0.33	0.33	0.33	0.37	0.33	0.33	0.33
	0.40	0.40	0.40	0.40	0.40	0.40	0.42	0.40	0.40	0.40
	0.46	0.46	0.46	0.46	0.46	0.46	0.46	0.46	0.46	0.46
	-0.51	-0.51	-0.51	-0.51	-0.51	-0.51	-0.51	-0.51	-0.51	-0.51
	0.29	0.29	0.29	0.29	0.29	0.29	0.28	0.29	0.29	0.29
	0.41	0.41	0.41	0.42	0.41	0.41	0.39	0.42	0.41	0.41
	0.92	0.92	0.92	0.92	0.92	0.92	0.89	0.92	0.92	0.92
	-0.43	-0.43	-0.43	-0.43	-0.43	-0.43	-0.46	-0.43	-0.43	-0.43
	0.81	0.81	0.81	0.81	0.81	0.81	0.78	0.81	0.81	0.81
Objective Function's Value	1.0E-30	4.7E-30	4.2E-30	2.0E-30	1.1E-23	5.0E-30	1.2E-03	3.9E-30	1.4E-14	0.0E+00
Inequality Constraint 1	0.0E+00	2.9E-40	1.3E-37	9.4E-35	0.0E+00	7.0E-44	0.0E+00	4.4E-37	0.0E+00	3.6E-34
Inequality Constraint 2	0.0E+00	0.0E+00	2.1E-03	4.0E-03	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	2.3E-03	0.0E+00	0.0E+00
Equality Constraint 1	0.0E+00	0.0E+00	2.1E-06	5.5E-06	1.6E-19	0.0E+00	0.0E+00	2.5E-06	3.1E-12	0.0E+00

Πίνακας 42

Problem 17 – CMA με τροποποιημένη FR Μέθοδος 3										
Run	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Μεταβλητές Απόφασης	-0.64	-0.63	-0.63	-0.62	-0.63	-0.63	-0.63	-0.63	-0.63	-0.67
	0.34	0.33	0.33	0.21	0.33	0.33	0.33	0.33	0.33	0.15
	0.50	0.40	0.40	0.88	0.40	0.40	0.40	0.40	0.40	0.09
	0.51	0.46	0.46	0.92	0.46	0.46	0.46	0.46	0.46	0.08
	-0.55	-0.51	-0.51	0.03	-0.51	-0.51	-0.51	-0.51	-0.51	-0.79
	0.17	0.29	0.29	0.53	0.29	0.29	0.29	0.29	0.29	0.29
	0.31	0.41	0.41	0.33	0.41	0.42	0.41	0.41	0.41	0.60
	0.87	0.92	0.92	0.50	0.92	0.92	0.92	0.92	0.92	1.14
	-0.31	-0.43	-0.43	-0.89	-0.43	-0.43	-0.43	-0.43	-0.43	-0.12
	0.85	0.81	0.81	0.17	0.81	0.81	0.81	0.81	0.81	1.24
Objective Function's Value	6.1E-02	3.9E-30	6.0E-30	7.2E-01	1.2E-17	4.0E-30	4.3E-22	3.2E-30	2.0E-30	1.9E-01
Inequality Constraint 1	0.0E+00	2.5E-33	2.8E-61	0.0E+00	0.0E+00	1.0E-35	0.0E+00	3.0E-35	5.6E-44	0.0E+00
Inequality Constraint 2	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	3.2E-03	0.0E+00	0.0E+00	4.7E-04	0.0E+00
Equality Constraint 1	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	1.4E-14	3.9E-06	7.1E-18	0.0E+00	2.3E-07	7.7E-06

Πίνακας 43

Problem 17 – CMA κανονική FR										
Run	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Μεταβλητές Απόφασης	-1.17	-1.17	1.72	1.45	-1.17	3.24	1.78	-1.49	-1.17	-1.47
	-0.20	-0.20	3.07	0.06	-0.21	0.94	1.36	0.00	-0.20	-0.45
	-0.09	-0.08	1.10	0.00	-0.14	1.20	0.00	-0.47	-0.09	-0.01
	0.27	0.27	0.00	0.23	-0.08	0.00	-0.57	-0.50	0.27	2.20
	1.49	1.49	-1.20	-1.25	-1.05	-1.09	-1.51	-1.42	1.49	1.46
	0.09	0.09	-0.73	0.00	-0.25	-0.24	-0.59	-0.21	0.09	-0.06
	-0.07	-0.08	-0.97	-0.03	-0.07	-0.79	-0.30	2.30	-0.07	-0.37
	0.38	0.38	-0.72	0.38	0.72	0.43	0.26	2.80	0.38	0.05
	-0.97	-0.97	-1.93	-0.83	1.59	-1.91	-0.82	-0.92	-0.97	-1.30
	0.27	0.27	-0.33	-0.02	0.65	-1.79	0.38	-0.08	0.27	-0.06
Objective Function's Value	9.85	9.85	6.20	6.25	9.74	15.45	4.48	12.23	9.85	10.37
Inequality Constraint 1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.07	0.17	0.00	0.16
Inequality Constraint 2	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Equality Constraint 1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Πίνακας 44

Problem 18 – CMA με τροποποιημένη FR Μέθοδος 1										
Run	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Μεταβλητές Απόφασης	-2.50	-2.50	-2.49	-2.50	-2.49	-2.50	-2.49	-2.49	-2.49	-2.49
	-0.31	-0.31	-0.30	-0.31	-0.31	-0.31	-0.30	-0.30	-0.30	-0.31
	-2.28	-2.27	-2.27	-2.28	-2.27	-2.27	-2.27	-2.27	-2.27	-2.27
	0.38	0.38	0.39	0.38	0.38	0.38	0.38	0.39	0.39	0.38
	2.39	2.39	2.40	2.39	2.40	2.39	2.40	2.40	2.40	2.40
	0.41	0.42	0.43	0.41	0.42	0.42	0.42	0.42	0.42	0.42
	-2.09	-2.08	-2.08	-2.09	-2.08	-2.09	-2.08	-2.08	-2.08	-2.08
	0.77	0.77	0.78	0.77	0.78	0.77	0.78	0.78	0.78	0.78
	-0.38	-0.38	-0.37	-0.38	-0.37	-0.38	-0.37	-0.37	-0.37	-0.37
	0.35	0.35	0.36	0.35	0.35	0.35	0.36	0.36	0.36	0.35
Objective Function's Value	1.4E-29	2.0E-28	1.4E-28	1.5E-28	2.0E-28	1.9E-28	2.5E-28	1.9E-28	2.1E-28	2.9E-29
Inequality Constraint 1	8.1E-06	9.7E-07	0.0E+00	8.4E-06	0.0E+00	2.1E-06	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00
Equality Constraint 1	0.0E+00	0.0E+00	9.2E-06	0.0E+00	7.1E-07	0.0E+00	3.9E-06	6.0E-06	6.5E-06	1.4E-07

Πίνακας 45

Problem 18 – CMA με τροποποιημένη FR Μέθοδος 2										
Run	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Μεταβλητές Απόφασης	-2.49	-2.50	-2.50	-2.50	-2.50	-2.49	-2.49	-2.49	-2.49	-2.50
	-0.31	-0.31	-0.31	-0.31	-0.31	-0.30	-0.31	-0.30	-0.31	-0.31
	-2.27	-2.27	-2.27	-2.28	-2.27	-2.27	-2.27	-2.27	-2.27	-2.27
	0.38	0.38	0.38	0.38	0.38	0.38	0.38	0.39	0.38	0.38
	2.40	2.39	2.39	2.39	2.39	2.40	2.40	2.40	2.39	2.39
	0.42	0.42	0.42	0.41	0.42	0.42	0.42	0.42	0.42	0.42
	-2.08	-2.08	-2.08	-2.09	-2.08	-2.08	-2.08	-2.08	-2.08	-2.08
	0.78	0.77	0.77	0.77	0.77	0.78	0.78	0.78	0.78	0.77
	-0.37	-0.38	-0.38	-0.38	-0.38	-0.37	-0.37	-0.37	-0.37	-0.38
	0.35	0.35	0.35	0.35	0.35	0.35	0.35	0.36	0.35	0.35
Objective Function's Value	1.3E-28	1.6E-28	1.6E-28	4.2E-30	2.3E-28	3.8E-30	1.4E-28	2.1E-28	1.9E-28	1.5E-28
Inequality Constraint 1	0.0E+00	1.2E-06	1.0E-06	8.1E-06	1.9E-06	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	1.9E-07	6.9E-07
Equality Constraint 1	6.7E-07	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	2.1E-06	1.6E-07	4.8E-06	0.0E+00	0.0E+00

Πίνακας 46

Problem 18 – CMA με τροποποιημένη FR Μέθοδος 3										
Run	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Μεταβλητές Απόφασης	-2.49	-2.50	-2.50	-2.49	-2.49	-2.49	-2.50	-2.49	-2.50	-2.49
	-0.30	-0.31	-0.31	-0.30	-0.31	-0.30	-0.31	-0.30	-0.31	-0.30
	-2.27	-2.28	-2.27	-2.27	-2.27	-2.27	-2.28	-2.27	-2.28	-2.27
	0.39	0.38	0.38	0.38	0.38	0.38	0.38	0.39	0.38	0.39
	2.40	2.39	2.39	2.40	2.40	2.40	2.39	2.40	2.39	2.40
	0.42	0.41	0.42	0.42	0.42	0.42	0.42	0.42	0.41	0.42
	-2.08	-2.09	-2.08	-2.08	-2.08	-2.08	-2.09	-2.08	-2.09	-2.08
	0.78	0.77	0.77	0.78	0.78	0.78	0.77	0.78	0.77	0.78
	-0.37	-0.38	-0.38	-0.37	-0.37	-0.37	-0.38	-0.37	-0.38	-0.37
	0.36	0.35	0.35	0.36	0.35	0.36	0.35	0.36	0.35	0.36
Objective Function's Value	1.3E-29	5.6E-30	2.6E-30	6.9E-30	1.7E-28	1.5E-29	2.1E-28	1.4E-28	1.9E-28	2.2E-28
Inequality Constraint 1	0.0E+00	7.9E-06	1.7E-06	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	3.9E-06	0.0E+00	8.1E-06	0.0E+00
Equality Constraint 1	8.2E-06	0.0E+00	0.0E+00	3.3E-06	1.6E-07	3.6E-06	0.0E+00	5.2E-06	0.0E+00	4.6E-06

Πίνακας 47

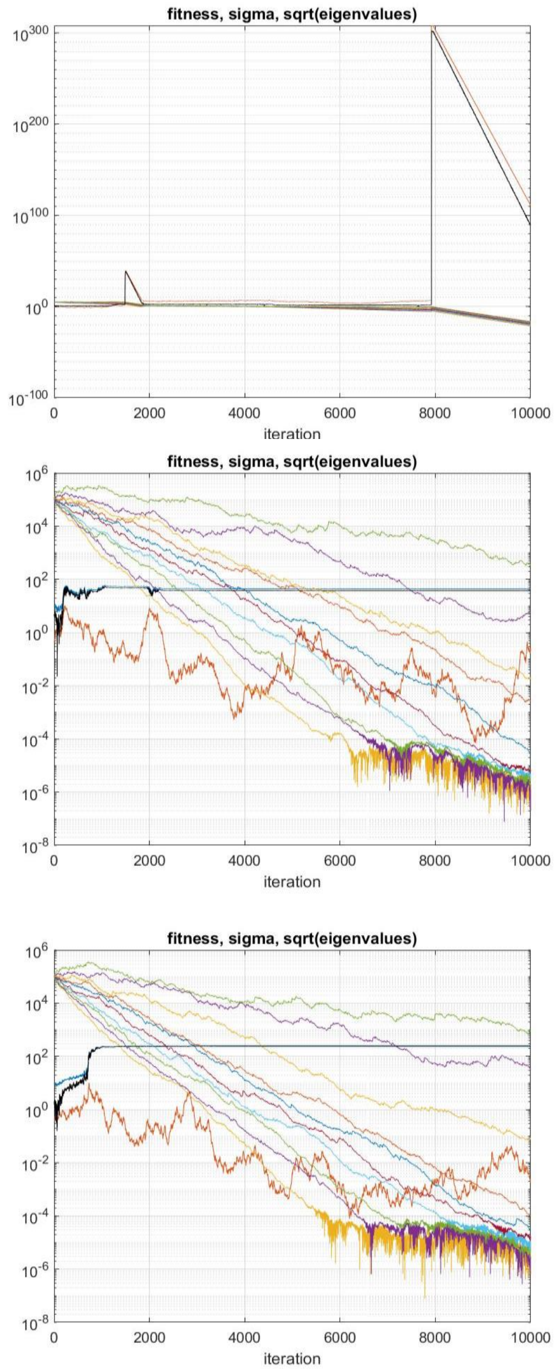
Problem 18 – CMA κανονική FR										
Run	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Μεταβλητές Απόφασης	-1.28	-1.48	-1.48	-1.28	-1.28	-1.28	-1.48	-1.45	-1.62	-1.77
	-0.07	-0.05	-0.05	-0.07	-0.07	-0.07	-0.05	-0.08	-0.10	-0.04
	-1.24	-1.80	-1.80	-1.24	-1.24	-1.24	-1.80	-1.42	-1.44	-1.54
	0.71	-1.16	-1.16	0.71	0.71	0.71	-1.16	0.46	1.41	1.33
	-0.78	-0.65	-0.65	-0.78	-0.78	-0.78	-0.65	-0.79	3.90	3.75
	0.74	-1.05	-1.05	0.74	0.74	0.74	-1.05	0.53	-0.13	1.35
	-1.26	-1.40	-1.40	-1.26	-1.26	-1.26	-1.40	-1.15	-1.75	-1.42
	-0.40	2.40	2.40	-0.40	-0.40	-0.40	2.40	2.14	-1.33	0.91
	-0.15	1.21	1.21	-0.15	-0.15	-0.15	1.21	-0.09	-1.60	-1.71
	2.54	2.39	2.39	2.53	2.53	2.53	2.39	1.35	0.48	-2.09
Objective Function's Value	3.7E+01	1.5E+01	1.5E+01	3.7E+01	3.7E+01	3.7E+01	1.5E+01	2.6E+01	1.5E+01	4.5E+00
Inequality Constraint 1	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00
Equality Constraint 1	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00	0.0E+00

Πίνακας 48

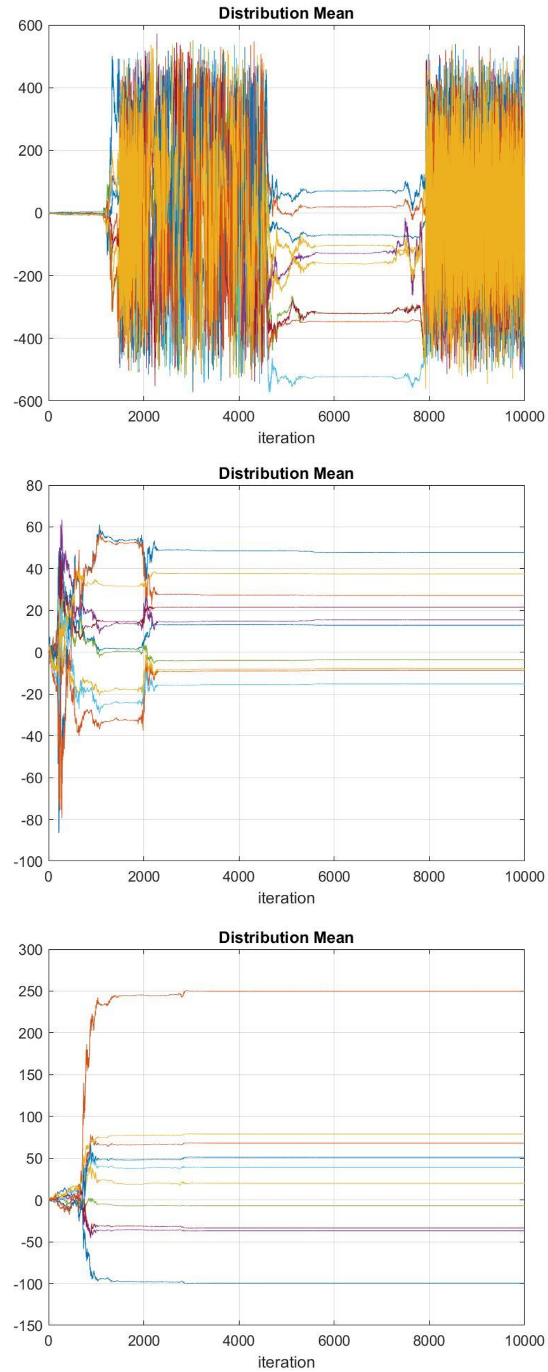
7.2 Γραφικές Παραστάσεις

Παρακάτω φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις, ενός τυπικού run, του σ της CMA και της ρίζας των ιδιοδιανυσμάτων, της μέσης τιμής m και των τιμών της αντικειμενικής συνάρτησης και της συνολικής παραβίασης των περιορισμών για κάθε μέθοδο για κάθε “άτομο”. Στο κάθε πρόβλημα τα πρώτα τρία σχήματα αφορούν τις τροποποιημένες μέθοδους αντιμετώπισης περιορισμών που εξετάζουμε ενώ το τέταρτο αφορά την κανονική FR.

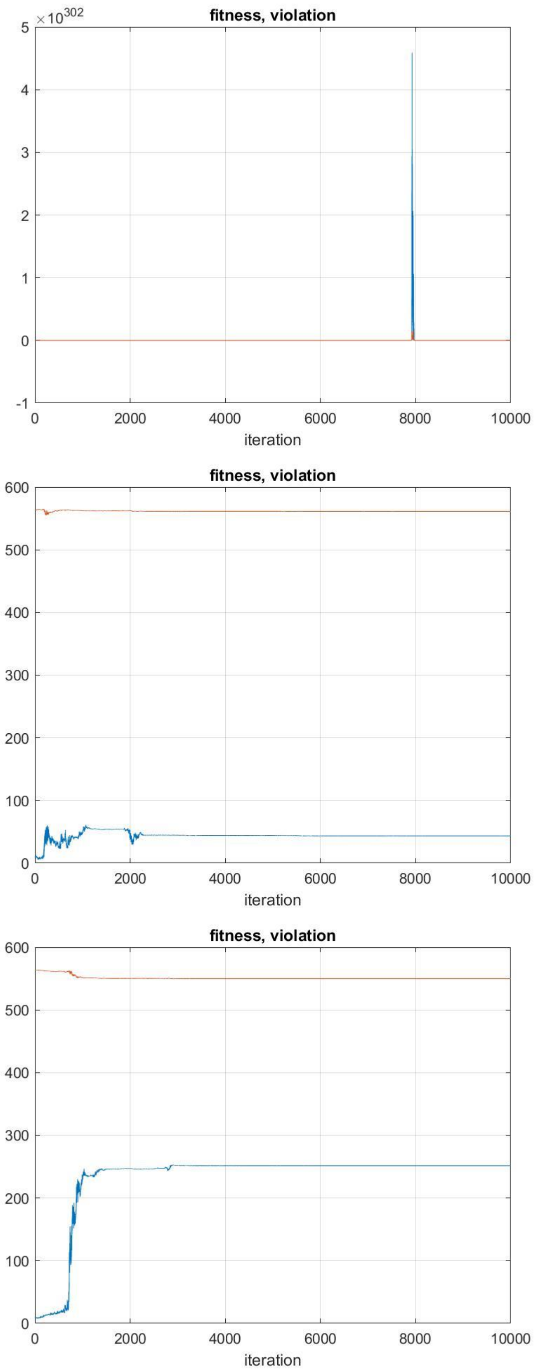
Problem 6



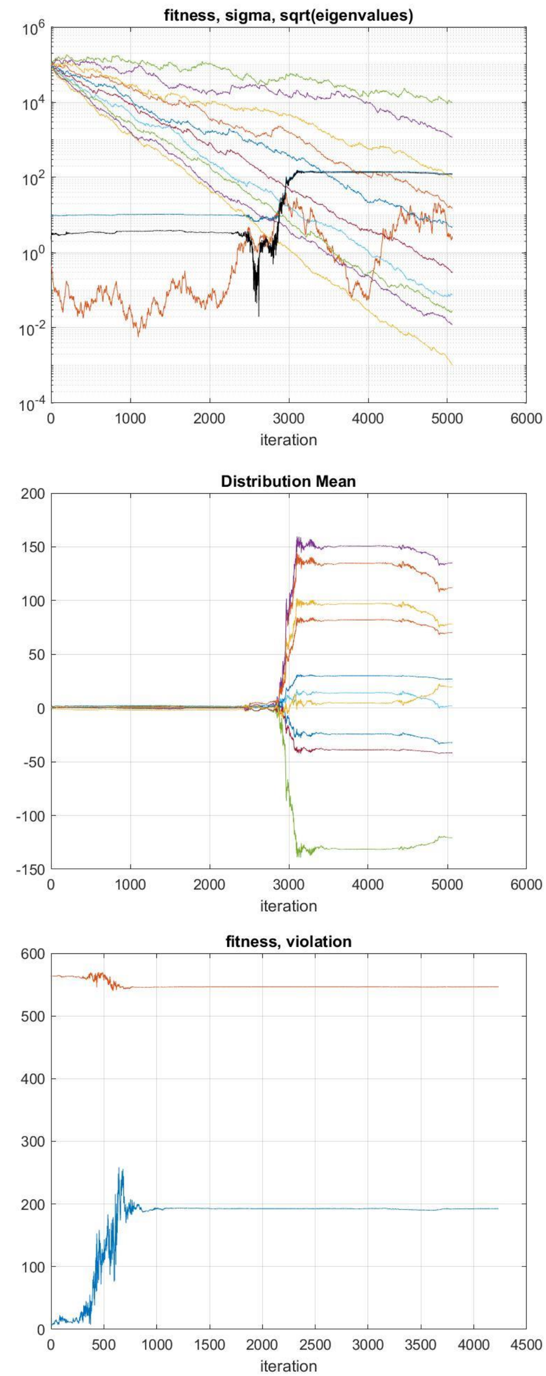
Σχ. 7-2



Σχ. 7-1

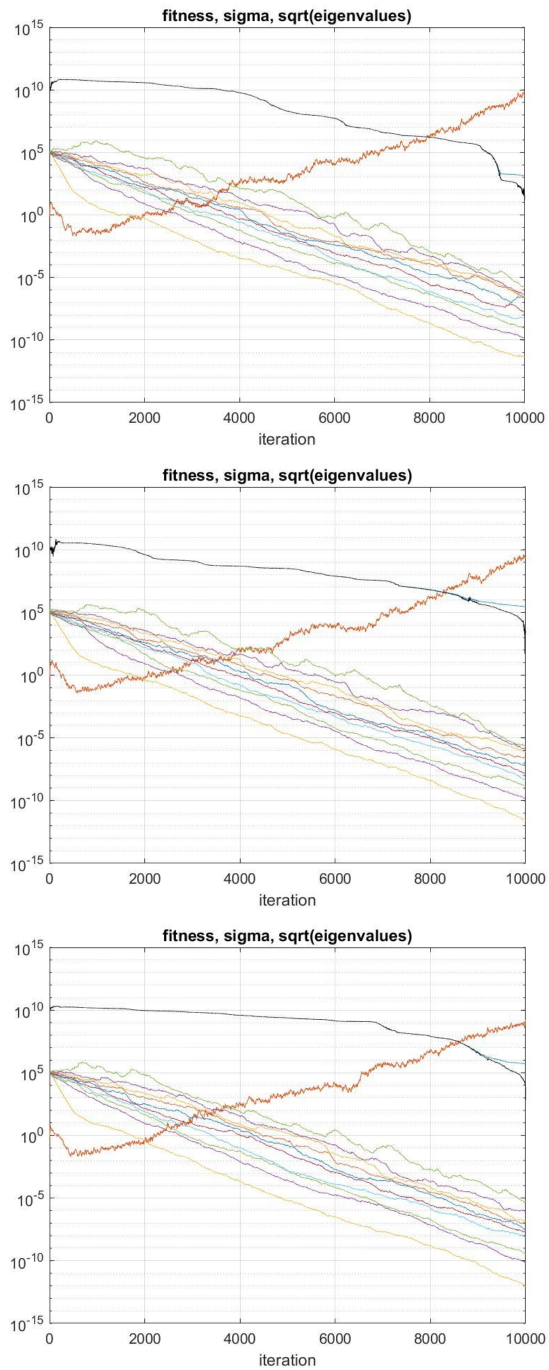

fitness, violation
iteration
fitness, violation
iteration
fitness, violation
iteration

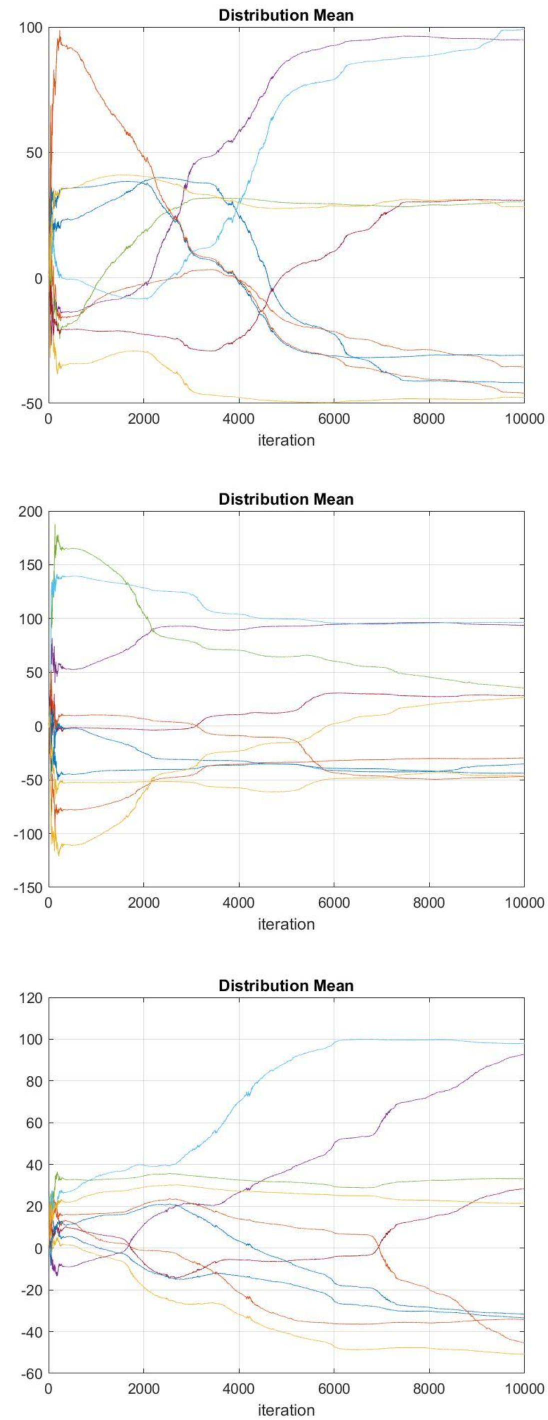
Σχ. 7-4


fitness, sigma, sqrt(eigenvalues)
iteration
Distribution Mean
iteration
fitness, violation
iteration

Σχ. 7-3

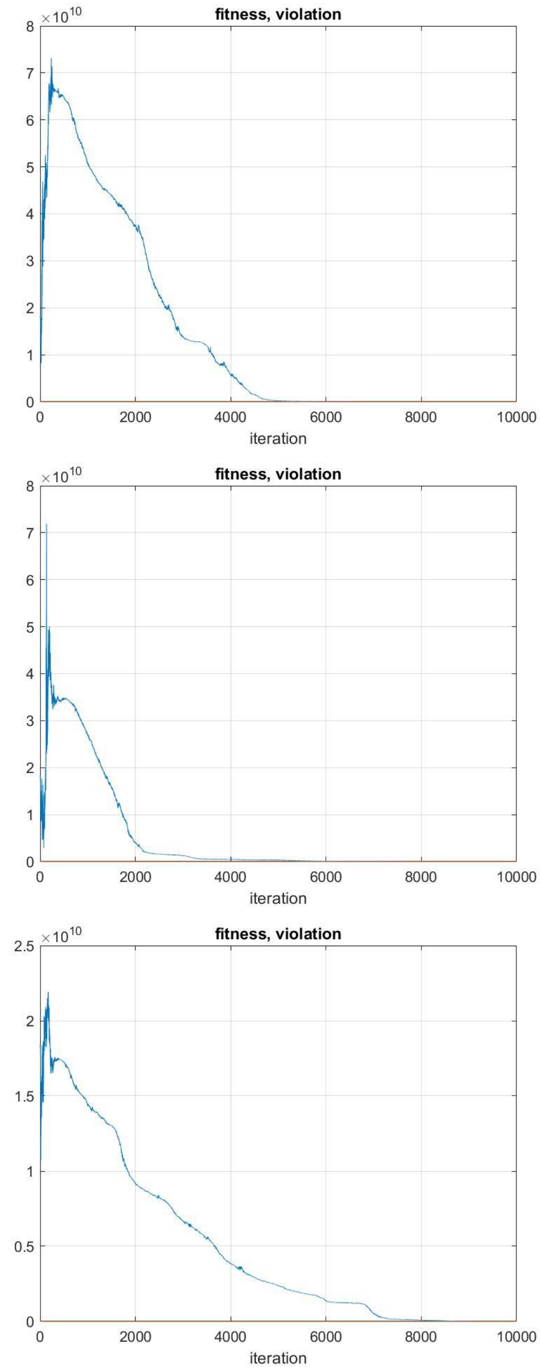
Problem 9





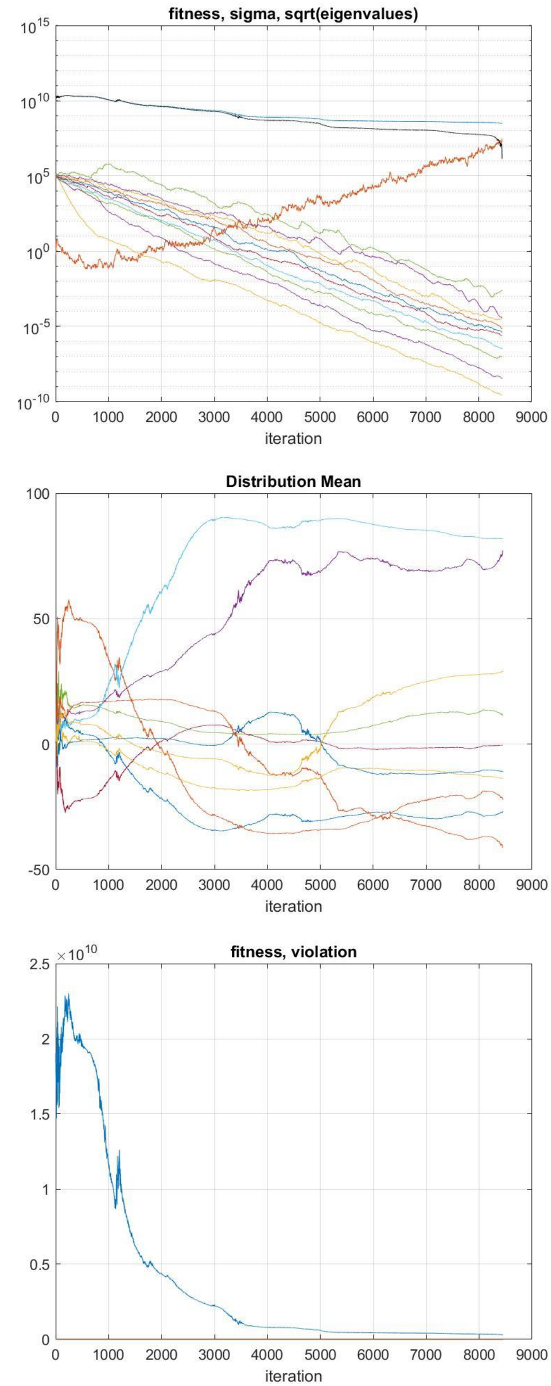
Σχ. 7-5

Σχ. 7-6



fitness, violation
×10^10
iteration
fitness, violation
×10^10
iteration
fitness, violation
×10^10
iteration

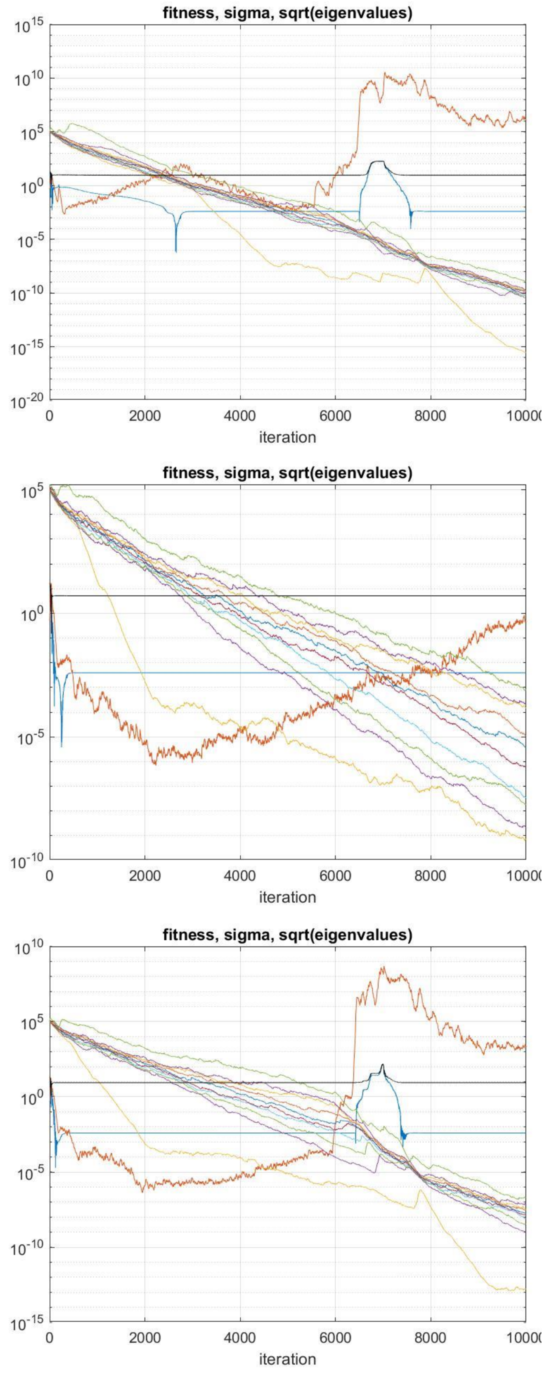
Σχ. 7-7

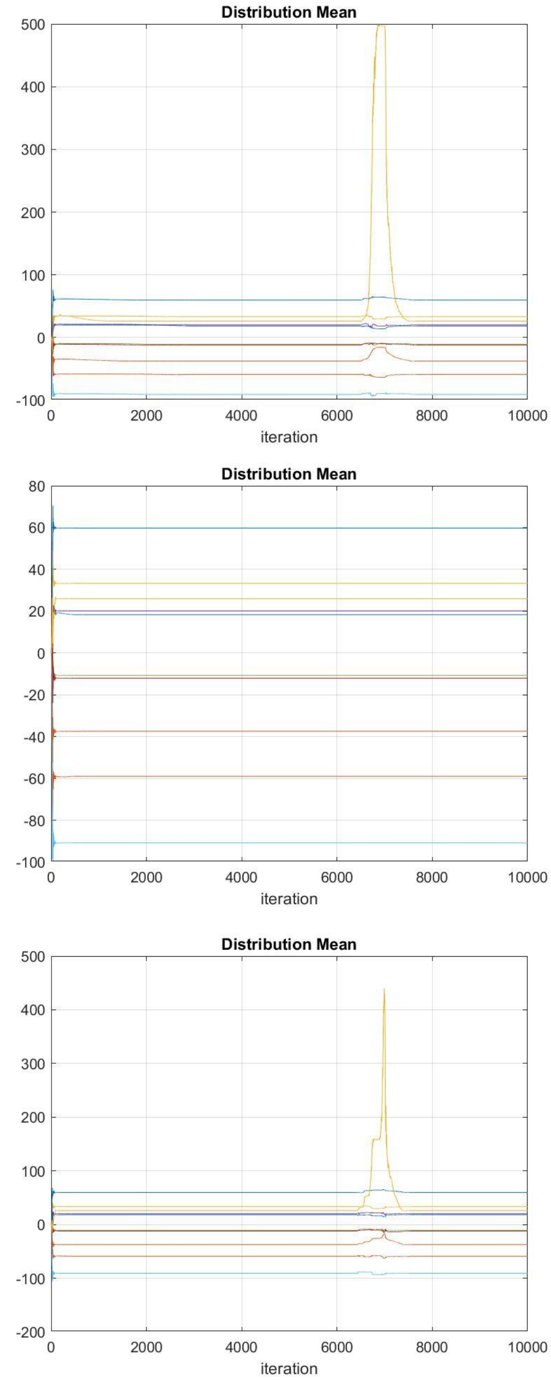


fitness, sigma, sqrt(eigenvalues)
iteration
Distribution Mean
iteration
fitness, violation
×10^10
iteration

Σχ. 7-8

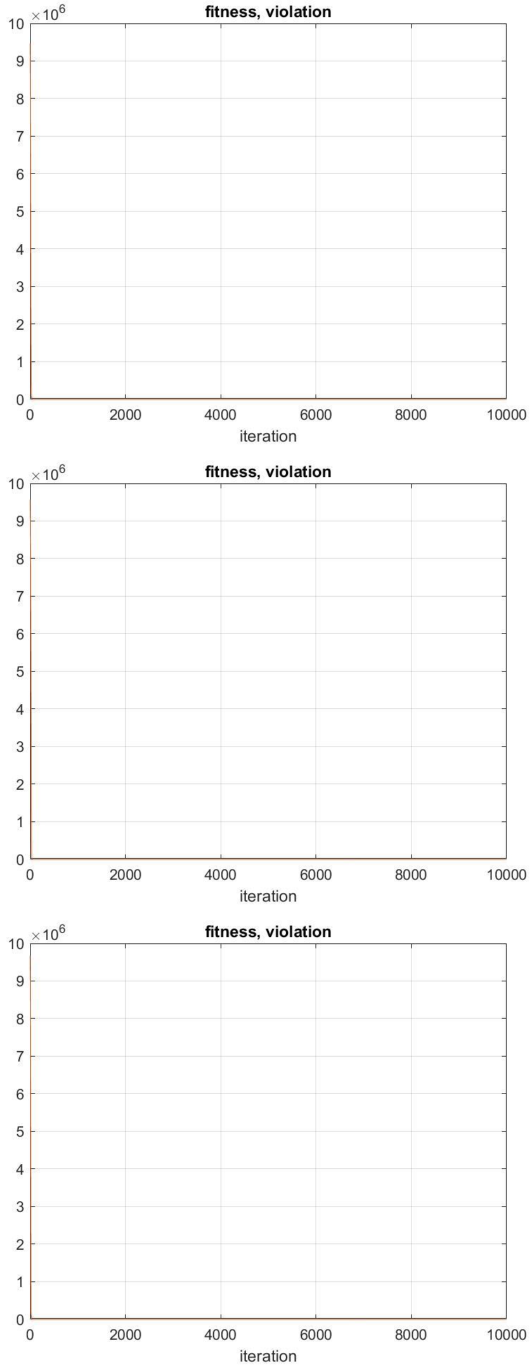
Problem 12



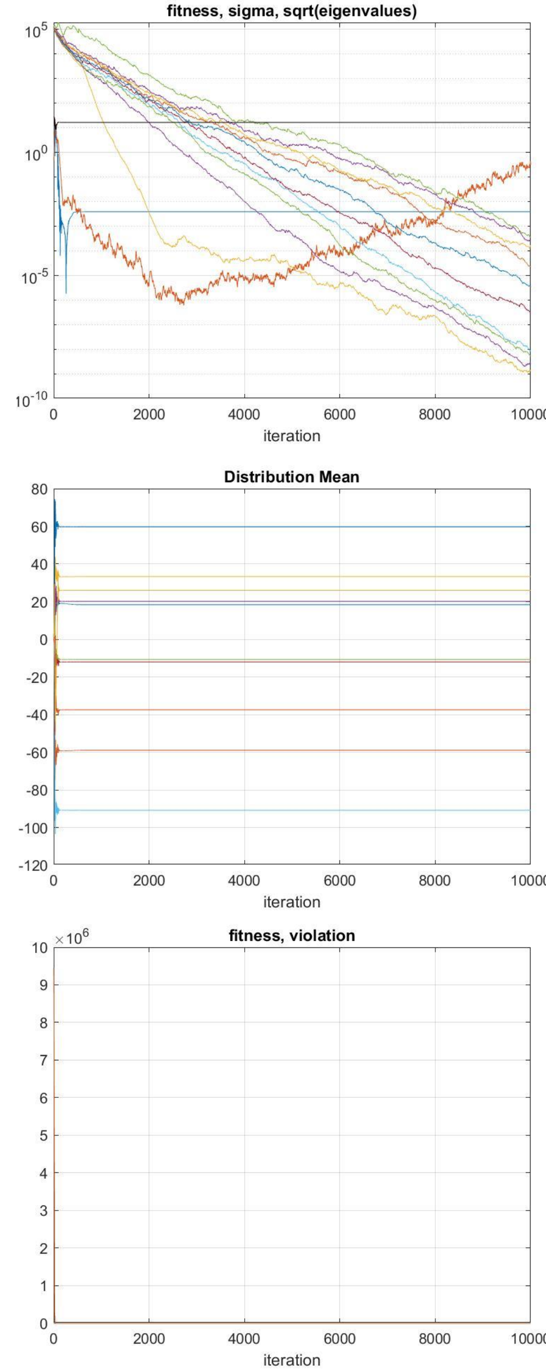


Σχ. 7-10

Σχ. 7-9

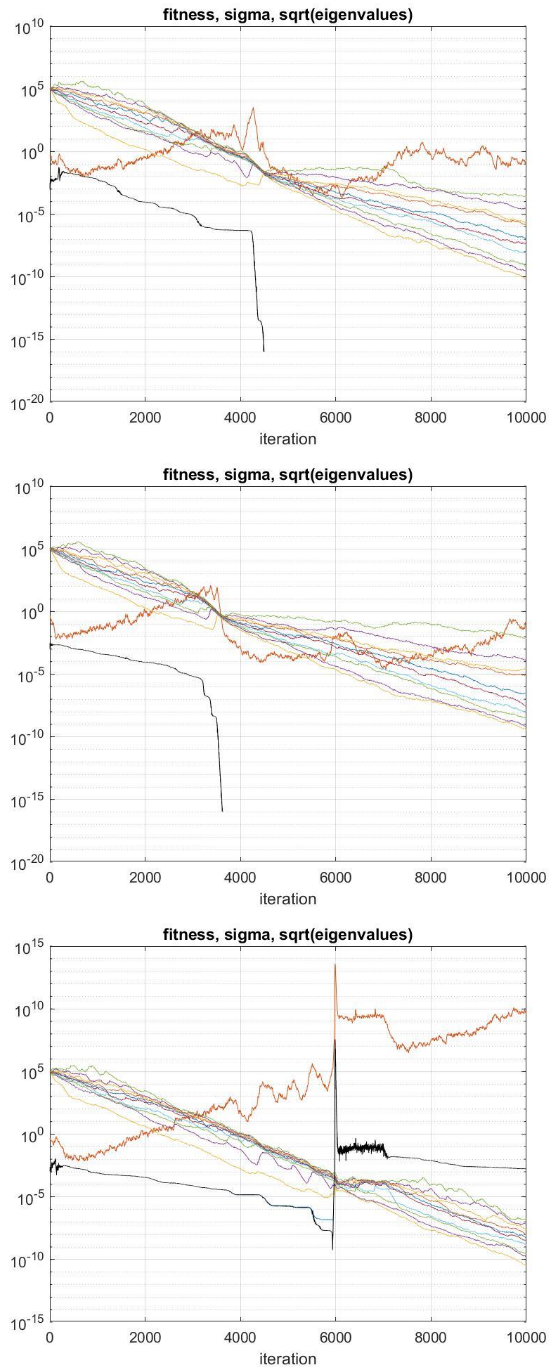

fitness, violation
×10^6
iteration
fitness, violation
×10^6
iteration
fitness, violation
×10^6
iteration

Σχ. 7-11

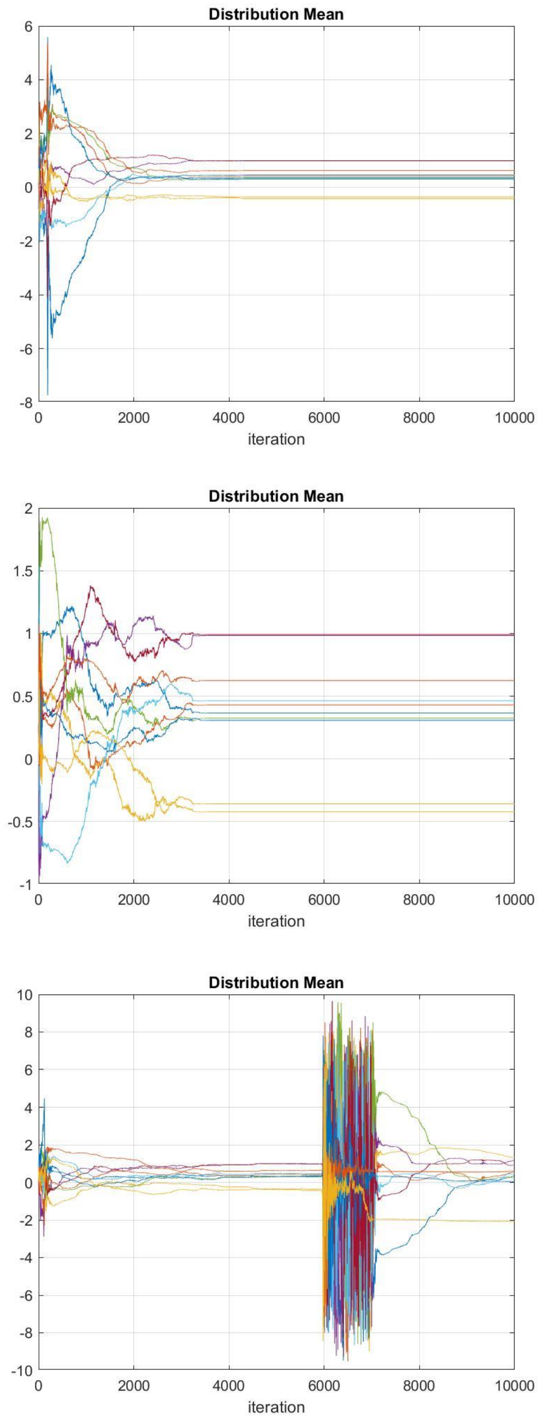

fitness, sigma, sqrt(eigenvalues)
iteration
Distribution Mean
iteration
fitness, violation
×10^6
iteration

Σχ. 7-12

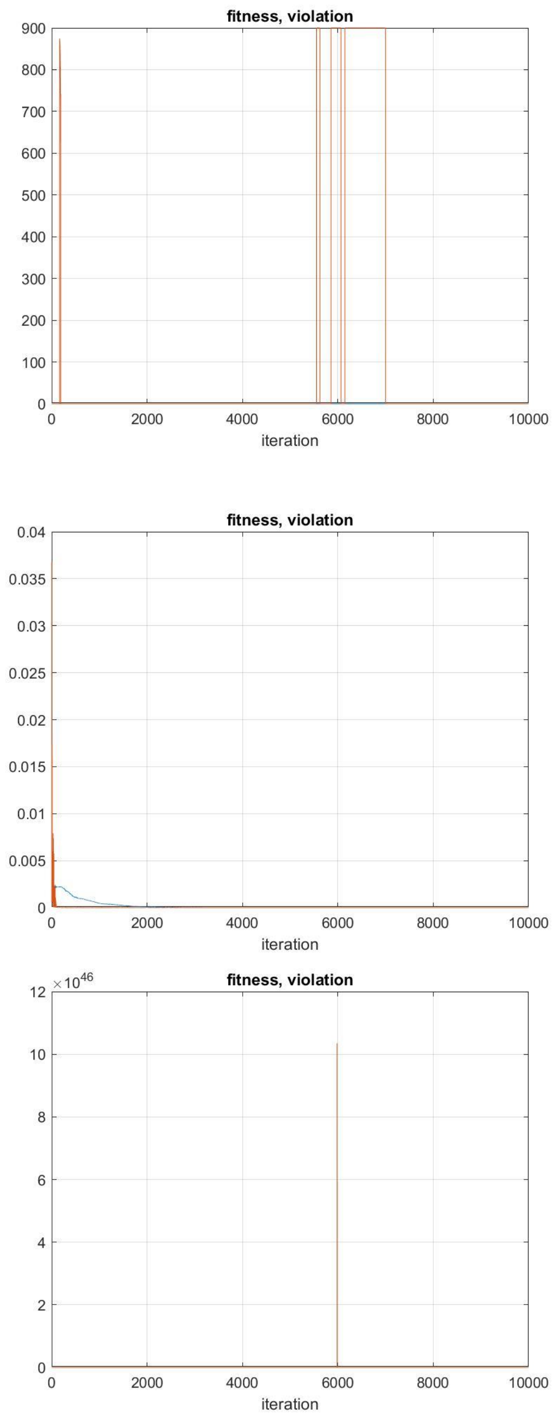
Problem 16



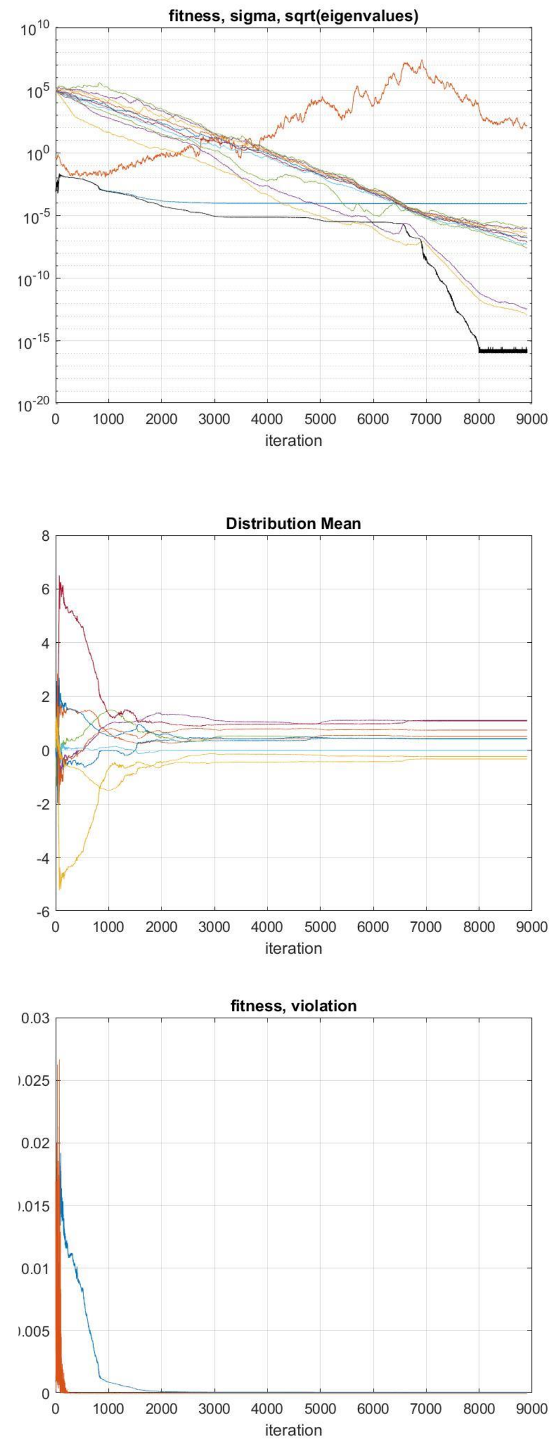
Σχ. 7-14



Σχ. 7-13

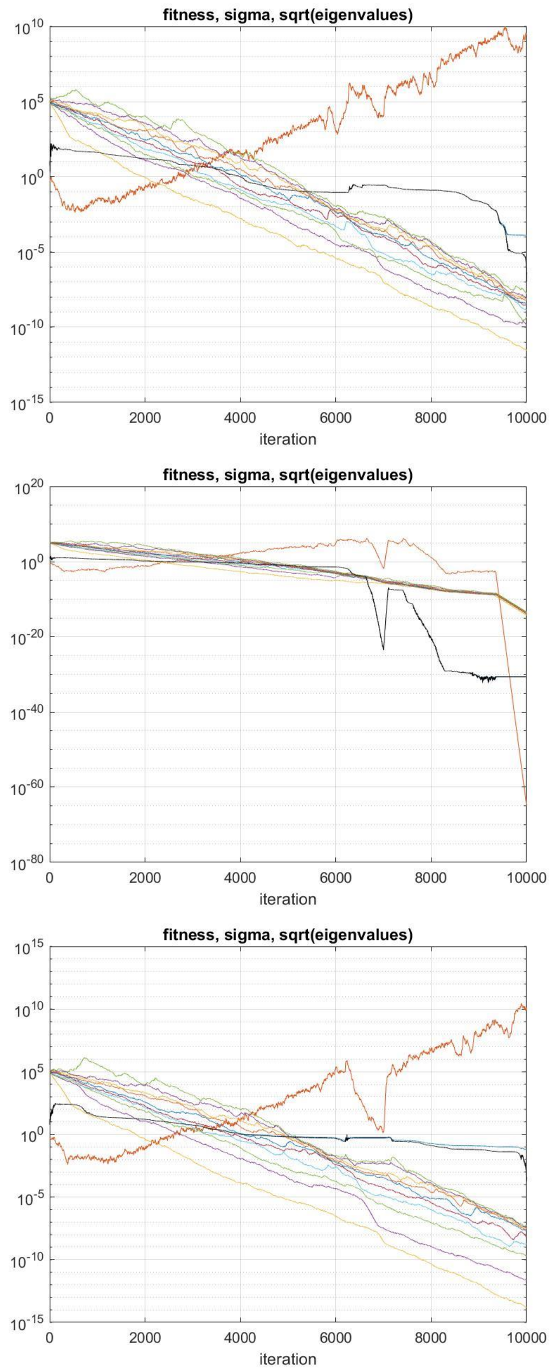

fitness, violation
iteration
fitness, violation
iteration
×10^46
fitness, violation
iteration

Σχ. 7-15

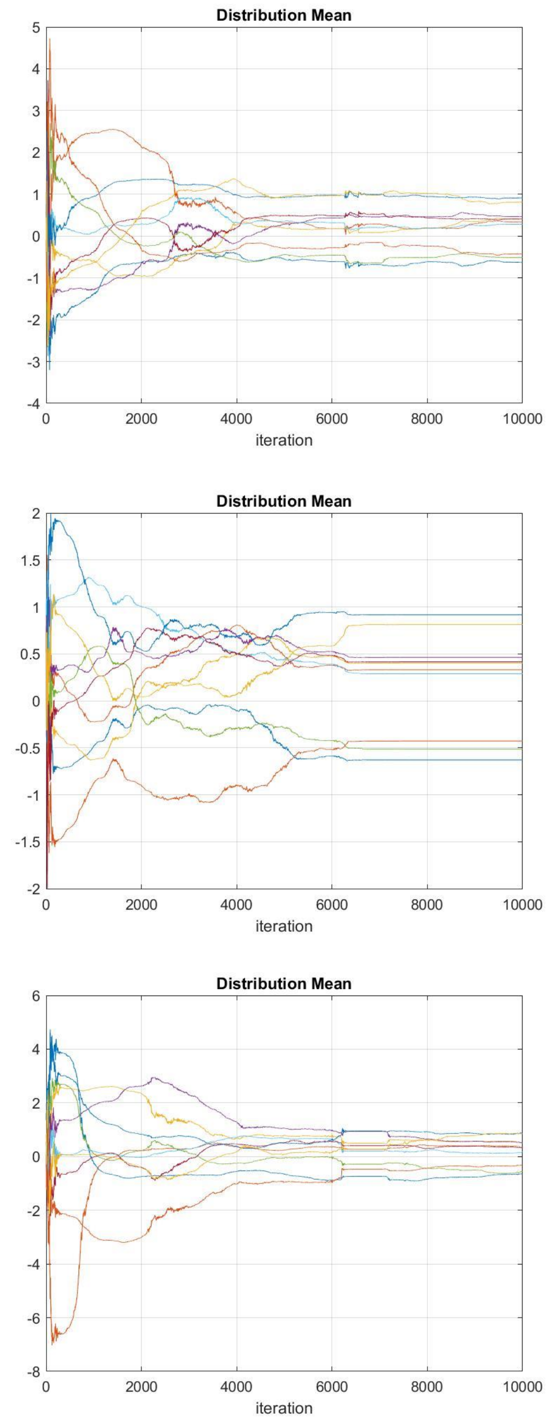

fitness, sigma, sqrt(eigenvalues)
iteration
Distribution Mean
iteration
fitness, violation
iteration

Σχ. 7-16

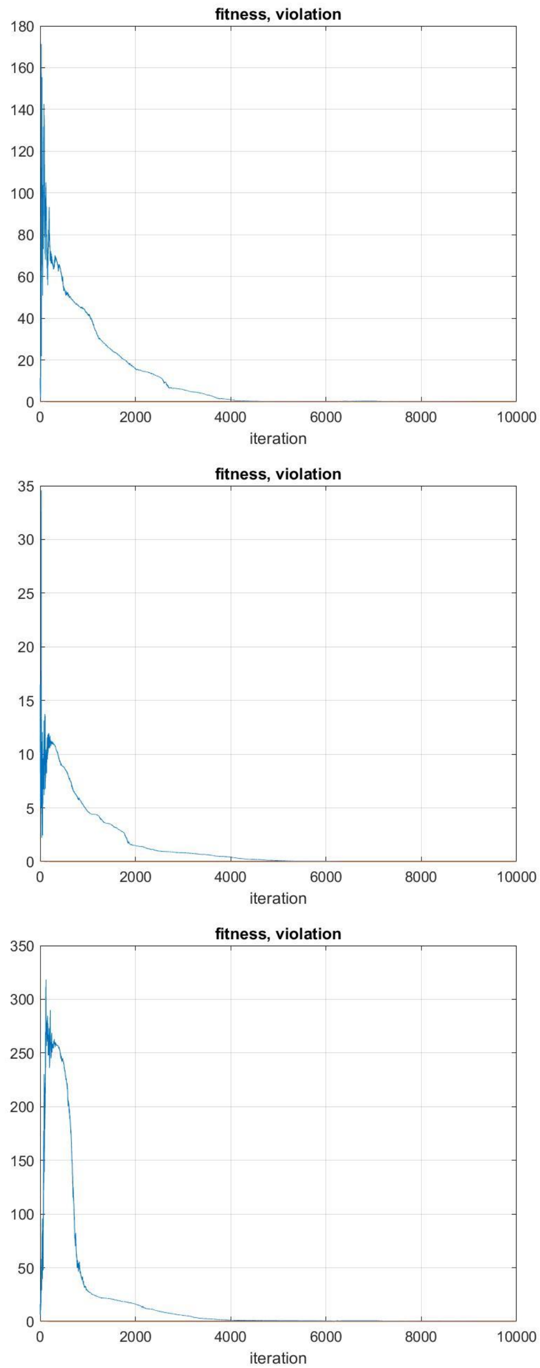
Problem 17



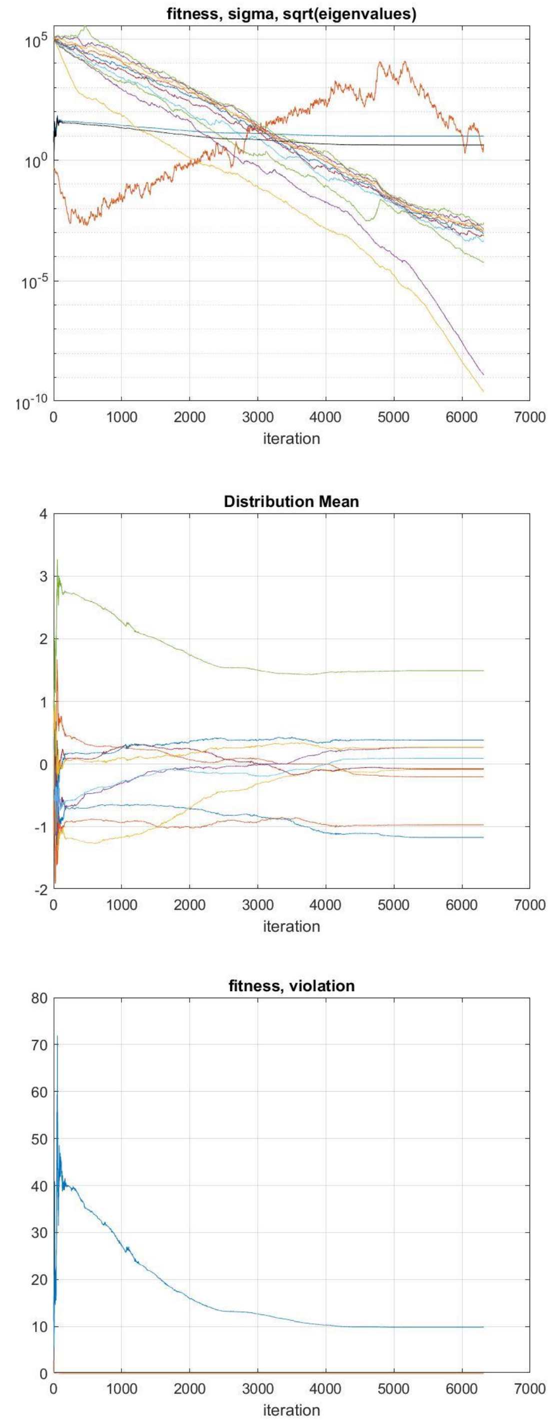
Σχ. 7-17



Σχ. 7-18

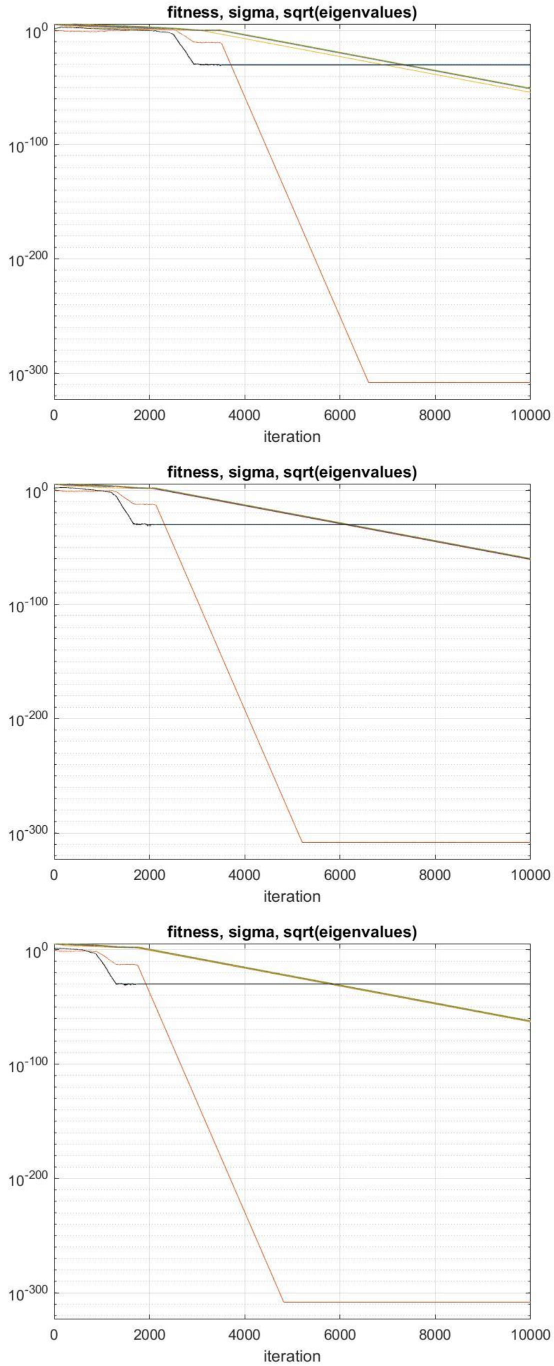

fitness, violation
iteration
fitness, violation
iteration
fitness, violation
iteration

Σχ. 7-19

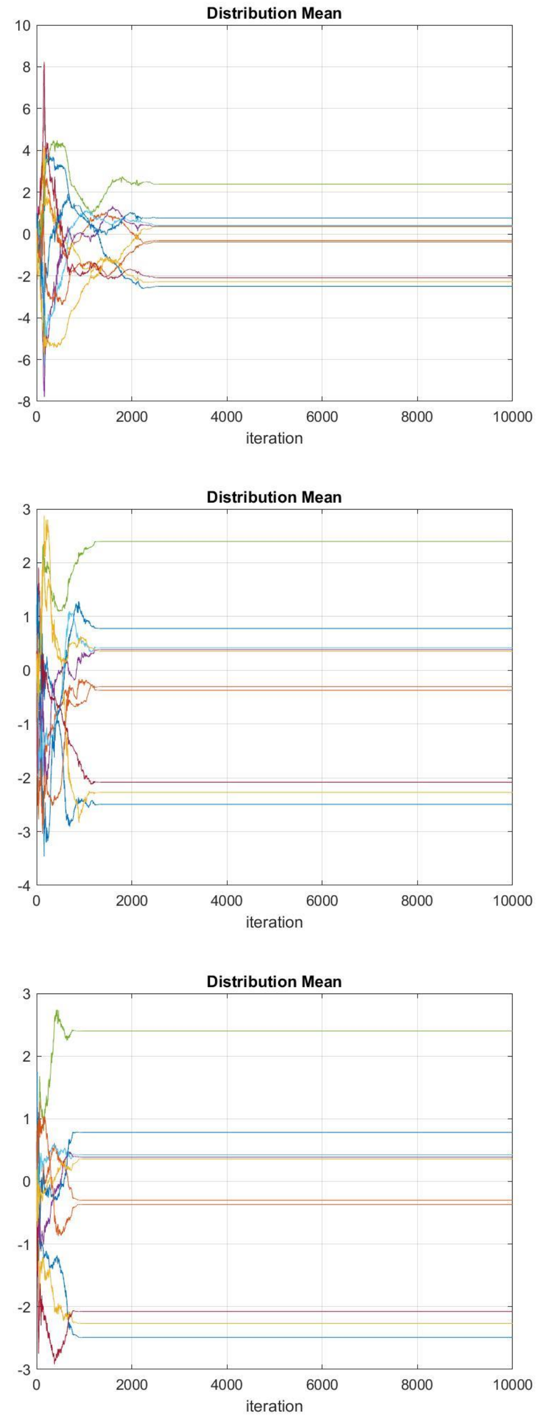

fitness, sigma, sqrt(eigenvalues)
iteration
Distribution Mean
iteration
fitness, violation
iteration

Σχ. 7-20

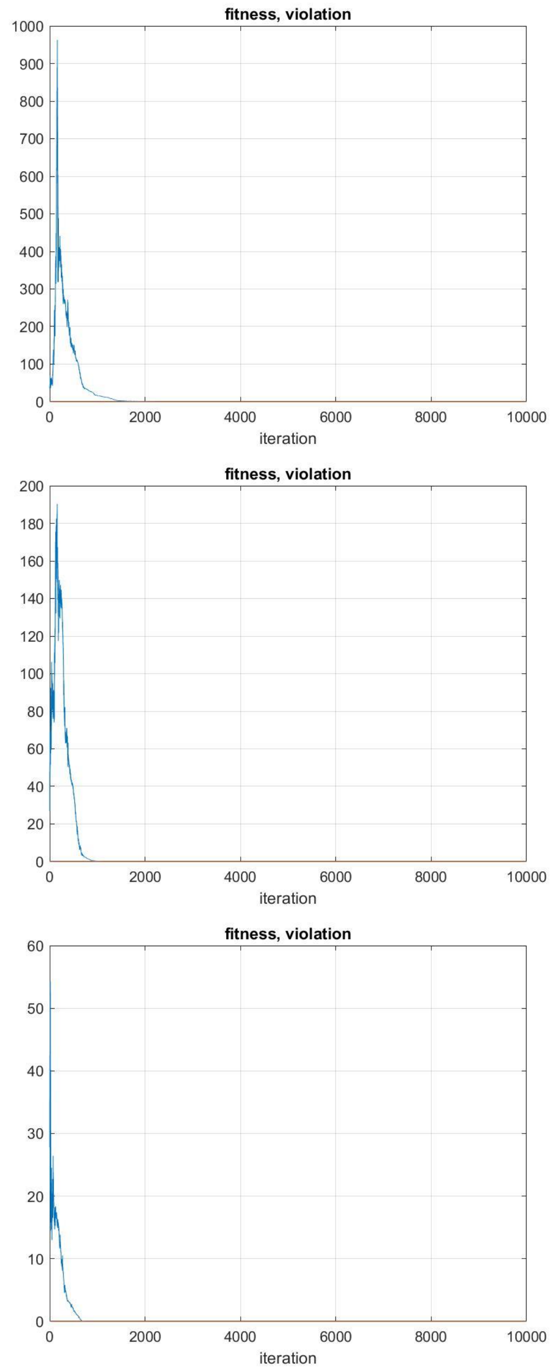
Problem 18



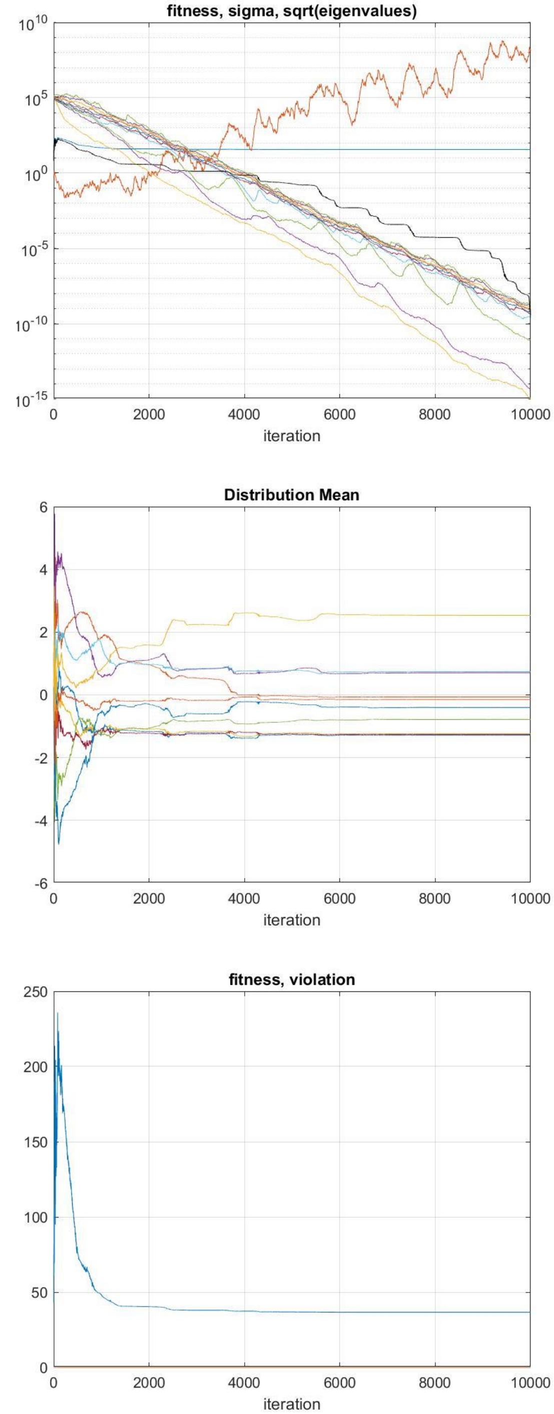
Σχ. 7-21



Σχ. 7-22


fitness, violation
iteration
fitness, violation
iteration
fitness, violation
iteration

Σχ. 7-23


fitness, sigma, sqrt(eigenvalues)
iteration
Distribution Mean
iteration
fitness, violation
iteration

Σχ. 7-24

7.3 Συμπεράσματα

Παρακάτω παραθέτουμε συγκεντρωτικούς πίνακες με τις ελάχιστες τιμές, τους μέσους όρους και τις μέγιστες τιμές κάθε προβλήματος.

Πρόβλημα 6 PSO								
M1	Min	Median	Max		M2	Min	Median	Max
Objective Function's Value	3.86E+02	5.00E+02	5.86E+02		Objective Function's Value	3.80E+02	4.85E+02	5.97E+02
Equality Constraint 1 Violation	1.46E+02	1.90E+02	2.45E+02		Equality Constraint 1 Violation	1.56E+02	1.95E+02	2.44E+02
Equality Constraint 2 Violation	3.85E+02	4.71E+02	5.72E+02		Equality Constraint 2 Violation	4.03E+02	4.81E+02	5.71E+02
M3	Min	Median	Max		NFR	Min	Median	Max
Objective Function's Value	2.54E+02	4.98E+02	5.94E+02		Objective Function's Value	4.44E+02	5.32E+02	5.97E+02
Equality Constraint 1 Violation	1.53E+02	1.92E+02	2.22E+02		Equality Constraint 1 Violation	1.45E+02	2.08E+02	2.71E+02
Equality Constraint 2 Violation	4.00E+02	4.77E+02	5.32E+02		Equality Constraint 2 Violation	3.84E+02	5.01E+02	6.08E+02

Πίνακας 49

Πρόβλημα 9 PSO								
M1	Min	Median	Max		M2	Min	Median	Max
Objective Function's Value	2.15E+11	1.53E+12	2.81E+12		Objective Function's Value	2.26E+11	9.24E+11	2.77E+12
Equality Constraint 1 Violation	0.00E+00	1.52E-04	1.03E-03		Equality Constraint 1 Violation	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
M3	Min	Median	Max		NFR	Min	Median	Max
Objective Function's Value	1.26E+10	1.03E+12	2.69E+12		Objective Function's Value	5.08E+10	1.05E+12	3.80E+12
Equality Constraint 1 Violation	0.00E+00	7.60E-05	7.60E-04		Equality Constraint 1 Violation	0.00E+00	2.10E-05	2.10E-04

Πίνακας 50

Πόβλημα 12 PSO								
M1	Min	Median	Max		M2	Min	Median	Max
Objective Function's Value	-7.13E+02	-3.58E+02	5.49E+01		Objective Function's Value	-8.32E+02	-3.51E+02	5.96E+01
Equality Constraint 1 Violation	2.36E+08	1.19E+10	4.46E+10		Equality Constraint 1 Violation	5.51E+09	2.37E+10	1.04E+11
Inequality Constraint 1 Violation	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00		Inequality Constraint 1 Violation	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
M3	Min	Median	Max		NFR	Min	Median	Max
Objective Function's Value	-1.01E+03	-3.19E+02	1.58E+02		Objective Function's Value	-5.83E+02	-2.00E+02	1.37E+02
Equality Constraint 1 Violation	3.46E+07	2.75E+10	1.37E+11		Equality Constraint 1 Violation	7.82E+06	1.61E+10	5.12E+10
Inequality Constraint 1 Violation	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00		Inequality Constraint 1 Violation	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00

Πίνακας 51

Πρόβλημα 16 PSO									
M1	Min	Median	Max		M2	Min	Median	Max
Objective Function's Value	3.59E-03	1.72E-02	2.53E-02		**Objective Function's Value**	7.89E-03	2.20E-02	4.70E-02
Equality Constraint 1 Violation	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00		**Equality Constraint 1 Violation**	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
Equality Constraint 2 Violation	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00		**Equality Constraint 2 Violation**	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
Inequality Constraint 1 Violation	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00		**Inequality Constraint 1 Violation**	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
Inequality Constraint 2 Violation	0.00E+00	4.15E+00	2.89E+01		**Inequality Constraint 2 Violation**	0.00E+00	1.31E+02	6.63E+02
M3	Min	Median	Max		NFR	Min	Median	Max
Objective Function's Value	5.68E-03	2.17E-02	4.48E-02		**Objective Function's Value**	9.50E-04	2.15E-02	4.00E-02
Equality Constraint 1 Violation	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00		**Equality Constraint 1 Violation**	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
Equality Constraint 2 Violation	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00		**Equality Constraint 2 Violation**	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
Inequality Constraint 1 Violation	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00		**Inequality Constraint 1 Violation**	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
Inequality Constraint 2 Violation	0.00E+00	9.90E+00	9.90E+01		**Inequality Constraint 2 Violation**	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00

Πίνακας 52

Πρόβλημα 17 PSO								
M1	Min	Median	Max		M2	Min	Median	Max
Objective Function's Value	1.67E+01	6.32E+01	1.61E+02		Objective Function's Value	4.46E+01	1.30E+02	2.76E+02
Equality Constraint 1 Violation	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00		Equality Constraint 1 Violation	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
Inequality Constraint 1 Violation	0.00E+00	4.84E+01	4.77E+02		Inequality Constraint 1 Violation	0.00E+00	3.18E+02	2.52E+03
Inequality Constraint 2 Violation	0.00E+00	3.59E-01	2.80E+00		Inequality Constraint 2 Violation	0.00E+00	8.70E-01	2.61E+00
M3	Min	Median	Max		NFR	Min	Median	Max
Objective Function's Value	1.71E+01	7.66E+01	2.55E+02		Objective Function's Value	4.53E+01	1.30E+02	2.81E+02
Equality Constraint 1 Violation	0.00E+00	6.40E-05	6.40E-04		Equality Constraint 1 Violation	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
Inequality Constraint 1 Violation	0.00E+00	4.00E-06	4.00E-05		Inequality Constraint 1 Violation	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
Inequality Constraint 2 Violation	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00		Inequality Constraint 2 Violation	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00

Πίνακας 53

Πρόβλημα 18 PSO								
M1	Min	Median	Max		M2	Min	Median	Max
Objective Function's Value	6.31E+02	2.77E+03	9.11E+03		Objective Function's Value	9.04E+02	2.78E+03	6.47E+03
Equality Constraint 1 Violation	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00		Equality Constraint 1 Violation	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
Inequality Constraint 1 Violation	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00		Inequality Constraint 1 Violation	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00

M3	Min	Median	Max		NFR	Min	Median	Max
Objective Function's Value	8.63E+02	4.00E+03	1.17E+04		**Objective Function's Value**	1.32E+03	3.46E+03	6.93E+03
Equality Constraint 1 Violation	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00		**Equality Constraint 1 Violation**	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
Inequality Constraint 1 Violation	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00		**Inequality Constraint 1 Violation**	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00

Πίνακας 54

Πρόβλημα 6 CMA								
M1	Min	Median	Max		M2	Min	Median	Max
Objective Function's Value	4.90E+01	3.50E+02	5.67E+02		**Objective Function's Value**	1.08E+01	2.09E+02	6.00E+02
Equality Constraint 1 Violation	1.35E+02	1.47E+02	1.60E+02		**Equality Constraint 1 Violation**	1.36E+02	1.50E+02	1.53E+02
Equality Constraint 2 Violation	3.65E+02	3.94E+02	4.19E+02		**Equality Constraint 2 Violation**	2.62E+02	3.87E+02	4.12E+02
M3	Min	Median	Max		NFR	Min	Median	Max
Objective Function's Value	7.81E+00	2.42E+02	4.17E+02		**Objective Function's Value**	2.01E+00	1.34E+02	5.36E+02
Equality Constraint 1 Violation	1.35E+02	1.45E+02	1.52E+02		**Equality Constraint 1 Violation**	1.39E+02	1.50E+02	1.53E+02
Equality Constraint 2 Violation	3.66E+02	3.91E+02	4.11E+02		**Equality Constraint 2 Violation**	9.65E+00	3.65E+02	4.13E+02

Πίνακας 55

Πρόβλημα 9 CMA								
M1	Min	Median	Max		M2	Min	Median	Max
Objective Function	1.35E+03	9.10E+08	5.19E+09		Objective Function	2.92E+05	1.39E+08	5.07E+08
Equality Constraint 1 Violation	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00		Equality Constraint 1 Violation	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
M3	Min	Median	Max		NFR	Min	Median	Max
Objective Function	5.26E+05	1.23E+10	1.16E+11		Objective Function	1.86E+07	1.11E+09	4.86E+09
Equality Constraint 1 Violation	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00		Equality Constraint 1 Violation	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00

Πίνακας 56

Πρόβλημα 12 CMA								
M1	Min	Median	Max		M2	Min	Median	Max
Objective Function's Value	-3.90E-03	-3.90E-03	-3.90E-03		Objective Function's Value	-3.90E-03	-3.90E-03	-3.90E-03
Inequality Constraint 1 Violation	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00		Inequality Constraint 1 Violation	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
Equality Constraint 1 Violation	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00		Equality Constraint 1 Violation	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
M3	Min	Median	Max		NFR	Min	Median	Max
Objective Function's Value	-3.90E-03	-3.90E-03	-3.90E-03		Objective Function's Value	-3.90E-03	-3.90E-03	-3.90E-03
Inequality Constraint 1 Violation	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00		Inequality Constraint 1 Violation	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
Equality Constraint 1 Violation	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00		Equality Constraint 1 Violation	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00

Πίνακας 57

Πρόβλημα 16 CMA								
M1	Min	Median	Max		M2	Min	Median	Max
Objective Function's Value	-4.60E-05	1.70E-04	7.50E-04		**Objective Function's Value**	-9.10E-11	6.43E-11	2.60E-10
Inequality Constraint 1 Violation	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00		**Inequality Constraint 1 Violation**	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
Inequality Constraint 2 Violation	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00		**Inequality Constraint 2 Violation**	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
Equality Constraint 1 Violation	0.00E+00	1.97E-06	9.00E-06		**Equality Constraint 1 Violation**	0.00E+00	3.04E-12	1.10E-11
Equality Constraint 2 Violation	0.00E+00	2.55E-06	9.40E-06		**Equality Constraint 2 Violation**	0.00E+00	3.65E-13	1.80E-12
M3	Min	Median	Max		NFR	Min	Median	Max
Objective Function's Value	-1.80E-10	6.99E-04	6.80E-03		**Objective Function's Value**	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
Inequality Constraint 1 Violation	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00		**Inequality Constraint 1 Violation**	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
Inequality Constraint 2 Violation	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00		**Inequality Constraint 2 Violation**	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
Equality Constraint 1 Violation	0.00E+00	5.50E-13	3.80E-12		**Equality Constraint 1 Violation**	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
Equality Constraint 2 Violation	0.00E+00	1.90E-02	1.90E-01		**Equality Constraint 2 Violation**	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00

Πίνακας 58

Πρόβλημα 17 CMA								
M1	Min	Median	Max		M2	Min	Median	Max
Objective Function's Value	0.00E+00	9.34E-02	7.00E-01		**Objective Function's Value**	0.00E+00	1.20E-04	1.20E-03
Inequality Constraint 1 Violation	0.00E+00	2.20E-35	2.20E-34		**Inequality Constraint 1 Violation**	0.00E+00	4.55E-35	3.60E-34
Inequality Constraint 2 Violation	0.00E+00	4.48E-04	4.30E-03		**Inequality Constraint 2 Violation**	0.00E+00	8.40E-04	4.00E-03
Equality Constraint 1 Violation	0.00E+00	2.57E-06	1.00E-05		**Equality Constraint 1 Violation**	0.00E+00	1.01E-06	5.50E-06
M3	Min	Median	Max		NFR	Min	Median	Max
Objective Function's Value	2.00E-30	9.71E-02	7.20E-01		**Objective Function's Value**	4.48E+00	9.43E+00	1.54E+01
Inequality Constraint 1 Violation	0.00E+00	2.54E-34	2.50E-33		**Inequality Constraint 1 Violation**	0.00E+00	4.05E-02	1.70E-01
Inequality Constraint 2 Violation	0.00E+00	3.67E-04	3.20E-03		**Inequality Constraint 2 Violation**	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
Equality Constraint 1 Violation	0.00E+00	1.18E-06	7.70E-06		**Equality Constraint 1 Violation**	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00

Πίνακας 59

Πρόβλημα 18 CMA								
M1	Min	Median	Max		M2	Min	Median	Max
Objective Function's Value	1.40E-29	1.57E-28	2.50E-28		Objective Function's Value	3.80E-30	1.38E-28	2.30E-28
Inequality Constraint 1 Violation	0.00E+00	1.96E-06	8.40E-06		Inequality Constraint 1 Violation	0.00E+00	1.31E-06	8.10E-06
Equality Constraint 1 Violation	0.00E+00	2.65E-06	9.20E-06		Equality Constraint 1 Violation	0.00E+00	7.73E-07	4.80E-06
M3	Min	Median	Max		NFR	Min	Median	Max
Objective Function's Value	2.60E-30	9.73E-29	2.20E-28		Objective Function's Value	4.54E+00	2.37E+01	3.66E+01
Inequality Constraint 1 Violation	0.00E+00	2.16E-06	8.10E-06		Inequality Constraint 1 Violation	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
Equality Constraint 1 Violation	0.00E+00	2.51E-06	8.20E-06		Equality Constraint 1 Violation	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00

Πίνακας 60

Αρχικά διαπιστώνεται ότι η PSO δεν δουλεύει πολύ καλά με την τροποποιημένη μέθοδο αντιμετώπισης των περιορισμών που εξετάζουμε, αφού στα προβλήματα 16 και 17 η κανονική FR πετυχαίνει καλύτερες λύσεις από ότι η μέθοδός μας. Σε αυτά τα προβλήματα η τροποποιημένη μέθοδος δίνει λύσεις οι οποίες έχουν παραβιάσεις περιορισμών ανισότητας ενώ η κανονική FR όχι. Μια εξήγηση που μπορούμε να δώσουμε για αυτό είναι η τροποποιημένη μέθοδος επηρεάζει και εμποδίζει τον τρόπο με τον οποίο δουλεύει η PSO και δεν την αφήνει να εξελιχθεί κατάλληλα. Λόγω της φύσης της PSO, δηλαδή, η τροποποιημένη μέθοδος FR δυσκολεύει την εύρεση καλύτερων λύσεων. Βέβαια σημειώνεται ότι στο πρόβλημα 18 και 9 όπου έχουμε πολύ μικρή ή μηδενική παραβίαση περιορισμών οι τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης είναι πολύ μεγάλες ειδικά συγκρίνοντας με τη βιβλιογραφία [53] [54]. Για το πρόβλημα 12 δεν έχει βρεθεί λύση χωρίς παραβίαση περιορισμών ισότητας ενώ έχουμε μηδενικές τιμές περιορισμών ανισότητας.
Γενικά για το πρόβλημα 9 δεν έχει βρεθεί καλή λύση και από τους δύο αλγόριθμους. Δηλαδή, ενώ δίνουν λύσεις με μηδενικές παραβιάσεις περιορισμών οι τιμές της αντικειμενικής δεν είναι καλές. Όσον αφορά το πρόβλημα 6 σε κανένα από τους δύο

αλγόριθμους δεν πετυχαίνουμε καλές λύσεις. Ειδικότερα, με κανένα αλγόριθμο δεν βρίσκουμε λύσεις με μηδενική παραβίαση στους περιορισμούς αλλά ούτε και λύσεις με "καλές" τιμές αντικειμενικής συνάρτησης.

Όπως μπορούμε να δούμε ανάμεσα στους δύο αλγορίθμους η CMA δουλεύει καλύτερα με τη χρήση της τροποποιημένης μεθόδου FR από ότι η PSO. Σε γενικές γραμμές φαίνεται ότι η CMA υπερτερεί της PSO. Με τη χρήση της CMA έχουμε στα προβλήματα 12, 16, 17 και 18 πολύ καλές λύσεις με μηδενικές παραβιάσεις στους περιορισμούς ανισότητας και ισότητας αλλά και πολύ καλές τιμές των αντικειμενικών συναρτήσεων. Σημειώνεται ότι στο πρόβλημα 12 ο αλγόριθμος φαίνεται να έχει "εγκλωβιστεί" σε ένα τοπικό ελάχιστο. Και πάλι στο πρόβλημα 9 οι παραβιάσεις των περιορισμών είναι μηδενικές αλλά οι τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης μεγάλες. Βέβαια, είναι μικρότερες από αυτές της PSO. Αξιοσημείωτη είναι η διαφορά που έχει η κανονική FR με την τροποποιημένη FR στα προβλήματα 17 και 18. Σε αυτά τα προβλήματα παρατηρούμε ότι, ενώ και με τις τέσσερις μεθόδους πετυχαίνουμε μηδενικές παραβιάσεις περιορισμών, οι τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης με τη χρήση της τροποποιημένης μεθόδου FR είναι σαφώς καλύτερες από ότι της κανονικής FR.

Τέλος, βλέπουμε ότι και οι τρεις μεθόδοι μείωσης του "ε" πετυχαίνουν παρόμοια αποτελέσματα και στους δύο αλγορίθμους.

Συνοψίζοντας, συμπεραίνουμε ότι η χρήση της τροποποιημένης μεθόδου FR δεν ενδείκνυται για τη χρήση της σε συνδυασμό με τον απλό αλγόριθμο PSO. Επίσης, σε ορισμένα προβλήματα η τροποποιημένη FR βοηθάει τον αλγόριθμο CMA και πετυχαίνει πολύ καλές λύσεις σε σχέση με την κανονική FR αλλά και γενικά σε σχέση με τις καλύτερες γνωστές λύσεις που έχουμε στη βιβλιογραφία [53] [54]. Επίσης, από όσα μπορούμε να δούμε οι αλγόριθμοί μας και ειδικά η CMA με τη χρήση της τροποποιημένης μεθόδου FR έχουν καλύτερες επιδόσεις σε προβλήματα που έχουν και περιορισμούς ανισότητας.

Μελλοντική εργασία πάνω σε αυτή τη διπλωματική θα μπορούσε να είναι μελέτη και δημιουργία νέων συναρτήσεων μείωσης της μεταβλητής "ε". Επίσης χρήση ενός τροποποιημένου αλγορίθμου PSO σε συνδυασμό με την τροποποιημένη FR.

8. Κατάλογος Πινάκων

9. Κατάλογος Σχημάτων

References

[1] R. Bansal, "Optimization methods for electric power systems: an overview," *Int. J. Emerging Elect. Power Syst.,* vol. 2, no. 1, pp. 1-23, 2005.

[2] Lazaros G. Papageorgiou, Eric S. Fraga, "A mixed integer quadratic programming formulation for the economic dispatch of generators with prohibited operating zones," *Electric Power Systems Research,* pp. 1292-1296, 2007.

[3] N.A.A.N Azlan, A. Saptari, E. Mohamad, "Augmentation of Simplex Algorithm for Linear Programming Problem to Enhance Computational Performance," *Journal of Advanced Manufacturing Technology,* vol. 11, no. 1(1), pp. 31-46, 2017.

[4] Robert G. Bland, Donald Goldfarb, Michael J. Todd, "The Ellipsoid Method: A Survey," *Operations Research,* vol. 29, no. 6, pp. 1039-1091, 1981.

[5] Mevludin Glavic, Louis Wehenkel , "Interior Point Methods: A Survey, Short Survey of Applications to Power Systems, and Research Opportunities," ResearchGate, Liege, BELGIUM , 2004.

[6] Philip E. Gill, Walter Murray, Michael A. Saunders, "SNOPT: An SQP Algorithm for Large-Scale Constrained Optimization," *SIAM Review,* vol. 47, no. 1, pp. 99-131, 2015.

[7] Y. Ya-Xiang, "A Review of Trust Region Algorithms for Optimization," *ICM99: Proceedings of the Fourth International Congress on Industrial and Applied Mathematics,* pp. 1-12, 1999.

[8] Joakim Westerlund, Mattias Hastbacka, Sebastian Forssell, Tapio Westerlund, "Mixed-Time Mixed-Integer Linear Programming Scheduling Model," *Industrial & Engineering Chemistry Research - IND ENG CHEM RES,* vol. 46, pp. 2781-2796, 2007.

[9] Lin Ming-Hua, Tsai Jung-Fa, Yu Chian-Son, "A Review of Deterministic Optimization Methods in Engineering and Management," *Mathematical Problems in Engineering,* vol. 2012, no. Special Issue, pp. 1-15, 2012.

[10] Francisco Trespalacios, Ignacio E. Grossmann, "Review of Mixed-Integer Nonlinear and Generalized Disjunctive Programming Methods," *Chemie Ingenieur Technik,* vol. 86, no. 7, pp. 991-1012, 2014.

[11] Piero P. Bonissone, Raj Subbu, Neil Eklund, Thomas R. Kiehl, "Evolutionary Algorithms + Domain Knowledge = Real-World Evolutionary Computation," *IEEE TRANSACTIONS ON EVOLUTIONARY COMPUTATION,* vol. 10, no. 3, pp. 256-280, 2006.

[12] P. Attaviriyanupap, H. Kita, E. Tanaka, J. Hasegawa, "A hybrid EP and SQP for dynamic economic dispatch with nonsmooth fuel cost function," *IEEE Trans. Power Syst.,* vol. 22, no. 4, p. 77, 2002.

[13] N. Hansen, "The CMA Evolution Strategy: A Tutorial," 2015.

[14] Changhe Li, Shengxiang Yang, Trung Thanh Nguyen, "A Self-Learning Particle Swarm Optimizer for Global Optimization Problems," *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B,* vol. 42, no. 3, pp. 527-646.

[15] R. Storn, K. Price, " Differential evolution: a simple and efficient adaptive scheme for global optimization over continuous spaces," 1995.

[16] Swagatam Das, Sankha Subhra Mullick, P.N. Suganthan, "Recent advances in differential evolution – An updated survey," *Swarmand Evolutionary Computation,* vol. 27, pp. 1-30, 2016.

[17] Dorigo, Marco, Colorni, Alberto, and Maniezzo, Vittorio, "Distributed optimization by ant colonies," 1991.

[18] Geem, Zong Woo, Kim, Joong Hoon, and Loganathan, Gobichettipalayam Vasudevan, "A new heuristic optimization algorithm: harmony search. simulation," vol. 76, no. 2, pp. 60-68, 2001.

[19] W. Ongsakul, N. Ruangpayoongsak, "Constrained dynamic economic dispatch by simulated annealing/genetic algorithms," *Power Ind. Comput. Appl.,* vol. 22, pp. 207-212, 2001.

[20] X. Z. Gao, V. Govindasamy, H. Xu, X. Wang, K. Zenger, "Harmony Search Method: Theory and Applications," *Computational Intelligence and Neuroscience,* vol. 2015, 2015.

[21] Yudong Zhang, Shuihua Wang, Genlin Ji, "A Comprehensive Survey on Particle Swarm Optimization Algorithm and Its Applications," *Mathematical Problems in Engineering,* vol. 2015, 2015.

[22] Kennedy J, Eberhart RC, "Particle swarm optimization," in *International Conference on Neural Networks*, 1995.

[23] Connie Rye, Robert Wise, Vladimir Jurukovski, Jean DeSaix, Jung Choi, Yael Avissar, Biology, Houston, Texas: OpenStax, 2016.

[24] Bing-Chuan Wang, Yun Feng, Han-Xiong Li, "Individual-dependent feasibility rule for constrained differential evolution," *Information Sciences,* vol. 506, pp. 174-195, 2020.

[25] V. D. R.V.Rao, "Teaching–learning-based optimization: A novel method for constrained mechanical design optimization problems," *Computer-Aided Design,* vol. 43, no. 3, pp. 303-315, 2011.

[26] T. A. K. D. J. Rafal Kicinger, "Evolutionary computation and structural design: A survey of the state-of-the-art," *Computers & Structures,* vol. 83, no. 23-24, pp. 1943-1978, 2005.

[27] K. S. Hansen N, "Evaluating the CMA evolution strategy on multimodal test functions," *Springer,* pp. 282-291, 2004.

[28] O. A. Hansen N, "Completely derandomized self-adaptation in evolution strategies," *Evolutionary Computation,* vol. 9, no. 2, pp. 159-195, 2001.

[29] M. S. K. P. Hansen N, "Reducing the time complexity of the derandomizedevolution strategy with covariance matrix adaptation (CMA-ES)," *Evolutionary Computation,* vol. 11, no. 1, pp. 1-18, 2003.

[30] O. A. Hansen N, "Convergence properties of evolution strategies with the derandomized covariance matrix adaptation: The (μ=μI ; λ)-CMA-ES.," in *Proceedings of the 5th European Congresson Intelligent Techniques and Soft Computing*, 1997.

[31] A. A. Nikolaus Hansen, "Tutorial CMA-ES — Evolution Strategies and Covariance Matrix Adaptation," in *GECCO*, Amsterdam, 2013.

[32] B. A. M. a. T. H. Spreen, Applied Mathematical Programming using algebraic systems, MA: Cambridge, 1997.

[33] R. M. a. S. L. W. Yan, "Multi-period semi-variance portfolio selection: Model and numerical solution," *Applied Mathematics and Computation,* vol. 194, no. 1, pp. 128-134, 2007.

[34] W. R. G. C. Pflug, Modeling, measuring and managing risk, World Scientific, 2007.

[35] P. V. P. E. T. L. M. S. Kaylen, "Risk modeling via direct utility maximization using numerical quadrature," *American Journal of Agricultural Economics,* vol. 69, no. 3, pp. 701-706, 1987.

[36] L. B. B. Baumrucker, MINLP & MPCC strategies for optimization of a class of hybrid dynamic systems, 2009.

[37] J. L. W. V. B. B. D. M. J. Buijs, "Quadratic programming in model predictive control for large scale systems," in *15th IFAC World Congress*.

[38] J. Castro, "Minimum-distance controlled perturbation methods for large-scale tabular data protection," *European Journal of Operational Research,* vol. 171, no. 1, pp. 39-52, 2006.

[39] H. Y.-J. M. K. M. Gorji-Bandpy, "Optimization of heat exchanger network," *Applied Thermal Engineering,* vol. 31, no. 5, pp. 779-784, 2011.

[40] P. N. S. S. Das, "Problem definitions and evaluation criteria for CEC 2011 competition on testing evolutionary algorithms on real world optimization problems," 2011.

[41] G. P. M. J. Bracken, "Selected Applications of Nonlinear Programming," John Wiley & Sons, Inc., 1968.

[42] L. B. M. B. S. D. Rudy Chocat, "Modified Covariance Matrix Adaptation – Evolution Strategy algorithm for constrained optimization under uncertainty, application to rocket design," *Int. J. Simul. Multisci. Des. Optim.,* vol. 6, no. A1, pp. 1-13, 2015.

[43] C. A. C. C. E. Mezura-Montes, "Constraint-handling in nature-inspired numerical optimization: Past, present, and future," *Swarm and Evolutionary Computation,* vol. 4, no. 1, pp. 173-194, 2011.

[44] A. A. R. R. S. F. P. P. N. Hansen, "Comparing results of 31 algorithms from the black-box optimization benchmarking BBOB-2009," in *Genetic and Evolutionary Computation Conference Companion — GECCO 2010*, ACM Press, 2010, pp. 1689-1696.

[45] N. H. Dirk Arnold, "A (1+1)-CMA-ES for Constrained Optimisation," in *GECCO*, Philadelphia, United States, ACM, 2012, pp. 297-304.

[46] H.-G. B. M. H. Patrick Spettel, "A Covariance Matrix Self-Adaptation Evolution Strategy for Optimization under Linear Constraints," *IEEE TRANSACTIONS ON EVOLUTIONARY COMPUTATION.*

[47] G. I. Vin´ıcius Veloso de Melo, "A CMA-ES-based 2-Stage Memetic Framework for Solving Constrained Optimization Problems," IEEE, 2014.

[48] G. I. V. V. de Melo, "A modified Covariance Matrix Adaptation Evolution Strategy with adaptive penalty function and restart for constrained optimization," *Expert Systems with Applications,* vol. 41, no. 16, pp. 7077-7094, 2014.

[49] N. A. V. T. C. Viet-Hung Dang, "A covariance matrix adaptation evolution strategy in reproducing kernel Hilbert space," *Genetic Programming and Evolvable Machines,* vol. 20, no. 1, pp. 479-501, 2019.

[50] X. T. H. M. Alexander Katz, "BRILLIANT," [Online]. Available: https://brilliant.org/.

[51] C. Darwin, On the Origin of Species by Means of Natural Selection, or the Preservation of Favoured Races in the Struggle for Life, 24 November 1859.

[52] P. N. S. R. Mallipeddi, "Problem Definitions and Evaluation Criteria for the CEC 2010 Competition on Constrained Real-Parameter Optimization," Singapore, 2010.

[53] R. D. L. Saber M.Elsayed, "Multi-operator based evolutionary algorithms for solving constrained optimization problems," *Computers & Operations Research,* vol. 38, pp. 1877-1896, 2011.

[54] S. S. Tetsuyuki Takahama, "Constrained Optimization by the Constrained DifferentialEvolution with an Archive and Gradient-Based Mutation," *IEEE World Congress on Computational Intelligence,* pp. 1680-1688, 2010.

[55] O. A. Hansen N, "Adapting arbitrary normal mutation distributions in evolution strategies: The covariance matrix adaptation," in *IEEE Conference on Evolutionary Computation*, 1996.