Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ HADAMARD ΣΕ ΠΙΝΑΚΕΣ

Διπλωματική εργασία

ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΥ ΧΡΙΣΤΙΝΑ

Επιβλέπων καθηγητής: Παναγιώτης Ψαρράκος

Ιούνιος 2021

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ HADAMARD ΣΕ ΠΙΝΑΚΕΣ

Διπλωματική εργασία

ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΥ ΧΡΙΣΤΙΝΑ

Τριμελής Επιτροπή:

Κ. Παυλοπούλου

Π. Στεφανέας

Π. Ψαρράκος (Επιβλέπων)

Ιούνιος 2021

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα διπλωματική πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια των υποχρεώσεων της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, με σκοπό την απόκτηση του Διπλώματος.

Στην εργασία παρουσιάζεται το γινόμενο Hadamard μεταξύ πινάκων, ένα γινόμενο που διαφέρει από το «κλασικό» γινόμενο πινάκων όπως το γνωρίζουμε. Πιο συγκεκριμένα, αφού δοθεί ο ορισμός του γινομένου Hadamard, δίνονται στη συνέχεια κάποια θεωρήματα και κάποιες προτάσεις, ως επί το πλείστον μαζί και με τις αποδείξεις τους.

Το γινόμενο Hadamard αρκετές φορές καλείται και κατά στοιχείο γινόμενο, λόγω του τρόπου με τον οποίο ορίζεται, δηλαδή ότι πολλαπλασιάζει το αντίστοιχο στοιχείο δύο πινάκων που έχουν ίδιο πλήθος γραμμών ή στηλών. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε πολλές περιπτώσεις. Κάποιες από αυτές είναι η εύρεση συντελεστών Fourier περιοδικών συναρτήσεων. Επιπλέον μπορεί να χρησιμοποιηθεί στα γινόμενα πυρήνων ολοκληρωτικής εξίσωσης, στην αρχή ελαχίστου στις μερικές διαφορικές εξισώσεις και στις χαρακτηριστικές συναρτήσεις στη θεωρία πιθανοτήτων (Θεώρημα του Bochner). Το γινόμενο Hadamard έχει εκτός αυτού εφαρμογές και στη θεωρία τελεστών.

Η εργασία αποτελείται από πέντε κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο (κεφάλαιο 0), το οποίο ουσιαστικά αποτελεί ένα εισαγωγικό κεφάλαιο, παρουσιάζονται κάποιοι ορισμοί και κάποια θεωρήματα από τη Γραμμική Άλγεβρα, τα οποία χρησιμοποιούνται και στο βασικό κομμάτι της εργασίας, έτσι ώστε ο αναγνώστης να μπορέσει να κατανοήσει τις έννοιες που παρουσιάζονται.

Στο δεύτερο κεφάλαιο (κεφάλαιο 1) δίνεται αρχικά ο ορισμός και κάποια βασικά θεωρήματα που σχετίζονται κυρίως με τις ιδιότητες του γινομένου Hadamard. Στη συνέχεια παρουσιάζονται θεωρήματα και προτάσεις, τα οποία αναφέρονται σε συγκεκριμένους πίνακες, για παράδειγμα σε διαγώνιους, διαγωνοποιήσιμους, ερμιτιανούς, συμμετρικούς και άλλους, και πώς αυτοί σχετίζονται με το γινόμενο Hadamard. Επιπλέον, γίνεται μια αρχική αναφορά της χρήσης του γινομένου Hadamard στη στατιστική στους πίνακες συνδιακύμανσης (περισσότερα θα δούμε στο κεφάλαιο 4). Βασικό κομμάτι του κεφαλαίου, αλλά και της εργασία γενικότερα, αποτελεί το Θεώρημα Schur, το οποίο στην ουσία συνδέει θετικά ορισμένους και ημιορισμένους πίνακες με το γινόμενο Hadamard.

Στο επόμενο κεφάλαιο θα δοθεί ο ορισμός του γινομένου Kronecker και θα δούμε πώς αυτό σχετίζεται με το γινόμενο Hadamard. Εδώ θα σχολιαστούν κυρίως θεωρήματα και ιδιότητες που αφορούν τα ίχνη γινομένων πινάκων κατά Hadamard και Kronecker. Στο κεφάλαιο θα δοθούν και αρκετές ανισοτικές σχέσεις, οι οποίες όπως θα δούμε έχουν να κάνουν περισσότερο με τη σύγκριση ιδιοτιμών πινάκων με ιδιοτιμές πινάκων που προκύπτουν από το Hadamard. Στο τέλος του κεφαλαίου παρουσιάζονται κάποια λήμματα και θεωρήματα που αποτελούν γενικεύσεις του Θεωρήματος Schur, σε περιπτώσεις που οι πίνακες παρουσιάζονται σε διαμερισμένη μορφή.

Στο κεφάλαιο 3 ασχολούμαστε με τους πίνακες $A \circ (A^{-1})^{T}$ και $A \circ A^{-1}$, οι οποίοι παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Έχουν αρκετές αλγεβρικές ιδιότητες και χρησιμοποιούνται σε υπολογισμό ανισοτήτων που συνδέονται με θετικά ορισμένους πίνακες.

Στο τελευταίο κεφάλαιο παρουσιάζεται μια “εφαρμογή” του γινομένου Hadamard στη στατιστική πολυμεταβλητή ανάλυση, αφού πρώτα γίνει μια ιστορική αναδρομή.

Στο σημείο αυτό, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Καθηγητή κύριο Παναγιώτη Ψαρράκο, επιβλέποντα της παρούσας διπλωματικής, για όλη τη βοήθεια και τη καθοδήγηση που μου παρείχε σε όλα τα στάδια εκπόνησης της εργασίας, καθώς και την οικογένεια μου που είναι πάντα δίπλα μου και με στηρίζει σε κάθε μου βήμα.

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία έγινε με αφορμή τη μελέτη ενός γινομένου πινάκων, του γινομένου Hadamard, το οποίο είναι διαφορετικό από το γινόμενο πινάκων όπως το γνωρίζουμε. Το γινόμενο Hadamard καλείται επίσης και κατά στοιχείο γινόμενο, εξαιτίας του τρόπου με τον οποίο ορίζεται, δηλαδή ότι πολλαπλασιάζει το αντίστοιχο στοιχείο δύο πινάκων με τις ίδιες διαστάσεις. Ονομάστηκε αρχικά γινόμενο Schur, εξαιτίας κάποιων βασικών αποτελεσμάτων που προέκυψαν ύστερα από παρατηρήσεις που έγιναν από τον Issai Schur. Μια από τις πιο βασικές αυτών είναι η κλειστότητα του κώνου σε θετικά ημιορισμένους πίνακες υπό το γινόμενο Hadamard. Αργότερα μετονομάστηκε σε γινόμενο Hadamard.

Ξεκινήσαμε δίνοντας κάποια βασικά στοιχεία θεωρίας από τη Γραμμική Άλγεβρα που είναι πολύ χρήσιμα στην ανάλυση του γινομένου Hadamard. Μετά από αυτό δώσαμε πρώτα τον ορισμό του γινομένου Hadamard και μετά παρουσιάσαμε μερικά θεωρήματα που σχετίζονται κυρίως με τις ιδιότητες του γινομένου. Στη συνέχεια, μελετήσαμε πώς το γινόμενο επιδρά σε συγκεκριμένους πίνακες, όπως διαγωνοποιήσιμους πίνακες, διαγώνιους πίνακες, ερμιτιανούς και συμμετρικούς πίνακες, καθώς και τα αποτελέσματα που προκύπτουν. Αναφερθήκαμε στο γινόμενο Kronecker και μελετήσαμε τη σύνδεση του με το Hadamard. Εδώ παρατέθηκαν κυρίως θεωρήματα και ιδιότητες των ιχνών γινομένων πινάκων Kronecker και Hadamard.

Βασικό κομμάτι της εργασίας αποτέλεσε το Θεώρημα Γινομένου Schur, το οποίο συνδέει θετικά ορισμένους πίνακες με το γινόμενο Hadamard. Επιπλέον, δόθηκαν κάποιες ανισότητες, που όπως θα δούμε, έχουν να κάνουν περισσότερο με τη σύγκριση ιδιοτιμών πινάκων με τις ιδιοτιμές πινάκων που προκύπτουν από το γινόμενο Hadamard. Ακολούθησαν κάποιες γενικεύσεις του Θεωρήματος Schur, σε περιπτώσεις που οι πίνακες δίνονται σε διαμερισμένη μορφη.

Πολύ σημαντική ήταν και η μελέτη των πινάκων $A \circ (A^{-1})^{T}$ και $A \circ A^{-1}$, οι οποίοι έχουν πολλές χρήσιμες ιδιότητες. Ο πίνακας $A \circ (A^{-1})^{T}$ χρησιμοποιείται εκτενώς στη διαδικασία ελέγχου των χημικών μηχανικών. Εκτός αυτού οι πίνακες $A \circ (A^{-1})^{T}$ και $A \circ A^{-1}$ παίζουν σημαντικό ρόλο σε ανισότητες και είναι στενά συνδεδεμένοι και με τους θετικά και ημιθετικά ορισμένους πίνακες.

Το γινόμενο Hadamard, αν και δε χρησιμοποιείται τόσο στη θεωρία των πινάκων, παρόλα αυτά, έχει αρκετές εφαρμογές στη στατιστική ανάλυση. Στο τέλος της εργασίας βλέπουμε μια εφαρμογή του στη στατιστική πολυμεταβλητή ανάλυση.

Λέξεις-κλειδιά: *Γινόμενο Hadamard, Θεώρημα Schur, συμπλήρωμα Schur, γινόμενο Kronecker, θετικά ορισμένοι πίνακες, ίχνη πινάκων, συνήθης συνάρτηση, πίνακες συνδιακύμανσης.*

Abstract

This thesis was made on the occasion of the study of a matrix product, the Hadamard product, that is different from the matrix product as we know it. The Hadamard product is also called the entrywise product, because of the way it is defined, that is that it multiplies the corresponding entry of two matrices with the same dimensions. It was called at first Schur product, because of some basic results obtained after observations made by Issai Schur. One of the most basic of these is the closure of the cone of positive semidefinite matrices under the Hadamard product. Later was renamed the Hadamard product.

We started by giving some basic elements of theory from Linear Algebra that are very useful in analyzing the Hadamard product. After that, we first gave the definition of the Hadamard product and then we presented some theorems that are related mostly with the properties of the product. Then, we studied how the product affects specific matrices, such as diagonalizable matrices, diagonal matrices, Hermitian and symmetric matrices, as well as the results that come out of this. We referred to the Kronecker product and we studied its connection with the Hadamard. Here were listed mainly theorems and properties of the traces of Kronecker and Hadamard products of matrices.

Key part of the thesis constituted the Schur Product Theorem that connects the positive definite matrices with the Hadamard product. In addition, some inequalities were given, that as we will see, they have to do more with the comparison of the eigenvalues of matrices with the eigenvalues of matrices resulting from the Hadamard product. Some generalizations of the Schur Theorem followed, in cases the matrices are given in partitioned form.

Very interesting was also the study of the matrices $A \circ (A^{-1})^T$ and $A \circ A^{-1}$, which have many useful properties. The matrix $A \circ (A^{-1})^T$ is used extensively in the chemical engineering process control. Except that the matrices $A \circ (A^{-1})^T$ and $A \circ A^{-1}$ play an important role in inequalities and are closely related to positive definite and semidefinite matrices.

The Hadamard product, even though is not used much in Matrix Theory, however, it has many applications in statistical analysis. At the end of the thesis we see an application of the Hadamard product in the multivariate statistical analysis.

<u>Keywords</u>: Hadamard product, Schur Theorem, Schur complement, Kronecker product, positive definite matrices, traces of matrices, ordinary function, covariance matrices.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 0. ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ

0.1. Πίνακες

Ορισμός 0.1.1. Ονομάζουμε πίνακα $A_{m\times n}$ με στοιχεία από ένα σύνολο F (F=$\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$) μια ορθογώνια διάταξη mn αριθμών a_{ij}, με i=1,…,m και j=1,…,n, στοιχείων του συνόλου F με m γραμμές και n στήλες,

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

έτσι ώστε το στοιχείο a_{ij} να βρίσκεται στην i-γραμμή και j-στήλη. Τον πίνακα A μπορούμε να τον συμβολίζουμε και με $[a_{ij}]$.

Παράδειγμα 0.1.2. Ο $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ είναι ένας 2×3 πίνακας.

Ορισμός 0.1.3. Έστω $A_{m\times n}$ ένας πίνακας. Αν n=m, δηλαδή το πλήθος των γραμμών ισούται με το πλήθος των στηλών, ο πίνακας θα ονομάζεται τετραγωνικός.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Τα στοιχεία a_{11}, a_{22},…, a_{nn} του πίνακα $A_{n\times n}$ ονομάζονται στοιχεία της κύριας διαγωνίου.

Παράδειγμα 0.1.4. Ο $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ είναι ένας 2×2 τετραγωνικός πίνακας και 1 και 4 είναι τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου.

Ορισμός 0.1.5. Έστω $A_{n\times n}$ ένας τετραγωνικός πίνακας n γραμμών και στηλών, τότε ονομάζουμε ίχνος το άθροισμα των στοιχείων της διαγωνίου και θα το συμβολίζουμε με

$$\mathrm{tr}(A)= a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}.$$

Παράδειγμα 0.1.6. Ο πίνακας $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ έχει ίχνος tr(A)=1+5+9=15.

Ορισμός 0.1.7. Έστω $A_{n\times n}$ ένας τετραγωνικός πίνακας n γραμμών και στηλών, όπου τα μόνα μη μηδενικά στοιχεία βρίσκονται στη διαγώνιο, δηλαδή $a_{ij}=0$ για κάθε i$\neq$ j. Τότε ο A θα ονομάζεται διαγώνιος. Αν επιπλέον, $a_{ij}=1$ για κάθε i=j, ο πίνακας θα ονομάζεται μοναδιαίος.

Παράδειγμα 0.1.8. Ο πίνακας A=$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 9\end{pmatrix}$ είναι διαγώνιος πίνακας και ο πίνακας B=$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ είναι μοναδιαίος.

Ορισμός 0.1.9. Έστω $A_{n\times m}$ ένας πίνακας n γραμμών και m στηλών, τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν πίνακα $B_{m\times n}$, m γραμμών και n στηλών, του οποίου οι γραμμές θα είναι οι στήλες του πίνακα A με την ίδια σειρά. Τον πίνακα B τον ονομάζουμε ανάστροφο του A και τον συμβολίζουμε με A^T. Έτσι προκύπτει ότι αν a_{ij} και b_{ij} είναι τα στοιχεία των πινάκων A και A^T αντίστοιχα, τότε $b_{ij} = a_{ji}$ για κάθε i=1,…, n και j=1,…,m.

Παράδειγμα 0.1.10. Αν $A_{2\times 3}$=$\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & 4 & 0\end{pmatrix}$, τότε $A^T_{3\times 2}$=$\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 4\\ 2 & 0\end{pmatrix}$.

Ορισμός 0.1.11. Έστω $A_{n\times n}$ ένας τετραγωνικός πίνακας n γραμμών και στηλών, τότε ο πίνακας A θα ονομάζεται συμμετρικός αν A^T=A και αντισυμμετρικός αν A^T=−A.

Παράδειγμα 0.1.12. Έστω A=$\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 3\\ 0 & 3 & -1\end{pmatrix}$ και B=$\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 1 & 0 & -3\\ -2 & 3 & 0\end{pmatrix}$. Τότε

$$A^T=A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 3\\ 0 & 3 & -1\end{pmatrix} \text{ και } B^T=-B=\begin{pmatrix}0 & 1 & -2\\ -1 & 0 & 3\\ 2 & -3 & 0\end{pmatrix}.$$

Δηλαδή, ο πίνακας A είναι συμμετρικός, ενώ ο πίνακας B είναι αντισυμμετρικός

Ορισμός 0.1.13. Έστω $A_{m\times n}$ ένας πίνακας m γραμμών και n στηλών. Τότε θα ονομάζουμε συζυγή του πίνακα A και θα συμβολίζουμε με $\overline{A}$ τον πίνακα που θα αποτελείται από τα συζυγή στοιχεία του πίνακα A, δηλαδή αν A=$[a_{ij}]$ τότε $\overline{A} = [\overline{a}_{ij}]$.

Παράδειγμα 0.1.14. Αν A=$\begin{pmatrix}1+i & -1 & i\\ 0 & -i & 2-i\end{pmatrix}$, τότε $\overline{A} = \begin{pmatrix}1-i & -1 & -i\\ 0 & i & 2+i\end{pmatrix}$.

Σημείωση: Ένας πίνακας $A_{m\times n}$ είναι πραγματικός αν και μόνο αν $\overline{A} = A$ και καθαρά φανταστικός αν και μόνο αν $\overline{A} = -A$.

Ορισμός 0.1.15. Έστω $A_{m\times n}$ ένας πίνακας m γραμμών και n στηλών. Τότε ονομάζουμε αναστροφοσυζυγή του πίνακα A τον πίνακα

$$A^* = (\overline{A})^T.$$

Παράδειγμα 0.1.16. Αν A=$\begin{pmatrix}1+i & -1 & i\\ 0 & 2-i & 2\end{pmatrix}$, τότε $A^* = \begin{pmatrix}1-i & 0\\ -1 & 2+i\\ -i & 2\end{pmatrix}$.

Ορισμός 0.1.17. Έστω $A_{n\times n}$ ένας τετραγωνικός πίνακας n γραμμών και στηλών. Τότε ο πίνακας A ονομάζεται ερμιτιανός αν ισχύει ότι $A^* = A$, ενώ ονομάζεται αντιερμιτιανός αν $A^* = -A$.

Σημείωση: Αν ο πίνακας A είναι πραγματικός τότε οι έννοιες του ερμιτιανού πίνακα και του συμμετρικού πίνακα ταυτίζονται. Αντίστοιχα, ταυτίζονται και οι έννοιες του αντισυμμετρικού και αντιερμιτιανού πίνακα.

Παράδειγμα 0.1.18. Αν A=$\begin{pmatrix} 1 & i & 1-i \\ -i & 1 & 0 \\ 1+i & 0 & 1 \end{pmatrix}$, τότε

$$A^* = (\overline{A})^T = \begin{pmatrix} 1 & i & 1-i \\ -i & 1 & 0 \\ 1+i & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^* = A.$$

Άρα ο A είναι ερμιτιανός.

Πράξεις μεταξύ πινάκων

Πρόσθεση: Έστω $A_{m\times n}$ και $B_{m\times n}$ δύο πίνακες m γραμμών και n στηλών. Τότε ως άθροισμα των πινάκων A+B ορίζουμε τον πίνακα

$$[A+B]_{m\times n} = [\gamma_{ij}],$$

όπου $\gamma_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij}$ όταν A=$[\alpha_{ij}]$ και B=$[\beta_{ij}]$ για όλα τα i,j.

Παρατήρηση: Οι πίνακες A και B πρέπει να είναι ίδιων διαστάσεων για να προστεθούν.

Παράδειγμα 0.1.19. Έστω $A_{2\times 3}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ και $B_{2\times 3}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Τότε

$$(A+B)_{2\times 3}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 7 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Βαθμωτό γινόμενο: Έστω $A_{m\times n}$ ένας πίνακας m γραμμών και n στηλών, τότε ως γινόμενο αριθμού με πίνακα ορίζουμε τον πίνακα

$$\lambda A=[\delta_{ij}],$$

όπου $\delta_{ij} = \lambda\alpha_{ij}$ αν A=$[\alpha_{ij}]$, για όλα τα i,j.

Παράδειγμα 0.1.20. Αν λ=2 και $A_{2\times 3}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, τότε $2A_{2\times 3}=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 6 & 8 & 0 \end{pmatrix}$.

Γινόμενο πινάκων: Έστω $A_{n\times m}$ και $B_{m\times k}$ δύο πίνακες n γραμμών και m στηλών και m γραμμών και k στηλών αντίστοιχα, τότε ορίζουμε ως γινόμενο αυτών των δύο πινάκων τον πίνακα

$$[AB]_{n\times k}=[r_{ij}],$$

όπου $r_{ij}=\alpha_{i1}\beta_{1j}+\alpha_{i2}\beta_{2j}+\cdots+\alpha_{im}\beta_{mj}=\sum_{s=1}^{m}\alpha_{is}\beta_{sj}$.

<u>**Παράδειγμα 0.1.21.**</u> Αν $A_{2\times3}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & 4 & 0\end{pmatrix}$ και $B_{3\times4}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 3 & 0\\ 2 & -1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, τότε

$$(AB)_{2\times4}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & 4 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 3 & 0\\ 2 & -1 & 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -4 & 1 & 8\\ 11 & 1 & 12 & 6\end{pmatrix}.$$

<u>0.2. Ιδιότητες πράξεων πινάκων</u>

Έστω πίνακες $A=[\alpha_{ij}]$, $B=[\beta_{ij}]$, $\Gamma=[\gamma_{ij}]$ και $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$.

1. $(A+B)+\Gamma=A+(B+\Gamma)$ (προσεταιριστική ιδιότητα).

2. $A+O=A$ (ύπαρξη ουδέτερου στοιχείου).

3. $A+(-A)=O$ (ύπαρξη αντίθετου στοιχείου).

4. $A+B=B+A$ (αντιμεταθετική ιδιότητα).

5. $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$ (επιμεριστική ιδιότητα).

6. $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$ (επιμεριστική ιδιότητα).

7. $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$.

8. $IA=A$ (ύπαρξη ταυτοτικού στοιχείου).

9. $OA=A$ (O ο μηδενικός πίνακας).

10. $(A+B)^T=A^T+B^T$.

11. $(A+B)^*=A^*+B^*$.

12. $(\lambda A)^T=\lambda A^T$.

13. $(\lambda A)^*=\bar{\lambda}A^*$.

14. $tr(A+B)=tr(A)+tr(B)$.

15. $tr(\lambda A)=\lambda tr(A)$.

16. $(AB)^T=B^TA^T$.

17. $(AB)^*=B^*A^*$.

18. $A(B+\Gamma)=AB+A\Gamma$ (επιμεριστική ιδιότητα από δεξιά).

19. $(A+B)\Gamma=A\Gamma+B\Gamma$ (επιμεριστική ιδιότητα από αριστερά).

20. $A(\lambda B)=(\lambda A)B=\lambda(AB)$.

0.3. Ορίζουσες

Ορισμός 0.3.1. Έστω $A_{n\times n}$ ένας τετραγωνικός πίνακας n γραμμών και n στηλών. Τότε η ορίζουσα του πίνακα A θα ισούται με το άθροισμα των γινομένων όλων των στοιχείων μιας γραμμής της (ή μιας στήλης) με το αντίστοιχο αλγεβρικό συμπλήρωμά τους, δηλαδή

$$\begin{aligned}|A| = \det(A) &= a_{11}(-1)^{1+1}M_{11} + a_{12}(-1)^{1+2}M_{12} + \cdots \\ &\quad + a_{ij}(-1)^{i+j}M_{ij} + \cdots + a_{in}(-1)^{i+n}M_{in} \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}M_{ij},\end{aligned}$$

όπου M_{ij} είναι η ελάσσων ορίζουσα του πίνακα A και αντιστοιχεί στο στοιχείο a_{ij}:

$$M_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{1+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Πρόταση 0.3.2. Έστω ένας τετραγωνικός πίνακας $A_{n\times n}$ n γραμμών και n στηλών, ο οποίος είναι αντιστρέψιμος. Τότε $\det A \neq 0$.

Πρόταση 0.3.3. Έστω $A_{n\times n}$ και $B_{n\times n}$ τετραγωνικοί πίνακές n γραμμών και n στηλών. Τότε

$$\det(AB)=\det A\cdot\det B.$$

Πρόταση 0.3.4. Έστω $A_{n\times n}$ ένας τετραγωνικός πίνακας n γραμμών και στηλών. Αν A^T είναι ο ανάστροφος του πίνακα A, τότε

$$\det(A^T)=\det(A).$$

0.4. Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα

Ορισμός 0.4.1. Έστω $A_{n\times n}$ ένας τετραγωνικός πίνακας n γραμμών και στηλών και λ ένας αριθμός ($\lambda\in\mathbb{R}$ ή $\lambda\in\mathbb{C}$) και $\vec{v} = [v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n]^T$ ένα διάνυσμα, τότε αν τα παραπάνω ικανοποιούν τη σχέση

$$A\vec{v}=\lambda\vec{v}$$

θα ονομάζουμε το λ ιδιοτιμή του πίνακα A και το $\vec{v}$ ιδιοδιάνυσμα του πίνακα A που παράγεται από την ιδιοτιμή λ. Θα λέμε ότι το λ είναι ιδιοτιμή του πίνακα A αν και μόνο αν ο $A-\lambda I_n$ δεν είναι αντιστρέψιμος, δηλαδή

$$\det(A-\lambda I) = 0.$$

Το πολυώνυμο $x_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ ονομάζεται χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A.

<u>**Θεώρημα 0.4.2.**</u> Έστω $A_{n\times n}$ ένας τετραγωνικός πίνακας n γραμμών και στηλών, τότε αν λ είναι μια ιδιοτιμή του με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $\vec{v}$ ισχύουν τα παρακάτω:

(a) Ο πίνακας A^k θα έχει ιδιοτιμή το λ^k για κάθε k=2,3,… και ιδιοδιάνυσμα το $\vec{v}$.

(b) Αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, τότε ο πίνακας A^{-1} θα έχει ιδιοτιμή το λ^{-1} και ιδιοδιάνυσμα το v.

(c) Ο πίνακας A^T θα έχει ιδιοτιμή το λ.

(d) Έστω $B_{n\times n}$ ένας τετραγωνικός πίνακας n γραμμών και n στηλών με ιδιοτιμή μ και ιδιοδιάνυσμα $\vec{v}$ ίδιο με αυτό που παράγει το λ στον πίνακα A. Τότε ο πίνακας A+B θα έχει ιδιοτιμή την λ+μ και ιδιοδιάνυσμα το $\vec{v}$, ενώ ο πίνακας AB θα έχει ιδιοτιμή το λμ και ιδιοδιάνυσμα το $\vec{v}$.

<u>**Απόδειξη**</u>: Έστω $A_{n\times n}$ τετραγωνικός πίνακας.
(a) Θα το αποδείξουμε με επαγωγή. Έστω λ ιδιοτιμή του πίνακα A με ιδιοδιάνυσμα το $\vec{v}$, τότε Av=λv. Πρώτα θα δείξουμε ότι ισχύει για k=2. Έχουμε

$$A^2v = A(Av) = A(\lambda v) = \lambda(Av) = \lambda\lambda v = \lambda^2 v$$

Έστω ότι ισχύει για k=n, δηλαδή $A^n v = \lambda^n v$. Θα δείξουμε ότι ισχύει για k=n+1. Έχουμε

$$A^{n+1}v = A(A^n v) = A(\lambda^n v) = \lambda^n(Av) = \lambda^n(\lambda v) = \lambda^{n+1}v.$$

(b) Ισχύει ότι

$$\begin{aligned} Av=\lambda v &\overset{\cdot A^{-1}}{\Longrightarrow} A^{-1}Av = A^{-1}\lambda v \Longrightarrow v = A^{-1}\lambda v \\ &\Longrightarrow v = \lambda A^{-1}v \overset{\lambda\neq 0}{\Longrightarrow} \lambda^{-1}v = \lambda^{-1}\lambda A^{-1}v \\ &\Longrightarrow \lambda^{-1}v = A^{-1}v. \end{aligned}$$

Άρα η λ^{-1} είναι ιδιοτιμή του πίνακα A^{-1} με ιδιοδιάνυσμα το v.

(c) Αρκεί να δείξουμε ότι οι πίνακες A και A^T έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο. Πράγματι,

$$\det(A-\lambda I)=\det((A-\lambda I)^T)=\det(A^T-(\lambda I)^T)=\det(A^T-\lambda I^T)=\det(A^T-\lambda I).$$

(d) Έστω $B_{n\times n}$ τετραγωνικός πίνακας με ιδιοτιμή το μ και ιδιοδιάνυσμα v, τότε

$$(A+B)v=Av+Bv=\lambda v+\mu v=(\lambda+\mu)v,$$

άρα το (λ+μ) είναι ιδιοτιμή του A+B με ιδιοδιάνυσμα το v. Όμοια,

$$(AB)v=A(Bv)=A\mu v=\mu Av=\mu\lambda v,$$

άρα το λμ είναι ιδιοτιμή του AB με ιδιοδιάνυσμα το v. □

Θεώρημα 0.4.3. Έστω $A_{n\times n}$ ένας τετραγωνικός πίνακας n γραμμών και n στηλών. Τότε αν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ιδιοτιμές του A, ισχύει ότι

(α) $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n$,

(b) $\mathrm{trace}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$.

0.5. Θετικά ορισμένοι και ημιορισμένοι πίνακες

Ορισμός 0.5.1. Έστω $A_{n\times n}$ ένας τετραγωνικός πίνακας ο οποίος είναι συμμετρικός, τότε ο A θα ονομάζεται θετικά ημιορισμένος αν

$$v^T A v \geq 0 \ \text{ για κάθε διάνυσμα } \vec{v} \in \mathbb{R}^n$$

και θετικά ορισμένος αν

$$v^T A v > 0 \ \text{ για κάθε διάνυσμα } \vec{v} \in \mathbb{R}^n \text{ (εκτός και αν } \vec{v} = 0).$$

Αντίστοιχα, ο πίνακας ονομάζεται αρνητικά ημιορισμένος αν

$$v^T A v \leq 0 \ \text{ για κάθε διάνυσμα } \vec{v} \in \mathbb{R}^n$$

και αρνητικά ορισμένος αν

$$v^T A v < 0 \ \text{ για } \vec{v} \in \mathbb{R}^n.$$

Παρατήρηση: Ο πίνακας A είναι θετικά ημιορισμένος αν και μόνο αν ο πίνακας $-A$ είναι αρνητικά ημιορισμένος.

Πρόταση 0.5.2. Έστω $A_{n\times n}$ ένας τετραγωνικός πίνακας n γραμμών και n στηλών, ο οποίος είναι συμμετρικός. Τότε ο A είναι θετικά ημιορισμένος αν και μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές του είναι μη αρνητικές. Επίσης, είναι αρνητικά ημιορισμένος αν και μόνο αν όλες οι ιδιοτιμές του είναι μη θετικές. Τέλος, είναι θετικά ορισμένος ή αρνητικά ορισμένος αν όλες οι ιδιοτιμές είναι θετικές ή αρνητικές, αντίστοιχα.

Απόδειξη: Έστω $A_{n\times n}$ ένας συμμετρικός τετραγωνικός πίνακας και λ ιδιοτιμή του με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα v. Τότε

$$v^T A v = (v^T U)\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)(U^T v) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i ((v^T U)_i)^2,$$

όπου U είναι ο πίνακας με στήλες τα ορθογώνια ιδιοδιανύσματα του πίνακα A. Η παραπάνω ποσότητα είναι μη αρνητική αν και μόνο αν $\lambda_i \geq 0$ για κάθε i=1,..., n.
Ομοίως, αποδεικνύονται και τα υπόλοιπα. □

Για την πρώτη ισότητα της παραπάνω απόδειξης, χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι αν ο A είναι συμμετρικός τότε $A = U\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)\, U^T$.

<u>**Πρόταση 0.5.3.**</u> Έστω $A_{n\times n}$ ένας τετραγωνικός πίνακας διάστασης $n \times n$. Τότε αν ο πίνακας A είναι θετικά ή αρνητικά ορισμένος θα ισχύει σίγουρα ότι

$$\det(A) \neq 0.$$

<u>**Απόδειξη:**</u> Έστω $A_{n\times n}$ ένας τετραγωνικός πίνακας, τέτοιος ώστε ο A να είναι θετικά ορισμένος. Τότε

$$\lambda_i > 0,\ \text{για } i=1,\dots,n.$$

Ισχύει ότι $\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n \neq 0$ αφού καμία ιδιοτιμή δεν είναι μηδενική.
Αντίστοιχα, το ίδιο αποδεικνύεται αν ο A είναι αρνητικά ορισμένος. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1. ΓΙΝΟΜΕΝΟ HADAMARD

Στο κεφάλαιο αυτό θα ορίσουμε το γινόμενο Hadamard, το οποίο αν και είναι απλό, δεν είναι τόσο διαδεδομένο.

1.1. Ορισμός γινομένου Hadamard

Ορισμός 1.1.1. Έστω $V = M_{n\times m}$ ο χώρος των πινάκων τύπου $n \times m$. Το (εσωτερικό ως πράξη) γινόμενο $A_{n\times m} \circ B_{n\times m}=[a_{ij}b_{ij}]$, όπου $[a_{ij}b_{ij}]$ ο πίνακας με στοιχεία τα γινόμενα των στοιχείων a_{ij} και b_{ij} των πινάκων $A_{n\times m}$ και $B_{n\times m}$ αντίστοιχα, ονομάζεται γινόμενο Hadamard.

Το γινόμενο Hadamard αρκετές φορές καλείται και κατά στοιχείο γινόμενο, λόγω του τρόπου με τον οποίο ορίζεται, δηλαδή ότι πολλαπλασιάζει το αντίστοιχο στοιχείο δύο πινάκων που έχουν ίδιο πλήθος γραμμών ή στηλών. Αυτό το κατά στοιχείο γινόμενο πινάκων καλείται και γινόμενο Schur, εξαιτίας κάποιων βασικών αποτελεσμάτων που προέκυψαν ύστερα από παρατηρήσεις του Issai Schur. Μια από τις πιο βασικές αυτών των παρατηρήσεων σχετίζεται με την κλειστότητα του κώνου σε θετικά ημιορισμένους πίνακες, πράγμα το οποίο προκύπτει κάνοντας χρήση του γινομένου Hadamard.
Το γινόμενο Hadamard μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε πολλές περιπτώσεις. Κάποιες από αυτές είναι η εύρεση συντελεστών Fourier περιοδικών συναρτήσεων. Επιπλέον μπορεί να χρησιμοποιηθεί στα γινόμενα πυρήνων ολοκληρωτικής εξίσωσης, στην αρχή ελαχίστου στις μερικές διαφορικές εξισώσεις και στις χαρακτηριστικές συναρτήσεις στη θεωρία πιθανοτήτων (Θεώρημα του Bochner). Το γινόμενο Hadamard έχει εκτός αυτού εφαρμογές και στη θεωρία τελεστών, λόγω κάποιων ιδιοτήτων των γραμμικών μετασχηματισμών πινάκων με σταθερά στοιχεία που προκύπτουν με τη χρήση αυτού του γινομένου.

Παράδειγμα 1.1.2. Έστω $A=\begin{pmatrix} -1 & 2i \\ 3i & -2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ και $B=\begin{pmatrix} -7i & 3i \\ 2 & 1 \\ -1 & -4i \end{pmatrix}$. Τότε το γινόμενο Hadamard των δύο πινάκων είναι

$$A\circ B = \begin{pmatrix} (-1)\cdot(-7i) & 2i\cdot 3i \\ 3i\cdot 2 & (-2)\cdot 1 \\ 4\cdot(-1) & 7\cdot(-4i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7i & -6 \\ 6i & -2 \\ -4 & -28i \end{pmatrix}.$$

Θεώρημα 1.1.3. Έστω A και B δύο πίνακες με m γραμμές και n στήλες, με στοιχεία μιγαδικούς αριθμούς. Τότε ισχύει ότι

$$A\circ B = B\circ A.$$

Απόδειξη: Έστω $A=[a_{ij}]$ και $B=[b_{ij}]$ με $i=1,\dots,m$ και $j=1,\dots,n$. Τότε

$$A \circ B = [a_{ij}] \cdot [b_{ij}] = [b_{ij}] \cdot [a_{ij}] = B \circ A. \qquad \square$$

Θεώρημα 1.1.4. Έστω " $\circ$ " το γινόμενο Hadamard μεταξύ δύο πινάκων. Τότε ο μοναδιαίος πίνακας (ταυτοτικός) ως προς την πράξη αυτή θα είναι ο πίνακας του οποίου κάθε στοιχείο θα ισούται με τη μονάδα, και θα συμβολίζεται με $J = J_{mn}$, δηλαδή $[j_{ij}]=1$ για κάθε i=1,…,m και j=1,…,n.

Απόδειξη: Έστω $A \in M_{m\times n}$ ένας πίνακας m γραμμών και n στηλών τέτοιος ώστε $A=[a_{ij}]$ για i=1,…,m και j=1,…,n. Τότε

$$J \circ A=[j_{ij}]\cdot[a_{ij}]=1\cdot[a_{ij}]= [a_{ij}]=A \;\text{ και }\; A\circ J= [a_{ij}]\cdot[j_{ij}]=[a_{ij}]\cdot 1=[a_{ij}]=A. \qquad \square$$

Επίσης, από το προηγούμενο θεώρημα, ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα στο γινόμενο Hadamard. Οπότε ισχύει

$$J\circ A= A\circ J=A.$$

Θεώρημα 1.1.5. Έστω $A \in M_{m\times n}$ ένας πίνακας m γραμμών και n στηλών. Θα λέμε ότι ο A έχει αντίστροφο ως προς το γινόμενο Hadamard αν και μόνο αν $[a_{ij}]\neq 0$ για i=1,…,m και j=1,…,n και θα ισχύει ότι αν $A=[a_{ij}]$, τότε

$$A^{-1} = [\frac{1}{a_{ij}}]=\widehat{A}.$$

Απόδειξη: " $\Longrightarrow$ " Έστω πίνακας $A \in M_{m\times n}$ με $A=[a_{ij}]$ ο οποίος αντιστρέφεται με το γινόμενο Hadamard με αντίστροφο πίνακα τον $A^{-1} = \widehat{A}$. Τότε ισχύει ότι

$$A \circ \widehat{A} = J_{mn} \Longrightarrow [a_{ij}]\cdot[\hat{a}_{ij}]=(1)_{ij} \Longrightarrow a_{ij} \cdot \hat{a}_{ij}=1.$$

Κατόπιν, θα πολλαπλασιάσουμε με τον αντίστροφο του $[a_{ij}]$ στους μιγαδικούς και θα πάρουμε:

$$(a_{ij})^{-1} \cdot (a_{ij}) \cdot(\hat{a}_{ij})= (a_{ij})^{-1} \cdot 1 \Longrightarrow \hat{a}_{ij} = (a_{ij})^{-1},$$

το οποίο ισχύει μόνο για τα στοιχεία a_{ij} τα οποία αντιστρέφονται με την πράξη του πολλαπλασιασμού στο $\mathbb{C}$, άρα για αυτά που είναι διάφορα του μηδενός. Συνεπώς $[a_{ij}]\neq 0$ για κάθε i=1,…,m και j=1,…,n.

" $\Longleftarrow$ " Έστω πίνακας $A \in M_{m\times n}$ με $A=[a_{ij}]$, i=1,…,m και j=1,…,n, με $a_{ij} \in \mathbb{C}$. Αφού $[a_{ij}]\neq 0$, τότε τα a_{ij} αντιστρέφονται στο σύνολο των μιγαδικών, δηλαδή υπάρχει $(a_{ij})^{-1} \in \mathbb{C}$ τέτοιος ώστε

$$\left(a_{ij}\right) \cdot (a_{ij})^{-1} = (a_{ij})^{-1} \cdot \left(a_{ij}\right)=1.$$

Άρα,

$$[a_{ij}]\cdot[\hat{a}_{ij}]=[\hat{a}_{ij}]\cdot[a_{ij}]=(1) \Longrightarrow A \circ \widehat{A} = J_{mn}, \text{ με } \hat{a}_{ij} = (a_{ij})^{-1}. \qquad \square$$

Θεώρημα 1.1.6. Το γινόμενο Hadamard είναι γραμμικό. Δηλαδή αν $A,B,C \in M_{m\times n}$ είναι πίνακες m γραμμών και n στηλών και $a\in \mathbb{C}$, τότε ισχύει ότι

$$\text{(i) } C \circ (A + B) = C \circ A + C \circ B \quad \text{και} \quad \text{(ii) } a(A \circ B) = (aA)\circ B = A \circ (aB).$$

__Απόδειξη:__ Έστω πίνακες A,B,C $\in$ $M_{m\times n}$ τέτοιοι ώστε $A=[a_{ij}]$, $B=[b_{ij}]$ και $C=[c_{ij}]$ με $i=1,\ldots,m$ και $j=1,\ldots,n$ και $a\in \mathbb{C}$. Τότε

$$\text{(i)}\ \ C\circ (A+B) =[c_{ij}]\cdot \left[(A+B)_{ij}\right]=[c_{ij}]\cdot [a_{ij}+b_{ij}]$$
$$=[c_{ij}]\cdot \left[a_{ij}\right] +[c_{ij}]\cdot \left[b_{ij}\right] = C\circ A + C\circ B$$

και

$$\text{(ii)}\ \ a(A\circ B) = a([a_{ij}]\cdot \left[b_{ij}\right])=(a\left[a_{ij}\right])\left[b_{ij}\right]=[a\cdot a_{ij}][\, b_{ij}]=(aA)\circ B$$
$$a(A\circ B) = a([a_{ij}]\cdot \left[b_{ij}\right])= [a_{ij}]\cdot a\cdot \left[b_{ij}\right]=[a_{ij}]\cdot (a\cdot \left[b_{ij}\right])$$
$$= [a_{ij}]\cdot \left[a\cdot b_{ij}\right]= A\circ (aB).$$

□

1.2. Διαγώνιοι πίνακες και γινόμενο Hadamard

Υπάρχει ένας τρόπος να συνδέσουμε το γινόμενο Hadamard με το γινόμενο πινάκων, αν βασιστούμε σε διαγώνιους πίνακες, καθώς ισχύει ότι $A\circ B=A\cdot B$ αν και μόνο αν οι πίνακες A και B είναι διαγώνιοι.

Πράγματι, έστω πίνακες $A=[a_{ij}]$ και $B=[b_{ij}]$ διαστάσεων $n\times n$. Τότε αν A και B είναι διαγώνιοι ισχύει $a_{ij}=0$ και $b_{ij}=0$ αν $i\neq j$. Το γινόμενο Hadamard καθώς και το κλασικό γινόμενο των A, B τότε είναι

$$A\circ B =[a_{ij}]\cdot \left[b_{ij}\right]=\begin{cases} a_{ii}b_{ii}, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases},$$

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}b_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow [ab]_{ij} = \begin{cases} a_{ii}b_{ii}\,, & i=j \\ 0\,, & i\neq j \end{cases}.$$

Άρα $A\circ B=A\cdot B$.
Θα δείξουμε τώρα το αντίστροφο. Έστω ότι ισχύει $A\circ B=A\cdot B$. Θα δείξουμε ότι οι πίνακες A, B είναι διαγώνιοι. Πράγματι,

$$A\circ B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} & \cdots & a_{1n}b_{1n} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} & \cdots & a_{2n}b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}b_{n1} & a_{n2}b_{n2} & \cdots & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix},$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+\cdots+a_{1n}b_{n1} & \cdots & a_{11}b_{1n}+\cdots+a_{1n}b_{nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}b_{11}+\cdots+a_{nn}b_{n1} & \cdots & a_{n1}b_{1n}+\cdots+a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$$

και

$$A \circ B=A\cdot B$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & \cdots & a_{1n}b_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1}b_{n1} & \cdots & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+\cdots+a_{1n}b_{n1} & \cdots & a_{11}b_{1n}+\cdots+a_{1n}b_{nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}b_{11}+\cdots+a_{nn}b_{n1} & \cdots & a_{n1}b_{1n}+\cdots+a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a_{11}b_{11}=a_{11}b_{11}+\cdots+a_{1n}b_{n1}\ ,\dots,a_{1n}b_{1n}=a_{11}b_{1n}+\cdots+a_{1n}b_{nn} \\ \vdots \\ a_{n1}b_{n1}=a_{n1}b_{11}+\cdots+a_{nn}b_{n1},\dots,a_{nn}b_{nn}=a_{n1}b_{1n}+\cdots+a_{nn}b_{nn} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow a_{ij}=0 \text{ για κάθε } i \neq j.$$

Άρα οι πίνακες A και B είναι διαγώνιοι. □

Πίνακες $A \circ (A^{-1})^{T}$

Εδώ θα μελετηθεί η σχέση ανάμεσα στις ιδιοτιμές και τα στοιχεία της διαγωνίου ενός διαγωνοποιήσιμου πίνακα. Έστω λοιπόν $B=[\ b_{ij}\ ] \in M_n$ ένας διαγωνοποιήσιμος τετραγωνικός πίνακας n γραμμών και n στηλών, με ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2,\dots, \lambda_n$. Τότε, υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $A \in M_n$, ίδιων διαστάσεων, τέτοιος ώστε:

$$B = A\,[\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2,\dots, \lambda_n)]\,A^{-1},$$

όπου $\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2,\dots, \lambda_n)$ είναι ο διαγώνιος πίνακας του οποίου τα στοιχεία της διαγωνίου είναι οι ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2,\dots, \lambda_n$.
Κάνοντας τις πράξεις, προκύπτει για τα στοιχεία της διαγωνίου του πίνακα B το εξής:

$$\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{nn} \end{bmatrix} = [A \circ (A^{-1})^{T}]\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Από το παραπάνω φαίνεται ότι το διάνυσμα των ιδιοτιμών του B μετασχηματίζεται στο διάνυσμα των στοιχείων της διαγωνίου του, μέσω του πίνακα $A \circ (A^{-1})^{T}$.

Στην περίπτωση όπου ο A είναι ορθομοναδιαίος (δηλαδή $(\overline{A})^{T} = A^{-1}$), ισχύει ότι ο πίνακας $A \circ (A^{-1})^{T} = A \circ \overline{A}$ είναι διπλά στοχαστικός, το οποίο σημαίνει ότι το άθροισμα των στοιχείων των γραμμών και των στηλών αντίστοιχα θα ισούται με τη μονάδα. Αν επιπλέον, οι ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ είναι πραγματικές (δηλαδή, ο πίνακας B είναι ερμιτιανός), τότε το άθροισμα των στοιχείων της διαγωνίου του πίνακα B ισούται με το άθροισμα των ιδιοτιμών.

Ένα παράδειγμα εκτεταμένης χρήσης του πίνακα $A \circ (A^{-1})^{T}$, είναι η προσέγγιση αποτελεσμάτων διαδικασιών που χρησιμοποιούν οι χημικοί μηχανικοί. Στην περίπτωση αυτή ο πίνακας A περιγράφει τη σχέση ανάμεσα στα δεδομένα που εισάγονται και στα αποτελέσματα που προκύπτουν μέσα από τις διαδικασίες που χρησιμοποιούνται.

Θεώρημα 1.2.1. Έστω τετραγωνικός πίνακας $A \in M_{n\times n}$ (n γραμμών και n στηλών), ο οποίος είναι διαγωνοποιήσιμος και έχει ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ και διαγωνοποίηση της μορφής $A = SDS^{-1}$, όπου D είναι ένας διαγώνιος πίνακας με στοιχεία διαγωνίου τις ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (δηλαδή $d_{ii} = \lambda_i \; \forall \; 1 \leq i \leq n$ και $d_{ij} = 0 \;\; \forall \; i \neq j$). Τότε

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix} = [S \circ (S^{-1})^{T}] \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Απόδειξη: Έστω $A, D \in M_{n\times n}$ τετραγωνικοί πίνακες τέτοιοι ώστε $A = [a_{ij}]$ και $D = \mathrm{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n]$. Τότε ισχύει

$$A = SDS^{-1} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & s_{n2} & \cdots & s_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s'_{11} & s'_{12} & \cdots & s'_{1n} \\ s'_{21} & s'_{22} & \cdots & s'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s'_{n1} & s'_{n2} & \cdots & s'_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} s_{11}\lambda_1 & s_{12}\lambda_2 & \cdots & s_{1n}\lambda_n \\ s_{21}\lambda_1 & s_{22}\lambda_2 & \cdots & s_{2n}\lambda_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1}\lambda_1 & s_{n2}\lambda_2 & \cdots & s_{nn}\lambda_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s'_{11} & s'_{12} & \cdots & s'_{1n} \\ s'_{21} & s'_{22} & \cdots & s'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s'_{n1} & s'_{n2} & \cdots & s'_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} s_{11}\lambda_1 s'_{11} + s_{12}\lambda_2 s'_{21} + \cdots + s_{1n}\lambda_n s'_{n1} & \cdots & s_{11}\lambda_1 s'_{1n} + s_{12}\lambda_2 s'_{2n} + \cdots + s_{1n}\lambda_n s'_{nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1}\lambda_1 s'_{11} + s_{n2}\lambda_2 s'_{21} + \cdots + s_{nn}\lambda_n s'_{n1} & \cdots & s_{n1}\lambda_1 s'_{1n} + s_{n2}\lambda_2 s'_{2n} + \cdots + s_{nn}\lambda_n s'_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} s_{11}s'_{11}\lambda_1 + s_{12}s'_{21}\lambda_2 + \cdots + s_{1n}s'_{n1}\lambda_n & \cdots & s_{11}s'_{1n}\lambda_1 + s_{12}s'_{2n}\lambda_2 + \cdots + s_{1n}s'_{nn}\lambda_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1}s'_{11}\lambda_1 + s_{n2}s'_{21}\lambda_2 + \cdots + s_{nn}s'_{n1}\lambda_n & \cdots & s_{n1}s'_{1n}\lambda_1 + s_{n2}s'_{2n}\lambda_2 + \cdots + s_{nn}s'_{nn}\lambda_n \end{pmatrix}.$$

Άρα

$$[a_{ii}]=\sum_{j=1}^{n} s_{ij}s'_{ji}\lambda_j =\sum_{j=1}^{n}[s_{ij}][\,s_{ji}^{-1}]\,\lambda_j=\sum_{j=1}^{n}[s_{ij}][(S^{-1})_{ij}^{T}]\,\lambda_j=\sum_{j=1}^{n}[S\circ (S^{-1})^{T}]_{ij}\,\lambda_j$$

$$= s_{i1}s''_{i1}\lambda_1+s_{i2}s''_{i2}\lambda_2+\cdots+s_{in}s''_{in}\lambda_n=\begin{pmatrix} s_{i1}s''_{i1} & s_{i2}s''_{i2} & \cdots & s_{in}s''_{in}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}$$

$$= (S\circ (S^{-1})^{T}D)_i,$$

όπου s'_{ij} είναι το i,j-στοιχείο του πίνακα S^{-1} και s''_{ij} το i,j-στοιχείο $(S^{-1})^{T}$. □

<u>Θεώρημα 1.2.2.</u> Έστω A ένας τετραγωνικός πίνακας n γραμμών και n στηλών και $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ οι θετικές τετραγωνικές ρίζες των ιδιοτιμών των συμμετρικών πινάκων $A\cdot A^{T}$ ή $A^{T}\cdot A$. Έστω $A=UDV^{*}$, όπου D είναι ένας διαγώνιος πίνακας τέτοιος ώστε $[D_{ii}]=\sigma_i$ για κάθε $1\leq i\leq n$ και U,V πίνακες που ικανοποιούν τα $U\overline{U}^{T}=I$ και $V\overline{V}^{T}=I$. Τότε

$$\begin{bmatrix}a_{11}\\ a_{22}\\ \vdots\\ a_{nn}\end{bmatrix}=[U\circ \overline{V}]\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \vdots\\ \sigma_n\end{bmatrix}.$$

<u>Απόδειξη:</u> Με απλές πράξεις, έχουμε

$$A=UDV^{*}=\begin{pmatrix}u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n}\\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{nn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\sigma_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n}\\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}u_{11}\sigma_1 & u_{12}\sigma_2 & \cdots & u_{1n}\sigma_n\\ u_{21}\sigma_1 & u_{22}\sigma_2 & \cdots & u_{2n}\sigma_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ u_{n1}\sigma_1 & u_{n2}\sigma_2 & \cdots & u_{nn}\sigma_n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n}\\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}u_{11}\sigma_1 v_{11}+u_{12}\sigma_2 v_{21}+\cdots+u_{1n}\sigma_n v_{n1} & \cdots & u_{11}\sigma_1 v_{1n}+u_{12}\sigma_2 v_{2n}+\cdots+u_{1n}\sigma_n v_{nn}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ u_{n1}\sigma_1 v_{11}+u_{n2}\sigma_2 v_{21}+\cdots+u_{nn}\sigma_n v_{n1} & \cdots & u_{n1}\sigma_1 v_{1n}+u_{n2}\sigma_2 v_{2n}+\cdots+u_{nn}\sigma_n v_{nn}\end{pmatrix}$$

Άρα,

$$[A_{ii}]=\sum_{j=1}^{n} u_{ij}\sigma_j v_{ji}=\sum_{j=1}^{n} u_{ij}v_{ji}\sigma_j=\sum_{j=1}^{n}[u_{ij}][v_{ji}^{*}]\sigma_j$$

$$=\sum_{j=1}^{n}[u_{ij}][\overline{v}_{ji}^{T}]\sigma_j=\sum_{j=1}^{n}[u_{ij}][\overline{v}_{ij}]\sigma_j$$

$$=\sum_{j=1}^{n}[U\circ \overline{V}]_{ij}\sigma_j=[U\circ \overline{V}]\cdot\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \vdots\\ \sigma_n\end{bmatrix}.$$ □

1.3. Το γινόμενο Hadamard στην εξίσωση Lyapunov $GA + A^*G=H$

Έστω $A \in M_n$, τετραγωνικός πίνακας n διαστάσεων, με σύνολο ιδιοτιμών (φάσμα) το

$$\sigma(A)=\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}.$$

Σύμφωνα με γνωστό θεώρημα, η εξίσωση Lyapunov

$$GA + A^*G=H$$

έχει μοναδική λύση την $G=G_A(H)$ για κάθε ερμιτιανό πίνακα H, αν και μόνο αν $\overline{\lambda}_i+\lambda_j\neq 0$ για κάθε i,j =1,2,…,n.

Βέβαια για να μπορέσουμε να ισχυριστούμε ότι οι ιδιοτιμές του A ικανοποιούν την παραπάνω σχέση, θα πρέπει να κάνουμε μια πιο ισχυρή υπόθεση ότι ο A είναι ένας πίνακας όπου κάθε ιδιοτιμή του έχει θετικό πραγματικό μέρος. Αν επιπλέον ο A είναι και διαγωνοποιήσιμος, δηλαδή $A=S\Lambda S^{-1}$, όπου $\Lambda=\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_n)$, τότε υπάρχει μια απλή φόρμουλα για τη συνάρτηση $G_A(H)$ η οποία περιλαμβάνει το γινόμενο Hadamard και ικανοποιεί την ισότητα

$$GA + A^*G=GS\Lambda S^{-1}+(S^{-1})^*\overline{\Lambda}S^*G=H \Rightarrow (S^*GS)\Lambda+\overline{\Lambda}(S^*GS)= S^*HS.$$

Για κάθε πίνακα $B=[b_{ij}] \in M_n$, ισχύει

$$B\Lambda+\overline{\Lambda}B=[b_{ij}\lambda_j]+[\overline{\lambda}_i b_{ij}]=[(\overline{\lambda}_i+\lambda_j)\, b_{ij}],$$

το οποίο είναι γινόμενο Hadamard.

Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι $\overline{\lambda}_i+\lambda_j\neq 0$ και ορίσουμε $L(A)\equiv [(\overline{\lambda}_i + \lambda_j)^{-1}]$, έχουμε ότι

$$S^*GS=L(A)\circ(S^*HS),$$

το οποίο οδηγεί στον παρακάτω τύπο:

$$G_A(H)=(S^{-1})^*[L(A)\circ(S^*HS)]\, S^{-1}, \quad A=S\Lambda S^{-1}$$

για κάθε λύση της εξίσωσης Lyapunov $GA + A^*G=H$ όταν ο A είναι διαγωνοποιήσιμος και $\overline{\lambda}_i+\lambda_j\neq 0$ $\forall\, \lambda_i, \lambda_j \in \sigma(A)$.

1.4. Πίνακες συνδιακύμανσης και γινόμενο Hadamard

Έστω $X=[X_1, \ldots, X_n]^T$ και $Y=[Y_1, \ldots, Y_n]^T$ ζεύγη τυχαίων μεταβλητών, για τα οποία ισχύει ότι $E(X)=E(X_i)=0$ και $E(Y)= E(Y_i)=0$, αντίστοιχα, όπου με $E(\cdot)$ συμβολίζουμε τη μέση τιμή. Ο πίνακας συνδιακύμανσης έχει τον παρακάτω γενικό τύπο:

$$COV(X)=E([X-E(X)]\,[X - E(X)]^*)\Rightarrow COV(X)=E(XX^*)=[E(X_i\overline{X}_j)],$$

καθώς στην περίπτωση μας $E(X)=0$.
Αν X και Y είναι ανεξάρτητες, τότε η τυχαία μεταβλητή $Z\equiv X\circ Y$ έχει μέση τιμή 0 και πίνακα συνδιακύμανσης ο οποίος προκύπτει από τον πίνακα συνδιακύμανσης των X και Y ως ένα γινόμενο Hadamard:

$$\begin{aligned} COV(Z) &= E(ZZ^*) = E((X\circ Y)(X \circ Y)^*) = E((X_i Y_i)\cdot(\overline{X_i Y_i})^T) \\ &= E(X_i Y_i \overline{Y}_i^T \overline{X}_i^T) = E(X_i \overline{X}_i^T Y_i \overline{Y}_i^T) = E(X_i \overline{X}_j Y_i \overline{Y}_j) \\ &= E(X_i \overline{X}_j) E(Y_i \overline{Y}_j) = COV(X)\circ COV(Y). \end{aligned}$$

Η προτελευταία ισότητα ισχύει λόγω ανεξαρτησίας των X_i, Y_i.
Μια σημαντική ιδιότητα του πίνακα συνδιακύμανσης είναι ότι είναι θετικά ημιορισμένος. Πράγματι,

$$\xi^*\, COV(X)\xi = (\overline{\xi_1} \quad \overline{\xi_2} \quad \cdots \quad \overline{\xi_n}) E(X_i \overline{X}_j) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

$$= (\overline{\xi_1} E(X_1 \overline{X}_1) + \cdots + \overline{\xi_n} E(X_n \overline{X}_1) \quad \cdots \quad \overline{\xi_1} E(X_1 \overline{X}_n) + \cdots + \overline{\xi_n} E(X_n \overline{X}_n)) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} E(X_i \overline{X}_j)\, \bar{\xi}_i \xi_i = \sum_{i,j=1}^{n} E(\bar{\xi}_i X_i \xi_j \overline{X}_j)$$

$$= E \sum_{i,j=1}^{n} (\bar{\xi}_i X_i \xi_j \overline{X}_j) = E[|\sum_{i=1}^{n} \bar{\xi}_i X_i|^2] \geq 0, \text{ για κάθε } \xi = [\xi_i] \in \mathbb{C}^n.$$

Για τον υπολογισμό αυτό έχουμε στηριχτεί στο γεγονός ότι ο τελεστής της μέσης τιμής είναι γραμμικός και θετικός. Χρησιμοποιήσαμε συγκεκριμένα την εξής ιδιότητα της μέσης τιμής:

$$E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y).$$

Επιπλέον, αφού το γινόμενο Hadamard δύο πινάκων συνδιακυμάνσης είναι και αυτό ένας πίνακας συνδιακύμανσης, μπορούμε να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι το γινόμενο Hadamard δύο πινάκων συνδιακυμάνσης είναι θετικά ημιορισμένο. Εφόσον κάθε θετικά ημιορισμένος πίνακας είναι ο πίνακας συνδιακυμάνσεων ενός διανύσματος Γκαουσιανών τυχαίων μεταβλητών, αυτές οι παρατηρήσεις δίνουν μια πιθανοθεωρητική απόδειξη του θεωρήματος για το γινόμενο Schur.

1.5. Μερικές βασικές παρατηρήσεις

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε κάποιες βασικές έννοιες από την άλγεβρα οι οποίες είναι πολύ χρήσιμες για το γινόμενο Hadamard. Σε αντίθεση με τον συνήθη πολλαπλασιασμό πινάκων, στο γινόμενο πινάκων κατά Hadamard ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα.

__Ορισμός 1.5.1.__ Έστω $A_{m\times n}$ ένας πίνακας διαστάσεων $m \times n$ και $B_{p\times q}$ ένας πίνακας διαστάσεων $p \times q$. Τότε το γινόμενο Kronecker $A\otimes B$ είναι ένας $C_{pm\times qn}$ πίνακας, τέτοιος ώστε

$$A\otimes B=\begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \cdots & a_{11}b_{1q} & \cdots & a_{1n}b_{11} & a_{1n}b_{12} & \cdots & a_{1n}b_{1q} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & \cdots & a_{11}b_{2q} & \cdots & a_{1n}b_{21} & a_{1n}b_{22} & \cdots & a_{1n}b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11}b_{p1} & a_{11}b_{p2} & \cdots & a_{11}b_{pq} & \cdots & a_{1n}b_{p1} & a_{1n}b_{p2} & \cdots & a_{1n}b_{pq} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{11} & a_{m1}b_{12} & \cdots & a_{m1}b_{1q} & \cdots & a_{mn}b_{11} & a_{mn}b_{12} & \cdots & a_{mn}b_{1q} \\ a_{m1}b_{21} & a_{m1}b_{22} & \cdots & a_{m1}b_{2q} & \cdots & a_{mn}b_{21} & a_{mn}b_{22} & \cdots & a_{mn}b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{p1} & a_{m1}b_{p2} & \cdots & a_{m1}b_{pq} & \cdots & a_{mn}b_{p1} & a_{mn}b_{p2} & \cdots & a_{mn}b_{pq} \end{bmatrix}.$$

__Λήμμα 1.5.2.__ Έστω $A_{m\times n}$, $B_{m\times n}$ δύο πίνακες m γραμμών και n στηλών. Τότε, ισχύει ότι

$$A \circ B=(A\otimes B)(\alpha,\beta),$$

όπου $\alpha=\{1,m+2,2m+3,\ldots,m^2\}$ και $\beta=\{1,n+2,2n+3,\ldots,n^2\}$.

__Λήμμα 1.5.3.__ Το γινόμενο Hadamard είναι ένας υποπίνακας του γινομένου Kronecker.

__Απόδειξη__: Έστω $A_{m\times n}$ ένας πίνακας διαστάσεων $m \times n$ και $B_{p\times q}$ ένας πίνακας διαστάσεων $p \times q$. Τότε το γινόμενο Kronecker $A\otimes B=\begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}$ είναι ένας πίνακας mp γραμμών και nq στηλών. Κάθε στοιχείο του πίνακα A πολλαπλασιάζεται με όλα τα στοιχεία του πίνακα B, άρα τα στοιχεία $a_{ij}b_{ij}$ σίγουρα αποτελούν στοιχεία του $A\otimes B$. Όμως

$$A \circ B= [a_{ij}][b_{ij}],$$

Άρα ο $A \circ B$ είναι υποπίνακας του $A\otimes B$. □

__Λήμμα 1.5.4.__ Έστω $A_{m\times n}$, $B_{m\times n}$ δύο πίνακες διαστάσεων $m\times n$ και $D_{m\times m}$, $E_{n\times n}$ δύο διαγώνιοι πίνακες (ο D m γραμμών και m στηλών και ο E n γραμμών και n στηλών). Τότε

$$D(A \circ B)E= (DAE)\circ B=(DA)\circ(BE)=(AE)\circ(DB)=A\circ(DBE).$$

Απόδειξη: Έστω λοιπόν $A=[\ a_{ij}\ ]$, $B=[\ b_{ij}\ ]$, $D=diag(\ d_{11}\ ,\ d_{22},\dots,d_{mm}\ )$ και $E=diag(e_{11},e_{22},\dots,e_{nn})$. Τότε

$$(D(A\circ B)E)_{ij}=$$

$$=diag(d_{11},d_{22},\dots,d_{mm})\cdot\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} & \cdots & a_{1n}b_{1n} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} & \cdots & a_{2n}b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{m1} & a_{m2}b_{m2} & \cdots & a_{mn}b_{mn} \end{pmatrix}\cdot diag(e_{11},e_{22},\dots,e_{nn})$$

$$=\begin{pmatrix} d_{11}a_{11}b_{11} & d_{11}a_{12}b_{12} & \cdots & d_{11}a_{1n}b_{1n} \\ d_{22}a_{21}b_{21} & d_{22}a_{22}b_{22} & \cdots & d_{22}a_{2n}b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{mm}a_{m1}b_{m1} & d_{mm}a_{m2}b_{m2} & \cdots & d_{mm}a_{mn}b_{mn} \end{pmatrix}\cdot diag(e_{11},e_{22},\dots,e_{nn})$$

$$=\begin{pmatrix} d_{11}a_{11}b_{11}e_{11} & d_{11}a_{12}b_{12}e_{22} & \cdots & d_{11}a_{1n}b_{1n}e_{nn} \\ d_{22}a_{21}b_{21}e_{11} & d_{22}a_{22}b_{22}e_{22} & \cdots & d_{22}a_{2n}b_{2n}e_{nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{mm}a_{m1}b_{m1}e_{11} & d_{mm}a_{m2}b_{m2}e_{22} & \cdots & d_{mm}a_{mn}b_{mn}e_{nn} \end{pmatrix}$$

$$=(d_{ii}a_{ij}b_{ij}e_{jj})=(d_{ii}a_{ij}e_{jj}b_{ij}).$$

Οπότε θα έχουμε:

$$(d_{ii}a_{ij}e_{jj}b_{ij})=(diag(d_{11},d_{22},\dots,d_{mm})\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\cdot$$
$$\cdot\, diag(e_{11},e_{22},\dots,e_{nn}))\cdot\ b_{ij}$$

$$=(DAE)_{ij}b_{ij}=(DAE)\circ B.$$

$$(d_{ii}a_{ij}e_{jj}b_{ij})=\left(diag(d_{11},d_{22},\dots,d_{mm})\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\right)_{ij}\cdot$$
$$\cdot\left(diag(e_{11},e_{22},\dots,e_{nn})\cdot\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}\right)_{ij}$$

$$=(DA)_{ij}\cdot(EB)_{ij}=(DA)_{ij}\cdot(BE)_{ij}=(DA)\circ(BE).$$

$$(d_{ii}a_{ij}e_{jj}b_{ij}) = \mathrm{diag}(d_{11}, d_{22}, \dots, d_{mm}) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \mathrm{diag}(e_{11}, e_{22}, \dots, e_{nn})$$

$$\cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= d_{ii}(AE)_{ij}b_{ij} = d_{ii}b_{ij}(AE)_{ij} = (DB)_{ij}(AE)_{ij} = (AE)_{ij}(DB)_{ij}$$

$$= (AE) \circ (DB).$$

$$(d_{ii}a_{ij}e_{jj}b_{ij}) = (a_{ij}d_{ii}e_{jj}b_{ij}) = (a_{ij}d_{ii}b_{ij}e_{jj})$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \left(\mathrm{diag}(d_{11}, d_{22}, \dots, d_{mm}) \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \cdot \mathrm{diag}(e_{11}, e_{22}, \dots, e_{nn}) \right)_{ij}$$

$$= A \cdot (DBE)_{ij} = A \circ (DBE).$$ □

Για τις επόμενες παρατηρήσεις μας και γενικά σε αυτό το κεφάλαιο, θα συμβολίσουμε με $\mathrm{diag}(x)$ το διαγώνιο πίνακα του οποίου τα στοιχεία της διαγωνίου θα είναι το διάνυσμα $x \in \mathbb{C}^n$, από τον πίνακα D_x. Επιπλέον $D_x \cdot e = x$, στον οποίον με e συμβολίζουμε το διάνυσμα $[1,1,\dots,1]^T$. Οι δύο παρατηρήσεις που θα συναντήσουμε παρακάτω αναφέρονται σε κάποιες επιπλέον σχέσεις ανάμεσα στο γινόμενο Hadamard και το κλασικό γινόμενο πινάκων κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις.

Λήμμα 1.5.5. Έστω $A_{m\times n}$, $B_{m\times n}$ δύο πίνακες διαστάσεων $m \times n$ (m γραμμών και n στηλών) και $x=[x_j]$ ένα διάνυσμα στο $\mathbb{C}^n$. Τότε το i-οστό στοιχείο της διαγωνίου του πίνακα AD_xB^T συμπίπτει με το i-οστό στοιχείο του διανύσματος $(A\circ B)x$, i=1,…,m.

Απόδειξη: Έστω λοιπόν $A=[a_{ij}]$, $B=[b_{ij}]$, και $x=[x_j]$ και $D_x=\mathrm{diag}[x_1, \ x_2, \ \cdots \ , x_n]$ με i=1,…,m και j=1,…,n. Τότε ο πίνακας AD_xB^T είναι:

$$(AD_xB^T) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{m1} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1n} & b_{2n} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 & a_{12}x_2 & \cdots & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & a_{22}x_2 & \cdots & a_{2n}x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & a_{m2}x_2 & \cdots & a_{mn}x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{m1} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1n} & b_{2n} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}x_1 + a_{12}b_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}b_{1n}x_n & \cdots & \cdots & a_{11}b_{m1}x_1 + a_{12}b_{m2}x_2 + \cdots + a_{1n}b_{mn}x_n \\ a_{21}b_{11}x_1 + a_{22}b_{12}x_2 + \cdots + a_{2n}b_{1n}x_n & \cdots & \cdots & a_{21}b_{m1}x_1 + a_{22}b_{m2}x_2 + \cdots + a_{2n}b_{mn}x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{11}x_1 + a_{m2}b_{12}x_2 + \cdots + a_{mn}b_{1n}x_n & \cdots & \cdots & a_{m1}b_{m1}x_1 + a_{m2}b_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}b_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

Όμως,

$$[(A\circ B)x]=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} & \cdots & a_{1n}b_{1n} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} & \cdots & a_{2n}b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{m1} & a_{m2}b_{m2} & \cdots & a_{mn}b_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}x_1 + a_{12}b_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}b_{1n}x_n \\ a_{21}b_{21}x_1 + a_{22}b_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}b_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}b_{m1}x_1 + a_{m2}b_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}b_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

Άρα τα i-στοιχεία της διαγωνίου του πίνακα (AD_xB^T) ταυτίζονται με τα i-στοιχεία του διανύσματος $(A\circ B)x$. □

Λήμμα 1.5.6. Έστω $A_{n\times m}$, $B_{n\times m}$, $C_{n\times m}$, τρεις πίνακες διαστάσεων n×m (n γραμμών και m στηλών). Το i-οστό στοιχείο της διαγωνίου του πίνακα $(A\circ B)C^T$ συμπίπτει με το i-οστό στοιχείο του πίνακα $(A\circ C)B^T$ $\forall$ i=1,2,...,n.

Απόδειξη: Έστω $A=[a_{ij}]$, $B=[b_{ij}]$ και $C=[c_{ij}]$. Τότε,

$$((A\circ B)C^T)_{ii}=\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}\, b_{ij})c_{ij}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{ij}c_{ij}$$

και

$$((A\circ C)B^T)_{ii}=\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}\, c_{ij})b_{ij}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, c_{ij}b_{ij}.$$ □

Λήμμα 1.5.7. Για κάθε $A_{m\times n}$, $B_{m\times n} \in M_{m\times n}$, πίνακες διαστάσεων m×n (m γραμμών και n στηλών) και $y\in\mathbb{C}^m$ και $x\in\mathbb{C}^n$ διανύσματα στο $\mathbb{C}^m$ και $\mathbb{C}^n$ αντίστοιχα, έχουμε ότι

$$y^*(A\circ B)x=\mathrm{tr}(\,D_y^*AD_xB^T).$$

Απόδειξη: Έστω λοιπόν $A=[a_{ij}]$, $B=[b_{ij}]$, και $x=[x_j]$, $y=[y_i]$ με i=1,…,m και j=1,…,n.

$$y^*(A\circ B)x=(\bar{y}_1 \quad \bar{y}_2 \quad \cdots \quad \bar{y}_m)\cdot\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} & \cdots & a_{1n}b_{1n} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} & \cdots & a_{2n}b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{m1} & a_{m2}b_{m2} & \cdots & a_{mn}b_{mn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$
$$=(a_{11}b_{11}\bar{y}_1 + \cdots + a_{m1}b_{m1}\bar{y}_m \quad \cdots \quad a_{1n}b_{1n}\bar{y}_1 + \cdots + a_{mn}b_{mn}\bar{y}_m)\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$=(a_{11}b_{11}\bar{y}_1x_1+\cdots+a_{m1}b_{m1}\bar{y}_mx_1 \quad \cdots \quad a_{1n}b_{1n}\bar{y}_1x_n+\cdots+a_{mn}b_{mn}\bar{y}_mx_n).$$

Θα υπολογίσουμε τώρα τον πίνακα $D_y^*AD_xB^T$, ο οποίος είναι

$$D_y^*AD_xB^T=\begin{pmatrix}\bar{y}_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \bar{y}_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \bar{y}_m\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & x_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & x_n\end{pmatrix}$$

$$\cdot\begin{pmatrix}b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{m1}\\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{m2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{1n} & b_{2n} & \cdots & b_{mn}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\bar{y}_1a_{11} & \bar{y}_1a_{12} & \cdots & \bar{y}_1a_{1n}\\ \bar{y}_2a_{21} & \bar{y}_2a_{22} & \cdots & \bar{y}_2a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \bar{y}_ma_{m1} & \bar{y}_ma_{m2} & \cdots & \bar{y}_ma_{mn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & x_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & x_n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{m1}\\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{m2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{1n} & b_{2n} & \cdots & b_{mn}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\bar{y}_1a_{11}x_1 & \cdots & \bar{y}_1a_{1n}x_n\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \bar{y}_ma_{m1}x_1 & \cdots & \bar{y}_ma_{mn}x_n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_{11} & \cdots & b_{m1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{1n} & \cdots & b_{mn}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\bar{y}_1a_{11}x_1b_{11}+\cdots+\bar{y}_1a_{1n}x_nb_{1n} & \cdots & \bar{y}_1a_{11}x_1b_{m1}+\cdots+\bar{y}_1a_{1n}x_nb_{mn}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \bar{y}_ma_{m1}x_1b_{11}+\cdots+\bar{y}_ma_{mn}x_nb_{1n} & \cdots & \bar{y}_ma_{m1}x_1b_{m1}+\cdots+\bar{y}_ma_{mn}x_nb_{mn}\end{pmatrix}.$$

Άρα,

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(D_y^*AD_xB^T)&=\bar{y}_1a_{11}x_1b_{11}+\cdots+\bar{y}_1a_{1n}x_nb_{1n}+\cdots+\bar{y}_ma_{m1}x_1b_{m1}+\cdots+\bar{y}_ma_{mn}x_nb_{mn}\\ &=y^*(A\circ B)x.\end{aligned}$$ □

Η παρακάτω παρατήρηση δε σχετίζεται τόσο με το γινόμενο Hadamard, αλλά είναι χρήσιμη σε υπολογισμούς ανισοτήτων που περιλαμβάνουν γινόμενα Hadamard.

Λήμμα 1.5.8. Υποθέτουμε ότι ο $A\in M_{n\times n}$ τετραγωνικός πίνακας διάστασης n είναι θετικά ορισμένος και έστω ότι $B\equiv A^{-1}$. Τότε για κάθε

$$A=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{12}^* & A_{22}\end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B=\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{12}^* & B_{22}\end{bmatrix},$$

όπου $A_{11}, B_{11}\in M_{k\times k}$, ο πίνακας

$$A-\begin{bmatrix}B_{11}^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11}-B_{11}^{-1} & A_{12}\\ A_{12}^* & A_{22}\end{bmatrix}$$

είναι θετικά ημιορισμένος και έχει βαθμό $n-k$.

Απόδειξη: Το B_{11}^{-1} μπορεί να γραφεί ως ένα συμπλήρωμα Schur, $B_{11}^{-1} = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{12}^{*}$ (H.J. Matrix Analysis (0.7.3)). Τότε έχουμε ότι

$$A - \begin{bmatrix} B_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{12}A_{22}^{-1}A_{12}^{*} & A_{12} \\ A_{12}^{*} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{12}(A_{22})^{-\frac{1}{2}} \\ (A_{22})^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{12}(A_{22})^{-\frac{1}{2}} \\ (A_{22})^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}^{*}$$

και ο ισχυρισμός έπεται διότι ο τελευταίος πίνακας είναι βαθμού n-k και θετικά ημιορισμένος. Εδώ $(A_{22})^{\frac{1}{2}}$ η τετραγωνική ρίζα του μοναδικά θετικά ορισμένου ερμιτιανού πίνακα και $(A_{22})^{-\frac{1}{2}}$ ο αντίστροφος αυτού. □

Θεώρημα 1.5.9. Έστω οι πίνακες $A, B \in M_{m\times n}$. Τότε

$$\operatorname{rank}(A\circ B) \leq (\operatorname{rank}(A))\cdot(\operatorname{rank}(B)).$$

Απόδειξη: Κάθε πίνακας βαθμού r μπορεί να γραφεί ως το άθροισμα r πλήθους πινάκων βαθμού ένα, όπου ο καθένας παράγεται από ένα εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων. Έτσι, αν ο βαθμός του A είναι r_1 και του B είναι r_2, έχουμε ότι

$$A=\sum_{i=1}^{r_1} x_i\, y_i^{*} \quad \text{και} \quad B=\sum_{j=1}^{r_2} u_j\, v_j^{*},$$

όπου $x_i, u_j \in \mathbb{C}^m$ και $y_i, v_j \in \mathbb{C}^n$, $i=1,\dots, r_1$ και $j=1,\dots,r_2$. Τότε

$$A\circ B=\sum_{i=1}^{r_1}\sum_{j=1}^{r_2}(x_i \circ u_j)(y_i \circ v_j)^{*},$$

το οποίο μας δείχνει ότι ο πίνακας A∘B είναι ένα άθροισμα από το πολύ $r_1 \cdot r_2$ πίνακες βαθμού 1. Συνεπώς, ο βαθμός του A∘B είναι

$$\operatorname{rank}(A\circ B) \leq r_1 \cdot r_2 = (\operatorname{rank}(A))\cdot(\operatorname{rank}(B)).$$ □

Παρακάτω παρουσιάζεται ένα γενικό αποτέλεσμα, το οποίο παρατηρήθηκε από τους Ballantine και Styan.

Παρατηρούμε ότι η ισότητα στη παραπάνω σχέση ισχύει όταν οι βαθμοί των πινάκων A και B υπερβαίνουν το ένα. Αν m=n=p, θα πρέπει παρόλα αυτά να ισχύει ότι p≥4. Για p=4, για παράδειγμα,

$$\text{αν } A=\begin{pmatrix} 1&1&0&0\\ 1&1&0&0\\ 0&0&1&1\\ 0&0&1&1 \end{pmatrix} \text{ και } B=\begin{pmatrix} 1&0&1&0\\ 0&1&0&1\\ 1&0&1&0\\ 0&1&0&1 \end{pmatrix}, \text{ τότε } A\circ B=\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}=I,$$

και ο $A \circ B$ έχει βαθμό 4. Όμως οι πίνακες A και B έχουν βαθμό 2 (καθώς έχουν 2 γραμμικά ανεξάρτητες γραμμές ο καθένας), και συνεπώς παρατηρούμε ότι ισχύει η ισότητα.

1.6. Ένα θεώρημα για το γινόμενο Schur.

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε και θα αποδείξουμε ένα θεώρημα για το γινόμενο Schur. Το θεώρημα αυτό συνδέει θετικά ορισμένους πίνακες με το γινόμενο Hadamard κάτι το οποίο είναι αρκετά σημαντικό όταν θέλουμε να αναλύσουμε ορίζουσες πινάκων. Το γεγονός ότι ο υπόχωρος των θετικά ορισμένων (ή ημιορισμένων) ερμιτιανών πινάκων ενός δεδομένου μεγέθους είναι κλειστός υπό τον πολλαπλασιασμό Hadamard είναι θεμελιώδες για πολλούς λόγους. Ήταν πιθανόν το πρώτο σημαντικό αποτέλεσμα που δημοσιεύτηκε για το γινόμενο Hadamard, και πολλά άλλα από τα αποτελέσματα του προέκυψαν ως γενικεύσεις αυτού. Είναι ένα καλό παράδειγμα για να καταλάβουμε ότι από αλγεβρική άποψη, το γινόμενο Hadamard, σε συγκεκριμένες περιπτώσεις μπορεί να είναι ένα πιο "φυσικό" γινόμενο από το κλασικό γινόμενο όπως το ξέρουμε. Να σημειωθεί ότι αν ένας πίνακας A είναι θετικά ημιορισμένος τότε κάθε ιδιοτιμή του είναι θετική και συνεπώς

$$\det A=\prod_{i=1}^{n} \lambda_i \geq 0.$$

Λήμμα 1.6.1. Έστω $A \in M_{n\times n}$ ένας τετραγωνικός πίνακας n γραμμών και n στηλών ο οποίος είναι θετικά ημιορισμένος και έχει βαθμό 1. Τότε ο A μπορεί να γραφτεί

$$A=x\,x^T, \text{ όπου } x \text{ είναι ένα διάνυσμα του } \mathbb{C}^n.$$

Απόδειξη: Έστω $A \in M_{n\times n}$ ένας πίνακας βαθμού 1 ο οποίος είναι θετικά ημιορισμένος. Αφού είναι θετικά ημιορισμένος τότε είναι ερμιτιανός, άρα και κανονικός, δηλαδή $A=UDU^*$, όπου $D=[\lambda_1,\dots,\lambda_n]$ ένας διαγώνιος πίνακας με στοιχεία τις ιδιοτιμές του A και U ένας ορθογώνιος πίνακας με στήλες τα ιδιοδιανύσματα του A. Επιπλέον, όπως έχουμε αναφέρει, αφού ο A είναι θετικά ημιορισμένος τότε $\lambda_i > 0$, $\forall$ i=1,…,n.
Έστω $X^*=\{u_1,\dots,u_n\}$ ο χώρος στηλών του U και $Y^*=\{u_1,\dots,u_n\}$ οι γραμμές του U^* (οι οποίες είναι οι γραμμές του U^T). Ορίζουμε $A_k \equiv \lambda_k u_k u_k^T$ και βλέπουμε ότι $A=A_1+\cdots+A_n$. Αφού ο A έχει βαθμό 1, τότε

$$A=A_1+O+\cdots+O=A_1=\lambda_1 u_1 u_1^T.$$

Επίσης, $\lambda_1 > 0$ και συνεπώς μπορούμε να ορίσουμε $x=\sqrt{\lambda_1}u_1$. Έτσι έχουμε ότι

$$x\,x^T=(\sqrt{\lambda_1}u_1)(\sqrt{\lambda_1}u_1)^T=\sqrt{\lambda_1}u_1u_1^T\sqrt{\lambda_1}=\sqrt{\lambda_1}\sqrt{\lambda_1}u_1u_1^T=\lambda_1u_1u_1^T=A.$$

Συνεπώς, κάθε θετικά ημιορισμένος πίνακας βαθμού ένα μπορεί να γραφεί ως

$$A=x\,x^T \text{ με } x\in\mathbb{C}^n. \qquad \square$$

Λήμμα 1.6.2. Έστω B ένας τετραγωνικός πίνακας n γραμμών και n στηλών, ο οποίος είναι θετικά ημιορισμένος και έχει βαθμό r. Τότε, αν $B=B_1+B_2+\cdots+B_r$, ισχύει ότι οι πίνακες $B_1,B_2,\dots,B_r$ είναι επίσης θετικά ημιορισμένοι.

Απόδειξη: Έστω $B \in M_{n\times n}$ ένας θετικά ημιορισμένος πίνακας βαθμού r με αναπαράσταση $B=B_1+B_2+\cdots+B_r$, όπου $B_1,B_2,\dots,B_r$ είναι πίνακες βαθμού ένα. Όπως είπαμε και παραπάνω, αφού ο B είναι θετικά ημιορισμένος, τότε είναι ερμιτιανός και συνεπώς ισχύει B= UDU^*. Άρα θα έχουμε $B_k = UD_kU^*$, όπου U είναι ένας ορθογώνιος πίνακας και D_k ένας διαγώνιος πίνακας με στοιχεία διαγωνίου τις ιδιοτιμές λ_k, δηλαδή $[D_k]_{kk} = \lambda_k$ και $[D_k]_{ij} = 0$ για $i \neq j$ με $\lambda_k > 0$ (αφού ο B είναι θετικά ημιορισμένος). Επομένως, οι πίνακες D_k είναι θετικά ημιορισμένοι για κάθε k=1,…,r. Επιπλέον,

$$<B_k x, x> = <UD_kU^*x, x> = <D_kU^*x, U^*x> \geq 0, \text{ για κάθε } k=1,\ldots,r .$$

Άρα, οι πίνακες B_k είναι θετικά ημιορισμένοι για κάθε k=1,…,r . □

<u>**Λήμμα 1.6.3.**</u> Έστω B ένας τετραγωνικός πίνακας n γραμμών και n στηλών ο οποίος έχει βαθμό r. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι οι πίνακες $B_1, B_2, \ldots, B_r$ τάξης ένα, για τους οποίους ισχύει $B = B_1 + B_2 + \cdots + B_r$, είναι θετικά ημιορισμένοι. Τότε και ο B θα είναι θετικά ημιορισμένος.

<u>**Απόδειξη:**</u> Έστω $B \in M_{n\times n}$ τέτοιος ώστε

$$B = B_1 + B_2 + \cdots + B_r ,$$

με $B_1, B_2, \ldots, B_r$ θετικά ημιορισμένους πίνακες βαθμού ένα και $x \in \mathbb{C}^n$. Τότε

$$\begin{aligned} <Bx, x> &= <(B_1 + B_2 + \cdots + B_r)x, x> \\ &= <B_1x + B_2x + \cdots + B_rx, x> \\ &= <B_1x, x> + \cdots + <B_rx, x> \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Επομένως, ο B είναι θετικά ημιορισμένος. □

<u>**Θεώρημα 1.6.4.**</u> <u>(Θεώρημα για το γινόμενο Schur)</u> Υποθέτουμε ότι $A, B \in M_{n\times n}$ είναι δύο τετραγωνικοί πίνακες n γραμμών και στηλών οι οποίοι είναι θετικά ημιορισμένοι. Τότε ο $A\circ B$ είναι επίσης θετικά ημιορισμένος.

<u>**Απόδειξη:**</u> Έστω $A, B \in M_{n\times n}$ θετικά ημιορισμένοι πίνακες. Υποθέτουμε ότι ο B έχει μηδενικό βαθμό, το οποίο ισχύει αν και μόνο αν B=O . Αφού B=O τότε $A\circ B = O$, ο οποίος είναι θετικά ημιορισμένος. Υποθέτουμε τώρα ότι ο B είναι βαθμού 1. Τότε από το παραπάνω Λήμμα 1.6.1 ισχύει ότι $B = x\,x^T$ για κάθε $x \in \mathbb{C}^n$. Οπότε έχουμε

$$[A \circ B]_{ij} = [a_{ij}]\,[b_{ij}] = [a_{ij}][\,x\,x^T] = [a_{ij}][x]_i[x^T]_j = [x]_i[a_{ij}]\,[x^T]_j = [D_xAD_x]_{ij},$$

όπου D_x είναι ένας διαγώνιος πίνακας με στοιχεία διαγωνίου τα στοιχεία του διανύσματος x.
Αφού ο A είναι θετικά ημιορισμένος, τότε και ο D_xAD_x θα είναι θετικά ημιορισμένος, καθώς αν $v \in \mathbb{C}^n$ ένα διάνυσμα, τότε

$$<D_xAD_xv, v> = <AD_xv, (D_x^*)v> = <AD_xv, D_xv> = <A(D_xv), (D_xv)> \geq 0.$$

Τέλος, υποθέτουμε ότι ο B έχει βαθμό r, με $1<r\leq n$. Τότε από το Λήμμα 1.6.2 ισχύει ότι

$$B = B_1 + B_2 + \cdots + B_r,$$

όπου οι B_i, i=1,…,r, είναι θετικά ημιορισμένοι. Τότε

$$A\circ B = A\circ(B_1 + B_2 + \cdots + B_r) = A\circ B_1 + A\circ B_2 + \cdots + A\circ B_r,$$

όπου ο $A\circ B_i$ θετικά ημιορισμένος για κάθε i, και συνεπώς, και το άθροισμα τους είναι θετικά ημιορισμένος πίνακας. Άρα για κάθε δύο πίνακες A,B θετικά ημιορισμένους, ισχύει ότι και ο $A\circ B$ είναι θετικά ημιορισμένος. ◻

Η ευρύτερη έννοια των παραπάνω δίνεται από το θεώρημα που ακολουθεί. Σημειώνεται ότι το γινόμενο Hadamard δύο ερμιτιανών πινάκων, είναι ένας ερμιτιανός πίνακας και ένας θετικά ημιορισμένος πίνακας είναι σίγουρα ερμιτιανός.

<u>Θεώρημα 1.6.5.</u> Αν $A, B \in M_{n\times n}$ δύο πίνακες διαστάσεων $n\times n$ θετικά ημιορισμένοι, τότε και ο $A\circ B$ είναι θετικά ημιορισμένος. Αν επιπλέον, ο B είναι θετικά ορισμένος και ο A δεν έχει διαγώνιο στοιχείο ίσο με το 0, τότε ο πίνακας $A\circ B$ είναι θετικά ορισμένος.
Πιο συγκεκριμένα, αν και οι δύο πίνακες είναι θετικά ορισμένοι, τότε και ο $A\circ B$ θα είναι θετικά ορισμένος.

<u>Απόδειξη:</u> Χρησιμοποιώντας τη δεύτερη υπόθεση και το Λήμμα 1.5.7 προκύπτει ότι:

$$x^*(A\circ B)x = \mathrm{tr}(D_x^* A D_x B^T), \quad \forall\, x \text{ διάνυσμα στο } \mathbb{C}^n. \qquad \textbf{(1)}$$

Από γνωστό θεώρημα έχουμε ότι το πλήθος των αρνητικών και θετικών ιδιοτιμών του γινομένου ενός ερμιτιανού και ενός θετικά ορισμένου πίνακα είναι το ίδιο με το αντίστοιχο πλήθος των αρνητικών και θετικών ιδιοτιμών του ερμιτιανού πίνακα.
Για κάθε $x \in \mathbb{C}^n$, ο πίνακας $D_x^* A D_x$ είναι θετικά ημιορισμένος και, αν επιπλέον $x \neq 0$ και ο A δεν έχει κανένα μηδενικό στοιχείο στη διαγώνιο, τότε $D_x^* A D_x \neq 0$ και ως εκ τούτου έχει τουλάχιστον μια θετική ιδιοτιμή.
Αν ο πίνακας B είναι θετικά ορισμένος, τότε θα ισχύει το ίδιο και για τον B^T. Επιπλέον, αν οι ιδιοτιμές του πίνακα $(D_x^* A D_x)B^T$ είναι μη αρνητικές και τουλάχιστον μία είναι θετική, προκύπτει ότι

$$\mathrm{tr}(D_x^* A D_x B^T) > 0.$$

Από τη σχέση **(1)** μπορούμε να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι ο πίνακας $A\circ B$ είναι θετικά ορισμένος.
Ο πρώτος ισχυρισμός τώρα έπεται εφαρμόζοντας τον δεύτερο στο $A_\varepsilon \equiv A+\varepsilon I$ και $B_\varepsilon \equiv B+\varepsilon I$, $\forall\, \varepsilon>0$, και παίρνωντας το όριο $\varepsilon\to 0$. Ο τελευταίος ισχυρισμός προκύπτει από την παρατήρηση ότι αν ο πίνακας $A=[\alpha_{ij}]$ είναι θετικά ορισμένος, τότε

$$e_i^* A e_i = \alpha_{ii} > 0, \quad \forall\, i=1,\dots,n. \qquad ◻$$

Η απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος μας δείχνει ότι υπάρχει μια σύνδεση μεταξύ του συνήθους γινομένου και του γινομένου Hadamard.
Το Θεώρημα 1.6.5 παρουσίασε την κλειστότητα του χώρου των θετικά και ημιθετικά ορισμένων πινάκων εφοδιασμένου με το γινόμενο Hadamard. Το 1963 επεκτάθηκε από τον Majindar, ο οποίος έδειξε ότι κάθε θετικά ορισμένος πίνακας μπορεί να εκφραστεί

ως ένα γινόμενο Hadamard δύο θετικά ορισμένων πινάκων, όχι απαραίτητα με μοναδικό τρόπο. Αν οι πίνακες είναι θετικά ημιορισμένοι και έχουν μηδενική ορίζουσα, το αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα χρησιμοποιώντας τον πίνακα ee^T ως ένα παράγοντα του γινομένου.

<u>Θεώρημα 1.6.6.</u> Ένας συμμετρικός πίνακας είναι θετικά ορισμένος αν και μόνο αν μπορεί να γραφεί ως γινόμενο Hadamard δύο θετικά ορισμένων πινάκων.

<u>Απόδειξη</u> :" $\Leftarrow$ " Από το Θεώρημα 1.6.5, αν $A_{n\times n}$ και $B_{n\times n}$ είναι θετικά ορισμένοι, τότε ο $A \circ B$ είναι θετικά ορισμένος.

" $\Longrightarrow$ " Κάθε θετικά ορισμένος πίνακας C=$\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$ γράφεται

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} c_{11}/(1+\varepsilon_{11}) & \cdots & c_{1n}/(1+\varepsilon_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1}/(1+\varepsilon_{n1}) & \cdots & c_{nn}/(1+\varepsilon_{nn}) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1+\varepsilon_{11} & \cdots & 1+\varepsilon_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1+\varepsilon_{n1} & \cdots & 1+\varepsilon_{nn} \end{pmatrix},$$

για κατάλληλη επιλογή των παραμέτρων $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \dots, \varepsilon_{nn}$ □

<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2.</u>

<u>2.1. Ίχνη σε γινόμενα πινάκων κατά Hadamard και Kronecker</u>

<u>Λήμμα 2.1.1.</u> Έστω $A\in M_{n\times n}$ και $B\in M_{m\times m}$ τετραγωνικοί πίνακες n γραμμών και n στηλών και m γραμμών και m στηλών αντίστοιχα. Τότε

$$\mathrm{tr}(A\otimes B)= \mathrm{tr}(B\otimes A)=\mathrm{tr}(A)\cdot\mathrm{tr}(B).$$

<u>Απόδειξη:</u> Κάνοντας υπολογισμούς έχουμε

$$A\otimes B=\begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \cdots & a_{nn}B \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \cdots & a_{11}b_{1m} & \cdots & a_{1n}b_{11} & a_{1n}b_{12} & \cdots & a_{1n}b_{1m} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & \cdots & a_{11}b_{2m} & \cdots & a_{1n}b_{21} & a_{1n}b_{22} & \cdots & a_{1n}b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11}b_{m1} & a_{11}b_{m2} & \cdots & a_{11}b_{mm} & \cdots & a_{1n}b_{m1} & a_{1n}b_{m2} & \cdots & a_{1n}b_{mm} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}b_{11} & a_{n1}b_{12} & \cdots & a_{n1}b_{1m} & \cdots & a_{nn}b_{11} & a_{nn}b_{12} & \cdots & a_{nn}b_{1m} \\ a_{n1}b_{21} & a_{n1}b_{22} & \cdots & a_{n1}b_{2m} & \cdots & a_{nn}b_{21} & a_{nn}b_{22} & \cdots & a_{nn}b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}b_{m1} & a_{n1}b_{m2} & \cdots & a_{n1}b_{mm} & \cdots & a_{nn}b_{m1} & a_{nn}b_{m2} & \cdots & a_{nn}b_{mm} \end{bmatrix}.$$

Άρα για το ίχνος του A⊗B προκύπτει:

$$\mathrm{tr}(A\otimes B)= a_{11}b_{11} + a_{11}b_{22}+\cdots a_{11}b_{mm} + \cdots + a_{nn}b_{11} + a_{nn}b_{22} + \cdots + a_{nn}b_{mm}.$$

Τώρα θα υπολογίσουμε το B⊗A:

$$B\otimes A=\begin{bmatrix} b_{11}A & b_{12}A & \cdots & b_{1m}A \\ b_{21}A & b_{22}A & \cdots & b_{2m}A \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1}A & b_{m2}A & \cdots & b_{mm}A \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} b_{11}a_{11} & b_{11}a_{12} & \cdots & b_{11}a_{1n} & \cdots & b_{1m}a_{11} & b_{1m}a_{12} & \cdots & b_{1m}a_{1n} \\ b_{11}a_{21} & b_{11}a_{22} & \cdots & b_{11}a_{2n} & \cdots & b_{1m}a_{21} & b_{1m}a_{22} & \cdots & b_{1m}a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{11}a_{n1} & b_{11}a_{n2} & \cdots & b_{11}a_{nn} & \cdots & b_{1m}a_{n1} & b_{1m}a_{n2} & \cdots & b_{1m}a_{nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1}a_{11} & b_{m1}a_{12} & \cdots & b_{m1}a_{1n} & \cdots & b_{mm}a_{11} & b_{mm}a_{12} & \cdots & b_{mm}a_{1n} \\ b_{m1}a_{21} & b_{m1}a_{22} & \cdots & b_{m1}a_{2n} & \cdots & b_{mm}a_{21} & b_{mm}a_{22} & \cdots & b_{mm}a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1}a_{n1} & b_{m1}a_{n2} & \cdots & b_{m1}a_{nn} & \cdots & b_{mm}a_{n1} & b_{mm}a_{n2} & \cdots & b_{mm}a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Επομένως,

$$\mathrm{tr}(B\otimes A)= b_{11}a_{11} + b_{11}a_{22} + \cdots + b_{11}a_{nn} + \cdots + b_{mm}a_{11} + b_{mm}a_{22} + \cdots + b_{mm}a_{nn}.$$

Υπολογίζουμε τώρα και τα ίχνη των πινάκων A,B:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ και } B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mm} \end{pmatrix},$$

οπότε

$$\mathrm{tr}(A)= a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} \text{ και } \mathrm{tr}(B)= b_{11} + b_{22} + \cdots + b_{mm}.$$

Άρα το γινόμενο τους είναι:

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(A)\cdot \mathrm{tr}(B)= {} & a_{11}b_{11} + a_{11}b_{22} + \cdots + a_{11}b_{mm} + a_{22}b_{11} + a_{22}b_{22} + \cdots + a_{22}b_{mm} + \cdots + \\ & +a_{nn}b_{11}+a_{nn}b_{22} + \cdots + a_{nn}b_{mm}.\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\mathrm{tr}(A\otimes B)= \mathrm{tr}(B\otimes A)=\mathrm{tr}(A)\cdot \mathrm{tr}(B). \qquad \square$$

Θεώρημα 2.1.2. Έστω $A,B \in M_{n\times n}$ τετραγωνικοί πίνακες με n γραμμές και n στήλες τέτοιοι ώστε $A=[a_{ij}]$ και $B=[b_{ij}]$. Τότε ισχύει

(1) $tr(A\otimes B)=n\cdot tr(A\circ B)-\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(a_{ii}-a_{jj})\cdot(b_{ii}-b_{jj})$,
(2) $tr(A\circ B)\leq tr((\frac{A+B}{2})\circ(\frac{A+B}{2}))$.

Απόδειξη: (1) Αν $A,B \in M_{n\times n}$, τότε το γινόμενο Kronecker τους $A\otimes B$ είναι:

$$A\otimes B=\begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \cdots & a_{nn}B \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \cdots & a_{11}b_{1n} & \cdots & a_{1n}b_{11} & a_{1n}b_{12} & \cdots & a_{1n}b_{1n} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & \cdots & a_{11}b_{2n} & \cdots & a_{1n}b_{21} & a_{1n}b_{22} & \cdots & a_{1n}b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11}b_{n1} & a_{11}b_{n2} & \cdots & a_{11}b_{nn} & \cdots & a_{1n}b_{n1} & a_{1n}b_{n2} & \cdots & a_{1n}b_{nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}b_{11} & a_{n1}b_{12} & \cdots & a_{n1}b_{1n} & \cdots & a_{nn}b_{11} & a_{nn}b_{12} & \cdots & a_{nn}b_{1n} \\ a_{n1}b_{21} & a_{n1}b_{22} & \cdots & a_{n1}b_{2n} & \cdots & a_{nn}b_{21} & a_{nn}b_{22} & \cdots & a_{nn}b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}b_{n1} & a_{n1}b_{n2} & \cdots & a_{n1}b_{nn} & \cdots & a_{nn}b_{n1} & a_{nn}b_{n2} & \cdots & a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix}.$$

Άρα,

$$tr(A\otimes B)=a_{11}b_{11}+a_{11}b_{22}+\cdots+a_{11}b_{nn}+\cdots+a_{nn}b_{11}+a_{nn}b_{22}+\cdots+a_{nn}b_{nn}.$$

Επίσης,

$$A\circ B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} & \cdots & a_{1n}b_{1n} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} & \cdots & a_{2n}b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}b_{n1} & a_{n2}b_{n2} & \cdots & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$$

και

$$tr(A\circ B)=a_{11}b_{11}+a_{22}b_{22}+\cdots a_{nn}b_{nn}.$$

Άρα,

$$tr(A\otimes B)=n\cdot tr(A\circ B)-\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(a_{ii}-a_{jj})\cdot(b_{ii}-b_{jj}).$$

(2) Έχουμε

$$(\frac{A+B}{2})\circ(\frac{A+B}{2})=\begin{pmatrix} \frac{(a_{11}+b_{11})^2}{4} & \cdots & \frac{(a_{1n}+b_{1n})^2}{4} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{(a_{n1}+b_{n1})^2}{4} & \cdots & \frac{(a_{nn}+b_{nn})^2}{4} \end{pmatrix}.$$

Άρα $tr((\frac{A+B}{2})\circ(\frac{A+B}{2}))=\frac{(a_{11}+b_{11})^2}{4}+\cdots+\frac{(a_{nn}+b_{nn})^2}{4}=\left(\frac{a_{11}+b_{11}}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{a_{nn}+b_{nn}}{2}\right)^2$. Οπότε θα έχουμε ότι

$$\mathrm{tr}(A\circ B)= a_{11}b_{11} + a_{22}b_{22} + \cdots + a_{nn} \leq (\tfrac{a_{11}+b_{11}}{2})^2+\cdots + (\tfrac{a_{nn}+b_{nn}}{2})^2= \mathrm{tr}((\tfrac{A+B}{2})\circ (\tfrac{A+B}{2})). \ \square$$

Πρόταση 2.1.3. Έστω $A\in M_{n\times n}$ ένας τετραγωνικός πίνακας με n γραμμές και n στήλες, του οποίου τα στοιχεία της διαγωνίου είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Τότε,

$$\mathrm{tr}\underbrace{(A \circ A \circ A \cdots \circ A)}_{m} \leq (\mathrm{tr}(A))^m.$$

Απόδειξη: Έστω $A\in M_{n\times n}$ τέτοιος ώστε $A=[a_{ij}]$ και $a_{ii} \in \mathbb{R}^+$. Τότε, από τους ορισμούς του γινομένου Hadamard και του ίχνους πινάκων, έχουμε ότι

$$\underbrace{(A \circ A \circ A \circ \cdots \circ A)}_{m}=\underbrace{[a_{ij}] \cdot [a_{ij}] \cdots \ [a_{ij}]}_{m} = [a_{ij}]^m.$$

Άρα,

$$\mathrm{tr}\underbrace{(A \circ A \circ A \cdots \circ A)}_{m}=a_{11}^m+a_{22}^m+\cdots + a_{nn}^m \leq (a_{11} + a_{22} + \cdots a_{nn})^m=(\mathrm{tr}(A))^m. \qquad \square$$

Πρόταση 2.1.4. Έστω $A,B \in M_{n\times n}$ τετραγωνικοί πίνακες με n γραμμές και n στήλες τέτοιοι ώστε $A=[a_{ij}]$ και $B=[b_{ij}]$, $i=1,\dots,n$ και $j=1,\dots,n$. Τότε ισχύει ότι

$$n\cdot \mathrm{tr}\underbrace{(A \circ A \circ A \cdots \circ A)}_{n} \circ \underbrace{(B \circ B \circ B \cdots \circ B)}_{n}$$
$$=\sum_{i=1}^n a_{ii}^n \sum_{i=1}^n b_{ii}^n - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n(a_{ii}^n - a_{jj}^n) \cdot (b_{ii}^n - b_{jj}^n).$$

Απόδειξη: Έστω $A,B \in M_{n\times n}$ τέτοιοι ώστε $A=[a_{ij}]$ και $B=[b_{ij}]$ για $i,j=1,\dots,n$. Τότε έχουμε

$$\mathrm{tr}\underbrace{(A \circ A \circ A \cdots \circ A)}_{n} \otimes \underbrace{(B \circ B \circ B \cdots \circ B)}_{n} =$$
$$=n\cdot \mathrm{tr}(A \circ A \circ A \cdots \circ A) \circ (B \circ B \circ B \cdots \circ B) - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n(a_{ii}^n - a_{jj}^n) \cdot (b_{ii}^n - b_{jj}^n)$$
$$=n\cdot \sum_{i=1}^n a_{ii}^n \sum_{i=1}^n b_{ii}^n - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n(a_{ii}^n - a_{jj}^n) \cdot (b_{ii}^n - b_{jj}^n),$$

όπου η πρώτη ισότητα προκύπτει από το Θεώρημα 2.1.2 και η δεύτερη από το ότι

$$\mathrm{tr}(\underbrace{(A \circ A \circ A \cdots \circ A)}_{n}=\sum_{i=1}^n a_{ii}^n. \qquad \square$$

Πρόταση 2.1.5. Έστω $A\in M_{n\times n}$ ένας τετραγωνικός πίνακας με n γραμμές και n στήλες.
Τότε ισχύει ότι

$$\mathrm{tr}\underbrace{(A\otimes A\otimes A \cdots \otimes A)}_{m} = (\mathrm{tr}(A))^m.$$

Απόδειξη: Αν $A\in M_{n\times n}$, τότε

$$\mathrm{tr}\underbrace{(A\otimes A\otimes A \cdots \otimes A)}_{m} =\mathrm{tr}(A) \cdot \mathrm{tr}\underbrace{(A\otimes A\otimes A \cdots \otimes A)}_{m-1}=\cdots=\underbrace{\mathrm{tr}(A) \ \cdot \cdots \ \mathrm{tr}(A)}_{m}=(\mathrm{tr}(A))^m,$$

όπου οι ισότητες προκύπτουν από τη χρήση του Λήμματος 2.1.1. □

<u>Παράδειγμα 2.1.6.</u> Έστω $A\in M_{2\times 2}$ τέτοιος ώστε $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Τότε με υπολογισμούς παίρνουμε

$$A \circ A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$$

και

$$A\otimes A\otimes A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 & 2 & 4 & 4 & 8 \\ 3 & 2 & 6 & 4 & 6 & 4 & 12 & 8 \\ 3 & 6 & 2 & 4 & 6 & 12 & 4 & 8 \\ 9 & 6 & 6 & 4 & 18 & 12 & 12 & 8 \\ 3 & 6 & 6 & 12 & 2 & 4 & 4 & 8 \\ 9 & 6 & 18 & 12 & 6 & 4 & 12 & 8 \\ 9 & 18 & 6 & 12 & 6 & 12 & 4 & 8 \\ 27 & 18 & 18 & 12 & 18 & 12 & 12 & 8 \end{bmatrix},$$

όπου $tr(A)=3$, $tr(A \circ A) = 5 \leq 3^2$, άρα η Πρόταση 2.1.3 ισχύει. Επίσης, $tr(A\otimes A\otimes A) = 27 = 3^3$, άρα και η Πρόταση 2.1.5 ισχύει.

<u>Πρόταση 2.1.7.</u> Έστω $A\in M_{n\times n}$ ένας τετραγωνικός πίνακας με n γραμμές και n στήλες.
Τότε ισχύει ότι

$$tr((A+A^t) \circ (A+A^t))=4tr(A\circ A).$$

<u>Απόδειξη:</u> Έστω $A\in M_{n\times n}$ τέτοιος ώστε $A=[a_{ij}]$. Τότε,

$$(A+A^t) \circ (A+A^t)$$

$$=\left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\right]$$

$$\circ \left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\right]$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}+a_{11} & a_{12}+a_{21} & \cdots & a_{1n}+a_{n1} \\ a_{21}+a_{12} & a_{22}+a_{22} & \cdots & a_{2n}+a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+a_{1n} & a_{n2}+a_{2n} & \cdots & a_{nn}+a_{nn} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a_{11}+a_{11} & a_{12}+a_{21} & \cdots & a_{1n}+a_{n1} \\ a_{21}+a_{12} & a_{22}+a_{22} & \cdots & a_{2n}+a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+a_{1n} & a_{n2}+a_{2n} & \cdots & a_{nn}+a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} (a_{11}+a_{11})^2 & (a_{12}+a_{21})^2 & \cdots & (a_{1n}+a_{n1})^2 \\ (a_{21}+a_{12})^2 & (a_{22}+a_{22})^2 & \cdots & (a_{2n}+a_{n2})^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{n1}+a_{1n})^2 & (a_{n2}+a_{2n})^2 & \cdots & (a_{nn}+a_{nn})^2 \end{pmatrix}.$$

Όποτε το ίχνος υπολογίζεται:

$$\mathrm{tr}((A+A^t)\circ(A+A^t)) = (2a_{11})^2+(2a_{22})^2+\cdots+(2a_{nn})^2 = 4a_{11}^2+4a_{22}^2+\cdots+4a_{nn}^2$$
$$=4(a_{11}^2+a_{22}^2+\cdots+a_{nn}^2) = 4\mathrm{tr}(A\circ A). \qquad \square$$

<u>Πρόταση 2.1.8.</u> Έστω $A,B \in M_{n\times n}$ δύο τετραγωνικοί πίνακες με n γραμμές και n στήλες. Τότε ισχύει ότι

$$\mathrm{tr}((A+B)\circ(A-B)) = \mathrm{tr}(A\circ A) - \mathrm{tr}(B\circ B).$$

<u>Απόδειξη:</u> Έστω $A,B \in M_{n\times n}$ τέτοιοι ώστε $A=[a_{ij}]$ και $B=[b_{ij}]$ δύο τυχαίοι πίνακες. Τότε,

$(A+B)\circ(A-B)=$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \cdots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \cdots & a_{2n}-b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}-b_{n1} & a_{n2}-b_{n2} & \cdots & a_{nn}-b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} (a_{11}+b_{11})(a_{11}-b_{11}) & (a_{12}+b_{12})(a_{12}-b_{12}) & \cdots & (a_{1n}+b_{1n})(a_{1n}-b_{1n}) \\ (a_{21}+b_{21})(a_{21}-b_{21}) & (a_{22}+b_{22})(a_{22}-b_{22}) & \cdots & (a_{2n}+b_{2n})(a_{2n}-b_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{n1}+b_{n1})(a_{n1}-b_{n1}) & (a_{n2}+b_{n2})(a_{n2}-b_{n2}) & \cdots & (a_{nn}+b_{nn})(a_{nn}-b_{nn}) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}^2-b_{11}^2 & a_{12}^2-b_{12}^2 & \cdots & a_{1n}^2-b_{1n}^2 \\ a_{21}^2-b_{21}^2 & a_{22}^2-b_{22}^2 & \cdots & a_{2n}^2-b_{2n}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^2-b_{n1}^2 & a_{n2}^2-b_{n2}^2 & \cdots & a_{nn}^2-b_{nn}^2 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} a_{11}^2 & a_{12}^2 & \cdots & a_{1n}^2 \\ a_{21}^2 & a_{22}^2 & \cdots & a_{2n}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^2 & a_{n2}^2 & \cdots & a_{nn}^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11}^2 & b_{12}^2 & \cdots & b_{1n}^2 \\ b_{21}^2 & b_{22}^2 & \cdots & b_{2n}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}^2 & b_{n2}^2 & \cdots & b_{nn}^2 \end{pmatrix}.$$

Οπότε προκύπτει το ζητούμενο. Δηλαδή

$$\mathrm{tr}((A+B)\circ(A-B)) = \mathrm{tr}(A\circ A) - \mathrm{tr}(B\circ B). \qquad \square$$

<u>Πρόταση 2.1.9.</u> Έστω $A,B \in M_{n\times n}$ τετραγωνικοί πίνακες με n γραμμές και n στήλες. Τότε ισχύει ότι

$$\mathrm{tr}((A+B)\circ(A+B)) = \mathrm{tr}(A\circ A) + 2\mathrm{tr}(A\circ B) + \mathrm{tr}(B\circ B).$$

<u>Απόδειξη :</u> Έστω $A,B \in M_{n\times n}$ τέτοιοι ώστε :

$$(A+B)\circ(A+B) =$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} (a_{11}+b_{11})^2 & (a_{12}+b_{12})^2 & \cdots & (a_{1n}+b_{1n})^2 \\ (a_{21}+b_{21})^2 & (a_{22}+b_{22})^2 & \cdots & (a_{2n}+b_{2n})^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{n1}+b_{n1})^2 & (a_{n2}+b_{n2})^2 & \cdots & (a_{nn}+b_{nn})^2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}^2+2a_{11}b_{11}+b_{11}^2 & a_{12}^2+2a_{12}b_{12}+b_{12}^2 & \cdots & a_{1n}^2+2a_{1n}b_{1n}+b_{1n}^2 \\ a_{21}^2+2a_{21}b_{21}+b_{21}^2 & a_{22}^2+2a_{22}b_{22}+b_{22}^2 & \cdots & a_{2n}^2+2a_{2n}b_{2n}+b_{2n}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^2+2a_{n1}b_{n1}+b_{n1}^2 & a_{n2}^2+2a_{n2}b_{n2}+b_{n2}^2 & \cdots & a_{nn}^2+2a_{nn}b_{nn}+b_{nn}^2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}^2 & a_{12}^2 & \cdots & a_{1n}^2 \\ a_{21}^2 & a_{22}^2 & \cdots & a_{2n}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^2 & a_{n2}^2 & \cdots & a_{nn}^2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} & \cdots & a_{1n}b_{1n} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} & \cdots & a_{2n}b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}b_{n1} & a_{n2}b_{n2} & \cdots & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11}^2 & b_{12}^2 & \cdots & b_{1n}^2 \\ b_{21}^2 & b_{22}^2 & \cdots & b_{2n}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}^2 & b_{n2}^2 & \cdots & b_{nn}^2 \end{pmatrix}$$

Άρα,

$$\mathrm{tr}((A+B)\circ(A+B)) = \mathrm{tr}(A\circ A) + 2\mathrm{tr}(A\circ B) + \mathrm{tr}(B\circ B). \qquad \square$$

<u>Πρόταση 2.1.10.</u> Έστω $A,B \in M_{n\times n}$ δύο τετραγωνικοί πίνακες με n γραμμές και n στήλες. Τότε ισχύει ότι

$$\mathrm{tr}(\underbrace{(A+B)\otimes(A+B)\otimes\cdots\otimes(A+B)}_{k})=\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}(\mathrm{tr}(A))^{k-i}(\mathrm{tr}(B))^{i}.$$

<u>Απόδειξη:</u> Έστω $A,B \in M_{n\times n}$ τέτοιοι ώστε $A=[a_{ij}]$ και $B=[b_{ij}]$. Τότε

$$\mathrm{tr}(\underbrace{(A+B)\otimes(A+B)\otimes\cdots\otimes(A+B)}_{k})=(\mathrm{tr}(A+B))^k$$

$$=(a_{11}+b_{11}+a_{22}+b_{22}+\cdots+a_{nn}+b_{nn})^k$$

$$=(\textstyle\sum_{i}^{n}(a_{ii}+b_{ii}))^k=(\sum_{i=1}^{n}a_{ii}+\sum_{i=1}^{n}b_{ii})^k=(\mathrm{tr}(A)+\mathrm{tr}(B))^k$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}(\mathrm{tr}(A))^{k-i}(\mathrm{tr}(B))^{i},$$

όπου για την πρώτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την Πρόταση 2.1.5 και για την τελευταία το διωνυμικό ανάπτυγμα του Newton. $\square$

<u>Σημείωση:</u> Κάνοντας χρήση της Πρότασης 2.1.3, μπορούμε να δείξουμε ότι για κάθε $A,B \in M_{n\times n}$ τετραγωνικούς πίνακες με θετική διαγώνιο ισχύει ότι

$$\mathrm{tr}(\underbrace{(A+B)\circ(A+B)\circ\cdots\circ(A+B)}_{n})\leq \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}(\mathrm{tr}(A))^{n-i}(\mathrm{tr}(B))^{i}.$$

<u>Πρόταση 2.1.11.</u> Έστω $A,B \in M_{n\times n}$ τετραγωνικοί πίνακες με n γραμμές και στήλες. Τότε

$$(\mathrm{tr}(A \circ B))^2 \leq \frac{1}{16} \mathrm{tr}((A+B) \circ (A+B) \circ (A+B) \circ (A+B)).$$

Απόδειξη: Αν $A, B \in M_{n\times n}$, τότε

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{tr}(A \circ B))^2 &\leq \left(\mathrm{tr}\left(\left(\frac{A+B}{2}\right) \circ \left(\frac{A+B}{2}\right)\right)\right)^2 = \left(\mathrm{tr}\left(\frac{A}{2} \circ \frac{A}{2}\right) + 2\mathrm{tr}\left(\frac{A}{2} \circ \frac{B}{2}\right) + \mathrm{tr}\left(\frac{B}{2} \circ \frac{B}{2}\right)\right)^2 \\
&= \left(\frac{1}{(2)^2}\mathrm{tr}(A \circ A) + 2\frac{1}{(2)^2}\mathrm{tr}(A \circ B) + \frac{1}{(2)^2}\mathrm{tr}(B \circ B)\right)^2 \\
&= \frac{1}{16}\left(\mathrm{tr}(A \circ A) + 2\mathrm{tr}(A \circ B) + \mathrm{tr}(B \circ B)\right)^2 \\
&= \frac{1}{16}(\mathrm{tr}((A+B) \circ (A+B)))\cdot(\mathrm{tr}((A+B) \circ (A+B))) \\
&= \frac{1}{16}\, \mathrm{tr}((A+B) \circ (A+B) \circ (A+B) \circ (A+B)).
\end{aligned}
$$

Για την ανισότητα χρησιμοποιήσαμε το Θεώρημα 2.1.2, ενώ για την πρώτη και την τέταρτη ισότητα την Πρόταση 2.1.9. Επίσης, για την τρίτη ισότητα ισχύει ότι

$\mathrm{tr}(\alpha A \circ \beta B) = \alpha\beta a_{11}b_{11} + \alpha\beta a_{22}b_{22} + \cdots + \alpha\beta a_{nn}b_{nn} = \alpha\beta\sum_{i=1}^{n} a_{ii}b_{ii} = \alpha\beta\mathrm{tr}(A \circ B)$. ◻

Θεώρημα 2.1.12. Έστω $A, B, C, D \in M_{n\times n}$ τετραγωνικοί πίνακες n γραμμών και n στηλών. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:

(1) $(A \otimes B) \circ (C \otimes D) = (A \circ C) \otimes (B \circ D)$.

(2) $\mathrm{tr}(A \otimes (B \circ C)) = n\mathrm{tr}(A \circ B \circ C) - \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(a_{ii} - a_{jj}) \cdot (b_{ii}c_{ii} - b_{jj}c_{jj})$.

Απόδειξη: (1)Έστω $A, B, C, D \in M_{n\times n}$ τέτοιοι ώστε: $A=[a_{ij}]$, $B=[b_{ij}]$, $C=[c_{ij}]$ και $D=[d_{ij}]$. Τότε, κάνοντας πράξεις έχουμε

$$
\begin{aligned}
(A \otimes B) \circ (C \otimes D) &= \\
&= \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \cdots & a_{nn}B \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} c_{11}D & c_{12}D & \cdots & c_{1n}D \\ c_{21}D & c_{22}D & \cdots & c_{2n}D \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1}D & c_{n2}D & \cdots & c_{nn}D \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11}c_{11}B \circ D & a_{12}c_{12}B \circ D & \cdots & a_{1n}c_{1n}B \circ D \\ a_{21}c_{21}B \circ D & a_{22}c_{22}B \circ D & \cdots & a_{2n}c_{2n}B \circ D \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}c_{n1}B \circ D & a_{n2}c_{n2}B \circ D & \cdots & a_{nn}c_{nn}B \circ D \end{bmatrix} \\
&= (A \circ C) \otimes (B \circ D)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(2)\ \mathrm{tr}(A \otimes (B \circ C)) &= n\mathrm{tr}(A \circ (B \circ C)) - \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(a_{ii} - a_{jj}) \cdot (b_{ii}c_{ii} - b_{jj}c_{jj}) \\
&= n\mathrm{tr}(A \circ B \circ C) - \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(a_{ii} - a_{jj}) \cdot (b_{ii}c_{ii} - b_{jj}c_{jj}).
\end{aligned}
$$

Η πρώτη ισότητα προκύπτει από το Θεώρημα 2.1.2, ενώ η δεύτερη από το ότι το γινόμενο Hadamard ικανοποιεί την προσεταιριστική ιδιότητα. ◻

Πρόταση 2.1.13. Έστω $A,B,C,D \in M_{n\times n}$ τετραγωνικοί πίνακες με n γραμμές και n στήλες. Τότε,

$$tr((A\otimes B)\circ(C\otimes D)) = ntr(A\circ B\circ C\circ D) - \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(a_{ii}c_{ii} - a_{jj}c_{jj})\cdot(b_{ii}d_{ii} - b_{jj}d_{jj}).$$

Πράγματι, από το Θεώρημα 2.1.12, μπορούμε να γράψουμε ότι

$$tr((A\otimes B)\circ(C\otimes D)) = tr((A\circ C)\otimes(B\circ D)).$$

Τέλος, από το Θεώρημα 2.1.2, προκύπτει ότι,

$$tr((A\otimes B)\circ(C\otimes D)) = \\ = ntr(A\circ B\circ C\circ D) - \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(a_{ii}c_{ii} - a_{jj}c_{jj})\cdot(b_{ii}d_{ii} - b_{jj}d_{jj}). \qquad \square$$

Παράδειγμα 2.1.14. Έστω $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ και $D=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$.

Τότε υπολογίζουμε:

$$A\otimes B=\begin{pmatrix}2 & -3 & -2 & 3\\ 4 & 1 & -4 & -1\\ 4 & -6 & 2 & -3\\ 8 & 2 & 4 & 1\end{pmatrix},\ C\otimes D=\begin{pmatrix}8 & -4 & -4 & 2\\ 6 & -2 & -3 & 1\\ 4 & -2 & 12 & -6\\ 3 & -1 & 9 & -3\end{pmatrix},$$

$$A\circ C=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix},\ B\circ D=\begin{pmatrix}8 & 6\\ 12 & -1\end{pmatrix}$$

και

$$A\otimes(B\circ D)=\begin{pmatrix}8 & 6 & -8 & -6\\ 12 & -1 & -12 & 1\\ 16 & 12 & 8 & 6\\ 24 & -2 & 12 & -1\end{pmatrix},\ A\circ B\circ D=\begin{pmatrix}8 & -6\\ 24 & -1\end{pmatrix},$$

$$(A\otimes B)\circ(C\otimes D)=\begin{pmatrix}16 & 12 & 8 & 6\\ 24 & -2 & 12 & -1\\ 16 & 12 & 24 & 18\\ 24 & -2 & 36 & -3\end{pmatrix} \text{ και } (A\circ C)\otimes(B\circ D)=\begin{pmatrix}16 & 12 & 8 & 6\\ 24 & -2 & 12 & -1\\ 16 & 12 & 24 & 18\\ 24 & -2 & 36 & -3\end{pmatrix}.$$

Άρα προκύπτει

$$(A\otimes B)\circ(C\otimes D)=(A\circ C)\otimes(B\circ D).$$

Επιπλέον υπολογίζουμε

$$n\cdot tr(A\circ B\circ D) - \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(a_{ii} - a_{jj})\cdot(b_{ii}d_{ii} - b_{jj}d_{jj}) =$$

$$=2\cdot 7 - \sum_{i=1}^{1}\sum_{j=i+1}^{2}(a_{ii} - a_{jj})\cdot(b_{ii}d_{ii} - b_{jj}d_{jj}) =$$

$$=14-(a_{11} - a_{22})\cdot(b_{11}d_{11} - b_{22}d_{22})$$
$$=14-(1-1)(2\cdot 4 - 1(-1)) = 14$$
$$= tr(A\otimes(B\circ D)).$$

Επομένως επαληθεύτηκε το Θεώρημα 2.1.12.

<u>Θεώρημα 2.1.15.</u> Έστω $A_i, B_i \in M_{n\times n}$ για i=1,…,n τετραγωνικοί πίνακες n γραμμών και στηλών. Τότε

$$\mathrm{tr}((A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes A_n) \circ (B_1 \otimes B_2 \otimes \cdots \otimes B_n)) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{tr}(A_i \circ B_i).$$

<u>Απόδειξη:</u> Έστω $A_1, A_2, \ldots, A_n$ και $B_1, B_2, \ldots, B_n \in M_{n\times n}$. Θα αποδείξουμε το θεώρημα με μαθηματική επαγωγή. Για n=1: $\mathrm{tr}(A_1 \circ B_1) = \mathrm{tr}(A_1 \circ B_1)$, άρα ισχύει. Έστω ότι ισχύει για n=k, δηλαδή

$$\mathrm{tr}((A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes A_k) \circ (B_1 \otimes B_2 \otimes \cdots \otimes B_k)) = \prod_{i=1}^{k} \mathrm{tr}(A_i \circ B_i).$$

Θα δείξουμε ότι ισχύει για n=k+1. Πράγματι,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{tr}((A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes A_k \otimes A_{k+1}) \circ (B_1 \otimes B_2 \otimes \cdots \otimes B_k \otimes B_{k+1})) \\
&= \mathrm{tr}(((A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes A_k) \circ (B_1 \otimes B_2 \otimes \cdots \otimes B_k)) \otimes (A_{k+1} \circ B_{k+1})) \\
&= \mathrm{tr}((A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes A_k) \circ (B_1 \otimes B_2 \otimes \cdots \otimes B_k)\mathrm{tr}(A_{k+1} \circ B_{k+1}) \\
&= \prod_{i=1}^{k} \mathrm{tr}(A_i \circ B_i)\, \mathrm{tr}(A_{k+1} \circ B_{k+1}) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \mathrm{tr}(A_i \circ B_i),
\end{aligned}$$

όπου η πρώτη ισότητα προέκυψε από το Θεώρημα 2.1.12, η δεύτερη από το Λήμμα 2.1.1 και η τρίτη από το δεύτερο βήμα της επαγωγής.
Άρα ισχύει για k+1 και συνεπώς αποδείχθηκε το ζητούμενο. □

<u>Ορισμός 2.1.16.</u> Έστω X ένας τετραγωνικός πίνακας $M_{n\times n}$ με πραγματικές ιδιοτιμές. Θα συμβολίζουμε με $\lambda_{min}(X)$ και $\lambda_{max}(X)$ την ελάχιστη και τη μέγιστη, αντίστοιχα, ιδιοτιμή του πίνακα X. Το γεγονός ότι το γινόμενο Hadamard δύο θετικά ημιορισμένων πινάκων $A,B \in M_{n\times n}$, με n γραμμές και n στήλες, είναι ένας βασικός υποπίνακας ενός γινομένου Kronecker $A\otimes B$ οδηγεί κάποιους σε σχετικά ασθενή συμπεράσματα. Εφόσον οι ιδιοτιμές του πίνακα $A\otimes B$ είναι τα κατά ζεύγη γινόμενα των ιδιοτιμών των πινάκων A και B, οι μικρότερες και μεγαλύτερες ιδιοτιμές του θα είναι οι $\lambda_{min}(A)\,\lambda_{min}(B)$ και $\lambda_{max}(A)\,\lambda_{max}(B)$, αντίστοιχα. Όμως, οι ιδιοτιμές κάθε βασικού υποπίνακα ενός ερμιτιανού πίνακα εντοπίζονται μεταξύ της μικρότερης και της μεγαλύτερης ιδιοτιμής του, το οποίο μας δίνει το άνω και κάτω φράγμα:

$$\lambda_{min}(A \circ B) \geq \lambda_{min}(A)\,\lambda_{min}(B)$$

και

$$\lambda_{max}(A \circ B) \leq \lambda_{max}(A)\,\lambda_{max}(B),$$

όπου A,B είναι θετικά ημιορισμένοι πίνακες διαστάσεων $n \times n$.
Αυτές οι εκτιμήσεις μπορεί να είναι πολύ χρήσιμες, παρόλα αυτά όχι τόσο απόλυτες. Για παράδειγμα, αν ο πίνακας A είναι ένας θετικά ορισμένος πίνακας και B=J, δηλαδή ο πίνακας που έχει παντού τη μονάδα και του οποίου μία από τις ιδιοτιμές του είναι το 0, από το παραπάνω καταλήγουμε στο κάτω φράγμα:

$$\lambda_{min}(A)= \lambda_{min}(A\circ J) \geq \lambda_{min}(A)\, \lambda_{min}(J)= \lambda_{min}(A)\cdot 0=0.$$

Επίσης, αν ο Α είναι θετικά ορισμένος και $B=A^{-1}$, προκύπτει ότι:

$$\lambda_{min}(A \circ A^{-1}) \geq \lambda_{min}(A)\, \lambda_{min}(A^{-1})= \lambda_{min}(A)/ \lambda_{max}(A).$$

Εδώ παρατηρούμε ότι, το κάτω φράγμα που βγάλαμε δεν είναι και τόσο καλό, καθώς όπως θα δούμε ένα κάτω φράγμα το οποίο είναι καλύτερο είναι το 1.
Να σημειώσουμε ότι αν ο $B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ είναι ένας ερμιτιανός πίνακας, τότε $B^T=\overline{B} \neq B$ αν και μόνο αν ο Β έχει τουλάχιστον ένα μη πραγματικό στοιχείο.

Θεώρημα 2.1.17. Έστω Α και Β πίνακες n γραμμών και n στηλών οι οποίοι είναι θετικά ημιορισμένοι. Τότε

$$ch_n(A)b_{min} \leq ch_j(A \circ B) \leq ch_1(A)b_{max},\ j=1,...,n,$$

όπου $ch_j(\cdot)$ είναι η j-οστή μεγαλύτερη ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης (δηλαδή, η j-οστή μεγαλύτερη ιδιοτιμή του πίνακα, που εδώ απλά συμβολίζουμε διαφορετικά προς αποφυγή σύγχυσης με τα λ_{min} και λ_{max}) και b_{min} και b_{max} είναι το μικρότερο και μεγαλύτερο στοιχείο της διαγωνίου του πίνακα Β αντίστοιχα.

Πρόταση 2.1.18. Έστω ένας πίνακας συσχέτισης R, δηλαδή ένας τετραγωνικός πίνακας διαστάσεων $n\times n$ που δείχνει τις συσχετίσεις (τον συντελεστή συσχέτισης) των τυχαίων μεταβλητών και ο οποίος έχει μονάδα στη διαγώνιο και είναι θετικά ημιορισμένος, και Α ένας θετικά ημιορισμένος πίνακας n γραμμών και στηλών. Τότε

$$ch_n(A) \leq ch_j(A \circ R) \leq ch_1(A),\ j=1,\dots,n.$$

Πρόταση 2.1.19. Έστω Α ένας τετραγωνικός πίνακας n γραμμών και n στηλών ο οποίος είναι θετικά ημιορισμένος. Τότε ισχύει:

$$ch_n^2(A) \leq a_{min}ch_n(A)) \leq ch_j(A \circ A) \leq a_{max}ch_1(A)) \leq ch_1^2(A),\ j=1,...,n,$$

όπου a_{min} και a_{max} είναι το μικρότερο και το μεγαλύτερο στοιχείο αντίστοιχα της διαγωνίου του πίνακα Α.

Η υπόθεση ότι ο Α είναι θετικά ημιορισμένος στο Θεώρημα 2.1.17 και τις Προτάσεις 2.1.18 και 2.1.19 μπορεί να αντικατασταθεί με την υπόθεση ο Α να είναι συμμετρικός και όχι αρνητικά ορισμένος, ενώ για τη δεύτερη ανισότητα του Θεωρήματος 2.1.17 μας αρκεί $ch_1(A) \geq 0$.
Ο Davis παρατήρησε ότι αν υποθέσουμε ότι οι πίνακες Α και Β είναι απλά συμμετρικοί, τότε υπάρχει ένα άνω φράγμα για την απόλυτη τιμή των ιδιοτιμών του $A \circ B$. Αυτό το φράγμα οδηγεί στο Θεώρημα 2.1.17 όταν οι Α και Β είναι θετικά ημιορισμένοι. Περισσότερες λεπτομέρειες για αυτό θα δοθούν παρακάτω.
Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 1.5.3, μπορούμε να δούμε ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα $A \circ B$ φράσσονται από τις ιδιοτιμές του πίνακα $A\otimes B$, όταν οι πίνακες Α και Β είναι θετικά ημιορισμένοι.
Αν A_{n-r} ένας πίνακας r γραμμών και r στηλών, ο οποίος είναι υποπίνακας του συμμετρικού πίνακα Α, τότε

$$\mathrm{ch}_{s+t}(A) \le \mathrm{ch}_s(A_t) \le \mathrm{ch}_s(A), \text{ όπου } s=1,\ldots,n-t \text{ και } t=1,\ldots,n-1.$$

Θεώρημα 2.1.20. Έστω A και B δύο τετραγωνικοί πίνακες n γραμμών και n στηλών, οι οποίοι είναι θετικά ημιορισμένοι. Τότε

$$\mathrm{ch}_n(A)\mathrm{ch}_n(B) \le \mathrm{ch}_{j+n^2-n}(A\otimes B) \le \mathrm{ch}_j(A \circ B) \le \mathrm{ch}_j(A\otimes B) \le \mathrm{ch}_1(A)\mathrm{ch}_1(B),\ j=1,\ldots,n.$$

Απόδειξη: Έστω $A_{n\times n}$ και $B_{n\times n}$ δύο θετικά ημιορισμένοι πίνακες, για τους οποίους ισχύει ότι $a_1,\ldots,a_n$ και $b_1,\ldots,b_n$ αντίστοιχα είναι οι ρίζες της χαρακτηριστικής τους εξίσωσης, δηλαδή οι ιδιοτιμές τους. Τότε ο πίνακας $A\otimes B$ θα έχει n^2 το πλήθος ιδιοτιμές, οι οποίες θα είναι οι $a_s b_t$ για κάθε s,t=1,…,n. Επιπλέον, η j-οστή μεγαλύτερη ιδιοτιμή του πίνακα $A \circ B$ βρίσκεται ανάμεσα στα j-οστα και $(j+n^2-n)$-οστά μεγαλύτερα από τα ζευγάρια $a_s b_t$ για κάθε s,t=1,…,n.
Άρα αποδείχθηκε το ζητούμενο. □

Πρόταση 2.1.21. Έστω A και B θετικά ημιορισμένοι πίνακες, τότε

$$\prod_{t=0}^{n-1} \mathrm{ch}_{n^2-t}(A\otimes B) \le |A \circ B| \le \prod_{j=1}^{n} \mathrm{ch}_j(A\otimes B).$$

Απόδειξη: Έστω $A_{n\times n}$ και $B_{n\times n}$ δύο θετικά ημιορισμένοι πίνακες. Επιπλέον, έστω $\mathrm{ch}_j(A \circ B)$, j=1,…,n οι ιδιοτιμές του πίνακα $A \circ B$. Τότε ισχύει ότι

$$\det(A \circ B)= \prod_{j=1}^{n} \mathrm{ch}_j(A \circ B).$$

Από Θεώρημα 2.1.20 έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{ch}_{j+n^2-n}(A\otimes B) \le \mathrm{ch}_j(A \circ B) \le \mathrm{ch}_j(A\otimes B)\ ,\ \forall\ j=1,\ldots,n \\
&\Rightarrow \prod_{j=1}^{n} \mathrm{ch}_{j+n^2-n}(A\otimes B) \le \prod_{j=1}^{n} \mathrm{ch}_j(A \circ B) \le \prod_{j=1}^{n} \mathrm{ch}_j(A\otimes B) \\
&\Rightarrow \prod_{j=1}^{n} \mathrm{ch}_{j+n^2-n}(A\otimes B) \le |A \circ B| \le \prod_{j=1}^{n} \mathrm{ch}_j(A\otimes B) \\
&\xRightarrow{j+n^2-n=n^2-t} \prod_{t=0}^{n-1} \mathrm{ch}_{n^2-t}(A\otimes B) \le |A \circ B| \le \prod_{j=1}^{n} \mathrm{ch}_j(A\otimes B).
\end{aligned}$$ □

Έστω τώρα A_{n-r} ο μικρότερος $r\times r$ υποπίνακας του τετραγωνικού πίνακα $A_{n\times n}$, με $A_0 = A$.

Λήμμα 2.1.22. Έστω $A_{n\times n}$ ένας τετραγωνικός πίνακας n γραμμών και n στηλών, ο οποίος είναι θετικά ημιορισμένος. Τότε ο πίνακας

$$A^0=A-a e_1 e_1^T$$

είναι θετικά ημιορισμένος, με $a=\frac{|A|}{|A_1|}$ όταν $|A| \neq 0$ και μηδέν σε διαφορετική περίπτωση, και όπου $e_1 = (1,0,\ldots,0)^T$.

Απόδειξη: Έστω $A_{n\times n}$ ένας τετραγωνικός πίνακας ο οποίος έχει ορίζουσα διάφορη του μηδενός και επιπλέον είναι θετικά ημιορισμένος. Αφού $\det A\neq 0$, τότε ο A αντιστρέφεται, και συνεπώς υπάρχει πίνακας A^{-1} τέτοιος ώστε $A\cdot A^{-1}=I$. Θεωρώ $a=\frac{1}{e_1^T A^{-1} e_1}$, τότε

$$\begin{aligned}A^0A^{-1}A^0 &= (A-ae_1e_1^T)(I-aA^{-1}e_1e_1^T)\\ &= A-aAA^{-1}e_1e_1^T-aAA^{-1}e_1e_1^T+a^2e_1e_1^TA^{-1}e_1e_1^T\\ &=A-2ae_1e_1^T+\frac{1}{e_1^TA^{-1}e_1}\frac{1}{e_1^TA^{-1}e_1}e_1(e_1^TA^{-1}e_1)e_1^T\\ &=A-2ae_1e_1^T+ae_1e_1^T=A-ae_1e_1^T=A^0.\end{aligned}$$

Αφού ο A^0 είναι συμμετρικός, τότε είναι θετικά ημιορισμένος. Με απλές πράξεις,

$$a=\frac{1}{e_1^TA^{-1}e_1}=\frac{1}{\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a^{11} & a^{12} & \cdots & a^{1n}\\ a^{21} & a^{22} & \cdots & a^{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a^{n1} & a^{11} & \cdots & a^{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}}=\frac{1}{\begin{pmatrix}a^{11} & a^{12} & \cdots & a^{1n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}}=\frac{1}{a^{11}}$$

$$ae_1e_1^T=a\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{a^{11}} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}.$$

Επίσης,

$$A^0=\begin{pmatrix}a_{11}-\frac{1}{a^{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}.$$

Αφού ο A^0 είναι θετικά ημιορισμένος, τότε

$$a_{11}-\frac{1}{a^{11}}\geq 0 \Longrightarrow a_{11}\geq\frac{1}{a^{11}}\Longrightarrow a_{11}a^{11}\geq 1\,,$$

και ομοίως $a_{ii}a^{ii}\geq 1$, για κάθε i=1,…,n. Επίσης, αφού $a_{11}a^{11}\geq 1$, τότε $|A|\leq a_{11}|A_1|$. □
Όμοια $|A_1|\leq a_{22}|A_2|$ και έτσι $|A|\leq a_{11}a_{22}|A_2|$.
Κάνοντας την ίδια διαδικασία καταλήγουμε στο παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 2.1.23. Έστω A ένας τετραγωνικός πίνακας n γραμμών και n στηλών, ο οποίος είναι θετικά ημιορισμένος, τότε

$$|A|\leq a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Ο Marcus ονόμασε το παραπάνω λήμμα ως Θεώρημα Οριζουσών Hadamard.

Λήμμα 2.1.24. Έστω C,E $\in M_{n\times n}$ τετραγωνικοί πίνακες $n \times n$, τέτοιοι ώστε ο E να είναι συμμετρικός ($E=E^T$) και για τον C να ισχύει ότι η ορίζουσα του είναι διάφορη του μηδενός και ότι είναι κανονικός, δηλαδή $C^*C=CC^*$. Τότε

$$\|C^{-1}EC^T\|_2 \geq \|E\|_2.$$

Απόδειξη: Έστω $C=U^*DU$ μια διαγωνοποίηση του πίνακα C. Τότε είναι φανερό ότι

$$\|C^{-1}EC^T\|_2=\|U^*D^{-1}UEU^TD\bar{U}\|_2=\|D^{-1}UEU^TD\|_2 \geq \|UEU^T\|_2=\|E\|_2.$$

Η δεύτερη και η τελευταία ισότητα προκύπτουν από το γεγονός ότι η νόρμα του Frobenius είναι αναλλοίωτη σε ορθομοναδιαίους μετασχηματισμούς ομοιότητας, και η ανισότητα από το γεγονός ότι ο πίνακας UEU^T είναι συμμετρικός και $|t|^{-1}+|t| \geq 2$ για κάθε $0\neq t \in \mathbb{C}$. ◻

Υπενθύμιση: Η νόρμα Frobenius ενός πίνακα $A=[a_{ij}]\in C^{n\times n}$ ορίζεται ως:

$$\|A\|_2 = \left(\sum_{i,j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Θεώρημα 2.1.25. Έστω A,B $\in M_{n\times n}$ δύο θετικά ημιορισμένοι τετραγωνικοί πίνακες με n γραμμές και n στήλες. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:

$$(\alpha)\ \lambda_{min}(A \circ B)\geq \lambda_{min}(AB^T)$$

και

$$(b)\ \lambda_{min}(A \circ B)\geq \lambda_{min}(AB).$$

Απόδειξη: Αρκεί να μελετήσουμε μόνο θετικά ορισμένους πίνακες A,B, καθώς η ισχυριζόμενη ανισότητα είναι τετριμμένη αν κάποιος από τους δύο πίνακες είναι ιδιάζοντες. Έστω$|||\cdot||| \equiv (\lambda_{max}(A^*A))^{\frac{1}{2}}$ η φασματική ακτίνα στους πίνακες $M_{n\times n}$. Αρχικά θα αποδείξουμε το εξής:

$$\begin{aligned}
\lambda_{min}(A \circ B) &= \min_{\|x\|_2=1} x^*(A\circ B)x = \min_{\|D_x\|_2=1} tr(D_x^* A D_x B^T)\\
&= \min_{\|D_x\|_2=1} tr(B^{\frac{1}{2}T}D_x^* A^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}D_x B^{\frac{1}{2}T})\\
&= \min_{\|D_x\|_2=1} tr\,([A^{\frac{1}{2}}D_xB^{\frac{1}{2}T}]^*[A^{\frac{1}{2}}D_xB^{\frac{1}{2}T}])\\
&= \min_{\|D_x\|_2=1} \left\|A^{\frac{1}{2}}D_xB^{\frac{1}{2}T}\right\|_2^2 = \min_{\|D_x\|_2=1} \left\|A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}B^{-\frac{1}{2}}D_xB^{\frac{1}{2}T}\right\|_2^2\\
&\geq \left|\left|\left|(A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}})^{-1}\right|\right|\right|_2^{-2} \min_{\|D_x\|_2=1} \left\|B^{-\frac{1}{2}}D_xB^{\frac{1}{2}T}\right\|_2^2\\
&\geq \left|\left|\left|B^{-\frac{1}{2}}A^{-\frac{1}{2}}\right|\right|\right|_2^{-2}\cdot 1 = [\lambda_{max}([B^{-\frac{1}{2}}A^{-\frac{1}{2}}]^*[B^{-\frac{1}{2}}A^{-\frac{1}{2}}])]^{-1}\\
&= [\lambda_{max}(A^{-\frac{1}{2}}B^{-1}A^{-\frac{1}{2}})]^{-1} = [\lambda_{max}(A^{\frac{1}{2}}[A^{-\frac{1}{2}}B^{-1}A^{-\frac{1}{2}}]A^{-\frac{1}{2}})]^{-1}
\end{aligned}$$

$$=[\lambda_{max}(B^{-1}A^{-1})]^{-1}=\lambda_{min}(AB).$$

Η δεύτερη ανισότητα προκύπτει από Λήμμα 2.1.24, ενώ η πρώτη προκύπτει από το γεγονός ότι $\|RS\|_2 \leq |\|R\||_2\|S\|_2$ για κάθε $R,S \in M_{n\times n}$.
Η πρώτη ανισότητα του θεωρήματος αποδεικνύεται ομοίως εισάγοντας αυτήν τη φορά την ποσότητα $B^{\frac{1}{2}T}B^{-\frac{1}{2}T}$. Οπότε έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\lambda_{min}(A\circ B) &= \min_{\|D_x\|_2=1} \left\|A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}T}B^{-\frac{1}{2}T}D_xB^{\frac{1}{2}T}\right\|_2^2 \\
&\geq \left|\left\|(A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}T})^{-1}\right\|\right|_2^{-2} \min_{\|D_x\|_2=1} \left\|B^{-\frac{1}{2}T}D_xB^{\frac{1}{2}T}\right\|_2 \\
&\geq \left|\left\|(A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}T})^{-1}\right\|\right|_2^{-2} \ ({x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2) \\
&\geq \left|\left\|(A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}T})^{-1}\right\|\right|_2^{-2} \cdot 1=[\lambda_{max}(B^{-1T}A^{-1})]^{-1} \\
&= \lambda_{min}(AB^T),
\end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ανισότητα οφείλεται στο γεγονός ότι το άθροισμα των τετραγώνων των απόλυτων τιμών των ιδιοτιμών κάθε πίνακα είναι μικρότερο ή ίσο από το τετράγωνο της Frobenius νόρμας του. Σε κάθε περίπτωση η δύναμη $\frac{1}{2}$ υποδεικνύει τη μοναδική θετική τετραγωνική ρίζα. □

<u>**Παράδειγμα 2.1.26.**</u> Έστω τετραγωνικοί πίνακες $A,B \in M_{n\times n}$ (n γραμμών και n στηλών) με πραγματικά στοιχεία. Τότε οι ανισότητες του Θεωρήματος 2.1.25 ικανοποιούνται. Αν όμως και οι δύο πίνακες έχουν μιγαδικά στοιχεία, τότε ίσως κάποια από τις ανισότητες να μην ικανοποιείται. Για παράδειγμα, αν

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2i \\ -2i & 1 \end{pmatrix} \text{ και } B=\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 3 \end{pmatrix},$$

τότε

$$\sigma(AB)=\{1\pm\sqrt{3}\},\ \sigma(AB^T)=\{2,8\} \text{ και } \sigma(A\circ B)=\{1,5\}.$$

Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε ότι

$$\lambda_{min}(A\circ B)=1<\lambda_{min}(AB^T).$$

<u>Σημείωση</u>: Αν ένας τετραγωνικός πίνακας $X\in M_{n\times n}$ έχει μόνο πραγματικές ιδιοτιμές, τότε ισχύει

$$\lambda_{min}(X)=\lambda_1(X)\leq\ \lambda_2(X)\leq \ldots \leq\ \lambda_n(X)=\lambda_{max}(X).$$

Για θετικά ορισμένους πίνακες $A,B \in M_{n\times n}$ (n γραμμών και n στηλών), το Θεώρημα 2.1.25 δίνει ότι $\lambda_1(AB)\leq \lambda_1(A\circ B)$ και από την ανισότητα Oppenheim

$$(\det A)(\det B)\leq\det(A\circ B)),$$

προκύπτει ότι:

$$\prod_{i=1}^{n} \lambda_i(AB) \leq \prod_{i=1}^{n} \lambda_i(A \circ B).$$

Τα παραπάνω αποτελούν μια πρόταση για πιθανές ενδιάμεσες ανισότητες μεταξύ των ιδιοτιμών:

$$\prod_{i=1}^{k} \lambda_i(AB) \leq \prod_{i=1}^{k} \lambda_i(A \circ B),\ k=2,\dots,n-1,$$

τα οποία όμως δεν έχουν εδραιωθεί. Η πιο ασθενής οικογένεια ανισοτήτων:

$$\prod_{i=1}^{k} \lambda_i(A)\lambda_i(B) \leq \prod_{i=1}^{k} \lambda_i(A \circ B),\ k=1,\dots,n$$

θεωρείται γνωστή. Όλες αυτές οι ανισότητες αφορούν θετικά ορισμένους τετραγωνικούς πίνακες $A,B \in M_{n\times n}$.

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε μια γενίκευση του Θεωρήματος 1.6.5, η οποία δίνει έμφαση στα στοιχεία της διαγωνίου του πίνακα. Θα δοθούν δύο αποδείξεις: η πρώτη δείχνει ότι ένα χρήσιμο ποσοτικό αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα από τον ποιοτικό ισχυρισμό του Θεωρήματος 1.6.5, ενώ η δεύτερη χρησιμοποιεί ιδιότητες τετραγωνικών μορφών οι οποίες είναι ζωτικής σημασίας για να παρατηρήσουμε καλύτερα τις ιδιοτιμές του γινομένου Hadamard.

Θεώρημα 2.1.27. Έστω δύο ερμιτιανοί πίνακες $A,B \in M_{n\times n}$ (n γραμμών και n στηλών), όπου ο A είναι επιπλέον θετικά ημιορισμένος. Κάθε ιδιοτιμή $\lambda(A \circ B)$ του πίνακα $A \circ B$ ικανοποιεί το εξής:

$$\begin{aligned}\lambda_{min}(A)\,\lambda_{min}(B) &\leq [\min_{1\leq i\leq n} a_{ii}]\,\lambda_{min}(B)\\ &\leq \lambda(A \circ B)\\ &\leq [\max_{1\leq i\leq n} a_{ii}]\,\lambda_{max}(B)\\ &\leq \lambda_{max}(A)\,\lambda_{max}(B).\end{aligned}$$

Απόδειξη #1: Αφού οι πίνακες $B-\lambda_{min}(B)I$ και A είναι θετικά ημιορισμένοι, τότε και ο $A\circ(B-\lambda_{min}(B)I)$ θα είναι θετικά ημιορισμένος. Έστω $x=[x_i]$ ένα μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $A \circ B$ το οποίο παράγεται από μια ιδιοτιμή $\lambda(A \circ B)$. Τότε,

$$\begin{aligned}x^*(\,A\circ(\,B-\lambda_{min}(B)I\,)x &= x^*(A \circ B)x-\lambda_{min}(B)\,x^*(A \circ I)x\\ &= \lambda(A \circ B)-\lambda_{min}(B)\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\,a_{ii}\\ &\geq \lambda(A \circ B)-\lambda_{min}(B)\min_i a_{ii},\end{aligned}$$

η οποία δίνει το ζητούμενο κάτω φράγμα. □

Ο υπολογισμός για το άνω φράγμα είναι παρόμοιος.

Απόδειξη #2: Έστω x ένα διάνυσμα στο $\mathbb{C}^n$, δηλαδή $x=[\,x_i\,] \in \mathbb{C}^n$, ένα μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $A \circ B$ το οποίο παράγεται από μια ιδιοτιμή $\lambda(A \circ B)$. Αφού ο A είναι θετικά ημιορισμένος, υπάρχουν πίνακες $C \in M_{n\times n}$ τέτοιοι ώστε $A=CC^*$ (για παράδειγμα $C=A^{\frac{1}{2}}$). Θα αναφερόμαστε στις στήλες του C ως $C=[c_1 c_2 ... c_n]$ και έτσι:

$$A=\sum_{k=1}^{n} c_k c_k^* .$$

Επιπλέον, έστω $C=[c_{ik}]$ τέτοιο ώστε το c_{ik} να δηλώνει το i-οστό στοιχείο της στήλης c_k. Τότε, για την ιδιοτιμή $\lambda(A\circ B)$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\lambda(A\circ B)&= x^*(A\circ B)x= tr(D_x^* A D_x B^T)\\ &=\sum_{k=1}^{n} \ tr(D_x^* c_k c_k^* \ D_x B^T)\\ &=\sum_{k=1}^{n}(c_k^* D_x)\ B^T(D_x^* c_k)\\ &=\sum_{k=1}^{n}(\overline{x}\circ c_k)^*\ B^T(\overline{x}\circ c_k).\end{aligned}$$

Ως εκ τούτου λοιπόν έχουμε

$$\begin{aligned}\lambda(A\circ B)&\geq \sum_{k=1}^{n}\lambda_{min}(B^T)\ \|\overline{x}\circ c_k\|_2^2=\lambda_{min}(B)\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}|\overline{x}_i c_{ik}|^2\\ &= \lambda_{min}(B)\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\sum_{k=1}^{n}|c_{ik}|^2=\lambda_{min}(B)\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\ a_{ii}\\ &\geq \lambda_{min}(B)\min_{1\leq i\leq n} a_{ii}.\end{aligned}$$

Ο υπολογισμός για το άνω φράγμα είναι παρόμοιος. Οι εξωτερικές ανισότητες τώρα προκύπτουν από το γεγονός ότι:

$$\lambda_{min}(A)\leq a_{ii} \leq \lambda_{max}(A). \qquad \square$$

Στο σημείο αυτό θα παρουσιάσουμε μια γενίκευση των ποιοτικών υποθέσεων του Θεωρήματος 1.6.5 σε μια κατάσταση κατά την οποία οι πίνακες παρουσιάζονται σε διαμερισμένη μορφή. Οι περιπτώσεις που θα συζητηθούν στο παρακάτω θεώρημα οδηγούν φυσικά στη θεωρία των μονότονων και κυρτών απεικονίσεων που ορίζονται μεταξύ πινάκων.
Η παρατήρηση κλειδί σε σχέση με την υπόθεση του Θεωρήματος 1.6.5 είναι ότι ένας θετικά ημιορισμένος πίνακας B δεν μπορεί να έχει μηδενικό στοιχείο στη διαγώνιο αν και μόνο αν $B=C^2$ για κάποιο ερμιτιανό πίνακα C με μη μηδενικές στήλες, όπου κάθε στήλη του C έχει βαθμό ένα.

Λήμμα 2.1.28. Έστω $n,p,n_1,\dots, n_p$ θετικοί ακέραιοι τέτοιοι ώστε $n_1+ n_2 +\dots+n_p = n$. Έστω $B,C \in M_{n\times n}$ δοσμένοι ερμιτιανοί τετραγωνικοί πίνακες διαστάσεων $n\times n$. Υποθέτουμε ότι:
(a) $B=C^2$ και
(b) B και C διαχωρίζονται σύμφωνα με τα εξης: $B=[\, B_{ij}]_{i,j=1}^{p}$ και $C=[\, C_{ij}]_{i,j=1}^{p}$ με $B_{ij}, C_{ij} \in M_{n_i\, x\, n_j}$ για κάθε i,j=1,...,p. Για ένα δοσμένο ακέραιο i, με $i\leq 1\leq p$, ο πίνακας B_{ii} είναι θετικά ορισμένος αν και μόνο αν $C_i \equiv [\, C_{k_i}]_{k=1}^{p}$, η i μπλοκ-στήλη του C, έχει βαθμό n_i.

<u>Απόδειξη</u>: Για κάθε $x \in \mathbb{C}^{n_i}$, έχουμε ότι

$$x^*B_{ii}x=\sum_{k=1}^{p} x^*\,(C_{k_i})^*C_{k_i}x=\sum_{k=1}^{p}\left\|C_{k_i}x\right\|_2^2 \geq 0,$$

όπου η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $C_{k_i}x=0$ για κάθε $k=1,\dots,p$.
Έτσι, $x^*B_{ii}x=0$ αν και μόνο αν $C_ix=0$, και έτσι ο θετικά ημιορισμένος υποπίνακας B_{ii} είναι μη αντιστρέψιμος αν και μόνο αν η μπλοκ-στήλη C_i έχει βαθμό μικρότερο του n_i. □

<u>**Θεώρημα 2.1.29.**</u> Έστω $n,p,n_1,\dots,n_p$ δοσμένοι θετικοί ακέραιοι τέτοιοι ώστε $n_1+n_2+\dots+n_p=n$, και έστω $A,B \in M_{n\times n}$ δοσμένοι θετικά ημιορισμένοι τετραγωνικοί πίνακες διαστάσεων $n \times n$. Υποθέτουμε ότι:

(a) A και B διαχωρίζονται ως εξής: $A=[A_{ij}]_{i,j=1}^{p}$ και $B=[B_{ij}]_{i,j=1}^{p}$, με $A_{ij}, B_{ij} \in M_{n_i,n_j}$ για $i,j=1,\dots,p$.

(b) $A_{ij}=a_{ij}J_{n_i,n_j}$, $a_{ij} \in \mathbb{C}$, $i,j=1,\dots,p$, όπου $J_{r,s}$ είναι ένας πίνακας $r\times s$ με όλα τα στοιχεία του ίσα με τη μονάδα.

(c) O $A\equiv[a_{ij}]_{i,j=1}^{p} \in M_p$ είναι θετικά ορισμένος.

(d) O B_{ii} είναι θετικά ορισμένος για $i=1,\dots,p$.

Τότε ο πίνακας $A \circ B$ είναι θετικά ορισμένος.

<u>**Απόδειξη**</u>: Αφού $B \geq 0$, υπάρχει ένας ερμιτιανός πίνακας C τέτοιος ώστε $B=C^2$, με διαμέριση C σύμφωνα με τα A και B ως $C=[C_{ij}]_{i,j=1}^{p}$ και $C_k \equiv [C_{i_k}]_{i=1}^{p}$ να δηλώνει την k μπλοκ-στήλη του πίνακα C.
Καθώς κάθε διαγώνιος υποπίνακας B_{ii} είναι θετικά ορισμένος, το Λήμμα 2.1.28 μας επιβεβαιώνει ότι κάθε μπλοκ-στήλη C_i έχει τάξη n_i, $i=1,\dots,p$. Για κάθε $x\in\mathbb{C}^n$ με $x=[x_i]_{i=1}^{p}$ με $x_i \in \mathbb{C}^{n_i}$ για $i=1,\dots,p$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} x^*(A\circ B)x &= x^*(A\circ C^2)x=\sum_{i,j=1}^{p} a_{ij}\,x_i^*(C_i)^*C_jx_j \\ &=\sum_{k=1}^{p}\sum_{i,j=1}^{p} a_{ij}\,x_i^*(C_{ki})^*C_{kj}\,x_j \\ &=\sum_{k=1}^{p}[(C_k)^*\square_1\,x]^*A\,[(C_k)^*\square_1\,x] \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

όπου $(C_k)^*\square_1\,x\equiv[(C_{ik})^*x_i]_{i=1}^{p}$. Υποθέτουμε ότι $x^*(A\circ B)x=0$. Αφού $A>0$, έχουμε ότι $(C_k)^*\square_1 x=0$ για κάθε $k=1,\dots,p$. Έτσι, για κάθε $i=1,\dots,p$ έχουμε ότι $(C_{ik})^*x_i=C_{ki}x_i=0$ για κάθε $k=1,\dots,p$ από το οποίο και προκύπτει ότι $C_ix_i=0$. Αφού κάθε C_i έχει το μέγιστο βαθμό που θα μπορούσε να έχει, αυτό σημαίνει ότι κάθε $x_i=0$. Έτσι λοιπόν, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $x=0$ και $A\circ B>0$. □

<u>Σημείωση:</u> Έστω $n=pq$ και οι υποπίνακες $A=[A_{ij}]_{i,j=1}^{p}$, $B=[B_{ij}]_{i,j=1}^{p} \in M_n$, όπου $A_{ij}, B_{ij} \in M_q$, τότε ορίζουμε το εξής γινόμενο:

$$A \square_1 B=[A_{ij}B_{ij}]_{i,j=1}^{p}.$$

Πρόταση 2.1.30. Έστω $n,p,n_1,\ldots, n_p$ δοσμένοι θετικοί ακέραιοι με $n_1+ n_2 +\ldots+n_p = n$, και έστω $A,B,C \in M_{n\times n}$ δοσμένοι ερμιτιανοί πίνακες διαστάσεων $n \times n$.
Υποθέτουμε ότι:

(a) A,B,C διαχωρίζονται ως εξής: $A=[A_{ij}]_{i,j=1}^{p}$, $B=[B_{ij}]_{i,j=1}^{p}$ και $C=[C_{ij}]_{i,j=1}^{p}$ με A_{ij}, B_{ij}, $C_{ij} \in M_{n_i,n_j}$ για i,j=1,...,p.

(b) $A_{ij}= a_{ij}J_{n_i,n_j}$, $B_{ij}= b_{ij}J_{n_i,n_j}$ όπου $a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{C}$, i,j=1,...,p, όπου $J_{r,s}$ είναι ένας πίνακας $r\times s$ με όλα τα στοιχεία του ίσα με τη μονάδα.

(c) O $A\equiv [a_{ij}]_{i,j=1}^{p} \in M_p$ είναι θετικά ορισμένος.

(d) $b_{ij} \neq 0$ για i,j=1,...,p και

(e) Κάθε μπλοκ-στήλη $C_j \equiv [C_{ij}]_{i=1}^{p} \in M_{n\,,\,n_j}$ έχει βαθμό n_j, j=1,...,p.

Τότε ο πίνακας $A \circ (B \circ C)^2$ είναι θετικά ορισμένος.

Απόδειξη: Για κάθε j=1,...,p, με $B_j \equiv [B_{ij}]_{i=1}^{p}$ θα δηλώνουμε την j μπλοκ-στήλη του πίνακα B. Εξαιτίας της κατασκευαστικής δομής των υποπινάκων του B και του γεγονότος ότι όλα τα στοιχεία του είναι μη μηδενικά, για κάθε j=1,...,p οι γραμμές του $B_j \circ C_j$ έχουν το ίδιο εύρος με τις γραμμές του C_j. Έτσι, $\operatorname{rank}(B_j \circ C_j)=\operatorname{rank}(C_j)= n_j$ για j=1,…,p. Από το Λήμμα 2.1.28 τώρα προκύπτει ότι κάθε διαγώνιος υποπίνακας του $(B \circ C)^2$ είναι θετικά ορισμένος και έτσι από το Θεώρημα 2.1.29 καταλήγουμε στο ζητούμενο. ◻

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3.

3.1. Πίνακες $A \circ (A^{-1})^T$ και $A \circ A^{-1}$

Όπως παρατηρήσαμε, στην αρχή του κεφαλαίου τα γινόμενα πινάκων $A \circ (A^{-1})^T$ και $A\circ A^{-1}$ εμφανίζονται αρκετά συχνά, όχι προς έκπληξη μας, καθώς όπως θα δούμε παρακάτω έχουν μια πολύ ειδική μαθηματική δομή.

Ορισμός 3.1.1. Έστω A ένας τετραγωνικός πίνακας με n γραμμές και n στήλες ο οποίος έχει μη μηδενική ορίζουσα. Τότε ορίζουμε τις εξής απεικονίσεις:

$$\Phi : M_{n\times n} \to M_{n\times n} \text{ τέτοια ώστε}$$
$$\Phi(A) = A \circ A^{-1}$$

και

$$\Phi_T: M_{n\times n} \to M_{n\times n} \text{ τέτοια ώστε}$$
$$\Phi_T(A) = A \circ (A^{-1})^T.$$

Στο παρακάτω λήμμα θα παρουσιάσουμε κάποιες βασικές αλγεβρικές ιδιότητες για τις απεικονίσεις Φ και Φ_T.

<u>Λήμμα 3.1.2.</u> Για τετραγωνικό πίνακα A διάστασης $n\times n$, ο οποίος έχει μη μηδενική ορίζουσα, ισχύουν τα ακόλουθα:

(a) Το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής και κάθε στήλης του πίνακα $\Phi_T(A)$ ισούται με τη μονάδα.

(b) Για τετραγωνικούς αντιστρέψιμους διαγώνιους πίνακες D,E με n γραμμές και n στήλες ισχύει ότι:

(i) $\Phi_T(DAE)= \Phi_T(A)$, και

(ii) $\Phi(DAE)=(D^{-1}E)^{-1}\Phi(A)(D^{-1}E)$.

(c) Για τετραγωνικούς πίνακές P,Q, με n γραμμές και n στήλες, οι οποίοι έχουν από μία φορά τη μονάδα σε κάθε γραμμή και στήλη και οπουδήποτε αλλού μηδενικά, ισχύει $\Phi_T(PAQ)=P\Phi_T(A)Q$.

(d) $\Phi_T(P)=P$ για κάθε πίνακα P, όπως αυτός ορίστηκε στην ιδιότητα c.

(e) (i) $\Phi(A^{-1})= \Phi(A)$.

(ii) $\Phi(A^T)=(\Phi(A))^T$.

(iii) $\Phi_T(A^{-1})= \Phi_T(A^T)$.

<u>Απόδειξη</u>: (a) Γνωρίζουμε ότι αν $\det(A)\neq 0$, τότε ο πίνακας A αντιστρέφεται, άρα θα υπάρχει πίνακας A^{-1}, τέτοιος ώστε:

$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I.$$

Έστω $(A\cdot A^{-1})_{ii}$ το στοιχείο του πίνακα $A\cdot A^{-1}$ που βρίσκεται στην i γραμμή και i στήλη. Τότε

$$(A\cdot A^{-1})_{ii}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, a'_{ji} \text{ για κάθε } i=1,\ldots,n,$$

όπου a_{ij} το στοιχείο του πίνακα A που βρίσκεται στην i γραμμή και j στήλη και a'_{ji} το στοιχείο του πίνακα A^{-1} που βρίσκεται στη γραμμή j και στη στήλη i. Αφού $A\cdot A^{-1}=I$, τότε $(A\cdot A^{-1})_{ii}=1$. Άρα,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, a'_{ji}=1.$$

Αντίστοιχα και $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, a'_{ji}=1$ για κάθε $j=1,\ldots,n$.

Το άθροισμα των στοιχείων της i γραμμής του πίνακα $\Phi_T(A)=A\circ(A^{-1})^T$ θα ισούται με:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, a'_{ji} \quad \text{για } i=1,\ldots,n.$$

Άρα από προηγούμενη σχέση το άθροισμα θα ισούται με 1.

Το άθροισμα των στοιχείων της j στήλης του πίνακα $\Phi_T(A)=(A\circ A^{-1})^T$ θα ισούται με

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, a'_{ji},$$

και από προηγούμενη σχέση θα ισούται με 1.
(b)Οι ισότητες (i) και (ii) προκύπτουν κάνοντας χρήση του Λήμματος 1.5.4. Κάνοντας πράξεις έχουμε:

$$
\begin{aligned}
\text{(i)}\ \ \Phi_T(DAE) &= (DAE)\circ ((DAE)^{-1})^T = (DAE)\circ (E^{-1}A^{-1}D^{-1})^T \\
&= (DAE)\circ((D^{-1})^T(A^{-1})^T(E^{-1})^T) \\
&= (DA)\circ(D^{-1}(A^{-1})^T E^{-1}E) = (DA)\circ(D^{-1}(A^{-1})^T I) \\
&= (DA)\circ(D^{-1}(A^{-1})^T) = A\circ(DD^{-1}(A^{-1})^T) = A\circ(I(A^{-1})^T) \\
&= A\circ(A^{-1})^T = \Phi_T(A).
\end{aligned}
$$

Η τέταρτη ισότητα προκύπτει από το ότι αν D,E διαγώνιοι πίνακες τότε D^{-1}και E^{-1} είναι επίσης διαγώνιοι πίνακες. Επίσης, ο ανάστροφος ενός διαγώνιου πίνακα ισούται με τον ίδιο τον πίνακα.

$$
\begin{aligned}
\text{(ii)}\ \ \Phi(DAE) &= (DAE)\circ (DAE)^{-1} = (DAE)\circ (DAE)^{-1} = (DAE)\circ(E^{-1}A^{-1}D^{-1}) \\
&= (DAED^{-1})\circ(E^{-1}A^{-1}) = (E^{-1}DA)\circ(A^{-1}ED^{-1}) \\
&= (E^{-1}DAD^{-1})\circ(A^{-1}E) = (E^{-1}DAD^{-1}E)\circ A^{-1} \\
&= E^{-1}D(A\circ A^{-1})\, D^{-1}E = (D^{-1}E)^{-1}\Phi(A)\,(D^{-1}E).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{(c)}\ \ \Phi_T(PAQ) &= (PAQ)\circ ((PAQ)^{-1})^T = (PAQ)\circ (Q^{-1}A^{-1}P^{-1})^T \\
&= (PAQ)\circ (Q^TA^{-1}P^T)^T = (PAQ)\circ ((P^T)^T(A^{-1})^T(Q^T)^T) \\
&= (PAQ)\circ(P(A^{-1})^TQ) = (PAQQ)\circ(P(A^{-1})^T) \\
&= (PPA)\circ((A^{-1})^TQQ) = (PPAQ)\circ((A^{-1})^TQ) \\
&= (PPAQQ)\circ(A^{-1})^T = PP(A\circ (A^{-1})^T)QQ \\
&= P\Phi_T(A)Q.
\end{aligned}
$$

Η τρίτη ισότητα είναι προφανής καθώς, για έναν πίνακα που έχει από μια φορά τη μονάδα και οπουδήποτε αλλού μηδενικά, ισχύει ότι $P^{-1}=P^T$.

(d) $\Phi_T(P)= P\circ (P^{-1})^T)= P\circ (P^T)^T)=P\circ P=P$, καθώς $(P\circ P)_{ij}=P_{ij}P_{ij}$ για κάθε i,j=1,...,n. Άρα, αν $p_{ij}=0$, τότε είναι $(P\circ P)_{ij}=0$ ενώ, αν $p_{ij}=1$, τότε $(P\circ P)_{ij}=1$.

(e) Κάνοντας υπολογισμούς προκύπτει:

(i) $\Phi(A^{-1})=A^{-1}\circ (A^{-1})^{-1}= A^{-1}\circ A=A\circ A^{-1}= \Phi(A)$,

αφού το γινόμενο Hadamard, όπως έχουμε πει, ικανοποιεί την αντιμεταθετική ιδιότητα, δηλαδή

$$(A\circ B)_{ij}=a_{ij}b_{ij}=b_{ij}a_{ij}=(B\circ A)_{ij},\ \text{για } i,j=1,\dots,n.$$

(ii) $\Phi(A^T)= A^T\circ (A^T)^{-1}=A^T\circ (A^{-1})^T=(A\circ A^{-1})^T=(\Phi(A))^T$,

καθώς ισχύει ότι

$$(A \circ B)_{ij}^{T} = (a_{ij}b_{ij})^{T} = (a_{ji}b_{ji}) = (A^{T})_{ij}(B^{T})_{ij}, \text{ άρα } (A \circ B)^{T} = A^{T} \circ B^{T}.$$

(iii) $\Phi_T(A^{-1}) = A^{-1} \circ ((A^{-1})^{-1})^{T} = A^{-1} \circ A^{T} = ((A^{T})^{T})^{-1} \circ A^{T}$
$= ((A^{T})^{-1})^{T} \circ A^{T} = A^{T} \circ ((A^{T})^{-1})^{T} = \Phi_T(A^{T})$. □

<u>Θεώρημα 3.1.3.</u> Έστω A ένας τετραγωνικός πίνακας με n γραμμές και n στήλες ο οποίος είναι θετικά ορισμένος. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:

(a) $\lambda_{min}(\Phi(A)) \geq 1$ και
(b) $\lambda_{min}(\Phi_T(A)) \geq 1$.

<u>Απόδειξη</u>: Έχουμε

$$\text{(a)}\ \lambda_{min}(\Phi(A)) = \lambda_{min}(A \circ A^{-1}) \geq \lambda_{min}(AA^{-1}) = \lambda_{min}(I) = 1.$$

και

$$\text{(b)}\ \lambda_{min}(\Phi_T(A)) = \lambda_{min}(A \circ (A^{-1})^{T}) \geq \lambda_{min}(A(A^{-1})^{T}) = \lambda_{min}(AA^{-1}) = \lambda_{min}(I) = 1.$$

Για να αποδειχθούν τα παραπάνω χρησιμοποιήσαμε τις ανισότητες του Θεωρήματος 2.1.25. □

Εδώ αξίζει να σημειωθεί ότι οι πίνακες $\Phi(A)$ και $\Phi_T(A)$ συμπίπτουν, αν ο ερμιτιανός πίνακας A έχει πραγματικά στοιχεία, το οποίο προκύπτει μόνο αν ο A είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος. Έτσι λοιπόν, από τις ανισότητες του Θεωρήματος 3.1.3 προκύπτει ότι:

$$\Phi(A) \geq I \Leftrightarrow \Phi(A) - I \geq 0,$$

το οποίο σημαίνει ότι $\Phi(A) - I$ θετικά ημιορισμένος, και

$$\Phi_T(A) \geq I \Leftrightarrow \Phi_T(A)) - I \geq 0,$$

οπότε $\Phi_T(A)) - I$ θετικά ημιορισμένος, για κάθε θετικά ορισμένο τετραγωνικό πίνακα A n διαστάσεων. Αφού $1 \in \sigma(\Phi_T(A))$, η δεύτερη ανισότητα του Θεωρήματος 3.1.3 δεν είναι ποτέ αυστηρή.

<u>Σημείωση:</u> Έστω A,B δύο τετραγωνικοί πίνακες n γραμμών και n στηλών οι οποίοι είναι θετικά ημιορισμένοι. Τότε μπορούμε να ορίσουμε μια σχέση μερικής διάταξης για την οποία ισχύει ότι $A \geq B$ αν $A - B \geq 0$, το οποίο σημαίνει ότι ο $A - B$ είναι θετικά ημιορισμένος.

__Παράδειγμα 3.1.4.__ Έστω $A \in M_{3\times 3}$ τετραγωνικός πίνακας διαστάσεων 3×3 τέτοιος ώστε:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -i & 1+i \\ i & 2 & 0 \\ 1-i & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

ο οποίος είναι θετικά ημιορισμένος. Τότε ο αντίστροφος του είναι:

$$A^{-1}= \begin{pmatrix} 10 & 5i & -2(1+i) \\ -5i & 3 & i-1 \\ -2+2i & -i-1 & 1 \end{pmatrix}.$$

O A^{-1} είναι θετικά ημιορισμένος, καθώς όλοι οι υποπίνακες του έχουν θετικές ορίζουσες. Δηλαδή,

$$|10| = 10,$$

$$\begin{vmatrix} 10 & 5i \\ -5i & 3 \end{vmatrix}=5,$$

$$\begin{vmatrix} 10 & 5i & -2(1+i) \\ -5i & 3 & i-1 \\ -2+2i & -i-1 & 1 \end{vmatrix}=1.$$

Άρα $\Phi(A)>I$.

__Θεώρημα 3.1.5.__ Έστω ένας θετικά ορισμένος πίνακας A με n γραμμές και n στήλες, ο οποίος αντιστρέφεται με $B\equiv A^{-1}$, οι οποίοι, A και B, έχουν τη μορφή:

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{bmatrix} \text{ και } B=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{12}^* & B_{22} \end{bmatrix},$$

όπου A_{11} τετραγωνικός.
Τότε ισχύει ότι

$$\text{(a) } \Phi(A)\geq \begin{bmatrix} \Phi(B_{11}) & 0 \\ 0 & \Phi(A_{22}) \end{bmatrix} \geq I$$

και

$$\Phi(A)\geq \begin{bmatrix} \Phi(A_{11}) & 0 \\ 0 & \Phi(B_{22}) \end{bmatrix} \geq I,$$

και

$$\text{(b) } \Phi_T(A) \geq \begin{bmatrix} \Phi_T(B_{11}^{-1}) & 0 \\ 0 & \Phi_T(A_{22}) \end{bmatrix} \geq I$$

και

$$\Phi_T(A) \geq \begin{bmatrix} \Phi_T(A_{11}) & 0 \\ 0 & \Phi_T(B_{22}^{-1}) \end{bmatrix} \geq I \ .$$

<u>Απόδειξη:</u>

(a)Αρχικά θα δείξουμε ότι $\Phi(A)\geq \begin{bmatrix}\Phi(B_{11}) & 0\\ 0 & \Phi(A_{22})\end{bmatrix}$, δηλαδή ότι ο πίνακας

$\Phi(A)-\begin{bmatrix}\Phi(B_{11}) & 0\\ 0 & \Phi(A_{22})\end{bmatrix}$ είναι θετικά ημιορισμένος.

Πράγματι,

$$\begin{aligned}\Phi(A)-\begin{bmatrix}\Phi(B_{11}) & 0\\ 0 & \Phi(A_{22})\end{bmatrix} &= A\circ A^{-1}-\begin{bmatrix}B_{11}\circ B_{11}^{-1} & 0\\ 0 & A_{22}\circ A_{22}^{-1}\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{12}^{*} & A_{22}\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{12}^{*} & A_{22}\end{bmatrix}^{-1}-\begin{bmatrix}B_{11}\circ B_{11}^{-1} & 0\\ 0 & A_{22}\circ A_{22}^{-1}\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{12}^{*} & A_{22}\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{12}^{*} & B_{22}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}B_{11}\circ B_{11}^{-1} & 0\\ 0 & A_{22}\circ A_{22}^{-1}\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}A_{11}\circ B_{11} & A_{12}\circ B_{12}\\ A_{12}^{*}\circ B_{12}^{*} & A_{22}\circ B_{22}^{*}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}B_{11}\circ B_{11}^{-1} & 0\\ 0 & A_{22}\circ A_{22}^{-1}\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}B_{11}\circ(A_{11}-B_{11}^{-1}) & A_{12}\circ B_{12}\\ A_{12}^{*}\circ B_{12}^{*} & A_{22}\circ(B_{22}^{*}-A_{22}^{-1})\end{bmatrix}\\ &=\left(\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{12}^{*} & B_{22}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & A_{22}^{-1}\end{bmatrix}\right)\circ\left(\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{12}^{*} & A_{22}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}B_{11}^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right),\end{aligned}$$

όπου από το Λήμμα 1.5.8 οι πίνακες $A_1=\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{12}^{*} & B_{22}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & A_{22}^{-1}\end{bmatrix}$ και $A_2=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{12}^{*} & A_{22}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}B_{11}^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ είναι θετικά ημιορισμένοι, και από το Θεώρημα 1.6.5 ο πίνακας $A_1\circ A_2$ είναι θετικά ημιορισμένος. Συνεπώς,

$$\Phi(A)\geq\begin{bmatrix}\Phi(B_{11}) & 0\\ 0 & \Phi(A_{22})\end{bmatrix}.$$

Θα δείξουμε ότι $\begin{bmatrix}\Phi(B_{11}) & 0\\ 0 & \Phi(A_{22})\end{bmatrix}\geq I$, δηλαδή ότι ο πίνακας $\begin{bmatrix}\Phi(B_{11}) & 0\\ 0 & \Phi(A_{22})\end{bmatrix}-I$ είναι θετικά ημιορισμένος.

Πράγματι,

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\Phi(B_{11}) & 0\\ 0 & \Phi(A_{22})\end{bmatrix}-I &=\begin{bmatrix}B_{11}\circ B_{11}^{-1} & 0\\ 0 & A_{22}\circ A_{22}^{-1}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}I_{11} & 0\\ 0 & I_{12}\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}B_{11}\circ B_{11}^{-1}-I_{11} & 0\\ 0 & A_{22}\circ A_{22}^{-1}-I_{12}\end{bmatrix}\geq 0.\end{aligned}$$

Θα δείξουμε τώρα ότι , $\Phi(A)\geq\begin{bmatrix}\Phi(A_{11}) & 0\\ 0 & \Phi(B_{22})\end{bmatrix}$, δηλαδή ότι ο πίνακας

$\Phi(A)-\begin{bmatrix}\Phi(A_{11}) & 0\\ 0 & \Phi(B_{22})\end{bmatrix}$είναι θετικά ημιορισμένος.

Πραγματι,

$$\Phi(\mathrm{A})-\begin{bmatrix}\Phi(\mathrm{A}_{11}) & 0\\ 0 & \Phi(\mathrm{B}_{22})\end{bmatrix}=\mathrm{A}\circ \mathrm{A}^{-1}-\begin{bmatrix}\mathrm{A}_{11}\circ \mathrm{A}_{11}^{-1} & 0\\ 0 & \mathrm{B}_{22}\circ \mathrm{B}_{22}^{-1}\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}\mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12}\\ \mathrm{A}_{12}^{*} & \mathrm{A}_{22}\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}\mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12}\\ \mathrm{A}_{12}^{*} & \mathrm{A}_{22}\end{bmatrix}^{-1}-\begin{bmatrix}\mathrm{A}_{11}\circ \mathrm{A}_{11}^{-1} & 0\\ 0 & \mathrm{B}_{22}\circ \mathrm{B}_{22}^{-1}\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}\mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12}\\ \mathrm{A}_{12}^{*} & \mathrm{A}_{22}\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}\mathrm{B}_{11} & \mathrm{B}_{12}\\ \mathrm{B}_{12}^{*} & \mathrm{B}_{22}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\mathrm{A}_{11}\circ \mathrm{A}_{11}^{-1} & 0\\ 0 & \mathrm{B}_{22}\circ \mathrm{B}_{22}^{-1}\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}\mathrm{A}_{11}\circ(\mathrm{B}_{11}-\mathrm{A}_{11}^{-1}) & \mathrm{A}_{12}\circ \mathrm{B}_{12}\\ \mathrm{A}_{12}^{*}\circ \mathrm{B}_{12}^{*} & \mathrm{B}_{22}\circ(\mathrm{A}_{22}-\mathrm{B}_{22}^{-1})\end{bmatrix}$$
$$=\underbrace{\left[\begin{bmatrix}\mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12}\\ \mathrm{A}_{12}^{*} & \mathrm{A}_{22}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \mathrm{B}_{22}^{-1}\end{bmatrix}\right]}_{\mathrm{B}_1}\circ\underbrace{\left[\begin{bmatrix}\mathrm{B}_{11} & \mathrm{B}_{12}\\ \mathrm{B}_{12}^{*} & \mathrm{B}_{22}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\mathrm{A}_{11}^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right]}_{\mathrm{B}_2},$$
όπου όπως προηγουμένως, από το Λήμμα 1.5.8 οι πίνακες B_1 και B_2 είναι θετικά ημιορισμένοι, και συνεπώς από το Θεώρημα 1.6.5 ο πίνακας $\mathrm{B}_1\circ\mathrm{B}_2$ είναι θετικά ημιορισμένος. Άρα,

$$\Phi(\mathrm{A})\geq\begin{bmatrix}\Phi(\mathrm{A}_{11}) & 0\\ 0 & \Phi(\mathrm{B}_{22})\end{bmatrix}.$$

Θα δείξουμε τώρα ότι, $\begin{bmatrix}\Phi(\mathrm{A}_{11}) & 0\\ 0 & \Phi(\mathrm{B}_{22})\end{bmatrix}\geq \mathrm{I}$, δηλαδή ότι ο πίνακας $\begin{bmatrix}\Phi(\mathrm{A}_{11}) & 0\\ 0 & \Phi(\mathrm{B}_{22})\end{bmatrix}-\mathrm{I}$ είναι θετικά ημιορισμένος.
Πράγματι,

$$\begin{bmatrix}\Phi(\mathrm{A}_{11}) & 0\\ 0 & \Phi(\mathrm{B}_{22})\end{bmatrix}-\mathrm{I}=\begin{bmatrix}\mathrm{A}_{11}\circ \mathrm{A}_{11}^{-1} & 0\\ 0 & \mathrm{B}_{22}\circ \mathrm{B}_{22}^{-1}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\mathrm{I}_{11} & 0\\ 0 & \mathrm{I}_{12}\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}\mathrm{A}_{11}\circ \mathrm{A}_{11}^{-1}-\mathrm{I}_{11} & 0\\ 0 & \mathrm{B}_{22}\circ \mathrm{B}_{22}^{-1}-\mathrm{I}_{12}\end{bmatrix}\geq 0.$$

(b) Θα δείξουμε ότι,
$\Phi_{\mathrm{T}}(\mathrm{A})\geq\begin{bmatrix}\Phi_{\mathrm{T}}(\mathrm{B}_{11}^{-1}) & 0\\ 0 & \Phi_{\mathrm{T}}(\mathrm{A}_{22})\end{bmatrix}$, δηλαδή ότι ο πίνακας $\Phi_{\mathrm{T}}(\mathrm{A})-\begin{bmatrix}\Phi_{\mathrm{T}}(\mathrm{B}_{11}^{-1}) & 0\\ 0 & \Phi_{\mathrm{T}}(\mathrm{A}_{22})\end{bmatrix}$ είναι θετικά ημιορισμένος.
Έχουμε λοιπόν,

$$\Phi_{\mathrm{T}}(\mathrm{A})-\begin{bmatrix}\Phi_{\mathrm{T}}(\mathrm{B}_{11}^{-1}) & 0\\ 0 & \Phi_{\mathrm{T}}(\mathrm{A}_{22})\end{bmatrix}=\mathrm{A}\circ(\mathrm{A}^{-1})^{\mathrm{T}}-\begin{bmatrix}\mathrm{B}_{11}^{-1}\circ((\mathrm{B}_{11}^{-1})^{-1})^{\mathrm{T}} & 0\\ 0 & \mathrm{A}_{22}\circ(\mathrm{A}_{22}^{-1})^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}\mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12}\\ \mathrm{A}_{12}^{*} & \mathrm{A}_{22}\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}\mathrm{B}_{11} & \mathrm{B}_{12}\\ \mathrm{B}_{12}^{*} & \mathrm{B}_{22}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}-\begin{bmatrix}\mathrm{B}_{11}^{-1}\circ {\mathrm{B}_{11}}^{\mathrm{T}} & 0\\ 0 & \mathrm{A}_{22}\circ(\mathrm{A}_{22}^{-1})^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}\mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12}\\ \mathrm{A}_{12}^{*} & \mathrm{A}_{22}\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}{\mathrm{B}_{11}}^{\mathrm{T}} & (\mathrm{B}_{12}^{*})^{\mathrm{T}}\\ {\mathrm{B}_{12}}^{\mathrm{T}} & {\mathrm{B}_{22}}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\mathrm{B}_{11}^{-1}\circ {\mathrm{B}_{11}}^{\mathrm{T}} & 0\\ 0 & \mathrm{A}_{22}\circ(\mathrm{A}_{22}^{-1})^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} {B_{11}}^{T}\circ(A_{11}-B_{11}^{-1}) & A_{12}\circ(B_{12}^{*})^{T} \\ A_{12}^{*}\circ {B_{12}}^{T} & A_{22}\circ({B_{22}}^{T}-(A_{22}^{-1})^{T} \end{bmatrix}$$

$$=\left[\begin{bmatrix} {B_{11}}^{T} & (B_{12}^{*})^{T} \\ {B_{12}}^{T} & {B_{22}}^{T} \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (A_{22}^{-1})^{T} \end{bmatrix}\right]\circ\left[\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^{*} & A_{22} \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} B_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right]$$

$$=\left[\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{12}^{*} & B_{22} \end{bmatrix}^{T}-\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}^{T}\right]\circ\left[\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^{*} & A_{22} \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} B_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right]$$

$$=\underbrace{\left[\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{12}^{*} & B_{22} \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{bmatrix}\right]^{T}}_{\Gamma_1}\circ\underbrace{\left[\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^{*} & A_{22} \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} B_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right]}_{\Gamma_2}.$$

Τότε από το Λήμμα 1.5.8 οι πίνακες Γ_1 και Γ_2 είναι θετικά ημιορισμένοι. Αν Γ_1 θετικά ημιορισμένος, τότε και ο Γ_1^{T} είναι θετικά ημιορισμένος και συνεπώς από το Θεώρημα 1.6.5 ο πίνακας $\Gamma_1^{T}\circ\Gamma_2$ είναι θετικά ημιορισμένος. Για την δεύτερη ανισότητα πρέπει να δείξουμε ότι ο πίνακας $\begin{bmatrix} \Phi_T(B_{11}^{-1}) & 0 \\ 0 & \Phi_T(A_{22}) \end{bmatrix}-I$ είναι θετικά ημιορισμένος.

Πράγματι,

$$\begin{bmatrix} \Phi_T(B_{11}^{-1}) & 0 \\ 0 & \Phi_T(A_{22}) \end{bmatrix}-I=\begin{bmatrix} B_{11}^{-1}\circ((B_{11}^{-1})^{-1})^{T} & 0 \\ 0 & A_{22}\circ(A_{22}^{-1})^{T} \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} I_{11} & 0 \\ 0 & I_{12} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} B_{11}^{-1}\circ {B_{11}}^{T}-I_{11} & 0 \\ 0 & A_{22}\circ(A_{22}^{-1})^{T}-I_{12} \end{bmatrix}\geq 0.$$

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι $\Phi_T(A)\geq\begin{bmatrix} \Phi_T(A_{11}) & 0 \\ 0 & \Phi_T(B_{22}^{-1}) \end{bmatrix}$, δηλαδή ότι ο πίνακας $\Phi_T(A)-\begin{bmatrix} \Phi_T(A_{11}) & 0 \\ 0 & \Phi_T(B_{22}^{-1}) \end{bmatrix}$ είναι θετικά ημιορισμένος.

Πράγματι,

$$\Phi_T(A)-\begin{bmatrix} \Phi_T(A_{11}) & 0 \\ 0 & \Phi_T(B_{22}^{-1}) \end{bmatrix}=A\circ(A^{-1})^{T}-\begin{bmatrix} A_{11}\circ(A_{11}^{-1})^{T} & 0 \\ 0 & B_{22}^{-1}\circ B_{22}^{T} \end{bmatrix}$$

$$=\left[\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^{*} & A_{22} \end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix} B_{11}^{T} & (B_{12}^{*})^{T} \\ B_{12}^{T} & B_{22}^{T} \end{bmatrix}\right]-\begin{bmatrix} A_{11}\circ(A_{11}^{-1})^{T} & 0 \\ 0 & B_{22}^{-1}\circ B_{22}^{T} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} A_{11}\circ(B_{11}^{T}-\left({A_{11}}^{-1}\right)^{T} & A_{12}\circ(B_{12}^{*})^{T} \\ A_{12}^{*}B_{12}^{T} & B_{22}^{T}\circ(A_{22}-B_{22}^{-1}) \end{bmatrix}$$

$$=\left[\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^{*} & A_{22} \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_{22}^{-1} \end{bmatrix}\right]\circ\left[\begin{bmatrix} B_{11}^{T} & (B_{12}^{*})^{T} \\ B_{12}^{T} & B_{22}^{T} \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} (A_{11}^{-1})^{T} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right]$$

$$=\underbrace{\left[\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^{*} & A_{22} \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_{22}^{-1} \end{bmatrix}\right]}_{\Delta_1}\circ\underbrace{\left[\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{12}^{*} & B_{22} \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right]^{T}}_{\Delta_2}.$$

Τότε από Λήμμα 1.5.8 οι πίνακες Δ_1 και Δ_2 είναι θετικά ημιορισμένοι. Αν Δ_1 θετικά ημιορισμένος και Δ_1^T θετικά ημιορισμένος, τότε από Θεώρημα 1.6.5 και ο πίνακας $\Delta_1^T \circ \Delta_2$ είναι θετικά ημιορισμένος.

Θα δείξουμε τώρα ότι ο πίνακας $\begin{bmatrix} \Phi_T(A_{11}) & 0 \\ 0 & \Phi_T(B_{22}^{-1}) \end{bmatrix} - I$ είναι θετικά ημιορισμένος.

Πράγματι,

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} \Phi_T(A_{11}) & 0 \\ 0 & \Phi_T(B_{22}^{-1}) \end{bmatrix} - I \\
&\qquad = \begin{bmatrix} A_{11} \circ (A_{11}^{-1})^T & 0 \\ 0 & B_{22}^{-1} \circ B_{22}^T \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I_{11} & 0 \\ 0 & I_{12} \end{bmatrix} \\
&\qquad = \begin{bmatrix} A_{11} \circ (A_{11}^{-1})^T - I_{11} & 0 \\ 0 & B_{22}^{-1} \circ B_{22}^T - I_{12} \end{bmatrix} \geq 0.
\end{aligned}$$ □

<u>Σημείωση:</u> Προσοχή, δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι ισχύει

$$\Phi(A) \geq \begin{bmatrix} \Phi(A_{11}) & 0 \\ 0 & \Phi(A_{22}) \end{bmatrix} \geq I.$$

Θα το δείξουμε με αντιπαράδειγμα.

Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Ο A είναι θετικά ημιορισμένος, με $A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$,

$A_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $A_{12}^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ και $A_{22} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Τότε,

$\Phi(A) \ - \begin{bmatrix} \Phi(A_{11}) & 0 \\ 0 & \Phi(A_{22}) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{9} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$, ο οποίος δεν είναι θετικά ημιορισμένος. □

Όπως προκύπτει και από το θεώρημα, για να ισχύουν οι ανισότητες πρέπει να παίρνουμε έναν υποπίνακα από τον πίνακα A και έναν υποπίνακα από τον πίνακα A^{-1}.

<u>Ορισμός 3.1.6.</u> Μια συνάρτηση $f(\cdot)$, η οποία αντιστοιχίζει το χώρο των θετικά ορισμένων πινάκων σε τετραγωνικούς πίνακες M_n (n γραμμών και n στηλών), θα ονομάζεται συνήθης συνάρτηση (ordinary function) αν υπάρχουν συναρτήσεις $f_i : R_+^n \to R_+$, i=1,2,…,n, τέτοιες ώστε για κάθε ορθομοναδιαίο αντιστρέψιμο πίνακα να ισχύει ότι αν $A=U^{*}\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)U$, $U\in M_n$ ορθομοναδιαίος $\forall\, \lambda_i \in R_+=(0,+\infty)$, τότε

$$f(A)= U^{*}\mathrm{diag}(f_1(\lambda_1,\dots,\lambda_n),\dots,f_n(\lambda_1,\dots,\lambda_n))U.$$

Αυτός ο ορισμός επιβεβαιώνει ότι ο πίνακας f(A) αντιμετατίθεται με τον πίνακα A, κάτι το οποίο είναι απαραίτητο για τους πίνακες της μορφής Af(A) έτσι ώστε να είναι ερμιτιανοί, και ότι ο f(A) όντως ΄΄έξαρτάται΄΄από τον A. Η υπόθεση ότι οι συναρτήσεις f_i ορίζονται από τον R_+^n στον R_+ επιβεβαιώνει ότι ο f(A) είναι θετικά ορισμένος όταν ο A είναι θετικά ορισμένος, και για αυτό το λόγο μια συνήθης συνάρτηση απεικονίζει τον κώνο των θετικά ορισμένων πινάκων στον εαυτό του.

Θεώρημα 3.1.7. Έστω f(·) μια δοσμένη συνήθης συνάρτηση η οποία ορίζεται στους θετικά ορισμένους πίνακες $M_{n\times n}$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.
(α) $A\circ f(A)\geq A\, f(A)$ για κάθε θετικά ορισμένο πίνακα $A\in M_n$.
(β) $f(A)=\alpha(A)\, A^{-1}$ για κάθε θετικά ορισμένο πίνακα $A\in M_n$, όπου α(·) είναι μια συνάρτηση θετικών πραγματικών αριθμών σε θετικά ορισμένους πίνακες διάστασης $n\times n$.

Απόδειξη: Για να αποδείξουμε το παραπάνω θεώρημα, αρκεί να αποδείξουμε την αναγκαιότητα της ισχυριζόμενης ιδιότητας της f(·). Από το (α) ισχύει ότι ο πίνακας $A\circ f(A)-A\, f(A)$ είναι θετικά ορισμένος. Έστω τώρα $f_1, f_2,\dots, f_n\colon R_+^n \to R$ οι συναρτήσεις οι οποίες επάγουν τη συνήθη συνάρτηση f(·), και έστω $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n>0$ δοσμένες θετικές σταθερές. Υποθέτουμε ότι:

$$\lambda_1 f_1(\lambda_1,\dots,\lambda_n)= \lambda_2 f_2(\lambda_1,\dots,\lambda_n)=\cdots= \lambda_n f_n(\lambda_1,\dots,\lambda_n),$$

όπου $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ οι ιδιοτιμές του A και $f_1(\lambda_1,\dots,\lambda_n),\dots,f_n(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ ιδιοτιμές του f(A). Συνεπώς, οι $\lambda_1 f_1(\lambda_1,\dots,\lambda_n),\ \dots,\ \lambda_n f_n(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ είναι ιδιοτιμές του Af(A), οπότε $Af(A)=\lambda_i f_i(\lambda_1,\dots,\lambda_n)I$ για κάθε i=1,...,n. Έτσι, $f(A)= \alpha(A)A^{-1}$ με $\alpha(A)= \lambda_1 f_1(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ είναι μια θετική βαθμωτή συνάρτηση. Στόχος μας είναι να δείξουμε ότι $\lambda_k f_k(\lambda_1,\dots,\lambda_n)= \lambda_j f_j(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ για κάθε ζεύγος διαφορετικών δεικτών k, j. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θα αποδείξουμε το παραπάνω για k=1 και j=2. (Ομοίως αποδεικνύεται και για τα υπόλοιπα ζεύγη.) Έστω

$$U_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix},\ U_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\ \text{και}\ A_i=U_i^{*}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}U_i\ \text{ για i=1,2,}$$

όπου οι U_1, U_2 είναι ορθομοναδιαίοι πίνακες.
Θεωρούμε $\widehat{A}_i \equiv A_i\otimes\mathrm{diag}(\lambda_3,\dots,\lambda_n)$, i=1,2, δηλαδή,

$$\widehat{A}_i \equiv \begin{bmatrix} a_{11}\mathrm{diag}(\lambda_3,\dots,\lambda_n) & \cdots & a_{1n}\mathrm{diag}(\lambda_3,\dots,\lambda_n)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1}\mathrm{diag}(\lambda_3,\dots,\lambda_n) & \cdots & a_{nn}\mathrm{diag}(\lambda_3,\dots,\lambda_n)\end{bmatrix}.$$

Έτσι, ισχύει ότι

$$
\begin{aligned}
(\widehat{A}_i \circ f(\widehat{A}_i)) - \widehat{A}_i \cdot f(\widehat{A}_i) &= (A_i \otimes \mathrm{diag}(\lambda_3,\ldots,\lambda_n)) \circ f(A_i \otimes \mathrm{diag}(\lambda_3,\ldots,\lambda_n)) - \\
&\quad - (A_i \otimes \mathrm{diag}(\lambda_3,\ldots,\lambda_n)) \cdot f(A_i \otimes \mathrm{diag}(\lambda_3,\ldots,\lambda_n)) \\
&= (A_i \circ f(A_i)) - A_i \cdot f(A_i)) \otimes a_{n-2},
\end{aligned}
$$

όπου a_{n-2} είναι ο μηδενικός πίνακας n-2 γραμμών και n-2 στηλών.
Εδώ λοιπόν θα πρέπει να εξετάσουμε τις συνέπειες των ανισοτήτων:

$$A_i \circ f(A_i) \geq A_i \cdot f(A_i),\ i=1,2,$$

για τετραγωνικούς πίνακες 2x2. Για αυτόν το λόγο θα κάνουμε τους παρακάτω υπολογισμούς:

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \lambda_1+\lambda_2 & \lambda_1-\lambda_2 \\ \lambda_1-\lambda_2 & \lambda_1+\lambda_2 \end{pmatrix}.$$

$$
\begin{aligned}
f(A_1) &= U^* \mathrm{diag}(f_1(\lambda_1,\lambda_2), f_2(\lambda_1,\lambda_2))U \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1(\lambda_1,\lambda_2) & 0 \\ 0 & f_2(\lambda_1,\lambda_2) \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} f_1(\lambda_1,\lambda_2)+f_2(\lambda_1,\lambda_2) & f_1(\lambda_1,\lambda_2)-f_2(\lambda_1,\lambda_2) \\ f_1(\lambda_1,\lambda_2)-f_2(\lambda_1,\lambda_2) & f_1(\lambda_1,\lambda_2)+f_2(\lambda_1,\lambda_2) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

και

$$A_1 \cdot f(A_1) = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 f_1(\lambda_1,\lambda_2)+\lambda_2 f_2(\lambda_1,\lambda_2) & \lambda_1 f_1(\lambda_1,\lambda_2)-\lambda_2 f_2(\lambda_1,\lambda_2) \\ \lambda_1 f_1(\lambda_1,\lambda_2)-\lambda_2 f_2(\lambda_1,\lambda_2) & \lambda_1 f_1(\lambda_1,\lambda_2)+\lambda_2 f_2(\lambda_1,\lambda_2) \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}}.$$

Οπότε έχουμε

$$
\begin{aligned}
&A_1 \circ f(A_1) - A_1 \cdot f(A_1) = \\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} (\lambda_1+\lambda_2)(f_1(\lambda_1,\lambda_2)+f_2(\lambda_1,\lambda_2)) & (\lambda_1-\lambda_2)(f_1(\lambda_1,\lambda_2)-f_2(\lambda_1,\lambda_2)) \\ (\lambda_1-\lambda_2)(f_1(\lambda_1,\lambda_2)-f_2(\lambda_1,\lambda_2)) & (\lambda_1+\lambda_2)(f_1(\lambda_1,\lambda_2)+f_2(\lambda_1,\lambda_2)) \end{pmatrix} - \\
&- \frac{1}{2}\mathbf{A} =
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \lambda_2 f_1(\lambda_1,\lambda_2)+\lambda_1 f_2(\lambda_1,\lambda_2)-(\lambda_1 f_1(\lambda_1,\lambda_2)+\lambda_2 f_2(\lambda_1,\lambda_2)) & 3\lambda_2 f_2(\lambda_1,\lambda_2)-\lambda_1 f_1(\lambda_1,\lambda_2)-\lambda_1 f_2(\lambda_1,\lambda_2)-\lambda_2 f_1(\lambda_1,\lambda_2)) \\ 3\lambda_2 f_2(\lambda_1,\lambda_2)-\lambda_1 f_1(\lambda_1,\lambda_2)-\lambda_1 f_2(\lambda_1,\lambda_2)-\lambda_2 f_1(\lambda_1,\lambda_2)) & \lambda_2 f_1(\lambda_1,\lambda_2)+\lambda_1 f_2(\lambda_1,\lambda_2)-(\lambda_1 f_1(\lambda_1,\lambda_2)+\lambda_2 f_2(\lambda_1,\lambda_2)) \end{pmatrix}$$

Αφού $A_1 \circ f(A_1) - A_1 \cdot f(A_1)$ θετικά ημιορισμένος, τότε

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}(A_1 \circ f(A_1) - A_1 \cdot f(A_1))\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

είναι θετικός αριθμός. Άρα,

$$\lambda_2 f_2(\lambda_1,\lambda_2) \geq \lambda_1 f_1(\lambda_1,\lambda_2).$$

Ομοίως, για τον A_2 έχουμε ότι

$$A_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \lambda_1+\lambda_2 & \lambda_2-\lambda_1 \\ \lambda_2-\lambda_1 & \lambda_1+\lambda_2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} f(A_2) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1(\lambda_1,\lambda_2) & 0 \\ 0 & f_2(\lambda_1,\lambda_2) \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} f_1(\lambda_1,\lambda_2)+f_2(\lambda_1,\lambda_2) & f_2(\lambda_1,\lambda_2)-f_1(\lambda_1,\lambda_2) \\ f_2(\lambda_1,\lambda_2)-f_1(\lambda_1,\lambda_2) & f_1(\lambda_1,\lambda_2)+f_2(\lambda_1,\lambda_2) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$A_2 \cdot f(A_2) = \frac{1}{2}\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 f_1(\lambda_1,\lambda_2)+\lambda_2 f_2(\lambda_1,\lambda_2) & \lambda_2 f_2(\lambda_1,\lambda_2)-\lambda_1 f_1(\lambda_1,\lambda_2) \\ \lambda_2 f_2(\lambda_1,\lambda_2)-\lambda_1 f_1(\lambda_1,\lambda_2) & \lambda_1 f_1(\lambda_1,\lambda_2)+\lambda_2 f_2(\lambda_1,\lambda_2) \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}}$$

και

$$\begin{aligned} & A_2 \circ f(A_2) - A_2 \cdot f(A_2) \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} (\lambda_1+\lambda_2)(f_1(\lambda_1,\lambda_2)+f_2(\lambda_1,\lambda_2)) & (\lambda_2-\lambda_1)(f_2(\lambda_1,\lambda_2)-f_1(\lambda_1,\lambda_2)) \\ (\lambda_2-\lambda_1)(f_2(\lambda_1,\lambda_2)-f_1(\lambda_1,\lambda_2)) & (\lambda_1+\lambda_2)(f_1(\lambda_1,\lambda_2)+f_2(\lambda_1,\lambda_2)) \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\mathbf{B} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \lambda_2 f_1(\lambda_1,\lambda_2)+\lambda_1 f_2(\lambda_1,\lambda_2)-(\lambda_1 f_1(\lambda_1,\lambda_2)+\lambda_2 f_2(\lambda_1,\lambda_2)) & 3\lambda_2 f_2(\lambda_1,\lambda_2)-\lambda_1 f_1(\lambda_1,\lambda_2)-\lambda_2 f_1(\lambda_1,\lambda_2)-\lambda_1 f_2(\lambda_1,\lambda_2)) \\ 3\lambda_2 f_2(\lambda_1,\lambda_2)-\lambda_1 f_1(\lambda_1,\lambda_2)-\lambda_2 f_1(\lambda_1,\lambda_2)-\lambda_1 f_2(\lambda_1,\lambda_2)) & \lambda_2 f_1(\lambda_1,\lambda_2)+\lambda_1 f_2(\lambda_1,\lambda_2)-(\lambda_1 f_1(\lambda_1,\lambda_2)+\lambda_2 f_2(\lambda_1,\lambda_2)) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Αφού $A_2 \circ f(A_2) - A_2 \cdot f(A_2)$ θετικά ημιορισμένος, τότε

$$(1 \quad 1)(A_2 \circ f(A_2) - A_2 \cdot f(A_2))\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

είναι θετικός αριθμός και συνεπώς

$$\lambda_1 f_1(\lambda_1,\lambda_2) \geq \lambda_2 f_2(\lambda_1,\lambda_2).$$

Άρα τελικά έχουμε

$$\lambda_1 f_1(\lambda_1,\lambda_2) = \lambda_2 f_2(\lambda_1,\lambda_2),$$

Και το αποτέλεσμα γενικεύεται για κάθε ζεύγος k,j. □

Αν θεωρήσουμε ότι οι απεικονίσεις Φ και Φ_T απεικονίζουν τετραγωνικούς πίνακες $M_{n\times n}$ n γραμμών και n στηλών με μη μηδενική ορίζουσα σε $M_{n\times n}$ πίνακες, είναι φυσικό να αναρωτηθούμε αν οι Φ και Φ_T μπορούν να παραχθούν ως η σύνθεση του εαυτού τους, δηλαδή να ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\Phi^{(k)}(A) \equiv \Phi(\Phi^{(k-1)}(A)), \text{ με } \Phi^{(0)}(A) \equiv A.$$

Αντίστοιχα,

$$\Phi_T^{k}(A) \equiv \Phi_T(\Phi_T^{(k-1)}(A)), \text{ με } \Phi_T^{(0)}(A) \equiv A.$$

Θεώρημα 3.1.8. Έστω $A \in M_{n\times n}$, ένας τετραγωνικός πίνακας n γραμμών και n στηλών, ο οποίος είναι θετικά ορισμένος. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:

$$(a) \lim_{k\to\infty} \Phi^{(k)}(A) = I$$

και

$$(b) \lim_{k\to\infty} \Phi_T^k(A) = I.$$

Ορισμός 3.1.9. Έστω $A \in M_{n\times n}$ πίνακας με n γραμμές και n στήλες. Θα συμβολίζουμε με M(A) τον πίνακα που ορίζεται ως εξής:

$$a_{ij}=\begin{cases} -|a_{ij}|, & \text{αν } i \neq j \\ \ \ |a_{ij}|, & \text{αν } i = j \end{cases}.$$

Ορισμός 3.1.10. Έστω $A \in M_{n\times n}$ πίνακας με n γραμμές και n στήλες, τότε ο A θα ονομάζεται M-πίνακας αν $[a_{ij}] \leq 0$, για κάθε $i \neq j$ και i,j=1,…,n, και κάθε ιδιοτιμή του έχει θετικό πραγματικό μέρος.

Ορισμός 3.1.11. Έστω $A \in M_{n\times n}$ πίνακας με n γραμμές και n στήλες. Τότε ο A θα ονομάζεται H-πίνακας, αν ο πίνακας M(A) είναι ένας M-πίνακας.

Θεώρημα 3.1.12. Έστω $A \in M_{n\times n}$ ένας τετραγωνικός πίνακας n γραμμών και n στηλών, ο οποίος είναι H-πίνακας. Τότε ισχύει ότι

$$\lim_{k\to\infty} \Phi^{(k)}(A) = I.$$

Απόδειξη: Αφού ο πίνακας A είναι H-πίνακας, τότε κάθε ιδιοτιμή του είναι θετική. Άρα ο πίνακας είναι θετικά ορισμένος και συνεπώς από το παραπάνω Θεώρημα 3.1.8 ισχύει ότι

$$\lim_{k\to\infty} \Phi^{(k)}(A) = I. \qquad \square$$

Στην αρχή της ενότητας έγινε αναφορά στο πως η συνάρτηση Φ_T απεικονίζει τις ιδιοτιμές ενός διαγωνοποιήσιμου πίνακα στα στοιχεία της κύριας διαγωνίου του. Σύμφωνα με αυτό, ένα πιο γενικό αποτέλεσμα είναι ότι η συνθήκη ότι το άθροισμα των ιδιοτιμών ισούται με το ίχνος του πίνακα είναι ο μόνος περιορισμός που θα πρέπει να ισχύει, με μία προφανή εξαίρεση.

Θεώρημα 3.1.13. Έστω $A \in M_{n\times n}$ ένας τετραγωνικός πίνακας n γραμμών και n στηλών και n πλήθος δοσμένων σταθερών $b_{11}, b_{22},\dots, b_{nn} \in \mathbb{C}$. Υποθέτουμε ότι, αν

$$A \neq \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}), \text{ με } a_{11}=a_{22} = \cdots = a_{nn} \text{ και } a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn} \in \mathbb{C}$$

(δηλαδή ο A δεν είναι ένας διαγώνιος πίνακας, του οποίου όλα τα στοιχεία της διαγωνίου είναι ίσα μεταξύ τους), τότε υπάρχει ένας πίνακας $B \in M_{n\times n}$ ο οποίος είναι όμοιος με τον A και έχει στη διαγώνιο τα στοιχεία b_{11}, b_{22},..., b_{nn} αν και μόνο αν

$$b_{11}+ b_{22}+\cdots+ b_{nn}= tr(A).$$

Απόδειξη: Έστω A διαγωνοποιήσιμος πίνακας, τότε υπάρχουν πίνακες P, D τέτοιοι ώστε:

$$A=PDP^{-1},$$

όπου $D=diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, με $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ιδιοτιμές του A. Ισχύει ότι αν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ιδιοτιμές του A, τότε

$$trace(A)= \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n.$$

Οπότε για B=D έχουμε το ζητούμενο. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4.

4.1. Το γινόμενο Hadamard στη στατιστική πολυμεταβλητή ανάλυση.

Το γινόμενο Hadamard θα μπορούσαμε να πούμε ότι αν και δε χρησιμοποιείται τόσο στη θεωρία των πινάκων, παρόλα αυτά έχει αρκετές εφαρμογές στη στατιστική ανάλυση. Στην ενότητα αυτή θα δούμε μια ιστορική αναδρομή για τις εφαρμογές αυτές αλλά και την εξέλιξη τους βασιζόμενοι σε θετικά ορισμένους πίνακες οι οποίοι έχουν πραγματικά στοιχεία.
Δεν είναι σαφές γιατί το γινόμενο

$$A \circ B = [a_{ij}b_{ij}] \tag{4.1}$$

ονομάστηκε Hadamard, αλλά ονομάστηκε έτσι αρχικά από τον Halmos. O Γάλλος μαθηματικός Hadamard έγραψε περίπου 400 επιστημονικές εργασίες καθώς και αρκετά βιβλία. Αρχικά έδωσε ένα κάτω φράγμα για το γινόμενο $A \circ B$ σε θετικά ημιορισμένους πίνακες. Το 1903, ο Hadamard ασχολήθηκε με τις τετραγωνικές μορφές που έχουν τη μορφή $x'(A\circ B)x$, αλλά μόνο για την περίπτωση όπου x=e, όπου e είναι το διάνυσμα στήλη που έχει όλα τα στοιχεία του ίσα με τη μονάδα, δηλαδή $e=\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}$. Ο Γερμανός μαθηματικός Issai Schur αγνοώντας οποιαδήποτε προηγούμενη δουλειά σχετικά με το γινόμενο αυτό, εισήγαγε το θεώρημα Schur για το γινόμενο σύμφωνα με το οποίο αν οι πίνακες A και B είναι θετικά ημιορισμένοι, τότε και το γινόμενο $A \circ B$ είναι θετικά ημιορισμένο. Επίσης ο Schur απέδειξε μια πολύ σημαντική ανισότητα σχετικά με τις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης του πίνακα $A\circ B$ που φαίνεται να έχουν παραλειφθεί από τους μεταγενέστερους συγγραφείς.
O Fan παρουσίασε το γινόμενο $C=A * B$, όπου $c_{ii} = a_{ii}b_{ii}$ και $c_{ij} = -a_{ij}b_{ij}$, για κάθε $i\neq j$, και το συσχέτισε με το γινόμενο Hadamard. Αυτό οφείλεται στην ιδιότητα κατά την

οποία όταν οι πίνακες A και B είναι M-πίνακες (δηλαδή τετραγωνικοί πίνακες που μπορούν να γραφτούν με τη μορφή $\rho I - N$, όπου ο N είναι ένας τετραγωνικός πίνακας με μη αρνητικά στοιχεία και ρ μία μη αρνητική πραγματική σταθερά η οποία ξεπερνά σε απόλυτη τιμή κάθε ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης του πίνακα N), τότε και ο $A * B$ θα είναι.
Το γινόμενο (4.1) αρχικά ονομάστηκε γινόμενο Schur από τους Bellman, Davis Majindar, Lynn και Srivastava. Αργότερα, οι Halmos, Olkin και Pratt, Marcus και Khan, Fiedler, Marcus και Thompson, Marcus και Minc, Djoković, Ballantine και Davis ονόμασαν το γινόμενο, γινόμενο Hadamard.
Έχουμε βρει μόνο μια σύντομη και διάσπαρτη χρήση του γινομένου Hadamard στη στατιστική ανάλυση. Οι Olkin και Pratt χρησιμοποίησαν το γινόμενο Hadamard ενός πίνακα με τον εαυτό του στο πλαίσιο των πολυμεταβλητών Tchebycheff ανισοτήτων, καθώς οι Srivastava και Rao χρησιμοποίησαν το γινόμενο Hadamard δύο διαφορετικών θετικά ορισμένων πινάκων στη μελέτη τους για τα γενικά γραμμικά μοντέλα. Ο McDonald αναπαριστά ένα γενικευμένο μοντέλο ανάλυσης παραγόντων, χρησιμοποιώντας γινόμενα Hadamard. Μέχρι στιγμής έχει βρεθεί μόνο μία αδημοσίευτη τεχνική αναφορά από τους Olkin και Siotani, στην οποία χρησιμοποίησαν το γινόμενο Hadamard στις εξισώσεις μέγιστης πιθανοφάνειας για τις μεταβλητές σε μια πολυμεταβλητή κανονική κατανομή.
Εξετάζουμε την άλγεβρα πινάκων στους οποίους τα αντίστοιχα στοιχεία πολλαπλασιάζονται μεταξύ τους και λαμβάνουμε αποτελέσματα σχετικά με το διαγώνιο πίνακα και το ίχνος ενός πινάκα, τα οποία είναι χρήσιμα σε εφαρμογές. Θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα τα οποία είναι γνωστά για τα γινόμενα Hadamard, τα περισσότερα από τα οποία περιλαμβάνουν θετικά ημιορισμένους πίνακες. Θα δούμε νέες ανισότητες για τις χαρακτηριστικές ρίζες του γινομένου Hadamard δύο συμμετρικών πινάκων. Επίσης, θα παρουσιαστούν εφαρμογές στην πολυμεταβλητή ανάλυση με τη μελέτη της εκτίμησης μέγιστης πιθανοφάνειας σε μια πολυμεταβλητή κανονική κατανομή με γνωστό πίνακα συσχέτισης R. Θα δείξουμε ότι ο πίνακας $R \circ R - 2(R^{-1} \circ R + I)^{-1}$ είναι θετικά ημιορισμένος.

Όπως έχουμε δει, το γινόμενο Hadamard διαφέρει αρκετά από το σύνηθες γινόμενο μεταξύ δύο πινάκων. Πρώτα από όλα, αν A και B είναι δύο πραγματικοί πίνακες διαστάσεων $m \times n$ και $p \times q$ (στο κεφάλαιο αυτό περιοριζόμαστε στους πραγματικούς πίνακες) αντίστοιχα, τότε μπορούμε να ορίσουμε τον πίνακα $A \circ B$ μόνο αν m=p και n=q, ενώ ο πίνακας AB ορίζεται μόνο αν n=p, χωρίς περιορισμούς στα m και q.
Για πίνακες με βαθμό ένα, τα δύο γινόμενα συνδέονται με μια ενδιαφέρουσα ιδιότητα. Έστω $A = u v^T$ και $B = w x^T$, όπου $u = [u_1, u_2, \dots, u_m]^T$, $w = [w_1, w_2, \dots, w_m]^T$ και $v^T = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ και $x^T = [x_1, x_2, \dots, x_n]$. Τότε

$$A \circ B = (uv^T) \circ (wx^T) = (u \circ w)(v \circ x)^T.$$

Έτσι προκύπτει ότι το γινόμενο Hadamard δύο πινάκων βαθμού ένα έχει βαθμό το πολύ ένα.
Οι διαγώνιοι πίνακες είναι πολύ βολικοί στο χειρισμό τους στα γινόμενα Hadamard. Ο διαγώνιος πίνακας που προκύπτει από τον τετραγωνικό πίνακα A συμβολίζεται ως:

$$A_{dg} = A \circ I.$$

Αν A και B είναι δύο τετραγωνικοί πραγματικοί πίνακες, τα αθροίσματα των γραμμών του πίνακα $A \circ B$ αποτελούν τα στοιχεία των διαγωνίων των πινάκων AB^T και BA^T. Έτσι μπορούμε να γράψουμε ότι

$$(A \circ B)e = (AB^T)_{dg}e=((AB^T) \circ I)e=(BA^T)_{dg}e=((BA^T) \circ I)e. \qquad (**)$$

Αν επιπλέον ο B είναι συμμετρικός πίνακας, τότε

$$(AB)_{dg}e=((AB) \circ I)e$$

ενώ αν ο A είναι συμμετρικός, τότε ισχύει ότι

$$(BA)_{dg}e=((BA) \circ I)e.$$

Το ίχνος του πίνακα AB είναι το άθροισμα όλων των στοιχείων του πίνακα $A \circ B^T$, ή του πίνακα $A \circ B$, όταν ο πίνακας B είναι τετραγωνικός και συμμετρικός. Τότε

$$tr(AB)=e^T(A \circ B^T)e.$$

Μια αξιοσημείωτη ιδιότητα του γινομένου Hadamard είναι το γινόμενο Hadamard μεταξύ διαγώνιων πινάκων. Έστω D ένας διαγώνιος πίνακας. Τότε έχουμε

$$D(A \circ B)=(DA) \circ B= A \circ (DB),$$
$$(A \circ B)D = (AD) \circ B = A \circ (BD),$$
$$D(A \circ B)D = (DAD) \circ B = A \circ (DBD) = (DA) \circ (BD) = (AD) \circ (DB).$$

Αν ο πίνακας A έχει βαθμό 1 μπορούμε να γράφουμε $A= uv^T$. Έστω D_u και D_v δύο διαγώνιοι πίνακες που προκύπτουν από τα διανύσματα u και v αντίστοιχα. Τότε

$$A \circ B = (uv^T) \circ B=(D_u ee^T D_v) \circ B = D_u((ee^T) \circ B) D_v=D_u B D_v.$$

<u>Αποτελέσματα</u>
Το πιο γνωστό και ίσως το πιο σημαντικό αποτέλεσμα σχετικά με τα γινόμενα Hadamard αποδείχθηκε, πιθανόν για πρώτη φορά, από τον Issai Schur. Σε αυτήν την ενότητα θα υποθέσουμε ότι οι πίνακες $A=[a_{ij}]$ και $B= [b_{ij}]$ είναι τετραγωνικοί συμμετρικοί πίνακες βαθμού n.

Αν ο A είναι θετικά ορισμένος αλλά ο B είναι θετικά ημιορισμένος με ορίζουσα ίση με το μηδέν, τότε ο $A \circ B$ μπορεί να είναι είτε όχι θετικά ορισμένος. Αν $B= ee^T$, τότε $A \circ B=A\circ(ee^T)=A$ και συνεπώς ο πίνακας $A \circ B$ είναι θετικά ορισμένος. Αν όμως, ο B είναι ο μηδενικός πίνακας τότε $A \circ B = A \circ O=O$ και συνεπώς ο πίνακας $A \circ B$ δεν είναι θετικά ορισμένος. Ικανές και αναγκαίες συνθήκες σχετικά με τον πίνακα B έτσι ώστε ο $A \circ B$ να είναι θετικά ορισμένος αναζητήθηκαν από τον Djoković και βρέθηκαν από τον Ballantine.

<u>**Πρόταση 4.1.1.**</u> Έστω ένας πίνακας συσχέτισης R, δηλαδή ένας τετραγωνικός πίνακας $n \times n$ που δείχνει τις συσχετίσεις (τον συντελεστή συσχέτισης) των τυχαίων μεταβλητών και ο οποίος έχει μονάδα στη διαγώνιο. Ο R είναι θετικά ημιορισμένος. Τότε για τα στοιχεία της διαγωνίου του R^{-1} ισχύει ότι

$$r^{ii} \geq 1, i=1,\ldots,n,$$

ενώ για την ορίζουσα του ισχύει

$$|R| \leq 1.$$

Απόδειξη: Από το συμπέρασμα του Λήμματος 2.1.22 ισχύει ότι

$$r^{ii} \geq 1, \text{ για κάθε } i=1,\ldots,n.$$

Όσο για την ορίζουσα έχουμε ότι

$$|R| = \prod_{j=1}^{n} ch_j(R) \leq \left(\frac{\sum_{j=1}^{n} ch_j(R)}{n}\right)^n = \left(\frac{tr(R)}{n}\right)^n = \left(\frac{1+\cdots+1}{n}\right)^n = \left(\frac{n}{n}\right)^n = 1.$$

Η πρώτη ανισότητα προκύπτει από την ανισότητα του Cauchy σύμφωνα με την οποία:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

ενώ η δεύτερη ισότητα από το ότι το ίχνος ενός πίνακα ισούται με το άθροισμα των διαγώνιων στοιχείων του. ◻

Αν ο πίνακας A έχει στη διαγώνιο μηδενικό στοιχείο, τότε $|A| \leq 0 \Longrightarrow A=0$. Διαφορετικά, θα υπήρχε διαγώνιος πίνακας $D=(A \circ I)^{1/2}$ αντιστρέψιμος τέτοιος ώστε $A=DRD$, όπου R ο πίνακας που περιγράψαμε παραπάνω. Τότε

$$|A| = |DRD| = \left|(A \circ I)^{1/2} R (A \circ I)^{1/2}\right|$$

$$= \left|\begin{pmatrix} a_{11}^{1/2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^{1/2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{1/2} \end{pmatrix} R \begin{pmatrix} a_{11}^{1/2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^{1/2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{1/2} \end{pmatrix}\right|$$

$$= \left|\begin{pmatrix} a_{11}^{1/2} r_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^{1/2} r_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{1/2} r_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}^{1/2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^{1/2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{1/2} \end{pmatrix}\right|$$

$$= \left|\begin{pmatrix} a_{11} r_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} r_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} r_{nn} \end{pmatrix}\right|$$

$$= a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} \cdot r_{11} r_{22} \cdots r_{nn} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

Οπότε δηλαδή, σε τέτοιες περιπτώσεις η ανισότητα $|R| \leq 1$ είναι ισοδύναμη με την ανισότητα του Λήμματος 2.1.23.

Θεώρημα 4.1.2. Έστω A και B δύο τετραγωνικοί πίνακες n γραμμών και n στηλών, οι οποίοι είναι θετικά ημιορισμένοι. Τότε

$$|A \circ B| \geq |A| b_{11} \cdots b_{nn}.$$

__Απόδειξη:__ Έστω $A_{n\times n}$ ένας πίνακας με μηδενική ορίζουσα, ή έστω ότι ο B έχει ένα μηδενικό στοιχείο στη διαγώνιο, τότε σίγουρα η παραπάνω ανισότητα ικανοποιείται σύμφωνα με τα παραπάνω. Έστω τώρα ότι ο A έχει μη μηδενική ορίζουσα και ο B δεν έχει μηδενικό στοιχείο στη διαγώνιο. Τότε μπορούμε να γράψουμε ότι B=DRD, όπου $D=(B\circ I)^{1/2}$, οπότε κάνοντας πράξεις έχουμε

$$|A\circ B| = |A\circ(DRD)| = \left|A\circ\left((B\circ I)^{1/2}\,R\,(B\circ I)^{1/2}\right)\right|$$

$$=\left|A\circ\begin{pmatrix} b_{11}r_{11} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & b_{22}r_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn}r_{nn}\end{pmatrix}\right|$$

$$=\left|\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}r_{11} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_{22}b_{22}r_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}b_{nn}r_{nn}\end{pmatrix}\right|$$

$$= a_{11}b_{11}r_{11}a_{22}b_{22}r_{22}\cdots a_{nn}b_{nn}r_{nn}$$

$$\geq |A|b_{11}b_{22}\cdots b_{nn}\cdot 1\cdot 1\cdots 1$$

$$= |A|b_{11}b_{22}\cdots b_{nn}.$$

□

<u>Παρατήρηση</u>: Χρησιμοποιώντας τα Θεωρήματα 1.6.4, 1.6.5 και το Λήμμα 2.1.22 προκύπτει ότι

$$0\leq |A_0\circ R| = \left|\left(A-\frac{e_1e_1^T}{a^{11}}\right)\circ R\right| =$$

$$=\left|\begin{pmatrix} a_{11}-\frac{1}{a^{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n}\\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn}\end{pmatrix}\right|$$

$$=\left|\begin{pmatrix} a_{11}r_{11}-\frac{r_{11}}{a^{11}} & a_{12}r_{12} & \cdots & a_{1n}r_{1n}\\ a_{21}r_{21} & a_{22}r_{22} & \cdots & a_{2n}r_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1}r_{n1} & a_{n2}r_{n2} & \cdots & a_{nn}r_{nn}\end{pmatrix}\right|$$

$$=\left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n}\\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn}\end{pmatrix}-\frac{1}{a^{11}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}\right|$$

$$=\left|A\circ R-\frac{e_1e_1^T}{a^{11}}\right| = |A\circ R| - \frac{|A_1\circ R_1|}{a^{11}}\quad .$$

Άρα,

$$|A \circ R| \geq |A_1 \circ R_1| \cdot \frac{|A|}{|A_1|}$$

και ομοίως

$$|A_1 \circ R_1| \geq |A_2 \circ R_2| \cdot \frac{|A_1|}{|A_2|}$$

και έτσι

$$|A \circ R| \geq |A_2 \circ R_2| \cdot \frac{|A|}{|A_2|} \ .$$

Με την ίδια διαδικασία καταλήγουμε στο ότι

$$\frac{|A_{n-1} \circ R_{n-1}|}{|A_{n-1}|} = \frac{a_{nn}}{a_{nn}} = 1.$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας το Λήμμα 2.1.23 στο Θεώρημα 4.1.2 οδηγούμαστε στην παρακάτω πρόταση, η οποία δίνει ένα κάτω φράγμα για την ορίζουσα του πίνακα $A \circ B$.

<u>Πρόταση 4.1.3.</u> Έστω A και B δύο τετραγωνικοί πίνακες n γραμμών και στηλών οι οποίοι είναι θετικά ημιορισμένοι. Τότε

$$|A \circ B| \geq |A||B|.$$

<u>Απόδειξη:</u> Έστω $A_{n\times n}$ και $B_{n\times n}$ τετραγωνικοί πίνακες οι οποίοι είναι θετικά ημιορισμένοι. Τότε από Θεώρημα 4.1.2

$$|A \circ B| \geq |A| b_{11} b_{22} \cdots b_{nn}.$$

Όμως, αφού B θετικά ημιορισμένος, από Λήμμα 2.1.23 ισχύει η ανισότητα

$$|B| \leq b_{11} b_{22} \cdots b_{nn}.$$

Άρα $|A \circ B| \geq |A||B|$. □

Χρησιμοποιούμε την Πρόταση 4.1.3 για να βρούμε ένα μικρότερο κάτω φράγμα από αυτό που παίρνουμε από το Θεώρημα 4.1.2.

<u>Θεώρημα 4.1.4.</u> Έστω $A_{n\times n}$ και $B_{n\times n}$ δύο τετραγωνικοί πίνακες n γραμμών και n στηλών οι οποίοι είναι θετικά ημιορισμένοι, τότε

$$|A \circ B| + |A||B| \geq |A| b_{11} b_{22} \cdots b_{nn} + a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} |B|.$$

<u>Απόδειξη:</u> Έστω $A_{n\times n}$ και $B_{n\times n}$ δύο τετραγωνικοί πίνακες. Αν κάποιος από αυτούς έχει μηδενική ορίζουσα, τότε η ανισότητα του θεωρήματος ταυτίζεται με την ανισότητα του Θεωρήματος 4.1.2. Έστω τώρα A και B είναι θετικά ορισμένοι. Τότε, αν $A{=}D_1RD_1$ και $B{=}D_2QD_2$, όπου οι πίνακες Q και R είναι θετικά ημιορισμένοι πίνακες συσχέτισης με μονάδα στη διαγώνιο, έχουμε

$$|A\circ B|+|A||B|=|(D_1RD_1)\circ(D_2QD_2)|+|D_1RD_1||D_2QD_2|$$
$$=\left|\left((A\circ I)^{1/2}R\,(A\circ I)^{1/2}\right)\circ(B\circ I)^{1/2}Q\,(B\circ I)^{1/2})\right|+$$
$$+\left|(A\circ I)^{1/2}R\,(A\circ I)^{1/2}\right|\left|(B\circ I)^{1/2}Q\,(B\circ I)^{1/2}\right|=$$

$$=\left|\begin{pmatrix} a_{11}r_{11} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_{22}r_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}r_{nn}\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} b_{11}q_{11} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & b_{22}q_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn}q_{nn}\end{pmatrix}\right|+$$

$$+\left|\begin{pmatrix} a_{11}r_{11} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_{22}r_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}r_{nn}\end{pmatrix}\right|\left|\begin{pmatrix} b_{11}q_{11} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & b_{22}q_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn}q_{nn}\end{pmatrix}\right|$$

$$=\left|\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}r_{11}q_{11} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_{22}b_{22}r_{22}q_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}b_{nn}r_{nn}q_{nn}\end{pmatrix}\right|+$$

$$+a_{11}r_{11}a_{22}r_{22}\cdots a_{nn}r_{nn}b_{11}q_{11}b_{22}q_{22}\cdots b_{nn}q_{nn}$$
$$=a_{11}b_{11}r_{11}q_{11}\cdots a_{nn}b_{nn}r_{nn}q_{nn}+a_{11}b_{11}r_{11}q_{11}\cdots a_{nn}b_{nn}r_{nn}q_{nn}$$
$$=2a_{11}b_{11}r_{11}q_{11}\cdots a_{nn}b_{nn}r_{nn}q_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}b_{11}b_{22}\cdots b_{nn}+$$
$$+a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}b_{11}b_{22}\cdots b_{nn}$$
$$\geq |A|b_{11}b_{22}\cdots b_{nn}+a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}|B|.$$ □

<u>Παρατήρηση:</u> Από το Λήμμα 2.1.22 ισχύει ότι $R^0=R-\frac{e_1e_1^T}{r^{11}}$ (όπου $r^{11}=e_1^TR^{-1}e_1$) είναι θετικά ημιορισμένος. Συνεπώς από Θεωρήματα 1.6.4, 1.6.5 ο πίνακας $Q\circ R^0$ είναι θετικά ορισμένος. Επιπλέον, από το Θεώρημα 4.1.2 ισχύει ότι

$$|Q|\left(1-\frac{1}{r^{11}}\right)\leq |Q\circ R^0|=\left|Q\circ R-\frac{e_1e_1^T}{r^{11}}\right|$$
$$=|Q\circ R|\left(I-\frac{|Q_1\circ R_1|}{|Q\circ R|r^{11}}\right)$$
$$\Rightarrow\left||Q|\left(1-\frac{1}{r^{11}}\right)\right|=\left||Q\circ R|\left(I-\frac{|Q_1\circ R_1|}{|Q\circ R|r^{11}}\right)\right|$$
$$\Rightarrow\left||Q|-\frac{|Q|}{r^{11}}\right|=|Q\circ R|-\frac{|Q_1\circ R_1|}{r^{11}}$$
$$\Rightarrow |Q\circ R|-\frac{|Q_1\circ R_1|}{r^{11}}\geq |Q|-\frac{|Q|}{r^{11}}. \qquad (*)$$

Η τελευταία σχέση προκύπτει από την αριστερή τριγωνική ανισότητα. Θεωρώ

$$l_{i+1}=|Q_i\circ R_i|+|Q_i||R_i|-|Q_i|-|R_i|,\ \text{για}\ i=0,1,\ldots,n-1.$$

Τότε

$$l_1=|Q_0\circ R_0|+|Q_0||R_0|-|Q_0|-|R_0|\geq 0.$$

Επίσης, η $(*)$ μπορεί και να γραφεί ως

$$l_1 - \frac{l_2}{r^{11}} \geq \left(\frac{1}{r^{11}} - |R|\right)(|Q_1| - |Q|).$$

Η ποσότητα $\frac{(1-|R_1|)}{r^{11}}$ είναι μη αρνητική από την Πρόταση 4.1.1. Επίσης, από τα συμπεράσματα του Λήμματος 2.1.22, προκύπτει ότι και η ποσότητα $l_1 - \frac{l_2}{r^{11}}$ είναι μη αρνητική, και έτσι προκύπτει ότι και τα δύο μέλη της παραπάνω ανισότητας είναι μη αρνητικά. Έτσι,

$$l_1 \geq l_2 \frac{|R|}{|R_1|},\ l_2 \geq l_3 \frac{|R_1|}{|R_2|},$$

και συνεπώς

$$l_1 \geq l_2 \frac{|R|}{|R_2|}.$$

Με την ίδια διαδικασία έχουμε ότι

$$l_{n-1} = 1 - q^2 r^2 + (1 - q^2)(1 - r^2) - (1 - q^2) - (1 - r^2) = 0,$$

όπου $q = q_{n,n-1}$ και $r = r_{n,n-1}$.

Λήμμα 4.1.5. Έστω $A_{n\times n}$ ένας τετραγωνικός πίνακας n γραμμών και n στηλών ο οποίος είναι θετικά ορισμένος και $B_{n\times n}$ θετικά ημιορισμένος πίνακας με r θετικά στοιχεία στη διαγώνιο. Τότε

$$\operatorname{rank}(A \circ B) = r.$$

Απόδειξη: Έστω $A_{n\times n}$ και $B_{n\times n}$ τετραγωνικοί πίνακες με A θετικά ορισμένο και B θετικά ημιορισμένο. Τότε από Θεωρήματα 1.6.4 και 1.6.5 ο πίνακας $A \circ B$ είναι θετικά ημιορισμένος και έχει r θετικά στοιχεία στη διαγώνιο. Άρα

$$\operatorname{rank}(A \circ B) \leq r.$$

Από το θεώρημα 4.1.2 έχουμε ότι ο πίνακας $A \circ B$ έχει έναν κύριο υποπίνακα βαθμού r ο οποίος έχει μη μηδενική ορίζουσα και έτσι

$$\operatorname{rank}(A \circ B) \geq r,$$

οπότε προκύπτει το ζητούμενο. ◻

Άμεση συνέπεια του Λήμματος 4.1.5 είναι το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 4.1.6. Έστω C ένας τετραγωνικός πίνακας n γραμμών και n στηλών, ο οποίος είναι θετικά ημιορισμένος. Τότε ο C μπορεί να εκφραστεί ως $A \circ B$, όπου A είναι ένας τετραγωνικός πίνακας $n \times n$ θετικά ορισμένος και $B_{n\times n}$ θετικά ημιορισμένος, αν και μόνο αν ο βαθμός του C ισούται με το πλήθος των θετικών στοιχείων της διαγωνίου του C. Η απόδειξη του θεωρήματος προκύπτει άμεσα από το προηγούμενο λήμμα.

Όταν όλα τα στοιχεία της διαγωνίου του πίνακα B είναι θετικά, τότε ο πίνακας $A \circ B$ είναι θετικά ορισμένος (και με μη μηδενική ορίζουσα) και έτσι τα Θεωρήματα 1.6.4, 1.6.5

ενισχύονται από τους Pólya και Szëgo. Το Λήμμα 4.1.5 ενισχύει το αποτέλεσμα του Djoković, ο οποίος απέδειξε ότι $\operatorname{rank}(A \circ B) \geq \operatorname{rank}(B)$ όταν ο A είναι θετικά ορισμένος και ο B είναι θετικά ημιορισμένος.
Ας υποθέσουμε τώρα ότι οι πίνακες A και B είναι και οι δύο θετικά ημιορισμένοι και έχουν μηδενική ορίζουσα. Όταν και οι δύο έχουν βαθμό ένα, ο πίνακας $A \circ B$ έχει βαθμό το πολύ ένα. Σε αυτήν την περίπτωση ο πίνακας $A \circ B$ έχει μηδενική ορίζουσα, εκτός και αν οι πίνακες A και B έχουν τάξη ένα και είναι βαθμωτοί. Ως εκ τούτου, το γινόμενο Hadamard δύο πινάκων οι οποίοι είναι θετικά ημιορισμένοι και έχουν μηδενική ορίζουσα και έχουν τάξη δύο δεν μπορεί να είναι θετικά ορισμένο. Όταν όμως η τάξη είναι το λιγότερο τρία, τότε ο πίνακας $A \circ B$ μπορεί να έχει είτε να μην έχει μηδενική ορίζουσα. Αν οι πίνακες A ή B είναι οι μηδενικοί πίνακες, τότε ο πίνακας $A \circ B = O$ και έτσι η ορίζουσα του $A \circ B$ θα ισούται με το μηδέν. Όμως, αν για παράδειγμα

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \text{ και } B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & \frac{7}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix},$$

τότε οι πίνακες A και B έχουν βαθμό 2, αλλά ο πίνακας $A \circ B=\begin{pmatrix} 9 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ 9 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ δεν έχει μηδενική ορίζουσα, καθώς $\det(A \circ B)=24$ και ο $A \circ B$ είναι θετικά ορισμένος.
Ο Fiedler μελέτησε τις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης του πίνακα $A \circ A^{-1}$, όταν ο πίνακας A είναι θετικά ορισμένος.
Όπως έχει ήδη αναφερθεί, αν A, B είναι τετραγωνικοί πραγματικοί πίνακες, τότε τα αθροίσματα των γραμμών του πίνακα $A \circ B$ είναι τα στοιχεία της διαγωνίου των πινάκων AB^T και BA^T, άρα εδώ όλα τα αθροίσματα των γραμμών του $A \circ A^{-1}$ θα ισούνται με τα στοιχεία της διαγωνίου του πίνακα $A(A^{-1})^T = A(A^{-1}) = I$, δηλαδή θα ισούνται με τη μονάδα και έτσι ο πίνακας $A \circ A^{-1}$ έχει ιδιοτιμή το 1, με το e να είναι ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα. Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να ενισχυθεί αν υποθέσουμε ότι ο πίνακας A έχει την παρακάτω μορφή:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{ss} \end{pmatrix},$$

όπου A_{ii}, για κάθε $i=1,\dots,s$, είναι υποπίνακες οι οποίοι είναι τετραγωνικοί και δε μπορούν να είναι μικρότερης διάστασης.

<u>Θεώρημα 4.1.7.</u> Έστω $A_{n\times n}$ ένας τετραγωνικός πίνακας n γραμμών και n στηλών ο οποίος είναι θετικά ορισμένος και μπορεί να γραφεί όπως αναφέρθηκε παραπάνω. Τότε ο πίνακας $A \circ A^{-1}$ έχει μικρότερη ιδιοτιμή το 1, με πολλαπλότητα s και ιδιοδιάνυσμα το e.
Ένας τετραγωνικός, όχι απαραίτητα συμμετρικός πίνακας, με μη αρνητικά στοιχεία έχει μια κυρίαρχη πραγματική ιδιοτιμή η οποία δεν είναι μικρότερη από τις άλλες ιδιοτιμές κατά απόλυτη τιμή.
Το 1963 οι Marcus και Thompson μελέτησαν το γινόμενο Hadamard σε κανονικούς πίνακες και απέδειξαν το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 4.1.8. Έστω $A_{n\times n}$ και $B_{n\times n}$ δύο τετραγωνικοί κανονικοί πίνακες με ιδιοτιμές $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ και $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, αντίστοιχα. Τότε οι ιδιοτιμές του πίνακα $A \circ B$ ανήκουν σε ένα υποσύνολο ενός κυρτού πολυγώνου στο επίπεδο, το οποίο δίνεται από τα $\alpha_i\beta_j$.

Τώρα θα δώσουμε μια νέα ανισότητα για τις ιδιοτιμές του πίνακα $A \circ B$, όταν έχουμε υποθέσει μόνο ότι οι πίνακες A και B είναι συμμετρικοί. Τότε υπάρχει ένας μοναδικός θετικά ημιορισμένος πίνακας $\overline{A}$ τέτοιος ώστε

$$\overline{A}^2 = A^2.$$

Επίσης, οι πίνακες $\overline{A}$ και A έχουν τα ίδια χαρακτηριστικά ιδιοδιανύσματα, αλλά οι ιδιοτιμές του πίνακα $\overline{A}$ είναι οι ιδιάζουσες τιμές του πίνακα A (και ως εκ τούτου επίσης του $\overline{A}$). Ένας πίνακας F, όχι απαραίτητα τετραγωνικός, βαθμού f έχει f πλήθος μη μηδενικών ιδιαζουσών τιμών, και ισχύει ότι

$$sg_j(F) = (ch_j(F^TF))^{1/2} = (ch_j(FF^T))^{1/2}, \text{ για κάθε } j=1,\ldots,f,$$

Έτσι, για ένα συμμετρικό πίνακα A προκύπτει:

$$ch_j(\overline{A}) = sg_j(A) = |ch_k(A)|, \text{ για κάθε } j=1,\ldots,n \text{ και κατάλληλα } k.$$

Βασιζόμενος σε αυτά ο Davis διατύπωσε το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 4.1.9. Έστω $A_{n\times n}$ και $B_{n\times n}$ δύο τετραγωνικοί πίνακες οι οποίοι είναι συμμετρικοί, και έστω $\overline{A}_{n\times n}$ και $\overline{B}_{n\times n}$ θετικά ημιορισμένοι πίνακες οι οποίοι ικανοποιούν τις ισότητες:

$$A^2 = \overline{A}^2 \text{ και } B^2 = \overline{B}^2.$$

Τότε

$$ch_j(A \circ B) \le ch_j(\overline{A} \circ \overline{B}), \text{ για κάθε } j=1,\ldots,n.$$

Απόδειξη: Έστω $A_{n\times n}$ και $B_{n\times n}$ δύο (πραγματικοί) συμμετρικοί πίνακες και $P=\{p_{ih}\}$ και $Q=\{q_{jk}\}$ δύο ορθογώνιοι πίνακες τέτοιοι ώστε

$$P^TAP = \Lambda = \{\lambda_h\} \text{ και } Q^TBQ = \Delta = \{\delta_k\},$$

με Λ και Δ διαγώνιους πίνακες. Επιπλέον, έστω $x=\{x_i\}$, ένας πίνακας n γραμμών και 1 στήλης (διάνυσμα). Τότε, αν

$$P^TAP = \Lambda \Longrightarrow A = P\Lambda P^T$$

και αν

$$Q^TBQ = \Delta \Longrightarrow B = Q\Delta Q^T,$$

προκύπτει

$$x^T(A \circ B)x = x^T((P\Lambda P^T) \circ (Q\Delta Q^T))x =$$

$$= x^T\left[\left(\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} & \cdots & p_{n1} \\ p_{12} & p_{22} & \cdots & p_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1n} & p_{2n} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}\right)\right.$$

$$\circ\left(\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \delta_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \delta_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_{11} & q_{21} & \cdots & q_{n1} \\ q_{12} & q_{22} & \cdots & q_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{1n} & q_{2n} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix}\right)\Bigg]x$$

$$=x^T\left[\begin{pmatrix} p_{11}^2\lambda_1 + p_{12}^2\lambda_2 + \cdots + p_{1n}^2\lambda_n & \cdots & p_{11}\,p_{n1}\lambda_1 + p_{12}\,p_{n2}\lambda_2 + \cdots + p_{1n}\,p_{nn}\lambda_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1}\,p_{11}\lambda_1 + p_{n2}\,p_{12}\lambda_2 + \cdots + p_{nn}\,p_{1n}\lambda_n & \cdots & p_{n1}^2\lambda_1 + p_{n2}^2\lambda_2 + \cdots + p_{nn}^2\lambda_n \end{pmatrix}\circ\right.$$

$$\left.\circ\begin{pmatrix} q_{11}^2\delta_1 + q_{12}^2\delta_2 + \cdots + q_{1n}^2\delta_n & \cdots & q_{11}\,q_{n1}\delta_1 + q_{12}\,q_{n2}\delta_2 + \cdots + q_{1n}\,q_{nn}\delta_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1}\,q_{11}\delta_1 + q_{n2}\,q_{12}\delta_2 + \cdots + q_{nn}\,q_{1n}\delta_n & \cdots & q_{n1}^2\delta_1 + q_{n2}^2\delta_2 + \cdots + q_{nn}^2\delta_n \end{pmatrix}\right]x$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} x_i \left(\sum_{h=1}^{n} p_{ih}\lambda_h p_{jh}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} q_{ik}\delta_k q_{jk}\right)x_j$$

$$= x_1^2(p_{11}^2\lambda_1 + p_{12}^2\lambda_2 + \cdots + p_{1n}^2\lambda_n)(\, q_{11}^2\delta_1 + q_{12}^2\delta_2 + \cdots + q_{1n}^2\delta_n) + \cdots +$$

$$+x_n^2\left(p_{n1}^2\lambda_1 + p_{n2}^2\lambda_2 + \cdots + p_{nn}^2\lambda_n\right)\left(\, q_{n1}^2\delta_1 + q_{n2}^2\delta_2 + \cdots + q_{nn}^2\delta_n\right)$$

$$= \sum_{h,k=1}^{n} \lambda_h\delta_k \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\, p_{ih}q_{ik}\right)^2$$

$$\le \sum_{h,k=1}^{n} |\lambda_h||\delta_k| \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\, p_{ih}q_{ik}\right)^2 = x^T(\overline{A}\circ\overline{B})x.$$

Έστω G ένας πίνακας $n\times(j-1)$, δηλαδή ένας πίνακας με n γραμμές και $j-1$ στήλες, ο οποίος έχει ως στήλες τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα $\overline{A}\circ\overline{B}$ τα οποία αντιστοιχούν στις $j-1$ μεγαλύτερες ιδιοτιμές. Αν επιπλέον $x^T\,x = 1$, τότε

$$ch_j(A\circ B\,) \le \max\{x^T(A\circ B\,)x : G^Tx=0\} \le \max\{x^T(\overline{A}\circ\overline{B}\,)x : G^Tx=0\} = ch_j(\overline{A}\circ\overline{B}),$$

το οποίο προέκυψε χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Courant-Fischer για το μέγιστο και το ελάχιστο, το οποίο λέει ότι αν A είναι ένας συμμετρικός πίνακας τότε

$$ch_j(A) = \min_{C}\max_{\|x\|=1, Cx=0} < Ax, x >,$$

όπου C ένας $(j-1)\times n$ πίνακας. □

<u>Θεώρημα 4.1.10.</u> Έστω $A_{n\times n}$ και $B_{n\times n}$ δύο τετραγωνικοί πίνακες n γραμμών και n στηλών οι οποίοι είναι συμμετρικοί. Τότε

$$ch_1(A\circ B\,) \le sg_1(A\circ B) \le sg_1(\overline{A}\circ\overline{B}\,) \le sg_1(A\,)\overline{b}_{max},$$

όπου $\overline{b}_{max}$ είναι το μεγαλύτερο στοιχείο της διαγωνίου του πίνακα $\overline{B}$.
Η ανισότητα $sg_j(A\circ B) \le sg_j(\overline{A}\circ\overline{B}\,)$ δεν ισχύει, γενικά, για $j\ge2$.

<u>Απόδειξη:</u> Έστω $A_{n\times n}$ και $B_{n\times n}$ δύο συμμετρικοί πίνακες. Τότε, από την παραπάνω ανισότητα έχουμε ότι

$$|x^T(A\circ B)x| \le x^T(\overline{A}\circ\overline{B}\,)x,$$

και έτσι προκύπτει

$$\begin{aligned} sg_1(A\circ B) &= \max(ch_1(A\circ B), -ch_n(A\circ B)) \\ &= \max(\max\{x^T(A\circ B)x\}, -\min\{x^T(A\circ B)x\}) \\ &= \max|x^T(A\circ B)x| \leq \max|x^T(\overline{A}\circ\overline{B})x| \\ &\leq \max(x^T(\overline{A}\circ\overline{B})x) = ch_1(\overline{A}\circ\overline{B}) \\ &= sg_1(\overline{A}\circ\overline{B}), \end{aligned}$$

το οποίο από Θεώρημα 2.1.17 δεν είναι μεγαλύτερο από $ch_1(\overline{A})\bar{b}_{max}$. Θα δώσουμε τώρα ένα αντιπαράδειγμα για να δούμε ότι η ανισότητα $sg_j(A\circ B) \leq sg_j(\overline{A}\circ\overline{B})$ δεν ισχύει γενικά. Υποθέτουμε ότι n=j=2 και

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ A\circ B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

O $A\circ B$ έχει ιδιοτιμές τις $\lambda_{1,2} = 3 \pm \sqrt{10}$. Επιπλέον,

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},\ \overline{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{3}{\sqrt{5}} \\ \frac{3}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{5}} \end{pmatrix},\ \overline{A}\circ\overline{B} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{9}{\sqrt{5}} \\ \frac{9}{\sqrt{5}} & \frac{8}{\sqrt{5}} \end{pmatrix},$$

με ιδιοτιμές $\lambda_{1,2} = \frac{5}{\sqrt{5}} \pm \frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{5}}$.

Οπότε $sg_2(A\circ B)= \left|3-\sqrt{10}\right| = \sqrt{10} - 3 \cong 0{,}16$, $sg_2(\overline{A}\circ\overline{B})=\left|\frac{5}{\sqrt{5}} - \frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{5}}\right| = \frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{5}} - \frac{5}{\sqrt{5}} \cong 2{,}01$.

Άρα $sg_2(A\circ B) < sg_2(\overline{A}\circ\overline{B})$. □

Έστω $x_1, x_2, \dots, x_n$ ένα τυχαίο δείγμα από μια n-διάστατη κανονική κατανομή N(0,Σ). Υποθέτουμε ότι με $L(\vec{x})$ συμβολίζουμε την πιθανοφάνεια των n παρατηρήσεων και l είναι η ποσότητα:

$$l = -\frac{2}{n}\log L - n\log(2\pi). \tag{1}$$

Αν με S συμβολίσουμε την ποσότητα:

$$S=\frac{1}{n}\sum_{a=1}^{n} x_a x_a^T,$$

όπου S ο πίνακας συνδιακύμανσης του δείγματος, τότε

$$l=tr(\Sigma^{-1}S)+\log|\Sigma|.$$

Οι πίνακες Σ και S είναι θετικά ορισμένοι και μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\Sigma=\Delta R\Delta \text{ και } S=DR'D,$$

όπου R και R′ είναι οι πίνακες συσχέτισης του πληθυσμού και του δείγματος, και Δ και D διαγώνιοι πίνακες του πληθυσμού και του δείγματος με διαγώνιο τις τυπικές αποκλίσεις. Υποθέτουμε ότι ο πίνακας R θεωρείται γνωστός. Αν

$$\begin{aligned} \Delta e &= \sigma = \{\sigma_i\}, \\ \Delta^{-1} e &= \sigma^{(-1)} = \left\{\frac{1}{\sigma_i}\right\}, \\ \Delta^2 e &= \sigma^{(2)} = \{\sigma_i^2\}, \end{aligned} \tag{2}$$

από προηγούμενες ιδιότητες προκύπτει:

$$\mathrm{tr}(\Sigma^{-1}S) = e^T(\Sigma^{-1} \circ S)e = e^T\left((\Delta^{-1}R^{-1}\Delta^{-1}) \circ S\right)e = (\sigma^{(-1)})^T(R \circ S)\,\sigma^{(-1)}.$$

Άρα,

$$\frac{dl}{d\sigma^{(-1)}} = \frac{d((\sigma^{(-1)})^T(R \circ S)\sigma^{(-1)} + \log|\Sigma|)}{d\sigma^{(-1)}} = 2((R^{-1} \circ S)\,(\sigma^{(-1)} - \sigma), \quad \textbf{(3)}$$

και έτσι η εκτίμηση μέγιστης πιθανοφάνειας θα είναι η:

$$\hat{\sigma} = ((R^{-1} \circ S)\hat{\sigma}^{(-1)}. \quad \textbf{(4)}$$

Από Θεωρήματα 1.6.4, 1.6.5 έχουμε ότι ο πίνακας

$$\frac{d^2 l}{d\sigma^{(-1)} d(\sigma^{(-1)})^T} = 2(R^{-1} \circ S + \Delta^2) \quad \textbf{(5)}$$

είναι θετικά ορισμένος και έτσι η εξίσωση **(4)** έχει μοναδική λύση.
Οι Newton-Raphson πρότειναν μια επαναληπτική μέθοδο για την εύρεση της $\hat{\sigma}$ βασισμένοι στην υπόθεση ότι $\hat{\sigma}_0 = De$, σύμφωνα με την οποία το διάνυσμα στήλη των τυπικών αποκλίσεων του τυχαίου δείγματος δίνει την πρώτη επανάληψη, δηλαδή

$$\hat{\sigma}_1^{(-1)} = 2D^{-1}(R^{-1} \circ R' + I)^{-1}e.$$

Ο Styan απέδειξε ότι οι ποσότητες $\sqrt{n}(\hat{\sigma}_1^{(2)} - \sigma^{(2)})$ και $\sqrt{n}(\hat{\sigma}^{(2)} - \sigma^{(2)})$ συγκλίνουν κατά κατανομή στην κανονική κατανομή με πίνακα συνδιακύμανσης τον

$$4\Delta^2(R^{-1} \circ R + I)^{-1}\Delta^2,$$

ενώ η $\sqrt{n}(D^2 e - \sigma^{(2)})$ συγκλίνει κατά κατανομή στην κανονική κατανομή με πίνακα συνδιακύμανσης τον

$$2\Delta^2(R \circ R)\,\Delta^2.$$

<u>Θεώρημα 4.1.11.</u> Έστω $R_{n\times n}$ ένας πίνακας συσχέτισης n γραμμών και n στηλών, ο οποίος όπως έχουμε αναφέρει έχει στη διαγώνιο τη μονάδα και είναι θετικά ορισμένος. Τότε ο πίνακας

$$R \circ R - 2(R^{-1} \circ R + I)^{-1}$$

είναι θετικά ημιορισμένος.

<u>Απόδειξη:</u> Έστω $R_{n\times n}$ πίνακας συσχέτισης θετικά ορισμένος. Θα εκτιμήσουμε τις ποσότητες:

$$s = (S \circ I)e = D^2 e \ \text{ και } \ \frac{d \log L}{d\sigma^{(2)}}.$$

Αρχικά θα αποδείξουμε ότι

$$nV(s) = 2\Sigma \circ \Sigma = 2\Delta^2(R \circ R)\Delta^2, \quad \textbf{(6)}$$

όπου $V(\cdot)$ είναι ο πίνακας συνδιακύμανσης. Έστω $\mathrm{cov}(s_i, s_j)$ το στοιχείο που βρίσκεται στην i-γραμμή και j-στήλη του πίνακα $V(s)$. Τότε

$$
\begin{aligned}
\mathrm{n}\,\mathrm{cov}(\mathrm{s_i},\mathrm{s_j}) &= \mathrm{ncov}\left(\frac{1}{n}\sum_{a=1}^{n} x_{a_i}x_{a_i}^{T}, \frac{1}{n}\sum_{\beta=1}^{n} x_{\beta_j}x_{\beta_j}^{T}\right)\\
&= n\frac{1}{n}\frac{1}{n}\mathrm{cov}\left(\sum_{a=1}^{n} x_{a_i}^{2}, \sum_{\beta=1}^{n} x_{\beta_j}^{2}\right)\\
&= \mathrm{cov}(X_i^2, X_j^2) = \frac{1}{2}\left[V\left(X_i^2+X_j^2\right) - V(X_i^2) - V\left(X_j^2\right)\right]\\
&= \mathrm{tr}(V^2) - \sigma_{ii}^2 - \sigma_{jj}^2,
\end{aligned}
$$

όπου X_i, X_j είναι διδιάστατες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την κανονική κατανομή, με μέση τιμή μηδέν και πίνακα συνδιακύμανσης

$$
V=\begin{bmatrix}\sigma_{ii} & \sigma_{ij}\\ \sigma_{ij} & \sigma_{jj}\end{bmatrix}.
$$

Εφόσον $\mathrm{tr}(V^2) = \sigma_{ii}^2 + \sigma_{jj}^2 + 2\sigma_{ij}^2$ και $\mathrm{ncov}(s_i, s_j) = 2\sigma_{ij}^2$, έπεται η σχέση (6).

Από την εξίσωση (3) προκύπτει ότι:

$$
\begin{aligned}
E\left(\frac{dl}{d\sigma^{(-1)}}\right) &= E\left(2\left((R^{-1}\circ S)\sigma^{(-1)} - \sigma\right)\right)\\
&=2\left((R^{-1}\circ \Sigma)\sigma^{(-1)} - \sigma\right)\\
&= 2(\Delta(R^{-1}\circ R)e - \sigma)\\
&=2(\Delta e-\sigma)\\
&=0,
\end{aligned}
$$

όπου για τα παραπάνω χρησιμοποιήθηκαν οι ισότητες (**) και (2) και με E συμβολίζουμε τη μέση τιμή. Επιπλέον, από την εξίσωση (1) έχουμε ότι

$$
E\left(\frac{d\,(\log L)}{d\sigma^{(-1)}}\right) = E\left(\frac{d(-\frac{n}{2}l - \frac{n}{2}\ n\log(2\pi))}{d\sigma^{(-1)}}\right) = 0,
$$

και έτσι προκύπτει ότι

$$
\mathrm{cov}\left(s, \frac{d\,(\log L)}{d\sigma^{(2)}}\right) = E\left(s\left(\frac{d\,(\log L)}{d\sigma^{(2)}}\right)^{T}\right) = \frac{dE(s)}{(d\sigma^{(2)})^{T}} = I,
$$

καθώς

$$
E(s) = \sigma^{(2)}.
$$

Επιπλέον,

$$
V\left(\frac{d\,(\log L)}{d\sigma^{(2)}}\right) = \frac{1}{4}n^2 V\left[\left(\frac{d(\sigma^{-1})}{d(\sigma^{(2)})^{T}}\right)\cdot\left(\frac{dl}{d(\sigma^{-1})}\right)\right]
$$

και εφόσον

$$
\frac{d(\sigma^{-1})}{d(\sigma^{(2)})^{T}} = -\frac{1}{2}\Delta^{-3},
$$

$$
V\left(\frac{dl}{d\sigma^{(-1)}}\right) = \frac{2}{n}E\left(\frac{d^2 l}{d\sigma^{(-1)}(d\sigma^{(-1)})^{T}}\right),
$$

βρίσκουμε, με χρήση της ισότητας (5), ότι

$$
V\left(\frac{d\,(\log L)}{d\sigma^{(2)}}\right) = \frac{1}{4}n\Delta^{-2}(R^{-1}\circ R + I)\,\Delta^{-2}
$$

καθώς

$$E(S)=\Sigma.$$

Οπότε τελικά

$$V\left(\begin{matrix} S \\ \frac{d\,(\log L)}{d\sigma^{(2)}} \end{matrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{2}{n}\ \Delta^2(R \circ R)\,\Delta^2 & I \\ I & \frac{1}{4}\ n\Delta^{-2}(R^{-1} \circ R + I)\,\Delta^{-2} \end{pmatrix},$$

όπου η απόδειξη του θεωρήματος προκύπτει από το γεγονός ότι ο παραπάνω πίνακας είναι θετικά ημιορισμένος. □

<u>Πρόταση 4.1.12</u>. Έστω $R_{n\times n}$ ένας πίνακας συσχέτισης n γραμμών και n στηλών, ο οποίος είναι θετικά ημιορισμένος. Τότε μια ικανή αλλά όχι αναγκαία συνθήκη για να ισχύει ότι ο πίνακας

$$R \circ R - 2(R^{-1} \circ R + I)^{-1}$$

έχει μηδενική ορίζουσα, είναι να ισχύει ότι ο πίνακας R−I έχει τουλάχιστον μια μηδενική γραμμή.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Pankaj Kumar Das and Lalit K. Vashisht, Traces of Hadamard and Kronecker Products of Matrices, *Mathematics for Applications*, **6**, 143-150, 2017.

2. Elizabeth Million, The Hadamard Product, technical report, 2007.

3. Roger A. and Horn-Charles R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 1985.

4. Roger A. and Horn-Charles R. Johnson, *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 1991.

5. George P. H. Styan, Hadamard Products and Multivariate Statistical Analysis, *Linear Algebra and its Applications*, **6**, 217-240, 1973.

6. Ιωάννης Μαρουλάς, *Γραμμική Άλγεβρα*, Αθήνα 2005.

7. Ανάργυρος Γ. Φελλούρης, *Γραμμική Άλγεβρα και Αναλυτική Γεωμετρία*, Αθήνα, 2006.

8. Παναγιώτης Ι. Ψαρράκος, *Θέματα Ανάλυσης Πινάκων*, Αθήνα, 2014.