

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ



Συμμετρίες ατομικών πυρήνων βασισμένες στο πρότυπο φλοιών

Διδακτορική διατριβή
του Ιωάννη Ασημάκη
Διπλωματούχου της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Δεκέμβριος 2019

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ



Συμμετρίες ατομικών πυρήνων βασισμένες
στο πρότυπο φλοιών

Διδακτορική διατριβή
του Ιωάννη Ασημάκη

Διπλωματούχου της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Τριμελής Επιτροπή

Μπονάτσος Διονύσιος, Ερευνητής Ε.Κ.Ε.Φ.Ε.

Κουτσούμπας Γεώργιος, Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Ήργες Νικόλαος, Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Επταμελής Εξεταστική Επιτροπή

Μπονάτσος Διονύσιος, Ερευνητής Ε.Κ.Ε.Φ.Ε.

Κουτσούμπας Γεώργιος, Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Ήργες Νικόλαος, Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Λαλαζήσης Γεώργιος, Καθηγητής Α.Π.Θ.

Κόκκορης Μιχαήλ, Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Μουστακίδης Χαράλαμπος, Αναπληρωτής Καθηγητής Α.Π.Θ.

Μερτζιμέκης Θεόδωρος, Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Κ.Π.Α.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα διδακτορική διατριβή αποτελεί την συνέχεια και υπό μία άποψη την ολοκλήρωση μίας προσπάθειας που ξεκίνησε το 2013 και στην οποία συμμετείχε ο γράφων στα πλαίσια του μεταπτυχιακού “Φυσική και τεχνολογικές εφαρμογές”. Το θέμα της διατριβής είναι το πρότυπο $\text{proxy-SU}(3)$ το οποίο δημιουργήθηκε από τον Δρ. Διονύση Μπονάτσο και τους συνεργάτες του. Το κίνητρο πίσω από την δημιουργία του μοντέλου είναι η αποκατάσταση της $\text{SU}(3)$ συμμετρίας στα πλαίσια του προτύπου των φλοιών, η οποία είναι σε ισχύ στους ελαφρείς πυρήνες, αλλά καταστρέφεται λόγω της αλληλεπίδρασης σπιν-τροχιάς στους βαρύτερους πυρήνες.

Το πρώτο κεφάλαιο εκτελεί χρέη εισαγωγής και σε αυτό παρουσιάζονται βασικές έννοιες οι οποίες θα βοηθήσουν τον αναγνώστη στη συνέχεια. Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα στοιχειώδη μαθηματικά εργαλεία τα οποία απαιτούνται για την κατανόηση ενός αλγεβρικού προτύπου όπως η $\text{proxy-SU}(3)$. Παρουσιάζονται ακόμη ορισμένα άλλα αλγεβρικά μοντέλα που βασίζονται στην $\text{SU}(3)$ συμμετρία τα οποία βοηθούν στην κατανόηση της proxy . Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζεται το κύριο θέμα της διατριβής και πραγματοποιείται μία “ποιοτική απόδειξη” μέσω υπολογισμών Nilsson του ότι η $\text{proxy-SU}(3)$ αποτελεί καλή προσέγγιση στους βαρείς πυρήνες. Στο τέταρτο κεφάλαιο αναφέρεται η σύνδεση ανάμεσα στις μεταβλητές β και γ του προτύπου του Bohr που περιγράφουν το σχήμα του πυρήνα και στις μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις της $\text{proxy-SU}(3)$. Μέσω της $\text{proxy-SU}(3)$ γίνεται φανερό ότι μπορούν να γίνουν μη παραμετρικές προβλέψεις για το σχήμα των πυρήνων και εμφανίζεται και από αλγεβρικής σκοπιάς και παρατηρείται η υπεροχή των επιμηκυμένων σχημάτων έναντι των πεπλατυσμένων. Στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζεται το φαινόμενο της συνύπαρξης των πυρηνικών σχημάτων και γίνονται προβλέψεις για την περιοχή της συνύπαρξης των πυρηνικών σχημάτων. Παρουσιάζεται ακόμη μία εξήγηση του φαινομένου, η οποία οφείλεται κυρίως σε εργασία της Δρ. Ανδριάνας Μαρτίνου. Στο τελευταίο κεφάλαιο παρουσιάζονται οι τελεστές Ω και Λ οι οποίοι αίρουν τον εκφυλισμό σε $\text{SU}(3)$ πρότυπα καθώς και οι Χαμιλτονιανές του προτύπου που προκύπτου με την χρήση τους. Παρουσιάζονται ακόμη δύο ποσότητες οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να ελεγχθεί σε πρώτη φάση η συμφωνία των πειραματικών δεδομένων και του προτύπου αναφορικά με το ενεργειακό φάσμα. Η πρώτη αφορά τη διαφοροποίηση των ενεργειών της γ ζώνης από την θεμελιώδη ενώ η δεύτερη αφορά το φαινόμενο

ενεργειακών ταλαντώσεων αναμέσα σε περιττές και άρτιες στροφορμές. Η σύγκριση με το πείραμα με τη χρήση των ελάχιστων δυνατών παραμέτρων δείχνει παραπάνω από ικανοποιητική συμφωνία.

Οφείλω να αναφέρω πως το περιεχόμενο αυτής της διατριβής είναι αποτέλεσμα του κόπου αρκετών ανθρώπων. Ο λόγος της δικής τους εργασίας προς τον δική μου είναι πολύ μεγαλύτερος της μονάδας. Θα ήθελα λοιπόν αρχικά να ευχαριστήσω τον Δρ. Διονύση Μπονάτσο για την βοήθεια και την υπομονή του όλα αυτά τα χρόνια. Θεωρώ πως η λέξη “ δάσκαλος ” δικαιώνεται στο πρόσωπο του. Θερμές ευχαριστίες οφείλω και στην υπόλοιπη συμμορία-ερευνητική ομάδα που απαρτίζεται από την Δρ. Ανδριάννα Μαρτίνου, την Σμαράγδα Σαραντοπούλου και τον Σπύρο Περούλη. Χωρίς την συμβολή τους η παρούσα διατριβή δεν θα είχε ολοκληρωθεί. Θελώ να ευχαριστήσω ακόμη τον καθηγητή Θεόδωρο Μερτζιμέκη και τον Δρ. Nikolay Minkov για την βοήθεια προς την ομάδα μας και το ενδιαφέρον τους για τον εμπλουτισμό και την ανάδειξη της proxy-SU(3).

Τις πιο θερμές ευχαριστίες όμως οφείλω στους γονείς μου για την υποστήριξη τους όλα αυτά τα χρόνια καθώς και στην σύντροφό μου Ελένη.

Περιεχόμενα

1	Μοντέλα πυρηνικής δομής	9
1.1	Εισαγωγή	9
1.2	Συλλογικά μοντέλα-Το γεωμετρικό συλλογικό μοντέλο	11
1.2.1	Πολυπολικές παραμορφώσεις	12
1.2.2	Η τετραπολική παραμόρφωση	14
1.3	Μικροσκοπικά μοντέλα	17
1.3.1	Το πρότυπο των φλοιών	17
1.3.2	Το πρότυπο του Nilsson	20
2	Η χρήση των συμμετριών στην πυρηνική φυσική	23
2.1	Θεωρία Ομάδων	23
2.1.1	Ομάδες Lie	24
2.1.2	Άλγεβρες Lie	26
2.1.3	Η έννοια της δυναμικής συμμετρίας και οι τελεστές Casimir	27
2.1.4	Αναπαραστάσεις	29
2.1.5	Διαγράμματα Young	31
2.2	Άλγεβρικά μοντέλα πυρηνικής δομής με SU(3) συμμετρία	33
2.2.1	Το πρότυπο του Elliott	33
2.2.2	Το πρότυπο αλληλεπιδρώντων μποζονίων	35
2.2.3	Το πρότυπο pseudo-SU(3)	39

3	Το πρότυπο proxy-SU(3)	41
3.1	Τροχιακά που διαφέρουν κατά $\Delta K[\Delta N \Delta n_z \Delta \Lambda] = 0[110]$	41
3.2	Η περιγραφή ενός πυρήνα στο πλαίσιο της proxy-SU(3)	45
3.3	Υπολογισμοί Nilsson για το πρότυπο των φλοιών και την proxy-SU(3)	48
3.3.1	Υπολογισμός των στοιχείων πίνακα	49
3.3.2	Ενεργειακά διαγράμματα Nilsson	56
3.4	Υπολογισμοί και διαγράμματα Nilsson για τους φλοιούς 28-50, 50-82, 82-126, 126-184	59
4	Η περιγραφή των πυρηνικών σχημάτων στο πλαίσιο της proxy-SU(3)	67
4.1	Η περιγραφή των μεταβλητών παραμόρφωσης μέσω των μη αναγωγίσιμων αναπαραστάσεων (λ, μ)	68
4.2	Η υπεροχή της επιμηχυμένης παραμόρφωσης έναντι της πεπλατυσμένης	71
4.3	Το σπάσιμο της συμμετρίας σωματιδίου οπής	74
5	Η συνύπαρξη των πυρηνικών σχημάτων	77
5.1	Ενεργειακά χάσματα σε μεγάλες παραμορφώσεις	78
5.2	Σύγκριση των ενεργειακών χασμάτων	84
5.3	Οι περιοχές συνύπαρξης σχήματος	90
5.4	Η τετραπολική αλληλεπίδραση και μια εξήγηση του φαινομένου	96
5.5	Προβλέποντας τους υποψήφιους πυρήνες	99
6	Άρση εκφυλισμών σε SU(3) πρότυπα	101
6.1	Χαμιλτονιανές με SU(3) συμμετρία	101
6.2	Ο τελεστής $\hat{\Omega}$	102
6.3	Ο τελεστής $\hat{\Lambda}$	104
6.4	Ο τελεστής \hat{K}^2	105
6.5	Χαμιλτονιανές στα πλαίσια του μοντέλου proxy-SU(3)	106
6.6	Σύγκριση με πειραματικά δεδομένα	110
6.6.1	Διαφοροποίηση της θεμελιώδους από την γ_1 ζώνη	110
6.6.2	Η ταλάντωση της ενεργειακής διαφοράς ανάμεσα σε περιττές και άρτιες στροφορές	123

ΠαράρτημαΑ' Αναλυτικοί υπολογισμοί της ποσότητας $E(L_\gamma^+) - E(L_g^+)$	131
Α'.1 Η παρουσία της $O(6)$ υποάλγεβρας	131
Α'.2 Πρότυπο τριαξονικού περιστροφέα	132
Α'.3 Το ακριβώς διαχωρίσιμο πρότυπο Davidson	132
Α'.4 Το μοντέλο $Z(5)$ -D	133
Α'.5 Το μοντέλο Davidson με παραμόρφωση εξαρτώμενη από την μάζα	134
Α'.5.1 Αξονικά συμμετρικοί επιμηχυμένοι πυρήνες	135
Α'.5.2 γ -ασταθείς πυρήνες	136
Α'.5.3 Τριαξονικοί πυρήνες για $\gamma = \frac{\pi}{6}$	136
ΠαράρτημαΒ' Αναλυτικοί υπολογισμοί της πυρηνικής ροπής αδράνειας	139
Β'.1 Περιπτώσεις της $O(5)$ υποάλγεβρας	139
Β'.1.1 Η περίπτωση της $U(5)$ αλυσίδας	139
Β'.1.2 Η περίπτωση της $O(6)$ αλυσίδας	139
Β'.2 Πρότυπο τριαξονικού περιστοφέα	140
Β'.3 Το ακριβώς διαχωρίσιμο πρότυπο Davidson	140
Β'.4 Το πρότυπο $Z(5)$ -D	140

Κεφάλαιο 1

Μοντέλα πυρηνικής δομής

1.1 Εισαγωγή

Θεμελιώδους σημασίας στον κλάδο της πυρηνικής φυσικής είναι η κατανόηση της δομής του πυρήνα. Η μελέτη δηλαδή της γεωμετρίας του πυρήνα, της μάζας του, της κατανομής του φορτίου καθώς και άλλων ιδιοτήτων που έχουν δυναμική αλληλεπίδραση μεταξύ τους.

Ιστορικά ένα από τα πρώτα μοντέλα που προσπάθησαν να περιγράψουν τη δομή του πυρήνα ήταν το πρότυπο της υγρής σταγόνας, το οποίο θεωρεί τον πυρήνα σαν μία σταγόνα ασυμπίεστης πυρηνικής ύλης πολύ υψηλής πυκνότητας. Η περιγραφή του πυρήνα, ο οποίος αποτελείται από πρωτόνια και νετρόνια, τα οποία συγκρατούνται μεταξύ τους μέσω της πυρηνικής δύναμης παρομοιάζεται σαν μία σταγόνα ενός υγρού η οποία αποτελείται από μόρια. Η θεώρηση αυτή μπορεί να περιγράψει τις διεγερμένες καταστάσεις χαμηλής ενέργειας βαρέων πυρήνων οι οποίες προσομοιάζονται με δονήσεις ή περιστροφές μη σφαιρικών πυρήνων ακριβώς όπως οι δονήσεις ή περιστροφές μίας υγρής σταγόνας.

Στο παραπάνω μοντέλο οφείλεται ο ημιεμπειρικός τύπος **Bethe-Weizsäcker**. Αν Z είναι ο αριθμός των πρωτονίων του πυρήνα, N ο αριθμός των νετρονίων και A ο μαζικός αριθμός, τότε η μάζα του πυρήνα δίνεται από τον τύπο:

$$m = Zm_p + Nm_n - \frac{E_B}{c^2}, \quad (1.1)$$

όπου m_p , m_n είναι οι μάζες ηρεμίας του πρωτονίου και του νετρονίου αντίστοιχα και E_B είναι η ενέργεια σύνδεσης του πυρήνα η οποία έχει την μορφή:

$$E_B = a_V A - a_S A^{\frac{2}{3}} - a_C \frac{Z(Z-1)}{A^{\frac{1}{3}}} - a_A \frac{(A-2Z)^{\frac{1}{3}}}{A} + \delta(A, Z). \quad (1.2)$$

Ο πρώτος όρος στην παραπάνω εξίσωση αντιπροσωπεύει την επίδραση του όγκου του πυρήνα και έχει να κάνει με τον μαζικό αριθμό του πυρήνα. Ο δεύτερος όρος αφορά την επιφάνεια του πυρήνα και αποτελεί μια διόρθωση στον πρώτο όρο, υπό την έννοια ότι τα νουκλεόνια δεν μπορούν να συνεισφέρουν απλώς προσθετικά στην ενέργεια ανεξάρτητα από την θέση τους, αφού ένα νουκλεόνιο στην επιφάνεια του πυρήνα έχει λιγότερους γείτονες από ένα νουκλεόνιο στο κέντρο του. Οι δύο παραπάνω όροι οφείλονται στην ισχυρή πυρηνική δύναμη.

Ο τρίτος όρος είναι αποτέλεσμα της ηλεκτραπωστικής δύναμης **Coulomb** ανάμεσα στα πρωτόνια και είναι ανάλογος με τον αριθμό των ζευγαριών πρωτονίων που μπορούν να σχηματιστούν.

Ο τέταρτος όρος είναι ο αντισυμμετρικός όρος και οφείλεται στην απαγορευτική αρχή του **Pauli** και όχι σε θεμελιώδεις δυνάμεις όπως οι προηγούμενοι. Η προσθήκη του οφείλεται στο γεγονός ότι όσο περισσότερα νουκλεόνια προστίθενται σε ένα πυρήνα, δεδομένου ότι οι πιθανές καταστάσεις που μπορούν να καταλάβουν λόγω της φερμιονικής φύσης τους είναι πεπερασμένες, τόσο αυξάνεται η ενέργεια του πυρήνα και έτσι μειώνεται η ενέργεια σύνδεσης.

Ο τελευταίος όρος προέρχεται από τα πειραματικά δεδομένα και δεν έχει κλασικό ανάλογο. Έχει θετική συνεισφορά όταν οι Z και N είναι άρτιοι αριθμοί, μηδενική συνεισφορά όταν ο A είναι περιττός αριθμός και αρνητική συνεισφορά όταν ο A είναι άρτιος αριθμός αλλά οι Z και N περιττοί.

Το παραπάνω πυρηνικό μοντέλο αποτελεί ένα συλλογικό μοντέλο. Προσπαθεί δηλαδή να περιγράψει τη δομή και τις ιδιότητες του πυρήνα θεωρώντας το σύνολο των νουκλεονίων σαν μία ολότητα. Δεν είναι απαραίτητος δηλαδή ο χειρισμός του κάθε νουκλεονίου μικροσκοπικά, αρκούν μόνο οι συνολικοί αριθμοί και ο προσδιορισμός των σταθερών από θεωρητικούς υπολογισμούς ή πειραματικά δεδομένα.

Το πρότυπο της υγρής σταγόνας αν και περιγράφει ικανοποιητικά αρκετούς πυρήνες αποτυγχάνει όταν ο αριθμός των νουκλεονίων αυξάνεται. Αυτό οφείλεται εν μέρει στη συλλογική φύση του μοντέλου, που παρά την απλότητα και την ευχέρεια που προσφέρει, χάνει σε ακρίβεια. Η αλληλεπίδραση των νουκλεονίων στο παρόν δεν λαμβάνεται υπόψιν, λαμβάνεται όμως υπόψιν στο πρότυπο των φλοιών το οποίο αποτελεί ένα μικροσκοπικό μοντέλο.

Σε γενικές γραμμές θα μπορούσε να ειπωθεί ότι τα μοντέλα που περιγράφουν τη δομή του πυρήνα διακρίνονται σε μικροσκοπικά και σε μακροσκοπικά ή αλλιώς συλλογικά.

Τα μικροσκοπικά μοντέλα περιγράφουν τις ιδιότητες του πυρήνα βασιζόμενα στη μελέτη κάθε νουκλεονίου ξεχωριστά, καθώς και των αλληλεπιδράσεών του με τα υπόλοιπα νουκλεόνια. Βέβαια επειδή η ακριβής φύση της πυρηνικής δύναμης δεν είναι γνωστή, είναι αυτονόητο ότι γίνονται παραδοχές και προσεγγίσεις. Τα πλέον σημαντικά μικροσκοπικά μοντέλα (τα οποία θα περιγραφούν συνοπτικά στις επόμενες παραγράφους) είναι το πρότυπο των φλοιών και το μοντέλο του Nilsson.

Τα συλλογικά μοντέλα περιγράφουν τις ιδιότητες του πυρήνα αντιμετωπίζοντας το σύνολο το νουκλεονίων σαν μία ολότητα. Περιγράφονται δηλαδή οι ιδιότητες του πυρήνα μέσω των στατιστικών ιδιοτήτων που οφείλονται στη συλλογική συνεισφορά των νουκλεονίων και όχι στην ξεχωριστή αντιμετώπιση του κάθε νουκλεονίου. Σημαντικό συλλογικό μοντέλο το οποίο βασίζεται στο πρότυπο της υγρής σταγόνας είναι το γεωμετρικό συλλογικό μοντέλο (το οποίο επίσης θα αναφερθεί σε επόμενη παράγραφο). Το κέρδος χρήσης των μακροσκοπικών μοντέλων είναι η απλούστευση των υπολογισμών. Ο υπολογισμός πυρηνικών μεγεθών με τη χρήση του προτύπου των φλοιών για παράδειγμα, μετά από ένα αριθμό νουκλεονίων και πάνω γίνεται απαγορευτικός με τις σημερινές υπολογιστικές μεθόδους και ικανότητες.

1.2 Συλλογικά μοντέλα-Το γεωμετρικό συλλογικό μοντέλο

Μετεξέλιξη του προτύπου της υγρής σταγόνας αποτελεί το γεωμετρικό συλλογικό μοντέλο, το οποίο αναπτύχθηκε από τους Bohr, Mottelson και Rainwater. Για αυτή τους την εργασία τιμήθηκαν με το βραβείο Νόμπελ το 1975. Η δημιουργία του μοντέλου βασίζεται στην ανακάλυψη της σύνδεσης της κίνησης των μεμονωμένων νουκλεονίων με τη συλλογική συμπεριφορά του πυρήνα. Ένας από τους κύριους λόγους που οδήγησαν στην διερεύνηση της συλλογικότητας ήταν οι αποκλίσεις ανάμεσα στα πειραματικά δεδομένα για τις μαγνητικές ροπές των πυρήνων και στις προβλέψεις που υπαγόρευε η μονοσωματιδιακή θεώρηση. Οι αποκλίσεις που παρατηρούνταν αποδόθηκαν στην συλλογική στροφορμή, η οποία οφείλεται σε συνεισφορά πολλών νουκλεονίων.

Στη θεώρηση του γεωμετρικού μοντέλου ο πυρήνας θεωρείται σαν μία υγρή σταγόνα, στην οποία οι διαστάσεις μεμονωμένων νουκλεονίων είναι αμελητέες συγκριτικά με τις διαστάσεις του πυρήνα. Έτσι η κινούμενη πυρηνική επιφάνεια μπορεί να αναλυθεί σε σφαιρικές αρμονικές με χρονοεξαρτώμενες

παραμέτρους που καθορίζουν το σχήμα:

$$R(\theta, \phi, t) = R_0 \left(1 + \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \alpha_{\lambda, \mu}^*(t) Y_{\lambda, \mu}(\theta, \phi) \right), \quad (1.3)$$

όπου με $R(\theta, \phi, t)$ συμβολίζεται η ακτίνα του πυρήνα κατά τη διεύθυνση (θ, ϕ) τη χρονική στιγμή t , R_0 είναι η ακτίνα στην σφαιρική περίπτωση και οι συντελεστές των σφαιρικών αρμονικών $\alpha_{\lambda, \mu}$ είναι οι συλλογικές συντεταγμένες οι οποίες εκφράζουν τις δονήσεις της πυρηνικής επιφάνειας.

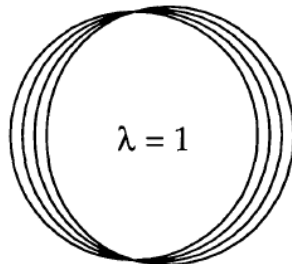
Με την χρήση του γεωμετρικού συλλογικού μοντέλου μπορούν να μελετηθούν οι συλλογικές ιδιότητες του πυρήνα, όπως τα δονητικά και περιστροφικά φάσματα, των οποίων η μελέτη με μικροσκοπικό τρόπο θα ήταν ιδιαίτερα δύσκολη.

1.2.1 Πολυπολικές παραμορφώσεις

Οι διάφορες τιμές του λ στο παραπάνω ανάπτυγμα περιγράφουν τους διαφορετικούς τρόπους της πολυπολικής παραμόρφωσης του πυρήνα μέσω της σχέσης 2^λ .

Για $\lambda = 0$ επικρατεί η μονοπολική παραμόρφωση. Στη συγκεκριμένη περίπτωση επιζεί μόνο η αρμονική Y_{00} η οποία αντιστοιχεί στην ακτίνα του σφαιρικού πυρήνα. Επειδή η πυρηνική ύλη είναι σχεδόν ασυμπίεστη χρειάζονται υψηλά ποσά ενέργειας, τα οποία δεν διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στις πυρηνικές καταστάσεις χαμηλής ενέργειας.

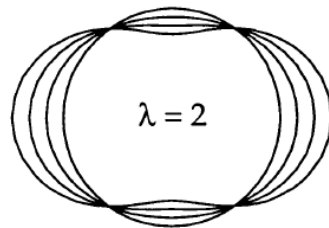
Για $\lambda = 1$ επικρατεί το διπολικό ανάπτυγμα, το οποίο δεν αποτελεί παραμόρφωση, αλλά αλλαγή του κέντρου μάζας.



Σχήμα 1.1: Διπολική παραμόρφωση

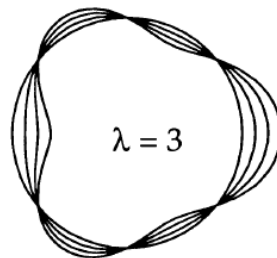
Για $\lambda = 2$ επικρατεί η τετραπολική παραμόρφωση, η οποία αποτελεί τον πιο σημαντικό τρόπο παραμόρφωσης του πυρήνα. Ενδιαφέρει πάρα πολύ διότι οι τετραπολικές παραμορφώσεις μπορούν να

παρατηρηθούν πειραματικά και αποτελούν πηγή πληροφορίας για την πυρηνική δομή. Περισσότερα θα αναφερθούν σε επόμενη παράγραφο.

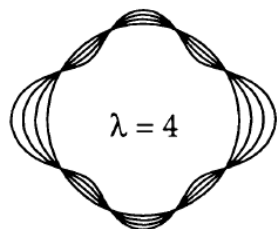


Σχήμα 1.2: Τετραπολική παραμόρφωση

Για $\lambda = 3$ επικρατεί η οκταπολική παραμόρφωση, η οποία μοιάζει με αχλάδι, ενώ για $\lambda = 4$ εμφανίζεται η δεκαεξαπολική παραμόρφωση, η οποία είναι η υψηλότερου βαθμού πολυπολική παραμόρφωση που ενδιαφέρει. Για υψηλότερα λ το ανάπτυγμα δεν έχει νόημα.



Σχήμα 1.3: Οκταπολική παραμόρφωση



Σχήμα 1.4: Δεκαεξαπολική παραμόρφωση

1.2.2 Η τετραπολική παραμόρφωση

Η τετραπολική παραμόρφωση, η οποία είναι παρατηρήσιμο μέγεθος φασματοσκοπικά, δείχνει την απόκλιση της κατανομής του φορτίου του πυρήνα από τη σφαιρική και έτσι αποτελεί σημαντικό εργαλείο για την περιγραφή της παραμόρφωσης του πυρήνα.

Στο γεωμετρικό μοντέλο η τετραπολική παραμόρφωση προκύπτει για $\lambda = 2$ και η πυρηνική επιφάνεια περιγράφεται από την εξίσωση:

$$R(\theta, \phi, t) = R_0 \left(1 + \sum_{\mu=-2}^2 \alpha_{2\mu}^*(t) Y_{2\mu}(\theta, \phi) \right). \quad (1.4)$$

Για την μελέτη του σχήματος του πυρήνα γίνεται η εισαγωγή των καρτεσιανών μεταβλητών:

$$\xi = \sin\theta \cos\phi, \quad \eta = \sin\theta \sin\phi, \quad \zeta = \cos\theta, \quad (1.5)$$

για τις οποίες ισχύει:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1. \quad (1.6)$$

Οι σφαιρικές αρμονικές μετά την αντικατάσταση των μεταβλητών γράφονται:

$$Y_{20}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3\cos^2\theta - 1) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (2\zeta^2 - \xi^2 - \eta^2), \quad (1.7)$$

$$Y_{2\pm 1}(\theta, \phi) = \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} (\sin\theta \cos\phi e^{\pm i\phi}) = \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} (\xi\zeta \pm i\eta\zeta), \quad (1.8)$$

$$Y_{2\pm 2}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2\theta e^{\pm 2i\phi} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} (\xi^2 - \eta^2 \pm 2i\xi\eta). \quad (1.9)$$

Εισάγοντας τις παραπάνω σχέσεις στην εξίσωση της πυρηνικής επιφάνειας, η τελευταία γράφεται:

$$R(\xi, \eta, \zeta) = R_0 (1 + \alpha_{\xi\xi} \xi^2 + \alpha_{\eta\eta} \eta^2 + \alpha_{\zeta\zeta} + 2\alpha_{\xi\eta} \xi\eta + 2\alpha_{\xi\zeta} \xi\zeta + 2\alpha_{\eta\zeta} \eta\zeta), \quad (1.10)$$

όπου πλέον οι σφαιρικοί συντελεστές παραμόρφωσης συνδέονται με τους καρτεσιανούς μέσω των σχέσεων:

$$\alpha_{2\pm 2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{8\pi}{15}} (\alpha_{\xi\xi} - \alpha_{\eta\eta} \pm 2i\alpha_{\xi\eta}), \quad (1.11)$$

$$\alpha_{2\pm 1} = \sqrt{\frac{8\pi}{15}} (\alpha_{\xi\zeta} \pm i\alpha_{\eta\zeta}), \quad (1.12)$$

$$\alpha_{20} = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{\frac{8\pi}{15}} (2\alpha_{\zeta\zeta} - \alpha_{\xi\xi} - \alpha_{\eta\eta}). \quad (1.13)$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις φαίνεται ότι ο συντελεστής α_{20} εκφράζει την επιμήκυνση του πυρήνα κατά τον άξονα $z'z$ συγκριτικά με τους άλλους δύο άξονες. Το πραγματικό μέρος των συντελεστών $\alpha_{2\pm 2}$ εκφράζει το λόγο του άξονα $x'x$ προς τον άξονα $y'y$, ενώ οι συντελεστές $\alpha_{2\pm 1}$ εκφράζουν τη στρεβλή παραμόρφωση του άξονα $z'z$.

Οι παραπάνω συντελεστές αφορούν το οποιοδήποτε σύστημα αναφοράς και έτσι οι παραμορφώσεις των αξόνων δεν περιγράφονται αυστηρά από μόνο μία έκφραση. Για αυτό το λόγο ορίζουμε το κύριο σύστημα αναφοράς (το οποίο είναι το σύστημα αναφοράς του πυρήνα) στο οποίο οι μεταβλητές είναι τονούμενες. Η έκφραση για την πυρηνική επιφάνεια γίνεται:

$$R(\xi', \eta', \zeta') = R_0(1 + \alpha'_{\xi\xi} \xi'^2 + \alpha'_{\eta\eta} \eta'^2 + \alpha'_{\zeta\zeta} \zeta'^2). \quad (1.14)$$

Πλέον οι συντελεστές που περιγράφουν την παραμόρφωση στις μη αξονικές διευθύνσεις είναι μηδενικές, δηλαδή $\alpha'_{\xi\eta} = \alpha'_{\xi\zeta} = \alpha'_{\eta\zeta} = 0$. Έτσι:

$$\alpha'_{2\pm 1} = 0, \quad (1.15)$$

$$\alpha'_{2\pm 2} = \sqrt{\frac{2\pi}{15}} (\alpha'_{\xi\xi} - \alpha'_{\eta\eta}) = \alpha_2, \quad (1.16)$$

$$\alpha'_{20} = \sqrt{\frac{8\pi}{15}} \frac{1}{\sqrt{6}} (2\alpha'_{\zeta\zeta} - \alpha'_{\xi\xi} - \alpha'_{\eta\eta}) = \alpha_0. \quad (1.17)$$

Με τη χρήση των καινούργιων μεταβλητών στο κύριο σύστημα αναφοράς, υπάρχουν πλέον πέντε ανεξάρτητες παράμετροι. Το α_0 περιγράφει την επιμήκυνση του άξονα $z'z$ συγκριτικά με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. Το α_2 περιγράφει τη διαφορά μήκους ανάμεσα στους άξονες $x'x$ και $y'y$. Οι υπόλοιπες τρεις παράμετροι είναι οι γωνίες Euler $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, οι οποίες περιγράφουν τον σχετικό προσανατολισμό του κυρίου συστήματος αναφοράς σε σχέση με το σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου.

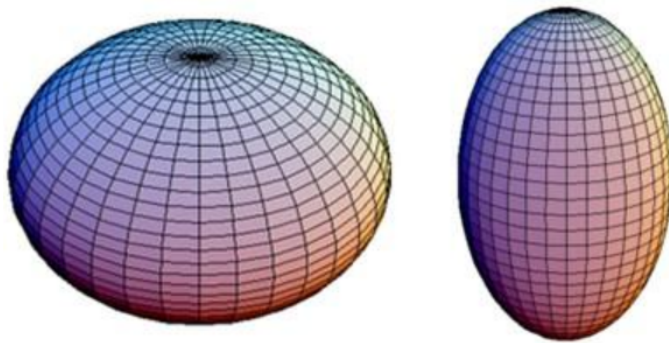
Επειδή η παραμόρφωση του πυρήνα εξαρτάται από τις παραμέτρους α_0, α_2 , ο Aage Bohr εισήγαγε δύο παραμέτρους για την περιγραφή της παραμόρφωσης του πυρήνα, τις β, γ οι οποίες συνδέονται με τις α_0, α_2 μέσω των σχέσεων:

$$\alpha_0 = \beta \cos \gamma, \quad (1.18)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \beta \sin \gamma. \quad (1.19)$$

Η παράμετρος β περιγράφει την απόκλιση από την σφαιρικότητα. Για $\beta = 0$ ο πυρήνας θεωρείται απόλυτα σφαιρικός. Πράγματι αν $\beta = 0$ τότε από τις εξισώσεις (1.18), (1.19) συνεπάγεται ότι $\alpha_0 = \alpha_2$. Από την (1.16) έχουμε $\alpha'_{\xi,\xi} = \alpha'_{\eta,\eta}$ και συνεπώς από την (1.17) $\alpha'_{z,z} = \alpha'_{\xi\xi} = \alpha'_{\eta\eta}$. Δηλαδή όλοι οι άξονες που περιγράφουν την επιμήκυνση είναι ίσοι.

Η παράμετρος γ λαμβάνει τιμές στο διάστημα $[0^\circ, 60^\circ]$. Για $\gamma = 0$ ο πυρήνας είναι επιμηκυμένος κατά τον $z'z$ και το μήκος στους άξονες $x'y$ είναι ίσο. Μέχρι την τιμή $\gamma = 60^\circ$ το μήκος κατά τον άξονα $x'x$ αυξάνεται μέχρι να γίνει ίσο με το μήκος κατά τον άξονα $z'z$. Πλέον το σχήμα του πυρήνα είναι πεπλατυσμένο αφού έχει δύο ίσους μεγάλους άξονες και έναν μικρό. Στις ενδιάμεσες τιμές το σχήμα του πυρήνα παρουσιάζει τριαξονικότητα. Η μέγιστη τιμή της τριαξονικότητας εμφανίζεται για $\gamma = 30^\circ$. Σε εκείνο το σημείο ο πυρήνας από επιμηκυμένο μεταμορφώνεται σε πεπλατυσμένο. Οι υπόλοιπες τιμές που μπορεί να λάβει η γωνία γ επαναλαμβάνονται ανά 60° όπου πλέον δεν υπάρχουν διαφοροποιήσεις στο σχήμα του πυρήνα, απλά αλλάζουν οι άξονες στους οποίους οφείλεται η παραμόρφωση.



Σχήμα 1.5: Πεπλατυσμένο (αριστερά) και επιμηκυμένο (δεξιά) σφαιροειδές

1.3 Μικροσκοπικά μοντέλα

1.3.1 Το πρότυπο των φλοιών

Η ύπαρξη των μαγικών αριθμών στην πυρηνική φυσική έχει διαπιστωθεί από την δεκαετία του 1940. Οι μαγικοί αριθμοί που είναι κοινώς παραδεκτοί μέχρι σήμερα για τα πρωτόνια και τα νετρόνια είναι αντίστοιχα:

$$Z = 2, 8, 20, 28, 50, 82,$$

$$N = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126.$$

Οι πυρήνες, των οποίων ο αριθμός των πρωτονίων ή των νετρονίων (ή και των δύο μαζί) είναι ένας από τους παραπάνω αριθμούς, παρουσιάζουν ενέργεια σύνδεσης ανά νουκλεόνιο σημαντικά μεγαλύτερη από αυτή που προβλέπεται από το πρότυπο της υγρής σταγόνας.

Η πειραματική παρατήρηση των μαγικών αριθμών οδήγησε τον J. Hans D. Jensen και την Maria Goeppert Mayer να αναπτύξουν το πρότυπο των φλοιών.

Οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις του προτύπου των φλοιών προκύπτουν από την επίλυση της τριδιάστατης εξίσωσης Schrödinger για μονοσωματιδιακές καταστάσεις:

$$\left(-\frac{\hbar}{2m} \nabla^2 + V(r) \right) \psi_i = E \psi_i,$$

όπου $V(r)$ είναι το μέσο δυναμικό στο οποίο βρίσκεται το κάθε νουκλεόνιο. Η ακριβής φύση του δυναμικού που οφείλεται στην ισχυρή πυρηνική δύναμη δεν είναι γνωστό. Έτσι η επιλογή του γίνεται προσεγγιστικά. Οι συνηθέστερες τρεις επιλογές για το δυναμικό είναι οι ακόλουθες:

Δυναμικό **Woods-Saxon**

Σε αυτήν την περίπτωση το δυναμικό στο οποίο οφείλεται η δύναμη την οποία δέχεται κάθε νουκλεόνιο δίνεται από την σχέση:

$$V(r) = -\frac{V_0}{1 + \exp[(r-R)/A]}. \quad (1.20)$$

Το παραπάνω δυναμικό έχει αύξουσα ελκτική συμπεριφορά με την ακτίνα, προκαλεί έντονη έλξη στα νουκλεόνια που βρίσκονται στην επιφάνεια του πυρήνα και τείνει στο μηδέν καθώς $r \rightarrow \infty$. Το κύριο μειονέκτημά του είναι ότι δεν υπάρχει αναλυτική λύση και απαιτούνται αριθμητικές μέθοδοι για την επίλυσή του.

Δυναμικό Αρμονικού Ταλαντωτή

Σε αντιστοιχία με τον κλασικό αρμονικό ταλαντωτή το δυναμικό σε αυτήν την περίπτωση είναι:

$$V(r) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2. \quad (1.21)$$

Το δυναμικό του αρμονικού ταλαντωτή είναι εύχρηστο, διότι επιλύεται αναλυτικά, όμως αποτυγχάνει να περιγράψει ικανοποιητικά τις κυματοσυναρτήσεις με την αύξηση του r διότι απειρίζεται.

Δυναμικό πηγαδιού απείρου βάθους

Σε αυτήν την περίπτωση το κάθε νουκλεόνιο κινείται σε ένα απείρου βάθους πηγάδι και το δυναμικό είναι:

$$V(r) = \begin{cases} V_0 & r \leq R \\ \infty & r > R \end{cases}. \quad (1.22)$$

Το παραπάνω παρουσιάζει μέτρια υπολογιστική δυσκολία και επιτυγχάνει το πεπερασμένο δυναμικό εντός των τειχών του πηγαδιού, αποτυγχάνει όμως λόγω απειρισμού εκτός των τειχών.

Η επίλυση της εξίσωσης **Schrödinger** για τα παραπάνω δυναμικά δεν δίνει όμως όλους τους μαγικούς αριθμούς που παρατηρούνται πειραματικά. Η συμφωνία με το πείραμα επέρχεται με την εισαγωγή του όρου αλληλεπίδρασης **spin-τροχιάς** $l \cdot s$. Πρέπει να προστεθεί δηλαδή στο μονοσωματιδιακό μέσο δυναμικό της Χαμιλτονιανής ένας όρος της μορφής $C l \cdot s$, όπου ο συντελεστής C έχει ακτινική εξάρτηση και στην σφαιρική περίπτωση ο τελεστής είναι διαγώνιος με τις ιδιοτιμές του να δίνονται από τον παρακάτω τύπο:

$$l \cdot s = \frac{1}{2}[(l+s)^2 - l^2 - s^2] = \frac{1}{2}\hbar^2[j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)]. \quad (1.23)$$

Είναι φανερό ότι καταστάσεις με την ίδια τροχιακή στροφορμή l για τις οποίες ισχύει $j = l \pm \frac{1}{2}$ παρουσιάζουν διαφορά στην ενέργεια:

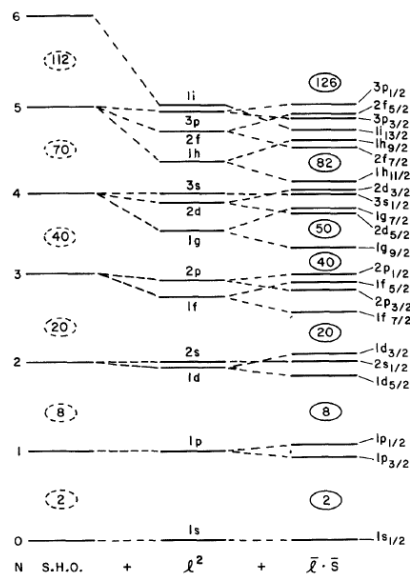
$$E_{j=l+\frac{1}{2}} - E_{j=l-\frac{1}{2}} = C\hbar^2(l + \frac{1}{2})$$

. Πειραματικά οι καταστάσεις με $j = l + \frac{1}{2}$ βρίσκονται χαμηλότερα στην ενέργεια και έτσι ο συντελεστής C είναι αρνητικός.

Λόγω της επιλυσιμότητάς του συνήθως επιλέγεται για μέσο δυναμικό, το δυναμικό του αρμονικού ταλαντωτή, για τον οποίο οι ιδιοτιμές της ενέργειας είναι $E = \frac{N}{2}\hbar\omega$, όπου N είναι ο κύριος κβαντικός αριθμός που δίνεται από την σχέση $N = 2n + l$. Σε αυτές τις ιδιοτιμές προστίθενται οι ιδιοτιμές που

προκύπτουν από την αλληλεπίδραση spin-τροχιάς και η διαφορά στην ενέργεια οδηγεί στο κλείσιμο των φλοιών, όπως έχουν παρατηρηθεί πειραματικά.

Για παράδειγμα το τροχιακό $1g$ με $n = 1$ και $l = 4$, το οποίο ανήκει στον $N = 4$ φλοιό, "ανοίγει" σε δύο τροχιακά, το ένα με $j = 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$ το οποίο συμβολίζεται με $1g_{\frac{9}{2}}$ και βρίσκεται χαμηλά στην ενέργεια και το άλλο, το οποίο έχει $j = 4 - \frac{1}{2}$ και συμβολίζεται με $1g_{\frac{7}{2}}$, το οποίο βρίσκεται ψηλότερα στην ενέργεια. Όπως φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα το τροχιακό $1g_{\frac{9}{2}}$ ομαδοποιείται ενεργειακά με τον χαμηλότερο $N = 3$ φλοιό και έτσι "κλείνει" ο μαγικός αριθμός 50. Με παρόμοιο τρόπο βρίσκονται και οι υπόλοιποι μαγικοί αριθμοί.



Σχήμα 1.6: Ενεργειακές καταστάσεις του προτύπου των φλοιών

1.3.2 Το πρότυπο του **Nilsson**

Το πρότυπο των φλοιών λόγω της σφαιρικότητας του δυναμικού που περιέχει δεν είναι κατάλληλο για να περιγράψει παραμορφωμένους πυρήνες που αποκλίνουν από το σφαιρικό σχήμα. Για την περιγραφή των παραμορφωμένων πυρήνων ο **Sven Gösta Nilsson** εισήγαγε το πρότυπο των παραμορφωμένων φλοιών, το οποίο ονομάζεται και πρότυπο του **Nilsson** [10]. Η βασική ιδέα είναι η θεώρηση διαφορετικών σταθερών για κάθε χωρική συντεταγμένη του αρμονικού ταλαντωτή:

$$V(r) = \frac{m}{2} (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2). \quad (1.24)$$

Αν υποθεθεί κυλινδρική συμμετρία γύρω από τον άξονα z' , δηλαδή οι σταθερές των χωρικών συντεταγμένων x και y τότε η Χαμιλτονιανή του μοντέλου γράφεται στην μορφή:

$$H = H_{osc} + u_{ls} \hbar \omega_0 (l \cdot s) + u_{ll} \hbar \omega_0 (l_N^2 - \langle l^2 \rangle), \quad (1.25)$$

όπου

$$H_{osc} = \frac{p^2}{2M} + \frac{1}{2} M (\omega_z^2 z^2 + \omega_{\perp} (x^2 + y^2)). \quad (1.26)$$

Με l συμβολίζεται η τροχιακή στροφορμή του κάθε νουκλεονίου, με s το σπιν, με p η ορμή και M είναι η μάζα του υπό θεώρηση πυρήνα. Οι συχνότητες ω_z και ω_{\perp} σχετίζονται με την παράμετρο παραμόρφωσης ε με τις παρακάτω σχέσεις:

$$\omega_z = \omega_0 \left(1 - \frac{2}{3} \varepsilon \right), \quad \omega_{\perp} = \omega_0 \left(1 + \frac{1}{3} \varepsilon \right), \quad (1.27)$$

δηλαδή ισχύει:

$$\varepsilon = \frac{\omega_{\perp} - \omega_z}{\omega_0}. \quad (1.28)$$

Για $\varepsilon > 0$ ο πυρήνας είναι επιμηκυμένος, ενώ για $\varepsilon < 0$ είναι πεπλατυσμένος. Οι τιμές u_{ls} και u_{ll} προσδιορίζονται πειραματικά για κάθε πυρήνα και οι τιμές τους μεταβάλλονται ανάλογα με τον φλοιό και τον τύπο των νουκλεονίων.

Πίνακας 1.1: Οι παράμετροι u_{ls} και u_{ll} της Χαμιλτονιανής του Nilsson . Παράλληλα φαίνονται και οι τιμές των παραμέτρων κ και μ που χρησιμοποιούνται σε άλλες ισοδύναμες εκφράσεις της Χαμιλτονιανής

Περιοχή	u_{ls}	u_{ll}	κ	μ
$N, Z < 50$	-0.16	0	0.08	0
$50 < Z < 82$	-0.127	-0.0382	0.0635	0.602
$82 < N < 126$	-0.127	-0.0268	0.0635	0.422
$82 < Z < 126$	-0.115	-0.0375	0.0575	0.652
$126 < N$	-0.127	-0.0206	0.0635	0.324

Για τον προσδιορισμό των ιδιοτιμών της Χαμιλτονιανής του Nilsson χρησιμοποιούμε τις ιδιοτιμές των τελεστών $\langle l^2 \rangle_N$ και H_{osc} :

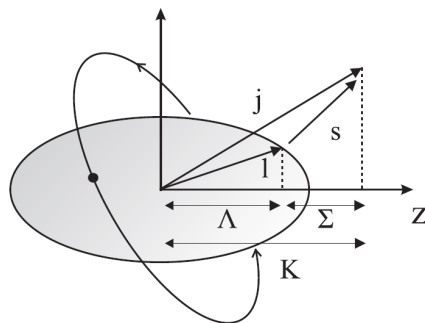
$$\langle l^2 \rangle_N = \frac{1}{2}N(N+3), \quad (1.29)$$

όπου N είναι ο κύριος κβαντικός αριθμός του φλοιού στον οποίο βρισκόμαστε και

$$E_{osc} = \hbar\omega_0 \left(N + \frac{3}{2} - \frac{1}{3}\epsilon(3n_z - N) \right). \quad (1.30)$$

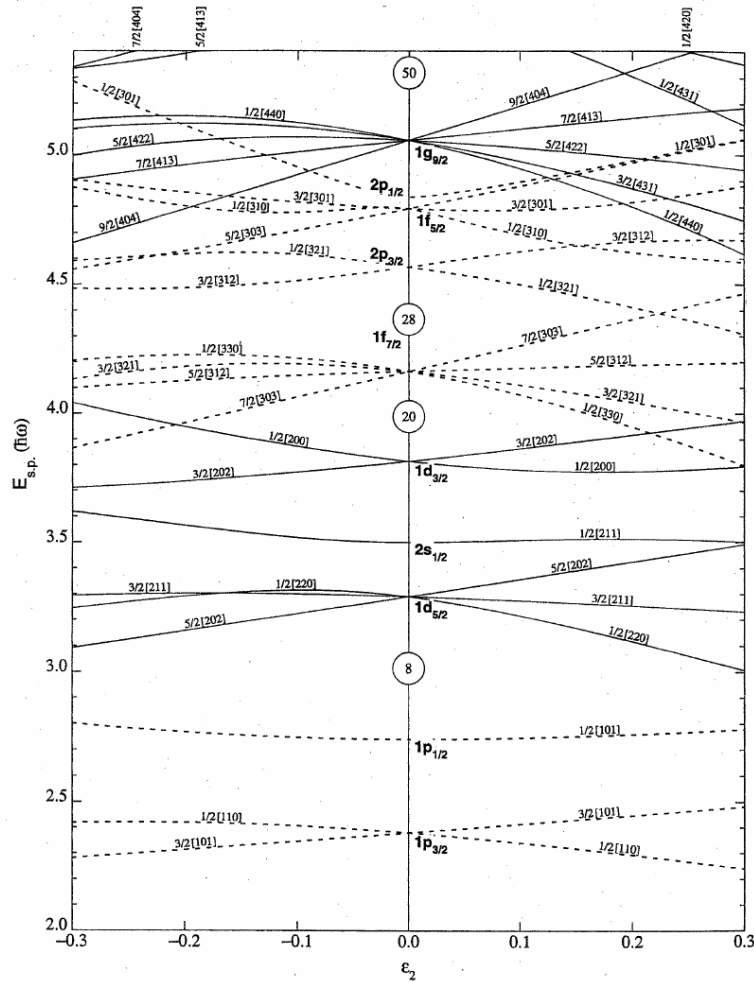
Οι τελεστές $l \cdot s$ και l^2 δεν είναι διαγώνιοι και ο υπολογισμός των ιδιοτιμών γίνεται αριθμητικά.

Να σημειωθεί ότι οι ιδιοσυναρτήσεις της (1.25) έχουν την μορφή $|Nl\Lambda\Sigma\rangle$, όπου N ο κύριος κβαντικός αριθμός, l η στροφορμή και Λ, Σ οι προβολές της τροχιακής στροφορμής και του σπιν αντίστοιχα. Με την αύξηση της παραμόρφωσης όμως, η συνεισφορά των όρων $l \cdot s$ και $l_N^2 - \langle l^2 \rangle$ μειώνεται και έτσι χρησιμοποιείται η λεγόμενη ασυμπτωτική βάση $K|Nn_z\Lambda\rangle$. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η τροχιά ενός νουκλεονίου σε έναν παραμορφωμένο πυρήνα μαζί με την σημασία των κβαντικών αριθμών της έκφρασης $K|Nn_z\Lambda\rangle$.



Σχήμα 1.7: Τροχιά σωματιδίου σε παραμορφωμένο πυρήνα κατά Nilsson

Με την αύξηση της παραμόρφωσης αλλάζει η σειρά πλήρωσης των τροχιακών. Για παράδειγμα για παραμόρφωση $\epsilon \leq 0,1$ συμπληρώνεται πρώτα το τροχιακό $3/2[312]$ και μετά το $3/2[310]$. Για παραμόρφωση $\epsilon \geq 0,15$ όμως η σειρά πλήρωσης αλλάζει και εμφανίζεται πρώτα το $3/2[310]$ και μετά το $3/2[312]$. Στο παρακάτω διάγραμμα παρουσιάζονται τα ενεργειακά διαγράμματα Nilsson για τα τροχιακά έως τον αριθμό των 50 νουκλεονίων.



Σχήμα 1.8: Ενεργειακά διαγράμματα Nilsson από 0 έως 50 νουκλεόνια

Κεφάλαιο 2

Η χρήση των συμμετριών στην πυρηνική φυσική

Σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι μία περιληπτική εισαγωγή στη θεωρία ομάδων και πιο συγκεκριμένα στη θεωρία των ομάδων και αλγεβρών Lie. Η χρήση των αλγεβρικών μοντέλων στην πυρηνική φυσική βασίζεται στην παραπάνω θεωρία. Μετά την παρουσίαση των βασικών εννοιών της θεωρίας γίνεται και μία συνοπτική παρουσίαση στα μέχρι τώρα πιο σημαντικά αλγεβρικά πυρηνικά μοντέλα.

2.1 Θεωρία Ομάδων

Η έννοια της ομάδας κατέχει σημαντική θέση στη σύγχρονη άλγεβρα και γενικά στη μαθηματική επιστήμη. Οι εφαρμογές της στη φυσική εκτείνονται σε αρκετούς τομείς, όπως στην θεωρία πεδίων, στην πυρηνική φυσική και στην φυσική των στοιχειωδών σωματιδίων, στην γενική σχετικότητα κ.τ.λ. Επακολουθεί ο ορισμός της ομάδας.

Ορισμός 1. Ομάδα αποτελεί ένα σύνολο G εφοδιασμένο με μία εσωτερική πράξη $*$ έτσι ώστε:

i) Για κάθε $x, y, z \in G$ ισχύει $x * (y * z) = (x * y) * z$. (Προσεταιριστική ιδιότητα).

ii) Υπάρχει ένα στοιχείο $e \in G$, έτσι ώστε για κάθε $x \in G$ να ισχύει $x * e = e * x = x$.

iii) Για κάθε $x \in G$ υπάρχει $x^{-1} \in G$, έτσι ώστε $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$.

Παραδείγματα ομάδων αποτελούν το σύνολο των θετικών αριθμών με πράξη τον πολλαπλασιασμό, το σύνολο των ακεραίων με πράξη την πρόσθεση κ.τ.λ. Ομάδα αποτελεί και το σύνολο των τετραγωνικών πινάκων $N \times N$ με πράξη τον πολλαπλασιασμό πινάκων. Η συγκεκριμένη ομάδα συμβολίζεται με $GL(N, \mathbb{R})$, αν τα στοιχεία των πινάκων είναι πραγματικοί αριθμοί, ή με $GL(N, \mathbb{C})$, αν τα στοιχεία των πινάκων είναι μιγαδικοί αριθμοί.

2.1.1 Ομάδες **Lie**

Μία σημαντική κατηγορία ομάδων, οι οποίες ενδιαφέρουν στο παρόν, είναι οι ομάδες **Lie**. Παρότι οι ομάδες **Lie** δεν είναι υποχρεωτικά ομάδες πινάκων, βολεύει να τις αντιμετωπίσουμε ως τέτοιες, διότι έχει αποδειχθεί ότι κάθε ομάδα **Lie** είναι ισομορφική με μία ομάδα πινάκων.

Μία ομάδα της οποίας κάθε στοιχείο εξαρτάται συνεχώς από μία ή περισσότερες μεταβλητές και οι πράξεις ανάμεσα στα στοιχεία είναι διαφορίσιμες απεικονίσεις αποτελεί μία ομάδα **Lie**. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η ομάδα των στροφών στο επίπεδο, η οποία συμβολίζεται με **SO(2)**. Η συνεχής ανεξάρτητη μεταβλητή στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι η γωνία θ , η οποία είναι και η γωνία στροφής του στοιχείου του επιπέδου στο οποίο δρα το στοιχείο της ομάδας. Κάθε στοιχείο της ομάδας **SO(2)** συμβολίζεται με:

$$M(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

Ακολουθεί ο ορισμός της ομάδας **Lie**. Να σημειωθεί ότι διαφορετικοί συγγραφείς δίνουν ελαφρώς διαφορετικούς ορισμούς, ανάλογα με τους σκοπούς του συγγράμματος.

Ορισμός 2. Ομάδα **Lie** αποτελεί μία ομάδα για την οποία ισχύει:

i) Η πράξη της ομάδας $m(x, y) = x * y$ και

ii) Η αντίστροφη απεικόνιση $i(x) = i^{-1}$

είναι διαφορίσιμες απεικονίσεις.

Ιδιαίτερη σημασία στη σύγχρονη φυσική και στο παρόν έχουν οι ομάδες των ορθομοναδιαίων πινάκων διάστασης N , οι οποίες συμβολίζονται με **U(N)**. Δηλαδή $\Upsilon(N) = \{A \in GL(N, \mathbb{C}) : A^*A = I\}$. Για κάθε ομάδα **U(N)** ορίζεται μία υποομάδα της οποίας οι πίνακες έχουν ορίζουσα ίση με την μονάδα. Η ομάδα αυτή ονομάζεται ειδική ορθομοναδιαία ομάδα και συμβολίζεται με **SU(N)**, δηλαδή $\{SU(N) = \{A \in \Upsilon(N) : \det(A) = 1\}$.

Κάθε στοιχείο g μίας ομάδας **Lie** μπορεί να γραφεί στην μορφή $g = g(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Οι αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ είναι οι παράμετροι της ομάδας. Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε την ομάδα **SU(3)**. Αν g είναι ένας πίνακας στοιχείο της ομάδας, οι απαιτήσεις $g^*g = I$ και $\det(g) = 1$ οδηγούν στην παρακάτω μορφή του g :

$$g = i \begin{bmatrix} \alpha_3 + \alpha_8 & \alpha_1 - i\alpha_2 & \alpha_4 - i\alpha_5 \\ \alpha_1 + i\alpha_2 & \alpha_8 - \alpha_3 & \alpha_6 - i\alpha_7 \\ \alpha_4 + i\alpha_5 & \alpha_6 + i\alpha_7 & -2\alpha_8 \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Δηλαδή το κάθε στοιχείο της $SU(3)$ εξαρτάται από 8 παραμέτρους και μπορεί να συμβολιστεί με την μορφή $g = g(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8)$.

Η δομή των ομάδων Lie μπορεί να μελετηθεί πλήρως με την χρήση των απειροστών γεννητόρων της ομάδας. Να σημειωθεί ότι οι απειροστοί γεννήτορες δεν σχετίζονται με τους γεννήτορες των διακριτών ομάδων. Εάν α_i είναι μία παράμετρος του τυχαίου στοιχείου $g = g(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n)$, τότε ο αντίστοιχος γεννήτορας X_i δίνεται από την σχέση:

$$X_i = \left. \frac{dg(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n)}{d\alpha_i} \right|_{\alpha_i=0}. \quad (2.3)$$

Έτσι για παράδειγμα οι γεννήτορες της $SU(3)$ είναι:

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & X_2 &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & X_3 &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & X_4 &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ X_5 &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{bmatrix}, & X_6 &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, & X_7 &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}, & X_8 &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Οι παραπάνω γεννήτορες έχουν πολλαπλασιαστεί με τις κατάλληλες σταθερές για λόγους κανονικοποίησης και είναι εύκολο ναδειχθεί ότι ικανοποιούν κάποιες σχέσεις μετάθεσης της μορφής:

$$[X_a, X_b] = if_{abc}X_c, \quad a, b, c = 1, \dots, 8 \quad (2.5)$$

με $f_{123} = 1$, $f_{147} = \frac{1}{2}$, $f_{156} = -\frac{1}{2}$, $f_{246} = \frac{1}{2}$, $f_{257} = \frac{1}{2}$, $f_{345} = \frac{1}{2}$, $f_{367} = -\frac{1}{2}$, $f_{458} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $f_{678} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Η σημασία των γεννητόρων οφείλεται στο ότι η χρήση τους οδηγεί στην έκφραση κάθε στοιχείου της ομάδας σαν άθροισμα της μονάδας συν τον γεννήτορα πολλαπλασιασμένο με μία απειροστή σταθερά. Αυτό ισχύει κοντά στην περιοχή του στοιχείου για απειροστούς μετασχηματισμούς. Αποδεικνύεται ότι μπορεί να βρεθεί παραμετροποίηση της κάθε ομάδας Lie έτσι ώστε $g(\mathbf{0}) = \mathbf{I}$, όπου \mathbf{I} το μοναδιαίο στοιχείο της ομάδας. Έτσι κάθε στοιχείο μπορεί να γραφτεί στην μορφή:

$$g(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i + \varepsilon, \dots, \alpha_n) = \mathbf{I} + \varepsilon X_i. \quad (2.6)$$

Με τη χρήση του θεωρήματος Taylor κάθε στοιχείο της ομάδας (όχι μόνο κοντά στην περιοχή της μονάδας ή κάποιου άλλου στοιχείου) μπορεί να γραφτεί στην μορφή:

$$G_i = g(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i + \kappa, \dots, \alpha_n) = e^{i\kappa t X_i}, \quad (2.7)$$

όπου t κατάλληλος συντελεστής.

2.1.2 Άλγεβρες Lie

Η ύπαρξη των γεννητόρων μίας ομάδας Lie οδηγεί με φυσικό τρόπο στον ορισμό μιας αλγεβρικής δομής που αντιστοιχεί σε αυτήν την ομάδα και ονομάζεται άλγεβρα Lie. Ο γενικός ορισμός για την άλγεβρα Lie είναι ο παρακάτω:

Ορισμός 3. Ένας διανυσματικός χώρος \mathfrak{g} πάνω σε ένα σώμα F εφοδιασμένος με μία πράξη $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ ονομάζεται άλγεβρα Lie αν για κάθε $x, y, z \in \mathfrak{g}$ και $a, b \in F$ ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες:

$$i) [ax + by, z] = a[x, z] + b[y, z] \text{ και } [z, ax + by] = a[z, x] + b[z, y],$$

$$ii) [x, x] = 0,$$

$$iii) [x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] = 0 \text{ (Ταυτότητα Jacobi).}$$

Η πράξη της άλγεβρας είναι ο γνωστός μεταθέτης τελεστών από την κβαντομηχανική (όταν αναφερόμαστε σε κβαντομηχανικά προβλήματα).

Αποδεικνύεται ότι οι γραμμικοί συνδυασμοί των γεννητόρων μίας ομάδας Lie συγκροτούν την αντίστοιχη στην ομάδα, άλγεβρα Lie. Αν η ομάδα γράφεται με κεφαλαία γράμματα η αντίστοιχη άλγεβρα γράφεται με μικρά. Για παράδειγμα η άλγεβρα Lie της $SU(3)$ γράφεται $\mathfrak{su}(3)$. Η σύνδεση ανάμεσα στην άλγεβρα και την ομάδα γίνεται φανερή με το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 1. Ένα οποιοδήποτε στοιχείο a μίας ομάδας πινάκων Lie γράφεται στην μορφή $a = e^{tA}$, όπου A στοιχείο της αντίστοιχης άλγεβρας Lie \mathfrak{g} και t κατάλληλη παράμετρος.

Αρκετά συχνά στη φυσική δεν γίνεται διάκριση μεταξύ ομάδας και άλγεβρας (στην κβαντομηχανική ενδιαφέρει κυρίως η άλγεβρα μίας ομάδας) και συμβολίζονται και οι δύο με κεφαλαία γράμματα. Ο λόγος για τον οποίο ενδιαφέρει η άλγεβρα μίας ομάδας σε προβλήματα κβαντομηχανικής είναι ότι αρκετά συχνά οι κβαντομηχανικοί τελεστές ενός προβλήματος συγκροτούν μία άλγεβρα Lie.

Αποδεικνύεται ότι κάθε άλγεβρα Lie μπορεί να αναπαρασταθεί με ένα σύνολο πινάκων. Έτσι απαιτούμε κάθε στοιχείο μίας άλγεβρας να δρα γραμμικά σε ένα σύνολο συναρτήσεων. Αυτές οι συναρτήσεις $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_d$ συγκροτούν ένα διανυσματικό χώρο με εσωτερικό γινόμενο d διαστάσεων και μπορούν να συμβολιστούν ως τα γνωστά ket της χβαντομηχανικής $|1\rangle, |2\rangle, \dots, |d\rangle$. Μία τυχαία συνάρτηση ψ μπορεί να γραφεί στην μορφή:

$$\psi = \sum_{k=1}^d c_k \psi_k. \quad (2.8)$$

Αν ένα τυχαίο στοιχείο x της άλγεβρας Lie δρα σε μία συνάρτηση βάσης ψ_k , το αποτέλεσμα θα είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των συναρτήσεων βάσης του χώρου, δηλαδή:

$$x\psi_k = \sum_{l=1}^d \Gamma(x)_{lk} \psi_l, \quad (2.9)$$

όπου Γ είναι ένας τετραγωνικός πίνακας d διαστάσεων που περιλαμβάνει τους αντίστοιχους μιγαδικούς ή πραγματικούς συντελεστές. Χρησιμοποιώντας τις δύο τελευταίες σχέσεις η δράση του x σε μία τυχαία συνάρτηση του χώρου ψ μπορεί να γραφεί στην μορφή:

$$x\psi_k = \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d c_k \Gamma(x)_{lk} \psi_l. \quad (2.10)$$

Η σημασία του πίνακα Γ θα φανεί στα επόμενα.

2.1.3 Η έννοια της δυναμικής συμμετρίας και οι τελεστές **Casimir**

Είναι γνωστό ότι τελεστές που μετατίθενται έχουν κοινή βάση ιδιοσυναρτήσεων. Πάνω σε αυτήν την ιδιότητα βασίζεται η έννοια της δυναμικής συμμετρίας της Χαμιλτονιανής ενός πυρηνικού μοντέλου.

Μια Χαμιλτονιανή H παρουσιάζει δυναμική συμμετρία εάν για κάθε γεννήτορα X μίας ομάδας Lie G ισχύει $[H, X] = 0$, δηλαδή αν η Χαμιλτονιανή και οι γεννήτορες μετατίθενται. Η ομάδα Lie G ονομάζεται ομάδα συμμετρίας της H . Είναι προφανές ότι η Χαμιλτονιανή θα μετατίθεται και με οποιονδήποτε γραμμικό συνδυασμό γεννητόρων της G , δηλαδή με τα αντίστοιχα στοιχεία της \mathfrak{g} . Η σημασία της δυναμικής συμμετρίας γίνεται φανερή και από το γεγονός ότι αν η $|\psi\rangle$ είναι ιδιοσυνάρτηση της H , τότε και η $A|\psi\rangle$, όπου $A \in \mathfrak{g}$, είναι επίσης ιδιοσυνάρτηση της H με την ίδια ενέργεια. Πράγματι:

$$H|A\psi\rangle = E|A\psi\rangle,$$

αν ο τελεστής A δράσει από αριστερά στην εξίσωση

$$AH|\psi\rangle = AE|\psi\rangle,$$

όμως $[H, A] = 0$, δηλαδή $HA = AH$, άρα:

$$HA|\psi\rangle = EA|\psi\rangle.$$

Ακόμη αποδεικνύεται ότι αν δύο πίνακες μετατίθενται έχουν το ίδιο σύστημα ιδιοσυναρτήσεων. Αυτές οι ιδιότητες οδηγούν στη χρήση των δυναμικών συμμετριών. Η κατασκευή τελεστών οι οποίοι μετατίθενται με μια χαμιλτονιανή και υπακούουν τις σχέσεις μετάθεσης των γεννητόρων μίας ομάδας Lie είναι η μέθοδος εύρεσης της δυναμικής συμμετρίας ενός φυσικού συστήματος.

Τελεστής Casimir C μίας ομάδας Lie είναι ένα στοιχείο το οποίο μετατίθεται με όλους τους γεννήτορες της ομάδας. Δηλαδή για κάθε X γεννήτορα της G ισχύει $[X, C] = 0$. Προφανώς κάθε τελεστής Casimir C της ομάδας μετατίθεται με όλα τα στοιχεία της άλγεβρας g , ακριβώς όπως και η Χαμιλτονιανή H . Αυτή η ιδιότητα οδηγεί στην χρήση των τελεστών Casimir για την έκφραση της Χαμιλτονιανής. Αποδεικνύεται ότι κάθε ομάδα Lie r παραμέτρων έχει ακριβώς r γραμμικά ανεξάρτητους τελεστές Casimir. Οι ιδιοτιμές των τελεστών Casimir είναι γνωστές στην μαθηματική βιβλιογραφία και έτσι, εφόσον οι ιδιοσυναρτήσεις της Χαμιλτονιανής είναι και ιδιοσυναρτήσεις των τελεστών Casimir, η έκφραση της Χαμιλτονιανής ως συνάρτησης των τελεστών Casimir οδηγεί σε μία καλή προσέγγιση των ιδιοενεργειών του συστήματος. Οι διάφορες παράμετροι που εμφανίζονται μπορούν να υπολογιστούν με την χρήση πειραματικών δεδομένων.

2.1.4 Αναπαραστάσεις

Κάθε στοιχείο μίας ομάδας ή μίας άλγεβρας μπορεί να παρασταθεί μέσω ενός ομομορφισμού με ένα μαθηματικό αντικείμενο διαφορετικής φύσης, με την απαίτηση να διατηρούνται οι πράξεις που εξασφαλίζουν τη δομή της συγκεκριμένης ομάδας ή άλγεβρας. Για παράδειγμα η ομάδα των πραγματικών αριθμών με πράξη τον πολλαπλασιασμό (πραγματικών αριθμών) (\mathbb{R}, \cdot) μπορεί να αναπαρασταθεί με την ομάδα πινάκων:

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\},$$

με πράξη τον πολλαπλασιασμό πινάκων. Είναι φανερό ότι ο πολλαπλασιασμός αριθμών αναπαρίσταται από τον πολλαπλασιασμό πινάκων και οι πραγματικοί αριθμοί από τους πίνακες.

Πιο αυστηρά ως θεωρήσουμε μία άλγεβρα Lie \mathfrak{g} και ένα σύνολο V $d \times d$ πινάκων έτσι ώστε για κάθε $x, y \in \mathfrak{g}$ και $a, b \in \mathbb{R}$ να υπάρχει πίνακας $R \in V$ και να ισχύει:

$$R(ax + by) = aR(x) + bR(y), \quad (2.11)$$

$$R([x, y]) = [R(x), R(y)]. \quad (2.12)$$

Τότε το σύνολο αυτών των πινάκων αποτελεί μία αναπαράσταση της άλγεβρας \mathfrak{g} . Πράγματι από την τελευταία σχέση είναι φανερό ότι διατηρούνται οι σχέσεις μετάθεσης μέσω της αναπαράστασης, δηλαδή η δομή της άλγεβρας παραμένει η ίδια.

Οι πίνακες $\Gamma(x)$ αποτελούν μία αναπαράσταση, η οποία χαρακτηρίζει την άλγεβρα με άμεσο τρόπο. Εύκολα αποδεικνύεται ότι ικανοποιούνται οι παραπάνω σχέσεις.

Αν $\Gamma_1(x), \Gamma_2(x), \dots, \Gamma_n(x)$ είναι αναπαραστάσεις ενός στοιχείου x μίας ομάδας, τότε είναι εύκολο να δείχθει ότι και ο μπλοκ διαγώνιος πίνακας $D(x)$ ο οποίος ορίζεται ως:

$$D(x) = \begin{bmatrix} \Gamma_1(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Gamma_2(x) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & \Gamma_n(x) \end{bmatrix},$$

αποτελεί μία αναπαράσταση του στοιχείου. Αντίστροφα, δοσμένης μίας αναπαράστασης Γ_x είναι δυνατό να βρεθούν αναπαραστάσεις $\Gamma_1(x), \Gamma_2(x), \dots, \Gamma_n(x)$ έτσι ώστε η Γ_x να γράφεται στην παραπάνω μορφή. Σε αυτή την περίπτωση η αναπαράσταση ονομάζεται αναγωγίσιμη, διότι μπορεί να γραφτεί με την χρήση

άλλων απλούστερων (μικρότερης διάστασης) αναπαραστάσεων. Σε αντίθετη περίπτωση, δηλαδή αν δεν γίνεται να βρεθούν αναπαραστάσεις έτσι ώστε η Γ_x να γράφεται σε μπλοκ διαγώνια μορφή, η Γ_x ονομάζεται μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση.

Η σημασία των μη αναγωγίσιμων αναπαραστάσεων στα προβλήματα χβαντομηχανικής γίνεται φανερή από την εξής θεώρηση [24]: Έστω ότι ο συναρτησιακός χώρος στον οποίο δρουν τα στοιχεία της Lie άλγεβρας είναι το ευθύ γινόμενο δύο υποχώρων A και B , έτσι ώστε οι συναρτήσεις βάσης να μπορούν να διαμεριστούν σε δύο σύνολα $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_\alpha \in A$ και $\psi_{\alpha+1}, \psi_{\alpha+2}, \dots, \psi_{\alpha+\beta} \in B$. Ακόμη ας θεωρήσουμε ότι οι δύο αυτοί υπόχωροι είναι αναλλοίωτοι, δηλαδή για κάθε τελεστή-στοιχείο x της άλγεβρας ισχύει:

$$x\psi_k = \sum_{l=1}^d \Gamma(x)_{lk} \psi_l, \quad (2.13)$$

με $\psi_l \in A$ αν $\psi_k \in A$ και $\psi_l \in B$ αν $\psi_k \in B$. Δηλαδή η δράση του στοιχείου της άλγεβρας σε μία συνάρτηση βάσης του κάθε συνόλου γίνεται εσωτερικά στο ίδιο το σύνολο. Έτσι ο πίνακας $\Gamma(x)$ μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\Gamma(x) = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \cdot & \Gamma_{1\alpha} & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Gamma_{\alpha 1} & \cdot & \Gamma_{\alpha\alpha} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \Gamma_{\alpha+1\alpha+1} & \cdot & \cdot & \Gamma_{\alpha+1d} \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & 0 & \Gamma_{d\alpha+1} & \cdot & \cdot & \Gamma_{dd} \end{bmatrix},$$

δηλαδή κάθε μία μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση μίας άλγεβρας μετασχηματίζει τις αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις μόνο μεταξύ τους και έτσι το σύνολο των ιδιοσυναρτήσεων έχει συγκεκριμένα χαρακτηριστικά.

Αν ένα φυσικό σύστημα παρουσιάζει μία δυναμική συμμετρία, τότε οι μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις των γεννητόρων της ομάδας συμμετρίας χαρακτηρίζουν τις ιδιοενέργειες του συστήματος. Κάθε διαφορετική μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση αντιστοιχεί σε διαφορετική ενέργεια την οποία μπορεί να έχει το σύστημα. Αυτό γίνεται φανερό από το επόμενο θεώρημα που αναφέρεται και ως λήμμα του Schur.

Θεώρημα 2. Εάν D είναι μία μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση μίας ομάδας *Lie* και υπάρχει ένας πίνακας H (η Χαμιλτονιανή), ο οποίος μετατίθεται με όλους τους πίνακες της D , τότε ο H γράφεται στην μορφή $H = \lambda \mathbf{I}$ όπου \mathbf{I} είναι η μονάδα της ομάδας.

Δηλαδή αν βρεθεί μία μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση της ομάδας, η Χαμιλτονιανή H έχει μία συγκεκριμένη ιδιοενέργεια (ο λ είναι πραγματικός αριθμός). Συνήθως οι ιδιοτιμές υπολογίζονται με τη χρήση αριθμών που χαρακτηρίζουν την κάθε μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση. Προφανώς τις προϋποθέσεις και το συμπέρασμα του λήμματος του Schur τις ικανοποιούν και οι τελεστές Casimir της αντίστοιχης άλγεβρας, συνεπώς ο χαρακτηρισμός των ιδιοτιμών των Casimir χρησιμεύει στην άμεση εύρεση των ιδιοενεργειών της Χαμιλτονιανής. Εκεί έγκειται και η χρήση των δυναμικών συμμετριών στη φυσική. Δεδομένης μιας χαμιλτωνιανής, η εύρεση της ομάδας συμμετρίας και στη συνέχεια των μη αναγωγίσιμων αναπαραστάσεων της, οδηγεί στην άμεση εύρεση των ιδιοενεργειών με την χρήση των τελεστών Casimir. Η εύρεση των ιδιοτιμών των Casimir είναι λυμένο πρόβλημα από μαθηματικής άποψης και έτσι η διαγωνοποίηση πολύπλοκων Χαμιλτονιανών αποφεύγεται.

2.1.5 Διαγράμματα Young

Η χρήση και η εύρεση των μη αναγωγίσιμων αναπαραστάσεων της $SU(3)$ προϋποθέτει την κατανόηση των διαγραμμάτων Young, τα οποία χρησιμοποιούνται για την περιγραφή των συμμετρικών ομάδων S_n .

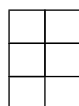
Διαμέριση ενός ακεραίου n ονομάζεται ένα σύνολο της μορφής $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ για το οποίο ισχύουν:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0, \quad (2.14)$$

και

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = n. \quad (2.15)$$

Τις διαμερίσεις ενός ακεραίου n μπορούμε να τις αναπαραστήσουμε με n κουτιά διατεταγμένα σε n γραμμές έτσι ώστε η τυχαία γραμμή i να περιέχει λ_i κουτιά. Προφανώς σε κάποιες από τις γραμμές μπορεί να υπάρχουν 0 κουτιά. Ένα τέτοιο διάγραμμα ονομάζεται διάγραμμα Young. Οι ιδιότητες των λ_i επιβάλλουν κάθε γραμμή ενός διαγράμματος Young να έχει το πολύ τόσα κουτιά όσα και η γραμμή ακριβώς από πάνω της. Για παράδειγμα η διαμέριση του ακεραίου 5 $(2, 2, 1, 0, 0)$ μπορεί να αναπαραστηθεί με το διάγραμμα:



με $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 1$ και $\lambda_4 = \lambda_5 = 0$.

Ένα διάγραμμα Young, το οποίο έχει σε κάθε ένα από τα n κουτιά που το αποτελούν ακεραίους από το σύνολο $\{0, 1, \dots, n\}$, ονομάζεται Young tableau. Υπάρχουν ακριβώς $n!$ Young tableau για κάθε διάγραμμα Young. Τα Young tableau που ενδιαφέρουν στο παρόν είναι τα standard Young Tableau στα οποία η διάταξη των ακεραίων από τα αριστερά προς τα δεξιά και από πάνω προς τα κάτω είναι αύξουσα.

Για παράδειγμα το

1	2
3	4
5	

είναι ένα standard Young tableau, ενώ το

4	3
1	2
5	

δεν είναι.

Η σημασία των standard Young tableau έγκειται στο γεγονός ότι μπορούν να χρησιμοποιηθούν για μια πιο χρηστική περιγραφή των συμμετριών μίας κυματοσυνάρτησης. Αποδεικνύεται ότι κάθε μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση μίας $SU(N)$ ομάδας μπορεί να αντιστοιχηθεί σε ένα διάγραμμα Young με n γραμμές. Η απαγορευτική αρχή του Pauli επιβάλλει η συνολική συνάρτηση N ταυτόσημων σωματιδίων να είναι πλήρως αντισυμμετρική. Αν θεωρήσουμε ότι κάθε κουτί του διαγράμματος συμβολίζει κάθε ένα από τα ταυτοτικά σωματίδια και κάθε αριθμός μία κατάσταση (κυματοσυνάρτηση), τότε το κάθε διάγραμμα εκφράζει μία συνολική κυματοσυνάρτηση του συστήματος. Τα σωματίδια-κουτιά που βρίσκονται στην ίδια γραμμή είναι συμμετροποιημένα μεταξύ τους, με την έννοια ότι η εναλλαγή τους δεν επιφέρει αλλαγή στην κυματοσυνάρτηση. Για παράδειγμα το διάγραμμα

1	2
---	---

εκφράζει την κυματοσυνάρτηση $\psi(x) = \sqrt{\frac{1}{2}}(\psi_a(x_1)\psi_b(x_2) + \psi_a(x_2)\psi_b(x_1))$. Η εναλλαγή των σωματιδίων x_1, x_2 διατηρεί αναλλοίωτη την ψ . Παράδειγμα συνολικής κατάστασης με μικτή συμμετρία είναι η

$$\psi = \psi_a(x_1)\psi_b(x_2)\psi_c(x_3) - \psi_a(x_2)\psi_b(x_1)\psi_c(x_3) - \psi_a(x_2)\psi_b(x_3)\psi_c(x_1) - \psi_a(x_3)\psi_b(x_2)\psi_c(x_1), \quad (2.16)$$

στην οποία αντιστοιχεί το διάγραμμα

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} .$$

Η συμμετρία και η αντισυμμετρία της κυματοσυνάρτησης N ταυτόσημων σωματιδίων είναι αποτέλεσμα δράσης τελεστών πάνω σε μία αρχική κατάσταση. Για παράδειγμα το παραπάνω Young tableau μπορεί να θεωρηθεί ότι αναπαριστά την δράση του τελεστή

$$T = F^{x_1, x_2, x_3} + F^{x_2, x_1, x_3} - F^{x_2, x_3, x_1} - F^{x_3, x_2, x_1}$$

στην αρχική κυματοσυνάρτηση $\Psi = \psi_a(x_1)\psi_b(x_2)\psi_c(x_3)$. Η εναλλαγή των δεικτών x_i δείχνει την εναλλαγή των σωματιδίων στις αντίστοιχες καταστάσεις.

Εφόσον η Χαμιλτονιανή ενός συστήματος μετατίθεται με τους τελεστές μίας ομάδας, υπάρχει κοινό σύνολο ιδιοκαταστάσεων και έτσι οι συμμετρίες και οι αντισυμμετρίες των ιδιοκαταστάσεων-κυματοσυναρτήσεων οφείλουν να εκφράζουν και τις συμμετρίες και τις αντισυμμετρίες των μη αναγωγίσιμων αναπαραστάσεων των αντίστοιχων τελεστών.

2.2 Αλγεβρικά μοντέλα πυρηνικής δομής με $SU(3)$ συμμετρία

Σκοπός της παρούσας παραγράφου είναι παρουσίαση των, μέχρι τώρα, βασικότερων αλγεβρικών πυρηνικών προτύπων τα οποία χρησιμοποιούν την $SU(3)$ συμμετρία για την πραγματοποίηση υπολογισμών. Η εξοικείωση με την χρήση της $SU(3)$ αποτελεί βασικό στόχο σχετικά και με το μοντέλο της proxy- $SU(3)$.

2.2.1 Το πρότυπο του **Elliott**

Για μικρό αριθμό νουκλεονίων η αλληλεπίδραση LS έχει μικρή επίδραση και έτσι το δυναμικό του πυρήνα μπορεί να προσεγγιστεί ικανοποιητικά από το δυναμικό του αρμονικού ταλαντωτή. Πάνω σε αυτή τη θέωση βασίστηκε ο Elliott και πρότεινε για την περιγραφή των ελαφρών πυρήνων την χρήση αλγεβρικών συμμετριών [39]. Η Χαμιλτονιανή του αρμονικού ταλαντωτή με τη χρήση των μεταβλητών θέσης και ορμής μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$H_0 = r^2 + b^4 p^2. \quad (2.17)$$

Η μεταβλητή b είναι μία μεταβλητή κανονικοποίησης η οποία υπεισέρχεται στην έκφραση των κυματοσυναρτήσεων. Για παράδειγμα η κυματοσυνάρτηση ενός νουκλεονίου που βρίσκεται στον πρώτο φλοιό και έχει στροφορμή 0 γράφεται στην μορφή:

$$u_{1s}(r) = (2/\pi^{\frac{1}{4}})e^{-\frac{r^2}{2b^2}}. \quad (2.18)$$

Η παραπάνω Χαμιλτονιανή μετατίθεται προφανώς με τον εαυτό της και τους οκτώ τελεστές:

$$L_q = (\mathbf{r} \times \mathbf{p})_q, \quad (2.19)$$

$$Q_q = (4\pi/5)^{\frac{1}{2}} \{r^2 Y_q^{(2)}(\theta_r, \phi_r) + b^4 p^2 Y_Q^{(2)}(\theta_p, \phi_p)\} / b^2. \quad (2.20)$$

Οι τελεστές L_q είναι οι τελεστές στροφής στο χώρο, ενώ οι τελεστές Q_q είναι οι πέντε συνιστώσες ενός ταυσιτικού τελεστή δεύτερης τάξης, οι οποίοι δίνουν την τετραπολική παραμόρφωση. Μπορεί να ελεγχθεί εύκολα ότι οι παραπάνω τελεστές ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$[L_q, L_{q'}] = -\sqrt{2} \langle 11q q' | 111q + q' \rangle L_{q+q'}, \quad (2.21)$$

$$[Q_q, L_{q'}] = -\sqrt{6} \langle 21q q' | 212q + q' \rangle Q_{q+q'}, \quad (2.22)$$

$$[Q_q, Q_{q'}] = 3\sqrt{10} \langle 22q q' | 221q + q' \rangle L_{q+q'}, \quad (2.23)$$

οι οποίες είναι οι σχέσεις μετάθεσης της ομάδας $U(3)$. Είναι εύκολο να δειχθεί ότι και οι τελεστές πολλών σωματιδίων

$$L' = \sum_{i=1}^k L_q(i), \quad (2.24)$$

$$Q' = \sum_{i=1}^k Q_q(i), \quad (2.25)$$

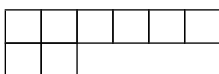
όπου το i παίρνει τιμές από 0 έως k σωματίδια ικανοποιούν τις ίδιες σχέσεις μετάθεσης. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι τελεστές διαφορετικών σωματιδίων μετατίθενται.

Οι μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις μίας ορθομοναδιαίας ομάδας $U(N)$ χαρακτηρίζονται από τους ακεραίους f_1, f_2, \dots, f_N , για τους οποίους ισχύει:

$$f_1 \geq f_2 \geq \dots \geq f_N, \quad (2.26)$$

και αποτελούν μία διαμέριση του αριθμού $[f] = \sum_{i=1}^N f_i$. Επειδή στα προβλήματα φυσικής δεν ενδιαφέρει η αλλαγή φάσης, μας ενδιαφέρει η υποομάδα $SU(N)$ της $U(N)$, η οποία προκύπτει αν από το σύνολο γεννητόρων της $U(N)$ αφαιρέσουμε τον μοναδιαίο γεννήτορα. Για την περίπτωση της $SU(3)$ προκύπτει η περιγραφή των μη αναγωγίσιμων αναπαραστάσεων της από το ζεύγος δύο αριθμών (λ, μ) , για τους οποίους ισχύει $\lambda = f_1 - f_2$ και $\mu = f_2$. Το αντίστοιχο διάγραμμα (tableau) είναι αυτό που έχει $f_1 - f_2$ κουτάκια στην πάνω γραμμή και f_2 στην κάτω.

Αποδεικνύεται ότι κάθε φλοιός του αρμονικού ταλαντωτή χαρακτηρίζεται από μία $U(N)$ συμμετρία, η οποία έχει τουλάχιστον μία $SU(3)$ υποομάδα. Επειδή κάθε μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση της $U(N)$ περιέχει αρκετές μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις της $SU(3)$, το πρόβλημα καθορισμού των καταστάσεων του συστήματος έχει να κάνει με το ποιές μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις (λ, μ) της $SU(3)$ υπάρχουν σε μία δεδομένη μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση $[f]$ της $U(N)$. Τα διαγράμματα Young που αντιστοιχούν στην κάθε μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση (λ, μ) αποτελούνται από δύο γραμμές. Ο αριθμός λ αντιστοιχεί στα επιπλέον κουτιά της πάνω γραμμής, ενώ ο αριθμός μ αντιστοιχεί στον αριθμό των κοινών κουτιών στην πάνω και στην κάτω γραμμή. Στο κάτω σχήμα παρουσιάζεται το διάγραμμα Young που αντιστοιχεί στην μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση $(4, 2)$.



2.2.2 Το πρότυπο αλληλεπιδρώντων μποζονίων

Το πρότυπο αλληλεπιδρώντων μποζονίων [Interacting Boson Model (IBM)] είναι ένα πυρηνικό μοντέλο, το οποίο στην πιό απλή του μορφή, η οποία αναφέρεται συχνά σαν IBM-1, αντιμετωπίζει τα νουκλεόνια (πρωτόνια ή νετρόνια) ως ζευγάρια συγκεκριμένης στροφορμής με μποζονική συμπεριφορά [9]. Το μοντέλο αυτό προτάθηκε από τους Akito Arima και Francesco Iachello το 1975. Το μοντέλο χρησιμοποιείται για να περιγράψει δονητικές και περιστροφικές καταστάσεις μη σφαιρικών πυρήνων.

Σε αυτήν τη θεώρηση διακρίνονται δύο τύποι μποζονίων: Τα s μποζόνια, τα οποία έχουν στροφορμή $L = 0$, και τα d μποζόνια, τα οποία έχουν στροφορμή $L = 2$. Η ενέργεια αυτών των ελευθέρων μποζονίων είναι ϵ_s και ϵ_d αντίστοιχα.

Κάθε πυρήνας χαρακτηρίζεται από τα μποζόνια που προκύπτουν από τα νουκλεόνια σθένους, δηλαδή τα νουκλεόνια που βρίσκονται εκτός κλειστού φλοιού. Αν τα νουκλεόνια σθένους έχουν πλήθος

μεγαλύτερο από το μισό του πλήθους του επόμενου φλοιού, τότε χρησιμοποιώντας την συμμετρία σωματιδίου-οπής μπορούν να χρησιμοποιηθούν μποζόνια οπών. Για παράδειγμα ο πυρήνας $^{110}_{48}\text{Cd}_{62}$ έχει 12 νετρόνια σθένους (αφού $62 - 50 = 12$), δηλαδή 6 νετρονικά μποζόνια και 2 οπές πρωτονίων (αφού $50 - 48 = 2$), δηλαδή 1 πρωτονικό μποζόνιο. Συνολικά δηλαδή περιγράφεται από 7 μποζόνια.

Ο χαρακτηρισμός των καταστάσεων του **IBM** περιγράφεται από τελεστές δημιουργίας $\hat{d}_\mu^\dagger, \hat{s}^\dagger$ και καταστροφής \hat{d}_μ, \hat{s} , όπου το μ εκφράζει την προβολή της τροχιακής στροφορμής και ισχύει : $\mu = -2, \dots, 2$. Οι παραπάνω τελεστές ικανοποιούν τις σχέσεις μετάθεσης:

$$[\hat{s}, \hat{s}^\dagger] = 1 \quad , \quad [\hat{d}_\mu, \hat{d}_\mu^\dagger] = \delta_{\mu\nu}, \quad (2.27)$$

ενώ όλοι οι υπόλοιποι μεταθέτες μηδενίζονται. Ο αριθμός των συνολικών μποζονίων δίνεται από τον τελεστή:

$$\hat{N} = \sum_{\mu} \hat{d}_\mu^\dagger \hat{d}_\mu + \hat{s}^\dagger \hat{s} = \hat{n}_d + \hat{n}_s. \quad (2.28)$$

Στο παρόν σημείο είναι σκόπιμο να αναφερθεί η έννοια του σφαιρικού τανυστικού τελεστή και του τανυστικού γινομένου.

Ένας σφαιρικός τανυστικός τελεστής τάξης k , τον οποίο συμβολίζουμε με $T_q^{(k)}$ με $q \in \{-k, -k+1, \dots, k-2, k-1, k\}$ είναι ένα σύνολο $2k+1$ τελεστών, τους οποίους συμβολίζουμε με $T_{-k}^{(k)}, T_{-k+1}^k, \dots, T_{k-1}^k, T_{k+}^k$ και οι οποίοι ικανοποιούν με τους τελεστές της στροφορμής τις παρακάτω σχέσεις:

$$[L_+, T_q^k] = \hbar \sqrt{k(k+1) - q(q+1)} T_{q+1}^{(k)}, \quad (2.29)$$

$$[L_-, T_q^k] = \hbar \sqrt{k(k+1) - q(q-1)} T_{q-1}^{(k)}, \quad (2.30)$$

$$[L_z, T_q^k] = \hbar q T_q^{(k)}. \quad (2.31)$$

Το τανυστικό γινόμενο δύο σφαιρικών τανυστικών τελεστών ορίζεται μέσω της σχέσης:

$$[T^{(k_1)} \times T^{(k_2)}]_q^{(k)} = \sum_{q_1=-k_1}^{k_1} \sum_{q_2=-k_2}^{k_2} \langle k_1 q_1 k_2 q_2 | k q \rangle T_{q_1}^{k_1} T_{q_2}^{k_2}. \quad (2.32)$$

Επειδή είναι επιθυμητή η σφαιρική τανυστική συμπεριφορά των μποζονικών τελεστών στη Χαμιλιτονική του **IBM**, ορίζουμε τους τελεστές $\hat{d}_\mu = (-1)^\mu \hat{d}_\mu^\dagger$. Οι \hat{d}_μ είναι σφαιρικοί τανυστικοί τελεστές.

Η γενική μορφή της Χαμιλτονιανής του IBM είναι:

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{IBM} = & \varepsilon_s N + \frac{1}{2} U_0 N(N-1) + \varepsilon N_d \\
& + \sum_{L=0,2,4} \frac{1}{2} \sqrt{2L+1} C'_L [[\hat{d}^\dagger \times \hat{d}^\dagger]^L \times [\hat{d}_\mu \times \hat{d}_\mu]^L]^0 \\
& + \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{V}_2 [[\hat{d}^\dagger \times \hat{d}^\dagger]^2 \times [\hat{d}_\mu \times \hat{s}_\mu]^2 + [\hat{d}^\dagger \times \hat{s}^\dagger]^L \times [\hat{d}_\mu \times \hat{d}_\mu]^2]^0 \\
& + \frac{1}{2} \tilde{V}_0 [[\hat{d}^\dagger \times \hat{d}^\dagger]^0 \times [\hat{s}_\mu \times \hat{s}_\mu]^0 + [\hat{s}^\dagger \times \hat{s}^\dagger]^0 \times [\hat{d}_\mu \times \hat{d}_\mu]^0].
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Επειδή στον παρόν μοντέλο ενδιαφέρουν οι διεγερμένες καταστάσεις του πυρήνα, οι πρώτοι τρεις όροι μπορούν να παραλειφθούν, γιατί συνεισφέρουν στη σταθερή ενέργεια κάθε πυρήνα. Έτσι η Χαμιλτονιανή έχει πλέον έξι ελεύθερες παραμέτρους.

Ορίζονται οι τελεστές:

$$\hat{T} = [\hat{d}^\dagger \times \hat{d}]^l, \quad l = 0, \dots, 4, \tag{2.34}$$

και μέσω αυτών:

ο τελεστής που συνδέεται με τον αριθμό των μποζονίων d :

$$\hat{n}_d = \sqrt{5} \hat{T}_0, \tag{2.35}$$

ο τελεστής της στροφορμής:

$$\hat{L}_\mu = \sqrt{5} \hat{T}_{1\mu}, \tag{2.36}$$

ο τετραπολικός τελεστής:

$$\hat{Q}_{2\mu} = (\hat{d}_\mu^\dagger \hat{s} + \hat{s}^\dagger \hat{d}_\mu) - \frac{\sqrt{7}}{2} \hat{T}_{2\mu}, \tag{2.37}$$

καθώς και ο τελεστής σύζευξης:

$$\hat{P} = \frac{1}{2} ([\hat{d} \times \hat{d}]^0 - \hat{s} \hat{s}). \tag{2.38}$$

Με τη χρήση των παραπάνω τελεστών η Χαμιλτονιανή γράφεται στη μορφή:

$$\hat{H} = \varepsilon'' \hat{n}_d + \alpha_0 \hat{P}^\dagger \hat{P} + \alpha_1 \hat{L}^2 + \alpha_2 \hat{Q}^2 + \alpha_3 \hat{T}^2 + \alpha_4 \hat{T}_4^2. \tag{2.39}$$

Στην παραπάνω μορφή είναι φανερή η φυσική σημασία της συνεισφοράς του κάθε όρου στη Χαμιλτονιανή.

Για την χρήση των αλγεβρικών ιδιοτήτων της Χαμιλτονιανής με σκοπό την εύρεση των ιδιοτιμών και των ιδιοκαταστάσεων, αρχικά είναι απαραίτητος ο προσδιορισμός της δυναμικής συμμετρίας που την χαρακτηρίζει. Στη συνέχεια μπορούν να βρεθούν διαφορετικές αλυσίδες υποαλγεβρών της άλγεβρας που χαρακτηρίζει τη δυναμική συμμετρία, κάθε μία από τις οποίες περιγράφει διαφορετικούς τρόπους ενεργειακών διεγέρσεων του συστήματος.

Αποδεικνύεται ότι η άλγεβρα συμμετρίας της Χαμιλτονιανής είναι η άλγεβρα $U(6)$. Οι γεννήτορες της $U(6)$ είναι 36. Διαλέγοντας κάθε φορά κατάλληλο υποσύνολο γεννητόρων είναι δυνατή η ανάλυση της $U(6)$ σε τρεις διαφορετικές αλυσίδες αλγεβρών.

Η πρώτη αλυσίδα είναι η:

$$U(6) \supset U(5) \supset O(5) \supset O(3) \supset O(2), \quad (2.40)$$

η δεύτερη είναι η :

$$U(6) \supset SU(3) \supset O(3) \supset O(2), \quad (2.41)$$

και η τρίτη:

$$U(6) \supset O(6) \supset O(5) \supset O(3) \supset O(2). \quad (2.42)$$

Κάθε αλυσίδα περιέχει τις άλγεβρες $O(3) \supset O(2)$, οι οποίες είναι οι άλγεβρες της στροφορμής σε 3 και 2 διαστάσεις αντίστοιχα. Η αλυσίδα $O(3) \supset O(2)$ παράγεται από τους τελεστές της στροφορμής $[\hat{d}^\dagger \times \hat{d}]_M^1$.

Στο παρόν ενδιαφέρει κυρίως η δεύτερη αλυσίδα, η οποία περιλαμβάνει την $SU(3)$. Η αλυσίδα αυτή προκύπτει ως εξής: Επιλέγουμε τον μονοπολικό τελεστή $[s^\dagger \times \hat{s}]^0 + \sqrt{5}[\hat{d}^\dagger \times \hat{d}]^0$, τους τρεις διπολικούς τελεστές \hat{L}_μ ($\mu = -1, 0, 1$) και τους πέντε τετραπολικούς τελεστές \hat{Q}_μ , οι οποίοι σχηματίζουν την άλγεβρα $SU(3)$. Αν εξαιρεθεί ο πρώτος τελεστής, που λειτουργεί ως καταμέτρητης μωζονίων του πυρήνα, οι υπόλοιποι οκτώ γεννήτορες είναι οι γεννήτορες της $SU(3)$.

Χρησιμοποιώντας τις δυναμικές συμμετρίες κάθε αλυσίδας και τους τελεστές Casimir των αντίστοιχων αλγεβρών, μπορούμε να εκφράσουμε την κάθε Χαμιλτονιανή ως συνάρτηση αυτών των τελεστών. Αναφορικά με την δεύτερη αλυσίδα, ο τελεστής Casimir έχει την μορφή:

$$\hat{C}_2 = 2\hat{Q}^2 + \frac{3}{4}\hat{L}^2, \quad (2.43)$$

και οι ιδιοτιμές που αντιστοιχούν στην μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση (λ, μ) δίνονται από την έκφραση:

$$\langle C_2 \rangle = \lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu + 3\lambda + 3\mu. \quad (2.44)$$

Οι τελεστές Casimir των $O(3)$ και $O(2)$ είναι αντίστοιχα ο τελεστής της στροφορμής \hat{L}^2 με ιδιοτιμές $L(L+1)$ και ο τελεστής \hat{L}_z με ιδιοτιμές M .

Με αυτόν τον τρόπο κάθε κατάσταση μπορεί να περιγραφεί μέσω της δεύτερης αλυσίδας, με τη χρήση των κβαντικών αριθμών που τη χαρακτηρίζουν. Οι καταστάσεις συμβολίζονται με $|N(\lambda, \mu)KLM\rangle$, όπου K είναι ένας επιπλέον κβαντικός αριθμός που χρησιμεύει για τον χαρακτηρισμό των καταστάσεων και ονομάζεται κβαντικός αριθμός του Elliott.

Αποδεικνύεται ότι στην περίπτωση της δεύτερης αλυσίδας η Χαμιλτονιανή του IBM έχει την μορφή:

$$\hat{H}_{IBM}^B = \hat{C}_Q \hat{Q}^2 + C_L \hat{L}^2 = \frac{1}{2} \hat{C}_Q \hat{C}_2 + (C_L - \frac{3}{8} C_Q) \hat{L}^2. \quad (2.45)$$

Εφόσον είναι γνωστές οι ιδιοτιμές των τελεστών Casimir, ο υπολογισμός των ιδιοτιμών της ενέργειας δίνεται από την έκφραση:

$$E_{ImL} = \frac{C_Q}{2} [\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu + 3\lambda + 3\mu] + (C_L - \frac{1}{2} C_Q) \hat{L}^2. \quad (2.46)$$

Η χρήση δηλαδή της $SU(3)$ συμμετρίας και των υποαλγεβρών της $O(3) \supset O(2)$ επιτρέπει με απλούς υπολογισμούς την εξαγωγή του φάσματος του υπό θεώρηση πυρήνα. Επειδή στην $SU(3)$ περίπτωση εμφανίζεται στις ιδιοτιμές ο όρος $L(L+1)$ που αντιστοιχεί στον συμπαγή περιστροφέα, η συγκεκριμένη αλυσίδα περιγράφει επιτυχώς πυρήνες, οι οποίοι έχουν περιστροφικό φάσμα και είναι παραμορφωμένοι.

2.2.3 Το πρότυπο **pseudo-SU(3)**

Το μοντέλο pseudo-SU(3) δημιουργήθηκε από τους R. D. Ratna Raju, J.P.Drayer και K. T. Hecht. Το συγκεκριμένο πρότυπο [40] επιδιώκει την ανάκτηση της $SU(3)$ συμμετρίας, η οποία επικρατεί στον sd φλοιό και καταστρέφεται στους υψηλότερους φλοιούς των βαρέων πυρήνων.

Η ανάκτηση της συμμετρίας επιδιώκεται μέσω της δημιουργίας ψευδοφλοιών σταθερής ομοτιμίας, των οποίων τα τροχιακά προκύπτουν από αντικατάσταση με τα τροχιακά των πραγματικών φλοιών. Η

αντικατάσταση βασίζεται στην παρατήρηση ότι τα τροχιακά του n φλοιού με $j = l - \frac{1}{2}$ και $j = l - 2 + \frac{1}{2}$ βρίσκονται κοντά στην ενέργεια. Έτσι λαμβάνουν τους ψευδο-κβαντικούς αριθμούς $\tilde{j} = j$, $\tilde{n} = n - 1$ και $\tilde{l} = l - 1$.

Για παράδειγμα, τα τροχιακά του φλοιού 50 – 82 με θετική ομοτιμία, $1g_{7/2}$, $2d_{5/2}$, $2d_{3/2}$, $3s_{1/2}$ απεικονίζονται στα τροχιακά $\tilde{f}_{7/2}$, $\tilde{f}_{5/2}$, $\tilde{p}_{3/2}$, $\tilde{p}_{1/2}$. Έτσι στο τροχιακό $1g_{7/2}$, το οποίο ανήκε στον $n = 4$ φλοιό, η στροφορμή μειώθηκε κατά μία μονάδα και το σπιν αντιστράφηκε και απεικονίστηκε στο $1f_{7/2}$ με $n = 3$. Στο τροχιακό $2d_{5/2}$, το οποίο ανήκε στον $n = 4$ φλοιό, η στροφορμή αυξήθηκε κατά μία μονάδα, το σπιν αντιστράφηκε και απεικονίστηκε στο $1f_{5/2}$ με $n = 3$.

Οι καινούργιοι φλοιοί που προκύπτουν με αυτόν τον τρόπο αποτελούν τους φλοιούς του αρμονικού ταλαντωτή και έτσι χαρακτηρίζονται από SU(3) συμμετρία.

Με αυτήν τη θεώρηση, μία Χαμιλτονιακή που θα χαρακτηρίζει το μοντέλο θα έχει την μορφή:

$$H = \sum_{\alpha=\pi,\nu} (H_{sp,\alpha} + G_{\alpha}H_{pair,\alpha}) - \frac{1}{2}\chi\tilde{Q}\cdot\tilde{Q} + aK_J^2 + bJ^2 + A_{asym}\hat{C}_2. \quad (2.47)$$

Στην παραπάνω Χαμιλτονιακή το πρώτο κομμάτι είναι το άθροισμα όλων των μονοσωματιδιακών ενεργειών Nilsson, το δεύτερο κομμάτι αφορά την τετραπολική αλληλεπίδραση, ενώ οι τελευταίοι όροι έχουν να κάνουν με το περιστροφικό φάσμα του πυρήνα.

Έτσι, αν κάποιος θέλει να εξάγει φάσματα πυρήνων στο πρότυπο pseudo-SU(3), πρέπει αρχικά να κάνει την αντιστοίχιση των τροχιακών των νουκλεονίων σθένους με τα ψευδοτροχιακά, σύμφωνα με τους κανόνες που αναφέρθηκαν παραπάνω. Στη συνέχεια πρέπει να βρει τις μη αναγωγίσιμες αναπαράστασεις της SU(3) που αντιστοιχούν στον δεδομένο πυρήνα και να επιλέξει αυτήν που μεγιστοποιεί την ιδιοτιμή του τελεστή Casimir \hat{C}^2 , διότι με αυτήν τη θεώρηση μεγιστοποιείται και η τετραπολική αλληλεπίδραση. Ο υπολογισμός των ιδιοτιμών των υπόλοιπων τελεστών γίνεται αριθμητικά ή προκύπτει με απλούς υπολογισμούς με την χρήση της μη αναγωγίσιμης αναπαράστασης (λ, μ) .

Κεφάλαιο 3

Το πρότυπο **proxy-SU(3)**

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζεται το πρότυπο proxy-SU(3) το οποίο είναι και το κύριο θέμα της διατριβής. Η ιδέα για την εισαγωγή του προτύπου οφείλεται στον Δρ. Διονύση Μπονάτσο και τους συνεργάτες του και βασίζεται στην αντικατάσταση ορισμένων τροχιακών με “συζυγή” τροχιακά τα οποία διατηρούν ορισμένους κβαντικούς αριθμούς. Η αντικατάσταση αυτή αποκαθιστά την SU(3) συμμετρία του αρμονικού ταλαντωτή και αποδεικνύεται υπολογιστικά ότι η proxy-SU(3) είναι μια ουσιαστικά καλή προσέγγιση σε σχέση με το πρότυπο των φλοιών.

Το πρότυπο proxy-SU(3) αποτελεί ένα συλλογικό πρότυπο και η χρησιμότητά του έγκειται στο ότι κάθε πυρήνας μπορεί να εκπροσωπηθεί από την μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση της άλγεβρας SU(3) η οποία έχει το μέγιστο βάρος, δηλαδή περιγράφει την πιο συμμετρική κατανομή των νουκλεονίων σθένους. Με τη χρήση της μη αναγωγίσιμης αναπαράστασης μπορεί να εξαχθεί το φάσμα του πυρήνα, η δομή του καθώς και οι ηλεκτρικές και μαγνητικές μεταπτώσεις.

3.1 Τροχιακά που διαφέρουν κατά $\Delta K[\Delta N \Delta n_z \Delta \Lambda] = 0[110]$

Το πρότυπο του Nilsson που παρουσιάστηκε περιληπτικά σε προηγούμενη παράγραφο περιγράφει ικανοποιητικά τις ιδιότητες των βαρέων παραμορφωμένων πυρήνων. Καθώς η παραμόρφωση ϵ αυξάνεται, οι κυματοσυναρτήσεις του προτύπου πλησιάζουν οριακά σε μία ασυμπτωτική μορφή, στην οποία διατηρούνται συγκεκριμένοι κβαντικοί αριθμοί. Αυτοί είναι : ο συνολικός αριθμός κβάντων του αρμονικού ταλαντωτή N , ο αριθμός των κβάντων στον κυλινδρικό άξονα συμμετρίας n_z καθώς και οι προβολές της τροχιακής στροφορμής Λ και του σπιν Σ στον κυλινδρικό άξονα συμμετρίας.

Οι ασυμπτωτικές κυματοσυναρτήσεις αποτελούν καλή προσέγγιση ακόμη και σε μεσαίες παραμορφώσεις και ο συνήθης συμβολισμός είναι ο $K[Nn_z\Lambda]$ όπου $K = \Lambda + \Sigma$ είναι η προβολή της συνολικής στροφορμής στον άξονα συμμετρίας.

Η ιδέα του προτύπου *proxy-SU(3)* βασίζεται στην αντικατάσταση νουκλεονίων, πρωτονίων ή νετρονίων, των οποίων οι χβαντικοί αριθμοί των ασυμπτωτικών κυματοσυναρτήσεων $K[Nn_z\Lambda]$ διαφέρουν κατά $\Delta K[\Delta N \Delta n_z \Delta \Lambda] = 0[110]$. Έχει παρατηρηθεί πειραματικά και αποδειχθεί υπολογιστικά στη περιοχή των σπανίων γαιών, ότι ζευγάρια πρωτονίων νετρονίων τα οποία διαφέρουν κατά $\Delta K[\Delta N \Delta n_z \Delta \Lambda] = 0[110]$ έχουν μεγάλη χωρική επικάλυψη[25].

Στο πρότυπο των φλοιών η αλληλεπίδραση *Is* διαλύει τους φλοιούς του αρμονικού ταλαντωτή, οι οποίοι αποτελούνται από τροχιακά συγκεκριμένης ομοτιμίας, σπρώχνοντας ενεργειακά προς τα κάτω μία ομάδα τροχιακών. Αυτή η ομάδα τροχιακών σχηματίζει με τον απο κάτω φλοιό του αρμονικού ταλαντωτή (που έχει χάσει και αυτός όμως μία ομάδα) έναν ενεργειακό φλοιό. Τα εισερχόμενα από «πάνω» τροχιακά έχουν αντίθετη ομοτιμία με τα τροχιακά του φλοιού στον οποίο εισέρχονται. Συμβαίνει όμως να διαφέρουν με τα τροχιακά που έφυγαν κατά $\Delta K[\Delta N \Delta n_z \Delta \Lambda] = 0[110]$ στους αναφερθέντες Nilsson χβαντικούς αριθμούς. Δεδομένης και της μέγιστης χωρικής επικάλυψης που παρατηρείται για τα συγκεκριμένα ζευγάρια η αντικατάσταση είναι εύλογη. Να σημειωθεί βεβαίως ότι το εισερχόμενο τροχιακό με την μεγαλύτερη τιμή του K μένει χωρίς αντικαταστάτη από τα εξερχόμενα τροχιακά. Κάτι τέτοιο όμως δεν δημιουργεί πρόβλημα αφού το μοντέλο επιχειρεί να περιγράψει παραμορφωμένους πυρήνες μακριά από το κλείσιμο του φλοιού στο οποίο συμβάλλει το τελευταίο τροχιακό.

Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε το φλοιό 50 – 82. Αυτός ο φλοιός αποτελείται από δέκα τροχιακά (20 νουκλεόνια) τα οποία ανήκουν στον (κατεστραμμένο) φλοιό του αρμονικού ταλαντωτή με κύριο χβαντικό αριθμό $N = 4$ καθώς και από έξι τροχιακά (12 νουκλεόνια) τα οποία έχουν κατέλθει από τον φλοιό του αρμονικού ταλαντωτή με $N = 5$ και έχουν αντίθετη ομοτιμία με τα υπόλοιπα. Από αυτά τα έξι τροχιακά το 11/2[505] παραλείπεται στα πλαίσια της *proxy-SU(3)* και τα υπόλοιπα πέντε: 1/2[505], 3/2[541], 5/2[532], 7/2[523], 9/2[541] αντικαθίστανται με τα τροχιακά 1/2[440], 3/2[431], 5/2[422], 7/2[413], 9/2[404] με τα οποία διαφέρουν κατά $\Delta K[\Delta N \Delta n_z \Delta \Lambda] = 0[110]$.

Το κέρδος είναι ότι πλέον ο φλοιός 50 – 82, μετά την εφαρμογή της *proxy-SU(3)* προσεγγίζεται με έναν *sdg* φλοιό, του οποίου τα τροχιακά έχουν την δυναμική συμμετρία $U(15)$, η οποία, όπως και όλες οι ορθομοναδιαίες άλγεβρες Lie έχουν μία $SU(3)$ υποάλγεβρα.

Πίνακας 3.1: Τροχιακά Nilsson για τους πυρηνικούς φλοιούς πρωτονίων και νετρονίων καθώς και για τους φλοιούς αρμονικού ταλαντωτή που προκύπτουν μετά την proxy-SU(3) αντικατάσταση .

0-2 n, p	0-2 n, p	s n, p	s n, p	2-8 n, p	2-8 n, p	p n, p	p n, p				
1s1/2	1/2[000]	1s1/2	1/2[000]	1p1/2 1p3/2	1/2[101] 1/2[110] 3/2[101]	1p1/2 1p3/2	1/2[101] 1/2[110] 3/2[101]				
8-20 n, p	8-20 n, p	sd n, p	sd n, p	20-28 n, p	20-28 n, p	f n, p	f n, p				
2s1/2 1d3/2 1d5/2	1/2[211] 1/2[200] 1/2[220]	2s1/2 1d3/2 1d5/2	1/2[211] 1/2[200] 1/2[220]	1f7/2	1/2[330] 3/2[321] 5/2[312] 7/2[303]	1f7/2	1/2[330] 3/2[321] 5/2[312] 7/2[303]				
28-50 n, p	28-50 n, p	pf n, p	pf n, p	50-82 n	50-82 n	sdg n	sdg n	50-82 p	50-82 p	sdg p	sdg p
2p1/2 2p3/2 1f5/2 1g9/2	1/2[301] 1/2[321] 1/2[310]	2p1/2 2p3/2 1f5/2	1/2[301] 1/2[321] 1/2[310]	3s1/2 2d3/2 2d5/2 1g7/2 1h11/2	1/2[411] 1/2[400] 1/2[431] 1/2[420] 1/2[550]	3s1/2 2d3/2 2d5/2 1g7/2 1g9/2	1/2[411] 1/2[400] 1/2[431] 1/2[420] 1/2[440]	3s1/2 2d3/2 2d5/2 1g7/2 1h11/2	1/2[400] 1/2[411] 1/2[420] 1/2[431] 1/2[550]	3s1/2 2d3/2 2d5/2 1g7/2 1g9/2	1/2[400] 1/2[411] 1/2[420] 1/2[431] 1/2[440]
	3/2[312]		3/2[312]		3/2[402]		3/2[402]		3/2[402]		3/2[402]
	3/2[301]		3/2[301]		3/2[422]		3/2[422]		3/2[411]		3/2[411]
	5/2[303]		5/2[303]		5/2[413]		5/2[413]		5/2[402]		5/2[402]
	3/2[431]		3/2[321]		3/2[411]		3/2[411]		3/2[422]		3/2[422]
	5/2[422]		5/2[312]		5/2[402]		5/2[402]		5/2[413]		5/2[413]
	7/2[413]		7/2[303]		7/2[404]		7/2[404]		7/2[404]		7/2[404]
	9/2[404]				7/2[523]		7/2[413]		7/2[523]		7/2[413]
					9/2[514]		9/2[404]		9/2[514]		9/2[404]
					11/2[505]				11/2[505]		

Πίνακας 3.2: (Συνέχεια)

82-126 n	82-126 n	pfh n	pfh n	82-126 p	82-126 p	pfh p	pfh p	126-184 n	126-184 n	sdgi n	sdgi n
3p1/2	1/2[501]	3p1/2	1/2[501]	3p1/2	1/2[501]	3p1/2	1/2[501]	4s1/2	1/2[611]	4s1/2	1/2[611]
3p3/2	1/2[521]	3p3/2	1/2[521]	3p3/2	1/2[510]	3p3/2	1/2[510]	3d3/2	1/2[600]	3d3/2	1/2[600]
	3/2[512]		3/2[512]		3/2[501]		3/2[501]		3/2[602]		3/2[602]
2f5/2	1/2[510]	3f5/2	1/2[510]	2f5/2	1/2[521]	2f5/2	1/2[521]	3d5/2	1/2[631]	3d5/2	1/2[631]
	3/2[501]		3/2[501]		3/2[512]		3/2[512]		3/2[622]		3/2[622]
	5/2[503]		5/2[503]		5/2[503]		5/2[503]		5/2[613]		5/2[613]
2f7/2	1/2[541]	3f7/2	1/2[541]	2f7/2	1/2[530]	2f7/2	1/2[530]	2g7/2	1/2[620]	2g7/2	1/2[620]
	3/2[532]		3/2[532]		3/2[521]		3/2[521]		3/2[611]		3/2[611]
	5/2[523]		5/2[523]		5/2[512]		5/2[512]		5/2[602]		5/2[602]
	7/2[514]		7/2[514]		7/2[503]		7/2[503]		7/2[604]		7/2[604]
1h9/2	1/2[530]	1h9/2	1/2[530]	1h9/2	1/2[541]	1h9/2	1/2[541]	2g9/2	1/2[651]	2g9/2	1/2[651]
	3/2[521]		3/2[521]		3/2[532]		3/2[532]		3/2[642]		3/2[642]
	5/2[512]		5/2[512]		5/2[523]		5/2[523]		5/2[633]		5/2[633]
	7/2[503]		7/2[503]		7/2[514]		7/2[514]		7/2[624]		7/2[624]
	9/2[505]		9/2[505]		9/2[505]		9/2[505]		9/2[615]		9/2[615]
1i13/2	1/2[660]	1h11/2	1/2[550]	1i13/2	1/2[660]	1h11/2	1/2[550]	1i11/2	1/2[640]	1i11/2	1/2[640]
	3/2[651]		3/2[541]		3/2[651]		3/2[541]		3/2[631]		3/2[631]
	5/2[642]		5/2[532]		5/2[642]		5/2[532]		5/2[622]		5/2[622]
	7/2[633]		7/2[523]		7/2[633]		7/2[523]		7/2[613]		7/2[613]
	9/2[624]		9/2[514]		9/2[624]		9/2[514]		9/2[604]		9/2[604]
	11/2[615]		11/2[505]		11/2[615]		11/2[505]		9/2[604]		9/2[604]
	13/2[606]				13/2[606]				11/2[606]		11/2[606]
								1j15/2	1/2[770]	1i13/2	1/2[660]
									3/2[761]		3/2[651]
									5/2[752]		5/2[642]
									7/2[743]		7/2[633]
									9/2[734]		9/2[624]
									11/2[725]		11/1[615]
									13/2[716]		13/2[606]
									15/2[707]		

3.2 Η περιγραφή ενός πυρήνα στο πλαίσιο της **proxy-SU(3)**

Ας θεωρηθεί ο πυρήνας του Μολυβδαινίου ${}_{42}^{96}\text{Mo}_{54}$. Ο πυρήνας αυτός έχει 42 πρωτόνια. Ο χαμηλότερος φλοιός κλείνει στα 28 πρωτόνια, δηλαδή το Μολυβδάνιο έχει 14 πρωτόνια σθένους τα οποία ανήκουν στον φλοιό 28-50. Σύμφωνα με την αντικατάσταση της *proxy-SU(3)* τα τροχιακά $1g_{9/2}$ πρέπει να αντικατασταθούν με τα τροχιακά $1f_{7/2}$. Με αυτόν τον τρόπο δημιουργείται ένας φλοιός με 28-48 πρωτόνια, δηλαδή με 20 τροχιακά. Η άλγεβρα συμμετρίας αυτού του φλοιού είναι η $U(10)$. Τα 14 πρωτόνια σθένους του Μολυβδαινίου καταλαμβάνουν 7 τροχιακά σε ένα φλοιό 10 τροχιακών. Συνεπώς το διάγραμμα Young για τα πρωτόνια είναι $[f] = [2, 2, 2, 2, 2, 2, 0, 0, 0]$.

Για την περιγραφή του πυρήνα με την χρήση της $SU(3)$ συμμετρίας πρέπει να βρεθεί η κύρια μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση της $SU(3)$ η οποία είναι και μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση της $U(10)$. Υπάρχουν αρκετές μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις της $U(10)$ οι οποίες είναι και μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις της $SU(3)$. Στο πλαίσιο της *proxy-SU(3)* επιλέγεται αυτή που έχει το μέγιστο βάρος, διότι αντιστοιχεί στο διάγραμμα Young που παρουσιάζει την μεγαλύτερη συμμετρία. Εφόσον τα νουκλεόνια είναι φερμιόνια και υπακούουν στην απαγορευτική αρχή του Pauli, οι κυματοσυναρτήσεις τους πρέπει να είναι όσο το δυνατόν πιο αντισυμμετρικές. Επειδή η κυματοσυνάρτηση είναι γινόμενο ενός χωρικού και ενός σπινιορικού μέρους, αν το κομμάτι της αντισυμμετρίας «φορτωθεί» στο σπιν, το χωρικό κομμάτι πρέπει να είναι όσο το δυνατόν πιο συμμετρικό. Αυτό στηρίζεται και από την φύση της ισχυρής πυρηνικής δύναμης. Η μικρή της εμβέλεια ευνοείται όταν τα νουκλεόνια έχουν τη μεγαλύτερη δυνατή χωρική επικάλυψη.

Η εύρεση της μη αναγωγίσιμης αναπαράστασης μεγίστου βάρους περιγράφεται αναλυτικά και αυστηρά στην δημοσίευση των J. P. Draayer, Y. Leschber, S. C. Park and R. Lopez [41]. Ιδιαίτερη σημασία έχει η σειρά πλήρωσης των τροχιακών σε κάθε φλοιό. Είναι φανερό σε ένα ενεργειακό διάγραμμα Nilsson ότι τα τροχιακά έχουν διαφορετική διάταξη αύξουσας ενέργειας σε συνάρτηση με την παραμόρφωση. Δηλαδή τα τροχιακά ακολουθούν διαφορετική σειρά εμφάνισης και πλήρωσης του φλοιού ανάλογα με την παραμόρφωση. Για παράδειγμα στον πρωτονικό φλοιό 28-50 για παραμόρφωση $\epsilon < 0.4$ (περίπου) το τροχιακό $1/2[310]$ έχει χαμηλότερη ενέργεια από το $1/2[440]$ και έτσι συμπληρώνει πιο πριν τον φλοιό, όμως για παραμόρφωση $\epsilon > 0.4$ το $1/2[310]$ έχει υψηλότερη ενέργεια από το $1/2[440]$ και έτσι

εμφανίζεται αργότερα. Η δουλειά των J. P. Draayer, Y. Leschber, S. C. Park and R. Lopez τοποθετεί τα τροχιακά θεωρώντας συμπεριφορά ισοτροπικού αρμονικού ταλαντωτή και για αυτό η σειρά πλήρωσης με αυτό το συλλογιστικό ταυτίζεται με την σειρά πλήρωσης κατά Nilsson για $\epsilon \approx 0.6$, ενώ αποκλίνει για άλλες παραμορφώσεις.

Ο κώδικας της παραπάνω δημοσίευσης τοποθετεί τρία χβάντα στους τρεις άξονες ως εξής: Αρχικά καταχωρεί το μέγιστο πλήθος χβάντων στον άξονα $z'z$ και μετά στους άξονες $x'x$ και $y'y$ δίνοντας προτεραιότητα στον $x'x$. Μετά ακολουθεί η ίδια διαδικασία με τον $x'x$ να προηγείται και τον $z'z$ να έχει προτεραιότητα έναντι του $y'y$ και τέλος ακολουθεί το μοίρασμα των χβάντων στον $y'y$ με τον $z'z$ να έχει προτεραιότητα έναντι του $x'x$. Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται η σειρά εμφάνισης για τον φλοιό 28-50.

Πίνακας 3.3: Πίνακας εμφάνισης των τροχιακών για $\epsilon \approx 0.6$

$K[Nn_z\Lambda]$	(n_z, n_x, n_y)
1/2[330]	(3, 0, 0)
3/2[321]	(2, 1, 0)
1/2[321]	(2, 0, 1)
5/2[312]	(1, 2, 0)
1/2[310]	(1, 1, 1)
3/2[312]	(1, 0, 2)
7/2[303]	(0, 3, 0)
3/2[301]	(0, 2, 1)
1/2[301]	(0, 1, 2)
5/2[303]	(0, 0, 3)

Το επόμενο βήμα για τον υπολογισμό της μη αναγωγίσιμης αναπαράστασης είναι η δημιουργία του τριγώνου Gelfand-Tsetlin που αντιστοιχεί στο $[f] = [2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 0, 0, 0]$. Το τρίγωνο αυτό θα αποτελείται από δέκα γραμμές (όση είναι και η διάσταση της $U(10)$). Κάθε γραμμή θα έχει ένα στοιχείο λιγότερο από την γραμμή που βρίσκεται ακριβώς από πάνω της, έτσι ώστε αρχικά να μειώνονται οι αριθμοί καταλήψης των τροχιακών και στη συνέχεια οι άδειες θέσεις που συμβολίζονται με μηδέν.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
& 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
& & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
& & & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
& & & & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
& & & & & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
& & & & & & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
& & & & & & & 2 & 0 & 0 & 0 \\
& & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\
& & & & & & & & & 0 & 0 \\
& & & & & & & & & & 0
\end{array}$$

Στη συνέχεια υπολογίζονται τα αθροίσματα των στοιχείων κάθε γραμμής. Το άθροισμα είναι : $\Sigma_1 = 14, \Sigma_2 = 12, \Sigma_3 = 10, \Sigma_4 = 8, \Sigma_5 = 6, \Sigma_6 = 4, \Sigma_7 = 2, \Sigma_8 = 0, \Sigma_9 = 0, \Sigma_{10} = 0$. Το διάνυσμα βάρους του διαγράμματος $[f]$ είναι το:

$$w = (\Sigma_1 - \Sigma_2, \Sigma_2 - \Sigma_3, \Sigma_3 - \Sigma_4, \dots, \Sigma_9 - \Sigma_{10}, \Sigma_{10}) = (2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 0, 0, 0). \quad (3.1)$$

Το κάθε στοιχείο δείχνει το πόσα κβάντα έχουν τοποθετηθεί σε κάθε τροχιακό. Η σειρά είναι αυτή του πίνακα 3.3. Το συνολικό πλήθος σε κάθε άξονα είναι:

$$n_z = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 20, \quad (3.2)$$

$$n_x = 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 3 = 14, \quad (3.3)$$

$$n_y = 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 0 = 8. \quad (3.4)$$

Το διάγραμμα Young της μη αναγωγίσιμης αναπαράστασης της $[f]$ είναι το $[f] = (f_1, f_2, f_3) = (20, 14, 8)$. Τα (λ, μ) βρίσκονται από την σχέση:

$$(\lambda, \mu) = (f_1 - f_2, f_2 - f_3) \quad (3.5)$$

και έτσι η μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση της $U(10)$ που αντιστοιχεί σε τροχιακά που έχουν καταλάβει επτά από τις δέκα θέσεις (τα πρωτόνια σθένους του Μολυβδαινίου) και έχει $SU(3)$ συμμετρία είναι η $(\lambda, \mu) = (6, 6)$.

Με παρόμοιο τρόπο μπορεί να γίνει η διαχείριση των νετρονίων του Μολυβδαινίου. Τα συνολικά νετρόνια αυτού του πυρήνα είναι 54 και έτσι τα νετρόνια σθένους είναι 4. Ο φλοιός 50-82 μετά την εφαρμογή της *proxy-SU(3)* προσεγγίζεται με έναν *sdg* φλοιό αρμονικού ταλαντωτή με $U(15)$ συμμετρία. Η μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση της $U(15)$ η οποία αντιστοιχεί σε τροχιακά τα οποία έχουν καταλάβει 2 από τις 15 θέσεις είναι η $(12, 2)$.

Ο πυρήνας ${}_{42}^{96}\text{Mo}_{54}$ μπορεί πλέον να περιγραφεί από την μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση της $SU(3)$:

$$(\lambda, \mu) = (\lambda_{\pi}, \mu_{\pi}) + (\lambda_{\nu}, \mu_{\nu}) = (\lambda_{\pi} + \lambda_{\nu}, \mu_{\pi} + \mu_{\nu}) \rightarrow (6, 6) + (12, 2) = (18, 8) \quad (3.6)$$

Στον παρακάτω πίνακα εμφανίζονται οι παραγματικοί πυρηνικοί φλοιοί μαζί με τις αντίστοιχες άλγεβρες που προκύπτουν στην *proxy-SU(3)* θεώρηση.

Πίνακας 3.4: Αντιστοίχιση φλοιών με άλγεβρες συμμετρίας

Πυρηνικός φλοιός	Φλοιός αρμονικού ταλαντωτή	Συμμετρία
28 – 50	<i>pf</i>	$U(10)$
50 – 82	<i>sdg</i>	$U(15)$
82 – 126	<i>pfh</i>	$U(21)$
126 – 184	<i>sdgi</i>	$U(28)$

3.3 Υπολογισμοί **Nilsson** για το πρότυπο των φλοιών και την **proxy-SU(3)**

Ένα ερώτημα που ανακύπτει είναι αν η *proxy-SU(3)* αποτελεί καλή προσέγγιση του κάθε φλοιού. Δηλαδή το κατά πόσο τα τροχιακά που χρησιμοποιούνται με την $0[110]$ αντικατάσταση προσομοιάζουν την αλληλεπίδραση των τροχιακών που αντικατέστησαν με τα υπόλοιπα τροχιακά του φλοιού. Μία θετική ένδειξη προέρχεται από την μεγάλη χωρική ομοιότητα που παρουσιάζουν τα $0[110]$ αδελφά τροχιακά. Για την ποσοτική όμως δικαιολόγηση απαιτούνται εκτεταμένοι υπολογισμοί **Nilsson** μέσω των οποίων θα μπορούν να συγκριθούν οι αλληλεπιδράσεις των τροχιακών σε κάθε φλοιό στην ακριβή (σύμφωνα με το πρότυπο των φλοιών) θεώρηση και την *proxy-SU(3)* [26].

3.3. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ NILSSON ΓΙΑ ΤΟ ΠΡΟΤΥΠΟ ΤΩΝ ΦΛΟΙΩΝ ΚΑΙ ΤΗΝ PROXY-SU(3) 49

3.3.1 Υπολογισμός των στοιχείων πίνακα

Το πρότυπο Nilsson (που παρουσιάστηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο) έχει κυλινδρική συμμετρία με άξονα συμμετρίας τον z' . Για το xy επίπεδο ορίζουμε τους τελεστές δημιουργίας και καταστροφής $a_x^\dagger, a_x, a_y^\dagger, a_y$ οι οποίοι δημιουργούν και καταστρέφουν χβάντα αρμονικού ταλαντωτή στις x και y συντεταγμένες. Μέσω αυτών ορίζονται οι εξής συντελεστές δημιουργίας και καταστροφής:

$$R^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x^\dagger + ia_y^\dagger), \quad R = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x - ia_y), \quad (3.7)$$

$$S^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x^\dagger - ia_y^\dagger), \quad S = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x + ia_y), \quad (3.8)$$

οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις μετάθεσης:

$$[R^\dagger, R] = [S^\dagger, S] = 1. \quad (3.9)$$

Με αυτό τον τρόπο εισάγεται μία νέα βάση $|n_z r s \Sigma\rangle$, όπου r είναι ο αριθμός των χβάντων στη διεύθυνση του R , s ο αριθμός των χβάντων στη διεύθυνση του S και για τα οποία ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$n_\perp = r + s = N - n_z, \quad \Lambda = r - s, \quad (3.10)$$

όπου n_\perp είναι ο αριθμός των χβάντων σε διεύθυνση κάθετη στον z' άξονα. Η αντιστοιχία ανάμεσα στην βάση $K[Nn_z, \Lambda]$ και την ασυμπτωτική βάση $|n_z r s \Sigma\rangle$ για κάθε φλοιό μετά την proxy-SU(3) αντικαταστάση δίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Πίνακας 3.5: Αντιστοίχιση τροχιακών ανάμεσα στην κλασική βάση και την ασυμπωτική βάση

$K[Nn_z\Lambda]$	$ n_zrs\Sigma\rangle$	$K[Nn_z\Lambda]$	$ n_zrs\Sigma\rangle$	$K[Nn_z\Lambda]$	$ n_zrs\Sigma\rangle$
pf	pf	pfh	pfh	sdgi	sdgi
1/2[301]	021-	1/2[501]	032-	1/2[611]	132-
1/2[321]	210-	1/2[521]	221-	1/2[600]	033+
3/2[312]	120-	3/2[512]	131-	3/2[602]	042-
1/2[310]	111+	1/2[510]	122+	1/2[631]	321-
3/2[301]	021+	3/2[501]	032+	3/2[622]	231-
5/2[303]	030-	5/2[503]	041-	5/2[613]	141-
1/2[330]	300+	1/2[541]	410-	1/2[620]	222+
3/2[321]	210+	3/2[532]	320-	3/2[611]	132+
5/2[312]	120+	5/2[523]	230-	5/2[602]	042+
7/2[303]	030+	7/2[514]	140-	7/2[604]	051-
		1/2[530]	311+	1/2[651]	510-
sdg	sdg	3/2[521]	221+	3/2[642]	420-
1/2[400]	022+	5/2[512]	131+	5/2[633]	330-
1/2[411]	121-	7/2[503]	041+	7/2[624]	240-
3/2[402]	031-	9/2[505]	050-	9/2[615]	150-
1/2[420]	211+	1/2[550]	500+	1/2[640]	411+
3/2[411]	121+	3/2[541]	410+	3/2[631]	321+
5/2[402]	031+	5/2[532]	320+	5/2[622]	231+
1/2[431]	310-	7/2[523]	230+	7/2[613]	141+
3/2[422]	220-	9/2[514]	140+	9/2[604]	051+
5/2[413]	130-	11/2[505]	050+	11/2[606]	060-
7/2[404]	040-			1/2[660]	600+
1/2[440]	400+	pfhj	pfhj	3/2[651]	510+
3/2[431]	310+	1/2[770]	700+	5/2[642]	420+
5/2[422]	220+	3/2[761]	610+	7/2[633]	330+
7/2[413]	130+	5/2[752]	520+	9/2[624]	240+
9/2[404]	040+	7/2[743]	430+	11/2[615]	150+
		9/2[734]	340+	13/2[606]	060+
		11/2[725]	250+		
		13/2[716]	160+		
		15/2[707]	070+		

3.3. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ NILSSON ΓΙΑ ΤΟ ΠΡΟΤΥΠΟ ΤΩΝ ΦΛΟΙΩΝ ΚΑΙ ΤΗΝ PROXY-SU(3) 51

Τα στοιχεία πίνακα του τελεστή $l \cdot s$ δίνονται από τις σχέσεις:

$$\langle n_z r s \Sigma | l \cdot s | n_z r s \Sigma \rangle = (r - s)\Sigma = \Lambda \Sigma, \quad (3.11)$$

$$\langle n_z - 1, r + 1, s, \Sigma - 1 | l \cdot s | n_z r s \Sigma \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{n_z(r+1)}, \quad (3.12)$$

$$\langle n_z + 1, r, s - 1, \Sigma - 1 | l \cdot s | n_z r s \Sigma \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(n_z + 1)s}, \quad (3.13)$$

$$\langle n_z + 1, r - 1, s, \Sigma + 1 | l \cdot s | n_z r s \Sigma \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(n_z + 1)r}, \quad (3.14)$$

$$\langle n_z - 1, r, s + 1, \Sigma + 1 | l \cdot s | n_z r s \Sigma \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{n_z(s+1)}, \quad (3.15)$$

ενώ του τελεστή l^2 από τις :

$$\langle n_z r s \Sigma | l^2 | n_z r s \Sigma \rangle = 2n_z(r + s + 1) + (r + s) + (r - s)^2, \quad (3.16)$$

$$\langle n_z + 2, r - 1, s - 1, \Sigma | l^2 | n_z r s \Sigma \rangle = \sqrt{(n_z + 2)(n_z + 1)rs}, \quad (3.17)$$

$$\langle n_z + 2, r - 1, s - 1, \Sigma | l^2 | n_z r s \Sigma \rangle = \sqrt{(n_z - 1)n_z(r + 1)(s + 1)}. \quad (3.18)$$

Με τη χρήση των παραπάνω είναι δυνατή η διαγωνοποίηση της Χαμιλτονιανής (1.25) με αριθμητικές μεθόδους για την εξαγωγή των μονοσωματιδιακών ενεργειών. Είναι φανερό ότι οι ενέργειες θα εξαρτώνται από την παραμόρφωση σύμφωνα με τις εξίσωση (1.30). Να τονιστεί ότι η παραμόρφωση υπεισέρχεται στους υπολογισμούς μέσω του όρου του αρμονικού ταλαντωτή.

Για την σύγκριση των δύο θεωρήσεων (του κλασικού προτύπου των φλοιών και της proxy-SU(3)) μέσω της Nilsson Χαμιλτονιανής πραγματοποιήθηκαν διαγωνοποιήσεις της (1.25) για παραμόρφωση $0,15 < \epsilon < 0,6$ με τις αντίστοιχες κυματοσυναρτήσεις που εκφράζουν το κάθε πρότυπο. Στην έκφραση των ιδιοτιμών του αρμονικού ταλαντωτή $E_{osc} = \hbar\omega_0(N + \frac{3}{2} - \frac{1}{3}\epsilon(3n_z - N))$ απαιτείται στην περίπτωση της proxy-SU(3) η πρόσθεση του όρου $1 - \frac{2}{3}\epsilon$ στα τροχιακά που έρχονται από τον χαμηλότερο φλοιό και αντικαθιστούν τα 0[110] αδερφά τροχιακά αντίθετης ομοτιμίας του φλοιού υπό θεώρηση. Δηλαδή τα τροχιακά αντικαστάτες έχουν στοιχεία πίνακα για τον όρο που προέρχεται από τις ιδιοενέργειες του αρμονικού ταλαντωτή:

$$E_{osc} = \hbar\omega_0(N + \frac{3}{2} - \frac{1}{3}\epsilon(3n_z - N) + 1 - \frac{2}{3}\epsilon). \quad (3.19)$$

Στις επόμενες σελίδες παρουσιάζονται τα στοιχεία πίνακα για τους τελεστές $l \cdot s$ και l^2 , καθώς και για την Χαμιλτονιανή (για παραμόρφωση $\epsilon = 0,3$). Στο πάνω μέρος βρίσκονται οι σχετικοί πίνακες για τον φλοιό 50-82 ενώ στον κάτω οι πίνακες στοιχείων που προκύπτουν μετά την *proxy-SU(3)* προσέγγιση (*sdg* φλοιός). Οι υπολογισμοί έχουν γίνει κανονικοποιώντας ως προς $\hbar\omega$. Όλοι οι πίνακες είναι χωρισμένοι σε δύο μπλόκ. Το πάνω αριστερά μπλόκ αφορά τα τροχιακά που παραμένουν αμετάβλητα με την αντικατάσταση ενώ τα υπόλοιπα εκφράζουν την αλληλεπίδραση των τροχιακών που αντικαθίστανται μεταξύ τους και με τα υπόλοιπα. Λόγω συμμετρίας απεικονίζεται μόνο το πάνω κομμάτι των πινάκων.

Με βολδ γραφή στους πίνακες που αφορούν την *proxy-SU(3)* παρουσιάζονται τα στοιχεία που επηρεάζονται από την αντικατάσταση. Επιπλέον στοιχεία πίνακα εμφανίζονται μόνο στο μπλοκ πάνω δεξιά και κάτω αριστερά στους πίνακες που αφορούν την *proxy-SU(3)*. Αυτό είναι αποτέλεσμα της αλλαγής των κβαντικών αριθμών στα αντικατεστημένα τροχιακά. Τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου (στο κάτω δεξιά μπλοκ) επηρεάζονται πολύ λίγο. Να σημειωθεί ακόμη ότι η περίπτωση που παρουσιάζεται είναι η χειρότερη δυνατή. Στον *sdg* φλοιό τα επιπλέον στοιχεία αποτελούν το 8,4% των συνολικών στοιχείων πίνακα. Στον *pfh* φλοιό το ποσοστό πέφτει στο 5,4% και στον *sdgi* στο 3,7%.

3.3.2 Ενεργειακά διαγράμματα **Nilsson**

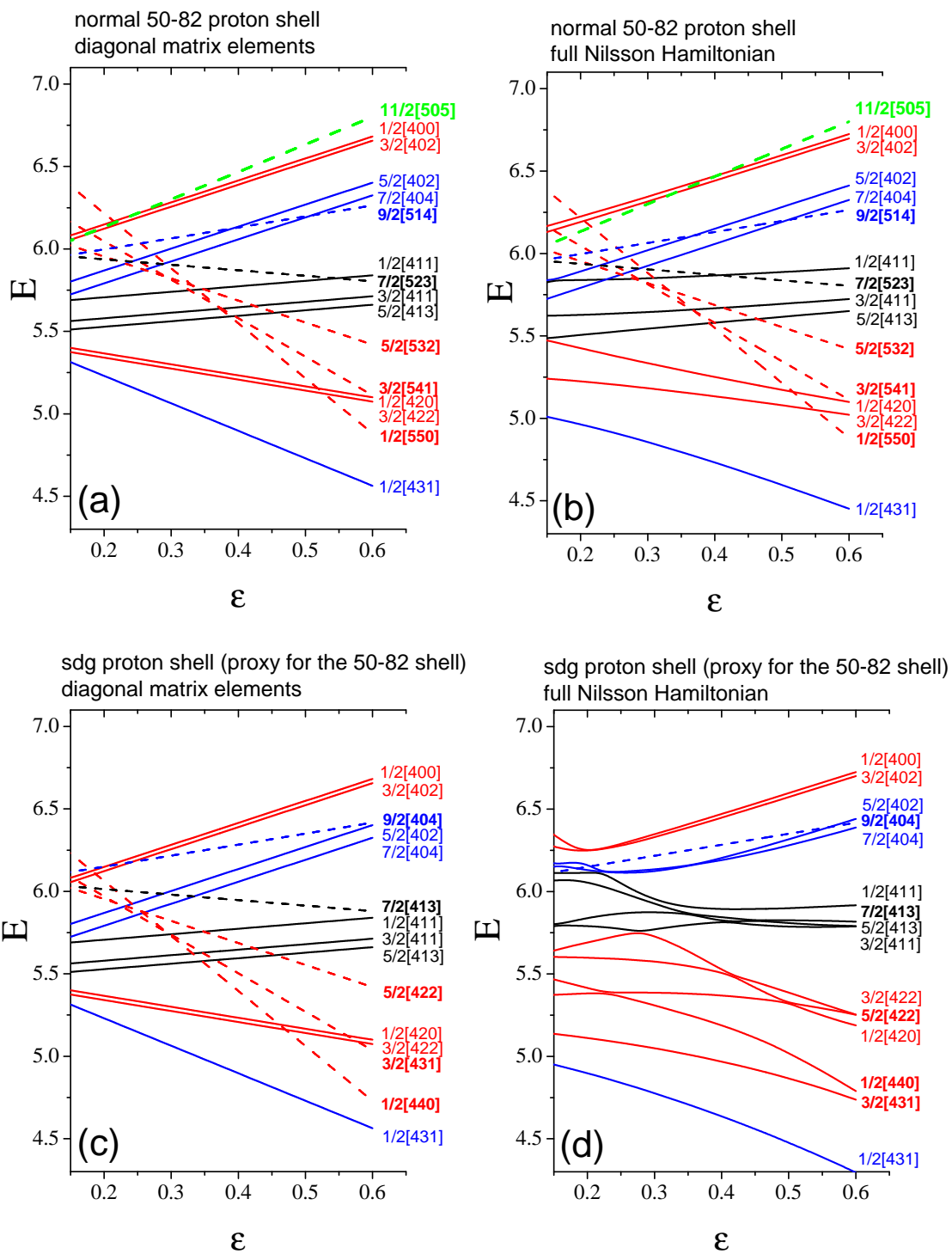
Μετά την διαγωνοποίηση των σχετικών πινάκων είναι εύκολη η δημιουργία των σχετικών ενεργειακών διαγραμμάτων Nilsson συναρτήσει της παραμόρφωσης. Στις επόμενες σελίδες παρουσιάζονται τα ενεργειακά διαγράμματα για τους φλοιούς 50-82 (πρωτονίων) και 82-126 (νετρονίων) καθώς και για τις proxy-SU(3) προσεγγίσεις τους.

Τα διαγράμματα 3.1 (a) και 3.2 (a) δείχνουν τη συμπεριφορά των διαγώνιων στοιχείων πίνακα (που επηρεάζουν σε σημαντικό βαθμό την ενέργεια) για τους φλοιούς 50-82 και 82-126 αντίστοιχα. Τα διαγράμματα 3.1 (c) και 3.2 (c) παρουσιάζουν την συμπεριφορά των αντίστοιχων στοιχείων για τους φλοιούς *sdg* και *pfh*. Τα διαγράμματα 3.1 (b) και 3.2 (b) δείχνουν τη ενεργειακή συμπεριφορά κάθε τροχιακού λόγω διαγωνοποίησης της Χαμιλτονιανής για τους φλοιούς 50-82 και 82-126 αντίστοιχα. Τα διαγράμματα 3.1 (d) και 3.2 (d) παρουσιάζουν την συμπεριφορά των αντίστοιχων τροχιακών για τους φλοιούς *sdg* και *pfh*.

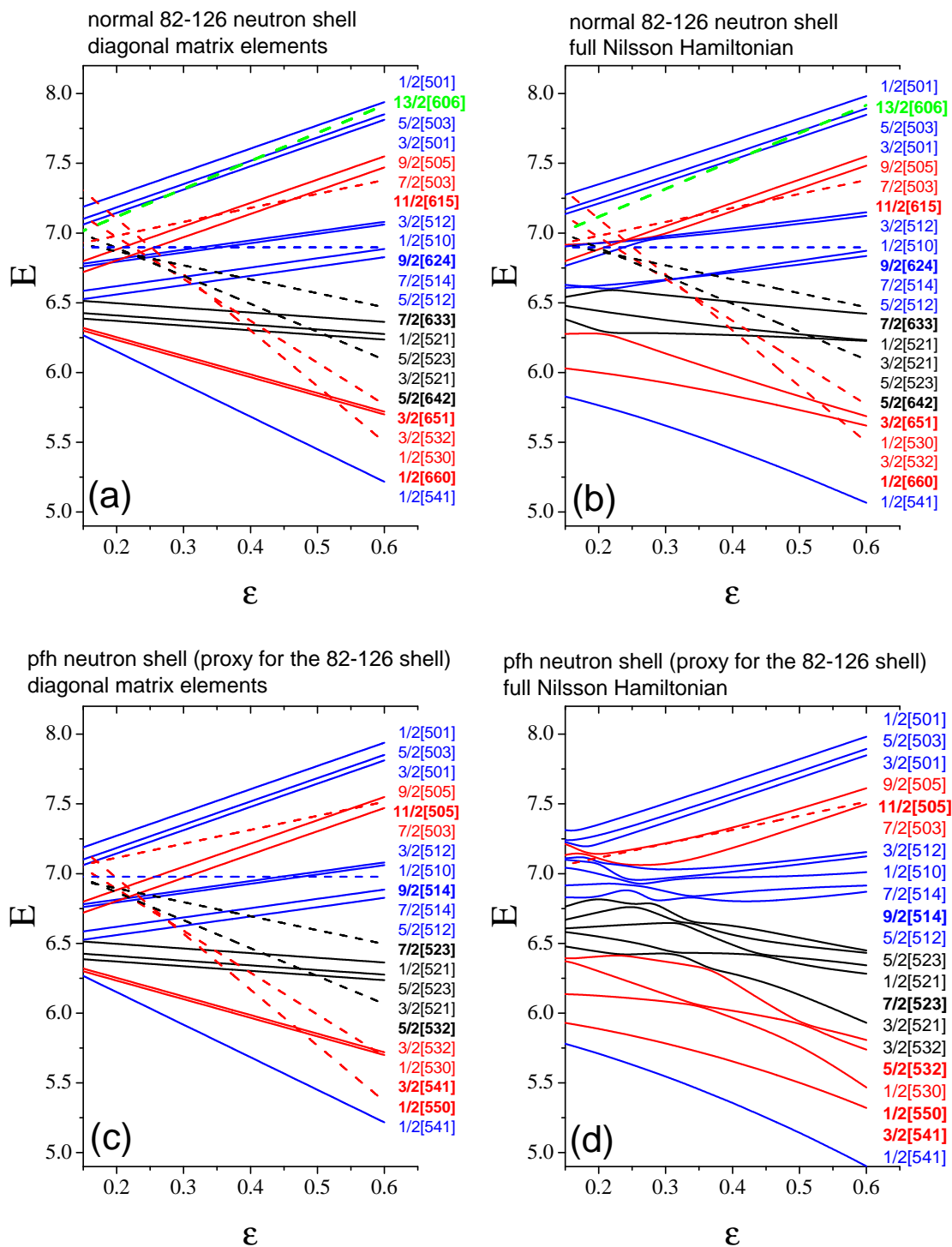
Να σημειωθεί ότι τα διαγράμματα που ακολουθούν δεν είναι τα συνηθισμένα στη βιβλιογραφία διαγράμματα Nilsson, διότι στον σχετικό υπολογισμό έχει χρησιμοποιηθεί η ασυμπτωτική βάση Nilsson. Αυτός είναι ο λόγος που δεν εμφανίζονται τα αποτελέσματα για μικρές παραμορφώσεις.

Στο διάγραμμα 3.1 (a) με συνεχείς γραμμές απεικονίζονται τα τροχιακά που έχουν την κύρια ομοτιμία του φλοιού, ενώ με διακεκομμένες τα τροχιακά που εισβάλλουν στον φλοιό από τον ανώτερο ενεργειακά και έχουν αντίθετη ομοτιμία. Στο αντίστοιχο διάγραμμα 3.1 (c) για τον *sdg* φλοιό με διακεκομμένες γραμμές παρουσιάζονται τα τροχιακά αντικαταστάτες $0[110]$. Είναι φανερό ότι η συμπεριφορά των τροχιακών και στις δύο θεωρήσεις είναι όμοια. Η σύγκριση των διαγραμμάτων 3.1 (b) και 3.1 (d) έχει ως αποτέλεσμα παρόμοια συμπεράσματα. Μόνο που στην περίπτωση αυτή οι προσθήκη των όρων l^2 και $l \cdot s$ δημιουργεί απαγορευμένες διασταυρώσεις οι οποίες φαίνονται στα διαγράμματα. Παρόμοια συμπεράσματα μπορούν να εξαχθούν και από τα αντίστοιχα διαγράμματα για τον φλοιό (νετρονίων) 82-126.

3.3. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ NILSSON ΓΙΑ ΤΟ ΠΡΟΤΥΠΟ ΤΩΝ ΦΛΟΙΩΝ ΚΑΙ ΤΗΝ PROXY-SU(3) 57



Σχήμα 3.1: Ενεργειακά διαγράμματα Nilsson για τον φλοιό 50-82



Σχήμα 3.2: Ενεργειακά διαγράμματα Nilsson για τον φλοιό 82-126

3.4. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ NILSSON ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΦΛΟΙΟΥΣ 28-50, 50-82, 82-126, 126-184 59

Η μορφή των πινάκων της Χαμιλτονιανής Nilsson και τα σχετικά ενεργειακά διαγράμματα που συγκρίνουν τους πραγματικούς φλοιούς και τους αντίστοιχους που προκύπτουν με την proxy-SU(3) δείχνουν ότι πράγματι η συγκεκριμένη προσέγγιση έχει μικρή απόκλιση από την κλασική θεώρηση του προτύπου των φλοιών. Αυτό το συμπέρασμα θεμελιώνεται από τα ελάχιστα επιπλέον στοιχεία στους πίνακες και την μικρή “διαταραχή” των στοιχείων της κύριας διαγωνίου. Αποτέλεσμα αυτού είναι τα ενεργειακά διαγράμματα να παρομοιάζουν παρόμοιες συμπεριφορές για κάθε τροχιακό και να δικαιολογούν την 0[110] αντικατάσταση.

Ο κύριος λόγος ο οποίος καθιστά ποιοτικά σωστή την προσέγγιση είναι το ότι τα τροχιακά που αντικαθίστανται με τους 0[110] αντικαταστάτες τους έχουν την ίδια τιμή του σπιν, της τροχιακής στροφορμής και της ολικής στροφορμής. Οι εξισώσεις 3.11 -3.18 δείχνουν την σημασία του κβαντικών αριθμών r και s για τον υπολογισμό των στοιχείων πίνακα. Οι αριθμοί παραμένουν αμετάβλητοι από την αντικατάσταση διότι οι αριθμοί N και n_z αλλάζουν ταυτόχρονα κατά μία μονάδα. Αυτό φαίνεται επιλύοντας τις σχέσεις 3.10 οι οποίες δίνουν:

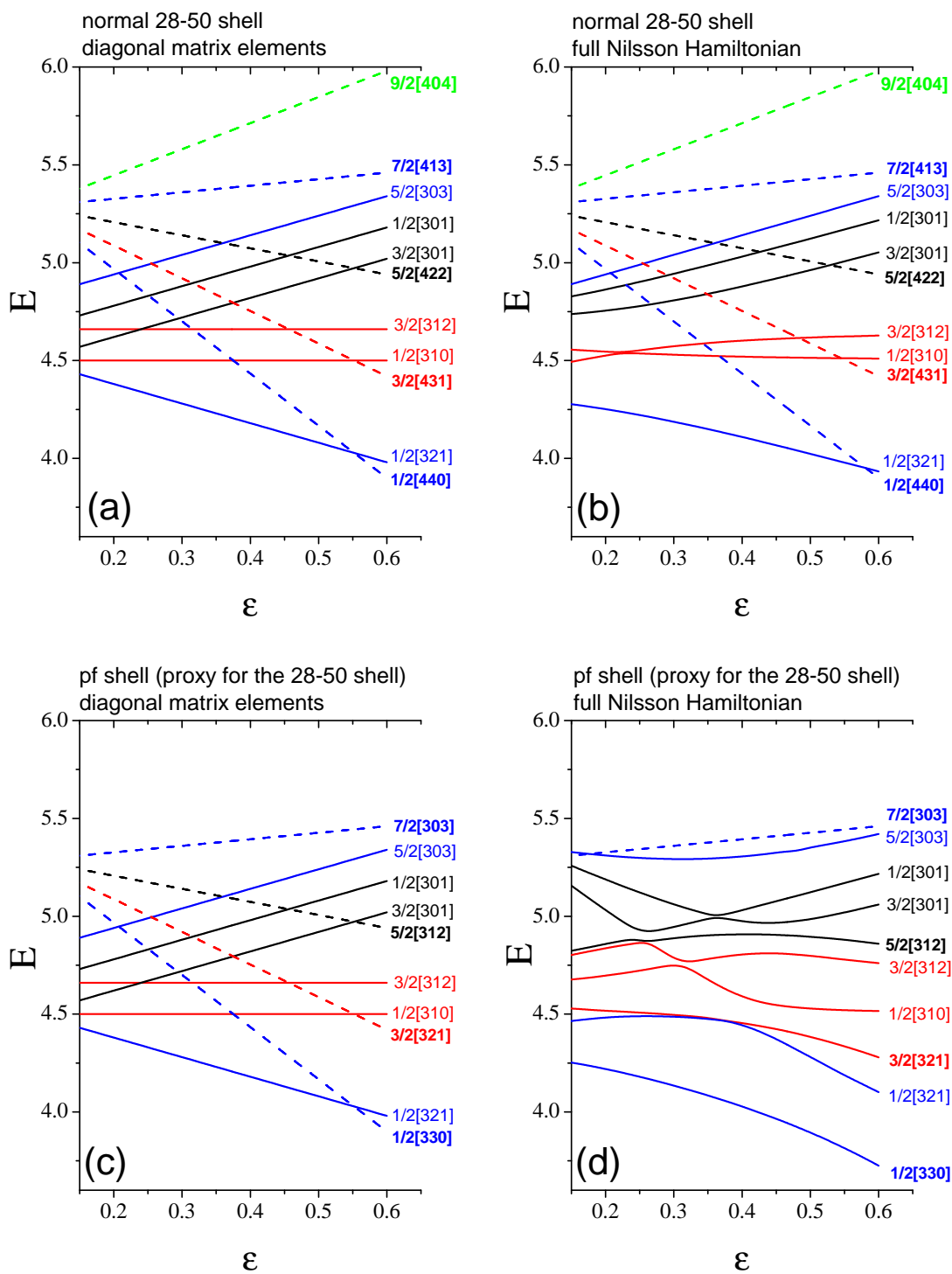
$$r = \frac{N - n_z + \Lambda}{2}, \quad (3.20)$$

$$s = \frac{N - n_z - \Lambda}{2}. \quad (3.21)$$

Δεδομένου ότι η αντικατάσταση των τροχιακών είναι ποιοτικά καλή όπως δείχθηκε, η περιγραφή του κάθε πυρήνα συλλογικά με το καινούργιο σύνολο καταστάσεων είναι δικαιολογημένη. Τα καινούργια σύνολα καταστάσεων συγκροτούν ουσιαστικά ένα φλοιό αρμονικού ταλαντωτή ο οποίος λόγω της U(N) συμμετρίας που έχει οδηγεί στην επιλογή της κατάλληλης SU(3) υποάλγεβρας και της αντίστοιχης μη αναγωγίσιμης αναπαράστασης όπως δείχθηκε παραπάνω.

3.4 Υπολογισμοί και διαγράμματα Nilsson για τους φλοιούς 28-50, 50-82, 82-126, 126-184

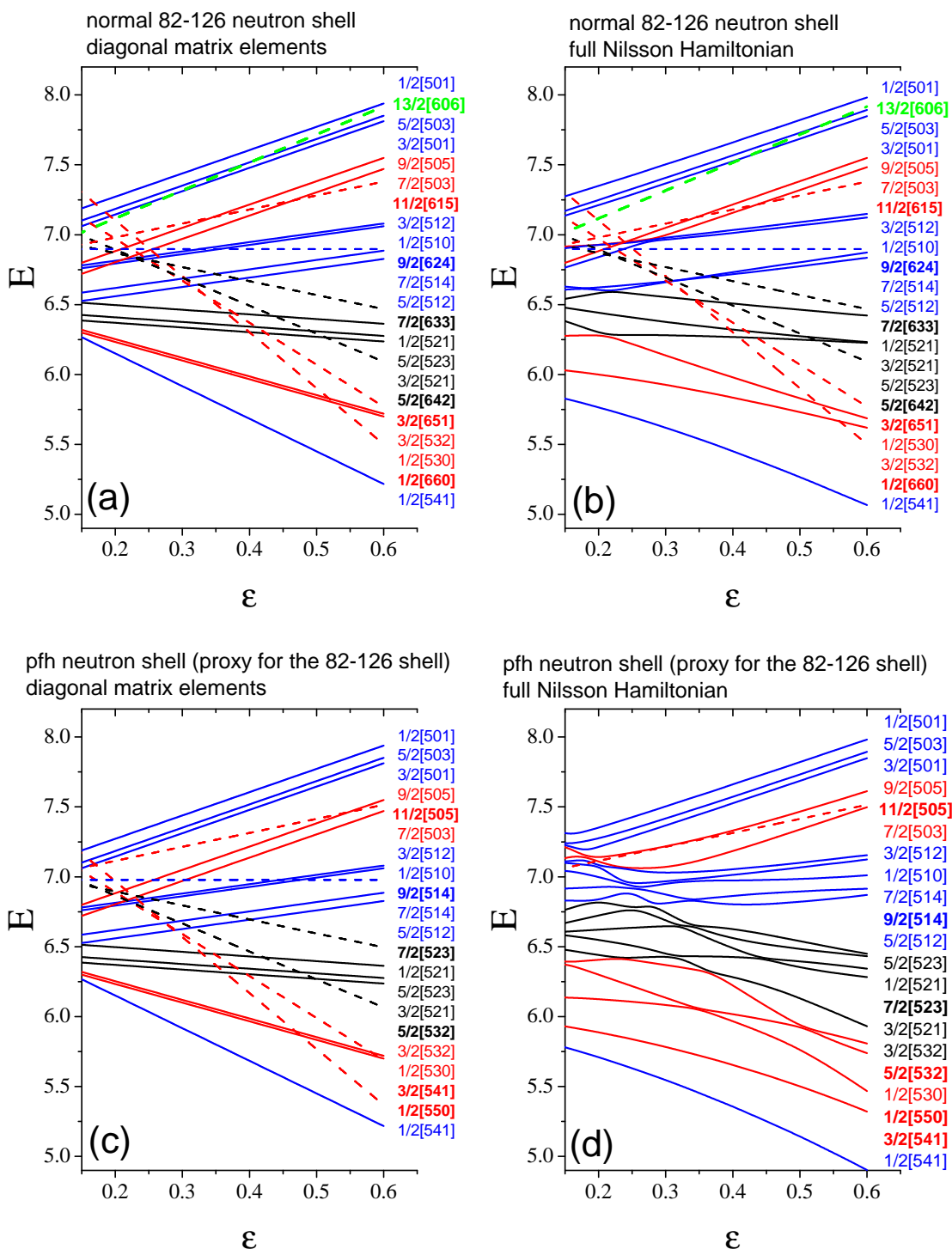
3.4. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ NILSSON ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΦΛΟΙΟΥΣ 28-50, 50-82, 82-126, 126-184 61



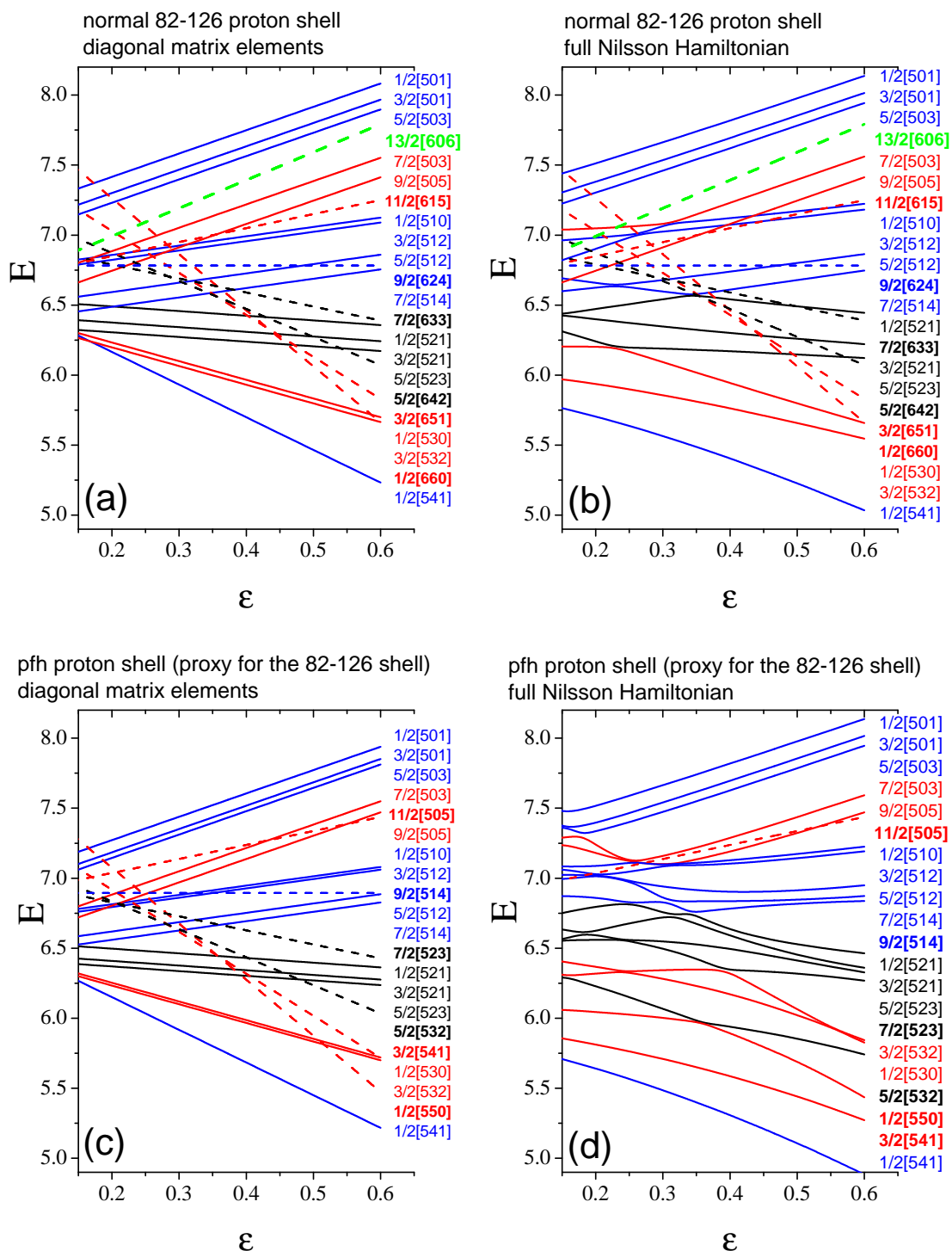
Σχήμα 3.3: Ενεργειακά διαγράμματα Nilsson για τον φλοιό 28-50

3.4. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ NILSSON ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΦΛΟΙΟΥΣ 28-50, 50-82, 82-126, 126-184 63

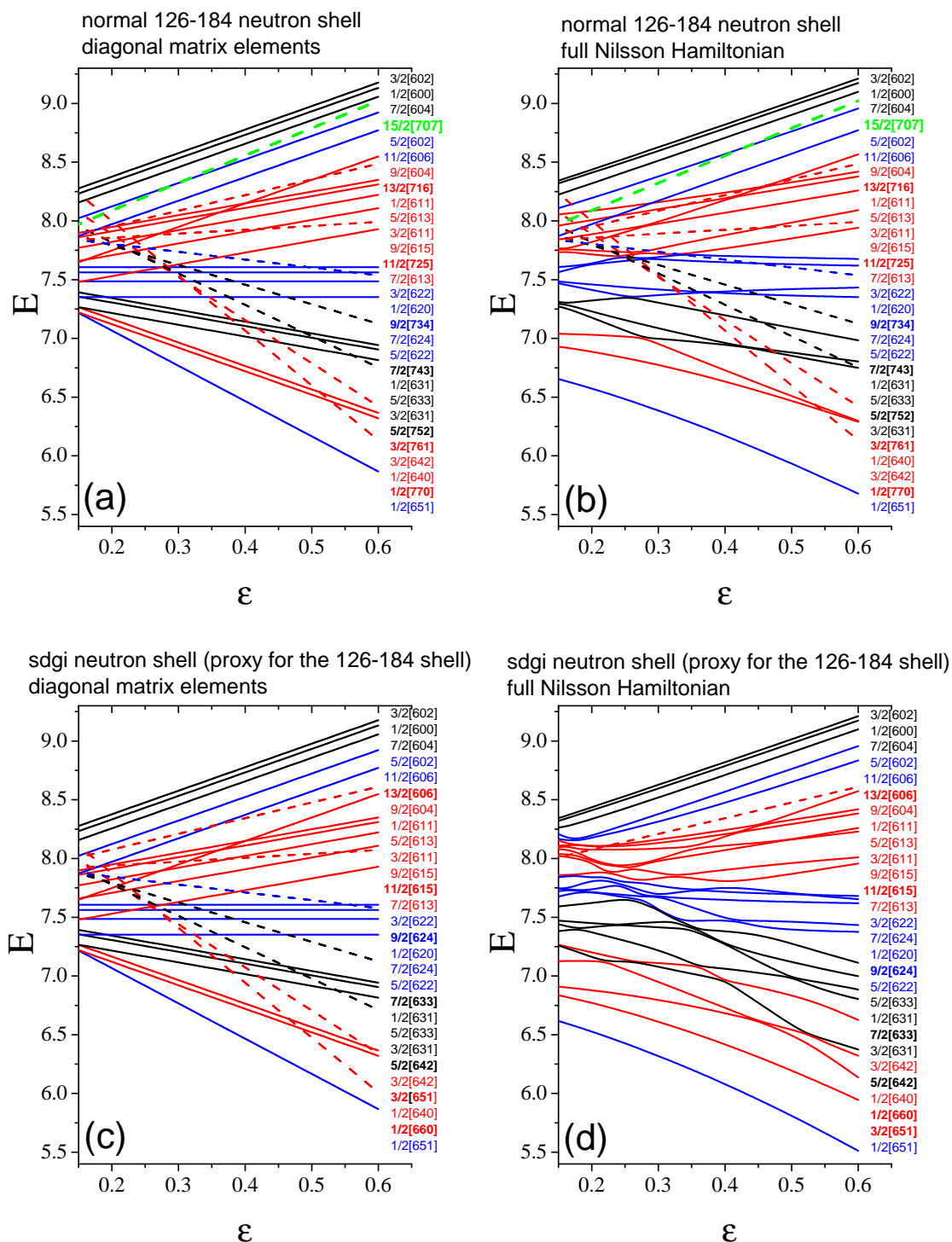
Σχήμα 3.5: Ενεργειακά διαγράμματα Nilsson για τον φλοιό 82-126 (νετρόνια)



Σχήμα 3.6: Ενεργειακά διαγράμματα Nilsson για τον φλοιό 82-126 (πρωτόνια)



Σχήμα 3.8: Ενεργειακά διαγράμματα Nilsson για τον φλοιό 126-184 (νετρόνια)



Κεφάλαιο 4

Η περιγραφή των πυρηνικών σχημάτων στο πλαίσιο της **proxy-SU(3)**

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον στο πεδίο της πυρηνικής δομής παρουσιάζει η μελέτη του σχήματος του πυρήνα. Το σχήμα ενός ατομικού πυρήνα καθορίζει τις επιτρεπόμενες ενεργειακές στάθμες καθώς και άλλες ιδιότητες και μετρήσιμα μεγέθη. Στη θεμελιώδη ενέργεια η πληθώρα των πυρήνων βρίσκεται σε σφαιρικό σχήμα ή επιμηκυμένο (δύο μικροί ίσοι άξονες συμμετρίας και ένας μεγάλος). Ορισμένοι πυρήνες έχουν πεπλατυσμένο σχήμα (ένας μικρός άξονας συμμετρίας και δύο ίσοι μεγάλοι).

Συγκεκριμένοι πυρήνες, για δεδομένο ατομικό αριθμό Z μεταβάλλουν το σχήμα τους από επιμηκυμένο σε πεπλατυσμένο και αντίστροφα με την αλλαγή του αριθμού των νετρονίων. Έντονο ενδιαφέρον παρουσιάζει επίσης το φαινόμενο της συνύπαρξης των πυρηνικών σχημάτων σε δεδομένες περιοχές του πυρηνικού χάρτη. Αυτή η συνύπαρξη μπορεί να αφορά διαφορετικά πυρηνικά σχήματα (επιμηκυμένο-πεπλατυσμένο) ή ίδιου τύπου σχήματα (επιμηκυμένο-επιμηκυμένο) με διαφορετικά μήκη αξόνων. Σε αυτό το κεφάλαιο μελετάται μέσω της **proxy-SU(3)** το πρώτο φαινόμενο καθώς και η κυριαρχία των επιμηκυμένων σχημάτων έναντι των πεπλατυσμένων [27]. Η μελέτη γίνεται χωρίς την χρήση παραμέτρων. Οδηγός είναι οι μη αναγωγίσιμες αναπαράστασεις που περιγράφουν τους πυρήνες στο πλαίσιο της **proxy-SU(3)**. Μέσω αυτών υπολογίζονται πυρηνικά μεγέθη των οποίων οι πειραματικές μετρήσεις δίνουν πληροφορία για τα πυρηνικά σχήματα.

68ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. Η ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΩΝ ΠΥΡΗΝΙΚΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΣΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΗΣ *PROXY-SU(3)*

4.1 Η περιγραφή των μεταβλητών παραμόρφωσης μέσω των μη αναγωγίσιμων αναπαραστάσεων (λ, μ)

Η σύνδεση των μεταβλητών β, γ που περιγράφουν την παραμόρφωση στο συλλογικό μοντέλο με τις μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις της $SU(3)$ επιτυγχάνεται από την φυσικά λογική απαίτηση, οι ιδιοτιμές των τελεστών που περιγράφουν το σύστημα στη μία θεώρηση να σχετίζονται γραμμικά με τις ιδιοτιμές των τελεστών της άλλης θεώρησης [42].

Οι τελεστές της στροφορμής και της τετραπολικής παραμόρφωσης μάζας του χβαντικού περιστροφέα για τον χβαντικό περιστροφέα είναι:

$$L_\mu = \int \rho(\bar{r})(\bar{r} \times \bar{u})_\mu d\tau, \quad (4.1)$$

$$Q_\mu^c = \sqrt{\frac{16\pi}{5}} \int \rho(\bar{r}) r^2 Y_{2\mu}(\Omega) d\tau, \quad (4.2)$$

όπου $\rho(\bar{r})$ είναι η πυρηνική πυκνότητα και η ολοκλήρωση πραγματοποιείται σε όλο τον πυρηνικό όγκο.

Οι αντίστοιχες ποσότητες για το πυρηνικό πρότυπο του αρμονικού ταλαντωτή είναι:

$$L_\mu = \sum_{i=1}^A (\bar{r}_i \times \bar{p}_i)_\mu, \quad (4.3)$$

$$Q_\mu^s = \sqrt{\frac{4\pi}{5}} \sum_{i=1}^A [r_i^2 Y_{2\mu}(\Omega_{r_i}) + p_i^2 Y_{2\mu}(\Omega_{p_i})]. \quad (4.4)$$

Στις δύο παραπάνω εξισώσεις η άθροιση πραγματοποιείται στα A νουκλεόνια του πυρήνα και έχει γίνει κανονικοποίηση μονάδων. Οι τελεστές της στροφορμής για τα δύο πρότυπα είναι οι ίδιοι, οι τετραπολικοί τελεστές όμως όχι. Ο κύριος λόγος για αυτό είναι ότι στο πρότυπο των φλοιών η τετραπολική παραμόρφωση λαμβάνεται ανά φλοιό.

Η δυναμική συμμετρία του χβαντικού περιστροφέα είναι η Lie άλγεβρα γινόμενο $T_5 \times SO(3)$ με αντίστοιχη άλγεβρα το ευθύ άθροισμα $\tau_5 + so(3)$. Οι τελεστές Casimir αυτής της άλγεβρας είναι οι εξής:

$$Tr[(Q^c)^2] = \frac{\sqrt{5}}{6} (Q^c \times Q^c)^0 = \frac{1}{6} Q^c Q^c, \quad (4.5)$$

$$Tr[(Q^c)^3] = -\frac{1}{36} \left(\frac{35}{2}\right)^{\frac{1}{2}} (Q^c \times Q^c \times Q^c)^0. \quad (4.6)$$

4.1. Η ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ ΜΕΣΩ ΤΩΝ ΜΗ ΑΝΑΓΩΓΙΣΙΜΩΝ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

Οι ιδιοτιμές των συγκεκριμένων τελεστών εκφράζονται ως συναρτήσεις των αριθμών $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, οι οποίοι χαρακτηρίζουν τις μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις της $T_5 \times \Sigma O(3)$:

$$\langle Tr[(Q^c)^2] \rangle = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2, \quad (4.7)$$

$$\langle Tr[(Q^c)^3] \rangle = 3(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3). \quad (4.8)$$

Οι τελεστές Casimir της $SU(3)$ είναι οι:

$$C_2 = \frac{1}{6} Q^s Q^s + \frac{1}{2} L^2, \quad (4.9)$$

$$C_3 = -\frac{1}{36} \left(\frac{35}{2} \right)^{\frac{1}{2}} (Q^c \times Q^c \times Q^c)^0 - \frac{1}{4} \left(\frac{15}{2} \right)^{\frac{1}{2}} (L \times Q^s \times L)^0. \quad (4.10)$$

Οι ιδιοτιμές αυτών των τελεστών εκφράζονται ως συναρτήσεις των αριθμών λ, μ που περιγράφουν της μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις της $SU(3)$:

$$\langle C_2 \rangle = \frac{2}{3} (\lambda^2 + \lambda \mu + \mu^2 + 3\lambda + 3\mu), \quad (4.11)$$

$$\langle C_3 \rangle = \frac{1}{9} (\lambda - \mu)(\lambda + 2\mu + 3)(2\lambda + \mu + 3). \quad (4.12)$$

Οι ιδιοτιμές του τετροπολικού τελεστή του συλλογικού μοντέλου δίνονται από την επίλυση της εξίσωσης:

$$\lambda_\alpha^3 - q\lambda_\alpha - r = 0, \quad (4.13)$$

όπου

$$q = \frac{1}{2} \langle Tr[(Q^c)^2] \rangle, \quad (4.14)$$

$$r = \frac{1}{3} \langle Tr[(Q^c)^3] \rangle. \quad (4.15)$$

Οι λύσεις αυτής της εξίσωσης μπορούν να γραφούν στη μορφή

$$\lambda_\alpha = 2 \left(\frac{q}{3} \right)^{\frac{1}{3}} \cos \left(\frac{\theta - 2\pi\alpha}{3} \right), \quad (4.16)$$

με $\alpha = 1, 2, 3$ και

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{4q^3}{27r^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.17)$$

70ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. Η ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΩΝ ΠΥΡΗΝΙΚΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΣΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΗΣ *PROXY-SU(3)*

Οι τιμές λ_α μπορούν να παραμετροποιηθούν με τη χρήση των μεταβλητών σχήματος β, γ :

$$\lambda_\alpha = \sqrt{\frac{5}{\pi}} \left[A \frac{r^2}{3} \right] \beta \cos \left(\gamma - \frac{2\pi\alpha}{3} \right). \quad (4.18)$$

Με τη χρήση αυτής της παραμετροποίησης οι Casimir του κβαντικού περιστροφέα μπορούν να γραφούν στη μορφή:

$$\langle Tr[(Q^c)^2] \rangle = \left(\frac{5}{6\pi} \right) (Ar^2)^2 \beta^2, \quad (4.19)$$

$$\langle Tr[(Q^c)^3] \rangle = \left(\frac{5}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \left[\frac{(Ar^2)^3}{36} \right] \beta^3 \cos(3\gamma). \quad (4.20)$$

Η απαίτηση οι ιδιοτιμές των τελεστών που περιγράφουν το σύστημα στη θεώρηση του κβαντικού περιστροφέα να σχετίζονται γραμμικά με τις ιδιοτιμές των τελεστών της $SU(3)$ θεώρησης δίνει:

$$\langle Tr[(Q^c)^2] \rangle = \langle \alpha_1 C_2 + \alpha_2 \rangle, \quad (4.21)$$

$$\langle Tr[(Q^c)^3] \rangle = \langle \alpha_3 C_3 + \alpha_4 C_2 + \alpha_5 \rangle. \quad (4.22)$$

Έτσι για τους αριθμούς λ_α έχουμε:

$$\lambda_\alpha = \sqrt{2\alpha_1 \left(\langle C_2 \rangle + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) \cos \left(\frac{\theta - 2\pi\alpha}{3} \right)}. \quad (4.23)$$

Η παραπάνω σχέση μαζί με τις 4.18, 4.19, 4.20 συνδέουν την $SU(3)$ με τις μεταβλητές β, γ του συλλογικού προτύπου. Μετά από τετριμμένες πράξεις οι εκφράσεις για τις β, γ είναι:

$$\beta = (Ar^2)^{-1} \sqrt{\frac{6\pi}{5} \alpha_1 \left(\langle C_2 \rangle + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)}, \quad (4.24)$$

$$\gamma = \frac{\theta}{3} = \frac{1}{3} \cos^{-1} \left(\frac{\sqrt{6} [\langle C_3 \rangle + (\alpha_4/\alpha_3) \langle C_2 \rangle + (\alpha_5/\alpha_3)]}{(\alpha_1 [\langle C_2 \rangle + (\alpha_2/\alpha_1)])^{\frac{3}{2}}} \right). \quad (4.25)$$

Η επιλογή των α γίνεται αναλυτικά στην [42]. Για $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = 1, \alpha_4 = \alpha_5 = 0$ οι τελικές εκφράσεις είναι:

$$\beta^2 = \left(\frac{4\pi}{5} \right) (Ar^2)^{-1} (\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2 + 3\lambda + 3\mu + 3), \quad (4.26)$$

και

$$\gamma = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}(\mu + 1)}{2\lambda + \mu + 3} \right). \quad (4.27)$$

4.2. Η ΥΠΕΡΟΧΗ ΤΗΣ ΕΠΙΜΗΚΥΜΕΝΗΣ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ ΕΝΑΝΤΙ ΤΗΣ ΠΕΠΛΑΤΥΣΜΕΝΗΣ 71

Για κάθε πυρήνα τα (λ_1, μ_1) της μη αναγωγίσιμης αναπαράστασης που εκφράζει τα πρωτόνια προστίθενται με τα (λ_2, μ_2) της μη αναγωγίσιμης αναπαράστασης που εκφράζει τα νετρόνια και έτσι προκύπτει η περιγραφή του πυρήνα από το ζεύγος των αριθμών $(\lambda, \mu) = (\lambda_1 + \lambda_2, \mu_1 + \mu_2)$. Με αυτούς σύμφωνα με τις παραπάνω σχέσεις υπολογίζονται τα β και γ .

Σύμφωνα με τα παραπάνω γίνεται φανερό ότι για μία δεδομένη περιοχή μάζας (δηλαδή για περίπου σταθερό A) η παραμόρφωση β αυξάνει με την αύξηση των (λ, μ) μέχρι το μέσο του φλοιού. Όταν $\lambda \gg \mu$ η μεταβλητή γ είναι περίπου 0° , ενώ για $\lambda > \mu$ ισχύει ότι $\gamma \in (0, 30^\circ)$. Σε αυτή την περίπτωση οι πυρήνες είναι επιμηκυμένοι. Όταν $\lambda \ll \mu$ το γ είναι περίπου 60° ενώ για $\lambda < \mu$ ισχύει ότι $\gamma \in (30^\circ, 60^\circ)$. Σε αυτήν την περίπτωση οι πυρήνες είναι πεπλατυσμένοι. Στην περίπτωση που $\lambda = \mu$ ισχύει $\gamma = 30^\circ$ και οι πυρήνες εμφανίζουν την μέγιστη τριαξονικότητα.

Οι σχέσεις 4.26, 4.27 δείχνουν ότι η μεταβλητή β είναι συμμετρική ως προς τα λ, μ και εξαρτάται από το A , ενώ η μεταβλητή γ όχι. Η επιλογή των λ, μ στο πλαίσιο της proxy-SU(3) γίνεται με βάση τη μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση μεγίστου βάρους η οποία δεν είναι συμμετρική γύρω από το κέντρο κάθε φλοιού, όπως δείχνεται παρακάτω. Άλλα αλγεβρικά πρότυπα όπως για παράδειγμα η pseudo-SU(3) χρησιμοποιούν την μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση που μεγιστοποιεί τον τελεστή Casimir C_2 , επιλογή που επιφέρει συμμετρική περιγραφή γύρω από το μέσο του φλοιού. Τα πειραματικά δεδομένα συμφωνούν με την proxy-SU(3) θεώρηση για μη συμμετρική συμπεριφορά των πυρήνων αναφορικά με την ύπαρξη επιμηκυμένων και πεπλατυσμένων γύρω από το μέσο του φλοιού.

4.2 Η υπεροχή της επιμηκυμένης παραμόρφωσης έναντι της πεπλατυσμένης

Τα αποτελέσματα της proxy-SU(3) για τις σπάνιες γαίες για την περιοχή των 50-82 πρωτονίων και των 82-126 νετρονίων φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

72ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. Η ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΩΝ ΠΥΡΗΝΙΚΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΣΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΗΣ PROXY-SU(3)

Πίνακας 4.1: Οι μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις μεγίστου βάρους της proxy-SU(3) για πυρήνες με 50 έως 82 πρωτόνια και 82 έως 126 νετρόνια. Μέ έντονη γραμματοσειρά εμφανίζονται οι πυρήνες με $R_{4/2} = E(4_1^+)/E(2_1^+) \geq 2,8$, ενώ με * οι πυρήνες με $2.8 > R_{4/2} \geq 2.5$. Με ** παρουσιάζονται οι πυρήνες με $R_{4/2}$ λίγο μικρότερο απο 2,5. Δεν παρουσιάζονται πυρήνες με $R_{4/2} < 2,5$. Για τους υπόλοιπους πυρήνες οι λόγοι $R_{4/2}$ είναι άγνωστοι. Οι μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις που αντιστοιχούν σε πεπλατυσμένους πυρήνες είναι υπογραμμισμένες.

		Ba	Ce	Nd	Sm	Gd	Dy	Er	Yb	Hf	W	Os	Pt
Z		56	58	60	62	64	66	68	70	72	74	76	78
Z_{val}		6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28
N_{val}	irrep	(18,0)	(18,4)	(20,4)	(24,0)	(20,6)	(18,8)	(18,6)	(20,0)	(12,8)	(6,12)	(2,12)	(0,8)
88	6 (24,0)	(42,0)*	(42,4)*	(44,4)*									
90	8 (26,4)	(44,4)	(44,8)	(46,8)	(50,4)	(46,10)	(44,12)	(44,10)*	(46,4)*	(38,12)*			
92	10 (30,4)	(48,4)	(48,8)	(50,8)	(54,4)	(50,10)	(48,12)	(48,10)	(50,4)	(42,12)*			
94	12 (36,0)	(54,0)	(54,4)	(56,4)	(60,0)	(56,6)	(54,8)	(54,6)	(56,0)	(48,8)	(42,12)	(38,12)*	
96	14 (34,6)	(52,6)	(52,10)	(54,10)	(58,6)	(54,12)	(52,14)	(52,12)	(54,6)	(46,14)	(40,18)	(36,18)*	
98	16 (34,8)	(52,8)	(52,12)	(54,12)	(58,8)	(54,14)	(52,16)	(52,14)	(54,8)	(46,16)	(40,20)	(36,20)*	
100	18 (36,6)	(54,6)	(54,10)	(56,10)	(60,6)	(56,12)	(54,14)	(54,12)	(56,6)	(48,14)	(42,18)	(38,18)	(36,14)*
102	20 (40,0)	(58,0)	(58,4)	(60,4)	(64,0)	(60,6)	(58,8)	(58,6)	(60,0)	(52,8)	(46,12)	(42,12)	(40,8)*
104	22 (34,8)	(52,8)	(52,12)	(54,12)	(58,8)	(54,14)	(52,16)	(52,14)	(54,8)	(46,16)	(40,20)	(36,20)	(34,16)*
106	24 (30,12)	(48,12)	(48,16)	(50,16)	(54,12)	(50,18)	(48,20)	(48,18)	(50,12)	(42,20)	(36,24)	(32,24)	(30,20)*
108	26 (28,12)	(46,12)	(46,16)	(48,16)	(52,12)	(48,18)	(46,20)	(46,18)	(48,12)	(40,20)	(34,24)	(30,24)	(28,20)*
110	28 (28,8)	(46,8)	(46,12)	(48,12)	(52,8)	(48,14)	(46,16)	(46,14)	(48,8)	(40,16)	(34,20)	(30,20)	(28,16)*
112	30 (30,0)	(48,0)	(48,4)	(50,4)	(54,0)	(50,6)	(48,8)	(48,6)	(50,0)	(42,8)	(36,12)	(32,12)	(30,8)**
114	32 (20,10)	(38,10)	(38,14)	(40,14)	(44,10)	(40,16)	(38,18)	(38,16)	(40,10)	(32,18)	(26,22)	(22,22)	(20,18)**
116	34 (12,16)	(30,6)	(30,10)	(32,10)	(36,6)	(32,12)	(30,14)	(30,12)	(32,6)	(24,14)	(18,28)*	(14,28)	(12,24)**
118	36 (6,18)	(24,18)	(24,22)	(26,22)	(30,18)	(26,24)	(24,16)	(24,24)	(26,18)	(18,26)	(12,30)	(8,30)*	(6,26)**
120	38 (2,16)	(20,16)	(20,20)	(22,20)	(26,16)	(22,22)	(20,24)	(20,22)	(22,16)	(14,24)	(8,28)	(4,28)*	(2,24)**

4.2. Η ΥΠΕΡΟΧΗ ΤΗΣ ΕΠΙΜΗΚΥΜΕΝΗΣ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ ΕΝΑΝΤΙ ΤΗΣ ΠΕΠΛΑΤΥΣΜΕΝΗΣ73

Πίνακας 4.2: Όπως και στον προηγούμενο πίνακα, μόνο που οι μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις αφορούν πυρήνες με πρωτόνια και νετρόνια στον φλοιό 50-82.

		Ba	Ce	Nd	Sm	Gd	Dy	Er	Yb	Hf	W	Os	Pt
Z		56	58	60	62	64	66	68	70	72	74	76	78
Z _{val}		6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28
N N _{val} irrep		(18,0)	(18,4)	(20,4)	(24,0)	(20,6)	(18,8)	(18,6)	(20,0)	(12,8)	(6,12)	(2,12)	(0,8)
56 6 (18,0)	(36,0)	(36,4)	(38,4)	(42,0)	(38,6)	(36,8)	(36,6)	(38,0)	(30,8)	(24,12)	(20,12)	(18,8)	
58 8 (18,4)	(36,4)	(36,8)	(38,8)	(42,4)	(38,10)	(36,12)	(36,10)	(38,4)	(30,12)	(24,16)	(20,16)	(18,12)	
60 10 (20,4)	(28,4)	(38,8)	(40,8)	(44,4)	(40,10)	(38,12)	(38,10)	(40,4)	(32,12)	(26,16)	(22,16)	(20,12)	
62 12 (24,0)	(42,0)	(42,4)	(44,4)	(48,0)	(44,6)	(42,8)	(42,6)	(44,0)	(36,8)	(30,12)	(26,12)	(24,8)	
64 14 (20,6)	(38,6)	(38,10)	(40,10)	(44,6)	(40,12)	(38,14)	(38,12)	(40,6)	(32,14)	(26,18)	(22,18)	(20,14)	
66 16 (18,8)	(36,8)	(36,12)	(38,12)	(32,8)	(38,14)	(36,16)	(36,14)	(38,8)	(30,16)	(24,20)	(20,20)	(18,16)	
68 18 (18,6)	(36,6)	(36,10)	(38,10)	(42,6)	(38,12)	(36,14)	(36,12)	(38,6)	(30,14)	(24,18)	(20,18)	(18,14)	
70 20 (20,0)	(38,0)*	(38,4)	(40,4)	(44,0)	(40,6)	(38,8)	(38,6)	(40,0)	(32,8)	(26,12)	(22,12)	(20,8)	
72 22 (12,8)	(30,8)*	(30,12)*	(32,12)	(36,8)	(32,14)	(30,16)	(30,14)	(32,8)	(24,16)	<u>(18,20)</u>	<u>(14,20)</u>	<u>(12,16)</u>	
74 24 (6,12)	(24,12)*	(24,16)*	(26,16)*	(30,12)*	(26,18)*	(24,20)	(24,18)	(26,12)	<u>(18,20)</u>	<u>(12,24)</u>	<u>(8,24)</u>	<u>(6,20)</u>	
76 26 (2,12)		(20,16)*	(22,16)*	(26,12)*	(22,18)*	(20,20)*	(20,18)	(22,12)	<u>(14,20)</u>	<u>(8,24)</u>	<u>(4,24)</u>	<u>(2,20)</u>	
78 28 (0,8)							(18,14)	(20,8)	<u>(12,16)</u>	<u>(6,20)</u>	<u>(2,20)</u>	<u>(0,16)</u>	

74ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. Η ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΩΝ ΠΥΡΗΝΙΚΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΣΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΗΣ *PROXY-SU(3)*

Σύμφωνα με τους παραπάνω πίνακες γίνεται φανερό ότι στις συγκεκριμένες περιοχές η επιμήκυνση των πυρήνων σαν προτιμώμενη παραμόρφωση κυριαρχεί. Πεπλατυσμένοι πυρήνες προβλέπεται να υπάρχουν στις περιοχές μεγάλων αριθμών νετρονίων. Δηλαδή για $N \geq 116$ για το Χάφνιο και για $N \geq 118$ για τις Πλατίνες. Τα συγκεκριμένα αποτελέσματα συμφωνούν και με τα πειραματικά δεδομένα. Για παράδειγμα είναι πειραματικά γνωστό [44] ότι η αύξηση των νετρονίων στο $^{192}_{76}\text{Mo}_{116}$ που οδηγεί στο $^{194}_{76}\text{Mo}_{118}$ παρουσιάζει αλλαγή σχήματος. Αυτό φαίνεται και στον πίνακα 4.1. Μέχρι αριθμό νετρονίων $N = 112$ για τις μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις (λ, μ) ισχύει $(\lambda > \mu)$, που αντιστοιχεί σε επιμηκυμένα σχήματα, για $N = 114$ έχουμε $\lambda = \mu$, ενώ για $N \geq 116$ έχουμε $\lambda < \mu$ που αντιστοιχεί σε πεπλατυσμένα σχήματα. Παρόμοια εικόνα υπάρχει και για τις Πλατίνες όπου η μετάβαση γίνεται για $N = 116$ νετρόνια, που αντιστοιχούν στο ισότοπο $^{196}_{78}\text{Pt}_{118}$ καθώς και για το Βολφράμιο για $N = 116$.

Τα αποτελέσματα των πινάκων εμφανίζονται συγκρινόμενα με τον λόγο $R_{4/2} = E(4_1^+)/E(2_1^+)$, ο οποίος είναι δείκτης της παραμόρφωσης του πυρηνικού σχήματος. Για υψηλές παραμορφώσεις ($R_{4/2} = E(4_1^+)/E(2_1^+) \geq 2,8$) αναμένεται τα αποτελέσματα της *proxy-SU(3)* να είναι πιό αξιόπιστα, ενώ για $R_{4/2} = E(4_1^+)/E(2_1^+) \leq 2,35$ ενδέχεται να παρατηρείται ασυμφωνία διότι η *proxy-SU(3)* αφορά παραμορφωμένους πυρήνες. Παρόλα αυτά η θεώρηση για το $^{196}_{78}\text{Pt}_{118}$ που δεν παρουσιάζει παραμόρφωση βρίσκεται σε συμφωνία με τις πειραματικές προβλέψεις [45].

4.3 Το σπάσιμο της συμμετρίας σωματιδίου οπής

Τα αποτελέσματα του παραπάνω πίνακα για τις διάφορες περιοχές πυρήνων δείχνουν ξεκάθαρα ότι δεν υπάρχει συμμετρία σωματιδίου οπής. Για παράδειγμα 6 πρωτόνια σθένους στην άλγεβρα $U(15)$ χαρακτηρίζονται από την μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση $(18,0)$, ενώ 6 οπές πρωτονίων που αντιστοιχούν σε $82 - 6 = 76$ συνολικά πρωτόνια και σε 26 πρωτόνια σθένους χαρακτηρίζονται από την μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση $(2,12)$. Αντίστοιχα 10 νετρόνια σθένους στην $U(21)$ χαρακτηρίζονται από την $(30,4)$ μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση ενώ 10 οπές νετρονίων που αντιστοιχούν σε $126 - 10 = 116$ συνολικά νετρόνια, δηλαδή 34 νετρόνια σθένους, χαρακτηρίζονται από την $(12,16)$ μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση. Έτσι το ^{148}Ba που έχει 6 πρωτόνια σθένους και 10 νετρόνια σθένους περιγράφεται από την $(18,0) + (30,4) = (48,4)$ μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση, η οποία αντιστοιχεί σε επιμηκυμένο σχήμα. Από την άλλη το ^{192}Os που έχει 6 οπές πρωτονίων σθένους και 10 οπές νετρονίων σθένους

περιγράφεται από την $(2, 12) + (12, 16) = (14, 28)$ μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση η οποία αντιστοιχεί σε πεπλατυσμένο σχήμα.

Όπως αναφέρθηκε και πριν, διάφορα αλγεβρικά πυρηνικά μοντέλα που χρησιμοποιούν την $SU(3)$ συμμετρία επιλέγουν για την περιγραφή των πυρήνων την μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση που μεγιστοποιεί την ιδιοτιμή του τελεστή Casimir. Αυτό οφείλεται στην απαίτηση η θεμελιώδης ζώνη να βρίσκεται όσο το δυνατόν πιο χαμηλά και η μεγιστοποίηση του Casimir έχει αυτό το αποτέλεσμα. Στην proxy- $SU(3)$ η επιλογή γίνεται με βάση τη μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση μέγιστου βάρους. Και οι δύο θεωρήσεις δίνουν παρόμοια αποτελέσματα μέχρι το μέσο του φλοιού μετρώντας από χαμηλά. Αν ακολουθηθεί όμως η πρώτη θεώρηση, όπως φαίνεται από τον πίνακα 4.3, τα αποτελέσματα θα είναι "άντισυμμετρικά" γύρω από το μέσο του φλοιού και οι πυρήνες με συγκεκριμένο αριθμό νουκλεονίων σθένους θα έχουν το ακριβώς "αντίθετο" σχήμα με τους συμμετρικούς τους πυρήνες που θα έχουν ίδιο αριθμό οπών σθένους. Για παράδειγμα στον φλοιό *sdg* ο οποίος πλέον έχει 30 νουκλεόνια, στην θεώρηση που μεγιστοποιεί τον Casimir 14 νουκλεόνια περιγράφονται από την $(24, 6)$ αναπαράσταση η οποία περιγράφει επιμηκυμένο σχήμα ενώ 16 νουκλεόνια από την $(6, 24)$ αναπαράσταση η οποία περιγράφει πεπλατυσμένο σχήμα. Στην proxy- $SU(3)$ κάτι τέτοιο δε συμβαίνει διότι μετά το μέσο του φλοιού η επιλογή με βάση το μέγιστο βάρος δίνει μη συμμετρικά αποτελέσματα για τις μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις, έτσι τα 14 νουκλεόνια περιγράφονται από την $(20, 6)$ αναπαράσταση και 16 νουκλεόνια από την $(18, 8)$. Και οι δύο αυτές αναπαραστάσεις περιγράφουν επιμηκυμένο σχήμα. Τα αποτελέσματα της proxy- $SU(3)$ δικαιώνονται και από τα πειραματικά δεδομένα τα οποία δείχνουν ότι οι επιμηκυμένοι πυρήνες υπερέχουν των πεπλατυσμένων.

Η ενίσχυση της proxy- $SU(3)$ θεώρησης προκύπτει και από τα διαγράμματα Nilsson. Για παράδειγμα στον φλοιό 50-82 για παραμόρφωση $\epsilon = 0,3$ τα πρώτα 8 σωματίδια καταλαμβάνουν τα τροχιακά $\frac{1}{2}[431]$, $\frac{1}{2}[550]$, $\frac{3}{2}[422]$ και $\frac{1}{2}[420]$. Τα τελευταία 8 σωματίδια καταλαμβάνουν τα τροχιακά $\frac{1}{2}[400]$, $\frac{3}{2}[402]$, $\frac{11}{2}[505]$ και $\frac{9}{2}[514]$. Τα τελευταία δύο τροχιακά, $\frac{11}{2}[505]$ και $\frac{9}{2}[514]$, έχουν υψηλότερα K σε σχέση με τα $\frac{3}{2}[422]$ και $\frac{1}{2}[420]$. Είναι γνωστό ότι υψηλότερα K οδηγούν σε υψηλότερες τιμές των μ στις αναπαραστάσεις (λ, μ) επειδή $K = \min(\lambda, \mu), \min(\lambda, \mu) - 2, \min(\lambda, \mu) - 4, 1$ ή 0 . Έτσι οι οπές δεν οδηγούν συμμετρικά στις ίδιες μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις με τα σωματίδια.

76ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. Η ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΩΝ ΠΥΡΗΝΙΚΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΣΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΗΣ *PROXY-SU(3)*

Πίνακας 4.3: Μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις της $SU(3)$ μεγίστου βάρους (hw) καθώς και μέγιστης τιμής του Casimir (C) για τις άλγεβρες $U(n)$.

M irrep	8-20		28-50		50-82		82-126	
	sd	sd	pf	pf	sdg	sdg	pfh	pfh
	U(6)	U(6)	U(10)	U(10)	U(15)	U(15)	U(21)	U(21)
	hw	C	hw	C	hw	C	hw	C
0	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)
1 [1]	(2,0)	(2,0)	(3,0)	(3,0)	(4,0)	(4,0)	(5,0)	(5,0)
2 [2]	(4,0)	(4,0)	(6,0)	(6,0)	(8,0)	(8,0)	(10,0)	(10,0)
3 [21]	(4,1)	(4,1)	(7,1)	(7,1)	(10,1)	(10,1)	(13,1)	(13,1)
4 [2 ²]	(4,2)	(4,2)	(8,2)	(8,2)	(12,2)	(12,2)	(16,2)	(16,2)
5 [2 ² 1]	(5,1)	(5,1)	(10,1)	(10,1)	(15,1)	(15,1)	(20,1)	(20,1)
6 [2 ³]	(6,0)	(0,6)	(12,0)	(12,0)	(18,0)	(18,0)	(24,0)	(24,0)
7 [2 ³ 1]	(4,2)	(1,5)	(11,2)	(11,2)	(18,2)	(18,2)	(25,2)	(25,2)
8 [2 ⁴]	(2,4)	(2,4)	(10,4)	(10,4)	(18,4)	(18,4)	(26,4)	(26,4)
9 [2 ⁴ 1]	(1,4)	(1,4)	(10,4)	(10,4)	(19,4)	(19,4)	(28,4)	(28,4)
10 [2 ⁵]	(0,4)	(0,4)	(10,4)	(4,10)	(20,4)	(20,4)	(30,4)	(30,4)
11 [2 ⁵ 1]	(0,2)	(0,2)	(11,2)	(4,10)	(22,2)	(22,2)	(33,2)	(33,2)
12 [2 ⁶]	(0,0)	(0,0)	(12,0)	(4,10)	(24,0)	(24,0)	(36,0)	(36,0)
13 [2 ⁶ 1]			(9,3)	(2,11)	(22,3)	(22,3)	(35,3)	(35,3)
14 [2 ⁷]			(6,6)	(0,12)	(20,6)	(20,6)	(34,6)	(34,6)
15 [2 ⁷ 1]			(4,7)	(1,10)	(19,7)	(7,19)	(34,7)	(34,7)
16 [2 ⁸]			(2,8)	(2,8)	(18,8)	(6,20)	(34,8)	(34,8)
17 [2 ⁸ 1]			(1,7)	(1,7)	(18,7)	(3,22)	(35,7)	(35,7)
18 [2 ⁹]			(0,6)	(0,6)	(18,6)	(0,24)	(36,6)	(36,6)
19 [2 ⁹ 1]			(0,3)	(0,3)	(19,3)	(2,22)	(38,3)	(38,3)
20 [2 ¹⁰]			(0,0)	(0,0)	(20,0)	(4,20)	(40,0)	(40,0)
21 [2 ¹⁰ 1]					(16,4)	(4,19)	(37,4)	(4,37)
22 [2 ¹¹]					(12,8)	(4,18)	(34,8)	(0,40)
23 [2 ¹¹ 1]					(9,10)	(2,18)	(32,10)	(3,38)
24 [2 ¹²]					(6,12)	(0,18)	(30,12)	(6,36)
25 [2 ¹² 1]					(4,12)	(1,15)	(29,12)	(7,35)
26 [2 ¹³]					(2,12)	(2,12)	(28,12)	(8,34)
27 [2 ¹³ 1]					(1,10)	(1,10)	(28,10)	(7,34)
28 [2 ¹⁴]					(0,8)	(0,8)	(28,8)	(6,34)
29 [2 ¹⁴ 1]					(0,4)	(0,4)	(29,4)	(3,35)
30 [2 ¹⁵]					(0,0)	(0,0)	(30,0)	(0,36)
31 [2 ¹⁵ 1]							(25,5)	(2,33)
32 [2 ¹⁶]							(20,10)	(4,30)
33 [2 ¹⁶ 1]							(16,13)	(4,28)
34 [2 ¹⁷]							(12,16)	(4,26)
35 [2 ¹⁷ 1]							(9,17)	(2,25)
36 [2 ¹⁸]							(6,18)	(0,24)
37 [2 ¹⁸ 1]							(4,17)	(1,20)
38 [2 ¹⁹]							(2,16)	(2,16)
39 [2 ¹⁹ 1]							(1,13)	(1,13)
40 [2 ²⁰]							(0,10)	(0,10)
41 [2 ²⁰ 1]							(0,5)	(0,5)
42 [2 ²¹]							(0,0)	(0,0)

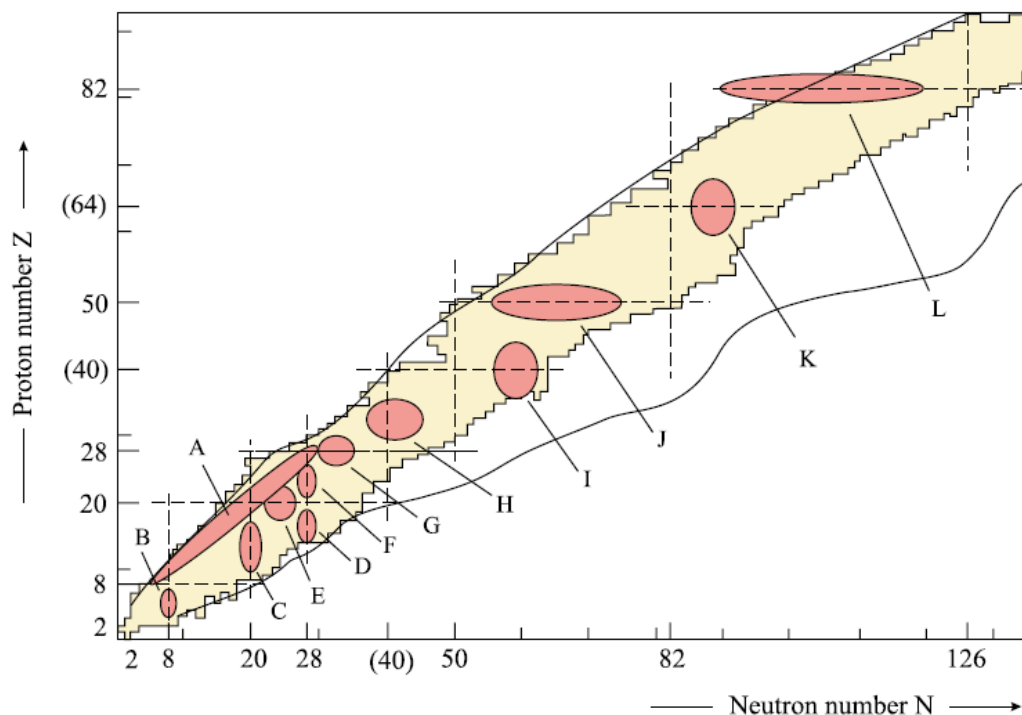
Κεφάλαιο 5

Η συνύπαρξη των πυρηνικών σχημάτων

Η συνύπαρξη σχήματος στους ατομικούς πυρήνες παρατηρείται όταν η θεμελιώδης ενεργειακή ζώνη του πυρήνα που ξεκινά από μία 0_1^+ κατάσταση συνοδεύεται πειραματικά από μία άλλη ενεργειακή ζώνη, η οποία ξεκινάει από μία 0^+ στάθμη που έχει υψηλότερη ενέργεια και διαφορετική δομή. Το φαινόμενο της συνύπαρξης σχήματος συνίσταται δηλαδή στην διαφορετική συμπεριφορά ενός συγκεκριμένου συνόλου νουκλεονίων (δηλαδή του ίδιου πυρήνα), η οποία οφείλεται στην διαφορετική γεωμετρική διάταξη που ακολουθούν. Έτσι ένας πυρήνας σε συγκεκριμένο ενεργειακό εύρος μπορεί να παρατηρείται σε επιμηκυμένο ή πεπλατυσμένο σχήμα είτε σε επιμηκυμένα σχήματα διαφορετικών χαρακτηριστικών.

Αποτελεί ανοικτό πρόβλημα στον κλάδο της πυρηνικής φυσικής η επεξήγηση του φαινομένου καθώς και η πρόβλεψη των νουκλεονικών περιοχών στις οποίες εκδηλώνεται. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι μέχρι τώρα πειραματικά επιβεβαιωμένες περιοχές. Αν και έχει υποστηριχθεί στη βιβλιογραφία ότι η συνύπαρξη σχημάτων μπορεί να συμβαίνει για κάθε πυρήνα, οι συγκεκριμένες περιοχές εμφάνισης οδηγούν σε περαιτέρω διερεύνηση του φαινομένου. Στο παρόν η μελέτη του φαινομένου της συνύπαρξης βασίζεται στην ύπαρξη ενεργειακών χασμάτων ανάμεσα στη θέωρηση του τριδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή και του κλασικού προτύπου των φλοιών. Γίνεται ακόμη σύγκριση και των δύο περιπτώσεων μέσω του προτύπου των φλοιών και της proxy-SU(3) θέωρησης.

Σχήμα 5.1: Περιοχές συνύπαρξης σχήματος [43]



5.1 Ενεργειακά χάσματα σε μεγάλες παραμορφώσεις

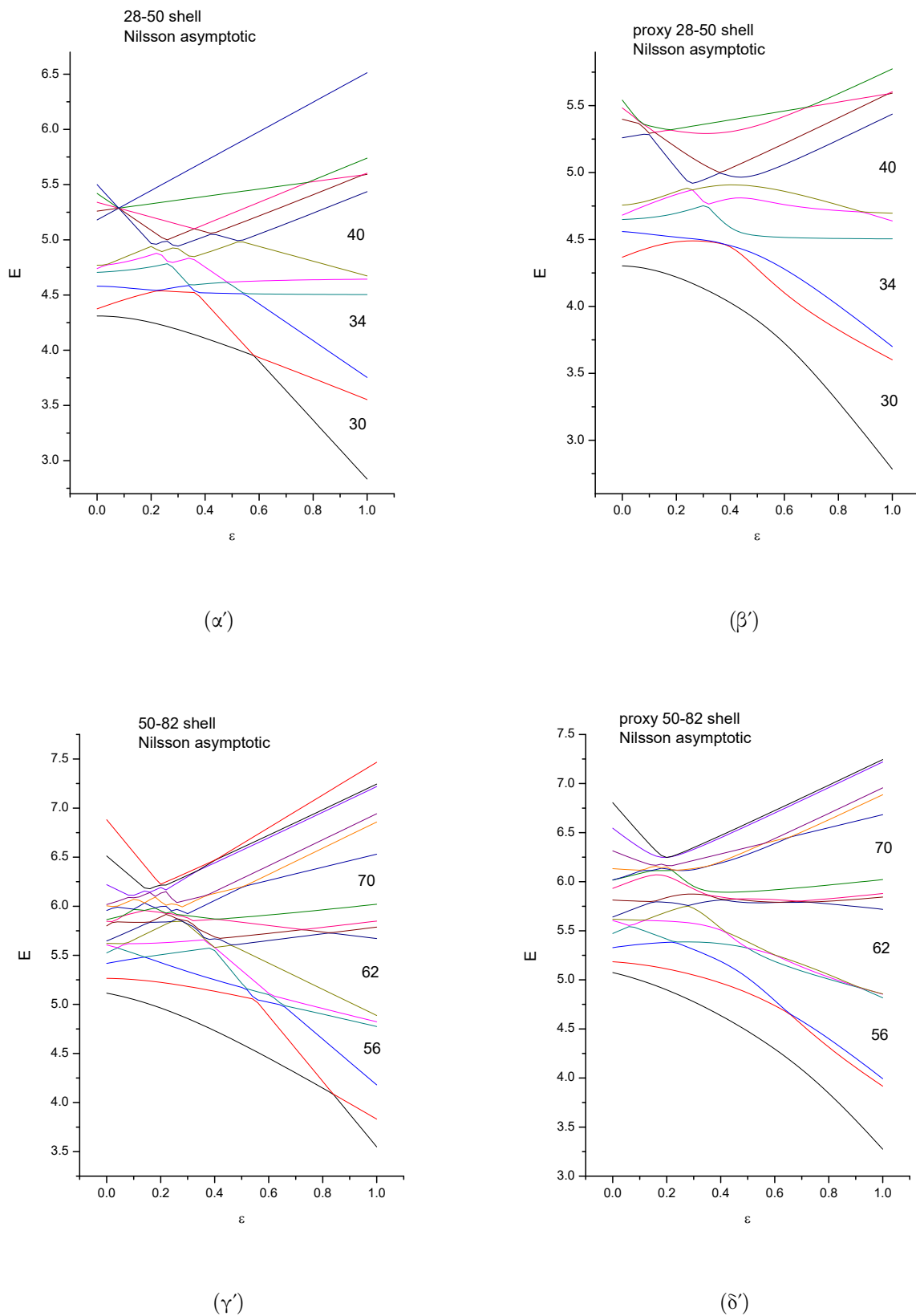
Είναι γνωστό ότι ο τρισδιάστατος αρμονικός ταλαντωτής σε μηδενική παραμόρφωση παρουσιάζει τους μαγικούς αριθμούς 2, 8, 20, 40, 70, 112,... Με την αύξηση της παραμόρφωσης οι μαγικοί αριθμοί τροποποιούνται και το επόμενο σταθερό σύνολο μαγικών αριθμών εμφανίζεται για παραμόρφωση $\epsilon = 0,6$ και αποτελείται από τους αριθμούς 2, 4, 10, 16, 28, 40, 60, 80,.. Αυτή η περίπτωση αντιστοιχεί σε επιμηκυμένα σχήματα και λόγο αξόνων $\omega_{\perp}/\omega_z = 2:1$. Στους πυρήνες οι μαγικοί αριθμοί τροποποιούνται ως γνωστόν λόγω της αλληλεπίδρασης σπιν τροχιάς και συνιστούν το σύνολο 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126..

Για τη διερεύνηση της ύπαρξης καινούργιων μαγικών αριθμών πραγματοποιήθηκαν υπολογισμοί για τις ενέργειες των τροχιακών συναρτήσεων της παραμόρφωσης για κάθε φλοιό. Οι υπολογισμοί πραγματοποιήθηκαν στο πλαίσιο του προτύπου Nilsson, όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο. Στις επόμενες σελίδες παρουσιάζονται τα ενεργειακά διαγράμματα Nilsson για τους φλοιούς 28-50, 50-82 (κοινά διαγράμματα για πρωτόνια και νετρόνια), και 82-126 (ξεχωριστά διαγράμματα για πρωτόνια και νετρόνια). Στο αριστερό μέρος παρουσιάζονται οι ενέργειες Nilsson για τους πραγματικούς φλοιούς,

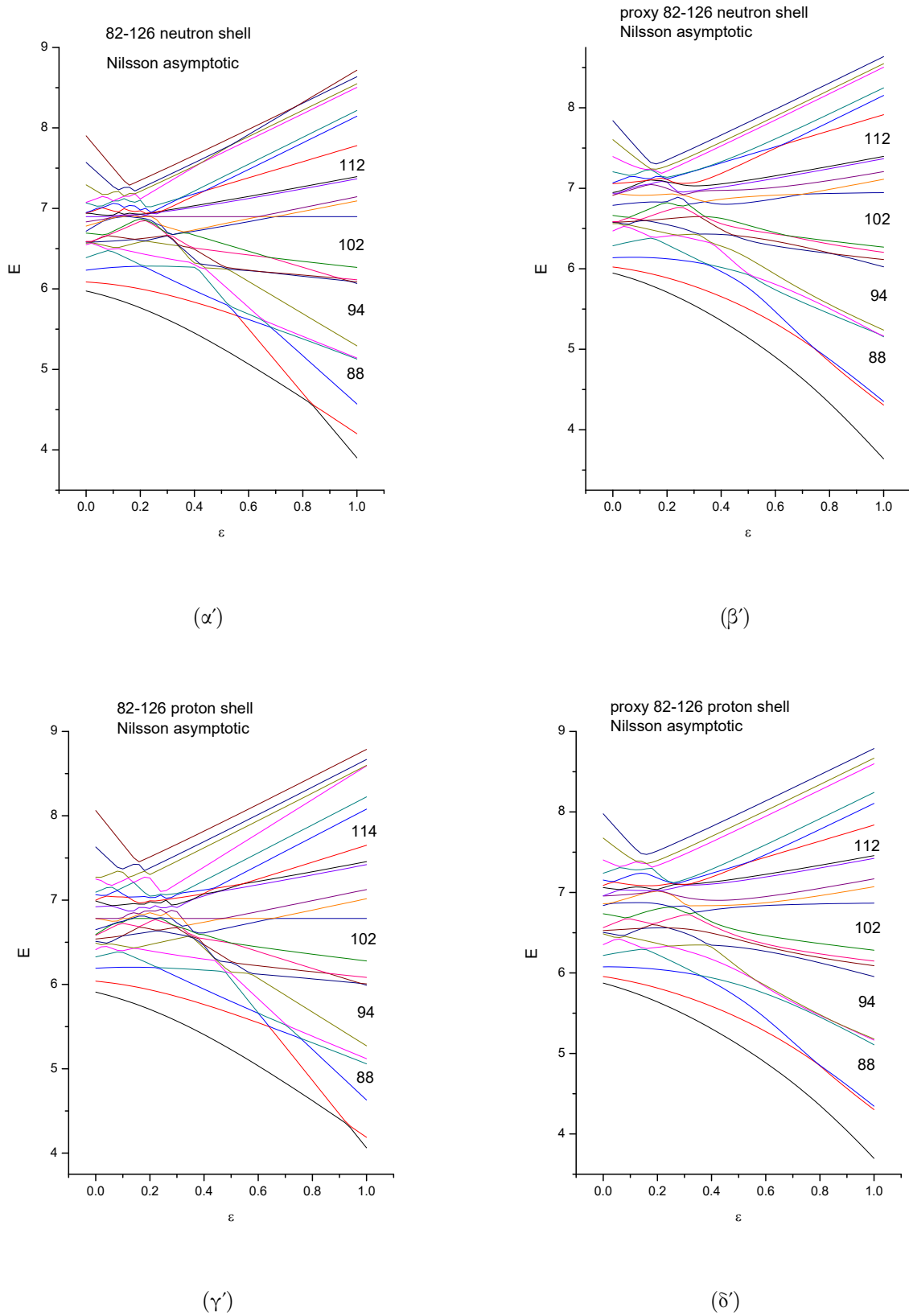
ενώ στο δεξιό οι ενέργειες στο πλαίσιο της $\text{proxy-SU}(3)$ για τους φλοιούς pf , sdg , pfh .

Από τα διαγράμματα γίνεται σαφές ότι με την αύξηση της παραμόρφωσης (δηλαδή για $\varepsilon > 0,6$) εμφανίζονται χάσματα στις ενέργειες των τροχιακών. Στον φλοιό 28-50 τα χάσματα εμφανίζονται στα 30, 34 και 40 νουκλεόνια. Στον φλοιό 50-82 τα χάσματα εμφανίζονται στα 56, 62 και 70 νουκλεόνια ενώ στον φλοιό 82-126 στα 94, 102, 112 νουκλεόνια. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι υπολογισμοί στο πλαίσιο της $\text{proxy-SU}(3)$ θεώρησης εμφανίζουν ακριβώς τα ίδια χάσματα, γεγονός αναμενόμενο δεδομένης της καλής ποιοτικά προσέγγισης που αποτελεί η $\text{proxy-SU}(3)$ όπως δείχθηκε με παρόμοιους υπολογισμούς στο προηγούμενο κεφάλαιο. Οι αριθμοί 40, 70, 112 αποτελούν τους μαγικούς αριθμούς του τρισδιάστατου αρμονικού ταλαντωτή. Αυτή η παρατήρηση οδηγεί στον εκ νέου Nilsson υπολογισμό των ενεργειών των τροχιακών υπό την επίδραση του δυναμικού του αρμονικού ταλαντωτή. Οι υπολογισμοί φαίνονται στα διαγράμματα 5.4 και 5.5.

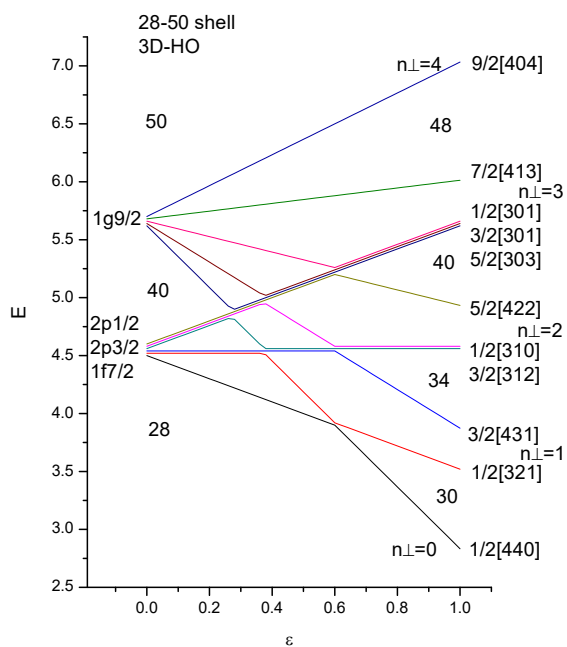
Τα ενεργειακά χάσματα που παρουσιάζονται στα διαγράμματα 5.2 και 5.3 είναι τα ίδια με αυτά των σχημάτων 5.4 και 5.5. Αυτή η ομοιότητα είναι αναμενόμενη, διότι τα διαγώνια στοιχεία πίνακα που οφείλονται στον αρμονικό ταλαντωτή αυξάνονται με την παραμόρφωση, ενώ τα στοιχεία πίνακα που οφείλονται στην αλληλεπίδραση σπιν-τροχιάς όχι. Έτσι με την αύξηση της παραμόρφωσης μπορεί να ειπωθεί ότι υπερισχύει η θεώρηση του αρμονικού ταλαντωτή.



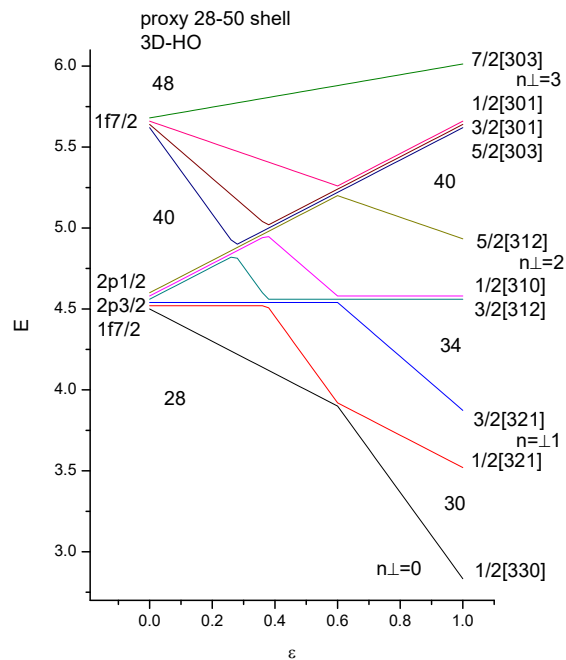
Σχήμα 5.2: Ενεργειακά διαγράμματα Nilsson για τους φλοιούς 28-50, 50-82.



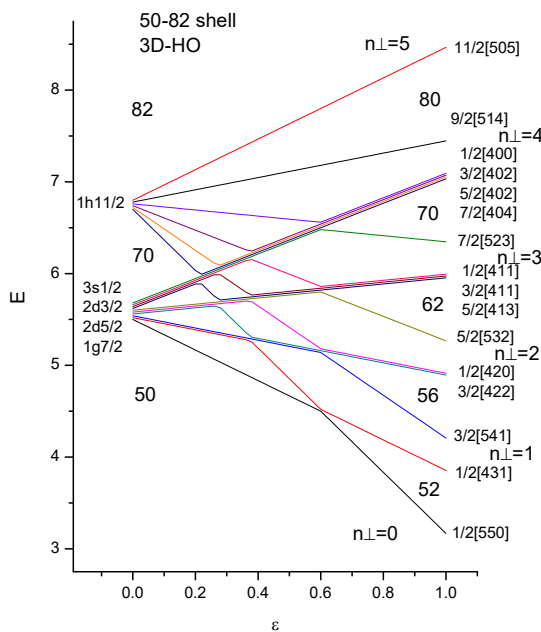
Σχήμα 5.3: Ενεργειακά διαγράμματα Nilsson για τους φλοιούς 82-126 (πρωτόνια και νετρόνια).



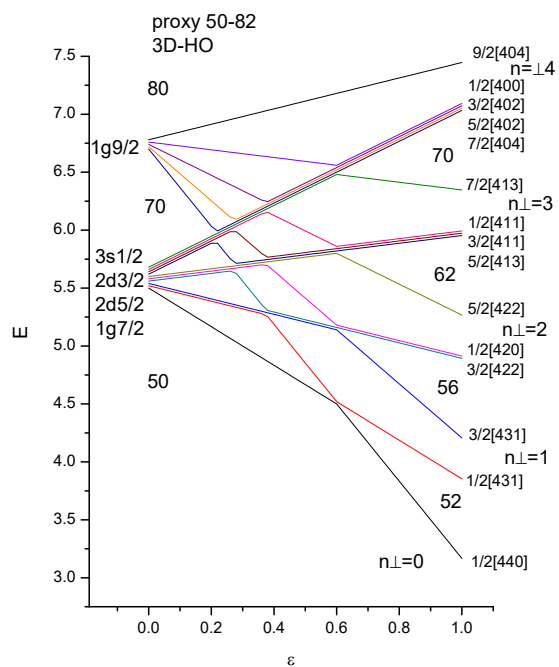
(α')



(β')

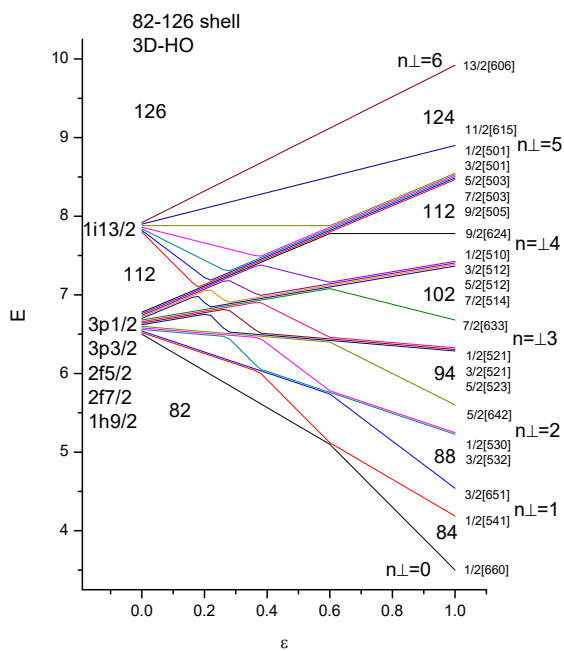


(γ')

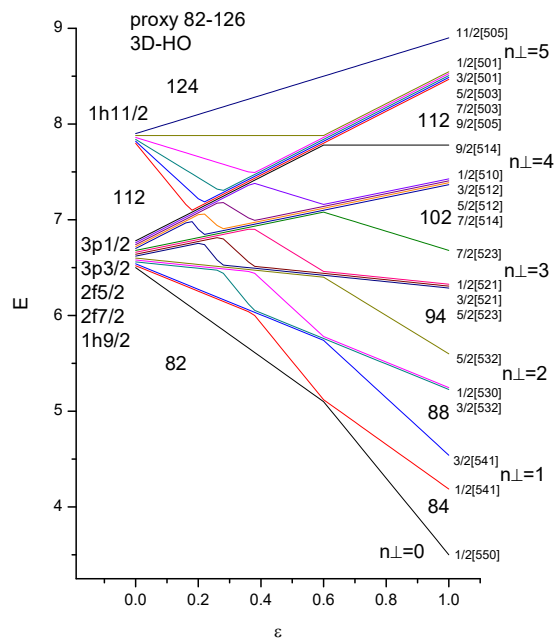


(δ')

Σχήμα 5.4: Ενεργειακά διαγράμματα Nilsson για την Χαμιλτονιανή του αρμονικού ταλαντωτή για τους φλοιούς 28-50, 50-82.



(α')

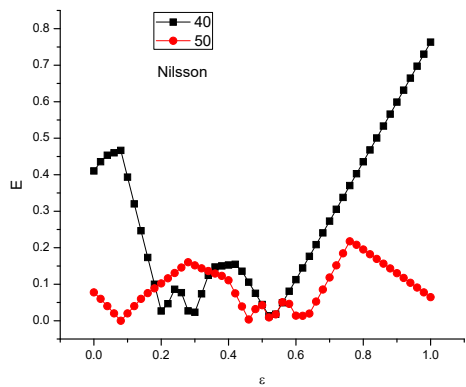


(β')

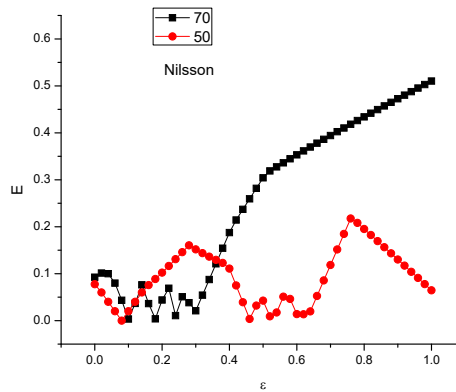
Σχήμα 5.5: Ενεργειακά διαγράμματα Nilsson για την Χαμιλτονιανή του αρμονικού ταλαντωτή για τους φλοιούς 82-126.

5.2 Σύγκριση των ενεργειακών χάσμάτων

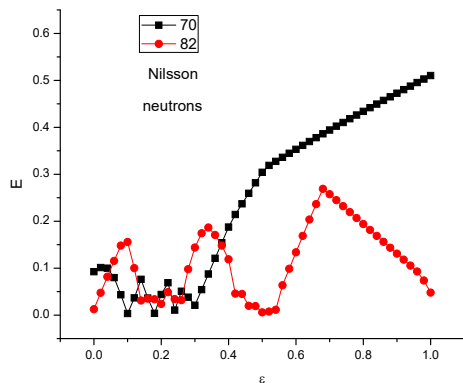
Στα διαγράμματα που ακολουθούν γίνεται η σύγκριση των ενεργειών των γνωστών φλοιών της πυρηνικής φυσικής και των φλοιών που προκύπτουν από τους αριθμούς νουκλεονίων στους οποίους εμφανίζονται τα χάσματα σε μεγάλες παραμορφώσεις. Τα χάσματα αυτά θεωρείται ότι προκύπτουν από την επικράτηση του αρμονικού ταλαντωτή. Σε χαμηλές παραμορφώσεις οι δύο θεωρήσεις δίνουν συγκρίσιμες ενέργειες, ενώ με την αύξηση της παραμόρφωσης υπερισχύουν ενεργειακά οι φλοιοί του αρμονικού ταλαντωτή. Για παράδειγμα, στο διάγραμμα 5.6' για παραμόρφωση $0,2 \leq \epsilon \leq 0,38$ ο κλασικός φλοιός 50 βρίσκεται υψηλότερα στην ενέργεια, ενώ για $0,38 \leq \epsilon \leq 0,5$ υπερισχύει ο φλοιός του αρμονικού ταλαντωτή. Αυτή η παρατήρηση ισχύει για όλα τα ζευγάρια φλοιών υπό σύγκριση. Οι ίδιοι υπολογισμοί παρατηρούνται και στην $\text{proxy-SU}(3)$ και οι ενεργειακές συμπεριφορές εμφανίζουν τα ίδια χαρακτηριστικά.



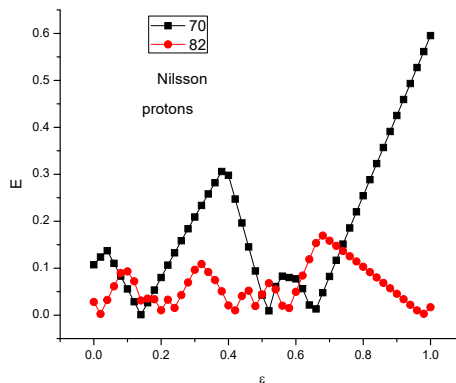
(α')



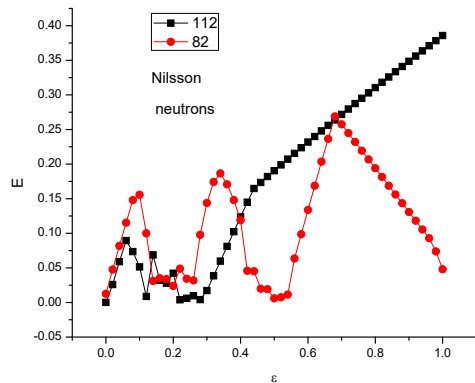
(β')



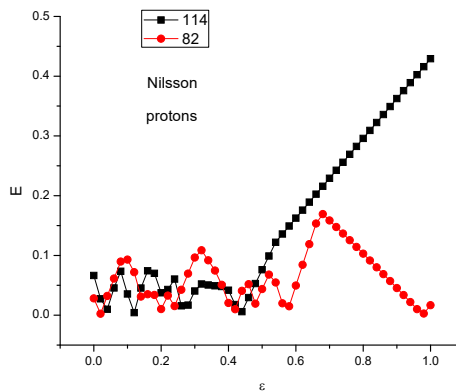
(γ')



(δ')

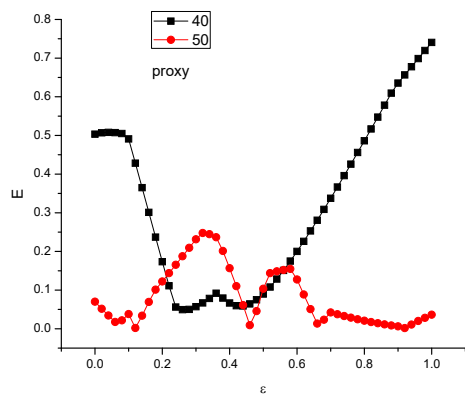


(ε')

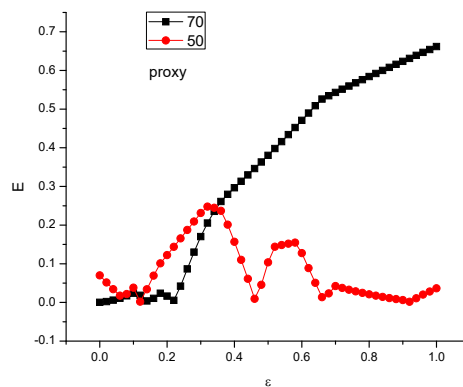


(ϛ')

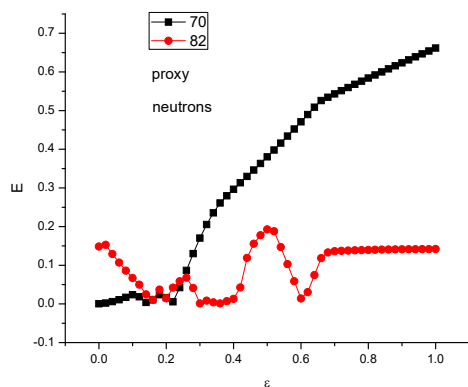
Σχήμα 5.6: Ενεργειακά χάσματα για τους αναγραφόμενους αριθμούς νουκλεονίων συναρτήσει της παραμόρφωσης. Λόγω χρήσης της ασυμπτωτικής βάσης τα αποτελέσματα αναμένεται να έχουν φυσικό νόημα για $\epsilon \geq 0,15$



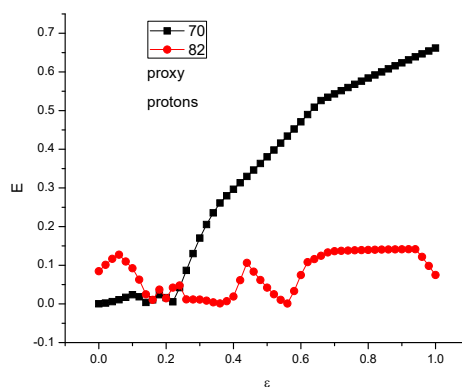
(α')



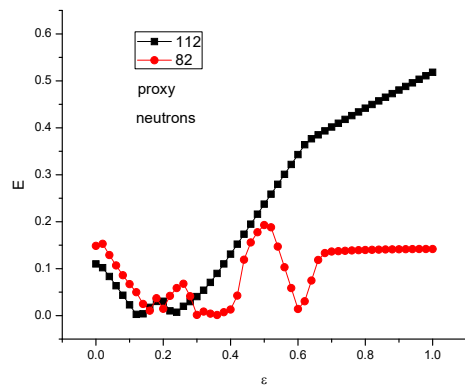
(β')



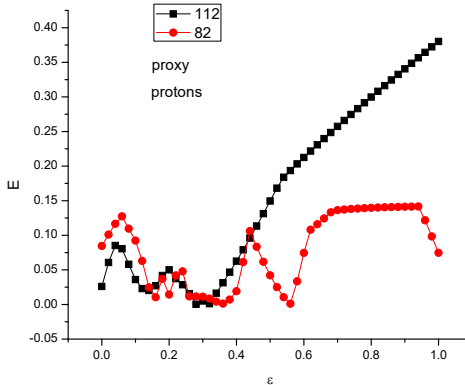
(γ')



(δ')

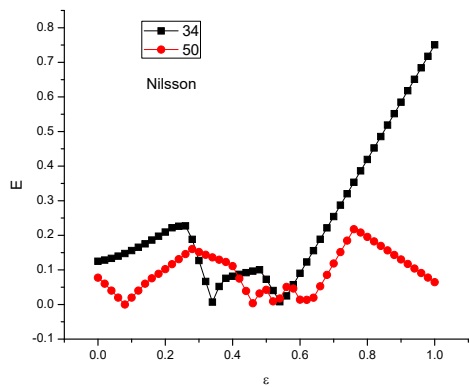


(ε')

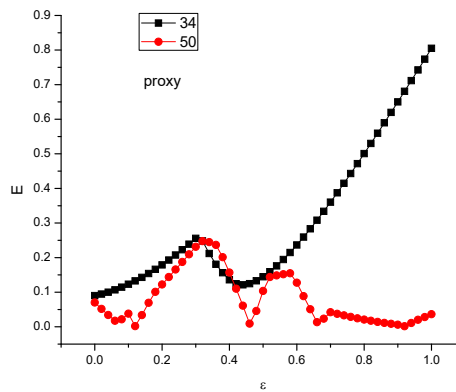


(ϛ')

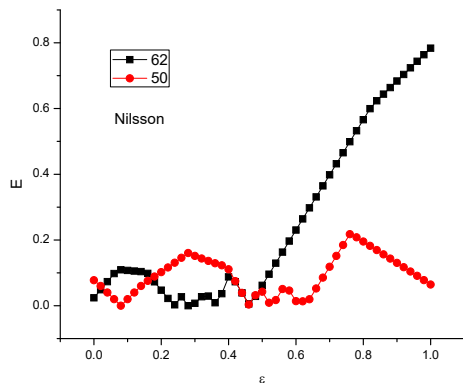
Σχήμα 5.7: Ενεργειακά χάσματα για τους αναγραφόμενους αριθμούς νουκλεονίων συναρτήσει της παραμόρφωσης. Λόγω χρήσης της ασυμπτωτικής βάσης τα αποτελέσματα αναμένεται να έχουν φυσικό νόημα για $\varepsilon \geq 0,15$



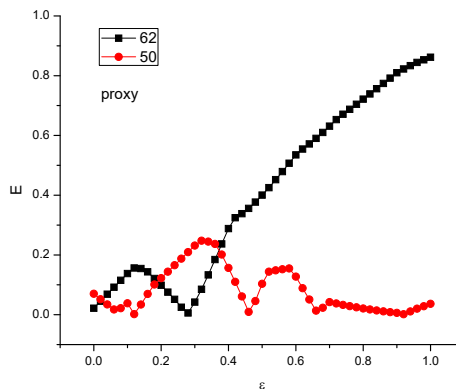
(α)



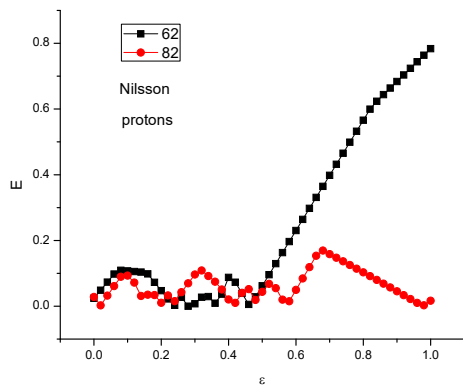
(β')



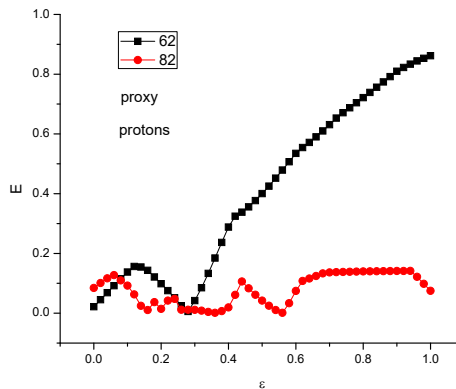
(γ')



(δ')

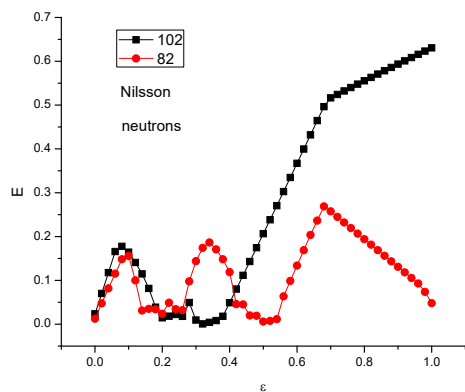


(ε')

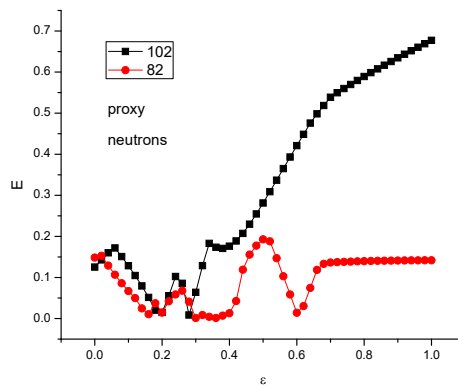


(ϛ')

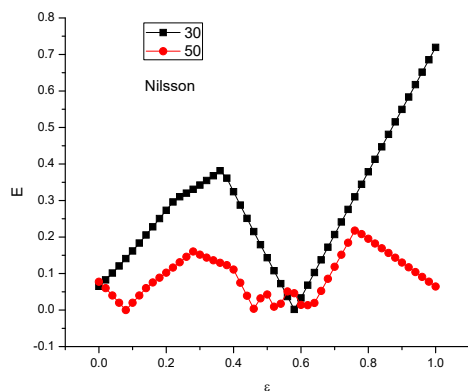
Σχήμα 5.8: Ενεργειακά χάσματα για τους αναγραφόμενους αριθμούς νουκλεονίων συναρτήσει της παραμόρφωσης. Λόγω χρήσης της ασυμπτωτικής βάσης τα αποτελέσματα αναμένεται να έχουν φυσικό νόημα για $\epsilon \geq 0,15$



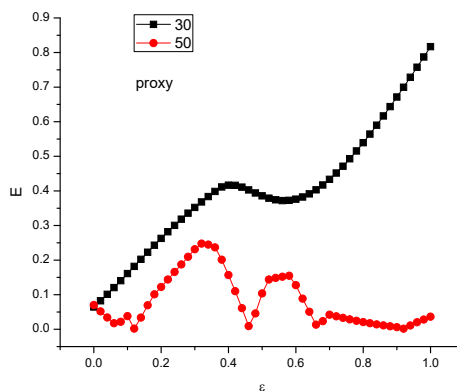
(α')



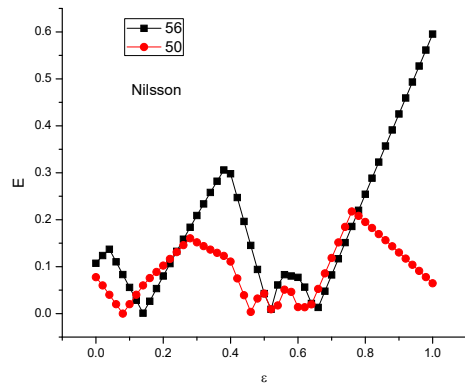
(β')



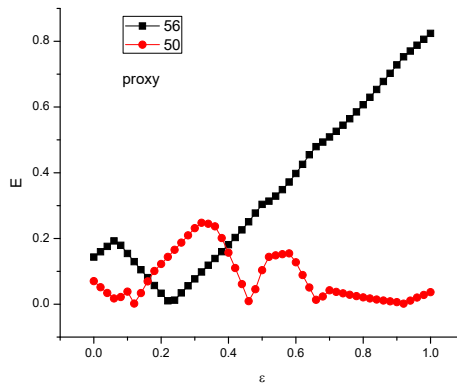
(γ')



(δ')

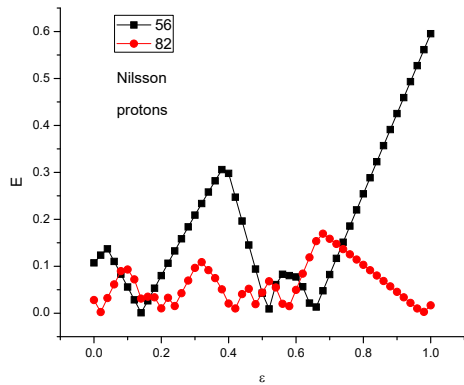


(ε')

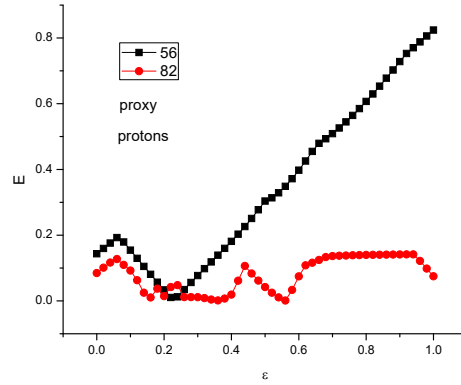


(ϛ')

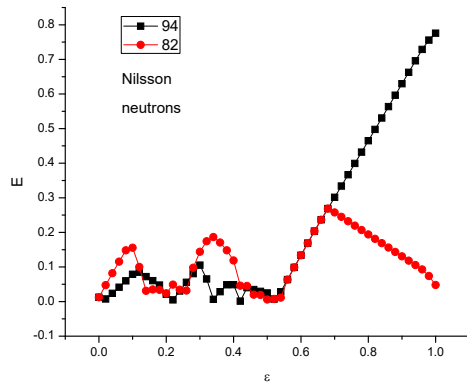
Σχήμα 5.9: Ενεργειακά χάσματα για τους αναγραφόμενους αριθμούς νουκλεονίων συναρτήσει της παραμόρφωσης. Λόγω χρήσης της ασυμπτωτικής βάσης τα αποτελέσματα αναμένεται να έχουν φυσικό νόημα για $\epsilon \geq 0,15$



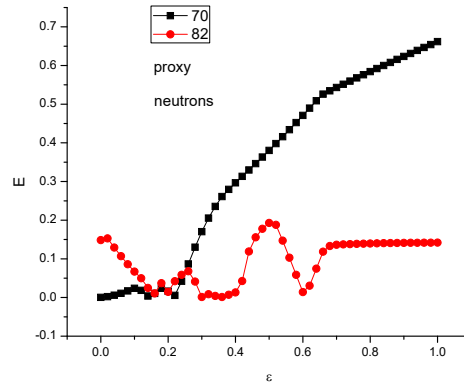
(α')



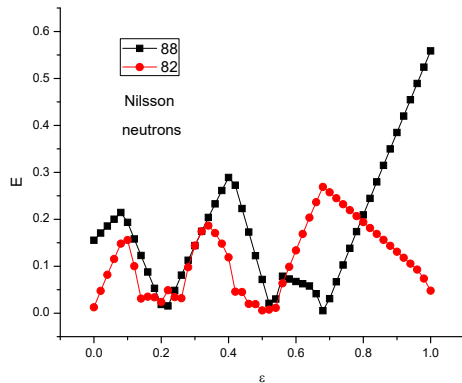
(β') Νετωορχ 2



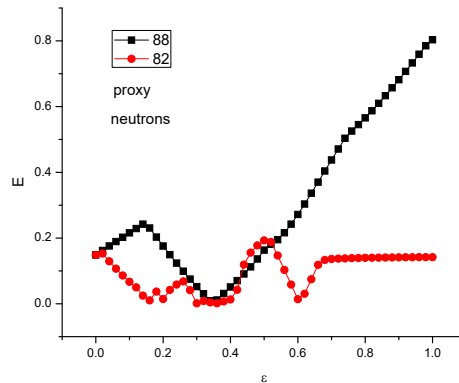
(γ')



(δ')



(ε')



(ϛ')

Σχήμα 5.10: Ενεργειακά χάσματα για τους αναγραφόμενους αριθμούς νουκλεονίων συναρτήσει της παραμόρφωσης. Λόγω χρήσης της ασυμπτωτικής βάσης τα αποτελέσματα αναμένεται να έχουν φυσικό νόημα για $\epsilon \geq 0,15$

5.3 Οι περιοχές συνύπαρξης σχήματος

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι αριθμοί των νουκλεονίων στους οποίους εμφανίζονται τα ενεργειακά χάσματα. Στο διάγραμμα 5.1 παρουσιάζονται οι περιοχές στις οποίες έχει παρατηρηθεί η συνύπαρξη σχήματος πειραματικά. Η σύγκριση αυτών των δύο οδηγεί σε συγκεκριμένες παρατηρήσεις για τις περιοχές συνύπαρξης σχήματος.

n_{\perp}	0	1	2	3	4	5	6	7
M	+2	+6	+12	+20	+30	+42	+56	+72
28	30	34	40	48				
50	52	56	62	70	80			
82	84	88	94	102	112	124		
126	128	132	138	146	156	168	182	
184	186	190	196	204	214	226	240	256
258	260	264	270	278	288	300	314	330

Σχήμα 5.11: Οι νουκλεονικοί αριθμοί M για τους οποίους εμφανίζονται τα μεγάλα ενεργειακά χάσματα.

1) Η περιοχή L εμφανίζεται γύρω από τον πρωτονικό μαγικό αριθμό $Z = 82$ και εκτείνεται ανάμεσα στους αριθμούς νετρονίων 94 και 112. Ο αριθμός νετρονίων 102 βρίσκεται περίπου στο κέντρο.

2) Η περιοχή K εμφανίζεται γύρω από τον πρωτονικό αριθμό 64, ο οποίος αποτελεί κλείσιμο υποφλοιού. Ο αντίστοιχος αριθμός νετρονίων για εκείνη την περιοχή είναι ο $N = 88$ και η περιοχή εκτείνεται από 56 έως 70 πρωτόνια.

3) Η περιοχή J εμφανίζεται γύρω από τον πρωτονικό μαγικό αριθμό $Z = 50$ και εκτείνεται ανάμεσα στους αριθμούς νετρονίων 56 και 70. Ο αριθμός νετρονίων 62 βρίσκεται κάπου στο κέντρο.

4) Η περιοχή I εμφανίζεται γύρω από τον πρωτονικό αριθμό 40 ο οποίος αποτελεί κλείσιμο υποφλοιού. Η περιοχή αυτή περιορίζεται από τους αριθμούς νετρονίων 56 και 62.

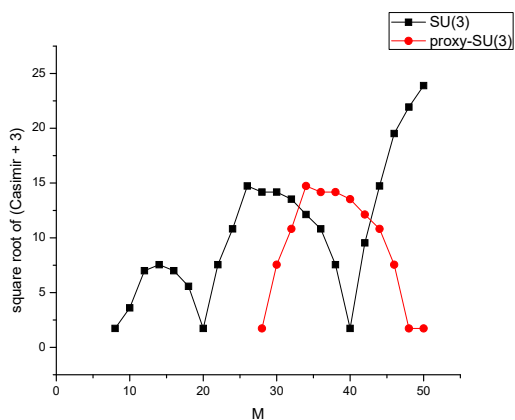
5) Η περιοχή G εμφανίζεται γύρω από τον πρωτονικό μαγικό αριθμό 28 και εκτείνεται ανάμεσα στους αριθμούς νετρονίων 30 και 34.

6) Η περιοχή H εμφανίζεται γύρω από τον αριθμό νετρονίων $N = 40$ και εκτείνεται στην περιοχή από 30 μέχρι 34 πρωτόνια.

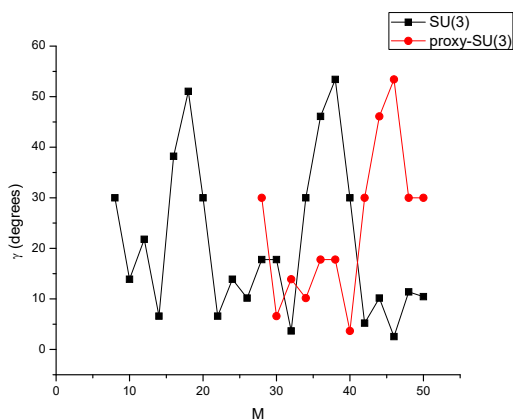
Συμπερασματικά παρατηρούμε ότι οι περιοχές στις οποίες εμφανίζεται η συνύπαρξη σχήματος χωρίζονται σε δύο κατηγορίες. Στις περιοχές G, J και L οι οποίες εμφανίζονται γύρω από τους κλασικούς

μαγικούς αριθμούς πρωτονίων 28, 50, 82 και έχουν όριο τους αριθμούς νετρονίων 30-34, 56-70 και 94-112. Ας ονομάσουμε αυτές τις περιοχές Z-περιοχές. Οι αριθμοί αυτοί δεν είναι τυχαίοι, αλλά όπως φαίνεται από τον πίνακα του Σχήματος 5.11 και τα διαγράμματα είναι οι αριθμοί στους οποίους εμφανίζονται τα ενεργειακά χάσματα που οφείλονται στον αρμονικό ταλαντωτή. Στις περιοχές αυτές τα δύο δυναμικά ανταγωνίζονται και έτσι το σχήμα του πυρήνα βρίσκεται σε διαφορετικό σχήμα ανάλογα με το προτιμώμενο δυναμικό.

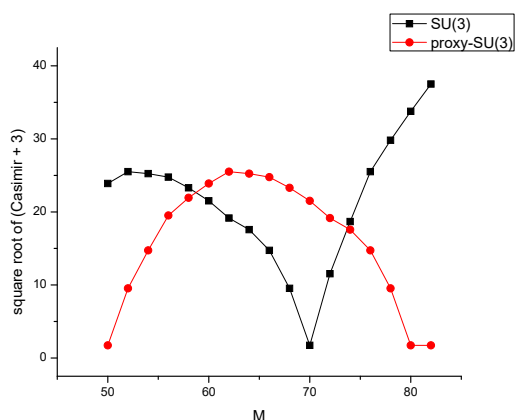
Στα σχήματα φαίνονται οι τιμές της ποσότητας $\sqrt{C_2(\lambda, \mu) + 3}$ καθώς και της μεταβλητής γ ως συνάρτησεις του αριθμού νουκλεονίων. Παρουσιάζονται τα αποτελέσματα στην περίπτωση του αρμονικού ταλαντωτή και στην proxy-SU(3). Η ποσότητα $\sqrt{C_2(\lambda, \mu) + 3}$ είναι ανάλογη της μεταβλητής παραμόρφωσης β .



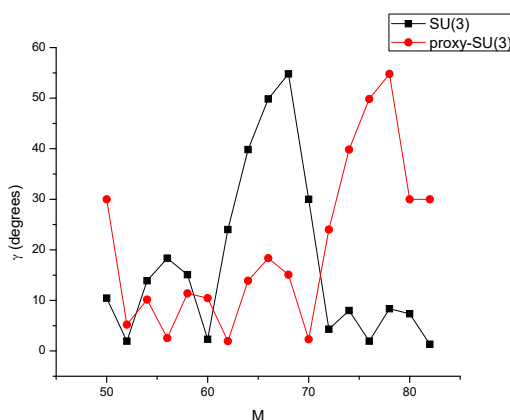
(α')



(β')



(γ')

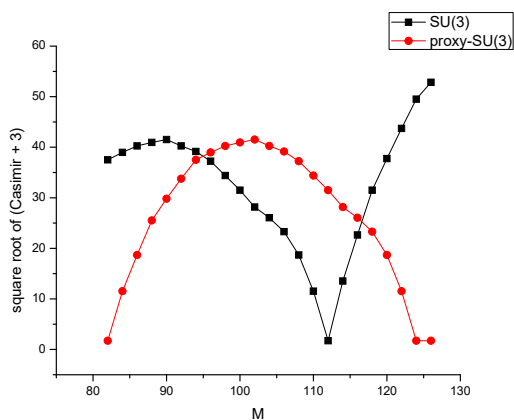


(δ')

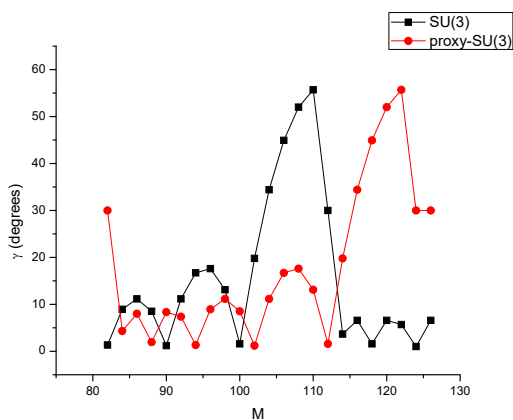
Σχήμα 5.12: Τιμές της ποσότητας $\sqrt{C_2(\lambda, \mu) + 3}$ (αριστερά) καθώς και της μεταβλητής γ συναρτήσεως του αριθμού των νουκλεονίων για την περίπτωση του αρμονικού ταλαντωτή και των πυρηνικών φλοιών με τη χρήση της proxy-SU(3).

Από τα σχήματα γίνεται φανερό ότι υπάρχουν περιοχές για τις οποίες οι τιμές της ποσότητας $\sqrt{C_2(\lambda, \mu) + 3}$ γίνονται χαμηλότερες για την περίπτωση του αρμονικού ταλαντωτή σε σχέση με την proxy-SU(3). Οι περιοχές αυτές αντιστοιχούν στους νουκλεονικούς αριθμούς 34-42, 60-72, 96-116 και 146-172. Τα πάνω όρια αυτών των περιοχών είναι αριθμοί λίγο μεγαλύτεροι από τους μαγικούς αριθμούς του αρμονικού ταλαντωτή. Οι πυρήνες των οποίων τα νετρόνια ή τα πρωτόνια βρίσκονται σε κάποια υποπεριοχή αυτών των περιοχών αναμένεται να παρουσιάζουν συνύπαρξη σχήματος.

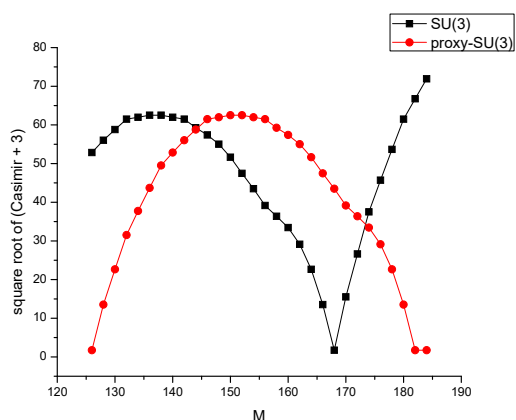
Αυτό διότι στις συγκεκριμένες περιοχές (στο μεγαλύτερο μέρος τους) η μεταβλητή γ λαμβάνει τιμές $\gamma \geq 30^\circ$ στην θεώρηση του αρμονικού ταλαντωτή, οι οποίες δίνουν πεπλατυσμένα σχήματα, ενώ στις



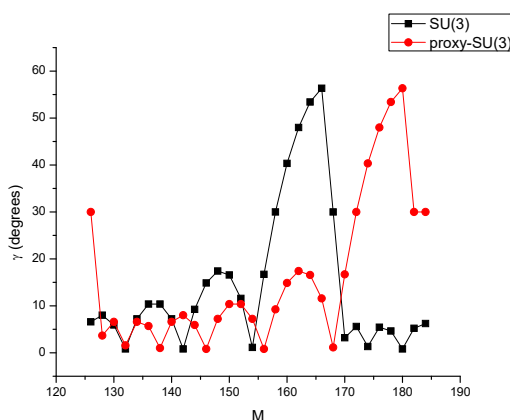
(α')



(β')



(γ')



(δ')

Σχήμα 5.13: Τιμές της ποσότητας $\sqrt{C_2(\lambda, \mu) + 3}$ (αριστερά) καθώς και της μεταβλητής γ συναρτήσει του αριθμού νουκλεονίων για την περίπτωση του αρμονικού ταλαντωτή και των πυρηνικών φλοιών με την χρήση της proxy-SU(3)

ίδιες περιοχές οι υπολογισμοί με βάση την proxy-SU(3) δίνουν $\gamma < 30^\circ$, δηλαδή επιμηκυμένα σχήματα. Οι περιοχές στις οποίες συμβαίνει αυτό είναι οι 34-40, 64-70, 104-112, 146-158. Τα πάνω όρια είναι οι μαγικοί αριθμοί του αρμονικού ταλαντωτή. Τα πεπλατυσμένα σχήματα παρουσιάζουν χαμηλότερη παραμόρφωση από τα επιμηκυμένα.

Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε τα διαγράμματα 5.13 (α●) και 5.13(β'). Στο 5.13 (α'), από $M = 96$ έως $M = 116$ (όπου M είναι αριθμός πρωτονίων ή νετρονίων), η ποσότητα $\sqrt{C_2(\lambda, \mu) + 3}$, που οφείλεται στους κλασικούς πυρηνικούς φλοιούς (με κόκκινο χρώμα) και υπολογίζεται με την χρήση της SU(3), βρίσκεται υψηλότερα από την αντίστοιχη για τον αρμονικό ταλαντωτή (με μαύρο χρώμα). Δηλαδή σε

αυτή την περιοχή "αντιμάχονται" δύο είδη παραμόρφωσης. Η αντίστοιχη περιοχή στο 5.13 (β') δίνει διαφορετικές τιμές της μεταβλητής γ , οι οποίες προκαλούν διαφορετικά είδη παραμόρφωσης.

Η περιοχή L εμφανίζεται για τον μαγικό αριθμό $Z = 82$ και χωρίζεται σε δύο υποπεριοχές. α) Την περιοχή που αντιστοιχεί σε $N = 104-112$ νετρόνια. Σε αυτήν συνυπάρχουν πεπλατυσμένα σχήματα χαμηλής παραμόρφωσης (προερχόμενα από τον αρμονικό ταλαντωτή) και επιμηκυμένα σχήματα μεγάλης παραμόρφωσης (προερχόμενα από την proxy-SU(3)). β) Στην κατώτερη υποπεριοχή $N = 96-104$ συνυπάρχουν επιμηκυμένα σχήματα χαμηλής παραμόρφωσης (προερχόμενα από τον αρμονικό ταλαντωτή) και επιμηκυμένα σχήματα υψηλής παραμόρφωσης (προερχόμενα από την proxy-SU(3)).

Η περιοχή J, η οποία εμφανίζεται γύρω από τον μαγικό αριθμό $Z = 50$, χωρίζεται σε τρεις υποπεριοχές. Η περιοχή που αντιστοιχεί σε $N = 64-70$ νετρόνια, στην οποία συνυπάρχουν πεπλατυσμένα σχήματα χαμηλής παραμόρφωσης (που προέρχονται από τον αρμονικό ταλαντωτή) με επιμηκυμένα σχήματα υψηλής παραμόρφωσης (που προέρχονται από την proxy-SU(3)). Η περιοχή που αντιστοιχεί σε $N = 60-64$ νετρόνια περιέχει επιμηκυμένα σχήματα χαμηλής παραμόρφωσης (προερχόμενα από τον αρμονικό ταλαντωτή) μαζί με επιμηκυμένα σχήματα υψηλότερης παραμόρφωσης (προερχόμενα από την proxy-SU(3)). Η τρίτη περιοχή περιορίζεται από τους αριθμούς νετρονίων 56-60 και περιέχει επιμηκυμένα σχήματα χαμηλής παραμόρφωσης (προερχόμενα από την proxy-SU(3)) μαζί με επιμηκυμένα σχήματα υψηλότερης παραμόρφωσης (προερχόμενα από τον αρμονικό ταλαντωτή).

Η περιοχή G εμφανίζεται γύρω από τον μαγικό αριθμό $Z = 28$ και για περιοχή νετρονίων $N = 30-34$ στην οποία συνυπάρχουν επιμηκυμένα σχήματα χαμηλής παραμόρφωσης (προερχόμενα από την proxy-SU(3)) με επιμηκυμένα σχήματα υψηλής παραμόρφωσης (προερχόμενα από τον αρμονικό ταλαντωτή).

Η περιοχή I εμφανίζεται γύρω από τον αριθμό πρωτονίων $Z = 40$ και περιέχει δύο υποπεριοχές: Την υποπεριοχή νετρονίων $N = 60-62$ στην οποία συνυπάρχουν επιμηκυμένα σχήματα χαμηλής παραμόρφωσης (προερχόμενα από τον αρμονικό ταλαντωτή) με επιμηκυμένα σχήματα υψηλής παραμόρφωσης (προερχόμενα από την proxy-SU(3)), καθώς και την υποπεριοχή 56-58 στην οποία συνυπάρχουν επιμηκυμένα σχήματα χαμηλής παραμόρφωσης (προερχόμενα από την proxy-SU(3)) με επιμηκυμένα σχήματα υψηλής παραμόρφωσης (προερχόμενα από τον αρμονικό ταλαντωτή).

Η περιοχή γύρω από τον μαγικό αριθμό πρωτονίων $Z = 126$ αναμένεται να αποτελείται από δύο περιοχές. Την περιοχή για $N = 158-168$ στην οποία θα συνυπάρχουν πεπλατυσμένα σχήματα χαμηλής

παραμόρφωσης (τα οποία προέρχονται από τον αρμονικό ταλαντωτή) με επιμηκυμένα σχήματα υψηλής παραμόρφωσης (τα οποία προέρχονται από την proxy-SU(3)), καθώς και την περιοχή $N = 146-158$ στην οποία επιμηκυμένα σχήματα χαμηλής παραμόρφωσης (προερχόμενα από τον αρμονικό ταλαντωτή) θα συνυπάρχουν με επιμηκυμένα σχήματα υψηλής παραμόρφωσης (προερχόμενα από την proxy-SU(3)).

Η περιοχή **K** γύρω από τον αριθμό νετρονίων $N = 88$ αποτελείται από τρεις υποπεριοχές: α) Την περιοχή για $Z = 64-70$ πρωτόνια στην οποία συνυπάρχουν πεπλατυσμένα σχήματα χαμηλής παραμόρφωσης (προερχόμενα από τον αρμονικό ταλαντωτή) με επιμηκυμένα σχήματα υψηλής παραμόρφωσης (προερχόμενα από την proxy-SU(3)), β) Την περιοχή για $Z = 60-64$ πρωτόνια στην οποία επιμηκυμένα σχήματα χαμηλής παραμόρφωσης (προερχόμενα από τον αρμονικό ταλαντωτή) συνυπάρχουν με επιμηκυμένα σχήματα υψηλής παραμόρφωσης (προερχόμενα από την proxy-SU(3)) και γ) την περιοχή για $Z = 56-60$ πρωτόνια στην οποία συνυπάρχουν επιμηκυμένα σχήματα χαμηλής παραμόρφωσης (προερχόμενα από την proxy-SU(3)) με επιμηκυμένα σχήματα υψηλής παραμόρφωσης (προερχόμενα από τον αρμονικό ταλαντωτή).

Η περιοχή **H**, η οποία εμφανίζεται γύρω από τον νετρονικό αριθμό $N = 40$, αποτελείται από την περιοχή που έχει όρια τα $Z = 30-34$ πρωτόνια, στην οποία συνυπάρχουν επιμηκυμένα σχήματα χαμηλής παραμόρφωσης (προερχόμενα από την proxy-SU(3)) με επιμηκυμένα σχήματα υψηλής παραμόρφωσης (προερχόμενα από τον αρμονικό ταλαντωτή).

Η προβλεπόμενη περιοχή για αριθμό πρωτονίων $Z = 94-112$ θα αποτελείται από δύο υποπεριοχές. Την περιοχή για $Z = 104-112$ πρωτόνια στην οποία θα συνυπάρχουν πεπλατυσμένα σχήματα χαμηλής παραμόρφωσης (προερχόμενα από τον αρμονικό ταλαντωτή) με επιμηκυμένα σχήματα υψηλότερης παραμόρφωσης (προερχόμενα από την proxy-SU(3)). Η υποπεριοχή $Z = 96-104$ θα περιέχει επιμηκυμένα σχήματα χαμηλής παραμόρφωσης (προερχόμενα από τον αρμονικό ταλαντωτή), τα οποία θα συνυπάρχουν με επιμηκυμένα σχήματα υψηλότερης παραμόρφωσης (προερχόμενα από την proxy-SU(3)).

Υπάρχουν δηλαδή αρκετές περιοχές στον πυρηνικό χάρτη, στις οποίες μπορεί να παρατηρηθεί συνύπαρξη επιμηκυμένων σχημάτων διαφορετικών παραμορφώσεων αλλά μόνο τρεις στις οποίες προβλέπεται να συνυπάρχουν πεπλατυσμένα σχήματα χαμηλής παραμόρφωσης μαζί με επιμηκυμένα σχήματα υψηλότερων παραμορφώσεων. Αυτές οι περιοχές είναι οι:

α) Η περιοχή $N = 104-112$ για $Z = 82$,

β) η περιοχή $N = 64-70$ για $Z = 50$, και

γ) η περιοχή $N = 158-168$ για $Z = 126$.

5.4 Η τετραπολική αλληλεπίδραση και μια εξήγηση του φαινομένου

Από τα παραπάνω συνάγεται ότι το φαινόμενο της συνύπαρξης σχήματος εμφανίζεται σε συγκεκριμένες περιοχές του πυρηνικού χάρτη, στις οποίες η παρατηρούμενη 0_2^+ στάθμη βρίσκεται ενεργειακά κοντά σε αυτή της θεμελιώδους κατάστασης. Η επεξήγηση του φαινομένου που προτείνεται βασίζεται στην επίδραση του αλγεβρικού τελεστή τετραπολικής αλληλεπίδρασης και στην βαθμιαία ‘‘άποδυνάμωση’’ των κλασικών μαγικών αριθμών με την αύξηση της παραμόρφωσης που παρουσιάστηκε στα προηγούμενα [35].

Η τετραπολική αλληλεπίδραση qq μεταξύ δύο νουκλεονίων είναι ένας ταυστικός τελεστής δευτέρου βαθμού. Η συνιστώσα q_0 εκπεφρασμένη στο μοντέλο του Nilsson γράφεται στην μορφή:

$$q_0 = (2\xi^2) - \xi^2 - \eta^2 + \left(-2\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right). \quad (5.1)$$

Έτσι ο παραμορφωμένος όρος στην Χαμιλτονιανή του Nilsson γράφεται:

$$H_\varepsilon = \frac{1}{6} \hbar \omega_0 q_0. \quad (5.2)$$

Τα στοιχεία πίνακα δίνονται από την σχέση:

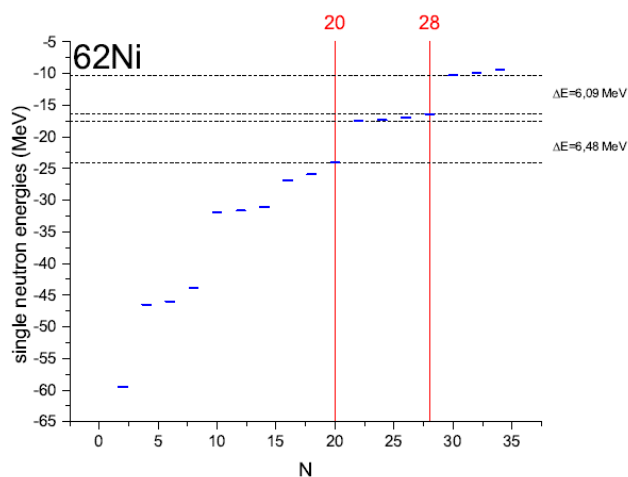
$$\langle N'_i l'_i \Lambda'_i \Sigma'_i | H_\varepsilon | N_i l_i \Lambda_i \Sigma_i \rangle = \delta_{N'_i N_i} \langle N'_i l'_i \Lambda'_i \Sigma'_i | \frac{1}{6} \hbar \omega_0 (2\xi^2 - \xi^2 - \eta^2) | N_i l_i \Lambda_i \Sigma_i \rangle. \quad (5.3)$$

Η παρουσία του $\delta_{N'_i N_i}$ δείχνει ότι τα μη μηδενικά στοιχεία του πίνακα της αλληλεπίδρασης είναι αυτά που έχουν τον ίδιο συνολικό αριθμό κβάντων. Δηλαδή ο τετραπολικός τελεστής απουσία των επιδράσεων των l^2 και ls (που δημιουργούν τους κλασικούς φλοιούς της πυρηνικής φυσικής) ισχυροποιείται στους φλοιούς του αρμονικού ταλαντωτή.

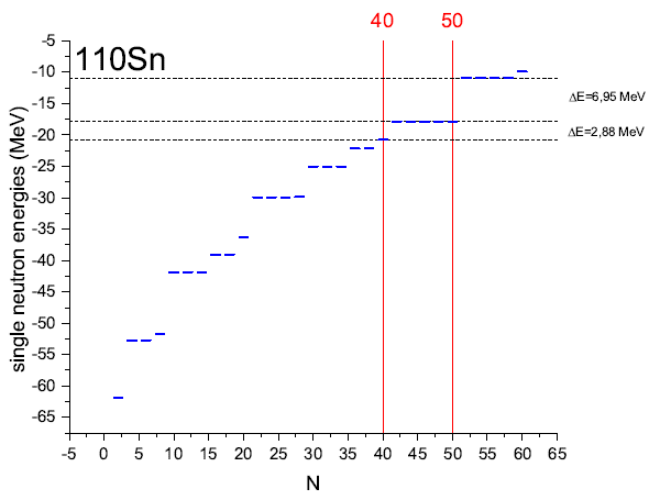
Ακόμη, όπως φάνηκε από τα προηγούμενα διαγράμματα, η αύξηση της παραμόρφωσης οδηγεί στην μείωση των ενεργειακών χασμάτων στους κλασικούς μαγικούς αριθμούς 28, 50, 82,... Αυτό οφείλεται στο ότι όταν ένας πυρήνας έχει χαμηλή παραμόρφωση έχει σφαιρικό σχήμα και ο κβαντικός αριθμός της στροφορμής είναι καλός κβαντικός αριθμός. Για αυτόν τον λόγο η αλληλεπίδραση ls είναι ισχυρή και

έτσι δημιουργούνται τα κλασικά ενεργειακά χάσματα. Οι παραμόρφωμένοι πυρήνες όμως απομακρύνονται από την σφαιρική συμμετρία και αποκτούν κυλινδρική. Σε αυτή την περίπτωση η αλληλεπίδραση qq ισχυροποιείται, αναταγωνίζεται την ls και προκαλεί την μείωση των ενεργειακών χάσμάτων.

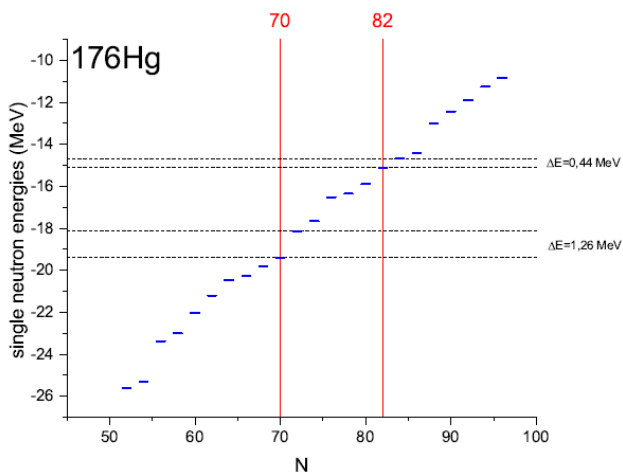
Ένας ακριβέστερος υπολογισμός [35] των νουκλεονικών ενεργειών με τη χρήση της σχετικιστικής θεωρίας μέσου πεδίου που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα δείχνει ότι τα ενεργειακά χάσματα στους αριθμούς 20, 40, 70 γίνονται συγκρίσιμα με τα χάσματα στους κλασικούς αριθμούς 28, 50, 82. Τα αποτελέσματα αφορούν τους πυρήνες ${}^{62}_{28}\text{Ni}_{34}$, ${}^{110}_{50}\text{Sn}_{60}$ και ${}^{96}_{42}\text{Mo}_{54}$.



Σχήμα 5.14: Υπολογισμοί RMF για το ${}^{62}_{28}\text{Ni}_{34}$ [35]. Τα ενεργειακά χάσματα στους αριθμούς 20 και 28 είναι φανερά.



Σχήμα 5.15: Υπολογισμοί RMF για το $^{110}_{50}\text{Sn}_{60}$ [35]. Τα ενεργειακά χάσματα στους αριθμούς 40 και 50 είναι φανερά.



Σχήμα 5.16: Υπολογισμοί RMF για το $^{176}_{82}\text{Hg}_{94}$ [35]. Τα ενεργειακά χάσματα στους αριθμούς 70 και 82 είναι φανερά.

Έτσι τα 6 νουκλεόνια σθένους του $^{62}_{28}\text{Ni}_{34}$ με τροχιακά Nilsson $1/2[330]$, $1/2[310]$, $3/2[301]$, τα οποία ανήκουν στον 28-50 φλοιό, αλληλεπιδρούν με τα υπόλοιπα νουκλεόνια $1/2[321]$, $3/2[321]$, $5/2[312]$, $7/2[303]$ του φλοιού του αρμονικού ταλαντωτή μέσω της qq εφόσον έχουν τον ίδιο χβαντικό αριθμό N .

Η συγχώνευση των κλασικών φλοιών με τους φλοιούς του αρμονικού ταλαντωτή δημιουργεί υπερφλοιούς που επιτρέπουν την ισχυροποίηση της τετραπολικής αλληλεπίδρασης και με αυτό τον τρόπο

την εμφάνιση της διεγερμένης $K = 0^+$ ζώνης. Το φαινόμενο δηλαδή της συνύπαρξης των πυρηνικών σχημάτων εμφανίζεται σε παραμορφωμένους πυρήνες που έχουν τα πρωτόνια ή τα νετρόνια τους περίπου στο μέσο ενός κλασικού πυρηνικού φλοιού. Λόγω παραμόρφωσης και απόσβεσης της αλληλεπίδρασης ls τα κλασικά ενεργειακά χάσματα για 28, 50, 82 συμπιέζονται και έτσι δημιουργούνται υπερφλοιοί που αποτελούνται από νουκλεόνια των κλασικών φλοιών και των φλοιών του αρμονικού ταλαντωτή. Σε αυτούς τους φλοιούς η αλληλεπίδραση qq “ζευγαρώνει” τα νουκλεόνια με διαφορετικούς τρόπους και έτσι προκύπτει η διεγερμένη 0^+ η οποία ερμηνεύεται ως διαφορετικό πυρηνικό σχήμα.

5.5 Προβλέποντας τους υποψήφιους πυρήνες

Είναι φανερό ότι το φαινόμενο της συνύπαρξης σχημάτων εμπλέκει την δομή των κλασικών φλοιών με τη δομή του αρμονικού ταλαντωτή. Αυτό από αλγεβρικής πλευράς σε ένα πυρηνικό πρότυπο βασισμένο στην $SU(3)$ σημαίνει την σύζευξη της χαρακτηριστικής μη αναγωγίσιμης αναπαράστασης που προκύπτει από την θεώρηση των κλασικών φλοιών του προτύπου φλοιών $(\lambda, \mu)_{sm}$ με την αντίστοιχη του αρμονικού ταλαντωτή $(\lambda, \mu)_{ho}$.

Επειδή αυτή η σύζευξη απαιτεί μαθηματικά εργαλεία που δεν έχουν χρησιμοποιηθεί ακόμη στα πλαίσια του παρόντος, η περιγραφή της πρόβλεψης θα βασιστεί στις μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις $(\lambda, \mu)_{sm}$, από τις οποίες προέρχεται η θεμελιώδης 0_1^+ στάθμη, καθώς και στις $(\lambda, \mu)_{ho}$, από τις οποίες προέρχεται η διεγερμένη 0_2^+ στάθμη.

Μία συλλογική Χαμιλτονιανή με $SU(3)$ συμμετρία έχει την μορφή:

$$H = H_0 - \frac{\chi}{2} QQ, \quad (5.4)$$

όπου H_0 είναι η Χαμιλτονιανή του αρμονικού ταλαντωτή και QQ ο όρος της τετραπολικής αλληλεπίδρασης, ο οποίος σχετίζεται με τον τελεστή Casimir δεύτερης τάξης C_2 μέσω της σχέσης:

$$QQ = 4C_2 - 3L^2. \quad (5.5)$$

Στα πειραματικά δεδομένα η τιμή της 0_2^+ παρουσιάζεται με την μορφή:

$$0_2^+ = E_{0_2^+} - E_{0_1^+}. \quad (5.6)$$

Εφόσον οι ιδιοτιμές της Χαμιλτονιανής του αρμονικού ταλαντωτή είναι N_0 , η παραπάνω σχέση γράφεται στην μορφή:

$$0_2^+ = (N_{0,ho} - \frac{\chi}{2} QQ_{ho}) - (N_{0,sm} - \frac{\chi}{2} QQ_{sm}) = \frac{\chi}{2} (QQ_{sm} - QQ_{ho}) - (N_{0,sm} - N_{0,ho}). \quad (5.7)$$

Αν $\Delta(QQ) = QQ_{SM} - QQ_{ho}$ και $\Delta(N_0) = N_{0,sm} - N_{0,ho}$ έχουμε:

$$0_2^+ = (N_{0,ho} - \frac{\chi}{2} QQ_{ho}) - (N_{0,sm} - \frac{\chi}{2} QQ_{sm}) = \frac{\chi}{2} (QQ_{sm} - QQ_{ho}) - (N_{0,sm} - N_{0,ho}). \quad (5.8)$$

Σύμφωνα με τα διαγράμματα των προηγούμενων παραγράφων παρατηρούμε ότι η συνύπαρξη σχήματος εμφανίζεται όταν

$$\frac{\chi}{2} (QQ_{sm} - QQ_{ho}) \geq 0. \quad (5.9)$$

Σύμφωνα με την παραπάνω σχέση μπορεί να προβλεφθούν άνευ παραμέτρων οι περιοχές στις οποίες εμφανίζεται η συνύπαρξη σχήματος. Με την χρήση των αριθμών λ, μ μπορεί ακόμη να προβλεφθεί το είδος της παραμόρφωσης μέσω της εξίσωσης 4.27.

Οι παραπάνω σχέσεις είναι μέχρι στιγμής άμεσα χρησιμοποιήσιμες αν τα πρωτόνια ή τα νετρόνια βρίσκονται σε μαγικό αριθμό, οπότε για την μη αναγωγίσιμη αναπαράστασή τους ισχύει $(\lambda, \mu) = (0, 0)$. Αν ο πυρήνας βρίσκεται σε πρωτονικό ή νετρονικό αριθμό εκτός των μαγικών, τα πρωτόνια χαρακτηρίζονται από την μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση $(\lambda, \mu)_\pi$ και τα νετρόνια από την $(\lambda, \mu)_\nu$. Σε αυτή την περίπτωση για την αναλυτική πρόβλεψη των περιοχών πρέπει να γίνουν οι συζεύξεις των πρωτονικών φλοιών της κλασικής θέωσης με του αρμονικού ταλαντωτή, των νετρονικών φλοιών αντίστοιχα, καθώς και η μεταξύ τους σύζευξη. Αυτή η διαδικασία απαιτεί τον υπολογισμό των συμβόλων $g(\lambda, \mu)$.

Κεφάλαιο 6

Άρση εκφυλισμών σε **SU(3)** πρότυπα

6.1 Χαμιλτονιανές με **SU(3)** συμμετρία

Όπως αναφέρθηκε και στο κεφάλαιο 2, η δυναμική συμμετρία ενός προτύπου έχει ως συνέπεια ότι η Χαμιλτονιανή μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός τελεστών Casimir των αντίστοιχων αλγεβρών. Έτσι αν η Χαμιλτονιανή έχει δυναμική συμμετρία g , και $g \supset g' \supset g'' \supset \dots$ μία αλυσίδα της g , μπορούμε να γράψουμε:

$$H = aC(g) + bC(g') + cC(g'') + \dots + Q_1 + Q_2 + \dots, \quad (6.1)$$

όπου $C(g), C(g'), C(g''), \dots$ οι τελεστές Casimir των αντίστοιχων υποαλγεβρών και Q_1, Q_2, \dots τελεστές που γράφονται ως γραμμικοί συνδυασμοί των γεννητόρων των υποαλγεβρών της αλυσίδας και δεν είναι Casimir.

Το πλήθος και το είδος των τελεστών που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για το κάθε πρότυπο είναι σχετικά "αυθαίρετο", αφού μπορούν να κατασκευαστούν άπειροι τελεστές που να δημιουργούνται από τους γεννήτορες των υποαλγεβρών, και έτσι να έχουν κοινές ιδιοσυναρτήσεις με την Χαμιλτονιανή. Η επιλογή τους εξαρτάται από την τάξη της ακρίβειας που απαιτείται.

Στην περίπτωση της **SU(3)** αν επιλέξουμε ακρίβεια τελεστών δύο σωμάτων η Χαμιλτονιανή γράφεται στην μορφή:

$$H = a\widehat{L}^2 + b\widehat{C}_2, \quad (6.2)$$

όπου L^2 είναι ο Casimir της **SO(3)** (που είναι υποάλγεβρα της **SU(3)**) με ιδιοτιμές:

$$\langle L^2 \rangle = l(l+1), \quad (6.3)$$

και \hat{C}_2 ο δεύτερης τάξης Casimir της $SU(3)$ με ιδιοτιμές που δίνονται από την 4.11 και όπως φαίνεται είναι συμμετρικές ως προς τα λ, μ . Είναι φανερό ακόμη ότι αυτές οι εκφράσεις δεν περιέχουν την τιμή K , η οποία χαρακτηρίζει τις διάφορες ζώνες περιστροφής. Έτσι, ζώνες που χαρακτηρίζονται από την ίδια μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση θα παρουσιάζουν εκφυλισμό. Επομένως είναι απαραίτητη η εισαγωγή όρων ανώτερης τάξης, έτσι ώστε να προκύψει διαφοροποίηση ως προς τα διαφορετικά K , η οποία θα άρει τον εκφυλισμό.

Αυτό επιτυγχάνεται με την εισαγωγή όρων τρίτης τάξης ή/και όρων τέταρτης τάξης. Οι αντίστοιχες Χαμιλτονιανές θα περιέχουν τους όρους $\hat{\Omega}$ και $\hat{\Lambda}$, οι όποιοι δεν είναι Casimir, αλλά γραμμικά ανεξάρτητοι και οι ιδιοτιμές τους εξαρτώνται από το K .

6.2 Ο τελεστής $\hat{\Omega}$

Η Χαμιλτονιανή τρίτης τάξης γράφεται στη μορφή [37]:

$$H = a\hat{L}^2 + b\hat{C}_2 + c\hat{\Omega} + d\hat{C}_3, \quad (6.4)$$

όπου \hat{C}_3 είναι ο τελεστής Casimir τρίτης τάξης και $\hat{\Omega}$ τελεστής τριών σωματινών που όμως δεν είναι Casimir, αν και γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός γινομένων γεννητόρων της $SU(3)$ αλυσίδας. Αποδεικνύεται ότι αυτοί οι δύο όροι είναι οι μοναδικοί τρίτης τάξης γραμμικά ανεξάρτητοι που υπάρχουν, με την έννοια ότι οποιοσδήποτε άλλος είναι γραμμικός συνδυασμός τους.

Οι ιδιοτιμές του \hat{C}_3 είναι [36, 37, 38]:

$$\langle C_3 \rangle = \frac{1}{162}(\lambda - \mu)(2\lambda + \mu + 3)(2\mu + \lambda + 3). \quad (6.5)$$

Για τις ιδιοτιμές του $\hat{\Omega}$ γενικά δεν μπορεί να βρεθεί μια αναλυτική έκφραση. Στη συνέχεια περιγράφεται η διαδικασία που οδηγεί στην αριθμητική εύρεση των ιδιοτιμών. Θεωρούμε τις καταστάσεις

$$|K, L \rangle \rangle = c(K, l) |(\lambda, \mu) K, L, 0 \rangle, \quad (6.6)$$

όπου $|(\lambda, \mu) K, L, 0 \rangle$ είναι οι ιδιοκαταστάσεις του μοντέλου του Elliott. Αν $\lambda \geq \mu$ τότε ισχύει:

$$\Omega = \sum_{K'=K, K \pm 2} \Omega_{K'K} |K' l \rangle \rangle, \quad (6.7)$$

όπου

$$\Omega_{KK} = \sqrt{6}(\mu + 2\lambda + 3)[l(l+1) - 3K^2], \quad (6.8)$$

και

$$\Omega_{K\pm 2K} = -3[3(\mu \mp K)(\mu \pm K + 2)(l \pm K + 2)(l \pm K + 1)(l \pm 1)(l \mp K)(l \mp K - 1)]^{\frac{1}{2}}. \quad (6.9)$$

Ακόμη ισχύει η σχέση

$$|-K, l \rangle\rangle = (-1)^{\lambda + \mu + l} |K, l \rangle\rangle. \quad (6.10)$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, μπορεί να γίνει η διαγωνοποίηση του $\hat{\Omega}$ και να εξαχθούν οι ιδιοτιμές του.

Για μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις της μορφής $(\lambda, 0)$ οι ιδιοτιμές δίνονται από τον τύπο [38] :

$$\langle \Omega \rangle = \sqrt{6}l(l+1)(2\lambda + 3). \quad (6.11)$$

Για την περίπτωση $(\lambda, 2)$: αν $l = 0$, τότε $\langle \Omega \rangle = 0$,

αν $l =$ περιττός, τότε

$$\langle \Omega \rangle = \sqrt{6}[l(l+1) - 12](2\lambda + 5), \quad (6.12)$$

αν $l =$ άρτιος, τότε

$$\langle \Omega \rangle = \sqrt{6}[(l-2)(l+3)(2\lambda + 5) \pm 6\sqrt{l(l+1)(l-1)(l+2) + (2\lambda + 5)}]. \quad (6.13)$$

Για τις υπόλοιπες περιπτώσεις η διαγωνοποίηση πρέπει να γίνει αριθμητικά. Αυτό απαιτεί τη διαγωνοποίηση ενός πίνακα της μορφής:

$$\begin{bmatrix} \langle 0|\Omega|0\rangle & \langle 0|\Omega|2\rangle & \langle 0|\Omega|4\rangle & \dots \\ \langle 2|\Omega|0\rangle & \langle 2|\Omega|2\rangle & \langle 2|\Omega|4\rangle & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \langle K-2|\Omega|K\rangle & \langle K|\Omega|K\rangle \end{bmatrix}. \quad (6.14)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (6.7), (6.8), (6.9), (6.10) ο πίνακας που προκύπτει είναι τριδιαγώνιος, αφού καταστάσεις των οποίων τα K απέχουν κατά 4 έχουν εσωτερικό γινόμενο 0. Έτσι:

$$\begin{bmatrix} \Omega_{00} & \Omega_{02} & 0 & \dots \\ \Omega_{20} + (-1)^{\lambda + \mu + l} \Omega_{20} & \Omega_{22} & \Omega_{24} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \Omega_{K-2K} & \Omega_{KK} \end{bmatrix}. \quad (6.15)$$

6.3 Ο τελεστής $\hat{\Lambda}$

Η γενική μορφή της χαμιλτονιανής που περιέχει όρους τέταρτης τάξης είναι [37] :

$$H = a\hat{L}^2 + b\hat{C}_2 + c\hat{\Omega} + d\hat{C}_3 + e\hat{\Lambda} + f\hat{L}^4 + g\hat{C}_2\hat{L}^2 + h\hat{C}_2^2. \quad (6.16)$$

Οι τελευταίοι τρεις όροι προέρχονται από πράξεις μεταξύ των τελεστών Casimir χαμηλότερης τάξης. Αποδεικνύεται ότι ο μοναδικός τελεστής τέταρτης τάξης που γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός γινόμενων γεννητόρων της $SO(3)$ και $SU(3)$ και είναι γραμμικά ανεξάρτητος είναι ο $\hat{\Lambda}$. Για τον υπολογισμό των ιδιοτιμών του $\hat{\Lambda}$ χρησιμοποιούμε τις καταστάσεις βάσης της εξίσωσης (6.10). Όπως και για τον $\hat{\Omega}$ ισχύει η σχέση:

$$\Lambda|K, l \rangle\rangle = \sum_{K'=K, K\pm 2} \Lambda_{K'K}|K' l \rangle\rangle, \quad (6.17)$$

όπου

$$\begin{aligned} \Lambda_{KK} &= 2(2\lambda + \mu + 3)^2[l(l+1) - 3K^2] - 18K^4 + 6K^2[5l(l+1) - 3] - 12l^2(l+1)^2 - 72l(l+1) \\ &\quad - 3(\mu - K)(\mu + K + 2)[l(l+1) - 3K^2] - 3(\mu + K)(\mu - K + 2)[l(l+1) - 3K^2], \end{aligned} \quad (6.18)$$

και

$$\Lambda_{K\pm 2K} = 6[(\mu \mp K)(\mu \pm K + 2)(l \pm K + 2)(l \pm K + 1)(l \mp K)(l \mp K - 1)]^{\frac{1}{2}}(2\lambda + \mu \mp 3K). \quad (6.19)$$

Για την περίπτωση με $(\lambda, 0)$ οι ιδιοτιμές σύμφωνα με την παραπάνω διαδικασία δίνονται από τον τύπο [38]

$$\langle \Lambda \rangle = 2l(l+1)[4\lambda^2 + 12\lambda - 6l(l+1) - 27]. \quad (6.20)$$

Για την περίπτωση με $(\lambda, 2)$ για περιττές τιμές της στροφορμής l οι ιδιοτιμές δίνονται από την σχέση [38] :

$$\begin{aligned} \langle \Lambda \rangle &= 2[(l-2)(l+3)(2\lambda+5) - 6(l^2+l+1)(l^2+l+3)] \\ &\quad \pm 12[12(2\lambda+5)^4 + 2(2l^2+4l^3-8l^2-10l+3)(2\lambda+5)^2 + 9(2l+1)^2]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (6.21)$$

ενώ για άρτιες τιμές της στροφορμής έχουμε

$$\langle \Lambda \rangle = 2[l(l+1) - 12](4\lambda^2 + 20\lambda - 12) + (-12l^4 - 24l^3 + 86l^2 + 98l - 960). \quad (6.22)$$

Για μεγαλύτερες τιμές του μ απαιτείται η διαγωνοποίηση του πίνακα

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \langle 0|\Lambda|0\rangle & \langle 0|\Lambda|2\rangle & \langle 0|\Lambda|4\rangle & \dots & \langle 0|\Lambda|K\rangle \\ \langle 2|\Lambda|0\rangle & \langle 2|\Lambda|2\rangle & \langle 2|\Lambda|4\rangle & \dots & \langle 2|\Lambda|K\rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle K|\Lambda|0\rangle & \dots & \dots & \langle K|\Lambda|K-2\rangle & \langle K|\Lambda|K\rangle \end{bmatrix}, \quad (6.23)$$

ο οποίος γράφεται

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_{00} & \Lambda_{02} & 0 & \dots & 0 \\ \Lambda_{20} + (-1)^{\lambda+\mu+l}\Lambda_{-20} & \Lambda_{22} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \Lambda_{K-2K} & \Lambda_{KK} \end{bmatrix}. \quad (6.24)$$

6.4 Ο τελεστής \hat{K}^2

Ένας άλλος τελεστής ο οποίος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την άρση των εκφυλισμών στις διαφόρες K ζώνες [51] είναι ο τελεστής \hat{K}^2 , ο οποίος είναι συνάρτηση των τελεστών $\hat{\Lambda}$ και $\hat{\Omega}$ και γράφεται στην μορφή:

$$\hat{K}^2 = (\lambda_1 \lambda_2 \hat{L}^2 + \lambda_3 \hat{X}_3 + \hat{X}_4) / (2\lambda_3^2 + \lambda_1 \lambda_2), \quad (6.25)$$

όπου

$$\lambda_1 = -\frac{1}{3}(-\lambda + \mu), \quad \lambda_2 = \frac{1}{3}(-\lambda - 2\mu - 3), \quad \lambda_3 = \frac{1}{3}(2\lambda + \mu + 3), \quad (6.26)$$

και

$$X_3 = \frac{1}{36}\Omega, \quad (6.27)$$

$$X_4 = \frac{1}{72}(\Lambda + 36L^2 + 12L^4 - 16C_2L^2). \quad (6.28)$$

Αποδεικνύεται με τετριμμένες πράξεις ότι τα στοιχεία πίνακα του τελεστή δίνονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} K_{KK}^2 &= \left\{ \left[\frac{2}{9}C_2 - \frac{2}{3}\mu(\mu+2) + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}K^2 \right] [L(L+1) - 3K^2] \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{1}{3}C_2 + \mu(\mu+2) + \frac{7}{4} - K^2 \right] K^2 \right\} / [(\lambda+1)(\lambda+\mu+2)], \end{aligned} \quad (6.29)$$

$$K_{K+2K}^2 = -(K+1) \{ [(\mu+1)^2 - (K+1)^2] [f(L, K+1)] \}^{\frac{1}{2}} / [2(\lambda+1)(\lambda+\mu+2)], \quad (6.30)$$

$$K_{K-2K}^2 = (K-1) \{ [(\mu+1)^2 - (K-1)^2] [f(L, K-1)] \}^{\frac{1}{2}} / [2(\lambda+1)(\lambda+\mu+2)], \quad (6.31)$$

όπου σε όλα τα παραπάνω \hat{C}_2 είναι ο τελεστής δευτέρου βαθμού της $SU(3)$ και η συνάρτηση f έχει την μορφή

$$f(L, n) = f(L, -n) = \frac{1}{4}(L^2 - n^2)(L^2 - n^2 + 2L + 1). \quad (6.32)$$

Ο πίνακας του τελεστή \hat{K}^2 έχει παρόμοια μορφή με αυτή των πινάκων των τελεστών \hat{L} και $\hat{\Omega}$ και μπορεί να ακολουθηθεί παρόμοια διαδικασία για την διαγωνοποίησή του.

6.5 Χαμιλτονιανές στα πλαίσια του μοντέλου **proxy-SU(3)**

Στα πλαίσια των φερμιονικών αλγεβρικών μοντέλων όπως η proxy-SU(3) (και η pseudo-SU(3)), η επιλεγόμενη μη αναγωγίσιμη αναπαράσταση χαρακτηρίζει την θεμελιώδη ζώνη, αλλά και την πρώτη γ_1 ζώνη, καθώς και (πιθανότατα) υψηλότερες K ζώνες. Οι β_1 και γ_2 ζώνες θα χαρακτηρίζονται από την επόμενη αναπαράσταση. Σε αυτή την περίπτωση είναι αναγκαία η εισαγωγή όρων τρίτης και τέταρτης τάξης με σκοπό την άρση των εκφυλισμών, η οποία επιτυγχάνεται με την εξάρτηση των ιδιοτιμών από το K .

Οι τελεστές $\hat{\Omega}$ και \hat{L} δεν είναι διαγώνιοι στην ίδια βάση και έτσι δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν “ταυτόχρονα”. Όμως μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο τελεστής \hat{K} , ο οποίος αποτελεί την τετραγωνική ρίζα (με την τελεστική έννοια) του \hat{K}^2 . Ο \hat{K} περιέχει τους τελεστές $\hat{\Omega}$ και \hat{L} και έχει την ενδιαφέρουσα ιδιότητα να μπορεί να θεωρηθεί διαγώνιος για τιμές της στροφορμής l σημαντικά μικρότερες από τους κβαντικούς αριθμούς (λ, μ) . Σύμφωνα με αυτή την ιδιότητα θα χρησιμοποιηθεί και στα παρακάτω. Η Χαμιλτονιανή τρίτης τάξης που περιέχει τον $\hat{\Omega}$ θα έχει την μορφή:

$$\hat{H}^{(3)} = A\hat{L}^2 + B\hat{K} + C\hat{\Omega} - D\hat{L}^4, \quad (6.33)$$

ενώ η Χαμιλτονιανή τέταρτης τάξης η οποία περιέχει τον \hat{L} θα είναι:

$$\hat{H}^{(4)} = A\hat{L}^2 + B\hat{K} + C\hat{L} - D\hat{L}^4. \quad (6.34)$$

Στους πίνακες 6.1, 6.2 παρουσιάζονται οι πειραματικές τιμές μέσω των οποίων γίνεται ο προσδιορισμός των παραμέτρων της Χαμιλτονιανής, καθώς και η σύγκριση με τις θεωρητικές προβλέψεις. Στους πίνακες 6.3, 6.4 παρουσιάζονται οι τιμές των παραμέτρων που βασίζονται σε αυτά τα δεδομένα.

Πίνακας 6.1: Φάσματα της θεμελιώδους ζώνης των πυρήνων ^{164}Er , ^{180}Hf και ^{238}U , ^{248}Cm , μέσω των οποίων έγινε ο προσδιορισμός των σταθερών για τη Χαμιλτονιανή τρίτης και τέταρτης τάξης αντίστοιχα. Τα δεδομένα πάρθηκαν από την βάση δεδομένων ENSDF.

L	^{164}Er		^{180}Hf		^{238}U		^{248}Cm	
	exp	th	exp	th	exp	th	exp	th
2	91	81	93	86	45	40	43	36
4	299	272	309	295	148	134	144	127
6	614	573	641	627	307	282	299	274
8	1025	978	1084	1076	518	482	506	477
10	1518	1476	1631	1632	776	733	763	732
12	2083	2057	2274	2284	1077	1031	1064	1035
14	2703	2706	3005	3019	1416	1372	1406	1382
16	3411	3405	3814	3821	1788	1752	1784	1769
18	4121	4137	4682	4672	2191	2165	2193	2190
20	4868	4879	5554	5551	2619	2605	2627	2639
22	5652	5608		6437	3068	3067	3084	3109
24		6296		7303	3535	3542	3560	3593
26		6916		8123	4018	4023	4055	4081
28		7434		8866	4517	4501	4572	4565
30		7818		9502	5035	4967	5114	5036

Πίνακας 6.2: Φάσματα της γ ζώνης των πυρήνων ^{164}Er ανδ ^{180}Hf και ^{238}U , ^{248}Cm , μέσω των οποίων έγινε ο προσδιορισμός των σταθερών για τη Χαμιλτονιανή τρίτης και τέταρτης τάξης αντίστοιχα. Τα δεδομένα πάρθηκαν από την βάση δεδομένων ENSDF.

L	^{164}Er		^{180}Hf		^{238}U		^{248}Cm	
	exp	th	exp	th	exp	th	exp	th
2	860	855	1200	1220	1060	1041	1050	1068
3	946	936	1291	1306	1106	1081		1104
4	1059	1039	1409	1407	1163	1133	1144	1142
5	1198	1176	1557	1561	1232	1200		1211
6	1359	1318	1724	1693	1311	1276	1284	1255
7	1545	1517	1929	1930	1403	1371		1369
8	1745	1688	2134	2085	1504	1467	1452	1413
9	1977	1953	2398	2405	1619	1592		1577
10	2184	2145	2614	2587	1741	1703	1669	1625
11	2479	2476	2961	2947	1875	1859		1807
12	2733	2683	3129	3186	2018	1983	1929	1888
13	3027	3061		3564	2171	2171		2073
14	3267	3291		3869	2333	2303	2230	2196
15	3519	3688		4242	2502	2522		2369
16		3951		4618	2683	2661	2567	2543
17		4350		4963	2868	2909		2691
18		4643		5416	3065	3052	2937	2924
19		5025		5710	3265	3323		3034
20		5344		6242	3474	3469	3332	3332
21					3686	3752		3389
22					3904	3906	3738	3761
23					4127	4197		3787
24					4358	4356	4158	4203
25					4586	4649		4212
26					4825	4809	4600	4650
27					5063	5101		4637
28						5258		5091
29						5543		5052
30						5694		5518

Πίνακας 6.3: Παραμετρικές τιμές σε keV αναφορικά με τη θεμελιώδη και την γ_1 ζώνη που προέκυψαν με τη χρήση πειραματικών δεδομένων για τη Χαμιλτονιανή τρίτης τάξης.

Πυρήνας	L_g	L_γ	A	B	$10^{-3}C$	$10^{-3}D$	n	σ
^{160}Gd	16	8	9.11	471	9.37	5.69	15	8
^{160}Dy	28	23	9.86	442	7.22	4.71	36	105
^{162}Dy	24	18	9.21	426	9.37	4.43	29	81
^{164}Dy	20	10	9.40	354	6.57	4.87	19	795
^{162}Er	20	12	13.35	413	8.19	13.21	21	35
^{164}Er	22	19	10.43	406	10.62	6.42	29	43
^{166}Er	18	14	9.53	371	9.46	8.04	22	33
^{168}Er	16	8	10.52	384	7.69	5.14	15	7
^{166}Yb	24	13	-2.69	523	57.55	9.26	24	78
^{168}Yb	30	17	5.28	482	19.06	3.37	31	101
^{178}Hf	20	15	11.46	567	9.73	9.14	24	48
^{180}Hf	20	16	11.26	586	11.83	6.06	25	20
^{228}Th	22	10	0.01	506	23.20	6.01	20	397
^{230}Th	24	10	3.41	382	10.75	3.36	21	26
^{232}Th	30	6	3.89	389	7.13	2.02	20	47
^{234}U	30	8	5.28	448	2.62	1.61	22	29
^{238}U	30	27	2.98	518	8.26	1.77	41	40
^{248}Cm	30	26					28	

Πίνακας 6.4: Παραμετρικές τιμές σε keV αναφορικά με τη θεμελιώδη και την γ_1 ζώνη που προέκυψαν με τη χρήση πειραματικών δεδομένων για τη Χαμιλτονιανή τέταρτης τάξης.

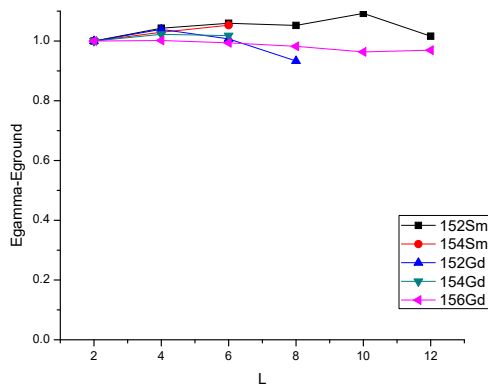
Πυρήνας	L_g	L_γ	A	B	$10^{-5}C$	$10^{-3}D$	n	σ
^{160}Gd	16	8	10.10	468	5.56	5.00	15	9
^{160}Dy	28	23	10.25	445	5.78	4.12	36	99
^{162}Dy	24	18	10.02	427	6.35	3.96	29	73
^{164}Dy	20	10	9.93	354	4.26	4.42	19	782
^{162}Er	20	12	14.43	408	4.40	12.58	21	34
^{164}Er	22	19	9.40	439	12.46	6.11	29	56
^{166}Er	18	14	10.44	371	6.19	7.65	22	28
^{168}Er	16	8	11.32	381	4.49	4.57	15	8
^{166}Yb	24	13	5.40	483	29.92	5.33	24	75
^{168}Yb	30	17	8.77	462	8.19	2.29	31	97
^{178}Hf	20	15	12.25	588	7.48	8.90	24	58
^{180}Hf	20	16	8.27	678	23.09	8.36	25	30
^{228}Th	22	10	5.03	473	6.64	3.81	20	396
^{230}Th	24	10	5.49	372	4.02	2.76	21	24
^{232}Th	30	6	4.79	387	3.28	1.61	20	47
^{234}U	30	8	5.98	444	0.73	1.50	22	28
^{238}U	30	27	4.54	513	3.06	1.37	41	34
^{248}Cm	30	26	3.52	531	3.13	1.47	28	31

6.6 Σύγκριση με πειραματικά δεδομένα

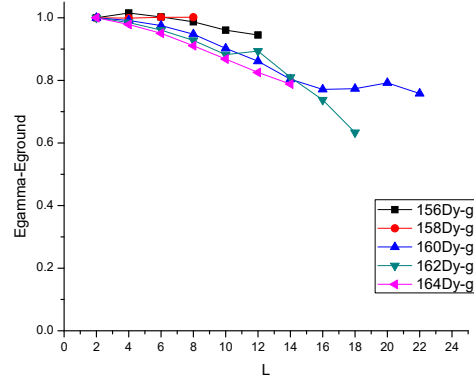
6.6.1 Διαφοροποίηση της θεμελιώδους από την γ_1 ζώνη

Πρόσφατα παρουσιάστηκε στην βιβλιογραφία [46] η ποσότητα $E(L_\gamma) - E(L_g)$, η οποία μετρά την διαφορά της ενέργειας ανάμεσα στην γ ζώνη και την θεμελιώδη, για συγκεκριμένες τιμές της στροφορμής. Όπως φαίνεται από τα διαγράμματα 6.1, 6.2 στα οποία παρουσιάζεται η συγκεκριμένη ποσότητα κανονικοποιημένη ως προς $E(2_\gamma) - E(2_g)$, η ενεργειακή αυτή διαφορά μειώνεται για τους παραμορφωμένους επιμηκνυμένους πυρήνες (όπως για παράδειγμα για τους ακτινίδες), αυξάνεται για τους γ ασταθείς (όπως τα όσμια και οι πλατίνες, τα οποία παρουσιάζουν την $O(6)$ συμμετρία) και παραμένει σχετικά σταθερή για τους δονητικούς πυρήνες.

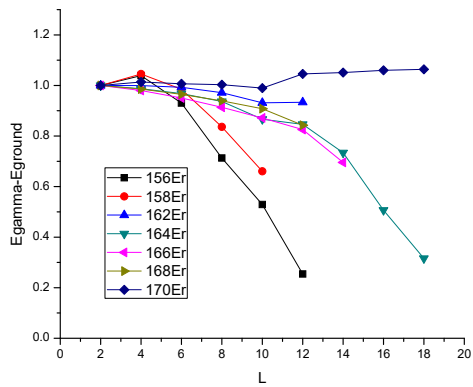
Ακόμη τα συμπεράσματα που βγαίνουν από τα πειραματικά δεδομένα επιβεβαιώνονται και από θεωρητικά πρότυπα τα οποία περιγράφουν τις αντίστοιχες κατηγορίες πυρήνων (βλέπε Παράρτημα Α). Μια εξήγηση για αυτό είναι ότι για τριαξονικούς, δονητικούς και γ ασταθείς πυρήνες η ροπή αδράνειας της γ ζώνης είναι μικρότερη από της θεμελιώδους, ενώ για παραμορφωμένους επιμηκνυμένους πυρήνες ισχύει το αντίθετο (βλέπε Παράρτημα Β). Υψηλότερες ροπές αδράνειας οδηγούν σε χαμηλότερες ενεργειακά ζώνες.



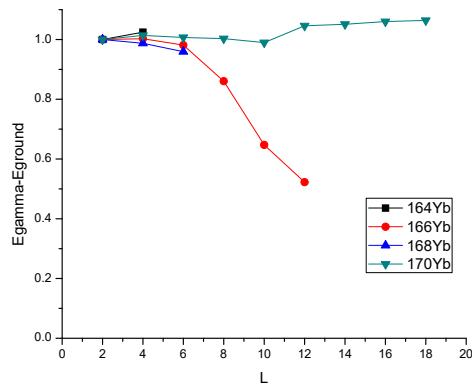
(α)



(β')

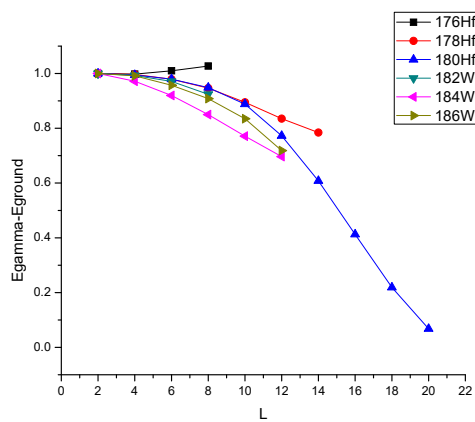


(γ')

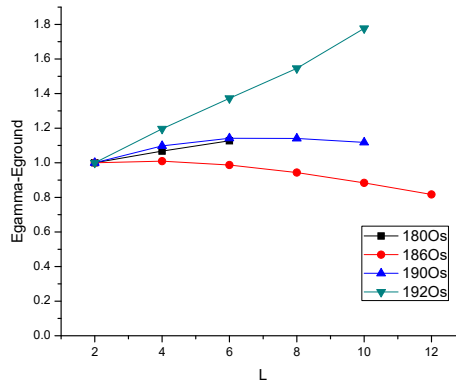


(δ')

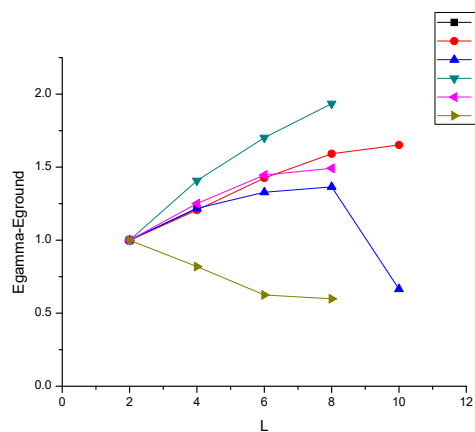
Σχήμα 6.1: Πειραματικές τιμές της ποσότητας $(E(L_\gamma) - E(L_g)) / (E(2_\gamma) - E(2_g))$ για διάφορες σειρές ισotόπων.



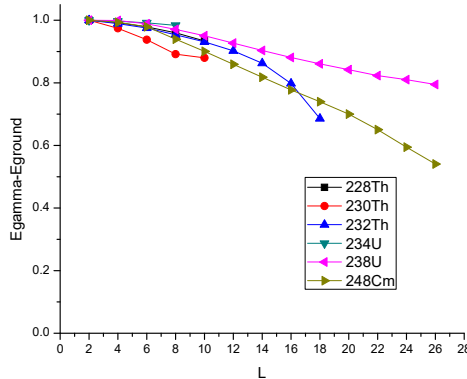
(α')



(β')



(γ')



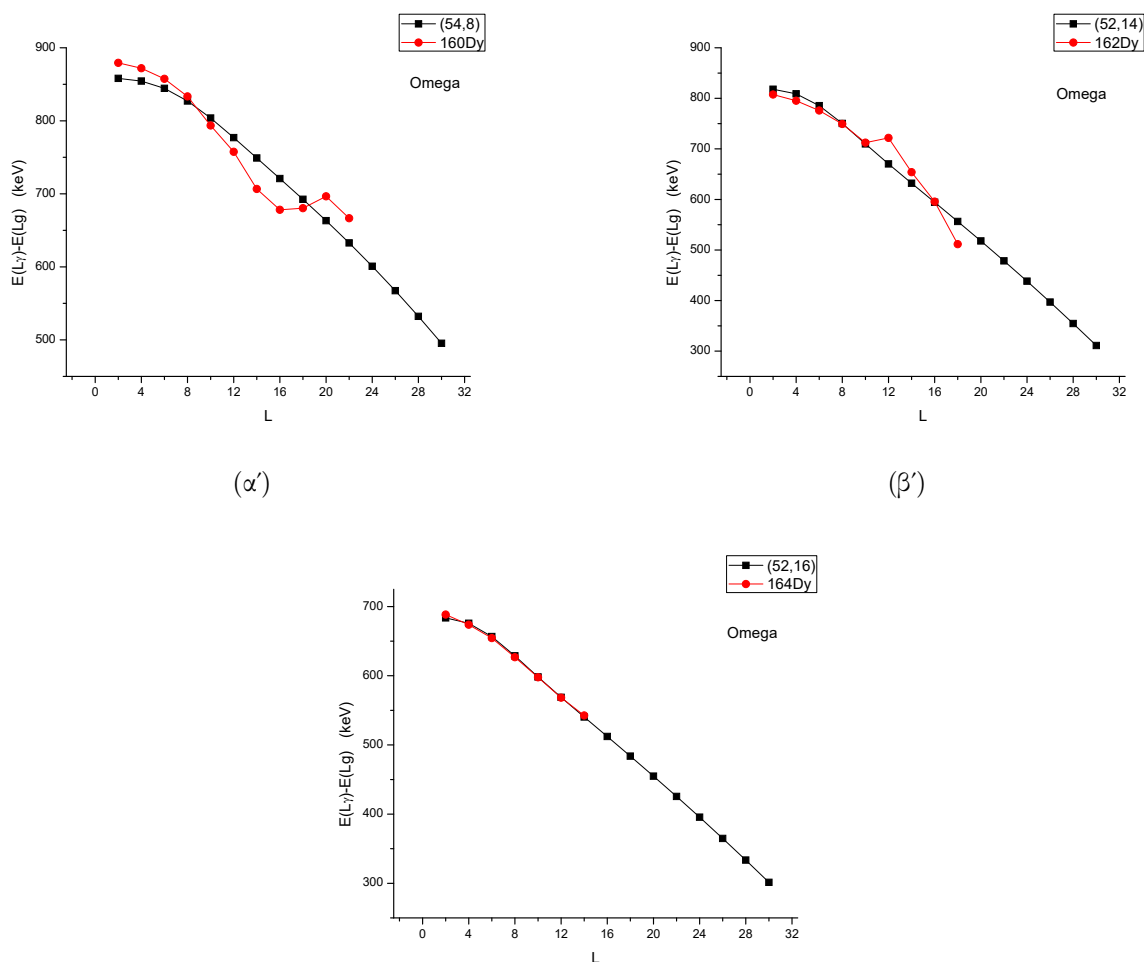
(δ')

Σχήμα 6.2: Πειραματικές τιμές της ποσότητας $(E(L_\gamma) - E(L_g)) / (E(2_\gamma) - E(2_g))$ για διάφορες σειρές ισοτόπων.

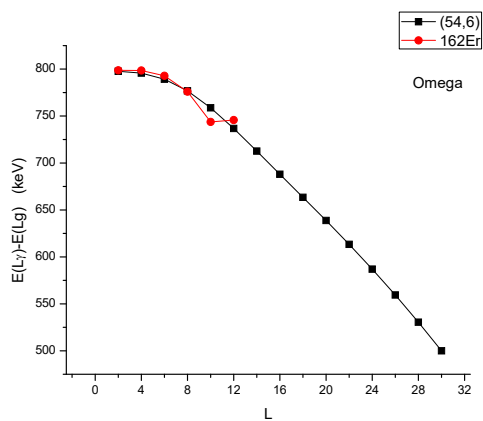
Αν θεωρήσουμε την Χαμιλτονιανή τρίτης ή τέταρτης τάξης (για $\hat{X} = \hat{\Omega}$ ή $\hat{X} = \hat{\Lambda}$ αντίστοιχα), οι όροι $A\hat{L}^2, D\hat{L}^4$ ακυρώνονται στην ποσότητα $(E(L_\gamma) - E(L_g))/(E(2_\gamma) - E(2_g))$, διότι έχουν την ίδια τιμή ανα στροφορμή. Έτσι ο λόγος γράφεται:

$$\frac{(E(L_\gamma) - E(L_g))}{(E(2_\gamma) - E(2_g))} = \frac{(BK(L_\gamma) + CX(L_\gamma)) - (BK(L_g) + CX(L_g))}{(BK(2_\gamma) + CX(2_\gamma)) - (BK(2_g) + CX(2_g))} = \frac{K(L_\gamma) - K(L_g) + \frac{C}{B}(X(L_\gamma) - X(L_g))}{K(2_\gamma) - K(2_g) + \frac{C}{B}(X(2_\gamma) - X(2_g))}, \quad (6.35)$$

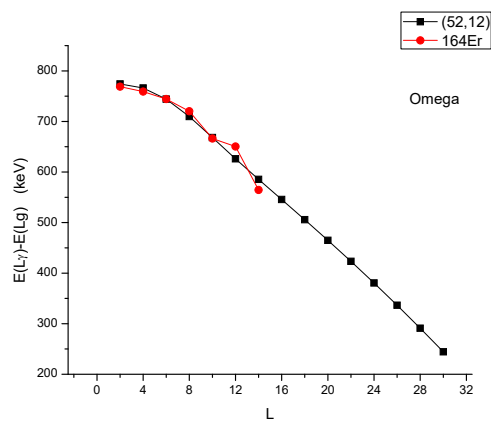
ποσότητα που εξαρτάται εμφανώς μόνο από τον λόγο C/B . Στα επόμενες σελίδες παρουσιάζονται οι πειραματικές τιμές της ποσότητας $E(L_\gamma) - E(L_g)$ συγκρινόμενες με τις αντίστοιχες θεωρητικές που προκύπτουν από τις Χαμιλτονιανές τρίτης ή τέταρτης τάξης για διάφορες σειρές ισοτόπων.



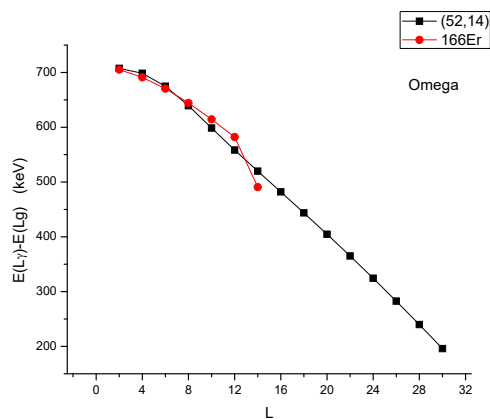
Σχήμα 6.3: Πειραματικές τιμές σε keV της ποσότητας $E(L_\gamma) - E(L_g)$ συγκρινόμενες με τις προβλέψεις της Χαμιλτονιανής που περιέχει τον τελεστή $\hat{\Omega}$ για ισότοπα του Δυσπροσίου.



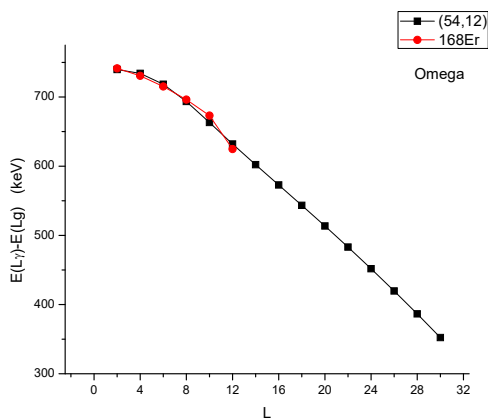
(α')



(β')

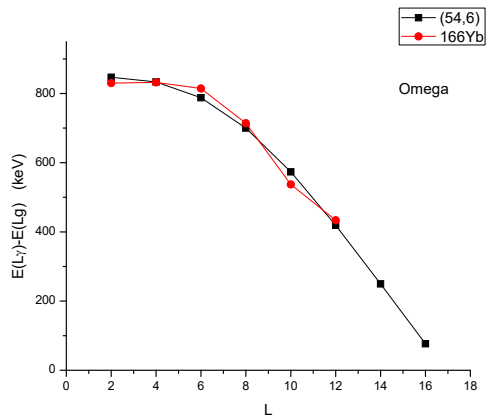


(γ')

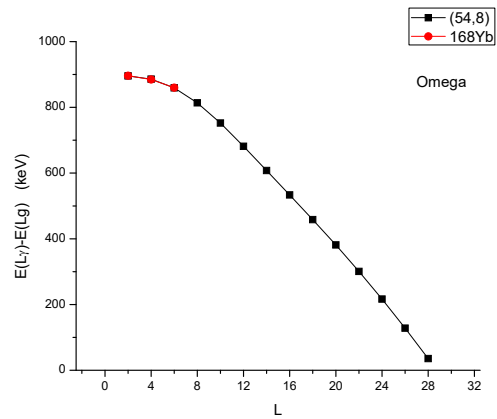


(δ')

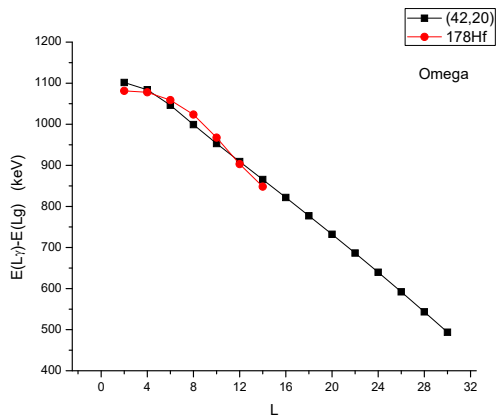
Σχήμα 6.4: Πειραματικές τιμές σε keV της ποσότητας $E(L_\gamma) - E(L_g)$ συγκρινόμενες με τις προβλέψεις της Χαμιλτονιανής που περιέχει τον τελεστή $\hat{\Omega}$ για ισότοπα του Ερβίου.



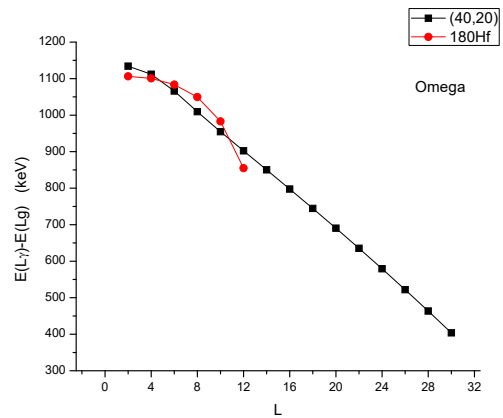
(α')



(β')

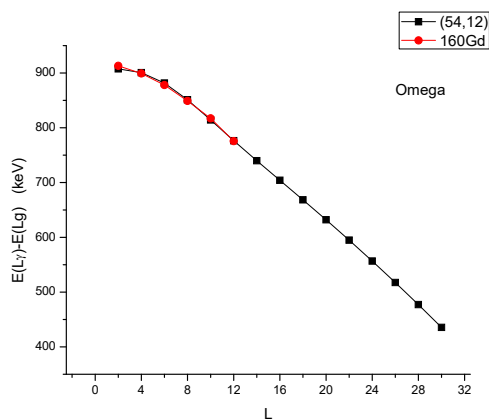


(γ')

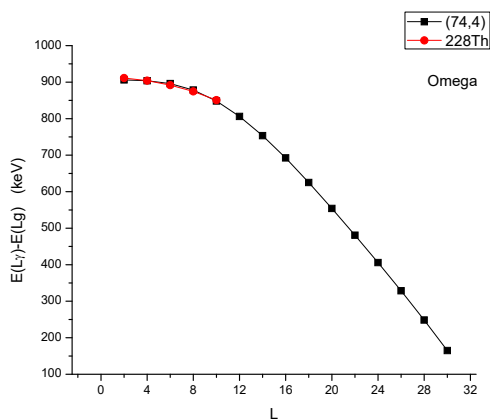


(δ')

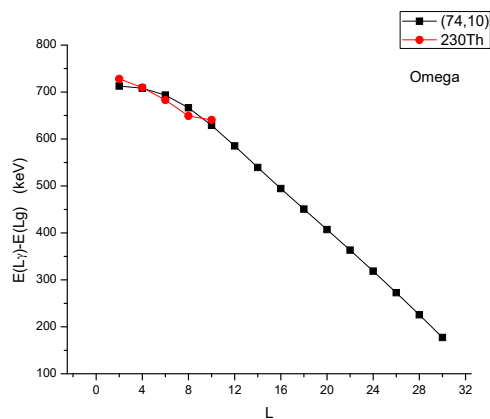
Σχήμα 6.5: Πειραματικές τιμές σε keV της ποσότητας $E(L_\gamma) - E(L_g)$ συγκρινόμενες με τις προβλέψεις της Χαμιλτονιανής που περιέχει τον τελεστή $\hat{\Omega}$ για ισότοπα του Υττεβρίου και του Χαφνίου.



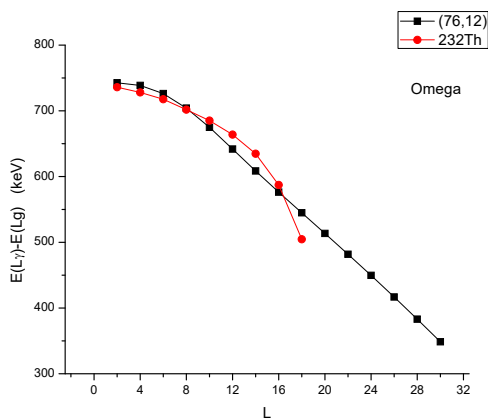
(α')



(β')

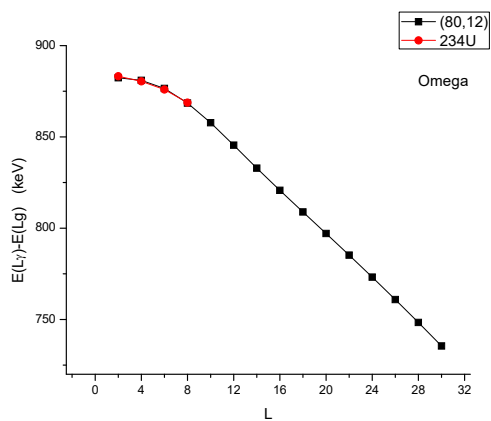


(γ')

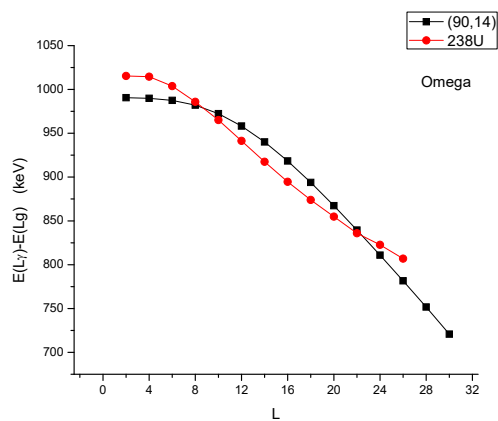


(δ')

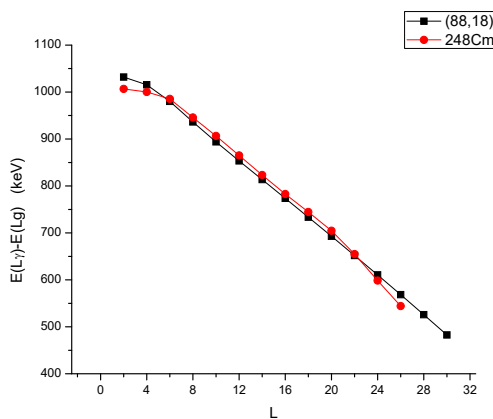
Σχήμα 6.6: Πειραματικές τιμές σε keV της ποσότητας $E(L_\gamma) - E(L_g)$ συγκρινόμενες με τις προβλέψεις της Χαμιλτονιανής που περιέχει τον τελεστή $\hat{\Omega}$ για ισότοπα Γαδολίνιου και του Θορίου.



(α')

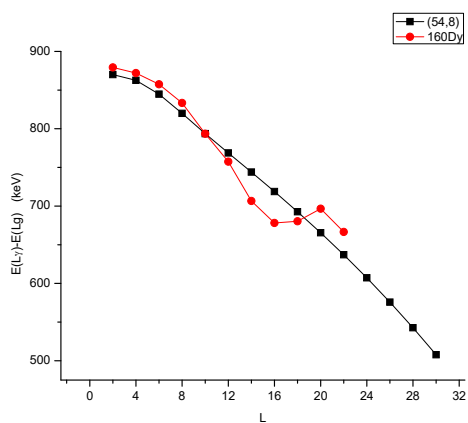


(β')

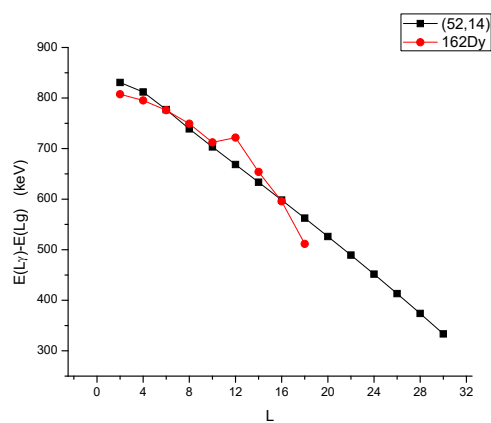


(γ')

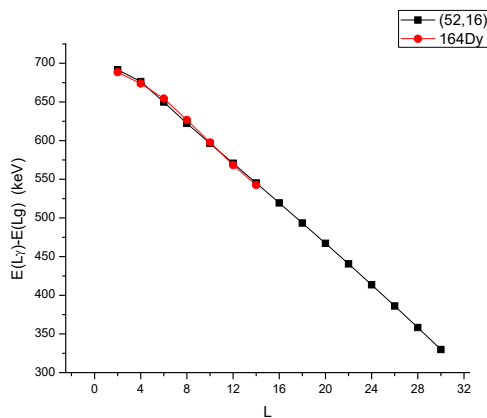
Σχήμα 6.7: Πειραματικές τιμές σε keV της ποσότητας $E(L_\gamma) - E(L_g)$ συγκρινόμενες με τις προβλέψεις της Χαμιλτονιανής που περιέχει τον τελεστή $\hat{\Omega}$ για ισότοπα του Ουρανίου και του Κιουρίου.



(α')



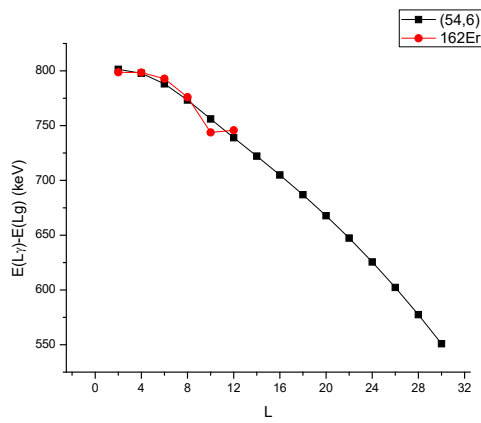
(β')



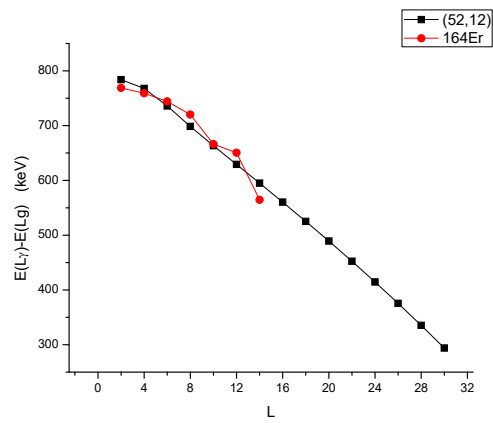
(γ')

Σχήμα 6.8:

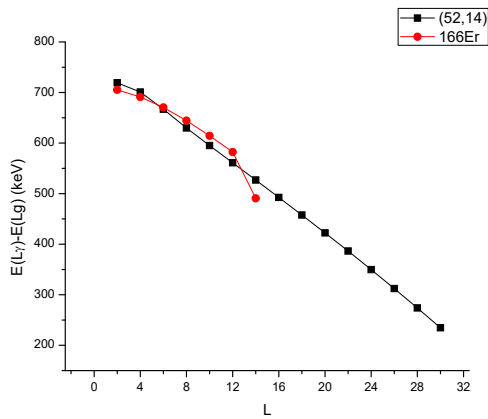
Πειραματικές τιμές σε keV της ποσότητας $E(L_\gamma) - E(L_g)$ συγκρινόμενες με τις προβλέψεις της Χαμιλτονιανής που περιέχει τον τελεστή $\hat{\Lambda}$ για ισότοπα του Δυσπροσίου.



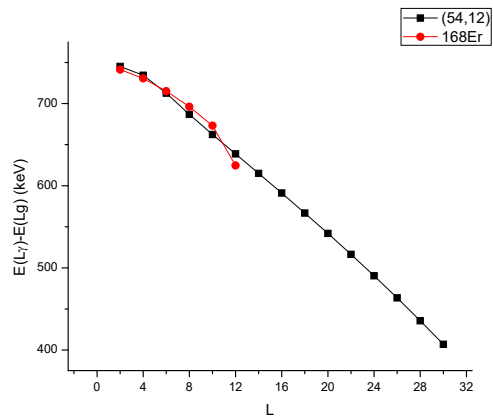
(α')



(β')



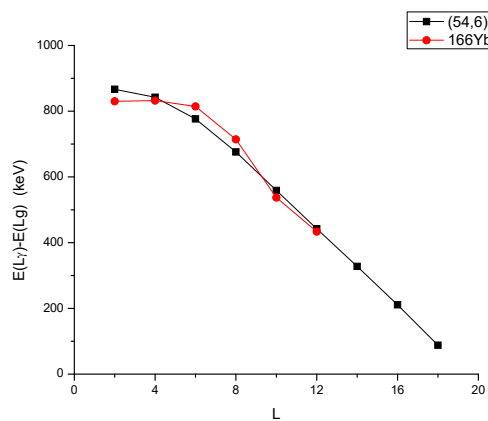
(γ')



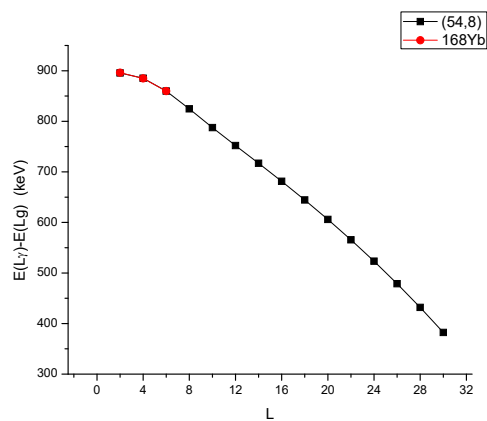
(δ')

Σχήμα 6.9:

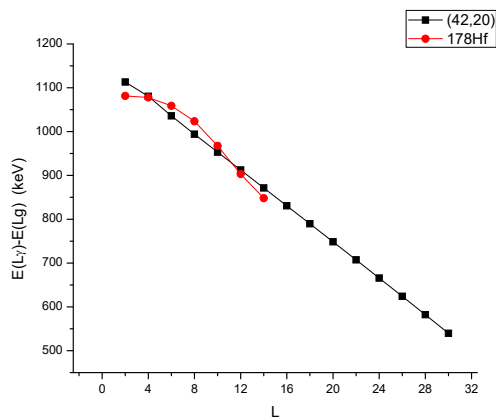
Πειραματικές τιμές σε keV της ποσότητας $E(L_\gamma) - E(L_g)$ συγκρινόμενες με τις προβλέψεις της Χαμιλτονιανής που περιέχει τον τελεστή $\hat{\Lambda}$ για ισότοπα του Ερβίου.



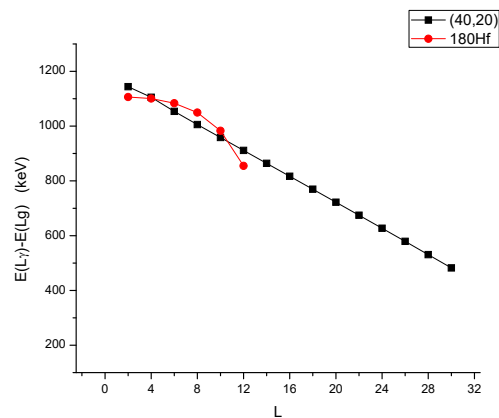
(α')



(β')



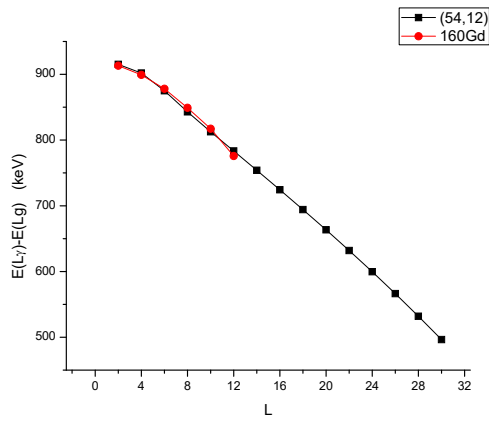
(γ')



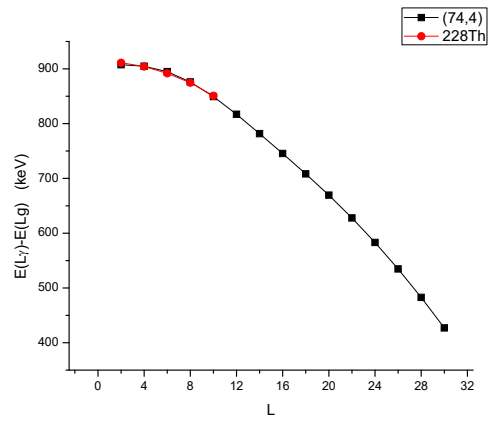
(δ')

Σχήμα 6.10:

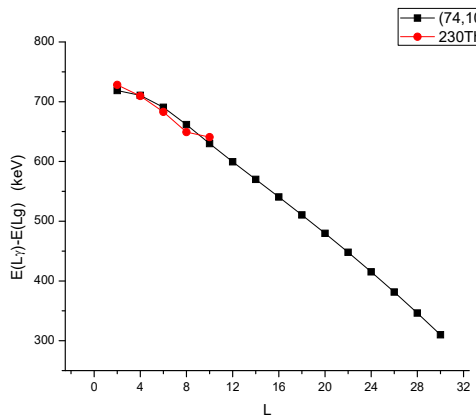
Πειραματικές τιμές σε keV της ποσότητας $E(L_\gamma) - E(L_g)$ συγκρινόμενες με τις προβλέψεις της Χαμιλτονιανής που περιέχει τον τελεστή $\hat{\Lambda}$ για ισότοπα του Υττερβίου και του Χαφνίου.



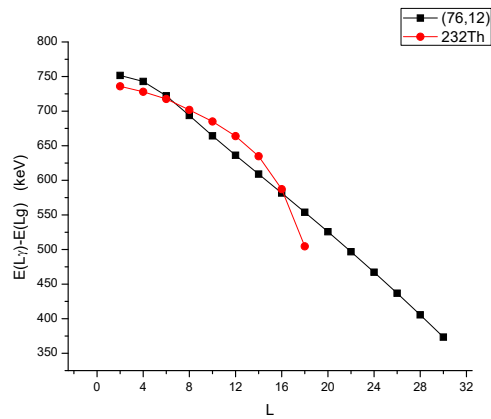
(α')



(β')



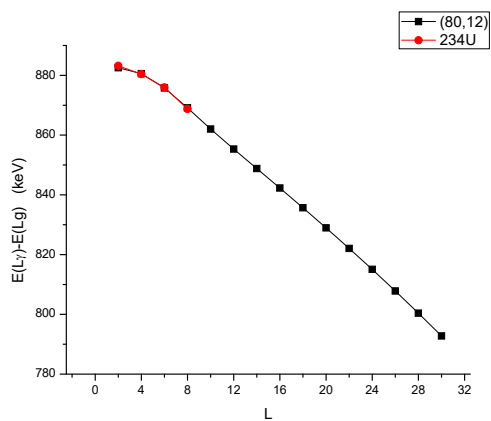
(γ')



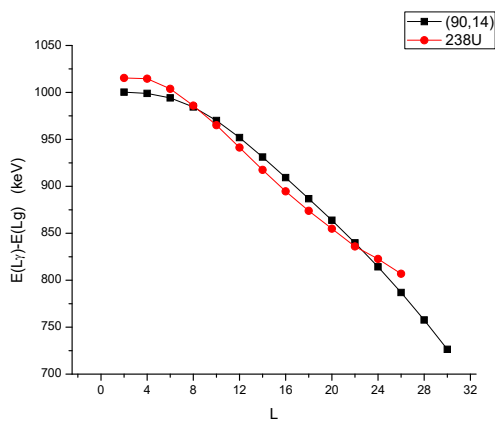
(δ')

Σχήμα 6.11:

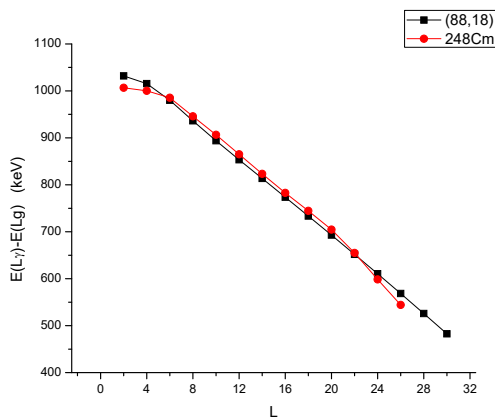
Πειραματικές τιμές σε keV της ποσότητας $E(L_\gamma) - E(L_g)$ συγκρινόμενες με τις προβλέψεις της Χαμιλτονιανής που περιέχει τον τελεστή $\hat{\Lambda}$ για ισότοπα του Γαδολινίου και του Θορίου.



(α')



(β')



(γ')

Σχήμα 6.12:

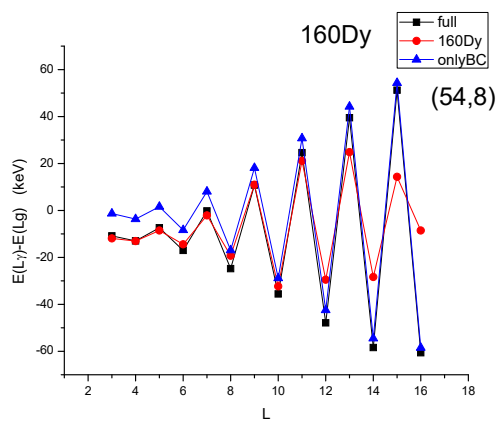
Πειραματικές τιμές σε keV της ποσότητας $E(L_\gamma) - E(L_g)$ συγκρινόμενες με τις προβλέψεις της Χαμιλτονιανής που περιέχει τον τελεστή $\hat{\Lambda}$ για ισότοπα του Ουρανίου και του Κιούριου.

6.6.2 Η ταλάντωση της ενεργειακής διαφοράς ανάμεσα σε περιττές και άρτιες στροφορμές

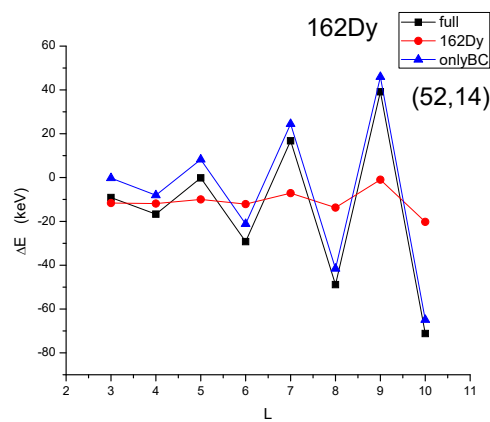
Η ταλάντωση της ενεργειακής διαφοράς ανάμεσα σε περιττές και άρτιες στροφορμές είναι το φαινόμενο κατά το οποίο οι ενέργειες σε μία ζώνη οι οποίες αντιστοιχούν σε περιττή τιμή της στροφορμής είναι σχετικά μετατοπισμένες στο ενεργειακό φάσμα σε σχέση με τις αντίστοιχες άρτιες. Μία ποσότητα η οποία περιγράφει αυτή την “ζιγκ ζαγκ” συμπεριφορά είναι η:

$$\Delta E(L) = E(L) - \frac{E(L-1) + E(L+1)}{2}. \quad (6.36)$$

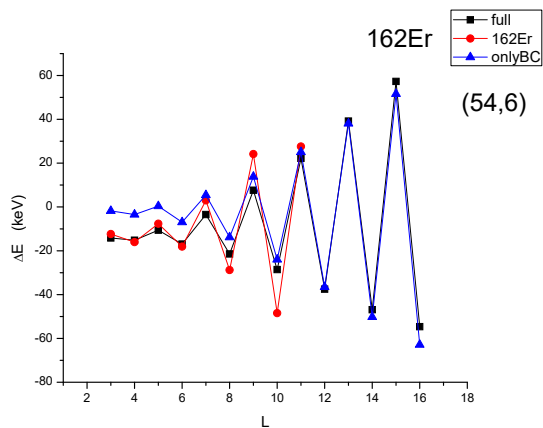
Στις γραφικές παραστάσεις που ακολουθούν εμφανίζονται η παραπάνω ποσότητα ως συνάρτηση της στροφορμής για διάφορους πυρήνες.



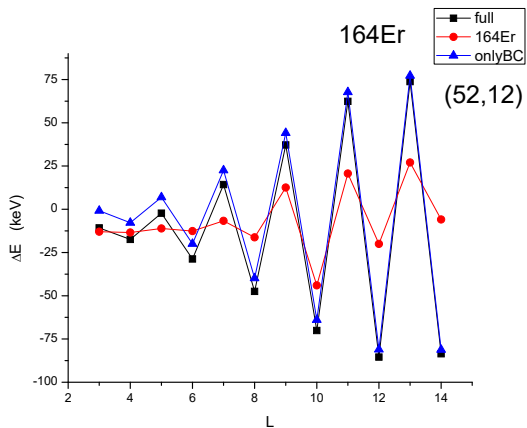
(α')



(β')

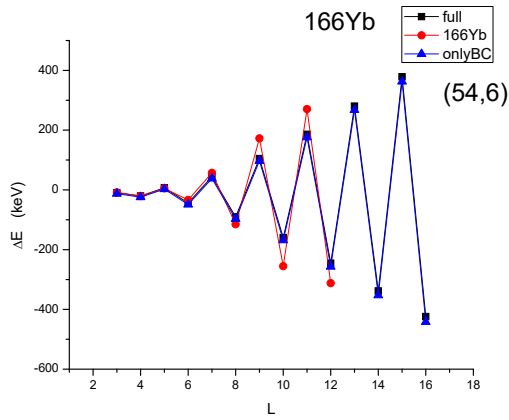


(γ')

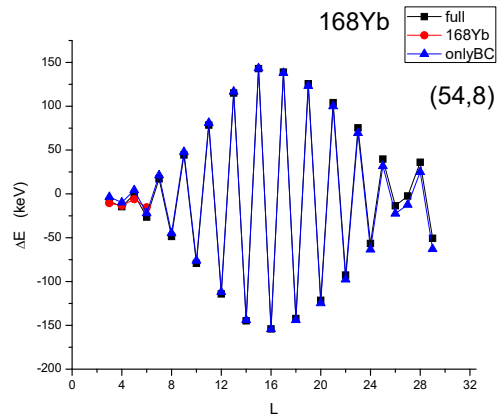


(δ')

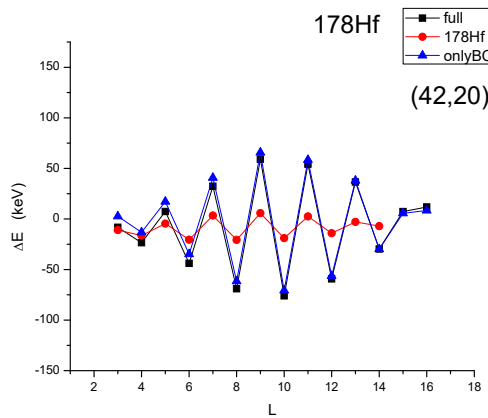
Σχήμα 6.13: Πειραματικές τιμές σε keV της ποσότητας $\Delta(L)$ συγκρινόμενες με τις αντίστοιχες της Χαμιλτονιανής που περιέχει τον τελεστή $\hat{\Omega}$ για διάφορες σειρές ισοτόπων.



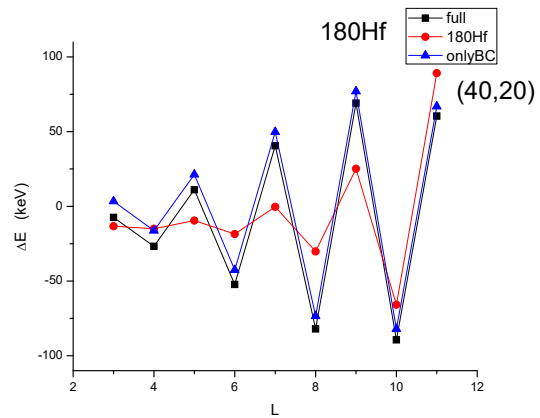
(α')



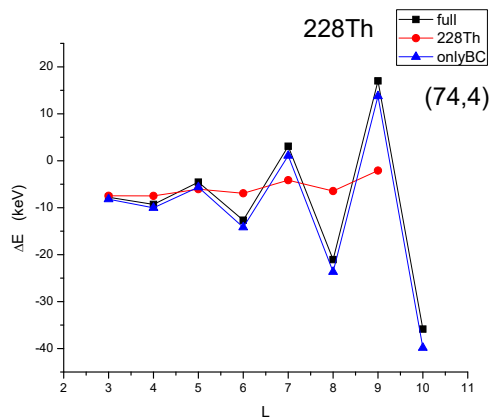
(β')



(γ')

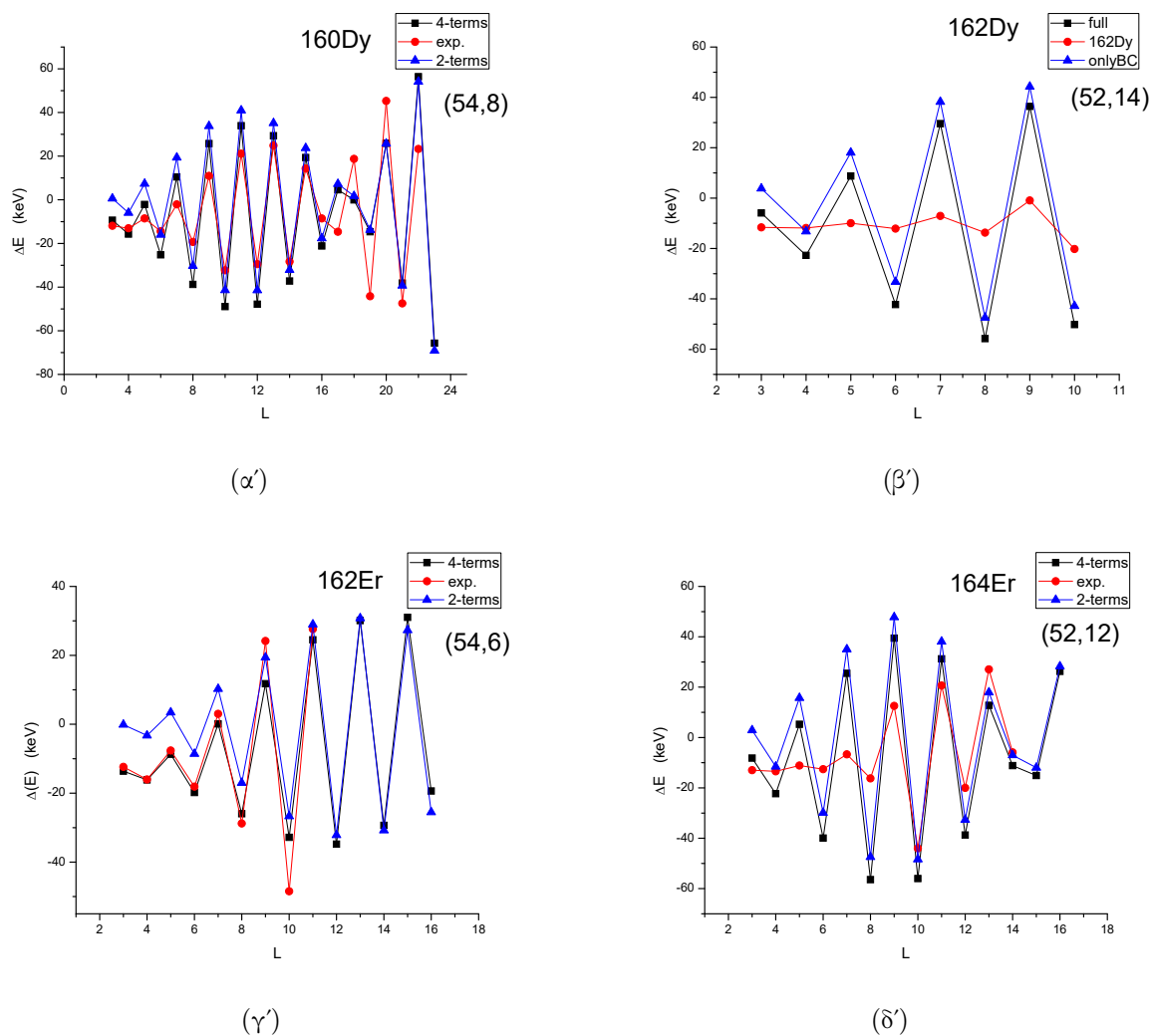


(δ')

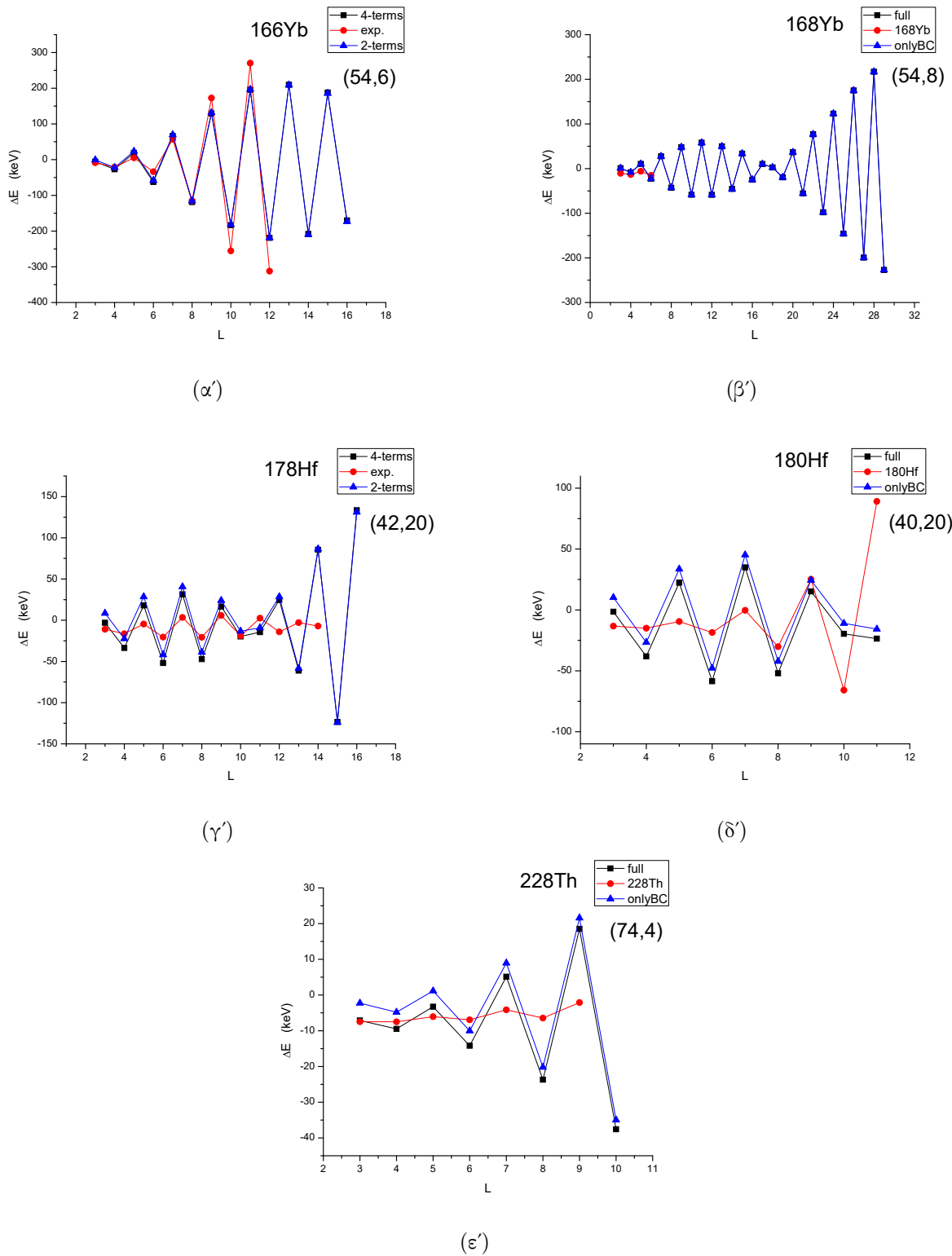


(ε')

Σχήμα 6.14: Πειραματικές τιμές σε keV της ποσότητας $\Delta(L)$ συγκρινόμενες με τις αντίστοιχες της Χαμιλτονιανής που περιέχει τον τελεστή Ω για διάφορες σειρές ισοτόπων.



Σχήμα 6.15: Πειραματικές τιμές σε keV της ποσότητας $\Delta(L)$ συγκρινόμενες με τις αντίστοιχες της Χαμιλτονιανής που περιέχει τον τελεστή $\hat{\Lambda}$ για διάφορες σειρές ισότοπων.



Σχήμα 6.16: Πειραματικές τιμές σε keV της ποσότητας $\Delta(L)$ συγκρινόμενες με τις αντίστοιχες της Χαμιλτονιανής που περιέχει τον τελεστή $\hat{\Lambda}$ για διάφορες σειρές ισοτόπων.

Επίλογος

Το πρόβλημα του πυρήνα λόγω του αγνώστου της ακριβούς περιγραφής της πυρηνικής δύναμης και της πολυπλοκότητας που χαρακτηρίζει τα κβαντικά συστήματα πολλών σωμάτων παρουσιάζει στη παρούσα φάση ανυπέρβλητα εμπόδια ακριβούς επιλυσιμότητας. Αν και οι δυσκολίες στην υπολογιστική ισχύ ξεπερνιούνται με την πάροδο του χρόνου και τα εκάστοτε μοντέλα γίνονται πιο χρήσιμα, η χρήση των αλγεβρικών προτύπων δεν χάνει καθόλου την αξία της, αφενός γιατί επιτρέπει την περιγραφή του πυρηνικού προβλήματος μέσω αρκετά απλούστερων υπολογισμών, αφετέρου διότι οι προβλέψεις της κρύβουν αρκετή φυσική στο βάθος.

Προς αυτή την κατεύθυνση λειτουργεί και το πρότυπο $\text{proxy-SU}(3)$. Η επαναφορά της $\text{SU}(3)$ συμμετρίας σε βαρείς πυρήνες, λόγω της αποκατάστασης των φλοιών του αρμονικού ταλαντωτή που επιτυγχάνεται με την αντικατάσταση των $0[110]$ τροχιακών είναι απόλυτα δικαιολογημένη, κάτι που αποδείχθηκε στο παρόν μέσω των υπολογισμών Nilsson. Κρίσιμο σημείο διαφοροποίησης της $\text{proxy-SU}(3)$ από άλλα πρότυπα είναι ακόμη και η επιλογή της μη αναγωγίσιμης αναπαράστασης, η οποία είναι αυτή που έχει το μέγιστο βάρος. Ο λόγος για αυτό είναι η φύση της ισχυρής πυρηνικής δύναμης που ευνοεί την μεγάλη χωρική αλληλεπικάλυψη. Η δυνατότητα μη παραμετρικών προβλέψεων η οποία βασίζεται στην επιλογή της μη αναγωγίσιμης αναπαράστασης είναι εξαιρετικά ενθαρρυντική όπως φαίνεται από την πρόβλεψη για την υπεροχή της επιμηχημένης παραμόρφωσης έναντι της πεπλατυσμένης, κάτι που έχει και πειραματικό αντίκρουσμα.

Μία άλλη επιτυχία του προτύπου είναι η δυνατότητα πρόβλεψης των περιοχών συνύπαρξης των πυρηνικών σχημάτων και η επεξήγηση του φαινομένου, η οποία είναι αντικείμενο υψηλού ενδιαφέροντος στην επιστημονική κοινότητα τα τελευταία χρόνια. Η θεωρία θα ισχυροποιηθεί μελλοντικά με την χρήση των συμβόλων $9-(\lambda.\mu)$ η οποία θα επιτρέψει την σύζευξη πρωτονικών και νετρονικών φλοιών.

Αξίζει να αναφερθεί ακόμη πως η κατασκευή της Χαμιλτονιανής του προτύπου, η οποία δεν έχει ολοκληρωθεί μέχρι την στιγμή συγγραφής του παρόντος, οδηγεί σε αρκετά καλή συμφωνία με τα πειραματικά δεδομένα μέσω μη παραμετρικών προβλεψεων που βασίζονται σε υπολογισμούς που εμπλέκουν τους τελεστές μετατόπισης τριών και τεσσάρων σωμάτων, γνωστών στην βιβλιογραφία ως Λ και Ω . Η διαδικασία εύρεσης των ιδιοτιμών τους η οποία για μεγάλες διαστάσεις απαιτεί αριθμητικούς υπολογισμούς μη τετριμμένους, οδήγησε στην συγγραφή αντίστοιχου κώδικα, ο οποίος μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για άλλα αλγεβρικά πρότυπα με $SU(3)$ συμμετρία. Τέλος η εισαγωγή της ποσότητας $E(L_\gamma^+) - E(L_g^+)$ στην επιστημονική βιβλιογραφία αποτελεί έναν δείκτη χαρακτηρισμού της δομής των πυρήνων και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εξαγωγή συμπερασμάτων από πειραματικά δεδομένα και θεωρητικά πρότυπα.

Παράρτημα Α΄

Αναλυτικοί υπολογισμοί της ποσότητας $E(L_\gamma^+) - E(L_g^+)$

Α΄.1 Η παρουσία της $O(6)$ υποάλγεβρας

Στην περίπτωση που η δυναμική συμμετρία της Χαμιλτονιανής περιέχει μία $O(6)$ υποάλγεβρα, δημιουργούνται εκφυλισμοί ανάμεσα στις ενεργειακές στάθμες των στροφορμών για την αντίστοιχη ζώνη. Για παράδειγμα, για στροφορμή $L = 2$ η ενεργειακή στάθμη της γ ζώνης είναι ίση με την ενεργειακή στάθμη για $L = 4$ της θεμελιώδους ζώνης κ.ο.κ [11].

Η περίπτωση της $U(5)$ υποάλγεβρας.

Ο πενταδιάστατος αρμονικός ταλαντωτής της Χαμιλτονιανής του προτύπου του Bohr παρουσιάζει δυναμική συμμετρία $U(5) \supset O(5) \supset SO(3)$ [14, 15]. Σε αυτή την περίπτωση οι ενεργειακές στάθμες της θεμελιώδους ζώνης δίνονται από την σχέση:

$$E(L_g) = AL, \quad (A'.1)$$

ενώ οι ενεργειακές στάθμες της γ ζώνης από την:

$$E(L_\gamma) = A(L+2), \quad (A'.2)$$

και έτσι ισχύει

$$E(L_\gamma^+) - E(L_g^+) = 2A, \quad (A'.3)$$

δηλαδή η διαφορά ανάμεσα στις δύο ζώνες διατηρείται σταθερή με την αύξηση της στροφορμής.

Η περίπτωση της $O(6)$ υποάλγεβρας.

Η τρίτη αλυσίδα του IBM είναι η $O(6) \supset O(5) \supset SO(3)$ [13, 14, 15, 16]. Οι ενεργειακές στάθμες δίνονται για την θεμελιώδη ζώνη από την σχέση:

$$E(L_g) = AL(L+6)/4, \quad (A'.4)$$

ενώ της γ ζώνης:

$$E(L_\gamma) = A(L+2)(L+8)/4, \quad (A'.5)$$

και έτσι η διαφορά ανάμεσα στις δύο ζώνες γράφεται:

$$E(L_\gamma^+) - E(L_g^+) = A(L+4), \quad (A'.6)$$

δηλαδή παρουσιάζει γραμμική αύξηση αναλογικά με την στροφορμή.

A'.2 Πρότυπο τριαξονικού περιστροφέα

Σε αυτήν την περίπτωση [17, 18] για την θεμελιώδη ζώνη έχουμε:

$$E(L_g) = AL(L+4), \quad (A'.7)$$

ενώ για τις άρτιες στροφορμές της quasi- γ ζώνης:

$$E(L_\gamma) = A[L(L+6) - 12], \quad (A'.8)$$

και έτσι

$$E(L_\gamma^+) - E(L_g^+) = 12A(L-1). \quad (A'.9)$$

A'.3 Το ακριβώς διαχωρίσιμο πρότυπο **Davidson**

Το δυναμικό Davidson είναι

$$v(\beta) = \beta^2 + \frac{\beta_0^4}{\beta^2}, \quad (A'.10)$$

όπου β_0 είναι η θέση όπου το δυναμικό παρουσιάζει ελάχιστο.

Στην περίπτωση του προτύπου Davidson οι ενέργειες δίνονται από τον τύπο [19]:

$$E_{n,L} = 2n + 1 + \sqrt{\frac{L(L+1) - K^2}{3} + \frac{9}{4} + \beta_0^4 + 6c(n_\gamma + 1)}, \quad (\text{A'.11})$$

όπου n είναι ο αριθμός των κβάντων στην μεταβλητή β , n_γ ο αριθμός των κβάντων στην μεταβλητή γ , και β_0 είναι η θέση ελαχίστου του δυναμικού αναφορικά με την μεταβλητή β . Οι ενεργειακές ζώνες που εμφανίζονται σε αυτή τη θεώρηση περιγράφονται ως (n, n_γ) . Έτσι η θεμελιώδης ζώνη είναι η $(0, 0)$, ενώ η γ_1 η $(0, 1)$. Ορίζοντας την ποσότητα:

$$F(L) = \frac{L(L+1)}{3} + \frac{9}{4} + \beta_0^4 + 6c, \quad (\text{A'.12})$$

οι ενεργειακές διαφορές γράφονται στη μορφή:

$$E(L_{\gamma_1}^+) - E(L_g^+) = \sqrt{F(L) + 6c - \frac{4}{3}} - \sqrt{F(L)}. \quad (\text{A'.13})$$

Παραγωγίζοντας ως προς την στροφορμή έχουμε:

$$\frac{d(E(L_{\gamma_1}^+) - E(L_g^+))}{dL} = \frac{2L+1}{6} \left(\frac{1}{\sqrt{F(L) + 6c - 4/3}} - \frac{1}{\sqrt{F(L)}} \right). \quad (\text{A'.14})$$

Η παραπάνω ποσότητα είναι αρνητική για πυρήνες για τους οποίους ισχύει $c > 2/9$, συνεπώς η ενεργειακή διαφορά είναι φθίνουσα συνάρτηση της στροφορμής.

Α'.4 Το μοντέλο **Z(5)-D**

Σε αυτήν την περίπτωση οι ενέργειες δίνονται από την σχέση [12]:

$$E_{n,n_w,L} = 2N + 1 + \sqrt{\frac{L(L+4) + 3n_w(2L - n_w) + 9}{\beta_0^4 + 4}}, \quad (\text{A'.15})$$

όπου n είναι ο κβαντικός αριθμός στην μεταβλητή β , n_w ο κβαντικός αριθμός της προβολής της στροφορμής στον άξονα x' , και β_0 η θέση του ελαχίστου όπως και στην προηγούμενη περίπτωση. Σε αυτή τη θεώρηση οι ενεργειακές ζώνες χαρακτηρίζονται από τους αριθμούς (n, n_w) και έτσι η θεμελιώδης ζώνη είναι η $(0, 0)$, ενώ η γ -ζώνη για άρτιες στροφορμές γράφεται $(0, 2)$ και για περιττές $(0, 1)$. Οι ενεργειακές διαφορές γράφονται:

$$E(L_{\gamma_1}^+) - E(L_g^+) = \frac{1}{2} \sqrt{L^2 + 16L - 3 + 4\beta_0^4} - \frac{1}{2} \sqrt{L^2 + 4L + 9\beta_0^4}. \quad (\text{A'.16})$$

Παραγωγίζοντας ως προς L :

$$\frac{d(E(L_\gamma^+) - E(L_g^+))}{dL} = \frac{L+8}{2\sqrt{L^2+16L-3+4\beta_0^4}} - \frac{L+2}{\sqrt{L^2+4L+9\beta_0^4}}. \quad (\text{A'.17})$$

Εφόσον και τα δύο κλάσματα είναι θετικοί αριθμοί, το πρόσημο της παραγώγου θα είναι ίδιο με αυτό της διαφοράς των τετραγώνων τους (το $1/2$ βγαίνει κοινός παράγοντας και παραλείπεται),

$$\frac{(L+8)^2}{L^2+16L-3+4\beta_0^4} - \frac{(L+2)^2}{L^2+4L+9\beta_0^4}, \quad (\text{A'.18})$$

η οποία μετά από τετριμμένες πράξεις φαίνεται ότι είναι πάντα θετική, και έτσι οι ενεργειακές διαφορές αυξάνονται με την αύξηση της στροφορμής.

A'.5 Το μοντέλο **Davidson** με παραμόρφωση εξαρτώμενη από την μάζα

Αν θεωρηθεί ότι η μάζα εξαρτάται από την παραμόρφωση [20] με μία σχέση της μορφής:

$$B(\beta) = \frac{B_0}{(f(\beta))^2}, \quad (\text{A'.19})$$

όπου $f(\beta)$ είναι η συνάρτηση που δίνει την παραμόρφωση και με την χρήση υπερσυμμετρικής κβαντομηχανικής παίρνει την μορφή:

$$f(\beta) = 1 + \alpha\beta^2, \quad a \ll 1, \quad (\text{A'.20})$$

τότε η έκφραση που προκύπτει για τις ενεργειακές στάθμες της θεμελιώδους και της γ ζώνης δίνεται από τον τύπο:

$$\varepsilon = \frac{19}{4}\alpha + \frac{5}{2}(1-\delta-\lambda)\alpha + \frac{1}{2}\sqrt{\alpha+4k_1} + \frac{\alpha}{2}\sqrt{1+4k_{-1}} + \frac{1}{4}\sqrt{(\alpha^2+4k_1)(1+4k_{-1})} + \alpha\Lambda, \quad (\text{A'.21})$$

όπου

$$k_1 = 2 + \alpha^2[5(1-\delta-\lambda) + (1-2\delta)(1-2\lambda) + 6 + \Lambda], \quad (\text{A'.22})$$

και

$$k_{-1} = 2 + \Lambda + \beta_0^4. \quad (\text{A'.23})$$

Στις παραπάνω εκφράσεις οι μεταβλητές δεν επηρεάζουν το πυρηνικό σχήμα και έτσι μπορούμε να διαλέξουμε $\delta = \lambda = 0$. Στη συνέχεια παρατίθενται τρεις περιπτώσεις, στις οποίες το Λ έχει διαφορετικό φυσικό νόημα. Ακόμη το δυναμικό που χρησιμοποιείται έχει την μορφή:

$$v(\beta, \gamma) = u(\beta, \gamma) + \frac{f^2}{\beta^2}w(\gamma), \quad (\text{A'.24})$$

A'.5. ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ *DAVIDSON* ΜΕ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ ΕΞΑΡΤΩΜΕΝΗ ΑΠΟ ΤΗΝ ΜΑΖΑ135

έκφραση η οποία επιτρέπει τον διαχωρισμό των μεταβλητών για την επίλυση της Χαμιλτονιανής του Bohr [22].

A'.5.1 Αξονικά συμμετρικοί επιμηκυμένοι πυρήνες

Σε αυτήν την περίπτωση [20]:

$$\Lambda = \frac{L(L+1) - K^2}{3} + 6c(n_\gamma + 1). \quad (A'.25)$$

Για $n_\gamma = 0$ προκύπτει η θεμελιώδης ζώνη, ενώ για $n_\gamma = 1$ η γ_1 . Ορίζοντας

$$F_1(L) = 8 + 49\alpha^2 + 24c\alpha^2 + \frac{4}{3}\alpha^2 L(L+1), \quad (A'.26)$$

και

$$F_2(L) = 9 + 8\beta_0^2 + 24c + \frac{4}{3}L(L+1), \quad (A'.27)$$

η έκφραση για την θεμελιώδη ζώνη γράφεται:

$$E(L_g) = \frac{29}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{F_1(L)} + \frac{\alpha}{2}\sqrt{F_2(L)} + \frac{1}{4}\sqrt{F_1(L)F_2(L)} + \frac{\alpha}{3}L(L+1) + 6c, \quad (A'.28)$$

ενώ για την γ_1 :

$$E(L_\gamma) = \frac{29}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{F_1(L) + 24\alpha^2(c - \frac{2}{9})} + \frac{\alpha}{2}\sqrt{F_2(L) + 24(c - \frac{2}{9})} + \frac{1}{4}\sqrt{F_1(L) + 24\alpha^2(c - \frac{2}{9})}\sqrt{F_2(L) + 24(c - \frac{2}{9})} + \frac{\alpha}{3}L(L+1) + 6c + 6(c - \frac{2}{9}). \quad (A'.29)$$

Η παραγωγή της ενεργειακής διαφοράς της θεμελιώδους από την γ ζώνη δίνει αρνητική πρώτη παράγωγο για $c > \frac{2}{9}$. Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα την διαφορά των πρώτων όρων (κάτω από ρίζα) στις δύο εκφράσεις. Αν

$$E = \frac{1}{2}\sqrt{F_1(L) + 24\alpha^2(c - \frac{2}{9})} - \frac{1}{2}\sqrt{F_1(L)}, \quad (A'.30)$$

τότε

$$\frac{dE}{dL} = \frac{1}{3}\alpha^2(2L+1) \left(\frac{1}{\sqrt{F_1(L) - (16/3)\alpha^2 + 24c\alpha^2}} - \frac{1}{\sqrt{F_1(L)}} \right), \quad (A'.31)$$

παράσταση δηλαδή που είναι πάντα αρνητική με τον παραπάνω περιορισμό. Άρα και σε αυτή την περίπτωση υπάρχει πτωτική συμπεριφορά της ενεργειακής διαφοράς συναρτήσει της στροφορμής.

Α'.5.2 γ -ασταθείς πυρήνες

Σε αυτή την περίπτωση [20] ισχύει $w(\gamma) = 0$, δηλαδή το δυναμικό είναι ανεξάρτητο της μεταβλητής γ .

Ακόμη ισχύει

$$\lambda = \tau(\tau + 3) \quad (\text{A'.32})$$

όπου τ είναι ο κβαντικός αριθμός της αρχαιότητας (seniority). Το ενεργειακό φάσμα σε αυτή την περίπτωση επηρεάζεται από την συμμετρία $O(5)$, όπως αναφέρθηκε στα προηγούμενα. Στην περίπτωση της θεμελιώδους ζώνης ισχύει $L = 2\tau$ και η έκφραση για τις ενέργειες γράφεται στην μορφή:

$$E(L_g) = \frac{29}{4}\alpha + \frac{1}{2}\sqrt{A + \alpha^2 L(L+6)} + \frac{\alpha}{2}\sqrt{B + L(L+6)} + \frac{1}{4}\sqrt{(A + \alpha^2 L(L+6))(B + L(L+6))} + \frac{\alpha}{4}L(L+6), \quad (\text{A'.33})$$

όπου

$$A = 8 + 49\alpha^2, \quad (\text{A'.34})$$

$$B = 9 + 8\beta_0^2. \quad (\text{A'.35})$$

Η ενεργειακή έκφραση για την γ_1 ζώνη είναι:

$$E(L_{\gamma_1}) = \frac{29}{4}\alpha + \frac{1}{2}\sqrt{A + \alpha^2(L+2)(L+8)} + \frac{\alpha}{2}\sqrt{B + (L+2)(L+8)} + \frac{1}{4}\sqrt{(A + \alpha^2(L+2)(L+8))(B + (L+2)(L+8))} + \frac{\alpha}{4}(L+2)(L+8). \quad (\text{A'.36})$$

Επειδή στις παραπάνω εκφράσεις για κάθε $L > 0$ ισχύει ότι $(L+2)(L+8) > L(L+6)$, συγκρίνοντας τους "όμοιους" όρους είναι φανερό ότι:

$$E(L_{\gamma_1}) - E(L_g) > 0, \quad (\text{A'.37})$$

δηλαδή υπάρχει αύξουσα συμπεριφορά συναρτήσεως της στροφορμής.

Α'.5.3 Τριαξονικοί πυρήνες για $\gamma = \frac{\pi}{6}$

Σε αυτή την περίπτωση [20] για $\gamma = \frac{\pi}{6}$ έχουμε:

$$w(\gamma) = \frac{1}{2}(3c)^2\left(\gamma - \frac{\pi}{6}\right)^2, \quad (\text{A'.38})$$

όπου το γ είναι περίπου ίσο με $\frac{\pi}{6}$. Έτσι για το Λ έχουμε:

$$\Lambda = \frac{L(L+4) + 3n_w(2L - n_w)}{4} + \sqrt{c}\left(n_\gamma + \frac{1}{2}\right), \quad (\text{A'.39})$$

A'.5. ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ *DAVIDSON* ΜΕ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ ΕΞΑΡΤΩΜΕΝΗ ΑΠΟ ΤΗΝ ΜΑΖΑ137

με n_w να είναι ο κβαντικός αριθμός της προβολής της στροφορμής στον άξονα x' . Η θεμελιώδης ζώνη έχει $n_w = 0$ και οι ενέργειές της γράφονται στην μορφή:

$$E(L_g) = \frac{29}{4}\alpha + \frac{1}{2}\sqrt{A + \alpha^2 L(L+4)} + \frac{\alpha}{2}\sqrt{B + L(L+4)} + \frac{1}{4}\sqrt{(A + \alpha^2 L(L+4))(B + L(L+4))} + \frac{\alpha}{4}L(L+4) + \alpha\frac{\sqrt{2c}}{2}, \quad (A'.40)$$

όπου

$$A = 8 + 49\alpha^2 + 2\alpha^2\sqrt{2c}, \quad (A'.41)$$

και

$$B = 9 + 8\beta_0^4 + 2\sqrt{2c}, \quad (A'.42)$$

ενώ για την γ_1 ισχύει $n_w = 2$ και

$$E(L_g) = \frac{29}{4}\alpha + \frac{1}{2}\sqrt{A' + \alpha^2 L(L+16)} + \frac{\alpha}{2}\sqrt{B' + L(L+16)} + \frac{1}{4}\sqrt{(A' + \alpha^2 L(L+16))(B' + L(L+16))} + \frac{\alpha}{4}L(L+16) - 3\alpha + \frac{3a\sqrt{2c}}{2}, \quad (A'.43)$$

όπου

$$A' = A - 12 + 4\alpha^2\sqrt{2c}, \quad (A'.44)$$

και

$$B' = B - 12 + 4\sqrt{2c}. \quad (A'.45)$$

Για την εύρεση της μονοτονίας της ποσότητας $E(L_{\gamma_1}) - E(L_g)$, θεωρούμε την παράγωγο $\frac{d(E(L_{\gamma_1}) - E(L_g))}{dL}$. Επειδή οι πράξεις είναι αρκετά μακροσκελείς αρκεί να εξεταστεί το πρόσημο της παραγώγου της διαφοράς των αντίστοιχων όρων. Για παράδειγμα η θεώρηση των δεύτερων κατά σειρά ριζών δίνει:

$$\frac{dE}{dL} = \frac{\alpha}{2} \left(\frac{L+8}{\sqrt{B'+L^2+16L}} - \frac{L+2}{\sqrt{B+L(L+4)}} \right). \quad (A'.46)$$

Η παραπάνω ποσότητα έχει πρόσημο ίδιο με το πρόσημο της διαφοράς των τετραγώνων των όρων:

$$D = \frac{(L+8)^2}{B'+L^2+16L} - \frac{(L+2)^2}{B+L(L+4)}, \quad (A'.47)$$

η οποία μετά από πράξεις γράφεται στην μορφή:

$$D = \frac{d_2 L^2 + d_1 L + d_0}{(B'+L^2+10L+16)(B+L^2+6L)}, \quad (A'.48)$$

με

$$d_0 = 588 + 104\sqrt{2c} + 480\beta_0^4, \quad (\text{A'.49})$$

$$d_1 = 780 + 104\sqrt{2c} + 480\beta_0^4, \quad (\text{A'.50})$$

$$d_3 = 4(18 - \sqrt{2c}). \quad (\text{A'.51})$$

Οι όροι d_0, d_1 είναι πάντα θετικοί και ο όρος d_3 είναι θετικός για $c < 162$, προϋπόθεση που πληρούται για το δυναμικό αυτής της περίπτωσης. Έτσι η διαφορά $E(L_\gamma) - E(L_g)$ έχει αύξουσα συμπεριφορά συναρτήσει της στροφορμής.

Παράρτημα Β'

Αναλυτικοί υπολογισμοί της πυρηνικής ροπής αδράνειας

Η ροπή αδράνειας για μία συγκεκριμένη ζώνη δίνεται από τον τύπο [20]:

$$\Theta(L) = \frac{2L-1}{E(L)-E(L-2)}. \quad (\text{B'.1})$$

Β'.1 Περιπτώσεις της $O(5)$ υποάλγεβρας

Β'.1.1 Η περίπτωση της $U(5)$ αλυσίδας

Σύμφωνα με το προηγούμενο παράρτημα:

$$\Theta(L_{\gamma}) = \Theta(L_g) = \frac{2L-1}{2A}, \quad (\text{B'.2})$$

και έτσι οι ροπές αδράνειας και για τις δύο ζώνες είναι ίσες.

Β'.1.2 Η περίπτωση της $O(6)$ αλυσίδας

Σύμφωνα με το προηγούμενο παράρτημα οι ροπές αδράνειας γράφονται:

$$\Theta(L_{\gamma}) = \frac{2L-1}{A(L+2)}, \quad (\text{B'.3})$$

$$\Theta(L_g) = \frac{2L-1}{A(L+4)}, \quad (\text{B'.4})$$

δηλαδή ισχύει $\Theta(L_g) > \Theta(L_{\gamma})$.

Β'.2 Πρότυπο τριαξονικού περιστροφέα

Σύμφωνα με το προηγούμενο παράρτημα οι ροπές αδρανείας γράφονται:

$$\Theta(L_{\gamma_1}) = \frac{2L-1}{4A(L+1)}, \quad (\text{B'.5})$$

$$\Theta(L_g) = \frac{2L-1}{4A(L+7)}, \quad (\text{B'.6})$$

δηλαδή ισχύει $\Theta(L_g) > \Theta(L_{\gamma})$.

Β'.3 Το ακριβώς διαχωρίσιμο πρότυπο **Davidson**

Σύμφωνα με το προηγούμενο παράρτημα και τετριμμένους υπολογισμούς:

$$\Theta(L_g) = \frac{3}{2} \left(\sqrt{\frac{L^2+L}{3} + A} + \sqrt{\frac{L^2-3L+2}{3} + A} \right), \quad (\text{B'.7})$$

με $A = \frac{9}{4} + \beta_0^4 + 6c$ και

$$\Theta(L_{\gamma}) = \frac{3}{2} \left(\sqrt{\frac{L^2+L}{3} + A'} + \sqrt{\frac{L^2-3L+2}{3} + A'} \right), \quad (\text{B'.8})$$

με $A' = A + 6c - \frac{4}{3}$. Επειδή για τους υπό θεώρηση πυρήνες πληρούται η προϋπόθεση $c > \frac{2}{9}$, συνεπάγεται ότι $A' > A$, άρα $\Theta(L_{\gamma}) > \Theta(L_g)$.

Β'.4 Το πρότυπο **Z(5)-D**

Σύμφωνα με το προηγούμενο παράρτημα και τετριμμένους υπολογισμούς:

$$\Theta(L_g) = \frac{2L-1}{L-1} \left(\sqrt{\frac{L^2+4L+9}{4} + \beta_0^4} + \sqrt{\frac{L^2+5}{4} + \beta_0^4} \right), \quad (\text{B'.9})$$

και

$$\Theta(L_{\gamma}) = \frac{2L-1}{L+7} \left(\sqrt{\frac{L^2+16L-3}{4} + \beta_0^4} + \sqrt{\frac{L^2+12L+31}{4} + \beta_0^4} \right). \quad (\text{B'.10})$$

Έτσι αφαιρώντας κατά μέλη:

$$\Theta(L_g) - \Theta(L_{\gamma}) = \frac{2L-1}{(L-1)^2(L+7)^2} \left(\frac{A_{11}}{B_{11}+B_{12}} + \frac{A_2}{B_{21}+B_{22}} \right), \quad (\text{B'.11})$$

όπου

$$A_1 = L^3 + 37L^2 + 75L + 111 + 16\beta_0^4(L+3), \quad (\text{B'.12})$$

$$A_2 = L^3 + 27L^2 - L + 69 + 16\beta_0^4(L + 3), \quad (\text{B'.13})$$

$$B_{11} = \frac{1}{2L-1} \sqrt{L^2 + 4L + 9 + 4\beta_0^4}, \quad (\text{B'.14})$$

$$B_{12} = \frac{1}{2L+7} \sqrt{L^2 + 16L - 3 + 4\beta_0^4}, \quad (\text{B'.15})$$

$$B_{21} = \frac{1}{2(L-1)} \sqrt{L^2 + 5 + 4\beta_0^4}, \quad (\text{B'.16})$$

$$B_{22} = \frac{1}{2(L+7)} \sqrt{L^2 + 12L - 31 + 4\beta_0^4}. \quad (\text{B'.17})$$

Όλοι οι παραπάνω όροι είναι θετικοί, συνεπώς ισχύει $\Theta(L_g) > \Theta(L_\gamma)$.

Βιβλιογραφία

- [1] Δ. Μπονάτσος, Ανώτερη Κβαντομηχανική (Εκδόσεις Κωσταράκη, Αθήνα, 2017).
- [2] Π. Α. Ασημακόπουλος, Πυρηνική Φυσική (Ιωάννινα, 1981).
- [3] Α. Μαρτίνου, Αλληλεπίδραση νουκλεονίου νουκλεονίου σε ευσταθείς και ασταθείς πυρήνες, διδακτορική διατριβή (Ε.Μ.Π., 2018).
- [4] Σ. Καραμπάγια, Προσεγγιστικές δυναμικές συμμετρίες σε συλλογικά πρότυπα πυρηνικής δομής, διδακτορική διατριβή (Ε.Μ.Π., 2014).
- [5] Λ.Σακελλίου, Κ.Σαρηγιάννης, Πυρηνική Φυσική, Παραδείγματα και Εφαρμογές (Αθήνα, 1995).
- [6] H. J. Lipkin, Lie groups for pedestrians, North Holland, Amsterdam, 1965.
- [7] R. Gilmore, Lie groups, Lie algebras and some of their applications, Wiley, New York, 1974.
- [8] B. G. Wybourne, Classical groups for physicists, Wiley, New York, 1974.
- [9] W. Greiner, J.A. Maruhn, Nuclear Models, Springer, Berlin, 1995.
- [10] S. G. Nilsson and I. Ragnarsson, *Shapes and shells in nuclear structure*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [11] D. Bonatsos, D. Lenis, N. Minkov, P.P.Raychev, and P.A. Terziev, *Sequence of potentials interpolating between the $U(5)$ and $E(5)$ symmetries*, Phys. Rev. C 69 (2004) 044316.
- [12] I. Yigitoglu and D. Bonatsos, *Bohr Hamiltonian with Davidson potential for triaxial nuclei*, Phys. Rev. C 83(2011) 014303.

- [13] F. Iachello and A. Arima, *The Interacting Boson Model*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
- [14] E. Chacón, M. Moshinsky, and R.T. Sharp,, $U(5) \subset O(5) \subset O(3)$ and the exact solution for the problem of quadrupole vibrations of the nucleus, *J. Math. Phys.* 17 (1976) 668.
- [15] E. Chacón and M. Moshinsky,, *Group theory of the collective model of the nucleus*, *J. Math. Phys.* 18 (1977) 870.
- [16] O. Castaños, E. Chacón, A. Frank, and M. Moshinsky, *Group theory of the interacting boson model of the nucleus*, *J. Math. Phys.* 20 (1979) 35.
- [17] A.S. Davydov and G.F. Filippov,, *Rotational states in even atomic nuclei*, *Nucl. Phys.* 8 (1958) 237.
- [18] A.S. Davydov and V.S. Rostovsky, *Relative transition probabilities between rotational levels of non-axial nuclei*, *Nucl. Phys.* 12 (1959) 58.
- [19] D. Bonatsos, E.A. McCutchan, N. Minkov, R.F. Casten, P. Yotov, D. Lenis, D. Petrellis, and I. Yigitoglu, *Exactly separable version of the Bohr Hamiltonian with the Davidson potential*, *Phys. Rev. C* 76 (2007) 064312.
- [20] D. Bonatsos, P.E. Georgoudis, D. Lenis, N. Minkov and C. Quesne, *Bohr Hamiltonian with a deformation dependent mass term for the Davidson potential*, *Phys.Rev. C* 83 (2011) 044321.
- [21] F. Cooper, A. Khare, and U. Sukhatme,, *Supersymmetry in Quantum Mechanics*, World Scientific, Singapore, 2001.
- [22] L. Fortunato, *Solutions of the Bohr Hamiltonian, a compendium*, *Eur. Phys. J. A* 26, s01 (2005) 1.
- [23] A. deShalit, H. Feshbach, *Theoretical Nuclear Physics Volume 1:Nuclear Structure*, Wiley, New York, 1974.
- [24] W. Pfeifer, *The Lie Algebras $su(N)$: An Introduction*, Birkhäuser, Basel, 2003.
- [25] D. Bonatsos, S. Karampagia, R.B. Cakirli, R.F. Casten, K. Blaum, L. Amon Susam, *Emergent collectivity in nuclei and enhanced proton-neutron interactions*, *Phys. Rev. C* 88 (2013) 054309.

- [26] D. Bonatsos, I.E. Assimakis, N. Minkov, A. Martinou, R.B. Cakirli, R.F. Casten and K. Blaum, *Proxy-SU(3) symmetry in heavy deformed nuclei*, Phys. Rev. C95 (2017) 064325.
- [27] D. Bonatsos, I.E. Assimakis, N. Minkov, A. Martinou, S. Sarantopoulou, R.B. Cakirli, R.F. Casten, K. Blaum, *Analytic predictions for nuclear shapes, prolate dominance, and the prolate-oblate shape transition in the proxy-SU(3) model*, Phys.Rev. C95 (2017) 064326.
- [28] D. Bonatsos, I.E. Assimakis, A. Martinou, *Proton-Neutron Pairs in Heavy Deformed Nuclei*, Bulg. J. Phys. 42 (2015) 439 (SDANCA2015 proceedings) .
- [29] D. Bonatsos, I.E. Assimakis, N. Minkov, A. Martinou, S.K. Peroulis, S. Sarantopoulou, R.B. Cakirli, R.F. Casten, K. Blaum, *Proxy-SU(3): A symmetry for heavy nuclei*, Bulg. J. Phys. 44 (2017) 385 (SDANCA2017 proceedings).
- [30] I.E. Assimakis, D. Bonatsos, N. Minkov, A. Martinou, R.B. Cakirli, R.F. Casten, K. Blaum, *Foundations of the proxy-SU(3) symmetry in heavy nuclei*, Bulg. J. Phys. 44 (2017) 398 (SDANCA2017 proceedings).
- [31] A. Martinou, D. Bonatsos, I.E. Assimakis, N. Minkov, S. Sarantopoulou, R.B. Cakirli, R.F. Casten, K. Blaum, *Parameter free predictions within the proxy-SU(3) Model*, Bulg. J. Phys. 44 (2017) 407 (SDANCA2017 proceedings).
- [32] S. Sarantopoulou, D. Bonatsos, I.E. Assimakis, N. Minkov, A. Martinou, R.B. Cakirli, R.F. Casten, K. Blaum, *Proxy-SU(3) symmetry in heavy nuclei: prolate dominance and prolate-oblate shape transition*, Bulg. J. Phys. 44 (2017) 417 (SDANCA2017 proceedings).
- [33] I. E. Assimakis, D. Bonatsos, A. Martinou, S. Sarantopoulou, S. Peroulis, T. J. Mertzimekis, N. Minkov, *Magic numbers for shape coexistence*, HNPS 2018 proceedings, arXiv: 1811.01071 [nucl-th].
- [34] A. Martinou, D. Bonatsos, N. Minkov, T. J. Mertzimekis, I. E. Assimakis, S. Peroulis, S. Sarantopoulou, *Nucleon numbers for nuclei with shape coexistence* , HNPS 2018 proceedings, arXiv: 1810.11860 [nucl-th].

- [35] A. Martinou, D. Bonatsos, K. Karakatsanis, I.E. Assimakis, T. Mertzimekis, N.Minkov, S.Peroulis, *A mechanism for shape coexistence*, to be published.
- [36] H. De Meyer, G. Vanden Berghe, J. Van der Jeugt, *On the spectra of $SO(3)$ scalars in the enveloping algebra of $SU(3)$* , J. Math. Phys. 26 (1985) 3109.
- [37] G. Vanden Berghe, H. E. De Meyer, P. Van Isacker, *Symmetry-conserving higher-order interaction terms in the interacting boson model*, Phys. Rev. 32 (1985) 1049.
- [38] J. Vanthournout, *Influence of symmetry-conserving higher order interactions in the interacting boson model on the first β and γ band in rotational nuclei*, Phys. Rev. C 41 (1990) 2380.
- [39] J.P. Elliott, *Collective motion in the nuclear shell model 1. Classification schemes for states of mixed configurations*, Proc. Roy. Soc. London Ser. A: Math. Phys. Sci. 245 (1958) 128 .
- [40] R.D. Ratna Raju, J.P. Draayer, K.T. Hecht, *Search for a coupling scheme in heavy deformed nuclei: The pseudo- $SU(3)$ model*, Nucl. Phys. A 202 (1973) 433.
- [41] J.P. Draayer, Y. Leschber, S.C. Park, R. Lopez, *Representations of $U(3)$ in $U(N)$* , Comput. Phys. Commun. 56 (1989) 279.
- [42] O. Castaños, J.P. Draayer, Y. Leschber, *Shape Variables and the Shell Model*, Z.Phys. A-At. Nucl. 329 (1988) 33.
- [43] K. Heyde, J.L. Wood, *Shape coexistence in atomic nuclei*, Rev. Mod. Phys. 83 (2011) 1467.
- [44] R.F. Casten, A.I. Namenson, W.F. Davidson, D.D. Warner, H.G. Borner *Low-lying levels in ^{194}Os and the prolate-oblate phase transition*, Phys. Lett. B 76 (1978) 280.
- [45] J. Jolie, R.F. Casten, P. von Brentano, V. Werner, *Quantum phase transition for gamma soft nuclei*, Phys. Rev. Lett. 87 (2001) 162501.
- [46] D. Bonatsos, I.E. Assimakis, A. Martinou, S.K. Peroulis, S. Sarantopoulou, N. Minkov, *Proxy- $SU(3)$ for heavy deformed nuclei: nuclear spectra*, Bulg. J. Phys. (2019) in press (SDANCA2019 proceedings).

- [47] E. Wigner, *On the consequences of the symmetry of the nuclear Hamiltonian on the spectroscopy of Nuclei*, Phys. Rev. 51 (1937) 106.
- [48] N. Minkov, *Models of Complex Atomic Nuclei*, Dr.Sci. thesis, INRNE, Sofia, 2017.
- [49] N. Minkov, S.B. Drenska, P.P. Raychev, R.P. Roussev, D. Bonatsos, *Broken $SU(3)$ symmetry in even-even nuclei*, Phys. Rev. C 55 (1997) 2345.
- [50] N. Minkov, S.B. Drenska, P.P. Raychev, R.P. Roussev, D. Bonatsos, *Ground- γ band coupling in heavy deformed nuclei and $SU(3)$ contraction limit*, Phys. Rev. C 60 (1999) 034305.
- [51] H.A. Naqvi, J.P. Draayer, *Shell model operator for K -band splitting*, Nucl. Phys. A 516 (1990) 351.
- [52] P.P. Raychev, *On the broken $Sp(3,3)$ symmetry and the spectra of deformed even even nuclei*, Compt. Rend. Acad. Bulg. Sci. 25 (1972) 1503.
- [53] J. P. Draayer. K. J. Weeks, *Towards a shell model description of the low-energy structure of deformed nuclei I. Even-even systems*, Ann. Phys. (N.Y.) 156 (1984) 41.