



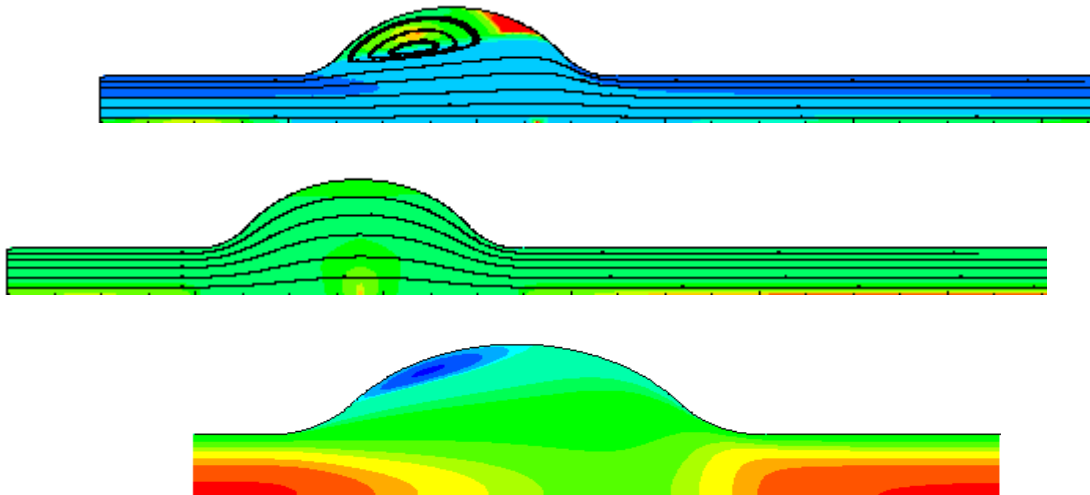
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Αριθμητική μελέτη μόνιμης ροής μη Νευτώνειων
ρευστών σε αξονικά συμμετρική διεύρυνση αγωγού

ΔΗΜΗΤΡΑ ΦΡΑΓΚΟΥ



Επιβλέπων
Δ.Σ.ΜΑΘΙΟΥΛΑΚΗΣ
Αναπληρωτής καθηγητής

ΑΘΗΝΑ 2011

ΔΗΜΗΤΡΑ ΦΡΑΓΚΟΥ

Αθήνα, Οκτώβριος 2011

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό ή κερδοσκοπικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης. Σε αυτή την περίπτωση η αναφορά της πηγής προέλευσης θα ήταν απλά ικανοποίηση για τον συγγραφέα. Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν το συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν την επίσημη θέση του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Από το Εργαστήριο Αεροδυναμικής θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμα τον επιβλέποντα καθηγητή της διπλωματικής αυτής εργασίας, Δ.Σ. Μαθιουλάκη, για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγηση του, καθώς και για την υπομονή του όλο αυτό το διάστημα. Επιπλέον, οι γνώσεις που με βοήθησε να αποκτήσω πάνω στη ρευστομηχανική, κατέστησαν δυνατή τη διεκπαιρέωση αυτής της εργασίας.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου για την υλική και ηθική τους υποστήριξη και ιδιαίτερα τον Αποστόλη για την υπομονή που έδειξε όλο αυτό τον καιρό.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα εργασία, από ιατρικής σκοπιάς, ασχολείται με ένα είδος αγγειακής παθοφυσιολογίας, το γνωστό σε όλους ανεύρυσμα κοιλιακής αορτής. Από καθαρά ρευστομηχανική πλευρά, όμως, μελετάται η στρωτή, ασυμπίεστη ροή σε απότομα διευρυνόμενο αγωγό. Συγκεκριμένα, ασχολείται με το συνδυασμό της βιοϊατρικής τεχνολογίας και της ρευστομηχανικής. Μελετά τα ροϊκά φαινόμενα σε διογκωμένες αρτηρίες του ανθρώπινου οργανισμού και τις σοβαρές επιπτώσεις που έχει η διογκωσή τους στην καλή λειτουργία του κυκλοφορικού συστήματος, θεωρώντας το αίμα ως ρευστό και τις αρτηρίες ως αγωγούς.

Στο *πρώτο κεφάλαιο*, γίνεται μία ιατρική ανασκόπηση που αφορά το καρδιαγγειακό σύστημα. Περιγράφονται οι αρτηρίες, η δομή και οι λειτουργίες τους, η καρδιά και ο καρδιακός κύκλος καθώς και το αίμα με τα συστατικά του. Επίσης, γίνεται μια μικρή ανάλυση του ανευρύσματος κοιλιακής αορτής, του μηχανισμού που οδηγεί στο σχηματισμό του, των παραγόντων που το επηρεάζουν, των συμπτωμάτων και των τρόπων αντιμετώπισής του.

Στο *δεύτερο κεφάλαιο*, δείχνουμε τον τρόπο με τον οποίο συνδέονται τα ρευστομηχανικά μεγέθη με την παθοφυσιολογία του κυκλοφορικού συστήματος. Θεωρούμε το κυκλοφορικό σύστημα ως δίκτυο σωληνώσεων, όπου η καρδιά παίζει το ρόλο αντλίας και οι αρτηρίες θεωρούνται ελαστικοί αγωγοί μέσα στους οποίους ρέει το αίμα. Στη συνέχεια αναλύεται το αίμα ως βιολογικό ρευστό και οι μη νευτώνειες και νευτώνειες ιδιότητές του. Τέλος, εξηγούμε την επίδραση των διαμηθικών τάσεων στο αρτηριακό τοίχωμα και τη γεωμετρία της αρτηρίας και την επίδραση που έχει πάνω τους το ιξώδες του αίματος.

Στο *τρίτο κεφάλαιο*, γίνεται η φυσική προτυποποίηση της ροής του αίματος μέσα στις αρτηρίες, κάνοντας θεωρήσεις πάνω στο ρευστό, στο μέσο ροής και τη ροή του.

Στο *τέταρτο κεφάλαιο*, παρουσιάζουμε το πρόβλημα εκφρασμένο μαθηματικά. Γίνεται μια γενική τοποθέτηση του προβλήματος και στη συνέχεια καταγράφουμε τις εξισώσεις ροής των ρευστών που μελετούμε.

Στο *πέμπτο κεφάλαιο*, εξηγούμε τη μέθοδο και τις παραμέτρους που χρησιμοποιεί το υπολογιστικό πακέτο που επιλέξαμε, για να επιλύσει τις εξισώσεις στις οποίες είχαμε καταλήξει στο κεφάλαιο τέσσερα.

Στο *έκτο κεφάλαιο*, παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα της μελέτης μας και συγχρόνως τα σχολιάζουμε, κάνοντας συγκρίσεις με άλλες αριθμητικές ή πειραματικές μελέτες.

Στο *έβδομο κεφάλαιο*, διατυπώνονται τα γενικά συμπεράσματα που εξήχθησαν από τη μελέτη μας.

Τέλος, παραθέτουμε τις βιβλιογραφικές πηγές, την περίληψη στην ελληνική και αγγλική γλώσσα και τα προγράμματα που αναπτύξαμε τα οποία παρουσιάζονται στο παράρτημα.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ.....	4
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ.....	5
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1	
Εισαγωγή.....	7
Ανεύρυσμα Κοιλιακής Αορτής.....	14
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 : από τα βιοϊατρικά φαινόμενα στα ρευστομηχανικά μεγέθη.....	19
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: φυσική έκφραση	
i)Ροή.....	25
ii)Μέσο Ροής.....	27
iii)Ρευστό.....	28
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: μαθηματική έκφραση	
i)γενική τοποθέτηση του προβλήματος.....	39
ii)ειδικές περιπτώσεις υλικών εξισώσεων.....	40
iii)επιλυσιμότητα του συστήματος εξισώσεων.....	42
iv)εξισώσεις ροής των ρευστών που μελετούμε.....	43
v)οριακές συνθήκες.....	48
vi)εξισώσεις της πλήρως διαμορφωμένης ροής.....	51
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: αριθμητική επίλυση	
i)μέθοδος επίλυσης.....	52
ii)εισαγωγή των οριακών συνθηκών.....	59
iii)υπολογιστικό πλέγμα.....	59
iv)ακρίβεια σύγκλισης των υπολογισμών.....	64
v)ανεξαρτησία αποτελεσμάτων από τη διαδικασία επίλυσης.....	64
vi)ταυτότητα υπολογισμών.....	69

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: αποτελέσματα και συζήτηση

1. Πεδία ροής	71
1.1.Ευθύγραμμος αγωγός	
i)Μήκος διαμόρφωσης.....	75
ii)Λόγος ταχύτητας στον άξονα και μέσης ταχύτητας διατομής..	83
iii)Κατανομές ταχυτήτων.....	85
iv)Διατμητικές τάσεις στο τοίχωμα.....	90
v)Πτώση στατικής πίεσης.....	93
1.2. Αγωγός με διεύρυνση	
i)Γραμμές ροής.....	99
ii)Γραμμές ροής και ιξώδες.....	103
iii)Ισουψείς ταχύτητας.....	111
iv)Κατανομές αξονικής ταχύτητας στην κορυφή του ανευρύσματος και μεταβολή της ταχύτητας στον άξονα συμμετρίας.....	116
v)Περιοχή επανακόλλησης της ροή.....	130
vi)Περιοχή ανακυκλοφορίας.....	140
vii)Διατμητικές τάσεις στο τοίχωμα.....	143
viii)Στατική πίεση.....	153

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7: συμπεράσματα

1.διαδικασία επίλυσης.....	161
2.ευθύγραμμος αγωγός.....	161
3.διευρυμένος αγωγός.....	162
ΠΕΡΙΛΗΨΗ.....	164
ABSTRACT.....	166
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	167
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ.....	171

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

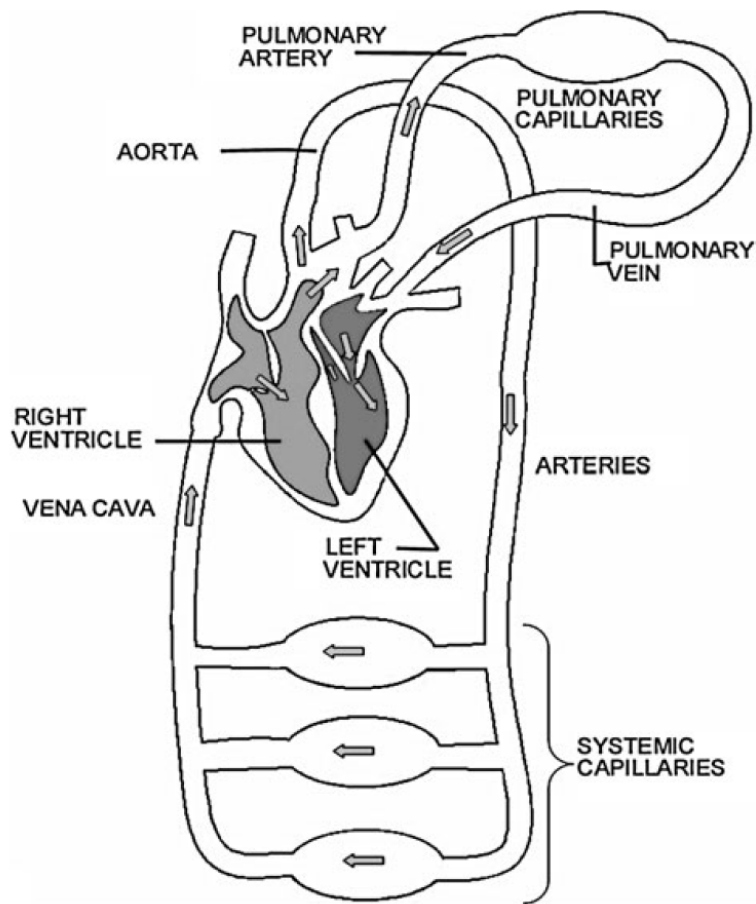
Θα αναρωτηθεί κανείς γιατί είναι σημαντικό για έναν μηχανικό να μελετάει φυσιολογία. Για να απαντηθεί αυτή η ερώτηση θα πρέπει να αρχίσουμε αναγνωρίζοντας ότι οι καρδιαγγειακές διαταραχές αποτελούν την κύρια αιτία θανάτου στις αναπτυγμένες χώρες. Επιπλέον, για να κατανοήσουμε τις παθολογίες ή τις δυσλειτουργίες του καρδιαγγειακού συστήματος, θα πρέπει πρώτα να μάθουμε τη φυσιολογία ή τη σωστή λειτουργία του. [1]

Το καρδιαγγειακό σύστημα αποτελείται από την καρδιά, τις αρτηρίες, τις φλέβες, τα τριχοειδή αγγεία και τα λεμφαγγεία. Οι πιο σημαντικές του λειτουργίες είναι να μεταφέρει οξυγόνο και θρεπτικά συστατικά, να απομακρύνει απόβλητα και να ρυθμίζει τη θερμοκρασία. [1]

Η κυκλοφορία του αίματος στο ανθρώπινο σώμα μπορεί να υποδιαιρεθεί σε δύο κυρίως υποσυστήματα:

Η **πνευμονική** ή **μικρή κυκλοφορία** αρχίζει στη δεξιά κοιλία της καρδιάς και μεταφέρει αίμα στους πνεύμονες, όπου γίνεται φιλτράρισμα του διοξειδίου του άνθρακα και εμπλουτισμός του αίματος με οξυγόνο.

Η **συστηματική** ή **μεγάλη κυκλοφορία** που αρχίζει από την αριστερή κοιλία της καρδιάς προσδίνει οξυγονωμένο αίμα σε όλα τα όργανα και ιστούς του σώματος. Πρέπει να εφοδιάζει κάθε κύτταρο στο σώμα με την απαιτούμενη ποσότητα οξυγόνου, μεταβολικού, ορμόνης και θερμότητας και θα πρέπει να απάγει θερμότητα και άλλα απόβλητα προϊόντα του κυττάρου. Για να φέρει εις πέρας αυτές τις λειτουργίες, η προμήθεια αίματος σε κάθε απλό κύτταρο θα πρέπει να είναι σε συμφωνία με τις ατομικές ανάγκες του κυττάρου όσον αφορά τη θρέψη και τη διατήρηση του ισοζυγίου θερμότητας. Αυτές οι απαιτήσεις αλλάζουν ανάλογα με τις συνθήκες περιβάλλοντος, ερεθισμού και άλλων παραγόντων, γι' αυτό η κυκλοφορία χρειάζεται έναν αποδοτικό και ευαίσθητο μηχανισμό ρύθμισης και την ικανότητα να αυξάνει ή να ελαττώνει τη ροή του αίματος σε μικρές περιοχές του σώματος. [1,2]

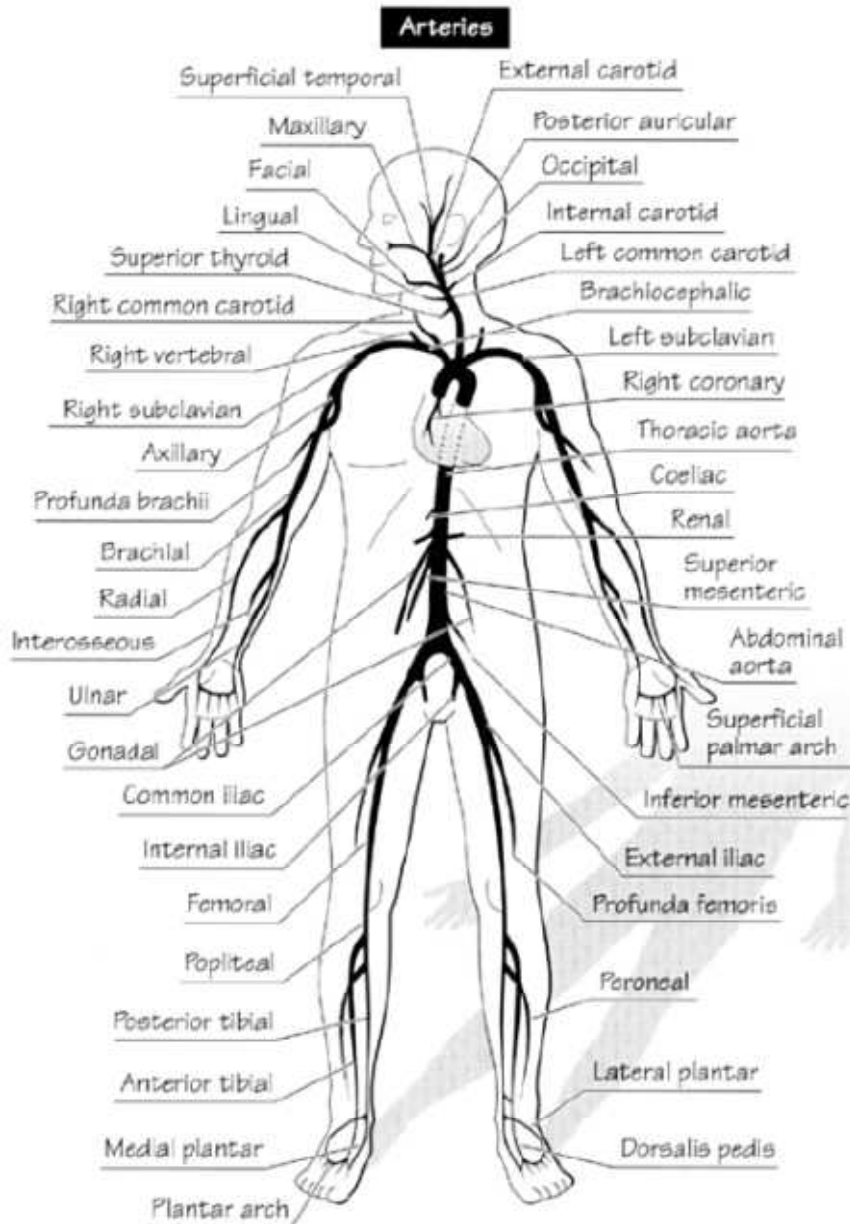


Σχ. 1.1: Η πνευμονική και η συστηματική κυκλοφορία.

Όλες οι διεργασίες του κυκλοφορικού συστήματος διενεργούνται στο επίπεδο των τριχοειδών αγγείων . Ο εφοδιασμός κάθε τριχοειδούς αγγείου ανάλογα με τις στιγμιαίες ανάγκες και τη λειτουργία του, απαιτεί ένα τεράστιο αριθμό ρυθμιστικών κέντρων και ένα τεράστιο αριθμό διόδων αίματος.

Οι **αρτηρίες** αποτελούν βασικό στοιχείο του κυκλοφορικού συστήματος του ανθρώπινου οργανισμού, γιατί μέσω αυτών μεταφέρεται το αίμα σε όλα τα μέρη του σώματος και επιστρέφει στην καρδιά μέσω των φλεβών. Για το λόγο αυτό θα ασχοληθούμε λίγο με τη δομή του αρτηριακού συστήματος.

Το *αρτηριακό σύστημα* αποτελείται από αγγεία διαφόρων διαμέτρων και μηκών που διαδοχικά διαχωρίζονται σε μικρότερα αγγεία. Βασικό, πρώτο και μεγαλύτερο αγγείο μετά την καρδιά είναι η *αορτή*, η οποία διακλαδίζεται διαδοχικά σε μικρότερα αγγεία μέχρι τα λεπτότερα, που ονομάζονται *τριχοειδή*. Ακολουθώντας τα τριχοειδή αγγεία συνδέονται μεταξύ τους σε όλο και μεγαλύτερα αγγεία που αποτελούν το *φλεβικό σύστημα*, του οποίου τα αγγεία ακολουθούν διόδους παράλληλες με εκείνες των αρτηριών. Η μείωση της διαμέτρου στο αρτηριακό σύστημα εξασφαλίζεται όχι μόνο με μείωση της διαμέτρου στα διακλαδούμενα αγγεία αλλά και με σταδιακή μείωση της διατομής κάθε κλάδου(*tapering*). [1,2]



Σχ. 1.2: Γενική άποψη των κύριων κλάδων των αρτηριών του κυκλοφορικού συστήματος.

Η αορτή είναι η μεγαλύτερη σε διάμετρο αρτηρία, κατά μέσο όρο 2.5-3cm διαμέτρου κατά την έξοδό της από την καρδιά. Η αορτή είναι μεγάλη σε μήκος εκτεινόμενη από την αορτική βαλβίδα και κατερχόμενη μέχρι την μηριαία διακλάδωση (με μέση διάμετρο 1.75cm). Το τμήμα αυτό της αορτής υποδιαιρείται στα παρακάτω τρία τμήματα:

1) Την **ανιούσα αορτή (ascending aorta)**

Έχει μήκος περίπου 5cm και ανατομικά βρίσκεται μεταξύ της πνευμονικής αρτηρίας και της κοίλης φλέβας. Είναι το πρώτο τμήμα της αορτής και ξεκινάει από την καρδιά. Στην αρχή της υπάρχουν δύο διακλαδώσεις, η δεξιά και αριστερή στεφανιαία αρτηρία, που εφοδιάζουν τον καρδιακό μυ με αίμα.

2) Το **αορτικό τόξο (aortic arch)**

Το μέσο μήκος του ανέρχεται στα 5cm. Ακολουθεί το αορτικό τόξο, όπου η αορτή καμπυλώνει. Από εδώ εξέρχονται τρεις κλάδοι: η βραχιοκεφαλική (brachiocephalic) ή ανώνυμος, η κοινή καρωτίδα (common carotid) και η υποκλείδια αρτηρία (subclavian artery).

3) Την **κατιούσα αορτή(descending aorta)**

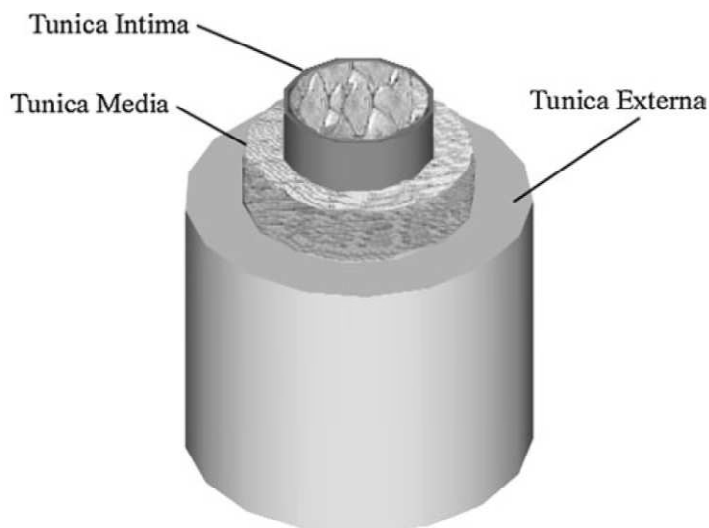
Αποτελείται από την κατιούσα θωρακική αορτή (descending thoracic aorta), μέσου μήκους 20cm και από την κατιούσα κοιλιακή αορτή (descending abdominal aorta).

Τα βασικά αυτά αγγεία υποδιαιρούνται συνεχώς σε μικρότερα μέχρι η διάμετρός τους να φθάσει των τριχοειδών.

Οι αρτηρίες εκτός από την κατάταξή τους κατά μέγεθος, κατατάσσονται συχνά και με τη δομή τους. Οι μεγάλες αρτηρίες που εκβάλλουν από την καρδιά και οι πρώτοι κλάδοι τους είναι «ελαστικές αρτηρίες» (*elastic arteries*) διότι περιέχουν μεγάλο ποσοστό *ελαστίνης (elastin)*. Η αορτή είναι ένα παράδειγμα ελαστικής αρτηρίας. Επίσης, υπάρχουν και οι «μυϊκές αρτηρίες» (*muscular arteries*).

Πέντε συντελεστές αποτελούν το τοίχωμα του αγγείου:

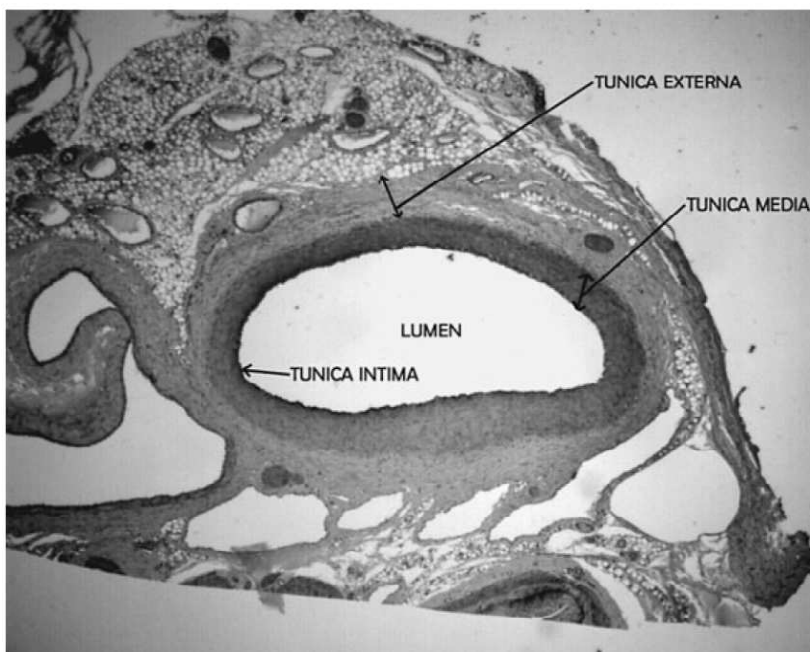
- 1) **Ενδοθηλιακός ιστός**
- 2) **Ίνες κολλαγόνου**
- 3) **Ίνες ελαστίνης**
- 4) **Λείοι μύες**
- 5) **Βασική ουσία**



Σχ. 1.3: Δομή του αρτηριακού τοιχώματος.

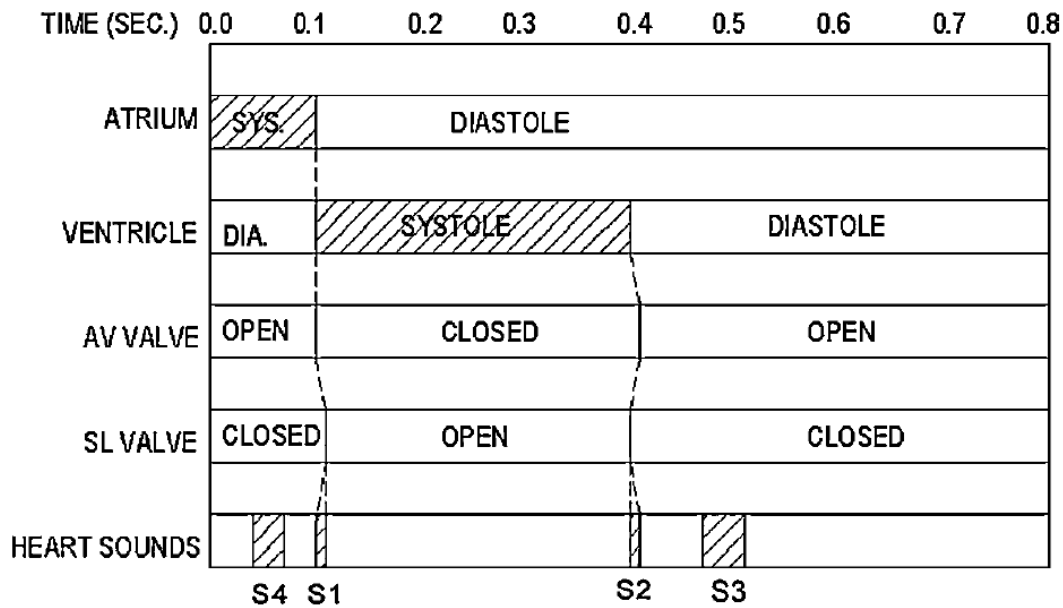
Οι παραπάνω ουσίες είναι διατεταγμένες σε τρία στρώματα. Ο **έσω χιτώνας** (tunica intima) αποτελείται από ένα στρώμα ενδοθηλίου με ένα λεπτό στρώμα ελαστίνης και ινών κολλαγόνου. Ο **μέσος χιτώνας** (tunica media) που αποτελεί το μεγαλύτερο τμήμα του τοιχώματος του αγγείου και αποτελείται από σφιχτές ελικοειδείς ίνες με

λεία μυϊκά κύτταρα μεταξύ τους είναι υπεύθυνος για την αντοχή και την ελαστικότητα του αρτηριακού τοιχώματος και ο **έξω χιτώνας** (adventitia) που αποτελείται από ελαστίνη και ίνες κολλαγόνου και περιβάλλεται από ιστούς. Υπάρχουν και μικρά αγγεία που τροφοδοτούν το τοίχωμα με αίμα. [3,5] Τα στρώματα αυτά απεικονίζονται στο σχήμα 1.4.



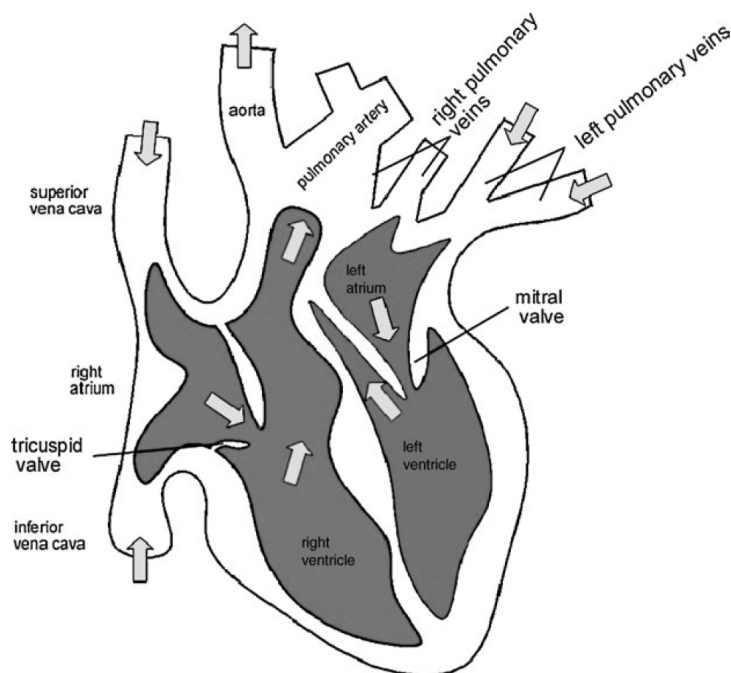
Σχ. 1.4: Μικροφωτογραφία η οποία δείχνει τα τρία στρώματα της διατομής μιας αρτηρίας. [1]

Οι αρτηρίες έχουν ελαστικές ιδιότητες και δύνανται να προσαρμόζονται στην κίνηση του σώματος. Επιπλέον, συστέλλονται και διαστέλλονται αντιδρώντας στη μεταβολή της πίεσης ή της μυϊκής έντασης. Η μυϊκή ένταση πέριξ των αρτηριών ρυθμίζει τη ροή του αίματος σε αυτές διαστέλλοντας το αγγείο για να αυξηθεί η ροή (αγγειοδιαστολή) ή συστέλλοντάς το για να μειωθεί η ροή (αγγειοσυστολή). [4] Κατά τη διάρκεια της συστολής η υψηλή πίεση της καρδιάς ωθεί το αίμα στις αρτηρίες οι οποίες διογκώνονται, ενώ κατά τη διάρκεια της διαστολής το συσσωρευθέν αίμα απελευθερώνεται καθώς οι αρτηρίες συστέλλονται λόγω μείωσης της πίεσης. Ο καρδιακός κύκλος, λοιπόν, υποδιαιρείται σε δύο κυρίως τμήματα, τη συστολή και τη διαστολή για να αντιδράσει ο οργανισμός στη μεταβολή της πίεσης ή της μυϊκής έντασης. [3] Το Σχ. 1.5 αποτελεί μια γραφική αναπαράσταση του καρδιακού κύκλου στη διάρκεια ενός κύτπου καρδιάς και το σχήμα δείχνει την τυπική πίεση στην αορτή, την αριστερή κοιλία και τον αριστερό κόλπο ως συνάρτηση του χρόνου.



Σχ. 1.5: Διάγραμμα καρδιακού κύκλου. [1]

Η καρδιά αποτελείται από τέσσερις «θαλάμους», οι οποίοι μπορούν να διαχωριστούν σε δύο ανώτερους θαλάμους, γνωστοί ως *κόλποι* (*atria*) και δύο κατώτερους, τις *κοιλίες* (*ventricles*). Οι βαλβίδες αντεπιστροφής ανάμεσα στους θαλάμους διασφαλίζουν ότι το αίμα κινείται προς μία μόνο κατεύθυνση και επιτρέπουν η πίεση στην αορτή, για παράδειγμα, να είναι υψηλότερη από την πίεση στους πνεύμονες, περιορίζοντας το αίμα να ρεύσει προς τα πίσω, δηλαδή από την αορτή προς τους πνεύμονες. [1] Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι τέσσερις «θαλάμοι» της καρδιάς καθώς και η σχηματική παράσταση των καρδιακών κοιλοτήτων και των οδών ροής.



Σχ. 1.7: Σχηματική παράσταση των καρδιακών κοιλοτήτων και των οδών ροής. [1]

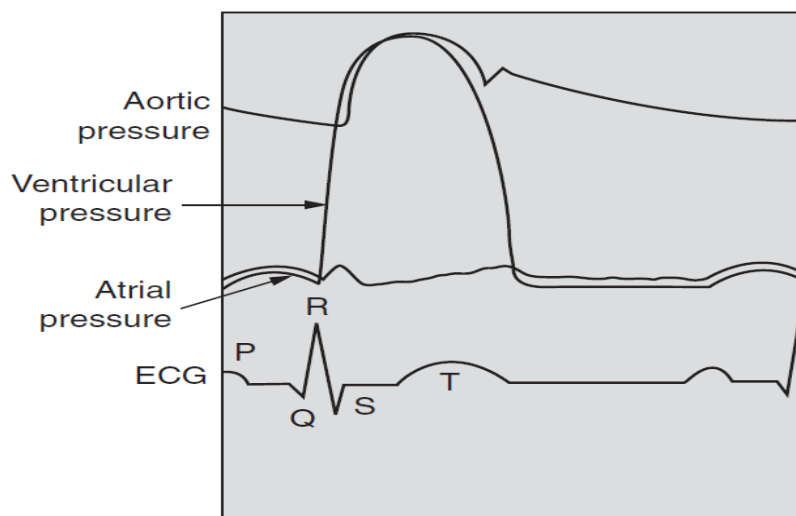
Οι δύο κοιλίες μπορεί να θεωρηθούν αντλίες εν σειρά. Είναι προφανές ότι οι δύο αντλίες εργαζόμενες εν σειρά πρέπει να είναι πλήρως συγχρονισμένες και να αντλούν την ίδια ποσότητα, ειδάλλως το σύστημα είτε θα αδειάζει είτε θα γεμίζει. [2]

Τέσσερις καρδιακές βαλβίδες βοηθάνε την απευθείας ροή του αίματος στην καρδιά. Οι βαλβίδες προκαλούν το αίμα να ρέει μόνο προς την επιθυμητή κατεύθυνση. Κάτω από φυσιολογικές συνθήκες, οι βαλβίδες συμπεριφέρονται ως βαλβίδες αντεπιστροφής για να προλάβουν τη ροή του αίματος προς την αντίθετη κατεύθυνση. Επιπλέον, οι βαλβίδες της καρδιάς παραμένουν κλειστές μέχρι η πίεση πίσω από τη βαλβίδα γίνει αρκετά μεγάλη, ώστε να κάνει το αίμα να ρεύσει προς τα εμπρός. [1]

Κάθε ανθρώπινη καρδιά έχει δύο κολποκοιλιακές βαλβίδες (atrioventricular valves-AV) που βρίσκονται ανάμεσα στους κόλπους και τις κοιλίες. Οι άλλες δύο βαλβίδες ονομάζονται ημισελήνοειδείς και είναι η αορτική και η πνευμονική βαλβίδα.

Κατά τη διάρκεια της κολπικής συστολής, η πίεση που παράγεται στον κόλπο αναγκάζει τις AV βαλβίδες να ανοίξουν και παραμένουν ανοικτές μέχρι η κοιλιακή συστολή να παράγει αρκετή κοιλιακή πίεση που θα αναγκάσει τις βαλβίδες να κλείσουν.

Κατά τη διάρκεια της κολπικής συστολής οι κοιλίες υποβάλλονται σε κοιλιακή διαστολή. Όταν η κοιλία γεμίσει και αρχίσει η κοιλιακή συστολή, οι AV βαλβίδες κλείνουν και η κολπική διαστολή αρχίζει, δηλαδή οι κόλποι γεμίζουν με αίμα.



Σχ. 1.6: Τυπικές τιμές πιέσεων στην αορτή, στην αριστερή κοιλία, στον αριστερό κόλπο. [1]

Όπως αναφέραμε στην αρχή, οι αρτηρίες είναι το μέσο μεταφοράς του αίματος σε όλα τα σημεία του ανθρώπινου σώματος. Η διαδρομή του αίματος είναι η εξής:

Το οξυγονωμένο αίμα εγκαταλείπει την καρδιά εκτοπιζόμενο από τη σύσπασση της αριστερής κοιλίας (*left ventricle*) και φθάνει στην αορτή (*aorta*) μέσω της αορτικής βαλβίδας (*aortic valve*) και από εκεί διαμοιράζεται σε όλα τα όργανα και τους ιστούς. Στη συνέχεια μέσω των τριχοειδών αγγείων διέρχεται στο φλεβικό σύστημα (*venous*

system). Δια μέσου του φλεβικού συστήματος και της κοίλης φλέβας (*vena cava*) πλούσιο σε διοξείδιο του άνθρακα φθάνει στο δεξιό κόλπο και μετά στη δεξιά κοιλία. Μέσω της πνευμονικής βαλβίδας (*pulmonary valve*) και της πνευμονική κυκλοφορίας (*pulmonary circulation*) μεταφέρεται στους πνεύμονες (*lungs*). Εκεί το διοξείδιο του άνθρακα ανταλλάσσεται με οξυγόνο και επιστρέφει στον αριστερό κόλπο. Από εκεί μέσω της μιτροειδούς βαλβίδας (*mitral valve*) εισέρχεται στην αριστερή κοιλία για να επαναληφθεί ο κύκλος.(τσαγγαρης) Είναι λάθος να θεωρούμε ότι οι αρτηρίες ως αγγεία μεταφέρουν μόνο οξυγονωμένο αίμα. Μία κατάλληλη διάκριση ανάμεσα στις αρτηρίες και τις φλέβες είναι ότι οι αρτηρίες μεταφέρουν αίμα σε σχετικά υψηλότερη πίεση από την πίεση αντίστοιχα των φλεβών. [1,2]

Το αίμα είναι γαλάκτωμα σωματιδίων σε υδατικό διάλυμα μεταβλητής σύστασης, το οποίο ονομάζεται πλάσμα (*plasma*) και αποτελεί το 55 - 60% και χρησιμεύει ως φορέας μεταφοράς των κυττάρων (εμμόρφων στοιχείων) που καταλαμβάνουν περίπου το 40 - 45% του συνολικού όγκου του αίματος. [1,2]

Η επί τοις εκατό κατ' όγκο περιεκτικότητα του αίματος σε έμμορφα στοιχεία λέγεται αιματοκρίτης (*Hct*). Το αίμα ανέρχεται στο 8% του βάρους του ανθρώπινου σώματος.

Τα πιο σημαντικά κύτταρα στο ανθρώπινο αίμα είναι:

-τα ερυθρά αιμοσφαίρια ή ερυθροκύτταρα (*red blood cells* ή *erythrocytes* R.B.C)

Είναι κύτταρα απύρρηνα τα οποία μεταφέρουν οξυγόνο στους ιστούς και γι' αυτό το λόγο πρέπει να βρίσκονται σε μεγάλο αριθμό στο αίμα. Το ερυθρό αιμοσφαίριο αποτελείται από πολύ εύκαμπτη μεμβράνη, η οποία φέρει εσωτερικά διάλυμα ονομαζόμενο αιμοσφαιρίνη. Η μεταφορά οξυγόνου γίνεται με τη δημιουργία ενώσεως, της αιμοσφαιρίνης Hb με το οξυγόνο O₂ της οξυαιμοσφαιρίνης (HbO₂). Σε περιπτώσεις ελαττωμένου ποσού αιμοσφαιρίνης, δηλαδή για ελαττωμένο αριθμό ερυθρών αιμοσφαιρίων έχουμε αναιμία.

-Τα λευκά αιμοσφαίρια ή λευκοκύτταρα (*W.B.C* ή *leukocytes*)

Αναλόγως της μορφής τους διακρίνονται σε πολυμορφοπύρρηνα, λεμφοκύτταρα και μονοπύρρηνα. Τα πολυμορφοπύρρηνα διακρίνονται σε ουδετερόφιλα, ηωσινόφιλα και βασεόφιλα. Αποτελούν τμήμα του αμυντικού συστήματος του σώματος εναντίον των λοιμώξεων. Συγκεκριμένα τα πολυμορφοπύρρηνα καταστρέφουν και απομακρύνουν μικροοργανισμούς και τεμαχίδια ιστών που έχουν υποστεί βλάβη ή νέκρωση. Τα λεμφοκύτταρα έχουν σχέση με την παραγωγή και κατανομή των αντισωμάτων.

-τα αιμοπετάλια ή θρομβοκύτταρα (*platelets* ή *thrombocytes*)

Είναι απύρρηνα κύτταρα. Τα αιμοπετάλια βοηθούν στην πήξη του αίματος και αιμόσταση.

Όλα αυτά τα κύτταρα είναι παραμορφώσιμα, με τα ερυθροκύτταρα να είναι τα πιο παραμορφώσιμα από τα υπόλοιπα. Σημαντικές παραμορφώσεις συμβαίνουν όταν το αίμα διέρχεται από τα τριχοειδή αγγεία. Όμως, οι κυτταρικές μεμβράνες δεν σπάνε γιατί κάθε κύτταρο έχει κυτταροσκελετό που υποστηρίζει το σχήμα του. [3]

Το αίμα ερχόμενο σε επαφή μέσα στο κυκλοφορικό σύστημα με το ενδοθήλιο των αγγείων και το ενδοκάριο διατηρείται σε υγρή κατάσταση. Κάτω όμως από ορισμένες συνθήκες, σε περίπτωση εξόδου από τα αγγεία τίθενται σε λειτουργία ενζυματικές διεργασίες που έχουν αποτέλεσμα την μετάπτωση του στην ημιστερεή κατάσταση, δηλαδή την **πήξη του αίματος**.

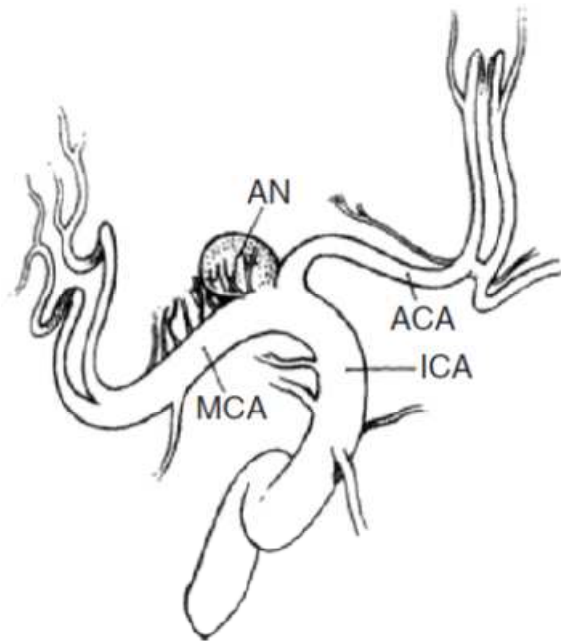
Το πήχθέν αίμα εκτός σώματος και αιματικών αγγείων ονομάζεται **πλακούς**, ενώ εντός του κυκλοφορικού συστήματος ονομάζεται **θρόμβος**. Ο σχηματισμός θρόμβου εγκυμονεί σοβαρό κίνδυνο για τον άνθρωπο, διότι ενδεχόμενη απόσπασή του από το σημείο δημιουργίας του δύναται να οδηγήσει σε απόφραξη αγγείων προκαλώντας εμβολή. Εάν γίνει και ρήξη αγγείων εντός του σώματος τότε εκτός της πήξης επιτελείται και αγγειοσυστολή με αποτέλεσμα την αιμόσταση και την επίσχεση της αιμορραγίας. [2]

Τα αιματικά αγγεία με την πάροδο του χρόνου μπορεί να παρουσιάσουν κάποια παθοφυσιολογικά χαρακτηριστικά με αποτέλεσμα να δυσλειτουργούν και να προκαλούν επιπλοκές στον ανθρώπινο οργανισμό. Στην παρούσα μελέτη θα εξετάσουμε από ρευστομηχανικής πλευράς ένα είδος παθοφυσιολογίας των αιματικών αγγείων, τα ανευρύσματα και συγκεκριμένα αυτά που παρουσιάζονται στην περιοχή της κοιλιακής αορτής.

ΑΝΕΥΡΥΣΜΑ ΚΟΙΛΙΑΚΗΣ ΑΟΡΤΗΣ (ΑΚΑ)

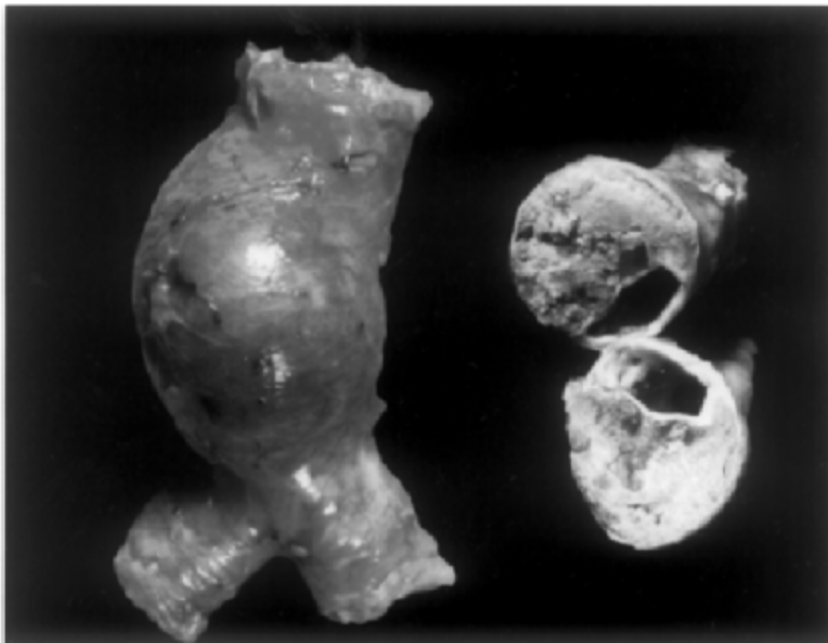
Ο όρος *ανεύρυσμα* αναφέρεται σε μια ανώμαλη διεύρυνση ή διόγκωση του αρτηριακού τοιχώματος. Η κατάσταση αυτή είναι αποτέλεσμα αδυναμίας ή λέπτυνσης του τοιχώματος των αιματικών αγγείων. Τα ανευρύσματα μπορεί να συμβούν σε οποιοδήποτε είδος αγγείου, αλλά συνήθως συμβαίνουν στις αρτηρίες και σε συγκεκριμένες θέσεις του κυκλοφορικού συστήματος. Ανευρύσματα συχνά συμβαίνουν στην ανιούσα θωρακική και κοιλιακή αορτή και είναι γνωστά σαν *ανευρύσματα κοιλιακής αορτής* και είναι *θυσανοειδούς* σχήματος ή στον εγκέφαλο και λέγονται *εγκεφαλικά* ή *ενδοκρανικά* ανευρύσματα και είναι *ασκοειδούς* τύπου. [6,7,8,9]

Το εγκεφαλικό ανεύρυσμα είναι ένα αδύναμο, διογκωμένο σημείο στην αρτηρία του εγκέφαλου και συνήθως είναι αποτέλεσμα αδυναμίας του μέσου χιτώνα του αγγείου εκ γενετής. Εμφανίζουν συμπτώματα που κυμαίνονται από πονοκέφαλο, υπνηλία, ναυτία έως πιο σοβαρά συμπτώματα όπως διανοητική σύγχυση, ζάλη και απώλεια αισθήσεων. [6]



Σχ. 1.8: Ενδοκρανιακό ανεύρυσμα.

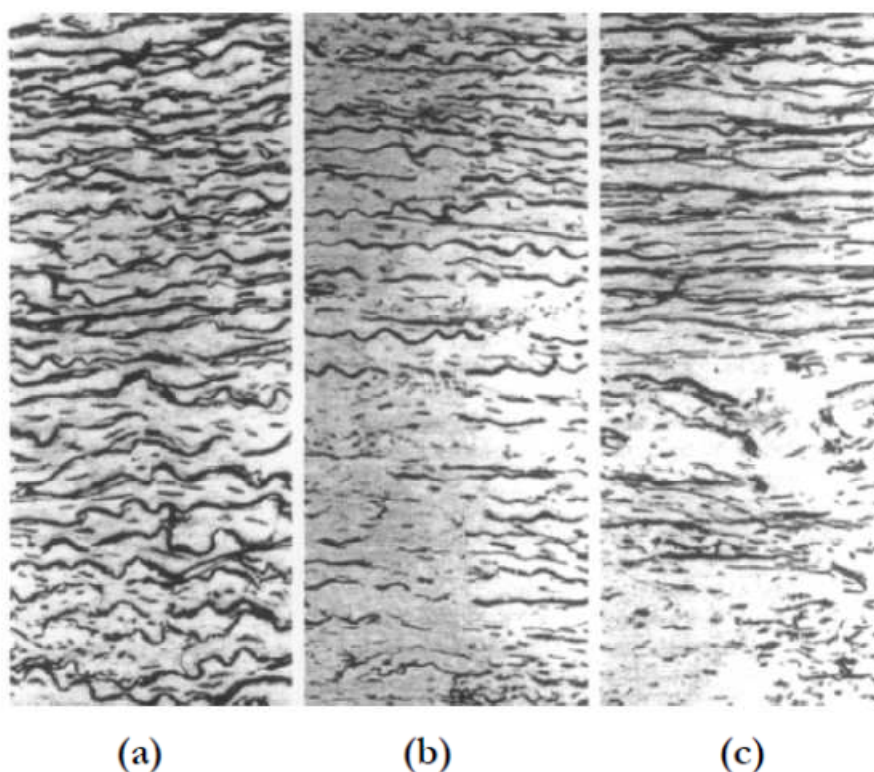
Εμείς θα κάνουμε μία εκτενέστερη αναφορά για τα ανευρύσματα κοιλιακής αορτής (ΑΚΑ) με τα οποία και ασχολείται η παρούσα μελέτη. Το ανεύρυσμα κοιλιακής αορτής είναι η πιο συχνή περίπτωση αορτικού ανευρύσματος και ο βασικότερος παράγοντας εμφάνισής του είναι η ηλικία. Όταν οι αρτηρίες οδηγούνται σε γήρανση με την πάροδο των χρόνων, η διάμετρός τους αυξάνει και τα τοιχώματά τους γίνονται σκληρότερα και παχύτερα. [10]



Σχ. 1.9: Ανεύρυσμα κοιλιακής αορτής.

Οι εντονότερες δομικές αλλαγές λαμβάνουν χώρα στον μέσο χιτώνα του αρτηριακού τοιχώματος. [11] Τα επίπεδα ελαστίνης και η αναλογία ελαστίνης-κολλαγόνου μειώνονται προοδευτικά. Η μειωμένη ελαστίνη συνδέεται με την αορτική διεύρυνση και η αύξηση του κολλαγόνου προδιαθέτει τη ρήξη του ανευρύσματος. Η καταστροφή της ελαστίνης που βρίσκεται στον μέσο χιτώνα των αγγείων θεωρείται ο παράγοντας «κλειδί» στην παθογένεια των ανευρυσμάτων. Ο μέσος χιτώνας γίνεται λεππότερος καθώς οι ίνες ελαστίνης τεμαχίζονται και οδηγούνται σε τυχαία διάταξη. Με τον εκφυλισμό των ίνων ελαστίνης, το κολλαγόνο, το πιο άκαμπτο συστατικό στοιχείο του τοιχώματος, αυξάνει, με αποτέλεσμα να χάνεται σιγά σιγά η ελαστικότητα του αγγείου. Το τοίχωμα, λοιπόν των αρτηριών καθίσταται πιο ευαίσθητο στην επίδραση της πίεσης του αίματος. [4]

Η ηλικία παίζει σημαντικό ρόλο στον εκφυλισμό του αρτηριακού μηχανισμού, καθώς με την πάροδο των ετών το αρτηριακό τοίχωμα λεπταίνει. Λόγω κόπωσης προκαλείται τεμαχισμός των φύλλων ελαστίνης, τα οποία σε πιο μικρές ηλικίες είναι πολύ σταθερά. Χάνεται λοιπόν, η ελαστική τους ιδιότητα και επέρχεται σταδιακή και μόνιμη διεύρυνση του αγγείου. Η ρήξη των ίνων ελαστίνης, φαίνεται χαρακτηριστικά στο σχήμα 1.10. [12]



Σχ. 1.10: Οι ίνες ελαστίνης.

Επίσης, μία αύξηση στο πλάτος των κυμάτων πίεσης μπορεί να ενεργοποιήσει και να επιταχύνει την ανάπτυξη ανευρύσματος σε ηλικιωμένα άτομα.

Οι παθολογικές αλλαγές που συμβαίνουν με την ηλικία είναι δυνατό να ενισχυθούν ή να επιταχυνθούν με την υπέρταση, την υπερβολική κατανάλωση αλκοόλ, το κάπνισμα, την έλλειψη άσκησης και άλλων διατροφικών και εξωτερικών παραγόντων. [13,14,15] Η αθηροσκλήρωση έχει ενοχοποιηθεί στο παρελθόν ότι αποτελεί τη συνηθέστερη αιτία εκφυλισμού των τοιχωμάτων σε ανευρύσματα, όπως της κοιλιακής αορτής. Αυτή η θεωρία επανεξετάζεται τα τελευταία χρόνια και επιπλέον έχει παρατηρηθεί ότι σε σημεία που δημιουργείται εκτενώς αθηρωματική πλάκα είναι σπάνιος και ο παράλληλος σχηματισμός ανευρυσμάτων. [16]

Ορισμένα ανευρύσματα αυξάνουν σταθερά σε μέγεθος με ένα ρυθμό που δεν είναι σαφώς καθορισμένος, ενώ άλλα μεγαλώνουν ραγδαία, προσεγγίζουν ένα συγκεκριμένο μέγεθος και ακολούθως μειώνουν το ρυθμό διόγκωσής τους. Η γνώση του ρυθμού διόγκωσης αποτελεί πολύτιμη πληροφορία για την ιατρική κοινότητα και αποτελεί κίνητρο για τη διεξαγωγή διεπιστημονικών ερευνών συμπεριλαμβανομένου και ενός μεγάλου αριθμού ρευστοδυναμικών μελετών.

Ο ρυθμός διόγκωσης του ανευρύσματος καθώς και η διάμετρός του αποτελούν βασικό κριτήριο για τον κίνδυνο ρήξης του ανευρύσματος. Συγκεκριμένα, υψηλής επικινδυνότητας θεωρούνται αυτά που έχουν διάμετρο μεγαλύτερη από 5 cm και ρυθμό διόγκωσης μεγαλύτερο από 0.5 cm/ έτος. [17] Υπάρχουν παραδείγματα ρήξης ανευρυσμάτων χωρίς να ικανοποιούν τις παραπάνω παραμέτρους.[18]

Τα ΑΚΑ που έχουν διάμετρο μικρότερη από 5cm συνήθως παρακολουθούνται και λαμβάνουν θεραπεία με φάρμακα που μειώνουν την πίεση. Αυτά που η διάμετρός τους ξεπερνά τα 5cm, αφού ανακαλυφθούν, τότε μέσω εγχειρητικής διαδικασίας θα αντικατασταθούν με μόσχευμα. [1]

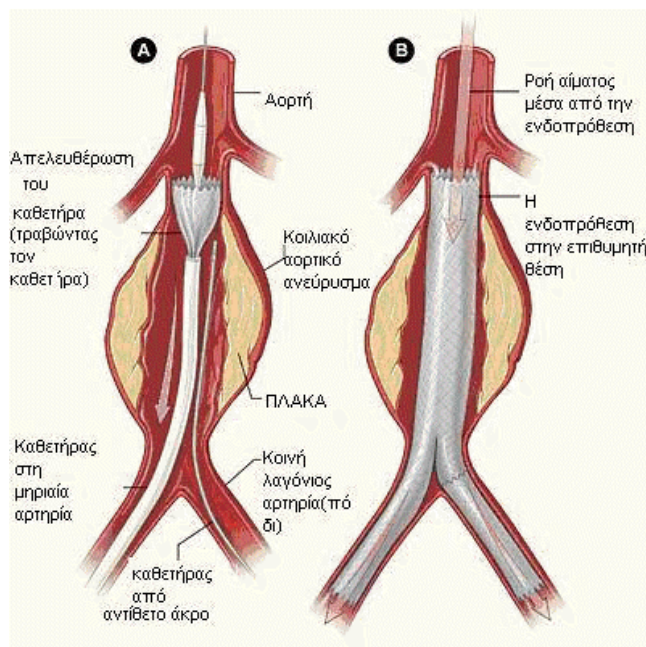
Τα ανευρύσματα είναι αποτέλεσμα ενδογενών δυσλειτουργιών ή δομικών ελαττωμάτων όπως η γήρανση, κάποια μόλυνση ή ασθένεια και διαφόρων αιμοδυναμικών παραγόντων.

Τα ΑΚΑ καλούνται συχνά και σιωπηλοί δολοφόνοι γιατί στις περισσότερες περιπτώσεις δεν δείχνουν προφανή συμπτώματα στους ασθενείς. Σε περίπτωση ύπαρξης συμπτωματολογίας τότε αυτή περιλαμβάνει: κοιλιακό πόνο συνεχή ή περιοδικό, πόνο στην πλάτη με αντανάκλαση σε πόδια, γλουτούς και βουβωνική περιοχή, αίσθημα παλμών στην κοιλιακή χώρα. Όταν έχουμε ρήξη του ανευρύσματος η συμπτωματολογία τροποποιείται σε πιο έντονα συμπτώματα όπως ναυτία, λιποθυμία, έντονη ταχυκαρδία και ξαφνική αδυναμία. [8]

Η κλινική εικόνα του είναι τις περισσότερες φορές ανύπαρκτη και η διάγνωσή του τυχαία, κυρίως όταν ο ασθενής υποβάλλεται σε εξετάσεις για μια άλλη πάθηση. Σε μερικές περιπτώσεις το ανεύρυσμα διαγιγνώσκεται με μία απλή φυσική εξέταση του ασθενούς. Ωστόσο, η πιο διαδεδομένη διαγνωστική εξέταση είναι ο υπέρηχος στην περιοχή του ανευρύσματος. Άλλες μέθοδοι διάγνωσης είναι η αξονική τομογραφία, η μαγνητική τομογραφία και η αρτηριογραφία. [19,20]

Μικρού μεγέθους ανευρύσματα, με μικρό κίνδυνο ρήξης, απαιτούν την τακτική παρακολούθησή τους με υπερηχογραφικό έλεγχο σε τακτά χρονικά διαστήματα, για να καθοριστεί εάν και πόσο έχει μεγαλώσει το ανεύρυσμα και ακολουθείται φαρμακευτική αγωγή.

Η πιο διαδεδομένη θεραπεία εκλογής που εφαρμόζεται σε μεγάλα, μη ραγέντα ανευρύσματα κοιλιακής αορτής είναι η ανοικτή χειρουργική επέμβαση, όπου ο χειρουργός διανοίγει το ανεύρυσμα και τοποθετεί ένα μόσχευμα, το οποίο τελικά αποκαθιστά τη ροή του αίματος. Όταν όμως, η διάμετρός του φτάσει 5cm περίπου, η πιθανότητα ρήξης του φτάνει στο 20% και τότε το απαιτείται η αποκατάστασή του. [20] Στην αποκατάσταση του ΑΚΑ με ενδοπρόσθεση (stent graft) εισάγεται ένας μακρύς, λεπτός σωλήνας (που λέγεται καθετήρας) μέσω μιας μικρής τομής ως την περιοχή του ανευρύσματος. Μέσω του καθετήρα τοποθετείται ένας υφασμάτινος αυλός (μόσχευμα-graft) που είναι αρκετά μακρύς, ώστε να εκτείνεται σε όλη τη διατεταμένη περιοχή της αορτής. Αυτός ο αυλός συγκρατείται στην περιοχή από έναν νάρθηκα (stent) που είναι ένας μεταλλικός δικτυωτός σκελετός. Ο νάρθηκας ασκεί πίεση μεταξύ του μοσχεύματος και της αρτηρίας ώστε το μόσχευμα να στερεώνεται σφιχτά στη θέση του. Το αίμα έτσι ρέει μέσα από το μόσχευμα και προσπερνά το ανεύρυσμα. Χωρίς την πίεση του ρέοντος αίματος, το ανεύρυσμα δεν κινδυνεύει πια να ραγεί και τελικά συρρικνώνεται.



Σχ. 1.11: επικαλυμμένη ενδοπρόσθεση

Οι επικαλυμμένες ενδοπροσθέσεις κοιλιακών αορτικών ανευρυσμάτων χρησιμοποιούνται για την παράκαμψη μεγάλων ανευρυσμάτων στο κοιλιακό τμήμα της αορτής, που διαφορετικά θα έσπαγαν και θα προκαλούσαν επικίνδυνες καταστάσεις. Υπάρχουν ορισμένοι κίνδυνοι από την αποκατάσταση του ανευρύσματος με ενδοπρόσθεση, οι οποίοι είναι σαφώς λιγότεροι από αυτούς της αποκατάστασης με χειρουργική επέμβαση. Τέλος, χρειάζεται ετήσια παρακολούθηση με αξονική τομογραφία ή υπερηχογράφημα για να εξασφαλίσουμε ότι η ενδοπρόσθεση έχει παραμείνει στη θέση της και ότι παρακάμπτεται ικανοποιητικά το αίμα από το ανεύρυσμα ώστε αυτό να συρρικνώνεται.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΑΠΟ ΤΑ ΒΙΟΪΑΤΡΙΚΑ ΦΑΙΝΟΜΕΝΑ ΣΤΑ

ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ

Το **κυκλοφορικό σύστημα** μπορούμε να το εκλάβουμε ως ένα δίκτυο ελαστικών σωληνώσεων μέσα στο οποίο ρέει το αίμα, με την καρδιά να παίζει τον ρόλο δύο αντλιών εν σειρά. Πάνω σε αυτή τη θεώρηση στηρίζεται η βιορευστομηχανική μελέτη του κυκλοφορικού συστήματος. [3] Επίσης, οι αρτηρίες θα θεωρηθούν ελαστικοί αγωγοί μέσα στους οποίους ρέει ένα ρευστό, το *αίμα*.

Οι δύο κοιλίες της *καρδιάς* μπορούν να θεωρηθούν αντλίες σε σειρά, που πρέπει να είναι πλήρως συγχρονισμένες και να αντλούν την ίδια ποσότητα, ειδάλλως το σύστημα είτε θα αδειάζει είτε θα γεμίζει. Ο μηχανισμός αυτός ονομάζεται νόμος Starling. [2] Ο καρδιακός κύκλος υποδιαιρείται σε δύο κυρίως τμήματα, τη συστολή και τη διαστολή. Η καρδιά με τη συστολή και τη διαστολή προσφέρει την απαραίτητη πίεση εξώθησης του αίματος για να ελέγχονται οι απώλειες πίεσης και να παρέχεται αίμα στα υπόλοιπα όργανα.

Το *αίμα* ρέει μέσα στις αρτηρίες, οι οποίες με τη σειρά τους διατηρούν την πίεση του σταθερή. Για τη σωστή λειτουργία του κυκλοφορικού συστήματος, λοιπόν, απαιτείται η ομαλή ροή του αίματος μέσα στις αρτηρίες. Η μελέτη της ροής του αίματος μέσα στα αγγεία ονομάζεται **αιμοδυναμική**. [21]

Το αίμα είναι το πιο σημαντικό παράδειγμα βιολογικού ρευστού. Ως ρευστό ορίζεται η ουσία η οποία παραμορφώνεται συνεχώς υπό την εφαρμογή διατμητικής τάσης, ανεξάρτητα από το πόσο μικρή είναι η δύναμη.

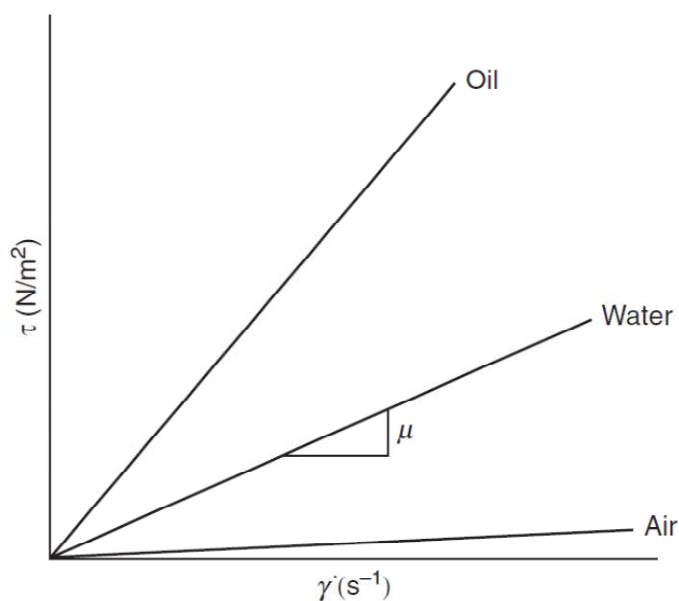
Η πυκνότητα του αίματος είναι λίγο πιο μεγάλη από αυτή του νερού, δηλαδή $1060\text{kg}/\text{m}^3$, ενώ η πυκνότητα του νερού είναι $1000\text{kg}/\text{m}^3$.

Ένας τρόπος για να απεικονίσουμε τις ιδιότητες των υλικών στα ρευστά είναι με το διάγραμμα των διατμητικών τάσεων ως συνάρτηση του ρυθμού διάτμησης $\dot{\gamma}$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Η κλίση της καμπύλης της διατμητικής τάσης στο διάγραμμα του ρυθμού παραμόρφωσης ονομάζεται ιξώδες και ορίζεται με το ελληνικό γράμμα μ . Είναι επίσης γνωστό και ως κινηματική συνεκτικότητα. Το ιξώδες του αίματος είναι ένα από τα χαρακτηριστικά του αίματος που επηρεάζουν το απαιτούμενο έργο για να ρεύσει το αίμα μέσα στις αρτηρίες και είναι της τάξης 0.003 με $0.006\text{Ns}/\text{m}^2$. Για τα συνήθη ρευστά λάδι, νερό και αέρας, η συνεκτικότητα δε μεταβάλλεται με το ρυθμό παραμόρφωσης, βλέπε σχήμα. Αυτά τα ρευστά είναι γνωστά ως *νευτώνεια*, για τα οποία ισχύει η σχέση $\tau = \mu\dot{\gamma}$, όπου τ η διατμητική τάση, μ το ιξώδες και $\dot{\gamma}$ ο ρυθμός παραμόρφωσης. [1]

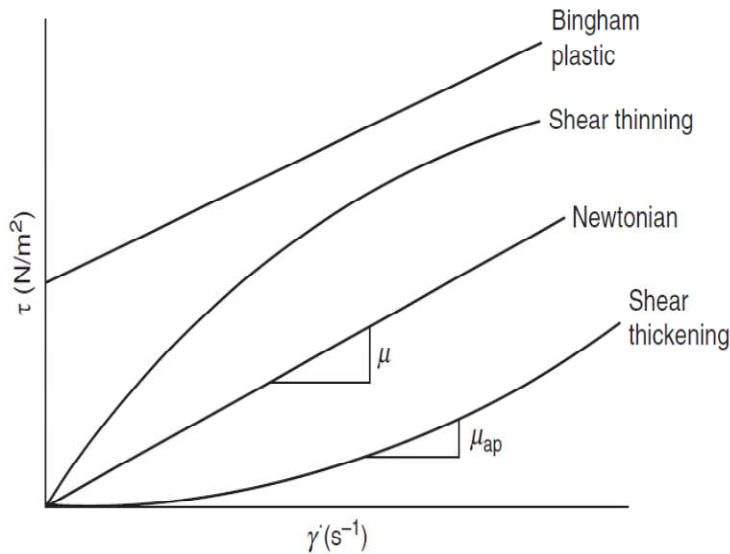
Η τιμή της συνεκτικότητας του αίματος έχει διερευνηθεί ως συνάρτηση της ταχύτητας παραμόρφωσης με διάφορες πειραματικές τεχνικές και για διάφορους συνδυασμούς συστατικών του. Ενώ σήμερα υπάρχει κλάδος της ρεολογίας ονομαζόμενος βιορεολογία (biorheology), δεν υπάρχει πάντα σύγκλιση αποτελεσμάτων στη βιβλιογραφία.

Έτσι, δεν υπάρχει συμφωνία των ερευνητών αν η συμπεριφορά του πλάσματος του αίματος είναι νευτώνεια ή μη νευτώνεια. Ο λόγος είναι ίσως ότι δεν μπορεί να προσδιοριστεί ενιαία συμπεριφορά όταν το αίμα απομακρυνθεί από το φυσικό του περιβάλλον. Εν γένει υπάρχει συμφωνία για δύο ιδιότητες του αίματος που πολλές φορές ονομάζονται «ανωμαλίες» του αίματος με τις οποίες θα ασχοληθούμε στο επόμενο κεφάλαιο. [2]

Το αίμα είναι μη νευτώνειο ρευστό, το οποίο σημαίνει ότι το ιξώδες του δεν είναι σταθερό και μεταβάλλεται σε σχέση με τον ρυθμό παραμόρφωσης. Επιπλέον, το ιξώδες εξαρτάται και από την θερμοκρασία και το κατ' όγκο ποσοστό των ερυθρών αιμοσφαιρίων που βρίσκονται στο αίμα. [1]



Σχ. 2.1 Η διατμητική τάση σε συνάρτηση με το ρυθμό παραμόρφωσης για νευτώνεια ρευστά.



Σχ. 2.2 Ρεογράφημα διαφόρων ρεολογικών ρευστών.

Όταν η γεωμετρία των αρτηριών μεταβάλλεται, προκαλούνται προβλήματα στην αιμάτωση των οργάνων και των μυών του οργανισμού που είναι γνωστά ως *στένωση* και *ανεύρυσμα*, με το οποίο και ασχοληθήκαμε παραπάνω, αλλά από ιατρικής πλευράς.

Όπως συμβαίνει και σε οποιοδήποτε δίκτυο αγωγών, η γεωμετρία των αρτηριών του κυκλοφορικού συστήματος αποτελεί βασικό παράγοντα διαμόρφωσης της ροής του αίματος.

Η στένωση και το ανεύρυσμα αποτελούν τα γνωστά και ευρέως μελετούμενα τυπικά ρευστομηχανικά προβλήματα, σε συγκλίνον-αποκλίνον ακροφύσιο και σε απότομα διευρυνόμενο αγωγό αντίστοιχα. Οι περιοχές αυτές έχουν ιδιαίτερο ρευστομηχανικό ενδιαφέρον γιατί εκεί εντοπίζονται σημαντικές διαφορές της στατικής πίεσης και των διατμητικών τάσεων στο τοίχωμα (WSS), σε σχέση με τα αντίστοιχα μεγέθη στα ευθύγραμμα τμήματα. Επομένως, συμπεραίνουμε ότι η δομή του αρτηριακού τοιχώματος επηρεάζεται από τη μηχανική κόπωση του αγγείου. [22]

Τα αίτια τραυματισμού του αρτηριακού τοιχώματος από κάποιους θεωρούνται καθαρά ρευστομηχανικά [22], από άλλους καθαρά βιοχημικά και από κάποιους άλλους ο συσχετισμός αυτών των δύο. [23]

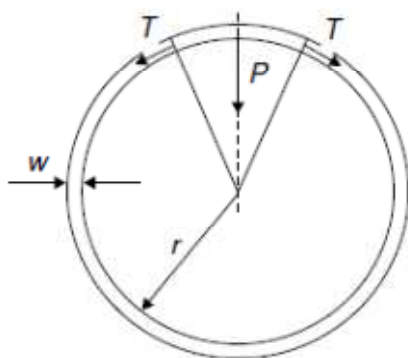
Για να κατανοήσουμε τις αρχές της αιμοδυναμικής στη ροή των ρευστών στους αγωγούς θα ασχοληθούμε με τις τάσεις στο αρτηριακό τοίχωμα. [21]

Ο νόμος *Laplace* συνδέει τις τάσεις στο αρτηριακό τοίχωμα με τη στατική πίεση του ρέοντος αίματος. Στο παρακάτω σχήμα το w αντιπροσωπεύει το πάχος του αρτηριακού τοιχώματος, το r την εσωτερική ακτίνα της αρτηρίας ή της φλέβας, το P τις ορθές τάσεις από την στατική πίεση και από τις οποίες φορτίζεται το τοίχωμα κατά την ακτινική κατεύθυνσή του και T τις εφαπτομενικές τάσεις της κυκλικής

διατομής. Η σχέση έχει τη μορφή: $P = \frac{w}{r}T$. Αυτός ο νόμος μας δείχνει την αντιστρόφως ανάλογη εξάρτηση της πίεσης από την ακτίνα r , δηλαδή όσο πιο μικρό είναι ένα αγγείο τόσο πιο μεγάλη είναι η στατική πίεση του αίματος.

Λέμε λοιπόν, ότι σε κάποιο βαθμό μία αρτηρία συμπεριφέρεται σαν ένα μακρύ κυλινδρικό μπαλόνι. Όταν προσπαθείς να φουσκώσεις ένα τέτοιο μπαλόνι, είναι αρκετά δύσκολο να τα καταφέρεις με το πρώτο φύσημα. Όταν, όμως, το μπαλόνι φτάσει μία συγκεκριμένη ακτίνα αυτό γίνεται πιο εύκολο, απαιτείται λιγότερη πίεση για την αύξηση του μεγέθους του μπαλονιού. Αυτό το φαινόμενο είναι γνωστό ως *αστάθεια*. Αν αυτό συμβεί σε μια αρτηρία, τότε έχουμε να κάνουμε με ανεύρυσμα και η σχετικά σταθερή πίεση του αίματος θα συνεχίσει να αυξάνει το μέγεθος του ανευρύσματος.

Την ακτίνα της αρτηρίας, στην οποία συμβαίνει αυτό το φαινόμενο της αστάθειας, δεν μπορούμε να την υπολογίσουμε με ακρίβεια αλλά κάποια αρκετά γενικά επιχειρήματα δηλώνουν ότι r_c είναι η κρίσιμη ακτίνα για την έναρξη της αστάθειας και r_0 είναι η αρχική ακτίνα της αρτηρίας και ισχύει η μεταξύ τους σχέση: $r_c \approx 2r_0$. Η σχέση αυτή ισχύει και σε ένα ανεύρυσμα. Η μέση διάμετρος της αορτής είναι $23mm$ και η ρήξη του ανευρύσματος είναι πολύ σπάνια όταν η διάμετρος είναι μικρότερη από $50mm$. Τυπικές τιμές ανθρώπου σε ηρεμία, είναι: $120mmHg$ για την μέγιστη εμφανιζόμενη στον καρδιακό παλμό-συστολική πίεση- και $80mmHg$ για την ελάχιστη εμφανιζόμενη-διαστολική πίεση.



Σχ. 2.3: Η ορθή και η διατμητική φόρτιση του αρτηριακού τοιχώματος. [21]

Η διατμητική τάση παίζει σημαντικό ρόλο στη βιορευστομηχανική, γιατί αν οι δυνάμεις που ασκούνται στο αίμα είναι έντονες τότε μπορεί τα ερυθροκύτταρα να καταστραφούν. Επίσης, έρευνες έχουν δείξει ότι οι διατμητικές δυνάμεις έχουν πρωτεύοντα ρόλο στην εμφάνιση αθηροσκληρωτικής πλάκας.

Οι διατμητικές τάσεις πάνω στο τοίχωμα (Wall Shear Stresses-WSS) τ_w παράγονται από την αντίσταση στη ροή του αίματος και έχουν τη διεύθυνση του διαμήκη άξονα του αγγείου. Οι διατμητικές τάσεις είναι ανάλογες του ρυθμού παραμόρφωσης γ του

τοιχώματος και του ιξώδους μ του αίματος. Αυτές σχετίζονται γραμμικά με το ρυθμό παραμόρφωσης με τη σχέση Newton: $\tau_w = \mu\gamma = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$.

Οι WSS έχουν μεγάλη επίδραση στο αρτηριακό τοίχωμα, επειδή ρυθμίζουν τη διάμετρο του αγγείου μεταβάλλοντας την παραγωγή αγγειοσυσταλτικών και αγγειοδιασταλτικών ουσιών και γι' αυτό θεωρούνται θεμελιώδους σημασίας στην αγγειακή λειτουργία. Επιπλέον, μαζί με την περιφερειακή και ακτινική ένταση του αγγείου καθορίζουν την έκφραση των ενδοθηλιακών γονιδίων. [23]

Πειραματικές μελέτες μας δίνουν τις παρακάτω τιμές της διατμητικής τοιχωματικής τάσης για διάφορες αρτηρίες: καρωτιδική :1.1-1.3Pa, βραχιόνειος :0.4-0.5Pa, μηριαία: 0.3-0.5Pa. [24] Οδηγούμαστε, λοιπόν, στην μελέτη των WSS, που φορτίζουν το αρτηριακό τοίχωμα, παραμετρικά ως προς όλους τους παράγοντες που καθορίζουν την τιμή τους, δηλαδή την αρτηριακή γεωμετρία (μέσω των χωρικών κλίσεων της ταχύτητας) και το ιξώδες του αίματος.

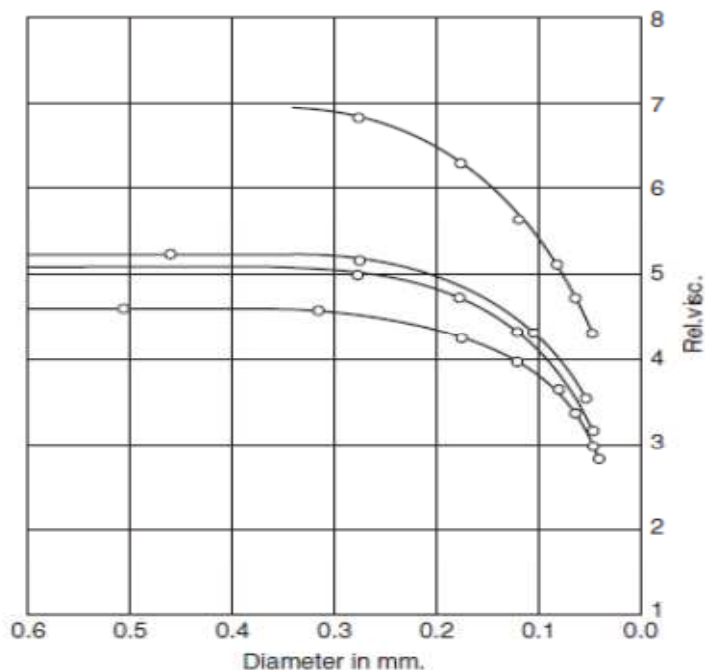
Μελέτες σχετικά με τα λεία μυϊκά κύτταρα έχουν δείξει ότι διαταραγμένες συνθήκες ροής και ασταθή τυρβώδη πεδία προκαλούν επιπλοκές στον ενδοθηλιακό ιστό και την απώλεια ή δυσλειτουργία των ρυθμιστικών διεργασιών (που επιτελεί το ενδοθήλιο) που δύναται να αποτελέσουν αιτία για εκφυλισμό του αγγειακού τοιχώματος. [25,26] Διάφορες μελέτες έχουν δείξει ότι υπάρχει συσχετισμός μεταξύ των χαμηλών διατμητικών τάσεων και την απώλεια της διαπερατότητας της ενδοθηλιακής μεμβράνης. [27,28,29] Ακόμα υψηλές χρονικές και χωρικές κλίσεις των τοιχωματικών διατμητικών τάσεων είναι δυνατό να τροποποιήσουν το ενδοθηλιακό κύτταρο. Το τοίχωμα του ανευρύσματος επηρεάζεται από την κυκλική φόρτιση των κάθετων και εφαπτομενικών φορτίων που δρουν σε αυτό.

Ότι οι διατμητικές τάσεις τροποποιούν τις φυσιολογικές διεργασίες που επιτελούνται από τα ενδοθηλιακά κύτταρα, έχει υπάρξει κίνητρο για τη διεξαγωγή αριθμητικών και ρευστοδυναμικών μελετών για τον προσδιορισμό των χαρακτηριστικών των τοιχωματικών διατμητικών τάσεων σε διάφορα στάδια ενός ανευρύσματος. Πειραματικές μετρήσεις, καθώς και αριθμητικές μελέτες σε συμμετρικά και μη μοντέλα ή και ρεαλιστικές γεωμετρίες, υπήρξαν το περιεχόμενο αυτών των εργασιών. [30,31,32] Οι αριθμητικές εργασίες θεωρούν συνήθως το αίμα ως Νευτώνειο, ενώ η παροχή στα εξεταζόμενα μοντέλα είναι είτε μόνιμη είτε χρονικά μεταβαλλόμενη.

Το πλάσμα, αποτελεί το συνεχές μέσο που δίνει τον χαρακτήρα του ρευστού στο αίμα, καθώς και από διαλυμένα σωματίδια τα οποία παίζουν σημαντικό ρόλο στη συμπεριφορά του αίματος. [33,34] Συγκεκριμένα η δυνατότητα των ερυθρών αιμοσφαιρίων να παράγουν συσσωματώματα ή αλυσίδες (rouleaux forming) [35] κυττάρων έχει μελετηθεί πολλές φορές και αποδεικνύεται ότι μεταβάλλεται από διάφορους παράγοντες:

- Μειώνεται με την αύξηση της θερμοκρασίας
- Αυξάνεται με την αύξηση της ποσοστιαίας συγκέντρωσης των ερυθρών αιμοσφαιρίων σε ένα δείγμα αίματος (αιματοκρίτης)
- Αυξάνεται καθώς μειώνεται ο ρυθμός παραμόρφωσής τους [36,37]

Όταν το αίμα ρέει σε αγγεία διαμέτρου μικρότερης από 1.5mm, το ιξώδες των ρευστών μειώνεται. Οι Fahraus - Lindqvist δημοσίευσαν ένα άρθρο όπου παρουσίαζαν αυτό το φαινόμενο και γι' αυτό ονομάστηκε *Fahraus – Lindqvist effect*. Στο γράφημα που ακολουθεί παρουσιάζεται αυτό το φαινόμενο. [1]



Σχ. 2.4: Γράφημα του Fahraus το 1932 όπου τέσσερις διαφορετικές περιπτώσεις δείχνουν την εξάρτηση του ιξώδους από τη διάμετρο του αγωγού.

Κατά τη ροή του αίματος μέσα στα αγγεία, ο ρυθμός παραμόρφωσης των συστατικών του εξαρτάται άμεσα από τις συνθήκες ροής τους, τις επικρατούσες ταχύτητες και τάσεις. [33,34]

Όταν λοιπόν, το αίμα βρίσκεται σε σημεία χαμηλών ρυθμών παραμόρφωσης εμφανίζεται δυσκολία στην αποκόλληση των ερυθρών αιμοσφαιρίων με αποτέλεσμα να παρουσιάζεται υψηλός λόγος διατμητικών τάσεων προς το ρυθμό παραμόρφωσης. Παρατηρούνται διαφορές στο ιξώδες του αίματος, με αποτέλεσμα το αίμα να συμπεριφέρεται ως μη νευτώνειο ρευστό, για το οποίο μιλήσαμε πιο πάνω.

Η δικιά μας εργασία εστιάζεται στη μελέτη του ανευρύσματος, ως ενός αξονικά συμμετρικού διογκωμένου αγωγού. Σκοπός μας είναι να μελετήσουμε ορισμένα ροϊκά χαρακτηριστικά μοντέλων ρευστών, τα οποία χρησιμοποιήθηκαν για την προτυποποίηση του ιξώδους του αίματος.

Επειδή, η συμπεριφορά των ρευστών είναι πρακτικά άγνωστη θα μελετήσουμε τη μόνιμη ροή κάποιων μη νευτώνειων ρευστών σε αξονικά συμμετρικούς αγωγούς, ευθύγραμμους και διογκωμένους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΦΥΣΙΚΗ ΕΚΦΡΑΣΗ

Για να μελετήσουμε λοιπόν τη ροή του αίματος στην περίπτωση μας, θα πρέπει να κάνουμε κάποιες θεωρήσεις για τη ροή, το μέσο ροής και το ρευστό.

i) ΡΟΗ

Μονιμότητα

Θεωρήσαμε μόνιμη ροή (*steady flow*) του αίματος, δηλαδή μια ροή με σταθερά αμετάβλητα χαρακτηριστικά, ώστε να έχουμε τη δυνατότητα να μελετήσουμε μια αρκετά απλούστερη περίπτωση ροής από τη φυσιολογική του αίματος. [30,32,38]

Σε αυτή την περίπτωση το πεδίο ροής καθορίζεται από ένα βαθμό ελευθερίας, τον αριθμό *Reynolds* (*Re*), ενώ στην περίπτωση της μη μόνιμης ροής (*unsteady flow*) καθορίζεται από δύο βαθμούς ελευθερίας. Σε αυτή την εργασία θα ασχοληθούμε μόνο με το μόνιμο πεδίο ροής και όχι με την πιο πολύπλοκη περίπτωση του μη μόνιμου.

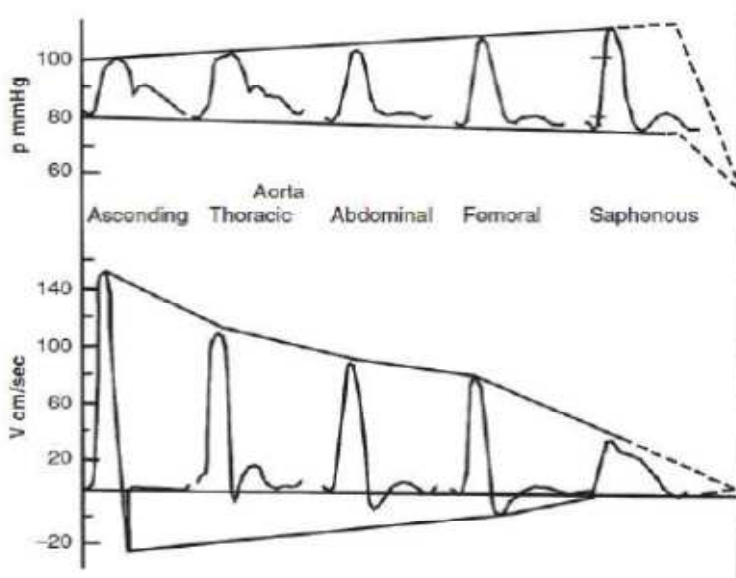
Με την περίπτωση του μη μόνιμου πεδίου ροής του αίματος υπάρχουν περισσότερες εργασίες όπως οι δύο εργασίες του J.R.Womersley το 1955 [39,40].

Με τη θεώρηση μόνιμης ροής του αίματος μας δίνεται η δυνατότητα να πάρουμε ορισμένα αντιπροσωπευτικά μεγέθη για τη ροή του αίματος. Παραδείγματα μελετών πάνω στη μόνιμη ροή (*steady flow*) βρήκαμε αρκετά για συμμετρικά και μη συμμετρικά μοντέλα όπως οι [4,30,32,38,41,77].

Στο παρακάτω σχήμα, Σχ.3.1, παρατηρούμε ότι η μεταβολή της παροχής του αίματος καθώς απομακρυνόμαστε από την καρδιά μειώνεται και οριακά σε μικρά αγγεία πολύ μακριά από αυτή είναι σχεδόν σταθερή. Σταθερή παροχή σημαίνει μόνιμο πεδίο ροής. Άρα η θεώρηση της μόνιμης ροής δεν είναι αβάσιμη.

Μια παρατήρηση που μπορούμε να κάνουμε είναι ότι τα φαινόμενα μη μονιμότητας της ροής σε περιπτώσεις φυσιολογικών ροών έχουν μικρή επίδραση σε σχέση με την αδράνεια της ροής του αίματος. Σαν αποτέλεσμα αυτού, μπορούμε να παραλείψουμε τους μη μόνιμους όρους των εξισώσεων ροής και να μελετήσουμε μόνιμα πεδία ροής.

Η ροή θα μελετηθεί μόνο για την περίπτωση του μόνιμου πεδίου ροής.



Σχ. 3.1: Η κυματομορφή της στατικής πίεσης p σε αντιδιαστολή με αυτή της ταχύτητας του αίματος V σε αγγεία, καθώς απομακρυνόμαστε από την καρδιά.

Δομή

Η ροή μπορεί να χαρακτηριστεί στρωτή ή τυρβώδης. Η μετάβασή της σε τυρβώδη μπορεί να προκληθεί από κάποιες διαταραχές στη γεωμετρία του αγωγού υπό υψηλούς αριθμούς Re . Στη τυρβώδη κατάσταση οι δομές είναι αρκετά πολύπλοκες και χαοτικές, οπότε απαιτούνται άλλες μέθοδοι για τη μελέτη τους. Επιπλέον η τύρβη προκαλεί αύξηση των τάσεων στο αγγειακό τοίχωμα. Πρέπει λοιπόν να γνωρίζουμε τους οριακούς αριθμούς Re πάνω από τους οποίους εμφανίζονται τυρβώδεις δομές σε αγωγούς με ανεύρυσμα.

Στη βιβλιογραφία υπάρχουν πλήθος στοιχεία για αυτό το θέμα, αλλά μόνο για το νευτώνειο ρευστό, ενώ στη περίπτωση των μη νευτώνειων ρευστών δεν βρέθηκαν στοιχεία. Για παράδειγμα η εργασία των Budwig, Elger, Hooper και Slipry, *Steady flow in abdominal aortic aneurysm models* [41] μελετάει την περίπτωση του μόνιμου πεδίου, αλλά για τυρβώδη ροή, όπως και αυτή των Peattie R.A., Schrader T., Bluth E.I., Comstock C.E., *Development of turbulence in steady flow through models of abdominal aortic aneurysms*. [41,42,43,44]

Η μελέτη σε αυτές τις εργασίες γίνεται για $Re \geq 2000$ όπου και παρουσιάζεται τύρβη. Διαβάζουμε ότι δεν εμφανίζονται τυρβώδεις ροές τουλάχιστον για $Re < 800$. Εμείς λοιπόν, μελετήσαμε ένα εύρος αριθμών Re $25 \leq Re \leq 600$ έχοντας εξασφαλίσει στρωτή ροή.

Θερμότητα

Η θερμοκρασία του οργανισμού διατηρείται σταθερή από την κυκλοφορία του αίματος, το οποίο συνεπάγεται μεταφορά θερμότητας κατά τη ροή του αίματος στα αγγεία. Σε αγγεία, όπως οι αρτηρίες και τα αρτηρίδια, που βρίσκονται σε αρκετή απόσταση από το δέρμα, η ισόθερμη ροή μπορεί να θεωρηθεί λογική συνεπαγωγή.

Η επίδραση της θερμότητας είναι σημαντική για την κατανομή των θερμοκρασιών στο τοίχωμα του αγγείου, αφού η διογκωμένη περιοχή παρουσιάζει αυξημένη θερμοκρασία σε σχέση με το ρέον αίμα, λόγω των αυξημένων μηχανικών φορτίων.

Στην εργασία μας δεν θα αναφερθούμε σε αυτό το θέμα, αλλά θα θεωρήσουμε *ισόθερμη ροή του αίματος*.

ii) ΜΕΣΟ ΡΟΗΣ

γεωμετρία

Ήδη έχουμε αναφέρει ότι τα μοντέλα για τη μελέτη ροής μπορεί να είναι συμμετρικά 2D, αλλά και ρεαλιστικά 3D. Για την υπολογιστική μας μελέτη θεωρήσαμε διδιάστατο πεδίο ροής καθώς η μελέτη γίνεται απλούστερη. Πρώτον, το πλέγμα μας αποτελείται από λιγότερους υπολογιστικούς κόμβους σε σχέση με τη 3D περιγραφή και οι εξισώσεις προς επίλυση είναι κατά μία λιγότερες μειώνοντας με αυτό τον τρόπο τον υπολογιστικό χρόνο. Όμως, η χρήση των μη νευτώνειων μοντέλων, για τη συμπεριφορά των οποίων δεν γνωρίζουμε αρκετά, προκαλεί ερωτήματα για δευτερεύουσες ροές και ασυμμετρίες οι οποίες εμφανίζονται μόνο σε 3D περιγραφή.

Η εργασία [45] δείχνει ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε διδιάστατα πεδία ροής και για την περίπτωση των μη νευτώνειων ρευστών για τα οποία, όπως είπαμε, δεν έχουμε και πολλές πληροφορίες. Έτσι, έχουμε τη δυνατότητα να αυξήσουμε την πυκνότητα του υπολογιστικού πλέγματος σε περιοχές που θεωρούμε σημαντικές για τη μελέτη ορισμένων μεγεθών.

Θεωρούμε αξονική συμμετρία στον αγωγό η οποία μας οδηγεί στην μελέτη του μισού μόνο αγωγού με τον ίδιο αριθμό υπολογιστικών κόμβων. Φυσικά τα αγγειακά τοιχώματα δεν είναι τέλειοι κύλινδροι και τα αναπτυσσόμενα ανευρύσματα δεν είναι αξονικά συμμετρικά. Όμως, αυτή η προτυποποίηση μας δίνει τη δυνατότητα μιας καλής αναπαράστασης των ροικών φαινομένων που λαμβάνουν χώρα σε ένα αγγείο.

Οι μελέτες που χρησιμοποιούν 3D περιγραφή έχουν στόχο την προσπάθεια ανάπτυξης μεθόδων μοντελοποίησης της συγκεκριμένης γεωμετρίας κάποιας αγγειακής ανωμαλίας που εμφανίζεται σε κάποιον ασθενή. Η δική μας εργασία δεν έχει κάποιο τέτοιο σκοπό, απλά μελετάει από καθαρά ρευστομηχανική πλευρά ενδιαφέρουσες περιοχές, όπως είναι οι διογκωμένες περιοχές την επίδραση του ιξώδους και άλλων ροικών φαινομένων.

Για το λόγο αυτό θεωρούμε τους αγωγούς *αξονικά συμμετρικούς*.

παραμόρφωση

Για να υπάρχει η δυνατότητα αγγειοσυστολής και αγγειοδιαστολής, τα κύτταρα των αγγείων έχουν ελαστικές ιδιότητες που τους επιτρέπουν να παραμορφώνονται κατά την αζονική και την ακτινική κατεύθυνση.

Άρα, η θεώρηση ενός τοιχώματος ακίνητου, άκαμπτου και απαραμόρφωτου δεν αντιστοιχεί στην πραγματικότητα.

Στη δική μας μελέτη, καθώς θεωρούμε ότι δεν έχουν αποσαφηνιστεί τελείως οι σωστές μέθοδοι επίλυσης του συνδυασμένου συστήματος εξισώσεων ρευστού και παραμορφωμένου τοιχώματος, αλλά και επειδή θέλουμε να παρακολουθήσουμε καθαρά την επίδραση των μη νευτώνειων χαρακτηριστικών του αίματος στη ροή του μέσα στα αγγεία, θεωρούμε τοίχωμα *απαραμόρφωτο, ακίνητο και άκαμπτο*.

διαπερατότητα

Τα αγγειακά τοιχώματα είναι διαπερατά για να γίνεται η ανταλλαγή οξυγόνου και διοξειδίου του άνθρακα, καθώς και η πρόσδοση θρεπτικών συστατικών. Μελέτες συσχέτισης των ρευστομηχανικών μεγεθών με τη διαπερατότητα του τοιχώματος έχουν γίνει, όπως η [46].

Η κλίμακα μελέτης είναι κατά πολύ μεγαλύτερη από την μοριακή, καθώς ασχολούμαστε με κύτταρα διαλυμένα στο πλάσμα, έτσι η έννοια της διαπερατότητας του τοιχώματος δεν τίθεται υπό συζήτηση.

Το αγγειακό τοίχωμα θεωρείται *αδιαπέρατο*.

iii) ΡΕΥΣΤΟ

Τα ρευστά μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σύμφωνα με τα αποτελέσματα που έχει η δράση δύο κατηγοριών δυνάμεων πάνω σε αυτά: οι δυνάμεις που οφείλονται στην εξωτερικά ασκούμενη πίεση στο ρευστό (*δυνάμεις πίεσης-ορθές τάσεις*) και αυτές που ασκούνται σε ένα στρώμα του ρευστού λόγω επαφής με άλλα επίπεδα του ρευστού (*δυνάμεις συνεκτικότητας-διατμητικές δυνάμεις*). [47]

Η ιδιότητα των ρευστών να μεταβάλλουν την πυκνότητά τους με μεταβολή της ορθής εντατικής τους κατάστασης (πίεσης) είτε εν ηρεμία είτε εν κινήσει ονομάζεται *συμπιεστότητα*. Όταν κάποια ρευστά έχουν αυτή την ιδιότητα λέγονται *συμπιεστά* και αν όχι *ασυμπιέστα*.

Σε γενικές γραμμές τα υγρά θεωρούνται ασυμπιέστα, ενώ τα αέρια συμπιεστά.

Μία επιπλέον φυσική ιδιότητα των ρευστών είναι η *συνεκτικότητα* ή *ιξώδες* όπου τα ρευστά ανθίστανται στη διάτμησή τους, δηλαδή στην κίνηση ενός στοιχείου ως προς το διπλανό του. Με βάση λοιπόν, τη συνεκτικότητα τα ρευστά χωρίζονται και σε μια ακόμα κατηγορία, τα *συνεκτικά* και τα *μη συνεκτικά* ρευστά.

Αν θεωρήσουμε δύο γειτονικά στοιχεία ρευστού που βρίσκονται σε σχετική κίνηση, τότε αναπτύσσεται μεταξύ τους εφαπτομενική δύναμη, η οποία ονομάζεται διατμητική δύναμη $d\vec{T}$, η οποία ανά μονάδα επιφάνειας λέγεται *διατμητική τάση*:

$$d\vec{T} = \tau dE \vec{\tau}_0$$

Όπου $\vec{\tau}_0$ το μοναδιαίο διάνυσμα κατά κατεύθυνση παράλληλη στο στοιχείο επιφάνειας dE .

Ο Newton διατύπωσε ότι για ορισμένα ρευστά, όπως νερό, αέρας κλπ., θα πρέπει να ισχύει ο υλικός νόμος για τη διατμητική δύναμη:

$$d\vec{T} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} dE$$

Δηλαδή ότι είναι ανάλογη της κλίσης της ταχύτητας κατά την κάθετη στο στοιχείο κατεύθυνση $\frac{\partial u}{\partial y}$ και ανάλογη του εμβαδού της επιφάνειας του στοιχείου

dE . Ο συντελεστής αναλογίας μ λέγεται *συντελεστής δυναμικής συνεκτικότητας* ή *ιξώδες* του ρευστού και είναι ο λόγος των διατμητικών τάσεων προς το μέτρο του ρυθμού παραμόρφωσης που τους επιβάλλεται. [47] Ο ορισμός της εφαπτομενικής διατμητικής τάσης τ είναι:

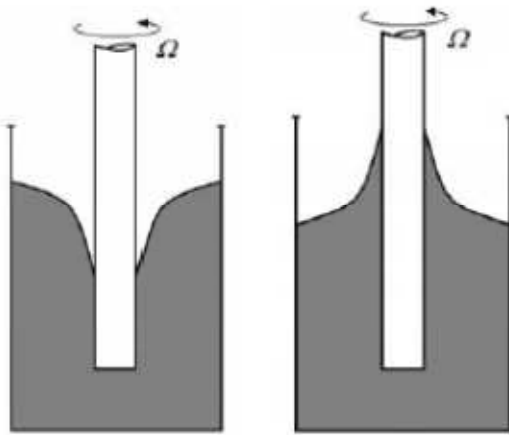
$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

Ο παραπάνω υλικός νόμος είναι πειραματικός-εμπειρικός νόμος συμπεριφοράς ορισμένης κατηγορίας ρευστών που λέγονται **νευτώνεια**. Τα νευτώνεια είναι μια μεγάλη κατηγορία ρευστών, όπου συμπεριλαμβάνονται το νερό και ο αέρας. Είναι δηλαδή συνεκτικά ρευστά όπου οι παραμορφώσεις έχουν γραμμική σχέση με τις δυνάμεις συνεκτικότητας. Αν η σχέση αυτή δεν είναι γραμμική τα ρευστά λέγονται **μη νευτώνεια**.

Θα αναφέρουμε ένα κλασικό παράδειγμα με το οποίο φαίνονται οι διαφορές στη συμπεριφορά μεταξύ του νευτώνειου και κάποιων μη νευτώνειων ρευστών.

Αναρρίχιση σε ράβδο (Weissenberg effect)

Σε κατακόρυφο δοχείο γεμάτο με υγρό τοποθετείται κυλινδρική ράβδος αξονοσυμμετρικά και περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα Ω . Αν το υγρό είναι νευτώνειο (πχ. νερό), το υγρό θα εισχωρήσει πιο βαθιά στο δοχείο, αν όμως το υγρό έχει ορισμένα μη νευτώνεια χαρακτηριστικά (πχ. υγρό σαπουνι) τότε το υγρό θα αναρριχηθεί πάνω στη ράβδο (Σχ. 3.2). Επίσης, με την αύξηση της Ω στο μη νευτώνειο ρευστό, θα αρχίσει μια ταλάντωση της ελεύθερης επιφάνειας



Σχ. 3.2: νευτώνεια (αριστερή εικόνα) και μη νευτώνεια (δεξιά εικόνα) συμπεριφορά κατά το πείραμα αναρρίχισης σε ράβδο.

Τα μη νευτώνεια είναι κατηγορία των συνεκτικών ρευστών για τα οποία ισχύει ότι το ιξώδες τους είναι μεταβλητό και εξαρτάται από τον ρυθμό παραμόρφωσής του. Ο *ρυθμός παραμόρφωσης (strain rate)* συμπίπτει με τον *ρυθμό διάτμησης (shear rate)* για πλήρως διαμορφωμένη, διδιάστατη ροή ευθύγραμμου αγωγού. [48]

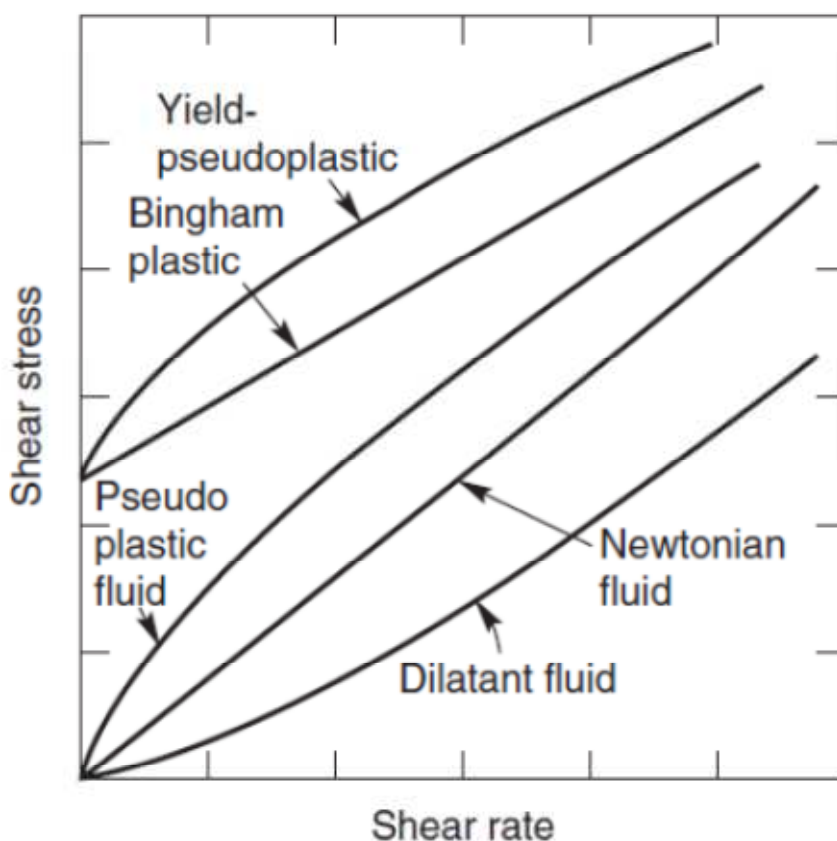
Μη νευτώνειο είναι το ρευστό του οποίου η καμπύλη ροής (διατμητική τάση-ρυθμός διάτμησης) είναι μη γραμμική.

Τα ρευστά αυτά μπορούν να χωριστούν σε τρεις γενικές κατηγορίες:

1. Αυτά των οποίων ο ρυθμός διάτμησης σε κάθε σημείο καθορίζεται μόνο από την τιμή της διατμητικής τάσης του σημείου εκείνη τη στιγμή που μελετούμε. Είναι γνωστά ως «*συμπεριφοράς ανεξάρτητης χρόνου*» ή «*γενικευμένα νευτώνεια*».
2. Τα περισσότερο πολύπλοκα των οποίων η σχέση μεταξύ της διατμητικής τάσης και του ρυθμού διάτμησης εξαρτάται επιπλέον από την ιστορία της έντασής τους, τα ρευστά «*συμπεριφοράς χρονικά εξαρτημένης*».
3. Τέλος, ουσίες που παρουσιάζουν χαρακτηριστικά ρευστών συνοδευόμενα από ελαστικές ιδιότητες, γνωστά ως *ιξωδοελαστικά*. [48]

- **Συμπεριφοράς ανεξάρτητης χρόνου (time-independent)**

Όπως αναφέραμε το ιξώδες τους καθορίζεται αποκλειστικά από το ρυθμό παραμόρφωσης που τους επιβάλλεται τη συγκεκριμένη στιγμή που μελετούμε. Κατηγοριοποιούνται ανάλογα με την καμπύλη ρυθμού παραμόρφωσης-διατμητικής τάσης, Σχ. 3.3.



Σχ. 3.3: Καμπύλες ρυθμού διάτμησης (shear rate) και διατμητικής τάσης (shear stress) των ρευστών συμπεριφοράς ανεξάρτητης χρόνου [48]

Οι κατηγορίες των *time-independent* ρευστών:

- Shear-thinning-pseudoplastic (ψευδοπλαστικά)

Είναι η πιο συχνά απαντούμενη μη νευτώνεια συμπεριφορά κατά την οποία όταν το ιξώδες μειώνεται ο ρυθμός παραμόρφωσης αυξάνεται. Για ρυθμούς παραμόρφωσης που προσεγγίζουν το μηδέν η συνεκτικότητα γίνεται σχεδόν άπειρη, οπότε είναι σαν να εμφανίζουν την πλαστική συμπεριφορά των στερεών. Παραδείγματα τέτοιων ρευστών είναι το γιαούρτι, η μαγιονέζα, η κέτσαπ, η σοκολάτα, οι υψηλής συμπύκνωσης χυμοί φρούτων. [48]

- Viscoplastic (ιξωδοπλαστικά)

Η συμπεριφορά αυτών των ρευστών χαρακτηρίζεται από την ύπαρξη μιας αρχικής διατμητικής τάσης τ_0 την οποία πρέπει να υπερβεί το ρευστό για να αρχίσει να ρέει. Αφού ξεπεραστεί η τ_0 τα ρευστά συμπεριφέρονται σαν νευτώνεια ή σαν ψευδοπλαστικά.

Το ρευστό με γραμμική καμπύλη ροής για $|\tau_{yx}| > |\tau_0|$ ονομάζεται *Bingham Plastic*, ενώ αυτά που συμπεριφέρονται σαν ψευδοπλαστικά ονομάζονται *yield-pseudoplastic*. [48]

Η ιξωδοπλαστικότητα δείχνει την αντιστοίχιση με το όριο των στερεών, τα οποία πάνω από μία τιμή έντασης περνούν από την ελαστική συμπεριφορά στην πλαστική. [50]

Κάποια παραδείγματα τέτοιων ρευστών είναι η οδοντόπαστα, κάποια γαλακτώματα και τα υψηλής συγκέντρωσης διαλύματα σωματιδίων.

- Shear-thickening-dilatant (διασταλά)

Στα ρευστά αυτά με την αύξηση του ρυθμού παραμόρφωσης αυξάνεται και το ιξώδες τους, δηλαδή έχουν ακριβώς την αντίθετη συμπεριφορά από τα ψευδοπλαστικά.

Παραδείγματα τέτοιων ρευστών είναι τα συμπυκνωμένα υδατικά διαλύματα αλευριού ή διοξειδίου του τιτανίου. [48]

- **Συμπεριφοράς χρονικά εξαρτημένης (time-dependent)**

Στην κατηγορία αυτή ανήκουν ρευστά που το ιξώδες τους εξαρτάται όχι μόνο από τον ρυθμό παραμόρφωσής τους εκείνη τη στιγμή αλλά και από προηγούμενες χρονικές στιγμές. Τα ρευστά αυτά μπορούν να χωριστούν σε δύο ακόμα υποκατηγορίες: *thixotropic* και *rheopectic*.

- Thixotropic

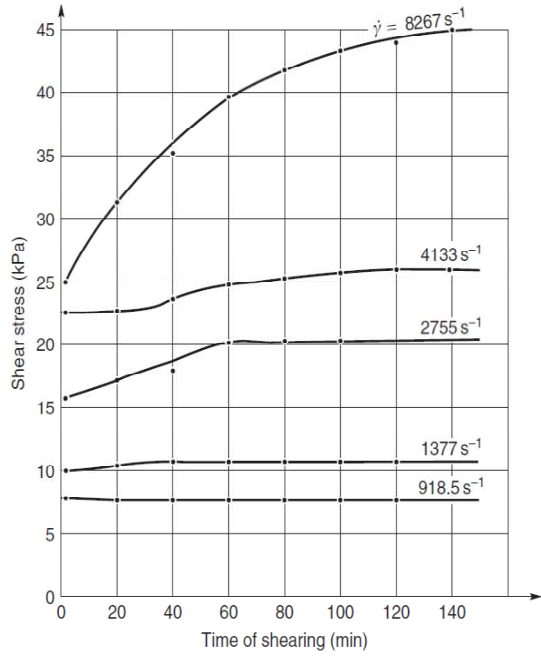
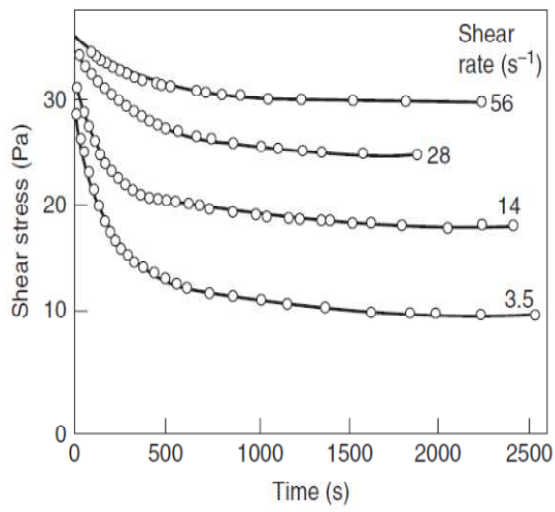
Το ιξώδες που εμφανίζουν κάθε στιγμή μειώνεται με τον χρόνο παραμόρφωσης. Αν η παραμόρφωση διακοπεί, τότε παρουσιάζεται μία χρονική υστέρηση ώστε να επανέλθουν οι διατμητικές τάσεις στο μηδέν. Παρακάτω φαίνεται η καμπύλη υστέρησής τους. (Σχ. 3.4 και 3.5)

Παραδείγματα ρευστών είναι το τσιμέντο και διάφορα χωμάτινα διαλύματα. [48]

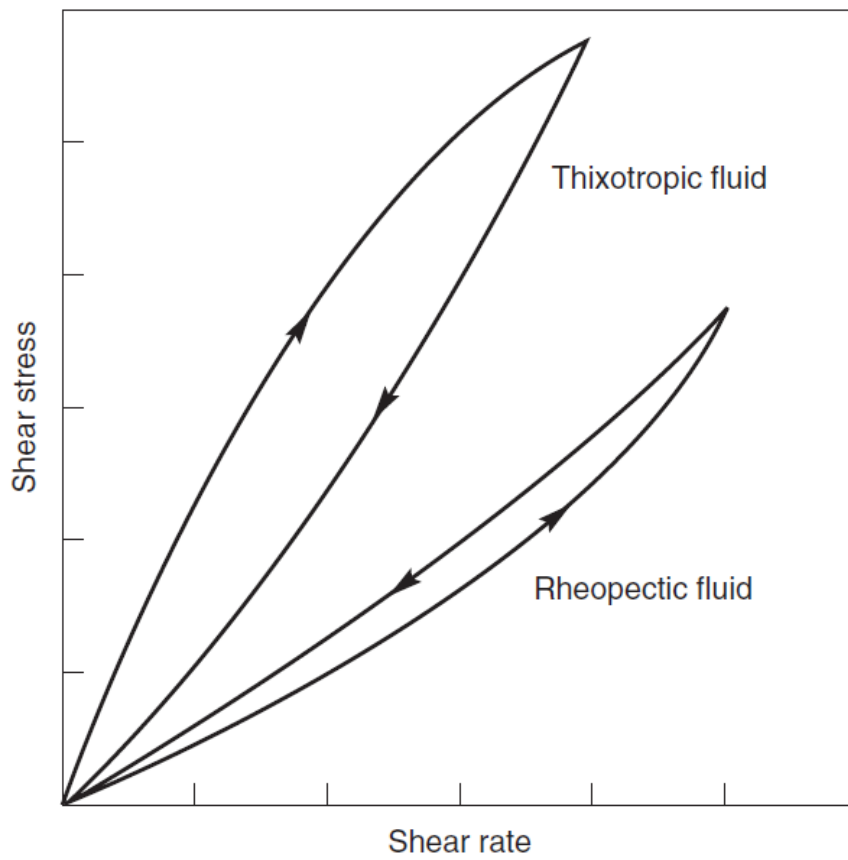
- Rheopectic

Εδώ συμβαίνει το αντίθετο από πριν, δηλαδή το ιξώδες τους αυξάνεται ανάλογα με τον χρόνο παραμόρφωσης, όπως διακρίνουμε και στην καμπύλη υστέρησής τους. (Σχ. 3.4, 3.5)

Τα ρευστά που παρουσιάζουν αυτή τη συμπεριφορά είναι σπάνια στη φύση αλλά ένα παράδειγμα είναι το υδατικό διάλυμα γύψου. [48]



Σχ. 3.4: Η μείωση του ιξώδους στα thixotropic ρευστά και η αύξησή του στα rheopectic.



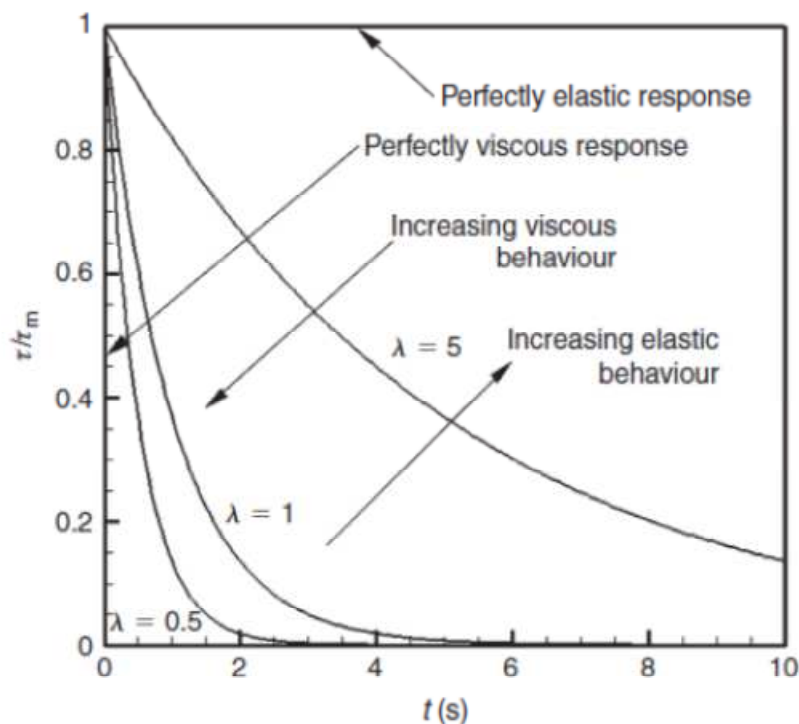
Σχ. 3.5: Η καμπύλη υστέρησης στα thixotropic και στα rheopectic ρευστά

- **Ιξωδοελαστικά ρευστά (viscoelastic)**

Είναι ουσίες οι οποίες παρουσιάζουν και ελαστικές και συνεκτικές ιδιότητες μαζί με τα υπόλοιπα χαρακτηριστικά των ρευστών. Σε αντίθεση με τα άλλα ρευστά, αποθηκεύουν την ενέργεια που τους προσφέρεται από την παραμόρφωση και λόγω της ελαστικής τους συμπεριφοράς μπορούν να ανακτήσουν ένα ποσοστό της. Τα άλλα ρευστά απελευθερώνουν την ενέργεια ως θερμότητα κατά τη ροή τους. Στα ρευστά αυτά είναι πιθανό να εμφανιστούν ορθές τάσεις εκτός από αυτές που παράγονται από τη στατική πίεση. [48]

Υπάρχει ένας συντελεστής που ονομάζεται *συντελεστής χαλάρωσης* λ , ο οποίος καθορίζει την ελαστικότητα του ρευστού, δηλαδή με την αύξησή του αυξάνει η ελαστική συμπεριφορά του ρευστού, ενώ με τη μείωσή του η συμπεριφορά του ρευστού τείνει να είναι μόνο συνεκτική, σχ. 3.6.

Τέτοια ρευστά είναι τα τήγματα και τα υδατικά διαλύματα πολυμερών καθώς και το σαπουνόνερο. [48]



Σχ. 3.6: διαφορετικές συμπεριφορές στα ιξωδοπλαστικά ρευστά παραμετρικά του, για συντελεστή χαλάρωσης λ τις τιμές της διατμητικής τάσης που εμφανίζονται κατά τη διάρκεια του χρόνου προς τη μέγιστη που του ασκήθηκε. [48]

Πολλές φορές στα ρευστά απαντώνται ταυτόχρονα πολλά από τα μη νευτώνεια χαρακτηριστικά κάνοντας την επίδραση της κάθε ιδιότητας δυσδιάκριτη. Συνήθως, όμως, υπάρχει μία κυρίαρχη μη νευτώνεια ιδιότητα που εκφράζεται στη συμπεριφορά του ρευστού. [48]

Στα προηγούμενα παραδείγματα ρευστών δεν αναφέραμε πουθενά το αίμα και αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι τα μη νευτώνεια χαρακτηριστικά που αποδίδονται στο αίμα, σχετίζονται με πολλές από τις κατηγορίες των μη νευτώνειων ρευστών που αναφέραμε πιο πάνω.

Τέσσερις είναι οι μη νευτώνειες ιδιότητες που αποδίδονται στο αίμα. Όλες συσχετίζονται με τη δυνατότητα των ερυθρών αιμοσφαιρίων να παράγουν συσσωματώματα ή αλυσίδες (rouleaux forming) κυττάρων.

Ψευδοπλαστικότητα

Κατά τη ροή των ερυθρών αιμοσφαιρίων μέσα στα αγγεία, ο ρυθμός παραμόρφωσής τους εξαρτάται από τις συνθήκες ροής, δηλαδή από τις επικρατούσες ταχύτητες αίματος. Όταν το αίμα βρίσκεται σε σημεία χαμηλών ρυθμών παραμόρφωσης θα εμφανίζεται μεγάλη δυσκολία να αποκολληθούν τα ερυθρά αιμοσφαίρια και συνεπώς υψηλότερος λόγος διατμητικών τάσεων προς το ρυθμό παραμόρφωσης που τις προκαλεί. Η ιδιότητα αυτή είναι πιο εμφανής στην περιοχή γύρω από τον άξονα συμμετρίας του αγγείου, όπου λόγω των μικρών κλίσεων της ταχύτητας ο ρυθμός παραμόρφωσης παραμένει σε χαμηλές τιμές και το ιξώδες των μη νευτώνειων ρευστών θα λαμβάνει μεγάλες τιμές. [51,52]

Ιξωδοπλαστικότητα

Η δυνατότητα των ερυθρών αιμοσφαιρίων να παράγουν συσσωματώματα ή αλυσίδες κυττάρων αυξάνεται κατακόρυφα καθώς μειώνεται ο ρυθμός με τον οποίο παραμορφώνονται. Από θεωρητική πλευρά λοιπόν, θεωρούμε ότι υπάρχει κάποια αρχική τάση, μικρή μεν αλλά υπαρκτή, που απαιτείται να ξεπεραστεί ώστε το αίμα να αρχίσει να ρέει. [51,52]

Ιξωδοελαστικότητα

Οι ελαστικές ιδιότητες του αίματος είναι ιδιαίτερα σημαντικές και οι παραγόμενες δυνάμεις συγκρίσιμες με τις οφειλόμενες στα συνεκτικά φαινόμενα. [53,54] Αυτή η συμπεριφορά του αίματος εμφανίζεται στη μη μόνιμη φυσιολογική ροή του αίματος και οφείλεται στη μεγάλη ικανότητα ελαστικής παραμόρφωσης των ερυθρών αιμοσφαιρίων, με την οποία αποθηκεύουν ποσά ενέργειας.

Έχουμε ήδη αναφέρει στο προηγούμενο κεφάλαιο το φαινόμενο Fahraus-Lindqvist, όπου το ιξώδες του αίματος μειώνεται όταν ρέει σε αγγεία μικρότερης διαμέτρου από 1.5mm, αφού τα ερυθρά αιμοσφαίρια τείνουν να λάβουν θέσεις γύρω από τον άξονα συμμετρίας του αγγείου, ενώ το πλάσμα καλύπτει τα στρώματα ρευστού κοντά στο τοίχωμα. [1]

Πολλοί μελετητές, για τον λόγο αυτό, δημιούργησαν μοντέλα ρευστού δύο φάσεων για να προσομοιώσουν τη συμπεριφορά του αίματος και για μεγαλύτερα αγγεία.

Στη μελέτη αυτή θα επιλέξουμε *μονοφασικά* μοντέλα *ρευστών μη νευτώνειας συμπεριφοράς ανεξάρτητης χρόνου*, αφού αυτή φαίνεται να είναι η κυρίαρχη μη νευτώνεια ιδιότητα του αίματος στο μεγαλύτερο μέρος της ροής του.

Παρακάτω αναφέρουμε τα μη νευτώνεια μοντέλα συμπεριφοράς ανεξάρτητης χρόνου, οι παράμετροι των οποίων προσαρμόζονται πάνω σε *in vitro* δεδομένα για το ιξώδες του αίματος.

- Εκθετικού νόμου
- Bingham
- Herschel- Bulkley
- Casson
- Carreau and Carreau- Yasuda
- Cross
- Ellis
- Walburn-Schneck (βασισμένο στο μοντέλο Εκθετικού Νόμου)
- Quemada

Η καταλληλότητα χρήσης τους, καθώς και τιμές των παραμέτρων των πιο πάνω μοντέλων φαίνονται στη βιβλιογραφική επισκόπηση των F.Yilmaz, M.Y.Gundogdu, *A critical review on blood flow in large arteries;relevance to blood rheology, viscosity models, and physiologic conditions* . [33]

Επιπλέον, επειδή το ιξώδες του αίματος είναι και συνάρτηση του αιματοκρίτη, οι παράμετροι όλων των μοντέλων μας αφορούν τιμές αιματοκρίτη μεταξύ των τιμών 40% και 45%.

Οι διατμητικές τάσεις τα που παράγονται στα υιοθετούμενα μοντέλα, συναρτήσε του ρυθμού παραμόρφωσης γ είναι:

Walburn-Schneck: $\mu = C_1 \exp \left\{ C_2 H + \left(C_4 \frac{TPMA}{H^2} \right) \right\} (\dot{\gamma})^{-C_3 H}$ shear thinning

H:αιματοκρίτης

TPMA:άθροισμα συγκεντρώσεων κάποιων συστατικών του αίματος

C_1 C_2 C_3 C_4 :σταθερές εξαρτώμενες από H και TPMA

Το μοντέλο αυτό αποτελεί εξειδίκευση του μοντέλου εκθετικού νόμου $\tau = k\dot{\gamma}^n$, Συγκεκριμένα για το αίμα θα το χρησιμοποιούμε στη γενικότερη έκφρασή του με υπολογισμένα τα k, γ για αιματοκρίτη 45%. [33,48]

Herschel-Bulkley:

Είναι ένα από τα ιξωδοπλαστικά μοντέλα που θα χρησιμοποιήσουμε και συνδυάζει την ύπαρξη της αρχικής τάσης με τον εκθετικό νόμο. [33,48]

$$\tau > \tau_0 \Rightarrow \tau = \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + k\dot{\gamma}^n$$

$$\tau < \tau_0 \Rightarrow \dot{\gamma} = 0$$

Casson:

Ένα ακόμα ευρέως χρησιμοποιούμενο ιξωδοπλαστικό μοντέλο.

$$\tau > \tau_0 \Rightarrow \tau = \left(\sqrt{\frac{\tau_0}{\gamma}} + \sqrt{\mu_\infty} \right)^2 \gamma$$

$$\tau < \tau_0 \Rightarrow \gamma = 0$$

μ_∞ : ασύμπτωτη τιμή συνεκτικότητας σε μεγάλους ρυθμούς παραμόρφωσης [33,48]

Quemada:

Το μοντέλο αυτό αναπτύχθηκε από τον Quemada με λεπτομέρειες αναφερόμενες στη , και στη συνέχεια χρησιμοποιούμε τις τιμές παραμέτρων για αιματοκρίτη 45%. [33,55]

$$\tau = \mu_F \left(1 - \frac{1}{2} \frac{k_0 + k_\infty \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma_c}}}{1 + \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma_c}}} \varphi \right)^{-2}$$

k_0, k_∞ : συντελεστές προσαρμογής σε πειραματικά δεδομένα για το αίμα

γ_c : κρίσιμη τιμή του ρυθμού παραμόρφωσης

φ : αιματοκρίτης

Επιλέξαμε τη μελέτη ροών στη περιοχή $25 \leq Re \leq 600$ σε διόγκωση $2.46d$.

- Διάμετρος κοιλιακής αορτής: $d = 0.013m$
- Μέση ταχύτητα του αίματος σε αυτή: $U = 0.1m/s$
- Πυκνότητα αίματος: $\rho = 1050 kg/m^3$
- Ιξώδες αίματος (νευτώνεια προσέγγιση) : $\mu = 0.0035 Pa \cdot s$

Και $Re = \frac{\rho U_0 d}{\mu}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΦΡΑΣΗ

i) Γενική τοποθέτηση του προβλήματος

Θα υποθέσουμε ότι η μακροσκοπική συμπεριφορά του ρευστού είναι συνεχής και ότι φυσικές ποσότητες όπως η μάζα, η ορμή κτλ που είναι συνυφασμένες με την ύλη που περιέχεται μέσα σε ένα μικρό ή μεγαλύτερο όγκο, θα θεωρούνται ότι είναι συνεχώς κατανεμημένες στον όγκο αυτό, αντίθετα με το τι συμβαίνει στην πραγματικότητα, που είναι συγκεντρωμένες σε ένα μικρό τμήμα του. [47]

Για να παρατηρήσουμε την κίνηση του ρευστού χρησιμοποιούμε την έννοια του σωματιδίου, δηλαδή του τμήματος του συνεχούς μέσου που περικλείεται κάποια χρονική στιγμή σε μια απειροστή περιοχή ενός σημείου του χώρου. Το σωματίδιο χαρακτηρίζεται από τη θέση του κάποια χρονική στιγμή. Συνεπώς το συνεχές μέσο θεωρείται ότι αποτελείται από το σύνολο των σωματιδίων του.

Για την περιγραφή της κίνησης των σωματιδίων χρειαζόμαστε ένα σύστημα αναφοράς. Θεωρούμε το χώρο κίνησης των ρευστοστοιχείων ένα κλειστό χωρίο Ω του ευκλείδειου χώρου \mathbb{R}^3 . Η περιγραφή του πεδίου ροής με την οποία θα περιγράψουμε την κίνηση των σωματιδίων λέγεται *υλική περιγραφή ή περιγραφή κατά Lagrange*, όπου η κίνηση των σωματιδίων περιγράφεται από τη θέση του παρατηρητή που κινείται μαζί με αυτά. [47]

Θεωρώντας *ισόθερμη ροή*, δηλαδή ροή χωρίς μεταφορά θερμότητας και την *επίδραση του πεδίου βαρύτητας αμελητέα*, προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις κίνησης σε διανυσματική μορφή.

$$\text{Αρχή διατήρησης της μάζας:} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u}) = 0 \quad (4.1)$$

$$\text{Αρχή διατήρησης της ορμής:} \quad \rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \text{div} \vec{\sigma} \quad (4.2)$$

Όπου ρ : πυκνότητα

\vec{u} : διανυσματικό πεδίο ταχυτήτων

$\vec{\sigma}$: τανυστής τάσεων

$\frac{D[]}{Dt}$: υλική παράγωγος

$\frac{\partial[]}{\partial t}$: μερική παράγωγος

$div()$: απόκλιση διανυσματικού πεδίου

Η εξίσωση διατήρησης της μάζας (4.1) δείχνει ότι η μάζα σε κάθε τμήμα του ρευστού παραμένει σταθερή, δηλαδή δεν παράγεται ούτε καταναλώνεται, ενώ η εξίσωση διατήρησης της ορμής (4.2) είναι η ισορροπία των δυνάμεων σ' ένα ρευστοστοιχείο, που εκφράζει ο 2^{ος} νόμος του Newton. [49,56]

Θεωρώντας το ρευστό *ισότροπο* προκύπτει συμμετρικός τανυστής τάσεων $\vec{\sigma}$ και αν θεωρήσουμε ότι συμπεριφέρεται ως υλικό Stokes τότε ο τανυστής τάσεων ακολουθεί την παρακάτω έκφραση: [47,56]

$$\vec{\sigma} = -p\dot{I} + \vec{\tau} \quad (4.3)$$

Όπου:

p : θερμοδυναμική πίεση

$\vec{\tau}$: πίνακας διατμητικών τάσεων

\dot{I} : μοναδιαίος πίνακας

Και ισχύει: $\vec{\tau} = \vec{f}(\vec{D})$, δηλαδή είναι συμμετρικός και συνάρτηση του τανυστή παραμορφώσεων.

Όπου :

$$\vec{D} = \frac{1}{2}(\text{grad}^T \vec{u} + \text{grad} \vec{u}) \quad (4.4)$$

ii) Ειδικές περιπτώσεις υλικών εξισώσεων

Τα συνήθη ρευστά (νερό, λάδι, αέρας) αποτελούν ειδική περίπτωση των υλικών Stokes, είναι γραμμικά υλικά και λέγονται *νευτώνεια* ρευστά (*newtonian*), για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$$\vec{\sigma} = -p\dot{I} + \vec{\tau}$$
$$\vec{\tau} = 2\mu\vec{D} + \mu' \text{tr}\vec{D}\dot{I} \quad (4.5)$$

όπου $\text{tr}\vec{D} = \text{div}\vec{u}$, $a_0 = \mu' I_D$, $a_1 = 2\mu$ και $a_2 = 0$.

Όπου μ είναι ο δυναμικός συντελεστής συνεκτικότητας ή ιξώδες, μ' είναι το ιξώδες όγκου που εμφανίζεται μόνο στις συμπιεστές ροές και $\text{tr}\vec{D}$ συμβολίζει το ίχνος του τανυστή ρυθμού παραμόρφωσης \vec{D} . Όταν το ρευστό είναι σε ακινησία ($\vec{D} = 0$) είναι $\vec{\tau} = 0$ και $\vec{\sigma} = -p\dot{I}$.

Χαρακτηριστικό των νευτώνειων ρευστών είναι η γραμμική σχέση των $\vec{\sigma}$ και \vec{D} . [47]

Πολλές φορές είναι απαραίτητη η απλούστερη παραδοχή του *μη συνεκτικού* ρευστού, που αποτελεί ειδική περίπτωση της παραπάνω κατηγορίας με $\mu = \mu' = 0$ οπότε:

$$\vec{\sigma} = -p\vec{I} \quad (4.6)$$

$$\vec{\tau} = 0$$

Εδώ οι τάσεις που εφαρμόζονται προέρχονται μόνο από την στατική πίεση.

Τα ρευστά που δεν εμπίπτουν στην κατηγορία των νευτώνειων ρευστών λέγονται *μη νευτώνεια*.

Στα μη νευτώνεια ρευστά υπάρχει μη γραμμική σχέση μεταξύ της διαμηκτικής τάσης και του ρυθμού παραμόρφωσης \vec{D} . Μια ειδική κατηγορία μη νευτώνειων ρευστών είναι τα ρευστά *συμπεριφοράς ανεξάρτητης χρόνου*, όπου οι παραγόμενες τάσεις είναι συνάρτηση μόνο του ρυθμού παραμόρφωσης \vec{D} τη στιγμή που τα εξετάζουμε.

Η συνήθης υλική εξίσωση που ισχύει για αυτά τα ρευστά και για ισότροπα υλικά είναι:

$$\vec{\tau} = \alpha_0 \dot{\vec{I}} + \alpha_1 \vec{D} + \alpha_2 \vec{D}^2 \quad (4.7)$$

Όπου οι α_i είναι συναρτήσεις των βασικών αναλλοίωτων του πίνακα \vec{D} , μια παραδοχή που εξασφαλίζει την *αρχή της υλικής ανεξαρτησίας*, δηλαδή οι ιδιότητες του υλικού να είναι ανεξάρτητες της θέσης του παρατηρητή. [47] Αυτές για *σύστημα κυλινδρικών συντεταγμένων* ($\vec{e}_x, \vec{e}_r, \vec{e}_\varphi$) γράφονται:

$$I_D = tr \vec{D} = D_{xx} + D_{yy} + D_{zz}$$

$$II_D = \frac{1}{2} \left(I^2 D - tr \vec{D}^2 \right) = \begin{vmatrix} D_{xx} & D_{xy} \\ D_{yx} & D_{yy} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} D_{xx} & D_{xz} \\ D_{zx} & D_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} D_{yy} & D_{yz} \\ D_{zy} & D_{zz} \end{vmatrix}$$

$$III_D = \det \vec{D} = \begin{vmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xz} \\ D_{yx} & D_{yy} & D_{yz} \\ D_{zx} & D_{zy} & D_{zz} \end{vmatrix}$$

το μέτρο του είναι: $|\vec{D}| = \sqrt{\frac{1}{2}(II_D)}$

Τα μη νευτώνεια συμπεριφοράς ανεξάρτητης χρόνου χωρίζονται στις εξής υποκατηγορίες:

Στη γενική περίπτωση $\alpha_1 = \alpha_1(I_D, II_D, III_D)$, συνήθως όμως $\alpha_1 = \alpha_1(II_D)$. Σ' αυτή την περίπτωση και για ασυμπέστο ρευστό ισχύει:

$$\vec{\tau} = \alpha_1(II_D) \vec{D} = 2\mu(II_D) \vec{D} \quad (4.8)$$

Τα ρευστά αυτά λέγονται *γενικευμένα νευτώνεια* και είναι η πιο διαδεδομένη υποκατηγορία ρευστών [47] και δύο εκπρόσωποι αυτής της υποκατηγορίας είναι:

Εκθετικού νόμου ή *Ostwald-de Waele*:
$$\vec{\tau} = 2m_1 |4II_D|^{q-2} \vec{D}$$

Carreau:
$$a_1 = m_0 + m_1 \left(m_2 (II_D)^2 \right)^{\frac{q-2}{2}}$$

Μια άλλη κατηγορία μη νευτώνειων ρευστών είναι τα ρευστά *συμπεριφοράς χρονικά εξαρτημένης*. Η συμπεριφορά των ρευστών αυτών εξαρτάται, εκτός από τις μεταβολές που δέχονται κάθε στιγμή και από τις μεταβολές του ρυθμού παραμόρφωσής τους. Ένα σύνηθες μοντέλο της κατηγορίας αυτής είναι το *ρευστό δευτέρης τάξης* όπου:

$$\vec{\tau} = \alpha_0 \vec{A}_1 + \alpha_1 \vec{A}_2 + \alpha_2 \vec{A}_1^2$$

$$\vec{A}_1 = 2\vec{D} \quad \vec{A}_2 = \frac{\partial \vec{A}_1}{\partial t} + \vec{u} \operatorname{div} \vec{A}_1 + \vec{A}_1 (\operatorname{div} \vec{u})^T + \operatorname{div} \vec{u} \vec{A}_1$$

και προφανώς $a_0 = \mu$, το μετρούμενο ιξώδες σε μόνιμη κατάσταση.

Η τελευταία κατηγορία που θα δούμε είναι τα *ιξωδοελαστικά (viscoelastic) ρευστά* των οποίων η υλική εξίσωση περιέχει και χρονικές παραγώγους $\frac{\partial \vec{\tau}}{\partial t}, \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$. Ένα γνωστό τέτοιο μοντέλο είναι το ρευστό Oldroyd-B. [47]

iii) Επιλυσιμότητα του συστήματος εξισώσεων

Η κατηγορία ρευστών που θα μας απασχολήσει είναι τα *γενικευμένα νευτώνεια*, για τα οποία ο τανυστής τάσεων γράφεται:

$$\vec{\sigma} = -pI + a_1(II_D)\vec{D} \quad (4.9)$$

Για ασυμπύεστο ρευστό ισχύουν οι παρακάτω εξισώσεις Navier-Stokes:

Διατήρηση μάζας:
$$\operatorname{div} \vec{u} = 0 \quad (4.10)$$

Διατήρηση ορμής:
$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \operatorname{div} \vec{\sigma} \quad (4.11)$$

Το σύστημα αυτών των μερικών διαφορικών εξισώσεων δεν έχει λύση σε κάθε περίπτωση και αν η λύση υπάρχει δεν είναι σίγουρα και η μοναδική.

Λύση (solution) του συστήματος αποτελεί κάθε σύστημα συναρτήσεων που επαληθεύουν τις εξισώσεις του προβλήματος.

Μοναδικότητα (uniqueness) μιας λύσης σημαίνει ότι δεδομένης μιας κατάστασης του συστήματος σε κάποια χρονική στιγμή, το σύστημα είναι μονοσήμαντα ορισμένο για τις επόμενες χρονικές στιγμές.

Ευστάθεια (stability) μπορούμε να πούμε ότι έχουμε σε κάποιες λύσεις, όταν υπάρχει συνεχής εξάρτηση από τις οριακές τιμές και συνεπώς μικρές διαταραχές στα αρχικά δεδομένα οδηγούν και σε προβλέψιμες μικρές μετατοπίσεις της αντίστοιχης λύσης.

Ομαλή ή λεία (smooth) συνάρτηση ονομάζεται αυτή που οι παράγωγοί της, κάθε τάξης, υπάρχουν και είναι συνεχείς. [57]

Η επίλυση του συστήματος αυτού συνεπάγεται την εύρεση του πεδίου ταχυτήτων $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ και της συνάρτησης πίεσης p σε κάθε χρονική στιγμή t σε χωρίο Ω , με κλειστό ή ανοιχτό όριο το $\partial\Omega$, του ευκλείδιου τρισδιάστατου χώρου \mathbb{R}^3 .

Στην περίπτωση μας η εισερχόμενη παροχή μάζας ισούται με την εξερχόμενη και στο τοίχωμα η ταχύτητα είναι μηδενική, οπότε το σύστημα των εξισώσεων (4.10) και (4.11) επιδέχεται λύση μοναδική και ομαλή.

Νευτώνειο ρευστό

- Υπάρχει κάποιου είδους συμμετρία στον χώρο, οπότε από μελέτη σε τρισδιάστατο χώρο καταλήγουμε σε μελέτη διδιάστατου αγωγού, δηλαδή μελετάμε αξονικά συμμετρικές ή διδιάστατες ροές.
- Η αρχική λύση ταχυτήτων είναι αρκετά μικρή
- Η αρχική λύση παρουσιάζει πολύ ταλαντωτική συμπεριφορά. [49,58,59,60]

Γενικευμένα νευτώνεια

- Υπάρχει κάποιου είδους συμμετρία στον χώρο, οπότε από μελέτη σε τρισδιάστατο χώρο καταλήγουμε σε μελέτη διδιάστατου αγωγού, δηλαδή μελετάμε αξονικά συμμετρικές ή διδιάστατες ροές.
- Σε κάθε κλειστό χωρίο, για $a_1 = m_0 + m_1(H_D)^{q-2}, q \geq 2$
- Μόνο το πρόβλημα συνοριακών τιμών για $a_1 = \kappa + a(H_D)$. [49]

iv) Εξισώσεις ροής των ρευστών που μελετούμε

Έχουμε καταλήξει σε ένα μοντέλο αγωγού διδιάστατο, αξονικά συμμετρικό, άκαμπτο και αδιαπέραστο. Θεωρήσαμε ισόθερμη ροή, δηλαδή ότι δεν υπάρχουν διαφορές στη θερμοκρασία τοιχωμάτων αγωγού και ρευστού, ούτε διαφορές θερμοκρασίας στο ρευστό. Επίσης, θεωρούμε *αμελητέα την επίδραση της βαρύτητας*.

Τέλος, το ρευστό θεωρείται *ασυμπίεστο*, δηλαδή διατηρεί την πυκνότητά του σταθερή ανεξάρτητη της πίεσης.

Για τις παραπάνω παραδοχές το πεδίο ταχυτήτων και πεδίο ρευστού που ρέει μέσα σε έναν τέτοιο αγωγό περιγράφεται από τις εξισώσεις *Navier-Stokes* εκφρασμένες σε δύο διαστάσεων κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων.

Στα *γενικευμένα νευτώνεια ρευστά* όπου οι τάσεις τους σχετίζονται με τις παραμορφώσεις τους με την παρακάτω σχέση:

$$\vec{\tau} = \alpha_1 (II_D) \vec{D} \quad (4.12)$$

Σε σύστημα δύο διαστάσεων (\vec{e}_x, \vec{e}_r) ο τανυστής παραμορφώσεων τους γράφεται:

$$\vec{D} = \frac{1}{2} (\text{grad}^T \vec{u} + \text{grad} \vec{u}) \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) & \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right) \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

και το μέτρο του ρυθμού παραμόρφωσης (για δύο διαστάσεις $\det \vec{D} = II_D$) είναι:

$$\gamma = |\vec{D}| = \sqrt{\frac{1}{2} |\det \vec{D}|} = \sqrt{\frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{1}{4} \left[\frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r} \right]^2} \quad (4.14)$$

Η μορφή της $a_1(|\vec{D}|)$ συνάρτησης των ρευστών που θα χρησιμοποιήσουμε είναι:

Νευτώνειο: $\vec{\tau} = 2\mu \vec{D}$ (σταθερή: $a_1 = \mu_0$)

Walburn-Schneck: $\vec{\tau} = (k\gamma^n) \vec{D}$ (εκθετικού νόμου: $a_1 = \mu_1 |\vec{D}|^{q-2}$)

Herschel-Bulkley: $|\vec{\tau}| > \tau_0 \Rightarrow \vec{\tau} = \left(\frac{\tau_0}{\gamma} + k\gamma^n \right) \vec{D}$

$$|\vec{\tau}| < \tau_0 \Rightarrow \gamma = 0$$

Casson: $|\vec{\tau}| > \tau_0 \Rightarrow \vec{\tau} = \left(\sqrt{\frac{\tau_0}{\gamma}} + \sqrt{\mu_\infty} \right)^2 \vec{D}$

$$|\vec{\tau}| < \tau_0 \Rightarrow \gamma = 0$$

Quemada: $\vec{\tau} = \mu_F \left(1 - \frac{1}{2} \frac{k_0 + k_\infty \sqrt{\gamma/\gamma_c}}{1 + \sqrt{\gamma/\gamma_c}} \varphi \right)^{-2} \vec{D}$

Θα γράψουμε τις εξισώσεις Navier-Stokes, τις εξισώσεις (4.10) και (4.11) σε βαθμωτή μορφή, συμβολίζοντας:

u_x : αξονική συνιστώσα της ταχύτητας

u_r : ακτινική συνιστώσα της ταχύτητας

τ_{ij} : το στοιχείο ij του τανυστή $\vec{\tau}$ όπου i και j το x, r .

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_r}{\partial r} = 0$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_r \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xr}}{\partial r} \right)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_r}{\partial x} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \left(\frac{\partial \tau_{rx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} \right)$$

Αντικαθιστώντας τις διατμητικές τάσεις $\tau_{ij} = \mu(\gamma) D_{ij}$ για κάθε στοιχείο των τανυστών $\vec{\tau}$ και \vec{D} .

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_r}{\partial r} = 0$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_r \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{\partial \left(\mu(\gamma) \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(\mu(\gamma) \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) \right)}{\partial r} \right)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_r}{\partial x} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \left(\frac{\partial \left(\mu(\gamma) \frac{\partial u_r}{\partial r} \right)}{\partial r} + \frac{\partial \left(\mu(\gamma) \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) \right)}{\partial x} \right)$$

Η τελευταία μορφή είναι αυτή που τελικά επιλύει το FLUENT.

Η συγκεκριμένη τοποθέτηση του ιξώδους $\mu(\gamma)$, ανταποκρίνεται και στη μέθοδο επίλυσης, αφού πρώτα υπολογίζεται το ιξώδες από κάποια πρόβλεψη του πεδίου ταχυτήτων, εισάγεται στις εξισώσεις και τέλος επιλύεται το σύστημα.

Στη συνέχεια θα γίνει αδιαστατοποίηση του παραπάνω συστήματος ώστε να αποκαλυφθούν οι παράμετροι που καθορίζουν το πρόβλημα.

Στη γενικότητά του μπορούμε να γράψουμε $\mu(\gamma) = \mu_{eff}(\gamma^*)$, όπου μ_{eff} μια σταθερή χαρακτηριστική τιμή ιξώδους για κάθε μοντέλο και $f(\gamma^*)$ μία αδιάστατη συνάρτηση του αδιάστατου μέτρου του ρυθμού παραμόρφωσης $\gamma^* = \gamma d / U_0$, όπως θα προκύψει από τις παρακάτω αδιαστατοποιήσεις:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_r}{\partial r} = 0$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_r \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu_{eff} \left(\frac{\partial \left(f(\gamma^*) \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial \left(f(\gamma^*) \left(\frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) \right)}{\partial r} \right)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_r}{\partial x} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu_{eff} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \left(f(\gamma^*) \left(\frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(f(\gamma^*) \frac{\partial u_r}{\partial r} \right)}{\partial r} \right)$$

Τα αδιάστατα μεγέθη παρουσιάζονται με αστερίσκο (*) και αδιαστατοποιούμε ως:

Αξονική απόσταση: $x^* = \frac{x}{d}$, ακτινική απόσταση: $r^* = \frac{r}{d}$, ταχύτητα: $u_i^* = \frac{u_i}{u_m}$,

χρόνος: $\tau = \frac{t}{T}$, στατική πίεση : $p^* = \frac{p}{\rho U_m^2}$, όπου d η διάμετρος αγωγού, T:

περίοδος περιοδικής συνάρτησης ταχύτητας, $U_m = U_0 = \frac{Q}{\pi R^2} = \left(\int_0^R 2\pi r u(r) dr \right) / \pi R^2$:

η μέση ταχύτητα διατομής, βασισμένη στην παροχή εισόδου του αγωγού, όπου εισέρχεται ελεύθερο ρεύμα ρευστού ταχύτητας U_0 .

Και εμφανίζεται η αδιάστατη παράμετρος της ροής:

$$\text{Αριθμός Reynolds: } Re = \frac{\rho U_0 d}{\mu_{eff}}$$

ο οποίος εκφράζει τη σημαντικότητα των συνεκτικών φαινομένων σχετικά με την αδράνεια που παρουσιάζει η ροή.

Μία άλλη αδιάστατη παράμετρος είναι ο αριθμός Strouhal: $Str = \frac{d}{TU_0}$,

ο οποίος εκφράζει τη σημαντικότητα των μη μόνιμων φαινομένων σχετικά με την αδράνεια που παρουσιάζει η ροή.

Σε πολλές περιπτώσεις χρησιμοποιείται ως αριθμός ομοιότητας ο αριθμός

Womersley : $a = R \sqrt{\frac{2\pi f}{\nu}}$ για $\nu = \frac{\mu}{\rho}$, $R = \frac{d}{2}$ και $f = \frac{1}{T}$ προκύπτει $a = \sqrt{\frac{\pi}{2} Re Str}$.

Θεωρούμε ότι ο αριθμός αυτός δεν προκύπτει άμεσα από αδιαστατοποίηση των τριών εξισώσεων, αλλά εμφανίζεται κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις στις εξισώσεις κίνησης του ρευστού σε ευθύγραμμο αγωγό και πλήρως διαμορφωμένη κατάσταση. Για το λόγο αυτό, είναι πιο ακριβές να διατυπωθούν οι εξισώσεις κίνησης με τους αδιάστατους αριθμούς που προκύπτουν άμεσα από την αδιαστατοποίηση.

Στα δύο ιξωδοπλαστικά ρευστά, H-B και Casson, από τη διαδικασία αδιαστατοποίησης προκύπτει και άλλος ένας αδιάστατος αριθμός για την περιγραφή της ροής τους.

Αριθμός Bingham (Bi): εκφράζει τη σημαντικότητα της αρχικής τάσης που απαιτείται για την έναρξη της ροής του ρευστού, σχετικά με την επίδραση των συνεκτικών τάσεων.

Παρακάτω φαίνονται οι συναρτήσεις $\mu(\gamma) = \mu_{eff}(\gamma^*)$ για κάθε μοντέλο:

Νευτώνειο: $\mu(\gamma) = \mu_0 f(\gamma^*) = 2, \mu_{eff} = \mu_0 = 0.0035 Pa \cdot s$

Walburn-Schneck: $\mu(\gamma) = k\gamma^{n-1}, f(\gamma^*) = \gamma^{*n-1}, \mu_{eff} = k \left(\frac{d}{U_0} \right)^{1-n}$

$$n = 0.7755, k = 0.01467 Pa \cdot s^{0.7755}$$

Η χρήση του W-S στο Fluent, λόγω της υπερβολικής συνάρτησης ορισμού του, απαιτεί τον καθορισμό ενός κατώτατου ορίου ιξώδους μ_{min} και ενός ανώτατου μ_{max} . Αν αυτά τα όρια τοποθετηθούν αρκετά μακριά από τις τιμές του ιξώδους που τελικά θα προκύψουν, δεν θα έχουν επηρεάσει τη λύση μας.

Έπρεπε λοιπόν, τα αποτελέσματά μας να είναι ανεξάρτητα αυτών των ορίων. Μετά από δοκιμές στο FLUENT βρήκαμε ότι η βέλτιστη θέσπισή τους ήταν:

$$\mu_{min} = 0.0001 Pa \cdot s \text{ και } \mu_{max} = 0.1 Pa \cdot s.$$

Herschel-Bulkley: $\mu(\gamma) = \frac{\tau_0}{\gamma} + k\gamma^{n-1}, f(\gamma^*) = \frac{Bi}{\gamma^*} + \gamma^{*n-1}, \mu_{eff} = k \left(\frac{d}{U_0} \right)^{1-n}$

$$n = 0.8601, k = 0.0089721 Pa \cdot s^{0.8601}, \tau_0 = 0.0175 Pa, Bi = (\tau_0/k) \left(\frac{d}{U_0} \right)^n$$

Για $\tau_0 < 0$ το H-B παρουσιάζει άπειρη συνεκτικότητα, τότε η συνάρτηση ορισμού του

στο FLUENT είναι: $\mu(\gamma) = \frac{\tau_0 + \left[\gamma^n - (\tau_0/\mu_0)^n \right]}{\gamma}$ όπου μ_0 η τιμή της συνεκτικότητας

όταν ασκηθεί η τάση αυτή.

Θα πρέπει ο όρος τ_0/μ_0 να εξαλειφθεί για να είναι σωστή η αδιαστατοποίηση που κάναμε. Παίρνοντας λοιπόν, ως δεδομένη την τιμή $\tau_0 = 0.0175 Pa$ θα πρέπει να επιλέξουμε μία τιμή για το $\mu_0 > 1$ ώστε πρακτικά ο όρος να εξαλείφεται. Εισάγουμε λοιπόν την τιμή $\mu_0 = 10 Pa \cdot s$.

Casson:

$$\mu(\gamma) = \left(\sqrt{\frac{\tau_0}{\gamma}} + \sqrt{\mu_\infty} \right)^2, f(\gamma^*) = \left(\sqrt{\frac{Bi}{\gamma^*}} + 1 \right)^2, \mu_{eff} = \mu_\infty = 0.0031 Pa \cdot s,$$

$$\tau_0 = 0.01082 Pa, Bi = (\tau_0 / \mu_\infty) \left(\frac{d}{U_0} \right)$$

Το Casson παρουσιάζει άπειρη συνεκτικότητα για $\tau_0 < 0$, αλλά στην παρακάμπτεται αν χρησιμοποιήσουμε τη συνεχή μορφή κατά Papanastasiou, όπως και άλλοι μελετητές.

$$\mu(\gamma) = \left(\sqrt{\mu_\infty} + \sqrt{\frac{\tau_0}{\gamma}} (1 - e^{-\sqrt{m\gamma}}) \right)^2$$

Για $m > 100$

$$\text{Σε αδιάστατη μορφή γράφεται: } \mu(\gamma) = \mu_\infty \left(1 + \sqrt{\frac{Bi}{\gamma^*}} \left(1 - e^{-\sqrt{\left(\frac{mU_0}{d}\right)\gamma^*}} \right) \right)^2$$

Στη συνάρτηση ορισμού του μοντέλου Casson θεωρήσαμε $m = 500$.

$$\text{Quemada: } \mu(\gamma) = \mu_F \left(1 - \frac{1}{2} \frac{k_0 + k_\infty \sqrt{\gamma/\gamma_c}}{1 + \sqrt{\gamma/\gamma_c}} \varphi \right)^{-2}$$

$$f(\gamma^*) = \left(1 - \frac{1}{2} \frac{k_0 + k_\infty \sqrt{\gamma/\gamma_c}}{1 + \sqrt{\gamma/\gamma_c}} \varphi \right)^{-2}, \mu_{eff} = \mu_F$$

$\mu_F = \mu_{plasma} = 0.0012 Pa \cdot s, \gamma_c = 1.88 s^{-1}, k_0 = 4.33, k_\infty = 2.07, \varphi = 0.45$ η τιμή του αιματοκρίτη.

v) Οριακές συνθήκες

Το σύστημα των εξισώσεων που καταστρώσαμε απαιτεί τον ορισμό οριακών συνθηκών για να πάρουμε τελικά το πεδίο ταχυτήτων και πιέσεων της ροής.

Η καμπύλη του ανευρύσματος των αγωγών που αναπτύχθηκαν στο πρόγραμμα GAMBIT, δεν έχει εμφανή μαθηματική έκφραση, αφού δημιουργείται ως προσαρμογή μιας καμπύλης με δεδομένο βαθμό καμπυλότητας σε τρία σημεία που υποδεικνύει ο χρήστης.

Για το λόγο αυτό, θεωρούμε ότι το τοίχωμα, στην περιοχή του ανευρύσματος προσεγγίζεται από την αρμονική καμπύλη που θα παρουσιαστεί πιο κάτω.

Οι οριακές συνθήκες αφορούν το σύνορο $\partial\Omega$ του χωρίου Ω του διδιάστατου ευκλείδειου χώρου, όπου ρέει το ρευστό. Το σύνορο αυτό αποτελείται από τοίχωμα, άξονα συμμετρίας, είσοδο και έξοδο.

$$\partial\Omega = \partial\Omega_w + \partial\Omega_{ax} + \partial\Omega_{in} + \partial\Omega_{out}$$

Για τους ευθύγραμμους αγωγούς που μελετούμε ισχύει:

$$\partial\Omega_w: r^* = 0.5 \forall x^* \in [0, 20]$$

$$\partial\Omega_{ax}: r^* = 0 \forall x^* \in [0, 20]$$

$$\partial\Omega_{in}: x^* = 0$$

$$\partial\Omega_{out}: x^* = 20$$

και

$$\partial\Omega_w: r^* = 0.5 \forall x^* \in [0, 40]$$

$$\partial\Omega_{ax}: r^* = 0 \forall x^* \in [0, 40]$$

$$\partial\Omega_{in}: x^* = 0$$

$$\partial\Omega_{out}: x^* = 40$$

Για τους αγωγούς με διόγκωση, αρχικό μήκος και χωρίς καμπυλότητα:

$$\partial\Omega_w: r^* = 0.5 \forall x^* \in [0, 2] \cup [5.46, 25.46]$$

$$r^* = 2 + 0.5 \left(1 + \cos \left(\pi \left(x^* - 3.73 \right) \right) \right) \forall x^* \in [2, 5.46]$$

$$\partial\Omega_{ax}: r^* = 0 \forall x^* \in [0, 25.46]$$

$$\partial\Omega_{in}: x^* = 0$$

$$\partial\Omega_{out}: x^* = 25.46$$

και

$$\partial\Omega_w: r^* = 0.5 \forall x^* \in [0, 2] \cup [5.46, 45.46]$$

$$r^* = 2 + 0.5 \left(1 + \cos \left(\pi \left(x^* - 3.73 \right) \right) \right) \forall x^* \in [2, 5.46]$$

$$\partial\Omega_{ax}: r^* = 0 \forall x^* \in [0, 45.46]$$

$$\partial\Omega_{in}: x^* = 0$$

$$\partial\Omega_{out} : x^* = 45.46$$

Για τους αγωγούς με διόγκωση, χωρίς αρχικό μήκος και χωρίς καμπυλότητα:

$$\partial\Omega_w : r^* = 0.5 \forall x^* \in [3.46, 23.46]$$

$$r^* = 1 + \cos(\pi(x^* - 1.73)) \forall x^* \in [0, 3.46]$$

$$\partial\Omega_{ax} : r^* = 0 \forall x^* \in [0, 23.46]$$

$$\partial\Omega_{in} : x^* = 0$$

$$\partial\Omega_{out} : x^* = 23.46$$

και

$$\partial\Omega_w : r^* = 0.5 \forall x^* \in [3.46, 43.46]$$

$$r^* = 1 + \cos(\pi(x^* - 1.73)) \forall x^* \in [0, 3.46]$$

$$\partial\Omega_{ax} : r^* = 0 \forall x^* \in [0, 43.46]$$

$$\partial\Omega_{in} : x^* = 0$$

$$\partial\Omega_{out} : x^* = 43.46$$

Και επιβάλλουμε τις εξής συνοριακές συνθήκες:

$$\partial\Omega_w : \text{μη ολίσθησης} \Leftrightarrow u|_{\partial\Omega_w} = 0 \quad (\text{τύπου Dirichlet})$$

$$\partial\Omega_{ax} : \text{μηδενισμός παραγώγων στην ακτινική κατεύθυνση} \Leftrightarrow \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{\partial\Omega_{ax}} = 0$$

(τύπου

Neumann)

$$\partial\Omega_{in} : \text{δεδομένη κατανομή ταχυτήτων} \Leftrightarrow u|_{\partial\Omega_{in}} = u(r) \quad (\text{τύπου Dirichlet})$$

Στην έξοδο των αγωγών έχει μεγάλη σημασία η επιλογή των συνοριακών συνθηκών, καθώς σε αυτή τη διατομή δεν είμαστε σίγουροι για τις ταχύτητες και τις πιέσεις, αλλά τις γνωρίζουμε αφού επιλυθεί το πεδίο.

Μία συνθήκη που ενδείκνυται για αυτή την περίπτωση είναι η λεγόμενη συνθήκη *απρόσκοπτης εξόδου-free outstream*. Σύμφωνα με αυτές τις μελέτες αυτή η συνθήκη δεν επηρεάζει το πεδίο ανάντι της εξόδου.

Στον επιλυτή FLUENT προκύπτει μία διαφοροποίηση αυτής της συνθήκης, όπου θεωρείται μηδενική η ροή των όρων διάχυσης (zero diffusion flux condition). Άρα ισχύει τελικά για την έξοδο κάθε αγωγού:

$$\partial\Omega_{out} : \text{μηδενισμός ροής όρων διάχυσης στην αξονική κατεύθυνση} \Leftrightarrow \left. \frac{\partial(DT)}{\partial x} \right|_{\partial\Omega_{out}} = 0$$

vi) Εξισώσεις της πλήρως διαμορφωμένης ροής

Θα δούμε στην περίπτωση της μόνιμης πλήρως διαμορφωμένης ροής πως μετασχηματίζονται οι εξισώσεις σε ευθύγραμμο αγωγό.

Σε αυτή την περίπτωση οι παράγωγοι ταχύτητας κατά την αξονική κατεύθυνση

μηδενίζονται: $\frac{\partial u_x^*}{\partial x} = 0$ και δεν υπάρχει ακτινική ταχύτητα: $u_r^* = 0$. [47]

Προκύπτει λοιπόν από την εξίσωση συνέχειας: $\frac{\partial u_x^*}{\partial x^*} = \frac{\partial u_r^*}{\partial r^*} = 0$

Και από την ακτινική κατεύθυνση για την ορμή: $\frac{\partial p^*}{\partial r^*} = 0 \Rightarrow p^* = p^*(x^*)$

Το σύστημα τελικά λαμβάνει την παρακάτω μορφή:

$$0 = -\frac{dp^*}{dx^*} + \frac{1}{\text{Re}} f(\gamma) \frac{du_x^*}{dr^*}$$

Το ρευστό παραμορφώνεται προς μία και μοναδική κατεύθυνση (uniaxial flow).

$$\vec{D} = \frac{1}{2} \left(\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T \right) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial u_x}{\partial r} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial u_x}{\partial r} & 0 \end{bmatrix} \text{ και το μέτρο του } \gamma = \sqrt{\frac{1}{2} |\det \vec{D}|} = \frac{1}{2} \left| \frac{du_x^*}{dr^*} \right|$$

Αυτές οι απλοποιήσεις κάνουν δυνατή την αναλυτική επίλυση του συστήματος, για το νευτώνειο και για τα W-S και H-B ρευστά. [48]

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ

i) Μέθοδος επίλυσης

Το υπολογιστικό πακέτο που χρησιμοποιήσαμε για την επίλυση των εξισώσεων ροής ονομάζεται **FLUENT**. Για την επίλυση των πεδίων ροής ρευστομηχανικών προβλημάτων υιοθετεί τη μέθοδο των *πεπερασμένων όγκων* (*finite volume method-FVM*). [61]

Σύμφωνα με αυτή τη μέθοδο, οι εξισώσεις που περιγράφουν τη ροή, ολοκληρώνονται στους *όγκους ελέγχου* (*control volumes-CV*), δηλαδή στους στοιχειώδεις όγκους (υπολογιστικά κελιά) στους οποίους έχουμε χωρίσει το πεδίο ροής που θα μελετήσουμε.

Διακριτοποιώντας τις εξισώσεις αυτές, θα προκύψει ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων, το οποίο εντέλει θα επιλυθεί αριθμητικά. [62]

Η μη μόνιμη εξίσωση μεταφοράς του βαθμωτού μεγέθους Φ , με το μη μόνιμο όρο και τους όρους *συναγωγής, διάχυσης και πηγής* αντίστοιχα.

$$\int \frac{\partial \rho \Phi}{\partial t} d\Omega + \int_S \rho \phi u \cdot n dS = \int_S \Gamma \text{grad} \phi \cdot n dS + \int_{\Omega} Q_{\phi} d\Omega \quad (5.1)$$

ρ : πυκνότητα

\vec{u} : διάνυσμα της ταχύτητας

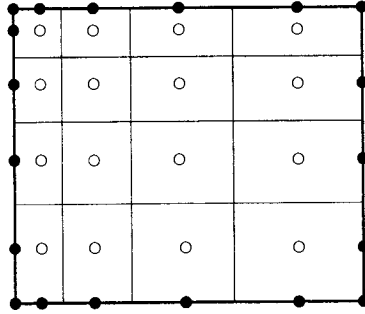
\vec{S} : διάνυσμα επιφάνειας

Γ_{ϕ} : συντελεστής διάχυσης του μεγέθους Φ

$\text{grad} \Phi$: παράγωγος κατά κατεύθυνση του μεγέθους Φ

Q_{ϕ} : πηγές του μεγέθους Φ μέσα στον CV

Μια συνήθης προσέγγιση είναι ο προσδιορισμός των όγκων ελέγχου CVs από κατάλληλο πλέγμα και η εκχώρηση του υπολογιστικού κόμβου στο κέντρο του όγκου ελέγχου, βλέπε το σχήμα 5.1. [62]



Σχ. 5.1: κόμβοι στα κέντρα των όγκων ελέγχου

Η παραπάνω εξίσωση ισχύει για κάθε CV καθώς και για τη λύση του πεδίου ορισμού στο σύνολο. Αν προσθέσουμε όλες τις εξισώσεις των CVs θα προκύψει η ολική εξίσωση διατήρησης.

Για να προκύψει αλγεβρική εξίσωση για καθένα CV, τα επιφανειακά και τα χωρικά (τριπλά) ολοκληρώματα πρέπει να προσεγγιστούν από μία μέθοδο τετραγωνισμού.

Για τα επιφανειακά ολοκληρώματα ισχύει:

$$\int_S f dS = \sum_k \int_{S_k} f dS$$

Όπου η f αντιπροσωπεύει τον όρο συναγωγής $\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ ή τον όρο διάχυσης $\Gamma \text{grad} \varphi \cdot \mathbf{n}$ με το συμβολισμό: $f^c = \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ και $f^d = \Gamma \text{grad} \varphi \cdot \mathbf{n}$. Θεωρούμε ότι το πεδίο ταχυτήτων, οι ιδιότητες των ρευστών ρ και Γ είναι γνωστά σε όλες τις περιοχές. Η εξίσωση λοιπόν, μετασχηματίζεται στην παρακάτω :

$$\frac{\partial \rho \varphi}{\partial t} \Omega + \sum_f^{N_{\text{faces}}} \rho f \vec{u}_f \varphi_f \cdot \vec{S}_f = \sum_f^{N_{\text{faces}}} \Gamma \Phi \text{grad} \varphi_f \cdot \vec{S}_f + Q_\varphi \Omega \quad (5.2)$$

φ : τιμή του μεγέθους στο κέντρο του CV

N_f : αριθμός πλευρών που περικλείουν το CV

φ_f : ποσότητα του Φ που περνά από την επιφάνεια f

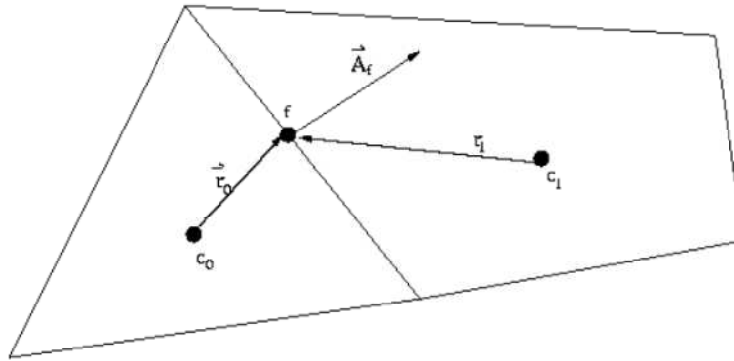
$\rho_f \vec{u}_f \cdot \vec{S}_f$: παροχή μάζας διαμέσου της επιφάνειας f

\vec{S}_f : προσημασμένο εμβαδό της επιφάνειας f

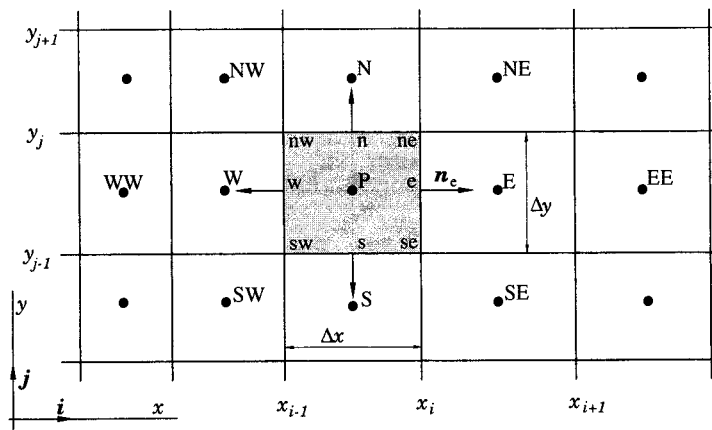
$\text{grad} \varphi_f$: παράγωγος κατά κατεύθυνση του Φ στην επιφάνεια f

Ω : όγκος CV

Προφανώς οι όροι επιφάνεια, εμβαδό και όγκος είναι σχετικοί και αφορούν τρισδιάστατες γεωμετρίες. Σε διδιάστατες γεωμετρίες μιλάμε αντίστοιχα για ακμή, μήκος και εμβαδό.



Σχ.5.2: δύο γειτονικά κελιά ενός διδιάστατου αριθμητικού πλέγματος και τα κέντρα τους c_0, c_1 . [61]



Σχ. 5.3: ένας τυπικός όγκος ελέγχου σε διδιάστατο καρτεσιανό πλέγμα.

Μετά τη γραμμικοποίηση των εξισώσεων που προκύπτουν σε κάθε CV, το γραμμικό πλέον σύστημα επιλύεται με χρήση του αλγόριθμου Gauss-Seidel. Το γραμμικό σύστημα παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$a_p \varphi = \sum_{nb} a_{nb} \varphi_{nb} + b \quad (5.3)$$

a_p, a_{nb} : γραμμικοποιημένοι συντελεστές

Το γραμμικοποιημένο πλέον σύστημα επιλύεται με τον αλγόριθμο Gauss-Siedel. [61]

Παρακάτω θα αναφέρουμε διάφορα σχήματα υπολογισμού της τιμής του φ . Συγκεκριμένα πρέπει να δείξουμε πώς η τιμή του φ και η παράγωγός του στην επιφάνεια 'ε' μπορεί να προσεγγισθεί. [62]

- Ανάντι υπολογισμός (*upwind differencing scheme-UDS*)

Η προσέγγιση του φ_e γίνεται από τιμές κελιών που βρίσκονται πίσω από το εξεταζόμενο σχετικά με την ταχύτητα του ρευστού.

$$1^{ης} \text{ τάξης ακρίβειας: } \varphi_f = \varphi_{UP} \quad (5.4)$$

$$2^{ης} \text{ τάξης ακρίβειας: } \varphi_f = \varphi + \text{grad}\varphi \cdot \vec{r} \quad (5.5)$$

φ_{UP} : τιμή του μεγέθους στο κέντρο του κελιού ανάντι του εξεταζόμενου

Με το σχήμα αυτό μας δίνεται η δυνατότητα να επιλέξουμε την τάξη ακρίβειας των υπολογισμών που θέλουμε να κάνουμε. Έτσι, έχουμε το πρώτης τάξης ακρίβειας 1st Order UDS και το δεύτερης τάξης ακρίβειας 2st Order UDS. Το μεγάλο πλεονέκτημα αυτού του σχήματος είναι ότι δεν θα παρουσιάσει ταλαντωτική συμπεριφορά κατά την προσέγγιση της λύσης.

- Κεντρικό σχήμα (*Central Differencing Scheme-CDS*)

Η προσέγγιση είναι γραμμική παρεμβολή και γίνεται από τιμές στα κέντρα κελιών που βρίσκονται πιο πίσω και άλλα εμπρός από το εξεταζόμενο, σχετικά με την ταχύτητα του ρευστού.

$$\varphi_f = \frac{1}{2}(\varphi_0 + \varphi_1) + \frac{1}{2}(\text{grad}\varphi_0 \cdot \vec{r}_0 + \text{grad}\varphi_1 \cdot \vec{r}_1) \quad (5.6)$$

Αυτό το σχήμα οδηγεί πάντα σε δεύτερης τάξης ακρίβεια, αλλά μπορεί πολύ εύκολα να δώσει ταλάντωση γύρω από τη λύση. [61,62] Για αυτό το λόγο χρησιμοποιείται μια άλλη προσέγγιση

$$\varphi_f = \varphi_{f,UP} + (\varphi_{f,CD} - \varphi_{f,UP}) \quad (5.7)$$

$\varphi_{f,UP}$: η τιμή του μεγέθους που προκύπτει από ανάντι υπολογισμό

$\varphi_{f,CD}$: η τιμή του μεγέθους που προκύπτει από κεντρικό σχήμα

Ένα ακόμα δεύτερης τάξης ακρίβειας σχήμα είναι το ονομαζόμενο QUICK το οποίο αποτελεί βελτίωση των προηγούμενων και χρησιμοποιεί παραβολή και όχι ευθεία γραμμή όπως το κεντρικό σχήμα. [78,79] Στις επιλογές του FLUENT υπάρχει και σχήμα τρίτης τάξης ακρίβειας ονομαζόμενο MUSCL. [62]

Το FLUENT χρησιμοποιεί κεντρικό σχήμα (CDS), δηλαδή δεύτερης τάξης ακρίβειας για τους όρους διάχυσης, ενώ για τους όρους συναγωγής υπάρχει η δυνατότητα επιλογής. [61]

Εμείς στην εργασία μας επιλέξαμε για τους όρους συναγωγής δεύτερης τάξης ακρίβειας ανάντι υπολογισμό (2st Order UDS). Η επιλογή αυτή βασίστηκε στην ευστάθεια του αλγορίθμου, και επιπρόσθετα κρίθηκε περιττή η χρήση μεγαλύτερης τάξης ακρίβειας.

Με βάση το θεώρημα Green-Gauss, ο υπολογισμός των παραγώγων γίνεται ως εξής:

$$(grad\varphi)_{c_0} = \sum_f \bar{\varphi}_f \bar{S}_f \quad (5.8)$$

$(grad\varphi)_{c_0}$: τιμή της παραγώγου κατά κατεύθυνση του Φ στο κέντρο c_0 του CV

$\bar{\varphi}_f$: τιμή του Φ στην επιφάνεια f

\bar{S}_f : προσημασμένο εμβαδό της επιφάνειας f .

Θεωρούμε το $\bar{\varphi}_f$ ως μέσο όρο των τιμών που λαμβάνει η Φ στα κέντρα των γειτονικών όγκων ελέγχου CVs $\bar{\varphi}_f = \frac{\varphi_{c_0} + \varphi_{c_1}}{2}$. Με αυτό τον τρόπο προκύπτει η διακριτοποίηση της παραγώγου κατά κατεύθυνση, όπου στο FLUENT λέγεται *Green-Gauss theorem-cell based*. [61,62]

Από αυτό το σημείο μας δίνεται η δυνατότητα επιλογής ανάμεσα σε δύο διαφορετικούς επιλυτές, τον *Pressure-Based solver* και τον *Density-Based solver*.

Ο *Pressure-Based solver* χρησιμοποιείται για ασυμπίεστες ροές ή ροές με ελαφρά συμπίεσότητα.

Στην επιλογή *Segregated* που είναι και η κύρια του επιλυτή οι βασικές εξισώσεις επιλύονται διαδοχικά και οι τιμές των μεγεθών από τη μία εισάγονται στην επόμενη.

Σε μία άλλη επιλογή ονομαζόμενη *Coupled* γίνεται διαδοχική επίλυση.

Ο *Density-Based solver* χρησιμοποιείται για έντονα συμπιεστές ροές και οι εξισώσεις της ροής επιλύονται ταυτόχρονα ως σύστημα και μόνο οι πρόσθετες εξισώσεις επιλύονται διαδοχικά μετά τα αποτελέσματα των πρώτων. [61]

Όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε εμείς χρησιμοποιήσαμε τον επιλυτή *Pressure-Based* γιατί η χρήση του ταιριάζει στις ροές που μελετούμε.

Διαδικασία επίλυσης

- 1) Υπολογισμός ιδιοτήτων ρευστών σύμφωνα με τις τιμές ταχυτήτων και πιέσεων του προηγούμενου κύκλου υπολογισμών. Σε αυτό το βήμα υπολογίζεται και το μεταβλητό ιξώδες των μη νευτώνειων ρευστών.
- 2) Επιλύονται διαδοχικά οι εξισώσεις ορμής για κάθε κατεύθυνση.
- 3) Στη συνέχεια επιλύεται η εξίσωση συνέχειας για τη διόρθωση του πεδίου πιέσεων.
- 4) Ανανέωση της ροής μάζας του πεδίου πιέσεων και του πεδίου ταχυτήτων.
- 5) Επίλυση των εξισώσεων για τα βαθμωτά μεγέθη, με τις τιμές πιέσεων και ταχυτήτων που υπολογίσαμε.
- 6) Αν υπάρχει σύγκλιση αποτελεσμάτων τότε λαμβάνουμε αποτελέσματα αν όχι επιστρέφουμε στο βήμα 1.

Αν στην εξίσωση (5.1) στη θέση του βαθμωτού μεγέθους Φ θεωρήσουμε μια συνιστώσα της ταχύτητας, για παράδειγμα την αξονική u_x , τότε προκύπτει η εξίσωση διατήρησης της ορμής κατά τη x κατεύθυνση. Μετά τη γραμμικοποίησή της θα έχει τη μορφή:

$$a_p u_x = \sum_{nb} a_{nb} u_{x,nb} + \sum_f p_f S + Q \quad (5.9)$$

u_x : η ταχύτητα στο κέντρο του CV

$u_{x,nb}$: η ταχύτητα στα κέντρα των γειτονικών CV

p_f : η πίεση στο κέντρο της επιφάνειας

S : το εμβαδό της επιφάνειας

Για την επίλυση της εξίσωσης αυτής απαιτείται η γνώση της πίεσης σε κάθε επιφάνεια του CV. Υπάρχουν διάφορες μέθοδοι για τον υπολογισμό της πίεσης που στηρίζονται στην προσέγγισή της από τις τιμές που λαμβάνει στα κέντρα των γειτονικών CV και θα τις αναφέρουμε παρακάτω.

- **Standard:** είναι η απλούστερη μέθοδος που χρησιμοποιεί το FLUENT και τη σχετίζει με τις σταθμισμένες τιμές πίεσης στο εξεταζόμενο CV και ακόμα ένα γειτονικό του.

$$p_f = \frac{\frac{p_{c0}}{a_{pc0}} + \frac{p_{c1}}{a_{pc1}}}{\frac{1}{a_{pc0}} + \frac{1}{a_{pc1}}} \quad (5.10)$$

- **Linear:** αποτελεί άλλη μία συσχέτιση που προκύπτει αν θεωρήσουμε την p_f ως τον μέσο όρο των πιέσεων των συνολικά N γειτονικών CV.

$$p_f = \frac{1}{N} \sum_{nb} p_{cnb} \quad (5.11)$$

Εκτός από τις εξισώσεις ορμής κατά κατεύθυνση υπάρχει και η εξίσωση συνέχειας, η οποία όταν εκφράζεται σε ένα CV διακριτοποιείται ως:

$$\sum_f J_f S_f = 0 \quad (5.12)$$

Με $J_f = \rho u_n$ τη ροή μάζας από την επιφάνεια S λόγω της u_n κάθετης σε αυτή ταχύτητας.

$$J_f = \rho_f \frac{a_{pc0} u_{n,c0} + a_{pc1} u_{n,c1}}{a_{pc0} + a_{pc1}} + d_f \left(\left(p_{c0} + (grad p)_{c0} \vec{r}_0 \right) - \left(p_{c1} + (grad p)_{c1} \vec{r}_1 \right) \right) \quad (5.13)$$

Όπου p_{c0} , p_{c1} και $u_{n,c0}$, $u_{n,c1}$ είναι οι πιέσεις και οι κάθετες ταχύτητες αντίστοιχα, στα κέντρα των δύο CV σε κάθε πλευρά της επιφάνειας f και \vec{r}_0 , \vec{r}_1 οι αποστάσεις της επιφάνειας από το κέντρο των κελιών (Σχ.5.2).

Όπως αναφέραμε στον επιλυτή *Pressure-Based Solver* οι εξισώσεις επιλύονται διαδοχικά.

Υπάρχει, λοιπόν, ένας αλγόριθμος ονομαζόμενος *Pressure-Velocity Coupling* που συνδέει την πρόβλεψη της ταχύτητας με την πίεση. Δηλαδή η πρόβλεψη της ταχύτητας που προκύπτει από τις εξισώσεις ορμής, πρέπει κατάλληλα διορθωμένη με *συντελεστές χαλάρωσης Under-Relaxation Factors*, να εισαχθεί στο σύστημα εξισώσεων και να δώσει μία νέα πρόβλεψη για την ταχύτητα ώστε να συνεχιστεί ο κύκλος των επαναλήψεων που θα προσεγγίσει τη λύση του πεδίου ταχυτήτων και πιέσεων.

Το FLUENT περιέχει πλήθος αλγορίθμων όπως οι SIMPLE, SIMPLEC, PISO και *Fractional-Step Method (FSM)*. [61]

Εμείς υιοθετήσαμε τον αλγόριθμο SIMPLE, ο οποίος είναι ευρύτατα χρησιμοποιούμενος σε προβλήματα της μορφής που θέλουμε να επιλύσουμε. Ο SIMPLE χρησιμοποιεί μία σχέση μεταξύ των διορθωμένων τιμών ταχύτητας και πίεσης για να επιβάλλει τη διατήρηση της μάζας και να λάβει το πεδίο πιέσεων. [62,63,66]

Εμείς μελετούμε μόνο το μόνιμο πεδίο ροής, οπότε η διακριτοποίηση στον χρόνο που είναι αναγκαία στη μη μόνιμη ροή, στη δικιά μας περίπτωση δεν χρειάζεται.

Παρακάτω δείχνουμε όλες τις επιλογές που κάναμε στο FLUENT για την επίλυση των πεδίων ροής.

Solver	Μόνιμη ροή
Solver	Pressure-based
Formulation	implicit
Space	axisymmetric
Time	steady
Gradient option	Green-gauss theorem-Cell based
Solution controls	
discretization	
Pressure	standard
momentum	Second order upwind
Velocity-pressure coupling	SIMPLE
Under relaxation factors	
Pressure	0.3
density	1
Body forces	1
momentum	0.7

Π.5.1: επιλογές στο FLUENT.

ii) Εισαγωγή των οριακών συνθηκών

- **Τοίχωμα:** wall- συνθήκη μη ολίσθησης , μηδενισμός ταχύτητας
- **Άξονας συμμετρίας:** axis-μηδενισμός παραγώγων στην ακτινική κατεύθυνση
- **Είσοδος αγωγού:** velocity inlet-κατανομή ταχύτητας εισάγεται από τον χρήστη

Ευθύγραμμος αγωγός:

Εισάγουμε το μέτρο της ταχύτητας του ελεύθερου ρεύματος U_0 , με κατεύθυνση κάθετη στη διατομή εισόδου.

Ανεύρυσμα:

Εισάγουμε τις κατανομές ταχύτητας (Read→Profiles) που προέκυψαν από την έξοδο του ευθύγραμμου αγωγού στον αντίστοιχο Re, δηλαδή τις κατανομές ταχύτητας κάθε μοντέλου στην πλήρως διαμορφωμένη ροή.

- **Έξοδος αγωγού:** outflow-μηδενισμός ροής όρων διάχυσης στην αξονική κατεύθυνση

iii) Υπολογιστικό πλέγμα

Για την επίλυση των πεδίων ροής χρησιμοποιήσαμε κάποια υπολογιστικά πλέγματα που μοντελοποιούν τους διδιάστατους αξονικά συμμετρικούς αγωγούς. [67,68] Τα πλέγματα αυτά τα φτιάξαμε με τη βοήθεια του υπολογιστικού πακέτου ονομαζόμενου Gambit, ακολουθώντας μια αρκετά απλή διαδικασία.

Αρχικά, έπρεπε να φτιάξουμε έναν ευθύγραμμο αγωγό όπου χρησιμοποιήσαμε δομημένο πλέγμα που αποτελούταν μόνο από τετραγωνικά στοιχεία, ενώ στην περίπτωση του διογκωμένου αγωγού το πλέγμα μας είναι μη δομημένο και αποτελείται από τριγωνικά στοιχεία στο εσωτερικό της κοιλότητας του ανευρύσματος.

Όλα τα πλέγματα που χρησιμοποιήσαμε αποτελούνταν από τέσσερις πλευρές: τοίχωμα και άξονας συμμετρίας παράλληλες στον άξονα x και είσοδος, έξοδος παράλληλες στον άξονα y.

Χρησιμοποιήσαμε δύο ευθύγραμμους αγωγούς, ο ένας με μήκος είκοσι διαμέτρων και ο άλλος με μήκος σαράντα διαμέτρων. Θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε έναν αγωγό με μεγάλο μήκος, αλλά αυτό θα αύξανε τους υπολογιστικούς μας χρόνους για χαμηλούς Re που δεν ήταν απαραίτητος ο μεγάλος αγωγός.

Αρχικά ορίσαμε τα τέσσερα σημεία του αγωγού, δηλαδή τις τέσσερις κορυφές του, τις οποίες και ενώσαμε και έτσι δημιουργήθηκαν οι τέσσερις ακμές του.

Στη συνέχεια, διαμερίσαμε τις κατά x πλευρές με έναν αριθμό σημείων ούτε ιδιαίτερα πυκνό, αλλά και ούτε αραιό. Τις κατά y πλευρές τις διαμερίσαμε έχοντας υπόψη να

είναι το πλέγμα μας από τον άξονα συμμετρίας προς το τοίχωμα προοδευτικά πυκνότερο επειδή μας ενδιέφεραν περισσότερο τα μεγέθη στο τοίχωμα του αγωγού (πχ τάσεις στο τοίχωμα). Από άλλες μελέτες, καταλήξαμε ότι μια λογική παραδοχή για την πυκνότητα του πλέγματός μας, είναι όταν η κατά x πλευρά κάθε υπολογιστικού κελιού είναι 5-10 φορές μεγαλύτερη από την κατά y πλευρά του κελιού. Ίσχυε δηλαδή η αναλογία $5 < \frac{\delta x}{\delta y} < 15$. Οι μέγιστοι λόγοι εμφανίζονται στα κελιά κοντά στο τοίχωμα, λόγω της πυκνότερης διαμέρισης κοντά στο τοίχωμα (λόγος λ). Με βάση λοιπόν, αυτή την παραδοχή έγινε η κατά x και η κατά y διαμέριση του αγωγού μας.

Οι τέσσερις αυτές ακμές, οι οποίες αποτελούν τις πλευρές του αγωγού, περικλείουν μία επιφάνεια (*face*). Το επόμενο βήμα μας είναι η ένωση των σημείων των τεσσάρων πλευρών και η τελική δημιουργία του πλέγματος. Τέλος, ορίσαμε τις οριακές συνθήκες για το τοίχωμα, τον άξονα, την είσοδο και την έξοδο του αγωγού.

Ο ευθύγραμμος αγωγός αποτελούταν από μία επιφάνεια, όπως ήδη αναφέραμε, ενώ ο διογκωμένος αγωγός αποτελούταν από τρεις αν είχε αρχικό μήκος ή από δύο χωρίς αρχικό μήκος.

Η πρώτη επιφάνεια ήταν ένας ευθύγραμμος αγωγός, τον οποίο δημιουργήσαμε με τον παραπάνω τρόπο ακριβώς. Η δεύτερη επιφάνεια αποτελεί την κοιλότητα του ανευρύσματος και το τοίχωμά της είναι μία έλλειψη. Στον έναν αγωγό η έλλειψη αρχίζει αμέσως με το τέλος του ευθύγραμμου αγωγού, ενώ στον άλλο αγωγό η έλλειψη ξεκινά πιο ομαλά με τη χρήση δύο τόξων. Εδώ το πλέγμα μας είναι μη δομημένο, αρκετά πιο πυκνό και αποτελείται, όπως είπαμε, από τριγωνικά στοιχεία.

Δηλαδή οι παράλληλες πλευρές στην κατά x κατεύθυνση χωρίστηκαν σε N_{x1}, N_{x2}, N_{x3} τμήματα και οι παράλληλες στη y κατεύθυνση από N_y , δίνοντας τμήματα σταθερού μήκους κατά x $\delta_{x1}, \delta_{x2}, \delta_{x3}$ και μεταβλητού κατά y δ_y .

Για το ανεύρυσμα φτιάξαμε τρία διαφορετικά πλέγματα για να συγκρίνουμε τις διαφορές που προέκυπταν σε διάφορα μεγέθη ανάλογα με το αρχικό μήκος ή την καμπυλότητα του ανευρύσματος.

Ένα πρόβλημα που συναντήσαμε ήταν ότι κάποιοι κόμβοι στην κοιλότητα του ανευρύσματος έβγαιναν εκτός τοιχώματος, φαινόμενο γνωστό ως overlapping. Μπήκαμε στη διαδικασία, λοιπόν, να δούμε αν αυτό έπαιζε κάποιο ρόλο στους περαιτέρω υπολογισμούς μας, αλλά δεν μας δημιουργήθηκαν προβλήματα. Δηλαδή αναρωτηθήκαμε αν έπαιζε ρόλο η πυκνότητα του πλέγματος, οπότε φτιάξαμε πιο χαλαρά πλέγματα, ή η δομή του οπότε φτιάξαμε δομημένα και μη δομημένα, με τριγωνικά αλλά και με τετραγωνικά στοιχεία ή η γεωμετρία του οπότε φτιάξαμε έλλειψη, παραβολή ή υπερβολή. Σε όλες τις περιπτώσεις παρατηρούσαμε το ίδιο φαινόμενο και τα υπολογιστικά μας αποτελέσματα ήταν πρακτικά ίδια.

α) Το πρώτο πλέγμα δεν είχε αρχικό μήκος, δηλαδή δεν υπήρχε πριν το ανεύρυσμα αρχικός ευθύγραμμος αγωγός. Το ανεύρυσμα παρουσιαζόταν με μια έλλειψη με μήκος 0.045m και ύψος 0.016mm.

β) Το δεύτερο πλέγμα είχε αρχικό ευθύγραμμο αγωγό με μήκος δύο διαμέτρους, δηλαδή 0.026mm.

γ) Το τρίτο πλέγμα είχε αρχικό μήκος, αλλά η καμπύλη του ανευρύσματος είχε μια μικρή καμπυλότητα ώστε η αύξηση να γίνεται πιο σταδιακά και να μπορούμε να συγκρίνουμε διαφορές με το πλέγμα που δεν είχε καμπυλότητα στα διάφορα μεγέθη όπως τοιχωματική τάση, πίεση κτλ.

Επειδή θα μελετήσουμε ένα εύρος αριθμών Re 25-600 και επειδή όσο αυξάνεται ο αριθμός Re αυξάνεται και το μήκος που απαιτείται για τη διαμόρφωση της ροής χρησιμοποιήσαμε δύο μήκη για τον αγωγό. Το πρώτο πάνω στο οποίο μελετήσαμε τη ροή για αριθμούς Re 25-150 έχει μήκος 20 διαμέτρους όπου η μία διάμετρος είναι 0.013m ,ενώ το δεύτερο έχει μήκος 40 διαμέτρους .

Οι κατανομές ταχυτήτων που προέκυψαν από τον ευθύγραμμο αγωγό ,εισάχθηκαν ως οριακή συνθήκη εισόδου σε αυτά τα πλέγματα ,για τον υπολογισμό μόνιμων πεδίων ταχύτητας σε ένα ανεύρυσμα.

Πλέγμα μήκους 20 διαμέτρων

- Ευθύγραμμος αγωγός

Χρησιμοποιήθηκε για τους υπολογισμούς μόνιμων πεδίων και τη μελέτη της συμπεριφοράς των μη νευτώνειων στην πλήρως διαμορφωμένη ροή.

$$N_x=500$$

$$N_y=50 \quad , \quad \lambda=0.98$$

$$N_{cv}=25 \cdot 10^3$$

- Διογκωμένος αγωγός

1)Αγωγός χωρίς αρχικό μήκος

$$N_y=70 \quad , \quad \lambda=0.98$$

$$N_{x1}=300 \quad (\text{το μήκος της περιοχής του ανευρύσματος})$$

$$N_{x2}=600 \quad (\text{το μήκος του ευθύγραμμου αγωγού στο τέλος})$$

$$N_{cv}=104.038$$

Η πρώτη επιφάνεια, δηλαδή αυτή του ανευρύσματος αποτελείται από 62.038 τριγωνικά στοιχεία ,ενώ η επιφάνεια του ευθύγραμμου αγωγού από 42000 στοιχεία.

2)Αγωγός με αρχικό μήκος

$$N_y=70 \quad , \quad \lambda=0.98$$

$$N_{x1}=60 \quad (\text{το μήκος του αρχικού ευθύγραμμου αγωγού})$$

$$N_{x2}=300 \quad (\text{το μήκος της περιοχής του ανευρύσματος})$$

$N_{x3}=600$ (το μήκος του ευθύγραμμου αγωγού στο τέλος)

$N_{cv}=108.188$

Στην περίπτωση αυτή η κοιλότητα του ανευρύσματος αποτελείται από 61.988 τριγωνικά στοιχεία.

3) *Αγωγός με αρχικό μήκος και καμπυλότητα*

$N_y=70$, $\lambda=0.98$

$N_{x1}=60$

$N_{x2}=300$ (το τμήμα της έλλειψης χωρίστηκε σε 200 σημεία ,ενώ το κάθε τόξο σε 50 σημεία ,άρα συνολικά η καμπύλη ολόκληρη αποτελείται από 300 σημεία.)

$N_{x3}=600$

$N_{cv}=100.026$

Πλέγμα μήκους 40 διαμέτρων

- Ευθύγραμμος αγωγός

$N_x=1000$

$N_y=50$, $\lambda=0.98$

$N_{cv}=50 \cdot 10^3$

- Διογκωμένος αγωγός

1) *Αγωγός χωρίς αρχικό μήκος*

$N_y=70$, $\lambda=0.98$

$N_{x1}=300$ (το μήκος της περιοχής του ανευρύσματος)

$N_{x2}=1200$ (το μήκος του ευθύγραμμου αγωγού στο τέλος)

$N_{cv}=146.038$

2) *Αγωγός με αρχικό μήκος*

$N_y=70$, $\lambda=0.98$

$N_{x1}=60$ (το μήκος του αρχικού ευθύγραμμου αγωγού)

$N_{x2}=300$ (το μήκος της περιοχής του ανευρύσματος)

$N_{x3}=1200$ (το μήκος του ευθύγραμμου αγωγού στο τέλος)

$N_{cv}=150.188$

3)Αγωγός με αρχικό μήκος και καμπυλότητα

$$N_y=70, \lambda=0.98$$

$$N_{x1}=60$$

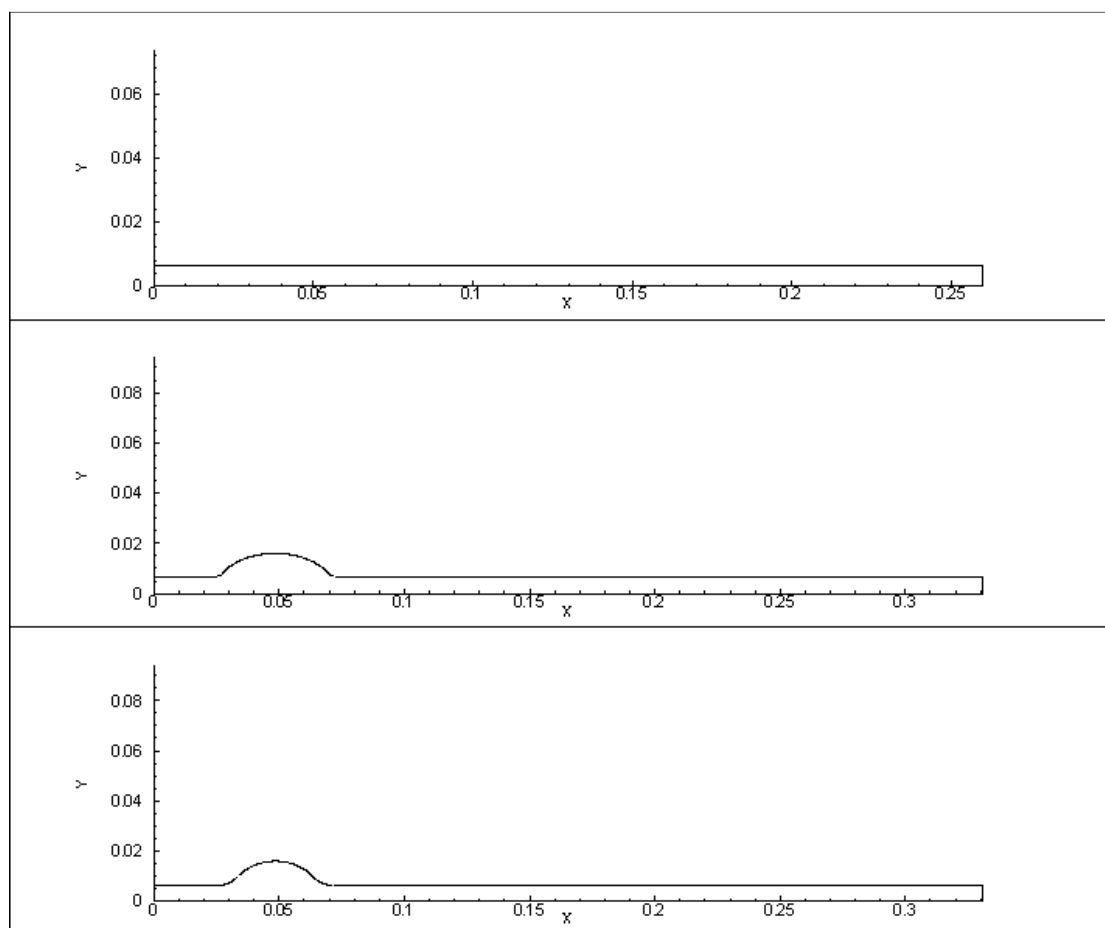
$N_{x2}=300$ (το τμήμα της έλλειψης χωρίστηκε σε 200 σημεία ,ενώ το κάθε τόξο σε 50 σημεία ,άρα συνολικά η καμπύλη ολόκληρη αποτελείται από 300 σημεία.

$$N_{x3}=1200$$

$$N_{cv}=142.026$$

Τη γεωμετρία στην κοιλότητα του ανευρύσματος, δηλαδή τη διάμετρο του ευθύγραμμου αγωγού καθώς και του διογκωμένου και το μήκος του ανευρύσματος επιλέχτηκαν με βάση την εργασία [4] ώστε να γίνουν παρακάτω συγκρίσεις.

Η γεωμετρία κάθε αγωγού φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, Σχ.5.4.



Σχ.5.4: η γεωμετρία των αγωγών στις διαστάσεις που χρησιμοποιήθηκαν

iv) Ακρίβεια σύγκλισης υπολογισμών

Το απόλυτο κριτήριο σύγκλισης για τις εξισώσεις ορμής R^m , προκύπτει από την παρακάτω εξίσωση, όπου υπονοείται άθροισμα για όλα τα κελιά P του πλέγματος.

$$R^m = \sum_{cells-P} \left| \sum_{nb} a_{nb} u_{nb} + b - a_P u_P \right|, \quad R^c = \sum_{cells-P} |q_P| \quad (5.14)$$

Για την εξίσωση συνέχειας εξαρτάται από τον q_P ρυθμού παραγωγής της μάζας στο κελί P.

Η ακρίβεια σύγκλισης υπολογισμών τέθηκε στα $\delta r = 10^{-6}$ κατά απόλυτες τιμές (*residuals-absolute criteria*).

Αυτό σημαίνει ότι τα μεγέθη του πεδίου ροής θεωρούνταν υπολογισμένα, αν σε δυο διαδοχικές επαναλήψεις στις εξισώσεις ορμής κατά κατεύθυνση και στην εξίσωση συνέχειας εμφανιζόταν διαφορά $\delta r < 10^{-6}$.

Κάναμε δοκιμές στα αρχικά στάδια της μελέτης της μόνιμης ροής στο διογκωμένο αγωγό, και παρατηρήσαμε ότι η ακρίβεια $\delta r = 10^{-4}$ δεν μας έδινε ικανοποιητικά αποτελέσματα στις γραμμές ροής του πεδίου, οι οποίες εμφανίζουν προσκολλημένη ροή σε περιοχές ανακυκλοφορίας.

Αντίθετα, με αντίστοιχες δοκιμές στον ευθύγραμμο αγωγό η ακρίβεια $\delta r = 10^{-3}$ φάνηκε ικανοποιητική.

Για όλους τους υπολογισμούς μας κρίθηκε αναγκαίο να αυξηθεί το κριτήριο σύγκλισης σε $\delta r = 10^{-6}$.

Στο FLUENT επιλύονται διδιάστατες εξισώσεις σε μονάδες SI, στις οποίες εισάγεται ένα πλέγμα με μεγέθη $O(10^{-3} m)$. Μια λογική είναι να θεωρήσουμε τις λύσεις συγκεκλιμένες όταν τα μεγέθη μας έχουν προσεγγιστεί με ακρίβεια χιλιοστού, δηλαδή έχουν φτάσει τρεις τάξεις μεγέθους πιο κάτω από το μικρότερο μήκος που εισάγεται. Με αυτή τη λογική λοιπόν, η σύγκλιση στο FLUENT εξασφαλίζεται με ακρίβεια $\delta r = 10^{-6}$ κατά απόλυτες τιμές.

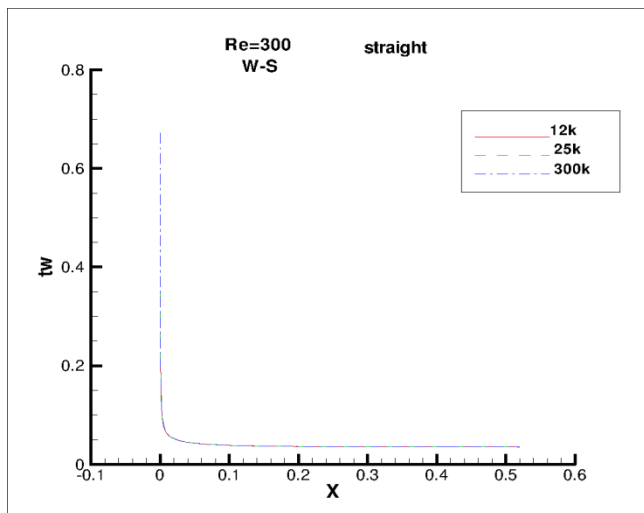
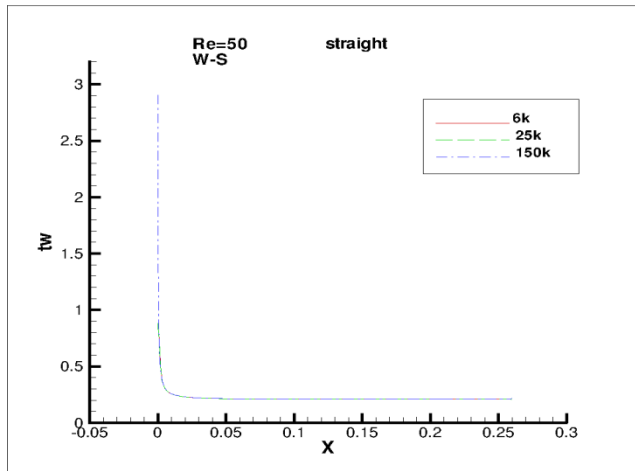
v) Ανεξαρτησία αποτελεσμάτων από τη διαδικασία επίλυσης

Την ανεξαρτησία των αποτελεσμάτων μας από τη διαδικασία επίλυσης θα δείξουμε με ένα από τα μεγέθη υψηλού ενδιαφέροντος της μελέτης μας, τις διαστατές διατμητικές τάσεις στο τοίχωμα τ_w , όπως αυτές προέκυψαν στα δοκιμαστικά δεδομένα.

Το μέγεθος αυτό δεν προκύπτει άμεσα από την επίλυση του πεδίου ροής, αλλά υπολογίζεται έμμεσα από παραγώγους της ταχύτητας και το μεταβλητό ιξώδες στα μη νευτώνεια.

Συνέπεια αυτού είναι ότι τα όποια σφάλματα της διαδικασίας επίλυσης θα εμφανιστούν ενισχυμένα και οι αποκλίσεις που προκύπτουν από τα συγκρινόμενα μεγέθη θα είναι πιο ευδιάκριτες.

Κατ' αρχήν συγκρίναμε πλέγματα διαφορετικής πυκνότητας το καθένα για τους ευθύγραμμους, καθώς και για τους διογκωμένους αγωγούς. Δεν τέθηκε θέμα σύγκρισης με πολλά πλέγματα διαφορετικών πυκνοτήτων, γιατί υπάρχουν στη βιβλιογραφία πληροφορίες σχετικές. [67,68] Όπου $k=10^3$ ο αριθμός των υπολογιστικών κελιών.



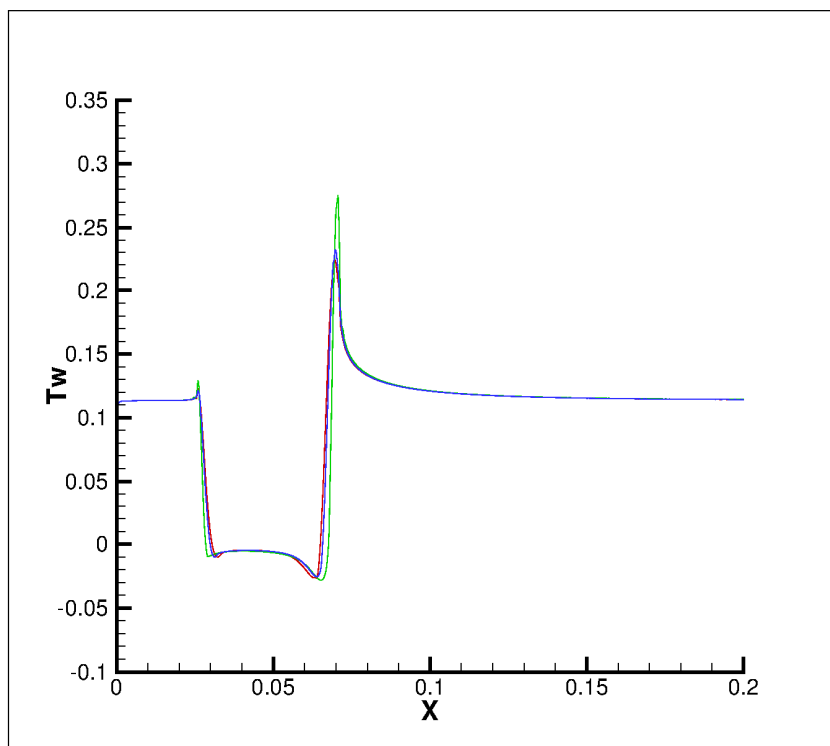
Σχ.5.5: μελέτη ανεξαρτησίας πλέγματος

Στην περίπτωση του διογκωμένου αγωγού έγινε σύγκριση πλεγμάτων δομημένων και μη δομημένων, με τετραγωνικά ή τριγωνικά στοιχεία, μίας επιφάνειας ή περισσότερων. Θα δείξουμε κάποια αποτελέσματα από πλέγματα που δοκιμάσαμε μέχρι να καταλήξουμε στα πλέγματα που μελετήσαμε.

Δημιουργήσαμε διάφορα πλέγματα, διαφορετικής καμπυλότητας και συγκρίναμε τις διατμητικές τάσεις για $Re=200$ για το νευτώνειο ρευστό.

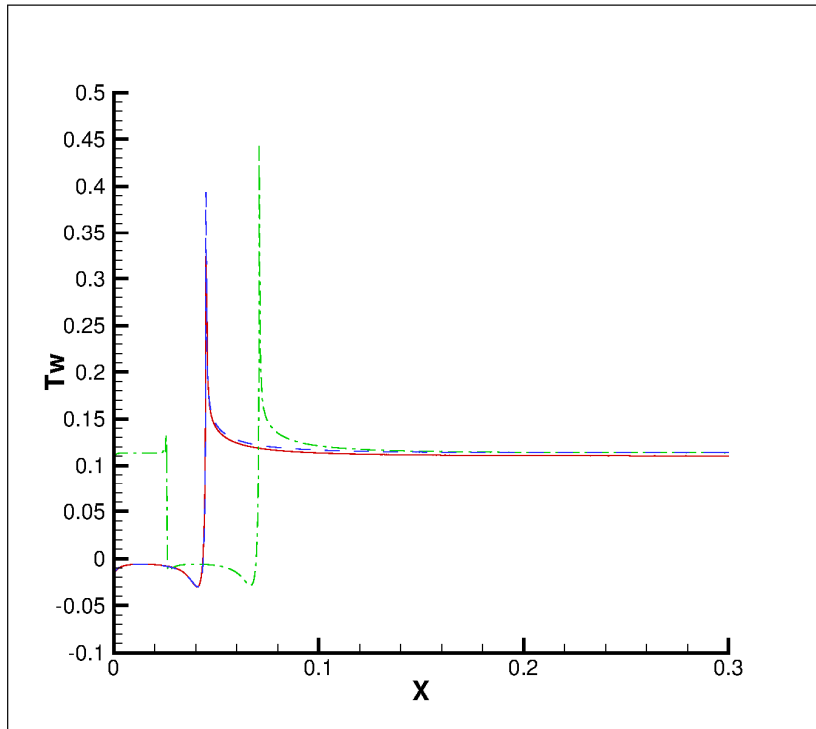
Στο σχήμα 5.5 δείχνουμε τρεις διαφορετικές καμπυλότητες πλέγματος, δηλαδή τα δύο τόξα (fillet arc) έχουν διαφορετική διάμετρο. Με την κόκκινη γραμμή παρουσιάζεται το δικό μας πλέγμα, με την πράσινη πλέγμα με μικρότερη καμπυλότητα και με τη μπλε με πιο έντονη καμπυλότητα.

Παρατηρήσαμε ότι όσο πιο μικρή είναι η καμπυλότητα τόσο πιο απότομη είναι η αύξηση της διατμητικής τοιχωματικής τάσης. Εμείς καταλήξαμε σε μία μεσαία κατάσταση, ώστε να είναι και το σχήμα του ανευρύσματος λογικό.



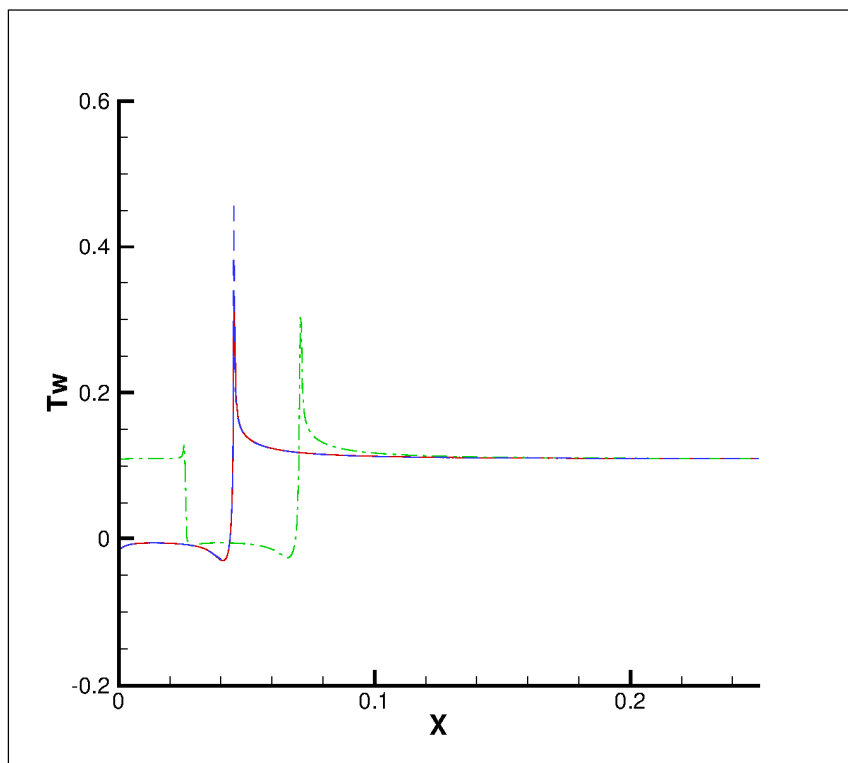
Σχ.5.6: μελέτη ανεξαρτησίας πλέγματος

Δεύτερον, δημιουργήσαμε πλέγματα δομημένα ή μη δομημένα. Στο σχήμα 5.6 παρουσιάζεται με την κόκκινη γραμμή το δικό μας πλέγμα, με την πράσινη δομημένο πλέγμα και με την μπλε μη δομημένο αλλά με τετραγωνικά στοιχεία.



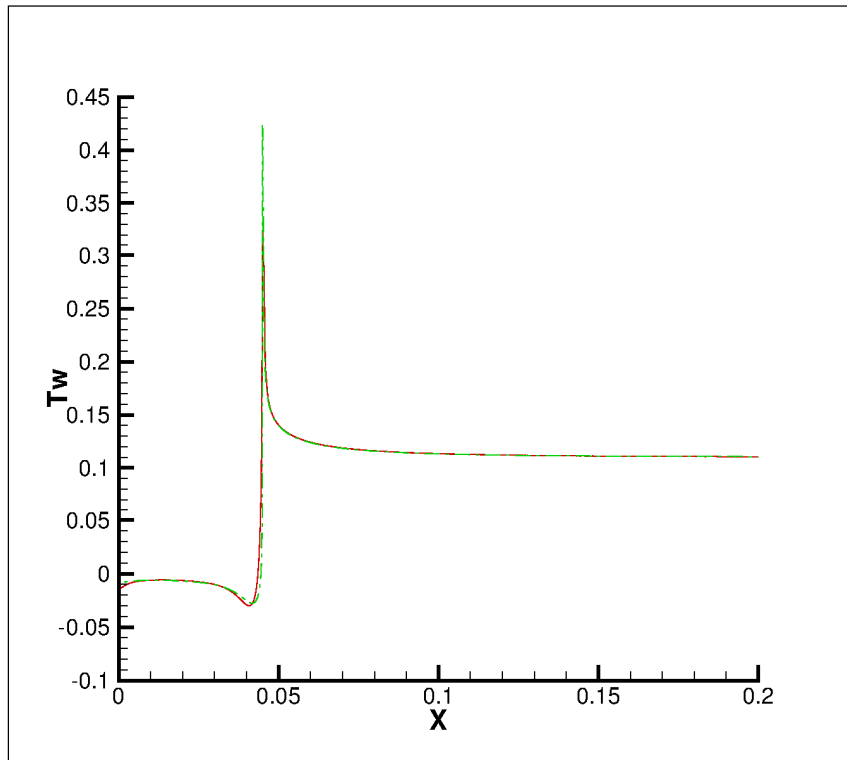
Σχ.5.7: ανεξαρτησία πλέγματος

Στη συνέχεια δημιουργήσαμε πλέγματα διαφορετικής πυκνότητας, όπως και στον ευθύγραμμο αγωγό. Με την κόκκινη γραμμή είναι το δικό μας πλέγμα, με την πράσινη πλέγμα μικρότερης πυκνότητας και με τη μπλε το πλέγμα είναι πυκνότερο.



Σχ.5.7 μελέτη ανεξαρτησίας πλέγματος

Τέλος, φτιάξαμε και πλέγμα χωρίς να πυκνώνει σταδιακά προχωρώντας προς το τοίχωμα του αγωγού, δηλαδή με ratio 1, με την πράσινη γραμμή.



Σχ.5.8: ανεξαρτησία πλέγματος

Παράμετροι υπολογισμού των μη νευτώνειων μοντέλων στο FLUENT

W-S

Consistency Index: $k = 0.01467 Pa \cdot s^{0.7755}$

Power-Law Index: $n = 0.7755$

Reference Temperature: $T_0 = 0$ (η εξίσωση ενέργειας αμελείται)

Minimum Viscosity Limit: $\mu_{\min} = 0.0001 Pa \cdot s$

Maximum Viscosity Limit: $\mu_{\max} = 0.1 Pa \cdot s$

H-B

Consistency Index: $k = 0.0089721 Pa \cdot s^{0.8601}$

Power-Law Index: $n = 0.8601$

Yield Stress Threshold: $\tau_0 = 0.0175 Pa$

Yielding Viscosity: $\mu_0 = 10 Pa \cdot s$

Quemada

Η χρήση του ρευστού Quemada στο FLUENT απαιτεί να εισάγουμε τη συνάρτηση ορισμού του μέσω *header file* γλώσσας προγραμματισμού C, το οποίο παρουσιάζεται στο ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ.

$$k_0 \rightarrow k_0 = 4.33$$

$$k_\infty \rightarrow k_\infty = 2.07$$

$$\mu_f \rightarrow mf = 0.0012$$

$$\gamma_c \rightarrow g = 1.88$$

$$\varphi \rightarrow h = 0.45$$

Casson

Η συνάρτηση ορισμού του ρευστού Casson εισάγεται με *header file* γλώσσας προγραμματισμού C και παρουσιάζεται στο ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ.

$$\mu_\infty \rightarrow m_0 = 0.0031$$

$$\tau_0 \rightarrow \text{double } t_0 = 0.01082$$

$$m \rightarrow k = 500$$

vi) Ταυτότητα υπολογισμών

Λειτουργικό σύστημα: MICROSOFT WINDOWS 2007

Υπολογιστικό πακέτο: FLUENT 6.1.22, Fluent Inc.

Υπολογιστικοί χρόνοι:

Θα αναφέρουμε ορισμένους υπολογιστικούς χρόνους που απαιτήθηκαν για την επίλυση των πεδίων ροής.

Προφανώς, ο υπολογιστικός χρόνος που απαιτούσε η επίλυση κάθε πεδίου ήταν αύξουσα συνάρτηση του μεγέθους του χρησιμοποιούμενου υπολογιστικού πλέγματος. Δηλαδή όσο πιο πυκνό ήταν το πλέγμα μας, τόσο περισσότερος χρόνος απαιτούταν για την επίλυσή του. Όμως, δεν έπαιζε μόνο το πλέγμα ρόλο στη διαμόρφωση του υπολογιστικού χρόνου, αλλά θα αναφέρουμε και άλλες παραμέτρους.

Σημαντικό ρόλο έπαιξε η επίδραση των μη νευτώνειων ρευστών, καθώς με τη χρήση τους ο υπολογιστικός χρόνος αυξανόταν αισθητά. Στα μοντέλα αυτά, αντιμετωπίστηκαν δυσκολίες στη σύγκλιση και ιδιαίτερα στα μοντέλα αυτά που εμείς εισάγουμε την εξίσωση ιξώδους, δηλαδή στα μοντέλα Casson και Quemada.

Μία ακόμα παράμετρος που επηρέασε τον υπολογιστικό χρόνο είναι το μήκος κάθε αγωγού, δηλαδή με την αύξηση του μήκους αυξανόταν και ο χρόνος. Τέλος, ο αριθμός Re έπαιζε και αυτός με τη σειρά του κάποιο ρόλο στον απαιτούμενο χρόνο, καθώς με τη μείωσή του ο υπολογιστικός χρόνος αυξανόταν.

Για τον ευθύγραμμο αγωγό $25 \cdot 10^3 CV$ ο υπολογιστικός χρόνος για όλα τα ρευστά ήταν περίπου 10 min , ενώ για τον ευθύγραμμο $50 \cdot 10^3 CV$ αυξανόταν στα 15 min .

Στο διογκωμένο αγωγό με μήκος $20d$ ο απαιτούμενος χρόνος για το νευτώνειο ήταν περίπου 20 min , ενώ με μήκος $40d$ έφτανε τα 25 min . Τώρα για τα μη νευτώνεια για τον αγωγό με μήκος $20d$ κυμαινόταν σε 30 min–120 min , ενώ για μήκος $40d$ στα 40 min–180 min .

Φυσικά, όπως αναφέραμε, ο μεγαλύτερος υπολογιστικός χρόνος εμφανιζόταν για το ρευστό Quemada και λίγο μικρότερος για το ρευστό Casson.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΖΗΤΗΣΗ

1.Πεδία ροής

Μελετήθηκαν οι ροές των μη νευτώνειων ρευστών Walburn-Schneck, Herschel-Bulkley, Quemada, Casson και του νευτώνειου για αριθμούς $Re=25, 50, 75, 100, 150, 200, 250, 300, 400, 500, 600$.

Για κάθε μοντέλο το ιξώδες μ_{eff} έχει και διαφορετικό ορισμό ,κατά συνέπεια έχουμε και διαφορετική ταχύτητα αναφοράς $U_{reff} = U_0$ αφού το ιξώδες υπεισέρχεται στον αδιάστατο αριθμό ομοιότητας της ροής Re .

$$Re = \frac{\rho U_0 d}{\mu_{eff}}$$

Οι υπολογισμοί έγιναν για τα παρακάτω διαστατά μεγέθη σε μονάδες SI.

Διάμετρος αγωγού: $d=0.013$ m

πυκνότητα: $\rho=1050$ kg/m³

αποτελεσματική συνεκτικότητα:

νευτώνειο: $\mu_{eff} = \mu_{blood} = 0.0035$ Pa·s

W-S : $\mu_{eff} = k \left(\frac{d}{U_0} \right)^{1-n}$ ($n = 0.7755$, $k = 0.01467$ Pa · s^{0.7755})

H-B : $\mu_{eff} = k \left(\frac{d}{U_0} \right)^{1-n}$ ($n = 0.8601$, $k = 0.0089721$ Pa · s^{0.8601})

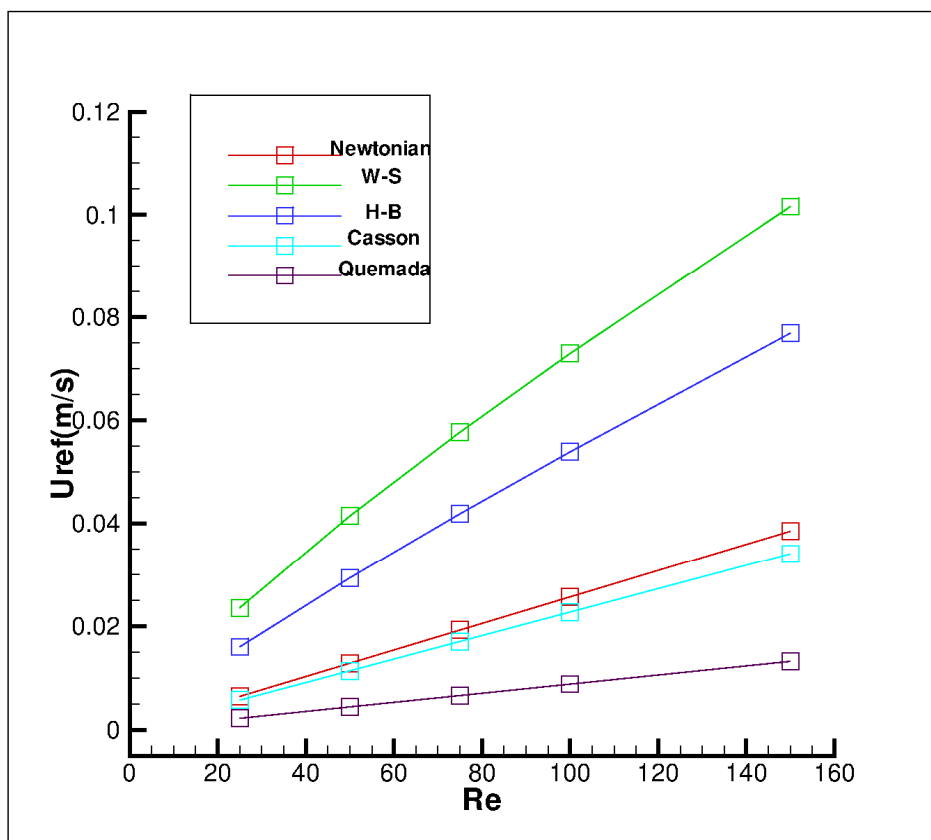
Casson : $\mu_{eff} = \mu_0 = 0.0031$ Pa·s

Quemada : $\mu_{eff} = \mu_{plasma} = 0.0012$ Pa·s

Όπου n : ο συντελεστής μη νευτώνειας συμπεριφοράς και

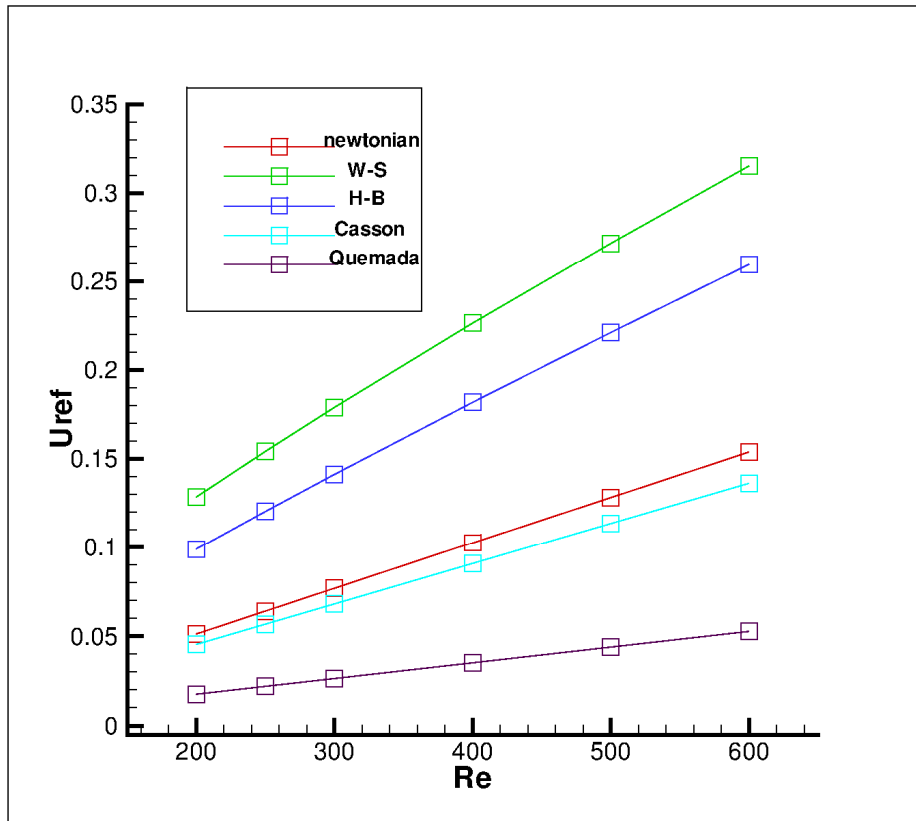
k : φαινόμενη συνεκτικότητα.

Στα διαγράμματα Δ6.1.1 και Δ6.1.2 παρουσιάζουμε αυτή τη σχέση $U_{ref} - Re$ που είναι γραμμική για το νευτώνειο και τα μοντέλα Quemada και Casson, αλλά όχι για τα W-S και H-B.



Δ6.1.1: Η ταχύτητα αναφοράς U_{ref} ως συνάρτηση του αριθμού Re σε κάθε μοντέλο στο εύρος τιμών $Re = 25-150$.

Για τη διατήρηση του αριθμού Re σταθερού, όσο πιο μικρή είναι η τιμή του μ_{eff} τόσο μικρότερη είναι και η τιμή της U_{ref} . Έτσι, μπορούμε να εξηγήσουμε γιατί το ρευστό Quemada παρουσιάζει τόσο μεγάλη διαφορά στην αρχική του ταχύτητα σε σχέση με τα υπόλοιπα ρευστά, καθώς ισχύει $\mu_{eff} = 0.0012 Pa \cdot s$, δηλαδή αρκετά μικρότερη τιμή από τα υπόλοιπα ρευστά. Ακολουθεί το Casson και την μεγαλύτερη ταχύτητα την συναντάμε στο W-S.



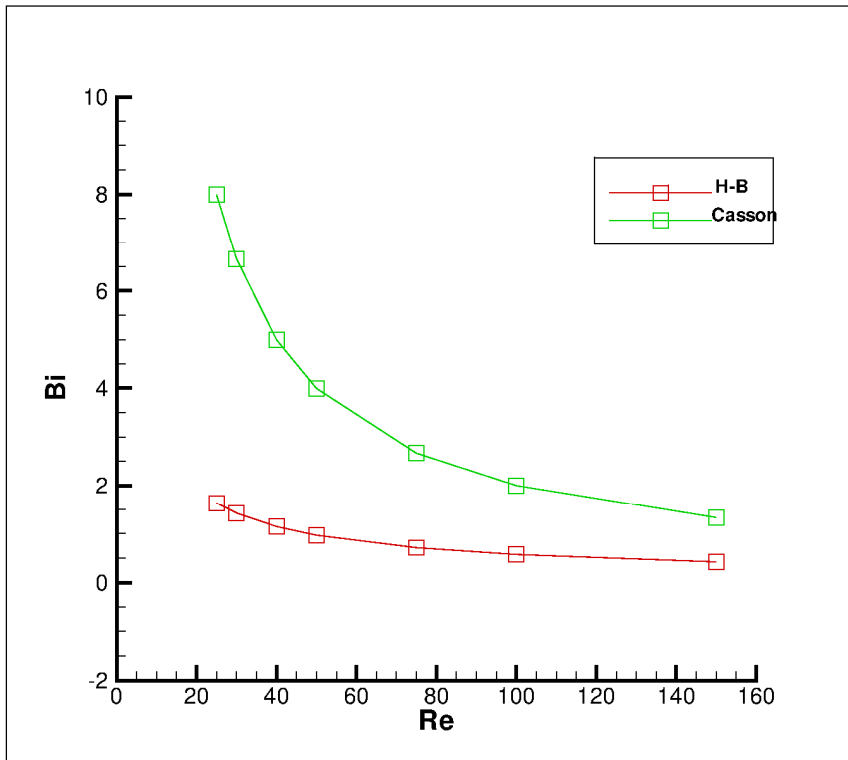
Δ6.1.2: Η ταχύτητα αναφοράς U_{ref} ως συνάρτηση του αριθμού Re σε κάθε μοντέλο στο εύρος τιμών $Re = 200-600$.

Για τα δύο ιξωδοπλαστικά μοντέλα H-B και Casson απαραίτητος είναι και ο προσδιορισμός ενός ακόμα αδιάστατου αριθμού, του αριθμού Bi , που υποδεικνύει τη σημαντικότητα της αρχικής τάσης για τη ροή του ρευστού, σχετικά με τις συνεκτικές δυνάμεις. Όσο αυξάνει ο Bi τόσο αυξάνει η αρχική τάση άρα τόσο πιο εύκολο είναι για το ρευστό να διαμορφωθεί.

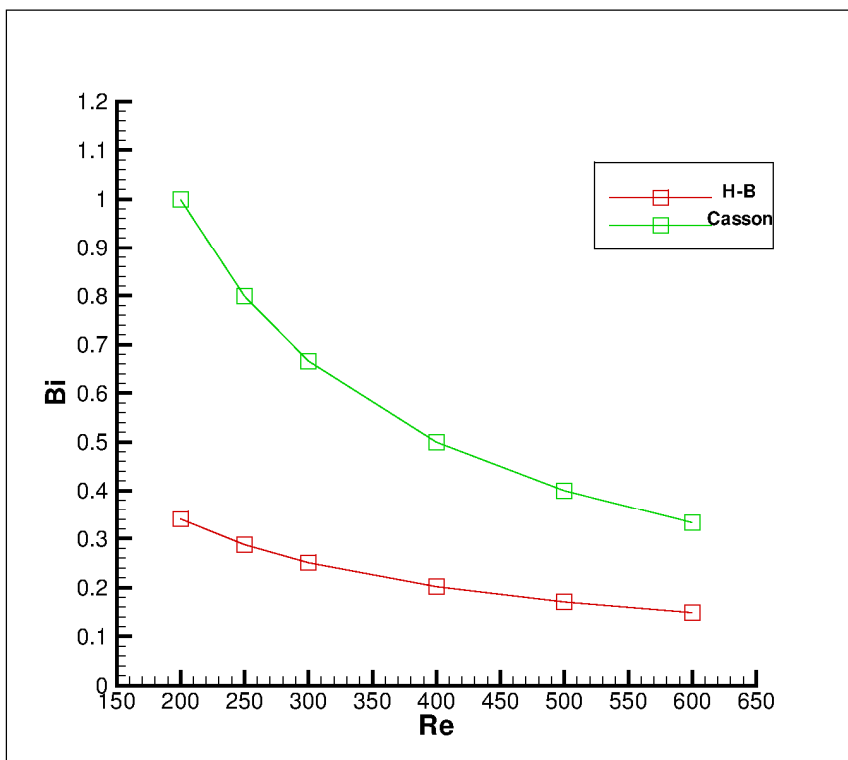
Η εμπειρική σχέση ορισμού είναι:

$$Bi = \left(\frac{\tau_0}{k} \right) \left(\frac{d}{U_0} \right)^n$$

Αυτό που μας ενδιαφέρει περισσότερο είναι η σχέση του αριθμού Bi με τον αριθμό Re . Η σχέση τους παρουσιάζεται στα διαγράμματα Δ6.2.1 και Δ6.2.2.



Δ6.2.1: Η σχέση των αριθμών Bi και Re στα ιξωδοπλαστικά μοντέλα για Re 25-150.



Δ6.2.2: Η σχέση των αριθμών Bi και Re στα ιξωδοπλαστικά μοντέλα για Re 200-600.

Μια παρατήρηση που κάναμε είναι ότι το ρευστό Casson έχει αρκετά πιο μεγάλο αριθμό Bi από το H-B, ιδιαίτερα σε χαμηλούς Re. Αυτό δικαιολογεί το μικρό μήκος που απαιτεί για να διαμορφωθεί πλήρως η ροή, όπως θα δούμε και παρακάτω. Με βάση τη σχέση ορισμού του προκύπτει για μεγάλο Bi μικρή ταχύτητα U_0 . Για παράδειγμα, για Re=25 για το H-B $U_0 = 0.01597$, ενώ αντίστοιχα για το Casson $U_0 = 0.00568$.

1.1. Ευθύγραμμος αγωγός

Η πρώτη περίπτωση αγωγού που μελετήσαμε ήταν ο ευθύγραμμος αγωγός, τη γεωμετρία του οποίου έχουμε αναλύσει σε προηγούμενα κεφάλαια. Χρησιμοποιήσαμε δύο διαφορετικά μήκη αγωγών και σε καθένα μελετάμε και διαφορετικό εύρος τιμών αριθμών Re.

Στον ευθύγραμμο αξονικά συμμετρικό αγωγό, θεωρούμε ότι ελεύθερο ρεύμα ρευστού, ταχύτητας U_0 , εισέρχεται στο σημείο $L_{in} = 0$ και εξέρχεται στο $L_{out} = 20d$ στη μία περίπτωση και στο $L_{out} = 40d$ στην άλλη περίπτωση. Πρόκειται για ροή Poiseuille και οι τάσεις που ασκούνται στον αγωγό μειώνονται μέχρι μια ορισμένη τιμή $\tau_{w, final}$, η οποία διατηρείται από το σημείο εκείνο και κατόπιν μαζί με την ακτινική κατανομή της ταχύτητας.

Σημαντικές πληροφορίες για τη συμπεριφορά κάθε μοντέλου παίρνουμε από κάποια χαρακτηριστικά, όπως το μήκος που απαιτείται για να διαμορφωθεί πλήρως η ροή, οι τάσεις που ασκούνται στον αγωγό καθώς και η ακτινική κατανομή των ταχυτήτων.

Τα μεγέθη με τα οποία ασχολούμαστε ιδιαίτερα στην εργασία μας είναι:

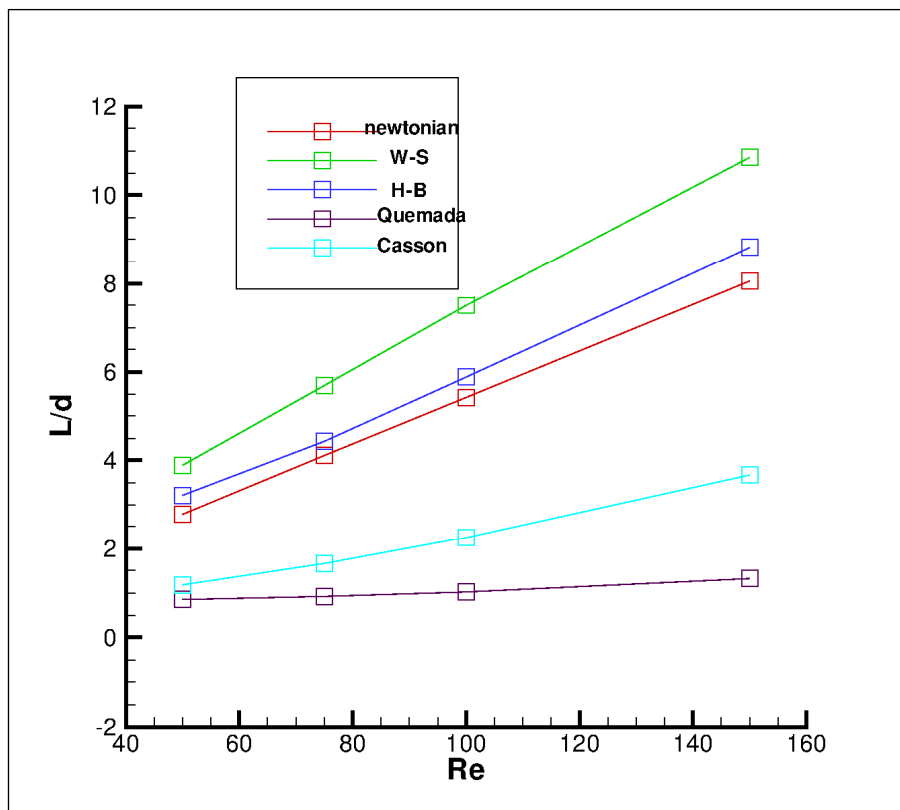
- i. Μήκος διαμόρφωσης
- ii. Λόγος ταχύτητας στον άξονα και μέσης ταχύτητας διατομής
- iii. Κατανομές ταχυτήτων
- iv. Διατμητικές τάσεις στο τοίχωμα
- v. Πτώση στατικής πίεσης

i) Μήκος διαμόρφωσης

Το μήκος διαμόρφωσης (*entrance length*) είναι το απαιτούμενο μήκος αγωγού από την είσοδο, που πρέπει να καλύψει το εισερχόμενο ρευστό, ώστε να επέλθει πλήρως διαμορφωμένη ροή. Θεωρούμε ότι το ρευστό φτάνει σε κατάσταση πλήρως διαμορφωμένης ροής, στην αξονική θέση L_D στην οποία, η τιμή των τάσεων που ασκεί στον αγωγό $\tau_w(L_D)$, φτάνει το 101% της τελικής του τιμής $\tau_{w, final}$.

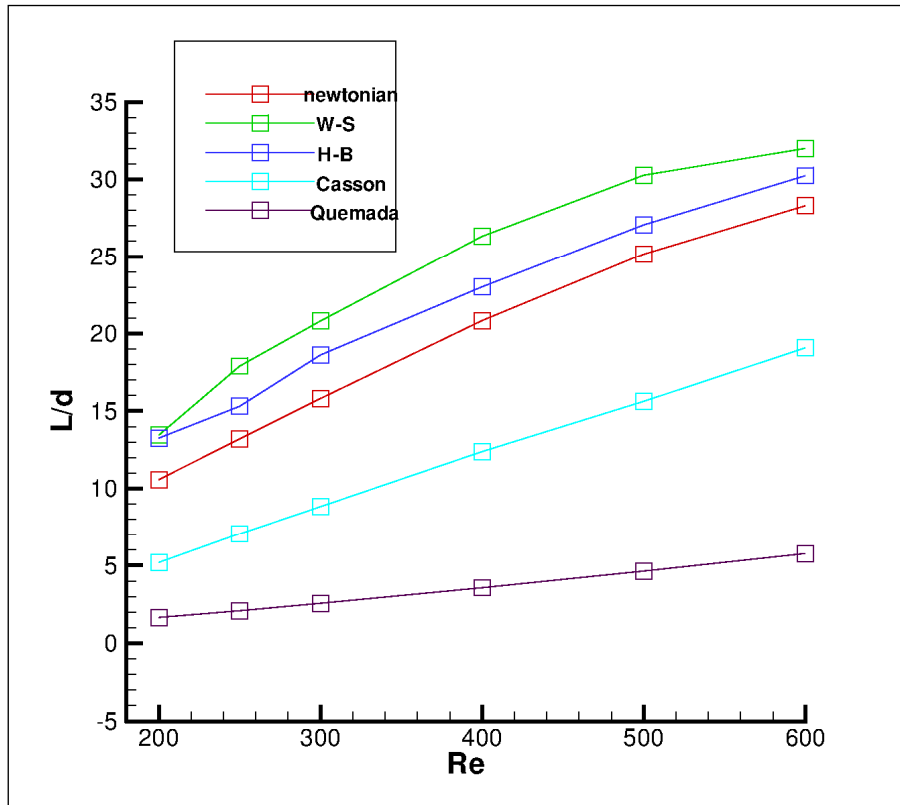
$$\tau_w(L_D) = 1.01\tau_{w, final}$$

Το μήκος αυτό $x_f = \frac{L_D}{d}$ παρουσιάζεται αδιαστατοποιημένο με τη διάμετρο του αγωγού d , στα παρακάτω διαγράμματα Δ6.3.1 και Δ6.3.2.



Δ6.3.1.: Απαιτούμενο αδιάστατο μήκος διαμόρφωσης x_f για Re 50-150.

Για το νευτώνειο ρευστό η σχέση $x_f = 0.06Re$, φαίνεται να ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα για ροές μακριά από συνθήκες ερπυσμού ($Re > 20$). [69,70] Συγκεκριμένα, για χαμηλούς Re 25-100, οι τιμές που προκύπτουν στην μελέτη μας για το νευτώνειο ρευστό επαληθεύονται από την παραπάνω σχέση, αλλά καθώς ο Re αυξάνεται οι τιμές αποκλίνουν και παρατηρούμε ότι απαιτείται μικρότερο μήκος για να διαμορφωθεί η ροή από το αναμενόμενο. Όσο ο Re αυξάνεται τόσο αυξάνεται και το μέγιστο σφάλμα, δηλαδή για $Re=200$ το μέγιστο σφάλμα είναι κάτω από 10%, ενώ για $Re=600$ το μέγιστο σφάλμα ανέρχεται κοντά στο 20%.



Δ6.3.2: Απαιτούμενο αδιάστατο μήκος διαμόρφωσης x_f για Re 200-600.

Στο W-S οι τιμές μας βρίσκονται μέσα στα πλαίσια που αναφέρουν οι άλλες μελέτες για το μοντέλο Εκθετικού Νόμου, συγκεκριμένα στο βιβλίο «*Development-Length Requirements for Fully Developed Laminar Pipe Flow of Inelastic Non-Newtonian Liquids*» [70] παρουσιάζονται όλες οι σχέσεις $x_f = f(Re)$ για το συγκεκριμένο μοντέλο και με βάση τον Re που έχουμε ορίσει: $0.05Re < x_f < 0.09Re$.

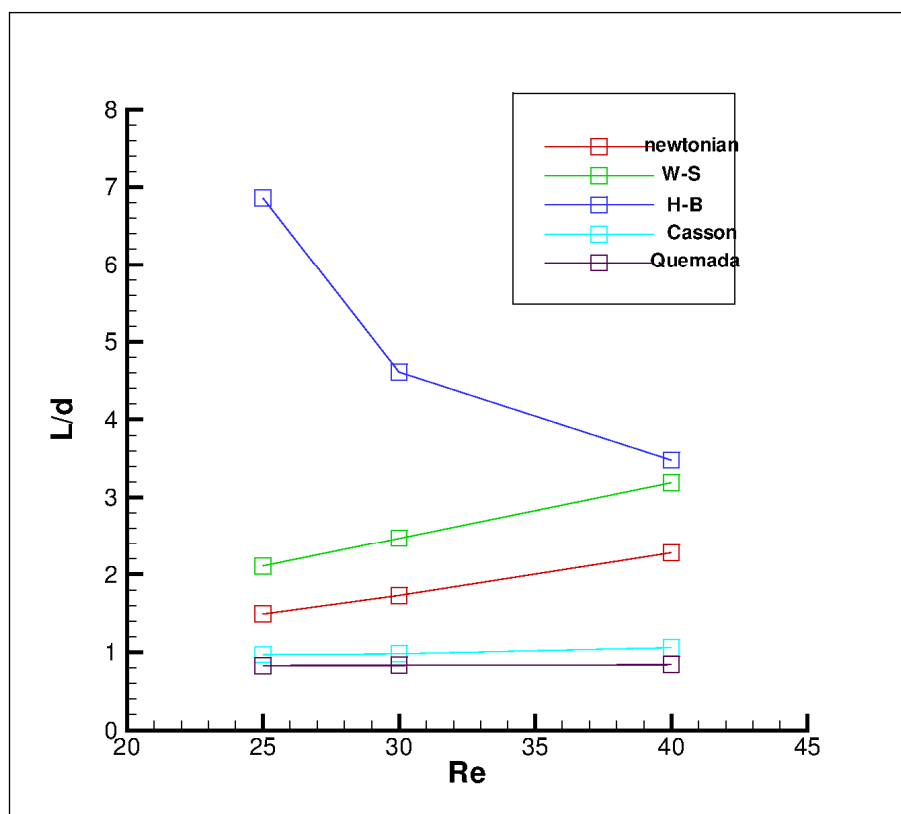
Για το μοντέλο Εκθετικού Νόμου συγκεκριμένα δεν υπάρχουν αρκετά πειραματικά αποτελέσματα, αλλά βρήκαμε αριθμητικές μελέτες ώστε να γίνει σύγκριση αποτελεσμάτων. [71,72,73,74,75]

Οι τιμές μας για το μοντέλο W-S βρίσκονται μέσα στα πλαίσια που ανφέρουν οι παραπάνω μελέτες.

Στο διάγραμμα για εύρος τιμών Re 50-150 μπορούμε να εφαρμόσουμε απλή γραμμική σχέση μεταξύ Re και x_f , ενώ για κάθε μοντέλο η κλίση της ευθείας που προκύπτει είναι πολύ διαφορετική. Ενώ όσο ο Re αυξάνεται η σχέση του με το μήκος διαμόρφωσης παύει να είναι γραμμική.

Υπάρχουν μεγάλες αποκλίσεις μεταξύ των μοντέλων. Παρατηρούμε ότι το ρευστό W-S απαιτεί το μεγαλύτερο μήκος από τα υπόλοιπα ρευστά για να διαμορφωθεί πλήρως η ροή, ενώ ακολουθεί το ρευστό H-B. Απ' την άλλη το νευτώνιο βρίσκεται σε μια ενδιάμεση κατάσταση έχοντας όμως αισθητή διαφορά από τα δύο άλλα ρευστά Casson και Quemada τα οποία χρειάζονται πολύ λιγότερα μήκη αγωγού για να διαμορφωθούν. Επίσης, παρατηρούμε ότι όσο ο Re αυξάνεται τόσο μεγαλύτερη διαφορά στα μήκη διαμόρφωσης έχουν τα ρευστά μεταξύ τους. Για παράδειγμα για Re=600 το ρευστό W-S χρειάζεται 32 μήκη αγωγού ενώ το ρευστό Quemada μόλις 5.8, ενώ για Re=50 το W-S χρειάζεται 3.9 μήκη και το Quemada 0.9.

Θα λέγαμε λοιπόν, ότι τα ρευστά W-S και H-B συμπεριφέρονται ως λεπτόρρευστα σχετικά με το νευτώνειο, ενώ τα ρευστά Quemada και Casson ως παχύρρευστα.



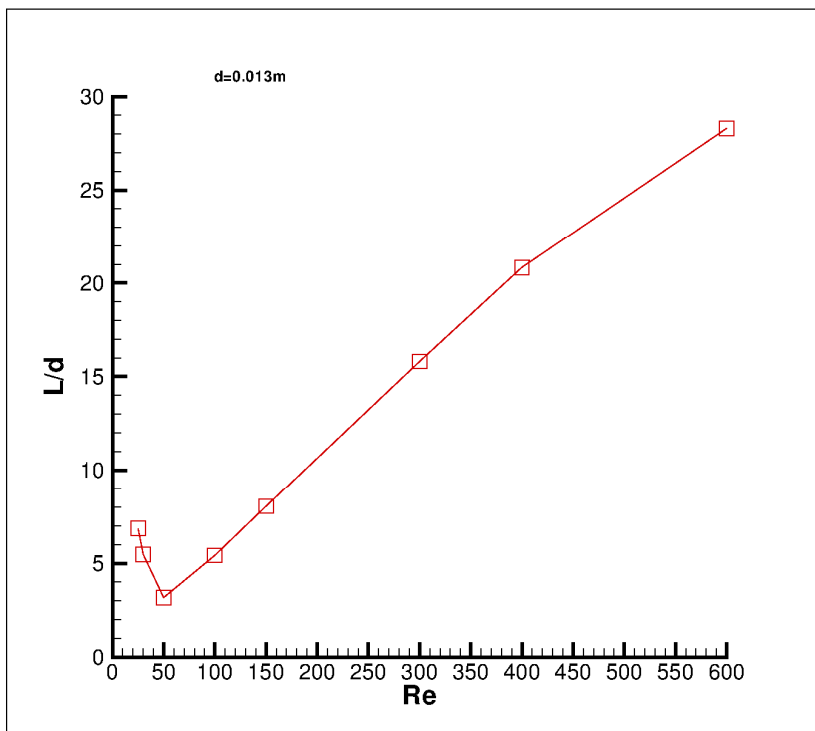
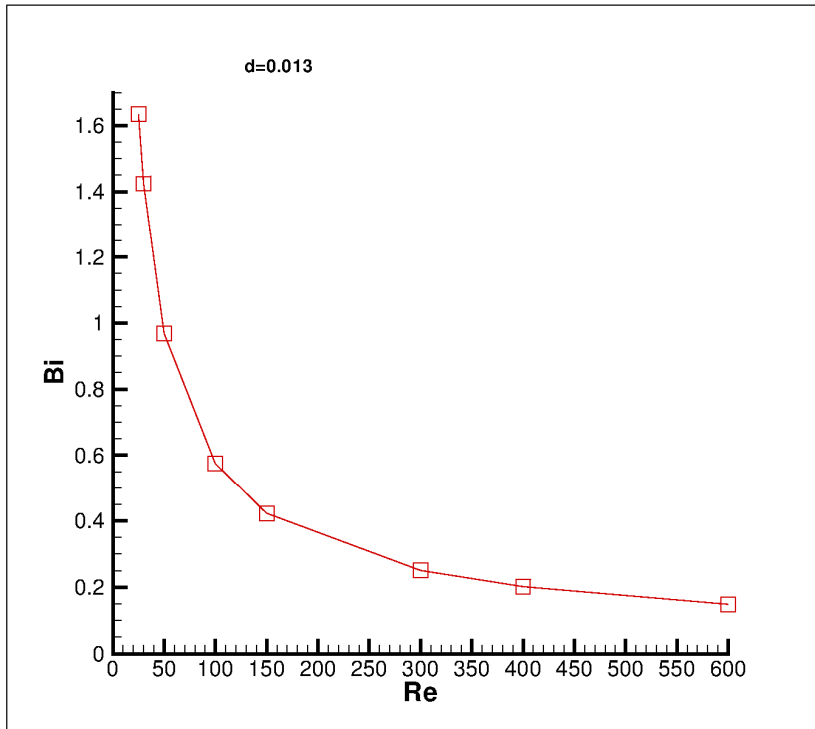
Δ6.3.3: Απαιτούμενο αδιάστατο μήκος διαμόρφωσης x_f για Re 25, 30, 40.

Αυτό που παρατηρήσαμε στο ρευστό H-B είναι ότι σε χαμηλούς Re το μήκος διαμόρφωσης δεν αυξανόταν με την αύξηση του Re όπως είναι και το αναμενόμενο, αλλά μειωνόταν μέχρι μια τιμή και μετά αυξανόταν. Έτσι, προέκυψε το παραπάνω διάγραμμα για τον αγωγό μας και για Re=25,30,40. Συγκεκριμένα για Re=25 απαιτούσε $x_f = 6.7d$, για Re=30 $x_f = 4.8d$, για Re=40 $x_f = 3.7d$ και για Re=50 $x_f = 2.6d$ και από αυτή την τιμή και μετά το μήκος άρχισε να αυξάνεται. Επειδή αυτό το χαρακτηριστικό το εντοπίσαμε μόνο στο H-B μπήκαμε στη διαδικασία να μελετήσουμε τον ρόλο που παίζει ο αδιάστατος αριθμός Bi καθώς και η διάμετρος του αγωγού στη διαμόρφωση της ροής. Έτσι, φτιάξαμε άλλους δύο αγωγούς, ο ένας είχε διάμετρο $d=0.005m$ δηλαδή μικρότερη από τη διάμετρο του δικού μας αγωγού και ο άλλος είχε διάμετρο $d=0.05m$ δηλαδή μεγαλύτερη διάμετρο από τη δική μας. Τα παρακάτω διαγράμματα Δ.6.4 δείχνουν το μήκος που απαιτείται για τη διαμόρφωση της ροής καθώς και τον αριθμό Bi συναρτήσει του Re για την κάθε περίπτωση αγωγού.

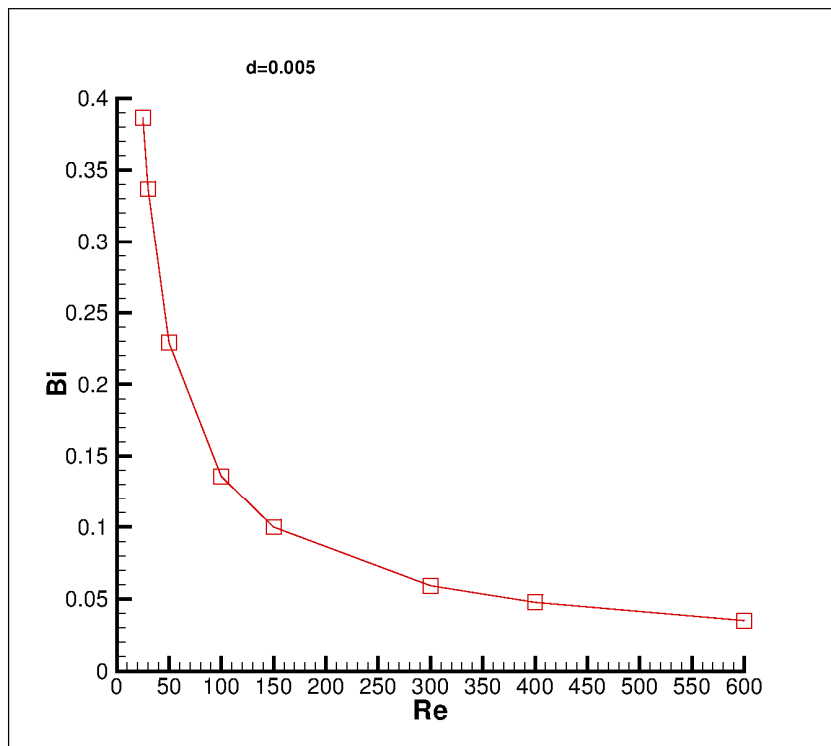
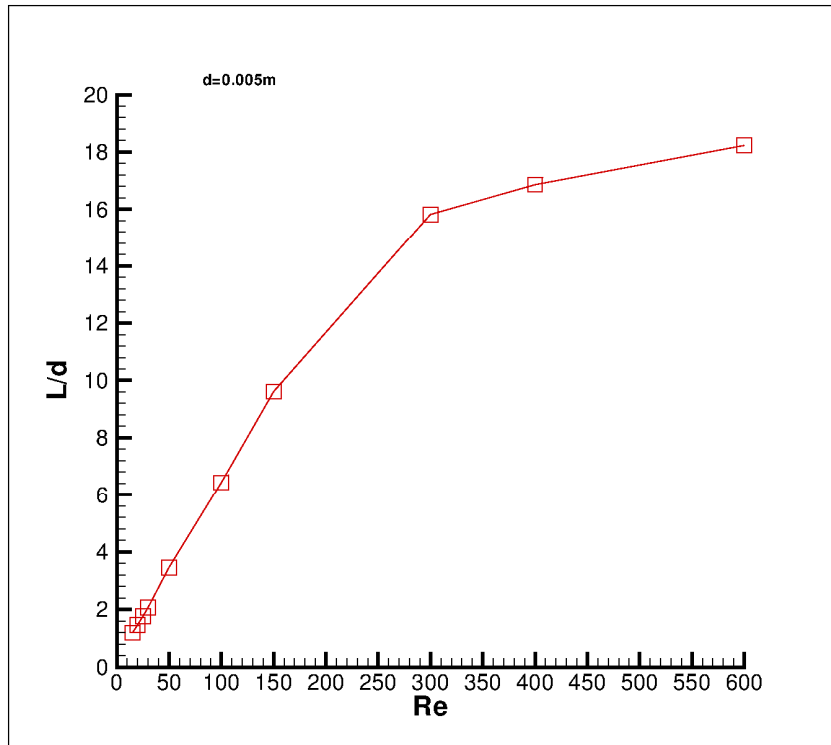
Τα συμπεράσματα είναι τα εξής:

- Όσο πιο μικρή διάμετρο έχει ο αγωγός, τότε για σταθερό Re έχουμε και πιο μικρό Bi .
- Όσο ο Re αυξάνεται τόσο ο Bi μειώνεται, το οποίο είναι προφανές γιατί με την αύξηση του Re αυξάνεται και η μέση ταχύτητα, άρα από τον τύπο για τον αριθμό Bi προκύπτει ότι αυτός μειώνεται.
- Για την μικρότερη διάμετρο το μήκος διαμόρφωσης αυξάνεται με την αύξηση του Re ασχέτως με την τιμή που αυτός παίρνει
- Για τις μεγαλύτερες διαμέτρους παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται ο Re τόσο μειώνεται το μήκος διαμόρφωσης αλλά μέχρι ο Re να φτάσει μια ορισμένη τιμή. Δηλαδή για την μεγάλη διάμετρο $d=0.05m$ το μήκος μειώνεται μέχρι ο Re να φτάσει 400 και μετά αυτό αυξάνεται.

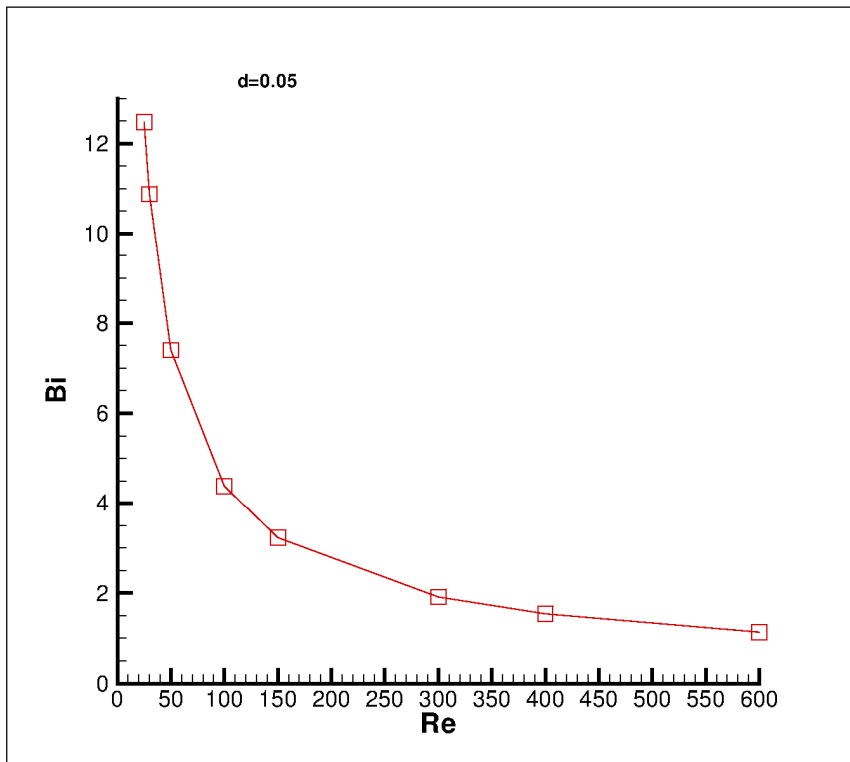
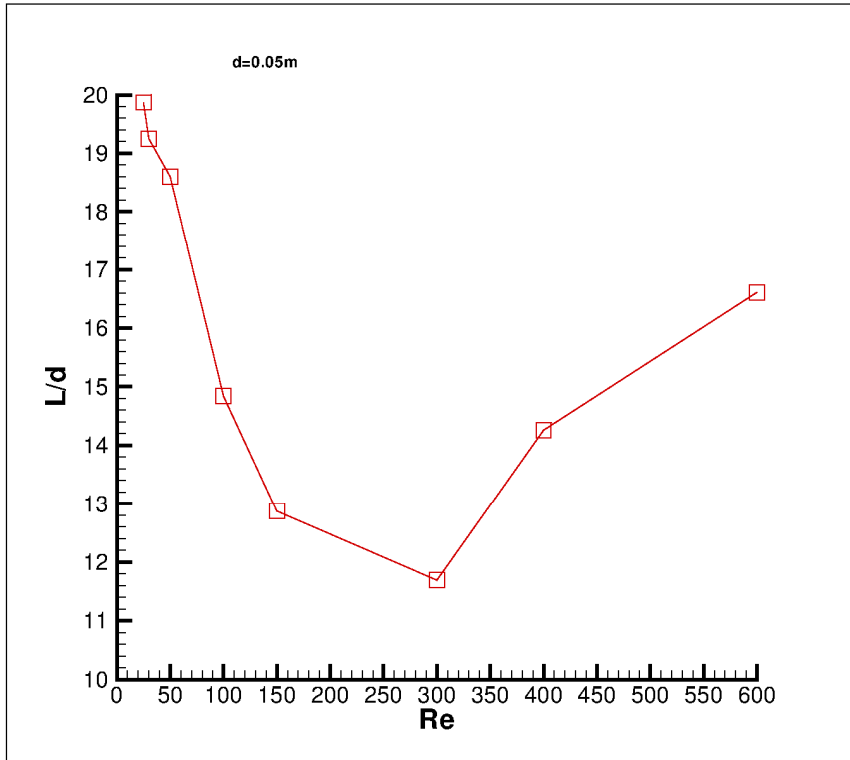
Ένα γενικό συμπέρασμα που μπορεί να προκύψει είναι ότι ο αριθμός Bi επηρεάζει το μήκος διαμόρφωσης της ροής όταν παίρνει υψηλές τιμές. Αν λοιπόν, παρατηρήσουμε τα παρακάτω διαγράμματα μπορούμε να διακρίνουμε κάποιο όριο στην τιμή του αριθμού Bi . Δηλαδή όταν ο αριθμός Bi είναι μεγαλύτερος από τη συγκεκριμένη τιμή παίζει σημαντικό ρόλο στο μήκος διαμόρφωσης της ροής. Συγκεκριμένα αυτό ισχύει για $Bi > 1$ περίπου.



Δ6.4.1: αδιάστατο μήκος συναρτήσει του Re και αριθμός Bi συναρτήσει του Re.



Δ6.4.2: αδιάστατο μήκος συναρτήσει του Re και αριθμός Bi συναρτήσει του Re.



Δ6.4.3: αδιάστατο μήκος συναρτήσει του Re και αριθμός Bi συναρτήσει του Re.

ii) *Λόγος ταχύτητας στον άξονα και μέσης ταχύτητας διατομής στην πλήρως διαμορφωμένη ροή.*

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε τον λόγο της ταχύτητας στον άξονα του αγωγού και της μέσης ταχύτητας στη διατομή, $w = \frac{U_a}{U_m}$, όπως προέκυψε για κάθε Re και κάθε μοντέλο.

Για το νευτώνειο περιμένουμε την σταθερή θεωρητική τιμή $w = 2$, ενώ για το ρευστό W-S την τιμή $w = \frac{3n+1}{n+1} = 1.874$. [48]

Ο θεωρητικός $w = \frac{U_a}{U_m}$ για το H-B δίνεται σε μορφή διαγράμματος ως συνάρτηση του αριθμού Bi στο Σχ.6.1. [2]

Στο βιβλίο «*Non-Newtonian flow and Applied Rheology*» [48] παρουσιάζονται αποτελέσματα για το λόγο ταχυτήτων άξονα συμμετρίας και μέσης ταχύτητας στη διατομή, $w = \frac{U_a}{U_m}$, καθώς και για το συντελεστή τριβής f , στα μοντέλα Εκθετικού Νόμου W-S και H-B.

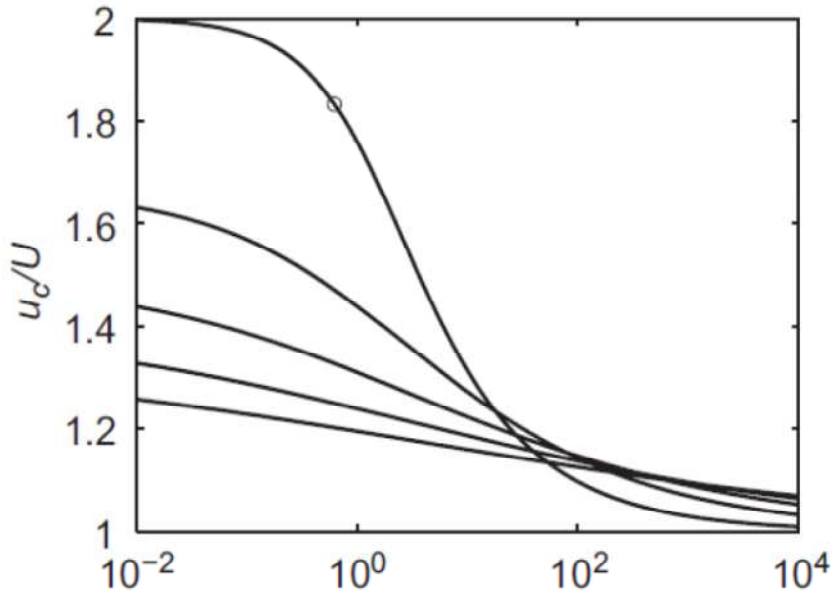
Τονίζουμε ότι στις ροές που μελετήσαμε ισχύει $U_0 = U_m$, επειδή $Q = \pi R^2 U_0$ στην είσοδο του αγωγού και $U_m = \frac{Q}{\pi R^2}$ η μέση ταχύτητα σε κάθε διατομή, με βάση την παροχή ρευστού $Q = \int_0^R 2\pi r u dr$ που περνά τη διατομή.

Στα παρακάτω διαγράμματα Δ6.5, φαίνονται τα αριθμητικά μας αποτελέσματα, τα οποία δεν έχουν σημαντικές αποκλίσεις από τις θεωρητικές τιμές.

Στην περίπτωση του νευτώνειου ρευστού αριθμητικά ισχύει $w_{num} = 1.998$ δηλαδή έχουμε απόκλιση 0.1% από τη θεωρητική τιμή $w = 2$.

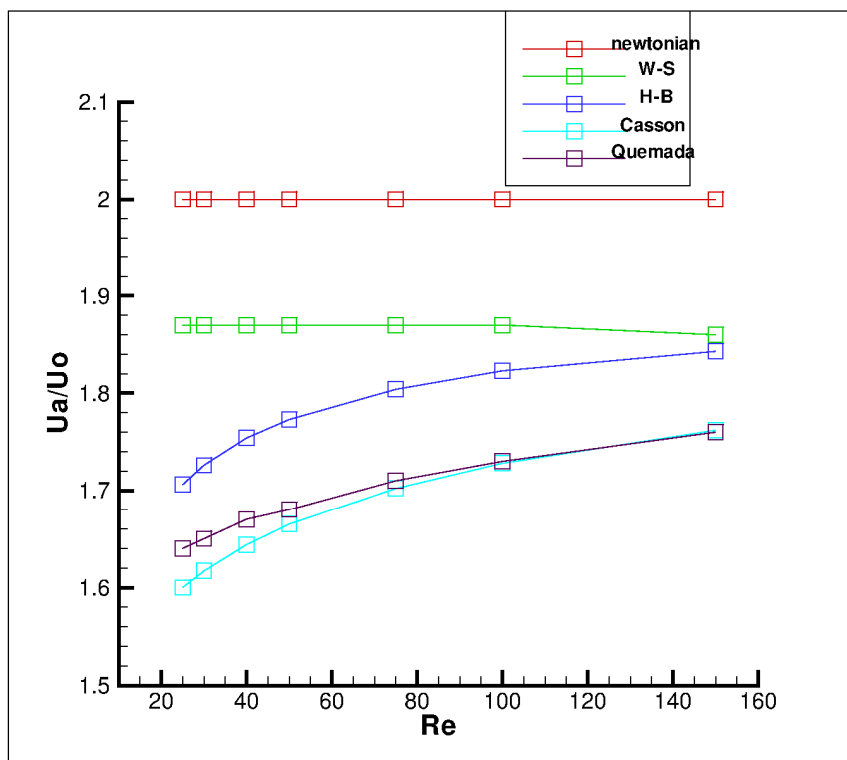
Για το ρευστό W-S ο λόγος κυμαίνεται $w_{num} = 1.86 - 1.87$ δηλαδή δεν έχουμε μεγαλύτερη απόκλιση από 0.6% από τη θεωρητική τιμή.

Για το H-B αριθμητικά υπολογίζουμε, π.χ για $Re = 100$, $Bi = 0.57$ και $w = 1.82$. Στο παρακάτω σχήμα 6.1 όπως βλέπουμε για την τιμή αυτή του Bi ο λόγος ταχυτήτων είναι περίπου 1.83, άρα τα αποτελέσματά μας συμπίπτουν σχεδόν με την θεωρία. [68]

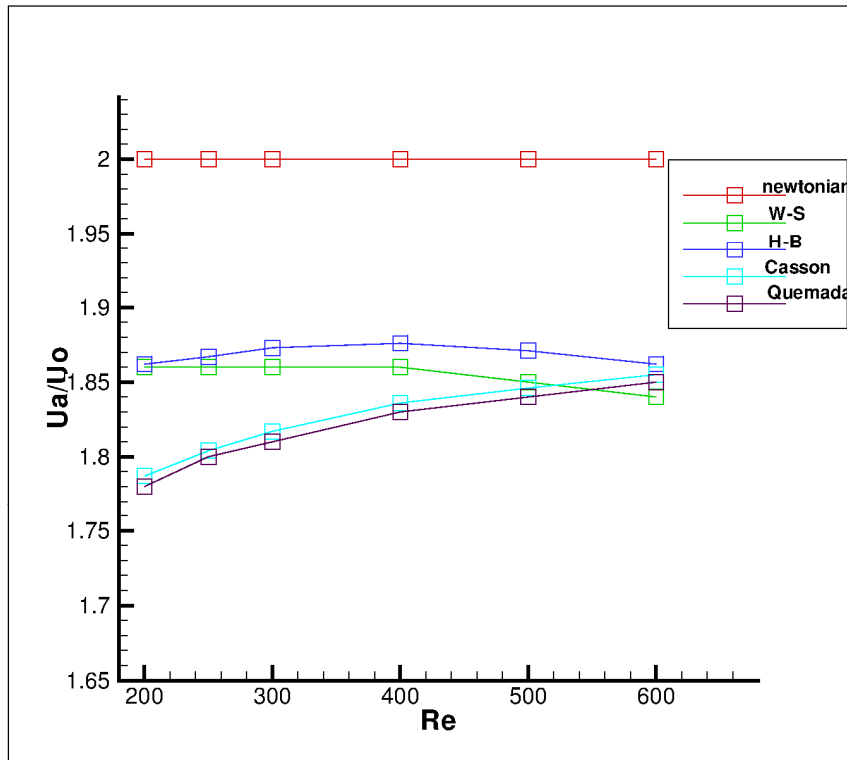


Σχ. 6.1: Ο λόγος w ως συνάρτηση του Bi στο H-B. [68]

Στην [76] παίρνουμε πληροφορίες για το ρευστό Casson και συγκεκριμένα για την ταχύτητα στον άξονα της ροής του μοντέλου, αλλά χρησιμοποιούνται διαφορετικοί συντελεστές και ο αριθμός Re ορίζεται με διαφορετικό τρόπο, με αποτέλεσμα να μη μπορεί να γίνει σύγκριση.



Δ6.5.1: ο λόγος w στα αριθμητικά μας αποτελέσματα για $Re=25-150$.



Δ6.5.2: ο λόγος w στα αριθμητικά μας αποτελέσματα για $Re=200-600$

iii) Οι κατανομές ταχυτήτων στην πλήρως διαμορφωμένη ροή

Λόγω της πλήρως διαμορφωμένης ροής, στις διατομές κατάντι της διατομής που αυτή επιτυγχάνεται, έχουμε μόνο αξονική ταχύτητα και αδιαστατοποιώντας με την ταχύτητα στον άξονα U_a , κάθε μοντέλου και στον εκάστοτε Re , προκύπτουν οι κατανομές (velocity profiles) $a = \frac{u(r)}{U_a}$ για διάφορους Re που φαίνονται στα διαγράμματα Δ6.6.

Παρατηρήσεις πάνω στα διαγράμματα Δ6.6:

- Το πρώτο που μπορούμε να διακρίνουμε είναι ότι στα μη νευτώνεια έχουμε περισσότερο πεπλατυσμένες κατανομές στην περιοχή του άξονα από ότι στο νευτώνειο ρευστό. Παρατηρούμε ότι το φαινόμενο αυτό είναι πιο έντονο στους χαμηλούς Re και όσο αυτός αυξάνεται η διαφορά μειώνεται αισθητά. Αυτό μας δείχνει πόσο αναγκαία ήταν η χρήση μη νευτώνειων ρευστών στη μελέτη της ροής του αίματος μειωμένου Re .
- Παρατηρούμε ότι η συμπεριφορά των Quemada και Casson τείνει να προσεγγίσει αυτή των άλλων μοντέλων σε μεγαλύτερους Re , δείχνοντάς μας ότι είναι κατάλληλα για την μελέτη ροών αίματος υψηλών Re .
- Διαφορές παρατηρούνται και στη ροή των δύο ιξωδοπλαστικών μοντέλων

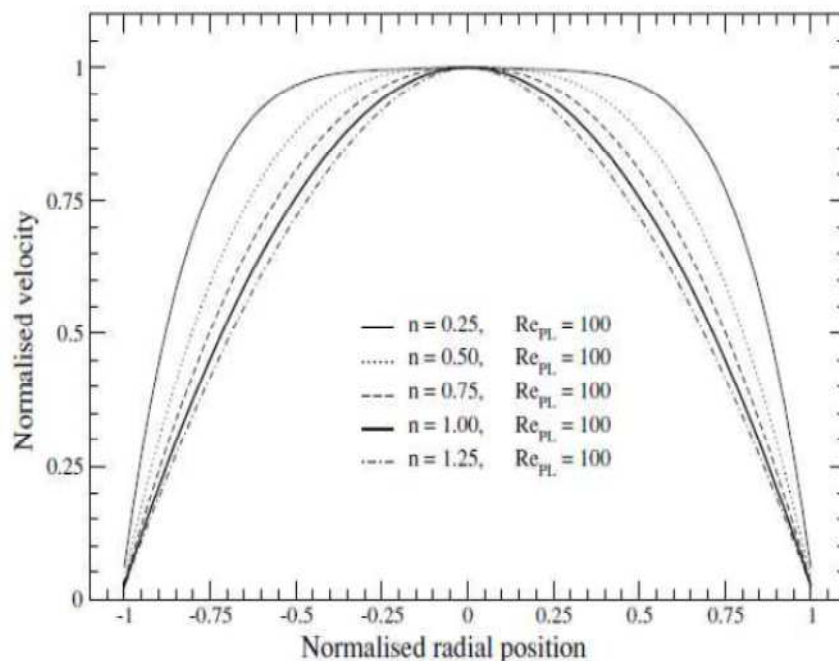
H-B και Casson. Η αρχική τάση που απαιτείται για τη ροή τους προκαλεί μεγάλη αντίσταση στην περιοχή του άξονα με αποτέλεσμα τη μείωση της ταχύτητας επί του άξονα. Σε ροές χαμηλών Re το ρευστό Casson παρουσιάζει υψηλούς Bi , οι οποίοι δεν επιτρέπουν την ανάπτυξη ταχυτήτων διαφορετικών των γειτονικών τους με αποτέλεσμα να έχουμε διατήρηση της ακτινικής κλίσης ταχύτητας $\left(\frac{\partial u_x}{\partial r}\right)$ σε χαμηλές τιμές.

Γνωρίζουμε όμως, ότι η ακτινική κλίση της ταχύτητας στον ευθύγραμμο αξονικά συμμετρικό αγωγό, καθορίζει το ρυθμό παραμόρφωσης. Καταλήγουμε σε αυξανόμενες διαφορές στην κατανομή ταχυτήτων αφού ο Re μειώνεται και αντίστροφα, ο Bi αυξάνεται.

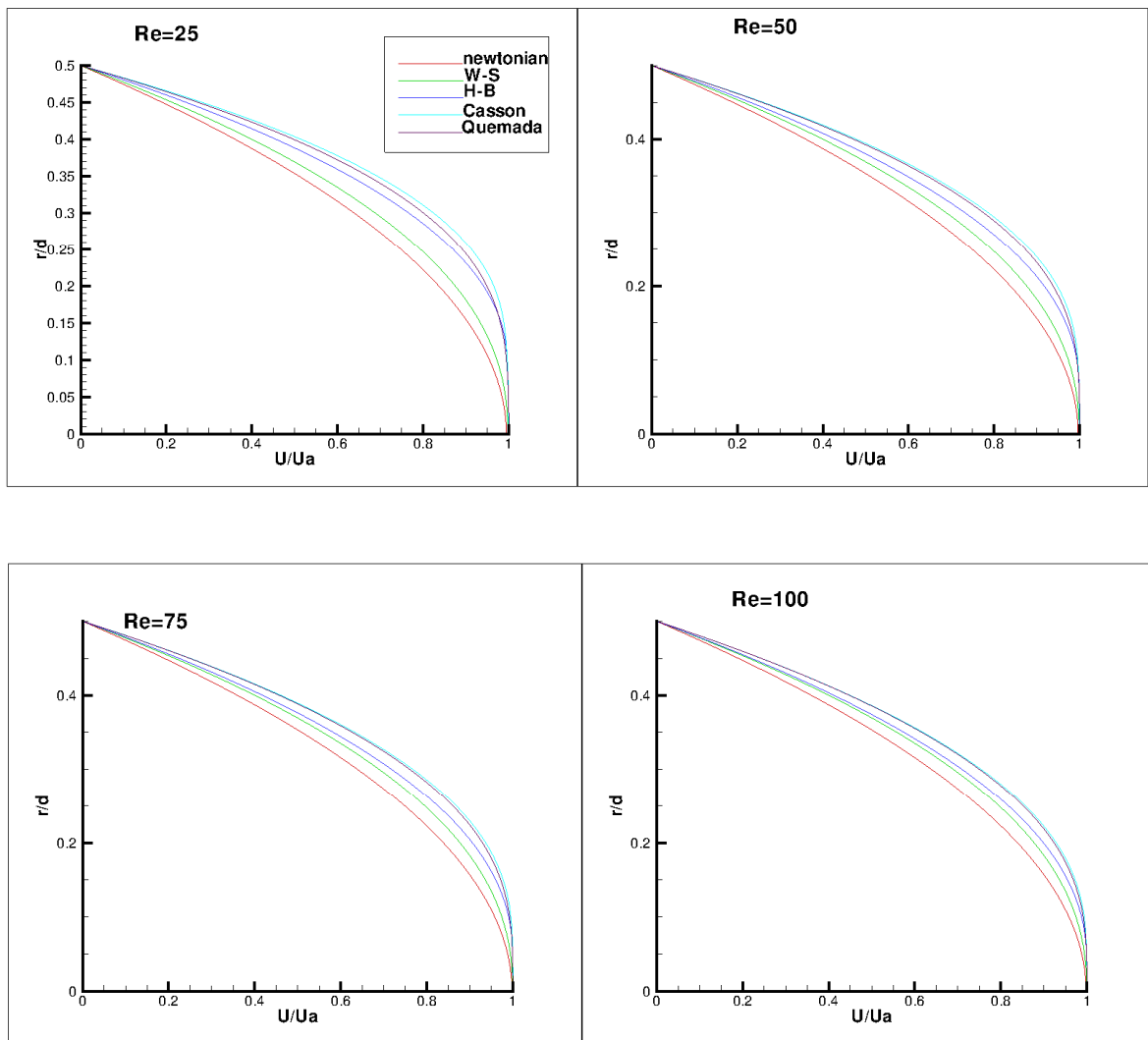
- Στον άξονα συμμετρίας, παρουσιάζεται μικρή ακτινική κλίση, άρα χαμηλοί ρυθμοί παραμόρφωσης και κατά συνέπεια χαμηλό $i\omega$ δες. Έτσι, στο κέντρο του αγωγού έχουμε πλάτυνση της κατανομής ταχυτήτων μη νευτώνειων ρευστών.
- Στο παρακάτω σχήμα, Σχ.6.2, εμφανίζονται οι κατανομές ταχυτήτων για ρευστό εκθετικού νόμου για διάφορους συντελεστές n μη νευτώνειας συμπεριφοράς. [76]

Ο αναφερόμενος Re_{pl} είναι ο γενικευμένος Re που έχουμε ορίσει $Re_{pl} = Re = 100$.

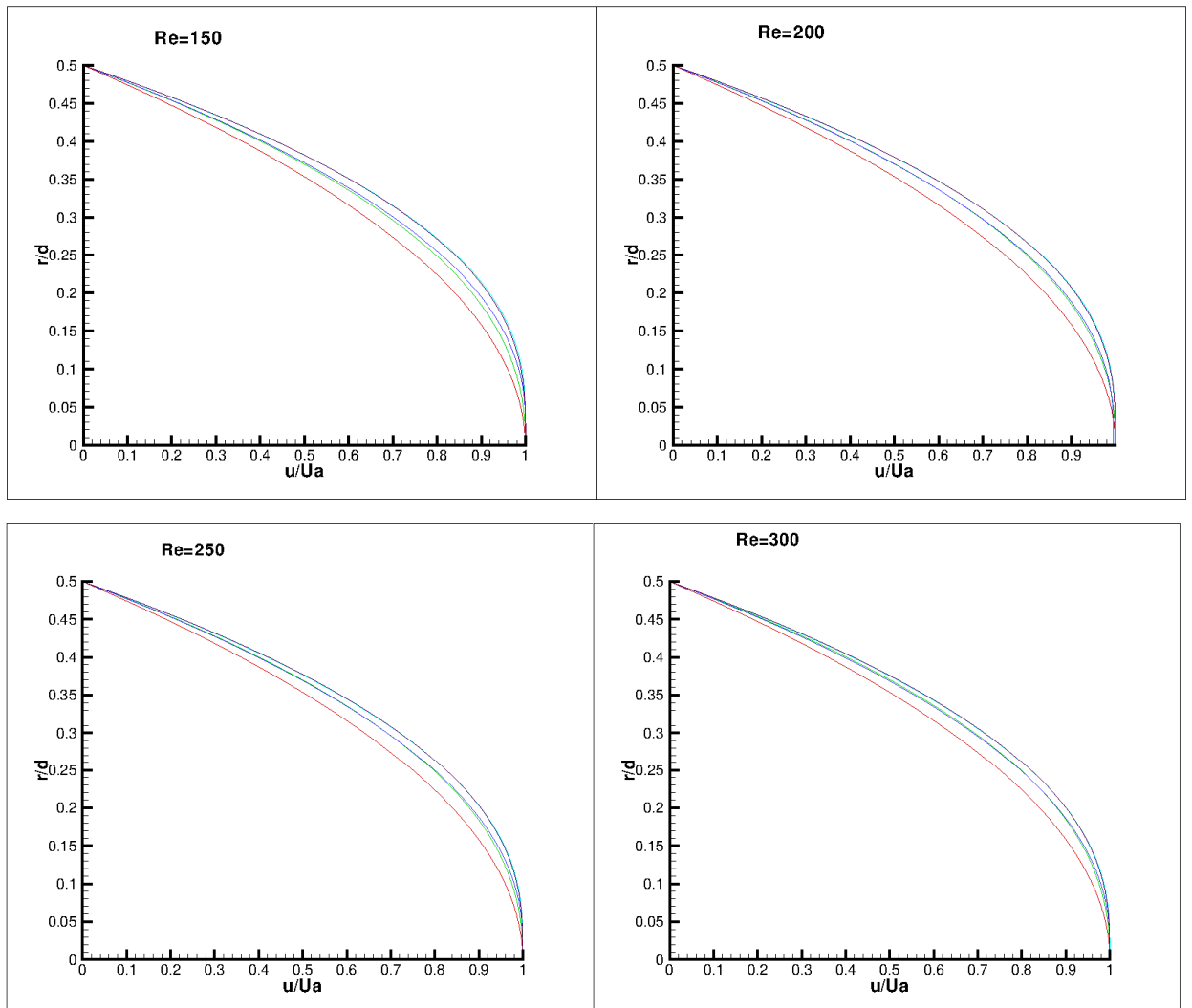
Για $n = 0.75$, που είναι τιμή κοντά στη $n = 0.7755$ που έχουμε ορίσει για το μοντέλο W-S υπάρχει ταύτιση αποτελεσμάτων.



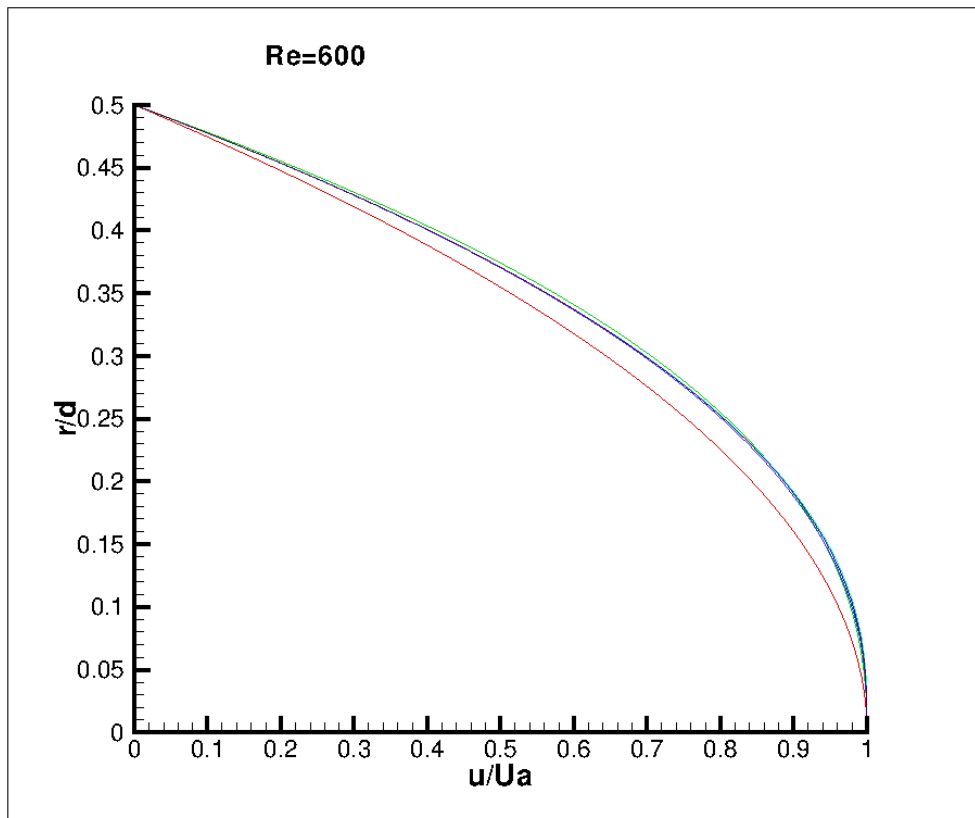
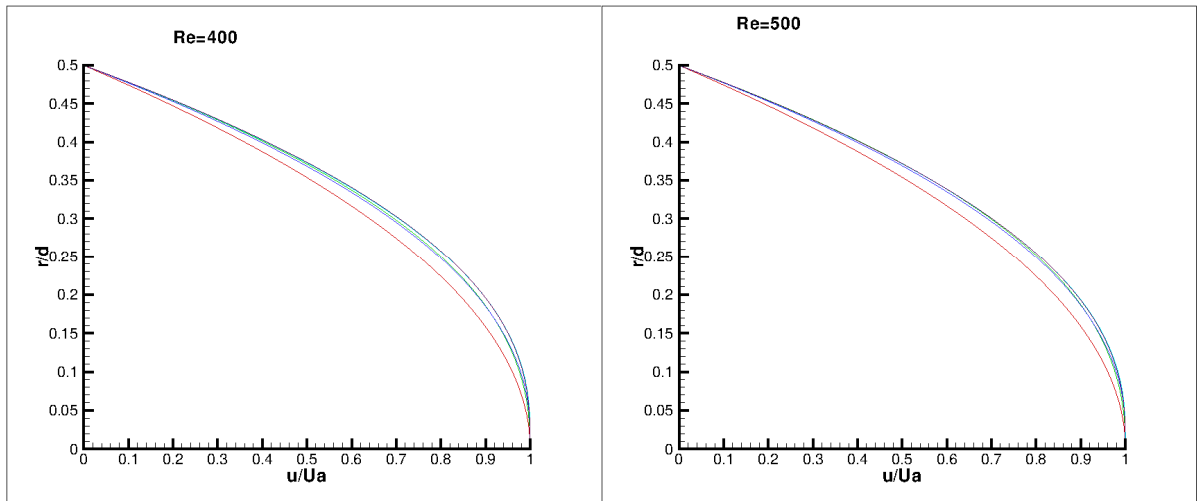
Σχ.6.2: κατανομές ταχυτήτων για το μοντέλο Εκθετικού Νόμου. [76]



Δ6.6.1: Κατανομές ταχυτήτων στην πλήρως διαμορφωμένη ροή



Δ6.6.2: Κατανομές ταχυτήτων στην πλήρως διαμορφωμένη ροή



Δ6.6.3: Κατανομές ταχυτήτων στην πλήρως διαμορφωμένη ροή

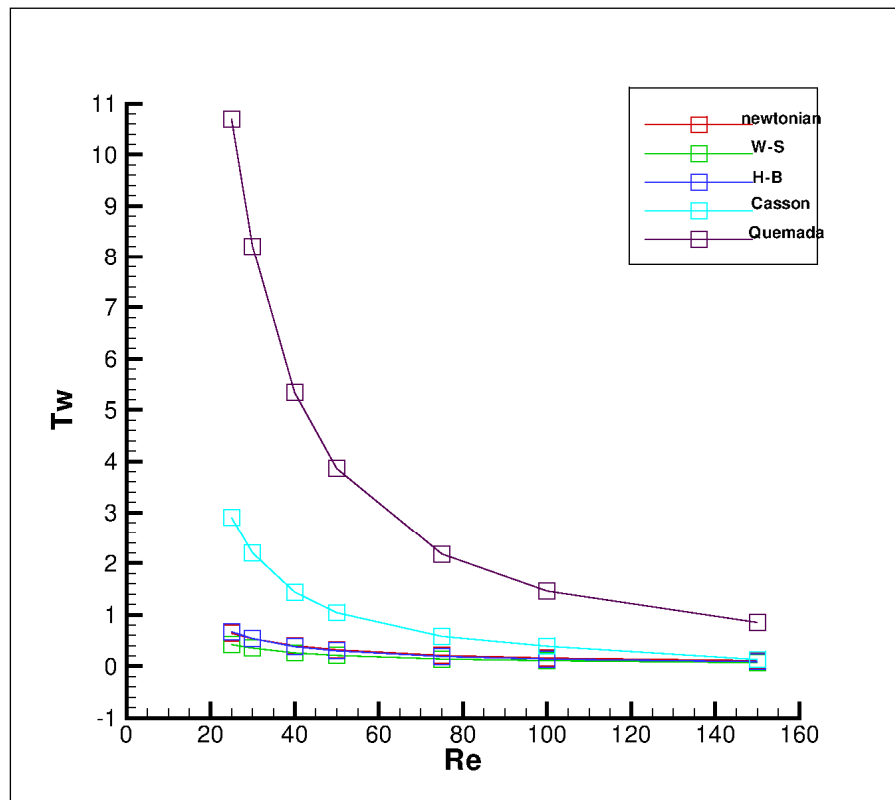
iv) Διατμητικές τάσεις στο τοίχωμα

Αδιαστατοποιούμε τις διατμητικές τάσεις (wall shear stresses) με τη δυναμική πίεση στην είσοδο του αγωγού:

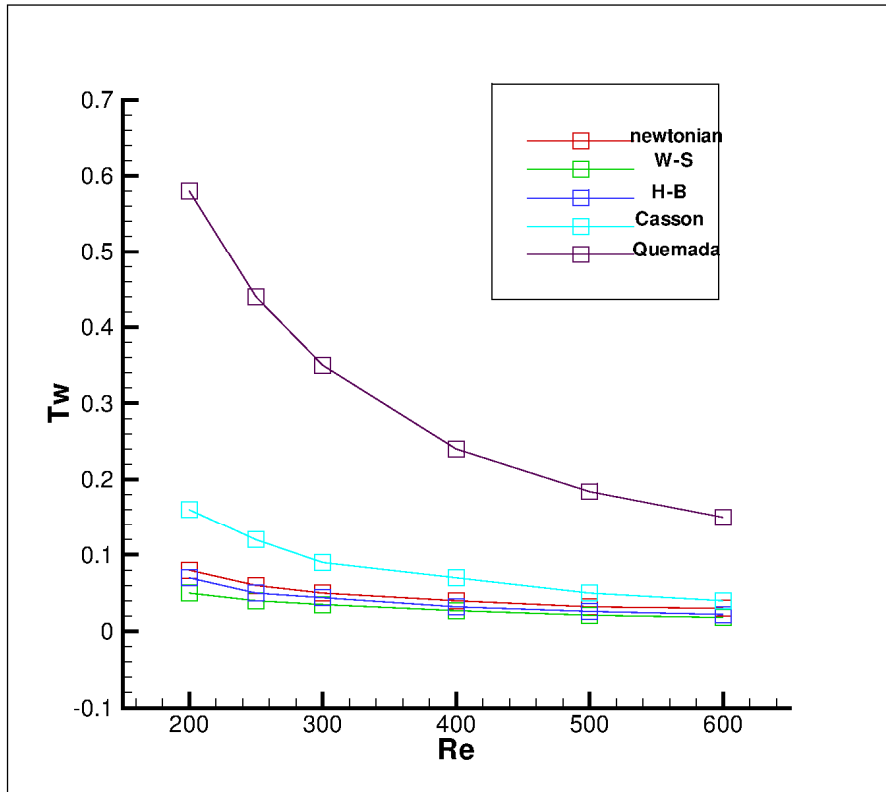
$$T_w = \frac{\tau_w}{\rho U_0^2 / 2}$$

Τα αριθμητικά μας αποτελέσματα παρουσιάζονται στα διαγράμματα Δ6.7.

Μία παρατήρηση που κάνουμε είναι το ρευστό Quemada παρουσιάζει αρκετά αυξημένη T_w σε σχέση με τα υπόλοιπα ρευστά, ενώ το Casson ακολουθεί.



Δ6.7.1: Τάσεις T_w που ασκούν τα ρευστά στον αγωγό με μήκος $L_{out} = 20d$ σε πλήρως διαμορφωμένη ροή, όπως υπολογίστηκαν αριθμητικά.



Δ6.7.2: Τάσεις T_w που ασκούν τα ρευστά στον αγωγό $L_{out} = 40d$ σε πλήρως διαμορφωμένη ροή, όπως υπολογίστηκαν αριθμητικά.

Το μέγεθος T_w , είναι ουσιαστικά ο συντελεστής τριβής f .

Στο νευτώνειο είναι γνωστό ως $f = \frac{16}{Re}$.

Για τα ρευστά Εκθετικού Νόμου και H-B υπάρχει ένας γενικευμένος αριθμός Re για τον οποίο ισχύει η σχέση: $Re^* = \frac{\rho U_0^{2-n} D^n}{8^{n-1} k \left(\frac{3n+1}{4n} \right)^n}$ και επίσης ισχύει $f = \frac{16}{Re^*}$ κάτι που

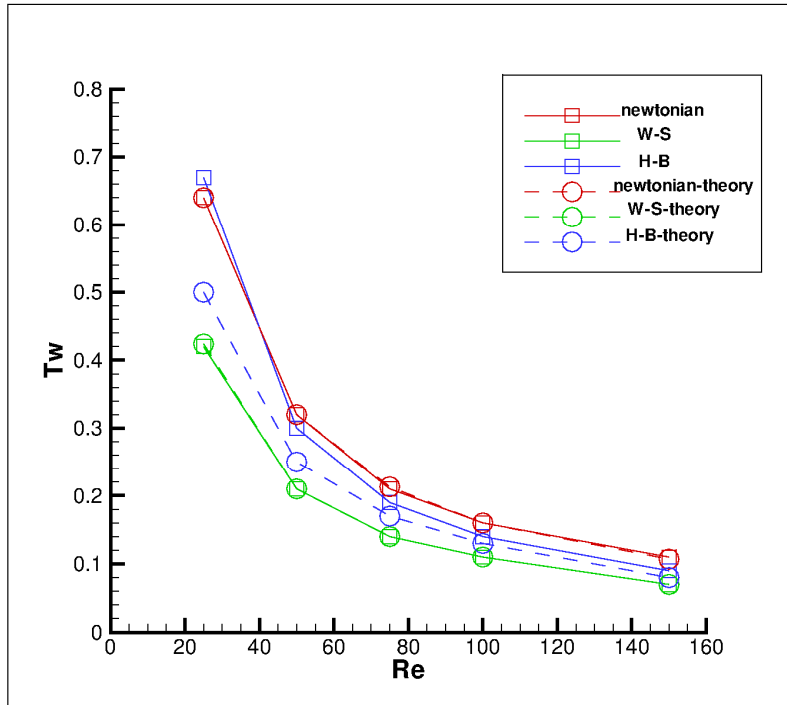
αναφέρεται στη [48].

Κάναμε λοιπόν τους υπολογισμούς αυτούς και προέκυψαν τα αντίστοιχα διαγράμματα Δ6.8, $f_{theory} - Re$, τα οποία παρουσιάζονται παρακάτω μαζί με τις αριθμητικές μας τιμές T_w .

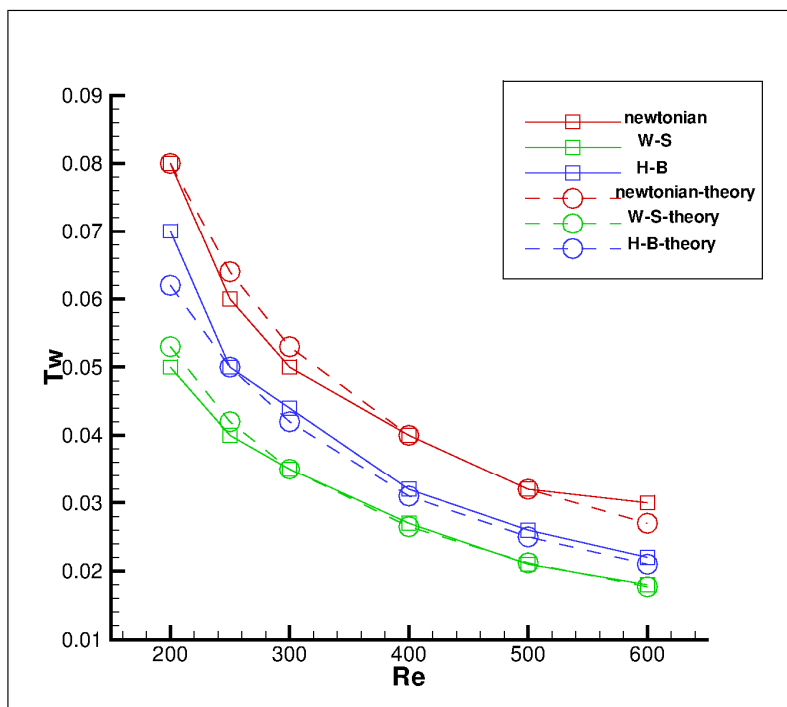
Για το νευτώνειο ρευστό τα αριθμητικά με τα θεωρητικά αποτελέσματα συμπίπτουν άριστα.

Για το ρευστό W-S η σύμπτωση των αποτελεσμάτων μας είναι άριστη για χαμηλούς καθώς και για υψηλούς Re .

Για το ρευστό H-B παρατηρούμε απόκλιση των αριθμητικών τιμών από των θεωρητικών, ιδιαίτερα για χαμηλούς Re . Συγκεκριμένα, τα αριθμητικά μας αποτελέσματα παρουσιάζουν υψηλότερες τιμές T_w από τη θεωρία, αλλά η απόκλιση παραμένει ελάχιστη.



Δ6.8.1: Σύγκριση θεωρητικών και αριθμητικών τιμών τάσεων T_w που ασκούν τα ρευστά σε πλήρως διαμορφωμένη ροή για Re 25-150.



Δ6.8.2: Σύγκριση θεωρητικών και αριθμητικών τιμών τάσεων T_w που ασκούν τα ρευστά σε πλήρως διαμορφωμένη ροή για Re 200-600.

i) Πτώση στατικής πίεσης

Στα διαγράμματα Δ6.9 παρουσιάζουμε τις τιμές της διαφοράς στατικής πίεσης (p_{static}) σε κάθε θέση από την είσοδο, αδιαστατοποιημένες με τη δυναμική πίεση, δηλαδή:

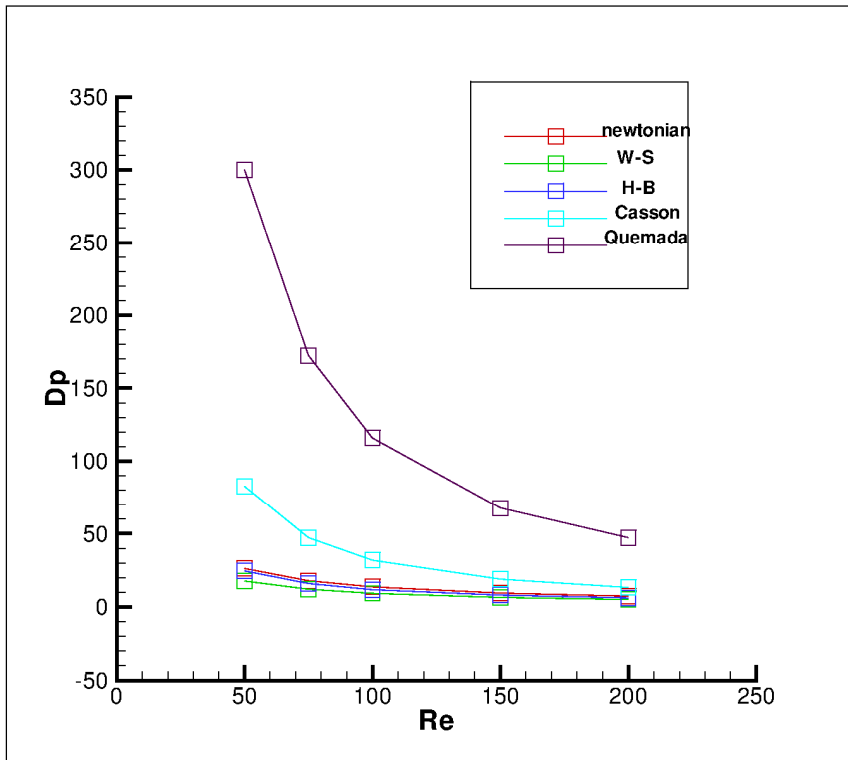
$$Dp = \frac{P_{static}}{\rho U_0^2 / 2}$$

Στην παραπάνω σχέση υπεισέρχεται η ταχύτητα U_0 η οποία έχει προκύψει για δεδομένο Re , άρα η στατική πίεση εξαρτάται και από το ιξώδες μ_{eff} που παρουσιάζει κάθε μοντέλο στον εκάστοτε Re .

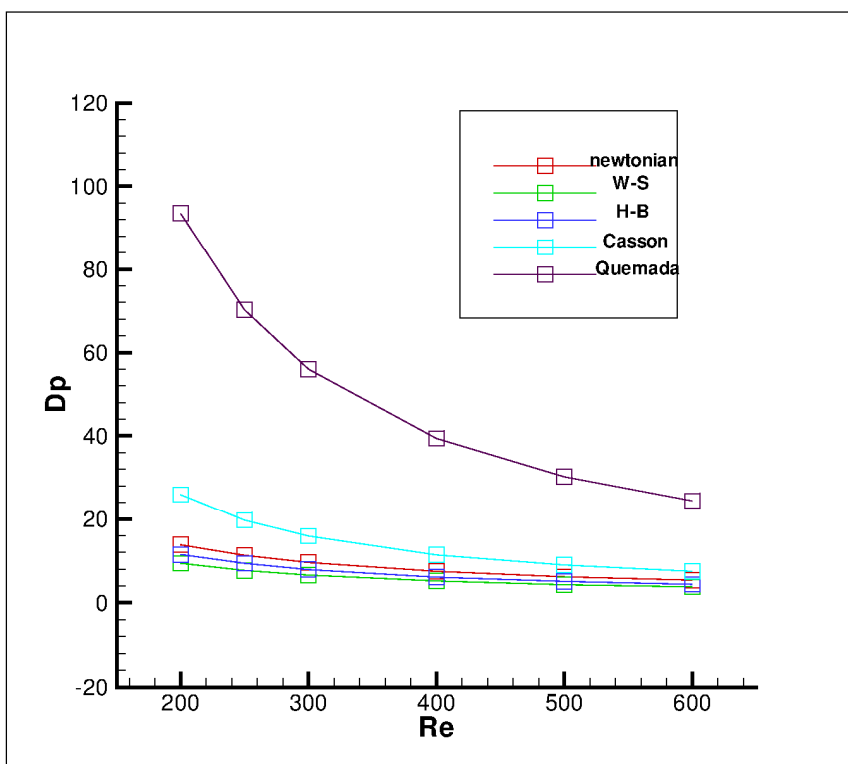
Στα διαγράμματα φαίνεται η πτώση πίεσης $Dp_f = |p_{out} - p_{in}|$, από την είσοδο στην έξοδο του αγωγού, όταν το ρευστό έχει προχωρήσει $L_{total} = 20d$ ή $L_{total} = 40d$ αντίστοιχα.

Το ρευστό Quemada απαιτεί πολύ μεγαλύτερη διαφορά πίεσης από τα υπόλοιπα ρευστά για να ρεύσει στον αγωγό μας, όπως μπορούμε να διακρίνουμε και στο παρακάτω διάγραμμα. Στις [83,84] παίρνουμε κάποιες πληροφορίες σχετικές με τη ρεολογία του ρευστού Quemada.

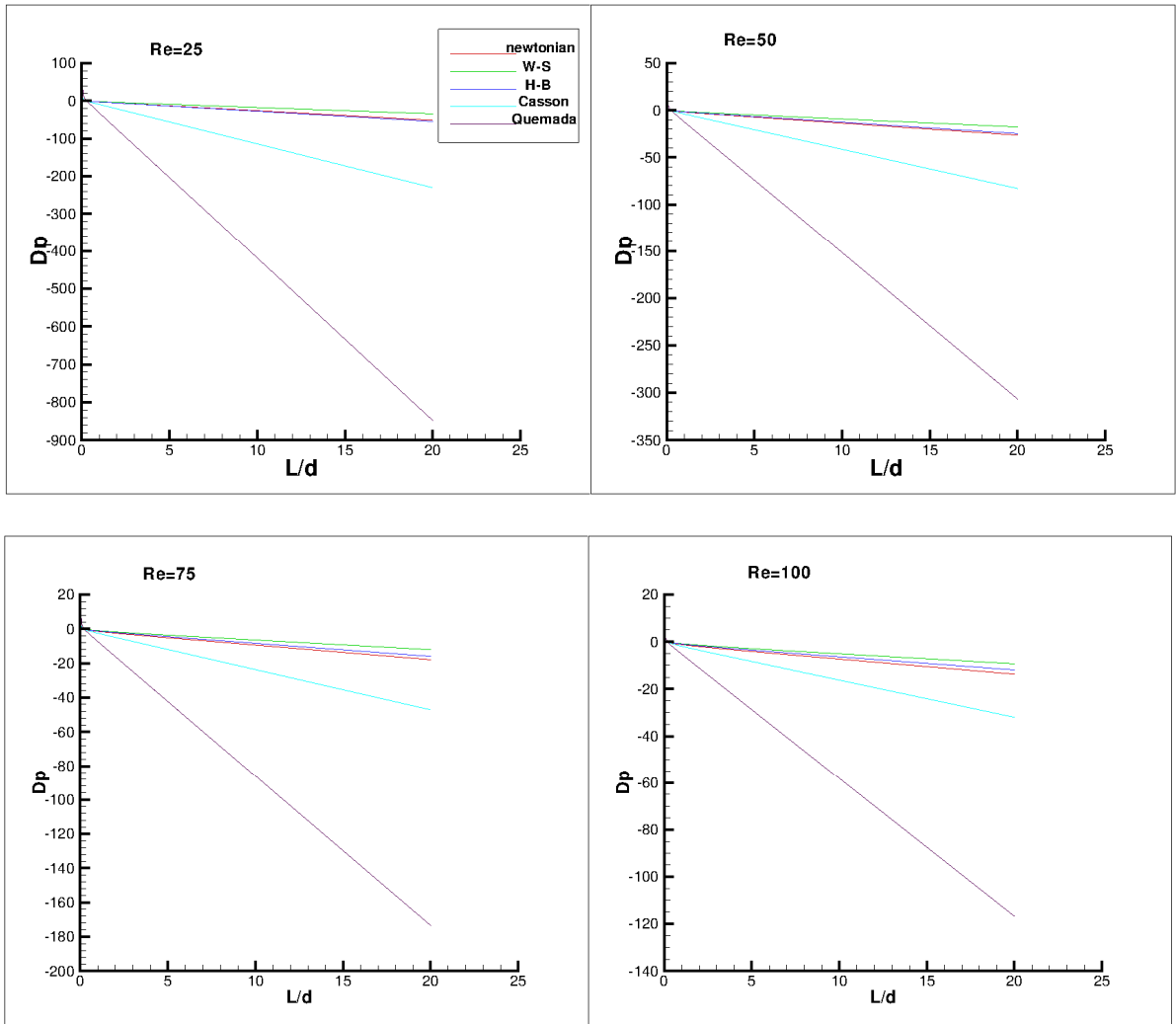
Η καμπύλη πτώσης πίεσης $Dp_f - Re$ για όλα τα μοντέλα έχει τη μορφή υπερβολής όπως και στο νευτώνειο.



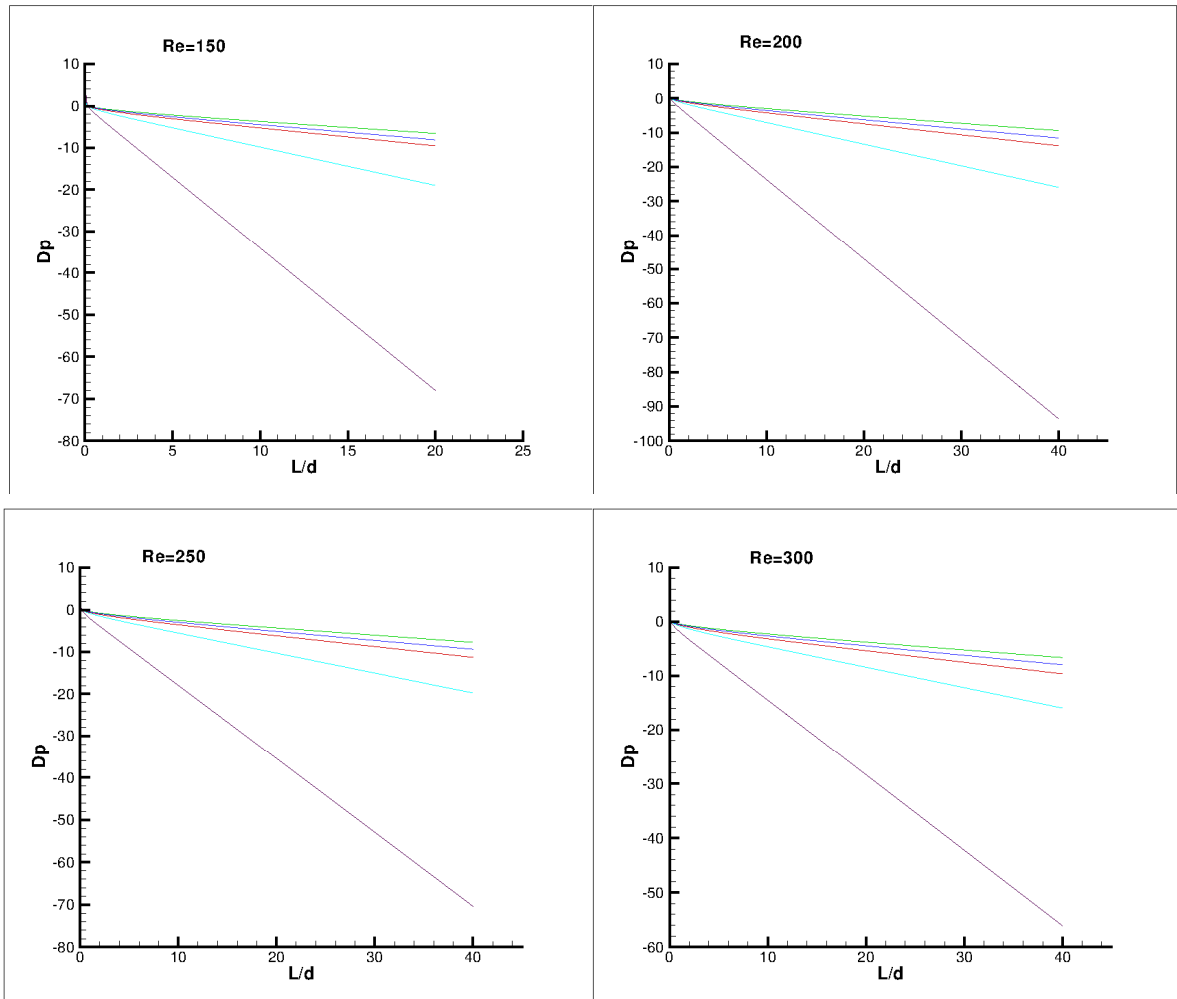
Δ6.9.1: αδιάστατη πτώση πίεσης Dp_f στην έξοδο του αγωγού ,σε απόσταση $L=20d$ κατάντι της εισόδου.



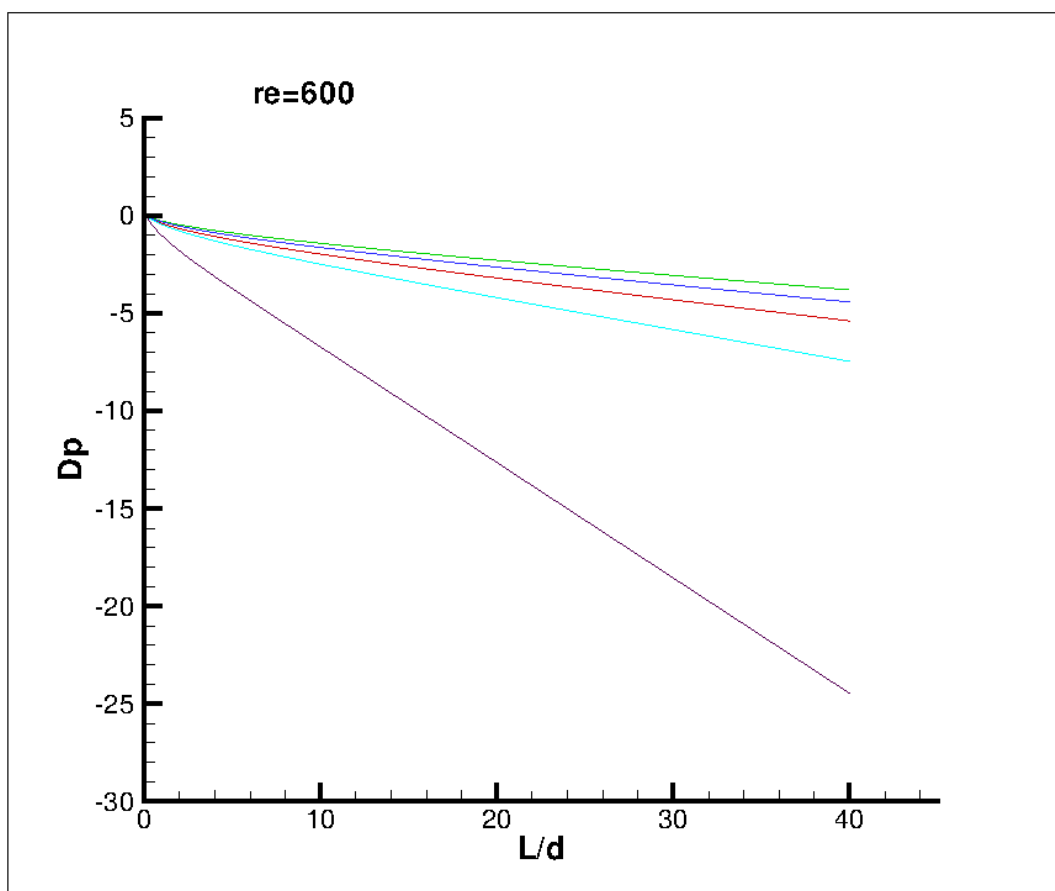
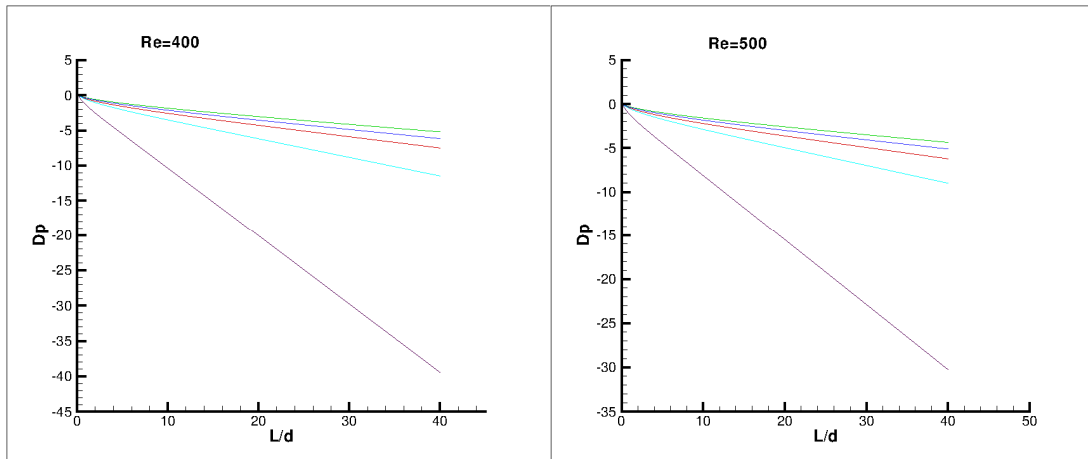
Δ6.9.2: αδιάστατη πτώση πίεσης Dp_f στην έξοδο του αγωγού ,σε απόσταση $L=40d$ κατάντι της εισόδου.



Δ6.10.1: αδιάστατη πτώση πίεσης σε όλο το μήκος του αγωγού



Δ6.10.2: αδιάστατη πτώση πίεσης σε όλο το μήκος του αγωγού



Δ6.10.3: αδιάστατη πτώση πίεσης σε όλο το μήκος του αγωγού

1.β Αγωγός με διεύρυνση

Θα υπενθυμίσουμε τη γεωμετρία των πλεγμάτων που χρησιμοποιήσαμε για το ανεύρυσμα καθώς θα μας χρειαστεί στη συνέχεια για τη σύγκριση των αποτελεσμάτων μας με αυτά άλλων μελετών. Επιλέξαμε τρεις αγωγούς με διαφορετική γεωμετρία ο καθένας.

α) Αγωγός χωρίς αρχικό μήκος

Η διεύρυνση του αγωγού ξεκινά στη θέση $L_{start} = 0$, δηλαδή δεν υπάρχει αρχικός ευθύγραμμος αγωγός.

Η κορυφή του ανευρύσματος βρίσκεται στη θέση $L_{peak} = 0.0225 = 1.73d$, όπου d η διάμετρος του αγωγού.

Το μήκος του ανευρύσματος είναι $L_{aneurysm} = 45mm = 3.46d$

Το κομμάτι του ευθύγραμμου αγωγού ξεκινά στο $L_{end} = 0.045m = 3.46d$

β) Αγωγός με αρχικό μήκος

Η διεύρυνση του αγωγού ξεκινά στη θέση $L_{start} = 0.026m = 2d$

Η κορυφή του ανευρύσματος του βρίσκεται στη θέση $L_{peak} = 0.0485m = 3.73d$, όπου d η διάμετρος του αγωγού.

Το μήκος του ανευρύσματος παραμένει το ίδιο $L_{aneurysm} = 45mm = 3.46d$.

Το κομμάτι του ευθύγραμμου αγωγού ξεκινά στο $L_{end} = 0.071m = 5.46d$.

Τέλος η διάμετρος της διατομής στην περιοχή της διεύρυνσης παραμένει όπως και πριν $d_{peak} = 32mm = 2.46d$.

γ) Αγωγός με αρχικό μήκος αλλά και καμπυλότητα.

Η διεύρυνση ξεκινά στη θέση $L_{start} = 0.026m = 2d$.

Η κορυφή του βρίσκεται στη θέση $L_{peak} = 0.0485m = 3.73d$, όπου d η διάμετρος του αγωγού.

Το μήκος του ανευρύσματος παραμένει το ίδιο με $L_{aneurysm} = 45mm = 3.46d$.

Το κομμάτι του ευθύγραμμου αγωγού ξεκινά στο $L_{end} = 0.071m = 5.46d$.

Τέλος η διάμετρος της διατομής στην περιοχή του λαιμού παραμένει όπως και πριν $d_{peak} = 32mm = 2.46d$.

Αυτό που αλλάζει στην περίπτωση αυτή είναι τα δύο τόξα στις άκρες του ανευρύσματος στο σημείο ένωσης της καμπύλης του ανευρύσματος με τον ευθύγραμμο αγωγό (*fillet arc*) με διάμετρο 0.1 το καθένα.

Τέλος, για τις τρεις αυτές περιπτώσεις ισχύουν:

Η διάμετρος της διατομής στην περιοχή της κορυφής του είναι $d_{peak} = 32mm = 2.46d$. Το μήκος του ευθύγραμμου αγωγού στο τέλος είναι:

$L = 260mm = 20d$ στην μία περίπτωση και

$L = 520mm = 40d$ στην άλλη περίπτωση.

Από την είσοδο του αγωγού $L_{in} = 0$ εισέρχεται το ρευστό το οποίο έχει διαμορφωθεί πλήρως, όπως είχαμε υπολογίσει στον ευθύγραμμο αγωγό και εξέρχεται για $L_{out} = 20d$ και για $L_{out} = 40d$.

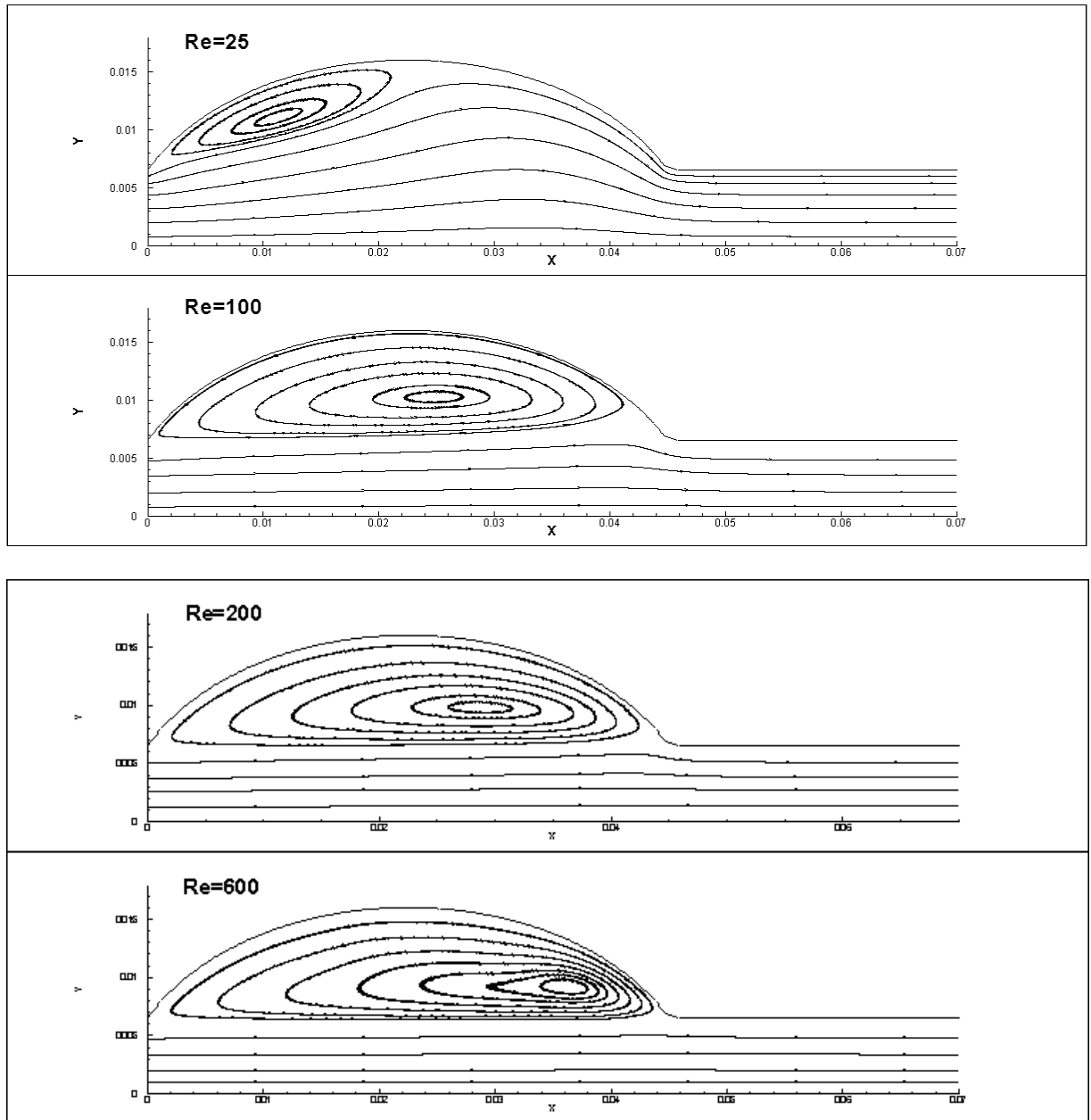
Για τη μελέτη της ροής θα χρησιμοποιήσουμε τα πιο κάτω χαρακτηριστικά και μεγέθη:

- i) Γραμμές ροής
- ii) Γραμμές ροής και ιξώδες
- iii) Ισοψείς ταχύτητας
- iv) Κατανομές αξονικής ταχύτητας στην κορυφή του ανευρύσματος και μεταβολή της ταχύτητας στον άξονα συμμετρίας
- v) Περιοχή επανακόλλησης της ροής
- vi) Περιοχή ανακυκλοφορίας
- vii) Διατμητικές τάσεις στο τοίχωμα
- viii) Στατική πίεση

i) Γραμμές ροής

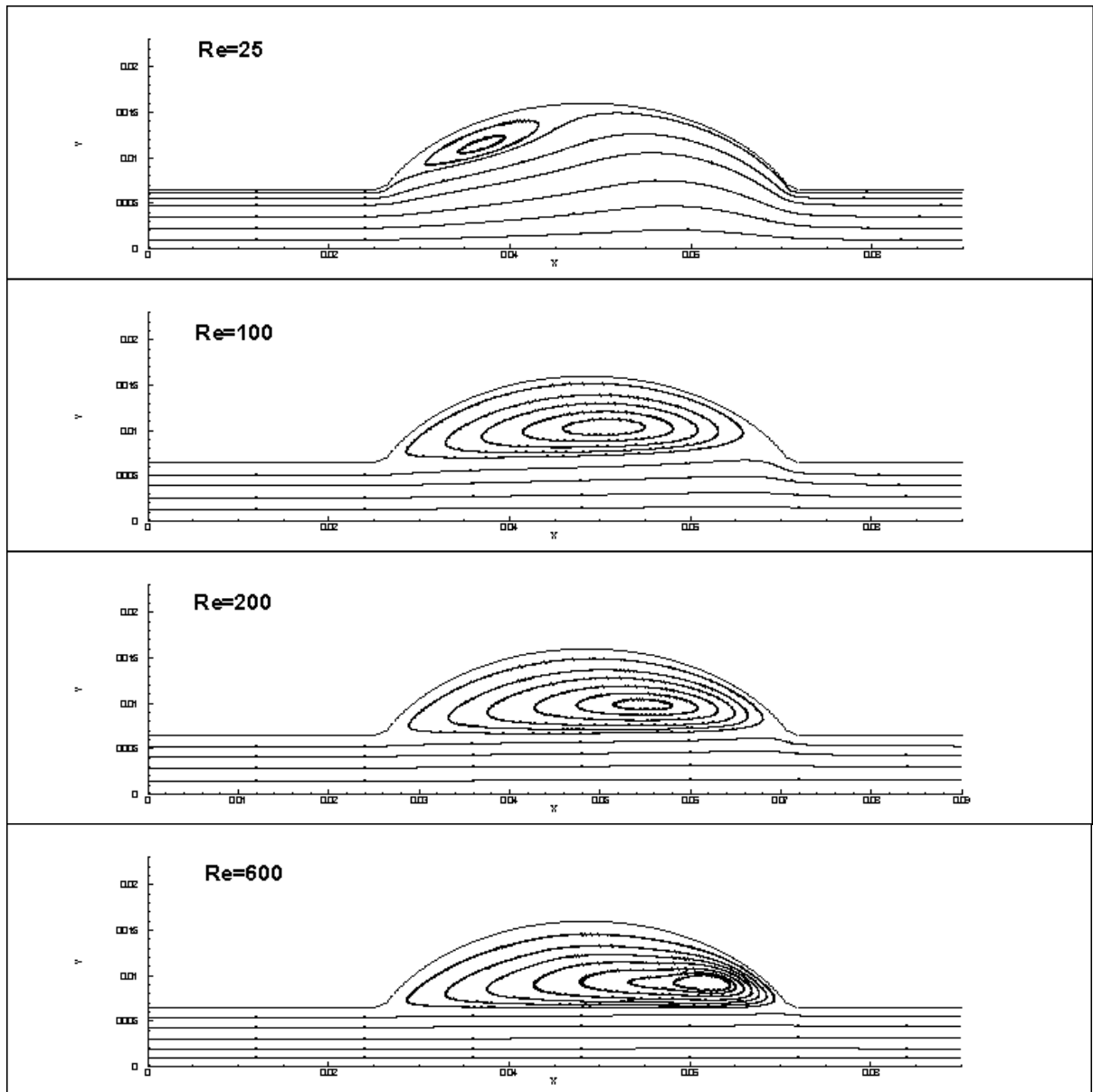
Η κίνηση των στοιχείων του ρευστού δύναται να οπτικοποιηθεί μέσω των γραμμών ροής δοθέντος ότι αυτές ταυτίζονται με τις τροχιές των στοιχείων ρευστού. Είναι ένα άριστο εργαλείο για διδιάστατες, αξονικά συμμετρικές ροές ασυμπίεστου ρευστού. Πρώτα θα δούμε τις γραμμές ροής μόνο για το νευτώνειο ρευστό και για τους 3 αγωγούς ώστε να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα μεταξύ τους αλλά και με άλλες εργασίες που έχει γίνει η μελέτη μόνο του νευτώνειου ρευστού, όπως στην [4], ενώ τα υπόλοιπα ρευστά θα τα παρουσιάσουμε παρακάτω μαζί με τις ισοσταθμικές του ιξώδους. Στα παρακάτω διαγράμματα φαίνεται ότι τα σωματίδια ρευστού ακολουθούν τροχιές ελλειπτικού τύπου στην κοιλότητα του ανευρύσματος, το κέντρο των οποίων μετατοπίζεται κατάντι με την αύξηση του αριθμού Re.

Αγωγός χωρίς αρχικό μήκος



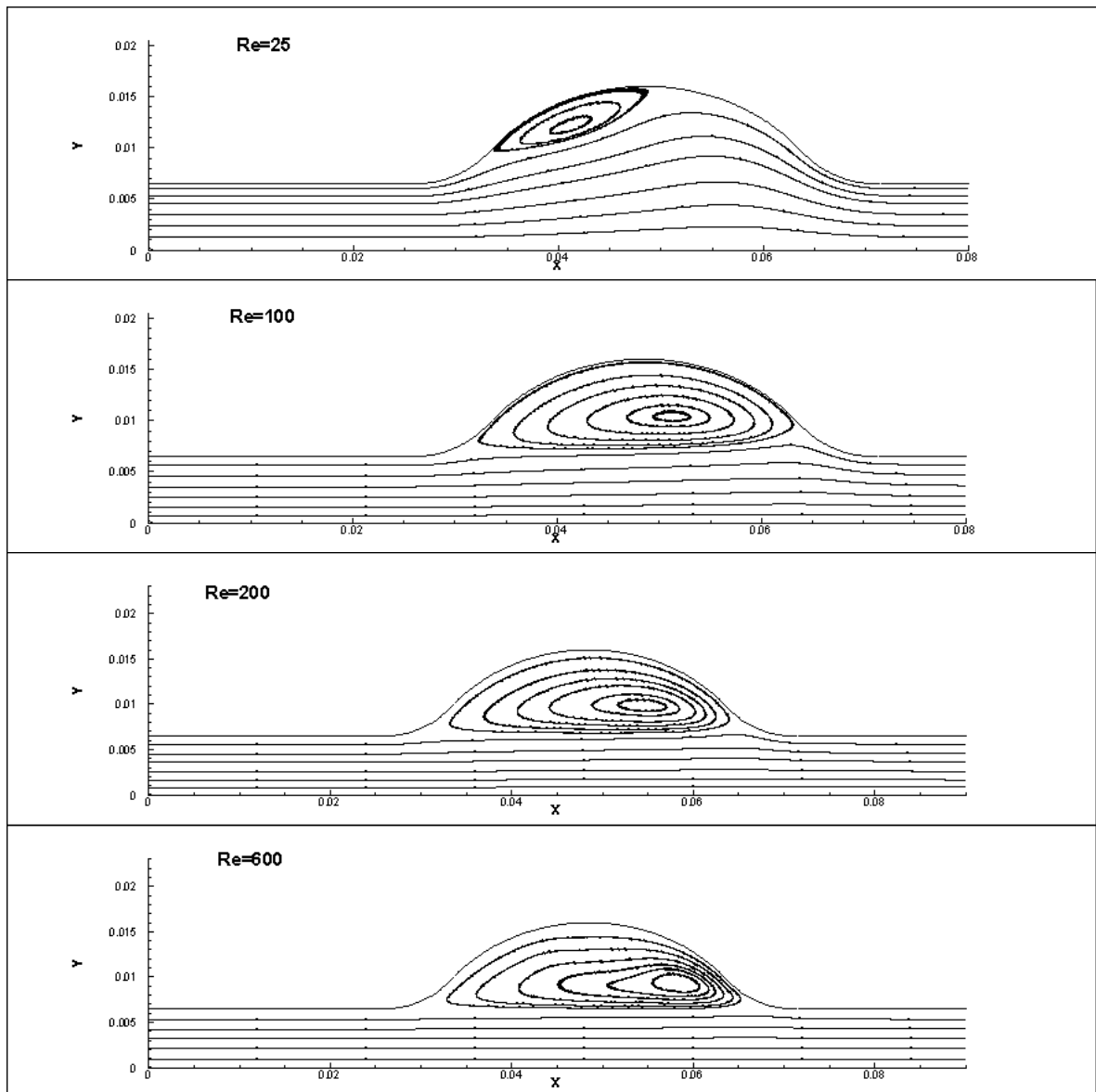
Δ6.11: γραμμές ροής για το νευτώνειο για $Re=25, 100, 200, 600$.

Αγωγός με αρχικό μήκος



Δ6.12: γραμμές ροής για το νευτώνειο για $Re=25, 100, 200, 600$.

Αγωγός με καμπυλότητα



Δ6.13: γραμμές ροής για το νευτώνιο για $Re=25, 100, 200, 600$.

Μια πρώτη παρατήρηση είναι πως όταν ο αγωγός μας έχει καμπυλότητα το κέντρο της δίνης μετακινείται κάποια χιλιοστά κατάντι στους πιο χαμηλούς Re και αντί στην περίπτωση υψηλών Re . Δηλαδή το ρευστό καθυστερεί περισσότερο να αποκολληθεί. Για παράδειγμα, για $Re=25$ το κέντρο της δίνης στον αγωγό χωρίς καμπυλότητα βρίσκεται στη θέση $x \approx 0.036m$, ενώ αντίστοιχα όταν έχουμε καμπυλότητα αυτό βρίσκεται στη θέση $x \approx 0.042m$. Με την αύξηση του Re , συγκεκριμένα για $Re=600$ στην πρώτη περίπτωση το κέντρο βρίσκεται $x \approx 0.061m$ ενώ στη δεύτερη περίπτωση $x \approx 0.058m$. Ένα γενικό συμπέρασμα είναι, ότι όταν

υπάρχει οξεία συνένωση της κοιλότητας του ανευρύσματος με τον ευθύγραμμο αγωγό, τότε το ρευστό αποκολλάται πιο γρήγορα.

Για την περίπτωση αγωγού με αρχικό μήκος ή χωρίς δεν παρατηρούνται διαφορές στο κέντρο της δίνης, άρα στην επανακόλληση και την αποκόλληση της ροής. Μπορούμε, λοιπόν, να συμπεράνουμε ότι το αρχικό μήκος του αγωγού δεν παίζει κάποιο ρόλο στην αποκόλληση της ροής. Επίσης, διαφορές ιδιαίτερες δεν παρατηρούνται στα αποτελέσματα τα δικά μας σε σχέση με τα αποτελέσματα στην εργασία [4].

ii) Γραμμές ροής και ιξώδες

Θέλοντας να διαπιστώσουμε τη σχέση του μεταβλητού ιξώδους των μη νευτώνειων ρευστών με τη μορφή της ροής, παρουσιάζουμε τις γραμμές ροής μαζί με τις ισοσταθμικές του ιξώδους για το νευτώνιο και για τα μη νευτώνεια ρευστά που εξετάζουμε.

Η μελέτη θα γίνει μόνο για τον αγωγό με καμπυλότητα, που είναι και ο κύριος αγωγός που θα χρησιμοποιήσουμε για μελέτη, αφού θεωρούμε ότι αυτή η γεωμετρία είναι και η πιο λογική.

Για να διατηρήσουμε τη γενικότητα της μεθόδου και για να επικεντρωθούμε στη μορφή της καμπύλης ιξώδους-ρυθμού παραμόρφωσης και όχι στις τιμές που παίρνει το ιξώδες, αδιαστατοποιούμε το ιξώδες σε όλο το πεδίο ροής με ένα ιξώδες αναφοράς μ_{ref} σε κάθε μοντέλο. Ιξώδες αναφοράς θεωρούμε την αποτελεσματική συνεκτικότητα κάθε μοντέλου $\mu_{ref} = \mu_{eff}$ μέσω της οποίας υπολογίστηκε ο Re στο καθένα.

Θα ορίσουμε τον λόγο $J = \frac{\mu_{axis}}{\mu_{flow}}$ ως το λόγο της τιμής που λαμβάνει το ιξώδες στην

περιοχή γύρω από τον άξονα, προς αυτή που λαμβάνει στα εξωτερικά, κοντά στο τοίχωμα στρώματα.

Στα διαγράμματα Δ.6.14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24, παρατηρούμε τις μεταβολές του ιξώδους μέσα στην κοιλότητα του ανευρύσματος. [38]

Μια γενική παρατήρηση είναι ότι το ιξώδες αυξάνεται πριν την αποκόλληση της ροής.

Αναλυτικά:

- Για το ρευστό W-S παρατηρούμε ότι το ιξώδες παίρνει υψηλότερες τιμές στην περιοχή της διόγκωσης του αγωγού και συγκεκριμένα στο τοίχωμα στην κοιλότητα του ανευρύσματος, καθώς και στην περιοχή του άξονα, ενώ στο εσωτερικό παίρνει χαμηλότερες τιμές.

Το ιξώδες του W-S λαμβάνει τις πιο χαμηλές τιμές σε σχέση με τα υπόλοιπα μη νευτώνεια ρευστά που μελετούμε.

Όσο ο αριθμός Re αυξάνεται τόσο μειώνεται και η τιμή του ιξώδους σταδιακά. Βλέπουμε ότι διατηρεί τον λόγο $J \approx 4$ για όλους τους αριθμούς Re. Η μόνη διαφορά που παρατηρείται είναι το πάχος των περιοχών που λαμβάνουν αυτές τις τιμές, συγκεκριμένα οι περιοχές με χαμηλό ιξώδες γίνονται πλατύτερες.

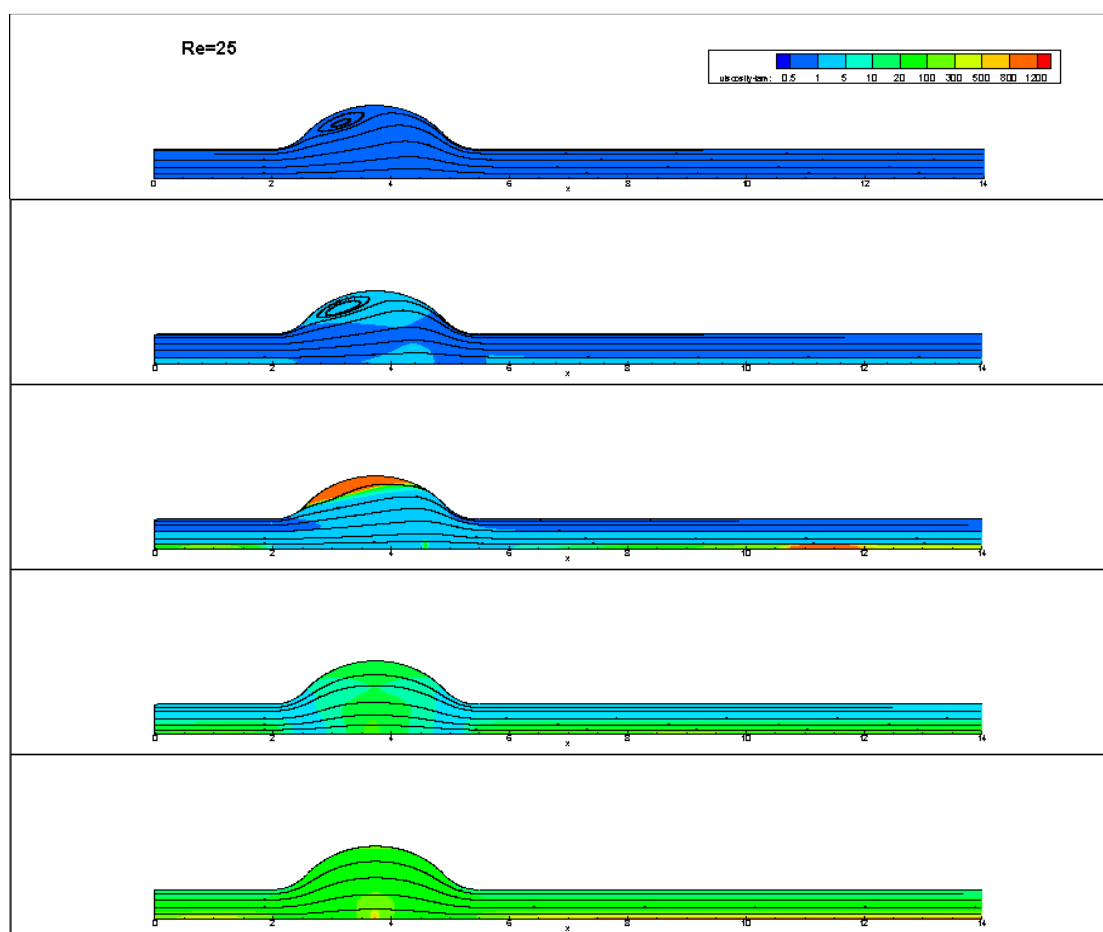
- Για το ρευστό H-B παρατηρούμε ότι το ιξώδες του λαμβάνει πολύ υψηλές τιμές στο τοίχωμα στην περιοχή της κοιλότητας του ανευρύσματος στους χαμηλούς Re που δεν έχουμε ακόμα αποκόλληση της ροής.

Για $Re = 75$, που έχουμε ανακυκλοφορία, το ιξώδες παίρνει υψηλές τιμές στο τοίχωμα λίγο πριν τη συνένωση με τον ευθύγραμμο αγωγό. Τέλος, το ρευστό H-B τείνει να προσεγγίσει τη συμπεριφορά του νευτώνιου ενιαίου ιξώδους, όσο ο Re αυξάνεται. Για $Re \geq 200$ παρατηρούμε παρόμοια συμπεριφορά του H-B με το W-S και σε όλο και μεγαλύτερους Re αυτό τείνει να προσεγγίσει τη νευτώνεια συμπεριφορά. Για παράδειγμα, για $Re=25$ ισχύει $J \approx 10$.

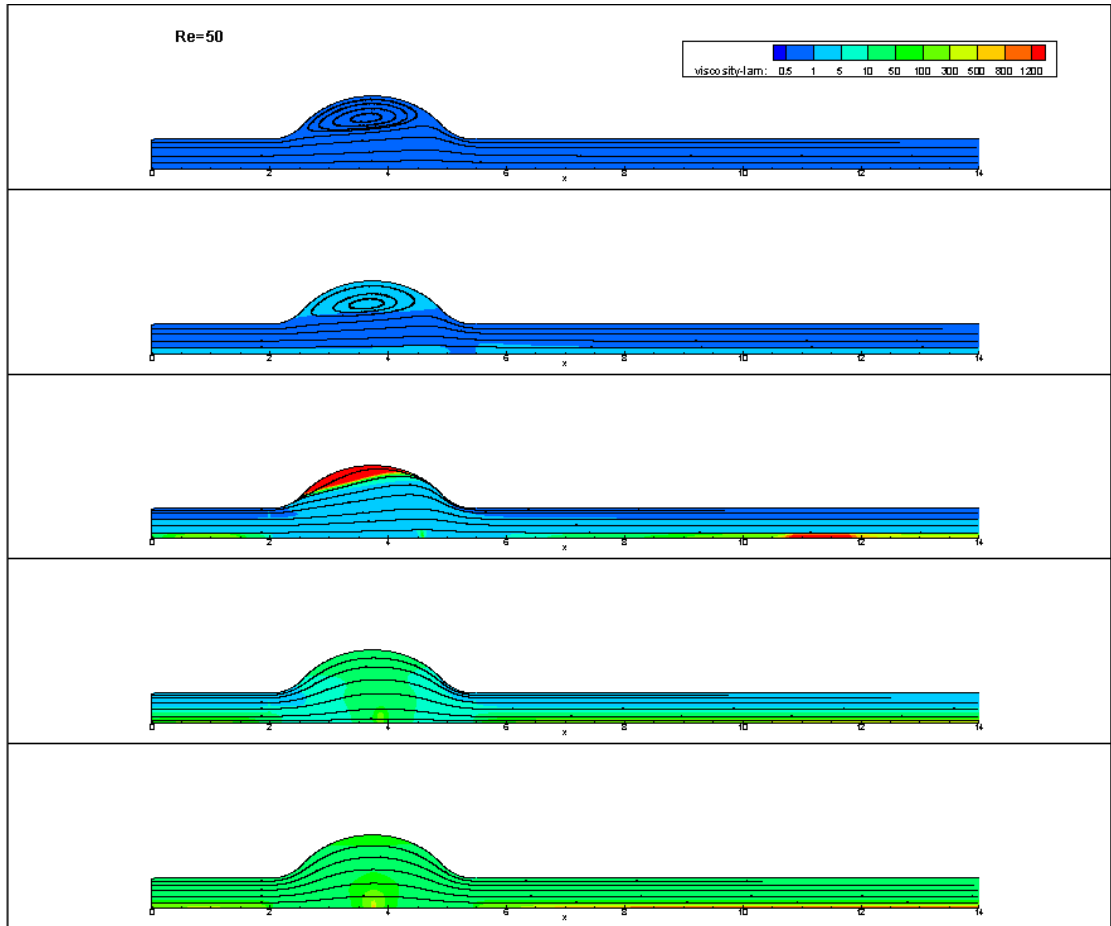
- Για το ρευστό Casson παρατηρούμε την παρουσία μιας «καμπάνας» στο εσωτερικό της κοιλότητας του ανευρύσματος κοντά στον άξονα. Επίσης, υψηλότερο ιξώδες παρουσιάζεται στην περιοχή της καμπάνας καθώς και στον άξονα. Και εδώ παρατηρείται τάση προσέγγισης της νευτώνειας συμπεριφοράς. Για $Re \leq 150$ παρατηρούνται υψηλές τιμές του λόγου J .

- Το τελευταίο μη νευτώνειο είναι το Quemada το οποίο λαμβάνει υψηλές σχετικά τιμές ιξώδους σε ολόκληρο το μήκος του αγωγού. Και εδώ έχουμε την εμφάνιση της «καμπάνας» όπου και έχουμε υψηλότερες τιμές ιξώδους. Οι λόγοι J που παρουσιάζει είναι αρκετά υψηλοί τόσο σε χαμηλούς, όσο και σε υψηλούς Re .

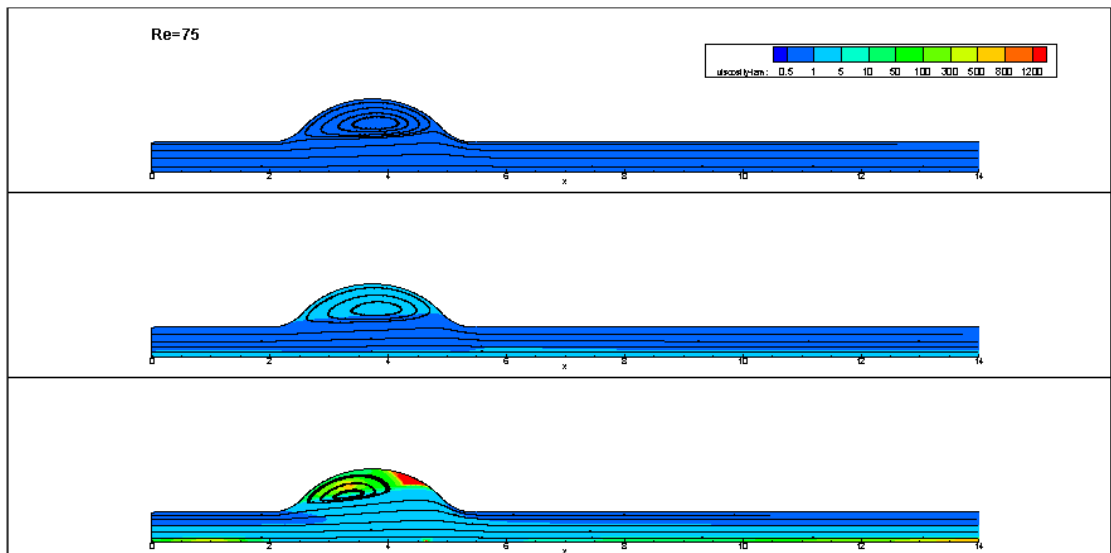
Σε γενικές γραμμές, σε κάθε περίπτωση που παρατηρείται μικρή δίνη, το κέντρο της είναι σημείο εμφάνισης υψηλού ιξώδους.

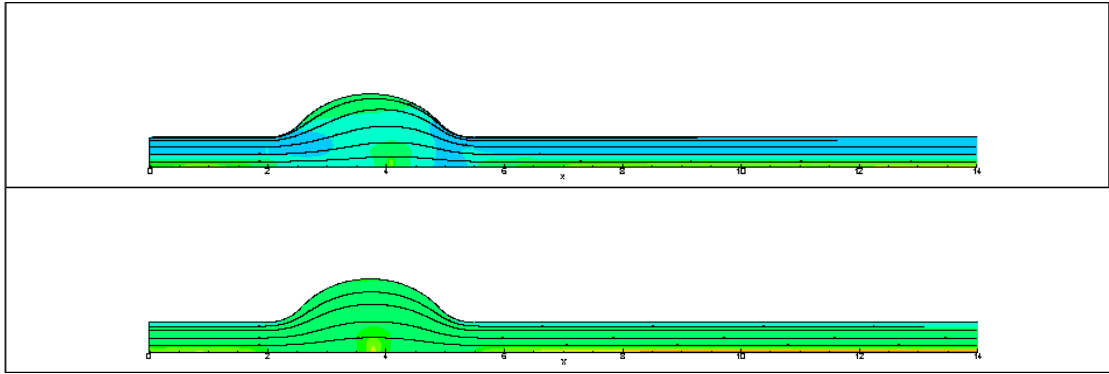


Δ6.14: $Re = 25$ Γραμμές ροής και ισοσταθμικές ιξώδους: νευτώνειο, W-S, H-B, Casson, Quemada.

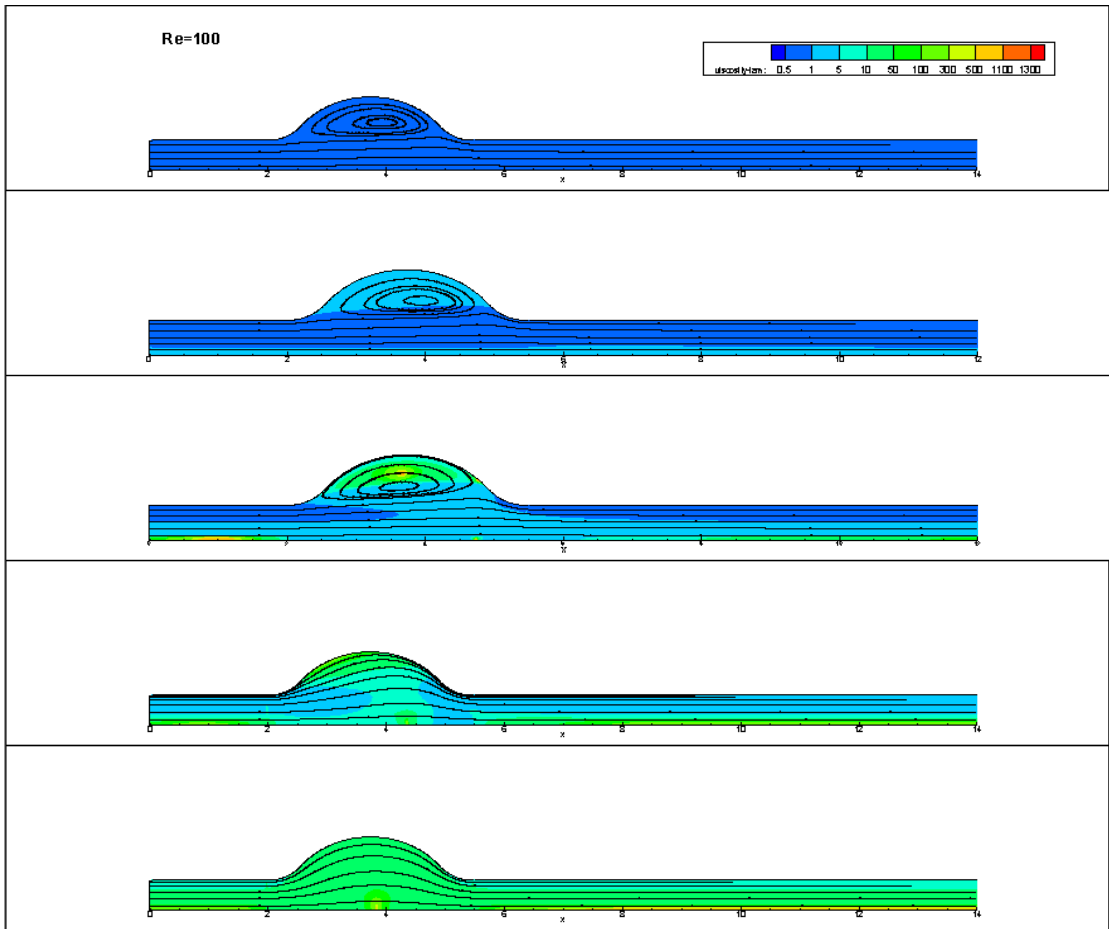


Δ6.15: $Re = 50$ Γραμμές ροής και ισοσταθμικές ιξώδους: νευτώνειο, W-S, H-B, Casson, Quemada.

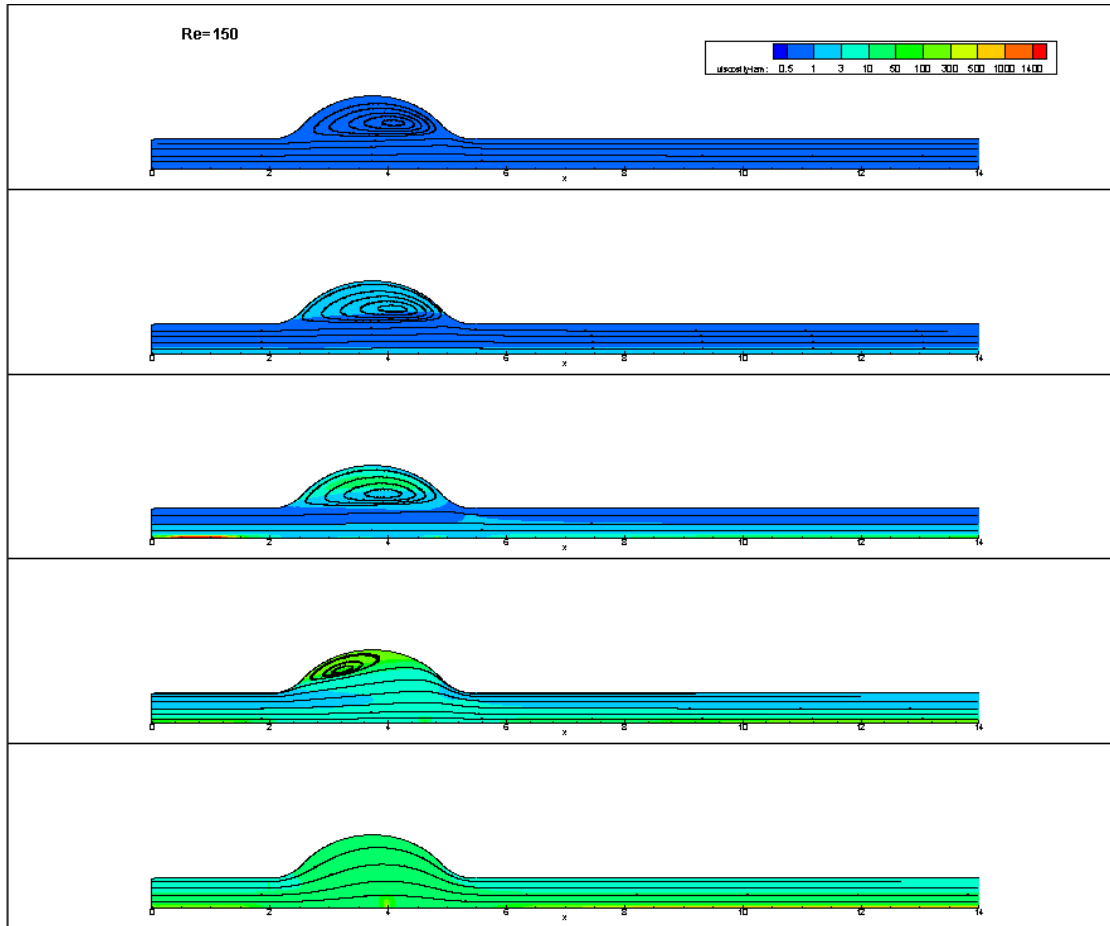




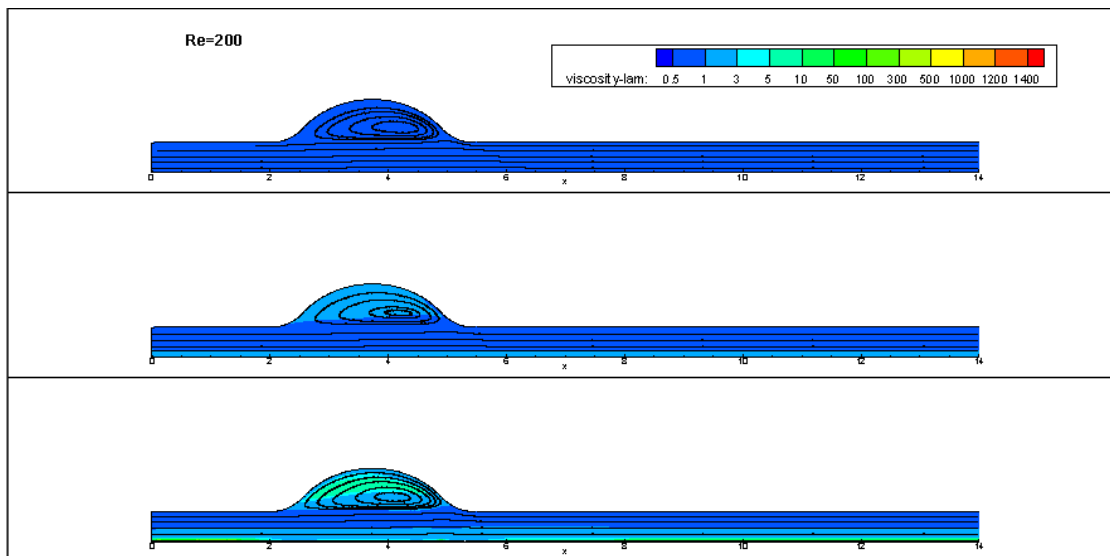
Δ6.16: $Re = 75$ Γραμμές ροής και ισοσταθμικές ιξώδους:
νευτώνιο, W-S, H-B, Casson, Quemada.

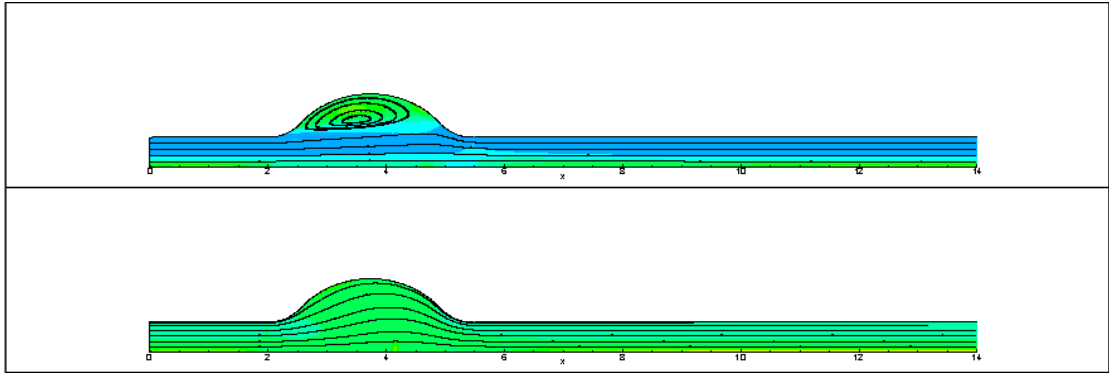


Δ6.17: $Re = 100$ Γραμμές ροής και ισοσταθμικές ιξώδους:
νευτώνιο, W-S, H-B, Casson, Quemada.

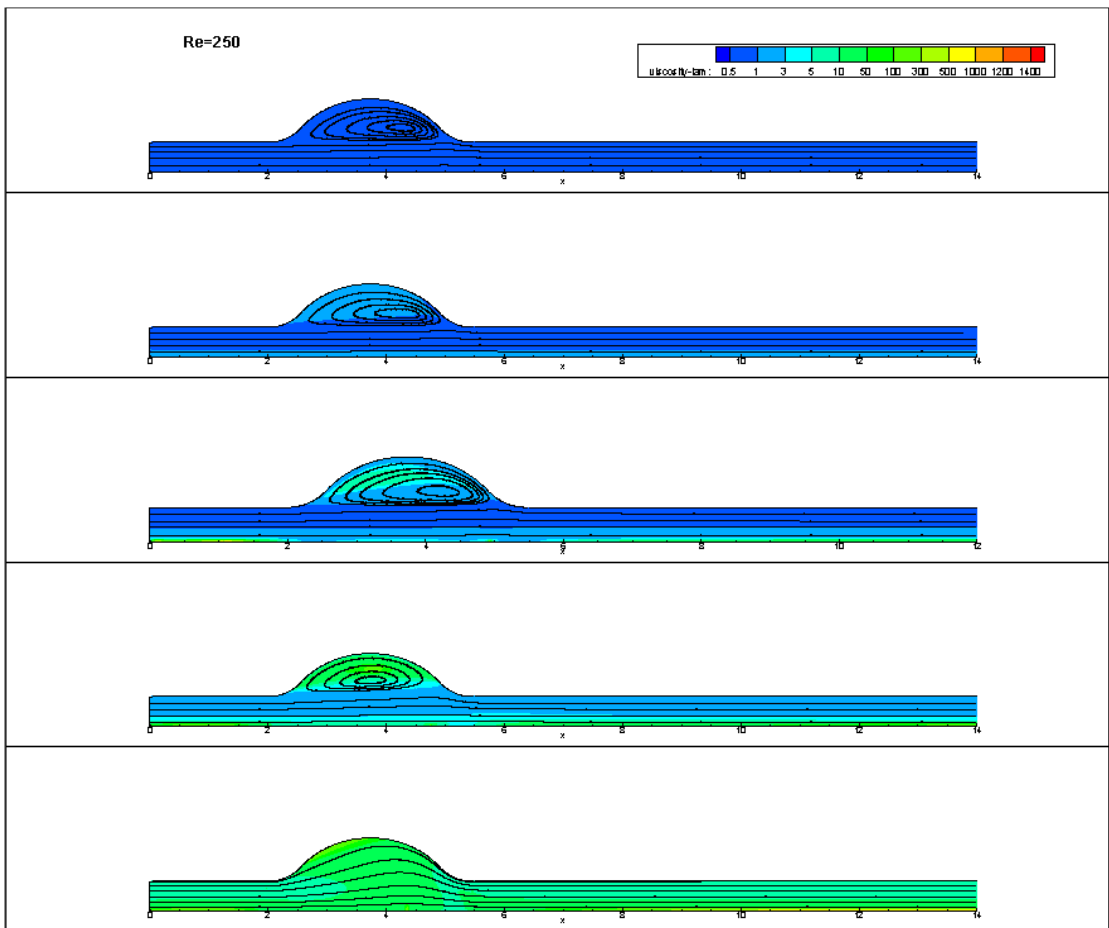


Δ6.18: $Re = 150$ Γραμμές ροής και ισοσταθμικές ιξώδους:
νευτώνειο, W-S, H-B, Casson, Quemada.

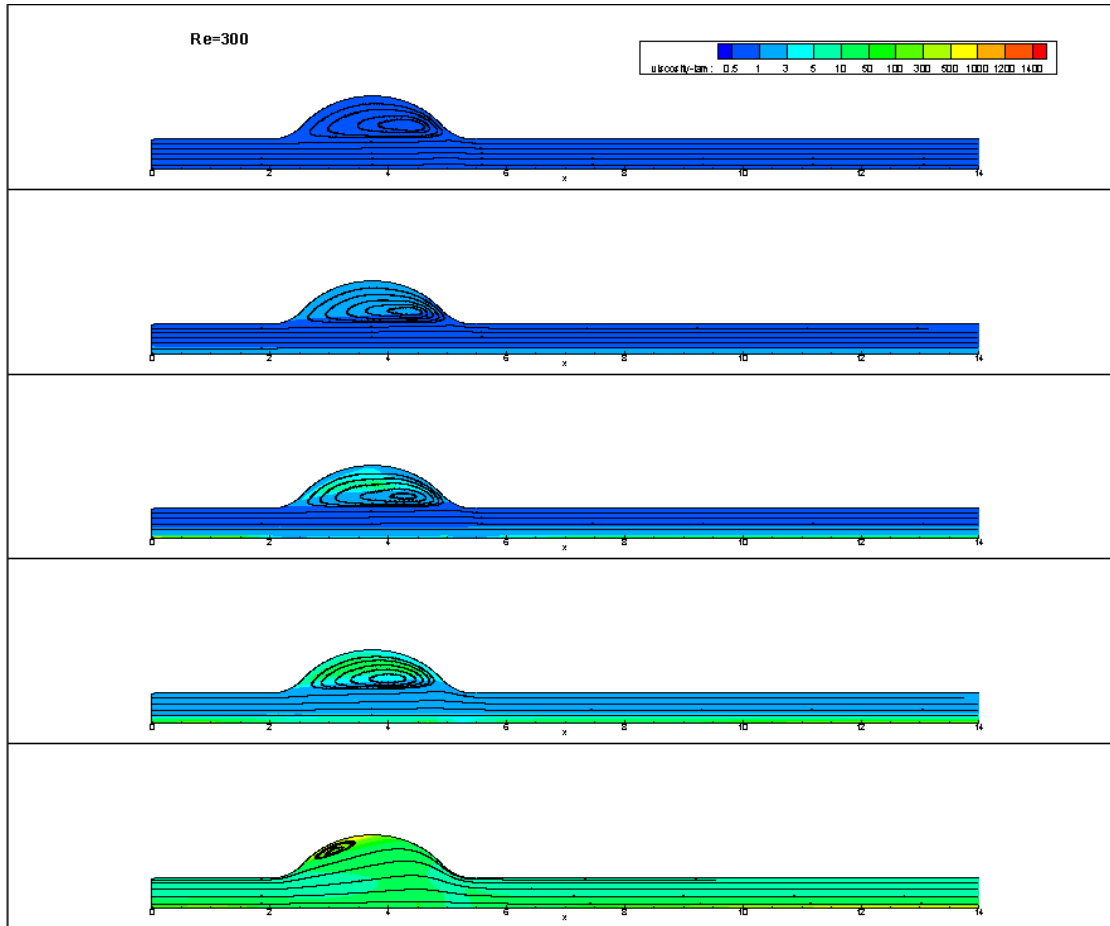




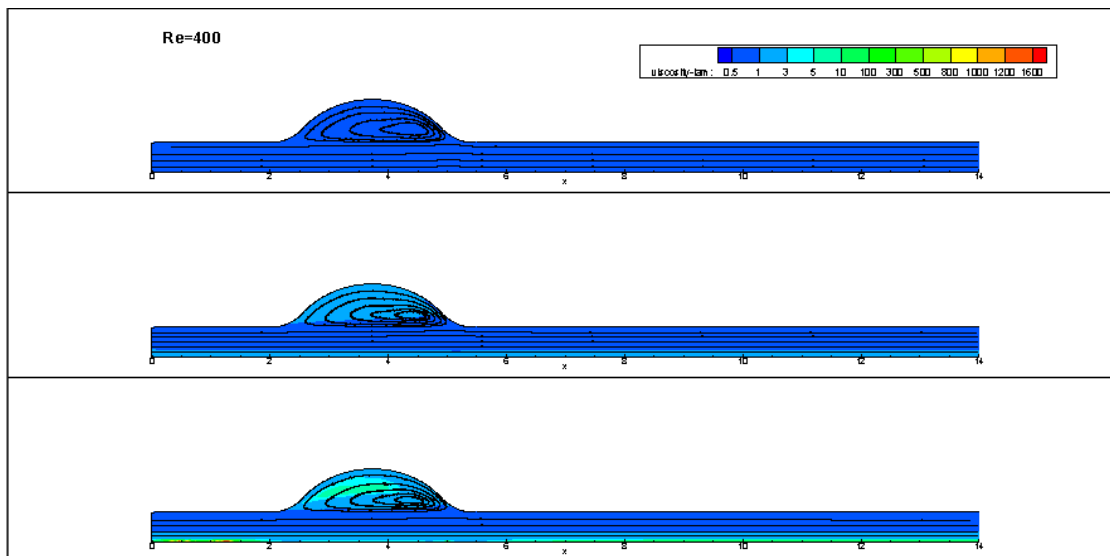
Δ6.19: $Re = 200$ Γραμμές ροής και ισοσταθμικές ιξώδους:
νευτώνειο, W-S, H-B, Casson, Quemada.

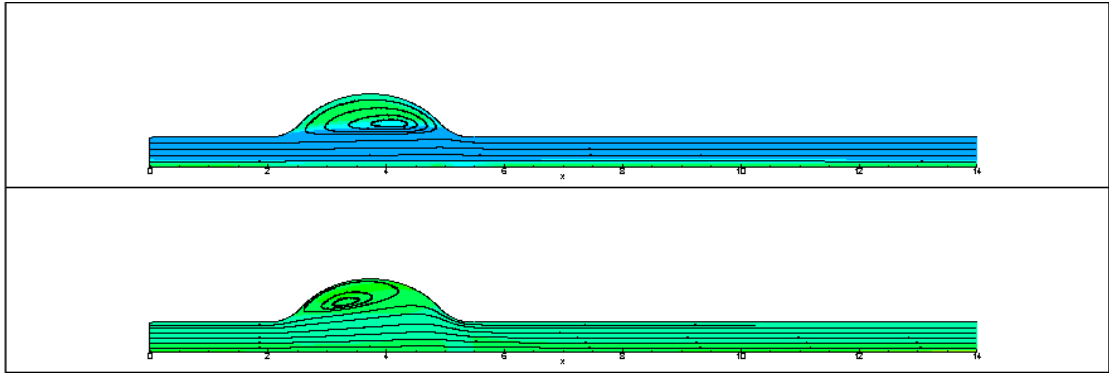


Δ6.20: $Re = 250$ Γραμμές ροής και ισοσταθμικές ιξώδους:
νευτώνειο, W-S, H-B, Casson, Quemada.

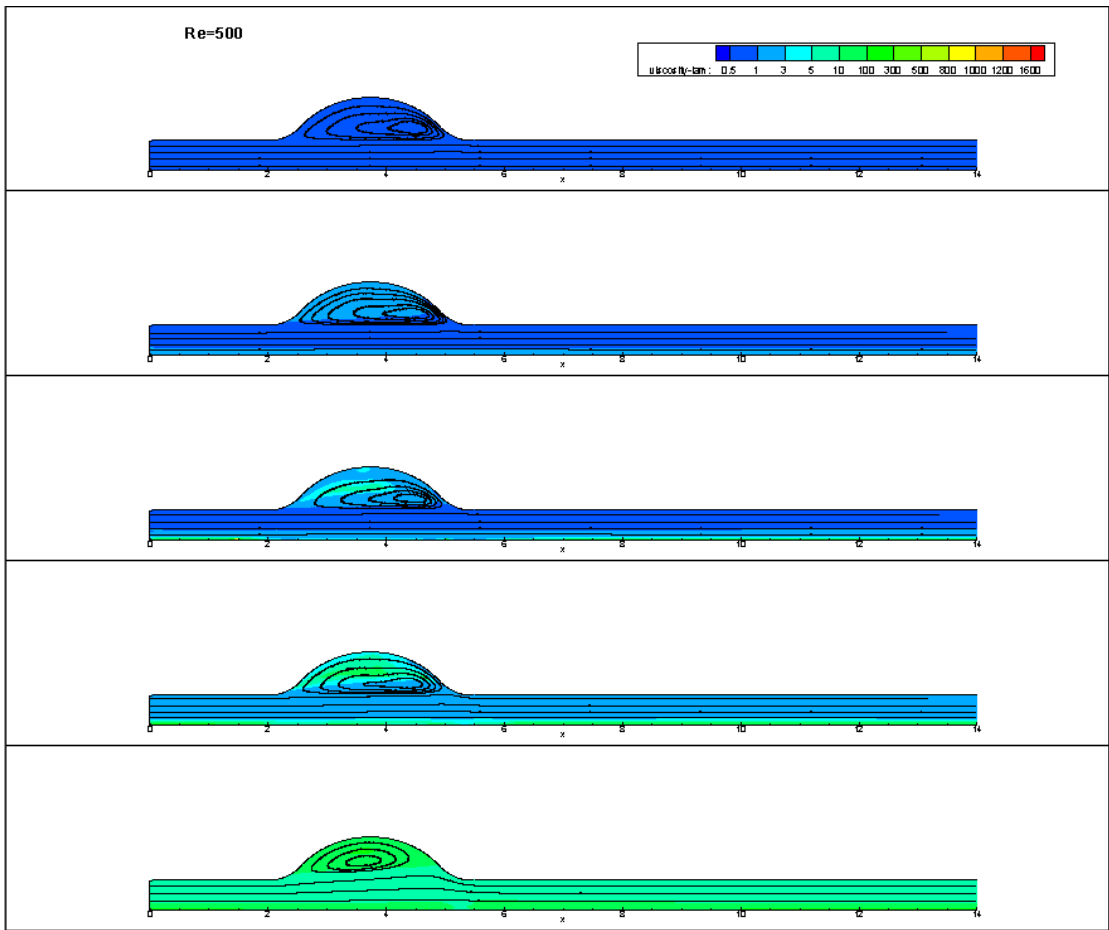


Δ6.21: $Re = 300$ Γραμμές ροής και ισοσταθμικές ιξώδους:
νευτώνιο, W-S, H-B, Casson, Quemada.

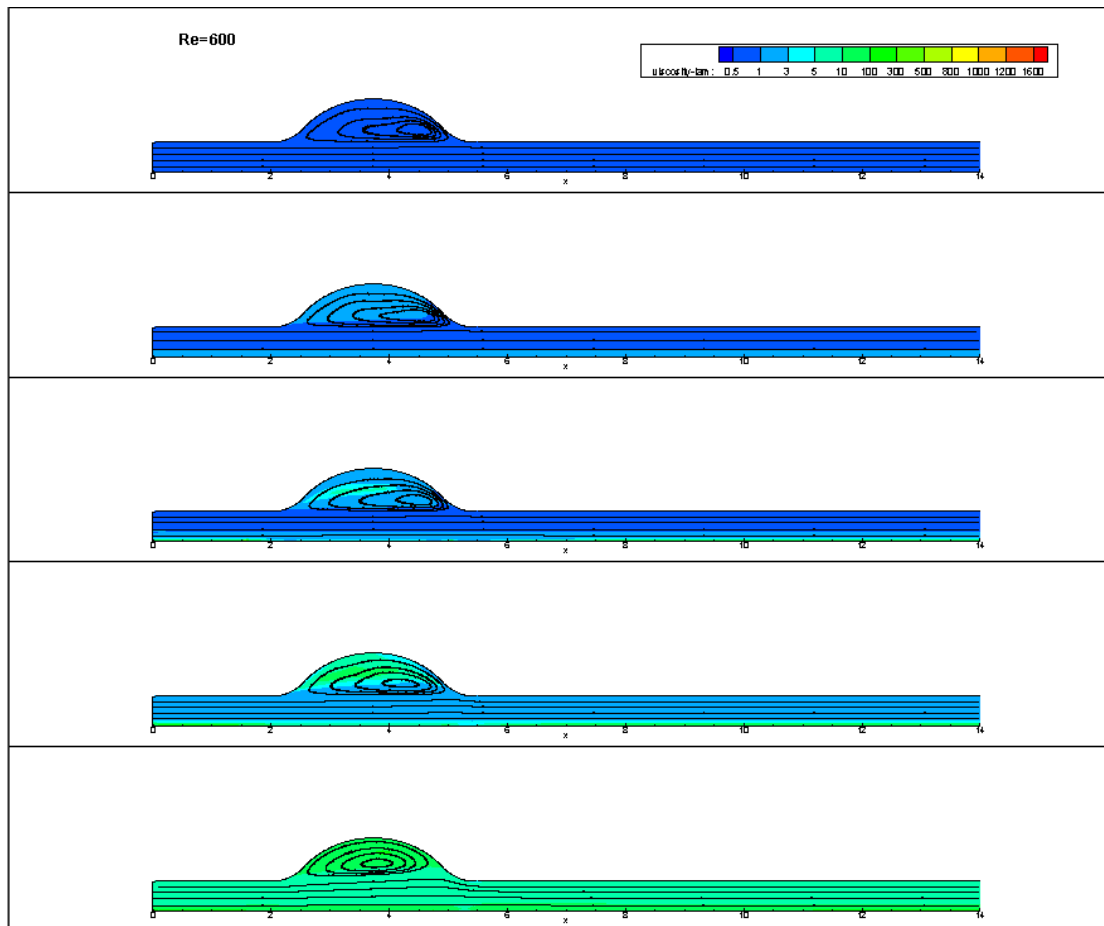




Δ6.22: $Re = 400$ Γραμμές ροής και ισοσταθμικές ιξώδους:
νευτώνειο, W-S, H-B, Casson, Quemada.



Δ6.23: $Re = 500$ Γραμμές ροής και ισοσταθμικές ιξώδους:
νευτώνειο, W-S, H-B, Casson, Quemada.



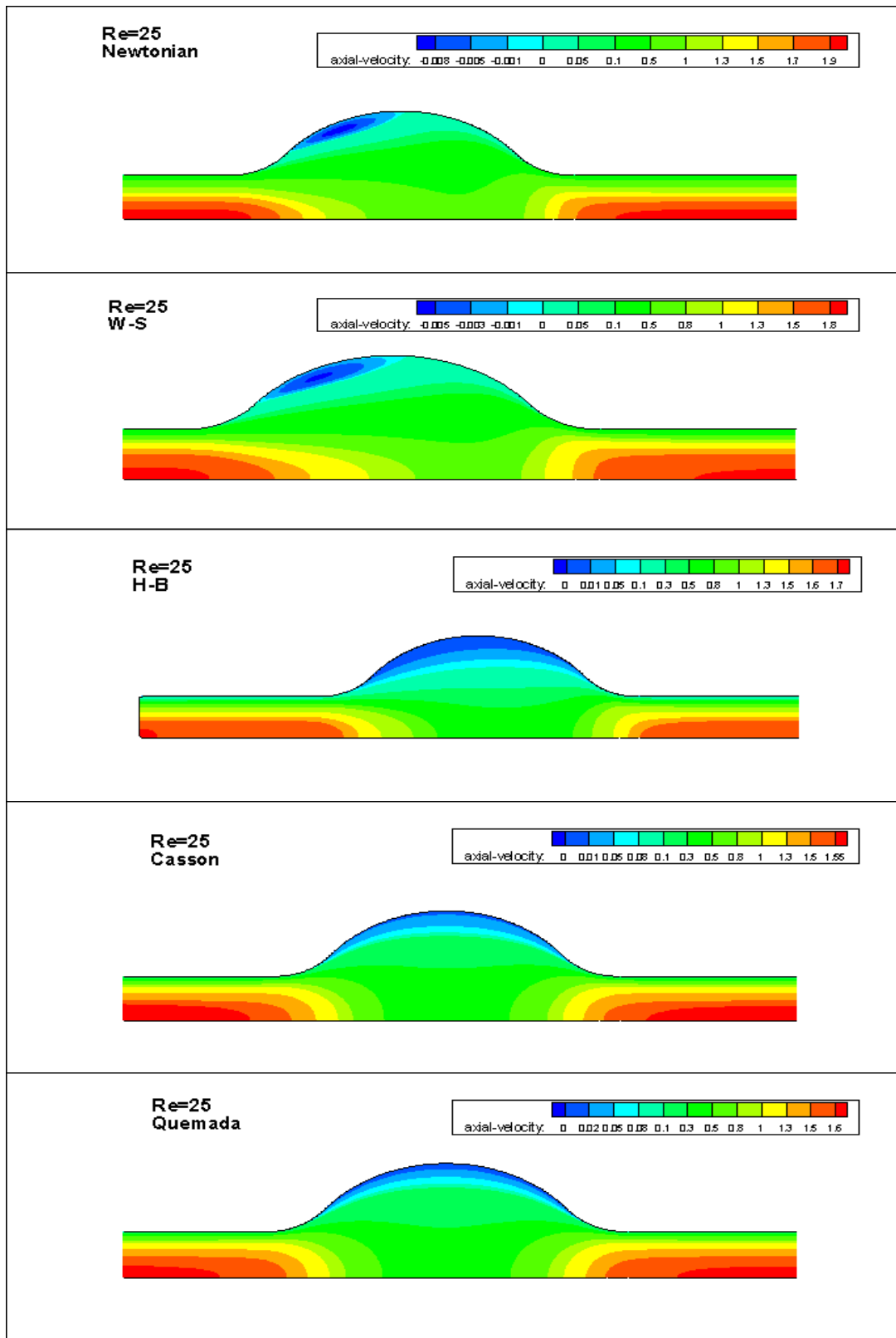
Δ6.24: $Re = 600$ Γραμμές ροής και ισοσταθμικές ιξώδους: νευτώνειο, W-S, H-B, Casson, Quemada.

iii) Ισοϋψείς ταχύτητας

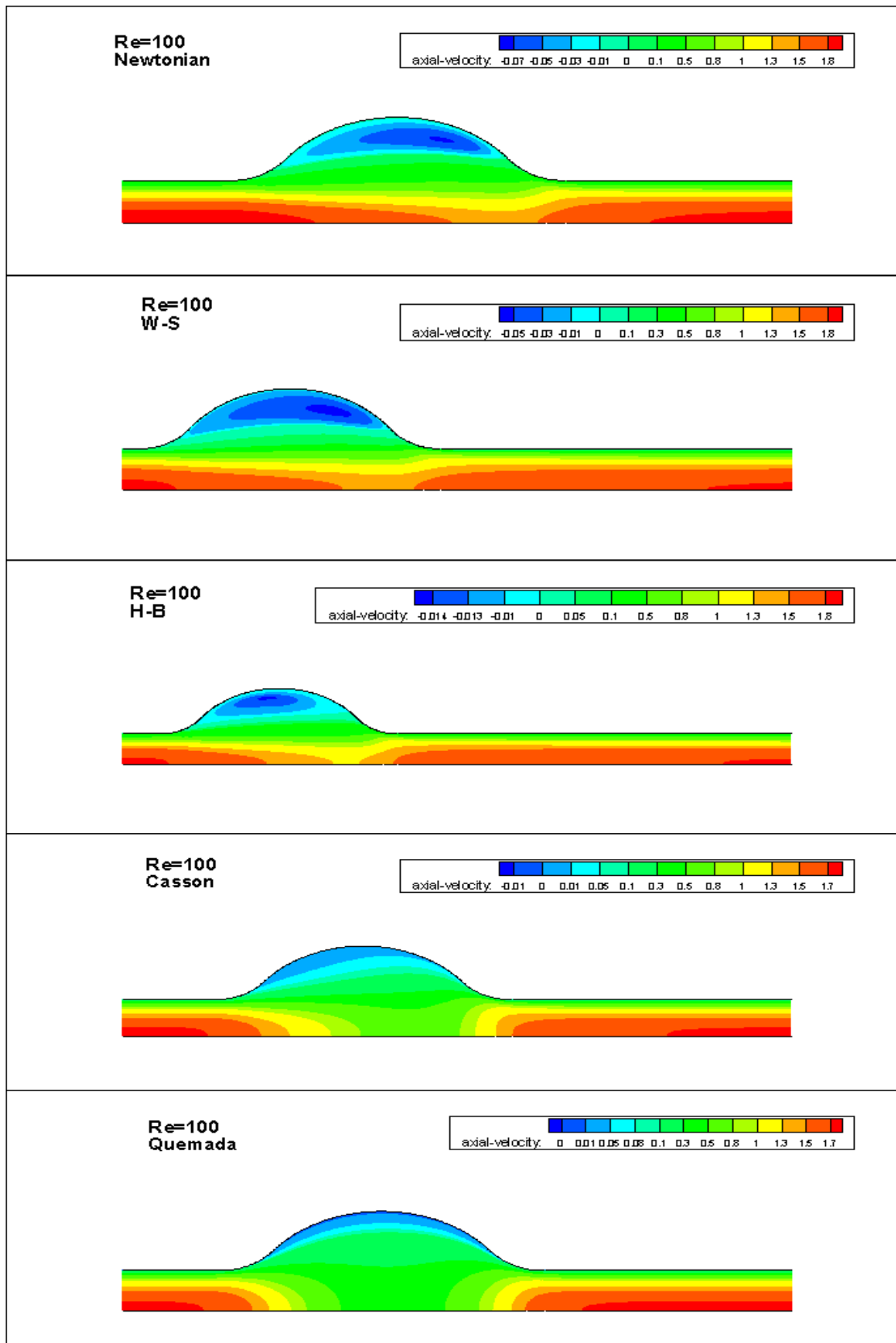
Οι ισοϋψείς κατανομής της κανονικοποιημένης αξονικής συνιστώσας της ταχύτητας (ανηγμένης στη μέση ταχύτητα εισόδου) απεικονίζονται στα παρακάτω διαγράμματα, για διάφορους αριθμούς Re .

Παρατηρήσεις:

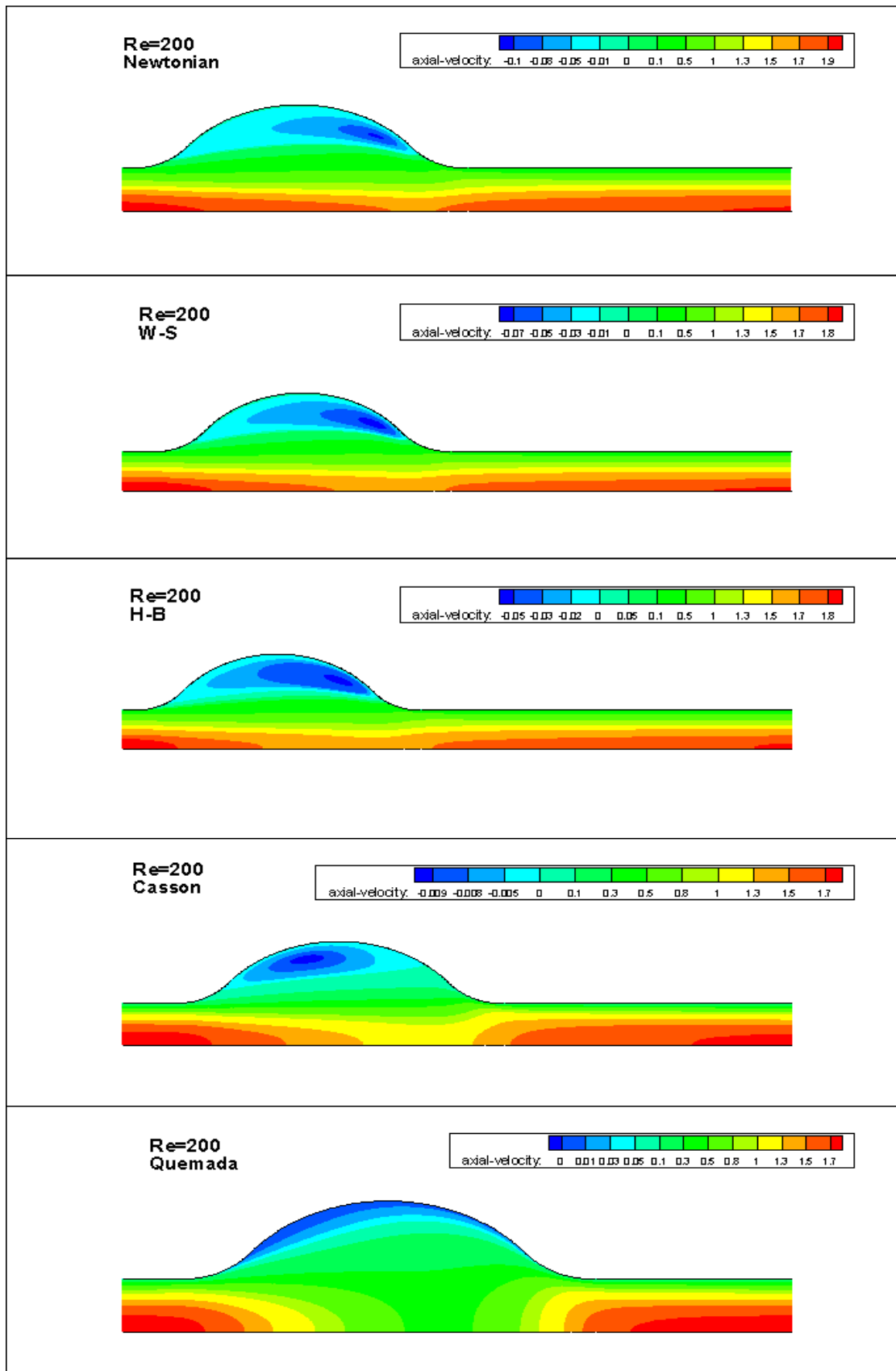
- Αυξανόμενος ο αριθμός Re , η θέση της μέγιστης ανάστροφης ροής μετατοπίζεται κατάντι συγχρόνως με τη γραμμή επανακόλλησης της ροής. Αυτό ισχύει για όλα τα ρευστά.
- Προφανώς η αξονική ταχύτητα λαμβάνει αρνητικές τιμές μόνο στην περιοχή ανακυκλοφορίας, γι' αυτό και ορισμένα ρευστά δεν παίρνουν αρνητικές τιμές σε χαμηλούς Re καθώς δεν παρουσιάζουν αποκόλληση ροής σε χαμηλούς Re .



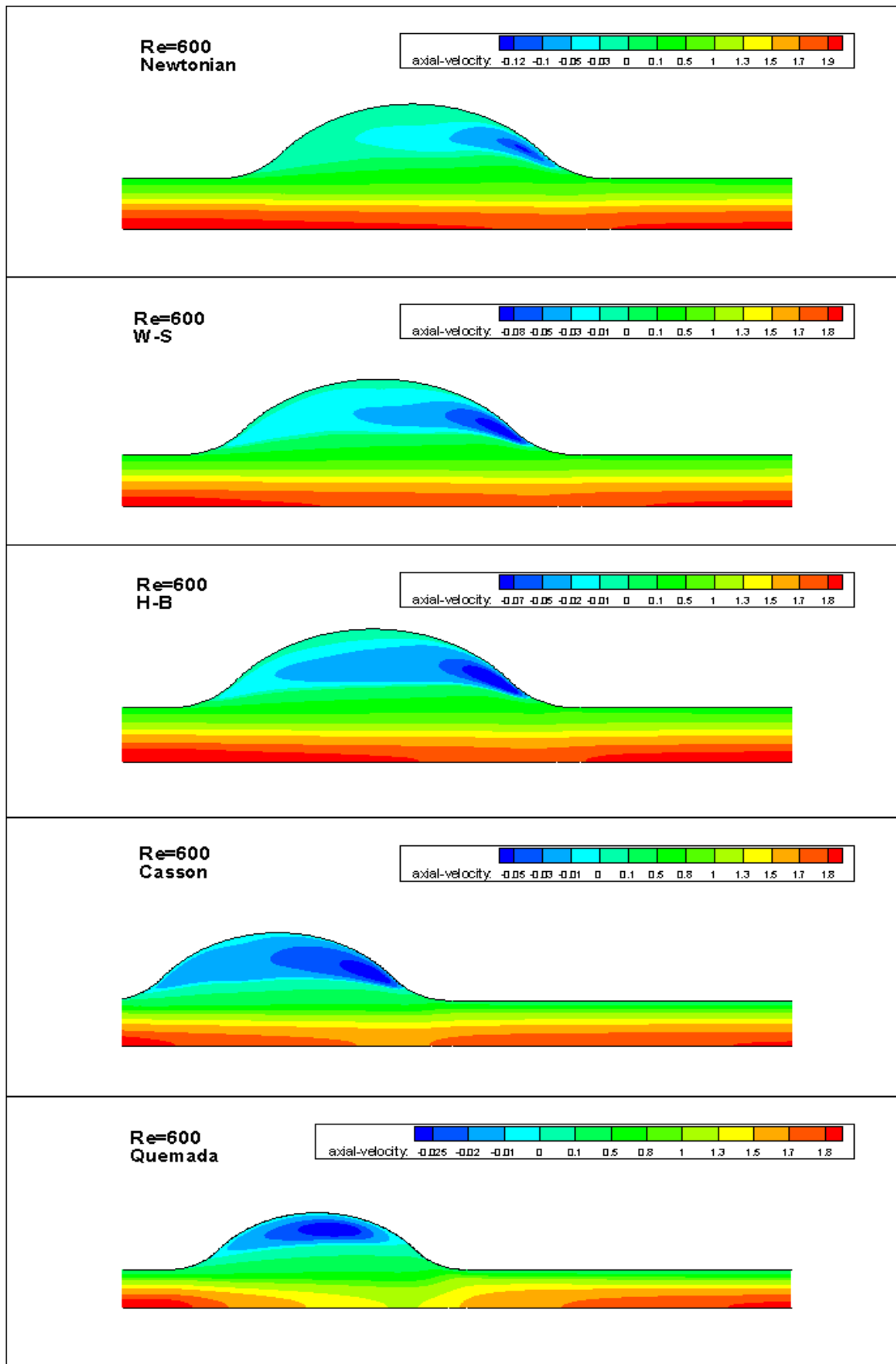
Δ6.25: Ισοϋψείς αξονικής ταχύτητας για $Re=25, 100, 200, 600$.



Δ6.26: Ισοϋψείς αξονικής ταχύτητας για $Re=25, 100, 200, 600$.



Δ6.27: ισοϋψεις αξονικής ταχύτητας για $Re=25, 100, 200, 600$.



Δ6.28: Ισοϋψείς αξονικής ταχύτητας για $Re=25, 100, 200, 600$.

iv) Κατανομές αξονικής ταχύτητας στην κορυφή του ανευρύσματος και μεταβολή της ταχύτητας στον άξονα συμμετρίας

Στα παρακάτω διαγράμματα απεικονίζονται οι κατανομές των αξονικών ταχυτήτων στη διατομή του ανευρύσματος για την περίπτωση του αγωγού με καμπυλότητα και για του αγωγού με οξεία συνένωση.

Η επίδραση του αριθμού Re διαφαίνεται στις κατανομές της αξονικής ταχύτητας στην είσοδο του μοντέλου, οι οποίες τείνουν να γίνουν πεπλατυσμένες για υψηλότερες τιμές Re .

Παρατηρούμε, ότι με την αύξηση του Re , οι διαφορές που παρατηρούνται στην περιοχή του ανευρύσματος μειώνονται με αποτέλεσμα να έχουμε σχεδόν παρόμοιες κατανομές ταχυτήτων. Καταλαβαίνουμε, λοιπόν, ότι υπάρχει ένα όριο που από κει και πέρα έχουμε σχεδόν όμοια προφίλ ταχυτήτων.

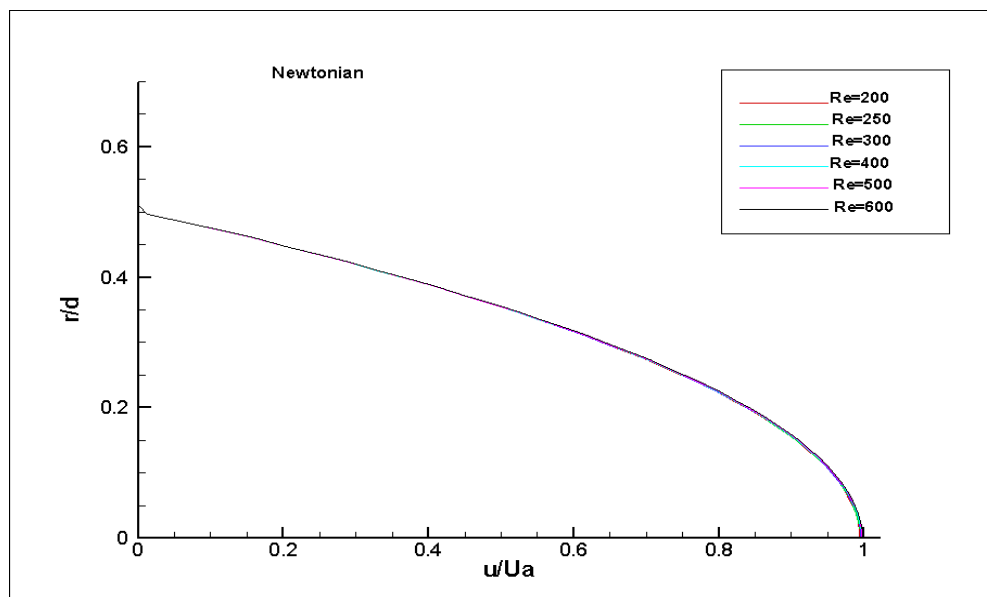
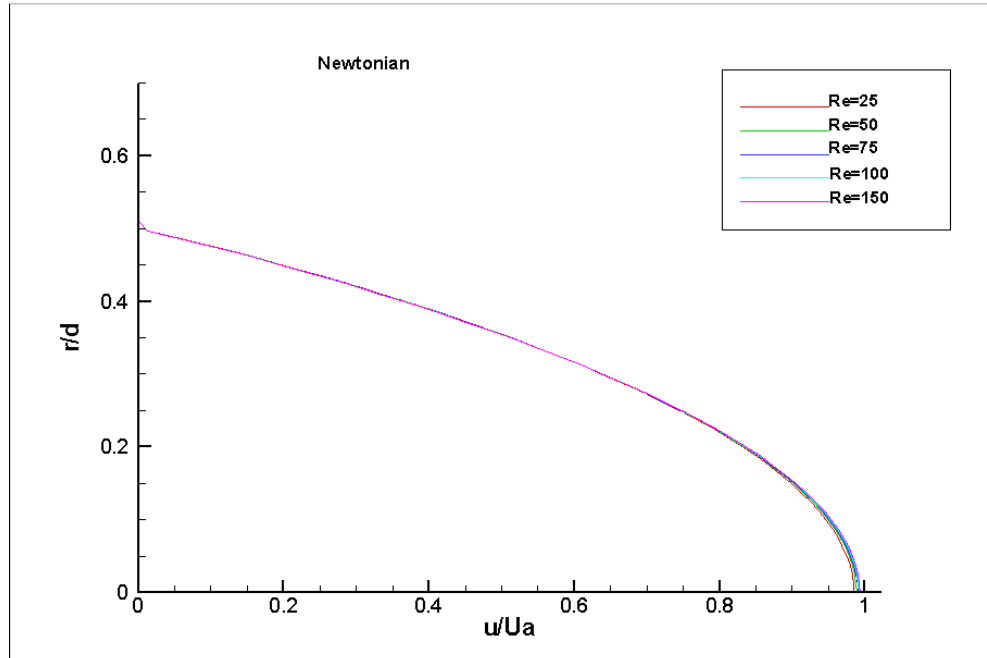
Συγκεκριμένα στα μοντέλα Casson και *quemada* οι διαφορές των προφίλ ταχυτήτων στους διάφορους αριθμούς Re είναι πιο έντονες συγκριτικά με τα υπόλοιπα ρευστά.

Στο νευτώνειο ρευστό και στο $W-S$, τα προφίλ σε χαμηλούς και σε υψηλούς αριθμούς Re είναι παρόμοια, με αποτέλεσμα να μη διακρίνονται λεπτομέρειες. Το φαινόμενο είναι εντονότερο στις κατανομές ταχυτήτων του νευτώνειου.

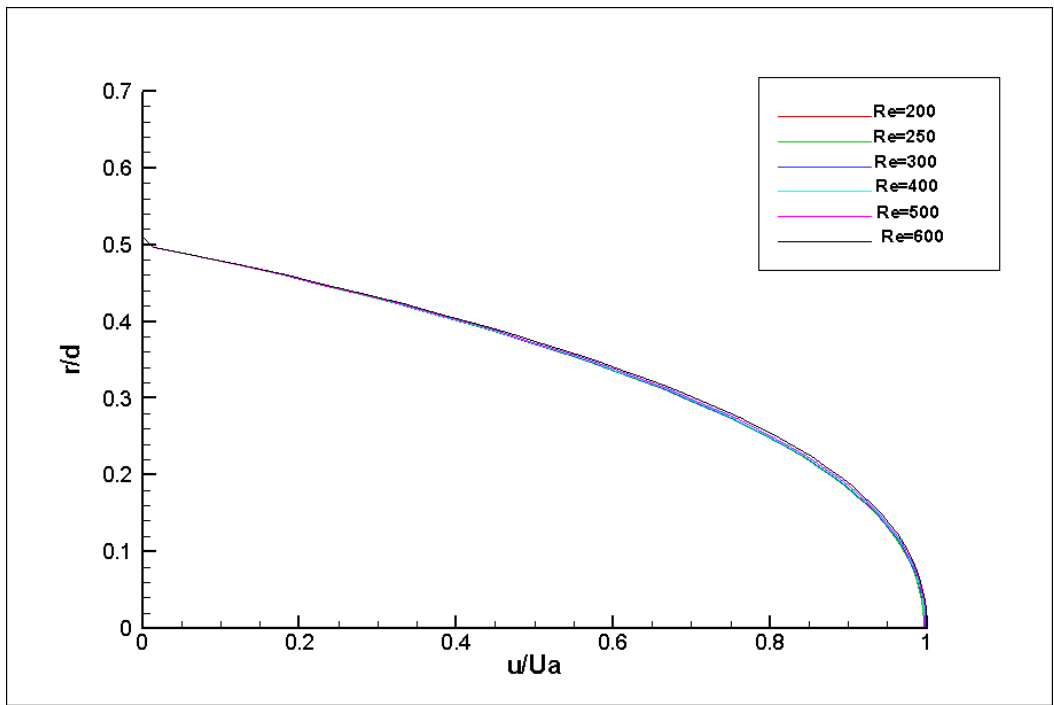
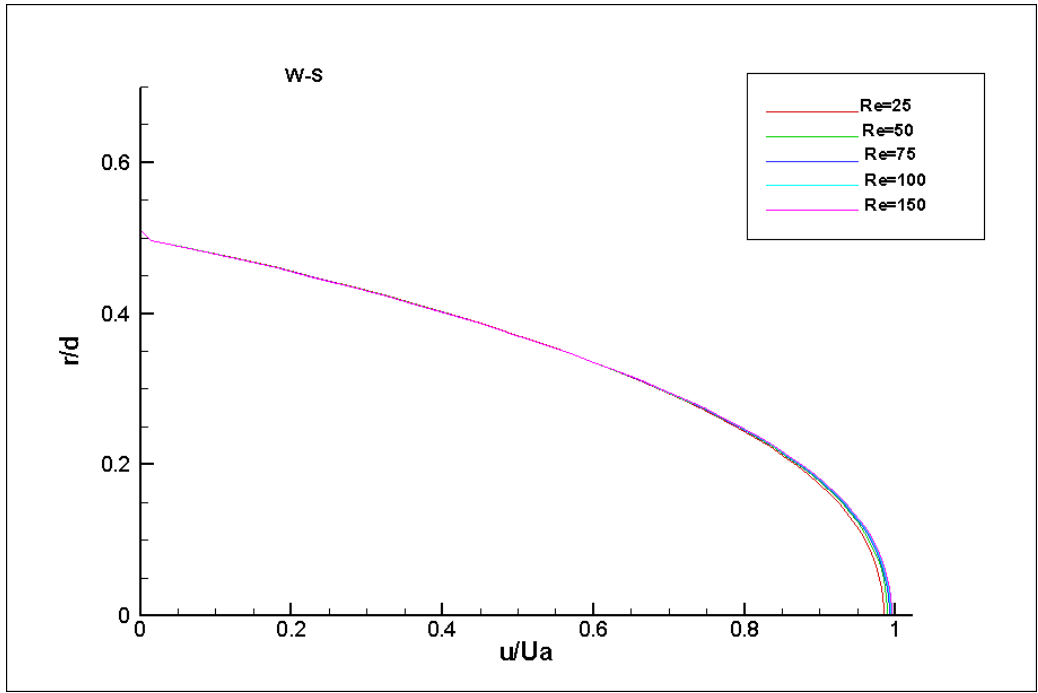
Στο $H-B$ διακρίνουμε πιο καθαρά την πιο πάνω παρατήρηση, ότι με την αύξηση του αριθμού Re καταλήγουμε σε παρόμοια προφίλ ταχυτήτων.

Επιπλέον, παρουσιάζουμε και τις δύο περιπτώσεις αγωγών αν και δεν παρατηρούνται ιδιαίτερες διαφορές μεταξύ τους.

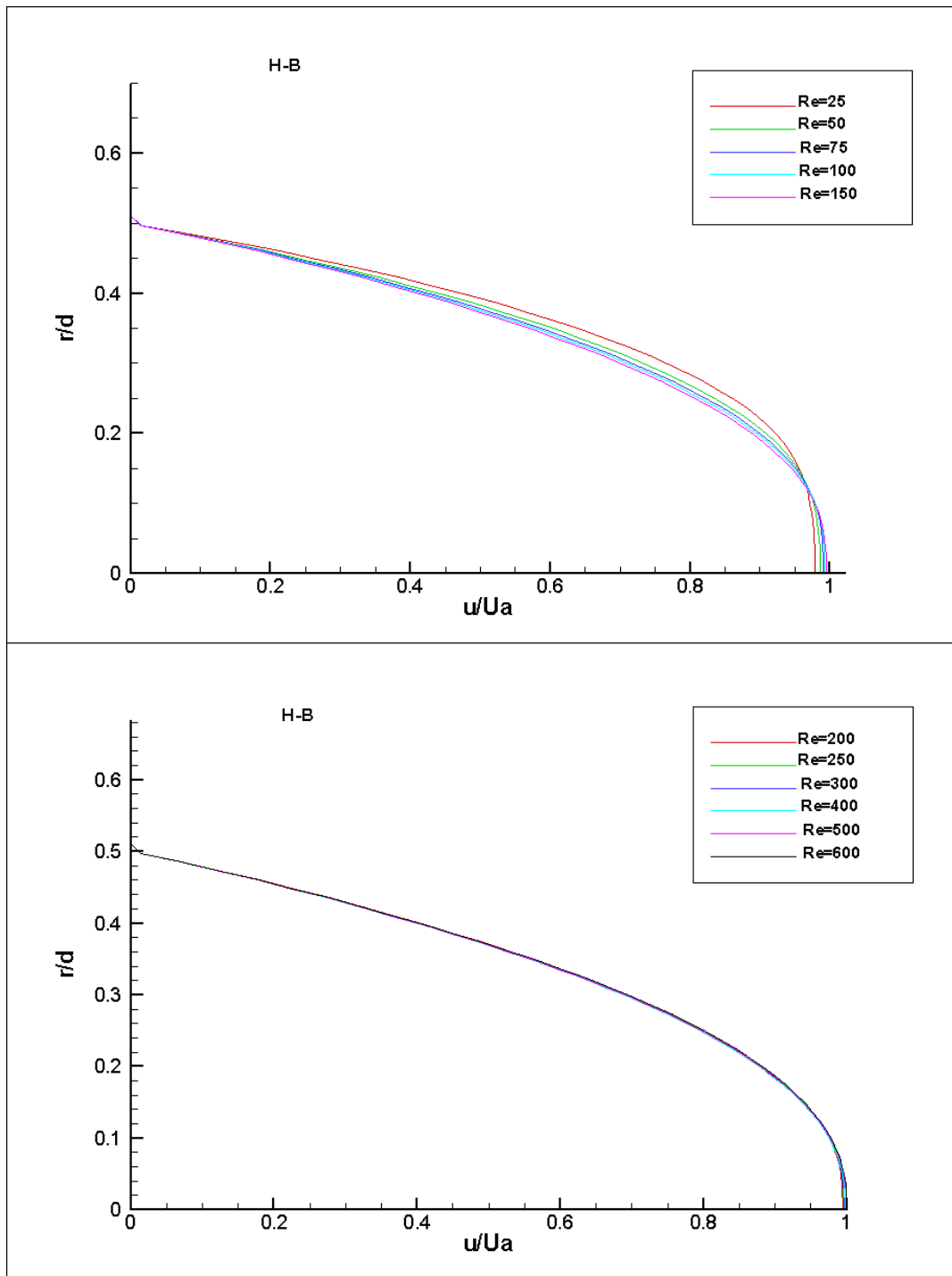
Αγωγός με καμπυλότητα



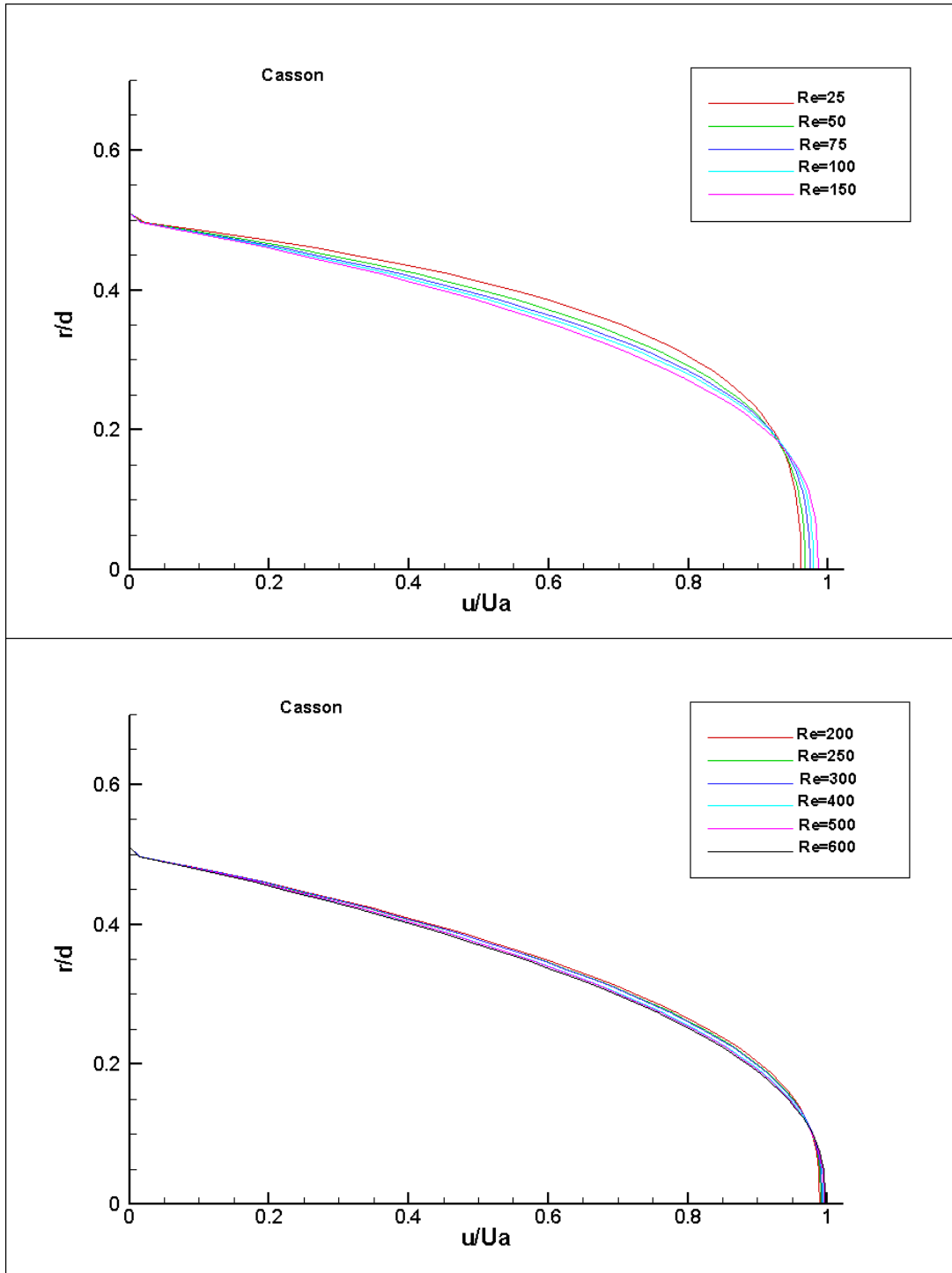
Δ6.29: οι κατανομές των αξονικών ταχυτήτων στη διατομή του ανευρύσματος.



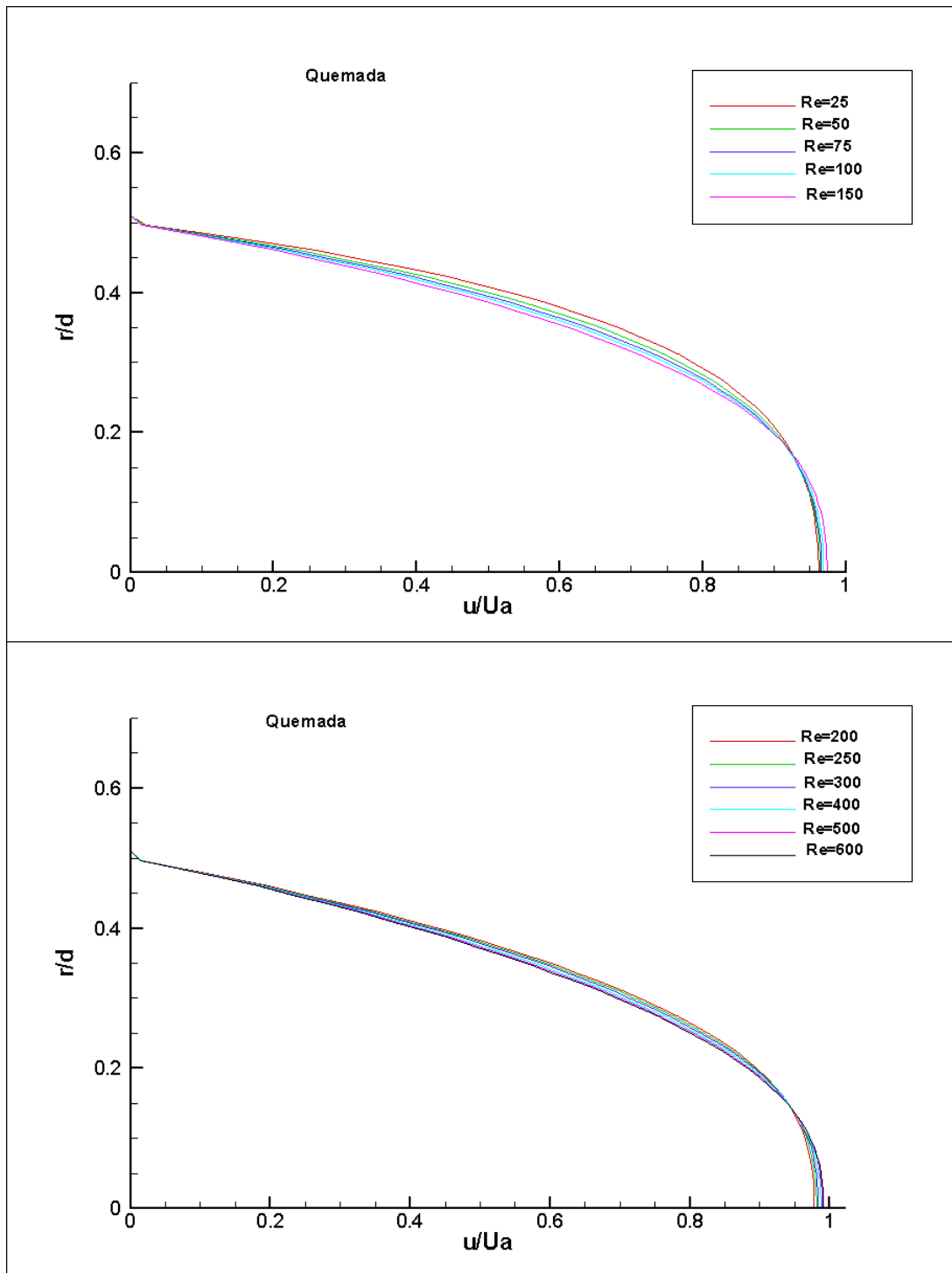
Δ6.30: οι κατανομές των αξονικών ταχυτήτων στη διατομή του ανευρύσματος.



Δ6.31: οι κατανομές των αξονικών ταχυτήτων στη διατομή του ανευρύσματος.

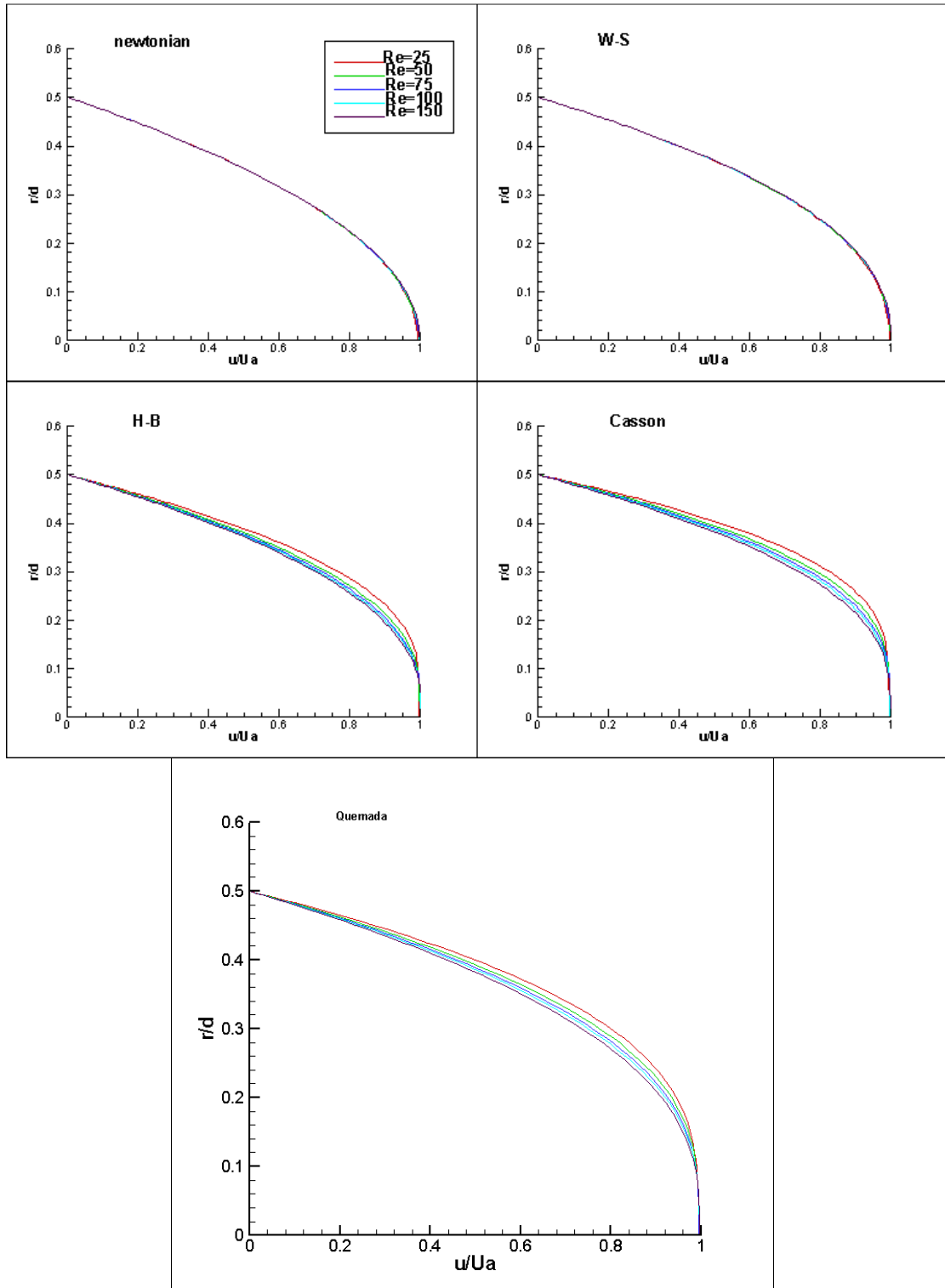


Δ6.32: οι κατανομές των αξονικών ταχυτήτων στη διατομή του ανευρύσματος

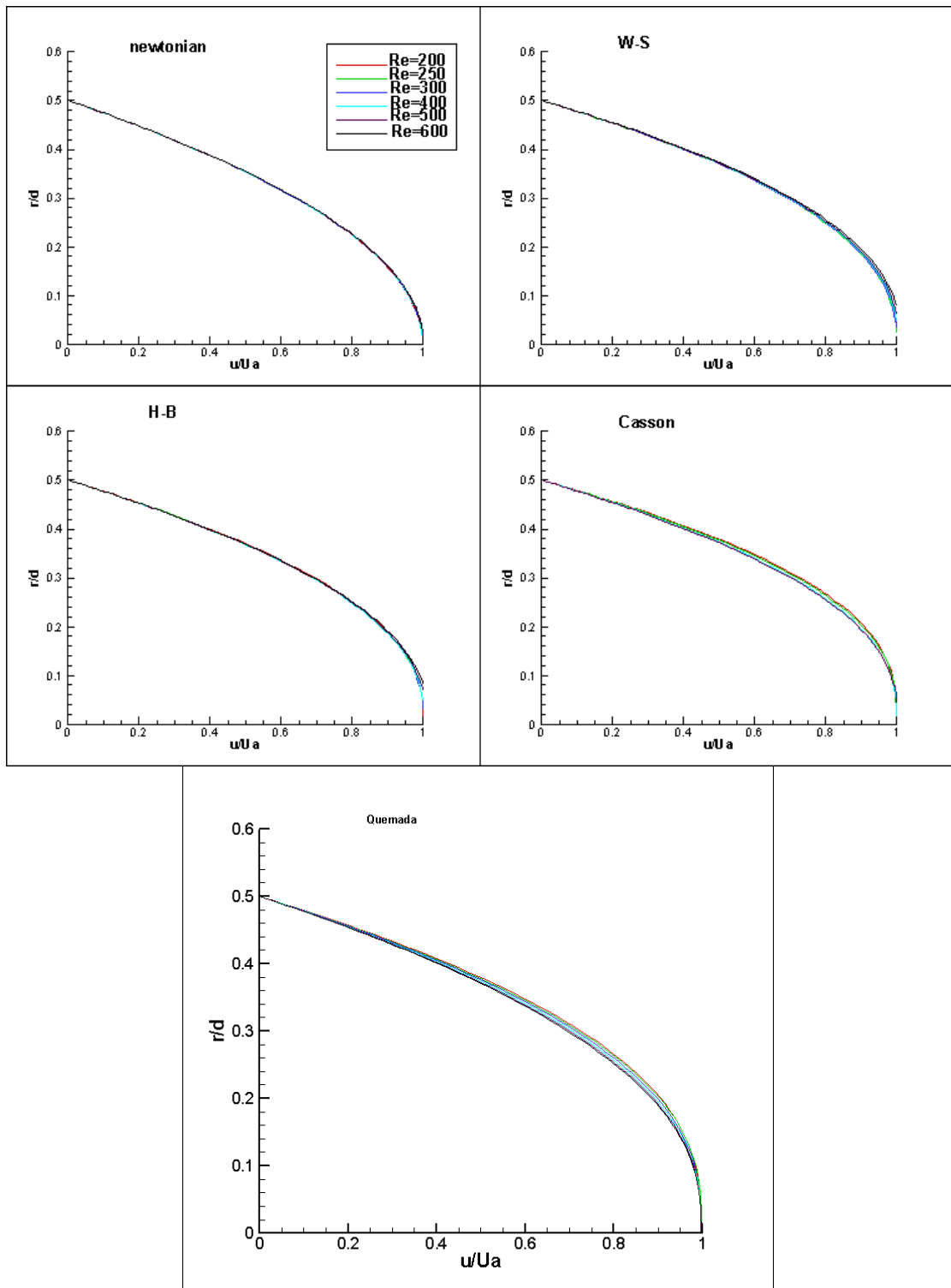


Δ6.33: οι κατανομές των αξονικών ταχυτήτων στη διατομή του ανευρύσματος.

Αγωγός χωρίς καμπυλότητα



Δ6.34: οι κατανομές των αξονικών ταχυτήτων στη διατομή του ανευρύσματος.



Δ6.35: οι κατανομές των αξονικών ταχυτήτων στη διατομή του ανευρύσματος.

Στα παρακάτω διαγράμματα εμφανίζεται η μεταβολή της ταχύτητας του άξονα κατά μήκος του αγωγού, αδιαστατοποιημένη με την ταχύτητα ελευθέρου ρεύματος U_0 , που προκύπτει για τον εκάστοτε Re. Όπου στο Δ6.36 ισχύει:

Re=25: κόκκινη γραμμή
Re=50: πράσινη γραμμή
Re=75: μπλέ γραμμή
Re=100: γαλάζια γραμμή
Re=150: ροζ γραμμή

Αντίστοιχα για το Δ6.37:

Re=200: κόκκινη
Re=250: πράσινη
Re=300: μπλε
Re=400: γαλάζια
Re=500: ροζ
Re=600: μοβ

Το σημείο εμφάνισης της μικρότερης αξονικής ταχύτητας βρίσκεται κατάντι της κορυφής του ανευρύσματος. Ισχύει $L_{peak} = 3.73d$.

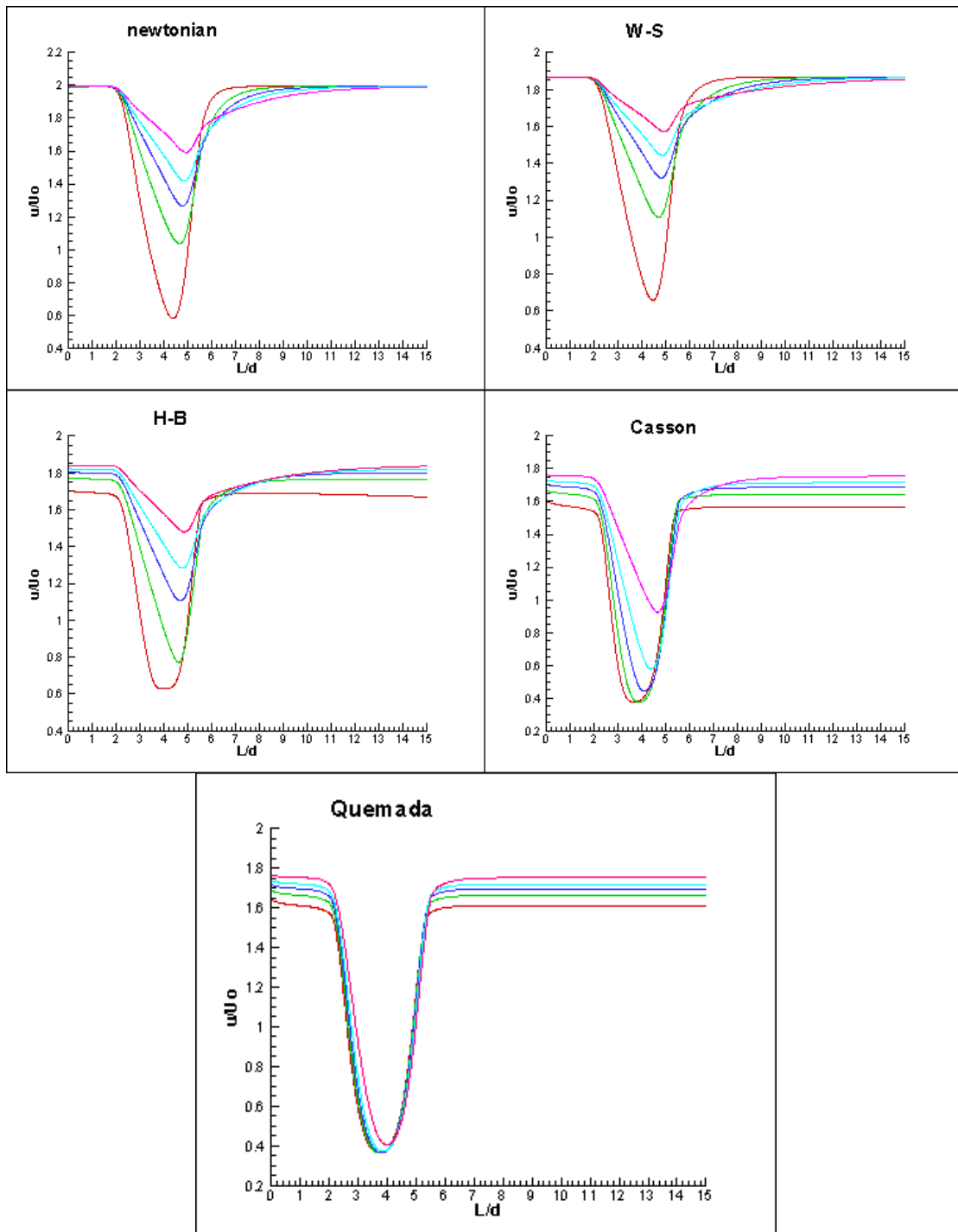
Τη μετατόπιση του σημείου την καταγράφουμε για κάθε μοντέλο στα διαγράμματα Δ6.38 και Δ6.39.

Η μετακίνηση αυτή φαίνεται να σχετίζεται με τις συνεκτικές δυνάμεις, αφού όχι μόνο μεταβάλλεται με τον αριθμό Re, αλλά και με το μοντέλο που υιοθετούμε κάθε στιγμή.

Η εμφάνιση της μικρότερης ταχύτητας δε συμπίπτει με αυτή που θα προβλεπόταν από την απλή εφαρμογή της εξίσωσης συνέχειας μεταξύ της διατομή τους αγωγού και της κορυφής του ανευρύσματος.

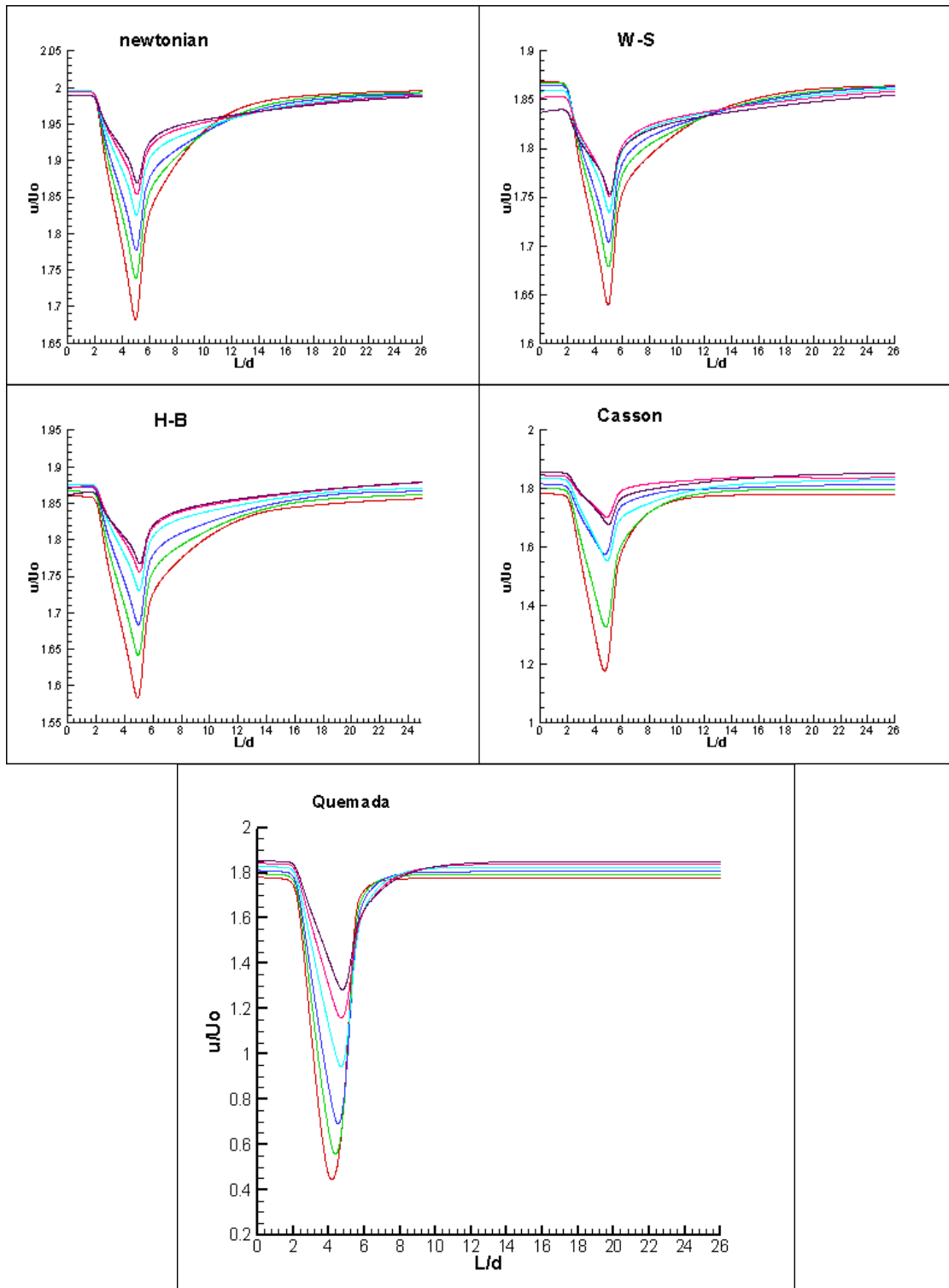
Με την αύξηση του Re αυξάνεται και η αξονική ταχύτητα, ενώ παρατηρούμε ότι καθώς ο Re αυξάνεται το σημείο εμφάνισης της μικρότερης ταχύτητας τείνει να σταθεροποιηθεί για όλα τα μοντέλα.

Πλέγμα 20d με καμπυλότητα

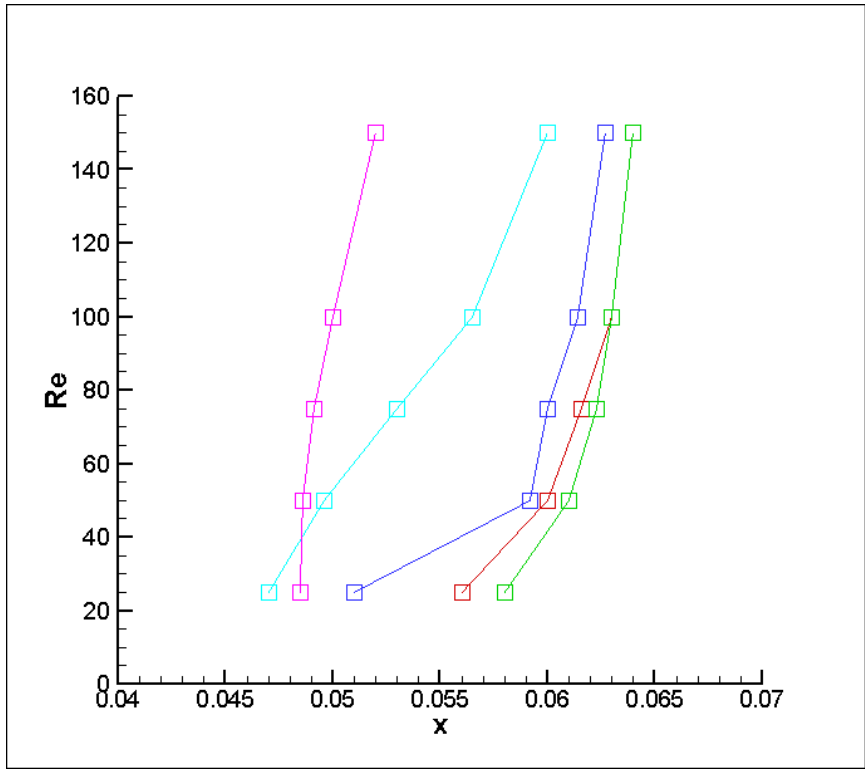


Δ6.36: Η ταχύτητα $U_a(x)$ στον άξονα του αγωγού

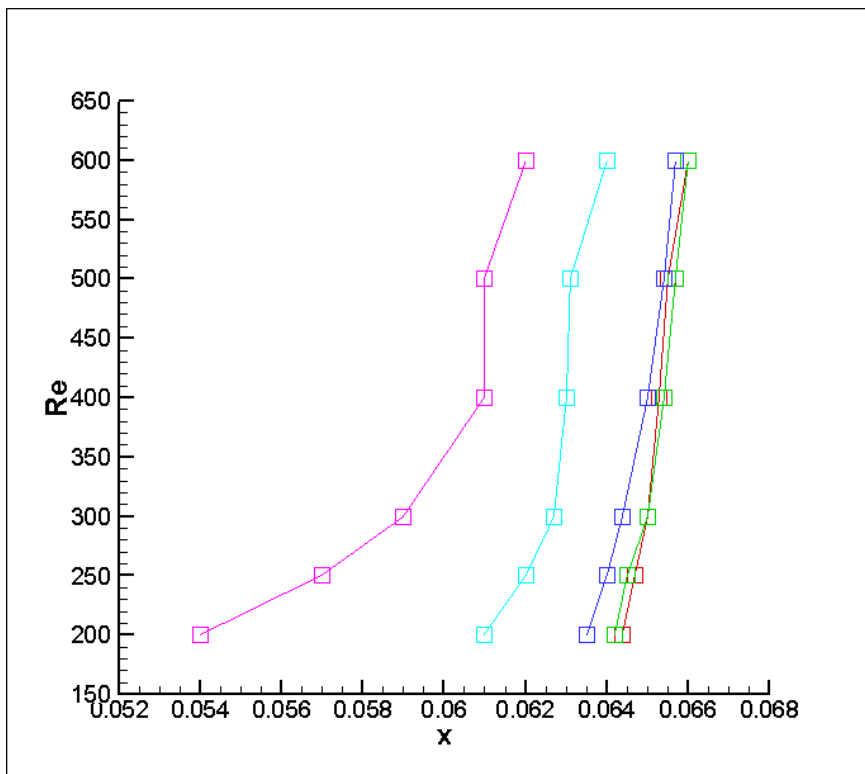
Πλέγμα 40d με καμπυλότητα



Δ6.37: Η ταχύτητα $U_a(x)$ στον άξονα του αγωγού



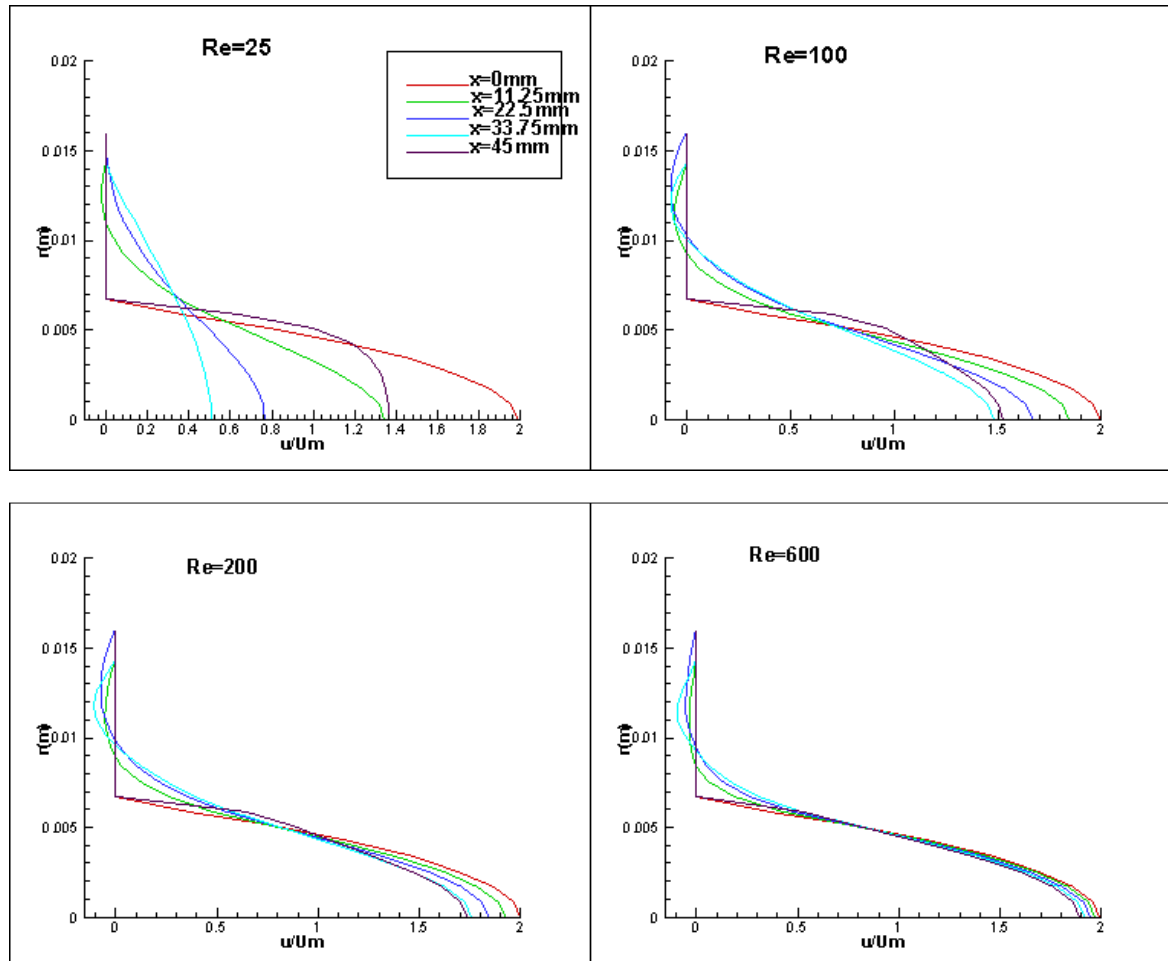
Δ6.38: Η κατάντι αδιάστατη μετακίνηση x του σημείου εμφάνισης της μικρότερης αξονικής ταχύτητας.



Δ6.39: Η κατάντι αδιάστατη μετακίνηση x του σημείου εμφάνισης της μικρότερης αξονικής ταχύτητας.

Παρακάτω βλέπουμε τις κατανομές της αξονικής ταχύτητας σε διάφορα σημεία του ανευρύσματος για το νευτώνιο ρευστό και για συγκεκριμένους Re. Συγκεκριμένα φαίνεται η κατανομή της αξονικής ταχύτητας στην είσοδο του ανευρύσματος, στην κορυφή του, στην έξοδο του και σε δύο ακόμα ενδιάμεσες θέσεις.

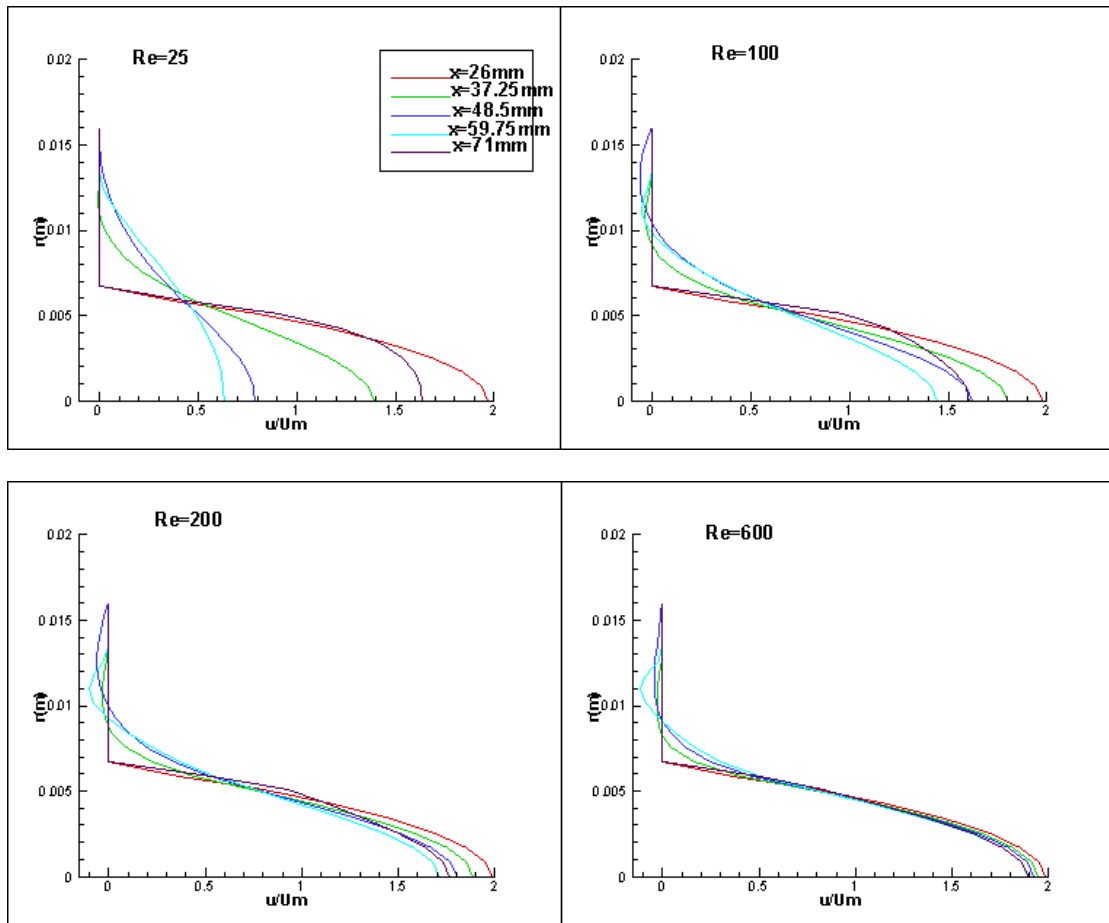
Αγωγός χωρίς αρχικό μήκος



Δ6.40: κατανομές αξονικής συνιστώσας ταχύτητας σε διάφορες θέσεις

Στην εργασία [4] παρουσιάζονται οι κατανομές ταχυτήτων στις ίδιες θέσεις για το νευτώνιο ρευστό και για $Re=206, 584, 690$. Ο αγωγός δεν είχε αρχικό ευθύγραμμο μήκος και δεν είχε καμπυλότητα, όπως το παραπάνω διάγραμμα Δ6.46. Σε αυτή την περίπτωση τα δικά μας αποτελέσματα δεν έχουν αποκλίσεις μεγάλες σε σχέση με την [4].

Αγωγός με καμπυλότητα

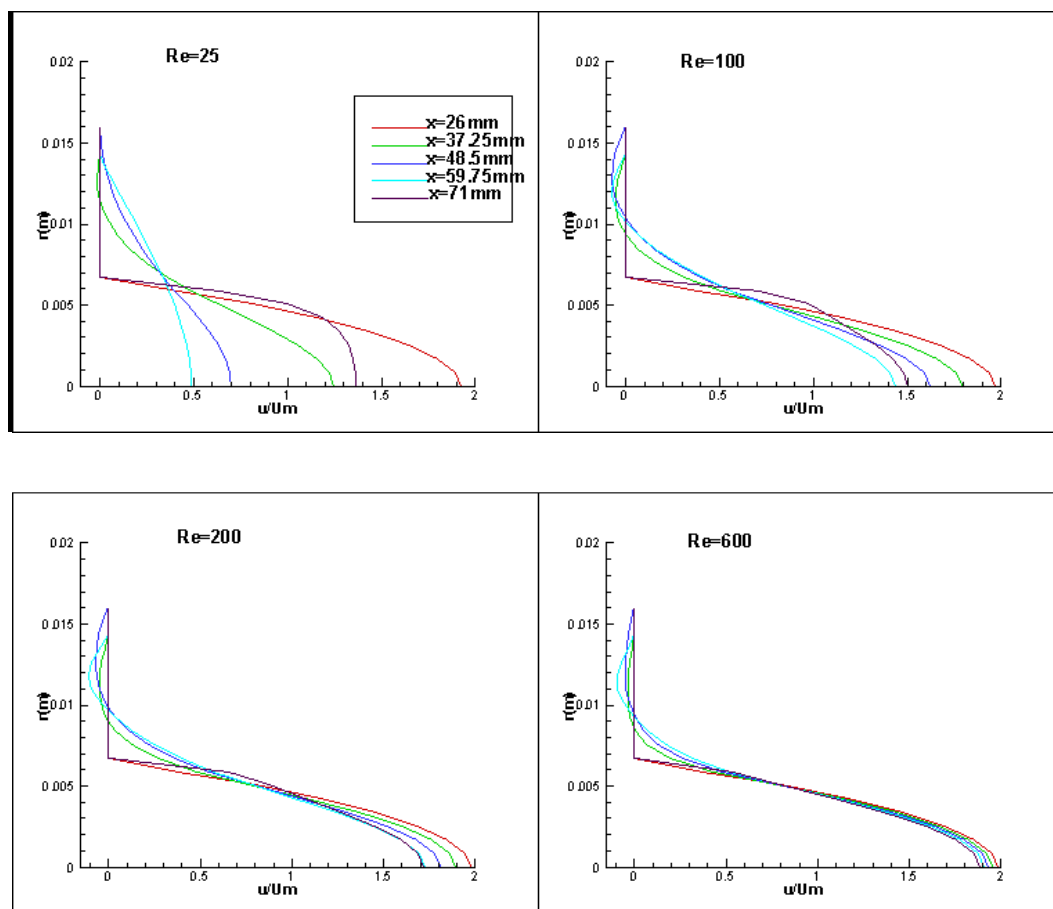


Δ6.41: κατανομές αξονικής συνιστώσας ταχύτητας σε διάφορες θέσεις

Όσο αυξάνεται ο αριθμός Re ο λόγος της ταχύτητας στον άξονα προς την μέση ταχύτητα, u/U_m , τείνει στο 2 για όλες τις ζώνες του ανευρύσματος.

Στην έξοδο του μοντέλου για αγωγό χωρίς καμπυλότητα η κατανομή της ταχύτητας παρουσιάζει μια ασυνέχεια σε μικρή απόσταση από το τοίχωμα, η οποία αποδίδεται στην τοπική επιτάχυνση του ρευστού στην οξεία συνένωση του τοιχώματος του ανευρύσματος με τον κυλινδρικό αγωγό. Το φαινόμενο αυτό δεν παρατηρείται στην περίπτωση του αγωγού με καμπυλότητα, τουλάχιστον τόσο έντονο.

Αγωγός με αρχικό μήκος αλλά χωρίς καμπυλότητα



Δ6.42: κατανομές αξονικής συνιστώσας ταχύτητας σε διάφορες θέσεις

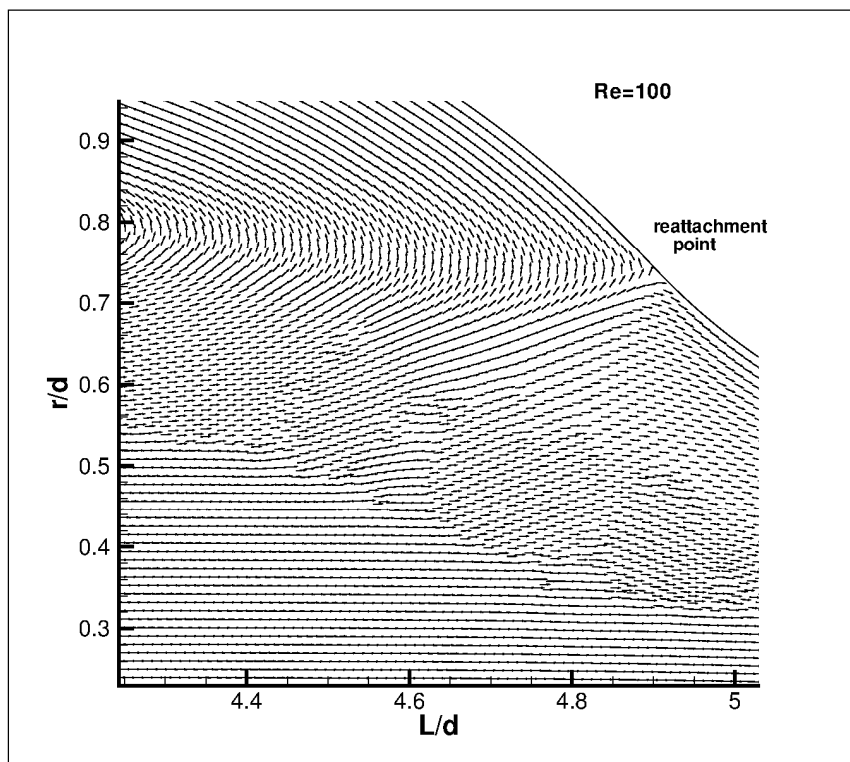
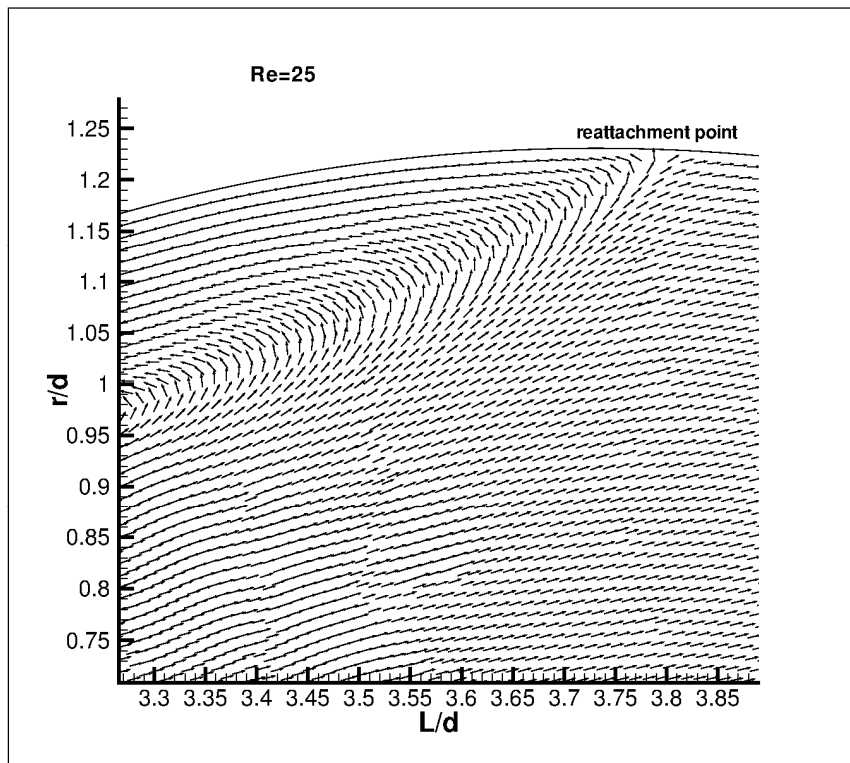
ν) Περιοχή επανακόλλησης της ροής

Τα διανύσματα της ταχύτητας στην περιοχή επανακόλλησης της ροής απεικονίζονται στα παρακάτω διαγράμματα για αριθμούς $Re=25,100,200,600$ για όλα τα μελετούμενα ρευστά.

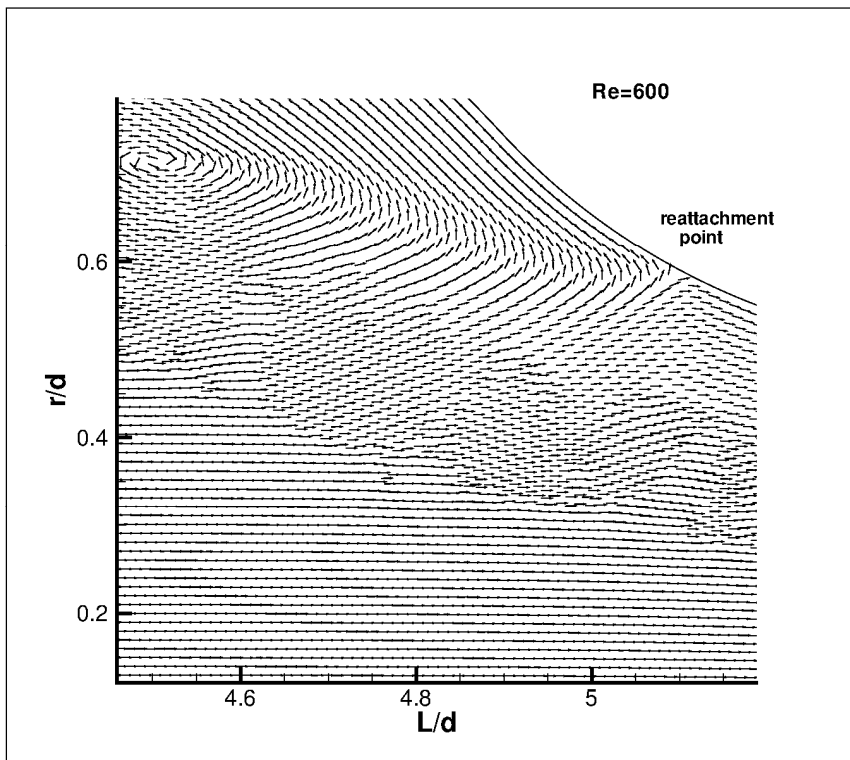
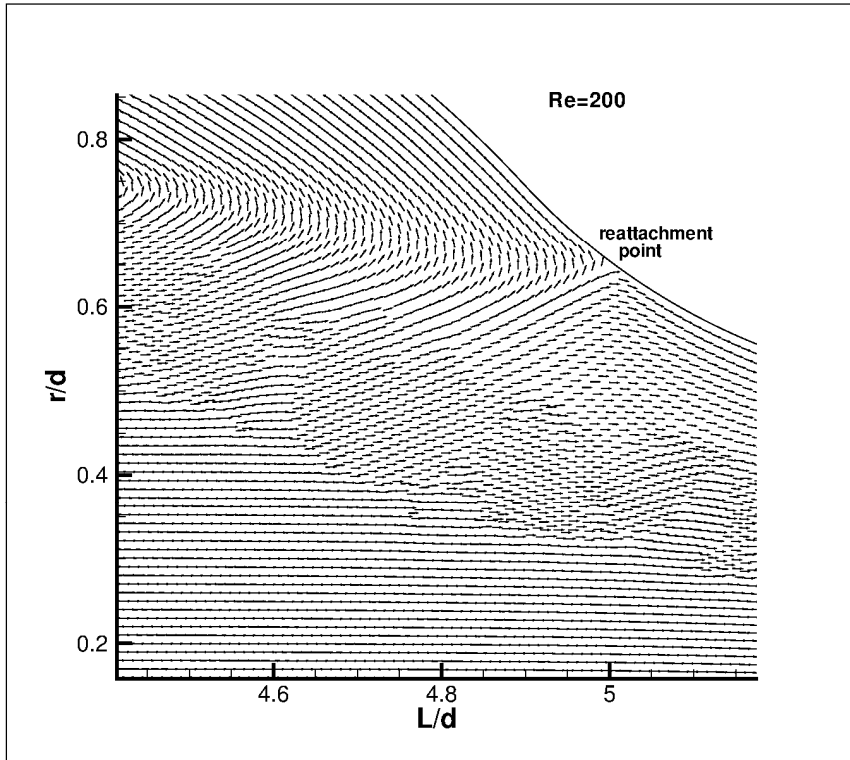
Τα διαγράμματα αυτά δείχνουν πως καθώς αυξάνεται ο Re το οριακό στρώμα καθίσταται λεπτότερο και η γραμμή επανακόλλησης μετατοπίζεται κατάντι. Επιπρόσθετα, η ταχύτητα κοντά στο τοίχωμα λαμβάνει υψηλότερες τιμές κατάντι της γραμμής επανακόλλησης με αποτέλεσμα να επηρεάζει τις μεταβολές στις κατανομές της τοιχωματικής διατμητικής τάσης και της τοιχωματικής πίεσης.

Αγωγός με καμπυλότητα

Νευτώνειο

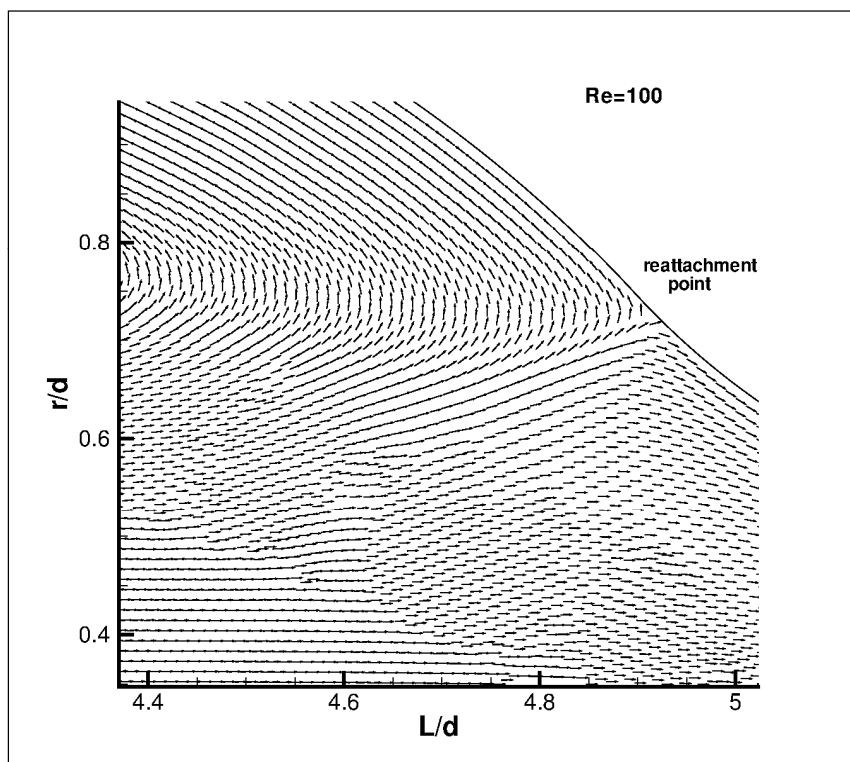
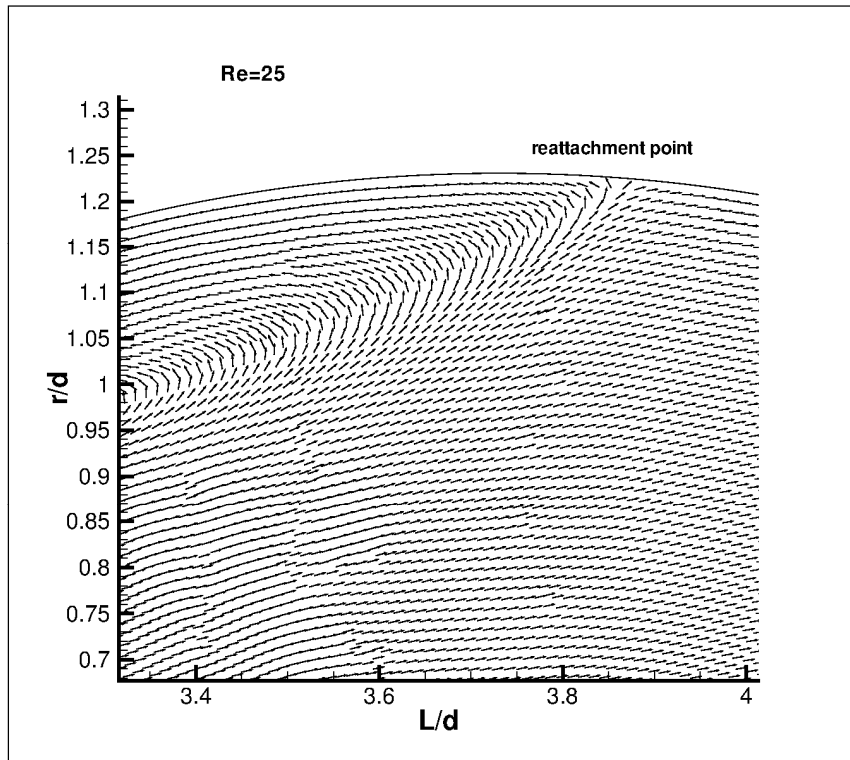


Δ6.43:διανύσματα ταχύτητας στην περιοχή επανακόλλησης της ροής.

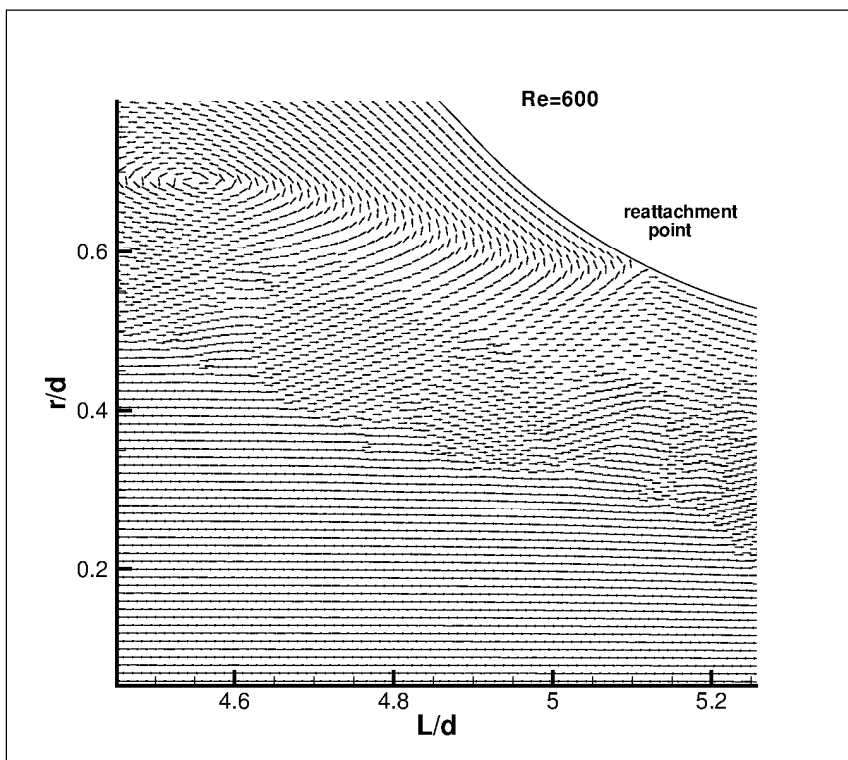
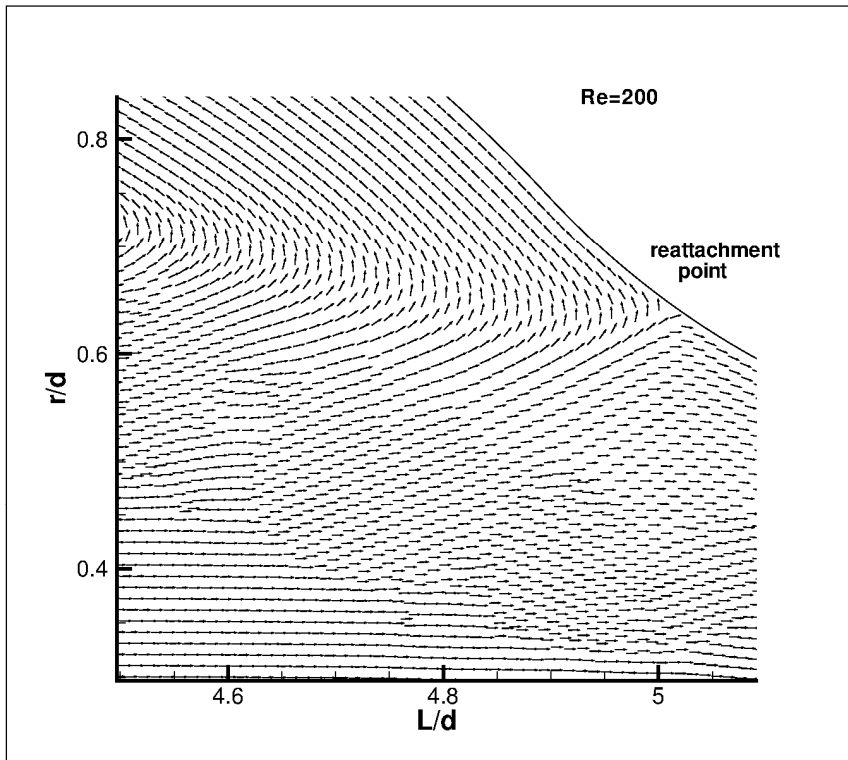


Δ6.44: διανύσματα ταχύτητας στην περιοχή επανακόλλησης της ροής.

W-S

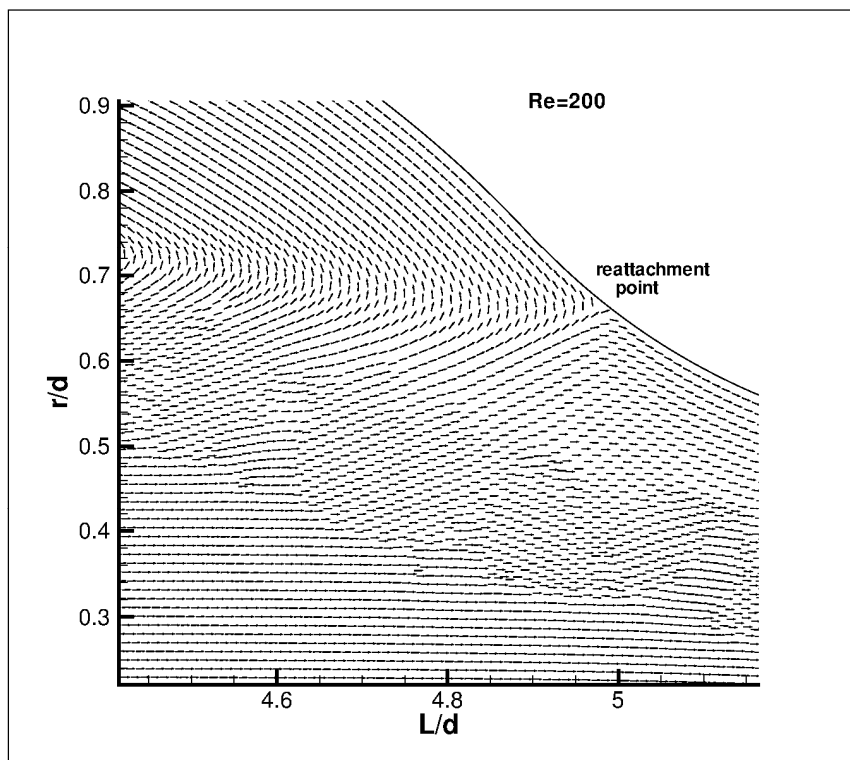
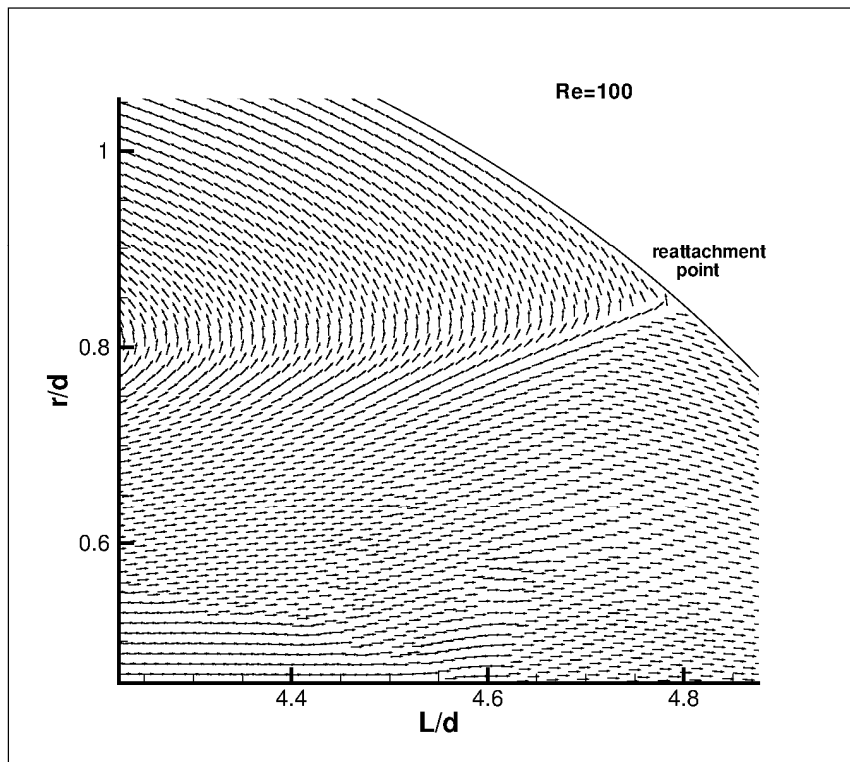


Δ6.45: διανύσματα ταχύτητας στην περιοχή επανακόλλησης της ροής.

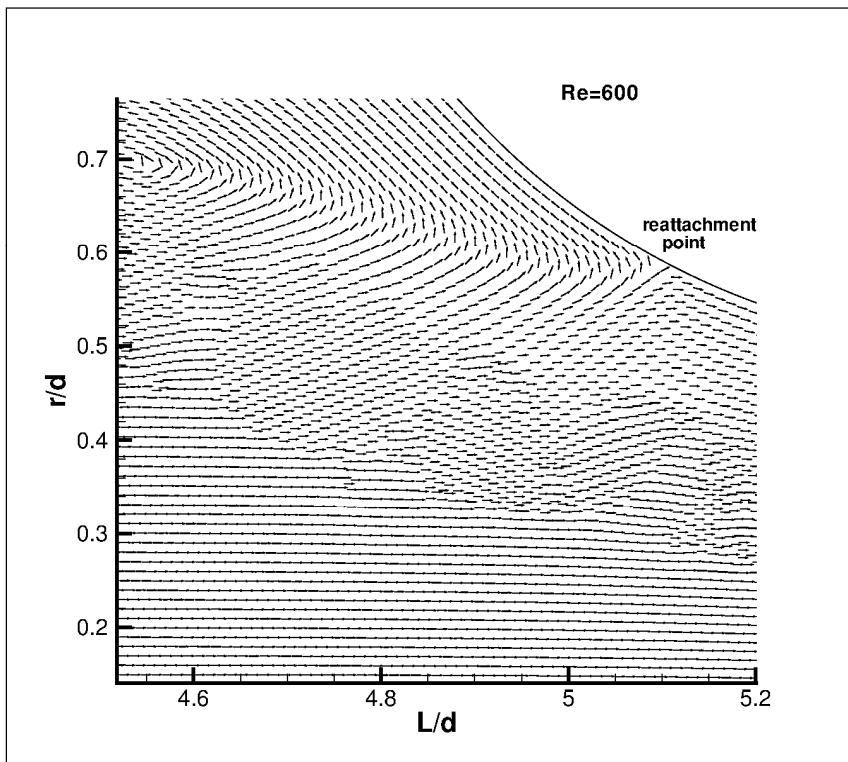


Δ6.46: διανύσματα ταχύτητας στην περιοχή επανακόλλησης της ροής.

H-B

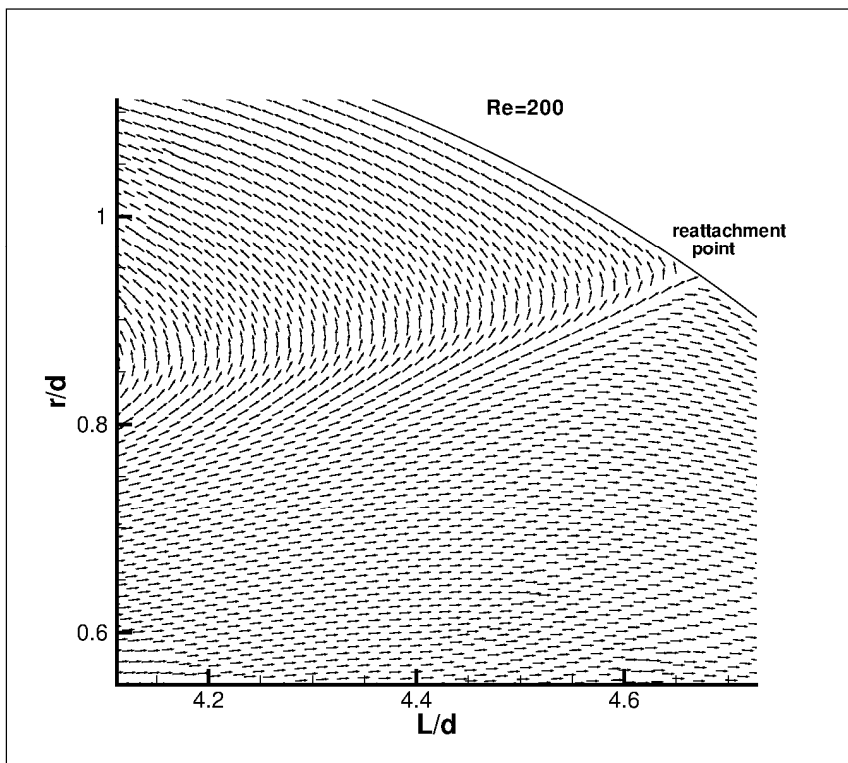


Δ6.47: διανύσματα ταχύτητας στην περιοχή επανακόλλησης της ροής.

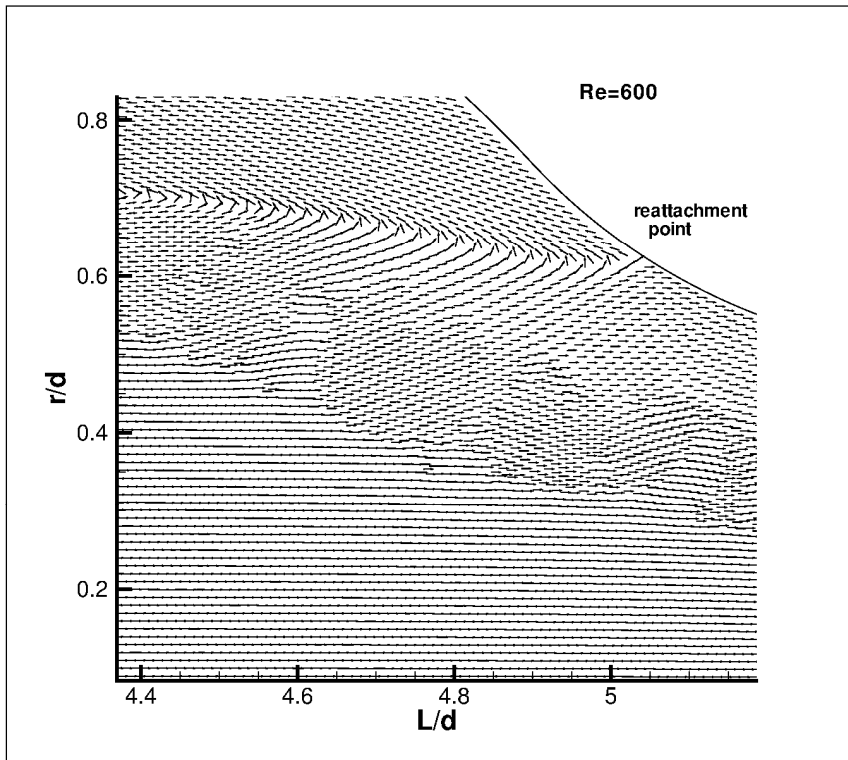


Δ6.48: διανύσματα ταχύτητας στην περιοχή επανακόλλησης της ροής.

Casson

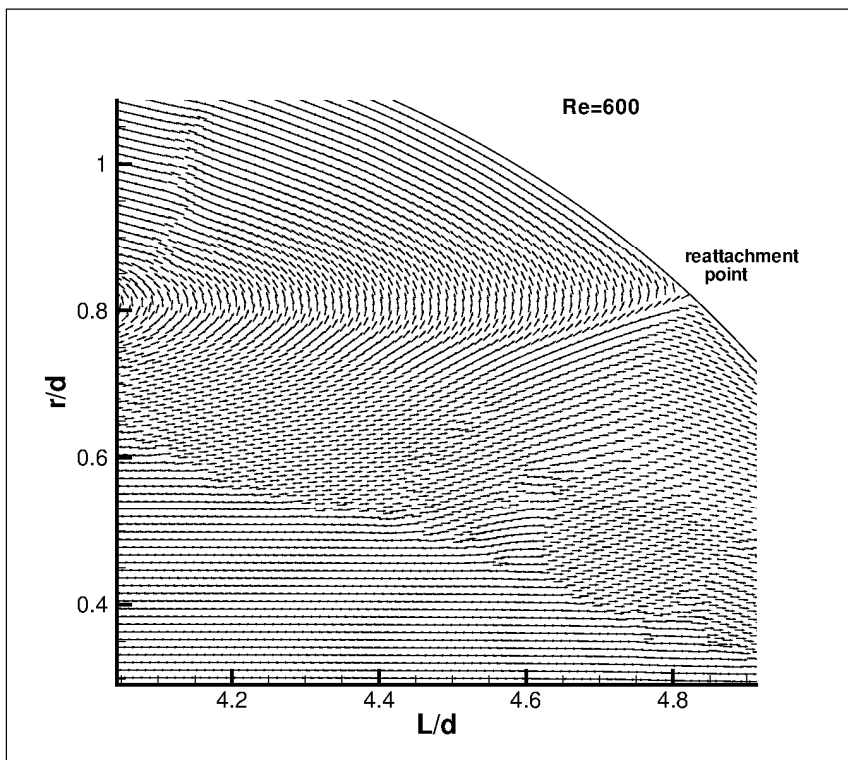


Δ6.49: διανύσματα ταχύτητας στην περιοχή επανακόλλησης της ροής.



Δ6.50: διανύσματα ταχύτητας στην περιοχή επανακόλλησης της ροής.

Quemada



Δ6.51: διανύσματα ταχύτητας στην περιοχή επανακόλλησης της ροής.

Κάποιες διαφορές παρατηρούνται στα διάφορα ρευστά όπως:

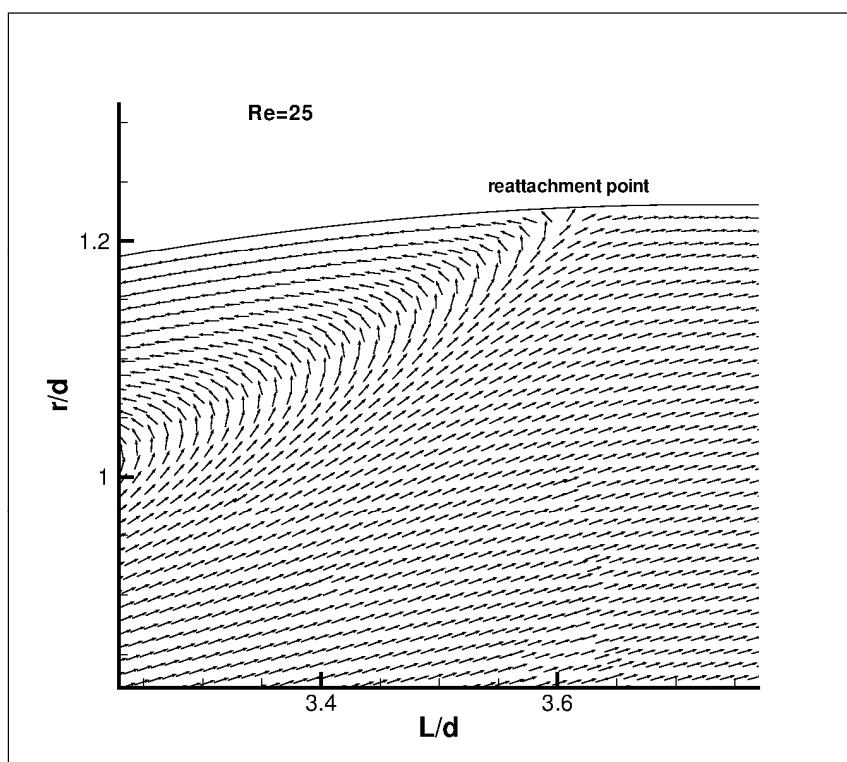
Για τα δύο ρευστά, το νευτώνειο και το W-S, για τα οποία η ροή αποκολλάται από μικρό Re , δηλαδή για $Re=25$, παρατηρούμε ότι στην περίπτωση του νευτώνειου η επανακόλληση γίνεται νωρίτερα συγκριτικά με το W-S σε όλους τους Re και ιδιαίτερα στους χαμηλούς.

Το σημείο επανακόλλησης για το ρευστό H-B εμφανίζεται πιο νωρίς απ' ότι στο νευτώνειο και στο W-S, φυσικά στους Re που υφίσταται επανακόλληση και για το H-B μοντέλο. Ενώ, αντίστοιχα στο ρευστό Casson η επανακόλληση της ροής γίνεται ακόμα πιο νωρίς και από τα τρία ρευστά, δηλαδή για $Re=200$, όπου έχουμε αποκόλληση και επανακόλληση της ροής για το Casson, ενώ στο νευτώνειο το σημείο επανακόλλησης βρίσκεται σε μήκος $L=5d$, στο Casson ισχύει $L=4.6d$. Τέλος, στο Quemada το σημείο για $Re=600$ είναι $L=4.8d$, ενώ για το νευτώνειο είναι $L=5.1d$.

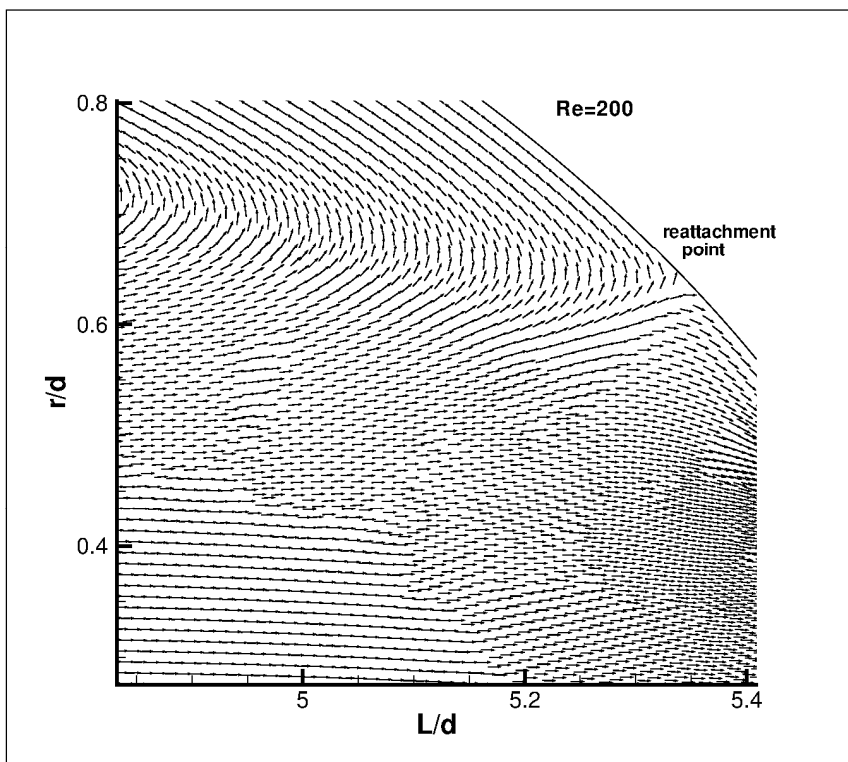
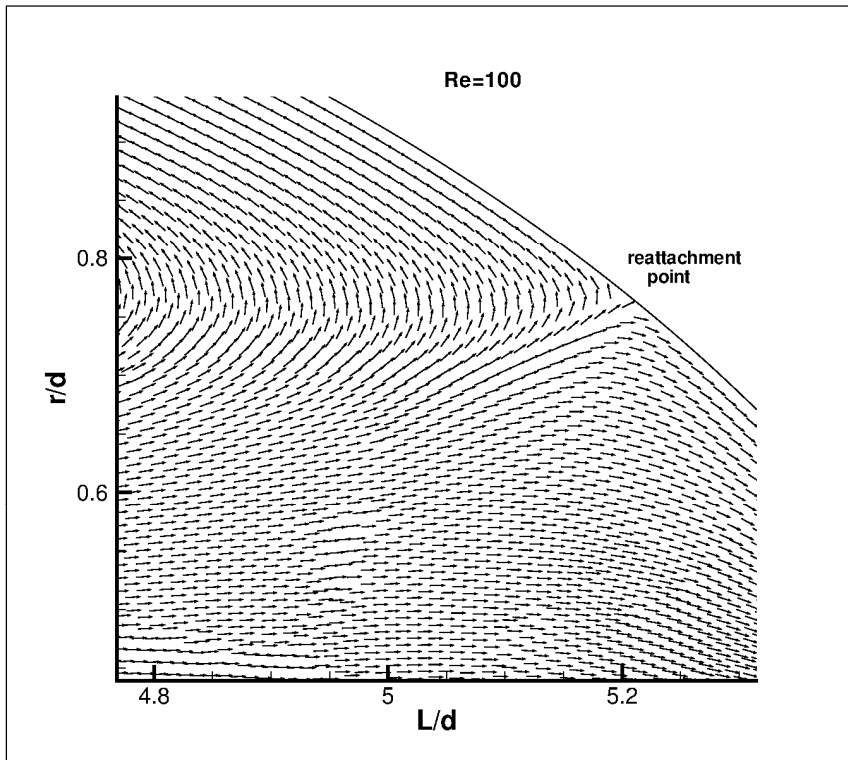
Παρακάτω φαίνεται το σημείο επανακόλλησης της ροής για τον αγωγό χωρίς καμπυλότητα για το νευτώνειο ρευστό, για να γίνει πάλι η σύγκριση με την [4].

Χωρίς καμπυλότητα

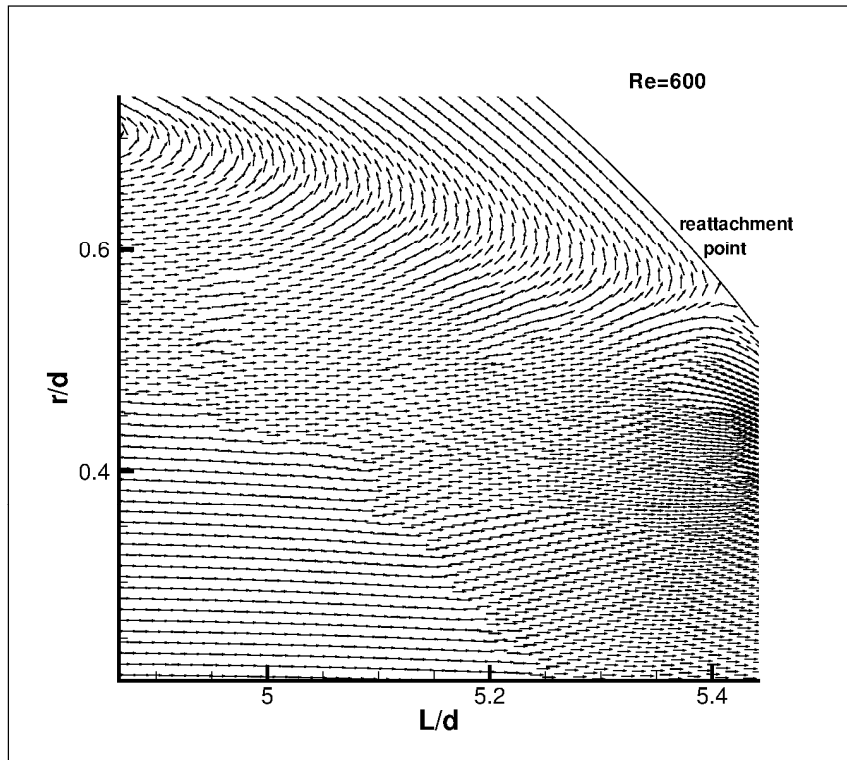
Νευτώνειο



Δ6.52: διανύσματα ταχύτητας στην περιοχή επανακόλλησης της ροής.



Δ6.53: διανύσματα ταχύτητας στην περιοχή επανακόλλησης της ροής.



Δ6.54: διανύσματα ταχύτητας στην περιοχή επανακόλλησης της ροής.

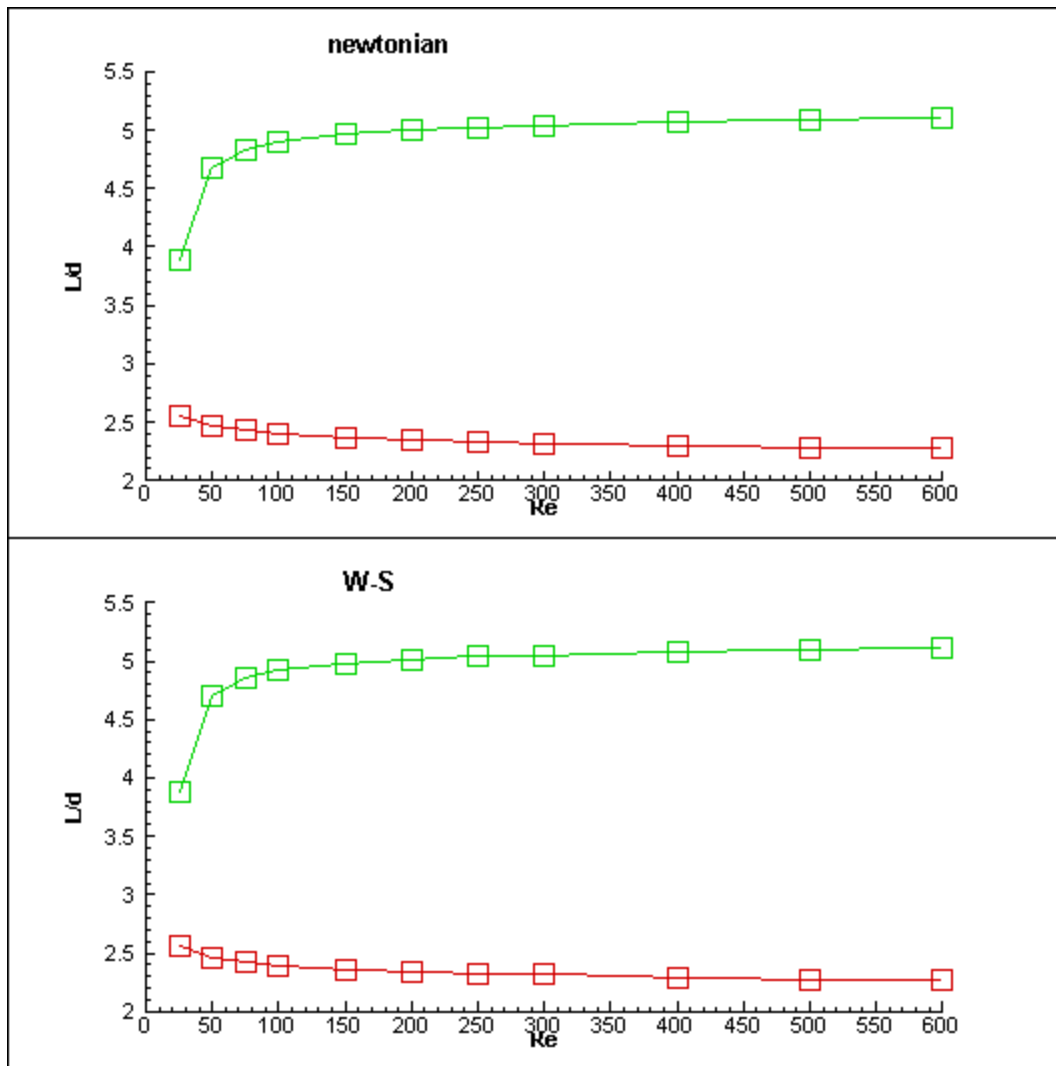
vi) Περιοχή ανακυκλοφορίας

Είναι γνωστό ότι για αγωγό που παρουσιάζει ανεύρυσμα, μετά από ένα συγκεκριμένο αριθμό Re εμφανίζεται μια περιοχή ανακυκλοφορίας ακριβώς κατάντι του ανευρύσματος, που αυξανόμενου του Re επιμηκύνεται.

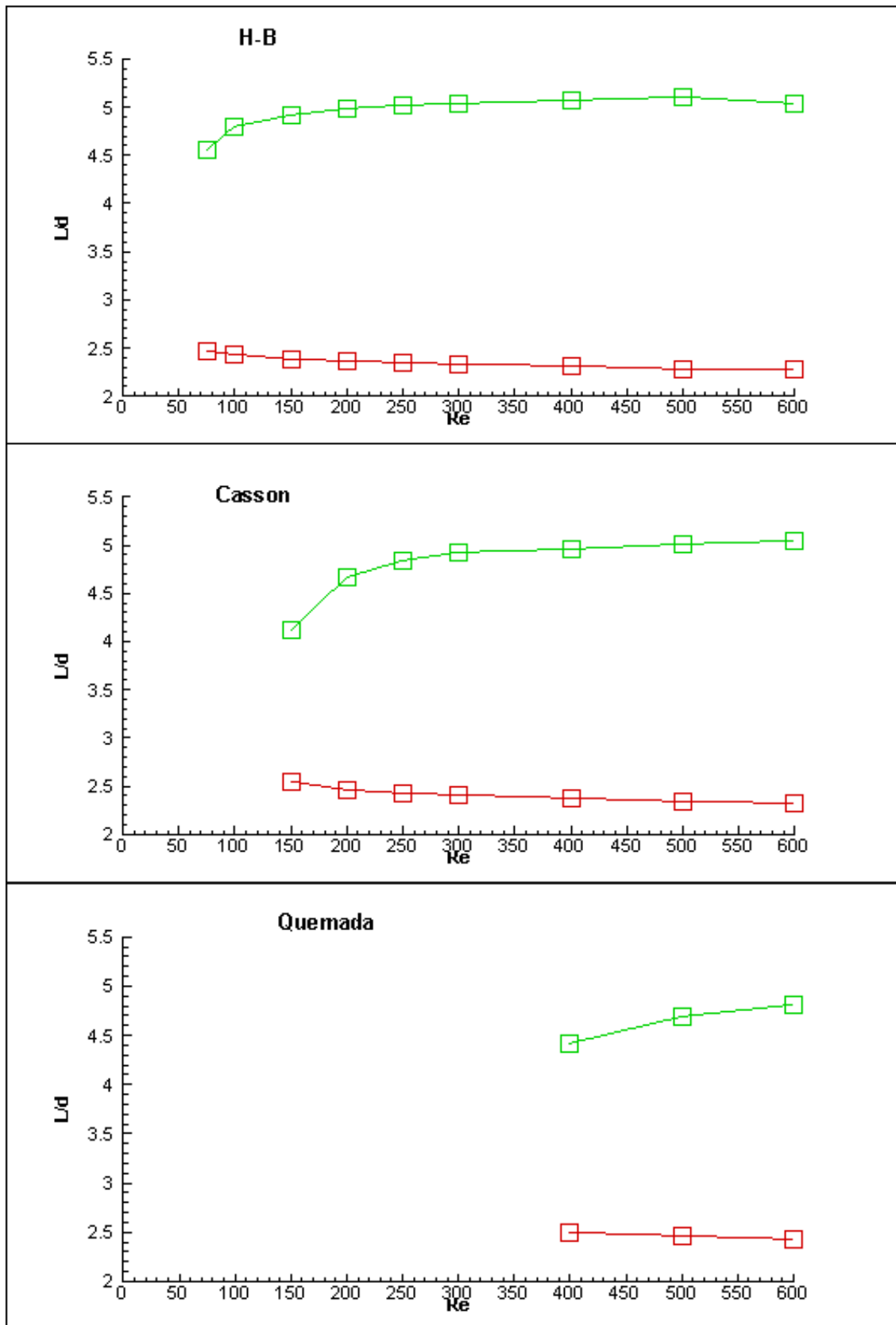
Στα παρακάτω διαγράμματα απεικονίζεται το σημείο αποκόλλησης (κόκκινο χρώμα) και επανακόλλησης (πράσινο χρώμα) της ροής για όλα τα ρευστά για τον αγωγό με καμπυλότητα.

Για όλα τα μοντέλα που μελετήθηκαν, το μήκος της περιοχής ανακυκλοφορίας είναι αύξουσα συνάρτηση του αριθμού Re .

Όσο μικρότερες διαμετρικές τάσεις στο τοίχωμα αναπτύσσει κάθε μοντέλο, τόσο μεγαλύτερη είναι η περιοχή ανακυκλοφορίας. Υπάρχει δηλαδή, συσχετισμός μεταξύ του μήκους ανακυκλοφορίας με τις διαμετρικές τάσεις στο τοίχωμα.



Δ6.55: Σημεία αποκόλλησης και επανακόλλησης της ροής στον αγωγό με διεύρυνση.



Δ6.56: Σημεία αποκόλλησης και επανακόλλησης της ροής στον αγωγό με διεύρυνση.

vii) Διατμητικές τάσεις στο τοίχωμα

Στα παρακάτω διαγράμματα παρουσιάζονται οι διατμητικές τάσεις (*Wall Shear Stresses*) τ_w αδιαστατοποιημένες, όχι όμως αυτή τη φορά με την εκάστοτε δυναμική πίεση. Η κανονικοποίηση βασίζεται στην αναγωγή της T_w στη διατμητική τάση τ_{st} των ευθύγραμμων αγωγών που είναι συνδεδεμένοι εκατέρωθεν του ανευρύσματος, δηλαδή $T_w = \frac{\tau_w}{\tau_{st}}$, όπου τ_w η τοιχωματική διατμητική τάση. Συγκεκριμένα στα διαγράμματα πιο κάτω παρουσιάζονται οι διατμητικές τάσεις του αγωγού με καμπυλότητα, αλλά και του αγωγού χωρίς καμπυλότητα.

Η κόκκινη γραμμή είναι για το Newtonian, η πράσινη για το W-S, η μπλε για το H-B, η γαλάζια για το Casson και η μοβ για το Quemada.

Ένα κοινό χαρακτηριστικό που παρατηρούμε είναι ότι η διατμητική τάση λαμβάνει χαμηλές και κατά προσέγγιση αρνητικές τιμές σε ένα μεγάλο μέρος του μοντέλου, λόγω της αποκόλλησης της ροής, φυσικά αυτό συμβαίνει μόνο όταν έχουμε ανακυκλοφορία. Εντούτοις, γύρω από την περιοχή επανακόλλησης της ροής αυτή μεταβάλλεται σημαντικά λαμβάνοντας αδιάστατο θετικό μέγιστο, εξαρτώμενο από τον αριθμό Re, στη συνένωση του ανευρύσματος με τον ευθύγραμμο αγωγό.

Η πρώτη και σημαντική διαφορά που παρατηρούμε στους δύο αγωγούς είναι ότι ο αγωγός με οξεία συνένωση ανευρύσματος με τον ευθύγραμμο αγωγό παρουσιάζει απότομη αύξηση της διατμητικής τάσης στο σημείο της συνένωσης και έχουμε πολύ υψηλό τοπικό μέγιστο, ενώ στην περίπτωση του αγωγού με καμπυλότητα έχουμε πιο ομαλή αύξηση και πιο χαμηλό τοπικό μέγιστο της διατμητικής τάσης.

Σε μικρή απόσταση ανάντι της περιοχής επανακόλλησης της ροής, όπου η διατμητική τάση είναι αρνητική, αυτή μεγιστοποιείται σε απόλυτη τιμή. Στα παρακάτω διαγράμματα φαίνεται η θέση αυτού του τοπικού μεγίστου, πρώτα σε αγωγό με καμπυλότητα και μετά σε αγωγό με οξεία συνένωση του ανευρύσματος με τον ευθύ αγωγό.

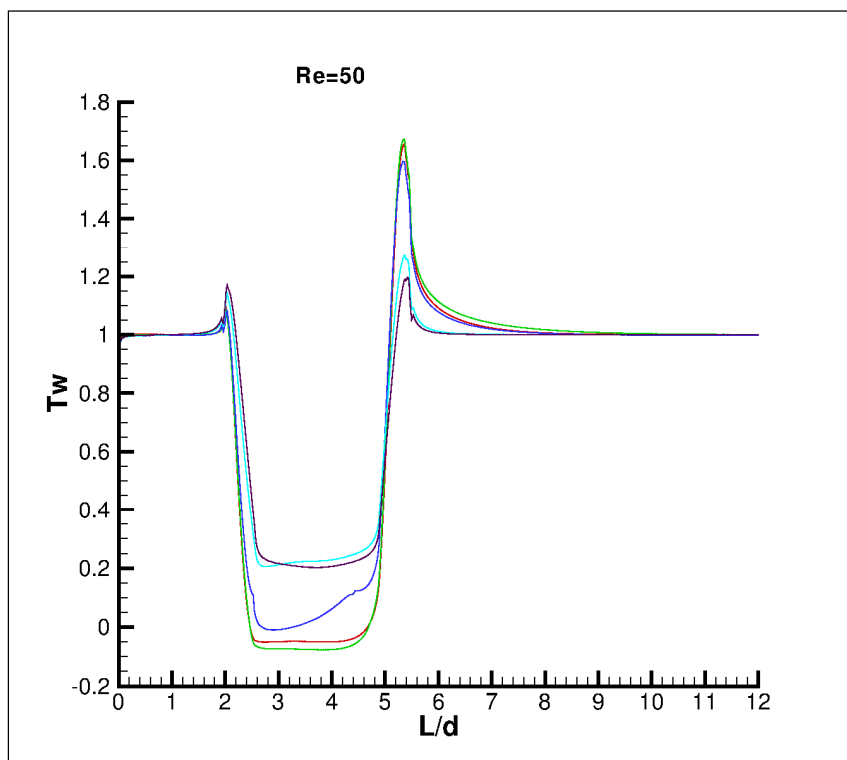
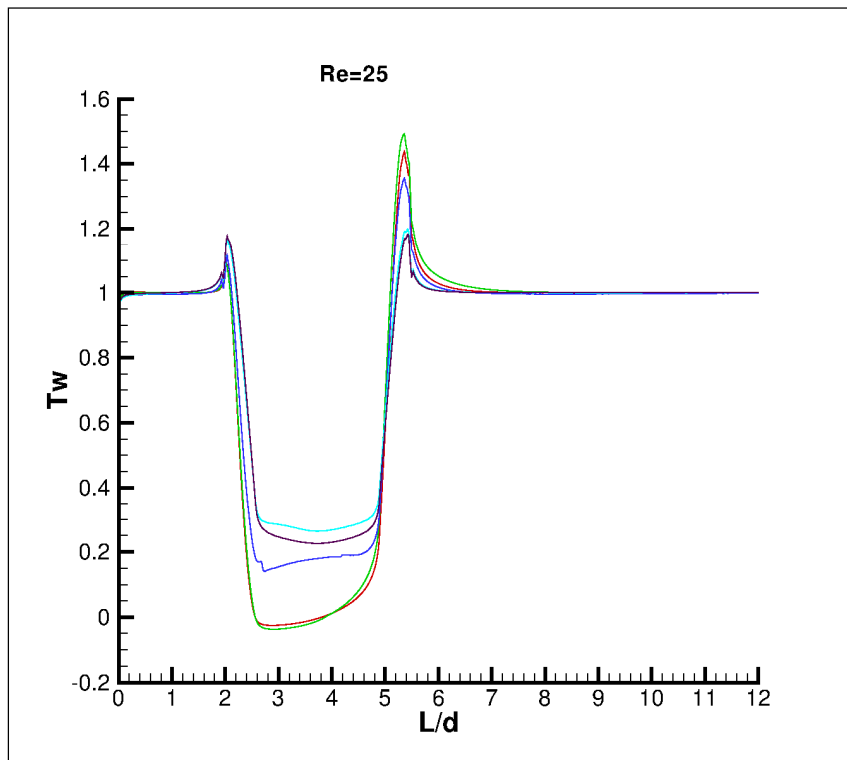
Το ρευστό Quemada παρουσιάζει διαφορετική κλίση διατμητικών τοιχωματικών τάσεων από τα υπόλοιπα ρευστά και δεν εμφανίζει τις υψηλές αρνητικές τιμές που εμφανίζουν τα υπόλοιπα ρευστά.

Για αριθμούς Re=25,50, τα ρευστά H-B, Casson, Quemada δεν παρουσιάζουν αποκόλληση ροής ακόμα, οπότε η καμπύλη της διατμητικής τάσης δεν εμφανίζει αρνητικές τιμές, όπως συμβαίνει για το νευτώνειο και το μοντέλο W-S, των οποίων οι καμπύλες είναι παρόμοιες.

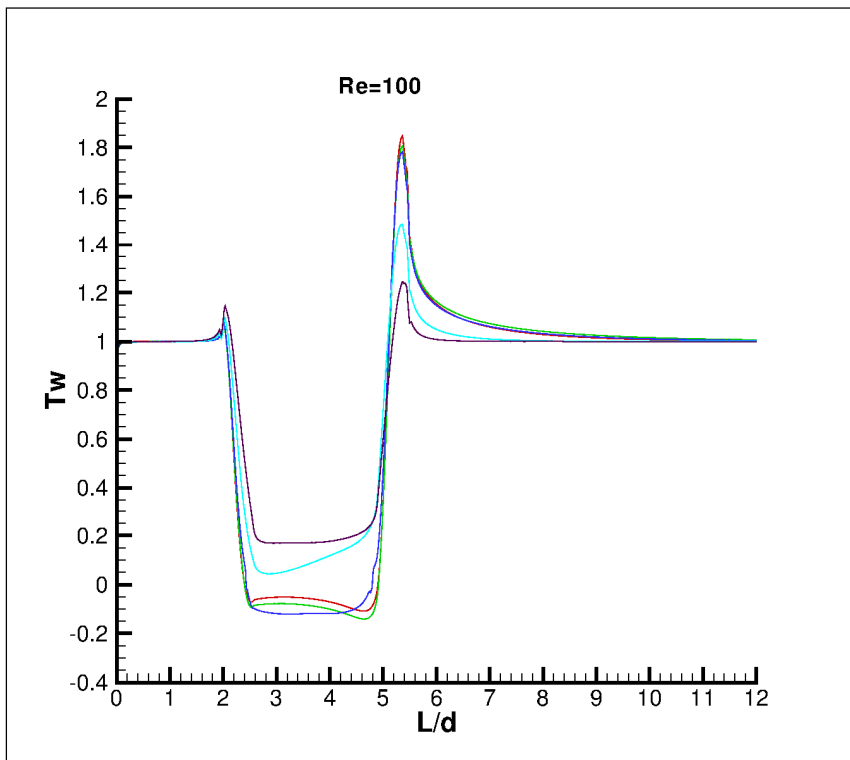
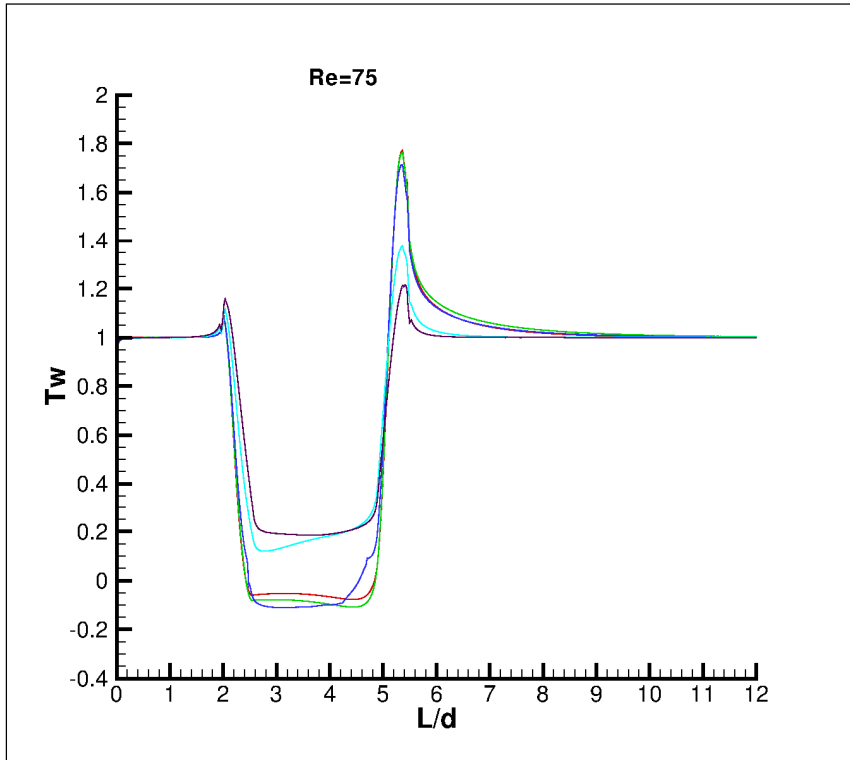
Με την αύξηση του Re αρχίζει η αποκόλληση της ροής στο ρευστό H-B, το οποίο και αρχίζει να λαμβάνει αρνητικές τιμές. Για ίδιο όμως Re, το H-B εμφανίζει μικρότερο κατά απόλυτη τιμή μέγιστο.

Το ίδιο ισχύει και για το ρευστό Casson, για το οποίο η αποκόλληση αρχίζει αργότερα, δηλαδή για Re=200.

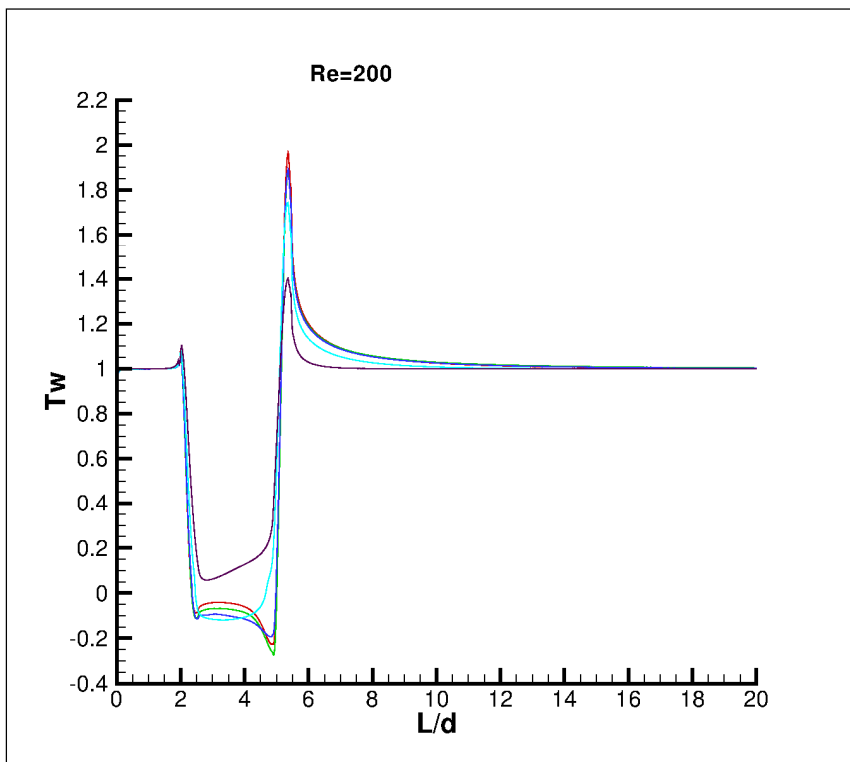
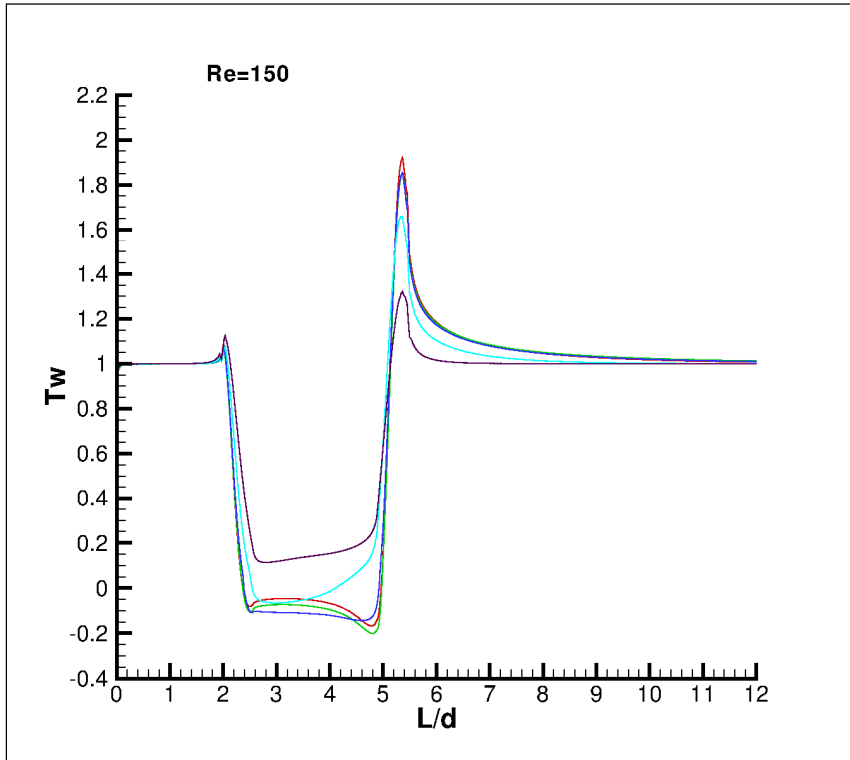
Αγωγός με καμπυλότητα



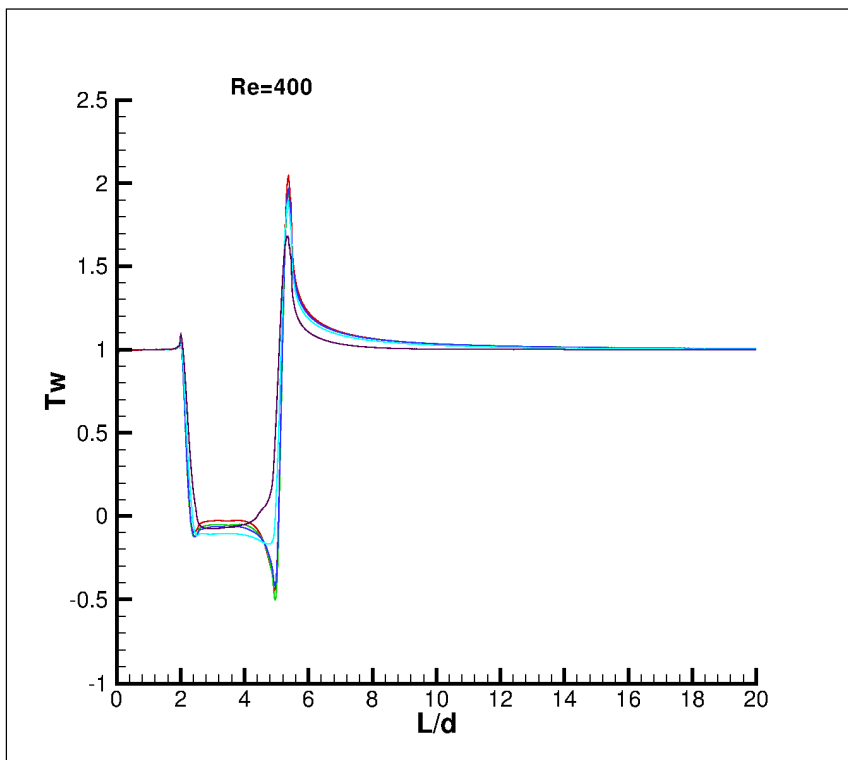
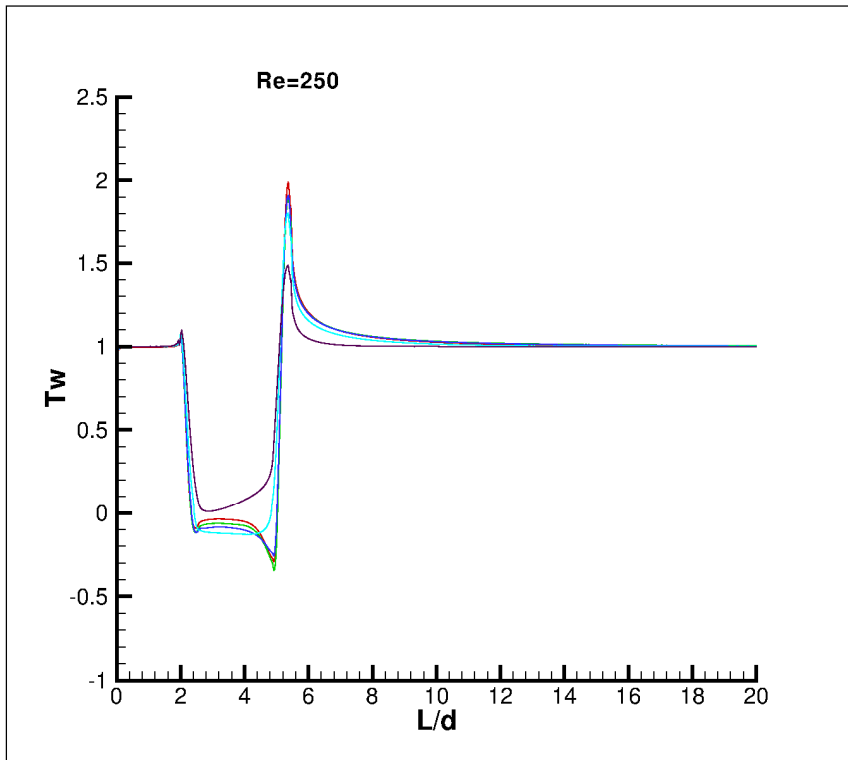
Δ6.57: διατμητικές τάσεις στο τοίχωμα του διευρυμένου αγωγού.



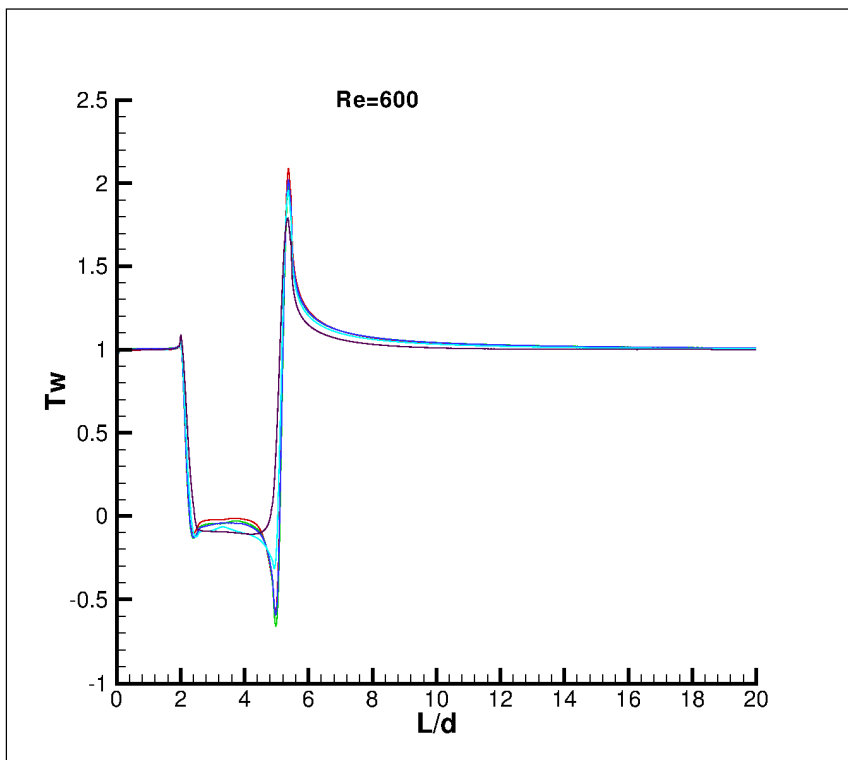
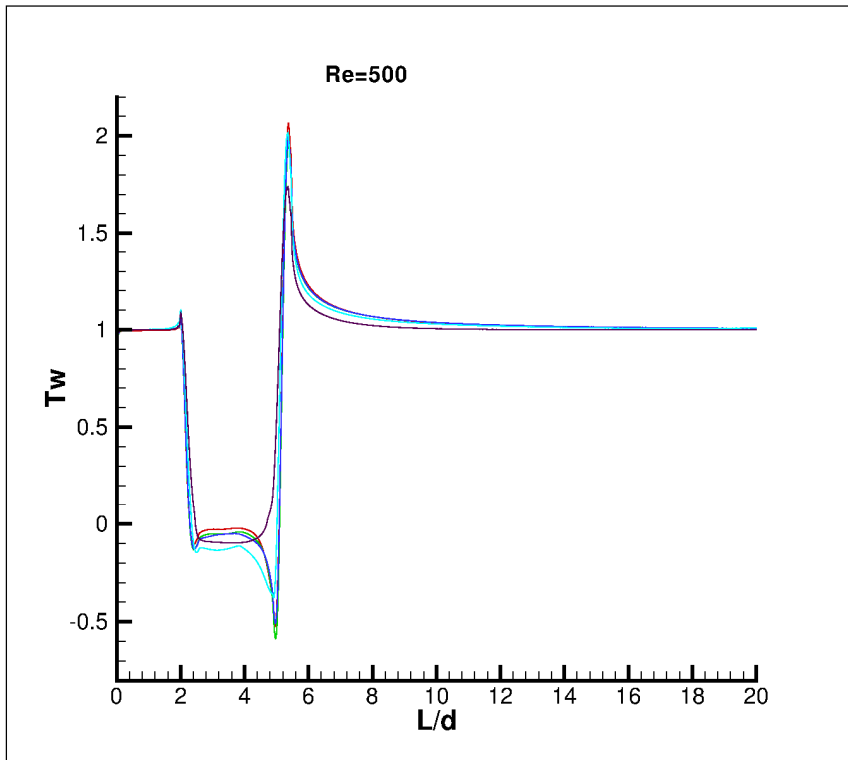
Δ6.58: διατμητικές τάσεις στο τοίχωμα του διευρυμένου αγωγού.



Δ6.59: διατμητικές τάσεις στο τοίχωμα του διευρυμένου αγωγού.

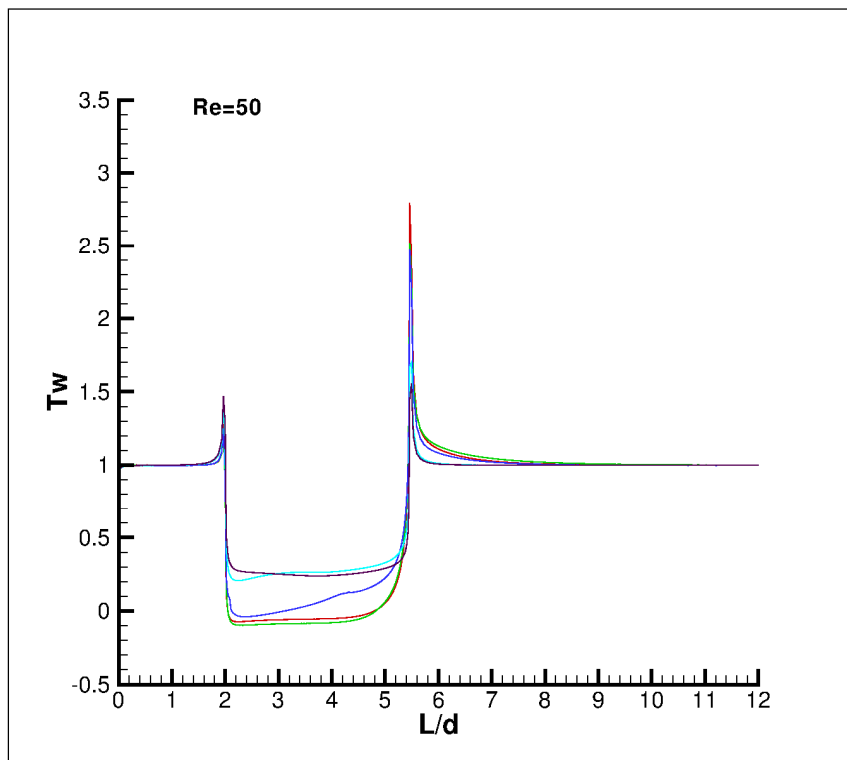
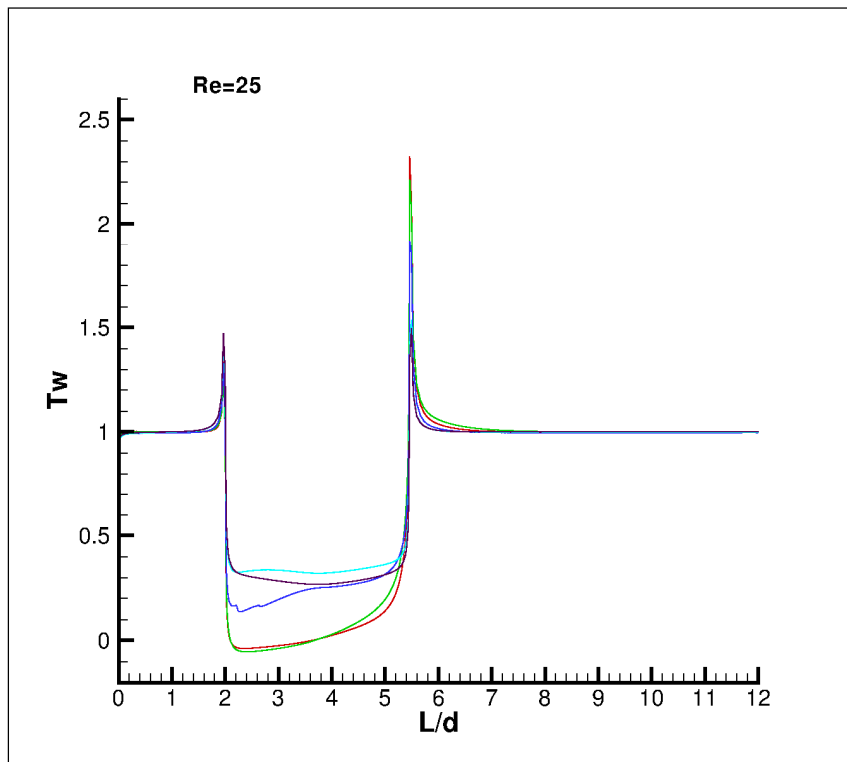


Δ6.60: διατμητικές τάσεις στο τοίχωμα του διευρυμένου αγωγού.

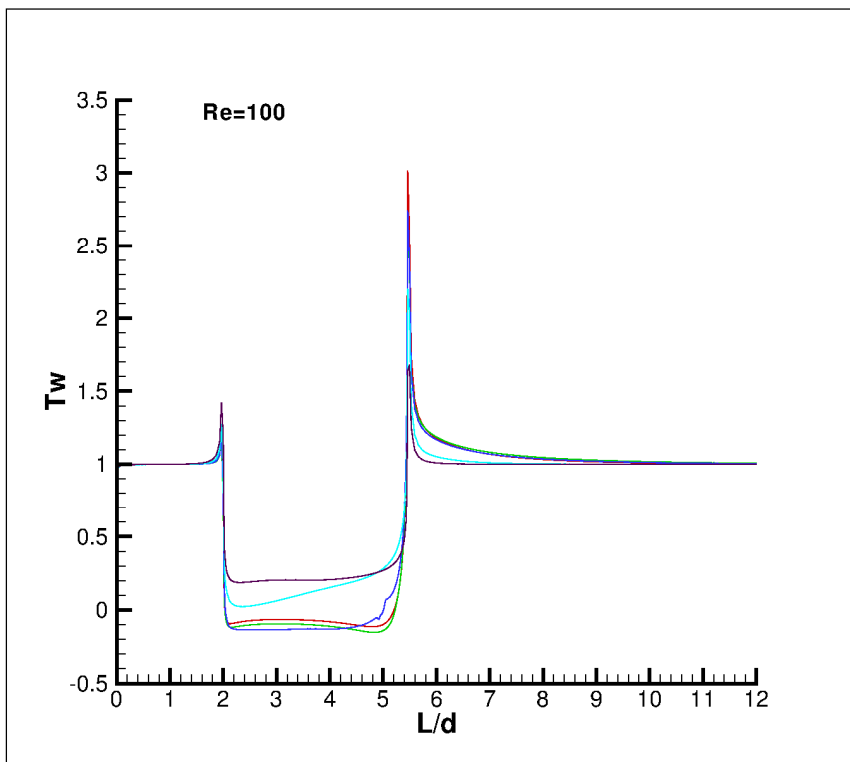
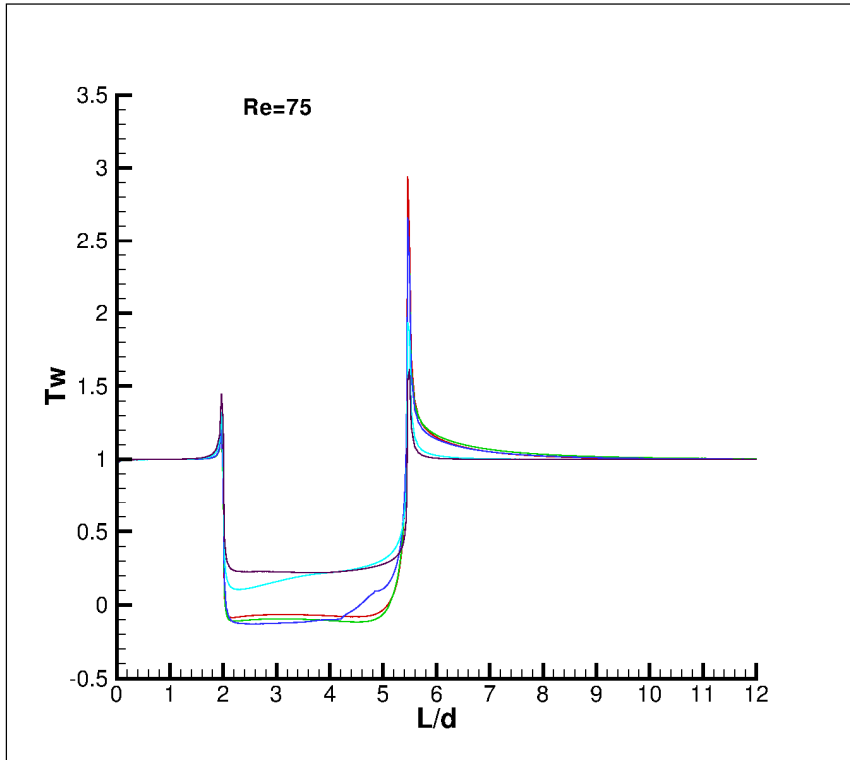


Δ6.61: διατμητικές τάσεις στο τοίχωμα του διευρυμένου αγωγού.

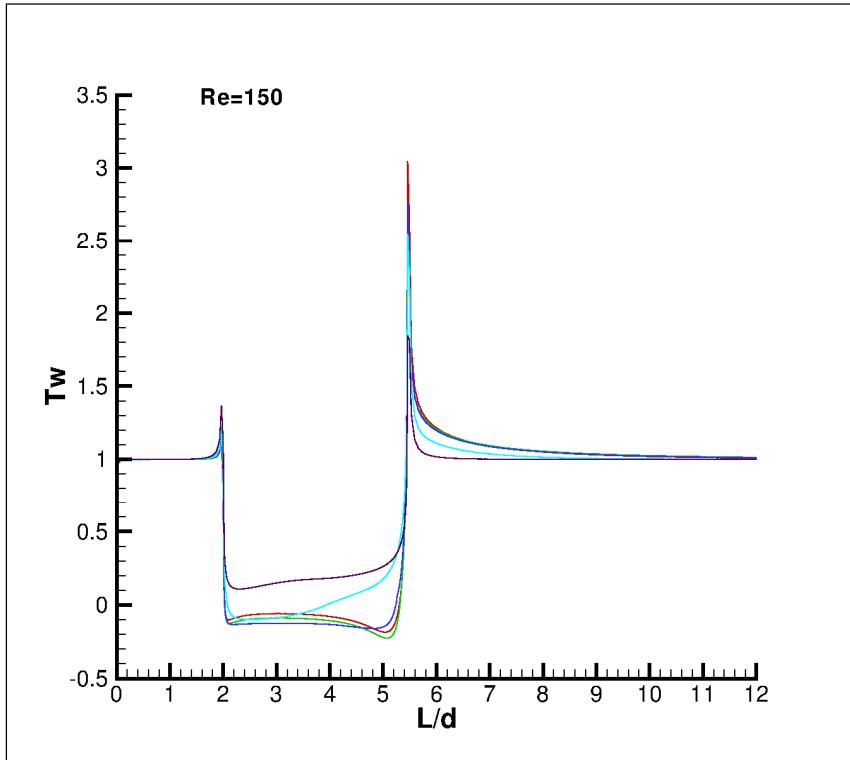
Αγωγός χωρίς καμπυλότητα



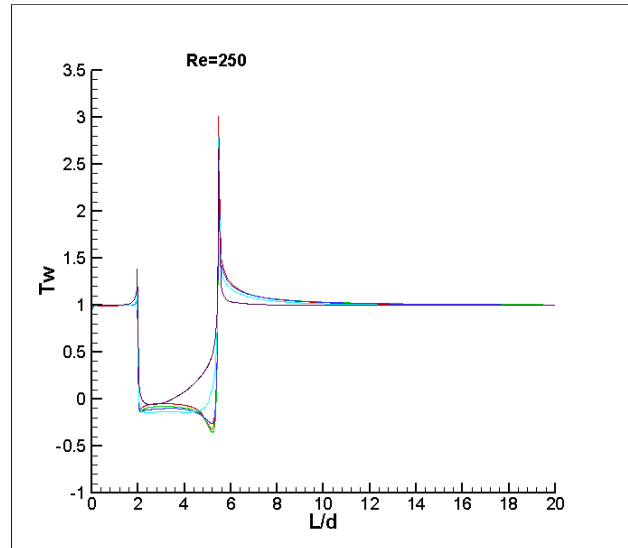
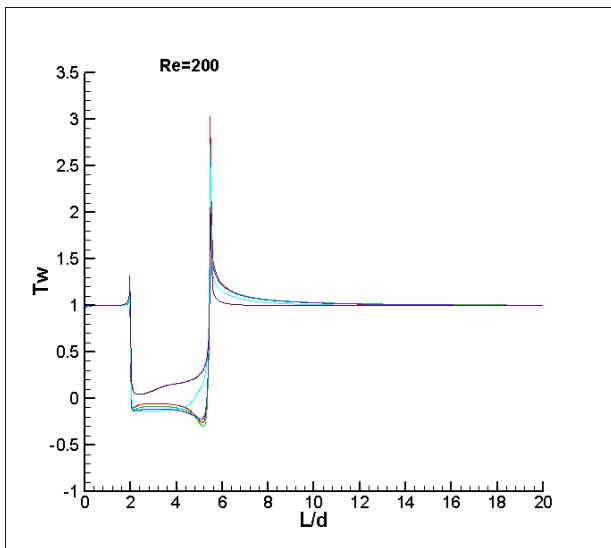
Δ6.62: διατμητικές τάσεις στο τοίχωμα του διευρυμένου αγωγού.



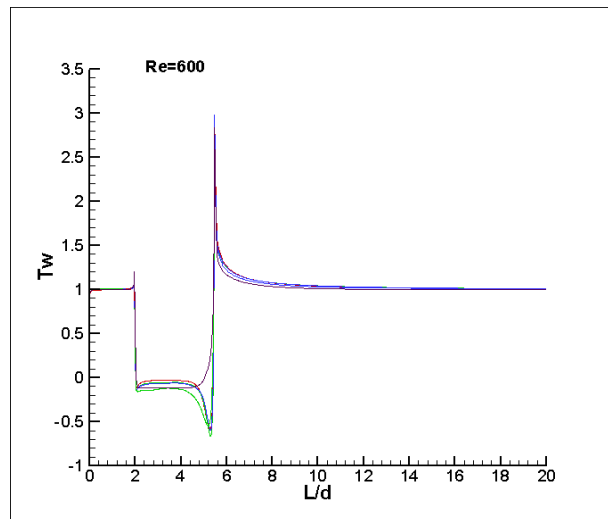
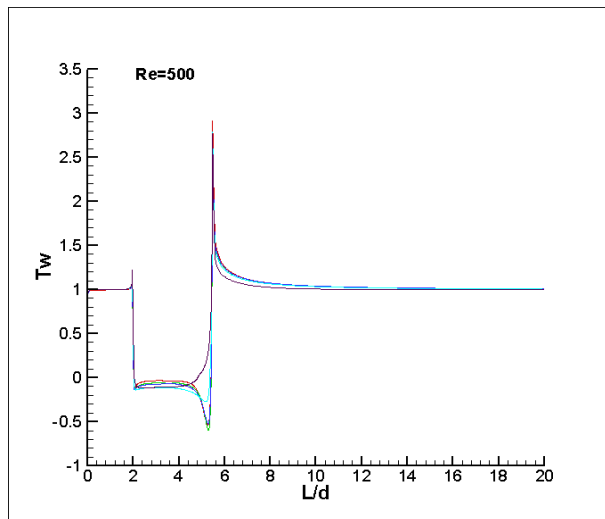
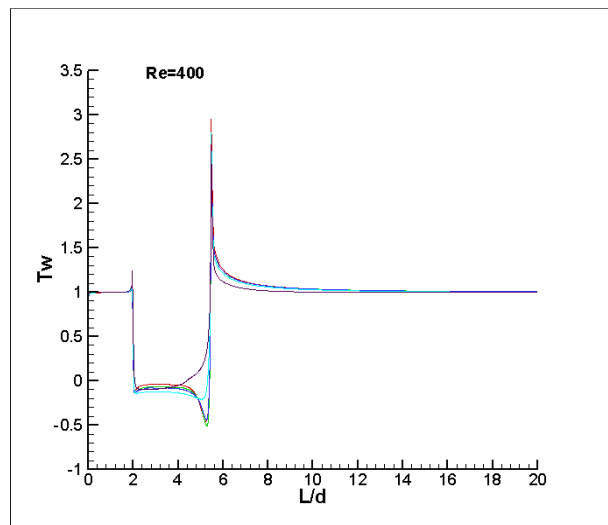
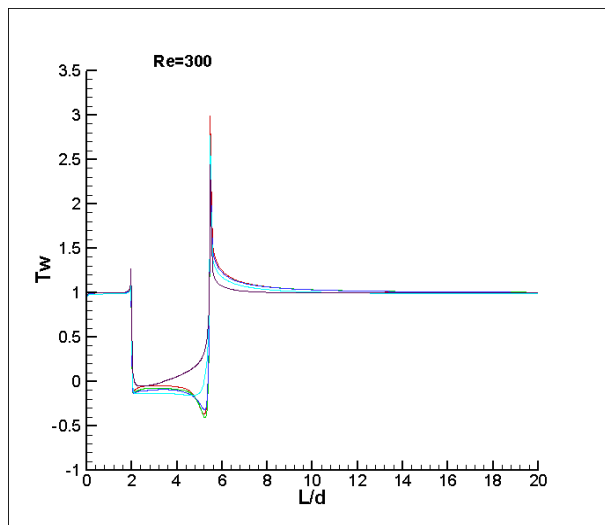
Δ6.63: διατμητικές τάσεις στο τοίχωμα του διευρυμένου αγωγού.



Δ6.64: διατμητικές τάσεις στο τοίχωμα του διευρυμένου αγωγού.



Δ6.65: διατμητικές τάσεις στο τοίχωμα του διευρυμένου αγωγού.



Δ6.66: διατμητικές τάσεις στο τοίχωμα του διευρυμένου αγωγού.

viii) Στατική πίεση

Παρακάτω ακολουθούν τα διαγράμματα πτώσης στατικής πίεσης στο τοίχωμα του αγωγού. Η στατική πίεση είναι το πιο άμεσα μετρούμενο μέγεθος σε μια πειραματική διάταξη, γι' αυτό και κρίνεται λογικό να μελετήσουμε την πίεση σ' αυτό το όριο. Τα μεγέθη είναι αδιαστατοποιημένα με την εκάστοτε δυναμική πίεση του ελεύθερου ρεύματος ταχύτητας U_0 όπως και στον ευθύγραμμο αγωγό.

Το μέγεθος της πίεσης δεν μας δίνει πολλές πληροφορίες για τη ροή, όπως οι διατμητικές τάσεις και το ιξώδες, αλλά μας πληροφορεί για τη συμπεριφορά του ρευστού.

Η μέγιστη τιμή της τοιχωματικής πίεσης δεν ταυτίζεται με τη γραμμή επανακόλλησης, αλλά εντοπίζεται σε μικρή απόσταση κατάντι αυτού. Αυτό μπορεί να αποδοθεί σε δράση της συνεκτικότητας, δεδομένου ότι η μείωση του αριθμού Re αυξάνει την απόσταση αυτή.

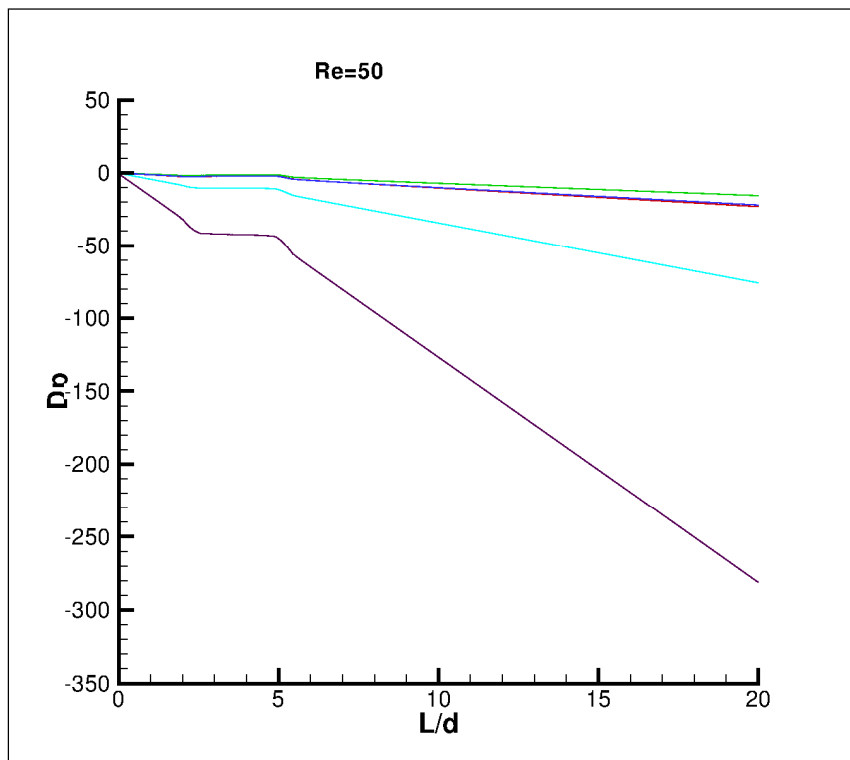
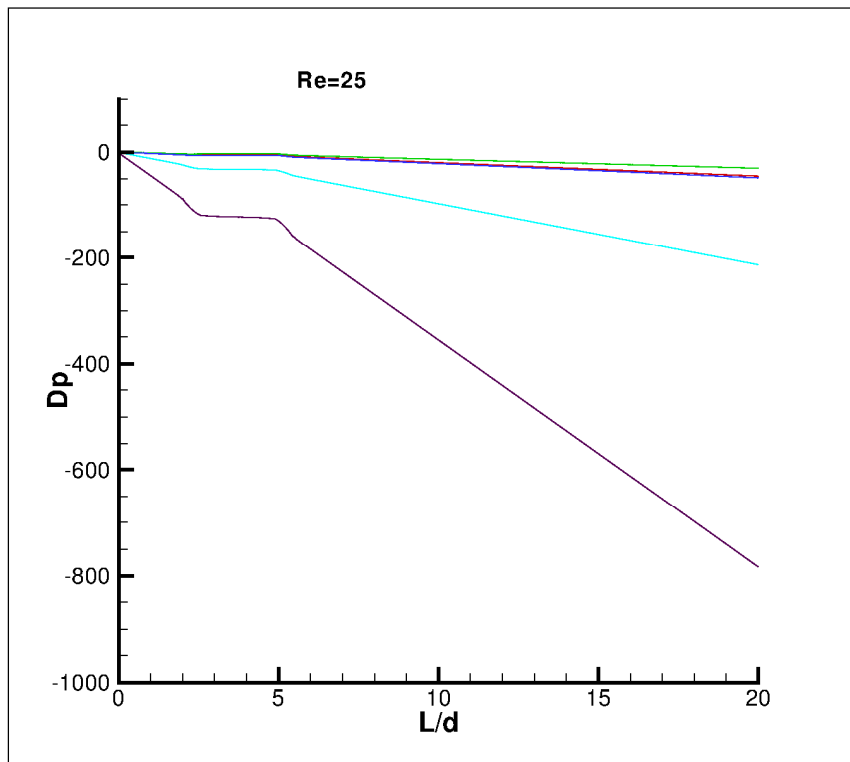
Στο μεγαλύτερο μέρος του διαστελλόμενου τμήματος του υπολογιστικού χωρίου, η αδιαστατοποιημένη πίεση παραμένει κατά προσέγγιση σταθερή, στην πραγματικότητα, όμως, παρατηρείται μια μικρή ανάκτηση πίεσης. Κατάντι της γραμμής επανακόλλησης, η πίεση ελαττώνεται απότομα και εν συνεχεία μειώνεται γραμμικά ως την έξοδο του ευθύγραμμου κυλινδρικού αγωγού, όπως ήταν και το αναμενόμενο.

Αυξανόμενος ο Re το μέγιστο της πίεσης αυξάνει αντίστοιχα, ενώ το σημείο όπου εμφανίζεται αυτό παραμένει πρακτικά σταθερό ανεξαρτήτως του Re .

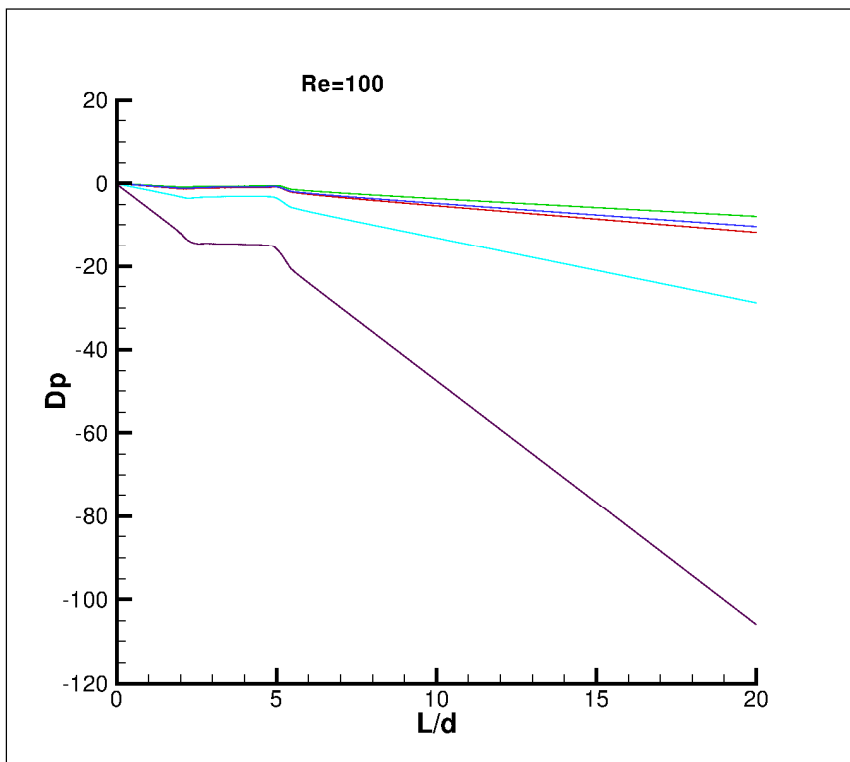
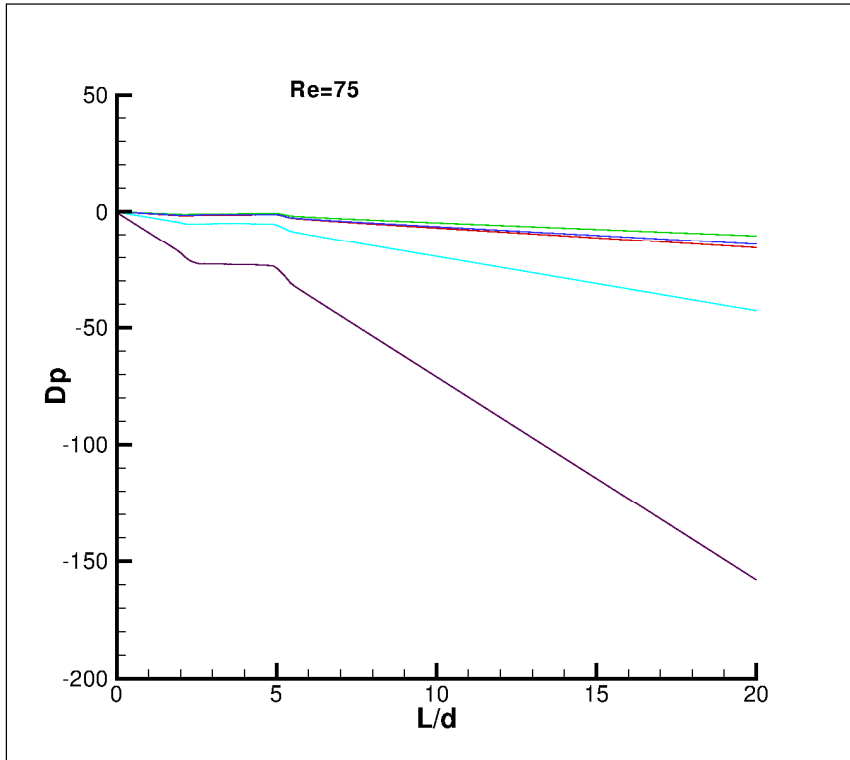
Πρώτη παρατήρηση είναι ότι το ρευστό $W-S$ παρουσιάζει τη μικρότερη πτώση πίεσης στον ευθύγραμμο αγωγό. Αυτό συνδυάζεται με την καλύτερη ανάκτηση πίεσης μετά την κοιλότητα του ανευρύσματος, όπως και βλέπουμε να συμβαίνει στα παρακάτω διαγράμματα για όλους τους Re για το ρευστό $W-S$.

Ισχύει ότι η ύπαρξη περιοχών ανακυκλοφορίας μειώνει τις απώλειες στατικής πίεσης που δημιουργούνται λόγω του ανευρύσματος. Αυτό συμβαίνει επειδή λόγω των μικρών ταχυτήτων που παρατηρούνται στις περιοχές ανακυκλοφορίας, η στατική πίεση δεν μετατρέπεται σε δυναμική στον ίδιο βαθμό που θα μετατρεπόταν χωρίς την ύπαρξη ανακυκλοφορίας.

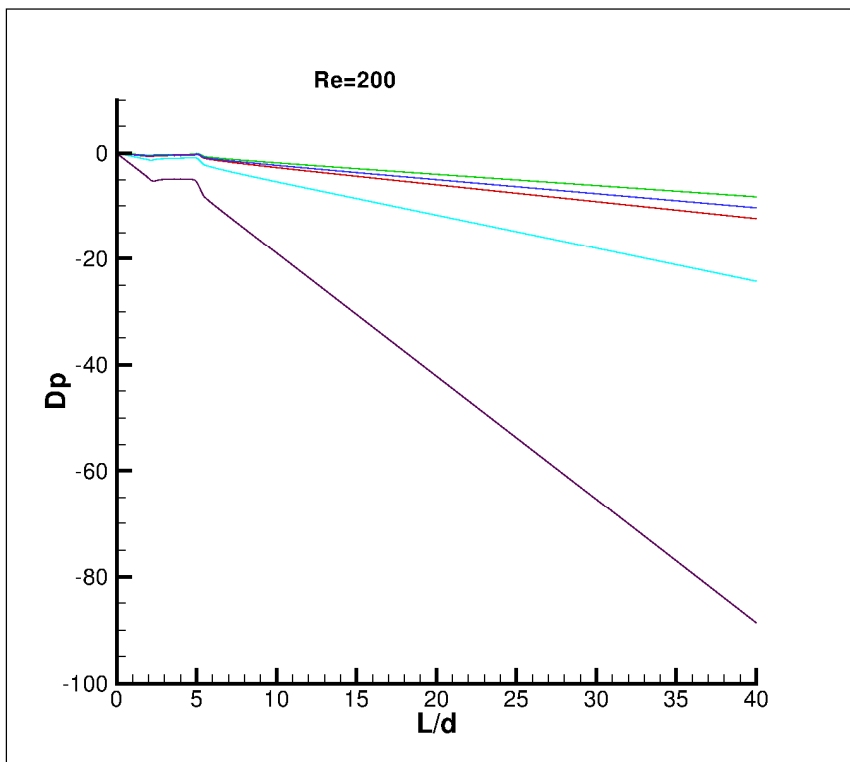
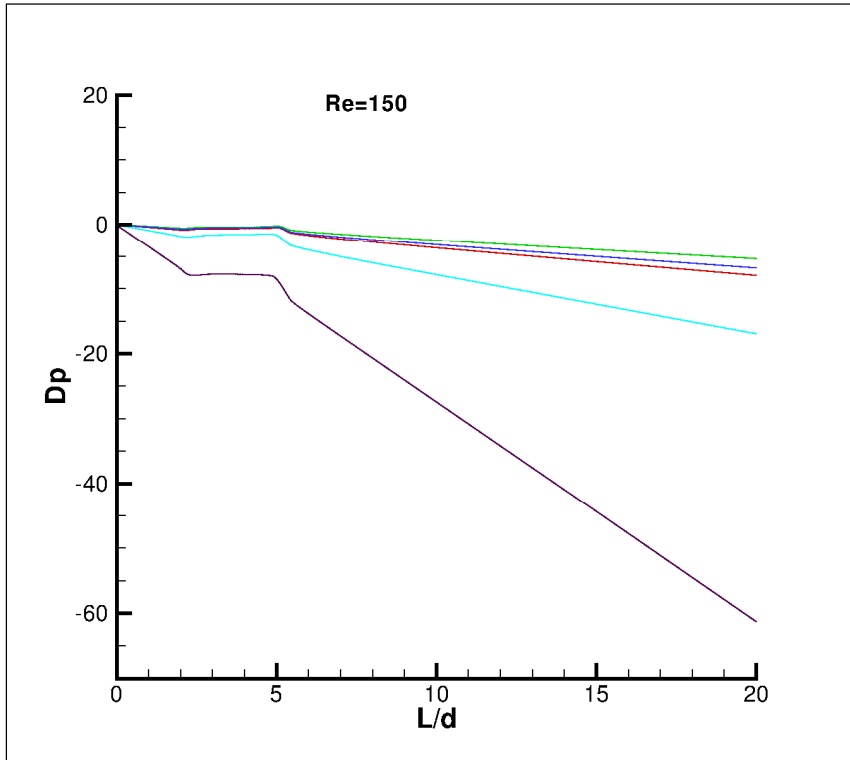
Αγωγός με καμπυλότητα



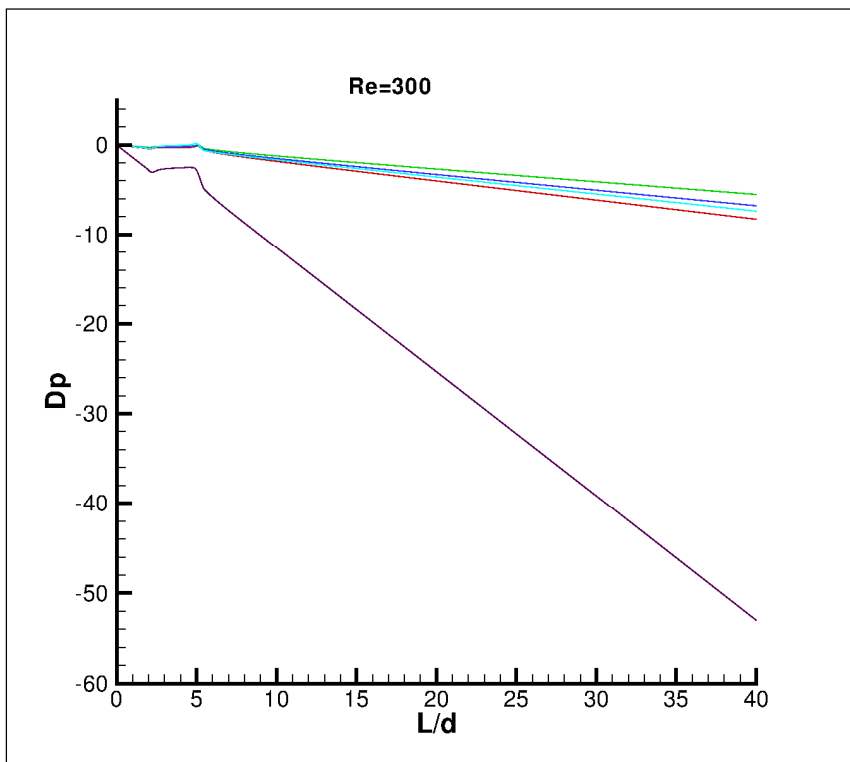
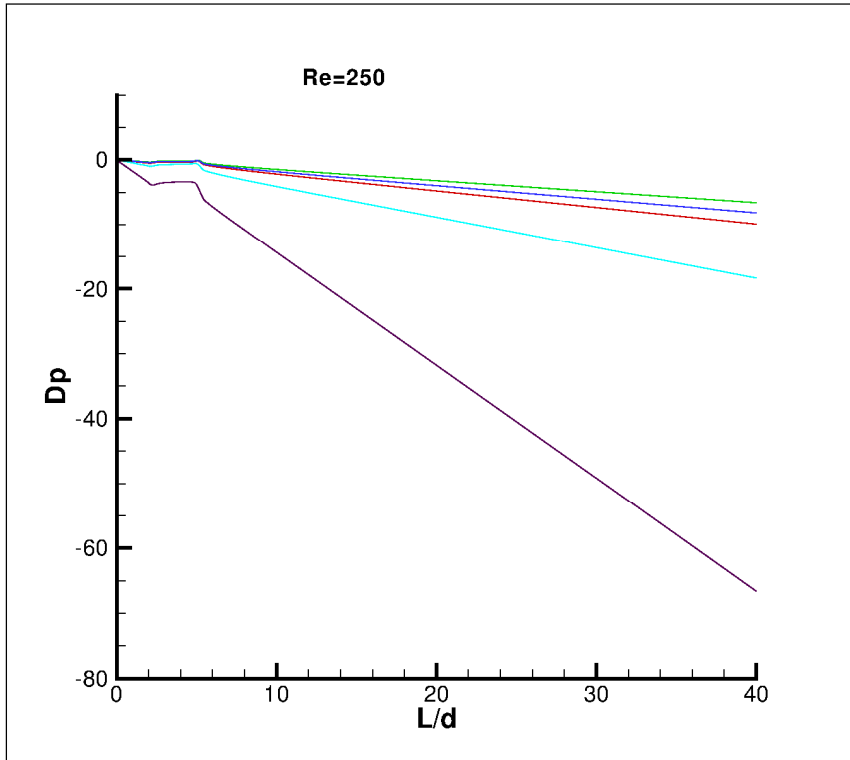
Δ6.67: στατική πίεση στον αγωγό με διεύρυνση.



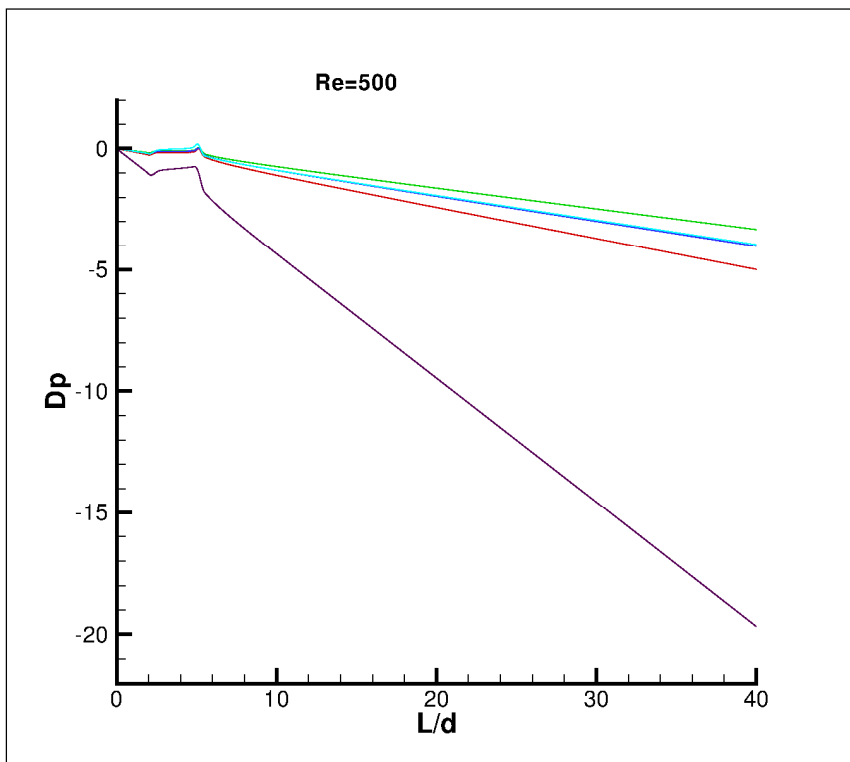
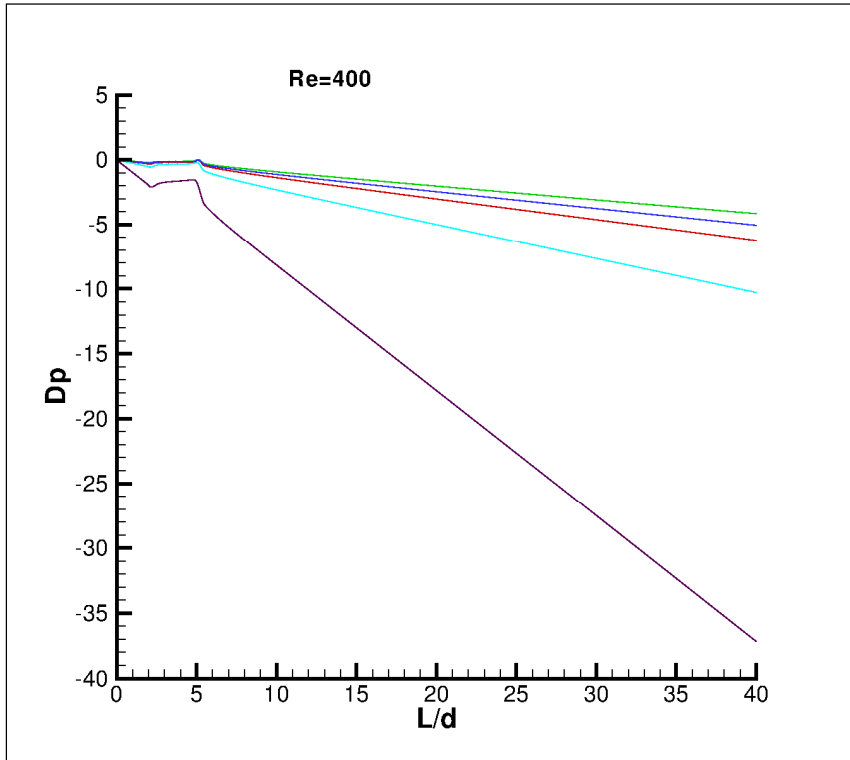
Δ6.68: στατική πίεση στον αγωγό με διεύρυνση.



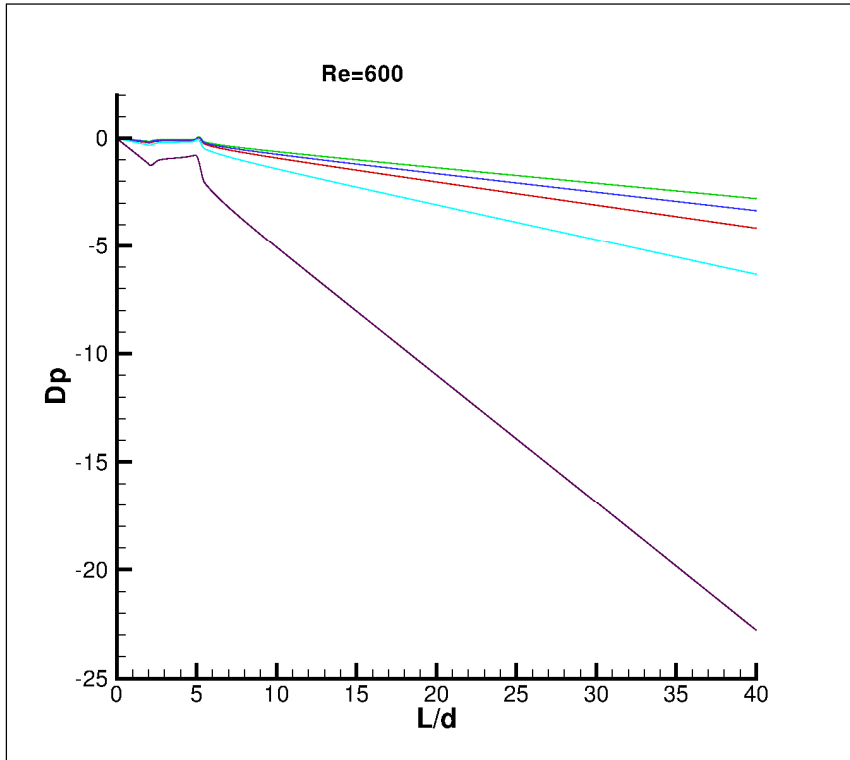
Δ6.69: στατική πίεση στον αγωγό με διεύρυνση.



Δ6.70: στατική πίεση στον αγωγό με διεύρυνση.

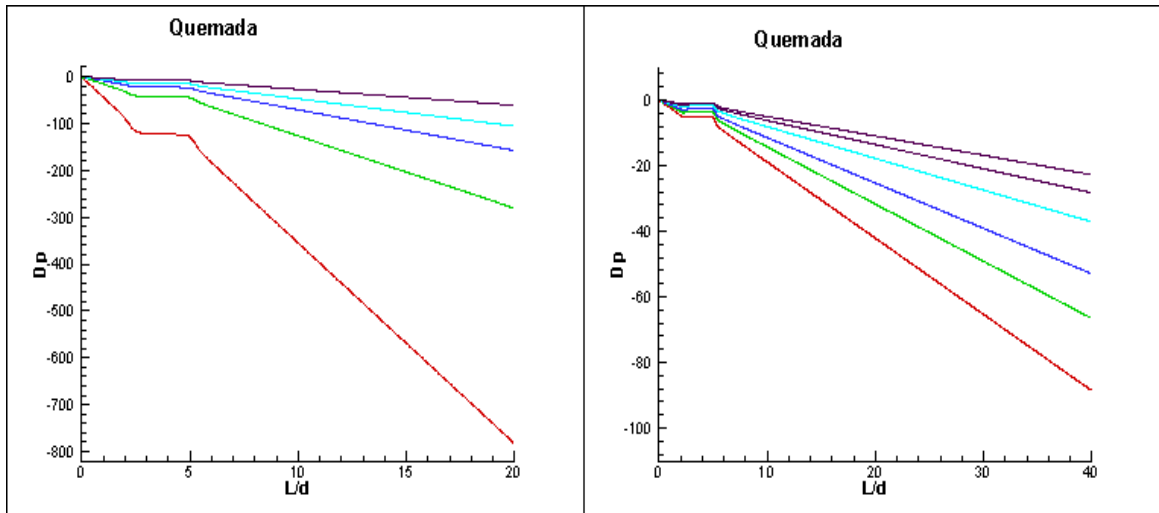


Δ6.71: στατική πίεση στον αγωγό με διεύρυνση.



Δ6.72: στατική πίεση στον αγωγό με διεύρυνση.

Στο Δ6.73, παρουσιάζεται η στατική πίεση για όλους τους Re για το μοντέλο Quemada. Για μήκος αγωγού 20d η κόκκινη γραμμή είναι για Re=25, η πράσινη για Re=50, η μπλε για Re=75, η γαλάζια για Re=100 και η μοβ για Re=150. Αντίστοιχα και για μήκος 40d.



Δ6.73: στατική πίεση στον αγωγό με διεύρυνση για το Quemada.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

1) Διαδικασία επίλυσης

Μελετήθηκε η μόνιμη ροή *νευτώνειου* και *μη νευτώνειων* ρευστών σε διδιάστατο αγωγό, που παρουσιάζει αξονοσυμμετρική διεύρυνση (συμμετρικό ανεύρυσμα) με τη χρήση του υπολογιστικού πακέτου **FLUENT**. Επιλέξαμε πέντε μοντέλα ρευστών, το νευτώνειο, το μοντέλο Εκθετικού Νόμου-Walburn-Schneck (W-S), το Herschel-Bulkley (H-B), το Casson (C) και το Quemada (Q), για τα οποία ορίσαμε κάποιες παραμέτρους υπολογισμού στο FLUENT.

Καθένα από αυτά τα μη νευτώνεια έχει και διαφορετική συνάρτηση για το μ_{eff} .

Με τη χρήση ενός προγράμματος, του GAMBIT, φτιάξαμε το υπολογιστικό μας πλέγμα, που αποτελείται από υπολογιστικά κελιά, στα οποία ολοκληρώνονται και οι εξισώσεις ροής που επιλύει το FLUENT. Κάτι που πρέπει να τονίσουμε είναι ότι χρησιμοποιήθηκαν δύο διαφορετικά μήκη αγωγών, λόγω του ότι μελετήσαμε ένα εύρος αριθμών Re από 25 έως 600 και με την αύξηση του Re αυξάνεται και το μήκος που χρειάζεται η ροή για να διαμορφωθεί. Στην περίπτωση του διευρυμένου αγωγού, πάλι δημιουργήθηκαν δύο αγωγοί διαφορετικής γεωμετρίας. Στον πρώτο υπήρχε οξεία συνένωση της περιοχής της διεύρυνσης με τον ευθύγραμμο αγωγό και στον άλλο η συνένωση γινόταν πιο ομαλά με καμπυλότητα.

2) ευθύγραμμος αγωγός

- Ο αδιάστατος αριθμός Bi, όταν λαμβάνει υψηλές τιμές, δηλαδή σε χαμηλούς Re στο ρευστό H-B, επηρεάζει το μήκος που απαιτείται για να διαμορφωθεί πλήρως η ροή. Πιο συγκεκριμένα, παρατηρήσαμε ότι όταν η τιμή του Bi είναι μεγαλύτερη από μια ορισμένη τιμή, το μήκος διαμόρφωσης αντί να αυξάνεται με την αύξηση του αριθμού Re, μειωνόταν μέχρι ορισμένη τιμή, και μετά, όπως ήταν και το αναμενόμενο, αυξανόταν πάλι, με το Re.
- Στο μήκος διαμόρφωσης παρατηρούμε ότι από τα τέσσερα μη νευτώνεια που μελετούμε τα Quemada και Casson απαιτούν το μικρότερο μήκος για να διαμορφωθεί η ροή τους.
- Για το νευτώνειο ρευστό μία ακόμα παρατήρηση είναι ότι όσο αυξάνεται ο Re, οι τιμές του μήκους διαμόρφωσης της ροής αποκλίνουν από τη θεωρία $\chi_f = 0.06 Re$. Πιο συγκεκριμένα, για $Re > 100$ απαιτείται μικρότερο μήκος από αυτό που ορίζει η θεωρία για να διαμορφωθεί πλήρως η ροή.
- Στα μη νευτώνεια μοντέλα παρατηρούνται περισσότερο πεπλατυσμένες ροές σε χαμηλούς Re, ενώ όσο αυτός αυξάνεται η διαφορά μειώνεται. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, την αναγκαιότητα της μελέτης των μη νευτώνειων σε χαμηλούς Re.
- Η αυξημένη διατμητική τάση στο τοίχωμα για το ρευστό Quemada οφείλεται στο χαμηλό ιξώδες του.
- Το Quemada απαιτεί πολύ μεγαλύτερη διαφορά πίεσης για να ρεύσει στον αγωγό μας.

3) διευρυμένος αγωγός

- Τα σωματίδια ρευστού ακολουθούν τροχιές ελλειπτικού τύπου στην κοιλότητα του ανευρύσματος, το κέντρο των οποίων μετατοπίζεται κατάντι με την αύξηση του αριθμού Re .
- Όταν υπάρχει οξεία συνένωση της κοιλότητας του ανευρύσματος με τον ευθύγραμμο αγωγό, τότε το ρευστό αποκολλάται πιο γρήγορα, σε σχέση με το διευρυμένο αγωγό με καμπυλότητα.
- Αυξανόμενος ο αριθμός Re , η θέση της μέγιστης ανάστροφης ροής μετατοπίζεται κατάντι συγχρόνως με τη γραμμή επανακόλλησης της ροής. Αυτό ισχύει για όλα τα ρευστά.
- Η περιοχή επανακόλλησης της ροής χαρακτηρίζεται από υψηλές κλίσεις της τοιχωματικής πίεσης και της τοιχωματικής διατμητικής τάσης.
- Το ρευστό που κινείται ανάντι της γραμμής επανακόλλησης κοντά στο τοίχωμα επιταχύνεται για κάποιο μήκος και ακολουθώς επιβραδύνεται.
- Η αξονική ταχύτητα λαμβάνει αρνητικές τιμές μόνο στην περιοχή ανακυκλοφορίας.
- Όσο ο αριθμός Re αυξάνεται οδηγούμαστε σε παρόμοιες κατανομές ταχυτήτων.
- Το σημείο εμφάνισης της μικρότερης αξονικής ταχύτητας εμφανίζεται λίγο κατάντι της θέσης που βρίσκεται η κορυφή του ανευρύσματος.
- Καθώς ο Re αυξάνεται το σημείο εμφάνισης της μικρότερης ταχύτητας τείνει να σταθεροποιηθεί για όλα τα μοντέλα.
- Το μεγαλύτερο τμήμα του τοιχώματος του μοντέλου εκτίθεται σε χαμηλές αρνητικές τιμές ταχύτητας, ενώ η αξονική ταχύτητα στον άξονα συμμετρίας του μοντέλου είναι περίπου σταθερή στους υψηλούς Re , μοιάζοντας με το πεδίο ροής ελεύθερης δέσμης ρευστού.
- Στην έξοδο του μοντέλου για αγωγό χωρίς καμπυλότητα η κατανομή της ταχύτητας παρουσιάζει μια ασυνέχεια σε μικρή απόσταση από το τοίχωμα, η οποία αποδίδεται στην τοπική επιτάχυνση του ρευστού στην οξεία συνένωση του τοιχώματος του ανευρύσματος με τον κυλινδρικό αγωγό. Κάτι τέτοιο δεν παρατηρείται τόσο έντονα όταν έχουμε καμπυλότητα.
- Όσο αυξάνεται ο αριθμός Re ο λόγος της ταχύτητας στον άξονα προς την μέση ταχύτητα, u/U_m , τείνει στο 2 για όλες τις ζώνες του ανευρύσματος.
- Καθώς αυξάνεται ο Re το οριακό στρώμα καθίσταται λεπτότερο και η γραμμή επανακόλλησης μετατοπίζεται κατάντι.
- Παρατηρήθηκαν μεγάλες διαφορές στον ελάχιστο απαιτούμενο Re για αποκόλληση της ροής για κάθε μη νευτώνειο μοντέλο ρευστού. Για το Casson η ροή αποκολλάται για $Re \geq 150$, για το Quemada για $Re \geq 300$, για το H-B $Re \geq 75$ ενώ για το W-S και το νευτώνειο η αποκόλληση αρχίζει στην περιοχή του $Re = 25$.
- Με την αύξηση του Re η περιοχή ανακυκλοφορίας επιμηκύνεται γραμμικά, σε όλα τα μοντέλα, ενώ το σημείο αποκόλλησης δεν μετακινείται ιδιαίτερα με την αύξηση του Re , πάλι σε όλα τα μοντέλα.

- Η διατμητική τοιχωματική τάση λαμβάνει χαμηλές και κατά προσέγγιση αρνητικές τιμές σε ένα μεγάλο μέρος του μοντέλου, λόγω της αποκόλλησης της ροής, όταν φυσικά υπάρχει.
- Γύρω από την περιοχή επανακόλλησης της ροής η διατμητική τάση στο τοίχωμα μεταβάλλεται σημαντικά λαμβάνοντας αδιάστατο θετικό μέγιστο, εξαρτώμενο από τον αριθμό Re , στη συνένωση του ανευρύσματος με τον ευθύγραμμο αγωγό.
- Ο αγωγός με οξεία συνένωση ανευρύσματος με τον ευθύγραμμο αγωγό παρουσιάζει απότομη αύξηση της διατμητικής τάσης στο σημείο της συνένωσης και έχουμε πολύ υψηλό τοπικό μέγιστο, ενώ στην περίπτωση του αγωγού με καμπυλότητα έχουμε πιο ομαλή αύξηση και πιο χαμηλό τοπικό μέγιστο της διατμητικής τάσης. Αυτός ήταν και ένας κύριος λόγος που δημιουργήσαμε και αγωγό με καμπυλότητα.
- Το ρευστό Quemada παρουσιάζει διαφορετική κλίση διατμητικών τοιχωματικών τάσεων από τα υπόλοιπα ρευστά και δεν εμφανίζει τις υψηλές αρνητικές τιμές που εμφανίζουν τα υπόλοιπα ρευστά.
- Κατάντι της γραμμής επανακόλλησης, η πίεση ελαττώνεται απότομα και εν συνεχεία μειώνεται γραμμικά ως την έξοδο του ευθύγραμμου κυλινδρικού αγωγού, όπως ήταν και το αναμενόμενο.
- Η μέγιστη τιμή της τοιχωματικής πίεσης δεν ταυτίζεται με τη γραμμή επανακόλλησης, αλλά εντοπίζεται σε μικρή απόσταση κατάντι αυτού. Αυτό μπορεί να αποδοθεί σε δράση της συνεκτικότητας, δεδομένου ότι η μείωση του αριθμού Re αυξάνει την απόσταση αυτή.
- Το ρευστό W-S παρουσιάζει τη μικρότερη πτώση πίεσης στον ευθύγραμμο αγωγό. Αυτό συνδυάζεται με την καλύτερη ανάκτηση πίεσης μετά την κοιλότητα του ανευρύσματος.
- Στο μεγαλύτερο μέρος του διαστελλόμενου τμήματος του υπολογιστικού χωρίου, η αδιάστατοποιημένη πίεση παραμένει κατά προσέγγιση σταθερή, στην πραγματικότητα, όμως, παρατηρείται μια μικρή ανάκτηση πίεσης.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Αριθμητική μελέτη μόνιμης ροής μη Νευτώνειων ρευστών σε αξονικά συμμετρική διεύρυνση αγωγού

Διπλωματική Εργασία
Της
Δήμητρας Φράγκου

Έγινε η διεξαγωγή υπολογιστικής μελέτης πάνω στη μόνιμη ροή του αίματος, όταν αυτό ρέει σε αγωγό με διεύρυνση, από βιοϊατρικής πλευράς σε αρτηρία με ανεύρυσμα. Μελετήθηκαν τέσσερα μοντέλα ρευστών, που συνήθως χρησιμοποιούνται για την περιγραφή των μη νευτώνειων χαρακτηριστικών του αίματος, τα Walburn-Schneck (W-S), Herschel-Bulkley (H-B), Casson και Quemada.

Σε διδιάστατους, αξονικά, συμμετρικούς αγωγούς, αναπτύχθηκαν τρία διαφορετικά είδη υπολογιστικών πλεγμάτων, η επίλυση των οποίων έγινε με το λογισμικό υπολογιστικής ρευστομηχανικής, FLUENT. Δώσαμε έμφαση στη γεωμετρία του αγωγού, γι' αυτό και χρησιμοποιήθηκαν δύο διαφορετικοί διευρυμένοι αγωγοί, καθώς και στη δομή του πλέγματός μας, το οποίο ήταν μη δομημένο στην περιοχή της διεύρυνσης του αγωγού.

Το εύρος των αριθμών Re που μελετήσαμε περιλάμβανε, τόσο τους χαμηλούς, όσο και υψηλότερους, δηλαδή η μελέτη έγινε για την περιοχή από $Re=25$ μέχρι $Re=600$.

Το μήκος που απαιτούσαν τα μοντέλα Casson και Quemada για να διαμορφωθεί πλήρως η ροή τους, ήταν κατά πολύ μικρότερο από αυτό των W-S και H-B. Διαπιστώσαμε την επίδραση του αριθμού Bi , στο μοντέλο H-B, πάνω στο μήκος διαμόρφωσης όταν αυτός λαμβάνει υψηλές τιμές, δηλαδή σε χαμηλούς Re , αντίστοιχα. Για το νευτώνειο, με την αύξηση του Re , οι τιμές του μήκους διαμόρφωσης αποκλίνουν από τις θεωρητικές τιμές, με τις οποίες σχεδόν ταυτίζονται για πιο χαμηλούς Re .

Στο διευρυμένο αγωγό, όταν υπάρχει οξεία συνένωση της κοιλότητας του ανευρύσματος με τον ευθύγραμμο αγωγό, η ροή αποκολλάται πιο γρήγορα. Η ζώνη ανακυκλοφορίας αυξάνεται με τον αριθμό Re και η γραμμή επανακόλλησης μετατοπίζεται προς την έξοδο του μοντέλου, δηλαδή κατάντι.

Οι διατμητικές τάσεις παρουσιάζουν τοπικό μέγιστο κοντά στην έξοδο της διεύρυνσης, εξαρτώμενο από τον Re , το οποίο στην περίπτωση του αγωγού με καμπυλότητα είναι πιο χαμηλό και η διατμητική τοιχωματική τάση αυξάνεται πιο ομαλά μέχρι αυτή την τιμή.

Επιπλέον, στην έξοδο του μοντέλου χωρίς καμπυλότητα η κατανομή της ταχύτητας παρουσιάζει μια ασυνέχεια σε μικρή απόσταση από το τοίχωμα, η οποία αποδίδεται στην τοπική επιτάχυνση του ρευστού στην οξεία συνένωση

του τοιχώματος του ανευρύσματος με τον κυλινδρικό αγωγό. Κάτι τέτοιο δεν παρατηρείται τόσο έντονα όταν ο αγωγός μας έχει καμπυλότητα.

Παρατηρήθηκαν μεγάλες διαφορές στον ελάχιστο απαιτούμενο Re για αποκόλληση της ροής για κάθε μη νευτώνειο μοντέλο ρευστού, με κάποια από αυτά να μην έχουν αποκολληθεί μέχρι και για $Re=300$, όπως το Quemada.

Το ρευστό Quemada παρουσιάζει διαφορετική κλίση διατμητικών τοιχωματικών τάσεων από τα υπόλοιπα ρευστά και δεν εμφανίζει τις υψηλές αρνητικές τιμές που εμφανίζουν τα υπόλοιπα ρευστά.

Κατάντι της γραμμής επανακόλλησης, η πίεση ελαττώνεται απότομα και εν συνεχεία μειώνεται γραμμικά ως την έξοδο του ευθύγραμμου κυλινδρικού αγωγού, όπως είναι αναμενόμενο.

Λέξεις κλειδιά: μόνιμη ροή, μη νευτώνειο, αξονοσυμμετρικός αγωγός, διεύρυνση, FLUENT, GAMBIT.

ABSTRACT

Numerical flow study of non Newtonian fluids in an axisymmetric tube dilatation

Diploma Thesis
by
Dimitra Fragkou

We conducted a numerical study about the steady blood flow, when it flows within an axisymmetric tube dilatation. The study involved four of the most commonly used models to describe blood's non-newtonian characteristics, namely: Walburn-Schneck (W-S), Herschel-Bulkley (H-B), Casson and Quemada.

In 2-D, axisymmetric, straight and enlarged tubes were developed three different types of numerical grids, which were solved using the commercial numerical code FLUENT. Firstly, we focused on the geometry of the tube, using two different enlarged tubes and secondly on the structure of our grid, which was unstructured in the area of the tube dilatation.

We studied the range of Re numbers 25-600, including both the low as the higher numbers.

The entrance length for Casson and Quemada was found much less than those of W-S and H-B models. We found the effect of Bi number, in H-B model, on the entrance length, when Bi takes high values and Re low, respectively, extremely important. For the Newtonian model, the values of the entrance length deviate from the theoretical ones, as Re increases.

In the enlarged tube, when there is a sharp junction of the model to the exit straight tube, the flow deattachment happens earlier.

The recirculation zone increases with Re and the flow reattachment line displaced towards the exit of the model. Wall shear stresses show high peaks at the distal end of the dilatation, depending on the Re, which in the case of the tube with curvature is lower and the increase of the value of WSS is smooth enough, up to this value.

In addition, at the model exit the velocity profile exhibits a discontinuity a small distance from the wall attributed to local fluid acceleration at the sharp junction of the model to the exit straight tube. We don't notice it, in such degree, in the case of tube with curvature.

Great differences among models were observed in the minimum required Re for the flow deattachment.

Quemada model shows different gradient of wall shear stresses and it doesn't show the high negative peaks as the other models.

Downstream of the reattachment line pressure drops abruptly and then it is reduced linearly in the exit straight tube, as expected.

Keywords: steady flow, non-newtonian, axisymmetric tube, dilatation, FLUENT, GAMBIT.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Lee Waite, Jerry Fine, *Applied Biofluid Mechanics*
- [2] Τσαγγάρης Σ. *Βιορρευστομηχανική του Κυκλοφορικού συστήματος του αίματος*, ΕΜΠ, Αθήνα 1996.
- [3] J.T. Ottesen, M.S. Olufsen, J.K. Larsen, *Applied Mathematical Models in Human Physiology*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2004
- [4] Χρήστος Γ. Σταματόπουλος, *Πειραματική και υπολογιστική μελέτη ροής σε μοντέλα αγγείων με παθοφυσιολογικά χαρακτηριστικά*, Αθήνα 2010.
- [5] Johansen K., *Aneurysm*, *Sci. Am.* 247 (1982) 110-125.
- [6] *Intracranial Aneurysms*, page 403-426
- [7] *Aortic Aneurysms*, page 427-466
- [8] George Fortner and Kaz Johansen, *Abdominal Aortic Aneurysms*, Medical Progress, Seattle 1984
- [9] J.S.P. Lumley, J.J.Hoballah, *Vascular Surgery*, Springer, Berlin 2009
- [10] Braunwald E., *Heart diseases*, Saunders, Philadelphia, 1988.
- [11] Lakatta E.G., Mitchell J.H., Pomerance A., Rowe G., *Human aging: changes in structure and functions*, *J. Am. Coll. Cardiol.* 10 (1987) A42-47.
- [12] Klima T., Spjut H.J., Coelho A., Gray A.G., Wukasch D.C., Reul G.J. Jr., Cooley D.A., *The morphology of ascending aortic aneurysms*, *Hum Pathol* 14 (1983) 810-817.
- [13] Juvela S., *Risk factor for multiple intracranial aneurysms*, *Stroke* 31 (2) (2000) 392-397.
- [14] Krex D., Schackert H.K., Schackert G., *Genesis of cerebral aneurysms-an update*, *Acta Neurochir.* 143 (2001) 429-449.
- [15] Singh K., Bonaa K.H, Jacobsen B.K., Bjork L., Solberg S., *Prevalence of and risk factors for abdominal aortic aneurysms in a population-based study*, *Am. J. Epidemiol.* 154 (2001) 236-244.
- [16] Lee A.J., Fowkes F.G., Carson M.N., Leng G.C., Allan P.L., *Smoking, atherosclerosis and risk of abdominal aortic aneurysm*, *Eur. Heart J.* 18 (1997) 545-546.
- [17] Brown P.M., Zelt D.T., Sobolev B., *The risk of rupture in untreated aneurysms: The impact of size, gender, and expansion rate*, *J. Vasc. Surg.* 37 (2003) 280-284.
- [18] Limet R., Sakalihassan N., Albert A., *Determination of the expansion rate and incidence of rupture of abdominal aortic aneurysms*, *J. Vasc. Surg.* 14 (1991) 540-548.
- [19] Baxter B.T., Terrin M.C., Dalman R.L., *Medical management of small abdominal aortic aneurysms*, *Circulation* 117 (2008) 1889.
- [20] Molony D.S., Callanan A., Kavanagh E.G., Walsh M.T., McGloughlin T.M., *Fluid-structure interaction of a patient-specific abdominal aortic aneurysm treated with an endovascular stentgraft*, *Biomed. Eng. Online* 8 (24) (2009).
- [21] R. Fitridge, M. Thompson, *Mechanisms of Vascular Disease: A Textbook for Vascular Surgeons*, Cambridge University Press 2006
- [22] Thubrikar M.J., *Vascular mechanics and pathology*, Springer Science & Business Media, New York, 2007.
- [23] Z.M. Ruggeri, *Von Willebrand Factor, Platelets and Endothelial Cell Interactions*, *Journal of Thrombosis and Haemostasis*, volume 1, number 7, July 2003
- [24] Robert S. Reneman Z. Arnold P.G.Hoeks, *Wall shear stress as measured in vivo: consequences for the design of the arterial system*, *Med Biol Eng Comput* (2008) 46: 499-507
- [25] Davies P.F., Dewey C.F., Bussolari S., Gordon E., Gibrone M.A., *Influence of hemodynamic forces on vascular endothelial function*, *J. Clin. Invest.* 73 (1984) 1121-1129.

- [26] Davies P.F., Mundel T., Barbee K.A., *A mechanism for heterogeneous endothelial responses to flow in vivo and in vitro*, J. Biomech. 28 (1995) 1553-1560.
- [27] Chapell D.C., Varner S.E., Nerem R.M., Medford R.M., Alexander R.W., *Oscillatory shear stress stimulates adhesion molecule expression in cultured human endothelium*, Circ. Res. 82 (1998) 532-539.
- [28] Chiu J.J., Chen L.J., Lee P.L., Lee C.I., Lo L.W., *Shear stress inhibits adhesion molecule expression in vascular endothelial cells induce by coculture with smooth muscle cells*, Blood 1 (2003) 2667-2674.
- [29] Helmlinger G., Geiger R.V., Schreck S., Nerem R.M., *Effects of pulsatile flow on cultured vascular endothelial cell morphology*, J. Biomech. Eng. 113 (1991) 123-131.
- [30] Asbury C.L., Ruberti J.W., Bluth E.I., Peattie R.A., *Experimental investigation of steady flow in rigid models of abdominal aortic aneurysms*, Ann. Biomed. Eng. 23 (1995) 23-39.
- [31] Taylor T.W., Yamaguchi T., *Three-dimensional simulation of blood flow in an abdominal aortic aneurysm—steady and unsteady flow cases*. J. Biomech. Eng. 116 (1994) 89-97.
- [32] Yu S.C.M., Zhao J.B., *A steady flow analysis on the stented and nonstented sidewall aneurysm models*, Med. Eng. Phys. 21 (1999) 133-41.
- [33] F.Yilmaz, M.Y.Gundogdu, *A critical review on blood flow in large arteries; relevance to blood rheology, viscosity models, and physiologic conditions*, Korea-Australia Rheology Journal, Vol. 20, No. 4, December 2008 pp. 197-211.
- [34] C.Picart, J.-M.Piau, H.Galliard, P.Carpentier, *Human blood shear yield stress and its hematocrit dependence*, J. Rheol. 42(1), January/February 1998.
- [35] J.W. Trevan, *The Viscosity of Blood*, 1917
- [36] G. E. Burgh and N. P. DePasquale, *Hematocrit, Viscosity and Coronary Blood Flow*, Dis Chest 1965;48;225-232
- [37] J. P. Woodcock, *Physical properties of blood and their influence on blood-flow measurement*, 1976 Rep. Prog. Phys. 39 65
- [38] Ιάσονας Ζήσης: *Υπολογιστική μελέτη πεδίων ροής μη νευτώνειων ρευστών σε αξονικά συμμετρική στένωση*, Αθήνα 2010
- [39] J.F.Hale, D.A.McDonald, J.R.Womersley, *Velocity Profiles of Oscillating Arterial Flow, With Some Calculations of Viscous Drag and the Reynolds Number*, Journal of Physiology (1955) 128, 629-640
- [40] J.R.Womersley, *Method for the Calculation of Velocity, Rate of Flow and Viscous Drag in Arteries when the Pressure Gradients Is Known*, Journal of Physiology (1955) 127, 553-563
- [41] Budwig R., Elger D., Hooper H., Slippery J., *Steady flow in abdominal aortic aneurysm models*, J. Biomech. Eng. 115 (1993) 418-423.
- [42] Yu S.C.M., *Steady and pulsatile flow characteristics in Abdominal Aortic Aneurysm models using Particle Image Velocimetry*, Int. J. Heat Fluid Flow. 21 (2000)
- [43] Peattie R.A., Schrader T., Bluth E.I., Comstock C.E., *Development of turbulence in steady flow through models of abdominal aortic aneurysms*, J. Ultrasound Med. 13 (1994) 467-72.
- [44] Julius M.Guccione, Ghassan S.Kassab, Mark B. Ratcliffe, *Computational Cardiovascular Mechanics: Modeling and Applications in Heart Failure*, Springer 2010
- [45] P.Neofytou, S.Tsangaris, *Flow effects of blood constitutive equations in 3D models of vascular anomalies*, International Journal for Numerical Methods in Fluids 2006; 51:489–510
- [46] M.H. Friedman, D.L. Fry, *Arterial permeability dynamics and vascular disease*, Atherosclerosis IO4 (1993) 189- 194
- [47] Σ. Τσαγγάρης, *Μηχανική των Ρευστών*, Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα 2005
- [48] R.P. Chhabra, J.F. Richardson, *Non-Newtonian Flow and Applied Rheology* - 2nd ed, Institute of Chemical Engineering, 2008

- [49] G.P.Galdi, *Mathematical Problems in Fluid Mechanics*, Birkhauser-Verlag, Basel, Switzerland, 2008
- [50] H.A. Barnes, *The yield stress—a review or ‘πάντα ρει’—everything flows?*, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 81 (1999) 133–178
- [51] N. Sun and D. DeKee, Simple Shear, *Hysteresis and Yield Stress in Biofluids*, *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, Volume 79, February 2001
- [52] C.Picart, J.-M.Piau, H.Galliard, P.Carpentier, *Human blood shear yield stress and its hematocrit dependence*, *J. Rheol.* 42(1), January/February 1998.
- [53] G.B. Thurston, *Viscoelasticity of Human Blood*, *Biophysical Journal* Volume 12 1972
- [54] G.B. Thurston, Nancy M. Henderson, *Effects of flow geometry on blood viscoelasticity*, *Biorheology* 43 (2006) 729–746
- [55] D.Quemada, *Rheology of concentrated disperse systems III. General features of the proposed non-newtonian model. Comparison with experimental data*, *Rheol. Acta* 17, 643-653 (1978).
- [56] A.Rutherford, *Vectors, Tensors, And The Basic Equations Of Fluid Mechanics*, Dover Publications, New York, 1989
- [57] N.M. Σταυρακάκης, *Εξιιώσεις Μερικών Παραγώγων για τις Επιστήμες και την Τεχνολογία*, Αθήνα Ιανουάριος 2002.
- [58] C.L.Fefferman, *Existence & Smoothness of the Navier-Stokes Equation*, Princeton University, Department of Mathematics, Princeton, NJ 08544-1000 - May 1, 2000
- [59] P.Constantin, *Some open problems and research directions in the mathematical study of uid dynamics*, Department of Mathematics, The University of Chicago
- [60] O.A.Ladyzhenskaya, *Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*, 2nd English Edition, Gordon and Breach Science Publishers, 1969
- [61] Fluent Inc., *Fluent 6.3 Release Notes*, 2006
- [62] J.Ferziger, M. Peric, *Computational Methods for Fluid Dynamics*, 3rd ed., Springer 2002
- [63] T.Chung, *Computational Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, 2002
- [64] Harvard Lomax and Thomas H.Pulliam , NASA Ames Research Center , David W. Zingg, University of Toronto, *Fundamentals of Computational Fluid Dynamics*, August 26, 1999.
- [65] Rajesh Bhaskaran, Lance Collins, *Introduction to CFD Basics*
- [66] Alexandre J. Chorin, Jerrold E.Marsden, *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*, Springer, Berkeley, 1978
- [67] J.Boyd, J.Buick, *Comparison of Newtonian and non-Newtonian flows in a two dimensional carotid artery model using the lattice Boltzmann method*, 2007 *Phys. Med. Biol.* 52 6215
- [68] B.Guzel, I.Frigaarda, D.M.Martinez,* *Predicting laminar–turbulent transition in Poiseuille pipe flow for non-Newtonian fluids*, *Chemical Engineering Science* 64 (2009) 254 -264
- [69] Durst, F., Ray, S., Unsal, B., and Bayoumi, O. A., 2005, *The Development Lengths of Laminar Pipe and Channel Flows*, *Journal of Fluids Engineering*, 127, pp. 1154–1160.
- [70] R.J.Poole, B.S.Ridley, *Development-Length Requirements for Fully Developed Laminar Pipe Flow of Inelastic Non-Newtonian Liquids*, *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 129 / 1281, 2007
- [71] M.Collins, W.R.Schowalter, *Behaviour of Non-Newtonian Fluids in the Inlet Region of a Channel* *AIChE J.*, 9, pp. 98–102, 1963
- [72] Z.Matros, Z.Nowak, *Laminar Entry Length Problem for Power Law Fluids*, *Acta Mech.*, 48, pp. 81–90, 1983
- [73]A.K.Mehrota, G.S.Patience, *Unified Entry Length for Newtonian and Power Law Fluids in Laminar Pipe Flow* *Can. J. Chem. Eng.*, 68, pp. 529–533, 1990

- [74] S. Ookawara, K. Ogawa, N. Dombrowski, E. Amooie-Foumeny, A. Riza, *Unified Entry Length Correlation for Newtonian, Power Law and Bingham Fluids in Laminar Pipe Flow at Low Reynolds Number*, J. Chem. Eng. Jpn., 33, pp. 675–678, 2000
- [75] R. C. Gupta, *On Developing Laminar Non-Newtonian Flow in Pipes and Channels*, Nonlinear Anal.: Real World Appl., 2, pp. 171–193, 2001
- [76] J. Boyd, J. M. Buick, S. Green, *Analysis of the Casson and Carreau-Yasuda non-Newtonian blood models in steady and oscillatory flows using the lattice Boltzmann method*, Physics of Fluids 19, 093103, 2007
- [77] Alvaro A. Valencia, Amador M. Guzmán, Ender A. Finol, Cristina H. Amon, *Blood Flow Dynamics in Saccular Aneurysm Models of the Basilar Artery*
- [78] Panagiotis Neofytou*, Sokrates Tsangaris* & Michalis Kyriakidis, *Non-Newtonian Fluid Flow Simulation In A Progressively Enlarged Aneurysm Model*.
- [79] P. Neofytou*, S. Tsangaris† and M. Kyriakidis**, *Implementation And Differences Between Blood Rheological Models In Simulating The Flow In An Abdominal Aortic Aneurysm*.
- [80] Z. Matras and Z. Nowak, *Laminar Entry Length Problem*, Poland
- [81] Rachid Chebbi, *Laminar flow of power-law fluids in the entrance region of a pipe*, United Arab Emirates.
- [82] CHARLES A. TAYLOR,^{1,2} CHRISTOPHER P. CHENG,² LEANDRO A. ESPINOSA,² BEVERLY T. TANG,² DAVID PARKER,² and ROBERT J. HERFKENS³, *In Vivo Quantification of Blood Flow and Wall Shear Stress in the Human Abdominal Aorta During Lower Limb Exercise*

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

- C header files

Συνάρτηση ορισμού του μοντέλου του ρευστού Quemada

```
/******  
UDF for specifying quemada blood model viscosity  
*****/  
#include "udf.h"  
double k0=4.33;  
double koo=2.07;  
double g=1.88;  
double h=0.45;  
double mf=0.0012;  
DEFINE_PROPERTY(quemada_viscosity, cell, thread)  
{  
double x = C_STRAIN_RATE_MAG(cell,thread);  
double strain = fabs(x);  
double a = sqrt(strain/g);  
double b = 0.5*(k0 + koo*a)*h/(1+a);  
double mu_lam = mf*pow( 1.-b , -2. );  
return mu_lam;  
}
```

Συνάρτηση ορισμού του μοντέλου του ρευστού Casson

```
/******  
UDF for specifying casson blood model viscosity  
*****/  
#include "udf.h"  
DEFINE_PROPERTY(casson_viscosity, cell, thread)  
{  
double m0=0.0031;  
double t0=0.01082;  
int k=500;  
double x = C_STRAIN_RATE_MAG(cell,thread);  
double strain = fabs(x) + 0.000000001;  
double a= pow( (t0/strain) , 0.5 );  
  
double b= 1. - exp(-pow((k*strain),0.5));  
double c = pow(m0, 0.5) + (b*a);  
double mu_lam = pow( c , 2.);  
return mu_lam;  
}
```

- FORTRAN 77 computer programs

Αδιαστατοποιήσεις

Με το πρόγραμμα αυτό υπολογίζονται τα διδιάστατα μεγέθη που ήταν απαραίτητο να εισαχθούν, για να προκύψουν ροές με τον αριθμό ομοιότητας Re , που εμείς επιλέγουμε.

```

program nondimensionalization
c
implicit double precision (a-h,o-z)
c
c parameter input, d = diameter of tube,
c
parameter(d=0.013)
c
c
1 write(*,*) 'Reynolds number ?'
read(*,*) re
c
write(*,*) 'density ?'

read(*,*) dens
c
write(*,*) 'effective viscosity ?'
read(*,*) hm
c
write(*,*) 'non-newtonian model parameter ?'
read(*,*) an
c
um= ((re*hm/dens)/(d**an))**(1./(2.-an))
c
write(*,*) 'yielding stress ?'
read(*,*) t0
c
bi= ((d/um)**an)*t0/hm
c
u0= um
c
write(*,*) '#####'
write(*,*) ' flow conditions '
write(*,*) '#####'
write(*,*) ' Reynolds =', re
write(*,*) ' Bingham =', bi
write(*,*) '#####'
write(*,*) ' '
write(*,*) ' '
write(*,*) ' '
write(*,*) '#####'
write(*,*) ' solver inputs '
write(*,*) '#####'
write(*,*) ' velocity factor =', u0write(*,*)
write(*,*) '#####'
c
write(*,*) ' '
write(*,*) 'for another calculation press --> 0'
read(*,*) m
if (m .eq. 0) goto 1
c
stop
end

```

Με το παρακάτω πρόγραμμα υπολογίζονται οι ταχύτητες και το μεταβλητό ιξώδες αναφοράς των μη νευτώνειων μοντέλων ρευστών W-S και H-B.

```
program v_calculation
c
implicit double precision (a-h,o-z)
c
parameter(d=0.013)
c
1 write(*,*) 'Reynolds number ?'
read(*,*) re
c
write(*,*) 'density ?'
read(*,*) dens
c
write(*,*) 'effective viscosity ?'
read(*,*) hm
c
write(*,*) 'non-newtonian model parameter ?'
read(*,*) an
c
um= ((re*hm/dens)/(d**an))**(1./(2.-an))
c
hmref=hm*((um/d)**(an-1.))
c
write(*,*) '#####'
write(*,*) ' reference values '
write(*,*) '#####'
write(*,*) ' viscosity reference =', hmref
write(*,*) ' velocity reference =', um
write(*,*) '#####'
c
write(*,*) ' '
c
write(*,*) 'for another calculation press --> 0'
read(*,*) m
if (m .eq. 0) goto 1
c
stop
end
```