Θεωρία Ramsey σε χώρους Λέξεων

Ιωάννης Λυκουρίνας

Διπλωματική εργασία

Επιβλέπων καθηγητής: Κανελλόπουλος Βασίλειος
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα
30 Ιουνίου 2021

Περίληψη

Αυτή η εργασία μελετά προβλήματα τύπου Ramsey σε χώρους λέξεων. Αυτοί είναι ο χώρος των λέξεων και ο χώρος των γενικευμένων (located) λέξεων όπως περιγράφεται στο [1]. Το βασικό θεώρημα που αποδεικνύεται είναι το 4.1 το οποίο αφορά γενικευμένες λέξεις και είναι μια γενίκευση του θεωρήματος Carlson. Στη συνέχεια αυτό επεκτείνεται σε χώρους πεπερασμένων και άπειρων ακολουθιών από πέπερασμένες λέξεις. Τέλος βλέπουμε εφαρμογές του θεωρήματος σε γενικευμένες λέξεις, λέξεις και φυσικούς αριθμούς.

Abstract

This thesis deals with Ramsey problems on spaces of words. These are the space of words and the space of located words as described in [1]. The main theorem that we prove is 4.1 which concerns located words and is a generalization of Carlson's theorem. Subsequently we extend this theorem on spaces of finite and infinite sequences of located words. Finally we see some applications on located words, words and natural numbers.

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή

Η θεωρία Ramsey είναι ο κλάδος της συνδιαστικής ο οποίος ασχολείται με την ύπαρξη δομής σε υποσύνολα ενός χώρου. Προέρχεται από το έργο των Ramsey, Schur και van der Waerden στις αρχές του $20^{ου}$ το οποίο επικεντρώθηκε σε γραφήματα, υπεργραφήματα και στους φυσικούς αριθμούς. Εμείς θα ασχοληθούμε με το κομμάτι της θεωρίας που αναπτύχθηκε γύρω στο 1970 η οποία συνέδεσε κάποια προβλήματα τύπου Ramsey με υπερφίλτρα, συμπαγείς ημιομάδες και "topological dynamics". Ο βασικός στόχος της εργασίας είναι η απόδειξη του Θεωρήματος 4.1 που είναι μια γενίκευση του Θεωρήματος Carlson για μεταβλητές λέξεις.

Καταρχάς Κεφάλαιο 2 θα παρουσιάσουμε συμβολισμό και θα ορίσουμε τους χώρους που μας ενδιαφέρουν. Αυτοί είναι ο χώρος λέξεων $W(\Sigma)$ και ο χώρος γενικευμένων λέξεων $G(\Sigma)$, με γράμματα από ένα πεπρασμένο αλφάβητο Σ. Παράλληλα με τους ορισμούς θα διατυπώσουμε και μερικά θεωρήματα που θα αποδείξουμε αργότερα.

Στο Κεφάλαιο 3 θα αποδείξουμε την ύπαρξη δύο υπερφίλτρων κ, λ τα οποία θα παίξουν βασικό ρόλο στις αποδείξεις. Η θεωρία του κεφαλαίου κάνει χρήση της συμπαγοποίησης Stone–Cech ενός χώρου μέσω υπερφίλτρων όπως και κάποια στοιχεία από τη θεωρία συμπαγών ημιομάδων. Αυτά τα προαπαιτούμενα αναφέρονται στα Κεφάλαια 8 και 9.

Τα Κεφάλαια 4,5,6 είναι βασισμένα στη θεωρία των Bergelson, Blass και Hindman [1]. Στο Κεφάλαιο 4 θα αποδείξουμε 4.1 το οποίο είναι μια γενίκευση του θεωρήματος Carlson 7.6 στον χώρο των γενικευμένων λέξεων. Στο Κεφάλαιο 5 θα επεκτείνουμε τη θεωρία του Κεφαλαίου 4 σε ένα χώρο από πεπερασμένες ακολουθίες γενικευμένων λέξεων. Στο Κεφάλαιο 6 θα επεκταθούμε περαιτέρω σε ένα χώρο από άπειρες ακολουθίες γενικευμένων λέξεων κάνοντας χρήση της θεωρίας από το Κεφάλαιο 10.

Τέλος στο Κεφάλαιο 7 θα δούμε κάποιες εφαρμογές από τα θεωρήματα των Κεφαλαίων 5 και 6. Κάποιες από αυτές είναι και τα θεωρήματα Carlson, Carlson-Simpson, Hindman και Hales-Jewett.

2 Συμβολισμοί

2.1 Χρωματισμοί

Ορισμός 2.1 *Ένας πεπερασμένος χρωματισμός ενός συνόλου X είναι μια συνάρτηση $f : X \to [m]$ για κάποιο $m \in \mathbb{N}^*$.*

όπου $[m] = \{0, 1, 2, 3, \ldots, m-1\}$, για πλήθος χρωμάτων m ο f θα λέγεται και m-χρωματισμός του X

Αν $f : X \to [m]$ για κάποιο $m \in \mathbb{N}^*$ είναι ένας πεπερασμένος χρωματισμός ενός συνόλου X, τα σύνολα $f^{-1}(\{i\})$ για $i \in [m]$ ονομάζονται χρωματικές κλάσεις του f.

Παρατηρούμε ότι για κάθε πεπερασμένο χρωματισμό ενός συνόλου X, οι χρωματικές κλάσεις διαμερίζουν το X.

Πρόταση 2.2 *Αν $X \neq \varnothing$, α ένα υπερφίλτρο του X και f πεπερασμένος χρωματισμός του X, τότε μία χρωματική κλάση του f ανήκει στο α.*

Απόδειξη: Έστω ότι $f : X \to [m]$ για κάποιο $m \in \mathbb{N}^*$. Όπως αναφέραμε $X = C_0 \cup C_1 \cup \cdots \cup C_{m-1}$ όπου $C_i = f^{-1}(\{i\})$. Έστω εις άτοπο ότι κανένα C_i δεν ανήκει στο υπερφίλτρο, δηλαδή για κάθε $i \in [m]$ $\quad C_i \notin \alpha$. Τότε έχουμε ότι για κάθε $i \in [m]$ $\quad X \setminus C_i \in \alpha$. Τα υπερφίλτρα είναι κλειστά στις πεπερασμένες τομές, άρα $\bigcap\limits_{i \in [m]} (X \setminus C_i) = \varnothing$ άτοπο. Δηλαδή υπάρχει χρωματική κλάση $C_{i_0} \in \alpha$.

Αν έχουμε ένα πεπερασμένο χρωματισμό του συνόλου Y έστω $f : Y \to [m]$ και μια συνάρτηση $g : X \to Y$, τότε μπορούμε να ορίσουμε χρωματισμό του X αντιστρέφοντας τις χρωματικές κλάσεις του f μέσω της g. Δηλαδή ο χρωματισμός του X θα έχει χρωματικές κλάσεις

$$g^{-1}(\{i\}) \text{ για } i \in [m]$$

ισοδύναμα ο χρωματισμός που αντιστοιχεί στο X είναι

$$f' : X \to [m]$$

$$x \mapsto f(g(x))$$

Τώρα αν θέλουμε να δείξουμε ότι ένα $B \subseteq Y$ είναι μονοχρωματικό κάτω από το χρωματισμό f, αρκεί να δείξουμε ότι $B \subseteq g(A)$ όπου A μονοχρωματικό κάτω από το χρωματισμό f'.

Θα χρησιμοποιήσουμε αρκετά αυτή τη τεχνική για να μεταφέρουμε θεωρήματα από έναν χώρο X σε ένα χώρο Y και θα αναφερόμαστε στον f' ως τον χρωματισμό που προκύπτει από την f μέσω της g^{-1}.

2.2 Λέξεις

Θεωρούμε ένα πεπερασμένο μη κενό αλφάβητο Σ. Λέξη του αλφαβήτου Σ θα ονομάζουμε μια πεπερασμένη ακολουθία γραμμάτων του Σ ή αλλιώς μια συνάρτηση $w : [l] \to \Sigma$ όπου $l \in \mathbb{N}^*$. Θα χρησιμοποιούμε ακόμα κάποια γράμματα εκτός του αλφαβήτου τα οποία θα λέμε μεταβλητές. Συνήθως θα χρειαζόμαστε μία μεταβλητή $v \notin \Sigma$. Λέξη μίας μεταβλητής ή απλά μεταβλητή λέξη του Σ θα ονομάζουμε μια λέξη του αλφαβήτου $\Sigma \cup \{v\}$ με τουλάχιστον μια εμφάνιση του v. Λέξη n μεταβλητών για μεταβλητές $\{v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}\} \cap \Sigma = \varnothing$ θα ονομάζουμε μία λέξη του αλφαβήτου $\Sigma \cup \{v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ στην οποία εμφανίζονται όλες οι μεταβλητές και η τελευταία εμφάνιση του v_i γίνεται πριν την πρώτη εμφάνιση του v_{i+1} για $i \in [n-1]$.

Ως σύμβαση θα έχουμε ότι το αλφάβητο μας είναι το Σ και όταν αναφερόμαστε σε λέξεις μιας μεταβλητής η μεταβλητή είναι v. Θα αναφερόμαστε στις λέξεις του Σ ως σταθερές λέξεις και θα συμβολίζουμε το σύνολο των σταθερών λέξεων με

$$W(\Sigma) = \{(w : [l] \to \Sigma) : l \in \mathbb{N}^*\}$$

το σύνολο όλων των λέξεων με

$$W(\Sigma, v) = \{(w : [l] \to \Sigma \cup \{v\}) : l \in \mathbb{N}^*\}$$

και των μεταβλητών λέξεων με

$$W(\Sigma; v) = W(\Sigma, v) \setminus W(\Sigma)$$

Αν w είναι μια λέξη και $a \in \Sigma \cup \{v\}$ το $w(a)$ είναι η λέξη που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε στη w κάθε εμφάνιση της μεταβλητής v με a και θα λέγεται στιγμιότυπο της w. Παρατηρούμε ότι αν $a = v \quad w(a) = w$. Επίσης θα συμβολίζουμε τη συνάρτηση αντικατάστασης

$$\widehat{a} : W(\Sigma, v) \to W(\Sigma, v)$$

$$w \mapsto w(a)$$

Εφοδιάζουμε τους χώρους λέξεων με την πράξη της παράθεσης $^\frown$. Δηλαδή αν έχουμε δύο λέξεις $w : [l] \to \Sigma \cup \{v\}$, $v : [l'] \to \Sigma \cup \{v\}$ και τις παραθέσουμε, προκύπτει η λέξη

$$(w^\frown v)(n) = \begin{cases} w(n) & \text{αν } n \in \{0, \ldots, l-1\} \\ v(n-l) & \text{αν } n \in \{l, \ldots, l'-1\} \end{cases}$$

Η πράξη είναι προσεταιριστική, άρα $(W(\Sigma, v), ^\frown)$ είναι ημιομάδα. Εύκολα βλέπουμε ότι $(W(\Sigma), ^\frown)$ $(W(\Sigma; v), ^\frown)$ είναι υποημιομάδες της $(W(\Sigma, v), ^\frown)$.

Τα θεωρήματα που θα μας απασχολήσουν έχουν να κάνουν με ακολουθίες λέξεων. Για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$ ορίζουμε το σύνολο από τις ακολουθίες λέξεων μήκους k

$$[W(\Sigma, v)]^k = \{(w_0, w_2, \ldots, w_{k-1}) : \forall i \in [k] \quad w_i \in W(\Sigma, v)\}$$

ομοίως έχουμε τα υποσύνολα με τις ακολουθίες σταθερών και μεταβλητών λέξεων μήκους k, $[W(\Sigma)]^k$ και $[W(\Sigma; v)]^k$.

Αντίστοιχα ορίζουμε το σύνολο με τις άπειρες ακολουθίες λέξεων

$$[W(\Sigma, v)]^\omega = \{(w_0, w_1, w_2, \ldots) : \forall i \in \mathbb{N} \quad w_i \in W(\Sigma, v)\}$$

και τα υποσύνολα με τις άπειρες ακολουθίες σταθερών και μεταβλητών λέξεων $[W(\Sigma)]^\omega$ και $[W(\Sigma; v)]^\omega$.

Για τα παρακάτω θα θεωρήσουμε μια άπειρη ακολουθία μεταβλητών λέξεων, έστω $\vec{s} = (s_0, s_1, \ldots) \in [W(\Sigma; v)]^\omega$.

Μία μειωμένη λέξη (reduced word) της $\vec{s}$ είναι μία λέξη $w \in W(\Sigma, v)$ τέτοια ώστε $w = s_0(a_0)^\frown s_1(a_1)^\frown \ldots ^\frown s_n(a_n)$ για $n \in \mathbb{N}^*$ και $(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n) \in W(\Sigma, v)$. Θα συμβολίζουμε με $R[\vec{s}]$ το σύνολο των μειωμένων λέξεων της $\vec{s}$ και $CR[\vec{s}]$, $VR[\vec{s}]$ τα υποσύνολα των σταθερών και μεταβλητών μειωμένων λέξεων της $\vec{s}$ αντίστοιχα.

Μια ακολουθία $(t_i)_{i=0}^{k-1} \in [W(\Sigma, v)]^k$ λέγεται μείωση (reduction) μήκους k της $\vec{s}$ αν υπάρχουν γράμματα $a_0, a_1 \ldots, a_{k-1} \in \Sigma \cup \{v\}$ και ακέραιοι $0 = n_0 < n_1 < \cdots < n_{k-1}$ ώστε

$$t_i = s_{n_i}(a_{n_i})^\frown s_{n_i+1}(a_{n_i+1})^\frown \ldots ^\frown s_{n_{i+1}-1}(a_{n_{i+1}-1})$$

Με $R_k[\vec{s}]$ συμβολίζουμε το σύνολο με τις μειώσεις μήκους k της $\vec{s}$ και με $VR_k[\vec{s}]$ το υποσύνολο με τις μεταβλητές μειώσεις μήκους k της $\vec{s}$, δηλαδή αυτές που έχουν όρους μόνο μεταβλητές λέξεις.

Μία άπειρη ακολουθία $\vec{t} \in [W(\Sigma, v)]^k$ λέγεται άπειρη μείωση της $\vec{s}$ αν κάθε αρχικό τμήμα της είναι μια πεπερασμένη μείωση της $\vec{s}$.
Συμβολίζουμε το σύνολο με τις άπειρες μειώσεις της $\vec{s}$

$$R_\omega[\vec{s}] = \{\vec{w} \in [W(\Sigma; v)]^\omega : \forall k \in \mathbb{N}^* \quad \vec{w}\restriction[k] \in R_k[\vec{s}]\}$$

και το σύνολο με τις άπειρες μεταβλητές μειώσεις της $\vec{s}$

$$VR_\omega[\vec{s}] = \{\vec{w} \in [W(\Sigma; v)]^\omega : \forall k \in \mathbb{N}^* \quad \vec{w}\restriction[k] \in VR_k[\vec{s}]\}$$

Θεώρημα 7.4 *Για κάθε πεπερασμένο χρωματισμό των $W(\Sigma; v)$ και $W(\Sigma)$ και άπειρη ακολουθία μεταβλητών λέξεων $\vec{s} \in [W(\Sigma; v)]^\omega$. Υπάρχει άπειρη μεταβλητή μείωση $\vec{t} \in VR_\omega[\vec{s}]$ τέτοια ώστε τα σύνολα από τις σταθερές και μεταβλητές αποσπόμενες λέξεις της $CR[\vec{t}]$ και $VR[\vec{t}]$ να είναι μονοχρωματικά.*

Για παράδειγμα αν $\Sigma = \{a, b\}$ και $\vec{s} = (avv, bvav, v, bbv, avb, \dots)$ μια άπειρη μείωσή της είναι η $\vec{t} = (aaabbab, abbvavb, \dots)$.

Μία λέξη $w \in W(\Sigma, v)$ λέγεται αποσπόμενη λέξη (extracted word) της $\vec{s}$ αν είναι μειωμένη λέξη κάποιας υπακολουθίας της. Πιο συγκεκριμμένα μία αποσπόμενη λέξη της $\vec{s}$ έχει τη μορφή $w = s_{i_0}(a_0)^\frown s_{i_1}(a_1)^\frown \dots ^\frown s_{i_n}(a_n)$ για γράμματα $a_0, a_1, a_2, \dots a_n \in \Sigma \cup \{v\}$ και ακέραιους $0 < i_0 < i_1 < \dots < i_n$. Θα συμβολίζουμε με $E[\vec{s}]$ το σύνολο όλων των αποσπόμενων λέξεων της $\vec{s}$ και με $CE[\vec{s}]$ $VE[\vec{s}]$ τα σύνολα των σταθερών και μεταβλητών αποσπόμενων λέξεων της $\vec{s}$.

Μια ακολουθία $(t_i)_{i=0}^{k-1} \in [W(\Sigma, v)]^k$ λέγεται απόσπαση (extraction) μήκους k της $\vec{s}$ αν είναι μείωση μήκους k κάποιας υπακολουθίας της $\vec{s}$. Με E_k θα συμβολίζουμε το σύνολο των αποσπάσεων μήκους k της $\vec{s}$ και με $VE_k[\vec{s}]$ θα συμβολίζουμε το υποσύνολο με τις μεταβλητές αποσπάσεις μήκους k της $\vec{s}$.

Μία άπειρη ακολουθία $\vec{t} \in [W(\Sigma, v)]^k$ λέγεται άπειρη απόσπαση της $\vec{s}$ αν κάθε αρχικό τμήμα της είναι μια πεπερασμένη απόσπαση της $\vec{s}$.
Συμβολίζουμε το σύνολο με τις άπειρες αποσπάσεις της $\vec{s}$ με

$$E_\omega[\vec{s}] = \{\vec{w} \in [W(\Sigma; v)]^\omega : \forall k \in \mathbb{N}^* \quad \vec{w}\restriction[k] \in E_k[\vec{s}]\}$$

και το σύνολο με τις άπειρες μεταβλητές αποσπάσεις της $\vec{s}$ με

$$VE_\omega[\vec{s}] = \{\vec{w} \in [W(\Sigma; v)]^\omega : \forall k \in \mathbb{N}^* \quad \vec{w}\restriction[k] \in VE_k[\vec{s}]\}$$

Για παράδειγμα αν $\vec{s} = (avv, bvav, v, bbv, avb, \dots)$ μια υπακολουθία είναι $\vec{s'} = (bvav, v, avb, \dots)$ και μια άπειρη απόσπαση είναι $\vec{t} = (baaa, baab, \dots)$.

Θεώρημα 7.3 *Για κάθε πεπερασμένο χρωματισμό των $W(\Sigma; v)$ και $W(\Sigma)$ και άπειρη ακολουθία μεταβλητών λέξεων $\vec{s} \in [W(\Sigma; v)]^\omega$. Υπάρχει άπειρη μεταβλητή απόσπαση $\vec{t} \in VE_\omega[\vec{s}]$ τέτοια ώστε τα σύνολα από τις σταθερές και μεταβλητές αποσπόμενες λέξεις της $CE[\vec{t}]$ και $VE[\vec{t}]$ να είναι μονοχρωματικά.*

2.3 Γενικευμένες λέξεις

Γενικευμένη λέξη w του αλφαβήτου Σ είναι μια συνάρτηση $w : J \to \Sigma \cup \{v\}$ όπου J είναι ένα πεπερασμένο μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{N}^*$.

Ομοίως θα ονομάζουμε σταθερές τις γενικευμένες λέξεις του Σ και μεταβλητές τις γενικευμένες λέξεις του $\Sigma \cup \{v\}$ με τουλάχιστον μια εμφάνιση του v.

Θα συμβολίζουμε με το σύνολο των σταθερών γενικευμένων λέξεων

$$L(\Sigma) = \{(w : J \to \Sigma) : J \subseteq \mathbb{N}^*\}$$

το σύνολο όλων των γενικευμένων λέξεων με

$$L(\Sigma, v) = \{(w : J \to \Sigma \cup \{v\}) : J \subseteq \mathbb{N}^*\}$$

και των γενικευμένων μεταβλητών λέξεων με

$$L(\Sigma; v) = L(\Sigma, v) \setminus L(\Sigma)$$

Σχεδόν πάντα θα εννοείται ότι το αλφάβητο είναι Σ και η μεταβλητή v, για απλοποίηση του συμβολισμού θα γράφουμε

$$L(\Sigma, v) = G$$

$$L(\Sigma; v) = V$$

$$L(\Sigma) = C$$

Αντίστοιχα για $w \in V$ ορίζονται τα στιγμιότυπα των μεταβλητών γενικευμένων λέξεων $w(a)$ και οι συναρτήσεις αντικατάστασης $\widehat{a}$.

Αντί για την πράξη της παράθεσης οι γενικευμένες λέξεις εφοδιάζονται με την πράξη της ένωσης. Αν $w, v \in G$ η ένωση τους $w * u := w \cup u$ θα ορίζεται μόνο όταν $\text{maxDomain}(w) <\text{minDomain}(u)$. Δηλαδή αν ισχύει η ανίσωση για τα w, u έχουμε

$$w * u : \text{Domain}(w) \cup \text{Domain}(u) \to \Sigma \cup \{v\}$$

$$(w * u)(n) = \begin{cases} w(n) & \text{αν } n \in \text{Domain}(w) \\ u(n) & \text{αν } n \in \text{Domain}(u) \end{cases}$$

Η πράξη $*$ δεν ορίζεται για κάθε ζεύγος γενικευμένων λέξεων, αλλά όταν είναι καλώς ορισμένη ισχύει η προσεταιριστικότητα. Έτσι $(G, *)$ είναι μια μερική ημιομάδα και $(C, *), (V, *)$ είναι είναι μερικές υποημιομάδες της $(G, *)$.

Μια πεπερασμένη ή άπειρη ακολουθία γενικευμένων λέξεων w_i λέγεται τμηματική αν για κάθε $i \in \mathbb{N}$ $\text{maxDomain}(w_i) < \text{minDomain}(w_{i+1})$.

Έτσι για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$ ορίζουμε το σύνολο από τις τμηματικές ακολουθίες γενικευμένων λέξεων μήκους k

$$[G]^k = \{(w_0, w_1, \dots, w_{k-1}) : \forall i \in [k] \quad w_i \in G \text{ και } (w_i)_{i=0}^{k-1} \text{ τμηματική}\}$$

και ομοίως τα σύνολα από τις τμηματικές ακολουθίες σταθερών και μεταβλητών γενικευμένων λέξεων μήκους k ορίζονται

$$[C]^k = \{(w_0, w_1, \dots, w_{k-1}) : \forall i \in [k] \quad w_i \in C \text{ και } (w_i)_{i=0}^{k-1} \text{ τμηματική}\}$$

και

$$[V]^k = \{(w_0, w_1, \dots, w_{k-1}) : \forall i \in [k] \quad w_i \in V \text{ και } (w_i)_{i=0}^{k-1} \text{ τμηματική}\}$$

Αντίστοιχα ορίζουμε το σύνολο από τις άπειρες τμηματικές ακολουθίες γενικευμένων λέξεων

$$[G]^\omega = \{(w_0, w_1, w_2, \dots) : \forall i \in \mathbb{N} \quad w_i \in G \text{ και } \vec{w} \text{ τμηματική}\}$$

και τα σύνολα από τις άπειρες τμηματικές ακολουθίες σταθερών και μεταβλητών γενικευμένων λέξεων $[C]^\omega, [V]^\omega$.

Αν έχουμε μία ακολουθία μεταβλητών λέξεων $\vec{s} \in [W(\Sigma, v)]^\omega$ και μία γενικευμένη λέξη $w \in G$ με $\text{Domain}(w) = \{i_0, i_1, \dots, i_n\}, i_0 < i_1 < \dots < i_n$ τότε η αποσπόμενη λέξη της $\vec{s}$ που προκύπτει από την w είναι

$$\vec{s}[w] = s_{i_0}(w_{i_0})^\frown s_{i_1}(w_{i_1})^\frown \dots ^\frown s_{i_n}(w_{i_n})$$

.

Για $k \in \mathbb{N}^*$ και $(w_i)_{i=0}^{k-1} \in [G]^k$ η απόσπαση μήκους k της $\vec{s}$ που προκύπτει από την $(w_i)_{i=0}^{k-1}$ είναι $\vec{s}[(w_i)_{i=0}^{k-1}] = (\vec{s}[w_0], \vec{s}[w_1], \ldots, \vec{s}[w_n])$

Για $\vec{w} \in [G]^\omega$ η άπειρη απόσπαση της $\vec{s}$ που προκύπτει από την $\vec{w}$ είναι $\vec{s}[\vec{w}] = (\vec{s}[w_0], \vec{s}[w_1], \vec{s}[w_2], \ldots)$

Παρατηρούμε ότι όλες οι αποσπόμενες λέξεις, οι πεπερασμένες αποσπάσεις και οι άπειρες αποσπάσεις της $\vec{s}$ προκύπτουν με αυτό τον τρόπο και μπορούμε να γράψουμε

$$E[\vec{s}] = \{\vec{s}[w] : w \in G\}$$
$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad E_k[\vec{s}] = \{\vec{s}[(w_i)_{i=0}^{k-1}] : (w_i)_{i=0}^{k-1} \in [G]^k\}$$
$$E_\omega[\vec{s}] = \{\vec{s}[\vec{w}] : \vec{w} \in [G]^\omega\}$$

Επίσης παρατηρούμε ότι αν $w \in V$ έχουμε $\vec{s}[w] \in W(\Sigma; v)$ και αν $w \in C$ έχουμε $\vec{s}[w] \in W(\Sigma)$ άρα

$$VE[\vec{s}] = \{\vec{s}[w] : w \in V\}$$

$$CE[\vec{s}] = \{\vec{s}[w] : w \in C\}$$

αντίστοιχα μπορούμε να περιγράψουμε και τα $VE_k[\vec{s}], VE_\omega[\vec{s}]$

Οι μειώσεις είναι υποπερίπτωση των αποσπάσεων. Η τυχαία μειωμένη λέξη της $\vec{s}$ είναι $\vec{s}[w]$ για κάποια γενικευμένη λέξη $w \in G$ η οποία έχει πεδίο ορισμού ένα αρχικό τμήμα του $\mathbb{N}$ δηλαδή w είναι μια απλή λέξη. Έτσι έχουμε

$$R[\vec{s}] = \{\vec{s}[w] : w \in W(\Sigma, v)\}$$

Η τυχαία πεπερασμένη μείωση της $\vec{s}$ είναι $\vec{s}[(w_i)_{i=0}^{k-1}]$ για κάποια πεπερασμένη τμηματική ακολουθία $(w_i)_{i=0}^{k-1} \in [G]^k$ της οποίας οι όροι έχουν την μορφή $w_i = \{j_i, j_i + 1, \ldots, j_{i+1} - 1\}$ για ακέραιους $0 = j_0 < j_1 < \cdots < j_{k-1}$. Αφού η $(w_i)_{i=0}^{k-1} \in [G]^k$ είναι τμηματική ισοδύναμα ισχύει ότι $\bigcup\limits_{i \in [k]} w_i \in W(\Sigma, v)$.

$$R_k[\vec{s}] = \{\vec{s}[\vec{w}] : \vec{w} \in [G]^k, \bigcup_{i \in [k]} w_i \in W(\Sigma, v)\}$$

Ομοίως η τυχαία άπειρη μείωση της $\vec{s}$ είναι $\vec{s}[\vec{w}]$ για κάποια άπειρη τμηματική ακολουθία $\vec{w} \in [G]^\omega$ για την οποία ισχύει $\bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{Domain}(w_i) = \mathbb{N}$

$$R_\omega[\vec{s}] = \{\vec{s}[\vec{w}] : \vec{w} \in [G]^\omega, \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{Domain}(w_i) = \mathbb{N}\}$$

Επεκτείνουμε τις αποσπάσεις στις τμηματικές ακολουθίες μεταβλητών γενικευμένων λέξεων , με την μόνη διαφορά ότι αντί για την πράξη της παράθεσης έχουμε την ένωση. Δηλαδή για $\vec{s} \in [V]^\omega$ και $w \in G$ με $\mathrm{Domain}(w) = \{i_0, i_1, \ldots, i_n\}, i_0 < i_1 < \cdots < i_n$ ορίζουμε την αποσπόμενη λέξη

$$\vec{s}[w] = s_{i_0}(w_{i_0}) * s_{i_1}(w_{i_1}) * \cdots * s_{i_n}(w_{i_n})$$

Αντίστοιχα ορίζονται οι αποσπόμενες ακολουθίες της $\vec{s}$

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad E_k[\vec{s}] = \{\vec{s}[(w_i)_{i=0}^{k-1}] : (w_i)_{i=0}^{k-1} \in [G]^k\}$$

$$E_\omega[\vec{s}] = \{\vec{s}[\vec{w}] : \vec{w} \in [G]^\omega\}$$

οι μειωμένες λέξεις της $\vec{s}$

$$R[\vec{s}] = \{\vec{s}[w] : w \in W(\Sigma, v)\}$$

και οι μειωμένες ακολουθίες της $\vec{s}$

$$R_k[\vec{s}] = \{\vec{s}[\vec{w}] : \vec{w} \in [G]^k, \bigcup_{i \in [k]} \text{Domain}(w_i) = [n] \text{ για κάποιο } n \in \mathbb{N}\}$$

$$R_\omega[\vec{s}] = \{\vec{s}[\vec{w}] : \vec{w} \in [G]^\omega, \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \text{Domain}(w_i) = \mathbb{N}\}$$

Στους τελευταίους ορισμούς εύκολα βλέπουμε ότι η ένωση όπου χρησιμοποιείται είναι καλώς ορισμένη, γιατί οι ακολουθίες που χρησιμοποιούμε είναι τμηματικές και τα στιγμιότυπα των μεταβλητών γενικευμένων λέξεων διατηρούν το πεδίο ορισμού. Για τον ίδιο λόγο τα σύνολα $E_k[\vec{s}], R_k[\vec{s}], E_\omega[\vec{s}], R_\omega[\vec{s}]$ αποτελούνται από τμηματικές ακολουθίες.
Θεώρημα 4.3 *Για κάθε πεπερασμένο χρωματισμό των V και C και άπειρη τμηματική ακολουθία $\vec{s} \in [G]^\omega$, υπάρχει μεταβλητή απόσπαση $\vec{t} \in VE_\omega[\vec{s}]$ τέτοια ώστε τα σύνολα των μεταβλητών και σταθερών αποσπόμενων λέξεων $VE[\vec{t}]$ και $CE[\vec{t}]$ να είναι μονοχρωματικά.*

Θεώρημα 7.1 *Για κάθε πεπερασμένο χρωματισμό των V και C και άπειρη τμηματική ακολουθία $\vec{s} \in [G]^\omega$, υπάρχει άπειρη μεταβλητή μείωση $\vec{t}$ της $\vec{s}$ τέτοια ώστε τα σύνολα των μεταβλητών και σταθερών μειωμένων λέξεων $VR[\vec{t}]$ και $CR[\vec{t}]$ να είναι μονοχρωματικά.*

Τα κύρια θεωρήματα που θα μας απασχολήσουν θα αφορούν γενικευμένες λέξεις. Από τη μία θα μπορέσουμε μέσω αυτών να δείξουμε αντίστοιχα θεωρήματα απλές λέξεις. Από την άλλη οι γενικευμένες λέξεις συσχετίζονται με τους θετικούς ακέραιους γιατί μπορούμε να δούμε ένα αλφάβητο Σ ως ψηφία $\{1, 2, 3, \ldots, \sigma\}$, με αυτή την οπτική βλέπουμε μια γενικευμένη λέξη ως την αναπαράσταση ενός θετικού ακέραιου σε βάση $\sigma + 1$, όπου τα κενά στο πεδίο ορισμού αντιστοιχούν σε μηδενικά.

3 Η συμπαγής δεξιά-τοπολογική ημιομάδα δG

3.1 Κατασκευή

Αν έχουμε μια ημιομάδα $(X, *)$ και εφοδιάσουμε τα υπερφίλτρα του με την συνήθη τοπολογία, μπορούμε να επεκτείνουμε την πράξη στον βX ώστε να γίνει συμπαγής δεξιά-τοπολογική ημιομάδα. Στην περίπτωση που μελετάμε έχουμε χώρους λέξεων S (S μπορεί να είναι G, V, C) στους οποίους η πράξη ορίζεται μόνο όταν $\max\text{Domain}(w) < \min\text{Domain}(v)$. Θα θέλαμε ομοίως να επεκτείνουμε την μερική πράξη " $*$ " σε πλήρη πράξη υπερφίλτρων. Για να το κάνουμε αυτό χρειάζεται να περιοριστούμε σε ένα υποσύνολο του βS το δS.
Για $(S, *) = (G, *), (V, *)$ ή $(C, *)$ ορίζουμε

$$S^n = \{w \in S : \min\text{Domain}(w) > n\} \text{ για } n \in \mathbb{N}$$

Αν ένα υπερφίλτρο $\alpha \in \beta S$ περιέχει όλα τα S^n ονομάζεται συμπεπερασμένο. Το σύνολο με τα συμπεπερασμένα υπερφίλτρα του S είναι

$$\delta S = \{\alpha \in \beta S : \forall n \in \mathbb{N} \ \ S^n \in \alpha\}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι $\delta S = \bigcap_n \overline{S^n}$. Ακόμα τα σύνολα $\overline{S^n}$ είναι κλειστά υποσύνολα του συμπαγούς χώρου βS και η οικογένεια $\{\overline{S^n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής. Έτσι συμπεραίνουμε ότι ο δS είναι ένας μη κενός συμπαγής υπόχωρος του βS.

Παρατηρούμε ότι για $w \in S$ και $\alpha \in \delta S \quad (au)(w * u$ ορίζεται) γιατί αν $m = \max\text{Domain(w)}$ έχουμε

$$S^m \in \alpha \Rightarrow (\alpha u)(\min\text{Domain}(u) > m) \Rightarrow (\alpha u)(w * u \text{ ορίζεται})$$

Ως συνέπεια έχουμε επίσης ότι για $\alpha, \beta \in \delta S \ (\alpha w)(\beta u)(w * u$ ορίζεται)

Τώρα μπορούμε για $\alpha, \beta \in \delta S$ να ορίσουμε την πράξη $\alpha * \beta$:

$$\alpha * \beta = \{A \subseteq S : (\alpha w)(\beta v)(w * u \text{ ορίζεται και } w * u \in A\}$$

και αν αντικαταστήσουμε τον ποσοδείκτη παίρνει την μορφή

$$\alpha * \beta = \{A \subseteq S : \{w \in S : A_w \in \beta\} \in \alpha$$

$$A_w = \{v \in S : w * u \text{ ορίζεται και } w * u \in A\}$$

Ισοδύναμα μπορούμε την ορίσουμε

$$((\alpha * \beta)w)P(w) \Leftrightarrow (\alpha w)(\beta u)(w * u \text{ ορίζεται και } P(w * v))$$

Πρόταση 3.1 $(\delta S, *)$ *είναι μια συμπαγής δεξιά-τοπολογική ημιομάδα.*

Απόδειξη. Η πράξη πράγματι είναι προσεταιριστική και αν $\alpha, \beta \in \delta S$ τότε $a * b$ είναι υπερφίλτρο.

Θα δείξουμε ότι για $\alpha, \beta \in \delta S$, $\alpha * \beta \in \delta S$. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N} \quad S^n \in \alpha * \beta$. Για τυχαίο $n \in \mathbb{N}$ έστω $A = S^n$ και $w \in A$ ισχύει ότι $A_w \in \beta$. Πράγματι $A_w = \{u \in S : w * u$ ορίζεται και $w * u \in S^n\} = S^{n_0}$ όπου $n_0 = \max\text{Domain}(f)$. Επειδή β συμπεπερασμένο $A_w = S^{n_0} \in \beta$.

Έτσι δείξαμε ότι $A \subseteq \{w \in S : A_w \in \beta\}$, όμως αφού α συμπεπερασμένο έχουμε $A = S^n \in \alpha$, άρα $\{w \in S : A_w \in \beta\} \in \alpha$. Εξ'ορισμού της πρόσθεσης αυτό σημαίνει ότι $A = S^n \in \alpha * \beta$.

Θα δείξουμε ότι για σταθερά $\beta \in \delta S$ και μεταβλητή $\alpha \in \delta S$ η συνάρτηση $\alpha \mapsto \alpha * \beta$ είναι συνεχής. Μια τυχαία βασική περιοχή του $\alpha * \beta$ είναι $M = \overline{A} \cap \delta S$

για $A \in \alpha * \beta$, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει ανοχτή περιοχή N του α τ.ω. $N * \beta \subseteq M$. Έστω $K = \{w \in S : A_w \in \beta\}$, $N = \overline{K} \cap \delta S$. Εξ'ορισμού της πράξης, $A \in \alpha * \beta \Rightarrow K \in \alpha$ και επίσης $\alpha \in \delta S$ άρα N ανοιχτή περιοχή του α. Από τον ορισμό της N, για τυχαίο $\gamma \in N$ έχουμε $\gamma \in \overline{K}$ δηλαδή $K \in \gamma$ και $\gamma \in \delta S$. Από τον ορισμό της πρόσθεσης παίρνουμε ότι $A \in \gamma * \beta$, άρα $\gamma \in M$. Αυτό σημαίνει ότι $N * \beta \subseteq M$ άρα η συνάρτηση είναι συνεχής.

Παρατηρούμε ότι αν $w, u \in G$ όπου $w * u$ ορίζεται και $a \in \Sigma \cup \{v\}$ τότε $w(a) * u(a)$ ορίζεται και $w(a) * u(a) = (w * u)(a)$. Αυτή η ιδιότητα μεταφέρεται στα υπερφίλτρα με την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 3.2 *Αν S, S' είναι χώροι λέξεων (G, V, C) και $a \in \Sigma \cup \{v\}$, η επέκταση της συνάρτησης αντικατάστασης $\widehat{a} : S \to S'$ σε $\widehat{a} : \beta S \to \beta S'$ αντιστοιχίζει τον δS στον $\delta S'$ και ο περιορισμός της $\widehat{a} : \delta S \to \delta S'$, είναι ομομορφισμός ημιομάδων.*

Απόδειξη. Κατ'αρχάς δείχνουμε ότι $\widehat{a}$ αντιστοιχίζει το δS στο $\delta S'$. Έστω $\alpha \in \delta S$, για να δείξουμε ότι $\widehat{a}(\alpha) \in \delta S'$ αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N} \quad S'^n \in \widehat{a}(\alpha)$ ή ισοδύναμα ότι $(\widehat{a}(\alpha)w)(\mathrm{maxDomain}(w) > n)$. Επειδή $\alpha \in \delta S$ έχουμε

$$(\alpha v)(\mathrm{maxDomain}(v) > n) \Rightarrow (\alpha v)(\mathrm{maxDomain}(v(a)) > n) \Rightarrow (\widehat{a}(\alpha)w)(\mathrm{maxDomain}(w) > n)$$

Μένει να δείξουμε ότι $\widehat{a}(\alpha * \beta) = \widehat{a}(\alpha) * \widehat{a}(\beta)$, για $\alpha, \beta \in \delta S$.

$$\begin{aligned}
(\widehat{a}(\alpha * \beta)w')P(w') &\Leftrightarrow ((\alpha * \beta)w)P(w(a)) \\
&\Leftrightarrow (\alpha w)(\beta v)(w * v \text{ ορίζεται και } P((w * v)(a)) \\
&\Leftrightarrow (\alpha w)(\beta v)(w(a) * v(a) \text{ ορίζεται και } P((w * v)(a))) \\
&\Leftrightarrow (\widehat{a}(\alpha)w')(\widehat{a}(\beta)v')(w' * v' \text{ ορίζεται και } P(w' * v') \\
&\Leftrightarrow ((\widehat{a}(\alpha) * \widehat{a}(\beta))w')P(w')
\end{aligned}$$

3.2 Ελάχιστικά ταυτοδύναμα υπερφίλτρα των $\delta C, \delta V$

Σε αυτή την υποενότητα θα δούμε δύο υπέρφίλτρα πολύ βασικά για την απόδειξη και με τα λήμματα του Κεφαλαίου 9 θα αναλύσουμε την μεταξύ τους σχέση.

Μέχρι τώρα έχουμε δείξει ότι οι χώροι $\delta C, \delta V, \delta G$ είναι δεξιά-τοπολογικές συμπαγείς ημιομάδες. Θα αντιμετωπίζουμε τα $\beta C, \beta V$ ως υπόχωρους του βG μέσω των επεκτάσεων των εμφυτεύσεων $id : C \to G$ και $id : V \to G$. Παρατηρούμε ότι $\delta C = \beta C \cap \delta G$ και ότι $\delta V = \beta V \cap \delta G$, έτσι οι $\delta C, \delta V$ είναι υποημιομάδες του δG.

Λήμμα 3.3 *Ένα υπερφίλτρο $\alpha \in \delta G$ είναι η εμφύτευση κάποιου υπερφίλτρου του C ή V ανν $(\alpha w)(w \in C)$ ή $(\alpha w)(w \in V)$ αντίστοιχα.*

Κάνουμε την απόδειξη για το C: " $\Rightarrow$ "

$$\alpha \in id(C) \Rightarrow \exists \alpha' \in \delta C \text{ τ.ω. } id(\alpha') = \alpha \Rightarrow$$

$$\alpha = id(\alpha') = \{A \subseteq G : id^{-1}(A) \in \alpha'\}$$

Έχουμε $id^{-1}(C) = C$ και $C \in \alpha'$ άρα $C \in \alpha$.
" $\Leftarrow$ "
Ορίζουμε $\alpha' = \{A \cap C : A \in \alpha\}$ εύκολα παρατηρούμε ότι $\alpha' \in \delta C$ και $id(\alpha') = \alpha$

Ακόμα, αν $\alpha \in \delta C$ ή δV που εμφυτεύεται ως $\alpha' \in \delta G$ και P μια πρόταση που αφορά γενικευμένες λέξεις, ισχύει ότι

$$(\alpha w)P(w) \Leftrightarrow (\alpha' w')P(w)$$

Άρα μπορούμε να συμβολίζουμε και τα δύο "α" χωρίς σύγχυση.

Προφανώς V είναι ιδεώδες του G, αυτό επεκτείνεται στα υπερφίλτρα με το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 3.4 *δV είναι ιδεώδες του δG.*

Απόδειξη: Έστω $\alpha \in \delta G, \beta \in \delta V$, αρκεί να δείξουμε ότι $\alpha * \beta \in \delta V$ και $\beta * \alpha \in \delta V$. Επειδή $V \in \beta$ έχουμε:
$(\alpha w)(\beta v)(w * v \in V) \Rightarrow ((\alpha * \beta)w)(w \in V) \Rightarrow \alpha * \beta \in V$
$(\beta w)(\alpha v)(w * v \in V) \Rightarrow ((\beta * \alpha)w)(w \in V) \Rightarrow \beta * \alpha \in V$

Χρησιμοποιόντας το Λήμμα 9.10 επιλέγουμε ένα ελάχιστικό ταυτοδύναμο υπερφίλτρο $\kappa \in \delta C$ το οποίο είναι και ταυτοδύναμο στο δG αλλά θα δείξουμε ότι εκεί δεν είναι ελαχιστικό. Επίσης επιλέγουμε ελαχιστικό ταυτοδύναμο $\lambda \in \delta G$ ώστε $\lambda \leq \kappa$.

Λήμμα 3.5 *Το λ είναι ελαχιστικό ταυτοδύναμο στο δV.*

Απόδειξη: Αφού δV είναι ιδεώδες έχουμε από το Λήμμα 9.4 ότι $\lambda \in \delta V$. Το λ είναι ελαχιστικό στο δV γιατί δεν υπάρχει $\lambda' \in \delta G$ ώστε $\lambda' \leq \lambda$ άρα ούτε υπάρχει και $\lambda' \in \delta V$ ώστε $\lambda' \leq \lambda$.

Τώρα για $a \in \Sigma$ θα θεωρήσουμε τις συναρτήσεις αντικατάστασης $\widehat{a} : V \to C$. Όπως δείξαμε στην Πρόταση 3.2 αυτές επεκτείνονται σε ομομορφισμούς $\widehat{a} : \delta V \to \delta C$.

Λήμμα 3.6 *Για κάθε $a \in \Sigma$, $\widehat{a}(\lambda) = \kappa$.*

Απόδειξη: Αφού η συνάρτηση $\widehat{a} : \delta G \to \delta C$ είναι ενδομορφισμός $\widehat{a}(\lambda)$ είναι ταυτοδύναμο. Ακόμα για τον ίδιο λόγο $\lambda \leq \kappa \Rightarrow \widehat{a}(\lambda) \leq \widehat{a}(\kappa)$. Όμως η συνάρτηση $\widehat{a}$ είναι η ταυτοτική στον C άρα και στον δC, δηλαδή $\widehat{a}(\kappa) = \kappa$. Έτσι στο χώρο δC έχουμε ότι κ είναι ελαχιστικό ταυτοδύναμο και $\widehat{a}(\lambda) \leq \kappa$ άρα $\widehat{a}(\lambda) = \kappa$.

4 Θεωρήματα για γενικευμένες λέξεις

Θεώρημα 4.1 *Για κάθε πεπερασμένο χρωματισμό των V και C, υπάρχει άπειρη τμηματική ακολουθία $\vec{s} \in [V]^\omega$ τέτοια ώστε τα σύνολα των μεταβλητών και σταθερών αποσπόμενων λέξεων $VE[\vec{s}]$ και $CE[\vec{s}]$ να είναι μονοχρωματικά.*

Απόδειξη: Θα χρησιμοποιήσουμε τα υπερφίλτρα του προηγούμενου κεφαλαίου $\kappa \in \delta C$ και $\lambda \in \delta V$. Συνοψίζοντας, ισχύουν τα παρακάτω:
(i) κ, λ είναι ταυτοδύναμα ($\kappa * \kappa = \kappa$ και $\lambda * \lambda = \lambda$)
(ii) $\lambda \leq \kappa$ ($\kappa * \lambda = \lambda * \kappa = \lambda$)
(iii) $\widehat{a}(\lambda) = \kappa$

Θέλουμε να κατασκευάσουμε ακολουθίες $V_n \in \lambda$, $C_n \in \kappa$ και την μεταβλητή τμηματική ακολουθία $\vec{s}$ επαγωγικά. Μία χρωματική κλάση του V θα ανήκει στο λ, και μία χρωματική κλάση του C θα ανήκει στο κ, αυτά τα σύνολα θα είναι τα V_0, C_0. Ο στόχος είναι να κατασκευάσουμε την $\vec{s}$ έτσι ώστε οι μεταβλητές αποσπόμενες λέξεις της να ανήκουν στο V_0 και οι σταθερές στο C_0.
Έτσι θα χρειαστούμε τα V_n, C_n και s_n να έχουν τις παρακάτω ιδιότητες. Σε αυτές για απλοποίηση του συμβολισμού, γράφουμε "$w * u \in \ldots$" αλλά εννοούμε "$w * u$ ορίζεται και $w * u \in \ldots$".
(1) $V_n \in \lambda$
(2) $C_n \in \kappa$
(3) $s_n \in V_n$
(4) Για κάθε $a \in \Sigma \quad s_n(a) \in C_n$
(5) $(\lambda w)(s_n * w \in V_n)$
(6) Για κάθε $a \in \Sigma \quad (\lambda w)(s_n(a) * w \in V_n)$
(7) $(\kappa u)(s_n * u \in V_n)$
(8) Για κάθε $a \in \Sigma \quad (\kappa u)(s_n(a) * u \in C_n)$
(9) Για $n > 0 \quad \mathrm{maxDomain}(s_{n-1}) < \mathrm{minDomain}(s_n)$

Επαγωγική βάση: Έχοντας τα V_0 και C_0 αρκεί να επιλέξουμε s_0 που να ικανοποιεί τα (3)-(8), το (9) δεν αφορά την περίπτωση $n = 0$. Από τις ιδιότητες (i),(ii),(iii) των κ, λ προκύπτει ότι κάθε μία από αυτές τις ιδιότητες ισχύει για λ-σχεδόν όλα τα s.
Ιδιότητα (3): $(\lambda s)(s \in V_n)$ γιατί $V_n \in \lambda$
Ιδιότητα (4): Για κάθε $a \in \Sigma \quad (\lambda s)(s(a) \in C_n)$ γιατί $C_n \in \kappa = \widehat{a}(\lambda) \Rightarrow (\kappa u)(u \in C_n) \Rightarrow (\widehat{a}(\lambda) u)(u \in C_n) \Rightarrow (\lambda s)(\widehat{a}(s) \in C_n) \Rightarrow (\lambda s)(s(a) \in C_n)$
Ιδιότητα (5): $(\lambda s)(\lambda w)(s * w \in V_n)$ γιατί $V_0 \in \lambda = \lambda * \lambda \Rightarrow (\lambda w)(w \in V_n) \Rightarrow ((\lambda * \lambda) w)(w \in V_n) \Rightarrow (\lambda s)(\lambda w)(s * w \in V_n)$
Ιδιότητα (6): Για κάθε $a \in \Sigma \quad (\lambda s)(\lambda w)(s(a) * w \in V_n)$ γιατί $V_0 \in \lambda = \lambda * \widehat{a}(\lambda) \Rightarrow (\lambda w)(w \in V_n) \Rightarrow ((\lambda * \widehat{a}(\lambda)) w)(w \in V_n) \Rightarrow (\lambda s)(\lambda w)(\widehat{a}(s) * w \in V_n) \Rightarrow (\lambda s)(\lambda w)(s(a) * w \in V_n)$
Ιδιότητα (7): $(\lambda s)(\kappa u)(s * u \in V_n)$ γιατί $V_0 \in \lambda = \lambda * \kappa \Rightarrow (\lambda w)(w \in V_n) \Rightarrow ((\lambda * \kappa) w)(w \in V_n) \Rightarrow (\lambda s)(\kappa u)(s * u \in V_n)$
Ιδιότητα (8): Για κάθε $a \in \Sigma \quad (\lambda s)(\kappa u)(s(a) * u \in C_0)$ γιατί $C_0 \in \kappa = \widehat{a}(\lambda) * \kappa \Rightarrow (\lambda w)(w \in V_n) \Rightarrow ((\widehat{a}(\lambda) * \kappa) w)(w \in V_n) \Rightarrow (\lambda s)(\kappa u)(\widehat{a}(s) * u \in C_0) \Rightarrow (\lambda s)(\kappa u)(s(a) * u \in C_0)$

Αφού το αλφάβητο είναι πεπερασμένο, οι παραπάνω προτάσεις είναι πεπερασμένες οπότε ισχύει και η σύζευξή τους. Δηλαδή για λ-σχεδόν όλα τα s ισχύουν τα (3)-(8). Επιλέγουμε ένα απ'όλα για s_0.

Επαγωγικό βήμα: Έστω ότι έχουμε V_{n-1}, C_{n-1} και s_{n-1} που ικανοποιούν (1)-(9). Από (1) έχουμε $V_{n-1} \in \lambda$, (5)$\Rightarrow \{w \in V : s_{n-1} * w \in V_{n-1}\} \in \lambda$ και (6)$\Rightarrow \forall a \in \Sigma \quad \{w \in V : s_{n-1}(a) * w \in V_{n-1}\} \in \lambda$. Αυτά τα σύνολα είναι πεπερασμένα σε πλήθος και ανήκουν στο λ, άρα και η τομή τους θα ανήκει στο λ. Έτσι ορίζουμε

$$V_n = V_{n-1} \cap \{w \in V : s_{n-1} * w \in V_{n-1}\} \cap \bigcap_{a \in \Sigma} \{w \in V : s_{n-1}(a) * w \in V_{n-1}\}$$

Ακόμα από (2) έχουμε $C_{n-1} \in \lambda$, (7)$\Rightarrow$ $\{u \in C : s_{n-1} * u \in V_{n-1}\} \in \kappa$ και (8)$\Rightarrow$ $\{u \in C : s_{n-1}(a) * u \in C_{n-1}\} \in \kappa$. Ομοίως η τομή τους θα ανήκει στο κ και ορίζουμε

$$C_n = C_{n-1} \cap \{u \in C : s_{n-1} * u \in V_{n-1}\} \cap \bigcap_{a \in \Sigma} \{u \in C : s_{n-1}(a) * u \in C_{n-1}\}$$

Τώρα μένει να δείξουμε ότι υπάρχει s_n που ικανοποιεί τις ιδιότητες (1)-(9). Παρατηρούμε ότι όπως στην επαγωγική βάση, οι ιδιότητες (1)-(8) ισχύουν για λ-σχεδόν όλα τα s αφού το μόνο που χρειαστήκαμε είναι ότι $V_0 \in \lambda$ και $C_0 \in \kappa$. Ομοίως τώρα έχουμε $V_n \in \lambda$ και $C_n \in \kappa$. Όσων αφορά την ιδιότητα (9), $\lambda \in \delta G$ οπότε λ-σχεδόν για όλα τα s $\mathrm{maxDomain}(s_{n-1}) < \mathrm{minDomain}(s)$. Με την σύζευξη αυτών των προτάσεων μπορούμε να επιλέξουμε s_n που να ικανοποιεί (1)-(9).

Τέλος θα δείξουμε ότι οι αποσπόμενες λέξεις της $\vec{s}$ ανήκουν στο V_0 αν είναι μεταβλητές και στο C_0 αν είναι σταθερές. Έστω τυχαία αποσπόμενη λέξη της $\vec{s}$

$$u_1 * u_2 * \cdots * u_k = s_{i_1}(w(i_1)) * s_{i_2}(w(i_2)) * \cdots * s_{i_k}(w(i_k))$$

όπου w γενικευμένη λέξη με $\mathrm{Domain}(w) = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$, $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$.

Ισχυρισμός. Για $0 \leq r \leq i_k$, έστω p ο μικρότερος ακέραιος ώστε $r \leq i_p$ τότε $u_p * \cdots * u_k$ ανήκει στο V_r αν είναι μεταβλητή και στο C_r αν είναι σταθερή.

Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο r από το i_k μέχρι το 0.
Επαγωγική βάση: Για $r = i_k$ έχουμε $p = k$

- αν $w_{i_k} = v$
  $u_k = s_{i_k}(w(i_k)) = s_{i_k}$ και $s_{i_k} \in V_{i_k} = V_r$ από (3)
- αν $w_{i_k} \in \Sigma$
  $u_k = s_{i_k}(w(i_k)) \in C_{i_k} = C_r$ από (4)

Επαγωγικό βήμα: Έστω ότι ισχύει για κάποιο r, θα το δείξουμε για $r-1$. Στην περίπτωση που $r-1$ δεν είναι κάποιο από τα i_j, αντιστοιχεί το ίδιο p στο r και στο $r-1$. Έστω $x = u_p * \cdots * u_k$, αν $x \in V$ από επαγωγική υπόθεση έχουμε $x \in V_r$ και εξ'ορισμού $V_r \subseteq V_{r-1}$ άρα $x \in V_{r-1}$, ομοίως αν $x \in C$ τότε $x \in C_{r-1}$. Μένει τώρα η περίπτωση $r-1 = i_j$. Το p που αντιστοιχεί στο $r-1$ είναι j και στο r αντιστοιχεί το $j+1$. Έστω $y = u_{j+1} * \cdots * u_k$, από επαγωγική υπόθεση έχουμε $y \in V_r$ ή $y \in C_r$ και θέλουμε να δείξουμε ότι $u_j * y \in V_{r-1}$ ή $u_j * y \in C_{r-1}$ αντίστοιχα. Έχουμε τις εξής περιπτώσεις, ανάλογα αν το y και u_j ανήκουν στο V ή στο C.

- αν $w(r-1) = v$ και $y \in V_r$
  $u_j = s_{r-1}(w(r-1)) = s_{r-1}$ και εξ'ορισμού $y \in V_r \subseteq \{w \in V : s_{r-1} * w \in V_{r-1}\}$ άρα $u_j * y = s_{r-1} * y \in V_{r-1}$
- αν $w(r-1) = v$ και $y \in C_r$
  $u_j = s_{r-1}(w(r-1)) = s_{r-1}$ και εξ'ορισμού $y \in C_r \subseteq \{u \in C : s_{r-1} * u \in C_{r-1}\}$ άρα $u_j * y = s_{r-1} * y \in C_{r-1}$
- αν $w(r-1) \in \Sigma$ και $y \in V_r$
  $u_j = s_{r-1}(w(r-1))$ και εξ'ορισμού $y \in V_r \subseteq \{w \in V : s_{r-1}(w(r-1)) * w \in V_{r-1}\}$ άρα $u_j * y = s_{r-1}(w(r-1)) * y \in V_{r-1}$

- αν $w(r-1) \in \Sigma$ και $y \in C_r$
  $u_j = s_{r-1}(w(r-1))$ και εξ'ορισμού $y \in C_r \subseteq \{u \in C : s_{r-1}(w(r-1)) * u \in C_{r-1}\}$ άρα $u_j * y = s_{r-1}(w(r-1)) * y \in C_{r-1}$

Έτσι έχουμε αποδείξει τον ισχυρισμό. Για $r = 0$ έχουμε $p = 1$ άρα $u_1 * \cdots * u_k$ ανήκει στο V_0 αν είναι μεταβλητή και στο C_0 αν είναι σταθερή.

Θεώρημα 4.2 *Αν κ ελάχιστο ταυτοδύναμο του C, λ ελάχιστο ταυτοδύναμο του V με $\lambda \leq \kappa$ και σύνολα $V'_n \in \lambda$, $C'_n \in \kappa$, υπάρχει $\vec{s} \in [V]^\omega$ τέτοια ώστε, για κάθε $x = u_1 * u_2 * \cdots * u_k$ όπου u_j στιγμιότυπο κάποιας λέξης s_{i_j} με $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$, τότε αν x μεταβλητή τότε $x \in V'_m$ και αν x σταθερή $x \in C'_m$, όπου $m = maxDomain(s_{i_1} - 1)$ αν $i_1 > 0$ και $m = 0$ αν $i_1 = 0$.*

Απόδειξη: Δουλεύουμε ακριβώς όπως στο Θεώρημα 4.1 με λίγες διαφορές. Στην επαγωγική βάση επιλέγουμε $V_0 = V'_0$ και $C_0 = C'_0$. Στο επαγωγικό βήμα επιλέγουμε τα V_n και C_n να είναι υποσύνολα των V'_k και C'_k όπου $m =$maxDomain(s_{n-1}) δηλαδή

$$V_n = V'_m \cap V_{n-1} \cap \{w \in V : s_{n-1} * w \in V_{n-1}\} \cap \bigcap_{a \in \Sigma} \{w \in V : s_{n-1}(a) * w \in V_{n-1}\}$$

$$C_n = C'_m \cap C_{n-1} \cap \{u \in C : s_{n-1} * u \in V_{n-1}\} \cap \bigcap_{a \in \Sigma} \{u \in C : s_{n-1}(a) * u \in C_{n-1}\}$$

Τέλος χρησιμοποιούμε τον ισχυρισμό. Αν $i_1 > 0$ $(p = 1)$ παίρνουμε $x \in V_{i_1} \subseteq V'_m$ ή $x \in C_{i_1} \subseteq C'_m$ και αν $i_1 = 0$ $x \in V_0 \subseteq V'_0$ ή $x \in C_0 \subseteq C'_0$.

Θεώρημα 4.3 *Για κάθε πεπερασμένο χρωματισμό των V και C και άπειρη τμηματική ακολουθία $\vec{s} \in [V]^\omega$, υπάρχει μεταβλητή απόσπαση $\vec{t} \in VE_\omega[\vec{s}]$ τέτοια ώστε τα σύνολα των μεταβλητών και σταθερών αποσπόμενων λέξεων $VE[\vec{t}]$ και $CE[\vec{t}]$ να είναι μονοχρωματικά.*

Αυτό το Θεώρημα επάγει το 4.1 στην περίπτωση που

$$\begin{aligned} \vec{s} = (&(v, 0, 0, 0 \dots), \\ &(0, v, 0, 0, \dots), \\ &(0, 0, v, 0, \dots), \dots) \end{aligned}$$

γιατί κάθε τμηματική ακολουθία μεταβλητών γενικευμένων λέξεων είναι απόσπαση αυτής της $\vec{s}$.

Από την άλλη μπορούμε να το αποδείξουμε μέσω του Θεωρήματος 4.1.

Απόδειξη: Έστω πεπερασμένοι χρωματισμοί f, g των V, C και μία τμηματική ακολουθία γενικευμένων μεταβλητών λέξεων $\vec{s}$. Θεωρούμε την συνάρτηση από την οποία προκύπτουν οι αποσπόμενες λέξεις της $\vec{s}$

$$h : G \to G : w \mapsto \vec{s}[w]$$

Παρατηρούμε ότι η h αντιστοιχίζει το V στο V και το C στο C. Με την h^{-1} μπορούμε να φτιάξουμε καινούριους χρωματισμούς f', g' των V, C. Εφαρμόζουμε το 4.1 στους f', g' και παίρνουμε ακολουθία $\vec{w}$ τέτοια ώστε $VE[\vec{w}]$ και $CE[\vec{w}]$ να είναι μονοχρωματικά κάτω από τους χρωματισμούς f', g'. Θέτουμε $\vec{t} = \vec{s}[\vec{w}]$. Τώρα παρατηρούμε ότι κάθε αποσπόμενη λέξη της $\vec{t}$ ανήκει στο $h(E[\vec{w}])$ γιατί έχει τη μορφή $\vec{t}[z] = \vec{s}[\vec{w}][z] = \vec{s}[\vec{w}[z]]$ για κάποιο $z \in G$, δηλαδή $E[\vec{t}] \subseteq h(E[\vec{w}])$. Πιο συγκεκριμένα αν $z \in V$ $\quad \vec{t}[z] \in V$ και αν $z \in C$ $\quad \vec{t}[z] \in C$ άρα $VE[\vec{t}] \subseteq h(VE[\vec{w}])$ και $CE[\vec{t}] \subseteq h(CE[\vec{w}])$. Εξ'ορισμού της $\vec{w}$ παίρνουμε το ζητούμενο.

5 Θεωρήματα για πεπερασμένες ακολουθίες γενικευμένων λέξεων

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με πεπερασμένους χρωματισμούς του χώρου των πεπερασμένων ακολουθιών γενικευμένων λέξεων $[G]^k$.

Παρατηρούμε ότι σε ένα χρωματισμό του $[G]^k$, το χρώμα μιας ακολουθίας μπορεί να εξαρτάται από το αν σε κάποια συνιστώσα έχει σταθερή ή μεταβλητή γενικευμένη λέξη. Για αυτό τον λόγο πρώτα θα δουλέψουμε στους παρακάτω υπόχωρους.

Αν $J \subseteq [k]$ ορίζουμε

$$[G]^k_J = \{(s_j)_{j=0}^{k-1} \in [G]^k : \forall j \in [k] \quad s_j \in V \Leftrightarrow j \in J\}$$

Παρατηρούμε ότι για $J = \varnothing \quad [G]^k_J = [C]^k$ και για $J = [n] \quad [G]^k_J = [V]^k$.

Θεώρημα 5.1 *Έστω πεπερασμένος χρωματισμός του $[G]^k$ και $J \subseteq [k]$. Υπάρχει $\vec{s} \in [V]^\omega$ τέτοια ώστε το σύνολο των αποσπόμενων πεπερασμένων ακολουθιών της που ανήκουν στο $[G]^k_J$ δηλαδή το $E_k[\vec{s}] \cap [G]^k_J$ να είναι μονοχρωματικό.*

Απόδειξη: Έστω ότι ο χρωματισμός είναι $f : [G]^k \to [m]$, ελάχιστο ταυτοδύναμο $\kappa \in \delta C$ και ελάχιστο ταυτοδύναμο $\lambda \in \delta V$ με $\lambda \leq \kappa$. Ακόμα έστω υπερφίλτρα $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$ τέτοια ώστε $\alpha_j = \lambda$ αν $j \in J$ και $\alpha_j = \kappa$ αν $j \notin J$.

Αφού τα υπερφίλτρα που χρησιμοποιούμε ανήκουν στο δG έχουμε

$$(\alpha_0 w_0)(\alpha_1 w_1)\ldots(\alpha_{k-1}w_{k-1})((w_0, w_1, \ldots, w_{k-1}) \text{ είναι τμηματική})$$

Άρα

$$(\alpha_0 w_0)(\alpha_1 w_1)\ldots(\alpha_{k-1}w_{k-1})((w_0, w_1, \ldots, w_{k-1}) \in [G]^k)$$

Με $\bigvee$ συμβολίζουμε την διάζευξη προτάσεων

$$(\alpha_0 w_0)(\alpha_1 w_1)\ldots(\alpha_{k-1}w_{k-1}) \bigvee_{i\in[m]} (f(w_0, w_1, \ldots, w_{k-1}) = i)$$

Οι ποσοδείκτες είναι συμβατοί με τη πεπερασμένη διάζευξη, άρα

$$\bigvee_{i\in[n]} (\alpha_0 w_0)(\alpha_1 w_1)\ldots(\alpha_{k-1}w_{k-1})(f(w_0, w_1, \ldots, w_{k-1}) = i)$$

Έτσι μπορούμε να επιλέξουμε χρώμα $c \in [m]$ τέτοιο ώστε

$$(\alpha_0 w_0)(\alpha_1 w_1)\ldots(\alpha_{k-1}w_{k-1})(f(w_0, w_1, \ldots, w_{k-1}) = c)$$

Τώρα εξ'ορισμού του ποσοδείκτη μπορούμε να επιλέξουμε $A_\varnothing \in \alpha_0$ ώστε για κάθε $w_0 \in A_\varnothing$ να έχουμε

$$(\alpha_1 w_1)(\alpha_2 w_2)\ldots(\alpha_{k-1}w_{k-1})(f(w_0, w_1, \ldots, w_{k-1}) = c)$$

Για κάθε $w_0 \in A_\varnothing$ μπορούμε να επιλέξουμε $A_{w_0} \in \alpha_1$ ώστε για κάθε $w_1 \in A_{w_0}$ να έχουμε

$$(\alpha_2 w_2)(\alpha_3 w_3)\ldots(\alpha_{k-1}w_{k-1})(f(w_0, w_1, \ldots, w_{k-1}) = c)$$

Για κάθε $w_0 \in A_\varnothing, w_1 \in A_{w_0}$ ομοίως μπορούμε να επιλέξουμε $A_{w_0,w_1} \in \alpha_2$. Επαγωγικά, μέχρι και για $w_0 \in A_\varnothing, \ldots, w_{k-2} \in A_{w_0,\ldots,w_{k-3}}$ μπορούμε να επιλέξουμε $A_{w_0,\ldots,w_{k-2}} \in \alpha_{k-1}$ ώστε για κάθε $w_{k-1} \in A_{w_0,\ldots,w_{k-2}}$
να έχουμε $f(w_0, w_1, \ldots, w_{k-1}) = c$. Για απλοποίηση, αν $w_j \neq A_{w_0,\ldots,w_{j-1}}$ ορίζουμε $A_{w_0,\ldots,w_j} = G$. Έτσι έχουμε ορίσει τα A_x για κάθε $x \in [G]^j, 1 \leq j \leq k$ με τις ιδιότητες.

- Αν $x \in [G]^j \quad A_x \in \alpha_j$
- Αν $w_0 \in A_\varnothing, \dots, w_{k-1} \in A_{w_0,\dots,w_{k-2}} \quad f(w_0, w_1, \dots, w_{k-1}) = c$

Θα λέμε ότι μια πεπερασμένη ακολουθία γενικευμένων λέξεων x είναι κάτω από m αν για κάθε όρο της $x \quad \text{maxDomain}(x) \leq m$. Ορίζουμε για $n \in \mathbb{N}$

$$V'_n = \bigcap \{A_x : x \in [G]^j, j \in J \text{ και } x \text{ κάτω από } n\}$$

$$C'_n = \bigcap \{A_x : x \in [G]^j, j \in [k] \setminus J \text{ και } x \text{ κάτω από } n\}$$

Αν $j \in J$ και $x \in [G]^j \quad A_x \in \alpha_j = \lambda$ και αν $j \in [k] \setminus J \quad x \in [G]^j \quad A_x \in \alpha_j = \kappa$, ακόμα παρατηρούμε ότι όλες οι ακολουθίες κάτω από κάποιο m είναι πεπερασμένες, άρα οι πάραπάνω τομές είναι πεπερασμένες. Έτσι έχουμε $V'_n \in \lambda$ και $C'_n \in \kappa$. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 4.2 και παίρνουμε κατάλληλη τμηματική ακολουθία $\vec{s}$.

Θεωρούμε $(z_0, z_1, \dots, z_{k-1}) \in E_k[\vec{s}] \cap [G]^k_J$ και θέλουμε να δείξουμε ότι $f(z_0, z_1, \dots, z_{k-1}) = c$. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $j \in [k] \quad z_i \in A_{z_0,z_1,\dots,z_{j-1}}$. Έστω ένα $j \in [k]$ το z_j έχει την μορφή

$$z_j = u_1 * u_2 * \cdots * u_r = s_{q_1}(w(q_1)) * s_{q_2}(w(q_2)) * \cdots * s_{q_r}(w(q_r))$$

όπου $w \in G$ με $\text{Domain}(w) = \{q_1, q_2, \dots, q_r\}, q_1 < q_2 < \cdots < q_r$. Αν $p = \text{maxDomain}(s_{q_1 - 1})$ αν $q_1 > 0$ και 0 αν $q_1 = 0$, επειδή η $(z_0, z_1, \dots, z_{k-1})$ είναι τμηματική $(z_0, \dots, z_{j-1})$ είναι κάτω από p.

Αν $j \in J \quad z_j \in V$, από την επιλογή του $\vec{s}$ έχουμε ότι $z_j \in V'_p$. Αφού $(z_0, z_1, \dots, z_{j-1})$ είναι κάτω από p με μήκος $j \in J$, το $A_{z_0,z_1,\dots,z_{j-1}}$ είναι ένα από τα σύνολα που τμήσαμε στον ορισμό του V'_n. Έτσι $z_j \in A_{z_0,z_1,\dots,z_{j-1}}$.

Αν $j \in [k] \setminus J \quad z_j \in C$ ομοίως προκύπτει ότι $z_j \in C'_p$ και ότι τμήσαμε το $A_{z_0,z_1,\dots,z_{j-1}}$ στον ορισμό του C'_p. Άρα $z_j \in A_{z_0,z_1,\dots,z_{j-1}}$.

Θεώρημα 5.2 *Έστω πεπερασμένος χρωματισμός του $[G]^k$, $J \subseteq [k]$ και $\vec{s} \in [V]^\omega$, υπάρχει απόσπαση $\vec{t} \in VE_\omega[\vec{s}]$ τέτοια ώστε $E_k[\vec{t}] \cap [G]^k_J$ να είναι μονοχρωματικό.*

Απόδειξη: Δουλεύουμε όπως την απόδειξη του 4.3. Θεωρούμε f πεπερασμένο χρωματισμό του $[G]^k$ και

$$h : [G]^k \to [G]^k$$

$$(w_0, w_1, \dots, w_{k-1}) \mapsto (\vec{s}[w_0], \vec{s}[w_1], \dots, \vec{s}[w_{k-1}])$$

Η h είναι καλώς ορισμένη $(w_i)_{i=0}^{k-1}$ είναι τμηματική τότε $h((w_i)_{i=0}^{k-1})$ είναι επίσης τμηματική. Μέσω της h^{-1} ορίζουμε καινούριο χρωματισμό του $[G]^k$. Εφαρμόζουμε το 5.1 για $\vec{s}, J$ και τον καινούριο χρωματισμό και παίρνουμε $\vec{w} \in [V]^\omega$ ώστε $E_k[\vec{w}] \cap [G]^k_J$ να είναι μονοχρωματικό. Ομοίως με το 4.3 προκύπτει ότι $E_k[\vec{t}] \cap [G]^k_J \subseteq h(E_k[\vec{w}] \cap [G]^k_J)$ και άρα $E_k[\vec{t}] \cap [G]^k_J$ είναι μονοχρωματικό κάτω από τον αρχικό χρωματισμό του $[G]^k$.

Θεώρημα 5.3 *Έστω πεπερασμένος χρωματισμός του $[G]^k$. Υπάρχει $\vec{s} \in [V]^\omega$ τέτοια ώστε για κάθε $J \subseteq [k]$ το $E_k[\vec{s}] \cap [G]^k_J$ είναι μονοχρωματικό.*

Απόδειξη: Αριθμούμε τα 2^k υποσύνολα του $[k] = \{0, 1, \dots, k-1\} \quad J_0, \dots, J_{2^k - 1}$. Αρχικά εφαρμόζουμε το 5.1 στο $[G]^k_{J_0}$ και παίρνουμε ακολουθία $\vec{s}_0$ ώστε $E_k[\vec{s}] \cap [G]^k_{J_0}$ να είναι μονοχρωματικό. Παρατηρούμε ότι αυτή η ιδιότητα μεταφέρεται σε κάθε άπειρη μεταβλητή απόσπαση της $\vec{s}_0$.

Επαγωγικά αν έχουμε ορίσει $\vec{s}_{i-1}$, εφαρμόζουμε το 5.2 με $\vec{s}_{i-1}, J = J_i$ και παίρνουμε $\vec{s}_i \in VE_\omega[\vec{s}_{i-1}]$ ώστε $E_k[\vec{s}] \cap [G]^k_{J_i}$. Αφού η $\vec{s}_i$ κληρονομεί την ιδιότητα της $\vec{s}_j$ για $0 \leq j < i$, θα έχουμε ότι για κάθε $0 \leq j \leq i \quad E_k[\vec{s}] \cap [G]^k_{J_j}$ είναι μονοχρωματικό. Έτσι συνεχίζουμε την επαγωγή μέχρι το $i = 2^k - 1$ και η $\vec{s} = \vec{s}_{2^k - 1}$ ικανοποιεί το ζητούμενο.

6 Θεωρήματα για άπειρες ακολουθίες γενικευμένων λέξεων

Τώρα θέλουμε να επεκτείνουμε την θεωρία του προηγούμενου κεφαλαίου στον χώρο $[G]^\infty$ των άπειρων τμηματικών ακολουθιών γενικευμένων λέξεων.

Ομοίως ορίζουμε για κάθε $J \subseteq \mathbb{N}$

$$[G]^\infty_J = \{\vec{s} \in [G]^\infty : \forall j \in \mathbb{N} \quad s_j \in V \Leftrightarrow j \in J\}$$

Ιδανικά θα ίσχυε το αντίστοιχο του Θεωρήματος 5.3, δηλαδή ότι για κάθε χρωματισμό του $[G]^\infty$ υπάρχει $\vec{s} \in [G]^\infty$ ώστε για κάθε $J \subseteq \mathbb{N}$, οι αποσπάσεις της $\vec{s}$ που ανήκουν στο $[G]^\infty_J$ να είναι μονοχρωματικές. Κάτι τέτοιο είναι δύσκολο για δύο λόγους.

Καταρχάς υπάρχει ένα γενικό πρόβλημα σε παρόμοια προβλήματα που αφορούν χρωματισμούς χώρων άπειρων ακολουθιών. Για παράδειγμα έχει δειχτεί ότι η άπειρη εκδοχή του θεωρήματος Ramsey για τα άπερια υποσύνολα του $\mathbb{N}$ έρχεται σε αντιπαράθεση με το αξίωμα επιλογής. Εμείς αντίστοιχα ακολουθόντας τη μεθοδολογία του προηγούμενου κεφαλαίου θα κατασκευάσουμε μια σχέση της μορφής

$$(\alpha_0 w_0)(\alpha_1 w_1)(\alpha_2 w_2)\ldots(f(w_0, w_1, w_2 \ldots) = c)$$

όπου $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ υπερφίλτρα και f χρωματισμός. Το πρόβλημα εμφανίζεται στο καλώς ορισμένο της πρότασης και πράγματι δεν ισχύει πάντα. Γι'αυτό τον λόγο θα περιοριστούμε σε συγκεκριμμένους χρωματισμούς των οποίων οι χρωματικές κλάσεις ανήκουν στο σύνολο $\mathcal{C}$, όπως αυτό περιγράφεται στο Κεφάλαιο 10.

Η δεύτερη δυσκολία είναι ότι τα $J \subseteq \mathbb{N}$ είναι υπεραριθμήσιμα. Ακόμα και αν δείξουμε το αντίστοιχο του 5.2 δεν θα μπορούμε να βρούμε κατάλληλη $\vec{s}$ για όλα τα J. Το καλύτερο που θα μπορέσουμε να κάνουμε είναι να βρούμε ακολουθία που δουλεύει για πεπερασμένα $J_0, J_1, \ldots, J_r$.

Θεώρημα 6.1 *Έστω $J \subseteq \mathbb{N}$ και πεπερασμένος χρωματισμός του $[G]^\omega$ τέτοιος ώστε οι χρωματικές κλάσεις να ανήκουν στο $\mathcal{C}$. Υπάρχει ακολουθία $\vec{s} \in [V]^\omega$ τέτοια ώστε το σύνολο των αποσπάσεων $E_\omega[\vec{s}] \cap [G]^\omega_J$ να είναι μονοχρωματικό.*

Απόδειξη: Θεωρούμε υπερφίλτρα κ και λ όπως πριν και άπειρη ακολουθία υπερφίλτρων $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ τέτοια ώστε $\alpha_i = \lambda$ αν $i \in J$ και $\alpha_i = \kappa$ αν $i \notin J$.

Τώρα για κάθε α-δέντρο T θα ισχύει

- για $k \in J$ και $(w_0, w_1, \ldots, w_{k-1}, w) \in T$

$$(\lambda w)((w_0, w_1, \ldots, w_{k-1}, w) \in T$$

- για $k \notin J$ και $(w_0, w_1, \ldots, w_{k-1}, w) \in T$

$$(\kappa w)((w_0, w_1, \ldots, w_{k-1}, w) \in T$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} T_J =& \{(w_i)_{i=0}^{k-1} : i \in \mathbb{N}, (w_i)_{i=0}^{k-1} \in [G]^k \text{ και για } i \in [k] \quad w_i \in V \Leftrightarrow i \in J\} \\ =& \bigcup_{i \in \mathbb{N}} [G]^k_{J \cap [k]} \end{aligned}$$

είναι ένα α-δέντρο. Έστω ότι ο χρωματισμός είναι $f : [G]^\omega \to [r]$, με χρωματικές κλάσεις $f^{-1}(\{i\}) \in \mathcal{C}$ για κάθε $i \in [r]$. Άρα για κάθε χρώμα i το παιχνίδι $(\alpha\vec{w})\vec{w} \in f^{-1}(\{i\})$ είναι προσδιορισμένο και από Πόρισμα 10.3 θα υπάρχει α-δέντρο T_i του οποίου όλα τα μονοπάτια έχουν χρώμα i ή όλα έχουν διαφορετικό χρώμα από i.

Θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχει χρώμα $c \in [r]$ τέτοιο ώστε όλα τα μονοπάτια του T_c έχουν χρώμα c, έστω εις άτοπο ότι δεν υπάρχει. Τότε για κάθε $i \in [r]$ τα μονοπάτια του T_i έχουν διαφορετικό χρώμα από i. Το $\bigcap_{i\in[r]} T_i \cap T_J$ ως πεπερασμένη τομή α-δέντρων είναι ένα α-δέντρο του οποίου τα μονοπάτια έχουν διαφορετικό χρώμα από i για κάθε $i \in [r]$, άτοπο. Έτσι υπάρχει κατάλληλο χρώμα $c \in [r]$ και α-δέντρο T_c. Θέτουμε $T'_c = T_c \cap T_J$.

Για κάθε $s = (w_0, w_1, \ldots, w_{k-1}) \in T'_c$ έχουμε για το σύνολο διακλάδωσης $T'_c(s)$ ότι αν $k \in J \quad T'_c(s) \in \lambda$ και αν $k \notin J \quad T'_c(s) \in \kappa$. Τώρα θέτουμε για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$V'_n = \bigcap\{T'_c(s) : s \in T'_c \cap [G]^j, j \in J \text{ και } s \text{ κάτω από } n\}$$

και

$$C'_n = \bigcap\{T'_c(s) : s \in T'_c \cap [G]^j, j \notin J \text{ και } s \text{ κάτω από } n\}$$

Ομοίως με το προηγούμενο κεφάλαιο θα έχουμε $V'_n \in \lambda$ και $C'_n \in \kappa$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Από 4.2 υπάρχει $\vec{s} \in [G]^\omega$ τέτοια ώστε, για κάθε $x = u_1 * u_2 * \cdots * u_k$ όπου u_j στιγμιότυπο κάποιας λέξης s_{i_j} με $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$, αν x μεταβλητή τότε $x \in V'_m$ και αν x σταθερή $x \in C'_m$, όπου $m = maxDomain(s_{i_1} - 1)$ αν $i_1 > 0$ και $m = 0$ αν $i_1 = 0$.

Τώρα θα δείξουμε ότι η $\vec{s}$ είναι η ζητούμενη ακολουθία του θεωρήματος. Έστω $\vec{t} \in E_\omega[\vec{s}] \cap [G]^\omega_J$, για να δείξουμε ότι $f(\vec{t}) = c$ αρκεί να δείξουμε ότι $\vec{t}$ είναι ένα μονοπάτι του α-δέντρου T'_c ή ισοδύναμα ότι κάθε αρχικό τμήμα της $\vec{t}$ ανήκει στο T'_c. Αυτό θα το δείξουμε επαγωγικά ως προς το μήκος του αρχικού τμήματος n. Η επαγωγική βάση για $n = 0$ είναι προφανής, αφού $\varnothing$ ανήκει σε οποιοδήποτε α-δέντρο. Για το επαγωγικό βήμα θεωρούμε ότι $s = (t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}) \in T'_c$ για $n > 0$ και $k = \text{maxDomain}(t_{n-1})$. Από την επιλογή του $\vec{s}$ έχουμε ότι t_n ανήκει στο V'_k ή στο C'_k αν t_n ανήκει στο V ή στο C αντίστοιχα. Για το n έχουμε δύο περιπτώσεις.

Αν $n \in J$, επειδή $\vec{t} \in [G]^\omega_J$ έχουμε $t_n \in V$ και άρα $t_n \in V'_k$. Αφού $s \in T'_c$, είναι κάτω από k και έχει μήκος $n \in J$, τότε ένα σύνολο που τμήσαμε στον ορισμό του V'_n είναι το $T'_c(s)$. Έτσι $t_n \in T'_c(s)$ και $s^\frown(t_n) = (t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n) \in T'_c$.

Αν $n \notin J$ έχουμε $t_n \in C'_k$ και ομοίως βλέπουμε ότι στον ορισμό του C'_n τμήσαμε το σύνολο $T'_c(s)$. Άρα $(t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n) \in T'_c$.

Πόρισμα 6.2 *Έστω $J \subseteq \mathbb{N}$, πεπερασμένος χρωματισμός του $[G]^\omega$ τέτοιος ώστε οι χρωματικές κλάσεις να ανήκουν στο $\mathcal{C}$ και $\vec{s} \in [V]^\omega$. Υπάρχει απόσπαση $\vec{t} \in VE_\omega[\vec{s}]$ τέτοια ώστε $E_\omega[\vec{t}] \cap [G]^\omega_J$ να είναι μονοχρωματικό.*

Απόδειξη: Εργαζόμαστε όπως το Θεώρημα 4.3 με τη διαφορά ότι τώρα χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση h που στέλνει το $\vec{w}$ στο $\vec{s}[\vec{w}]$ για να ορίσουμε καινούριο χρωματισμό. Εφαρμόζουμε το 6.1 για να πάρουμε ακολουθία $\vec{w}$ και ορίζουμε $\vec{t} = \vec{s}[\vec{w}]$. Παρατηρούμε ότι οι αντιστροφοεικόνες των χρωματικών κλάσεων παραμένουν σύνολα του $\mathcal{C}$ γιατί h είναι συνεχής συνάρτηση.

Θεώρημα 6.3 *Έστω $J_0, J_1, \ldots, J_r \subseteq \mathbb{N}$ και πεπερασμένος χρωματισμός του $[G]^\omega$ τέτοιος ώστε οι χρωματικές κλάσεις να ανήκουν στο $\mathcal{C}$. Υπάρχει ακολουθία $\vec{s} \in [V]^\omega$ τέτοια ώστε για κάθε $i \in [r+1] \quad E_\omega[\vec{s}] \cap [G]^\omega_{J_i}$ να είναι μονοχρωματικό.*

Απόδειξη: Από το 6.1 παίρνουμε μία $\vec{w}_0$ για το J_0 και παίρνουμε διαδοχικά αποσπάσεις $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_r$ χρησιμοποιώντας το 6.2, όπως ακριβώς κάναμε στο 5.3. Η ζητούμενη ακολουθία είναι $\vec{s} = \vec{w}_r$.

7 Εφαρμογές

7.1 Γενικευμένες Λέξεις

Θεώρημα 7.1 *Για κάθε πεπερασμένο χρωματισμό των V και C και άπειρη τμηματική ακολουθία $\vec{s} \in [G]^\omega$, υπάρχει άπειρη μεταβλητή μείωση $\vec{t}$ της $\vec{s}$ τέτοια ώστε τα σύνολα των μεταβλητών και σταθερών μειωμένων λέξεων $VR[\vec{t}]$ και $CR[\vec{t}]$ να είναι μονοχρωματικά.*

Απόδειξη: Καταρχάς θα χρειαστούμε την συνάρτηση συμπίεσης

$$f : G \to W(\Sigma, v)$$

όπου αν $w \in G$ με $\mathrm{Domain}(w) = \{i_0, i_1, \dots, i_{n-1}\}, i_0 < i_1 < \cdots < i_{n-1}$, $f(w)$ είναι η λέξη μήκους n όπου το $j-$οστό της γράμμα είναι το $w(i_j)$. Δηλαδή αυτή η συνάρτηση σε κάθε γενικευμένη λέξη αγνοεί τα κενά του πεδίου ορισμού της και τη συμπιέζει σε ένα αρχικό τμήμα του $\mathbb{N}$ κάνοντάς την απλή λέξη.

Ακόμα ορίζουμε τη συνάρτηση

$$g : G \to G$$

$$w \mapsto \vec{s}[f(w)]$$

Με την g^{-1} ορίζουμε καινούριο χρωματισμό του G και χρησιμοποιούμε το 4.1 για να πάρουμε κατάλληλη ακολουθία $\vec{w} \in [G]^\omega$. Θα ορίσουμε μια συμπιεσμένη εκδοχή της $\vec{w}$ την $\vec{w}' \in [G]^\omega$. Έστω $D = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{Domain}(w_i)$ και ακέραιοι $0 = n_0 < n_1 < \dots$ τέτοιοι ώστε το πεδίο ορισμού της w_j να περιέχει από το n_j-οστό έως και το $(n_{j+1} - 1)$-οστό στοιχείο του D. Η γενικευμένη λέξη w'_j θα έχει πεδίο ορισμού $\{n_j, n_j + 1, \dots, n_{j+1} - 1\}$ και $f(w'_j) = f(w_j)$. Δηλαδή η w'_j προκύπτει αν συμπιέσουμε το πεδίο ορισμού της w_j στο διάστημα $[n_j, n_{j+1})$ του $\mathbb{N}$. Θέτουμε την ζητούμενη μείωση να είναι $\vec{t} = \vec{s}[\vec{w}']$. Παρατηρούμε ότι $\vec{w}'$ τμηματική και $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{Domain}(w'_i) = \mathbb{N}$ οπότε $\vec{t}$ είναι όντως μείωση της $\vec{s}$. Για κάθε γενικευμένη μειωμένη λέξη w της $\vec{t}$ υπάρχει λέξη $(a_0, a_1, \dots, a_k) \in W(\Sigma, v)$ τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} w =& \vec{t}[(a_0, a_1, \dots, a_k)] \\ =& \vec{s}[w'_0(a_0)] * \vec{s}[w'_1(a_1)] * \cdots * \vec{s}[w'_{k-1}(a_{k-1})] \\ =& \vec{s}[f(w_0(a_0) * w_1(a_1) * \cdots * w_k(a_k))] \\ =& g(w_0(a_0) * w_1(a_1) * \cdots * w_k(a_k)) \end{aligned}$$

Άρα w είναι g-εικόνα κάποιας αποσπόμενης λέξης της $\vec{w}$ (πιο συγκεκριμμένα μειωμένης) και μάλιστα αν $w_0(a_0) * w_1(a_1) * \cdots * w_k(a_k)$ είναι σταθερή λέξη τότε w είναι σταθερή και αν $w_0(a_0) * w_1(a_1) * \cdots * w_k(a_k)$ είναι μεταβλητή τότε w είναι μεταβλητή. Από την επιλογή της $\vec{w}$, τα σύνολα από τις μεταβλητές και σταθερές μειωμένες λέξεις της $\vec{t}$ $VR[\vec{t}]$ και $CR[\vec{t}]$ είναι μονοχρωματικά.

Θεώρημα 7.2 *Έστω πεπερασμένος χρωματισμός του $[G]^k$, $J \subseteq [k]$ και τμηματική ακολουθία μεταβλητών γενικευμένων λέξεων $\vec{s}$, υπάρχει μείωση $\vec{t} \in VR_\omega[\vec{s}]$ τέτοια ώστε $R_k[\vec{t}] \cap [G]^k_J$ να είναι μονοχρωματικό.*

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι παρόμοια με το 7.1. Τώρα έχουμε συνάρτηση

$$f : G^k \to G^k$$

Αν $z = (w_i)_{i=0}^{k-1} \in G^k$, $f(z)$ θα είναι μια συμπιεσμένη εκδοχή του z. Έστω $D = \bigcup\limits_{i\in[k]} \mathrm{Domain}(w_i)$ και $0 < n_0 < n_1 < \cdots < n_k = |D|$ ώστε το πεδίο ορισμού της w_j να περιέχει από το n_j-οστό έως και το $(n_{j+1}-1)$-οστό στοιχείο του D. Για $j \in [k]$ η $f(z)_j$ προκύπτει αν συμπιέσουμε το πεδίο ορισμού του w_j στο διάστημα $[n_j, n_{j+1})$ του $\mathbb{N}$. Ακόμα ορίζουμε

$$g : G^k \to G^k$$

$$(w_i)_{i=0}^{k-1} \mapsto \vec{s}[f((w_i)_{i=0}^{k-1})]$$

Και παίρνουμε καινούριο χρωματισμό του G^k μέσω της g^{-1}. Τώρα χρησιμοποιούμε το Θεώρημα 5.3 και παίρνουμε κατάλληλη ακολουθία $\vec{w}$. Όπως στο 7.1 ορίζουμε $\vec{w}'$ τη συμπιεσμένη εκδοχή της $\vec{w}$ και θέτουμε $\vec{t} = \vec{s}[\vec{w}']$. Κάθε $(u_i)_{i=0}^{k-1} \in R_k[\vec{t}]$ θα είναι g εικόνα κάποιου $(y_i)_{i=0}^{k-1} \in R_k[\vec{w}] \subseteq E_k[\vec{w}]$ και μάλιστα για κάθε $J \subseteq [k]$ $(u_i)_{i=0}^{k-1} \in G^k_J \Leftrightarrow (y_i)_{i=0}^{k-1} \in G^k_J$. Άρα από την επιλογή της $\vec{w}$ τα σύνολα $R_k[\vec{t}] \cap [G]^k_J$ είναι μονοχρωματικά.

7.2 Λέξεις

Θεώρημα 7.3 *Για κάθε πεπερασμένο χρωματισμό των $W(\Sigma; v)$ και $W(\Sigma)$ και άπειρη ακολουθία μεταβλητών λέξεων $\vec{s} \in [W(\Sigma; v)]^{\omega}$. Υπάρχει απόσπαση $\vec{t} \in VE_{\omega}[\vec{s}]$ τέτοια ώστε τα σύνολα από τις σταθερές και μεταβλητές αποσπόμενες λέξεις της $CE[\vec{t}]$ και $VE[\vec{t}]$ να είναι μονοχρωματικά.*

Απόδειξη: Χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση

$$g : G \to W(\Sigma, v)$$

$$w \mapsto \vec{s}[w]$$

Με την g^{-1} ορίζουμε χρωματισμό των V και C. Χρησιμοποιούμε το Θεώρημα 4.1 και παίρνουμε τμηματική ακολουθία γενικευμένων λέξεων $\vec{w}$. Θέτουμε $\vec{t} = \vec{s}[\vec{w}]$ και είναι η ζητούμενη απόσπαση, γιατί κάθε αποσπόμενη λέξη της είναι της μορφής $g(u) = \vec{s}[u]$ για κάποια u αποσπόμενη λέξη της $\vec{w}$.

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε το αντίστοιχο αποτέλεαμσ για μειώσεις.

Θεώρημα 7.4 *Για κάθε πεπερασμένο χρωματισμό των $W(\Sigma; v)$ και $W(\Sigma)$ και άπειρη ακολουθία μεταβλητών λέξεων $\vec{s} \in [W(\Sigma; v)]^{\omega}$. Υπάρχει άπειρη μεταβλητή μείωση $\vec{t} \in VR_{\omega}[\vec{s}]$ τέτοια ώστε τα σύνολα από τις σταθερές και μεταβλητές αποσπόμενες λέξεις της $CR[\vec{t}]$ και $VR[\vec{t}]$ να είναι μονοχρωματικά.*

Αν θέσουμε στο Θεώρημα 7.3 $\vec{s} = \{v, v, v, \dots\}$, παρατηρούμε ότι κάθε ακολουθία μεταβλητών λέξεων $\vec{t} \in [W(\Sigma; v)]^{\omega}$ είναι απόσπαση της $\vec{s}$ και μπορούμε να πάρουμε το απλούστερο αποτέλεσμα.

Πόρισμα 7.5 *Για κάθε πεπερασμένο χρωματισμό των $W(\Sigma; v)$ και $W(\Sigma)$, υπάρχει άπειρη ακολουθία μεταβλητών λέξεων $\vec{t} \in [W(\Sigma; v)]^{\omega}$ τέτοια ώστε τα σύνολα από τις σταθερές και μεταβλητές αποσπόμενες λέξεις της $CE[\vec{t}]$ και $VE[\vec{t}]$ να είναι μονοχρωματικά.*

Πόρισμα 7.6 *(Carlson) Για κάθε πεπερασμένο χρωματισμό του $W(\Sigma; v)$ και άπειρη ακολουθία μεταβλητών λέξεων $\vec{s} \in [W(\Sigma; v)]^{\omega}$. Υπάρχει άπειρη μεταβλητή απόσπαση $\vec{t} \in VE_{\omega}[\vec{s}]$ τέτοια ώστε το σύνολο από τις μεταβλητές αποσπόμενες λέξεις $VE[\vec{t}]$ να είναι μονοχρωματικό.*

Απόδειξη: Χρωματίζουμε αυθέραιτα το $W(\Sigma, v)$, εφαρμόζουμε το 7.3 και παίρνουμε μόνο το αποτέλεσμα για τις μεταβλητές αποσπόμενες λέξεις.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας για το παρακάτω θεώρημα, το $W(\Sigma)$ περιέχει τη κενή λέξη, δηλαδή τη $w : \varnothing \to \Sigma$. Ακόμα θα ονομάζουμε αριστερή μεταβλητή λέξη μια μεταβλητή λέξη της οποίας το πρώτο γράμμα είναι η μεταβλητή.

Θεώρημα 7.7 *(Carlson-Simpson) Για κάθε πεπερασμένο χρωματισμό του $W(\Sigma)$ υπάρχει μία σταθερή λέξη w και μια ακολουθία αριστερών μεταβλητών λέξεων $\vec{s}$ ώστε το σύνολο*

$$\{w\} \cup \{w^\frown s_0(a_0)^\frown \dots ^\frown s_n(a_n) : n \in \mathbb{N} \text{ και } a_0, \dots, a_n \in \Sigma\}$$

είναι μονοχρωματικό.

Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι κάθε $u \in W(\Sigma; v)$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως $l(u)^\frown r(u)$ όπου $l(u)$ σταθερή λέξη και $r(u)$ αριστερή μεταβλητή λέξη. Αν u είναι αριστερή μεταβλητή λέξη τότε $l(u)$ είναι η κενή λέξη και $u = r(u)$. Η συνάρτηση l δηλαδή έχει πεδίο ορισμού το $W(\Sigma; v)$ και σύνολο τιμών $W(\Sigma)$.

και με την l^{-1} χρωματίζουμε το $W(\Sigma; v)$. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Carlson και παίρνουμε ακολουθία $\vec{t} \in W(\Sigma; v)^{\omega}$ όπου $VE[\vec{t}]$ μονοχρωματικό. Επιλέγουμε τυχαίο $a \in \Sigma$, θέτουμε $w = t_0(a)^\frown l(t_1)$ και $s_i = r(t_{i+1})^\frown l(t_{i+2})$ για $i \in \mathbb{N}$. Η $\vec{s}$ είναι πράγματι ακουλουθία αριστερών μεταβλητών λέξεων και μένει να δείξουμε ότι το ζητούμενο σύνολο είναι μονοχρωματικό. Για κάθε λέξη z του συνόλου υπάρχουν γράμματα $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \Sigma$ έτσι ώστε

$$\begin{aligned} z =& w^\frown s_0(a_0)^\frown \ldots ^\frown s_n(a_n) \\ =& (t_0(a)^\frown l(t_1))^\frown (r(t_1)(a_0)^\frown l(t_2))^\frown \ldots ^\frown (r(t_{n+1}(a_n))^\frown l(t_{n+2})) \\ =& t_0(a)^\frown t_1(a_0)^\frown \ldots ^\frown t_{n+1}(a_n)^\frown l(t_{n+2}) \\ =& l(t_0(a)^\frown t_1(a_0)^\frown \ldots ^\frown t_{n+1}(a_n)^\frown t_{n+2}) \end{aligned}$$

και $t_0(a)^\frown t_1(a_0)^\frown \ldots ^\frown t_{n+1}(a_n)^\frown t_{n+2} \in VE[\vec{t}]$. Άρα

$$\{w\} \cup \{w^\frown s_0(a_0)^\frown \ldots ^\frown s_n(a_n) : n \in \mathbb{N} \text{ και } a_0, \ldots, a_n \in \Sigma\} \subseteq l(VE[\vec{t}])$$

άρα είναι μονοχρωματικό.

Θεώρημα 7.8 *Για κάθε πεπερασμένο χρωματισμό του $W(\Sigma, v)^k$, υπάρχει ακολουθία μεταβλητών λέξεων $\vec{w} \in W(\Sigma; v)^\omega$ τέτοια ώστε για κάθε $J \subseteq [k]$ το σύνολο $E_k[\vec{s}] \cap [W(\Sigma; v)]^k_J$ είναι μονοχρωματικό.*

Απόδειξη: Θεωρούμε την συνάρτηση συμπίεσης

$$f : G \to W(\Sigma, v)$$

που σε κάθε γενικευμένη λέξη αγνοεί τα κενά του πεδίου ορισμού της και τη συμπιέζει σε ένα αρχικό τμήμα του $\mathbb{N}$ κάνοντάς την απλή λέξη.

και τη συνάρτηση

$$g : G^k \to W(\Sigma, v)^k$$

$$(w_i)_{i=0}^{k-1} \mapsto (f(w_i))_{i=0}^{k-1}$$

Με την g^{-1} ορίζουμε χρωματισμό του G^k και με το Θεώρημα 5.3 επιλέγουμε κατάλληλη $\vec{t} \in [G]^\omega$. Θέτουμε $\vec{s} \in [W(\Sigma; v)]^\omega$ όπου για κάθε $i \in \mathbb{N}$ $\;\; s_i = f(t_i)$. Για κάθε $J \subseteq [k]$ το τυχαίο στοιχείο του $E_k[\vec{s}] \cap [W(\Sigma; v)]^k_J$ είναι της μορφής $g((w_i)_{i=0}^{k-1})$ για $(w_i)_{i=0}^{k-1} \in E_k[\vec{t}] \cap [G]^k_J$. Από την επιλογή του χρωματισμού του $[G]^k$ και της ακολουθίας $\vec{t}$ τα σύνολα $E_k[\vec{s}] \cap [W(\Sigma; v)]^k_J$ είναι μονοχρωματικά.

Θυμίζουμε ότι μια λέξη n μεταβλητών είναι μία λέξη του αλφαβήτου

$$\Sigma \cup \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$$

στην οποία εμφανίζονται όλες οι μεταβλητές $\{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$ και η τελευταία εμφάνιση του v_i γίνεται πριν την πρώτη εμφάνιση του v_{i+1} για $i \in [n]$.

Με την ίδια λογική για μεταβλητές $\{v_0, v_1, v_2, \dots\}$ μία λέξη άπειρων μεταβλητών θα είναι μια συνάρτηση

$$w : \mathbb{N} \to \Sigma \cup \{v_0, v_1, v_2, \dots\}$$

στην οποία εμφανίζονται όλες οι μεταβλητές και η τελευταία εμφάνιση του v_i γίνεται πριν την πρώτη εμφάνιση του v_{i+1} για $i \in \mathbb{N}$.

Αρχικό τμήμα μιας άπειρης ή πεπερασμένης λέξης θα ονομάζουμε τον περιορισμό της στο $[k]$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$.

Στιγμιότυπο μιας λέξης πολλών μεταβλητών θα λέμε την λέξη που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε την εμφάνιση κάθε μεταβλητής με κάποια άλλη μεταβλητή ή κάποιο γράμμα του αλφαβήτου Σ.

Θεώρημα 7.9 *Για κάθε πεπερασμένο χρωματισμό των λέξεων n μεταβλητών, υπάρχει λέξη άπειρων μεταβλητών w τέτοια ώστε οι λέξεις n μεταβλητών που προκύπτουν από στιγμιότυπα αρχικών τμημάτων της w τα οποία τελειώνουν μόλις πριν την εμφάνιση κάποιας μεταβλητής, να είναι μονοχρωματικές.*

Απόδειξη: Θεωρούμε την συνάρτηση g που σε κάθε τμηματική ακολουθία μεταβλητών λέξεων μήκους $n+1$

$$(s_0, s_1, \dots, s_n) \in [W(\Sigma; v)]^{n+1}$$

αντιστοιχίζει την λέξη n μεταβλητών

$$s_0(v_0)^\frown s_1(v_1)^\frown \dots ^\frown s_{n-1}(v_{n-1})^\frown \overline{s_n}$$

όπου $\overline{s_n}$ είναι το αρχικό τμήμα της s_n που τελειώνει μόλις πριν την εμφάνιση της μεταβλητής. Εύκολα βλέπουμε ότι αυτό είναι μια επί συνάρτηση.

Η g^{-1} ορίζει καινούριο χρωματισμό στο $[W(\Sigma; v)]^{n+1}$ και εφαρμόζουμε εκεί το Θεώρημα 7.8. Παίρνουμε ακολουθία $\vec{s} \in [W(\Sigma; v)]^\omega$ και χρησιμοποιούμε την περίπτωση $J = [n+1] = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ του Θεωρήματος. Άρα έχουμε ότι το $E_{n+1}[\vec{s}] \cap [W(\Sigma; v)]_J^{n+1} = VE_{n+1}[\vec{s}]$ είναι μονοχρωματικό.

Θέτουμε την λέξη άπειρων μεταβλητών $w = s_0(v_0) * s_1(v_1) * s_2(v_2) * \ldots$ και θέλουμε να δείξουμε ότι το μονοχρωματικό σύνολο $VE_{n+1}[\vec{s}]$ μέσω της g παράγει όλες ζητούμενες λέξεις n. Έστω z μία λέξη n μεταβλητών που προκύπτει από στιγμιότυπα αρχικών τμημάτων της w που τελειώνουν μόλις πριν την εμφάνιση κάποιας μεταβλητής. Η z μπορεί να προκύψει και ως g-εικόνα κάποιας πεπερασμένης ακολουθίας του $VE_{n+1}[\vec{s}]$ με τον εξής τρόπο. Επιλέγουμε το μικρότερο αρχικό τμήμα της $\vec{s}$ που καλύπτει το κομμάτι της w που χρησιμοποιείται για την z. Το διαμερίζουμε σε $n+1$ τμήματα έτσι ώστε για $i \in [n]$ το i-οστό τμήμα να αντιστοιχεί στο κομμάτι που εμφανίζεται η μεταβλητή v_i και το τελευταίο τμήμα να αντιστοιχεί στο κομμάτι που κόβουμε την w πριν την εμφάνιση της μεταβλητής. Τέλος χρησιμοποιούμε το κάθε τμήμα για να κατασκευάσουμε κατάλληλες αποσπόμενες μεταβλητές λέξεις της $\vec{s}$. Η g-εικόνα της ακολουθίας αυτών των λέξεων μας δίνει το z.

7.3 $\mathbb{N}$

Αν θέσουμε το αλφάβητο να είναι $\Sigma = \{1, 2, \ldots, \sigma\}$ και τη μεταβλητή $v = \sigma + 1$ τότε μπορούμε να δούμε μία γενικευμένη λέξη $w \in G(\Sigma, v)$ ως αναπαράσταση ενός θετικού ακεραίου σε βάση $\sigma + 2$, όπου βλέπουμε τα κενά στο πεδίο ορισμού ως μηδενικά. Πιο συγκεκριμμένα χρησιμοποιούμε την 1-1 και επί συνάρτηση

$$f : L(\Sigma, v) \to \mathbb{N}^*$$

$$w \mapsto \sum_{i \in \mathrm{Domain}(w)} w(i) \cdot (\sigma + 2)^i$$

Όταν ορίζεται η ένωση γενικευμένων λέξεων η f τη μεταφέρει σε πρόσθεση στον $\mathbb{N}^*$. Αυτό μας επιτρέπει να μεταφέρουμε θεωρήματα γενικευμένων λέξεων σε αντίστοιχα για θετικούς ακέραιους. Σημειώνουμε ότι η f^{-1} δεν μεταφέρει τη πράξη από τον $\mathbb{N}^*$ στο G γιατί δεν ορίζεται το $f^{-1}(n_1) * f^{-1}(n_2)$ για κάθε ζεύγος θετικών ακεραίων n_1, n_2.

Αντίστοιχα με τις μεταβλητές λέξεις θα λέμε στιγμιότυπο ενός $q \in \mathbb{N}^*$ που περιέχει το ψηφίο $\sigma + 1$, τον αριθμό που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε στον q κάθε εμφάνηση του $\sigma + 1$ με κάποιο ψηφίο από το αλφάβητο Σ.

Έτσι το Θεώρημα 4.1 παίρνει τη μορφή

Θεώρημα 7.10 *Για κάθε πεπερασμένο χρωματισμό του $\mathbb{N}^*$ και θετικό ακέραιο σ, υπάρχει ακολουθία θετικών ακεραίων $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και δύο χρώματα τέτοια ώστε*

- *κάθε q_n σε βάση $\sigma + 2$ περιέχει το ψηφίο $\sigma + 1$*
- *κάθε q_{n+1} διαιρείται με μια μεγαλύτερη δύναμη του $\sigma + 2$ απ'ότι το q_n*
- *τα πεπερασμένα αθροίσματα από διαφορετικά στιγμιότυπα των q_n είναι χρωματισμένα με το πρώτο χρώμα αν περιέχουν το ψηφίο $\sigma+1$ και με το δεύτερο αν όχι*

Για κάθε άπειρο $K \subseteq \mathbb{N}^*$ ορίζουμε

$$P_{fin}(K) = \{L \subseteq K : \varnothing \neq L \text{ πεπερασμένο}\}$$

$$FS(K) = \{\sum_{n \in L} n : L \in P_{fin}(K)\}$$

Θεώρημα 7.11 *Για κάθε πεπερασμένο χρωματισμό του $\mathbb{N}^*$ και $\sigma \in \mathbb{N}^*$, υπάρχει ακολουθία θετικών ακεραίων $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ τέτοια ώστε*

- *κάθε q_{n+1} διαιρείται με μια μεγαλύτερη δύναμη του $\sigma + 1$ απ'ότι το q_n*
- *το σύνολο $FS((q_n)_{n \in \mathbb{N}})$ είναι μονοχρωματικό*

Απόδειξη: Θέτουμε

$$A = \{n \in \mathbb{N}^* : n \text{ σε βάση } \sigma + 2 \text{ δεν περιέχει το ψηφίο } \sigma + 1\}$$

και

$$g : A \to \mathbb{N}^*$$

όπου αν $n \in A$ έχει αναπαράσταση σε βάση $\sigma + 2$ $a_0 a_1 \ldots a_n$ με ψηφία από το σύνολο $\{0, 1, \ldots, \sigma\}$ τότε

$$g(n) = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot (\sigma + 1)^i$$

Έστω ότι ο χρωματισμός του $\mathbb{N}^*$ είναι $c : \mathbb{N}^* \to [r]$, με την g^{-1} ορίζουμε χρωματισμό $c' : A \to [r]$ και επεκτείνουμε αυθαίρετα τον c' σε $c'' : \mathbb{N}^* \to [r]$.

Εφαρμόζουμε το 7.10 στον $\mathbb{N}^*$ με το χρωματισμό c'' και παίρνουμε κατάλληλη ακολουθία θετικών ακεραίων $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Παρατηρούμε ότι τα πεπερασμένα αθροίσματα από στιγμιότυπα διαφορετικών s_n που ανήκουν στο A έχουν το ίδιο χρώμα στον χρωματισμό c'' άρα και στον c'. Θέτουμε $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $q_n = g(s_n(a_n))$ για τυχαία ψηφία a_n από το σύνολο $\{1, \ldots, \sigma\}$. Τα $s_n(a_n)$ σε βάση $\sigma+2$ δεν περιέχουν το ψηφίο $\sigma + 1$ άρα ανήκουν στο A και τα q_n είναι καλώς ορισμένα.

Για την πρώτη ιδιότητα, επειδή κάθε s_{n+1} διαιρείται με μια μεγαλύτερη δύναμη του $\sigma + 2$ απ'ότι το s_n, κάθε q_{n+1} διαιρείται με μια μεγαλύτερη δύναμη του $\sigma + 1$ απ'ότι το q_n.

Για την δεύτερη ιδιότητα, θεωρούμε ένα στοιχείο του $FS((q_n)_{n\in\mathbb{N}})$ έστω $q_{i_0} + q_{i_1} + \cdots + q_{i_k}$ για αύξουσα ακολουθία ακεραίων i_j

$$\begin{aligned} q_{i_0} + q_{i_1} + \cdots + q_{i_k} =& g(s_{i_0}(a_{i_0})) + g(s_{i_1}(a_{i_1})) + \cdots + g(s_{i_1}(a_{i_1})) \\ =& g(s_{i_0}(a_{i_0}) + s_{i_1}(a_{i_1}) + \cdots + s_{i_k}(a_{i_1})) \end{aligned}$$

όπου $s_{i_0}(a_{i_0}) + s_{i_1}(a_{i_1}) + \cdots + s_{i_k}(a_{i_k})$ είναι πεπερασμένο άθροισμα από στιγμιότυπα διαφορετικών s_n που ανήκει στο A. Άρα $FS((q_n)_{n\in\mathbb{N}})$ είναι μονοχρωματικό.

Αν σταθεροποιήσουμε το σ στο Θεώρημα 7.11 και αγνοήσουμε την πρώτη ιδιότητα έχουμε το Θεώρημα Hindman.

Πόρισμα 7.12 *(Hindman) Για κάθε πεπερασμένο χρωματισμό του $\mathbb{N}^*$ υπάρχει άπειρο $K \subseteq \mathbb{N}^*$ τέτοιο ώστε $FS(K)$ είναι μονοχρωματικό.*

Από την άλλη μπορούμε να ταυτίσουμε τα σύνολα $\mathbb{N}^*$ και $P_{fin}(\mathbb{N}^*)$ με την 1-1 και επί συνάρτηση

$$g : \mathbb{N}^* \to P_{fin}(\mathbb{N}^*)$$

όπου αν $n \in \mathbb{N}^*$ με δυαδική αναπαράσταση $b_1, b_2, \ldots, b_k$

$$g(n) = \{L \subseteq \{1, 2, \ldots, k\} : i \in L \Leftrightarrow b_i = 1\}$$

Η g μεταφέρει τη πρόσθεση σε ένωση συνόλων άρα από το Θεώρημα 7.11 παίρνουμε μια ισοδύναμη μορφή του Θεωρήματος Hindman.

Για κάθε άπειρο $K \subseteq P_{fin}(\mathbb{N}^*)$ ορίζουμε

$$FU(K) = \{ \bigcup_{A\in L} A : L \in P_{fin}(K)\}$$

Θεώρημα 7.13 *Για κάθε πεπερασμένο χρωματισμό του $P_{fin}(\mathbb{N}^*)$ υπάρχει άπειρο σύνολο $K \subseteq P_{fin}(\mathbb{N}^*)$ τέτοιο ώστε $FU(K)$ είναι μονοχρωματικό.*

7.4 Θεωρήματα σε πεπερασμένους χώρους

Θεωρούμε για τα παρακάτω ότι το μέγεθος του αλφαβήτου Σ είναι $k \in \mathbb{N}^*$. Στο πρώτο θεώρημα με Σ^n για $n \in \mathbb{N}^*$ θα συμβολίζουμε τις σταθερές λέξεις του Σ με μήκος n.

Θεώρημα 7.14 *(Hales-Jewett) Για κάθε $r \in \mathbb{N}^*$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}^*$ με την εξής ιδιότητα. Αν $n \geq N$ τότε για κάθε r-χρωματισμό του Σ^n, υπάρχει μεταβλητή λέξη w μήκους n τέτοια ώστε $\{w(a) : a \in \Sigma\}$ να είναι μονοχρωματικό.*

Απόδειξη: Έστω εις άτοπο ότι δεν ισχύει. Τότε υπάρχει $r \in \mathbb{N}^*$ ώστε για κάθε $N \in \mathbb{N}^*$ να υπάρχει $n \geq N$ και r-χρωματισμός του Σ^n για τον οποίο δεν υπάρχει μεταβλητή λέξη w μήκους n τέτοια ώστε $\{w(a) : a \in \Sigma\}$ να είναι μονοχρωματικό.

Για $N = 1$ επιλέγουμε n_0 και χρωματισμό $c_0 : \Sigma^{n_0} \to [r]$

Για $N = n_0 + 1$ επιλέγουμε $n_1 > n_0$ και χρωματισμό $c_1 : \Sigma^{n_1} \to [r]$

$$\vdots$$

Επαγωγικά κατασκευάζουμε άπειρη ακολουθία χρωματισμών $(c_0, c_1, c_2, \dots)$. Για κάθε $i \in \mathbb{N}$ επεκτείνουμε το κάθε $c_i : \Sigma^{n_i} \to [r]$ σε $c'_i : W(\Sigma) \to [r]$ με τρόπο που το c'_i να ταυτίζεται με το c_j στο Σ^{n_j} για κάθε $j < i$, επιλέγουμε χρώματα για τον υπόλοιπο $W(\Sigma)$ αυθαίρετα. Έτσι παίρνουμε την ακολουθία r-χρωματισμών του $W(\Sigma)$ $(c'_0, c'_1, c'_2, \dots)$.

Ισχυρισμός: Υπάρχει υπακολουθία $(c'_{j_i})_{i\in\mathbb{N}}$ και χρωματισμός $c' : W(\Sigma) \to [r]$ ώστε για κάθε λέξη $w \in W(\Sigma)$ η ακολουθία $c'_{j_i}(w)$ είναι τελικά σταθερή και ίση με $c'(w)$.

Απόδειξη ισχυρισμού: Ο χώρος $W(\Sigma)$ είναι αριθμήσιμος γιατί αποτελείται από ακολουθίες με πεπερασμένο μήκος και οι όροι τους παίρνουν πεπερασμένες τιμές. Έτσι έχει τη μορφή $W(\Sigma) = \{w_0, w_1, w_2, \dots\}$. Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να δούμε ένα χρωματισμό $c : W(\Sigma) \to [r]$ ως μια ακολουθία $(c(w_0), c(w_1), c(w_2), \dots)$. Τώρα γυρίζουμε στην ακολουθία χρωματισμών $(c'_0, c'_1, c'_2, \dots)$. Αφού οι τιμές που μπορούν να έχουν τα $c'_i(w_0)$ είναι πεπερασμένες, υπάρχει άπειρο $A_0 \subseteq \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για $i \in A_0$ τα χρώματα $c'_i(w_0)$ να ταυτίζονται. Ομοίως υπάρχει άπειρο $A_1 \subseteq A_0$ τέτοιο ώστε, για $i \in A_1$ τα χρώματα $c'_i(w_1)$ να ταυτίζονται. Συνεχίζουμε επαγωγικά και κατασκευάζουμε φθίνουσα ακολουθία άπειρων $A_i \subseteq \mathbb{N}$. Για να ορίσουμε τη ζητούμενη υπακολουθία $(c'_{j_i})_{i\in\mathbb{N}}$, ξεκινάμε με κάποιο $j_0 \in A_0$, και για $j > 0$ επιλέγουμε j_i τέτοιο ώστε $j_i > j_{i-1}$ και $j_i \in A_i$. Για να ορίσουμε τον χρωματισμό $c' : W(\Sigma) \to [r]$, θεωρούμε μια τυχαία λέξη $w = w_m \in W(\Sigma)$ για κάποιο $m \in \mathbb{N}$. Αφού η ακολουθία είναι φθίνουσα, τα $c'_{j_i}(w)$ για $i \geq m$ έχουν μια κοινή τιμή έστω $p_m \in [r]$, θέτουμε $c'(w) = p_m$.

Έτσι από τον ισχυρισμό παίρνουμε κατάλληλη υπακολουθία r-χρωματισμών $(c'_{j_i})_{i\in\mathbb{N}}$ και $c' : W(\Sigma) \to [r]$. Επιλέγουμε μια ακολουθία μεταβλητών λέξεων $\vec{w}$ τέτοια ώστε w_0 να έχει μήκος n_{j_0} και για $i > 0$ η w_i να έχει μήκος $n_{j_i} - n_{j_{i-1}}$. Για τον χρωματισμό c' του $W(\Sigma)$, ένα τυχαίο χρωματισμό του $W(\Sigma; v)$ και την ακολουθία $\vec{w}$ εφαρμόζουμε το 7.4 και παίρνουμε μείωση $\vec{t} \in VR_\omega[\vec{w}]$ τέτοια ώστε $CR[\vec{t}]$ μονοχρωματικό. Χρησιμοποιούμε μόνο ένα μικρό μέρος της ισχύος του 6.4 και βλέπουμε ότι το σύνολο $\{t_0(a) : a \in \Sigma\}$ είναι μονοχρωματικό κάτω από τον χρωματισμό c'. Ακόμα το t_0 είναι μεταβλητή μειωμένη λέξη της $\vec{w}$, αφού όμως ορίσαμε τα μήκη των w_i τηλεσκοπικά, το μήκος του t_0 είναι n_{j_m} για κάποιο $m \in \mathbb{N}$. Τέλος, επιλέγουμε $i > m$ αρκετά μεγάλο ώστε c'_{j_i} να ταυτίζεται με το c' στο σύνολο $\Sigma^{n_{j_m}}$. Δηλαδή $\{t_0(a) : a \in \Sigma\}$ είναι μονοχρωματικό κάτω από το χρωματισμό c'_{j_i}. Αφού $j_i > j_m$ ο περιορισμός του c'_{j_i} στο $\Sigma^{n_{j_m}}$ ταυτίζεται με το c_{j_m}, άρα το $\{t_0(a) : a \in \Sigma\}$ είναι μονοχρωματικό κάτω από τον c_{j_m}, άτοπο.

Τώρα θα παρουσιάσουμε μια πεπερασμένη εκδοχή του θεωρήματος Carlson αλλά πρώτα θα χρειαστούμε κάποιους ορισμούς.

Για κάθε $(s_i)_{i=0}^{N-1} \in W(\Sigma; v)^N$ και $w \in G$ με Domain$(w) = \{p_0, p_1, \ldots, p_m\}$, $0 \le p_0 < p_1 < \cdots < p_m < N$ έχουμε

$$(s_i)_{i=0}^{N-1}[w] = s_{p_0}(w(p_0)) * s_{p_1}(w(p_1)) * \cdots * s_{p_m}(w(p_m))$$

$$VE[(s_i)_{i=0}^{N-1}] = \{(s_i)_{i=0}^{N-1}[w] : w \in V \text{ και } \mathrm{maxDomain}(w) < N\}$$

και θα λέμε μια $(t_i)_{i=0}^{d-1} \in W(\Sigma; v)^d$ ακολουθία αποσπόμενων λέξεων της $(s_i)_{i=0}^{N-1} \in W(\Sigma; v)^N$ αν

$$(t_0, t_1, \ldots, t_{d-1}) = ((s_i)_{i=0}^{N-1}[w_0], (s_i)_{i=0}^{N-1}[w_1], \ldots, (s_i)_{i=0}^{N-1}[w_{d-1}])$$

για $(w_i)_{i=0}^{d-1} \in W(\Sigma; v)^d$ με maxDomain$(w_{d-1}) < N$.

Θεώρημα 7.15 *Για κάθε ζεύγος θετικών ακεραίων d, r υπάρχει $d \le N \in \mathbb{N}^*$ με την εξής ιδιότητα. Για κάθε $(s_i)_{i=0}^{N-1} \in W(\Sigma; v)^N$ και κάθε r-χρωματισμό του $VE[(s_i)_{i=0}^{N-1}]$ υπάρχει ακολουθία αποσπόμενων λέξεων $(t_i)_{i=0}^{d-1}$ της $(s_i)_{i=0}^{N-1}$ τέτοια ώστε το σύνολο $VE[(t_i)_{i=0}^{d-1}]$ να είναι μονοχρωματικό.*

Απόδειξη: Έστω εις άτοπο ότι δεν ισχύει. Τότε για κάθε $n \ge d$ υπάρχει $(s_{n,i})_{i=0}^{n-1} \in W(\Sigma; v)^n$ και r-χρωματισμός $c_n : VE[(s_{n,i})_{i=0}^{n-1}] \to [r]$ τέτοιος ώστε για κάθε ακολουθία αποσπόμενων λέξεων $(t_i)_{i=0}^{d-1}$ της $(s_{n,i})_{i=0}^{n-1}$ το σύνολο $VE[(t_i)_{i=0}^{n-1}]$ δεν είναι μονοχρωματικό.

Τώρα θεωρούμε $\vec{w} \in [W(\Sigma; v])]^\omega$ τέτοια ώστε τα μήκη των λέξεων να έχουν αύξουσα σειρά. Για κάθε χρωματισμό $c_n : VE[(s_{n,i})_{i=0}^{n-1}] \to [r]$ ορίζουμε χρωματισμό $c'_n : VE[(w_i)_{i=0}^{n-1}] \to [r]$ με τον εξής τρόπο. Έστω $x \in VE[(w_i)_{i=0}^{n-1}]$, επειδή οι λέξεις της $\vec{w}$ έχουν αύξουσα σειρά μηκών $x = (w_i)_{i=0}^{n-1}[y]$ για μοναδικό $y \in V$ με maxDomain$(y) < n$. Τώρα θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g : VE[(w_i)_{i=0}^{n-1}] \to VE[(s_{n,i})_{i=0}^{n-1}]$$

Με τη g^{-1} ορίζουμε το χρωματισμό c'_n. Παρατηρούμε ότι από την επιλογή της $(s_{n,i})_{i=0}^{n-1}$, θα έχουμε ότι για κάθε ακολουθία αποσπόμενων λέξεων $(t_i)_{i=0}^{d-1}$ της $(w_i)_{i=0}^{n-1}$ το σύνολο $VE[(t_i)_{i=0}^{n-1}]$ δεν είναι μονοχρωματικό κάτω από το c'_n.

Επεκτείνουμε αυθαίρετα τους χρωματισμούς c'_n σε $c''_n : W(\Sigma; v) \to [r]$ και παίρνουμε ακολουθία r-χρωματισμών του $W(\Sigma; v)$ $(c''_d, c''_{d+1}, c''_{d+2}, \ldots)$. Όμοια με τον ισχυρισμό που δείξαμε στο 7.14 έχουμε το εξής. Υπάρχει υπακολουθία $(c''_{j_n})_{n=d}^{\infty}$ και χρωματισμός $c'' : W(\Sigma; v) \to [r]$ ώστε για κάθε $w \in W(\Sigma; v)$ η ακολουθία $c''_{j_n}(w)$ είναι τελικά σταθερή και ίση με $c''(w)$.

Τώρα εφαρμόζουμε το Θεώρημα Carlson για $\vec{w}, c''$ και παίρνουμε $\vec{u} \in VE_\omega[\vec{w}]$ τέτοια ώστε $VE[\vec{u}]$ μονοχρωματικό. Χρησιμοποιόντας ένα μικρό κομμάτι από το θεώρημα έχουμε ότι $VE[(u_i)_{i=0}^{d-1}]$ είναι μονοχρωματικό κάτω από το c''.

Έστω N_1 να είναι ο μεγαλύτερος από τους δείκτες των w_i που χρησιμοποιήσαμε για να πάρουμε την $(u_i)_{i=0}^{d-1}$. Το σύνολο $VE[(u_i)_{i=0}^{d-1}]$ είναι πεπερασμένο, οπότε μπορούμε να βρούμε N_2 από τον οποίο και μετά η ακολουθία c''_{j_n} σταθεροποιείται στο $VE[(u_i)_{i=0}^{d-1}]$. Τέλος θέτουμε $N =$max$\{N_1 + 1, N_2\}$ και έχουμε $(u_i)_{i=0}^{d-1} \in VE(w_i)_{i=0}^{N-1}$ και ότι το σύνολο $VE[(u_i)_{i=0}^{d-1}]$ είναι μονοχρωματικό κάτω από το c''_{j_N}. Εξ'ορισμού ο περιορισμός του c''_{j_N} στο $VE(w_i)_{i=0}^{N-1}$ είναι ο c'_{j_N} και άρα $VE[(u_i)_{i=0}^{d-1}]$ είναι μονοχρωματικό κάτω από το c'_{j_N}, άτοπο.

Με αντίστοιχους ορισμούς για πεπερασμένες ακολουθίες γενικευμένων λέξεων μπορούμε να πάρουμε την πεπερασμένη εκδοχή του 4.1.

Θεώρημα 7.16 *Για κάθε ζεύγος θετικών ακεραίων d, r υπάρχει $d \leq N \in \mathbb{N}^*$ με την εξής ιδιότητα. Για κάθε $(s_i)_{i=0}^{N-1} \in [V]^N$ και κάθε r-χρωματισμό του $E[(s_i)_{i=0}^{N-1}]$ υπάρχει ακολουθία αποσπόμενων γενικευμένων λέξεων $(t_i)_{i=0}^{d-1}$ της $(s_i)_{i=0}^{N-1}$ τέτοια ώστε τα σύνολα $VE[(t_i)_{i=0}^{d-1}]$ και $CE[(t_i)_{i=0}^{d-1}]$ να είναι μονοχρωματικά.*

Απόδειξη: Εργαζόμαστε με τον ίδιο τρόπο, με την μόνη διαφορά ότι τώρα δεν χρειάζεται να πάρουμε κάποιο περιορισμό για την ακολουθία $\vec{w} \in [V]^\omega$. Αφού η $\vec{w}$ είναι τμηματική, κάθε αποσπόμενη λέξη $x \in VE[(w_i)_{i=0}^{n-1}]$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως $(w_i)_{i=0}^{n-1}[y]$ για μοναδικό $y \in V$ με $\mathrm{maxDomain}(y) < n$.

8 Παράρτημα Α: Υπερφίλτρα

Ορισμός 8.1 *Έστω X ένα μη κενό σύνολο. Ένα υπερφίλτρο του X είναι ένα σύνολο υποσυνόλων του X, έστω α που ικανοποιεί:*
1. $\emptyset \notin \alpha$
2. Αν $A \in \alpha$ και $A \subseteq B \subseteq X$ τότε $B \in \alpha$
3.Αν $A, B \in \alpha$, τότε $A \cap B \in \alpha$
4.Για κάθε $A \subseteq X$, $A \in \alpha$ ή $X \setminus A \in \alpha$

Πρόταση 8.2 *Ένα σύνολο υποσυνόλων του X είναι ένα υπερφίλτρο του X ανν είναι ένα μεγιστικό στοιχείο της οικογένειας*

$$\{\beta \subseteq P(X) : \beta \text{ έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής}\}$$

Συμβολίζουμε το σύνολο όλων των υπερφίλρων του X με βX.

Φανταζόμαστε ότι τα σύνολα που ανήκουν σε ένα υπερφίλτρο α είναι τα "μεγάλα" υποσύνολα του X ως προς το α και αυτά που δεν ανήκουν είναι τα "μικρά" ως προς το α. Δηλαδή κάθε υπερφίλτρο είναι κάτι σαν μέτρο του X. Με αυτή την οπτική ορίζουμε τον παρακάτω ποσοδείκτη.

Ορισμός 8.3 *Έστω $\alpha \in \beta X$, ορίζουμε τον ποσοδείκτη (αx) έτσι ώστε για κάθε πρόταση $P(x)$ να ισχύει:*

$$(\alpha x)P(x) \Leftrightarrow \{x \in X : P(x)\} \in \alpha$$

Αυτός μεταφράζεται "α-σχεδόν πάντα ισχύει P(x)"

Παρατηρούμε ότι ο ποσοδείκτης (αx) περιγράφει πλήρως το υπερφίλτρο α γιατί για κάθε $A \subseteq X \quad A \in \alpha \Leftrightarrow (\alpha x)(x \in A)$.
Ακόμα ο ποσοδείκτης είναι συμβατός με τους λογικούς συνδέσμους:
1. $\neg(\alpha x)P(x) \Leftrightarrow (\alpha x)(\neg P(x))$
2. $(\alpha x)(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow (\alpha x)P(x) \wedge (\alpha x)Q(x)$
Ως συνέπεια είναι συμβατός με όλους τους λογικούς συνδέσμους ($\vee, \Rightarrow$ κλπ.)

Από την άλλη, αν ορίσουμε έναν ποσοδείκτη που είναι συμβατός με την άρνηση και την σύζευξη, περιγράφει ένα υπερφίλτρο.

Θεώρημα 8.4 *Η οικογένεια $\{\overline{A} : A \subseteq X\}$ όπου $\overline{A} = \{\alpha \in \beta X : A \in \alpha\}$, είναι μια τοπολογική βάση στον χώρο βX και δημιουργεί συμπαγή και Hausdorff τοπολογία, στην οποία τα σύνολα $\widehat{A}$ είναι κλειστά και ανοικτά.*

Αυτή η τοπολογία βασίζεται στην φυσιολογική τοπολογία που μπορούμε να δώσουμε σε ένα δυναμοσύνολο. Δηλαδή θα εφοδιάσουμε το $P(P(X))$ με κάποια τοπολογία, ο βX ως υποσύνολό του θα κληρονομήσει την σχετική τοπολογία. Μένει για κάποιο μη κενό σύνολο Y να ορίσουμε την τοπολογία του $P(Y)$. Αντιστοιχίζουμε τον $P(Y)$ με τον χώρο γινόμενο $\prod_{y \in Y}\{0,1\}$ με την παρακάτω συνάρτηση

$$f : P(Y) \to \prod_{y \in Y}\{0,1\}$$

$$f(A) = \{x_y\}_{y \in Y} \text{ τ.ω. } x_y = \begin{cases} 1 & \text{αν } y \in A \\ 0 & \text{αν } y \notin A \end{cases}$$

Έυκολα παρατηρούμε ότι η f είναι ένα προς ένα και επί.
Εφοδιάζουμε τον χώρο $\{0,1\}$ με την διακριτή τοπολογία $\mathcal{D}$ και τον $\prod_{y \in Y}\{0,1\}$

με την αντίστοιχη τοπολογία γινόμενο, της οποίας τα βασικά σύνολα είναι ανοικτά και κλειστά και έχουν την μορφή

$$\prod_{y \in F} D_y \times \prod_{y \in Y \setminus F} \{0,1\}$$

με $F \subset Y$ πεπερασμένο και $D_y \in \mathcal{D}$.
Ο χώρος $\{0,1\}$ με την διακριτή τοπολογία είναι συμπαγής και Hausdorff, άρα ο $\prod_{y \in Y} \{0,1\}$ με την τοπολογία γινόμενο είναι επίσης συμπαγής και Hausdorff.
Αν όπου $Y = P(X)$ το παραπάνω μας δίνει μία συμπαγή, Hausdorff τοπολογία για το $P(P(X))$. Το βX ως κλειστό υποσύνολο του $P(P(X))$, με τη σχετική τοπολογία είναι συμπαγές και Hausdorff. Επίσης τα βασικά σύνολα στην σχετική τοπολογία του βX είναι ανοικτά και κλειστά και παίρνουν την μορφή

$$\overline{A} = \{\alpha \in \beta X : A \in \alpha\} \text{ για } A \subseteq X$$

Πρόταση 8.5 *Το σύνολο X εμφυτεύεται πυκνά στον βX με την συνάρτηση $\beta : X \to \beta X$, $\beta x = \{A \subseteq X : x \in A\}$*

Μέσω αυτής της αντιστοιχίας θα αντιμετωπίζουμε τον χώρο X ως υποσύνολο του βX. Παρατηρούμε ότι $A \subseteq X$ είναι πυκνό υποσύνολο του $\overline{A}$, το οποίο είναι κλειστό. Δηλαδή η κλειστότητα του A στον χώρο βX ταυτίζεται με το βασικό σύνολο $\overline{A}$, έτσι δικαιολογείται και το σύμβολο της κλειστότητας.

Πρόταση 8.6 *Έστω X, Y μη κενά σύνολα, και $f : X \to Y$. Υπάρχει μοναδική συνεχής επέκταση $\beta f : \beta X \to \beta Y$ με $\beta f(\alpha) = \{B \subseteq Y : f^{-1}(B) \in \alpha\}$*
Ισοδύναμα η συνάρτηση βf μπορεί να περιγραφεί από τον ποσοδείκτη:
$(\beta f(\alpha)x')P(x') \Leftrightarrow (\alpha x)P(f(x))$

Θα γράφουμε f για την βf γιατί το πεδίο ορισμού θα είναι προφανές.

9 Παράρτημα Β: Συμπαγείς δεξιά-τοπολογικές ημιομάδες

Ορισμός 9.1 *Μία τριάδα $(S, *, \mathcal{T})$ όπου X σύνολο, $*$ πράξη και $\mathcal{T}$ τοπολογία του S, θα λέγεται συμπαγής δεξιά-τοπολογική ημιομάδα αν:*
1. $\mathcal{T}$ είναι συμπαγής και Hausdorff (συμπαγής)
2. Για κάθε $\beta \in A$, οι συναρτήσεις $\alpha \mapsto \alpha * \beta$ είναι συνεχείς (δεξιά-τοπολογική)
3. Η πράξη $*$ είναι προσεταιριστική (ημιομάδα)

Ορισμός 9.2 *Αν S είναι μια ημιομάδα και $\varnothing \neq I \subseteq S$*
1. I είναι αριστερό ιδεώδες αν $X * I \subseteq I$.
2. I είναι δεξί ιδεώδες αν $I * X \subseteq I$.
3. I είναι ιδεώδες αν είναι αριστερό και δεξί ιδεώδες.
4. I είναι υποημιομάδα αν είναι κλειστό στην πράξη.

Ένα αριστερό ιδεώδες του S ονομάζεται ελαχιστικό αν είναι ελαχιστικό κάτω από την διάταξη " $\subseteq$ " των αριστερών ιδεωδών. Ισοδύναμα είναι ένα αριστερό ιδεώδες του οποίου κανένα υποσύνολο δεν είναι αριστερό ιδεώδες. Ομοίως θα λέμε μια υποημιομάδα του S ελαχιστική.

Λήμμα 9.3 *Αν S ημιομάδα και $L \subseteq S$ είναι αριστερό ιδεώδες τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*
1) L είναι ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες.
2) Για κάθε $\alpha \in L \quad L * \alpha = L$.
3) Για κάθε $\alpha \in L \quad S * \alpha = L$.

Απόδειξη:
1) $\Rightarrow$ 2) $\quad L * \alpha \subseteq L$ αφού L είναι αριστερό ιδεώδες και εύκολα βλέπουμε ότι $L * \alpha$ είναι αριστερό ιδεώδες. Αφού L είναι ελαχιστικό $L = L * \alpha$.
2) $\Rightarrow$ 3) $\quad$ Για $\alpha \in L$ έχουμε $L * \alpha \subseteq S * \alpha \subseteq L$ επειδή L είναι αριστερό ιδεώδες. Από 2) έχουμε $L * \alpha = L$ άρα $S * \alpha = L$.
3) $\Rightarrow$ 1) $\quad$ Έστω αριστερό ιδεώδες $L' \subseteq L$, θέλουμε να δείξουμε ότι $L \subseteq L'$. Επιλέγουμε τυχαίο $\alpha \in L'$, τότε $\alpha \in L$ και από υπόθεση $L = S * \alpha$. Όμως L' είναι αριστερό ιδεώδες άρα $S * \alpha \subseteq S * L' \subseteq L'$. Τελικά $L \subseteq S * \alpha \subseteq L'$ άρα L ελαχιστικό.

Λήμμα 9.4 *Αν S είναι μια ημιομάδα, $L \subseteq S$ είναι ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες και $I \subseteq S$ είναι ιδεώδες τότε $L \subseteq I$.*

Αποδειξη: $L' = L \cap I$ είναι μη κενό γιατί για $i \in I$ και $l \in L \quad il \in L \cap I$. Ακόμα είναι αριστερό ιδεώδες ως τομή αριστερών ιδεωδών και $L' \subseteq L$. Αφού L ελαχιστικό, $L \cap I = L' = L$, άρα $L \subseteq I$.

Βέβαια δεν υπάρχουν σε όλες τις ημιομάδες ελαχιστικά αριστερά ιδεώδη π.χ. στον χώρο $(\mathbb{N}, +)$, όμως ισχύει για τις συμπαγείς δεξιά-τοπολογικές ημιομάδες.

Λήμμα 9.5 *Έστω S συμπαγής δεξιά-τοπολογική ημιομάδα. Ισχύουν τα παρακάτω:*
1. Για $\alpha \in X$ το σύνολο $S * \alpha$ είναι κλειστό αριστερό ιδεώδες.
2. Κάθε αριστερό ιδεώδες $I \subseteq S$ περιλαμβάνει ένα κλειστό αριστερό ιδεώδες.
3. Αν L ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες είναι κλειστό.
4. Κάθε αριστερό ιδεώδες $I \subseteq S$ περιλαμβάνει ένα ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες.

Απόδειξη:
1) Εύκολα παρατηρούμε ότι $S * \alpha$ είναι αριστερό ιδεώδες και είναι κλειστό ως συνεχής εικόνα συμπαγούς συνόλου σε Hausdorff χώρο.
2) Επιλέγουμε $\alpha \in I$, το σύνολο $S * \alpha$ είναι ένα κλειστό αριστερό ιδεώδες υποσύνολο του I.

3) Επιλέγουμε $\alpha \in L$, το σύνολο $L*\alpha$ είναι ένα αριστερό ιδεώδες υποσύνολο του I άρα $I = L*\alpha$ και $L*\alpha$ είναι κλειστό.
4)Επιλέγουμε $J \subseteq I$ κλειστό αριστερό ιδεώδες και θεωρούμε την οικογένεια $\mathcal{I} = \{J' \subset J :\ J'$ κλειστό αριστερό ιδεώδες$\}$ εφοδιασμένη με τη διάταξη " $\subseteq$ ". Έστω μια αλυσίδα C της οικογένειας $\mathcal{I}$, αυτή έχει την ιδιότητα πεπερασμένης τομής, κάθε στοιχείο της είναι κλειστό και ο χώρος $(S,+)$ είναι συμπαγής. Έτσι έχουμε ότι η τομή όλης της αλυσίδας είναι μη κενή. Η τομή είναι επίσης ένα αριστερό κλειστό ιδεώδες, άρα ανήκει στο C και φράσει από κάτω κάθε στοιχείο της αλυσίδας. Έτσι, μπορούμε να εφαρμόσουμε το λήμμα του Zorn και να πάρουμε ένα ελαχιστικό $K \in \mathcal{I}$. K είναι ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες και κλειστό σύνολο.

Ορισμός 9.6 *Ένα στοιχείο $\alpha \in X$ λέγεται ταυτοδύναμο αν $\alpha + \alpha = \alpha$.*

Λήμμα 9.7 *Έστω S συμπαγής ημιομάδα, S περιέχει ένα ταυτοδύναμο στοιχείο.*

Απόδειξη: Με παρόμοιο τρόπο εφαρμόζουμε το λήμμα Zorn στο σύνολο $\mathcal{S} = \{S' \subset S :\ S'$ συμπαγής υποημιομάδα της $S\}$ και παίρνουμε ένα ελαχιστικό $M \in \mathcal{S}$. Διαλέγουμε $a \in M$ και από την συνέχεια της πράξης έχουμε ότι $M*\alpha$ είναι συμπαγής υποημιομάδα του M, επίσης M είναι ελαχιστική άρα $M*a = M$. Έτσι $M' = \{a' \in M : \alpha' * \alpha = \alpha\} \neq \emptyset$, παρατηρούμε ότι M' είναι κλειστό ως προς την πράξη, και από την συνέχεια της προκύπτει ότι M' είναι μία συμπαγής υποημιομάδα της M. Τελικά $M' = M \Rightarrow \alpha \in M' \Rightarrow \alpha*\alpha = \alpha$.

Πόρισμα 9.8 *Αν S συμπαγής δεξιά-τοπολογική ημιομάδα και I αριστερό ιδεώδες υπάρχει ταυτοδύναμο στοιχείο $\alpha \in I$.*

Από Λήμμα 4.3 2) υπάρχει $J \subseteq I$ κλειστό αριστερό ιδεώδες. J επίσης είναι μια συμπαγής ημιομάδα άρα από Λήμμα 4.6 υπάρχει ταυτοδύναμο $\alpha \in J \subseteq I$.

Ορισμός 9.9 *Αν S ημιομάδα και $\alpha, \beta \in S$ ταυτοδύναμα στοιχεία, ορίζουμε τη μερική διάταξη:*

$$\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha + \beta = \beta + \alpha = \alpha$$

Λήμμα 9.10 *Έστω S συμπαγής δεξιά-τοπολογική ημιομάδα και ταυτοδύναμο $\alpha \in S$, ισχύουν τα παρακάτω*
1) Αν $L \subseteq S*\alpha$ είναι ένα ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες, τότε υπάρχει ταυτοδύναμο $\beta \in L$ τ.ω. $\beta \leq \alpha$
2) α είναι ταυτοδύναμο ανν $\alpha \in L$ για κάποιο ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες L.
3)Υπάρχει ελαχιστικό ταυτοδύναμο στοιχείο β τ.ω. $\beta \leq \alpha$.

Απόδειξη: 1) Από Πόρισμα 9.8 επιλέγουμε ταυτοδύναμο $\beta \in L$. $\gamma = \alpha*\beta$ και θα δείξουμε ότι είναι το ζητούμενο. Έχουμε $\gamma \in L$ γιατί L είναι αριστερό ιδεώδες και $\beta \in L$, ακόμα $\beta*\alpha = \beta$, πράγματι $\beta \in L \subseteq S*\alpha$, έστω $\beta = s*\alpha$ για $s \in S$ άρα έχουμε $\beta*\alpha = s*\alpha*\alpha = s*a = \beta$.
Με αυτή τη παρατήρηση έχουμε:
$\gamma*\gamma = \alpha*\beta*\alpha*\beta = \alpha*\beta*\beta = \alpha*\beta = \gamma$
$\alpha*\gamma = \alpha*\alpha*\beta = \alpha*\beta = \gamma$
$\gamma*\alpha = \alpha*\beta*\alpha = \alpha*\beta = \gamma$
Άρα γ είναι ταυτοδύναμο και $\gamma \leq \alpha$.
2) " $\Rightarrow$ " Έστω ελαχιστικό ταυτοδύναμο στοιχείο α, το $S*\alpha$ είναι αριστερό ιδεώδες άρα από το Λήμμα 9.5 4) μπορούμε να επιλέξουμε $L \subseteq S*\alpha$ ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες. Από 1) επιλέγουμε $\beta \in L$ τ.ω. $\beta \leq \alpha$ και α είναι ελαχιστικό άρα $\alpha = \beta \in L$.
" $\Leftarrow$ " Έστω ταυτοδύναμο α που ανήκει σε ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες L. Θεωρούμε ταυτοδύναμο $\beta \leq \alpha$, με στόχο να δείξουμε ότι $\beta = \alpha$. Παρατηρούμε ότι $S*\beta \subseteq S*\alpha$ γιατί αν $s \in S \quad s*\beta = s*\beta*\alpha = s'*\alpha$. Ακόμα L ελαχιστικό άρα από Λήμμα 9.3 έχουμε $L = S*\alpha$ και από την τελευταία παρατήρηση

$L = S * \alpha = S * \beta$. Δηλαδή έχουμε ότι $\alpha = s * \beta$ για κάποιο $s \in S$. Τελικά $\beta = \alpha * \beta = s * \beta * \beta = s * \beta = \alpha$.
3) Από Λήμμα 9.5 4) επιλέγουμε ελαχιστικό αριστερό ιδεώδες $L \subseteq S * \alpha$ και από 1) επιλέγουμε $\beta \subseteq L$ τ.ω. $\beta \leq \alpha$. Από 2) το β είναι ελαχιστικό.

10 Παράρτημα Γ: Άπειρα παιχνίδια με Υπερφίλτρα

Σ'αυτή την υποενότητα θα ασχοληθούμε με τη πρόταση

$$(\alpha_0 w_0)(\alpha_1 w_1)(\alpha_2 w_2)\ldots((w_0, w_1, w_2, \ldots) \in A)$$

την οποία θα συμβολίζουμε και $(\alpha\vec{w})\vec{w} \in A$
όπου $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ είναι υπερφίλτρα που ανήκουν στο δG, $(w_0, w_1, w_2, \ldots) \in [G]^\omega$ και $A \subseteq [G]^\omega$. Η πρόταση $(\alpha\vec{w})\vec{w} \in A$ μπορεί να γραφτεί ως

$$\exists A_0 \in \alpha_0, \forall w_0 \in A_0, \exists A_1 \in \alpha_1, \forall w_1 \in A_1, \exists A_2 \in \alpha_2 \ldots((w_0, w_1, w_2, \ldots) \in A)$$

και την αντιμετωπίζουμε ως ένα παιχνίδι άπειρων γύρων ανάμεσα στους παίκτες $\exists$ και $\forall$. Στο n-οστό γύρο του παιχνιδιού ο $\exists$ επιλέγει $A_n \in \alpha_n$ και ο $\forall$ επιλέγει $w_n \in A_n$ με τον περιορισμό ότι για $n > 0$ $\max\mathrm{Domain}(w_{n-1}) < \min\mathrm{Domain}(w_n)$. Τελικά αν $(w_0, w_1, w_2 \ldots) \in A$ νικάει ο $\exists$ αλλιώς νικάει ο $\forall$. Στα παρακάτω θα αγνοήσουμε τον περιορισμό, αφού τα υπερφίλτρα που χρησιμοποιούμε ανήκουν στο δG.

Μια στρατηγική σ για τον παίκτη $\exists$ στο παιχνίδι $(\alpha\vec{w})\vec{w} \in A$ είναι ένας κανόνας με τον οποίο επιλέγει A_{n+1} ανάλογα με το $(w_0, w_1, \ldots, w_n)$ και ομοίως ορίζουμε μια στρατηγική για τον $\forall$ ως ένα κανόνα με τον οποίο επιλέγει w_{n+1} ανάλογα με τα $(w_0, w_1, \ldots, w_n)$ και A_{n+1}. Αν η σ εγγυάται τη νίκη του παίκτη ανεξάρτητα από τις επιλογές του άλλου τότε λέγεται στρατηγική νίκης. Μας ενδιαφέρει η πρόταση $(\alpha\vec{w})\vec{w} \in A$ να είναι καλώς ορισμένη ή ισοδύναμα κάποιος παίκτης από τους δύο να έχει στρατηγική νίκης. Αυτά τα παιχνίδια θα λέγονται προσδιορισμένα.

Πρόταση 10.1 *Το παιχνίδι $(\alpha\vec{w})\vec{w} \in A$ είναι προσδιορισμένο ανν ο $\exists$ έχει στρατηγική νίκης στο $(\alpha\vec{w})\vec{w} \in A$ ή στο $(\alpha\vec{w})\vec{w} \in [G]^\omega \setminus A$*

Απόδειξη: Θα αναφερόμαστε στο παιχνίδι $(\alpha\vec{w})\vec{w} \in A$ ως (1) και στο $(\alpha\vec{w})\vec{w} \in [G]^\omega \setminus A$ ως (2). Αρκεί να δείξουμε ότι:

- Ο $\exists$ έχει στρατηγική νίκης στο (1) ανν ο $\forall$ έχει στρατηγική νίκης στο (2)
- Ο $\forall$ έχει στρατηγική νίκης στο (1) ανν ο $\exists$ έχει στρατηγική νίκης στο (2)

Θα δείξουμε το πρώτο και το δεύτερο προκύπτει με παρόμοιο τρόπο.

Αν ο $\exists$ έχει στρατηγική νίκης σ στο (1), θα βρούμε για τον $\forall$ μια στρατηγική νίκης σ' στο (2). Έστω ότι παίζουμε το παιχνίδι (2), παράλληλα θα παίζουμε ένα βοηθητικό παιχνίδι (1) και ανάλογα με τη στρατηγική σ του $\exists$ θα καθορίζουμε τη στρατηγική σ' του $\forall$ στο (2). Έστω ότι και τα δύο παιχνίδια βρίσκονται στον γύρο n με $s = (w_0, w_1, \ldots, w_{n-1})$. Ο $\exists$ στο (2) επιλέγει $A_n \in \alpha_n$ και $\forall$ πρέπει να επιλέξει $w_n \in \alpha_n$. Στο παιχνίδι (1) ακολουθούμε τη στρατηγική σ και παίρνουμε $A'_n \in \alpha_n$, επειδή τα υπερφίλτρα είναι κλειστά σε πεπερασμένες τομές $A_n \cap A'_n \neq \varnothing$. Επιλέγουμε $w_n \in A_n \cap A'_n$ στο (2) και συνεχίζουμε το βοηθητικό παιχνίδι (1) με τρόπο που ο $\forall$ επιλέγει το w_n. Με τη στρατηγική σ', κάθε ακολουθία $(w_0, w_1, \ldots)$ που παράγεται στο (2) είναι μια ακολουθία που μπορεί να προκύψει στο (1) με τη στρατηγική σ, δηλαδή $(w_0, w_1, \ldots) \in A$. Άρα η σ' είναι στρατηγική νίκης του $\forall$ στο (2).

Τώρα θεωρούμε ότι ο $\forall$ έχει στρατηγική νίκης σ' στο (2). Για να βρούμε τη στρατηγική σ του $\exists$ όμοια θα παίξουμε το παιχνίδι (1) προσομοιόνοντας παράλληλα ένα βοηθητικό παιχνίδι (2) όπου ο $\forall$ ακολουθεί στρατηγική σ'. Έστω ότι και τα δύο παιχνίδια βρίσκονται στο γύρο n με $s = (w_0, w_1, \ldots, w_{n-1})$ και ο $\exists$ πρέπει να επιλέξει κάποιο $A_n \in \alpha_n$. Τώρα θεωρούμε όλες τις δυνατές κινήσεις $A_n \in \alpha_n$ που μπορεί να παίξει ο $\exists$ στο βοηθητικό παιχνίδι (2) και B_n το σύνολο με όλες τις δυνατές απαντήσεις του $\forall$ σύμφωνα με τη σ'. Δηλαδή

$$B_n = \{\sigma'(s, A_n) : A_n \in \alpha_n\}$$

όπου $\sigma'(s, A_n) \in A_n$. Άρα $B_n \cap A_n \neq \varnothing$ για κάθε $A_n \in \alpha_n$, το οποίο συνεπάγεται ότι $B_n \in \alpha_n$. Έτσι, B_n είναι μια νόμιμη κίνηση για τον $\exists$ και την επιλέγουμε στο παιχνίδι (1). Αν ο $\forall$ απαντήσει με $w_n \in B_n$, έχουμε εξ'ορισμού του B_n ότι υπάρχει $A_n \in \alpha_n$ στο οποίο μέσω της στρατηγικής σ' θα απαντούσε με w_n. Έτσι συνεχίζουμε το βοηθητικό παιχνίδι (2) με B_n και w_n. Και πάλι οι ακολουθίες που προκύπτουν με την στρατηγική σ στο (1), μπορούν να προκύψουν και μέσω της στρατηγικής σ' στο (2) άρα η σ είναι στρατηγική νίκης του $\exists$ στο (1).

Μπορούμε να εκφράζουμε τις στρατηγικές του $\exists$ μέσω κάποιων δέντρων.

Ορισμός 10.2 *Ένα α-δέντρο T για το παιχνίδι $(\alpha\vec{w})\vec{w} \in A$ είναι ένα μη κενό υποσύνολο του $G^{<\omega}$ για το οποίο ισχύει*

- *T είναι κλειστό σε αρχικά τμήματα*
- *αν στο στάδιο n του παιχνιδιού έχουμε $s = (w_0, w_1, \dots, w_{n-1}) \in T$ το "σύνολο διακλάδωσης"*

$$T(s) = \{w \in G : s^\frown(w) \in T\}$$

ανήκει στο α_n ή ισοδύναμα $(\alpha_n w)s^\frown(w) \in T$

Θεωρούμε ότι ένα αρχικό τμήμα μπορεί να έχει μήκος 0, άρα κάθε α-δέντρο περιέχει το κενό σύνολο. Ακόμα παρατηρούμε ότι η πεπερασμένη τομή α-δέντρων είναι ένα α-δέντρο.

Μονοπάτι ενός α-δέντρου T θα λέμε μια ακολουθία $(w_0, w_1, \dots) \in [G]^\omega$ της οποίας τα αρχικά τμήματα ανήκουν στο T.

Πρόταση 10.3 *Το παιχνίδι $(\alpha\vec{w})\vec{w} \in A$ είναι προσδιορισμένο ανν υπάρχει α-δέντρο του οποίου όλα τα μονοπάτια ανήκουν στο A ή αν υπάρχει α-δέντρο του οποίου κανένα μονοπάτι δεν ανήκει στο A.*

Απόδειξη: Καταρχάς οι στρατηγικές του $\exists$ στο παιχνίδι $(\alpha\vec{w})\vec{w} \in A$ περιγράφονται από α-δέντρα με τον εξής τρόπο. Αν σ μία στρατηγική του $\exists$ τότε το σύνολο από τα αρχικά τμήματα των $(w_0, w_1, \dots) \in [G]^\omega$ που παράγονται όταν ο $\exists$ ακολουθεί τη σ και ο $\forall$ παίζει αυθαίρετα είναι ένα α-δέντρο T_σ. Αντίστροφα κάθε α-δέντρο T είναι ένα T_σ για μια μοναδική στρατηγική σ, πιο συγκεκριμμένα για αυτή που για κάθε $s \in [G]^\omega$ απαντά με $T(s)$.

Με αυτή την αντιστοιχία, οι ακολουθίες $(w_0, w_1, \dots)$ που παράγονται με μία στρατηγική σ του $\exists$, είναι τα μονοπάτια του α-δέντρου T_σ. Έτσι αν ο $\exists$ έχει στρατηγική νίκης για το παιχνίδι $(\alpha\vec{w})\vec{w} \in A$ τότε υπάρχει δέντρο του οποίου όλα τα μονοπάτια ανήκουν στο A. Αντίστοιχα αν ο $\exists$ έχει στρατηγική νίκης για το $(\alpha\vec{w})\vec{w} \in [G]^\omega \setminus A$ τότε υπάρχει δέντρο του οποίου κανένα μονοπάτι δεν ανήκει στο A. Έτσι το 10.1 παίρνει τη ζητούμενη μορφή.

Επίσης θα χρειαστούμε και τα παιχνίδια που ξεκινούν "από τη μέση". Έτσι για $s \in (w_0, w_1, \dots, w_{n-1})$ το παιχνίδι που ξεκινάει από s είναι

$$(\alpha_n w_n)(\alpha_{n+1} w_{n+1})(\alpha_{n+2} w_{n+2}) \dots (s^\frown(w_n, w_{n+1}, w_{n+2}, \dots) \in A)$$

και το συμβολίζουμε με $(a\vec{w})s^\frown\vec{w} \in A$

Θέτουμε $\mathcal{C}$ να είναι η συλλογή των $A \subseteq [G]^\omega$ για τα οποία τα παιχνίδια $(a\vec{w})\vec{w} \in A$ και $(a\vec{w})s^\frown\vec{w} \in A$ για κάθε $s \in [G]^{<\omega}$ είναι προσδιορισμένα.

Τώρα εφοδιάζουμε τον χώρο G με διακριτή τοπολογία και το G^ω με την αντίστοιχη τοπολογία γινόμενο. Το σύνολο $[G]^\omega$ κληρονομεί την σχετική τοπολογία ως υποσύνολο του G^ω. Ισοδύναμα αυτή προκύπτει από την εξής μετρική. Αν $\vec{w}, \vec{s} \in [G]^\omega$, και j είναι ο μικρότερος δείκτης με $w_j \neq s_j$ τότε οι $\vec{w}$ και $\vec{s}$ έχουν απόσταση 2^{-j}.

Πρόταση 10.4 *Η $\mathcal{C}$ είναι μια Boolean σ-άλγεβρα υποσυνόλων του $[G]^\omega$, περιέχει τα ανοικτά σύνολα και είναι κλειστή κάτω από τη πράξη του Suslin.*

Βιβλιογραφία

[1] V. Bergelson, A. Blass, and N. Hindman. *Partition Theorems for Spaces of Variable Words.* Proceedings of the London Mathematical Society, Volume s3-68, Issue 3, May 1994, 449–476.

[2] A. Blass. *Selective Ultrafilters and Homogeneity.* 1986. Annals of Pure and Applied Logic Volume 38, Issue 3, June 1988, 215-255.

[3] T. J. Carlson. *Some unifying principles in Ramsey theory.* Discr. Math 68, 1988, 117–169.

[4] P. Dodos and V. Kanellopoulos. *Ramsey Theory for Product Spaces.* Mathematical Surveys and Monographs Volume 212, American Mathematical Society, May 2016, 1-15, 61-77.

[5] H. Furstenberg and Y. Katznelson. *Idempotents in compact semigroups and Ramsey theory.* Israel J. Math. 68, 1989, 257–270.

[6] Y. Gurevich. *Games People Play.* "Collected Works of J. Richard Büchi" ed. Saunders Mac Lane and Dirk Siefkes Springer-Verlag, 1990, 517-524.

[7] V. Kanellopoulos. *A proof of W. T. Gowers' c0 theorem.* Proceedings of the American Mathematical Society 132(11), November 2004.