Οριακά θεωρήματα σε τυχαίους πίνακες και το πρόβλημα του Ulam

Χρυστάλλα Καλυφομμάτου

Διπλωματική εργασία

Επιβλέπων καθηγητής: Μιχαήλ Λουλάκης
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Αθήνα, Ιούλιος, 2021

Ευχαριστίες

Θέλω να ευχαριστήσω από καρδιάς τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κύριο Μιχαήλ Λουλάκη, που ήταν διαθέσιμος ανά πάσα στιγμή για συζήτηση και για επίλυση κάθε απορίας. Οφείλω επίσης να ευχαριστήσω και τα υπόλοιπα μέλη της τριμελούς επιτροπής - τους καθηγητές Βασίλη Παπανικολάου και Χρήστο Κουκουβίνο. Πολλοί καθηγητές υπήρξαν κατά τη διάρκεια των σπουδών μου καθοδηγητές και φυσικά εξαίρετοι μαθηματικοί. Ιδιαιτέρως θα αναφέρω τον κύριο Βασίλη Παπανικολάου, ο οποίος υπήρξε σημαντικός παράγοντας που με οδήγησε στην επιλογή μιας διπλωματικής στον τομέα της θεωρίας πιθανοτήτων. Τέλος, ευχαριστώ τον Φοίβο Ευαγγελόπουλο που υπήρξε ένας από τους συμφοιτητές με τους οποίους οι συζητήσεις και οι διερευνήσεις διαφόρων τομέων των μαθηματικών εμπλούτισαν τις γνώσεις μου και διεύρυναν τους ορίζοντες της περιέργειάς μου.

Στην πολυαγαπημένη μου μητέρα, τη Χριστίνα.

Περίληψη

Σε αυτή την εργασία πραγματευόμαστε οριακά θεωρήματα σε τυχαίους πίνακες. Συγκεκριμένα, θα εξάγουμε τον νόμο ημικυκλίου του Wigner και τον νόμο του Marchenko-Pastur. Στην συνέχεια θα εξάγουμε την κατανομή Tracy-Widom που περιγράφει την ασυμπτωτική συμπεριφορά της μέγιστης ιδιοτιμής ενός πίνακα GUE. Στο τέλος, θα θίξουμε την καθολικότητα της κατανομής αυτής, και θα δούμε συγκεκριμένα την εμφάνισή της στο πρόβλημα της μέγιστης αύξουσας υπακολουθίας - το πρόβλημα του Ulam.

Λέξεις/φράσεις κλειδιά: Τυχαίοι πίνακες, ιδιοτιμές, οριακά θεωρήματα, πίνακες Wigner, νόμος ημικυκλίου του Wigner, κατανομή ημικυκλίου, πίνακες Wishart, νόμος Marchenko-Pastur, steepest descent, κατανομή Tracy-Widom, το πρόβλημα του Ulam.

Abstract

In this project we deal with limit theorems in random matrices. In particular, we deduce Wigner's semicircle law and the Marchenko-Pastur distribution. Subsequently, we deduce the Tracy-Widom distribution which describes the asymptotic behavior of the largest eigenvalue of a GUE matrix. Finally, we hint at the universality of said distribution, by connecting it with the problem of the longest increasing subsequence - Ulam's problem.

Key words/phrases: Random matrices, eigenvalues, limit theorems, Wigner matrices, Wigner semicircle law, semicircle distribution, Wishart matrices, Marchenko-Pastur law, steepest descent, Tracy-Widom distribution, Ulam's problem.

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή **7**

2 Νόμος ημικυκλίου του Wigner **9**
2.1 Εισαγωγή 9
2.2 Μέτρα - Ροπές 13
2.3 Συνδυαστική αναπαράσταση ροπών 16
2.3.1 Γραφική αναπαράσταση 17
2.4 Σύγκλιση ροπών 19
2.4.1 Catalan - Ταιριάσματα - Μη διασταυρωμένα ταιριάσματα 19
2.4.2 Εύρεση οριακών ροπών 20
2.4.3 Κατανομή ημικυκλίου 22
2.5 Σχέση ροπών των μέτρων $\mu_{A_N}, \bar{\mu}_N$ 26
2.6 Σύγκλιση κατά πιθανότητα 29
2.7 Σχεδόν βέβαιη σύγκλιση 31
2.8 Περίπτωση κανονικής κατανομής 32

3 Marchenko-Pastur **41**
3.1 Σύγκλιση ροπών 41

4 Κατανομή Tracy Widom **52**
4.1 GUE 52
4.2 Πυρήνες-Ορίζουσα Fredholm 54
4.3 Πολυώνυμα-Συναρτήσεις-Πυρήνας Hermite 56
4.4 Επανεπίσκεψη του νόμου ημικυκλίου του Wigner 64
4.5 Ασυμπτωτική συμπεριφορά στα άκρα: η μέγιστη ιδιοτιμή του GUE 66
4.6 Πυρήνας Airy και ύπαρξη ορίου 70
4.7 Σύνδεση F_2 με εξίσωση Painlevé II 82

5 Το πρόβλημα του Ulam **90**
5.1 Παιχνίδι καρτών για την LIS 92
5.2 Αντιστοίχιση Robinson-Schensted 93
5.3 Μη τετμημένα μονοπάτια 97
5.4 Poissonization - Depoissonization 99
5.5 Θεωρία Riemann-Hilbert 103
5.5.1 Πρόβλημα RH για το πρόβλημα του Ulam 106
5.5.2 Πρόβλημα RH για την PII 108

5.6 Μέτρο ισορροπίας 114
5.7 $0 \leq \gamma \leq 1$ 122
5.8 $\gamma > 1$ 134
5.9 Ασυμπτωτική ανάλυση του $\varphi_n(\lambda)$ καθώς $n \to +\infty$. 151
5.10 Αποδείξεις των κυρίων θεωρημάτων 159

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Η εργασία αυτή είναι χωρισμένη σε τρεις βασικούς άξονες.

Α) Σε πρώτη φάση ασχολούμαστε με οριακά φασματικά θεωρήματα για δύο είδη τυχαίων πινάκων: τους πίνακες Wigner και Wishart. Για αυτά τα δύο είδη πινάκων ορίζουμε αντίστοιχα τυχαία εμπειρικά φασματικά μέτρα στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, που για κάθε πίνακα μετρούν σε κάποιο $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ το κανονικοποιημένο πλήθος των ιδιοτιμών μέσα στο B. Δείχνουμε ότι όσο η διάσταση των πινάκων αυτών των ειδών μεγαλώνει, οι τυχαίες εμπειρικές φασματικές κατανομές συγκλίνουν με κατάλληλη κανονικοποίηση σχεδόν βεβαίως σε κάποιες αντίστοιχες ντετερμινιστικές κατανομές. Δίνονται με διακριτά μαθηματικά μια απόδειξη για γενικούς πίνακες Wigner και μια για πίνακες Wishart, όπως επίσης και μια απόδειξη με εργαλεία από την ανάλυση για πίνακες Wigner με στοιχεία που προέρχονται από την μιγαδική τυπική κανονική κατανομή (GUE).

Β) Στο δεύτερο κομμάτι μελετάμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά της μέγιστης ιδιοτιμής ενός GUE, $\lambda_{max}^{(N)}$. Αναπτύσσουμε πρώτα τα κατάλληλα εργαλεία που χρειάζονται για αυτό (πυρήνες, πολυώνυμα και συναρτήσεις Hermite κ.ο.κ). Δείχνουμε ότι η μέγιστη ιδιοτιμή καταλλήλως κανονικοποιημένη $(\tilde{\lambda}_{max}^{(N)})$ συγκλίνει σχεδόν βεβαίως στο 2, και ψάχνουμε να βρούμε κάποιον νόμο αντίστοιχο με αυτόν των μεγάλων αριθμών για να απαντήσουμε στο εξής: Με τι πρέπει να πολλαπλασιάσουμε το $\tilde{\lambda}_{max}^{(N)} - 2$ ώστε να δούμε οριακά κάποια μη τετριμμένη κατανομή ανεξάρτητη της διάστασης του πίνακα, N; Πιο αυστηρά, ποιες είναι οι τυπικές αποκλίσεις της $(\tilde{\lambda}_{max}^{(N)})$; Αφού απαντηθεί το ερώτημα αυτό, βρίσκουμε το αντίστοιχο όριο, που σχετίζεται με την διαφορική εξίσωση Painlevé II (PII) και στην συνέχεια αποδεικνύουμε ότι αυτό είναι κατανομή. Ονομάζουμε την κατανομή αυτή Tracy - Widom (F_2).

Γ) Στο τρίτο και τελευταίο κομμάτι θίγουμε την καθολικότητα της κατανομής F_2. Δείχνουμε ότι, κατά έναν εξαιρετικά ενδιαφέροντα τρόπο, μπορεί η κατανομή αυτή να χρησιμοποιηθεί για να λύσει το πρόβλημα του Ulam, που είναι το πρώτο πρόβλημα εκτός του τομέα των τυχαίων

πινάκων στο οποίο εμφανίστηκε η F_2. Στη συνέχεια η κατανομή αυτή χρησιμοποιήθηκε και σε άλλα προβλημάτα (βλέπε Aztec diamond, growth processes), αν και δε θα δούμε κάτι για αυτά σε αυτήν την εργασία. Η εκτίμηση είναι ότι η TW είναι μια καθολική κατανομή αντίστοιχη της κανονικής, που περιγράφει οριακές συμπεριφορές προβλημάτων με τυχαίες μεταβλητές που έχουν κάποιου είδους εξάρτηση, χωρίς να ξέρουμε ποια ακριβώς είναι αυτή. Στο τελευταίο λοιπόν κομμάτι της διπλωματικής, ασχολούμαστε με την ασυμπτωτική συμπεριφορά του μήκους της μέγιστης αύξουσας υπακολουθίας, και δείχνουμε ότι αυτό σχετίζεται άμεσα με την F_2. Για να το δείξουμε αυτό, σχετίζουμε τη μέγιστη αύξουσα υπακολουθία με τα τυπικά Tableau Young, και με βάση αυτά, μεταφράζουμε το πρόβλημά μας στην γλώσσα της θεωρίας Riemann-Hilbert. Κατασκευάζουμε ένα πρόβλημα RH που να μας δίνει το όριο που ψάχνουμε και ένα πρόβλημα RH που να σχετίζεται με την Painlevé II. Με διαδοχικούς μετασχηματισμούς του πρώτου, και με χρήση λογικής steepest descent, δείχνουμε ότι κατά κάποιο τρόπο τα προβλήματα αυτά είναι οριακά κοντά, και έτσι προκύπτει η σύνδεση του προβλήματος με την F_2.

Κεφάλαιο 2

Νόμος ημικυκλίου του Wigner

2.1 Εισαγωγή

Ορισμός 2.1.1. Έστω μ κατανομή στον $\mathbb{R}$ με υπάρχουσες πεπερασμένες ροπές κάθε τάξης τ.ω. $\mathbb{E}_\mu[X] = 0, \mathbb{E}_\mu[X^2] = 1$ και έστω $A = (a_{ij})_{i,j=1}^N \in \mathbb{R}^{N\times N}$ τ.ω.:

- $\{a_{ij} : i \geq j\}$ ανεξάρτητες τ.μ.
- $a_{ij} \sim \mu \;\; \forall\, i, j \in \{1, ..., N\} : i \geq j$
- $a_{ij} = a_{ji} \;\; \forall\, i, j \in \{1, ..., N\}$

Ένας τυχαίος πίνακας Wigner είναι ένας πίνακας της μορφής $A_N = \frac{1}{\sqrt{N}} A$ για κάποια A και μ όπως πιο πάνω.

Παρατήρηση 2.1.1. (i) Η τρίτη συνθήκη μας εξασφαλίζει ότι ο πίνακας είναι συμμετρικός και άρα οι ιδιοτιμές του είναι πραγματικές.

(ii) Η κανονικοποίηση του πίνακα με $1/\sqrt{N}$ εξηγείται από το ότι αποδεικνύεται πως η νόρμα του πίνακα (μέγιστη κατά απόλυτη τιμή ιδιοτιμή) είναι $O(\sqrt{N})$, και άρα με τη διαίρεση η νόρμα είναι $O(1)$. Θα εξηγήσουμε καλύτερα πιο κάτω πως αυτή η κανονικοποίηση είναι αναγκαία συνθήκη (Παρατήρηση 2.2.3), και καταλήγει να είναι και ικανή.

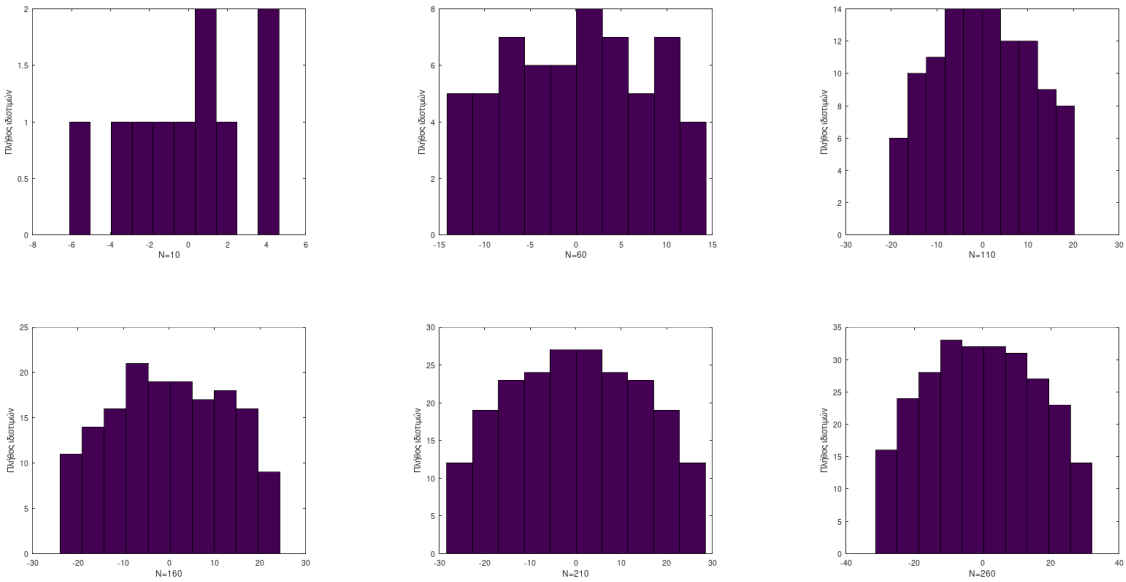
Θέλουμε να μελετήσουμε τις ιδιοτιμές ενός τέτοιου πίνακα και την ασυμπτωτική τους συμπεριφορά όταν η διάσταση μεγαλώνει αυθαίρετα, δηλαδή $N \to +\infty$.

Σκοπός: Θα δείξουμε ότι ασυμπτωτικά σε τυχαίους πίνακες Wigner οι ιδιοτιμές κατανέμονται μέσα σε ένα ημικύκλιο.

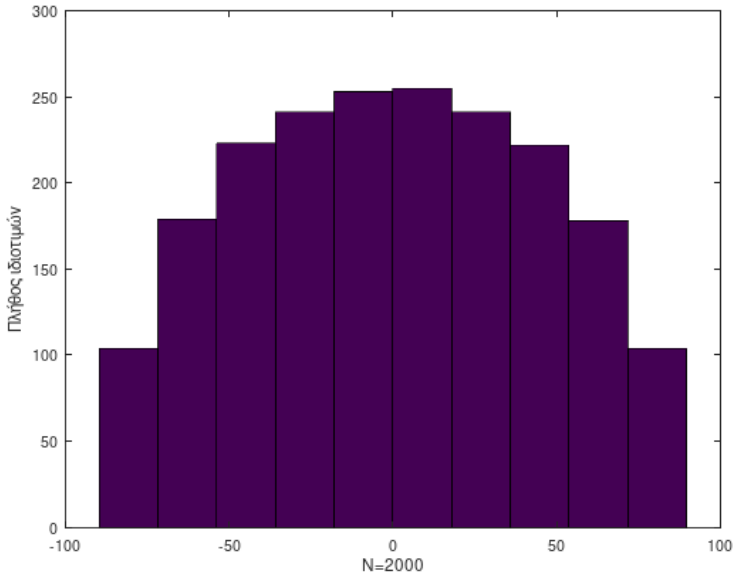
Στην επόμενη σελίδα έχουμε ένα τυχαίο πείραμα: Για δύο διαφορετικές - συμβατές με τον πιο πάνω ορισμό - κατανομές φαίνονται με αύξουσα ως προς την διάσταση N σειρά τα ιστογράμματα που μετράνε το πλήθος των ιδιοτιμών τυχαίου πίνακα με την αντίστοιχη κατανομή.

Αυτό είναι χωρίς την κανονικοποίηση του πίνακα με τον όρο $1/\sqrt{N}$. Βλέπουμε ότι αρκετά σύντομα οι κατανομές μπαίνουν σε ένα 'ημικύκλιο' του οποίου οι διαστάσεις εξαρτώνται φυσικά από το N. Βλέπουμε επίσης ένα ιστόγραμμα στο οποίο η διάσταση του πίνακα είναι αρκετά μεγάλη για να φαίνεται η ασυμπτωτική συμπεριφορά. Με την κανονικοποίηση που κάνουμε, θα δείξουμε ότι το οριακό ημικύκλιο είναι συγκεκριμένο, με διαστάσεις ανεξάρτητες του N.

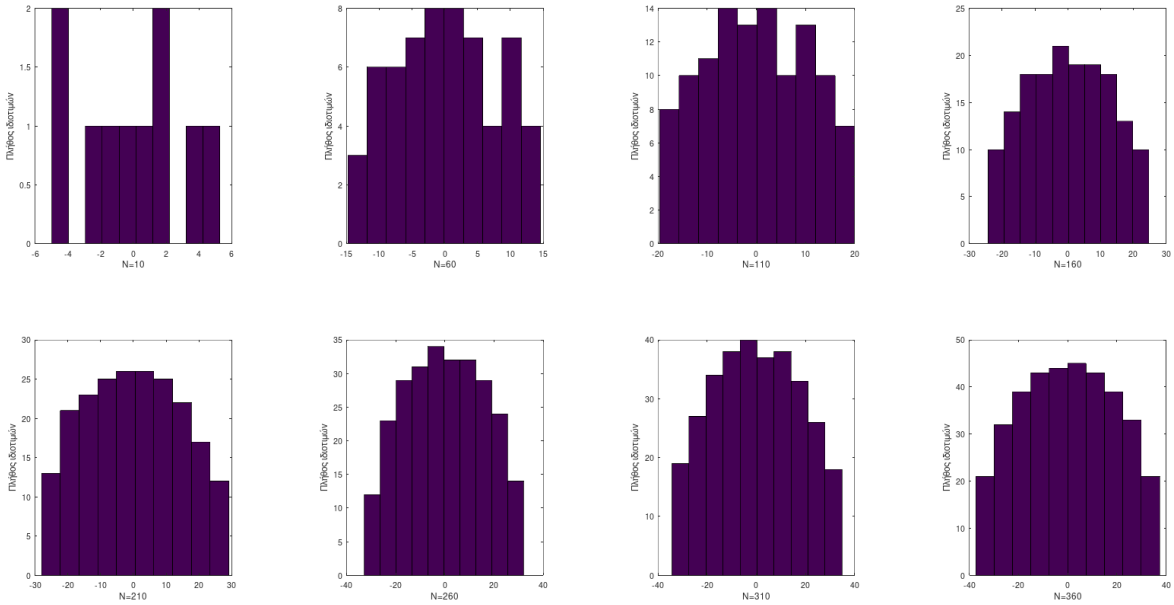
Σχήμα 2.1: Uniform({-1,1})



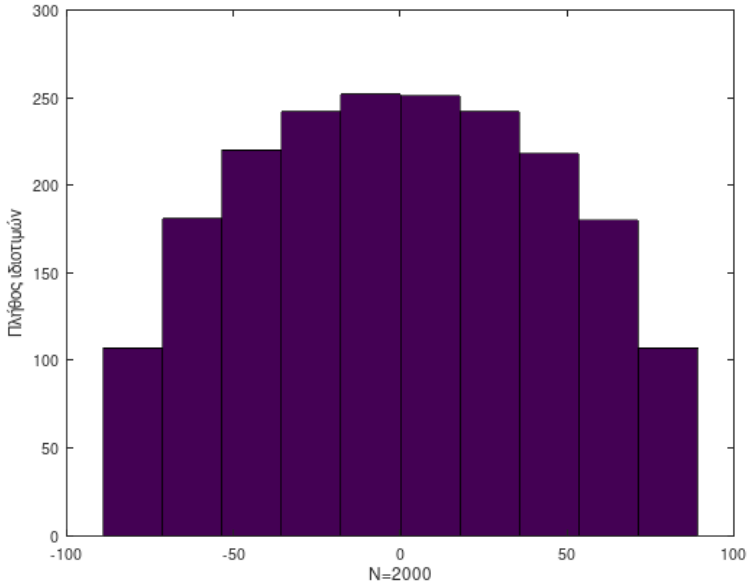
Σχήμα 2.2: Uniform({-1,1}) : N = 2000



Σχήμα 2.3: Standard Normal - $\mathcal{N}(0,1)$



Σχήμα 2.4: Standard Normal - $\mathcal{N}(0,1)$: $N = 2000$



2.2 Μέτρα - Ροπές

Ορισμός 2.2.1. (i) Δεδομένου πίνακα Wigner A_N ορίζουμε το εμπειρικό φασματικό μέτρο του ως τη συνάρτηση $\mu_{A_N} : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ με τιμές

$$\mu_{A_N}(B) := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathbb{1}_B(\lambda_i(A_N))$$

(ii) Ονομάζουμε ντετερμινιστικό μέτρο τάξης N το $\bar{\mu}_N := \mathbb{E}[\mu_{A_N}]$, δηλαδή $\bar{\mu}_N : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ με $\bar{\mu}_N(B) = \mathbb{E}[\mu_{A_N}(B)]$.

Παρατήρηση 2.2.1. (i) Για κάθε πίνακα A_N, το μ_{A_N} είναι μέτρο στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, καθώς είναι κυρτός συνδυασμός μέτρων dirac. Παρατηρούμε ότι το $\mu_{A_N}(B)$ μετράει το πλήθος των ιδιοτιμών του A_N που βρίσκονται στο B. Το μέτρο αυτό είναι τυχαίο, αφού ο A_N είναι τυχαίος. Είναι προφανής η συσχέτισή του με το ιστόγραμμα των ιδιοτιμών.

(ii) Το $\bar{\mu}_N$ είναι επίσης μέτρο στον $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

- $\bar{\mu}_N(B) = \mathbb{E}[\mu_{A_N}(B)] \geq 0$.
- $\mu_{A_N}(\mathbb{R}) = \mathbb{E}[\mu_{A_N}(\mathbb{R})] = 1$.
- αν $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ οικογένεια ξένων ανά 2 συνόλων,

$$\begin{aligned}\bar{\mu}_N(\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n) =& \mathbb{E}[\mu_{A_N}(\cup_{n\in\mathbb{N}} B_n)] = \mathbb{E}\left[\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_{A_N}(B_n)\right] \\ =& \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[\mu_{A_N}(B_n)] = \sum_{n\in\mathbb{N}} \bar{\mu}_N(B_n)\end{aligned}$$

Ποιο είναι το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης f ως προς τα πιο πάνω μέτρα; Για ευκολία στον συμβολισμό, όταν ξέρουμε ποιος είναι ο πίνακας A_N θα γράφουμε τις ιδιοτιμές του ως $(\lambda_i)_{i=1}^N$ αντί για $(\lambda_i(A_N))_{i=1}^N$. Ας ξεκινήσουμε με το $\bar{\mu}_N$, για το οποίο θα δείξουμε μια ιδιότητα που θα το συνδέει με το ολοκλήρωμα ως προς το μ_{A_N}. Ισχυριζόμαστε ότι για μετρήσιμη συνάρτηση f

$$\int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\bar{\mu}_N = \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\mu_{A_N}\right]$$

- Για μια δείκτρια συνάρτηση $\mathbb{1}_B$ όπου B μετρήσιμο:

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_B \mathrm{d}\bar{\mu}_N = \bar{\mu}_N(B) = \mathbb{E}[\mu_{A_N}(B)] = \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}(B) \mathrm{d}\mu_{A_N}\right]$$

- Αν $s = \sum_{k=1}^n c_k \mathbb{1}_{B_k}$, τότε

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} s \mathrm{d}\bar{\mu}_N =& \sum_{k=1}^n c_k \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_B \mathrm{d}\bar{\mu}_N = \sum_{k=1}^n c_k \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}(B) \mathrm{d}\mu_{A_N}\right] \\ =& \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}} \sum_{k=1}^n c_k \mathbb{1}(B) \mathrm{d}\mu_{A_N}\right] = \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}} s \mathrm{d}\mu_{A_N}\right]\end{aligned}$$

- Αν f θετική, έχουμε $\int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\bar{\mu}_N = \sup\left\{\int_{\mathbb{R}} s_n \mathrm{d}\bar{\mu}_N : s_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} f\right\}$. Υπάρχει s_n αύξουσα ακολουθία απλών με $s_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} f$ και άρα για κάθε $A_N, \int s_n \mathrm{d}\mu_{A_N} \xrightarrow{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\mu_{A_N}$. Αυτό ισχύει για κάθε πίνακα A_N. Έτσι, αν θεωρήσουμε τις τυχαίες μεταβλητές g_n, g, όπου $g_n = \int_{\mathbb{R}} s_n \mathrm{d}\mu_{A_N}, g = \int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\mu_{A_N}$, τότε $g_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} g$. Φυσικά, η g_n είναι αύξουσα (ως προς το n) αφού κληρονομεί αυτή την ιδιότητα από την ακολουθία s_n. Χρησιμοποιούμε το θεώρημα μονότονης σύγκλισης, και έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\bar{\mu}_N = \lim_n \int_{\mathbb{R}} s_n \mathrm{d}\bar{\mu}_N = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}} s_n \mathrm{d}\mu_{A_N}\right] = \mathbb{E}\left[\lim_n \int_{\mathbb{R}} s_n \mathrm{d}\mu_{A_N}\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\mu_{A_N}\right]$$

- Αν $f = f^+ - f^-$ δουλεύουμε με όμοιο τρόπο και προκύπτει ότι ο ισχυρισμός ισχύει.

Ας δούμε τώρα το μ_{A_N}.

- Αν έχουμε μια δείκτρια συνάρτηση $\mathbb{1}_B$ όπου B μετρήσιμο, τότε

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_B \mathrm{d}\mu_{A_N} = \mu_{A_N}(B) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathbb{1}_B(\lambda_i)$$

- Αν $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ απλή συνάρτηση, δηλαδή $s(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathbb{1}_{B_k}(x)$, τότε

$$\int_{\mathbb{R}} s \mathrm{d}\mu_{A_N} = \sum_{k=1}^{n} c_k \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{B_k} \mathrm{d}\mu_{A_N} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n} c_k \sum_{i=1}^{N} \mathbb{1}_{B_k}(\lambda_i) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{n} c_k \mathbb{1}_{B_k}(\lambda_i)$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} s(\lambda_i)$$

- Αν η f είναι θετική, τότε υπάρχει αύξουσα ακολουθία απλών s_n έτσι ώστε $s_n(x) \to f(x) \ \ \forall x \in \mathbb{R}$. Τότε, από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης,

$$\int_{\mathbb{R}} s_n \mathrm{d}\mu_{A_N} \xrightarrow{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\mu_{A_N}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} s_n(\lambda_i) \xrightarrow{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\mu_{A_N}$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\mu_{A_N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(\lambda_i)$$

- Αν τώρα $f = f^+ - f^-$ δουλεύουμε κατά τον ίδιο τρόπο και προκύπτει τελικώς ότι

$$\int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\mu_{A_N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(\lambda_i)$$

Σημειώνουμε ότι το πιο πάνω μπορεί να θεωρηθεί γνωστό, καθώς το ολοκλήρωμα ως προς κυρτό συνδυασμό μέτρων είναι ο κυρτός συνδυασμός των ολοκληρωμάτων ως προς τα αντίστοιχα μέτρα.

Αν συγκεκριμένα η f είναι η $x \mapsto x^m$, $m \in \mathbb{N}$, τότε έχουμε τη ροπή $m-$οστής τάξης του μ_{A_N}, η οποία είναι η

$$\mathbb{E}_{\mu_{A_N}}[X^m] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \lambda_i^m$$

Υπενθυμίζουμε ότι σε έναν πίνακα με διαστάσεις $N \times N$, το ίχνος $\mathrm{Tr}(A_N)$ ορίζεται ως το άθροισμα των στοιχείων της διαγωνίου. Θα ονομάσουμε $\mathrm{tr}(A_N) = \frac{1}{N}\ \mathrm{Tr}(A_N)$ το κανονικοποιημένο ίχνος.

Οι πίνακες που μας ενδιαφέρουν είναι διαγωνοποιήσιμοι καθώς είναι συμμετρικοί. Άρα, $A_N = M^{-1}DM$ όπου αν, $(\lambda_i)_{i=1}^N$ οι ιδιοτιμές του A_N και ο D είναι ο διαγώνιος πίνακας

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_N \end{pmatrix}$$

Γνωρίζουμε από τη γραμμική άλγεβρα ότι $A_N^m = M^{-1}D^m M$, και ότι το ίχνος διατηρείται κάτω από τον μετασχηματισμό της διαγωνιοποίησης, δηλαδή

$$\mathrm{tr}(A_N^m) = \mathrm{tr}(D^m) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \lambda_i^m$$

Αυτό, όπως έχουμε δει πιο πάνω, σημαίνει πως η ροπή $m-$οστής τάξης του μ_{A_N} είναι το ίχνος του πίνακα A_N.

Θέλουμε να δούμε τώρα που συγκλίνει αυτό το ίχνος, το οποίο φυσικά είναι τυχαίο, επειδή ο πίνακας είναι τυχαίος, όταν η διάσταση του πίνακα μεγαλώνει. Σε πρώτη φάση μπορούμε να χειριστούμε πρώτα κάτι ντετερμινιστικό και να δούμε που συγκλίνει η ροπή $m-$οστής τάξης του $\bar{\mu}_N$ καθώς $N \to +\infty$, η οποία είναι εξ ορισμού η $\mathbb{E}[\mathrm{tr}(A_N)]$.

Παρατήρηση 2.2.2. $\mathrm{Tr}(A^m) = \sum_{i_1,i_2,i_3\ldots i_m=1}^{N} a_{i_1i_2}a_{i_2i_3}a_{i_3i_4}\ldots a_{i_mi_1}$ και άρα

$$\mathrm{tr}(A_N^m) = \frac{1}{N^{1+\frac{m}{2}}}\sum_{i_1,i_2,i_3\ldots i_m=1}^{N} a_{i_1i_2}a_{i_2i_3}a_{i_3i_4}\ldots a_{i_mi_1}$$

Παρατήρηση 2.2.3. Τώρα που γνωρίζουμε την σημασία του ίχνους, ας μιλήσουμε για την κανονικοποίηση του πίνακα Wigner και τον παράγοντα $\frac{1}{\sqrt{N}}$. Έστω τυχαίος πίνακας $A \in \mathbb{R}^{N\times N}, N \in \mathbb{N}$, πριν την κανονικοποίηση.

$$\|A\|_2^2 = \max_{1\le i\le N} |\lambda_i|^2 \ge \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \lambda_i^2 = \mathrm{tr}\big(A^2\big)$$

Αν θέλουμε η $\|A\|_2^2$ να είναι πεπερασμένη, πρέπει σίγουρα να συγκλίνει το $\mathrm{tr}(A^2)$. Μια αναγκαία συνθήκη κανονικοποίησης του πίνακα A προκύπτει στο επόμενο παράδειγμα:

Παράδειγμα 2.2.1. Αν $\mu = U(\{-1,1\})$, και $A = (a_{ij})_{i,j=1}^N$ ένας μη κανονικοποιημένος συμμετρικός τυχαίος πίνακας, τότε

$$\mathrm{tr}(A^2) = \frac{1}{N}\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}a_{ji} = \frac{1}{N}\sum_{i,j=1}^{N} 1 = N \to +\infty$$

Χρειάζεται να θέσουμε $A_N = \frac{1}{\sqrt{N}}A$ ώστε το $\mathrm{tr}(A_N^2) = 1$, που φυσικά, συγκλίνει.

2.3 Συνδυαστική αναπαράσταση ροπών

Από την παρατήρηση 2.2.2. μπορούμε εύκολα να συμπεράνουμε ότι

$$\mathbb{E}[\mathrm{tr}(A_N^m)] = \frac{1}{N^{1+\frac{m}{2}}}\sum_{i_1,\dots,i_m}^{N} \mathbb{E}[a_{i_1i_2}a_{i_2i_3}\dots a_{i_mi_1}]$$

Ας υπολογίσουμε λοιπόν το πιο πάνω.

Συμβολισμός: Θα λέμε $[n] = \{1,2,\dots,n\}$.

Ορισμός 2.3.1. Ονομάζουμε το $\sigma = \{V_1,\dots,V_k\}$ διαμέριση του $[n]$ αν πληροί τα πιο κάτω:

- $V_i \subset [n] \;\; \forall i = 1,2,\dots,k$
- $V_i \neq \emptyset \;\; \forall i = 1,2,\dots,k$
- $V_i \cap V_j = \emptyset$
- $\cup_{i=1}^k V_i = [n]$

Ονομάζουμε τα V_i σύμπλοκα της σ και ορίζουμε επίσης: $\mathcal{P}(n) = \{\sigma : \sigma$ διαμέριση του $[n]\}$

Ορισμός 2.3.2. Για έναν πολυδείκτη $i = (i_1,i_2,\dots,i_m)$, αν θεωρήσουμε την $i : [m] \to [N]$ κατά τον προφανή τρόπο, ορίζουμε ως $\ker(i)$ την διαμέριση που είναι φυσικά στοιχείο του $\mathcal{P}(m)$:

$$\ker(i) = \{i^{-1}(1), i^{-1}(2), \dots, i^{-1}(N)\}$$

όπου αγνοούμε τις κενές προεικόνες.

Μπορούμε να ορίσουμε μια σχέση ισοδυναμίας στον χώρο των πολυδεικτών: θα λέμε ότι $i \sim j \iff \ker(i) = \ker(j)$, δηλαδή δύο πολυδείκτες είναι ισοδύναμοι αν επάγουν την ίδια διαμέριση (πυρήνας) στο $[m]$. Από αυτή τη σχέση ισοδυναμίας, μπορούμε να διαμερίσουμε τον χώρο των πολυδεικτών. Μπορεί κανείς να καταλάβει, λόγω του ότι $a_{ij} \sim \mu$, όπου μ η κατανομή στον ορισμό του πίνακα Wigner, ότι αν $i \sim j$ τότε

$$\mathbb{E}[a_{i_1i_2}a_{i_2i_3}\dots a_{i_{m-1}i_m}] = \mathbb{E}[a_{j_1j_2}a_{j_2j_3}\dots a_{j_{m-1}j_m}]$$

πχ αν $i = (1,1,2,1,1,2), j = (2,2,3,2,2,3)$ τότε $\ker(i) = \ker(j) = \{(1,2,4,5)(3,6)\}$ και

$$\mathbb{E}[a_{11}a_{12}a_{21}a_{11}a_{12}] = \mathbb{E}[a_{11}^2 a_{12}^4] = \mathbb{E}[a_{11}^2]\mathbb{E}[a_{12}^4] = \mathbb{E}[a_{22}^2]\mathbb{E}[a_{23}^4] = \mathbb{E}[a_{22}a_{23}a_{32}a_{22}a_{23}]$$

Έτσι, για κάθε σύμπλοκο στην διαμέριση στον χώρο των πολυδεικτών που περιγράψαμε πιο πάνω, έχουμε μια συνεισφορά στο άθροισμα που προσπαθούμε να υπολογίσουμε - την ίδια συνεισφορά από κάθε όρο στο σύμπλοκο. Κάθε σύμπλοκο στον χώρο διαμέρισης των πολυδεικτών είναι μια διαμέριση του $[m]$. Έτσι, μπορούμε να βρούμε την συνεισφορά της διαμέρισης. Ονομάζουμε

$$\mathbb{E}[\sigma] = \mathbb{E}[a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \dots a_{i_m i_1}] \qquad \text{αν } \ker(i) = \sigma$$

Από τα προηγούμενα, μπορούμε να ομαδοποιήσουμε τους πολυδείκτες σύμφωνα με την σχέση ισοδυναμίας τους, και αντί να αθροίζουμε σε πολυδείκτες, να αθροίζουμε σε διαμερίσεις-σύμπλοκα. Έτσι,

$$\mathbb{E}[\operatorname{tr}(A_N^m)] = \frac{1}{N^{1+\frac{m}{2}}} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}(m)} \mathbb{E}[\sigma] \cdot \#\{i : [m] \to [N] : \ker(i) = \sigma\}$$

όπου $\mathbb{E}[\sigma]$ η συνεισφορά του συμπλόκου, και ο δίπλα όρος είναι το πλήθος του. Αν $\#\sigma$ ο αριθμός των συμπλόκων της σ, τότε

$$\#\{i : [m] \to [N] : \ker(i) = \sigma\} = N(N-1)(N-2)\dots(N-\#\sigma+1) = \frac{N!}{\#\sigma!} \sim N^{\#\sigma}$$

Εξήγηση: Οι πολυδείκτες που έχουν τον ίδιο πυρήνα είναι αυτοί που έχουν κάποιον αριθμό στο πρώτο σύμπλοκο, κάποιον άλλο στο 2ο κ.ο.κ., δηλαδή υπάρχουν N επιλογές για το πρώτο σύμπλοκο, $N-1$ για το δεύτερο κ.ο.κ. Χρησιμοποιούμε τον κανόνα γινομένου. Επίσης, ισχύει το εξής:

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{N!}{\#\sigma! N^{\#\sigma}} = 1$$

Το δείχνουμε:

$$\frac{N!}{\#\sigma! N^{\#\sigma}} = \frac{N}{N} \cdot \frac{N-1}{N} \cdots \frac{N-\#\sigma+1}{N}$$

$$\frac{N-i}{N} \xrightarrow{N \to +\infty} 1 \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, \#\sigma - 1\}$$

Άρα για κάθε όρο του γινομένου το όριο υπάρχει και είναι το 1, και συνεπώς το όριο και του γινομένου είναι το 1.

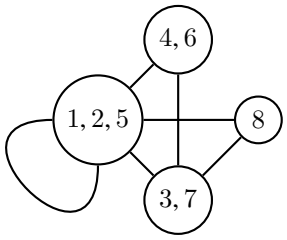
□

2.3.1 Γραφική αναπαράσταση

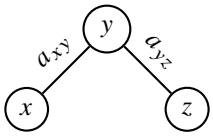
Μπορούμε να αντιστοιχήσουμε μια διαμέριση $\sigma = \{V_1, \dots, V_k\} \in \mathcal{P}(n)$ σε ένα γράφημα ως εξής: στέλνουμε τα σύμπλοκα σε k ομώνυμες κορυφές και τοποθετούμε ακμή ανάμεσα σε δύο κορυφές V_p, V_q αν $\exists\, r \in [m]$:

$r \in V_p$ και $r + 1(\mathrm{mod} m) \in V_q$. Δηλαδή τοποθετούμε ακμή ανάμεσα σε δύο κορυφές αν τα αντίστοιχα σύμπλοκα περιέχουν διαδοχικούς όρους στον $\mathbb{Z}_m$. Ονομάζουμε αυτό το γράφημα $\mathcal{G}_\sigma$. Φαίνεται από τον ορισμό ότι είναι μη κατευθυνόμενο, μπορεί να περιέχει θηλιές (ακμή από μια κορυφή στον εαυτό της) και δεν μπορεί να περιέχει πολλαπλές ακμές.

Για παράδειγμα, στη διαμέριση του [8]: $\sigma = (1,2,5)(3,7)(4,6)(8)$ αντιστοιχεί το γράφημα:



Με την γραφική αναπαράσταση της σ, αν $i = (i_1, \ldots, i_m) : \ker(i) = \sigma$ το κάθε σύμπλοκο περιέχει την προεικόνα κάποιου αριθμού στο $[N]$. Έτσι, θεωρούμε ότι η κάθε ακμή αντιστοιχεί σε κάποιες τυχαίες μεταβλητές: η ακμή ανάμεσα στις V_p, V_q αντιστοιχεί στην a_{pq} όπου p, q είναι αντιπρόσωποι των συμπλόκων V_p, V_q αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι διαφορετικές ακμές αντιστοιχούν σίγουρα σε ανεξάρτητες τ.μ.:



Μπορούμε έτσι να θεωρήσουμε ότι η τιμή $\mathbb{E}[\sigma] = \mathbb{E}[a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} ... a_{i_m i_1}]$ αντιστοιχεί σε μια περιήγηση m βημάτων στο γράφημα, κατά την οποία ξεκινάμε από την κορυφή που περιέχει το 1, μεταβαίνουμε σε αυτήν που περιέχει το 2, στη συνέχεια στο 3, μέχρι να φτάσουμε σε αυτήν που περιέχει το m και στο τέλος να επιστρέψουμε στην κορυφή που περιέχει το 1. Αν θεωρήσουμε δηλαδή το σ συνάρτηση που στέλνει κάθε στοιχείο του $[m]$ στο σύμπλοκο που το περιέχει με βάση την δράση της ομώνυμης διαμέρισης σ, τότε η περιήγηση είναι:

$$\sigma(1) \to \sigma(2) \to \sigma(3) \to ... \to \sigma(m) \to \sigma(1)$$

Οι αντίστοιχες ακμές φυσικά υπάρχουν από την κατασκευή του γραφήματος.

Αν σε κάποια περιήγηση μια ακμή χρησιμοποιηθεί μόνο μια φορά, τότε η μέση τιμή που προκύπτει από αυτόν τον περίπατο είναι 0, λόγω ανεξαρτησίας και του ότι η ροπή πρώτης τάξης του μ είναι 0. Άρα, για μη μηδενικά αποτελέσματα, μας ενδιαφέρουν τα γραφήματα στα οποία κατά τις αντίστοιχες περιηγήσεις, η κάθε ακμή χρησιμοποιείται τουλάχιστον 2 φορές. Δηλαδή,

$$\#\{\text{ακμές στο } \mathcal{G}_\sigma\} \leq \frac{\#\{\text{βήματα στην περιήγηση}\}}{2} = \frac{m}{2}$$

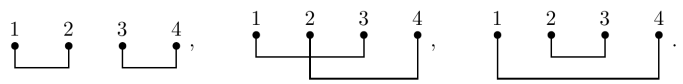
2.4 Σύγκλιση ροπών

2.4.1 Catalan - Ταιριάσματα - Μη διασταυρωμένα ταιριάσματα

Μια ειδική περίπτωση διαμέρισης είναι το ταίριασμα:

Συμβολίζουμε με π μια διαμέριση του $[n]$ όπου τα σύμπλοκα έχουν μέγεθος 2. Μπορεί φυσικά να υπάρξει μόνο για άρτιο n, και το πλήθος των συμπλόκων είναι $n/2$. Αντίστοιχα συμβολίζουμε $\mathcal{P}_2(n) = \{\pi : \pi \text{ ταίριασμα του } n\}$.

Παράδειγμα 2.4.1. Αν $n = 4$, τα δυνατά ταιριάσματα είναι τα εξής:

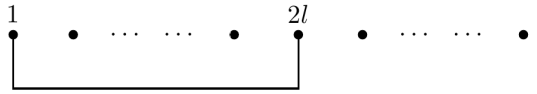


Ορισμός 2.4.1. Μη διασταυρωμένο ταίριασμα ονομάζεται κάποιο ταίριασμα π κατά το οποίο δεν υπάρχουν

$i < j < k < l : (i,k)(j,l) \in \pi$. Συμβολίζουμε το σύνολο των μη διασταυρωμένων ταιριασμάτων του $[n]$ με $\mathcal{NC}_2(n)$.

Στο παραπάνω παράδειγμα, το μεσαίο ταίριασμα <u>δεν</u> είναι μη διασταυρωμένο, ενώ το πρώτο και το τρίτο είναι.

Παρατήρηση 2.4.1. Τα $\mathcal{NC}_2(2k)$ έχουν αναδρομική δομή. Το πρώτο ζεύγος στο ταίριασμα πρέπει να είναι της μορφής $(1, 2l)$ όπου $l \in \mathbb{N}, l \leq k$. Τα υπόλοιπα ζεύγη μπαίνουν (ολόκληρα) στα διαστήματα $\{2, 2l-1\}$ και$\{2l+1, 2k\}$ ώστε να μην διασταυρώνονται.



Αυτό σημαίνει πως όλα τα δυνατά μη διασταυρωμένα ταιριάσματα στο $[2k]$ έχουν πλήθος $d_k = \sum_{l=1}^{k} d_{l-1} d_{k-l}$, με $d_0 = 1$.

Ορισμός 2.4.2. (Αριθμοί Catalan) Οι αριθμοί Catalan C_k ορίζονται από την αναδρομική σχέση

$$C_0 = 1, \quad C_k = \sum_{l=0}^{k-1} C_l C_{k-l-1}, \ k > 1$$

Συμπέρασμα: $|\mathcal{NC}_2(2k)| = C_k$

Ονομάζουμε $\gamma \in S_m$ τη μετάθεση μετατόπισης κατά 1, δηλαδή $\gamma(i) = (i+1)\mathrm{mod}m \quad \forall i \in [m]$. Μπορούμε επίσης να θεωρήσουμε ένα ταίριασμα π ως μετάθεση, δηλαδή στοιχείο της S_m. Η πιο κάτω πρόταση θα φανεί χρήσιμη στην εύρεση των οριακών ροπών του $\bar{\mu}_N$.

Πρόταση 2.4.1. *$\#\gamma\pi = \frac{m}{2} + 1 \iff \pi$ μη διασταυρωμένο, όπου $\#s$ ο αριθμός των ξένων κύκλων της μετάθεσης $s \in S_m$.*

Απόδειξη

'$\Leftarrow$' Παρατηρούμε πρώτα ότι αν $\pi \in \mathcal{NC}_2(m)$ τότε υπάρχει σίγουρα κάποιο ζεύγος $(i, i+1) \in \pi$. Παρατηρούμε τώρα ότι $(i,(i+1)) \in \pi \iff \gamma\pi((i+1)) = (i+1)$, $\gamma\pi(i) = (i+2)\mathrm{mod}m$. Αν αφαιρέσουμε τα $i, i+1$ δημιουργούμε ένα $\tilde{\pi} \in \mathcal{NC}_2(m-2)$. Έτσι, έχουμε αφαιρέσει τον κύκλο $(i+1)$ και έχουμε μειώσει το μέγεθος του κύκλου που περιέχει το i κατά 1, δηλαδή $\#\gamma\tilde{\pi} = \#\gamma\pi - 1$. Αν το κάνουμε αυτό αναδρομικά, σε ακριβώς $m/2 - 1$ βήματα καταλήγουμε σε ένα $\pi' \in \mathcal{NC}_2(2)$, όπου δηλαδή $\pi' = (1', 2')$, και άρα $\gamma\pi' = (1')(2')$. Άρα

$$\#\gamma\pi = (m/2 - 1) + 2 = m/2 + 1$$

'$\Rightarrow$' Στην αντίθετη περίπτωση, αν έχουμε κάποιο ταίριασμα $\pi \in \mathcal{P}_2(m)$, αρκεί να δείξουμε ότι αν είναι διασταυρωμένο, τότε ο αριθμός των κύκλων δεν είναι ίσος με $m/2 + 1$. Πράγματι, αν είναι διασταυρωμένο, αφαιρούμε όλους τους μονούς κύκλους από την $\gamma\pi$ μέχρι να μην υπάρχουν άλλοι (δεν μπορούν να αφαιρεθούν όλα τα στοιχεία αλλιώς το π θα ήταν μη διασταυρωμένο). Έστω ότι υπήρχαν $k < m$ τέτοιοι κύκλοι. Καταλήγουμε στην $\tilde{\pi} \in \mathcal{P}_2(m-2k)$ και την $\gamma\tilde{\pi}$. Για τη $\gamma\tilde{\pi}$, ο κάθε κύκλος έχει τουλάχιστον 2 στοιχεία, και άρα

$$\#\gamma\tilde{\pi} \leq \frac{m-2k}{2} < \frac{m-2k}{2} + 1$$

Άρα,

$$\#\gamma\pi = \#\gamma\tilde{\pi} + k < \frac{m-2k}{2} + 1 + k = \frac{m}{2} + 1$$

□

2.4.2 Εύρεση οριακών ροπών

Με βάση τα πιο πάνω μπορούμε να υπολογίσουμε τις οριακές ροπές του $\bar{\mu}_N$:

Λήμμα 2.4.1. Αν A_N ένας πίνακας Wigner που προσδιορίζεται από την κατανομή μ, τότε $\forall m \in \mathbb{N}$

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbb{E}[\mathrm{tr}(A_N^m)] = \begin{cases} 0 & \text{, αν } m \text{ περιττός} \\ C_{m/2} & \text{, αν } m \text{ άρτιος} \end{cases}$$

Απόδειξη

Έχουμε δείξει ότι

$$\mathbb{E}[\mathrm{tr}(A_N^m)] = \frac{1}{N^{1+\frac{m}{2}}} \sum_{\sigma\in\mathcal{P}(m)} \mathbb{E}[\sigma] \cdot \underbrace{N(N-1)(N-2)...(N-\#\sigma+1)}_{\sim N^{\#\sigma}}$$

και άρα

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbb{E}[\mathrm{tr}(A_N^m)] = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N^{1+\frac{m}{2}}} \sum_{\sigma\in\mathcal{P}(m)} \mathbb{E}[\sigma]N^{\#\sigma} = \sum_{\sigma\in\mathcal{P}(m)} \mathbb{E}[\sigma] \lim_{N\to+\infty} N^{\#\sigma-\frac{m}{2}-1}$$

Στον υπολογισμό του αθροίσματος, μας ενδιαφέρουν τα σ των οποίων το $\mathbb{E}[\sigma] \neq 0$, και άρα μας ενδιαφέρουν τα σ με αντίστοιχα γραφήματα τέτοια ώστε

$$\#E(\mathcal{G}_\sigma) \leq \frac{\#\text{βήματα στην περιήγηση}}{2} = \frac{m}{2}$$

όπου $\#E(\mathcal{G}_\sigma)$ ο αριθμός ακμών. Τα γραφήματα που μας ενδιαφέρουν είναι επίσης συνεκτικά, καθώς στο πολυγράφημα το οποίο προκύπτει αν ακολουθήσουμε το μονοπάτι που περιγράφουμε πιο πάνω υπάρχει κύκλος Euler. Άρα $\#\sigma = \#V(\mathcal{G}_\sigma) \leq \#E(\mathcal{G}_\sigma) + 1$. Αυτό με τη σειρά του μας δίνει ότι

$$\#\sigma - \frac{m}{2} - 1 \leq 0$$

Συνεπώς ο εκθέτης του N στο άθροισμα είναι μη θετικός. Στο όριο συνεισφέρει μόνο η περίπτωση που ο εκθέτης είναι μηδενικός, και άρα μας ενδιαφέρουν μόνο τα σ που η αντιστοίχηση που περιγράφηκε προηγουμένως δίνει γραφήματα-δέντρα. Σε τέτοια γραφήματα, $\mathbb{E}(\sigma) = 1$ καθώς η κάθε ακμή χρησιμοποιείται ακριβώς 2 φορές, και

$$\mathbb{E}[\sigma] = \mathbb{E}[a_{i_{j_1}i_{j_2}}a_{i_{j_2}i_{j_1}}]\cdot\mathbb{E}[a_{i_{j_2}i_{j_3}}a_{i_{j_3}i_{j_2}}]\cdot\ldots\cdot\mathbb{E}[a_{i_{j_m}i_{j_1}}a_{i_{j_1}i_{j_m}}] = \underbrace{1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1}_{\#m} = 1$$

Δηλαδή:

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbb{E}[\mathrm{tr}(A_N^m)] = \#\{\sigma \in \mathcal{P}(m) : \mathcal{G}_\sigma \text{ δέντρο}\}$$

Αν έχουμε δέντρο, όπως αναφέραμε έχουμε $m/2+1$ το πλήθος κορυφές. Στην περίπτωση που ο m είναι περιττός, το δεξί σύνολο είναι κενό και άρα έχει πληθικότητα 0.

Θέλουμε τώρα να μετρήσουμε την πληθικότητα του συνόλου στα δεξιά στην περίπτωση που ο m είναι άρτιος.

Ισχυρισμός.

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbb{E}[\mathrm{tr}(A_N^m)] = C_{m/2}, \text{ για άρτιο } m \in \mathbb{N}$$

Απόδειξη

Θεωρούμε την $\varphi : \mathcal{N}C_2(m) \to \{\sigma \in S_m : \mathcal{G}_\sigma \text{ δέντρο}\}, \varphi(\pi) = \sigma_{\gamma\pi}$, όπου $\sigma_{\gamma\pi}$ η διαμέριση που προκύπτει από τους ξένους κύκλους της μετάθεσης $\gamma\pi \in S_m$. Όπως έχουμε δείξει στην πρόταση 2.4.1., $\#\gamma\pi = m/2+1$ ανν το π είναι μη διασταυρωμένο, άρα έχουμε $m/2+1$ κορυφές στο γράφημα που αντιστοιχεί στην $\sigma_{\gamma\pi}$.

$$\frac{m}{2} + 1 = \#\gamma\pi \leq \#E_{\gamma\pi} + 1 \leq \frac{m}{2} + 1$$

Άρα, $\#\gamma\pi = \#E_{\gamma\pi}+1$ και άρα, από γνωστό λήμμα της θεωρίας συνόλων, το $G_{\sigma_{\gamma\pi}}$ είναι δέντρο. Άρα, η φ είναι καλά ορισμένη.

Η φ είναι $1-1$ και επί. Πράγματι,

- $1-1$: αν $\pi_1 \neq \pi_2$ τότε προφανώς $\gamma\pi_1 \neq \gamma\pi_2$.
- Επί: Αν $\sigma \in S_m : G_\sigma$ δέντρο με $m/2+1$ κορυφές, τότε το $\pi = \gamma^{-1}\sigma$ είναι μη διασταυρωμένο καθώς

$$\gamma\pi = \gamma\gamma^{-1}\sigma = \sigma, \text{και } \#\sigma = m/2+1$$

□

□

Σχόλιο. Ένα ενδιαφέρον πόρισμα των πιο πάνω είναι ότι ο αριθμός των μη ισομορφικών διατεταγμένων δέντρων με $n+1$ κορυφές είναι C_n.

2.4.3 Κατανομή ημικυκλίου

Σύμφωνα με τη συνθήκη του Carleman, αν $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ροπές κάποιου μέτρου μ τέτοιες ώστε $\forall n \in \mathbb{N}\ \ m_n < +\infty$ και ισχύει

$$\sum_{n=1}^{\infty} m_{2n}^{-\frac{1}{2n}} = +\infty$$

τότε το μ είναι μοναδικό. Θα δείξουμε ότι στην περίπτωση των οριακών ροπών που βρήκαμε, η συνθήκη αυτή ισχύει και άρα αν βρούμε μέτρο που να έχει αυτές τις ροπές, θα είναι μοναδικό. Θα χρειαστούμε το πιο κάτω λήμμα.

Λήμμα 2.4.2. Οι αριθμοί Catalan $(C_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ικανοποιούν την σχέση:

$$C_k = \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}$$

π.χ.: Μερικοί πρώτοι όροι της ακολουθίας είναι οι 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132...

Απόδειξη

Θεωρούμε την γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας των αριθμών Catalan,

$$c(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n$$

Έστω τώρα $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ η ακολουθία που ικανοποιεί την πιο πάνω σχέση. Θα δείξουμε ότι η S_n ταυτίζεται με την C_n. Η S_n έχει γεννήτρια συνάρτηση την

$$s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n$$

Παρατηρούμε ότι

$$x\,(c(x))^2 = x\left(\sum_{m=0}^{+\infty} C_m x^m\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} C_n C_m x^{n+m+1} = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=0}^{k} C_l C_{k-l} x^{k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} C_{k+1} x^{k+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n - 1 = c(x) - 1$$

Προκύπτει δηλαδή μια δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς $c(x)$ με λύσεις

$$c(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$$

Κρατάμε μόνο τη λύση με το $'-'$, καθώς με το $'+'$ η έκφραση αυτή απειρίζεται όταν το $x \to 0^+$, ενώ

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = 1 = C_0$$

Αν αναπτύξουμε σε δυναμοσειρά τον όρο $\sqrt{1-4x}$ με το γενικευμένο διωνυμικό θεώρημα, έχουμε:

$$\sqrt{1-4x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4^n(2n-1)}\binom{2n}{n}(-4x)^n = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n-1}\binom{2n}{n}x^n$$

και, αν αντικαταστήσουμε αυτή τη δυναμοσειρά στην πιο πάνω λύση, έχουμε

$$c(x) = \frac{1}{2x}\left(1 - \left(-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2n-1}\binom{2n}{n}x^n\right)\right) = \frac{1}{2x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n-1}\binom{2n}{n}x^n$$

$$= \frac{1}{2x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2(n+1)-1}\binom{2(n+1)}{n+1}x^{n+1}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2n+1}\binom{2(n+1)}{n+1}x^n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2n+1}\binom{2n}{n}\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2}x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}x^n = s(x)$$

Καταλήγουμε δηλαδή στο ότι $s(x) = c(x)$ και άρα $S_n = C_n$

□

Πρόταση 2.4.2. *Οι οριακές ροπές που βρήκαμε πιο πάνω αντιστοιχούν σε μοναδικό μέτρο. Δηλαδή, υπάρχει μοναδικό μέτρο μ_W:*

$$\mathbb{E}_{\mu_W}[X^k] = \begin{cases} 0 & \text{, αν } k \text{ περιττός} \\ C_{k/2} & \text{, αν } k \text{ άρτιος} \end{cases}$$

Απόδειξη

Για την μοναδικότητα, όπως αναφέραμε πιο πάνω, να δείξουμε ότι

$$\sum_{k=1}^{+\infty} C_k^{-\frac{1}{2k}} = +\infty$$

Εύκολα φαίνεται ότι $C_k \geq 1$. Αυτό σημαίνει ότι

$$\sum_{k=1}^{+\infty} C_k^{-\frac{1}{2k}} \geq \sum_{k=1}^{+\infty} 1^{-\frac{1}{2k}} = \sum_{k=1}^{+\infty} 1 = +\infty$$

Πάμε λοιπόν να βρούμε ποιο είναι ακριβώς αυτό το μέτρο. Θα χρησιμοποιήσουμε την έννοια της χαρακτηριστικής συνάρτησης. Υπενθυμίζουμε τον ορισμό της:

Ορισμός 2.4.3. Ονομάζουμε χαρακτηριστική συνάρτηση του μέτρου μ την $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \mathrm{d}\mu(x)$$

Θεωρούμε δεδομένο ότι, αν για συνάρτηση f συμβολίζουμε με $f^{(n)}$ την $n-$οστή της παράγωγο, τότε αν φ η χαρακτηριστική συνάρτηση του μέτρου ν,

$$\varphi^{(n)}(0) = i^n \mathbb{E}_\nu[X^n]$$

Αν υποθέσουμε ότι $\mathbb{E}[e^{|X|}] < +\infty$, τότε η φ είναι αναλυτική γύρω από το 0 με ακτίνα σύγκλισης τουλάχιστον 1, καθώς, για $|t| < 1$

$$\varphi(t) = \mathbb{E}\left[e^{itX}\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(it)^k X^k}{k!}\right] \overset{\text{fubini}}{=} \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left[\frac{(it)^k X^k}{k!}\right] = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{t^k}{k!}\mathbb{E}\left[(iX)^k\right] = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} t^k$$

Το θεώρημα του Fubini χρησιμοποιήθηκε για το μέτρο που έχει σχέση με τη φ_{μ_W} και το αριθμητικό μέτρο στο $\mathbb{N}$, καθώς

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{|(it)^k X^k|}{k!}\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{|(tX)^k|}{k!}\right] = \mathbb{E}[e^{|tX|}] < \mathbb{E}[e^{|X|}] < +\infty$$

Η υπόθεση που κάναμε είναι σωστή, επειδή:

$$e^{|x|} < e^x + e^{-x} = 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

και άρα,

$$\mathbb{E}\left[e^{|X|}\right] < 2\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k)!}\mathbb{E}\left[X^{2k}\right] = 2\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k)!}\frac{(2k)!}{(k+1)(k!)^2} = 2\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)(k!)^2} < 2\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty$$

Τα πιο πάνω μας οδηγούν στον υπολογισμό της χαρακτηριστικής στο x:

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^{2n} C_n}{(2n)!} x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^{2n}}{(2n)!}\frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{(n!)^2} x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} x^{2n}$$

$$x\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} x^{2n+1} = J_1(2x)$$

όπου J_1 η συνάρτηση Bessel πρώτης τάξης. Μάλιστα, αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση αυτή έχει και ολοκληρωτική μορφή:

$$J_1(x) = \frac{1}{i\pi} \int_0^{\pi} e^{ix\cos\theta} \cos\theta \mathrm{d}\theta$$

Θα αντιστρέψουμε τώρα την χαρακτηριστική συνάρτηση για να βρούμε την συνάρτηση πυκνότητας στην οποία αντιστοιχεί. Έχουμε,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) e^{-itx} \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t} J_1(2t) e^{-itx} \mathrm{d}t = \frac{1}{2i\pi^2} \int_{\mathbb{R}} \int_0^{\pi} \frac{1}{t} e^{2it\cos\theta} \cos\theta e^{-itx} \mathrm{d}\theta \mathrm{d}t$$

$$\overset{fubini}{=} \frac{1}{2i\pi^2} \int_0^{\pi} \cos\theta \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t} e^{it(2\cos\theta - x)} \mathrm{d}t}_{-i\pi \mathrm{sgn}(2cos\theta - x)} \mathrm{d}\theta = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \cos\theta \mathrm{sgn}(2\cos\theta - x) \mathrm{d}\theta$$

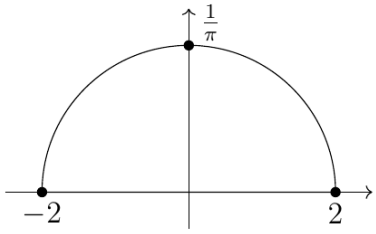
Αν $x > 2$ τότε $\mathrm{sgn}(2\cos\theta - x) = -1$, και αν $x < -2$ τότε $\mathrm{sgn}(2\cos\theta - x) = 1$ και άρα, αφού $\int_0^{\pi} \cos\theta \mathrm{d}\theta = 0$, και $f(x) = 0$. Έστω τώρα πως $-2 \leq x \leq 2$. Αν θέσουμε $u = 2\cos\theta - x$, τότε

$$\begin{aligned}
f(x) =& \frac{1}{2\pi} \int_{-2-x}^{2-x} \frac{u+x}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{u+x}{2}\right)^2}} \mathrm{sgn}(u) \mathrm{d}u \\
=& \frac{1}{2\pi} \int_{-2-x}^{0} \frac{u+x}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{u+x}{2}\right)^2}} \mathrm{d}u - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2-x} \frac{u+x}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{u+x}{2}\right)^2}} \mathrm{d}u \\
=& \frac{1}{2\pi} \left(2 \int_{-1}^{\frac{x}{2}} \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \mathrm{d}y - 2 \int_{\frac{x}{2}}^{1} \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \mathrm{d}y \right) \\
=& \frac{1}{2\pi} \left(2\sqrt{1-y^2}\Big|_{-1}^{x/2} - 2\sqrt{1-y^2}\Big|_{x/2}^{1} \right) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4-x^2}
\end{aligned}$$

Η f είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, όπως θα δούμε και αμέσως μετά, κάτι που μας εξασφαλίζει και την ύπαρξη, και μας επιτρέπει να ολοκληρώσουμε την απόδειξή μας. □

Ορισμός 2.4.4. Ονομάζουμε κατανομή ημικυκλίου μ_W την κατανομή στο $\mathbb{R}$ με πυκνότητα πιθανότητας

$$\mathrm{d}\mu_W = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x & , x \in [-2, 2] \\ 0 & , x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty) \end{cases}$$



Είναι η ζητούμενη οριακή ως προς τις ροπές κατανομή.

Πρόταση 2.4.3. *Η μ_W είναι μέτρο πιθανότητας.*

Απόδειξη

Η συνάρτηση $x \mapsto \int_{-\infty}^{x} \mathrm{d}\mu_W$ είναι αύξουσα και $\lim\limits_{x\to-\infty} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \mathrm{d}\mu_W = 0$. Μένει τώρα ν.δ.ο. $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \mathrm{d}\mu_W = 1$, ή ισοδύναμα ότι $\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x = 1$. Πράγματι,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cos t\sqrt{4-4\sin^2 t}\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 t\mathrm{d}t$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\cos(2t)+1}{2}\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left(\cancel{\frac{\sin(2t)}{2}\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}} + t\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}\right) = \frac{\pi}{\pi} = 1$$

□

Δηλαδή, έχουμε καταλήξει στο εξής αποτέλεσμα:

Θεώρημα 2.4.1. *(Νόμος ημικυκλίου του Wigner-Εκδοχή ντετερμινιστικών ροπών)*

$$\mathbb{E}_{\bar{\mu}_N}[X^m] \xrightarrow{N\to+\infty} \mathbb{E}_{\mu_W}[X^m] \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

2.5 Σχέση ροπών των μέτρων $\mu_{A_N}, \bar{\mu}_N$

Μέχρι αυτό το σημείο έχουμε δείξει την σύγκλιση των ντετερμινιστικών ροπών, από την οποία προκύπτει διαισθητικά το σχήμα του ημικυκλίου. Ας προχωρήσουμε λοιπόν για να δείξουμε κάτι ισχυρότερο. Θα δείξουμε τώρα ότι οι ροπές που προκύπτουν από το μ_{A_N} είναι 'κοντά' σε αυτές που προκύπτουν από το $\bar{\mu}_N$ και άρα για να προχωρήσουμε σε πιο ισχυρά αποτελέσματα, θα αρκεί η σύγκλιση που δείξαμε, δηλαδή αυτό που δηλοί το θεώρημα 2.4.1..

Λήμμα 2.5.1. $\lim\limits_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\displaystyle\int_{\mathbb{R}} x^m \mathrm{d}\mu_{A_N} - \int_{\mathbb{R}} x^m \mathrm{d}\bar{\mu}_N\right| > \varepsilon\right) = 0$

Απόδειξη

Από την ανισότητα Chebyshev ισχύει:

$$\mathbb{P}\left(\left|\int_{\mathbb{R}} x^m \mathrm{d}\mu_{A_N} - \int_{\mathbb{R}} x^m \mathrm{d}\bar{\mu}_N\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} Var\left(\int_{\mathbb{R}} x^m \mathrm{d}\mu_{A_N}\right)$$

Άρα αρκεί ν.δ.ο. $Var\left(\int_{\mathbb{R}} x^m \mathrm{d}\mu_{A_N}\right) \xrightarrow{N\to+\infty} 0$. Πράγματι,

$$Var\left(\int_{\mathbb{R}} x^m \mathrm{d}\mu_{A_N}\right)$$

$$=\mathbb{E}\left[\left(\int_{\mathbb{R}} x^m \mathrm{d}\mu_{A_N}\right)^2\right] - \left(\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}} x^m \mathrm{d}\mu_{A_N}\right]\right)^2$$

$$=\mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \lambda_i^m(A_N)\right)^2\right] - \left(\mathbb{E}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \lambda_i^m(A_N)\right]\right)^2$$

$$=\mathbb{E}[(\mathrm{tr}(A_N^m))^2] - (\mathbb{E}[\mathrm{tr}(A_N^m)])^2$$

$$=\frac{1}{N^{2+m}}\left\{\sum_{\substack{i_1,\dots,i_m=1\\ j_1,\dots,j_m=1}}^{N} \mathbb{E}[a_{i_1i_2}a_{i_2i_3}\dots a_{i_mi_1}a_{j_1j_2}a_{j_2j_3}\dots a_{j_mj_1}] - \left(\sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{N} \mathbb{E}[a_{i_1i_2}a_{i_2i_3}\dots a_{i_mi_1}]\right)^2\right\}$$

$$=\frac{1}{N^{2+m}}\left\{\sum_{\substack{i_1,\dots,i_m=1\\ j_1,\dots,j_m=1}}^{N} \mathbb{E}[a_{i_1i_2}a_{i_2i_3}\dots a_{i_mi_1}a_{j_1j_2}a_{j_2j_3}\dots a_{j_mj_1}]\right.$$

$$\left. - \sum_{\substack{i_1,\dots,i_m=1\\ j_1,\dots,j_m=1}}^{N} \mathbb{E}[a_{i_1i_2}a_{i_2i_3}\dots a_{i_mi_1}]\mathbb{E}[a_{j_1i_2}a_{j_2j_3}\dots a_{j_mj_1}]\right\}$$

$$=\frac{1}{N^{2+m}} \sum_{\substack{i_1,\dots,i_m=1\\ j_1,\dots,j_m=1}}^{N} \left\{\mathbb{E}[a_{i_1i_2}a_{i_2i_3}\dots a_{i_mi_1}a_{j_1j_2}a_{j_2j_3}\dots a_{j_mj_1}] - \mathbb{E}[a_{i_1i_2}a_{i_2i_3}\dots a_{i_mi_1}]\mathbb{E}[a_{j_1i_2}a_{j_2j_3}\dots a_{j_mj_1}]\right\}$$

Για να είναι κάποιος όρος του αθροίσματος μη μηδενικός θα πρέπει σίγουρα κάποιο $a_{i_ki_{k+1}}$ να ταυτίζεται με κάποιο $a_{j_lj_{l+1}}$ για $k \neq l$, άρα θα πρέπει τα i, j να έχουν 2 διαδοχικούς όρους κοινούς. Για το ζεύγος (i, j) ορίζουμε τον συζευγμένο πυρήνα του, σ_{ij} ως το σύνολο

$$\sigma_{ij} = \{i^{-1}(1), i^{-1}(2), \dots, i^{-1}(N), j^{-1}(1), j^{-1}(2), \dots, j^{-1}(N)\}$$

Υπάρχουν $N(N-1)\cdots(N-\#\sigma_{ij}+1)$ διαφορρετικά ισοδύναμα ζεύγη, δηλαδή αυτά που έχουν τον ίδιο συζευγμένο πυρήνα.

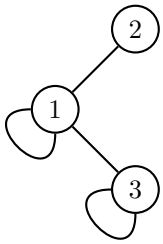
Δεδομένων των i, j κατασκευάζουμε τώρα ένα γράφημα που να έχει για κορυφές τα $\{i_1, \dots, i_m, j_1, \dots, j_m\}$ και έχει ακμές τις

$$\{\{i_1, i_2\}, \{i_2, i_3\}, \dots, \{i_m, i_{m+1}\}, \{j_1, j_2\}, \{j_2, j_3\}, \dots, \{j_m, j_{m+1}\}\}$$

Το ονομάζουμε $G_{\sigma_{ij}}$, και φυσικά το πλήθος των κορυφών του είναι $\#\sigma_{ij}$. Σε αντίθεση με το γράφημα που κατασκευάσαμε πάνω, το γράφημα

αυτό δεν είναι απαραίτητα συνεκτικό-για να είναι πρέπει να υπάρχει κοινή κορυφή που προκύπτει από προεικόνες των i, j.

Ένα παραδειγμα γραφήματος: αν $i = (1, 2, 1, 3)$, $j = (1, 1, 3, 3)$ έχουμε το γράφημα $G_{\sigma_{ij}}$:



Στους μη μηδενικούς όρους του αθροίσματος πριν περάσουμε στο όριο (μη τετριμμένα ζεύγη) αντιστοιχούν γραφήματα στα οποία:

- Η κάθε ακμή χρησιμοποιείται τουλάχιστον 2 φορές.
- Υπάρχουν $\{i_k, i_{k+1}\}, \{j_l, j_{l+1}\}$ που να ταυτίζονται. Αυτό σημαίνει πως τα i, j έχουν κοινή ακμή στο γράφημα $\mathcal{G}_{\sigma_{ij}}$.

Η πρώτη συνθήκη είναι απαραίτητη έτσι ώστε να είναι μη μηδενικοί και οι δύο όροι του αθροίσματος για κάθε πολυδείκτη. Έτσι,

$$\#E(\mathcal{G}_{\sigma_{ij}}) \leq \frac{\#\text{βήματα στα 2 μονοπάτια}}{2} = \frac{2m}{2} = m$$

Η δεύτερη συνθήκη μας λέει ότι τα γραφήματα που μας ενδιαφέρουν είναι συνεκτικά επειδή το κομμάτι του γραφήματος που προσπελαύνει το μονοπάτι από το i είναι συνεκτικό (με την ίδια λογική που χρησιμοποιήσαμε στην απόδειξη του λήμματος 2.4.1), και αντίστοιχα αυτό από το j. Αν τα γραφήματα που προκύπτουν από τους 2 πολυδείκτες είναι μεταξύ τους ξένες συνεκτικές συνιστώσες, από τα πιο πάνω το Var μηδενίζεται.

Έστω ζεύγος (i, j). Έχουμε 3 περιπτώσεις:

- $\#\sigma_{ij} \leq m$: Κάθε τέτοιο ζεύγος μπορεί να συνεισφέρει πριν το όριο $O(1)$. Υπάρχουν $\frac{N!}{\#\sigma_{ij}!} \sim N^{\#\sigma_{ij}}$ ισοδύναμα ζεύγη, και άρα στο όριο εμφανίζεται ο όρος

$$N^{\#\sigma_{ij}-m-2} \leq N^{-2} \to 0$$

  Έτσι, η συνεισφορά ενός τέτοιου ζεύγους και όλων των ισοδυνάμων του τείνει στο 0 καθώς $N \to +\infty$.
- $\#\sigma_{ij} = m + 1$: Το γράφημα είναι δέντρο, προκύπτει από τετριμμένο ζεύγος γιατί κάθε ακμή προσπελαύνεται ακριβώς δις από κάποιο πολυδείκτη και άρα η κάθε ακμή προσπελαύνεται μόνο από ένα εκ των 2 πολυδεικτών-άρα οι i, j έχουν ξένες ακμές. Από την πρώτη συνθήκη το ζεύγος αυτό είναι τετριμμένο.

- $\#\sigma_{ij} \geq m+2$: Ένα μη τετριμμένο ζεύγος δίνει γράφημα συνεκτικό με το πολύ m ακμές. Αυτό φυσικά δεν γίνεται αν το πλήθος των κορυφών είναι μεγαλύτερο ή ίσο με $m+2$. Άρα, κάθε ζεύγος με $\#\sigma_{ij} \geq m+2$ είναι τετριμμένο.

Δηλαδή τελικώς έχουμε δείξει ότι

$$\lim_{N\to+\infty} Var\left(\int_\Omega x^m \mathrm{d}\mu_N\right) = 0$$

και άρα

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\int_\Omega x^m \mathrm{d}\mu_{A_N} - \int_\Omega x^m \mathrm{d}\bar{\mu}_N\right| > \varepsilon\right) = 0$$

□

Πόρισμα 2.5.1. $Var\left(\int_\Omega x^m \mathrm{d}\mu_N\right) = O\left(\frac{1}{N^2}\right)$

2.6 Σύγκλιση κατά πιθανότητα

Ορισμός 2.6.1. (Ασθενής σύγκλιση μέτρων)
Αν τα $\nu, (\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ντετερμινιστικά μέτρα πιθανότητας στον χ.π. $(\Omega, \mathcal{F})$, θα λέμε ότι $\nu_n \xrightarrow{w} \nu$ αν για κάθε f συνεχή φραγμένη συνάρτηση

$$\int_\Omega f \mathrm{d}\nu_n \xrightarrow{n\to\infty} \int_\Omega f \mathrm{d}\nu$$

Αν τα ν_n είναι τυχαία, τότε μιλάμε για ασθενή σύγκλιση κατά πιθανότητα ή σχεδόν βεβαίως.

Λήμμα 2.6.1. Για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύουν τα εξής φράγματα:

$$\sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} e^{\frac{1}{12n+1}} < n! < \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} e^{\frac{1}{12n}}$$

Λήμμα 2.6.2. Αν $(C_k)_{k\in\mathbb{N}}$ οι αριθμοί Catalan, τότε

$$C_k \leq \frac{4^k}{k^{\frac{3}{2}}}$$

Απόδειξη
Δεδομένου του πιο πάνω λήμματος,

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k} = \frac{(2k)!}{(k+1)(k!)^2} \\ &\leq \frac{\sqrt{2\pi}(2k)^{2k+\frac{1}{2}} e^{-2k} e^{\frac{1}{24k}}}{(k+1)2\pi k^{2k+1} e^{-2k} e^{\frac{2}{12k+1}}} \\ &= \frac{2^{2k}}{(k+1)\sqrt{\pi}\sqrt{k}} \underbrace{e^{\frac{1}{24k}-\frac{2}{12k+1}}}_{<1} < \frac{4^k}{k^{\frac{3}{2}}\sqrt{\pi}} < \frac{4^k}{k^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

□

Θεώρημα 2.6.1. *(Νόμος ημικυκλίου του Wigner - Σύγκλιση κατά πιθανότητα)*

Αν $(A_N)_{N\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία από πίνακες Wigner, τότε $\mu_{A_N} \xrightarrow{w} \mu_W$ κατά πιθανότητα.

Απόδειξη

Από την ανισότητα Markov και από τη σύγκλιση κατά ροπές που δείξαμε προηγουμένως, αν $B > 0$ προκύπτει

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left|\int_{\mathbb{R}} x^m \mathbb{1}_{\{|x|>B\}} \mathrm{d}\mu_{A_N}\right| > \varepsilon\right) &\leq \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}} x^m \mathbb{1}_{\{|x|>B\}} \mathrm{d}\mu_{A_N}\right] \\ &= \frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}} x^m \mathbb{1}_{\{|x|>B\}} \mathrm{d}\bar{\mu}_N \leq \frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}} |x|^m \frac{|x|^m}{B^m} \mathrm{d}\bar{\mu}_N \\ &= \frac{1}{\varepsilon B^m}\int_{\mathbb{R}} x^{2m} \mathrm{d}\bar{\mu}_N \xrightarrow{N\to+\infty} \frac{C_m}{\varepsilon B^m}\end{aligned}$$

Δεδομένου ότι $C_m \leq \dfrac{4^k}{k^{\frac{3}{2}}} < 4^m$ προκύπτει ότι

$$\limsup_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\int_{\mathbb{R}} x^m \mathbb{1}_{\{|x|>B\}} \mathrm{d}\mu_{A_N}\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{4^m}{\varepsilon B^m}$$

Αν επιλέξουμε $B = 5$, το δεξί μέλος της ανισότητας τείνει στο 0 όταν το $m \to +\infty$, και το αριστερό μέλος που είναι μη αρνητικό είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς m, καθώς $B > 1$. Αυτό φυσικά σημαίνει ότι

$$\limsup_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\int_{\mathbb{R}} x^m \mathbb{1}_{\{|x|>B\}} \mathrm{d}\mu_{A_N}\right| > \varepsilon\right) = 0 \tag{2.6.0.1}$$

Έστω φραγμένη συνεχής συνάρτηση f. Από τα πιο πάνω έχουμε ότι μπορούμε να θεωρήσουμε πως εκτός του $[-5,5]$ είναι μηδενική, άρα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι έχει συμπαγή φορέα στο $[-5,5]$. Αυτό ισχύει γιατί από το θεώρημα Stone - Weierstrass, για κάθε διάστημα $[-n,n]$ η f προσεγγίζεται από πολυώνυμο το οποίο εκτός του $[-5,5]$ έχει κατά πιθανότητα μηδενικό ολοκλήρωμα οριακά. Έστω $\delta > 0$. Από Stone - Weierstrass υπάρχει πολυώνυμο $p_\delta : [-5,5] \to \mathbb{R}$ με $|p_\delta(x) - f(x)| < \frac{\delta}{4}$ $\forall x \in [-5,5]$.

Θα φράξουμε τώρα για αυτή την τυχούσα $f \in C_c(\mathbb{R})$ την διαφορά της δράσης των μέτρων μ_{A_N}, μ_W από κάποια τιμή που θα συγκλίνει στο 0 καθώς $N \to +\infty$. Παρακάτω χρησιμοποιούμε την τριγωνική ανισότητα.

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\mu_{A_N} - \int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\mu_W\right| \\ =&\left|\int_{\mathbb{R}} f \mathbb{1}_{\{|x|\leq 5\}} \mathrm{d}\mu_{A_N} - \int_{\mathbb{R}} f \mathbb{1}_{\{|x|\leq 5\}} \mathrm{d}\mu_W\right|\end{aligned}$$

$$\leq \left|\int_{[-5,5]}(f-p_\delta)\mathrm{d}\mu_{A_N}\right| + \left|\int_{[-5,5]}(f-p_\delta)\mathrm{d}\mu_W\right| + \left|\int_{[-5,5]}p_\delta\mathrm{d}\mu_{A_N} - \int_{[-5,5]}p_\delta\mathrm{d}\mu_W\right|$$

$$\leq \left|\int_{[-5,5]}(f-p_\delta)\mathrm{d}\mu_{A_N}\right| + \left|\int_{[-5,5]}(f-p_\delta)\mathrm{d}\mu_W\right|$$

$$+ \left|\int_{[-5,5]}p_\delta\mathrm{d}\mu_{A_N} - \int_{[-5,5]}p_\delta\mathrm{d}\bar{\mu}_N\right| + \left|\int_{[-5,5]}p_\delta\mathrm{d}\mu_W - \int_{[-5,5]}p_\delta\mathrm{d}\bar{\mu}_N\right|$$

$$\leq \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{4} + \left|\int_{[-5,5]}p_\delta\mathrm{d}\mu_{A_N} - \int_{[-5,5]}p_\delta\mathrm{d}\bar{\mu}_N\right| + \left|\int_{[-5,5]}p_\delta\mathrm{d}\mu_W - \int_{[-5,5]}p_\delta\mathrm{d}\bar{\mu}_N\right|$$

Συνεπώς,

$$\mathbb{P}\left(\left|\int_{\mathbb{R}} f\mathrm{d}\mu_{A_N} - \int_{\mathbb{R}} f\mathrm{d}\mu_W\right| > \delta\right)$$

$$\leq \mathbb{P}\left(\left|\int_{[-5,5]}p_\delta\mathrm{d}\mu_{A_N} - \int_{[-5,5]}p_\delta\mathrm{d}\bar{\mu}_N\right| + \left|\int_{[-5,5]}p_\delta\mathrm{d}\mu_W - \int_{[-5,5]}p_\delta\mathrm{d}\bar{\mu}_N\right| > \frac{\delta}{2}\right)$$

$$\leq \mathbb{P}\left(\left\{\left|\int_{[-5,5]}p_\delta\mathrm{d}\mu_{A_N} - \int_{[-5,5]}p_\delta\mathrm{d}\bar{\mu}_N\right| > \frac{\delta}{4}\right\} \cup \left\{\left|\int_{[-5,5]}p_\delta\mathrm{d}\mu_W - \int_{[-5,5]}p_\delta\mathrm{d}\bar{\mu}_N\right| > \frac{\delta}{4}\right\}\right)$$

$$\leq \mathbb{P}\left(\left|\int_{[-5,5]}p_\delta\mathrm{d}\mu_{A_N} - \int_{[-5,5]}p_\delta\mathrm{d}\bar{\mu}_N\right| > \frac{\delta}{4}\right) + \mathbb{P}\left(\left|\int_{[-5,5]}p_\delta\mathrm{d}\mu_W - \int_{[-5,5]}p_\delta\mathrm{d}\bar{\mu}_N\right| > \frac{\delta}{4}\right)$$

Από το λήμμα 2.5.1. ο πρώτος όρος τείνει στο 0 και από τη σύγκλιση που έχουμε δείξει στις ροπές ο δεύτερος όρος τείνει επίσης στο 0. Άρα τελικώς, καταλήγουμε σε ασθενή σύγκλιση κατά πιθανότητα, όπως απαιτεί το αποδεικτέο θεώρημα.

□

2.7 Σχεδόν βέβαιη σύγκλιση

Πόρισμα 2.7.1. (Νόμος ημικυκλίου του Wigner-σχεδόν βεβαίως)

Αν $(A_N)_{N\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία από πίνακες Wigner, τότε $\mu_{A_N} \xrightarrow{w} \mu_W$ σχεδόν βεβαίως.

Απόδειξη

Από το πόρισμα 2.5.1. έχουμε ότι για κάθε m υπάρχει c τ.ω. να ισχύει για επαρκώς μεγάλα N:

$$Var\left(\int_\Omega x^m \mathrm{d}\mu_{A_N}\right) \leq \frac{c}{N^2}$$

Από την ανισότητα του Chebyshev έχουμε επίσης ότι

$$\sum_{N=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\int_{\mathbb{R}} x^m \mathrm{d}\mu_{A_N} - \int_{\mathbb{R}} x^m \mathrm{d}\bar{\mu}_N\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{N=1}^{+\infty} \left|Var\left(\int_{\Omega} x^m \mathrm{d}\mu_{A_N}\right)\right|$$

$$\leq c_1 + \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{N=k}^{+\infty} \frac{c}{N^2} < +\infty$$

Το λήμμα Borel - Cantelli μας δίνει τώρα ότι

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{N\to+\infty} \left|\int_{\mathbb{R}} x^m \mathrm{d}\mu_{A_N} - \int_{\mathbb{R}} x^m \mathrm{d}\bar{\mu}_N\right| > \varepsilon\right) = 0$$

και άρα

$$\left|\int_{\mathbb{R}} x^m \mathrm{d}\mu_{A_N} - \int_{\mathbb{R}} x^m \mathrm{d}\bar{\mu}_N\right| \xrightarrow{N\to+\infty} 0 \text{ σχεδόν βεβαίως}$$

Η ίδια ακριβώς απόδειξη με πιο πάνω μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να περάσουμε από τα πολυώνυμα σε φραγμένες συναρτήσεις f, μόνο που αυτή τη φορά στο τέλος χρησιμοποιούμε την πιο πάνω ισχυρότερη σύγκλιση, αντί για τη σύγκλιση κατά πιθανότητα. □

2.8 Περίπτωση κανονικής κατανομής

Στην περίπτωση που η κατανομή μ είναι συγκεκριμένα η τυπική κανονική κατανομή, μπορούμε να αποδείξουμε το θεώρημα 2.6.1. με έναν εναλλακτικό τρόπο. Θεωρούμε δεδομένη τη σύγκλιση κατά ροπές. Ας δούμε τους ορισμούς και τα εργαλεία που θα μας χρειαστούν.

Ορισμός 2.8.1. (GUE) Ένας Γκαουσσιανός ορθομοναδιαίος πίνακας είναι ένα στοιχείο του $\mathbb{C}^{N\times N}$, δηλαδή ένας πίνακας της μορφής $A_N = \frac{1}{\sqrt{N}}(a_{ij})_{i,j=1}^N$, όπου:

- a_{ij} τυπικές κανονικές τυχαίες μεταβλητές, μιγαδικές εκτός διαγωνίου και πραγματικές στη διαγώνιο για $i > j$.
- a_{ij} ανεξάρτητα για $i > j$.
- $A_N = A_N^*$.

Δηλαδή, $\forall j, k \in \{1, \ldots, N\}$, $a_{jj} \sim \mathcal{N}(0,1)$ και για $k < j$, $a_{jk} = \frac{1}{2}(b_{jk} + ic_{jk})$ όπου $a_{jk}, b_{jk} \sim \mathcal{N}(0,1)$. Παρατηρούμε ότι με την κανονικοποίηση το στοιχείο (i,j) του A_N έχει διασπορά

$$\sigma_{ij}^2 = \begin{cases} \frac{2}{N} & i = j \\ \frac{1}{N} & i \neq j \end{cases}$$

Ορισμός 2.8.2. (Μετασχηματισμός Stieltjes) Έστω $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$ χώρος πιθανότητας. Ο μετασχηματισμός Stieltjes του μ είναι η συνάρτηση $S_\mu : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, όπου

$$S_\mu(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x - z} \mathrm{d}\mu(x), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$$

Παρατήρηση 2.8.1.

$$|S_\mu(z)| = \left|\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x-z} \mathrm{d}\mu(x)\right| \leq \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{1}{x-z}\right| \mathrm{d}\mu(x) \leq \frac{1}{Im(z)}$$

Λήμμα 2.8.1. (i) Ισχύει η φόρμουλα αντιστρεψιμότητας του μετασχηματισμού Stieltjes:

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\pi} \int_a^b \mathrm{Im}\{S_\mu(x+i\varepsilon)\} \mathrm{d}x = \mu((a,b)) + \frac{1}{2}\mu(\{a,b\})$$

(ii) Αν ν, μ πεπερασμένα μέτρα, τότε $S_\nu = S_\mu \iff \nu = \mu$.

Απόδειξη

(i)

$$\mathrm{Im}\, S_\mu(x+i\varepsilon) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{Im}\left\{\frac{1}{t-x-i\varepsilon}\right\} \mathrm{d}\mu(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varepsilon}{(t-x)^2+\varepsilon} \mathrm{d}\mu(t)$$

Αν τώρα ολοκληρώσουμε,

$$\int_a^b \int_{\mathbb{R}} \frac{\varepsilon}{(t-x)^2+\varepsilon} \mathrm{d}\mu(t) \mathrm{d}x \overset{fubini}{=} \int_{\mathbb{R}} \int_a^b \frac{\varepsilon}{(t-x)^2+\varepsilon} \mathrm{d}x \mathrm{d}\mu(t)$$

Το εσωτερικό ολοκλήρωμα είναι $\int_a^b \frac{\varepsilon}{(t-x)^2+\varepsilon} \mathrm{d}x = \arctan\left(\frac{b-t}{\varepsilon}\right) - \arctan\left(\frac{a-t}{\varepsilon}\right)$ και ισχύει το εξής:

$$\arctan\left(\frac{b-t}{\varepsilon}\right) - \arctan\left(\frac{a-t}{\varepsilon}\right) \xrightarrow{\varepsilon \to 0^+} \begin{cases} 0 & , t \notin [a,b] \\ \pi/2 & , t \in \{a,b\} \\ \pi & , t \in (a,b) \end{cases}$$

Από όπου προκύπτει το ζητούμενο.

(ii) Έστω $S_\nu = S_\mu$. Για κάθε $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ που δεν είναι άτομα του μ ή του ν, από το $i)$ έχουμε ότι $\mu((a,b)) = \nu((a,b))$. Έστω τώρα $c, d \in \mathbb{R}$. Ξέρουμε ότι μπορούν να υπάρχουν το πολύ αριθμήσιμα άτομα για τα μέτρα μ, ν και άρα μπορούμε να γράψουμε κάθε διάστημα (c,d) ως

$$(c,d) = \cup_{n=1}^{+\infty} (c+\varepsilon_n, d-\varepsilon_n)$$

όπου ε_n θετική ακολουθία, $\varepsilon_n \to 0$ και είναι έτσι επιλεγμένο ώστε κανένα από τα $c+\varepsilon_n, d-\varepsilon_n$ να μην είναι άτομο ούτε στο μ ούτε στο ν. Η ακολουθία συνόλων $(c+\varepsilon_n, d-\varepsilon_n)$ είναι αύξουσα και άρα

$$\mu((c,d)) = \lim_{n\to\infty} \mu((c+\varepsilon_n, d-\varepsilon_n)) = \lim_{n\to\infty} \nu((c+\varepsilon_n, d-\varepsilon_n)) = \nu((c,d))$$

Αφού τα δύο μέτρα ταυτίζονται σε οικογένεια που παράγει τα Borel και είναι πεπερασμένα, από το θεώρημα μοναδικότητας, $\mu = \nu$.

□

Υπενθυμίζουμε κάτι που αναφέραμε πιο πάνω για την ασθενή τοπολογία και δίνουμε έναν επιπλέον ορισμό:

Ορισμός 2.8.3. 1.

$$C_0 = \{f \in C(\mathbb{R}) : \lim_{|t|\to+\infty} f(t) = 0\}$$
$$C_b = \{f \in C(\mathbb{R}) : \exists M > 0 : |f(t)| \leq M \quad \forall t \in \mathbb{R}\}$$

2. Έστω $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μέτρα πιθανότητας στον $(\mathbb{R}, \mathcal{F})$. Τότε λέμε ότι:
-Η μ_n συγκλίνει με την vague(v) τοπολογία στο μ ή $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$ αν

$$\int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\mu_n \to \int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\mu \quad \forall f \in C_0(\mathbb{R})$$

-Η μ_n συγκλίνει με την ασθενή (weak-w) τοπολογία στο μ, ή $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$ αν

$$\int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\mu_n \to \int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\mu \quad \forall f \in C_b(\mathbb{R})$$

Το πιο πάνω μας λέει ότι $C_0(\mathbb{R})^* = \{$Τα μιγαδικά μέτρα στον $\mathbb{R}\}$ και η τοπολογία *vague* είναι ακριβώς η w^* τοπολογία (κατά σημείον τοπολογία).

Πρόταση 2.8.1. *Έστω $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}, \mu$ μέτρα πιθανότητας. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$

(ii) Για κάθε $z \in \mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\}$, ισχύει $S_{\mu_n}(z) \xrightarrow{n\to\infty} S_\mu(z)$.

(iii) Υπάρχει $D \subset \mathbb{C}^+$ με σημείο συσσώρευσης στο $\mathbb{C}^+$ τ.ω. $S_{\mu_n}(z) \xrightarrow{n\to\infty} S_\mu(z) \quad \forall z \in D$.

Απόδειξη

'$(i) \Rightarrow (ii)$': Η συνάρτηση $f_z : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : \quad f_z(x) = \frac{1}{x-z}$ είναι συνεχής και φραγμένη (παρατήρηση 2.8.1.) και από τον ορισμό της w-σύγκλισης το ζητούμενο είναι προφανές.

'$(ii) \Rightarrow (iii)$' Προφανές

'$(iii) \Rightarrow (i)$' Από το θεώρημα Banach Alaoglu η μοναδιαία μπάλα στον $\mathcal{M}(\mathbb{R})$, δηλαδή τον χώρο των μέτρων στο $\mathbb{R}$ είναι $v-$ συμπαγής. Επιπλέον, η μπάλα με την *vague* τοπολογία είναι μετρικοποιήσιμη. Τα μ_n είναι στοιχεία της μοναδιαίας μπάλας και άρα θα έχουν μια υπακολουθία $\mu_{k_n} \xrightarrow{v} \theta \in B_1(\mathcal{M}(\mathbb{R}))$. Άρα $S_{\mu_{k_n}}(z) \to S_\theta(z) \ \ \forall z \in \mathbb{C}^+$. Όμως, $S_{\mu_{k_n}}(z) \to S_\mu(z) \ \ \forall z \in D$ και άρα

$$S_\theta(z) = S_\mu(z) \quad \forall z \in D$$

Όμως, η S_μ, S_θ είναι αναλυτικές μιγαδικές συναρτήσεις, και το D έχει σημείο συσσώρευσης, άρα από το θεώρημα ταυτοτικής απεικόνισης

ταυτίζονται σε κάθε $z \in \mathbb{C}^+$. Από το λήμμα 2.8.1. έχουμε ότι $\theta = \mu$. Αυτό σημαίνει ότι $\mu_{k_n} \xrightarrow{v} \mu$. Κάθε υπακολουθία του μ_n κατά τον ίδιο τρόπο έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, η οποία μάλιστα πρέπει να συγκλίνει στο μ με όμοια επιχειρήματα με τα πιο πάνω, και άρα η ίδια η μ_n συγκλίνει με την *vague* τοπολογία στο μ.

Μάλιστα, ισχύει και $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$: έστωσαν $f \in C_b$ και $g \in C_0 : 0 < g < 1$. Φυσικά, ισχύει $fg \in C_0$, και άρα, από την σύγκλιση κατά v:

$$\int_{\mathbb{R}} fg \mathrm{d}\mu_n \to \int_{\mathbb{R}} fg \mathrm{d}\mu$$

Γράφουμε τώρα $f = (1-g)f + gf$. Τότε,

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\mu_n - \int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\mu\right| &\leq \int_{\mathbb{R}} |(1-g)f| \,\mathrm{d}\mu_n + \int_{\mathbb{R}} |(1-g)f| \,\mathrm{d}\mu + \left|\int_{\mathbb{R}} fg \mathrm{d}\mu_n - \int_{\mathbb{R}} fg \mathrm{d}\mu\right| \\ &\leq \|f\|_\infty \left(\int_{\mathbb{R}} (1-g) \mathrm{d}\mu_n + \int_{\mathbb{R}} (1-g) \mathrm{d}\mu\right) + \left|\int_{\mathbb{R}} fg \mathrm{d}\mu_n - \int_{\mathbb{R}} fg \mathrm{d}\mu\right|\end{aligned}$$

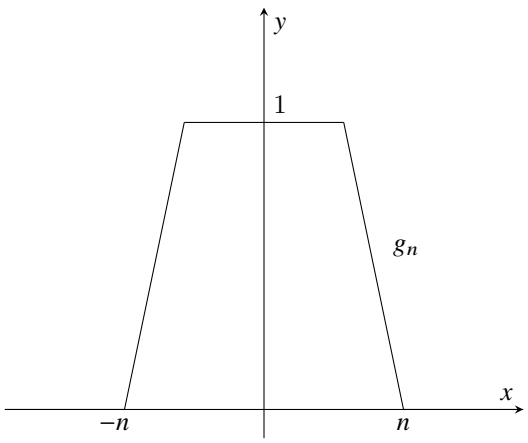
Από τα πιο πάνω εύκολα φαίνεται ότι

$$\limsup_n \left|\int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\mu_n - \int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\mu\right| \leq 2\|f\|_\infty \left(1 - \int_{\mathbb{R}} g \mathrm{d}\mu\right)$$

Επιπλέον, $\sup\{\int_{\mathbb{R}} g \mathrm{d}\mu : 0 \leq g \leq 1, g \in C_0\} = 1$ και άρα το πιο πάνω άνω φράγμα γίνεται όσο κοντά θέλουμε στο 0, και συνεπώς έχουμε σύγκλιση στο 0. Πράγματι, προφανώς για κάθε τέτοια g ισχύει ότι $\int_{\mathbb{R}} g \mathrm{d}\mu \leq 1$. Επιπλέον, αν ορίσουμε την ακολουθία συναρτήσεων g_n που να έχει στήριγμα στο $[-n, n]$:

$$g_n(x) = \begin{cases} 0 & , |x| \geq n \\ 1 & , x \in [-n+1/n, n-1/n] \\ n(x+n) & , x \in [-n, -n+1/n] \\ -n(x-n) & , x \in [n-1/n, n] \end{cases}$$

Σχηματικά, αυτό είναι ένα τραπέζιο. Για τυχόν n μοιάζει έτσι:



Εύκολα φαίνεται ότι αυτή η ακολουθία συγκλίνει σημειακά στην σταθερή συνάρτηση 1, και κυριαρχείται από την σταθερή συνάρτηση 1. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης συνεπάγεται ότι

$$\int_{\mathbb{R}} g_n \mathrm{d}\mu \to \int_{\mathbb{R}} 1 \mathrm{d}\mu = 1$$

και άρα αυτό είναι το ελάχιστο άνω φράγμα. □

Σύμφωνα με τα πιο πάνω, αρκεί για το νόμο ημικυκλίου του Wigner να δείξουμε ότι υπάρχει $D \subset \mathbb{C}^+$ με σημείο συσσώρευσης τέτοιο ώστε

$$S_{\mu_{A_N}}(z) \xrightarrow{N \to +\infty} S_{\mu_W}(z) \quad \forall z \in D$$

κατά πιθανότητα και στη συνέχεια σχεδόν βεβαίως. Σε πρώτη φάση, όπως πιο πάνω, θέλουμε να δείξουμε ότι $\bar{\mu}_N \to \mu_W$, και άρα αρκεί

$$S_{\bar{\mu}_N}(z) \xrightarrow{N \to +\infty} S_{\mu_W}(z) \quad \forall z \in D$$

Η πιο κάτω πρόταση μας λέει ποιο είναι το όριο θέλουμε να έχει το $S_{\bar{\mu}_N}(z)$.

Πρόταση 2.8.2. *Ο μετασχηματισμός Stieltjes της μ_W για $|z| < \frac{1}{4}$ δίνεται από την έκφραση*

$$S_{\mu_W}(z) = \frac{-z + \sqrt{z^2 - 4}}{2}$$

και αφού ο S_{μ_W} είναι αναλυτική συνάρτηση, αυτή η έκφραση ισχύει για κάθε $z \in \mathbb{C}^+$

Απόδειξη

Έχουμε δειξει στην απόδειξη του λήμματος 2.4.2. ότι η γεννήτρια συνάρτηση των αριθμών Catalan έχει τον κλειστό τύπο

$$\hat{\beta}(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2z}$$

Παρατηρούμε ότι για $|z| < 1/4$:

$$\hat{\beta}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k \int_{\mathbb{R}} x^{2k} \mathrm{d}\mu_W(x) \overset{fubini}{=} \int_{-2}^{2} \sum_{k=0}^{+\infty} (zx^2)^k \mathrm{d}\mu_W(x) = \int_{-2}^{2} \frac{1}{1 - zx^2} \mathrm{d}\mu_W(x)$$

$$= \frac{1}{z} \int_{-2}^{2} \frac{1}{\frac{1}{z} - x^2} \mathrm{d}\mu_W(x) = \frac{1}{\frac{2z}{\sqrt{z}}} \int_{-2}^{2} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{z}} - x} \mathrm{d}\mu_W(x) + \frac{1}{\frac{2z}{\sqrt{z}}} \int_{-2}^{2} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{z}} + x} \mathrm{d}\mu_W(x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{z}} \int_{-2}^{2} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{z}} - x} \mathrm{d}\mu_W(x) = -\frac{1}{\sqrt{z}} S_{\mu_W}\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right)$$

Όπου η προτελευταία ισότητα προέκυψε λόγω της συμμετρίας της μ_W. Αλλιώς, το πιο πάνω γράφεται ως

$$-zS_{\mu_W}(z) = \hat{\beta}\left(\frac{1}{z^2}\right) = \frac{1-\sqrt{1-4\frac{1}{z^2}}}{2\frac{1}{z^2}} = \frac{z^2 - z\sqrt{z^2-4}}{2}$$

$$S_{\mu_W}(z) = \frac{-z+\sqrt{z^2-4}}{2}$$

□

Για την εύρεση του ορίου, παρατηρούμε ότι η ακολουθία που θα μας απασχολήσει είναι η εξής:

$$S_{\bar{\mu}_N}(z) = \frac{1}{N}\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\lambda_i - z}\right] = \mathbb{E}[\mathrm{tr}(A_N - zI)^{-1}]$$

Ας θέσουμε $R_N(z) = (A_N - zI)^{-1}$. Επιπλέον,

$$R_N(z)(A_N - zI) = I \iff R_N(z) = -\frac{1}{z}I + \frac{1}{z}R_N(z)A_N$$

Δηλαδή,

$$\mathbb{E}[\mathrm{tr}(R_N(z))] = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z}\mathbb{E}[\mathrm{tr}(R_N(z)A_N)]$$

Το αριστερό μέλος είναι ο μετασχηματισμός Stieltjes που μας ενδιαφέρει στην σύγκλιση, ας μελετήσουμε λοιπόν το δεξί μέλος, καθώς θα είναι πιο εύκολο να το χειριστούμε. Αν συμβολίσουμε με $[R_N]_{ij}$ την συντεταγμένη στην θέση (i,j) του $R_N(z)$ και αντίστοιχα με a_{ij} για τον A_N, έχουμε ότι

$$\mathrm{tr}(R_N A_N) = \frac{1}{N}\sum_{i,j=1}^{N}[R_N(z)]_{ij}a_{ji}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε ως δεδομένο το πιο κάτω για να συνεχίσουμε:

Λήμμα 2.8.2. (Ταυτότητα Stein) Αν $(Z_i)_{i=1}^N$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών με $Z_i \sim \mathcal{N}(0,\sigma_i^2)$ και $f:\mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ διαφορίσιμη συνάρτηση, τότε αν ορίσουμε $Z = (Z_1, Z_2, ..., Z_N)$ ισχύει η ταυτότητα του Stein:

$$\mathbb{E}[Z_i f(Z)] = \sigma_i^2\mathbb{E}\left[\frac{\partial}{\partial Z_i}f(Z)\right]$$

Λήμμα 2.8.3. Αν $A_N = (a_{ij})_{i,j=1}^N$ πίνακας Wigner τότε

$$\frac{\partial}{\partial a_{ij}}[R_N(z)]_{lk} = \begin{cases} -[R_N(z)]_{li}\cdot[R_N(z)]_{ik} & ,i=j \\ -[R_N(z)]_{li}\cdot[R_N(z)]_{jk} - [R_N(z)]_{lj}\cdot[R_N(z)]_{ik} & ,i\neq j \end{cases}$$

Απόδειξη

Κατ αρχάς, αν E_{ij} ο πίνακας με 1 στη θέση (i,j) και 0 στις υπόλοιπες, τότε

$$\frac{\partial}{\partial a_{ij}}A_N = \begin{cases} E_{ii} & ,i=j \\ E_{ij}+E_{ji} & ,i\neq j \end{cases}$$

Με την σχέση $R_N(z)(A_N - zI) = I$ και τον κανόνα γινομένου προκύπτει ότι

$$\frac{\partial}{\partial a_{ij}}(R_N(z))\cdot(A_N - zI) + R_N(z)\cdot\frac{\partial}{\partial a_{ij}}(A_N) = 0 \iff \frac{\partial}{\partial a_{ij}}(R_N(z)) = -R_N(z)\cdot\frac{\partial}{\partial a_{ij}}(A_N)\cdot R_N(z)$$

και άρα αν

- $i = j$ τότε

$$\frac{\partial}{\partial a_{ii}}[R_N(z)]_{lk} = -[R_N(z)E_{ii}R_N(z)]_{lk} = -[R_N(z)]_{li}\cdot[R_N(z)]_{ik}$$

- $i \neq j$ τότε

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial a_{ij}}[R_N(z)]_{lk} &= -[R_N(z)E_{ij}R_N(z)]_{lk} - [R_N(z)E_{ji}R_N(z)]_{lk}\\ &= -[R_N(z)]_{li}\cdot[R_N(z)]_{jk} - [R_N(z)]_{lj}\cdot[R_N(z)]_{ik}\end{aligned}$$

□

Σύμφωνα δηλαδή με τα λήμματα 2.7.2. και 2.7.3., και δεδομένης της συμμετρικότητας του $R_N(z)$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathrm{tr}(R_N A_N)] =& \mathbb{E}[\mathrm{tr}(A_N R_N)] = \frac{1}{N}\sum_{i,j=1}^{N}\mathbb{E}[a_{ij}[R_N(z)]_{ji}] = \frac{1}{N}\sum_{i,j=1}^{N}\sigma_{ij}^2\mathbb{E}\left[\frac{\partial}{\partial a_{ij}}[R_N(z)]_{ji}\right]\\ &= -\frac{1}{N}\sum_{i,j=1}^{N}\frac{1}{N}\mathbb{E}\left[[R_N]_{ii}\cdot[R_N]_{jj} + [R_N(z)]_{ij}\cdot[R_N]_{ij}\right]\\ &= -\frac{1}{N}\mathbb{E}\left[\sum_{i,j=1}^{N}\frac{1}{N}\left[[R_N]_{ii}\cdot[R_N(z)]_{jj} + [R_N(z)]_{ij}\cdot[R_N]_{ji}\right]\right]\\ &= -\mathbb{E}[(\mathrm{tr}(R_N(z)))^2] - \frac{1}{N}\mathbb{E}[\mathrm{tr}\big(R_N^2(z)\big)]\end{aligned}$$

Ισχύει ότι

$$\left|\frac{1}{N}\mathbb{E}[\mathrm{tr}(R_N^2(z))]\right| = \frac{1}{N^2}\left|\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{(\lambda_i - z)^2}\right| \leq \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{1}{\lambda_i - z}\right|^2 \leq \frac{1}{N^2}N\frac{1}{(\mathrm{Im}\, z)^2} \xrightarrow{N\to+\infty} 0$$

Ενώ

$$\mathbb{E}[(\mathrm{tr}(R_N(z)))^2] = (\mathbb{E}[\mathrm{tr}(R_N(z))])^2 - \mathrm{Var}[\mathrm{tr}(R_N(z))] = S_{\bar{\mu}_N}^2(z) - \mathrm{Var}[\mathrm{tr}(R_N(z))]$$

Δηλαδή,

$$S_{\bar{\mu}_N} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z}S^2_{\bar{\mu}_N} + \frac{1}{z}\mathrm{Var}[\mathrm{tr}(R_N(z))] + \varepsilon_N$$

όπου $\varepsilon_N \to 0$.

Θα αναφέρουμε τώρα χωρίς αποδείξεις τι χρειάζεται για να δείξει κανείς ότι $\mathrm{Var}[\mathrm{tr}(R_N(z))] \to 0$ και θα καταλήξουμε στο ότι οριακά έχουμε τον μετασχηματισμό Stieltjes του μ_W.

Λήμμα 2.8.4. (Ανισότητες Poincaré και Efron-Stein) Έστω $X = (X_i)_{i=1}^N : \Omega \to \mathbb{R}^N$ τετραγωνικά ολοκληρώσιμη τυχαία μεταβλητή.

(i) Θα λέμε ότι ικανοποιεί την ανισότητα Poincaré με σταθερά c αν για κάθε $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση με $\mathbb{E}[f(X)^2] < +\infty$ ισχύει:

$$\mathrm{Var}[f(X)] \leq c\mathbb{E}[\|\nabla f(X)\|_2^2]$$

(ii) Αν επιπλέον $(X_i)_{i=1}^N$ μεταξύ τους ανεξάρτητες, τότε αν $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση με $\mathbb{E}[f(X)^2] < +\infty$

$$\mathrm{Var}[f(X)] \leq \sum_{i=1}^N \mathbb{E}[\mathrm{Var}^{(i)}[f(X)]]$$

Συγκεκριμένα, αποδεικνύεται ότι αν $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, ικανοποιεί την ανισότητα Poincaré με σταθερά $c = 1$, δηλαδή

$$\mathrm{Var}[f(X)] \leq \mathbb{E}[\|\nabla f(X)\|_2^2]$$

Αν τώρα τοποθετήσουμε σε κάποιο διάνυσμα X τις τυχαίες μεταβλητές του GUE, οι οποίες ακολουθούν κανονική κατανομή (ανάλογα με το αν βρίσκονται στη διαγώνιο ή εκτός αυτής έχουν διαφορετική κατανομή) με $\max\{\sigma_{ij}\} = \frac{2}{N}$, η σταθερά στην ανισότητα Poincaré μετατρέπεται σε $2/N$ και έχουμε για $f_z = \mathrm{tr}(R_N(z))$,

$$\mathrm{Var}[\mathrm{tr}(R_N(z))] \leq \frac{2}{N}\mathbb{E}[\|\nabla \mathrm{tr}(R_N(z))\|_2^2]$$

Για να υπολογίσουμε το φράγμα στα δεξιά, κάνουμε τους εξής υπολογισμούς (λαμβάνοντας υπόψιν το λήμμα 2.7.3.). Αν $i \neq j$,:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_z(X)}{\partial x_{ij}} &= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^N \frac{\partial [R_N(z)]_{kk}}{\partial x_{ij}} \\
&= -\frac{1}{N}\sum_{k=1}^N \left([R_N(z)]_{ki}\cdot[R_N(z)]_{jk} + [R_N(z)]_{kj}\cdot[R_N(z)]_{ik}\right) \\
&\overset{\text{συμμετρ.}}{=} -\frac{2}{N}\sum_{k=1}^N [R_N(z)]_{ik}\cdot[R_N(z)]_{kj} \\
&= -\frac{2}{N}[R_N(z)^2]_{ij}
\end{aligned}$$

Έχουμε το ίδιο αποτέλεσμα αν $i = j$ με το $2/N$ να αντικαθίσταται από $1/N$. Το $\mathrm{tr}(R_N(z))$ είναι μιγαδικό, δηλαδή,

$$\mathrm{Var}[\mathrm{tr}(R_N(z))] = \mathrm{Var}[\mathrm{Re}(\mathrm{tr}(R_N(z)))] + \mathrm{Var}[\mathrm{Im}(\mathrm{tr}(R_N(z)))]$$

Άρα αρκεί να φράξουμε ξεχωριστά το πραγματικό και το φανταστικό μέρος. Θέτουμε $g_z(X) = \mathrm{Re}(\mathrm{tr}(R_N(z)))$. Τότε,

$$\left|\frac{\partial g_z(X)}{\partial x_{ij}}\right| \leq \frac{2}{N}|[R_N(z)^2]_{ij}| \leq \frac{2}{N}\left\|R_N(z)^2\right\| \leq \frac{2}{N\cdot(\mathrm{Im}(z))^2}$$

Άρα,

$$\left|\frac{\partial g_z(X)}{\partial x_{ij}}\right|^2 \leq \frac{4}{N^2\cdot(\mathrm{Im}(z))^4}$$

Από την ανισότητα Poincaré,

$$\mathrm{Var}[\mathrm{Re}(\mathrm{tr}(R_N(z)))] \leq \frac{2}{N}\mathbb{E}\left[\sum_{i<j}\left|\frac{\partial g_z(X)}{\partial x_{ij}}\right|^2\right] \leq \frac{8}{N\cdot(\mathrm{Im}(z))^4}$$

Κατά τον ίδιο ακριβώς τρόπο έχουμε το ίδιο φράγμα για το $\mathrm{Var}(\mathrm{Im}(f_z))$.

$$\mathrm{Var}[\mathrm{tr}(R_N(z))] \leq \frac{16}{N\cdot(\mathrm{Im}(z))^4} \xrightarrow{N\to+\infty} 0$$

Αυτό δηλαδή σημαίνει ότι οριακά, αν $S = \lim_{N\to+\infty} S_{\bar{\mu}_N}$,

$$S = \frac{1}{z} + \frac{1}{z}S^2 \iff S = \frac{-z+\sqrt{z^2-4}}{2} = S_{\mu_W}$$

και άρα, από την πρόταση 2.8.1. $\bar{\mu}_N \xrightarrow{w} \mu_W$. Από το λήμμα 2.5.1. έχουμε τελικώς και πάλι τον 'ασθενή' νόμο ημικυκλίου του Wigner στην περίπτωση της κανονικής κατανομής, δηλαδή:

Θεώρημα 2.8.1. *Έστω $A_N = (a_{ij})_{i,j=1}^N$ πίνακας Wigner με $\mu = \mathcal{N}(0,1)$, τότε*

$$\mu_{A_N} \xrightarrow{w} \mu_W \quad \textit{κατά πιθανότητα}$$

Κεφάλαιο 3

Marchenko-Pastur

3.1 Σύγκλιση ροπών

Αντίστοιχα αποτελέσματα με τα πιο πάνω υπάρχουν και για άλλα είδη πινάκων. Ένα παράδειγμα είναι οι πίνακες Wishart.

Ορισμός 3.1.1. Έστω μ κατανομή με υπάρχουσες πεπερασμένες ροπές κάθε τάξης, με $\mathbb{E}_\mu[Q] = 0$ και $\mathbb{E}_\mu[X^2] = 1$. Έστω επίσης $X = (x_{ij}) \in \mathbb{R}^{M\times N}$ ένας πίνακας τέτοιος ώστε

- $x_{ij} \sim \mu \ \ \forall i, j$
- $\{x_{ij}\}$ ανά δύο ανεξάρτητες

Ονομάζουμε τον $Y_N = \dfrac{1}{N}XX^T \in \mathbb{R}^{M\times M}$ πίνακα Wishart.

Ορισμός 3.1.2. (i) Δεδομένου πίνακα Wishart Y_N ορίζουμε την εμπειρικό φασματικό μέτρο του ως τη συνάρτηση $\mu_{Y_N} : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ με τιμές

$$\mu_{Y_N}(B) := \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} \mathbb{1}_B(\lambda_i(Y_N))$$

(ii) Ονομάζουμε ντετερμινιστικό μέτρο τάξεων N, M το $\bar{\mu}_{MN} := \mathbb{E}[\mu_{Y_N}]$, δηλαδή $\bar{\mu}_{MN} : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ με $\bar{\mu}_{MN}(B) = \mathbb{E}[\mu_{Y_N}(B)]$.

Θεώρημα 3.1.1. *Δεδομένου πίνακα Wishart* $Y_N = \dfrac{1}{N}XX^T$*, όταν* $M, N \to +\infty$ *και* $\dfrac{M}{N} \to \lambda \in (0, 1)$*, το εμπειρικό φασματικό μέτρο* μ_{Y_N} *συγκλίνει σχεδόν βεβαίως στο μέτρο* μ_ρ*, όπου*

$$\mathrm{d}\mu_\rho(x) = \frac{\sqrt{(b-x)(x-a)}}{2\pi\lambda x}\mathbb{1}_{[a,b]}(x)$$

όπου $a = (1-\sqrt{\lambda})^2$ *και* $b = (1+\sqrt{\lambda})^2$

Για να δείξουμε το πιο πάνω θα δείξουμε μόνο την σύγκλιση κατά ροπές. Όπως πιο πριν, θα δείξουμε την σύγκλιση των ροπών του $\bar{\mu}_{MN}$ στις ροπές του μ_ρ. Συγκεκριμένα θα το δείξουμε για $\lambda < 1$. Τα υπόλοιπα αποδεικνύονται με την ίδια διαδικασία που χρησιμοποιήσαμε

για τον νόμο ημικυκλίου του Wigner: δηλαδή ισχύει ότι οι ροπές των $\bar{\mu}_{MN}$, μ_{Y_N} είναι 'κοντά' σχεδόν βεβαίως, και μέσω του Stone-Weirstrass μπορούμε να περάσουμε σε σχεδόν βέβαιη ασθενή σύγκλιση. Λόγω της ομοιότητας στις διαδικασίες, το δεύτερο κομμάτι παραλείπεται.

Πρόταση 3.1.1. *Η k-οστή ροπή του μέτρου $\bar{\mu}_{MN}$ είναι:*

$$\mathbb{E}_{\bar{\mu}_{MN}}\left[Z^k\right] = \frac{1}{M}\mathbb{E}\left[\mathrm{Tr}\left(Y^k\right)\right] = \frac{1}{N^k M}\sum_{j_1,\dots j_k=1}^{M}\sum_{i_0,\dots i_k=1}^{N}\mathbb{E}[x_{i_0 j_1}\bar{x}_{j_1 i_2}\dots\bar{x}_{i_k j_k}]$$

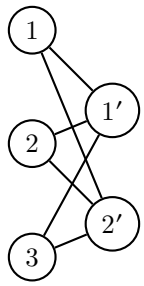
Απόδειξη

Όπως πάνω. □

Ορισμός 3.1.3. Ένα πλήρες διμερές γράφημα $G(A,B)$, όπου A, B είναι σύνολα κόμβων, είναι ένα γράφημα που δεν έχει ακμές ανάμεσα σε κόμβους του A ή ανάμεσα σε κόμβους του B, αλλά $\forall u \in A, v \in B, (u,v) \in E(G(A,B))$.

Παρατήρηση 3.1.1. Όλοι οι κύκλοι και όλες οι περιηγήσεις σε ένα διμερές γράφημα έχουν άρτιο μήκος (δηλαδή πλήθος ακμών).

Κατασκευάζουμε ένα πλήρες διμερές γράφημα με το ένα μέλος να είναι έχει πλήθος $[M]$ και το άλλο μέλος να έχει πλήθος $[N]$. Ας το ονομάσουμε $G(M,N)$. Σχηματικά, ένα παράδειγμα πλήρους διμερούς για $N = 3, M = 2$:



Στο γράφημα που θα κατασκευάσουμε, θα έχουμε στο δεξί μέλος $[N]$ κόμβους αριθμημένους από το 1 μέχρι και το $[N]$, και στο δεξί $[M]$ κόμβους, αριθμημένους από το 1 μέχρι και το $[M]$. Θέλουμε από αυτό το γράφημα να αντλήσουμε τα $\mathbb{E}[x_{i_0 j_1}\bar{x}_{j_1 i_2}\dots\bar{x}_{i_k j_k}]$. Θεωρούμε το σύνολο των περιηγήσεων του $G(M,N)$ μήκους $2k$ που ξεκινούν (και τελειώνουν) από κορυφή στο αριστερό μέλος: ας το ονομάσουμε $\mathcal{K}_k$. Ορίζουμε για κάποιο στοιχείο $\gamma \in \mathcal{K}_k$ το βάρος της

$$\gamma = (i_0, j_1, i_1, j_2, i_2, j_3, \dots, j_k, i_k = i_0)$$

με $i_l \in [N], j_r \in [M]\ \forall l \in [k] \cup \{0\}, r \in [k]$ να είναι το εξής:

$$w(\gamma) = x_{i_0 j_1}\bar{x}_{i_1 j_1}x_{i_1 j_2}\dots\bar{x}_{j_k i_1}$$

Προκύπτει ότι μόνο οι κλειστές περιηγήσεις μας ενδιαφέρουν για να υπολογίσουμε την $\mathbb{E}[x_{i_0 j_1}\bar{x}_{j_1 i_2}\dots\bar{x}_{i_k j_k}]$, καθώς αν μια ακμή χρησιμοποιηθεί μόνο μια φορά, τότε η μέση τιμή μηδενίζεται, και θα δούμε πιο κάτω

ότι όλες οι ακμές πρέπει να χρησιμοποιηθούν ακριβώς δύο φορές για μη τετριμμένο αποτέλεσμα.

Κατά αυτό τον τρόπο, ισχύει:

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{Tr}\left(Y^k\right)\right] = \sum_{\gamma \in \mathcal{K}_k} \mathbb{E}\left[w(\gamma)\right]$$

Θέλουμε τώρα να δούμε, με τα ίδια ακριβώς επιχειρήματα που χρησιμοποιήσαμε πιο πάνω, αν τα M, N μεγαλώνουν κατά τον ίδιο ρυθμό, δηλαδή $M, N \to +\infty$, $\dfrac{M}{N} \to \lambda \in (0,1)$, που συγκλίνει η τιμή του $\int_{\mathbb{R}} y^k \mathrm{d}\bar{\mu}_{MN}(y) = \frac{1}{M}\mathbb{E}\left[\mathrm{Tr}(Y_N^k)\right] = \frac{1}{MN^k}\sum_{\gamma \in \mathcal{K}_k} \mathbb{E}[w(\gamma)]$.

Ορισμός 3.1.4. Δεδομένου περιπάτου $p = i_0 i_1 \ldots i_k$ σε ένα γράφημα G, ορίζουμε τον τύπο του $p, \tau_p = (m_1, m_2 \ldots, m_k)$ ως την πεπερασμένη ακολουθία που προκύπτει από τον εξής αλγόριθμο: δίνουμε στην πρώτη κορυφή τον αριθμό 1. Κρατάμε ένα δείκτη τον οποίο αυξάνουμε κάθε φορά που επισκεπτόμαστε μια καινούργια κορυφή. Αποδίδουμε σε κάθε καινούργια κορυφή που επισκεπτόμαστε την τρέχουσα τιμή του πιο πάνω δείκτη, και σε κάθε κορυφή που έχουμε ήδη επισκεφθεί δίνουμε την πρώτη τιμή που έχει πάρει.

Ο πιο πάνω ορισμός γίνεται πιο εύκολα αντιληπτός με ένα παράδειγμα:

Παράδειγμα 3.1.1. Στον περίπατο $p = uvuwxv$ αντιστοιχεί $\tau_p = 1, 2, 1, 3, 4, 2$.

Είναι εύκολο να καταλάβουμε ότι αν δύο περίπατοι έχουν τον ίδιο τύπο, τότε έχουν κατά μέση τιμή το ίδιο βάρος. λόγω του ότι τα στοιχεία του πίνακα X είναι ισοκατανεμημένα με τυπική κανονική κατανομή. Σε διμερή γραφήματα, ο τύπος είναι μια ακολουθία που δεν μπορεί να έχει τον ίδιο αριθμό σε περιττή και άρτια συνιστώσα. Αυτό είναι επειδή, αν ξεκινήσουμε από την ομάδα κόμβων A, τότε σε άρτιο βήμα θα βρισκόμαστε πάντα στην ομάδα A, ενώ σε περιττό βήμα θα βρισκόμαστε στην ομάδα B, όπως είναι προφανές από τον ορισμό του διμερούς γραφήματος.

Ομαδοποιούμε τα μονοπάτια του $\mathcal{K}_k$ με τους ίδιους τύπους και θεωρούμε το σύνολο F_k των τύπων με μήκος $2k+1$. Τότε, αν θεωρήσουμε ότι $\#\tau$ είναι το πλήθος των περιηγήσεων με τύπο τ, έχουμε

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{Tr}\left(Y^k\right)\right] = \frac{1}{N^k}\sum_{\tau \in F_k} \#\tau \mathbb{E}[w(\tau)]$$

Αν έχουμε τον τύπο τ που έχει r_m διακριτά στοιχεία στις άρτιες συνιστώσες και r_n στις περιττές, και μήκος $2k+1$. Τότε, το πλήθος των περιπάτων με αυτό τον τύπο, $\#\tau$ είναι:

$$[N(N-1)\ldots(N-r_n+1)][M(M-1)\ldots(M-r_m+1)] = \frac{N!}{r_n!}\frac{M!}{r_m!} \sim N^{r_n}M^{r_m} \sim MN^{r_m+r_n-1}\lambda^{r_m-1}$$

Αυτό σημαίνει ότι οριακά,

$$\lim_{N,M\to+\infty} \frac{1}{M}\mathbb{E}\left[\mathrm{Tr}\left(Y^k\right)\right] = \lim_{N,M\to+\infty} \sum_{\tau\in F_k} N^{r_m+r_n-k-1}\lambda^{r_m-1}\mathbb{E}[w(\tau)] \tag{3.1.0.1}$$

Λήμμα 3.1.1. Για μια περιήγηση p που περνά από κάθε ακμή τουλάχιστον 2 φορές ισχύει ότι

$$r_n + r_m \leq k+1$$

και η ισότητα ισχύει όταν το επαγόμενο υπογράφημα που προκύπτει από την p είναι δέντρο.

Απόδειξη

Θεωρούμε το επαγόμενο υπογράφημα που έχει τις r_n διαφορετικές κορυφές στην μια ομάδα κόμβων και τις r_m διαφορετικές κορυφές στην άλλη. Το ονομάζουμε $G(A,B)$ με $\#A = r_n$ και $\#B = r_m$. Η περιήγηση έχει μήκος $2k$ και η κάθε ακμή προσπελαύνεται τουλάχιστον 2 φορές. Αυτό σημαίνει ότι

$$\mathrm{Edges}(G(A,B)) \leq \frac{2k}{2} = k$$

Επιπλέον, το $G(A,B)$ είναι συνεκτικό, καθώς υπάρχει περιήγηση που περνάει από όλες τις κορυφές. Το πλήθος των κορυφών δηλαδή του γραφήματος, $r_n + r_m$ είναι μικρότερο ή ίσο από $\mathrm{Edges}(G)+1 \leq k+1$. Η ισότητα προκύπτει όταν το πλήθος των κορυφών είναι ίσο με $k+1$, και άρα $\mathrm{Edges}(G)+1 = k+1 = r_n + r_m$. Δεδομένης και της συνεκτικότητας, προκύπτει ότι σε αυτή την περίπτωση έχουμε δέντρο. □

Οριακά, λόγω της 3.1.0.1, οι μόνες περιηγήσεις που μας ενδιαφέρουν είναι αυτές κατά τις οποίες $r_n + r_m = k+1$, δηλαδή οι περιηγήσεις που αντιστοιχούν σε δέντρα. Συγκεκριμένα, όπως πάνω, η περιήγηση περνάει από την κάθε ακμή ακριβώς δύο φορές, από αντίθετες κατευθύνσεις, γιατί αλλιώς θα δημιουργούνταν ένας μη τετριμμένος κύκλος. Μάλιστα, περιηγήσεις που αντιστοιχούν σε δέντρα, η μέση τιμή του βάρους είναι ακριβώς 1. Αυτό σημαίνει πως το πρόβλημά μας ανάγεται στο να υπολογίσουμε το εξής:

$$\sum_{r_m=1}^{k}\sum_{\tau\in T_k(r_m)} \lambda^{r_m-1} = \sum_{r_m=1}^{k}\lambda^{r_m-1}\#T_k(r_m) = \sum_{t=0}^{k-1}\lambda^t\#T_k(t+1) \tag{3.1.0.2}$$

Όπου $T_k(r_m)$ οι τύποι που αντιστοιχούν σε δέντρα με r_m διαφορετικές κορυφές στα δεξιά. Θα επιχειρήσουμε παρακάτω να απαριθμήσουμε αυτά τα δέντρα για κάθε τιμή του r_m.

Λήμμα 3.1.2. Το πλήθος των πιο πάνω δέντρων για δεδομένο t με $r_m = t+1, r_n = k-t$ είναι ίσο με

$$\#T_k(t+1) = \frac{1}{t+1}\binom{k-1}{t}\binom{k}{t}$$

Απόδειξη

Ορίζουμε πρώτα το σύνολο $A_k^+(t,s)$ των ακολουθιών μήκους $2k$:

$$d_1u_1d_2u_2\dots d_ku_k$$

όπου

1. $u_i \in \{0,1\}, d_i \in \{0,-1\}$
2. $\sum_{i=1}^k u_i = t, \sum_{i=1}^k d_i = -s$
3. $\sum_{i=1}^m (u_i + d_i) + d_{m+1} \geq 0 \ \ \forall 0 \leq m < k$

Θα κατασκευάσουμε μια 1-1 και επί απεικόνιση από τα δέντρα με αυτά τα χαρακτηριστικά στο σύνολο $A_k^+(t,t)$. Έτσι θα αρκεί να μετρήσουμε αυτές τις ακολουθίες για να μετρήσουμε τα δέντρα. Ουσιαστικά θα ασχοληθούμε με τις ακμές κάποιου δέντρου - θα θεωρούμε ότι διαφορετική φορά μας δίνει διαφορετικό αντικείμενο. Έστω γ μια περιήγηση μήκους $2k$ με τύπο τ όπου $r_m = t+1$ και $r_n = k-t$. Έστω ότι ξεκινούμε από το σύνολο κόμβων $[M]$. Διευκρινίζουμε ότι ξεκινούμε τους δείκτες από το 1.

Σε άρτιο βήμα, έστω το $2i$, θέτουμε $u_i = 1$ αν επισκεπτόμαστε την αντίστοιχη κορυφή για πρώτη φορά, και $u_i = 0$ σε αντίθετη περίπτωση.

Αν από την άλλη βρισκόμαστε σε περιττό βήμα, τότε, αν το βήμα αυτό είναι το πρώτο, θέτουμε $d_1 = 0$. Αν όχι, τότε έχουμε φτάσει σε αυτό μέσω μιας ακμής που συνδέει την κορυφή u με μια κορυφή v που βρίσκεται σε άρτια θέση. Αν με τη μετάβαση στην u δεν επισκεπτόμαστε ξανά την v, τότε θέτουμε $d_i = -1$, αλλιώς θέτουμε $d_i = 0$.

Η απεικόνιση που δημιουργήσαμε είναι καλά ορισμένη. Πράγματι, το αποτέλεσμα που προκύπτει ανήκει στο $A_k^+(t,t)$: προφανώς πληροί την πρώτη ιδιότητα. Ισχύει επίσης η δεύτερη ιδιότητα, διότι στους άρτιους όρους δίνουμε την τιμή 1 σε ακριβώς t θέσεις, αντιστοιχούν σε ακμές που καταλήγουν σε κορυφές τις οποίες επισκεπτόμαστε για πρώτη φορά. Δίνουμε την τιμή -1 στις θέσεις που αντιστοιχούν σε ακμές (με φορά προς το σύνολο $[N]$ κορυφών) η προσπέλαση των οποίων σημαίνει την τελευταία έξοδο από κάποια κορυφή στο $[M]$. Για την τρίτη ιδιότητα, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι το -1 έρχεται πάντα μετά από κάποιο 1, άρα αν σταματήσουμε σε οποιαδήποτε περιττή θέση, η περίπτωση με το μικρότερο άθροισμα είναι αυτή όπου υπάρχουν όλα τα -1 για όλα τα 1, οπότε το άθροισμα είναι μηδέν. Επιπλέον, είναι προφανές ότι δύο περιηγήσεις με τον ίδιο τύπο έχουν την ίδια τιμή κάτω από την απεικόνιση.

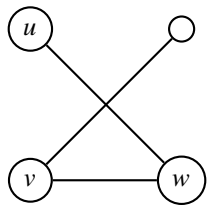
Ισχύουν τα πιο κάτω

a) $d_i = 0 \iff$ η κορυφή στο βήμα $2i-1$ είναι καινούργια, αν $i > 1$.
b) Φεύγουμε από μια περιττή κορυφή για τελευταία φορά ανν πηγαίνουμε σε κορυφή που έχουμε ήδη επισκεφθεί, δηλαδή στο βήμα $2i$ έχουμε $u_i = 0$.
c) Αν σε άρτιο βήμα $2i$ η κορυφή δεν είναι καινούργια, δηλαδή $u_i = 0$, τότε είναι η τελευταία κορυφή που επισκέφθηκε η γ στο $[M]$ από την οποία η γ δεν έχει φύγει για τελευταία φορά.

d) Ομοίως, αν σε περιττό βήμα $2i-1$ η κορυφή δεν είναι καινούργια, τότε είναι η τελευταία κορυφή που επισκέφθηκε η γ στο $[N]$ από την οποία η γ δεν έχει φύγει για τελευταία φορά.

Απόδειξη του a): Στα περιττά βήματα κατά τα οποία απονέμουμε τιμή στα d_i, αν η κορυφή w που επισκέπτεται η γ είναι καινούργια, τότε υποχρεωτικά $d_i = 0$. Αυτό ισχύει γιατί η γ επισκέπτεται κάθε ακμή ακριβώς 2 φορές προς αντίθετες κατευθύνσεις. Αν $d_i = -1$, τότε φεύγουμε από την προηγούμενη κορυφή, v, για τελευταία φορά για να φτάσουμε στην w και άρα έχουμε ήδη περάσει από την ακμή wv - και φυσικά από την κορυφή w.

Αντίθετα, αν $d_i = 0$, τότε η κορυφή στο βήμα $2i-1$, w είναι καινούργια. Πράγματι, έστω πως δεν είναι καινούργια. θεωρούμε ότι η μετάβαση στην w στο βήμα $2i-1$ γίνεται μέσω της v. Λόγω του ότι $d_i = 0$, θα περάσουμε σε κάποιο αργότερο στάδιο ξανά από την κορυφή v. Αν η w δεν ήταν καινούργια, τότε σε κάποιο προηγούμενο βήμα περάσαμε από την ακμή uw. Το μοναδικό μονοπάτι ανάμεσα στο u και το v περιέχει την ακμή wv, λόγω της δενδρικής δομής. Άρα, για να φτάσαμε στο v μέσα στην περιήγηση, περάσαμε ήδη την wv, και αφού στο βήμα $2i-1$ περνάμε από την vw, η ακμή αυτή δεν μπορεί να ξαναπροσπελαστεί. Αυτό σημαίνει ότι αν θέλουμε στην περιήγηση να φτάσουμε σε κάποιον άλλο γείτονα της v (υπάρχει αλλιώς $d_i = -1$), δεν γίνεται χωρίς να περάσουμε ξανά από την vw ή χωρίς να δημιουργήσουμε κάποιον μη τετριμμένο κύκλο, κάτι που φυσικά δεν μπορεί να γίνει. Όμως, πρέπει να περάσουμε από όλες τις κορυφές, και άρα έχουμε άτοπο. Το σχήμα πιο κάτω βοηθάει:



Η πιο πάνω αντιστοίχιση είναι 1-1: αν έχουμε δύο δέντρα T, T' με τις αντίστοιχες περιηγήσεις και τους τύπους τους τ, τ', τότε αν $\tau \neq \tau'$, υποχρεωτικά θα υπάρχει κάποιο i στο οποίο ο τ να επισκέπτεται κάποια καινούργια κορυφή και ο τ' θα επισκέπτεται κάποια παλιά, γιατί αν επισκέπτονται και οι δύο τύποι κάποια παλιά, μπορεί να είναι μόνο η τελευταία από την απέναντι πλευρά που δεν έχει κορεστεί. Άρα θα υπάρχει διαφορά στο $u_{i/2}$ αν i περιττό, ή στο $d_{(i-1)/2}$ αν i περιττό.

Η πιο πάνω αντιστοίχιση είναι επί. Αν πάρουμε μια ακολουθία $A = d_1u_1 \dots d_ku_k$ τότε εξάγουμε τις $D = d_1d_2 \dots d_k$ και $U = u_1u_2 \dots u_k$. Θα δημιουργήσουμε από αυτές έναν τ τύπο που να αντιστοιχεί σε κάποιο δέντρο με μια αντίστοιχη περιήγηση, η εικόνα του οποίου να μας δίνει την A. Αρχίζουμε με το ότι $\tau_1 = 1$. Θα προσδιορίσουμε τις υπόλοιπες τιμές.

Στις άρτιες θέσεις, η τιμή του τ καθορίζεται από την D: Αν $d_i = 0$ τότε θέλουμε να επισκεφτούμε μια καινούργια κορυφή. Θέτουμε $\tau(2i) =$

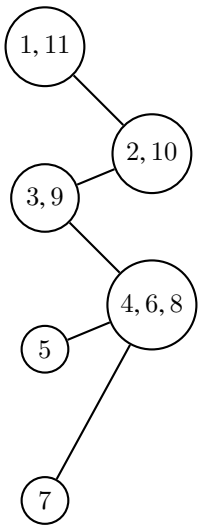
$\max\{\tau(j) : j < 2i\} + 1$. Αν $d_i = -1$, τότε στο βήμα $2i$ πρέπει να φροντίσουμε να βρισκόμαστε σε κορυφή που έχουμε επισκεφθεί ξανά. Για να καθορίσουμε την τιμή του $\tau(2i)$, πρέπει να ξέρουμε ποια κορυφή επισκεπτόμαστε σε αυτό το βήμα. Η κορυφή αυτή θα είναι η τελευταία περιττή κορυφή που εμφανίζεται στο τ μέχρι το σημείο αυτό η οποία δεν έχει εμφανιστεί για τελευταία φορά. Ψάχνουμε δηλαδή στην U τη θέση του τελευταίου όρου που να μην έχει την τιμή 0, έστω την j, και έχουμε ότι $\tau(2i) = \tau(2j)$.

Στις περιττές θέσεις, $u_i = 1 \Rightarrow \tau(2i-1) = \max\{\tau(j) : j < 2i-1\} + 1$. Αν $u_i = 0$, τότε υποχρεωτικά στο βήμα $2i-1$ της γ έχουμε φύγει από μια περιττή κορυφή για τελευταία φορά. Ψάχνουμε την τελευταία d_j που να έχει τιμή 0, έστω ότι έχει δείκτη l, και θέτουμε $\tau(2i-1) = \tau(2l-1)$.

Εύκολα προκύπτει ότι η εικόνα του τ και του δέντρου του είναι η A, καθώς έχουμε φροντίσει από την κατασκευή του τ να μεταβαίνουμε σε καινούργια κορυφή στο βήμα $2i-1$ ανν $d_i = 0$ και στο βήμα $2i$ ανν $u_i = 1$.

Συνεπώς, έχουμε μια διαδικασία που είναι 1-1 και επί, άρα τα σύνολα που μας ενδιαφέρουν είναι ισοπληθικά.

Παράδειγμα 3.1.2. Έστω $k = 5$, $t = 3$ και άρα $r_m = 4, r_n = 2$. Στο πιο κάτω σχήμα έχουμε ένα δέντρο που επάγεται από ένα διμερές γράφημα, και στον κάθε κόμβο έχουμε την σειρά επίσκεψής του από μια περιήγηση γ, φυσικά δεν είναι απαραίτητα μοναδική αυτή η σειρά.



Ο τύπος του πιο πάνω δέντρου είναι

$$\tau_\gamma = (1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 4,\ 6,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1)$$

Σύμφωνα με την πιο πάνω απεικόνιση, το δέντρο αυτό μαζί με την περιήγησή του θα αντιστοιχηθεί στην ακολουθία

$$\begin{aligned} A =& (0,\ 1,\ 0,\ 1, -1,\ 1, -1,\ 0, -1,\ 0\ ) \\ =& (d_1, u_1, d_2, u_2, d_3, u_3, d_4, u_4, d_5, u_5) \end{aligned}$$

Αν τώρα χρησιμοποιήσουμε την αντίστροφη διαδικασία που περιγράψαμε για να βρούμε τον τ_γ δεδομένης της A, γνωρίζουμε ότι $\tau_1 = 1 = \tau_{11}$ και έχουμε όντως ότι οι καινούργιες κορυφές προκύπτουν από τις d_1, u_1, d_2, u_2, u_3. Δηλαδή ξέρουμε ότι

$$\tau_\gamma = (1, 2, 3, 4, 5, -, 6, -, -, -, 1)$$

Για να συμπληρώσουμε τα κενά, θέλουμε πρώτα να δούμε που πηγαίνουμε μετά την κορυφή 5. Σύμφωνα με τα πιο πάνω, πηγαίνουμε στην τελευταία κορυφή της δεξιάς πλευράς που δεν έχει κορεστεί, δηλαδή ψάχνουμε την τελευταία d_i ώστε το αντίστοιχο u_i να είναι μη μηδενικό. Αυτό είναι το d_2, και $\tau(2 \cdot 2) = 4$, άρα μεταβαίνουμε στην κορυφή 4. Για την επόμενη άγνωστη κορυφή, έχουμε το d_4 και βλέπουμε ότι το u_3 είναι μη μηδενικό, άρα $\tau(2 \cdot 4) = \tau(2 \cdot 3) = 4$. Στη συνέχεια ψάχνουμε την κορυφή που αντιστοιχεί στο u_4, δηλαδή ψάχνουμε το τελευταίο d_i που να μην είναι -1: αυτό είναι το d_2. Από το u_1 έχουμε το $\tau(1 \cdot 2 + 1) = 3$. Τέλος, ψάχνουμε την τιμή για το d_5. Για να την βρούμε, ψάχνουμε το τελευταίο d_i που να αντιστοιχεί σε κορυφή ώστε το u_i να είναι μη μηδενικό. Το d_2 είναι η ίδια κορυφή με το d_4, άρα δεν είναι κατάλληλο, και άρα μένει το d_1. Δηλαδή, $\tau(2 \cdot 5) = \tau(2 \cdot 1) = 2$.

Μένει τώρα να απαριθμήσουμε το $A_k^+(t, t)$.

Παρατήρηση 3.1.2. Από τον ορισμό που έχουμε δώσει για το σύνολο αυτό, δεδομένων των ιδιοτήτων 2 και 3, ξέρουμε ότι υποχρεωτικά $d_1 = u_k = 0$. Άρα θέλουμε να βρούμε πόσες ακολουθίες $(0, u_1, d_2, u_2, \ldots, d_k, 0)$ υπάρχουν με τους πιο πάνω περιορισμούς.

Ας αρχίσουμε με το $A_k(t, s)$, το οποίο πληροί τις πρώτες 2 συνθήκες του ορισμού του $A_k^+(t, s)$: επιλέγουμε από τις $k - 1$ διαθέσιμες άρτιες θέσεις t θέσεις οι οποίες θα έχουν τον αριθμό 1, και από τις $k - 1$ διαθέσιμες περιττές θέσεις s θέσεις οι οποίες θα έχουν τον αριθμό 0. Αυτό φυσικά γίνεται με $\binom{k-1}{t}\binom{k-1}{s}$ τρόπους. Τώρα θα δείξουμε ότι

$$\#A_k^+(t, t) = \#A_{k-1}(t, t) - \#A_{k-1}(t - 1, t + 1)$$

Κατ αρχάς, λόγω της πιο πάνω παρατήρησης έχουμε ότι κατά τον προφανή τρόπο το $A_k^+(t, t)$ εμφυτεύεται στο $A_{k-1}(t, t)$. Άρα, αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο των στοιχείων του $A_{k-1}(t, t)$ που δεν ικανοποιούν την συνθήκη 3 είναι σε 1-1 και επί αντιστοιχία με το $A_{k-1}(t - 1, t + 1)$. Αν ένα στοιχείο του $A_{k-1}(t, t)$ δεν ικανοποιεί τη συνθήκη 3, τότε υπάρχει ο ελάχιστος φυσικός αριθμός x τέτοιος ώστε

$$\sum_{i=1}^{x-1}(u_i + d_{i+1}) = -1$$

Λόγω της ιδιότητας 2, ισχύει επιπλέον ότι

$$\sum_{i=x}^{k-1}(u_i + d_{i+1}) = 1$$

Άρα, από το x και μετά έχουμε ακριβώς 1 περισσότερο (1) από τα (-1). Για κάθε (u_i, d_i) με $i \geq x$ χρησιμοποιούμε την πιο κάτω απεικόνιση (ανάκλαση και αλλαγή προσήμου)

$$\begin{aligned}
(0,0) &\mapsto (0,0)\\
(+,-) &\mapsto (+,-)\\
(0,-) &\mapsto (+,0)\\
(+,0) &\mapsto (0,-)
\end{aligned}$$

Με αυτό τον τρόπο, καταλήγουμε να έχουμε 1 περισσότερο (-1) από τα (1) από το x και μετά. Δηλαδή, μειώνουμε τον συνολικό αριθμό των 1 κατά 1 και αυξάνουμε τον συνολικό αριθμό των (-1) κατά 1. Έχουμε δηλαδή ένα στοιχείο του $A_k(t-1, t+1)$. Η διαδικασία αυτή είναι εμφανώς αμφιμονοσήμαντη.

Τελικώς, έχουμε τα εξής:

$$\begin{aligned}
\#A_{k-1}(t,t) - \#A_{k-1}(t-1,t+1) =& \binom{k-1}{t}^2 - \binom{k-1}{t-1}\binom{k-1}{t+1}\\
=& \frac{[(k-1)!]^2}{(t!)^2[(k-1-t)!]^2} - \frac{[(k-1)!]^2}{(t-1)!(t+1)!(k-t-2)!(k-t)!}\\
=& \frac{[(k-1)!]^2(t+1)(k-t) - [(k-1)!]^2 t(k-t-1)}{t!(t+1)!(k-t-1)!(k-t)!}\\
=& \frac{1}{t+1}\frac{(k-1)!k!}{(t!)^2(k-t-1)!(k-t)!}\\
=& \frac{1}{t+1}\binom{k-1}{t}\binom{k}{t}
\end{aligned}$$

□

Πρόταση 3.1.2.

$$\lim_{N,M\to+\infty} \frac{1}{M}\mathbb{E}\left[\mathrm{Tr}\left(Y^k\right)\right] = \sum_{t=0}^{k-1} \frac{\lambda^t}{t+1}\binom{k-1}{t}\binom{k}{t}$$

Απόδειξη

Άμεσο από την 3.1.0.2 και την πιο πάνω απαρίθμηση των δέντρων.

□

Όπως και πριν, θέλουμε αυτές οι ροπές να αντιστοιχούν σε μοναδικό μέτρο. Ισχύει η συνθήκη του Carleman:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}[Z^{2n}]^{-\frac{1}{2n-1}} =& \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\sum_{t=0}^{2n-1}\frac{\lambda^t}{t+1}\binom{2n-1}{t}\binom{2n}{t}\right]^{-\frac{1}{2n}} \overset{t=2n-1}{\geq} \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{\lambda^{2n-1}}{2n}2n\right]^{-\frac{1}{2n}}\\
=& \sum_{n=1}^{+\infty}\lambda^{-\frac{2n-1}{2n}} \overset{\lambda\in(0,1)}{\geq} \sum_{n=1}^{+\infty} 1 = +\infty
\end{aligned}$$

Έτσι, αν υπάρχει μέτρο που να έχει για ροπές τις οριακές ροπές που βρήκαμε πιο πάνω, είναι μοναδικό.

Λήμμα 3.1.3. Δεδομένης ακολουθίας $a(n,l)$, ισχύει ο εξής τύπος:

$$\sum_{t=0}^{m}\sum_{r=0}^{2m-2t} a(t,r) = \sum_{s=0}^{2m}\sum_{t=0}^{\min\{s,2m-s\}} a(t,s-t)$$

Απόδειξη

Τα ζεύγη των (k,s) που αθροίζονται είναι τα πιο κάτω. Με το πρώτο άθροισμα τα αθροίζουμε προσπελαύνοντας για κάθε γραμμή όλες τις στήλες και με τη σειρά όλες τις γραμμές. Η ιδέα είναι ότι στο δεύτερο άθροισμα είναι τα ίδια ζεύγη αλλά αθροίζουμε κατά διαγωνίους, δηλαδή πρώτα έχουμε τον όρο $\{(0,0)\}$, μετά τους όρους $\{(0,1),(1,0)\}$, μετά $\{(0,2),(1,1),(0,2)\}$ κλπ.

$$\begin{array}{lllllll}
(0,0) & (0,1) & (0,2) & (0,3) & \cdots & (0,2m) \\
(1,0) & (1,1) & (1,2) & (1,3) & \cdots & (1,2m-2) \\
(2,0) & (2,1) & (2,2) & (2,3) & \cdots & (2,2m-4) \\
 & & \vdots & & & \\
(m-1,0) & (m-1,1) & (m-1,2) & & & \\
(m,0) & & & & &
\end{array}$$

□

Λήμμα 3.1.4. (Ταυτότητα του Vandermord)

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r}\binom{m}{k}\binom{n}{r-k}$$

όπου θεωρούμε ότι $\binom{a}{b} = 0$ για $b > a$.

Θεώρημα 3.1.2. *Για κάθε $k \in \mathbb{N}$, ισχύει η σύγκλιση κατά ροπές του μέτρου $\bar{\mu}_{MN}$ στο μ_ρ, δηλαδή:*

$$\mathbb{E}_{\bar{\mu}_{MN}}[Z^k] \xrightarrow{N\to+\infty} \mathbb{E}_{\mu_\rho}[Z^k]$$

Απόδειξη

Λόγω της συνθήκης του Carleman, αρκεί να δείξουμε ότι οι οριακές ροπές που βρήκαμε πιο πάνω αντιστοιχούν στις ροπές της μ_ρ. Ψάχνουμε να βρούμε την $k-$οστή ροπή της κατανομής f.

$$\mathbb{E}[X^k] = \frac{1}{2\pi\lambda}\int_{\mathbb{R}} x^k \mathrm{d}\mu_\rho(x) = \frac{1}{2\pi\lambda}\int_a^b x^k \frac{\sqrt{(b-x)(x-a)}}{x}\mathrm{d}x$$

Υπενθυμίζουμε ότι $a = (1-\sqrt{\lambda})^2, b = (1+\sqrt{\lambda})^2$. Παρατηρούμε ότι $a+b = 2(1+\lambda), ab = (1-\lambda)^2$. Επίσης,

$$\sqrt{(b-x)(x-a)} = \sqrt{-x^2 - ab + (a+b)x} = \sqrt{-\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 - ab + \frac{(a+b)^2}{4}}$$

$$= \sqrt{-(x-(1+\lambda))^2 - (1-\lambda)^2 + (1+\lambda)^2} = \sqrt{-(x-(1+\lambda))^2 + 4\lambda}$$

Θέτουμε $y = (x-(1+\lambda))/\sqrt{\lambda}$, και έχουμε ότι $x = a \iff y = -2, x = b \iff y = 2$, και $\mathrm{d}x = \sqrt{\lambda}\mathrm{d}y$. Επιπλέον, $x = \sqrt{\lambda}y + (1+\lambda)$.

$$\mathbb{E}[X^k] = \frac{1}{2\pi\lambda}\int_{-2}^{2}[\sqrt{\lambda}y + (1+\lambda)]^{k-1}\sqrt{-\lambda y^2 + 4\lambda}\sqrt{\lambda}\mathrm{d}y = \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2}[\sqrt{\lambda}y + (1+\lambda)]^{k-1}\sqrt{-y^2+4}\mathrm{d}y$$

$$\overset{bin}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2}\sum_{t=0}^{k-1}\binom{k-1}{t}\lambda^{\frac{t}{2}}y^t(1+\lambda)^{k-1-t}\sqrt{4-y^2}\mathrm{d}y$$

$$= \sum_{t=0}^{k-1}\binom{k-1}{t}\lambda^{\frac{t}{2}}(1+\lambda)^{k-1-t}\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2}y^t\sqrt{4-y^2}\mathrm{d}y}_{\mathbb{E}_{\mu_W}[Y^t]}$$

$$= \sum_{t=0}^{[(k-1)/2]}\binom{k-1}{2t}\lambda^t(1+\lambda)^{k-1-2t}C_t = \sum_{t=0}^{[(k-1)/2]}\lambda^t\binom{k-1}{2t}\frac{1}{t+1}\binom{2t}{t}\sum_{r=0}^{k-1-2t}\binom{k-1-2t}{r}\lambda^r$$

$$= \sum_{t=0}^{[(k-1)/2]}\sum_{r=0}^{k-1-2t}\lambda^{t+r}\frac{(k-1)!(2t)!(k-1-2t)!}{(k-1-2t)!(2t)!(t+1)!t!(k-1-2t-r)!r!}$$

$$= \sum_{t=0}^{[(k-1)/2]}\sum_{r=0}^{k-1-2t}\lambda^{t+r}\frac{(k-1)!}{(t+1)!t!(k-1-2t-r)!r!}$$

$$\overset{\text{λήμμα 3.1.3}}{=} \sum_{s=0}^{k-1}\lambda^s\sum_{t=0}^{\min\{s,k-1-s\}}\frac{(k-1)!}{(t+1)!t!(k-1-t-s)!(s-t)!}$$

$$= \sum_{s=0}^{k-1}\lambda^s\frac{1}{k}\binom{k}{s}\sum_{t=0}^{\min\{s,k-1-s\}}\binom{s}{s-t}\binom{k-s}{t+1}$$

$$\overset{\text{λήμμα 3.1.4}}{=} \sum_{s=0}^{k-1}\lambda^s\frac{1}{k}\binom{k}{s}\binom{k}{s+1} = \sum_{s=0}^{k-1}\lambda^s\frac{1}{s+1}\binom{k}{s}\binom{k-1}{s}$$

□

Κεφάλαιο 4

Κατανομή Tracy Widom

Στο κεφάλαιο 2.8 μελετήσαμε για την περίπτωση των (GUE) μια ασυμπτωτική φασματική κατανομή, όταν ασχοληθήκαμε με το σύνολο του φάσματος. Ενδιαφέρον έχει τώρα να δούμε για αυτήν ακριβώς την περίπτωση την συμπεριφορά της μέγιστης κατά απόλυτο ιδιοτιμής λ_{max}, όταν οι διαστάσεις του πίνακα μεγαλώνουν. Θα δούμε ότι με κατάλληλη κανονικοποίηση προκύπτει μια οριακή κατανομή που περιγράφει αυτό που ζητούμε.

4.1 GUE

Θεώρημα 4.1.1. *Η από κοινού κατανομή των ιδιοτιμών ενός μη κανονικοποιημένου GUE πίνακα A_N είναι η*

$$p(\lambda_1, \ldots, \lambda_N) = c_N \exp\left\{-\frac{1}{2}(\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_N^2)\right\} \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j)^2$$

Απόδειξη

Η ιδέα είναι ότι για την από κοινού κατανομή των ανεξάρτητων κανονικών τ.μ. $a_{ij}, 1 \leq i, j \leq N$, πολλαπλασιάζουμε τις συναρτήσεις κατανομών τους, δηλαδή,

$$f(a_{11}, a_{12} \ldots, a_{NN}) = \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{a_{ii}^2}{2}} \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq N} \frac{1}{\pi} e^{-|a_{ij}|^2}$$

Μπορούμε να διαγωνιοποιήσουμε τον A_N, ώστε

$$A_N = UDU^*$$

όπου $UU* = I$. Μπορούμε να γράψουμε $U = e^{-iH}$ για κάποιον αυτοσυζυγή πίνακα H και έτσι

$$U^* = (e^{-iH})^* = e^{iH}$$

Για να βρούμε την κατανομή $p(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ θέλουμε να βρούμε τον ιακωβιανό J της απεικόνισης S:

$$A_N \mapsto e^{-iH} D e^{iH}$$

Το J καταλήγει να είναι

$$J(S) = \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j)^2$$

και έτσι

$$q(\lambda_1, \dots, \lambda_N, h_{ij}) = p(\lambda_1, \dots, \lambda_N) J = c_N \exp\left\{-\frac{N}{2}(\lambda_1^2 + \dots + \lambda_N^2)\right\} \prod_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j)^2$$

Αυτή η έκφραση είναι ανεξάρτητη της h_{ij} και άρα με την ολοκλήρωση αλλάζει απλώς η σταθερά c_N.

Η αυστηρή απόδειξη για αυτό μπορεί να βρεθεί στο [8] □

Ορισμός 4.1.1. Ονομάζουμε πίνακα Vandermonde τάξης N για το $x = (x_1, \dots, x_N)$ τον πίνακα

$$V(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{N-1} & x_2^{N-1} & \dots & x_N^{N-1} \end{pmatrix}$$

Πρόταση 4.1.1. *Η ορίζουσα του πίνακα $V(x)$ δίνεται από τον τύπο*

$$\Delta(x) = \prod_{i<j} (x_i - x_j)$$

Απόδειξη

Η ορίζουσα θα είναι φυσικά ένα πολυώνυμο των $(x_i)_{i=1}^N$. Αν υπάρχουν $i, j : x_i = x_j$, τότε η ορίζουσα είναι μηδενική. Άρα, αν παραγοντοποιήσουμε το πολυώνυμο, αυτό περιέχει για κάθε $i > j$ τον όρο $(x_i - x_j)$. Αυτό σημαίνει πως $\Delta(x) | \det(V(x))$. Αρκεί για την ισότητα να δείξουμε ότι τα δύο πολυώνυμα έχουν τον ίδιο βαθμό και τον ίδιο μεγιστοβάθμιο συντελεστή. Πράγματι, η $\det(V(x))$ είναι ένα άθροισμα γινομένων όρων από διαφορετικές γραμμές(ένας όρος από κάθε γραμμή), και άρα ο βαθμός του πολυωνύμου αυτού είναι

$$0 + 1 + \dots + N - 1 = \frac{N(N-1)}{2}$$

ίδιος με αυτόν του $\Delta(x)$. Επιπλέον, και στα δύο πολυώνυμα ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής είναι 1, άρα ισχύει η ισότητα. □

Με βάση τα πιο πάνω, αν $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_N)$ οι ιδιοτιμές του $\sqrt{N} A_N$

$$p(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = c_N \exp\left\{-\frac{1}{2}(\lambda_1^2 + \dots + \lambda_N^2)\right\} \Delta(\lambda)^2$$

Παρατήρηση 4.1.1. Αν στην $V(x)[i,j]$ αντί για το x_i^j βρισκόταν κάποιο άλλο μονώνυμο τάξης j και μεγιστοβάθμιο συντελεστή 1, η ορίζουσα παραμένει η ίδια, λόγω της γραμμικότητας της δομής των οριζουσών. Παρακάτω θα επιλέξουμε τα κατάλληλα τέτοια μονώνυμα.

4.2 Πυρήνες-Ορίζουσα Fredholm

Έστω $\mathcal{X}$ τοπικά συμπαγής πολωνικός χώρος και ν μιγαδικό μέτρο ορισμένο στον $\mathcal{X}$ εφοδιασμένο με την σ-άλγεβρα των Borel, δηλαδή στο $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$, τέτοιο ώστε

$$\|\nu\|_1 := \int_{\mathcal{X}} |\nu(\mathrm{d}x)| < +\infty$$

Ορισμός 4.2.1. Ονομάζουμε πυρήνα μια συνάρτηση $K : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{C}$ τ.ω.

$$\|K\| := \sup_{x,y \in \mathcal{X}} |K(x,y)| < +\infty$$

Επιπλέον, ονομάζουμε ίχνος του K ως προς το μέτρο ν το

$$\mathrm{tr}(K) = \int_{\mathcal{X}} K(x,x)\mathrm{d}\nu(x)$$

Ορισμός 4.2.2. Έστω K, L δύο πυρήνες. Ονομάζουμε συνέλιξη των K, L ως προς το μέτρο ν την $K \star L : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{C}$, όπου

$$(K \star L)(x,y) = \int_{\mathcal{X}} K(x,z)L(z,y)\mathrm{d}\nu(z)$$

Λήμμα 4.2.1. Έστωσαν $n \in \mathbb{N}$ και F, G πυρήνες στον $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$. Τότε, για κάθε
$(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathcal{X}^n$,

$$\left| \det_{i,j=1}^{n} F(x_i, y_j) - \det_{i,j=1}^{n} G(x_i, y_j) \right| \leq n^{1+\frac{n}{2}} \|F - G\| \cdot \max\{\|F\|, \|G\|\}^{n-1}$$

και

$$\left| \det_{i,j=1}^{n} F(x_i, y_i) \right| \leq n^{\frac{n}{2}} \|F\|^n$$

Απόδειξη
Θέτουμε

$$H_i^{(k)}(x,y) = \begin{cases} G(x,y) & i < k \\ F(x,y) - G(x,y) & i = k \\ F(x,y) & i > k \end{cases}$$

Από την γραμμικότητα της ορίζουσας ως προς τις γραμμές,

$$\det_{i,j=1}^{n} F(x_i, y_i) - \det_{i,j=1}^{n} G(x_i, y_i) = \sum_{k=1}^{n} \det_{i,j=1}^{n} H_i^{(k)}(x_i, y_j)$$

Έτσι, αν $v_j(k)$ τα διανύσματα στήλες του $\left(H_i^{(k)}(x_i, y_j)\right)_{i,j=1}^n$, από την ανισότητα του Hadamard έχουμε ότι για κάθε $1 \leq k \leq n$,

$$\left|\det_{i,j=1}^n H_i^{(k)}(x_i, y_j)\right| \leq \prod_{j=1}^n \left\|v_j(k)\right\|_2 \leq n^{\frac{n}{2}} \prod_{j=1}^n \left\|v_j(k)\right\|_\infty \leq n^{\frac{n}{2}} \|F - G\| \max\{\|F\|, \|G\|\}^{n-1}$$

Αθροίζουμε για όλα τα k και προκύπτει το πρώτο ζητούμενο. Παρατηρούμε ότι αν $G = 0$ υπάρχει μόνο ένας μη μηδενικός όρος στο άθροισμα (για $k = 1$), και έτσι

$$\det_{i,j=1}^n F(x_i, y_j) = \det_{i,j=1}^n H_i^{(1)}(x_i, y_j)$$

Έτσι προκύπτει το δεύτερο ζητούμενο.

□

Θέτουμε για τον πυρήνα K,

$$\Delta_n := \int_{\mathcal{X}} \cdots \int_{\mathcal{X}} \det_{i,j=1}^n K(\xi_i, \xi_j) \mathrm{d}\xi_1 \ldots \mathrm{d}\xi_n$$

και

$$\Delta_0 = 1$$

Παρατηρούμε ότι από το προηγούμενο λήμμα

$$|\Delta_n| \leq \|v\|_1^n n^{\frac{n}{2}} \|K\|^n \tag{4.2.0.1}$$

Ορισμός 4.2.3. Ονομάζουμε ορίζουσα Fredholm του πυρήνα K το

$$\Delta(K) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \Delta_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_{\mathcal{X}} \cdots \int_{\mathcal{X}} \det_{i,j=1}^n K(x_i, x_j) \mathrm{d}v(x_1) \ldots \mathrm{d}v_n(x_n)$$

Λόγω της σχέσης 4.2.0.1, η ορίζουσα Fredholm είναι καλά ορισμένη.

Παρατήρηση 4.2.1. Αν και χρησιμοποιείται ο ίδιος συμβολισμός με την ορίζουσα Vandermonde, υπάρχει η σημαντική διαφορά στο όρισμα: στην περίπτωση του Vandermonde το όρισμα είναι διάνυσμα, ενώ στην ορίζουσα Fredholm το όρισμα είναι πυρήνας.

Πόρισμα 4.2.1. Έστω K, L πυρήνες ως προς το μέτρο v. Ισχύει η εξής ανισότητα:

$$|\Delta(K) - \Delta(L)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{1+\frac{n}{2}} \|v\|_1^n \cdot \max\{\|K\|, \|L\|\}^{n-1}}{n!} \cdot \|K - L\|$$

Απόδειξη

Προκύπτει άμεσα από το προηγούμενο λήμμα και τον ορισμό του $\Delta(K)$. □

Πόρισμα 4.2.2. Από το πιο πάνω πόρισμα, αν $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία πυρήνων και L επίσης πυρήνας τ.ω. $\|K_n - L\| \xrightarrow{n\to+\infty} 0$, τότε και $|\Delta(K_n) - \Delta(L)| \xrightarrow{n\to+\infty} 0$.

Δεδομένου του πυρήνα K, συμβολίζουμε

$$K\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix} := \det\big(K(x_i, y_j)\big)_{i,j=1}^n$$

Θέτουμε

$$H_n(x, y) = \int_{\mathcal{X}} \cdots \int_{\mathcal{X}} K\begin{pmatrix} x & \xi_1 & \dots & \xi_n \\ y & \xi_1 & \dots & \xi_n \end{pmatrix} \mathrm{d}\nu(\xi_1) \dots \mathrm{d}\nu(\xi_n)$$

Φυσικά,

$$H_0(x, y) = K(x, y)$$

Παρατηρούμε ότι από το λήμμα 4.2.1,

$$|H_n(x, y)| \leq \|K\|^{n+1} \|\nu\|_1^n (n+1)^{(n+1)/2} \tag{4.2.0.2}$$

Ορισμός 4.2.4. Έστω K πυρήνας ως προς το μέτρο ν. Ορίζουμε τον Fredholm συζυγή(adjugant) πυρήνα του K, H ώστε

$$H(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} H_n(x, y)$$

Επιπλέον, αν $\Delta(K) \neq 0$, μπορούμε να ορίσουμε και τον επιλύοντα πυρήνα R ως

$$R(x, y) = \frac{H(x, y)}{\Delta(x, y)}$$

Παρατήρηση 4.2.2. Το άθροισμα στον ορισμό του H συγκλίνει απολύτως και ομοιόμορφα στο $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$, από την παρατήρηση 4.2.4..

Λήμμα 4.2.2. (Θεμελιώδης ταυτότητα) Έστω K πυρήνας και H ο Fredholm συζυγής του. Τότε,

$$K \star H = H - \Delta(K) \cdot K = H \star K$$

Πόρισμα 4.2.3. Έστω K πυρήνας και R ο επιλύων του, τότε

$$K \star R = R - K = R \star K$$

4.3 Πολυώνυμα-Συναρτήσεις-Πυρήνας Hermite

Η παρατήρηση 4.1.1. προμηνύει αυτό που θα κάνουμε σε αυτό το υποκεφάλαιο. Θέλουμε να εκφράσουμε και με τα εργαλεία που μόλις αναπτύξαμε την από κοινού κατανομή των ιδιοτιμών με έναν βολικό τρόπο, καθώς επίσης και να αρχίσουμε την μελέτη της μέγιστης ιδιοτιμής ενός GUE.

Ορισμός 4.3.1. Ορίζουμε τα πολυώνυμα Hermite ως εξής:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$$

Όπως προδίδει το όνομά τους, και όπως μπορεί να καταλάβει κανείς με μερικές πράξεις, είναι πολυώνυμα, και μάλιστα το $H_n(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού n, με μεγιστοβάθμιο συντελεστή 1. Παρατηρούμε ότι

$$H_n'(x) = (-1)^n x e^{\frac{x^2}{2}} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right) + (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right) = xH_n(x) - H_{n+1}(x)$$

Επιπλέον,

$$\begin{aligned}
H_n'(x) &= (-1)^n x e^{\frac{x^2}{2}} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right) + (-1)^{n+1} e^{\frac{x^2}{2}} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(xe^{-\frac{x^2}{2}}\right) \\
&= (-1)^n x e^{\frac{x^2}{2}} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right) + (-1)^{n+1} e^{\frac{x^2}{2}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\mathrm{d}^k x}{\mathrm{d}x^k} \cdot \frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}x^{n-k}}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right) \\
&= (-1)^n x e^{\frac{x^2}{2}} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right) + (-1)^{n+1} e^{\frac{x^2}{2}} \binom{n}{0} x \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right) + \binom{n}{1} (-1)^{n+1} e^{\frac{x^2}{2}} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right) \\
&= n(-1)^{n-1} e^{\frac{x^2}{2}} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right) \\
&= nH_{n-1}
\end{aligned}$$

Μας μένουν δηλαδή 3 σημαντικές σχέσεις:

$$H_n'(x) = xH_n(x) - H_{n+1}(x) \tag{4.3.0.1}$$

$$H_n'(x) = nH_{n-1}(x) \tag{4.3.0.2}$$

$$xH_n(x) = H_{n+1}(x) + nH_{n-1}(x) \tag{4.3.0.3}$$

Μερικά πρώτα πολυώνυμα Hermite:

$$\begin{aligned}
H_0(x) &= 1 \\
H_1(x) &= x \\
H_2(x) &= x^2 - 1 \\
H_3(x) &= x^3 - 3x
\end{aligned}$$

Λήμμα 4.3.1. Μια ολοκληρωτική έκφραση για τα H_n δίνεται από τον τύπο

$$H_n(x) = \frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (it)^n e^{-\frac{t^2}{2} - itx} \mathrm{d}t$$

Απόδειξη

Θεωρούμε δεδομένο τον μετασχηματισμό Fourier:

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2} - itx} \mathrm{d}t$$

και, αφού $H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$, παραγωγίζουμε το ολοκλήρωμα ως προς x n φορές και προκύπτει το ζητούμενο. □

Λήμμα 4.3.2. (Φορμουλα Christoffel-Darboux)

Αν $H_n(x)$ τα πολυώνυμα Hermite, τότε για $x \neq y$ ισχύει η εξής ταυτότητα:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{H_k(x)H_k(y)}{k!} = \frac{H_n(x)H_{n-1}(y) - H_{n-1}(x)H_n(y)}{(x-y)(n-1)!}$$

Απόδειξη

Θα το δείξουμε με επαγωγή. Εύκολα βλέπουμε ότι το ζητούμενο ισχύει για $n = 1$. Έστω ότι ισχύει για κάποιο n, θα δείξουμε ότι ισχύει για $n+1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{H_k(x)H_k(y)}{k!} &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{H_k(x)H_k(y)}{k!} + \frac{H_n(x)H_n(y)}{n!} \\
&= \frac{H_n(x)H_{n-1}(y) - H_{n-1}(x)H_n(y)}{(x-y)(n-1)!} + \frac{H_n(x)H_n(y)}{n!} \\
&= \frac{nH_n(x)H_{n-1}(y) - nH_{n-1}(x)H_n(y) + (x-y)H_n(x)H_n(y)}{(x-y)n!} \\
&= \frac{H_n(x)(yH_n(y) - H_{n+1}(y)) - (xH_n(x) - H_{n+1}(x))H_n(y) + (x-y)H_n(x)H_n(y)}{(x-y)n!} \\
&= \frac{-H_n(x)H_{n+1}(y) + H_{n+1}(x)H_n(y)}{(x-y)n!}
\end{aligned}$$

□

Μια πολύ κύρια ιδιότητα των πολυωνύμων Hermite είναι η ορθογωνιότητα ως προς το μέτρο που επάγεται από την τυπική κανονική κατανομή, την w με $w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. Αυτό φαίνεται στο πιο κάτω λήμμα:

Λήμμα 4.3.3. Αν $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τα πολυώνυμα Hermite, τότε ισχύει το εξής:

$$\langle H_n(x), H_m(x)\rangle_{(L^2(\mathbb{R}), w(x)\mathrm{d}x)} = \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x)\overline{H_m}(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = n!\delta_{nm}$$

Απόδειξη

Αν $m > n$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\langle H_n(x), H_m(x)\rangle_{(L^2(\mathbb{R}), w(x)\mathrm{d}x)} &= \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x)(-1)^m e^{\frac{x^2}{2}} \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x \\
&= (-1)^m \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x)\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Δεδομένης της ταχείας σύγκλισης στο 0 του όρου $e^{-x^2/2}$ όταν $|x| \to +\infty$, μέσω ολοκλήρωσης κατά παράγοντες m φορές καταλήγουμε στο ότι

$$\langle H_n(x), H_m(x)\rangle_{(L^2(\mathbb{R}),w(x)\mathrm{d}x)} = (-1)^{n+m}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}H_n(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x = 0$$

Όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από το ότι η H_n είναι πολυώνυμο βαθμού n.

Αν από την άλλη $n = m$,

$$\langle H_n(x), H_m(x)\rangle_{(L^2(\mathbb{R}),w(x)\mathrm{d}x)} = (-1)^{2n}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}H_n(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x = n!$$

Όπου χρησιμοποιούμε ότι το H_n είναι πολυώνυμο βαθμού n με μεγιστοβάθμιο όρο το 1, και το ολοκλήρωμα της κατανομής πιθανότητας μας κάνει επίσης 1. □

Τώρα που είδαμε τον ορισμό και μερικές ιδιότητες των $H_n(x)$, όπως έχουμε παρατηρήσει, για $x \in \mathcal{F}^N$, με $\mathcal{F}$ σώμα,

$$\Delta(x) = \det(V(x)) = \det\big(H_{i-1}(x_j)\big)_{i,j=1}^N$$

Άρα, αν θέλουμε να εκφράσουμε την από κοινού κατανομή των ιδιοτιμών ενός (μη κανονικοποιημένου) GUE ως προς τα πολυώνυμα Hermite, έχουμε το εξής:

$$p(\lambda_1,\dots,\lambda_N) = \tilde{c}_N \exp\left\{-\frac{1}{2}(\lambda_1^2+\cdots+\lambda_N^2)\right\}\left[\det\big(H_{i-1}(\lambda_j)\big)_{i,j=1}^N\right]^2$$

Θα ορίσουμε τώρα κάποιες καινούργιες συναρτήσεις που θα είναι όχι μόνο ορθογώνιες, αλλά και ορθομοναδιαίες.

Ορισμός 4.3.2. Οι συναρτήσεις Hermite για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζονται ως

$$\Psi_n = (2\pi)^{-\frac{1}{4}}(n!)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{4}x^2}H_n(x)$$

Λήμμα 4.3.4. Μια ολοκληρωτική έκφραση για την Ψ_n είναι η εξής:

$$\Psi_n(x) = \frac{i^n e^{\frac{x^2}{4}}}{(2\pi)^{\frac{3}{4}}\sqrt{n!}}\int_{\mathbb{R}} t^n e^{-\frac{t^2}{2}-itx}\mathrm{d}t$$

Απόδειξη

Βλέπε λήμμα 4.3.1.. □

Μερικές ιδιότητες των συναρτήσεων αυτών που θα χρειαστούμε:

Παρατήρηση 4.3.1. (Ορθομοναδιαία ως προς το μέτρο Lebesgue) Οι Ψ_n είναι κανονικοποιημένες ακριβώς ώστε το ολοκλήρωμα-εσωτερικό γινόμενο ως προς το μέτρο Lebesgue να είναι 1, κάτι που φαίνεται με μια μικρή τροποποίηση της απόδειξης της ορθογωνιότητας των H_n.

Λήμμα 4.3.5. Αν Ψ_n είναι οι συναρτήσεις Hermite, τότε $\forall n \in \mathbb{N}$ ισχύουν οι εξής διαφορικές εξισώσεις:

$$\Psi_n'(x) = -\frac{x}{2}\Psi_n(x) + \sqrt{n}\Psi_{n-1}(x)$$
$$\Psi_n''(x) + \left(n + \frac{1}{2} - \frac{x^2}{4}\right)\Psi_n(x) = 0$$

Απόδειξη

Για την πρώτη διαφορική, έχουμε:

$$\begin{aligned}(2\pi)^{\frac{1}{4}}(n!)^{\frac{1}{2}}\Psi_n'(x) &= -\frac{1}{2}xe^{-\frac{1}{4}x^2}H_n(x) + e^{-\frac{1}{4}x^2}H_n'(x)\\ &= -\frac{1}{2}xe^{-\frac{1}{4}x^2}H_n(x) + e^{-\frac{1}{4}x^2}nH_{n-1}(x)\end{aligned}$$

όπου στη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε τη σχέση 4.3.0.2. Με λίγες πράξεις μπορούμε να δούμε ότι:

$$\begin{aligned}\Psi_n'(x) &= -\frac{x}{2}\Psi_n(x) + (2\pi)^{-\frac{1}{4}}((n-1)!)^{-\frac{1}{2}}n^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{4}x^2}nH_{n-1}(x)\\ &= -\frac{x}{2}\Psi_n(x) + \sqrt{n}\Psi_{n-1}(x)\end{aligned}$$

Για τη δεύτερη διαφορική, τροποποιούμε την σχέση 4.3.0.3:

$$\begin{aligned}x\Psi_n(x) &= (2\pi)^{-\frac{1}{4}}(n!)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{4}x^2}xH_n(x)\\ &= (2\pi)^{-\frac{1}{4}}(n!)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{4}x^2}H_{n+1}(x) + (2\pi)^{-\frac{1}{4}}(n!)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{4}x^2}nH_{n-1}(x)\\ &= \sqrt{n+1}\Psi_{n+1}(x) + \sqrt{n}\Psi_{n-1}(x)\end{aligned}$$

Παραγωγίζουμε τώρα τα 2 μέλη της εξίσωσης που εξηγάγαμε λίγο πιο πάνω

$$\begin{aligned}\Psi_n''(x) &= \left(-\frac{x}{2}\Psi_n(x) + \sqrt{n}\Psi_{n-1}(x)\right)'\\ &= -\frac{1}{2}\Psi_n(x) - \frac{x}{2}\Psi_n'(x) + \sqrt{n}\left(-\frac{x}{2}\Psi_{n-1}(x) + \sqrt{n-1}\Psi_{n-2}\right)\\ &= -\frac{1}{2}\Psi_n(x) - \frac{x}{2}\Psi_n'(x) - \frac{x}{2}\sqrt{n}\Psi_{n-1}(x) + \sqrt{n(n-1)}\Psi_{n-2}(x)\\ &= -\frac{1}{2}\Psi_n(x)\underbrace{-\frac{x}{2}\Psi_n'(x) + \frac{x}{2}\sqrt{n}\Psi_{n-1}(x)}_{\frac{x^2}{4}\Psi_n(x)} - \sqrt{n}\underbrace{\left(x\Psi_{n-1}(x) - \sqrt{n-1}\Psi_{n-2}(x)\right)}_{\sqrt{n}\Psi_n(x)}\\ &= -\frac{1}{2}\Psi_n(x) + \frac{x^2}{4}\Psi_n(x) - n\Psi_n(x)\end{aligned}$$

□

Με βάση τον πιο πάνω ορισμό, μπορούμε τώρα να εκφράσουμε την από κοινού κατανομή ως προς τις Ψ_n:

$$p(\lambda_1, \ldots, \lambda_N) = \tilde{c}_N \left[\det\left(e^{-\frac{1}{4}\lambda_j^2} H_{i-1}(\lambda_j) \right)_{i,j=1}^N \right]^2 = \bar{c}_N \left[\det\left(\Psi_{i-1}(\lambda_j) \right)_{i,j=1}^N \right]^2$$

οπου φυσικά αλλάζει η σταθερά ώστε να ρυθμιστεί με βάση τους συντελεστές των Ψ_n. Ονομάζουμε τον πίνακα με στοιχεία τις συναρτήσεις Hermite B, δηλαδή

$$B = \Psi_{i-1}(\lambda_j))_{i,j=1}^N$$

Έτσι,

$$(\det B)^2 = \det\left(B^T\right)\dot{\det}(B) = \det\left(B^T B\right) = \det\left[\left(\sum_{k=1}^N B_{ki} B_{kj} \right)_{i,j=1}^N \right]$$

$$= \det\left[\left(\sum_{k=1}^N \Psi_{k-1}(\lambda_i)\Psi_{k-1}(\lambda_j) \right)_{i,j=1}^N \right]$$

Ορισμός 4.3.3. Ο $N-$οστός πυρήνας Hermite K_N ορίζεται ως εξής:

$$K_N(x, y) = \sum_{k=0}^{N-1} \Psi_k(x)\Psi_k(y)$$

Είναι πυρήνας, με την έννοια που αναφέραμε στο προηγούμενο υποκεφάλαιο. Με βάση όλα τα παραπάνω, έχουμε τελικώς για την από κοινού κατανομή των μη ταξινομημένων μη κανονικοποιημένων ιδιοτιμών:

$$p(\lambda_1, \ldots, \lambda_N) = \bar{c}_N \det\left[\left(K_N(\lambda_i, \lambda_j) \right)_{i,j=1}^N \right]$$

Ας υπολογίσουμε την τιμή της σταθεράς $\bar{c}_N$.

Πρόταση 4.3.1.

$$K_N(x, y) = \sqrt{N} \frac{\Psi_N(x)\Psi_{N-1}(y) - \Psi_{N-1}(x)\Psi_N(y)}{x - y}$$

και

$$K_N(x, x) = \sqrt{N} \left(\Psi'_N(x)\Psi_{N-1}(x) - \Psi'_{N-1}(x)\Psi_N(x) \right)$$

Απόδειξη

Υπενθυμίζουμε ότι $\Psi_n = (2\pi)^{-\frac{1}{4}}(n!)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{4}x^2} H_n(x)$. Έτσι,

$$K_N(x, y) = \sum_{k=0}^{N-1} \Psi_k(x)\Psi_k(y) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H_k(x)H_k(y)}{k!}$$

$$= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \frac{H_N(x)H_{N-1}(y) - H_{N-1}(x)H_N(y)}{(x - y)(N - 1)!}$$

$$= \sqrt{N} \frac{\Psi_N(x)\Psi_{N-1}(y) - \Psi_{N-1}(x)\Psi_N(y)}{x - y}$$

Στην δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την φόρμουλα Christoffel-Darboux. Το δεύτερο κομμάτι της πρότασης αποδεικνύεται με τον κανόνα De L'Hôpital. □

Πρόταση 4.3.2.

$$K_N(x,y) = \frac{\Psi_N(x)\Psi'_N(y) - \Psi'_N(x)\Psi_N(y)}{x-y} - \frac{1}{2}\Psi_N(x)\Psi_N(y)$$

Απόδειξη

Δεδομένου του λήμματος λήμματος 4.3.5., $\Psi'_n(x) = -\frac{x}{2}\Psi_n(x) + \sqrt{n}\Psi_{n-1}(x)$, και αν αντικαταστήσουμε το $\Psi_{N-1}(y)$ στην έκφραση που εξηγάγαμε στην πρόταση 4.3.1., βρίσκουμε το ζητούμενο. □

Πρόταση 4.3.3. *Ο $N-$οστός πυρήνας Hermite είναι αναπαράγων, δηλαδή*

$$\int_{\mathbb{R}} K_N(x,u)K_N(u,y)\mathrm{d}u = K_N(x,y)$$

Απόδειξη

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} K_N(x,u)K_N(u,y)\mathrm{d}u &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=0}^{N-1}\Psi_k(x)\Psi_k(u)\sum_{l=0}^{N-1}\Psi_l(u)\Psi_l(y)\mathrm{d}u \\ &= \sum_{k,l=0}^{N-1}\Psi_k(x)\Psi_l(y)\int_{\mathbb{R}}\Psi_k(u)\Psi_l(u)\mathrm{d}u \\ &= \sum_{k,l=0}^{N-1}\Psi_k(x)\Psi_l(y)\delta_{kl} = \sum_{k=0}^{N-1}\Psi_k(x)\Psi_k(y) = K_N(x,y)\end{aligned}$$

□

Λήμμα 4.3.6. Για κάποιον πυρήνα $K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ που είναι αναπαράγων, αν $d = \int_{\mathbb{R}} K(x,x)\mathrm{d}x$, τότε $\forall n \geq 2$,

$$\int_{\mathbb{R}} \det\big(K(\lambda_i,\lambda_j)\big)_{i,j=1}^{n}\mathrm{d}\lambda_n = (d-n+1)\det\big(K(\lambda_i,\lambda_j)\big)_{i,j=1}^{n-1}$$

Απόδειξη

Η απόδειξη για το πιο πάνω βρίσκεται στο [2], με επαγωγή. □

Πόρισμα 4.3.1. Αν $r \leq n$, τότε

$$\int_{\mathbb{R}}\cdots\int_{\mathbb{R}} \det\big(K(\lambda_i,\lambda_j)\big)_{i,j=1}^{n}\mathrm{d}\lambda_1\mathrm{d}\lambda_2\ldots\mathrm{d}\lambda_r = (d-n+1)(d-n+2)\ldots(d-n+r)\det\big(K(\lambda_i,\lambda_j)\big)_{i,j=1}^{n-r}$$

και αρα

$$\int_{\mathbb{R}}\cdots\int_{\mathbb{R}} \det\big(K(\lambda_i,\lambda_j)\big)_{i,j=1}^{n}\mathrm{d}\lambda_1\mathrm{d}\lambda_2\ldots\mathrm{d}\lambda_n = (d-n+1)(d-n+2)\ldots(d-1)d = \frac{d!}{(d-n)!}$$

Αν εφαρμόσουμε τα πιο πάνω στον πυρήνα Hermite τάξης N, K_N, τότε

$$d = \int_{\mathbb{R}} K(x,x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=0}^{N-1} \Psi_k(x)\Psi_k(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{\mathbb{R}} \Psi_k(x)\Psi_k(x)\mathrm{d}x = N \tag{4.3.0.4}$$

και άρα

$$\int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \det\big(K_N(\lambda_i,\lambda_j)\big)_{i,j=1}^{n} \mathrm{d}\lambda_1 \mathrm{d}\lambda_2 \ldots \mathrm{d}\lambda_n = N!$$

Αφού η p είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, πρέπει

$$\int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} p(\lambda_1,\ldots,\lambda_N)\mathrm{d}\lambda_1 \ldots \mathrm{d}\lambda_N = 1$$

και άρα

$$\bar{c}_N \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \det\big(K_N(\lambda_i,\lambda_j)\big)_{i,j=1}^{N} \mathrm{d}\lambda_1 \mathrm{d}\lambda_2 \ldots \mathrm{d}\lambda_N = 1$$

δηλαδή, από τα προηγούμενα, καταλήγουμε στο ότι $\bar{c}_N = \frac{1}{N!}$ και άρα τελικώς

$$p(\lambda_1,\ldots,\lambda_N) = \frac{1}{N!} \det\left[\big(K_N(\lambda_i,\lambda_j)\big)_{i,j=1}^{N}\right]$$

Λήμμα 4.3.7. Η μέση συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των μη κανονικοποιημένων ιδιοτιμών, δηλαδή η σππ του μέτρου $\bar{\mu}_N$ πριν την κανονικοποίηση, δίνεται από την έκφραση

$$p_N(\lambda) = \frac{1}{N} K_N(\lambda,\lambda)$$

Απόδειξη

Η τιμή $p(\lambda_1,\ldots,\lambda_N)$ μας δίνει την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας να έχουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα GUE στις θέσεις $\lambda_1,\ldots,\lambda_N$. Αν μας ενδιαφέρει να είναι απλώς κάποια από τις ιδιοτιμές σε κάποια θέση, τότε συμβολίζουμε $\lambda_N = \lambda$, ολοκληρώνουμε στις υπόλοιπες $N-1$ ιδιοτιμές και έχουμε το εξής:

$$\begin{aligned} p_N(\lambda) &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} p(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda) = \frac{1}{N!}\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \det\big[K_N(\lambda_i,\lambda_j)\big]_{i,j=1}^{N} \mathrm{d}\lambda_1 \ldots \mathrm{d}\lambda_{N-1} \\ &= \frac{1}{N!}(N-1)! K_N(\lambda,\lambda) = \frac{1}{N} K_N(\lambda,\lambda) \end{aligned}$$

□

Με βάση όλα τα παραπάνω, προκύπτει το εξής:

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}[\lambda_i^{(N)} \notin [t,t'] \ \ \forall i = 1,\ldots,N] \\ =&1 - \mathbb{P}[\cup_{i=1}^{N}\{\lambda_i \in [t,t']\}] = 1 - \sum_{k=1}^{N}(-1)^{k-1} \sum_{\substack{I\subset[N] \\ |I|=k}} \mathbb{P}[\cap_{i\in I}\{\lambda_i \in [t,t']\}] \end{aligned}$$

$$=1+\sum_{k=1}^{N}(-1)^k\binom{N}{k}\underbrace{\int_t^{t'}\cdots\int_t^{t'}}_{\#k}\underbrace{\int_{\mathbb{R}}\cdots\int_{\mathbb{R}}}_{\#(N-k)}p(\lambda_1,\ldots,\lambda_k,\ldots,\lambda_N)\mathrm{d}\lambda_1\mathrm{d}\lambda_2\ldots\mathrm{d}\lambda_k\ldots\mathrm{d}\lambda_N$$

$$=1+\sum_{k=1}^{N}(-1)^k\binom{N}{k}\underbrace{\int_t^{t'}\cdots\int_t^{t'}}_{\#k}\int_{\mathbb{R}^{N-k}}\frac{1}{N!}\det\big(K_N(\lambda_i,\lambda_j)\big)_{i,j=1}^{N}\mathrm{d}\lambda_1\mathrm{d}\lambda_2\ldots\mathrm{d}\lambda_k\ldots\mathrm{d}\lambda_N$$

$$=1+\sum_{k=1}^{N}(-1)^k\binom{N}{k}\underbrace{\int_t^{t'}\cdots\int_t^{t'}}_{\#k}\left[\int_{\mathbb{R}^{N-k}}\frac{1}{N!}\det\big(K_N(\lambda_i,\lambda_j)\big)_{i,j=1}^{N}\mathrm{d}\lambda_{k+1}\ldots\mathrm{d}\lambda_N\right]\mathrm{d}\lambda_1\ldots\mathrm{d}\lambda_k$$

$$=1+\sum_{k=1}^{N}(-1)^k\binom{N}{k}\int_t^{t'}\cdots\int_t^{t'}\frac{(N-k)!}{N!}\det\big(K_N(\lambda_i,\lambda_j)\big)_{i,j=1}^{k}\mathrm{d}\lambda_1\ldots\mathrm{d}\lambda_k$$

$$=1+\sum_{k=1}^{N}(-1)^k\frac{1}{k!}\int_t^{t'}\cdots\int_t^{t'}\det\big(K_N(\lambda_i,\lambda_j)\big)_{i,j=1}^{k}\mathrm{d}\lambda_1\ldots\mathrm{d}\lambda_k$$

$$=1+\Delta(K_N)$$

όπου $\Delta(K_N)$ η ορίζουσα Fredholm για τον πυρήνα K_N και το μέτρο $\mathbb{1}_{[t,t']}(x)\mathrm{d}x$. Στην πέμπτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε το πόρισμα 4.3.1. και την 4.3.0.4. Το αν και υπό τι προϋποθέσεις αυτή η ποσότητα συγκλίνει κάπου όταν το $N\to+\infty$ και το $t'\to\infty$ θα το μελετήσουμε πιο κάτω.

4.4 Επανεπίσκεψη του νόμου ημικυκλίου του Wigner

Προς το παρόν ανοίγουμε μια παρένθεση για να χρησιμοποιήσουμε τα νέα μας εργαλεία ώστε να δούμε από μια διαφορετική σκοπιά τον νόμο ημικυκλίου του Wigner για GUE. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα πιο πάνω για να εκφράσουμε την δράση του μέτρου $\bar{\mu}_N$ σε μια συνάρτηση f συναρτήσει του πυρήνα Hermite. Αρχικά υπενθυμίζουμε ότι το λήμμα 4.3.7 μας δίνει την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του $\bar{\mu}_N$ πριν από την κανονικοποίηση, δηλαδή του $\mathbb{E}[\mu_N]$.

$$\mathbb{E}[\mu_N(x)]=\frac{1}{N}K_N(x,x)\overset{\text{γραμ.}}{\iff}\mathbb{E}\left[\frac{\mu_N}{\sqrt{N}}\left(\frac{x}{\sqrt{N}}\right)\right]=\frac{1}{N}K_N(x,x)$$

Άρα,

$$\bar{\mu}_N\left(\frac{x}{\sqrt{N}}\right)=\frac{1}{N}K_N(x,x)$$

$$\langle\bar{\mu}_N,f\rangle=\int_{\mathbb{R}}f\mathrm{d}\bar{\mu}_N=\frac{1}{N}\int_{\mathbb{R}}f\left(\frac{x}{\sqrt{N}}\right)K_N(x,x)\mathrm{d}x$$

Λήμμα 4.4.1. Η ροπογεννήτρια του $\bar{\mu}_N$ δίνεται από την έκφραση

$$\langle \bar{\mu}_N, e^{s\cdot} \rangle = e^{\frac{s^2}{2N}} \sum_{k=0}^{N-1} C_k \frac{(N-1)(N-2)\dots(N-K)}{N^k} \frac{s^{2k}}{(2k)!}$$

Απόδειξη

Αρχικά, από την πρόταση 4.3.1. και το λήμμα 4.3.5. προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{N}} \frac{\mathrm{d}K_N(x,x)}{\mathrm{d}x} &= \Psi_N''(x)\Psi_{N-1}(x) - \Psi_{N-1}''(x)\Psi_N(x) \\
&= -(N + \frac{1}{2} - \frac{x^2}{4})\Psi_N(x)\Psi_{N-1}(x) + (N - 1 + \frac{1}{2} - \frac{x^2}{4})\Psi_{N-1}(x)\Psi_N(x) \\
&= -\Psi_{N-1}(x)\Psi_N(x)
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Taylor, το ότι το H_N είναι ένα πολυώνυμο βαθμού N και μια χρήσιμη ταυτότητα που δείξαμε πιο πάνω για τα πολυώνυμα Hermite, καταλήγουμε στο εξής:

$$H_N(x+t) = \sum_{k=0}^{N} \frac{H_N^{(k)}(x)t^k}{k!} \overset{4.3.0.2}{=} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \frac{N!}{(N-k)!} H_{N-k}(x)t^k = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} H_{N-k}(x)t^k \tag{4.4.0.1}$$

Τώρα, σύμφωνα με τα πιο πάνω μπορούμε να υπολογίσουμε την δράση του $\bar{\mu}_N$ ως εξής:

$$\langle \bar{\mu}_N, e^{s\cdot} \rangle = \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{sx}{\sqrt{N}}} K_N(x,x)\mathrm{d}x \overset{\text{κ.π.}}{=} \frac{1}{N} \frac{\sqrt{N}}{s} \left[\cancel{e^{\frac{sx}{\sqrt{N}}} K_N(x,x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}} + \sqrt{N} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{sx}{\sqrt{N}}} \Psi_{N-1}(x)\Psi_N(x)\mathrm{d}x \right]$$

όπου στην ολοκλήρωση κατά παράγοντες χρησιμοποιήσαμε την έκφραση για την παράγωγο του K_N που δείξαμε στην αρχή της απόδειξης. Συνεχίζοντας, το πιο πάνω ισούται με

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{sx}{\sqrt{N}}} \Psi_{N-1}(x)\Psi_N(x) &= \frac{1}{\sqrt{N}((N-1)!)\sqrt{2\pi}s} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{sx}{\sqrt{N}} - \frac{x^2}{2}} H_{N-1}(x)H_N(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{\sqrt{N}e^{\frac{s^2}{2N}}}{N!\sqrt{2\pi}s} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}\left(x - \frac{s}{\sqrt{N}}\right)^2} H_{N-1}(x)H_N(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{\sqrt{N}e^{\frac{s^2}{2N}}}{N!s} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_{N-1}\left(x + \frac{s}{\sqrt{N}}\right) H_N\left(x + \frac{s}{\sqrt{N}}\right)\mathrm{d}x \\
&\overset{4.4.0.1}{=} \frac{\sqrt{N}e^{\frac{s^2}{2N}}}{N!s} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1}{k} H_{N-1-k}(x) \left(\frac{s}{\sqrt{N}}\right)^k \sum_{r=0}^{N} \binom{N}{r} H_{N-r}(x) \left(\frac{s}{\sqrt{N}}\right)^r \mathrm{d}x \\
&= \frac{\sqrt{N}e^{\frac{s^2}{2N}}}{N!s} \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1}{k} \left(\frac{s}{\sqrt{N}}\right)^k \sum_{r=0}^{N} \binom{N}{r} \left(\frac{s}{\sqrt{N}}\right)^r \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_{N-1-k}(x)H_{N-r}(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$\overset{\text{ορθ.}}{=} \frac{\sqrt{N}e^{\frac{s^2}{2N}}}{N!s}\sum_{k=0}^{N-1}\binom{N-1}{k}\binom{N}{k+1}\left(\frac{s}{\sqrt{N}}\right)^{2k+1}(N-1-k)!$$

$$= e^{\frac{s^2}{2N}}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}\frac{(N-1)!}{(N-k-1)!}\frac{s^{2k}}{(2k)!N^k}$$

$$= e^{\frac{s^2}{2N}}\sum_{k=0}^{N-1}C_k\frac{(N-1)(N-2)\dots(N-k)}{N^k}\frac{s^{2k}}{(2k)!}$$

όπου C_k ο $k-$οστός αριθμός Catalan. □

Το πιο πάνω μας δίνει έναν εναλλακτικό τρόπο απόδειξης του νόμου ημικυκλίου του Wigner στην περίπτωση των GUE, καθώς μπορούμε να πάρουμε το όριο $N \to +\infty$ στην πιο πάνω έκφραση και να καταλήξουμε στη ροπογεννήτρια της κατανομής που έχει ως ροπές τους αριθμούς Catalan στις άρτιες θέσεις, και μηδενικές ροπές στις περιττές θέσεις.

Κλείνουμε αισίως την παρένθεση.

4.5 Ασυμπτωτική συμπεριφορά στα άκρα: η μέγιστη ιδιοτιμή του GUE

Στην αρχή της εργασίας αποδείξαμε τον νόμο του ημικυκλίου του Wigner για μια οικογένεια κατανομών, συμπεριλαμβανομένης της περίπτωσης των GUE. Σύμφωνα με τον νόμο αυτό ξέρουμε ότι οριακά όλες οι κανονικοποιημένες ιδιοτιμές κατανέμονται σχεδόν βεβαίως με έναν συγκεκριμένο τρόπο στο διάστημα $[-2, 2]$. Αυτό σημαίνει ότι αν $\lambda_{\max}^{(N)}/\sqrt{N}$ η κανονικοποιημένη μέγιστη ιδιοτιμή και αν $\varepsilon > 0$, τότε

$$\mathbb{P}(\limsup(\omega : \lambda_{max}^{(N)}(\omega)/\sqrt{N} < 2-\varepsilon)) = \mathbb{P}(\limsup\{\text{όλες οι ιδιοτιμές μικρότερες του } 2-\varepsilon\}) = 0.$$

Αυτό μας λέει ότι η μέγιστη ιδιοτιμή είναι σχεδόν βεβαίως μεγαλύτερη ή ίση του 2. Δεν ξέρουμε βέβαια αν μπορεί να γίνει μεγαλύτερη του 2 ή αν συγκεντρώνεται γύρω από αυτό. Στην πραγματικότητα, συμβαίνει το δεύτερο, όπως θα δούμε σε αυτό το υποκεφάλαιο.

Έστω ότι θέλουμε να μελετήσουμε τις διακυμάνσεις της $\lambda_{\max}^{(N)}/\sqrt{N}$ στο διάστημα $[2-t, 2]$ για μικρά t. Σε αυτό το διάστημα χονδρικά, το πλήθος των ιδιοτιμών του κανονικοποιημένου τυχαίου πίνακα είναι

$$N\int_{2-t}^{2}\mu_W\,\mathrm{d}x = \frac{N}{2\pi}\int_{2-t}^{2}\sqrt{(2-x)(2+x)}$$

$$\approx \frac{N}{\pi}\int_{2-t}^{2}\sqrt{(2-x)} = \frac{N}{\pi}\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}$$

Αν θέλουμε να φροντίσουμε το πιο πάνω να είναι της τάξης του 1, τότε πρέπει να επιλέξουμε το $t \sim N^{\frac{2}{3}}$. Σε αυτή την περίπτωση αναμένουμε πως ενδεχομένως η τυχαία μεταβλητή $N^{2/3}\left(\lambda_{max}^{(N)}/\sqrt{N} - 2\right)$ να

κατανέμεται οριακά με έναν τρόπο ανεξάρτητο του N. Θα το δείξουμε φυσικά αυστηρά στο επόμενο υποκεφάλαιο.

Για τη συνέχεια, πρώτα ορίζουμε την ακολουθία $b_k^{(N)}$ ώστε να ισχύει:

$$\langle \bar{\mu}_N, e^{s\cdot} \rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k^{(N)} C_k \frac{s^{2k}}{(2k)!}$$

Λήμμα 4.5.1. (Αναδρομή Harer-Zagier) Για κάθε $k \in \mathbb{N}_0$, ισχύει η εξής αναδρομική σχέση:

$$b_{k+1}^{(N)} = b_k^{(N)} + \frac{k(k+1)}{4N^2} b_{k-1}^{(N)}$$

και $b_{-1} = 0$

Απόδειξη

Ορίζουμε πρώτα τη δυναμοσειρά

$$F_N(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)!} \binom{N-1}{k} t^k$$

και

$$\Phi_N(t) = e^{-\frac{t}{2}} F_N(t)$$

Με την παραδοχή ότι $\binom{m}{n} = 0$ για $n > m$ (υπάρχουν 0 τρόποι να επιλέξουμε n στοιχεία από m διαθέσιμα στοιχεία), το άθροισμα είναι πεπερασμένο και το k φτάνει μέχρι και το $N-1$. Με λίγες πράξεις,

$$\langle \bar{\mu}_N, e^{s\cdot} \rangle = \Phi_N\left(-\frac{s^2}{N}\right)$$

Εύκολα μπορούμε να επιβεβαιώσουμε ότι

$$\left(t\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + (2-t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + N - 1\right) F_N(t) = 0$$

και άρα

$$\left(4t\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + 8\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + 4N - t\right) \Phi_N(t) = 0$$

Αναπτύσσουμε την $\Phi_N(t)$ σε δυναμοσειρά, δηλαδή $\Phi_N(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{(N)} t^k$ και αντικαθιστούμε στην πιο πάνω διαφορική:

$$4(k+2)(k+1)a_{k+1}^{(N)} + 4Na_k^{(N)} - a_{k-1}^{(N)} = 0 \tag{4.5.0.1}$$

όπου αν $k = 0$, αγνοούμε τον τελευταίο όρο. Επιπλέον, εξ ορισμού των $a_k^{(N)}$, φυσικά ισχύει η σχέση

$$\frac{(-1)^k a_k^{(N)} (2k)!}{N^k} = \frac{b_k^{(N)}}{k+1}\binom{2k}{k} = \langle \bar{\mu}_N, \cdot^{2k} \rangle$$

Τελικώς, αντικαθιστούμε στην 4.5.0.1 και προκύπτει η ζητούμενη αναδρομική σχέση για το b_k. □

Με βάση αυτό το λήμμα, μπορούμε να δείξουμε το εξής:

Θεώρημα 4.5.1. *Η κανονικοποιημένη μέγιστη ιδιοτιμή ενός GUE,* $\frac{\lambda_{\max}^{(N)}}{\sqrt{N}}$ *συγκλίνει σχεδόν βεβαίως στο 2.*

Απόδειξη

Σύμφωνα με αυτά που αναφέραμε στην αρχή του υποκεφαλαίου, αρκεί να δείξουμε ότι η μέγιστη ιδιοτιμή είναι σχεδόν βεβαίως μικρότερη του 2. Έχουμε,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\frac{\lambda_{\max}^{(N)}}{\sqrt{N}} \geq 2+\varepsilon\right) &= \mathbb{P}\left(\left(\frac{\lambda_{\max}^{(N)}}{\sqrt{N}}\right)^{2k} \geq (2+\varepsilon)^{2k}\right) \\
&\leq \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\lambda_j}{\sqrt{N}}\right)^{2k} \geq (2+\varepsilon)^{2k}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\operatorname{tr}\left(A_N^{2k}\right) \geq \frac{(2+\varepsilon)^{2k}}{N}\right) \\
&\leq \frac{N}{(2+\varepsilon)^{2k}}\mathbb{E}\left[\operatorname{tr}\left(A_N^{2k}\right)\right] \\
&= b_k^{(N)} C_k
\end{aligned}$$

Θέλουμε να φράξουμε τον όρο στα αριστερά από κάτι που οριακά θα μηδενίζεται, άρα αρκεί να φράξουμε τον όρο στα δεξιά. Σύμφωνα με το λήμμα 2.6.2, $C_k \leq 4^k/k^{\frac{3}{2}}$. Όσον αφορά στο $b_k^{(N)}$, από την αναδρομή Harer-Zagier βλέπουμε ότι η $b_k^{(N)}$ είναι φθίνουσα ως προς k. Έτσι,

$$\begin{aligned}
b_k^{(N)} &\leq \left(1+\frac{(k-1)^2}{2N^2}\right) b_{k-1}^{(N)} \leq \cdots \leq \left(1+\frac{(k-1)^2}{2N^2}\right)\cdot\left(1+\frac{(k-2)^2}{2N^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1^2}{2N^2}\right) \\
&\leq \left(1+\frac{k^2}{2N^2}\right)^k \leq \left[\exp\left\{\frac{k^2}{2N^2}\right\}\right]^k = \exp\left\{\frac{k^3}{2N^2}\right\}
\end{aligned}$$

Άρα, για κάθε $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}\left(\left(\frac{\lambda_{\max}^{(N)}}{\sqrt{N}}\right) \geq 2+\varepsilon\right) \leq \exp\left\{\frac{k^3}{2N^2}\right\}\frac{N}{(2+\varepsilon)^{2k}}\frac{4^k}{k^{\frac{3}{2}}}$$

Αν επιλέξουμε $k = \left\lfloor N^{\frac{2}{3}} \right\rfloor$, τότε

$$\exp\left\{\frac{k_N^3}{2N^2}\right\} \xrightarrow{N\to+\infty} e^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{N}{k_N^{\frac{3}{2}}} \xrightarrow{N\to+\infty} 1, \quad \left(\frac{2}{2+\varepsilon}\right)^{2k_N} \xrightarrow{N\to+\infty} 0$$

Άρα $\forall \varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left(\frac{\lambda_{\max}^{(N)}}{\sqrt{N}}\right) \geq 2+\varepsilon\right) \xrightarrow{N\to+\infty} 0$$

Μάλιστα, η σύγκλιση κατά πιθανότητα που μόλις δείξαμε ισχυροποιείται σε σχεδόν βέβαιη σύγκλιση με χρήση του Borel-Cantelli και του ότι

$$\sum_N \left(\frac{2}{2+\varepsilon}\right)^{k_N} < +\infty$$

Πράγματι,

$$\sum_N \mathbb{P}\left(\left(\frac{\lambda_{\max}^{(N)}(\omega)}{\sqrt{N}}\right) - 2 \geq \varepsilon\right) = e^{\frac{1}{2}} \sum_N \left(\frac{2}{2+\varepsilon}\right)^{k_N} < +\infty$$

άρα από το Borel-Cantelli

$$\mathbb{P}\left(\limsup_N \left\{\omega : \left(\frac{\lambda_{\max}^{(N)}(\omega)}{\sqrt{N}}\right) - 2 \geq \varepsilon\right\}\right) = 0 \tag{4.5.0.2}$$

Όμως,

$$\left\{\left|\frac{\lambda_{\max}^{(N)}}{\sqrt{N}} - 2\right| \geq \varepsilon\right\} = \left\{\frac{\lambda_{\max}^{(N)}}{\sqrt{N}} - 2 \geq \varepsilon\right\} \sqcup \left\{\frac{\lambda_{\max}^{(N)}}{\sqrt{N}} - 2 \leq -\varepsilon\right\}$$

και άρα

$$\limsup \left\{\left|\frac{\lambda_{\max}^{(N)}}{\sqrt{N}} - 2\right| \geq \varepsilon\right\} = \limsup \left\{\frac{\lambda_{\max}^{(N)}}{\sqrt{N}} - 2 \geq \varepsilon\right\} \sqcup \limsup \left\{\frac{\lambda_{\max}^{(N)}}{\sqrt{N}} - 2 \leq -\varepsilon\right\}$$

Η πιθανότητα του πρώτου συνόλου στα δεξιά είναι μηδέν από την 4.5.0.2, και η πιθανότητα του δεύτερου συνόλου είναι επίσης μηδέν, καθώς όπως έχουμε αναφέρει στην αρχή του υποκεφαλαίου, η μέγιστη ιδιοτιμή είναι σχεδόν βεβαίως μεγαλύτερη ή ίση του 2. Η πιθανότητα του όρου στα αριστερά είναι το άθροισμα των πιθανοτήτων των όρων στα δεξιά, καθώς τα σύνολα είναι ξένα, και έτσι έχουμε την σχεδόν βέβαιη σύγκλιση.

□

Λήμμα 4.5.2. (Φράγμα του Ledoux)

Αν $\lambda_{\max}^{(N)}$ η μέγιστη ιδιοτιμή ενός μη κανονικοποιημένου GUE, τότε υπάρχει σταθερά C ώστε για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $N \in \mathbb{N}$ να ισχύει το εξής φράγμα:

$$\mathbb{P}\left(\frac{\lambda_{\max}^{(N)}}{2\sqrt{N}} \geq e^{N^{-\frac{2}{3}}\varepsilon}\right) \leq Ce^{-2\varepsilon}$$

Αν στην παραπάνω έκφραση πάρουμε για κάποιο x, $\varepsilon_N = N^{2/3}\log\left(1 + \frac{x}{2N^{2/3}}\right)$ και μετά πάρουμε $N \to +\infty$, τότε βλέπουμε ότι

$$\mathbb{P}\left(N^{2/3}\left(\frac{\lambda_{\max}^{(N)}}{\sqrt{N}} - 2\right) > x\right) \leq C\left(1 + \frac{x}{2N^{2/3}}\right)^{N^{-2/3}} \xrightarrow{N\to+\infty} Ce^{-x} \tag{4.5.0.3}$$

Αυτό βέβαια ισχύει για κάθε x, και έτσι βλέπουμε με έναν ακόμα τρόπο ότι η πιθανότητα η κανονικοποιημένη ιδιοτιμή ενός GUE, $\lambda_{\max}^{(N)}/\sqrt{N}$ να ξεπεράσει το 2 είναι οριακά μηδενική. Μάλιστα, το πιο πάνω μας λέει ότι η τάξη της σύγκλισης συμφωνεί με τα ευριστικά επιχειρήματα που αναφέραμε στην αρχή του υποκεφαλαίου. Θα χρησιμοποιήσουμε αυτό το φράγμα στο επόμενο υποκεφάλαιο.

Απόδειξη

Αρχικά, από την ανισότητα του Markov έχουμε ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}\left(\frac{\lambda_{\max}^{(N)}}{2\sqrt{N}} \geq e^{N^{-\frac{2}{3}}\varepsilon}\right) \leq e^{-2kN^{-\frac{2}{3}}\varepsilon}\mathbb{E}\left[\left(\frac{\lambda_{\max}^{(N)}}{2\sqrt{N}}\right)^{2k}\right]$$

Γνωρίζουμε ότι

$$\frac{1}{N}\mathbb{E}\left[\left(\frac{\lambda_{\max}^{N}}{\sqrt{N}}\right)^{2k}\right] \leq \mathbb{E}\left[\frac{\left(\lambda_N^1/\sqrt{N}\right)^{2k} + \cdots + \left(\lambda_N^N/\sqrt{N}\right)^{2k}}{N}\right] = \int_{\mathbb{R}} x^{2k}\mathrm{d}\bar{\mu}_N(x) = b_k^{(N)}C_k$$

Συνδυάζουμε τα πιο πάνω και το φράγμα που βρήκαμε για το b_k στην πιο πάνω απόδειξη, δηλαδή ότι

$$b_k^{(N)} \leq e^{\frac{k^3}{2N^2}}$$

και προκύπτει ότι

$$\mathbb{P}\left(\frac{\lambda_{\max}^{(N)}}{2\sqrt{N}} \geq e^{N^{-\frac{2}{3}}\varepsilon}\right) \leq e^{-2kN^{-\frac{2}{3}}\varepsilon}\mathbb{E}\left[\left(\frac{\lambda_{\max}^{(N)}}{2\sqrt{N}}\right)^{2k}\right] \leq e^{-2kN^{-\frac{2}{3}}\varepsilon}\frac{1}{2^{2k}}Nb_k^{(N)}C_k$$

$$\leq Ne^{-2kN^{-\frac{2}{3}}\varepsilon}\frac{1}{2^{2k}}e^{\frac{k^3}{2N^2}}\frac{4^k}{k^{\frac{3}{2}}} = Ne^{\frac{k^3}{2N^2}-2kN^{-\frac{2}{3}}\varepsilon}k^{-\frac{3}{2}}$$

Θέτουμε $k = \left\lfloor N^{\frac{2}{3}}\right\rfloor$ και έχουμε

$$\mathbb{P}\left(\frac{\lambda_{\max}^{(N)}}{2\sqrt{N}} \geq e^{N^{-\frac{2}{3}}\varepsilon}\right) \leq e^{\frac{1}{2}-2\varepsilon} = Ce^{-2\varepsilon}$$

□

4.6 Πυρήνας Airy και ύπαρξη ορίου

Θα συνεχίσουμε την μελέτη της μέγιστης ιδιοτιμής με μεγαλύτερη λεπτομέρεια. Έχουμε ήδη δείξει ότι αν $\lambda_{\max}^{(N)}$ η μέγιστη ιδιοτιμή του μη κανονικοποιημένου GUE τάξης N, και $\{\lambda_i\}_{i=1}^N$ το σύνολο των ιδιοτιμών, τότε:

$$\mathbb{P}[\lambda_i^{(N)} \notin [t,t']] = 1 + \sum_{k=1}^{N}(-1)^k\frac{1}{k!}\int_t^{t'}\int_t^{t'}\cdots\int_t^{t'}\det\left(K_N(\lambda_i,\lambda_j)\right)_{i,j=1}^k\mathrm{d}\lambda_1\mathrm{d}\lambda_2\ldots\mathrm{d}\lambda_k$$

$$:= 1 + \Delta^{(N)}(K_N)$$

Με βάση την πιο πάνω έκφραση, η ερώτηση που θα μας απασχολήσει τώρα είναι κατά πόσον υπάρχει το όριο

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}[\lambda_{max}^{(N)} < t]$$

και το τι πρέπει να κάνουμε για να φροντίσουμε να ισχύει αυτό.

Αρχικά, έχουμε δείξει ότι η κανονικοποιημένη ιδιοτιμή συγκλίνει σχεδόν βεβαίως στο 2. Θέλουμε να δούμε με τι πρέπει να πολλαπλασιάσουμε το $\left(\frac{\lambda_{max}^{(N)}}{\sqrt{N}} - 2\right)$ ώστε να προκύπτει οριακά μια μη τετριμμένη συμπεριφορά, να δούμε δηλαδή την τάξη της σύγκλισης. Ακολουθούμε με τα ευριστικά επιχειρήματα της αρχής του προηγουμένου υποκεφαλαίου, καθώς και την υπόδειξη του φράγματος του Ledoux, και θα πολλαπλασιάσουμε με τον όρο $N^{2/3}$. Παρατηρούμε ότι

$$N^{2/3}\left(\frac{\lambda_{max}^{(N)}}{\sqrt{N}} - 2\right) \le t \iff \lambda_{\max}^{(N)} \le 2\sqrt{N} + tN^{-\frac{1}{6}}$$

Θέτουμε, όπως φαίνεται πως θα χρειαστεί,

$$A_N(x,y) = N^{-\frac{1}{6}} K_N(2\sqrt{N} + xN^{-\frac{1}{6}}, 2\sqrt{N} + yN^{-\frac{1}{6}})$$

Ο A_N είναι επίσης πυρήνας.

$$\mathbb{P}\left[N^{2/3}\left(\frac{\lambda_{max}^{(N)}}{\sqrt{N}} - 2\right) \le t\right]$$

$$=1 + \sum_{k=1}^{N} (-1)^k \frac{1}{k!} \int_{2\sqrt{N}+tN^{-\frac{1}{6}}}^{+\infty} \cdots \int_{2\sqrt{N}+tN^{-\frac{1}{6}}}^{+\infty} \det\big(K_N(\lambda_i,\lambda_j)\big)_{i,j=1}^{k} \mathrm{d}\lambda_1 \ldots \mathrm{d}\lambda_k$$

$$=1 + \sum_{k=1}^{N} (-1)^k \frac{1}{k!} \int_{t}^{+\infty} \cdots \int_{t}^{+\infty} \det\Big(N^{-\frac{1}{6}} K_N(2\sqrt{N} + \lambda_i N^{-\frac{1}{6}}, 2\sqrt{N} + \lambda_j N^{-\frac{1}{6}})\Big)_{i,j=1}^{k} \mathrm{d}\lambda_1 \ldots \mathrm{d}\lambda_k$$

$$=1 + \sum_{k=1}^{N} (-1)^k \frac{1}{k!} \int_{t}^{+\infty} \cdots \int_{t}^{+\infty} \det\big(A_N(\lambda_i,\lambda_j)\big)_{i,j=1}^{k} \mathrm{d}\lambda_1 \ldots \mathrm{d}\lambda_k$$

$$:=1 + \Delta_t^{(N)}(A_N)$$

Για να δείξουμε ότι το όριο που μας ενδιαφέρει υπάρχει και να το υπολογίσουμε, χρειαζόμαστε πρώτα το όριο του $A_N(x,y)$. Θέτουμε $\tilde{\Psi}_k(x) = N^{\frac{1}{12}} \Psi_k(2\sqrt{N} + xN^{-\frac{1}{6}})$. Έτσι, $\tilde{\Psi}'_k(x) = N^{-\frac{1}{12}} \Psi'_k(2\sqrt{N} + xN^{-\frac{1}{6}})$.

$$A_N(x,y) = N^{-\frac{1}{6}} K_N(2\sqrt{N} + xN^{-\frac{1}{6}}, 2\sqrt{N} + yN^{-\frac{1}{6}})$$

$$= \frac{\Psi_N(2\sqrt{N} + xN^{-\frac{1}{6}})\Psi'_N(2\sqrt{N} + yN^{-\frac{1}{6}}) - \Psi'_N(2\sqrt{N} + xN^{-\frac{1}{6}})\Psi_N(2\sqrt{N} + yN^{-\frac{1}{6}})}{x - y}$$

$$-\frac{1}{2}N^{-\frac{1}{6}}\Psi_N(2\sqrt{N}+xN^{-\frac{1}{6}})\Psi_N(2\sqrt{N}+yN^{-\frac{1}{6}})$$

$$=\frac{\tilde{\Psi}_N(x)\tilde{\Psi}'_N(y)-\tilde{\Psi}'_N(x)\tilde{\Psi}_N(y)}{x-y}-\frac{1}{2}N^{-\frac{1}{3}}\tilde{\Psi}_N(x)\tilde{\Psi}_N(y)$$

Στην δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την πρόταση 4.3.1..

Επιπλέον, $\frac{1}{2}N^{-\frac{1}{3}}\tilde{\Psi}_N(x)\tilde{\Psi}_N(y)\to 0$, διότι:

$$\Psi_N(x)=(2\pi)^{-\frac{1}{4}}(N!)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{4}x^2}H_N(x)=O\left((N!)^{-\frac{1}{2}}x^N\right)$$

και άρα, με χρήση της φόρμουλας του Stirling,

$$\frac{1}{2}N^{-\frac{1}{3}}\tilde{\Psi}_N(x)\tilde{\Psi}_N(y)=O\left(\frac{1}{N^{\frac{1}{6}}}\frac{N^N}{N!}\right)=O\left(\frac{1}{N^{\frac{1}{6}}}\frac{N^N}{N^{N+\frac{1}{2}}}\right)=O\left(N^{-\frac{2}{3}}\right)$$

Συνεπώς, για να δούμε που συγκλίνει (ομοιόμορφα) η $A_N(x,y)$ όταν $N\to+\infty$, θέλουμε να δούμε που συγκλίνει (ομοιόμορφα) η έκφραση

$$\frac{\tilde{\Psi}_N(x)\tilde{\Psi}'_N(y)-\tilde{\Psi}'_N(x)\tilde{\Psi}_N(y)}{x-y}$$

και άρα ψάχνουμε ιδανικά να βρούμε μια συνάρτηση στην οποία όχι μόνο να συγκλίνει η $\tilde{\Psi}_N$ ομοιόμορφα, αλλά και να συγκλίνει η $\tilde{\Psi}'_N$ ομοιόμορφα στην παράγωγό της!

Ορισμός 4.6.1. Ορίζουμε την συνάρτηση Airy ως εξής:

$$Ai(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_C e^{\frac{z^3}{3}-xz}\mathrm{d}z$$

όπου $C=\left\{te^{i\theta}:t\geq 0,\theta\in\{-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\}\right\}$ με δεξιόστροφο προσανατολισμό. (Βλέπε σχήμα 4.1).

Αν παραγωγίσουμε 2 φορές ως προς x, η παράγωγος περνάει μέσα από το ολοκλήρωμα και μπορούμε να ολοκληρώσουμε κατά παράγοντες για να δούμε ότι ότι η $Ai(x)$ ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση Airy,

$$u''(x)-xu(x)=0$$

Θεωρούμε δεδομένη την ασυμπτωτική συμπεριφορά των Ai, Ai':

Λήμμα 4.6.1.

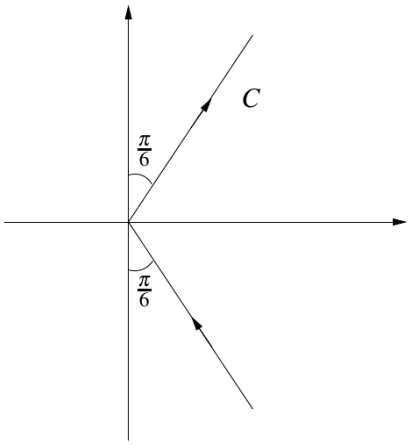
$$\mathrm{Ai}(x)\sim\frac{e^{-2/3x^{3/2}}}{2\sqrt{\pi}x^{1/4}}\qquad\text{καθώς } x\to+\infty$$

$$\mathrm{Ai}'(x)\sim\frac{x^{1/4}e^{-2/3x^{3/2}}}{2\sqrt{\pi}}\qquad\text{καθώς } x\to+\infty$$

Ορισμός 4.6.2. Ορίζουμε τον πυρήνα Airy ως εξής:

$$K_{Airy}(x,y)=A(x,y):=\frac{Ai(x)Ai'(y)-Ai'(x)Ai(y)}{x-y}$$

Σχήμα 4.1: Καμπύλη ολοκλήρωσης για την συνάρτηση Airy



Λήμμα 4.6.2. Για κάθε $x_0 > 0$,

$$\sup_{x,y>x_0} e^{x+y}|K_{Airy}(x,y)| < +\infty$$

Για να συνεχίσουμε, επεκτείνουμε τα Ψ_N αναλυτικά στο $\mathbb{C}$ - άρα και τα $K_N, \bar{\Psi}_N, A_N$.

Λήμμα 4.6.3. Για κάθε $\alpha > 0$, ισχύει:

$$\lim_{N\to+\infty} \sup_{u:|u|<\alpha} \left\{ \left|\tilde{\Psi}_N(u) - Ai(u)\right| \right\} = 0$$

Η απόδειξη είναι κάπως τεχνική και βρίσκεται λίγο πιο κάτω.

Θεώρημα 4.6.1. *Για κάθε $t \in \mathbb{R}$,*

$$F_2(t) := \lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left[N^{2/3}\left(\frac{\lambda_{max}^{(N)}}{\sqrt{N}} - 2\right) \le t \right]$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{N} (-1)^k \frac{1}{k!} \int_t^{+\infty} \int_t^{+\infty} \cdots \int_t^{+\infty} \det\left(K_{Airy}(\lambda_i, \lambda_j)\right)_{i,j=1}^{k} \mathrm{d}\lambda_1 \mathrm{d}\lambda_2 \ldots \mathrm{d}\lambda_k$$

$$:= 1 + \Delta_t(K_{Airy})$$

Απόδειξη θεωρήματος 4.6.1.

Από το λήμμα 4.6.3., λόγω της ομοιόμορφης σύγκλισης σε συμπαγή σύνολα (συμπαγής σύγκλιση) και του ότι η $\bar{\Psi}_N$ είναι ακέραια συνάρτηση, έχουμε και συμπαγή σύγκλιση των παραγώγων, και άρα και κατ επέκτασιν έχουμε σύγκλιση σε φραγμένα σύνολα και του A_N στο K_{Airy}, δηλαδή, για κάθε $\alpha > 0$,

$$\lim_{N\to+\infty} \sup\{|A_N(x,y) - K_{Airy}(x,y)| : x, y \in B(0,\alpha)\} = 0$$

Έτσι, αφού το $[t, t']$ είναι συμπαγές διάστημα, αν πάρουμε τους πυρήνες $\tilde{A}_N = A_N|_{[t,t']}$, $\tilde{K}_{Airy} = K_{Airy}|_{[t,t']}$, έχουμε ότι

$$\lim_{N\to+\infty} \left\|\tilde{A}_N - \tilde{K}_{Airy}\right\| = 0$$

Από το πόρισμα 4.2.1., το πιο πάνω συνεπάγεται ότι

$$\lim_{N\to+\infty} |\Delta(\tilde{A}_N) - \Delta(\tilde{K}_{Airy})| = 0 \iff \Delta(\tilde{A}_N) \xrightarrow{N\to+\infty} \Delta(\tilde{K}_{Airy})$$

Έτσι,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left[N^{2/3}\left(\frac{\lambda_i^{(N)}}{\sqrt{N}} - 2\right) \notin [t, t'], \quad i = 1, \dots, N\right] \\
=&1 + \sum_{k=1}^{N} (-1)^k \frac{1}{k!} \int_t^{t'} \int_t^{t'} \cdots \int_t^{t'} \det\left(A_N(\lambda_i, \lambda_j)\right)_{i,j=1}^k \mathrm{d}\lambda_1 \mathrm{d}\lambda_2 \dots \mathrm{d}\lambda_k \\
=&1 + \Delta(\tilde{A}_N) \\
\xrightarrow{N\to+\infty}&1 + \Delta(\tilde{K}_{Airy}) \\
=&1 + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} \int_t^{t'} \int_t^{t'} \cdots \int_t^{t'} \det\left(K_{Airy}(\lambda_i, \lambda_j)\right)_{i,j=1}^k \mathrm{d}\lambda_1 \mathrm{d}\lambda_2 \dots \mathrm{d}\lambda_k
\end{aligned}$$

Το παραπάνω μπορεί και να γραφτεί ως

$$1 + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} \int_t^{+\infty} \cdots \int_t^{+\infty} \det\left(K_{Airy}(\lambda_i, \lambda_j)\right)_{i,j=1}^k \mathbb{1}_{[t,t']}(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \mathrm{d}\lambda_1 \dots \mathrm{d}\lambda_k$$

Επιπλέον, ξέρουμε ότι αν T πίνακας διάστασης n τότε $\det(T) \leq \frac{1}{n^n}[\mathrm{tr}(A)]^n$. Από αυτό και από το λήμμα 4.6.2., ξέρουμε ότι για κάθε $1 \leq k \leq N$, η $\det\left(K_{Airy}(\lambda_i, \lambda_j)\right)_{i,j=1}^k$ κυριαρχείται από μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης μπορούμε να πάρουμε το όριο καθώς $t' \to +\infty$ εντός του ολοκληρώματος και να καταλήξουμε στο ότι

$$1 + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} \int_t^{t'} \int_t^{t'} \cdots \int_t^{t'} \det\left(K_{Airy}(\lambda_i, \lambda_j)\right)_{i,j=1}^k \mathrm{d}\lambda_1 \mathrm{d}\lambda_2 \dots \mathrm{d}\lambda_k \xrightarrow{t'\to+\infty} 1 + \Delta_t(K_{Airy})$$

Τώρα, για να καταλήξουμε στο ζητούμενο, αρχικά παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[N^{2/3}\left(\frac{\lambda_{max}^{(N)}}{\sqrt{N}} - 2\right) \leq t\right] &= \mathbb{P}\left[N^{2/3}\left(\frac{\lambda_i^{(N)}}{\sqrt{N}} - 2\right) \leq t \quad \forall i = 1, \dots, N\right] \\
&\leq \mathbb{P}\left[N^{2/3}\left(\frac{\lambda_i^{(N)}}{\sqrt{N}} - 2\right) \notin [t, t'] \quad \forall i = 1, \dots, N\right]
\end{aligned}$$

και άρα, αν πάρουμε όριο πρώτα στο $N \to +\infty$ και μετά για $t' \to +\infty$, έχουμε ότι

$$\limsup \mathbb{P}\left[N^{2/3}\left(\frac{\lambda_{max}^{(N)}}{\sqrt{N}} - 2\right) \leq t\right] \leq 1 + \Delta_t(K_{Airy}) \tag{4.6.0.1}$$

Παρατηρούμε επίσης ότι

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[\bigcap_{i=1}^{N}\left\{N^{2/3}\left(\frac{\lambda_i^{(N)}}{\sqrt{N}} - 2\right) \notin [t, t']\right\}\right] &= \mathbb{P}\left[N^{2/3}\left(\frac{\lambda_{max}^{(N)}}{\sqrt{N}} - 2\right) < t\right] + \mathbb{P}\left[\bigcap_{i=1}^{N}\left\{N^{2/3}\left(\frac{\lambda_i^{(N)}}{\sqrt{N}} - 2\right) > t'\right\}\right] \\
&\leq \mathbb{P}\left[N^{2/3}\left(\frac{\lambda_{max}^{(N)}}{\sqrt{N}} - 2\right) < t\right] + \mathbb{P}\left[N^{2/3}\left(\frac{\lambda_{max}^{(N)}}{\sqrt{N}} - 2\right) > t'\right] \\
&\overset{4.5.0.3}{\leq} \mathbb{P}\left[N^{2/3}\left(\frac{\lambda_{max}^{(N)}}{\sqrt{N}} - 2\right) < t\right] + Ce^{-2t'}
\end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$\mathbb{P}\left[N^{2/3}\left(\frac{\lambda_{max}^{(N)}}{\sqrt{N}} - 2\right) < t\right] \geq \mathbb{P}\left[\bigcap_{i=1}^{N}\left\{N^{2/3}\left(\frac{\lambda_i^{(N)}}{\sqrt{N}} - 2\right) \notin [t, t']\right\}\right] - Ce^{-2t'}$$

και αν πάρουμε όριο πρώτα στο $N \to +\infty$ και μετά για $t' \to +\infty$, έχουμε ότι

$$\liminf \mathbb{P}\left[N^{2/3}\left(\frac{\lambda_{max}^{(N)}}{\sqrt{N}} - 2\right) \leq t\right] \geq 1 + \Delta_t(K_{Airy}) \tag{4.6.0.2}$$

Από τις 4.6.0.1/2, καταλήγουμε στο ότι

$$\lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}\left[N^{2/3}\left(\frac{\lambda_{max}^{(N)}}{\sqrt{N}} - 2\right) \leq t\right] = 1 + \Delta_t(K_{Airy})$$

□

Τα πιο πάνω μας λένε ότι όντως οριακά με κατάλληλη κανονικοποίηση η μέγιστη ιδιοτιμή έχει συγκεκριμένη ντετερμινιστική συμπεριφορά. Πιο κάτω, θα βρούμε μια πιο εύχρηστη έκφραση του ορίου που βρήκαμε. Προς το παρόν, ολοκληρώνουμε την πιο πάνω απόδειξη με την απόδειξη ενός λήμματος που χρησιμοποιήθηκε σε αυτήν:

Απόδειξη λήμματος 4.6.2

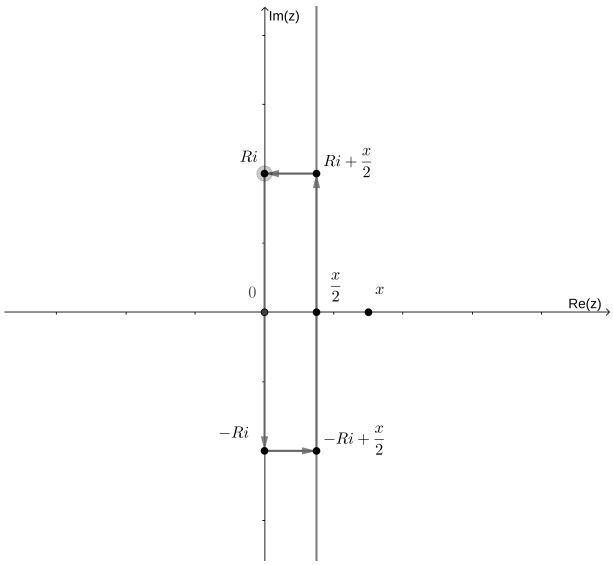
Σύμφωνα με το λήμμα 4.3.4., για πραγματικά x,

$$\Psi_N(x) = \frac{i^N e^{\frac{x^2}{4}}}{(2\pi)^{\frac{3}{4}}\sqrt{N!}} \int_{\mathbb{R}} t^N e^{-\frac{t^2}{2} - itx} \mathrm{d}t$$

Τροποποιούμε ελαφρώς την πιο πάνω έκφραση για να έχουμε ολοκλήρωμα στο μιγαδικό επίπεδο:

$$\Psi_N(x) = \frac{e^{\frac{x^2}{4}}}{i(2\pi)^{\frac{3}{4}}\sqrt{N!}} \underbrace{\int_{-i\infty}^{+i\infty} z^N e^{\frac{z^2}{2}-zx} \mathrm{d}z}_{J_N}$$

Για τον υπολογισμό αυτού του ολοκληρώματος, παρατηρούμε ότι με το θεώρημα Cauchy, λόγω του ότι η ολοκληρωτέα ποσότητα είναι ολόμορφη, αν ολοκληρώσουμε στην καμπύλη C_R την ποσότητα αυτή, όπου C_R είναι η κλειστή καμπύλη που φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα με τον αντίστοιχο προσανατολισμό, το αποτέλεσμα είναι 0.



Το ολοκλήρωμα στα οριζόντια κομμάτια της καμπύλης είναι μηδενικό όταν $R \to +\infty$. Πράγματι, η πάνω καμπύλη είναι τα σημεία $z = t + Ri$: $t \in [0, \frac{x}{2}]$. Έχουμε:

$$\left|\int_0^{\frac{x}{2}} (t+Ri)^N e^{-\frac{R^2}{2}+\frac{t^2}{2}-tx+R(t-x)i} \mathrm{d}t\right| \leq \left|\left(\frac{x}{2}+Ri\right)^N\right| e^{-\frac{R^2}{2}} \int_0^{\frac{x}{2}} e^{\frac{1}{2}(x-t)^2-\frac{1}{2}x^2} \left|e^{R(t-x)i}\right| \mathrm{d}t$$

$$\leq \left|\left(\frac{x}{2}+Ri\right)^N\right| e^{-\frac{R^2}{2}} \int_0^{\frac{x}{2}} \underbrace{\left|e^{R(t-x)i}\right|}_{=1} \mathrm{d}t \xrightarrow{R\to+\infty} 0$$

Με πανομοιότυπους υπολογισμούς βλέπουμε ότι το ολοκλήρωμα και στο κάτω οριζόντιο κομμάτι είναι μηδενικό. Έτσι, μένει ότι το ολοκλήρωμα J_N είναι ίδιο με το ολοκλήρωμα πάνω στην καμπύλη στα δεξιά, δηλαδή την $\frac{x}{2}(1+it)$: $t \in \mathbb{R}$, και άρα:

$$J_N = e^{\frac{-3x^2}{8}} \left(\frac{x}{2}\right)^{N+1} \int_{-i\infty}^{+i\infty} (1+z)^N e^{\left(\frac{x}{2}\right)^2\left(\frac{z^2}{2}-z\right)} \mathrm{d}z$$

δηλαδή,

$$\Psi_N(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{8}}}{i(2\pi)^{\frac{3}{4}}\sqrt{N!}}\left(\frac{x}{2}\right)^{N+1}\int_{-i\infty}^{+i\infty}(1+z)^N\, e^{\left(\frac{x}{2}\right)^2\left(\frac{z^2}{2}-z\right)}\mathrm{d}z$$

Η πιο πάνω έκφραση ισχύει και για μιγαδικά x, αφού επεκτείνουμε αναλυτικά τα Ψ_N, από το θεώρημα ταυτοτισμού.

Έχουμε ήδη θέσει $\tilde{\Psi}_k(u) = N^{\frac{1}{12}}\Psi_k(2\sqrt{N}+uN^{-\frac{1}{6}})$. Έτσι, αν $x = 2\sqrt{N}+uN^{-\frac{1}{6}}$,

$$\bar{\Psi}_N(u) = \underbrace{\frac{(2\pi)^{\frac{1}{4}}N^{\frac{1}{12}}e^{-\frac{x^2}{8}}}{\sqrt{N!}}\left(\frac{x}{2}\right)^{N+\frac{1}{3}}}_{a_N(u)}\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{3}}(1+z)^N\, e^{\left(\frac{x}{2}\right)^2\left(\frac{z^2}{2}-z\right)}\mathrm{d}z}_{I_N(u)}$$

Μπορούμε να δείξουμε ότι $a_N(u) \xrightarrow{N\to+\infty} 1$ ομοιόμορφα για $u : |u| < \alpha$. Πράγματι, δεδομένης της φόρμουλας του Stirling,

$$a_N(u) = \frac{(2\pi)^{\frac{1}{4}}N^{\frac{1}{12}}e^{-\frac{x^2}{8}}}{\sqrt{N!}}\left(\frac{x}{2}\right)^{N+\frac{1}{3}} \sim N^{-\frac{N}{2}-\frac{1}{6}}e^{-\frac{x^2}{8}+\frac{N}{2}}\left(\frac{x}{2}\right)^{N+\frac{1}{3}}$$

Αν log ο μιγαδικός λογάριθμος ορισμένος στον κύριο κλάδο του $(\mathbb{C}\setminus\{\mathbb{R}_{\leq 0}\})$, με $\log(z) = \ln(|z|) + i\arg z$, τότε αρκεί ισοδύναμα το εξής:

$$\begin{aligned}\log(a_N(u)) &= -\frac{1}{2}\left(N+\frac{1}{3}\right)\log(N) - \frac{x^2}{8} + \frac{N}{2} + \left(N+\frac{1}{3}\right)\log\left(\frac{x}{2}\right)\\ &= -\frac{1}{2}\left(N+\frac{1}{3}\right)\log(N) - \frac{uN^{\frac{1}{3}}}{2} - \frac{u^2}{8N^{\frac{1}{3}}} + \left(N+\frac{1}{3}\right)\log\left(1+\frac{u}{2n^{\frac{2}{3}}}\right) + \frac{1}{2}\left(N+\frac{1}{3}\right)\log(N)\\ &\xrightarrow{N\to+\infty} 0\end{aligned}$$

όπου φυσικά, όπως έχουμε υποθέσει, $|u| < \alpha$. Αυτό σημαίνει πως για να ισχύει ο ισχυρισμός που διατυπώνουμε στο λήμμα 4.6.2., αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{N\to+\infty}\sup_{u:|u|<\alpha}\left\{\left|I_N(u) - Ai(u)\right|\right\} = 0$$

Για να δείξουμε το πιο πάνω, θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο steepest descent. Θα τροποποιήσουμε το ολοκλήρωμα $I_N(u)$ ώστε να φτάσει στην μορφή

$$\int_C g(\lambda, z)e^{\lambda h(z)}\mathrm{d}z$$

με h, g ακέραιες μιγαδικές συναρτήσεις, λ μια ποσότητα που να μεγαλώνει και C κατάλληλα επιλεγμένη καμπύλη στο μιγαδικό επίπεδο ώστε η $h(z)$ να είναι κατά μήκος της μια πραγματική συνάρτηση, και το $g(\lambda, z)$ να ταλαντώνεται 'αργά' γύρω από τα κρίσιμα σημεία της h. Θέτουμε $\omega = \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \sim N^{\frac{1}{3}}$. Έτσι,

$$I_N(u) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\omega e^{N\log(1+z)+\omega^3\left(\frac{z^2}{2}-z\right)}\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\omega e^{-\left(\omega^2-\frac{N}{\omega}\right)\omega\log(1+z)+\omega^3\left(\log(1+z)+\frac{z^2}{2}-z\right)}\mathrm{d}z$$

Παρατηρούμε με μερικές πράξεις ότι $u' := \omega^2 - \frac{N}{\omega} \xrightarrow{N\to+\infty} u$ ομοιόμορφα για $|u| < r$. Θέτουμε τώρα

$$h(z) = \log(1+z) + \frac{z^2}{2} - z$$

Ο όρος που μας ενδιαφέρει οριακά είναι της τάξης $e^{Nh(z)}$. Σκοπός μας είναι να αλλάξουμε την καμπύλη ολοκλήρωσης με χρήση και του θεωρήματος Cauchy, σε κάποια καμπύλη C' πάνω στην οποία η $h(z)$ θα παίρνει πραγματικές τιμές, ώστε να μετατρέψουμε το μιγαδικό ολοκλήρωμα σε πραγματικό. Θα θέλαμε ιδανικά η C' να περνάει ακριβώς μια φορά από το σημείο μεγίστου της h. Βλέπουμε από την μορφή της h ότι για φανταστικά z η μέγιστη τιμή του $\mathrm{Re}(h(z))$ λαμβάνεται στο $z = 0$, και άρα θα αναζητήσουμε καμπύλη που θα περνάει από το $z = 0$, και σε όλα τα υπόλοιπα σημεία της η h θα λαμβάνει αρνητική τιμή.

Η κατασκευή της καμπύλης έχει ως εξής. Θεωρούμε την σφήνα

$$S = \left\{ re^{i\theta} \in C : r \geq 0, \theta \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right] \right\}$$

και για $\rho > 0$ παίρνουμε το σχήμα που προκύπτει από την τομή της S με την μπάλα ακτίνας ρ και κέντρο 0, την $B(0,\rho)$, δηλαδή το $S_\rho = S \cap B(0,\rho)$. Το ∂S_ρ είναι απλή κλειστή καμπύλη, το ίδιο και η $h(\partial S_\rho)$ (αναλυτική h). Είναι εύκολο να καταλάβουμε (και να το οπτικοποιήσουμε μέσω του πιο κάτω σχήματος) ότι για κάθε $t > 0$ υπάρχει ένα αρκετά μεγάλο ρ ώστε η $h(\partial S_\rho)$ να περικλείει το $-t$, φυσικά ακριβώς μια φορά. Από την αρχή του ορίσματος του Cauchy, ο αριθμός των περιελήξεων με θετική φορά της $h(\partial S_\rho)$ γύρω από το $-t$ είναι ακριβώς η διαφορά του πλήθους των πόλων από το πλήθος των ριζών της συνάρτησης $k : S_\rho \to \mathbb{R}$, με $k(z) = h(z) + t$. Η h είναι ακέραια, και άρα φυσικά η k είναι ακέραια, και άρα δεν έχει πόλους. Αφού η $h(\partial S_\rho)$ είναι απλή και κλειστή, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μοναδική ρίζα της k στο S_ρ, ας την ονομάσουμε $\gamma(t)$. Φυσικά, $\gamma(0) = 0$, καθώς το $z = 0$ είναι ρίζα της $h(t)$ και αυτή είναι η μοναδική ρίζα της γ στο πεδίο ορισμού της.

Ας δούμε μερικές ιδιότητες της συνάρτησης $\gamma : [0,+\infty) \to \mathbb{C}$.

Λήμμα 4.6.4. (i) $\lim_{t\to+\infty} |\gamma(t)| = +\infty$
(ii)

$$|\gamma(t)| \sim (2t)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{όταν } t \to +\infty \tag{4.6.0.3}$$

$$|\gamma'(t)| \sim (2t)^{-\frac{1}{2}} \qquad \text{όταν } t \to +\infty \tag{4.6.0.4}$$

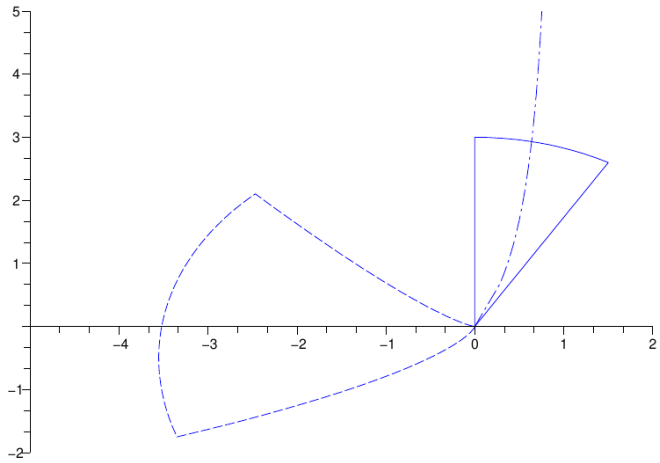
$$\gamma(t) \sim e^{\frac{\pi i}{3}} (3t)^{\frac{1}{3}} \qquad \text{όταν } t \to 0 \tag{4.6.0.5}$$

$$\gamma'(t) \sim e^{\frac{\pi i}{3}} (3t)^{-\frac{2}{3}} \qquad \text{όταν } t \to 0 \tag{4.6.0.6}$$

(iii) Η γ είναι συνεχής για $t \geq 0$ και αναλυτική για $t > 0$.

Απόδειξη λήμματος

Σχήμα 4.2: ∂S_3 η συνεχής γραμμή, $h(S_3)$ η διακεκομμένη (γραμμές), $\gamma(t)$ η διακεκομμένη(γραμμές και τελείες).



(i) Προκύπτει άμεσα από το (ii).

(ii) Αρχικά, ισχύει το εξής: Για $|z| > 1$

$$\frac{|\log(1+z)|}{|z^2|}\,\frac{\sqrt{(|z+1|)^2+\pi^2}}{|z|^2} \xrightarrow{|z|\to+\infty} 0$$

Για το πρώτο, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι

$$\lim_{|z|\to+\infty}\frac{h(z)}{z^2} = \frac{1}{2} < +\infty$$

Δηλαδή, όταν μεγαλώνει το μέτρο του z, η h συμπεριφέρεται σαν την $\frac{1}{2}z^2$. Έτσι, $\gamma(t) = h^{-1}(-t) \sim (2t)^{\frac{1}{2}}$, καθώς αυτή είναι η αντίστροφη της $\frac{1}{2}z^2$.

Το δεύτερο βγαίνει άμεσα από το πρώτο μέσω παραγώγισης της γ ως προς t.

Στην περίπτωση του τρίτου, δεδομένου ότι για $|z| < 1, \log(1+z) = \sum_{k\geq 1}(-1)^{k+1}\frac{z^k}{k}$, με ένα απλό επιχείρημα de L'Hôpital έχουμε ότι

$$\frac{3h(z)}{z^3} \xrightarrow{z\to 0} 1$$

ή αλλιώς, $h(z) \sim \dfrac{z^3}{3}$ όταν $z \to 0$. Έτσι, $\gamma(t) = h^{-1}(-t) \sim (-3t)^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{\pi i}{3}}(3t)^{\frac{1}{3}}$. Για το τέταρτο, απλώς παραγωγίζουμε την τελευταία έκφραση ως προς t.

(iii) Αν $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\leq 0}$ με $g(t) = -t$, τότε $\gamma = h^{-1}\big|_{\mathbb{R}_{\leq 0}} \circ g$.

Η αναλυτικότητα προκύπτει άμεσα από το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης. Για τη συνέχεια στο 0, γνωρίζουμε από το (ii) ότι $\lim_{t\to 0}\gamma(t) = 0 = \gamma(0)$.

□

Αφού η h είναι ακέραια συνάρτηση και έχει πραγματικές τιμές για πραγματικά θετικά z, $h(\overline{z}) = \overline{h(z)}\ \ \forall z \in \mathbb{C}$, και άρα $h(\overline{(\gamma(t))}) = \overline{h(\gamma(t))} = \overline{-t} = -t$. Με βάση τα πιο πάνω, μπορούμε να καταλάβουμε ότι πάνω στην καμπύλη $\gamma \cup \bar{\gamma}$ η h είναι πραγματική. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Cauchy, μπορούμε για άλλη μια φορά να αλλάξουμε την καμπύλη ολοκλήρωσης από $-i\infty \to +i\infty$ στην $\gamma \cup \bar{\gamma}$ με κατεύθυνση "προς τα πάνω", (βλέπε σχήμα 4.2) και άρα

$$\begin{aligned} I_N(u) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty} \omega e^{-u'\omega\log(1+z)+\omega^3 h(z)}\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{+\infty} \omega e^{-\omega^3 t}\left[(1+\gamma(t))^{-u'\omega}\,\gamma'(t) - (1+\bar{\gamma}(t))^{-u'\omega}\,\bar{\gamma}'(t)\right]\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Μπορούμε τώρα να αντικαταστήσουμε το t με $\frac{t^3}{3N}$ για να έχουμε το αποτέλεσμα:

$$I_N(u) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\left[\tilde{A}_N(t,u) - \tilde{B}_N(t,u)\right]\mathrm{d}z$$

όπου

$$\tilde{A}_N(t,u) = \omega e^{-\frac{\omega^3 t^3}{3N}}\left(1+\gamma\left(\frac{t^3}{3N}\right)\right)^{-u'\omega}\gamma'\left(\frac{t^3}{3N}\right)\frac{t^2}{N}$$

$$\tilde{B}_N(t,u) = \omega e^{-\frac{\omega^3 t^3}{3N}}\left(1+\bar{\gamma}\left(\frac{t^3}{3N}\right)\right)^{-u'\omega}\bar{\gamma}'\left(\frac{t^3}{3N}\right)\frac{t^2}{N}$$

Σειρά έχει τώρα να δούμε που συγκλίνουν αυτές οι $\tilde{A}_N$, $\tilde{B}_N$. Δεδομένων των σχέσεων στο λήμμα 4.6.3., μπορούμε να δείξουμε ότι για $t_0 < +\infty$,

$$\lim_{N\to+\infty}\sup_{0\le t\le t_0}\sup_{|u|<\alpha}\left|\frac{\tilde{A}_N(t,u)}{A(t,u)} - 1\right| = 0 \tag{4.6.0.7}$$

$$\lim_{N\to+\infty}\sup_{0\le t\le t_0}\sup_{|u|<\alpha}\left|\frac{\tilde{B}_N(t,u)}{B(t,u)} - 1\right| = 0 \tag{4.6.0.8}$$

όπου

$$\begin{aligned} A(t,u) &= e^{-\frac{t^3}{3} - e^{\frac{\pi i}{3}}tu + \frac{\pi i}{3}} \\ B(t,u) &= e^{-\frac{t^3}{3} - e^{\frac{\pi i}{3}}tu - \frac{\pi i}{3}} \end{aligned} \tag{4.6.0.9}$$

Η σύγκλιση αυτή προκύπτει από τα πιο κάτω, για τα οποία όπως είπαμε χρησιμοποιούμε το λήμμα λήμμα 4.6.3. :

- $\lim_{N\to+\infty} \frac{\omega}{N^{\frac{1}{3}}} = 1 \Rightarrow \lim_{N\to+\infty} \frac{e^{-\frac{\omega^3 t^3}{3N}}}{e^{-\frac{t^3}{3}}} = 1$
- $u' \xrightarrow{\text{ομοιόμ.}} u \Rightarrow \lim_{N\to+\infty} \sup_{u:|u|<\alpha} \left| \left(1+\gamma\left(\frac{t^3}{3N}\right)\right)^{-u'\omega} / \left(1+\frac{te^{\frac{\pi i}{3}}}{N^{\frac{1}{3}}}\right)^{-u\omega} - 1 \right| =$ 0 και $\left(1+\frac{te^{\frac{\pi i}{3}}}{N^{\frac{1}{3}}}\right)^{-u\omega} \xrightarrow{\text{ομοιομ.}} e^{e^{\frac{\pi i}{3}} tu}$
- $\omega\gamma'\left(\frac{t^3}{3N}\right)\frac{t^2}{N} \sim N^{\frac{1}{3}} e^{\frac{\pi i}{3}} \frac{t^{-2}}{N^{-\frac{2}{3}}} \frac{t^2}{N} = e^{\frac{\pi i}{3}}$

Υπενθυμίζουμε ότι

$$Ai(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C e^{\frac{z^3}{3}-xz}\mathrm{d}z$$

όπου $C = \left\{te^{i\theta} : t \geq 0, \theta \in \{-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\}\right\}$ με δεξιόστροφο προσανατολισμό. Δηλαδή,

$$\begin{aligned} Ai(u) &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{+\infty} e^{\frac{t^3 e^{\pi i}}{3}} e^{-ute^{\frac{\pi i}{3}}} e^{\frac{\pi i}{3}}\mathrm{d}t - \frac{1}{2\pi i}\int_0^{+\infty} e^{\frac{t^3 e^{-\pi i}}{3}} e^{-ute^{-\frac{\pi i}{3}}} e^{-\frac{\pi i}{3}}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{+\infty} [A(t,u) - B(t,u)]\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Ισχυριζόμαστε τώρα ότι το $\tilde{A}_N(t,u)$ είναι μια ποσότητα φραγμένη για κάθε u από κάποιο t_0 και μετά από μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση ανεξάρτητη του N.

Πράγματι, όπως έχουμε ήδη πει, $\omega \sim N^{\frac{1}{3}}$. Έτσι, υπάρχει $N_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\forall N \geq N_0$, $\frac{1}{2}N^{\frac{1}{3}} \leq |\omega| \leq 2N^{\frac{1}{3}}$. Άρα, και $e^{-\omega^3 t} \leq e^{-\frac{1}{8}Nt}$.

Επιπλέον, αφού $u' \to u$, υπάρχει ένα N_1 τέτοιο ώστε $\forall N > N_1, c_1 \leq |u'| \leq c_2$ για $c_1 < |u| < c_2$.

Επίσης, αφού $\gamma(t) \xrightarrow{t\to+\infty} +\infty$ υπάρχει ένα $t_1 > 0$ τ.ω. $\forall t > t_1, |1+\gamma(t)| \geq |\gamma(t)| \geq e^{-t^{1/3}}$, και άρα $\left|(1+\gamma(t))^{-u'\omega}\right| \leq \left|e^{t^{1/3}u'\omega}\right| \leq e^{t^{1/3}c_2 2N^{\frac{1}{3}}} = e^{c_5(tN)^{\frac{1}{3}}}$.

Τέλος, για μεγάλα t, η παράγωγος συμπεριφέρεται όπως η $(2t)^{-1/2}$, άρα $|\gamma'(t)| < t^{-1/2} \leq N^{1/3}t^{-1/3}$ από κάποιο t και μετά. Άρα, από κάποιο t και μετά, και από κάποιο N και μετά,

$$|\omega e^{-\omega^3 t}(1+\gamma(t))^{-u'\omega}\gamma'(t)| \leq cN^{\frac{1}{3}}e^{-\frac{1}{8}Nt+c_5(tN)^{1/3}}N^{\frac{1}{3}}t^{-\frac{1}{3}}$$

Άρα, αν βάλουμε όπου t το $\frac{t^3}{3N}$,

$$|\tilde{A}_N(t,u)| \leq cte^{-\frac{1}{24}t^3-c_6 t} \tag{4.6.0.10}$$

Κατά τον ίδιο τρόπο έχουμε, το ίδιο αποτέλεσμα και για την $\tilde{B}_N(t,u)$.

Επιλέγουμε $t_0 \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύουν τα πιο πάνω φράγματα από κάποιο N και πάνω.

$$\lim_{N\to+\infty} \sup_{|u|<\alpha} \left\{ \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{t_0} [(A_N(t,u) - B_N(t,u)) - (A(t,u) - B(t,u))] \, \mathrm{d}t \right| \right\}$$

$$\leq \lim_{N\to+\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{t_0} \sup_{|u|<\alpha} \left| (A_N(t,u) - B_N(t,u)) - (A(t,u) - B(t,u)) \right| \mathrm{d}t \right\}$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \lim_{N\to+\infty} t_0 \sup_{0<t<t_0} \sup_{|u|<\alpha} \left| (A_N(t,u) - B_N(t,u)) - (A(t,u) - B(t,u)) \right|$$

$$=0$$

Επιπλέον,

$$\lim_{N\to+\infty} \sup_{|u|<\alpha} \left\{ \left| \frac{1}{2\pi} \int_{t_0}^{+\infty} [(A_N(t,u) - B_N(t,u)) - (A(t,u) - B(t,u))] \, \mathrm{d}t \right| \right\} = 0$$

Το πιο πάνω οφείλεται στη σημειακή σύγκλιση των A_N, B_N στα A, B αντίστοιχα και στο θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης που μπορεί να εφαρμοσθεί λόγω των 4.6.0.9, 4.6.0.10

Με συνδυασμό των δύο πιο πάνω σχέσεων, καταλήγουμε στο ζητούμενο, δηλαδή:

$$\lim_{N\to+\infty} \sup_{u:|u|<\alpha} \left\{ \left| I_N(u) - Ai(u) \right| \right\} = 0$$

□

4.7 Σύνδεση F_2 με εξίσωση Painlevé II

Η ύπαρξη του πιο πάνω ορίου δεν εγγυάται ότι αυτό είναι κατανομή. Η στρατηγική που θα ακολουθήσουμε για να δείξουμε πως είναι, είναι να φέρουμε το όριο σε μια πιο κατάλληλη μορφή, ώστε να μπορέσουμε να το μελετήσουμε. Ένας καλός τρόπος για να το κάνουμε αυτό είναι να το συνδέσουμε με μια διαφορική εξίσωση η λύση της οποίας να υπάρχει και να είναι μοναδική, και να μελετήσουμε αυτή την λύση.

Θα χρησιμοποιήσουμε το υπόβαθρο που χτίσαμε στο κομμάτι των πυρήνων και των οριζουσών Fredholm. Το όριό μας είναι ίσο με $1 + \Delta_t(K_{Airy})$. Ορίζουμε το μέτρο ν του οποίου η πυκνότητα είναι $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\nu(x) = \mathbb{1}_{(t,+\infty)}(x)$. Συμβολίζουμε

$$A\begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_k \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_k \end{pmatrix} := \det\left(K_{Airy}(\lambda_i, \lambda_j)\right)_{i,j=1}^k$$

Έτσι, με την ορίζουσα Fredholm του K_{Airy} να δίνεται ως προς το μέτρο ν,

$$F_2(t) = 1 + \Delta_t(K_{Airy}) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} \int_t^{+\infty} \int_t^{+\infty} \cdots \int_t^{+\infty} A\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_k \\ x_1 & \dots & x_k \end{pmatrix} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \dots \mathrm{d}x_k$$

Από την σχέση 4.2.0.1, αφού $\|v\|_1 \xrightarrow{t\to+\infty} 0$, και από το λήμμα 4.6.2. σε συνδυασμό με την κυριαρχημένη σύγκλιση, $F_2(t) \xrightarrow{t\to+\infty} 1$. Μένει να δείξουμε ότι $F_2(t) \xrightarrow{t\to-\infty} 0$ και ότι η $F_2(t)$ είναι αύξουσα.

Στη συνέχεια, θέτουμε

$$H(x,y,t) = K_{Airy}(x,y) + \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k \frac{1}{k!}\int_t^{+\infty}\int_t^{+\infty}\cdots\int_t^{+\infty} A\begin{pmatrix} x & x_1 & \dots & x_k \\ y & x_1 & \dots & x_k \end{pmatrix} \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\dots\mathrm{d}x_k$$

όπου ο δεύτερος όρος είναι ο Fredholm συζυγής του K_{Airy} για το πιο πάνω μέτρο. Με όμοια επιχειρήματα, για κάθε $t_0 \in \mathbb{R}$,

$$\sup_{t\geq t_0}\sup_{x,y\in\mathbb{R}} e^{x+y}|H(x,y,t)| < +\infty \tag{4.7.0.1}$$

και

$$\lim_{t\to+\infty}\sup_{x,y\in\mathbb{R}} e^{x+y}|H(x,y,t) - K_{Airy}(x,y)| = 0 \tag{4.7.0.2}$$

Σημειώνουμε ότι η $1+\Delta_t(K_{Airy})$ μπορεί να επεκταθεί σε μια όχι ταυτοτικά μηδενική αναλυτική συνάρτηση του t για κάποιο ανοικτό χωρίο $\Omega \subset \mathbb{C}$, και άρα υποχρεωτικά από το θεώρημα ταυτοτισμού πρέπει να μηδενίζεται μόνο σε μεμονωμένα σημεία του $\mathbb{R}$ (αν υπήρχε σημείο συσσώρευσης θα έπρεπε να ήταν ταυτοτικά μηδενική η επέκταση). Έτσι, κατ' αναλογία με τον επιλύοντα πυρήνα μπορούμε να ορίσουμε σχεδόν για όλα τα $t \in \mathbb{R}$:

$$R(x,y,t) = \frac{H(x,y,t)}{1+\Delta_t(K_{Airy})}$$

Πρόταση 4.7.1.

$$\begin{aligned}\frac{\partial(1+\Delta_t(K_{Airy}))}{\partial t} &= \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\frac{1}{k!}\frac{\partial}{\partial t}\int_t^{+\infty}\int_t^{+\infty}\cdots\int_t^{+\infty} A\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_k \\ x_1 & \dots & x_k \end{pmatrix}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\dots\mathrm{d}x_k \\ &= H(t,t,t)\end{aligned}$$

Απόδειξη

Ισοδύναμα, μπορούμε να δείξουμε ότι για $k \geq 1$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underbrace{\int_t^{+\infty}\cdots\int_t^{+\infty}}_{\#k} A\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_k \\ x_1 & \dots & x_k \end{pmatrix}\prod_{i=1}^k \mathrm{d}x_i = -k\underbrace{\int_t^{+\infty}\cdots\int_t^{+\infty}}_{\#k-1} A\begin{pmatrix} t & x_2 & \dots & x_k \\ t & x_2 & \dots & x_k \end{pmatrix}\prod_{i=2}^k \mathrm{d}x_i$$

Για $k=1$, από το θεμελιώδες θεώρημα διαφορικού λογισμού, και λόγω του ότι όταν $\lim_{x\to+\infty} K_{Airy}(x,x) = 0$, έχουμε ότι

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_t^{+\infty} K_{Airy}(x,x)\mathrm{d}x = -K_{Airy}(t,t)$$

Για $k > 1$, ορίζουμε

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k) = A\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_k \\ x_1 & \dots & x_k \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} K(x_1,x_1) & K(x_1,x_2) & \dots & K(x_1,x_k) \\ K(x_2,x_1) & K(x_2,x_2) & \dots & K(x_2,x_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K(x_k,x_1) & K(x_2,x_2) & \dots & K(x_k,x_k) \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $i \neq j$ μπορούμε να εναλλάξουμε τα x_i, x_j, δηλαδή

$$f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots x_k) = f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots x_k)$$

Αυτό είναι επειδή μπορούμε να εναλλάξουμε τις γραμμές αλλά και τις στήλες i, j, και αφού η ορίζουσα είναι εναλλάσσουσα: αν αλλάξουν r το πλήθος γραμμές ή/και στήλες, τότε έχουμε το ίδιο αποτέλεσμα επί $(-1)^r$.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_t^{+\infty} \underbrace{\int_t^{+\infty} \cdots \int_t^{+\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_k)\mathrm{d}x_k \dots \mathrm{d}x_2}_{f_1(x_1,t)} \mathrm{d}x_1$$

$$= -f_1(t,t) + \int_t^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t}\int_t^{+\infty} \underbrace{\int_t^{+\infty} \cdots \int_t^{+\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_k)\mathrm{d}x_k \dots \mathrm{d}x_3}_{f_2(x_1,x_2,t)} \mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_1$$

$$= -\int_t^{+\infty} \cdots \int_t^{+\infty} f(t, x_2, \dots, x_k)\mathrm{d}x_k \dots \mathrm{d}x_2$$
$$+ \int_t^{+\infty} \left[-f_2(x_1,t,t) + \int_t^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t}\int_t^{+\infty} \cdots \int_t^{+\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_k)\mathrm{d}x_k \dots \mathrm{d}x_3\right] \mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_1$$

$$= -\int_t^{+\infty} \cdots \int_t^{+\infty} f(t, x_2, \dots, x_k)\mathrm{d}x_k \dots \mathrm{d}x_2 - \int_t^{+\infty} \cdots \int_t^{+\infty} f(x_1, t, \dots, x_k)\mathrm{d}x_k \dots \mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_1$$
$$+ \int_t^{+\infty}\int_t^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t}\int_t^{+\infty} \cdots \int_t^{+\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_k)\mathrm{d}x_k \dots \mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_1$$

$$= \dots$$

$$= -\sum_{i=1}^{k} \int_{[t,+\infty)^{k-1}} f(x_1, x_2, \dots, x_k)\mathbb{1}_{\{x_i = t\}} \prod_{j\in[k]\setminus\{i\}} \mathrm{d}x_j$$

$$= -k\int_t^{+\infty} \cdots \int_t^{+\infty} f(t, x_2, \dots, x_k)\mathrm{d}x_k \dots \mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_2$$

όπου η τελευταία ισότητα ισχύει από την πιο πάνω παρατήρηση. □

Από αυτό που δείξαμε μόλις, προκύπτει:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\log\big(1 + \Delta_t(K_{Airy})\big) = R(t,t,t) \tag{4.7.0.3}$$

$$\frac{\partial R(x,y,t)}{\partial t} = -R(x,t,t)R(t,y,t) \tag{4.7.0.4}$$

το δεύτερο με αντίστοιχους υπολογισμούς.

Ορίζουμε τώρα τα εξής:

$$\begin{aligned}
Q(x,t) &= Ai(x) + \int_t^{+\infty} R(x,y,t)Ai(y)\mathrm{d}y \\
P(x,t) &= Ai'(x) + \int_t^{+\infty} R(x,y,t)Ai'(y)\mathrm{d}y \\
q(t) &= Q(t,t) \\
p(t) &= P(t,t) \\
u(t) &= \int_t^{+\infty} Q(x,t)Ai(x)\mathrm{d}x \\
v(t) &= \int_t^{+\infty} Q(x,t)Ai'(x)\mathrm{d}x = \int_t^{+\infty} P(x,t)Ai(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει εύκολα από την συμμετρία $R(x,y,t) = R(y,x,t)$, αν απλώς αντικαταστήσουμε τα P, Q από τους ορισμούς τους. Παρατηρούμε ότι λόγω της 4.7.0.1, αλλά και δεδομένου ότι $\lim_{t\to+\infty} \mathrm{Ai}(t)$, όπως εξάλλου φαίνεται από το λήμμα 4.6.1.,

$$q(t) - Ai(t) = \int_t^{+\infty} R(t,y,t)Ai(y)\mathrm{d}y \leq C\int_t^{+\infty} e^{-t-y}Ai(y)\mathrm{d}y \leq e^{-2t}\int_t^{+\infty} Ai(y)\mathrm{d}y \xrightarrow{t\to+\infty} 0$$

και συνεπώς

$$\frac{q(t)}{Ai(t)} \xrightarrow{t\to+\infty} 1$$

Ομοίως,

$$q(t), p(t), u(t), v(t) \xrightarrow{t\to+\infty} 0$$

Παρατηρούμε επίσης ότι

$$R(x,y,t) = \frac{Q(x,t)P(y,t) - Q(y,t)P(x,t)}{x-y}$$

και άρα, με τον κανόνα De L'Hôpital ισχύει:

$$R(x,x,t) = \frac{\partial}{\partial x}Q(x,t)P(x,t) - Q(x,t)\frac{\partial}{\partial x}P(x,t)$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε τα εξής:

$$\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}Q(t,t)}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)Q(x,t)\Big|_{x=t}$$

$$\frac{\mathrm{d}p(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}P(t,t)}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) P(x,t)\bigg|_{x=t}$$

Εύκολα από τον ορισμό τους, τις σχέσις 4.7.0.3, 4.7.0.4 και τον κανόνα ολοκλήρωσης του Leibniz προκύπτει ότι

$$\frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} = -R(x,t,t)Q(t,t) = -R(t,x,t)Q(t,t)$$

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = -R(x,t,t)P(t,t) = -R(t,x,t)P(t,t)$$

Τώρα χρειάζεται να βρούμε τα $\frac{\partial}{\partial x}Q(x,t)$, $\frac{\partial}{\partial x}P(x,t)$. Για να προχωρήσουμε εισάγουμε τον συμβολισμό

$$f'(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right) f(x,y)$$

και

$$(F \star' G) = \int F(x,z)G(z,y)\mathrm{d}\nu' = F(x,t)G(t,y)$$

όπου η πιο πάνω έκφραση μπορεί να θεωρηθεί ο ορισμός του μέτρου ν'. Με τον πιο πάνω συμβολισμό,

$$K'_{Airy}(x,y) = -Ai(x)Ai(y) \tag{4.7.0.5}$$

κάτι που προκύπτει άμεσα από την διαφορική εξίσωση Airy: $y'' - xy = 0$. Υπενθυμίζουμε τη θεμελιώδη ταυτότητα

$$R - K_{Airy} = R \star K_{Airy} = K_{Airy} \star R$$

Αν παραγωγίσουμε τα δύο μέλη και χρησιμοποιήσουμε κατά παράγοντες ολοκλήρωση, έχουμε:

$$R' - K'_{Airy} = R' \star K_{Airy} + R \star' K_{Airy} + R \star K'_{Airy} \tag{4.7.0.6}$$

Εκτελούμε την πράξη $\star R$ στα δύο μέλη (η οποία έχει την επιμεριστική και την προσεταιριστική ιδιότητα), αντικαθιστούμε τους όρους $R \star K_{Airy}$ και $K_{Airy} \star R$ με $R - K_{Airy}$ λόγω της θεμελιώδους ταυτότητας, και καταλήγουμε στην σχέση:

$$R' \star R - K'_{Airy} \star R = R' \star (R - K_{Airy}) + R \star' (R - K_{Airy}) + R \star K'_{Airy} \star R \tag{4.7.0.7}$$

Αθροίζουμε κατά μέλη τις δύο πιο πάνω σχέσεις φτάνουμε στο εξής:

$$R' = R \star' R + K'_{Airy} + R \star K'_{Airy} + K'_{Airy} \star R + R \star K'_{Airy} \star R \tag{4.7.0.8}$$

Χρησιμοποιούμε τώρα την 4.7.0.5 και με αρκετές πράξεις η πιο πάνω έκφραση μετατρέπεται στην πιο κάτω:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right) R(x,y,t) = R(x,t,t)R(t,y,t) - Q(x,t)Q(y,t) \tag{4.7.0.9}$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την πιο πάνω σχέση για να υπολογίσουμε τα $\frac{\partial Q(x,t)}{\partial x}$ και $\frac{\partial P(x,t)}{\partial x}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} =& Ai'(x) + \int_t^{+\infty} \frac{\partial R(x,y,t)}{\partial x} Ai(y)\mathrm{d}y \\
=& Ai'(x) - \int_t^{+\infty} \frac{\partial R(x,y,t)}{\partial y} Ai(y)\mathrm{d}y + R(x,t,t)\int_t^{+\infty} R(t,y,t)Ai(y)\mathrm{d}y \\
& - Q(x,t)\underbrace{\int_t^{+\infty} Q(y,t)Ai(y)\mathrm{d}y}_{u(t)} \\
=& \underbrace{Ai'(x) + \int_t^{+\infty} R(x,y,t)Ai'(y)\mathrm{d}y}_{P(x,t)} + R(x,t,t)Ai(t) \\
& + R(x,t,t)\int_t^{+\infty} R(t,y,t)Ai(y)\mathrm{d}y - Q(x,t)u(t) \\
=& P(x,t) + R(x,t,t)Q(t,t) - Q(x,t)u(t)
\end{aligned}$$

Ομοίως,

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial x} = xQ(x,t) + R(x,t,t)P(t,t) + P(x,t)u(t) - 2Q(x,t)v(t)$$

Τώρα, με βάση όλα τα πιο πάνω,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}q(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}Q(t,t)}{\mathrm{d}t} &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) Q(x,t)\Big|_{x=t} \\
&= -R(t,t,t)Q(t,t) + P(t,t) + R(t,t,t)Q(t,t) - Q(t,t)u(t) \\
&= p(t) - q(t)u(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}p(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}P(t,t)}{\mathrm{d}t} &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right) P(x,t)\Big|_{x=t} \\
&= -R(t,t,t)P(t,t) + tQ(t,t) + R(t,t,t)P(t,t) + P(t,t)u(t) - 2Q(t,t)v(t) \\
&= tq(t) + p(t)u(t) - 2q(t)v(t)
\end{aligned}$$

Επιπλέον, και πάλι λόγω του κανόνα ολοκλήρωσης του Leibniz,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} &= \int_t^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} Q(x,t)Ai(t)\mathrm{d}x - Q(t,t)Ai(t) \\
&= -\int_t^{+\infty} R(t,x,t)Q(t,t)Ai(t)\mathrm{d}x - Q(t,t)Ai(t)
\end{aligned}$$

$$= -q^2$$

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = \int_t^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} Q(x,t) Ai'(t) \mathrm{d}x - Q(t,t) Ai'(t)$$

$$= -\int_t^{+\infty} R(t,x,t) Q(t,t) Ai'(t) \mathrm{d}x - Q(t,t) Ai'(t)$$

$$= -pq$$

Δείξαμε ότι $q' = p - qu$. Αν πολλαπλασιάσουμε με $2q$ τα 2 μέλη και αντικαταστήσουμε το pq με $-v'$, και το $-q^2$ με u, ολοκληρώνοντας έχουμε ότι

$$u^2 - 2v = q^2 \tag{4.7.0.10}$$

Η σταθερά είναι μηδενική γιατί στο όριο πρέπει να είναι μηδενική. Με βάση τους τελευταίους υπολογισμούς,

$$q'' = (p - qu)' = p' - q'u - qu' = tq + pu - 2qv - (p - qu)u - q(-q^2)$$

$$= tq + 2q^3$$

Η πιο πάνω διαφορική εξίσωση είναι η Painlevé II.

Η 4.7.0.9, σε συνδυασμό με την 4.7.0.4 μας λέει ότι

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial t}\right) R(x,y,t) = -Q(x,t)Q(y,t)$$

Αν αποτιμήσουμε το πιο πάνω για $x = y = t$, δεδομένης της 4.7.0.3, έχουμε ότι

$$\frac{\partial^2 (\log\big(1 + \Delta_t(K_{Airy})\big))}{\partial t^2} = -q(t)^2$$

Ολοκληρώνουμε δύο φορές και έχουμε

$$\log\big(1 + \Delta_t(K_{Airy})\big) = -\int_t^{+\infty} \int_s^{+\infty} q(x)^2 \mathrm{d}x \mathrm{d}s$$

Δεδομένου του ότι το q είναι λύση της Painlevé II, μπορούμε εύκολα να επιβεβαιώσουμε την πιο κάτω σχέση παραγωγίζοντάς την, δεδομένου ότι η διαφορά των δύο πιο κάτω όρων μηδενίζεται στο $+\infty$. Φυσικά χρησιμοποιούμε την παράγωγο που υπολογίσαμε για το u.

$$u(x) = q'(x)^2 - xq(x)^2 - q(x)^4$$

Άρα, αφού $u(t) = -\int_t^{+\infty} q^2(x)\mathrm{d}x$,

$$\log\big(1 + \Delta_t(K_{Airy})\big) = -\int_t^{+\infty} (q'(x)^2 - xq(x)^2 - q(x)^4)\mathrm{d}s$$

$$= -\int_x^{+\infty} (s - x) q(s)^2 \mathrm{d}s$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει μέσω ολοκλήρωσης κατά παράγοντες και αξιοποιώντας για άλλη μια φορά το ότι η q είναι λύση της Painlevé II. Δηλαδή τελικώς,

$$F_2(t) = 1 + \Delta_t(K_{Airy}) = \exp\left\{-\int_t^{+\infty}(s-t)q(s)^2\mathrm{d}s\right\}$$

Σε αυτή την μορφή πλέον μπορούμε να καταλάβουμε για την F_2 ότι είναι αύξουσα, ότι $\lim_{t\to+\infty} F_2(t) = 1$ και $\lim_{t\to-\infty} F_2(t) = 0$. Λόγω φυσικά και της συνέχειας, καταλήγουμε στο ότι η F_2 είναι κατανομή.

Κεφάλαιο 5

Το πρόβλημα του Ulam

Ορισμός 5.0.1. (i) Μια συνάρτηση $s : [N] \to [N]$ που είναι $1-1$ ονομάζεται μετάθεση. Λέμε ότι είναι αύξουσα αν $s(i) < s(j) \iff i < j$. Μια υπακολουθία της ορίζεται κατά την κλασσική έννοια ως μια πεπερασμένη ακολουθία από όρους της πρώτης.

(ii) Για κάθε μετάθεση s, μια μεγιστική αύξουσα υπακολουθία (longest increasing subsequence-LIS) είναι μια υπακολουθία με το μέγιστο μήκος από όλες τις υπακολουθίες της s. Φυσικά, δεν είναι απαραίτητα μοναδική.

Παράδειγμα 5.0.1. Για παράδειγμα, έστω το σύνολο [7], και η μετάθεση

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 3 & 6 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

όπου η πάνω σειρά είναι οι δείκτες και η κάτω σειρά οι αντίστοιχες τιμές. Το μήκος LIS, l_7 είναι 4, και δύο μεγιστικές υπακολουθίες (LIS) που αντιστοιχούν σε αυτό είναι οι

$$2, 3, 5, 7$$

και

$$2, 3, 6, 7$$

Για τους πρώτους N φυσικούς αριθμούς κατασκευάζουμε ένα σύνολο Ω_N που να περιέχει όλες τις μεταθέσεις, δηλαδή, $\#\Omega_N = \#S_N = N!$. Εφοδιάζουμε το Ω_N με το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας p_N, δηλαδή αν $s \in \Omega_N$, τότε $p_N(s) = \frac{1}{N!}$. Κατά αυτόν τον τρόπο, το μήκος μιας LIS, l_N, είναι μια τυχαία μεταβλητή, δηλαδή $l_N : \Omega_N \to [N]$. Παρατηρούμε ότι η μέγιστη δυνατή τιμή που μπορεί να πάρει η l_N είναι το N, και προκύπτει από την ταυτοτική μετάθεση id: $[N] \to [N]$, $\mathrm{id}(i) = i$. Θέτουμε

$$q_{n,N} = \mathbb{P}(l_N \leq n) = \frac{\#\{\sigma \in \Omega_N : l_N(\sigma) \leq n\}}{N!}$$

Ψάχνουμε να βρούμε ποια είναι η συμπεριφορά αυτής της τυχαίας μεταβλητής και της $q_{n,N}$ όταν το μήκος της μετάθεσης, N, τείνει στο άπειρον.

Ας αναφέρουμε ενδεικτικά τα αποτελέσματα που θα θεωρήσουμε δεδομένα για να συνεχίσουμε με αυτά που θα ασχοληθούμε πιο κάτω. Κατ'αρχάς, όπως και στην περίπτωση της μέγιστης ιδιοτιμής ενός GUE, με αριθμητικές μεθόδους (Monte-Carlo), ο Ulam πρώτος διατύπωσε την εικασία ότι αν κανονικοποιήσουμε την $\mathbb{E}_N[l_N]$ πολλαπλασιάζοντάς την με τον όρο $1/\sqrt{N}$, τότε υπάρχει το όριο

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbb{E}_N\left[\frac{l_N}{\sqrt{N}}\right] \tag{5.0.0.1}$$

Σε αυτό προσέθεσαν σε μια εργασία τους ο Erdös και ο Szekeres, που έδειξαν ότι

$$\mathbb{E}_N[l_N] \geq \frac{1}{2}\sqrt{N-1}$$

κάτι που μας λέει ότι αν το πιο πάνω όριο υπάρχει, τότε έχει τιμή τουλάχιστον 1/2. Μάλιστα, οι Vershik και Kerov έδειξαν ότι ισούται ακριβώς με 2. Λίγο πιο κάτω θα δούμε κάποια περισσότερα πράγματα για αυτό το όριο. Επιπλέον, οι Odlyzko και Rains με αριθμητικές μεθόδους ισχυρίστηκαν ότι υπάρχουν τα όρια

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbb{E}\left[N^{2/3}\left(\frac{l_N}{\sqrt{N}}-2\right)\right] \sim -1.758$$

και

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N^{1/3}} Var[l_N] \sim 0.819$$

Στο υπόλοιπο κομμάτι της εργασίας αυτής θα δούμε ότι κατά έναν εξαιρετικά ενδιαφέρον τρόπο εμπλέκεται στην ασυμπτωτική συμπεριφορά του l_N η κατανομή Tracy Widom, F_2, που εξήγαμε πιο πάνω από τους GUE. Συγκεκριμένα, θα αναλύσουμε τα αποτελέσματα των Baik, Deift, Johansson από την εργασία "On the distribution of the length of the longest increasing subsequence of random permutations".

Θεώρημα 5.0.1. *Αν $s \in (\Omega_N, p_N)$, τότε αν F_2 η κατανομή Tracy-Widom που προκύπτει από τους GUE, για κάθε $t \in \mathbb{R}$:*

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left(\chi_N = N^{2/3}\left(\frac{l_N}{\sqrt{N}}-2\right) \leq t\right) = F_2(t)$$

Θεώρημα 5.0.2. *Για κάθε $m \in \mathbb{N}$,*

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbb{E}_N[\chi_N^m] = \mathbb{E}[\chi^m]$$

όπου $\mathbb{E}_N[\chi_N^m], \mathbb{E}[\chi^m]$ η ροπή τάξης m για το p_N και την F_2 αντίστοιχα.

Από εδώ μέχρι και το τέλος της εργασίας αυτής θα ασχοληθούμε με την απόδειξη των δύο πιο πάνω θεωρημάτων.

5.1 Παιχνίδι καρτών για την LIS

Ας αρχίσουμε με τη μελέτη της LIS για κάποιο δεδομένο $N \in \mathbb{N}$ και για κάποια συγκεκριμένη μετάθεση $\sigma \in [N]$. Η μελέτη μας ξεκινάει με την περιγραφή ενός παιχνιδιού καρτών. Οι κανόνες έχουν ως εξής:

Έστω ότι έχουμε μια στοίβα με N κάρτες με τους αριθμούς από 1 μέχρι και N με κάποια συγκεκριμένη σειρά. Θέλουμε να τις τοποθετήσουμε στο τραπέζι τραβώντας κάθε φορά την πρώτη κάρτα στην στοίβα μας. Για να βάλουμε κάτω μια κάρτα δικαιούμαστε είτε να ξεκινήσουμε μια καινούργια στοίβα (αν υπάρχει ήδη στοίβα στο τραπέζι, η καινούργια στοίβα μπαίνει στα δεξιά), είτε να την τοποθετήσουμε σε κάποια στοίβα της οποίας η κορυφαία κάρτα έχει τιμή μεγαλύτερη από την κάρτα που θέλουμε να βάλουμε κάτω.

Στόχος μας είναι, δεδομένων των πιο πάνω κανόνων, να προσπαθήσουμε να τοποθετήσουμε τις κάρτες στο τραπέζι δημιουργώντας τις λιγότερες δυνατές στοίβες.

Λύση

Λύση σε αυτό το πρόβλημα μας δίνει ο εξής άπληστος αλγόριθμος: Τοποθετούμε κάτω την πρώτη κάρτα, δημιουργώντας έτσι μια καινούργια στοίβα. Για κάθε επόμενη κάρτα, η θέση της είναι στην στοίβα που έχει για κορυφαία κάρτα αυτήν με την μικρότερη απόσταση από την δικιά μας ως προς την τιμή, δεδομένου ότι επιτρέπεται η τοποθέτηση. Εάν δεν υπάρχει τέτοια στοίβα, τότε δημιουργούμε μια καινούργια στα δεξιά. Αυτή η στρατηγική συμπίπτει με την τοποθέτηση της κάρτας στην πιο αριστερή διαθέσιμη θέση, κάτι που μπορούμε να επιβεβαιώσουμε με απλή επαγωγή. Το διαισθητικό επιχείρημα που μας λέει ότι με αυτόν τον τρόπο παίρνουμε το μικρότερο πλήθος στοιβών είναι

$$\text{Λιγότερες στοίβες} \iff \text{Περισσότερες κάρτες τοποθετημένες στην θέση τους}$$

Η λογική είναι πως όταν τοποθετούμε μια κάρτα στην πιο 'κοντινή' της θέση, ελαχιστοποιείται το συνολικό σφάλμα. Πιο αυστηρά:

Σε κάθε νόμιμη στρατηγική, αν στη στοίβα σ υπάρχει κάποια αύξουσα υπακολουθία $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, τότε υποχρεωτικά από τους κανόνες που περιγράψαμε πιο πάνω, αυτές τοποθετούνται σε αύξουσα σειρά στοιβών. Δηλαδή, αν t μια νόμιμη στρατηγική,

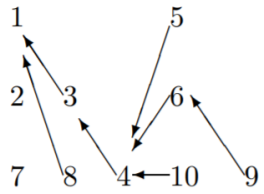
$$l_N \leq \#\text{piles}\ (\sigma, t)$$

Επιπλέον, η άπληστη στρατηγική g για κάποια μετάθεση σ μας δίνει ακριβώς $l_N(\sigma)$ στοίβες, και άρα παράγει τον ελάχιστο πιθανό αριθμό στοιβών.

Πράγματι, έστω ότι όταν τοποθετούμε κάποια κάρτα c' σε κάποια στοίβα εκτός από την πρώτη, θέτουμε έναν δείκτη ακμή που να δείχνει από την c' στην $c < c'$ που είναι αμέσως αριστερά. Για παράδειγμα: έχουμε με τη σειρά τα χαρτιά

$$7, 2, 8, \underline{1}, \underline{3}, \underline{4}, 10, \underline{6}, \underline{9}, 5.$$

Υπογραμμισμένη είναι μια LIS. Με την πιο πάνω ιδέα προκύπτει το εξής σχήμα:



Αν ακολουθήσουμε τους δείκτες, παίρνουμε μια αύξουσα υπακολουθία. Συγκεκριμένα, παίρνουμε την υπογραμμισμένη LIS. Αυτό μπορεί να γίνει κάθε φορά, γιατί $l_N \leq \#\text{piles}\ (\sigma, g)$ και από το πιο πάνω ισχύει και η αντίστροφη ανισότητα, άρα

$$l_N = \#\text{piles}\ (\sigma, g)$$

□

Παράδειγμα 5.1.1. Αν έχουμε με τη σειρά τις κάρτες $4, 2, 3, 6, 5, 1, 7$ που αντιστοιχούν στην μετάθεση

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 3 & 6 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

με την άπληστη στρατηγική έχουμε το εξής τελικό αποτέλεσμα στοιβών:

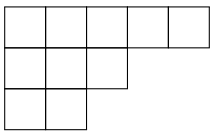
$$\begin{array}{cccc} 1 & & & \\ 2 & & 5 & \\ 4 & 3 & 6 & 7 \end{array}$$

5.2 Αντιστοίχιση Robinson-Schensted

Μπορούμε να μεταφέρουμε την ιδιότητα που έχει το πιο πάνω παιχνίδι ως προς το l_N σε μια ακόμη δομή που θα μας βοηθήσει στην ασυμπτωτική μελέτη. Αυτό θα κάνουμε σε αυτό το υποκεφάλαιο.

Ορισμός 5.2.1. Ένα διάγραμμα Young είναι ένας πεπερασμένος 'πίνακας' με φθίνον μήκος γραμμών. Επάγει με τον προφανή τρόπο μια διαμέριση λ του συνολικού αριθμού κελιών που το αποτελούν. Θα λέμε ότι έχει το σχήμα αυτής της διαμέρισης λ.

Παράδειγμα 5.2.1. Το παρακάτω σχήμα είναι ένα διάγραμμα Young σχήματος $(5, 3, 2)$.



Ορισμός 5.2.2. Ένα διαγραμμα Young με μια αρίθμηση που να είναι τέτοια ώστε κάθε γραμμή και κάθε στήλη να είναι αύξουσα ονομάζεται τυπικό ταμπλό Young (τ.τ.Y.).

Παράδειγμα 5.2.2. Το παρακάτω σχήμα είναι ένα τυπικό ταμπλό Young σχήματος $(5, 3, 2)$.

1	2	4	5	7
3	6	8		
9	10			

Ονομάζουμε Tabλ το σύνολο των τυπικών ταμπλό Young με σχήμα λ. Σύμφωνα με τους Robinson – Schensted υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ανάμεσα στο σύνολο μεταθέσεων μήκους N, S_N και το $\bigcup_{\lambda \in \mathcal{P}(N)} \text{Tab}\lambda \times \text{Tab}\lambda$, όπου υπενθυμίζουμε το σύνολο $\mathcal{P}(N)$ αποτελείται από τις διαμερίσεις του $[N]$. Ας δούμε τώρα αυτήν την αντιστοίχηση.

Ορίζουμε πρώτα την πράξη της προσαύξησης. Δεδομένου κάποιου τ.τ.Y. T και κάποιου στοιχείου-φυσικού αριθμού x, θέλουμε να δημιουργήσουμε το τ.τ.Y. $(T \leftarrow x)$, που περιέχει το x και τα στοιχεία του T με σχέση που έχουν στο T. Το αποτέλεσμα της πράξης αυτής θα είναι ένα τ.τ.Y. και ένα 'κουτί', το οποίο περιγράφει την μεταβολή του σχήματος από το T στο $(T \leftarrow x)$. Το κάνουμε ως εξής:

Algorithm 1: Προσαύξηση

Input: T, x
Result: $(T \leftarrow x), s$
$i = 1$, $j =$ μήκος πρώτης γραμμής του T.
while $j > 1$ && $x < T_{i,j-1}$ **do**
  j-- ;
end
/* Το if ξεχωρίζει την περίπτωση που το x είναι μεγαλύτερο από όλα τα στοιχεία της γραμμής */
if *το (i, j) είναι άδειο στο T.* **then**
  $(i, j) \leftarrow x$;
  $s = (i, j)$;
  τερμάτισε;
end
$x \leftrightarrow T_{i,j}$;
$i++$;
$j =$ το μήκος της γραμμής i.
Πίσω στην **while**;

Με λόγια, ο πιο πάνω αλγόριθμος για ένα στοιχείο x βρίσκει στην πρώτη γραμμή τη θέση του αριστερότερου στοιχείου που το ξεπερνάει, αν αυτό υπάρχει. Αν δεν υπάρχει, τοποθετεί το στοιχείο στα δεξιά της πρώτης γραμμής. Αν υπάρχει, τότε το x παίρνει τη θέση του στοιχείου που το ξεπερνάει, και αυτό παίρνει τη θέση του x. Επαναλαμβάνεται η προηγούμενη διαδικασία με την επόμενη γραμμή για το καινούργιο x.

Παράδειγμα 5.2.3. Μια εφαρμογή του πιο πάνω αλγορίθμου φαίνεται εδώ. Έστω ότι θέλουμε να προσαυξήσουμε τον πιο κάτω τ.τ.Y. T που

φαίνεται στο πρώτο βήμα με το στοιχείο $x = 4$.

1	2	5	7
3	8		

Μόλις βάλαμε το 4 στη θέση του πρώτου στοιχείου που το ξεπερνάει στην πρώτη γραμμή, δηλαδή του 5.

1	2	4	7
3	8		

Σε αυτό το βήμα πρέπει να επανατοποθετήσουμε το στοιχείο 5 στο τ.τ.Υ. Κατά τον ίδιο τρόπο με πριν, στην δεύτερη γραμμή τώρα, ανταλλάζουμε το 5 με το 8.

1	2	4	7
3	5		

Στην τρίτη σειρά πλέον, αφού αυτή δεν υπάρχει, τοποθετούμε το στοιχείο 8.

1	2	4	7
3	5		
8			

Αυτή η πράξη είναι όντως καλώς ορισμένη. Κατ' αρχάς, το $T \leftarrow x$ είναι τ.τ.Υ.. Πράγματι, το σχήμα μεταβάλλεται κατά ένα μόνο κουτί, καθώς είτε προσθέτουμε το x σε κάποια άδεια θέση, είτε το τοποθετούμε στη θέση κάποιου άλλου που με τη σειρά του θα ακολουθήσει την ίδια διαδικασία. Η αύξουσα σειρά στις γραμμές διατηρείται. Όσον αφορά στις στήλες, έστω ότι ανταλλάζουμε το x με το $T_{i,j}$ και πάμε να τοποθετήσουμε το $T_{i,j}$ σε κάποια θέση στην σειρά $i + 1$.

Υποχρεωτικά, αφού οι στήλες και οι γραμμές είχαν αύξουσα σειρά, η θέση του $T_{i,j}$ βρίσκεται σύμφωνα με τον αλγόριθμο, στο το κουτί ακριβώς κάτω από το κουτί που τώρα περιέχει το x ή αριστερότερα. Φυσικά, λόγω του ότι το T έχει την απαιτούμενη δομή, $T_{i,j} > T_{i,k}\ \forall k < j$. Αυτό σημαίνει ότι όταν έχει πάρει τη θέση του το $T_{i,j}$, θα είναι μεγαλύτερο από το αμέσως από πάνω του στοιχείο. Θα είναι επίσης μικρότερο από το ακριβώς από κάτω του, καθώς το $T_{i,j}$ αντικαθιστά κάποιο στοιχείο που είναι μεγαλύτερο από αυτό, και λόγω της ισχύουσας δομής του T, έχουμε το ζητούμενο. Τα παραπάνω μας δείχνουν ότι σε κάθε βήμα, το αποτέλεσμα είναι ένα τ.τ.Υ..

Στον αλγόριθμο που θα δούμε τώρα, θα παίρνουμε μια μετάθεση σ στο S_N και θα παράγουμε δύο τ.τ.Υ., τα P, Q, δηλαδή $\sigma \mapsto (P(\sigma), Q(\sigma))$ με $\mathrm{shape}(P(\sigma)) = \mathrm{shape}(Q(\sigma))$. Αυτό γίνεται ως εξής:

Algorithm 2: Αλγόριθμος Robinson - Shensted:

Input: σ
Result: P, Q
$P, Q = \emptyset$;
for *i=1 to n* **do**
  Προσαύξηση $(P, \sigma(i))$;
  Τοποθέτηση του στοιχείου i στο κουτί s στο Q;
end
Επίστρεψε το (P, Q).

Παράδειγμα 5.2.4. Δίνουμε ένα παράδειγμα εφαρμογής του αλγορίθμου R-S.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 3 & 6 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{array}{|c|}\hline 4 \\ \hline \end{array} \to \begin{array}{|c|}\hline 2 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array} \to \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3 \\ \hline 4 & \\ \hline \end{array} \to \begin{array}{|c|c|c|}\hline 2 & 3 & 6 \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array} \to \begin{array}{|c|c|c|}\hline 2 & 3 & 5 \\ \hline 4 & 6 & \\ \hline \end{array}$$

$$\to \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 6 & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array} \to \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 5 & 7 \\ \hline 2 & 6 & & \\ \hline 4 & & & \\ \hline \end{array}$$

$$Q = \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline \end{array} \to \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \to \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \to \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array} \to \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline \end{array}$$

$$\to \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline 6 & & \\ \hline \end{array} \to \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 4 & 7 \\ \hline 2 & 5 & & \\ \hline 6 & & & \\ \hline \end{array}$$

Η διαδικασία του αλγορίθμου είναι αντιστρέψιμη. Πράγματι, δεδομένου κάποιου (P, Q) μπορούμε μέσω του Q να βρούμε τη σειρά προσαύξησης που δημιούργησε το τ.τ.Υ. P, και να χρησιμοποιήσουμε τον αντίστροφο αλγόριθμο προσαύξησης. Ο τρόπος που γίνεται αυτό είναι ο εξής:

Στο πρώτο βήμα εντοπίζουμε το κουτί με την μεγαλύτερη τιμή στο Q. Αυτή είναι η θέση του κουτιού που προστέθηκε τελευταίο στο P. Αφαιρούμε το κουτί αυτό από το P, και έχουμε το σχήμα του P στο προτελευταίο βήμα του αλγορίθμου R-S. Για να έχουμε και τις σωστές τιμές στο σχήμα μας, επανατοποθετούμε τον αριθμό s που μόλις αφαιρέσαμε με τον αντίστροφο αλγόριθμο προσαύξησης:

Πάμε στην σειρά πάνω από αυτήν στην οποία ανήκε το στοιχείο που αφαιρέσαμε, και βρίσκουμε το αριστερότερο στοιχείο που είναι μικρότερο από το s. Τους αλλάζουμε θέση και ακολουθούμε την ίδια διαδικασία με το καινούργιο s και την από πάνω γραμμή. Αυτό σε κάποια

φάση τερματίζει (όταν φτάσουμε στην πρώτη γραμμή), και έχουμε διώξει κάποιο στοιχείο από τ.τ.Υ.. Αυτό το στοιχείο είναι το τελευταίο που έχει προστεθεί στο P, και άρα είναι το τελευταίο στοιχείο της μετάθεσης. Ακολουθούμε την ίδια διαδικασία για να πάμε ακόμα ένα βήμα πιο πίσω, κάτι που μας δίνει το προτελευταίο στοιχείο της μετάθεσης, και επαναλαμβάνουμε με τον ίδιο τρόπο μέχρι να φτάσουμε στο 1 κουτί.

Αυτό μας λέει ότι αυτή η απεικόνιση είναι αμφιμονοσήμαντη, και άρα

$$\#S_N = \# \bigcup_{\lambda \in \mathcal{P}(N)} \mathrm{Tab}\lambda \times \mathrm{Tab}\lambda$$

Αυτό σημαίνει ότι αν d_λ το πλήθος των πινάκων Young με σχήμα λ,

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}(N)} d_\lambda^2 = \#S_N = N!$$

Κάτω από αυτήν την απεικόνιση, το μήκος της μέγιστης αύξουσας υπακολουθίας της μετάθεσης σ καταλήγει να είναι ακριβώς το μήκος της πρώτης γραμμής του τ.τ.Υ. της εικόνας (P ή Q - δεν έχει σημασία καθώς έχουν το ίδιο σχήμα). Αυτό ισχύει διότι, από το προηγούμενο παιχνίδι με κάρτες παρατηρούμε ότι ουσιαστικά η πρώτη γραμμή του πίνακα young P κάποιας σ είναι η ίδια με τις κορυφαίες κάρτες των στοιβών που δημιουργούνται με τον άπληστο αλγόριθμο!

Πράγματι, όταν προσαυξάνουμε τον πίνακα με κάποιο στοιχείο x, αν είναι μεγαλύτερο από κάθε στοιχείο της γραμμής τότε η γραμμή μεγαλώνει κατά 1 στοιχείο (οι στοίβες αυξάνονται κατά μία). Αν από την άλλη το ξεπερνάει κάποιο στοιχείο της πρώτης γραμμής, τότε αντικαθιστά το αριστερότερο στοιχείο που το ξεπερνάει (αντίστοιχα, η κάρτα τοποθετείται στην αριστερότερη νόμιμη θέση).

Σύμφωνα με όλα τα πιο πάνω,

$$\mathbb{P}(l_N = n) = \frac{1}{N!}\#\left\{\sigma \in S_N : l_N(\sigma) = n\right\} = \frac{1}{N!}\#\left\{\bigcup_{\substack{\lambda \in \mathcal{P}(N) \\ \lambda_1 = n}} \mathrm{Tab}\lambda \times \mathrm{Tab}\lambda\right\} = \sum_{\substack{\lambda \in \mathcal{P}(N) \\ \lambda_1 = n}} d_\lambda^2$$

Για να δείξει κανείς ότι το όριο του Ulam υπάρχει, μπορεί να ασχοληθεί με τα τ.τ.Υ.. Οι Logan και Shepp (Βλέπε [9]) με βάση τα πιο πάνω δείχνουν ότι

$$\mathbb{E}[l_N] \geq (2 + O(1))N^{1/2}$$

Οι Vershik και Kerov (Βλέπε [10]) συμπληρώνουν το πιο πάνω δείχνοντες ότι

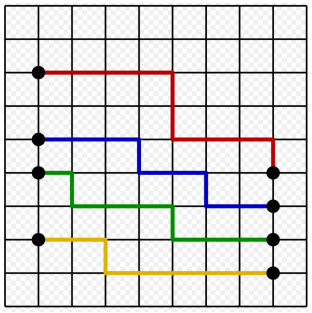
$$\mathbb{E}[l_N] \leq (2 + O(1))N^{1/2}$$

5.3 Μη τετμημένα μονοπάτια

Σε αυτό το υποκεφάλαιο μεταφέρουμε και πάλι την πιο πάνω ιδιότητα σε μια ακόμη δομή.

Ορισμός 5.3.1. Έστω πεπερασμένο πλέγμα διαστάσεων $n \times m$ και έστω στις δύο πλευρές του τα σημεία $\{a_1, \ldots, a_k\}, \{b_1, \ldots, b_k\}$ με $k \leq n$. Θα λέμε σύστημα μη τετμημένων μονοπατιών ένα σύνολο από μονοπάτια $P_i : a_i \to b_i$ που δεν έχουν κοινή κορυφή.

Παράδειγμα 5.3.1. Για $n = m = 8$ και $k = 4$, ένα παράδειγμα είναι το εξής



Ορισμός 5.3.2. Έστω μονοπάτι P σε κάποιο γράφημα $G(V, E)$. Ορίζουμε το πρόσημο του μονοπατιού, $\operatorname{sign}(P)$ ως το γινόμενο των προσήμων των ακμών. Ορίζουμε επίσης το $\omega(P)$ να είναι το γινόμενο των βαρών των ακμών του P.

Ορισμός 5.3.3. Έστω γράφημα $G(V, E)$ και έστω 2 κορυφές $a, b \in V$. Θα λέμε

$$e(a, b) = \sum_{P: a \to b} \omega(P)$$

Για δύο σύνολα κορυφών $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_k\}, \mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_k\}$, ονομάζουμε πίνακα μονοπατιών των $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ τον

$$M = (e(a_i, b_j))_{i=1}^{n}$$

Αναφέρουμε το πιο κάτω χωρίς απόδειξη:

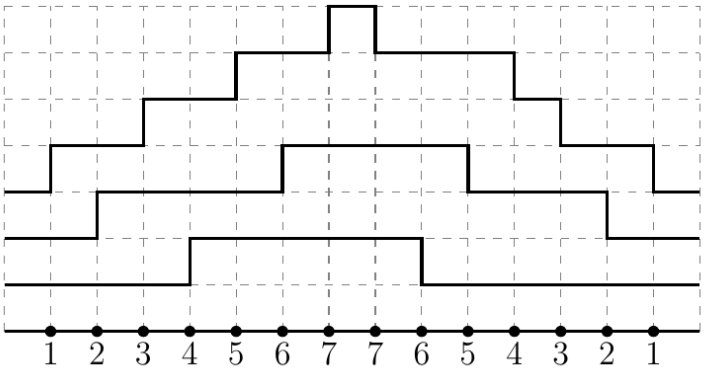
Θεώρημα 5.3.1. *(Lindström-Gessel-Viennot) Έστω $G(V, E)$ ένα τοπικά πεπερασμένο κατευθυνόμενο ακυκλικό γράφημα με συνάρτηση βαρών $\omega : E \to \mathbb{R}$, και έστω τα σύνολα κορυφών $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_k\}, \mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_k\}$, και έστω M ο πίνακας μονοπατιών των $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Τότε, αν VD το σύνολο των συστημάτων μη τετμημένων μονοπατιών ανάμεσα στα $\mathcal{A}, \mathcal{B}$,*

$$\det M = \sum_{P \in VD} sign(P)\omega(P)$$

Σημείωση: Τοπικά πεπερασμένο σημαίνει πως κάθε κορυφή έχει πεπερασμένο βαθμό. Στην ειδική περίπτωση που το γράφημα έχει μοναδιαίες ακμές, η $\det M$ μετράει το πλήθος των συστημάτων μη τετμημένων μονοπατιών από το $\mathcal{A}$ στο $\mathcal{B}$, δηλαδή το $\#VD$.

Τα μη τετριμμένα μονοπάτια συνδέοντα με τα τ.τ.Υ.. Έστω (P, Q) ένα ζεύγος τ.τ.Υ. με n στοιχεία και k γραμμές. Κατασκευάζουμε ένα πλέγμα διαστάσεων $2n \times n$, και θεωρούμε τα k χαμηλότερα σημεία στην

κάθε πλευρά του πλέγματος. Το πιο χαμηλό σημείο αντιστοιχεί στην πιο χαμηλή γραμμή του τ.τ.Υ., το δεύτερο χαμηλότερο στην δεύτερη κ.ο.κ.. Οι αριθμοί στο P θα μας λένε πότε θα ανεβαίνουμε ένα βήμα και οι αριθμοί στο Q θα μας λένε πότε θα κατεβαίνουμε ένα βήμα. Αυτό γίνεται ευκολότερα αντιληπτό με ένα παράδειγμα: Έστω τα (P, Q) του παραδείγματος 5.2.4.. Με την πιο πάνω περιγραφή καταλήγουμε στα εξής μονοπάτια:



5.4 Poissonization - Depoissonization

Με βάση όλα τα προηγούμενα, μπορούμε να ασχοληθούμε με το

$$q_{n,N} = \mathbb{P}(l_N \leq n) = \frac{\#\{\sigma \in S_N : l_N(\sigma) \leq n\}}{N!}$$

Ορίζουμε

$$\varphi_n(\lambda) = \sum_{N=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^N}{N!} q_{n,N}$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι η $\varphi_{n,N}$ είναι συνάρτηση κατανομής πιθανότητας ως προς το n. Η ιδέα είναι ότι τυχαιοποιούμε το N κάνοντάς το να ακολουθεί μια κατανομή Poisson με παράμετρο λ, και ομαλοποιούμε με χρήση της συνέλιξης την $q_{n,N}$ ώστε να μελετήσουμε μια πιο 'καλή' ποσότητα οριακά. Συγκεκριμένα, αν επιλέξουμε τις παραμέτρους λ ώστε $\lambda \sim N$, τότε η μέση τιμή των κατανομών Poisson, λ θα συμπεριφέρεται όπως το N, ενώ η τυπική απόκλιση συμπεριφέρεται όπως το $\sqrt{N}$. Συνεπώς όσο το N μεγαλώνει προσεγγίζουμε την μέση τιμή της Poisson - και άρα προσεγγίζουμε το $q_{n,N}$. Με αυτή τη λογική, θα αρκεί στην συνέχεια να μελετήσουμε την συμπεριφορά της $\varphi_n(\lambda)$ όταν $0 \leq n \leq N \sim \lambda$ και $\lambda \to +\infty$. Η οριακή εγγύτητα των δύο ποσοτήτων διαφαίνεται μέσα από τα λήμματα 4.5.2. και 4.5.3. που γράφουμε πιο κάτω.

Λήμμα 5.4.1. Για κάθε n, N,

$$q_{n,N+1} \leq q_{n,N}$$

Απόδειξη

Έστωσαν τα σύνολα S_N, S_{N+1}. Ορίζουμε για κάθε $k \in [N]$ το $S_{N+1}(k) \subset S_{N+1}$ που είναι όλες οι μεταθέσεις στο S_{N+1} των οποίων το τελευταίο στοιχείο είναι το k. Φυσικά, $\#S_{N+1}(k) = N!$. Μάλιστα, μπορούμε να κατασκευάσουμε μια 1-1 (άρα και επί) απεικόνιση από $g_k : S_{N+1}(k) \to S_N$. Θέτουμε πρώτα $\varphi_k : [N+1] \setminus \{k\} \to [N]$ με

$$\varphi_k(m) \begin{cases} m & \text{αν } m < k \\ m-1 & \text{αν } m > k \end{cases}$$

Αυτή η απεικόνιση είναι καλά ορισμένη και προφανώς είναι 1-1, άρα και επί. Είναι επίσης γνησίως αύξουσα. Επιπλέον, θέτουμε για $\sigma \in S_{N+1}(k)$,

$$g_k(\sigma)(m) = \varphi_k(\sigma((m+1)\mathrm{mod}(N+1)))$$

Σχηματικά, ένα παράδειγμα του πιο πάνω είναι το εξής:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{g_2}{\mapsto} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Δηλαδή είναι σαν να αφαιρούμε από την πάνω και από την κάτω γραμμή τον δεξιότερο αριθμό, αντικαθιστούμε τα στοιχεία στην κάτω γραμμή που ξεπερνούν το k με τον εαυτό τους -1. Από την πιο πάνω απεικόνιση, παρατηρούμε ότι για $\sigma \in S_{N+1}(k)$,

$$l_N(g_k(\sigma)) \leq l_{N+1}(\sigma)$$

επειδή η φ_k είναι γνησίως αύξουσα, και άρα αν υπάρχει μια αύξουσα υπακολουθία της σ, τότε υπάρχει μια αντίστοιχη αύξουσα υπακολουθία στην εικόνα της, $g_k(\sigma)$, και η ένα επιπλέον στοιχείο στην θέση $N+1$ μπορεί μόνο να αυξήσει το μήκος της LIS. Αυτό σημαίνει ότι

$$\mathbb{1}_{\{l_{N+1}(\sigma) \leq n\}} \leq \mathbb{1}_{\{l_N(g_k(\sigma)) \leq n\}}$$

$$\begin{aligned}
q_{n,N+1} &= \frac{\#\{\sigma \in S_{N+1} : l_N(\sigma) \leq n\}}{(N+1)!} = \frac{\#\cup_{k\in[N]}\{\sigma \in S_{N+1}(k) : l_{N+1}(\sigma) \leq n\}}{(N+1)!} \\
&= \frac{1}{(N+1)!}\sum_{k=1}^{N+1}\sum_{\sigma\in S_{N+1}(k)} \mathbb{1}_{\{l_{N+1}(\sigma)\leq n\}} \\
&\leq \frac{1}{(N+1)!}\sum_{k=1}^{N+1}\sum_{\sigma\in S_{N+1}(k)} \mathbb{1}_{\{l_N(g_k(\sigma))\leq n\}} \\
&= \frac{1}{(N+1)!}\sum_{k=1}^{N+1}\sum_{\sigma\in S_N} \mathbb{1}_{\{l_{N+1}(\sigma)\leq n\}} \\
&= \frac{1}{N!}\sum_{\sigma\in S_N} \mathbb{1}_{\{l_{N+1}(\sigma)\leq n\}}
\end{aligned}$$

$= q_{n,N}$

□

Λήμμα 5.4.2. Έστω $m > 0$ σταθερός πραγματικός αριθμός. Θέτουμε $\mu_N^{(m)} = N + (2\sqrt{m+1}+1)\sqrt{N\log N}$ και $\nu_N^{(m)} = N - (2\sqrt{m+1}+1)\sqrt{N\log N}$. Τότε υπάρχουν σταθερές C, N_0 τέτοιες ώστε

$$\varphi_n(\mu_N^{(m)}) - \frac{C}{N^m} \le q_{n,N} \le \varphi_n(\nu_N^{(m)}) + \frac{C}{N^m}$$

για $N \ge N_0$ και $0 \le n \le N$.

Παρατήρηση 5.4.1. Παρατηρούμε ότι $\mu_N^{(m)} \sim N$. Η μορφή του $\mu_N^{(m)}$ έχει επιλεγεί με τρόπο που γίνεται πιο ξεκάθαρος σε επόμενα κεφάλαια.

Λήμμα 5.4.3. Υπάρχει $C > 0$ τέτοιο ώστε

$$q_{n,N} \le C\varphi_n(N-\sqrt{N}) \text{ και } 1 - q_{n,N} \le C(1-\varphi_n(N+\sqrt{N}))$$

για επαρκώς μεγάλα $N, 0 \le n \le N$.

Απόδειξη

Γνωρίζουμε ότι $q_{n,N} \ge 0$. Χρησιμοποιούμε το λήμμα 5.4.1. και τη φόρμουλα του Stirling και προκύπτουν τα πιο κάτω:

$$\begin{aligned}
\varphi_n(N-\sqrt{N}) &= \sum_{N'=0}^{+\infty} \frac{e^{-(N-\sqrt{N})}(N-\sqrt{N})^{N'}}{N'!} q_{n,N'} \\
&\ge \sum_{N'=N-\sqrt{N}}^{N} \frac{e^{-(N-\sqrt{N})}(N-\sqrt{N})^{N'}}{N'!} q_{n,N'} \\
&\overset{5.4.1.}{\ge} q_{n,N} \sum_{N'=N-\sqrt{N}}^{N} \frac{e^{-(N-\sqrt{N})}(N-\sqrt{N})^{N'}}{N'!} \\
&\ge C q_{n,N} \sum_{N'=N-\sqrt{N}}^{N} \frac{e^{-(N-\sqrt{N})}(N-\sqrt{N})^{N'}}{(N')^{N'+1/2}e^{-N'}} \\
&= C q_{n,N} \sum_{N'=N-\sqrt{N}}^{N} e^{-(N-\sqrt{N})+N'\log\left(N-\sqrt{N}\right)-(N'+1/2)\log N'+N'} \\
&= C q_{n,N} \sum_{N'=N-\sqrt{N}}^{N} e^{f(N')}
\end{aligned}$$

όπου $f(x) = -(N-\sqrt{N}) + x\log\left(N-\sqrt{N}\right) - (x+1/2)\log x + x$. Η f είναι φθίνουσα για $x \ge N-\sqrt{N}$, και άρα

$$\varphi_n(N-\sqrt{N}) \ge C q_{n,N}(N-(N-\sqrt{N}))e^{f(N)} = C q_{n,N} e^{\sqrt{N}+N\log\left(1-1/\sqrt{N}\right)} \ge C q_{n,N}$$

Η δεύτερη ανισότητα ισχύει για $N > 1$, και σημειώνουμε ότι $q_{n,N} \leq 1$. Με παρόμοιες πράξεις έχουμε

$$1 - \varphi_n(N + \sqrt{N}) = \sum_{N'=0}^{+\infty} \frac{e^{-(N-\sqrt{N})}(N + \sqrt{N})^{N'}}{N'!}(1 - q_{n,N'})$$

$$\geq C(1 - q_{n,N}) \sum_{N'=N}^{N+\sqrt{N}} e^{g(N')}$$

όπου $g(x) = -(N + \sqrt{N}) + x \log\left(N + \sqrt{N}\right) - x + \frac{1}{2}\log x + x$. Για $N \leq x \leq N + \sqrt{N}$, $g''(x) < 0$ και $\min(g(x)) = \min(g(N), g(N + \sqrt{N}))$. Για επαρκώς μεγάλο N, $\min(g(x)) = g(N + \sqrt{N}) = -\frac{1}{2}\log\left(N + \sqrt{N}\right)$. Έτσι, για επαρκώς μεγάλο $N, 0 \leq n \leq N$.

$$1 - \varphi_n(N + \sqrt{N}) \geq C(1 - q_{n,N})\sqrt{N}e^{g(N)} \geq C(1 - q_{n,N})$$

□

Δείξαμε με τα πιο πάνω δύο λήμματα ότι όντως τα $q_{n,N}$ και $\varphi_n(\lambda)$ όταν $\lambda \sim N$ και $N \to +\infty$ είναι αυθαίρετα κοντά. Τώρα, αν θέλουμε να δούμε τη συμπεριφορά του $\varphi_n(\lambda)$ πρέπει να το εκφράσουμε σε μια πιο βολική μορφή.

Ορισμός 5.4.1. Έστω $f : \Sigma \to \mathbb{C}$, όπου Σ ο θετικά προσανατολισμένος μοναδιαίος κύκλος στο μιγαδικό επίπεδο και οι αντίστοιχοι συντελεστές Fourier:

$$f_j = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})e^{-ij\theta}\mathrm{d}\theta, j = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$$

Ονομάζουμε ορίζουσα Toeplitz τάξης n την ποσότητα

$$D_n(f) = \det\left(f_{j-k}\right)_{j,k=0}^{n-1}$$

Πρόταση 5.4.1.

$$D_n(f) = \frac{1}{(2\pi)^n n!}\int_{-\pi}^{\pi}\cdots\int_{-\pi}^{\pi}\prod_{1\leq j\leq k\leq n}|e^{i\theta_j} - e^{i\theta_k}|^2\prod_{j=1}^{n} f(e^{i\theta_j})\mathrm{d}\theta_j$$

Ο Gessel (Βλέπε [11]) με το πιο πάνω εργαλείο και με χρήση ιδεών από το προηγούμενο υποκεφάλαιο εξέφρασε την $\varphi_n(\lambda)$ ως εξής:

Πρόταση 5.4.2.

$$\varphi_n(\lambda) = e^{-\lambda}D_{n-1}\left(e^{2\sqrt{\lambda}\cos\theta}\right)$$

Συμβολίζουμε την πιο πάνω ορίζουσα τάξης n ως $D_n(\lambda)$ για συντομία. Αυτή ακριβώς η ορίζουσα σχετίζεται στενά με το πολυώνυμο $p_n(z, \lambda) = \kappa_n(\lambda)z^n + \cdots + \kappa_1$, όπου ισχύει η σχέση ορθογωνιότητας

$$\int_{-\pi}^{\pi} p_n(e^{i\theta}, \lambda)\overline{p_m(e^{i\theta}, \lambda)}\frac{e^{2\sqrt{\lambda}\cos\theta}}{2\pi}\mathrm{d}\theta = \delta_{nm}, \qquad n, m \in \mathbb{N}$$

Συγκεκριμένα, ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής του $p_n(z,\lambda)$, κ_n σχετίζεται με τις ορίζουσες Toeplitz ως εξής:

$$\kappa_n^2(\lambda) = \frac{D_{n-1}(\lambda)}{D_n(\lambda)}$$

Λήμμα 5.4.4. (Ισχυρό όριο του Szegö)

$$\lim_{n\to+\infty} D_n(\lambda) = e^{\lambda}$$

Γράφουμε με βάση τα πιο πάνω:

$$\varphi_n(\lambda) = e^{-\lambda} D_{n-1}(\lambda) = \frac{D_{n-1}(\lambda)}{\lim_{n\to+\infty} D_n(\lambda)} = \prod_{k=n}^{+\infty} \frac{D_{k-1}}{D_k} = \prod_{k=n}^{+\infty} \kappa_k^2(\lambda)$$

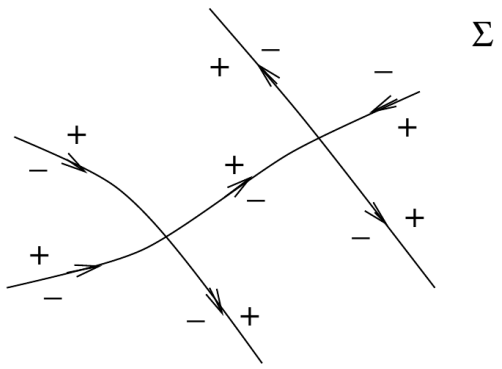
$$\Longleftrightarrow \log \varphi_n(\lambda) = \sum_{k=n}^{+\infty} \log \kappa_k^2(\lambda)$$

Αν θέλουμε να ελέγξουμε το $q_{n,N}$ όταν $N \to +\infty$, μπορούμε πρώτα να ελέγξουμε τα $\kappa_k^2(\lambda)$. Για να το κάνουμε αυτό, θα χρειαστούμε μερικά ακόμα καινούργια εργαλεία, τα οποία θα δούμε στην πιο κάτω υποενότητα.

5.5 Θεωρία Riemann-Hilbert

Σε αυτό το κομμάτι της εργασίας θα αναφέρουμε κάποια γενικά βασικά εργαλεία που θα χρειαστούν για τον υπολογισμό της πιο πάνω ποσότητας. Επιπλέον, θα δούμε συγκεκριμένα πως θα χρησιμοποιηθούν αυτά τα εργαλεία στην περίπτωση της εξίσωσης Painlevé II, η οποία, υπενθυμίζουμε, σχετίζεται άμεσα με την κατανομή F_2.

Έστω Σ μια προσανατολισμένη καμπύλη στο μιγαδικό επίπεδο. Υιοθετούμε τη σύμβαση κατά την οποία το κομμάτι του επιπέδου στα αριστερά της καμπύλης έχει θετικό πρόσημο (+), και το κομμάτι στα δεξιά έχει αρνητικό πρόσημο (-). Ένα παράδειγμα μιας καμπύλης φαίνεται πιο κάτω:



Ορισμός 5.5.1. Ονομάζουμε $Gl(n, F)$ το σύνολο των αντιστρέψιμων πινάκων με διαστάσεις $n \times n$ που λαμβάνει στοιχεία από το σώμα F. Εφοδιάζουμε το πιο πάνω σύνολο με τον πολλαπλασιασμό πινάκων $(\cdot)$ και έχουμε την ομάδα $(Gl(n, F), \cdot)$.

Ορισμός 5.5.2. (Πρόβλημα Riemann-Hilbert)

Έστω $\Sigma_0 = \Sigma - \{\text{Σημεία αυτοτομής}\}$ και έστω $u : \Sigma_0 \to Gl(n, \mathbb{C})$ μια λεία απεικόνιση. Αν η Σ είναι μη φραγμένη, τότε θα θεωρούμε κάποια u τέτοια ώστε $u(z) \to I$ καθώς $z \to +\infty$ πάνω στην Σ. Θεωρούμε τώρα το εξής πρόβλημα

$$\begin{cases} Y(z) & \text{αναλυτική στο } \mathbb{C} \setminus \Sigma \\ Y_+(z) = Y_-(z)u(z) & z \in \Sigma_0 \\ Y(z) \to I & \text{καθώς } z \to \infty \end{cases} \tag{5.5.0.1}$$

όπου $Y_\pm = \lim_{z' \to z} Y(z')$ όταν z' ανήκει αντίστοιχα στην $(\pm)$ - πλευρά στην οποία χωρίζει η Σ το επίπεδο. Το ονομάζουμε πρόβλημα Riemann Hilbert. Στην εργασία αυτή, η τελευταία συνθήκη αναφέρεται σε ομοιόμορφη σύγκλιση της μορφής $Y(z) \to I + O\left(\frac{1}{z}\right)$ καθώς $z \to \infty$ στο $\mathbb{C} - \Sigma$.

Όταν ασχολούμαστε με ένα τέτοιο πρόβλημα, μας ενδιαφέρει η ύπαρξη κάποιας λύσης $Y : \Sigma \to Gl(n, \mathbb{C})$ αλλά και η μοναδικότητα αυτής. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τέτοιου είδους προβλήματα για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων. Συγκεκριμένα, αν κατασκευάσουμε ένα πρόβλημα RH που να ικανοποιεί η λύση μιας διαφορικής εξίσωσης τέτοιο ώστε η λύση του να υπάρχει και είναι μοναδική, και παράλληλα κατασκευάσουμε ένα πρόβλημα που να είναι κατά κάποια έννοια αρκετά κοντά σε αυτό, τότε η λύση του προσεγγιστικού μας προβλήματος θα προσεγγίζει τη λύση του αρχικού, δηλαδή τη λύση της διαφορικής. Με αυτή τη λογική θα προχωρήσουμε πιο κάτω.

Επιπλέον, αν η λύση ενός προβλήματος RH υπάρχει, τότε μπορεί, όπως θα δούμε λίγο πιο κάτω, να εκφραστεί με χρήση του πιο κάτω:

Ορισμός 5.5.3. (Τελεστές Cauchy)

Για μια ολόμορφη συνάρτηση $f : \Sigma \to \mathbb{C}$ ορίζουμε τους τελεστές Cauchy $C_\pm f : \Sigma \to \mathbb{C}$ ως εξής:

$$(C_\pm f)(z) = \lim_{z' \to z_\pm} \int_\Sigma \frac{f(s)}{s - z'} \frac{\mathrm{d}s}{2\pi i}$$

όπου με $z' \to z_\pm$ συμβολίζουμε το όριο καθώς το z' τείνει στο z από την $\pm$ πλευρά του επιπέδου (μη εφαπτομενικά).

Μπορούμε να επεκτείνουμε τον πιο πάνω ορισμό για $f = u : \Sigma \to Gl(n, \mathbb{C})$, όπου οι τελεστές $C_\pm u : \Sigma \to Gl(n, \mathbb{C})$ είναι πίνακες με την δράση των αντίστοιχων τελεστών στις συναρτήσεις - στοιχεία του u, τα u_{ij}.

Λήμμα 5.5.1. Αν $f \in L_p(\Sigma, |\mathrm{d}z|)$, τότε $C_\pm f \in L^p(\Sigma, |\mathrm{d}z|)$. Συγκεκριμένα,

$$\|C_\pm f\|_{L^p(\Sigma, |\mathrm{d}z|)} \leq c_p \|f\|_{L^p(\Sigma, |\mathrm{d}z|)}$$

Με έναν απλό υπολογισμό με χρήση του ολοκληρωτικού τύπου Cauchy μπορούμε να δείξουμε ότι $C_+ - C_- = Id \in (\Sigma \to \mathbb{C})^{(\Sigma \to \mathbb{C})}$, όταν μετασχηματίζουμε κάποια $f : \Sigma \to \mathbb{C}$, άρα και όταν μετασχηματίζουμε κάποια $u : \Sigma \to Gl(n, \mathbb{C})$,

$$C_+ - C_- = Id \in (\Sigma \to Gl(n, \mathbb{C}))^{(\Sigma \to Gl(n,\mathbb{C}))} \tag{5.5.0.2}$$

Εκφράζουμε τον πίνακα άλματος του προβλήματος RH, u, ως $u = I + w$, με $w \xrightarrow{|z| \to +\infty} 0$ και ορίζουμε τον τελεστή $C_w : (Gl(n, \mathbb{C}))^\Sigma \to (Gl(n, \mathbb{C}))^\Sigma$ όπου

$$C_w(f) = C_-(f \cdot w)$$

Αν $w \in L^\infty(\Sigma, |\mathrm{d}z|)$ και $f \in L^2(\Sigma, |\mathrm{d}z|)$, τότε $fw \in L^2(\Sigma, |\mathrm{d}z|)$, και δεδομένου του πιο πάνω λήμματος, έχουμε ότι ο C_w με πεδίο ορισμού περιορισμένο στον $L^2(\Sigma, |\mathrm{d}z|)$ είναι φραγμένος τελεστής στο $L^2(\Sigma, |\mathrm{d}z|) \to L^2(\Sigma, |\mathrm{d}z|)$. Έστω ότι υπάρχει $\mu \in I + L^2(\Sigma, |\mathrm{d}z|)$ -όρισμα για τον τελεστή $(Id - C_w)$ - τέτοιο ώστε

$$(Id - C_w)(\mu) = I \quad \text{στο } \Sigma \tag{5.5.0.3}$$

ή ισοδύναμα, για $w \in L^2(\Sigma, |\mathrm{d}z|) \cap L^\infty(\Sigma, |\mathrm{d}z|)$, $\mu - I \in L^2(\Sigma, |\mathrm{d}z|)$ και

$$(Id - C_w)(\mu - I) = C_w(I) = C_-(w)$$

Ισχυρισμός. Η λύση του προβλήματος RH 5.5.0.1 για φραγμένη Σ είναι η $Y : \mathbb{C} \to Gl(n, \mathbb{C})$, όπου:

$$Y(z) = I + \int_\Sigma \frac{\mu(s)w(s)}{s - z} \frac{\mathrm{d}s}{2\pi i} \quad \text{για } z \notin \Sigma \tag{5.5.0.4}$$

και οι τιμές στην Σ καθορίζονται οριακά.

Απόδειξη

Πράγματι, η Y είναι αναλυτική στο $\mathbb{C} - \Sigma$ και προφανώς συγκλίνει στο I με τάξη τουλάχιστον $\frac{1}{z}$ καθώς $z \to \infty$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι ικανοποιείται η συνθήκη άλματος (συνθήκη 2 στο πρόβλημα RH). Για αυτό, χρησιμοποιούμε τις σχέσεις 5.5.0.2 και 5.5.0.3:

$$\begin{aligned} Y_-(z) &= I + C_-(\mu(s)w(s)) = I + C_w(\mu)(z) \\ &= \mu(z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_+(z) &= I + C_+(\mu(z)w(z)) = \{I + C_w(\mu)(z)\} + \{(C_+ + C_-)(\mu w)(z)\} \\ &= \mu(z) + \mu(z)w(z) = \mu(z)(I + w(z)) = \mu(z)u(z) \end{aligned}$$

Έτσι, όπως ισχυριστήκαμε,

$$Y_+(z) = Y_-(z)u(z)$$

και άρα η Y είναι όντως η λύση του προβλήματος RH.

□

5.5.1 Πρόβλημα RH για το πρόβλημα του Ulam

Τώρα, ας δούμε ένα συγκεκριμένο πρόβλημα RH, το οποίο θα μας βοηθήσει να υπολογίσουμε τα $\kappa_k^2(\lambda)$ που εμφανίστηκαν στην προηγούμενη ενότητα.

Έστω Σ ο θετικά προσανατολισμένος μοναδιαίος κύκλος στο $\mathbb{C}$, δηλαδή $\Sigma : r(\theta) = e^{i\theta}$. Έστω επίσης $f : \Sigma \to \mathbb{R}$ μια μη-αρνητική, περιοδική λεία συνάρτηση. Επιπλέον, ονομάζουμε $\{p_q : \Sigma \to \mathbb{C}\}_{q\in\mathbb{N}}$ όπου $p_q(z) = \kappa_q z^q + \cdots + \kappa_0$ τα ορθομοναδιαία πολυώνυμα ως προς το μέτρο $\frac{f(e^{i\theta})}{2\pi}\mathrm{d}\theta$. Ορίζουμε επίσης τα πολυώνυμα $p_q^*(z) \equiv z^q \bar{p}_q(1/z) = z^q \overline{p_q(1/\bar{z})}$. Τέλος, θέτουμε

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow z^{-(k+1)\sigma_3} = \begin{pmatrix} z^{-(k+1)} & 0 \\ 0 & z^{k+1} \end{pmatrix}$$

Ψάχνουμε κάποια $Y : \mathbb{C} \to Gl(n, \mathbb{C})$ που να ικανοποιεί το εξής πρόβλημα RH:

$$\begin{cases} Y(z) & \text{αναλυτική στο } \mathbb{C} \setminus \Sigma \\ Y_+(z) = Y_-(z) \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{z^{k+1}} f(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & z \in \Sigma \\ Y(z) z^{-(k+1)\sigma_3} = I + O\left(\frac{1}{z}\right) & \text{καθώς } z \to \infty \end{cases} \tag{5.5.1.1}$$

Ισχυρισμός. Το πιο πάνω πρόβλημα RH έχει μοναδική λύση την $Y : \mathbb{C} \to Gl(n, \mathbb{C})$, όπου:

$$Y(z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\kappa_{k+1}} p_{k+1} & \frac{1}{\kappa_{k+1}} \int_\Sigma \frac{p_{k+1}(s)}{s-z} \frac{f(s)\mathrm{d}s}{2\pi i s^{k+1}} \\ -\kappa_k p_k^*(z) & -\kappa_k \int_\Sigma \frac{p_k^*(s)}{s-z} \frac{f(s)\mathrm{d}s}{2\pi i s^{k+1}} \end{pmatrix}$$

Απόδειξη

Ύπαρξη: Μπορούμε να επιβεβαιώσουμε ότι το πιο πάνω είναι πράγματι λύση. Για να το κάνουμε αυτό, γράφουμε $C[h](z) = \int_\Sigma \frac{h(s)}{s-z} \frac{\mathrm{d}s}{2\pi i}$, και έτσι

$$Y(z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\kappa_{k+1}} p_{k+1} & \frac{1}{\kappa_{k+1}} C[f p_{k+1}/(\cdot)^{k+1}](z) \\ -\kappa_k p_k^*(z) & -\kappa_k C[p_k^* f/(\cdot)^{k+1}](z) \end{pmatrix}$$

Παίρνουμε τα όρια καθώς $z' \to z_\pm$, χρησιμοποιούμε την ιδιότητα $C_+ - C_- = Id$ και έτσι καταλήγουμε στο ότι η Y ικανοποιεί την συνθήκη άλματος. Όσο για την τρίτη συνθήκη που αφορά στην ασυμπτωτική συμπεριφορά καθώς $z \to \infty$,

$$Y(z) z^{-(k+1)\sigma_3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{z^{k+1}\kappa_{k+1}} p_{k+1}(z) & \frac{z^{k+1}}{\kappa_{k+1}} \int_\Sigma \frac{p_{k+1}(s)}{s-z} \frac{f(s)\mathrm{d}s}{2\pi i s^{k+1}} \\ -\kappa_k \frac{p_k^*(z)}{z^{k+1}} & -\kappa_k z^{k+1} \int_\Sigma \frac{p_k^*(s)}{s-z} \frac{f(s)\mathrm{d}s}{2\pi i s^{k+1}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\kappa_{k+1}z^{k+1}+\cdots+\kappa_0}{z^{k+1}\kappa_{k+1}} & \frac{z^{k+1}}{\kappa_{k+1}}\int_\Sigma \frac{p_{k+1}(s)}{s-z}\frac{f(s)\mathrm{d}s}{2\pi i s^{k+1}} \\ -\frac{\kappa_k(\overline{\kappa_k}+\cdots+\overline{\kappa_0}z^k)}{z^{k+1}} & -\kappa_k z^{k+1}\int_\Sigma \frac{p_k^*(s)}{s-z}\frac{f(s)\mathrm{d}s}{2\pi i s^{k+1}} \end{pmatrix}$$

Δείχνουμε τώρα ότι καθώς $z \to \infty$, το πιο πάνω συγκλίνει στο I με τάξη τουλάχιστον $\frac{1}{z}$. Ας προσδιορίσουμε πρώτα ασυμπτωτικά το στοιχείο (12). Κατ αρχάς, αν $|z| > |s| = 1$ (που φυσικά ισχύει καθώς $|z| \to +\infty$), μπορούμε να αναπτύξουμε σε γεωμετρική σειρά, και έχουμε:

$$\frac{1}{(s-z)} = \frac{1}{z\left(\frac{s}{z}-1\right)} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{s}{z}\right)^n$$

και άρα το στοιχείο που μας ενδιαφέρει είναι το

$$\frac{z^{k+1}}{\kappa_{k+1}}\int_\Sigma \frac{p_{k+1}(s)}{s-z}\frac{f(s)\mathrm{d}s}{2\pi i s^{k+1}} = -\frac{z^k}{\kappa_{k+1}}\int_\Sigma p_{k+1}(s)\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{s}{z}\right)^n\frac{1}{s^k}\frac{f(s)\mathrm{d}s}{2\pi i s}$$

$$= -\frac{1}{\kappa_{k+1}}\sum_{n=0}^{+\infty} z^{k-n}\int_\Sigma p_{k+1}(s)s^{n-k}\frac{f(s)\mathrm{d}s}{2\pi i s}$$

Για $n \leq k$, το ολοκλήρωμα είναι μηδενικό λόγω της ορθογωνιότητας ως προς το $\frac{f(s)\mathrm{d}s}{2\pi i s}$. Για $n > k$, το ολοκλήρωμα είναι φραγμένο, ενώ το z είναι υψωμένο σε αρνητική δύναμη, και καθώς $z \to \infty$, η έκφραση z^{k-n} τείνει στο 0 με ρυθμό $O(1/z)$.

Ομοίως δουλεύουμε και για το στοιχείο (22), με την παρατήρηση ότι για $s \in \Sigma, p_q^*(s) = z^q\overline{p_q(1/\bar{s})} = z^q\overline{p_q(s)}$:

$$-\kappa_k z^{k+1}\int_\Sigma \frac{p_k^*(s)}{s-z}\frac{f(s)\mathrm{d}s}{2\pi i s^{k+1}} = \kappa_k z^k\int_\Sigma s^k\overline{p_k(s)}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{s}{z}\right)^n\frac{1}{s^k}\frac{f(s)\mathrm{d}s}{2\pi i s}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} z^{k-n}\int_\Sigma \overline{p_k(s)}(\kappa_k s^n)\frac{f(s)\mathrm{d}s}{2\pi i s}$$

Για $n \neq k$, το ολοκλήρωμα μηδενίζεται λόγω ορθογωνιότητας. Για $n = k$, το ολοκλήρωμα είναι ίσο με 1, λόγω του ότι τα πολυώνυμα p_k είναι ορθομοναδιαία, και φυσικά $z^0 = 1$. Έτσι, καταλήγουμε στο ότι αν $|z| > 1$, το στοιχείο (22) είναι ίσο με 1.

Για τα άλλα δύο στοιχεία, είναι προφανές ότι όταν $z \to \infty$, το στοιχείο $\left(Y(z)z^{-(k+1)\sigma_3}\right)_{11}$ είναι $1+O(1/z)$ και το στοιχείο $\left(Y(z)z^{-(k+1)\sigma_3}\right)_{21}$ είναι $O(1/z)$.

Μοναδικότητα: Έστω $\tilde{Y}$ μια λύση του προβλήματος RH. Σημειώνουμε ότι

$$\det\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{z^{k+1}}f(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

και άρα $\det\left(\tilde{Y}_+(z)\right) = \det\left(\tilde{Y}_-(z)\right)$. Συνεπώς, η $\det\left(\tilde{Y}(z)\right)$ είναι ακέραια συνάρτηση. Αφού $\tilde{Y}(z) \to I$ όταν $z \to +\infty$, από το θεώρημα του Liouville, $\det\left(\tilde{Y}(z)\right) \equiv 1$. Έτσι, ο $\tilde{Y}$ είναι αντιστρέψιμος. Ορίζουμε $Z = Y\tilde{Y}^{-1}$. Φυσικά, $Z(z) \to I$ καθώς $z \to +\infty$, και $Z_+ = Z_-$, άρα το Z είναι επίσης ακέραιο, και έτσι ταυτοτικά ίσο με I. Δηλαδή, $Y = \tilde{Y}$.

□

Παρατήρηση 5.5.1. Σύμφωνα με τα πιο πάνω:

$$-Y_{21}(0) = \kappa_k^2$$

Εμείς για τα πολυώνυμα που σχετίζονται με την ορίζουσα Toepliz, θα ασχοληθούμε με ένα πρόβλημα αυτής της μορφής, όπου $f(z) = e^{\sqrt{\lambda}(z+z^{-1})}$, καθώς τα πολυώνυμα είναι ορθογώνια ως προς το $\frac{f(e^{i\theta})}{2\pi}\mathrm{d}\theta$. Θέτουμε $q = k+1$ και

$$\gamma = \frac{2\sqrt{\lambda}}{q}$$

Δηλαδή, το πρόβλημα που μας ενδιαφέρει πλέον είναι το εξής:

$$\begin{cases} Y(z,q) & \text{αναλυτική στο } \mathbb{C} \setminus \Sigma \\ Y_+(z,q) = Y_-(z,q)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{z^q}e^{\frac{q\gamma}{2}(z+z^{-1})} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & z \in \Sigma \\ Y(z,q) = \left(I + O\left(\frac{1}{z}\right)\right) z^{q\sigma_3} & \text{καθώς } z \to \infty \end{cases} \tag{5.5.1.2}$$

Λύνοντες αυτό το πρόβλημα, θέλουμε ουσιαστικά, σύμφωνα με την πιο πάνω παρατήρηση, να δούμε που πάει το $Y_{21}(0,q)$ όταν μεγαλώνει το q για κάθε $\gamma > 0$.

5.5.2 Πρόβλημα RH για την PII

Υπενθυμίζουμε ότι η διαφορική εξίσωση Painlevé τύπου II που σχετίζεται με την κατανομή Tracy-Widom είναι η εξής:

$$v_{xx} = 2v^3 + xv \qquad x \in \mathbb{R}$$

Θα κατασκευάσουμε ένα πρόβλημα RH που να μας δίνει τη λύση αυτής διαφορικής, v. Αρχικά θα χρειαστούμε μια κατάλληλη καμπύλη. Θέτουμε για $k \in \{0, 1, \ldots, 5\}$,

$$\Sigma_k^{PII} = \{re^{ik\pi/3} : r \geq 0\}$$

και

$$\Sigma^{PII} = \cup_{k=0}^{5} \Sigma_k^{PII}$$

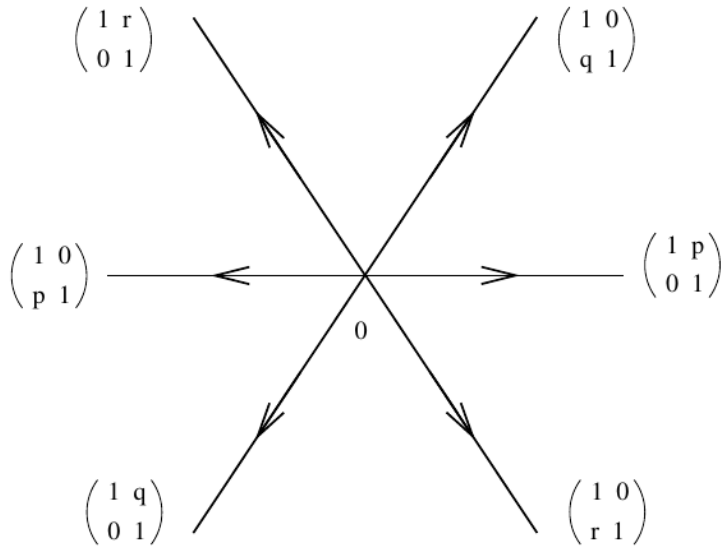
Παρατηρούμε ότι $\Sigma^{PII} = \{z \in C : \mathrm{Re}(iz^3) = 0\} = \{re^{i\theta} : \sin(3\theta) = 0\}$. Χρειάζεται επίσης να ορίσουμε έναν πίνακα άλματος $u^{PII} : \Sigma^{PII} \to M_2(\mathbb{C})$. Για κάποιους αριθμούς $p, q, r \in \mathbb{C}$ που τηρούν τις σχέσεις

$$p + q + r + pqr = 0$$

και

$$|q - \bar{p}| < 2, \quad r \in \mathbb{R}$$

κατασκευάζουμε τον πίνακα άλματος u^{PII} όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα:



Έστω $x \in \mathbb{R}$. Για $z \in \Sigma^{PII} \setminus \{0\}$ θέτουμε

$$u_x^{PII}(z) = e^{-\theta_{PII}\sigma_3} u^{PII}(z) e^{\theta_{PII}\sigma_3}$$

όπου

$$\theta_{PII} \equiv \frac{4z^3}{3} + xz$$

Από την πιο πάνω παρατήρηση ξέρουμε ότι $\Sigma^{PII} = \left\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\left(i\frac{4}{3}z^3\right) = 0\right\}$. Για $z \in \mathbb{R}$, καθώς $z \to \infty$, το $u_x^{PII} - I$ είναι περιοδικό και άρα δεν συγκλίνει (μάλιστα, σε άλλες ακτίνες της Σ^{PII} ενδεχομένως να απειρίζεται). Έτσι, $u_x^{PII} - I \notin L^2(\Sigma^{PII})$, και άρα δεν μπορούμε να αναμένουμε να υπάρχει λύση του προβλήματος RH $(\Sigma^{PII}, u_x^{PII})$. Για να το μετατρέψουμε σε ένα πρόβλημα που θα έχει λύση, θα στρίψουμε την καμπύλη μας αριστερόστροφα κατά κάποιο $0 < \theta_0 < \pi/3$, δηλαδή

$$\Sigma^{PII} \mapsto \Sigma_{\theta_0}^{PII} = e^{-\theta_0}\Sigma^{PII}$$

Τότε, $u_x^{PII} - I \in L^2 \cap L^\infty(\Sigma_{\theta_0}^{PII})$, και μπορούμε να αναμένουμε ότι θα υπάρχει λύση στο αντίστοιχο πρόβλημα RH. Επιπλέον, αφού το $u_x(z)$

είναι αναλυτικό, αν λύσουμε το πρόβλημα για κάποιο $0 < \theta_0 < \pi/3$, τότε θα μπορούμε εύκολα να το λύσουμε και για κάποιο άλλο $0 < \tilde{\theta_0} < \pi/3$ με χρήση της λύσης που βρήκαμε για το θ_0. Έστω λοιπόν ότι σταθεροποιούμε ένα τέτοιο θ_0 και κάποιο $x \in \mathbb{R}$. Δεδομένων αυτών, κατασκευάζουμε το εξής πρόβλημα RH:

$$\begin{cases} m_{\theta_0}^{PII}(z), & \text{αναλυτική στο } \mathbb{C} - \Sigma_{\theta_0}^{PII} \\ (m_{\theta_0})_+(z) = (m_{\theta_0})_-(z) u_x^{PII}(z), & z \in \Sigma_{\theta_0}^{PII} - \{0\} \\ m_{\theta_0}^{PII}(z) \to I, & \text{καθώς } |z| \to +\infty \end{cases}$$

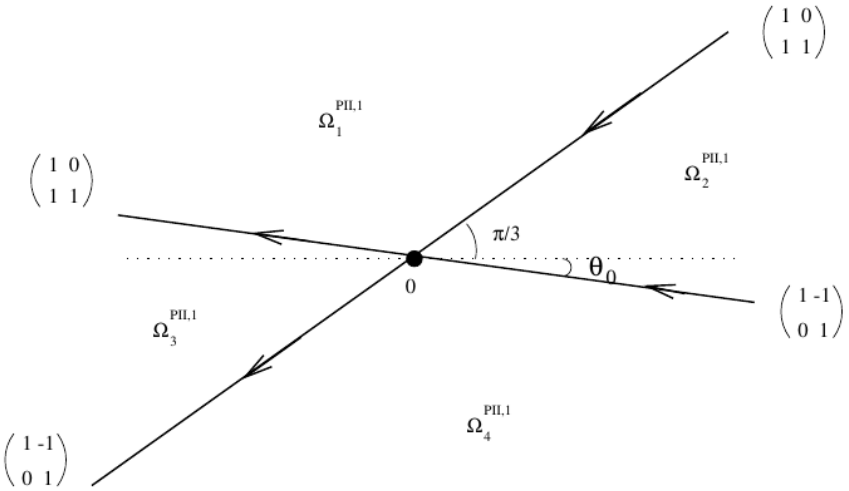
Ονομάζουμε $m_1^{PII}(x)$ τον συντελεστή του υπολοίπου τάξης $1/z$ της λύσης του πιο πάνω, $m_{\theta_0}(z)$, δηλαδή

$$m_{\theta_0}(z) = I + \frac{m_1^{PII}(x)}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \quad \text{καθώς } |z| \to +\infty$$

Σύμφωνα με τα [12], [13], αν v η λύση της εξίσωσης PII, τότε

$$v(x) = 2im_{1,12}^{PII}(x) = -2im_{1,21}^{PII}$$

Επιπλέον, το m_1^{PII} είναι ανεξάρτητο από την επιλογή του θ_0. Μπορούμε να επιλέξουμε όποια p, q, r πληρούν τις συνθήκες που αναφέρθηκαν πιο πάνω. Ας θέσουμε $p = -q = 1, r = 0$. Με αυτή την επιλογή, ονομάζουμε την καμπύλη μας $\Sigma_{\theta_0}^{PII,1}$ και οι ακτίνες της γίνονται 4 αντί για 6. Μπορούμε επίσης να αντιστρέψουμε τη φορά ακτινών, ώστε η καμπύλη και ο $u_{\theta_0}^{PII,1}$ παίρνουν την εξής μορφή:



Η λύση εξακολουθεί να υπάρχει και να είναι μοναδική. Η απόδειξη για αυτό μπορεί να βρεθεί στο [14]. Η λύση $m_{\theta_0}^{PII,1}(z, x)$ μάλιστα αλλά και η αντίστροφή της έχουν την ιδιότητα της ομοιόμορφης φραγής στο $(z, x) \in (\mathbb{C} - \Sigma_{\theta_0}^{PII,1}) \times [-M, M]$ για κάθε σταθερό $M > 0$.

Θεωρούμε γνωστή την ασυμπτωτική συμπεριφορά της λύσης της PII, $v = 2im_{1,12}^{PII,1}$, δηλαδή ότι αν Ai η συνάρτηση Airy, τότε

$$v(x) = -\mathrm{Ai}(x) + O\left(x^{-1/4}e^{-(4/3)x^{3/2}}\right) \qquad \text{καθώς } x \to +\infty$$

$$v(x) = -\sqrt{\frac{-x}{2}}\left(1 + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \qquad \text{καθώς } x \to -\infty$$

$$\mathrm{Ai}(x) \sim \frac{e^{-2/3x^{3/2}}}{2\sqrt{\pi}x^{1/4}} \qquad \text{καθώς } x \to +\infty$$

Για να δειχθεί αυτό χρησιμοποιείται το πρόβλημα RH που έχουμε κατασκευάσει. Μάλιστα, από την απόδειξη στο [15] μπορούμε να αντλήσουμε επίσης ότι

$$m_{1,22}^{PII}(x) = O\left(x^{-1/4}e^{-(4/3)x^{3/2}}\right) \qquad \text{καθώς } x \to +\infty$$

$$m_{1,22}^{PII}(x) \sim \frac{i}{8}x^2 \qquad \text{καθώς } x \to -\infty$$

και ότι

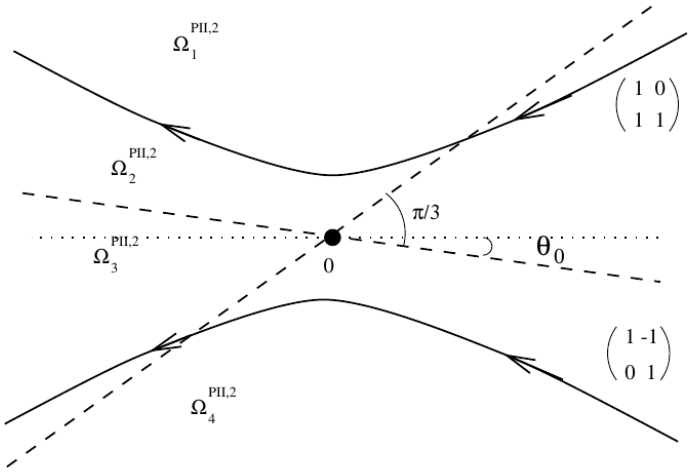
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}2im_{1,22}^{PII,1}(x) = v^2(x)$$

κάτι που δείχνει ότι η $2im_{1,22}^{PII,1}$ λαμβάνει πραγματικές τιμές.

Τώρα, θα τροποποιήσουμε το πιο πάνω πρόβλημα RH ώστε να φτιάξουμε κάτι που θα εμφανιστεί οριακά στο πρόβλημα που προσπαθούμε να λύσουμε. Συγκεκριμένα, θεωρούμε μια καμπύλη $\Sigma^{PII,2}$ και ένα $u^{PII,2}$ που είναι της γενικής μορφής που φαίνεται στο συνεχές κομμάτι του σχήματος 5.1.: Το ένα τμήμα της καμπύλης πρέπει να είναι στο $\mathbb{C}_+$ και το άλλο στο $\mathbb{C}_-$, και ασυμπτωτικά πρέπει να προσεγγίζει ευθείες που ανήκουν στο χωρίο $\{z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \pi/3\} \cup \{z \in \mathbb{C} : 2\pi/3 < \arg z < 4\pi/3\}$. Η $\Sigma^{PII,2}$ μαζί με την τον περιστραμμένο κατά θ_0 πραγματικό άξονα, δηλαδή την ευθεία $\{z \in \mathbb{C} : z = re^{i\theta_0}, r \in \mathbb{R}\}$, χωρίζουν το μιγαδικό επίπεδο σε 4 ξένα κομμάτια, τα $\Omega_k^{PII,2}, k = 1, 2, 3, 4$ όπως φαίνεται στο πιο πάνω σχήμα. Με βάση αυτά, ορίζουμε:

$$\begin{cases} m^{PII,2} = m_{\theta_0}^{PII,1}e^{-i\theta_{PII}ad\sigma_3}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{-1} & \text{στο } \Omega_1^{PII,2} \cap \Omega_2^{PII,1} \\ m^{PII,2} = m_{\theta_0}^{PII,1}e^{-i\theta_{PII}ad\sigma_3}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} & \text{στο } \Omega_2^{PII,2} \cap \Omega_2^{PII,1} \\ m^{PII,2} = m_{\theta_0}^{PII,1}e^{-i\theta_{PII}ad\sigma_3}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{-1} & \text{στο } \Omega_3^{PII,2} \cap \Omega_4^{PII,1} \\ m^{PII,2} = m_{\theta_0}^{PII,1}e^{-i\theta_{PII}ad\sigma_3}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix} & \text{στο } \Omega_4^{PII,2} \cap \Omega_3^{PII,1} \\ m^{PII,2} = m_{\theta_0}^{PII,1} & \text{αλλού} \end{cases}$$

Σχήμα 5.1:



Σχετικά εύκολα μπορεί κανείς να επιβεβαιώσει ότι η $m^{PII,2}$ είναι λύση του εξής προβλήματος RH:

$$\begin{cases} m^{PII,2} & \text{αναλυτική στο } \mathbb{C} - \Sigma^{PII,2} \\ m_+^{PII,2} = m_-^{PII,2} u_x^{PII,2} & \text{στο } \Sigma^{PII,2} \\ m^{PII,2}(z) \to I & \text{καθώς } |z| \to +\infty \end{cases} \tag{5.5.2.1}$$

όπου $u_x^{PII} = e^{-i\theta_{PII} ad\sigma_3} u^{PII}$. Φυσικά αυτό το πρόβλημα RH είναι ισοδύναμο με το προηγούμενο, καθώς λύση του ενός μας δίνει με έναν απλό μετασχηματισμό και λύση του άλλου. Επίσης, όσον αφορά στο συντελεστή του $1/z$ καθώς $|z| \to +\infty$,

$$(m_{\theta_0}^{PII,1})_1 = m_1^{PII,2} \tag{5.5.2.2}$$

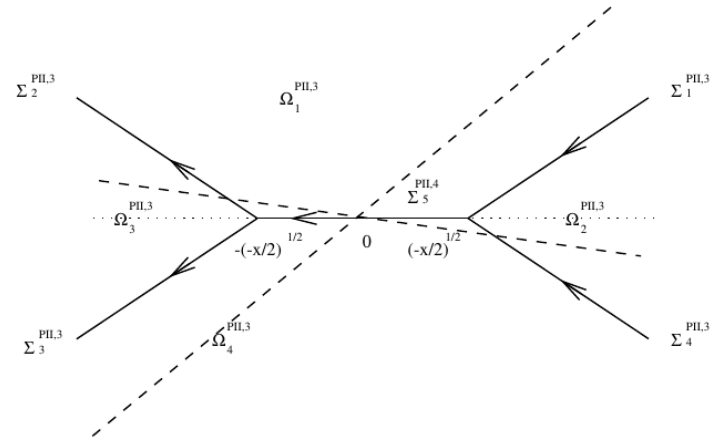
Τέλος, όπως και προηγουμένως

$$\begin{cases} \text{για κάθε } M > 0, \text{ η } m^{PII,2}(z,x) \text{ και η αντίστροφή της είναι} \\ \text{ομοιόμορφα φραγμένη στο } (\mathbb{C} - \Sigma^{PII,2}) \times [-M, M]. \end{cases} \tag{5.5.2.3}$$

Ένα άλλο ισοδύναμο πρόβλημα, το οποίο αφορά αποκλειστικά σε $x < 0$, έχει για καμπύλη την

$$\Sigma^{PII,3} = \cup_{k=1}^{5} \Sigma^{PII,3}$$

που αποτελείται όπως φαίνεται στο συνεχές κομμάτι στο πιο κάτω σχήμα από πέντε καμπύλες, τέσσερις εκ των οποίων είναι μη φραγμένες και μια φραγμένη:



Στο σχήμα αυτό, όπως πριν, με διακεκομμένες γραμμές έχουμε την $\Sigma_{\theta_0}^{PII,1}$ για κάποιο σταθερό, μικρό θ_0. Ορίζονται επίσης όπως φαίνεται στο σχήμα τα χωρία $\Omega_k, k = 1, \ldots, 5$. Οι μη φραγμένες γραμμές φροντίζουμε να σχηματίζουν γωνία με τον πραγματικό άξονα μικρότερη του $\pi/3$. Θέτουμε

$$g^{PII}(z) = \frac{4}{3}\left(z^2 + \frac{x}{2}\right)^{3/2}$$

Η συνάρτηση αυτή είναι αναλυτική στο $\mathbb{C} - \left[-\sqrt{\frac{x}{2}}, \sqrt{\frac{-x}{2}}\right]$ και συμπεριφέρεται όπως η $\frac{4}{3}z^3 + xz + \frac{x^2}{8z} + O\left(\frac{1}{z^3}\right)$ καθώς $z \to \infty$. Συνεπώς για κάθε $M > 0$,

$$\text{Η } e^{i(g^{PII}(z) - \theta_{PII(z)})} \text{ είναι φραγμένη για } (z, x) \in \mathbb{C} - \left[-\sqrt{\frac{x}{2}}, \sqrt{\frac{-x}{2}}\right] \times [-M, 0] \tag{5.5.2.4}$$

και

$$e^{i(g^{PII}(z) - \theta_{PII(z)})} \xrightarrow{z \to \infty} 1 \text{ ομοιόμορφα για } -M \leq x \leq 0 \tag{5.5.2.5}$$

Ορίζουμε την $m^{PII,3}$ ως:

$$m^{PII,3} = \begin{cases} m_{\theta_0}^{PII,1}[e^{-i(\theta_{PII})ad\sigma_3}\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{smallmatrix}\right)^{-1}]e^{i(g^{PII}(z)-\theta_{PII(z)})\sigma_3} & \text{στο } \Omega_1^{PII,3} \cap (\Omega_2^{PII,1} \cup \Omega_3^{PII,1}) \\ m_{\theta_0}^{PII,1}[e^{-i(\theta_{PII})ad\sigma_3}\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{smallmatrix}\right)]e^{i(g^{PII}(z)-\theta_{PII(z)})\sigma_3} & \text{στο } \Omega_3^{PII,3} \cap \Omega_1^{PII,1} \\ m_{\theta_0}^{PII,1}[e^{-i(\theta_{PII})ad\sigma_3}\left(\begin{smallmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)^{-1}]e^{i(g^{PII}(z)-\theta_{PII(z)})\sigma_3} & \text{στο } \Omega_2^{PII,3} \cap \Omega_4^{PII,1} \\ m_{\theta_0}^{PII,1}[e^{-i(\theta_{PII})ad\sigma_3}\left(\begin{smallmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)^{-1}]e^{i(g^{PII}(z)-\theta_{PII(z)})\sigma_3} & \text{στο } \Omega_4^{PII,3} \cap (\Omega_2^{PII,1} \cup \Omega_3^{PII,1}) \\ m_{\theta_0}^{PII,1} & \text{αλλού} \end{cases}$$

Τότε, από τις σχέσεις που ξέρουμε για την $m_{\theta_0}^{PII,1}$, προκύπτει ότι η $m^{PII,3}$ λύνει το νέο πρόβλημα RH $(\Sigma^{PII,3}, u_x^{PII,3})$:

$$\begin{cases} m^{PII,3} & \text{αναλυτική στο } \mathbb{C} - \Sigma^{PII,3} \\ m_+^{PII,3} = m_-^{PII,3} u_x^{PII,3} & \text{στην } \Sigma^{PII,3} \\ m^{PII,3} \to I & \text{καθώς } z \to \infty \end{cases} \tag{5.5.2.6}$$

όπου το $u_x^{PII,3}$ είναι

$$u_x^{PII,3} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e^{2ig^{PII}} & 1 \end{pmatrix} & \text{στο } \Sigma_1^{PII,3}, \Sigma_2^{PII,3} \\ \begin{pmatrix} 1 & -e^{-2ig^{PII}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{στο } \Sigma_3^{PII,3}, \Sigma_4^{PII,3} \\ \begin{pmatrix} -e^{-2ig^{PII}} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \text{στο } \Sigma_5^{PII,3} \end{cases} \tag{5.5.2.7}$$

Επιπλέον, έχουμε ότι

$$m_1^{PII} = m_1^{PII,3} - \left(\frac{ix^2}{8}\sigma_3\right) \tag{5.5.2.8}$$

για τα αντίστοιχα υπόλοιπα των $m_{\theta_0}^{PII,1}$ και $m^{PII,3}$ στο $+\infty$. Τέλος, από τις 5.5.2.1 και 5.5.2.4, καταλήγουμε στο ότι για κάθε $M \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} \text{Η } m^{PII,3}(z,x) \text{ και η αντίστροφή της είναι ομοιόμορφα φραγμένες} \\ \text{για } (z,x) \in (\mathbb{C} - \Sigma^{PII,3}) \times [-M, 0] \end{cases} \tag{5.5.2.9}$$

Πιο κάτω θα συνδέσουμε τα τελευταία δύο προβλήματα RH οριακά με προβλήματα RH ισοδύναμα με αυτό που αναπτύξαμε στο προηγούμενο υποκεφάλαιο, που περιγράφει την συμπεριφορά της l_N.

5.6 Μέτρο ισορροπίας

Σε επόμενη φάση θα επαναμετασχηματίσουμε καταλλήλως το πρόβλημα RH 5.5.1.2. ώστε οι εκθετικά αύξοντες όροι στον πίνακα άλματος u του αρχικού προβλήματος να αντικατασταθούν από ταλαντευόμενους(περιοδικούς) ή εκθετικά φθίνοντες όρους.

Έστω μ ένα μέτρο πιθανότητας στον μοναδιαίο κύκλο Σ. Ορίζουμε

$$g_\mu(z) = g(z) \equiv \int_\Sigma \log(z-s)\mathrm{d}\mu(s)$$

όπου για κάθε $s = e^{i\theta}$ επιλέγουμε το πεδίο ορισμού του μιγαδικού λογαρίθμου ώστε το $\log\left(z - e^{i\theta}\right)$ να είναι αναλυτική συνάρτηση του z στο $\mathbb{C} - (-\infty, -1\ ] \cup \{e^{it} : -\pi < t < \theta\}$. Επιπλέον, για πραγματικά z, $\log\left(z - e^{i\theta}\right) \sim \log(z)$.

Λήμμα 5.6.1. Έστω μ απολύτως συνεχές μέτρο πιθανότητας στο Σ με $\mathrm{d}\mu(z) = u(\theta)\mathrm{d}\theta$ και $u(\theta) = u(-\theta)$. Τότε ισχύουν τα πιο κάτω:

1. Η g είναι αναλυτική στο $\mathbb{C} - \Sigma \cup (-\infty, -1)$.
2. $g_+(z) - g_-(z) = 2\pi i$ στο $(-\infty, -1)$.
3. $g(z) = \log z + O\left(\frac{1}{z}\right)$ καθώς $z \to \infty$.

4. Η e^{qg} είναι αναλυτική στο $\mathbb{C} - \Sigma$.
5. $e^{qg(z)} = z^q \left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right)$ καθώς $z \to \infty$
6. $g(0) = \pi i$.
7. $g_+(z) + g_-(z) = 2\int_{-\pi}^{\pi} \log|z - s| \mathrm{d}\mu(s) + i(\arg(z) + \pi)$ στο Σ.
8. $g_+(z) - g_-(z) = 2\pi i \int_{\arg z}^{\pi} \mathrm{d}\mu(s)$ στο Σ.

Απόδειξη

Τα πρώτα 5 σημεία είναι προφανή. Για το 6.:

$$g(0) = \int_\Sigma \log(-s)\mathrm{d}z = \int_{-\pi}^{\pi} \log\left(e^{i(\theta+\pi)}\right) u(\theta)\mathrm{d}\theta = \int_{-\pi}^{\pi} i(\theta + \pi)u(\theta)\mathrm{d}\theta = \pi i$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το ότι η u είναι άρτια.

Όσον αφορά στο 7., σταθεροποιούμε κάποιο $z = e^{i\varphi} \in \Sigma$. Τότε, το $\arg(z - e^{i\theta})$ είναι αναλυτική αν $-\pi < \theta < \varphi$, και

$$g_+(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \log|z - e^{i\theta}| \mathrm{d}\mu(z) + i\int_{-\pi}^{\varphi} \arg(z - e^{i\theta})\mathrm{d}\mu(z) + i\int_{\varphi}^{\pi} \arg_+(z - e^{i\theta})\mathrm{d}\mu(z)$$
$$g_-(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \log|z - e^{i\theta}| \mathrm{d}\mu(z) + i\int_{-\pi}^{\varphi} \arg(z - e^{i\theta})\mathrm{d}\mu(z) + i\int_{\varphi}^{\pi} \arg_-(z - e^{i\theta})\mathrm{d}\mu(z)$$

Σημειώνουμε ότι για $\varphi < \theta < \pi$,

$$\arg_+(e^{i\varphi} - e^{i\theta}) - \arg_-(e^{i\varphi} - e^{i\theta}) = 2\pi$$

Αθροίζουμε κατά μέλη και προκύπτει:

$$g_+(z)+g_-(z) = 2\int_{-\pi}^{\pi} \log|z-e^{i\theta}| \mathrm{d}\mu(z) + 2i\int_{-\pi}^{\varphi} \arg(z-e^{i\theta})\mathrm{d}\mu(z) - i\int_{\varphi}^{\pi} 2\pi \mathrm{d}\mu(z)$$

Θέτουμε

$$F(\varphi) = 2\int_{-\pi}^{\varphi} \arg(e^{i\varphi}-e^{i\theta})\mathrm{d}\mu(z) + 2\int_{\varphi}^{\pi} \arg_+(e^{i\varphi}-e^{i\theta})\mathrm{d}\mu(z) - 2\pi\int_{\varphi}^{\pi} \mathrm{d}\mu(z) - \varphi$$

Αρκεί να δείξουμε ότι $F(\varphi) \equiv \pi$. Σημειώνουμε ότι

- $\arg(e^{i\varphi} - e^{i\varphi_-}) = \varphi + \frac{\pi}{2}$
- $\arg(e^{i\varphi} - e^{i\varphi_+}) = \varphi + \frac{3\pi}{2}$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi} \arg(e^{i\varphi} - e^{i\theta}) \equiv \frac{1}{2}$

Αυτό σημαίνει ότι

$$F'(\varphi) = 2\arg(e^{i\varphi} - e^{i\varphi_-})u(\varphi) - 2\arg_+(e^{i\varphi} - e^{i\varphi_+})u(\varphi) + 2\pi u(\varphi) \equiv 0$$

Αυτό, σε συνδυασμό με το ότι $F(\pi) = \pi$ μας λέει ότι $F(\varphi) \equiv \pi$. Τέλος, για το 8.,

$$\begin{aligned} g_+(z) - g_-(z) &= i\int_{\varphi}^{\pi} [\arg_+(e^{i\varphi} - e^{i\theta}) - \arg_-(e^{i\varphi} - e^{i\theta})]\mathrm{d}\mu(z) \\ &= i\int_{\varphi}^{\pi} 2\pi \mathrm{d}\mu(z) \end{aligned}$$

□

Τώρα, θέτουμε

$$M = \{p | p \text{ μέτρο πιθανότητας στο } \Sigma\}$$

Έστω V το δυναμικό $V : \Sigma \to \mathbb{C}$ και $V(z) = -\frac{\gamma}{2}(z + z^{-1})$. Για κάθε $\mu \in M$ ορίζεται το

$$I_\mu = \int \int_{\Sigma \times \Sigma} \log |z - s|^{-1} \mathrm{d}\mu(z) \mathrm{d}\mu(s) + \int_\Sigma V(z) \mathrm{d}\mu(z)$$

Αποδεικνύεται ότι το $\inf_{\mu \in M} \{I_\mu\}$ 'πιάνεται' σε μοναδικό σημείο. Ονομάζουμε το μέτρο στο οποίο επιτυγχάνεται 'μέτρο ισορροπίας' και το συμβολίζουμε με μ_V. Λίγο πιο κάτω το υπολογίζουμε επακριβώς. Μια ενδιαφέρουσα σημείωση είναι ότι το $\inf_{\mu \in M} \{I_\mu\}$ είναι μια μοντελοποίηση που περιγράφει την κατάσταση ισορροπίας σε ένα σύστημα κατά το οποίο υπάρχουν ηλεκτρόνια στον μοναδιαίο κύκλο Σ που αλληλεπιδρούν με δυνάμεις Coulomb και που δέχονται την επίδραση του δυναμικού V.

Επιπλέον, αν J το στήριγμα του μέτρου μ_V, τότε αποδεικνύεται ότι τα μ_V και J προσδιορίζονται μοναδικά από τις εξής συνθήκες Euler-Lagrange, δηλαδή: υπάρχει κάποιο $l \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$2 \int_\Sigma \log |z - s| \mathrm{d}\mu_V(s) - V(z) + l = 0 \qquad \text{για } z \in \bar{J} \tag{5.6.0.1}$$

$$2 \int_\Sigma \log |z - s| \mathrm{d}\mu_V(s) - V(z) + l \leq 0 \qquad \text{για } z \in \Sigma - \bar{J} \tag{5.6.0.2}$$

Έτσι, πλέον ορίζουμε την $g : \Sigma \to \mathbb{C}$ όπου

$$g(z) = g_{\mu_V}(z) \equiv \int_\Sigma \log(z - s) \mathrm{d}\mu_V(s)$$

Χρησιμοποιούμε το πιο πάνω για να ορίσουμε:

$$m^{(1)}(z) \equiv e^{\frac{ql}{2}\sigma_3} Y(z) e^{-qg(z)\sigma_3} e^{-\frac{ql}{2}\sigma_3} \tag{5.6.0.3}$$

όπου $Y(z)$ η λύση στο πρόβλημα RH 5.5.1.1. Φυσικά αυτό σημαίνει ότι

$$Y(z) = e^{-\frac{ql}{2}\sigma_3} m^{(1)} e^{qg(z)\sigma_3} e^{\frac{ql}{2}\sigma_3} \tag{5.6.0.4}$$

Με χρήση του λήμματος 5.6.1. μπορούμε σχετικά εύκολα να επιβεβαιώσουμε ότι το $m^{(1)}$ είναι λύση του καινούργιου προβλήματος RH:

$$\begin{cases} m^{(1)}(z) & \text{αναλυτική στο } \mathbb{C} - \Sigma \\ m_+^{(1)}(z) = m_-^{(1)}(z) u^{(1)} & \text{στο } \Sigma \\ m^{(1)}(z) = I + O\left(\frac{1}{z}\right) & \text{καθώς } z \to \infty \end{cases} \tag{5.6.0.5}$$

Υπενθυμίζουμε ότι σύμφωνα με την παρατήρηση 5.5.1. ψάχνουμε το $-Y_{21}(0, q)$, ή με τα νέα δεδομένα:

$$\kappa_k^2 = \kappa_{q-1}^2 = -Y_{21}(0, q) = -m_{21}^{(1)}(0) e^{ql} e^{qg(0)} = -(-1)^q m_{21}^{(1)}(0) e^{ql} \tag{5.6.0.6}$$

Έτσι, αρκεί να λύσουμε το πιο πάνω πρόβλημα RH. Όπως υποσχεθήκαμε πιο πάνω, αυτό το πρόβλημα είναι πιο ευεπίλυτο, και για να το δούμε αυτό, αρκεί να παρατηρήσουμε τη συμπεριφορά του πίνακα άλματος, $u^{(1)}$. Πράγματι, χρησιμοποιούμε και πάλι το λήμμα 5.6.1. και με μερικές πράξεις έχουμε ότι:

$$u^{(1)}(z) = \begin{cases} \begin{pmatrix} e^{-2\pi q i \int_{\arg z}^{\pi} \mathrm{d}\mu_V(\theta)} & (-1)^q \\ 0 & e^{2\pi q i \int_{\arg z}^{\pi} \mathrm{d}\mu_V(\theta)} \end{pmatrix} & \text{για } z \in J \\ \begin{pmatrix} e^{-2\pi q i \int_{\arg z}^{\pi} \mathrm{d}\mu_V(\theta)} & (-1)^q e^{q\left[2\int_{-\pi}^{\pi} \log|z-e^{i\theta}|\mathrm{d}\mu_V(\theta) - V(z) + l\right]} \\ 0 & e^{2\pi q i \int_{\arg z}^{\pi} \mathrm{d}\mu_V(\theta)} \end{pmatrix} & \text{για } z \in \Sigma - J \end{cases} \tag{5.6.0.7}$$

Ενδεικτικά, χωρίς να παρουσιάζουμε τις πράξεις, το $u_{12}^{(1)}(z)$ υπολογίζεται με το σημείο 7 του πιο πάνω λήμματος. Για $z \in J$ από την σχέση 5.6.0.1 προκύπτει το ζητούμενο $u_{12}^{(1)}(z)$. Τα $u_{11}^{(1)}(z), u_{22}^{(1)}(z)$ υπολογίζονται με το σημείο 8. Σύμφωνα με την σχέση 5.6.0.2, στο $\Sigma - \bar{J}$ έχουμε αρνητικό εκθέτη στο $u_{22}^{(1)}(z)$, άρα είναι ένας όρος που φθίνει όταν το $q \to +\infty$, ενώ οι υπόλοιποι όροι ταλαντώνονται.

Ολοκληρώνουμε το υποκεφάλαιο με τον υπολογισμό αυτού του μέτρου ισορροπίας $\mathrm{d}\mu_V$ στο πιο κάτω λήμμα.

Λήμμα 5.6.2. Για το δυναμικό $V : \Sigma \to \mathbb{C}$ όπου $V(z) = -\frac{\gamma}{2}(z + z^{-1})$, το μέτρο ισορροπίας μ_V και η σταθερά l εκφράζονται ως εξής:

- Αν $0 \leq \gamma \leq 1$, τότε
$$\mathrm{d}\mu_V(\theta) = \frac{1}{2\pi}(1 + \gamma\cos\theta)\mathrm{d}\theta$$
και $l = 0$.
- Αν $\gamma > 1$, τότε
$$\mathrm{d}\mu_V(\theta) = \frac{\gamma}{\pi}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sqrt{\frac{1}{\gamma} - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\mathbb{1}_{[-\theta_c,\theta_c]}(\theta)\mathrm{d}\theta$$
και $l = -\gamma + \log\gamma + 1$,
όπου $\sin^2\frac{\theta_c}{2} = \frac{1}{\gamma}, 0 < \theta_c < \pi$. Σε αυτή την περίπτωση, η ανισότητα 5.6.0.2 είναι αυστηρή.

Απόδειξη

Το μέτρο ισορροπίας εξαρτάται από την σταθερά γ, καθώς το δυναμικό V εξαρτάται από αυτήν. Ας θεωρήσουμε τις περιπτώσεις που ορίζονται στο λήμμα. Έστω $0 \leq \gamma \leq 1$. Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι η $f : [-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ με $f(\theta) = \frac{1}{2\pi}(1 + \gamma\cos\theta)$ είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, καθώς η F με $F(x) = \int_{-\pi}^{x} f(\theta)\mathrm{d}\theta$ είναι συνεχής, αύξουσα (διότι $0 \leq \gamma \leq 1$ και άρα η ολοκληρωτέα ποσότητα είναι θετική) και $F(-\pi) = 0, F(\pi) = 1$.

Όπως αναφέραμε πιο πάνω, για να δείξουμε ότι πράγματι αυτό είναι το μέτρο ισορροπίας, αρκεί να δείξουμε ότι ικανοποιεί τις συνθήκες 5.6.0.1/2. Έχουμε

$$\begin{aligned} g(z) &= \int_{-\pi}^{\pi} \log\left(z - e^{i\theta}\right) \frac{1}{2\pi}(1 + \gamma\cos\theta)\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Sigma} \log(z-s)\left(1 + \frac{\gamma}{2}(s + s^{-1})\right)\frac{\mathrm{d}s}{s} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Sigma} \log(z-s)\left(\frac{1}{s} + \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2s^2}\right)\mathrm{d}s \end{aligned}$$

και άρα

$$\begin{aligned} g'(z) &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{z - e^{i\theta}}\frac{1}{2\pi}(1 + \gamma\cos\theta)\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Sigma} \frac{1}{z-s}\left(\frac{1}{s} + \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2s^2}\right)\mathrm{d}s \end{aligned}$$

Αν $|z| < 1$, υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα $g'(z)$. Για να το κάνουμε αυτό, θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων του Cauchy(ΘΟΥ). Οι πόλοι της ολοκληρωτέας συνάρτησης h με

$$h(s) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z-s}\left(\frac{1}{s} + \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2s^2}\right)$$

είναι το $s = 0$ (τάξης 2) και $s = z$ (απλός πόλος). Υπολογίζουμε τα αντίστοιχα ολοκληρωτικά υπόλοιπα:

$$\begin{aligned} 2\pi i\,\mathrm{Res}(h,0) &= \lim_{s\to 0}[(s^2 h(s))'] = \lim_{s\to 0}\left[\left(\frac{1}{z-s}\left(s + \frac{s^2\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2}\right)\right)'\right] \\ &= \lim_{s\to 0}\left[\frac{1}{(z-s)^2}\left(s + \frac{s^2\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2}\right) + \frac{1}{z-s}(1+\gamma s)\right] \\ &= \frac{\gamma}{2z^2} + \frac{1}{z} \\ 2\pi i\,\mathrm{Res}(h,z) &= \lim_{s\to z}[(s-z)h(s)] = \lim_{s\to z}\left[-\left(\frac{1}{s} + \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2s^2}\right)\right] \\ &= -\frac{1}{z} - \frac{\gamma}{2} - \frac{\gamma}{2z^2} \end{aligned}$$

Από το ΘΟΥ,

$$g'(z) = 2\pi i(\mathrm{Res}(h,0) + \mathrm{Res}(h,z)) = -\frac{\gamma}{2}$$

Λόγω της αναλυτικότητας της g στο $\mathbb{C} - \Sigma \cup (-\infty, -1)$,

$$g(z) = -\frac{\gamma z}{2} + c$$

Επιπλέον, από το 5ο σημείο του λήμματος 5.6.1., $g(0) = \pi i$. Έτσι, υποχρεωτικά, $g(z) = -\dfrac{\gamma z}{2} + \pi i$.

Αν $|z| > 1$ και $z \notin (-\infty, -1)$ ώστε να ορίζεται ο μιγαδικός λογάριθμος και να είναι αναλυτική η g, τότε μοναδικός πόλος της h είναι το $s = 0$, και είναι δευτέρας τάξης. Έτσι, αν h η ολοκληρωτέα συνάρτηση αυτή τη φορά στην g, τότε

$$\operatorname{Res}(h, 0) = \lim_{s \to 0} \left[(s^2 h(s))' \right] = \frac{1}{2\pi i} \left(\log z - \frac{\gamma}{2z} \right)$$

Έτσι,

$$g(z) = 2\pi i \operatorname{Res}(h, 0) = \log z - \frac{\gamma}{2z}$$

Συνοψίζοντας:

$$g(z) = \begin{cases} \log z - \dfrac{\gamma}{2z} & |z| > 1, z \notin (-\infty, -1), \\ -\dfrac{\gamma z}{2} + \pi i & |z| < 1. \end{cases}$$

Δηλαδή,

$$g_+(z) + g_-(z) = \log z - \frac{\gamma}{2}(z + z^{-1}) + \pi i$$

Και πάλι από το λήμμα 5.6.1., και συγκεκριμένα από το 7ο σημείο, φτάνουμε στο συμπέρασμα ότι

$$2 \int_{-\pi}^{\pi} \log |z - s| \frac{1}{2\pi} (1 + \gamma \cos \theta) \mathrm{d}\theta + \frac{\gamma}{2}(z + z^{-1}) = 0$$

καθώς $\log z = \ln(|z|) + i \arg z$, και αφού $z \in \Sigma, |z| = 1$, άρα $\ln(|z|) = 0$. Δηλαδή, $\log z = i \arg z$. Έτσι, ισχύει η συνθήκη 5.6.0.1 για $l = 0$, ενώ η 5.6.0.2 ισχύει τετριμμένα λόγω του ότι το στήριγμα του μ_V που ορίσαμε είναι ολόκληρο το Σ. Άρα αυτό είναι πράγματι το μέτρο ισορροπίας.

Έστω τώρα ότι $\gamma > 1$. Είναι και πάλι εύκολο να δούμε ότι στο διάστημα $[-\theta_c, \theta_c] \subset [-\pi, \pi]$, η ολοκληρωτέα ποσότητα $h(\theta)$ είναι θετική, και άρα η F τ.ω. $F(x) = \int_{-\pi}^{x} h(\theta) \mathrm{d}\theta$ είναι αύξουσα. Είναι φυσικά συνεχής και θετική, και μπορούμε να ελέγξουμε ότι $F(-\pi) = 0, F(\pi) = 1$. Δηλαδή, η F είναι συνάρτηση κατανομής πιθανότητας. Η αντίστοιχη συνάρτηση g για το μέτρο που επάγεται από την F είναι η εξής:

$$\begin{aligned} g(z) &= \int_{-\theta_c}^{\theta_c} \log\left(z - e^{i\theta}\right) \frac{\gamma}{\pi} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sqrt{\frac{1}{\gamma} - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{\gamma}{4\pi i} \int_{\tilde{\Sigma}} \log(z - s) \frac{s+1}{s^2} \sqrt{(s - \xi)(s - \bar{\xi})} \mathrm{d}s \end{aligned}$$

όπου $\xi = e^{i\theta_c}$ και $\tilde{\Sigma} = \{e^{i\theta} : -\theta_c \leq \theta \leq \theta_c\}$. Επιλέγουμε τον κλάδο του λογαρίθμου ώστε να είναι αναλυτικός στο χωρίο $\mathbb{C} - \{e^{i\theta} : \theta_c \leq |\theta| \leq \pi\}$.

Έτσι,

$$g'(z) = \int_{-\theta_c}^{\theta_c} \frac{1}{s - e^{i\theta}} \frac{\gamma}{\pi} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sqrt{\frac{1}{\gamma} - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{\gamma}{4\pi i} \int_{\tilde{\Sigma}} \frac{1}{z - s} \frac{s+1}{s^2} \sqrt{(s-\xi)(s-\bar{\xi})} \mathrm{d}s$$

Χρησιμοποιώντας πάλι σε κατάλληλο χωρίο το ΘΟΥ, έχουμε ότι

$$g'(z) = \frac{1}{2z} - \frac{\gamma}{4}(1 - z^{-2}) + \frac{\gamma}{4} \frac{z+1}{z^2} \sqrt{(z-\xi)(z-\bar{\xi})}$$

Θεωρούμε τώρα μια ακολουθία $a_n \in \mathbb{C}$ με $|a_n| > 1$ τέτοια ώστε $a_n \to 1$. Ολοκληρώνοντας, με χρήση του θεμελιώδους θεωρήματος του απειροστικού λογισμού, για $|z| > 1, z \notin (-\infty, -1)$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$g(z) - g(a_n) = \frac{1}{2}\log z - \frac{\gamma}{4}(z + z^{-1}) - \frac{1}{2}\log(a_n) + \frac{\gamma}{4}(a_n + a_n^{-1}) + \frac{\gamma i}{4} \int_{a_n}^{z} \frac{s+1}{s} \sqrt{(s-\xi)(s-\bar{\xi})} \frac{\mathrm{d}s}{si}$$

Όταν περάσουμε στο όριο καθώς $n \to +\infty$,

$$g(z) = \frac{1}{2}\log z - \frac{\gamma}{4}(z + z^{-1}) + \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma i}{4} \int_{1_+}^{z} \frac{s+1}{s} \sqrt{(s-\xi)(s-\bar{\xi})} \frac{\mathrm{d}s}{si} + g_-(1)$$

Όπου υπενθυμίζουμε ότι $g_-(1)$ συμβολίζει το όριο της g όταν η τιμή 1 προσεγγίζεται από τα δεξιά της καμπύλης (στην προκειμένη περίπτωση, από το εξωτερικό της Σ).

Αντίστοιχα, θεωρούμε μια $b_n \in \mathbb{C}$ με $|b_n| < 1$ τέτοια ώστε $b_n \to 1$. Για $|z| < 1, z \notin (-1, 0]$,

$$g(z) - g(b_n) = \frac{1}{2}\log z - \frac{\gamma}{4}(z + z^{-1}) - \frac{1}{2}\log(b_n) + \frac{\gamma}{4}(b_n + b_n^{-1}) + \frac{\gamma i}{4} \int_{b_n}^{z} \frac{s+1}{s} \sqrt{(s-\xi)(s-\bar{\xi})} \frac{\mathrm{d}s}{si}$$

Όταν περάσουμε στο όριο καθώς $n \to +\infty$,

$$g(z) = \frac{1}{2}\log z - \frac{\gamma}{4}(z + z^{-1}) + \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma i}{4} \int_{1_-}^{z} \frac{s+1}{s} \sqrt{(s-\xi)(s-\bar{\xi})} \frac{\mathrm{d}s}{si} + g_+(1)$$

Εμείς θέλουμε για κάθε $z \in \Sigma$ να υπολογίσουμε όπως πιο πάνω το $g_+(z) + g_-(z)$, δηλαδή το άθροισμα της προσέγγισης 'από έξω' και 'από μέσα'. Ας υπολογίσουμε πρώτα με χρήση του γνωστού λήμματος το εξής:

$$g_+(1) + g_-(1) = 2\int_{-\theta_c}^{\theta_c} \log|1 - e^{i\theta}| \frac{\gamma}{\pi} \cos\frac{\theta}{2} \sqrt{\frac{1}{\gamma} - \sin^2\frac{\theta}{2}} + i(0 + \pi)$$

$$= \frac{4\gamma}{\pi} \int_0^{\theta_c} \log\left|2\sin\frac{\theta}{2}\right| \cos\frac{\theta}{2} \sqrt{\frac{1}{\gamma} - \sin^2\frac{\theta}{2}} + i\pi$$

$$= 2\log 2 - \log\gamma + \frac{8}{\pi}\int_0^{\pi/2} \log(\sin t)\cos^2 t \mathrm{d}t + \pi i$$

$$= 2\log 2 - \log\gamma - 1 + \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \log(\sin t)\mathrm{d}t + \pi i$$

Όπου πιο πάνω χρησιμοποιήσαμε την αλλαγή μεταβλητής τ.ω. $sin^2\frac{\theta}{2} \to \frac{1}{\gamma}\sin t$ στο ολοκλήρωμα και ολοκλήρωση κατά παράγοντες. Επιπλέον,

$$\begin{aligned}
2\int_0^{\pi/2} \log(\sin t)\mathrm{d}t &= \int_0^{\pi/2} \log(\sin t)\mathrm{d}t + \int_0^{\pi/2} \log(\cos t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi/2} \log\left(\frac{1}{2}\sin 2t\right)\mathrm{d}t \\
&= -\frac{\pi}{2}\log 2 + \int_0^{\pi/4} \log(\sin 2t)\mathrm{d}t + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \log(\sin 2t)\mathrm{d}t \\
&= -\frac{\pi}{2}\log 2 + 2\int_0^{\pi/4} \log(\sin 2t)\mathrm{d}t \\
&= -\frac{\pi}{2}\log 2 + 2\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \log(\sin t)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την αντικατάσταση $t \mapsto \pi/2 - x$ για να δείξουμε ότι $\int_0^{\pi/2}\log(\sin t) = \int_0^{\pi/2}\log(\cos t)$ και μετά με τη σειρά χρησιμοποιήσαμε τις $t \mapsto \pi/4 - x$ και $t \mapsto x/2$. Έτσι, $\int_0^{\pi/2}\log(\sin t)\mathrm{d}t = -\frac{\pi}{2}\log 2$, και άρα

$$g_+(1) + g_-(1) = -\log\gamma - 1 + \pi i$$

Υπενθυμίζουμε ότι έχουμε επιλέξει τον κλάδο ώστε να έχουμε αναλυτικότητα στο $\mathbb{C} - \{e^{i\theta} : \theta_c \le |\theta| \le \pi\}$, και άρα για να υπολογίσουμε το $g_+ + g_-$ έχουμε 2 περιπτώσεις για το z.

Πρώτη περίπτωση: $|\arg z| \le \theta_c$. Σε αυτή την περίπτωση, βρισκόμαστε στο χωρίο αναλυτικότητας και άρα

$$g_+(z) + g_-(z) = \log z - \frac{\gamma}{2}(z + z^{-1}) + \gamma + (-\log\gamma - 1 + \pi i)$$

Από το γνωστό λήμμα, από το 7ο σημείο, καταλήγουμε στο ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log|z - e^{i\theta}|\mathrm{d}\mu_V(\theta) + \frac{\gamma}{2}(z + z^{-1})\underbrace{-\gamma + \log\gamma + 1}_{l} = 0$$

Δεύτερη περίπτωση: $|\theta_c| < \arg z$. Συγκεκριμένα, αν $\theta_c < \arg z < \pi$ τότε

$$g_+(z)+g_-(z) = \log z - \frac{\gamma}{2}(z+z^{-1}) + \gamma + (-\log\gamma - 1 + \pi i) + \frac{\gamma}{2}\int_{\theta_c}^{\arg z} \frac{s+1}{s^2}\sqrt{(s-\xi)(s-\bar{\xi})}\mathrm{d}s$$

Όμως,

$$\frac{\gamma}{2}\int_{\theta_c}^{\arg z} \frac{s+1}{s^2}\sqrt{(s-\xi)(s-\bar{\xi})}\mathrm{d}s = -\frac{\gamma}{2}\int_{\theta_c}^{\arg z} \cos\frac{\theta}{2}\sqrt{\sin^2\frac{\theta}{2} - \frac{1}{\gamma}}\mathrm{d}\theta < 0$$

και άρα με βάση το γνωστό λήμμα,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log|z - e^{i\theta}| \mathrm{d}\mu_V(\theta) + \frac{\gamma}{2}(z + z^{-1}) - \gamma + \log\gamma + 1 < 0$$

Ομοίως, στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε και όταν $-\pi < \arg z < -\theta_c$.

□

Στα επόμενα δύο κεφάλαια αναλύουμε ξεχωριστά τις δύο περιπτώσεις του μέτρου ισορροπίας έτσι ώστε να αναλύσουμε το μετασχηματισμένο πρόβλημα RH με την κατάλληλη συνάρτηση g και το αντίστοιχο στήριγμα για κάθε περίπτωση.

5.7 $0 \leq \gamma \leq 1$

Όπως έχουμε δείξει πιο πάνω, όταν $0 \leq \gamma \leq 1$,

$$g(z) = \begin{cases} \log z - \dfrac{\gamma}{2z} & |z| > 1, z \notin (-\infty, -1), \\ -\dfrac{\gamma z}{2} + \pi i & |z| < 1. \end{cases}$$

και $l = 0$. Επιπλέον, το στήριγμα του μ_V είναι ολόκληρη η Σ. Σύμφωνα με τους πιο πάνω υπολογισμούς και την σχέση 5.6.0.7, ο πίνακας $u^{(1)}$ στο πρόβλημα RH που καλούμαστε να λύσουμε για αυτές τις τιμές του γ είναι ο εξής:

$$u^{(1)} = \begin{pmatrix} e^{2q\pi i \int_{\arg z}^{\pi} \mathrm{d}\mu_V(\theta)} & (-1)^q \\ 0 & e^{2\pi q i \int_{\arg z}^{\pi} \mathrm{d}\mu_V(\theta)} \end{pmatrix}$$

Επιπλέον, για το μέτρο μ_V που υπολογίσαμε έχουμε ότι:

$$\int_{\arg z}^{\pi} \mathrm{d}\mu_V(\theta) = \int_{\arg z}^{\pi} \frac{1}{2\pi}(1 + \gamma\cos\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{-\gamma\sin(\arg z) - \arg z + \pi}{2\pi}$$

Αφού $l = 0$, από την σχέση 5.6.0.6,

$$\kappa_{q-1} = -(-1)^q m_{21}^{(1)}(0) e^{ql} = -(-1)^q m_{21}^{(1)}(0)$$

Με μερικές απλές πράξεις φτάνουμε στο εξής πρόβλημα RH:

$$\begin{cases} m^{(1)}(z) & \text{αναλυτική στο } \mathbb{C} - \Sigma \\ m_+^{(1)}(z) = m_-^{(1)}(z) \begin{pmatrix} (-1)^q z^q e^{\frac{qz}{2}(z - z^{-1})} & (-1)^q \\ 0 & (-1)^q z^{-q} e^{-\frac{qz}{2}(z - z^{-1})} \end{pmatrix} & \text{στο } \Sigma \\ m^{(1)}(z) = I + O\left(\frac{1}{z}\right) & \text{καθώς } z \to \infty \end{cases} \tag{5.7.0.1}$$

Μετασχηματίζουμε για άλλη μια φορά το πρόβλημα RH που θέλουμε να επιλύσουμε, ορίζοντας την $m^{(2)}$ ως προς την $m^{(1)}$ ως εξής:

Για άρτια q,

$$\begin{cases} m^{(2)} \equiv m^{(1)} & \text{αν } |z| > 1 \\ m^{(2)} \equiv m^{(1)} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \text{αν } |z| < 1 \end{cases}$$

Για περιττά q,

$$\begin{cases} m^{(2)} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} m^{(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \text{αν } |z| > 1 \\ m^{(2)} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} m^{(1)} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \text{αν } |z| < 1 \end{cases}$$

Δεν είναι δύσκολο να επιβεβαιώσουμε ότι με αυτόν τον μετασχηματισμό έχουμε το εξής πρόβλημα RH:

$$\begin{cases} m^{(2)}(z) & \text{αναλυτική στο } \mathbb{C} - \Sigma \\ m_+^{(2)}(z) = m_-^{(2)}(z) \begin{pmatrix} 1 & -(-1)^q z^q e^{\frac{qz}{2}(z+z^{-1})} \\ (-1)^q z^{-q} e^{-\frac{qz}{2}(z+z^{-1})} & 0 \end{pmatrix} & \text{στο } \Sigma \\ m^{(2)}(z) = I + O\left(\frac{1}{z}\right) & \text{καθώς } z \to \infty \end{cases} \tag{5.7.0.2}$$

Ονομάζουμε τον πίνακα άλματος $u^{(2)}$, και με μερικές επιπλέον πράξεις βλέπουμε ότι πλέον $\kappa_{q-1} = m_{22}^{(2)}(0)$.

Θα κατασκευάσουμε τώρα μια καινούργια, κατάλληλη καμπύλη που θα χρησιμεύσει στο να μετασχηματίσουμε για άλλη μια φορά το πρόβλημά RH. Αυτή τη φορά, ο μετασχηματισμός θα μας βοηθήσει να συνδέσουμε τη λύση του προβλήματος αυτού με τη λύση του προβλήματος RH που σχετίζεται με την Painlevé II, που θα μας δώσει επί τέλους την επιθυμητή σύνδεση με την κατανομή Tracy-Widom για την περίπτωση $0 \leq \gamma \leq 1$.

Αρχικά, για κάποιο $\pi/2 < |\theta| \leq \pi$, όπου $z = \rho e^{i\theta}$ και $0 < \rho \leq 1$ (δηλαδή για μη μηδενικά z στο δεύτερο τεταρτημόριο της μοναδιαίας μπάλας στο μιγαδικό επίπεδο), ορμώμενοι από τα στοιχεία $u_{12}^{(2)}, u_{21}^{(2)}$, θέτουμε

$$F_\theta(\rho) = \mathrm{Re}(\frac{\gamma}{2}(z - z^{-1}) + \log z) = \frac{\gamma}{2}(\rho - \rho^{-1}) + \log \rho$$

Αυτή η ποσότητα ελαχιστοποιείται για

$$\rho_\theta = \frac{\sqrt{1 - \gamma^2 \cos^2 \theta} - 1}{\gamma \cos \theta}$$

και $F(\rho_\theta) < 0$ για $0 \leq \gamma < 1$ ενώ $F(\rho_\theta) < 0$ για $\pi/2 < \theta < \pi$, $F(\rho_\pi) = 0$ για $\gamma = 1$. Σημειώνουμε ότι για $|\theta| < \frac{\pi}{2}$ το ρ_θ είναι αρνητικό, κάτι που

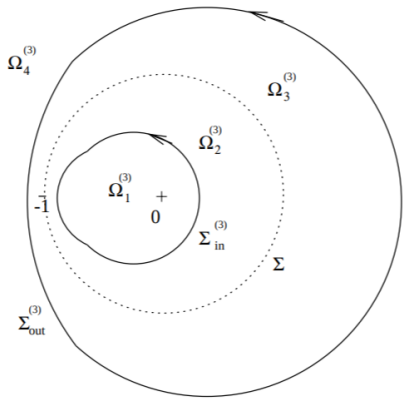
δεν θέλουμε, και άρα αμέσως πιο κάτω φροντίζουμε να κατασκευάσουμε καταλλήλως την καμπύλη για τις γωνίες αυτές.

Έστω $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$. Για $\frac{1}{2} \leq \gamma \leq 1$, ορίζουμε

$$\Sigma^{(3)}_{\text{in}}(\gamma) = \{\rho_\theta e^{i\theta} : \frac{\pi}{2} + \varepsilon \leq |\theta| \leq \pi\} \cup \{\rho_{\frac{\pi}{2}+\varepsilon} e^{i\theta} : |\theta| \leq \frac{\pi}{2} + \varepsilon\}$$

$$\Sigma^{(3)}_{\text{out}}(\gamma) = \{\rho_\theta^{-1} e^{i\theta} : \frac{\pi}{2} + \varepsilon \leq |\theta| \leq \pi\} \cup \{\rho^{-1}_{\frac{\pi}{2}+\varepsilon} e^{i\theta} : |\theta| \leq \frac{\pi}{2} + \varepsilon\}$$

Προσανατολίζουμε τις δύο καμπύλες θετικά, και προκύπτουν τα $\{\Omega^{(3)}_k\}_{k=1}^4$ - χωρία στα οποία η $\Sigma^{(3)}$ χωρίζει το μιγαδικό επίπεδο ως εξής:



Τέλος, για $0 \leq \gamma < 1/2$ θέτουμε $\Sigma^{(3)}(\gamma) = \Sigma^{(3)}(\frac{1}{2})$.

Υπενθυμίζουμε ότι οι τελεστές Cauchy για την πιο πάνω καμπύλη είναι οι $C_\pm$ ώστε

$$C_\pm(f) = \lim_{z' \to z_\pm} \int_{\Sigma^{(3)}} \frac{f(s)}{s - z'} \frac{\mathrm{d}s}{2\pi i}$$

Αποδεικνύεται ότι είναι ομοιόμορφα φραγμένοι στον $L^2(\Sigma^3(\gamma))$ για κάθε $0 \leq \gamma \leq 1$, δηλαδή, υπάρχει μια κοινή σταθερά C για όλα τα πιο πάνω γ ώστε

$$\|C_\pm\|_{L^2(\Sigma^3(\gamma)) \to L^2(\Sigma^3(\gamma))} \leq C < +\infty \tag{5.7.0.3}$$

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι όταν $\gamma \to 1$, $\rho_\theta \to \dfrac{\sin\theta - 1}{\cos\theta}$ για $z \in \Sigma_{\text{in}}$, και άρα για αυτά τα z τείνουμε να έχουμε

$$z = \frac{\sin\theta - 1}{\cos\theta}(\cos\theta + i\sin\theta)$$

συνεπώς,

$$\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z) + 1} = \frac{\sin\theta - 1}{\cos\theta}$$

Όταν παράλληλα $\theta \to \pm\pi$, ή αλλιώς $z \to -1$, έχουμε

$$\lim_{\theta \to \pm\pi} \frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z) + 1} = \pm 1$$

Κατά τον ίδιο τρόπο, για $z \in \Sigma^{(3)}_{\text{out}}$,

$$z = \frac{\cos\theta}{\sin\theta - 1}(\cos\theta + i\sin\theta)$$

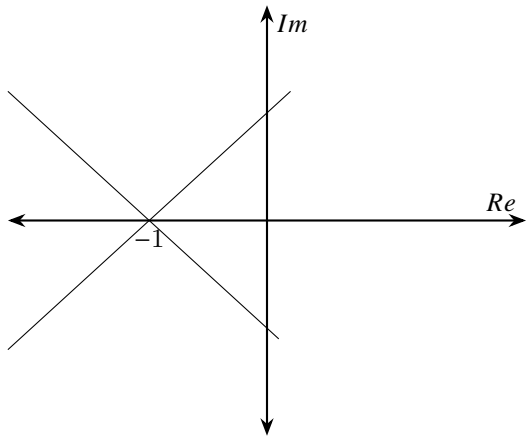
και άρα, με μερικές πράξεις,

$$\frac{\text{Im}(z)}{\text{Re}(z)+1} = \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$$

Έτσι,

$$\lim_{\theta\to\pm\pi} \frac{\text{Im}(z)}{\text{Re}(z)+1} = \pm 1$$

Αυτό μας λέει ότι κοντά στην περιοχή του $z = -1$ η $\Sigma^{(3)}$ τείνει να πάρει το σχήμα του πιο κάτω σταυρού όταν $\gamma \to 1, \theta \to \pm\pi$:



Θέλουμε να βρούμε ένα κατάλληλο πρόβλημα RH για την καμπύλη $\Sigma^{(3)}$. Παραγοντοποιούμε τον πίνακα $u^{(2)}$ ως εξής:

$$u^{(2)}(z) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (-1)^q z^{-q} e^{-\frac{q\gamma}{2}(z-z^{-1})} & 1 \end{pmatrix}}_{(b_-^{(2)})^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -(-1)^q z^q e^{\frac{q\gamma}{2}(z-z^{-1})} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{b_+^{(2)}}$$

Ορίζουμε

$$\begin{cases} m^{(3)} = m^{(2)}(b_+^{(2)})^{-1} & \text{στο } \Omega_2^{(3)} \\ m^{(3)} = m^{(2)}(b_-^{(2)})^{-1} & \text{στο } \Omega_3^{(3)} \\ m^3 = m^{(2)} & \text{στα } \Omega_1^{(3)}, \Omega_4^{(3)}. \end{cases}$$

Τότε, το $m^{(3)}$ λύνει το πρόβλημα RH στο $(\Sigma^{(3)}, u^{(3)})$, όπου

$$u^{(3)}(z) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & -(-1)^q z^q e^{\frac{q\gamma}{2}(z-z^{-1})} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{στο } \Sigma^{(3)}_{\text{in}} \\ \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (-1)^q z^{-q} e^{-\frac{q\gamma}{2}(z-z^{-1})} & 1 \end{pmatrix} & \text{στο } \Sigma^{(3)}_{\text{out}} \end{cases}$$

Έχουμε φροντίσει με την επιλογή της καμπύλης να είναι τέτοιος ο πίνακας $u^{(3)}$ ώστε το $\sup_{\left\{z\in\Sigma^{(3)}:|\arg z|<\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right\}}|u^{(3)}(z)-I|\to 0$ με εκθετικό ρυθμό όσο το $q\to+\infty$, καθώς για $|\theta|<\frac{\pi}{2}+\varepsilon$ έχουμε

$$\left|-(-1)^q z^q e^{\frac{q\gamma}{2}(z-z^{-1})}\right| = \left|e^{\frac{q\gamma}{2}(z-z^{-1})+q\log z}\right| = e^{\mathrm{Re}\{\frac{q\gamma}{2}(z+z^{-1})+q\log z\}} = e^{qF(\rho_{\frac{\pi}{2}+\varepsilon})}$$

και

$$F(\rho_{\frac{\pi}{2}+\varepsilon})<0$$

Το ότι για τα υπόλοιπα $z\in\Sigma^{(3)}$ το $u^{(3)}(z)$ τείνει στο I για $0<\gamma<1$ προκύπτει επειδή $F(\rho_\theta)<0$, όπως αναφέραμε πιο πάνω. Έτσι, $u^{(3)}(z)\to I$ καθώς $q\to+\infty$ για αυτά τα γ, ενώ όταν $\gamma\to 1$ και $\theta\to\pm\pi$, δηλαδή όσο πλησιάζουμε την περιοχή του $z=-1$, έχουμε κάποια ιδιομορφία. Με αυτό τον τρόπο, από το πιο πάνω πρόβλημα,

$$\kappa_{q-1}^2 = m_{22}^{(3)}(0)$$

Φυσικά, η $m^{(3)}$ εξαρτάται από το q. Αν στείλουμε το $q\to+\infty$, φτιάχνουμε ένα πρόβλημα RH πάνω στην ίδια την καμπύλη $\Sigma^{(3)}$ την οποία μετονομάζουμε $\Sigma^{(\infty)}$, και έχουμε

$$\begin{cases} m^{(\infty)} & \text{αναλυτική στο } \mathbb{C}-\Sigma^{(\infty)} \\ m_+^{(\infty)}(z)=m_-^{(\infty)}(z)I & \text{στο } \Sigma^{(\infty)} \\ m^{(\infty)}(z)=I+O\left(\frac{1}{z}\right) & \text{καθώς } z\to\infty \end{cases}$$

του οποίου η μοναδική λύση είναι το $m^{(\infty)}(z)\equiv I$, λόγω του θεωρήματος ταυτοτικής απεικόνισης. Έτσι, $\lim_{q\to+\infty} m_q^{(3)}(z)=m^{(\infty)}(z)=I$. Έτσι αναμένουμε ότι

$$\kappa_{q-1}^2 = m_{22}^{(3)}(0) \xrightarrow{q\to+\infty} 1$$

Ας το δείξουμε, και ας βρούμε την τάξη της σύγκλισης. Υπενθυμίζουμε ότι

$$\varphi_n(\lambda)=\varphi_n\left(\frac{\gamma^2q^2}{4}\right)=\sum_{q=n+1}^{+\infty}\log\left(\kappa_{q-1}^2\left(\frac{\gamma^2q^2}{4}\right)\right)$$

Θέλουμε να φράξουμε το $\log\left(\kappa_{q-1}^2\left(\frac{\gamma^2q^2}{4}\right)\right)$. Δεδομένου ότι $\log x\le x-1$, αρκεί να φράξουμε το $|\kappa_{q-1}^2-1|$.

Ας δούμε τρεις περιπτώσεις για το γ. Έστω στην πρώτη $0<\delta_1<1$ και $0<\gamma\le 1-\delta_1$.

$$\left\|w^{(3)}\right\|_{L^\infty} = \left\|u^{(3)}-I\right\|_{L^\infty} = \sup_\theta e^{F_\theta(\rho_{z(\theta)})} \le \sup_\theta e^{F_\theta(\rho_\pi)} \le e^{F_\pi(\rho_\pi)}$$

$$= e^{q\left(\sqrt{1-\gamma^2}+\log\frac{1-\sqrt{1-\gamma^2}}{\gamma}\right)}$$

Για $0<\gamma\le 1$, με έναν απλό υπολογισμό βλέπουμε ότι

$$\sqrt{1-\gamma^2}+\log\left(1-\sqrt{1-\gamma^2}\right)-\log\gamma \le -\frac{2\sqrt{2}}{3}(1-\gamma)^{3/2} \tag{5.7.0.4}$$

και άρα

$$\left\|w^{(3)}\right\|_\infty \leq e^{-\frac{2\sqrt{2}}{3}\delta_1^{3/2}q} \xrightarrow{q\to+\infty} 0$$

Από την 5.7.0.3, $\left\|C_{w^{(3)}}\right\|_{L^2\to L^2} \leq C\left\|w^{(3)}\right\|_\infty$ για κάποια σταθερά C ανεξάρτητη του γ και έτσι ο τελεστής $(Id - C_{w^{(3)}})$ είναι αντιστρέψιμος για μεγάλα q. Έτσι, η λύση ενός προβλήματος RH μπορεί να εκφραστεί με χρήση των τελεστών Cauchy, δηλαδή

$$m^{(3)}(z) = I + \int_{\Sigma^{(3)}} \frac{\overbrace{((Id - C_{w^{(3)}})^{-1}(I))(s)}^{\mu(s)}\overbrace{(u^{(3)}(s) - I)}^{w^{(3)}(s)}}{s - z}\frac{\mathrm{d}s}{2\pi i}$$

και άρα

$$\kappa_{q-1}^2 = m_{22}^{(3)}(0) = 1 + \left(\int_{\Sigma^{(3)}} \frac{\mu(s)w^{(3)}(s)}{s}\frac{\mathrm{d}s}{2\pi i}\right)_{22} \tag{5.7.0.5}$$

Αυτό, σε συνδυασμό με το ότι το μήκος της $\Sigma^{(3)}(\gamma)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένο και $\operatorname{dist}(0,\Sigma) \geq c > 0$ για κάθε $\gamma \in [0,1]$, μας λέει ότι

$$|\kappa_{q-1}^2 - 1| \leq C\left\|w^{(3)}\right\|_\infty \leq Ce^{-\frac{2\sqrt{2}}{3}\delta_1^{3/2}q}$$

Για την δεύτερη περίπτωση, έστω κάποιο $M_1 > 0$ επαρκώς μεγάλο, και $\frac{1}{2} \leq \gamma \leq 1 - \frac{M_1}{2^{1/3}q^{2/3}}$. Από τα πιο πάνω,

$$\|C_{w^3}\|_{L^2\to L^2} \leq Ce^{-\frac{2\sqrt{2}}{3}q(1-\gamma)^{3/2}} \leq Ce^{\frac{2\sqrt{2}}{3}M_1^{3/2}} \leq \frac{1}{2} < 1 \tag{5.7.0.6}$$

για επαρκώς μεγάλο M_1. Δεδομένης της 5.7.0.4 , έχουμε την σχέση

$$\begin{aligned}\kappa_{q-1}^2 &= 1 + \left(\int_{\Sigma^{(3)}} \frac{w^{(3)}(s) + [(Id - C_{w^3})^{-1}C_{w^{(3)}}(I)](s)w^{(3)}(s)}{s}\frac{\mathrm{d}s}{2\pi i}\right)_{22}\\ &= 1 + \left(\int_{\Sigma^{(3)}} \frac{[(Id - C_{w^{(3)}})^{-1}C_{w^{(3)}}(I)](s)w^{(3)}(s)}{s}\frac{\mathrm{d}s}{2\pi i}\right)_{22}\end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ισότητα προέκυψε επειδή $diag(w^{(3)}(s)) \equiv 0$.

Από την ανισότητα Hölder,

$$\begin{aligned}|\kappa_{q-1}^2 - 1| &\leq \left\|(Id - C_{w^{(3)}})^{-1}C_{w^{(3)}}(I)(\cdot)\right\|_{L^2}\left\|\frac{w^{(3)}(\cdot)}{2\pi i\cdot}\right\|_{L^2}\\ &\leq \left\|(Id - C_{w^{(3)}})^{-1}\right\|_{L^2\to L^2}\left\|C_{w^{(3)}}(I)(\cdot)\right\|_{L^2}\left\|\frac{w^{(3)}(\cdot)}{2\pi i\cdot}\right\|_{L^2}\\ &\leq C\left\|w^{(3)}\right\|_{L^2}^2\\ &\leq C\left\|w^{(3)}\right\|_{L^\infty}\left\|w^{(3)}\right\|_{L^1}\end{aligned}$$

για κάποια κατάλληλη σταθερά C που προσαρμόζεται σε κάθε βήμα. Όμως, όπως υπολογίσαμε και πιο πάνω,

$$\left\|w^{(3)}\right\|_{L^\infty} \leq e^{-\frac{2\sqrt{2}}{3}q(1-\gamma)^{3/2}}$$

Δηλαδή,

$$|\kappa_{q-1}^2 - 1| \leq Ce^{-\frac{2\sqrt{2}}{3}q(1-\gamma)^{3/2}}\left\|w^{(3)}\right\|_{L^1}$$

Ας φράξουμε λοιπόν την νόρμα L^1 που εμφανίζεται στα δεξιά. Θα το κάνουμε για το $\Sigma_{in}^{(3)}$, και με παρόμοιους υπολογισμούς προκύπτει και το φράγμα για την $\Sigma_{out}^{(3)}$. Ο πίνακας $w^{(3)} = u^{(3)} - I$ έχει μοναδικό μη μηδενικό στοιχείο στην θέση w_{12}. Θέτουμε $\bar{\theta} = \frac{1}{q^{1/3}}\log q$, που είναι αυστηρά μικρότερο του 1 για κάθε $q > 0$.

$$\left\|u^{(3)} - I\right\|_{L^1(\Sigma_{in}^{(3)})} = \int_{\Sigma_{in}^{(3)}} \left|z^q e^{\frac{q\gamma}{2}(z-z^{-1})}\right| |\mathrm{d}z| \leq \int_{\Sigma_{in}^{(3)}} e^{qF_{\arg z}(\rho_z)}\, |\mathrm{d}z|$$

$$\leq C\int_{-\pi}^{\pi} e^{qF_\theta(\rho_{z(\theta)})}\mathrm{d}\theta = (1) + (2)$$

δεδομένου ότι $|\mathrm{d}z| \leq \mathrm{d}\theta$, όπου (1) το ολοκλήρωμα στις γωνίες $|\theta| \leq \pi - \bar{\theta}$, και (2) το ολοκλήρωμα στο συμπλήρωμα. Για $z \in \Sigma_{in}^{(3)}$, με $z = \rho_\theta e^{i\theta}$, $\frac{\pi}{2} + \varepsilon \leq |\theta| \leq \pi$,

$$\begin{aligned}
e^{qF_\theta(\rho_z)} = e^{qF_\theta(\rho_\theta)} &= e^{q\left(\frac{\sqrt{1-\gamma^2\cos^2\theta}}{-\cos\theta} + \log\left(1-\sqrt{1-\gamma^2\cos^2\theta}\right) - \log(-\gamma\cos\theta)\right)} \\
&= e^{q\left(\frac{\gamma\sqrt{1-t^2}}{t} + \log\left(1-\sqrt{1-t^2}\right) - \log(t)\right)} \qquad (t = -\gamma\cos\theta) \\
&\leq e^{q\left(\sqrt{1-t^2} + \log\left(1-\sqrt{1-t^2}\right) - \log(t)\right)} \\
&\leq e^{-\frac{2\sqrt{2}}{3}q(1-t)^{3/2}} \\
&= e^{-\frac{2\sqrt{2}}{3}q(1+\gamma\cos\theta)^{3/2}} \\
&\leq e^{-Cq(\pi-|\theta|)^3}
\end{aligned}$$

Αυτό ισχύει και για $\theta = \frac{\pi}{2} + \varepsilon$, και άρα το φράγμα ισχύει και για τα $z \in \Sigma_{in}^{(3)} : 0 \leq |\theta| \leq \frac{\pi}{2} + \varepsilon$.

Αν $|\theta| \leq \pi - \bar{\theta}$, τότε το πιο πάνω φράγμα επεκτείνεται περαιτέρω ώστε

$$e^{qF_\theta(\rho_z)} \leq e^{-Cq\bar{\theta}^3}$$

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι

$$e^{-Cq\bar{\theta}^3} = e^{-C(\log q)^3} \leq (e^{-C\log q})^3 \leq (e^{-C\log q})^{1/3} \leq Cq^{-\frac{1}{3}}$$

Σύμφωνα με τα πιο πάνω, δεδομένου ότι $q \geq 2$, με κατάλληλη αναπροσαρμογή των σταθερών C,

$$(1) \leq \int_{|\theta|<\pi-\bar{\theta}} e^{-Cq\bar{\theta}^3} \leq Ce^{-Cq\bar{\theta}^3} \leq Cq^{-\frac{1}{3}}$$

$$(2) \leq \int_{\pi-\bar{\theta}<|\theta|<\pi} e^{-Cq(\pi-|\theta|)^3} \mathrm{d}\theta$$

Αν $\theta > 0$, τότε με την αντικατάσταση $\theta \mapsto (\pi - \theta)$

$$\int_{\pi-\bar{\theta}}^{\pi} e^{-Cq(\pi-|\theta|)^3} \mathrm{d}\theta = \int_0^{\bar{\theta}} e^{-Cq\theta^3} \mathrm{d}\theta = \int_0^{\log q} e^{-Ct^3} \frac{\mathrm{d}t}{q^{1/3}} \leq Cq^{-1/3}$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε την αντικατάσταση $t = \theta q^{1/3}$. Ομοίως και για $\theta < 0$, με την αντικατάσταση $\theta \mapsto (\pi + \theta)$ βρίσκουμε ο ίδιο φράγμα.

Επομένως, και πάλι με αναπροσαρμογή της C,

$$\left\| w^{(3)} \right\|_{L^1} \leq Cq^{-1/3}$$

και άρα τελικώς

$$|\kappa_{q-1}^2 - 1| \leq Cq^{-1/3} e^{-\frac{2\sqrt{2}}{3} q(1-\gamma)^{3/2}} \tag{5.7.0.7}$$

Στην τρίτη και τελευταία περίπτωση για τις τιμές του γ, έστω $M_2 > 0$ και έστω $1 - \frac{M_1}{2^{1/3} q^{2/3}} \leq \gamma \leq 1$. Κατά αυτό τον τρόπο, όταν το $q \to +\infty$, το $\gamma \to 1$ και $\rho_\pi \to 1$. Όπως αναφέραμε πιο πάνω, Θα δώσουμε ιδιαίτερη σημασία σε κάποια περιοχή του $z = -1$.

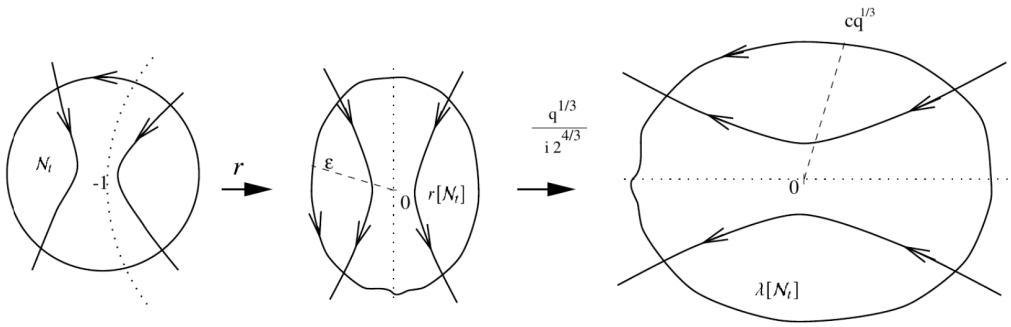
Θέτουμε $\gamma = 1 - \frac{t}{2^{1/3} q^{2/3}}, 0 \leq t \leq M_2$. Για κάθε t σταθεροποιούμε κάποια συγκεκριμένη επαρκώς μικρή περιοχή του $z = -1$, ας την ονομάσουμε $\mathcal{N}_t$. Όπως έχουμε δείξει, στην $\mathcal{N}_t$ προσεγγίζουμε οριακά όσο το q μεγαλώνει (συγκεκριμένα όταν $\gamma \to 1$) το σχήμα του σταυρού, δηλαδή των $z = x + iy$:

$$y = \pm|x + 1|$$

Ορίζουμε $r : \mathcal{N}_t \to \mathbb{C}$, όπου $r(z) = \frac{1}{2}(z - z^{-1})$, και φυσικά η $r[\mathcal{N}_t \cap \Sigma]$ με Σ τον μοναδιαίο κύκλο ανήκει στον μιγαδικό άξονα. Η απεικόνιση r είναι 1-1, και μετατρέπει την περιοχή $\mathcal{N}_t$ σε μια περιοχή του 0. Στην συνέχεια θέλουμε να στρίψουμε και να αλλάξουμε την κλίμακα της περιοχής. Για να το κάνουμε αυτό, ορίζουμε την $\lambda : \mathcal{N}_t \to \mathbb{C}$, με

$$\lambda(z) = \frac{q^{1/3} r(z)}{i2^{4/3}} = \frac{q^{1/3}}{i2^{4/3}} \frac{1}{2}(z - z^{-1})$$

Οι διαδοχικές δράσεις των r, λ φαίνονται στο πιο κάτω σχήμα:



Σημειώνουμε ότι αφού η N_t είναι σταθεροποιημένη και πεπερασμένη, μπορούμε να βρούμε $c_1, c_2 > 0$ σταθερές τέτοιες ώστε για κάθε $z \in \partial N_t$ να ισχύει

$$c_1 q^{1/3} \leq |\lambda(z)| \leq c_2 q^{1/3} \tag{5.7.0.8}$$

Με αυτόν τον μετασχηματισμό, το $\lambda[N_t \cap \Sigma]$ να είναι πραγματικό, ενώ με κάποιες πράξεις βλέπουμε ότι

$$\lambda[N_t \cap \Sigma^{(3)}] = \left\{ x + iy : y^2 = \frac{\frac{q^{2/3}}{2^{8/3}}(1-\gamma^2) + x^2}{1 + \frac{2^{8/3}\gamma^2 x^2}{q^{2/3}}}, |x| < cq^{1/3} \right\}$$

όπου $c > 0$ ένας σταθερός μικρός αριθμός. Αφού $\frac{q^{2/3}}{2^{8/3}}(1-\gamma^2) = \frac{t}{4}\left(1 - \frac{t}{2^{4/3}q^{2/3}}\right)$ με $0 \leq t \leq M_2$, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η γωνία που σχηματίζει η καμπύλη $\lambda[N_t \cap \Sigma^{(3)}]$ με τον πραγματικό άξονα είναι μικρότερη από $\frac{\pi}{4}$ και η καμπύλη είναι ομοιόμορφα φραγμένη όσο το $q \to +\infty$. Εμφανίζεται εντός του χωρίου $\lambda(N_t)$ η μορφή που εξηγάγαμε στο υποκεφάλαιο 5.5.2, που φαίνεται στο σχήμα 5.1.. Επεκτείνουμε λεία την $\Sigma^{PII,2}$ έξω από το $\lambda[N_t]$ ώστε ασυμπτωτικά να προσεγγίζει κάποιες ευθείες με κλίση σε σχέση με τον πραγματικό άξονα ανάμεσα στο 0 και το $\frac{\pi}{3}$. Μπορούμε να ονομάζουμε αυτή την επεκτεταμένη καμπύλη $\Sigma^{PII,2}(t,q)$, αφού έχει ακριβώς την μορφή που αναπτύξαμε στο υποκεφάλαιο 5.5.1, με εξάρτηση από τα t, q. Βλέπουμε ότι οι συνθήκες είναι κατάλληλες ώστε το πρόβλημα RH 5.5.2.1 για το ζεύγος $(\Sigma^{PII,2}(t,q), u_t^{PII,2})$ να έχει λύση την $m^{PII,2}(z,t)$ που να φράσσεται ομοιόμορφα σύμφωνα με την 5.5.2.3 και το φράγμα αυτό είναι ομοιόμορφο και για τα q, γ που σχετίζονται όπως αναφέραμε, δηλαδή

$$1 - \frac{M_2}{2^{1/3}q^{2/3}} \leq \gamma \leq 1 \tag{5.7.0.9}$$

Σε αυτή τη φάση εισάγουμε την έννοια μιας "προσεγγιστικής" συνάρτησης γύρω από το $z = -1$. Ορίζουμε την

$$\begin{cases} m_p(z) = m^{PII,2}(\lambda(z), t) & \text{στο } N_t - \Sigma^{(3)} \\ m_p(z) = I & \text{στο } \bar{N}_t^c - \Sigma^{(3)} \end{cases}$$

Καθώς $q \to +\infty$, για τα $z \in \partial\mathcal{N}_t, |\lambda(z)| \to +\infty$. Θέτουμε $u_p(z) \equiv u_t^{PII,2}(\lambda(z))$. Τότε, η m_p ικανοποιεί το εξής πρόβλημα:

$$\begin{cases} m_p(z) & \text{αναλυτική στο } \mathbb{C} - (\Sigma^{(3)} \cup \partial\mathcal{N}_t) \\ m_{p+}(z) = m_{p-}(z)u_p(z) & \text{στο } \mathcal{N}_t \cap \Sigma^{(3)} \\ m_{p+}(z) = m_{p-}(z)I & \text{στο } \mathcal{N}_t^c \cap \Sigma^{(3)} \\ m_{p+}(z) = I + \dfrac{m_1^{PII,2}(t)}{\lambda(z)} + O\left(\dfrac{1}{\lambda(z)^2}\right) & \text{στο } \partial\mathcal{N}_t \text{ καθώς } q \to +\infty \end{cases}$$

Το σημείο κλειδί σε αυτό το σημείο είναι το ότι το u_p προσεγγίζει το $u^{(3)}$ όσο το q μεγαλώνει, με σφάλμα τάξης $q^{-2/3}$. Πράγματι, ξεχωρίζουμε τις 2 περιπτώσεις των τμημάτων της $\Sigma^{(3)}$.

Αν δούμε το στοιχείο (12) στην $\Sigma_{in}^{(3)}$ για τον $u^{(3)}$ και τον $u_t^{PII,2}$ αντίστοιχα, εκπεφρασμένα ως προς την μεταβλητή $r = r(z)$ που αναφέραμε πιο πάνω,

$$u_{12}^{(3)} = -e^{q\left[\gamma r + \log\left(\sqrt{1+r^2} - r\right)\right]}$$

$$\left(u_t^{PII,2}\right)_{12} = -e^{q\left[\gamma r - r + \frac{1}{6}r^3\right]}$$

Με ένα απλό επιχείρημα αναπτύγματος Taylor για την περιττή συνάρτηση $\log\left(\sqrt{1+(\cdot)^2} - (\cdot)\right)$,

$$\log\left(\sqrt{1+r^2} - r\right) = -r + \frac{1}{6}r^3 + v^5 j(r)$$

όπου $j(0) = -\frac{3}{40}$ και το $j(r)$ φραγμένο για μικρά r, έστω για $|r| \leq \frac{1}{2}$. Θέτουμε $\hat{c} = \sup_{r \leq |1/2|}\{|j(r)|\}$. Σημειώνουμε ότι για $z = \rho_\theta e^{i\theta} \in \mathcal{N}_t \cap \Sigma_{in}^{(3)}$, από τον ορισμό του ρ_θ έχουμε ότι καθώς $q \to +\infty$,

$$|r| \leq \tilde{c}\sqrt{1 + \gamma\cos\theta} \leq \tilde{c}\sqrt{c'\varepsilon'}$$

όπου ε' η διάμετρος της $\mathcal{N}_t$. Έτσι, αν έχουμε επιλέξει επαρκώς μικρό ε', μπορούμε να φροντίσουμε ώστε

$$-\frac{2\sqrt{2}}{3} + \hat{c}(\tilde{c})^5 c'\varepsilon' \leq -\frac{1}{2}$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} &\left|u_{12}^{(3)} - \left(u_t^{PII,2}\right)_{12}\right| \\ &= \left|e^{q\left[\gamma r + \log\left(\sqrt{1+r^2} - r\right)\right]} - e^{q\left[\gamma r - r + \frac{1}{6}r^3\right]}\right| \\ &= \left|e^{q\left[\gamma r + \log\left(\sqrt{1+r^2} - r\right)\right]}\right| \left|1 - e^{-qr^5 j(r)}\right| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq e^{-\frac{2\sqrt{2}q}{3}(1+\gamma\cos\theta)^{3/2}} \cdot q|r|^5 \|j\|_{L^\infty(|r|\leq 1/2)} e^{q\hat{c}(\tilde{c})^5(1+\gamma\cos\theta)^{5/2}} \\
&\leq Cq(1+\gamma\cos\theta)^{5/2} e^{q\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}+\hat{c}(\tilde{c})^5 c'\varepsilon'\right)(1+\gamma\cos\theta)^{3/2}} \\
&\leq Cq(1+\gamma\cos\theta)^{5/2} e^{-\frac{q}{2}(1+\gamma\cos\theta)^{3/2}} \\
&\leq \frac{C}{q^{2/3}}
\end{aligned}
$$

όπου πιο πάνω χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα $|1-e^z| \leq |z|e^{|z|}$, και το ότι $\left\| x^{5/3}e^{-x^{3/2}} \right\|_{L^\infty_{(0,\infty)}} \leq C$ (όπου x το $2^{-2/3}q^{2/3}(1+\gamma\cos\theta)$). Αφού

$$
u^{(3)}u_p^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -e^{q\left[\gamma\nu+\log\left(\sqrt{1+\nu^2}-\nu\right)\right]} + e^{q\left[\gamma\nu-\nu+\frac{1}{6}u^3\right]} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

δεδομένων των πιο πάνω υπολογισμών,

$$
\left\| u^{(3)}u_p^{-1} - I \right\|_{L^\infty(\mathcal{N}_t \cap \Sigma^{(3)}_{in})} = \mathcal{O}(q^{-2/3})
$$

Μπορεί κανείς να επιβεβαιώσει ότι το ίδιο σφάλμα έχουμε και στην περίπτωση του $\mathcal{N}_t \cap \Sigma^{(3)}_{out}$. Όσον αφορά στο χωρίο $\mathcal{N}_t^c$, το σφάλμα είναι εκθετικά μικρό:

$$
\left\| u^{(3)}u_p^{-1} - I \right\|_{L^\infty(\mathcal{N}_t^c \cap \Sigma^{(3)})} = \left\| u^{(3)} - I \right\|_{L^\infty(\mathcal{N}_t^c \cap \Sigma^{(3)})} = \mathcal{O}(e^{-cq})
$$

Ορίζουμε τώρα το $R(z) = m^{(3)}m_p^{-1}$. Η R είναι αναλυτική στο $\mathbb{C} - \Sigma^{(3)} \cup \partial N_t$. Κατασκευάζουμε επίσης τον αντίστοιχο πίνακα άλματος u_R:

$$
u_R = m_{p-}u^{(3)}u_p^{-1}m_{p-}^{-1}
$$

Αυτός ο πίνακας άλματος, σύμφωνα με τους πιο πάνω υπολογισμούς, ικανοποιεί τις πιο κάτω ανισότητες:

$$
\begin{cases}
\|u_R - I\|_\infty \leq \dfrac{C(M_2)}{q^{2/3}} & \text{στο } \mathcal{N}_t \cap \Sigma^{(3)} \\
\|u_R - I\|_\infty \leq Ce^{-cq} & \text{στο } \mathcal{N}_t^c \cap \Sigma^{(3)} \\
u_R = u_p^{-1} = m_{p+}^{-1} = I - \dfrac{m_1^{PII,2}}{\lambda(z)} + \mathcal{O}_{M_2}\left(\dfrac{1}{\lambda(z)^2}\right) & \text{στο } \partial\mathcal{N}_t, \text{ καθώς } q \to +\infty
\end{cases}
\tag{5.7.0.10}
$$

Στις πιο πάνω σχέσεις έχουμε χρησιμοποιήσει ότι η $m^{PII,2}(z,t)$ και άρα και η m_p είναι αντιστρέψιμη και φραγμένη για $(z,t) \in \mathbb{C} \times [0, M_2]$. (Βλέπε σχόλιο πριν από το 5.7.0.9).

Από τις σχέσεις 5.7.0.8 και 5.7.0.10, έχουμε ότι $\|u_R - I\|_\infty = \|w_R\|_\infty \leq \frac{C(M_2)}{q^{1/3}}$. Συγκεκριμένα, για μεγάλα q το $I - C_{w_R}$ είναι αντιστρέψιμο και,

όπως έχουμε δει σε παρόμοια προβλήματα,

$$R(z) = I + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Sigma^{(3)}\cup\partial N_t} \frac{\mu(s)(u_R(s)-I)}{s-z}\mathrm{d}s$$

όπου μ η λύση του $(I - C_{w_R})\mu = I$. Αφού $\|w_R\|_\infty \leq \frac{C(M_2)}{q^{1/3}}$, έχουμε ότι $\|\mu - I\|_{L^2} = O_{M_2}\left(\frac{1}{q^{1/3}}\right)$, όπου αυτός ο συμβολισμός δηλοί:

$$f(x) = O_{M_2}(g(x)) \iff \exists x_0 : \forall x > x_0 \ \ |f(x)| \leq c(M_2)g(x)$$

Έτσι, με προσθαφαίρεση του όρου I στο μ στο ολοκλήρωμα,, και με το πιο πάνω φράγμα,

$$R_{22}(0) = 1 + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Sigma^{(3)}\cup\partial N_t} (u_R(s)-1)_{22}\frac{\mathrm{d}s}{s} + O_{M_2}\left(\frac{1}{q^{2/3}}\right)$$

Με χρήση του ότι $\|w_R\|_\infty \leq \frac{C(M_2)}{q^{2/3}}$ από την 5.7.0.10 για την δεύτερη ισότητα πιο κάτω, αλλά και από το ότι $m_1^{PII,2} = m_1^{PII,1}$ για την τελευταία ισότητα(βλέπε 5.5.2.2), έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\kappa_{q-1}^2 &= R_{22}(0) \\
&= 1 + \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial N_t} (u_R(s)-1)_{22}\frac{\mathrm{d}s}{s} + O_{M_2}\left(\frac{1}{q^{2/3}}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial N_t} \frac{m_{1,22}^{PII,2}(t)}{\lambda(s)}\frac{\mathrm{d}s}{s} + O_{M_2}\left(\frac{1}{q^{2/3}}\right) \\
&= 1 - \frac{m_{1,22}^{PII,2}(t)}{2\pi i}\int_{r(\partial N_t)} \frac{1}{-i\frac{q^{1/3}}{2^{4/3}}r}\frac{\mathrm{d}r}{\left(-\sqrt{r^2+1}\right)} + O_{M_2}\left(\frac{1}{q^{2/3}}\right) \\
&= 1 + \frac{i2^{4/3}}{q^{2/3}}m_{1,22}^{PII,2}(t) + O_{M_2}\left(\frac{1}{q^{2/3}}\right) \\
&= 1 + \frac{i2^{4/3}}{q^{2/3}}m_{1,22}^{PII,1}(t) + O_{M_2}\left(\frac{1}{q^{2/3}}\right)
\end{aligned}$$

Σημειώνουμε ότι το φράγμα που βρήκαμε πιο πάνω ισχύει για όλα τα $0 \leq t \leq M_2$. Συνοψίζουμε όλα τα αποτελέσματα αυτών που πραγματευτήκαμε στο υποκεφάλαιο αυτό με το εξής λήμμα:

Λήμμα 5.7.1. Έστω $M_1 > 0$ σταθερός αριθμός επαρκώς μεγάλος ώστε να ικανοποιείται η σχέση 5.7.0.6. Έστωσαν επίσης $M_2 > 0$ και $0 < \delta_1 < 1$ σταθεροί αριθμοί. Καθώς το $q \to +\infty$, έχουμε τα εξής αποτελέσματα:

1. Αν $0 \leq \gamma \leq 1 - \delta_1$, τότε υπάρχουν σταθερές $C = C(\delta_1), c = c(\delta_1)$ ώστε
$$|\kappa_{q-1}^2 - 1| \leq Ce^{-cq}$$

2. Αν $\frac{1}{2} \leq \gamma \leq 1 - \frac{M_1}{2^{1/3}q^{2/3}}$, τότε για κάποια σταθερά C ανεξάρτητη του M_1,
$$|\kappa_{q-1}^2 - 1| \leq \frac{C}{q^{1/3}} e^{-\frac{2\sqrt{2}}{3} q(1-\gamma)^{3/2}}$$
3. Αν $1 - \frac{M_2}{2^{1/3}q^{2/3}} \leq \gamma \leq 1$, τότε υπάρχει σταθερά $C(M_2)$ ώστε
$$|\kappa_{q-1}^2 - 1 - \frac{i2^{4/3}}{q^{1/3}} m_{1,22}^{PII,2}(t)| \leq \frac{C(M_2)}{q^{2/3}}$$
όπου $\gamma = 1 - \frac{t}{q^{2/3}}$.

5.8 $\gamma > 1$

Αντίστοιχη διαδικασία με την παραπάνω θα ακολουθήσουμε για την περίπτωση που $\gamma > 1$, με την αντίστοιχη έκφραση του μέτρου ισορροπίας. Υπενθυμίζουμε ότι από το λήμμα 5.6.2., το μέτρο ισορροπίας για αυτές τις τιμές του γ είναι το
$$\mathrm{d}\mu_V(\theta) = \frac{\gamma}{\pi} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sqrt{\frac{1}{\gamma} - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \mathbb{1}_{[-\theta_c,\theta_c]}(\theta)\mathrm{d}\theta$$
με $\sin^2 \frac{\theta_c}{2} = \frac{1}{\gamma}, 0 < \theta_c < \pi$, ή αλλιώς
$$\mathrm{d}\mu_V(z) = \frac{\gamma}{4\pi i} \frac{z+1}{z^2} \sqrt{(z-\xi)(z-\xi^{-1})}\mathrm{d}z \text{ για } z = e^{i\theta}$$
με $\xi = e^{i\theta_c}$. Χωρίζουμε τον μοναδιαίο κύκλο Σ στα $C_1 = \{e^{i\theta} : \theta_c < |\theta| \leq \pi\}$ και $C_2 = \Sigma - \overline{C_1}$. Το $\overline{C_2}$ είναι το στήριγμα του μέτρου και στο C_1 έχουμε τετριμμένο μηδενικό αποτέλεσμα.

Λήμμα 5.8.1. Έστω $\alpha : \Sigma \to \mathbb{C} : \alpha(z) = -\frac{\gamma}{4} \int_\xi^z \frac{s+1}{s^2} \sqrt{(s-\xi)(s-\xi^{-1})}\mathrm{d}s$ όπου $\xi = e^{i\theta_c}$ και ο κλάδος για τη ρίζα επιλέγεται ώστε να έχουμε αναλυτικότητα στο $\mathbb{C} - \overline{C_1}$ και $\sqrt{(s-\xi)(s-\xi^{-1})} > 0$ για πραγματικά $s > 0$. Τότε,

1. Το $e^{2\alpha(z)}$ είναι ανεξάρτητο της καμπύλης που συνδέει τα $\xi \to z$ για $z \in \mathbb{C} - (\overline{C_1} \cup \{0\})$.
2. $\exp\left\{-2\pi i \int_{\theta_c}^{\arg z} \mathrm{d}\mu_V(\theta)\right\} = \exp(2\alpha(z))$ για $z \in C_2$.
3. $\exp\left(2\int_{-\pi}^{\pi} \log|z - e^{i\theta}|\mathrm{d}\mu_V(\theta) - V(z) + l\right) = \exp(-2\alpha_-(z))$ για $z \in C_1$.

Απόδειξη

Αν έχουμε μια καμπύλη C' που να περνάει από τα ξ, z, τότε αν δεν περικλείει το 0 ή κάποιο σημείο της $\overline{C}_1$, η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι ολόμορφη στο χωρίο που περικλείει η C'. Αν χωρίσουμε την C' σε C_1' και C_2' που να συνδέουν τα $\xi \to z$ και $z \to \xi$ αντίστοιχα, από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων, έχουμε ότι
$$\int_{C_1'} f(s)\mathrm{d}s = \int_{C_2'} f(s)\mathrm{d}s$$

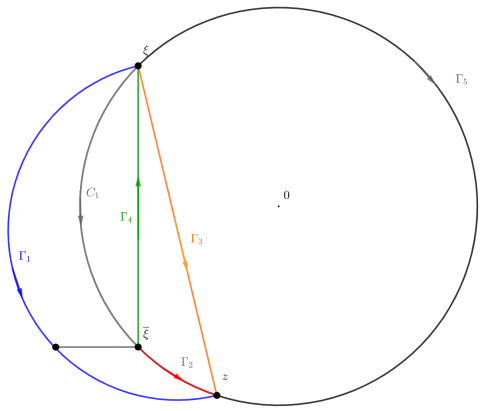
Αν η C' περικλείει το 0, τότε αυτό είναι πόλος δεύτερης τάξης της ολοκληρωτέας συνάρτησης f, και βλέπουμε ότι

$$\mathrm{Res}(f,0) = \cdots = -\frac{\gamma}{4}\left(1 - \frac{\xi + \xi^{-1}}{2}\right) = -\frac{\gamma}{4}(1-\cos\theta_c) = -\frac{\gamma}{4}\left(2\sin^2\left(\frac{\theta_c}{2}\right)\right) = -\frac{1}{2}$$

Άρα, από το θεώρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων, το ολοκλήρωμα της f στην C' είναι ίσο με $-\pi i$. Έτσι,

$$e^{2\int_{C_1'} f(s)\mathrm{d}s} = e^{2\left(\int_{C_2'} f(s)\mathrm{d}s - \pi i\right)} = e^{2\int_{C_2'} f(s)\mathrm{d}s}$$

Αν η καμπύλη ολοκλήρωσης περιέχει την C_1, τότε από το μέτρο $\mu_V(\theta)$ ξέρουμε ότι το ολοκλήρωμα πάνω στην C_1 είναι ίσο με 0. Έτσι, αν έχουμε κάτι σαν αυτό που φαίνεται στο σχήμα,



Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\int_{\Gamma_1} f(s)\mathrm{d}s = \int_{\Gamma_5} f(s)\mathrm{d}s$$

Το ολοκλήρωμα στην Γ_1 είναι ίσο με το ολοκλήρωμα στην την Γ_2, που είναι ίσο με αυτό στην $\Gamma_3 \cup \Gamma_4$. Το ολοκλήρωμα στην Γ_4 είναι ίσο με το ολοκλήρωμα στην C_1 και άρα είναι μηδενικό, ενώ το ολοκλήρωμα στην Γ_3 ισούται με αυτό στην Γ_5 από τα πιο πάνω.

Το 2. προκύπτει από τον ορισμό του $\alpha(z)$. Όσον αφορά στο 3., ορίζουμε

$$F(\varphi) = 2\int_{-\pi}^{\pi} \log|e^{i\varphi} - e^{i\theta}|\mathrm{d}\mu_V(\theta) + \underbrace{\gamma\cos\varphi}_{-V(\varphi)} + l + 2\alpha_-(e^{i\varphi})$$

για $z = e^{i\varphi} \in \overline{C_1}$. Το $\xi = e^{i\theta_c}$ ανήκει στο $\overline{C_2}$, και από την συνθήκη 5.6.0.1, $F(\theta_c) = 0$. Τώρα, με λίγες πράξεις παραγωγίζουμε και βρίσκουμε

ότι

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\log|e^{i\varphi}-e^{i\theta}| = i\frac{e^{i\varphi}+e^{i\theta}}{e^{i\varphi}-e^{i\theta}} = i\left[\frac{2e^{i\varphi}}{e^{i\varphi}-e^{i\theta}}-1\right]$$

και άρα

$$\begin{aligned}
F'(\varphi) &= 2\int_{-\theta_c}^{\theta_c} i\left[\frac{2e^{i\varphi}}{e^{i\varphi}-e^{i\theta}}-1\right]\mathrm{d}\mu_V(\theta) - \frac{\gamma}{2i}(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}) - \frac{i\gamma}{2}\frac{e^{i\varphi}+1}{e^{i\varphi}}\sqrt{(e^{i\varphi}-\xi)(e^{i\varphi}-\xi^{-1})_-} \\
&= \frac{\gamma}{\pi}\int_{C_2}\frac{z}{z-s}\frac{s+1}{s^2}\sqrt{(s-\xi)(s-\xi^{-1})}\mathrm{d}s - 2i - \frac{\gamma}{2i}(z-z^{-1}) - \frac{i\gamma}{2}\frac{z+1}{z}\sqrt{(z-\xi)(z-\xi^{-1})_-} \\
&= \dots \\
&= 0
\end{aligned}$$

Για αυτό χρησιμοποιούμε ένα επιχείρημα ολοκληρωτικών υπολοίπων όπως στο 1.. Έτσι, η συνάρτηση είναι σταθερή στο $\overline{C_1}$, και άρα $F(\varphi) \equiv 0$. □

Σημειώνουμε ότι για $z \in C_1$, εκτός του στηρίγματος δηλαδή,

$$e^{2q\pi i\int_\varphi^\pi \mathrm{d}\mu_V(\theta)} = 1$$

Από αυτό, το πιο πάνω λήμμα και την σχέση 5.6.0.7, το πρόβλημα RH μετατρέπεται στο εξής:

$$\begin{cases}
m^{(1)}(z) & \text{αναλυτική στο } \mathbb{C}-\Sigma \\
m_+^{(1)} = m_-^{(1)}\begin{pmatrix} e^{-2q\alpha} & (-1)^q \\ 0 & e^{2q\alpha}\end{pmatrix} & \text{στο } C_2 \\
m_+^{(1)} = m_-^{(1)}\begin{pmatrix} 1 & (-1)^q e^{-2q\alpha_-} \\ 0 & 1\end{pmatrix} & \text{στο } C_1 \\
m^{(1)} = I + O\left(\frac{1}{z}\right) & \text{καθώς } z\to\infty
\end{cases} \tag{5.8.0.1}$$

και $\kappa_{q-1}^2 = -(-1)^q m_{21}^{(1)}(0)e^{ql} = -(-1)^q e^{q(-\gamma+\log\gamma+1)}m_{21}^{(1)}(0)$, από τις 5.6.0.6 και από το λήμμα 5.6.2. που μας δίνει την τιμή του l για το μέτρο ισορροπίας σε αυτές τις τιμές του γ. Ορίζουμε την $m^{(2)}$ σε σχέση με την $m^{(1)}$ όπως στο προηγούμενο υποκεφάλαιο, ξεχωρίζοντας τις περιπτώσεις των άρτιων και περιττών q. Έτσι, ο πίνακας άλματος μετατρέπεται στον εξής:

$$u^{(2)} = \begin{cases}
\begin{pmatrix} 1 & -e^{-2q\alpha} \\ e^{2q\alpha} & 0\end{pmatrix} & \text{στο } C_2 \\
\begin{pmatrix} e^{-2q\alpha_-} & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix} & \text{στο } C_1
\end{cases} \tag{5.8.0.2}$$

και $\kappa_{q-1}^2 = e^{-\gamma-\log\gamma+1}m_{22}^{(2)}(0)$. Παραγοντοποιούμε τον πίνακα άλματος

$u^{(2)}$ στο C_2 ως εξής:

$$u^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e^{2q\alpha} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & e^{-2q\alpha} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Θέτουμε $\mathrm{Re}(\alpha(z)) = R(z)$ και $\mathrm{Im}(\alpha(z)) = I(z)$, δηλαδή $\alpha(z) = R(z)+iI(z)$. Υπενθυμίζουμε τις εξισώσεις Cauchy-Riemann για πολικές συντεταγμένες (r, θ):

$$r\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{\partial I}{\partial \theta}, \quad r\frac{\partial I}{\partial r} = -\frac{\partial R}{\partial \theta}$$

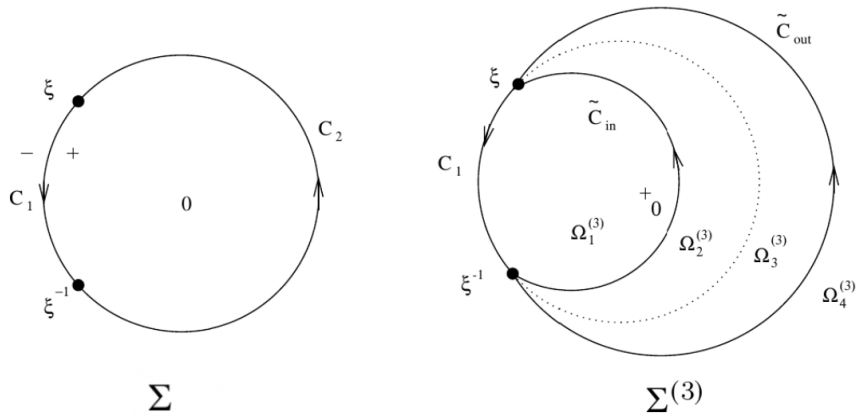
Για $z = e^{i\theta} \in C_2$, το $\alpha(z) = -\pi i \int_{\theta_c}^{\pi} \mathrm{d}\mu_V(\theta')$ είναι φανταστικό και άρα $R = 0, I = -i\alpha$. Επιπλέον,

$$\frac{\partial I}{\partial \theta} = \frac{\partial(-i\alpha)}{\partial \theta} = -\pi\frac{\gamma}{\pi}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sqrt{\frac{1}{\gamma} - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} < 0$$

άρα

$$\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{\partial I}{\partial \theta} < 0 \ \text{ στο } C_2$$

που σημαίνει ότι το $R(z)$ είναι τοπικά φθίνουσα ως προς r για κάποια περιοχή γύρω από κάποιο $z \in C_2$. Δηλαδή, για κάποιο δεδομένο θ, υπάρχει κάποιο $\varepsilon = \varepsilon(\theta) > 0$, τέτοιο ώστε αν $z = re^{i\theta}$ με $r = 1 - \varepsilon$ τότε $R(z) > 0$, ενώ αν $r = 1 + \varepsilon$, τότε $R(z) < 0$. Θέτουμε τώρα $\Sigma^{(3)} = \overline{C_1} \cup \tilde{C}_{in} \cup \tilde{C}_{out}$ όπως στο σχήμα:



Συγκεκριμένα, τα $\tilde{C}_{in}, \tilde{C}_{out}$ είναι ανοικτά τόξα, και επιλέγονται ώστε

$$\begin{cases} \tilde{C}_{in} \subset \{z : |e^{-2\alpha(z)}| < 1\} \\ \tilde{C}_{out} \subset \{z : |e^{2\alpha(z)}| < 1\} \end{cases} \tag{5.8.0.3}$$

Με αυτές τις καμπύλες δημιουργούνται τα χωρία $\{\Omega_k\}_{k=1}^4$ όπως φαίνε-

ται στο πιο πάνω σχήμα. Ορίζουμε το $m^{(3)}$ ως εξής:

$$m^{(3)} = \begin{cases} m^{(2)} \begin{pmatrix} 1 & -e^{-2q\alpha} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} & \text{στο } \Omega_2^{(3)} \\ m^{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e^{2q\alpha} & 1 \end{pmatrix} & \text{στο } \Omega_3^{(3)} \\ m^{(2)} & \text{στο } \Omega_1^{(3)}, \Omega_4^{(3)} \end{cases}$$

Τότε, ο πίνακας άλματος $u^{(3)}$ είναι ο

$$u^{(3)} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & -e^{-2q\alpha} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{στο } \tilde{C}_{in} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e^{2q\alpha} & 1 \end{pmatrix} & \text{στο } \tilde{C}_{out} \\ \begin{pmatrix} -e^{-2q\alpha_-} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \text{στο } C_1 \end{cases}$$

και

$$\kappa_{q-1}^2 = e^{q(-\gamma+\log\gamma+1)} m_{22}^{(3)}(0) \tag{5.8.0.4}$$

Από το λήμμα 5.8.1. και την συνθήκη 5.6.0.2, που για $\gamma > 1$ μας δίνει μια αυστηρή ανισότητα, έχουμε ότι για κάθε $z \in C_1$,

$$e^{-2q\alpha_-} \to 0 \text{ καθώς } q \to +\infty$$

Επιπλέον, από την επιλογή των $\tilde{C}_{in}$ και $\tilde{C}_{out}$,

$$\begin{cases} e^{-2q\alpha} \xrightarrow{q\to+\infty} 0 & \text{στο } \tilde{C}_{in} \\ e^{2q\alpha} \xrightarrow{q\to+\infty} 0 & \text{στο } \tilde{C}_{out} \end{cases}$$

Συνεπώς, όταν το $q \to +\infty, u^{(3)} \to u^{(\infty)}$, όπου

$$u^{(\infty)} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{στο } \tilde{C}_{in} \cup \tilde{C}_{out} \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \text{στο } C_1 \end{cases}$$

Λήμμα 5.8.2. Το πρόβλημα RH $(\Sigma^{(3)}, u^{(\infty)})$ λύνεται και έχει ως λύση την

$$m^{(\infty)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\beta+\beta^{-1}) & \frac{1}{2i}(\beta-\beta^{-1}) \\ -\frac{1}{2i}(\beta-\beta^{-1}) & \frac{1}{2}(\beta+\beta^{-1}) \end{pmatrix}$$

όπου $\beta(z) = \left(\frac{z-\xi}{z-\xi^{-1}}\right)^{1/4}$, και η β είναι αναλυτική στο $\mathbb{C} - \bar{C}_1$, με $\beta \sim 1$ καθώς $z \to \infty$.

Απόδειξη

Για τον ακριβή προσδιορισμό του β: Πρώτα επιλέγουμε τον κλάδο για το $(z-\xi)^{1/4}$ ώστε $(z-\xi)^{1/4} = |z-\xi|^{1/4} e^{\frac{i\omega(z)}{4}}$ με $\omega(z)$ η γωνία $(\xi^{-1}\xi z)$. Η κλαδική τομή είναι η ημιευθεία που ξεκινάει από το ξ και περνάει από το ξ^{-1}. Υπάρχει άλμα κατά μήκος της κλαδικής τομής:

$$|z-\xi|^{\frac{1}{4}} e^{\frac{i2\pi}{4}} - e^{\frac{i0}{4}} = |z-\xi|^{\frac{1}{4}} i$$

Για τον παρονομαστή θέτουμε $(z-\xi)^{-1/4} = |z-\xi|^{-1/4} e^{\frac{i\varphi(z)}{4}}$ με $\varphi(z)$ η γωνία $\pi - (\xi\xi^{-1}z)$. Η κλαδική τομή είναι η ίδια ημιευθεία με πιο πάνω, χωρίς το κομμάτι $[\xi, \xi^{-1})$. Υπάρχει άλμα κατά μήκος της κλαδικής τομής:

$$|z-\xi|^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{i2\pi}{4}} - e^{\frac{i0}{4}} = |z-\xi|^{-\frac{1}{4}} i$$

Ορίζουμε τώρα

$$\beta(z) = \left|\frac{z-\xi}{z-\xi^{-1}}\right|^{1/4} e^{\frac{i(\omega(z)-\varphi(z))}{4}}$$

εκτός της πρώτης κλαδικής τομής, και την επεκτείνουμε αναλυτικά και στην δεύτερη κλαδική τομή καθώς τα άλματα αλληλοαναιρούνται. Υπάρχει άλμα στο ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα ξ, ξ':

$$\left|\frac{z-\xi}{z-\xi^{-1}}\right|^{\frac{1}{4}} \left(e^{i\frac{2\pi-\pi}{4}} - e^{-i\frac{0-\pi}{4}}\right) = \sqrt{2}i \left|\frac{z-\xi}{z-\xi^{-1}}\right|^{\frac{1}{4}}$$

Τέλος, παραμορφώνουμε την κλαδική τομή ώστε να γίνει η $\overline{C_1}$. Επιπλέον,

$$\omega(z), \varphi(z) \xrightarrow{z\to\infty} \frac{\pi}{2} \Rightarrow \beta(z) \xrightarrow{z\to\infty} 1$$

Το ότι είναι λύση του πιο πάνω προβλήματος η $m^{(\infty)}$ επιβεβαιώνεται άμεσα με κάποιους υπολογισμούς.

□

Από την επιλογή του κλάδου αναλυτικότητας για το β, βλέπουμε ότι $\omega(0) = \theta_c - \frac{\pi}{2}, \varphi(0) = \frac{3\pi}{2} - \theta_c$, και έτσι

$$\beta(0) = \left|\frac{\xi}{\xi^{-1}}\right|^{1/4} e^{\frac{i(\omega(0)-\varphi(0))}{2}} = |\xi|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i(\theta_c - \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{2} + \theta_c)}{4}} = -ie^{i\frac{\theta_c}{2}}$$

και άρα $m^{(\infty)}(0) = \sin\left(\frac{\theta_c}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$. Έτσι, αναμένουμε από την 5.8.0.4 πως

$$\kappa_{q-1}^2 \sim e^{q(-\gamma+\log\gamma+1)} m_{22}^{(\infty)}(0) = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} e^{q(-\gamma+\log\gamma+1)}$$

Στόχος μας είναι λοιπόν να δείξουμε ότι $m^{(3)}(z) \to m^{(\infty)}(z)$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$. Όπως στο προηγούμενο υποκεφάλαιο, θα χωρίσουμε σε περιπτώσεις τις τιμές του γ, καθώς γύρω από το $\gamma = 1$ έχουμε ιδιάζουσα συμπεριφορά.

Έστωσαν λοιπόν κάποια $\delta_3, M_4 > 0$ σταθεροί αριθμοί, κάποιο $0 < \delta_4 < 1$ κάποιος σταθερός, επαρκώς μικρός αριθμός - θα φανεί πόσο μικρός συγκεκριμένα πιο κάτω (βλέπε 5.8.0.29), και $M_3 > 0$ κάποιος σταθερός επαρκώς μεγάλος αριθμός (βλέπε 5.8.0.32, 5.8.0.26). Ξεχωρίζουμε τις εξής περιπτώσεις:

1. $1 + \delta_3 \leq \gamma$
2. $1 + \frac{M_3}{2^{1/3}q^{2/3}} \leq \gamma \leq 1 + \delta_4$
3. $1 \leq \gamma \leq 1 + \frac{M_4}{2^{1/3}q^{2/3}}$

Με κάποιους υπολογισμούς όπως στο [14] μπορεί να δειχθεί ότι στην πρώτη περίπτωση,

$$\kappa_{q-1}^2 = e^{q(-\gamma+\log\gamma+1)}\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\left(1 + O\left(\frac{1}{q}\right)\right)$$

Μάλιστα, το σφάλμα είναι ομοιόμορφο για $1 + \delta_3 \leq \gamma \leq L$ για κάθε σταθερό $L < +\infty$. Ας αναλύσουμε τώρα την τρίτη περίπτωση πρώτα, πριν περάσουμε στην δεύτερη. Θέτουμε $\gamma = 1 + \frac{t}{2^{1/3}q^{2/3}}$ με $0 \leq t \leq M_4$. Εύκολα βλέπουμε ότι $r_0 \equiv \sin\theta_c = \frac{2}{\gamma}\sqrt{\gamma - 1}$. Ας δούμε τώρα ποιες ακριβώς θα είναι οι καμπύλες $\tilde{C}_{in}, \tilde{C}_{out}$ που θα επιλέξουμε. Θέτουμε πρώτα

$$x = -\frac{q^{2/3}r_0^2}{2^{5/3}} = -t\left(1 + \frac{t}{2^{1/3}q^{2/3}}\right)^{-2} \sim -t < 0 \quad \text{καθώς } q \to +\infty$$

Αυτό το x είναι φυσικά αρνητικό, και έτσι μπορούμε να ορίσουμε την $\Sigma^{PII,3}$ που αναπτύξαμε στο υποκεφάλαιο 5.5.2. Στη συνέχεια, 'φουσκώνουμε' λίγο την καμπύλη μας, ορίζουμε δηλαδή την

$$\Sigma' = \left\{r = \frac{2^{4/3}}{q^{1/3}}\lambda : \lambda \in \Sigma^{PII,3}\right\} = \cup_{k=1}^{5}\Sigma'_k$$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι ακτίνες $\Sigma'_1, \Sigma'_2, \Sigma'_3, \Sigma'_4$ σχηματίζουν γωνίες μικρότερες του $\pi/6$ με τον πραγματικό άξονα. Επιλέγουμε τώρα ένα επαρκώς μικρό $\varepsilon' > 0$ και θέτουμε

$$\mathcal{N}'_t = \{r \in \mathbb{C} : |r| < \varepsilon'\}$$

Αν το q είναι επαρκώς μεγάλο, τότε το $r_0 = \frac{2}{\gamma}\sqrt{\gamma - 1} \in \mathcal{N}'_t$. Θέτουμε $r = r(z) = \dfrac{1}{2i}(z - z^{-1})$. Επιλέγουμε το πιο πάνω ε' ώστε να ισχύει ότι

Η r είναι 1-1 απεικόνιση από μια ανοικτή περιοχή του $z = -1, \mathcal{N}_t$ επί του $\mathcal{N}'_t$ (5.8.0.5)

Υπάρχουν σταθερές $c_1, c_2 > 0$ τέτοιες ώστε $c_1 \leq |z(r)| \leq c_2$ για όλα τα $r \in \partial\mathcal{N}'_t$. Υπό την αντίστροφη απεικόνιση r^{-1}, τα σημεία $r_0, -r_0$ απεικονίζονται στα ξ, ξ^{-1} αντίστοιχα, ενώ $r^{-1}(\Sigma'_5) = C_1$. Θεωρούμε ένα σημείο $z \in r^{-1}(\Sigma'_4 \cap \mathcal{N}'_t)$. Τότε,

$$-2\alpha(z) = \frac{i\gamma}{2}\int_{\xi}^{z}(\sqrt{s} + \sqrt{s}^{-1})\sqrt{(s + s^{-1}) - (\xi + \xi^{-1})}\frac{\mathrm{d}s}{is}$$

$$
\begin{aligned}
&= -i\gamma \int_{r_0}^{r} \left(\sqrt{1-r_0^2} - \sqrt{1-t^2}\right)^{1/2} \frac{\sqrt{1-\sqrt{1-t^2}}}{\sqrt{1-t^2}} \mathrm{d}t && \left(t = \frac{1}{2i}(s - s^{-1})\right) \\
&= -\frac{i\gamma}{2} \int_{r_0}^{r} \left(\frac{t^2 - r_0^2}{1 + k(r_0^2) + k(r^2)}\right)^{1/2} r(1 + h(r^2))\mathrm{d}t \\
&= -\frac{i\gamma}{4} \int_{r_0^2}^{r^2} (w - r_0^2)^{1/2}[1 + (h(w) - h(r_0^2)) + h(r_0^2)]\mathrm{d}w \\
&\quad - \frac{i\gamma}{4} \int_{r_0^2}^{r^2} (w - r_0^2)^{1/2} \frac{[k(r_0^2) - k(w) - 2k(r_0^2)](1 + h(w))\mathrm{d}w}{(1 + k(r_0^2) + k(w))^{1/2}[1 + (1 + k(r_0^2) + k(w))^{1/2}]} && (w = t^2) \\
&= -\frac{i\gamma}{6}(r^2 - r_0^2)^{3/2} + O\left(|r^2 - r_0^2|^{5/2}\right) + O\left(|r^2 - r_0^2|^{3/2} r_0^2\right)
\end{aligned}
$$

όπου το $\sqrt{r^2 - r_0^2}$ ορίζεται ώστε να είναι αναλυτική στο $\mathbb{C} - [-r_0, r_0]$ και θετικό για $r > r_0$, ενώ

$$
\begin{aligned}
h(w) &= \frac{\sqrt{2}\sqrt{1-\sqrt{1-w}}}{\sqrt{w}\sqrt{1-w}} - 1 \\
k(w) &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{1-w} - 1\right)
\end{aligned}
$$

Τα h, k είναι αναλυτικά για $|w| \leq \varepsilon'$ και $h(0) = 0, k(0) = 0$. Αφού η Σ_4' είναι ευθεία της οποίας η γωνία με τον πραγματικό άξονα είναι $-\frac{\pi}{6}$, έχουμε ότι

$$
\mathrm{Re}(-i(r^2 - r_0)^{3/2}) \leq -\frac{1}{2}|r^2 - r_0^2|^{3/2}
$$

το οποίο μας λέει ότι

$$
|e^{-2\alpha(z)}| \leq e^{-\frac{1}{24}|r^2 - r_0^2|^{3/2}} < 1 \tag{5.8.0.6}
$$

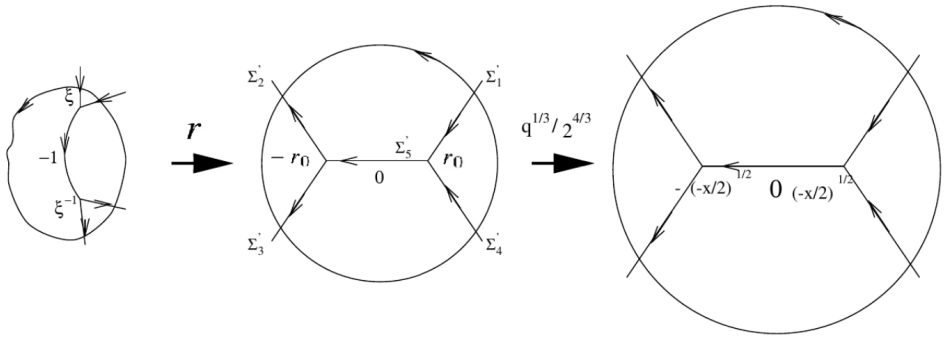
Φροντίζουμε το ε' να είναι αρκετά μικρό ώστε

$$
O(|r^2 - r_0^2|^{5/2}) + O(|r^2 - r_0^2|^{3/2} r_0^2) \leq c|r^2 - r_0^2|^{3/2}(|r^2 - r_0^2| + r_0^2) \leq \frac{1}{24}|r^2 - r_0^2|^{3/2} \tag{5.8.0.7}
$$

για $r \in \Sigma_4' \cap \mathcal{N}_t'$. Για το ίδιο ε' βρίσκουμε το ίδιο αποτέλεσμα και για τα $z \in r^{-1}(\Sigma_3' \cap \mathcal{N}_t')$, και επίσης $|\exp(2\alpha(z))| \leq \exp\left(-\frac{1}{24}|r^2 - r_0^2|^{3/2}\right) < 1$ για $z \in r^{-1}((\Sigma_1' \cup \Sigma_2') \cap \mathcal{N}_t')$. Έτσι, επιλέγουμε το $\Sigma^{(3)}$:

$$
\Sigma^{(3)} \equiv r^{-1}(\Sigma' \cap \mathcal{N}_t') \ \text{ στο } \mathcal{N}_t \tag{5.8.0.8}
$$

και την επεκτείνουμε στο $\mathcal{N}_t^c$ στο γενικό σχήμα $\overline{C_1} \cup \tilde{C}_{in} \cup \tilde{C}_{out}$ κατά ένα γενικό τρόπο όπως γράφουμε πιο πάνω. Το πιο κάτω σχήμα δείχνει τους προαναφερθέντες μετασχηματισμούς:



Ορίζουμε

$$m_p(z) = \begin{cases} m^{PII,3}\left(\frac{q^{1/3}}{2^{4/3}}r(z), x\right) & \text{στο } \mathcal{N}_t - \Sigma^{(3)} \\ I & \text{στο } \overline{\mathcal{N}_t}^c - \Sigma^{(3)} \end{cases} \tag{5.8.0.9}$$

όπου το $m^{PII,3}(z,x)$ λύνει το πρόβλημα RH που σχετίζεται με την PII, 5.5.2.6. Τότε, η m_p λύνει το πρόβλημα RH στην $\Sigma^{(3)} \cup \partial\mathcal{N}_t$, με πίνακα άλματος

$$u_p(z) = \begin{cases} u^{PII,3}\left(\frac{q^{1/3}}{2^{4/3}}r(z)\right) & \text{στο } \Sigma^{(3)} \cap \mathcal{N}_t \\ I & \text{στο } \Sigma^{(3)} \cap \mathcal{N}_t^c \\ m_{p+}(z) & \text{στο } \partial\mathcal{N}_t \end{cases} \tag{5.8.0.10}$$

όπου το $u^{PII,3}$ δίνεται από την σχέση 5.5.2.6. Συγκρίνουμε λοιπόν τα $u^{(3)}, u_p$ με γνώμονα το q. Πρώτα, ας τα συγκρίνουμε για $z \in \Sigma^{(3)} \cap \mathcal{N}_t$ τέτοια ώστε $r(z) \in \Sigma_4' \cap \mathcal{N}_t'$. Έχουμε ότι

$$u_{12}^{(3)}(z) = -e^{-2q\alpha(z)}$$

$$(u_p)_{12}(z) = -e^{-2iq^{PII}\left(\frac{q^{1/3}}{2^{4/3}}r(z)\right)} = -e^{-\frac{iq}{6}(r^2-r_0^2)^{3/2}}$$

Για επαρκώς μικρό ε' ώστε να ισχύουν τα παραπάνω, σημειώνουμε πρώτα ότι για τα γ της περίπτωσης 3,

$$\mathrm{Re}(-i(r^2-r_0^2)^{3/2}) \le -\frac{1}{2}|r^2-r_0^2|^{3/2}$$

$$r_0^2 \le \frac{4M_4}{q^{2/3}}$$

$$\left\|x^{5/2}e^{-x^{3/2}}\right\|_{L^\infty(0,\infty)} \le C$$

$$\gamma > 1$$

$$|e^z - 1| \le 2|z|$$

Έτσι, από τους υπολογισμούς που κάναμε για το $\alpha(z)$ και τα πιο πάνω, έχουμε ότι

$$\left|u_{12}^{(3)}(z) - (u_p)_{12}(z)\right| = \left|-e^{-2q\alpha(z)} + e^{-\frac{iq}{6}(r^2-r_0^2)^{3/2}}\right|$$

$$
\begin{aligned}
&= e^{\mathrm{Re}(-\frac{iq}{6}(r^2-r_0^2)^{3/2})}\left|e^{-2q\alpha(z)+\frac{iq}{6}(r^2-r_0^2)^{3/2}}-1\right| \\
&\leq e^{-\frac{q}{12}|r^2-r_0^2|^{3/2}}\cdot 2q\left|-2\alpha(z)+\frac{i}{6}(r^2-r_0^2)^{3/2}\right| \\
&\leq 2qe^{-\frac{q}{24}|r^2-r_0^2|^{3/2}}\left|-2\alpha(z)+\frac{i\gamma}{6}(r^2-r_0^2)^{3/2}\right| \\
&\leq Ce^{-\frac{q}{24}|r^2-r_0^2|^{3/2}}q(|r^2-r_0^2|^{5/2}+|r^2-r_0^2|^{3/2}r_0^2) \\
&\leq \frac{C}{q^{2/3}}+\frac{C(M_4)}{q^{2/3}} \\
&= \frac{C(M_4)}{q^{2/3}}
\end{aligned}
$$

όπου και πάλι η σταθερά C είναι αυθαίρετη, και δεν είναι ίδια σε κάθε στιγμιότυπό της στα πιο πάνω. Με παρόμοιες πράξεις βρίσκουμε το ίδιο αποτέλεσμα για τη θέση (12) για $z : r(z) \in \Sigma_3' \cap \mathcal{N}_t'$ και άρα συνολικά για $z \in \tilde{C}_{in} \cap \mathcal{N}_t$. Ομοίως και για $z \in \tilde{C}_{out}$, έχουμε ότι για $r(z) \in \Sigma_1' \cap \mathcal{N}_t'$ και για $r(z) \in \Sigma_2' \cap \mathcal{N}_t'$,

$$
\left|u_{21}^{(3)}-(u_p)_{21}\right| = \left|e^{2q\alpha(z)}-e^{\frac{iq}{6}(r^2-r_0^2)^{3/2}}\right| \leq \frac{C(M_4)}{q^{2/3}}
$$

Τέλος, για $z \in C_1$ που αντιστοιχεί σε $r(z) \in \Sigma_5'$ μας ενδιαφέρει η διαφορά στο στοιχείο (11). Έχουμε ότι

$$
\mathrm{Re}(-i(r^2-r_0^2)_-^{3/2}) = -|r^2-r_0^2|^{3/2}
$$

Και πάλι από τους υπολογισμούς που κάναμε για το $-2\alpha(z)$, έχουμε ότι

$$
\left|u_{11}^{(3)}-(u_p)_{11}\right| = \left|e^{-2q\alpha_-(z)}-e^{-2ig_-^{PII}\left(\frac{q^{1/3}}{2^{4/3}r(z)}\right)}\right| \leq \frac{C(M_4)}{q^{2/3}}
$$

Δηλαδή, συνολικά,

$$
\left\|u^{(3)}u_p^{-1}-I\right\|_{L^\infty(\Sigma^{(3)}\cap\mathcal{N}_t)} \leq \frac{C(M_4)}{q^{2/3}} \tag{5.8.0.11}
$$

Τώρα, για $z \in \Sigma^{(3)} \cap \mathcal{N}_t^c$, έχουμε τις περιπτώσεις των $\tilde{C}_{in}$ και $\tilde{C}_{out}$. Από την επιλογή τους, σύμφωνα με την 5.8.0.3, υπάρχει $\rho < 1$:

$$
|e^{-2q\alpha}| \leq \rho^q = \left(\frac{1}{\rho}\right)^{-q} \leq Ce^{-cq} \quad \text{για } z \in \tilde{C}_{in}
$$

και ομοίως

$$
|e^{2q\alpha}| \leq Ce^{-cq} \quad \text{για } z \in \tilde{C}_{out}
$$

Συνεπώς,

$$
\left\|u^{(3)}u_p^{-1}-I\right\|_{L^\infty(\Sigma^{(3)}\cap\mathcal{N}_t^c)} \leq Ce^{-cq} \tag{5.8.0.12}
$$

Τέλος, για $z \in \partial \mathcal{N}_t, |r(z)| = \varepsilon'$, από την 5.8.0.10, το ότι $m^{PII,3} \to I$ και τα πιο πάνω, λόγω Taylor,

$$m_{p+}(z) = m^{PII,3}\left(\frac{q^{1/3}}{2^{4/3}}r(z), x\right) = I + \frac{m_1^{PII,3}(x)}{\frac{q^{1/3}}{2^{4/3}}r(z)} + O_{M_4}\left(\frac{1}{q^{2/3}}\right) \quad (5.8.0.13)$$

Το φράγμα είναι ομοιόμορφο για $0 \leq x \leq 2M_4$. Τώρα, όπως και στο προηγούμενο υποκεφάλαιο, ορίζουμε $R = m^{(3)}m_p^{-1}$. Τότε, ο πίνακας άλματος είναι ο $u_R = m_{p-}u^{(3)}u_p^{-1}m_{p-}^{-1}$. Από τις σχέσεις 5.8.0.11/12/13 αλλά και την 5.5.2.9, έχουμε ότι

$$\begin{cases} \|u_R - I\|_{L^\infty(\Sigma^{(3)}\cap\mathcal{N}_t} \leq \dfrac{C(M_4)}{q^{2/3}} & \text{στο } \Sigma^{(3)}) \cap \mathcal{N}_t \\ \|u_R - I\|_{L^\infty(\Sigma^{(3)}\cap\mathcal{N}_t^c} \leq Ce^{-cq} & \text{στο } \Sigma^{(3)}) \cap \mathcal{N}_t^c \\ u_R = m_{p+}^{-1} = I - \frac{2^{4/3}}{q^{1/3}r(z)}m_1^{PII,3}(x) + O_{M_4}\left(\frac{1}{q^{2/3}}\right) & \text{στο } \partial\mathcal{N}_t \end{cases} \quad (5.8.0.14)$$

Από την 5.5.2.8, $m_{1,22}^{PII}(x) = m_{1,22}^{PII,3}(x) + \frac{ix^2}{8}$. Έτσι,

$$\begin{aligned} m_{22}^{(3)}(0) &= R_{22}(0) \\ &= 1 + \frac{i2^{4/3}}{q^{1/3}}m_{1,22}^{PII,3}(x) + O_{M_4}\left(\frac{1}{q^{2/3}}\right) \\ &= 1 + \frac{i2^{4/3}}{q^{1/3}}\left[m_{1,22}^{PII}(x) - \frac{it^2}{8}\left(1 + \frac{t}{2^{1/3}q^{2/3}}\right)^{-4}\right] + O_{M_4}\left(\frac{1}{q^{2/3}}\right) \\ &= 1 + \frac{i2^{4/3}}{q^{1/3}}m_{1,22}^{PII}(x) + \frac{t^2}{2^{5/3}q^{1/3}} + O_{M_4}\left(\frac{1}{q^{2/3}}\right) \end{aligned}$$

Ξέρουμε ότι $x = -t\left(1 + \frac{t}{2^{1/3}q^{2/3}}\right)^{-2} = -t + O_{M_4}\left(\frac{1}{q^{2/3}}\right)$. Επιπλέον, από την 5.5.2.9 η $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m_{1,22}^{PII}(t)$ είναι φραγμένη για $0 \leq t \leq M_4$, λόγω του ότι η $v(x) = m_{1,12}^{PII}$ είναι φραγμένη. Από την 5.8.0.4, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \kappa_{q-1}^2 &= e^{q(-\gamma+\log\gamma+1)}m_{22}^{(3)}(0) \\ &= e^{q(-\gamma+\log\gamma+1)}\left(1 + \frac{i2^{4/3}}{q^{1/3}}m_{1,22}^{PII}(x) + \frac{t^2}{2^{5/3}q^{1/3}} + O\left(\frac{1}{q^{2/3}}\right)\right) \\ &= \left(1 - \frac{t^2}{2^{5/3}q^{1/3}} + O_{M_4}\left(\frac{1}{q^{2/3}}\right)\right)\left(1 + \frac{i2^{4/3}}{q^{1/3}}m_{1,22}^{PII}(x) + \frac{t^2}{2^{5/3}q^{1/3}} + O_{M_4}\left(\frac{1}{q^{2/3}}\right)\right) \\ &= 1 + \frac{i2^{4/3}}{q^{1/3}}m_{1,22}^{PII}(x) + O_{M_4}\left(\frac{1}{q^{2/3}}\right) \\ &= 1 + \frac{i2^{4/3}}{q^{1/3}}m_{1,22}^{PII}(-t) + O_{M_4}\left(\frac{1}{q^{2/3}}\right) \end{aligned}$$

Τέλος, ας δούμε την τρίτη περίπτωση για το γ, δηλαδή $1 + \frac{M_3}{2^{1/3}q^{2/3}} \leq \gamma \leq$

$1+\delta_4$. Ορίζουμε το εξής:

$$m^{(4)} \equiv \begin{cases} m^{(2)} & \text{αν } |z|>1 \\ m^{(2)} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) & \text{αν } |z|<1 \end{cases} \tag{5.8.0.15}$$

Ορίζουμε $\bar{\alpha}(z) = -\pi i \int_{\xi}^{z} \frac{\gamma}{4\pi i} \frac{s+1}{s^2} \sqrt{(s-\xi)(s-\xi^{-1})} \mathrm{d}s$, όπου σε αυτή την περίπτωση επιλέγουμε τον κλάδο ώστε το $\sqrt{(s-\xi)(s-\xi^{-1})}$ να είναι αναλυτικό στο $\mathbb{C} - \overline{C_2}$ και $\sqrt{(s-\xi)(s-\xi^{-1})} \sim +s$ καθώς $s \to +\infty$. Τότε, ο πίνακας άλματος $u^{(4)}$ για το $m^{(4)}$ είναι ο

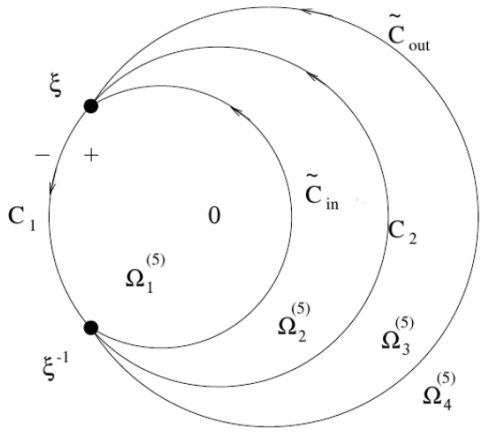
$$u^{(4)} = \begin{cases} \begin{pmatrix} e^{2q\tilde{\alpha}_+} & 1 \\ 0 & e^{2q\tilde{\alpha}_-} \end{pmatrix} & \text{στο } C_2 \\ \begin{pmatrix} 1 & e^{2q\tilde{\alpha}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{στο } C_1 \end{cases} \tag{5.8.0.16}$$

και $\kappa_{q-1}^2 = -e^{q(-\gamma+\log\gamma+1)} m_{21}^{(4)}(0)$. Μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε το $u^{(4)}$ στην C_2 ως εξής:

$$u^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e^{2q\tilde{\alpha}_-} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e^{2q\tilde{\alpha}_+} & 1 \end{pmatrix}$$

Ορίζουμε επίσης την καμπύλη $\Sigma^{(5)}$, από την οποία προκύπτουν τα χωρία $\{\Omega_k^{(5)}\}_{k=1}^4$, η γενική μορφή των οποίων φαίνεται στο σχήμα 5.2.

Σχήμα 5.2:



Με βάση τα πιο πάνω, μπορούμε να ορίσουμε

$$m^{(5)} = \begin{cases} m^{(4)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e^{2q\tilde{\alpha}} & 1 \end{pmatrix}^{-1} & \text{στο } \Omega_2^{(5)} \\ m^{(4)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e^{2q\tilde{\alpha}} & 1 \end{pmatrix} & \text{στο } \Omega_3^{(5)} \\ m^{(4)} & \text{στο } \Omega_1^{(5)} \cup \Omega_4^{(5)} \end{cases} \tag{5.8.0.17}$$

και άρα

$$u^{(5)} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \text{στο } C_2 \\ \begin{pmatrix} 1 & e^{-2q\tilde{\alpha}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{στο } C_1 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e^{2q\tilde{\alpha}} & 1 \end{pmatrix} & \text{στο } \tilde{C}_{in} \cup \tilde{C}_{out} \end{cases} \tag{5.8.0.18}$$

όπως στην περίπτωση του α, έχουμε ότι $|e^{-\tilde{\alpha}(z)}| < 1$ για $z \in C_1$ και $|e^{\tilde{\alpha}(z)}| < 1$ για $z \in \tilde{C}_{in} \cup \tilde{C}_{out}$. Έτσι, μπορούμε να πάρουμε $q \to +\infty$, έχουμε ότι

$$u^{(5,\infty)} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \text{στο } C_2 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{στο } C_1 \end{cases} \tag{5.8.0.19}$$

Με την ίδια λογική με πριν, το πρόβλημα RH με την καμπύλη που φαίνεται στο πιο πάνω σχήμα και τον οριακό πίνακα άλματος $u^{(5,\infty)}$ έχει λύση την

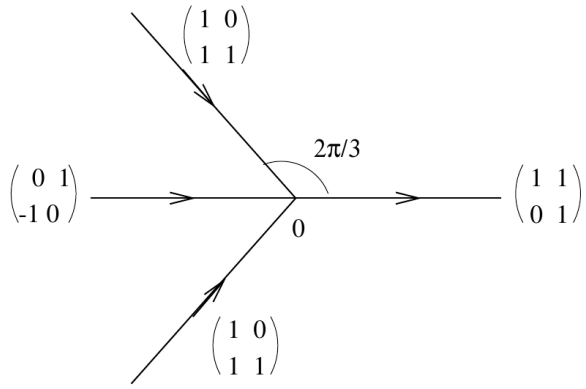
$$m^{(5,\infty)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\tilde{\beta} + \tilde{\beta}^{-1}) & \frac{1}{2i}(\tilde{\beta} - \tilde{\beta}^{-1}) \\ \frac{1}{2i}(\tilde{\beta} - \tilde{\beta}^{-1}) & \frac{1}{2}(\tilde{\beta} + \tilde{\beta}^{-1}) \end{pmatrix}$$

όπου $\tilde{\beta}(z) \equiv \left(\frac{z-\xi}{z-\xi^{-1}}\right)^{1/4}$ και ο κλάδος αυτή τη φορά επιλέγεται ώστε η $\tilde{\beta}$ να είναι αναλυτική στο $\mathbb{C} - \overline{C}_2$ και $\tilde{\beta} \sim +1$ καθώς $z \to \infty$. Με αυτή την επιλογή του κλάδου, μπορούμε να υπολογίσουμε το $\beta(0)$ και να βρούμε ότι

$$m^{(5,\infty)}(0) = -\sin\theta_c = -\frac{1}{\sqrt{\gamma}}$$

και $\kappa_{q-1}^2 \sim e^{q(-\gamma+\log\gamma+1)}\frac{1}{\sqrt{\gamma}}$ καθώς $q \to +\infty$. Θέλουμε και πάλι να δείξουμε ότι $m^{(5)} \xrightarrow{q\to+\infty} m^{(5,\infty)}$, και άρα πρέπει να ελέγξουμε τη συμπεριφορά γύρω από τα άκρα ξ, ξ^{-1} όπου η σύγκλιση γίνεται πιο αργή. Σημειώνουμε πρώτα ότι $\det m^{(5,\infty)} = 1$: αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $\det u^{(5,\infty)} = 1$, και άρα από το πρόβλημα RH, η $\det m^{(5,\infty)}$ είναι αναλυτική, και αφού στο $z \to \infty$ είναι ίση με 1, από το θεώρημα ταυτοτισμού είναι ταυτοτικά ίση με 1.

Με λογική που υιοθετούμε από το [15] για τους πιο κάτω υπολογισμούς, ορίζουμε τώρα την $\Sigma'' = \mathbb{R} \cup \{re^{2\pi i/3} : r > 0\} \cup \{re^{4\pi i/3} : r > 0\}$, και αντίστοιχους πίνακες πάνω σε αυτήν, όπως φαίνεται στο σχήμα:



Θέτουμε $\omega = e^{2\pi i/3}$ και

$$\Psi(s) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \mathrm{Ai}(s) & \mathrm{Ai}(\omega^2 s) \\ \mathrm{Ai}'(s) & \omega^2 \mathrm{Ai}'(\omega^2 s) \end{pmatrix} e^{-\frac{i\pi}{6}\sigma_3} & 0 < \arg s < \frac{2\pi}{3} \\ \begin{pmatrix} \mathrm{Ai}(s) & \mathrm{Ai}(\omega^2 s) \\ \mathrm{Ai}'(s) & \omega^2 \mathrm{Ai}'(\omega^2 s) \end{pmatrix} e^{-\frac{i\pi}{6}\sigma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & \frac{2\pi}{3} < \arg s < \pi \\ \begin{pmatrix} \mathrm{Ai}(s) & -\omega^2 \mathrm{Ai}(\omega s) \\ \mathrm{Ai}'(s) & -\mathrm{Ai}'(\omega s) \end{pmatrix} e^{-\frac{i\pi}{6}\sigma_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \pi < \arg s < \frac{4\pi}{3} \\ \begin{pmatrix} \mathrm{Ai}(s) & -\omega^2 \mathrm{Ai}(\omega s) \\ \mathrm{Ai}'(s) & \omega \mathrm{Ai}'(\omega s) \end{pmatrix} e^{-\frac{i\pi}{6}\sigma_3} & \frac{4\pi}{3} < \arg s < 2\pi \end{cases} \tag{5.8.0.20}$$

όπου Ai η συνάρτηση Airy. Τότε, η Ψ ικανοποιεί τις συνθήκες άλματος:

$$\begin{cases} \Psi_+ = \Psi_- \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & z \in \mathbb{R}_+ \\ \Psi_+ = \Psi_- \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & z \in \mathbb{R}_- \\ \Psi_+ = \Psi_- \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & z \in \{re^{2\pi i/3} : r > 0\} \cup \{re^{4\pi i/3} : r > 0\} \end{cases} \tag{5.8.0.21}$$

Ορίζουμε τώρα τις $\mathcal{N}_\xi, \mathcal{N}_{\xi^{-1}}$, ανοικτές μπάλες γύρω από τα ξ, ξ^{-1} αντίστοιχα με ακτίνα $\varepsilon''\sqrt{\gamma - 1}$, όπου $0 < \varepsilon'' < 1$ επαρκώς μικρή για να ικανοποιείται η 5.8.0.23. Παρατηρούμε ότι

$$\frac{1}{2}|\xi - \xi^{-1}| = \frac{2}{\gamma}\sqrt{\gamma - 1} > \varepsilon''\sqrt{\gamma - 1}$$

Αφού $0 < \varepsilon'' < 1$, $\mathcal{N}_\xi \cap \mathcal{N}_{\xi^{-1}} = \emptyset$. Θεωρούμε ότι οι $\partial\mathcal{N}_\xi, \partial\mathcal{N}_{\xi^{-1}}$ είναι προσανατολισμένες αριστερόστροφα. Με μια αλλαγή μεταβλητής έχουμε ότι

$$\tilde{\alpha}(z) = \frac{2}{3}(z - \xi)^{3/2} G(z)$$

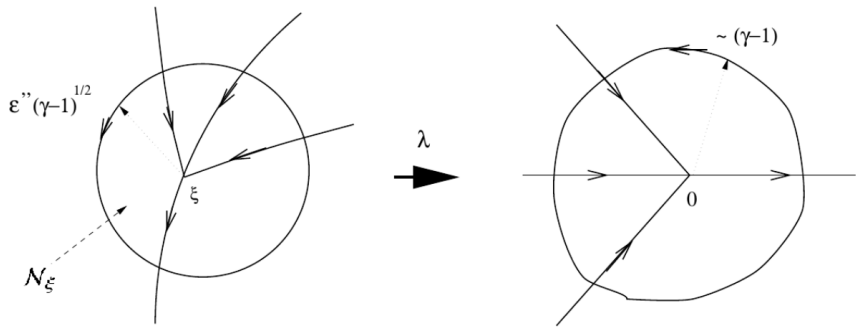
όπου το G είναι αναλυτική συνάρτηση και $G(\xi) = (\gamma-1)^{3/4}e^{-i(\frac{3}{2}\theta_c+\frac{3\pi}{4})}$. Συγκεκριμένα, $(z-\xi)^{3/2} = |z-\xi|^{3/2}e^{\frac{3}{2}i\arg(z-\xi)}$ και $\theta_c - \frac{\pi}{2} < \arg(z-\xi) < \theta_c + \frac{3\pi}{2}$. Ορίζουμε

$$\lambda(z) \equiv (z-\xi)(G(z))^{2/3} \tag{5.8.0.22}$$

όπου η $(G(\cdot))^{2/3}$ είναι αναλυτική στο $\mathcal{N}_\xi$ και $(G(z))^{2/3} \xrightarrow{z\to\xi} (\gamma-1)^{1/2}e^{-i(\theta_c+\frac{\pi}{2})}$. Φυσικά, $\lambda^{3/2} = \frac{3}{2}\tilde{\alpha}$. Μπορούμε να επιλέξουμε το ε'' να είναι επαρκώς μικρό ώστε η

Η $z \mapsto \lambda(z)$ είναι 1-1 και επί σε μια ανοικτή γειτονιά του 0 με διάμετρο $\sim (\gamma-1)$ (5.8.0.23)

Αυτός ο μετασχηματισμός φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα:



Ορίζουμε $\Sigma^{(5)} \cap \mathcal{N}_\xi \equiv \{z \in \mathcal{N}_\xi : \lambda(z) \in \Sigma''\}$. Θέτουμε

$$E(z) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \sqrt{\pi} e^{\frac{i\pi}{6}} q^{\frac{1}{6}\sigma_3} \left(\left(z-\xi^{-1}\right)(G(z))^{2/3} \right)^{\frac{1}{4}\sigma_3} \tag{5.8.0.24}$$

και για $z \in \mathcal{N}_\xi - \Sigma_5$, ορίζουμε την προσέγγιση της $m^{(5)}$:

$$m_p(z) = E(z)\Psi(q^{2/3}\lambda(z))e^{q\tilde{\alpha}(z)\sigma_3} \tag{5.8.0.25}$$

Τότε, η m_p ικανοποιεί την συνθήκη άλματος στο $\Sigma^{(5)} \cap \mathcal{N}_\xi$ όπως η $m^{(5)}$: $m_{p+} = m_{p-}u^{(5)}$. Αν το $q \to +\infty$, για $z \in \partial\mathcal{N}_\xi, |q^{2/3}\lambda(z)| \geq cq^{2/3}(\gamma-1) \geq cM_3 2^{-1/3}$. Συνεπώς, αν

το M_3 είναι επαρκώς μεγάλο ώστε οι ασυμπτωτικά κυρίαρχοι όροι στην συνάρτηση Airy να κυριαρχούν στην $\Psi(q^{2/3}\lambda(z))$ (5.8.0.26)

τότε από την επιλογή του $E(z)$, για $z \in \partial N_\xi$,

$$m_{p+} = m^{(5,\infty)}(z)\left(I + O\left(\frac{1}{q\lambda^{3/2}(z)}\right)\right) = m^{(5,\infty)}(z)\left(I + O\left(\frac{1}{q(\gamma-1)^{3/2}}\right)\right) \tag{5.8.0.27}$$

Σημειώνουμε την συμμετρία $m^{(5)} = \overline{m^{(5)}(\bar{z})}$ και ορίζουμε $\Sigma^{(5)} \cap \mathcal{N}_{\xi^{-1}} \equiv \overline{\Sigma^{(5)} \cap \mathcal{N}_\xi}$, και για $z \in \mathcal{N}_{\xi^{-1}} - \Sigma^{(5)}$, θέτουμε $m_p(z) = \overline{m_p(\bar{z})}$. Στη συνέχεια

επεκτείνουμε την $\Sigma^{(5)} \cap (\mathcal{N}_\xi \cup \mathcal{N}_{\xi^{-1}})$ ώστε να έχουμε τη $\Sigma^{(5)}$, που να έχει τη γενική μορφή που φαίνεται στο σχήμα 5.2. Τέλος, για $z \in \mathbb{C} - (\Sigma^{(5)} \cap (\mathcal{N}_\xi \cup \mathcal{N}_{\xi^{-1}}))$, ορίζουμε $m_p(z) = m^{(5,\infty)}$.

Θέτουμε $\mathcal{N} = \mathcal{N}_\xi \cup \mathcal{N}_{\xi^{-1}}$. Τότε, το $\tilde{R} \equiv m^{(5)} m_p^{-1}$ λύνει ένα πρόβλημα RH στην καμπύλη $\Sigma^{(5)} \cup \partial\mathcal{N}$ με πίνακα άλματος τον $u_{\tilde{R}} = m_{p-} u^{(5)} u_p^{-1} m_{p-}^{-1}$, δηλαδή,

$$u_{\tilde{R}} = \begin{cases} I & \text{στο } (\Sigma^{(5)} \cap \mathcal{N}) \cup C_2 \\ m^{(5,\infty)} \begin{pmatrix} 1 & e^{-2q\tilde{\alpha}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (m^{(5,\infty)})^{-1} & \text{στο } C_1 \cap \overline{\mathcal{N}}^c \\ m^{(5,\infty)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e^{2q\tilde{\alpha}} & 1 \end{pmatrix} (m^{(5,\infty)})^{-1} & \text{στο } (\tilde{C}_{in} \cup \tilde{C}_{out}) \cap \overline{\mathcal{N}}^c \\ I + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{q(\gamma-1)^{3/2}}\right) & \text{στο } \partial\mathcal{N} \end{cases} \tag{5.8.0.28}$$

Έστω $\varepsilon_1 > 0$ επαρκώς μικρό. Επιλέγουμε δ_4 επαρκώς μικρό ώστε για $1 \le \gamma \le 1 + \delta_4$,

$$\xi, \xi^{-1} \in \{z : |z+1| \le \varepsilon_1\} \tag{5.8.0.29}$$

Με υπολογισμούς παρόμοιους με πιο πάνω, καταλήγουμε στο ότι $\mathrm{Re}(2\tilde{\alpha}(z)) \le -c(\gamma-1)^{3/2}$ για $z \in \left(\tilde{C}_{in} \cup \tilde{C}_{out}\right) \cap \{z : |z+1| \le \varepsilon_1\} \cap \overline{\mathcal{N}}^c$, και επίσης $|e^{2q\tilde{\alpha}(z)}| \le e^{-cq}$ για $z \in \left(\tilde{C}_{in} \cup \tilde{C}_{out}\right) \cap \{z : |z+1| > \varepsilon_1\}$. Δηλαδή, $|e^{2q\tilde{\alpha}(z)}| \le e^{-cq(\gamma-1)^{3/2}}$ για $z \in \left(\tilde{C}_{in} \cup \tilde{C}_{out}\right) \cap \mathcal{N}^c$. Επιπλέον, $\mathrm{Re}(-2\tilde{\alpha}(z)) \le -c(\gamma-1)^{3/2}$ για $z \in C_1 \cap \mathcal{N}^c$. Συνεπώς, καταλήγουμε στο ότι

$$\left\| u_{\tilde{R}} - I \right\|_{L^\infty(\Sigma^{(5)} \cap \mathcal{N}^c)} \le C e^{-cq(\gamma-1)^{3/2}} \tag{5.8.0.30}$$

Επίσης, και πάλι με παρόμοιους υπολογισμούς με πιο πάνω, στο $\Gamma = \tilde{C}_{in} \cap \mathcal{N}^c \cap \{z : \mathrm{Im}(z) \ge 0\}$, χρησιμοποιούμε το ότι $|r + r_0| \ge |r - r_0|$ στην δεύτερη ανισότητα και έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \int_\Gamma |e^{-2q\tilde{\alpha}(z)}||\mathrm{d}z| &\le \int_{r = r_0 + x e^{i\pi/3} : x \ge c\sqrt{\gamma-1}} C e^{-qc|r^2 - r_0^2|^{3/2}} \mathrm{d}r + C e^{-cq} \\ &\le \int_{c\sqrt{\gamma-1}}^{+\infty} C e^{-qcx^3} \mathrm{d}x + C e^{-cq} \\ &\le \frac{C}{q(\gamma-1)} \end{aligned}$$

Οι ίδιοι υπολογισμοί ισχύουν και για το υπόλοιπο του $\tilde{C}_{in} \cap \mathcal{N}^c$ και για το $\tilde{C}_{out} \cap \mathcal{N}^c$, και έτσι $\left\| u_{\tilde{R}} - I \right\|_{L^1((\tilde{C}_{in} \cup \tilde{C}_{out}) \cap \mathcal{N}^c)} \le \frac{C}{q(\gamma-1)}$. Από την άλλη, $\mathrm{length}(\partial\mathcal{N}) \le C\sqrt{\gamma-1}$ και $\mathrm{length}(C_1 \cap \mathcal{N}^c) \le C\sqrt{\gamma-1}$, και άρα, από τους πιο πάνω L^∞ υπολογισμούς, $\left\| u_{\tilde{R}} - I \right\|_{L^1(\partial\mathcal{N})} \le \frac{C}{q(\gamma-1)}$ και $\left\| u_{\tilde{R}} - I \right\|_{L^1(C_1 \cap \mathcal{N}^c)} \le \frac{C}{q(\gamma-1)}$. Συνεπώς,

$$\left\| u_{\tilde{R}} - I \right\|_{L^1(\Sigma^{(5)} \cup \partial\mathcal{N})} \le \frac{C}{q(\gamma-1)} \tag{5.8.0.31}$$

Χρησιμοποιούμε την επιλογή των $\mathcal{N}_\xi, \mathcal{N}_{\xi^{-1}}$ και με έναν ευθύ υπολογισμό μπορούμε να δούμε ότι το $m^{(5,\infty)}$, και άρα και το $(m^{(5,\infty)})^{-1}$ (καθώς $\det m^{(5,\infty)} = 1$) είναι ομοιόμορφα φραγμένα για τα γ τέτοια ώστε $1 + \frac{M_3}{2^{1/3}q^{2/3}} \leq \gamma \leq 1 + \delta_4$. Επίσης, βλέπουμε ότι οι τελεστές Cauchy, $C_\pm$ στο $L^2(\Sigma^{(5)} \cup \partial\mathcal{N})$ είναι ομοιόμορφα φραγμένοι για αυτά τα γ. Δηλαδή,

$$\begin{aligned}
\left\|C_{w_{\tilde{R}}}\right\|_{L^2(\Sigma^{(5)}\cup\partial\mathcal{N}\to L^2(\Sigma^{(5)}\cup\partial\mathcal{N}))} &\leq C\left\|w_{\tilde{R}}\right\|_{L^\infty(\Sigma^{(5)}\cup\partial\mathcal{N})} \\
&\leq \frac{C}{q(\gamma-1)^{3/2}} + Ce^{-Cq(\gamma-1)^{3/2}} \\
&\leq \frac{C}{M_3^{2/3}} + Ce^{-CM_3^{3/2}} \\
&\leq \frac{1}{2} < 1 \qquad (5.8.0.32)
\end{aligned}$$

αν το M_3 είναι επαρκώς μεγάλο. Έτσι τελικώς, από τις σχέσεις 5.8.0.31 και ,

$$\begin{aligned}
|\tilde{R}_{22}(0) - 1| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Sigma^{(5)}\cup\partial\mathcal{N}}\left(\frac{w_{\tilde{R}}(s) - [(\mathrm{Id} - C_{w_{\tilde{R}}})^{-1}C_{w_{\tilde{R}}}(I)](z)w_{\tilde{R}}(s)}{s}\mathrm{d}s\right)_{22}\right| \\
&\leq C(\left\|w_{\tilde{R}}\right\|_{L^1(\Sigma^{(5)}\cup\partial\mathcal{N})} + \left\|w_{\tilde{R}}\right\|^2_{L^2(\Sigma^{(5)}\cup\partial\mathcal{N})}) \\
&\leq C\left\|w_{\tilde{R}}\right\|_{L^1(\Sigma^{(5)}\cup\partial\mathcal{N})} \\
&\leq \frac{C}{q(\gamma-1)}
\end{aligned}$$

όπου η τελευταία γραμμή προκύπτει από το ότι το $\left\|w_{\tilde{R}}\right\|_{L^\infty(\Sigma^{(5)}\cup\partial\mathcal{N})}$ είναι φραγμένο. Επιπλέον,

$$\tilde{R}_{21}(0) \leq \frac{C}{q(\gamma-1)}$$

Τελικώς, από το ότι $m_{21}^{(5)}(0) = \tilde{R}_{22}(0)m_{21}^{(5,\infty)}(0)\tilde{R}_{21}(0)m_{11}^{(5,\infty)}(0)$ καταλήγουμε στο ότι

$$\kappa_{q-1}^2 = -e^{q(-\gamma+\log\gamma+1)}m_{21}^{(5)}(0) = e^{q(\gamma+\log\gamma+1)}\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\left(1 + O\left(\frac{1}{q(\gamma-1)}\right)\right) \qquad (5.8.0.33)$$

Σημειώνουμε ότι αυτό είναι συνεπές με το αποτέλεσμα που έχουμε στην περίπτωση 1. όπου $\gamma - 1 \geq \delta_3$. Συνοψίζουμε με το παρακάτω λήμμα:

Λήμμα 5.8.3. Έστω $\delta_3, M_4 > 0$ σταθεροί αριθμοί. Έστωσαν επίσης $\delta_4 > 0$ σταθερός επαρκώς μικρός αριθμός που να ικανοποιεί την σχέση 5.8.0.29, και $M_3 > 0$ ένας σταθερός επαρκώς μεγάλος αριθμός που να ικανοποιεί τις σχέσεις 5.8.0.26,5.8.0.32. Τότε, καθώς $q \to +\infty$, έχουμε τις εξής ασυμπτωτικές σχέσεις:

1. Αν $1+\delta_3 \leq \gamma$,

$$\kappa_{q-1}^2 = e^{q(-\gamma+\log\gamma+1)}\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\left(1+O\left(\frac{1}{q}\right)\right)$$

   όπου το σφάλμα είναι ομοιόμορφο για $1+\delta_4 \leq \gamma \leq L$ για κάθε σταθερό $L < +\infty$.
2. Αν $1+\frac{M_3}{2^{1/3}q^{2/3}} \leq \gamma \leq 1+\delta_4$,

$$\kappa_{q-1}^2 = e^{q(-\gamma+\log\gamma+1)}\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\left(1+O\left(\frac{1}{q(\gamma-1)}\right)\right)$$

   όπου το σφάλμα είναι ομοιόμορφο για το χωρίο στο οποίο ανήκει το γ.
3. Αν $1 < \gamma \leq 1+\frac{M_4}{2^{1/3}q^{2/3}}$,

$$\left|\kappa_{q-1}^2 - 1 - \frac{i2^{4/3}}{q^{1/3}}m_{1,22}^{PII}(-t)\right| \leq \frac{C(M_4)}{q^{2/3}}$$

   όπου το t καθορίζεται από την σχέση $\gamma = 1+\frac{t}{2^{1/3}q^{2/3}}, 0 \leq t \leq M_4$.

Αν συνδυάσουμε τα λήμματα 5.8.3, 5.7.1 σύμφωνα με τα τρίτα σημεία και των δύο λημμάτων, τότε υπάρχει θετική σταθερά M τέτοια ώστε για την περιοχή $1-\frac{M}{2^{1/3}q^{2/3}} \leq \gamma \leq 1+\frac{M}{2^{1/3}q^{2/3}}$ να ισχύει το πιο κάτω:

$$\left|\kappa_{q-1}^2 - 1 - \frac{i2^{4/3}}{q^{1/3}}m_{1,22}^{PII}(-t)\right| \leq \frac{C(M)}{q^{2/3}}$$

όπου $\gamma = 1-\frac{t}{2^{1/3}q^{2/3}}$.

Επιπλέον, από το λήμμα 5.8.3, 2., υπάρχει $C^{\#}$ ανεξάρτητο της M_3 και σταθερό αν επιλέξουμε δ_4 ώστε να ικανοποιείται η σχέση 5.8.0.29, ώστε καθώς $q \to +\infty$,

$$\log\kappa_{q-1}^2 \leq q(-\gamma+\log\gamma+1) + \frac{C^{\#}}{q(\gamma-1)} \tag{5.8.0.34}$$

5.9 Ασυμπτωτική ανάλυση του $\varphi_n(\lambda)$ καθώς $n \longrightarrow +\infty$.

Σε αυτή την ενότητα καταλήγουμε στα θεμιτά αποτελέσματα για το $\varphi_n(\lambda)$ όταν το $n \to +\infty$. Για να το κάνουμε αυτό, κατ' αρχάς συνδυάζουμε τα κύρια λήμματα που προέκυψαν στις τελευταίες δύο ενότητες για να μελετήσουμε πέντε διαφορετικές περιπτώσεις. Υπενθυμίζουμε ότι $\gamma = \gamma(\lambda, k) = \frac{2\sqrt{\lambda}}{k+1}$.

Λήμμα 5.9.1. Έστωσαν οι σταθερές $0 < \delta_5, \delta_6, \delta_7 < 1$ και $M_5, M_6, M_7 > 0$, τέτοιες ώστε να ικανοποιούνται οι εξής συνθήκες:

a) Το δ_6 ικανοποιεί την 5.8.0.29
b) Το $M_5 \geq 1$ ικανοποιεί την 5.7.0.6
c) Το $\frac{1}{2}M_6 \geq 1$ ικανοποιεί την 5.7.0.6

d) Το $M_7 \geq 2$ είναι επαρκώς μεγάλο ώστε να ικανοποιεί την 5.9.0.2

Αν θέσουμε $\frac{2\sqrt{\lambda}}{n+1} = 1 - \frac{t}{2^{1/3}(n+1)^{2/3}} \iff t = 2^{1/3}(n+1)^{2/3}\left(1 - \frac{2\sqrt{\lambda}}{n+1}\right)$, τότε έχουμε τις εξής εκτιμήσεις για την ασυμπτωτική συμπεριφορά του $\varphi_n(\lambda)$ καθώς $n \to +\infty$:

1. Αν $0 \leq \frac{2\sqrt{\lambda}}{n+1} \leq 1 - \delta_5$, τότε υπάρχουν $C(\delta_5) = C, c(\delta_5) = c$ τ.ω.

$$|\log \varphi_n(\lambda)| \leq Ce^{-cn}$$

2. Αν $\frac{1}{2} \leq \frac{2\sqrt{\lambda}}{n+1} \leq 1 - \frac{M_5}{2^{1/3}(n+1)^{2/3}}$, τότε υπάρχουν σταθερές C, c ανεξάρτητες του M_5 τ.ω.

$$|\log \varphi_n(\lambda)| \leq Ce^{-ct^{3/2}}$$

3. Αν $1 - \frac{M_6}{2^{1/3}(n+1)^{2/3}} \leq \frac{2\sqrt{\lambda}}{n+1} \leq 1 + \frac{M_6}{2^{1/3}(n+1)^{2/3}}$, ώστε $-M_6 \leq t \leq M_6$ τότε υπάρχει $C(M_6)$ και σταθερά C ανεξάρτητη του M_6 ώστε

$$\left|\log \varphi_n(\lambda) - \int_t^{+\infty} 2im_{1,22}^{PII}(y)\mathrm{d}y\right| \leq \frac{C(M_6)}{n^{1/3}} + Ce^{-\frac{1}{4}M_6^{3/2}}$$

4. Αν $1 + \frac{M_7}{2^{1/3}(n+1)^{2/3}} \leq \frac{2\sqrt{\lambda}}{n+1} \leq 1 + \delta_6$, τότε υπάρχει $C(M_7)$ τ.ω.

$$\log \varphi_n(\lambda) \leq \frac{1}{96}t^3 + C(M_7)$$

5. Αν $1 + \delta_7 \leq \frac{2\sqrt{\lambda}}{n+1}$, τότε υπάρχουν σταθερές C, c ώστε

$$\varphi_n(\lambda) \leq Ce^{-c\lambda} \leq Ce^{-cn^2}$$

Απόδειξη

Θα θεωρήσουμε την περίπτωση 5. γνωστή, και η απόδειξή της βρίσκεται στο [16]. Για κάθε μια από τις υπόλοιπες πιο πάνω περιπτώσεις, θα χρησιμοποιήσουμε το $\log \varphi_n(\lambda) = \sum_{k=n}^{+\infty} \log \kappa_k^2(\lambda)$. Τις μελετάμε λοιπόν ξεχωριστά.

Στην περίπτωση 1., για κάθε $k \geq n, 0 \leq \gamma(k,\lambda) = \frac{2\sqrt{\lambda}}{k+1} \leq \frac{2\sqrt{\lambda}}{n+1} \leq 1 - \delta_5$. Έτσι, καθώς $n \to +\infty$, υπάρχει σταθερά C ώστε

$$\begin{aligned}
|\log \varphi_n(\lambda)| &= \left|\sum_{k=n}^{+\infty} \log \kappa_k^2(\lambda)\right| \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \left|\kappa_k^2 - 1\right| \\
&\leq \sum_{k=n}^{+\infty} Ce^{-ck} = Ce^{-cn} \sum_{i=0}^{+\infty} e^{-ci} \\
&= C'e^{-cn}
\end{aligned}$$

Στην πρώτη ανισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι $\log x \leq x - 1$, στην δεύτερη ανισότητα επικαλούμαστε το λήμμα 5.7.1,1. και στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το ότι η σειρά που εμφανίζεται συγκλίνει (είναι γεωμετρική με λόγο $e^{-c} \leq 1$).

Στην περίπτωση 2., χωρίζουμε το άθροισμα σε δύο αθροίσματα, οι δείκτες k των οποίων κινούνται στα χωρία:

$$(1) = \{k \in \mathbb{N} : n+1 \leq k+1 \leq 4\sqrt{\lambda}\}$$

$$(2) = \{k \in \mathbb{N} : 4\sqrt{\lambda} < k+1\}$$

Δηλαδή,

$$\log \varphi_n(\lambda) = \sum_{k\in(1)} \log \kappa_k^2(\lambda) + \sum_{k\in(2)} \log \kappa_k^2(\lambda)$$

Για $k \in (1)$, εύκολα φαίνεται ότι $\frac{1}{2} \leq \frac{2\sqrt{\lambda}}{k+1} \leq 1 - \frac{M_5}{2^{1/3}(n+1)^{2/3}}$. Από το λήμμα 5.7.1,2., υπάρχει σταθερά C ανεξάρτητη του M_5 που να ικανοποιεί τη σχέση 5.7.0.6, ώστε, αφού $q = k+1$,

$$|\log \kappa_k^2(\lambda)| \leq \frac{e^{-\frac{2\sqrt{2}}{3}(k+1)\left(1-\frac{2\sqrt{\lambda}}{k+1}\right)^{3/2}}}{(k+1)^{1/3}}$$

Η συνάρτηση f όπου $f(x) = \frac{1}{x^{1/3}} e^{-\frac{2\sqrt{2}}{3}x\left(1-\frac{2\sqrt{\lambda}}{x}\right)^{3/2}}$ είναι φθίνουσα και μη αρνητική για $x \geq 1$. Με βάση αυτό,

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{(1)} \log \kappa_k^2(\lambda)\right| &\leq C \sum_{(1)} \frac{e^{-\frac{2\sqrt{2}}{3}(k+1)\left(1-\frac{2\sqrt{\lambda}}{k+1}\right)^{3/2}}}{(k+1)^{1/3}} \\
&\leq C \int_{n+1}^{4\sqrt{\lambda}} f(x)\mathrm{d}x + C\frac{e^{-\frac{2\sqrt{2}}{3}(n+1)\left(1-\frac{2\sqrt{\lambda}}{n+1}\right)^{3/2}}}{(n+1)^{1/3}} \\
&\leq C(2\sqrt{\lambda})^{2/3} \int_{\frac{n+1}{2\sqrt{\lambda}}-1}^{1} e^{-\frac{4\sqrt{2\lambda}y^{3/2}}{3(1+y)^{1/2}}} \frac{\mathrm{d}y}{(1+y)^{1/3}} + Ce^{-\frac{1}{2}(n+1)\left(1-\frac{2\sqrt{\lambda}}{n+1}\right)^{3/2}} \\
&\leq C(2\sqrt{\lambda})^{2/3} \int_{\frac{n+1}{2\sqrt{\lambda}}-1}^{1} e^{-\sqrt{\lambda}y^{3/2}}\mathrm{d}y + Ce^{-\frac{1}{2}(n+1)\left(1-\frac{2\sqrt{\lambda}}{n+1}\right)^{3/2}} \\
&\leq C(2\sqrt{\lambda})^{2/3} \int_{\sqrt{\lambda}\left(\frac{n+1}{2\sqrt{\lambda}}-1\right)^{3/2}}^{\sqrt{\lambda}} e^{-s}\frac{\mathrm{d}s}{s^{1/3}} + Ce^{-\frac{1}{2}(n+1)\left(1-\frac{2\sqrt{\lambda}}{n+1}\right)^{3/2}} \\
&\leq Ce^{-\sqrt{\lambda}\left(\frac{n+1}{2\sqrt{\lambda}}-1\right)^{3/2}} + Ce^{-\frac{1}{2}(n+1)\left(1-\frac{2\sqrt{\lambda}}{n+1}\right)^{3/2}} \\
&\leq Ce^{-\frac{1}{2}(n+1)\left(1-\frac{2\sqrt{\lambda}}{n+1}\right)^{3/2}}
\end{aligned}$$

Φυσικά, η σταθερά C προσαρμόζεται σε κάθε βήμα. Πιο πάνω χρησιμοποιήσαμε τις αλλαγές μεταβλητών $y = \frac{x}{2\sqrt{\lambda}} - 1$ για την τρίτη ανισότητα και $s = \sqrt{\lambda}y^{3/2}$ για την πέμπτη. Για την προτελευταία ανισότητα χρησιμοποιούμε ότι $e^{-s}\frac{1}{s^{1/3}} \leq e^{-s}$ και η τελευταία είναι φθίνουσα για $s \geq 1$.

Χρησιμοποιήσαμε επίσης για την τελευταία ανισότητα το ότι $\frac{2\sqrt{\lambda}}{n+1} \leq 1$ σε συνδυασμό με τους πιο κάτω υπολογισμούς:

$$\sqrt{\lambda}\left(\frac{n+1}{2\sqrt{\lambda}}-1\right)^{3/2} = \sqrt{\lambda}\left(\frac{1-\frac{2\sqrt{\lambda}}{n+1}}{\frac{2\sqrt{\lambda}}{n+1}}\right)^{3/2} = \left(\frac{n+1}{2\sqrt{\lambda}}\right)^{1/2}\frac{n+1}{2}\left(1-\frac{2\sqrt{\lambda}}{n+1}\right)^{3/2} \geq \frac{n+1}{2}\left(1-\frac{2\sqrt{\lambda}}{n+1}\right)^{3/2}$$

Για $k \in (2)$, έχουμε ότι $\frac{2\sqrt{\lambda}}{n+1} \leq \frac{1}{2}$. Έτσι, από το λήμμα 5.7.1,1. έχουμε ότι

$$\left|\sum_{k\in(2)} \log \kappa_k^2(\lambda)\right| \leq \sum_{k=[4\sqrt{\lambda}]-1}^{+\infty} Ce^{-ck} \leq Ce^{-cn}$$

με το ίδιο επιχείρημα με πιο πάνω - της συγκλίνουσας γεωμετρικής σειράς. Δηλαδή, συνολικά για την περίπτωση 2.,

$$|\log \varphi_n(\lambda)| \leq Ce^{-c(n+1)\left(1-\frac{2\sqrt{\lambda}}{n+1}\right)^{3/2}}$$

καθώς $n \to +\infty$.

Προχωράμε στην περίπτωση 3.. Θέτουμε t τέτοιο ώστε

$$\frac{2\sqrt{\lambda}}{n+1} = 1 - \frac{t}{2^{1/3}(n+1)^{2/3}} \tag{5.9.0.1}$$

με $-M_6 \leq t \leq M_6$. Χωρίζουμε αυτή τη φορά το άθροισμα που θέλουμε να φράξουμε σε τρία αθροίσματα. Ορίζουμε

$$(1) = \left\{k : n+1 \leq k+1 \leq (n+1) + \frac{M_6 - t}{2^{1/3}}(n+1)^{1/3}\right\}$$

$$(2) = \left\{k : (n+1) + \frac{M_6 - t}{2^{1/3}}(n+1)^{1/3} < k+1 \leq \frac{3}{2}(n+1) - \frac{t}{2^{1/3}}(n+1)^{1/3}\right\}$$

$$(3) = \left\{k : \frac{3}{2}(n+1) - \frac{t}{2^{1/3}}(n+1)^{1/3} \leq k+1\right\}$$

Για $k \in (1)$, καθώς $n \to +\infty$, έχουμε τα εξής: αφού $k+1 > n+1$, $\gamma(k) = \frac{2\sqrt{\lambda}}{k+1} \leq \frac{2\sqrt{\lambda}}{n+1} \leq 1 + \frac{M_6}{2^{1/3}(k+1)^{2/3}}$. Επίσης, με μερικές πράξεις μπορούμε να βρούμε και ένα κάτω φράγμα για το $\gamma(k)$, και να καταλήξουμε στην εξής έκφραση:

$$1 - \frac{6M_6}{2^{1/3}(k+1)^{2/3}} \leq \frac{2\sqrt{\lambda}}{k+1} \leq 1 + \frac{M_6}{2^{1/3}(k+1)^{2/3}}$$

Συνεπώς, από το λήμμα 5.8.3, έχουμε ότι καθώς $k \geq n \to +\infty$,

$$\log \kappa_k^2(\lambda) = \frac{i2^{4/3}}{(k+1)^{1/3}} m_{1,22}^{PII}\left(2^{1/3}(k+1)^{2/3}\left(1-\frac{2\sqrt{\lambda}}{k+1}\right)\right) + O_{M_6}\left(\frac{1}{k^{2/3}}\right)$$

Έτσι,

$$\sum_{k\in(1)} \log \kappa_k^2(\lambda) = \sum_{k+1=n+1}^{[(n+1)+\frac{M_6-t}{2^{1/3}}(n+1)^{1/3}]} \frac{i2^{4/3}}{(k+1)^{1/3}} m_{1,22}^{PII}\left(2^{1/3}(k+1)^{2/3}\left(1-\frac{2\sqrt{\lambda}}{k+1}\right)\right) + O_{M_6}\left(\frac{1}{k^{2/3}}\right)$$

$$= \int_{n+1}^{(n+1)+\frac{(M_6-t)}{2^{1/3}}(n+1)^{1/3}} \frac{i2^{4/3}}{x^{1/3}} m_{1,22}^{PII}\left(2^{1/3}x^{2/3}\left(1-\frac{2\sqrt{\lambda}}{x}\right)\right)\mathrm{d}x + O_{M_6}\left(\frac{1}{n^{1/3}}\right)$$

Για να περάσουμε στη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιούμε ότι για $b > a$ ακεραίους,

$$\left|\sum_{n=a}^{b} f(n) - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \sum_{n=a}^{b-1} \sup\left\{|f(\alpha)-f(\beta)| : n \leq \alpha, \beta \leq n+1\right\}$$

$$\leq \|f'\|_{L^\infty(a,b)}(b-a)$$

Για τη δική μας περίπτωση, ένας απλός υπολογισμός μπορεί να δείξει ότι

$$\|f'\|_{L^\infty(n+1,[(n+1)+\frac{M_6-t}{2^{1/3}}(n+1)^{1/3}])} \leq \frac{C(M_6)}{n^{2/3}}$$

ενώ φυσικά η συμβολή από το αντίστοιχο (a,b) είναι $O_{M_6}(n^{1/3})$ και από το $([(n+1)+\frac{M_6-t}{2^{1/3}}(n+1)^{1/3}], [(n+1)+\frac{M_6-t}{2^{1/3}}(n+1)^{1/3}]+1)$ είναι $O_{M_6}(1/n^{1/3})$.

Σύμφωνα με την 5.9.0.1, $2\sqrt{\lambda} = (n+1)\left(1-\frac{t}{2^{1/3}(n+1)^{2/3}}\right)$. Με την αντικατάσταση $x = (n+1)+s(n+1)^{1/3}$,

$$\int_0^{\frac{M_6-t}{2^{1/3}}} i2^{4/3} m_{1,22}^{PII}\left[2^{1/3}(n+1)^{2/3}\left(1+\frac{s}{(n+1)^{2/3}}\right)^{2/3}\left(1-\frac{(n+1)-\frac{t}{2^{1/3}}(n+1)^{1/3}}{(n+1)+s(n+1)^{1/3}}\right)\right]$$

$$(n+1)^{-1/3}\left(1+\frac{s}{(n+1)^{2/3}}\right)^{-1/3}(n+1)^{1/3}\mathrm{d}s + O_{M_6}\left(\frac{1}{n^{1/3}}\right)$$

$$= \int_0^{\frac{M_6-t}{2^{1/3}}} i2^{4/3} m_{1,22}^{PII}\left[2^{1/3}(n+1)^{-1/3}\left(1+\frac{s}{(n+1)^{2/3}}\right)^{-1/3}\left(s+\frac{t}{2^{1/3}}\right)(n+1)^{1/3}\right]$$

$$\left(1+\frac{s}{(n+1)^{2/3}}\right)^{-1/3}\mathrm{d}s + O_{M_6}\left(\frac{1}{n^{1/3}}\right)$$

$$= \int_0^{\frac{M_6-t}{2^{1/3}}} i2^{4/3} m_{1,22}^{PII}\left[\left(1+\frac{s}{(n+1)^{2/3}}\right)^{-1/3}\left(2^{1/3}s+t\right)\right]\left(1+\frac{s}{(n+1)^{2/3}}\right)^{-1/3}\mathrm{d}s + O_{M_6}\left(\frac{1}{n^{1/3}}\right)$$

$$= \int_0^{\frac{M_6-t}{2^{1/3}}} i2^{4/3} m_{1,22}^{PII}(t+2^{1/3}s)\mathrm{d}s + O_{M_6}\left(\frac{1}{n^{1/3}}\right)$$

$$= \int_t^{M_6} 2im_{1,22}^{PII}(y)\mathrm{d}y + O_{M_6}\left(\frac{1}{n^{1/3}}\right)$$

όπου στην προτελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε και πάλι τη λογική που χρησιμοποιήθηκε στη σελίδα 143, με την ομοιόμορφη φραγή της $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m_{1,22}^{PII}(t)$ για $0 \le t \le M_6$, αλλά και ότι από το γενικευμένο διωνυμικό ανάπτυγμα, $\left(1+\frac{s}{(n+1)^{2/3}}\right)^{-1/3} = (1-\frac{s}{3(n+1)^{2/3}}+\ldots)$.

Για τα $k \in (2)$,

$$\frac{1}{2} \le \frac{2\sqrt{\lambda}}{k+1} \le 1 - \frac{\frac{1}{2}M_6}{2^{1/3}(k+1)^{2/3}} \quad \text{καθώς } k \ge n \to +\infty.$$

Με επιχειρήματα όμοια με αυτά της περίπτωσης 2, ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k\in(2)} \log \kappa_k^2(\lambda)\right| &\le C \sum_{k\in(2)} \frac{e^{\frac{-2\sqrt{2}}{3}(k+1)\left(1-\frac{2\sqrt{\lambda}}{k+1}\right)^{3/2}}}{(k+1)^{1/3}} \\
&\le C \int_{n+1+\frac{M_6-t}{2^{1/3}}(n+1)^{1/3}}^{\frac{3}{2}(n+1)-\frac{t}{2^{1/3}}(n+1)^{1/3}} e^{-\frac{2\sqrt{2}}{3}x\left(1-\frac{2\sqrt{\lambda}}{x}\right)^{3/2}} \frac{\mathrm{d}x}{x^{1/3}} + Ce^{-\left(\frac{M_6}{2}\right)^{3/2}} \\
&\le C(2\sqrt{\lambda})^{2/3} \int_{\frac{M_6(n+1)^{1/3}}{2^{4/3}\sqrt{\lambda}}}^{\frac{n+1}{4\sqrt{\lambda}}} e^{-\frac{4\sqrt{2\lambda}}{3}\left(\frac{y^3}{1+y}\right)^{1/2}} \frac{\mathrm{d}y}{(1+y)^{1/3}} + Ce^{-\left(\frac{M_6}{2}\right)^{3/2}} \\
&\le C(2\sqrt{\lambda})^{2/3} \int_{\frac{M_6(n+1)^{1/3}}{2^{4/3}\sqrt{\lambda}}}^{\frac{n+1}{4\sqrt{\lambda}}} e^{-\sqrt{\lambda}y^{3/2}}\mathrm{d}y + Ce^{-\left(\frac{M_6}{2}\right)^{3/2}} \\
&\le C(2\sqrt{\lambda})^{2/3} \int_{\left(\frac{n+1}{2\sqrt{\lambda}}\right)^{1/2}\left(\frac{M_6}{2}\right)^{3/2}}^{+\infty} e^{-s}\frac{\mathrm{d}s}{s^{1/3}} + Ce^{-\left(\frac{M_6}{2}\right)^{3/2}} \\
&\le C(2\sqrt{\lambda})^{2/3} \int_{\frac{1}{4}M_6^{3/2}}^{+\infty} e^{-s}\frac{\mathrm{d}s}{s^{1/3}} + Ce^{-\left(\frac{M_6}{2}\right)^{3/2}} \\
&\le Ce^{-\frac{1}{4}M_6^{3/2}} + Ce^{-\left(\frac{M_6}{2}\right)^{3/2}} \\
&\le Ce^{-\frac{1}{4}M_6^{3/2}}
\end{aligned}$$

όπου και πάλι η σταθερά C προσαρμόζεται σε κάθε βήμα. Η πρώτη ανισότητα προκύπτει από το λήμμα 5.7.1, 2., δεδομένου ότι φροντίζουμε ώστε το $\frac{1}{2}M_6$ ικανοποιεί την σχέση 5.7.0.6. Για την μετάβαση στη δεύτερη γραμμή, ελέγχουμε την συμβολή του διαστήματος $[[(n+1)+\frac{M_6-t}{2^{1/3}}(n+1)^{1/3}], (n+1)+\frac{M_6-t}{2^{1/3}}(n+1)^{1/3}]$ με χρήση της ανισότητας

$$1+\frac{M_6-t}{2^{1/3}(n+1)^{2/3}} \le 1+\frac{2^{2/3}M_6}{(n+1)^{2/3}} \le \frac{32}{9} \quad \text{για επαρκώς μεγάλα } n$$

Για την τρίτη γραμμή θέτουμε $y = \frac{x}{2\sqrt{\lambda}} - 1$, και για την τέταρτη, χρησιμοποιούμε την ανισότητα

$$\frac{4\sqrt{\lambda}}{(n+1)\delta} \geq 1 - \frac{M_6}{2^{1/3}(n+1)^{2/3}} \geq \frac{9}{23} \quad \text{για επαρκώς μεγάλα } n$$

Για την πέμπτη γραμμή θέτουμε $s = \sqrt{\lambda}y^{3/2}$, ενώ για την έκτη γραμμή χρησιμοποιούμε την ανισότητα

$$\frac{2\sqrt{\lambda}}{n+1} \leq 1 + \frac{M_6}{2^{1/3}(n+1)^{2/3}} \leq 2 \quad \text{για επαρκώς μεγάλα } n$$

Τέλος, για $k \in (3)$, καθώς $n \to +\infty, 0 \leq \frac{2\sqrt{\lambda}}{k+1} \leq \frac{3}{4}$, και από το λήμμα 5.7.1.,

$$\left|\sum_{k\in(3)} \log \kappa_k^2(\lambda)\right| \leq Ce^{-cn}$$

Αθροίζουμε τα αθροίσματα στα σύνολα $(1), (2), (3)$ και έχουμε

$$\log \varphi_n(\lambda) = \sum_{k\in(1)\cup(2)\cup(3)} \log \kappa_k^2(\lambda) \leq \int_t^{M_6} 2im_{1,22}^{PII}(y)\mathrm{d}y + O_{M_6}\left(\frac{1}{n^{1/3}}\right) + Ce^{-\frac{1}{4}M_6^{3/2}} + Ce^{-cn}$$

ή αλλιώς,

$$\left|\log \varphi_n(\lambda) - \int_t^{M_6} 2im_{1,22}^{PII}(y)\mathrm{d}y\right| \leq \frac{C(M_6)}{n^{1/3}} + Ce^{-\frac{1}{4}M_6^{3/2}}$$

όπου $C(M_6)$ έχει εξάρτηση μόνο από το M_6 και C είναι σταθερά. Με χρήση της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς της $m_{1,22}^{PII}(y)$ καθώς $y \to +\infty$ (βλέπε κεφάλαιο 5.1, σελ. 110), καταλήγουμε στο ότι

$$\left|\log \varphi_n(\lambda) - \int_t^{+\infty} 2im_{1,22}^{PII}(y)\mathrm{d}y\right| \leq \frac{C(M_6)}{n^{1/3}} + Ce^{-\frac{1}{4}M_6^{3/2}}$$

Στη συνέχεια, εξετάζουμε την περίπτωση 4., κατά την οποία $1 + \frac{M_7}{2^{1/3}(n+1)^{2/3}} \leq \frac{2\sqrt{\lambda}}{n+1} \leq 1 + \delta_6$. Ορίζουμε τα σύνολα

$$(1) = \left\{k \in \mathbb{N} : n+1 \leq k+1 \leq 2\sqrt{\lambda} - \frac{M_7}{2^{1/3}}(n+1)^{1/3}\right\}$$

$$(2) = \left\{k \in \mathbb{N} : 2\sqrt{\lambda} - \frac{M_7}{2^{1/3}}(n+1)^{1/3} \leq k+1\right\}$$

Για $k \in (1)$, έχουμε ότι για επαρκώς μεγάλα $n, 1 + \frac{M_7}{2^{1/3}(k+1)^{2/3}} \leq \frac{2\sqrt{\lambda}}{k+1} \leq 1 + \delta_6$. Συνεπώς, με χρήση του 5.8.0.34, ισχύει το εξής:

$$\sum_{k\in(1)} \log \kappa_k^2(\lambda) \leq \sum_{k+1=n+1}^{[2\sqrt{\lambda}-\frac{M_7}{2^{1/3}}(n+1)^{1/3}]} (k+1)\left(-\frac{1}{4}\left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{k+1} - 1\right)^2\right) + \frac{C^{\#}}{2\sqrt{\lambda} - (k+1)}$$

Αυτό είναι επειδή $-\gamma + \log\gamma + 1 \leq -\frac{(\gamma-1)^2}{4}$ για $1 \leq \gamma \leq 2$. Σημειώνουμε ότι η $C^{\#}$ δεν εξαρτάται από το M_7. Οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = x\left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{x} - 1\right)^2, g(x) = (2\sqrt{\lambda} - x)^{-1}$ είναι μονότονες στο χωρίο $n+1 \leq x \leq 2\sqrt{\lambda} - \frac{M_7}{2^{1/3}}(n+1)^{1/3}$. Έτσι, το πιο πάνω φράσσεται από το εξής

$$-\frac{1}{4}\int_{n+1}^{2\sqrt{\lambda}-\frac{M_7}{2^{1/3}}(n+1)^{1/3}} x\left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{x} - 1\right)^2 \mathrm{d}x + \int_{n+1}^{2\sqrt{\lambda}-\frac{M_7}{2^{1/3}}(n+1)^{1/3}} \frac{C^{\#}}{2\sqrt{\lambda} - x}\mathrm{d}x + C(M_7)$$

Θέτουμε διαδοχικά $y = \frac{x}{2\sqrt{\lambda}}$, $z = 1 - y$ για να φράξουμε το πιο πάνω από τα εξής:

$$-\frac{1}{4}\int_{\frac{n+1}{2\sqrt{\lambda}}}^{1-\frac{M_7}{2^{1/3}(n+1)^{2/3}}\frac{n+1}{2\sqrt{\lambda}}} (2\sqrt{\lambda})^2\frac{(1-y)^2}{y}\mathrm{d}y + C^{\#}\log\overbrace{\left(\frac{2\sqrt{\lambda} - (n+1)}{(n+1)^{1/3}}\right)}^{\geq 1} + C(M_7)$$

$$\leq -\frac{1}{4}\int_{\frac{n+1}{2\sqrt{\lambda}}}^{1-\frac{M_7}{2^{1/3}(n+1)^{2/3}}\frac{n+1}{2\sqrt{\lambda}}} (2\sqrt{\lambda})^2(1-y)^2\mathrm{d}y + C^{\#}\frac{2\sqrt{\lambda} - (n+1)}{(n+1)^{1/3}} + C(M_7)$$

$$\leq \frac{1}{4}\int_{1-\frac{n+1}{2\sqrt{\lambda}}}^{\frac{M_7}{2^{1/3}(n+1)^{2/3}}\frac{n+1}{2\sqrt{\lambda}}} (2\sqrt{\lambda})^2 z^2\mathrm{d}z + C^{\#}(n+1)^{2/3}\left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{n+1} - 1\right) + C(M_7)$$

$$\leq \frac{1}{12}(2\sqrt{\lambda})^2\left[\left(\frac{M_7}{2^{1/3}(n+1)^{2/3}}\frac{n+1}{2\sqrt{\lambda}}\right)^3 - \left(1 - \frac{n+1}{2\sqrt{\lambda}}\right)^3\right] + C^{\#}(n+1)^{2/3}\left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{n+1} - 1\right) + C(M_7)$$

$$\leq \frac{M_7^3}{24}\left(\frac{n+1}{2\sqrt{\lambda}}\right) - \frac{(n+1)^3}{12\sqrt{\lambda}}\left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{n+1} - 1\right)^3 + C^{\#}(n+1)^{2/3}\left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{n+1} - 1\right) + C(M_7)$$

$$\leq -\frac{1}{48}\left[2^{1/3}(n+1)^{2/3}\left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{n+1} - 1\right)\right]^3 + C^{\#}(n+1)^{2/3}\left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{n+1} - 1\right) + C(M_7)$$

Σημειώνουμε ότι $2^{1/3}(n+1)^{2/3}\left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{n+1} - 1\right) \geq M_7$. Αν φροντίσουμε ώστε

$$M_7 \geq \sqrt{96C^{\#}} \tag{5.9.0.2}$$

τότε μπορούμε να φράξουμε και πάλι το τελευταίο από το εξής:

$$-\frac{1}{96}\left[2^{1/3}(n+1)^{2/3}\left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{n+1} - 1\right)\right]^3 + C(M_7)$$

Για $k \in (2)$, έχουμε ότι $\frac{2\sqrt{\lambda}}{n+1} \leq 1 + \frac{2M_7}{2^{1/3}(k+1)^{2/3}}$. Με υπολογισμούς παρόμοιους με αυτούς των περιπτώσεων 1., 2., 3. μπορεί κανείς να δείξει ότι

$$\sum_{(2)} \log\kappa_k^2(\lambda) \leq \left|\int_{-2M_7}^{+\infty} 2im_{1,22}^{PII}(y)\mathrm{d}y\right| + \frac{C(M_7)}{n^{1/3}} + Ce^{-M_7} \leq C(M_7)$$

Έτσι, συνολικά για την περίπτωση 4., δηλαδή το χωρίο $1 + \frac{M_7}{2^{1/3}(n+1^{2/3})} \leq \frac{2\sqrt{\lambda}}{n+1} \leq 1 + \delta_6$,

$$\log \varphi_n(\lambda) \leq -\frac{1}{96}\left[2^{1/3}(n+1)^{2/3}\left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{n+1} - 1\right)\right]^3 + C(M_7)$$

□

5.10 Αποδείξεις των κυρίων θεωρημάτων

Τώρα επιτέλους έχουμε όλα τα απαραίτητα εργαλεία για να δούμε ποια ακριβώς θα είναι η ασυμπτωτική κατανομή της τυχαίας μεταβλητής l_N. Ξέρουμε από το προηγούμενο κεφάλαιο πως συμπεριφέρεται η poisson-οποιημένη κατανομή $\varphi_n(\lambda)$ καθώς $n \to +\infty$. Έχουμε επίσης την σχέση της $\varphi_n(\lambda)$ με την κατανομή που προσπαθούμε να προσδιορίσουμε, $q_{n,N}$, μέσω των λημμάτων 'απο-poisson-οποίησης' 5.4.2/3.

Απόδειξη του θεωρήματος 5.0.1.

Έστω $t < 0$. Παρόμοιοι υπολογισμοί γίνονται και στην περίπτωση του $t \geq 0$, και γι αυτό παραλείπονται.

$$F_N(t) = \mathbb{P}\left(\frac{l_N - 2\sqrt{N}}{N^{1/6}} \leq t\right) = q_{[2\sqrt{N}+tN^{1/6}],N}$$

Θέτουμε $n = [2\sqrt{N} + tN^{1/6}]$.

Το t είναι σταθερό, και άρα $0 \leq n \leq N$ καθώς $N \to +\infty$. Σύμφωνα με το λήμμα 5.4.2., για κάθε $m > 0$, αν

$$\mu_N^{(m)} = N + (2\sqrt{m+1} + 1)\sqrt{N \log N}$$
$$\nu_N^{(m)} = N - (2\sqrt{m+1} + 1)\sqrt{N \log N}$$

τότε

$$\varphi_n(\mu_N^{(m)}) - \frac{C}{N^m} \leq F_N(t) \leq \varphi_n(\nu_N^{(m)}) + \frac{C}{N^m} \tag{5.10.0.1}$$

Θέτουμε

$$t_N = 2^{1/3}(n+1)^{2/3}\left(1 - \frac{2\sqrt{\mu_N^{(m)}}}{n+1}\right)$$

Αυτή είναι η μορφή που χρειαζόμαστε στο λήμμα 5.9.1., για $\lambda = \mu_N^{(m)}$. Παρατηρούμε ότι για μεγάλα N, $\frac{1}{2}t \leq t_N \leq t$, καθώς επίσης και $\lim_{N\to+\infty} t_N = t$.

Από το λήμμα 5.9.1.,3., ξέρουμε ότι για κάποια κατάλληλη σταθερά M_6, ώστε $M_6 \geq 2|t|$ και για κάποιο $C(M_6)$ εξαρτημένη από το M_6 και κάποια σταθερά C,

$$\varphi_n(\mu_N^{(m)}) = \exp\left(\int_{t_N}^{+\infty} 2im_{1,22}^{PII}(y)\mathrm{d}y\right)\exp\left\{O_{M_6}\left(\frac{1}{n^{1/3}}\right)\right\}\exp\left\{O\left(e^{-\frac{1}{4}M_6^{3/2}}\right)\right\}$$

Έτσι, αν πάρουμε πρώτα όριο $N \to +\infty$ και στη συνέχεια όριο $M_6 \to +\infty$, τότε, αφού το αριστερό μέλος δεν εξαρτάται από το M_6, έχουμε ότι

$$\lim_{N\to+\infty} \varphi_n(\mu_N^{(m)}) = \exp\left(\int_t^{+\infty} 2im_{1,22}^{PII}(y)\mathrm{d}y\right).$$

Αν θεωρήσουμε $\lambda = \nu_N^{(m)}$ και πάρουμε το αντίστοιχο t_N, με όμοιους υπολογισμούς βρίσκουμε ότι

$$\lim_{N\to+\infty} \varphi_n(\nu_N^{(m)}) = \exp\left(\int_t^{+\infty} 2im_{1,22}^{PII}(y)\mathrm{d}y\right).$$

Από την 5.10.0.1,

$$\lim_{N\to+\infty} F_N(t) = \exp\left(\int_t^{+\infty} 2im_{1,22}^{PII}(y)\mathrm{d}y\right).$$

Θυμόμαστε ότι $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}2i(m_{1,22}^{PII}(x)) = v^2(x)$ όπου u η λύση της Painlevé II, δηλαδή

$$v_{xx} = 2v^3 + xv \quad x \in \mathbb{R}$$

Ισοδύναμα, λόγω του μηδενισμού της $v(x)$ όταν $x \to +\infty$,

$$2im_{1,22}^{PII}(s) = -\int_s^{+\infty} v^2(x)\mathrm{d}x$$

και άρα

$$\lim_{N\to+\infty} F_N(t) = \exp\left(-\int_t^{+\infty}\int_y^{+\infty} v^2(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right) = \exp\left(-\int_t^{+\infty}(s-x)v^2(y)\mathrm{d}y\right) = F_2(t)$$

□

Απόδειξη του θεωρήματος 5.0.2.

Για την σύγκλιση των ροπών, αρχίζουμε με μια ολοκλήρωση κατά παράγοντες:

$$\mathbb{E}_N[\chi_N^m] = \int_{-\infty}^{+\infty} t^m \mathrm{d}F_N(t) = -\int_{-\infty}^{0} mt^{m-1}F_N(t)\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} mt^{m-1}(1-F_N(t))\mathrm{d}t$$

Από το προηγούμενο θεώρημα λαμβάνουμε ως δεδομένη την σύγκλιση κατά κατανομή. Για να περάσουμε στη σύγκλιση κατά ροπές, πρέπει να ελέγξουμε ομοιόμορφα το F_N για μεγάλα N. Θέλουμε να ελέγξουμε το $F_N(t)$ για μεγάλα N και μεγάλα $|t|$. Θα ασχοληθούμε ξεχωριστά με τα χωρία των θετικών και τον αρνητικών αριθμών t, όπως προμηνύει ο πιο πάνω υπολογισμός.

Πρώτα θεωρούμε την περίπτωση του $t < 0$. Έστω $M > 0$ επαρκώς μεγάλος αριθμός και έστω $0 \le \delta \le \frac{1}{4}$ επαρκώς μικρός αριθμός. Παρατηρούμε τα $t < -M$. Αρχικά, θέτουμε και πάλι $n = [2\sqrt{N} + tN^{1/6}]$.

Αν $t < -2N^{1/3} \iff 2\sqrt{N} + tN^{1/6} < 0$, τότε

$$F_N(t) = \mathbb{P}(l_N \le 2\sqrt{N} + tN^{1/6}) \le \mathbb{P}(l_N < 0) = 0$$

Αν $-2N^{1/3} \leq t \leq -M$, τότε από το λήμμα 5.4.3.,

$$F_N(t) = q_{n,N} \leq C\varphi_n(N - \sqrt{N})$$

Χωρίζουμε το χωρίο $-2N^{1/3} \leq t \leq -M$ σε περαιτέρω 2 κομμάτια: Αν $-2N^{1/3} \leq t \leq -2\delta N^{1/3}$, για επαρκώς μεγάλα N,

$$\frac{2(N-\sqrt{N})}{n+1} \geq \frac{2\sqrt{N}\left(1-\frac{1}{\sqrt{N}}\right)^{1/2}}{2\sqrt{N}+tN^{1/6}+1} \geq \frac{2\sqrt{N}\left(1-\frac{\delta}{4}\right)}{2(1-\delta)\sqrt{N}+1} \geq 1+\frac{\delta}{2}$$

Συνεπώς, από το λήμμα 5.9.1.,5., αν θεωρήσουμε $\lambda = N-\sqrt{N}$, για μεγάλα N,

$$\varphi_n(N-\sqrt{N}) \leq Ce^{-cN} \leq Ce^{ct^3}$$

Αν $-2\delta N^{1/3} \leq t \leq -M$,

$$\frac{2\sqrt{N-\sqrt{N}}}{n+1} \leq \frac{2\sqrt{N}}{2\sqrt{N}-2\delta\sqrt{N}} \leq 1+2\delta$$

Η συνάρτηση $f : [0, 2\sqrt{\lambda}] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{2\sqrt{\lambda}-x}{x^{1/3}}$ είναι φθίνουσα, και άρα καθώς $N \to +\infty$,

$$\tilde{t} = 2^{1/3}\left(\frac{2\sqrt{N-\sqrt{N}}-(n+1)}{(n+1)^{1/3}}\right) \geq 2^{1/3}\left(\frac{2\sqrt{N}\left(1-\frac{1}{\sqrt{N}}\right)^{1/2}-(2\sqrt{N}+tN^{1/6}+1)}{(2\sqrt{N}+tN^{1/6}+1)^{1/3}}\right) \geq -\frac{t}{2} \geq \frac{M}{2}$$

Συνεπώς, από το λήμμα 5.9.1.,4., δεδομένου ότι το $M/2$ ικανοποιεί τη συνθήκη $d)$ και το 2δ ικανοποιεί τη συνθήκη $a)$,

$$F_N(t) \leq \varphi_n(N-\sqrt{N}) \leq C_M e^{\frac{1}{96}\tilde{t}^3} \leq C_M e^{\frac{1}{768}t^3}$$

Συνολικά, υπάρχουν σταθερές C, c τέτοιες ώστε για επαρκώς μεγάλο N,

$$F_N(t) \leq Ce^{ct^3} \quad \text{για } -2N^{1/3} \leq t \leq -M$$

Έτσι, από τα πιο πάνω και από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης, και από το θεώρημα 5.0.1.,

$$\lim_{N\to+\infty}\int_{-\infty}^{0} mt^{m-1}F_N(t)\mathrm{d}t$$

$$= \lim_{N\to+\infty}\left[\int_{-\infty}^{-2N^{1/3}} mt^{m-1}\cancel{F_N(t)}\mathrm{d}t + \int_{-2N^{1/3}}^{-M} mt^{m-1}F_N(t)\mathrm{d}t + \int_{-M}^{0} mt^{m-1}F_N(t)\mathrm{d}t\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{-M} mt^{m-1}F(t)\mathrm{d}t + \int_{-M}^{0} mt^{m-1}F(t)\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-\infty}^{0} mt^{m-1}F(t)\mathrm{d}t$$

Μένει να μελετήσουμε τα $t > 0$. Ας θεωρήσουμε $t \geq M$. Αν $t \geq N^{5/6} - 2N^{1/3}$, τότε

$$1 - F_N(t) = 1 - \mathbb{P}(l_N \leq 2\sqrt{N} + tN^{1/6}) \leq 1 - \mathbb{P}(l_N \leq N) = 0$$

Αν $M \leq t \leq N^{5/6} - 2N^{1/3}$, τότε και πάλι από το λήμμα 5.4.3, υπάρχει σταθερά C ώστε

$$1 - F_N(t) = 1 - q_{n,N} \leq C(1 - \varphi_n(N + \sqrt{N}))$$

Αν $2\delta N^{1/3} \leq t \leq N^{5/6} - 2N^{1/3}$, όταν το N είναι επαρκώς μεγάλο,

$$\frac{N + \sqrt{N}}{n+1} \leq \frac{2\sqrt{N}\left(1 + \frac{\delta}{4}\right)}{2\sqrt{N} + 2\delta\sqrt{N}} \leq 1 - \frac{\delta}{2}$$

Έτσι, με χρήση του λήμματος 5.9.1.,1.,

$$1 - \varphi_n(N + \sqrt{N}) \leq |\log \varphi_n(N + \sqrt{N})| \leq Ce^{-cn} \leq Ce^{-c\sqrt{N}} \leq Ce^{-ct^{3/5}}$$

Αν $M \leq t \leq 2\delta N^{1/3}$, με υπολογισμούς παρόμοιους με αυτούς της περίπτωσης $-2\delta N^{1/3} \leq t \leq -M$, έχουμε

$$\frac{1}{2} \leq 1 - 2\delta \leq \frac{2\sqrt{N + \sqrt{N}}}{n+1} \leq 1 - \frac{\frac{1}{2}M}{2^{1/3}(n+1)^{2/3}}$$

Συνεπώς, αν το $\frac{1}{2}M$ ικανοποιεί τη συνθήκη $d)$ του λήμματος 5.9.1., από το 2. του λήμματος αυτού, καθώς $N \to +\infty$

$$1 - \varphi_n(N - \sqrt{N}) \leq \exp\left(-c\left(2^{1/3}(n+1)^{2/3}\left(1 - \frac{2\sqrt{N + \sqrt{N}}}{n+1}\right)\right)^{3/2}\right)$$

Όμως, όπως και στην περίπτωση $-2\delta N^{1/3} \leq t \leq -M$, έχουμε για $M \leq t \leq 2\delta N^{1/3}$ και $N \to +\infty$

$$2^{1/3}\left(\frac{(n+1) - 2\sqrt{N + \sqrt{N}}}{(n+1)^{1/3}}\right) \geq 2^{1/3}\left(\frac{(2\sqrt{N} + tN^{1/6}) - 2\sqrt{N}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{N}}\right)^{1/2}}{(2\sqrt{N} + tN^{1/6})^{1/3}}\right) \geq \frac{t}{2}$$

Έτσι, υπάρχει σταθερές C, c τέτοιες ώστε

$$1 - \varphi_n(N - \sqrt{N}) \leq C\exp\left(-ct^{3/2}\right) \quad \text{για } M \leq t \leq 2\delta N^{1/3}$$

Συνδυάζουμε τα πιο πάνω και καταλήγουμε στο ότι για $M \leq t \leq N^{5/6} - 2N^{1/3}$, καθώς $N \to +\infty$

$$1 - F_N(t) \leq Ce^{-ct^{3/5}} \quad \text{για } M \leq t \leq N^{5/6} - 2N^{1/3}$$

Όπως πριν, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης, και το θεώρημα 5.0.1.

$$\lim_{N \to +\infty} \int_0^{+\infty} mt^{m-1}(1 - F_N(t))\mathrm{d}t$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{N\to+\infty} \int_0^M mt^{m-1}(1-F_N(t))\mathrm{d}t + \int_M^{N^{5/6}-2N^{1/3}} mt^{m-1}(1-F_N(t))\mathrm{d}t \\
&\quad + \int_{N^{5/6}-2N^{1/3}}^{+\infty} mt^{m-1}\cancel{(1-F_N(t))}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^M mt^{m-1}(1-F(t))\mathrm{d}t + \int_M^{+\infty} mt^{m-1}(1-F(t))\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} mt^{m-1}(1-F(t))\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

Όλα τα πιο πάνω μας λένε ότι συνολικά, πράγματι,

$$
\mathbb{E}[\chi_N^m] \xrightarrow{N\to+\infty} \mathbb{E}[\chi^m]
$$

με $\chi \sim F_2(t)$ και $\chi_N = \frac{l_N - 2\sqrt{N}}{N^{1/6}}$.

□

Βιβλιογραφία

[1] Roland Speicher. (2020). Lecture Notes on "Random Matrices".

[2] Feier, A. (2012). *Methods of proof in random matrix theory.* (Doctoral dissertation, Harvard University).

[3] Lalley, S. (2013). *Bulk Spectrum: Wigner and Marchenko-Pastur theorems.* Personal collection of S. Lalley, The University of Chicago, Chicago Illinois.

[4] Chafaï, D. (2011). The Marchenko - Pastur law. *Libres pensées d'un mathématicien ordinaire.* https://djalil.chafai.net/blog/2011/01/29/the-marchenko-pastur-law/?fbclid=IwAR12kfewKw4yHLNW9vB8-lC7T-VwmuwWepjxBmSdln_dyLycxWfpb3LT_C8.

[5] Anderson, G., Guionnet, A., & Zeitouni, O. (2010). *An introduction to random matrices.* Cambridge university press.

[6] Baik, J., Deift, P., & Johansson, K. (1999). *On the distribution of the length of the longest increasing subsequence of random permutations. Journal of the American Mathematical Society*, 12(4), 1119–1178.

[7] Aldous, D., & Diaconis, P. (1999). Longest increasing subsequences: from patience sorting to the Baik-Deift-Johansson theorem. Bulletin of the American Mathematical Society, 36(4), 413–432.

[8] Mehta, M. (2004). Random matrices. Elsevier.

[9] Logan, B., & Shepp, L. (1977). A variational problem for random Young tableaux. Advances in mathematics, 26(2), 206–222.

[10] Vershik, A., & Kerov, S. (1977). Asymptotics of the Plancherel measure of the symmetric group and the limiting form of Young tableaux. In Doklady Akademii Nauk (pp. 1024–1027).

[11] Gessel, I. (1990). Symmetric functions and P-recursiveness.. *J. Comb. Theory, Ser. A, 53(2), 257–285.*

[12] Flaschka, H., & Newell, A. (1980). Monodromy-and spectrum-preserving deformations I. *Communications in Mathematical Physics, 76(1), 65–116.*

[13] Jimbo, M., Miwa, T., & Ueno, K. (1981). Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients: I. General theory and τ-function. *Physica D: Nonlinear Phenomena, 2(2), 306–352.*

[14] Deift, P., Kriecherbauer, T., McLaughlin, K.R., Venakides, S., & Zhou, X. (1999). Uniform asymptotics for polynomials orthogonal

with respect to varying exponential weights and applications to universality questions in random matrix theory. *Communications on Pure and Applied Mathematics: A Journal Issued by the Courant Institute of Mathematical Sciences, 52(11), 1335–1425.*

[15] Deift, P., & Zhou, X. (1995). Asymptotics for the Painlevé II equation. *Communications on Pure and Applied Mathematics, 48(3), 277–337.*

[16] Johansson, K. (1998). The longest increasing subsequence in a random permutation and a unitary random matrix model. *Mathematical Research Letters, 5(1), 68–82.*