Η μέθοδος των εναλλασσόμενων προβολών

Ευαγγελόπουλος Φοίβος

email: foivosevangelopoulos@gmail.com

Διπλωματική εργασία

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Επιβλέπων: Γιαννακάκης Νικόλαος
Αναπληρωτής καθηγητής Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.

Αθήνα, 2021

Ευχαριστίες

Καταρχάς, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κύριο Ν. Γιαννακάκη, αναπληρωτή καθηγητή του τμήματος μαθηματικών της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, για το πολύ ενδιαφέρον θέμα που μου πρότεινε και την όλη βοήθεια που μου προσέφερε. Επιπλέον, οφείλω να ευχαριστήσω τα μέλη της τριμελούς επιτροπής Ν. Γιαννακάκη, Δ. Δριβαλιάρη και Ε. Φελουζή. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους καθηγητές Γ. Σμυρλή, Σ. Αργυρό, Ν. Παπαγεωργίου και Β. Παπανικολάου, καθώς και την συμφοιτήτρια και πολύ καλή μου φίλη Χ. Καλυφομμάτου.

Περίληψη

Η μέθοδος των εναλλασσόμενων προβολών είναι, ουσιαστικά, μία επαναληπτική διαδικασία κατά την οποία προβάλλουμε αναδρομικά με κάποιον κανόνα ένα διάνυσμα πάνω σε ένα πεπερασμένο πλήθος κλειστών υποχώρων ενός χώρου Hilbert ή, γενικότερα, ενός χώρου Banach. Σε αυτήν την εργασία μελετάμε την σύγκλιση της παραπάνω μεθόδου και αναφέρουμε τα κυριότερα αποτελέσματα που μας είναι γνωστά έως και σήμερα.

Στο πρώτο κεφάλαιο επικεντρωνόμαστε σε χώρους Hilbert. Δείχνουμε πως αν ο τρόπος προβολής του διανύσματος πάνω στους υποχώρους είναι περιοδικός, ή γενικότερα, οιονεί-περιοδικός, τότε η μέθοδος συγκλίνει ως προς την νόρμα, και μάλιστα στην προβολή του διανύσματος πάνω στην τομή των υποχώρων. Έπειτα, αποδεικνύουμε πως η μέθοδος συγκλίνει ως προς την ασθενή τοπολογία, ανεξαρτήτως από τον τρόπο με τον οποίο προβάλουμε το διάνυσμα, και τέλος, κατασκευάζουμε μία ακολουθία προβολών, η οποία ναι μεν συγκλίνει ασθενώς, αλλά δεν είναι ισχυρά συγκλίνουσα.

Στο δεύτερο κεφάλαιο γενικεύουμε τα αποτελέσματα του πρώτου κεφαλαίου σε χώρους Banach με κάποιες καλές γεωμετρικές ιδιότητες, όπως για παράδειγμα ομοιόμορφα κυρτούς και λείους χώρους Banach. Επίσης, επεκτείνουμε τα αποτελέσματα αυτά και σε ευρύτερες κλάσεις (μη γραμμικών) απεικονίσεων, όπως για παράδειγμα προβολές βέλτιστης προσέγγισης (metric προβολές).

Αφιερώνουμε το τρίτο, και τελευταίο, κεφάλαιο στις διάφορες εφαρμογές της μεθόδου των εναλλασσόμενων προβολών σε ποικίλους κλάδους των μαθηματικών.

Λέξεις κλειδιά: Εναλλασσόμενες προβολές, Χώροι Hilbert, Ισχυρή σύγκλιση, Περιοδικές ακολουθίες προβολών, Οιονεί-περιοδικές ακολουθίες προβολών, Ασθενής σύγκλιση, Αποτυχία ισχυρής σύγκλισης, Χώροι Banach, Ομοιόμορφα κυρτός, Ομοιόμορφα λείος, Metric προβολές, Nonexpansive απεικονίσεις, Ομοιόμορφη σύγκλιση.

Abstract

The method of alternating projection is, at its core, an iterative process for calculating best approximations from a finite intersection of closed subspaces in a Hilbert space. Given a finite collection of closed subspaces of a Hilbert space, at each step of this process one has to orthogonally project a vector onto one of these closed subspaces. In this thesis we investigate the convergence of this sequence of projections, and present some of the most important results known to us till the day of writing this thesis.

In the first chapter, we show that given an initial point x, if the sequence of orthogonal projections onto the closed subspaces is taken to be periodic or even quasi-periodic, then the method converges with respect to the norm topology. In fact, the limit of this method is the projection of the vector x onto the (finite) intersection of the closed subspaces. Moreover, we show that the method of alternating projections always converges with respect to the weak topology, regardless of the order projections are taken in. Lastly, we present a rather technical counterexample of a sequence of projections that does not converge in norm.

In the second chapter, we generalize most of the results of the previous chapter to Banach spaces with nice geometric properties, such as (uniform) convexity and/or (uniform) smoothness. Furthermore, we deduce some nonlinear extensions of these results for wider classes of (nonlinear) maps, such as metric projections.

In the last chapter, we present different applications of the method of alternating projections in various areas of mathematics.

Keywords: Alternating projections, Hilbert space, Strong convergence, Periodic projections, Quasi-periodic projections, Weak convergence, Failure of convergence, Banach space, Uniformly convex, Uniformly smooth, Metric projection, Nonexpansive map, Averaged projections, Uniform convergence.

Κατάλογος Σχημάτων

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Η μέθοδος εναλλασσόμενων προβολών στο πλαίσιο χώρων Hilbert.

1.1 Εισαγωγή

Ας αρχίσουμε ορίζοντας την μέθοδο των εναλλασσόμενων προβολών. Έστωσαν $\mathcal{H}$ ένας χώρος Hilbert, $J \geq 2$ ακέραιος και $M_1, \ldots, M_J$ κλειστοί υπόχωροι του $\mathcal{H}$. Για $j \in \{1, \ldots, J\}$, έστω P_j η ορθογώνια προβολή επί του κλειστού υποχώρου M_j. Τέλος, αν $(j_n)_{n\geq 1}$ είναι μία ακολουθία με τιμές στο σύνολο $\{1, \ldots J\}$, ορίζουμε την ακολουθία $(x_n)_{n\geq 0}$ επιλέγοντας ένα (τυχαίο) στοιχείο $x_0 \in \mathcal{H}$ και θέτοντας

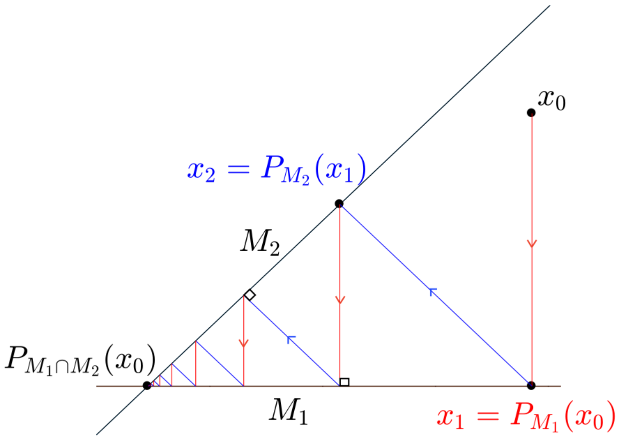
$$x_n = P_{j_n} x_{n-1}, \quad n \geq 1. \tag{1.1}$$

Η (1.1) είναι γνωστή ως η μέθοδος των εναλλασσόμενων προβολών. Το λογικό ερώτημα που τίθεται, και θα μας απασχολήσει σε αυτήν την εργασία, είναι κάτω από τι συνθήκες η ακολουθία (x_n) συγκλίνει.

Ο λόγος που αναμένουμε η (x_n) να συγκλίνει δικαιολογείται από το ακόλουθο απλό παράδειγμα. Θεωρούμε τον χώρο Hilbert $\mathcal{H} = \mathbb{R}^2$ και τους υποχώρους

$$M_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x = y\right\},$$
$$M_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = 0\right\}.$$

Εξετάζουμε τι συμβαίνει όταν προβάλουμε ένα $x_0 \in \mathcal{H}$ περιοδικά πάνω στους υποχώρους M_1 και M_2 (βλ. σχήμα 1).



Σχήμα 1: Η μέθοδος των εναλλασσόμενων προβολών για δύο υπόχωρους του $\mathbb{R}^2$.

Παρατηρούμε πως η ακολουθία (x_n) συγκλίνει στο σημείο $(0, 0)$, δηλαδή, την προβολή του x_0 πάνω στον υπόχωρο $M_1 \cap M_2$. Όπως θα δούμε και στην ενότητα 1.3, αυτό δεν είναι τυχαίο: αν η ακολουθία (j_n) είναι περιοδική, ή γενικότερα οιονεί-περιοδική (βλ. ορισμό 1.3.10), τότε η ακολουθία (x_n) συγκλίνει ως προς την νόρμα στην προβολή του x_0 πάνω στον $\bigcap_{j=1}^{J} M_j$. Αν η ακολουθία προβολών είναι εντελώς τυχαία, τότε η ακολουθία (x_n) δεν συγκλίνει απαραίτητα. Συγκεκριμένα, στην ενότητα 1.5 θα κατασκευάσουμε τρεις υποχώρους και μία ακολουθία (j_n), έτσι ώστε η ακολουθία (x_n) δεν συγκλίνει. Παρ'ολ'αυτά, η ακολουθία (x_n) συγκλίνει ως προς την ασθενή τοπολογία, ανεξαρτήτως της ακολουθίας προβολών (βλ. ενότητα 1.4).

1.2 Συμβολισμοί και χρήσιμα λήμματα

Από εδώ και στο εξής $\mathcal{H}$ θα είναι ένας (πραγματικός ή μιγαδικός) χώρος Hilbert, $J \geq 2$ ένας ακέραιος, $M_1, \ldots, M_J$ κλειστοί υπόχωροι του $\mathcal{H}$ με τομή $M = \bigcap_{j=1}^{J} M_j$. Με $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ θα συμβολίζουμε τον χώρο Banach όλων των γραμμικών και φραγμένων τελεστών από τον $\mathcal{H}$ στον εαυτό του, και με $B_{\mathcal{H}}$ θα συμβολίζουμε την ανοιχτή μοναδιαία μπάλα του $\mathcal{H}$. Αν (x_n) είναι μία ακολουθία στον $\mathcal{H}$ και $x \in \mathcal{H}$, θα συμβολίζουμε την ασθενή σύγκλιση της (x_n) στο x ως $x_n \xrightarrow{w} x$. Τέλος, με $\mathbb{F}$ συμβολίζουμε το μιγαδικό ή πραγματικό σώμα του $\mathcal{H}$. Περαιτέρω συμβολισμοί θα οριστούν όταν και όποτε χρειαστεί.

Υπενθυμίζουμε ορισμένα πράγματα για προβολές σε χώρους Hilbert. Αν M είναι ένας κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert, τότε κάθε $x \in \mathcal{H}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο σαν $x = m + m^{\perp}$, όπου $m \in M$ και $m^{\perp} \in M^{\perp}$. Η ορθογώνια προβολή του x πάνω στον M ορίζεται ως $P_M(x) = m$. Αξίζει να σημειώσουμε πως μπορεί να οριστεί και προβολή επί κλειστών κυρτών υποσυνόλων. Πράγματι, αν C είναι ένα κλειστό και κυρτό υποσύνολο του $\mathcal{H}$, τότε κάθε $x \in \mathcal{H}$ υπάρχει μοναδικό σημείο $P_C(x) \in C$, το οποίο λύνει το πρόβλημα $\inf\{||x - c||: c \in C\}$. Το σημείο αυτό χαρακτηρίζεται από το κριτήριο του Kolmogorov

$$P_C(x) \in C \quad \text{και} \quad (x - P_C(x), z - x) \leq 0 \quad \text{για κάθε } z \in C.$$

Η απεικόνιση $P_C: X \to C$, $x \mapsto P_C(x)$ καλείται η metric προβολή επί του C. Στην περίπτωση όπου το C είναι υπόχωρος, η metric προβολή ταυτίζεται με την ορθογώνια προβολή επί του C.

Λήμμα 1.2.1. *Έστω $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert και έστω Y κλειστός, μη τετριμμένος υπόχωρος του $\mathcal{H}$. Έστω επιπλέον $x \in \mathcal{H}$ και P η ορθογώνια προβολή επί του Y. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

(a) $\|x - Px\|^2 = \|x\|^2 - \|Px\|^2$.

(b) $||Px|| \leq ||x||$, *με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν* $Px = x$.

(c) Η προβολή P είναι ένας γραμμικός, φραγμένος, ταυτοδύναμος ($P^2 = P$) και αυτοσυζυγής ($P = P^*$) τελεστής με νόρμα $||P|| = 1$.

(d) Για κάθε $y \in Y$, ισχύει ότι $||x - Px|| \leq ||x - y||$ και η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $Px = y$.

(e) Αν U και V είναι κλειστοί υπόχωροι του $\mathcal{H}$ με $U \perp V$, τότε ο $U + V$ είναι κλειστός.

(f) Αν U και V είναι κλειστοί υπόχωροι του $\mathcal{H}$ με $U \perp V$, τότε $P_U + P_V = P_{U+V}$.

Απόδειξη. (a) : Εφόσον $\mathcal{H} = Y \oplus Y^{\perp}$, θα υπάρχουν $y \in Y$ και $y^{\perp} \in Y^{\perp}$ ώστε $x = y + y^{\perp}$. Επομένως,

$$\begin{aligned} ||x||^2 &= ||x - Px + Px||^2 \\ &= ||x - Px||^2 + \|Px\|^2 + 2(x - Px, Px) \\ &= ||x - Px||^2 + \|Px\|^2. \qquad [(x - Px, Px) = (y + y^{\perp} - y, y) = 0] \end{aligned}$$

(b) : Από το (a) έχουμε ότι $||Px||^2 = ||x||^2 - ||x - Px||^2 \leq ||x||^2$, με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν $x = Px$.

(c) : Όσον αφορά την γραμμικότητα: Έστωσαν $x_1, x_2 \in \mathcal{H}$. Θα είναι $x_1 = y_1 + y_1^{\perp}$ και $x_2 = y_2 + y_2^{\perp}$, για κάποια $y_1, y_2 \in Y$ και $y_1^{\perp}, y_2^{\perp} \in Y^{\perp}$. Για $a, b \in \mathbb{F}$ έχουμε ότι

$$P(ax_1 + bx_2) = P(ay_1 + by_2 + ay_1^{\perp} + by_2^{\perp}) = ay_1 + by_2 = aP(x_1) + bP(x_2).$$

Συνεπώς η P είναι γραμμική. Επίσης, αν $x \in \mathcal{H}$, το x γράφεται ως $x = y + y^{\perp}$, και άρα

$$P^2(x) = P(P(y + y^{\perp})) = P(y) = y = P(x).$$

Με άλλα λόγια, ο τελεστής P είναι ταυτοδύναμος. Επιπλέον, για $x_1 = y_1 + y_1^{\perp}$ και $x_2 = y_2 + y_2^{\perp}$, έχουμε πως

$$(Px_1, x_2) = (y_1, y_2 + y_2^{\perp}) = (y_1, y_2) = (y_1 + y_1^{\perp}, y_2) = (x_1, Px_2).$$

Με άλλα λόγια, ο τελεστής P είναι αυτοσυζυγής. Τέλος, από το (b) έπεται ότι ο τελεστής P είναι φραγμένος και $||P|| = 1$.

(d) : Έστω $y_0 \in Y$ και $y_0^{\perp} \in Y^{\perp}$ τέτοια ώστε $x = y_0 + y_0^{\perp}$. Για κάθε $y \in Y$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &= \left\|(y_0 - y) + y_0^{\perp}\right\|^2 = ||y_0 - y||^2 + ||y_0^{\perp}||^2 \\ &\geq ||y_0^{\perp}||^2 = ||x - y_0||^2 = ||x - Px||^2, \end{aligned}$$

με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν $y = y_0 = Px$.

(e) : Έστω (x_n) μία Cauchy ακολουθία στον $U + V$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θα είναι $x_n = u_n + v_n$, όπου $u_n \in U$ και $v_n \in V$. Εφόσον $U \perp V$, θα ισχύει ότι

$$\|x_n - x\|^2 = \|(u_n - u_m) + (v_n - v_m)\|^2 = ||u_n - u_m||^2 + \|v_n - v_m\|^2, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Συνεπώς, οι (u_n) και (v_n) είναι Cauchy ακολουθίες. Από την πληρότητα των U, V έπεται ότι $u_n \longrightarrow u$ και $v_n \longrightarrow v$ για κάποια $u \in U$, και $v \in V$. Ως αποτέλεσμα, $x_n \longrightarrow u + v \in U + V$. Με άλλα λόγια, ο $U + V$ είναι πλήρης, και άρα κλειστός υπόχωρος του $\mathcal{H}$.

(f) : Αρχικά, παρατηρούμε ότι η προβολή P_{U+V} είναι καλά ορισμένη, καθώς ο $U + V$ είναι κλειστός υπόχωρος. Δείχνουμε τώρα ότι η $P_U + P_V$ είναι προβολή. Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathcal{H}$, εφόσον $U \perp V$, έχουμε ότι

$$0 = (P_V x_1, P_U x_2) = (P_U P_V x_1, x_2) = (x_1, P_V P_U x_2),$$

και άρα $P_U P_V = 0 = P_V P_U$. Επιπρόσθετα, εφόσον οι P_U και P_V είναι ταυτοδύναμοι,

$$(P_U + P_V)^2 = P_U^2 + P_V^2 = P_U + P_V,$$

δηλαδή, η P_U+P_V είναι πράγματι μία προβολή. Τέλος, δείχνουμε ότι $P_{U+V} = P_U+P_V$. Για κάθε $u \in U$ και $v \in V$ έχουμε ότι

$$(P_U + P_V)(u + v) = P_U u + P_V v + P_U v + P_V u = u + v,$$

και για κάθε $z \in (U + V)^\perp$, $h \in \mathcal{H}$, έχουμε

$$\big((P_U + P_V)z, h\big) = \big(z, (P_V + P_V)h\big) = 0.$$

Δηλαδή, η P_U+P_V είναι ο ταυτοτικός τελεστής στο $U+V$, και είναι μηδέν στο $(U+V)^\perp$. Αυτό δείχνει ότι $P_U + P_V = P_{U+V}$. □

Λήμμα 1.2.2. *Έστω $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert και έστωσαν $M_1, \dots, M_J$ κλειστοί υπόχωροι του $\mathcal{H}$, με τομή $M = \bigcap_{j=1}^{J} M_j$. Για κάθε $j \in \{1, \dots, J\}$, έστω P_j η προβολή επί του M_j, και έστω P_M η προβολή επί του κλειστού υποχώρου M. Για τον τελεστή $T = P_J \cdots P_1$ ισχύουν τα εξής:*

(a) $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{j} \ker(I - P_k) = \ker(I - P_j \cdots P_1), \quad j \in \{1, \dots, J\}.$

(b) $Tx = x$ *αν και μόνο αν* $x \in M$.

(c) $T^*x = x$ *αν και μόνο αν* $x \in M$.

(d) Αν $A \in B(H)$ *είναι μία συστολή, τέτοια ώστε* $||A^{n+1}x - A^n x|| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ *για κάθε* $x \in \mathcal{H}$, *τότε* $A^n y \xrightarrow{n\to\infty} 0$ *για κάθε* $y \in \overline{Ran(I - A)}$.

(e) $\big(Ran(I - T)\big)^\perp = \ker(I - T^*)$.

Απόδειξη. (a) : Αν $x \in \bigcap_{k=1}^{j} \ker(I - P_k)$, τότε $P_k x = x$ για κάθε $k \in \{1, \dots, J\}$, και άρα $P_j \cdots P_1 x = x$. Ανάποδα, αν $x \in \ker(I - P_j \cdots P_1)$, τότε

$$||x|| = \big\|P_j \cdots P_1 x\big\| \le \big\|P_{j-1} \cdots P_1 x\big\| \le \cdots \le ||P_1 x|| \le x.$$

Έπεται πως $||Px|| = x$, και άρα από το Λήμμα 1.2.1(b), $P_1 x = x$. Επίσης, $||P_2 P_1 x|| = ||x||$, και άρα $||P_2 x|| = ||x||$. Πάλι, από το Λήμμα 1.2.1(b), έπεται ότι $P_2 x = x$. Επαγωγικά, αποδεικνύεται ότι $P_k x = x$ για κάθε $k \in \{1, \dots, j\}$.

(b) : Από το (a), για $j = J$ έχουμε ότι

$$Tx = x \iff x \in \ker(I - T) \iff x \in \bigcap_{k=1}^{J} \ker(I - p_k) \iff x \in M.$$

(c) : Ακολουθώντας παρόμοια λογική με αυτή του (a), αντικαθιστώντας το P_k με το P_{j-k}, καταλήγουμε στο ότι

$$\bigcap_{k=1}^{j} \ker(I - P_k) = \ker(I - P_1 \cdots P_j), \quad j \in \{1, \ldots J\}.$$

Εφαρμόζουμε το από πάνω για $j = J$, παρατηρώντας ότι $T^* = P_1 \cdots P_J$, και έχουμε

$$T^* x = x \iff x \in \ker(I - T^*) \iff x \in \bigcap_{k=1}^{J} \ker(I - P_k) \iff x \in M.$$

(d) : Αν $x \in Ran(I - A)$, τότε $x = (I - A)h$, για κάποιο $h \in \mathcal{H}$. Εξ υποθέσεως,

$$||A^n x|| = ||A^n (I - A)h|| = ||A^n h - A^{n+1} h|| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Έστω τώρα $y \in \overline{Ran(I - A)}$ και έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $x \in Ran(I - A)$ ώστε $||x - y|| < \varepsilon$. Τότε

$$\|A^n y\| \leq \|A^n x\| + \|A^n (x - y)\| \leq ||A^n x|| + ||x - y|| < ||A^n x|| + \varepsilon,$$

και άρα $\limsup_{n\to\infty} ||A^n y|| \leq \varepsilon$. Αυτό δείχνει ότι $\lim_{n\to\infty} ||A^n y|| = 0$.

(e) : Εφόσον $(I - T)^* = I - T^*$, έχουμε πως

$$\begin{aligned} x \in (Ran(I - T))^{\perp} &\iff (x, y) = 0 \text{ για κάθε } y \in Ran(I - T) \\ &\iff (x, (I - T)h) = 0 \text{ για κάθε } h \in \mathcal{H} \\ &\iff ((I - T^*)x, h) = 0 \text{ για κάθε } h \in \mathcal{H} \\ &\iff (I - T^*)x = 0 \\ &\iff x \in \ker(I - T^*). \end{aligned}$$

□

1.3 Ισχυρή σύγκλιση

Σε αυτή την ενότητα αποδεικνύουμε τα κυριότερα θεωρήματα (ισχυρής) σύγκλισης της μεθόδου των εναλλασσόμενων προβολών. Αρχίζουμε με το θεώρημα του von Neumann (Θεώρημα 1.3.1) για την περίπτωση δύο υποχώρων, ύστερα γενικεύουμε με το θεώρημα του Halperin (Θεώρημα 1.3.2) σε $J > 2$ υποχώρους με την προϋπόθεση ότι η ακολουθία (j_n) (βλ. (1.1)) είναι περιοδική, και τέλος, επεκτείνουμε σε "οιονεί-περιοδικές" ακολουθίες (j_n) με το θεώρημα του Sakai (Θεώρημα 1.3.11).

Κλείνουμε την ενότητα αναφέροντας κάποιους βαθμούς σύγκλισης της μεθόδου, οι οποίοι σχετίζονται με μία έννοια γωνίας ανάμεσα στους κλειστούς υποχώρους.

1.3.1 Η περίπτωση των δύο υποχώρων - Το Θεώρημα von Neumann

Το πρώτο και κυριότερο αποτέλεσμα όσον αφορά τη μέθοδο των εναλλασσόμενων προβολών είναι χάρις στον von Neumann [2]:

Θεώρημα 1.3.1 (von Neumann)**.** *Έστω $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert. Έστωσαν P_1, P_2 οι ορθογώνιες προβολές επί των κλειστών υποχώρων M_1, M_2 του $\mathcal{H}$ αντίστοιχα. Έστω επίσης P_M η ορθογώνια προβολή επί του $M = M_1 \cap M_2$. Τότε, για κάθε $x \in \mathcal{H}$,*

$$\|(P_2P_1)^n x - P_M x\| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Απόδειξη. Αντί να ακολουθήσουμε την απόδειξη του ίδιου του von Neumann, ακολουθούμε μία καινούρια και ενδιαφέρουσα απόδειξη από το [1], η οποία κάνει χρήση του περιβόντου φασματικού θεωρήματος στην εξής μορφή του:

Θέωρημα (Φασματικό Θεώρημα - πολλαπλασιαστική μορφή)**.** Έστω $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert και έστω $T \in B(\mathcal{H})$ ένας αυτοσυζυγής γραμμικός τελεστής. Τότε, υπάρχει ένας $\sigma-$πεπερασμένος χώρος μέτρου (Ω, Σ, μ), ένας ορθομοναδιαίος τελεστής $U\colon \mathcal{H} \to L^2(\Omega,\mu)$ και $F \in L^\infty(\Omega,\mu)$, έτσι ώστε

$$UTU^{-1}f = F \cdot f, \quad f \in L^2(\Omega,\mu),$$

και $F(\omega) \in \mathbb{R}$ για $\mu-$σχεδόν όλα τα $\omega \in \Omega$. Επιπλέον, $\|T\| = \|F\|_\infty$.

Η βασική ιδέα της απόδειξης του θεωρήματος 1.3.1 είναι να θεωρήσουμε την ακολουθία $(P_1P_2P_1)^n$ αντί την $(P_1P_2)^n$. Σημειωτέον πως $(P_2P_1)^n x \xrightarrow{n\to\infty} P_M x$ αν και μόνο αν $(P_1P_2P_1)^n x \xrightarrow{n\to\infty} P_M x$. Θα αποδείξουμε το τελευταίο. Έστω $T = P_1P_2P_1$. Από το Φασματικό Θεώρημα, έπεται ότι υπάρχει ένας χώρος πεπερασμένου μέτρου (Ω, Σ, μ), ένας ορθομοναδιαίος τελεστής $U\colon \mathcal{H} \to L^2(\Omega,\mu)$ και $F \in L^\infty(\Omega,\mu)$, έτσι ώστε

$$UTU^{-1}f = F \cdot f, \quad f \in L^2(\Omega,\mu),$$

και $F(\omega) \in \mathbb{R}$ για $\mu-$σχεδόν όλα τα $\omega \in \Omega$. Ας σημειωθεί ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$UT^nU^{-1}f = F^n \cdot f, \quad f \in L^2(\Omega, \mu).$$

Έστω $f \in L^2(\Omega, \mu)$ και έστω $y = U^{-1}f$. Εύκολα βλέπει κανείς ότι ο T είναι ένας επαυξητικός (accretive) τελεστής (δηλαδή $(Th, h) \geq 0$ για κάθε $h \in \mathcal{H}$), και άρα

$$\begin{aligned}\int_\Omega F|f|^2 \mathrm{d}\mu &= (F \cdot f, f)_{L^2(\Omega,\mu)} = (UTU^{-1}f, f)_{L^2(\Omega,\mu)} \\ &= (TU^{-1}f, U^*f) = (Ty, y) \geq 0.\end{aligned}$$

Με άλλα λόγια, $\int_\Omega F|f|^2 \mathrm{d}\mu \geq 0$, για κάθε $f \in L^2(\Omega, \mu)$. Συμπεραίνουμε ότι $F(\omega) \geq 0$ για $\mu-$σχεδόν όλα τα $\omega \in \Omega$. Επιπλέον, εφόσον $\|F\|_\infty = \|T\| \leq 1$, έπεται ότι $0 \leq F(\omega) \leq 1$, για $\mu-$σχεδόν όλα τα $\omega \in \Omega$.

Έχοντας αυτά υπόψη, θέτοντας

$$\begin{aligned}\{F \leq 1\} &= \{\omega \in \Omega \colon F(\omega) \leq 1\}, \\ \{F < 1\} &= \{\omega \in \Omega \colon F(\omega) < 1\}, \\ \{F = 1\} &= \{\omega \in \Omega \colon F(\omega) = 1\},\end{aligned}$$

έχουμε ότι $\mu(\Omega \setminus \{F \leq 1\}) = 0$. Για $f \in L^2(\Omega, \mu)$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\left\|(F^n - F^{n+1}) \cdot f\right\|^2_{L^2(\Omega,\mu)} &= \int_\Omega |F^n(1-F) \cdot f|^2 \mathrm{d}\mu \\ &= \int_{\{F\leq 1\}} |F^n(1-F) \cdot f|^2 \mathrm{d}\mu \\ &= \int_{\{F<1\}} |F^n(1-F) \cdot f|^2 \mathrm{d}\mu + \int_{\{F=1\}} |F^n(1-F) \cdot f|^2 \mathrm{d}\mu \\ &= \int_{\{F<1\}} |F^n(1-F) \cdot f|^2 \mathrm{d}\mu \\ &\leq \int_{\{F<1\}} |F^n \cdot f|^2 \mathrm{d}\mu. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Ας σημειωθεί ότι $(F(\omega))^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ για όλα τα $\omega \in \{F < 1\}$. Επίσης, η f είναι ολοκληρώσιμη, και άρα, πεπερασμένη $\mu-$σχεδόν παντού στο $\{F < 1\}$. Συνεπώς, $(F(\omega))^n f(\omega) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ για $\mu-$σχεδόν όλα τα $\omega \in \{F < 1\}$. Εφόσον $|(F(\omega))^n f(\omega)| \leq |f(\omega)|$ για κάθε $\omega \in \{F < 1\}$, από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebesgue, έπεται ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\{F<1\}} |F^n \cdot f|^2 \mathrm{d}\mu = \int_{\{F<1\}} \lim_{n\to\infty} |F^n \cdot f|^2 \mathrm{d}\mu = 0.$$

Για $x \in \mathcal{H}$ και $f = Ux$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} ||T^n x - T^{n+1}x|| &= ||U^{-1}U(T^n - T^{n+1})U^{-1}Ux|| \\ &\leq ||U^{-1}||\, ||U(T^n - T^{n+1})U^{-1}f||_{L^2(\Omega,\mu)} \\ &= ||U(T^n - T^{n+1})U^{-1}f||_{L^2(\Omega,\mu)} \\ &= ||(F^n - F^{n+1})\cdot f||_{L^2(\Omega,\mu)} \to 0 \qquad [(1.2)]. \end{aligned}$$

Από το Λήμμα 1.2.2(d), έπεται ότι $||T^n y|| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ για κάθε $y \in \overline{Ran(I-A)}$. Επιπλέον, από το Λήμμα 1.2.2(c)(e) ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \overline{Ran(I-A)} \oplus (Ran(I-A))^{\perp} \\ &= \overline{Ran(I-A)} \oplus \ker(I-T^*) \\ &= \overline{Ran(I-A)} \oplus M. \end{aligned}$$

Συνεπώς, αν $x \in \mathcal{H}$, τότε το x γράφεται ως $x = y + z$, όπου $y \in \overline{Ran(I-A)}$ και $z \in M$. Ως εκ τούτου,

$$||T^n x - P_M x|| = ||T^n y + T^n z - z|| = ||T^n y|| \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

όπως ακριβώς θέλαμε. □

Κλείνουμε αυτή την υποενότητα με την παρατήρηση ότι κάθε ακολουθία από προβολές που περιέχει τις P_1 και P_2 μπορεί να αναχθεί σε μία όπου οι P_1 και P_2 εναλλάσσονται. Συνεπώς, το Θεώρημα 1.3.1 μας δείχνει πράγματι ότι αν $J = 2$ και (j_n) είναι μία (όχι κατ'ανάγκη περιοδική) ακολουθία με τιμές στο $\{1, J\}$, τότε η

$$x_n = P_{j_n} x_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}$$

συγκλίνει ως προς τη νόρμα στο σημείο $P_M x_0$.

1.3.2 Περιοδικές προβολές - Το Θεώρημα Halperin

Το 1962, ο Halperin [3] γενίκευσε το Θεώρημα του von Neumann [2], δείχνοντας ότι η (x_n) είναι norm συγκλίνουσα, αν η ακολουθία (j_n) είναι περιοδική:

Θεώρημα 1.3.2 (Halperin)**.** *Έστωσαν $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert, $J \geq 2$ ακέραιος, και $M_1, \ldots, M_J$ κλειστοί υπόχωροι του $\mathcal{H}$. Έστω $T = P_J \cdots P_1$, και έστω P_M η ορθογώνια προβολή επί του $M = \bigcap_{j=1}^{J} M_j$. Τότε, για κάθε $x \in \mathcal{H}$,*

$$||T^n x - P_M x|| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Θα ακολουθήσουμε την απόδειξη του Halperin [3], αποδεικνύοντας ένα ισχυρότερο θεώρημα σε γενικούς χώρους Banach, από το οποίο το Θεώρημα 1.3.2 έπεται ως πόρισμα. Αν και η απόδειξη του θεωρήματος 1.3.2 μπορεί να γίνει πιο άμεσα (βλ. [1]), αξίζει να αναφέρουμε τα αποτελέσματα του Halperin, καθώς ανοίγουν δρόμο για περαιτέρω έρευνα.

Συμβολισμός

Αν X είναι ένας χώρος Banach και $T \in \mathcal{B}(X)$, θέτουμε $K(T) = \sup_{n\in\mathbb{N}} ||T^n||$. Θα λέμε ότι ο T είναι συστολή, αν $||T|| \le 1$. Επιπλέον, από εδώ και στο εξής, S θα είναι ένας αντιστρέψιμος τελεστής από τον X στον X. Τέλος, $\varphi\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ θα είναι μία γνησίως αύξουσα συνάρτηση, έτσι ώστε $\varphi(t) > 0$ για $t > 0$, και $\Phi_2 := \sup\left\{\frac{\varphi(2t)}{\varphi(t)} : t > 0\right\} < +\infty$. (Τυπικά παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων είναι οι $\varphi(t) = t^p,\ p \ge 1$.)

Θα λέμε ότι ένας τελεστής $T \in \mathcal{B}(X)$ ικανοποιεί την συνθήκη:

$(*)$ αν $||Tx|| < ||x||$, οποτεδήποτε $Tx \neq x$.

$(**)$ αν για κάθε $x \in X$, $||T^n x - T^{n+1}x|| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ (τέτοιοι τελεστές λέγονται και asymptotically regular).

$(***)$ αν $X = \ker(I-T) + \overline{Ran(I-T)}$.

(φ) αν υπάρχει συνάρτηση φ με τις προαναφερθείσες ιδιότητες, και αν υπάρχει $k > 0$, έτσι ώστε για κάθε $x \in X$,

$$\varphi(||x - Tx||) \le k(\varphi(||x||) - \varphi(||Tx||)).$$

Παρατήρηση 1.3.3. (a) Κάθε συστολή T ικανοποιεί την συνθήκη $(*)$.

(b) Αν $X = \mathcal{H}$ είναι χώρος Hilbert και T είναι συστολή, όπως θα δούμε και στην Πρόταση 1.3.7, ο T ικανοποιεί την συνθήκη $(***)$.

(c) Το κίνητρο που οδήγησε στον ορισμό της συνθήκης (φ) είναι η παρατήρηση ότι αν $\mathcal{H}$ είναι ένας χώρος Hilbert και P είναι μία ορθογώνια προβολή, τότε

$$||x - Px||^2 = ||x||^2 - ||Px||^2, \quad x \in \mathcal{H}.$$

($\varphi(t) = t^2$ και $k = 1$.)

(d) Όπως θα δούμε και στην Πρόταση 1.3.7 οι συνθήκες $(*)$ και $(**)$ έπονται από την (φ).

Θεώρημα 1.3.4. *Έστω $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert και έστωσαν $T_1, \ldots, T_J \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, οι οποίοι ικανοποιούν την συνθήκη (φ) για μία κοινή συνάρτηση φ και για διαφορετικές εν γένει σταθερές k_j $(j = 1, \ldots, J)$. Τότε, η ακολουθία $T^n = (T_J \cdots T_1)^n$ συγκλίνει ισχυρά στην προβολή επί του $\bigcap_{j=1}^{J} \ker(I - T_j)$, καθώς $n \to \infty$.*

Σχόλιο 1.3.5. Αν $T_1, \ldots, T_J$ είναι ορθογώνιες προβολές επί των $M_1, \ldots, M_J$, τότε από το Λήμμα 1.2.2 (a)(b), έχουμε ότι

$$\bigcap_{j=1}^{J} \ker(I - T_j) = \ker(I - T_J \cdots T_1) = \ker(I - T) = \bigcap_{j=1}^{J} M_j.$$

Επιπλέον, από την Παρατήρηση 1.3.3 (c), οι T_i $(1 \le i \le J)$ ικανοποιούν την συνθήκη (φ). Άρα, το Θεώρημα 1.3.2 (Halperin) συνεπάγεται από το Θεώρημα 1.3.4.

Θα αποδείξουμε ένα θεώρημα για γενικούς χώρους Banach (Θεώρημα 1.3.8), από το οποίο έπεται το Θεώρημα 1.3.4, και κατά συνέπεια το Θεώρημα 1.3.2 (Halperin).

Λήμμα 1.3.6. *Έστω $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert και $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ συστολή. Τότε $Tx = x$ αν και μόνο αν $T^*x = x$.*

Απόδειξη. Αρχίζουμε την απόδειξη του Λήμματος με την παρατήρηση ότι εφόσον $||T|| = ||T^*||$, έπεται ότι ο T^* είναι συστολή. Αν $Tx = x$, τότε

$$||x||^2 = (x, x) = (Tx, x) = (x, T^*x) \le ||x||\,||T^*x|| \le ||x||^2,$$

και άρα, $(x, T^*x) = ||x||\,||T^*x||$ και $||T^*x|| = ||x||$. Ως εκ τούτου,

$$||x - T^*x||^2 = ||x||^2 - 2(x, T^*x) + ||T^*x||^2 = 0.$$

Με άλλα λόγια, $T^*x = x$. Ομοίως δείχνουμε πως αν $T^*x = x$, τότε $Tx = x$. □

Πρόταση 1.3.7. *Έστω X χώρος Banach και έστωσαν $T, T_1, \ldots, T_J \in \mathcal{B}(X)$. Ισχύουν τα ακόλουθα:*

(I) Αν ο T ικανοποιεί την συνθήκη (φ), τότε ο T ικανοποιεί τις συνθήκες ($*$) και ($**$).

(II) Αν $X = \mathcal{H}$ είναι χώρος Hilbert και αν ο T είναι συστολή, τότε ο T ικανοποιεί την συνθήκη ($***$). Επιπλέον, αν ο τελεστής STS^{-1} είναι συστολή, τότε ο T ικανοποιεί την συνθήκη ($***$).

(III) Αν $X = \mathcal{H}$ είναι χώρος Hilbert και $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, τότε η P είναι συστολή και ταυτοδύναμος τελεστής αν και μόνο αν η P είναι μία ορθογώνια προβολή επί του $\ker(I - P)$.

(IV) Υποθέτουμε ότι για κάθε $i \in \{1, \ldots, J\}$, ο τελεστής ST_iS^{-1} ικανοποιεί την συνθήκη (∗). Θέτουμε $T = T_J \cdots T_1$. Τότε ο STS^{-1} ικανοποιεί την συνθήκη (∗). Επιπλέον, $Tx = x$ αν και μόνο αν $T_ix = x$ για κάθε i.

(V) Υποθέτουμε οι τελεστές ST_iS^{-1} $(1 \leq i \leq J)$ ικανοποιούν την συνθήκη (φ) για μία κοινή συνάρτηση φ και για εν γένει διαφορετικές σταθερές k_i $(i = 1, \ldots, J)$. Θέτουμε $T = T_J \cdots T_1$. Τότε ο STS^{-1} ικανοποιεί την συνθήκη (φ).

(VI) Αν $K(T) < +\infty$ και αν ο T ικανοποιεί την συνθήκη (∗∗), τότε $T^n y \xrightarrow{n\to\infty} 0$ για κάθε $y \in \overline{Ran(I - T)}$.

(VII) Αν ο T^n συγκλίνει ισχυρά σε ένα τελεστή P, τότε:

(i) $K(T) < +\infty$.

(ii) Ο τελεστής T ικανοποιεί την συνθήκη (∗∗).

(iii) Ο τελεστής T ικανοποιεί την συνθήκη (∗ ∗ ∗).

(iv) $PT = TP = P$ και $P^2 = P$.

(v) $Px = x$ αν και μόνο αν $Tx = x$.

(vi) $Px = 0$ αν και μόνο αν $x \in \overline{Ran(I - T)}$.

Απόδειξη. Για το (I) : Παρατηρούμε ότι αν $Tx \neq x$, δηλαδή, αν $||Tx - x|| > 0$, τότε $\varphi(||Tx - x||) > 0$, και άρα, εφόσον ο T ικανοποιεί την συνθήκη (φ), έχουμε πως $\varphi(||x||) - \varphi(||Tx||) > 0$. Κατά συνέπεια, $||Tx|| < ||x||$. Δείχνουμε τώρα ότι ο T ικανοποιεί την συνθήκη (∗∗). Για κάθε $x \in X$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} \varphi(||T^n x - T^{n+1}x||) &\leq k \sum_{n=0}^{N} \left\{\varphi(||T^n x||) - \varphi(||T^{n+1}x||)\right\} \\ &= k\varphi(||x||) - k\varphi(||T^{N+1}x||) \\ &\leq k\varphi(||x||),\end{aligned}$$

και άρα $\varphi(||T^n x - T^{n+1}x||) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Αυτό όμως έπεται ότι $||T^n x - T^{n+1}x|| \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Για το (II) : Αν T είναι συστολή, τότε, από το Λήμμα 1.3.6, έχουμε ότι

$$\ker(I - T) = \ker(I - T^*) = \ker((I - T)^*) = Ran(I - T)^{\perp},$$

και άρα, $\overline{Ran(I - T)} = \ker(I - T)^{\perp}$. Συμπεραίνουμε πως $\mathcal{H} = \ker(I - T) + \overline{Ran(I - T)}$, δείχνοντας ότι ο T ικανοποιεί την συνθήκη (∗∗). Δείχνουμε τώρα ότι αν ο STS^{-1} είναι συστολή, τότε ο T ικανοποιεί την συνθήκη $(**)$. Από το παραπάνω επιχείρημα, έχουμε ότι $\mathcal{H} = \ker(I - STS^{-1}) + \overline{Ran(I - STS^{-1})}$. Έπεται ότι $\mathcal{H} = S(\ker(I - T)) + S(\overline{Ran(I - T)})$ και άρα, εφόσον ο S είναι ισομορφισμός,

$$\mathcal{H} = \ker(I - T) + \overline{Ran(I - T)}.$$

Για το (III) : Προφανές.

Για το (IV) : Αρχικά, δείχνουμε πως $STS^{-1}x = x$ αν και μόνο αν $ST_iS^{-1}x = x$ για κάθε i. Αν $ST_iS^{-1}x = x$ για κάθε i, τότε $STS^{-1}x = ST_JS^{-1} \cdots ST_1S^{-1}x = x$. Ανάποδα, αν υπάρχει j για το οποίο $ST_jS^{-1}x \neq x$, τότε, επιλέγοντας το μικρότερο τέτοιο j, έχουμε ότι

$$||STS^{-1}x|| = ||ST_JS^{-1} \cdots ST_jS^{-1}x|| \leq ||ST_jS^{-1}x|| < ||x||,$$

και κατά συνέπεια, $STS^{-1}x \neq x$. Επιπλέον, δείξαμε ότι ο STS^{-1} ικανοποιεί την συνθήκη $(*)$. Τέλος, παρατηρούμε πως

$$\begin{aligned} Tx = x &\iff STS^{-1}(Sx) = Sx \\ &\iff \forall\, i \in \{1, \ldots, J\}\,,\; ST_iS^{-1}(Sx) = Sx \\ &\iff \forall\, i \in \{1, \ldots, J\}\,,\; T_ix = x. \end{aligned}$$

Για το (V) : Παρατηρούμε πως

$$\begin{aligned} &\varphi(||x - ST_2T_1S^{-1}x||) \\ &\leq \varphi(||x - ST_1S^{-1}x|| + ||ST_1S^{-1}x - ST_2T_1S^{-1}x||) \\ &\leq \varphi\big(2 \max\big\{||x - ST_1S^{-1}x||, ||ST_1S^{-1}x - ST_2T_1S^{-1}x||\big\}\big) \\ &\leq \Phi_2\, \varphi\big(\max\big\{||x - ST_1S^{-1}x||, ||ST_1S^{-1}x - ST_2T_1S^{-1}x||\big\}\big) \\ &= \Phi_2 \max\big\{\varphi(||x - ST_1S^{-1}x||), \varphi(||ST_1S^{-1}x - ST_2T_1S^{-1}x||)\big\} \\ &\leq \Phi_2\big(\varphi(||x - ST_1S^{-1}x||) + \varphi(||ST_1S^{-1}x - ST_2T_1S^{-1}x||)\big) \\ &= \Phi_2\big(\varphi(||x - ST_1S^{-1}x||) + \varphi(||(ST_1S^{-1}x) - ST_2S^{-1}(ST_1S^{-1}x)||)\big) \\ &\leq \Phi_2 \max\{k_1, k_2\}\,\big(\varphi(||x||) - \varphi(||ST_1S^{-1}x||) + \varphi(||ST_1S^{-1}x||) - \varphi(||ST_2T_1S^{-1}x||)\big) \\ &= \Phi_2 \max\{k_1, k_2\}\,\big(\varphi(||x||) - \varphi(||ST_2T_1S^{-1}x||)\big), \end{aligned}$$

και άρα, ο $ST_2T_1S^{-1}$ ικανοποιεί την συνθήκη (φ). Με επαγωγή, δείχνουμε ότι ο $ST_J \cdots T_1S^{-1}$ ικανοποιεί (φ).

Για το (VI) : Αν $y \in Ran(I - T)$, τότε $y = x - Tx$ για κάποιο $x \in X$. Άρα, εφόσον ο T ικανοποιεί την συνθήκη $(**)$,

$$||T^n(x - Tx)|| = ||T^nx - T^{n+1}x|| \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

Έστω τώρα $y \in \overline{Ran(I-T)}$ και έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $x \in Ran(I-T)$ με $||x-y|| < \varepsilon/K(T)$. Τότε,

$$||T^n y|| \leq ||T^n x|| + ||T^n(x-y)|| \leq ||T^n x|| + \varepsilon,$$

και κατά συνέπεια, $\limsup_{n\to\infty} ||T^n y|| \leq \varepsilon$. Εφόσον το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχαίο, έπεται ότι $T^n y \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Για το (VII) : (i) : Δείχνουμε καταρχάς ότι $K(T) < +\infty$. Εφόσον ο T^n συγκλίνει ισχυρά, έπεται ότι για κάθε $x \in X$, $\sup_{n\geq 1} ||T^n x|| < +\infty$, και άρα, από το Θεώρημα Ομοιόμορφου Φράγματος (Θεώρημα B.1.18), έπεται ότι $K(T) = \sup_{n\geq 1} ||T^n|| < +\infty$.

(ii): Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in X$, $\lim_{n\to\infty}(T^n x - T^{n+1}x) = Px - Px = 0$, και άρα ο T ικανοποιεί την συνθήκη ισχύει η $(**)$.

(iii) : Για κάθε $x \in X$,

$$\begin{aligned} x &= Px + (I-P)x = Px + (I-T^n)(I-P)x + T^n(I-P)x \\ &= Px + (I-T)\big((I+T+\cdots+T^{n-1})(I-P)x\big) + T^n(I-P)x. \end{aligned}$$

Όμως, $\lim_{n\to\infty} T^n(I-P)x = Px - Px = 0$, και κατά συνέπεια,

$$x = \underbrace{Px}_{\in\ker(I-T)} + \lim_{n\to\infty} \underbrace{(I-T)\big((I+T+\cdots+T^{n-1})(I-P)x\big)}_{\in Ran(I-T)},$$

δείχνοντας ότι ο T ικανοποιεί την συνθήκη $(***)$.

(iv) : Για κάθε $x \in X$,

$$PTx = \lim_{n\to\infty} T^n(Tx) = \lim_{n\to\infty} T^{n+1}x = T(\lim_{n\to\infty} T^n x) = TPx,$$

και άραμ $PT = P = TP$. Επιπλέον, από τα παραπάνω, $PPx = \lim_{n\to\infty} T^n(Px) = \lim_{n\to\infty} Px = Px$, και άρα, $P^2 = P$.

(vi) : Αν $Px = x$, τότε, $Tx = TPx = Px = x$. Ανάποδα, αν $Tx = x$, τότε, $Px = \lim_{n\to\infty} T^n x = \lim_{n\to\infty} x = x$.

(vii) : Από το (VI), έχουμε ότι $T^n y \xrightarrow{n\to\infty} 0$ για κάθε $y \in \overline{Ran(I-T)}$, και άρα, $Py = 0$ για κάθε $y \in \overline{Ran(I-T)}$. Ανάποδα, αν $Py = 0$, τότε, $\lim_{n\to\infty} T^n y = 0$. Εφόσον ο T ικανοποιεί την συνθήκη $(***)$, θα υπάρχουν $x \in \ker(I-T)$ και $z \in \overline{Ran(I-T)}$, έτσι ώστε $y = x + z$. Όμως, από το (VI),

$$\lim_{n\to\infty} T^n y = \lim_{n\to\infty} T^n x + T^n z = \lim_{n\to\infty} x + T^n z = x,$$

και άρα $x = 0$. Με άλλα λόγια, $y \in \overline{Ran(I-T)}$. □

Θεώρημα 1.3.8. *Έστω $T \in \mathcal{B}(X)$. Ισχύουν τα εξής:*

(i) *Η ακολουθία T^n συγκλίνει ισχυρά καθώς $n \to \infty$ αν και μόνο αν $K(T) < +\infty$ και ο T ικανοποιεί τις συνθήκες $(**)$ και $(***)$.*

Επιπλέον, αν $T^n \xrightarrow{n\to\infty} P$ ισχυρά, τότε $P^2 = P$, $PT = TP = P$, $Px = x$ αν και μόνο αν $Tx = x$. Τέλος, $Px = 0$ αν και μόνο αν $x \in \overline{Ran(I - T)}$.

(ii) *Αν ο STS^{-1} ικανοποιεί την συνθήκη (φ), τότε ο T ικανοποιεί την συνθήκη $(**)$, και $K(T) < +\infty$. Ειδικότερα, αν $S = I$ και αν $T^n \xrightarrow{n\to\infty} P$ ισχυρά, τότε η P είναι μία ταυτοδύναμη συστολή.*

(iii) *Αν $X = \mathcal{H}$ είναι χώρος Hilbert και υπάρχει $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, έτσι ώστε ο STS^{-1} να ικανοποιεί την συνθήκη (φ) , τότε $T^n \xrightarrow{n\to\infty} P$ ισχυρά. Επιπλέον, αν $S = I$, τότε η P είναι προβολή επί του $\ker(I - T)$.*

Απόδειξη. Για το (i) : Αν ο T ικανοποιεί την συνθήκη $(**)$ και $K(T) < +\infty$, τότε, από την Πρόταση 1.3.7 (VI), $T^n(x + y) \to x$ για κάθε $x \in \ker(I - T)$ και $y \in \overline{Ran(I - T)}$. Συνεπώς, αν ο T ικανοποιεί την συνθήκη $(***)$, τότε η ακολουθία $T^n z$ συγκλίνει καθώς $n \to \infty$ για κάθε $z \in X$. Το υπόλοιπο κομμάτι της απόδειξης του (i) περιέχεται στην Πρόταση 1.3.7 (VII).

Για το (ii) : Εφόσον ο STS^{-1} ικανοποιεί την συνθήκη (φ), από την Πρόταση 1.3.7 (I), έπεται ότι ο STS^{-1} είναι συστολή, και πως ικανοποιεί την συνθήκη $(**)$. Έπεται εύκολα πως ο T ικανοποιεί την συνθήκη $(**)$, και από το Θεώρημα Ομοιόμορφου Φράγματος, προκύπτει πως $K(T) < +\infty$. Το υπόλοιπο κομμάτι του (ii) περιέχεται στην Πρόταση 1.3.7 (III).

Για το (iii) : Από το (ii), έχουμε πως ο T ικανοποιεί την συνθήκη $(**)$ και πως $K(T) < +\infty$. Επίσης, εφόσον ο STS^{-1} είναι συστολή, από την Πρόταση 1.3.7 (II), έχουμε πως ο T ικανοποιεί την συνθήκη $(***)$. Άρα, από το (i), υπάρχει τελεστής P, έτσι ώστε $T^n \xrightarrow{n\to\infty} P$ ισχυρά. Αν τώρα $S = I$, τότε η P είναι μία ταυτοδύναμη συστολή, και άρα, από την Πρόταση 1.3.7 (III), έχουμε ότι η P είναι προβολή επί του $\ker(I - T)$. □

Είμαστε πλέον έτοιμοι να αποδείξουμε το Θεώρημα 1.3.4. Η απόδειξη περιέχεται στο δεύτερο κομμάτι του παρακάτω πορίσματος.

Πόρισμα 1.3.9. *Έστω X χώρος Banach και έστωσαν $T_1, \ldots, T_J \in \mathcal{B}(X)$. Θέτουμε $T = T_J \cdots T_1$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει αντιστρέψιμος τελεστής S, έτσι ώστε κάθε ST_iS^{-1} $(i = 1, \ldots, J)$ να ικανοποιεί την συνθήκη (φ).*

(i) *Τότε, η ακολουθία T^n συγκλίνει ισχυρά σε έναν τελεστή P καθώς $n \to \infty$ αν και μόνο αν ο T ικανοποιεί την συνθήκη $(***)$. Επιπλέον, ο P είναι ταυτοδύναμος (αν $S = I$, τότε είναι συστολή), και $Px = x$ αν και μόνο αν $T_ix = x$ για κάθε i.*

(ii) *Αν $X = \mathcal{H}$ είναι χώρος Hilbert, τότε η ακολουθία T^n συγκλίνει ισχυρά σε έναν ταυτοδύναμο τελεστή P καθώς $n \to \infty$. Επιπλέον, $Px = x$ αν και μόνο αν $T_i x = x$ για κάθε i. Αν $S = I$, τότε η P είναι η ορθογώνια προβολή επί του $\bigcap_{i=1}^{J} \ker(I - T_i) = \ker(I - T)$.*

Απόδειξη. Για το (i) : Έστω πως $T^n \xrightarrow{n\to\infty} P$ ισχυρά. Τότε, από το Θεώρημα 1.3.8 (i), έχουμε πως ο T ικανοποιεί την συνθήκη $(***)$. Ανάποδα, αν ο T ικανοποιεί την συνθήκη $(***)$, για να δείξουμε ότι $T^n \xrightarrow{n\to\infty} P$ ισχυρά, από το Θεώρημα 1.3.8 (i), αρκεί να δείξουμε πως ο T ικανοποιεί τη συνθήκη $(**)$, και πως $K(T) < +\infty$. Προς αυτόν τον σκοπό, παρατηρούμε ότι από την Πρόταση 1.3.7 (V), ο STS^{-1} ικανοποιεί την συνθήκη (φ). Από το Θεώρημα 1.3.8 (ii), συμπεραίνουμε πως ο T ικανοποιεί τη συνθήκη $(**)$ και $K(T) < +\infty$.

Επιπλέον, είναι προφανές ότι ο P είναι ταυτοδύναμος, και αν $S = I$, τότε είναι συστολή. Τέλος, από την Πρόταση 1.3.7 (IV), $Tx = x$ αν και μόνο αν $T_j x = x$ για κάθε $j \in \{1, \ldots, J\}$.

Για το (ii) : Με βάση τα παραπάνω, για να δείξουμε πως $T^n \xrightarrow{n\to\infty} P$ ισχυρά, αρκεί να δείξουμε πως ο T ικανοποιεί την συνθήκη $(***)$. Από την Πρόταση 1.3.7 (V), ο STS^{-1} ικανοποιεί την (φ), και άρα, από την Πρόταση 1.3.7 (I), ο STS^{-1} είναι συστολή. Συνεπώς, από την Πρόταση 1.3.7 (II), ο T ικανοποιεί την συνθήκη $(***)$.

Επιπλέον, από το Θεώρημα 1.3.8 (i), $Px = x$ αν και μόνο αν $Tx = x$, το οποίο από την Πρόταση 1.3.7 (IV), ισχύει αν και μόνο αν $T_i x = x$ για κάθε $i \in \{1, \ldots, J\}$. Αν τώρα $S = I$, τότε η P είναι ταυτοδύναμη συστολή, και άρα, από την Πρόταση 1.3.7 (III), είναι ορθογώνια προβολή. Παρατηρούμε ότι $P = I$ στον $\bigcap_{i=1}^{J} \ker(I - T_i) = \ker(I - T)$ (Βλ. Πρόταση 1.3.7 (IV)), ενώ για κάθε $x \in X$, $P(x - Tx) = Px - PTx = Px - Px = 0$, και κατά συνέπεια, $P = 0$ στον $\overline{Ran(I - T)} = \ker(I - T)^{\perp}$. Δηλαδή, η P είναι η ορθογώνια προβολή επί του $\ker(I - T)$. □

1.3.3 Οιονεί-περιοδικές προβολές - Το Θεώρημα Sakai

Μπορούμε να γενικεύσουμε το Θεώρημα 1.3.2 (Halperin) βρίσκοντας μία ασθενέστερη συνθήκη από αυτή της περιοδικότητας ώστε η ακολουθία των προβολών να συγκλίνει ως προς την νόρμα. Το 1995, ο Sakai [5] απέδειξε ότι αν η ακολουθία των προβολών είναι "οιονεί-περιοδική", τότε μπορούμε να εξασφαλίσουμε την σύγκλιση ως προς την νόρμα. Προτού ορίσουμε τι εννοούμε με τον όρο οιονεί-περιοδική, ας θυμηθούμε το σκηνικό μας.

Έστω $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert, $J \geq 2$ ένας ακέραιος, και $P_1, \ldots, P_J$ οι ορθογώνιες προβολές επί των κλειστών υποχώρων $M_1, \ldots, M_J$ του $\mathcal{H}$ αντίστοιχα. Επιπλέον, έστω P_M η ορθογώνια προβολή επί του $M = \bigcap_{j=1}^{J} M_j$. Τέλος, έστω $(j_n)_{n\geq 1}$ μία ακολουθία με τιμές στο σύνολο $\{1, \ldots, J\}$. Ορίζουμε αναδρομικά την ακολουθία

$(x_n)_{n\geq 0}$ επιλέγοντας ένα τυχαίο $x_0 \in \mathcal{H}$ και θέτοντας

$$x_n = P_{j_n} x_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Για απλοποίηση στο συμβολισμό, θα γράφουμε $s = (j_n)_{n\geq 1}$. Ορίζουμε τώρα πότε η ακολουθία s είναι οιονεί-περιοδική.

Ορισμός 1.3.10. Η ακολουθία $s = (j_n)$ καλείται **οιονεί-περιοδική**, αν κάθε $i \in \{1, \ldots, J\}$ εμφανίζεται απείρως πολλές φορές στην s, και αν για κάθε τέτοιο i, ο αριθμός

$$I(s,i) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(k_n(i) - k_{n-1}(i)\right) \tag{1.3}$$

είναι πεπερασμένος, όπου $k_0(i) = 0$ και $\left(k_n(i)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι η αύξουσα ακολουθία όλων των φυσικών αριθμών, τέτοιοι ώστε $j_{k_n(i)} = i$.

Πιο απλά, αν η $s = (j_n)$ είναι οιονεί-περιοδική, τότε ο αριθμός των στοιχείων που παρεμβάλλονται ανάμεσα σε ένα $i \in \{1, \ldots, J\}$ και στην επόμενη εμφάνισή του, είναι φραγμένος (από το $I(s,i) < +\infty$). Για έναν ισοδύναμο χαρακτηρισμό των οιονεί-περιοδικών ακολουθιών βλ. ορισμό 2.4.13.

Θεώρημα 1.3.11 (Sakai)**.** *Αν η (j_n) είναι οιονεί-περιοδική, τότε*

$$||x_n - P_M x_0|| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Θα ακολουθήσουμε την απόδειξη του Sakai [5], χωρίζοντάς την σε μικρότερες υποενότητες.

Χρήσιμα Λήμματα

Καταρχάς, αποδεικνύουμε δύο απλά, αλλά χρήσιμα, λήμματα, τα οποία θα χρησιμοποιήσουμε αργότερα για την απόδειξη του θεωρήματος 1.3.11 (Sakai).

Λήμμα 1.3.12. *Έστωσαν $y_1, y_2, \ldots, y_N, y_{N+1} \in \mathcal{H}$. Τότε,*

$$||y_{N+1} - y_1||^2 \leq N \sum_{k=1}^{N} ||y_{k+1} - y_k||^2.$$

Απόδειξη. Από την τριγωνική ανισότητα και την ανισότητα Hölder, έχουμε ότι

$$||y_{N+1} - y_1||^2 = \left\| \sum_{k=1}^{N} (y_{k+1} - y_k) \right\|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{N} ||y_{n+1} - y_n|| \right)^2 \leq N \sum_{k=1}^{N} ||y_{n+1} - y_n||^2,$$

αποδεικνύοντας το ζητούμενο. □

Λήμμα 1.3.13. *Έστω P μία ορθογώνια προβολή επί ενός κλειστού υποχώρου ενός χώρου Hilbert $\mathcal{H}$, και έστωσαν $x, y \in \mathcal{H}$. Τότε,*

(a) $||x - Py||^2 \le ||x - y||^2 + ||x - Px||^2$.

(b) $||x - y||^2 \le ||x - Py||^2 + ||x - Px||^2 + 2||y - Py||^2$.

Απόδειξη. (a) : Παρατηρούμε ότι $x - Px \perp P(x - y)$, και άρα

$$\begin{aligned} ||x - Py||^2 &= ||x - Px + P(x - y)||^2 \\ &= ||x - Px||^2 + ||P(x - y)||^2 \\ &\le ||x - Px||^2 + ||x - y||^2. \end{aligned}$$

(b) : Παρατηρούμε ότι $Px, Py \perp y - Py$, και επομένως

$$(x - Py, y - Py) = (x, y - Py) = (x - Px, y - Py).$$

Ως εκ τούτου,

$$\begin{aligned} ||x - y||^2 &= \|x - Py - (y - Py)\|^2 \\ &\le ||x - Py||^2 + ||y - Py||^2 + 2|(x - Py, y - Py)| \\ &= ||x - Py||^2 + ||y - Py||^2 + 2|(x - Px, y - Py)| \\ &\le ||x - Py||^2 + ||y - Py||^2 + 2||x - Px||\ ||y - Py|| && \text{[Cauchy-Swartz]} \\ &\le ||x - Py||^2 + ||y - Py||^2 + ||x - Px||^2 + ||y - Py||^2 && [2ab \le a^2 + b^2] \\ &= ||x - Py||^2 + ||x - Px||^2 + 2||y - Py||^2. \end{aligned}$$

□

Ένα κριτήριο σύγκλισης

Αρχίζουμε αποδεικνύοντας ένα λήμμα που μας εγγυάται την σύγκλιση της (x_n) ως προς την νόρμα. Ύστερα, διατυπώνουμε μία επαρκή συνθήκη, από την οποία το έπεται το Θεώρημα 1.3.11 (Sakai) ως πόρισμα.

Λήμμα 1.3.14. *Υποθέτουμε ότι υπάρχει μία σταθερά C (που μπορεί να εξαρτάται από την ακολουθία s), έτσι ώστε*

$$\|x_n - x_m\|^2 \le C \sum_{k=m}^{n-1} \|x_{k+1} - x_k\|^2, \quad n > m \ge 1. \tag{1.4}$$

Τότε η (x_n) είναι norm συγκλίνουσα.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι η (x_n) είναι Cauchy ακολουθία, καθώς ο $\mathcal{H}$ είναι χώρος Hilbert (και άρα πλήρης). Εφόσον $x_{k+1} = P_{j_{k+1}}x_k$, από το Λήμμα 1.2.1(a), έχουμε ότι

$$\|x_{k+1}\|^2 + \|x_k - x_{k+1}\|^2 = \|x_{k+1}\|^2 + \|x_k\|^2 - \|x_{k+1}\|^2 = \|x_k\|^2.$$

Συνεπώς, η $(||x_k||)$ είναι φθίνουσα ακολουθία μη αρνητικών αριθμών, και άρα θα συγκλίνει. Αθροίζοντας την παραπάνω σχέση από $k = m$ έως $k = n-1$, καταλήγουμε στο ότι

$$||x_m||^2 = ||x_n||^2 + \sum_{k=m}^{n-1} ||x_{k+1} - x_k||^2.$$

Συνεπώς, η (1.4) είναι ισοδύναμη με την

$$||x_n - x_m||^2 \leq C(||x_m||^2 - ||x_n||^2).$$

Από την σύγκλιση της $(||x_k||)$, έχουμε ότι

$$||x_n - x_m||^2 \leq C(||x_m||^2 - ||x_n||^2) \xrightarrow{n,m\to\infty} 0,$$

και άρα η (x_n) είναι Cauchy. □

Δείξαμε λοιπόν ότι κάτω από τις υποθέσεις του παραπάνω λήμματος, η ακολουθία (x_n) συγκλίνει ως προς την νόρμα σε κάποιο σημείο, έστω x_∞. Ειδικότερα, θα συγκλίνει και ασθενώς σε αυτό το σημείο. Στο επόμενο Λήμμα δείχνουμε ότι αν υποθέσουμε περαιτέρω πως κάθε προβολή εμφανίζεται απείρως συχνά στην ακολουθία $(P_{j_n})_{n\geq 1}$, τότε έχουμε ότι $x_\infty = P_M x_0$.

Λήμμα 1.3.15. *Υποθέτουμε ότι η ακολουθία (x_n) συγκλίνει ασθενώς σε ένα σημείο x_∞. Αν κάθε $i \in \{1, \ldots, J\}$ εμφανίζεται απείρως συχνά στην ακολουθία $s = (j_n)_{n\geq 1}$, τότε $x_\infty = P_M x_0$.*

Απόδειξη. Έστω $i \in \{1, \ldots, J\}$. Εξ υποθέσεως, το i εμφανίζεται απείρως συχνά στην ακολουθία $s = (j_n)$, και άρα υπάρχει μία υπακολουθία (x_{n_k}) της (x_n), τέτοια ώστε $x_{n_k} \in M_i$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Επομένως, για κάθε $y \in (M_i)^\perp$, έχουμε ότι

$$(x_\infty, y) = \lim_{k\to\infty} (x_{n_k}, y) = 0.$$

Με άλλα λόγια, $x_\infty \in M_i$ για κάθε $i \in \{1, \ldots, J\}$ και άρα $x_\infty \in M$.

Για να δείξουμε ότι $x_\infty = P_M x_0$, αρκεί να δείξουμε ότι $x_0 - x_\infty \in M^\perp$. Προς αυτόν τον σκοπό, έστω $x \in M$. Για κάθε $n \geq 0$, έχουμε ότι $x_n - x_{n+1} = x_n - P_{j_n+1}x_n \in (M_{j_n+1})^\perp$ και $x \in M_{j_n+1}$. Ως εκ τούτου,

$$(x_n - x_{n+1}, x) = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Αθροίζοντας την ως άνω σχέση από $n = 0$ έως $N > 0$, έχουμε ότι $(x_0 - x_N, x) = 0$. Συνεπώς,

$$(x_0 - x_\infty, x) = \lim_{N\to\infty}(x_0 - x_N, x) = 0,$$

αποδεικνύοντας ότι $x_0 - x_\infty \in M^\perp$. □

Συγκεντρώνουμε τώρα τα δύο τελευταία Λήμματα στο επόμενο:

Πόρισμα 1.3.16. *Υποθέτουμε ότι η ακολουθία $s = (j_n)$ είναι οιονεί-περιοδική. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι υπάρχει σταθερά $C > 0$ (η οποία μπορεί να εξαρτάται από την s), ώστε*

$$\|x_n - x_m\|^2 \le C \sum_{k=m}^{n-1} \|x_{k+1} - x_k\|^2 \quad n > m \ge 1. \tag{1.5}$$

Τότε, $||x_n - P_M x_0|| \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Για να αποδείξουμε λοιπόν το Θεώρημα 1.3.11 (Sakai), αρκεί να βρούμε μία σταθερά $C > 0$ ώστε να ικανοποιείται η (1.5). Το υπόλοιπο αυτής της ενότητας επικεντρώνεται στην ύπαρξη τέτοιας σταθεράς.

Δύο προτάσεις από τις οποίες έπεται το Θεώρημα Sakai

Έμειναν δύο βήματα για την απόδειξη του θεωρήματος 1.3.11 (Sakai). Πρώτον, θα βρούμε δύο προτάσεις από τις οποίες προκύπτει το Θεώρημα, και δεύτερον, θα δείξουμε ότι αυτές οι προτάσεις είναι αληθείς.

Θέτουμε $I = I(s) = \sup_{1\le j\le J} I(s, j)$ και

$$S_\ell = \sum_{k=\ell}^{\ell+I-2} ||x_{k+1} - x_k||^2.$$

Από το Πόρισμα 1.3.16, για να αποδείξουμε το Θεώρημα 1.3.11 (Sakai), αρκεί να δείξουμε ότι

$$||x_n - x_m||^2 \le \big(3 + (I-1)(I-2)\big) \sum_{k=m}^{n-1} ||x_{k+1} - x_k||^2, \quad n > m \ge 1. \tag{1.6}$$

Έστω $n > m \ge 1$. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

(A) $n - m \le 2I - 3$,

(B) $n - m \ge 2I - 2$.

Αν ισχύει η (A), τότε από το Λήμμα 1.3.12, για $N = n-m$, $y_1 = x_m$, $y_2 = x_{m+1}, \dots, y_N = x_{n-1}$, $y_{N+1} = x_n$, έχουμε ότι

$$||x_n - x_m||^2 \le (n-m) \sum_{k=m}^{n-1} ||x_{k+1} - x_k||^2, \tag{1.7}$$

και εφόσον $n - m \le 2I - 3 \le 3 + (I-1)(I-2)$, βλέπουμε ότι ισχύει η (1.6).

Συνεπώς, υποθέτουμε ότι ισχύει η (B), δηλαδή, ότι $n - m \ge 2I - 2$. Παρατηρούμε ότι για να δείξουμε ότι ισχύει η (1.6), αρκεί να αποδείξουμε τις ακόλουθες δύο προτάσεις:

(i) Αν $S_{n-I+1} \le S_m$, τότε

$$||x_n - x_m||^2 \le ||x_n - x_{m+I-1}||^2 + \big(3 + (I-1)(I-2)\big)S_m.$$

(ii) Αν $S_m < S_{n-I+1}$, τότε

$$||x_n - x_m||^2 \le ||x_{n-I+1} - x_m||^2 + \big(3 + (I-1)(I-2)\big)S_{n-I+1}.$$

Πράγματι, αν αποδείξουμε πως ισχύουν οι (i) και (ii), τότε μπορούμε να τις εφαρμόσουμε επανειλημμένα (όποια από τις δύο μπορούμε σε κάθε βήμα), έως ότου καταλήξουμε στην περίπτωση (A). Ύστερα, η (1.6) αποδεικνύεται εύκολα.

Για παράδειγμα, έστω $n > m \ge 1$ με $n - m \ge 2I - 2$. Έστω επίσης ότι $3I - 3 \le n - m < 4I - 4$ (ώστε να χρειαστεί να εφαρμόσουμε δύο φορές τις (i), (ii)). Υποθέτουμε ότι ισχύει η (i), δηλαδή, ότι $S_{n-I+1} \le S_m$, και άρα

$$||x_n - x_m||^2 \le ||x_n - x_{m+I-1}||^2 + \underbrace{\big(3 + (I-1)(I-2)\big)}_{=C} S_m.$$

Θέτουμε τώρα $m' = m + I - 1$. Εφόσον $n - m' = (n-m) - I + 1 \ge 2I - 2$, μπορούμε να εφαρμόσουμε μία από τις (i), (ii). Υποθέτουμε τώρα ότι ισχύει η (ii), δηλαδή, ότι $S_{m+I-1} < S_{n+I-1}$, και άρα

$$||x_n - x_{m+I-1}||^2 \le ||x_{n-I+1} - x_{m+I-1}||^2 + C\, S_{n-I+1}.$$

Θέτουμε $n' = n - I + 1$. Παρατηρούμε ότι $n' - m' = n - m - 2I - 2 < 2I - 2$, και άρα καταλήξαμε στην περίπτωση (A). Συνεπώς, όπως και στην (1.7), παίρνουμε ότι

$$||x_{n-I+1} - x_{m+I-1}||^2 = ||x_{n'} - x_{m'}||^2 \le C \sum_{k=m+I-1}^{n-I} ||x_{k+1} - x_k||^2.$$

Τελικώς, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
||x_n - x_m||^2 &\le ||x_n - x_{m+I-1}||^2 + C\, S_m \\
&\le ||x_{n-I+1} - x_{m+I-1}||^2 + C\,(S_{n-I+1} + S_m) \\
&\le C\Big(\sum_{k=m+I-1}^{n-I} ||x_{k+1} - x_k||^2 + \sum_{k=n-I+1}^{n-1} ||x_{k+1} - x_k||^2 + \sum_{k=m}^{m-I-2} ||x_{k+1} - x_k||^2\Big) \\
&= C \sum_{k=m}^{n-1} ||x_{k+1} - x_k||^2,
\end{aligned}$$

όπως ακριβώς θέλαμε.

Η απόδειξη του θεωρήματος Sakai

Όπως είδαμε, για να αποδείξουμε το Θεώρημα 1.3.11 (Sakai), αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $n > m \ge 1$ με $n - m \ge 2I - 2$, ισχύουν οι ακόλουθες προτάσεις:

(i) Αν $S_{n-I+1} \le S_m$, τότε

$$||x_n - x_m||^2 \le ||x_n - x_{m+I-1}||^2 + \big(3 + (I-1)(I-2)\big)S_m.$$

(ii) Αν $S_m < S_{n-I+1}$, τότε

$$||x_n - x_m||^2 \le ||x_{n-I+1} - x_m||^2 + \big(3 + (I-1)(I-2)\big)S_{n-I+1}.$$

Απόδειξη της (i). Έστωσαν $n > m \ge 1$ με $n - m \ge 2I - 2$. Υποθέτουμε ότι $S_{n-I+1} \le S_m$. Για κάθε $k \in \{m, m+1, \dots, m+I-2\}$, από το Λήμμα 1.3.13(b), για $x = x_n,\ y = x_k,\ P = P_{j_{k+1}}$, και θέτοντας $p_{j_{k+1}} = P_{j_{k+1}} x_n$, έχουμε ότι

$$||x_n - x_k||^2 \le ||x_n - x_{k+1}||^2 + \left\|x_n - p_{j_{k+1}}\right\|^2 + 2||x_{k+1} - x_k||^2.$$

Εφαρμόζοντας την ως άνω ανίσωση για όλα τα $k \in \{m, m+1, \dots, m+I-2\}$, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
||x_n - x_m||^2 &\le ||x_n - x_{m+1}||^2 + \left\|x_n - p_{j_{k+1}}\right\|^2 + 2||x_{k+1} - x_k||^2 \\
&\le \cdots \le ||x_n - x_{m+I-1}||^2 + \sum_{k=m}^{m+I-2} \left\|x_n - p_{j_{k+1}}\right\|^2 + 2S_m. \qquad (1.8)
\end{aligned}$$

Άρα, μένει να φράξουμε κατάλληλα το άθροισμα στο δεξί μέρος της (1.8).

Το σύνολο $\{x_{n-I+1}, x_{n-I+2}, \dots, x_n\}$ περιέχει I συνεχόμενα στοιχεία της ακολουθίας (x_n). Συνεπώς, από τον ορισμό του I, υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο από αυτό το σύνολο, έστω x_h, το οποίο ανήκει στον $M_{j_{k+1}}$. Επιλέγουμε το μεγαλύτερο τέτοιο h, και το συμβολίζουμε με $h(j_{k+1})$. Ας σημειωθεί ότι

$$0 \le n - h(j_{k+1}) \le n - (n - I + 1) = I - 1. \tag{1.9}$$

Εφόσον $p_{j_{k+1}} = P_{j_{k+1}} x_n$ είναι η προβολή του x_n πάνω στον $M_{j_{k+1}}$, και $x_{h(j_{k+1})} \in M_{j_{k+1}}$, το Λήμμα 1.2.1(d) μας λέει ότι

$$||x_n - p_{j_{k+1}}||^2 \le ||x_n - x_{h(j_{k+1})}||^2.$$

Εφαρμόζοντας τώρα το Λήμμα 1.3.12, παίρνουμε πως

$$\begin{aligned} ||x_n - x_{h(j_{k+1})}||^2 &\le (n - h(j_{k+1})) \sum_{k=h(j_{k+1})}^{n-1} ||x_{k+1} - x_k||^2 \\ &\le (n - h(j_{k+1})) \sum_{k=n-I+1}^{n-1} ||x_{k+1} - x_k||^2 \qquad [(1.9)] \\ &= (n - h(j_{k+1}))\, S_{n-I+1}. \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\sum_{k=m}^{m+I-2} ||x_n - p_{j_{k+1}}||^2 \le \sum_{k=m}^{m+I-2} (n - h(j_{k+1})) S_{n-I+1}. \tag{1.10}$$

Αρκεί λοιπόν να φράξουμε το άθροισμα στο δεξί μέρος της (1.10) καταλλήλως.

Εφόσον $k \in \{m, \dots, m + I - 2\}$, το k διατρέχει $I - 1$ συνεχόμενους αριθμούς. Άρα, υπάρχει κάποιο $a \in \{m, \dots, m + I - 2\}$ έτσι ώστε ο $M_{j_{a+1}}$ να ισούται με έναν από τους $M_{j_{n-1}}$ ή M_{j_n}. Επιλέγουμε το μεγαλύτερο τέτοιο a. Τότε, αν $M_{j_{a+1}} = M_{j_n}$, έπεται ότι $h(j_{a+1}) = n$ [διότι $x_n \in M_{j_n} = M_{j_{a+1}}$ και δεν υπάρχει $h > n$ ώστε $x_h \in M_{j_n}$], ενώ αν $M_{j_{a+1}} = M_{j_{n-1}}$, έπεται ότι $h(j_{a+1}) = n - 1$. Σε κάθε περίπτωση, ισχύει $0 \le n - h(j_{a+1}) \le 1$. Με βάση τα παραπάνω, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^{m+I-2} (n - h(j_{k+1}) &= \sum_{k=m}^{a-1} (n - h(j_{k+1}) + (n - h(j_{a+1}) + \sum_{k=a+1}^{m+I-2} (n - h(j_{k+1})) \\ &\le \sum_{k=m}^{a-1} (I - 1) + 1 + \sum_{k=a+1}^{m+I-2} (I - 1) \qquad [(1.9\,)] \\ &\le (I - 1)(I - 2) + 1 \end{aligned} \tag{1.11}$$

Τελικώς,από τις (1.8), (1.10) και (1.11), παίρνουμε πως

$$\begin{aligned} ||x_n - x||^2 &\leq ||x_n - x_{m+I-1}||^2 + \big((I-1)(I-2)+1\big)S_{n-I+1} + 2S_m \\ &\leq \big((I-1)(I-2)+1\big)S_m + 2S_m && [S_{n-I+1} \leq S_m] \\ &\leq \big((I-1)(I-2)+3\big)S_m. \end{aligned}$$

□

Απόδειξη της (*ii*). Έστωσαν $n > m \geq 1$ με $n - m \geq 2I - 2$. Υποθέτουμε ότι $S_m < S_{n-I+1}$. Για κάθε $k \in \{n-I+1, \ldots, n-1\}$, εφαρμόζοντας το Λήμμα 1.3.13(a), για $x = x_m,\ y = x_k,\ P = P_{j_{k+1}}$ και θέτοντας $p_{j_{k+1}} = P_{j_{k+1}}x_m$, παίρνουμε πως

$$||x_m - x_n|| \leq ||x_m - x_k||^2 + ||x_m - p_{j_{k+1}}||^2.$$

Εφαρμόζοντας την ως άνω σχέση για όλα τα $k \in \{n-I+1, \ldots, n-1\}$, όπως και στην (1.8), έχουμε ότι

$$||x_m - x_n||^2 \leq ||x_m - x_{n-I+1}||^2 + \sum_{k=n-I+1}^{n-1} ||x_m - p_{j_{k+1}}||^2. \tag{1.12}$$

Ακολουθώντας τώρα παρόμοια λογική με την απόδειξη της (*i*), παίρνουμε πως

$$\sum_{k=n-I+1}^{n-1} ||x_m - p_{j_{k+1}}||^2 \leq \big((I-1)(I-2)+1\big)S_m. \tag{1.13}$$

Από τις (1.12) και (1.13), καθώς και σημειώνοντας πως $S_m < S_{n-I+1}$, παίρνουμε το ζητούμενο.

□

Τελικές παρατηρήσεις

Ένα ενδιαφέρον ερώτημα είναι αν μπορούμε να εξασφαλίσουμε σύγκλιση ως προς την νόρμα για την περίπτωση όπου $J = \infty$ και η (j_n) είναι οιονεί-περιοδική. Σημειώνουμε εδώ ότι υπάρχουν πράγματι οιονεί-περιοδικές ακολουθίες με τιμές σε όλο το $\mathbb{N}$. Δίνουμε το εξής παράδειγμα:

$$1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 4, 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 5, \ldots,$$

δηλαδή, η ακολουθία που έχει 1 κάθε δεύτερο αριθμό, 2 κάθε τέταρτο αριθμό, 3 κάθε όγδοο αριθμό, και ούτω καθεξής.

Στην περίπτωση όπου $J = \infty$, για κάθε οιονεί-περιοδική ακολουθία ισχύει $I = \sup_{j \in \mathbb{N}} I(s, j) = +\infty$ (βλ. (1.3)), και άρα η απόδειξη του θεωρήματος 1.3.11 (Sakai) δεν μπορεί να εφαρμοστεί. Παρ' όλ' αυτά, μπορούμε να εξασφαλίσουμε την σύγκλιση ως προς την νόρμα σε ειδικές περιπτώσεις.

Για παράδειγμα, έστω πως η ακολουθία των κλειστών υποχώρων $(M_j)_{j\geq 1}$ είναι φθίνουσα, δηλαδή, $M_1 \supseteq M_2 \supseteq M_3 \supseteq \cdots$. Τότε, έχουμε πως

$$P_b P_a = P_a P_b = P_b, \quad b \geq a \geq 1. \tag{1.14}$$

Θεωρούμε την ακολουθία $j_n = n,\ n \in \mathbb{N}$. Από την (1.14) και το Λήμμα 1.2.2(a), έχουμε ότι

$$\begin{aligned} ||x_n - x_m||^2 &= ||x_m||^2 - ||x_n||^2 \\ &= ||x_n - x_{m+1} + x_{m+1} - x_{m+2} + \cdots - x_n + x_n||^2 - ||x_n||^2 \\ &\leq ||x_m - x_{m+1}||^2 + \cdots + ||x_{n-1} - x_n||^2 + ||x_n||^2 - ||x_n||^2 \\ &= \sum_{k=m}^{n-1} ||x_{k+1} - x_k||^2. \end{aligned}$$

Άρα ισχύει η (1.4) για $C = 1$, και άρα η (x_n) συγκλίνει ως προς την νόρμα. Έστω x το όριο της (x_n). Αν $M = \bigcap_{j=1}^{\infty} M_j$, εύκολα ελέγχει κανείς ότι $x_0 - x \perp M$, δηλαδή, $x = P_M x_0$.

Τέλος, αναφέρουμε ότι ο Sakai παρατήρησε πως αν έστω και ένας από τους J υποχώρους έχει πεπερασμένη διάσταση, τότε η (x_n) συγκλίνει ως προς την νόρμα. Για να το αποδείξουμε αυτό θα χρειαστούμε το Θεώρημα 1.4.1, που βρίσκεται στην ενότητα 1.4. Συμπεριλαμβάνουμε την απόδειξη της παρατήρησης αυτής στην επόμενη ενότητα, και συγκεκριμένα, στην Πρόταση 1.4.8.

1.3.4 Βαθμοί σύγκλισης - Η γωνία του Friedrichs

Κλείνουμε την ενότητα της ισχυρής σύγκλισης παρουσιάζοντας ορισμένα αποτελέσματα όσον αφορά την ταχύτητα σύγκλισης της μεθόδου. Ο αναγνώστης μπορεί να βρει περισσότερες λεπτομέρειες στα [37] και [32].

Ορισμός 1.3.17. Η γωνία Friedrichs $\theta(M,N)$ ανάμεσα σε δύο κλειστούς υποχώρους M, N του $\mathcal{H}$, είναι η γωνία στο διάστημα $[0, \pi/2]$, της οποίας το συνημίτονο $\cos(M,N)$ δίνεται από τον τύπο

$$\cos(M,N) = \\ \sup\left\{|(x,y)| : x \in M \cap (M\cap N)^{\perp}, ||x|| \leq 1,\ y \in N \cap (M\cap N)^{\perp}, ||y|| \leq 1\right\}.$$

Η γωνία δύο υποχώρων δίνει πληροφορίες για τη γεωμετρία των χώρων αυτών, όπως φαίνεται και στο παρακάτω:

Θεώρημα 1.3.18. *Έστωσαν M_1, M_2 κλειστοί υπόχωροι του $\mathcal{H}$. Θέτουμε $M = M_1 \cap M_2$. Τότε,*

(i) $0 \leq \cos(M_1, M_2) \leq 1$.

(ii) $\cos(M_1, M_2) = \cos(M_2, M_1)$.

(iii) $\cos(M_1, M_2) = ||P_{M_1}P_{M_2} - P_M|| = ||P_{M_2}P_{M_1}P_{M_2^\perp}||$.

(iv) Ο $M_1 + M_2$ είναι κλειστός αν και μόνο αν $\cos(M_1, M_2) < 1$.

(v) $\cos(M_1, M_2) = 0$ *αν και μόνο αν οι P_{M_1} και P_{M_2} αντιμετατίθενται (σε αυτή την περίπτωση $P_{M_1}P_{M_2} = P_M$.*

Απόδειξη. Τα (i) και (ii) είναι προφανή.

(iii): Σημειωτέον ότι $x \in M_1 \cap M^\perp$ αν και μόνο αν $x \in M_1$ και $P_M x = 0$, καθώς και ότι $y \in M_2 \cap M^\perp$ αν και μόνο αν $y \in M_2$ και $P_M y = 0$. Ως εκ τούτων,

$$\begin{aligned}
&\cos(M_1, M_2) = \\
&= \sup\{|(x - P_M x, y - P_M y)| : x \in M_1 \cap B_X,\ y \in M_2 \cap B_X\} \\
&= \sup\left\{|(P_{M_1}x - P_M P_{M_1}x, P_{M_2}y - P_M P_{M_2}y)| : x \in M_1 \cap B_X,\ y \in M_2 \cap B_Y\right\} \\
&= \sup\left\{|\big((I - P_M)P_{M_1}x, (I - P_M)P_{M_2}y\big)| : x, y \in B_X\right\} \\
&= \sup\left\{|(P_{M_2}(I - P_M)P_{M_1}x, y)| : x, y \in B_X\right\} \\
&= ||P_{M_2}(I - P_M)P_{M_1}|| = ||P_{M_2}P_{M_1} - P_M|| = ||P_{M_2}(P_{M_1}(I - P_M)|| \\
&= ||P_{M_2}P_{M_1}P_{M^\perp}|| = ||P_{M_2}P_{M_1}P_{\overline{M_1^\perp + M_2^\perp}}|| = ||P_{M_2}P_{M_1}P_{M_2^\perp}||.
\end{aligned}$$

(iv): Για την απόδειξη θα χρειαστούμε το ακόλουθο:

Λήμμα. *Έστωσαν M_1, M_2 κλειστοί υπόχωροι του $\mathcal{H}$. Θέτουμε $M = M_1 \cap M_2$. Τότε, ο $M_1 + M_2$ είναι κλειστός αν και μόνο αν ο $M_1 \cap M^\perp + M_2 \cap M^\perp$ είναι κλειστός.*

Απόδειξη λήμματος. ($\implies$) : Έστω πως ο $M_1 + M_2$ είναι κλειστός. Θέτουμε $S = M_1 \cap M^\perp + M_2 \cap M^\perp$. Ισχυριζόμαστε ότι

$$S = (M_1 + M_2) \cap M^\perp \tag{1.15}$$

Πράγματι, αρκεί να δείξουμε ότι $(M_1 + M_2) \cap M^\perp \subseteq S$. Προς αυτόν τον σκοπό, έστω $x \in (M_1 + M_2) \cap M^\perp$. Τότε, $x = m_1 + m_2 \in M_1 + M_2$ και $x \in M^\perp$. Άρα, $P_M x = 0$ ή ισοδύναμα,

$$x = (I - P_M m_1 + (I - P_M)m_2 \in S.$$

Από την (1.15), έπεται ότι $M_1 \cap M^\perp + M_2 \cap M^\perp = (M_1 + M_2) \cap M^\perp$, ο οποίος είναι κλειστός.

($\Longleftarrow$) : Έστω πως ο $M_1 \cap M^\perp + M_2 \cap M^\perp$ είναι κλειστός. Ισχυριζόμαστε ότι

$$M_1 + M_2 = (M_1 + M_2) \cap M^\perp + M.$$

Πράγματι, αρκεί να δείξουμε ότι $M_1 + M_2 \subseteq (M_1 + M_2) \cap M^\perp + M$. Προς αυτόν τον σκοπό, έστω $x = m_1 + m_2 \in M_1 + M_2$. Αν $x = 0$ τότε έχουμε τελειώσει. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $x \neq 0$. Εφόσον $\mathcal{H} = M \oplus M^\perp$, είτε $x \in M$ ή $x \in M^\perp$. Αν $x \in M$, τότε $x = 0+x \in (M_1+M_2)\cap M^\perp+M$, ενώ αν $x \in M^\perp$, τότε $x = x+0 \in (M_1+M_2)\cap M^\perp+M$. $\square$

Με βάση το παραπάνω λήμμα αρκεί να δείξουμε ότι $\cos(M_1, M_2) < 1$ αν και μόνο αν ο $M_1 \cap M^\perp + M_2 \cap M^\perp$ είναι κλειστός. Έστω πως $\cos(M_1, M_2) < 1$. Θέτουμε $A = M_1 \cap M^\perp$ και $B = M_2 \cap M^\perp$. Τότε, για κάθε $a \in A$ και για κάθε $b \in B$,

$$|(a, b)| \leq \cos(M_1, M_2) < 1.$$

Έστω $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στον $A + B$ με $a_n + b_n \longrightarrow z$. Τότε,

$$\begin{aligned}
||a_n + b_n||^2 &= ||a_n||^2 + 2(a_n, b_n) + ||b_n||^2 \geq ||a_n||^2 - 2|(a_n, b_n)| + ||b_n||^2 \\
&\geq ||a_n||^2 - 2\cos(M_1, M_2)||a_n||\,||b_n|| + ||b_n||^2 \\
&= (||a_n|| - ||b_n||)^2 + 2(1 - \cos(M_1, M_2))||a_n||\,||b_n||,
\end{aligned}$$

από όπου προκύπτει ότι οι ακολουθίες $(||a_n||-||b_n||)^2$ και $||a_n||\,||b_n||$ είναι φραγμένες. Επιπλέον, εφόσον

$$||a_n||^2 + ||b_n||^2 = (||a_n|| - ||b_n||)^2 + 2||a_n||\,||b_n||,$$

έπεται ότι οι ακολουθίες (a_n) και (b_n) είναι φραγμένες. Συνεπώς, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a_n \xrightarrow{w} a \in A$ και $bn \xrightarrow{w} b \in B$, και ως εκ τούτου, $z = a + b \in A + B$.

Ανάποδα, έστω πως ο $A+B$ είναι κλειστός. Θεωρούμε τον χώρο Banach $V = A+B$. Εφόσον $A \cap B = \{0\}$, βλέπουμε ότι $V = A \oplus B$. Με άλλα λόγια, οι A, B είναι συμπληρωματικοί. Έστω $P\colon A \oplus B \to A$ η γραμμική και φραγμένη προβολή, με $P(a+b) = a$. Υποθέτουμε προς άτοπον ότι $\cos(M_1, M_2) = 1$. Επιλέγουμε ακολουθίες $(a_n) \subseteq A$ και $(b_n) \subseteq B$ με $||a_n|| = ||b_n|| = 1$, έτσι ώστε

$$\lim_{n\to\infty} (a_n, b_n) = \cos(M_1, M_2) = 1.$$

Τότε, $||a_n - b_n||^2 = 2 - 2(a_n, b_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$, και κατά συνέπεια, $a_n = P(a_n - b_n) \xrightarrow{n\to\infty} P(0) = 0$, που είναι αδύνατον.

(iv): Αν $\cos(M_1, M_2) = 0$, τότε από το (iii), $P_{M_2}P_{M_1} = P_M$. Όμως, από το (ii), $P_{M_1}P_{M_2} = P_M$, δείχνοντας ότι $P_{M_2}P_{M_1} = P_{M_1}P_{M_2}$. Ανάποδα, αν $P_{M_2}P_{M_1} = P_{M_1}P_{M_2}$, τότε από το (iii), $\cos(M_1, M_2) = ||P_{M_2}P_{M_1}P_{M_2^\perp}|| = ||P_{M_1}P_{M_2}P_{M_2^\perp}|| = 0$. $\square$

Η σημαντικότητα του ορισμού 1.3.17 φαίνεται στο παρακάτω θεώρημα των Kaylar και Weinert [15]:

Θεώρημα 1.3.19. *Αν P_2, P_1 είναι ορθογώνιες προβολές επί των κλειστών υποχώρων M_1, M_2 ενός χώρου Hilbert, και αν P_M είναι η ορθογώνια προβολή επί του $M = M_1 \cap M_2$, τότε*

$$||(P_2P_1)^n - P_M|| = \cos(M_1, M_2)^{2n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Βλέπουμε πως $\cos(M_1, M_2) < 1$, δηλαδή, το άθροισμα $M_1 + M_2$ είναι κλειστό (βλ. Θεώρημα 1.3.18), αν και μόνο αν η ακολουθία $(P_2P_1)^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην P_M. Όταν αυτό συμβαίνει, τότε η σύγκλιση είναι εκθετικά γρήγορη. Ένα άμεσο πόρισμα αυτού είναι πως αν ένας εκ των δύο υποχώρων είναι πεπερασμένης διάστασης, τότε το άθροισμα είναι κλειστό, και άρα, η μέθοδος των εναλλασσόμενων προβολών συγκλίνει.

Όταν $\cos(M_1, M_2) = 1$, η ακολουθία $(P_2P_1)^n$ συγκλίνει ισχυρά (δηλαδή κατά σημείο) στην P_M, αλλά η ταχύτητα σύγκλισης δεν είναι εκθετική. Ειδικότερα, οι Bauschke, Deutsch και Hundal [14] έδειξαν πως σε αυτήν την περίπτωση η σύγκλιση είναι "αυθαίρετα αργή", με την έννοια πως για κάθε φθίνουσα και μηδενική ακολουθία (λ_n) στο $[0, 1]$, υπάρχει $x_\lambda \in \mathcal{H}$, τέτοιο ώστε

$$||(P_2P_1)^n x_\lambda - P_M(x_\lambda)|| \geq \lambda_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Συνεπώς, έχουμε την εξής διχοτόμηση:

$$\cos(M_1, M_2) < 1 \implies \text{Εκθετικά γρήγορη ομοιόμορφη σύγκλιση}$$
$$\cos(M_1, M_2) = 1 \implies \text{Αυθαίρετα αργή ισχυρή σύγκλιση.}$$

Οι Badea, Grivaux και Müller [39] επέκτειναν την έννοια της γωνίας Friedrichs σε περισσότερους από δύο υποχώρους. Γενίκευσαν το Θεώρημα 1.3.18, και έδειξαν πως η διχοτόμηση αυτή ισχύει και για περισσότερους από δύο υποχώρους.

Επιπλέον, οι Badea και Seifert [40] έδειξαν πως υπάρχει ένας πυκνός υπόχωρος H_0 του $\mathcal{H}$, τέτοιος ώστε για κάθε $x \in H_0$,

$$||(P_J \cdots P_1)^n x - P_M x|| = o(n^{-k}), \quad k \geq 1, \tag{1.16}$$

καθώς $n \to \infty$. Αναφέρθηκαν σε αυτή την σύγκλιση ως "super-polynomially fast". Η (1.16) μας λέει πως, ακόμα και στην "κακή" περίπτωση όπου η σύγκλιση είναι αυθαίρετα αργή (δηλαδή $\cos(M_1, \ldots, M_J) = 1$), αν επιλέξουμε ένα αρχικό σημείο x στο οποίο έχουμε (αυθαίρετα) αργή σύγκλιση, βρισκόμαστε ε κοντά από ένα σημείο στο οποίο έχουμε super-polynomially fast σύγκλιση.

Τέλος, ο Oppenheim [20] όρισε την έννοια της γωνίας μεταξύ δύο προβολών σε έναν χώρο Banach, η οποία συμπίπτει με την Friedrichs γωνία όταν οι προβολές είναι σε χώρους Hilbert. Αναλύουμε λεπτομερώς την γωνία αυτή και την σχέση της με τη μέθοδο των εναλλασσόμενων προβολών στην ενότητα 2.4.

1.4 Ασθενής σύγκλιση

Μέχρι στιγμής, όλα τα θεωρήματα σύγκλισης που έχουμε αναφέρει έχουν έναν περιορισμό στην ακολουθία των προβολών (περιοδικές ή και οιονεί-περιοδικές). Είναι λογικό να αναρωτηθεί κανείς τι γίνεται όταν ελαφρύνει κανείς αυτούς τους περιορισμούς. Το 1965, οι Amemiya και Ando [6] έδειξαν ότι για οποιαδήποτε ακολουθία προβολών, μπορούμε πάντα να εξασφαλίσουμε ασθενή σύγκλιση:

Θεώρημα 1.4.1. *Έστω $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert, $J \geq 2$ ένας ακέραιος, και $P_1, \ldots, P_J$ οι ορθογώνιες προβολές επί των κλειστών υποχώρων $M_1, \ldots, M_J$ του $\mathcal{H}$. Επιπλέον, έστω P_M η ορθογώνια προβολή επί του $M = \bigcap_{j=1}^{J} M_j$. Τέλος, έστω $(j_n)_{n\geq 1}$ μία ακολουθία με τιμές στο σύνολο $\{1, \ldots, J\}$. Ορίζουμε αναδρομικά την ακολουθία $(x_n)_{n\geq 0}$ επιλέγοντας ένα τυχαίο $x_0 \in \mathcal{H}$ και θέτοντας*

$$x_n = P_{j_n} x_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Τότε η (x_n) συγκλίνει ασθενώς.

Για την ακρίβεια, οι Amemiya και Ando απέδειξαν ένα πιο ισχυρό θεώρημα για συστολές, από το οποίο το Θεώρημα 1.4.1 έπεται ως πόρισμα. Εμείς θα ακολουθήσουμε την άμεση απόδειξη του [1].

Θα συμβολίζουμε τη συλλογή όλων των ασθενώς ανοιχτών συνόλων που περιέχουν το μηδέν ως $\mathcal{N}_0^w$. Επιπλέον, θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $[a, b]$ για τα σημεία του χώρου γινόμενο $A \times B$. Υπενθυμίζουμε ότι ένα σύνολο U λέγεται ισορροπημένο αν $\lambda U \subseteq U$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{F}$ με $|\lambda| \leq 1$. Επιπλέον, ο χώρος $\mathcal{H}$ εφοδιασμένος με την ασθενή του τοπολογία είναι ένας τοπικά κυρτός τοπολογικός γραμμικός χώρος. Συνεπώς, έχει ως (τοπική) βάση περιοχών του μηδενός ασθενώς ανοιχτά, κυρτά και ισορροπημένα σύνολα (βλ. Παράρτημα B.2).

Αναφέρουμε και αποδεικνύουμε μία σειρά από λήμματα, τα οποία θα χρησιμοποιήσουμε κατά κόρον για την απόδειξη του θεωρήματος 1.4.1.

Λήμμα 1.4.2. *Για κάθε $U \in \mathcal{N}_0^w$ και για κάθε $j \in \{1, \ldots, J\}$, υπάρχει $\varepsilon = \varepsilon(j) > 0$, έτσι ώστε για κάθε $x \in B_{\mathcal{H}}$,*

$$||P_j x|| \geq 1 - \varepsilon \implies (I - P_j)x \in U.$$

Απόδειξη. Έστωσαν $U \in \mathcal{N}_0^w$ και $j \in \{1, \ldots, J\}$. Τότε, υπάρχουν $y_1, \ldots, y_r \in \mathcal{H}$ και $\delta > 0$ τέτοια ώστε

$$U = \bigcap_{k=1}^{r} \{h \in \mathcal{H} : |(h, y_k)| < \delta\}.$$

Επιλέγουμε $\varepsilon > 0$ επαρκώς μικρό έτσι ώστε $0 < M\sqrt{2\varepsilon - \varepsilon^2} < \delta$, όπου $M = \max\{\|y_k\| \colon 1 \le k \le r\}$. Έστω $x \in B_{\mathcal{H}}$ με $\|P_j x\| \ge 1 - \varepsilon$. Από το Λήμμα 1.2.1(a) έχουμε πως

$$\|(I - P_j)x\|^2 = \|x - P_j x\|^2 = \|x\|^2 - \|P_j x\|^2 \le 1 - (1-\varepsilon)^2 = 2\varepsilon - \varepsilon^2.$$

Συνεπώς, από την ανισότητα Cauchy-Schwartz, για κάθε $k \in \{1, \dots, r\}$, έχουμε ότι

$$\left|\left((I - P_j)x, y_k\right)\right| \le \|(I - P_j)x\| \, \|y_k\| \le M\sqrt{2\varepsilon - \varepsilon^2} < \delta,$$

και άρα $(I - P_j)x \in U$. □

Λήμμα 1.4.3. *Έστω Q_j η ορθογώνια προβολή επί του $\ker(I - P_j \cdots P_1)$. Τότε, για κάθε $k \in \{1, \dots, j\}$, οι Q_j και P_k αντιμετατίθενται.*

Απόδειξη. Από το Λήμμα 1.2.2(a), για κάθε $x \in \mathcal{H}$, έχουμε πως $Q_j x \in \ker(I - P_j \cdots P_1) = \bigcap_{k=1}^{j} \ker(I - P_k)$. Συνεπώς, για κάθε $k \in \{1, \dots, j\}$, έχουμε ότι $(I - P_k)Q_j x = 0$, και άρα $P_k Q_j x = Q_j x$. Με άλλα λόγια,

$$P_k Q_j = Q_j. \tag{1.17}$$

Επιπλέον, εφόσον οι P_k και Q_j είναι αυτοσυζυγείς,

$$Q_j = (Q_j)^* = (P_k Q_j)^* = (Q_j)^*(P_k)^* = Q_j P_k,$$

και άρα $P_k Q_j = Q_j P_k$. □

Υπενθυμίζουμε ότι ένας τελεστής $T \colon X \to Y$ ανάμεσα σε δύο χώρους με νόρμα λέγεται ασθενώς συνεχής, αν είναι συνεχής, όταν οι X και Y εφοδιαστούν με τις ασθενείς τους τοπολογίες. Είναι γνωστό (βλ. Πρόταση B.3.7) πως ο T είναι φραγμένος αν και μόνο αν είναι ασθενώς συνεχής. Επιπλέον, δεν είναι δύσκολο να δείξει κανείς πως αν $X_1, \dots, X_n$ είναι χώροι με νόρμα, τότε η ασθενής τοπολογία του χώρου γινόμενο $\mathbb{X} = \prod_{j=1}^{n} X_j$ είναι ισοδύναμη με το γινόμενο των ασθενών τοπολογιών κάθε X_j. Με άλλα λόγια, δοθέντος ασθενώς ανοιχτού συνόλου U του χώρου γινόμενο $\mathbb{X}$ που περιέχει το μηδέν, μπορούμε για κάθε $j \in \{1, \dots, n\}$ να βρούμε ασθενώς ανοιχτό σύνολο U_j στον X_j που περιέχει το μηδέν, έτσι ώστε $\prod_{j=1}^{n} U_j \subseteq U$.

Λήμμα 1.4.4. *Έστω $R_j = I - Q_j$, όπου Q_j η ορθογώνια προβολή επί του $\ker(I - P_j \cdots P_1)$. Τότε, για κάθε $U \in \mathcal{N}_0^w$, υπάρχει $V \in \mathcal{N}_0^w$, έτσι ώστε για κάθε $x \in B_{\mathcal{H}}$,*

$$(I - P_k)x \in V, \quad \text{για κάθε } k \in \{1, \dots, j\} \implies R_j x \in U.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τον χώρο γινόμενο $\mathcal{H}^j = \mathcal{H} \times \cdots \times \mathcal{H}$ (j−φορές) εφοδιασμένο με την νόρμα

$$||[u_1, \ldots, u_j]||_{\mathcal{H}^j} = \sqrt{||u_1||^2 + \cdots |||u_j||^2}, \quad [u_1, \ldots u_j] \in \mathcal{H}^j.$$

Έπεται άμεσα ότι ο $\mathcal{H}^j$ είναι χώρος Hilbert.

Θεωρούμε τον μη φραγμένο (unbounded) γραμμικό τελεστή $T\colon R_j(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{H} \to \mathcal{H}^j$ με τύπο

$$T(R_j x) = [(I - P_1)x, \ldots, (I - P_j)x], \quad x \in \mathcal{H},$$

όπου και οι δύο χώροι είναι εφοδιασμένοι με τις αντίστοιχες ασθενείς τοπολογίες τους. Από το Λήμμα 1.2.2(a) παίρνουμε ότι για κάθε $x \in \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned}
(I - P_k)x = 0, \quad \text{για κάθε } k \in \{1, \ldots, j\} &\iff x \in \bigcap_{k=1}^{j} \ker(I - P_k) \\
&\iff x \in \ker(I - P_j \cdots P_1) \\
&\iff Q_j x = x \\
&\iff R_j x = 0.
\end{aligned}$$

Η ($\Longleftarrow$) συνεπαγωγή δείχνει ότι ο T είναι καλά ορισμένος, ενώ η ($\Longrightarrow$) συνεπαγωγή δείχνει ότι ο T είναι 1-1. Παρατηρούμε τώρα ότι από την (1.17) έχουμε πως

$$\begin{aligned}
(I - P_k)R_j = (I - P_k)(I - Q_j) &= I - Q_j - P_k + P_k Q_j \\
&= I - Q_j - P_k + Q_j = I - P_k, \quad k \in \{1, \ldots, j\}.
\end{aligned}$$

Ως εκ τούτου, για κάθε $x \in \mathcal{H}$, παρατηρώντας ότι $||I - P_k|| \leq ||I|| + ||P_k|| \leq 2$, έχουμε

$$\begin{aligned}
||T(R_j x)||_{\mathcal{H}^j} &= \left\| [(I - P_1)x, \ldots, (I - P_j)x] \right\|_{\mathcal{H}^j} \\
&= \left\| [(I - P_1)R_j x, \ldots, (I - P_j)R_j x] \right\|_{\mathcal{H}^j} \\
&= \sqrt{||(I - P_1)R_j x||^2 + \cdots + ||(I - P_j)R_j x||^2} \\
&\leq ||(I - P_1)R_j x|| + \cdots + ||(I - P_j)R_j x|| \\
&\leq 2j||R_j x||.
\end{aligned}$$

Δηλαδή, ο T είναι φραγμένος, και κατά συνέπεια, ασθενώς συνεχής. Εφόσον ο $\mathcal{H}$ είναι χώρος Hilbert, από το Θεώρημα Milman-Pettis (Θεώρημα B.6.8), θα είναι και ανακλαστικός. Συνεπώς, η $B_{\mathcal{H}}$ είναι ασθενώς συμπαγής (βλ. Πρόταση B.5.2). Εφόσον η R_j είναι ασθενώς συνεχής (όντας φραγμένη), το σύνολο $K = R_j(B_{\mathcal{H}})$ είναι ασθενώς συμπαγές. Συνεπώς, αν f είναι ο περιορισμός του T πάνω στο K, έχουμε ότι η απεικόνιση

$$f\colon K \to Ran(f) \subseteq \mathcal{H}^j$$

είναι 1-1, επί, και ασθενώς συνεχής, από το ασθενώς συμπαγές σύνολο K, στο Hausdorff χώρο $\mathcal{H}^j$ (εφοδιασμένο με την ασθενή του τοπολογία). Έπεται ότι η f είναι κλειστή απεικόνιση, και κατά συνέπεια, ομοιομορφισμός. Ειδικότερα, η $f^{-1}\colon Ran(f) \subseteq \mathcal{H}^j \to R_j(B_{\mathcal{H}})$ είναι ασθενώς συνεχής στο $0 \in \mathcal{H}^j$. Συνεπώς, δοθέντος $U \in \mathcal{N}_0^w$, υπάρχει $W \subseteq Ran(f)$ ασθενώς ανοιχτό που περιέχει το $0 \in \mathcal{H}^j$, τέτοιο ώστε

$$f^{-1}(W) \subseteq U \cap R_j(B_{\mathcal{H}}). \tag{$\star$}$$

Με όσα έχουμε πει, θα υπάρχουν $V_1, \dots, V_j \in \mathcal{N}_0^w$, έτσι ώστε $V_1 \times \cdots \times V_j \subseteq W$. Θέτουμε $V = \bigcap_{k=1}^{j} V_k$. Τότε $V \in \mathcal{N}_0^w$ και $V^j \subseteq W$. Από την ($\star$) παίρνουμε πως για κάθε $x \in B_{\mathcal{H}}$,

$$[(I - P_1)x, \dots, (I - P_k)x] \in V^j \implies x \in U \cap R_j(B_{\mathcal{H}}),$$

από όπου έπεται το ζητούμενο. □

Για κάθε $j \in \{1, \dots, J\}$, θα συμβολίζουμε με $\mathrm{Semi}(P_{i_1}, \dots, P_{i_j})$ την ελεύθερη υποομάδα που παράγεται από τις προβολές $\{P_{i_1}, \dots, P_{i_j}\}$. Θέτουμε

$$\mathcal{M}_j = \left\{S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})\colon \text{ υπάρχουν } i_1, \dots, i_j \text{ ώστε } S \in \mathrm{Semi}(P_{i_1}, \dots, P_{i_j})\right\},$$

και $\mathcal{M}_0 = \{I\}$. Ας σημειωθεί ότι $\mathcal{M}_{j-1} \subseteq \mathcal{M}_j$ και πως για κάθε $S \in \mathcal{M}_j$ έχουμε ότι $\|S\| \leq 1$.

Λήμμα 1.4.5. *Έστω $U \in \mathcal{N}_0^w$ κυρτό και ισορροπημένο, και έστω $S \in \mathcal{M}_j$. Τότε, υπάρχει $\varepsilon = \varepsilon(U, j) > 0$, έτσι ώστε για κάθε $x \in B_{\mathcal{H}}$,*

$$\|Sx\| \geq 1 - \varepsilon \implies (I - S)x \in U.$$

Απόδειξη. Με επαγωγή στο j. Η περίπτωση $j = 1$ προκύπτει από το Λήμμα 1.4.2 (εφόσον $S = P_i$, για κάποιο $i \in \{1, \dots, J\}$). Υποθέτουμε ότι το Λήμμα ισχύει για $j - 1$. Έστω $S \in \mathcal{M}_j$. Αν $S \in \mathcal{M}_{j-1}$, τότε έχουμε τελειώσει από την επαγωγική υπόθεση. Συνεπώς, υποθέτουμε ότι

$$S \in \mathcal{M}_j \setminus \mathcal{M}_{j-1}.$$

Επιπλέον, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $S \in \mathrm{Semi}(P_1, \dots, P_j)$ (αν όχι, τότε απλά μετονομάζουμε τις προβολές). Εφόσον $S \notin \mathcal{M}_{j-1}$, για κάθε $k \in \{1, \dots, J\}$, ο S μπορεί να γραφτεί στην μορφή

$$S = T_1 P_k T_2 = T_3 P_k T_4,$$

όπου $T_1, T_4 \in \mathcal{M}_{j-1}$ και $T_2, T_3 \in \mathcal{M}_j$.

Έστω $U \in \mathcal{N}_0^w$ κυρτό και ισορροπημένο. Επιλέγουμε V όπως στο Λήμμα 1.4.4. Ισχυριζόμαστε ότι υπάρχει $W \in \mathcal{N}_0^w$ κυρτό και ισορροπημένο έτσι ώστε

$$4W + 4P_i W \subseteq V, \quad \text{για κάθε } i \in \{1, \dots, j\}.$$

Πράγματι, για κάθε $i \in \{1, \dots, j\}$, εφόσον η συνάρτηση $f_i = 4I + 4P_i$ είναι ασθενώς συνεχής, μπορούμε να βρούμε $W_i \in \mathcal{N}_0^w$ με $f_i(W_i) \subseteq V$. Εφόσον $\bigcap_{i=1}^j W_i \in \mathcal{N}_0^w$, και εφόσον ο $\mathcal{H}$ με την ασθενή του τοπολογία είναι τοπικά κυρτός τοπολογικός γραμμικός χώρος, θα υπάρχει $W \in \mathcal{N}_0^w$ κυρτό και ισορροπημένο που να περιέχεται στο $\bigcap_{i=1}^j W_i$, τέτοιο ώστε

$$4W + 4P_i W = f_i(W) \subseteq f_i(W_i) \subseteq V, \quad i \in \{1, \dots, j\}.$$

Από την επαγωγική υπόθεση, υπάρχει $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(W, j) > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε $x \in B_{\mathcal{H}}$ και για κάθε $T \in \mathcal{M}_{j-1}$,

$$||Tx|| \geq 1 - \varepsilon_1 \implies (I - T)x \in W.$$

Επιπλέον, από το Λήμμα 1.4.2, υπάρχει $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(k) > 0$ έτσι ώστε

$$||P_k x|| \geq 1 - \varepsilon_2 \implies (I - T)x \in W.$$

Θέτουμε $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ και παρατηρούμε ότι είναι ανεξάρτητο του S. Τότε, αν $x \in B_{\mathcal{H}}$ και $T \in \mathcal{M}_{j-1} \cup \{P_k\}$,

$$||Tx|| \geq 1 - \varepsilon_1 \implies (I - T)x \in W. \tag{1.18}$$

Έστω τώρα $x \in B_{\mathcal{H}}$ με $||Sx|| \geq 1 - \varepsilon$. Θα δείξουμε ότι $(I - S)x \in U$. Παρατηρούμε πως

$$1 \geq ||T_4 x|| \geq ||P_k T_4 x|| \geq ||T_3 P_k T_4 x|| = ||Sx|| \geq 1 - \varepsilon.$$

Ειδικότερα, $||T_4 x|| \geq 1 - \varepsilon$ και $||P_k(T_4 x)|| \geq 1 - \varepsilon$. Από την (1.18), έχουμε ότι $(I - T_4)x \in W$ και $(I - P_k)(T_4 x) \in W$. Ας σημειωθεί ότι $-(I - T_4 x)x \in W$, καθώς το W είναι ισορροπημένο. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
(I - P_k)x &= (I - T_4)x + (I - P_k)(T_4 x) - P_k(I - T_4)x \\
&\in W + W + P_k(W) \\
&\subseteq 2W + P_k(W) && [W \text{ κυρτό}] \\
&\subseteq 2W + 2P_k(W) && [W \text{ ισορροπημένο}] \\
&\subseteq \tfrac{1}{2}V.
\end{aligned} \tag{1.19}$$

Επίσης, παρατηρούμε ότι $||T_1(P_kT_2x)|| = ||Sx|| \geq 1-\varepsilon$, και άρα από την (1.18), έχουμε ότι $(I-T_1)(P_kT_2x) \in W$. Συμπεραίνουμε λοιπόν πως

$$\begin{aligned}(I-P_k)Sx &= (T_1-I)P_kT_2x + P_k(I-T_1)P_kT_2x\\ &\in W + P_kW\\ &\subseteq 2W + 2P_k(W)\\ &\subseteq \tfrac{1}{2}V.\end{aligned} \tag{1.20}$$

Εφόσον οι (1.19) και (1.20) ισχύουν για όλα τα $k \in \{1,\ldots,j\}$, από το Λήμμα 1.4.4 παίρνουμε ότι $R_jx \in \frac{1}{2}U$ και $R_j(Sx) \in \frac{1}{2}U$. Επομένως,

$$R_j(I-S)x \in \frac{1}{2}U - \frac{1}{2}U \subseteq \frac{1}{2}U + \frac{1}{2}U \subseteq U.$$

Υπενθυμίζουμε ότι ο $S \in \mathcal{M}_j \setminus \mathcal{M}_{j-1}$ ανήκει στην ελεύθερη υποομάδα παραγόμενη από τις $P_1,\ldots,P_j$. Με ένα παρόμοιο επιχείρημα με αυτό του Λήμματος 1.2.2(a), καταλήγουμε στο ότι

$$\ker(I - P_j\cdots P_1) = \bigcap_{k=1}^{j}\ker(I-P_k) = \ker(I-S).$$

Εφόσον η Q_j είναι η προβολή επί του $\ker(I-P_j\cdots P_1) = \ker(I-S)$, συμπεραίνουμε πως $(I-S)(I-R_j)x = (I-S)Q_jx = 0$, και άρα

$$(I-S)x = (I-S)R_jx.$$

Από το Λήμμα 1.4.3, οι Q_j και P_k αντιμετατίθενται για κάθε $k \in \{1,\ldots,J\}$, και άρα οι $R_j = (I-Q_j)$ και P_k αντιμετατίθενται για όλα τα k. Συνεπώς, οι R_j και S αντιμετατίθενται, και ως εκ τούτου, οι R_j και $(I-S)$ αντιμετατίθενται. Με άλλα λόγια,

$$(I-S)x = (I-S)R_jx = R_j(I-S)x \in U,$$

όπως ακριβώς θέλαμε. □

Είμαστε πλέον έτοιμοι να αποδείξουμε ότι για κάθε ακολουθία προβολών, η ακολουθία (x_n) είναι ασθενώς συγκλίνουσα.

Απόδειξη του θεωρήματος 1.4.1. Έστω $x_0 \in \mathcal{H}$. Παρατηρούμε ότι η ακολουθία $P_{j_n}\cdots P_{j_1}x_0$ συγκλίνει ασθενώς αν και μόνο αν η $P_{j_n}\cdots P_{j_1}\frac{x_0}{||x_0||}$ συγκλίνει ασθενώς. Οπότε, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $||x_0|| = 1$. Εφόσον $x_{n+1} = P_{j_{n+1}}x_n$, από το Λήμμα 1.2.1(a), έχουμε ότι

$$\|x_{n+1}\|^2 + \|x_n - x_{n+1}\|^2 = \|x_{n+1}\|^2 + \|x_n\|^2 - \|x_{n+1}\|^2 = \|x_n\|^2.$$

Συνεπώς, η $(||x_n||)$ είναι φθίνουσα ακολουθία μη αρνητικών αριθμών, και άρα συγκλίνει. Αν $||x_n|| \to 0$, τότε η x_n συγκλίνει ως προς τη νόρμα, και άρα, συγκλίνει ασθενώς. Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι $\inf_{n\geq 0} ||x_n|| = \lim_{n\to\infty} ||x_n|| > 0$.

Έστω $U \in \mathcal{N}_0^w$ κυρτό και ισορροπημένο, και έστω $\varepsilon > 0$ όπως στο Λήμμα 1.4.5. Τότε, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq m \geq N$,

$$||x_n|| \geq (1-\varepsilon)||x_m||.$$

Πράγματι, έστω προς άτοπον ότι δεν υπάρχει τέτοιο N. Τότε, για κάθε $N_i \in \mathbb{N}$, υπάρχουν $n_i \geq m_i \geq N_i$, ώστε $||x_{n_i}|| < (1-\varepsilon)||x_{m_i}||$. Θέτουμε $N_1 = 0$, και βρίσκουμε $n_1 \geq m_1 \geq N_1 = 0$. Έπειτα, θέτουμε $N_2 = n_1 + 1$, και βρίσκουμε $n_2 \geq m_2 \geq N_2$. Συνεχίζοντας αναδρομικά, ορίζουμε δύο αύξουσες ακολουθίες δεικτών (n_k) και (m_k) με $m_k \geq n_{k-1} + 1$, τέτοιες ώστε $||x_{n_k}|| < (1-\varepsilon)||x_{m_k}||$. Τότε, εφόσον η $(||x_n||)$ είναι φθίνουσα,

$$\begin{aligned} ||x_{n_k}|| &< (1-\varepsilon)||x_{m_k}|| \leq (1-\varepsilon)||x_{n_{k-1}}|| \\ &< (1-\varepsilon)^2||x_{n_{k-2}}|| < \cdots < (1-\varepsilon)^k||x_{n_1}|| \\ &\leq (1-\varepsilon)^k||x_0|| \xrightarrow{k\to\infty} 0, \end{aligned}$$

που έρχεται σε αντίφαση με το γεγονός ότι $\inf_{n\geq 0} ||x_n|| > 0$.

Δοθέντος $U \in \mathcal{N}_0^w$ κυρτό και ισορροπημένο, βρίσκουμε $N \in \mathbb{N}$ όπως παραπάνω. Έστωσαν $n \geq m \geq N$. Θέτουμε $x = \frac{x_m}{||x_m||}$. Παρατηρούμε ότι υπάρχει $S \in \mathcal{M}_j$, έτσι ώστε $x_n = Sx_m$. Συνεπώς,

$$||Sx|| = \frac{||x_n||}{||x_m||} \geq 1 - \varepsilon,$$

και άρα από το Λήμμα 1.4.5, έπεται πως $(I-S)x \in U$. Ως εκ τούτου,

$$\begin{aligned} x_m - x_n = (I-S)x_m &= ||x_m||(I-s)\frac{x_m}{||x_m||} \\ &= ||x_m||(I-S)x \leq ||x_0||(I-S)x \\ &= (I-S)x \in U. \end{aligned} \tag{1.21}$$

Έστω τώρα $\delta > 0$ και $y \in \mathcal{H}$. Εφόσον το σύνολο $U = \{x \in \mathcal{H} : |(x,y)| < \delta/2\} \in \mathcal{N}_0^w$ είναι κυρτό και ισορροπημένο, από την (1.21) παίρνουμε ότι για κάθε $n \geq m \geq N$, $x_m - x_n \in U$, και άρα

$$|(x_m - x_n, y)| < \delta/2.$$

Εφόσον η (x_n) είναι φραγμένη, και η $B_{\mathcal{H}}$ είναι ασθενώς συμπαγής, από το Θεώρημα Eberlein-Smulian (βλ. Θεώρημα B.3.14), θα έχει μία ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία, έστω (x_{n_k}). Έστω ότι το ασθενές όριο της (x_{n_k}) είναι το $x_\infty \in \mathcal{H}$. Επιλέγουμε $K \geq N$ έτσι ώστε

$$|(x_{n_k} - x_\infty, y)| < \delta/2.$$

Τότε, για κάθε $n \geq n_K$, έχουμε ότι

$$|(x_n - x_\infty, y)| \leq |(x_n - x_{n_K}, y)| + |(x_{n_K} - x_\infty, y)| < \delta/2 + \delta/2 = \delta.$$

Με άλλα λόγια, $x_n \xrightarrow{w} x_\infty$. □

Δείξαμε λοιπόν ότι η (x_n) συγκλίνει πάντα ως προς την ασθενή τοπολογία, αλλά δεν ξέρουμε ακόμα πιο είναι ακριβώς το όριο της. Συνδυάζοντας το Λήμμα 1.3.15 και το Θεώρημα 1.4.1, έχουμε το εξής:

Πόρισμα 1.4.6. *Υποθέτουμε ότι κάθε φυσικός αριθμός $i \in \{1, \ldots, J\}$ εμφανίζεται απείρως συχνά στην ακολουθία (j_n). Τότε, η (x_n) συγκλίνει ασθενώς στην ορθογώνια προβολή του x_0 επί του $M = \bigcap_{j=1}^{J} M_j$.*

Αν $\mathcal{H}$ είναι ένας πεπερασμένης διάστασης χώρος Hilbert, τότε η ασθενής τοπολογία συμπίπτει με την τοπολογία που επάγει η νόρμα του χώρου. Ειδικότερα, μία ακολουθία συγκλίνει ισχυρά αν και μόνο αν συγκλίνει ασθενώς. Η απόδειξη του παρακάτω πορίσματος είναι σαφής.

Πόρισμα 1.4.7. *Υποθέτουμε πως ο $\mathcal{H}$ είναι πεπερασμένης διάστασης. Αν κάθε φυσικός αριθμός $i \in \{1, \ldots, J\}$ εμφανίζεται απείρως συχνά στην ακολουθία (j_n), τότε η (x_n) συγκλίνει (ισχυρά) στην ορθογώνια προβολή του x_0 επί του $M = \bigcap_{j=1}^{J} M_j$.*

Για την ακρίβεια, μπορούμε να πούμε κάτι παραπάνω. Τελειώνουμε αυτήν την ενότητα με μία παρατήρηση του Sakai [5] όπου αναφέραμε και στο τέλος της ενότητας 1.3.3. Θεωρούμε το σύνολο

$$D = \{i \in \{1, \ldots, J\} : \text{ ο αριθμός } i \text{ εμφανίζεται απείρως συχνά στην } (j_n)\}.$$

Πρόταση 1.4.8. *Έστω ότι υπάρχει φυσικός αριθμός $i \in D$, έτσι ώστε ο υπόχωρος M_i να έχει πεπερασμένη διάσταση. Τότε η (x_n) συγκλίνει ως προς τη νόρμα.*

Απόδειξη. Γνωρίζουμε από το Θεώρημα 1.4.1 ότι η (x_n) συγκλίνει ασθενώς σε κάποιο όριο x_∞. Εφόσον ο φυσικός αριθμός i εμφανίζεται απείρως συχνά στην ακολουθία (j_n), θα υπάρχει μία υπακολουθία (x_{n_k}) της (x_n), έτσι ώστε $x_{n_k} \in M_i$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Σημειωτέον ότι η (x_{n_k}) συγκλίνει ασθενώς στο x_∞. Εφόσον η διάσταση του M_i είναι πεπερασμένη, έπεται ότι η (x_{n_k}) συγκλίνει ως προς την νόρμα στο x_∞.

Από τον ορισμό του D, έπεται ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $j_n \in D$ για κάθε $n \geq n_0$. Ειδικότερα, για κάθε $n \geq n_0$, έπεται ότι $x_\infty \in M_{j_n}$, ή ισοδύναμα, $P_{j_n} x_\infty = x_\infty$. Εφόσον η (x_{n_k}) συγκλίνει στο x_∞ ως προς την νόρμα, για δεδομένο $\varepsilon > 0$, υπάρχει $K \geq n_0$, έτσι ώστε $||x_{n_K} - x_\infty|| < \varepsilon$. Συνεπώς, για $m \geq n_K$, παίρνουμε πως

$$\begin{aligned} ||x_m - x_\infty|| &= ||P_{j_m} P_{j_{m-1}} \cdots P_{j_{n_K+1}} x_{n_K} - x_\infty|| \\ &= ||P_{j_m} P_{j_{m-1}} \cdots P_{j_{n_K+1}} (x_{n_K} - x_\infty)|| \\ &\leq ||x_{n_K} - x_\infty|| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Με άλλα λόγια, η (x_n) συγκλίνει στο x_∞ ως προς τη νόρμα. □

Σχόλιο 1.4.9. Η απόδειξη που έδωσε ο Sakai [5] για την Πρόταση 1.4.8 φαίνεται να είναι λανθασμένη. Για την ακρίβεια, ο Sakai υπέθεσε ότι αν μία ακολουθία συγκλίνει ασθενώς σε ένα όριο, και έχει μία υπακολουθία που συγκλίνει ως προς την νόρμα, τότε η ίδια η ακολουθία συγκλίνει ως προς την νόρμα. Όμως αυτό δεν είναι εν γένει σωστό. Πράγματι, εφόσον ο $\mathcal{H}$ είναι απειροδιάστατος και ανακλαστικός, υπάρχει (u_n) ασθενώς μηδενική ακολουθία (δηλαδή, $u_n \xrightarrow{w} 0$), η οποία δεν είναι μηδενική. Είναι προφανές ότι η ακολουθία

$$(v_n) = (u_1, 0, u_2, 0, u_3, 0, \dots)$$

συγκλίνει ασθενώς στο μηδέν, έχει μία υπακολουθία που συγκλίνει στο μηδέν ως προς την νόρμα, αλλά δεν συγκλίνει η ίδια ως προς την νόρμα.

1.5 Αποτυχία ισχυρής σύγκλισης - Η κατασκευή των Kopecká και Paszkiewicz

Η ερώτηση των Amemiya και Ando όσον αφορά την ύπαρξη μίας ακολουθίας από προβολές η οποία δεν συγκλίνει ισχυρά [6] παρέμεινε αναπάντητη για πολύ καιρό. Απαντήθηκε πρώτα το 2012, όταν ο Paszkiewicz απέδειξε πως για κάθε (απειροδιάστατο) χώρο Hilbert, υπάρχουν πέντε υπόχωροι, ένα σημείο $x_0 \in \mathcal{H}$ και μία ακολουθία (j_n), έτσι ώστε η ακολουθία εναλλασσόμενων προβολών (x_n) δεν συγκλίνει ως προς την νόρμα [7]. Η κατασκευή αυτή βελτιώθηκε από τους Kopecká και Müller από πέντε υποχώρους σε τρεις [10], και ύστερα έγινε ακόμη πιο κομψή από τους Kopecká και Paszkiewicz [11]. Δηλαδή, παρ'όλο που στην περίπτωση των δύο υποχώρων η ακολουθία (x_n) συγκλίνει πάντα (Θεώρημα 1.3.1), αν προσθέσουμε έστω και έναν ακόμη υπόχωρο τα πράγματα γίνονται πολύ χειρότερα. Σε αυτή την ενότητα θα ακολουθήσουμε πιστά την κατασκευή των Kopecká και Paszkiewicz και θα αποδείξουμε το ακόλουθο:

Θεώρημα 1.5.1. *Έστω $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert. Υπάρχουν M_1, M_2, M_3 κλειστοί υπόχωροι του $\mathcal{H}$ με κοινή τομή μόνο το μηδέν, και ακολουθία (j_n) με τιμές στο $\{1, 2, 3\}$, έτσι ώστε για κάθε μη μηδενικό $x_0 \in \mathcal{H}$, η ακολουθία (x_n) δεν συγκλίνει ως προς την νόρμα.*

1.5.1 Συμβολισμοί

Έστωσαν X, Y υποσύνολα του $\mathcal{H}$. Θα συμβολίζουμε με $X \vee Y$ την κλειστή γραμμική θήκη του συνόλου $X \cup Y$. Επιπλέον, αν $\{X_i\}_{i\in I}$ είναι οικογένεια υποσυνόλων του $\mathcal{H}$, θα συμβολίζουμε με $\bigvee_{i\in I} X_i$ την κλειστή γραμμική θήκη του συνόλου $\bigcup_{i\in I} X_\iota$. Τέλος, αν $x, y \in \mathcal{H}$, θα γράφουμε $\vee x$ και $x \vee y$ αντί για $\vee \{x\}$ και $\{x\} \vee \{y\}$ αντίστοιχα.

Έστωσαν $m \in \mathbb{N}$ και $\{a_1, \dots, a_m\}$ ένα σύνολο, το οποίο θα καλούμε **αλφάβητο**. Θα συμβολίζουμε με $\mathcal{S}_m$ την ελεύθερη υποομάδα που παράγεται από το αλφάβητο $\{a_1, \dots, a_m\}$. Θα αναφερόμαστε σε στοιχεία της $\mathcal{S}_m$ ως **λέξεις**, παραγόμενες από γράμματα του αλφαβήτου $\{a_1, \dots, a_m\}$. Για $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ και $\varphi = a_{i_r} \cdots a_{i_1} \in \mathcal{S}_m$, όπου $r \in \mathbb{N}$ και $\{i_1, \dots, i_r\} \subseteq \{1, \dots, m\}$, θα γράφουμε

$$\varphi(A_1, \dots, A_m) = A_{i_r} \cdots A_{i_1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

Τέλος, θα συμβολίζουμε το **μήκος** της λέξης φ με $|\varphi| = r$, και τον **αριθμό των εμφανίσεων** του γράμματος a_i στη λέξη φ με $|\varphi_i|$. Έτσι, $\sum_{i=1}^{m} |\varphi_i| = |\varphi| = r$.

Λήμμα 1.5.2. *Έστωσαν $n \in \mathbb{N}$ και $\psi \in S_n$. Έστω επίσης $\{A_i, B_i, E\}_{i=1}^n$ μία ακολουθία από συστολές, έτσι ώστε κάθε A_i αντιμετατίθεται με την E. Τότε,*

$$\|\psi(A_1,\ldots,A_n)E - \psi(B_1,\ldots,B_n)E\| \le \sum_{1\le i\le n} |\psi_i|\, \|A_iE - B_iE\|.$$

Απόδειξη. Με επαγωγή στο μήκος της λέξης $|\psi|$. Για $|\psi| = 0$, έχουμε ότι $\psi(A_1,\ldots,A_n) = \psi(B_1,\ldots,B_n) = I$, και άρα η ως άνω ανισότητα αληθεύει. Για την επαγωγική υπόθεση (ΕΥ), υποθέτουμε πως το Λήμμα ισχύει για $|\psi| \le r$. Έστω τώρα ότι $|\psi| = r+1$. Τότε, θα υπάρχει $\varphi \in \mathcal{S}_n$ με $|\varphi| = r$ και $a_k \in \{a_1,\ldots,a_n\}$, ώστε $\psi = \varphi a_k$. Επομένως,

$$\begin{aligned}
&\|\psi(A_1,\ldots,A_n)E - \psi(B_1,\ldots,B_n)E\| \\
&= \|\varphi(A_1,\ldots,A_n)A_kE - \varphi(B_1,\ldots,B_n)B_kE\| \\
&\le \|\varphi(A_1,\ldots,A_n)A_kE - \varphi(B_1,\ldots,B_n)A_kE\| \\
&\quad + \|\varphi(B_1,\ldots,B_n)A_kE - \varphi(B_1,\ldots,B_n)B_kE\| && [\text{τριγωνική ανισότητα}] \\
&\le \|\varphi(A_1,\ldots,A_n)E - \varphi(B_1,\ldots,B_n)E\| \\
&\quad + \|\varphi(B_1,\ldots,B_n)\|\, \|A_kE - B_kE\| && [A_kE = EA_\kappa,\ ||A_k|| \le 1] \\
&\le \sum_{1\le i\le n} |\varphi_i|\, \|A_iE - B_iE\| + ||A_kE - B_kE|| && [\text{ΕΥ},\ \|\varphi(B_1,\ldots,B_n)\| \le 1] \\
&= \sum_{1\le i\le n} |\psi_i|\, ||A_iE - B_iE||.
\end{aligned}$$

□

Ας κάνουμε εδώ την εξής παρατήρηση: Αν X, X', E είναι κλειστοί υπόχωροι του $\mathcal{H}$, έτσι ώστε $X \subseteq E$ και $X' \perp E$, τότε από το Λήμμα 1.2.1,

$$P_X = P_XP_E = (P_X + P_{X'})P_E = P_{X+X'}P_E = P_{X\vee X'}P_E,$$

καθώς $X' \perp X$, και κατά συνέπεια, ο υπόχωρος $X' + X$ είναι κλειστός.

Πόρισμα 1.5.3. *Έστω $\psi \in \mathcal{S}_3$. Έστωσαν E, W, X, X', Y, Y', Z κλειστοί υπόχωροι του $\mathcal{H}$, έτσι ώστε $W, X, Y \subseteq E$ και $X', Y' \perp E$. Τότε,*

$$\|\psi(P_W, P_X, P_Y)P_E - \psi(P_Z, P_{X\vee X'}, P_{Y\vee Y'})P_E\| \le |\psi_1|\, \|P_ZP_E - P_W\|.$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το Λήμμα 1.5.2 για $n = 3$, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $P_WP_E = P_W$, $P_X = P_XP_E = P_{X\vee X'}P_E$ και $P_Y = P_YP_E = P_{Y\vee Y'}P_E$. □

Πόρισμα 1.5.4. *Έστωσαν $n \in \mathbb{N}$ και $\varphi \in \mathcal{S}_n$. Έστω επίσης $\{A_i, B_i\}_{i=1}^n$ μία ακολουθία από συστολές. Τότε,*

$$\|\varphi(A_1,\ldots,A_n) - \varphi(B_1,\ldots,B_n)\| \le |\varphi| \max_{1\le i\le n} ||A_i - B_i||.$$

Απόδειξη. Άμεση εφαρμογή του Λήμματος 1.5.2, για $E = I$. □

1.5.2 Η κατασκευή τριών υποχώρων

Σε αυτήν την υποενότητα, δεδομένων ορθομοναδιαίων διανυσμάτων $u, v \in \mathcal{H}$, κατασκευάζουμε τρεις υποχώρους X, Y και $W = u \vee v$, καθώς και ένα πεπερασμένο γινόμενο προβολών $\psi(P_W, P_X, P_Y)$ επί του W, έτσι ώστε το διάνυσμα $\psi(P_W, P_X, P_Y)u$ να είναι "κοντά" στο v.

Έστω $\varepsilon > 0$ και έστω $k = k(\varepsilon)$ ο ελάχιστος φυσικός αριθμός τέτοιος ώστε

$$1 - \left(\cos \frac{\pi}{2k}\right)^k < \varepsilon.$$

Τέτοιο k υπάρχει, καθώς $\lim_{n\to\infty}(\cos \frac{\pi}{2n})^n = 1$. Έστωσαν ορθομοναδιαία διανύσματα $u, v \in \mathcal{H}$. Για $j \in \{1, \dots, k\}$, θέτουμε

$$h_j = u \cos \frac{\pi j}{2k} + v \sin \frac{\pi j}{2k}.$$

Ας σημειωθεί ότι $h_0 = u$ και $h_k = v$. Επιπλέον, $||h_j||^2 = 1$ και $(h_j, h_{j+1}) = cos\frac{\pi}{2k}$. Εύκολα βλέπουμε ότι

$$(P_{\vee h_k} \cdots P_{\vee h_2} P_{\vee h_1})u = \frac{(u, h_1)(h_1, h_2) \cdots (h_{k-1}, h_k)}{\|h_1\|^2 \|h_2\|^2 \cdots \|h_k\|^2} h_k = \left(\cos \frac{\pi}{2k}\right)^k v,$$

και άρα

$$\left\|(P_{\vee h_k} \cdots P_{\vee h_2} P_{\vee h_1})u - v\right\| < \varepsilon. \tag{1.22}$$

Λήμμα 1.5.5. *Έστωσαν $\delta > 0$ και $j \in \{1, \dots, J\}$. Έστω επίσης*

$$X'_j = \bigvee \left\{h_0 + a_0 z_0, h_1 + a_1 z_1, \dots, h_{j-1} + a_{j-1} z_{j-1}, h_j\right\},$$

όπου τα $h_0, \dots, h_j$ και $z_0, \dots, z_j$ είναι ορθομοναδιαία διανύσματα του $\mathcal{H}$, και $a_0 > a_1 > \cdots > a_{j-1} > 0$. Τότε, υπάρχει θετικός αριθμός $a_j < a_{j-1}$, έτσι ώστε

$$||P_{X'_j} - P_{X_j}|| < \delta,$$

όπου $X_j = \bigvee \left\{h_0 + a_0 z_0,\ h_1 + a_1 z_1, \dots,\ h_{j-1} + a_{j-1} z_{j-1},\ h_j + a_j z_j\right\}$ είναι μία "μικρή" διαταραχή του X'_j.

Απόδειξη. Ισχυριζόμαστε ότι αρκεί να επιλέξουμε $a_j < a_{j-1}$ επαρκώς μικρό, έτσι ώστε $\frac{a_j^2+4a_j}{a_j^2+1} < \delta/2$, το οποίο υπάρχει, καθώς $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+4x}{x^2+1} = 0$. Πράγματι, αν επιλέξουμε τέτοιο a_j, τότε για κάθε $u \in B_{\mathcal{H}}$,

$$||P_{X'_j} u - P_{X_j} u||$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\| \frac{(u, h_j + a_j z_j)}{||h_j + a_j z_j||^2}(h_j + a_j z_j) - \frac{(u, h_j)}{||h_j||^2} h_j \right\| \\
&= \left\| \frac{(u, h_j + a_j z_j)}{1 + a_j^2}(h_j + a_j z_j) - (u, h_j) h_j \right\| && [||h_j||^2 = 1,\ ||h_j + a_j z_j||^2 = 1 + a_j^2] \\
&= \left\| \left\{ \frac{(u, h_j + a_j z_j)}{1 + a_j^2} - (u, h_j) \right\} h_j \right. \\
&\qquad \left. + \left\{ \frac{a_j}{1 + a_j^2}(u, h_j + a_j z_j) \right\} z_j \right\| \\
&\leq \left| \frac{(u, h_j)}{1 + a_j^2} - (u, h_j) + \frac{a_j}{1 + a_j^2}(u, z_j) \right| \\
&\qquad + \left| \frac{a_j}{1 + a_j^2}(u, h_j + a_j z_j) \right| && [\text{τριγωνική ανισότητα}] \\
&\leq |(u, h_j)| \left(1 - \frac{1}{1 + a_j^2} \right) + |(u, z_j)| \frac{a_j}{1 + a_j^2} \\
&\quad + \frac{a_j}{1 + a_j^2} |(u, h_j + a_j z_j)| && [\text{τριγωνική ανισότητα}] \\
&\leq 1 - \frac{1}{1 + a_j^2} + \frac{a_j}{1 + a_j^2} + \frac{a_j}{1 + a_j^2} \sqrt{1 + a_j^2} && [\text{Cauchy - Schwarz}] \\
&\leq \frac{a_j^2 + 4a_j}{1 + a_j^2} && [a_j < 1] \\
&< \delta/2,
\end{aligned}
$$

και άρα $\sup_{u \in B_{\mathcal{H}}} ||P_{X_j'} u - P_{X_j} u|| < \delta$. □

Λήμμα 1.5.6. *Έστω $\varepsilon > 0$, και έστω $k = k(\varepsilon)$ ο ελάχιστος φυσικός αριθμός, τέτοιος ώστε $(cos \frac{\pi}{2k})^k < 1 - \varepsilon$. Τότε, υπάρχει $\varphi \in \mathcal{S}_{k+1}$ με την ακόλουθη ιδιότητα:*

Αν X είναι απειροδιάστατος υπόχωρος του $\mathcal{H}$, u, v ορθομοναδιαία διανύσματα του $\mathcal{H}$, και $W = u \vee v$, τότε, υπάρχουν υπόχωροι $X_1 \subseteq \cdots \subseteq X_k \subseteq X$, έτσι ώστε $\dim X_j = j + 1$ για κάθε $j \in \{1, \ldots, k\}$, και

$$||\varphi(P_W, P_{X_1}, \ldots, P_{X_k})u - v|| < 2\varepsilon.$$

Απόδειξη. Επιλέγουμε ορθομοναδιαία διανύσματα $z_0, z_1, \ldots, z_{k-1} \in W^{\perp} \cap X$. Θα κατασκευάσουμε αναδρομικά μία φθίνουσα ακολουθία αριθμών $a_1 > \cdots > a_{k-1} > a_k = 0$, και μία αύξουσα ακολουθία υποχώρων $X_1 \subseteq \cdots X_k \subseteq X$ ως ακολούθως.

Επιλέγουμε ένα τυχαίο $a_0 \in (0,1)$. Έστω πως έχουμε επιλέξει $a_1 > \cdots > a_{j-1}$, και $X_1 \subseteq \cdots X_{j-1}$, για κάποιο $j \leq k-1$. Θέτουμε

$$X'_j = \bigvee \left\{ h_0 + a_0 z_0, h_1 + a_1 z_1, \ldots, h_{j-1} + a_{j-1} z_{j-1}, h_j \right\}.$$

Παρατηρούμε ότι $\vee h_j \subseteq W \cap X'_j$. Επιπλέον, εφόσον το διάνυσμα z_i είναι κάθετο στον W για κάθε $i \in \{0, \ldots, j-1\}$, έχουμε ότι

$$W \cap X'_j = \vee h_j.$$

Συνεπώς, από το Θεώρημα 1.3.1 (von Neumann), για κάθε $x \in \mathcal{H}$, έχουμε πως

$$(P_{X'_j} P_W P_{X'_j})^n x \xrightarrow{n \to \infty} P_{\vee h_j} x.$$

Επιπλέον, εφόσον οι υπόχωροι $\vee h_j$ και X'_j είναι πεπερασμένης διάστασης, οι τελεστές $P_{\vee h_j}$ και $P_{X'_j} P_W P_{X'_j}$ έχουν εικόνα με πεπερασμένη διάσταση. Επιπλέον, από το Λήμμα B.4.4, έχουμε ότι $\sup_{x \in K} ||(P_{X'_j} P_W P_{X'_j})^n x - P_{\vee h_j} x|| \to 0$, για κάθε συμπαγές σύνολο K. Ως εκ τούτου,

$$||(P_{X'_j} P_W P_{X'_j})^n - P_{\vee h_j}|| \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

Συνεπώς, υπάρχει $n(j) \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε

$$||(P_{X'_j} P_W P_{X'_j})^{n(j)} - P_{\vee h_j}|| < \frac{\varepsilon}{2k}. \tag{1.23}$$

Επιλέγουμε $\delta > 0$ επαρκώς μικρό, έτσι ώστε

$$||P_{X_j} P_W P_{X_j} - P_{X'_j} P_W P_{X'_j}|| < \delta \implies ||(P_{X_j} P_W P_{X_j})^{n(j)} - (P_{X'_j} P_W P_{X'_j})^{n(j)}|| < \frac{\varepsilon}{2k}.$$

Από το Λήμμα 1.5.5, επιλέγουμε $a_j > 0$ τέτοιο ώστε

$$||P_{X_j} - P_{X'_j}|| < \frac{\delta}{2},$$

όπου $X_j = \bigvee \left\{ h_0 + a_0 z_0,\ h_1 + a_1 z_1, \ldots,\ h_{j-1} + a_{j-1} z_{j-1},\ h_j + a_j z_j \right\}$. Τότε,

$$\begin{aligned}
&||P_{X_j} P_W P_{X_j} - P_{X'_j} P_W P_{X'_j}|| \\
&= ||P_{X_j} P_W P_{X_j} - P_{X'_j} P_W P_{X_j} + P_{X'_j} P_W P_{X_j} - P_{X'_j} P_W P_{X'_j}|| \\
&\leq ||P_{X_j} - P_{X'_j}||\, ||P_W P_{X_j}|| + ||P_{X'_j} P_W||\, ||P_{X_j} - P_{X'_j}|| \\
&\leq 2||P_{X_j} - P_{X'_j}|| \\
&< \delta,
\end{aligned}$$

και άρα

$$||(P_{X_j}P_WP_{X_j})^{n(j)} - (P_{X_j'}P_WP_{X_j'})^{n(j)}|| < \frac{\varepsilon}{2k}. \tag{1.24}$$

Συνδυάζοντας τις (1.23) και (1.24), καταλήγουμε στο ότι

$$||(P_{X_j}P_WP_{X_j})^{n(j)} - P_{\vee h_j}|| < \frac{\varepsilon}{k}. \tag{1.25}$$

Έχουμε λοιπόν κατασκευάσει μία ακολουθία αριθμών $a_1 > \cdots > a_{k-1} > 0$ και μία ακολουθία υποχώρων $X_1 \subseteq \cdots \subseteq X_{k-1}$. Θέτουμε $a_k = 0$ και $X_k = X_k' = \bigvee \{h_0 + a_0z_0, \ldots, h_{k-1} + a_{k-1}z_{k-1}, h_k\}$. Θεωρούμε τώρα τις λέξεις $\varphi \in \mathcal{S}_{k+1}$ και $\psi \in \mathcal{S}_k$ με

$$\begin{aligned}
\varphi &= (b_kcb_k)^{n(k)} \cdots (b_1cb_1)^{n(1)}, \\
\psi &= a_1 \cdots a_k,
\end{aligned}$$

όπου $\{b_k, c\}_{k=1}^n$ είναι τυχαία γράμματα του αλφαβήτου, τα οποία δεν εξαρτώνται από την επιλογή των X, u ή v. Από το Πόρισμα 1.5.4, έχουμε πως

$$\begin{aligned}
&||\varphi(P_W, P_{X_1}, \ldots, P_{X_k}) - P_{\vee h_k} \cdots P_{\vee h_1}|| \\
&= ||\psi\big((P_{X_k}P_WP_{X_k})^{n(k)}, \ldots, (P_{X_1}P_WP_{X_1})^{n(1)}\big) - \psi(P_{\vee h_k}, \ldots, P_{\vee h_1})|| \\
&\leq |\psi| \max_{1\leq i\leq k} ||(P_{X_j}P_WP_{X_j})^{n(j)} - P_{\vee h_j}|| \\
&< k\frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon.
\end{aligned} \tag{1.26}$$

Τελικώς, από τις (1.22) και (1.26), παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
&||\varphi(P_W, P_{X_1}, \ldots, P_{X_k})u - v|| \\
&\leq ||\varphi(P_W, P_{X_1}, \ldots, P_{X_k})u - (P_{\vee h_k} \cdots P_{\vee h_1})u|| + \big\|(P_{\vee h_k} \cdots P_{\vee h_1})u - v\big\| \\
&< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Σημειώνουμε ότι η φ δεν εξαρτάται από τον υπόχωρο X ή από τα διανύσματα u, v. □

Λήμμα 1.5.7. *Έστωσαν $k \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$ και $a > 0$. Τότε, υπάρχουν φυσικοί αριθμοί $a < s(k) < s(k-1) < \cdots < s(1)$ με την εξής ιδιότητα:*

Αν $X_1 \subseteq \cdots \subseteq X_k \subseteq X \subseteq E$ είναι κλειστοί υπόχωροι του $\mathcal{H}$, όπου ο X είναι απειροδιάστατος και διαχωρίσιμος, και $\dim(X^\perp \cap E) = +\infty$, τότε, υπάρχει κλειστός υπόχωρος $Y \subseteq E$, έτσι ώστε $X \cap Y = \{0\}$, $||P_X - P_Y|| < \eta$, και

$$||(P_XP_YP_X)^{s(j)} - P_{X_j}|| < \varepsilon, \quad j \in \{1, \ldots, k\}.$$

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $0 < \eta < 1$. Αρχίζουμε επιλέγοντας έναν αριθμό $0 < \beta_{k+1} < \eta/2$, και έναν αριθμό $s(k) > a$ επαρκώς μεγάλο, ώστε $\frac{1}{(1+\beta_{k+1}^2)^{s(k)}} < \varepsilon/2$. Ύστερα, επιλέγουμε ένα $0 < \beta_k < \beta_{k+1}$ επαρκώς μικρό, έτσι ώστε $|\frac{1}{(1+\beta_k^2)^{s(k)}} - 1| < \varepsilon/2$, και έπειτα επιλέγουμε ένα $s(k-1) > s(k)$ επαρκώς μεγάλο, ώστε $|\frac{1}{(1+\beta_k)^{s(k-1)}}| < \varepsilon/2$. Συνεχίζοντας αυτήν την διαδικασία αναδρομικά, βρίσκουμε αριθμούς $\beta_k,\ s(k-1),\ \beta_{k-1},\ s(k-2), \ldots,\ s(1),\ \beta_1$, έτσι ώστε

$$\beta_{k+1} > \beta_k > \cdots > \beta_1 > 0,$$
$$a < s(k) < s(k-1) < \cdots < s(1),$$

$$\frac{1}{(1+\beta_{j+1}^2)^{s(j)}} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{και} \quad \left|\frac{1}{(1+\beta_j^2)^{s(j)}} - 1\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad j \in \{1, \ldots, k\}. \tag{1.27}$$

Θα δείξουμε ότι τα $s(j)$ είναι τα ζητούμενα. Έστωσαν $X_1 \subseteq \cdots \subseteq X_k \subseteq X \subseteq E$ κλειστοί υπόχωροι του $\mathcal{H}$, όπου ο X είναι απειροδιάστατος και διαχωρίσιμος, και $\dim(X^\perp \cap E) = +\infty$. Εφόσον ο X_1 είναι κλειστός και διαχωρίσιμος υπόχωρος του $\mathcal{H}$, θα είναι ένας διαχωρίσιμος χώρος Hilbert. Συνεπώς, υπάρχει αριθμήσιμο σύνολο I_1 και ορθομοναδιαία ακολουθία $(e_i)_{i\in I_1}$ στον X_1, η οποία είναι πλήρης. Ομοίως, εφόσον ο X_2 είναι διαχωρίσιμος χώρος Hilbert, θα υπάρχει αριθμήσιμο σύνολο I_2' και ορθομοναδιαία ακολουθία $(e_i)_{i\in I_2}$ στον X_2, η οποία είναι πλήρης. Θέτουμε $I_2 = I_1 \cup I_2'$, ώστε $I_1 \subseteq I_2$. Συνεχίζοντας αυτήν την διαδικασία, βρίσκουμε αριθμήσιμα σύνολα $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_k \subseteq I_{k+1} = I$, ώστε η ακολουθία $(e_i)_{i\in I_j}$ να είναι πλήρης στον X_j, για κάθε $j \in \{1, \ldots, k+1\}$.

Για $i \in I_j \setminus I_{j-1}$ θέτουμε $\gamma_i = \beta_j$. Εφόσον $\dim(X^\perp \cap E) = +\infty$, μπορούμε να βρούμε ένα σύνολο ορθομοναδιαίων διανυσμάτων $(w_i)_{i\in I}$ στον $X^\perp \cap E$. Θέτουμε $Y = \bigvee_{i\in I} \{e_i + \gamma_i w_i\}$. Τότε, για κάθε $i \in I$, είναι εύκολο να ελεγχθεί ότι

$$e_i = \underbrace{\frac{e_i + \gamma_i w_i}{1+\gamma_i^2}}_{\in Y} + \underbrace{e_i - \frac{e_i + \gamma_i w_i}{1+\gamma_i^2}}_{\in Y^\perp},$$

και άρα $P_Y e_i = \frac{e_i+\gamma_i w_i}{1+\gamma_i^2}$. Επιπλέον, εφόσον $e_i \in X$ και $w_i \in X^\perp$,

$$(P_X P_Y P_X) e_i = P_X P_Y (P_X e_i) = P_X (P_Y e_i) = P_X\left(\frac{e_i + \gamma_i w_i}{1+\gamma_i^2}\right) = \frac{e_i}{1+\gamma_i^2}.$$

Έστω $x \in X$. Γράφουμε το x ως $x = \sum_{i\in I} a_i e_i$. Σημειωτέον πως $\gamma_i \le \beta_j$ για $i \in I_j$ (καθώς η β_j είναι αύξουσα), ενώ $\gamma_i \ge \beta_j$ για $i \in I \setminus I_j$. Έχουμε ότι

$$||(P_X P_Y P_X)^{s(j)} x - P_{X_j} x||^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big\| \sum_{i\in I} a_i \frac{e_i}{(1+\gamma_i^2)^{s(j)}} - \sum_{i\in I_j} a_i e_i \Big\|^2 \\
&= \Big\| \sum_{i\in I_j} a_i e_i \Big(-1 + \frac{1}{(1+\gamma_i^2)^{s(j)}} \Big) + \sum_{i\in I\setminus I_j} a_i \frac{e_i}{(1+\gamma_i^2)^{s(j)}} \Big\|^2 \\
&= \sum_{i\in I_j} \Big\| a_i e_i \Big(-1 + \frac{1}{(1+\gamma_i^2)^{s(j)}} \Big) \Big\|^2 + \sum_{i\in I\setminus I_j} \Big\| a_i \frac{e_i}{(1+\gamma_i^2)^{s(j)}} \Big\|^2 \qquad \text{[Πυθαγόρειο Θεώρημα]} \\
&= \sum_{i\in I_j} |a_i|^2 \Big(1 - \frac{1}{(1+\gamma_i^2)^{s(j)}} \Big)^2 + \sum_{i\in I\setminus I_j} |a_i|^2 \frac{1}{(1+\gamma_i^2)^{s(j)}} \\
&\leq \sum_{i\in I_j} |a_i|^2 \Big(1 - \frac{1}{(1+\beta_j^2)^{s(j)}} \Big)^2 + \sum_{i\in I\setminus I_j} |a_i|^2 \frac{1}{(1+\beta_{j+1}^2)^{s(j)}} \\
&\leq \sum_{i\in I_j} |a_i|^2 (\varepsilon^2/4) + \sum_{i\in I\setminus I_j} |a_i|^2 (\varepsilon^2/4) \qquad [(1.27)] \\
&= (\varepsilon^2/4) \sum_{i\in I} |a_i|^2 = (\varepsilon^2/4) ||x||^2. \qquad (1.28)
\end{aligned}
$$

Σημειώνουμε ότι $P_{X_j} P_X = P_{X_j}$, καθώς $X_j \subseteq X$. Υπενθυμίζουμε επίσης ότι οι προβολές είναι ταυτοδύναμες. Από την (1.28), έχουμε ότι για κάθε $z \in \mathcal{H}$, και για κάθε $j \in \{1, \ldots, k\}$,

$$
\begin{aligned}
||(P_X P_Y P_X)^{s(j)} z - P_{X_j} z||^2 &= ||(P_X P_Y P_X)^{s(j)} (P_X z) - P_{X_j}(P_X z)||^2 \\
&\leq (\varepsilon^2/4) ||P_X z||^2 \leq (\varepsilon^2/4) ||z||^2,
\end{aligned}
$$

και κατά συνέπεια,

$$
||(P_X P_Y P_X)^{s(j)} z - P_{X_j} z|| < \varepsilon, \quad j \in \{1, \ldots, k\}.
$$

Μένει τώρα να δείξουμε ότι $X \cap Y = \{0\}$, και ότι $||P_X - P_Y|| < \eta$. Για το πρώτο, έστω $z \in X \cap Y$. Εφόσον $z \in X$, το z θα γράφεται ως $z = \sum_{i\in I} b_i e_i$, και εφόσον $z \in Y$, το z θα γράφεται επίσης ως $z = \sum_{i\in I} c_i (e_i + \gamma_i w_i)$. Εφόσον κάθε $w_i \in X^\perp$, και κάθε $e_i \in X$, θα έχουμε πως για κάθε $j \in I$,

$$
b_j = (z, e_j) = \Big(\sum_{i\in I} c_i (e_i + \gamma_i w_i), e_j \Big) = \Big(\sum_{i\in I} c_i e_i, e_j \Big) = c_j.
$$

Έπεται ότι $\sum_{i\in I} c_i \gamma_i w_i = 0$, και άρα $c_i = 0$ για κάθε $i \in I$. Με άλλα λόγια, $z = 0$.

Τέλος, θέλουμε να δείξουμε ότι $||P_X - P_Y|| < \eta$. Υπενθυμίζουμε πως αν $(f_i)_{i\in I}$ είναι ένα ορθομοναδιαίο σύνολο, τότε $P_{\bigvee\{f_i\,:\, i\in I\}}(z) = \sum_{i\in I} (z, f_i) f_i$. Επομένως, για κάθε $z \in H \setminus \{0\}$,

$$
||P_X z - P_Y z||^2
$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big\| \sum_{i\in I}(e_i,z)e_i - \sum_{i\in I}\frac{(e_i+\gamma_i w_i,z)}{1+\gamma_i^2}(e_i+\gamma_i w_i)\Big\|^2 \\
&= \Big\| \sum_{i\in I}\Big\{(e_i,z)\frac{\gamma_i^2}{1+\gamma_i^2} - (w_i,z)\frac{\gamma_i}{1+\gamma_i^2}\Big\}e_i \\
&\qquad - \sum_{i\in I}\frac{\gamma_i}{1+\gamma_i^2}(e_i+\gamma_i w_i,z)w_i\Big\|^2 \\
&= \sum_{i\in I}\Big|(e_i,z)\frac{\gamma_i^2}{1+\gamma_i^2} - (w_i,z)\frac{\gamma_i}{1+\gamma_i^2}\Big|^2 \\
&\qquad + \sum_{i\in I}\Big|\frac{\gamma_i}{1+\gamma_i^2}(e_i+\gamma_i w_i,z)\Big|^2 && [\text{Πυθαγόρειο Θεώρημα}] \\
&\le \sum_{i\in I}\frac{1}{(1+\gamma_i^2)^2}\Big|\gamma_i^2(e_i,z)-\gamma_i(w_i,z)\Big|^2 \\
&\qquad + \frac{\eta^2}{4}\sum_{i\in I}\Big|\frac{1}{1+\gamma_i^2}(e_i+\gamma_i w_i,z)\Big|^2 && [\gamma_i \le \eta/2] \\
&\le \sum_{i\in I}\frac{1}{(1+\gamma_i^2)^2}(2\gamma_i^4\ |(e_i,z)|^2 + 2\gamma_i^2\ |(w_i,z)|^2) \\
&\qquad + \frac{\eta^2}{4}\sum_{i\in I}\Big|\frac{1}{1+\gamma_i^2}(e_i+\gamma_i w_i,z)\Big|^2 && [|a-b|^2 \le 2|a|^2+2|b|^2] \\
&\le 2(\eta^4/16)\sum_{i\in I}|(e_i,z)|^2 + 2\ (\eta^2/4)\sum_{i\in I}|(w_i,z)|^2 \\
&\qquad + (\eta^2/4)\sum_{i\in I}\Big|\frac{1}{1+\gamma_i^2}(e_i+\gamma_i w_i,z)\Big|^2 && [0<\gamma_i<\eta/2] \\
&\le 2(\eta^4/16)||z||^2 + 2(\eta^2/4)||z||^2 + \frac{\eta^2}{4}||z||^2 && [\text{Ανισότητα Bessel}] \\
&< (7/8)\eta^2||z||^2. && [\eta<1]
\end{aligned}
$$

Με άλλα λόγια, $||P_X - P_Y|| < \eta$. □

Λήμμα 1.5.8. *Για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $N = N(\varepsilon)$ φυσικός αριθμός, τέτοιος ώστε για κάθε $\eta > 0$, υπάρχει $\psi \in \mathcal{S}_3$ με $|\psi_1| \le N$ που έχει την ακόλουθη ιδιότητα:*

Αν $X \subseteq E$ είναι υπόχωροι του $\mathcal{H}$ με X απειροδιάστατο και διαχωρίσιμο, και $\dim(X^\perp \cap E) = +\infty$, και αν $u, v \in X$ είναι ορθομοναδιαία διανύσματα, και $W = u \vee v$, *τότε, υπάρχει ένας υπόχωρος $Y \subseteq E$, τέτοιος ώστε $X \cap Y = \{0\}$, $||P_X - P_Y|| < \eta$, και*

$$||\psi(P_W, P_X, P_Y)u - v|| < 3\varepsilon.$$

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$ και έστω $k = k(\varepsilon)$ ο ελάχιστος φυσικός αριθμός ώστε $(cos\frac{\pi}{2k})^k < 1 - \varepsilon$. Από το Λήμμα 1.5.6, βρίσκουμε μία λέξη $\varphi \in \mathcal{S}_{k+1}$, και θέτουμε $N = |\varphi_1|$. Έστω $\eta > 0$. Από το Λήμμα 1.5.7 (για $a = 1$ και $\varepsilon/|\varphi|$ αντί για ε), βρίσκουμε φυσικούς αριθμούς $s(k) < s(k-1) < \cdots < s(1)$. Ορίζουμε τώρα την $\psi \in \mathcal{S}_3$ να είναι η φ, αλλά αντικαθιστούμε κάθε γράμμα a_i με $(a_2 a_3 a_2)^{s(i-1)}$, για κάθε $i \in \{2, \ldots, k+1\}$. Προφανώς, $|\psi_1| = |\varphi_1| = N$.

Έστω τώρα $X \subseteq E$ και u, v, W όπως και στην εκφώνηση αποδεικτέου Λήμματος. Ας σημειωθεί ότι

$$\psi(P_W, P_X, P_Y) = \varphi(P_W, (P_X, P_Y, P_X)^{s(1)}, \ldots, (P_X, P_Y, P_X)^{s(k)}).$$

Από το Λήμμα 1.5.6, βρίσκουμε υποχώρους $X_1 \subseteq \cdots \subseteq X_k \subseteq X$ με $\dim X_j = j + 1$, έτσι ώστε

$$||\varphi(P_W, P_{X_1}, \ldots, P_{X_k})u - v|| < 2\varepsilon.$$

Από το Λήμμα 1.5.7, βρίσκουμε έναν υπόχωρο $Y \subseteq E$, έτσι ώστε $X \cap Y = \{0\}$, $||P_X - P_Y|| < \eta$, και

$$||(P_X P_Y P_X)^{s(j)} - P_{X_j}|| < \frac{\varepsilon}{|\varphi|}, \quad j \in \{1, \ldots, k\}.$$

Τέλος, από το Πόρισμα 1.5.4, έχουμε πως

$$\begin{aligned}
&||\psi(P_W, P_X, P_X)u - v|| \\
&= ||\varphi(P_W, (P_X P_Y P_X)^{s(1)}, \ldots, (P_X P_Y P_X)^{s(k)})u - v|| \\
&\leq ||\varphi(P_W, (P_X P_Y P_X)^{s(1)}, \ldots, (P_X P_Y P_X)^{s(k)})u - \varphi(P_W, P_{X_1}, \ldots, P_{X_k})u|| \\
&\quad + ||\varphi(P_W, P_{X_1}, \ldots, P_{X_k})u - v|| \\
&\leq |\varphi| \frac{\varepsilon}{|\varphi|} + 2\varepsilon = 3\varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Λήμμα 1.5.9. *Για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon)$, τέτοιο ώστε για κάθε $\eta > 0$, υπάρχει $\psi \in \mathcal{S}_3$ με την ακόλουθη ιδιότητα:*

Αν $X \subseteq E$ είναι υπόχωροι του $\mathcal{H}$ με X απειροδιάστατο και διαχωρίσιμο, και $\dim(X^\perp \cap E) = +\infty$, και αν $u, v \in X$ είναι ορθομοναδιαία διανύσματα, και $W = u \vee v$, τότε, υπάρχει υπόχωρος $Y \subseteq E$, τέτοιος ώστε $X \cap Y = \{0\}$, $||P_X - P_Y|| < \eta$, και επιπλέον, αν X', Y', Z είναι υπόχωροι του $\mathcal{H}$ έτσι ώστε $X', Y' \perp E$ και $||P_W - P_Z P_E|| < \delta$, τότε

$$||\psi(P_Z, P_{X \vee X'}, P_{Y \vee Y'})u - v|| < 4\varepsilon.$$

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $N \in \mathbb{N}$ όπως και στο Λήμμα 1.5.8, και θέτουμε $\delta = \frac{\varepsilon}{N}$. Έστω τώρα $\eta > 0$. Επιλέγουμε $\psi \in \mathcal{S}_3$ όπως και στο Λήμμα 1.5.8. Για δεδομένο υπόχωρο X, επιλέγουμε Y όπως και στο Λήμμα 1.5.8. Αν X', Y', Z είναι όπως και στην εκφώνηση του αποδεικτέου Λήμματος, τότε από το Πόρισμα 1.5.3, και το Λήμμα 1.5.8, έχουμε πως

$$\begin{aligned}
&||\psi(P_Z, P_{X\vee X'}, P_{Y\vee Y'})u - v|| \\
&= ||\psi(P_Z, P_{X\vee X'}, P_{Y\vee Y'})u - \psi(P_W, P_X, P_Y)u|| \\
&\quad + ||\psi(P_W, P_X, P_Y)u - v|| && [\text{τριγωνική ανισότητα}] \\
&= ||\psi(P_Z, P_{X\vee X'}, P_{Y\vee Y'})P_E u - \psi(P_W, P_X, P_Y)P_E u|| \\
&\quad + ||\psi(P_W, P_X, P_Y)u - v|| && [u \in E] \\
&\leq |\psi_1|\ ||P_W - P_Z P_E|| + 3\varepsilon \\
&\leq N\delta + 3\varepsilon = 4\varepsilon.
\end{aligned}$$

□

1.5.3 Το τελικό βήμα

Το τελευταίο βήμα που έμεινε για να αποδείξουμε το Θεώρημα 1.5.1, χρησιμοποιεί το Λήμμα 1.5.9 για να δείξει πως αν (e_i) είναι μία ορθομοναδιαία ακολουθία, η οποία έχει απειροδιάστατο ορθογώνιο συμπλήρωμα, τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε τρεις κλειστούς υποχώρους X, Y, Z του $\mathcal{H}$ και λέξεις (Ψ_i), έτσι ώστε το διάνυσμα $\Psi_i(P_Z, P_X, P_Y)e_i$ να είναι κοντά στο e_{i+1}.

Λήμμα 1.5.10. *Για κάθε ακολουθία θετικών αριθμών (ε_i), υπάρχει ακολουθία λέξεων (Ψ_i) στην υποομάδα $\mathcal{S}_3$ με την ακόλουθη ιδιότητα:*

Αν (e_i) είναι μία ορθομοναδιαία ακολουθία στον $\mathcal{H}$, η οποία έχει απειροδιάστατο ορθογώνιο συμπλήρωμα, τότε υπάρχουν τρεις υπόχωροι X, Y, Z του $\mathcal{H}$, έτσι ώστε

$$||\Psi_i(P_Z, P_X, P_Y)e_i - e_{i+1}|| < 4\varepsilon, \quad i \in \mathbb{N}. \tag{1.29}$$

Απόδειξη. Έστω (ε_i) ακολουθία θετικών αριθμών. Για κάθε $i \in \mathbb{N}$, βρίσκουμε ένα δ_i όπως και στο Λήμμα 1.5.9. Θέτουμε $\delta_0 = 1$ και $\eta_i = \frac{1}{2}\min\{\delta_{i-1}, \delta_{i+1}\}$, και βρίσκουμε λέξη $\psi_i \in \mathcal{S}_3$, όπως και στο Λήμμα 1.5.9. Για $i \in \mathbb{N}$, θεωρούμε τη λέξη $\Psi_i \in \mathcal{S}_3$, με

$$\Psi_i(P_Z, P_X, P_Y) = \begin{cases} \psi_i(P_Z, P_X, P_Y), & \text{αν } i \text{ άρτιος} \\ \psi_i(P_Y, P_X, P_Z), & \text{αν } i \text{ περιττός.} \end{cases}$$

Θα κατασκευάσουμε μία ακολουθία απειροδιάστατων υποχώρων (E_i) του $\mathcal{H}$, έτσι ώστε για κάθε $i \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
&e_i,\ e_{i+1} \in E_i, \\
&P_{\vee e_{i+1}} = P_{E_i}P_{E_{i+1}} = P_{E_{i+1}}P_{E_i}, \\
&E_i \perp E_j \ \text{ για } |i-j| \geq 2.
\end{aligned} \tag{1.30}$$

Εφόσον η (e_i) έχει απειροδιάστατο ορθογώνιο συμπλήρωμα, θα υπάρχει μία ακολουθία (f_i), ώστε $f_i \perp e_j$ για κάθε $i, j \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε τον απειροδιάστατο υπόχωρο

$$F_i = \bigvee \left\{ f_{(p_i)^r} : r \in \mathbb{N} \right\},$$

όπου p_i είναι ο $i-$στός πρώτος αριθμός, μεγαλύτερος από το δύο. Ας σημειωθεί ότι από το θεμελιώδες θεώρημα της αριθμητικής, $F_i \perp F_j$ για $i \neq j$. Επιπλέον, θέτουμε

$$E_i = \vee e_i \oplus \vee e_{i+1} \oplus F_i.$$

Παρατηρούμε ότι ο E_i ικανοποιεί τις συνθήκες στην (1.30).

Για κάθε $i \in \mathbb{N}$, θα κατασκευάσουμε έναν κλειστό και διαχωρίσιμο απειροδιάστατο υπόχωρο $X_i \subseteq E_i$, έτσι ώστε $\dim(X_i^\perp \cap E_i) = +\infty$, και

$$\begin{aligned} & e_i,\ e_{i+1} \in X_i, \\ & P_{\vee e_{i+1}} = P_{X_i} P_{X_{i+1}} = P_{X_{i+1}} P_{X_i}, \\ & X_i \perp X_j \ \text{ για } |i-j| \geq 2. \end{aligned} \tag{1.31}$$

Θέτουμε

$$\widetilde{F_i} = \bigvee \{ f_{(p_i)^{2r}} : r \in \mathbb{N} \} \subseteq F_i.$$

Θεωρούμε τον (διαχωρίσιμο) υπόχωρο $X_i = \vee e_i \oplus \vee e_{i+1} \oplus \widetilde{F_i}$. Από το Λήμμα 1.2.1(e), έπεται ότι ο X_i είναι κλειστός. Επιπρόσθετα, ισχύει ότι $\bigvee \{ f_{(p_i)^{2r+1}} : r \in \mathbb{N} \} \subseteq X_i^\perp \cap E_i$, και άρα $\dim(X_i^\perp \cap E) = +\infty$. Είναι άμεσο ότι ο X_i είναι ο ζητούμενος.

Για κάθε $i \in \mathbb{N}$, από το Λήμμα 1.5.9, υπάρχει κλειστός υπόχωρος $Y_i \subseteq E_i$, έτσι ώστε $Y_i \cap X_i = \{0\}$, $||P_{X_i} - P_{Y_i}|| < \eta_i$, και

$$||\psi_i(P_{Z_i}, P_{X_i \vee X_i'}, P_{Y_i \vee Y_i'}) e_i - e_{i+1}|| < 4\varepsilon, \tag{1.32}$$

οποτεδήποτε $W_i = e_i \vee e_{i+1}$, και X_i', Y_i', Z_i είναι υπόχωροι του $\mathcal{H}$, τέτοιοι ώστε $X_i', Y_i' \perp E_i$ και $||P_{W_i} - P_{Z_i} P_{E_i}|| < \delta$.

Παρατηρούμε ότι εφόσον ο Y_i είναι υπόχωρος του E_i και $X_i \cap Y_i = \{0\}$, θα είναι $Y_i = F_i'$, για κάποιο κλειστό απειροδιάστατο υπόχωρο $F_i' \subseteq F_i$ με $F_i' \cap \widetilde{F_i} = \{0\}$.

Θέτουμε $Y_0 = \vee e_1$ και

$$X = \bigvee_{j \geq 1} X_j, \quad Y = \bigvee_{j \geq 0} Y_{2j} \quad \text{και} \quad Z = \bigvee_{j \geq 0} Y_{2j+1}.$$

Επιπλέον, για $i \in \mathbb{N}$, θέτουμε

$$X_i' = \widetilde{F_{i-1}} \vee \widetilde{F_{i+1}} \vee \bigvee_{\substack{j \geq 1 \\ j \notin \{i-1,\, i,\, i+1\}}} X_j.$$

Έπεται ότι $X_i' \perp E_i$ και $X = X_i \vee X_i'$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Τέλος, για $k \in \mathbb{N}$ θέτουμε

$$Y_{2k}' = F_{2k-2}' \vee F_{2k+2}' \vee \bigvee_{\substack{j\geq 0\\ j\neq k}} Y_{2j}$$

και

$$Y_{2k+1}' = F_{2k-1}' \vee F_{2k+3}' \vee \bigvee_{\substack{j\geq 0\\ j\neq k}} Y_{2j+1}.$$

Τότε για κάθε $i \in \mathbb{N}$, ο Y_i' είναι υπόχωρος του $\mathcal{H}$ με $Y_i' \perp E_i$. Επιπλέον, $Y = Y_i \vee Y_i'$ για κάθε άρτιο i, ενώ $Z = Y_i \vee Y_i'$ για κάθε περιττό i.

Μένει να δείξουμε ότι για τα ως άνω X, Y, Z, ισχύει η (1.29). Έστω $i \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε πως ο i είναι άρτιος. Υπενθυμίζουμε ότι $X_{i-1} \perp X_{i+1}$ και $Y_{i-1} \perp Y_{i+1}$. Σημειώνουμε επίσης ότι από το Λήμμα 1.2.1(e)(f), έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
P_Z P_{E_i} &= P_{Y_{i-1}\vee Y_{i+1}} P_{E_i} = (P_{Y_{i-1}} + P_{Y_{i+1}})P_{E_i},\\
P_{W_i} &= P_{X_{i-1}\vee X_{i+1}} P_{E_i} = (P_{X_{i-1}} + P_{X_{i+1}})P_{E_i}.
\end{aligned}$$

Τότε,

$$\begin{aligned}
||P_{W_i} - P_Z P_{E_i}|| &= ||(P_{X_{i-1}} + P_{X_{i+1}})P_{E_i} - (P_{Y_{i-1}} + P_{Y_{i-1}})P_{E_i}||\\
&\leq ||P_{X_{i-1}} - P_{Y_{i-1}}|| + ||P_{X_{i+1}} - P_{Y_{i+1}}||\\
&\leq \eta_{i-1} + \eta_{i+1}\\
&= \tfrac{1}{2}\min\{\delta_{i-2}, \delta_i\} + \tfrac{1}{2}\min\{\delta_i, \delta_{i+2}\}\\
&\leq \delta_i.
\end{aligned}$$

Από την (1.32), για $Z_i = Z,\ X_i \vee X_i' = X$ και $Y_i \vee Y_i' = Y$, παίρνουμε πως

$$||\Psi_i(P_Z, P_X, P_Y)e_i - e_{i+1}|| = ||\psi_i(P_Z, P_X, P_Y)e_i - e_{i+1}|| < 4\varepsilon_i.$$

Αν τώρα ο i είναι περιττός, τότε όπως και παραπάνω, παρατηρώντας πως $P_Y P_{E_i} = (P_{Y_{i-1}} + P_{Y_{i+1}})P_{E_i}$, δείχνουμε ότι $||P_{W_i} - P_Y P_{E_i}|| < \delta_i$, και άρα από την (1.32), για $Z_i = Y,\ X_i \vee X_i' = X$ και $Y_i \vee Y_i' = Z$, παίρνουμε πως

$$||\Psi_i(P_Z, P_X, P_Y)e_i - e_{i+1}|| = ||\psi_i(P_Y, P_X, P_Z)e_i - e_{i+1}|| < 4\varepsilon_i.$$

□

Είμαστε πλέον έτοιμοι να αποδείξουμε το Θεώρημα 1.5.1.

Απόδειξη θεωρήματος 1.5.1. Για $\varepsilon_i = 9^{-i},\ i \in \mathbb{N}$, επιλέγουμε Ψ_i όπως και στο Λήμμα 1.5.10. Έστω $e_1 = \frac{x_0}{||x_0||}$. Εφόσον ο $\mathcal{H}$ είναι απειροδιάστατος, μπορούμε να βρούμε μία ορθομοναδιαία ακολουθία $(e_i)_{i\geq 1}$, η οποία επιπλέον έχει απειροδιάστατο ορθογώνιο συμπλήρωμα. Βρίσκουμε κλειστούς υποχώρου X, Y, Z, όπως και στο Λήμμα 1.5.10. Για ευκολία στον συμβολισμό, θα μετονομάσουμε τους υποχώρους αυτούς σε M_1, M_2 και M_3 αντίστοιχα. Για $k \in \mathbb{N}$, θέτουμε $A_k = \Psi_k(P_{M_1}, P_{M_2}, P_{M_3}) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Τότε,

$$\begin{aligned}
&||A_k A_{k-1} \cdots A_1 e_1 - e_{k+1}|| \\
&\leq ||A_k A_{k-1} \cdots A_2 (A_1 e_1 - e_2)|| + ||A_k A_{k-1} \cdots A_2 e_2 - e_{k+1}|| \\
&\leq ||A_k A_{k-1} \cdots A_2|| \, ||A_1 e_1 - e_2|| + ||A_k A_{k-1} \cdots A_2 e_2 - e_{k+1}|| \\
&< 4\varepsilon_1 + ||A_k A_{k-1} \cdots A_2 e_2 - e_{k+1}|| \\
&\leq 4\varepsilon_1 + ||A_k A_{k-1} \cdots A_3 (A_2 e_2 - e_3)|| + ||A_k A_{k-1} \cdots A_3 e_3 - e_{k+1}|| \\
&< 4\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2 + ||A_k A_{k-1} \cdots A_3 e_3 - e_{k+1}|| \\
&\vdots \\
&< 4\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2 \cdots + 4\varepsilon_{k-1} + ||A_k e_k - e_{k+1}|| \\
&< 4(9^{-1} + \cdots + 9^{-k}) \qquad (1.33) \\
&< 4 \sum_{k=1}^{\infty} 9^{-j} = \frac{1}{2}. \qquad (1.34)
\end{aligned}$$

Εκ κατασκευής, κάθε A_k είναι ένα γινόμενο κάποιον ορθογώνιων προβολών επί των M_1, M_2 και M_3. Έστω $n_k (\geq k)$ ο συνολικός αριθμός των προβολών στο γινόμενο $A_k A_{k-1} \cdots A_1$. Ορίζουμε την ακολουθία προβολών $(P_{j_i})_{i \in \mathbb{N}}$ ως εξής:

Έστω $i \in \mathbb{N}$, και έστω k ο ελάχιστος φυσικός αριθμός, ώστε $i \leq n_k$. Θέτουμε P_{j_i} να είναι η προβολή που βρίσκεται στην i–στή θέση (μετρώντας από τα δεξιά) του γινομένου $A_k A_{k-1} \cdots A_1$. Έτσι, εξασφαλίζουμε πως $x_{n_k} = A_k A_{k-1} \cdots A_1 x_0$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Θα δείξουμε ότι η υπακολουθία (x_{n_k}) δεν συγκλίνει ως προς την νόρμα, και ως αποτέλεσμα, ούτε η (x_n) συγκλίνει ως προς την νόρμα. Θεωρούμε την ακολουθία

$$y_k = \frac{x_{n_k}}{||x_0||} = A_k A_{k-1} \cdots A_1 e_1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Από την (1.33), έπεται πως

$$||y_k - e_{k+1}|| < \frac{1}{2}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Από την αντίστροφη τριγωνική ανισότητα και την Cauchy-Schwarz, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
|(y_k, e_{k+1})| &\geq |(e_{k+1}, e_{k+1})| - |(y_k - e_{k+1}, e_{k+1})| \\
&= 1 - |(y_k - e_{k+1}, e_{k+1})| \\
&\geq 1 - ||y_k - e_{k+1}|| \\
&\geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Αρκεί να δείξουμε ότι η (y_k) δεν συγκλίνει ως προς την νόρμα. Υποθέτουμε προς άτοπον ότι η ακολουθία (y_k) συγκλίνει ως προς την νόρμα σε κάποιο $y \in \mathcal{H}$. Τότε, υπάρχει επαρκώς μεγάλο $m \in \mathbb{N}$, έτσι ώστε

$$||y_k - y|| < \frac{1}{4}, \quad k \geq m.$$

Έπεται ότι για $k \geq m$,

$$\begin{aligned} |(y, e_{k+1})| &\geq |(y_k, e_{k+1})| - |(y - y_k, e_{k+1})| \\ &\geq |(y_k, e_{k+1})| - ||y - y_k|| \\ &\geq \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

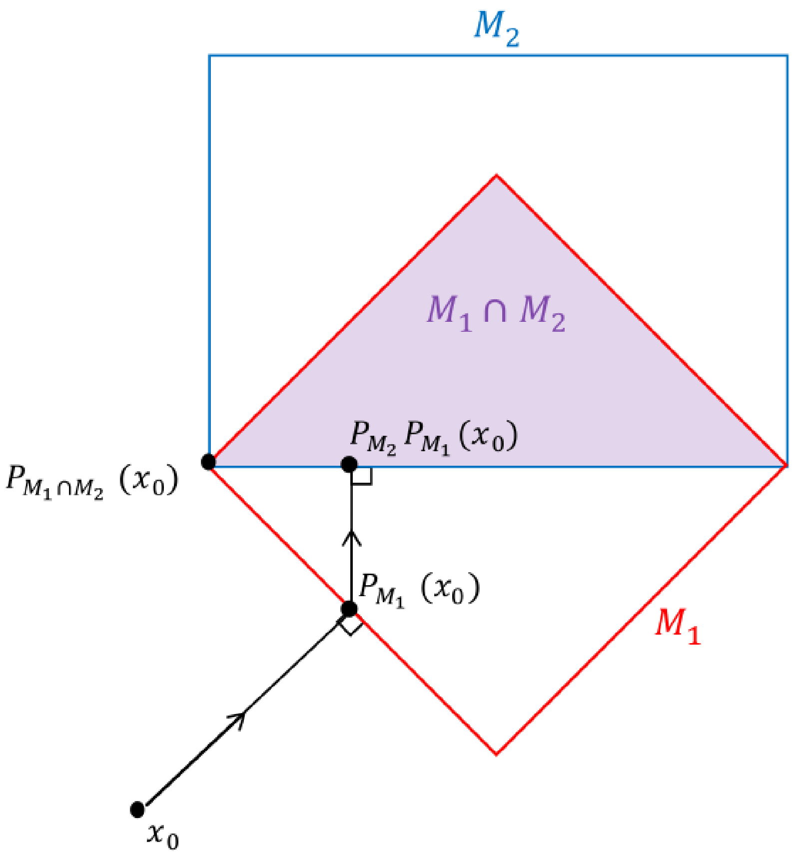
Όμως, από την ανισότητα Bessel, συμπεραίνουμε πως

$$||y||^2 \geq \sum_{k=1}^{\infty} |(y, e_k)|^2 \geq \sum_{k=m}^{\infty} |(y, e_{k+1})|^2 \geq \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{16} = +\infty,$$

που είναι αδύνατον. □

1.6 Τελικές παρατηρήσεις

Αξίζει να σημειώσουμε ότι μπορούμε να επεκτείνουμε και να εμβαθύνουμε τη θεωρία πίσω από τη μέθοδο των εναλλασσόμενων προβολών ακόμη περισσότερο. Για παράδειγμα, θα μπορούσε κανείς να θεωρήσει κλειστά και κυρτά σύνολα αντί για κλειστούς υποχώρους (θεωρώντας τις αντίστοιχες metric προβολές επί των υποσυνόλων αυτών). Ο Bregman [9] το 1965 απέδειξε πως κάθε περιοδικό γινόμενο προβολών συγκλίνει ασθενώς σε ένα στοιχείο της τομής των κλειστών υποσυνόλων. Όμως, σε αντίθεση με την περίπτωση κλειστών υποχώρων, το σημείο σύγκλισης της μεθόδου δεν είναι απαραίτητα η προβολή πάνω στην τομή των κυρτών υποσυνόλων, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 2: Παράδειγμα δύο κυρτών συνόλων στον $\mathbb{R}^2$ όπου η ακολουθία περιοδικών προβολών δεν συγκλίνει στην προβολή πάνω στην τομή των υποσυνόλων.

Προφανώς, στην περίπτωση όπου ο $\mathcal{H}$ είναι πεπερασμένης διάστασης, η σύγκλιση είναι ως προς την νόρμα. Στην πραγματικότητα, με ένα αντίστοιχο επιχείρημα με αυτό της απόδειξης της πρότασης 1.4.8, μπορεί να δείξει κανείς πως αρκεί ένα εκ των κλειστών υποσυνόλων να περιέχεται σε έναν πεπερασμένης διάστασης υπόχωρο. Δώδεκα χρόνια αργότερα, οι Bruck και Reich [21] απέδειξαν ότι κάθε περιοδικό γινόμενο metric προβολών σε χώρους Hilbert συγκλίνει ισχυρά σε ένα στοιχείο της τομής των υποσυνόλων. Αναφέρουμε αυτό το αποτέλεσμα στην ενότητα 2 ως Πόρισμα 2.2.13). Όπως και στην περίπτωση των κλειστών υποχώρων, αναρωτιέται κανείς αν μπορούμε να έχουμε πάντα ισχυρή σύγκλιση. Ο Hundal [8] κατασκεύασε δύο κλειστά και κυρτά σύνολα C_1 και C_2 με κοινή τομή μόνο το μηδέν, έτσι ώστε η ακολουθία $(P_{C_2}P_{C_1})^n$ ναι μέν συγκλίνει ασθενώς στο μηδέν, αλλά δεν συγκλίνει ως προς την νόρμα.

Μία αξιοσημείωτη παραλλαγή της μεθόδου των εναλλασσόμενων προβολών είναι ο λεγόμενος αλγόριθμος του Dykstra [17]. Έστω C ένα κλειστό και κυρτό υποσύνολο ενός χώρου Hilbert. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν κλειστά και κυρτά σύνολα $C_1, \ldots, C_J$, έτσι ώστε $C = \bigcap_{j=1}^{J} C_j$. Ο αλγόριθμος του Dykstra χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της βέλτιστης προσέγγισης ενός διανύσματος x από στοιχεία του C, δηλαδή, τον υπολογισμό του $P_C(x)$. Σε κάθε βήμα του αλγορίθμου χρειάζεται (μόνο) να υπολογίσουμε βέλτιστες προσεγγίσεις από κάθε C_j.

Μία άλλη ενδιαφέρουσα παραλλαγή της μεθόδου είναι η ακόλουθη. Έστωσαν $P_1, \ldots, P_J$ ορθογώνιες προβολές επί των κλειστών υποχώρων $M_1, \ldots, M_J$ ενός χώρου Hilbert, και έστω T ένας κυρτός συνδυασμός των P_j. Ο Lapidus [34] έδειξε πως η ακολουθία T^n συγκλίνει ισχυρά στην προβολή επί του $\bigcap_{j=1}^{J} M_j$. Αναλύουμε περαιτέρω τους κυρτούς συνδυασμούς προβολών στην ενότητα 2.3.

Τέλος, όπως και θα δούμε στο κεφάλαιο 2, μπορούμε να γενικεύσουμε πολλά από τα θεωρήματα που έχουμε δει και σε χώρους Banach με κάποιες καλές γεωμετρικές ιδιότητες.

Κεφάλαιο 2

Γενικεύσεις σε χώρους Banach

Σε αυτό το κεφάλαιο δούμε κατά πόσο μπορούμε να γενικεύσουμε/επεκτείνουμε τα θεωρήματα σύγκλισης του κεφαλαίου 1 σε χώρους Banach. Η πρώτη δυσκολία που συναντά κανείς σε χώρους Banach είναι ότι, σε αντίθεση με τους χώρους Hilbert, δεν ορίζεται πάντα η προβολή επί ενός κλειστού υποχώρου V, με την έννοια ότι δεν υπάρχει πάντα ταυτοδύναμη απεικόνιση P επί του V. Επιπλέον, ακόμη και αν ορίζεται, η απεικόνιση αυτή δεν είναι κατ'ανάγκη γραμμική ή συνεχής. Στην πραγματικότητα, υπάρχει μία γραμμική και συνεχής προβολή επί ενός κλειστού υποχώρου V αν και μόνο αν ο υπόχωρος αυτός είναι συμπληρωματικός (βλ. παράρτημα B.7).

Ένα κλασσικό παράδειγμα προβολής σε χώρους Banach είναι η προβολή βέλτιστης προσέγγισης, ή αλλιώς, η metric προβολή. Υπενθυμίζουμε πως ένα υποσύνολο C ενός χώρου Banach X καλείται Chebyshev αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει μοναδικό σημείο $c = c(x) \in C$, τέτοιο ώστε $d(x, C) = ||x - c||$. Το μοναδικό αυτό σημείο συμβολίζεται με $P_C(x)$. Η απεικόνιση $P_C \colon X \to C,\ x \mapsto P_C(x)$ καλείται η metric προβολή επί του C. Σημειωτέον πως $P_C^2 = P_C$, δηλαδή, η P_C είναι μία προβολή και πως $||P_C x|| \leq 2||x||$, δηλαδή, η P_C είναι φραγμένη. Αν ο X είναι γνήσια κυρτός και ανακλαστικός, τότε κάθε κλειστός υπόχωρος (γενικότερα, κάθε κλειστό και κυρτό υποσύνολο) είναι Chebyshev, και άρα η metric προβολή είναι καλά ορισμένη. Η metric προβολή είναι εν γένει μη γραμμική. Αν ο X είναι χώρος Hilbert, τότε η metric προβολή επί ενός κλειστού υποχώρου, δεν είναι τίποτε άλλο παρά την ορθογώνια προβολή επί του υποχώρου αυτού, η οποία είναι γραμμική. Στην πραγματικότητα, οι μόνοι χώροι των οποίων όλες οι metric προβολές επί κλειστών υποχώρων είναι γραμμικές είναι οι χώροι Hilbert [42]. Αν ο X είναι ομοιόμορφα κυρτός ή γενικότερα έχει την ιδιότητα Kadec-Klee, τότε η metric προβολή επί ενός Chebyshev συνόλου είναι συνεχής [41].

2.1 Το Θεώρημα του von Neumann σε χώρους Banach

Σε αυτήν την ενότητα παρουσιάζουμε ορισμένες γενικεύσεις του θεωρήματος von Neumann που οφείλονται στον Deutsch [32] . Υπενθυμίζουμε ότι από το Θεώρημα 1.3.1 (Neumann), έχουμε πως για κάθε V_1, V_2 κλειστούς υποχώρους του $\mathcal{H}$,

$$(P_{V_1}P_{V_2})^n x \xrightarrow{n\to\infty} P_{V_1\cap V_2}x, \quad x \in \mathcal{H}. \tag{2.1}$$

Θα ήλπιζε κανείς ότι για κάθε ζεύγος υποχώρων V_1, V_2, η σχέση (2.1) γενικεύεται και σε χώρους Banach, όπου αντί για ορθογώνιες προβολές, θεωρήσουμε metric προβολές. Δυστυχώς αυτό δεν ισχύει. Συγκεκριμένα, ο Stiles [30] έδειξε ότι:

Θεώρημα 2.1.1 (Stiles)**.** *Αν X είναι ανακλαστικός και γνήσια κυρτός χώρος Banach με διάσταση τουλάχιστον 3, και αν για κάθε A, B κλειστούς υποχώρους του X,*

$$(P_BP_A)^n x \xrightarrow{n\to\infty} P_{A\cap B}x, \quad x \in X,$$

όπου P_A, P_B και $P_{A\cap B}$ είναι οι metric προβολές επί των A, B και $A\cap B$ αντίστοιχα, τότε ο X είναι κατ'ανάγκη χώρος Hilbert.

Η ιστορία όμως δεν τελειώνει εδώ. Υπενθυμίζουμε πως αν A, B είναι κλειστοί υπόχωροι ενός χώρου Hilbert, τότε $I - P_A = P_{A^\perp}$ και $(A\cap B)^\perp = \overline{A^\perp + B^\perp}$. Έχοντας αυτά υπόψη, εύκολα βλέπει κανείς ότι η (2.1) είναι στην πραγματικότητα ισοδύναμη με την

$$[(I - P_{V_1^\perp})(I - P_{V_2^\perp})]^n x \xrightarrow{n\to\infty} (I - P_{\overline{V_1^\perp + V_2^\perp}})x, \quad x \in \mathcal{H}. \tag{2.2}$$

Σε αντίθεση με την (2.1), η (2.2) επεκτείνεται και σε χώρους Banach. Για παράδειγμα, ο Stiles [31] έδειξε πως αν ο X είναι πεπερασμένης διάστασης και γνήσια κυρτός, τότε η (2.2) ισχύει για κάθε ζεύγος υποχώρων V_1, V_2. Παραθέτουμε μία εναλλακτική απόδειξη του αποτελέσματος αυτού στο Πόρισμα 2.1.8.

Σκοπός αυτής της ενότητας είναι να δούμε πότε άλλοτε μπορούμε να εξασφαλίσουμε την σύγκλιση στην (2.2). Εν συντομία, δείχνουμε πως αν ο X είναι ομοιόμορφα κυρτός και λείος, και αν οι metric προβολές είναι γραμμικές, τότε η (2.2) ισχύει (Θεώρημα 2.1.5). Αν δεν απαιτήσουμε οι metric προβολές να είναι γραμμικές, τότε, κάτω από την προϋπόθεση ότι το άθροισμα των υποχώρων είναι κλειστό, μπορούμε πάλι να εξασφαλίσουμε την σύγκλιση στην (2.2) (Θεώρημα 2.1.10).

Ας ξεκινήσουμε με το γεγονός ότι ο χώρος Banach πρέπει να είναι (τουλάχιστον) λείος. Πράγματι, αν ο X δεν ήταν λείος, τότε θα υπήρχαν ένα μοναδιαίο διάνυσμα $x \in X$ και συναρτησιακά $f_1, f_2 \in X^*$ με νόρμα ένα, έτσι ώστε $f_1(x) = f_2(x) = ||x|| = 1$. Για $i = 1, 2$ θεωρούμε το υπερεπίπεδο $H_i = f_i^{-1}(\{1\})$ και τον κλειστό υπόχωρο $V_i = H_i - x$. Έπεται πως $P_Ax = P_Bx = 0$ και $(I - P_A)(I - P_B)x = x$, ενώ $(I - P_{\overline{A+B}})x = 0$. Ειδικότερα,

$$\lim_{n\to\infty}[(I - P_A)(I - P_B)]^n x = x \neq 0 = (I - P_{\overline{A+B}})x.$$

2.1.1 Λίγα πράγματα για την δυϊκή απεικόνιση

Η πλειότιμη (multivalued) απεικόνιση $J\colon X \to 2^{X^*}$ με τύπο

$$J(x) = \{x^* \in X^*\colon \langle x^*, x\rangle = ||x||\,||x^*||,\ ||x^*|| = ||x||\}$$

καλείται η (κανονικοποιημένη) δυϊκή απεικόνιση του X. Σημειωτέον πως από το Θεώρημα Hahn-Banach, για κάθε $x \in X$, το $J(x)$ είναι μη κενό. Είναι άμεσο πως ο X είναι λείος αν και μόνο αν για κάθε $x \in X$, το $J(x)$ είναι μονοσύνολο. Σε αυτήν την περίπτωση θα ταυτίζουμε το σύνολο $J(x) = \{j(x)\}$ με το συναρτησιακό $j(x)$. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με την δυϊκή απεικόνιση, παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο [33].

Αν M είναι ένας (όχι κατ'ανάγκη κλειστός) υπόχωρος του X, θέτουμε $M^0 = \{x \in X\colon ||x|| = d(x, M)\}$ $(= \ker P_M)$.

Λήμμα 2.1.2. *Αν M είναι υπόχωρος του X και $x \in X$, τότε*

(i) $J(x) \cap M^\perp \neq \varnothing$ *αν και μόνο αν* $x \in M^0$. *Ειδικότερα, αν ο X είναι λείος, τότε* $j(x) \in M^\perp$ *αν και μόνο αν* $x \in M^0$.

(ii) $P_M(x + m) = P_M(x) + m$ *για κάθε* $m \in M$ *και για κάθε* $x \in X$.

(iii) *Αν ο X είναι λείος, τότε* $A^0 \cap B^0 = (\overline{A + B})^0$.

Απόδειξη. (i): Άμεσο πόρισμα από το Θεώρημα Hahn-Banach.

(ii): Αρκεί να δείξουμε πως $\inf_{m'\in M} ||(x + m) - m'|| = ||(x + m) - (P_M x + m)||$, το οποίο είναι προφανές.

(iii): Από το (i), αρκεί να δείξουμε πως για κάθε $x \in X$, $j(x) \in A^\perp \cap B^\perp$ αν και μόνο αν $j(x) \in (\overline{A + B})^\perp$, το οποίο όμως ισχύει τετριμμένα, καθώς $(\overline{A + B})^\perp = A^\perp \cap B^\perp$. □

2.1.2 Το Θεώρημα του Deutsch

Στην υποενότητα αυτή αποδεικνύουμε τις προαναφερθείσες επεκτάσεις του Θεωρήματος 1.3.1 (von Neumann) στο πλαίσιο χώρων Banach. Οι αποδείξεις αυτές βασίζονται σε ένα αποτέλεσμα των Bruck και Reich [21], το οποίο παρουσιάζουμε στην ενότητα 2.2 ως Θεώρημα 2.2.9.

Λήμμα 2.1.3. *Έστω X ομοιόμορφα κυρτός χώρος Banach και έστωσαν M υπόχωρος του X και (x_n) ακολουθία στον X. Υποθέτουμε ότι το $L = \lim_{n\to\infty} ||x_n||$ υπάρχει. Τότε, τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(a) $\lim_{n\to\infty} ||x_n|| = \lim_{n\to\infty} ||x_n - P_{\overline{M}}(x_n)||$.

(b) $\lim_{n\to\infty} P_{\overline{M}}(x_n) = 0$.

Αν ο X είναι ομοιόμορφα λείος, τότε τα παραπάνω είναι ισοδύναμα με τα

(c) $\lim_{n\to\infty} ||j(x_n) - j(x_n - P_{\overline{M}}(x_n))|| = 0$.

(d) $\lim_{n\to\infty} |\langle j(x_n), \cdot\rangle| = 0$ *ομοιόμορφα σε κάθε φραγμένο υποσύνολο του* $\overline{M}$.

Απόδειξη. $(a) \implies (b)$: Έχουμε $\lim_{n\to\infty} ||x_n|| = \lim_{n\to\infty} ||x_n - P_B(x_n)|| = L$.
Επιπλέον, εφόσον

$$||\tfrac{1}{2}x_n + \tfrac{1}{2}(x_n - P_{\overline{M}}(x_n))|| = ||x_n - \tfrac{1}{2}P_{\overline{M}}(x_n)|| \geq d(x_n, \overline{M}) = ||x_n - P_{\overline{M}}(x_n)||,$$

έπεται πως $\lim_{n\to\infty} ||\frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2}(x_n - P_{\overline{M}}(x_n))|| = L$. Εφόσον ο X είναι ομοιόμορφα κυρτός, έπεται πως $\lim_{n\to\infty} ||x_n - (x_n - P_{\overline{M}}(x_n))|| = 0$ (βλ. Πρόταση B.6.6), ή ισοδύναμα, $\lim_{n\to\infty} ||P_{\overline{M}}(x_n)|| = 0$.

$(b) \implies (c)$: Έχουμε $||j(x_n)|| = ||x_n|| \xrightarrow{n\to\infty} L$ και $||j(x_n - P_{\overline{M}}(x_n))|| \xrightarrow{n\to\infty} L$. Επιπλέον,

$$\begin{aligned}
&||\tfrac{1}{2}j(x_n) + \tfrac{1}{2}j(x_n - P_{\overline{M}}(x_n)||\\
&\geq \frac{1}{2}\left(\left\langle j(x_n), \frac{x_n}{||x_n||}\right\rangle + \left\langle j(x_n - P_{\overline{M}}(x_n)), \frac{x_n}{||x_n||}\right\rangle\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(||x_n|| + \frac{1}{||x_n||}\left\langle j(x_n - P_{\overline{M}}(x_n)), x_n - P_{\overline{M}}(x_n)\right\rangle + \frac{1}{||x_n||}\left\langle j(x_n - P_{\overline{M}}(x_n)), P_{\overline{M}}(x_n)\right\rangle\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(||x_n|| + \frac{1}{||x_n||}||x_n - P_{\overline{M}}(x_n)||^2\right) \xrightarrow{n\to\infty} L,
\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από το ότι $x_n - P_{\overline{M}}(x_n) \in (\overline{M})^0$, και άρα (Βλ. Λήμμα 2.1.2) $j(x_n - P_{\overline{M}}(x_n)) \in M^\perp$. Συμπεραίνουμε ότι $||\frac{1}{2}j(x_n) + \frac{1}{2}j(x_n - P_{\overline{M}}(x_n)|| \xrightarrow{n\to\infty} L$. Το ζητούμενο προκύπτει από την ομοιόμορφη κυρτότητα του X^* (Βλ. Πρόταση B.6.6).

$(c) \implies (d)$: Έπεται άμεσα από την ανισότητα

$$\begin{aligned}
|\langle j(x_n), m\rangle| &\leq \left|\left\langle j(x_n) - j(x_n - P_{\overline{M}}(x_n)), m\right\rangle\right| + \left|\left\langle j(x_n - P_{\overline{M}}(x_n)), m\right\rangle\right|\\
&\leq ||m||\,||j(x_n) - j(x_n - P_{\overline{M}}(x_n))||, \quad m \in \overline{M}.
\end{aligned}$$

$(d) \implies (a)$: Σημειωτέον ότι $||x_n - P_{\overline{M}}(x_n)|| \leq ||x_n||$. Επιπλέον,

$$\begin{aligned}
||x_n - P_{\overline{M}}(x_n)|| &\geq \frac{1}{||j(x_n)||}\left|\left\langle j(x_n), x_n - P_{\overline{M}}(x_n)\right\rangle\right|\\
&= \left|\left\langle j(x_n), \frac{x_n}{||x_n||} - P_{\overline{M}}(\frac{x_n}{||x_n||})\right\rangle\right|\\
&= \left|||x_n|| - \left\langle j(x_n), P_{\overline{M}}(\frac{x_n}{||x_n||})\right\rangle\right|,
\end{aligned}$$

δείχνοντας ότι $\lim_{n\to\infty} ||x_n - P_{\overline{M}}(x_n)|| = L$. □

Πρόταση 2.1.4. *Έστωσαν* A, B *Chebyshev υπόχωροι ενός χώρου Banach* X *και* $x \in X$. *Θέτουμε* $x_0 = x$,

$$\begin{aligned} x_{2n-1} &= x_{2n-2} - P_A(x_{2n-2}), \\ x_{2n} &= x_{2n-1} - P_B(x_{2n-1}) = [(I - P_B)(I - P_A)]^n x. \end{aligned}$$

Ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) $x_{2n-1} \in (x + A + B) \cap A^0$ *και* $x_{2n} \in (x + A + B) \cap B^0$.

(ii) Η ακολουθία $(||x_n||)$ *είναι φθίνουσα και*

$$\lim_{n\to\infty} ||x_n|| = \lim_{n\to\infty} ||x_{2n-1} - P_B(x_{2n-1})|| = \lim_{n\to\infty} ||x_{2n} - P_A(x_{2n})||.$$

(iii) $J(x_{2n}) \cap B^\perp \neq \emptyset$ *και* $J(x_{2n-1}) \cap A^\perp \neq \emptyset$. *Ειδικότερα, αν ο* X *είναι* ***λείος***,

$$j(x_{2n}) \in B^\perp \quad \text{και} \quad j(x_{2n-1}) \in A^\perp.$$

(iv) Αν ο X *είναι* ***ομοιόμορφα κυρτός***, *τότε*

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} P_A(x_{2n}) = 0 = \lim_{n\to\infty} P_B(x_{2n-1}), \\ &\lim_{n\to\infty} ||x_{2n} - x_{2n-1}|| = 0. \end{aligned}$$

(v) Αν ο X ***ομοιόμορφα κυρτός*** *και* ***λείος***, *τότε*

(a) Αν μία εκ των (x_{2n}) *και* (x_{2n-1}) *συγκλίνει, τότε και οι δύο συγκλίνουν στο* $x - P_{\overline{A+B}}x$.

(b) Αν τα σύνολα A^0 *και* B^0 *είναι ασθενώς ακολουθιακά κλειστά, τότε οι ακολουθίες* (x_{2n}) *και* (x_{2n-1}) *συγκλίνουν ασθενώς στο* $x - P_{\overline{A+B}}x$.

(vi) Αν ο X ***ομοιόμορφα κυρτός*** *και* ***ομοιόμορφα λείος***, *τότε*

$$\lim_{n\to\infty} ||j(x_{2n}) - j(x_{2n-1})|| = 0,$$

και

$$\lim_{n\to\infty} \langle j(x_{2n}), \cdot \rangle = 0 \ \ (\lim_{n\to\infty} \langle j(x_{2n-1}), \cdot \rangle = 0 \text{ αντίστοιχα})$$

ομοιόμορφα σε κάθε φραγμένο υποσύνολο του A *(*B *αντίστοιχα).*

Απόδειξη. (i) Παρατηρούμε πως $x_1 = x - P_A(x) \in (x + A + B)$ και μάλιστα

$$||x_1|| = ||x - P_A(x)|| = d(x, A) = d(x - P_A(x), A) = d(x_1, A),$$

δείχνοντας ότι $x_1 \in A^0$. Επιπλέον, $x_2 = x_1 - P_B(x_1) \in (x + A + B)$ και

$$||x_2|| = ||x_1 - P_B(x_1)|| = d(x_1, B_1) = d(x_1 - P_B(x_1), B) = d(x_2, B),$$

δείχνοντας πως $x_2 \in B^0$. Συνεχίζοντας επαγωγικά προκύπτει το ζητούμενο.

(ii): Έπεται άμεσα από την ανίσωση

$$\begin{aligned} ||x_{2n+1}|| = ||x_{2n} - P_A(x_{2n})|| &= d(x_{2n}, A) \leq ||x_{2n}|| \\ &= ||x_{2n-1} - P_B(x_{2n-1})|| = d(x_{2n-1}, B) \\ &\leq ||x_{2n-1}||. \end{aligned}$$

(iii): Άμεσο από το Λήμμα 2.1.2, εφόσον $x_{2n-1} \in A^0$ και $x_{2n} \in B^0$.

(iv): Από το (ii), έχουμε πως $\lim_{n\to\infty} ||x_{2n-1}|| = \lim_{n\to\infty} ||x_{2n-1} - P_B(x_{2n-1})||$ και άρα, από το Λήμμα 2.1.3 (b) $\lim_{n\to\infty} P_B(x_{2n-1}) = 0$. Ομοίως δείχνουμε πως $\lim_{n\to\infty} P_A(x_{2n}) = 0$.

(v): Για το (a) : Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας πως η (x_{2n}) συγκλίνει στο $z \in X$. Από το (iv) παίρνουμε πως η (x_{2n+1}) συγκλίνει και αυτή στο z. Από το (i), έχουμε ότι $z \in (x + \overline{A + B}) \cap A^0 \cap B^0$. Επιπλέον, από το Λήμμα 2.1.2, έχουμε πως $A^0 \cap B^0 = (\overline{A + B})^0$. Συμπεραίνουμε λοιπόν πως $z = x + y$ για κάποιο $y \in \overline{A + B}$ και $x + y \in (\overline{A + B})^0$. Άρα,

$$||x + y|| = d(x + y, \overline{A + B}) = d(x, \overline{A + B}),$$

και κατά συνέπεια, $-y = P_{\overline{A+B}}x$. Με άλλα λόγια, $z = x - P_{\overline{A+B}}x$. (Υπενθυμίζουμε ότι η $P_{\overline{A+B}}$ είναι καλώς ορισμένη, καθώς ο υπόχωρος $\overline{A + B}$ είναι Chebyshev, από το Θεώρημα B.7.9.)

Για το (b) : Υπενθυμίζουμε ότι σε έναν τοπολογικό χώρο μία ακολουθία (u_n) συγκλίνει σε ένα σημείο u αν και μόνο αν κάθε υπακολουθία της έχει περαιτέρω υπακολουθία που συγκλίνει στο u. Έχοντας αυτό υπόψη, έστω (x_{2n_k}) μία υπακολουθία της (x_{2n}). Θα δείξουμε ότι η (x_{2n_k}) έχει περαιτέρω υπακολουθία που να συγκλίνει ασθενώς στο $x - P_{\overline{A+B}}(x)$. Εφόσον η (x_{2n_k}) είναι φραγμένη, θα υπάρχει υπακολουθία της η οποία συγκλίνει ασθενώς σε κάποιο $z \in X$ (βλ. Πόρισμα B.5.4). Όμως, λόγω της ακολουθιακής κλειστότητας των A^0, B^0, και από το Θεώρημα Mazur (βλ. Θεώρημα B.3.4), έχουμε ότι $z \in (x + \overline{A + B}) \cap A^0 \cap B^0$, και κατά συνέπεια, $z = x - P_{\overline{A+B}}(x)$. Ακολουθούμε παρόμοια λογική για την (x_{2n-1}).

(vi): Έπεται άμεσα από το Λήμμα 2.1.3 (c)(d).

□

Θεώρημα 2.1.5 (Deutsch - Πρώτη μορφή)**.** *Έστω X λείος και ομοιόμορφα κυρτός χώρος Banach. Έστωσαν A, B κλειστοί υπόχωροι του X. Υποθέτουμε ότι οι metric προβολές P_A και P_B είναι γραμμικές. Τότε,*

$$[(I - P_B)(I - P_A)]^n(x) \xrightarrow{n\to\infty} (I - P_{\overline{A+B}})(x), \quad x \in X.$$

Επιπλέον, η P_{A+B} είναι γραμμική.

Απόδειξη. Θέτουμε $P_1 = I - P_A$ και $P_2 = I - P_B$. Είναι προφανές ότι οι P_1 και P_2 είναι γραμμικές προβολές με νόρμα ένα. Από το Θεώρημα 2.2.9, το ισχυρό $\lim_{n\to\infty}(P_2P_1)^n x = Px$ υπάρχει για κάθε $x \in X$ και ορίζει μία γραμμική προβολή με νόρμα ένα επί του $Ran(P_1) \cap Ran(P_2)$. Από την Πρόταση 2.1.4 (v), έπεται πως $Px = (I - P_{\overline{A+B}})(x)$. □

Στο [35] αποδεικνύεται πως σε έναν ανακλαστικό χώρο Banach η metric προβολή P_M επί του κλειστού υποχώρου M είναι ασθενώς ακολουθιακά συνεχής αν και μόνο αν ο $\ker P_M (= M^0)$ είναι ασθενώς ακολουθιακά κλειστός. Με βάση την Πρόταση 2.1.4 (v), η απόδειξη του παρακάτω θεωρήματος είναι σαφής.

Θεώρημα 2.1.6. *Έστω X ομοιόμορφα κυρτός και λείος χώρος Banach και έστωσαν A, B κλειστοί υπόχωροι του X. Υποθέτουμε ότι οι P_A και P_B είναι ασθενώς ακολουθιακά συνεχείς. Τότε,*

$$[(I - P_B)(I - P_A)]^n(x) \xrightarrow{w} (I - P_{\overline{A+B}})(x), \quad x \in X.$$

Πόρισμα 2.1.7. *Έστω X ομοιόμορφα κυρτός και λείος χώρος Banach και έστωσαν A, B κλειστοί υπόχωροι του X. Υποθέτουμε ότι η δυϊκή απεικόνιση J είναι ασθενώς-ασθενώς άστρο ακολουθιακά συνεχής. Τότε,*

$$[(I - P_B)(I - P_A)]^n(x) \xrightarrow{w} (I - P_{\overline{A+B}})(x), \quad x \in X.$$

Απόδειξη. Με βάση την Πρόταση 2.1.4 (v), αρκεί να δείξουμε πως τα A^0 και B^0 είναι ασθενώς ακολουθιακά κλειστά. Προς αυτόν τον σκοπό, έστω (y_n) ακολουθία στο A^0 με $y_n \xrightarrow{w} y$. Με βάση το Λήμμα 2.1.2 και την ασθενώς-ασθενώς άστρο ακολουθιακά συνέχεια της J, παίρνουμε ότι

$$0 = \langle j(y_n), a\rangle \xrightarrow{n\to\infty} \langle j(y), a\rangle, \quad a \in A.$$

Με άλλα λόγια, $j(y) \in A^{\perp}$, και κατά συνέπεια, $y \in A^0$. Ομοίως δείχνουμε ότι το B^0 είναι ασθενώς ακολουθιακά κλειστό. □

Πόρισμα 2.1.8 (Stiles [31])**.** *Έστω X πεπερασμένης διάστασης γνήσια κυρτός και λείος χώρος με νόρμα. Τότε για κάθε κλειστούς υποχώρους A, B*

$$[(I - P_B)(I - P_A)]^n(x) \xrightarrow{n\to\infty} (I - P_{A+B})(x), \quad x \in X.$$

Απόδειξη. Κάθε πεπερασμένης διάστασης γνήσια κυρτός χώρος με νόρμα είναι και ομοιόμορφα κυρτός [44]. Επιπλέον, με ένα απλό επιχείρημα συμπάγειας, έπεται πως η metric προβολή επί ενός πεπερασμένης διάστασης υποχώρου είναι συνεχής. Τέλος, σε χώρους πεπερασμένης διάστασης, η ασθενής τοπολογία συμπίπτει με την norm τοπολογία. Το υπόλοιπο της απόδειξης έπεται από το Θεώρημα 2.1.6. □

Για την απόδειξη του επόμενου θεωρήματος θα χρειαστούμε το ακόλουθο πόρισμα του θεωρήματος ανοιχτής απεικόνισης.

Λήμμα 2.1.9. *Έστω X χώρος Banach, και έστωσαν A, B κλειστοί υπόχωροι του X. Υποθέτουμε ότι ο $A + B$ είναι κλειστός. Αν C είναι φραγμένο υποσύνολο του $A + B$, τότε υπάρχει σταθερά $\delta > 0$, έτσι ώστε για κάθε $c \in C$ υπάρχουν $a \in A \cap \delta B_X$ και $b \in B \cap \delta B_X$ με $c = a + b$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε το χώρο γινόμενο $A\times B$ με την νόρμα $||[a, b]|| = \max\{||a||, ||b||\}$. Η απεικόνιση $L\colon A \times B \to A + B$, με τύπο $L(a, b) = a + b$, είναι συνεχής, γραμμική και επί. Συνεπώς, από το θεώρημα ανοιχτής απεικόνισης (Βλ. Θεώρημα B.1.19), υπάρχει $\varepsilon > 0$, έτσι ώστε $L(B_{A\times B}) \supseteq \varepsilon B_{A+B}$. Εφόσον το C είναι φραγμένο, υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $\delta\varepsilon B_{A+B} \supseteq C$. Τελικώς,

$$L(\delta B_{A\times B}) = \delta L(B_{A\times B}) \supseteq \delta\varepsilon B_{A+B} \supseteq C,$$

από όπου και έπεται το ζητούμενο. □

Θεώρημα 2.1.10 (Deutsch - Δεύτερη μορφή)**.** *Έστω X ομοιόμορφα κυρτός και ομοιόμορφα λείος χώρος Banach, και έστωσαν A, B κλειστοί υπόχωροι του X. Υποθέτουμε ότι ο $A + B$ είναι κλειστός. Τότε,*

$$[(I - P_B)(I - P_A)]^n(x) \xrightarrow{n\to\infty} (I - P_{\overline{A+B}})(x), \quad x \in X.$$

Απόδειξη. Έστω $x \in X$. Θεωρούμε την ακολουθία $x_{2n} = [(I - P_B)(I - P_A)]^n(x)$. Από την Πρόταση 2.1.4 (i) (ii) έχουμε ότι $x_n = x + a_n + b_n$ για κάποια $a_n \in A, b_n \in B$, και πως το $\lim_{n\to\infty} ||x_{2n}||$ υπάρχει. Σημειώνουμε πως

$$\begin{aligned} x_{2n} - P_{A+B}(x_{2n}) &= x + a_n + b_n - P_{A+B}(x + a_n + b_n) \\ &= x - P_{A+B}(x), \end{aligned}$$

και άρα, για να δείξουμε ότι $x_{2n} \xrightarrow{n\to\infty} x - P_{A+B}(x)$, αρκεί (και πρέπει) να δείξουμε ότι $P_{A+B}(x_{2n}) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Από το Λήμμα 2.1.3 (d), αρκεί να δείξουμε ότι $\lim_{n\to\infty} \langle j(x_{2n}), \cdot \rangle = 0$ για κάθε φραγμένο υποσύνολο του $A+B$. Προς αυτόν τον σκοπό, έστω C φραγμένο υποσύνολο του $A+B$. Από το Λήμμα 2.1.9, υπάρχουν $A_1 \subseteq A$ και $B_1 \subseteq B$ φραγμένα ώστε $C \subseteq A_1 + B_1$. Το ζητούμενο έπεται από την Πρόταση 2.1.4 (iii) (vi). □

Πόρισμα 2.1.11. *Έστω X ομοιόμορφα κυρτός και ομοιόμορφα λείος χώρος Banach, και έστωσαν A, B κλειστοί υπόχωροι του X. Υποθέτουμε ότι υπάρχει κλειστός υπόχωρος $V \subseteq A$, έτσι ώστε $\overline{A+B} = V \oplus B$. Τότε,*

$$[(I-P_B)(I-P_A)]^n(x) \xrightarrow{n\to\infty} (I - P_{\overline{A+B}})(x), \quad x \in X.$$

Απόδειξη. Είναι άμεσο ότι ο $A+B$ είναι κλειστός. Το ζητούμενο έπεται από το Θεώρημα 2.1.10. □

Πόρισμα 2.1.12. *Έστω $1 < p < +\infty$. Αν A, B είναι κλειστοί υπόχωροι του L^p, έτσι ώστε το άθροισμα $A+B$ είναι κλειστό, τότε Τότε,*

$$[(I-P_B)(I-P_A)]^n(x) \xrightarrow{n\to\infty} (I - P_{A+B})(x), \quad x \in X.$$

Το επόμενο λογικό ερώτημα είναι κατά πόσο η προϋπόθεση "$A+B$ κλειστός" στο Θεώρημα 2.1.10 είναι αναγκαία. Ο Boznay [26] προσπάθησε να δείξει πως η απαίτηση αυτή μπορεί να παραληφθεί, αν και η απόδειξη του δεν είναι πολύ "πειστική" [37].

2.2 Το Θεώρημα Halperin σε χώρους Banach

Σε αυτή την ενότητα χρησιμοποιούμε εργαλεία από την θεωρία (μη γραμμικών) non-expansive απεικονίσεων σε χώρους Banach, για να αποδείξουμε ορισμένες γενικεύσεις του Θεωρήματος 1.3.2 (Halperin). Ο αναγνώστης μπορεί να βρει περαιτέρω λεπτομέρειες στα [21] και [22].

Εν συντομία, δείχνουμε πως αν ο X είναι ένας ομοιόμορφα κυρτός χώρος Banach και $P_1, \ldots, P_J$ είναι γραμμικές προβολές με νόρμα ένα επί των κλειστών υποχώρων $M_1, \ldots, M_J$, τότε η ακολουθία $(P_J \cdots P_1)^n$ συγκλίνει ισχυρά σε μία προβολή με νόρμα ένα επί του $\bigcap_{j=1}^J M_j$ (Θεώρημα 2.2.9). Εφόσον τα εργαλεία των αποδείξεων είναι καθαρά μη γραμμικά, αποδεικνύουμε και μερικά οριακά θεωρήματα για μη γραμμικές απεικονίσεις, όπως για παράδειγμα metric προβολές σε χώρους Hilbert (Πόρισμα 2.2.13).

2.2.1 Nonexpansive απεικονίσεις

Έστω X χώρος Banach και έστω $T\colon D(T) \subseteq X \to X$ μία (εν γένει μη γραμμική) απεικόνιση με πεδίο ορισμού $D(T)$. Θα συμβολίζουμε με $Fix(T)$ το σύνολο όλων των σταθερών σημείων της T, δηλαδή, $Fix(T) = \{x \in X : Tx = x\}$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in D(T)$, $T^n x \in X$. Η ακολουθία $(T^n x)$ θα λέγεται τροχιά της T στο σημείο x.

Ορισμός 2.2.1. Η απεικόνιση T καλείται:

(i) **nonexpansive**, αν για κάθε $x, y \in D(T)$, $||Tx - Ty|| \leq ||x - y||$.

(ii) **firmly nonexpansive**, αν για κάθε $r > 0$ και για κάθε $x, y \in D(T)$,

$$||Tx - Ty|| \leq ||r(x - y) + (1 - r)(Tx - Ty)||.$$

(iii) **strongly nonexpansive**, αν η T είναι nonexpansive και αν για κάθε ακολουθίες $(x_n), (y_n)$ στο $D(T)$ με $\sup_{n\in\mathbb{N}} ||x_n - y_n|| < +\infty$ και $||x_n - y_n|| - ||Tx_n - Ty_n|| \xrightarrow{n\to\infty} 0$, έπεται πως

$$(x_n - y_n) - (Tx_n - Ty_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

(iv) **asymptotically regular στο σημείο** $x \in D(T)$, αν $\lim_{n\to\infty}(T^n x - T^{n+1}x) = 0$. Επιπλέον, αν η T είναι asymptotically regular σε κάθε σημείο, θα λέμε ότι είναι asymptotically regular.

Παρατήρηση 2.2.2. (a) Αν T είναι strongly nonexpansive και υπάρχουν $x, y \in D(T)$, έτσι ώστε $||Tx - Ty|| = ||x - y||$, τότε $x - y = Tx - Ty$.

(b) Η κλάση των strongly nonexpansive απεικονίσεων είναι κλειστή ως προς την σύνθεση.

(c) Αν ο X είναι, επιπλέον, ομοιόμορφα κυρτός, τότε όπως και θα δούμε στην Πρόταση 2.2.6 κάθε firmly nonexpansive απεικόνιση είναι strongly nonexpansive.

Πρόταση 2.2.3. *Αν η T είναι strongly nonexpansive, τότε για κάθε $k \geq 1$,*

$$\lim_{n\to\infty} ||T^{n+1}x - T^n x|| = \frac{1}{k} \lim_{n\to\infty} ||T^{n+k}x - T^n x|| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}||T^n x||, \quad x \in D(T).$$

Απόδειξη. Βλ. Πρόταση 1.2 στο [21]. □

Πόρισμα 2.2.4. *Αν T είναι strongly nonexpansive και $Fix(T) \neq \emptyset$, τότε η T είναι asymptotically regular.*

Απόδειξη. Έστωσαν $x_0 \in Fix(T)$ και $x \in D(T)$. Τότε,

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} ||T^{n+1}x - T^n x|| &= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}||T^n x|| \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} (\frac{1}{n}||T^n x - T^n x_0|| + \frac{1}{n}||T^n x_0||) \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}(||x - x_0|| + ||x_0||) \\ &= 0.\end{aligned}$$

□

Πόρισμα 2.2.5. *Αν ο X είναι, επιπλέον, ομοιόμορφα κυρτός, C είναι κυρτό και συμμετρικό υποσύνολο του X, και αν $T: C \to C$ είναι strongly nonexpansive και περιττή απεικόνιση, τότε η ακολουθία των τροχιών $(T^n x)$ συγκλίνει ισχυρά σε ένα σταθερό σημείο της T.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 1.1 στο [22], κάθε περιττή και asymptotically regular nonexpansive απεικόνιση σε έναν ομοιόμορφα κυρτό χώρο Banach έχει ισχυρά συγκλίνουσες τροχιές. Συνεπώς, από το Πόρισμα 2.2.4, η ακολουθία $(T^n x)$ συγκλίνει ισχυρά σε ένα σημείο $y \in X$. Έπεται άμεσα ότι $Ty = y$, και άρα, $y \in Fix(T)$. □

2.2.2 Το Θεώρημα των Bruck και Reich

Σε αυτήν την υποενότητα αποδεικνύουμε ένα θεώρημα των Bruck και Reich [21] (Θεώρημα 2.2.9), το οποίο αποτελεί γενίκευση του Θεωρήματος Halperin (Θεώρημα 1.3.2) στο πλαίσιο χώρων Banach. Χρησιμοποιούμε τα αποτελέσματα της προηγούμενης ενότητας για γραμμικές προβολές με νόρμα ένα και, γενικότερα, για firmly nonexpansive απεικονίσεις (βλ. Λήμμα 2.2.7) σε ομοιόμορφα κυρτούς χώρους Banach. Αυτό είναι εφικτό με βάση την ακόλουθη:

Πρόταση 2.2.6. *Αν ο X είναι, επιπλέον, ομοιόμορφα κυρτός, τότε κάθε firmly nonexpansive απεικόνιση είναι strongly nonexpansive.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε κάτι πιο ισχυρό: αν T είναι μία απεικόνιση τέτοια ώστε

$$||Tx - Ty|| \leq ||r(x-y) + (1-r)(Tx - Ty)||, \quad x, y \in D(T),$$

για κάποια σταθερά $0 < c < 1$, τότε η T είναι strongly nonexpansive. Είναι άμεσο ότι μία τέτοια απεικόνιση T είναι nonexpansive. Έστωσαν τώρα ακολουθίες $(x_n), (y_n)$ με $\sup_{n\in\mathbb{N}} ||x_n - y_n|| < +\infty$ και $||x_n - y_n|| - ||Tx_n - Ty_n|| \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $||x_n - y_n|| \xrightarrow{n\to\infty} d$, και κατά συνέπεια, $||Tx_n - Ty_n|| \xrightarrow{n\to\infty} d$. Βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} d \xleftarrow{n\to\infty} ||Tx_n - Ty_n|| &\le ||(1-c)(Tx_n - Ty_n) + c(x_n - y_n)|| \\ &\le (1-c)||Tx_n - Ty_n|| + c||x_n - y_n|| \xrightarrow{n\to\infty} d, \end{aligned}$$

και άρα $||(1-c)(Tx_n - Ty_n) + c(x_n - y_n)|| \xrightarrow{n\to\infty} d$. Από την ομοιόμορφη κυρτότητα του χώρου , έπεται πως $||(Tx_n - Ty_n) - (x_n - y_n)|| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ (βλ. Πρόταση B.6.6), δείχνοντας ότι η T είναι strongly nonexpansive. □

Λήμμα 2.2.7. *Κάθε γραμμική προβολή με νόρμα ένα είναι firmly nonexpansive.*

Απόδειξη. Έστω Q γραμμική προβολή με νόρμα ένα. Για κάθε $r > 0$ και για κάθε $x, y \in X$, έχουμε πως

$$||Qx - Qy|| = ||Q\big((1-r)(Qx - Qy) + r(x - y)\big)|| \le ||(1-r)(Qx - Qy) + r(x - y)||,$$

δείχνοντας πως η Q είναι πράγματι firmly nonexpansive. □

Λήμμα 2.2.8. *Έστωσαν $T_1, \dots, T_J$ strongly nonexpansive απεικονίσεις. Υποθέτουμε ότι $\bigcap_{j=1}^{J} Fix(T_j) \neq \emptyset$. Τότε,*

$$\bigcap_{j=1}^{J} Fix(T_j) = Fix(T_J \cdots T_1).$$

Απόδειξη. Είναι προφανές ότι $\bigcap_{j=1}^{J} Fix(T_j) \subseteq Fix(T_J \cdots T_1)$. Ανάποδα, έστω πως $T_J \cdots T_1 x = x$. Θα δείξουμε ότι $T_j x = x$ για κάθε $j \in \{1, \dots, J\}$. Έστω $x_0 \in \bigcap_{j=1}^{J} Fix(T_j)$. Θέτουμε $y = T_{J-1} \cdots T_1 x$. Τότε,

$$\begin{aligned} ||x - x_0|| = ||T_J y - x_0|| &= ||T_J y - T_J x_0|| \le ||y - x_0|| \\ &= ||T_{J-1} \cdots T_1 x - T_{J-1} x_0|| \le \cdots \le ||x - x_0||, \end{aligned}$$

και άρα, $||T_J y - T_J x_0|| = ||T_J y - x_0|| = ||y - x_0||$. Εφόσον ο T_J είναι strongly nonexpansive, έπεται ότι $T_J y - T_J x_0 = y - x_0$ ή ισοδύναμα, ότι $T_J x = x$. Με επαγωγή δείχνουμε πως $T_j x = x$ για κάθε $j \in \{1, \dots, J\}$. □

Διαθέτουμε πλέον τα κατάλληλα εργαλεία ώστε να επεκτείνουμε το Θεώρημα του Halperin (Θεώρημα 1.3.2).

Θεώρημα 2.2.9 (Bruck - Reich). *Υποθέτουμε ότι ο X είναι, επιπλέον, ομοιόμορφα κυρτός. Έστωσαν $P_1, \dots, P_J$ γραμμικές προβολές με νόρμα ένα επί των κλειστών υποχώρων $M_1, \dots, M_J$. Τότε, το ισχυρό $\lim_{n\to\infty}(P_J \cdots P_1)^n x = Px$ υπάρχει για κάθε $x \in X$, και ορίζει μία γραμμική προβολή με νόρμα ένα επί του $\bigcap_{j=1}^J M_j$.*

Απόδειξη. Από το Λήμμα 2.2.7, την Πρόταση 2.2.6, και εφόσον η κλάση των strongly nonexpansive απεικονίσεων είναι κλειστή ως προς την σύνθεση, η $R = P_J \cdots P_1$ είναι strongly nonexpansive. Παρατηρούμε ότι η R είναι προφανώς περιττή απεικόνιση, και άρα, από το Πόρισμα 2.2.5, το ισχυρό όριο $\lim_{n\to\infty} R^n x = Px$ υπάρχει για κάθε $x \in X$. Είναι προφανές ότι η P είναι γραμμική προβολή και μάλιστα nonexpansive (άρα έχει νόρμα ένα). Επιπλέον, η P είναι επί του $\ker(I - P_J \cdots P_1)$, και άρα, από το Λήμμα 2.2.8, έπεται ότι η P είναι επί του $\ker(I - P_J \cdots P_1) = \bigcap_{j=1}^J \ker(I - P_j) = \bigcap_{j=1}^J M_j$. □

Μία άμεση εφαρμογή αυτού του θεωρήματος, την οποία συμπεριλαμβάνουμε στην ενότητα 3.4, είναι στον τομέα της θεωρίας πιθανοτήτων. Εν συντομία, αν $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ είναι ένας χώρος πιθανότητας, $f \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ $(1 < p < +\infty)$, και $\mathcal{A}$ είναι μία υπο σ-άλγεβρα της $\mathcal{F}$, τότε υπάρχει μοναδική $\mathcal{A}-$μετρήσιμη συνάρτηση, η οποία συμβολίζεται με $\mathbb{E}[f \mid \mathcal{A}]$ και καλείται η δεσμευμένη μέση τιμή της f ως προς την $\mathcal{A}$, τέτοια ώστε $\int_A f \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}[f \mid \mathcal{A}]$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$. Ο τελεστής $f \mapsto \mathbb{E}[f \mid \mathcal{A}]$ είναι μία γραμμική προβολή με νόρμα ένα επί του κλειστού υποχώρου $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, και άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 2.2.9.

Παρατήρηση 2.2.10. Το Θεώρημα αυτό δεν ισχύει για γενικούς χώρους Banach. Για παράδειγμα, θεωρούμε τον χώρο $\mathbb{R}^4$ με την supremum νόρμα, και τις προβολές

$$P_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, x_1, x_2),$$
$$P_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_4, x_3, x_3, x_4).$$

Βλέπουμε πως $||P_1|| = ||P_2|| = 1$, αλλά $(P_2P_1)^n(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2, x_1, x_1, x_2)$ για άρτια n, ενώ $(P_2P_1)^n(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, x_2, x_1)$ για περιττά n.

Σχόλιο 2.2.11. Αξίζει να αναφέρουμε ότι το Θεώρημα 2.2.9 επεκτείνεται και σε μη γραμμικές απεικονίσεις. Έστω C ένα κλειστό κυρτό υποσύνολο του X και έστω F ένα κλειστό υποσύνολο του C. Μία απεικόνιση $P \colon C \to F$ λέγεται **retraction**, αν $Px = x$ για κάθε $x \in F$. Επιπλέον, μία τέτοια P λέγεται **sunny** αν $P((1-t)Px + tx) = Px$ οποτεδήποτε $t \geq 0$ και $x, (1-t)Px + tx \in C$. Κλασσικό παράδειγμα μίας τέτοιας απεικόνισης είναι η metric προβολή. Με ένα παρόμοιο επιχείρημα με αυτό του Λήμματος 2.2.7, βλέπουμε ότι κάθε sunny nonexpansive retraction είναι firmly nonexpansive. Μπορεί να δειχθεί (Βλ. [23] Θεώρημα 1) πως αν ο X είναι λείος, τότε υπάρχει το πολύ μία retraction του C επί του F η οποία είναι firmly nonexpansive. Ειδικότερα, αυτή η απεικόνιση καθορίζεται πλήρως από την ιδιότητα $Px = y$ αν και μόνο αν $||y-f|| \leq ||(1-t)y+tx-f||$ για κάθε $t \geq 0$ και για κάθε $f \in F$. Έπεται εύκολα πως αν τα C και F είναι συμμετρικά, τότε η (μοναδική) sunny nonexpansive retraction του C επί του F είναι περιττή απεικόνιση. Η απόδειξη του επόμενου θεωρήματος είναι πλέον σαφής.

Θεώρημα 2.2.12. *Υποθέτουμε πως ο X είναι, επιπλέον, ομοιόμορφα κυρτός και λείος. Αν $C \subseteq X$ είναι συμμετρικό, κυρτό και κλειστό, και αν $P_j : C \to F_j$ είναι sunny nonexpansive retractions επί των συμμετρικών υποσυνόλων F_j $(1 \leq j \leq J)$, τότε το ισχυρό $\lim_{n\to\infty}(P_J \cdots P_1)^n x = Px$ υπάρχει για κάθε $x \in C$ και ορίζει μία nonexpansive retraction του C επί του $\bigcap_{j=1}^J F_j$.*

Πόρισμα 2.2.13. *Έστω $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert και έστω $P_j : \mathcal{H} \to C_j$ $(1 \leq j \leq J)$ metric προβολές επί των κλειστών και κυρτών υποσυνόλων $\{C_j : 1 \leq j \leq J\}$ του $\mathcal{H}$. Υποθέτουμε ότι $\bigcap_{j=1}^J C_j \neq \emptyset$. Τότε, το ισχυρό $\lim_{n\to\infty}(P_J \cdots P_1)^n x = Px$ υπάρχει για κάθε $x \in \mathcal{H}$ και ορίζει μία nonexpansive retraction P του $\mathcal{H}$ επί του $\bigcap_{j=1}^J C_j$.*

Απόδειξη. Άμεσο από το Θεώρημα 2.2.12 και το γεγονός ότι οι metric προβολές σε χώρους Hilbert είναι sunny και nonexpansive retractions. □

2.3 Οριακά θεωρήματα για γινόμενα κυρτών συνδυασμών προβολών

Μέχρι στιγμής, όλα τα θεωρήματα με τα οποία έχουμε ασχοληθεί μελετάνε την ασυμπτωτική συμπεριφορά γινομένων προβολών. Σε αυτό το κεφάλαιο αναφέρουμε μερικά οριακά θεωρήματα για γινόμενα κυρτών συνδυασμών από προβολές, τα οποία οφείλονται στον Reich [24].

Συγκεκριμένα, δείχνουμε πως αν X είναι ένας ομοιόμορφα κυρτός χώρος Banach, $P_1, \ldots, P_J$ είναι γραμμικές προβολές με νόρμα ένα επί των κλειστών υποχώρων $M_1, \ldots, M_J$, και $T = \sum_j a_j P_j$ είναι κυρτός συνδυασμός των $P_1, \ldots, P_J$, τότε δείχνουμε πως η ακολουθία T^n συγκλίνει ισχυρά σε μία προβολή με νόρμα ένα επί του $\bigcap_{j=1}^J M_j$ (Θεώρημα 2.3.3). Επιπλέον, εφόσον τα εργαλεία που χρησιμοποιούμε είναι μη γραμμικά, αναφέρουμε ορισμένες μη γραμμικές επεκτάσεις του θεωρήματος αυτού.

Λήμμα 2.3.1. *Κυρτός συνδυασμός strongly nonexpansive απεικονίσεων είναι strongly nonexpansive.*

Απόδειξη. Έστωσαν $T_1, \ldots, T_J$ strongly nonexpansive απεικονίσεις και έστω $T = \sum_{j=1}^J a_j T_j$ κυρτός συνδυασμός των $T_1, \ldots, T_J$. Είναι προφανές ότι η T είναι nonexpansive. Επιπλέον, για κάθε $x, y \in X$,

$$||x - y|| - ||Tx - Ty|| \geq ||x - y|| - \sum_{j=1}^{J} a_j ||T_j x - T_j y||$$
$$= \sum_{j=1}^{J} a_j (||x - y|| - ||T_j x - T_j y||).$$

Έστωσαν τώρα (x_n) και (y_n) ακολουθίες στον X με $\sup_{n\in\mathbb{N}} ||x_n - y_n|| < +\infty$ και $||x_n - y_n|| - ||Tx_n - Ty_n|| \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Τότε, για κάθε $j \in \{1, \ldots, J\}$, $||x_n - y_n|| - ||T_j x_n - T_j y_n|| \xrightarrow{n\to\infty} 0$, και κατά συνέπεια, εφόσον ο T_j είναι strongly nonexpansive, θα ισχύει ότι $(x_n - y_n) - (T_j x_n - T_j y_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Έπεται ότι $(x_n - y_n) - (Tx_n - Ty_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$. □

Λήμμα 2.3.2. *Έστωσαν $T_1, \ldots, T_J$ strongly nonexpansive απεικονίσεις και έστω $T = \sum_{j=1}^{J} a_j T_j$ κυρτός συνδυασμός των $T_1, \ldots, T_J$. Υποθέτουμε πως $\bigcap_{j=1}^{J} Fix(T_j) \neq \emptyset$. Τότε,*

$$\bigcap_{j=1}^{J} Fix(T_j) = Fix(T).$$

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι $Fix(T) \subseteq \bigcap_{j=1}^{J} Fix(T_j)$. Προς αυτόν τον σκοπό, έστω πως $Tx = x$. Επιλέγουμε $x_0 \in \bigcap_{j=1}^{J} Fix(T_j)$. Τότε,

$$||x - x_0|| = ||Tx - Tx_0|| \leq \sum_{j=1}^{J} a_j ||T_j x - T_j x_0|| \leq \sum_{j=1}^{J} a_j ||x - x_0|| = ||x - x_0||.$$

Συνεπώς, $||x - x_0|| = ||T_j x - T_j x_0||$ για κάθε $j \in \{1, \ldots, J\}$. Εφόσον κάθε T_j είναι strongly nonexpansive, έπεται πως $x - x_0 = T_j x - T_j x_0$ για κάθε $j \in \{1, \ldots, J\}$, ή ισοδύναμα, $x \in \bigcap_{j=1}^{J} Fix(T_j)$. □

Θεώρημα 2.3.3 (Reich)**.** *Έστω πως ο X είναι ομοιόμορφα κυρτός και έστωσαν $P_1, \ldots, P_J$ γραμμικές προβολές με νόρμα ένα επί των κλειστών υποχώρων $M_1, \ldots, M_J$. Έστωσαν $0 < a_j < 1$ $(1 \leq j \leq J)$ με $\sum a_j = 1$. Τότε το ισχυρό $\lim_{n\to\infty} (\sum a_j P_j)^n x = Px$ υπάρχει για κάθε $x \in X$, και ορίζει μία γραμμική προβολή με νόρμα ένα επί του $\bigcap_{j=1}^{J} M_j$.*

Απόδειξη. Θέτουμε $T = \sum a_j P_j$. Από το Λήμμα 2.2.7 και την Πρόταση 2.2.6, έπεται πως κάθε P_j είναι strongly nonexpansive. Ως εκ τούτου, από το Λήμμα 2.3.1, η T είναι strongly nonexpansive. Εφόσον η T είναι περιττή (όντας γραμμική), από το Πόρισμα 2.2.5, το ισχυρό όριο $\lim_{n\to\infty} (\sum a_j P_j)^n x = Px$ υπάρχει για κάθε $x \in X$. Επιπλέον, η $P\colon X \to Fix(T)$ είναι nonexpansive γραμμική προβολή επί του $Fix(T)$. Τέλος, εφόσον $0 \in Fix(T)$ (άρα δεν είναι κενό), το Λήμμα 2.3.2 μας δίνει ότι $Fix(T) = \bigcap_{j=1}^{J} Fix(T_j)$. □

Το Θεώρημα 2.3.3 είχε αποδειχθεί και από τον Lapidus [34] για την περίπτωση όπου ο X είναι χώρος Hilbert, όμως η απόδειξη του δεν μπορούσε να γενικευτεί σε χώρους Banach. Οι Badea και Lyubich [38] γενίκευσαν το Θεώρημα 2.3.3 περαιτέρω. Συγκεκριμένα, έδειξαν πως αν $P_1, \ldots, P_J$ είναι γραμμικές προβολές με νόρμα ένα σε έναν ομοιόμορφα κυρτό ή ομοιόμορφα λείο χώρο Banach X, τότε για κάθε T στην κυρτή πολλαπλασιαστική ημιομάδα παραγόμενη από τις $P_1, \ldots, P_J$, το ισχυρό $\lim_{n\to\infty} T^n x = Px$ υπάρχει για κάθε $x \in X$ και ορίζει μία γραμμική προβολή με νόρμα ένα. Επιπρόσθετα, αν ο χώρος X είναι ανακλαστικός, έδειξαν ότι ισχύει κάτι παρόμοιο για μία ευρεία κλάση προβολών (κλάση (D) [38]). Όπως και το Θεώρημα 2.2.9 (Bruck - Reich) της ενότητας 2.2.2, το παραπάνω θεώρημα επιδέχεται και αυτό μία μη γραμμική επέκταση.

Θεώρημα 2.3.4. *Έστω πως ο X είναι λείος και ομοιόμορφα κυρτός. Έστωσαν $P_1, \ldots, P_J$ sunny nonexpansive retractions επί των συμμετρικών υποσυνόλων $C_1, \ldots, C_J$. Αν $0 < a_j < 1$ $(1 \le j \le J)$ και $\sum a_j = 1$, τότε το ισχυρό $\lim_{n\to\infty}(\sum a_j P_j)^n x = Px$ υπάρχει για κάθε $x \in X$, και ορίζει μία nonexpansive retraction P του X επί του $\bigcap_{j=1}^J C_j$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι παρόμοια με αυτή του Θεωρήματος 2.3.3. Σημειώνουμε ότι κάθε sunny nonexpansive retraction του X επί ενός κυρτού συνόλου είναι περιττή και firmly nonexpansive. □

Εφόσον οι metric προβολές επί κλειστών υποσυνόλων ενός χώρου Banach είναι sunny και nonexpansive retractions, έχουμε το ακόλουθο:

Πόρισμα 2.3.5. *Έστω $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert και έστωσαν $P_1, \ldots, P_J$ metric προβολές επί των συμμετρικών, κυρτών και κλειστών υποσυνόλων $C_1, \ldots, C_J$. Αν $0 < a_j < 1$ $(1 \le j \le J)$ και $\sum a_j = 1$, τότε το ισχυρό $\lim_{n\to\infty}(\sum a_j P_j)^n x = Px$ υπάρχει για κάθε $x \in X$, και ορίζει μία nonexpansive retraction P του X επί του $\bigcap_{j=1}^J C_j$.*

Αν παραλήψουμε την υπόθεση τα C_j του Θεωρήματος 2.3.4 να είναι συμμετρικά, τότε μπορούμε να εξασφαλίσουμε ασθενή σύγκλιση, δεδομένου ότι τα C_j έχουν μη κενή τομή, και αν ο X είναι, επιπλέον, ομοιόμορφα λείος [24].

Θεώρημα 2.3.6. *Έστω X ομοιόμορφα κυρτός και ομοιόμορφα λείος χώρος Banach. Έστωσαν $P_1, \ldots, P_J$ sunny nonexpansive retractions του X επί των $C_1, \ldots, C_J$. Υποθέτουμε πως η τομή $\bigcap_{j=1}^J C_j$ είναι μη κενή. Αν $0 < a_j < 1$ $(1 \le j \le J)$ και $\sum a_j = 1$, τότε το ασθενές $\lim_{n\to\infty}(\sum a_j P_j)^n x = Px$ υπάρχει για κάθε $x \in E$, και ορίζει μία nonexpansive retraction P του E επί της $\bigcap_{j=1}^J C_j$.*

Πόρισμα 2.3.7. *Έστω $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert και έστωσαν $P_1, \ldots, P_J$ metric προβολές επί των κλειστών και κυρτών υποσυνόλων $C_1, \ldots, C_J$. Υποθέτουμε πως η τομή $\bigcap_{j=1}^{J} C_j$ είναι μη κενή. Αν $1 < a_j < 1$ $(1 \leq j \leq J)$ με $\sum a_j = 1$, τότε το ισχυρό $\lim_{n\to\infty}(\sum a_j P_j)^n x = Px$ υπάρχει για κάθε $x \in \mathcal{H}$ και ορίζει μία nonexpansive retraction P του $\mathcal{H}$ επί του $\bigcap_{j=1}^{J} C_j$.*

2.4 Κριτήρια ομοιόμορφης σύγκλισης - Η γωνία του Oppenheim

Όπως αναφέραμε και στο τέλος της υποενότητας 1.3.4, ο Oppenheim [20] όρισε την γωνία ανάμεσα σε δύο (γραμμικές) προβολές σε ένα χώρο Banach, η οποία αποτελεί γενίκευση της γωνίας Friedrichs (ορισμός 1.3.17).

Σε αυτήν την ενότητα διατυπώνουμε κριτήρια ομοιόμορφης σύγκλισης γινομένων και κυρτών συνδυασμών (γραμμικών) προβολών σε χώρους Banach, τα οποία συσχετίζονται με τη γωνία Oppenheim. Το ενδιαφέρον είναι ότι, σε αντίθεση με όλα τα άλλα θεωρήματα μέχρι στιγμής, δεν υποθέτουμε ότι οι προβολές έχουν νόρμα ένα (αν και θα πρέπει να είναι επαρκώς κοντά στη μονάδα). Επίσης, τα κριτήρια σύγκλισης που αναφέρουμε αναφέρονται μόνο σε γωνίες ανάμεσα σε ζευγάρια προβολών, σε αντίθεση για παράδειγμα με τα κριτήρια της γωνίας Friedrichs, τα οποία αναφέρονται σε $J-$άδες υποχώρων (βλ. υποενότητα 1.3.4). Τα κύρια αποτελέσματα την ενότητας αυτής συνοψίζονται ως εξής. Έστωσαν $P_1, \ldots, P_J$ γραμμικές προβολές σε ένα χώρο Banach X.

Στην πρώτη υποενότητα ασχολούμαστε με κυρτούς συνδυασμούς προβολών. Αν T είναι κυρτός συνδυασμός των $P_1, \ldots, P_J$, τότε, κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις, αν νόρμες των προβολών είναι επαρκώς κοντά στο ένα, και αν το συνημίτονο ανά δύο προβολών είναι μικρότερο από τη μονάδα, η ακολουθία T^n συγκλίνει ομοιόμορφα σε μία προβολή επί του $\bigcap_{j=1}^{J} Ran(P_j)$.

Στη δεύτερη ενότητα ασχολούμαστε με γινόμενα προβολών. Πάλι, κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις, αν οι νόρμες των προβολών είναι επαρκώς κοντά στο ένα, και αν το συνημίτονο ανά δύο προβολών είναι μικρότερο της μονάδας, δείχνουμε πως το περιοδικό, οιονεί-περιοδικό, αλλά και τυχαίο γινόμενο προβολών συγκλίνει ομοιόμορφα σε μία προβολή επί του $\bigcap_{j=1}^{J} Ran(P_j)$.

2.4.1 Κυρτοί συνδυασμοί προβολών

Έστω X χώρος Banach. Από εδώ και στο εξής, με τον όρον προβολή θα αναφερόμαστε σε γραμμικούς, φραγμένους και ταυτοδύναμους τελεστές. Σημειωτέον ότι η νόρμα ενός τέτοιου (μη τετριμμένου) τελεστή είναι μεγαλύτερη ή ίση της μονάδας.

Ορισμός 2.4.1 (Oppenheim γωνία)**.** Έστωσαν P_1, P_2 προβολές στον X. Υποθέτουμε ότι υπάρχει προβολή $P_{1,2}$ επί του $Ran(P_1) \cap Ran(P_2)$, έτσι ώστε $P_{1,2}P_1 = P_{1,2}$ και $P_{1,2}P_2 = P_{1,2}$. Θέτουμε

$$\cos_{P_{1,2}}(\angle(P_1, P_2)) = \max\left\{||P_1(P_2 - P_{1,2})||, ||P_2(P_1 - P_{1,2})||\right\}.$$

Επιπλέον, ορίζουμε το $\cos(\angle(P_1, P_2))$ να είναι το infimum των $\cos_{P_{1,2}}(\angle(P_1, P_2))$ πάνω σε όλες τις προβολές $P_{1,2}$ επί του $Ran(P_1) \cap Ran(P_2)$, τέτοιες ώστε $P_{1,2}P_1 = P_{1,2}$ και $P_{1,2}P_2 = P_{1,2}$.

Παρατηρήσεις 2.4.2. (a) Σημειώνουμε ότι ο ορισμός της Oppenheim γωνίας ανάμεσα στις προβολές P_1 και P_2 προϋποθέτει την ύπαρξη μία τρίτης προβολής $P_{1,2}$ επί του κλειστού υποχώρου $Ran(P_1) \cap Ran(P_2)$ η οποία αντιμετατίθεται με τις P_1 και P_2. Εν γένει τέτοια προβολή δεν είναι απαραίτητο να υπάρχει.

(b) Όταν ο X είναι χώρος Hilbert και P_1, P_2 είναι ορθογώνιες προβολές επί των M_1 και M_2, τότε η ορθογώνια προβολή $P_{1,2}$ επί του $M = M_1 \cap M_2$ ικανοποιεί (πάντα) την συνθήκη $P_{1,2}P_1 = P_{1,2}$ και $P_{1,2}P_2 = P_{1,2}$. Επιπλέον, σε αυτή την περίπτωση, η ποσότητα $\cos_{P_{1,2}}(\angle(P_1, P_2))$ δεν είναι τίποτε άλλο παρά το συνημίτονο της Friedrichs γωνίας ανάμεσα στους M_1 και M_2 (βλ. Θεώρημα 1.3.18).

(c) Ο ορισμός του $\cos(\angle(P_1, P_2))$ ως το infimum των $\cos_{P_{1,2}}(\angle(P_1, P_2))$ δεν είναι ιδανικός. Παρ' όλ' αυτά, όπως θα δούμε στην Πρόταση 2.4.7, στην περίπτωση όπου $\cos(\angle(P_1, P_2)) < 1$, υπάρχει μία μοναδική προβολή $P_{1,2}$, τέτοια ώστε $\cos_{P_{1,2}}(\angle(P_1, P_2)) = \cos(\angle(P_1, P_2))$, και για κάθε άλλη προβολή $Q_{1,2}$, αν $Q_{1,2} \neq P_{1,2}$, τότε $\cos_{Q_{1,2}}(\angle(P_1, P_2)) \geq 1$.

Λήμμα 2.4.3. *Έστωσαν P_1, P_2 προβολές στον X. Έστω πως υπάρχει μία προβολή $P_{1,2}$ επί του $Ran(P_1) \cap Ran(P_2)$, έτσι ώστε $P_{1,2}P_1 = P_{1,2}$ και $P_{1,2}P_2 = P_{1,2}$. Υποθέτουμε ότι $\cos_{P_{1,2}}(\angle(P_1, P_2)) \equiv \cos(\angle(P_1, P_2)) < 1$, και ότι υπάρχει σταθερά β, τέτοια ώστε $||P_1|| \leq \beta$ και $||P_2|| \leq \beta$. Τότε για κάθε $S \in \mathcal{B}(X)$ ισχύει πως*

$$\begin{aligned}&||(P_1P_2 - P_2P_1)S||\\ &\leq \frac{\left(\beta + \beta^2 + \cos(\angle(P_1, P_2))\right)\cos(\angle(P_1, P_2))}{1 - \cos(\angle(P_1, P_2))}(||(I - P_1)S|| + ||(I - P_2)S||).\end{aligned}$$

Απόδειξη. Έστω $S \in \mathcal{B}(X)$. Αρχικά, παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}||(P_1P_2 - P_2P_1)S|| &\leq ||(P_1P_2 - P_{1,2})S|| + ||(P_2P_1 - P_{1,2})S||\\ &= ||P_1(P_2 - P_{1,2})^2S|| + ||P_2(P_1 - P_{1,2})^2S||\\ &\leq \cos(\angle(P_1, P_2))(||(P_1 - P_{1,2})S|| + ||(P_2 - P_{1,2})S||).\end{aligned}$$

Συνεπώς, αρκεί να δείξουμε πως

$$\begin{aligned}&||(P_1 - P_{1,2})S|| + ||(P_2 - P_{1,2})S||\\ &\qquad\leq \frac{\beta + \beta^2 + \cos(\angle(P_1, P_2))}{1 - \cos(\angle(P_1, P_2))}(||(I - P_1)S|| + ||(I - P_2)S||).\end{aligned}$$

Από τον ορισμό του $\cos(\angle(P_1, P_2))$, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}||P_{1,2}|| &\leq ||P_1P_2|| + ||P_1P_2 - P_{1,2}|| \leq ||P_1P_2|| + \cos(\angle(P_1, P_2))\\ &\leq \beta^2 + \cos(\angle(P_1, P_2))\end{aligned} \tag{2.3}$$

Επιπλέον,

$$\begin{aligned}||(P_1 - P_{1,2})S|| &\le ||(P_1 - P_{1,2})P_2 S|| + ||(P_1 - P_{1,2})(I - P_2)S|| \\ &= ||(P_1 P_2 - P_{1,2})S|| + ||(P_1 - P_{1,2})(I - P_2)S|| \\ &= ||(P_1 P_2 - P_{1,2})^2 S|| + ||(P_1 - P_{1,2})(I - P_2)S|| \\ &\le \cos(\angle(P_1, P_2))\, ||(P_2 - P_{1,2})S|| \\ &\qquad + (||P_1|| + ||P_{1,2}||)||(I - P_2)S|| \\ &\le \cos(\angle(P_1, P_2))\, ||(P_2 - P_{1,2})S|| \\ &\qquad + (\beta + \beta^2 + \cos(\angle(P_1, P_2)))\, ||(I - P_2)S||. \qquad [(2.3)]\end{aligned}$$

Με παρόμοια λογική, δείχνουμε ότι

$$\begin{aligned}||(P_2 - P_{1,2})S|| &\le \cos(\angle(P_1, P_2))\, ||(P_1 - P_{1,2})S|| \\ &\qquad + (\beta + \beta^2 + \cos(\angle(P_1, P_2)))\, ||(I - P_1)S||.\end{aligned}$$

Άρα, προσθέτοντας τις ως άνω ανισότητες, καταλήγουμε στο ότι

$$\begin{aligned}&||(P_1 - P_{1,2})S|| + ||(P_2 - P_{1,2})S|| \\ &\qquad \le \cos(\angle(P_1, P_2))\,(||(P_1 - P_{1,2})S|| + ||(P_2 - P_{1,2})S||) \\ &\qquad\qquad + (\beta + \beta^2 + \cos(\angle(P_1, P_2)))\,(||(I - P_1)S|| + ||(I - P_2)S||).\end{aligned}$$

Κατά συνέπεια,

$$\begin{aligned}&||(P_1 - P_{1,2})S|| + ||(P_2 - P_{1,2})S|| \\ &\qquad \le \frac{\beta + \beta^2 + \cos(\angle(P_1, P_2))}{1 - \cos(\angle(P_1, P_2))}(||(I - P_1)S|| + ||(I - P_2)S||),\end{aligned}$$

όπως ακριβώς θέλαμε. □

Θεώρημα 2.4.4. *Έστωσαν $P_1, \ldots, P_J$ προβολές στον X. Υποθέτουμε ότι για κάθε $1 \le j_1 \le j_2 \le J$ υπάρχει μία προβολή P_{j_1,j_2} επί του $Ran(P_{j_1}) \cap Ran(P_{j_2})$, έτσι ώστε $P_{j_1,j_2}P_{j_1} = P_{j_1,j_2}$ και $P_{j_1,j_2}P_{j_2} = P_{j_1,j_2}$. Έστωσαν $0 < a_j < 1$ $(1 \le j \le J)$ με $\sum a_j = 1$. Θέτουμε $T = \sum a_j P_j$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει μία σταθερά*

$$\beta < \min\left\{\frac{1}{1 - a_1}, \ldots, \frac{1}{1 - a_J}\right\},$$

έτσι ώστε

$$\max\{||P_1||, \ldots, ||P_J||\} \le \beta.$$

Επιπλέον, υποθέτουμε ότι για κάθε $1 \le j_1 \le j_2 \le J$,

$$\cos_{P_{j_1,j_2}}(\angle(P_{j_1}, P_{j_2})) \equiv \cos\big(\angle(P_{j_1}, P_{j_2})\big) < 1,$$

καθώς και

$$\delta := \max_{1\le j\le J}\left((1-a_j)\beta + \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{J}\left(\frac{\big(\cos\big(\angle(P_j,P_k)\big)+\beta+\beta^2\big)\cos\big(\angle(P_j,P_k)\big)}{1-\cos\big(\angle(P_j,P_k)\big)}2a_k\right)\right) < 1.$$

Τότε υπάρχει μία προβολή P επί του $\bigcap_{k=1}^{J} Ran(P_k)$, έτσι ώστε

$$||T^n - P|| \le C\delta^n, \quad n \ge 1,$$

όπου $C = \frac{1+\beta}{1-r}$.

Απόδειξη. Ξεκινούμε την απόδειξη του Θεωρήματος ορίζοντας μία συνάρτηση ενέργειας $E\colon \mathcal{B}(X) \to [0,\infty)$, με τύπο

$$E(S) = \sum_{j=1}^{J} a_j||(I-P_j)S||.$$

Σε πρώτη φάση, δείχνουμε πως για κάθε $S \in \mathcal{B}(X)$, έχουμε ότι $E(TS) \le \delta E(S)$, όπου δ είναι η σταθερά που ορίσαμε στην εκφώνηση του Θεωρήματος 2.4.4. Προς αυτόν τον σκοπό, έστω $S \in \mathcal{B}(X)$. Τότε,

$$\begin{aligned}
E(TS) &= \sum_{j=1}^{J} a_j \left\|(I-P_j)\Big(\sum_{k=1}^{J} a_k P_k\Big)S\right\| \\
&= \sum_{j=1}^{J} a_j \left\|\Big(\sum_{k=1,k\neq j}^{J} a_k(P_k - P_jP_k)\Big)S\right\| \\
&= \sum_{j=1}^{J} a_j \left\|\Big(\sum_{k=1,k\neq j}^{J} a_k(P_k - P_kP_j) + a_k(P_kP_j - P_jP_k\Big)S\right\| \\
&= \sum_{j=1}^{J} a_j \left\|\Big(\sum_{k=1,k\neq j}^{J} a_kP_k(I - P_j) + a_k(P_kP_j - P_jP_k\Big)S\right\| \\
&\le \Big(\sum_{j=1}^{J} a_j \sum_{k=1,k\neq j}^{J} a_k||P_k||\,||(I-P_j)S||\Big) \\
&\quad + \Big(\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1,k\neq j}^{J} a_ja_k||(P_kP_k - P_jP_k)S||\Big).
\end{aligned}$$

Θα ασχοληθούμε με το κάθε ένα άθροισμα από την παραπάνω ανίσωση ξεχωριστά. Πρώτον, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{J} a_j \sum_{k=1,k\neq j}^{J} a_k ||P_k||\, ||(I-P_j)S|| &\leq \sum_{j=1}^{J} a_j ||(I-P_j)S|| \sum_{k=1,k\neq j}^{J} a_k\beta \\ &= \sum_{j=1}^{J} (1-a_j)\beta a_j ||(I-P_j)S||. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Δεύτερον, εφαρμόζοντας το Λήμμα 2.4.3, παίρνουμε πως

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{k,j=1\\k\neq j}}^{J} a_j a_k ||(P_k P_j - P_j P_k)S|| \\ &\leq \sum_{\substack{k,j=1\\k\neq j}}^{J} a_j a_k \frac{(\cos\big(\angle(P_j,P_k)\big)+\beta+\beta^2)\cos\big(\angle(P_j,P_k)\big)}{1-\cos\big(\angle(P_j,P_k)\big)}(||(I-P_j)S||+||(I-P_k)S||) \\ &= \sum_{j=1}^{J} a_j ||(I-P_j)S|| \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{J} \frac{(\cos\big(\angle(P_j,P_k)\big)+\beta+\beta^2)\cos\big(\angle(P_j,P_k)\big)}{1-\cos\big(\angle(P_j,P_k)\big)} 2a_k. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Συνδυάζοντας τις (2.4) και (2.5), καταλήγουμε στο ότι

$$\begin{aligned}E(TS) &\leq \sum_{j=1}^{J} a_j ||(I-P_j)S|| \left(\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{J} \frac{(\cos\big(\angle(P_j,P_k)\big)+\beta+\beta^2)\cos\big(\angle(P_j,P_k)\big)}{1-\cos\big(\angle(P_j,P_k)\big)} 2a_k \right) \\ &\leq \delta E(S).\end{aligned}$$

Δείχνουμε τώρα ότι η ακολουθία (T^n) είναι Cauchy στον $\mathcal{B}(X)$, και άρα συγκλίνουσα. Πράγματι, για κάθε $n \geq 1$, βλέπουμε ότι

$$||T^{n+1} - T^n|| = \left\| \Big(\sum_{j=1}^{J} a_j P_j - I \Big) T^n \right\| \leq \sum_{j=1}^{J} a_j ||(I-p_j)T^n|| = E(T^n) \leq \delta^n E(I).$$

(Υπενθυμίζουμε ότι $\delta < 1$, και άρα η (T^n) είναι πράγματι Cauchy.) Συμβολίζουμε με P το όριο της (T^n). Σημειωτέον ότι

$$E(I) = \sum_{j=1}^{J} a_j ||I - P_j|| \leq \sum_{j=1}^{J} a_j (1 + ||P_j||) \leq 1 + \beta.$$

Για κάθε $n \geq 1$,

$$||P - T^n|| \leq \sum_{k=n}^{\infty} E(I)\delta^k = \frac{E(I)}{1-\delta}\delta^n \leq \frac{1+\beta}{1-\delta}\delta^n.$$

Μένει να δείξουμε ότι η P είναι μία προβολή επί του $Ran(P_1) \cap \cdots \cap Ran(P_J)$. Είναι άμεσο ότι η P είναι όντος μία προβολή. Θα δείξουμε τώρα ότι $Ran(P) = Ran(P_1) \cap \cdots \cap Ran(P_J)$. Προς αυτόν τον σκοπό, έστω $u \in Ran(P_1) \cap \cdots \cap Ran(P_J)$. Τότε, $P_j u = u$ για κάθε $1 \leq j \leq J$, και άρα $Tu = u$, το οποίο συνεπάγεται ότι $Pu = u$. Ανάποδα, παρατηρούμε ότι $TP = P$, και άρα $E(P) = E(TP) \leq \delta E(P)$. Με άλλα λόγια, $E(P) = 0$. Ως εκ τούτου, $(I - P_j)P = 0$ για κάθε $1 \leq j \leq J$, και άρα $Ran(P) \subseteq Ran(P_1) \cap \cdots \cap Ran(P_J)$. □

Πόρισμα 2.4.5. *Έστωσαν $P_1, \ldots, P_J$ προβολές στον X. Υποθέτουμε ότι για κάθε $1 \leq j_1 \leq j_2 \leq J$ υπάρχει μία προβολή P_{j_1,j_2} επί του $Ran(P_{j_1}) \cap Ran(P_{j_2})$, έτσι ώστε $P_{j_1,j_2}P_{j_1} = P_{j_1,j_2}$ και $P_{j_1,j_2}P_{j_2} = P_{j_1,j_2}$. Θέτουμε $T = \frac{P_1+\cdots+P_J}{J}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει μία σταθερά $\beta < 1 + \frac{1}{J-1}$, έτσι ώστε*

$$\max\{||P_1||, \ldots, ||P_n||\} \leq \beta.$$

Επιπλέον, υποθέτουμε ότι για κάθε $1 \leq j_1 \leq j_2 \leq J$,

$$\cos_{P_{j_1,j_2}}(\angle(P_{j_1}, P_{j_2})) \equiv \cos\big(\angle(P_{j_1}, P_{j_2})\big) < 1.$$

Τότε υπάρχει μία σταθερά $\gamma = \gamma(\beta, J) > 0$, τέτοια ώστε ***αν***

$$\max\left\{\cos\big(\angle(P_{j_1}, P_{j_2})\big) : 1 \leq j_1 < j_2 \leq J\right\} \leq \gamma,$$

τότε υπάρχουν σταθερές $C > 0$ και $0 < r < 1$ που εξαρτώνται μόνο από τα β, J, γ, και μία προβολή P επί του $\bigcap_{k=1}^{J} Ran(P_k)$, έτσι ώστε

$$||T^n - P|| \leq Cr^n, \quad n \geq 1.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(x) = \frac{J-1}{J}\beta + 2\frac{J-1}{J}\frac{(x+\beta+\beta^2)x}{1-x}, \quad x \in [0,1),$$

όπου $0 < \beta < 1 + \frac{1}{J-1}$, όπως και στην εκφώνηση του Θεωρήματος. Είναι άμεσο ότι η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα. Επιπλέον, $\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$ και $f(0) < 1$.

Συνεπώς, υπάρχει $\gamma' > 0$ ώστε $f(\gamma') = 1$. Επιλέγουμε έναν οποιοδήποτε αριθμό γ, έτσι ώστε $0 < \gamma < \gamma'$. Αν $\cos\big(\angle(P_{j_1}, P_{j_2})\big) \leq \gamma$ για κάθε $1 \leq j_1 \leq j_2 \leq n$, τότε

$$\begin{aligned}
\delta \equiv \max_{1\leq j\leq J} & \left(\frac{J-1}{J}\beta + \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{J} \frac{\big(\cos\big(\angle(P_j, P_k)\big) + \beta + \beta^2\big)\cos\big(\angle(P_j, P_k)\big)}{1-\cos\big(\angle(P_j, P_k)\big)}\, 2\frac{1}{J}\right) \\
&\leq \left(\frac{J-1}{J}\beta + \frac{2}{J}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{J} \frac{(\gamma+\beta+\beta^2)\gamma}{1-\gamma}\right) \\
&= \frac{J-1}{J}\beta + 2\frac{J-1}{J}\frac{(\gamma+\beta+\beta^2)\gamma}{1-\gamma} \\
&= f(\gamma) < 1.
\end{aligned}$$

Συνεπώς, από το Θεώρημα 2.4.4, για $a_1 = \cdots = a_J = \frac{1}{J}$, έχουμε πως υπάρχει σταθερά $C = \frac{1+\beta}{1-\delta}$, και μία προβολή P επί του $Ran(P_1) \cap \cdots \cap Ran(P_J)$, έτσι ώστε

$$||P - T^n|| \leq C\delta^n \leq \frac{1+\beta}{1-f(\gamma)}(f(\gamma))^n, \quad n \geq 1.$$

Η σταθερά $r = f(\gamma)$ είναι η ζητούμενη. □

Σημειώνουμε ότι για $\gamma_1 < \gamma_2$, έχουμε πως $r(\gamma_1) < r(\gamma_2)$, καθώς και $C(\gamma_1) < C(\gamma_2)$. Αυτή η παρατήρηση θα μας χρησιμεύσει για την απόδειξη του Πορίσματος 2.4.9.

Τέλος, δείχνουμε πως η ακολουθία T^n συγκλίνει σε μία "κανονική" προβολή επί του $Ran(P_1) \cap \cdots \cap Ran(P_J)$.

Πρόταση 2.4.6. *Έστωσαν $P_1, \ldots, P_J$ προβολές στον X. Έστωσαν $0 < a_j < 1$ $(1 \leq j \leq J)$ με $\sum a_j = 1$. Θέτουμε $T = \sum a_j P_j$. Υποθέτουμε ότι η ακολουθία (T^n) συγκλίνει ομοιόμορφα στον τελεστή P, ο οποίος είναι μία προβολή επί του $Ran(P_1) \cap \cdots \cap Ran(P_J)$. Αν $P_{1,2,\ldots,J}$ είναι μία προβολή επί του $Ran(P_1) \cap \cdots \cap Ran(P_J)$, έτσι ώστε $P_{1,2,\ldots,J} P_j = P_{1,2,\ldots,J}$ για κάθε $j \in \{1, \ldots, J\}$, τότε $P = P_{1,2,\ldots,J}$.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε ότι $P_{1,2,\ldots,J} T^n = P_{1,2,\ldots,J}$, και κατά συνέπεια, $P = P_{1,2,\ldots,J} P = P_{1,2,\ldots,J}$. □

2.4.2 Γινόμενα προβολών

Κλείνουμε αυτό το κεφάλαιο αναφέροντας μερικά κριτήρια σύγκλισης περιοδικών, οιονεί-περιοδικών, αλλά και τυχαίων γινομένων προβολών (κάτω από ένα μέτρο πιθανότητας).

Σε ό,τι ακολουθεί, $P_1, \ldots, P_J$ είναι προβολές σε έναν χώρο Banach X. Από εδώ και στο εξής θα υποθέτουμε ότι για κάθε $1 \leq j_1 < j_2 \leq J$, υπάρχει μία προβολή P_{j_1,j_2} επί του $Ran(P_{j_1}) \cap (RanP_{j_2})$, έτσι ώστε $P_{j_1,j_2}P_{j_1} = P_{j_1,j_2}$, $P_{j_1,j_2}P_{j_2} = P_{j_1,j_2}$, και ότι $\cos_{P_{j_1,j_2}}(\angle(P_{j_1}, P_{j_2})) = \cos\big(\angle(P_{j_1}, P_{j_2})\big) < 1$.

Η περίπτωση των δύο προβολών είναι αρκετά απλή, και δεν χρειάζεται πολλές προϋποθέσεις.

Πρόταση 2.4.7. *Έστωσαν P_1, P_2 όπως και παραπάνω. Τότε η ακολουθία $(P_1P_2)^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $P_{1,2}$ καθώς $n \to \infty$. Επιπλέον, για κάθε προβολή $Q_{1,2}$ επί του $Ran(P_1) \cap Ran(P_2)$, με $Q_{1,2}P_1 = Q_{1,2}$ και $Q_{1,2}P_2 = Q_{1,2}$, αν $Q_{1,2} \neq P_{1,2}$, τότε $\cos_{Q_{1,2}}(\angle(P_1, P_2)) \geq 1$.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι εφόσον $P_{1,2}P_1 = P_{1,2}$ και $P_{1,2}P_2 = P_{1,2}$, έχουμε πως

$$P_1P_2(I - P_{1,2}) = P_1P_2(I - P_{1,2})^2 = (I - P_{1,2})P_1P_2(I - P_{1,2}).$$

Άρα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
(P_1P_2)^n - P_{1,2} &= (P_1P_2)^n(I - P_{1,2}) \\
&= (P_1P_2)^{n-1}(P_1P_2)(I - P_{1,2}) \\
&= (P_1P_2)^{n-1}(I - P_{1,2})(P_1P_2)(I - P_{1,2}) \\
&\vdots \\
&= ((P_1P_2)(I - P_{1,2}))^n \\
&= (P_1P_2 - P_{1,2})^n.
\end{aligned}$$

Ως εκ τούτου,

$$\begin{aligned}
||(P_1P_2)^n - P_{1,2}|| = ||(P_1P_2 - P_{1,2})^n|| &\leq ||P_1P_2 - P_{1,2}||^n \\
&\leq \big(\cos_{P_{1,2}}(\angle(P_1, P_2))\big)^n \xrightarrow{n\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

Τέλος, για κάθε $Q_{1,2}$ όπως και παραπάνω, αν $Q_{1,2} \neq P_{1,2}$, τότε, λόγω μοναδικότητας του ορίου, έπεται πως $\cos_{Q_{1,2}}(\angle(P_1, P_2)) \geq 1$. □

Η περίπτωση των $J > 2$ προβολών είναι πιο τεχνική και χρειάζεται περισσότερη δουλειά.

Θεώρημα 2.4.8. *Έστωσαν $P_1, \ldots, P_J$ όπως και παραπάνω. Υποθέτουμε ότι υπάρχει σταθερά $\beta < 1 + \frac{1}{J-1}$, τέτοια ώστε*

$$\max\{||P_1||, \ldots, ||P_n||\} \leq \beta.$$

Τότε, υπάρχει μία σταθερά $\gamma = \gamma(\beta, J) > 0$, τέτοια ώστε αν

$$\max_{1 \leq j_1 < j_2 \leq J} \cos\big(\angle(P_{j_1}, P_{j_2})\big) \leq \gamma,$$

τότε, υπάρχουν σταθερές $C > 0$ και $0 < r < 1$ που εξαρτώνται μόνο από τα β, J, γ, καθώς και μία προβολή P επί του $\bigcap_{j=1}^{J} Ran(P_j)$, έτσι ώστε για κάθε φυσικό αριθμό $m \geq J$ και για κάθε επιμορφισμό $\sigma \colon \{1, \dots, m\} \to \{1, \dots, J\}$, ισχύει πως

$$||P_{\sigma(m)} \cdots P_{\sigma(1)} - P|| \leq \beta^m C r^n + 2\gamma\beta^{m-2}(m-1)((2+\beta)^n - 1), \quad n \geq 1.$$

Απόδειξη. Θέτουμε $T = \frac{P_1 + \cdots + P_J}{J}$. Επιλέγουμε σταθερά $\gamma = \gamma(\beta, J) > 0$ όπως και στο Πόρισμα 2.4.5. Έπεται ότι αν

$$\max_{1 \leq j_1 < j_2 \leq J} \cos\big(\angle(P_{j_1}, P_{j_2})\big) \leq \gamma,$$

τότε, υπάρχουν σταθερές $C > 0$ και $0 < r < 1$ που εξαρτώνται μόνο από τα β, J, γ, καθώς και μία προβολή P επί του $\bigcap_{j=1}^{J} Ran(P_j)$, έτσι ώστε

$$||P - T^n|| \leq C r^n, \quad n \geq 1.$$

Έστωσαν $m \in \mathbb{N}$ και $\sigma \colon \{1, \dots, m\} \to \{1, \dots, J\}$ επί. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε πως

$$\begin{aligned}
||P_{\sigma(m)} \cdots P_{\sigma(1)} - P|| &= ||P_{\sigma(m)} \cdots P_{\sigma(1)}(I - P)|| \\
&\leq ||P_{\sigma(m)} \cdots P_{\sigma(1)}(I - T^n)|| + ||P_{\sigma(m)} \cdots P_{\sigma(1)}(T^n - P)|| \\
&\leq ||P_{\sigma(m)} \cdots P_{\sigma(1)}(I - T^n)|| + ||P_{\sigma(m)} \cdots P_{\sigma(1)}|| \, ||T^n - P|| \\
&\leq ||P_{\sigma(m)} \cdots P_{\sigma(1)}(I - T^n)|| + \beta^m C r^n.
\end{aligned}$$

Συνεπώς, αρκεί να δείξουμε ότι

$$||P_{\sigma(m)} \cdots P_{\sigma(1)}(I - T^n)|| \leq 2\gamma\beta^{m-2}(m-1)((2+\beta)^n - 1).$$

Σημειώνουμε πως

$$I - T^n = I - (I - (I - T))^n = (I - T) \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (I - T)^{k-1}.$$

Ως εκ τούτου,

$$\begin{aligned}
||P_{\sigma(m)} \cdots P_{\sigma(1)}(I - T^n)|| &\leq ||P_{\sigma(m)} \cdots P_{\sigma(1)}(I - T)|| \left\| \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (I - T)^{k-1} \right\| \\
&\leq ||P_{\sigma(m)} \cdots P_{\sigma(1)}(I - T)|| \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (1+\beta)^{k-1} \right) \\
&= \frac{(2+\beta)^n - 1}{1+\beta} ||P_{\sigma(m)} \cdots P_{\sigma(1)}(I - T)||.
\end{aligned}$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε πως

$$||P_{\sigma(m)} \cdots P_{\sigma(1)}(I - T)|| \leq 2\gamma\beta^{m-2}(m-1)(1+\beta).$$

Μάλιστα, εφόσον

$$\begin{aligned}&||P_{\sigma(m)} \cdots P_{\sigma(1)}(I - T)|| \\ &\qquad \leq \frac{||P_{\sigma(m)} \cdots P_{\sigma(1)}(I - P_1)|| + \cdots + ||P_{\sigma(m)} \cdots P_{\sigma(1)}(I - P_J)||}{J},\end{aligned}$$

αρκεί να δείξουμε ότι

$$||P_{\sigma(m)} \cdots P_{\sigma(1)}(I - P_j)|| \leq 2\gamma\beta^{m-2}(m-1)(1+\beta)$$

για κάθε $j \in \{1, \dots, J\}$.

Προς αυτόν τον σκοπό, έστω $j \in \{1, \dots, J\}$. Έστω επίσης $1 \leq t \leq m$ ο μικρότερος φυσικός αριθμός, έτσι ώστε $\sigma(t) = j$. Θα τελειώσουμε την απόδειξη του Θεωρήματος δείχνοντας ότι

$$||P_{\sigma(m)} \cdots P_{\sigma(1)}(I - P_j)|| \leq 2\gamma\beta^{m-2}(t-1)(1+\beta). \tag{2.6}$$

Θα χρειαστούμε το εξής:

Λήμμα. *Έστω* $\sigma \in \{1, \dots, m\}^{\{1,\dots,J\}}$ *και έστω* $t \in \mathbb{N}$. *Θέτουμε* $\sigma' \in \{1, \dots, m\}^{\{1,\dots,J\}}$ *με τύπο*

$$\sigma'(k) = \begin{cases} \sigma(k), & \text{αν } k > t \text{ ή } k < t-1 \\ \sigma(t), & \text{αν } k = t-1 \\ \sigma(t-1), & \text{αν } k = t. \end{cases}$$

Τότε,

$$||P_{\sigma(m)} \cdots P_{\sigma(1)}(I - P_j) - P_{\sigma'(m)} \cdots P_{\sigma'(1)}(I - P_j)|| \leq 2\gamma\beta^{m-2}(1+\beta).$$

Απόδειξη Λήμματος. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
&||P_{\sigma(m)} \cdots P_{\sigma(1)}(I - P_j) - P_{\sigma'(m)} \cdots P_{\sigma'(1)}(I - P_j)|| \\
&= ||P_{\sigma(m)} \cdots P_{\sigma(t+1)}(P_{\sigma(t)}P_{\sigma(t-1)} - P_{\sigma(t-1)}P_{\sigma(t)})P_{\sigma(t-2)} \cdots P_{\sigma(1)}(I - P_j)|| \\
&\leq ||P_{\sigma(m)} \cdots P_{\sigma(t+1)}||\, ||P_{\sigma(t)}P_{\sigma(t-1)} - P_{\sigma(t-1)}P_{\sigma(t)}||\, ||P_{\sigma(t-2)} \cdots P_{\sigma(1)}||\, ||I - P_j|| \\
&\leq \beta^{m-2}(1+\beta)||P_{\sigma(t)}P_{\sigma(t-1)} - P_{\sigma(t-1)}P_{\sigma(t)}|| \\
&\leq \beta^{m-2}(1+\beta)||P_{\sigma(t)}P_{\sigma(t-1)} - P_{\sigma(t-1),\sigma(t)}|| \\
&\qquad + \beta^{m-2}(1+\beta)||P_{\sigma(t-1)}P_{\sigma(t)} - P_{\sigma(t-1),\sigma(t)}|| \\
&\leq 2\gamma\beta^{m-2}(1+\beta),
\end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε το (εξ υποθέσεως) γεγονός πως $\cos\big(\angle(P_{\sigma(t-1)}, P_{\sigma(t)})\big) \leq \gamma$. $\square$

Πίσω στην απόδειξη του θεωρήματος 2.4.8. Θέτουμε $\sigma_t = \sigma$. Με βάση το παραπάνω Λήμμα, βρίσκουμε $\sigma_{t-1} \in \{1, \ldots, m\}^{\{1,\ldots,J\}}$, έτσι ώστε $\sigma_{t-1}(t-1) = \sigma_t(t) = j$, και

$$||P_{\sigma_t(m)} \cdots P_{\sigma_t(1)}(I - P_j) - P_{\sigma_{t-1}(m)} \cdots P_{\sigma_{t-1}(1)}(I - P_j)|| \leq 2\gamma\beta^{m-2}(1+\beta).$$

Επιπλέον, από το παραπάνω Λήμμα, για "t" $= t-1$ και "σ" $= \sigma_{t-1}$, βρίσκουμε $\sigma_{t-2} \in \{1, \ldots, m\}^{\{1,\ldots,J\}}$, έτσι ώστε $\sigma_{t-2}(t-2) = \sigma_{t-1}(t-1) = j$, και

$$||P_{\sigma_{t-1}(m)} \cdots P_{\sigma_{t-1}(1)}(I - P_j) - P_{\sigma_{t-2}(m)} \cdots P_{\sigma_{t-2}(1)}(I - P_j)|| \leq 2\gamma\beta^{m-2}(1+\beta).$$

Συνεχίζοντας κατ'αυτόν τον τρόπο, ορίζουμε αναδρομικά $\sigma_t, \sigma_{t-1}, \ldots, \sigma_1$, έτσι ώστε

$$||P_{\sigma_{k+1}(m)} \cdots P_{\sigma_{k+1}(1)}(I - P_j) - P_{\sigma_k(m)} \cdots P_{\sigma_k(1)}(I - P_j)|| \leq 2\gamma\beta^{m-2}(1+\beta),$$

για κάθε $1 \leq k \leq t-1$. Σημειώνουμε πως $\sigma_1(1) = j$, και κατά συνέπεια,

$$P_{\sigma_1(m)} \cdots P_{\sigma_1(1)}(I - P_j) = P_{\sigma_1(m)} \cdots P_j(I - P_j) = 0.$$

Έχοντας αυτά υπόψη, βλέπουμε πως

$$\begin{aligned}
&||P_{\sigma(m)} \cdots P_{\sigma(1)}(I - P_j)|| = ||P_{\sigma_t(m)} \cdots P_{\sigma_t(1)}(I - P_j)|| \\
&\leq ||P_{\sigma_t(m)} \cdots P_{\sigma_t(1)}(I - P_j) - P_{\sigma_{t-1}(m)} \cdots P_{\sigma_{t-1}(1)}(I - P_j)|| \\
&\qquad + \cdots + ||P_{\sigma_2(m)} \cdots P_{\sigma_2(1)}(I - P_j) - P_{\sigma_1(m)} \cdots P_{\sigma_1(1)}(I - P_j)|| \\
&\qquad + ||P_{\sigma_1(m)} \cdots P_{\sigma_1(1)}(I - P_j)|| \\
&\leq 2\gamma\beta^{m-2}(1+\beta)(t-1),
\end{aligned}$$

δείχνοντας ότι πράγματι ισχύει η (2.6). □

Πόρισμα 2.4.9. *Έστωσαν $P_1, \ldots, P_J$ όπως και παραπάνω. Τότε, για κάθε φυσικό αριθμό $m \geq J$ και για κάθε σταθερές $0 < q < 1$, $0 \leq \beta < 1 + \frac{1}{n-1}$, υπάρχει σταθερά $\gamma = \gamma(\beta, J, m, q) > 0$, έτσι ώστε αν*

$$\max\{||P_1||, \ldots, ||P_J||\} \leq \beta \quad \textit{και} \quad \max_{1 \leq j_1 \leq j_2 \leq J} \cos\big(\angle(P_{j_1}, P_{j_2})\big) \leq \gamma,$$

τότε για κάθε επιμορφισμό $\sigma\colon \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, J\}$, έχουμε ότι

$$||P_{\sigma(m)} \cdots P_{\sigma(1)} - P|| \leq q,$$

όπου P είναι η προβολή επί του $\bigcap_{j=1}^J Ran(P_j)$, όπως και στο Θεώρημα 2.4.8.

Απόδειξη. Έστωσαν m, q, β σταθερές όπως και παραπάνω. Βρίσκουμε σταθερές $\gamma_1 > 0$, $C > 0$ και $0 < r < 1$ που εξαρτώνται μόνο από τα β, J, m, q, καθώς και προβολή P, όπως και στο Θεώρημα 2.4.8. Έστω $\sigma \colon \{1, \dots, m\} \to \{1, \dots, J\}$ επί. Αν

$$\max\{||P_1||, \dots, ||P_J||\} \le \beta \quad \text{και} \quad \max_{1 \le j_1 \le j_2 \le J} \cos\big(\angle(P_{j_1}, P_{j_2})\big) \le \gamma_1,$$

τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$||P_{\sigma(m)} \cdots P_{\sigma(1)} - P|| \le \beta^m C(\gamma_1) r(\gamma_1)^n + 2\gamma_1 \beta^{m-2}(m-1)((2+\beta)^n - 1).$$

Έστω n_0 επαρκώς μεγάλο, ώστε $\beta^m C r^{n_0} \le \frac{q}{2}$. Θέτουμε

$$\gamma_2 = \frac{1}{2\beta^{m-2}(m-1)((2+\beta)^{n_0} - 1)} \frac{q}{2}. \tag{1}$$

Έστω $\gamma = \min\{\gamma_1, \gamma_2\}$. Σημειωτέον ότι $r := r(\gamma) < r(\gamma_1)$ και $C := C(\gamma) < C(\gamma_1)$. Αν $\max\left\{\cos\big(\angle(P_{j_1}, P_{j_2})\big) \colon 1 \le j_1 \le j_2 \le J\right\} \le \gamma$, τότε

$$\begin{aligned}
&||P_{\sigma(m)} \cdots P_{\sigma(1)} - P|| \\
&\le \beta^m C r^n + 2\gamma \beta^{m-2}(m-1)((2+\beta)^n - 1) \\
&\le \beta^m C(\gamma_1) r(\gamma_1)^n + 2\gamma_2 \beta^{m-2}(m-1)((2+\beta)^n - 1),
\end{aligned}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και κατά συνέπεια,

$$\begin{aligned}
||P_{\sigma(m)} \cdots P_{\sigma(1)} - P|| &\le \beta^m C(\gamma_1) r(\gamma_1)^{n_0} + 2\gamma_2 \beta^{m-2}(m-1)((2+\beta)^{n_0} - 1) \\
&\le \frac{q}{2} + \frac{q}{2} = q.
\end{aligned}$$

□

Για να προχωρήσουμε, θα μας χρειαστεί ο ακόλουθος ορισμός:

Ορισμός 2.4.10. Θα λέμε ότι οι προβολές $P_1, \dots, P_J$ είναι **συνεπείς**, αν για κάθε $\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, J\}$, υπάρχει προβολή $P_{i_1,\dots,i_k}$ επί του $Ran(P_{i_1}) \cap \cdots \cap Ran(P_{i_k})$, έτσι ώστε

$$P_{i_1,\dots,i_k} P_j = P_{i_1,\dots,i_k}, \quad \text{για κάθε } j \in \{1, \dots, k\}.$$

Επιπλέον, θα λέμε ότι οι προβολές $P_1, \dots, P_J$ είναι **ασθενώς συνεπείς** αν υπάρχει προβολή $P_{1,\dots,J}$ επί του $\bigcap_{j=1}^J Ran(P_j)$, έτσι ώστε

$$P_{1,\dots,J} P_j = P_{1,\dots,J}, \quad \text{για κάθε } j \in \{1, \dots, k\}.$$

Παρατήρηση 2.4.11. Σημειώνουμε ότι από την Πρόταση 2.4.6, αν οι $P_1, \ldots, P_J$ είναι ασθενώς συνεπής, και αν η ακολουθία $T^n = \left(\frac{P_1+\cdots+P_J}{J}\right)^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μία προβολή P επί του $\bigcap_{j=1}^J Ran(P_j)$, τότε $P = P_{1,\ldots,J}$.

Θα χρησιμοποιήσουμε το Πόρισμα 2.4.9, μαζί με την υπόθεση της ασθενής συνέπειας, για να εξάγουμε κριτήρια ομοιόμορφης σύγκλισης για περιοδικά, οιονεί-περιοδικά, και τυχαία γινόμενα προβολών.

Πρόταση 2.4.12. *Έστωσαν $P_1, \ldots, P_J$ όπως παραπάνω. Έστωσαν επίσης σταθερές $0 \leq \beta \leq 1 + \frac{1}{n-1}$ και $0 < q < 1$. Τότε, υπάρχει σταθερά $\gamma = \gamma(\beta, q)$, έτσι ώστε αν*

(a) $\max\{||P_1||, \ldots, ||P_n||\} \leq \beta$ *και* $\max\left\{\cos\left(\angle(P_{j_1}, P_{j_2})\right) : 1 \leq j_1 < j_2 \leq J\right\} \leq \gamma$,

(b) οι $P_1, \ldots, P_J$ είναι ασθενώς συνεπείς,

τότε $||(P_J \cdots P_1)^n - P_{1,\ldots,J}|| \leq q^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη. Έστωσαν β, q όπως και παραπάνω. Επιλέγουμε σταθερά $\gamma = \gamma(\beta, J, m, q) > 0$, όπως και στο Πόρισμα 2.4.9. Από την ασθενή συνέπεια, έχουμε ότι

$$P_J \cdots P_1 - P_{1,\ldots,J} = P_J \cdots P_1(I - P_{1,\ldots,J}) = (I - P_{1,\ldots,J})P_J \cdots P_1(I - P_{1,\ldots,J}).$$

Άρα,

$$\begin{aligned} ||(P_J \cdots P_1)^n = P_{1,\ldots,J}|| &= ||\left((P_J \cdots P_1)(I - P_{1,\ldots,J})\right)^n|| \\ &\leq ||P_J \cdots P_1 - P_{1,\ldots,J}||^n \\ &= ||P_J \cdots P_1 - T^\infty||^n \\ &\leq q^n, \end{aligned}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. □

Υπενθυμίζουμε ότι μία ακολουθία $\tau \in \{1, \ldots, J\}^{\mathbb{N}}$ λέγεται οιονεί-περιοδική αν κάθε $i \in \{1, \ldots, J\}$ εμφανίζεται απείρως συχνά στην τ, και αν για κάθε τέτοιο i, ο αριθμός

$$I(\tau, i) = \sup_{n \in \mathbb{N}} (k_n(i) - k_{n-1}(i))$$

είναι πεπερασμένος, όπου $k_0(i) = 0$ και $\left(k_n(i)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι η αύξουσα ακολουθία όλων των φυσικών αριθμών ώστε $\tau(k_n(i)) = i$. Πιο απλά, αν η τ είναι οιονεί-περιοδική αν ο αριθμός των στοιχείων που παρεμβάλλονται ανάμεσα σε ένα $i \in \{1, \ldots, J\}$ και στην επόμενη εμφάνισή του, είναι φραγμένος (από το $I(\tau, i) < +\infty$).

Δεν είναι δύσκολο να ελέγξει κανείς ότι αυτός ο ορισμός είναι ισοδύναμος με τον εξής:

Ορισμός 2.4.13. Μία ακολουθία $\tau \in \{1,\ldots,J\}^{\mathbb{N}}$ θα λέγεται οιονεί-περιοδική αν υπάρχει φυσικός αριθμός $m \geq J$ (ο οποίος θα λέγεται και η οιονεί περίοδος της τ), έτσι ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\{\tau(n), \tau(n+1), \ldots, \tau(n+m-1)\} = \{1,\ldots,J\}\,.$$

Από εδώ και στο εξής, όταν θα αναφερόμαστε στο $\prod_{l=1}^{k} P_l$, θα εννοούμε το γινόμενο $P_k \cdots P_1$.

Πρόταση 2.4.14. *Έστωσαν $P_1,\ldots,P_J$ όπως και παραπάνω. Έστω $0 \leq \beta < 1 + \frac{1}{J-1}$. Για κάθε $m \geq J$, υπάρχει $\gamma = \gamma(\beta, J, m)$, έτσι ώστε αν*

(a) $\max\{||P_1||,\ldots,||P_n||\} \leq \beta$ *και* $\max\left\{\cos\big(\angle(P_{j_1}, P_{j_2})\big) : 1 \leq j_1 < j_2 \leq J\right\} \leq \gamma$,

(b) οι $P_1,\ldots,P_J$ είναι ασθενώς συνεπείς,

τότε κάθε οιονεί περιοδικό γινόμενο των $P_1,\ldots,P_J$ με οιονεί περίοδο m, συγκλίνει ομοιόμορφα στην $P_{1,\ldots,J}$. Επιπλέον, η ταχύτητα σύγκλισης είναι εκθετική.

Απόδειξη. Έστω $m \geq J$. Έστω επίσης $q < 1$. Από το Πόρισμα 2.4.9 βρίσκουμε σταθερά $\gamma = \gamma(\beta, J, m, q) > 0$. Έστω $\tau \in \{1,\ldots,J\}^{\mathbb{N}}$ μία οιονεί-περιοδική ακολουθία οιονεί περίοδο m. Από το Πόρισμα 2.4.9, και την οιονεί περίοδο της τ, αν

$$\max\{||P_1||,\ldots,||P_n||\} \leq \beta \quad \text{και} \quad \max\left\{\cos\big(\angle(P_{j_1}, P_{j_2})\big) : 1 \leq j_1 < j_2 \leq J\right\} \leq \gamma,$$

τότε $||P_{\tau((k+1)m)} \cdots P_{\tau(km+1)} - P_{1,\ldots,J}|| \leq q$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Εφόσον οι $P_1,\ldots,P_J$ είναι ασθενώς συνεπείς, έπεται ότι

$$\begin{aligned}
&||P_{\tau(n)} \cdots P_{\tau(1)} - P_{1,\ldots,J}|| \\
&= ||P_{\tau(n)} \cdots P_{\tau\left(\lfloor \frac{n}{m} \rfloor m+1\right)} \prod_{l=1}^{\lfloor \frac{n}{m} \rfloor} (P_{\tau(lm)} \cdots P_{\tau((l-1)m+1)} - P_{1,\ldots,n})|| \\
&\leq ||P_{\tau(n)} \cdots P_{\tau(\lfloor \frac{n}{m} \rfloor m+1)}|| \prod_{l=1}^{\lfloor \frac{n}{m} \rfloor} ||(P_{\tau(lm)} \cdots P_{\tau((l-1)m+1)} - P_{1,\ldots,n})|| \\
&\leq \beta^{m-1} q^{\lfloor \frac{n}{m} \rfloor}.
\end{aligned}$$

Συνεπώς, η νόρμα $||P_{\tau(n)} \cdots P_{\tau(1)} - P_{1,\ldots,J}||$ τείνει στο μηδέν εκθετικά γρήγορα, καθώς $n \to \infty$. $\square$

Τελειώνουμε με ένα θεώρημα για τυχαία γινόμενα, όπου κάθε $\tau \in \{1,\ldots,J\}^{\mathbb{N}}$ επιλέγεται με βάση ένα μέτρο πιθανότητας.

Θεώρημα 2.4.15. *Έστωσαν $P_1, \ldots, P_J$ όπως και παραπάνω και έστω $1 \leq \beta < 1+\frac{1}{J-1}$. Επιπλέον, έστω μ ένα μέτρο πιθανότητας στο σύνολο $\{1, \ldots, J\}$, έτσι ώστε $\mu(j) > 0$ για κάθε $j \in \{1, \ldots, J\}$. Τότε, υπάρχει σταθερά $\gamma = \gamma(\beta, J, \mu)$, τέτοια ώστε αν*

(a) $\max\{||P_1||, \ldots, ||P_n||\} \leq \beta$ *και* $\max\left\{\cos\big(\angle(P_{j_1}, P_{j_2})\big) : 1 \leq j_1 < j_2 \leq J\right\} \leq \gamma$,

(b) οι $P_1, \ldots, P_J$ είναι ασθενώς συνεπείς,

τότε, για τον χώρο πιθανότητας $\{1, \ldots, J\}^{\mathbb{N}}$ με το μέτρο γινόμενο $\overline{\mu} = \prod_{n=1}^{\infty} \mu$, έχουμε ότι για $\overline{\mu}-$σχεδόν όλες τις ακολουθίες $\tau \in \{1, \ldots, J\}^{\mathbb{N}}$, το γινόμενο $P_{\tau(i)} \cdots P_{\tau(1)}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $P_{1,\ldots,J}$. Επιπλέον, η σύγκλιση είναι εκθετικά γρήγορη.

Απόδειξη. Για $k \in \mathbb{N}$ και για $\tau \in \{1, \ldots, J\}^{\mathbb{N}}$, ορίζουμε τα σύνολα

$$\begin{aligned} A(\tau, k) &= \Big\{l \in \{1, \ldots, k\} : \big\{\tau(J(l-1)+1), \tau(J(l-1)+2), \ldots, \tau(lJ)\big\} = \{1, \ldots, J\}\Big\}, \\ B(\tau, k) &= \{1, \ldots, k\} \setminus A(\tau, k), \\ A(\tau) &= \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A(\tau, k). \end{aligned}$$

Σε μία τυχαία $J-$άδα από αριθμούς που επιλέγονται κάτω από το μέτρο πιθανότητας $\mu \times \mu \times \cdots \times \mu$, η πιθανότητα κάθε αριθμός $1, \ldots, J$ να εμφανιστεί ακριβώς μία φορά στην $J-$άδα είναι $\mu(1)\mu(2)\cdots\mu(J)J!$. Από το νόμο των μεγάλων αριθμών του Borel, για $\overline{\mu}-$σχεδόν όλες τις $\tau \in \{1, \ldots, J\}^{\mathbb{N}}$, έχουμε ότι

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|A(\tau, k)|}{k} = \mu(1)\mu(2)\cdots\mu(J)J!. \tag{2.7}$$

Έστω $0 < \lambda < \mu(1)\mu(2)\cdots\mu(J)J!$. Τότε, από την (2.7), για $\overline{\mu}-$σχεδόν όλες τις $\tau \in \{1, \ldots, J\}^{\mathbb{N}}$, υπάρχει $k_\tau \in \mathbb{N}$, έτσι ώστε $\frac{|A(\tau,k)|}{k} \geq \lambda$ για κάθε $k \geq k_\tau$. Ισοδύναμα, για κάθε $k \geq k_\tau$, ισχύει πως $\frac{|B(\tau,k)|}{k} \leq 1 - \lambda$.

Επιλέγουμε ένα $0 < q < 1$, έτσι ώστε $\beta^{J(1-\lambda)} q^{\lambda} < 1$. Επιπλέον, επιλέγουμε $\gamma = \gamma(\beta, J, q) > 0$ όπως και στο Πόρισμα 2.4.9. Από το Πόρισμα 2.4.9, αν

$$\max_{1 \leq j_1 < j_2 \leq J} \cos\big(\angle(P_{j_1}, P_{j_2})\big) \leq \gamma,$$

τότε, για κάθε $l \in A(\tau, k)$, έχουμε ότι

$$||P_{\tau(lJ)} \cdots P_{\tau((l-1)J+1)}(I - P_{1,\ldots,J})|| = ||P_{\tau(lJ)} \cdots P_{\tau((l-1)J+1)} - P_{1,\ldots,J}|| \leq q.$$

Για $l \in \mathbb{N}$, ορίζουμε τον τελεστή T_l ως εξής:

$$T_l = \begin{cases} P_{\tau(lJ)} \cdots P_{\tau((l-1)J+1)}(I - P_{1,\ldots,J}), & l \in A(\tau), \\ P_{\tau(lJ)} \cdots P_{\tau((l-1)J+1)} & , \ l \notin A(\tau). \end{cases}$$

Σημειώνουμε ότι

$$\begin{aligned} ||T_l|| &\leq q, \quad \text{για κάθε } l \in A(\tau), \\ ||T_l|| &\leq \beta^J, \quad \text{για κάθε } l \notin A(\tau). \end{aligned}$$

Δεν είναι δύσκολο να επαληθεύσει κανείς ότι λόγω της ασθενής συνέπειας των $P_1, \ldots, P_J$, για κάθε $n \geq J$, αν $J \nmid n$,

$$P_{\tau(n)} \cdots P_{\tau(1)}(I - P_{1,\ldots,J}) = P_{\tau(n)} \cdots P_{\tau\left(\lfloor \frac{n}{J} \rfloor J+1\right)} \Big(\prod_{l=1}^{\lfloor \frac{n}{J} \rfloor} T_l \Big)(I - P_{1,\ldots,J}),$$

ενώ, αν $J \mid n$,

$$P_{\tau(n)} \cdots P_{\tau(1)}(I - P_{1,\ldots,J}) = \Big(\prod_{l=1}^{\lfloor \frac{n}{J} \rfloor} T_l \Big)(I - P_{1,\ldots,J}).$$

Ως εκ τούτου, για κάθε $n \geq J$, έχουμε πως

$$\begin{aligned} ||P_{\tau(n)} \cdots P_{\tau(1)}(I - P_{1,\ldots,J})|| &\leq ||P_{\tau(n)} \cdots P_{\tau\left(\lfloor \frac{n}{J} \rfloor J+1\right)}|| \Big(\prod_{l=1}^{\lfloor \frac{n}{J} \rfloor} ||T_l|| \Big) ||I - P_{1,\ldots,J}|| \\ &\leq \beta^{J-1} (\beta^J)^{|B(\tau, \lfloor \frac{n}{J} \rfloor)|} q^{|A(\tau, \lfloor \frac{n}{J} \rfloor)|} ||I - P_{1,\ldots,J}||. \end{aligned}$$

Τέλος, από τον ορισμό του k_τ, για $n \geq J k_\tau$, έχουμε πως

$$||P_{\tau(n)} \cdots P_{\tau(1)}(I - P_{1,\ldots,J})|| \leq ||I - P_{1,\ldots,J}|| \beta^{J-1} (\beta^{J(1-\lambda)} q^\lambda)^{\lfloor \frac{n}{J} \rfloor} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

εκθετικά γρήγορα. Υπενθυμίζουμε ότι έχουμε επιλέξει $0 < q < 1$, έτσι ώστε $\beta^{J(1-\lambda)} q^\lambda < 1$. □

Κεφάλαιο 3

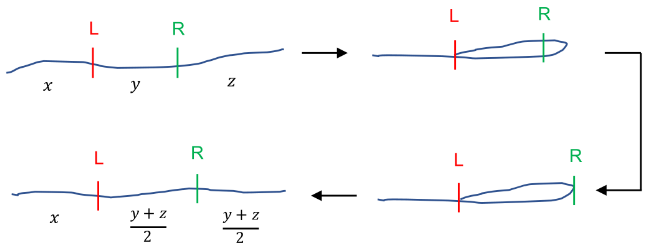
Εφαρμογές

Αφιερώνουμε αυτό το κεφάλαιο στις διάφορες εφαρμογές της μεθόδου των εναλλασσόμενων προβολών. Ξεκινούμε με ένα ενδιαφέρον παιχνίδι, στο οποίο θέλουμε να διαμερίσουμε μία χορδή σε τρία ίσα κομμάτια, και στην συνέχεια προχωράμε σε πιο "σημαντικές" εφαρμογές της μεθόδου, όπως επίλυση γραμμικών συστημάτων και διαφορικών εξισώσεων. Παρουσιάζουμε επίσης μία καινούρια (απ'όσο γνωρίζουμε) απόδειξη όσον αφορά την σύγκλιση γινομένων δεσμευμένων μέσων τιμών. Ο αναγνώστης μπορεί να βρει περισσότερες εφαρμογές της μεθόδου των εναλλασσόμενων προβολών στα [37], [16] και [17].

3.1 Διαμέριση μίας χορδής σε τρία ίσα τμήματα

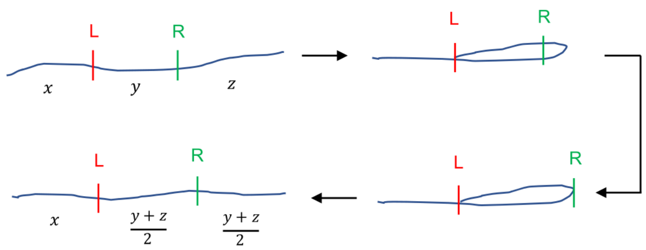
Ας αρχίσουμε με ένα ενδιαφέρον παιχνίδι. Έστω πως έχουμε μία χορδή και θέλουμε να την χωρίσουμε σε τρία ίσα τμήματα. Τοποθετούμε δύο συνδετήρες σε τυχαίες θέσεις της χορδής, έναν αριστερά και έναν δεξιά. Θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 1.3.1 (von Neumann) για να δείξουμε ότι, κάτω από μία επαναληπτική διαδικασία, οι συνδετήρες συγκλίνουν στο ένα τρίτο και στα δύο τρίτα του μήκους της χορδής αντίστοιχα. Το επαναληπτικό βήμα της διαδικασίας χωρίζεται σε δύο κομμάτια ως εξής:

(i) Διπλώνουμε το δεξί μέρος της χορδής, έτσι ώστε να αγγίξει τον αριστερό συνδετήρα, και έπεται μετακινούμε τον δεξί συνδετήρα έως ότου φτάσει στην θηλιά. Τέλος, ξετυλίγουμε την χορδή.



Σχήμα 3: Βήμα (i) της επαναληπτικής διαδικασίας

(ii) Διπλώνουμε τώρα το αριστερό μέρος της χορδής, έτσι ώστε να αγγίξει τον δεξιό συνδετήρα, και έπεται μετακινούμε τον αριστερό συνδετήρα έως ότου φτάσει στην θηλιά. Τέλος, ξετυλίγουμε την χορδή.



Σχήμα 4: Βήμα (ii) της επαναληπτικής διαδικασίας

Θεώρημα 3.1.1. *Οι θέσεις των συνδετήρων συγκλίνουν στο ένα τρίτο και στα δύο τρίτα του μήκους της χορδής αντίστοιχα.*

Απόδειξη. Έστωσαν x, y, z το μήκος των τριών τμημάτων της χορδής σε μία τυχούσα επανάληψη, όπως και στο σχήμα 3. Βλέπουμε ότι ύστερα από το βήμα (i), τα τρία τμήματα της χορδής θα έχουν μήκη x, $(y+z)/2$ και $(y+z)/2$, ενώ ύστερα από το βήμα (ii), θα έχουν μήκη $(x+y)/2$, $(x+y)/2$ και z. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι τα βήματα (i) και (ii) αντιστοιχούν στις προβολές

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

αντίστοιχα. Θεωρούμε το χώρο Hilbert $\mathcal{H} = \mathbb{R}^3$ και τους κλειστούς υποχώρους $M_1 = P_1(\mathcal{H})$ και $M_2 = P_2(\mathcal{H})$. Ας σημειωθεί ότι οι P_1 και P_2 είναι ορθογώνιες προβολές, καθώς είναι αυτοσυζυγείς. Επιπλέον, εφόσον $z \in M_1 \cap M_2 \iff P_1 z = P_2 z = z$, το οποίο συμβαίνει αν και μόνο αν $z = (a, a, a)$, για κάποιο $a \in \mathbb{R}$, βλέπουμε πως

$$M_1 \cap M_2 = \{(a, a, a) \colon a \in \mathbb{R}\}.$$

Ως εκ τούτου,

$$P_{M_1 \cap M_2}(x, y, z) = \left(\frac{x+y+z}{3}, \frac{x+y+z}{3}, \frac{x+y+z}{3}\right).$$

Από το Θεώρημα 1.3.1 (Neumann), παίρνουμε πως

$$(P_1 P_2)^n (x, y, z) \xrightarrow{n\to\infty} \left(\frac{x+y+z}{3}, \frac{x+y+z}{3}, \frac{x+y+z}{3}\right),$$

δείχνοντας ότι θέσεις των συνδετήρων συγκλίνουν πράγματι στο ένα τρίτο και στα δύο τρίτα του μήκους της χορδής. □

3.2 Επίλυση γραμμικών συστημάτων

Έστω $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert και έστωσαν $y_1, \ldots, y_J \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$, και $c_1, \ldots, c_J \in \mathbb{F}(= \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C})$. Σκοπός μας είναι να βρούμε ένα διάνυσμα $x \in \mathcal{H}$ που να ικανοποιεί το σύστημα εξισώσεων

$$(x, y_i) = c_i, \quad i \in \{1, \ldots, J\} \tag{3.1}$$

Θεωρούμε τα (κλειστά) υπερεπίπεδα

$$H_i = \{u \in \mathcal{H} \colon (u, y_i) = c_i\}, \quad i \in \{1, \ldots, J\},$$

και θέτουμε $H = \bigcap_{i=1}^J H_i$. Είναι προφανές ότι ένα διάνυσμα x ικανοποιεί την (3.1) αν και μόνο αν $x \in H$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει λύση στο σύστημα (3.1), δηλαδή, $H \neq \emptyset$.

Θα θέλαμε να αξιοποιήσουμε το Θεώρημα 1.3.2 (Halperin), παίρνοντας μία περιοδική ακολουθία προβολών ενός διανύσματος $x_0 \in \mathcal{H}$ επί των J υπερεπιπέδων, και δείχνοντας ότι συγκλίνει (ως προς την νόρμα) σε ένα στοιχείο του H. Όμως, τα υπερεπίπεδα H_i μπορεί να μην είναι υπόχωροι, καθώς δεν περιέχουν κατ'ανάγκη το μηδέν. Μπορούμε να προσπεράσουμε αυτό το πρόβλημα με τη χρήση αφινικών χώρων. Υπενθυμίζουμε ότι ένα $U \subseteq \mathcal{H}$ λέγεται αφινικός χώρος αν υπάρχει μοναδικός υπόχωρος M του $\mathcal{H}$ ώστε $U = M + u$ για κάθε $u \in U$. Μπορούμε να ορίσουμε την προβολή ενός $z \in \mathcal{H}$ επί του αφινικού χώρου U ως

$$P_U(z) = P_M(z - u) + u.$$

Η απεικόνιση αυτή είναι καλά ορισμένη διότι αν $u, u' \in U$, τότε υπάρχει $x \in M$, έτσι ώστε $u = x + u'$, και άρα

$$P_M(u - u') = P_M(x) = x = u - u'.$$

Ως εκ τούτου, από την γραμμικότητα της P_M, για κάθε $z \in \mathcal{H}$,

$$P_M(z - u) + u = P_M(z - u') + u'.$$

Θέτουμε $M_i = \{u \in \mathcal{H} \colon (u, y_i) = 0\},\ i \in \{1, \ldots, J\}$. Είναι άμεσο ότι για κάθε $h_i \in H_i$ έχουμε ότι

$$H_i = M_i + h_i,$$

και άρα ο H_i είναι αφινικός χώρος. Επιπλέον, αν $M = \bigcap_{i=1}^{J} M_i$, έχουμε ότι για κάθε $h \in H$,

$$H = M + h,$$

και άρα ο H είναι και αυτός ένας αφινικός χώρος. Ειδικότερα, ας παρατηρήσουμε ότι για κάθε $h \in H$, έχουμε ότι

$$H_i = M_i + h,$$
$$H = M + h.$$

Εύρεση μίας λύσης

Είμαστε πλέον έτοιμοι να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 1.3.2 (Halperin). Επιλέγουμε ένα αυθαίρετο $x_0 \in \mathcal{H}$ και σταθεροποιούμε ένα $h \in H$. Για κάθε $i, j \in \{1, \ldots, J\}$ έχουμε ότι

$$P_{H_j} P_{H_i} x_0 = P_{H_j}(P_{M_i}(x_0 - h) + h) = P_{M_j} P_{M_i}(x_0 - h) + h.$$

Θέτουμε $T = P_{H_j} \cdots P_{H_1}$, και παρατηρούμε ότι

$$T^n x_0 = h + (P_{M_J} \cdots P_{M_1})^n (x_0 - h), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Άρα, από το Θεώρημα 1.3.2,

$$||T^n x_0 - P_H x_0|| = ||(P_{M_J} \cdots P_{M_1})^n (x_0 - h) - P_M(x_0 - h)|| \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

Ειδικότερα, εφόσον $P_H x_0 \in H$, βλέπουμε ότι η ακολουθία $T^n x_0$ συγκλίνει σε μία λύση του συστήματος (3.1). Επιπλέον, εφόσον το διάνυσμα $P_H x_0$ είναι η (μοναδική) βέλτιστη προσέγγιση του x_0 από στοιχεία του H, αν επιλέξουμε $x_0 = 0$, έχουμε ότι η $T^n x_0$ συγκλίνει σε μία λύση του (3.1) με την μικρότερη δυνατή νόρμα.

Είναι απλό να ελέγξει κανείς ότι για κάθε $z \in \mathcal{H}$,

$$P_{H_i}(z) = z - \frac{(z, y_i)}{||y_i||^2} y_i + \frac{c_i}{||y_i||^2} y_i, \quad i \in \{1, \ldots, J\},$$

και άρα μπορεί να υπολογιστεί εύκολα η προβολή $P_{H_i}(z)$ για κάθε $z \in \mathcal{H}$.

Μία ειδική περίπτωση ιδιαίτερου ενδιαφέροντος είναι όταν $\mathcal{H} = \mathbb{R}^d$ (με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο). Το σύστημα (3.1) παίρνει την μορφή

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_i = c_i, \quad i \in \{1, \ldots, J\}.$$

Αυτή είναι η λεγόμενη μέθοδος Kaczmarz, που προτάθηκε το 1937 [12] (βλ. [13] για μία Αγγλική μετάφραση). Έχει υπολογιστικό προβάδισμα σε σχέση με άλλες γνωστές μεθόδους επίλυσης γραμμικών συστημάτων, αν ο πίνακας του συστήματος είναι αραιός. Συγκεκριμένα, όταν ο πίνακας $A = [a_{ij}]$ είναι αραιός, ο υπολογισμός της προβολής $P_{H_i}(z)$ είναι πολύ γρήγορος [32].

3.3 Επίλυση ΜΔΕ σε σύνθετα χωρία

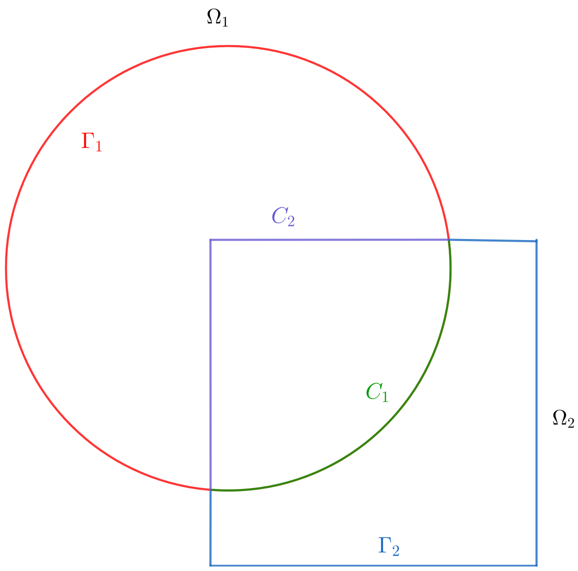
Σε αυτήν την ενότητα παρουσιάζουμε τη λεγόμενη επαναληπτική μέθοδο Schwarz. Η μέθοδος αυτή μας επιτρέπει να βρούμε μία (επαναληπτική) λύση ενός ελλειπτικού προβλήματος σε ένα χωρίο $\Omega = \bigcup_{j=1}^{J} \Omega_j$, το οποίο είναι σύνθεση άλλων υποχωρίων Ω_j, στα οποία το αντίστοιχο πρόβλημα λύνεται εύκολα. Θα ασχοληθούμε μόνο με προβλήματα Dirichlet, αλλά ο αναγνώστης μπορεί να βρει επιπλέον παραδείγματα στο [19].

Η περίπτωση δύο υποχωρίων

Έστω $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^d$, όπου τα χωρία Ω_1 και Ω_2 είναι ανοιχτά και επαρκώς ομαλά (για παράδειγμα, C^1 ή γενικότερα τοπικά Lipschitz). Θεωρούμε τον χώρο Sobolev $\mathcal{H} = H_0^1(\Omega)$, βλέποντας τον ως χώρο Hilbert με το εσωτερικό γινόμενο

$$(u, v)_{\mathcal{H}} = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \overline{\nabla v} \, \mathrm{d}x.$$

Θέτουμε $\Gamma = \partial\Omega$, και για $k \in \{1, 2\}$, θέτουμε $\Gamma_k = \partial\Omega_k \cap \partial\Omega$ και $\gamma_k = \partial\Omega_k \setminus \Gamma_k$.



Σχήμα 5: Ένα παράδειγμα χωρίου $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$.

Για $f \in L^2(\Omega)$, αναζητούμε ασθενή λύση του προβλήματος Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{στο } \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{στη } \Gamma. \end{cases} \tag{3.2}$$

Υπενθυμίζουμε ότι ασθενής λύση είναι μία συνάρτηση $u \in \mathcal{H} = H_0^1(\Omega)$, έτσι ώστε

$$(f, v)_{L^2(\Omega)} = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)}, \quad v \in \mathcal{H}.$$

Παρατηρούμε ότι το συναρτησιακό $\mathcal{H} \ni v \mapsto (f, v)_{L^2(\omega)}$ είναι (συζυγές) γραμμικό και φραγμένο, άρα από το Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz, υπάρχει μοναδικό $u \in \mathcal{H}$, έτσι ώστε

$$(f, v)_{L^2(\Omega)} = (u, v)_{\mathcal{H}} = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)}.$$

Με άλλα λόγια, υπάρχει ασθενής λύση του (3.2). Θα κάνουμε χρήση του Θεωρήματος 1.3.1 (von Neumann) για να βρούμε μία ακολουθία που να συγκλίνει (ως προς την νόρμα) στην ασθενή λύση του (3.2).

Αρχίζουμε επιλέγοντας ένα $u_0 \in \mathcal{H}$. Βρίσκουμε ένα κατάλληλο $u_1 \in H^1(\Omega_1)$ που να είναι ασθενής λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} -\Delta u_1 = f & \text{στο } \Omega_1, \\ \quad u_1 = 0 & \text{στη } \Gamma_1, \\ \quad u_1 = u_0 & \text{στη } \gamma_1, \end{cases} \tag{3.3}$$

και ύστερα επεκτείνουμε το u_1 σε όλο το Ω, θέτοντας $u_1 = u_0$ στο $\Omega_2 \setminus \Omega_1$. Σημειώνουμε ότι ένα $u_1 \in H^1(\Omega_1)$ είναι ασθενής λύση του (3.3) αν $u_1 = 0$ στην Γ_1, $u_1 = u_0$ στην γ_2, και αν

$$(f, v)_{L^2(\Omega_1)} = (\nabla u_1, \nabla v)_{L^2(\Omega_1)}, \quad v \in H_0^1(\Omega_1).$$

Ένα τέτοιο u_1 υπάρχει από το Θεώρημα Riesz.

Έπειτα, βρίσκουμε $u_2 \in H^1(\Omega_2)$ που να είναι ασθενής λύση του ανάλογου προβλήματος στο Ω_2, αντικαθιστώντας το u_0 με u_1, και μετά επεκτείνουμε το u_2 σε όλο το Ω. Συνεχίζοντας κατά αυτόν τον τρόπο, κατασκευάζουμε μία ακολουθία (u_n) στον $\mathcal{H} = H_0^1(\Omega)$. Θα δείξουμε ότι η (u_n) συγκλίνει (ως προς την νόρμα) στο u, το οποίο είναι ασθενής λύση του (3.2).

Για $k \in \{1, 2\}$, θέτουμε $Y_k = H_0^1(\Omega_k)$ και $M_k = Y_k^\perp$. Βλέπουμε τον Y_k σαν ένα κλειστό υπόχωρο του $\mathcal{H}$, επεκτείνοντας τις συναρτήσεις από το Ω_k σε όλο το Ω, θέτοντας τις μηδέν στο $\Omega \setminus \Omega_k$. Έστω P_k η ορθογώνια προβολή επί του M_k και έστω $M = M_1 \cap M_2$. Ας σημειωθεί ότι $M = Y_1^\perp \cap Y_2^\perp = (Y_1 + Y_2)^\perp = \{0\}$, καθώς μπορεί να δειχθεί ότι ο $Y_1 + Y_2$ είναι πυκνός στον $\mathcal{H}$.

Παρατηρούμε ότι για κάθε $v \in Y_1$,

$$\begin{aligned}
(u - u_1, v)_{\mathcal{H}} &= (u - u_1, v)_{Y_1} \\
&= (\nabla(u - u_1), \nabla v)_{L^2(\Omega_1)} \\
&= (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega_1)} - (\nabla u_1, \nabla v)_{L^2(\Omega_1)} \\
&= (f, v)_{L^2(\Omega_1)} - (f, v)_{L^2(\Omega_1)} = 0.
\end{aligned}$$

Ως εκ τούτου, $u - u_1 \in M_1$. Επιπλέον, σημειώνουμε ότι $u_1 - u_0 \in Y_1 = M_1^\perp$. Άρα, έχουμε πως

$$u - u_0 = \underbrace{(u - u_1)}_{\in M_1} + \underbrace{(u_1 - u_0)}_{\in M_1^\perp},$$

και κατά συνέπεια $P_1(u - u_0) = u - u_1$. Παρόμοια, μπορεί να δειχθεί ότι $P_2(u - u_1) = u - u_2$, και ούτω καθεξής. Γενικά, αν θέσουμε $x_n = u - u_n$, $n \geq 1$, έχουμε ότι $x_{2n+2} = P_2 P_1 x_{2n}$, και άρα

$$x_{2n} = (P_2 P_1)^n x_0, \quad n \geq 1.$$

Από το Θεώρημα 1.3.1 (von Neumann), έχουμε ότι

$$||x_{2n} - P_M x_0|| \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι

$$||x_{2n+1} - P_M x_0|| = ||P_1(x_{2n} - P_M x_0)|| \leq ||x_{2n} - P_M x_0|| \xrightarrow{n \to \infty} 0,$$

και άρα, καταλήγουμε στο ότι

$$||x_n - P_M x_0|| \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

Όμως, όπως προαναφέραμε, $M = \{0\}$, και άρα $x_n \to 0$. Ισοδύναμα,

$$||u_n - u|| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι όντως η (u_n) συγκλίνει στην ασθενή λύση του (3.2).

Στην πραγματικότητα, μπορεί να δειχθεί ότι η (u_n) συγκλίνει εκθετικά γρήγορα στην ασθενή λύση του προβλήματος (3.2) (αν και αυτό δεν ισχύει αν θεωρήσουμε Neumann συνοριακές συνθήκες αντί για Dirichlet), βλ. [19] για περισσότερες λεπτομέρειες.

Η περίπτωση $N \geq 3$ υποχωρίων

Μπορούμε εύκολα να επεκτείνουμε τα παραπάνω για την περίπτωση περισσότερων υποχωρίων, κάνοντας χρήση του Θεωρήματος 1.3.2 (Halperin). Έστω $N \geq 3$ ακέραιος και έστωσαν $\Omega_1, \ldots, \Omega_N$ ανοιχτά και επαρκώς ομαλά υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$. Θέτουμε $\Omega = \bigcup_{j=1}^N \Omega_j$. Θεωρούμε τον χώρο Sobolev $\mathcal{H} = H_0^1(\Omega)$. Όπως και πριν, αναζητούμε ασθενή λύση στο πρόβλημα

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{στο } \ \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{στο } \partial\Omega. \end{cases}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 1.3.2 (Halperin), κατασκευάζοντας μία ακολουθία συναρτήσεων (u_n) στον $\mathcal{H}$ που να συγκλίνουν στην ασθενή λύση u του ως άνω προβλήματος.

Επιλέγουμε $u_0 \in \mathcal{H}$. Για κάθε $k \geq 0$ και για κάθε $j \in \{1, \ldots, N\}$, βρίσκουμε $u_{kN+j} \in H_0^1(\Omega_j)$ που να είναι ασθενής λύση του

$$\begin{cases} -\Delta u_{kN+j} = f & \text{στο } \ \Omega_j, \\ \quad u_{kN+j} = u_{kN+j-1} & \text{στο } \partial\Omega_j, \end{cases}$$

και επεκτείνουμε την u_{kN+j} σε όλο το Ω θέτοντας $u_{kN+j} = u_{kN+j-1}$ στο $\Omega \setminus \Omega_j$.

Για $j \in \{1, \ldots, N\}$, θέτουμε $Y_j = H_0^1(\Omega_j)$ και $M_j = Y_j^{\perp}$. Έστω P_j η προβολή επί του M_j. Επιπλέον, θέτουμε $M = \bigcap_{j=1}^J M_j$. Μπορεί να δειχθεί ότι ο $Y_1 + \cdots + Y_N$ είναι πυκνός στον $H_0^1(\Omega)$, και άρα, $M = \{0\}$.

Όπως και πριν, μπορεί να δειχθεί ότι $P_1(u - u_0) = u - u_1$, $P_2(u - u_1) = u - u_2$ και ούτω καθεξής. Οπότε, αν ορίσουμε $x_n = u - u_n$, $n \geq 1$, τότε

$$x_{2n} = (P_J \cdots P_1)^n x_0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Από το Θεώρημα 1.3.2 (Halperin), έχουμε πως

$$||x_{2n}|| = ||x_{2n} - P_M x_0|| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Επιπλέον, εφόσον $||x_{2n+1}|| = ||P_{j_{n+1}} x_{2n}|| \leq ||x_{2n}||$, καταλήγουμε στο ότι $x_n \to 0$, ή ισοδύναμα, $||u_n - u|| \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

3.4 Σύγκλιση δεσμευμένων μέσων τιμών

Σε αυτήν την ενότητα θα δούμε μία εφαρμογή της μεθόδου των εναλλασσόμενων προβολών στο τομέα της θεωρίας πιθανοτήτων. Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ χώρος πιθανότητας. Έστω X μία ολοκληρώσιμη τυχαία μεταβλητή και έστω $\mathcal{A}$ μία υπο σ-άλγεβρα της $\mathcal{F}$. Ως γνωστόν, υπάρχει μοναδική (σχεδόν παντού) $\mathcal{A}-$μετρήσιμη και ολοκληρώσιμη τυχαία μεταβλητή Y, τέτοια ώστε $\int_A Y \mathrm{d}\mathbb{P} = \int_A X \mathrm{d}\mathbb{P}$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$. Η τυχαία μεταβλητή Y συμβολίζεται με $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{A}]$ και καλείται η δεσμευμένη μέση τιμή της X ως προς την $\sigma-$άλγεβρα $\mathcal{A}$. Αν $X \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ για κάποιο $p \geq 1$, μπορεί να δειχθεί ότι η ο τελεστής $\mathbb{E}[\cdot \mid \mathcal{A}] \colon L^P(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to L^P(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ είναι μία γραμμική προβολή επί του $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ με νόρμα ένα [36]. Ειδικότερα, αν $p = 2$, τότε η $\mathbb{E}[\cdot \mid \mathcal{A}]$ είναι η ορθογώνια προβολή επί του $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Θεώρημα 3.4.1. *Έστω $p \in (1, +\infty)$, και έστωσαν $P_i \colon L^P(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to L^P(\Omega, \mathcal{A}_i, \mathbb{P})$ $(1 \leq i \leq J)$ δεσμευμένες μέσες τιμές. Θέτουμε $T = P_J \cdots P_1$. Τότε, για κάθε $X \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, η ακολουθία $T^n(X)$ συγκλίνει ισχυρά στην δεσμευμένη μέση τιμή της X ως προς την $\sigma-$άλγεβρα $\mathcal{A}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{A}_J$, δηλαδή,*

$$T^n(X) \xrightarrow{n \to \infty} \mathbb{E}[X \mid \mathcal{A}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{A}_J] \quad \text{στον } L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}). \tag{3.4}$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 2.2.9, έχουμε ότι το ισχυρό $\lim_{n \to \infty} T^n(X) = P(X)$ υπάρχει και ορίζει μία γραμμική προβολή με νόρμα ένα επί του $\bigcap_{i=1}^J L^p(\Omega, \mathcal{A}_i, \mathbb{P})$. Επιπλέον, εύκολα επαληθεύει κανείς ότι $\int_A P(X) = \int_A X$ για κάθε $X \in L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ και για κάθε $A \in \mathcal{A}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{A}_J$, και κατά συνέπεια, $P(X) = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{A}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{A}_J]$. □

Αξίζει να σημειώσουμε ότι το παραπάνω θεώρημα ισχύει και για $p = 1$. Επιπλέον, στην περίπτωση όπου $p > 1$, μπορεί να δειχθεί ότι η σύγκλιση στην (3.4) είναι, όχι μόνο στον $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, αλλά και σχεδόν βεβαίως. Ο αναγνώστης μπορεί να δει περισσότερες λεπτομέρειες στο [28].

3.5 Προσέγγιση συναρτήσεων πολλών μεταβλητών από συναρτήσεις μίας μεταβλητής

Έστωσαν S, T κλειστά και φραγμένα διαστήματα στον $\mathbb{R}$. Θεωρούμε τον χώρο Hilbert $\mathcal{H} = L^2(S \times T)$. Σκοπός μας είναι να υπολογίσουμε την βέλτιστη προσέγγιση κάθε συνάρτησης δύο μεταβλητών $f \in L^2(S \times T)$ από αθροίσματα συναρτήσεων μίας μεταβλητής. Θέτουμε $A = \{f \in \mathcal{H} \colon f(x, y) = f(x)\}$ και $B = \{g \in \mathcal{H} \colon g(x, y) = g(y)\}$.

Έπεται ότι οι A, B είναι κλειστοί υπόχωροι του $\mathcal{H}$ και μάλιστα

$$P_A f(s,t) = \frac{1}{|T|}\int_T f(s,t)\,\mathrm{d}t,$$
$$P_B f(s,t) = \frac{1}{|S|}\int_S f(s,t)\,\mathrm{d}s,$$

για κάθε $f \in L^2(S\times T)$. Εύκολα βλέπουμε ότι οι προβολές P_A και P_B αντιμετατίθενται, και άρα, από το Θεώρημα 1.3.18, το άθροισμα $A+B$ είναι κλειστό και $\cos(A,B)=0$. Συνεπώς,

$$P_{A+B}f = P_A f + P_B f - P_{A\cap B} f = P_A f + P_B f - P_A P_B f, \quad f \in L^2(S\times T).$$

Αντικαθιστώντας,

$$P_{A+B}f(s,t) = \frac{1}{|T|}\int_T f(s,t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{|S|}\int_S f(s,t)\,\mathrm{d}s - \frac{1}{|T|\,|S|}\int_T\int_S f(s,t)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t.$$

Με άλλα λόγια, η βέλτιστη προσέγγιση της f από στοιχεία του $A+B$ είναι το άθροισμα των μέσων τιμών της στα T, S πλην τη μέση της τιμή στο $T\times S$.

3.6 Αποκατάσταση εικόνας

Έστω $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert και έστωσαν A, B κλειστοί υπόχωροι του $\mathcal{H}$. Το πρόβλημα της αποκατάστασης εικόνας είναι ο προσδιορισμός ενός $x \in \mathcal{H}$ δεδομένου ότι τα μόνα που γνωρίζουμε είναι η προβολή $y = P_A x$ και πως $x \in B$. Με βάση αυτά τα δεδομένα, βλέπουμε πως

$$y = P_A x = P_A P_B x = (I - P_{A^\perp})P_B x = P_B x - P_{A^\perp}P_B x = x - P_{A^\perp}P_B x.$$

Συνεπώς, για να υπάρχει λύση στο πρόβλημα αυτό, είναι αναγκαίο να ανήκει το y στην εικόνα του τελεστή $I - P_{A^\perp}P_B$. Η παραπάνω εξίσωση μας δίνει κίνητρο στο να θεωρήσουμε την επαναληπτική διαδικασία

$$\begin{cases} x_0 = y, \\ x_{n+1} = P_{A^\perp}P_B x_n + y, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Ισοδύναμα,

$$x_{n+1} = (P_{A^\perp}P_B)^n y + x - (P_{A^\perp}P_B)^{n-1}x, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Από το Θεώρημα 1.3.1 (Neumann), έπεται πως

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = P_{A^\perp\cap B}\,y + x - P_{A^\perp\cap B}\,x. \tag{3.5}$$

Αν μπορέσουμε να εξασφαλίσουμε πως $A^{\perp} \cap B = \{0\}$ (ή ισοδύναμα ότι $||P_{A^{\perp}} P_B|| < 1$), η (3.5) δίνει

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x,$$

δηλαδή, η επαναληπτική διαδικασία συγκλίνει στο x, την λύση του προβλήματος.

Η μέθοδος αυτή μπορεί να επεκταθεί και για κυρτά υποσύνολα του $\mathcal{H}$, όχι μόνο υποχώρους [29].

Κεφάλαιο A

Γενική τοπολογία

A.1 Βασικές έννοιες

Ορισμός A.1.1. Έστω X μη κενό σύνολο, μία οικογένεια $\mathcal{T}$ υποσυνόλων του X καλείται τοπολογία πάνω στο X εάν ισχύουν τα ακόλουθα:

(a) $X, \varnothing \in \mathcal{T}$.

(b) Πεπερασμένες τομές μελών της $\mathcal{T}$ ανήκουν στην $\mathcal{T}$, δηλαδή, αν $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{T}$ τότε $\bigcap_{k=1}^{n} U_k \in \mathcal{T}$.

(c) Αυθαίρετες ενώσεις μελών της $\mathcal{T}$ ανήκουν στην $\mathcal{T}$, δηλαδή, αν $U_i \in \mathcal{T}$ $(i \in I)$ τότε $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$.

Ένας **τοπολογικός χώρος** είναι ένα σύνολο εφοδιασμένο με μια τοπολογία $\mathcal{T}$, δηλαδή μια δυάδα $(X, \mathcal{T})$. Τα μέλη της $\mathcal{T}$ λέγονται **ανοιχτά σύνολα.**

Ορισμός A.1.2. Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$.

(i) Ένα $x \in A$ καλείται **εσωτερικό σημείο** του A αν υπάρχει $U \in \mathcal{T}$ τ.ω. $x \in U \subseteq A$.

(ii) Το σύνολο
$$\bigcup \{U \in \mathcal{T} : U \subseteq A\}$$
λέγεται το **εσωτερικό** του A και συμβολίζεται με $\operatorname{int} A$ ή A°.

Το $\operatorname{int} A$ είναι το μεγαλύτερο ανοιχτό σύνολο που περιέχεται στο A. Επιπλέον, το σύνολο A είναι ανοιχτό ανν ταυτίζεται με το εσωτερικό του, δηλαδή ανν $A = \operatorname{int} A$.

Πρόταση A.1.3. *Αν $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και A υποσύνολο του X, τότε* *(i)* $\operatorname{int} A = \{x \in X\colon$ *το x είναι εσωτερικό σημείο του A*$\}$.

(ii) $\operatorname{int}(\operatorname{int} A) = A^\circ$.

(iii) *Αν $A \subseteq B$, τότε $A^\circ \subseteq B^\circ$.*

(iv) $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$ *και* $\operatorname{int} A \cup \operatorname{int} B \subseteq \operatorname{int}(A \cup B)$.

Απόδειξη. Αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη. □

Ορισμός A.1.4. Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $x \in X$. Η οικογένεια των ανοιχτών υποσυνόλων του X που περιέχουν το σημείο x καλείται **ανοιχτή περιοχή του** x και συμβολίζεται με $\mathcal{N}_x$. Δηλαδή,

$$\mathcal{N}_x = \{U \in \mathcal{T} : x \in U\}\,.$$

Ορισμός A.1.5. Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος. Ένα $F \subseteq X$ καλείται κλειστό αν το $X \setminus F$ είναι ανοιχτό, δηλαδή, αν $X \setminus F \in \mathcal{T}$.

Πρόταση A.1.6. *Αν $(X, \mathcal{T})$ είναι τοπολογικός χώρος και $\mathcal{F}$ είναι η οικογένεια όλων των κλειστών υποσυνόλων του X, τότε*

- $X, \varnothing \in \mathcal{F}$
- *Η $\mathcal{F}$ είναι κλειστή ως προς τις πεπερασμένες ενώσεις.*
- *Η $\mathcal{F}$ είναι κλειστή ως προς τις αυθαίρετες τομές.*

Απόδειξη. Προφανές. □

Ορισμός A.1.7. Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και A υποσύνολο του X.

(i) Ένα $x \in X$ λέγεται **οριακό σημείο του** A αν για κάθε $U \in \mathcal{N}_x$, ισχύει ότι $U \cap A \neq \varnothing$.

(ii) Το σύνολο

$$\bigcap \{F \subseteq X\colon F \text{ κλειστό και } F \supseteq A\}$$

λέγεται **κλειστότητα του** A και συμβολίζεται με $\overline{A}$ ή $\operatorname{cl} A$.

Το $\overline{A}$ είναι το μικρότερο κλειστό σύνολο που περιέχει το A. Επιπλέον, το σύνολο A είναι κλειστό ανν $\overline{A} = A$.

Πρόταση A.1.8. *Αν $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και A υποσύνολο του X, τότε*

(i) $\overline{A} = \{x \in X \colon \text{ το } x \text{ είναι οριακό σημείο του } A\}$.

(ii) $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$.

(iii) *Αν* $A \subseteq B$, *τότε* $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

(iv) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ *και* $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

Απόδειξη. Αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη. □

Πρόταση A.1.9. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και A υποσύνολο του X. Τότε*

(i) $X \setminus \operatorname{int} A = \overline{X \setminus A}$.

(ii) $X \setminus \overline{A} = \operatorname{int}(X \setminus A)$.

Απόδειξη. Έπεται άμεσα από τους ορισμούς. □

Ορισμός A.1.10. Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και έστω A υποσύνολο του X. Μπορούμε να ορίσουμε μία τοπολογία στο A που επάγεται από την $\mathcal{T}$ ως εξής:

$$\mathcal{T}\big|_A = \{U \cap A \colon U \in \mathcal{T}\}.$$

Αυτή είναι η λεγόμενη **σχετική τοπολογία** του A.

Ένα $U \subseteq A$ είναι σχετικά ανοιχτό στο A αν και μόνο αν υπάρχει $U' \subseteq X$ ανοιχτό στον X τέτοιο ώστε $U = U' \cap A$. Ομοίως, ένα $F \subseteq A$ είναι σχετικά κλειστό στο A αν και μόνο αν υπάρχει $F' \subseteq X$ κλειστό στον X τέτοιο ώστε $F = F' \cap A$.

Ορισμός A.1.11. Έστωσαν $(X, \mathcal{T})$ και $(Y, \mathcal{O})$ τοπολογικοί χώροι. Έστω επίσης $x_0 \in X$ και $f \colon X \to Y$ συνάρτηση.

(a) Η f λέγεται **συνεχής στο** x_0 αν για κάθε $W \in \mathcal{N}_{f(x_0)}$ υπάρχει $V \in \mathcal{N}_{x_0}$, τέτοιο ώστε $f(V) \subseteq W$.

(b) Αν η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο του X, τότε θα λέμε ότι η f είναι **συνεχής**.

Πρόταση A.1.12. *Έστωσαν $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{S})$ και $(Z, \mathcal{O})$ τοπολογικοί χώροι και έστωσαν $f : X \to Y$ και $g : Y \to Z$ συνεχείς συναρτήσεις. Τότε η $g \circ f : X \to Z$ είναι συνεχής.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

Απόδειξη. Προφανές. □

Πρόταση A.1.13. *Έστωσαν $(X, \mathcal{T})$ και $(Y, \mathcal{O})$ τοπολογικοί χώροι. Έστω επίσης $f : X \to Y$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) *f συνεχής.*

(ii) *Για κάθε V ανοιχτό υποσύνολο του Y, το σύνολο $f^{-1}(V)$ είναι ανοιχτό στον X (επιστρέφει ανοιχτά σε ανοιχτά).*

(iii) *Για κάθε F κλειστό υποσύνολο του Y, το σύνολο $f^{-1}(V)$ είναι κλειστό στον X (επιστρέφει κλειστά σε κλειστά).*

(iv) *Για κάθε A υποσύνολο του X, $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.*

(v) *Για κάθε B υποσύνολο του Y, $f^{-1}(\operatorname{int} B) \subseteq \operatorname{int} f^{-1}(B)$.*

Απόδειξη. Αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη. □

Ορισμός A.1.14. Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και έστωσαν (x_n) ακολουθία στο X και $x \in X$. Θα λέμε ότι η ακολουθία (x_n) **συγκλίνει στο** x, και θα γράφουμε $x_n \to x$, αν για κάθε $U \in \mathcal{N}_x$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $x_n \in U$ για κάθε $n \geq n_0$.

A.2 Βάσεις περιοχών και αξιώματα αριθμησιμότητας

Ορισμός A.2.1. Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος. Μια οικογένεια υποσυνόλων $\mathcal{B}$ του X λέγεται **βάση περιοχών** για την $\mathcal{T}$, αν

$$\forall U \in \mathcal{T}, \ \exists B_i \in \mathcal{B} \ (i \in I) \ \text{ έτσι ώστε } \ U = \bigcup_{i \in I} B_i.$$

Τα μέλη της $\mathcal{B}$ λέγονται **βασικά ανοιχτά** σύνολα.

Σημειωτέον ότι ο ως άνω ορισμός είναι ισοδύναμος με την ιδιότητα

$$\forall U \in \mathcal{T}, \ \forall x \in U, \ \exists B \in \mathcal{B}, \ \text{ώστε } x \in B \subseteq V.$$

Πρόταση A.2.2. *Έστωσαν $(X, \mathcal{T})$ και $(Y, \mathcal{O})$ τοπολογικοί χώροι και έστω $f : X \to Y$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) f συνεχής.

(ii) Για κάθε V βασικό ανοιχτό υποσύνολο του Y, το σύνολο $f^{-1}(V)$ είναι ανοιχτό στον X.

Απόδειξη. Προφανές. □

Θεώρημα A.2.3. *Έστω σύνολο X και έστω $\mathcal{B}$ οικογένεια υποσυνόλων του X. Η $\mathcal{B}$ είναι βάση για κάποια τοπολογία του X αν και μόνο αν ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) $X = \bigcup \mathcal{B}$.

(ii) Για κάθε $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ και $x \in B_1 \cap B_2$, υπάρχει $B_3 \in \mathcal{B}$, έτσι ώστε $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Απόδειξη. Εύκολα αποδεικνύεται ότι αν $\mathcal{B}$ είναι μία βάση περιοχών του X, τότε επαληθεύει τις $(i), (ii)$. Έστω λοιπόν $\mathcal{B}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του X για την οποία ισχύουν οι ως άνω προϋποθέσεις, θα δείξουμε ότι είναι βάση για κάποια τοπολογία του X. Θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{T} = \left\{ \bigcup \mathcal{A} : \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \right\}.$$

Δηλαδή, $U \in \mathcal{T}$ αν και μόνο αν υπάρχουν $B_i \in \mathcal{B}$ $(i \in I)$ τέτοια ώστε $U = \bigcup_{i \in I} B_i$. Σημειωτέον ότι η κενή ένωση είναι το κενό σύνολο, και άρα $\varnothing \in \mathcal{T}$. Επιπλέον, από την (i) προκύπτει ότι $X \in \mathcal{T}$. Δείχνουμε ότι η Η $\mathcal{T}$ είναι κλειστή ως προς τις ενώσεις.

Έστω $U_j \in \mathcal{T}$ $(j \in J)$. Εξ ορισμού, για κάθε $j \in J$ υπάρχει ένα σύνολο I_j και $B_i \in \mathcal{B}$ $(i \in I_j)$ έτσι ώστε $U_j = \bigcup_{i \in I_j} B_i$. Κατά συνέπεια,

$$\bigcup_{j \in J} U_j = \bigcup_{j \in J} \left(\bigcup_{i \in I_j} B_i \right) = \bigcup_{i \in I} B_i \in \mathcal{T},$$

όπου $I = \bigcup_{j \in J} I_j$. Τέλος, δείχνουμε ότι η $\mathcal{T}$ είναι κλειστή ως προς τις πεπερασμένες τομές. Έστωσαν $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$. Αρκεί να δείξουμε ότι $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$. Σημειώνουμε πως $U_1 = \bigcup_{i \in I} B_i$ and $U_2 = \bigcup_{j \in J} B_j$ για κάποια σύνολα I και J. Άρα,

$$U_1 \cap U_2 = \bigcup_{(i,j) \in (I \times J)} (B_i \cap B_j). \tag{A.2.1}$$

Για $(i, j) \in I \times J$, από την (ii), έχουμε πως για κάθε $x \in B_i \cap B_j$ υπάρχει $B_x^{(i,j)} \in \mathcal{B}$ έτσι ώστε $x \in B_x^{(i,j)} \subseteq B_i \cap B_j$. Με άλλα λόγια,

$$B_i \cap B_j = \bigcup_{x \in B_i \cap B_j} B_x^{(i,j)},$$

και κατά συνέπεια, $B_i \cap B_j \in \mathcal{T}$. Εφόσον κάθε όρος της ένωσης στην (A.2.1) ανήκει στην $\mathcal{T}$, και η $\mathcal{T}$ είναι κλειστή ως προς της ενώσεις, το ζητούμενο έπεται.

□

Ορισμός A.2.4. Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και $x \in X$. Μία οικογένεια $\mathcal{B}_x$ υποσυνόλων του X λέγεται **τοπική βάση** περιοχών του x, αν

(i) Για κάθε $B \in \mathcal{B}_x$, $x \in B$ (δηλαδή, κάθε μέλος της $\mathcal{B}_x$ περιέχει το x).

(ii) Αν $V \in \mathcal{N}_x$, τότε υπάρχει $B \in \mathcal{B}_x$ ώστε $B \subseteq V$ (δηλαδή αν ένα ανοιχτό σύνολο περιέχει το x, τότε υπάρχει μέλος της $\mathcal{B}_x$ που να περιέχεται στο V).

Ορισμός A.2.5. Ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T})$ λέγεται **πρώτος αριθμήσιμος** αν κάθε σημείο του X έχει αριθμήσιμη τοπική βάση περιοχών.

Κλασσικό παράδειγμα πρώτων αριθμήσιμων τοπολογικών χώρων είναι οι μετρικοί χώροι. Πράγματι, έστω (X, d) μετρικός χώρος και έστω $x \in X$. Τότε η οικογένεια μπαλών

$$\mathcal{B}_x = \{B(x, 1/n) \colon n \in \mathbb{N}\}$$

αποτελεί (αριθμήσιμη) βάση περιοχών για το x.

Πρόταση Α.2.6. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ πρώτος αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος και έστω $A \subseteq X$. Τότε η κλειστότητα $\overline{A}$ είναι το σύνολο των σημείων όπου "προσεγγίζονται" από κάποια ακολουθία του A, δηλαδή,*

$$\overline{A} = \{x \in X : \text{ υπάρχει ακολουθία } (x_n) \text{ στο } A, \text{ έτσι ώστε } x_n \to x\}.$$

Απόδειξη. Έστω (x_n) ακολουθία στο A με $x_n \to x$. Θα δείξουμε ότι $x \in \overline{A}$. Προς αυτόν τον σκοπό, έστω $V \in \mathcal{N}_x$. Από την σύγκλιση της (x_n) έχουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, ώστε $x_{n_0} \in V$, και συνεπώς, $x_{n_0} \in A \cap V$. Ειδικότερα, $A \cap V \neq \emptyset$. Αυτό δείχνει πως $x \in \overline{A}$.

Ανάποδα, έστω $x \in \overline{A}$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει ακολουθία στο A που να συγκλίνει στο x. Έστω $U_n (n \in \mathbb{N})$ μια αριθμήσιμη βάση περιοχών του x. Μπορούμε να υποθέσουμε χ.β.τ.γ. ότι η οικογένεια αυτή είναι εμφωλευμένη, δηλαδή $U_1 \supseteq U_2 \supseteq U_3 \supseteq \cdots$. Αν όχι, τότε απλά αντικαθιστούμε κάθε U_n με $\bigcap\{U_k : k \leq n\}$. Εφόσον $x \in \overline{A}$, έπεται ότι $U_n \cap A \neq \emptyset$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επιλέγουμε για κάθε τέτοιο n ένα $x_n \in U_n \cap A$. Έπεται ότι $x_n \to x$. □

Πρόταση Α.2.7 (Αρχή μεταφοράς)**.** *Έστωσαν $(X, \mathcal{T})$ πρώτος αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος, $(Y, \mathcal{O})$ τοπολογικός χώρος και έστω $f : X \to Y$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) Η f είναι συνεχής στο $x \in X$.

(ii) Για κάθε ακολουθία (x_n) στον X με $x_n \to x$, έπεται ότι $f(x_n) \to f(x)$.

Απόδειξη. $(i) \Longleftarrow (ii)$: Με βάση την Πρόταση Α.1.13, αρκεί να δειχθεί ότι $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ για κάθε A υποσύνολο του X. Προς αυτόν τον σκοπό, έστω $A \subseteq X$ και έστω $z \in \overline{A}$. Εφόσον ο $(X, \mathcal{T})$ είναι πρώτος αριθμήσιμος, από την Πρόταση Α.2.6 υπάρχει ακολουθία (x_n) στο A, τέτοια ώστε $x_n \to z$, και άρα εξ υποθέσεως, $f(x_n) \to f(z)$. Δηλαδή, το $f(z) \in \overline{f(A)}$.

$(i) \Longrightarrow (ii)$: Προφανές

□

Ορισμός Α.2.8. Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος. Ο $(X, \mathcal{T})$ λέγεται **δεύτερος αριθμήσιμος** αν έχει αριθμήσιμη βάση περιοχών.

Σημειωτέον ότι κάθε δεύτερος αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος είναι και πρώτος αριθμήσιμος. Το αντίστροφο εν γένει δεν ισχύει.

Ορισμός A.2.9. Αν $(X, \mathcal{T})$ είναι τοπολογικός χώρος, μια οικογένεια $\mathcal{S}$ υποσυνόλων του X λέγεται **υποβάση**, αν η οικογένεια

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap \mathcal{F} : \mathcal{F} \subseteq \mathcal{S} \text{ and } F \text{ is finite} \right\}$$

αποτελεί μια βάση περιοχών του X. Δηλαδή, αν πεπερασμένες τομές μελών της $\mathcal{S}$ είναι βασικά ανοιχτά σύνολα.

Τα μέλη της υποβάσης $\mathcal{S}$ καλούνται υποβασικά ανοιχτά σύνολα.

Πρόταση A.2.10. *Έστωσαν $(X, \mathcal{T})$ και $(Y, \mathcal{O})$ τοπολογικοί χώροι και έστω $f\colon X \to Y$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) *f συνεχής.*

(ii) *Για κάθε V υποβασικό-ανοιχτό υποσύνολο του Y, το σύνολο $f^{-1}(V)$ είναι ανοιχτό στον X.*

Απόδειξη. Προφανές. □

Θεώρημα A.2.11. *Έστω σύνολο X και $\mathcal{S} \subseteq 2^X$. Τότε υπάρχει η μιρκότερη τοπολογία $\mathcal{T}$ στον X, ώστε η $\mathcal{S}$ να είναι υποβάση του $(X, \mathcal{T})$.*

Απόδειξη. Έστω $\tau(\mathcal{S})$ η μικρότερη τοπολογία που περιέχει την οικογένεια $\mathcal{S}$. Σημειώνουμε ότι τέτοια τοπολογία υπάρχει, και μάλιστα, είναι η τομή του συνόλου

$$\left\{ \mathcal{O} \subseteq 2^X : \mathcal{S} \subseteq \mathcal{O} \text{ and } \mathcal{O} \text{ is a topology on } X \right\}.$$

Έστω $\mathcal{B}$ η οικογένεια υποσυνόλων του X η οποία αποτελείται από πεπερασμένες τομές συνόλων της $\mathcal{S}$. Έπεται ότι η $\mathcal{B}$ είναι κλειστή ως προς την πεπερασμένες τομές. Επιπλέον, με την σύμβαση ότι η κενή τομή υποσυνόλων του X είναι όλο το X, έπεται ότι $X \in \mathcal{B}$. Από το Θεώρημα A.2.3, υπάρχει τοπολογία $\mathcal{T}$ στον X, η οποία έχει ως βάση την $\mathcal{S}$. Είναι προφανές ότι $\mathcal{T} = \tau(S)$. □

Α.3 Διαχωριστικά αξιώματα

Ορισμός Α.3.1. Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος. Λέμε ότι ο X ικανοποιεί το αξίωμα (ή πιο απλά είναι):

(i) T_1, αν για κάθε ανά δύο διαφορετικά σημεία $x_1, x_2 \in X$, υπάρχει $U_1 \in \mathcal{T}$ ώστε $x_1 \in U_1,\ x_2 \notin U_1$ καθώς και $U_2 \in \mathcal{T}$ ώστε $x_2 \in U_2,\ x_1 \notin U_2$.

(ii) T_2 (Hausdorff), αν για κάθε ανά δύο διαφορετικά σημεία $x_1, x_2 \in X$, υπάρχουν $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ ξένα ώστε $x_1 \in U_1,\ x_2 \in U_2$. Σε αυτή τη περίπτωση, λέμε ότι τα σημεία διαχωρίζονται από ανοιχτά σύνολα.

(iii) T_3 (regural), αν είναι T_1 και αν για κάθε F κλειστό υποσύνολο του X και για κάθε $x \in X \setminus F$, υπάρχουν $U, V \in \mathcal{T}$ ξένα ώστε $x \in U$ και $F \subseteq V$. Σε αυτή τη περίπτωση, λέμε ότι το σημείο x και το κλειστό σύνολο F διαχωρίζονται από ανοιχτά σύνολα.

(iv) T_4 (normal), αν είναι T_1 και αν για κάθε K, F κλειστά και ξένα υποσύνολα του X, υπάρχουν $U, V \in \mathcal{T}$ ξένα ώστε $K \subseteq U$ και $F \subseteq V$. Σε αυτή τη περίπτωση, λέμε ότι τα κλειστά σύνολα διαχωρίζονται από ανοιχτά σύνολα.

Πρόταση Α.3.2. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος, τότε*

(I) Ο $(X, \mathcal{T})$ είναι T_1 αν και μόνο αν το μονοσύνολο $\{x\}$ είναι κλειστό, για κάθε $x \in X$.

(II) Ο $(X, \mathcal{T})$ είναι Hausdorff ανν για κάθε διαφορετικά $x, y \in X$, υπάρχει $U \in \mathcal{T}$ ώστε $x \in U$ και $y \notin \overline{U}$.

(III) Ο $(X, \mathcal{T})$ είναι T_3 ανν για κάθε $x \in X$ και για κάθε $V \in \mathcal{N}_x$, υπάρχει $U \subseteq X$ ανοιχτό ώστε $x \in U \subseteq \overline{U} \subseteq V$.

(IV) Ο $(X, \mathcal{T})$ είναι T_4 ανν για κάθε $K \subseteq X$ κλειστό και για κάθε $V \in \mathcal{T}$ με $K \subseteq V$, υπάρχει $U \in \mathcal{T}$ ώστε $K \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq V$.

Απόδειξη. Αφήνουμε τα $(I), (II), (III)$ και (IV) ως άσκηση. Για το (V). Έστω K κλειστό υποσύνολο του X και έστω $V \in \mathcal{T}$, ώστε $K \subseteq V$. Παρατηρούμε πως το $X \setminus V$ είναι κλειστό και ξένο με το K, άρα από την ιδιότητα T_4 έχουμε ότι υπάρχουν $W, U \in \mathcal{T}$ ξένα, ώστε $W \supseteq X \setminus V$ και $U \supseteq K$. Επιπλέον, $U \subseteq X \setminus W$, και άρα, $\overline{U} \subseteq X \setminus W$.

Δηλαδή, $\overline{U} \cap W = \varnothing$. Ειδικότερα, $\overline{U} \cap (X \setminus V) = \varnothing$, ή ισοδύναμα, $\overline{U} \subseteq V$. Τελικά, $K \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq V$.

Ανάποδα, έστωσαν K, F κλειστά και ξένα υποσύνολα του X. Θέτουμε $V = X \setminus K$. Τότε, εξ υποθέσεως, υπάρχει $U \in \mathcal{T}$ έτσι ώστε $K \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq V$. Θέτουμε $W = X \setminus \overline{U}$. Τότε, τα σύνολα V, W είναι ανοιχτά και διαχωρίζουν τα K, F. □

Πρόταση A.3.3. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ Hausdorff τοπολογικός χώρος. Τότε κάθε ακολουθία στον X έχει το πολύ ένα όριο.*

Απόδειξη. Έστω προς άτοπον ότι υπάρχει ακολουθία (x_n) στον X και διαφορετικά $x, y \in X$, έτσι ώστε $x_n \to x$ και $x_n \to y$. Λόγω της ιδιότητας Hausdorff, υπάρχουν V_x, V_y ανοιχτά και ξένα, με $x \in V_x$ και $y \in V_y$. Από την σύγκλιση της ακολουθίας στο x και στο y, υπάρχουν $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, έτσι ώστε $x_n \in V_x$ για κάθε $n \geq n_1$, και $x_n \in V_y$ για κάθε $n \geq n_1$. Οπότε, για κάθε $n \geq \max\{n_1, n_2\}$, $x_n \in V_x \cap V_y$, το οποίο είναι αδύνατον διότι $V_x \cap V_y = \varnothing$. □

Για την απόδειξη των ακόλουθων θεωρημάτων παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο [41].

Θεώρημα A.3.4 (Λήμμα Urysohn)**.** *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Ο $(X, \mathcal{T})$ είναι T_4.*

(ii) *Για κάθε K, F κλειστά και ξένα υποσύνολα του X, υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : X \to [0, 1]$, τέτοια ώστε $f\big|_F = 0$ και $f\big|_K = 1$.*

Η συνάρτηση f καλείται συνάρτηση Urysohn για τα K, F.

Πόρισμα A.3.5. *Κάθε μετρικός χώρος είναι T_4.*

Απόδειξη. Έστω (X, d) μετρικός χώρος και έστωσαν K, F κλειστά και ξένα υποσύνολα του X. Τότε η συνάρτηση $f : X \to [0, 1]$, με τύπο

$$f(x) = \frac{\operatorname{dist}(x, F)}{\operatorname{dist}(x, F) + \operatorname{dist}(x, K)}$$

είναι συνάρτηση Urysohn για τα K, F. □

Θεώρημα A.3.6 (Tietze)**.** *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Ο $(X, \mathcal{T})$ είναι T_4.*

(ii) *Για κάθε F κλειστό υποσύνολο του X και για κάθε συνεχής συνάρτηση $f\colon F \to \mathbb{R}$, υπάρχει συνεχής επέκταση $\hat{f}\colon X \to \mathbb{R}$ της f.*

Επιπλέον, αν υπάρχει σταθερά $c > 0$, τέτοια ώστε $|f(x)| < c$ για κάθε $x \in F$, τότε η $\hat{f}$ μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε $|\hat{f}(x)| < c$ για κάθε $x \in X$.

Α.4 Δίκτυα

Ορισμός Α.4.1. Έστω Λ σύνολο και έστω $(\leq)$ μία διμελής σχέση στο Λ.

(a) Η σχέση αυτή λέγεται **προδιάταξη** αν $\lambda \leq \lambda$ για κάθε $\lambda \in \Lambda$ (ανακλαστικότητα), και αν για οποιαδήποτε $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \Lambda$ ισχύει $\lambda_1 \leq \lambda_2$ και $\lambda_2 \leq \lambda_3$, τότε $\lambda_1 \leq \lambda_3$ (μεταβατικότητα).

(b) Το προδιατεταγμένο σύνολο $(\Lambda, \leq)$ λέγεται **κατευθυνόμενο**, αν για κάθε $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, υπάρχει $\lambda_3 \in \Lambda$, τέτοιο ώστε $\lambda_1 \leq \lambda_3$ και $\lambda_2 \leq \lambda_3$.

Κλασσικό παράδειγμα κατευθυνόμενου συνόλου είναι το $\mathbb{N}$ με την συνήθη διάταξη. Ένα πιο ενδιαφέρον παράδειγμα είναι το ακόλουθο. Έστωσαν $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος, $x \in X$ και $\mathcal{B}_x$ βάση περιοχών του x. Για κάθε $U, W \in \mathcal{B}_x$, ορίζουμε την σχέση $U \leq W \iff U \supseteq W$. Τότε το σύνολο $(\mathcal{B}_x, \leq)$ είναι κατευθυνόμενο. Πράγματι, έστωσαν $U_1, U_2 \in \mathcal{B}_x$. Θέτουμε $U_3 = U_1 \cap U_2$. Έπεται ότι $U_1 \leq U_3$ και $U_2 \leq U_3$.

Ορισμός Α.4.2. Έστω X σύνολο. **Δίκτυο στο** X είναι μια συνάρτηση $x\colon \Lambda \to X$, όπου Λ κάποιο κατευθυνόμενο σύνολο. Θα συμβολίζουμε το δίκτυο αυτό με $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, ή για συντομία, (x_λ).

Κλασσικό παράδειγμα δικτύων είναι οι ακολουθίες. Τα δίκτυα είναι πολύ χρήσιμα καθώς περιγράφουν πλήρως την τοπολογία ενός χώρου.

Ορισμός Α.4.3. Έστω X τοπολογικός χώρος και έστωσαν $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ δίκτυο στον X και $x \in X$. Θα λέμε ότι το δίκτυο **συγκλίνει στο** x, και θα γράφουμε $x_\lambda \to x$, αν για κάθε $U \in \mathcal{N}_x$, υπάρχει $\lambda_0 \in \Lambda$, τέτοιο ώστε $x_\lambda \in U$ για κάθε $\lambda \geq \lambda_0$.

Πρόταση Α.4.4. *Έστω X τοπολογικός χώρος και έστωσαν A υποσύνολο του X και $x \in X$. Τότε $x \in \overline{A}$ αν και μόνο αν υπάρχει δίκτυο (x_λ) στο A, τέτοιο ώστε $x_\lambda \to A$.*

Απόδειξη. $(\Longleftarrow)$: Προφανές.

$(\Longrightarrow)$: Θεωρούμε το σύνολο $\Lambda = \mathcal{N}_x$ όλων των ανοιχτών περιοχών του x, εφοδιασμένο με τη διάταξη $U \leq W \iff U \supseteq W$. Έστω $x \in \overline{A}$. Για κάθε $U \in \mathcal{N}_x$ επιλέγουμε ένα $x_U \in U \cap A$. Σημειώνουμε ότι $U \cap A \neq \emptyset$, καθώς $x \in \overline{A}$. Τότε το δίκτυο $(x_U)_{U\in\mathcal{N}_x}$ συγκλίνει στο x. □

Η απόδειξη του παρακάτω πορίσματος είναι σαφής.

Πόρισμα Α.4.5. *Έστω X τοπολογικός χώρος και έστω F υποσύνολο του X. Τότε το F είναι κλειστό αν και μόνο αν για οποιοδήποτε δίκτυο (x_λ) στον F, το οποίο συγκλίνει στον x, έπεται ότι $x \in F$.*

Πρόταση A.4.6. *Έστω X τοπολογικός χώρος. Τότε ο X είναι Hausdorff αν και μόνο αν κάθε δίκτυο στον X έχει το πολύ ένα όριο.*

Απόδειξη. ($\Longrightarrow$) : Η απόδειξη είναι παρόμοια με αυτή της πρότασης A.3.3.

($\Longleftarrow$) Υποθέτουμε προς άτοπον ότι ο X δεν είναι Hausdorff. Άρα, υπάρχουν διαφορετικά $x, y \in X$, έτσι ώστε για κάθε $U \in \mathcal{N}_x$ και για κάθε $V \in \mathcal{N}_y$, $U \cap V \neq \varnothing$. Για κάθε τέτοια U, V επιλέγουμε ένα $x_{U,V} \in U \cap V$. Έπεται ότι το δίκτυο $(x_{U,V})_{(U,V)\in\mathcal{N}_x\times\mathcal{N}_y}$ συγκλίνει στο x και στο y. Άτοπο. □

Πρόταση A.4.7. *(Αρχή της μεταφοράς) Έστωσαν $(X, \mathcal{T})$ και $(Y, \mathcal{O})$ τοπολογικοί χώροι και έστωσαν $f: X \to Y$ και $x_0 \in X$. Τότε η f είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν για κάθε δίκτυο (x_λ) στο X, αν $x_\lambda \to x_0$, τότε $f(x_\lambda) \to f(x_0)$.*

Απόδειξη. ($\Longrightarrow$) : Προφανές.

($\Longleftarrow$) : Υποθέτουμε προς άτοπον ότι η f δεν είναι συνεχής στο x_0. Τότε υπάρχει ανοιχτή περιοχή V του $f(x_0)$ στον Y, ώστε για κάθε $U \in \mathcal{N}_{x_0}$, $f(U) \nsubseteq V$. Δηλαδή, για κάθε $U \in \mathcal{N}_{x_0}$, υπάρχει $x_U \in U$, τέτοιο ώστε $f(x_U) \notin V$. Το δίκτυο $(x_U)_{U\in\mathcal{N}_{x_0}}$ συγκλίνει στο x_0, και άρα, εξ υποθέσεως, $f(x_U) \to f(x_0)$. Αυτό έπεται ότι υπάρχει $U_0 \in \mathcal{N}_{x_0}$, έτσι ώστε $f(x_{U_0}) \in V$. Άτοπο. □

A.5 Διαχωρισιμότητα και συμπάγεια

Ορισμός A.5.1. Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και D υποσύνολο του X.

(a) Το D καλείται **πυκνό** αν $\overline{D} = X$.

(b) Ο $(X,\mathcal{T})$ καλείται **διαχωρίσιμος**, αν υπάρχει αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του.

Παρατήρηση A.5.2. Ένα $D \subseteq X$ είναι πυκνό αν και μόνο αν τέμνει όλα τα βασικά ανοιχτά υποσύνολα του X.

Ορισμός A.5.3. Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος και έστω K υποσύνολο του X.

(a) Μια οικογένεια $\mathcal{U}$ ανοιχτών υποσυνόλων του X καλείται **ανοιχτό κάλυμμα** του K, αν $K \subseteq \bigcup \mathcal{U}$.

(b) Το K καλείται **συμπαγές**, αν κάθε ανοιχτό κάλυμμα του K υπάρχει πεπερασμένο υποκάλλυμα. Δηλαδή, αν $\mathcal{U}$ είναι ένα ανοιχτό κάλυμμα του K, τότε υπάρχει $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$ πεπερασμένο, ώστε $K \subseteq \bigcup \mathcal{F}$.

Θεώρημα A.5.4 (Ιδιότητα της πεπερασμένης τομής)**.** *Έστω $(X,\mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) *$(X,\mathcal{T})$ συμπαγής.*

(ii) *Αν $\{F_i\}_{i\in I}$ είναι οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του X με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής, δηλαδή, για κάθε $i_1, i_2, \dots i_n \in I$ ισχύει ότι $\bigcap_{k=1}^n F_{i_k} \neq \emptyset$, τότε $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$.*

Απόδειξη. $(i) \implies (ii)$: Έστω $\{F_i\}_{i\in I}$ οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του X με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής. Υποθέτουμε προς άτοπον ότι $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$. Τότε $\bigcup_{i\in I}(X \setminus F_i) = X \setminus \bigcap_{i\in I} F_i = X$. Δηλαδή, η οικογένεια $\{X \setminus F_i\}_{i\in I}$ είναι ένα ανοιχτό κάλυμμα του X. Συνεπώς, υπάρχουν $i_1, i_2, \dots i_n \in I$ ώστε $X = \bigcup_{k=1}^n X \setminus F_{i_k} = X \setminus \bigcap_{k=1}^n F_{i_k}$. Αυτό όμως είναι αδύνατον καθώς $\bigcap_{k=1}^n F_{i_k} \neq \emptyset$.

$(i) \impliedby (ii)$: Έστω προς άτοπον ότι ο $(X,\mathcal{T})$ δεν είναι συμπαγής. Τότε υπάρχει ένα ανοιχτό κάλυμμα του X, έστω $\{U_i\}_{i\in I}$, το οποίο δεν έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα. Έπεται πως για κάθε $i_1, ..., i_n \in I$,

$$\bigcap_{k=1}^n (X \setminus U_{i_k}) \neq \emptyset.$$

Δηλαδή, η οικογένεια $\{X \setminus U_i\}_{i\in I}$ κλειστών υποσυνόλων του X έχει την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής, και άρα, $\bigcap_{i\in I}(X \setminus U_i) \neq \emptyset$, ή ισοδύναμα, $X \neq \bigcup_{i\in I} U_i$. Άτοπο. □

Υπενθυμίζουμε ένα πολύ σημαντικό αποτέλεσμα της θεωρία συνόλων. Για μία απόδειξη βλ. [45].

Λήμμα (Zorn)**.** Έστω $(A, \leq)$ ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο. Υποθέτουμε ότι κάθε αλυσίδα του A έχει άνω φράγμα. Τότε το A έχει μεγιστικό στοιχείο.

Θεώρημα A.5.5 (Alexander)**.** *Έστω $(X, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος με βάση $\mathcal{B}$ και υποβάση $\mathcal{S}$, και έστω K υποσύνολο του X. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) Το K είναι συμπαγές.

(ii) Το K είναι βασικά-συμπαγές (δηλαδή, κάθε ανοιχτό κάλυμμα του K με στοιχεία από την $\mathcal{B}$ έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα),

(iii) Το K είναι υποβασικά-συμπαγές (δηλαδή, κάθε ανοιχτό κάλυμμα του K με στοιχεία από την $\mathcal{S}$ έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα).

Απόδειξη. Προφανώς $(i) \implies (ii) \implies (iii)$. Θα δείξουμε ότι $(iii) \implies (i)$. Έστω προς άτοπον ότι το K είναι υποβασικά-συμπαγές και όχι συμπαγές. Άρα, υπάρχει ένα ανοιχτό κάλυμμα $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ του K, χωρίς πεπερασμένο υποκάλυμμα.

Ισχυρισμός: Υπάρχει $\mathcal{M}$ ανοιχτό υποκάλυμμα του K με τις ιδιότητες:

(i) $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{M}$

(ii) Το $\mathcal{M}$ είναι μεγιστικό κάλυμμα του K δίχως πεπερασμένο υποκάλυμμα. Δηλαδή, το $\mathcal{M}$ δεν έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα, και για κάθε ανοιχτό σύνολο $V \notin \mathcal{M}$, το $\mathcal{M} \cup \{V\}$ έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα.

Απόδειξη ισχυρισμού: Θα κάνουμε χρήση του λήμματος του Zorn. Θέτουμε

$$\Delta = \{W \subseteq \mathcal{T} : \mathcal{U} \subseteq W \text{ και η οικογένεια } W \text{ δεν έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα του } K\}$$

και ορίζουμε την σχέση ισοδυναμίας $W_1 \prec W_2 \iff W_1 \subseteq W_2$. Θα δείξουμε ότι κάθε αλυσίδα του Δ έχει άνω φράγμα. Έστω $\{W_i\}_{i \in I}$ μία αλυσίδα του Δ, δηλαδή, για κάθε $i_1, i_2 \in I$, είτε $W_{i_1} \prec W_{i_2}$ ή $W_{i_2} \prec W_{i_1}$. Ισχυριζόμαστε πως $\bigcup_{i \in I} W_i \in \Delta$, και άρα, η αλυσίδα έχει άνω φράγμα. Πράγματι, αν αυτό δεν ισχύει, τότε υπάρχουν $w_1, \ldots, w_n \in \bigcup_{i \in I} W_i$, έτσι ώστε $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n w_i$. Όμως τότε $w_1 \in W_{i_1}, \ldots, w_n \in W_{i_n}$, για κάποια $i_1, \ldots, i_n \in I$. Διαλέγουμε ένα ένα $j \in I$ με $i_1 \leq j \leq i_n$ ώστε $W_{i_1}, \ldots, W_{i_n} \subseteq W_j$ (η $\{W_i\}_{i \in I}$ είναι αλυσίδα), και άρα, $w_1, \ldots, w_n \in W_j$. Αυτό σημαίνει ότι $W_j \notin \Delta$, διότι το W_j έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα του K. Άτοπο.

Θα δείξουμε τώρα πως $K \subseteq \bigcup\{G \colon G \in \mathcal{M} \cap \mathcal{S}\}$, και άρα, λόγω υποβασικής συμπάγειας, υπάρχουν $G_1, \ldots, G_n \in \mathcal{M} \cap \mathcal{S}$, τέτοια ώστε $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n G_i \subseteq \mathcal{M}$, καταλήγοντας σε άτοπο καθώς το $\mathcal{M}$ δεν έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα του K. Προς αυτόν τον σκοπό, έστω $x \in K$. Αναζητούμε ένα $G \in \mathcal{M} \cap \mathcal{S}$, τέτοιο ώστε $x \in G$. Επιλέγουμε ένα $V \in \mathcal{M}$ ώστε $x \in V$ (το $\mathcal{M}$ είναι κάλυμμα). Τότε υπάρχουν $G_1, \ldots, G_n \in \mathcal{S}$ ώστε $x \in \bigcap_{j=1}^n G_i \subseteq V$. Ισχυριζόμαστε πως υπάρχει $j_0 \in \{1, \ldots, n\}$ έτσι ώστε $S_{j_0} \in \mathcal{M}$ και άρα έχουμε τελειώσει. Για απλοποίηση (και μόνο) υποθέτουμε ότι $n = 2$ και υποθέτουμε προς άτοπον ότι $x \in G_1 \cap G_2 \subseteq V$ και $G_1, G_2 \notin \mathcal{M}$. Τότε, εφόσον το $\mathcal{M}$ είναι μεγιστικό κάλυμμα του K χωρίς πεπερασμένο υποκάλυμμα, έπεται ότι τα $\mathcal{M} \cup \{G_1\}$ και $\mathcal{M} \cup \{G_2\}$ έχουν πεπερασμένα υποκαλύμματα. Άρα, υπάρχουν $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{S}$ και $B_1, \ldots, B_d \in \mathcal{S}$ τέτοια ώστε

$$K \subseteq G_1 \cup A_1 \cup \cdots \cup A_k \ \text{ και } \ K \subseteq G_2 \cup B_1 \cup \cdots \cup B_d.$$

Είναι εύκολο να ελέγξει κανείς ότι

$$(G_1 \cap G_2) \cup A_1 \cup \cdots \cup A_k \cap B_1 \cup \cdots \cup B_d \supseteq K,$$

και άρα, εφόσον $G_1 \cap G_2 \subseteq V$,

$$V \cup A_1 \cup \cdots \cup A_k \cup B_1 \cup \cdots \cup B_d \supseteq K.$$

Άτοπο, καθώς το $\mathcal{M}$ δεν έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα του K. □

Βασικές ιδιότητες συμπαγών συνόλων

Πρόταση A.5.6. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ συμπαγής τοπολογικός χώρος και F κλειστό υποσύνολο του X. Τότε το F είναι συμπαγές.*

Απόδειξη. Έστω $\{V_i\}_{i \in I}$ ένα τυχόν ανοιχτό κάλυμμα του K. Τότε, εφόσον το $\{V_i\}_{i \in I} \cup \{X \setminus K\}$ είναι ανοιχτό κάλυμμα του X, θα υπάρχουν $i_1, \ldots, i_d \in I$, έτσι ώστε η οικογένεια $\left\{V_{i_n}\right\}_{n=1}^d \cup \{X \setminus K\}$ να καλύπτει το X. Έπεται ότι $K \subseteq \left\{V_{i_n}\right\}_{n=1}^d$, δηλαδή, το K έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα. □

Πρόταση A.5.7. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ Hausdorff τοπολογικός χώρος και έστω $K \subseteq X$ συμπαγές. Τότε το K είναι κλειστό.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι το $X \setminus K$ είναι ανοιχτό. Έστω $x \in X \setminus K$. Αναζητούμε $U \in \mathcal{T}$, τέτοιο ώστε $x \in U$ και $U \subseteq X \setminus K$. Από τον ακόλουθο ισχυρισμό υπάρχουν $U, V \in \mathcal{T}$ ξένα, ώστε $x \in U$ και $K \subseteq V$. Εφόσον $U \cap V = \varnothing$ και $K \subseteq V$, έπεται ότι

$U \cap K = \varnothing$ και άρα $U \subseteq X \setminus K$.

Ισχυρισμός. Για κάθε $x \in X \setminus K$, υπάρχουν $U, V \in \mathcal{T}$ ξένα, έτσι ώστε $x \in U$ και $K \subseteq V$, δηλαδή, μπορούμε να διαχωρίσουμε το x από το συμπαγές σύνολο K.

Απόδειξη ισχυρισμού. Πράγματι, έστω $x \in X \setminus K$ και έστω $y \in K$. Υπάρχουν $U_{x,y}$ και $V_{x,y}$ ξένα ανοιχτά υποσύνολα του X ώστε $x \in U_{x,y}$ και $y \in V_{x,y}$. Παρατηρούμε πως $K \subseteq \bigcup_{y \in K} V_{x,y}$, και άρα, $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{x,y_i}$ για ορισμένα $y_1, \ldots, y_n \in K$. Τα ζητούμενα σύνολα είναι τα $V = \bigcup_{i=1}^{n} V_{x,y_i}$ και $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{x,y_i}$. □

Πρόταση Α.5.8. *Έστωσαν $(X, \mathcal{T})$ και $(Y, \mathcal{O})$ τοπολογικοί χώροι, και έστω $f : X \to Y$ συνεχής συνάρτηση. Τότε η f μεταφέρει συμπαγή σύνολα του X σε συμπαγή υποσύνολα του $f(Y)$.*

Απόδειξη. Έστω $K \subseteq X$ συμπαγές. Θα δείξουμε ότι το $f(K)$ είναι συμπαγές. Έστω $\{W_i\}_{i \in I}$ τυχόν ανοιχτό κάλυμμα του $f(K)$. Τότε $K \subseteq f^{-1}(\bigcup_{i \in I} W_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(W_i)$. Εφόσον η f είναι συνεχής, το $\left\{f^{-1}(W_i)\right\}_{i \in I}$ είναι ανοιχτό κάλυμμα του K, και άρα, υπάρχουν $i_1, .., i_n \in I$, έτσι ώστε $K \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} f^{-1}(W_{i_k}) = f^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^{n} W_{i_k}\right)$. Έπεται πως $f(K) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} W_{i_k}$, δηλαδή το $f(K)$ έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα. □

Πόρισμα Α.5.9. *Έστωσαν $(X, \mathcal{T})$ συμπαγής τοπολογικός χώρος, (Y, s) χώρος Hausdorff και έστω $f : X \to Y$ μία συνεχής συνάρτηση. Τότε η f είναι κλειστή, δηλαδή, στέλνει κλειστά υποσύνολα του X σε κλειστά υποσύνολα του Y.*

Απόδειξη. Έπεται άμεσα από τις προτάσεις Α.5.6, Α.5.7 και Α.5.8. □

Πόρισμα Α.5.10. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ συμπαγής τοπολογικός χώρος, $(Y, \mathcal{O})$ χώρος Hausdorff και έστω $f : X \to Y$ μία συνεχής 1-1 και επί συνάρτηση. Τότε η f είναι και αντίστροφα συνεχής.*

Απόδειξη. Σημειώνουμε πως αν $g = f^{-1}$, τότε για κάθε $A \subseteq X$,

$$g^{-1}[A] = (f^{-1})^{-1}[A] = f[A].$$

Συνεπώς, για να δείξουμε πως η g είναι συνεχείς, αρκεί να δείξουμε πως η f είναι κλειστή. Το ζητούμενο έπεται από το Πόρισμα Α.5.10. □

Πρόταση Α.5.11. *Έστω $(X, \mathcal{T})$ συμπαγής και Hausdorff τοπολογικός χώρος. Τότε ο X είναι T_4.*

Απόδειξη. Δείχνουμε καταρχάς ότι ο X είναι T_3. Έστωσαν K κλειστό υποσύνολο του X και $x \notin K$. Εφόσον ο X είναι συμπαγής, το K όντας κλειστό, θα είναι συμπαγές. Έστω τώρα τυχαίο $y \in K$. Από την ιδιότητα Hausdorff υπάρχουν $U_{x,y}$ *και* $V_{y,x}$ ξένα ανοιχτά υποσύνολα του X, ώστε $x \in U_{x,y}$ και $y \in V_{y,x}$. Παρατηρούμε πως $K \subseteq \bigcup_{y \in K} V_{y,x}$, και άρα, λόγω συμπάγειας, $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i,x}$ για ορισμένα $y_1, \ldots, y_n \in K$. Αν θέσουμε $G_1 = \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i,x}$ και $G_2 = \bigcap_{i=1}^{n} U_{x,y_i}$, τότε τα G_1 και G_2 είναι ανοιχτά που διαχωρίζουν τα x, F.

Δείχνουμε τώρα ότι ο X είναι T_4. Έστωσαν F, G ξένα κλειστά υποσύνολα του X. Σημειωτέον ότι τα F, G είναι και συμπαγή. Έστω $x \in F$, λόγω της ιδιότητας T_3, υπάρχουν V_x και $U_{G,x}$ ξένα ανοιχτά ώστε $x \in V_x$ και $G \subseteq U_{G,x}$. Παρατηρούμε ότι $F \subseteq \bigcup_{x \in F} V_x$, οπότε, λόγω συμπάγειας, $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}$ και $G \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} U_{G,x_i}$, για κάποια $x_1, \ldots, x_n \in F$. Τα σύνολα $\bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}$ και $\bigcap_{i=1}^{n} U_{G,x_i}$ είναι ανοιχτά και διαχωρίζουν τα F, G. □

A.6 Τοπολογία γινόμενο

Έστωσαν σύνολο X και $\{(Y_i, \mathcal{T}_i)\}_{i\in I}$ οικογένεια τοπολογικών χώρων, και έστω $(f_i)_{i\in I}$ οικογένεια συναρτήσεων, με $f_i\colon X \to Y_i$. Τότε, υπάρχει η μικρότερη τοπολογία $\mathcal{T}$ στον X, ώστε η f_i να είναι συνεχής, για κάθε $i \in I$. Πράγματι, θεωρούμε το σύνολο

$$\mathcal{A} = \left\{\mathcal{T} \subseteq 2^X \text{ τοπολογία στο } X\colon\ \forall\, i \in I,\ \text{η } f_i\colon (X, \mathcal{T}) \to (Y_i, \mathcal{T}_i) \text{ συνεχής}\right\}.$$

Σημειώνουμε ότι $2^X \in \mathcal{A}$, και άρα, το ως άνω σύνολο είναι μη κενό. Η ζητούμενη τοπολογία είναι η $\mathcal{T} = \bigcap \mathcal{A}$.

Πρόταση A.6.1. *Για κάθε $i \in I$, επιλέγουμε $\mathcal{S}_i \subseteq \mathcal{T}_i$ υποβάση της $\mathcal{T}_i$. Θεωρούμε την οικογένεια υποσυνόλων του X*

$$\mathcal{S} = \bigcup_{i\in I} \left\{f_i^{-1}(V)\colon V \in \mathcal{S}_i\right\}.$$

Τότε η $\mathcal{S}$ είναι υποβάση για την $\mathcal{T}$.

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{O}$ η μικρότερη τοπολογία στο X που έχει ως υποβάση την $\mathcal{S}$. Σημειώνουμε πως η τοπολογία αυτή υπάρχει από το Θεώρημα A.2.11. Θα δείξουμε ότι $\mathcal{O} = \mathcal{T}$. Καταρχάς, παρατηρούμε πως κάθε f_i είναι συνεχής ως προς την $\mathcal{O}$, και άρα, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{O}$.

Ανάποδα, εφόσον κάθε $f_i\colon (X, \mathcal{T}) \to (Y_i, \mathcal{T}_i)$ είναι συνεχής, έπεται ότι $f_i^{-1}(V) \in \mathcal{T}$ για κάθε $V \in \mathcal{S}_i$ και για κάθε $i \in I$. Τέλος, έπεται πως $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$, και κατά συνέπεια, $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{T}$. □

Παρατήρηση A.6.2. Μπορεί να δείξει κανείς ότι οι παρακάτω οικογένειες αποτελούν και αυτές υποβάση για την τοπολογία $\mathcal{T}$:

$$\mathcal{S}' = \bigcup_{i\in I} \left\{f_i^{-1}(V)\colon V \in \mathcal{B}_i\right\} \text{ και}$$
$$\mathcal{S}'' = \bigcup_{i\in I} \left\{f_i^{-1}(V)\colon V \in \mathcal{T}_i\right\}.$$

Πρόταση A.6.3. *Έστωσαν σύνολο X, $\{(Y_i, \tau_i)\}_{i\in I}$ οικογένεια τοπολογικών χώρων και $(f_i)_{i\in I}$ όπως πριν. Εφοδιάζουμε το X με την μικρότερη τοπολογία ($\mathcal{T}$) που κάνει τις συναρτήσεις $(f_i)_{i\in I}$ συνεχείς. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) $x_n \xrightarrow{\mathcal{T}} x$.

(ii) $\forall\, i \in I,\ f_i(x_n) \xrightarrow{\tau_i} f(x)$.

Απόδειξη. $(ii) \impliedby (i)$: Έστω $V \in \mathcal{T}$ με $x \in V$. Αναζητάμε $n_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $x_n \in V$ για κάθε $n \geq n_0$. Από την μορφή της υποβάσης της $\mathcal{T}$, υπάρχει $F \subseteq I$ πεπερασμένο ώστε $x \in \bigcap_{i\in F} f_i^{-1}(V_i)$, για κάποια $V_i \in \mathcal{S}_i$, $i \in F$. Σημειώνουμε ότι $f_i(x) \in V_i$ για κάθε $i \in I$. Άρα, για κάθε $i \in F$, υπάρχει $n_i \in \mathbb{N}$ ώστε $f_i(x_n) \in V_i$ για κάθε $n \geq n_i$. Θέτουμε $n_0 = \max\{n_i : i \in F\}$. Τότε $f_i(x_n) \in V_i$, για κάθε $n \geq n_0$. Με άλλα λόγια, $x_n \in \bigcap_{i\in F} f_i^{-1} \subseteq V$ για κάθε $n \geq n_0$.

$(i) \implies (ii)$: Προφανές.

□

Ορισμός Α.6.4 (Τοπολογία γινόμενο)**.** Έστω $(X_i, \mathcal{T}_i)$ οικογένεια τοπολογικών χώρων. Θεωρούμε το σύνολο γινόμενο $\mathbb{X} = \prod_{i\in I} X_i$ και τις συναρτήσεις (προβολές): $\pi_i : \mathbb{X} \to X_i$, $i \in I$, με τύπο $\pi_i((x_i)_{i\in I}) = x_i$. Η **τοπολογία γινόμενο** $\mathcal{T}$ στον $\mathbb{X}$ είναι η μικρότερη τοπολογία που κάνει συνεχείς τις π_i, $i \in I$.

Με βάση τα παραπάνω, μία υποβάση της τοπολογίας γινόμενο είναι η

$$\mathcal{S} = \bigcup_{i\in I} \left\{\pi_i^{-1}(V) : V \in \mathcal{S}_i\right\} = \bigcup_{i\in I} \left\{V \times \prod_{j\neq i} X_j : V \in \mathcal{S}_i\right\}.$$

Άρα, μία βάση της τοπολογίας γινόμενο είναι η

$$\mathcal{B} = \bigcup_{i\in I} \left\{\prod_{i\in F} V_i \times \prod_{i\in I\setminus F} : F \subseteq I \text{ πεπερασμένο, } V_i \in \mathcal{S}_i\right\}.$$

Δεν είναι δύσκολο να δείξει κανείς ότι οι οικογένειες

$$\mathcal{B}' = \bigcup_{i\in I} \left\{\prod_{i\in F} V_i \times \prod_{i\in I\setminus F} : F \subseteq I \text{ πεπερασμένο, } V_i \in \mathcal{B}_i\right\} \text{ και}$$

$$\mathcal{B}'' = \bigcup_{i\in I} \left\{\prod_{i\in F} V_i \times \prod_{i\in I\setminus F} : F \subseteq I \text{ πεπερασμένο, } V_i \in \mathcal{T}_i\right\}$$

είναι επίσης βάσεις για την τοπολογία γινόμενο.

Επιπλέον, από την Πρόταση Α.6.3, έχουμε πως μία ακολουθία $(\boldsymbol{x}_n)$ στον $\mathbb{X} = \prod_{i\in I} X_i$ συγκλίνει ως προς την τοπολογία γινόμενο, ανν συγκλίνει σημειακά.

Πρόταση Α.6.5. *Έστωσαν $\{(X_i, \mathcal{T}_i)\}_{i\in I}$ οικογένεια τοπολογικών χώρων και έστω F_i κλειστό υποσύνολο του X_i $(i \in I)$. Τότε το σύνολο $\prod_{i\in I} F_i$ είναι κλειστό στο χώρο γινόμενο $\mathbb{X} = \prod_{i\in I} X_i$.*

Απόδειξη. Σημειώνουμε πως $\prod_{i\in I} F_i = \bigcap_{i\in I} \pi_i^{-1}(F_i)$. Πράγματι, αν $\boldsymbol{x} = (x_i)_{i\in I} \in \mathbb{X}$, τότε

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} \in \prod_{i\in I} F_i &\iff \forall\, i \in I,\ x_i \in F_i \\ &\iff \forall\, i \in I,\ \pi_i(\boldsymbol{x}) \in F_i \\ &\iff \boldsymbol{x} \in \bigcap_{i\in I} \pi_i^{-1}(F_i). \end{aligned}$$

Το αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα από την συνέχεια των προβολών. □

Θεώρημα A.6.6 (Tychonoff)**.** *Έστω $\{(X_i, \mathcal{T}_i)\}_{i\in I}$ οικογένεια συμπαγών τοπολογικών χώρων. Τότε ο χώρος γινόμενο $\mathbb{X} = \prod_{i\in I} X_i$ είναι συμπαγής.*

Απόδειξη. Με βάση το Θεώρημα Alexander (Θεώρημα A.5.5), αρκεί να δείξουμε ότι ο $\mathbb{X}$ είναι υποβασικά-συμπαγής. Προς αυτόν τον σκοπό, έστω $\mathcal{W} = \left\{\pi_i^{-1}(V) \colon V \in \mathcal{T}_i\right\}_{i\in I}$ ένα υποβασικό-κάλυμμα του X. Για $i \in I$, θεωρούμε την οικογένεια συνόλων

$$\mathcal{U}_i = \left\{V \in \mathcal{T}_i \colon \pi_i^{-1}(V) \in \mathcal{W}\right\} \subseteq 2^{X_i}.$$

Ισχυριζόμαστε πως υπάρχει $i_0 \in I$, τέτοιο ώστε $X_{i_0} = \bigcup \mathcal{U}_{i_0}$. Πράγματι, έστω προς άτοπον ότι για κάθε $i \in I$, υπάρχει $x_i \in X_i$, τέτοιο ώστε $x_i \notin \bigcup \mathcal{U}_i$. Θα δείξουμε ότι το σημείο $\boldsymbol{x} = (x_i)_{i\in I}$ δεν καλύπτεται από το $\mathcal{W}$, και άρα θα καταλήξουμε σε άτοπο. Πράγματι, έστω προς άτοπον ότι υπάρχουν $i \in I$ και $V \in \mathcal{T}_i$, ώστε $\boldsymbol{x} \in \pi_i^{-1}(V)$. Τότε $x_i \in V$ και $V \in \mathcal{U}_i$. Άτοπο.

Με βάση τον ισχυρισμό, υπάρχει $i_0 \in I$ ώστε το $\mathcal{U}_{i_0}$ να καλύπτει τον X_{i_0}. Άρα, υπάρχουν $V_1, V_2, \ldots, V_n \in \mathcal{T}_{i_0}$, με $\pi_{i_0}^{-1}(V_k) \in \mathcal{W}$, για κάθε $1 \le k \le n$, τέτοια ώστε $X_{i_0} = \bigcup_{k=1}^n V_k$. Έπεται ότι

$$\mathbb{X} = \bigcup_{k=1}^{n} \pi_{i_0}^{-1}(V_k).$$

□

Κεφάλαιο B

Συναρτησιακή Ανάλυση

B.1 Εισαγωγικές έννοιες

Έστω X ένας απειροδιάστατος γραμμικός χώρος πάνω στο σώμα $\mathbb{R}$. Ό,τι πούμε ισχύει και για γραμμικούς χώρους επί του $\mathbb{C}$.

Ορισμός B.1.1. Μία συνάρτηση $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$ λέγεται **νόρμα** αν

(i) $\|x\| \geq 0$ και $\|x\| = 0$ αν και μόνο αν $x = 0$, για κάθε $x \in X$.

(ii) $\|ax\| = |a|\|x\|$, για κάθε $x \in X$ και για κάθε $a \in \mathbb{R}$ (ομογένεια).

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, για κάθε $x, y \in X$ (τριγωνική ανισότητα).

Ο γραμμικός χώρος X εφοδιασμένος με μία νόρμα καλείται χώρος με νόρμα. Θα λέμε ότι ο X είναι χώρος Banach, αν είναι πλήρης ως προς την μετρική που επάγει η νόρμα του.

Πρόταση B.1.2. *Έστω X χώρος με νόρμα. Τότε ο X είναι Banach αν και μόνο αν κάθε "απολύτως συγκλίνουσα" σειρά στον X συγκλίνει.*

Απόδειξη. ($\Longrightarrow$) : Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ μία απολύτως συγκλίνουσα σειρά στον X, δηλαδή, $\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n|| < +\infty$. Αρκεί να δείξουμε ότι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $(\sum_{k=1}^{n} x_k)$ είναι Cauchy στον X. Προς αυτόν τον σκοπό, έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε επαρκώς μεγάλο $n_0 \in \mathbb{N}$, έστι ώστε $\sum_{k=n+1}^{\infty} ||x_k|| < \varepsilon$. Έπεται πως για κάθε $m > n \geq n_0$, $|| \sum_{k=n+1}^{m} x_k|| \leq \sum_{k=n+1}^{m} ||x_k|| < \varepsilon$, δηλαδή, η ακολουθία μερικών αθροισμάτων είναι Cauchy.

($\Longleftarrow$) : Έστω (y_n) μία Cauchy ακολουθία στον X. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει μία υπακολουθία της (y_n) η οποία συγκλίνει. Επιλέγουμε επαγωγικά φυσικούς αριθμούς $k_1, , k_2, \ldots,$ έτσι ώστε $||y_{k_n} - y_{k_{n+1}}|| < 2^{-n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θέτουμε

$x_n = y_{k_{n+1}} - y_{k_n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έπεται πως $\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n|| < +\infty$, και άρα, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει στο X. Έστω $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Παρατηρούμε πως $\sum_{k=1}^{n} x_k = y_{k_{n+1}} - y_{k_1}$, και άρα, $y_{k_{n+1}} \to x + y_{k_1}$. □

Έστω $T\colon X \to Y$ ένας γραμμικός τελεστής ανάμεσα στους χώρους με νόρμα X και Y. Θα λέμε ότι ο T είναι φραγμένος, αν υπάρχει σταθερά $M > 0$ ώστε $||Tx|| \leq M||x||$, για κάθε $x \in X$. Αν ο T είναι φραγμένος, ορίζουμε την τελεστική του νόρμα ως $\|T\| = \sup\left\{\frac{||Tx||}{||x||} : x \in X \setminus \{0\}\right\}$. Είναι άμεσο ότι αν ο T είναι φραγμένος, τότε

$$\|T\| = \sup_{x\in\overline{B}_X} ||Tx|| = \sup_{x\in B_X} ||Tx|| = \sup_{x\in S_X} ||Tx||.$$

Έχουμε τον εξής χαρακτηρισμό συνέχειας των γραμμικών τελεστών ανάμεσα σε δύο χώρους με νόρμα X και Y:

Πρόταση B.1.3. *Έστω $T\colon X \to Y$ γραμμικός τελεστής. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) T συνεχής.

(ii) Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε το σύνολο $T(\delta B)$ να είναι φραγμένο στον $\mathbb{R}$.

(iii) T Φραγμένος.

(iv) T Lipschitz συνεχής.

Απόδειξη. Αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη. □

Ορισμός B.1.4. Αν X και Y είναι χώροι με νόρμα, θέτουμε

$$\mathcal{B}(X,Y) = \{T\colon X \to Y \text{ γραμμικός και φραγμένος}\}.$$

Ειδικότερα, αν $Y = X$ θα γράφουμε $\mathcal{B}(X,X) = \mathcal{B}(X)$.

Είναι προφανές ότι η συνάρτηση $||T|| = \sup_{x\in B_X} ||Tx||$ είναι μία νόρμα στον $\mathcal{B}(X,Y)$. Επιπλέον, ισχύει το εξής:

Πρόταση B.1.5. *Αν ο X είναι μη τετριμμένος γραμμικός χώρος, τότε ο γραμμικός χώρος $\mathcal{B}(X,Y)$ είναι Banach αν και μόνο αν ο Y είναι Banach.*

Απόδειξη. ($\Longrightarrow$) : Έστω (T_n) μία Cauchy ακολουθία στον $\mathcal{B}(X,Y)$. Σημειωτέον ότι για κάθε $x \in X$, έχουμε πως $||T_n x - T_m x|| \leq ||T_n - T_m||\,||x||$, και άρα, η ακολουθία $(T_n x)$ είναι Cauchy στον $\mathbb{R}$. Θεωρούμε τον τελεστή $T\colon X \to Y$ με τύπο $Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$, $x \in X$. Είναι άμεσο ότι ο T είναι γραμμικός. Θα δείξουμε ότι ο T είναι φραγμένος, και πως $T_n \to T$ στον $\mathcal{B}(X,Y)$. Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ επαρκώς μεγάλο, ώστε $||T_n - T_m|| < \varepsilon$ για κάθε $n > m \geq n_0$. Έπεται ότι για κάθε $x \in B_X$,

$$||T_n x - T_m x|| < \varepsilon, \quad n > m \geq n_0.$$

Παίρνοντας όριο καθώς $m \to \infty$, προκύπτει ότι για κάθε $x \in X$,

$$||T_n x - Tx|| \leq \varepsilon, \quad n \geq n_0. \tag{B.1.1}$$

Από την (B.1.1) έπεται ότι ο $T - T_{n_0}$ είναι φραγμένος, και κατά συνέπεια, ο T είναι και αυτός φραγμένος. Τέλος, πάλι από την (B.1.1), παίρνουμε ότι $||T_n - T|| \leq \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Επειδή το ε ήταν αυθαίρετο, συμπεραίνουμε πως $T_n \to T$ στον $\mathcal{B}(X,Y)$.

($\Longleftarrow$) : Έστω (y_n) cauchy ακολουθία στον Y και έστω $f : X \to \mathbb{R}$ γραμμική και φραγμένη συνάρτηση με $f \neq 0$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $T_n : X \to Y$ με τύπο $T_n(x) = f(x)y_n$. Έπεται ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ο T_n είναι γραμμικός και φραγμένος, και μάλιστα $||T_n|| \leq ||f||\,||y_n||$. Παρατηρούμε πως $\|T_n - T_m\| = \sup_{x \in B_X} |f(x)|\|y_n - y_m\| \xrightarrow{n.m\to\infty} 0$, δηλαδή, η ακολουθία (T_n) είναι cauchy στον $\mathcal{B}(X,Y)$. Συνεπώς, θα υπάρχει $T \in \mathcal{B}(X,Y)$, έτσι ώστε $||T_n - T|| \to 0$. Επιλέγουμε ένα $x \in X \setminus \ker f$. Τότε $T_n(x) \to T(x)$, και άρα, $y_n \to T(x)/|f(x)|$. □

Θεωρούμε τώρα γραμμικούς τελεστές με τιμές στο $\mathbb{R}$.

Ορισμός B.1.6. Ένας γραμμικός τελεστής $X \to \mathbb{R}$ θα καλείται **γραμμικό συναρτησιακό**, και θα συμβολίζεται με x^* ή και καμιά φορά με f. Θα συμβολίζουμε με $\langle x^*, x \rangle$ τη δράση του συναρτησιακού x^* πάνω στο $x \in X$, ή καμιά φορά, θα συμβολίζουμε με $f(x)$ τη δράση του συναρτησιακού f πάνω στο $x \in X$.

Όπως και στους γραμμικούς τελεστές, το συναρτησιακό x^* καλείται φραγμένο, αν υπάρχει σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε $|\langle x^*, x \rangle| \leq c||x||$ για κάθε $x \in X$. Αν x^* είναι ένα φραγμένο συναρτησιακό, ορίζουμε τη νόρμα του ως $||x^*|| = \sup_{x \in B_X} |\langle x^*, x \rangle|$. Θα συμβολίζουμε με $X^* = \mathcal{B}(X,\mathbb{R})$. Ο γραμμικός χώρος X^* καλείται ο δυϊκός χώρος του X. Εφόσον ο $\mathbb{R}$ είναι χώρος Banach, η Πρόταση B.1.5 μας δίνει ότι ο X^* είναι πάντοτε χώρος Banach με την νόρμα $\|x^*\| = \sup_{x \in B_X} |\langle x^*, x \rangle|$.

Θεώρημα B.1.7. *Έστω $x^* : X \to \mathbb{R}$ μη τετριμμένο γραμμικό συναρτησιακό. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) x^* *φραγμένο*

(ii) $\ker x^*$ *κλειστός*

(iii) $\ker x^*$ *όχι πυκνός.*

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε την συνεπαγωγή $(iii) \implies (i)$. Έστω λοιπόν ότι ο $\ker f$ είναι μη πυκνός. Τότε υπάρχουν $x \in X$ και $\varepsilon > 0$, τέτοια ώστε $B(x,\varepsilon) \cap \ker f = \varnothing$. Έπεται ότι $0 \notin f(B_X(0,\varepsilon)) = f(x) + f(B_X(0,\varepsilon))$, ή ισοδύναμα, $-f(x) \notin f(B_X(0,\varepsilon))$. Υποθέτουμε προς άτοπον ότι το συναρτησιακό f δεν είναι φραγμένο. Από την Πρόταση B.1.2, το σύνολο $f(B_X(0,\varepsilon))$ δεν είναι φραγμένο στον $\mathbb{R}$. Σημειωτέον ότι, εφόσον το f είναι γραμμικό, το σύνολο $f(B_X(0,\varepsilon))$ είναι κυρτός και συμμετρικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Με άλλα λόγια, είναι ένα συμμετρικό διάστημα του $\mathbb{R}$. Έπεται ότι $f(B_X(0,\varepsilon)) = \mathbb{R}$. το οποίο είναι αδύνατον διότι $-f(x) \notin f(B_X(0,\varepsilon))$. □

Το Θεώρημα Hahn-Banach και οι γεωμετρικές μορφές του

Ορισμός B.1.8. Έστω $p\colon X \to \mathbb{R}$ συναρτησιακό. Το p λέγεται **θετικό υπογραμμικό** αν

(i) $p(x) \geq 0$, για κάθε $x \in X$.

(ii) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ για κάθε $x, y \in X$.

(iii) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$, για κάθε $\lambda \geq 0$ και για κάθε $x \in X$.

Πρόταση B.1.9. *Έστω $p\colon X \to \mathbb{R}$ θετικό υπογραμμικό συναρτησιακό. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) p συνεχές στο μηδέν.

(ii) p συνεχές.

(iii) p φραγμένο στην περιοχή του μηδενός, δηλαδή, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $p(\delta B_X)$ φραγμένο.

Απόδειξη. Αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη. □

Θεώρημα B.1.10 (Επέκτασης Hahn-Banach)**.** *Έστωσαν Y υπόχωρος του X, $p\colon X \to \mathbb{R}$ θετικό υπογραμμικό συναρτησιακό και έστω $f\colon Y \to \mathbb{R}$ γραμμικό συναρτησιακό, ώστε $f(y) \leq p(y)$, για κάθε $y \in Y$. Τότε υπάρχει $\widehat{f}\colon X \to \mathbb{R}$ γραμμική επέκταση του f, ώστε $\widehat{f}(x) \leq p(x)$, για κάθε $x \in X$.*

Απόδειξη. Βλ. [44]. □

Θεώρημα B.1.11 (Δεύτερη μορφή Θεωρήματος Hahn-Banach)**.** *Έστω Y υπόχωρος του X και έστω $f\colon Y \to \mathbb{R}$ φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό του Y. Τότε υπάρχει επέκταση $\widehat{f}\colon X \to \mathbb{R}$ του f, η οποία είναι ένα γραμμικό και φραγμένο συναρτησιακό με $||\widehat{f}|| = ||f||$.*

Απόδειξη. Βλ. [44]. □

Πρόταση B.1.12 (Πρώτο Πόρισμα Hahn-Banach)**.** *Για κάθε $x_0 \in X \setminus \{0\}$, υπάρχει x^* φραγμένο και γραμμικό συναρτησιακό με $\|x^*\| = 1$ και $\langle x^*, x_0\rangle = \|x\|$.*

Απόδειξη. Θέτουμε $Y = \operatorname{span}\{x_0\} = \{\lambda x_0 \colon \lambda \in \mathbb{R}\}$ και $\langle f, \lambda x_0\rangle = \lambda\|x_0\|$. Το f είναι γραμμικό και $|\langle f, \lambda x_0\rangle| = \|\lambda x_0\|$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. Δηλαδή, το f είναι φραγμένο, με $\|f\| = 1$. Ειδικότερα, $\langle f, x_0\rangle = \|x_0\|$. Επεκτείνοντας το f μέσω του Θεωρήματος Hahn-Banach, προκύπτει το ζητούμενο. □

Παρατήρηση B.1.13. Η Πρόταση B.1.12 μας εξασφαλίζει ότι ο X^* χωρίζει σημεία στον X, δηλαδή για κάθε διαφορετικά $x_1, x_2 \in X$ υπάρχει $x^* \in X^*$, έτσι ώστε $\langle x^*, x_1\rangle \neq \langle x^*, x_2\rangle$.

Πόρισμα B.1.14. *Αν $x \in X$, τότε*

$$\|x\| = \max_{x^* \in \overline{B}_{X^*}} |\langle x^*, x\rangle| = \max_{x^* \in B_{X^*}} |\langle x^*, x\rangle| = \max_{x^* \in S_{X^*}} |\langle x^*, x\rangle|.$$

Πρόταση B.1.15 (Δεύτερο Πόρισμα Hahn-Banach)**.** *Έστω Y κλειστός (γνήσιος) υπόχωρος του X και έστω $x_0 \in X \setminus Y$. Τότε υπάρχει $x^* \in X^*$ ώστε*

(i) $\|x^*\| = 1$.

(ii) $x^*\big|_Y = 0$.

(iii) $\langle x^*, x_0\rangle = \operatorname{dist}(x_0, Y) = \inf\{\|x_0 - y\| \colon y \in Y\} > 0$.

Απόδειξη. Εφόσον ο Y είναι κλειστός, $d(x_0, Y) := \operatorname{dist}(x_0, Y) > 0$. Θέτουμε

$$Z = \operatorname{span}\{Y \cup \{x_0\}\} = \{y + \lambda x_0 \colon y \in Y,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

και $x^* \colon Z \to \mathbb{R}$ με τύπο $\langle x^*, y + \lambda x_0\rangle = \lambda d(x_0, Y)$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και για κάθε $y \in Y$. Ειδικότερα, $\langle x^*, y\rangle = 0$, για κάθε $y \in Y$, και $\langle x^*, x_0\rangle = d(x_0, Y)$.

Το x^* είναι γραμμικό. Επιπλέον, είναι φραγμένο, καθώς

$$|\langle x^*, y+\lambda x_0\rangle| = |\lambda| d(x_0, Y) \leq \|\lambda x_0 + \lambda y\| \quad \text{για κάθε } y \in Y.$$

Συνεπώς, $\|x^*\| \leq 1$. Θα δείξουμε ότι $\|x^*\| = 1$. Έστω (y_n) μία ακολουθία στο Y με $\lim_{n\to\infty} \|x_0 - y_n\| = d(x, Y)$. Τότε

$$d(x_0, Y) = \langle x^*, x_0\rangle = |\langle x^*, x_0 - y_n\rangle| \leq \|x^*\| \|x_0 - y_n\|,$$

και άρα, παίρνοντας $n \to \infty$ προκύπτει το ζητούμενο.

□

Για την απόδειξη των επόμενων θεωρημάτων παραπέμπουμε τον αναγνώστη στην ενότητα B.2, και συγκεκριμένα, στα θεωρήματα B.2.31 και *B*.2.35.

Θεώρημα B.1.16 (1ο Γεωμετρικό Θεώρημα Hahn-Banach)**.** *Έστω X χώρος με νόρμα και έστωσαν $C_1, C_2 \subseteq X$ κυρτά τέτοια ώστε*

$$\operatorname{int} C_1 \neq \emptyset, \quad C_2 \neq \emptyset \quad \textit{και} \quad \operatorname{int} C_1 \cap C_2 = \emptyset.$$

Τότε, υπάρχει $x^* \neq 0$ φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό έτσι ώστε

$$\sup x^*(C_1) \leq \inf x^*(C_2).$$

Θεώρημα B.1.17 (2ο Γεωμετρικό Θεώρημα Hahn-Banach)**.** *Έστω X χώρος με νόρμα και έστωσαν C_1, C_2 κυρτά, ξένα, μη κενά, ώστε C_1 συμπαγές και C_2 κλειστό. Τότε, υπάρχει $x^* \neq 0$ γραμμικό και φραγμένο ώστε*

$$\max x^*(C_1) < \inf x^*(C_2).$$

Η κανονική εμφύτευση του X στον X^{**}

Θεωρούμε συναρτησιακά που δρουν πάνω στον X^*, δηλαδή, πάνω στον δυϊκό του X. Ένα συναρτησιακό που δρα πάνω στον X^* θα συμβολίζεται με x^{**}, και η δράση του πάνω στο τυχόν $x^* \in X^*$ θα συμβολίζεται με $\langle x^{**}, x^*\rangle$. Όπως και πριν, το συναρτησιακό x^{**} καλείται φραγμένο, αν υπάρχει σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε $|\langle x^{**}, x^*\rangle| \leq c\|x^*\|$ για κάθε $x^* \in X^*$. Αν το x^{**} είναι φραγμένο, τότε ορίζουμε την νόρμα του $\|x^{**}\| = \sup_{x^* \in B_{X^*}} |\langle x^{**}, x^*\rangle|$.

Έστω $x \in X$. Ορίζουμε το συναρτησιακό $e(x)\colon X^* \to \mathbb{R}$ με τύπο $\langle e(x), x^* \rangle = \langle x^*, x \rangle$ για κάθε $x^* \in X^*$. Είναι προφανές ότι το $e(x)$ είναι καλά ορισμένο και γραμμικό. Επιπλέον,

$$|\langle e(x), x^* \rangle| = |\langle x^*, x \rangle| \leq ||x||\,||x^*||, \quad \text{για κάθε } x^* \in X^*.$$

Δηλαδή, το $e(x)$ είναι φραγμένο, με $||e(x)|| \leq ||x||$. Μάλιστα, από το Πόρισμα B.1.12, προκύπτει ότι $||e(x)|| = ||x||$.

Από τα παραπάνω, η απεικόνιση $e\colon X \to X^{**}$ που απεικονίζει το $x \in X$ στο $e(x) \in X^{**}$ είναι καλά ορισμένη. Επιπλέον, είναι μία γραμμική ισομετρία. Πράγματι, όπως είδαμε, $||e(x)|| = ||x||$ για κάθε $x \in X$ και άρα η e είναι ισομετρία. Για την γραμμικότητα, έστωσαν $x, y \in X$. Για κάθε $x^* \in X^*$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \langle e(x+y), x^* \rangle &= \langle x^*, x+y \rangle \, \langle x^*, x \rangle + \langle x^*, y \rangle \\ &= \langle e(x), x^* \rangle + \langle e(y), x^* \rangle, \end{aligned}$$

και άρα, $e(x+y) = e(x) + e(y)$. Ομοίως, δείχνεται ότι $e(\lambda x) = \lambda e(x)$ για κάθε $x \in X$ και για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Με άλλα λόγια, μπορούμε να εμφυτεύσουμε τον X στον X^{**} μέσω αυτής της ισομετρίας, και άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο X είναι ένας υπόχωρος του X^{**}.

Βασικά Θεωρήματα σε χώρους Banach

Υπενθυμίζουμε ένα βασικό τοπολογικό αποτέλεσμα από την θεωρία μετρικών χώρων:

Θεώρημα (Baire)**.** Έστω X πλήρης μετρικός χώρος και έστω (F_n) ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του X με $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Τότε υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $\operatorname{int} F_N \neq \emptyset$.

Απόδειξη. Βλ. [43]. □

Θεώρημα B.1.18 (Ομοιόμορφου φράγματος / Banach-Steinhaus)**.** *Έστωσαν X χώρος Banach, Y χώρος με νόρμα και $(T_i)_{i\in I}$ μια οικογένεια φραγμένων γραμμικών τελεστών από τον X στον Y, τέτοια ώστε*

$$\sup_{i\in I} \|T_i(x)\| < \infty, \quad \text{για κάθε } x \in X.$$

Τότε $\sup_{i\in I} \|T_i\| < +\infty$.

Απόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θέτουμε

$$F_n = \{x \in X : \|T_i(x)\| \leq n, \text{ για κάθε } i \in I\}.$$

Εφόσον $F_n = \bigcap_{i\in I} T_i^{-1}(\overline{B}_Y(0,n))$, έπεται ότι το F_n είναι κλειστό, για κάθε n. Επίσης, από την υπόθεση μας, η οικογένεια $\{T_i\}_{i\in I}$ είναι σημειακά φραγμένη και άρα $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Από το Θεώρημα Baire, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\operatorname{int} F_N \neq \emptyset$, και συνεπώς, υπάρχουν $x_0 \in X$ και $\varepsilon > 0$ ώστε $\overline{B}_X(x_0,\varepsilon) \subseteq F_N$. Έτσι, για κάθε $x \in X$ με $\|x - x_0\| \leq \varepsilon$, θα ισχύει ότι $\|T_i(x)\| \leq N$, για κάθε $i \in I$. Έστω τώρα $i \in I$. Για κάθε $x \in B_X$, θα ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
\|T_i(x)\| &= \frac{1}{\varepsilon}\|T_i(\varepsilon x)\| = \frac{1}{\varepsilon}\|T_i(x_0+\varepsilon x) - T_i(x_0)\| \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon}\Big(\|T_i(x_0+\varepsilon x)\| + \|T_i(x_0)\|\Big) \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon}(N+N).
\end{aligned}$$

Επομένως, $\|T_i\| \leq 2N/\varepsilon$, για κάθε $i \in I$. Συμπεραίνουμε πως $\sup_{i\in I}\|T_i\| \leq 2N/\varepsilon$. □

Θεώρημα B.1.19 (Ανοιχτής Απεικόνισης)**.** *Έστωσαν X, Y χώροι Banach και έστω $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ επί. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε*

$$T(B_X) \supseteq \delta B_Y.$$

Για την απόδειξη του Θεωρήματος B.1.19 θα χρειαστούμε τις δύο ακόλουθες προτάσεις.

Πρόταση B.1.20. *Έστωσαν X χώρος Banach, Y χώρος με νόρμα και $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. Υποθέτουμε ότι $0 \in \operatorname{int}\left(\overline{T(B_X)}\right)$. Τότε,*

$$0 \in \operatorname{int} T(B_X).$$

Επιπλέον, ο T είναι επί και ανοιχτή απεικόνιση.

Απόδειξη. Έστω $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $B_Y(0,\delta) \subseteq \overline{T(B_X)}$. Για να δείξουμε πως $0 \in \operatorname{int} T(B_X)$, αρκεί να δείξουμε ότι $B_Y(0,\delta/2) \subseteq T(B_X)$. Προς αυτόν τον σκοπό, παρατηρούμε πως

$$B_Y(0,\delta) \subseteq \overline{T(B_X)} \subseteq T(B_X) + B_Y(0,\delta/2).$$

Πράγματι, έστω $y \in \overline{T(B_X)}$. Τότε, $y + B_Y(0,\delta/2) \cap T(B_X) \neq \emptyset$. Επιλέγουμε $\hat{y} \in B_Y(0,\delta/2)$ έτσι ώστε $y+\hat{y} \in y + B_Y(0,\delta/2) \cap T(B_X)$. Τότε,

$$y = (y+\hat{y}) + (-\hat{y}) \in T(B_X) + B_Y(0,\delta/2).$$

Άρα, για κάθε $\theta > 0$, έχουμε πως $B_Y(0,\theta) \subseteq \frac{\theta}{\delta}T(B_X) + B_Y(0,\theta/2)$. Δηλαδή, για κάθε $\theta > 0$, και για κάθε $y \in B_Y(0,\theta)$, υπάρχει $x \in X$ έτσι ώστε

$$\|x\| < \theta/\delta \ \text{ και } \ \|y - Tx\| < \theta/2.$$

Έστω $y \in B_Y(0,\delta/2)$. Θα δείξουμε ότι $y \in T(B_X)$. Επιλέγουμε $\theta = \delta/4$. Τότε, υπάρχει $x_1 \in X$ έτσι ώστε $\|x_1\| < 1/4$ και $\|y - Tx_1\| < \delta/8$. Επιλέγουμε τώρα $\theta = \delta/8$. Εφόσον $y - Tx_1 \in B_Y(0,\delta/8)$, θα υπάρχει $x_2 \in X$ τέτοιο ώστε $\|x_2\| < 1/8$, και $\|y - Tx_1 - Tx_2\| < \delta/16$. Συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία, κατασκευάζουμε αναδρομικά μία ακολουθία (x_n), τέτοια ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\|x_n\| < \frac{1}{2^{n+1}} \ \text{ και } \ \left\| y - \sum_{k=1}^{n} Tx_k \right\| < \frac{\delta}{2^{n+1}}. \tag{B.1.2}$$

Παρατηρούμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \leq \sum_{n=2}^{\infty} 2^{-n} \leq 1/2 < +\infty$. Εφόσον ο X είναι Banach, υπάρχει $x \in X$ έτσι ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x$. Σημειωτέον πως $||x|| < 1$. Λόγω συνέχειας του T, έχουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} Tx_k = T\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k\right) = Tx.$$

Από την (B.1.2), συμπεραίνουμε πως $y = Tx$, και συνεπώς $y \in TB$. Με άλλα λόγια,

$$B_Y(0,\delta/2) \subseteq T(B_X). \tag{B.1.3}$$

Δείχνουμε τώρα ότι ο T είναι ανοιχτή απεικόνιση. Έστωσαν $G \subseteq X$ ανοιχτό και $x_0 \in G$. Τότε, $G - x_0 \in \mathcal{N}_0$, και άρα υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $\varepsilon B_X \subseteq G - x_0$. Κατά συνέπεια, $\varepsilon T(B_X) = T(\varepsilon B_X) \subseteq T(G) - Tx_0$. Από την (B.1.3) ισχύει ότι

$$B_Y(0,\varepsilon\delta/2) \subseteq \varepsilon T(B_X) \subseteq T(G) - Tx_0,$$

και συνεπώς, $B_Y(Tx_0,\varepsilon\delta/2) \subseteq T(G)$. Δηλαδή, $Tx_0 \in \operatorname{int} T(G)$.

Τέλος, η T είναι επί καθώς για κάθε $y \in Y \setminus \{0\}$, έχουμε πως $\frac{\delta}{4\|y\|}y \in B(0,\delta/2) \subseteq T(B_X)$, και άρα,

$$y \in T\left(\frac{4\|y\|}{\delta}B_X\right) \subseteq T(X).$$

□

Πρόταση B.1.21. *Έστωσαν X χώρος Banach, Y χώρος με νόρμα και $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ με*

$$\operatorname{int}(\overline{T(B_X)}) \neq \emptyset.$$

Τότε ο T είναι επί και ανοιχτή απεικόνιση.

Απόδειξη. Ξεκινούμε την απόδειξη με μία χρήσιμη παρατήρηση: Αν C είναι ένα κυρτό και συμμετρικό υποσύνολο του Y με $\operatorname{int} C \neq \emptyset$, τότε $0 \in \operatorname{int} C$. Πράγματι, έστω $y_0 \in \operatorname{int} C$. Επιλέγουμε ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $B_Y(y_0, \delta) \subseteq C$. Τότε,

$$\frac{1}{2}B_Y(0,\delta) \subseteq \frac{1}{2}C - \frac{1}{2}y_0 \subseteq \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}C \subseteq C.$$

Εφόσον το σύνολο $\overline{T(B_X)} \subseteq Y$ είναι κυρτό και συμμετρικό, και εξ υποθέσεως, $\operatorname{int}(\overline{T(B_X)}) \neq \emptyset$, θα ισχύει πως $0 \in \operatorname{int}(\overline{T(B_X)})$. Το ζητούμενο προκύπτει από την Πρόταση B.1.20. □

Απόδειξη του Θεωρήματος B.1.19 . Έστωσαν X, Y χώροι Banach και $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ επί. Εφόσον, $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nB_X$, θα ισχύει ότι

$$Y = T(X) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nT(B_X) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} n\overline{T(B_X)} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{nT(B_X)}.$$

Από το Θεώρημα Baire, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\operatorname{int}(\overline{nT(B_X)}) \neq \emptyset$, και άρα $\operatorname{int}(\overline{T(B_X)}) \neq \emptyset$. Το αποτέλεσμα έπεται από την Πρόταση B.1.21. □

Πόρισμα B.1.22. *Έστωσαν X, Y χώροι Banach και $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ επί και 1-1. Τότε ο T είναι ισομορφισμός.*

Απόδειξη. Έστω $A = T^{-1}$. Αρκεί να δείξουμε ότι A επιστρέφει ανοιχτά σύνολα του X σε ανοιχτά σύνολα του Y. Παρατηρήστε ότι $A^{-1}(U) = (A^{-1})^{-1}(U) = T(U)$, για κάθε $U \subseteq X$ ανοιχτό. Από το Θεώρημα B.1.19, A είναι συνεχής. □

Θεώρημα B.1.23 (Κλειστού Γραφήματος)**.** *Έστωσαν X, Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής. Τότε, ο T είναι φραγμένος αν και μόνο αν το γράφημα του*

$$\operatorname{Gr} T = \{[x,y] \in X \times Y : y = Tx\}$$

είναι κλειστό στον χώρο γινόμενο $X \times Y$.

Απόδειξη. ($\Longleftarrow$) : Εφοδιάζουμε τον γραμμικό χώρο $X \times Y$ με τη νόρμα

$$\|[x, y]\| = \|x\|_X + \|y\|_Y, \quad [x, y] \in X \times Y.$$

Εύκολα βλέπει κανείς ότι ο $X \times Y$ είναι χώρος Banach με την ως άνω νόρμα. Συνεπώς, ο υπόχωρος $\operatorname{Gr} T$ είναι επίσης χώρος Banach (όντας κλειστός). Θεωρούμε την προβολή $\pi \colon X \times Y \to X$, με τύπο $\pi(x, y) = x$. Η π είναι συνεχής και γραμμική. Συνεπώς, ο τελεστής

$$S := \pi\big|_{\operatorname{Gr} T} \colon \operatorname{Gr} T \to X$$

είναι γραμμικός, φραγμένος, 1-1 και επί. Από το Πόρισμα B.1.22, ο $S^{-1} \colon X \to \operatorname{Gr} T$ είναι φραγμένος. Δηλαδή, υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$\|x\|_X + \|Tx\|_Y = \|[x, Tx]\| = \left\|S^{-1}x\right\| \leq M\|x\|_X.$$

($\Longrightarrow$) : Προφανές. □

B.2 Τοπολογικοί γραμμικοί χώροι

Έστω X γραμμικός χώρος επί του σώματος $\mathbb{R}$. Ό,τι πούμε ισχύει και για γραμμικούς χώρους επί του $\mathbb{C}$. Επιπλέον, έστωσαν A, B υποσύνολα του X, $x \in X$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Θα χρησιμοποιούμε τον εξής συμβολισμό:

$$\begin{aligned} A + B &= \{x + y : x \in A,\ y \in B\} \\ A - B &= \{x - y : x \in A,\ y \in B\} \\ \lambda A &= \{\lambda x : x \in A\} \\ x + A &= \{x + y : y \in A\} \\ x - A &= \{x - y : y \in A\}\,. \end{aligned}$$

Ορισμός B.2.1. Έστω A μη κενό υποσύνολο του X. Το A καλείται:

(i) **Ισορροπημένο**, αν $\lambda A \subseteq A$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ με $|\lambda| < 1$.

(ii) **Απορροφούν**, αν για κάθε $x \in X$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $\lambda x \in A$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ με $|\lambda| < \delta$.

Ορισμός B.2.2. Έστω $\mathcal{T}$ μία τοπολογία επί του γραμμικού χώρου X. Λέμε ότι ο X είναι ένας **τοπολογικός γραμμικός χώρος** αν:

(i) Ο τοπολογικός χώρος X είναι T_1, δηλαδή, αν τα μονοσύνολα είναι κλειστά.

(ii) Οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού:

$$\begin{aligned} + &: X \times X \ni (x, y) \mapsto x + y \in X \\ \cdot &: \mathbb{R} \times X \ni (\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x \in X \end{aligned}$$

είναι συνεχείς, αν εφοδιάσουμε τους $X \times X$ και $\mathbb{R} \times X$ με τις τοπολογίες γινόμενο.

Προφανώς, κάθε χώρος με νόρμα είναι ένας τοπολογικός γραμμικός χώρος.

Ορισμός B.2.3. Θα συμβολίζουμε με $\mathcal{N}_0$ την οικογένεια των ανοιχτών συνόλων που περιέχουν το $0 \in X$.

Λήμμα B.2.4. *Έστωσαν X τοπολογικός γραμμικός χώρος, $a \in X$ και $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Τότε, οι απεικονίσεις*

$$\tau_a : X \to X, \text{ με } \tau_a(x) = x + a, \ \forall x \in X.$$
$$\sigma_\lambda : X \to X, \text{ με } \sigma_\lambda(x) = \lambda x, \ \forall x \in X.$$

είναι ομοιομορφισμοί επί, και μάλιστα $\tau_a^{-1} = \tau_{-a}$ και $\sigma_\lambda^{-1} = \sigma_{\lambda^{-1}}$.

Υπενθυμίζουμε ότι οι ομοιομορφισμοί είναι ανοιχτές απεικονίσεις, δηλαδή, απεικονίζουν ανοιχτά σύνολα σε ανοιχτά. Οι αποδείξεις των παρακάτω πορισμάτων είναι σαφείς.

Πόρισμα B.2.5. *Αν G είναι ανοιχτό υποσύνολο του X και $a \in X$, $\lambda \neq 0$, τότε τα σύνολα $a + G$ και λG είναι ανοιχτά. Επιπλέον, αν A είναι τυχόν υποσύνολο του X, τότε το $A + G = \bigcup_{a \in A}(a + G)$ είναι ανοιχτό.*

Πόρισμα B.2.6. *Αν $\mathcal{B}$ είναι μία βάση περιοχών του 0, τότε για κάθε $x \in X$, η οικογένεια*

$$\mathcal{B}_x = \{x + V : V \in \mathcal{B}\},$$

είναι βάση περιοχών του x.

Πόρισμα B.2.7. *Η τοπολογία του X γράφεται*

$$\mathcal{T} = \{x + V : x \in X, \ V \in \mathcal{N}_0\}$$

όπου $\mathcal{N}_0$ η οικογένεια των ανοιχτών συνόλων που περιέχουν το 0.

Πόρισμα B.2.8. *Έστωσαν A, B υποσύνολα του x, $x \in X$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε*

(i) $\overline{x + A} = x + \overline{A}$

(ii) $\operatorname{int}(x + A) = x + \operatorname{int} A$

(iii) $\overline{\lambda A} = \lambda \overline{A}$

(iv) $\operatorname{int}(\lambda A) = \lambda \operatorname{int} A$

(v) $\overline{A} + \overline{B} \subseteq \overline{A + B}$

(vi) *Αν ο Y είναι γραμμικός υπόχωρος του X, τότε είναι και ο $\overline{Y}$.*

(vii) αν A ισορροπημένο, τότε $\overline{A}$ ισορροπημένο.

(viii) Αν A ισορροπημένο και $0 \in \operatorname{int} A$, τότε $\operatorname{int} A$ ισορροπημένο.

(ix) Αν A κυρτό, τότε $\overline{A}$ και $\operatorname{int} A$ κυρτά.

(x) Αν G ανοιχτό, τότε η κυρτή θήκη $\operatorname{conv} G$ είναι ανοιχτό σύνολο.

Πρόταση B.2.9. *Κάθε τοπολογικός γραμμικός χώρος είναι Hausdorff.*

Απόδειξη. Έστω X τοπολογικός γραμμικός χώρος και έστωσαν $x_0, y_0 \in X$ με $x_0 \neq y_0$. Τότε, $x_0 - y_0 \in X \setminus \{0\}$ και το τελευταίο είναι ανοιχτό. Η απεικόνιση $\varphi\colon X \times X \to X$ με $\varphi(x, y) = x - y$ είναι συνεχής και $\varphi(x_0, y_0) = x_0 - y_0 \in X \setminus \{0\}$. Άρα, υπάρχουν $V, W \subseteq X$ ανοιχτά ώστε $(x_0, y_0) \in V \times W$ και $\varphi(V \times W) \subseteq X \setminus \{0\}$. Με άλλα λόγια, $V - W \subseteq X \setminus \{0\}$, και ειδικότερα $V \cap W = \emptyset$. □

Πρόταση B.2.10. *Έστω X τοπολογικός γραμμικός χώρος και έστω $V \in \mathcal{N}_0$ (Βλ. ορισμό B.2.3). Τότε*

(i) Το V είναι απορροφούν.

(ii) Υπάρχει $W \in \mathcal{N}_0$ ισορροπημένο, ώστε

$$W \subseteq \overline{W} \subseteq W + W \subseteq V.$$

Απόδειξη. (i) : Έστω $x \in X$. Η συνάρτηση $\varphi_x : \mathbb{R} \to X$ με $\varphi_x(\lambda) = \lambda x$ είναι συνεχής και $\varphi_x(0) = 0x = 0 \in V$. Άρα, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $\varphi_x((-\delta, \delta)) \subseteq V$, και άρα $\lambda x \in V$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ με $|\lambda| < \delta$.

(ii) : Η συνάρτηση $\psi : X \times X \to X$ με $\psi(x, y) = x + y$ είναι συνεχής και $\psi(0, 0) = 0 \in V$. Άρα, υπάρχουν $V_1, V_2 \in \mathcal{N}_0$ τέτοια ώστε

$$\psi(V_1 \times V_2) = V_1 + V_2 \subseteq V.$$

Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \times X \to X$ με $f(\lambda, x) = \lambda x$. Η f είναι συνεχής και $f(0, 0) = 0 \in V_1 \cap V_2$ (το οποίο είναι ανοιχτό). Άρα υπάρχουν $\delta > 0$ και $U \in \mathcal{N}_0$ τέτοια ώστε $f\left((-\delta, \delta) \times U\right) \subseteq V_1 \cap V_2$. Με άλλα λόγια,

$$\lambda U \subseteq V_1 \cap V_2, \quad \text{για κάθε } \lambda \in (-\delta, \delta).$$

Θέτουμε

$$W = \bigcup_{|\lambda|<\delta} \lambda U.$$

Τότε το W είναι ισορροπημένο, $W \in \mathcal{N}_0$, και $W \subseteq V_1 \cap V_2$. Συνεπώς, $W + W \subseteq V_1 + V_2 \subseteq V$. Μένει να δείξουμε ότι $\overline{W} \subseteq W + W$. Προς αυτό το σκοπό, έστω $x \in \overline{W}$. Επειδή το $x + W$ είναι ανοιχτό και περιέχει το x, θα ισχύει ότι $(x + W) \cap W \neq \varnothing$. Άρα, υπάρχουν $w, w' \in W$ τέτοια ωστε $x + w = w'$, ή ισοδύναμα, $x = w - w' \in W - W = W + W$ (καθώς το W είναι ισορροπημένο). □

Πόρισμα B.2.11. *Κάθε τοπολογικός γραμμικός χώρος είναι T_3 (regular).*

Απόδειξη. Έστω X τοπολογικός γραμμικός χώρος και έστωσαν $G \subseteq X$ ανοιχτό και $x \in X$ με $x \in G$. Το $V = G - x$ είναι ανοιχτό και περιέχει το 0, άρα από την από πάνω πρόταση, θα υπάρχει $W \in \mathcal{N}_0$ έτσι ώστε $W \subseteq \overline{W} \subseteq V$. Τότε,

$$x \in \underbrace{x + W}_{\text{ανοιχτό}} \subseteq \overline{x + W} = x + \overline{W} \subseteq x + V = G.$$

Δηλαδή, ο X είναι T_3. □

Πόρισμα B.2.12. *Αν X τοπολογικός γραμμικός χώρος, τότε η οικογένεια*

$$\mathcal{B}_0 = \{W \in \mathcal{N}_0 \colon W \text{ ισορροπημένο}\}$$

είναι βάση περιοχών του μηδενός. Επομένως, για κάθε $x \in X$, η οικογένεια

$$\mathcal{B}_x = \{x + W \in \mathcal{N}_0 \colon W \text{ ισορροπημένο}\}$$

είναι βάση περιοχών του x.

Θεώρημα B.2.13. *Έστω X γραμμικός χώρος και $\mathcal{B} \subseteq 2^X$ έτσι ώστε*

(i) $\bigcap \mathcal{B} = \{0\}$,

(ii) Για κάθε $V, W \in \mathcal{B}$, υπάρχει $U \in \mathcal{B}$ με $U \subseteq V \cap W$,

(iii) Για κάθε $V \in \mathcal{B}$, το V είναι ισορροπημένο και απορροφούν, και

(iv) Για κάθε $V \in \mathcal{B}$, υπάρχει $W \in \mathcal{B}$ με $W + W \subseteq V$.

Θέτουμε

$$\mathcal{T} = \{G \subseteq X \colon \forall x \in G,\ \exists V \in \mathcal{B} \text{ με } x + V \subseteq G\}.$$

Τότε, ο $(X, \mathcal{T})$ είναι ένας τοπολογικός γραμμικός χώρος, και $\mathcal{B}$ είναι βάση περιοχών του μηδενός.

Για την απόδειξη του Θεωρήματος B.2.13, χρησιμοποιούμε το εξής τοπολογικό αποτέλεσμα:

Θεώρημα. Έστω X μη κενό σύνολο και έστωσαν $\mathcal{B}_x \subseteq 2^X$, $x \in X$, μια οικογένεια υποσυνόλων του X έτσι ώστε

(I) $x \in G$, για κάθε $G \in \mathcal{B}_x$,

(II) Για κάθε $G, H \in \mathcal{B}_x$, υπάρχει $U \in \mathcal{B}_x$ με $U \subseteq G \cap H$,

(III) Για κάθε $H \in \mathcal{B}_x$, υπάρχει $A \subseteq X$ (όχι κατά ανάγκη ανοιχτό) έτσι ώστε

- $x \in A \subseteq H$ και
- Για κάθε $y \in A$, υπάρχει $W \in \mathcal{B}_y$ με $W \subseteq A$.

Τότε, η οικογένεια

$$\mathcal{T} = \{G \subseteq X : \ \forall x \in G, \ \exists V \in \mathcal{B}_x \text{ με } V \subseteq G\}$$

ορίζει τοπολογία στον X με τοπικές βάσεις περιοχών ακριβώς τις $\mathcal{B}_x$, $x \in X$.

Απόδειξη Θεωρήματος B.2.13 . Ορίζουμε $\mathcal{B}_x = \{x + V : V \in \mathcal{B}\}$, $x \in X$. Έπεται ότι η οικογένεια $\{\mathcal{B}_x\}_{x \in X}$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις $(I), (II)$ και (III) του ως άνω θεωρήματος, και άρα η

$$\mathcal{T} = \{G \subseteq X : \ \forall x \in G, \ \exists V \in \mathcal{B} \text{ με } x + V \subseteq G\}$$

είναι μία τοπολογία επί του X με τοπικές βάσεις περιοχών τις $\mathcal{B}_x$, $x \in X$. Μένει να δειχθεί ότι ο X είναι τοπολογικός γραμμικός χώρος. Η ιδιότητα T_1 προκύπτει άμεσα από το (i). Η συνέχεια της πρόσθεσης βασίζεται στο (iv). Θα δείξουμε τη συνέχεια του πολλαπλασιασμού. Αρχικά, ας παρατηρήσουμε ότι από την (iv), με επαγωγή στο n, εύκολα βλέπει κανείς ότι για κάθε $V \in \mathcal{B}$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει $U = U_n \in \mathcal{B}$ έτσι ώστε

$$2^n U \subseteq V. \tag{B.2.1}$$

Έστωσαν $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ και $x_0 \in X$ και έστω $V \in \mathcal{B}$. Θα να δείξουμε πως υπάρχει $\delta > 0$ και $U \in \mathcal{B}$ ώστε

$$|\lambda - \lambda_0| < \delta \text{ και } x \in x_0 + U \implies \lambda x - \lambda_0 x_0 \in V.$$

Από την (iv), έχουμε ότι υπάρχει $W \in \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε

$$W + W \subseteq V \tag{B.2.2}$$

Από την (iii), το W είναι απορροφούν, και άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $tx_0 \in W$, για κάθε $t \in B_{\mathbb{F}}(0, \delta)$. Τότε,

$$|\lambda - \lambda_0| < \delta \implies (\lambda - \lambda_0)x_0 \in W \tag{B.2.3}$$

Επιλέγουμε $n \in \mathbb{N}$ ώστε $2^n > |\lambda_0| + \delta$. Από την (1), υπάρχει $U \in \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε

$$2^n U \subseteq W \tag{B.2.4}$$

Έστω τώρα $\lambda \in \mathbb{F}$ με $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ και έστω $x \in x_0 + U$. Τότε,

$$\lambda x - \lambda_0 x_0 = \lambda(x - x_0) + \underbrace{(\lambda - \lambda_0)x_0}_{\in W}$$

Παρατηρούμε ότι για $|\lambda - \lambda_0| < \delta$, έχουμε $|\lambda| < |\lambda_0| + \delta < 2^n$, και άρα $|\frac{1}{2^n}\lambda| < 1$. Ως εκ τούτου,

$$\begin{aligned}
\lambda(x - x_0) &= \frac{\lambda}{2^n} 2^n (x - x_0) \\
&\in \frac{\lambda}{2^n} 2^n U \\
&\subseteq \frac{\lambda}{2^n} W && [(B.2.4)] \\
&\subseteq W && [W \text{ ισορροπημένο}]
\end{aligned}$$

Τελικώς, για $|\lambda - \lambda_0| < \delta$, έπεται ότι $\lambda x - \lambda_0 x_0 \in W + W \subseteq V$, λόγω της (B.2.2). □

Γραμμικοί τελεστές σε τοπολογικούς γραμμικούς χώρους

Έστω X τοπολογικός γραμμικός χώρος επί του σώματος $\mathbb{R}$. Ό,τι πούμε ισχύει και για τοπολογικούς γραμμικούς χώρους επί του $\mathbb{C}$. Έστω $f\colon X \to \mathbb{R}$ γραμμική συνάρτηση.

Πρόταση B.2.14. *Έστω ότι $f \neq 0$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) f *συνεχής στο* 0.

(ii) f *συνεχής.*

(iii) $\ker f$ *κλειστός.*

(iv) $\ker f$ *όχι πυκνός.*

(v) *Το* f *είναι φραγμένο σε περιοχή του, δηλαδή υπάρχει* $W \in \mathcal{N}_0$ *έτσι ώστε* $f(W) \subseteq \mathbb{F}$ *φραγμένο.*

Απόδειξη. Οι συνεπαγωγές $(i) \implies (ii) \implies (iii) \implies (iv)$ είναι προφανείς.

$(iv) \implies (v)$: Αφού ο $\ker f$ δεν είναι πυκνός, υπάρχει $x \in X \setminus \overline{\ker f}$. Άρα, υπάρχει $W \in \mathcal{N}_0$ ισορροπημένο με $W \subseteq V$ και $(x + W) \cap \ker f = \varnothing$. Έπεται ότι για κάθε $w \in W$, $f(w) \neq f(x)$. Ως αποτέλεσμα, $f(W) \subsetneq \mathbb{R}$. Όμως, το $f(W)$ είναι ισορροπημένο και μη κενό. Δεν είναι δύσκολο να επιβεβαιώσει κανείς, ότι τότε το $f(W)$ είναι κάποιο φραγμένο διάστημα.

$(v) \implies (i)$ Υποθέτουμε ότι υπάρχει $V \in \mathcal{N}_0$ τέτοιο ώστε $f(V)$ φραγμένο. Δηλαδή, υπάρχει σταθερά $M > 0$ τέτοια ώστε $|f(v)| \leq M$ για κάθε $v \in V$. Έστω $\varepsilon > 0$. Θέτουμε $U = \frac{\varepsilon}{2M}V \in \mathcal{N}_0$. Τότε, για κάθε $x \in U$, $|f(x)| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$. □

Οι αποδείξεις των παρακάτω προτάσεων είναι σαφείς.

Πρόταση B.2.15. *Έστωσαν X, Y τοπολογικοί γραμμικοί χώροι και έστω $T\colon X \to Y$ γραμμικός τελεστής. Τότε ο T είναι συνεχής αν και μόνο αν είναι συνεχής στο μηδέν.*

Πρόταση B.2.16. *Έστωσαν X τοπολογικός γραμμικός χώρος, Y χώρος με νόρμα και έστω $T\colon X \to Y$ γραμμικός τελεστής. Εάν ο T είναι φραγμένος σε περιοχή του 0, δηλαδή, αν υπάρχει $V \in \mathcal{N}_0$ τέτοιο ώστε $T(V) \subseteq Y$ φραγμένο, τότε ο T είναι συνεχής.*

Πρόταση B.2.17. *Έστω $p\colon X \to \mathbb{R}$ θετικό υπογραμμικό συναρτησιακό. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) p *συνεχές στο μηδέν.*

(ii) p *συνεχές*

(iii) p *φραγμένο σε περιοχή του μηδενός, δηλαδή, υπάρχει* $V \in \mathcal{N}_0$ *ώστε* $p(V)$ *φραγμένο.*

Ασθενείς τοπολογίες σε τοπολογικούς γραμμικούς χώρους

Έστω X απειροδιάστατος τοπολογικός γραμμικός χώρος επί του σώματος $\mathbb{R}$. Ό,τι πούμε ισχύει και για τοπολογικούς γραμμικούς χώρους επί του $\mathbb{C}$.

Ορίζουμε $X^{\#} = \{f : X \to \mathbb{R}$ γραμμική$\}$. Έστω $\Phi \subseteq X^{\#}$ μία οικογένεια που χωρίζει σημεία στον X, δηλαδή, για κάθε $x, y \in X$ με $x \neq y$, υπάρχει $f \in \Phi$ τέτοιο ώστε $f(x) \neq f(y)$.

Θεώρημα B.2.18. *Υπάρχει μοναδική τοπολογία, $\mathcal{T}_\Phi$, στον X, η λεγόμενη **ασθενής τοπολογία που παράγεται από την οικογένεια** Φ, τέτοια ώστε:*

(a) Ο $(X, \mathcal{T}_\Phi)$ είναι τοπολογικός γραμμικός χώρος.

(b) Για κάθε $f \in \Phi$, η $f : (X, \mathcal{T}_\Phi) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής.

(c) Εάν $\mathcal{T}$ είναι μία τοπολογία στον X τέτοια ώστε για κάθε $f \in \Phi$, η $f : (X, \mathcal{T}) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε $\mathcal{T}_\Phi \subseteq \mathcal{T}$.

Απόδειξη. (a) : Η μοναδικότητα της $\mathcal{T}_\Phi$ προκύπτει άμεσα από τα $(b), (c)$. Άρα, αρκεί να αποδείξουμε την ύπαρξη της $\mathcal{T}_\Phi$. Θέτουμε

$$\mathcal{S} = \left\{ f^{-1}((-\varepsilon, \varepsilon)) : \varepsilon > 0,\ f \in \Phi \right\} \text{ και } \mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} S_i : S_i \in \mathcal{S},\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Αρκεί να δείξουμε ότι η $\mathcal{B}$ ικανοποιεί τις ιδιότητες $(i) - (iv)$ του Θεωρήματος B.2.13. Το (i) έπεται από το ότι η Φ χωρίζει σημεία. Τα $(ii), (iii)$ έπονται εύκολα. Για το (iv) : Έστω $V \in \mathcal{B}$. Τότε, υπάρχουν $f_1, f_2, \ldots, f_k \in \Phi$ και $\varepsilon > 0$ ώστε $V = \bigcap_{j=1}^{n} f_j^{-1}((-\varepsilon, \varepsilon))$. Θέτουμε $W = \bigcap_{j=1}^{n} f_j^{-1}((-\varepsilon/2, \varepsilon/2))$. Είναι άμεσο ότι $W + W \subseteq V$.

Από το Θεώρημα B.2.13 έπεται ότι ο X με την τοπολογία

$$\mathcal{T}_\Phi = \{G \subseteq X : \forall x \in F,\ \exists V \in \mathcal{B} \text{ τ.ω } x + V \subseteq G\}$$

είναι ένας τοπολογικός γραμμικός χώρος, και η $\mathcal{B}$ είναι βάση περιοχών του $0 \in X$ για την $\mathcal{T}_\Phi$.

(b) : Έστω $f \in \Phi$ και έστω $\varepsilon > 0$. Εξ'ορισμού, $f^{-1}((-\varepsilon, \varepsilon)) \in \mathcal{T}_\Phi$, και άρα η f είναι συνεχής στο μηδέν. Από την Πρόταση B.2.14 συμπεραίνουμε πως η f είναι συνεχής.

(c) : Έστω $\mathcal{T}$ τοπολογία στον X ώστε η $f : (X, \mathcal{T}) \to \mathbb{F}$ είναι συνεχής, για κάθε $f \in \Phi$. Θα δείξουμε ότι $\mathcal{T}_\Phi \subseteq \mathcal{T}$. Έστω $G \in \mathcal{T}_\Phi$ και $x \in G$. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $U \in \mathcal{T}$ ώστε $x \in U \subseteq G$. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει $V \in \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε $x + V \subseteq G$. Το V θα είναι της μορφής

$$V = \bigcap_{j=1}^{k} f_j^{-1}((-\varepsilon, \varepsilon))$$

για κάποια $f_1, f_2, \ldots, f_k \in \Phi$ και $\varepsilon > 0$. Ισχυριζόμαστε πως $x + V \in \mathcal{T}$. Πράγματι, παρατηρούμε πως

$$\begin{aligned} z \in x + V &\iff \left|f_j(z - x)\right| < \varepsilon, \qquad \text{για κάθε } j = 1, \ldots, k \\ &\iff \left|f_j(z) - f_j(x)\right| < \varepsilon, \quad \text{για κάθε } j = 1, \ldots, k \\ &\iff z \in \bigcap_{j=1}^{k} f_j^{-1}((f_j(x) - \varepsilon, f_j(x) + \varepsilon)). \end{aligned}$$

Με άλλα λόγια, $x + V = \bigcap_{j=1}^{k} f_j^{-1}\big((f_j(x) - \varepsilon, f_j(x) + \varepsilon)\big)$, το οποίο ανήκει στην $\mathcal{T}$, καθώς οι f_j είναι $\mathcal{T}$-συνεχείς. Το $U = x + V$ είναι το ζητούμενο. □

Πρόταση B.2.19. *Έστωσαν (x_n) ακολουθία στον X και $x \in X$. Τότε $x_n \xrightarrow{\mathcal{T}_\Phi} x$ αν και μόνο αν $f(x_n) \to f(x)$ για κάθε $f \in \Phi$.*

Απόδειξη. ($\Longrightarrow$) : Άμεσο από την συνέχεια των $f \in \Phi$.

($\Longleftarrow$) : Έστω $G \in \mathcal{T}_\Phi$ με $x \in G$. Τότε, το σύνολο $G - x \in \mathcal{T}_\Phi$ και περιέχει το μηδέν. Συνεπώς, υπάρχουν $f_1, \ldots, f_k \in \Phi$ και $\varepsilon > 0$ έτσι ώστε

$$\bigcap_{j=1}^{k} f_j^{-1}((-\varepsilon, \varepsilon)) \subseteq G - x.$$

Για κάθε $j = 1, \ldots, k$, από την σύγκλιση της $(f_j(x_n))$, έχουμε ότι υπάρχει $n_j \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|f_j(x_n - x)| = \left|f_j(x_n) - f_j(x)\right| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_j$. Θέτουμε $n_0 = \max\left\{n_j : j = 1, \ldots, k\right\}$. Τότε, $x_n - x \in \bigcap_{j=1}^{k} f_j^{-1}((-\varepsilon, \varepsilon)) \subseteq G - x$, για κάθε $n \geq n_0$. □

Πρόταση B.2.20. *Εάν $V \in \mathcal{N}_0$, τότε υπάρχει μη τετριμμένος γραμμικός υπόχωρος Y του X που να περιέχεται στον V, δηλαδή, $Y \subseteq V$.*

Απόδειξη. Έστω $V \in \mathcal{N}_0$. Τότε υπάρχουν $f_1, \ldots, f_k \in \Phi$ και $\varepsilon > 0$ τέτοια ώστε $\bigcap_{j=1}^{k} f_j^{-1}((-\varepsilon, \varepsilon)) \subseteq V$. Θέτουμε $Y = \bigcap_{j=1}^{k} \ker f_j$. Προφανώς, ο Y είναι υπόχωρος του X. Αρκεί να δείξουμε ότι είναι μη τετριμμένος. Προς αυτόν τον σκοπό, έστω προς άτοπον ότι $Y = \{0\}$. Θεωρούμε την συνάρτηση $g : X \to \mathbb{R}^k$ με τύπο $g(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x))$. $x \in X$. Έπεται ότι η g είναι γραμμική και $\ker g = \bigcap_{j=1}^{k} \ker f_j = \{0\}$. Δηλαδή, η g είναι μία 1-1 και γραμμική απεικόνιση από τον X στον $\mathbb{R}^k$. Αυτό είναι αδύνατον καθώς ο X είναι απειροδιάστατος. □

Πόρισμα B.2.21. *Έστω X τοπολογικός γραμμικός χώρος. Τότε δεν υπάρχει νόρμα στον X της οποίας η επαγόμενη τοπολογία είναι ισοδύναμη με την ασθενή τοπολογία $\mathcal{T}_\Phi$.*

Λήμμα B.2.22. *Έστωσαν X γραμμικός χώρος και $f_1, \dots, f_k$ και g γραμμικές συναρτήσεις $X \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε πως $\bigcap_{j=1}^{k} \ker f_j \subseteq \ker g$. Τότε $g \in \operatorname{span}\{f_1, f_2, \dots, f_k\}$.*

Απόδειξη. Με επαγωγή στο k. Για $k = 1$ ισχύει προφανώς. Υποθέτουμε ότι το λήμμα ισχύει για k και δείχνουμε ότι ισχύει για $k+1$. Έστωσαν λοιπόν $f_1, \dots, f_{k+1}$ και g γραμμικές συναρτήσεις, με $\bigcap_{j=1}^{k+1} \ker f_j \subseteq \ker g$. Θέτουμε $Y = \bigcap_{j=1}^{k} \ker f_j$. Τότε,

$$\ker(f_{k+1}\big|_Y) = \bigcap_{j=1}^{k+1} \ker f_j \subseteq \ker(g\big|_Y)$$

και άρα, εφόσον το Λήμμα ισχύει για $k = 1$, υπάρχει $\lambda \in \mathbb{F}$ ώστε $g\big|_Y = \lambda f_{k+1}\big|_Y$. Δηλαδή, $g - \lambda f_{k+1} = 0$ στο Y, και άρα $Y \subseteq \ker(g - \lambda f_{k+1})$. Από την επαγωγική υπόθεση έπεται ότι $g - \lambda f_{k+1} \in \operatorname{span}\{f_1, f_2, \dots f_k\}$ και κατά συνέπεια, $g \in \operatorname{span}\{f_1, f_2, \dots, f_{k+1}\}$. $\square$

Θεώρημα B.2.23. *Έστω X γραμμικός χώρος και $\Phi \subseteq X^{\#}$ οικογένεια που χωρίζει σημεία στον X. Εάν $g\colon (X, \mathcal{T}_\Phi) \to \mathbb{R}$ είναι γραμμικό και συνεχές, τότε $g \in \operatorname{span} \Phi$.*

Απόδειξη. Θέτουμε $V = g^{-1}[(-1, 1)]$. Λόγω συνέχειας της g, το $V \in \mathcal{T}_\Phi$ και μάλιστα περιέχει το μηδέν. Από την Πρόταση B.2.20, θα υπάρχουν $f_1, f_2, \dots, f_k \in \Phi$ ώστε $\bigcap_{j=1}^{k} \ker f_j \subseteq V$. Εύκολα βλέπει κανείς ότι $\bigcap_{j=1}^{k} \ker f_j \subseteq \ker G$ και άρα, από το Λήμμα B.2.22, έπεται ότι $g \in \operatorname{span}\{f_1, f_2, \dots, f_k\} \subseteq \operatorname{span} \Phi$. $\square$

Συναρτησιακό του Minkowski και Γεωμετρικά Θεωρήματα Hahn-Banach

Σε ό,τι ακολουθεί X είναι ένας τοπολογικός γραμμικός χώρος επί του σώματος $\mathbb{R}$ και A ένα απορροφούν και κυρτό υποσύνολο του X. Ό,τι πούμε ισχύει και για τοπολογικούς γραμμικούς χώρους επί του $\mathbb{C}$. Σημειωτέον ότι $0 \in A$, και πως για κάθε $x \in X$, το σύνολο

$$\{\lambda > 0 \colon x \in \lambda A\}$$

είναι μη κενό.

Ορισμός B.2.24. Το **συναρτησιακό του Minkowski** για το σύνολο A είναι η απεικόνιση

$$p_A \colon X \to [0, \infty)$$

με $p_A(x) = \inf\{\lambda > 0 \colon x \in \lambda A\}$, για κάθε $x \in X$.

Πρόταση B.2.25. *Το p_A είναι θετικό υπογραμμικό συναρτησιακό και*

$$(p_A < 1) \subseteq A \subseteq (p_A \leq 1).$$

Απόδειξη. Προφανώς $p_A(x) \geq 0$ για κάθε $x \in X$. Επιπλέον, $p_A(tx) = tp_A(x)$ για κάθε $t \geq 0$ και για κάθε $x \in X$. Έστωσαν $x, y \in A$ και έστω $\varepsilon > 0$. Τότε, υπάρχουν $\lambda, \mu > 0$ τέτοια ώστε $x \in \lambda A$ και $\lambda < p_A(x) + \varepsilon/2$, καθώς και $y \in \mu A$ και $\mu < p_A(y) + \varepsilon/2$. Έχουμε,

$$x + y \in \lambda A + \mu A = (\lambda + \mu)\left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}A + \frac{\mu}{\lambda + \mu}A\right) \subseteq (\lambda + \mu)A.$$

Επομένως, $p_A(x + y) \leq \lambda + \mu < p_A(x) + p_A(y) + \varepsilon$. Παίρνοντας όριο καθώς $\varepsilon \downarrow 0$ προκύπτει ότι το p_A είναι υπογραμμικό. Αφήνουμε ως άσκηση το δεύτερο μέρος της πρότασης. □

Πρόταση B.2.26. *Εάν $0 \in \operatorname{int} A$, τότε*

(i) το p_A είναι συνεχές.

(ii) $\operatorname{int} A = (p_A < 1)$ *και* $\overline{A} = (p_A \leq 1)$.

Απόδειξη. (i) : Έστω $V \in \mathcal{N}_0$ με $V \subseteq A$. Παρατηρούμε ότι $0 \leq \sup p_A(V) \leq 1$, δηλαδή, το p_A φραγμένο σε περιοχή του μηδενός. Το ζητούμενο έπεται από την Πρόταση B.2.17.

(ii) : Ξεκινάμε την απόδειξη με μία παρατήρηση: Αν $G \subseteq X$ ανοιχτό και $x_0 \in G$, τότε υπάρχουν $0 < s < 1 < t$ τέτοια ώστε $sx_0, tx_0 \in G$. Πράγματι, εφόσον η απεικόνιση $\varphi\colon \mathbb{R} \to X$, με τύπο $\varphi(t) = tx_0$ είναι συνεχής, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $\varphi\big((1-\delta, 1+\delta)\big) \subseteq G$. Αρκεί να επιλέξουμε $s \in (1-\delta, 1)$ και $t \in (1, 1+\delta)$.

Έστω τώρα $x_0 \in \operatorname{int} A$ και $y_0 \in X \setminus \overline{A}$. Με βάση την παραπάνω παρατήρηση, υπάρχουν $s \in (0,1)$ και $t > 1$ τέτοια ώστε

$$tx_0 \in \operatorname{int} A \ \text{ και } \ sy_0 \in X \setminus \overline{A} \subseteq X \setminus A.$$

Από την προηγούμενη πρόταση, έχουμε πως $p_A(tx_0) \leq 1$, και άρα $p_A(x_0) \leq 1/t < 1$. Επιπρόσθετα, έχουμε ότι $p_A(sy_0) \geq 1$, και άρα $p_A(y_0) \geq 1/s > 1$. Συμπεραίνουμε λοιπών πως

$$\operatorname{int} A \subseteq (p_A < 1) \ \text{ και } \ X \setminus \overline{A} \subseteq (p_A > 1).$$

Από την προηγούμενη πρόταση, και αναδιατυπώνοντας το παραπάνω, έχουμε πως

$$\operatorname{int} A \subseteq (P_A < 1) \subseteq A \subseteq \overline{A} \subseteq (P_A \leq 1).$$

Το ζητούμενο έπεται, καθώς το $(p_A < 1)$ είναι ανοιχτό, και το $(p_A \leq 1)$ κλειστό. □

Πρόταση B.2.27. *Αν* $0 \in \operatorname{int} A$, *τότε*

$$p_A = p_{\operatorname{int} A} = p_{\overline{A}}.$$

Απόδειξη. Εφόσον $\operatorname{int} A \subseteq A \subseteq \overline{A}$, έπεται ότι $p_A \leq p_{\operatorname{int} A} \leq p_{\overline{A}}$. Έστω προς άτοπον ότι $p_A(x) < p_{\operatorname{int} A}(x)$, για κάποιο $x \in X$. Επιλέγουμε $s > 0$ με $p_A(x) < s < p_{\operatorname{int} A}(x)$. Τότε, $p_A\left(s^{-1}x\right) < 1$, και άρα $s^{-1}x \in \operatorname{int} A$. Συμπεραίνουμε πως $p_{\operatorname{int} A}\left(s^{-1}x\right) \leq 1$. Δηλαδή, $p_{\operatorname{int} A}(x) \leq s$, το οποίο είναι αδύνατον. Ομοίως δείχνουμε ότι $p_A = p_{\overline{A}}$. □

Πόρισμα B.2.28. *Έστω C κυρτό με $\operatorname{int} C \neq \varnothing$. Τότε,*

(i) $\overline{\operatorname{int} C} = \overline{C}$ *και* $\operatorname{int} \overline{C} = \operatorname{int} C$.

(ii) Αν V ανοιχτό και κυρτό με $\overline{V} = C$, τότε $V = \operatorname{int} C$.

Λήμμα B.2.29. *Έστωσαν $A \subseteq X$ κυρτό και $x_0 \in X$. Υποθέτουμε πως $0 \in \operatorname{int} A$ και $x_0 \notin \operatorname{int} A$. Τότε, υπάρχει $f \in X^* \setminus \{0\}$ έτσι ώστε*

$$\sup f(A) \leq f(x_0).$$

Απόδειξη. Εφόσον $x_0 \notin \operatorname{int} A$, έχουμε ότι $p_A(x_0) \geq 1$. Θεωρούμε το γραμμικό συναρτησιακό $g\colon \operatorname{span}\{x_0\} \to \mathbb{R}$, με τύπο $g(\lambda x_0) = \lambda$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. Αν $\lambda \geq 0$, τότε $g(\lambda x_0) = \lambda \leq \lambda p_A(x_0) = p_A(\lambda x_0)$. Επιπλέον, αν $\lambda < 0$, τότε $g(\lambda x_0) = \lambda < 0 \leq p_A(\lambda x_0)$. Επομένως, $g(y) \leq p_A(y)$, για κάθε $y \in \operatorname{span}\{x_0\}$. Από το Θεώρημα Hahn-Banach (Θεώρημα B.1.10) υπάρχει $f \in X^*$ έτσι ώστε $f\big|_{\operatorname{span}\{x_0\}} = g$ και $f(x) \leq p_A(x)$, για κάθε $x \in X$. Ειδικότερα, $f(x_0) = g(x_0) = 1$.

Επιλέγουμε $V \in \mathcal{N}_0$ ισορροπημένο, με $V \subseteq \operatorname{int} A$. Τότε,

$$\pm f(V) = f(V) \subseteq f(A) \subseteq [-\infty, 1]$$

και άρα $\sup_{x\in V} |f(x)| \leq 1$. Συνεπώς το f είναι φραγμένο (καθώς είναι φραγμένο σε περιοχή του μηδενός). Τέλος, για κάθε $x \in A$,

$$f(x) \leq p_A(x) \leq 1 = f(x_0).$$

□

Πρόταση B.2.30. *Έστωσαν $A \subseteq X$ κυρτό και $x_0 \in X$. Υποθέτουμε πως $\operatorname{int} A \neq \varnothing$ και $x_0 \notin \operatorname{int} A$. Τότε, υπάρχει $f \in X^* \setminus \{0\}$ τ.ω.*

$$\sup f(A) \leq f(x_0).$$

Απόδειξη. Επιλέγουμε $a \in \operatorname{int} A$ και εφαρμόζουμε το παραπάνω Λήμμα για "A" $= A - a$ και "x_0" $= x_0 - a$. □

Θεώρημα B.2.31 (1ο Γεωμετρικό Θεώρημα Hahn-Banach)**.** *Έστωσαν $A, B \subseteq X$ κυρτά τέτοια ώστε*

$$\operatorname{int} A \neq \varnothing,\ B \neq \varnothing \ \text{ και } \ \operatorname{int} A \cap B \neq \varnothing.$$

Τότε, υπάρχει $f \in X^* \setminus \{0\}$ έτσι ώστε

$$\sup f(A) \leq \inf f(B).$$

Απόδειξη. Θέτουμε $V = \operatorname{int} A - B$ και $C = A - B$. Τότε, τα V, C είναι κυρτά, μη κενά, και το V είναι ανοιχτό. Επιπλέον, $0 \notin V$. Από το Πόρισμα B.2.28, παίρνουμε πως $\overline{\operatorname{int} A} = \overline{A}$. Έχουμε,

$$V \subseteq C \subseteq \overline{A} - \overline{B} = \overline{\operatorname{int} A} - \overline{B} \subseteq \overline{\operatorname{int} A - B} = \overline{V}$$

και άρα $\overline{C} = \overline{V}$. Πάλι, από το Πόρισμα B.2.28, έπεται ότι $\operatorname{int} C = V$, και κατά συνέπεια, $0 \notin \operatorname{int} C$. Από την προηγούμενη πρόταση, υπάρχει $f \in X^* \setminus \{0\}$ με

$$\sup f(C) \leq f(0) = 0,$$

δηλαδή $\sup f(A - B) \leq 0$. Το ζητούμενο έπεται από την γραμμικότητα του f. □

Λήμμα B.2.32. *Κάθε μη τετριμμένο γραμμικό συναρτησιακό $f \in X^*$ είναι ανοιχτή απεικόνιση, δηλαδή, απεικονίζει ανοιχτά σύνολα του X σε ανοιχτά σύνολα του $\mathbb{R}$.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $V \in \mathcal{N}_0$, ισχύει πως $0 \in \operatorname{int} f(V)$. Πράγματι, αν αυτό αληθεύει, τότε δεδομένων $G \subseteq X$ ανοιχτό και $x \in G$, θέτουμε $V = G - x \in \mathcal{N}_0$, και έχουμε ότι $0 \in \operatorname{int}(f(G) - f(x)) = \operatorname{int} f(G) - f(x)$. Ισοδύναμα, $f(x) \in \operatorname{int} f(G)$, δηλαδή το $f(G)$ είναι ανοιχτό.

Έστω λοιπόν $V \in \mathcal{N}_0$. Εφόσον η f είναι επί, μπορούμε να επιλέξουμε ένα $z \in X$ με $f(z) = 1$. Από την Πρόταση B.2.10, το V είναι απορροφούν, και άρα υπάρχει $\delta > 0$ με $(-\delta, \delta) \cdot z \subseteq V$. Τότε, $(-\delta, \delta) \subseteq f(V)$ και άρα $0 \in \operatorname{int} f(V)$. □

Ορισμός B.2.33. Ο τοπολογικός γραμμικός χώρος X θα λέγεται **τοπικά κυρτός**, αν οι τοπικές βάσεις περιοχών του απαρτίζονται από κυρτά σύνολα.

Λήμμα B.2.34. *Έστω X τοπικά κυρτός τοπολογικός γραμμικός χώρος. Τότε,*

(i) Για κάθε $V \in \mathcal{N}_0$, υπάρχει $W \in \mathcal{N}_0$ κυρτό, ώστε $W + W \subseteq V$.

(ii) Αν K συμπαγές και F κλειστό με $K \cap F = \varnothing$, τότε υπάρχει $V \in \mathcal{N}_0$ κυρτό ώστε $(K + V) \cap F = \varnothing$.

Απόδειξη. (i) : Η απόδειξη είναι παρόμοια με αυτή της Πρότασης B.2.10.

(ii) : Από το (i), για κάθε $U \in \mathcal{N}_0$, υπάρχει $W \in \mathcal{N}_0$ κυρτό, ώστε $W \subseteq \overline{W} \subseteq W + W \subseteq U$. Επομένως, για κάθε $x \in K$, υπάρχει $W_x \in \mathcal{N}_0$ κυρτό τέτοιο ώστε

$$x \in \; x + W_x \subseteq \overline{x + W_x} = x + \overline{W}_x \subseteq x + W_x + W_x \subseteq X \setminus F. \tag{B.2.5}$$

Παρατηρούμε ότι η οικογένεια $\{x + W_x\}_{x \in K}$ αποτελεί μια ανοιχτή κάλυψη του K. Λόγω συμπάγειας, υπάρχουν $x_1, \ldots, x_m \in K$ ώστε η οικογένεια $\left\{x_n + W_{x_n}\right\}_{n=1}^{m}$ να καλύπτει το K. Ορίζουμε

$$V = \bigcap_{n=1}^{m} W_{x_n} \in \mathcal{N}_0.$$

Τότε, το V είναι κυρτό και ισχύει ότι

$$\begin{aligned} K + V &\subseteq \bigcup_{n=1}^{m} \left\{x_n + W_{x_n}\right\} + \bigcap_{n=1}^{m} W_{x_n} \\ &\subseteq \bigcup_{n=1}^{m} \left\{x_n + W_{x_n} + W_{x_n}\right\} \\ &\subseteq X \setminus F, \end{aligned}$$

λόγω της (B.2.5). □

Θεώρημα B.2.35 (2ο Γεωμετρικό Θεώρημα Hahn-Banach)**.** *Έστω X τοπικά κυρτός τοπολογικός γραμμικός χώρος και έστωσαν K, F κυρτά, μη κενά και ξένα υποσύνολα του X με K συμπαγές και F κλειστό. Τότε υπάρχει $f \in X^* \setminus \{0\}$ με*

$$\max f(K) < \inf f(F).$$

Απόδειξη. Από το Λήμμα B.2.34, υπάρχει $V \in \mathcal{N}_0$ κυρτό τέτοιο ώστε $(K+V) \cap F = \varnothing$. Το σύνολο $H = K + V$ είναι μη κενό, ανοιχτό και κυρτό. Από το Λήμμα B.2.32, το $f(H)$ είναι ανοιχτό στον $\mathbb{R}$. Επιπλέον, εφόσον η f είναι γραμμική, θα είναι και κυρτό. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το $f(H)$ είναι ένα ανοιχτό διάστημα στον $\mathbb{R}$. Από το 1ο Γεωμετρικό θεώρημα Hahn-Banach (Θεώρημα B.2.31) για $A = H$ και $B = F$, έχουμε ότι υπάρχει $f \in X^* \setminus \{0\}$ έτσι ώστε

$$\sup f(H) \leq \inf f(F) =: \mu.$$

Τότε $f(H) \subseteq (-\infty, \mu]$, και άρα, ¨$f(H) \subseteq (-\infty, \mu)$, καθώς το $f(H)$ είναι ανοιχτό. Συνεπώς, $f(K) \subseteq (-\infty, \mu)$. Επειδή το K είναι συμπαγές και η f συνεχής, υπάρχει το $\max f(K)$, και από τα παραπάνω έπεται ότι $\max f(K) < \mu$. ◻

B.3 Ασθενής τοπολογία

Σημειώνουμε ότι από το Πόρισμα B.1.12 έχουμε πως η οικογένεια X^* χωρίζει σημεία στον X. Συνεπώς, από το Θεώρημα B.2.18, υπάρχει μοναδική τοπολογία $\mathcal{T}$ στον X, ώστε ο $(X, \mathcal{T})$ να είναι τοπολογικός γραμμικός χώρος, και είναι η μικρότερη τοπολογία με την οποία κάθε γραμμικό συναρτησιακό $x^*\colon X \to \mathbb{R}$ είναι συνεχές.

Ορισμός B.3.1. Η **ασθενής τοπολογία** στον X που επάγεται από την οικογένεια X^* μέσω του θεωρήματος B.2.18 θα συμβολίζεται με w.

Παρατηρήσεις B.3.2. (i) Η ασθενής τοπολογία είναι ασθενέστερη της norm τοπολογίας. Επιπλέον, οι δύο τοπολογίες ταυτίζονται αν και μόνο αν $\dim X < \infty$.

(ii) Μια βάση περιοχών του $0 \in X$ ως προς την w είναι η οικογένεια των πεπερασμένων τομών συνόλων της μορφής

$$(x^*)^{-1}\left((-\varepsilon, \varepsilon)\right)\ ,\ x^* \in X^*,\ \varepsilon > 0.$$

Δηλαδή, πεπερασμένες τομές συνόλων της μορφής

$$V_{x^*}(\varepsilon) = \{x \in X\colon |\langle x^*, x\rangle| < \varepsilon\}\,, \quad x^* \in X^*\ \ \varepsilon > 0.$$

(iii) Ο τοπολογικός γραμμικός χώρος (X, w) είναι τοπικά κυρτός.

(iv) Η ασθενής τοπολογία είναι Hausdorff και T_3 (regular).

(v) Αν (x_λ) δίκτυο στον X, και $x \in X$, τότε

$$x_\lambda \xrightarrow{w} x \in X \iff x^*(x_\lambda) \to x^*(x) \text{ στον } \mathbb{R}, \quad \text{για κάθε } x^* \in X^*.$$

(vi) Ένα γραμμικό συναρτησιακό $x^*\colon (X, w) \to \mathbb{R}$ είναι συνεχές αν και μόνο αν $x^* \in X^*$, δηλαδή, αν και μόνο αν είναι φραγμένο. Με άλλα λόγια, τα γραμμικά $w-$συνεχή συναρτησιακά είναι ακριβώς τα στοιχεία του X^*.

Πρόταση B.3.3. *Έστω X χώρος με νόρμα και K ασθενώς συμπαγές υποσύνολο του X. Τότε το K είναι norm φραγμένο και ασθενώς κλειστό.*

Απόδειξη. Για κάθε $x \in X$, θεωρούμε το φραγμένο συναρτησιακό $e(x)\colon X^* \to \mathbb{R}$, με τύπο $\langle e(x), x^*\rangle = \langle x^*, x\rangle$, για κάθε $x^* \in X^*$. Σημειωτέον πως κάθε $x^* \in X^*$ είναι $w-$συνεχές, και άρα το σύνολο $x^*(K)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ως εκ τούτου, $\sup_{x\in K} |\langle x^*, x\rangle| < +\infty$, ή ισοδύναμα,

$$\sup_{x\in K} |\langle e(x), x^*\rangle| < +\infty.$$

Δηλαδή, η οικογένεια συναρτησιακών $\{e(x)\}_{x\in X}$ είναι σημειακά φραγμένη για κάθε $x^* \in X^*$. Από το Θεώρημα Ομοιόμορφου φράγματος (Θεώρημα B.1.18) έχουμε ότι η ως άνω οικογένεια είναι ομοιόμορφα φραγμένη. Δηλαδή, $\sup_{x\in K} \|e_x\| < +\infty$, ή ισοδύναμα, $\sup_{x\in K} \|x\| < +\infty$. Με άλλα λόγια, το K είναι norm φραγμένο. Τέλος, το K είναι ασθενώς κλειστό, καθώς η ασθενής τοπολογία είναι Hausdorff.

□

Θεώρημα B.3.4 (Mazur). *Έστω X χώρος με νόρμα και $A \subseteq X$ κυρτό. Τότε,*

$$\overline{A} = \overline{A}^w .$$

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέτουμε ότι $A \neq \emptyset$. Επειδή η w τοπολογία είναι ασθενέστερη της norm τοπολογίας, θα ισχύει ότι

$$\overline{A} \subseteq \overline{A}^w .$$

Θα δείξουμε τώρα ότι ισχύει και ο αντίστροφος εγκλεισμός. Έστω προς άτοπον ότι υπάρχει $x_0 \in \overline{A}^w \setminus \overline{A}$. Το σύνολο $\{x_0\}$ είναι κυρτό και συμπαγές, ενώ το $\overline{A}$ είναι κυρτό και κλειστό. Από το 1ο γεωμετρικό Θεώρημα Hahn-Banach (Θεώρημα B.1.16) υπάρχει $x^* \in X^* \setminus \{0\}$ ώστε

$$\mu := \sup x^*(A) < \langle x^*, x_0 \rangle . \tag{B.3.1}$$

Θεωρούμε τώρα το σύνολο

$$G = \{x \in X : \langle x^*, x \rangle > \mu\} .$$

Το G είναι $w-$ανοιχτό και περιέχει το x_0. Εφόσον $x_0 \in \overline{A}^w$, θα ισχύει ότι $A \cap G \neq \emptyset$. Αυτό όμως έρχεται σε αντίφαση με την (B.3.1).

□

Πόρισμα B.3.5. *Έστω X χώρος με νόρμα και $A \subseteq X$ κυρτό. Τότε:*

(i) Το A είναι κλειστό αν και μόνο αν είναι $w-$κλειστό.

(ii) Το A είναι πυκνό αν και μόνο αν είναι $w-$πυκνό.

Πόρισμα B.3.6. *Έστω X χώρος με νόρμα και έστωσαν (x_n) ακολουθία στον X και $x \in X$ με $x_n \xrightarrow{w} x$. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $y_n \in \operatorname{conv}\left\{x_j : j \in \mathbb{N}\right\}$, έτσι ώστε $y_n \to x$.*

Ένας γραμμικός τελεστής $T\colon X \to Y$ λέγεται ασθενώς συνεχής, αν είναι συνεχής, όταν οι X και Y εφοδιαστούν με τις ασθενείς τους τοπολογίες. Έχουμε τον εξής χαρακτηρισμό των ασθενώς συνεχών γραμμικών τελεστών:

Πρόταση B.3.7. *Έστω $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(a) T ασθενώς συνεχής.

(b) Για κάθε $y^* \in Y^*$, $y^* \circ T \in X^*$.

(c) T φραγμένος.

Απόδειξη. $(a) \implies (b)$: Προφανές.

$(b) \implies (a)$: Έστωσαν (x_λ) δίκτυο στον X και $x \in X$ με $x_\lambda \xrightarrow{w} x$ στον X. Αρκεί να δείξουμε ότι $Tx_\lambda \xrightarrow{w} T_x$ στον Y. Από την ασθενή σύγκλιση του (x_λ), για κάθε $y^* \in Y^*$, εφόσον το συναρτησιακό $y^* \circ T \in X^*$, έχουμε πως $\langle y^*, Tx_\lambda\rangle \to \langle y^*, Tx\rangle$ στον $\mathbb{R}$. Με άλλα λόγια, $Tx_\lambda \xrightarrow{w} Tx$ στον Y.

$(c) \implies (b)$: Προφανές.

$(b) \implies (c)$: Θεωρούμε την κανονική ισομετρική εμφύτευση $e : Y \to Y^{**}$ με

$$\langle e(y), y^*\rangle = \langle y^*, y\rangle\,, \text{ για κάθε } y \in Y,\ y^* \in Y^*.$$

Παρατηρούμε ότι $\|Tx\| = \|e(Tx)\|$ για κάθε $x \in X$, και άρα, $\|T\| = \sup_{x\in B_X} \|e(Tx)\|$. Επιπλέον,

$$\langle e(Tx), y^*\rangle = \langle y^*, Tx\rangle = \langle y^* \circ T, x\rangle\,, \text{ για κάθε } y^* \in Y^*.$$

Συνεπώς, για κάθε $y^* \in Y^*$ ισχύει πως $|\langle e(Tx), y^*\rangle| \le \|y^* \circ T\|\|x\|$. Εφόσον αυτό ισχύει για κάθε $x \in X$, έπεται πως

$$\sup_{x\in B_X} |\langle e(Tx), y^*\rangle| \le \|y^* \circ T\| < +\infty, \quad \text{για κάθε } y^* \in Y^*.$$

Δηλαδή, η οικογένεια συναρτησιακών $\{e(Tx)\}_{x\in B_X}$ είναι κατά σημείο φραγμένη και εφόσον ο Y^* είναι Banach, από το Θεώρημα Ομοιόμορφου Φράγματος (Θεώρημα B.1.18), έχουμε ότι

$$||T|| = \sup_{x\in B_X} \|e(Tx)\| < +\infty.$$

□

Θεώρημα B.3.8. *Έστω X απειροδιάστατος χώρος με νόρμα. Τότε ο (X, w) δεν είναι πρώτος αριθμήσιμος, και κατά συνέπεια, δεν είναι μετρικοποιήσιμος.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε προς άτοπον ότι υπάρχει αριθμήσιμη βάση περιοχών του μηδενός, έστω $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Δηλαδή, $0 \in V_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και για κάθε $U \in \mathcal{N}_0$, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $V_n \subseteq U$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχουν $\Phi_n \subseteq X^*$ πεπερασμένο, και $\varepsilon_n > 0$ ώστε

$$\bigcap_{x^*\in\Phi_n} \{x \in X : |\langle x^*, x\rangle| < \varepsilon_n\} \subseteq V_n. \tag{B.3.2}$$

Θέτουμε $\Phi = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Phi_n$. Θα δείξουμε ότι $X^* = \operatorname{span}\Phi$, και άρα θα καταλήξουμε σε άτοπο, καθώς ένας απειροδιάστατος χώρος Banach δεν γίνεται να έχει άπειρη αριθμήσιμη βάση Hamel. Προς αυτόν τον σκοπό, έστω $z^* : (X, w) \to \mathbb{R}$ γραμμικό και συνεχές. Το σύνολο $U = (z^*)^{-1}((-1, 1))$ είναι ασθενώς ανοιχτό και περιέχει το μηδέν. Άρα, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $V_n \subseteq U$. Από την (B.3.2) έχουμε ότι υπάρχουν $\Phi_n \subseteq X^*$ πεπερασμένο, και $\varepsilon > 0$ έτσι ώστε $\bigcap_{x^*\in\Phi_n} \{x \in X : |\langle x^*, x\rangle| < \varepsilon\} \subseteq U$. Όπως και στην Πρόταση B.2.20, ο υπόχωρος $\bigcap_{x^*\in\Phi_n} \ker x^* \subseteq U$ είναι μη τετριμμένος. Εύκολα βλέπει κανείς ότι $\bigcap_{x^*\in\Phi_n} \ker x^* \subseteq \ker z^*$, και άρα, από το Λήμμα B.2.22, έπεται πως $z^* \in \operatorname{span}\Phi_n \subseteq \operatorname{span}\Phi$. □

Πρόταση B.3.9. *Έστω X χώρος με νόρμα και έστω $A \subseteq X$ norm φραγμένο. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $D^* \subseteq X^*$ πυκνό. Τότε,*

$$w\big|_A = \mathcal{T}_{D^*}\big|_A,$$

όπου $\mathcal{T}_{D^*}$ η ασθενής τοπολογία του X που επάγεται από το D^* όπως και στο Θεώρημα B.2.18.

Απόδειξη. Εφόσον το D^* είναι πυκνό στον X^*, έπεται ότι χωρίζει σημεία στον X. Οπότε, η επαγόμενη ασθενής τοπολογία είναι καλά ορισμένη. Παρατηρούμε ότι $\mathcal{T}_{D^*} \subseteq w$, καθώς κάθε $x^* \in D^*$ είναι συνεχή ως προς την w, και η $\mathcal{T}_{D^*}$ είναι η μικρότερη τοπολογία με αυτήν την ιδιότητα. Ως εκ τούτου, $\mathcal{T}_{D^*}\big|_A \subseteq w\big|_A$.

Ισχυριζόμαστε πως για κάθε $x \in A$, $x^* \in X^*$, και για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $y^* \in D^*$ τέτοιο ώστε

$$A \cap \left(x + (y^*)^{-1}((-\varepsilon/2, \varepsilon/2))\right) \subseteq A \cap \left(x + (x^*)^{-1}((-\varepsilon, \varepsilon))\right).$$

Πράγματι, έστωσαν $x \in A$, $x^* \in X^*$ και $\varepsilon > 0$. θέτουμε $M = \sup\{\|z\| : z \in A\}$, και επιλέγουμε $y^* \in D$ με $\|y^* - x^*\| < \varepsilon/2M$. Εύκολα βλέπει κανείς ότι το y^* είναι το ζητούμενο.

Θα δείξουμε τώρα ότι $w\big|_A \subseteq \mathcal{T}_{D^*}\big|_A$. Προς αυτόν τον σκοπό, έστω $G \in w$. Αρκεί να δειχθεί ότι το σύνολο $A \cap G$ είναι ανοιχτό στην $\mathcal{T}_{D^*}\big|_A$. Έστω $x \in A \cap G$. Αναζητούμε ένα $\mathcal{T}_{D^*}\big|_A$−ανοιχτό σύνολο που περιέχει το x. Υπάρχουν $x_1^*, \ldots, x_k^* \in X^*$, και $\varepsilon > 0$ ώστε

$$\bigcap_{j=1}^{k} x + (x_j^*)^{-1}((-\varepsilon, \varepsilon)) \subseteq G.$$

Από τον ισχυρισμό, για κάθε $j = 1, \ldots, k$, υπάρχει $y_j^* \in D^*$ έτσι ώστε

$$A \cap \left(x + (y_j^*)^{-1}((-\varepsilon/2, \varepsilon/2))\right) \subseteq A \cap \left(x + (x_j^*)^{-1}((-\varepsilon, \varepsilon))\right).$$

Άρα,

$$\begin{aligned} x \in A \cap \left(\bigcap_{j=1}^{k} \left(x + (y_j^*)^{-1}((-\varepsilon/2, \varepsilon/2))\right)\right) &\subseteq A \cap \left(\bigcap_{j=1}^{n} \left(x + (x_j^*)^{-1}((-\varepsilon, \varepsilon))\right)\right) \\ &\subseteq A \cap G \end{aligned}$$

και το πρώτο σύνολο ανήκει στην $\mathcal{T}_{D^*}\big|_A$. □

Πρόταση B.3.10. *Έστω X γραμμικός χώρος και έστω D αριθμήσιμη οικογένεια γραμμικών συναρτησιακών $X \to \mathbb{R}$ που χωρίζει σημεία στον X. Τότε ο $(X, \mathcal{T}_D)$ είναι μετρικοποιήσιμος, όπου $\mathcal{T}_D$ η επαγόμενη ασθενής τοπολογία πάνω στον X, από την οικογένεια D όπως και στο Θεώρημα B.2.18 .*

Απόδειξη. Έστω $D = \{f_k : k \in \mathbb{N}\}$ μία απαρίθμηση του D. Θέτουμε

$$d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|f_k(x) - f_k(y)|}{1 + |f_k(x) - f_k(y)|}, \quad x, y \in X.$$

Ισχυριζόμαστε πως η d είναι μετρική στον X, και μάλιστα $d(x + z, y + z) = d(x, y)$, για κάθε $x, y, z \in X$ (αναλλοίωτη κάτω από μετατοπίσεις). Επιπλέον, η f_k είναι d-συνεχής, για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Ξεκινούμε καταρχάς αποδεικνύοντας ότι η d είναι όντως μετρική. Προφανώς $d(x, y) \geq 0$ για κάθε x, y, και μάλιστα $d(x, y) = 0$ αν και μόνο αν $x = y$, καθώς η οικογένεια D χωρίζει σημεία. Επιπλέον, ισχύει η τριγωνική ανισότητα καθώς η συνάρτηση $t \mapsto \frac{t}{1+t}$ είναι αύξουσα. Το αναλλοίωτο της μετρικής κάτω από μετατοπίσεις είναι προφανές. Έστω τώρα $k \in \mathbb{N}$. Θα δείξουμε ότι η συνάρτηση f_k είναι συνεχής ως προς την d. Είναι προφανές ότι αρκεί να δείξουμε ότι η f_k είναι d−συνεχής στο μηδέν [λόγω του αναλλοίωτου κάτω από μετατοπίσεις]. Έστω $\varepsilon > 0$. Εφόσον η συνάρτηση $t \mapsto \frac{t}{1+t}$ είναι αντίστροφα συνεχής, υπάρχει $\delta' > 0$ ώστε

$$\frac{|f_k(x)|}{1 + |f_k(x)|} < \delta' \implies |f_k(x)| < \varepsilon.$$

Θέτουμε $\delta = \frac{1}{2^k}\delta'$. Τότε

$$d(x,0) < \delta \implies \frac{1}{2^k}\frac{|f_k(x)|}{1+|f_k(x)|} < \frac{1}{2^k}\delta' \implies |f_k(x)| < \varepsilon,$$

δείχνοντας πως η f_k είναι πράγματι $d-$συνεχής στο μηδέν.

Εφόσον για κάθε $k \in \mathbb{N}$ η f_k είναι d-συνεχής, έπεται ότι $\mathcal{T}_D \subseteq \mathcal{T}_d$. Για τον αντίστροφο εγκλεισμό, αρκεί να δειχθεί πως

$$B_d(x,\varepsilon) := \{y \in X : d(y,x) < \varepsilon\} \in \mathcal{T}_D,$$

για κάθε $x \in X$ και για κάθε $\varepsilon > 0$. Επιπλέον, εφόσον $B_d(x,\varepsilon) = x + B_d(0,\varepsilon)$ [λόγω του αναλλοίωτου της d κάτω από μετατοπίσεις], και εφόσον ο $(X,\mathcal{T}_D)$ είναι τοπολογικός γραμμικός χώρος, αρκεί να δείξουμε ότι

$$B_d(0,\varepsilon) \in \mathcal{T}_D,$$

για κάθε $\varepsilon > 0$. Έστω λοιπόν $\varepsilon > 0$ και έστω $z \in B_d(0,\varepsilon)$. Τότε, υπάρχει $\rho > 0$ τέτοιο ώστε $d(z,0)+\rho < \varepsilon$. Επιλέγουμε ένα επαρκώς μεγάλο $N \in \mathbb{N}$ ώστε $\sum_{k=N+1}^{\infty} 2^{-k} < \rho/2$, καθώς και ένα $\delta > 0$ ώστε $\frac{\delta}{1+\delta} < \rho/2$. Θέτουμε

$$V = \bigcap_{k=1}^{N} f_k^{-1}\big((-\delta,\delta)\big).$$

Τότε, το $z+V$ είναι $\mathcal{T}_D$-ανοιχτό και περιέχει το z. Θα δείξουμε ότι $z+V \subseteq B_d(0,\varepsilon)$. Προς αυτόν τον σκοπό, έστω $v \in V$. Τότε $|f_k(v)| < \delta$, για κάθε $1 \le k \le N$, και κατά συνέπεια,

$$\begin{aligned} d(v,0) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\frac{|f_k(v)|}{1+|f_k(v)|} = \sum_{k=1}^{N} 2^{-k}\frac{|f_k(v)|}{1+|f_k(v)|} + \sum_{K=N+1}^{\infty} 2^{-k}\frac{|f_k(v)|}{1+|f_k(v)|} \\ &\le \frac{\delta}{1+\delta}\sum_{k=1}^{n} 2^{-k} + \sum_{K=N+1}^{\infty} 2^{-k} < \frac{\delta}{1+\delta} + \rho/2 < \rho/2 + \rho/2 = \rho. \end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε λοιπών πως

$$d(z+v,0) \le d(z+v,z) + d(z,0) = d(v,0) + d(z,0) < \rho + d(z,0) < \varepsilon.$$

Με άλλα λόγια, $z+v \in B_d(0,\varepsilon)$. □

Θεώρημα B.3.11. *Έστω X χώρος με νόρμα και έστω $A \subseteq X$ norm φραγμένο. Υποθέτουμε πως ο X^* είναι διαχωρίσιμος. Τότε, ο $(A, w|_A)$ είναι μετρικοποιήσιμος.*

Απόδειξη. Έστω $D^* \subseteq X^*$ αριθμήσιμο και πυκνό. Από την Πρόταση B.3.9, έχουμε ότι $w\big|_A = \mathcal{T}_{D^*}\big|_A$, ενώ από την Πρόταση B.3.10, έχουμε ότι ο $(X, \mathcal{T}_{D^*})$ είναι μετρικοποιήσιμος. Το ζητούμενο είναι πλέον σαφές. □

Πόρισμα B.3.12. *Έστω X χώρος με νόρμα. Τότε ο X^* είναι διαχωρίσιμος αν και μόνο αν η $\overline{B}_X$ με την επαγόμενη ασθενή τοπολογία είναι μετρικοποιήσιμος τοπολογικός χώρος.*

Απόδειξη. ($\Longleftarrow$) : Υποθέτουμε ότι η $\overline{B}_X$ με την επαγόμενη ασθενή τοπολογία είναι μετρικοποιήσιμος τοπολογικός χώρος. Ειδικότερα, είναι πρώτος αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος, και άρα μπορούμε να βρούμε μία αριθμήσιμη τοπική βάση περιοχών του μηδενός, έστω $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχουν $F_n^* \subseteq X^*$ πεπερασμένο, και $\varepsilon_n > 0$ ώστε

$$W_n := \bigcap_{x^* \in F_n^*} \{x \in X : |\langle x^*, x\rangle| < \varepsilon_n\} \subseteq U_n.$$

Έστω $E^* = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n^*$. Τότε, το E^* είναι αριθμήσιμο, και κατά συνέπεια, ο γραμμικός χώρος $\overline{\operatorname{span}} E^*$ είναι διαχωρίσιμος. Θα δείξουμε πως $X^* = \overline{\operatorname{span}} E^*$. Έστω προς άτοπον, ότι υπάρχει $u^* \in X^* \setminus \overline{\operatorname{span}} E^*$. Έστω $d = \operatorname{dist}(x^*, \overline{\operatorname{span}} E^*) > 0$. Από την Πρόταση B.1.11, υπάρχει $x^{**} \in X^{**}$ τέτοιο ώστε

$$\|x^{**}\| = 1, \quad x^{**}\big|_{\overline{\operatorname{span}} E^*} = 0 \;\text{ και }\; \langle x^{**}, u^*\rangle = d. \tag{B.3.3}$$

Θέτουμε

$$V = \left\{x \in \overline{B}_X : |\langle u^*, x\rangle| < \frac{d}{2}\right\}.$$

Τότε, το V είναι ασθενώς ανοιχτό και περιέχει το μηδέν, και κατά συνέπεια, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $W_{n_0} \subseteq V$. Έστω $e\colon X \to X^{**}$ η κανονική ισομετρική εμφύτευση. Υπενθυμίζουμε πως η $e\colon (X, w) \to (X^{**}, w^*)$ είναι ομοιομορφισμός. Εφόσον το $e(W_{n_0}) \subseteq X^{**}$ είναι w^*−ανοιχτό και περιέχει το μηδέν, από το Θεώρημα Goldstine (Θεώρημα B.4.8), υπάρχει $x_1 \in B_X$ ώστε $e(x_1) \in e(W_{n_0}) \subseteq e(V)$. Με άλλα λόγια, $|\langle x^*, x_1\rangle| \le \varepsilon_{n_0}$, για κάθε $x^* \in F_{n_0}^*$, καθώς και $|\langle u^*, x_1\rangle| < d/2$. Από την (B.3.3) έχουμε πως για κάθε $x^* \in F_{n_0}^*$,

$$|\langle x^{**} - e(x_1), x^*\rangle| = |\langle x^{**}, x^*\rangle - \langle x^*, x_1\rangle| = |\langle x^*, x_1\rangle| < \varepsilon_{n_0}.$$

Δηλαδή, $x^{**} - e(x_1) \in e(W_{n_0}) \subseteq e(V)$. Συμπεραίνουμε ότι

$$0 < d - |\langle u^*, x_1\rangle| = |\langle x^{**}, u^*\rangle - \langle u^*, x_1\rangle| = |\langle x^{**} - e(x_1), u^*\rangle| < d/2,$$

και άρα $|\langle u^*, x_1\rangle| > d/2$. Άτοπο.

($\Longrightarrow$) : Έπεται από Θεώρημα B.3.11. □

Πρόταση B.3.13. *Έστω X διαχωρίσιμος χώρος με νόρμα και έστω K ασθενώς συμπαγές υποσύνολο του X. Τότε το K εφοδιασμένο με την επαγόμενη ασθενή τοπολογία είναι μετρικοποιήσιμος (συμπαγής) τοπολογικός χώρος.*

Απόδειξη. Έστω (x_n) πυκνή ακολουθία στον X. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, από το Πόρισμα B.1.12, υπάρχει $x_n^* \in B_{X^*}$ έτσι ώστε $\langle x_n^*, x_n \rangle = \|x_n\|$. Ισχυριζόμαστε ότι το σύνολο $D^* = \{x_n^* \colon n \in \mathbb{N}\}$ χωρίζει σημεία στον X. Πράγματι, έστω $x \in X$ τέτοιο ώστε $\langle x_n^*, x \rangle = 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θα δείξουμε ότι $x = 0$. Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\|x - x_N\| < \varepsilon/2$. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \|x\| &\le \|x - x_N\| + \|x_N\| < \varepsilon/2 + x_N^*(x_N) = \varepsilon/2 + x_N^*(x_N - x) \\ &\le \varepsilon/2 + \|x_N - x\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Επειδή το $\varepsilon > 0$ ήταν αυθαίρετο, έπεται ότι $x = 0$.

Με βάση τον ισχυρισμό και την Πρόταση B.3.10, έπεται ότι ο $(X, \mathcal{T}_{D^*})$ είναι μετρικοποιήσιμος. Θα δείξουμε ότι $w\big|_K = \mathcal{T}_{D^*}\big|_K$. Προφανώς, ισχύει ότι $\mathcal{T}_D \subseteq w$, και άρα $\mathcal{T}_{D^*}\big|_K \subseteq w\big|_K$. Δείχνουμε τώρα και τον αντίστροφο εγκλεισμό. Έστω $F \subseteq K$ κλειστό ως προς την $w\big|_K$. Αρκεί να δείξουμε ότι είναι κλειστό ως προς την $\mathcal{T}_{D^*}\big|_K$. Λόγω της ασθενής συμπάγειας του K, έπεται ότι το F είναι $w\big|_K$−συμπαγές, και άρα, $\mathcal{T}_{D^*}\big|_K$−συμπαγές. Συνεπώς, το F είναι $\mathcal{T}_{D^*}\big|_K$−κλειστό. □

Θεώρημα B.3.14 (Eberlein-Smulian)**.** *Έστω X χώρος με νόρμα και $K \subseteq X$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) K ασθενώς συμπαγές.

(ii) K ακολουθιακά ασθενώς συμπαγές.

Απόδειξη. Θα δείξουμε μόνο τη συνεπαγωγή $(i) \implies (ii)$. Η ανάποδη συνεπαγωγή βρίσκεται στο [44]. Έστω πως το K είναι ασθενώς συμπαγές και έστω (x_n) μία ακολουθία στο K. Θέτουμε $Y = \overline{\operatorname{span}\{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}}$. Προφανώς, ο Y είναι διαχωρίσιμος υπόχωρος του X. Επιπλέον, από το Θεώρημα Mazur (Θεώρημα B.3.4), ο Y είναι ασθενώς κλειστός, και άρα το $K \cap Y \subseteq Y$ είναι ασθενώς συμπαγές. Από την Πρόταση B.3.13 έχουμε ότι ο $K \cap Y$ με την επαγόμενη ασθενή τοπολογία είναι μετρικοποιήσιμος συμπαγής τοπολογικός χώρος. Άρα, μπορούμε να βρούμε μία ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία της (x_n) μέσα στο $K \cap Y \subseteq K$. □

B.4 Ασθενής-άστρο τοπολογία

Έστω X χώρος με νόρμα. Θεωρούμε την κανονική ισομετρική εμφύτευση $e\colon X \to X^{**}$, με τύπο $\langle e(x), x^*\rangle = \langle x^*, x\rangle$, για κάθε $x^* \in X$. Παρατηρούμε ότι το σύνολο $e(X) \subseteq X^{**}$ χωρίζει σημεία στον X^*. Συνεπώς, από το Θεώρημα B.2.18, υπάρχει μοναδική τοπολογία $\mathcal{T}$ στον X^*, ώστε ο $(X^*, \mathcal{T})$ να είναι τοπολογικός γραμμικός χώρος, και είναι η μικρότερη τοπολογία με την οποία κάθε συναρτησιακό $e(x)\colon X^* \to \mathbb{R}$ είναι συνεχές.

Ορισμός B.4.1. Η **ασθενής-άστρο τοπολογία** στον X^* που επάγεται από την οικογένεια X^*, μέσω του θεωρήματος B.2.18, θα συμβολίζεται με w^*.

Παρατήρηση B.4.2. (i) Η ασθενής άστρο τοπολογία είναι ασθενέστερη της norm τοπολογίας. Επιπλέον, οι δύο τοπολογίες ταυτίζονται αν και μόνο αν $\dim X < \infty$.

(ii) Μια βάση περιοχών του $0 \in X^*$ είναι η κλάση των πεπερασμένων τομών συνόλων της μορφής
$$(e(x))^{-1}\left((-\varepsilon, \varepsilon)\right), \quad x \in X,\ \varepsilon > 0.$$
Δηλαδή, πεπερασμένες τομές συνόλων της μορφής
$$V_x^*(\varepsilon) = \{x^* \in X^* \colon |\langle x^*, x\rangle| < \varepsilon\}, \quad x \in X,\ \varepsilon > 0.$$

(iii) Ο τοπολογικός γραμμικός χώρος (X^*, w^*) είναι τοπικά κυρτός.

(iv) Η ασθενής-άστρο τοπολογία είναι Hausdorff και T_3 (regular).

(v) Εάν (x_λ^*) είναι δίκτυο στον X^* και $x^* \in X^*$, τότε
$$x_\lambda^* \xrightarrow{w^*} x^* \iff \left\langle x_\lambda^*, x\right\rangle \to \langle x^*, x\rangle \text{ στον } \mathbb{R}, \quad \text{για κάθε } x \in X.$$

(vi) Εάν $x^{**}\colon (X^*, w^*) \to \mathbb{R}$ είναι γραμμικό και συνεχές συναρτησιακό, τότε $x^{**} \in e(X)$, δηλαδή υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $x^{**} = e(x)$.

Πρόταση B.4.3. *Έστω X χώρος Banach και έστω K w^*−συγπαγές υποσύνολο του X^*. Τότε το K είναι norm φραγμένο και w^*−κλειστό.*

Απόδειξη. Για κάθε $x \in X$, το συναρτησιακό $e(x)\colon x^* \to \mathbb{R}$ είναι w^*−συνεχές, και άρα, το σύνολο $e(x)(K)$ είναι συμπαγές στο $\mathbb{R}$. Συνεπώς, $\sup_{x^*\in K} |\langle e(x), x^*\rangle| < \infty$, ή ισοδύναμα, $\sup_{x^*\in K} |\langle x^*, x\rangle| < \infty$. Με άλλα λόγια, η οικογένεια συναρτησιακών K είναι σημειακά φραγμένη, και εφόσον ο X είναι Banach, από το Θεώρημα Ομοιόμορφου Φράγματος (Θεώρημα B.1.18), έχουμε ότι $\sup_{x^*\in K} \|x^*\| < \infty$. Τέλος, το K είναι w^*−κλειστό, καθώς ο X^* είναι Hausdorff με την ασθενή-άστρο τοπολογία. □

Λήμμα B.4.4. *Έστωσαν X, Y χώροι Banach. Έστω $\{T_n, T\}_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία γραμμικών και φραγμένων τελεστών, με $T_n(x) \to T(x)$ για κάθε $x \in X$. Τότε, $\sup_{x\in K} ||T_n(x) - T(x)|| \to 0$ για κάθε $K \subseteq X$ συμπαγές.*

Απόδειξη. Έστω προς άτοπον ότι ο ισχυρισμός του λήμματος δεν αληθεύει. Τότε, υπάρχει ένα συμπαγές σύνολο $K \subseteq X$, ένα $\varepsilon_0 > 0$, μία υπακολουθία $(T_n)_{n\in M\subseteq\mathbb{N}}$ της (T_n), και μία ακολουθία $(x_n)_{n\in M}$ στο K, έτσι ώστε

$$||T_n(x_n) - T(x_n)|| \geq \varepsilon_0, \quad n \in M.$$

Εφόσον το K είναι συμπαγές, μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει $x \in K$, τέτοιο ώστε $x_n \to x$. Παρατηρούμε πως

$$\begin{aligned}
\varepsilon_0 &\leq ||(T_n - T)(x_n)|| \\
&\leq ||(T_n - T)(x)|| + ||(T_n - T)(x_n - x)|| \\
&\leq ||(T_n - T)(x)|| + ||T_n - T||\, ||x_n - x||, \quad n \in M.
\end{aligned}$$

Εφόσον η ακολουθία (T_n) είναι w^*-συγκλίνουσα, από το Λήμμα B.4.3, θα ισχύει πως $\sup_{n\in M} ||T_n - T|| < +\infty$. Επιπλέον, σημειώνουμε ότι $||x_n - x|| \to 0$ και $||(T_n - T)(x)|| \to 0$. Συμπεραίνουμε ότι $\varepsilon_0 \leq 0$, το οποίο είναι αδύνατον. □

Πρόταση B.4.5. *Εάν $A^* \subseteq X^*$ φραγμένο και $D \subseteq X$ πυκνό, τότε*

$$w^*\big|_{A^*} = \mathcal{T}_{e(D)}\big|_{A^*},$$

όπου $e\colon X \to X^{**}$ η κανονική εμφύτευση και $\mathcal{T}_{e(D)}$ η ασθενής τοπολογία που επάγει η $e(D)$ στον X^*, με βάση το Θεώρημα B.2.18.

Απόδειξη. Η ιδέα της απόδειξης είναι παρόμοια με την αντίστοιχη της Πρότασης B.3.9 . □

Θεώρημα B.4.6. *Έστω X χώρος με νόρμα. Τότε η $\overline{B}_{X^*}$ είναι μετρικοποιήσιμη με την ασθενή-άστρο τοπολογία αν και μόνο αν ο X είναι διαχωρίσιμος.*

Απόδειξη. ($\Longleftarrow$) : Έστω $D \subseteq X$ αριθμήσιμο και πυκνό. Από την Πρόταση B.4.5, έχουμε ότι $w^*\big|_{\overline{B}_{X^*}} = \mathcal{T}_{e(D)}\big|_{\overline{B}_{X^*}}$. Επιπλέον, το $e(D) \subseteq X^{**}$ είναι αριθμήσιμο και χωρίζει σημεία στον X^*, και άρα, από την Πρόταση B.3.10, για "X" $= X^*$, παίρνουμε ότι ο $(X^*, \mathcal{T}_{e(D)})$ είναι μετρικοποιήσιμος. Το ζητούμενο είναι πλέον σαφές.

($\Longrightarrow$) : Εφόσον η $\overline{B}_{X^*}$ με την ασθενή-άστρο τοπολογία είναι μετρικοποιήσιμος τοπολογικός χώρος, θα είναι και πρώτος αριθμήσιμος. Έστω λοιπόν $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μία αριθμήσιμη τοπική βάση περιοχών του μηδενός. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχουν $F_n \subseteq X$ πεπερασμένο, και $\varepsilon_n > 0$ ώστε

$$\bigcap_{x\in F_n} \left\{x^* \in \overline{B}_{X^*} : |\langle x^*, x\rangle| < \varepsilon_n\right\} \subseteq U_n.$$

Θέτουμε $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Τότε το E είναι αριθμήσιμο, και άρα ο υπόχωρος $\overline{\mathrm{span}}E$ είναι διαχωρίσιμος. Επιπλέον, αν $x^*\big|_E = 0$, έπεται ότι $x^* \in U_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και άρα $x^* = 0$. Ειδικότερα, αν $x^*\big|_{\overline{\mathrm{span}}E} = 0$, τότε $x^* = 0$. Αρκεί να δείξουμε ότι $X = \overline{\mathrm{span}}E$. Προς αυτόν τον σκοπό, έστω προς άτοπον ότι υπάρχει $x \in X$ ώστε $x \notin \overline{\mathrm{span}}E$. Από το Πόρισμα B.1.15), υπάρχει $x^* \in X^*$ τέτοιο ώστε $||x^*|| = 1$, και $x^*\big|_{\overline{\mathrm{span}}E} = 0$. Αυτό όμως είναι αδύνατον. □

Λήμμα B.4.7. *Έστω X χώρος με νόρμα και έστω $e\colon X \longrightarrow X^{**}$ η κανονική ισομετρική εμφύτευση. Τότε*

$$\overline{e(\overline{B}_X)}^{w^*} \subseteq \overline{B}_{X^{**}}.$$

Απόδειξη. Έστω προς άτοπον ότι υπάρχει $x^{**} \in \overline{e(\overline{B}_X)}^{w^*}$ με $\|x^{**}\| > 1$. Τότε, υπάρχει $x^* \in \overline{B}_{X^*}$ ώστε $|\langle x^{**}, x^*\rangle| > 1$. Το σύνολο

$$U_{x^{**}} = \{z^{**} \in X^{**} : |\langle z^{**}, x^*\rangle| > 1\}$$

είναι w^*-ανοιχτό και περιέχει το x^{**}. Συνεπώς, $U_{x^{**}} \cap e(\overline{B}_X) \neq \emptyset$, και άρα υπάρχει $x \in \overline{B}_X$ με $e(x) \in U_{x^{**}}$. Τότε, $|\langle x^*, x\rangle| = |\langle e(x), x^*\rangle| > 1$. Αυτό είναι αδύνατον, καθώς $x \in \overline{B}_X$ και $x^* \in \overline{B}_{X^*}$. □

Θεώρημα B.4.8 (Πυκνότητας του Goldstine)**.** *Έστω X χώρος με νόρμα και έστω $e\colon X \longrightarrow X^{**}$ η κανονική ισομετρική εμφύτευση. Τότε,*

$$\overline{e(\overline{B}_X)}^{w^*} = \overline{B}_{X^{**}}.$$

Επιπλέον, $\overline{e(X)}^{w^*} = X^{**}$.

Απόδειξη. Με βάση το Λήμμα B.4.7, έχουμε ότι $\overline{e(\overline{B}_X)}^{w^*} \subseteq \overline{B}_{X^{**}}$. Υποθέτουμε προς άτοπον ότι υπάρχει $x_0^{**} \in \overline{B}_{X^{**}}$ με $x_0^{**} \notin \overline{e(\overline{B}_X)}^{w^*}$. Από το 2ρο Γεωμετρικό Θεώρημα Hahn-Banach για τοπολογικούς γραμμικούς χώρους (Θεώρημα B.2.35), υπάρχει $L\colon (X^{**}, w^*) \to \mathbb{R}$ γραμμικό και συνεχές και $\mu \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\sup\left\{L(x^{**}) \colon x^{**} \in \overline{e(\overline{B}_X)}^{w^*}\right\} < \mu < L(x_0^{**}). \tag{B.4.1}$$

Εφόσον το L είναι w^*-συνεχές, θα ισχύει ότι $L \in \tilde{e}(X^*)$, όπου $\tilde{e}\colon X^* \to X^{***}$ η κανονική ισομετρική εμφύτευση του X^* στον X^{***}. Δηλαδή, θα υπάρχει $x^* \in X^*$ ώστε να ισχύει $L = \tilde{e}(x^*)$. Από την (B.4.1) για κάθε $x \in \overline{B}_x$, έχουμε πως

$$x^*(x) < \mu < x_0^{**}(x^*).$$

Εφαρμόζοντας την τελευταία για ”x” $= -x$, παίρνουμε ότι

$$\sup_{x \in B_X} |x^*(x)| \leq \mu < x_0^{**}(x^*).$$

Άρα, $\|x^*\| \leq \mu < ||x_0^{**}||\, \|x^*\| \leq \|x^*\|$, το οποίο είναι αδύνατον. □

Θεώρημα B.4.9 (Alaoglou). *Έστω X χώρος με νόρμα. Τότε η $\overline{B}_{X^*}$ είναι w^*−συμπαγής.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι για κάθε $f \in \overline{B}_{X^*}$ και για κάθε $x \in \overline{B}_X$, έχουμε ότι $|f(x)| \leq 1$. Δηλαδή, $f|_{\overline{B}_X} \in [-1,1]^{\overline{B}_X}$, για κάθε $f \in \overline{B}_{X^*}$. Ορίζουμε $E = [-1,1]^{\overline{B}_X}$ και εφοδιάζουμε το Ε με την τοπολογία γινόμενο. Από το Θεώρημα Tychonoff (Θεώρημα A.6.6), ο Ε είναι συμπαγής τοπολογικός χώρος. Θεωρούμε την απεικόνιση $\gamma\colon (\overline{B}_{X^*}, w^*) \to (E, \mathcal{T})$, με

$$\gamma(f) = f|_{\overline{B}_X}.$$

Είναι προφανές ότι η γ είναι 1-1. Επιπλέον, η γ είναι ομομορφισμός επί της εικόνας της. Πράγματι, έστω (f_λ) δίκτυο στην $\overline{B}_{X^*}$ και έστω $f \in \overline{B}_{X^*}$. Τότε,

$$f_\lambda \xrightarrow{w^*} f \iff f_\lambda(x) \to f(x), \text{ για κάθε } x \in \overline{B}_X \iff \gamma(f_\lambda) \xrightarrow{\mathcal{T}} \gamma(f).$$

Θα δείξουμε ότι το σύνολο $\gamma(\overline{B}_{X^*})$ είναι κλειστό στον E. Έστω (f_λ) δίκτυο στην $\overline{B}_{X^*}$ τέτοιο ώστε $\gamma(f_\lambda) \to \rho$ στον E, δηλαδή, $f_\lambda(x) \to \rho(x)$ για κάθε $x \in \overline{B}_X$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\rho \in \gamma(\overline{B}_{X^*})$.

Αρχικά, παρατηρούμε ότι για κάθε $x, y \in \overline{B}_X$ και για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $ax + by \in \overline{B}_X$, ισχύει ότι

$$\rho(ax + by) = a\rho(x) + b\rho(y) \tag{B.4.2}$$

Ισχυριζόμαστε ότι υπάρχει $f\colon X \to \mathbb{R}$ γραμμική ώστε $f\big|_{\overline{B}_X} = \rho$. Αν αυτό αληθεύει, τότε έχουμε τελειώσει. Πράγματι, εφόσον $f_\lambda(x) \to \rho(x)$ για κάθε $x \in \overline{B}_X$, και $(f_\lambda) \subseteq \overline{B}_{X^*}$, έπεται ότι $|f(x)| = \rho(x) \leq 1$ για κάθε $x \in \overline{B}_X$. Δηλαδή, $f \in \overline{B}_{X^*}$ και συνεπώς $\rho = \gamma(f)$.

Αποδεικνύουμε τώρα τον ισχυρισμό. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f\colon X \to \mathbb{R}$, με τύπο

$$f(x) = \|x\|\rho\left(\frac{x}{\|x\|}\right),\ x \in X.$$

Για $x \in \overline{B}_X$ έχουμε ότι $\frac{1}{\|x\|}x \in \overline{B}_X$, και άρα, από την (B.4.2), έχουμε ότι $f(x) = \rho(x)$. Με άλλα λόγια, η f είναι επέκταση της ρ. Μένει να δείξουμε τώρα ότι η f είναι γραμμική. Έστωσαν $x, y \in X$. Για να δείξουμε ότι $f(x+y) = f(x) + f(y)$, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\rho\left(\frac{x}{\|x+y\|} + \frac{y}{\|x+y\|}\right) = \frac{\|x\|}{\|x+y\|}\rho\left(\frac{x}{\|x\|}\right) + \frac{\|y\|}{\|x+y\|}\rho\left(\frac{y}{\|y\|}\right).$$

Αυτό όμως ισχύει από την (B.4.2), καθώς

$$\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|} \in B_X \quad \text{και} \quad \frac{\|x\|}{\|x+y\|}\frac{x}{\|x\|} + \frac{\|y\|}{\|x+y\|}\frac{y}{\|y\|} \in \overline{B}_X.$$

Ομοίως μπορεί να δειχθεί ότι $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ για κάθε $x \in X$ και για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Πόρισμα B.4.10. *Έστω X χώρος Banach. Ένα σύνολο $K^* \subseteq X^*$ είναι w^*-συμπαγές αν και μόνο αν είναι w^*-κλειστό και φραγμένο.*

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι άμεση από το Θεώρημα Alaoglou (Θεώρημα B.4.9) και την Πρόταση B.4.3. □

Πόρισμα B.4.11. *Εάν X είναι διαχωρίσιμος χώρος με νόρμα, τότε ο (B_{X^*}, w^*) είναι συμπαγής μετρικοποιήσιμος τοπολογικός χώρος.*

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι άμεση από το Θεώρημα Alaoglou (Θεώρημα B.4.9), και την Πρόταση B.4.6. □

Πόρισμα B.4.12. *Εάν X είναι διαχωρίσιμος χώρος Banach, τότε κάθε w^*-συμπαγές υποσύνολο του X^* είναι και w^*-ακολουθιακά συμπαγές.*

Απόδειξη. Άμεσο από την Πρόταση B.4.3 και το Θεώρημα Alaoglou (Θεώρημα B.4.9). □

B.5 Ανακλαστικοί χώροι

Έστω X χώρος με νόρμα και $e\colon X \to X^{**}$ η κανονική ισομετρική εμφύτευση.

Ορισμός B.5.1. Ο X λέγεται ανακλαστικός αν η e είναι επί, δηλαδή, $e(X) = X^{**}$.

Πρόταση B.5.2. *Ένας χώρος με νόρμα X είναι ανακλαστικός αν και μόνο αν η $\overline{B}_X$ είναι ασθενώς συμπαγής.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την κανονική ισομετρική εμφύτευση $e : X \to X^{**}$, με τύπο $\langle e(x), x^*\rangle = \langle x^*, x\rangle$, για κάθε $x \in X$, $x^* \in X^*$. Ας σημειωθεί ότι η $e\colon (X, w) \to (X^{**}, w^*)$ είναι ομοιομορφισμός επί της εικόνας της.

($\Longrightarrow$) : Έστω ότι ο X είναι ανακλαστικός. Τότε, $e(\overline{B}_X) = \overline{B}_{X^{**}}$. Από το Θεώρημα Alaoglou (Θεώρημα B.4.9), έχουμε ότι η $\overline{B}_{X^{**}}$ είναι w^*-συμπαγής, και άρα η $\overline{B}_X$ είναι $w-$συμπαγής.

($\Longleftarrow$) : Έστω ότι η $\overline{B}_X$ είναι $w-$συμπαγής. Τότε, το σύνολο $e(\overline{B}_X)$ είναι w^*-συμπαγές, και άρα w^*-κλειστό. Συνεπώς από το Θεώρημα Goldstine (Θεώρημα B.4.8), έχουμε ότι

$$e(\overline{B}_X) = \overline{e(\overline{B}_x)}^{w^*} = \overline{B}_{X^{**}},$$

και άρα ο X είναι ανακλαστικός. □

Πόρισμα B.5.3. *Αν X ανακλαστικός χώρος με νόρμα και Y κλειστός γραμμικός υπόχωρος του X, τότε ο Y είναι ανακλαστικός.*

Απόδειξη. Εφόσον ο Y είναι κλειστός υπόχωρος, από το Θεώρημα Mazur (Θεώρημα B.3.4), είναι και $w-$κλειστός. Άρα, το σύνολο $\overline{B}_Y = Y \cap \overline{B}_X$ είναι $w-$κλειστό υποσύνολο της $\overline{B}_X$. Το ζητούμενο έπεται από την προηγούμενη πρόταση. □

Πόρισμα B.5.4. *Έστω X χώρος με νόρμα. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) Ο X είναι ανακλαστικός.

(ii) Κάθε φραγμένη ακολουθία στον X έχει $w-$συγκλίνουσα υπακολουθία.

Απόδειξη. Η απόδειξη προκύπτει άμεσα από την Πρόταση B.5.2 και το Θεώρημα Eberlein-Smulian (Θεώρημα B.3.14). □

Πόρισμα B.5.5. *Αν X ανακλαστικός χώρος με νόρμα, τότε ο X^* είναι ανακλαστικός.*

Απόδειξη. Εφόσον $e(X) = X^{**}$, η w^* τοπολογία στον X^* συμπίπτει με την w τοπολογία. Το ζητούμενο προκύπτει από το Θεώρημα Alaoglou (Θεώρημα B.4.9) και την Πρόταση B.5.2. □

Λήμμα B.5.6. *Έστω X ανακλαστικός χώρος με νόρμα και έστω $T\colon X \to Y$ ισομορφισμός. Τότε, ο Y είναι ανακλαστικός.*

Απόδειξη. Με βάση την Πρόταση B.5.2, αρκεί να δείξουμε ότι η $\overline{B}_Y \subseteq Y$ είναι w-συμπαγής. Από το Θεώρημα Eberlein-Smulian (Θεώρημα B.3.14), αρκεί να δείξουμε ότι είναι ασθενώς ακολουθιακά συμπαγής. Προς αυτό τον σκοπό, έστω (y_n) ακολουθία στην $\overline{B}_Y$. Τότε, υπάρχει ακολουθία (x_n) στον X έτσι ώστε $y_n = Tx_n$, $n \in \mathbb{N}$. Τότε, $\|x_n\| \leq \|T^{-1}\|$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Εφόσον ο X είναι ανακλαστικός, από το Πόρισμα B.5.4, έπεται πως υπάρχει ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία της (x_n), έστω (x_{k_n}). Υποθέτουμε ότι το ασθενές όριο της (x_{k_n}) είναι το $x \in X$. Εφόσον ο T είναι συνεχής, από την Πρόταση B.3.7, είναι και ασθενώς συνεχής. Άρα, $y_{k_n} = Tx_{k_n} \xrightarrow{w} Tx$. Αρκεί τώρα να παρατηρήσουμε ότι $Tx \in \overline{B}_Y$, καθώς από το Θεώρημα Mazur (Θεώρημα B.3.4), η $\overline{B_Y}$ είναι ασθενώς κλειστή. □

Πόρισμα B.5.7. *Αν X χώρος **Banach** και X^* ανακλαστικός, τότε ο X είναι ανακλαστικός.*

Απόδειξη. Επειδή ο X είναι Banach και η $e\colon X \to X^{**}$ είναι γραμμική ισομετρία, ο $e(X)$ είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του X^{**}. Από το προηγούμενο πόρισμα, ο X^{**} είναι ανακλαστικός. Από το Πόρισμα B.5.3, ο $e(X)$ είναι ανακλαστικός. Συνεπώς, από το προηγούμενο Λήμμα, ο X είναι ανακλαστικός καθώς είναι (ισομετρικά) ισόμορφος με τον $e(X)$. □

Θεώρημα B.5.8 (Χαρακτηρισμός ασθενής συμπάγειας του James)**.** *Έστω X χώρος Banach και $C \subseteq X$ φραγμένο και ασθενώς κλειστό. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Το C είναι ασθενώς συμπαγές.*

(ii) *Κάθε συναρτησιακό $x^* \in X^*$ υλοποιεί/πετυχαίνει το supremum του στο C, δηλαδή υπάρχει $z \in C$ τέτοιο ώστε $\sup\{\langle x^*, x\rangle : x \in C\} = x^*(z)$.*

Πόρισμα B.5.9 (Θεώρημα James)**.** *Ένας χώρος Banach X είναι ανακλαστικός αν και μόνο αν κάθε συναρτησιακό του X^* υλοποιεί/πετυχαίνει την νόρμα του, δηλαδή, υπάρχει $z \in B_X$ τέτοιο ώστε $\sup_{x\in\overline{B}_X} |\langle x^*, x\rangle| = x^*(z)$.*

Απόδειξη. Έπεται άμεσα από το Θεώρημα B.5.8 και την Πρόταση B.5.2. □

Πρόταση B.5.10. *Έστω X ανακλαστικός χώρος και $K \subseteq X$ κυρτό, κλειστό και φραγμένο. Τότε, το K είναι w-συμπαγές.*

Απόδειξη. Εφόσον το K είναι κυρτό και κλειστό, από Θεώρημα Mazur (Θεώρημα B.3.4), είναι και ασθενώς κλειστό. Επιπρόσθετα, επειδή είναι φραγμένο, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $K \subseteq \delta B_X$. Εφόσον ο X είναι ανακλαστικός, έπεται ότι το σύνολο δB_X είναι ασθενώς συμπαγές, και κατά συνέπεια, το K είναι ασθενώς συμπαγές. □

Θεώρημα B.5.11 (Χαρακτηρισμός ασθενής συμπάγειας του Mazur)**.** *Έστω X χώρος Banach και έστω $C \subseteq X$ μη κενό, κλειστό, κυρτό και φραγμένο. Τότε, το C είναι w-συμπαγές αν και μόνο αν για κάθε φθίνουσα ακολουθία μη κενών, κλειστών και κυρτών υποσυνόλων $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ του C, ισχύει πως $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n \neq \emptyset$.*

Απόδειξη. ($\Longrightarrow$): Άμεσο.

($\Longleftarrow$): Έστω $x^* \in X^*$. Θέτουμε $m = \sup\{\langle x^*, x\rangle : x \in C\}$ και

$$C_n = \left\{x \in C\colon\ \langle x^*, x\rangle \geq m - \frac{1}{n}\right\}.$$

Η $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μία φθίνουσα ακολουθία μη κενών, κλειστών και κυρτών υποσυνόλων C. Άρα, εξ υποθέσεως, υπάρχει $u \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$. Τότε, $\langle x^*, u\rangle \geq m$, και άρα $x^*(u) = m$. Με άλλα λόγια, το συναρτησιακό x^* λαμβάνει το supremum του στο C. Το ζητούμενο προκύπτει από το Θεώρημα B.5.8. □

Πόρισμα B.5.12. *Ένας χώρος Banach είναι ανακλαστικός αν και μόνο αν κάθε φθίνουσα ακολουθία μη κενών, κλειστών, κυρτών και φραγμένων υποσυνόλων της $\overline{B}_X$ έχει μη κενή τομή.*

B.6 Ομοιόμορφα κυρτοί και λείοι χώροι Banach

Ορισμός B.6.1. Ένας χώρος με νόρμα X λέγεται **γνήσια κυρτός** αν για κάθε διαφορετικά $x, y \in S_X$ ισχύει ότι $\|\frac{1}{2}(x+y)\| < 1$.

Πρόταση B.6.2. *Ένας χώρος με νόρμα X είναι γνήσια κυρτός αν και μόνο αν για κάθε $x, y \in S_X$ με $x \neq y$ και για κάθε $t \in (0,1)$, ισχύει πως $\|tx + (1-t)y\| < 1$. Δηλαδή, αν και μόνο αν το ευθύγραμμο τμήμα $(x; y)$ ανήκει στο εσωτερικό της κλειστής μπάλας B_X.*

Απόδειξη. ($\Longrightarrow$): Υπενθυμίζουμε ότι αν X είναι ένας τοπολογικός γραμμικός χώρος, $C \subseteq X$ κυρτό, $x_1 \in C$ και $x_2 \in \operatorname{int} C$, τότε

$$tx_1 + (1-t)x_2 \in \operatorname{int} C, \quad \text{για κάθε } t \in (0,1).$$

Πράγματι, έστω $t \in (0,1)$. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $tx_1 + (1-t)x_2 \in tC + (1-t)\operatorname{int} C \subseteq C$ και το $tC + (1-t)\operatorname{int} C$ είναι ανοιχτό.

Έστωσαν λοιπόν $x, y \in S_X$ με $x \neq y$ τέτοια ώστε $||\frac{1}{2}(x+y)|| < 1$. Από το παραπάνω Λήμμα, για $C = B_X$, $x_1 = x$, $x_2 = (x+y)/2$, έχουμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα $(x; \frac{x+y}{2})$ ανήκει στο εσωτερικό της B_X. Ομοίως, το ευθύγραμμο τμήμα $(\frac{x+y}{2}; y)$ ανήκει στο εσωτερικό της B_X. Άρα το ευθύγραμμο τμήμα $(x; y)$ ανήκει στο εσωτερικό της B_X.

($\Longleftarrow$) : Προφανές.

□

Πρόταση B.6.3. *Ένας χώρος με νόρμα X είναι γνήσια κυρτός χώρος αν και μόνο αν για κάθε $x_1, x_2 \in X$, αν $||x_1 + x_2|| = ||x_1|| + ||x_2||$ τότε $x_1 = ax_2$ για κάποιο $a > 0$.*

Απόδειξη. ($\Longrightarrow$) : Έστω ότι ο X είναι γνήσια κυρτός. Έστωσαν $x_1, x_2 \in X$ με $||x_1 + x_2|| = ||x_1|| + ||x_2||$. Υποθέτουμε χ.β.τ.γ. ότι $||x_1|| = 1$. Θέτουμε $y = x_2/\|x_2\|$. Τότε,

$$\begin{aligned}
2 &\geq \|x_1 + y\| \\
&= \left\|x_1 + x_2 - (1 - \|x_2\|^{-1})x_2\right\| \\
&\geq \|x_1 + x_2\| - (1 - \|x_2\|^{-1})\,\|x_2\| \\
&= \|x_1\| + \|x_2\| - \|x_2\| + 1 \\
&= 2
\end{aligned}$$

και άρα $||\frac{1}{2}(x_1 + y)|| = 1$. Εφόσον ο X είναι γνήσια κυρτός, έπεται ότι $x_1 = y_1 = \|x_2\|^{-1}x_2$.

($\Longleftarrow$): Προφανές. □

Ορισμός B.6.4. Ένας χώρος με νόρμα λέγεται **ομοιόμορφα κυρτός** αν για κάθε $\varepsilon \in (0,2]$, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $x, y \in B_X$,

$$\|x - y\| \geq \varepsilon \implies 1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| > \delta.$$

Πρόταση B.6.5. *Κάθε χώρος εσωτερικού γινομένου είναι ομοιόμορφα κυρτός.*

Απόδειξη. Έστω X χώρος εσωτερικού γινομένου. Έστω $\varepsilon \in (0,2]$, θέτουμε $\delta = 1-\sqrt{1-\varepsilon^2/4} > 0$. Εάν $x, y \in B_X$, τότε

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 = \frac{\|x\|^2+\|y\|^2}{2} \leq 1.$$

Οπότε εάν $\|x-y\| \geq \varepsilon$, έχουμε ότι $\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 \leq 1-\varepsilon^2/4 = (1-\delta)^2$ και άρα $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1-\delta$. □

Πρόταση B.6.6. *Έστω X χώρος με νόρμα. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) Ο X είναι ομοιόμορφα κυρτός.

(ii) Για κάθε ακολουθίες $(x_n), (y_n)$ στην B_X με $\|\frac{1}{2}(x_n+y_n)\| \to 1$, ισχύει $\|x_n - y_n\| \to 0$.

(iii) Για κάθε ακολουθίες $(x_n), (y_n)$ στην B_X και για κάθε σταθερά $0<\lambda<1$, αν $\|\lambda x_n + (1-\lambda)y_n\| \to 1$, τότε $\|x_n - y_n\| \to 0$.

(iv) Για κάθε ακολουθίες $(x_n), (y_n)$ με $\|x_n\| \to 1$, $\|y_n\| \to 1$ και $\|x_n+y_n\| \to 2$, έπεται πως $\|x_n - y_n\| \to 0$.

(v) Για κάθε ακολουθίες $(x_n), (y_n)$ με $\|x_n\| \to 1$, $\|y_n\| \to 1$, και για κάθε σταθερά $0<\lambda<1$, αν $\|\lambda x_n + (1-\lambda)y_n\| \to 1$, τότε $\|x_n - y_n\| \to 0$.

Απόδειξη. $(i) \implies (ii)$: Έστω ότι ο Χ είναι ομοιόμορφα κυρτός. Υποθέτουμε προς άτοπον ότι υπάρχουν ακολουθίες (x_n) και (y_n) στην B_X με $\|\frac{1}{2}(x_n+y_n)\| \to 1$ και $\|x_n-y_n\| \not\to 0$. Τότε υπάρχουν $\varepsilon_0 > 0$ και υπακολουθίες (x_{k_n}), (y_{k_n}) των αρχικών ακολουθιών έτσι ώστε $\|x_{k_n} - y_{k_n}\| \geq \varepsilon_0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από την ομοιόμορφη κυρτότητα, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\|\frac{1}{2}(x_{k_n}+y_{k_n})\| < 1-\delta$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άτοπο, καθώς $\|\frac{1}{2}(x_n+y_n)\| \to 1$.

$(ii) \implies (iii)$: Έστω $(x_n), (y_n)$ ακολουθίες στην B_X και έστω $\lambda \in (0,1)$. Υποθέτουμε πως $\|\lambda x_n + (1-\lambda)y_n\| \to 1$. Θέτουμε

$$z_n = (2\lambda-1)x_n + 2(1-\lambda)y_n \in B_X,$$

έτσι ώστε $\frac{1}{2}(z_n+x_n) = \lambda x_n + (1-\lambda)y_n$. Τότε, $\|\frac{1}{2}(z_n+x_n)\| \to 1$, και άρα, $\|z_n - x_n\| \to 0$. Αρκεί τώρα να παρατηρήσουμε πως

$$z_n - x_n = 2(1-\lambda)(x_n-y_n).$$

$(iii) \implies (iv)$: Έστω $(x_n), (y_n)$ ακολουθίες στον X με $\|x_n\| \to 1$, $\|y_n\| \to 1$ και $\|\frac{1}{2}(x_n+y_n)\| \to 1$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|x_n\|, \|y_n\| > 0$ για κάθε

$n \in \mathbb{N}$. Θέτουμε $x'_n = x_n/||x_n||$ και $y'_n = y_n/||y_n||$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι $||\frac{1}{2}(x'_n + y'_n)|| \to 1$, και άρα, $||x'_n - y'_n|| \to 0$. Ως εκ τούτου, $||x_n - y_n|| \to 0$.

$(iv) \implies (v)$: Έστω $(x_n), (y_n)$ ακολουθίες στον X με $||x_n|| \to 1$ και $||y_n|| \to 1$. Έστω πως υπάρχει σταθερά $\lambda \in (0.1)$ με $||\lambda x_n + (1-\lambda)y_n|| \to 1$. Θέτουμε $z_n = (2\lambda - 1)x_n + 2(1-\lambda)y_n$. Σημειώνουμε ότι $\limsup_{n\to\infty} ||z_n|| \leq 1$. Επιπλέον,

$$\begin{aligned} ||z_n|| &= ||\lambda x_n + (1-\lambda)y_n - (1-\lambda)(x_n - y_n)|| \\ &\geq \Big| ||\lambda x_n + (1-\lambda)y_n|| + (1-\lambda)(||x_n|| - ||y_n||) \Big|, \end{aligned}$$

έτσι ώστε $||z_n|| \to 1$. Εφόσον $||\frac{1}{2}(z_n + x_n)|| \to 1$, έπεται ότι $||z_n - x_n|| \to 0$, και άρα, $||x_n - y_n|| \to 0$.

$(v) \implies (i)$: Προφανές.

□

Πρόταση B.6.7 (Ιδιότητα Kadec-Klee)**.** *Έστω X ομοιόμορφα κυρτός χώρος. Έστωσαν $(x_n) \subseteq X$ και $x \in X$ τέτοια ώστε $x_n \xrightarrow{w} x$ και $\|x_n\| \to \|x\|$. Τότε, $\|x_n - x\| \to 0$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε αρχικά ότι $\|x_n\| = \|x\| = 1$, για κάθε $n \geq 1$. Από το Θεώρημα Hahn-Banach, υπάρχει $x^* \in X^*$ τ.ω $\|x^*\| = 1$ και $x^*(x) = \|x\| = 1$. Τότε, για κάθε $n \geq 1$,

$$2 \geq \|x_n + x\| \geq |x^*(x_n + x)| = |x^*(x_n) + 1|.$$

Όμως $x^*(x_n) \to x^*(x) = 1$ και κατά συνέπεια, $\|x_n + x\| \to 2$. Από την προηγούμενη πρόταση, έχουμε ότι $\|x_n - x\| \to 0$.

Έστωσαν τώρα $(x_n)_n \subseteq X$ και $x \in X$, με $x_n \xrightarrow{w} x$ και $\|x_n\| \to \|x\|$. Αν $x = 0$, τότε η πρόταση ισχύει τετριμμένα. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $x \neq 0$. Μπορούμε να υποθέσουν χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $||x_n|| > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θέτουμε $y_n = x_n/||x_n||$ και $y = x/||x||$, $n \in \mathbb{N}$. Τότε, $y_n \xrightarrow{w} y$ και $\|y_n\| = \|y\| = 1$. Συνεπώς, $y_n \to y$ και άρα $x_n \to x$. □

Θεώρημα B.6.8 (Milman - Pettis)**.** *Κάθε ομοιόμορφα κυρτός χώρος Banach είναι ανακλαστικός.*

Απόδειξη. Έστω X ομοιόμορφα κυρτός χώρος Banach, και έστω $e\colon X \to X^{**}$ η κανονική ισομετρική εμφύτευση. Εφόσον ο X είναι Banach, ο $e(X)$ είναι κλειστός υπόχωρος του X^{**}. Αρκεί να δείξουμε ότι $\overline{e(X)} = X^{**}$. Για να το δείξουμε αυτό, αρκεί να εξασφαλίσουμε ότι

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall x^{**} \in B_{X^{**}},\ \exists x \in X \ \text{ ώστε } \ \|e(x) - x^{**}\| < \varepsilon. \tag{B.6.1}$$

Έστωσαν λοιπόν $\varepsilon > 0$ και $x^{**} \in B_{X^{**}}$. Από την ομοιόμορφη κυρτότητα έχουμε πως υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε για κάθε $x, y \in B_X$ με $x \neq y$,

$$\|x - y\| \geq \varepsilon \implies 1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| > \delta.$$

Εφόσον $\|x^{**}\| = \sup\{|\langle x^{**}, x^*\rangle| : x^* \in B_{X^*}\}$, υπάρχει $x_0^* \in B_{X^*}$ τέτοιο ώστε

$$\left|\left\langle x^{**}, x_0^*\right\rangle\right| > 1 - \delta/2. \tag{B.6.2}$$

Θέτουμε

$$V = \left\{z^{**} \in X^{**} : \left|\left\langle z^{**}, x_0^*\right\rangle - \left\langle x^{**}, x_0^*\right\rangle\right| < \delta/2\right\}.$$

Το V είναι w^*-ανοιχτό στον X^{**} και περιέχει το x^{**}. Συνεπώς, το $V \cap B_{X^{**}}$ είναι μη κενό και w^*-ανοιχτό υποσύνολο της $B_{X^{**}}$. Από το Θεώρημα πυκνότητας του Goldstine (Θεώρημα B.4.8) γνωρίζουμε ότι $\overline{e(B_X)}^{w^*} = B_{X^{**}}$ και άρα $(V \cap B_{X^{**}}) \cap e(B_X) \neq \emptyset$. Επιλέγουμε $x \in B_X$ έτσι ώστε $\left|\left\langle x, x_0^*\right\rangle - \left\langle x^{**}, x_0^*\right\rangle\right| < \delta/2$. Ισχυριζόμαστε πως $\|e(x) - x^{**}\| \leq \varepsilon$ και άρα ισχύει (B.6.1)

Πράγματι, έστω προς άτοπον ότι $\|e(x) - x^{**}\| > \varepsilon$. Θέτουμε

$$W = \{z^{**} \in X^{**} : \|z^{**} - e(x)\| > \varepsilon\}.$$

Το W είναι w^*-ανοιχτό και περιέχει το x^{**}. Χρησιμοποιώντας πάλι το Θεώρημα Goldstine (Θεώρημα B.4.8), έχουμε ότι υπάρχει $y \in B_X$ έτσι ώστε $\left|\left\langle y, x_0^*\right\rangle - \left\langle x^{**}, x_0^*\right\rangle\right| < \delta/2$ και $\|e(y) - e(x)\| > \varepsilon$. Όμως $\|x - y\| \geq \|e(x) - e(y)\| > \varepsilon$, και άρα, από την ομοιόμορφη κυρτότητα,

$$1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| > \delta.$$

Δηλαδή, $\|x + y\| < 2 - 2\delta$. Η τελευταία σχέση, σε συνδυασμό με την (B.6.2) θα μας οδηγήσει σε άτοπο. Είναι,

$$\begin{aligned}
2\left|x^{**}(x_0^*)\right| &= \left|x^{**}(x_0^*) - x_0^*(x) + x_0^*(x) + x_0^*(y) + x^{**}(x_0^*) - x_0^*(y)\right| \\
&\leq \left|x^{**}(x_0^{**}) - x_0^*(x)\right| + \left|x_0^*(x+y)\right| + \left|x^{**}(x_0^*) - x_0^*(y)\right| \\
&< \delta/2 + \|x + y\| + \delta/2 \\
&= \delta + \|x + y\| \\
&< 2 - \delta.
\end{aligned}$$

Άτοπο. □

Ορισμός B.6.9. Ένας χώρος με νόρμα X καλείται **λείος**, αν για κάθε μη μηδενικό $x \in X$ υπάρχει μοναδικό $x^* \in X^*$, έτσι ώστε $||x^*|| = 1$ και $\langle x^*, x\rangle = ||x||$.

Πρόταση B.6.10. *Έστω X χώρος με νόρμα. Τότε ο X είναι λείος αν ο X^* είναι γνήσια κυρτός.*

Απόδειξη. Έστω προς άτοπον ότι ο X δεν είναι λείος. Τότε υπάρχει $x \in X$ με νόρμα ένα, και δύο διαφορετικά συναρτησιακά x_1^*, x_2^* στον X^* με νόρμα ένα, έτσι ώστε $\left\langle x_1^*, x \right\rangle = \left\langle x_2^*, x \right\rangle = 1$. Συνεπώς, $\frac{1}{2}\left\langle x_1^* + x_2^*, x \right\rangle = 1$, και άρα, $||\frac{1}{2}(x_1^* + x_2^*)|| \geq 1$. Όμως, $||\frac{1}{2}(x_1^* + x_2^*)|| \leq 1$, και κατά συνέπεια, $||\frac{1}{2}(x_1^* + x_2^*)|| = 1$. Αυτό είναι αδύνατον, καθώς ο X^* είναι γνήσια κυρτός. □

Πρόταση B.6.11. *Έστω X χώρος με νόρμα. Τότε ο X είναι γνήσια κυρτός αν ο X^* είναι λείος.*

Απόδειξη. Έστω προς άτοπον ότι ο X δεν είναι γνήσια κυρτός. Τότε υπάρχουν δύο διαφορετικά $x_1, x_2 \in S_X$, τέτοια ώστε $||\frac{1}{2}(x_1+x_2)|| = 1$. Έστω $e \colon X \to X^{**}$ η κανονική ισομετρική εμφύτευση. Θεωρούμε τον υπόχωρο $Y = \operatorname{span}\{x_1, x_2\}$ και το γραμμικό και φραγμένο συναρτησιακό $x^* \colon Y \to \mathbb{R}$ με τύπο $\langle x^*, \lambda x_1 + \mu x_2 \rangle = \lambda ||x_1|| + \mu ||x_2||$. Σημειωτέον πως $\langle x^*, x_1 \rangle = \langle x^*, x_2 \rangle = \left\langle x^*, \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \right\rangle = 1$. Επεκτείνουμε το x^* σε όλον τον X με βάση το Θεώρημα Hahn-Banach, και το ταυτίζουμε με την επέκταση του. Έπεται πως $\langle e(x_1), x^* \rangle = \langle e(x_2), x^* \rangle = 1$, ενώ $e(x_1) \neq e(x_2)$. Αυτό όμως είναι αδύνατον, καθώς ο X^* είναι λείος. □

Πόρισμα B.6.12. *Έστω X ανακλαστικός χώρος. Τότε ο X είναι γνήσια κυρτός αν και μόνο αν ο X^* είναι λείος. Επιπλέον, ο X είναι λείος αν και μόνο αν ο X^* είναι γνήσια κυρτός.*

Ορισμός B.6.13. Ένας χώρος με νόρμα καλείται **ομοιόμορφα λείος**, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$, έτσι ώστε για κάθε $x, y \in X$ με $||x|| = 1$ και $||y|| \leq \delta$, έπεται πως

$$||x + y|| + ||x - y|| \leq 2 + \varepsilon ||y||.$$

Πρόταση B.6.14. *Κάθε ομοιόμορφα λείος χώρος με νόρμα είναι και λείος.*

Απόδειξη. Βλ. [44]. □

Θεώρημα B.6.15. *Έστω X χώρος με νόρμα. Τότε ο X είναι ομοιόμορφα κυρτός αν και μόνο αν ο X^* είαι ομοιόμορφα λείος. Επιπλέον, ο X είναι ομοιόμορφα λείος αν και μόνο αν ο X^* είναι ομοιόμορφα κυρτός.*

Απόδειξη. Βλ. [44]. □

B.7 Προβολές σε χώρους Banach

Έστω X χώρος με νόρμα. Μία απεικόνιση $P\colon X \to X$ θα λέγεται προβολή αν $P^2 = P$.

Ορισμός B.7.1. Έστω X χώρος με νόρμα και έστω M κλειστός υπόχωρος του X. Θα λέμε ότι ο M είναι συμπληρωματικός, αν υπάρχει Z κλειστός υπόχωρος του X, ώστε $X = M \oplus Z$. Ο υπόχωρος Z λέγεται το τοπολογικό συμπλήρωμα του M.

Πρόταση B.7.2. *Έστω X χώρος Banach και Y κλειστός υπόχωρος του X. Τότε, ο Y είναι συμπληρωματικός αν και μόνο αν υπάρχει γραμμική και φραγμένη προβολή $P\colon X \to Y$.*

Απόδειξη. ($\implies$): Έστω πως ο Y είναι συμπληρωματικός, και έστω Z το τοπολογικό συμπλήρωμα του Y. Ορίζουμε $P\colon X \to Y$, με τύπο

$$P(y+z) = y, \quad y \in Y,\ z \in Z.$$

Είναι άμεσο ότι ο P είναι γραμμικός τελεστής επί του Y και ότι $P^2 = P$. Επιπλέον, δεν είναι δύσκολο να δείξει κανείς ότι ο τελεστής P έχει κλειστό γράφημα, και άρα είναι φραγμένος (βλ. Θεώρημα B.1.23).

($\impliedby$): Αν $P\colon X \to Y$ είναι γραμμική και φραγμένη προβολή, τότε ο $Z = \ker P$ είναι το τοπολογικό συμπλήρωμα του Y.

□

Πρόταση B.7.3. *Έστω X χώρος με νόρμα και έστω $P \in \mathcal{B}(X)$. Τότε,*

$$\ker P = Ran(I-P) \ \text{ και } \ Ran(P) = \ker(I-P).$$

Απόδειξη. Έστω $x \in R(I-P)$. Τότε, $x = (I-P)u = u - Pu$, για κάποιο $u \in X$. Είναι προφανές ότι $Px = 0$, και άρα $Ran(I-P) \subseteq \ker P$. Έστω τώρα $x \in \ker P$. Τότε, $(I-P)x = x$, και άρα $\ker P \subseteq Ran(I-P)$. Αντικαθιστώντας όπου I, τον $I-P$ προκύπτει το δεύτερο αποτέλεσμα. □

Πόρισμα B.7.4. *Αν X χώρος με νόρμα και $P \in \mathcal{B}(X)$ προβολή, τότε $Ran(P) = \{x \in X : Px = x\}$. Επιπλέον, ο $Ran(P)$ είναι κλειστός και $X = \ker P \oplus Ran(P)$.*

Ορισμός B.7.5. Έστω X χώρος με νόρμα και έστω Y υποσύνολο του X.

(a) Η πλειότιμη απεικόνιση $P_Y \colon X \to 2^Y$ όπου $P_Y(x) = \{y \in Y \colon d(x,Y) = ||x-y||\}$ θα καλείται η **metric προβολή** του Y.

(b) Το σύνολο Y θα λέγεται **proximinal** (ή ότι έχει την ιδιότητα της βέλτιστης προσέγγισης στον X) αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει $y \in P_Y(x)$.

(c) Το σύνολο Y θα λέγεται **Chebyshev** αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει μοναδικό $y \in P_Y(x)$. Σε αυτήν την περίπτωση θα ταυτίζουμε το μονοσύνολο $P_Y(x)$ με το διάνυσμα $y \in P_Y(x)$.

Λήμμα B.7.6. *Έστω X χώρος με νόρμα και Y κλειστός υπόχωρος του X. Έστω επίσης $x \in X \setminus Y$ και $y_0 \in Y$. Τότε, $y \in P_Y(x)$ αν και μόνο αν υπάρχει $f \in X^*$ τ.ω.*

- $\|f\| = 1$
- $f\big|_Y = 0$
- $f(x-y_0) = ||x-y_0||$.

Απόδειξη. $(\implies)$: Έπεται από το Πόρισμα B.1.15.

$(\impliedby)$: Για κάθε $y \in Y$ έχουμε ότι

$$\|x-y_0\| = |f(x-y_0)| = |f(x-y)| \leq ||x-y||,$$

και άρα, $||x-y_0|| = d(x,Y)$. □

Πόρισμα B.7.7. *Έστω X μη ανακλαστικός χώρος Banach. Τότε, υπάρχει κλειστός υπόχωρος του X, ο οποίος δεν είναι proximinal.*

Απόδειξη. Άμεσο από το Θεώρημα James (Θεώρημα B.5.8), και από το Λήμμα B.7.6. □

Θεώρημα B.7.8. *Ένας χώρος Banach X είναι ανακλαστικός αν και μόνο αν κάθε κλειστό και κυρτό υποσύνολο του είναι proximinal.*

Απόδειξη. $(\implies)$: Έστω X ανακλαστικός χώρος και έστω $K \subseteq X$ κλειστό και κυρτό. Θα δείξουμε ότι το K είναι proximinal. Έστω $x \in X$ και έστω (u_n) ακολουθία στο K με $\|x-u_n\| \to d(x,K)$. Εύκολα βλέπει κανείς ότι η (u_n) είναι φραγμένη, και άρα, από το Πόρισμα B.5.4, μπορούμε να υποθέτουμε χ.β.τ.γ. ότι $u_n \xrightarrow{w} u$, για κάποιο $u \in X$. Η συνάρτηση $\|\cdot\| \colon (X,w) \to [0,+\infty)$ είναι ασθενώς κάτω ημι-συνεχής και άρα

$$d(x,K) \leq \|x-u\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x-u_n\| = d(x,K).$$

$(\impliedby)$: Άμεσο από το Πόρισμα B.7.7. □

Θεώρημα B.7.9. *Ένας χώρος Banach X είναι γνήσια κυρτός και ανακλαστικός αν και μόνο αν κάθε κλειστό, μη κενό και κυρτό υποσύνολο του είναι ένα Chebyshev σύνολο.*

Απόδειξη. ($\Longrightarrow$) : Έστω C κλειστό και κυρτό υποσύνολο του X. Από το Θεώρημα B.7.8, το C είναι proximinal. Συνεπώς, μένει να δείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο βέλτιστης προσέγγισης για κάθε $x \in X$. Έστω ότι υπάρχει $x \in X$ και $y_1, y_2 \in C$ τ.ω. $d(x, C) = ||x - y_1|| = ||x - y_2||$ και $y_1 \neq y_2$. Παρατηρούμε ότι $\frac{1}{2}(y_1 + y_2) \in C$ και

$$\left\|\frac{x_1 - y_1}{2}\right\| = \left\|\frac{x - y_2}{2}\right\| = \frac{d(x, C)}{2} > 0.$$

Επιπλέον, από την γνήσια κυρτότητα του X, έχουμε ότι

$$\left\|\left(\frac{x - y_1}{2}\right) + \left(\frac{x - y_2}{2}\right)\right\| < \left\|\frac{x - y_1}{2}\right\| + \left\|\frac{x - y_2}{2}\right\|.$$

Πράγματι, αν ίσχυε η ισότητα, τότε από την Πρόταση B.6.3, υπάρχει $a > 0$ ώστε $\frac{1}{2}(x - y_1) = a\frac{1}{2}(x - y_2)$. Εφόσον $||x - y_1|| = ||x - y_2||$ έχουμε ότι $a = 1$, και άρα, $y_1 = y_2$, που είναι αδύνατον.

Έχοντας αυτά υπόψη, έχουμε

$$d(x, K) \leq \left\|x - \frac{y_1 + y_2}{2}\right\| = \left\|\left(\frac{x - y_1}{2}\right) + \left(\frac{x - y_2}{2}\right)\right\| < \left\|\frac{x - y_1}{2}\right\| + \left\|\frac{x - y_2}{2}\right\| = d(x, K)$$

που είναι αδύνατον.

($\Longleftarrow$) : Από το Θεώρημα B.7.8, ο X είναι ανακλαστικός. Μένει να δείξουμε ότι ο X είναι γνήσια κυρτός. Έστω προς άτοπον ότι αυτό δεν ισχύει. Από την Πρόταση B.6.2, υπάρχουν διαφορετικά $x_1, x_2 \in S_X$, έτσι ώστε το ευθύγραμμο τμήμα $(x_1; x_2) = \{tx_1 + (1 - t)x_2 \colon t \in (0, 1)\}$ να περιέχεται μέσα στην S_X. Σημειωτέον πως όλα τα σημεία του ευθυγράμμου τμήματος $(x_1; x_2)$ ισαπέχουν από το μηδέν, καθώς $||tx_1 + (1 - t)x_2 - 0|| = 1$ για κάθε $t \in (0, 1)$. Συνεπώς, το $(x_1; x_2)$ δεν είναι σύνολο Chebyshev, ενώ είναι προφανώς κυρτό και κλειστό. Άτοπο. □

Βιβλιογραφία

[1] Omer Ginat, "The Method of Alternating Projections", arXiv:1809.05858

[2] J. von Neumann, Functional Operators - Vol.II The Geometry of Orthogonal Spaces, Annals of Math.Studies # 22, Princeton Univ. Press, 1950. (This is a reprint of mimeographed lecture notes first distributed in 1933.)

[3] I. Halperin, "The product of projection operators", Acta Sci. Math. (Szeged), vol. 23, no. 1, pp. 96-99, 1962.

[4] S. Kakutani, "On Nakano's talk", Zenokuku Sugaku Danwakai Osaka, vol. 192, pp. 42-44, 1940.

[5] M. Sakai, "Strong convergence of infinite products of orthogonal projections in Hilbert space", Applicable Analysis, vol. 59,no. 1-4, pp. 109-120, 1995.

[6] I. Amemiya and T. Ando, "Convergence of random products of contractions in Hilbert space", Acta Sci. Math. (Szeged), vol. 26, no, 3-4, pp. 239-244, 1965.

[7] A. Paszkiewicz, "The Amemiya-Ando conjecture falls," arXiv preprint arXiv:1203.3354, 2012.

[8] H. S. Hundal, "An alternating projection that does not converge in norm", Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, vol. 57, no. 1, pp. 35–61, 2004

[9] L. M. Bregman, "The method of successive projection for finding a com- mon point of convex sets", Sov. Math. Dok., vol. 162, no. 3, pp. 688–692, 1965.

[10] E. Kopecká and V. Müller, "A product of three projections," Studia Mathematica, vol. 223, pp. 175–186, 2014.

[11] E. Kopecká and A. Paszkiewicz, "Strange products of projections," Israel Journal of Mathematics, vol. 219, no. 1, pp. 271–286, 2017.

[12] S. Kaczmarz, “Angenaherte Auflosung von Systemen linearer Gleichun- gen”, Bull. Int. Acad. Sci. Pologne, A, vol. 35, pp. 355–357, 1937.

[13] S. Kaczmarz, “Approximate solution of systems of linear equations”, International Journal of Control, vol. 57, no. 6, pp. 1269–1271, 1993.

[14] H. H. Bauschke, F. Deutsch, and H. Hundal, “Characterizing arbitrarily slow convergence in the method of alternating projections,” Interna- tional Transactions in Operational Research, vol. 16, no. 4, pp. 413–425, 2009.

[15] S. Kayalar and H. L. Weinert, “Error bounds for the method of alternating projections,” Mathematics of Control, Signals and Systems, vol. 1, no. 1, pp. 43–59, 1988.

[16] F. Deutsch, “The method of alternating orthogonal projections”, In: Approximation theory, spline functions and applications. Springer, 1992, pp. 105–121.

[17] R. Escalante and M Raydan, "Alternating Projection Methods".

[18] R. Aharoni and Y. Censor, "Block-lterative Projection Methods for Parallel Computation of Solutions to Convex Feasibility Problems".

[19] P. L. Lions, “On the Schwarz alternating method. I”, in First international symposium on domain decomposition methods for partial differential equations, 1988, pp. 1–42.

[20] I. Oppenheim, "Angle criteria for uniform convergence of averaged projections and cyclic or random products of projections", arXiv:1605.00220

[21] R. E. Bruck and S. Reich, “Nonexpansive projections and resolvents of accretive operators in Banach spaces”, Houston J. Math, vol. 3, no. 4, pp. 459–470, 1977.

[22] J.B. Baillon, R. E. Bruck and S. Reich, "On the asymptotic behavior of nonexpansive mappings and semigroups in Banach spaces,Houston J. Math.

[23] Ronald E. Bruck Jr. "Nonexpansive projections on subsets of Banach spaces" (1973), Pacific Journal of Mathematics, 47(2), 341 – 355.

[24] Simeon Reich, "A limit theorem for projections" (1983), Linear and Multilinear Algebra 13(3), 291-290.

[25] Deutsch F. (1984) Rate of Convergence of the Method of Alternating Projections. In: Brosowski B., Deutsch F. (eds) Parametric Optimization and Approximation. International Series of Numerical Mathematics, vol 72.

[26] Bosznay, Á.P. A remark on the alternating algorithm. Period Math Hung 17, 241–244 (1986).

[27] R. Zaharopolon, "Products of conditional expectation operators", Canad. Math. Bull. Vol. 33 (3), 1990.

[28] G. Cohen, "Iterates of a product of conditional expectation operators" Journal of Functional Analysis 242 (2007) 658–668.

[29] D.C. Youla and H. Webb, [1982], Image restoration by the method of convex projections: Part 1-Theory, IEEE Trans. Medical Imagine $M_1 - 1$, 81-94.

[30] W. J. Stiles, "Closest-point maps and their productrs", Nieuw Archief voor Wiskunde 13 no. (3), 19-29

[31] W. J. Stiles, " A Solution to Hirchfeld's problem", Nieuw Arch. Wisk., 13 (1965), 116-119.

[32] Deutsch F. "The Alternating Method of von Neumann", Multivariate Approximation Theory.

[33] (2009) Duality Maps in Banach Spaces. In: Geometric Properties of Banach Spaces and Nonlinear Iterations. Lecture Notes in Mathematics, vol 1965. Springer, London

[34] M. L. Lapidus, "Generalization of projection operators", Acta Sci. math (Szeged), 23 (1962), 96-99.

[35] R.B. Holmes,"On the continuity of the best approximation operator", in Proc.Symp.Infinite Dimensional Topology, Annals of Math.Studies #69, Princeton Univ.Press, 1972.

[36] J. Neveu, "Bases Mathématiques du Calcul des Probabilités".

[37] F. Deutsch, "The Method of Alternating Projections", In: Best Approximation in Inner Product Spaces, Springer 2001.

[38] C. Badea and Y. I. Lyubich, "Geometric, spectral and asymptotic properties of averaged products of projections in Banach spaces"

[39] C. Badea, S. Grivaux, and V. Müller, "The rate of convergence in the method of alternating projections," St. Petersburg Mathematical Journal, vol. 23, no. 3, pp. 413–434, 2012.

[40] C. Badea and D. Seifert, "Ritt operators and convergence in the method of alternating projections", Journal of Approximation Theory, vol. 205, pp. 133–148, 2016.

[41] N. S. Papageorgiou and W. Patrick, "Applied Nonlinear Functional Analysis", Berlin, Boston: De Gruyter, 2018.

[42] Lindenstrauss, J., Tzafriri, L. "On the complemented subspaces problem", Israel J. Math. 9, 263–269 (1971).

[43] H. Brezis, "Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations", Springer (2011).

[44] R. E. Megginson, "An Introduction to Banach Space Theory", Springer (1998).

[45] Y. Moschovakis, "Notes on set theory", Springer (2006).