ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Διδακτορική Διατριβή

Σύνολα Birkhoff-James ε-ορθογωνιότητας και Birkhoff-James συνημίτονο

Βασιλική Παναγάκου

Επιβλέπων Καθηγητής
Π. Ψαρράκος, Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Μάιος 2021

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Διδακτορική Διατριβή

Σύνολα Birkhoff-James ε-ορθογωνιότητας και Birkhoff-James συνημίτονο

Βασιλική Παναγάκου

Επταμελής Εξεταστική Επιτροπή
Α. Αρβανιτάκης, Επικ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.
Ν. Γιαννακάκης, Αναπλ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.
Β. Κανελλόπουλος, Αναπλ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.
Ι. Πολυράκης, Ομοτ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.
Γ. Σμυρλής, Αναπλ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.
Μ. Τσατσόμοιρος, Καθηγητής Washington State University
Π. Ψαρράκος, Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Μάιος 2021

Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση της παρούσας Διδακτορικής Διατριβής, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα κύριο Παναγιώτη Ψαρράκο, Καθηγητή του Τομέα Μαθηματικών της Σχολής Ε.Μ.Φ.Ε. του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου καθώς επίσης και τον κύριο Νικόλαο Γιαννακάκη, Αναπληρωτή Καθηγητή του Τομέα Μαθηματικών της Σχολής Ε.Μ.Φ.Ε. του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου για την άριστη συνεργασία μας, τις χρήσιμες συμβουλές τους και την καθοδήγησή τους σε όλη τη διάρκεια της εκπόνησής της. Ευχαριστώ επίσης τον κύριο Ιωάννη Πολυράκη, Ομότιμο Καθηγητή του Τομέα Μαθηματικών της Σχολής Ε.Μ.Φ.Ε. του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου για την υποστήριξη και την εποικοδομητική συνεργασία μας.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Τομέα Μαθηματικών και το Κληροδότημα Χρίστου Παπακυριακόπουλου για την οικονομική στήριξη που μου προσέφεραν, με υποτροφία για την εκπόνηση της Διδακτορικής Διατριβής χρηματοδοτούμενης από το Κληροδότημα.

Βασιλική Παναγάκου

Περίληψη

Στην παρούσα Διδακτορική Διατριβή μελετάμε το σύνολο Birkhoff-James ε-ορθογωνιότητας του διανύσματος χ ως προς το διάνυσμα ψ, σε ένα μιγαδικό γραμμικό χώρο με νόρμα. Το σύνολο αυτό αποτελεί γενίκευση του γνωστού αριθμητικού πεδίου πινάκων και τελεστών. Αρχικά, αποδεικνύεται ένας ισοδύναμος εναλλακτικός ορισμός με χρήση γραμμικών συναρτησιακών και ερευνάται η πλούσια δομή του ως άνω συνόλου. Ο νέος αυτός ορισμός οδηγεί σε βασικές ιδιότητες, μεταξύ των οποίων και η υποπροσθετικότητα του συνόλου Birkhoff-James ε-ορθογωνιότητας ως προς το διάνυσμα χ.

Επίσης, εισάγουμε και διερευνούμε το Birkhoff-James συνημίτονο της κυρτής γωνίας, που σχηματίζεται από δύο μη μηδενικά διανύσματα ενός μιγαδικού γραμμικού χώρου με νόρμα, το οποίο βρίσκεται σε άμεση σύνδεση με το σύνολο Birkhoff-James ε-ορθογωνιότητας. Το συνημίτονο αυτό μελετάται και για φραγμένους γραμμικούς τελεστές, ενώ παρουσιάζονται κάποιοι χαρακτηρισμοί των φραγμένων γραμμικών τελεστών για την Birkhoff-James ορθογωνιότητα, στην προσπάθεια επέκτασης του γνωστού Θεωρήματος Bhatia-$\check{S}$emrl σε απειροδιάστατους μιγαδικούς γραμμικούς χώρους με νόρμα.

Τέλος, εισάγουμε το σύνολο Birkhoff-James ε-ορθογωνιότητας για διανυσματικά πολυώνυμα μιας μιγαδικής μεταβλητής και διερευνούμε τις γεωμετρικές και τοπολογικές ιδιότητες του συνόλου αυτού στο μιγαδικό επίπεδο. Επιπλέον, μελετάμε το πλήθος συνεκτικών συνιστωσών του συνόλου, χαρακτηρίζουμε το σύνορό του και διερευνούμε την τοπική διάσταση σημείων του.

Abstract

In this thesis, we study the Birkhoff-James ε-orthogonality set of a vector χ with respect to a vector ψ in a complex normed linear space. This set is a direct generalization of the numerical range of matrices and operators. Firstly, we give an alternative definition for this set using linear functionals, and explore its rich structure. Based on this new definition, we obtain some basic properties of the Birkhoff-James ε-orthogonality set such as the subadditivity in χ.

We also introduce and investigate a cosine function for the convex angle formed by two nonzero vectors of a complex normed linear space, in connection with recent results on the Birkhoff-James approximate orthogonality sets. The proposed cosine function is discussed for bounded linear operators, and some characterizations of the Birkhoff-James orthogonality of bounded linear operators are obtained extending the well-known Bhatia-$\check{S}$emrl Theorem to the case of infinite dimensional normed linear space.

Finally, we introduce the Birkhoff-James ε- orthogonality set of vector-polynomials in one complex variable, and investigate its geometrical and topological properties in the complex plane. We study the connected components of the Birkhoff-James ε-orthogonality set of vector-polynomials, we characterize the boundary of this set, and investigate the local dimension of its points.

Συμβολισμοί

$\mathbb{R}, \mathbb{R}^n$	Το σύνολο των πραγματικών αριθμών και των διανυσμάτων, αντίστοιχα
$\mathbb{C}, \mathbb{C}^n$	Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών και των διανυσμάτων, αντίστοιχα
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Εσωτερικό γινόμενο
$[\cdot, \cdot]$	Ημιεσωτερικό γινόμενο
$\perp, \perp^{\varepsilon}_{\langle \cdot, \cdot \rangle}$	Ορθογωνιότητα και προσεγγιστική ορθογωνιότητα μέσω εσωτερικού γινομένου, αντίστοιχα
$\perp_{[\cdot, \cdot]}, \perp^{\varepsilon}_{[\cdot, \cdot]}$	Ορθογωνιότητα και προσεγγιστική ορθογωνιότητα μέσω ημιεσωτερικού γινομένου, αντίστοιχα
$\| \cdot \|_1, \| \cdot \|_\infty$	Η νόρμα-1 και η νόρμα-∞, αντίστοιχα
$\perp_{BJ}, \perp^{\varepsilon}_{BJ}$	Birkhoff-James ορθογωνιότητα και Birkhoff-James ε-ορθογωνιότητα, αντίστοιχα
$F(T)$	Το κλασικό αριθμητικό πεδίο τελεστή ή πίνακα
$\sigma(T)$	Το φάσμα τελεστή ή πίνακα
$F_{[\cdot, \cdot]}(T)$	Το αριθμητικό πεδίο τελεστή ή πίνακα με χρήση ημιεσωτερικού γινομένου
$V(T)$	Το αριθμητικό πεδίο τελεστή με χρήση συναρτησιακών
$F^{\varepsilon}_{\| \cdot \|}(\chi; \psi)$	Το σύνολο Birkhoff-James ε-ορθογωνιότητας του χ ως προς ψ
$JF^{\varepsilon}_{\| \cdot \|}(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_\kappa; \psi)$	Το συνθετικό σύνολο Birkhoff-James ε-ορθογωνιότητας των $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_\kappa$ ως προς ψ

$\mathcal{S}_{\mathcal{X}}(0,1)$	Η μοναδιαία σφαίρα του χώρου $\mathcal{X}$
$\mathcal{D}(\cdot,\cdot)$	Ο δίσκος με αντίστοιχο κέντρο και ακτίνα
$\cos_{BJ}^{\\|\cdot\\|}(\chi,\psi)$	Το Birkhoff-James συνημίτονο του χ με το ψ
$P(z)$	Διανυσματικό πολυώνυμο
$W_{\\|\cdot\\|}^{\varepsilon}(P(z);\psi)$	Το σύνολο Birkhoff-James ε-ορθογωνιότητας του $P(z)$ ως προς το ψ
$\widehat{r}_{\\|\cdot\\|}^{\varepsilon}(\chi;\psi)$	Η εσωτερική ακτίνα Birkhoff-James ε-ορθογωνιότητας του χ ως προς το ψ
$r_{\\|\cdot\\|}^{\varepsilon}(\chi;\psi)$	Η εξωτερική ακτίνα Birkhoff-James ε-ορθογωνιότητας του χ ως προς το ψ

Εισαγωγή

Στην παρούσα Διατριβή μελετάμε τη γενίκευση του ορισμού του αριθμητικού πεδίου και προτείνουμε τη χρήση ενός συνημιτόνου σε γραμμικούς χώρους με νόρμα. Για περισσότερο από έναν αιώνα, η έννοια του αριθμητικού πεδίου έχει κεντρίσει το ενδιαφέρον των ερευνητών κυρίως από την περιοχή της Γραμμικής Άλγεβρας και από την περιοχή της θεωρίας των Γραμμικών Τελεστών. Υπάρχει πλούσια ερευνητική δραστηριότητα στον τομέα αυτόν που έχει οδηγήσει στη δημοσίευση εκατοντάδων επιστημονικών άρθρων. Παρόλα αυτά, μέχρι πρόσφατα, δεν υπήρχε κανένα αριθμητικό πεδίο που να μπορεί να οριστεί σε μη τετραγωνικό πίνακα μιας και αυτό βασιζόταν στην έννοια του εσωτερικού γινομένου. Οι Chorianopoulos και Psarrakos στο [13] όρισαν το σύνολο Birkhoff-James ε-ορθογωνιότητας για πίνακες, ενώ στο [32] το σύνολο αυτό γενικεύτηκε σε γραμμικούς χώρους με νόρμα, από τους Karamanlis και Psarrakos. Εμείς συνεχίζουμε τη μελέτη αυτού του συνόλου. Κομβικό σημείο στην αρχή της έρευνάς μας είναι η καθιέρωση ενός ισοδύναμου ορισμού με χρήση συναρτησιακών, ο οποίος οδηγεί με πολύ άμεσο τρόπο στην υποπροσθετικότητα του συνόλου, η οποία δεν είχε αποδειχθεί μέχρι τώρα. Αυτό μας δίνει τη δυνατότητα να εξάγουμε και άλλα αποτελέσματα που σχετίζονται με την πλούσια δομή του συνόλου.

Η όλη μας μελέτη οδηγεί στον ορισμό ενός συνημιτόνου, που ενώ αρχικά ορίστηκε μέσα από αυτά τα σύνολα Birkhoff-James ε-ορθογωνιότητας, τελικά αποδείχθηκε ότι είναι ίδιος με τον ορισμό του Szostok [55]. Οι γεωμετρικές ιδιότητες των συνόλων μας δίνουν τη δυνατότητα να εξάγουμε επιπλέον αποτελέσματα. Όπως είναι λογικό, κάποιος εκτός από το να εργαστεί με συνημίτονα και γωνίες μεταξύ διανυσμάτων, μπορεί να μελετήσει συνημίτονα και γωνίες τελεστών. Στο [53] αποδεικνύονται κάποιοι ορισμοί για την ορθογωνιότητα τελεστών σε πραγματικούς χώρους. Επεκτείνουμε τους χαρακτηρισμούς αυτούς σε μιγαδικούς γραμμικούς χώρους. Τα συγκεκριμένα αποτελέσματα αποτελούν προσπάθεια επέκτασης του γνωστού Θεωρήματος Bhatia-

$\check{S}$emrl το οποίο συνδέει την ορθογωνιότητα των τελεστών με την καθετότητα (με εσωτερικό εσωτερικό γινόμενο) εικόνων τους.

Συγκεκριμένα, στο δεύτερο κεφάλαιο, διατυπώνουμε τον ισοδύναμο ορισμό για το σύνολο Birkhoff-James ε-ορθογωνιότητας δύο στοιχείων χ, ψ ενός (μιγαδικού) διανυσματικού χώρου με νόρμα $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$,

$$F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi;\psi) = \left\{\mu \in \mathbb{C} : \|\psi - \lambda\chi\| \geqslant \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|\,|\mu - \lambda|, \ \ \forall \lambda \in \mathbb{C}\right\},$$

με χρήση γραμμικών συναρτησιακών:

$$F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi;\psi) \;\; = \;\; \left\{\frac{f(\chi)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\|\psi\|} \in \mathbb{C} : \ f \in L_{\varepsilon}(\psi)\right\},$$

όπου

$$L_{\varepsilon}(\psi) \;\; = \;\; \left\{f \in \mathcal{X}^* : \ f(\psi) = \sqrt{1-\varepsilon^2}\|\psi\|, \ \|f\| \leqslant 1\right\}.$$

Αποδεικνύονται ιδιότητές του, ανάμεσα στις οποίες είναι αυτή της υποπροσθετικότητας, δηλαδή $F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_1+\chi_2;\psi) \subseteq F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_1;\psi) + F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_2;\psi)$ για κάθε $\chi_1, \chi_2, \psi \in \mathcal{X}$.

Στο τρίτο κεφάλαιο εισάγεται η έννοια του Birkhoff-James συνημιτόνου (της κυρτής γωνίας) δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\chi, \psi \in \mathcal{X}$,

$$\cos^{\|\cdot\|}_{BJ}(\chi,\psi) = \min\left\{\varepsilon \in [0,1) : \ 0 \in F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\psi;\chi)\right\}.$$

Το ως άνω συνημίτονο είναι καλά ορισμένο αφού το ελάχιστο ζητούμενο ε είναι μοναδικό λόγω της συνέχειας και της μονοτονίας της απεικόνισης $\varepsilon \mapsto F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\psi;\chi)$. Στην περίπτωση που η νόρμα $\|\cdot\|$ επάγεται από ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$, αποδεικνύεται ότι

$$\cos^{\|\cdot\|}_{BJ}(\chi,\psi) = \frac{|\langle\psi,\chi\rangle|}{\|\chi\|\,\|\psi\|},$$

δηλαδή, ο ορισμός αυτός είναι συμβατός με το συνήθη ορισμό του συνημιτόνου στους χώρους εσωτερικού γινομένου. Μελετώνται οι ιδιότητες του Birkhoff-James συνημιτόνου καθώς και οι σχέσεις του με το P-συνημίτονο (συνημίτονο που προκύπτει από την Πυθαγόρεια ορθογωνιότητα και τον γνωστό Νόμο των Συνημιτόνων) και με το I-συνημίτονο (το συνημίτονο που προέρχεται από την ισοσκελή ορθογωνιότητα).

Στο τέταρτο κεφάλαιο ορίζεται το Birkhoff-James συνημίτονο τελεστών

$$\begin{aligned}\cos^{\|\cdot\|}_{BJ}(T,A) &= \min\{\varepsilon \in [0,1) : T \perp^{\varepsilon}_{BJ} A\} \\ &= \min\left\{\varepsilon \in [0,1) : \|T - \lambda A\| \geq \sqrt{1-\varepsilon^2}\|T\|, \ \forall \lambda \in \mathbb{C}\right\},\end{aligned}$$

όπου T, A γραμμικοί τελεστές με $T, A : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ και $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ γραμμικοί χώροι με νόρμα. Στο ίδιο κεφάλαιο, γίνεται η επέκταση του Θεωρήματος Bhatia-Šemrl για μιγαδικούς γραμμικούς χώρους.

Στο πέμπτο κεφάλαιο, μελετώνται το σύνολο Birkhoff-James ε-ορθογωνιότητας διανυσματικών πολυωνύμων μιας μιγαδικής μεταβλητής και οι γεωμετρικές ιδιότητές του. Συγκεκριμένα, για ένα διανυσματικό πολυώνυμο

$$P(z) = \chi_m z^m + \chi_{m-1} z^{m-1} + \cdots + \chi_1 z + \chi_0, \;\; \chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_m \in \mathcal{X}, \; \chi_m \neq 0,$$

το σύνολο Birkhoff-James ε-ορθογωνιότητας ορίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z); \psi) &= \Big\{ \mu \in \mathbb{C} : \; 0 \in F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(\mu); \psi) \Big\} \\ &= \Big\{ \mu \in \mathbb{C} : \; \|P(\mu) - \lambda \psi\| \geqslant \sqrt{1 - \varepsilon^2}\, \|\psi\| \, |\lambda|, \; \forall \lambda \in \mathbb{C} \Big\}. \end{aligned}$$

Αποδεικνύεται ότι το σύνολο $W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z); \psi)$ είναι φραγμένο αν και μόνο αν $0 \notin F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_m; \psi)$, και υπολογίζεται το μέγιστο δυνατό πλήθος συνεκτικών τμημάτων του $W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z); \psi)$ όταν αυτό είναι φραγμένο. Μελετάται η ισχυρή σύνδεση ενός συνοριακού σημείου $z_0 \in W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z); \psi)$ με το 0 ως συνοριακό σημείο του συνόλου $F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z_0); \psi)$, καθώς και η τοπική (τοπολογική) διάσταση του 0 στο σύνολο $F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z_0); \psi)$ δεδομένης της τοπικής διάστασης του $z_0 \in W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z); \psi)$ στο σύνολο $W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z); \psi)$.

Δημοσιεύσεις από την παρούσα διατριβή

- V. Panagakou, P. Psarrakos and N. Yannakakis, Birkhoff-James epsilon orthogonality sets of vectors and vector-valued polynomials, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 454 (2017), pp. 59-78.
- V. Panagakou, P. Psarrakos and N. Yannakakis, A Birkhoff-James cosine for normed linear spaces, *Aequationes Mathematicae*, to appear (2021).

Περιεχόμενα

1 Σύνολο Birkhoff-James ε-Ορθογωνιότητας 1

1.1 Birkhoff-James Ορθογωνιότητα 1

1.2 Birkhoff-James ε-Ορθογωνιότητα 7

1.3 Ορισμός Συνόλου Birkhoff-James ε- Ορθογωνιότητας 11

1.4 Βασικές Ιδιότητες 14

1.5 Συνέχεια 17

1.6 Birkhoff-James ε-Ορθογώνιο Συμπλήρωμα 24

2 Ορισμός με Χρήση Γραμμικών Συναρτησιακών 27

2.1 Ισοδύναμος Ορισμός και Υποπροσθετικότητα 27

2.2 Ημιεσωτερικό Γινόμενο 35

2.3 Συνθετικό Σύνολο Birkhoff-James
ε-Ορθογωνιότητας 41

3 Birkhoff-James Συνημίτονο 45

3.1 Ορισμός και Γεωμετρική Ερμηνεία 46

3.2 Βασικές Ιδιότητες 56

3.3 Ορισμός με Χρήση Γραμμικών Συναρτησιακών 68

3.4 Σχέση Birkhoff-James Συνημιτόνου με άλλα Συνημίτονα 71

4 Τελεστές 77

4.1 Συνημίτονο Τελεστών 77

4.2 Γενικεύσεις του Θεωρήματος Bhatia-Šemrl 80

5 Διανυσματικά Πολυώνυμα 91

5.1 Ορισμός και Βασικές Ιδιότητες 91

5.2 Συνεκτικές Συνιστώσεις 99
5.3 Σύνορο 103
5.4 Τοπική Διάσταση 105

Βιβλιογραφία **111**

Παράρτημα: Περίληψη στην Αγγλική **116**

Κεφάλαιο 1

Σύνολο Birkhoff-James ε-Ορθογωνιότητας

1.1 Birkhoff-James Ορθογωνιότητα

Αν θεωρήσουμε οποιονδήποτε γραμμικό χώρο, του οποίου η νόρμα του επάγεται από εσωτερικό γινόμενο, δεν υπάρχει αμφιβολία για το τι είδους ορθογωνιότητα έχουμε στο νου μας. Σε έναν χώρο εσωτερικού γινομένου $(\mathcal{X}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ επί του σώματος $\mathbb{K}$, (όπου $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$), τα στοιχεία χ και ψ είναι ορθογώνια αν και μόνο αν $\langle \chi, \psi \rangle = 0$. Τι συμβαίνει όμως όταν η νόρμα δεν επάγεται από εσωτερικό γινόμενο και ο χώρος είναι μόνο γραμμικός; Θα μπορούσαμε να μελετήσουμε κάποιου είδους ορθογωνιότητα και με ποιον τρόπο; Αρκετοί ορισμοί έχουν δοθεί από τους ερευνητές, όπως η Birkhoff-James ορθογωνιότητα, η Ισοσκελής, η Πυθαγόρεια κλπ. [2, 8, 29].

Υπενθυμίζουμε τον βασικό ορισμό της Birkhoff-James ορθογωνιότητας, ο οποίος αρχικά ήταν για πραγματικούς γραμμικούς χώρους, αλλά αργότερα χρησιμοποιήθηκε και για μιγαδικούς, καθώς και μερικές βασικές ιδιότητές [8, 29].

Ορισμός 1.1. Έστω ένας γραμμικός χώρος με νόρμα $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ και δύο στοιχεία του, το χ και το ψ. Θα λέμε ότι το στοιχείο χ είναι Birkhoff-James ορθογώνιο στο ψ και θα συμβολίζουμε $\chi \perp_{BJ} \psi$ αν και μόνο αν

$$\|\chi + \lambda\psi\| \geq \|\chi\|, \quad \text{για κάθε } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Παρατηρούμε ότι, η Birkhoff-James ορθογωνιότητα είναι ομογενής, δηλαδή, αν $\chi \perp_{BJ} \psi$, τότε $\alpha\chi \perp_{BJ} \beta\psi$ για οποιαδήποτε $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Πράγματι, θεωρούμε δύο αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ με $\alpha \neq 0$. Τότε αν $\chi \perp_{BJ} \psi$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \|\alpha\chi + \lambda\beta\psi\| &= |\alpha| \left\| \chi + \lambda\frac{\beta}{\alpha}\psi \right\| \\ &\geq |\alpha| \, \|\chi + \kappa\psi\| \qquad \left(\text{για } \kappa = \lambda\frac{\beta}{\alpha}\right) \\ &\geq |\alpha| \, \|\chi\| = \|\alpha\chi\|. \end{aligned}$$

Για $\alpha = 0$, ισχύει κατά προφανή τρόπο.

Παρατήρηση 1.2. Η Birkhoff-James ορθογωνιότητα δεν είναι συμμετρική. Πράγματι, έστω ο μιγαδικός χώρος με νόρμα $(\mathbb{C}^3, \| \cdot \|_1)$. Θεωρούμε τα στοιχεία $\chi = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ και $\psi = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ του χώρου $\mathbb{C}^3$. Τότε για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\|\chi + \lambda\psi\|_1 = \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 2-\lambda \\ \lambda \end{bmatrix} \right\|_1 = 1 + |2-\lambda| + |\lambda| \geq 3 = \|\chi\|_1,$$

δηλαδή $\chi \perp_{BJ} \psi$.

Αντίθετα, για $\lambda = \frac{1}{2}$, έχουμε

$$\|\psi + \lambda\chi\|_1 = \left\| \begin{bmatrix} \lambda \\ -1+2\lambda \\ 1 \end{bmatrix} \right\|_1 = \left\| \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -1+1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\|_1 = \frac{3}{2} \ngeq 2 = \|\psi\|_1,$$

δηλαδή $\psi \not\perp_{BJ} \chi$.

Παρατήρηση 1.3. Η Birkhoff-James ορθογωνιότητα δεν είναι προσθετική. Πράγματι, έστω ο μιγαδικός χώρος με νόρμα $(\mathbb{C}^3, \| \cdot \|_1)$. Θεωρούμε τα στοιχεία $\chi = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\psi = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ και $\zeta = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$ του χώρου $\mathbb{C}^3$. Τότε για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ έχουμε

$$\|\chi+\lambda\psi\|_1 = \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 2-\lambda \\ \lambda \end{bmatrix} \right\|_1 = 1+|2-\lambda|+|\lambda| \geq 3 = \|\chi\|_1,$$

δηλαδή $\chi \perp_{BJ} \psi$ και

$$\|\chi+\lambda\zeta\|_1 = \left\| \begin{bmatrix} 1+\dfrac{\lambda}{2} \\ 2+\dfrac{\lambda}{2} \\ -\lambda \end{bmatrix} \right\|_1 = \left|1+\frac{\lambda}{2}\right| + \left|2+\frac{\lambda}{2}\right| + |-\lambda| \geq 3 = \|\chi\|_1,$$

δηλαδή $\chi \perp_{BJ} \zeta$.

Αντίθετα, για $\lambda=-2$, έχουμε

$$\|\chi+\lambda(\psi+\zeta)\|_1 \;=\; \left\| \begin{bmatrix} 1+\dfrac{\lambda}{2} \\ 2-\dfrac{\lambda}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_1 = \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_1 = 1 \not\geq 3 = \|\chi\|_1,$$

δηλαδή $\chi \not\perp_{BJ} (\psi+\zeta)$.

Η Birkhoff-James ορθογωνιότητα δεν είναι τετριμμένη στον γραμμικό χώρο $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ όπως παρατηρούμε στο επόμενο λήμμα [29].

Λήμμα 1.4. Αν χ και ψ είναι δύο στοιχεία ενός γραμμικού χώρου με νόρμα, τότε υπάρχει αριθμός $a \in \mathbb{K}$ τέτοιος ώστε $\chi \perp_{BJ} (\psi + a\chi)$.

Θεώρημα 1.5. [29] Έστω f ένα γραμμικό συναρτησιακό του γραμμικού χώρου $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ με $f \neq 0$. Τότε,

$$|f(\chi)| = \|f\|\,\|\chi\| \text{ αν και μόνο αν } \chi \perp_{BJ} H,$$

όπου H το υπερεπίπεδο όλων των στοιχείων h για τα οποία $f(h)=0$.

Παρατηρούμε ότι, αν η νόρμα του γραμμικού χώρου $\|\cdot\|$ επάγεται από ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$, τότε η Birkhoff-James ορθογωνιότητα ισοδυναμεί με την κλασική ορθογωνιότητα. Πράγματι, ισχύει ότι

$$\begin{aligned}\|\chi+\lambda\psi\|^2 &= \langle\chi+\lambda\psi,\chi+\lambda\psi\rangle \\ &= \langle\chi,\chi+\lambda\psi\rangle+\lambda\langle\psi,\chi+\lambda\psi\rangle \\ &= \overline{\langle\chi+\lambda\psi,\chi\rangle}+\lambda\overline{\langle\chi+\lambda\psi,\psi\rangle} \\ &= \|\chi\|^2+\overline{\lambda}\,\overline{\langle\psi,\chi\rangle}+\lambda\overline{\langle\chi,\psi\rangle}+\lambda\overline{\lambda}\|\psi\|^2 \\ &= \|\chi\|^2+\overline{\lambda}\langle\chi,\psi\rangle+\lambda\overline{\langle\chi,\psi\rangle}+|\lambda|^2\|\psi\|^2.\end{aligned}$$

Οπότε, αν υποθέσουμε ότι $\langle\chi,\psi\rangle\neq 0$, για $\lambda=-\dfrac{\langle\chi,\psi\rangle}{\langle\psi,\psi\rangle}=-\dfrac{\langle\chi,\psi\rangle}{\|\psi\|^2}$ έχουμε

$$\begin{aligned}\|\chi+\lambda\psi\|^2 &= \|\chi\|^2-\frac{\overline{\langle\chi,\psi\rangle}}{\|\psi\|^2}\langle\chi,\psi\rangle-\frac{\langle\chi,\psi\rangle}{\|\psi\|^2}\overline{\langle\chi,\psi\rangle}+\frac{\langle\chi,\psi\rangle^2}{\|\psi\|^4}\|\psi\|^2 \\ &= \|\chi\|^2-\frac{\overline{\langle\chi,\psi\rangle}}{\|\psi\|^2}\langle\chi,\psi\rangle<\|\chi\|^2.\end{aligned}$$

το οποίο σημαίνει ότι $\chi\not\perp_{BJ}\psi$.

Αντίστροφα τώρα, αν $\langle\chi,\psi\rangle=0$, τότε για κάθε $\lambda\in\mathbb{C}$ έχουμε

$$\|\chi+\lambda\psi\|^2=\langle\chi+\lambda\psi,\chi+\lambda\psi\rangle=\|\chi\|^2+|\ \lambda\ |^2\|\psi\|^2\geq\|\chi\|^2.$$

Επομένως, $\chi\perp_{BJ}\psi$, και καταλήγουμε στην ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 1.6. Έστω $(\mathcal{X},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ ένας χώρος εσωτερικού γινομένου. Τότε για τα στοιχεία χ και ψ του χώρου $\mathcal{X}$ ισχύει

$$\langle\chi,\psi\rangle=0 \text{ αν και μόνο αν } \chi\perp_{BJ}\psi.$$

Ορισμός 1.7. Η Birkhoff-James ορθογωνιότητα ονομάζεται δεξιά μοναδική αν για κάθε στοιχείο $\chi\neq 0$ και ψ, υπάρχει μοναδικός αριθμός a τέτοιος ώστε $\chi\perp_{BJ}(\psi+a\chi)$.

Υπενθυμίζουμε τον ορισμό του λείου χώρου, αναφέροντας αρχικά τον ορισμό του support υπερεπιπέδου ή υπερεπιπέδου στήριξης [44].

Ορισμός 1.8. Έστω A υποσύνολο ενός γραμμικού χώρου $\mathcal{X}$. Ένα μη μηδενικό συναρτησιακό $f\in\mathcal{X}^*$ λέγεται support συναρτησιακό (ή συναρτησιακό στήριξης) για το A, αν υπάρχει ένα χ_0 στο A τέτοιο ώστε

$$Ref(\chi_0)=\sup\{Ref(\chi):\ \chi\in A\}.$$

Το χ_0 λέγεται support σημείο (ή σημείο στήριξης) του A. Το σύνολο

$$\{\chi : \chi \in \mathcal{X},\ Re\, f(\chi) = Re\, f(\chi_0)\}$$

λέγεται support υπερεπίπεδο (ή υπερεπίπεδο στήριξης) για το A.

Ορισμός 1.9. Ένας γραμμικός χώρος με νόρμα $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ λέγεται λείος αν για κάθε στοιχείο χ της μοναδιαίας σφαίρας του χώρου $\mathcal{S}_{\mathcal{X}}(0,1)$ υπάρχει μοναδικό support υπερεπίπεδο στο σημείο αυτό.

Θεώρημα 1.10. [29] Η Birkhoff-James ορθογωνιότητα είναι προσθετική σε ένα γραμμικό χώρο με νόρμα αν και μόνο αν είναι δεξιά μοναδική αν και μόνο αν ο χώρος είναι λείος.

Αν υποθέσουμε ότι ο χώρος είναι διάστασης μεγαλύτερης ή ίσης του 3, τότε προκύπτει το παρακάτω θεώρημα [30].

Θεώρημα 1.11. Η Birkhoff-James ορθογωνιότητα είναι συμμετρική αν και μόνο αν η νόρμα $\|\cdot\|$ επάγεται από ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Τέλος, βλέπουμε τη σχέση της Birkhoff-James ορθογωνιότητας με το ημιεσωτερικό γινόμενο. Υπενθυμίζουμε τον ορισμό του ημιεσωτερικού γινομένου $[\cdot,\cdot]$ για γραμμικό χώρο με νόρμα $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$, έτσι όπως διαμορφώθηκε από τους Lumer και Giles.

Ορισμός 1.12. [17, 20, 39] Η απεικόνιση $[\cdot,\cdot] : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{C}$ λέγεται ημιεσωτερικό γινόμενο αν:

1. $[\chi,\chi] \geq 0, \quad \text{για κάθε } \chi \in \mathcal{X} \text{ και } [\chi,\chi] = 0 \text{ αν και μόνο αν } \chi = 0,$

2. $[\lambda\chi,\psi] = \lambda[\chi,\psi], \quad \text{για κάθε } \chi,\psi \in \mathcal{X}, \lambda \in \mathbb{C},$

3. $[\chi,\lambda\psi] = \overline{\lambda}[\chi,\psi], \quad \text{για κάθε } \chi,\psi \in \mathcal{X}, \lambda \in \mathbb{C},$

4. $[\chi+\zeta,\psi] = [\chi,\psi] + [\zeta,\psi], \quad \text{για κάθε } \chi,\psi,\zeta \in \mathcal{X},$

5. $|[\chi,\psi]|^2 \leq [\chi,\chi]\,[\psi,\psi], \quad \text{για κάθε } \chi,\psi \in \mathcal{X}, \lambda \in \mathbb{C}.$

Το στοιχείο χ είναι ορθογώνιο στο ψ ως προς το ημιεσωτερικό γινόμενο, που συμβολίζουμε $\chi \perp_{[\cdot,\cdot]} \psi$, αν ισχύει $[\psi, \chi] = 0$.

Θεώρημα 1.13. Έστω ένας γραμμικός χώρος με νόρμα $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ και $[\cdot,\cdot]$ ένα ημιεσωτερικό γινόμενο που παράγεται από τη νόρμα. Θεωρούμε δύο στοιχεία $\chi, \psi \in \mathcal{X}$. Αν $\chi \perp_{[\cdot,\cdot]} \psi$, τότε $\chi \perp_{BJ} \psi$.

Απόδειξη. Έστω $\chi \perp_{[\cdot,\cdot]} y$. Αν $\chi = 0$, τότε προφανώς ισχύει. Έστω $\chi \neq 0$. Τότε, για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ έχουμε

$$\begin{aligned} \|\chi\|^2 &= [\chi, \chi] \\ &= [\chi + \lambda\psi, \chi] \qquad (\text{αφού } [\psi, \chi] = 0) \\ &\leq \|\chi\| \, \|\chi + \lambda\psi\|. \end{aligned}$$

Άρα $\chi \perp_{BJ} \psi$. □

Παρατήρηση 1.14. Το αντίστροφο δεν είναι αληθές εν γένει, λόγω της μη μοναδικότητας ορισμού ημιεσωτερικού γινομένου. Πράγματι, θεωρούμε τον γραμμικό χώρο $(\mathbb{C}^3, \|\cdot\|_1)$. Τότε το

$$[\chi, \psi] = \|\psi\|_1 \sum_{\substack{k=1 \\ \psi_k \neq 0}}^{3} \frac{\chi_k \overline{\psi}_k}{|\psi_k|}, \quad \text{όπου } \chi, \psi \in \mathbb{C}^3,$$

είναι ένα ημιεσωτερικό γινόμενο στον χώρο $\mathbb{C}^3$ που παράγεται από τη νόρμα $\|\cdot\|_1$. Θεωρούμε τα στοιχεία $\chi = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ και $\psi = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ του χώρου $\mathbb{C}^3$. Τότε έχουμε ότι

$$\|\psi + \lambda\chi\|_1 = \left\| \begin{bmatrix} 1+\lambda \\ \lambda \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_1 = |1+\lambda| + |\lambda|.$$

Επομένως,

$$\|\psi\|_1 = 1 \leq |1+\lambda| + |\lambda| = \|\psi + \lambda\psi\|_1, \quad \text{για κάθε } \lambda \in \mathbb{C},$$

δηλαδή, $\psi \perp_{BJ} \chi$. Παρόλα αυτά, $[\chi, \psi] = 1 \neq 0$.

Αυτό που αληθεύει είναι ότι υπάρχει ένα ημιεσωτερικό γινόμενο του οποίου η ορθογωνιότητα σχετίζεται με την Birkhoff-James ορθογωνιότητα. Ως εκ τούτου, η ισοδυναμία αληθεύει όταν έχουμε λείο χώρο, αφού τότε το ημιεσωτερικό γινόμενο είναι μοναδικό [20].

1.2 Birkhoff-James ε-Ορθογωνιότητα

Θεωρούμε έναν χώρο εσωτερικού γινομένου $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, δύο στοιχεία $\chi, \psi \in \mathcal{X}$ και $\varepsilon \in [0,1)$. Τότε, μέσω αυτού του εσωτερικού γινομένου, μπορεί να οριστεί και η προσεγγιστική ορθογωνιότητα:

$$\chi \perp^{\varepsilon}_{\langle\cdot,\cdot\rangle} \psi \;\;\Leftrightarrow\;\; |\langle \chi, \psi\rangle| \leq \varepsilon \|\chi\|\,\|\psi\|.$$

Με αντίστοιχη λογική ορίζονται και οι ακόλουθες προσεγγιστικές ορθογωνιότητες που προκύπτουν από την Birkhoff-James ορθογωνιότητα [11, 16]:

- $\chi \perp^{\varepsilon}_{BJD} \psi \;\;\Leftrightarrow\;\; \|\chi + \lambda\psi\| \geq (1-\varepsilon)\|\chi\|, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{C}.$
- $\chi \perp^{\varepsilon}_{BJ} \psi \;\;\Leftrightarrow\;\; \|\chi + \lambda\psi\| \geq \sqrt{1-\varepsilon^2}\|\chi\|, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{C}.$
- $\chi \perp^{\varepsilon}_{BJC} \psi \;\;\Leftrightarrow\;\; \|\chi + \lambda\psi\|^2 \geq \|\chi\|^2 - 2\,\varepsilon\|\chi\|\,\|\lambda\psi\|, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{C}.$

Παρατήρηση 1.15.

1. Παρατηρούμε ότι για $\varepsilon = 0$ αυτές οι ορθογωνιότητες ταυτίζονται με την κλασική Birkhoff-James ορθογωνιότητα.
2. Οι παραπάνω προσεγγιστικές ορθογωνιότητες, όπως μπορούμε να δούμε, είναι ομογενείς, ενώ δεν διαθέτουν συμμετρία και προσθετικότητα.

Παρατήρηση 1.16. Οι παραπάνω προσεγγιστικές ορθογωνιότητες συσχετίζονται. Προφανώς ισχύει ότι

$$\chi \perp^{\varepsilon}_{BJ} \psi \;\;\Leftrightarrow\;\; \chi \perp^{\rho}_{BJD} \psi, \;\; \text{με} \;\; \rho = \rho(\varepsilon) = 1 - \sqrt{1-\varepsilon^2},$$

δηλαδή οι δύο πρώτες προσεγγιστικές ορθογωνιότητες είναι πρακτικά ισοδύναμες.

Για δύο στοιχεία χ και ψ του γραμμικού χώρου με νόρμα $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ παρατηρούμε ότι, αφού η απεικόνιση $\lambda \mapsto \|\chi + \lambda\psi\|$ έχει min, τότε υπάρχει κάποιο λ_0 τέτοιο ώστε $(\chi + \lambda_0\psi) \perp \psi$ [29], δηλαδή

$$\|(\chi + \lambda_0\psi) + \lambda\psi\| \geq \|\chi + \lambda_0\psi\|, \quad \text{για κάθε } \lambda \in \mathbb{K}.$$

Για $\lambda = -\lambda_0$, λόγω της σχέσης της ορθογωνιότητας αλλά και της τριγωνικής ανισότητας, ισχύει ότι $|\lambda_0| \leq \dfrac{2\|\chi\|}{\|\psi\|}$. Θεωρούμε ένα $\varepsilon \in [0, 1)$. Υποθέτοντας ότι $\chi \perp^{\varepsilon}_{BJC} \psi$ και χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση που βρήκαμε για το λ_0, καταλήγουμε στο εξής:

$$\|\chi + \lambda\psi\|^2 \geq \|\chi + \lambda_0\psi\|^2 \geq \|\chi\|^2 - 2\varepsilon|\lambda_0|\,\|\chi\|\,\|\psi\| \geq (1 - 4\varepsilon)\|\chi\|^2, \;\; \forall \lambda \in \mathbb{K}.$$

Επομένως, αν πάρουμε ως περιορισμό το ε να ανήκει στο $\left[0, \dfrac{1}{4}\right]$ τότε, θέτοντας $\rho = 2\sqrt{\varepsilon}$, έχουμε ότι $\chi \perp^{\rho}_{BJ} \psi$. Άρα, καταλήξαμε στην ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 1.17. Έστω ένας γραμμικός χώρος με νόρμα $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$, $\varepsilon \in \left[0, \dfrac{1}{4}\right]$ και δύο στοιχεία του χώρου, τα χ και ψ τέτοια ώστε $\chi \perp^{\varepsilon}_{BJC} \psi$. Τότε $\chi \perp^{\rho}_{BJ} \psi$, όπου $\rho = 2\sqrt{\varepsilon}$.

Λόγω της ισοδυναμίας της Birkhoff-James ε-ορθογωνιότητας με την Birkhoff-James-Dragomir ε-ορθογωνιότητα καταλήγουμε στην εξής πρόταση:

Πρόταση 1.18. [45, Πρόταση 3.1] Έστω γραμμικός χώρος με νόρμα $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$, ένα $\varepsilon \in \left[0, \dfrac{1}{4}\right]$ και δύο στοιχεία χ και ψ του χώρου $\mathcal{X}$ τέτοια ώστε $\chi \perp^{\varepsilon}_{BJC} \psi$. Τότε, $\chi \perp^{\delta}_{BJD} \psi$, όπου $\delta = 1 - \sqrt{1 - 4\varepsilon}$.

Έστω $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ένας χώρος εσωτερικού γινομένου, $\varepsilon \in [0, 1)$ και δύο στοιχεία χ και ψ του χώρου αυτού τέτοια ώστε $|\langle\chi, \psi\rangle| \leq \varepsilon\|\chi\|\,\|\psi\|$. Για $\lambda = -\dfrac{\langle\chi, \psi\rangle}{\|\psi\|^2}$ παρατηρούμε ότι

$$\|\chi + \lambda\psi\|^2 = \|\chi\|^2 + \overline{\lambda}\langle\chi, \psi\rangle + \lambda\overline{\langle\chi, \psi\rangle} + |\lambda|^2\|\psi\|^2 \geq (1 - \varepsilon^2)\|\chi\|^2,$$

ή

$$\|\chi\|^2 - \frac{|\langle\chi, \psi\rangle|^2}{\|\psi\|^2} - \frac{|\langle\chi, \psi\rangle|^2}{\|\psi\|^2} + \frac{|\langle\chi, \psi\rangle|^2}{\|\psi\|^4}\|\psi\|^2 \geq (1 - \varepsilon^2)\|\chi\|^2,$$

ή

$$-\frac{|\langle \chi, \psi \rangle|^2}{\|\psi\|^2} \geq -\varepsilon^2 \|\chi\|^2,$$

ή

$$|\langle \chi, \psi \rangle|^2 \leq \varepsilon^2 \|\chi\|^2 \|\psi\|^2.$$

Συνεπώς, προκύπτει η προσεγγιστική ορθογωνιότητας ως προς το εσωτερικό γινόμενο.

Αντίστροφα τώρα, αν υποθέσουμε ότι για τα στοιχεία χ και ψ του χώρου $\mathcal{X}$ ισχύει ότι $|\langle \chi, \psi \rangle| \leq \varepsilon \|\chi\| \, \|\psi\|$, τότε έχουμε

$$Re\, \overline{\lambda} \langle \chi, \psi \rangle \leq |\overline{\lambda} \langle \chi, \psi \rangle| \leq \varepsilon \, |\lambda| \, \|\chi\| \, \|\psi\|.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
\|\chi + \lambda\psi\|^2 &= \langle \chi + \lambda\psi, \chi + \lambda\psi \rangle \\
&= \|\chi\|^2 + \overline{\lambda}\langle \chi, \psi \rangle + \lambda\overline{\langle \chi, \psi \rangle} + |\lambda|^2 \|\psi\|^2 \\
&= \|\chi\|^2 + 2Re\, \overline{\lambda}\langle \chi, \psi \rangle + |\lambda|^2 \|\psi\|^2 \\
&\geq \|\chi\|^2 - 2|\overline{\lambda}\langle \chi, \psi \rangle| + |\lambda|^2 \|\psi\|^2 \\
&\geq \|\chi\|^2 - \varepsilon \, |\lambda| \, \|\chi\| \, \|\psi\| + |\lambda|^2 \|\psi\|^2 \\
&\geq \|\chi\|^2 - \varepsilon^2 \|\chi\|^2 + \varepsilon^2 \|\chi\|^2 - 2\varepsilon \, |\lambda| \, \|\chi\| \, \|\psi\| + |\lambda|^2 \|\psi\|^2 \\
&\geq \|\chi\|^2 - \varepsilon^2 \|\chi\|^2 + (\varepsilon \|\chi\| - |\lambda| \, \|\psi\|)^2 \\
&\geq \|\chi\|^2 - \varepsilon^2 \|\chi\|^2 \\
&\geq (1 - \varepsilon^2) \|\chi\|^2,
\end{aligned}$$

δηλαδή καταλήξαμε στην Birkhoff-James ε-ορθογωνιότητα. Επομένως, ισχύει η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 1.19. Έστω ένας χώρος εσωτερικού γινομένου $(\mathcal{X}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, δύο στοιχεία του, χ και ψ και $\varepsilon \in [0, 1)$. Τότε

$$\chi \perp^{\varepsilon}_{\langle \cdot, \cdot \rangle} \psi \text{ αν και μόνο αν } \chi \perp^{\varepsilon}_{BJ} \psi.$$

Λόγω της ισοδυναμίας της Birkhoff-James ε-ορθογωνιότητας και της Birkhoff-James-Dragomir ε-ορθογωνιότητας, προφανώς ισχύει και το εξής [16]: Σε χώρο εσωτερικού γινομένου $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ η σχέση $\chi \perp_{BJD}^{\varepsilon} \psi$ είναι ισοδύναμη με τη σχέση $\chi \perp_{\langle\cdot,\cdot\rangle}^{\rho(\varepsilon)} \psi$, όπου $\rho(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon(2-\varepsilon)}$, για $\chi, \psi \in \mathcal{X}$.

Πρόταση 1.20. [11, Πρόταση 2.1] Αν $(\mathcal{X}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ είναι ένας χώρος εσωτερικού γινομένου και $\chi, \psi \in \mathcal{X}$, τότε για οποιοδήποτε $\varepsilon \in [0,1)$,

$$\chi \perp_{\langle\cdot,\cdot\rangle}^{\varepsilon} \psi \text{ αν και μόνο αν } \chi \perp_{BJC}^{\varepsilon} \psi.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε δύο στοιχεία χ και ψ του γραμμικού χώρου $\mathcal{X}$. Υποθέτουμε ότι $|\langle\chi,\psi\rangle| \le \varepsilon\|\chi\|\,\|\psi\|$. Κάνοντας πράξεις παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
\|\chi+\lambda\psi\|^2 &= \langle\chi+\lambda\psi, \chi+\lambda\psi\rangle \\
&= \|\chi\|^2 + 2Re\,\overline{\lambda}\langle\chi,\psi\rangle + |\lambda|^2\|\psi\|^2 \\
&\ge \|\chi\|^2 + 2Re\,\overline{\lambda}\langle\chi,\psi\rangle.
\end{aligned}$$

Τότε, με δεδομένη την προσεγγιστική ορθογωνιότητα του εσωτερικού γινομένου, έχουμε

$$\begin{aligned}
\|\chi+\lambda\psi\|^2 &\ge \|\chi\|^2 + 2Re\,\overline{\lambda}\langle\chi,\psi\rangle \\
&\ge \|\chi\|^2 - 2|\overline{\lambda}\langle\chi,\psi\rangle| \\
&\ge \|\chi\|^2 - \varepsilon\,|\lambda|\,\|\chi\|\,\|\psi\|,
\end{aligned}$$

δηλαδή το ζητούμενο.

Για το αντίστροφο, υποθέτουμε ότι $\chi \perp_{BJC}^{\varepsilon} \psi$. Τότε για $\lambda = -\dfrac{\langle\chi,\psi\rangle}{\|\psi\|^2}$, κάνοντας απλές πράξεις, όπως παραπάνω, προκύπτει η προσεγγιστική ορθογωνιότητα ως προς το εσωτερικό γινόμενο:

$$\begin{aligned}
&\|\chi+\lambda\psi\|^2 \ge \|\chi\|^2 - \varepsilon\|\chi\|\,|\lambda|\,\|\psi\| \\
\Longrightarrow\ &|\langle\chi,\psi\rangle| \le \varepsilon\|\chi\|\,\|\psi\|,
\end{aligned}$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. $\square$

Η ε-ορθογωνιότητα μέσω ημιεσωτερικού γινομένου $[\cdot,\cdot]$, για $\varepsilon \in [0,1)$, ορίζεται αντίστοιχα ως εξής:

$$\chi \perp^{\varepsilon}_{[\cdot,\cdot]} \psi \;\;\Leftrightarrow\;\; |[\psi,\chi]| \leq \varepsilon \|\chi\|\,\|\chi\|.$$

Σε ένα διανυσματικό χώρο με νόρμα $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ μπορούν να οριστούν διαφορετικά ημιεσωτερικά γινόμενα. Όπως παρατήρησε ο J. Chmielinski [4], η Birkhoff-James-Chmielinski ε-ορθογωνιότητα έχει άμεση σχέση με την προσεγγιστική ορθογωνιότητα μέσω του ημιεσωτερικού γινομένου. Για την ακρίβεια απέδειξε τα εξής:

Πρόταση 1.21. [11, Πρόταση 3.1] Σε γραμμικό χώρο με νόρμα $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$, με $\chi,\psi \in \mathcal{X}$ και $\varepsilon \in [0,1)$, αν $\chi \perp^{\varepsilon}_{[\cdot,\cdot]} \psi$, τότε $\chi \perp^{\varepsilon}_{BJC} \psi$.

Σε έναν γραμμικό χώρο $\mathcal{X}$ θα υπάρχει μοναδικό ημιεσωτερικό γινόμενο (το οποίο θα επάγει και τη νόρμα) αν και μόνο αν ο γραμμικός χώρος $\mathcal{X}$ είναι λείος. Επομένως, για την αντίστροφη συνεπαγωγή χρειάζεται και αυτή η επιπλέον προϋπόθεση. Άρα, θα ισχύει η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 1.22. [11, Πρόταση 3.2] Σε ένα λείο χώρο $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$, με $\chi,\psi \in \mathcal{X}$ και $\varepsilon \in [0,1)$, ισχύει ότι αν $\chi \perp^{\varepsilon}_{BJC} \psi$, τότε $\chi \perp^{\varepsilon}_{[\cdot,\cdot]} \psi$.

Λόγω των παραπάνω συνεπαγωγών, παρατηρούμε ότι αν σε έναν γραμμικό χώρο με νόρμα $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ με $\varepsilon \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$ και δύο στοιχεία $\chi,\psi \in \mathcal{X}$ τέτοια ώστε $\chi \perp^{\varepsilon}_{[\cdot,\cdot]} \psi$, τότε, λόγω της Πρότασης 1.21, έχουμε ότι $\chi \perp^{\varepsilon}_{BJC} \psi$ και λόγω της Πρότασης 1.17, $\chi \perp^{\rho}_{BJ} \psi$, όπου $\rho = 2\sqrt{\varepsilon}$. Τελικά, καταλήγουμε στην παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 1.23. Έστω ένας γραμμικός χώρος με νόρμα $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$, με $\chi,\psi \in \mathcal{X}$ και $\varepsilon \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$. Αν ισχύει ότι $\chi \perp^{\varepsilon}_{[\cdot,\cdot]} \psi$, τότε έχουμε $\chi \perp^{\rho}_{BJ} \psi$, όπου $\rho = 2\sqrt{\varepsilon}$.

1.3 Ορισμός Συνόλου Birkhoff-James ε- Ορθογωνιότητας

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζεται ο ορισμός του συνόλου Birkhoff-James ε-ορθογωνιότητας, όπως διαμορφώθηκε αυτός στα [13, 32]. Αποτελεί γενίκευση, όπως θα δούμε, του κλασικού αριθμητικού πεδίου. Ο πρώτος ορισμός του κλασικού αριθμητικού πεδίου δόθηκε από τον Toeplitz το 1918 στο [56] και αφορούσε φραγμένο γραμμικό τελεστή T ορισμένο σε έναν χώρο Hilbert $\mathcal{H}$ πεπερασμένης διάστασης. Σε αυτή την περίπτωση το αριθμητικό πεδίο ορίζεται ως εξής:

$$F(T) = \{\langle T\chi, \chi\rangle, \, \chi \in \mathcal{H}, \|\chi\| = 1\}.$$

Στην περίπτωση που, αντί για τελεστή, θεωρήσουμε έναν τετραγωγικό πίνακα A του $\mathbb{C}^{n\times n}$, προκύπτει το κλασικό αριθμητικό πεδίο για πίνακες:

$$F(A) = \{\chi^* A\chi \, : \, \chi \in \mathbb{C}^n, \chi^*\chi = 1\}.$$

Παρουσιάζουμε επιγραμματικά ορισμένες βασικές ιδιότητες του αριθμητικού πεδίου [24, 27]:

Πρόταση 1.24. (i) $F(T) = \{\alpha\}$ αν και μόνο αν $T = \alpha I$, για κάποιο $\alpha \in \mathbb{C}$.

(ii) $F(T + \alpha I) = F(T) + \alpha$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{C}$.

(iii) $F(\alpha T) = \alpha F(T)$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{C}$.

(iv) Το αριθμητικό πεδίο έχει την ιδιότητα της υποπροσθετικότητας.

(v) Το αριθμητικό πεδίο είναι κυρτό σύνολο.

(vi) Το φάσμα $\sigma(T)$ του τελεστή περιέχεται στην κλειστότητα του αριθμητικού πεδίου του.

(vii) Αν ο τελεστής T είναι κανονικός, τότε ισχύει $\overline{F(T)} = co(\sigma(T))$.

Οι παραπάνω ιδιότητες ισχύουν σε τυχαίο χώρο Hilbert $\mathcal{H}$. Στην περίπτωση που ο χώρος Hilbert είναι πεπερασμένης διάστασης, το αριθμητικό πεδίο είναι συμπαγές σύνολο [27], επομένως οι δύο τελευταίες ιδιότητες γράφονται απλούστερα ως $\sigma(T) \subseteq F(T)$ και $F(T) = co(\sigma(T))$ με T κανονικό, αντίστοιχα.

Ο ορισμός του αριθμητικού πεδίου γενικεύτηκε, από τον Lumer, το 1961, στο [39] με τη χρήση ημιεσωτερικού γινομένου σε έναν γραμμικό χώρο $\mathcal{X}$:

$$F_{[\cdot,\cdot]}(T) = \{[T\chi, \chi], \, \chi \in \mathcal{X}, \|\chi\| = 1\},$$

και από τον Bauer, το 1962, στο [6] με τη χρήση συναρτησιακών, που θα αναφέρουμε στο επόμενο κεφάλαιο.

Το 1999, οι Bhatia και $\check{S}$emrl ασχολήθηκαν με ένα ζεύγος πινάκων (A, B) μελετώντας την ποσότητα $\langle A\chi, B\chi \rangle$, για μοναδιαίο διάνυσμα χ και απέδειξαν στο [7] το παρακάτω θεώρημα, το οποίο συνδέει το αριθμητικό πεδίο με την έννοια της Birkhoff-James ορθογωνιότητας.

Θεώρημα 1.25. (Θεώρημα Bhatia-$\check{S}$emrl) Έστω ένας χώρος Hilbert πεπερασμένης διάσταση $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ και δύο πίνακες A και B στον χώρο $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Ο πίνακας A είναι Birkhoff-James ορθογώνιος στον πίνακα B αν και μόνο αν υπάρχει ένα μοναδιαίο διάνυσμα $\chi \in H$ τέτοιο ώστε $\|A\chi\| = \|A\|$ και $\langle A\chi, B\chi \rangle = 0$.

Επομένως, με τη εφαρμογή του θεωρήματος για $B = I$, η γραφή του αριθμητικού πεδίου μπορεί να γίνει και ως εξής:

$$F(A) = \{\mu \in \mathbb{C} : \ \ I \perp_{BJ} (A - \mu I)\}.$$

Από αυτήν την γραφή του αριθμητικού πεδίου, οι Chorianopoulos και Psarrakos οδηγήθηκαν στον ορισμό του συνόλου Birkhoff-James ε-ορθογωνιότητας για ένα ζεύγος πινάκων A και $B \in \mathbb{C}^{n\times m}$, όχι αναγκαστικά τετραγωγικών, με $\varepsilon \in [0, 1)$ [13]:

$$F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(A; B) = \{\mu \in \mathbb{C} : \ B \perp^{\varepsilon}_{BJ} (A - \mu B)\}.$$

Στη συνέχεια, οι Karamanlis και Psarrakos γενίκευσαν τον ορισμό αυτό στους μιγαδικούς γραμμικούς χώρους [32].

Ορισμός 1.26. Έστω $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ ένας γραμμικός χώρος με νόρμα και έστω δύο στοιχεία $\chi, \psi \in \mathcal{X}$ με $\psi \neq 0$. Τότε για $\varepsilon \in [0,1)$, έχουμε

$$\begin{aligned}
F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi;\psi) &= \{\mu \in \mathbb{C} : \psi \perp^{\varepsilon}_{BJ} (\chi - \mu\psi)\} \\
&= \left\{\mu \in \mathbb{C} : \|\psi + \kappa(\chi - \mu\psi)\| \geq \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|,\ \forall \kappa \in \mathbb{C}\right\} \\
&= \left\{\mu \in \mathbb{C} : \|\psi - \lambda(\chi - \mu\psi)\| \geq \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|,\ \forall \lambda \in \mathbb{C}\right\} \\
&= \left\{\mu \in \mathbb{C} : \left\|\psi - \frac{1}{\lambda}(\chi - \mu\psi)\right\| \geq \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|,\ \forall \lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}\right\} \\
&= \left\{\mu \in \mathbb{C} : \frac{1}{|\lambda|}\,\|\lambda\psi - (\chi - \mu\psi)\| \geq \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|,\ \forall \lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}\right\} \\
&= \left\{\mu \in \mathbb{C} : \|\chi - (\mu - \lambda)\psi\| \geq \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|\,|\lambda|,\ \forall \lambda \in \mathbb{C}\right\} \\
&= \left\{\mu \in \mathbb{C} : \|\chi - \lambda\psi\| \geq \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|\,|\mu - \lambda|,\ \forall \lambda \in \mathbb{C}\right\} \\
&= \bigcap_{\lambda\in\mathbb{C}} \mathcal{D}\left(\lambda, \frac{\|\chi - \lambda\psi\|}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|}\right).
\end{aligned}$$

Προφανώς, το παραπάνω σύνολο αποτελεί γενίκευση του αριθμητικού πεδίου. Πράγματι, στην περίπτωση που θέσουμε $\chi = T, \psi = I$ και $\varepsilon = 0$ έχουμε

$$\begin{aligned}
F^{0}_{\|\cdot\|}(T;I) &= \{\mu \in \mathbb{C} :\ I \perp_{BJ} (T - \mu I)\} \\
&= F(T).
\end{aligned}$$

1.4 Βασικές Ιδιότητες

Το σύνολο Birkhoff-James ε-ορθογωνιότητας έχει τις παρακάτω ιδιότητες, οι αποδείξεις των οποίων μπορούν να μελετηθούν στις αντίστοιχες αναφορές. Θεωρούμε έναν γραμμικό χώρο με νόρμα $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:

Πρόταση 1.27. ([32, Πρόταση 2.1] και για πίνακες [12, Λήμμα 3]) Για οποιαδήποτε στοιχεία $\chi, \psi \in \mathcal{X}$ με $\psi \neq 0$ και οποιοδήποτε $\varepsilon \in [0,1)$ το σύνολο Birkhoff-James ε-ορθογωνιότητας $F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi;\psi)$ είναι μη κενό.

Πρόταση 1.28. [32, Πρόταση 2.2] Έστω δύο στοιχεία $\chi, \psi \in \mathcal{X}$ με $\psi \neq 0$ και έστω $\varepsilon \in [0,1)$. Τότε για οποιοδήποτε μη μηδενικό $b \in \mathbb{C}$,

$$F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi; b\psi) = \frac{1}{b}F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi;\psi).$$

Πρόταση 1.29. ([32, Πρόταση 2.3] και για πίνακες [13, Ιδιότητα P_4]) Έστω χ, ψ δύο μη μηδενικά στοιχεία του χώρου $\mathcal{X}$. Τότε για οποιοδήποτε $\varepsilon \in [0,1)$,

$$\left\{\mu^{-1} \in \mathbb{C} \ : \ \mu \in F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi;\psi), |\mu| \geq \frac{\|\chi\|}{\|\psi\|}\right\} \subseteq F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\psi;\chi).$$

Πρόταση 1.30. [32, Πρόταση 2.4] Έστω $\|\cdot\|_a$ και $\|\cdot\|_b$ δύο ισοδύναμες νόρμες στον χώρο $\mathcal{X}$ και θεωρούμε τους πραγματικούς αριθμούς $C, c > 0$, οι οποίοι

$$c\|\zeta\|_a \leq \|\zeta\|_b \leq C\|\zeta\|_a, \quad \text{για κάθε } \zeta \in \mathcal{X}.$$

Τότε για οποιαδήποτε χ, $\psi \in \mathcal{X}$ με $\psi \neq 0$ και για οποιοδήποτε $\varepsilon \in [0,1)$ ισχύει ότι

$$F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|_a}(\chi;\psi) \subseteq F^{\varepsilon'}_{\|\cdot\|_b}(\chi;\psi), \text{ όπου } \varepsilon' = \sqrt{1 - \frac{c^2(1-\varepsilon^2)}{C^2}}.$$

Θεώρημα 1.31. ([32, Θεώρημα 3.1] και για πίνακες [13, Πρόταση 2]) Έστω δύο στοιχεία $\chi, \psi \in \mathcal{X}$ με $\psi \neq 0$ και υποθέτουμε ότι το στοιχείο χ δεν είναι πολλαπλάσιο του ψ. Τότε, για οποιαδήποτε $0 \leq \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < 1$, το σύνολο $F^{\varepsilon_1}_{\|\cdot\|}(\chi;\psi)$ βρίσκεται στο εσωτερικό του συνόλου $F^{\varepsilon_2}_{\|\cdot\|}(\chi;\psi)$.

Πόρισμα 1.32. ([32, Πόρισμα 3.2] και για πίνακες [13, Πόρισμα 3]) Έστω δύο στοιχεία $\chi, \psi \in \mathcal{X}$ με $\psi \neq 0$ και υποθέτουμε ότι το στοιχείο χ δεν είναι πολλαπλάσιο του ψ. Τότε για οποιοδήποτε $\varepsilon \in (0,1)$, το σύνολο $F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi;\psi)$ έχει μη κενό εσωτερικό.

Πρόταση 1.33. ([32, Πρόταση 3.3] και για πίνακες [13, Ιδιότητα P_1]) Έστω δύο στοιχεία $\chi, \psi \in \mathcal{X}$ με $\psi \neq 0$. Θεωρούμε έναν μιγαδικό αριθμό a. Τότε

$$\chi = a\psi \text{ αν και μόνο αν } F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi;\psi) = \{a\} \text{ για κάθε } \varepsilon \in [0,1).$$

Πρόταση 1.34. ([32, Πρόταση 3.4] και για πίνακες [13, Ιδιότητα P_2]) Έστω δύο στοιχεία $\chi, \psi \in \mathcal{X}$ με $\psi \neq 0$ και $\varepsilon \in [0,1)$. Τότε για οποιαδήποτε $a, b \in \mathbb{C}$ έχουμε,

$$F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(a\chi + b\psi;\psi) = aF^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi;\psi) + b.$$

Παρατήρηση 1.35. Θεωρούμε δύο $n \times n$ πίνακες A και B με τον πίνακα B να είναι αντιστρέψιμος. Από την Πρόταση 1.34, γνωρίζουμε ότι $\mu \in F^0_{\|\cdot\|_2}(A;B)$ αν και μόνο αν $0 \in F^0_{\|\cdot\|_2}(A-\mu B;B)$. Ισοδύναμα, από το Θεώρημα 1.25 (Θεώρημα Bhatia-Šemrl), υπάρχει μοναδικό διάνυσμα $\chi \in \mathbb{C}^n$ τέτοιο ώστε $\|B\chi\|_2 = \|B\|$ και

$$\begin{aligned} B\chi \perp_{BJ} (A-\mu B)\chi &\Leftrightarrow (B\chi)^*[(A-\mu B)\chi] = 0 \\ &\Leftrightarrow \chi^* B^*(A-\mu B)\chi = 0 \\ &\Leftrightarrow \chi^* B^* A\chi - \mu\chi^* B^* B\chi = 0 \\ &\Leftrightarrow \mu = \frac{\chi^* B^* A\chi}{\chi^* B^* B\chi} \qquad (\text{αφού } B\chi \neq 0). \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} F^0_{\|\cdot\|}(A;B) &= \left\{\mu \in \mathbb{C} :\ \mu = \frac{\chi^* B^* A\chi}{\chi^* B^* B\chi},\ \chi \in \mathbb{C}^n,\ \|\chi\|_2 = 1,\ \|B\chi\|_2 = \|B\|\right\} \\ &\subseteq \left\{\mu \in \mathbb{C} :\ \mu = \frac{\chi^* B^* A\chi}{\chi^* B^* B\chi},\ \chi \in \mathbb{C}^n,\ \|\chi\|_2 = 1\right\}. \end{aligned}$$

Το σύνολο αυτό είναι γνωστό ως το αριθμητικό πεδίο της γραμμικής δέσμης (linear pencil) $\mathcal{L}(z) = (B^*B)z - (B^*A)$.

Θεώρημα 1.36. ([32, Θεώρημα 3.5] και για πίνακες [13, Πρόταση 4]) Έστω δύο στοιχεία $\chi, \psi \in \mathcal{X}$ με $\psi \neq 0$ και υποθέτουμε ότι το χ δεν είναι πολλαπλάσιο του ψ. Τότε για οποιαδήποτε φραγμένη περιοχή $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, υπάρχει $\varepsilon_\Omega \in [0,1)$ τέτοιο ώστε $\Omega \subseteq F^{\varepsilon_\Omega}_{\|\cdot\|}(\chi;\psi)$.

Πόρισμα 1.37. [32, Πόρισμα 3.6] Έστω δύο στοιχεία $\chi, \psi \in \mathcal{X}$ με $\psi \neq 0$. Αν το χ δεν είναι πολλαπλάσιο του ψ, τότε

$$\mathbb{C} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F^{1-\frac{1}{n}}_{\|\cdot\|}(\chi;\psi).$$

Πρόταση 1.38. ([32, Πρόταση 4.1] και για πίνακες [13, Ιδιότητα P_5]) Έστω δύο στοιχεία $\chi, \psi \in \mathcal{X}$ με $\psi \neq 0$. Τότε για οποιοδήποτε $\varepsilon \in [0,1)$

$$Int\left[F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi;\psi)\right] \subseteq \left\{\mu \in \mathbb{C} :\ \|\chi - \lambda\psi\| > \sqrt{1-\varepsilon^2}\|\psi\|\,|\mu - \lambda|,\ \ \forall\lambda \in \mathbb{C}\right\}.$$

Θεώρημα 1.39. ([32, Θεώρημα 4.2] και για πίνακες [13, Πρόταση 16]) Έστω δύο στοιχεία $\chi, \psi \in \mathcal{X}$ με $\psi \neq 0$ και $\varepsilon \in [0, 1)$. Θεωρούμε ότι $\mu_0 \in F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi; \psi)$.

(1) Το μ_0 βρίσκεται στο σύνορο $\partial F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi; \psi)$ αν και μόνο αν

$$\inf_{\lambda \in \mathbb{C}} \left\{ \|\chi - \lambda\psi\| - \sqrt{1-\varepsilon^2}\|\psi\| \, |\mu_0 - \lambda| \right\} = 0.$$

(2) Αν $\varepsilon > 0$, τότε $\mu_0 \in \partial F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi; \psi)$ αν και μόνο αν

$$\min_{\lambda \in \mathbb{C}} \left\{ \|\chi - \lambda\psi\| - \sqrt{1-\varepsilon^2}\|\psi\| \, |\mu_0 - \lambda| \right\} = 0,$$

ή ισοδύναμα, αν και μόνο αν $\|\chi - \lambda_0\psi\| = \sqrt{1-\varepsilon^2}\|\psi\| \, |\mu_0 - \lambda_0|$ για κάποιο $\lambda_0 \in \mathbb{C}$.

Πόρισμα 1.40. [32, Πόρισμα 4.3] Έστω δύο στοιχεία $\chi, \psi \in \mathcal{X}$ με $\psi \neq 0$. Τότε για οποιοδήποτε $\varepsilon \in (0, 1)$

$$Int\left[F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi; \psi)\right] = \left\{\mu \in \mathbb{C} : \ \|\chi - \lambda\psi\| > \sqrt{1-\varepsilon^2}\|\psi\| \, |\mu - \lambda|, \ \ \forall \lambda \in \mathbb{C}\right\}.$$

Θεώρημα 1.41. ([32, Θεώρημα 5.1] και για πίνακες [13, Παράγραφος 5]) Έστω δύο στοιχεία $\chi, \psi \in \mathcal{X}$ με $\psi \neq 0$ και $\varepsilon \in [0, 1)$. Θεωρούμε ότι η νόρμα $\|\cdot\|$ επάγεται από ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Τότε το σύνολο Birkhoff-James ε-ορθογωνιότητας του χ ως προς το ψ είναι ο κλειστός δίσκος

$$F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi; \psi) = \mathcal{D}\left(\frac{\langle\chi, \psi\rangle}{\|\psi\|^2}, \left\|\chi - \frac{\langle\chi, \psi\rangle}{\|\psi\|^2}\psi\right\| \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\|\psi\|}\right).$$

1.5 Συνέχεια

Οι Chorianopoulos και Psarrakos απέδειξαν στο [14] την συνέχεια του συνόλου Birkhoff-James ε-ορθογωνιότητας για πίνακες ως προς τον πρώτο πίνακα και ως προς το ε. Εδώ, για λόγους πληρότητας, οι αποδείξεις μεταφέρονται για τυχαίο γραμμικό χώρο με νόρμα $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ και τυχαία στοιχεία του χώρου.

Ορισμός 1.42. Έστω $(\mathcal{X}, \rho_{\mathcal{X}})$ ένας μετρικός χώρος και $(\mathcal{Y}, \rho_{\mathcal{Y}})$ ένας πλήρης μετρικός χώρος. Επιπλέον, έστω μια απεικόνιση $F : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ και ένα στοιχείο $x_0 \in \mathcal{X}$. Τότε η F καλείται:

1. δ-άνω ημισυνεχής στο x_0, αν για κάθε $\delta > 0$, υπάρχει περιοχή $\mathcal{N}(x_0) \subset \mathcal{X}$ του x_0 τέτοια ώστε
$$F(x) \subseteq F(x_0) + B(0, \delta), \quad \forall x \in \mathcal{N}(x_0),$$

2. δ-κάτω ημισυνεχής στο x_0, αν για κάθε $\delta > 0$, υπάρχει περιοχή $\mathcal{N}(x_0) \subset \mathcal{X}$ του x_0 τέτοια ώστε
$$F(x_0) \subseteq F(x) + B(0, \delta), \quad \forall x \in \mathcal{N}(x_0),$$

3. δ-συνεχής στο x_0, αν είναι δ-άνω και δ-κάτω ημισυνεχής.

Επιπλέον, η F καλείται:

1. άνω ημισυνεχής στο x_0, αν για κάθε περιοχή $\mathcal{N}(F(x_0)) \subset \mathcal{Y}$ του $F(x_0)$, υπάρχει περιοχή $\mathcal{N}(x_0) \subset \mathcal{X}$ του x_0 τέτοια ώστε
$$F(x) \subseteq \mathcal{N}(F(x_0)), \quad \forall x \in \mathcal{N}(x_0),$$

2. κάτω ημισυνεχής στο x_0, αν για κάθε $y_0 \in F(x_0)$ και για κάθε περιοχή $\mathcal{N}(y_0) \subset \mathcal{Y}$ του y_0, υπάρχει περιοχή $\mathcal{N}(x_0) \subset \mathcal{X}$ του x_0 τέτοια ώστε
$$F(x) \cap \mathcal{N}(y_0) \neq \emptyset, \quad \forall x \in \mathcal{N}(x_0),$$

3. συνεχής στο x_0, αν είναι άνω και κάτω ημισυνεχής.

Λήμμα 1.43. [4] Έστω $(\mathcal{X}, \rho_{\mathcal{X}})$ ένας μετρικός χώρος και $(\mathcal{Y}, \rho_{\mathcal{Y}})$ ένας πλήρης μετρικός χώρος. Επιπλέον, έστω μια απεικόνιση $F : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ και ένα στοιχείο $x_0 \in \mathcal{X}$.

1. Αν η F είναι άνω ημισυνεχής στο x_0, τότε είναι και δ-άνω ημισυνεχής στο x_0. Το αντίστροφο ισχύει αν το $F(x_0)$ συμπαγές υποσύνολο του $\mathcal{Y}$.

2. Αν η F είναι δ-κάτω ημισυνεχής στο x_0, τότε είναι και κάτω ημισυνεχής στο x_0. Το αντίστροφο ισχύει αν το $F(x_0)$ συμπαγές υποσύνολο του $\mathcal{Y}$.

Υπενθυμίζουμε ότι η απόσταση (ή μετρική) Hausdorff για δύο συμπαγή υποσύνολα Ω_1 και Ω_2 ενός μετρικού χώρου $(\mathcal{X}, \rho_{\mathcal{X}})$ ορίζεται ως εξής:

$$d_H(\Omega_1, \Omega_2) = \max\left\{\max_{a\in\Omega_1}\min_{b\in\Omega_2}\rho_{\mathcal{X}}(a,b), \max_{b\in\Omega_2}\min_{a\in\Omega_1}\rho_{\mathcal{X}}(a,b)\right\}.$$

Λήμμα 1.44. [35] Έστω δύο στοιχεία $\chi, \psi \in \mathcal{X}$ και $\varepsilon \in [0,1)$ και έστω ότι το χ δεν είναι πολλαπλάσιο του ψ. Τότε για κάθε $\delta > 0$, υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\kappa \in \mathbb{C}$ τέτοια ώστε

$$d_H\left(\bigcap_{i=1}^{\kappa}\mathcal{D}\left(\lambda_i, \frac{\|\chi - \lambda_i\psi\|}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|}\right), F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi;\psi)\right) \leq \delta,$$

όπου d_H είναι η απόσταση Hausdorff.

Θεώρημα 1.45. (Για πίνακες [14, Θεώρημα 6]) Θεωρούμε έναν γραμμικό χώρο με νόρμα $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ και $\varepsilon \in [0,1)$. Έστω δύο στοιχεία ψ και χ_0 του χώρου $\mathcal{X}$, με το χ_0 να μην είναι πολλαπλάσιο του ψ. Η απεικόνιση $\chi \mapsto F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi;\psi)$ είναι συνεχής στο $\chi_0 \in \mathcal{X}$.

Απόδειξη. Πρώτα θα δείξουμε την άνω ημισυνέχεια της απεικόνισης. Θεωρούμε ένα στοιχείο $\chi_0 \in \mathcal{X}$ (χ_0 όχι πολλαπλάσιο του ψ) και έστω $\delta > 0$. Από Λήμμα 1.44 υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\kappa \in \mathbb{C}$ τέτοια ώστε

$$d_H\left(G(\chi_0), F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_0;\psi)\right) \leq \frac{\delta}{2},$$

όπου

$$G(\chi_0) = \bigcap_{i=1}^{\kappa}\mathcal{D}\left(\lambda_i, \frac{\|\chi_0 - \lambda_i\psi\|}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|}\right).$$

Επίσης, για $\zeta \in \mathcal{X}$ έχουμε

$$\frac{\|\chi_0 - \lambda_i\psi\|}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|} = \frac{\|\chi_0 + \zeta - \lambda_i\psi - \zeta\|}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|} \leq \frac{\|\chi_0 + \zeta - \lambda_i\psi\|}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|} + \frac{\|\zeta\|}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|}$$

για $i = 1, 2, \ldots, \kappa$. Τότε το σύνολο

$$\Omega(\chi_0, \zeta) = \bigcap_{i=1}^{\kappa}\mathcal{D}\left(\lambda_i, \frac{\|\chi_0 + \zeta - \lambda_i\psi\|}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|} + \frac{\|\zeta\|}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|}\right)$$

περιέχει το

$$F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_0+\zeta;\psi) = \bigcap_{\lambda\in\mathbb{C}} \mathcal{D}\left(\lambda, \frac{\|\chi_0+\zeta-\lambda\psi\|}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|}\right).$$

Από [51, Κεφάλαιο 1.7, Θεώρημα 3] υπάρχει ένα $\gamma>0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\zeta\in\mathcal{X}$ με $\|\zeta\|\le\gamma$,

$$d_H(G(\chi_0),\Omega(\chi_0,\zeta)) \le \frac{\delta}{2}.$$

Τότε για κάθε $\zeta\in\mathcal{X}$ με $\|\zeta\|\le\gamma$ έχουμε,

$$d_H(F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_0;\psi),\Omega(\chi_0,\zeta)) \le d_H(F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_0;\psi),G(\chi_0)) + d_H(G(\chi_0),\Omega(\chi_0,\zeta)) \le \delta.$$

Άρα ισχύει,

$$\Omega(\chi_0,\zeta) \subseteq F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_0;\psi) + \mathcal{D}(0,\delta)$$

και

$$F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_0+\zeta;\psi) \subseteq F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_0;\psi) + \mathcal{D}(0,\delta).$$

Επομένως, η απεικόνιση $\chi\mapsto F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi;\psi)$ είναι δ-άνω ημισυνεχής στο $\chi_0\in\mathcal{X}$ και από το Λήμμα 1.43 είναι και άνω ημισυνεχής στο χ_0.

Θα δείξουμε και την κάτω ημισυνέχεια της απεικόνισης. Πρώτα θεωρούμε την περίπτωση για $\varepsilon>0$. Αφού το στοιχείο χ_0 δεν είναι πολλαπλάσιο του ψ, τότε από το Πόρισμα 1.32 έχουμε ότι $Int[F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_0;\psi)]\neq\emptyset$. Λόγω κυρτότητας του $F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi;\psi)$, έχουμε ότι για οποιοδήποτε $\mu\in F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_0;\psi)$ και $\delta>0$, ο δίσκος $\mathcal{D}(\mu,\delta)$ έχει μη κενή τομή με το $Int[F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_0;\psi)]$. Επιπλέον, για οποιοδήποτε $\mu_0\in\mathcal{D}(\mu,\delta)\cap Int[F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_0;\psi)]$, ισχύει

$$\inf_{\lambda\in\mathbb{C}}\left\{\|\chi_0-\lambda\psi\| - |\lambda-\mu_0|\,\|\psi\|\sqrt{1-\varepsilon^2}\right\} = \xi > 0.$$

Τότε για κάθε $\zeta\in\mathcal{X}$ με $\|\zeta\|\le\xi$ έχουμε

$$\|\chi_0-\lambda\psi\| - \|\zeta\| > |\lambda-\mu_0|\,\|\psi\|\sqrt{1-\varepsilon^2},\quad \forall\lambda\in\mathbb{C},$$

και τελικά,

$$\|\chi_0+\zeta-\lambda\psi\| > |\lambda-\mu_0|\,\|\psi\|\sqrt{1-\varepsilon^2},\quad \forall\lambda\in\mathbb{C}.$$

Συνεπώς, $\mu_0\in F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_0+\zeta;\psi)$, για κάθε $\zeta\in\mathcal{X}$ με $\|\zeta\|\le\xi$ και

$$\mathcal{D}(\mu,\delta)\cap F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_0+\zeta;\psi)\neq\emptyset.$$

Επομένως, για $\varepsilon > 0$ η απεικόνιση είναι κάτω ημισυνεχής στο χ_0.

Έστω τώρα ότι $\varepsilon = 0$. Υποθέτουμε ότι η απεικόνιση $\chi \mapsto F^0_{\|\cdot\|}(\chi;\psi)$ δεν είναι κάτω ημισυνεχής στο χ_0. Τότε υπάρχει $\mu_0 \in F^0_{\|\cdot\|}(\chi;\psi)$ και $\delta > 0$ τέτοια ώστε για κάθε $\xi > 0$, υπάρχει ένα $\zeta \in \mathcal{X}$ με $\|\zeta\| \le \xi$, για το οποίο θα έχουμε

$$F^0_{\|\cdot\|}(\chi_0+\zeta;\psi) \cap \mathcal{D}(\mu_0,\delta) = \emptyset.$$

Τότε, για κάθε $\mu \in \mathcal{D}(\mu_0,\delta)$, υπάρχει ένα $\lambda_\mu \in \mathbb{C}$ (με $\lambda_\mu \ne \mu$) τέτοιο ώστε

$$\|\chi_0+\zeta-\lambda_\mu\psi\| < |\mu-\lambda_\mu|\,\|\psi\|.$$

Αφού η ανισότητα είναι γνήσια, η ποσότητα $|\mu-\lambda_\mu|\,\|\psi\|$ είναι θετική. Άρα, για κάθε $\mu \in \mathcal{D}(\mu_0,\delta)$, ο αριθμός

$$\varepsilon_\mu = \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{\|\chi_0+\zeta-\lambda_\mu\psi\|}{|\mu-\lambda_\mu|\,\|\psi\|}} < \sqrt{1-\frac{\|\chi_0+\zeta-\lambda_\mu\psi\|}{|\mu-\lambda_\mu|\,\|\psi\|}}$$

είναι θετικός και ικανοποιεί

$$\|\chi_0+\zeta-\lambda_\mu\psi\| < \sqrt{1-{\varepsilon_\mu}^2}\,|\mu-\lambda_\mu|\,\|\psi\|.$$

Τότε, αν ορίσουμε $\widehat{\varepsilon} = \min\{\varepsilon_\mu :\ \mu \in \mathcal{D}(\mu_0,\delta)\} > 0$, έχουμε ότι

$$\|\chi_0+\zeta-\lambda_\mu\psi\| < \sqrt{1-\widehat{\varepsilon}^2}\,|\mu-\lambda_\mu|\,\|\psi\|$$

και συνεπώς,

$$F^{\widehat{\varepsilon}}_{\|\cdot\|}(\chi_0+\zeta;\psi) \cap \mathcal{D}(\mu_0,\delta) = \emptyset.$$

Αυτό όμως σημαίνει ότι η απεικόνιση $\chi \mapsto F^{\widehat{\varepsilon}}_{\|\cdot\|}(\chi;\psi)$ δεν είναι κάτω ημισυνεχής στο χ_0, άτοπο από την πρώτη περίπτωση που δείξαμε για $\varepsilon > 0$. □

Θεώρημα 1.46. (Για πίνακες [14, Θεώρημα 7]) Έστω ένας γραμμικός χώρος με νόρμα $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ και δύο στοιχεία του χώρου αυτού, τα χ και ψ. Επιπλέον, θεωρούμε ένα $\varepsilon_0 \in [0,1)$. Η απεικόνιση $\varepsilon \mapsto F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi;\psi)$ είναι συνεχής στο ε_0.

Απόδειξη. Για να δείξουμε την άνω ημισυνέχεια της απεικόνισης, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $\delta > 0$, υπάρχει μια περιοχή του ε_0, έστω η $\mathcal{N}(\varepsilon_0)$, τέτοια ώστε

$$F^{\widehat{\varepsilon}}_{\|\cdot\|}(\chi;\psi) \subseteq F^{\varepsilon_0}_{\|\cdot\|}(\chi;\psi) + \mathcal{D}(0,\delta), \quad \forall \widehat{\varepsilon} \in \mathcal{N}(\varepsilon_0).$$

Για $\widehat{\varepsilon} < \varepsilon_0$, από το Θεώρημα 1.31 έχουμε ότι $F^{\widehat{\varepsilon}}_{\|\cdot\|}(\chi;\psi) \subseteq F^{\varepsilon_0}_{\|\cdot\|}(\chi;\psi)$.

Έστω τώρα ότι $\widehat{\varepsilon} > \varepsilon_0$. Όπως στην προηγούμενη απόδειξη, από το Λήμμα 1.44, υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\kappa \in \mathbb{C}$ τέτοια ώστε η απόσταση Hausdorff μεταξύ του

$$G(\varepsilon_0) = \bigcap_{i=1}^{\kappa} \mathcal{D}\left(\lambda_i, \frac{\|\chi - \lambda_i\psi\|}{\sqrt{1-\varepsilon_0{}^2}\,\|\psi\|}\right)$$

και του $F^{\varepsilon_0}_{\|\cdot\|}(\chi;\psi)$ να είναι μικρότερη ή ίση με $\dfrac{\delta}{2}$. Από [51] υπάρχει ένα $\widehat{\varepsilon}$, κοντά στο ε_0, τέτοιο ώστε $d_H(G(\widehat{\varepsilon}), G(\varepsilon_0)) \le \dfrac{\delta}{2}$, όπου

$$G(\widehat{\varepsilon}) = \bigcap_{i=1}^{\kappa} \mathcal{D}\left(\lambda_i, \frac{\|\chi - \lambda_i\psi\|}{\sqrt{1-\widehat{\varepsilon}^2}\,\|\psi\|}\right).$$

Τότε έχουμε,

$$d_H(G(\widehat{\varepsilon}), F^{\varepsilon_0}_{\|\cdot\|}(\chi;\psi)) \le d_H(G(\widehat{\varepsilon}), G(\varepsilon_0)) + d_H(G(\varepsilon_0), F^{\varepsilon_0}_{\|\cdot\|}(\chi;\psi)) \le \delta.$$

Άρα, ισχύει

$$G(\widehat{\varepsilon}) \subseteq F^{\varepsilon_0}_{\|\cdot\|}(\chi;\psi) + \mathcal{D}(0,\delta).$$

Αφού $F^{\widehat{\varepsilon}}_{\|\cdot\|}(\chi;\psi) \subseteq G(\widehat{\varepsilon})$, τότε

$$F^{\widehat{\varepsilon}}_{\|\cdot\|}(\chi;\psi) \subseteq F^{\varepsilon_0}_{\|\cdot\|}(\chi;\psi) + \mathcal{D}(0,\delta),$$

το οποίο σημαίνει ότι η απεικόνιση $\varepsilon \mapsto F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi;\psi)$ είναι δ-άνω ημισυνεχής στο ε_0.

Θα δείξουμε την κάτω ημισυνέχεια της απεικόνισης. Αν $\varepsilon_0 = 0$, τότε από το Θεώρημα 1.31 έχουμε το αποτέλεσμα. Έστω $\varepsilon_0 > 0$ και $\mu \in F^{\varepsilon_0}_{\|\cdot\|}(\chi;\psi)$. Θα δούμε ότι για κάθε $\delta > 0$, υπάρχει ανοικτό διάστημα $\mathcal{N}(\varepsilon_0) = (\varepsilon_0 - \gamma, \varepsilon_0 + \gamma)$ με $\gamma > 0$ τέτοιο ώστε

$$F^{\widehat{\varepsilon}}_{\|\cdot\|}(\chi;\psi) \cap \mathcal{D}(\mu,\delta) \neq \emptyset, \quad \forall \widehat{\varepsilon} \in (\varepsilon_0 - \gamma, \varepsilon_0 + \gamma).$$

Από το Θεώρημα 1.31, για κάθε $\widehat{\varepsilon} \in [\varepsilon_0, \varepsilon_0 + \gamma)$ έχουμε ότι $\mu \in F^{\widehat{\varepsilon}}_{\|\cdot\|}(\chi;\psi)$. Επομένως, αρκεί να μελετήσουμε την περίπτωση για $\widehat{\varepsilon} \in (\varepsilon_0 - \gamma, \varepsilon_0)$. Επιπλέον, αν υπάρχει ένα $\widehat{\varepsilon} \le \varepsilon_0$ τέτοιο ώστε $F^{\widehat{\varepsilon}}_{\|\cdot\|}(\chi;\psi) \cap \mathcal{D}(\mu,\delta) \neq \emptyset$, τότε από το Θεώρημα 1.31, μπορούμε να θέσουμε $\gamma = \varepsilon_0 - \widehat{\varepsilon}$.

Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα $\delta_\mu > 0$ τέτοιο ώστε $F^{\widehat{\varepsilon}}_{\|\cdot\|}(\chi;\psi) \cap \mathcal{D}(\mu,\delta_\mu) = \emptyset$, για κάθε μη αρνητικό $\widehat{\varepsilon} < \varepsilon_0$. Τότε, επιλέγοντας ένα κατάλληλα μικρό δ_μ, θα υπάρχει μια $\theta \in [0, 2\pi]$ τέτοια ώστε

$$\mu + \delta_\mu e^{i\theta} \in Int[F^{\varepsilon_0}_{\|\cdot\|}(\chi;\psi)]$$

και

$$\mu + \delta_\mu e^{i\theta} \notin F^{\widehat{\varepsilon}}_{\|\cdot\|}(\chi;\psi), \quad \forall \widehat{\varepsilon} \in [0, \varepsilon_0).$$

Θεωρούμε την ακολουθία $\{\varepsilon_\kappa\}_{\kappa\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \subseteq [0,\varepsilon_0)$, η οποία συγκλίνει στο ε_0. Τότε για κάθε $\kappa = 1, 2, \ldots$, υπάρχει ένας $\lambda_\kappa(\mu,\theta)$ τέτοιος ώστε

$$|\mu + \delta_\mu e^{i\theta} - \lambda_\kappa(\mu,\theta)| > \frac{\|\chi - \lambda_\kappa(\mu,\theta)\psi\|}{\sqrt{1-{\varepsilon_\kappa}^2}\,\|\psi\|} \tag{1.1}$$

ή

$$|\mu + \delta_\mu e^{i\theta}| + |\lambda_\kappa(\mu,\theta)| > \frac{1}{\sqrt{1-{\varepsilon_\kappa}^2}\,\|\psi\|}|\,\|\chi\| - |\lambda_\kappa(\mu,\theta)|\|\psi\|\,|.$$

Αν $|\lambda_\kappa(\mu,\theta)|\,\|\psi\| < \|\chi\|$, τότε έχουμε $|\lambda_\kappa(\mu,\theta)| < \dfrac{\|\chi\|}{\|\psi\|}$. Αν όχι, τότε

$$|\lambda_\kappa(\mu,\theta)|\,\|\psi\| - \|\chi\| < \sqrt{1-{\varepsilon_\kappa}^2}\,\|\psi\|(|\mu + \delta_\mu e^{i\theta}| + |\lambda_\kappa(\mu,\theta)|),$$

και αφού $\varepsilon_\kappa > 0$, έχουμε

$$|\lambda_\kappa(\mu,\theta)| < \frac{\|\chi\| + \sqrt{1-{\varepsilon_\kappa}^2}\,\|\psi\||\mu + \delta_\mu e^{i\theta}|}{\|\psi\|(1-\sqrt{1-{\varepsilon_\kappa}^2})}.$$

Τότε η ακολουθία $\lambda_\kappa(\mu,\theta)$ $(\kappa = 1,2,\ldots)$ είναι φραγμένη και έχει συγκλίνουσα υπακολουθία $\lambda_{\kappa_t}(\mu,\theta)$ $(t = 1,2,\ldots)$. Αν $\lambda_0 = \lim\limits_{\kappa_t\longrightarrow\infty} \lambda_{\kappa_t}(\mu,\theta)$, τότε από την (1.1) έχουμε

$$\lim_{\kappa_t\longrightarrow\infty}|\mu + \delta_\mu e^{i\theta} - \lambda_{\kappa_t}(\mu,\theta)| > \lim_{\kappa_t\longrightarrow\infty}\frac{\|\chi - \lambda_{\kappa_t}(\mu,\theta)\psi\|}{\sqrt{1-{\varepsilon_{\kappa_t}}^2}\,\|\psi\|}$$

ή

$$|\mu + \delta_\mu e^{i\theta} - \lambda_0| > \frac{\|\chi - \lambda_0\psi\|}{\sqrt{1-{\varepsilon_0}^2}\,\|\psi\|}.$$

Αυτό είναι αδύνατο, αφού το $\mu + \delta_\mu e^{i\theta}$ είναι εσωτερικό σημείο του $F^{\varepsilon_0}_{\|\cdot\|}(\chi;\psi)$. Συνεπώς, η απεικόνιση $\varepsilon \mapsto F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi;\psi)$ είναι κάτω ημισυνεχής στο ε_0. □

1.6 Birkhoff-James ε-Ορθογώνιο Συμπλήρωμα

Θεωρούμε έναν γραμμικό χώρο με νόρμα $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ και $\varepsilon \in [0,1)$.

Ορισμός 1.47. Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του χώρου $\mathcal{X}$. Ορίζουμε το Birkhoff-James ε-ορθογώνιο συμπλήρωμα του συνόλου A, ως το σύνολο όλων των στοιχείων του χώρου $\mathcal{X}$ που είναι Birkhoff-James ε-ορθογώνια με κάθε ένα από τα στοιχεία του υποσυνόλου A, δηλαδή

$$A^{\perp_{BJ}^{\varepsilon}} = \{\psi \in \mathcal{X} : \ \psi \perp_{BJ}^{\varepsilon}, \chi \ \text{ για κάθε } \chi \in A\}.$$

Παρατήρηση 1.48. Θεωρούμε ένα μη κενό υποσύνολο A του γραμμικού χώρου $\mathcal{X}$ και έναν τυχαίο μιγαδικό αριθμό a. Τότε

(i) $0 \in A^{\perp_{BJ}^{\varepsilon}}$, αφού $0 \perp_{BJ}^{\varepsilon} g$ για κάθε $g \in G$.

(ii) Αν $\chi \in A^{\perp_{BJ}^{\varepsilon}}$, τότε $a\chi \in A^{\perp_{BJ}^{\varepsilon}}$, λόγω ομογένειας της Birkhoff-James ε-ορθογωνιότητας.

(iii) Η τομή $A \cap A^{\perp_{BJ}^{\varepsilon}}$ είναι ή το κενό σύνολο ή το μονοσύνολο $\{0\}$.

Παρατήρηση 1.49. Επιλέγουμε έναν μη κενό γραμμικό υπόχωρο G. Παρατηρούμε ότι το σύνολο $G^{\perp_{BJ}^{\varepsilon}}$ δεν είναι εν γένει υπόχωρος, αφού η Birkhoff-James ε-ορθογωνιότητα δεν είναι προσθετική.

Παρατήρηση 1.50. Θεωρούμε έναν μη κενό γραμμικό υπόχωρο G του γραμμικού χώρου $\mathcal{X}$. Παρατηρούμε ότι

$$G \cap G^{\perp_{BJ}^{\varepsilon}} = \{0\}.$$

Πράγματι, ισχύει ότι το 0 ανήκει στην τομή $G \cap G^{\perp_{BJ}^{\varepsilon}}$, αφού ο υπόχωρος G περιέχει το μηδενικό στοιχείο εξ ορισμού και $0 \in G^{\perp_{BJ}^{\varepsilon}}$. Για την απόδειξη του αντίστροφου εγκλεισμού, θεωρούμε ένα στοιχείο χ που ανήκει στην τομή των G και $G^{\perp_{BJ}^{\varepsilon}}$. Τότε $\chi \perp_{BJ}^{\varepsilon} \chi$, το οποίο ισχύει όταν $\chi = 0$. Άρα, $G \cap G^{\perp_{BJ}^{\varepsilon}} \subseteq \{0\}$. Τελικά, έχουμε $G \cap G^{\perp_{BJ}^{\varepsilon}} = \{0\}$.

Λήμμα 1.51. Έστω ένας γραμμικός χώρος με νόρμα $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ και G ένας μη κενός κλειστός γραμμικός υπόχωρός του. Υποθέτουμε ότι $G \subsetneqq \mathcal{X}$. Τότε για κάθε $\varepsilon \in (0,1)$, το Birkhoff-James ε-ορθογώνιο συμπλήρωμα του G περιέχει και μη μηδενικά στοιχεία.

Απόδειξη. Έστω ένα στοιχείο $\widehat{\psi} \in \mathcal{X} \backslash G$. Αφού ο υπόχωρος G είναι κλειστός, έχουμε ότι $d(\widehat{y}, \mathcal{X}) = d > 0$. Μπορούμε να επιλέξουμε ένα $\psi_\varepsilon \in G$ τέτοιο ώστε

$$d \leq \|\widehat{\psi} - \psi_\varepsilon\| \leq \frac{d}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

Θέτουμε $\chi_\varepsilon = \widehat{\psi} - \psi_\varepsilon$. Τότε $\chi_\varepsilon \neq 0$. Για κάθε $\psi \in G$ και $\lambda \in \mathbb{C}$ ισχύει

$$\|\chi_\varepsilon + \lambda\psi\| = \|\widehat{\psi} - \psi_\varepsilon + \lambda\psi\| = \|\widehat{\psi} - (\psi_\varepsilon - \lambda\psi)\| \geq d \geq \sqrt{1-\varepsilon^2}\|\chi_\varepsilon\|.$$

Επομένως, $\chi_\varepsilon \perp_{BJ}^{\varepsilon} \psi$. Δηλαδή $\chi_\varepsilon \in G^{\perp_{BJ}^{\varepsilon}}$. □

Θεώρημα 1.52. Έστω ένας γραμμικός χώρος με νόρμα $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ και G ένας μη κενός κλειστός γραμμικός υπόχωρός του. Τότε για κάθε $\varepsilon \in (0,1)$, ισχύει

$$\mathcal{X} = G + G^{\perp_{BJ}^{\varepsilon}}.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε ότι $G \subsetneqq \mathcal{X}$ και ένα στοιχείο $\chi \in \mathcal{X}$. Αν $\chi \in G$, τότε $\chi = \chi + 0$ με $\chi \in G$ και $0 \in G^{\perp_{BJ}^{\varepsilon}}$. Αν $\chi \notin G$, τότε υπάρχει ένα στοιχείο $\psi_\varepsilon \in G$ τέτοιο ώστε:

$$0 < d < d(\chi, G) \leq \|\chi - \psi_\varepsilon\| \leq \frac{d}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

Αφού $\chi_\varepsilon = \chi - \psi_\varepsilon \in G^{\perp_{BJ}^{\varepsilon}}$, θεωρώντας $\chi = \psi_\varepsilon + \chi_\varepsilon$ με $\psi_\varepsilon \in G$ και $\chi_\varepsilon \in G^{\perp_{BJ}^{\varepsilon}}$, το θεώρημα έχει ολοκληρωθεί. □

Αντίστοιχο θεώρημα υπάρχει για $\varepsilon = 0$ στο [18], ενώ για την Birkhoff-James-Dragomir ε-ορθογωνιότητα στο [16].

Κεφάλαιο 2

Ορισμός με Χρήση Γραμμικών Συναρτησιακών

2.1 Ισοδύναμος Ορισμός και Υποπροσθετικότητα

Το αριθμητικό πεδίο είναι ένα σύνολο που έχει μελετηθεί για δεκαετίες και είναι ιδιαίτερα χρήσιμο για πίνακες και τελεστές, όπως αναφέραμε και πιο πάνω, μαζί με τις ισοδύναμες εκφράσεις του (βλέπε [6, 9, 10, 27, 54]). Ο Bauer στο [6] δίνει έναν ορισμό με τη χρήση συναρτησιακού. Ο ίδιος θεωρούσε γραμμικούς χώρους με νόρμα πεπερασμένης διάστασης. Ο περιορισμός αυτός στις διαστάσεις δεν είναι απαραίτητος στον ορισμό του αριθμητικού πεδίου που διατυπώνει. Θεωρούμε έναν γραμμικό χώρο με νόρμα $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$. Με $\mathcal{X}^*$ θα συμβολίζουμε τον δϋικό χώρο του $\mathcal{X}$ και με $\mathcal{S}_{\mathcal{X}}(0,1)$ τη μοναδιαία σφαίρα του $\mathcal{X}$. Τότε, για ένα τελεστή $T : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$, το αριθμητικό πεδίο ορίζεται ως εξής:

$$V(T) = \{f(T\chi) : \ \chi \in \mathcal{S}_{\mathcal{X}}(0,1),\ f \in \mathcal{X}^*,\ \|f\| = f(\chi) = 1\}.$$

Όταν ο χώρος $\mathcal{X}$ που έχουμε θεωρήσει είναι Hilbert, τότε ισχύει η εξής ισοδυναμία

$$\chi \in \mathcal{S}_{\mathcal{X}}(0,1), \quad f \in \mathcal{X}^*, \quad \|f\| = f(\chi) = 1$$

αν και μόνο αν

$$\chi \in \mathcal{S}_{\mathcal{X}}(0,1) \text{ και } f \text{ το συναρτησιακό με τύπο: } f(\psi) = \langle \psi, \chi \rangle \text{ με } \psi \in \mathcal{X}.$$

Στην περίπτωση αυτή, το αριθμητικό πεδίο $V(T)$ συμπίπτει με το κλασικό αριθμητικό πεδίο $F(T)$. Αν θεωρήσουμε έναν λείο χώρο, όπου έχουμε μοναδικό ημιεσωτερικό γινόμενο, τότε το σύνολο $V(T)$ συμπίπτει με το αριθμητικό πεδίο $F_{[\cdot,\cdot]}(T)$. Αν θεωρήσουμε έναν γραμμικό χώρο με νόρμα $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$, τότε το αριθμητικό πεδίο $V(T)$ είναι η ένωση των αριθμητικών πεδίων $F_{[\cdot,\cdot]}(T)$ για όλες τις επιλογές του ημιεσωτερικού γινομένου, ενώ για κάθε επιλογή του ημιεσωτερικού γινομένου έχουμε [9, p. 6]:

$$\overline{co}V(T) = \overline{co}F_{[\cdot,\cdot]}(T).$$

Αντίστοιχα, θεωρώντας $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ (απλούστερα, $\mathcal{A}$) μια μιγαδική άλγεβρα με νόρμα, με μοναδιαίο στοιχείο το $\mathbf{1}$, και με το $\mathcal{A}^*$ να είναι ο δυϊκός χώρος της άλγεβρας $\mathcal{A}$ (δηλαδή, ο χώρος Banach όλων των συνεχών γραμμικών συναρτησιακών του $\mathcal{A}$), τότε το αριθμητικό πεδίο ενός στοιχείου $\alpha \in \mathcal{A}$ μπορεί να οριστεί ανάλογα ως εξής:

$$F(\alpha) = \{f(\alpha) : f \in \mathcal{A}^*, \, f(\mathbf{1}) = 1, \, \|f\| = 1\}$$

και

$$F(\alpha) = \cup \{F(\alpha, \chi) : \chi \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}}(0,1)\},$$

όπου

$$F(\alpha, \chi) = \{f(\alpha\chi) : \chi \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}}(0,1), \; f \in \mathcal{A}^*, \; f(\chi) = 1, \; \|f\| = 1\}.$$

Οι Stampfli και Williams [54, Θεώρημα 4], και αργότερα οι Bonsall και Duncan [10, Λήμμα 6.22.1], παρατήρησαν ότι το αριθμητικό πεδίο $F(\alpha)$ ισούται με μια άπειρη τομή κλειστών δίσκων,

$$F(\alpha) = \bigcap_{\lambda \in \mathbb{C}} \mathcal{D}\left(\lambda, \|\alpha - \lambda \mathbf{1}\|\right). \tag{2.1}$$

Σε αυτό το εδάφιο, αποδεικνύουμε μια ισοδύναμη εναλλακτική μορφή του ορισμού του συνόλου Birkhoff-James ορθογωνιότητας κάνοντας χρήση γραμμικών συναρτησιακών.

Ορισμός 2.1. Έστω δύο στοιχεία χ, ψ του γραμμικού χώρου $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ με $\psi \neq 0$. Για τυχαίο $\varepsilon \in [0,1)$, ορίζουμε τα σύνολα

$$L_\varepsilon(\psi) = \left\{ f \in \mathcal{X}^* : \, f(\psi) = \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\| \text{ και } \|f\| \leq 1 \right\}$$

και

$$\Omega_\varepsilon(\chi;\psi) \;=\; \left\{ \frac{f(\chi)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|} \,:\, f \in L_\varepsilon(\psi) \right\}.$$

Λήμμα 2.2. Για κάθε μη μηδενικό στοιχείο $\psi \in \mathcal{X}$ και τυχαίο $\varepsilon \in [0,1)$, το σύνολο $L_\varepsilon(\psi)$ είναι μη κενό, κλειστό και κυρτό.

Απόδειξη. Θεωρούμε ένα στοιχείο $\chi \in \mathcal{X}$ το οποίο να μην είναι πολλαπλάσιο του ψ. Από την Πρόταση 1.27, το σύνολο Birkhoff-James ε-ορθογωνιότητας $F^\varepsilon_{\|\cdot\|}(\chi;\psi)$ είναι μη κενό. Επομένως, υπάρχει τουλάχιστον ένας μιγαδικός μ εντός του $F^\varepsilon_{\|\cdot\|}(\chi;\psi)$. Στο διδιάστατο διανυσματικό υπόχωρο $\mathcal{Y} = span\{\chi,\psi\}$, ορίζουμε το γραμμικό συναρτησιακό $f_0 : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathbb{C}$ με

$$f_0(z_1\chi + z_2\psi) = z_1\mu\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\| + z_2\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|, \;\; z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Τότε $f_0(\chi) = \mu\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|$ και $f_0(\psi) = \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|$. Επιπλέον, αφού ο μιγαδικός μ ανήκει στο σύνολο $F^\varepsilon_{\|\cdot\|}(\chi;\psi)$, έχουμε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \|\chi - \lambda\psi\| &\geq \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|\,|\mu - \lambda| \\ &= |\,\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|\,\mu - \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|\,\lambda\,| \\ &= |f_0(\chi) - \lambda f_0(\psi)| \\ &= |f_0(\chi - \lambda\psi)| \end{aligned}$$

και $\|f_0\| \leq 1$ (ως γραμμικό συναρτησιακό ορισμένο στο διδιάστατο υπόχωρο $\mathcal{Y}$). Επομένως, από το Θεώρημα Hahn-Banach θα υπάρχει επέκταση του f_0, έστω το $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{C}$ τέτοιο ώστε

$$f(\chi) = \mu\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|, \quad f(\psi) = \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\| \;\; \text{ και } \;\; \|f\| = \|f_0\| \leq 1.$$

Άρα, $f \in L_\varepsilon(\psi)$ και το σύνολο $L_\varepsilon(\psi)$ είναι μη κενό.

Για την κλειστότητα του $L_\varepsilon(\psi)$, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι το σύνολο $\mathcal{X}^*\backslash L_\varepsilon(\psi)$ είναι ανοικτό. Πράγματι, αν ένα γραμμικό συναρτησιακό $f \in \mathcal{X}^*$ δεν ανήκει στο $L_\varepsilon(\psi)$, τότε

$$f(\psi) \neq \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\| \quad \text{ή} \quad \|f\| > 1.$$

Συνεπώς, λόγω συνέχειας της νόρμας, υπάρχει μια περιοχή $\mathcal{G}_f \subset \mathcal{X}^*$ του f τέτοια ώστε για κάθε $g \in \mathcal{G}_f$,

$$g(\psi) \neq \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\| \quad \text{ή} \quad \|g\| > 1$$

κι έτσι $\mathcal{G}_f \subset \mathcal{X}^*\backslash L_\varepsilon(\psi)$.

Τέλος, για την κυρτότητα, θεωρούμε δύο γραμμικά συναρτησιακά f, g που ανήκουν στο σύνολο $L_\varepsilon(\psi)$. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $t \in [0,1]$, ισχύει

$$[(1-t)f + t\,g](\psi) = (1-t)f(\psi) + t\,g(\psi) = \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|$$

και

$$\|(1-t)f + t\,g\| \leq (1-t)\|f\| + t\,\|g\| \leq 1,$$

δηλαδή, ο κυρτός συνδυασμός $(1-t)f + t\,g$ ανήκει στο σύνολο $L_\varepsilon(\psi)$. $\square$

Αποδείξαμε ότι για $\psi \neq 0$, το σύνολο $L_\varepsilon(\psi)$ είναι μη κενό. Ως εκ τούτου και το χωρίο $\Omega_\varepsilon(\chi;\psi)$ είναι μη κενό. Επιπλέον, το σύνολο $\Omega_\varepsilon(\chi;\psi)$ ταυτίζεται με το σύνολο Birkhoff-James ε-ορθογωνιότητας $F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi;\psi)$. Επομένως, καταλήγουμε στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 2.3. Έστω $\chi, \psi \in \mathcal{X}$ με $\psi \neq 0$. Για κάθε $\varepsilon \in [0,1)$, ισχύει

$$\Omega_\varepsilon(\chi;\psi) = F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi;\psi).$$

Απόδειξη. Έστω ένα τυχαίο $\mu \in \Omega_\varepsilon(\chi;\psi)$. Τότε $\mu = \dfrac{f_\mu(\chi)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|}$ για κάποιο γραμμικό συναρτησιακό $f_\mu \in L_\varepsilon(\psi)$. Για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|\,|\mu-\lambda| &= \left|\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|\,\frac{f_\mu(\chi) - \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|\,\lambda}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|}\right| \\
&= |f_\mu(\chi) - \lambda f_\mu(\psi)| \\
&= |f_\mu(\chi - \lambda\psi)| \\
&\leq \|f_\mu\|\,\|\chi - \lambda\psi\| \\
&\leq \|\chi - \lambda\psi\|.
\end{aligned}$$

Άρα, $\mu \in F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi;\psi)$ και συμπεραίνουμε ότι $\Omega_{\varepsilon}(\chi;\psi) \subseteq F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi;\psi)$.

Για το αντίστροφο, διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:
(i) Έστω $\chi = c\psi$ για κάποιον σταθερό $c \in \mathbb{C}$. Τότε, λόγω της Πρότασης 1.33

$$F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi;\psi) = F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(c\psi;\psi) = \{c\}.$$

Επίσης,

$$\frac{f(\chi)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|} = \frac{f(c\psi)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|} = \frac{cf(\psi)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|} = c, \quad \forall f \in L_{\varepsilon}(\psi).$$

Επομένως, $\Omega_{\varepsilon}(c\psi;\psi) = \{c\}$.
(ii) Έστω δύο στοιχεία $\chi, \psi \in \mathcal{X}$ μη μηδενικά και γραμμικά ανεξάρτητα. Θεωρούμε ένα τυχαίο $\mu \in F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi;\psi)$. Από την απόδειξη του Λήμματος 2.2, γνωρίζουμε ότι υπάρχει ένα γραμμικό συναρτησιακό $f_{\mu} \in L_{\varepsilon}(\psi)$ τέτοιο ώστε

$$f_{\mu}(\chi) = \mu\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|.$$

Άρα, $\mu \in \Omega_{\varepsilon}(\chi;\psi)$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Παρατήρηση 2.4. Παρατηρούμε ότι αν το $L_0(\psi)$ είναι μονοσύνολο, τότε υπάρχει μοναδικό γραμμικό συναρτησιακό f που δίνει στοιχείο του $F^{0}_{\|\cdot\|}(\chi;\psi)$, άρα και το σύνολο $F^{0}_{\|\cdot\|}(\chi;\psi)$ είναι μονοσύνολο. Προφανώς ισχύει και το αντίστροφο. Συγκεντρωτικά, αν θεωρήσουμε έναν γραμμικό χώρο με νόρμα $\mathcal{X}$, και δύο στοιχεία του χ και ψ με μη μηδενικό το ψ, τότε ισχύουν οι εξής ισοδυναμίες [17, 29, 44]:

(i) Ο γραμμικός χώρος $\mathcal{X}$ είναι λείος.

(ii) Ο γραμμικός χώρος $\mathcal{X}^*$ είναι αυστηρά κυρτός.

(iii) Το σύνολο Birkhoff-James 0-ορθογωνιότητας $F^{0}_{\|\cdot\|}(\chi;\psi)$ είναι μονοσύνολο.

(iv) Το σύνολο $L_0(\psi)$ είναι μονοσύνολο.

Η παραπάνω εναλλακτική γραφή του συνόλου Birkhoff-James ε-ορθογωνιότητας συνεπάγεται τελικά την υποπροσθετικότητα του συνόλου.

Πρόταση 2.5. Έστω $\chi_1, \chi_2, \psi \in \mathcal{X}$ με $\psi \neq 0$ και $\varepsilon \in [0,1)$. Τότε ισχύει

$$F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_1+\chi_2;\psi) \subseteq F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_1;\psi) + F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_2;\psi).$$

Απόδειξη. Πράγματι, έχουμε

$$\begin{aligned}
F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_1+\chi_2;\psi) &= \Omega_{\varepsilon}(\chi_1+\chi_2;\psi)\\
&= \left\{\frac{f(\chi_1+\chi_2)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|} : f \in L_{\varepsilon}(\psi)\right\}\\
&= \left\{\frac{f(\chi_1)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|} + \frac{f(\chi_2)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|} : f \in L_{\varepsilon}(\psi)\right\}\\
&\subseteq \left\{\frac{f(\chi_1)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|} : f \in L_{\varepsilon}(\psi)\right\}\\
&\quad + \left\{\frac{g(\chi_2)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|} : g \in L_{\varepsilon}(\psi)\right\}\\
&= \Omega_{\varepsilon}(\chi_1;\psi) + \Omega_{\varepsilon}(\chi_2;\psi)\\
&= F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_1;\psi) + F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_2;\psi).
\end{aligned}$$

□

Λόγω της υποπροσθετικότητας του συνόλου $F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi;\psi)$ η συνέχεια ως προς την πρώτη μεταβλητή είναι άμεση.

Πόρισμα 2.6. (**Θεώρημα 1.45**) Έστω δύο στοιχεία ψ και χ_0 του χώρου $\mathcal{X}$, με το χ_0 να μην είναι πολλαπλάσιο του ψ και $\varepsilon \in [0,1)$. Η απεικόνιση $\chi \mapsto F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi;\psi)$ είναι συνεχής στο $\chi_0 \in \mathcal{X}$.

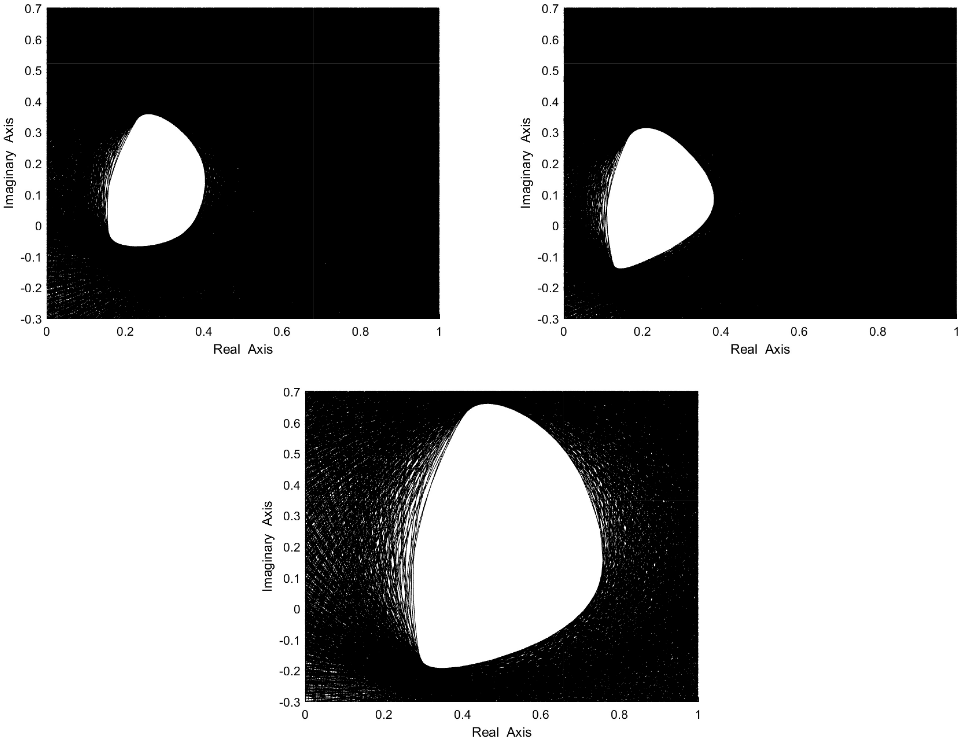
Παράδειγμα 2.7. *Θεωρούμε τις ακολουθίες του μιγαδικού γραμμικού χώρου ακολουθιών ℓ_1:*

$$\chi_1 = \left\{1, \frac{1}{2-i}, \frac{1}{(2-i)^2}, \frac{1}{(2-i)^3}, \dots\right\},$$

$$\chi_2 = \left\{1, \frac{1}{1-2i}, \frac{1}{(1-2i)^2}, \frac{1}{(1-2i)^3}, \dots\right\}$$

και

$$\psi = \left\{1, \frac{1}{1+i}, \frac{1}{(1+i)^2}, \frac{1}{(1+i)^3}, \dots\right\}.$$



Σχήμα 2.1: Το σύνολο $F^{0,4}_{\|\cdot\|_1}(\chi_1;\psi)$ (πάνω αριστερά), το σύνολο $F^{0,4}_{\|\cdot\|_1}(\chi_2;\psi)$ (πάνω δεξιά) και το σύνολο $F^{0,4}_{\|\cdot\|_1}(\chi_1+\chi_2;\psi)$ (κάτω).

Τα σύνολα Birkhoff-James ε-ορθογωνιότητας $F^{0,4}_{\|\cdot\|_1}(\chi_1;\psi)$, $F^{0,4}_{\|\cdot\|_1}(\chi_2;\psi)$ *και* $F^{0,4}_{\|\cdot\|_1}(\chi_1+\chi_2;\psi)$ *φαίνονται ως λευκές περιοχές στα τρία μέρη του σχήματος. Κάθε προσέγγιση προκύπτει από τον σχεδιασμό 500 κύκλων. Οι ιδιότητες της συμπάγειας, της κυρτότητας αλλά και της υποπροσθετικότητας επιβεβαιώνονται κατά προφανή τρόπο.*

Πρόταση 2.8. Έστω δύο στοιχεία $\chi,\psi\in\mathcal{X}$, με ψ μη μηδενικό και το χ να μην είναι πολλαπλάσιο του στοιχείου ψ και $\varepsilon\in[0,1)$. Αν ένας μιγαδικός αριθμός μ ανήκει στο σύνορο του συνόλου $F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi;\psi)$, δηλαδή $\mu\in\partial F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi;\psi)$, τότε για κάθε γραμμικό συναρτησιακό $f_\mu\in L_\varepsilon(\psi)$ τέτοιο ώστε $\mu=\dfrac{f_\mu(\chi)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|}$, ισχύει $\|f_\mu\|=1$.

Απόδειξη. Έστω $\mu \in \partial F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi;\psi)$. Τότε από το Θεώρημα 1.39 γνωρίζουμε ότι

$$\inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \left\{ \|\chi-\lambda\psi\| - \sqrt{1-\varepsilon^2}\|\psi\|\,|\mu-\lambda| \right\} = 0.$$

Επομένως, για κάθε $f_\mu \in L_\varepsilon(\psi)$ με $\mu = \dfrac{f_\mu(\chi)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
0 &= \inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \left\{ \|\chi-\lambda\psi\| - \left| \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|\, \frac{f_\mu(\chi) - \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|\,\lambda}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|} \right| \right\} \\
&= \inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \{ \|\chi-\lambda\psi\| - |f_\mu(\chi) - \lambda f(\psi)| \} \\
&= \inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \{ \|\chi-\lambda\psi\| - |f_\mu(\chi-\lambda\psi)| \} \\
&= -\sup_{\lambda\in\mathbb{C}} \{ |f_\mu(\chi-\lambda\psi)| - \|\chi-\lambda\psi\| \} \\
&= -\sup_{\lambda\in\mathbb{C}} \left\{ \frac{|f_\mu(\chi-\lambda\psi)|}{\|\chi-\lambda\psi\|} - 1 \right\}
\end{aligned}$$

και συμπεραίνουμε ότι $\|f_\mu\| = 1$. □

Πρόταση 2.9. Έστω δύο στοιχεία $\chi,\psi \in \mathcal{X}$ με μη μηδενικό το ψ, το χ να μην είναι πολλαπλάσιο του ψ και $\varepsilon \in [0,1)$. Τότε ισχύει

$$\max\left\{ \mathrm{Re}\mu : \mu \in F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi;\psi) \right\} \le \inf_{a>0} \frac{1}{a} \left\{ \frac{\|\psi + a\chi\|}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|} - 1 \right\}.$$

Απόδειξη. Έστω ένα τυχαίο γραμμικό συναρτησιακό $f \in L_\varepsilon(\psi)$. Τότε για κάθε $a>0$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{f(\chi)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|} &= \frac{1}{a}\left[\frac{f(\psi + a\chi - \psi)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|} \right] \\
&= \frac{1}{a}\left[\frac{f(\psi + a\chi)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|} - \frac{f(\psi)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|} \right] \\
&= \frac{1}{a}\left[\frac{f(\psi + a\chi)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|} - 1 \right].
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\mathrm{Re}\,\frac{f(\chi)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|} = \mathrm{Re}\,\frac{1}{a}\left[\frac{f(\psi + a\chi)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|} - 1 \right] = \frac{1}{a}\left[\mathrm{Re}\,\frac{f(\psi + a\chi)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|} - 1 \right]$$

και συνεπώς,

$$\operatorname{Re}\frac{f(\chi)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|}+\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\left[\operatorname{Re}\frac{f(\psi+a\chi)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|}\right]\leq\frac{1}{a}\left[\frac{|f(\psi+a\chi)|}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|}\right].$$

Καταλήγουμε λοιπόν ότι για κάθε $a>0$,

$$\operatorname{Re}\frac{f(\chi)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|}\leq\frac{1}{a}\left[\frac{|f(\psi+a\chi)|}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|}-1\right]\leq\frac{1}{a}\left[\frac{\|\psi+a\chi\|}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|}-1\right],$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

2.2 Ημιεσωτερικό Γινόμενο

Υπενθυμίζουμε πάλι τον Ορισμό 1.12 του ημιεσωτερικού γινομένου έτσι όπως διαμορφώθηκε από τους Lumer και Giles [17, 20, 39]:

Ορισμός 1.12. Η απεικόνιση $[\cdot,\cdot]:\mathcal{X}\times\mathcal{X}\longrightarrow\mathbb{C}$ λέγεται ημιεσωτερικό γινόμενο αν:

1. $[\chi,\chi]\geq 0$ για κάθε $\chi\in\mathcal{X}$ και $[\chi,\chi]=0$ αν και μόνο αν $\chi=0$,
2. $[\lambda\chi,\psi]=\lambda[\chi,\psi]$, για κάθε $\chi,\psi\in\mathcal{X},\lambda\in\mathbb{C}$,
3. $[\chi,\lambda\psi]=\overline{\lambda}[\chi,\psi]$, για κάθε $\chi,\psi\in\mathcal{X},\lambda\in\mathbb{C}$,
4. $[\chi+\zeta,\psi]=[\chi,\psi]+[\zeta,\psi]$, για κάθε $\chi,\psi,\zeta\in\mathcal{X}$,
5. $|[\chi,\psi]|^2\leq[\chi,\chi]\,[\psi,\psi]$, για κάθε $\chi,\psi\in\mathcal{X},\lambda\in\mathbb{C}$.

Πρόταση 2.10. Έστω ένας γραμμικός χώρος με νόρμα $(\mathcal{X},\|\cdot\|)$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $\chi,\psi\in\mathcal{X}$ με $\chi,\psi\neq 0$ το σύνολο $F^0_{\|\cdot\|}(\chi;\psi)$ είναι μονοσύνολο, δηλαδή $F^0_{\|\cdot\|}(\chi;\psi)=\{\mu(\chi,\psi)\}$. Τότε μπορούμε να ορίσουμε ημιεσωτερικό γινόμενο με τύπο

$$[\chi,\psi]=\begin{cases}\mu(\chi,\psi)\|\psi\|^2, & \text{αν } \psi\neq 0,\\ 0, & \text{αν } \psi=0.\end{cases}$$

Απόδειξη. Θέτουμε

$$[\chi,\psi]=\mu\|\psi\|^2,\ \text{ όπου } \mu=\mu(\chi,\psi)\in F^0_{\|\cdot\|}(\chi;\psi).$$

Επαληθεύοντας τις απαιτούμενες ιδιότητες, έχουμε

(i) Θετικά ορισμένο:
Ισχύει: $F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi;\chi)=\left\{\dfrac{f(\chi)}{\|\chi\|}: f\in L_0(\chi)\right\}=1$ και άρα,

$$[\chi,\chi]=\|\chi\|^2\geq 0.$$

Παρατηρούμε ότι είναι ίσο με το 0 αν και μόνο αν $\chi=0$.

(ii) Δεξιά ομογένεια:
Από τον τύπο που έχουμε ορίσει έχουμε

$$\overline{\lambda}[\chi,\psi]=\overline{\lambda}\mu\|\psi\|^2\ \text{ και }\ [\chi,\lambda\psi]=\mu_1\|\lambda\psi\|^2=\lambda^2\mu_1\|\psi\|^2.$$

Αρκεί να δείξουμε για $\lambda\neq 0$, ότι $\mu_1\lambda^2=\mu\overline{\lambda}$, δηλαδή $\mu_1=\dfrac{\mu}{\lambda}$. Έχουμε

$$\psi\perp^0_{BJ}(\chi-\mu\psi)\Leftrightarrow\psi\perp^0_{BJ}\left(\chi-\frac{\mu}{\lambda}\lambda\psi\right)\Leftrightarrow\psi\perp^0_{BJ}(\chi-\mu_1\lambda\psi),$$

και λόγω ομογένειας τελικά,

$$\lambda\psi\perp^0_{BJ}(\chi-\mu_1\lambda\psi).$$

Για $\lambda=0$, ισχύει τετριμμένα η ιδιότητα.

Άρα $[\chi,\lambda\psi]=\overline{\lambda}[\chi,\psi]$.

(iii) Αριστερή ομογένεια:
Πάλι από τον τύπο, $\lambda[\chi,\psi]=\lambda\mu\|\psi\|^2$ και $[\lambda\chi,\psi]=\mu_1\|\psi\|^2$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\mu_1=\lambda\mu$. Έχουμε

$$\psi\perp^0_{BJ}(\chi-\mu\psi)$$

και λόγω ομογένειας,

$$\psi\perp^0_{BJ}(\lambda\chi-\mu\lambda\psi),$$

δηλαδή

$$\psi\perp^0_{BJ}(\lambda\chi-\mu_1\psi).$$

Άρα $[\lambda\chi,\psi]=\lambda[\chi,\psi]$.

(iv) Αριστερή προσθετικότητα:
Θέλουμε $[\chi+\zeta,\psi]=[\chi,\psi]+[\zeta,\psi]$. Έχουμε

$$\begin{aligned}\mu(\chi+\zeta,\psi) &= \frac{f(\chi+\zeta)}{\|\psi\|}=\frac{f(\chi)}{\|\psi\|}+\frac{f(\zeta)}{\|\psi\|}\\ &= \mu(\chi,\psi)+\mu(\zeta,\psi).\end{aligned}$$

Άρα, ισχύει η ιδιότητα.

(v) Ανισότητα Cauchy-Schwarz:
Από τον ορισμό έχουμε, $|[\chi,\psi]|=|\mu\|\psi\|^2\leq\frac{\|\chi\|}{\|\psi\|}\|\psi\|^2=\|\psi\|\|\chi\|$.

$\square$

Παρατήρηση 2.11. Στην περίπτωση που όλα τα $F^0_{\|\cdot\|}(\chi;\psi)$ είναι μονοσύνολα, το ημιεσωτερικό είναι μοναδικό, άρα από [11, 39], ο χώρος είναι λείος.

Παρατήρηση 2.12. Στις ισοδυναμίες της Παρατήρησης 2.4 μπορεί να προστεθεί:

(v) Υπάρχει μοναδικό ημιεσωτερικό γινόμενο και μάλιστα της μορφής:

$$[\chi,\psi]=\mu\|\psi\|^2,\ \text{όπου}\ \mu=\mu(\chi,\psi)\in F^0_{\|\cdot\|}(\chi;\psi).$$

Αυτό το (μοναδικό) ημιεσωτερικό γινόμενο που ορίσαμε για να είναι και εσωτερικό γινόμενο χρειάζεται την ιδιότητα της συμμετρίας, δηλαδή,

$$[\chi,\psi]=\overline{[\psi,\chi]},$$

ή ισοδύναμα,

$$\mu(\chi,\psi)\|\psi\|^2=\overline{\mu(\psi,\chi)}\|\chi\|^2.$$

Παράδειγμα 2.13. *Θεωρούμε τον $\mathbb{C}^3$ με την νόρμα $\|\cdot\|_3$ και δύο διανύσματα* $\chi=\begin{bmatrix}\chi_1\\ \chi_2\\ \chi_3\end{bmatrix}$ *και* $\psi=\begin{bmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\end{bmatrix}$. *Ορίζουμε*

$$[\chi,\psi]=\begin{cases}\dfrac{1}{\|\psi\|_3}\sum\limits_{1\leq i\leq 3}\overline{\psi}_i|\psi_i|\chi_i, & \text{αν}\ \psi\neq 0,\\ 0, & \text{αν}\ \psi=0.\end{cases}$$

Τότε το $[\chi, \psi]$ είναι ημιεσωτερικό γινόμενο.

Απόδειξη. Αν το στοιχείο ψ είναι το μηδενικό, τότε τετριμμένα ισχύουν οι ιδιότητες του ημιεσωτερικού γινομένου. Έστω $\chi, \psi, \zeta \in \mathbb{C}^3$ με $\chi = \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \end{bmatrix}$, $\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{bmatrix}$ μη μηδενικό, και $\zeta = \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{bmatrix}$. Πρώτα θα δείξουμε ότι είναι θετικά ορισμένο.

$$\begin{aligned}
[\chi, \chi] &= \frac{1}{\|\chi\|_3} \sum_{1 \le i \le 3} \overline{\chi}_i |\chi_i| \chi_i \\
&= \frac{1}{\|\chi\|_3} \sum_{1 \le i \le 3} |\chi_i|^3 \\
&= \|\chi\|_3^2.
\end{aligned}$$

Ομογένεια ως προς την πρώτη μεταβλητή, για $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
[\lambda\chi, \psi] &= \frac{1}{\|\psi\|_3} \sum_{1 \le i \le 3} \overline{\psi}_i |\psi_i| (\lambda \chi_i) \\
&= \lambda \frac{1}{\|\psi\|_3} \sum_{1 \le i \le 3} \overline{\psi}_i |\psi_i| \chi_i \\
&= \lambda [\chi, \psi].
\end{aligned}$$

(Συζυγής) Ομογένεια ως προς τη δεύτερη μεταβλητή, για $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
[\chi, \lambda\psi] &= \frac{1}{\|\lambda\psi\|_3} \sum_{1 \le i \le 3} \overline{\lambda\psi}_i |\lambda\psi_i| \chi_i \\
&= \frac{1}{|\lambda|\, \|\psi\|_3} \overline{\lambda}\, |\lambda| \sum_{1 \le i \le 3} \overline{\psi}_i |\psi_i| \chi_i \\
&= \overline{\lambda} [\chi, \psi].
\end{aligned}$$

Προσθετικότητα ως προς την πρώτη μεταβλητή:

$$\begin{aligned}[\chi+\zeta,\psi] &= \frac{1}{\|\psi\|_3}\sum_{1\le i\le 3}\overline{\psi}_i|\psi_i|(\chi_i+\zeta_i)\\ &= \frac{1}{\|\psi\|_3}\sum_{1\le i\le 3}\overline{\psi}_i|\psi_i|\chi_i+\frac{1}{\|\psi\|_3}\sum_{1\le i\le 3}\overline{\psi}_i|\psi_i|\zeta_i\\ &= [\chi,\psi]+[\zeta,\psi].\end{aligned}$$

Ανισότητα Cauchy-Schwarz: Θέλουμε να δείξουμε $|\,[\chi,\psi]\,|\le\|\psi\|\,\|\chi\|$. Έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{|[\chi,\psi]|}{\|\psi\|_3} &= \frac{1}{\|\psi\|_3^2}\left|\sum_{1\le i\le 3}\overline{\psi}_i|\psi_i|\chi_i\right|\\ &\le \frac{1}{\|\psi\|_3^2}\sum_{1\le i\le 3}|\overline{\psi}_i|\,|\psi_i||\chi_i|\\ &\le \frac{1}{\|\psi\|_3^2}\left(\sum_{1\le i\le 3}\left(|\psi_i|^2\right)^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\sum_{1\le i\le 3}|\chi_i|^3\right)^{\frac{1}{3}}=\|\chi\|_3,\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ανισότητα ισχύει λόγω της ανισότητας Hölder, για $p=\dfrac{3}{2}$ και $q=3$. □

Ο $(\mathbb{C}^3,\|\cdot\|_3)$ είναι λείος [44, Cor. 5.5.17] και άρα αυτό είναι το μοναδικό ημιεσωτερικό γινόμενο και προκύπτει, όπως αναφέραμε, από τα $\{\mu(\chi,\psi)\}=F^0_{\|\cdot\|}(\chi;\psi)$. Άρα έχουμε

$$\mu(\chi,\psi)\|\psi\|_3^2=[\chi,\psi]=\frac{1}{\|\psi\|_3}\sum_{1\le i\le 3}\overline{\psi}_i|\psi_i|\chi_i\quad(\psi\neq 0)$$

δηλαδή

$$\mu(\chi,\psi)=\frac{1}{\|\psi\|_3^3}\sum_{1\le i\le 3}\overline{\psi}_i|\psi_i|\chi_i\quad(\psi\neq 0).$$

Παράδειγμα 2.14. *Θεωρούμε τον $\mathbb{C}^3$ με την νόρμα $\|\cdot\|_3$. Θεωρούμε τα διανύσματα $\chi=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ και $\psi=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$. Τότε $\psi\perp^0_{BJ}(\chi-\psi)$ και $\mu(\chi,\psi)=1$.*

Πράγματι,

$$\|\psi + \lambda(\chi - \psi)\|_3 = \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \lambda \end{bmatrix} \right\|_3 = (1 + |\lambda|^3)^{\frac{1}{3}} \geq 1 = \|\psi\|_3.$$

Τότε $[\chi, \psi] = 1$. *Πράγματι,*

$$[\chi, \psi] = \frac{1}{\|\psi\|_3} \sum_{1 \leq i \leq 3} \overline{\psi}_i |\psi_i| \chi_i = 1.$$

Παρατήρηση 2.15. Ξέρουμε ότι, αν $F^0_{\|\cdot\|}(\chi;\psi) = \{\mu(\chi,\psi)\}$, τότε υπάρχει γραμμικό συναρτησιακό $f \in L_0(\psi) = \{f \in \mathcal{X}^*,\ f(\psi) = \|\psi\|,\ \|f\| = 1\}$ τέτοιο ώστε

$$\mu(\chi, \psi) = \frac{f(\chi)}{f(\psi)} = \frac{f(\chi)}{\|\psi\|_3}.$$

Άρα,

$$f(\chi) = \frac{1}{\|\psi\|_3^2} \sum_{1 \leq i \leq 3} \overline{\psi}_i |\psi_i| \chi_i.$$

Παράδειγμα 2.16. *Έστω το συναρτησιακό* $f : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}$ *με*

$$f(\chi) = \frac{1}{\|\psi\|_3^2} \sum_{1 \leq i \leq 3} \overline{\psi}_i |\psi_i| \chi_i.$$

Τότε $f \in L_0(\psi)$ *και αν* $(\chi - \mu(\chi,\psi)\psi) \in \ker f$, *τότε* $\mu(\chi, \psi) \in F^0_{\|\cdot\|}(\chi;\psi)$. *Πράγματι, το* f *είναι γραμμικό αφού* $f(\lambda\chi + \kappa\zeta) = \lambda f(\chi) + \kappa f(\zeta)$. *Επίσης,* $f(\psi) = \|\psi\|$. *Επιπλέον, έχουμε* $|f(\psi)| = \|\psi\| \leq \|f\|\,\|\psi\|$, *δηλαδή* $1 \leq \|f\|$. *Από την Cauchy-Schwarz έχουμε ότι* $|f(\chi)| \leq \|\chi\|$, *για κάθε* $\chi \in \mathbb{C}^3$. *Άρα,* $\|f\| = 1$. *Τελικά,* $f \in L_0(\psi)$. *Έστω* $(\chi - \mu(\chi,\psi)\psi) \in \ker f$. *Τότε*

$$\begin{aligned}
& f(\chi - \mu(\chi,\psi)\psi) = 0 \\
\Longrightarrow\ & f(\chi) - \mu(\chi,\psi) f(\psi) = 0 \qquad (\textit{αφού το } f \textit{ είναι γραμμικό}) \\
\Longrightarrow\ & \mu(\chi,\psi) = \frac{f(\chi)}{f(\psi)} = \frac{f(\chi)}{\|\psi\|_3}.
\end{aligned}$$

Άρα $\mu(\chi, \psi) \in F^0_{\|\cdot\|}(\chi;\psi)$.

2.3 Συνθετικό Σύνολο Birkhoff-James ε-Ορθογωνιότητας

Έστω μια n-άδα τελεστών $\mathbf{T} = (T_1, T_2, \ldots, T_n)$ που δρουν στον μιγαδικό χώρο Hilbert $\mathcal{H}$. Το *συνθετικό αριθμητικό πεδίο* $JF(\mathbf{T})$ ορίζεται ως εξής:

$$JF(\mathbf{T}) = \{(\langle T_1\chi, \chi\rangle, \langle T_2\chi, \chi\rangle, \ldots, \langle T_n\chi, \chi\rangle) : \chi \in \mathcal{H}, \|\chi\| = 1\} \subseteq \mathbb{C}^n.$$

Το σύνολο αυτό είναι κυρτό για $n = 1$, ενώ αν $n \geq 2$ κάτι τέτοιο δεν ισχύει εν γένει. Ανάλογα, έστω μια άλγεβρα Banach $\mathcal{A}$ με μοναδιαίο στοιχείο $\mathbf{1}$. Θεωρούμε μια n-άδα στοιχείων του $\mathcal{A}$, το $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathcal{A}^n$. Τότε μπορεί να ορισθεί το *συνθετικό αλγεβρικό αριθμητικό πεδίο* $JV(\boldsymbol{\alpha}, \mathcal{A})$

$$JV(\boldsymbol{\alpha}, \mathcal{A}) = \{(f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots, f(\alpha_n)) : \ f \in \mathcal{A}^*, \|f\| = 1 = f(\mathbf{1})\}.$$

Το σύνολο αυτό είναι συμπαγές υποσύνολο του χώρου $\mathbb{C}^n$. Το παρακάτω θεώρημα συνδέει τα δυο αυτά συνθετικά αριθμητικά πεδία.

Θεώρημα 2.17. [46, Θεώρημα 1] Έστω $\mathbf{T} = (T_1, T_2, \ldots, T_n) \in B(\mathcal{H})^n$, όπου $\mathcal{H}$ ένας μιγαδικός χώρος Hilbert. Τότε

$$JV(\mathbf{T}, B(\mathcal{H})) = \overline{coJF(\mathbf{T})}.$$

Περισσότερα μπορούν να βρεθούν στα [9, 10, 46]. Γενικεύοντας τον παραπάνω ορισμό, καταλήγουμε στο εξής:

Ορισμός 2.18. Θεωρούμε έναν γραμμικό χώρο με νόρμα $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$. Έστω ένας αριθμός $\kappa \in \mathbb{N}$ και στοιχεία $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_\kappa, \psi \in \mathcal{X}$ και $\varepsilon \in [0, 1)$. Ορίζουμε το *συνθετικό σύνολο Birkhoff-James ε-ορθογωνιότητας των στοιχείων $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_\kappa$ ως προς ψ* ως εξής:

$$JF^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_\kappa; \psi) = \left\{ \left(\frac{f(\chi_1)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|}, \frac{f(\chi_2)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|}, \ldots, \frac{f(\chi_\kappa)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|} \right), \ f \in L_\varepsilon(\psi) \right\}.$$

Πρόταση 2.19. Το συνθετικό σύνολο $JF^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_\kappa; \psi)$ είναι κυρτό.

Απόδειξη. Έστω δύο στοιχεία c, d του συνόλου $JF^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_\kappa; \psi)$. Θα δείξουμε ότι $tc + (1-t)d \in JF^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_\kappa; \psi)$, όπου $t \in [0,1]$. Αφού $c, d \in JF^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_\kappa; \psi)$, τότε λόγω ορισμού

$$c = \left(\frac{f(\chi_1)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|}, \frac{f(\chi_2)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|}, \ldots, \frac{f(\chi_\kappa)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|} \right)$$

και

$$d = \left(\frac{g(\chi_1)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|}, \frac{g(\chi_2)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|}, \ldots, \frac{g(\chi_\kappa)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|} \right)$$

για κάποια γραμμικά συναρτησιακά $f, g \in L_\varepsilon(\psi)$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
& tc + (1-t)d \\
= \; & t\left(\frac{f(\chi_1)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|}, \frac{f(\chi_2)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|}, \ldots, \frac{f(\chi_\kappa)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|} \right) \\
& +(1-t)\left(\frac{g(\chi_1)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|}, \frac{g(\chi_2)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|}, \ldots, \frac{g(\chi_\kappa)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|} \right) \\
= \; & \left(\frac{tf(\chi_1) + (1-t)g(\chi_1)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|}, \frac{tf(\chi_2) + (1-t)g(\chi_2)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|}, \ldots, \frac{tf(\chi_\kappa) + (1-t)g(\chi_\kappa)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|} \right) \\
= \; & \left(\frac{[tf + (1-t)g](\chi_1)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|}, \frac{[tf + (1-t)g](\chi_2)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|}, \ldots, \frac{[tf + (1-t)g](\chi_\kappa)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|} \right) \\
= \; & \left(\frac{h(\chi_1)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|}, \frac{h(\chi_2)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|}, \ldots, \frac{h(\chi_\kappa)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|} \right),
\end{aligned}$$

όπου $h = tf + (1-t)g \in L_\varepsilon(\psi)$ αφού το σύνολο $L_\varepsilon(\psi)$ κυρτό. □

Πρόταση 2.20. Έστω $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_\kappa, \psi$ στοιχεία του γραμμικού χώρου $\mathcal{X}$ και ένα $\varepsilon \in [0,1)$. Θεωρούμε το στοιχείο $z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \ldots \\ z_\kappa \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^\kappa$. Τότε, ισχύει η παρακάτω ισοδυναμία:

(i) $z \in JF^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_\kappa; \psi)$.

(ii) Για κάθε $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\kappa, \lambda \in \mathbb{C}$,

$$\left|\sum_{i=1}^{\kappa} \alpha_i\, z_i + \lambda\sqrt{1-\varepsilon^2}\|\psi\|\right| \leq \left\|\sum_{i=1}^{\kappa} \alpha_i \frac{\chi_i}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\|\psi\|} + \lambda\psi\right\|.$$

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε πρώτα το ευθύ. Έστω $z \in JF^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_\kappa; \psi)$. Τότε από τον ορισμό του συνθετικού συνόλου $JF^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_\kappa; \psi)$, υπάρχει γραμμικό συναρτησιακό $f \in L_\varepsilon(\psi)$ έτσι ώστε $z_i = \dfrac{f(\chi_i)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$. Έστω $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\kappa, \lambda \in \mathbb{C}$. Τότε

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^{\kappa} \alpha_i\, z_i + \lambda\sqrt{1-\varepsilon^2}\|\psi\|\right| &= \left|\sum_{i=1}^{\kappa} \alpha_i\, \frac{f(\chi_i)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\|\psi\|} + \lambda f(\psi)\right| \\
&= \left| f\left(\sum_{i=1}^{\kappa} \alpha_i\, \frac{\chi_i}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\|\psi\|} + \lambda\psi\right)\right| \\
&\leq \|f\| \left\|\sum_{i=1}^{\kappa} \alpha_i \frac{\chi_i}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\|\psi\|} + \lambda\psi\right\|.
\end{aligned}$$

Αφού $\|f\| \leq 1$, ισχύει το ζητούμενο.

Για το αντίστροφο τώρα, υποθέτουμε ότι ισχύει η ανισότητα

$$\left|\sum_{i=1}^{\kappa} \alpha_i\, z_i + \lambda\sqrt{1-\varepsilon^2}\|\psi\|\right| \leq \left\|\sum_{i=1}^{\kappa} \alpha_i \frac{\chi_i}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\|\psi\|} + \lambda\psi\right\|,$$

για κάθε $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\kappa, \lambda \in \mathbb{C}$. Θεωρούμε τον υπόχωρο $\mathcal{A}$, του γραμμικού χώρου $\mathcal{X}$, που παράγεται από τα στοιχεία $\chi_1, \chi_2, \ldots \chi_\kappa$. Ορίζουμε το γραμμικό συναρτησιακό $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ ως εξής:

$$f\left(\sum_{i=1}^{\kappa} \alpha_i \frac{\chi_i}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\|\psi\|} + \lambda\psi\right) = \sum_{i=1}^{\kappa} \alpha_i\, z_i + \lambda\sqrt{1-\varepsilon^2}\|\psi\|.$$

Τότε $\|f\| \leq 1$, $f(\psi) = \sqrt{1-\varepsilon^2}\|\psi\|$. Επιπλέον, έχουμε ότι $\dfrac{f(\chi_i)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\|\psi\|} = z_i$, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, \kappa$. Από το θεώρημα επέκτασης Hahn-Banach, υπάρχει ένα συναρτησιακό $\hat{f} : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{C}$ που επεκτείνει το f διατηρώντας τις παραπάνω ιδιότητες. Άρα, $\hat{f} \in L_\varepsilon(\psi)$ και $z \in JF^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_\kappa; \psi)$. $\square$

Κεφάλαιο 3

Birkhoff-James Συνημίτονο

Η μελέτη των τριγωνομετρικών συναρτήσεων και των εφαρμογών τους με σκοπό τον προσδιορισμό του μέτρου γωνιών, έχουν μακρά ιστορία, ειδικά στους χώρους όπου μπορεί να οριστεί εσωτερικό γινόμενο. Τις τελευταίες δεκαετίες το πρόβλημα των τριγωνομετρικών συναρτήσεων καθώς και ο ορισμός τους σε γραμμικούς χώρους με νόρμα με εναλλακτικές ορθογωνιότητες έχει προσελκύσει το ενδιαφέρον των ερευνητών [5]. Με τη χρήση της Birkhoff-James ορθογωνιότητας, ο Szostok [55] εισήγαγε την συνάρτηση ημίτονο

$$s(\chi,\psi)=\inf_{\lambda\in\mathbb{R}}\frac{\|\chi+\lambda\psi\|}{\|\chi\|}$$

για δύο μη μηδενικά στοιχεία χ,ψ ενός πραγματικού γραμμικού χώρου με νόρμα $(\mathcal{V},\|\cdot\|)$. Η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής και αν η νόρμα επάγεται από ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$, τότε η συνάρτηση $s(\chi,\psi)$ συμπίπτει με την κλασική συνάρτηση του ημιτόνου $\sqrt{1-\left(\dfrac{\langle\chi,\psi\rangle}{\|\chi\|\,\|\psi\|}\right)^2}$. Επιπλέον, ο Chmieliński [11] παρατήρησε ότι, για οποιοδήποτε $\varepsilon\in[0,1)$, $\sqrt{1-s(\chi,\psi)^2}\leq\varepsilon$ αν και μόνο αν $s(\chi,\psi)^2\geq\sqrt{1-\varepsilon^2}$ αν και μόνο αν $\|\chi+\lambda\psi\|\geq\sqrt{1-\varepsilon^2}\|\chi\|$ για κάθε πραγματικό αριθμό λ, χωρίς να μελετήσει περαιτέρω το θέμα.

Έστω ένας γραμμικός χώρος με νόρμα $(\mathcal{X},\|\cdot\|)$ και δύο στοιχεία $\chi,\psi\in\mathcal{X}$ με $\chi\neq0$. Για λόγους ευκολίας στη χρήση των συμβολισμών, θα εργαστούμε με το σύνολο Birkhoff-James ε-ορθογωνιότητας $F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\psi;\chi)$ αντί του συνόλου

$F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi;\psi)$. Η συμπεριφορά και οι ιδιότητες του συνόλου Birkhoff-James ε-ορθογωνιότητας $F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\psi;\chi)$ οδηγούν σε έναν ορισμό συνημιτόνου της κυρτής γωνίας που σχηματίζεται μεταξύ του παραγόμενου χώρου $span\{\chi\}$ με τον παραγόμενο χώρο $span\{\psi\}$. Για την ακρίβεια, θα ορίσουμε ως συνημίτονο τον ελάχιστο αριθμό $\varepsilon \in [0,1)$, έτσι ώστε $0 \in F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\psi;\chi)$.

Υπενθυμίζουμε το επόμενο θεώρημα που εξασφαλίζει την συνέχεια του συνόλου με βάση την απόσταση Hausdorff.

Θεώρημα 1.46. Η απεικόνιση $\varepsilon \mapsto F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\psi;\chi)$ είναι συνεχής.

3.1 Ορισμός και Γεωμετρική Ερμηνεία

Ορισμός 3.1. Έστω δύο στοιχεία $\chi,\psi \in \mathcal{X}$ με $\chi,\psi \neq 0$. Αν τα στοιχεία αυτά δεν είναι παράλληλα, τότε ορίζουμε ως Birkhoff-James συνημίτονο της κυρτής γωνίας που δημιουργείται μεταξύ του παραγόμενου χώρου $span\{\chi\}$ με τον χώρο $span\{\psi\}$ την ποσότητα:

$$\begin{aligned}
\cos^{\|\cdot\|}_{BJ}(\chi,\psi) &= \min\left\{\varepsilon \in [0,1) :\ 0 \in F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\psi;\chi)\right\} \\
&= \min\left\{\varepsilon \in [0,1) : \chi \perp^{\varepsilon}_{BJ} \psi\right\} \\
&= \min\left\{\varepsilon \in [0,1) :\ \|\chi - \lambda\psi\| \geq \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\chi\|,\ \forall\,\lambda \in \mathbb{C}\right\}.
\end{aligned}$$

Στην περίπτωση που τα στοιχεία χ και ψ είναι παράλληλα λέμε (κατά σύμβαση) ότι

$$\cos^{\|\cdot\|}_{BJ}(\chi,\psi) = 1.$$

Το συνημίτονο είναι καλά ορισμένο, αφού ο αριθμός ε είναι μοναδικός λόγω συνέχειας και μονοτονίας της απεικόνισης $\varepsilon \mapsto F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\psi;\chi)$ (βλέπε Θεώρημα 1.46 και [50, Παρατήρηση 2.1]).

Ορισμός 3.2. Αν $\cos^{\|\cdot\|}_{BJ}(\chi,\psi) = \varepsilon_0$, τότε ως Birkhoff-James ημίτονο της κυρτής γωνίας του χώρου $span\{\chi\}$ με τον χώρο $span\{\psi\}$ θεωρούμε την ποσότητα

$$\sin^{\|\cdot\|}_{BJ}(\chi,\psi) = \sqrt{1 - \cos^{\|\cdot\|}_{BJ}(\chi,\psi)^2} = \sqrt{1-\varepsilon_0{}^2}.$$

Οι παραπάνω Birkhoff-James τριγωνομετρικές συναρτήσεις δεν είναι, εν γένει, συμμετρικές για τα στοιχεία χ και ψ.

Πρόταση 3.3. Έστω ένας γραμμικός χώρος με νόρμα $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ και έστω δύο στοιχεία $\chi, \psi \in \mathcal{X}$ με $\chi, \psi \neq 0$. Τότε ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

1. $\chi \perp_{BJ} \psi$ αν και μόνο αν $\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi, \psi) = 0$.
2. $\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\alpha\chi, \beta\psi) = \cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi, \psi)$ για $\alpha, \beta \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$.
3. $\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi, \psi) = \cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(-\chi, \psi) = \cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(-\chi, -\psi) = \cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi, -\psi)$.

Απόδειξη. Θεωρούμε δύο στοιχεία χ, ψ στον χώρο $\mathcal{X}$ με το στοιχείο χ να μην είναι μηδενικό.

1. Έχουμε $\chi \perp_{BJ} \psi \Leftrightarrow 0 \in F_{\|\cdot\|}^{0}(\psi; \chi) \Leftrightarrow \cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi, \psi) = 0$.
2. Λόγω ομογένειας του συνόλου Birkhoff-James ε-ορθογωνιότητας ισχύει ότι $F_{\|\cdot\|}^{\varepsilon}(\beta\psi; \alpha\chi) = \dfrac{\beta}{\alpha} F_{\|\cdot\|}^{\varepsilon}(\psi; \chi)$. Άρα, $0 \in F_{\|\cdot\|}^{\varepsilon}(\beta\psi; \alpha\chi)$ αν και μόνο αν $0 \in \dfrac{\beta}{\alpha} F_{\|\cdot\|}^{\varepsilon}(\psi; \chi)$ αν και μόνο αν $0 \in F_{\|\cdot\|}^{\varepsilon}(\psi; \chi)$. Επομένως,
$$\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\alpha\chi, \beta\psi) = \cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi, \psi) \quad \text{για } \alpha, \beta \in \mathbb{C}\backslash\{0\}.$$
3. Προκύπτει από την προηγούμενη ιδιότητα με κατάλληλες επιλογές των $\alpha, \beta \in \{1, -1\}$.

□

Αν η νόρμα $\|\cdot\|$ επάγεται από ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$, τότε όπως αναφέρθηκε προηγουμένως στο Θεώρημα 1.41, το σύνολο Birkhoff-James ε-ορθογωνιότητας του ψ ως προς χ είναι ο δίσκος:

$$F_{\|\cdot\|}^{\varepsilon}(\psi; \chi) = \mathcal{D}\left(\frac{\langle\psi, \chi\rangle}{\|\chi\|^2}, \left\|\psi - \frac{\langle\psi, \chi\rangle}{\|\chi\|^2}\chi\right\| \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\|\chi\|}\right).$$

Σε αυτήν την περίπτωση, ο ορισμός του Birkhoff-James συνημιτόνου συμπίπτει με τον ορισμό του κλασικού συνημιτόνου.

Θεώρημα 3.4. Έστω γραμμικός χώρος με νόρμα $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ και έστω ότι η νόρμα του $\|\cdot\|$ επάγεται από ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Θεωρούμε δύο μη μηδενικά στοιχεία $\chi, \psi \in \mathcal{X}$. Τότε

$$\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi,\psi) = \frac{|\langle\psi,\chi\rangle|}{\|\chi\|\,\|\psi\|}.$$

Απόδειξη. Πράγματι, έχουμε ότι $\varepsilon_0 = \min\{\varepsilon \in [0,1) \ : \ 0 \in F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\psi;\chi)\}$ αν και μόνο αν η απόσταση του κέντρου του δίσκου από το 0 είναι ίση με την ακτίνα, δηλαδή αν και μόνο αν

$$\begin{aligned}
& \frac{|\langle\psi,\chi\rangle|}{\|\chi\|^2} = \left\|\psi - \frac{\langle\psi,\chi\rangle}{\|\chi\|^2}\chi\right\| \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{1-\varepsilon_0^2}\|\chi\|} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{|\langle\psi,\chi\rangle|}{\|\chi\|^2} = \left\|\frac{\|\chi\|^2\psi - \langle\psi,\chi\rangle}{\|\chi\|^2}\chi\right\| \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{1-\varepsilon_0^2}\|\chi\|} \\
\Leftrightarrow\ & |\langle\psi,\chi\rangle| = \big\|\|\chi\|^2\psi - \langle\psi,\chi\rangle\chi\big\| \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{1-\varepsilon_0^2}\|\chi\|} \\
\Leftrightarrow\ & |\langle\psi,\chi\rangle|^2 = \left(\|\|\chi\|^2\psi - \langle\psi,\chi\rangle\chi\|\frac{\varepsilon_0}{\sqrt{1-\varepsilon_0^2}\|\chi\|}\right)^2 \\
\Leftrightarrow\ & |\langle\psi,\chi\rangle|^2 = \big\|\|\chi\|^2\psi - \langle\psi,\chi\rangle\chi\big\|^2 \frac{\varepsilon_0^2}{(1-\varepsilon_0^2)\|\chi\|^2}.
\end{aligned}$$

Άρα έχουμε,

$$\begin{aligned}
& (1-\varepsilon_0^2)\|\chi\|^2|\langle\psi,\chi\rangle|^2 = \big\|\|\chi\|^2\psi - \langle\psi,\chi\rangle\chi\big\|^2 \varepsilon_0^2 \\
\Leftrightarrow\ & (1-\varepsilon_0^2)\|\chi\|^2|\langle\psi,\chi\rangle|^2 = \big\langle \|\chi\|^2\psi - \langle\psi,\ \chi\rangle\chi, \|\chi\|^2\psi - \langle\psi,\chi\rangle\chi\big\rangle\, \varepsilon_0^2 \\
\Leftrightarrow\ & (1-\varepsilon_0^2)\|\chi\|^2|\langle\psi,\chi\rangle|^2 = \big(\|\chi\|^4\|\psi\|^2 - \|\chi\|^2\langle\psi,\chi\rangle^2 - \|\chi\|^2|\langle\psi,\chi\rangle|^2 + \|\chi\|^2\langle\psi,\chi\rangle^2\big)\, \varepsilon_0^2 \\
\Leftrightarrow\ & (1-\varepsilon_0^2)|\langle\psi,\chi\rangle|^2 = \big(\|\chi\|^2\|\psi\|^2 - |\langle\psi,\chi\rangle|^2\big)\, \varepsilon_0^2 \\
\Leftrightarrow\ & |\langle\psi,\chi\rangle|^2 - \varepsilon_0^2|\langle\psi,\chi\rangle|^2 = \|\chi\|^2\|\psi\|^2\varepsilon_0^2 - \varepsilon_0^2|\langle\psi,\chi\rangle|^2.
\end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι

$$\begin{aligned}
|\langle\psi,\chi\rangle|^2 &= \|\chi\|^2\|\psi\|^2\varepsilon_0^2 \\
\Leftrightarrow\quad \varepsilon_0^2 &= \frac{|\langle\psi,\chi\rangle|^2}{\|\chi\|^2\|\psi\|^2} \\
\Leftrightarrow\quad \varepsilon_0 &= \frac{|\langle\psi,\chi\rangle|}{\|\chi\|\,\|\psi\|},
\end{aligned}$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Επομένως, ο Ορισμός (3.1) είναι συμβατός με τον συνήθη ορισμό του συνημιτόνου στους χώρους εσωτερικού γινομένου.

Παρατήρηση 3.5. (Γεωμετρική ερμηνεία του ημιτόνου) Έστω ένας γραμμικός χώρος με νόρμα $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ και έστω δύο στοιχεία $\chi, \psi \in \mathcal{X}$, μη παράλληλα, με το χ να μην είναι Birkhoff-James ορθογώνιο στο ψ, δηλαδή

$$0 \notin F^0_{\|\cdot\|}(\psi;\chi).$$

Αν $\cos^{\|\cdot\|}_{BJ}(\chi,\psi) = \varepsilon_0 \in (0,1)$, τότε

$$0 \in F^{\varepsilon_0}_{\|\cdot\|}(\psi;\chi), \text{ ή ισοδύναμα, } \|\chi+\lambda\psi\| \geq \sqrt{1-{\varepsilon_0}^2}\,\|\chi\|, \quad \forall\,\lambda\in\mathbb{C}.$$

Επιπλέον, επειδή ο αριθμός ε_0 είναι θετικός και $0 \in \partial F^{\varepsilon_0}_{\|\cdot\|}(\psi;\chi)$, προκύπτει από το Θεώρημα 1.39 ότι υπάρχει μιγαδικός αριθμός λ_0 τέτοιος ώστε:

$$\|\chi+\lambda\psi\| \geq \|\chi+\lambda_0\psi\| = \sqrt{1-\varepsilon_0^2}\|\chi\|, \quad \forall\,\lambda\in\mathbb{C}.$$

Συνεπώς,

$$\sqrt{1-\varepsilon_0^2} = \frac{\|\chi+\lambda_0\psi\|}{\|\chi\|} = \min_{\lambda\in\mathbb{C}}\frac{\|\chi+\lambda\psi\|}{\|\chi\|} = \sin^{\|\cdot\|}_{BJ}(\chi,\psi).$$

Αυτή είναι η ποσότητα που αναφέρθηκε παραπάνω και ορίστηκε αρχικά από τον T. Szostok στο [55].

Επιπλέον, θα έχουμε

$$\|\chi+\lambda_0\psi\| \leq \|\chi+\lambda\psi\|, \quad \forall\,\lambda\in\mathbb{C},$$

ή ισοδύναμα,

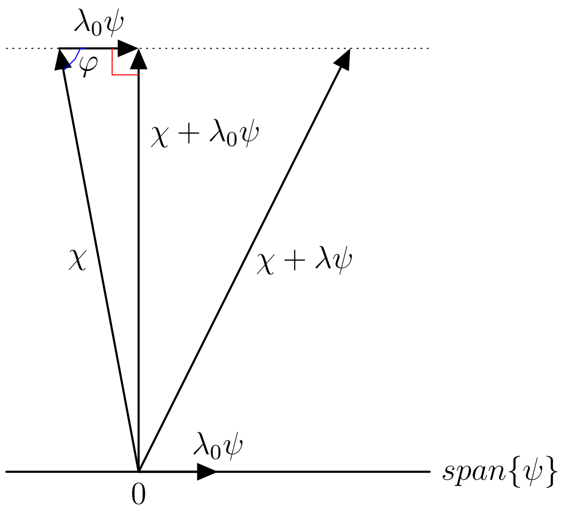
$$\|\chi + \lambda_0\psi\| \leq \|\chi + \lambda_0\psi + (\lambda - \lambda_0)\psi\|, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{C},$$

ή ισοδύναμα,

$$\|(\chi + \lambda_0\psi) + \kappa\psi\| \geq \|\chi + \lambda_0\psi\|, \quad \forall\, \kappa \in \mathbb{C},$$

ή ισοδύναμα,

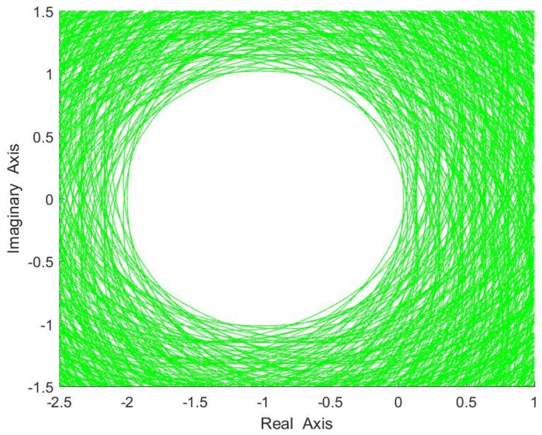
$$(\chi + \lambda_0\psi) \perp_{BJ} \psi.$$



Δηλαδή αν επιλέξουμε έναν μιγαδικό αριθμό λ_0 που ελαχιστοποιεί την ποσότητα $\|\chi + \lambda\psi\|$, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι δημιουργείται ορθογώνιο τρίγωνο, όπου η πλευρά με μέτρο $\|\chi\|$ είναι η υποτείνουσα και η πλευρά με μέτρο $\|\chi + \lambda_0\psi\|$ είναι η απέναντι κάθετη πλευρά στη γωνία φ και

$$\sqrt{1 - \varepsilon_0^2} = \frac{\|\chi + \lambda_0\psi\|}{\|\chi\|} = \sin\varphi.$$

Παράδειγμα 3.6. *Έστω ο γραμμικός χώρος* $\mathcal{X} = \mathbb{C}^3$ *εφοδιασμένος με τη νόρμα* $\|\cdot\|_\infty$. *Θεωρούμε τα μοναδιαία διανύσματα* $\chi = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ *και* $\psi = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.



Σχήμα 3.1: Το 0 εμφανίζεται ως ένα διαφορίσιμο σημείο του συνόρου $\partial F^{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\|\cdot\|_\infty}(\psi;\chi)$.

Λόγω του πρώτου στοιχείου του διανύσματος ψ (που είναι μηδενικό), έχουμε προφανώς ότι

$$\begin{aligned} \|\chi+\lambda\psi\|_\infty &= \left\| \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \lambda \\ 1-\lambda \end{bmatrix} \right\|_\infty = \max\left\{\frac{1}{2}, |\lambda|, |1-\lambda|\right\} \\ &\geq \frac{1}{2} = \|\chi\|_\infty \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα, $0 \in F^{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\|\cdot\|_\infty}(\psi;\chi)$. Για $\lambda = \frac{1}{2}$, ισχύει η ισότητα στην παραπάνω ανισότητα και συνεπώς, $0 \in \partial F^{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\|\cdot\|_\infty}(\psi;\chi)$. Επιπλέον, για κάθε $\varepsilon < \frac{\sqrt{3}}{2}$ και για $\lambda = \frac{1}{2}$, ισχύει

$$\frac{1}{2} = \left\| \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot 0 \\ 0 + \frac{1}{2}\cdot 1 \\ 1 + \frac{1}{2}\cdot(-1) \end{bmatrix} \right\|_\infty = \|\chi + \frac{1}{2}\psi\|_\infty < \|\chi\|_\infty\sqrt{1-\varepsilon^2}.$$

Δηλαδή για κάθε $\varepsilon < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ *έχουμε* $0 \notin F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|_\infty}(\psi;\chi)$, *αφού* $0 \in \partial F^{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\|\cdot\|_\infty}(\psi;\chi)$. *Έτσι, καταλήγουμε ότι*

$$\cos_{BJ}^{\|\cdot\|_\infty}(\chi,\psi) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \textit{και} \quad \sin_{BJ}^{\|\cdot\|_\infty}(\chi,\psi) = \frac{1}{2} = \frac{\min\limits_{\lambda\in\mathbb{C}} \|\chi+\lambda\psi\|_\infty}{\|\chi\|_\infty}.$$

Για να υπολογίσουμε όλα τα $\lambda \in \mathbb{C}$ *που δίνουν ισότητα στην παραπάνω ανισότητα, παρατηρούμε ότι*

$$\|\chi+\lambda\psi\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \lambda \\ 1-\lambda \end{bmatrix} \right\|_\infty = \frac{1}{2},$$

ή ισοδύναμα,

$$\max\left\{\frac{1}{2}, |\lambda|, |1-\lambda|\right\} = \frac{1}{2},$$

ή ισοδύναμα,

$$|\lambda| \le \frac{1}{2} \quad \textit{και} \quad |1-\lambda| \le \frac{1}{2},$$

και προκύπτει ότι το $\lambda_0 = \dfrac{1}{2}$ *είναι η μοναδική τιμή του* λ *για την οποία ισχύει*

$$\|\chi+\lambda_0\psi\|_\infty = \min_{\lambda\in\mathbb{C}} \|\chi+\lambda\psi\|_\infty.$$

Παρά τη μοναδικότητα του λ_0 *έχουμε,*

$$\cos_{BJ}^{\|\cdot\|_\infty}(\chi,\psi) = \frac{\sqrt{3}}{2} \neq \frac{1}{2} = \frac{\|\lambda_0\psi\|_\infty}{\|\chi\|_\infty}.$$

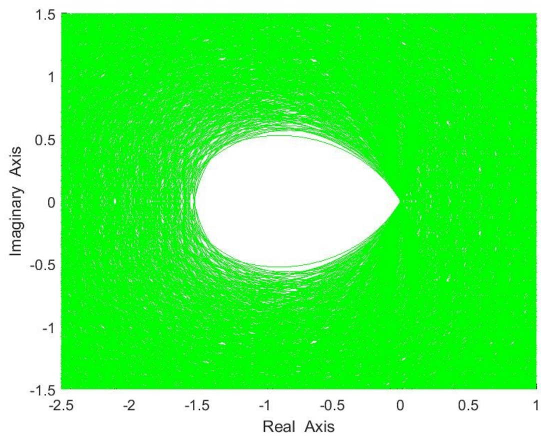
Επομένως για το $\cos_{BJ}^{\|\cdot\|_\infty}(\chi,\psi)$ *δεν μπορούμε να έχουμε μια γεωμετρική ερμηνεία (λόγος προσκείμενης προς υποτείνουσα) όπως για το* $\sin_{BJ}^{\|\cdot\|_\infty}(\chi,\psi)$.

Παράδειγμα 3.7. *Έστω ο γραμμικός χώρος* $\mathcal{X} = \mathbb{C}^3$ *εφοδιασμένος με τη νόρμα* $\|\cdot\|_\infty$. *Θεωρούμε τα μοναδιαία διανύσματα* $\chi = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ *και* $\psi = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$.

Λόγω του πρώτου στοιχείου του διανύσματος ψ (που είναι μηδενικό), έχουμε προφανώς ότι

$$\begin{aligned}\|\chi + \lambda\psi\|_\infty &= \left\| \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\lambda}{2} \\ 1-\lambda \end{bmatrix} \right\|_\infty = \max\left\{\frac{1}{2}, \frac{|\lambda|}{2}, |1-\lambda|\right\} \\ &\geq \frac{1}{2} = \|\chi\|_\infty \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C},\end{aligned}$$

ή ισοδύναμα, $0 \in F^{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\|\cdot\|_\infty}(\psi;\chi)$. *Για* $\lambda = 1$, *ισχύει η ισότητα και συνεπώς,* $0 \in \partial F^{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\|\cdot\|_\infty}(\psi;\chi)$. *Επιπλέον, για κάθε* $\varepsilon < \frac{\sqrt{3}}{2}$ *και για* $\lambda = 1$ *ισχύει*



Σχήμα 3.2: Το 0 εμφανίζεται ως ένα μη διαφορίσιμο σημείο του συνόρου $\partial F^{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\|\cdot\|_\infty}(\psi;\chi)$.

$$\frac{1}{2} = \left\| \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + 1\cdot 0 \\ 0 + 1\cdot\frac{1}{2} \\ 1 + 1\cdot(-1) \end{bmatrix} \right\|_\infty = \|\chi + \psi\|_\infty < \|\chi\|_\infty\sqrt{1-\varepsilon^2}.$$

Δηλαδή για κάθε $\varepsilon < \frac{\sqrt{3}}{2}$ *ισχύει* $0 \notin F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|_\infty}(\psi;\chi)$, *αφού* $0 \in \partial F^{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\|\cdot\|_\infty}(\psi;\chi)$. *Έτσι, καταλήγουμε ότι*

$$\cos_{BJ}^{\|\cdot\|_\infty}(\chi,\psi) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{και} \quad \sin_{BJ}^{\|\cdot\|_\infty}(\chi,\psi) = \frac{1}{2} = \frac{\min_{\lambda\in\mathbb{C}} \|\chi+\lambda\psi\|_\infty}{\|\chi\|_\infty}.$$

Για να υπολογίσουμε όλα τα $\lambda \in \mathbb{C}$ *που δίνουν ισότητα στην παραπάνω ανισότητα, παρατηρούμε ότι*

$$\|\chi+\lambda\psi\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\lambda}{2} \\ 1-\lambda \end{bmatrix} \right\|_\infty = \frac{1}{2},$$

ή ισοδύναμα,

$$\max\left\{\frac{1}{2}, \left|\frac{\lambda}{2}\right|, |1-\lambda|\right\} = \frac{1}{2},$$

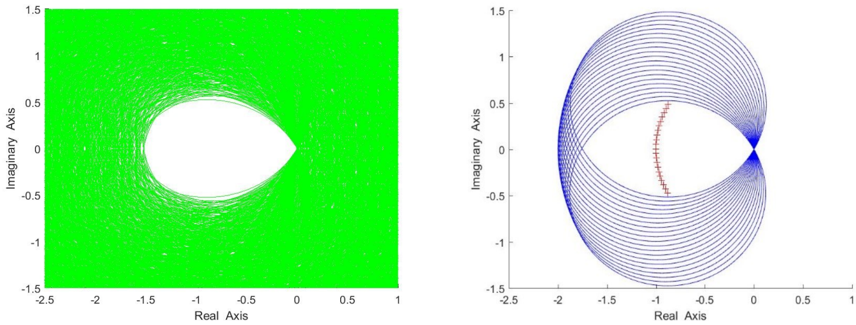
ή ισοδύναμα,

$$|\lambda| \le 1 \quad \text{και} \quad |1-\lambda| \le \frac{1}{2}$$

και προκύπτει ότι για κάθε $\lambda_0 \in \{\lambda \in \mathbb{C} \, : \, |\lambda| \le 1\} \cap \left\{\lambda \in \mathbb{C} \, : \, |1-\lambda| \le \frac{1}{2}\right\}$ *(δηλαδή για άπειρες τιμές του* λ_0 *μέσα στη μη τετριμμένη τομή των δύο δίσκων), ισχύει*

$$\|\chi+\lambda_0\psi\|_\infty = \min_{\lambda\in\mathbb{C}} \|\chi+\lambda\psi\|_\infty.$$

Στην περίπτωση αυτή, έχουμε άπειρα λ_0 *που δίνουν το minimum και για τα οποία το πηλίκο* $\frac{\|\lambda_0\psi\|_\infty}{\|\chi\|_\infty}$ *λαμβάνει όλες τις τιμές στο διάστημα* $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, *οπότε δεν έχει νόημα να συγκρίνουμε το* $\cos_{BJ}^{\|\cdot\|_\infty}(\chi,\psi) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ *και το* $\frac{\|\lambda_0\psi\|_\infty}{\|\chi\|_\infty}$. *Επομένως, για το* $\cos_{BJ}^{\|\cdot\|_\infty}(\chi,\psi)$ *δεν μπορούμε να έχουμε μια γεωμετρική ερμηνεία όπως για το* $\sin_{BJ}^{\|\cdot\|_\infty}(\chi,\psi)$.



Σχήμα 3.3: Το $F^{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\|\cdot\|_\infty}(\psi;\chi)$ (αριστερά) και κύκλοι με κέντρα πάνω στο τόξο $\Theta\left(0,1,\dfrac{1}{2}\right)-1$ και ακτίνα 1 απ' αυτούς που παράγουν το $F^{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\|\cdot\|_\infty}(\psi;\chi)$ (δεξιά).

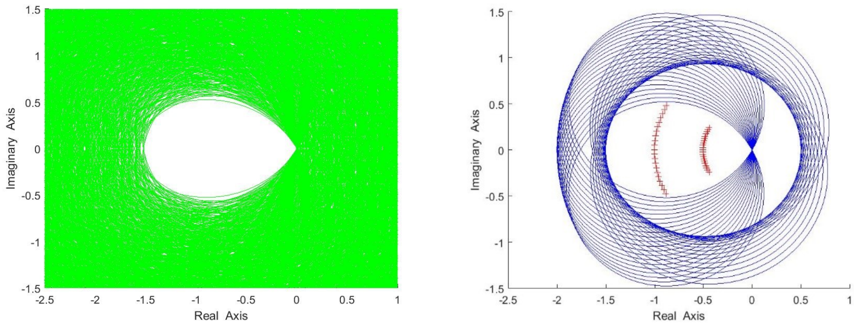
Στο παράδειγμα αυτό είναι αξιοσημείωτο το εξής: Γνωρίζουμε ότι

$$
\begin{aligned}
0\in F^{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\|\cdot\|_\infty}(\psi;\chi) &= \bigcap_{\lambda\in\mathbb{C}} D\left(\lambda,\frac{\|\psi-\lambda\chi\|_\infty}{\frac{1}{2}\|\chi\|_\infty}\right)\\
&= \bigcap_{\lambda\in\mathbb{C}} D\left(\lambda, 2\max\left\{\frac{|\lambda|}{2},\frac{1}{2},|-1-\lambda|\right\}\right)\\
&= \bigcap_{\lambda\in\mathbb{C}} D\left(\lambda,\max\{|\lambda|,1,2|1+\lambda|\}\right).
\end{aligned}
$$

Αν συμβολίσουμε με $\Theta\left(0,1,\dfrac{1}{2}\right)$ *το τόξο του κύκλου* $\mathcal{C}(1,1)$ *με κέντρο 1 και ακτίνα 1 που βρίσκεται εντός του δίσκου* $\mathcal{D}\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$*, με κέντρο 0 και ακτίνα* $\dfrac{1}{2}$*, τότε για κάθε* $\lambda\in\Theta\left(0,1,\dfrac{1}{2}\right)-1$ *(δηλαδή, μετατοπίζουμε παράλληλα το τόξο κατά* -1*), έχουμε*

$$\max\{|\lambda|,1,2|\lambda+1|\}=|\lambda|=1.$$

Αυτό σημαίνει ότι έχουμε άπειρους κύκλους με κέντρα πάνω στο τόξο $\Theta\left(0,1,\dfrac{1}{2}\right)-1$ *και ακτίνα* 1 *που περιλαμβάνουν το* $F^{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\|\cdot\|_\infty}(\psi;\chi)$ *και διέρχονται από την αρχή των αξόνων. Άρα, το* 0 *είναι γωνιακό σημείο του* $F^{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\|\cdot\|_\infty}(\psi;\chi)$.



Σχήμα 3.4: Το $F^{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\|\cdot\|_\infty}(\psi;\chi)$ (αριστερά) και κύκλοι με κέντρα πάνω στα τόξα $\Theta\left(0,1,\frac{1}{2}\right)-1$ και $\frac{1}{2}\left[\Theta\left(0,1,\frac{1}{2}\right)-1\right]$ απ' αυτούς που παράγουν το $F^{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\|\cdot\|_\infty}(\psi;\chi)$ (δεξιά).

Παρατήρηση 3.8. Σχετικά με την σύμβαση του ορισμού σχετικά με τα παράλληλα διανύσματα παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
\cos^{\|\cdot\|}_{BJ}(\chi,\psi)=1 \quad &\Leftrightarrow \quad \sin^{\|\cdot\|}_{BJ}(\chi,\psi)=0\\
&\Leftrightarrow \quad \inf_{\lambda\in\mathbb{C}}\|\chi+\lambda\psi\|=0\\
&\Leftrightarrow \quad \min_{\lambda\in\mathbb{C}}\|\chi+\lambda\psi\|=0\\
&\Leftrightarrow \quad \text{υπάρχει } \lambda_0\in\mathbb{C} \text{ τέτοιο ώστε } \|\chi+\lambda_0\psi\|=0\\
&\Leftrightarrow \quad \chi\parallel\psi.
\end{aligned}$$

3.2 Βασικές Ιδιότητες

Ξεκινώντας την παράγραφο, αποδεικνύουμε ότι η απεικόνιση του Birkhoff-James συνημιτόνου είναι συνεχής ως προς το χ και το ψ. Για να το δείξουμε αυτό, χρησιμοποιούμε την συνέχεια του Birkhoff-James ημιτόνου. (Για έναν πραγματικό γραμμικό χώρο [55, Θεώρημα 2.5])

Θεώρημα 3.9. Η απεικόνιση Birkhoff-James ημίτονο

$$\sin^{\|\cdot\|}_{BJ}:\mathcal{X}\setminus\{0\}\times\mathcal{X}\setminus\{0\}\longrightarrow[0,1]$$

είναι συνεχής.

Απόδειξη. Έστω ένα τυχαίο στοιχείο $(\chi, \psi) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$, $\chi, \psi \neq 0$ και έστω ότι υπάρχουν δύο ακολουθίες στοιχείων $(\chi_n, \psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $({\chi_n}', {\psi_n}')_{n\in\mathbb{N}}$ με

$$(\chi_n, \psi_n) \longrightarrow (\chi, \psi)$$

και

$$({\chi_n}', {\psi_n}') \longrightarrow (\chi, \psi)$$

τέτοιες ώστε

$$\sin_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi_n, \psi_n) \longrightarrow \alpha$$

και

$$\sin_{BJ}^{\|\cdot\|}({\chi_n}', {\psi_n}') \longrightarrow \alpha_1$$

με $\alpha \neq \alpha_1$, δύο πραγματικοί αριθμοί. Υποθέτουμε ότι τα στοιχεία $\chi_n, \psi_n, {\chi_n}', {\psi_n}'$ είναι μη μηδενικά για κάθε φυσικό αριθμό n και $\alpha > \alpha_1$. Θέτουμε $\varepsilon = \alpha - \alpha_1$. Αφού $\chi \neq 0$ αντικαθιστούμε το (χ, ψ) με το $\left(\dfrac{\chi}{\|\chi\|}, \psi\right)$ και αντίστοιχα αντικαθιστούμε τα $(\chi_n, \psi_n), ({\chi_n}', {\psi_n}')$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε

$$\|\chi\| = \|\chi_n\| = \|{\chi_n}'\| = 1, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}$$

και

$$\sin_{BJ}^{\|\cdot\|}\left(\frac{\chi_n}{\|\chi_n\|}, \psi_n\right) = \min_{\lambda\in\mathbb{C}} \frac{\|\chi_n + \lambda\psi_n\|}{\|\chi_n\|} = \min_{\lambda\in\mathbb{C}} \|\chi_n + \lambda\psi_n\| \longrightarrow \alpha,$$

$$\sin_{BJ}^{\|\cdot\|}\left(\frac{{\chi_n}'}{\|{\chi_n}'\|}, \psi_n^1\right) = \min_{\lambda\in\mathbb{C}} \|{\chi_n}' + \lambda{\psi_n}'\| \longrightarrow \alpha_1.$$

Τότε $\|\chi_n + \lambda_n\psi_n\| \longrightarrow \alpha$ και $\|{\chi_n}' + {\lambda_n}'{\psi_n}'\| \longrightarrow \alpha_1$, όπου $\{\lambda_n\}, \{{\lambda_n}'\} \subseteq \mathbb{C}$ ακολουθίες τέτοιες ώστε για κάθε $n \in \mathbb{C}$, το λ_n είναι αυτό που δίνει το min. Επίσης, λόγω ορισμού του λ_n ισχύει

$$\|\chi_n + \lambda_n\psi_n\| \leq \|\chi_n + \lambda\psi_n\|, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N} \text{ και για κάθε } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Επιπλέον ισχύει ότι $\|{\chi_n}' + {\lambda_n}'{\psi_n}'\| = \sin_{BJ}^{\|\cdot\|}({\chi_n}', {\psi_n}') \leq 1$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Λόγω της τριγωνικής ανισότητας:

$$|{\lambda_n}'|\,\|{\psi_n}'\| - \|{\chi_n}'\| \leq \|{\chi_n}' + {\lambda_n}'{\psi_n}'\| \;\; n \in \mathbb{N},$$

άρα,

$$|\lambda_n{}'| \leq \frac{\|\chi_n{}'\| + \|\chi_n{}' + \lambda_n{}'\psi_n{}'\|}{\|\psi_n{}'\|}.$$

Συνεπώς, η ακολουθία $\{\lambda_n{}'\}$ είναι φραγμένη. Επομένως, από Bolzano-Weierstrass η ακολουθία $\{\lambda_n{}'\}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Για ευκολία, θα θεωρούμε την $\{\lambda_n{}'\}$. Άρα, υπάρχει κάποιο $\lambda' \in \mathbb{C}$ τέτοιο ώστε $\lambda_n{}' \longrightarrow \lambda'$. Επιπλέον, ισχύουν τα εξής: Υπάρχουν φυσικοί αριθμοί n_1, n_2, n_3 τέτοιοι ώστε

$$|\,\|\chi_n + \lambda'\psi_n\| - \|\chi_n{}' + \lambda'\psi_n{}'\|\,| < \frac{\varepsilon}{9} \ \text{ για κάθε } n \geq n_1, \tag{3.1}$$

$$\big|\,\|\chi_n^1 + \lambda_1\psi_n^1\| - \|\chi_n^1 + \lambda_n^1\psi_n^1\|\,\big| < \frac{\varepsilon}{9} \ \text{ για } n \geq n_2 \tag{3.2}$$

και

$$|\alpha_1 - \|\chi_n{}' + \lambda_n{}'\psi_n{}'\|\,| < \frac{\varepsilon}{9} \ \text{ για } n \geq n_3. \tag{3.3}$$

Απόδειξη της Ανισότητας 3.1. Έχουμε

$$\begin{aligned} & |\,\|\chi_n + \lambda'\psi_n\| - \|\chi_n{}' + \lambda'\psi_n{}'\|\,| \\ \leq \ & \|(\chi_n - \chi_n{}') + \lambda'(\psi_n - \psi_n{}')\| \\ \leq \ & \|\chi_n - \chi_n{}'\| + |\lambda'|\|\psi_n - \psi_n{}'\| \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Άρα για οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$, υπάρχει n_1 τέτοιο ώστε αν

$$n \leq n_1 \text{ τότε } |\|\chi_n + \lambda'\psi_n\| - \|\chi_n{}' + \lambda'\psi_n{}'\|\,| < \frac{\varepsilon}{9} \ \text{ για } n \geq n_1.$$

Απόδειξη της Ανισότητας 3.2. Έχουμε

$$\begin{aligned} & |\,\|\chi_n{}' + \lambda'\psi_n{}'\| - \|\chi_n{}' + \lambda_n{}'\psi_n{}'\|\,| \\ \leq \ & \|(\lambda' - \lambda_n{}')\psi_n{}'\| \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Άρα για οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$, υπάρχει n_2 τέτοιο ώστε αν $n \leq n_2$ τότε

$$|\,\|\chi_n{}' + \lambda'\psi_n{}'\| - \|\chi_n{}' + \lambda_n{}'\psi_n{}'\|\,| < \frac{\varepsilon}{9} \ \text{ για } n \geq n_2.$$

Απόδειξη της Ανισότητας 3.3. Έχουμε $\sin_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi_n{}', \psi_n{}') \longrightarrow \alpha_1$, επομένως, για οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_3 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε αν $n \geq n_3$ τότε

$$|\sin_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi_n{}', \psi_n{}') - \alpha_1| < \frac{\varepsilon}{9}.$$

Τελικά για $n \geq \max\{n_1, n_2, n_3\}$:

$$\begin{aligned}
& |\alpha_1 - \|\chi_n + \lambda'\psi_n\|\,| \\
\leq \; & |\,\|\chi_n + \lambda'\psi_n\| - \|\chi_n{}' + \lambda'\psi_n{}'\|\,| + |\,\|\chi_n{}' + \lambda'\psi_n{}'\| - \|\chi_n{}' + \lambda_n{}'\psi_n{}'\|\,| \\
& \quad + |\alpha_1 - \|\chi_n{}' + \lambda_n{}'\psi_n{}'\|\,| \\
< \; & \frac{\varepsilon}{9} + \frac{\varepsilon}{9} + \frac{\varepsilon}{9} = \frac{\varepsilon}{3}.
\end{aligned}$$

Από την άλλη, όμως, λόγω του ορισμού της σύγκλισης, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε για $n \geq n_0$, ισχύει:

$$|\,\|\chi_n + \lambda_n\psi_n\| - \alpha| < \frac{\varepsilon}{3} \Longrightarrow \alpha - \frac{\varepsilon}{3} < \|\chi_n + \lambda_n\psi_n\|.$$

Για κάθε $n \geq \max\{n_0, n_1, n_2, n_3\}$, από τις παραπάνω ανισότητες, έχουμε

$$\|\chi_n + \lambda_n\psi_n\| \;\; > \;\; \alpha - \frac{\varepsilon}{3} > \alpha_1 + \frac{\varepsilon}{3} > \|\chi_n + \lambda'\psi_n\|.$$

Άτοπο. Επομένως, $\alpha = \alpha_1$ και η συνάρτηση είναι συνεχής. □

Πόρισμα 3.10. Η απεικόνιση $\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\cdot,\cdot)$ είναι συνεχής.

Απόδειξη. Λόγω της συνέχειας του Birkhoff-James ημιτόνου $\sin_{|(\mathcal{X}\setminus\{0\})\times(\mathcal{X}\setminus\{0\})}$, θα ισχύει ότι και το Birkhoff-James συνημίτονο $\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\cdot,\cdot) = \sqrt{1 - \sin_{BJ}^{\|\cdot\|}(\cdot,\cdot)^2}$ είναι συνεχής απεικόνιση. □

Πρόταση 3.11. Έστω ένας γραμμικός χώρος με νόρμα $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$. Υποθέτουμε ότι η διάσταση του αυτού γραμμικού χώρου είναι μεγαλύτερη ή ίση του 3. Το Birkhoff-James συνημίτονο είναι συμμετρικό, δηλαδή αν για κάθε μη μηδενικά στοιχεία χ, ψ του γραμμικού χώρου $\mathcal{X}$ έχουμε ότι $\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi,\psi) = \cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\psi,\chi)$, αν και μόνο αν ο χώρος $\mathcal{X}$ είναι χώρος εσωτερικού γινομένου.

Απόδειξη. Αφού ισχύει ότι $\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi,\psi) = \cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\psi,\chi)$ για κάθε μη μηδενικά στοιχεία $\chi, \psi \in \mathcal{X}$, τότε θα έχουμε ότι

$$cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi,\psi) = 0 \text{ αν και μόνο αν } \cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\psi,\chi) = 0.$$

Αυτό όμως σημαίνει ότι

$$\chi \perp_{BJ} \psi \text{ αν και μόνο αν } \psi \perp_{BJ} \chi.$$

Πράγματι,

$$\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi,\psi)=0 \Leftrightarrow 0\in F^0_{\|\cdot\|}(\psi;\chi) \Leftrightarrow \chi \perp_{BJ} \psi$$

και

$$\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\psi,\chi)=0 \Leftrightarrow 0\in F^0_{\|\cdot\|}(\chi;\psi) \Leftrightarrow \psi \perp_{BJ} \chi.$$

Επομένως, η Birkhoff-James ορθογωνιότητα είναι συμμετρική, δηλαδή η νόρμα $\|\cdot\|$ επάγεται από εσωτερικό γινόμενο. □

Παράδειγμα 3.12. *Έστω ο γραμμικός χώρος $\mathcal{X}=\mathbb{C}^3$ εφοδιασμένος με τη νόρμα $\|\cdot\|_\infty$. Θεωρούμε τα διανύσματα* $\chi=\begin{bmatrix}1\\ \frac{1}{2}\\ 0\end{bmatrix}$, $\psi=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$ *και* $\zeta=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}$. *Έχουμε ότι*

$$\begin{aligned}\|\chi+\lambda\psi\|_\infty &= \left\|\begin{bmatrix}1\\ \frac{1}{2}+\lambda\\ \lambda\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}\right\|_\infty = \max\left\{1,\left|\frac{1}{2}+\lambda\right|,\frac{|\lambda|\sqrt{3}}{2}\right\}\\ &\geq 1=\|\chi\|_\infty,\quad \forall\lambda\in\mathbb{C},\end{aligned}$$

ή ισοδύναμα, $0\in F^0_{\|\cdot\|_\infty}(\psi;\chi)$. *Κάνοντας αντίστοιχους υπολογισμούς όπως στα προηγούμενα παραδείγματα, συμπεραίνουμε ότι*

$$\cos_{BJ}^{\|\cdot\|_\infty}(\chi,\psi)=0.$$

Από την άλλη τώρα,

$$\begin{aligned}\|\psi+\lambda\chi\|_\infty &= \left\|\begin{bmatrix}\lambda\\ 1+\lambda\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}\right\|_\infty = \max\left\{|\lambda|,\left|1+\lambda\frac{1}{2}\right|,\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}\\ &\geq \frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\|\psi\|_\infty=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}\|\psi\|_\infty,\quad \forall\lambda\in\mathbb{C},\end{aligned}$$

ή ισοδύναμα, $0 \in F^{\frac{1}{2}}_{\|\cdot\|_\infty}(\chi;\psi)$.

Τελικά

$$\cos^{\|\cdot\|_\infty}_{BJ}(\psi,\chi) = \frac{1}{2}.$$

Επιπλέον, έχουμε

$$\begin{aligned} \|\chi + \lambda\zeta\|_\infty &= \left\| \begin{bmatrix} 1+\lambda \\ \frac{1}{2} \\ \frac{\lambda}{2} \end{bmatrix} \right\|_\infty = \max\left\{ |1+\lambda|, \frac{1}{2}, \frac{|\lambda|}{2} \right\} \\ &\geq \frac{1}{2} = \|\chi\|_\infty \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα, $0 \in F^{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\|\cdot\|_\infty}(\psi;\chi)$. *Κάνοντας αντίστοιχους υπολογισμούς όπως στα προηγούμενα παραδείγματα, συμπεραίνουμε ότι*

$$\cos^{\|\cdot\|_\infty}_{BJ}(\chi,\zeta) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Επιπλέον, συμπεραίνουμε ότι

$$\cos^{\|\cdot\|_\infty}_{BJ}(\zeta,\chi) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Γενικά γνωρίζουμε ότι η νόρμα ενός γραμμικού χώρου θα επάγεται από εσωτερικό γινόμενο αν και μόνο αν ισχύει ο Νόμος των Συνημιτόνων.

Πρόταση 3.13. Έστω $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ ένας γραμμικός χώρος με νόρμα. Η νόρμα $\|\cdot\|$ επάγεται από ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$ αν και μόνο αν για κάθε δύο μη μηδενικά στοιχεία $\chi, \psi \in \mathcal{X}$ ισχύει

$$\cos^{\|\cdot\|}_{BJ}(\chi,\psi) = \frac{\left|\, \|\chi\|^2 + \|\psi\|^2 - \|\chi-\psi\|^2 \right|}{2\,\|\chi\|\,\|\psi\|}.$$

Απόδειξη. Έστω χ και ψ δύο μη μηδενικά στοιχεία του γραμμικού χώρου $\mathcal{X}$ για τα οποία ισχύει

$$\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi,\psi) = \frac{|\,\|\chi\|^2 + \|\psi\|^2 - \|\chi-\psi\|^2|}{2\,\|\chi\|\,\|\psi\|}.$$

Αν το στοιχείο χ είναι Birkhoff-James ορθογώνιο στο στοιχείο ψ, τότε

$$\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi,\psi) = \frac{|\,\|\chi\|^2 + \|\psi\|^2 - \|\chi-\psi\|^2|}{2\,\|\chi\|\,\|\psi\|} = 0,$$

ή ισοδύναμα, $\|\chi\|^2 + \|\psi\|^2 = \|\chi-\psi\|^2$. Άρα η Birkhoff-James ορθογωνιότητα συνεπάγεται την Πυθαγόρεια ορθογωνιότητα. Επομένως, από [2] και [49], ο χώρος $\mathcal{X}$ είναι χώρος εσωτερικού γινομένου. □

Πρόταση 3.14. Αν $\chi,\psi \in \mathcal{X}$ δύο μη μηδενικά και μη παράλληλα διανύσματα, τότε για κάθε $\varepsilon_0 \in (0,1)$, υπάρχουν άπειροι μιγαδικοί αριθμοί μ_0 τέτοιοι ώστε

$$\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi,\psi-\mu_0\chi) = \varepsilon_0.$$

Ειδικότερα, αυτοί οι μιγαδικοί μ_0 είναι ακριβώς όλα τα συνοριακά σημεία του συνόλου $F_{\|\cdot\|}^{\varepsilon_0}(\psi;\chi)$.

Απόδειξη. Έστω δυο μη μηδενικά και μη παράλληλα διανύσματα $\chi,\psi \in \mathcal{X}$. Θεωρούμε ένα τυχαίο $\varepsilon_0 \in (0,1)$. Για κάθε $\mu_0 \in \partial F_{\|\cdot\|}^{\varepsilon_0}(\psi;\chi)$, έχουμε ότι

$$0 \in \partial F_{\|\cdot\|}^{\varepsilon_0}(\psi-\mu_0\chi;\chi)$$

και

$$\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi,\psi-\mu_0\chi) = \varepsilon_0.$$

Επιπλέον, το σύνολο $F_{\|\cdot\|}^{\varepsilon_0}(\psi;\chi)$ είναι συμπαγές και κυρτό και αφού τα στοιχεία χ,ψ δεν είναι παράλληλα, τότε δεν είναι μονοσύνολο και έχει άπειρα συνοριακά σημεία. □

Πρόταση 3.15. Έστω δύο τυχαία στοιχεία $\chi,\psi \in \mathcal{X}$, μη παράλληλα, μη μηδενικά. Τότε

$$\sin_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi,\chi\pm\psi) \leq \frac{\|\psi\|}{\|\chi\|}.$$

Απόδειξη. Έστω $\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi, \chi \pm \psi) = \varepsilon_0 < 1$. Τότε

$$0 \in F_{\|\cdot\|}^{\varepsilon_0}(\chi \pm \psi; \chi) \text{ δηλαδή } \chi \perp_{BJ}^{\varepsilon_0} (\chi \pm \psi).$$

Άρα, $\|\chi + \lambda(\chi \pm \psi)\| \geq \sqrt{1 - {\varepsilon_0}^2}\|\chi\|$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$.

Επομένως, για $\lambda = -1$ έχουμε ότι

$$\|\psi\| \geq \sqrt{1 - {\varepsilon_0}^2}\|\chi\|, \text{ δηλαδή } \sin_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi, \chi \pm \psi) \leq \frac{\|\psi\|}{\|\chi\|},$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Αν $\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi, \chi \pm \psi) = 1$, τότε $\sin_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi, \chi \pm \psi) = 0$.

Πόρισμα 3.16. Έστω δύο στοιχεία $\chi, \psi \in \mathcal{X}$ με $\chi, \psi \neq 0$. Τότε

$$\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi, \chi \pm \psi) \geq \sqrt{\left|1 - \frac{\|\psi\|^2}{\|\chi\|^2}\right|}.$$

Πρόταση 3.17. Έστω γραμμικός χώρος με νόρμα $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ και δύο στοιχεία $\chi, \psi \in \mathcal{X}$ μη μηδενικά και μη παράλληλα τέτοια ώστε $\|\psi - \chi\| = \|\psi\|$. Τότε

$$\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\psi, \chi) = \cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\psi - \chi, \chi).$$

Απόδειξη. Έστω $\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\psi, \chi) = \varepsilon_1$ και $\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\psi - \chi, \chi) = \varepsilon_2$. Τότε, βάσει του ορισμού, $0 \in F_{\|\cdot\|}^{\varepsilon_1}(\chi; \psi)$ και άρα $\psi \perp_{BJ}^{\varepsilon_1} \chi$. Επομένως,

$$\|\psi - \lambda\chi\| \geq \sqrt{1 - {\varepsilon_1}^2}\,\|\psi\|, \quad \forall\,\lambda \in \mathbb{C},$$

ή ισοδύναμα,

$$\|\psi - \chi - (\lambda - 1)\chi\| \geq \sqrt{1 - {\varepsilon_1}^2}\,\|\psi\|, \quad \forall\,\lambda \in \mathbb{C},$$

ή ισοδύναμα,

$$\|(\psi - \chi) - \kappa\chi\| \geq \sqrt{1 - {\varepsilon_1}^2}\,\|\psi\|, \quad \forall\,\kappa \in \mathbb{C},$$

ή ισοδύναμα,

$$\|(\psi - \chi) - \kappa\chi\| \geq \sqrt{1 - {\varepsilon_1}^2}\,\|\psi - \chi\|, \quad \forall\,\kappa \in \mathbb{C}.$$

Άρα, $(\psi - \chi) \perp_{BJ}^{\varepsilon_1} \chi$, δηλαδή, $0 \in F_{\|\cdot\|}^{\varepsilon_1}(\chi; \psi - \chi)$. Επομένως,

$$\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\psi-\chi,\chi)=\varepsilon_2=\min\left\{\varepsilon\in[0,1):\ 0\in F_{\|\cdot\|}^{\varepsilon}(\chi;\psi-\chi)\right\}\leq\varepsilon_1.$$

Για την άλλη ανισότητα, θέτοντας $\psi-\chi$ αντί για ψ και $-\chi$ αντί για χ, έχουμε

$$\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}\left((\psi-\chi)+\chi,-\chi\right)\leq\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\psi-\chi,-\chi),$$

δηλαδή

$$\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\psi,\chi)\leq\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\psi-\chi,\chi).$$

Τελικά, $\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\psi,\chi)=\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\psi-\chi,\chi)$. □

Παρατήρηση 3.18. Η γεωμετρική ερμηνεία της Πρότασης 3.17 είναι η εξής: σε ένα ισοσκελές τρίγωνο, οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες.

Πόρισμα 3.19. Έστω ένας γραμμικός χώρος με νόρμα $(\mathcal{X},\|\cdot\|)$ και δύο στοιχεία $\chi,\psi\in\mathcal{X}$, μη παράλληλα, με $\chi,\psi\neq 0$ και $\|\psi-\chi\|=\|\psi\|=\|\chi\|$. Υποθέτουμε ότι $\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\psi,\chi)=\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi,\psi)$. Τότε

$$\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\psi,\chi)=\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi,\psi)=\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\psi-\chi,\chi)=\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\psi-\chi,\psi).$$

Απόδειξη. Από τη Πρόταση 3.17, έχουμε ότι $\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\psi,\chi)=\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\psi-\chi,\chi)$ και $\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi,\psi)=\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi-\psi,\chi)=\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\psi-\chi,\chi)$. Λόγω της υπόθεσης της συμμετρίας του Birkhoff-James συνημιτόνου των χ και ψ, προκύπτει άμεσα το ζητούμενο. □

Παρατήρηση 3.20. Η γεωμετρική ερμηνεία του Πορίσματος 3.19 είναι η εξής: σε ένα ισόπλευρο τρίγωνο, με δεδομένη τη συμμετρία του συνημιτόνου της γωνίας των χ και ψ, οι γωνίες είναι ίσες.

Παρατήρηση 3.21. Αν $\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi+\psi,\chi-\psi)=0$ για κάθε χ, $\psi\in\mathcal{X}$ μη μηδενικά, με $\|\chi\|=\|\psi\|=1$, τότε η νόρμα $\|\cdot\|$ επάγεται από ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Απόδειξη. Πράγματι, αφού θα ισχύει $(\chi+\psi)\perp_{BJ}(\chi-\psi)$, τότε από [1] και [2], ο γραμμικός χώρος $\mathcal{X}$ είναι χώρος εσωτερικού γινομένου. □

Παρατήρηση 3.22. Η γεωμετρική ερμηνεία της Παρατήρησης 3.21 είναι η εξής: αν υπάρχει ρόμβος (με κάθετες τις διαγωνίους και ίσες τις διαδοχικές πλευρές του), τότε η νόρμα $\|\cdot\|$ επάγεται από ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Έστω δύο μη μηδενικά διανύσματα $\chi, \psi \in \mathcal{X}$ τέτοια ώστε $0 \in F^0_{\|\cdot\|}(\psi;\chi)$, ή ισοδύναμα, $\chi \perp_{BJ} \psi$. Τότε

$$\|\chi + \lambda\psi\| \geq \|\chi\|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C},$$

ή ισοδύναμα,

$$s(\chi,\psi) = \inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \frac{\|\chi+\lambda\psi\|}{\|\chi\|} = \min_{\lambda\in\mathbb{C}} \frac{\|\chi+\lambda\psi\|}{\|\chi\|} = \frac{\|\chi+0\psi\|}{\|\chi\|} = 1,$$

το οποίο είναι απολύτως συμβατό με το

$$\cos^{\|\cdot\|}_{BJ}(\chi,\psi) = 0 \quad \text{και} \quad \sin^{\|\cdot\|}_{BJ}(\chi,\psi) = \sqrt{1-\cos_{BJ}(\chi,\psi)^2} = 1.$$

Επιπλέον, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός $\rho_0 \geq 0$ τέτοιος ώστε $\mathcal{D}(0,\rho_0) \subseteq F^0_{\|\cdot\|}(\psi;\chi)$. Τότε από τη σχέση

$$\mathcal{D}(0,\rho_0) \subseteq F^0_{\|\cdot\|}(\psi;\chi) = \bigcap_{\lambda\in\mathbb{C}} \mathcal{D}\left(\lambda, \frac{\|\psi-\lambda\chi\|}{\|\chi\|}\right) \subseteq \mathcal{D}\left(0, \frac{\|\psi-0\chi\|}{\|\chi\|}\right),$$

είναι φανερό ότι $\rho_0 \leq \dfrac{\|\psi\|}{\|\chi\|}$ και για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ ισχύει

$$\mathcal{D}(0,\rho_0) \subseteq F^0_{\|\cdot\|}(\psi;\chi) \subseteq \mathcal{D}\left(\lambda, \frac{\|\psi-\lambda\chi\|}{\|\chi\|}\right).$$

Άρα, $\dfrac{\|\psi-\lambda\chi\|}{\|\chi\|} \geq |\lambda| + \rho_0$. Επομένως,

$$\begin{aligned}
\rho_0 &\leq \inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \left\{ \frac{\|\psi-\lambda\chi\|}{\|\chi\|} - |\lambda| \right\} = \inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \frac{\|\psi-\lambda\chi\| - \|\lambda\chi\|}{\|\chi\|} \\
&\leq \inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \frac{\|\psi-\lambda\chi\|}{\|\chi\|} = \inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \frac{\|\psi+\lambda\chi\|}{\|\chi\|} = \frac{\|\psi\|}{\|\chi\|} \inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \frac{\|\psi+\lambda\chi\|}{\|\psi\|} \\
&= \frac{\|\psi\|}{\|\chi\|} s(\psi,\chi) = \frac{\|\psi\|}{\|\chi\|} \sin^{\|\cdot\|}_{BJ}(\psi,\chi).
\end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι, αν $\chi \perp_{BJ} \psi \Leftrightarrow 0 \in F^0_{\|\cdot\|}(\psi;\chi)$ και $\mathcal{D}(0,\rho_0) \subseteq F^0_{\|\cdot\|}(\psi;\chi)$, τότε

$$\sin^{\|\cdot\|}_{BJ}(\chi,\psi) = 1 \;\; \text{και} \;\; \sin^{\|\cdot\|}_{BJ}(\psi,\chi) \geq \frac{\|\chi\|}{\|\psi\|}\rho_0,$$

δηλαδή

$$0 \leq \frac{\|\chi\|}{\|\psi\|}\rho_0 \leq \sin_{BJ}^{\|\cdot\|}(\psi,\chi) \leq 1 = \sin_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi,\psi),$$

ή ισοδύναμα,

$$\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi,\psi) = 0 \leq \cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\psi,\chi) \leq \sqrt{1 - \left(\frac{\|\chi\|}{\|\psi\|}\rho_0\right)^2}.$$

Ειδικότερα, αν $\rho_0 = \dfrac{\|\psi\|}{\|\chi\|} \Leftrightarrow F^0_{\|\cdot\|}(\psi;\chi) = \mathcal{D}\left(0, \dfrac{\|\psi\|}{\|\chi\|}\right)$, τότε

$$\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\psi,\chi) = 0 = \cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi,\psi).$$

Στη γενική περίπτωση για $\varepsilon \in [0,1)$, ας θεωρήσουμε δύο μη μηδενικά διανύσματα $\chi, \psi \in \mathcal{X}$ τέτοια ώστε $0 \in F^\varepsilon_{\|\cdot\|}(\psi;\chi)$, ή ισοδύναμα, $\chi \perp^\varepsilon_{BJ} \psi$. Τότε

$$\|\chi + \lambda\psi\| \geq \sqrt{1-\varepsilon^2}\|\chi\|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C},$$

ή ισοδύναμα,

$$\sin_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi,\psi) = s(\chi,\psi) = \inf_{\lambda \in \mathbb{C}} \frac{\|\chi + \lambda\psi\|}{\|\chi\|} \leq \sqrt{1-\varepsilon^2},$$

ή ισοδύναμα,

$$\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi,\psi) \geq \varepsilon.$$

Επιπλέον, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός $\rho_\varepsilon > 0$ τέτοιος ώστε $\mathcal{D}(0,\rho_\varepsilon) \subseteq F^\varepsilon_{\|\cdot\|}(\psi;\chi)$. Τότε από τη σχέση

$$\mathcal{D}(0,\rho_\varepsilon) \subseteq F^\varepsilon_{\|\cdot\|}(\psi;\chi) = \bigcap_{\lambda \in \mathbb{C}} \mathcal{D}\left(\lambda, \frac{\|\psi - \lambda\chi\|}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\|\chi\|}\right) \subseteq \mathcal{D}\left(0, \frac{\|\psi - 0\chi\|}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\|\chi\|}\right),$$

είναι φανερό ότι $\rho_\varepsilon \leq \dfrac{\|\psi\|}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\|\chi\|}$, και για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$, ισχύει

$$\mathcal{D}(0,\rho_\varepsilon) \subseteq F^\varepsilon_{\|\cdot\|}(\psi;\chi) \subseteq \mathcal{D}\left(\lambda, \frac{\|\psi - \lambda\chi\|}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\|\chi\|}\right). \text{ Άρα, } \frac{\|\psi - \lambda\chi\|}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\|\chi\|} \geq |\lambda| + \rho_\varepsilon.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\rho_\varepsilon &\le \inf_{\lambda\in\mathbb{C}}\left\{\frac{\|\psi-\lambda\chi\|}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\|\chi\|}-|\lambda|\right\}=\inf_{\lambda\in\mathbb{C}}\frac{\|\psi-\lambda\chi\|-\sqrt{1-\varepsilon^2}\|\lambda\chi\|}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\|\chi\|}\\ &\le \inf_{\lambda\in\mathbb{C}}\frac{\|\psi-\lambda\chi\|}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\|\chi\|}=\inf_{\lambda\in\mathbb{C}}\frac{\|\psi+\lambda\chi\|}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\|\chi\|}=\frac{\|\psi\|}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\|\chi\|}\inf_{\lambda\in\mathbb{C}}\frac{\|\psi+\lambda\chi\|}{\|\psi\|}\\ &= \frac{\|\psi\|}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\|\chi\|}s(\psi,\chi)=\frac{\|\psi\|}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\|\chi\|}\sin_{BJ}^{\|\cdot\|}(\psi,\chi).\end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι, αν $\chi \perp_{BJ}^{\varepsilon} \psi \Leftrightarrow 0 \in F_{\|\cdot\|}^{\varepsilon}(\psi;\chi)$ και $\mathcal{D}(0,\rho_\varepsilon) \subseteq F_{\|\cdot\|}^{\varepsilon}(\psi;\chi)$, τότε

$$\sin_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi,\psi) \le \sqrt{1-\varepsilon^2} \quad \text{και} \quad \sin_{BJ}^{\|\cdot\|}(\psi,\chi) \ge \sqrt{1-\varepsilon^2}\left(\frac{\|\chi\|}{\|\psi\|}\rho_\varepsilon\right),$$

ή ισοδύναμα,

$$\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi,\psi) \ge \varepsilon \quad \text{και} \quad \cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\psi,\chi) \le \sqrt{1-\left(\frac{\|\chi\|}{\|\psi\|}\rho_\varepsilon\right)^2(1-\varepsilon^2)}.$$

Έστω $\mathcal{X}$ ένας γραμμικός χώρος και έστω $\|\cdot\|_a, \|\cdot\|_b$ δύο ισοδύναμες νόρμες με $c\|\zeta\|_a \le \|\zeta\|_b \le C\|\zeta\|_a$, όπου $c, C > 0$ για κάθε $\zeta \in \mathcal{X}$. Υπενθυμίζουμε ότι από την Πρόταση 1.30, ισχύει ότι για κάθε $\varepsilon \in [0,1)$ έχουμε

$$F_{\|\cdot\|_a}^{\varepsilon}(\psi;\chi) \subseteq F_{\|\cdot\|_b}^{\varepsilon'}(\psi;\chi), \quad \text{με } \varepsilon' = \sqrt{1-\frac{c^2(1-\varepsilon^2)}{C^2}}.$$

Πρόταση 3.23. Έστω δύο μη μηδενικά στοιχεία $\chi,\psi \in \mathcal{X}$ και $\|\cdot\|_a, \|\cdot\|_b$ ισοδύναμες νόρμες όπως παραπάνω, τότε

$$\sin_{BJ}^{\|\cdot\|_a}(\chi,\psi) \le \frac{C}{c}\sin_{BJ}^{\|\cdot\|_b}(\chi,\psi).$$

Απόδειξη. Πράγματι, θεωρούμε ότι $\cos_{BJ}^{\|\cdot\|_a}(\chi,\psi) = \varepsilon_1$. Τότε, από τον ορισμό, $0 \in F_{\|\cdot\|_a}^{\varepsilon_1}(\psi;\chi) \subseteq F_{\|\cdot\|_b}^{\varepsilon_2}(\psi;\chi)$. Άρα, $\cos_{BJ}^{\|\cdot\|_b}(\chi,\psi) \le \varepsilon_2 = \sqrt{1-\frac{c^2(1-{\varepsilon_1}^2)}{C^2}}$.

Επομένως,

$$
\begin{aligned}
& \cos_{BJ}^{\|\cdot\|_b}(\chi,\psi) \leq \sqrt{1-\frac{c^2(1-{\varepsilon_1}^2)}{C^2}} \\
\Leftrightarrow\quad & {\cos_{BJ}^{\|\cdot\|_b}(\chi,\psi)}^2 \leq 1-\frac{c^2(1-{\varepsilon_1}^2)}{C^2} \\
\Leftrightarrow\quad & {\cos_{BJ}^{\|\cdot\|_b}(\chi,\psi)}^2 \leq 1-\frac{c^2(1-{\cos_{BJ}^{\|\cdot\|_a}(\chi,\psi)}^2)}{C^2} \\
\Leftrightarrow\quad & C^2{\cos_{BJ}^{\|\cdot\|_b}(\chi,\psi)}^2 \leq C^2-c^2(1-{\cos_{BJ}^{\|\cdot\|_a}(\chi,\psi)}^2) \\
\Leftrightarrow\quad & C^2{\cos_{BJ}^{\|\cdot\|_b}(\chi,\psi)}^2 - C^2 \leq -c^2(1-{\cos_{BJ}^{\|\cdot\|_a}(\chi,\psi)}^2) \\
\Leftrightarrow\quad & C^2({\cos_{BJ}^{\|\cdot\|_b}(\chi,\psi)}^2 - 1) \leq -c^2(1-{\cos_{BJ}^{\|\cdot\|_a}(\chi,\psi)}^2) \\
\Leftrightarrow\quad & C^2(1-{\cos_{BJ}^{\|\cdot\|_b}(\chi,\psi)}^2) \geq c^2(1-{\cos_{BJ}^{\|\cdot\|_a}(\chi,\psi)}^2) \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{C^2}{c^2} \geq \frac{(1-{\cos_{BJ}^{\|\cdot\|_a}(\chi,\psi)}^2)}{(1-{\cos_{BJ}^{\|\cdot\|_b}(\chi,\psi)}^2)} \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{C^2}{c^2} \geq \frac{{\sin_{BJ}^{\|\cdot\|_a}(\chi,\psi)}^2}{{\sin_{BJ}^{\|\cdot\|_b}(\chi,\psi)}^2} \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{C}{c} \geq \frac{\sin_{BJ}^{\|\cdot\|_a}(\chi,\psi)}{\sin_{BJ}^{\|\cdot\|_b}(\chi,\psi)} \\
\Leftrightarrow\quad & \sin_{BJ}^{\|\cdot\|_a}(\chi,\psi) \leq \frac{C}{c}\sin_{BJ}^{\|\cdot\|_b}(\chi,\psi).
\end{aligned}
$$

□

3.3 Ορισμός με Χρήση Γραμμικών Συναρτησιακών

Έστω $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ ένας γραμμικός χώρος με νόρμα, $\chi, \psi \in \mathcal{X}$, μη μηδενικά και μη παράλληλα. Με τη βοήθεια της γραφής του ορισμού του συνόλου Birkhoff-James ε-ορθογωνιότητας με τα γραμμικά συναρτησιακά, μπορούμε να γράψουμε και τον ορισμό του Birkhoff-James συνημιτόνου ως εξής:

$$
\begin{aligned}
&\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi,\psi) = \min\left\{\varepsilon \in [0,1) : \ 0 \in F_{\|\cdot\|}^{\varepsilon}(\psi;\chi)\right\} \\
= \ & \min\left\{\varepsilon \in [0,1) : \ f(\psi) = 0 \text{ για κάποιο } f \in L_{\varepsilon}(\chi)\right\} \\
= \ & \min\left\{\varepsilon \in [0,1) : \ f(\psi) = 0 \ \text{ για } f \in \mathcal{X}^* \text{ με } f(\chi) = \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\chi\| \ \text{ και } \ \|f\| \le 1\right\}.
\end{aligned}
$$

Στην περίπτωση που τα μη μηδενικά στοιχεία χ και ψ δεν είναι μεταξύ τους Birkhoff-James ορθογώνια και δεν είναι παράλληλα, έχουμε $\varepsilon \in (0,1)$ και

$$
\begin{aligned}
&\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi,\psi) = \min\left\{\varepsilon \in (0,1) : \ 0 \in \partial F_{\|\cdot\|}^{\varepsilon}(\psi;\chi)\right\} \\
= \ & \min\left\{\varepsilon \in (0,1) : \ f(\psi) = 0 \ \text{ για } f \in \mathcal{X}^* \text{ με } f(\chi) = \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\chi\| \ \text{ και } \ \|f\| = 1\right\} \\
= \ & \min\left\{\varepsilon \in (0,1) : \ f(\psi) = 0 \ \text{ για } f \in \mathcal{X}^*,\ \varepsilon = \sqrt{1-\left(\frac{f(\chi)}{\|\chi\|}\right)^2}\ f(\chi) > 0, \|f\| = 1\right\},
\end{aligned}
$$

Ένα βέλτιστο γραμμικό συναρτησιακό $f_{\chi;\psi} \in \mathcal{X}^*$ τέτοιο ώστε

$$
\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi,\psi) = \sqrt{1-\left(\frac{f_{\chi;\psi}(\chi)}{\|\chi\|}\right)^2},\ f_{\chi;\psi}(\psi) = 0,\ f_{\chi;\psi}(\chi) > 0 \text{ και } \|f_{\chi;\psi}\| = 1
$$

ικανοποιεί τη σχέση

$$
\sin_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi,\psi) = \frac{f_{\chi;\psi}\,(\chi)}{\|\chi\|} = \max_{\substack{f\in\mathcal{X}^* \\ \|f\|=1 \\ f(\psi)=0 \\ f(\chi)>0}} \frac{f(\chi)}{\|\chi\|} = \min_{\lambda\in\mathbb{C}} \frac{\|\chi+\lambda\psi\|}{\|\chi\|},
$$

ή ισοδύναμα,

$$
f_{\chi;\psi}\,(\chi) = \max_{\substack{f\in\mathcal{X}^* \\ \|f\|=1 \\ f(\psi)=0 \\ f(\chi)>0}} f(\chi) = \min_{\lambda\in\mathbb{C}} \|\chi+\lambda\psi\|.
$$

Στην περίπτωση που έχουμε ένα γραμμικό συναρτησιακό $f \in \mathcal{X}^*$ το οποίο ικανοποιεί τις συνθήκες $f(\psi) = 0,\ f(\chi) \in \mathbb{C}$ και $\|f\| = 1$, είναι προφανές ότι υπάρχει $\theta \in [0, 2\pi)$ τέτοιο ώστε το γραμμικό συναρτησιακό $f_\theta = e^{i\theta} f \in \mathcal{X}^*$ να ικανοποιεί τις συνθήκες

$$f_\theta(\psi) = e^{i\theta} f(\psi) = 0, \quad f_\theta(\chi) = e^{i\theta} f(\chi) = |f(\chi)| > 0 \quad \text{και } \|f_\theta\| = \|e^{i\theta} f\| = 1.$$

Επομένως, μπορούμε να παραλείψουμε τον περιορισμό $f(\chi) > 0$ (ή $f(\chi) \in \mathbb{R}$) και οι παραπάνω σχέσεις μπορούν να γραφούν αντίστοιχα ως εξής:

$$\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi, \psi) = \min \left\{ \sqrt{1 - \left(\frac{|f(\chi)|}{\|\chi\|} \right)^2} \in (0,1) : f \in \mathcal{X}^* \text{ με } f(\psi) = 0 \text{ και } \|f\| = 1 \right\}$$

και

$$\sin_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi, \psi) = \frac{|f_{\chi;\psi}(\chi)|}{\|\chi\|} = \max_{\substack{f \in \mathcal{X}^* \\ \|f\|=1 \\ f(\psi)=0}} \frac{|f(\chi)|}{\|\chi\|} = \min_{\lambda \in \mathbb{C}} \frac{\|\chi + \lambda\psi\|}{\|\chi\|},$$

ή ισοδύναμα,

$$|f_{\chi;\psi}(\chi)| = \max_{\substack{f \in \mathcal{X}^* \\ \|f\|=1 \\ f(\psi)=0}} |f(\chi)| = \min_{\lambda \in \mathbb{C}} \|\chi + \lambda\psi\|,$$

όπου $f_{\chi;\psi} \in \mathcal{X}^*$ τέτοιο ώστε

$$\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi, \psi) = \sqrt{1 - \left(\frac{|f_{\chi;\psi}(\chi)|}{\|\chi\|} \right)^2}, \quad f_{\chi;\psi}(\psi) = 0 \quad \text{και} \quad \|f_{\chi;\psi}\| = 1.$$

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
& \cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi, \psi)^2 = 1 - \left(\frac{|f_{\chi;\psi}(\chi)|}{\|\chi\|} \right)^2 \\
\Leftrightarrow \quad & \left(\frac{|f_{\chi;\psi}(\chi)|}{\|\chi\|} \right)^2 = 1 - \cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi, \psi)^2 = \sin_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi, \psi)^2 \\
\Leftrightarrow \quad & |f_{\chi;\psi}(\chi)| = \|\chi\| \sqrt{1 - \cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi, \psi)^2} = \|\chi\| \sin_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi, \psi)
\end{aligned}$$

και

$$\tan_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi, \psi) = \frac{|f_{\chi;\psi}(\chi)|}{\sqrt{\|\chi\|^2 - |f_{\chi;\psi}(\chi)|^2}} = \frac{\min\limits_{\lambda \in \mathbb{C}} \|\chi + \lambda\psi\|}{\sqrt{\|\chi\|^2 - \left(\min\limits_{\lambda \in \mathbb{C}} \|\chi + \lambda\psi\| \right)^2}}.$$

3.4 Σχέση Birkhoff-James Συνημιτόνου με άλλα Συνημίτονα

Εμπνεόμενος από την Πυθαγόρεια ορθογωνιότητα και τον γνωστό Νόμο των Συνημιτόνων, ο Wilson στο [57] θεώρησε το P-συνημίτονο μεταξύ δύο μη μηδενικών διανυσμάτων χ, ψ ενός γραμμικού χώρου με νόρμα $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ ως εξής:

$$\cos_P(\chi, \psi) = \frac{\|\chi\|^2 + \|\psi\|^2 - \|\chi - \psi\|^2}{2\|\chi\| \, \|\psi\|}$$

Αυτό το συνημίτονο είναι συμμετρικό αλλά όχι ομογενές [5].

Πρόταση 3.24. Έστω δύο στοιχεία $\chi, \psi \in \mathcal{X}$ με $\chi, \psi \neq 0$. Τότε

$$\cos_P(\chi, \psi) \leq \frac{\|\psi\|}{2\|\chi\|} + \cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi, \psi)^2 \, \frac{\|\chi\|}{2\|\psi\|}.$$

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι ισχύει $\|\chi\|^2 + \|\psi\|^2 \geq \|\chi - \psi\|^2$. Έστω $\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi, \psi) = \varepsilon_0 < 1$. Τότε $0 \in F_{\|\cdot\|}^{\varepsilon_0}(\psi; \chi)$ και άρα, $\chi \perp_{BJ}^{\varepsilon_0} \psi$. Επομένως,

$$\begin{aligned}
& \|\chi - \lambda\psi\| \geq \sqrt{1 - {\varepsilon_0}^2} \, \|\chi\|, \quad \forall \, \lambda \in \mathbb{C} \\
\Longrightarrow \quad & \|\chi - \psi\| \geq \sqrt{1 - {\varepsilon_0}^2} \, \|\chi\| \qquad (\text{για } \lambda = 1) \\
\Longrightarrow \quad & -\|\chi - \psi\|^2 \leq -(1 - {\varepsilon_0}^2) \, \|\chi\|^2.
\end{aligned}$$

Άρα,

$$\begin{aligned}
0 \leq \cos_P(\chi, \psi) &= \frac{\|\chi\|^2 + \|\psi\|^2 - \|\chi - \psi\|^2}{2\|\chi\| \, \|\psi\|} \\
&\leq \frac{\|\chi\|^2 + \|\psi\|^2 - (1 - {\varepsilon_0}^2)\|\chi\|^2}{2\|\chi\| \, \|\psi\|} \\
&= \frac{\|\chi\|^2 + \|\psi\|^2 - (\|\chi\|^2 - {\varepsilon_0}^2\|\chi\|^2)}{2\|\chi\| \, \|\psi\|} \\
&= \frac{\|\psi\|^2 + {\varepsilon_0}^2\|\chi\|^2}{2\|\chi\| \, \|\psi\|} \\
&= \frac{\|\psi\|^2}{2\|\chi\| \, \|\psi\|} + \frac{{\varepsilon_0}^2\|\chi\|^2}{2\|\chi\| \, \|\psi\|} \\
&= \frac{\|\psi\|}{2\|\chi\|} + \frac{\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi, \psi)^2 \, \|\chi\|}{2\|\psi\|}.
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\cos_P(\chi,\psi) \leq \frac{\|\psi\|}{2\|\chi\|} + \cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi,\psi)^2 \, \frac{\|\chi\|}{2\|\psi\|}.$$

□

Πόρισμα 3.25. Έστω δύο στοιχεία $\chi, \psi \in \mathcal{X}$ με $\chi, \psi \neq 0$. Αν $\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi,\psi) = 0$, τότε $\|\chi\| \leq \|\chi - \psi\|$.

Απόδειξη. Από την παραπάνω πρόταση για $\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi,\psi) = 0$ θα έχουμε

$$\begin{aligned}
& \cos_P(\chi,\psi) \leq \frac{\|\psi\|}{2\|\chi\|} \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{\|\chi\|^2 + \|\psi\|^2 - \|\chi-\psi\|^2}{2\|\chi\|\,\|\psi\|} \leq \frac{\|\psi\|}{2\|\chi\|} \\
\Leftrightarrow\quad & \|\chi\|^2 + \|\psi\|^2 - \|\chi-\psi\|^2 \leq \|\psi\|^2 \\
\Leftrightarrow\quad & \|\chi\|^2 \leq \|\chi-\psi\|^2.
\end{aligned}$$

□

Παρατήρηση 3.26. Αντίστοιχα, αφού $\cos_P(\chi,\psi) = \cos_P(\psi,\chi)$, θα έχουμε ότι

$$\cos_P(\psi,\chi) \leq \frac{\|\chi\|}{2\|\psi\|} + \cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\psi,\chi)^2 \, \frac{\|\psi\|}{2\|\chi\|}$$

και άρα, αν $\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\psi,\chi) = 0$, τότε η $\|\chi - \psi\|$ μεγαλύτερη από την $\|\psi\|$.

Θεωρούμε

$$\cos_I(\chi,\psi) = \frac{\|\chi+\psi\|^2 - \|\chi-\psi\|^2}{4\|\chi\|\,\|\psi\|},$$

το συνημίτονο που προέρχεται από την ισοσκελή ορθογωνιότητα [5].

Πρόταση 3.27. Έστω δύο στοιχεία $\chi, \psi \in \mathcal{X}$ με $\chi, \psi \neq 0$. Τότε

$$\cos_I(\chi,\psi) \leq \frac{\|\chi+\psi\|^2 - \|\chi\|^2}{4\|\chi\|\,\|\psi\|} + \cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi,\psi)^2 \, \frac{\|\chi\|}{4\|\psi\|}.$$

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι $\|\chi+\psi\| \geq \|\chi-\psi\|$. Έστω $\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi,\psi)=\varepsilon_0$. Τότε $0 \in F_{\|\cdot\|}^{\varepsilon_0}(\psi;\chi)$ και $\chi \perp_{BJ}^{\varepsilon_0} \psi$. Επομένως,

$$\begin{aligned} & \|\chi-\lambda\psi\| \geq \sqrt{1-{\varepsilon_0}^2}\,\|\chi\|, \quad \forall\,\lambda\in\mathbb{C} \\ \Longrightarrow\ & \|\chi-\psi\| \geq \sqrt{1-{\varepsilon_0}^2}\,\|\chi\| \qquad (\text{για } \lambda=1) \\ \Longrightarrow\ & \|\chi-\psi\|^2 \geq (1-{\varepsilon_0}^2)\,\|\chi\|^2 \\ \Longrightarrow\ & -\|\chi-\psi\|^2 \leq -(1-{\varepsilon_0}^2)\,\|\chi\|^2. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\begin{aligned} 0 \leq \cos_I(\chi,\psi) &= \frac{\|\chi+\psi\|^2-\|\chi-\psi\|^2}{4\|\chi\|\,\|\psi\|} \\ &\leq \frac{\|\chi+\psi\|^2-(1-{\varepsilon_0}^2)\|\chi\|^2}{4\|\chi\|\,\|\psi\|} \\ &= \frac{\|\chi+\psi\|^2-(\|\chi\|^2-{\varepsilon_0}^2\|\chi\|^2)}{4\|\chi\|\,\|\psi\|} \\ &= \frac{\|\chi+\psi\|^2-\|\chi\|^2+{\varepsilon_0}^2\|\chi\|^2}{4\|\chi\|\,\|\psi\|} \\ &= \frac{\|\chi+\psi\|^2-\|\chi\|^2}{4\|\chi\|\,\|\psi\|} + \frac{{\varepsilon_0}^2\|\chi\|^2}{4\|\chi\|\,\|\psi\|} \\ &= \frac{\|\chi+\psi\|^2-\|\chi\|^2}{4\|\chi\|\,\|\psi\|} + \cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi,\psi)^2\,\frac{\|\chi\|}{4\|\psi\|}. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\cos_I(\chi,\psi) \leq \frac{\|\chi+\psi\|^2-\|\chi\|^2}{4\|\chi\|\,\|\psi\|} + \cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi,\psi)^2\,\frac{\|\chi\|}{4\|\psi\|}.$$

$\square$

Πρόταση 3.28. Έστω δύο στοιχεία $\chi,\psi\in\mathcal{X}$ με $\chi,\psi\neq 0$. Τότε

$$\frac{\|\chi\|^2-\|\chi-\psi\|^2}{4\|\chi\|\,\|\psi\|} - \cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi,\psi)^2\,\frac{\|\chi\|}{4\|\psi\|} \leq \cos_I(\chi,\psi).$$

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι $\|\chi+\psi\| \leq \|\chi-\psi\|$. Έστω $\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi,\psi)=\varepsilon_0$. Τότε $0 \in F_{\|\cdot\|}^{\varepsilon_0}(\psi;\chi)$ και $\chi \perp_{BJ}^{\varepsilon_0} \psi$. Επομένως,

$$\begin{aligned} & \|\chi-\lambda\psi\| \geq \sqrt{1-{\varepsilon_0}^2}\,\|\chi\|, \quad \forall\,\lambda\in\mathbb{C} \\ \Longrightarrow\ & \|\chi+\psi\| \geq \sqrt{1-{\varepsilon_0}^2}\,\|\chi\| \qquad (\text{για } \lambda=-1) \\ \Longrightarrow\ & \|\chi+\psi\|^2 \geq (1-{\varepsilon_0}^2)\,\|\chi\|^2. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\begin{aligned} 0 \geq \cos_I(\chi,\psi) &= \frac{\|\chi+\psi\|^2 - \|\chi-\psi\|^2}{4\|\chi\|\ \|\psi\|} \\ &\geq \frac{(1-{\varepsilon_0}^2)\|\chi\|^2 - \|\chi-\psi\|^2}{4\|\chi\|\ \|\psi\|} \\ &= \frac{\|\chi\|^2 - {\varepsilon_0}^2\|\chi\|^2 - \|\chi-\psi\|^2}{4\|\chi\|\ \|\psi\|} \\ &= \frac{\|\chi\|^2 - \|\chi-\psi\|^2}{4\|\chi\|\ \|\psi\|} - \frac{{\varepsilon_0}^2\|\chi\|^2}{4\|\chi\|\ \|\psi\|} \\ &= \frac{\|\chi\|^2 - \|\chi-\psi\|^2}{4\|\chi\|\ \|\psi\|} - \cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi,\psi)^2\ \frac{\|\chi\|}{4\|\psi\|}. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\frac{\|\chi\|^2 - \|\chi-\psi\|^2}{4\|\chi\|\ \|\psi\|} - \cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi,\psi)^2\ \frac{\|\chi\|}{4\|\psi\|} \leq \cos_I(\chi,\psi).$$

□

Παρατήρηση 3.29. Έστω $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ ένας γραμμικός πραγματικός χώρος με νόρμα.

- Αν για κάθε μη μηδενικά χ, ψ με $\cos_I(\chi,\psi) = 0$ έχουμε $\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi,\psi) = 0$, τότε η νόρμα $\|\cdot\|$ επάγεται από ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$.
- Αν για κάθε μη μηδενικά χ, ψ με $\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi,\psi) = 0$ έχουμε $\cos_I(\chi,\psi) = 0$, τότε η νόρμα $\|\cdot\|$ επάγεται από ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Τέλος, είδαμε ότι η Birkhoff-James ε-ορθογωνιότητα δεν έχει κάποια ισοδυναμία με την ε-ορθογωνιότητα που προκύπτει από το ημιεσωτερικό γινόμενο (σχετίζονται υπό προϋποθέσεις αλλά για διαφορετικά ε, βλέπε Πρόταση 1.23).

Παράδειγμα 3.30. *Θεωρούμε τον χώρο* $\mathbb{C}^3$ *με την νόρμα* $\|\cdot\|_3$ *και τα διανύσματα* $\chi = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ *και* $\psi = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. *Τότε παρατηρούμε ότι για κάθε αριθμό*

$\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}\|\chi + \lambda\psi\|_3 &= \left\| \begin{bmatrix} 1+\lambda \\ 0 \\ \lambda \end{bmatrix} \right\|_3 = (|1+\lambda|^3 + |\lambda|^3)^{\frac{1}{3}} \\ &\geq \frac{\sqrt[3]{2}}{2} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2} \|\chi\|_3 = \sqrt{1 - \left(1 - \left(\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\right)^2\right)} \|\chi\|_3.\end{aligned}$$

Για $\lambda = -\frac{1}{2}$, $\left\|\chi - \frac{1}{2}\psi\right\|_3 = \left\| \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \right\|_3 = \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2} \|\chi\|_3.$

Επομένως, για $\varepsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\right)^2}$ *θα ισχύει ότι* $0 \in \partial F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\psi;\chi)$ *και άρα,*

$$\cos^{\|\cdot\|}_{BJ}(\chi,\psi) = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\right)^2} = 0.776.$$

Παρατηρούμε ότι το συνημίτονο είναι (όπως αναμενόταν) διαφορετικό από το συνημίτονο που θα προέκυπτε από το ημιεσωτερικό γινόμενο (τον τύπο του οποίου έχουμε υπολογίσει στο Παράδειγμα 2.14)

$$\frac{|[\psi,\chi]|}{\|\psi\|_3 \, \|\chi\|_3} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = 0.7936.$$

Κεφάλαιο 4

Τελεστές

4.1 Συνημίτονο Τελεστών

Έστω δύο γραμμικοί χώροι με νόρμα $\mathcal{X}$ και $\mathcal{Y}$ και έστω δύο μη μηδενικά στοιχεία $\chi, \psi \in \mathcal{X}$. Επιπλέον, έστω οι γραμμικοί τελεστές $T, A : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$. Ενδιαφέρον παρουσιάζει και η μελέτη των παρακάτω συνημιτόνων:

Ορισμός 4.1.

$$\begin{aligned}\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(T\chi, T\psi) &= \min\left\{\varepsilon \in [0,1) : T\chi \perp_{BJ}^{\varepsilon} T\psi\right\} \\ &= \min\left\{\varepsilon \in [0,1) : \|T\chi - \lambda T\psi\| \geq \sqrt{1-\varepsilon^2}\|T\chi\|,\ \forall \lambda \in \mathbb{C}\right\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(T\chi, A\chi) &= \min\left\{\varepsilon \in [0,1) : T\chi \perp_{BJ}^{\varepsilon} A\chi\right\} \\ &= \min\left\{\varepsilon \in [0,1) : \|T\chi - \lambda A\chi\| \geq \sqrt{1-\varepsilon^2}\|T\chi\|,\ \forall \lambda \in \mathbb{C}\right\},\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(T, A) &= \min\left\{\varepsilon \in [0,1) : T \perp_{BJ}^{\varepsilon} A\right\} \\ &= \min\left\{\varepsilon \in [0,1) : \|T - \lambda A\| \geq \sqrt{1-\varepsilon^2}\|T\|,\ \forall \lambda \in \mathbb{C}\right\}.\end{aligned}$$

Ορισμός 4.2. Έστω ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής $U : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$. Ο τελεστής θα ονομάζεται δ-ισομετρία, αν υπάρχει $\delta \in (0,1)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\chi \in \mathcal{X}$ ισχύει:

$$(1-\delta)\|\chi\| \leq \|U\chi\| \leq (1+\delta)\|\chi\|.$$

Πρόταση 4.3. Έστω ένας γραμμικός τελεστής T που είναι πολλαπλάσιο μιας δ-ισομετρίας (δηλαδή $T = cU$, όπου U μια δ-ισομετρία). Αν $\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi,\psi) = \varepsilon_0$, τότε

$$\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(T\chi, T\psi) \leq \sqrt{1-\left(\frac{1-\delta}{1+\delta}\right)^2(1-{\varepsilon_0}^2)}.$$

Απόδειξη. Έστω $\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi,\psi) = \varepsilon_0$ και έστω $T = cU$. Τότε έχουμε $\chi \perp_{BJ}^{\varepsilon_0} \psi$ και άρα για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
\|T\chi - \lambda T\psi\| = \|T(\chi - \lambda\psi)\| &= \|cU(\chi-\lambda\psi)\| \\
&\geq |c|(1-\delta)\|\chi - \psi\| \\
&\geq |c|(1-\delta)\sqrt{1-{\varepsilon_0}^2}\,\|\chi\| \\
&\geq |c|\frac{(1-\delta)}{(1+\delta)}\sqrt{1-{\varepsilon_0}^2}\,\|U\chi\| \\
&\geq \frac{(1-\delta)}{(1+\delta)}\sqrt{1-{\varepsilon_0}^2}\,\|cU\chi\| \\
&\geq \frac{(1-\delta)}{(1+\delta)}\sqrt{1-{\varepsilon_0}^2}\,\|T\chi\| \\
&\geq \sqrt{1-\rho^2}\,\|T\chi\|,
\end{aligned}$$

όπου $\rho = \sqrt{1-\left(\frac{1-\delta}{1+\delta}\right)^2(1-{\varepsilon_0}^2)}$ αφού,

$$\begin{aligned}
&\sqrt{1-\rho^2} = \frac{(1-\delta)}{(1+\delta)}\sqrt{1-{\varepsilon_0}^2} \\
\Leftrightarrow\ & 1-\rho^2 = \left(\frac{1-\delta}{1+\delta}\right)^2(1-{\varepsilon_0}^2) \\
\Leftrightarrow\ & \rho^2 = 1-\left(\frac{1-\delta}{1+\delta}\right)^2(1-{\varepsilon_0}^2) \\
\Leftrightarrow\ & \rho = \sqrt{1-\left(\frac{1-\delta}{1+\delta}\right)^2(1-{\varepsilon_0}^2)}.
\end{aligned}$$

Επομένως, $\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(T\chi, T\psi) \leq \sqrt{1-\left(\frac{1-\delta}{1+\delta}\right)^2(1-{\varepsilon_0}^2)}.$ □

Παρατήρηση 4.4. Αφού $1-{\varepsilon_0}^2 = \sin_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi,\psi)^2$, το παραπάνω αποτέλεσμα μπορεί να γραφεί και ως εξής: $\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(T\chi,T\psi) \leq \sqrt{1-\left(\frac{1-\delta}{1+\delta}\right)^2 \sin_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi,\psi)^2}$.

Παρατήρηση 4.5. Αν ο T είναι απλή ισομετρία ($\delta = 0$), τότε για το παραπάνω έχουμε ότι $\rho = \varepsilon_0$ και άρα,

$$\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(T\chi,T\psi) \leq \varepsilon_0 = \cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi,\psi).$$

Ανάλογο αποτέλεσμα υπάρχει το [45].

Χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}(\cdot,\cdot)$ και $\mathcal{S}_{\mathcal{X}}(\cdot,\cdot)$ για μπάλες και σφαίρες εντός του $\mathcal{X}$, και θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{M}_T = \{\chi \in \mathcal{S}_{\mathcal{X}}(0,1) : \|T\chi\| = \|T\|\}$.

Πρόταση 4.6. Έστω $T, A : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ δύο φραγμένοι γραμμικοί τελεστές και έστω $\{\chi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}_{\mathcal{X}}(0,1)$ μια ακολουθία μοναδιαίων διανυσμάτων τέτοια ώστε $\|T\chi_n\| \longrightarrow \|T\|$. Τότε

$$\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(T,A) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(T\chi_n, A\chi_n).$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(T\chi_n, A\chi_n) < 1$ και ότι υπάρχει κάποιο $\varepsilon_0 \in [0,1)$ τέτοιο ώστε $\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(T\chi_n, A\chi_n) \leq \varepsilon_0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ισχύει ότι $T\chi_n \perp_{BJ}^{\varepsilon_0} A\chi_n$, ή

$$\|T\chi_n - \lambda A\chi_n\| \geq \sqrt{1-{\varepsilon_0}^2}\,\|T\chi_n\|, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{C},$$

ή

$$\|T - \lambda A\|\,\|\chi_n\| \geq \sqrt{1-{\varepsilon_0}^2}\,\|T\chi_n\|, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{C},$$

ή

$$\|T - \lambda A\| \geq \sqrt{1-{\varepsilon_0}^2}\,\|T\chi_n\|, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{C}.$$

Από την συνέχεια, αφού $\|T\chi_n\| \longrightarrow \|T\|$, έπεται ότι

$$\|T - \lambda A\| > \sqrt{1-{\varepsilon_0}^2}\,\|T\chi_n\|, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{C},$$

ή

$$\|T - \lambda A\| \geq \sqrt{1-{\varepsilon_0}^2}\,\|T\|, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{C}.$$

Τότε $T \perp_{BJ}^{\varepsilon_0} A$ και $\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(T,A) \leq \varepsilon_0$. □

Πόρισμα 4.7. Έστω $T, A : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ δύο φραγμένοι γραμμικοί τελεστές.

(i) Αν $\mathcal{M}_T \neq \emptyset$, τότε για οποιοδήποτε $\chi \in \mathcal{M}_T$, $\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(T, A) \leq \cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(T\chi, A\chi)$.

(ii) Αν $\{\chi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}_{\mathcal{X}}(0,1)$ είναι μια ακολουθία μοναδιαίων διανυσμάτων τέτοια ώστε $\|T\chi_n\| \longrightarrow \|T\|$, και $T\chi_n \perp_{BJ} A\chi_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $T \perp_{BJ} A$.

(iii) Αν $\mathcal{M}_T \neq \emptyset$ και υπάρχει ένα $\chi \in \mathcal{M}_T$ τέτοιο ώστε $T\chi \perp_{BJ} A\chi$, τότε $T \perp_{BJ} A$.

4.2 Γενικεύσεις του Θεωρήματος Bhatia-Šemrl

Όπως αναφέραμε στο πρώτο κεφάλαιο, οι Bhatia και Šemrl στο [7] απέδειξαν το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 1.25. Έστω ένας πεπερασμένος χώρος Hilbert $\mathcal{H}$ και δύο τετραγωνικοί πίνακες A και B σε αυτόν. Ο πίνακας A είναι Birkhoff-James ορθογώνιος στον πίνακα B αν και μόνο αν υπάρχει ένα μοναδιαίο διάνυσμα $\chi \in \mathcal{H}$ τέτοιο ώστε $\|A\chi\| = \|A\|$ και $\langle A\chi, B\chi\rangle = 0$.

Μελετώντας την αντίστοιχη περίπτωση, για τυχαίο χώρο με νόρμα, οι Li και Schneider κατέγραψαν αντιπαράδειγμα και μάλιστα σε πεπερασμένης διάστασης χώρο στο [38]. Για την απόδειξη ανάλογων αποτελεσμάτων για τυχαίο χώρο με νόρμα χρειάστηκαν επιπλέον προϋποθέσεις [52, 53].

Επεκτείνουμε δύο χαρακτηρισμούς για την Birkhoff-James ορθογωνιότητα των φραγμένων γραμμικών τελεστών σε μιγαδικούς γραμμικούς χώρους (για την περίπτωση των πραγματικών, [53, Θεωρήματα 2.1 και 2.8]). Για την συνέχεια, εισάγουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 4.8. Έστω δύο στοιχεία $\chi, \psi \in \mathcal{X}$, $\theta \in [0, 2\pi]$ και ένα $\varepsilon \in [0,1)$. Λέμε ότι

$$\psi \in \chi^{(\theta,\varepsilon)} \text{ αν } \|\chi + (e^{i\theta}r)\psi\| \geq \sqrt{1-\varepsilon^2}\|\chi\| \text{ για κάθε } r \geq 0.$$

Παρατήρηση 4.9. 1. Για οποιοδήποτε $\varepsilon \in [0,1)$ ισχύει

$$\chi \perp_{BJ}^{\varepsilon} \psi \text{ αν και μόνο αν } \psi \in \chi^{(\theta,\varepsilon)} \text{ για κάθε } \theta \in [0, 2\pi].$$

Πράγματι, $\chi \perp_{BJ}^{\varepsilon} \psi$ αν και μόνο αν $\|\chi + \lambda\psi\| \geq \sqrt{1-\varepsilon^2}\|\chi\|$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ αν και μόνο αν $\psi \in \chi^{(\theta,\varepsilon)}$, για κάθε $\theta \in [0, 2\pi]$.

2. Αν $\psi \in \chi^{(\theta,\varepsilon)}$ για κάποιο $\theta \in [0, 2\pi]$ και $\varepsilon \in [0, 1)$, τότε $\eta\psi \in (\mu\chi)^{(\theta,\varepsilon)}$, για κάθε $\eta, \mu \geq 0$. Πράγματι, θεωρούμε $\eta, \mu > 0$. Τότε

$$\begin{aligned}
\psi \in \chi^{(\theta,\varepsilon)} &\implies \|\chi + (e^{i\theta}r)\psi\| \geq \sqrt{1-\varepsilon^2}\|\chi\|, \quad \forall r \geq 0 \\
&\implies \|\eta\chi + (e^{i\theta}r\eta)\psi\| \geq \sqrt{1-\varepsilon^2}\|\eta\chi\|, \quad \forall r \geq 0 \\
&\implies \left\|\eta\chi + \left(e^{i\theta}\frac{r\eta}{\mu}\right)\psi\right\| \geq \sqrt{1-\varepsilon^2}\|\eta\chi\|, \quad \forall r \geq 0 \\
&\implies \|\eta\chi + (e^{i\theta}\kappa)\psi\| \geq \sqrt{1-\varepsilon^2}\|\eta\chi\|, \quad \forall \kappa \geq 0.
\end{aligned}$$

Για η και μ μηδενικά, ισχύει τετριμμένα η ιδιότητα. Άρα, $\eta\psi \in (\mu\chi)^{(\theta,\varepsilon)}$ για κάθε $\eta, \mu \geq 0$.

3. Για κάθε $\theta, \phi \in [0, 2\pi]$ με $0 < \phi \leq \theta \leq 2\pi$, έχουμε

$$\|\chi + (e^{i\theta}r)\psi\| = \|\chi + (e^{i(\theta-\phi)}r)e^{i\phi}\psi\|$$

και άρα,

$$\psi \in \chi^{(\theta,\varepsilon)} \text{ αν και μόνο αν } e^{i\phi}\psi \in \chi^{(\theta-\phi,\varepsilon)}.$$

Παρατήρηση 4.10. Αν $\psi \in \chi^{(\theta,\varepsilon)}$ για κάποιο $\theta \in [0, \pi]$, τότε $-\psi \in \chi^{(\theta+\pi,\varepsilon)}$ και $\psi \in (-\chi)^{(\theta+\pi,\varepsilon)}$, ενώ αν $\theta \in (\pi, 2\pi]$, τότε $-\psi \in \chi^{(\phi,\varepsilon)}$ και $\psi \in (-\chi)^{(\phi,\varepsilon)}$, όπου $\phi = \theta - \pi \in (0, \pi]$. Πράγματι, αν $\theta \in [0, \pi]$, τότε ισχύει: $-e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$. Επομένως, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\psi \in \chi^{(\theta,\varepsilon)} &\implies \|\chi + (e^{i\theta}r)\psi\| \geq \sqrt{1-\varepsilon^2}\|\chi\|, \quad \forall r \geq 0 \\
&\implies \|\chi + (-e^{i\theta}r)(-\psi)\| \geq \sqrt{1-\varepsilon^2}\|\chi\|, \quad \forall r \geq 0 \\
&\implies \|\chi + (e^{i(\theta+\pi)}r)(-\psi)\| \geq \sqrt{1-\varepsilon^2}\|\chi\|, \quad \forall r \geq 0 \\
&\implies -\psi \in \chi^{(\theta+\pi,\varepsilon)}.
\end{aligned}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned}
\psi \in \chi^{(\theta,\varepsilon)} &\implies \|\chi + (e^{i\theta}r)\psi\| \geq \sqrt{1-\varepsilon^2}\|\chi\|, \quad \forall r \geq 0 \\
&\implies \|-\chi + (-e^{i\theta}r)\psi\| \geq \sqrt{1-\varepsilon^2}\|-\chi\|, \quad \forall r \geq 0 \\
&\implies \|-\chi + (e^{i(\theta+\pi)}r)\psi\| \geq \sqrt{1-\varepsilon^2}\|-\chi\|, \quad \forall r \geq 0 \\
&\implies -\psi \in (-\chi)^{(\theta+\pi,\varepsilon)}.
\end{aligned}$$

Αν $\theta \in (\pi, 2\pi]$, τότε εργαζόμαστε ομοίως.

Λήμμα 4.11. Θεωρούμε δύο διανύσματα $\chi, \psi \in \mathcal{X}$, μια γωνία $\theta \in [0, 2\pi]$ και ένα $r_0 > 0$ τέτοια ώστε $\|\chi + (e^{i\theta} r_0)\psi\| < \|\chi\|$. Τότε για κάθε $r \in (0, r_0]$ ισχύει $\|\chi + (e^{i\theta} r)\psi\| < \|\chi\|$.

Απόδειξη. Από υπόθεση, έχουμε ότι $\|\chi + (e^{i\theta} r_0)\psi\| < \|\chi\|$. Για οποιοδήποτε $r \in (0, r_0]$, ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
\|\chi + (e^{i\theta} r)\psi\| &= \left\|\chi + \left(\frac{r}{r_0}\right) r_0 e^{i\theta}\psi\right\| \\
&= \left\|\left(\frac{r_0 - r}{r_0}\right)\chi + \left(\frac{r}{r_0}\right)\chi + \left(\frac{r}{r_0}\right) r_0 e^{i\theta}\psi\right\| \\
&\leq \left(\frac{r_0 - r}{r_0}\right)\|\chi\| + \left(\frac{r}{r_0}\right)\|\chi + r_0 e^{i\theta}\psi\| \\
&< \left(\frac{r_0 - r}{r_0}\right)\|\chi\| + \left(\frac{r}{r_0}\right)\|\chi\| \\
&= \|\chi\|.
\end{aligned}$$

□

Πρόταση 4.12. Θεωρούμε δύο διανύσματα $\chi, \psi \in \mathcal{X}$. Τότε, για οποιαδήποτε $\theta \in [0, \pi]$, $\psi \in \chi^{(\theta,0)}$ ή $\psi \in \chi^{(\theta+\pi,0)}$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $\psi \notin \chi^{(\theta,0)}$ και $\psi \notin \chi^{(\theta+\pi,0)}$. Τότε θα υπάρχουν δύο μιγαδικοί αριθμοί $\lambda_\theta = e^{i\theta} r_\theta$ και $\lambda_{\theta+\pi} = e^{i(\theta+\pi)} r_{\theta+\pi}$, με $r_\theta, r_{\theta+\pi} > 0$, έτσι ώστε $\|\chi + \lambda_\theta\psi\| < \|\chi\|$ και $\|\chi + \lambda_{\theta+\pi}\psi\| < \|\chi\|$. Από το Λήμμα 4.11, αν $\hat{r} = \min\{r_\theta, r_{\theta+\pi}\} > 0$, τότε για κάθε $r \in [-\hat{r}, 0) \cup (0, \hat{r}]$, $\|\chi + (e^{i\theta} r)\psi\| < \|\chi\|$ (και για οποιοδήποτε $r \in [-\hat{r}, 0) \cup (0, \hat{r}]$, το $-r$ βρίσκεται στο $[-\hat{r}, 0) \cup (0, \hat{r}]$). Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
\|\chi\| &= \left\|\frac{1}{2}(\chi + (e^{i\theta} r)\psi) + \frac{1}{2}(\chi + (-e^{i\theta} r)\psi)\right\| \\
&\leq \frac{1}{2}\|\chi + (e^{i\theta} r)\psi\| + \frac{1}{2}\|\chi + (-e^{i\theta} r)\psi\| \\
&< \frac{1}{2}\|\chi\| + \frac{1}{2}\|\chi\| \\
&= \|\chi\|,
\end{aligned}$$

το οποίο είναι άτοπο. □

Τώρα είμαστε σε θέση να επεκτείνουμε το Θεώρημα 2.2 του [52] και τα Θεωρήματα 2.1 και 2.8 του [53] σε μιγαδικούς γραμμικούς χώρους με νόρμα.

Θεώρημα 4.13. Θεωρούμε έναν μιγαδικό γραμμικό χώρο με νόρμα $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ πεπερασμένης διάστασης και έστω $T, A : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ δύο φραγμένοι γραμμικοί τελεστές. Τότε $T \perp_{BJ} A$ αν και μόνο αν για οποιοδήποτε $\theta \in [0, 2\pi]$, υπάρχει κάποιο $\chi_\theta \in \mathcal{M}_T$ τέτοιο ώστε $A\chi_\theta \in (T\chi_\theta)^{(\theta,0)}$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι για οποιοδήποτε $\theta \in [0, 2\pi]$, υπάρχει $\chi_\theta \in \mathcal{M}_T$ τέτοιο ώστε $A\chi_\theta \in (T\chi_\theta)^{(\theta,0)}$. Τότε για κάθε $\theta \in [0, 2\pi]$ και $r \geq 0$ έχουμε

$$\|T + (re^{i\theta})A\| \geq \|(T + (re^{i\theta})A)\chi_\theta\| \geq \|T\chi_\theta + (re^{i\theta})A\chi_\theta\| \geq \|T\chi_\theta\| = \|T\|,$$

δηλαδή $T \perp_{BJ} A$.

Αντίστροφα τώρα, υποθέτουμε ότι $T \perp_{BJ} A$. Έστω ότι δεν ισχύει το συμπέρασμα. Άρα, θα υπάρχει ένα $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ τέτοιο ώστε $A\chi \notin (T\chi)^{(\theta_0,0)}$, για κάθε $\chi \in \mathcal{M}_T$. Θεωρούμε την συνεχή συνάρτηση

$$g : \mathcal{S}_{\mathcal{X}}(0,1) \times \mathcal{D}(0,1) \longrightarrow [0, \infty), \quad \text{με } g(\chi, \lambda) = \|T\chi + \lambda A\chi\|.$$

Για οποιοδήποτε $\chi \in \mathcal{M}_T$ αφού $A\chi \notin (T\chi)^{(\theta_0,0)}$, θα υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός $r_\chi > 0$ έτσι ώστε $\|T\chi + (e^{i\theta_0} r_\chi)A\chi\| < \|T\chi\| = \|T\|$. Από τη συνέχεια της g υπάρχουν $\rho_\chi, \delta_\chi > 0$ με $\delta_\chi < r_\chi$ τέτοια ώστε, για κάθε $\psi \in \mathcal{B}_{\mathcal{X}}(\chi, \rho_\chi)$ και $r \in (r_\chi - \delta_\chi, r_\chi + \delta_\chi)$, $\|T\psi + (e^{i\theta_0} r)A\psi\| < \|T\|$. Από το Λήμμα 4.11, η συνθήκη $r \in (r_\chi - \delta_\chi, r_\chi + \delta_\chi)$ μπορεί να αντικατασταθεί με την συνθήκη $r \in (0, r_\chi)$.

Θεωρούμε ένα διάνυσμα $\zeta \in \mathcal{S}_{\mathcal{X}}(0,1) \setminus \mathcal{M}_T$. Τότε $g(\zeta, 0) = \|T\zeta\| < \|T\|$, και από την συνέχεια της g υπάρχουν $\rho_\zeta, \delta_\zeta > 0$ τέτοια ώστε για κάθε $\psi \in \mathcal{B}_{\mathcal{X}}(\zeta, \rho_\zeta)$ και $r \in (-\delta_\zeta, \delta_\zeta)$, $\|T\psi + (e^{i\theta_0} r)A\psi\| < \|T\|$. Η ένωση

$$\left(\bigcup_{\chi \in \mathcal{M}_T} (\mathcal{B}_{\mathcal{X}}(\chi, \rho_\chi) \cap \mathcal{S}_{\mathcal{X}}(0,1)) \right) \bigcup \left(\bigcup_{\zeta \in \mathcal{S}_{\mathcal{X}}(0,1) \setminus \mathcal{M}_T} (\mathcal{B}_{\mathcal{X}}(\zeta, \rho_\zeta) \cap \mathcal{S}_{\mathcal{X}}(0,1)) \right)$$

είναι ανοικτό κάλυμμα της μοναδιαίας σφαίρας $\mathcal{S}_{\mathcal{X}}(0,1)$. Αφού η $\mathcal{S}_{\mathcal{X}}(0,1)$ είναι συμπαγής, έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα της μορφής

$$\left(\bigcup_{j=1}^{n} (\mathcal{B}_{\mathcal{X}}(\chi_j, \rho_{\chi_j}) \cap \mathcal{S}_{\mathcal{X}}(0,1)) \right) \bigcup \left(\bigcup_{k=1}^{m} (\mathcal{B}_{\mathcal{X}}(\zeta_k, \rho_{\zeta_k}) \cap \mathcal{S}_{\mathcal{X}}(0,1)) \right),$$

όπου $\chi_1,\ldots,\chi_n \in \mathcal{M}_T$ και $\zeta_1,\ldots,\zeta_k \in \mathcal{S}_{\mathcal{X}}(0,1)\setminus\mathcal{M}_T$.

Θεωρούμε έναν μη μηδενικό πραγματικό αριθμό

$$r_0 \in \left(\bigcap_{j=1}^{n}(0,r_{\chi_j})\right)\bigcap\left(\bigcap_{k=1}^{m}(-\delta_{\zeta_k},\delta_{\zeta_k})\right).$$

Αφού ο $\mathcal{X}$ είναι πεπερασμένης διάστασης, ο τελεστής $T+(r_0e^{i\theta_0})A$ επιτυγχάνει τη νόρμα του για ένα διάνυσμα $\psi_0 \in \mathcal{S}_{\mathcal{X}}(0,1)$. Αυτό το διάνυσμα ανήκει στην μπάλα $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}(\chi_j,\rho_{\chi_j})$ για κάποιο $\chi_j \in \mathcal{M}_T,\ j\in\{1,2,\ldots,n\}$ ή στην μπάλα $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}(\zeta_k,\rho_{\zeta_k})$ για κάποιο $\zeta_k \in \mathcal{S}_{\mathcal{X}}(0,1)\setminus\mathcal{M}_T,\ k\in\{1,2,\ldots,m\}$. Και για τις δύο περιπτώσεις έχουμε

$$\|T+(e^{i\theta_0}r_0)A\| = \|(T+(e^{i\theta_0}r_0)A)\psi_0\| = \|T\psi_0+(e^{i\theta_0}r_0)A\psi_0\| < \|T\|.$$

Αφού $T\perp_{BJ}A$, αυτό είναι άτοπο. □

Το Θεώρημα 4.13 επεκτείνεται με διαφορετική απόδειξη σε γραμμικούς χώρους άπειρης διάστασης, υπό την προϋπόθεση ότι ο χώρος $\mathcal{X}$ είναι αυτοπαθής και οι τελεστές συμπαγείς.

Θεώρημα 4.14. Θεωρούμε έναν αυτοπαθή χώρο Banach $\mathcal{X}$ και έναν γραμμικό χώρο με νόρμα $\mathcal{Y}$. Έστω $T,A:\mathcal{X}\longrightarrow\mathcal{Y}$ δύο συμπαγείς γραμμικοί τελεστές. Τότε $T\perp_{BJ}A$ αν και μόνο αν για οποιοδήποτε $\theta\in[0,2\pi]$ υπάρχει κάποιο $\chi_\theta\in\mathcal{M}_T$ τέτοιο ώστε $A\chi_\theta\in(T\chi_\theta)^{(\theta,0)}$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι για οποιοδήποτε $\theta\in[0,2\pi]$, υπάρχει κάποιο διάνυσμα $\chi_\theta\in\mathcal{M}_T$ τέτοιο ώστε $A\chi_\theta\in(T\chi_\theta)^{(\theta,0)}$. Τότε για κάθε $\theta\in[0,2\pi]$ και $r\geq 0$,

$$\|T+(re^{i\theta})A\| \geq \|(T+(re^{i\theta})A)\chi_\theta\| \geq \|T\chi_\theta+(re^{i\theta})A\chi_\theta\| \geq \|T\chi_\theta\| = \|T\|,$$

δηλαδή $T\perp_{BJ}A$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $T\perp_{BJ}A$. Έστω $\theta\in[0,2\pi]$ και $r\geq 0$. Αφού οι T και A είναι συμπαγείς γραμμικοί τελεστές, τότε και ο $\left(T+\dfrac{e^{i\theta}r}{n}A\right)$ είναι συμπαγής γραμμικός τελεστής για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Αφού ο χώρος $\mathcal{X}$ είναι αυτοπαθής, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, ο τελεστής $\left(T+\dfrac{e^{i\theta}r}{n}A\right)$ επιτυγχάνει τη νόρμα του για κάποιο μοναδιαίο διάνυσμα. Δηλαδή, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $\chi_n \in \mathcal{S}_{\mathcal{X}}$ τέτοιο ώστε : $\left\| \left(T + \frac{e^{i\theta} r}{n} A \right) \chi_n \right\| = \left\| T + \frac{e^{i\theta} r}{n} A \right\|$. Αφού ο $\mathcal{X}$ είναι αυτοπαθής, η μοναδιαία μπάλα $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$ είναι ασθενώς συμπαγής. Άρα η ακολουθία $\{\chi_n\}$ έχει ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι η $\{\chi_n\}$ συγκλίνει ασθενώς στο χ. Αφού οι T και A είναι συμπαγείς γραμμικοί τελεστές, τότε $T\chi_n \longrightarrow T\chi$ και $A\chi_n \longrightarrow A\chi$. Επειδή $T \perp_{BJ} A$, τότε $\left\| T + \frac{e^{i\theta} r}{n} A \right\| \geq \|T\|$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Τότε $\left\| \left(T + \frac{e^{i\theta} r}{n} A \right) \chi_n \right\| = \left\| T + \frac{e^{i\theta} r}{n} A \right\| \geq \|T\| \geq \|T\chi\|$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Όταν $n \longrightarrow \infty$, παρατηρούμε ότι, $\|T\chi\| \geq \|T\| \geq \|T\chi\|$. Επομένως, $\|T\chi\| = \|T\|$, δηλαδή $\chi \in \mathcal{M}_T$.

Θα δείξουμε ότι $A\chi_\theta \in (T\chi_\theta)^{(\theta,0)}$. Για $r \geq \frac{1}{n}$ ισχυριζόμαστε ότι

$$\|T\chi_n + (e^{i\theta} r) A\chi_n\| \geq \|T\chi_n\|.$$

Αλλιώς, αν $T\chi_n + \frac{e^{i\theta}}{n} A\chi_n = \left(1 - \frac{1}{nr}\right) T\chi_n + \frac{1}{nr}(T\chi_n + e^{i\theta} r A\chi_n)$, τότε

$$\begin{aligned}
\left\| T + \frac{e^{i\theta}}{n} A \right\| &= \left\| T\chi_n + \frac{e^{i\theta}}{n} A\chi_n \right\| \\
&\leq \left(1 - \frac{1}{nr}\right) \|T\chi_n\| + \frac{1}{nr} \|(T\chi_n + e^{i\theta} r A\chi_n)\| \\
&< \left(1 - \frac{1}{nr}\right) \|T\chi_n\| + \frac{1}{nr} \|T\chi_n\| \\
&= \|T\chi_n\| \\
&\leq \|T\|,
\end{aligned}$$

άτοπο. Άρα αποδείχθηκε ο ισχυρισμός. Για οποιοδήποτε $r > 0$, υπάρχει κάποιο $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $r \geq \frac{1}{n_0}$. Για κάθε $n \geq n_0$, $\|T\chi_n + (e^{i\theta} r) A\chi_n\| \geq \|T\chi_n\|$. Άρα, όταν $n \longrightarrow \infty$, έχουμε ότι $\|T\chi + (e^{i\theta} r) A\chi\| \geq \|T\chi\|$. Και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Παρατήρηση 4.15. Θεωρούμε έναν αυτοπαθή χώρο Banach $\mathcal{X}$ και έναν μιγαδικό γραμμικό χώρο με νόρμα $\mathcal{Y}$. Έστω $T, A : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ δύο συμπαγείς γραμμικοί τελεστές. Υποθέτουμε ότι $\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(T, A) = \varepsilon_0 > 0$. Τότε $0 \in \partial F_{\|\cdot\|}^{\varepsilon_0}(A; T)$, ή ισοδύναμα, υπάρχει αριθμός $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ τέτοιος ώστε

$$\|T + \lambda_0 A\| = \min_{\lambda \in \mathbb{C}} \|T + \lambda A\| = \sqrt{1 - \varepsilon_0{}^2}\|T\| = \sin_{BJ}^{\|\cdot\|}(T, A)\|T\|.$$

Κατά συνέπεια, $(T + \lambda_0 A) \perp_{BJ} A$. Άρα, από το Θεώρημα 4.14, για κάθε $\theta \in [0, 2\pi]$, υπάρχει διάνυσμα $\chi_\theta \in \mathcal{M}_{T+\lambda_0 A}$ τέτοιο ώστε

$$A\chi_\theta \in [(T + \mu_0 A)\chi_\theta]^{(\theta,0)},$$

ή ισοδύναμα, για κάθε $\theta \in [0, 2\pi]$, υπάρχει μοναδιαίο διάνυσμα $\chi_\theta \in \mathcal{X}$ τέτοιο ώστε για κάθε $r > 0$

$$\begin{aligned} \|T + (\lambda_0 + e^{i\theta} r)A\| &\geq \|[T + (\lambda_0 + e^{i\theta} r)A]\chi_\theta\| \\ &\geq \|(T + \lambda_0 A)\chi_\theta\| \\ &= \|T + \lambda_0 A\| \\ &= \sin_{BJ}^{\|\cdot\|}(T, A)\|T\|. \end{aligned}$$

Θεώρημα 4.16. Έστω δύο μιγαδικοί γραμμικοί χώροι με νόρμα, οι $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ και θεωρούμε δύο μη μηδενικούς φραγμένους γραμμικούς τελεστές $T, A : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$. Τότε $T \perp_{BJ} A$ αν και μόνο αν ισχύει ένα από τα δύο:

(1) Υπάρχει ακολουθία $\{\chi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}_{\mathcal{X}}(0, 1)$ τέτοια ώστε $\|T\chi_n\| \longrightarrow \|T\|$ και $\|A\chi_n\| \longrightarrow 0$.

(2) Για οποιοδήποτε $\theta \in [0, 2\pi]$, υπάρχει ακολουθία $\{\chi_{\theta,n}\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}_{\mathcal{X}}(0, 1)$ και ακολουθία πραγματικών αριθμών $\{\varepsilon_{\theta,n}\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (0, 1)$ τέτοιες ώστε

   (i) $\varepsilon_{\theta,n} \longrightarrow 0$,

   (ii) $\|T\chi_{\theta,n}\| \longrightarrow \|T\|$ και

   (iii) $A\chi_{\theta,n} \in (T\chi_{\theta,n})^{(\theta,\varepsilon_{\theta,n})}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι ισχύει το (1). Τότε για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ έχουμε

$$\|T + \lambda A\| \geq \|T\chi_n + \lambda A\chi_n\| \geq \|T\chi_n\| - |\lambda|\,\|A\chi_n\|.$$

Για $n \longrightarrow \infty$ θα ισχύει ότι $\|T + \lambda A\| \geq \|T\|$. Άρα, $T \perp_{BJ} A$.

Υποθέτουμε ότι ισχύει το (2). Έστω $\theta \in [0, 2\pi]$. Τότε υπάρχουν δύο ακολουθίες $\{\chi_{\theta,n}\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}_{\mathcal{X}}(0,1)$ και $\{\varepsilon_{\theta,n}\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (0,1)$ έτσι ώστε να ισχύουν οι $(i) - (iii)$. Τότε για κάθε $r \geq 0$ έχουμε

$$\|T + (e^{i\theta}r)A\| \geq \|T\chi_{\theta,n} + (e^{i\theta}r)A\chi_{\theta,n}\| \geq \sqrt{1 - \varepsilon_{\theta,n}{}^2}\|T\chi_{\theta,n}\|.$$

Για $n \longrightarrow \infty$, έπεται ότι $\|T + (e^{i\theta}r)A\| \geq \|T\|$ για κάθε $r \geq 0$. Αυτή η ανισότητα ισχύει για κάθε $\theta \in [0, 2\pi]$. Συνεπώς, $T \perp_{BJ} A$.

Για το αντίστροφο τώρα, έστω ότι δεν ισχύει το πρώτο. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει το δεύτερο. Έστω $\theta \in [0, 2\pi]$. Υποθέτουμε ότι $\|A\| \leq 1$. Αφού $T \perp_{BJ} A$, τότε για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$, ισχύει $\|T + \lambda A\| \geq \|T\|$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \left\|T + \frac{e^{i\theta}}{n}A\right\| &\geq \|T\| - \frac{|e^{i\theta}|}{n}\|A\| \\ &\geq \|T\| - \frac{1}{n} \\ &> \|T\| - \frac{1}{n^3}. \end{aligned}$$

Τότε, λόγω του ορισμού της νόρμας, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $\{\chi_{\theta,n}\} \subseteq \mathcal{S}_{\mathcal{X}}(0,1)$ τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} \left\|\left(T + \frac{e^{i\theta}}{n}A\right)\chi_{\theta,n}\right\| &> \|T\| - \frac{1}{n^3} \\ &\geq \|T\chi_{\theta,n}\| - \frac{1}{n^3}. \end{aligned}$$

Τότε $\|T\chi_{\theta,n}\| \longrightarrow \|T\|$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} \|T\chi_{\theta,n}\| &= \left\|\left(T + \frac{e^{i\theta}}{n}A\right)\chi_{\theta,n} - \frac{e^{i\theta}}{n}A\chi_{\theta,n}\right\| \\ &\geq \left\|\left(T + \frac{e^{i\theta}}{n}A\right)\chi_{\theta,n}\right\| - \frac{|e^{i\theta}|}{n}\|A\chi_{\theta,n}\| \\ &\geq \|T\| - \frac{1}{n^3} - \frac{1}{n}\|A\|. \end{aligned}$$

Για $n \longrightarrow \infty$ έχουμε $\|T\chi_{\theta,n}\| \geq \|T\|$ και αφού $\{\chi_{\theta,n}\} \subseteq \mathcal{S}_{\mathcal{X}}(0,1)$, τότε ισχύει $\|T\chi_{\theta,n}\| \leq \|T\|$. Αφού δεν ισχύει το (1), τότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$\inf_{n\in\mathbb{N}} \|A\chi_{\theta,n}\| = c > 0$. Επιλέγουμε $n_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $n_1 \geq \dfrac{2\|T\|}{c}$. Αφού $\|T\chi_{\theta,n}\| \longrightarrow \|T\| > 0$, τότε υπάρχει $n_2 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\|T\chi_{\theta,n}\| > \dfrac{\|T\|}{2}$ για κάθε $n \geq n_2$. Πράγματι, ισχύει από τον ορισμό της σύγκλισης για $\varepsilon = \dfrac{\|T\|}{2}$. Επιπλέον, επιλέγουμε και ένα φυσικό $n_3 > \dfrac{2}{\|T\|}$.
Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$. Τότε για κάθε $n \geq n_0$,

$$0 < \frac{1}{n\|T\chi_{\theta,n}\|} < \frac{2}{n\|T\|} < 1,$$

και άρα για κάθε $n \geq n_0$,

$$0 < 1 - \frac{1}{n\|T\chi_{\theta,n}\|} < 1.$$

Θέτουμε $\varepsilon_{\theta,n} = \sqrt{1 - \left(\dfrac{1}{n\|T\chi_{\theta,n}\|}\right)^2}$. Τότε $\varepsilon_{\theta,n} \longrightarrow 0$ για $n \longrightarrow \infty$. Ισχυριζόμαστε ότι $A\chi_{\theta,n} \in (T\chi_{\theta,n})^{(\theta,\varepsilon_{\theta,n})}$ για $n \geq n_0$. Έστω $n \geq n_0$. Τότε έχουμε

(1) Για $0 \leq r < \dfrac{1}{n}$,

$$\begin{aligned} \|T\chi_{\theta,n} + (e^{i\theta}r)A\chi_{\theta,n}\| &\geq \|T\chi_{\theta,n}\| - |r|\,\|A\chi_{\theta,n}\| \\ &\geq \|T\chi_{\theta,n}\| - \frac{1}{n}\|A\| \\ &\geq \|T\chi_{\theta,n}\| - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

(2) Για $\dfrac{1}{n} \leq r \leq n$, ισχυριζόμαστε ότι

$$\|T\chi_{\theta,n} + (e^{i\theta}r)A\chi_{\theta,n}\| \leq \|T\chi_{\theta,n}\| - \frac{1}{n}.$$

Έστω ότι δεν ισχύει. Τότε υπάρχει κάποιο $\dfrac{1}{n} \leq r_0 \leq n$ έτσι ώστε να ισχύει

$$\|T\chi_{\theta,n} + (e^{i\theta}r_0)A\chi_{\theta,n}\| < \|T\chi_{\theta,n}\| - \frac{1}{n}.$$

Τότε $T\chi_{\theta,n} + \dfrac{e^{i\theta}}{n}A\chi_{\theta,n} = \left(1 - \dfrac{1}{nr_0}\right)T\chi_{\theta,n} + \dfrac{1}{nr_0}(T\chi_{\theta,n} + e^{i\theta}r_0A\chi_{\theta,n})$.
Άρα,

$$\begin{aligned}
\|T\chi_{\theta,n}\| - \frac{1}{n^3} &\leq \left\| T\chi_{\theta,n} + \frac{e^{i\theta}}{n}A \right\| \\
&\leq \left(1 - \frac{1}{nr_0}\right)\|T\chi_{\theta,n}\| + \frac{1}{nr_0}\|T\chi_{\theta,n} + e^{i\theta}r_0 A\chi_{\theta,n}\| \\
&< \left(1 - \frac{1}{nr_0}\right)\|T\chi_{\theta,n}\| + \frac{1}{nr_0}\left(\|T\chi_{\theta,n}\| - \frac{1}{n}\right) \\
&\leq \|T\chi_{\theta,n}\| - \frac{1}{n^2 r_0}.
\end{aligned}$$

Άρα ισχύει

$$\begin{aligned}
\|T\chi_{\theta,n}\| - \frac{1}{n^3} < \|T\chi_{\theta,n}\| - \frac{1}{n^2 r_0} &\implies n^3 < n^2 r_0 \\
&\implies n < r_0,
\end{aligned}$$

το οποίο είναι άτοπο.

Επομένως, για κάθε $0 \leq r \leq n$ έχουμε $\|T\chi_{\theta,n} + e^{i\theta}rA\chi_{\theta,n}\| \geq \|T\chi_{\theta,n}\| - \dfrac{1}{n}$. Αφού $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$, τότε $\dfrac{2\|T\|}{c} < n_1 \leq n$. Άρα, για $0 \leq r \leq \dfrac{2\|T\|}{c}$ θα ισχύει $\|T\chi_{\theta,n} + e^{i\theta}rA\chi_{\theta,n}\| \geq \|T\chi_{\theta,n}\| - \dfrac{1}{n}$. Για $r > \dfrac{2\|T\|}{c}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\|T\chi_{\theta,n} + e^{i\theta}rA\chi_{\theta,n}\| &\geq r\|A\chi_{\theta,n}\| - \|T\chi_{\theta,n}\| \\
&\geq r\,c - \|T\chi_{\theta,n}\| \\
&> \frac{2\|T\|}{c}c - \|T\chi_{\theta,n}\| \\
&> 2\|T\| - \|T\chi_{\theta,n}\| \\
&> \|T\chi_{\theta,n}\| > \|T\chi_{\theta,n}\| - \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Επομένως, για όλα τα $r \leq 0$ ισχύει

$$\|T\chi_{\theta,n} + e^{i\theta}rA\chi_{\theta,n}\| \geq \|T\chi_{\theta,n}\| - \frac{1}{n} = \sqrt{1 - {\varepsilon_{\theta,n}}^2}\|T\chi_{\theta,n}\|.$$

Τελικά, $A\chi_{\theta,n} \in (T\chi_{\theta,n})^{(\theta,\varepsilon_{\theta,n})}$. $\square$

Κεφάλαιο 5

Διανυσματικά Πολυώνυμα

5.1 Ορισμός και Βασικές Ιδιότητες

Θεωρούμε έναν μιγαδικό γραμμικό χώρο με νόρμα $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$. Έστω ένα διανυσματικό πολυώνυμο

$$P(z) = \chi_m z^m + \chi_{m-1} z^{m-1} + \cdots + \chi_1 z + \chi_0$$

με $z \in \mathbb{C}$, $\chi_i \in \mathcal{X}$ για $i = 0, 1, \ldots, m$ και $\chi_m \neq 0$. Τα διανυσματικά πολυώνυμα εμφανίζονται στις προσεγγίσεις των διανυσματικών συναρτήσεων [3, 48]. Επιπλέον, ειδικές περιπτώσεις των διανυσματικών πολυωνύμων, όπως πολυωνυμικοί πίνακες [19, 22, 23, 31, 33] και πολυωνυμικοί τελεστές [21, 22, 36, 41], έχουν εφαρμογές σε συστήματα Γραμμικών Διαφορικών Εξισώσεων ανωτέρας τάξης, στη Θεωρία Ελέγχου, στη Θεωρία Ταλαντώσεων και στην Ακουστική.

Θεωρούμε ένα τυχαίο μη μηδενικό στοιχείο ψ του γραμμικού χώρου $\mathcal{X}$ τέτοιο ώστε $F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_m; \psi) \neq \{0\}$. Με τη χρήση των γραμμικών συναρτησιακών μπορεί να οριστεί το σύνολο Birkhoff-James ε-ορθογωνιότητας του $P(z)$ ως προς ψ με τον εξής τρόπο:

Ορισμός 5.1. Για τυχαίο $\varepsilon \in [0, 1)$, ορίζουμε το σύνολο Birkhoff-James

ε-ορθογωνιότητας του $P(z)$ ως προς ψ:

$$\begin{aligned} W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi) &= \{\mu \in \mathbb{C} : 0 \in F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(\mu);\psi)\} \\ &= \left\{\mu \in \mathbb{C} : \frac{f(P(\mu))}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|} = 0,\ f \in L_{\varepsilon}(\psi)\right\} \\ &= \{\mu \in \mathbb{C} : f(\chi_m)\mu^m + \cdots + f(\chi_1)\mu + f(\chi_0) = 0,\ f \in L_{\varepsilon}(\psi)\} \\ &= \{\mu \in \mathbb{C} : \psi \perp^{\varepsilon}_{BJ} P(\mu)\} \\ &= \{\mu \in \mathbb{C} :\ \|P(\mu) - \lambda\psi\| \geq \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|\,|\lambda|,\ \forall\lambda \in \mathbb{C}\}. \end{aligned}$$

Σημειώνουμε ότι για $\chi_m \neq 0$ και $\varepsilon \in (0,1)$, η συνθήκη $F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_m;\psi) \neq \{0\}$ ικανοποιείται πάντα λόγω της Πρότασης 1.33 και του Πορίσματος 1.32.

Παρατήρηση 5.2. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi) &= \Big\{\mu \in \mathbb{C} : f(\chi_m)\mu^m + \cdots + f(\chi_1)\mu + f(\chi_0) = 0, \\ &\qquad \text{όπου } (f(\chi_0), f(\chi_1), \ldots, f(\chi_m)) \in JF^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_0,\chi_1,\ldots,\chi_m;\psi)\Big\}. \end{aligned}$$

Παρατήρηση 5.3. Έστω $P(z)$ διανυσματικό πολυώνυμο και ένα μη μηδενικό $\psi \in \mathcal{X}$ έτσι ώστε $F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_m;\psi) \neq \{0\}$ και $\varepsilon \in [0,1)$. Θεωρούμε ένα $\mu \in \mathbb{C}$ έτσι ώστε το $P(\mu)$ να μην είναι πολλαπλάσιο του ψ. Τότε ισχύει

$$\begin{aligned} \mu \in W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi) &\Leftrightarrow \|P(\mu) - \lambda\psi\| \geq \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|\,|\lambda|, \quad \forall\lambda \in \mathbb{C} \\ &\Leftrightarrow \left\|\frac{1}{\lambda}P(\mu) - \psi\right\| \geq \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|,\ \forall\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\} \\ &\Leftrightarrow \|\psi - \lambda P(\mu)\| \geq \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|,\ \forall\lambda \in \mathbb{C} \\ &\Leftrightarrow \inf_{\lambda\in\mathbb{C}} \|\psi - \lambda P(\mu)\| \geq \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\| \quad (\psi \notin span\{P(\mu)\}) \\ &\Leftrightarrow dist(\psi, span\{P(\mu)\}) \geq \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε επίσης ότι

$$\mu \in W^{0}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi) \text{ αν και μόνο αν } dist(\psi, span\{P(\mu)\}) = \|\psi\|$$

και

$$\mu \notin W^{0}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi) \text{ αν και μόνο αν } dist(\psi, span\{P(\mu)\}) < \|\psi\|.$$

Στην περίπτωση αυτή, υπάρχει ένα $\varepsilon_0 \in [0,1)$ τέτοιο ώστε $\mu \in \partial W^{\varepsilon_0}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi)$ και $dist(\psi, span\{P(\mu)\}) = \sqrt{1-\varepsilon_0{}^2}\,\|\psi\|$. Αυτό το ε_0 είναι το μικρότερο $\varepsilon \in [0,1)$ για το οποίο $\mu \in W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi)$.

Παρουσιάζονται κάποιες βασικές ιδιότητες του συνόλου Birkhoff-James ε-ορθογωνιότητας του διανυσματικού πολυωνύμου $P(z)$ ως προς ψ, οι αποδείξεις των οποίων είναι τετριμμένες και οι οποίες πρωτοαποδείχθηκαν για πολυωνυμικούς πίνακες στο [13]. Οι αποδείξεις αυτές μεταφέρονται άμεσα και για διανυσματικά πολυώνυμα.

Πρόταση 5.4. (Για πολυωνυμικούς πίνακες, [13, Πρόταση 10]) Για οποιοδήποτε $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, έχουμε

$$W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(aP(z);\psi) = W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi),$$

$$W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(az);\psi) = a^{-1}W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi)$$

και

$$W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z+a);\psi) = W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi) - a.$$

Επιπλέον, αν θεωρήσουμε ότι το $R(z) = \chi_0 z^m + \cdots + \chi_{m-1} z + \chi_m = z^m P(z^{-1})$ είναι το αντίστροφο διανυσματικό πολυώνυμο του $P(z)$, τότε

$$W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(R(z);\psi) \setminus \{0\} = \left\{\mu \in \mathbb{C} : \ \mu^{-1} \in W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi) \setminus \{0\}\right\}.$$

Τέλος, αν υπάρχει ένα γραμμικό συναρτησιακό $f \in L_{\varepsilon}(\psi)$ τέτοιο ώστε $f(\chi_m) = f(\chi_{m-1}) = \cdots = f(\chi_0) = 0$, τότε $W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi) = \mathbb{C}$.

Παρατήρηση 5.5. Θεωρούμε ένα διανυσματικό πολυώνυμο

$$P(z) = \chi_m z^m + \chi_{m-1} z^{m-1} + \cdots + \chi_1 z + \chi_0, \text{ όπου } \chi_0, \chi_1, \cdots, \chi_{m-1}, \chi_m \in \mathcal{X},\ \chi_m \neq 0.$$

Για οποιοδήποτε $\varepsilon \in [0,1)$, το σύνολο Birkhoff-James ε-ορθογωνιότητας του $P(z)$ ως προς το μη μηδενικό $\psi \in \mathcal{X}$, όπως είδαμε, είναι

$$\begin{aligned} W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi) &= \{\mu \in \mathbb{C} \ :\ 0 \in F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(\mu);\psi)\} \\ &= \{\mu \in \mathbb{C} \ :\ \psi \perp^{\varepsilon}_{BJ} P(\mu)\} \\ &= \{\mu \in \mathbb{C} \ :\ \cos^{\|\cdot\|}_{BJ}(\psi, P(\mu)) \leq \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Επιπλέον, αν $\varepsilon \in (0,1)$ τότε

$$\mu \in \partial W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi) \Longrightarrow 0 \in \partial F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(\mu);\psi) \Longrightarrow \cos^{\|\cdot\|}_{BJ}(\psi, P(\mu)) = \varepsilon.$$

Αυτό σημαίνει ότι

$$\begin{aligned} \partial W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi) &\subseteq \{\mu \in \mathbb{C} : 0 \in \partial F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(\mu);\psi)\} \\ &= \{\mu \in \mathbb{C} : \cos^{\|\cdot\|}_{BJ}(\psi, P(\mu)) = \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Ορισμός 5.6. Έστω δύο στοιχεία $\chi, \psi \in \mathcal{X}$ και το ψ μη μηδενικό. Για $\varepsilon \in [0,1)$ ορίζουμε ως εσωτερική ακτίνα Birkhoff-James ε-ορθογωνιότητας του χ ως προς το ψ

$$\widehat{r}^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi;\psi) = \min\Big\{|z| \ : \ z \in F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi;\psi)\Big\},$$

και εξωτερική ακτίνα Birkhoff-James ε-ορθογωνιότητας του χ ως προς το ψ

$$r^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi;\psi) = \max\Big\{|z| \ : \ z \in F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi;\psi)\Big\}.$$

Θεώρημα 5.7. (Για πολυωνυμικούς πίνακες, [13, Θεώρημα 12] και για το κλασικό αριθμητικό πεδίο πολυωνυμικών πινάκων, [37, Θεώρημα 2.3]) Έστω ένα διανυσματικό πολυώνυμο

$$P(z) = \chi_m z^m + \chi_{m-1} z^{m-1} + \cdots + \chi_1 z + \chi_0$$

με $z \in \mathbb{C}$, $\chi_i \in \mathcal{X}$ για $i = 0, 1, \ldots, m$ και $\chi_m \neq 0$. Θεωρούμε ένα $\varepsilon \in [0,1)$ και ένα μη μηδενικό στοιχείο $\psi \in \mathcal{X}$ έτσι ώστε $F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_m;\psi) \neq \{0\}$. Το σύνολο $W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi)$ είναι φραγμένο αν και μόνο αν $0 \notin F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_m;\psi)$.

Απόδειξη. Έστω $0 \notin F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_m;\psi)$, ή ισοδύναμα, $\widehat{r}^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_m;\psi) > 0$. Θα δείξουμε ότι το σύνολο $W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi)$ είναι φραγμένο. Συγκεκριμένα, για $M = \dfrac{\max\limits_{0 \leq j \leq m-1} r^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_j;\psi)}{\widehat{r}^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_m;\psi)} + 1$, θα δείξουμε ότι $W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi) \subseteq \mathcal{D}(0,M)$. Έστω $\mu \in W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi)$ με $|\mu| \geq 1$ (αρκεί λόγω $M \geq 1$). Από τον ορισμό, υπάρχει ένα γραμμικό συναρτησιακό $f \in L_{\varepsilon}(\psi)$ τέτοιο ώστε

$f(\chi_m)\mu^m + f(\chi_{m-1})\mu^{m-1} + \ldots + f(\chi_0) = 0$. Άρα $-\mu^m = \dfrac{\sum\limits_{j=0}^{m-1} f(\chi_j)\mu^j}{f(\chi_m)}$. Επομένως,

$$
\begin{aligned}
|\mu|^m = \frac{|\sum\limits_{j=0}^{m-1} f(\chi_j)\mu^j|}{|f(\chi_m)|} &\le \frac{\sum\limits_{j=0}^{m-1} |f(\chi_j)|\,|\mu|^j}{|f(\chi_m)|} \\
&\le \frac{\max\limits_{0\le j\le m-1} r^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_j;\psi)}{\frac{|f(\chi_m)|}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|}} \frac{|\mu|^m - 1}{|\mu| - 1} \\
&\le \frac{\max\limits_{0\le j\le m-1} r^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_j;\psi)}{\widehat{r}^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_m;\psi)} \frac{|\mu|^m - 1}{|\mu| - 1}.
\end{aligned}
$$

Άρα, $|\mu| - 1 \le \dfrac{\max\limits_{0\le j\le m-1} r^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_j;\psi)}{\widehat{r}^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_m;\psi)} \dfrac{|\mu|^m - 1}{|\mu|^m} \le \dfrac{\max\limits_{0\le j\le m-1} r^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_j;\psi)}{\widehat{r}^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_m;\psi)}$. Δηλαδή, $|\mu| \le M$.

Για το αντίστροφο, θεωρούμε ότι το σύνολο $W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi)$ είναι φραγμένο και ότι $0 \in F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_m;\psi)$. Τότε υπάρχει γραμμικό συναρτησιακό $f \in L_{\varepsilon}(\psi)$ τέτοιο ώστε $f(\chi_m) = 0$. Αφού το σύνολο $W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi) \neq \mathbb{C}$, τότε $f(\chi_s) \neq 0$ για κάποιο δείκτη $s \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$. Αφού το σύνολο $F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_m;\psi) \neq \{0\}$, υπάρχει μια ακολουθία συνεχών γραμμικών συναρτησιακών $\{f_j\}_{j=1,2,\ldots} \subset L_{\varepsilon}(\psi)$ με $f_j(\chi_m) \neq 0$ για $j = 1, 2, \ldots$ τέτοια ώστε

$$\frac{f_j(\chi_m)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|} \longrightarrow 0 \ \text{ για } j \longrightarrow \infty.$$

Άρα $f_j(\chi_m) \longrightarrow 0$.

Θεωρούμε το

$$f_j(P(z)) = f_j(\chi_m)z^m + f_j(\chi_{m-1})z^{m-1} + \cdots + f_j(\chi_1)z + f_j(\chi_0)$$

για $j \in \{1, 2, \ldots\}$ και παρατηρούμε ότι $\dfrac{f_j(\chi_s)}{f_j(\chi_m)} \longrightarrow \infty$ για $j \longrightarrow \infty$. Άτοπο, αφού υποθέτουμε ότι το σύνολο Birkhoff-James ε-ορθογωνιότητας $W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi)$ είναι φραγμένο, τότε όλες οι ρίζες των πολυωνύμων $f_j(P(z))$ για $j \in \{1, 2, \ldots\}$ είναι φραγμένες. Συνεπώς και οι στοιχειώδεις συμμετρικές συναρτήσεις των $f_j(P(z))$, για $j \in \{1, 2, \ldots\}$, είναι φραγμένες. □

Θεώρημα 5.8. (Για το κλασικό αριθμητικό πεδίο ενός τετραγωνικού πολυωνυμικού πίνακα, [42, Θεώρημα 3.1]) Έστω ένα μη μηδενικό $\psi \in \mathcal{X}$, ένα $\varepsilon \in [0,1)$ και το διανυσματικό πολυώνυμο

$$P(z) = \psi z^m + \chi_{m-1} z^{m-1} + \cdots + \chi_0 \quad (\text{δηλαδή } \chi_m = \psi).$$

Τότε για κάθε μιγαδικό $\mu \in W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi)$ έχουμε ότι ισχύει η ανισότητα

$$\rho_1 \leq |\mu| \leq 1 + \rho_2,$$

όπου

$$\rho_1 = \frac{\widehat{r}^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_0;\psi)}{\widehat{r}^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_0;\psi) + \max\limits_{1\leq j\leq m} r^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_j;\psi)}, \quad \text{με } \chi_m = \psi$$

και $\rho_2 = \max\limits_{0\leq j\leq m-1} r^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_j;\psi)$.

Απόδειξη. Το σύνολο $W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi)$ είναι φραγμένο αφού το σύνολο $F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\psi;\psi) = \{1\}$ δεν περιέχει το 0. Έστω ένας τυχαίος μιγαδικός $\mu \in W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi)$. Τότε υπάρχει κάποιο γραμμικό συναρτησιακό $f \in L_{\varepsilon}(\psi)$ τέτοιο ώστε

$$f(\psi)\mu^m + f(\chi_{m-1})\mu^{m-1} + \cdots + f(\chi_1)\mu + f(\chi_0) = 0.$$

Αφού $\rho_1 \leq 1$, αρκεί να δούμε, για την πρώτη ανισότητα, για $|\mu| < 1$. Έχουμε ότι

$$f(\chi_0) = -(f(\psi)\mu^m + f(\chi_{m-1})\mu^{m-1} + \cdots + f(\chi_1)\mu),$$

άρα,

$$|f(\chi_0)| = |f(\psi)\mu^m + f(\chi_{m-1})\mu^{m-1} + \cdots + f(\chi_1)\mu|.$$

Επομένως, έχουμε

$$\begin{aligned}
\widehat{r}^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_0,\psi) &\leq \frac{|f(\psi)\mu^m + f(\chi_{m-1})\mu^{m-1} + \cdots + f(\chi_1)\mu|}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\|\psi\|} \\
&\leq \frac{|f(\psi)|\,|\mu|^m + |f(\chi_{m-1})|\,|\mu|^{m-1} + \cdots + |f(\chi_1)|\,|\mu|}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\|\psi\|} \\
&\leq \frac{|\mu|}{1-|\mu|} \max_{1\leq j\leq m} r^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_j;\psi).
\end{aligned}$$

Καταλήξαμε στο εξής

$$\frac{\widehat{r}^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_0;\psi)}{\widehat{r}^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_0;\psi)+\max\limits_{1\leq j\leq m} r^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_j;\psi)} \leq |\mu|.$$

Για την απόδειξη της δεύτερης ανισότητας αρκεί να παρατηρήσουμε ότι το άνω φράγμα συμπίπτει με το M που θεωρήσαμε στο προηγούμενο θεώρημα. □

Πόρισμα 5.9. Για μιγαδικό αριθμό $\mu \in W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi)$, όπου $P(z)=\psi z^m + \chi_{m-1}z^{m-1}+\cdots+\chi_0$, όπως παραπάνω, έχουμε ότι ισχύει η ανισότητα

$$\rho_3 \leq |\mu| \leq 1+\rho_4,$$

όπου

$$\rho_3 = \frac{\widehat{r}^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_0;\psi)}{\widehat{r}^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_0;\psi)+\max\limits_{1\leq j\leq m}\frac{\|\chi_j\|}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|}}$$

και

$$\rho_4 = \max_{1\leq j\leq m-1}\frac{\|\chi_j\|}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|}.$$

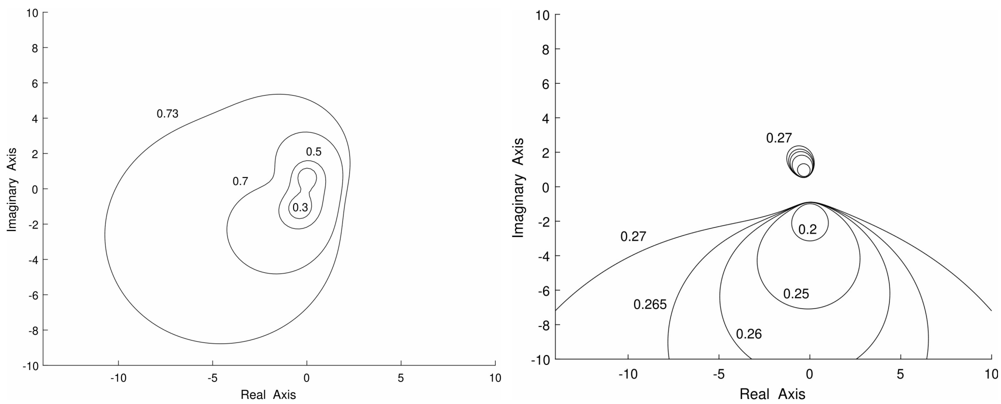
Απόδειξη. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\max_{1\leq j\leq m} r^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_j;\psi) &\leq \max_{1\leq j\leq m}\frac{|f_j(\chi_j)|}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|}\\
&\leq \max_{1\leq j\leq m}\frac{\|f_j\|\|\chi_j\|}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|}\\
&\leq \max_{1\leq j\leq m}\frac{\|\chi_j\|}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|},
\end{aligned}$$

και το αποτέλεσμα προκύπτει από το προηγούμενο θεώρημα. □

Παρατήρηση 5.10. Υποθέτουμε ότι η νόρμα $\|\cdot\|$ επάγεται από ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Έστω ένα διανυσματικό πολυώνυμο $P(z)$ με $\chi_m \neq 0$, ένα $\varepsilon\in[0,1)$ και ένα μη μηδενικό στοιχείο $\psi\in\mathcal{X}$ τέτοιο ώστε $F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_m;\psi)\neq\{0\}$. Τότε έχουμε

$$
\begin{aligned}
W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi) &= \{\mu \in \mathbb{C} : \psi \perp^{\varepsilon}_{BJ} P(\mu)\} \\
&= \{\mu \in \mathbb{C} : \psi \perp^{\varepsilon}_{\langle\cdot,\cdot\rangle} P(\mu)\} \\
&= \{\mu \in \mathbb{C} : |\langle P(\mu), \psi\rangle| \leq \varepsilon \|\psi\| \, \|P(\mu)\|\} \\
&= \{\mu \in \mathbb{C} : |\langle P(\mu), \psi\rangle|^2 \leq \varepsilon^2 \|\psi\|^2 \, \|P(\mu)\|^2\} \\
&= \{\mu \in \mathbb{C} : \langle P(\mu), \psi\rangle \langle \psi, P(\mu)\rangle \leq \varepsilon^2 \|\psi\|^2 \, \langle P(\mu), P(\mu)\rangle\} \\
&= \left\{\mu \in \mathbb{C} : \langle \sum_{i=0}^{m} \chi_i \mu^i, \psi\rangle \langle \psi, \sum_{j=0}^{m} \chi_j \mu^j\rangle \leq \varepsilon^2 \|\psi\|^2 \, \langle \sum_{i=0}^{m} \chi_i \mu^i, \sum_{j=0}^{m} \chi_j \mu^j\rangle \right\} \\
&= \left\{\mu \in \mathbb{C} : \sum_{i,j=0}^{m} \langle \chi_i, \psi\rangle \langle \psi, \chi_j\rangle \mu^i \overline{\mu}^j - \varepsilon^2 \|\psi\|^2 \sum_{i,j=0}^{m} \langle \chi_i, \chi_j\rangle \mu^i \overline{\mu}^j \leq 0 \right\}.
\end{aligned}
$$



Σχήμα 5.1: Τα σύνολα Birkhoff-James ε-ορθογωνιότητας του $P(z)$ (αριστερά) και του $R(z)$ (δεξιά).

Παράδειγμα 5.11. *Θεωρούμε το τεσσάρων διαστάσεων διανυσματικό πολυώνυμο*

$$
P(z) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0.8 \\ i \end{bmatrix} z^2 + \begin{bmatrix} i \\ -1 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -0.1 \\ -i \end{bmatrix},
$$

και το αντίστροφο διανυσματικό πολυώνυμό του

$$R(z) = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -0.1 \\ -i \end{bmatrix} z^2 + \begin{bmatrix} i \\ -1 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0.8 \\ i \end{bmatrix},$$

και το διάνυσμα $\begin{bmatrix} 0.6 & 0 & 0.9 & 0.2 \end{bmatrix}^T$. *Για την ευκλείδεια νόρμα, που επάγεται από το κλασικό εσωτερικό γινόμενο, έχουμε σχεδιάσει τα σύνορα των συνόλων Birkhoff-James ε-ορθογωνιότητας* $W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|_2}(P(z);\psi)$, $\varepsilon = 0.3, 0.5, 0.7, 0.73$, *και* $W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|_2}(R(z);\psi)$, $\varepsilon = 0.2, 0.25, 0.26, 0.265, 0.27$, *οι φιγούρες των οποίων είναι στο αριστερό και δεξί μέρος του σχήματος αντίστοιχα.*

5.2 Συνεκτικές Συνιστώσεις

Εφόσον το σύνολο Birkhoff-James ε-ορθογωνιότητας $W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi)$ δεν είναι συνεκτικό, προκύπτει η ανάγκη εκτίμησης του πλήθους των συνεκτικών συνιστωσών το οποίο αποτελεί το αντικείμενο της παραγράφου αυτής. Επισημαίνουμε ότι με τον όρο συνεκτικό θεωρούμε το κατά καμπύλες συνεκτικό.

Λήμμα 5.12. Έστω ένα διανυσματικό πολυώνυμο $P(z)$ με $\chi_m \neq 0$, ένα $\varepsilon \in [0,1)$ και ένα μη μηδενικό στοιχείο $\psi \in \mathcal{X}$. Θεωρούμε L ένα μη κενό κλειστό και κυρτό υποσύνολο του $\mathcal{X}^*$, τέτοιο ώστε $f(\chi_m) \neq 0$ για κάθε $f \in L$. Τότε οι ρίζες του πολυωνύμου

$$f(P(z)) = f(\chi_m)z^m + f(\chi_{m-1})z^{m-1} + \cdots + f(\chi_1)z + f(\chi_0)$$

είναι συνεχείς ως προς το γραμμικό συναρτησιακό $f \in L$.

Απόδειξη. Είναι γνωστό ότι οι ρίζες ενός πολυωνύμου είναι συνεχείς συναρτήσεις των συντελεστών του πολυωνύμου [26, Θεώρημα, Παράρτημα D]. Οι συντελεστές $\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_m \in \mathcal{X}$ του διανυσματικού πολυωνύμου $P(z) = \chi_m z^m + \cdots + \chi_1 z + \chi_0$ είναι σταθερές, και άρα, οι συντελεστές $f(\chi_0), f(\chi_1), \ldots, f(\chi_m)$ του διανυσματικού πολυωνύμου $f(P(z))$ εξαρτώνται μόνο από το γραμμικό συναρτησιακό $f \in L$. Αν η $f_1, f_2, \ldots$ είναι μια ακολουθία συνεχών γραμμικών συναρτησιακών του L η οποία συγκλίνει στο γραμμικό συναρτησιακό $f \in L$, (δηλαδή, $\|f_k - f\| \longrightarrow 0$, καθώς $k \longrightarrow +\infty$), τότε για κάθε $j = 0, 1, \dots, m$, ισχύει ότι

$$\|f(\chi_j) - f_k(\chi_j)\| \leq \|(f - f_k)(\chi_j)\| \leq \|f - f_k\| \, \|\chi_j\|, \quad k = 1, 2, \dots,$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Θεώρημα 5.13. (Για το κλασικό αριθμητικό πεδίο πολυωνυμικών πινάκων, [37, Θεώρημα 2.2]) Έστω ένα διανυσματικό πολυώνυμο $P(z)$ με $\chi_m \neq 0$, ένα $\varepsilon \in [0, 1)$ και ένα μη μηδενικό στοιχείο $\psi \in \mathcal{X}$ τέτοιο ώστε $0 \notin F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_m; \psi)$ (ή ισοδύναμα, το σύνολο $W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z); \psi)$ είναι φραγμένο). Υποθέτουμε ότι το σύνολο $W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z); \psi)$ έχει r, το πλήθος, συνεκτικές συνιστώσες. Θεωρούμε τον φυσικό αριθμό κ, ως τον ελάχιστο αριθμό των διακεκριμένων ριζών του πολυωνύμου $f(P(z)) = f(\chi_m)z^m + f(\chi_{m-1})z^{m-1} + \cdots + f(\chi_1)z + f(\chi_0)$ επί όλων των γραμμικών συναρτησιακών $f \in L_\varepsilon(\psi)$. Τότε

$$r \leq \kappa \leq m.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε ένα γραμμικό συναρτησιακό $f_1 \in L_\varepsilon(\psi)$ τέτοιο ώστε το πολυώνυμο $f_1(P(z)) = f_1(\chi_m)z^m + f_1(\chi_{m-1})z^{m-1} + \cdots + f_1(\chi_1)z + f_1(\chi_0)$ να έχει ακριβώς κ, το πλήθος, διακεκριμένες ρίζες. Έστω ένα γραμμικό συναρτησιακό $f_2 \in L_\varepsilon(\psi)$. Αφού $0 \notin F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_m; \psi)$, τότε οι $f_1(\chi_m)$ και $f_2(\chi_m)$ είναι μη μηδενικοί. Επιπλέον, από την κυρτότητα του συνόλου $L_\varepsilon(\psi)$ και του συνόλου $F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_m; \psi)$, κάθε συνεχές γραμμικό συναρτησιακό

$$g_t = (1 - t)f_1 + tf_2 \in L_\varepsilon(\psi), \quad t \in [0, 1],$$

ικανοποιεί την συνθήκη $g_t(\chi_m) \neq 0$. Τότε, από το προηγούμενο λήμμα, οι ρίζες του πολυωνύμου

$$g_t(P(z)) = g_t(\chi_m)z^m + g_t(\chi_{m-1})z^{m-1} + \cdots + g_t(\chi_1)z + g_t(\chi_0), \;\; t \in [0, 1]$$

είναι συνεχείς ως προς $t \in [0, 1]$. Επομένως, οι κ, το πλήθος, ρίζες του πολυωνύμου $f_1(P(z))$ συνδέονται μέσω συνεχών καμπυλών στο $W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z); \psi)$ με τις ρίζες του $f_2(P(z))$. Συνεπώς, ο αριθμός των συνεκτικών συνιστωσών του συνόλου $W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z); \psi)$ είναι μικρότερος ή ίσος του κ. □

Υποθέτουμε ότι για κάθε γραμμικό συναρτησιακό $f \in L_\varepsilon(\psi)$, το πολυώνυμο $f(P(z))$ έχει m, το πλήθος, απλές ρίζες. Τότε αυτές οι m, το πλήθος, απλές ρίζες ορίζουν m, το πλήθος, συνεχείς απεικονίσεις

$$\rho_i \,:\, L_\varepsilon(\psi) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{5.1}$$

Ορισμός 5.14. Έστω δύο στοιχεία $\chi, \psi \in \mathcal{X}$ με μη μηδενικό το ψ, $\varepsilon \in [0,1)$ και θεωρούμε ένα μιγαδικό αριθμό $z_0 \in F^\varepsilon_{\|\cdot\|}(\chi;\psi)$. Ορίζουμε το σύνολο

$$LS_\chi(z_0) = \left\{ f \in L_\varepsilon(\psi) : \;\; z_0 = \frac{f(\chi)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\|\psi\|} \right\} \subseteq L_\varepsilon(\psi).$$

Επιπλέον, για το διανυσματικό πολυώνυμο $P(z)$, ορίζουμε το σύνολο

$$\begin{aligned} LS_{P(z)}(z_0) &= \{ f \in L_\varepsilon(\psi) : \;\; f(P(z_0)) = 0 \} \\ &= LS_{P(z_0)}(0). \end{aligned}$$

Λήμμα 5.15. Έστω $\chi, \psi \in \mathcal{X}$, με το ψ μη μηδενικό και θεωρούμε ένα $z_0 \in F^\varepsilon_{\|\cdot\|}(\chi;\psi)$. Τότε το σύνολο $LS_\chi(z_0)$ είναι κυρτό.

Απόδειξη. Θεωρούμε δύο γραμμικά συναρτησιακά $f_1, f_2 \in LS_\chi(z_0)$ και έναν αριθμό $\alpha \in [0,1]$. Τότε έχουμε ότι

$$\frac{f_1(\chi)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|} = z_0 = \frac{f_2(\chi)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|}.$$

Επομένως,

$$\frac{[\alpha f_1 + (1-\alpha) f_2]}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|}(\chi) = z_0$$

και το γραμμικό συναρτησιακό $\alpha f_1 + (1-\alpha) f_2$ βρίσκεται στο $LS_\chi(z_0)$. □

Θεώρημα 5.16. (Για πολυωνυμικούς τελεστές, [40, Θεώρημα 1]) Έστω ένα διανυσματικό πολυώνυμο $P(z)$ με $\chi_m \neq 0$, ένα $\varepsilon \in [0,1)$ και ένα μη μηδενικό στοιχείο $\psi \in \mathcal{X}$ έτσι ώστε $0 \notin F^\varepsilon_{\|\cdot\|}(\chi_m;\psi)$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $f \in L_\varepsilon(\psi)$, το πολυώνυμο $f(P(z)) = f(\chi_m) z^m + \cdots + f(\chi_1) z + f(\chi_0)$ έχει ακριβώς m απλές ρίζες. Τότε το σύνολο $W^\varepsilon_{\|\cdot\|}(P(z);\psi)$ έχει ακριβώς m, το πλήθος, συνεκτικές συνιστώσες.

Απόδειξη. Θεωρούμε τις εικόνες των συναρτήσεων των ριζών $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$ από το (5.1),

$$W_i = \rho_i(L_\varepsilon(\psi)) \subseteq W^\varepsilon_{\|\cdot\|}(P(z);\psi), \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Αυτά τα σύνολα είναι συνεκτικά και ικανοποιούν την ισότητα

$$W^\varepsilon_{\|\cdot\|}(P(z);\psi) = \bigcup_{1 \le i \le m} W_i.$$

Αρκεί να δείξουμε ότι

$$W_i \cap W_j = \emptyset \text{ για κάθε } i \neq j.$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$. Τότε υπάρχει κάποιος αριθμός $z_0 \in \mathbb{C}$ τέτοιος ώστε

$$\rho_1(f_1) = z_0 = \rho_2(f_2) \text{ για κάποια συναρτησιακά } f_1, f_2 \in L_\varepsilon(\psi).$$

Τότε και τα δύο γραμμικά συναρτησιακά f_1 και f_2 ανήκουν στο σύνολο $LS_{P(z)}(z_0)$. Επιπλέον, ισχύει ότι

$$LS_{P(z)}(z_0) = \bigcup_{1 \le i \le m} \{ f \in L_\varepsilon(\psi) : \;\; z_0 = \rho_i(f) \}.$$

Δηλαδή, το σύνολο $LS_{P(z)}(z_0)$ είναι η ένωση των συνόλων

$$LS_1 = \{ f \in L_\varepsilon(\psi) : \;\; z_0 = \rho_1(f) \} \text{ και } LS_2 = \bigcup_{2 \le i \le m} \{ f \in L_\varepsilon(\psi) : \;\; z_0 = \rho_i(f) \}.$$

Προφανώς, το γραμμικό συναρτησιακό $f_1 \in LS_1$ και το $f_2 \in LS_2$, και τα σύνολα LS_1 και LS_2 είναι μη κενά. Επιπλέον, τα σύνολα LS_1 και LS_2 είναι κλειστά ως αντίστροφες εικόνες συνεχών απεικονίσεων. Αφού το σύνολο $LS_{P(z)}(z_0)$ είναι κυρτό, είναι και συνεκτικό, και τότε $LS_1 \cap LS_2 \neq \emptyset$. Επομένως, θα υπάρχει ένα συναρτησιακό f τέτοιο ώστε $\rho_1(f) = z = \rho_i(f)$ για κάποιο δείκτη $i \geq 2$, αυτό είναι άτοπο, αφού υποθέσαμε ότι οι ρίζες είναι απλές. $\square$

5.3 Σύνορο

Ενδιαφέρον παρουσιάζει και η μελέτη του συνόρου του συνόλου Birkhoff-James ε-ορθογωνιότητας $W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi)$.

Θεώρημα 5.17. (Για πολυωνυμικούς πίνακες, [13, Θεώρημα 19 (i)] και για το κλασικό αριθμητικό πεδίο πολυωνυμικών πινάκων, [42, Θεώρημα 1.1]) Θεωρούμε ένα διανυσματικό πολυώνυμο $P(z)$ με $\chi_m \neq 0$, ένα $\varepsilon \in [0,1)$ και ένα μη μηδενικό στοιχείο $\psi \in \mathcal{X}$ έτσι ώστε $F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_m;\psi) \neq \{0\}$. Αν $z_0 \in \partial W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi)$, τότε $0 \in \partial F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z_0);\psi)$.

Απόδειξη. Έστω $z_0 \in \partial W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi)$. Αφού το σύνολο $W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi)$ είναι κλειστό, τότε $z_0 \in W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi)$, και άρα υπάρχει συνεχές γραμμικό συναρτησιακό $f_0 \in L_{\varepsilon}(\psi)$ τέτοιο ώστε $f_0(P(z_0)) = 0$. Άρα, $0 \in F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z_0);\psi)$. Αρκεί να δείξουμε ότι το 0 δεν είναι εσωτερικό σημείο του συνόλου $F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z_0);\psi)$.

Έστω ότι το 0 είναι εσωτερικό σημείο του $F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z_0);\psi)$ και έστω μια ακολουθία $\{z_n\} \subseteq \mathbb{C} \setminus W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi)$ έτσι ώστε $z_n \longrightarrow z_0$. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε $\mathcal{D}(0,\delta) \subseteq F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z_0);\psi)$. Άρα θα υπάρχουν γραμμικά συναρτησιακά $f_1, f_2, f_3 \in L_{\varepsilon}(\psi)$ έτσι ώστε το 0 να ανήκει στο εσωτερικό του τριγώνου

$$Co\left\{\frac{f_1(P(z_0))}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|}, \frac{f_2(P(z_0))}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|}, \frac{f_3(P(z_0))}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|}\right\} \subseteq \mathcal{D}\left(0,\frac{\delta}{2}\right).$$

Λόγω συνέχειας έχουμε

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{f_{\delta,i}(P(z_n))}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|} = \frac{f_{\delta,i}(P(z_0))}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|} \quad \text{για } i = 1,2,3.$$

Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $0 \in F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z_n);\psi)$, για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $z_n \in W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi)$, το οποίο είναι άτοπο. □

Θεωρούμε το διανυσματικό πολυώνυμο

$$P'(z) = m\chi_m z^{m-1} + (m-1)\chi_{m-1}z^{m-2} + \cdots + 2\chi_2 z + \chi_1.$$

Θεώρημα 5.18. (Για πολυωνυμικούς πίνακες, [13, Θεώρημα 19 (ii)] και για το κλασικό αριθμητικό πεδίο πολυωνυμικών πινάκων, [34, Θεώρημα 2]) Θεωρούμε ένα διανυσματικό πολυώνυμο $P(z)$ με $\chi_m \neq 0$, ένα $\varepsilon \in [0,1)$ και ψ

ένα μη μηδενικό στοιχείο του χώρου $\mathcal{X}$ έτσι ώστε $F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_m;\psi) \neq \{0\}$. Έστω $z_0 \in W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi)$ με $F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z_0);\psi) \neq \{0\}$ και $0 \notin F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P'(z_0);\psi)$. Αν $0 \in \partial F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z_0);\psi)$ τότε $z_0 \in \partial W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi)$.

Απόδειξη. Έστω $0 \in \partial F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z_0);\psi)$ και θεωρούμε σημείο z_0 το οποίο ανήκει στο εσωτερικό του συνόλου $W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi)$. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\mathcal{D}(z_0,\delta) \subseteq W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi).$$

Άρα, για οποιοδήποτε $z \in \mathcal{D}(z_0,\delta) \setminus \{z_0\}$, υπάρχει γραμμικό συναρτησιακό $f_z \in L_{\varepsilon}(\psi)$ τέτοιο ώστε $f_z(P(z)) = 0$. Τότε

$$f_z\left(P(z_0) + (z-z_0)P'(z_0) + (z-z_0)R(z,z_0)\right) = 0, \tag{5.2}$$

όπου $R(z,z_0)$ διανυσματικό πολυώνυμο με $\|R(z,z_0)\| \longrightarrow 0$, καθώς $|z-z_0| \longrightarrow 0$.

Αφού $0 \notin F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P'(z_0);\psi)$, το δ μπορεί να επιλεγεί αρκετά μικρό έτσι ώστε για κάθε $z \in \mathcal{D}(z_0,\delta) \setminus \{z_0\}$,

$$\begin{aligned} 0 \notin F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P'(z_0) + R(z,z_0);\psi) &\subseteq F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P'(z_0);\psi) + F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(R(z,z_0);\psi) \\ &\subseteq F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P'(z_0);\psi) + \mathcal{D}\left(0, \frac{\|R(z,z_0)\|}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|}\right). \end{aligned}$$

Από την (5.2) θα έχουμε $z - z_0 = -\dfrac{f_z(P(z_0))}{f_z(P'(z_0) + R(z,z_0))}$. Από την κυρτότητα του συνόλου $F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P'(z_0) + R(z,z_0);\psi)$ θα υπάρχουν γωνίες $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3 \in [0,2\pi]$ τέτοιες ώστε $0 \leq \vartheta_2 - \vartheta_1 \leq \vartheta_3 < \pi$ και

$$F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P'(z_0) + R(z,z_0);\psi) \subset \{w \in \mathbb{C}: \ \vartheta_1 \leq arg(w) \leq \vartheta_2\},$$

για κάθε $z \in \mathcal{D}(z_0,\delta) \setminus \{z_0\}$. Επίσης, ισχύει ότι $F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z_0);\psi) \neq \{0\}$ και $0 \in \partial F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z_0);\psi)$. Άρα, λόγω κυρτότητας του $F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z_0);\psi)$, θα υπάρχουν γωνίες ϕ_1 και ϕ_2 με $0 < \phi_2 - \phi_1 \leq \pi$ τέτοιες ώστε

$$F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z_0);\psi) \subset \{w \in \mathbb{C}: \ \phi_1 \leq arg(w) \leq \phi_2\}.$$

Επομένως, το δεξί κλάσμα στην (5.2) δεν μπορεί να πάρει όλες τις τιμές μεταξύ 0 και 2π, σε σχέση με το $z - z_0$ και καταλήξαμε σε άτοπο. $\square$

Πρόταση 5.19. (Για το κλασικό αριθμητικό πεδίο ενός τετραγωνικού πολυωνυμικού πίνακα, [42, Θεώρημα 2.1]) Έστω ένα διανυσματικό πολυώνυμο $P(z)$, ένα $\varepsilon \in [0,1)$ και ένα μη μηδενικό στοιχείο $\psi \in \mathcal{X}$ τέτοιο ώστε $0 \notin F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_m;\psi)$ (ή ισοδύναμα, το σύνολο $W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi)$ είναι φραγμένο). Αν ο μιγαδικός αριθμός z_0 είναι ένα μεμονωμένο σημείο του συνόλου $W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi)$, τότε ισχύει

$$F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z_0);\psi) = \{0\}.$$

Επιπλέον, αν $\varepsilon > 0$, τότε $P(z_0) = 0$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι το μονοσύνολο $\{z_0\}$ είναι συνεκτική συνιστώσα του συνόλου $W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi)$. Τότε υπάρχει ένα συνεχές γραμμικό συναρτησιακό $f_0 \in L_{\varepsilon}(\psi)$ τέτοιο ώστε

$$f_0(P(z_0)) = f_0(\chi_m)z_0^m + f_0(\chi_{m-1})z_0^{m-1} + \cdots + f_0(\chi_1)z_0 + f_0(\chi_0) = 0.$$

Αφού έχουμε υποθέσει ότι $0 \notin F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_m;\psi)$, λόγω της κυρτότητας του συνόλου $L_{\varepsilon}(\psi)$ και της συνέχειας των ριζών του πολυωνύμου $f(P(z))$ ως προς το $f \in L_{\varepsilon}(\psi)$, οι ρίζες του πολυωνύμου $f_0(P(z))$ συνδέονται με τις ρίζες οποιουδήποτε πολυωνύμου $f(P(z))$ (όπου f γραμμικό συναρτησιακό που ανήκει στο σύνολο $L_{\varepsilon}(\psi)$) μέσω συνεχών καμπυλών στο σύνολο $W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi)$. Συνεπώς, για οποιοδήποτε γραμμικό συναρτησιακό $f \in L_{\varepsilon}(\psi)$, το z_0 είναι ρίζα του πολυωνύμου $f(P(z))$. Επομένως, $f(P(z_0)) = 0$ για κάθε γραμμικό συναρτησιακό $f \in L_{\varepsilon}(\psi)$, και άρα, $F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z_0);\psi) = \{0\}$. Επιπλέον, αν $\varepsilon > 0$, τότε από τις ιδιότητες του συνόλου έπεται ότι $P(z_0) = 0$. □

5.4 Τοπική Διάσταση

Έστω Ω ένα κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{C}$. Ως τοπολογική διάσταση του συνόλου Ω θα θεωρούμε το εξής [25, 28]:

1. Η τοπολογική διάσταση του κενού συνόλου θα είναι -1.

2. Η τοπολογική διάσταση του συνόλου Ω είναι n και θα γράφουμε $\dim \Omega = n$ αν για κάθε στοιχείο $\chi \in \Omega$ και για κάθε ανοικτό σύνολο $U \subseteq \Omega$ υπάρχει

ένα ανοικτό V με $\chi \in V$, τέτοιο ώστε $\overline{V} \subseteq U$ και $\dim(\partial V) = n-1$, όπου ∂V θα θεωρούμε το σύνορο του V.

Ορισμός 5.20. Έστω Ω ένα κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και $z_0 \in \Omega$. Η *τοπική διάσταση* του z_0 στο Ω ορίζεται ως το όριο

$$\lim_{h \longrightarrow 0^+} \dim \{\Omega \cap D(z_0, h)\} \text{ με } h \in \mathbb{R}, h > 0.$$

Ειδικότερα, η τοπική διάσταση του z_0 στο Ω είναι ίση με:

0 αν και μόνο αν το z_0 είναι μεμονωμένο σημείο του Ω,

1 αν και μόνο αν το z_0 δεν είναι μεμονωμένο σημείο του Ω και δεν βρίσκεται στην κλειστή θήκη του εσωτερικού του συνόλου,

2 αν και μόνο αν το z_0 βρίσκεται στην κλειστή θήκη του εσωτερικού του Ω.

Θεώρημα 5.21. (Για το κλασικό αριθμητικό πεδίο ενός τετραγωνικού πολυωνυμικού πίνακα, [47, Θεώρημα 1]) Έστω ένα διανυσματικό πολυώνυμο $P(z)$ με $\chi_m \neq 0$, ένα $\varepsilon \in [0, 1)$ και $\psi \in \mathcal{X}$ μη μηδενικό έτσι ώστε $F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_m; \psi) \neq \{0\}$. Έστω $z_0 \in W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z); \psi)$ τέτοιο ώστε $F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z_0); \psi) \neq \{0\}$, το 0 να είναι διαφορίσιμο σημείο του συνόλου $\partial F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z_0); \psi)$ και $0 \notin F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P'(z_0); \psi)$. Αν η τοπική διάσταση του z_0 στο $W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z); \psi)$ είναι ίση με 1, τότε και η τοπική διάσταση του 0 στο σύνολο $F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z_0); \psi)$ είναι 1.

Απόδειξη. Έστω $z_0 \in W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z); \psi)$ με τοπική διάσταση 1 και θεωρούμε ότι $0 \in F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z_0); \psi)$. Υποθέτουμε ότι είναι τοπικής διάστασης 2 για να καταλήξουμε σε άτοπο. Προφανώς, $z_0 \in \partial W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z); \psi)$ και υπάρχει $r > 0$ έτσι ώστε

$$W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z); \psi) \cap \mathcal{D}(z_0, r) \subseteq \partial W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z); \psi).$$

Αφού $z_0 \in \partial W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z); \psi)$, τότε $0 \in F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z_0); \psi)$. Επίσης, αφού το 0 είναι διαφορίσιμο σημείο του συνόλου $\partial F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z_0); \psi)$, τότε υπάρχει μοναδική εφαπτομένη στο σημείο αυτό, έστω η (ϵ), η οποία θα ορίζει δύο ημιεπίπεδα, έστω το κλειστό $\mathcal{H}_1$ και το ανοικτό $\mathcal{H}_2 = \mathbb{C} \setminus \mathcal{H}_1$ έτσι ώστε $F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z_0); \psi) \subset \mathcal{H}_1$.

Για κάθε $\rho \in [0, r]$ και $\theta \in [0, 2\pi]$, το σημείο $z_0 + \rho e^{i\theta}$ είναι είτε σύνορο είτε εξωτερικό σημείο του συνόλου $W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z); \psi)$. Επομένως, για κάθε $\rho \in [0, r]$ και $\theta \in [0, 2\pi]$, το 0 είναι είτε σύνορο είτε εξωτερικό σημείο του συνόλου

$\partial F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z_0+\rho e^{i\theta});\psi)$. Επειδή $0 \notin F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P'(z_0);\psi)$, από υπόθεση, για κάθε $\rho \in [0,r]$ και $\theta \in [0,2\pi]$, το πολυώνυμο $P(z_0+\rho e^{i\theta})$ γράφεται

$$P(z_0+\rho e^{i\theta}) = P(z_0) + \rho e^{i\theta}P'(z_0) + \rho e^{i\theta}R(z_0,\rho,\theta)$$

με $\|R(z_0,\rho,\theta)\| \longrightarrow 0$, καθώς $\rho \longrightarrow 0$.

Αφού $0 \notin F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P'(z_0);\psi)$ και λόγω υποπροσθετικότητας, για αρκετά μικρό r, υπάρχει κυρτός κώνος

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}(z_0,r) = \{z \in \mathbb{C} : \theta_1 \le arg(z) \le \theta_2,\ 0 < \theta_2 - \theta_1 \le \theta_3 < \pi\},$$

έτσι ώστε για κάθε ρ και θ, όπως πριν, να ισχύει

$$F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P'(z_0) + R(z_0,\rho,\theta);\psi) \subseteq \mathcal{K} \setminus \{0\}.$$

Για κατάλληλο $\theta \in [0,2\pi]$ έχουμε

$$e^{i\theta}F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P'(z_0) + R(z_0,\rho,\theta);\psi) \subset e^{i\theta}\mathcal{K} \setminus \{0\} \subset \mathcal{H}_2.$$

Παρατηρούμε ότι, για κάθε γραμμικό συναρτησιακό $f \in L_\varepsilon(\psi)$,

$$\frac{f(P(z_0+\rho e^{i\theta}))}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|} = \frac{f(P(z_0))}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|} + \frac{\rho e^{i\theta} f(P'(z_0)+R(z_0,\rho,\theta))}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|},$$

με $\dfrac{f(P(z_0))}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|} \in F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z_0);\psi) \subset \mathcal{H}_1$ και

$$\frac{\rho e^{i\theta} f(P'(z_0)+R(z_0,\rho,\theta))}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|} \subset e^{i\theta}\mathcal{K} \setminus \{0\} \subset \mathcal{H}_2.$$

Καθώς το ρ παίρνει τιμές από το 0 στο r, ένα μέρος του $F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z_0+\rho e^{i\theta});\psi)$ κοντά στο 0 κινείται προς στο $\mathcal{H}_2$ με συνεχή τρόπο [14]. Συνεπώς, το 0 γίνεται εσωτερικό του συνόλου

$$F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z_0) + r_\theta e^{i\theta}[P'(z_0) + R(z_0,\rho,\theta)]);\psi) = F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z_0+r_\theta e^{i\theta});\psi).$$

Άτοπο, από τον ορισμό του $r > 0$. $\square$

Αν $z_0 \in W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi)$ τέτοιο ώστε $F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z_0);\psi) \neq \{0\}$, τότε το $P(z_0)$ δεν είναι πολλαπλάσιο του ψ. Έτσι, αν $\varepsilon > 0$, τότε η κυρτότητα του συνόλου $F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z_0);\psi)$ και το Πόρισμα 1.32 συνεπάγονται ότι η τοπική διάσταση του 0 στο $F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z_0);\psi)$ είναι 2. Συνεπώς, καταλήγουμε στο επόμενο πόρισμα.

Πόρισμα 5.22. Έστω ένα διανυσματικό πολυώνυμο $P(z)$ με $\chi_m \neq 0$, ένα $\varepsilon \in (0,1)$ και $\psi \in \mathcal{X}$ μη μηδενικό έτσι ώστε $F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_m;\psi) \neq \{0\}$. Έστω z_0 ένα μη μεμονωμένο σημείο του συνόρου του $W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi)$ τέτοιο ώστε $F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z_0);\psi) \neq \{0\}$, το 0 να είναι διαφορίσιμο σημείο του συνόλου $\partial W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi)$ και $0 \notin F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P'(z_0);\psi)$. Τότε η τοπική διάσταση του z_0 στο $W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi)$ είναι 2.

Για $\varepsilon = 0$ ισχύει το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 5.23. (Για το κλασικό αριθμητικό πεδίο ενός τετραγωνικού πολυωνυμικού πίνακα, [47, Θεώρημα 2]) Έστω ένα διανυσματικό πολυώνυμο $P(z)$ με $\chi_m \neq 0$ και $\psi \in \mathcal{X}$ μη μηδενικό έτσι ώστε $F^{0}_{\|\cdot\|}(\chi_m;\psi) \neq \{0\}$. Έστω z_0 ένα εσωτερικό σημείο του συνόλου $W^{0}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi)$ ή ένα διαφορίσιμο σημείο του $\partial W^{0}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi)$ με τοπική διάσταση στο σύνολο $W^{0}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi)$ ίση με 2 έτσι ώστε $F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z_0);\psi) \neq \{0\}$ και $0 \notin F^{0}_{\|\cdot\|}(P'(z_0);\psi)$. Τότε η τοπική διάσταση του 0 στο σύνολο $W^{0}_{\|\cdot\|}(P(z_0);\psi)$ είναι 2.

Απόδειξη. Αν το z_0 είναι εσωτερικό σημείο του συνόλου $W^{0}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi)$, τότε, από το Θεώρημα 5.21, έχουμε ότι το 0 είναι εσωτερικό σημείο του συνόλου $F^{0}_{\|\cdot\|}(P(z_0);\psi)$. Άρα, η τοπική διάσταση του z_0 στο σύνολο $W^{0}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi)$ και η τοπική διάσταση του 0 στο σύνολο $F^{0}_{\|\cdot\|}(P(z_0);\psi)$ είναι 2.

Έστω $z_0 \in \partial W^{0}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi)$. Αφού το z_0 είναι διαφορίσιμο σημείο του συνόλου $\partial W^{0}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi)$ και έχει τοπική διάσταση 2 στο σύνολο $W^{0}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi)$, τότε υπάρχει γωνία $\phi_0 \in [0, 2\pi]$ τέτοια ώστε για κάθε $\phi \in (\phi_0, \phi_0 + \pi)$, να υπάρχει $r_\phi > 0$ έτσι ώστε το $z_0 + r_\phi e^{i\phi}$ να βρίσκεται στο εσωτερικό του συνόλου $W^{0}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi)$. Έστω ότι το 0 έχει τοπική διάσταση 1 στο σύνολο $F^{0}_{\|\cdot\|}(P(z_0);\psi)$. Τότε, λόγω κυρτότητας, το σύνολο $F^{0}_{\|\cdot\|}(P(z_0);\psi)$ θα είναι ευθύγραμμο τμήμα που περνά από το 0. Η ευθεία που ορίζεται από το $F^{0}_{\|\cdot\|}(P(z_0);\psi)$ θα ορίζει δύο κλειστά ημιεπίπεδα, έστω τα $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$. Παρόμοια με πριν,

$$P(z_0 + r\,e^{i\phi}) = P(z_0) + r\,e^{i\phi}P'(z_0) + r\,e^{i\phi}R(z_0, r, \phi)$$

με $\|R(z_0, r, \phi)\| \longrightarrow 0$, καθώς $r \longrightarrow 0$.
Αφού $0 \notin F^0_{\|\cdot\|}(P'(z_0); \psi)$, για αρκετά μικρό r, υπάρχει κυρτός κώνος

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : \ \theta_1 \le arg(z) \le \theta_2, \ 0 < \theta_2 - \theta_1 \le \theta_3 < \pi\},$$

τέτοιος ώστε

$$F^0_{\|\cdot\|}(P'(z_0) + R(z_0, r, \phi); \psi) \subseteq \mathcal{K} \setminus \{0\}.$$

Για κάποιο $\theta \in (\phi_0, \phi_0 + \pi)$ το

$$e^{i\theta}F^0_{\|\cdot\|}(P'(z_0) + R(z_0, r, \phi); \psi)$$

βρίσκεται στο εσωτερικό του $\mathcal{H}_1$ ή του $\mathcal{H}_2$. Αφού ισχύει

$$F^0_{\|\cdot\|}(P(z_0 + r_\theta e^{i\theta}); \psi) \subseteq F^0_{\|\cdot\|}(P(z_0); \psi) + r_\theta e^{i\theta}F^0_{\|\cdot\|}(P'(z_0) + R(z_0, r, \phi); \psi),$$

τότε και το $F^0_{\|\cdot\|}(P(z_0 + r_\theta e^{i\theta}); \psi)$ θα βρίσκεται στο εσωτερικό του $\mathcal{H}_1$ ή του $\mathcal{H}_2$. Άρα $0 \notin F^0_{\|\cdot\|}(P(z_0 + r_\theta e^{i\theta}); \psi)$. Άτοπο, αφού $z_0 + r_\theta e^{i\theta} \in W^0_{\|\cdot\|}(P(z); \psi)$. □

Θεώρημα 5.24. (Για το κλασικό αριθμητικό πεδίο ενός τετραγωνικού πολυωνυμικού πίνακα, [47, Θεώρημα 4]) Έστω το διανυσματικό πολυώνυμο $\chi_1 z + \chi_0$, ένα $\varepsilon \in [0, 1)$ και ένα μη μηδενικό $\psi \in \mathcal{X}$ έτσι ώστε $F^\varepsilon_{\|\cdot\|}(\chi_1; \psi) \neq \{0\}$. Αν το σύνολο $W^\varepsilon_{\|\cdot\|}(\chi_1 z + \chi_0; \psi)$ φραγμένο, τότε είναι απλά συνεκτικό.

Απόδειξη. Έστω ότι το σύνολο $W^\varepsilon_{\|\cdot\|}(\chi_1 z + \chi_0; \psi)$ δεν είναι απλά συνεκτικό. Τότε υπάρχει $w_0 \notin W^\varepsilon_{\|\cdot\|}(\chi_1 z + \chi_0; \psi)$ τέτοιο ώστε για κάθε γωνία $\phi \in [0, 2\pi]$, υπάρχει $r_\phi > 0$ έτσι ώστε $w_0 + r_\phi e^{i\phi} \in W^\varepsilon_{\|\cdot\|}(\chi_1 z + \chi_0; \psi)$. Λόγω ιδιότητας, για $\alpha \in \mathbb{C}$ ισχύει ότι

$$W^\varepsilon_{\|\cdot\|}(\chi_1(z + \alpha) + \chi_0; \psi) = W^\varepsilon_{\|\cdot\|}(\chi_1 z + \chi_0; \psi) - \alpha.$$

Άρα, χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $w_0 = 0$. Υποθέτοντας ότι $0 \notin W^\varepsilon_{\|\cdot\|}(\chi_1 z + \chi_0; \psi)$ έχουμε ότι $0 \notin F^\varepsilon_{\|\cdot\|}(\chi_1; \psi)$ και $0 \notin F^\varepsilon_{\|\cdot\|}(\chi_0; \psi)$. Τότε υπάρχουν δυο κυρτοί κώνοι

$$\mathcal{K}_1 = \left\{z \in \mathbb{C} : \ \theta_1 \le arg(z) \le \widetilde{\theta}_1, \ 0 < \widetilde{\theta}_1 - \theta_1 \le \psi_1 < \pi\right\}$$

και

$$\mathcal{K}_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} : \ \theta_2 \leq arg(z) \leq \widetilde{\theta}_2, \ 0 < \widetilde{\theta}_2 - \theta_2 \leq \psi_2 < \pi \right\}$$

τέτοιοι ώστε το $F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_1;\psi)$ να βρίσκεται στο εσωτερικό του $\mathcal{K}_1$ και το $F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_0;\psi)$ στο εσωτερικό του $\mathcal{K}_2$.

Επίσης, υπάρχει $\phi_0 \in [0, 2\pi]$ έτσι ώστε το $F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(r_{\phi_0} e^{i\phi_0}\chi_1;\psi) = r_{\phi_0} e^{i\phi_0} F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_1;\psi)$ και το $F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_0;\psi)$ να βρίσκονται στο εσωτερικό του κυρτού κώνου $\mathcal{K}_0$, όπου

$$\mathcal{K}_0 = \left\{ z \in \mathbb{C} : \ \theta_0 \leq arg(z) \leq \widetilde{\theta}_0, \ 0 < \widetilde{\theta}_0 - \theta_0 \leq \psi_0 < \pi \right\}.$$

με $\max\{\psi_1, \psi_2\} \leq \psi_0$. Άρα, το

$$F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_1 r_{\phi_0} e^{i\phi_0} + \chi_0;\psi) \subseteq r_{\phi_0} e^{i\phi_0} F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_1;\psi) + F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_0;\psi)$$

βρίσκεται στο εσωτερικό του $\mathcal{K}_0$ και δεν περιέχει το 0, το οποίο είναι άτοπο. $\square$

Βιβλιογραφία

[1] C. Alsina, J. Sikorska and M. S. Tomas, *Norm Derivatives and Characterizations of Inner Product Spaces*, World Scientific, 2010.

[2] D. Amir, *Characterizations of Inner Product Spaces, Operator Theory: Advances and Applications*, vol. **20**, Birkhäuser Verlag, 1986.

[3] G. A. Anastassiou and S. G. Gal, On best approximation of vector valued functions by polynomials with coefficirnts in vector spaces, *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, **186** (2007) 251-265.

[4] M. V. Balashov, Geometric difference of multivaued sets, *Mathematical Notes*, **70** (2001) 147–153.

[5] V. Balestro, A. G. Horvath, H. Martini and R. Teixeira, Angles in normed spaces, *Aequationes Mathematicae*, **91** (2016) 201-236.

[6] F. L. Bauer, On the field of values subordinate to a norm, *Numerische Mathematik*, **4** (1962) 103-111.

[7] R. Bhatia and P. *Š*emrl Orthogonality of matrices and some distance problems, *Linear Algebra and its Applications*, **287** (1999) 77–85.

[8] G. Birkhoff, Orthogonality in linear metric spaces, *Duke Mathematical Journal*, **1** (1935) 169–172.

[9] F. F. Bonsall and J. Duncan, *Numerical Ranges of Operators on Normed Spaces and of Elements of Normed Algebras*, London Mathematical

Society Lecture Note Series, Cambridge University Press, New York, 1971.

[10] F. F. Bonsall and J. Duncan, *Numerical Ranges II*, London Mathematical Society Lecture Note Series, Cambridge University Press, New York, 1973.

[11] J. Chmielinski, On an ε-Birkhoff orthogonality, *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, **6** (2005) Article 79.

[12] Ch. Chorianopoulos, S. Karanasios and P. Psarrakos, A definition of numerical range of rectangular matrices, *Linear and Multilinear Algebra*, **57** (2009) 459–475.

[13] Ch. Chorianopoulos and P. Psarrakos, Birkhoff-James approximate orthogonality sets and numerical ranges, *Linear Algebra and its Applications*, **434** (2011) 2089–2108.

[14] Ch. Chorianopoulos and P. Psarrakos, On the continuity of Birkhoff-James epsilon-orthogonality sets, *Linear and Multilinear Algebra*, **61** (2013) 1447–1454.

[15] M. M. Day, Some characterizations of inner product spaces, *Transactions of the American Mathematical Society*, **62** (1947) 320–337.

[16] S. S. Dragomir, On approximation of continuous linear functionals in normed linear spaces, *Analese Universităţii din Timişoara Seria Ştiinţe Matematice-Fizice*, **29** (1991) 51–58.

[17] S. S. Dragomir, *Semi-Inner Products and Applications*, Nova Science Publishers, Inc, New York, 2004.

[18] N. Gangadharan, A study on characterization of best approximations in normed spaces in terms of Semi-Inner Products, PhD, University of Calicut, 2009.

[19] F. R. Gantmacher, *The Theory of Matrices*, Chelsae Publishing Company, New York, 1959.

[20] J. R. Giles, Classes of semi-inner-product spaces, *Transactions of the American Mathematical Society*, **129** (1967) 436–446.

[21] I. Gohberg, P. Lancaster and L. Rodman, Representation and divisibility of operator polynomials, *Canadian Journal of Mathematics*, **30** (1978) 1045-1096.

[22] I. Gohberg, P. Lancaster and L. Rodman, Spectral analysis of selfadjoint matrix polynomials, *Annals of Mathematics*, **112** (1980) 33-71.

[23] I. Gohberg, P. Lancaster and L. Rodman, *Matrix Polynomials*, Academic Press, New York, 1982.

[24] K. E. Gustafson and D. Rao *Numerical Range, The field of values of linear operators and matrices*, Springer-Verlag, New York, 1997.

[25] J. Hocking and G. Young, *Topology*, Dover, New York, 1988.

[26] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[27] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[28] W. Hurewicz and H. Wallman, *Dimension Theory*, revised edition, Princeton Mathematical Series, vol **4**, Princeton University Press, Princeton, 1996.

[29] R. C. James, Orthogonality and linear functionals in normed linear spaces, *Transactions of the American Mathematical Society*, **61** (1947) 265–292.

[30] R. C. James, Inner products in normed linear spaces, *Bulletin of the American Mathematical Society*, **53** (1947) 559–566.

[31] T. Kailath, *Linear Systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1980.

[32] M. Karamanlis and P. J. Psarrakos, Birkhoff-James epsilon-orthogonality sets in normed linear spaces, *Textos de Matematica, University of Coimbra*, **44** (2013) 81–92.

[33] P. Lancaster, *Lambda-Matrices and Vibrating Systems*, Pergamon Press, Oxford, 1966.

[34] P. Lancaster and P. Psarrakos, Normal and seminormal eigenvalues of analytic matrix functions, *Integral Equations Operator Theory*, **41** (2001) 331-342.

[35] H. W. J. Lenferink and M. N. Spijker, On generalization of the numerical range of a matrix, *Linear Algebra and its Applications*, **140** (1990) 251-266.

[36] L. Lerer, L. Rodman, M. Tismenetsky, Bezoutian and Schur-Cohn problem for operator polynomials, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **103** (1984) 83-102.

[37] C-K. Li and L. Rodman, Numerical range of matrix polynomials, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, **15** (1994) 1256–1265.

[38] C-K. Li and H. Schneider, Orthogonality of matrices, *Linear Algebra and its Applications*, **47** (2002) 115–122.

[39] G. Lumer, Semi-inner-product spaces, *Transactions of the American Mathematical Society*, **100** (1961) 29–43.

[40] Y. Lyubich, Seperation of roots of matrix and operator polynomials, *Integral Equations and Operator Theory*, **29** (1997) 52–62.

[41] A. S. Markus, *Introduction to the Spectral Theory of Polynomial Operator Pencils*, Translations of Mathematical Monographs, vol. **71**, American Mathematical Society, Providence, 1988.

[42] J. Maroulas and P. Psarrakos, The boundary of numerical range of matrix polynomials, *Linear Algebra and its Applications*, **267** (1997) 101–111.

[43] C. Martin and J. E. Valentine, Angles in metric and normed linear spaces, *Colloquium Mathematicum*, Vol.XXXIV, FASC.**2** (1976) 209–217.

[44] R. Megginson, *An Introduction to Banach Space Theory*, Springer-Verlag, 1998.

[45] B. Mojskerc and A. Turnsek, Mappings approximately preserving orthogonality in normed spaces, *Nonlinear Analysis*, **73** (2010) 3821-3831.

[46] V. Muller, The joint essential numerical range, compact perturbations, and the Olsen problem, *Studia Mathematica*, **197** (3) (2010) 275-290.

[47] H. Nakazato and P. Psarrakos, On the shape of numerial range of matrix polynomials, *Linear Algebra and its Applications*, **338** (2001) 105-111.

[48] I. B. Prolla, *Approximation of Vector Valued Functions*, Notas de Matematica, vol. **62**, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1977.

[49] K. Ohira, On some characterizations of abstract Euclidean spaces by properties of orthogonality, *Kumamoto Journal of Science*, **1** (1952) 23–26.

[50] V. Panagakou, P. Psarrakos and N. Yannakakis, Birkhoff-James epsilon-orthogonality sets of vector and vector-valued polynomials, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **454** (2017) 59–78.

[51] E. S. Polovinkin, *Elements of the theory of many-valued mappings*, Izdat. Moskov. Fiz. Tekh. Inst., Moscow, 1982.

[52] D. Sain and K. Paul, Operator norm attainment and inner product spaces, *Linear Algebra and its Applications*, **439** (2013) 2448–2452.

[53] D. Sain, K. Paul and A. Mal, A complete characterization of Birkhoff-James orthogonality in infinite dimensional normed space, *Journal of Operator Theory*, **80** (2018) 399–413.

[54] J. G. Stampfli and J. P. Williams, Growth conditions and the numerical range in a Banach algebra, *Tôhoku Mathematical Journal*, **20** (1968) 417–424.

[55] T. Szostok, On a generalization of the sine function, *Glasnik Matematicki*, **38(58)** (2003) 29–44.

[56] O. Toeplitz, Das algebraische Analogon zu einem Satze von Fejer, *Mathematische Zeitschrift*, **2** (1918) 187-197.

[57] W. A. Wilson, A relation between metric and Euclidean spaces, *American Journal of Mathematics*, **54(3)** (1932) 505–517.

Παράρτημα: Περίληψη στην Αγγλική

English Summary

1. Introduction

In this thesis, we study the Birkhoff-James ε-orthogonality set of χ with respect to ψ, give an alternative definition for this set using linear functionals, and explore its rich structure. We also investigate a cosine function for the convex angle formed by two nonzero elements of a complex normed linear space, in connection with recent results on the Birkhoff-James approximate orthogonality sets.

Finally, we introduce the Birkhoff-James ε-orthogonality set of polynomials in one complex variable whose coefficients are members of $\mathcal{X}$, and survey and record extensions of results on matrix polynomials to these vector-valued polynomials.

2. Birkhoff-James ε-orthogonality sets of vectors

Definition 2.1. Let $\chi, \psi \in \mathcal{X}$ with $\psi \neq 0$. For any $\varepsilon \in [0, 1)$, define the sets

$$L_\varepsilon(\psi) = \left\{ f \in \mathcal{X}^* : \, f(\psi) = \sqrt{1-\varepsilon^2}\, \|\psi\| \; \text{ and } \; \|f\| \leqslant 1 \right\}$$

and

$$\Omega_\varepsilon(\chi;\psi) \; = \; \left\{ \frac{f(\chi)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\, \|\psi\|} \, : \, f \in L_\varepsilon(\psi) \right\}.$$

Theorem 2.2. Let $\chi, \psi \in \mathcal{X}$, with $\psi \neq 0$. For every $\varepsilon \in [0, 1)$, it holds that

$$\Omega_\varepsilon(\chi;\psi) = F^\varepsilon_{\|\cdot\|}(\chi;\psi).$$

Proposition 2.3. Let $\chi_1, \chi_2, \psi \in \mathcal{X}$, with $\psi \neq 0$. Then, it holds that

$$F^\varepsilon_{\|\cdot\|}(\chi_1+\chi_2;\psi) \ \subseteq\ F^\varepsilon_{\|\cdot\|}(\chi_1;\psi) + F^\varepsilon_{\|\cdot\|}(\chi_2;\psi).$$

Proposition 2.4. Let $\chi, \psi \in \mathcal{X}$, with $\psi \neq 0$, χ not a scalar multiple of ψ, and $\varepsilon \in [0,1)$. If $\mu \in \partial F^\varepsilon_{\|\cdot\|}(\chi;\psi)$, then for every continuous linear functional $f_\mu \in L_\varepsilon(\psi)$ such that $\mu = \frac{f_\mu(\chi)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|}$, it holds that $\|f_\mu\| = 1$.

Proposition 2.5. Let $\chi, \psi \in \mathcal{X}$, with $\psi \neq 0$, χ not a scalar multiple of ψ, and $\varepsilon \in [0,1)$. Then, it holds that

$$\max\left\{\mathrm{Re}\mu :\ \mu \in F^\varepsilon_{\|\cdot\|}(\chi;\psi)\right\} \leqslant \inf_{a>0} \frac{1}{a}\left\{\frac{\|\psi + a\chi\|}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|} - 1\right\}.$$

3. Birkhoff-James cosine function

Definition 3.1. Consider two nonzero vectors $\chi, \psi \in \mathcal{X}$. If they are not co-linear, then we can define the (positive) *Birkhoff-James cosine* of the convex angle formed by $span\{\chi\}$ and $span\{\psi\}$:

$$\begin{aligned}
\cos^{\|\cdot\|}_{BJ}(\chi,\psi) &= \min\{\varepsilon \in [0,1) :\ 0 \in F_\varepsilon(\psi;\chi)\} \\
&= \min\{\varepsilon \in [0,1) :\ \chi \perp^\varepsilon_{BJ} \psi\} \\
&= \min\left\{\varepsilon \in [0,1) :\ \|\chi - \lambda\psi\| \geq \sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\chi\|,\ \forall\,\lambda \in \mathbb{C}\right\}.
\end{aligned}$$

If χ and ψ are co-linear, then we assume that $\cos^{\|\cdot\|}_{BJ}(\chi,\psi) = 1$. By the continuity and the monotonicity of the set $F^\varepsilon_{\|\cdot\|}(\psi;\chi)$ with respect to ε, it follows that the smallest value of the parameter $\varepsilon \in [0,1)$, say ε_0, that satisfies $0 \in F^{\varepsilon_0}_{\|\cdot\|}(\psi;\chi)$ is unique. As a consequence, the above cosine is well defined.

Proposition 3.2. Let $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ be a complex normed linear space, and let $\chi, \psi \in \mathcal{X}$ be nonzero.

(*i*) $\chi \perp_{BJ} \psi$ if and only if $\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi, \psi) = 0$.

(*ii*) For any scalars $a, b \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(a\chi, b\psi) = \cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi, \psi)$. In particular, for $a, b = \pm 1$, $\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi, \psi) = \cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(-\chi, \psi) = \cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(-\chi, -\psi) = \cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi, -\psi)$.

Theorem 3.3. Let $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ be a complex normed linear space. If the norm $\|\cdot\|$ is induced by an inner product $\langle\cdot,\cdot\rangle$, then for any nonzero $\chi, \psi \in \mathcal{X}$,

$$\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi, \psi) = \frac{|\langle\psi, \chi\rangle|}{\|\chi\| \, \|\psi\|}.$$

Proposition 3.4. The norm $\|\cdot\|$ is induced by an inner product if and only if for every nonzero vectors $\chi, \psi \in \mathcal{X}$, it holds that

$$\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi, \psi) = \frac{\left|\|\chi\|^2 + \|\psi\|^2 - \|\chi - \psi\|^2\right|}{2\,\|\chi\| \, \|\psi\|}.$$

Proposition 3.5. If $\chi, \psi \in \mathcal{X} \setminus \{0\}$ are not co-linear, then, for any $\varepsilon_0 \in (0, 1)$, there are infinitely many scalars $\mu_0 \in \mathbb{C}$ such that $\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi, \psi - \mu_0\chi) = \varepsilon_0$. In particular, these scalars μ_0 are exactly the boundary points of the set $F_{\|\cdot\|}^{\varepsilon_0}(\psi; \chi)$.

Proposition 3.6. If $\chi, \psi \in \mathcal{X} \setminus \{0\}$ are not co-linear and satisfy $\|\psi - \chi\| = \|\psi\|$, then $\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\psi, \chi) = \cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\psi - \chi, \chi)$.

Theorem 3.7. Let $\mathcal{X}$ be a complex normed linear space, and suppose that for every $\chi, \psi \in \mathcal{X}$ with $\chi \neq 0$, the set $F_{\|\cdot\|}^{0}(\psi; \chi)$ is a singleton, say $F_{\|\cdot\|}^{0}(\psi; \chi) = \{\mu(\psi, \chi)\}$. Then the map

$$[\psi, \chi] = \begin{cases} \mu(\psi, \chi)\|\chi\|^2, & \text{if } \chi \neq 0, \\ 0, & \text{if } \chi = 0 \end{cases}$$

is a semi-inner product.

Proposition 3.8. Let χ and ψ be two nonzero vectors of a complex normed linear space $\mathcal{X}$. Then,

$$\cos_P(\chi, \psi) \leq \frac{\|\psi\|}{2\|\chi\|} + \cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi, \psi)^2 \frac{\|\chi\|}{2\|\psi\|}.$$

4. Cosines of operators

Proposition 4.1. Let $T : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ be a scalar multiple of a δ-isometry. Then, for any nonzero vectors $\chi, \psi \in \mathcal{X}$,

$$\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(T\chi, T\psi) \leq \sqrt{1 - \left(\frac{1-\delta}{1+\delta}\right)^2 \sin_{BJ}^{\|\cdot\|}(\chi, \psi)^2}.$$

Proposition 4.2. Let $T, A : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ be two bounded linear operators, and let $\{\chi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}_{\mathcal{X}}(0,1)$ be a sequence of unit vectors such that $\|T\chi_n\| \longrightarrow \|T\|$. Then, $\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(T, A) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(T\chi_n, A\chi_n)$.

Corollary 4.3. Let $T, A : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ be two bounded linear operators.

(*i*) If $\mathcal{M}_T \neq \emptyset$, then for any $\chi \in \mathcal{M}_T$, $\cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(T, A) \leq \cos_{BJ}^{\|\cdot\|}(T\chi, A\chi)$.

(*ii*) If $\{\chi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}_{\mathcal{X}}(0,1)$ is a sequence of unit vectors such that $\|T\chi_n\| \longrightarrow \|T\|$, and $T\chi_n \perp_{BJ} A\chi_n$ for all $n \in \mathbb{N}$, then $T \perp_{BJ} A$.

(*iii*) If $\mathcal{M}_T \neq \emptyset$ and there exists a $\chi \in \mathcal{M}_T$ such that $T\chi \perp_{BJ} A\chi$, then $T \perp_{BJ} A$.

Proposition 4.4. Consider two vectors $\chi, \psi \in \mathcal{X}$. Then, for any $\theta \in [0, \pi]$, $\psi \in \chi^{(\theta,0)}$ or $\psi \in \chi^{(\theta+\pi,0)}$.

Theorem 4.5. Consider a reflexive complex Banach space $\mathcal{X}$ and a complex normed linear space $\mathcal{Y}$. Let $T, A : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ be two compact linear operators. Then, $T \perp_{BJ} A$ if and only if, for any $\theta \in [0, 2\pi]$, there is a vector $\chi_\theta \in \mathcal{M}_T$ such that $A\chi_\theta \in (T\chi_\theta)^{(\theta,0)}$.

Theorem 4.6. Consider two complex normed linear spaces $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, and let $T, A : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ be two nonzero bounded linear operators. Then, $T \perp_{BJ} A$ if and only if one of the following holds:

(i) There exists a sequence $\{\chi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}_{\mathcal{X}}(0,1)$ such that $\|T\chi_n\| \longrightarrow \|T\|$ and $\|A\chi_n\| \longrightarrow 0$.

(ii) For any $\theta \in [0, 2\pi]$, there is a sequence of vectors $\{\chi_{\theta,n}\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}_{\mathcal{X}}(0,1)$ and a sequence of real numbers $\{\varepsilon_{\theta,n}\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (0,1)$ such that

- *(a)* $\varepsilon_{\theta,n} \longrightarrow 0$,
- *(b)* $\|T\chi_{\theta,n}\| \longrightarrow \|T\|$, and
- *(c)* $A\chi_{\theta,n} \in (T\chi_{\theta,n})^{(\theta,\varepsilon_{\theta,n})}$ for all $n \in \mathbb{N}$.

5. Vector-valued polynomials

Consider a vector-valued polynomial

$$P(z) = \chi_m z^m + \chi_{m-1} z^{m-1} + \cdots + \chi_1 z + \chi_0,$$

with vector coefficients $\chi_i \in \mathcal{X}$ $(i = 0, 1, \ldots, m)$, $\chi_m \neq 0$, and a scalar variable $z \in \mathbb{C}$.

For any $\varepsilon \in [0,1)$, and any nonzero vector $\psi \in \mathcal{X}$ such that $F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_m; \psi) \neq \{0\}$, we can define the Birkhoff-James ε-orthogonality set of $P(z)$ with respect to ψ.

Definition 5.1. Let $P(z)$ be a vector-valued polynomial, $\varepsilon \in [0,1)$, and $\psi \in \mathcal{X}$ be a nonzero vector such that $F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_m; \psi) \neq \{0\}$. The *Birkhoff-James ε-orthogonality set of $P(z)$ with respect to ψ* is defined and denoted by

$$
\begin{aligned}
W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi) &= \left\{\mu\in\mathbb{C}:\ 0\in F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(\mu);\psi)\right\}\\
&= \{\mu\in\mathbb{C}:\ f(P(\mu))=0,\ f\in L_{\varepsilon}(\psi)\}\\
&= \{\mu\in\mathbb{C}:\ f(\chi_m)\mu^m+\cdots+f(\chi_1)\mu+f(\chi_0)=0,\ f\in L_{\varepsilon}(\psi)\}\\
&= \{\mu\in\mathbb{C}:\ \psi\perp^{\varepsilon}_{BJ}P(\mu)\}\\
&= \left\{\mu\in\mathbb{C}:\ \|P(\mu)-\lambda\psi\|\geqslant\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\|\psi\|\,|\lambda|,\ \forall\lambda\in\mathbb{C}\right\}.
\end{aligned}
$$

Theorem 5.2. Let $P(z)$ be a vector-valued polynomial, $\varepsilon\in[0,1)$, and $\psi\in\mathcal{X}$ be a nonzero vector such that $F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_m;\psi)\neq\{0\}$. Then, the set $W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi)$ is bounded if and only if $0\notin F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_m;\psi)$.

Theorem 5.3. Consider a nonzero vector $\psi\in\mathcal{X}$, an $\varepsilon\in[0,1)$, and the vector-valued polynomial $P(z)=\psi z^m+\chi_{m-1}z^{m-1}+\cdots+\chi_1 z+\chi_0$ (i.e., $\chi_m=\psi$). Then, for every $\mu\in W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi)$, it holds

$$
\frac{\widehat{r}^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_0;\psi)}{\widehat{r}^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_0;\psi)+\max\limits_{1\leqslant j\leqslant m} r^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_j;\psi)}\leqslant|\mu|\leqslant 1+\max_{0\leqslant j\leqslant m-1} r^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_j;\psi).
$$

Theorem 5.4. Let $P(z)$ be a vector-valued polynomial, $\varepsilon\in[0,1)$, and $\psi\in\mathcal{X}$ be a nonzero vector such that $0\notin F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_m;\psi)$ (or equivalently, $W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi)$ is bounded). Suppose that $W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi)$ has r connected components. If κ is the minimum number of distinct zeros of the scalar polynomial $f(P(z))=f(\chi_m)z^m+f(\chi_{m-1})z^{m-1}+\cdots+f(\chi_1)z+f(\chi_0)$ over all $f\in L_{\varepsilon}(\psi)$, then $r\leqslant\kappa\leqslant m$.

Theorem 5.5. Let $P(z)$ be a vector-valued polynomial, $\varepsilon\in[0,1)$, and $\psi\in\mathcal{X}$ be a nonzero vector such that $0\notin F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_m;\psi)$ (or equivalently, $W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi)$ is bounded). Suppose that for every $f\in L_{\varepsilon}(\psi)$, the scalar polynomial $f(P(z))=f(\chi_m)z^m+f(\chi_{m-1})z^{m-1}+\cdots+f(\chi_1)z+f(\chi_0)$ has exactly m simple roots. Then, $W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi)$ has exactly m connected components.

Theorem 5.6. Let $P(z)$ be a vector-valued polynomial, $\varepsilon \in [0,1)$, and $\psi \in \mathcal{X}$ be a nonzero vector such that $F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_m;\psi) \neq \{0\}$. If $z_0 \in \partial W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi)$, then $0 \in \partial F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z_0);\psi)$.

Theorem 5.7. Let $P(z)$ be a vector-valued polynomial, $\varepsilon \in [0,1)$, and $\psi \in \mathcal{X}$ be a nonzero vector such that $F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_m;\psi) \neq \{0\}$. Let also $z_0 \in W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi)$ such that $F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z_0);\psi) \neq \{0\}$ and $0 \notin F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P'(z_0);\psi)$. If $0 \in \partial F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z_0);\psi)$, then $z_0 \in \partial W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi)$.

Proposition 5.8. Let $P(z)$ be a vector-valued polynomial, $\varepsilon \in [0,1)$, and $\psi \in \mathcal{X}$ be a nonzero vector such that $0 \notin F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_m;\psi)$ (or equivalently, $W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi)$ is bounded). If z_0 is an isolated point of $W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi)$, then $F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z_0);\psi) = \{0\}$. If, in addition, $\varepsilon > 0$, then $P(z_0) = 0$.

Theorem 5.9. Let $P(z)$ be a vector-valued polynomial, $\varepsilon \in [0,1)$, and $\psi \in \mathcal{X}$ be a nonzero vector such that $F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_m;\psi) \neq \{0\}$. Let also $z_0 \in W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi)$ with local dimension in $W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi)$ equal to 1, such that $F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z_0);\psi) \neq \{0\}$, the origin is a differentiable point of $\partial F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z_0);\psi)$ and $0 \notin F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P'(z_0);\psi)$. Then, the local dimension of 0 in $F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(P(z_0);\psi)$ is 1.

Theorem 5.10. Let $P(z)$ be a vector-valued polynomial and $\psi \in \mathcal{X}$ be a nonzero vector such that $F^{0}_{\|\cdot\|}(\chi_m;\psi) \neq \{0\}$. Let also z_0 be an interior point of $W^{0}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi)$ or a differentiable point of $\partial W^{0}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi)$ with local dimension in $W^{0}_{\|\cdot\|}(P(z);\psi)$ equal to 2, such that $F^{0}_{\|\cdot\|}(P(z_0);\psi) \neq \{0\}$ and $0 \notin F^{0}_{\|\cdot\|}(P'(z_0);\psi)$. Then, the local dimension of the origin in $F^{0}_{\|\cdot\|}(P(z_0);\psi)$ is equal to 2.

Theorem 5.11. Let $\chi_1 z+\chi_0$ be a linear vector-valued polynomial, $\varepsilon \in [0,1)$, and $\psi \in \mathcal{X}$ be a nonzero vector such that $F^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_1;\psi) \neq \{0\}$. If the set $W^{\varepsilon}_{\|\cdot\|}(\chi_1 z + \chi_0;\psi)$ is bounded, then it is simply connected.