ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΤΑΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΕΙΣΜΙΚΩΝ ΕΡΕΥΝΩΝ

ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΥΣΤΕΡΗΤΙΚΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΠΛΑΚΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΑΝΑΡΓΥΡΟΣ ΜΩΥΣΙΔΗΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΒΛΑΣΗΣ ΚΟΥΜΟΥΣΗΣ, Καθηγητής Ε.Μ.Π.

ΣΥΝΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΣΑΒΒΑΣ ΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΟΥ, Διδάκτωρ Ε.Μ.Π.

ΑΘΗΝΑ 2011

ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΥΣΤΕΡΗΤΙΚΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΠΛΑΚΩΝ

Θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές και ειλικρινείς ευχαριστίες μου στον κ. Βλάση Κουμούση, καθηγητή του Εργαστηρίου Στατικής και Αντισεισμικών Ερευνών του τομέα Δομοστατικής της Σχολής Πολιτικών Μηχανικών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, για τη συνεχή καθοδήγηση και την πολύτιμη βοήθεια του, για το ενδιαφέρον και την άμεση ανταπόκριση στα διάφορα προβλήματα που προέκυπταν καθώς και για το πλούσιο βιβλιογραφικό υλικό που μου παρείχε.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Σάββα Τριανταφύλλου, διδάκτορα Πολιτικό Μηχανικό Ε.Μ.Π., για την υποστήριξη του και τη συνεισφορά του στην εκπόνηση αυτής της διπλωματικής εργασίας.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Αντικείμενο της διπλωματικής εργασίας είναι η ανάπτυξη υστερητικών πεπερασμένων στοιχείων πλακών για την ανελαστική δυναμική ανάλυση των κατασκευών. Ένα σημαντικό ζήτημα που καλείται να αντιμετωπίσει ο Δομοστατικός Πολιτικός Μηχανικός είναι η μη γραμμική απόκριση ελαστοπλαστικών κατασκευών που υποβάλλονται σε ανακυκλιζόμενη δυναμική φόρτιση. Προκειμένου να ληφθεί υπόψη η ανελαστική απόκριση, είναι απαραίτητα πιο ακριβή προσομοιώματα της συμπεριφοράς των υλικών. Στην παρούσα διπλωματική χρησιμοποιείται το προσομοίωμα Bouc-Wen, το οποίο είναι ένα ομαλό υστερητικό προσομοίωμα που είναι ανεξάρτητο της ταχύτητας επιβολής της παραμορφώσεως (rate independent). Με βάση την κλασική θεωρία της πλαστικότητας, εξάγεται το γενικευμένο τριαξονικό προσομοίωμα Bouc-Wen σε τανυστική μορφή, το οποίο ισχύει για κάθε κριτήριο διαρροής και για κάθε νόμο κράτυνσης. Έτσι, καθίσταται δυνατή η ενσωμάτωση του προσομοιώματος Bouc-Wen στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Στη συνέχεια, εξάγονται υστερητικά πεπερασμένα στοιχεία πλακών. Οι κλασικές ελαστικές διατυπώσεις του στοιχείου πλάκας της θεωρίας Kirchhoff και της θεωρίας Reissner-Mindlin επεκτείνονται εισάγοντας επιπρόσθετους υστερητικούς βαθμούς ελευθερίας. Τέλος, τα υστερητικά αυτά στοιχεία χρησιμοποιούνται για την επίλυση παραδειγμάτων και τα αποτελέσματα συγκρίνονται με τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την επίλυση με το Femap από όπου προκύπτει πολύ ικανοποιητική ακρίβεια.

ABSTRACT

The purpose of this diploma thesis is the development of hysteretic plate finite elements for the inelastic, dynamic analysis of structures. An issue of major importance for structural engineers is the nonlinear response of elastoplastic structures undergoing cyclic dynamic loading. In order to take into account the inelastic response, more accurate material models are needed. In the present thesis, the Bouc-Wen model is utilized, which is a smooth, hysteretic, rate independent model capable to express the hysteretic behavior and to incorporate stiffness degradation, strength deterioration and pinching phenomena. On the basis of the classical theory of

plasticity, the generalized triaxial Bouc-Wen model is derived in tensorial form which is valid for any yield criterion and hardening law. Thus, the incorporation of Bouc-Wen model into the Finite Element Method is achieved. Based on this approach, hysteretic plate finite elements are derived. The classical elastic formulations of the plate element according to Kirchhoff theory and Reissner-Mindlin theory are extended to include additional hysteretic degrees of freedom. Finally, to validate the current formulation the results are compared against those obtained using Femap-Nastran code. A good agreement is reached between the standard FEM and the proposed formulation.

Πίνακας περιεχομένων

Πίνακας εικόνων

κεφάλαιο 1 Εισαγωγή

Ένα σημαντικό ζήτημα που καλείται να αντιμετωπίσει ο Δομοστατικός Πολιτικός Μηχανικός είναι η μη γραμμική απόκριση ελαστοπλαστικών κατασκευών που υποβάλλονται σε ανακυκλιζόμενη δυναμική φόρτιση. Προκειμένου να ληφθεί υπόψη η ανελαστική απόκριση, είναι απαραίτητα πιο ακριβή προσομοιώματα της συμπεριφοράς των υλικών. Στην παρούσα διπλωματική χρησιμοποιείται το προσομοίωμα Bouc-Wen, το οποίο είναι ένα ομαλό υστερητικό προσομοίωμα που είναι ανεξάρτητο της ταχύτητας επιβολής της παραμορφώσεως (rate independent). Το προσομοίωμα αυτό ενσωματώνεται στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων κι έτσι εξάγονται υστερητικά πεπερασμένα στοιχεία πλακών. Η διπλωματική διαρθρώνεται ως εξής:

Στο κεφάλαιο 2, αρχικά, συνοψίζονται ορισμένα στοιχεία από τη Θεωρία της Ελαστικότητας και τη Μηχανική του Παραμορφώσιμου Σώματος. Συγκεκριμένα, υπενθυμίζονται οι έννοιες των τάσεων, της ανηγμένης παραμόρφωσης και αναφέρονται οι εξισώσεις ισορροπίας των τάσεων, συμβιβαστού των παραμορφώσεων και οι σχέσεις τάσεων-ανηγμένων παραμορφώσεων. Στη συνέχεια, εξετάζεται η μετελαστική συμπεριφορά των υλικών, όπου παρουσιάζονται κριτήρια αστοχίας υλικών και στοιχεία από την κλασική θεωρία της Πλαστικότητας και από τη θεωρία της Πλαστικής Ροής.

Στο κεφάλαιο 3, παρουσιάζεται το υστερητικό προσομοίωμα Bouc-Wen. Αφού περιγραφεί η έννοια της υστέρησης, διατυπώνεται το προσομοίωμα Bouc-Wen στη μία διάσταση και για να γίνει πιο κατανοητό απεικονίζεται ως ένας εν παραλλήλω συνδυασμός ενός γραμμικού ελατηρίου και ενός μη γραμμικού στοιχείου. Στο ίδιο κεφάλαιο, με βάση τις εξισώσεις της κλασικής πλαστικότητας εξάγεται το γενικευμένο τριαξονικό προσομοίωμα Bouc-Wen σε τανυστική μορφή, το οποίο ισχύει για κάθε κριτήριο διαρροής και για κάθε νόμο κράτυνσης.

Στο κεφάλαιο 4, το παραπάνω τριαξονικό προσομοίωμα, του οποίου οι σχέσεις είναι διατυπωμένες στο χώρο των τάσεων, εκφράζεται σε όρους συνισταμένων των τάσεων, δηλαδή ροπών. Αφού παρατεθούν ορισμένα θεωρητικά στοιχεία της κάμψης πλακών σύμφωνα με τη θεωρία Kirchhoff και τη θεωρία Reissner-Mindlin, εξάγονται τα αντίστοιχα πεπερασμένα στοιχεία πλακών που ενσωματώνουν την υστέρηση Bouc-Wen. Για να επιτευχθεί αυτό, απαιτείται κάποιο κριτήριο αστοχίας, το οποίο προκύπτει ύστερα από κατάλληλους μετασχηματισμούς του κριτηρίου αστοχίας του

Mises. Στο τέλος του κεφαλαίου, παρουσιάζεται η διαδικασία επίλυσης των εξισώσεων ενός δυναμικού προβλήματος.

Στο κεφάλαιο 5, παρουσιάζονται τρία παραδείγματα που καταδεικνύουν την ισχύ και την ακρίβεια της προτεινόμενης μεθόδου μέσω της σύγκρισης με τα αποτελέσματα που λαμβάνονται από τη επίλυση των ίδιων παραδειγμάτων με το Femap. Τέλος, στο κεφάλαιο 6, συνοψίζονται τα συμπεράσματα της διπλωματικής.

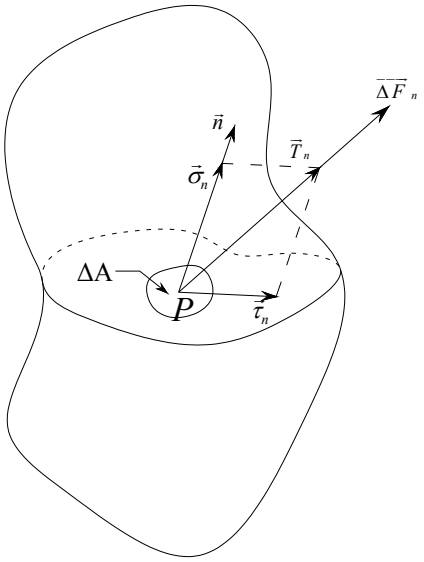
κεφάλαιο 2

Στοιχεία μηχανικής του παραμορφώσιμου και θεωρίας της πλαστικότητας

2.1 Η έννοια της τάσεως

Δύο είναι οι βασικοί τύποι δυνάμεων που μπορεί να εξασκούνται σε ένα σώμα, οι επιφανειακές και οι μαζικές. Οι πρώτες εμφανίζονται όταν ένα σώμα έρχεται σε επαφή με ένα άλλο σώμα, ενώ οι δυνάμεις του δεύτερου τύπου δρουν σε κάθε σημείο της μάζας του σώματος μέσω κάποιου πεδίου δυνάμεων.

Ας θεωρηθεί στοιχειώδης επιφάνεια ΔΑ στη γειτονιά τυχόντος σημείου Ρ στο εσωτερικό ή στην επιφάνεια ενός υλικού σώματος Β κι έστω $\vec{n}$ το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα που χαρακτηρίζει την επιφάνεια ΔΑ. Έστω επίσης $\overrightarrow{\Delta F_n}$ η συνισταμένη δύναμη που δρα στην επιφάνεια αυτή, όπως φαίνεται στην Εικόνα 2.1.



Εικόνα 2.1 Αυθαίρετη επιφάνεια ΔΑ και η επί αυτής συνισταμένη δύναμη $\overrightarrow{\Delta F_n}$

Ως διάνυσμα της συνισταμένης τάσεως ορίζεται η ποσότητα:

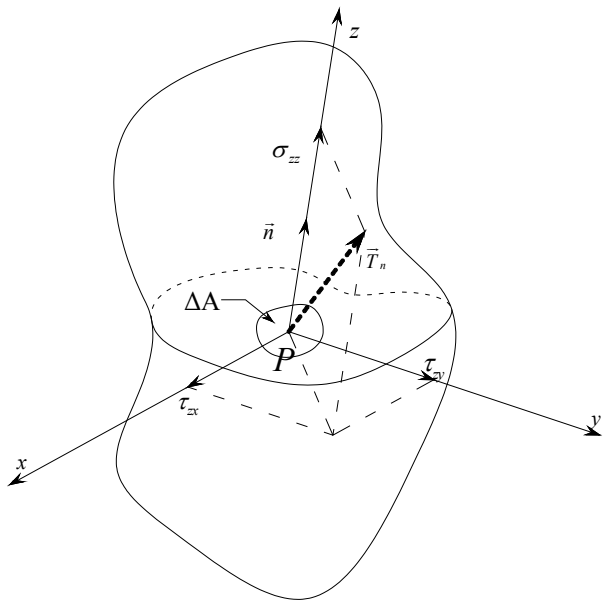
$$\vec{T}_n = \lim_{\Delta A \to \alpha_0} \frac{\overrightarrow{\Delta F_n}}{\Delta A} \tag{2.1}$$

όπου α_0 το κάτω όριο της υποδιαιρέσεως της στοιχειώδους επιφάνειας για το οποίο εξακολουθεί να έχει νόημα η μηχανική του Συνεχούς Μέσου. Τονίζεται στο σημείο αυτό ότι η συνισταμένη τάση $\vec{T}_n$ είναι συνάρτηση τόσο της θέσεως του σημείου Ρ όσο και του προσανατολισμού της επιφάνειας ΔΑ. Ακόμα δηλαδή και αν το σημείο Ρ παραμείνει σταθερό και απλώς στραφεί η επιφάνεια ΔΑ, το διάνυσμα $\vec{T}_n$ θα πάρει διαφορετική τιμή.

Είναι προφανές ότι η συνισταμένη τάση $\vec{T}_n$ μπορεί να αναλυθεί σε δύο συνιστώσες, μία κάθετη στην επιφάνεια ΔΑ, την $\vec{\sigma}_n$, και μία εφαπτομενική στην επιφάνεια ΔΑ, την $\vec{\tau}_n$, όπως φαίνεται στην Εικόνα 2.1. Η $\vec{\sigma}_n$ καλείται συνισταμένη **ορθή τάση** ενώ η $\vec{\tau}_n$ καλείται συνισταμένη **διατμητική τάση**.

2.1.1 Η τάση ως τανυστής

Αν τώρα η επιφάνεια ΔΑ αναφερθεί σε δεξιόστροφο καρτεσιανό σύστημα αναφοράς P_{xyz}, τέτοιο ώστε η θετική z-διεύθυνση να ταυτίζεται με τη διεύθυνση της εξωτερικής καθέτου $\vec{n}$ της επιφάνειας ΔΑ, όπως φαίνεται στην Εικόνα 2.2, τότε η συνισταμένη τάση $\vec{T}_n$ αναλύεται σε τρεις καρτεσιανές συνιστώσες σ_{zz}, σ_{zx} και σ_{zy} (ή και σ_{zz}, τ_{zx} και τ_{zy} σύμφωνα με άλλο συμβολισμό) κατά τους άξονες z, x και y αντίστοιχα.



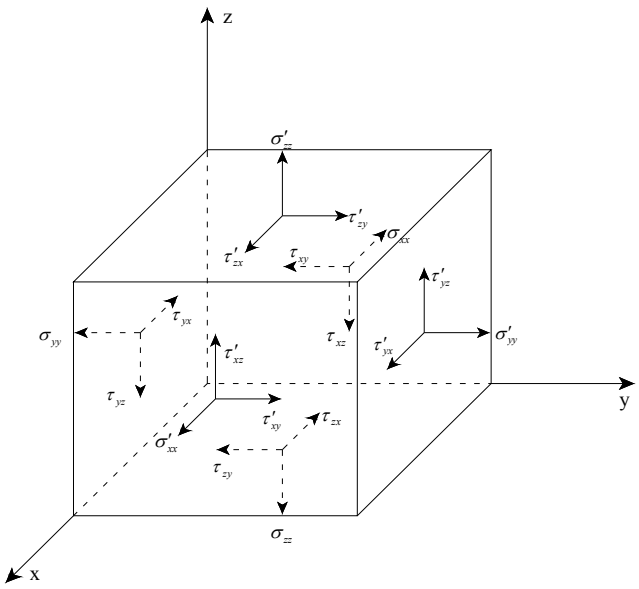
Εικόνα 2.2 Καρτεσιανή ανάλυση της συνισταμένης τάσεως $\vec{T}_n$

Αν αυτή η διαδικασία επαναληφθεί με επιφάνειες προσανατολισμένες κατά τους άξονες x και y, αντίστοιχα, λαμβάνονται δύο ακόμα τριάδες καρτεσιανών συνιστωσών, οι σ_{xx}, τ_{xy} και τ_{xz} και οι σ_{yy}, τ_{yx} και τ_{yz}, αντίστοιχα. Συνηθίζεται οι τρεις

αυτές τριάδες καρτεσιανών συνιστωσών να παρουσιάζονται με τη μορφή μητρώου ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{διάνυσμα συνισταμένης τάσεως επί επιφανείας με εξωτερική κάθετο //x-άξονα} \\ \rightarrow \text{διάνυσμα συνισταμένης τάσεως επί επιφανείας με εξωτερική κάθετο //y-άξονα} \\ \rightarrow \text{διάνυσμα συνισταμένης τάσεως επί επιφανείας με εξωτερική κάθετο //z-άξονα} \end{array}$$

Οι εννέα αυτές καρτεσιανές συνιστώσες της τάσεως γίνονται αντιληπτές καλύτερα αν σχεδιασθούν στις πλευρές ενός στοιχειώδους κύβου, όπως φαίνεται στην Εικόνα 2.3.



Εικόνα 2.3 Οι καρτεσιανές συνιστώσες της τάσεως στις πλευρές ενός στοιχειώδους κυβικού στοιχείου

Οι εννέα συνιστώσες της τάσεως διατεταγμένες σε μητρωική μορφή απαρτίζουν το λεγόμενο τανυστή των τάσεων σ_{ij}, ο οποίος συμβολίζεται ως εξής:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

Αποδεικνύεται ότι ο τανυστής των τάσεων είναι συμμετρικός, δηλαδή ισχύει:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}\,, \quad i, j = x, y, z, \quad i \neq j \tag{2.3}$$

2.1.2 Οι εξισώσεις ισορροπίας των τάσεων

Με βάση την Εικόνα 2.3, ας θεωρήσουμε την ισορροπία του κυβικού στοιχείου κατά τον άξονα x. Προφανώς θα ισχύει:

$$\sigma'_{xx}dydz + \tau'_{yx}dxdz + \tau'_{zx}dydx - \sigma_{xx}dydz - \tau_{yx}dxdz - \tau_{zx}dydx + F_x dxdydz = 0 \quad (2.4)$$

όπου dx, dy, dz οι διαστάσεις του κυβικού στοιχείου και F_x η συνιστώσα μαζική δύναμη κατά τον άξονα x ανά μονάδα όγκου. Θεωρώντας όμως ότι οι διαστάσεις του στοιχειώδους κύβου τείνουν στο μηδέν μπορεί να γραφεί:

$$\sigma'_{xx} = \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}dx, \quad \tau'_{yx} = \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}dy, \quad \tau'_{zx} = \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}dz \quad (2.5)$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (2.5) στην εξίσωση (2.4) και διαιρώντας με το στοιχειώδη όγκο dxdydz, λαμβάνεται:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + F_x = 0 \quad (2.6)$$

Ομοίως, θεωρώντας την ισορροπία κατά τους άξονες y και z, λαμβάνονται και οι επόμενες δύο εξισώσεις:

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + F_y = 0 \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + F_z = 0 \quad (2.8)$$

Οι εξισώσεις (2.6), (2.7) και (2.8) αποτελούν τις λεγόμενες εξισώσεις ισορροπίας των τάσεων και πρέπει να ικανοποιούνται από οποιαδήποτε θεωρητικώς ή πειραματικώς λαμβανόμενη κατανομή τάσεων.

2.2 Η έννοια της παραμορφώσεως

Στην περίπτωση που ένα σύστημα εξωτερικών φορτίσεων ασκηθεί σε ένα υλικό σώμα, τα διάφορα σημεία του σώματος θα κινηθούν. Η μετακίνηση ενός τυχαίου

$P(x, y, z)$ είναι προφανώς διανυσματική ποσότητα και καλείται **μετατόπιση**. Αν τώρα οι μετατοπίσεις διαφόρων σημείων ενός σώματος είναι διαφορετικές μεταξύ τους, κάθε μία από αυτές θα αντιπροσωπεύεται από το δικό της μοναδικό διάνυσμα μετατοπίσεως, το οποίο μπορεί να αναλύεται σε τρεις καρτεσιανές συνιστώσες:

$$\begin{aligned} u &= u(x, y, z) \\ v &= v(x, y, z) \\ w &= w(x, y, z) \end{aligned} \tag{2.9}$$

κατά τους άξονες x, y και z αντίστοιχα.

Η κίνηση ενός σώματος γενικά θεωρείται ότι αποτελείται από τρία τμήματα:

i. Μεταφορά του σώματος ως στερεού (απαραμόρφωτου) σώματος
ii. Περιστροφή του σώματος ως στερεού σώματος και
iii. Σχετικές μετατοπίσεις των υλικών σημείων του σώματος μεταξύ τους.

Οι δύο πρώτες κινήσεις (μεταφορά και περιστροφή) είναι γνωστές ως κινήσεις του (απολύτως) στερεού σώματος. Η τρίτη περίπτωση αντιστοιχεί στην παραμόρφωση του σώματος και είναι ιδιότητα όλων των πραγματικών σωμάτων. Οι μετακινήσεις της κατηγορίας αυτής είναι σχετικά μικρές σε αντίθεση με τις δύο πρώτες που μπορεί να είναι αυθαίρετα μεγάλες ή μικρές. Είναι προφανές ότι για την παραμόρφωση ενός σώματος είναι απαραίτητη η ύπαρξη των μετακινήσεων της τρίτης αυτής κατηγορίας ή με άλλα λόγια τα διανύσματα μετατοπίσεως των διαφόρων σημείων του σώματος να είναι διαφορετικά μεταξύ τους.

2.2.1 Η παραμόρφωση ως τανυστής

Ορίζουμε ως **μέση ορθή παραμόρφωση ε_{ss}** κατά μήκος τυχόντος ευθύγραμμου τμήματος ΔS (επί τυχούσης καμπύλης) του απαραμόρφωτου σώματος τη σχετική ως προς το αρχικό αυτό μήκος αλλαγή μήκους του ευθύγραμμου τμήματος, δηλαδή:

$$\varepsilon_{ss} = \frac{\Delta S' - \Delta S}{\Delta S} \tag{2.10}$$

Αποδεικνύεται ότι η μέση ορθή παραμόρφωση κατά τους άξονες x, y και z δίνονται από τους τύπους:

$$\varepsilon_{xx} = \sqrt{1 + 2\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} - 1 \tag{2.11}$$

$$\varepsilon_{yy} = \sqrt{1 + 2\frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} - 1 \tag{2.12}$$

$$\varepsilon_{xx} = \sqrt{1 + 2\frac{\partial w}{\partial z} + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2} - 1 \tag{2.13}$$

Στη συνέχεια ορίζουμε ως διατμητική παραμόρφωση γ_{xy} την αλλαγή της γωνίας μεταξύ δύο ευθύγραμμων τμημάτων κάθετων μεταξύ τους, στην αρχική απαραμόρφωτη γεωμετρία. Αποδεικνύεται ότι:

$$\gamma_{xy} = \arcsin\left(\frac{\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}}{\left(1+\varepsilon_{xx}\right)\left(1+\varepsilon_{yy}\right)}\right) \tag{2.14}$$

$$\gamma_{yz} = \arcsin\left(\frac{\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}}{\left(1+\varepsilon_{yy}\right)\left(1+\varepsilon_{zz}\right)}\right) \tag{2.15}$$

$$\gamma_{zx} = \arcsin\left(\frac{\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x}}{\left(1+\varepsilon_{zz}\right)\left(1+\varepsilon_{xx}\right)}\right) \tag{2.16}$$

Οι εξισώσεις (2.11)-(2.16) συνδέουν τις ορθές και διατμητικές παραμορφώσεις με το πεδίο των μετατοπίσεων, δηλαδή με τις θέσεις των σημείων ενός σώματος στην αρχική (απαραμόρφωτη) και στην τελική (παραμορφωμένη) θέση του. Ωστόσο, στην πλειονότητα των εφαρμογών του μηχανικού οι μετατοπίσεις και οι παραμορφώσεις είναι πάρα πολύ μικρές, ώστε τόσο τα γινόμενα των παραγώγων της μετατοπίσεως όσο και τα τετράγωνά τους να μπορούν να αγνοηθούν, συγκρινόμενα με τις παραγώγους των μετατοπίσεων καθ' εαυτές. Στην περίπτωση αυτή, οι παραπάνω εξισώσεις απλοποιούνται ως εξής:

$$\begin{gathered} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \equiv 2\varepsilon_{xy}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \equiv 2\varepsilon_{yz}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \equiv 2\varepsilon_{zx} \end{gathered} \tag{2.17}$$

Οι εννέα συνιστώσες της παραμορφώσεως διατεταγμένες σε μητρωική μορφή απαρτίζουν το λεγόμενο τανυστή των παραμορφώσεων ε_{ij}, ο οποίος συμβολίζεται ως εξής:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

ο οποίος είναι συμμετρικός, δηλαδή ισχύει:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}\,, \quad i,\, j = x,\, y,\, z, \quad i \neq j \tag{2.19}$$

2.2.2 Οι εξισώσεις συμβιβαστού των παραμορφώσεων

Οι εξισώσεις (2.17) παρέχουν τον τανυστή των παραμορφώσεων αν είναι δεδομένο το πεδίο των μετατοπίσεων. Η αντίστροφη διαδικασία προφανώς δεν είναι εφικτή. Δηλαδή, ο προσδιορισμός του πεδίου των μετατοπίσεων, αν είναι δεδομένος ο τανυστής των παραμορφώσεων (σύστημα έξι εξισώσεων με τρεις προσδιοριστέες συναρτήσεις), δε μπορεί να επιτευχθεί αν δεν τεθούν ορισμένοι περιορισμοί, όπως για παράδειγμα να μην υπάρχουν κενά στο φορτιζόμενο σώμα μετά την παραμόρφωσή του. Οι εξισώσεις που εξασφαλίζουν την επίλυση του αντίστροφου αυτού προβλήματος καλούνται εξισώσεις συμβιβαστού των παραμορφώσεων και είναι:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} \\
\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} \\
\frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} \\
2\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \\
2\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \\
2\frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)
\end{aligned} \tag{2.20}$$

2.3 Οι σχέσεις μεταξύ των τάσεων και των παραμορφώσεων- Νόμος του Hooke

Στην παράγραφο αυτή θα αναφερθεί η τελευταία ομάδα εξισώσεων που χρησιμοποιείται στην επίλυση των προβλημάτων της Ελαστικότητας και της Μηχανικής του Παραμορφώσιμου Σώματος, οι καταστατικές εξισώσεις. Οι εξισώσεις αυτές δεν είναι άλλες παρά οι σχέσεις που συνδέουν τις τάσεις με τις παραμορφώσεις που αναπτύσσονται σε ένα σώμα από συγκεκριμένο υλικό. Οι καταστατικές εξισώσεις έχουν μια ιδιαιτερότητα συγκρινόμενες τόσο με τις εξισώσεις ισορροπίας των τάσεων όσο και με τις εξισώσεις συμβιβαστού των παραμορφώσεων: οι καταστατικές εξισώσεις δε μπορούν να προκύψουν θεωρητικώς.

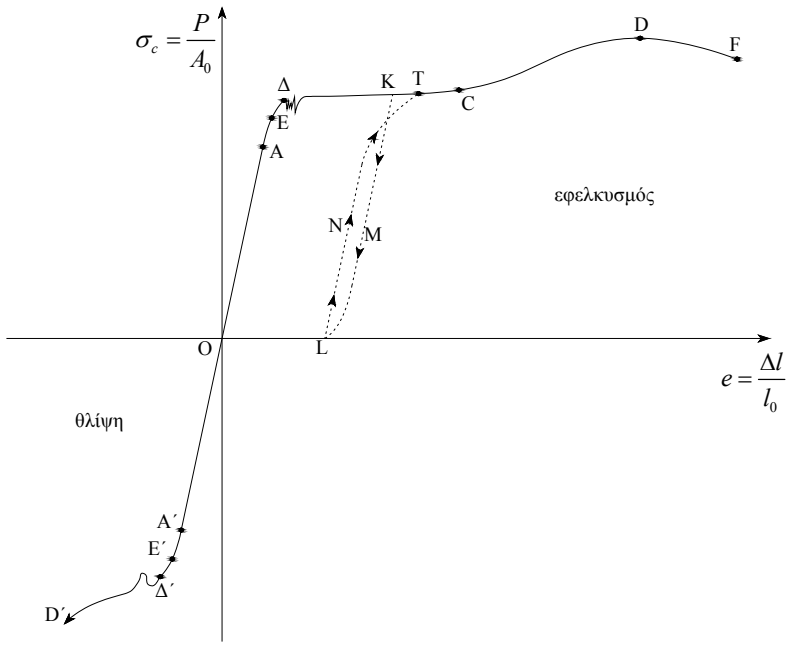
Στην απλούστερη περίπτωση, δηλαδή της φορτίσεως στην αρχική ελαστική περιοχή, όπου τα φαινόμενα θεωρούνται αντιστρεπτά και οι σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων είναι γραμμικές και επιπλέον με την εκμετάλλευση επιχειρημάτων συμμετρίας και υποθέτοντας ότι το υλικό του καταπονούμενου σώματος είναι ομογενές και ισότροπο, οι καταστατικές εξισώσεις γράφονται ως:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_{xx} + \nu\left(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}\right)\right] \\
\sigma_{yy} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_{yy} + \nu\left(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz}\right)\right] \\
\sigma_{zz} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_{zz} + \nu\left(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}\right)\right] \\
\tau_{xy} &= \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{xy}\,, \quad \tau_{yz} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{yz}\,, \quad \tau_{zx} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{zx}
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

2.4 Η μετελαστική συμπεριφορά των υλικών

2.4.1 Ελαστικές και πλαστικές παραμορφώσεις

Στο διάγραμμα της Εικόνας 2.4 παρουσιάζονται οι πληροφορίες που αφορούν τη συμπεριφορά ενός όλκιμου υλικού, όπως αυτή προκύπτει από ένα πείραμα μονοαξονικού εφελκυσμού και θλίψης. Ο κατακόρυφος άξονας αντιστοιχεί στη συμβατική τάση σ_c (φορτίο διαιρεμένο με την αρχική διατομή A_0 του δοκιμίου) ενώ ο οριζόντιος στη συμβατική παραμόρφωση e (την επιμήκυνση Δl διαιρεμένη με το αρχικό μήκος μετρήσεως l_0 του δοκιμίου).



Εικόνα 2.4 Τυπικό διάγραμμα συμβατικών τάσεων-συμβατικών παραμορφώσεων όλκιμου μεταλλικού υλικού

Το σημείο Α του διαγράμματος αντιστοιχεί στο όριο αναλογίας (σημείο πέραν του οποίου παύει να ισχύει ο νόμος του Hooke) και το οποίο κείται κατά τι χαμηλότερα από το όριο ελαστικότητας Ε, πέραν του οποίου οι μεταβολές καθίστανται μη αντιστρεπτές. Στη συνέχεια εμφανίζεται η περιοχή διαρροής (yield plateau) ΔC, όπου η παραμόρφωση αυξάνει με ανεπαίσθητη αύξηση της επιβαλλόμενης τάσεως και κατόπιν η περιοχή κρατύνσεως στην οποία η αύξηση των παραμορφώσεων συνοδεύεται από σχετικά σημαντική αύξηση των τάσεων. Στην περιοχή της θλίψεως το διάγραμμα είναι πανομοιότυπο με αυτό της περιοχής εφελκυσμού τουλάχιστον μέχρι το όριο διαρροής του υλικού. Η τάση που αντιστοιχεί στο τμήμα ΔC καλείται

τάση ή όριο διαρροής (yield limit or yield stress) και σε μερικά υλικά δε, χαρακτηρίζεται από ευθύγραμμο τμήμα.

Αν το φορτίο αφαιρεθεί αφού η τάση έχει ξεπεράσει την τάση διαρροής, το υλικό ακολουθεί εν γένει μια ευθύγραμμη καμπύλη αποφορτίσεως (KML στην Εικόνα 2.4) και το τμήμα (OL) αντιστοιχεί στη μόνιμη ή παραμένουσα παραμόρφωση. Αν το υλικό επαναφορτιστεί η καμπύλη φορτίσεως διαφέρει ελάχιστα από την αρχική (τμήμα LNT στην Εικόνα 2.4). Μοιάζει δηλαδή το υλικό να διατηρεί, να «θυμάται» τις ελαστικές του ιδιότητες και μάλιστα να αυξάνει κατά τι το όριο ελαστικότητάς του εις βάρος της ικανότητάς του να δέχεται πλαστικές παραμορφώσεις. Το φαινόμενο αυτό καλείται εργοσκλήρυνση (strain hardening) και γενικά έχει «προσανατολισμό». Ως συνέπεια επομένως της πλαστικής παραμορφώσεως τα υλικά, έστω και αν αρχικά είναι ισότροπα, καθίστανται ανισότροπα. Η ανισοτροπία αυτή καλείται παραμορφωσιακή ανισοτροπία (strain anisotropy) και ένα από τα αποτελέσματά της είναι το φαινόμενο Bauschinger, δηλαδή η ελάττωση της αντοχής ενός υλικού κατά μία διεύθυνση αν έχει προηγηθεί πλαστική παραμόρφωση κατά την αντίθετη διεύθυνση. Για παράδειγμα, πλαστικός εφελκυσμός μιας ράβδου έχει ως αποτέλεσμα σημαντική πτώση της τάσεως διαρροής σε επακόλουθη θλίψη της ίδιας ράβδου.

2.4.2 Η αστοχία των υλικών

Τα παραπάνω αφορούσαν μονοαξονικές φορτίσεις. Είναι ωστόσο, ιδιαίτερα σημαντικό να γνωρίζουμε τη συμπεριφορά των υλικών υπό σύνθετες εντατικές καταστάσεις. Εξαιρετικό ενδιαφέρον παρουσιάζει η γνώση των συνθηκών που χαρακτηρίζουν την αλλαγή της μηχανικής συμπεριφοράς ενός υλικού και τη μετάβασή του από την ελαστική κατάσταση στην κατάσταση διαρροής. Ενώ στο πείραμα του απλού μονοαξονικού εφελκυσμού κατά τον άξονα x μία συνθήκη της μορφής $\sigma_{xx} > \sigma_{\Delta}$ όπου σ_{Δ} είναι μια σταθερή τάση ίση με την τάση διαρροής (σημείο Δ στην Εικόνα 2.4) είναι αρκετή για να περιγράψει την αστοχία του υλικού, κάτι τέτοιο δεν είναι προφανές στην περίπτωση σύνθετων πολυαξονικών εντατικών καταστάσεων. Η σχέση αυτή που ικανοποιείται κατά τη στιγμή της μεταβάσεως του υλικού από την ελαστική κατάσταση (αντιστρεπτά φαινόμενα) στην κατάσταση διαρροής (μη αντιστρεπτά φαινόμενα) ονομάζεται κριτήριο αστοχίας ή συνθήκη πλαστικότητας.

Στη σύνθετη εντατική κατάσταση αποδεικνύεται πειραματικά ότι η αστοχία εξαρτάται από όλες τις τρεις κύριες τάσεις σ_1, σ_2 και σ_3. Έχουν αναπτυχθεί διάφορα κριτήρια αστοχίας τα οποία προσδιορίζουν τον κατάλληλο εκείνο συνδυασμό των κυρίων τάσεων για τον οποίο επέρχεται η αστοχία. Αυτά έχουν κάποια κοινά χαρακτηριστικά:

i. Ισοτροπία

Αν δεχτούμε ότι το υλικό παρουσιάζει ταυτότητα ιδιοτήτων σε όλες τις διευθύνσεις, τότε η συνθήκη αστοχίας πρέπει να είναι μια συμμετρική συνάρτηση των κυρίων τάσεων:

$$f\left(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\right) = \mathrm{K} \tag{2.22}$$

όπου K μία σταθερά που χαρακτηρίζει το συγκεκριμένο υλικό και η οποία είναι συνδεδεμένη με το όριο διαρροής.

ii. Ανεξαρτησία από το σύστημα αναφοράς

Η αστοχία ως φυσικό φαινόμενο δε μπορεί να εξαρτάται από την επιλογή συγκεκριμένου συστήματος αναφοράς για τον τανυστή των τάσεων. Επομένως, η συνθήκη (2.22) θα πρέπει να εκφράζεται συναρτήσει των αναλλοιώτων του τανυστή των τάσεων:

$$f\left[I_1\left(T_\sigma\right), I_2\left(T_\sigma\right), I_3\left(T_\sigma\right)\right] = \mathrm{K} \tag{2.23}$$

iii. Ανεξαρτησία της αστοχίας από την υδροστατική πίεση

Έχει αποδειχθεί πειραματικά από τον Bridgeman (1952), ότι στην πλειονότητα των ισότροπων υλικών η επιβολή υδροστατικής πίεσης, οσοδήποτε μεγάλης δε μπορεί να επιφέρει αστοχία, δεδομένου ότι η συμβολή της στην αλλαγή σχήματος του υλικού είναι αμελητέα. Επομένως, από την εξίσωση (2.23) μπορεί να παραληφθεί η πρώτη αναλλοίωτος $I_1\left(T_\sigma\right)$, που δεν είναι παρά το τριπλάσιο της υδροστατικής πίεσης. Άρα, η συνάρτηση που περιγράφει την αστοχία μπορεί να γραφεί ως:

$$f\left[I_2\left(T_\sigma\right), I_3\left(T_\sigma\right)\right] = \mathrm{K} \tag{2.24}$$

ή και ως:

$$f\left[I_2\left(D_\sigma\right), I_3\left(D_\sigma\right)\right] = \mathrm{K} \tag{2.25}$$

όπου $I_2(D_\sigma)$, $I_3(D_\sigma)$ η δεύτερη και τρίτη αναλλοίωτος του αποκλίνοντος τανυστή των τάσεων.

Με βάση τα παραπάνω, η εξίσωση (2.25) θα είναι η εξίσωση ενός κυλινδρικού πρίσματος στο χώρο των κυρίων τάσεων, του οποίου ο άξονας είναι η γραμμή $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. Έχουν διατυπωθεί αρκετά γενικά κριτήρια όπως το κριτήριο της μέγιστης ορθής τάσεως, της μέγιστης ορθής παραμορφώσεως, της πυκνότητας της ενέργειας παραμορφώσεων, της μέγιστης διατμητικής τάσεως, της πυκνότητας της στροφικής ενέργειας παραμορφώσεων, της εσωτερικής τριβής κλπ. Παρακάτω, αναφέρονται αναλυτικότερα τα κριτήρια αστοχίας von Mises και Bresler-Pister.

2.4.3 Η θεωρία της πυκνότητας της στροφικής ενέργειας των παραμορφώσεων ή κριτήριο αστοχίας του von Mises (1913)

Σύμφωνα με τη θεωρία της πυκνότητας της στροφικής ενέργειας των παραμορφώσεων ή το κριτήριο διαρροής του von Mises, η αστοχία ενός όλκιμου υλικού που βρίσκεται κάτω από την επίδραση σύνθετης εντατικής καταστάσεως σ_1, σ_2, σ_3, επέρχεται όταν η πυκνότητα της στροφικής ενέργειας των παραμορφώσεων που αναπτύσσεται στο υλικό με αυτήν την εντατική κατάσταση, γίνει ίση με την αντίστοιχη πυκνότητα της στροφικής ενέργειας που αναπτύσσεται κατά τη διαρροή του ίδιου υλικού από καθαρό εφελκυσμό.

Όπως είναι γνωστό από τη θεωρία της ελαστικότητας, το συνολικό έργο των παραμορφώσεων U που παράγεται από τις εξωτερικές δυνάμεις, αποταμιεύεται στο σώμα ως ελαστική ενέργεια. Η ενέργεια αυτή είναι ίση με το άθροισμα της ενέργειας που απαιτείται για τη στρέβλωση του σώματος U_d και της ενέργειας που απαιτείται για τη μεταβολή του όγκου του σώματος U_v. Δηλαδή:

$$U = U_d + U_v \tag{2.26}$$

Είναι δε:

$$U = \frac{\sigma_1 \varepsilon_1}{2} + \frac{\sigma_2 \varepsilon_2}{2} + \frac{\sigma_3 \varepsilon_3}{2} \tag{2.27}$$

Αντικαθιστώντας τις παραμορφώσεις με τη βοήθεια του νόμου του Hooke, η εξίσωση (2.27) γράφεται ως:

$$U = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1\right)\right] \tag{2.28}$$

όπου E είναι το μέτρο ελαστικότητας και ν ο λόγος Poisson του υλικού. Εξάλλου, γνωρίζουμε ότι η ενέργεια για τη μεταβολή του όγκου είναι

$$U_v = \frac{p\Theta}{2} \tag{2.29}$$

όπου p είναι η υδροστατική συνιστώσα του τανυστή των τάσεων και Θ η ανηγμένη διόγκωση, που δίνονται από τις σχέσεις:

$$p = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad \kappa\alpha\iota \quad \Theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \tag{2.30}$$

Συνδυασμός των σχέσεων (2.29) και (2.30) με το νόμο του Hooke δίνει για την ανηγμένη ανά μονάδα όγκου ενέργεια μεταβολής όγκου:

$$U_v = \frac{1-2\nu}{6E}\left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right)^2 \tag{2.31}$$

και για την ανηγμένη ανά μονάδα όγκου ενέργεια στρεβλώσεως:

$$U_d = \left(\frac{1+\nu}{3E}\right)\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1\right) \tag{2.32}$$

Εισάγοντας το μέτρο διατμήσεως G η εξίσωση (2.32) γίνεται:

$$U_d = \frac{1}{12G}\left[\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_3 - \sigma_1\right)^2\right] \tag{2.33}$$

Στην περίπτωση της διαρροής σε μονοαξονικό εφελκυσμό ($\sigma_1=\sigma_\Delta$, $\sigma_2=\sigma_3=0$) θα ισχύει:

$$U_d = \frac{1}{12G}2\sigma_\Delta^2 = \frac{1+\nu}{3E}\sigma_\Delta^2 \tag{2.34}$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (2.32), (2.33) και (2.34) προκύπτει η παρακάτω έκφραση για το κριτήριο αστοχίας των όλκιμων υλικών, σύμφωνα με τη θεωρία της στροφικής ενέργειας:

$$\sigma_1^3 + \sigma_2^3 + \sigma_3^3 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1 = \sigma_\Delta^2 \tag{2.35}$$

$$\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_3 - \sigma_1\right)^2 = 2\sigma_\Delta^2 \tag{2.36}$$

2.4.4 Κριτήριο αστοχίας Bresler-Pister

Το κριτήριο Bresler-Pister είναι ένα προσομοίωμα εξαρτώμενο από τρεις παραμέτρους που χρησιμοποιείται για την προσομοίωση της πλαστικοποίησης του σκυροδέματος. Η επιφάνεια διαρροής ορίζεται από την εξίσωση:

$$\Phi_{BP} = 0 \tag{2.37}$$

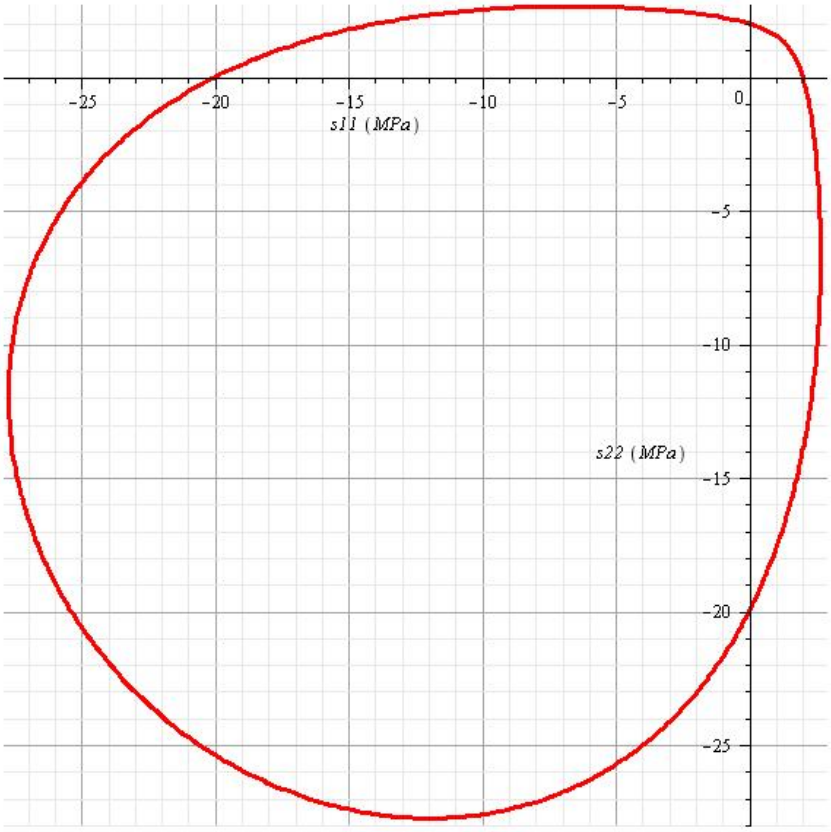
όπου:

$$\Phi_{BP} = \frac{\frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{J_2} - c_1\left(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}\right) - c_2\left(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}\right)^2}{c_0} - 1 \tag{2.38}$$

όπου c_0, c_1, c_2 είναι συντελεστές που εξαρτώνται από το υλικό και J_2 είναι η δεύτερη αναλλοίωτος του τανυστή των τάσεων. Η επιλογή των παραμέτρων πρέπει να γίνει έτσι ώστε να προκύψει μια επιφάνεια διαρροής λογικού σχήματος. Για την περίπτωση του σκυροδέματος, οι παράμετροι παίρνουν τις παρακάτω τιμές:

$$\begin{aligned}
c_1 &= \left(\frac{\sigma_t - \sigma_c}{\sqrt{3}\left(\sigma_t + \sigma_c\right)}\right)\left(\frac{4\sigma_b^2 - \sigma_b\left(\sigma_c + \sigma_t\right) + \sigma_c\sigma_t}{4\sigma_b^2 + 2\sigma_b\left(\sigma_t - \sigma_c\right) - \sigma_c\sigma_t}\right) \\
c_2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}\left(\sigma_t + \sigma_c\right)}\right)\left(\frac{\sigma_b\left(3\sigma_t - \sigma_c\right) - 2\sigma_c\sigma_t}{4\sigma_b^2 + 2\sigma_b\left(\sigma_t - \sigma_c\right) - \sigma_c\sigma_t}\right) \\
c_0 &= \frac{\sigma_c}{\sqrt{3}} + c_1\sigma_c - c_2\sigma_c^2
\end{aligned} \tag{2.39}$$

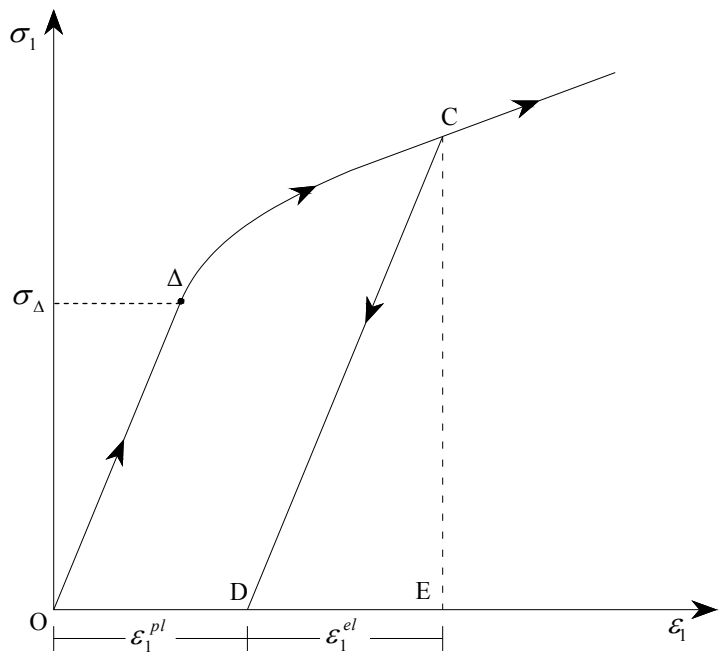
Στις σχέσεις (2.39), σ_t και σ_c είναι οι τάσεις διαρροής σε μονοαξονικό εφελκυσμό και θλίψη αντίστοιχα ενώ σ_b η τάση διαρροής σε διαξονική θλίψη. Στην Εικόνα 2.5 παρουσιάζεται η επιφάνεια διαρροής για την περίπτωση της διαξονικής φόρτισης, θεωρώντας $\sigma_c = 20MPa$, $\sigma_b = 23MPa$ και $\sigma_t = 2MPa$.



Εικόνα 2.5 Επιφάνεια διαρροής Bresler-Pister

2.5 Η συμπεριφορά των υλικών μετά τη διαρροή

Μετά την ικανοποίηση της συνθήκης αστοχίας, το υλικό εισέρχεται σε μια νέα φάση της μηχανικής του συμπεριφοράς, με βασικό γνώρισμα τη μη αντιστρεψιμότητα των φαινομένων που την συνοδεύουν. Από το σημείο δηλαδή της αστοχίας και μετά οι παραμορφώσεις δεν είναι αντιστρεπτές αλλά είναι εν γένει το άθροισμα μιας ελαστικής (αντιστρέψιμης) συνιστώσας και μιας μη αντιστρέψιμης, η οποία καλείται πλαστική παραμόρφωση. Ουσιαστικά, αν ικανοποιηθεί το κριτήριο αστοχίας, η τρέχουσα τάση είναι ένα στιγμιαίο όριο ελαστικότητας που εξαρτάται από την προηγηθείσα πλαστική παραμόρφωση και το οποίο διαχωρίζει την περαιτέρω φόρτιση (που συνοδεύεται από επιπλέον πλαστική παραμόρφωση) από την αποφόρτιση (που χαρακτηρίζεται από καθαρά ελαστική συμπεριφορά), όπως φαίνεται στην Εικόνα 2.6 για την περίπτωση μονοαξονικού εφελκυσμού.



Εικόνα 2.6 Φόρτιση-αποφόρτιση σε μονοαξονικό εφελκυσμό

Στην περίπτωση σύνθετων εντατικών καταστάσεων, είναι σαφώς πιο δύσκολη η διάκριση μεταξύ των εννοιών της φόρτισης και της περαιτέρω πλαστικής παραμόρφωσης. Γι' αυτό, εισάγεται η έννοια της επιφάνειας φόρτισης (ή επιφάνεια ροής), η οποία ορίζεται ως η επιφάνεια εκείνη στο χώρο των τάσεων σ_{ij} που για μια δεδομένη κατάσταση του υλικού διαχωρίζει τις περιοχές της ελαστικής και της πλαστικής παραμορφώσεως. Η αρχή των συντεταγμένων αντιστοιχεί στην κατάσταση μηδενικών τάσεων. Κατά τη διάρκεια της πλαστικής παραμόρφωσης, η επιφάνεια φόρτισης υφίσταται διόγκωση, μετατόπιση και στρέβλωση στο χώρο των τάσεων. Θα αναφερθούν παρακάτω δύο απλά προσομοιώματα κράτυνσης: η ισότροπη και η κινηματική.

Η ισότροπη κράτυνση θεωρεί ότι η επιφάνεια φορτίσεως είναι μια ομοιόμορφη επέκταση της αρχικής επιφάνειας διαρροής και ότι η ισότροπη απόκριση του υλικού στη διαρροή παραμένει αμετάβλητη κατά τη διάρκεια της πλαστικής παραμόρφωσης. Έτσι, το κέντρο της αρχικής επιφάνειας διαρροής και των επιφανειών φόρτισης (επακόλουθων επιφανειών διαρροής) παραμένει το ίδιο και αμελείται η ανισότροπη επίδραση που προκαλείται από την παραμόρφωση. Αγνοώντας την επίδραση της υδροστατικής πίεσης, η σχέση:

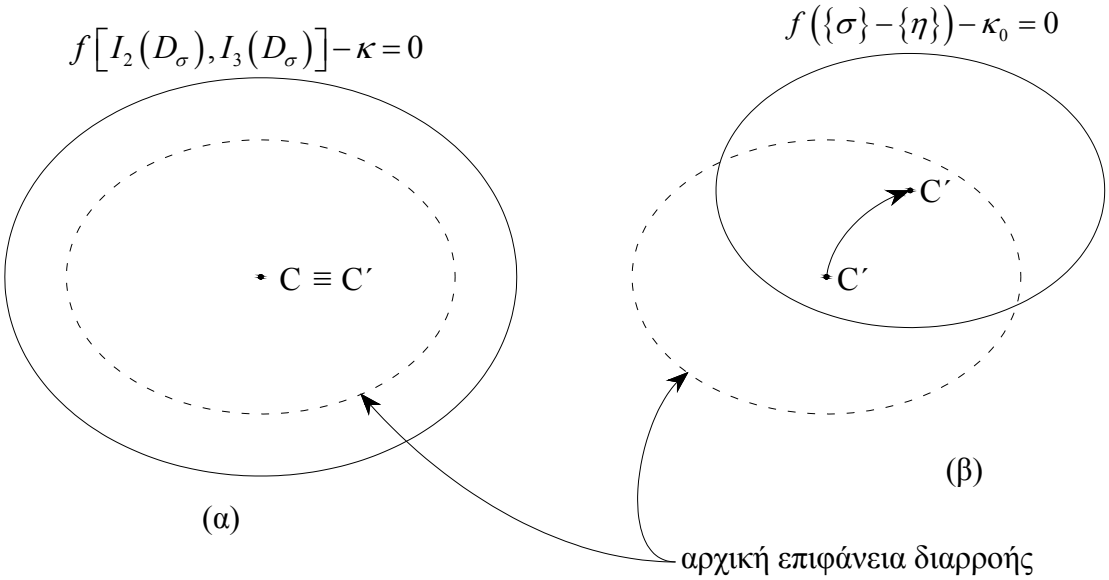
$$F\left[I_2\left(D_\sigma\right), I_3\left(D_\sigma\right), \kappa\right] = f\left[I_2\left(D_\sigma\right), I_3\left(D_\sigma\right)\right] - \kappa = 0 \qquad (2.40)$$

περιγράφει μαθηματικά την ισότροπη κρατυνόμενη συμπεριφορά, όπου κ είναι μια αύξουσα συνάρτηση και $I_2\left(D_\sigma\right)$, $I_3\left(D_\sigma\right)$ η δεύτερη και η τρίτη αναλλοίωτος του αποκλίνοντος τανυστή των τάσεων. Για τα απολύτως πλαστικά υλικά, το κ παραμένει σταθερό κατά τη διάρκεια της πλαστικής παραμόρφωσης, έτσι ώστε η επιφάνεια φόρτισης είναι σταθερή σε μέγεθος και θέση (ταυτίζεται με την αρχική επιφάνεια διαρροής)(Εικόνα 2.7(α)).

Η ισότροπη κράτυνση είναι η ευκολότερη στη χρήση αλλά δε μπορεί να προβλέψει το φαινόμενο Bauschinger, το οποίο παρατηρείται πειραματικά. Για να ληφθεί υπόψη το παραπάνω φαινόμενο, ο Prager (1956) πρότεινε την κινηματική κράτυνση. Αυτή υποθέτει ότι η επιφάνεια φόρτισης μετατοπίζεται ως στερεό σώμα στο χώρο των τάσεων κατά τη διάρκεια της πλαστικής παραμόρφωσης. Ως αποτέλεσμα, το σχήμα των επιφανειών φόρτισης παραμένει ίδιο με αυτό της αρχικής επιφάνειας διαρροής (Εικόνα 2.7(β)). Αυτό το προσομοίωμα κρατυνόμενης συμπεριφοράς μπορεί να γραφεί ως:

$$F\left(\{\sigma\}-\{\eta\}\right)=f\left(\{\sigma\}-\{\eta\}\right)-\kappa_0=0 \tag{2.41}$$

όπου το $\{\eta\}$ είναι γνωστό ως διάνυσμα εσωτερικών τάσεων (back stress).



Εικόνα 2.7 (α) Ισότροπη κράτυνση, (β) Κινηματική κράτυνση

Φόρτιση και αποφόρτιση στο χώρο των τάσεων

Ένα υλικό που υφίσταται μηχανική φόρτιση θα παραμορφωθεί ελαστικά ή πλαστικά ανάλογα με την επιβαλλόμενη φόρτιση. Δεδομένου ότι οι σχέσεις τάσεων-ανηγμένων παραμορφώσεων για την ελαστική παραμόρφωση και την πλαστική παραμόρφωση είναι διαφορετικές, είναι σημαντικό να γίνει διάκριση μεταξύ ελαστικής και πλαστικής περιοχής και να προσδιορίσουμε εάν η παραμόρφωση είναι ελαστική ή πλαστική. Έτσι, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την επιφάνεια διαρροής για να προσδιορίσουμε τις ελαστικές και πλαστικές περιοχές και τα κριτήρια φόρτισης και αποφόρτισης για να προσδιορίσουμε το είδος της παραμόρφωσης.

Έστω $F\left(\{\sigma\}\right) = f\left(\{\sigma\}\right) - \kappa_0 = 0$ η επιφάνεια φόρτισης. Στο χώρο των τάσεων, η διεύθυνση του διανύσματος $\partial f / \partial \{\sigma\}$ είναι στη διεύθυνση της εξωτερικής καθέτου n στην επιφάνεια φόρτισης. Έτσι, το $\partial f / \partial \{\sigma\} : d\{\sigma\} < 0$ [1] αναπαριστά μια στοιχειώδη αύξηση των τάσεων προς το εσωτερικό της επιφάνειας φόρτισης, το $\partial f / \partial \{\sigma\} : d\{\sigma\} > 0$ αναπαριστά μια στοιχειώδη αύξηση των τάσεων προς το εξωτερικό της επιφάνειας φόρτισης και το $\partial f / \partial \{\sigma\} : d\{\sigma\} = 0$ αναπαριστά μια στοιχειώδη αύξηση των τάσεων η οποία είναι εφαπτομενική στην επιφάνεια φόρτισης. Έτσι έχουμε:

$$
\begin{aligned}
&F\left(\{\sigma\}\right) < 0 \quad \rightarrow \left(\textit{ελαστική παραμόρφωση}\right) \\
&F\left(\{\sigma\}\right) = 0, \quad dF = f\left(\{\sigma\} + \{d\sigma\}\right) - f\left(\{\sigma\}\right) = \frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}} : d\{\sigma\} > 0 \rightarrow \left(\textit{φόρτιση}\right) \\
&F\left(\{\sigma\}\right) = 0, \quad dF = f\left(\{\sigma\} + \{d\sigma\}\right) - f\left(\{\sigma\}\right) = \frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}} : d\{\sigma\} = 0 \rightarrow \left(\textit{ουδέτερη φόρτιση}\right) \\
&F\left(\{\sigma\}\right) = 0, \quad dF = f\left(\{\sigma\} + \{d\sigma\}\right) - f\left(\{\sigma\}\right) = \frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}} : d\{\sigma\} < 0 \rightarrow \left(\textit{αποφόρτιση}\right)
\end{aligned}
$$

(2.42)

[1] $\partial f / \partial \{\sigma\} : d\{\sigma\} \equiv \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right) d\sigma_{ij}$

2.6 Κλασική θεωρία πλαστικότητας

Από πειράματα συνάγεται το συμπέρασμα ότι η πλαστική παραμόρφωση έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

1) Η πλαστική παραμόρφωση συσχετίζεται με την καταστροφή ενέργειας και ως εκ τούτου είναι μη αντιστρέψιμη. Αυτό μπορεί να φανεί στην Εικόνα 2.6. Κατά την αποφόρτιση στο C, μόνο ένα μέρος της ανηγμένης παραμόρφωσης (DE) μπορεί να ανακτηθεί ενώ το υπόλοιπο μέρος (OD) παραμένει όταν αφαιρεθεί το φορτίο. Η ενέργεια που αντιπροσωπεύεται από το τρίγωνο DCE είναι η ανακτώμενη ελαστική ενέργεια, ενώ το εμβαδόν που περικλείεται από την καμπύλη OΔCD αναπαριστά την ενέργεια που καταστρέφεται προκαλώντας την πλαστική παραμόρφωση OD. Συνεπώς, η πλαστική παραμόρφωση είναι η μόνιμη παραμόρφωση μετά την αποφόρτιση. Από το σχήμα προκύπτει ότι η συνολική ανηγμένη παραμόρφωση OE σε ένα αυθαίρετο σημείο C στην πλαστική περιοχή είναι το άθροισμα της πλαστικής ανηγμένης παραμόρφωσης OD και της ελαστικής DE: $\varepsilon = \varepsilon^{el} + \varepsilon^{pl}$. Αυτός ο προσθετικός νόμος μπορεί να γενικευθεί για μια τριδιάστατη εντατική κατάσταση:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{el} + \varepsilon_{ij}^{pl} \tag{2.43}$$

Η παραπάνω σχέση είναι μια βασική υπόθεση που χρησιμοποιείται στην κλασική θεωρία της πλαστικότητας, καλείται «προσθετική αποσύνθεση» (additive decomposition) του τανυστή των τάσεων και πρέπει να τονιστεί ότι η παραπάνω σχέση είναι αληθής για τις περιπτώσεις των απειροστών ανηγμένων παραμορφώσεων.

2) Εξαιτίας αυτού του χαρακτηριστικού της (καταστροφή ενέργειας), η πλαστική παραμόρφωση εξαρτάται από την ιστορία/διαδρομή της φόρτισης. Με άλλα λόγια, δεν υπάρχει αντιστοιχία ένα προς ένα μεταξύ τάσης και ανηγμένης παραμόρφωσης. Αυτό οδηγεί στην απαίτηση οι καταστατικές εξισώσεις για την πλαστική παραμόρφωση να εκφράζονται σε μορφή παραγώγων (rate form) ή σε μορφή απειροστών μεταβολών (incremental form).

3) Η πλαστική παραμόρφωση θεωρείται ότι είναι ανεξάρτητη της ταχύτητας παραμορφώσεως. Αυτό σημαίνει ότι οι καταστατικές εξισώσεις για την

πλαστική παραμόρφωση πρέπει να μην εξαρτώνται από το χρόνο και ως εκ τούτου η έκφραση με μορφή παραγώγων είναι ισοδύναμη με την έκφραση σε μορφή απειροστών μεταβολών.

2.6.1 Μεταβολή του όγκου και λόγος του Poisson στην πλαστική παραμόρφωση

Μια θεμελιώδης υπόθεση η οποία χρησιμοποιείται για να θεμελιωθεί η θεωρία της πλαστικότητας είναι ότι η πλαστική παραμόρφωση είναι ισόογκη. Αυτή η υπόθεση βασίζεται στις πειραματικές παρατηρήσεις του Bridgman (όπως αναφέρθηκε και παραπάνω), ο οποίος ισχυρίστηκε ότι ακόμα και σε πολύ υψηλή υδροστατική πίεση, η μεταβολή του όγκου είναι αντιστρέψιμη. Αυτό εκφράζεται από τη σχέση:

$$\varepsilon_{kk}^{pl} = \varepsilon_{xx}^{pl} + \varepsilon_{yy}^{pl} + \varepsilon_{zz}^{pl} = \varepsilon_1^{pl} + \varepsilon_2^{pl} + \varepsilon_3^{pl} = 0 \tag{2.44}$$

έτσι ώστε ο πλαστικός τανυστής των τάσεων είναι απλώς ένας αποκλίνων τανυστής $\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{pl} = \boldsymbol{\varepsilon}'^{pl}\right)$.

Βασισμένοι σε αυτήν την υπόθεση, απαιτείται μόνο η καταστατική εξίσωση για τον αποκλίνοντα τανυστή των ανηγμένων παραμορφώσεων για να θεμελιωθεί μια θεωρία πλαστικότητας.

Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό αυτού του κανόνα μεταβολής όγκου είναι ότι παρέχει πληροφορία για την εγκάρσια παραμόρφωση υπό συνθήκες μονοαξονικής φόρτισης. Με άλλα λόγια, μπορεί να εξαχθεί ο λόγος του Poisson υποθέτοντας μη πλαστική μεταβολή του όγκου. Ο ορισμός του λόγου του Poisson στην περιοχή της πλαστικής παραμόρφωσης για ισότροπα υλικά ορίζεται από τη σχέση:

$$\nu^p = -\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{xx}} = -\frac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon_{xx}} \tag{2.45}$$

Δεδομένου ότι $\varepsilon_{kk}^p = 0$ ισχύει ότι $\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{kk}^{el}$ και συνεπώς

$$\left(1 - 2\nu^{pl}\right)\varepsilon_{xx} = \frac{1-2\nu}{E}\sigma_{xx} \tag{2.46}$$

όπου ν είναι ο λόγος Poisson στην ελαστική περιοχή και ορίζεται από τη σχέση:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{yy}^{el}}{\varepsilon_{xx}^{el}} = -\frac{\varepsilon_{zz}^{el}}{\varepsilon_{xx}^{el}} \tag{2.47}$$

Λύνοντας την εξίσωση (2.46) ως προς ν^{pl} προκύπτει:

$$\nu^{pl} = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \nu\right)\frac{\sigma_{xx}}{E\varepsilon_{xx}} \tag{2.48}$$

Μπορεί να παρατηρηθεί ότι εάν η παραμόρφωση είναι ελαστική, η παραπάνω εξίσωση δίνει $\nu^{pl} = \nu$. Στην περίπτωση υλικού με γραμμική κινηματική κράτυνση με $\sigma_{xx} = \sigma_y^0 + E'\left(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_y^0\right)$, όπου σ_y^0 είναι η αρχική τάση διαρροής, ε_y^0 είναι η αντίστοιχη ανηγμένη παραμόρφωση και E' η κλίση της περιοχής της γραμμικής κράτυνσης, η σχέση (2.48) γίνεται:

$$\nu^{pl} = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \nu\right)\left(\frac{\sigma_y^0 - E'\varepsilon_y^0}{E\varepsilon_{xx}} + \frac{E'}{E}\right) \tag{2.49}$$

Όταν το ε_{xx} γίνεται μεγάλο, τότε: $\nu^{pl} = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \nu\right)\frac{E'}{E}$, το οποίο είναι μικρότερο από $1/2$. Ωστόσο, για τα περισσότερα υλικά $E' \ll E$ και έτσι $\nu^{pl} \to 1/2$.

2.6.2 Εξισώσεις Levy-Mises

Η πρώτη προσπάθεια να διατυπωθεί μια σχέση τάσεων-ανηγμένων παραμορφώσεων για την πλαστική παραμόρφωση έγινε από τον Saint-Venant(1870). Εργάστηκε στην επίπεδη πλαστική παραμόρφωση χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Tresca και μηδενική κράτυνση. Για πρώτη φορά πρότεινε ότι οι κύριοι άξονες της μεταβολής της ανηγμένης παραμόρφωσης συμπίπτουν με τους άξονες των κυρίων τάσεων. Η ελαστική ανηγμένη παραμόρφωση $\boldsymbol{\varepsilon}^{el}$ αμελήθηκε έτσι ώστε η πλαστική ανηγμένη παραμόρφωση $\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$ να ισούται με την ολική ανηγμένη παραμόρφωση $\boldsymbol{\varepsilon}$. Η γενίκευση της ιδέας του Saint-Venant για την τριδιάστατη περίπτωση έγινε από τον Levy (1870) και ανεξάρτητα από τον Mises (1913). Η θεωρία πλαστικότητας των Levy-Mises, βασίζεται στις εξής παραδοχές:

1. Η ελαστική ανηγμένη παραμόρφωση $\boldsymbol{\varepsilon}^{el}$ είναι τόσο μικρή ώστε μπορεί να αμεληθεί.

2. Η μεταβολή της ανηγμένης παραμόρφωσης $d\boldsymbol{\varepsilon}$, ή ισοδύναμα ο ρυθμός μεταβολής $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$, είναι ομοαξονική με την τάση $\boldsymbol{\sigma}$.

Οι κύριοι άξονες της τάσης $\boldsymbol{\sigma}$ συμπίπτουν με αυτούς του αποκλίνοντος τανυστή των τάσεων $\mathbf{S}$. Συνεπώς, η εξίσωση Levy-Mises είναι η εξής:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\lambda}\mathbf{S} \quad ή \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\lambda} S_{ij} \quad ή \quad \frac{\dot{\varepsilon}_{xx}}{S_{xx}} = \frac{\dot{\varepsilon}_{yy}}{S_{yy}} = \frac{\dot{\varepsilon}_{zz}}{S_{zz}} = \frac{\dot{\varepsilon}_{xy}}{S_{xy}} = \frac{\dot{\varepsilon}_{yz}}{S_{yz}} = \frac{\dot{\varepsilon}_{zx}}{S_{zx}} = \dot{\lambda} \qquad (2.50)$$

Η παράμετρος $\dot{\lambda}$ προσδιορίζεται από το κριτήριο διαρροής. Ο Mises πρότεινε ότι το κριτήριο von Mises είναι πιο κατάλληλο για αυτή τη θεωρία σε σχέση με το κριτήριο του Tresca που χρησιμοποιούσε ο Saint-Venant. Έτσι, προκύπτει ότι:

$$\dot{\lambda} = \sqrt{\frac{3\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}/2}{\sigma_y^2}} \qquad (2.51)$$

2.6.3 Εξισώσεις Prandtl-Reuss

Οι εξισώσεις Levy-Mises που παρουσιάστηκαν παραπάνω είναι χρήσιμες για να υπολογίσουμε την πλαστική παραμόρφωση για τα περισσότερα μεταλλικά υλικά, όπου η πλαστική ανηγμένη παραμόρφωση ε^{pl} είναι πολύ μεγαλύτερη από την ελαστική ανηγμένη παραμόρφωση ε^{el}. Όταν το μέγεθος της $\boldsymbol{\varepsilon}^{el}$ είναι συγκρίσιμο με αυτό της $\boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$, αναμένεται ότι αν αμεληθεί η $\boldsymbol{\varepsilon}^{el}$ θα υπάρξει σημαντικό σφάλμα. Ο Prandtl (1927) και ο Reuss (1930) πρότεινε σχέσεις παρόμοιες με τις εξισώσεις Levy-Mises. Η πλαστική παραμόρφωση είναι ισόογκη ενώ η ελαστική παραμόρφωση προκαλεί μεταβολή του όγκου όπως επίσης και μεταβολή σχήματος. Η διαφορική μορφή του αποκλίνοντος τανυστή των ανηγμένων παραμορφώσεων, που αναφέρεται στην μεταβολή του σχήματος είναι η εξής:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}'^{el} = \frac{1}{2G}\dot{\mathbf{S}} \quad ή \quad \dot{\varepsilon}_{ij}'^{el} = \frac{1}{2G}\dot{S}_{ij} \quad ή \quad d\boldsymbol{\varepsilon}'^{el} = \frac{1}{2G}\dot{\mathbf{S}} \quad ή \quad d\varepsilon_{ij}'^{el} = \frac{1}{2G}d\dot{S}_{ij} \qquad (2.52)$$

Οι άξονες του ρυθμού μεταβολής της πλαστικής ανηγμένης παραμόρφωσης ακόμα θεωρείται ότι συμπίπτουν με τους άξονες του αποκλίνοντος τανυστή των τάσεων $\mathbf{S}$ κι έτσι:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} = \dot{\lambda}\mathbf{S} \quad ή \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^{pl} = \dot{\lambda} S_{ij} \qquad (2.53)$$

Πάλι, το $\dot{\lambda}$ είναι μια παράμετρος και μπορεί να προσδιοριστεί χρησιμοποιώντας το κριτήριο διαρροής. Επιπλέον, το $\dot{\lambda}$ πρέπει να είναι μια πρώτης τάξεως ομογενής συνάρτηση του ρυθμού μεταβολής της ανηγμένης παραμόρφωσης $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ για να διασφαλιστεί ότι η καταστατική εξίσωση είναι ανεξάρτητη της ταχύτητας παραμορφώσεως. Παρατηρώντας ότι το $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl}$ (εξίσωση (2.53)) είναι εκ φύσεως αποκλίνων τανυστής, αφού η πλαστική παραμόρφωση είναι ισόογκη, ο συνολικός ρυθμός μεταβολής της αλλαγής σχήματος δίνεται από την εξίσωση:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}' = \frac{1}{2G}\dot{\mathbf{S}} + \dot{\lambda}\mathbf{S} \quad \acute{\eta} \quad \varepsilon'_{ij} = \frac{1}{2G}\dot{S}_{ij} + \dot{\lambda}S_{ij} \tag{2.54}$$

Με βάση το κριτήριο διαρροής von Mises προκύπτει ότι

$$\dot{\lambda} = \frac{3S_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}}{2\sigma_y^2} \tag{2.55}$$

το οποίο είναι όντως μια πρώτης τάξεως ομογενής συνάρτηση του $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$.

2.7 Η θεωρία της πλαστικής ροής

Οι εξισώσεις Levy-Mises και Prandtl-Reuss ήταν τεκμηριωμένες εμπειρικά βάσει πειραματικών παρατηρήσεων στα μέταλλα. Η γενική μαθηματική επεξεργασία της καταστατικής εξίσωσης για την πλαστική ροή προτάθηκε από τον Mises το 1928. Παρατήρησε ότι στη θεωρία ελαστικότητας ο τανυστής των ανηγμένων παραμορφώσεων συσχετίζεται με την τάση $\{\sigma\}$ μέσω μιας συνάρτησης ελαστικού δυναμικού, τη συμπληρωματική ενέργεια U_c (θεώρημα ελάχιστης ολικής συμπληρωματικής ενέργειας):

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial U_c}{\partial \sigma_{ij}} \tag{2.56}$$

Γενικεύοντας και εφαρμόζοντας την παραπάνω σχέση στη θεωρία πλαστικότητας, ο Mises πρότεινε ότι υπάρχει μια συνάρτηση πλαστικού δυναμικού $Q(\{\sigma\})$ ή $Q(\sigma_{ij})$

και η πλαστική ανηγμένη παραμόρφωση μπορεί να εξαχθεί με παρόμοιο τρόπο όπως η σχέση (2.56):

$$\dot{\varepsilon}^{pl} = \dot{\lambda}\frac{\partial Q(\{\sigma\})}{\partial\{\sigma\}} \;\; ή \;\; \dot{\varepsilon}_{ij}^{pl} = \dot{\lambda}\frac{\partial Q(\sigma_{ij})}{\partial\sigma_{ij}} \tag{2.57}$$

όπου $\dot{\lambda}$ είναι ένας θετικός βαθμωτός συντελεστής αναλογίας. Η θεωρία πλαστικότητας που βασίζεται στο νόμο ροής της εξίσωσης (2.57) καλείται πλαστική θεωρία δυναμικού (plastic potential theory). Ακολουθούν μερικές παρατηρήσεις πάνω στην εξίσωση (2.57):

1) Κάθε εντατική κατάσταση $\{\sigma\}$ αντιστοιχεί σε ένα σημείο στον εξαδιάστατο χώρο των τάσεων. Το πλαστικό δυναμικό $Q(\sigma_{ij}) = C$ αναπαριστά μια επιφάνεια και η πλαστική ανηγμένη παραμόρφωση $\{\dot{\varepsilon}^{pl}\}$ είναι ένα διάνυσμα στο χώρο. Η γεωμετρική ερμηνεία της εξίσωσης (2.57) είναι ότι το διάνυσμα του ρυθμού μεταβολής της ανηγμένης παραμόρφωσης είναι κάθετο στην επιφάνεια $Q(\sigma_{ij}) = C$. Γι' αυτό, η εξ. (2.57) αναφέρεται επίσης και ως νόμος της καθετότητας (normality rule) στην πλαστική θεωρία και μπορεί να ξαναγραφεί ως:

$$\dot{\varepsilon}^{pl} = \dot{\lambda}\, grad\big(Q(\{\sigma\})\big) \tag{2.58}$$

2) Για τα ισότροπα υλικά, η $Q(\sigma_{ij})$ είναι μια συνάρτηση των αναλλοιώτων του τανυστή των τάσεων:

$$Q = Q(I_1, I_2, I_3) \tag{2.59}$$

3) Εξαιτίας της υπόθεσης της μη συμπιεστότητας της πλαστικής παραμόρφωσης, η αντίστοιχη επιφάνεια του πλαστικού δυναμικού πρέπει να είναι ένα κυλινδρικό πρίσμα (χωρίς απαραίτητα να έχει κυκλική διατομή) του οποίου, στο χώρο των κυρίων τάσεων, ο άξονας να είναι η γραμμή $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$.

Το βασικό σημείο στην εφαρμογή της πλαστικής θεωρίας δυναμικού είναι να προσδιορίσουμε το πλαστικό δυναμικό Q. Μια συνήθης προσέγγιση στη θεωρία της πλαστικότητας είναι να υποθέσουμε ότι η συνάρτηση του πλαστικού δυναμικού ταυτίζεται με τη συνάρτηση διαρροής $\Phi(\sigma_{ij})$, οπότε:

$$\left\{\dot{\varepsilon}^{pl}\right\} = \dot{\lambda}\frac{\partial \Phi}{\partial \{\sigma\}} \tag{2.60}$$

δηλαδή το διάνυσμα του ρυθμού μεταβολής της πλαστικής ανηγμένης παραμόρφωσης είναι κάθετο στην επιφάνεια διαρροής. Η παραπάνω θεώρηση καλείται συσχετισμένος νόμος πλαστικής ροής (associated flow rule).

Σύμφωνα με το 2ο χαρακτηριστικό της πλαστικής παραμόρφωσης (παράγραφος 2.6), οι σχέσεις τάσεων-ανηγμένων παραμορφώσεων για την πλαστική ροή πρέπει να είναι σε διαφορική μορφή. Για να εξαχθούν οι παραπάνω διαφορικές εξισώσεις (και να προσδιοριστεί η παράμετρος $\dot{\lambda}$) είναι απαραίτητο να τεθούν ορισμένες συνθήκες. Οι ακόλουθες τέσσερις δόθηκαν από τον Prager (1949):

1. Συνέχεια (continuity). Η ουδέτερη φόρτιση δεν προκαλεί πλαστική παραμόρφωση.
2. Μοναδικότητα (uniqueness). Για μια δεδομένη απειροστή αύξηση του επιφανειακού φορτίου που εφαρμόζεται σε ένα σώμα, οι προκύπτουσες αυξήσεις στην τάση και την ανηγμένη παραμόρφωση είναι μοναδικές. Αυτή η συνθήκη περιγράφεται μαθηματικά από τη σχέση:

$$\{\dot{\sigma}\}:\left\{\dot{\varepsilon}^{pl}\right\} > 0 \quad \acute{\eta} \quad d\{\sigma\}:d\left\{\varepsilon^{pl}\right\} > 0 \tag{2.61}$$

3. Μη αντιστρεψιμότητα (irreversibility). Απαιτείται η αύξηση του πλαστικού έργου να είναι θετική:

$$\{\sigma\}:\left\{\dot{\varepsilon}^{pl}\right\} > 0 \quad \acute{\eta} \quad \{\sigma\}:d\left\{\varepsilon^{pl}\right\} > 0 \tag{2.62}$$

4. Συνεκτικότητα (consistency). Κατά τη διάρκεια της πλαστικής παραμόρφωσης η εντατική κατάσταση (ή το σημείο στο χώρο των τάσεων) πρέπει να παραμένει πάνω στην επιφάνεια φόρτισης. Με άλλα λόγια, η φόρτιση από μια κατάσταση πλαστικής παραμόρφωσης πρέπει να οδηγεί σε άλλη κατάσταση πλαστικής παραμόρφωσης.

Έστω κριτήριο διαρροής της μορφής $\Phi = \Phi\left(\{\sigma\},\{\eta\},\kappa\right)$, όπου $\{\eta\}$ το διάνυσμα εσωτερικών τάσεων και κ η παράμετρος που χαρακτηρίζει την ισότροπη κράτυνση. Ας υποθέσουμε ότι η τρέχουσα πλαστική κατάσταση παριστάνεται από την εντατική κατάσταση $\{\sigma\}$ και τις παραμέτρους $\{\eta\}$ και κ. Τότε, ικανοποιείται η συνθήκη διαρροής:

$$\Phi\left(\{\sigma\},\{\eta\},\kappa\right)=0 \tag{2.63}$$

Τώρα, ας θεωρήσουμε την πλαστική παραμόρφωση που προκαλείται από την απειροστή αύξηση $d\{\sigma\}$. Η εντατική κατάσταση γίνεται $\sigma+d\{\sigma\}$ και εξαιτίας της πλαστικής παραμόρφωσης τα $\{\eta\}$ και κ γίνονται $\{\eta\}+d\{\eta\}$ και $\kappa+d\kappa$, αντίστοιχα. Σύμφωνα με τη συνθήκη της συνεκτικότητας (consistency condition), και η νέα εντατική κατάσταση πρέπει να βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια φόρτισης και συνεπώς να ικανοποιείται το κριτήριο διαρροής:

$$\Phi\left(\{\sigma\}+d\{\sigma\},\{\eta\}+d\{\eta\},\kappa+d\kappa\right)=0 \tag{2.64}$$

Δεδομένου ότι το $d\{\sigma\}$ είναι απειροστό και συνεπώς και τα $d\{\eta\}$ και $d\kappa$, η εξίσωση (2.64) μπορεί να αναπτυχθεί:

$$\begin{aligned}&\Phi\left(\{\sigma\}+d\{\sigma\},\{\eta\}+d\{\eta\},\kappa+d\kappa\right)=\\&=\Phi\left(\{\sigma\},\{\eta\},\kappa\right)+\frac{\partial\Phi}{\partial\{\sigma\}}:d\{\sigma\}+\frac{\partial\Phi}{\partial\{\eta\}}:d\{\eta\}+\frac{\partial\Phi}{\partial\kappa}:d\kappa\end{aligned} \tag{2.65}$$

Συγκρίνοντας τη σχέση (2.65) με τις (2.63) και (2.64), λαμβάνουμε τη συνθήκη συνεκτικότητας:

$$\dot{\Phi}=\frac{\partial\Phi}{\partial\{\sigma\}}:d\{\sigma\}+\frac{\partial\Phi}{\partial\{\eta\}}:d\{\eta\}+\frac{\partial\Phi}{\partial\kappa}:d\kappa=0 \tag{2.66}$$

2.8 Παράρτημα – Η μαθηματική θεωρία της Πλαστικότητας

(Journal of Applied Physics, Volume 20, Number 3, March, 1949, Recent Developments in the Mathematical Theory of Plasticity, William Prager, 1948)

Η συνθήκη της συνέχειας (continuity condition)

Ας συμβολίσουμε με σ_x, σ_y, σ_z τις ορθές τάσεις και με τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{zx} τις διατμητικές τάσεις, οι οποίες αναφέρονται σε σύστημα ορθογωνίων αξόνων. Όμοια, ας συμβολίσουμε τις απειροστές αυξήσεις των πλαστικών ορθών ανηγμένων παραμορφώσεων και των διατμητικών ανηγμένων παραμορφώσεων με $d\varepsilon_x$, $d\varepsilon_y$, $d\varepsilon_z$ και $d\gamma_{xy}$, $d\gamma_{yz}$, $d\gamma_{zx}$ αντίστοιχα.

Είναι χρήσιμο να επεξεργαστούμε τους νόμους τάσεων-ανηγμένων παραμορφώσεων σε γεωμετρικούς όρους που αναφέρονται σε έναν εξαδιάστατο ευκλείδειο χώρο με ορθογώνιες συντεταγμένες. Έτσι, η τάση παριστάνεται με το διάνυσμα $\boldsymbol{\sigma}$ και μια απειροστή μεταβολή της τάσης από το $d\boldsymbol{\sigma}$.

Ας θεωρήσουμε μια δεδομένη κατάσταση ενός υλικού με κράτυνση. Το όριο διαρροής που συσχετίζεται με αυτήν την κατάσταση παριστάνεται από μια συγκεκριμένη υπερεπιφάνεια στον εξαδιάστατο χώρο μας. Στο εξής, αυτή η υπερεπιφάνεια θα ονομάζεται επιφάνεια διαρροής. Η υπό θεώρηση κατάσταση είναι ελαστική ή πλαστική ανάλογα με το αν το διάνυσμα $\boldsymbol{\sigma}$ βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια διαρροής ή στο εσωτερικό της. Επειδή στην τελευταία περίπτωση μια επαρκώς μικρή μεταβολή της τάσης δε θα προκαλέσει μεταβολή της πλαστικής ανηγμένης παραμόρφωσης, ενδιαφερόμαστε μόνο για την περίπτωση στην οποία το πέρας του $\boldsymbol{\sigma}$ βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια διαρροής. Σ' αυτήν την περίπτωση, μια απειροστή μεταβολή της τάσης $d\boldsymbol{\sigma}$ συνιστά αποφόρτιση ή φόρτιση ή είναι ουδέτερη ανάλογα με το αν το διάνυσμα $d\boldsymbol{\sigma}$ κατευθύνεται από το άκρο του $\boldsymbol{\sigma}$ προς το εσωτερικό ή το εξωτερικό της επιφάνειας διαρροής ή είναι εφαπτομενικό προς αυτήν. Φαίνεται λογικό να υποθέσουμε ότι από οποιαδήποτε δεδομένη πλαστική κατάσταση μια κατάσταση χωρίς ένταση μπορεί να προσεγγιστεί με κατάλληλη διαδικασία αποφόρτισης. Αυτό σημαίνει ότι η αρχή των συντεταγμένων πρέπει να βρίσκεται στο εσωτερικό της επιφάνειας διαρροής. Αν θέλουμε να αποφευχθούν ασυνέχειες στις σχέσεις τάσεων-ανηγμένων παραμορφώσεων, πρέπει να θεωρήσουμε μια ουδέτερη μεταβολή της τάσης ως μια οριακή περίπτωση είτε της φόρτισης είτε της

αποφόρτισης. Στη συνέχεια αυτή η σημαντική συνθήκη θα ονομάζεται συνθήκη της συνέχειας (continuity condition).

Ας επιλέξουμε μια αλληλουχία από διανύσματα $d\boldsymbol{\sigma}$ τα οποία όλα κατευθύνονται προς το εξωτερικό της επιφάνειας διαρροής αλλά τείνουν προς ένα διάνυσμα στο εφαπτομενικό επίπεδο αυτής της επιφάνειας. Σε κάθε ένα από αυτά τα $d\boldsymbol{\sigma}$ αντιστοιχεί μια μοναδικώς οριζόμενη μεταβολή της πλαστικής παραμόρφωσης $d\boldsymbol{\varepsilon}$. Η συνθήκη της συνέχειας απαιτεί $d\varepsilon \to 0$ καθώς το $d\boldsymbol{\sigma}$ τείνει στο οριακό διάνυσμα.

Ένα διάνυσμα που κατευθύνεται προς το εξωτερικό της επιφάνειας διαρροής μπορεί να θεωρηθεί ως το διανυσματικό άθροισμα ενός διανύσματος $d\boldsymbol{\sigma}_n$ το οποίο είναι κάθετο στην επιφάνεια διαρροής και ένα διάνυσμα $d\boldsymbol{\sigma}_t$ το οποίο είναι εφαπτομενικό σε αυτήν την επιφάνεια. Δεδομένου ότι ο νόμος των τάσεων-ανηγμένων παραμορφώσεων για τη φόρτιση θεωρείται γραμμικός στις συνιστώσες των απειροστών αυξήσεων των τάσεων, η μεταβολή στην πλαστική ανηγμένη παραμόρφωση $d\boldsymbol{\varepsilon}$ που προκαλείται από το $d\boldsymbol{\sigma}$ μπορεί να υπολογιστεί ως το άθροισμα των μεταβολών των ανηγμένων παραμορφώσεων που προκαλούν τα $d\boldsymbol{\sigma}_n$ και $d\boldsymbol{\sigma}_t$ ξεχωριστά. Εξαιτίας της συνθήκης της συνέχειας, ωστόσο, το $d\boldsymbol{\sigma}_t$ δεν προκαλεί καμία μεταβολή στην πλαστική παραμόρφωση. Έτσι, η μεταβολή της πλαστικής παραμόρφωσης $d\boldsymbol{\varepsilon}$ που συσχετίζεται με το $d\boldsymbol{\sigma}$ φαίνεται να εξαρτάται μόνο από την κάθετη συνιστώσα $d\boldsymbol{\sigma}_n$ του $d\boldsymbol{\sigma}$. Αυτό το γεγονός μαζί με τη γραμμικότητα της σχέσης μεταξύ των μεταβολών της τάσης και της πλαστικής ανηγμένης παραμόρφωσης, δείχνει ότι η διεύθυνση του $d\boldsymbol{\varepsilon}$ είναι εντελώς ανεξάρτητη από τη διεύθυνση του $d\boldsymbol{\sigma}$, ενώ το μέτρο του $d\boldsymbol{\varepsilon}$ είναι ανάλογο σε αυτό του $d\boldsymbol{\sigma}_n$.

Η συνθήκη της μοναδικότητας (uniqueness condition)

Το κύριο συμπέρασμα των προηγουμένων μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: σε κάθε σημείο $\boldsymbol{\sigma}$ της επιφάνειας διαρροής ένα μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{n}$ μπορεί να συσχετισθεί έτσι ώστε το $d\boldsymbol{\varepsilon}$ που προκαλείται από ένα οποιοδήποτε $d\boldsymbol{\sigma}$ να έχει τη διεύθυνση του $\mathbf{n}$. Τώρα, θα διερευνήσουμε τη σχέση μεταξύ των μοναδιαίων διανυσμάτων $\mathbf{n}$ και του σχήματος της επιφάνειας διαρροής.

Ας θεωρήσουμε ένα σώμα που αποτελείται από ένα υλικό που εμφανίζει εργοσκλήρυνση (work-hardening) και ας το υποβάλουμε σε επιφανειακές φορτίσεις

που μεταβάλλονται με συγκεκριμένο τρόπο, ξεκινώντας από το μηδέν. Τώρα, ας μελετήσουμε το ακόλουθο πρόβλημα συνοριακών τιμών: Δεδομένων της στιγμιαίας μηχανικής κατάστασης του σώματος και ενός συστήματος απειροστών αυξήσεων των επιφανειακών φορτίσεων να βρεθούν οι αντίστοιχες αυξήσεις των τάσεων. Φαίνεται λογικό να απαιτήσουμε η λύση αυτού του προβλήματος συνοριακών τιμών να είναι μοναδική. Θα διερευνήσουμε τι περιορισμούς επιβάλλει η συνθήκη της μοναδικότητας (uniqueness condition).

Ας υποθέσουμε ότι το πρόβλημα συνοριακών τιμών επιδέχεται δύο λύσεων. Χρησιμοποιώντας τη γεωμετρική αναπαράσταση, αναπαριστούμε τη διαφορά μεταξύ των δύο μεταβολών των τάσεων σε δεδομένο σημείο του σώματος με $\Delta d\boldsymbol{\sigma}$, τη διαφορά των μεταβολών της ελαστικής ανηγμένης παραμόρφωσης με $\Delta d\mathbf{e}$ και τη διαφορά μεταξύ των μεταβολών της πλαστικής ανηγμένης παραμόρφωσης με $\Delta d\boldsymbol{\varepsilon}$. Τώρα, οι δύο λύσεις αντιστοιχούν στις ίδιες αυξήσεις των επιφανειακών φορτίσεων. Επιπλέον, ο νόμος τάσεων-ανηγμένων παραμορφώσεων είναι γραμμικός στις μεταβολές των τάσεων και των παραμορφώσεων. Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω και το θεώρημα της απόκλισης (divergence theorem), πρέπει να δείξουμε ότι το ολοκλήρωμα του εσωτερικού γινομένου

$$dI = \Delta d\boldsymbol{\sigma} \cdot \left(\Delta d\mathbf{e} + \Delta d\boldsymbol{\varepsilon} \right) \tag{Π.1}$$

στον όγκο του σώματος μηδενίζεται. Οποιοσδήποτε νόμος τάσεων-ανηγμένων παραμορφώσεων ο οποίος εξασφαλίζει ότι το ολοκληρωτέο γινόμενο dI είναι θετικά ορισμένο θα ικανοποιεί επομένως τη συνθήκη της μοναδικότητας.

Τώρα, το $\Delta d\mathbf{e}$ συσχετίζεται με το $\Delta d\boldsymbol{\sigma}$ από το νόμο του Hooke και το εσωτερικό γινόμενο $\Delta d\boldsymbol{\sigma} \cdot \Delta d\mathbf{e}$ είναι θετικά ορισμένο. Όσον αφορά το εσωτερικό γινόμενο $\Delta d\boldsymbol{\sigma} \cdot \Delta d\boldsymbol{\varepsilon}$ πρέπει να εξεταστούν οι παρακάτω τρεις ξεχωριστές περιπτώσεις: (i) και οι δύο λύσεις συνιστούν φόρτιση στο υπό θεώρηση σημείο, (ii) η μία λύση συνιστά φόρτιση και η άλλη αποφόρτιση και (iii) οι δύο λύσεις συνιστούν αποφόρτιση. Στην τρίτη περίπτωση $\Delta d\boldsymbol{\varepsilon} = 0$, οπότε το γινόμενο (Π.1) είναι θετικά ορισμένο επειδή είναι το $\Delta d\boldsymbol{\sigma} \cdot \Delta d\mathbf{e}$. Στις άλλες δύο περιπτώσεις, η σειρά με την οποία θα ληφθούν οι δύο λύσεις δεν επηρεάζει το πρόσημο του γινομένου $\Delta d\boldsymbol{\sigma} \cdot \Delta d\boldsymbol{\varepsilon}$, γιατί και το $\Delta d\boldsymbol{\sigma}$ και το $\Delta d\boldsymbol{\varepsilon}$ αλλάζουν πρόσημο όταν αυτή η σειρά αντιστραφεί. Επομένως, μπορούμε να συμφωνήσουμε να διατάξουμε τις δύο λύσεις έτσι ώστε το διάνυσμα $\Delta d\boldsymbol{\sigma}$ να έχει φορά από το πέρας του $\boldsymbol{\sigma}$ προς το εξωτερικό της επιφάνειας διαρροής.

Στην πρώτη περίπτωση, η διεύθυνση του $\Delta d\boldsymbol{\varepsilon}$ δίνεται από το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{n}$ το οποίο εξαρτάται μόνο από τη στιγμιαία κατάσταση αλλά όχι από τη μεταβολή της τάσης $\Delta d\boldsymbol{\sigma}$. Εύκολα μπορεί να παρατηρηθεί ότι το $\mathbf{n}$ πρέπει να είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κατά μήκος του εξωτερικού κάθετου διανύσματος στην επιφάνεια διαρροής, εάν το γινόμενο $\Delta d\boldsymbol{\sigma} \cdot \Delta d\boldsymbol{\varepsilon}$ πρέπει να είναι μη αρνητικό για όλα τα διανύσματα $\Delta d\boldsymbol{\sigma}$ τα οποία έχουν φορά προς το εξωτερικό αυτής της επιφάνειας. Επιπλέον, και στη δεύτερη περίπτωση επίσης, το γινόμενο $\Delta d\boldsymbol{\sigma} \cdot \Delta d\boldsymbol{\varepsilon}$ γίνεται μη αρνητικό με αυτήν την επιλογή του $\mathbf{n}$.

Οι συνθήκες της μη αντιστρεψιμότητας και της συνεκτικότητας (the conditions of irreversibility and consistency)

Λόγω του μη αναστρέψιμου χαρακτήρα της πλαστικής παραμόρφωσης, το έργο που δαπανάται στην πλαστική παραμόρφωση δε μπορεί να ανακτηθεί. Αυτό σημαίνει ότι το έργο των τάσεων στη μεταβολή των πλαστικών ανηγμένων παραμορφώσεων είναι θετικό οποτεδήποτε συμβαίνει μεταβολή των πλαστικών ανηγμένων παραμορφώσεων. Αυτή η συνθήκη της μη αντιστρεψιμότητας απαιτεί ότι $\boldsymbol{\sigma} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon} > 0$ εάν $d\boldsymbol{\varepsilon} \neq 0$, δηλαδή ότι το διάνυσμα σε οποιοδήποτε σημείο της επιφάνειας διαρροής και η εξωτερική κάθετος της επιφάνειας διαρροής σε αυτό το σημείο πρέπει να σχηματίζουν οξεία γωνία. Με άλλα λόγια, η επιφάνεια διαρροής, η οποία πάντα περιέχει την αρχή των συντεταγμένων, πρέπει πάντα να είναι κυρτή.

Έχουμε ακόμα να προσδιορίσουμε το μέτρο του διανύσματος $d\boldsymbol{\varepsilon}$. Αυτό μπορεί να γίνει σύμφωνα με τον παρακάτω τρόπο. Έστω

$$f\left(\sigma_x, \ldots, \tau_{zx}, \varepsilon_x, \ldots, \gamma_{zx}\right) = 0 \qquad (\Pi.2)$$

σχέση η οποία ορίζει την εξάρτηση της επιφάνειας διαρροής από την πλαστική ανηγμένη παραμόρφωση. Ο επιθυμητός νόμος τάσεων-ανηγμένων παραμορφώσεων δίνει την αύξηση της πλαστικής ανηγμένης παραμόρφωσης $d\boldsymbol{\varepsilon}$ η οποία οφείλεται στη μεταβολή $d\boldsymbol{\sigma}$ της τάσης μιας δεδομένης πλαστικής κατάστασης. Επειδή η φόρτιση από μια πλαστική κατάσταση πρέπει να οδηγεί ξανά σε μια πλαστική κατάσταση, η τάση και η ανηγμένη παραμόρφωση οι οποίες προκύπτουν μετά τις απειροστές μεταβολές $d\boldsymbol{\sigma}$ και $d\boldsymbol{\varepsilon}$ πρέπει ακόμα να ικανοποιούν τη σχέση (Π.2). Λαμβάνοντας υπόψη αυτή τη συνθήκη συνεκτικότητας, λαμβάνουμε τον παρακάτω νόμο τάσεων-ανηγμένων παραμορφώσεων:

$$d\varepsilon_x = (dN/D)(\partial f/\partial\sigma_x),\ldots,d\gamma_{zx} = (dN/D)(\partial f/\partial\tau_{zx}) \tag{Π.3}$$

όπου

$$dN = (\partial f/\partial\sigma_x)d\sigma_x + \ldots + (\partial f/\partial\tau_{zx})d\tau_{zx} \tag{Π.4}$$

$$D = -(\partial f/\partial\sigma_x)(\partial f/\partial\varepsilon_x) - \ldots - (\partial f/\partial\tau_{zx})(\partial f/\partial\gamma_{zx}) \tag{Π.5}$$

Η σχέση (Π.3) προορίζεται για φόρτιση από μια πλαστική κατάσταση $(dN > 0,\ f = 0)$. Εφαρμοζόμενη για μια ουδέτερη μεταβολή της φόρτισης $(dN = 0,\ f = 0)$ δίνει το σωστό αποτέλεσμα $d\varepsilon_x = \cdots = d\gamma_{zx} = 0$, ικανοποιώντας τη συνθήκη της συνέχειας. Η συνθήκη της μοναδικότητας ικανοποιείται όταν

$$D > 0 \tag{Π.6}$$

και η συνθήκη της μη αντιστρεψιμότητας όταν

$$(\partial f/\partial\sigma_x)\sigma_x + \ldots + (\partial f/\partial\tau_{zx})\tau_{zx} > 0 \tag{Π.7}$$

κεφάλαιο 3

Το υστερητικό προσομοίωμα Bouc-Wen

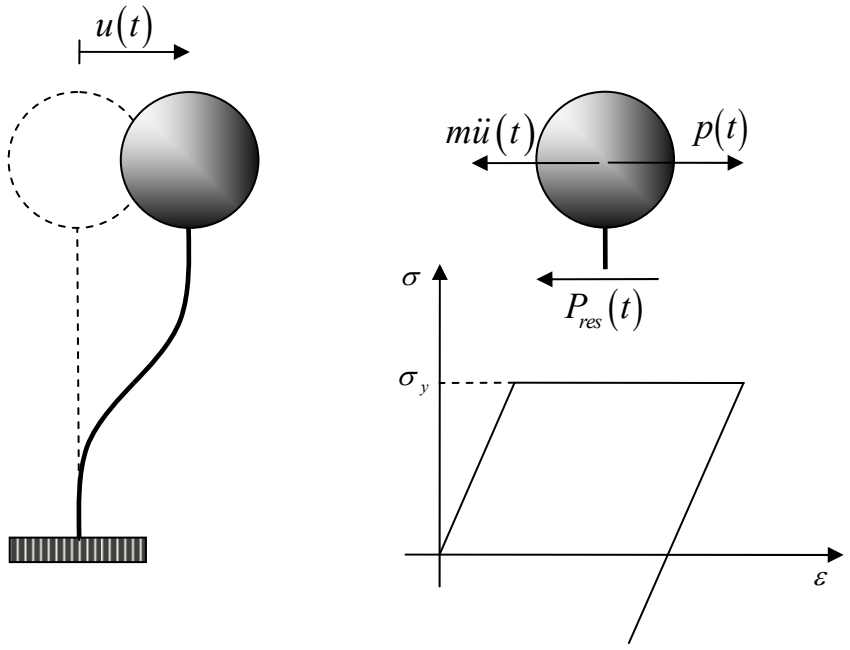
3.1 Εισαγωγή

Ένα ζήτημα μείζονος σημασίας για μια μη γραμμική ανάλυση είναι ο νόμος υστέρησης που απαιτείται για να προσομοιωθεί η ανακυκλιζόμενη απόκριση των κατασκευών. Τα τελευταία είκοσι χρόνια, έχει συντελεστεί σημαντική εξέλιξη στη φαινομενολογική, όπως ονομάζεται, προσέγγιση της υστέρησης. Μετά τον Massing (1925), τον Preisac (1935) και τον Valanis (1971), ο Bouc παρουσίασε τη διατύπωση του (1967) για το μονοβάθμιο υστερητικό προσομοίωμα. Μεταγενέστερα, εισήχθησαν αρκετές τροποποιήσεις, όπως το προσομοίωμα Bouc-Wen (Wen, 1976, 1980), το προσομοίωμα Baber-Noori (Baber και Wen 1980, Baber et al. 1986) και το προσομοίωμα Reinhorn (Sivaselvan και Reinhorn, 2000). Αυτά τα προσομοιώματα υστέρησης, που είναι επίσης γνωστά ως ομαλά υστερητικά προσομοιώματα (smooth hysteretic models) είναι σε θέση να προσομοιώσουν διαφορετικούς τύπους υστερητικής συμπεριφοράς χρησιμοποιώντας μια απλή ομαλή υστερητική συνάρτηση που επηρεάζεται από ένα σύνολο παραμέτρων οι οποίες καθορίζονται από το χρήστη.

Τις τελευταίες δεκαετίες το υστερητικό προσομοίωμα Bouc-Wen αποδεικνύεται πολύ ευέλικτο στην έκφραση ενός ευρέος φάσματος υστερητικών συμπεριφορών, συμπεριλαμβανομένης της μείωσης της δυσκαμψίας, της μείωσης αντοχής όπως επίσης και των φαινομένων 'pinching' στο οπλισμένο σκυρόδεμα, στα χαλύβδινα μέλη και τις συνδέσεις, στο ξύλο κλπ. Επιπρόσθετα, έχει αφιερωθεί σημαντική προσπάθεια για να απαλλαχθεί το προσομοίωμα Bouc-Wen από αντιφάσεις όσον αφορά τις παραδοχές της θερμοδυναμικής (Erlicher και Point 2004, Erlicher και Bursi, 2009) και τη παραβίαση των αξιωμάτων της πλαστικότητας (Charalampakis και Koumousis, 2009). Η διαφορική μορφή των εξισώσεων εξέλιξης (evolution equations), που εξάγονται επίσης με βάση τις ενδοχρονικές θεωρίες της πλαστικότητας, είναι σε θέση να εκφράσει με ολοκληρωμένο τρόπο τη φαινομενολογική υστερητική συμπεριφορά σε επίπεδο στοιχείου. Αυτές οι δυνατότητες αναδεικνύονται με το κόστος της επέκτασης των ελαστικών πεπερασμένων στοιχείων εισάγοντας επιπρόσθετα μητρώα δυσκαμψίας που λαμβάνουν υπόψη την ανελαστική συμπεριφορά και την εγγενή αλληλεπίδραση μεταξύ των συνιστωσών των τάσεων.

3.2 Η έννοια της υστέρησης

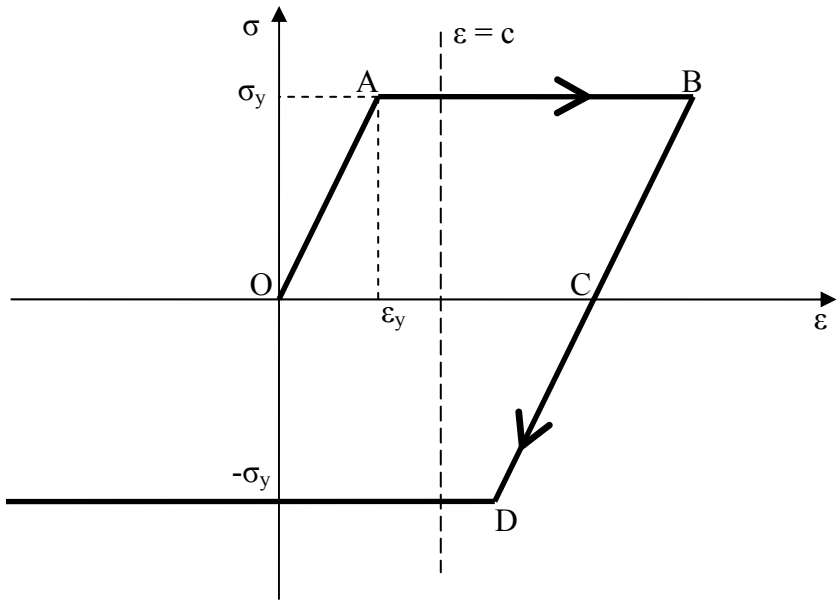
Ας εξετάσουμε το μονοβάθμιο ταλαντωτή που παρουσιάζεται στην Εικόνα 3.1. Ο ταλαντωτής παρουσιάζει συμπεριφορά ελαστικού-απολύτως πλαστικού υλικού με τάση διαρροής σ_y.



Εικόνα 3.1 Μονοβάθμιος ταλαντωτής κάτω από ανακυκλιζόμενη διέγερση

Η απόκριση του μη γραμμικού ταλαντωτή απεικονίζεται με μεγαλύτερη λεπτομέρεια στην Εικόνα 3.2. Για τάσεις μικρότερες από την τάση διαρροής, η συμπεριφορά του υλικού καθορίζεται από τον νόμο του Hooke, έτσι ώστε στην ελαστική περιοχή απόκρισης ισχύει η σχέση:

$$\sigma(\varepsilon) = E\varepsilon, \quad |\sigma| \leq \sigma_y \tag{3.1}$$



Εικόνα 3.2 Υστερητικός βρόχος

και υπάρχει 1:1 αντιστοιχία μεταξύ τάσης και παραμόρφωσης. Ωστόσο, υπάρχουν τουλάχιστον δύο πιθανές εντατικές καταστάσεις $\sigma \in [-\sigma_y, \sigma_y]$, οι οποίες αντιστοιχούν στην ίδια αυθαίρετη παραμόρφωση $\varepsilon = c, c \in [\varepsilon_y, +\infty)$, μεγαλύτερη από την παραμόρφωση διαρροής ε_y. Έτσι, δεν υπάρχει κάποια συνάρτηση $\sigma(\varepsilon)$ η οποία να μπορεί με μοναδικό τρόπο να αντιστοιχήσει την τρέχουσα παραμορφωσιακή κατάσταση στην τρέχουσα εντατική κατάσταση ακόμα και για την απλουστευμένη περίπτωση ενός ελαστικού-απολύτως πλαστικού υλικού. Η μαθηματική θεωρία της υστέρησης προσπαθεί να ορίσει μια κατάλληλη συνάρτηση ‘‘εξόδου’’ $\sigma = \sigma(t) : [0,T] \to \mathbb{R}$, δεδομένης μιας συνάρτησης ‘‘εισόδου’’ $\varepsilon = \varepsilon(t) : [0,T] \to \mathbb{R}$, έτσι ώστε το προκύπτον διάνυσμα $(\sigma(t), \varepsilon(t))$ να συμπίπτει με την καμπύλη της Εικόνας 3.2.

Έτσι, το πρόβλημα της υστέρησης ισοδυναμεί με το μαθηματικό πρόβλημα της εύρεσης ενός συναρτησιακού $B[In](t)$, όπου $In : [0,T] \to \mathbb{R}$ είναι μια αυθαίρετη χρονοϊστορία «εισόδου» όπως μετατόπιση, ανηγμένη παραμόρφωση κ.λπ. Από φυσικής πλευράς, το συναρτησιακό πρέπει να είναι ανεξάρτητο του ρυθμού μεταβολής καθώς η υστερητική ενέργεια που συσσωρεύεται σε διαδοχικούς κύκλους φόρτισης και αποφόρτισης δεν εξαρτάται από το ρυθμό μεταβολής των συναρτήσεων

«εισόδου» ή «εξόδου». Επιπλέον, το συναρτησιακό της υστέρησης πρέπει να είναι τμηματικά μονότονο, όπως υποδηλώνει το σχήμα των βρόχων υστέρησης (σε σχέση με την Εικόνα 3.2, μονοτονικά αυξανόμενο στη διαδρομή OAB και μονοτονικά φθίνον στη διαδρομή BCD). Τέλος, το συναρτησιακό πρέπει να έχει μνήμη.

3.3 Το προσομοίωμα Bouc-Wen

Ο Bouc (1967) μελέτησε την απόκριση ενός μονοβάθμιου ταλαντωτή μάζας m. Σύμφωνα με τις έννοιες που έχουν περιγραφεί στην παράγραφο (3.2), κατέληξε στη σχέση:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dt^2} + P_{res}^{B}(t) = p\left(t\right) \\ \dfrac{dP_{res}^{B}}{dt} = \dfrac{dz}{dt} = \left[A - \beta z \operatorname{sgn}(du)\right]\dfrac{du}{dt} \end{cases} \tag{3.2}$$

Τροποποιήσεις της αρχικής διατύπωσης του Bouc εισήχθησαν μεταγενέστερα, όπως από τους Wen (1976, προσομοίωμα Bouc-Wen), Baber & Noori (1985) και τον Reinhorn (1996). Στην εργασία αυτή, για κάθε ανάλυση χρησιμοποιείται το προσομοίωμα Bouc-Wen:

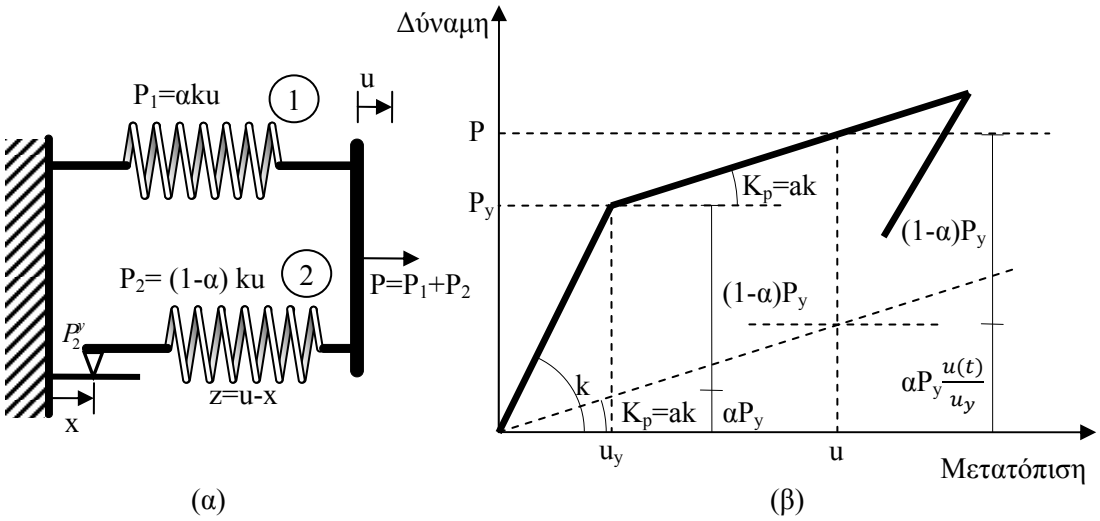
$$\begin{cases} \ddot{u} + c\dot{u} + P_{res}^{BW} = p\left(t\right) \\ P_{res}^{BW} = \alpha K u + z \\ \dot{z} = \left(1-\alpha\right)\mathrm{K}\left[A - \left|z\right|^{n}\left(\beta + \gamma \operatorname{sgn}(z\dot{u})\right)\right]\dot{u} \end{cases} \tag{3.3}$$

όπου c είναι η σταθερά απόσβεσης ιξώδους χαρακτήρα, P_{res}^{BW} είναι η δύναμη επαναφοράς Bouc-Wen, α είναι ο λόγος μετελαστικής προς την ελαστική δυσκαμψία, K είναι η ελαστική δυσκαμψία του ταλαντωτή ενώ τα A , β, γ είναι παράμετροι του προσομοιώματος. Η παράμετρος A έχει αποδειχθεί ότι είναι περιττή και θα θεωρηθεί ίση με τη μονάδα. Όπως υποδηλώνει η εξίσωση (3.3), η δύναμη επαναφοράς διαχωρίζεται σε δύο μέρη. Το πρώτο μέρος είναι γραμμικό με ενεργή δυσκαμψία ίση με την πλαστική δυσκαμψία του υλικού και το δεύτερο μέρος είναι υστερητικό με το z να είναι η δύναμη επαναφοράς η οποία εμπεριέχει τη μνήμη του μη γραμμικού συστήματος. Σ' αυτήν την εργασία χρησιμοποιείται μια παραλλαγή αυτής της διατύπωσης όπου το z θεωρείται ότι είναι η υστερητική μετατόπιση του συστήματος και έτσι:

$$\begin{cases} \ddot{u} + c\dot{u} + P_{res}^{BW} = p\left(t\right) \\ P_{res}^{BW} = \alpha K u + \left(1-\alpha\right)\mathrm{K}z \\ \dot{z} = \left[1 - \left|\dfrac{z}{z_y}\right|^n \left(\beta + \gamma\,\mathrm{sgn}(z\dot{u})\right)\right]\dot{u} \end{cases} \tag{3.4}$$

όπου το z_y είναι η μέγιστη τιμή της υστερητικής παραμέτρου.

Με την παραπάνω διατύπωση και θεωρώντας $c = 0$ για λόγους παρουσίασης, το προσομοίωμα μπορεί να απεικονιστεί ως ένας εν παραλλήλω συνδυασμός ενός γραμμικού ελατηρίου (Ελατήριο #1) και ενός μη γραμμικού στοιχείου, όπως φαίνεται στην Εικόνα 3.1(α). Το μη γραμμικό στοιχείο αποτελείται από ένα γραμμικό ελατήριο (Ελατήριο #2) και έναν ολισθητήρα, συνδεδεμένα εν σειρά. Έτσι, εισάγεται ένα διβάθμιο σύστημα, στο οποίο ορίζουμε ως u τη συνολική μετατόπιση και ως z τη σχετική μετατόπιση του ελατηρίου 2. Για λόγους συμβιβαστού των μετακινήσεων, η μετατόπιση του ολισθητήρα, αν υπάρχει, καθορίζεται από τη διαφορά $\left(x = u - z\right)$.



Εικόνα 3.3 (α) 'Συστατικά μέρη' του προσομοιώματος Bouc-Wen (β) Σχέση δύναμης-μετατόπισης

Όσο η δύναμη η οποία επενεργεί πάνω στον ολισθητήρα είναι μικρότερη από ένα άνω όριο $\left(x_y\right)$, δεν υπάρχει ολίσθηση κι έτσι $x = 0$ και η σχετική μετατόπιση είναι ίση με τη συνολικά επιβαλλόμενη. Σε μια τέτοια περίπτωση, το σύστημα

συμπεριφέρεται ελαστικά με συνδυασμένη στιβαρότητα k, επειδή τα ελατήρια 1 και 2 δίνουν μια ελαστική στιβαρότητα $\alpha\, k$ και $\left(1-\alpha\right)k$ αντίστοιχα, με το α να είναι ο λόγος της ανελαστικής προς την ελαστική στιβαρότητα.

Όταν το άνω όριο του ολισθητήρα ξεπερνιέται, συμβαίνει ολίσθηση και η σχετική μετατόπιση στο ελατήριο 2 παραμένει σταθερή και συμβολίζεται ως z_y. Όλα αυτά τα στάδια συνοψίζονται στην παρακάτω σχέση δύναμης μετατόπισης:

$$P_{res}^{BW} = P_1 + P_2 = \alpha k u + \left(1-\alpha\right)kz \tag{3.5}$$

όπου για το z ισχύει:

$$z = \begin{cases} u, & x \le x_y \\ z_y, & x > x_y \end{cases} \tag{3.6}$$

Καθώς στις εφαρμογές του μηχανικού η εσωτερική μεταβλητή x δεν είναι ούτε εύκολο να μετρηθεί, ούτε προκύπτει θεωρητικά, αντί αυτής, χρησιμοποιείται η συνολική μετατόπιση στην οποία λαμβάνει χώρα η ολίσθηση. Αυτή μπορεί εύκολα να προκύψει από μια δοκιμή μονοαξονικού εφελκυσμού ή εφαρμόζοντας ένα κριτήριο διαρροής κι έτσι η σχέση (3.6) μπορεί να γραφεί ισοδύναμα ως:

$$z = \begin{cases} u, & u \le u_y \\ u_y, & u > u_y \end{cases} \tag{3.7}$$

Ο Wen το 1980 πρότεινε την ακόλουθη σχέση με σκοπό να εξομαλύνει τη μετάβαση από την ελαστική (χωρίς ολίσθηση) στην ανελαστική απόκριση (με ολίσθηση) του συστήματος:

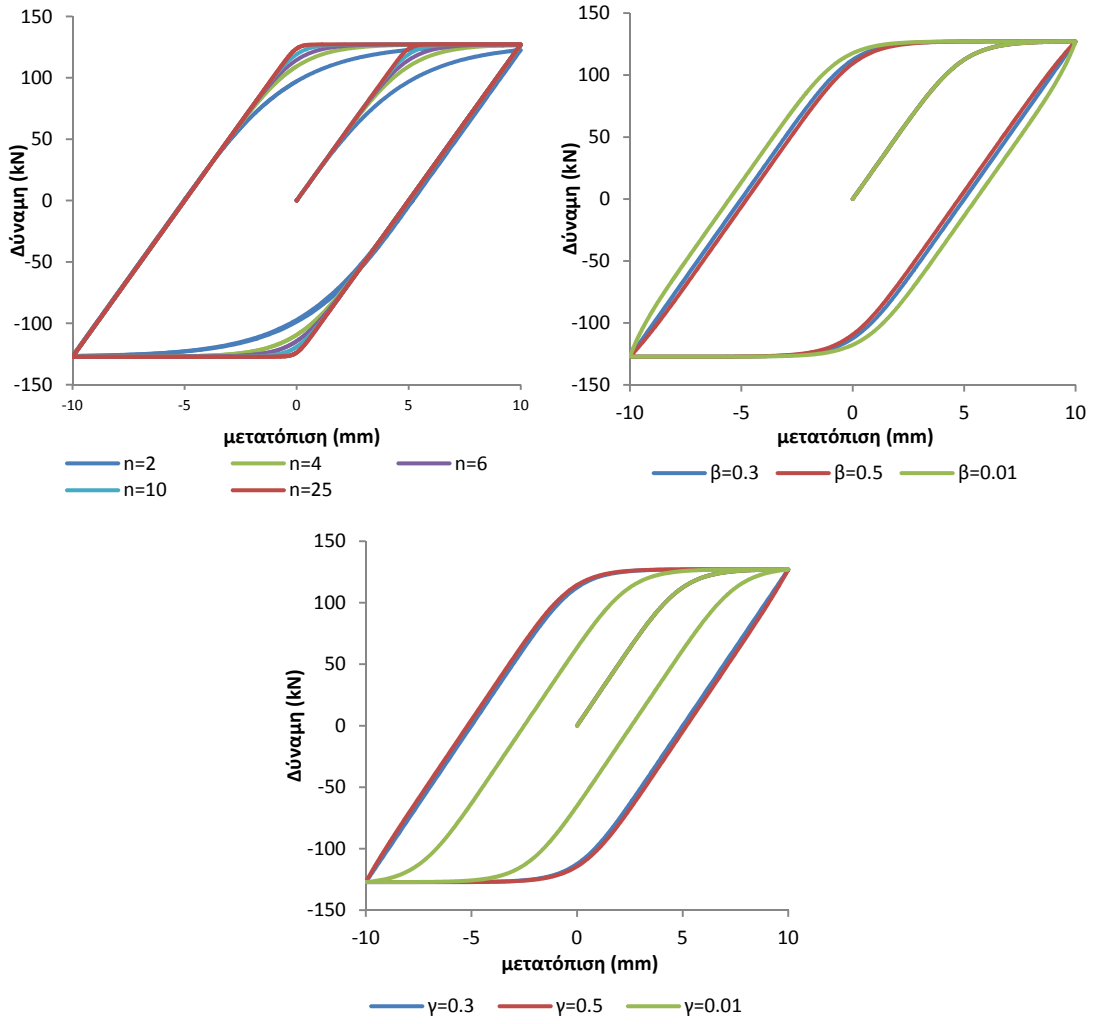
$$\dot{z}(t) = f(\dot{u}(t), z(t)) = \dot{u}\left[\mathrm{A} - h_1 h_2\right] \tag{3.8}$$

όπου:

$$h_1 = \left|\frac{z}{z_y}\right|^n, \qquad h_2 = \left(\beta + \gamma\,\mathrm{sgn}\left(z\dot{u}\right)\right) \tag{3.9}$$

Το h_1 μπορεί να θεωρηθεί ως ένα μονοαξονικό κριτήριο διαρροής και το h_2 ως ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της ανακυκλιζόμενης φόρτισης, ενώ στην παραπάνω σχέση, το σύμβολο $\dot{(\cdot)}$ δηλώνει παραγώγιση ως προς το χρόνο. Η παράμετρος n

ελέγχει την ομαλότητα της μετάβασης από την ελαστική στην ανελαστική περιοχή, ενώ οι όροι β και γ οι οποίοι εισάγονται στη σχέση (3.9) είναι συντελεστές σχήματος που επηρεάζουν το σχήμα του βρόχου υστέρησης. Στην Εικόνα 3.4 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από μία αριθμητική εφαρμογή[1], στην οποία ελέγχεται η ανηγμένη παραμόρφωση, σε μια ράβδο οπλισμού 18mm για διάφορες τιμές των παραμέτρων n, β και γ. Οι παράμετροι του υλικού είναι S500 και E=200GPa, ενώ το μήκος της ράβδου θεωρείται ίσο με 2m.



Εικόνα 3.4 Αριθμητικό πείραμα επιβολής παραμόρφωσης (α) μεταβολή υστερητικού βρόχου καθώς μεταβάλλεται το n, (β) μεταβολή υστερητικού βρόχου καθώς μεταβάλλεται το β (n=5, γ=0.3), (γ) μεταβολή υστερητικού βρόχου καθώς μεταβάλλεται το γ (n=5, β=0.3)

[1] Ο κώδικας του παραδείγματος βρίσκεται στο Παράρτημα Ι, 3.6.1

3.3.1 Σχόλια στο προσομοίωμα Bouc-Wen

Μια άμεση συνέπεια των εξισώσεων (3.5) και (3.8), είναι το γεγονός ότι μια μικρή τιμή της παραμέτρου n, έχει ως αποτέλεσμα να εμφανίζεται ολίσθηση πριν ακόμα τη μετατόπιση διαρροής z_y. Αυτό είναι προφανές αν θεωρήσουμε, χωρίς απώλεια της γενικότητας, ότι $sign(z\dot{u}) = 1$ (κατάσταση φόρτισης στο θετικό ημιεπίπεδο) κι έτσι η σχέση (3.8) γίνεται:

$$\dot{z}(t) = \dot{u}\left[1 - \left|\frac{z}{z_y}\right|^n \left(\beta + \gamma\right)\right] \tag{3.10}$$

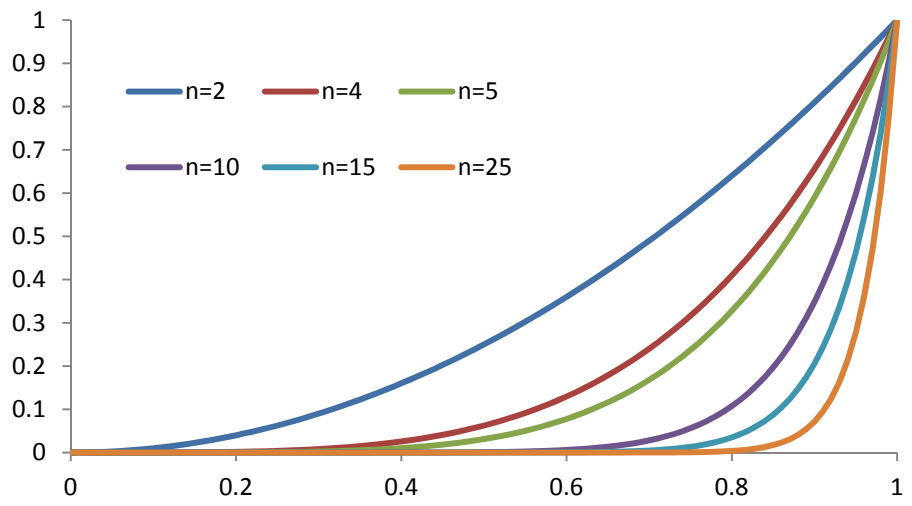
Λόγω των φυσικών θεωρήσεων, όπως περιγράφτηκαν παραπάνω, στην ελαστική περιοχή, πρέπει να ισχύει ότι, με βάση την Εικόνα 3.3, η σχετική μετατόπιση στο ελατήριο 2 πρέπει να είναι ίση με τη μετατόπιση στο ελατήριο 1 κι έτσι:

$$z = u \Rightarrow \dot{z}(t) = \dot{u} \Rightarrow \left[1 - \left|\frac{z}{z_y}\right|^n \left(\beta + \gamma\right)\right] = 1 \overset{(\beta+\gamma)=1}{\Rightarrow} z = 0 \tag{3.11}$$

Είναι προφανές ότι η σχέση (3.11) δε μπορεί να ισχύει γιατί αυτό θα σήμαινε ότι η επιβαλλόμενη μετατόπιση θα ήταν επίσης μηδενική. Αυτό που επιτυγχάνει η συνάρτηση h_1 είναι ότι κρατάει τον όρο $\left|z/z_y\right|^n \left(\beta + \gamma\right)$ επαρκώς μικρό όσο $z < z_y$, έτσι ώστε να ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$1 - \left|\frac{z}{z_y}\right|^n \left(\beta + \gamma\right) \overset{(\beta+\gamma)=1}{\rightarrow} 1 \tag{3.12}$$

Η αποτελεσματικότητα της συνάρτησης h_1 σε σχέση με την παράμετρο n παρουσιάζεται στην Εικόνα 3.5. Η αριθμητική απόδοση αυτής της συνάρτησης αυξάνεται όσο η παράμετρος n διατηρεί μια μεγάλη τιμή, ενώ μειώνεται κάπως όσο η τιμή του n μειώνεται. Ως αποτέλεσμα, η εξίσωση (3.11) αποκλίνει ελαφρώς από την ισότητα και εμφανίζεται μικροολίσθηση πριν ακόμα η μετατόπιση γίνει ίση με τη μετατόπιση διαρροής.



Εικόνα 3.5 Μεταβολή της συνάρτησης h_1 (smoothing function) συναρτήσει του n

Παρόλα αυτά, είναι προφανές ότι μια τέτοια διατύπωση είναι ικανή να προσομοιώσει οποιαδήποτε μονοαξονική συμπεριφορά που εισάγεται στα πλαίσια της κλασικής πλαστικότητας, αφού ενσωματωθεί σε μια απλή εξίσωση το κριτήριο διαρροής, ο νόμος της πλαστικής ροής και ο ρυθμός μεταβολής της φόρτισης. Σημειώνεται ότι ο όρος που ορίζεται εδώ ως μετατόπιση διαρροής είναι μια φαινομενολογική ποσότητα που υποδηλώνει τη μετατόπιση από την οποία ξεκινά η πλαστική παραμόρφωση. Αυτή η ποσότητα μαζί με τους όρους β, γ και n μπορούν να εκτιμηθούν με διάφορες τεχνικές. Ωστόσο, όπως απέδειξαν ο Erlicher και ο Bursi (2004), οι προσδιοριζόμενες παράμετροι θα πρέπει να υπακούουν στον ακόλουθο περιορισμό, έτσι ώστε να προκύπτει ένα θερμοδυναμικώς αποδεκτό προσομοίωμα:

$$-\beta \leq \gamma \leq \beta \tag{3.13}$$

Ως αυτό το σημείο, η παρουσίαση του προσομοιώματος Bouc-Wen είναι βασισμένη σε σχέσεις δύναμης-μετατόπισης. Αν και ευέλικτη, αυτή η διατύπωση περιορίζει τη δυνατότητα εφαρμογής αυτών των σχέσεων στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Στις επόμενες παραγράφους, παρουσιάζεται μια γενική διατύπωση στα πλαίσια της κλασικής πλαστικότητας, η οποία λαμβάνει υπόψη την εφαρμογή των παραπάνω συνεχών, ομαλών συναρτήσεων, αποφεύγοντας έτσι τη χρήση τμηματικώς γραμμικών υστερητικών προσομοιωμάτων.

3.4 Το γενικευμένο τριαξονικό προσομοίωμα Bouc-Wen

Αν και το προσομοίωμα Bouc-Wen βασίζεται σε μαθηματικούς συλλογισμούς, μπορεί να αποδειχθεί ότι οι ίδιες σχέσεις μπορούν να εξαχθούν θεωρώντας τη φυσική διάσταση της κλασικής πλαστικότητας. Το πλεονέκτημα αυτής της προσέγγισης είναι το γεγονός ότι συνεχείς, ομαλές σχέσεις πλαστικότητας εξάγονται σε όρους τανυστικών σχέσεων τάσεων-ανηγμένων παραμορφώσεων.

Η κλασική πλαστικότητα είναι βασισμένη σε ένα σύνολο από εξισώσεις, δηλαδή το νόμο της πλαστικής ροής, τη συνθήκη διαρροής, τη συνθήκη της συνεκτικότητας και το νόμο κράτυνσης (hardening). Στη συγκεκριμένη εργασία, χρησιμοποιείται η υπόθεση της συσχετισμένης πλαστικότητας (associative plasticity), όπου το πλαστικό δυναμικό συμπίπτει με τη συνάρτηση διαρροής. Συμβολίζοντας το κριτήριο της διαρροής με Φ , ο ρυθμός μεταβολής της πλαστικής παραμόρφωσης ορίζεται ως εξής:

$$\left\{\dot{\varepsilon}^p\right\} = \dot{\lambda}\frac{\partial\Phi\left(\left\{\sigma\right\}\right)}{\partial\left\{\sigma\right\}} \tag{3.14}$$

όπου $\left\{\dot{\varepsilon}^p\right\}$ είναι ο πλαστικός τανυστής ανηγμένων παραμορφώσεων, $\dot{\lambda}$ ο πλαστικός πολλαπλασιαστής (plastic multiplier), $\left\{\sigma\right\}$ ο τανυστής των τάσεων και $\dot{(\cdot)}$ δηλώνει παραγώγιση ως προς το χρόνο. Ο πλαστικός πολλαπλασιαστής και η συνάρτηση διαρροής συμφωνούν με τις συνθήκες ορθογωνικότητας των Kuhn-Tucker (Kuhn-Tucker optimality conditions):

$$\dot{\lambda} \geq 0, \quad \Phi \leq 0, \quad \dot{\lambda}\Phi = 0 \tag{3.15}$$

Η συνθήκη συνεκτικότητας (consistency condition) είναι μια άμεση συνέπεια της σχέσης (3.15), η οποία δηλώνει ότι στη διαρροή ισχύει:

$$\dot{\lambda}\dot{\Phi} = 0 \tag{3.16}$$

Ένα τυπικό ισοτροπικό κριτήριο διαρροής (isotropic yield criterion ή plasticity model) είναι το κριτήριο διαρροής von-Mises που ορίζεται:

$$\Phi = \left\|\left\{\sigma\right\} - \left\{\eta\right\}\right\| - \sigma_M \leq 0 \tag{3.17}$$

όπου $\{\sigma\}$ είναι ο αποκλίνων τανυστής των τάσεων και $\{\eta\}$ είναι ο αποκλίνων τανυστής των εσωτερικών τάσεων (back-stress tensor). Η εξέλιξη της εσωτερικής τάσης (back-stress), καθορίζει τον τύπο της κράτυνσης που εισάγεται στο προσομοίωμα του υλικού κατά τη διάρκεια διαδοχικών κύκλων φόρτισης και αποφόρτισης. Ένας τύπος κράτυνσης που χρησιμοποιείται συνήθως είναι η υπόθεση της γραμμικής κινηματικής κράτυνσης (linear kinematic hardening), η οποία επιβάλλει ένα σταθερό πλαστικό μέτρο ελαστικότητας κατά τη διάρκεια της πλαστικής φόρτισης. Αυτό επιτυγχάνεται με την εξής απαίτηση:

$$\{\dot{\eta}\} = C\{\dot{\varepsilon}^p\} \tag{3.18}$$

όπου C ορίζεται ως η σταθερά κράτυνσης του υλικού.

Μια βασική έννοια της κλασικής πλαστικότητας είναι η «προσθετική αποσύνθεση» (ή αθροιστική υπέρθεση) της ανηγμένης παραμόρφωσης σε αναστρέψιμες ελαστικές και σε μόνιμες πλαστικές συνιστώσες. Κατά συνέπεια, η «προσθετική αποσύνθεση» (additive decomposition) του ρυθμού μεταβολής της ανηγμένης παραμόρφωσης ορίζεται ως:

$$\{\dot{\varepsilon}\} = \{\dot{\varepsilon}^{el}\} + \{\dot{\varepsilon}^p\} \Rightarrow \{\dot{\varepsilon}^{el}\} = \{\dot{\varepsilon}\} - \{\dot{\varepsilon}^p\} \tag{3.19}$$

όπου $\{\dot{\varepsilon}\}$ είναι ο ρυθμός μεταβολής του τανυστή της συνολικής παραμόρφωσης, ενώ $\{\dot{\varepsilon}^{el}\}$ είναι ο ρυθμός μεταβολής του ελαστικού μέρους του διανύσματος της συνολικής παραμόρφωσης. Βασιζόμενοι σε φαινομενολογική προσέγγιση, η στιβαρότητα του κλάδου αποφόρτισης θεωρείται ίση με αυτή του ελαστικού κι έτσι ισχύει η επόμενη σχέση μεταξύ του τανυστή της συνολικής τάσης και του ελαστικού μέρους του ρυθμού μεταβολής της ανηγμένης παραμόρφωσης:

$$\{\dot{\sigma}\} = [D]\{\dot{\varepsilon}^{el}\} \tag{3.20}$$

όπου $[D]$ είναι το ελαστικό καταστατικό μητρώο (elastic constitutive matrix). Αντικαθιστώντας την εξίσωση (3.14) στη σχέση (3.19) και χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.20) εξάγεται η ακόλουθη εξίσωση:

$$\left\{\dot{\sigma}\right\} = \left[D\right]\left(\left\{\dot{\varepsilon}\right\} - \dot{\lambda}\frac{\partial\Phi\left(\left\{\sigma\right\}\right)}{\partial\left\{\sigma\right\}}\right) \tag{3.21}$$

Μέσω της συνθήκης συνεκτικότητας (consistency condition) (εξίσωση (3.16)) και της σχέσης (3.21), η τιμή του πλαστικού πολλαπλασιαστή (plastic multiplier) $\dot{\lambda}$ υπολογίζεται ως:

$$\dot{\lambda}\dot{\Phi} = 0 \Rightarrow \dot{\lambda}\left(\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\left\{\sigma\right\}}\right)^T\left\{\dot{\sigma}\right\} + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\left\{\eta\right\}}\right)^T\left\{\dot{\eta}\right\}\right) = 0 \tag{3.22}$$

Στη διαρροή, $\Phi = 0$ και $\dot{\lambda} > 0$ κι έτσι η σχέση (3.22) μπορεί να γραφεί ως:

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\left\{\sigma\right\}}\right)^T\left\{\dot{\sigma}\right\} + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\left\{\eta\right\}}\right)^T\left\{\dot{\eta}\right\} = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\left\{\sigma\right\}}\right)^T\left\{\dot{\sigma}\right\} = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\left\{\eta\right\}}\right)^T\left\{\dot{\eta}\right\} \tag{3.23}$$

Προπολλαπλασιάζοντας τη σχέση (3.21) με $\partial\Phi/\partial\left\{\sigma\right\}$ εξάγεται η ακόλουθη εξίσωση:

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\left\{\sigma\right\}}\right)^T\left\{\dot{\sigma}\right\} = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\left\{\sigma\right\}}\right)^T\left[D\right]\left(\left\{\dot{\varepsilon}\right\} - \dot{\lambda}\frac{\partial\Phi\left(\left\{\sigma\right\}\right)}{\partial\left\{\sigma\right\}}\right) \tag{3.24}$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (3.23) στην εξίσωση (3.24) προκύπτει η ακόλουθη σχέση:

$$-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\left\{\eta\right\}}\right)^T\left\{\dot{\eta}\right\} = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\left\{\sigma\right\}}\right)^T\left[D\right]\left(\left\{\dot{\varepsilon}\right\} - \dot{\lambda}\frac{\partial\Phi\left(\left\{\sigma\right\}\right)}{\partial\left\{\sigma\right\}}\right) \tag{3.25}$$

Στη θεωρία της κλασικής πλαστικότητας, ο νόμος της κράτυνσης (hardening law) ορίζεται ως μία σχέση μεταξύ του τανυστή των εσωτερικών τάσεων (back-stress tensor) και του τανυστή των πλαστικών ανηγμένων παραμορφώσεων. Αυτή η σχέση μπορεί να είναι είτε εξαρτημένη είτε ανεξάρτητη από το ρυθμό μεταβολής της παραμόρφωσης. Σε κάθε περίπτωση, η εσωτερική τάση (back-stress) τελικά προκύπτει ως συνάρτηση του πλαστικού πολλαπλασιαστή (plastic multiplier) $\dot{\lambda}$ και ως εκ τούτου μπορεί να γραφεί:

$$\left\{\dot{\eta}\right\} = \dot{\lambda}G\left(\left\{\eta\right\},\Phi\right) \tag{3.26}$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (3.26) στην εξίσωση (3.25), προκύπτει η ακόλουθη σχέση:

$$-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\{\eta\}}\right)^T \dot{\lambda} G\left(\{\eta\},\Phi\right) = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\{\sigma\}}\right)^T [D]\left(\{\dot{\varepsilon}\} - \dot{\lambda}\frac{\partial\Phi\left(\{\sigma\}\right)}{\partial\{\sigma\}}\right) \tag{3.27}$$

Ανακατατάσσοντας και λύνοντας ως προς τον πλαστικό πολλαπλασιαστή, εξάγεται η ακόλουθη έκφραση:

$$\dot{\lambda} = \left(-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\{\eta\}}\right)^T G\left(\{\eta\},\Phi\right) + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\{\sigma\}}\right)^T [D]\frac{\partial\Phi\left(\{\sigma\}\right)}{\partial\{\sigma\}}\right)^{-1}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\{\sigma\}}\right)^T [D]\{\dot{\varepsilon}\} \tag{3.28}$$

Στην περίπτωση του ελαστικού-απολύτως πλαστικού υλικού, $G = 0$ και η σχέση (3.28) συμπίπτει με αυτή που πρότεινε ο Casciati το 2006. Οι εξισώσεις (3.23) έως (3.28) ισχύουν όταν έχει συμβεί η διαρροή, είτε στο θετικό είτε στο αρνητικό ημιεπίπεδο κι έτσι εισάγοντας τις ακόλουθες συναρτήσεις Heaviside:

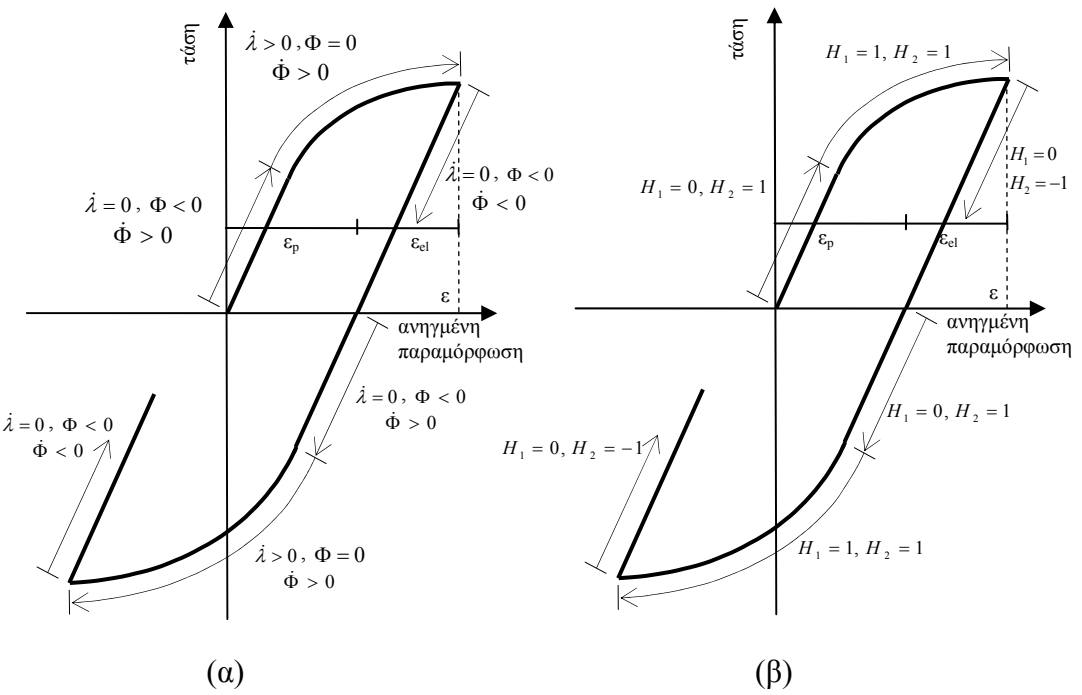
$$H_1\left(\Phi\right) = \begin{cases} 1, & \Phi = 0 \\ 0, & \Phi < 0 \end{cases} \qquad H_2\left(\dot{\Phi}\right) = \begin{cases} 1, & \dot{\Phi} > 0 \\ 0, & \dot{\Phi} < 0 \end{cases} \tag{3.29}$$

προκύπτει μια μόνο σχέση για τον πλαστικό πολλαπλασιαστή $\dot{\lambda}$ σε όλο το πεδίο του τανυστή των παραμορφώσεων:

$$\dot{\lambda} = H_1 H_2\left(-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\{\eta\}}\right)^T G\left(\{\eta\},\Phi\right) + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\{\sigma\}}\right)^T [D]\frac{\partial\Phi\left(\{\sigma\}\right)}{\partial\{\sigma\}}\right)^{-1}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\{\sigma\}}\right)^T [D]\{\dot{\varepsilon}\}$$

(3.30)

Αντί να περιγράφουμε την ανακυκλιζόμενη συμπεριφορά ενός υλικού σε βήματα λαμβάνοντας υπόψη τις περιοχές των συνθηκών του Kuhn-Tucker (Εικόνα 3.6(α)) ή των αντιστοίχων συναρτήσεων Heaviside Εικόνα 3.6(β), ο Casciati πρότεινε την εξομάλυνση των τελευταίων, εισάγοντας πρόσθετες παραμέτρους του υλικού.



Εικόνα 3.6 (α) Ανελαστική ανακυκλιζόμενη απόκριση (β) Συναρτήσεις Heaviside

Σύμφωνα με αυτήν την προσέγγιση, οι δύο συναρτήσεις Heaviside εξομαλύνονται χρησιμοποιώντας τις ακόλουθες εκφράσεις:

$$H_1 = \left|\frac{\Phi}{\Phi_0}\right|^N, \quad N \geq 2 \tag{3.31}$$

και

$$H_2 = H\left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}\right)^T \left\{\dot{\sigma}\right\}\right) = \frac{1 + \operatorname{sgn}\left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}\right)^T \left\{\dot{\sigma}\right\}\right)}{2} \approx \beta + \gamma \operatorname{sgn}\left(\left\{\varepsilon\right\}^T \left\{\dot{\sigma}\right\}\right) \tag{3.32}$$

όπου N, β, και γ είναι παράμετροι του προσομοιώματος και Φ_0 είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης διαρροής ή το σημείο διαρροής. Στην ειδική περίπτωση όπου $\beta = \gamma = 0.5$ η δυσκαμψία αποφόρτισης είναι ίση με την ελαστική. Μια άμεση συνέπεια της εξίσωσης (3.31) είναι το γεγονός ότι το υλικό μπορεί να διαρρεύσει πριν ακόμα φτάσουμε στο θεωρητικό σημείο διαρροής Φ_0. Ανακατατάσσοντας την εξίσωση (3.21) και αντικαθιστώντας τον ορισμό του πλαστικού πολλαπλασιαστή, εξάγεται το ακόλουθο προσομοίωμα Bouc-Wen:

$$\left\{\dot{\sigma}\right\} = \left[D\right]\left(\left[I\right] - \left|\frac{\Phi}{\Phi_0}\right|^N \left(\beta + \gamma\,\mathrm{sgn}\left(\left\{\varepsilon\right\}^T \left\{\dot{\sigma}\right\}\right)\right)\left[R\right]\right)\left\{\dot{\varepsilon}\right\} \tag{3.33}$$

όπου το μητρώο $\left[R\right]$ υπολογίζεται ως:

$$\left[R\right] = \left(-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\left\{\eta\right\}}\right)^T G\left(\left\{\eta\right\},\Phi\right) + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\left\{\sigma\right\}}\right)^T \left[D\right]\frac{\partial\Phi\left(\left\{\sigma\right\}\right)}{\partial\left\{\sigma\right\}}\right)^{-1}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\left\{\sigma\right\}}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\left\{\sigma\right\}}\right)^T \left[D\right]$$

(3.34)

και ορίζει τη σχέση αλληλεπίδρασης μεταξύ των συνιστωσών του τανυστή των τάσεων στη διαρροή. Έτσι, οι εξισώσεις πλαστικότητας «βήμα προς βήμα» της σχέσης (3.15) αντικαθίστανται από μια συνεχή σχέση τάσεων-ανηγμένων παραμορφώσεων. Στην περίπτωση μονοαξονικών καταπονήσεων το κριτήριο διαρροής του von Mises αποκτά την ακόλουθη μορφή:

$$\Phi_{VM} = \frac{\left(\sigma_{11} - \eta_{11}\right)^2}{\left(\sigma_y\right)^2} - 1$$

και επομένως, η σχέση (3.33) γίνεται:

$$\dot{\sigma}_{11} = E\left(1 - \frac{E}{c+E}\left|\frac{\sigma_{11} - \eta_{11}}{\sigma_y}\right|^{2N}\left(\beta + \gamma\,\mathrm{sgn}\left(\varepsilon_{11}\dot{\sigma}_{11}\right)\right)\right)\dot{\varepsilon}_{11} \tag{3.35}$$

Οι ομοιότητες μεταξύ της εξίσωσης (3.35) και του υπολογισμού της υστερητικής παραμέτρου z από τον Bouc στην εξίσωση (3.4) είναι προφανείς.

3.4.1 Μια υποπερίπτωση - το παράλληλο γενικευμένο προσομοίωμα της υστέρησης

Το παράλληλο γενικευμένο προσομοίωμα των Bouc-Wen, το οποίο εισήγαγαν οι Karray και Bouc (Wen, 1980, Casciati, 2006) είναι μια υποπερίπτωση της διατύπωσης που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη παράγραφο. Γενικεύοντας την ιδέα των ελατηρίων εν παραλλήλω, όπως φαίνεται στην Εικόνα 3.3(α), ο τανυστής των τάσεων «διασπάται» σε ένα ελαστικό κι ένα ανελαστικό μέρος όπως παρακάτω:

$$\left\{\sigma\right\} = \left[\alpha\right]\left\{\sigma^e\right\} + \left(\left[I\right] - \left[\alpha\right]\right)\left\{\sigma^h\right\} \tag{3.36}$$

όπου το $[\alpha]$ συμβολίζει ένα τετραγωνικό διαγώνιο μητρώο με τους λόγους μετελαστικής προς την ελαστική δυσκαμψία, οι οποίοι για ένα ισοτροπικό υλικό θεωρούνται σταθεροί σε κάθε διεύθυνση, το $[I]$ είναι το ταυτοτικό μητρώο, ενώ το ελαστικό μέρος $\{\sigma^e\} = \{\sigma_{11}^e \quad \sigma_{22}^e \quad \sigma_{12}^e\}^T$ εκφράζεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\{\sigma^e\} = [D]\{\varepsilon\} \tag{3.37}$$

όπου $[D]$ είναι το ελαστικό καταστατικό μητρώο (elastic constitutive matrix). Το υστερητικό μέρος $\{\sigma^h\} = \{\sigma_{11}^h \quad \sigma_{22}^h \quad \sigma_{12}^h\}^T$ εξελίσσεται σύμφωνα με τον ακόλουθο υστερητικό νόμο των Bouc-Wen (Sivaselvan και Reinhorn,2003):

$$\begin{Bmatrix} \dot{\sigma}_{11}^h \\ \dot{\sigma}_{22}^h \\ \dot{\sigma}_{12}^h \end{Bmatrix} = [D]\left([I] - H_1 H_2 \left[\tilde{R}\right]\right) \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_{11} \\ \dot{\varepsilon}_{22} \\ \dot{\varepsilon}_{12} \end{Bmatrix} \tag{3.38}$$

όπου H_1, H_2 είναι ομαλές συναρτήσεις Heaviside, που ορίζονται στις εξισώσεις (3.31) και (3.32) αντίστοιχα, ενώ $\left[\tilde{R}\right]$ είναι το μητρώο αλληλεπίδρασης που ορίζεται στην εξίσωση (3.34) θέτοντας $G = 0$. Έτσι, οι εξισώσεις (3.36) έως (3.38) είναι ικανές να προσομοιώσουν υστερητικά συστήματα με γραμμική κινηματική κράτυνση (linear kinematic hardening). Είναι προφανές πως το παραπάνω περιορίζει τη δυνατότητα εφαρμογής του προσομοιώματος.

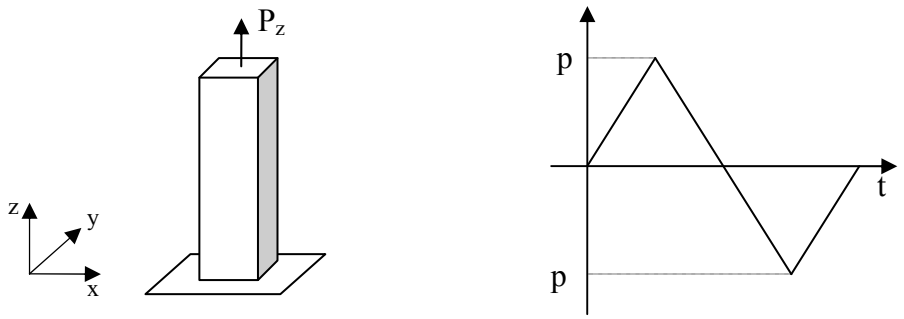
3.4.2 Αριθμητικές εφαρμογές

Παράδειγμα 1ο[2]

Εξετάζεται χαλύβδινο δοκίμιο dxdydz για το οποίο ισχύει το κριτήριο διαρροής του von Mises. Αυτό υφίσταται μονοαξονική ανακυκλιζόμενη φόρτιση. Θεωρούνται δύο κύκλοι φόρτισης-αποφόρτισης με μέγιστη τιμή της αξονικής τάσης ίση με p=1.20σ_y . Οι παράμετροι του υλικού είναι $\sigma_y = 235$ MPa, $E = 210$ GPa, $\nu = 0.3$.

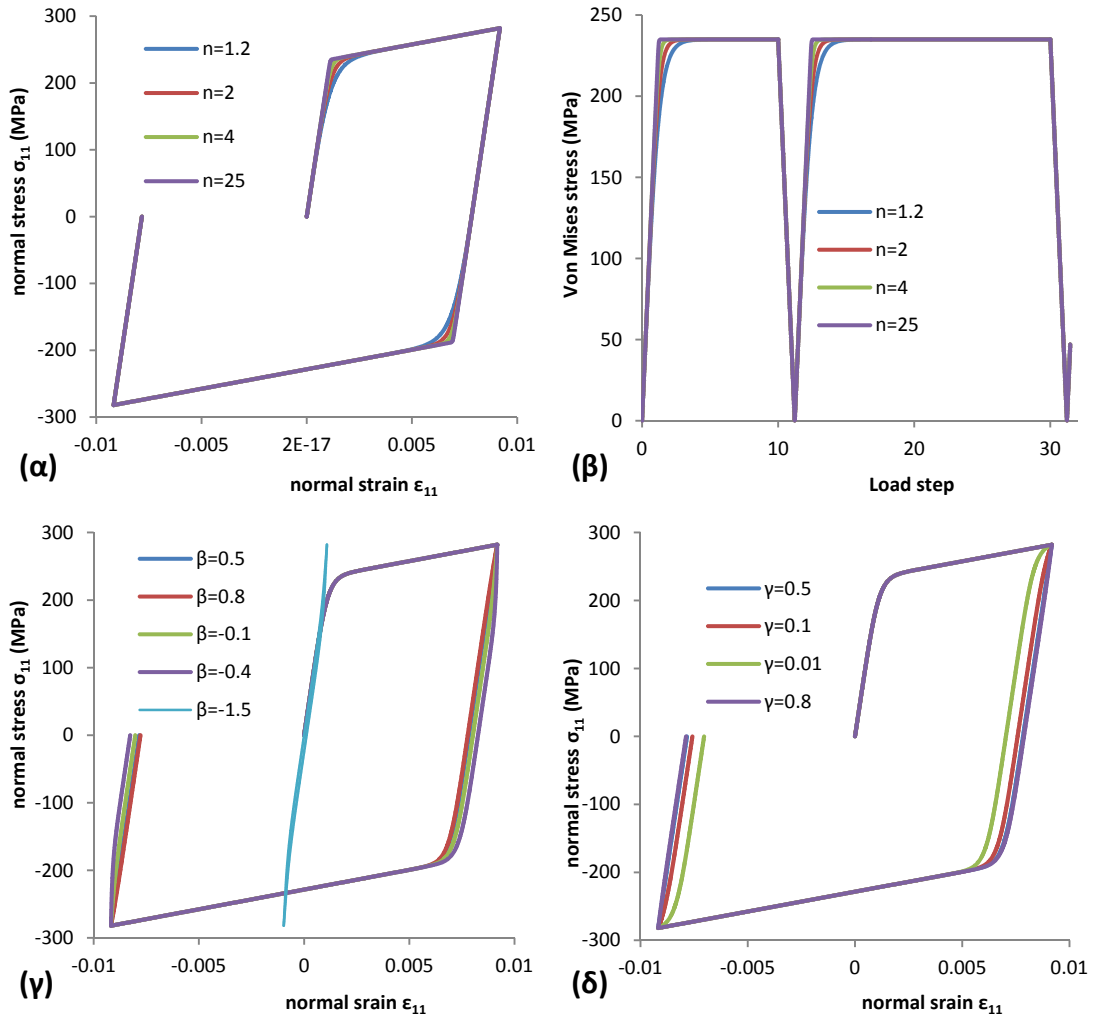
[2] Ο κώδικας του παραδείγματος βρίσκεται στο 3.6.2

Τέλος, θεωρείται γραμμική κινηματική κράτυνση (Linear kinematic hardening) τύπου Melan-Prager με σταθερή παράμετρο κράτυνσης $c = 6000$ MPa.



Εικόνα 3.7 Μονοαξονική δοκιμή εφελκυσμού με ανακυκλιζόμενη φόρτιση

Στην Εικόνα 3.8, σχεδιάζεται η συνιστώσα της τάσης, σ_{11}, με την αντίστοιχη ανηγμένη παραμόρφωση ε_{11} για διαφορετικές τιμές των παραμέτρων του προσομοιώματος n, β, γ. Οι διαφορές δεν είναι τόσο εντυπωσιακές όσο στη μονοαξονική δοκιμή που παρουσιάζεται στην Εικόνα 3.4 λόγω της επίδρασης της κινηματικής κράτυνσης. Ωστόσο, μπορούν να εξαχθούν τα ίδια ποιοτικά συμπεράσματα. Στην Εικόνα 3.8(α), παρουσιάζεται το διάγραμμα τάσεων-παραμορφώσεων για διάφορες τιμές της παραμέτρου n, θεωρώντας γραμμικούς κλάδους αποφόρτισης με $\beta = \gamma = 0.5$. Πάλι, καθώς η τιμή της παραμέτρου n αυξάνεται, το διάγραμμα τάσεων-ανηγμένων παραμορφώσεων τείνει προς την «απότομη» διγραμμική καμπύλη. Στην Εικόνα 3.8(β), παρουσιάζεται η εξέλιξη της ισοδύναμης τάσης Von Mises $\left(\sigma_{VM} = \left|\sigma_{11} - \eta_{11}\right|\right)$ για διάφορες τιμές της παραμέτρου n. Στην Εικόνα 3.8(γ), εξετάζεται η επιρροή της παραμέτρου β, κρατώντας σταθερές τις τιμές των $n = 2$ και $\gamma = 0.5$. Καθώς η τιμή του β μειώνεται, ο υστερητικός βρόχος διογκώνεται, ενώ μια αυξανόμενη τιμή του β έχει ως αποτέλεσμα έναν πιο «στενό» υστερητικό βρόχο. Ωστόσο, όταν $\beta < -\gamma$, ο υστερητικός βρόχος εκφυλίζεται σε μια σιγμοειδή καμπύλη με αυξανόμενη στιβαρότητα στη μη γραμμική περιοχή. Στην Εικόνα 3.8(δ), εξετάζεται η επίδραση της παραμέτρου γ, κρατώντας σταθερές τις τιμές των $n = 2$ και $\beta = 0.5$. Όσο μειώνεται το γ, οι κλάδοι αποφόρτισης τείνουν να στραφούν προς τα μέσα.



Εικόνα 3.8 Διαγράμματα τάσεων-παραμορφώσεων από πείραμα εφελκυσμού δοκιμίου που υφίσταται ανακυκλιζόμενη φόρτιση (α) Μεταβολή της παραμέτρου n για $\beta = \gamma = 0.5$ (β) Εξέλιξη των τάσεων Von-Mises για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου n (γ) Μεταβολή της παραμέτρου β για $n = 2,\ \gamma = 0.5$ (δ) Μεταβολή της παραμέτρου γ για $n = 2,\ \beta = 0.5$

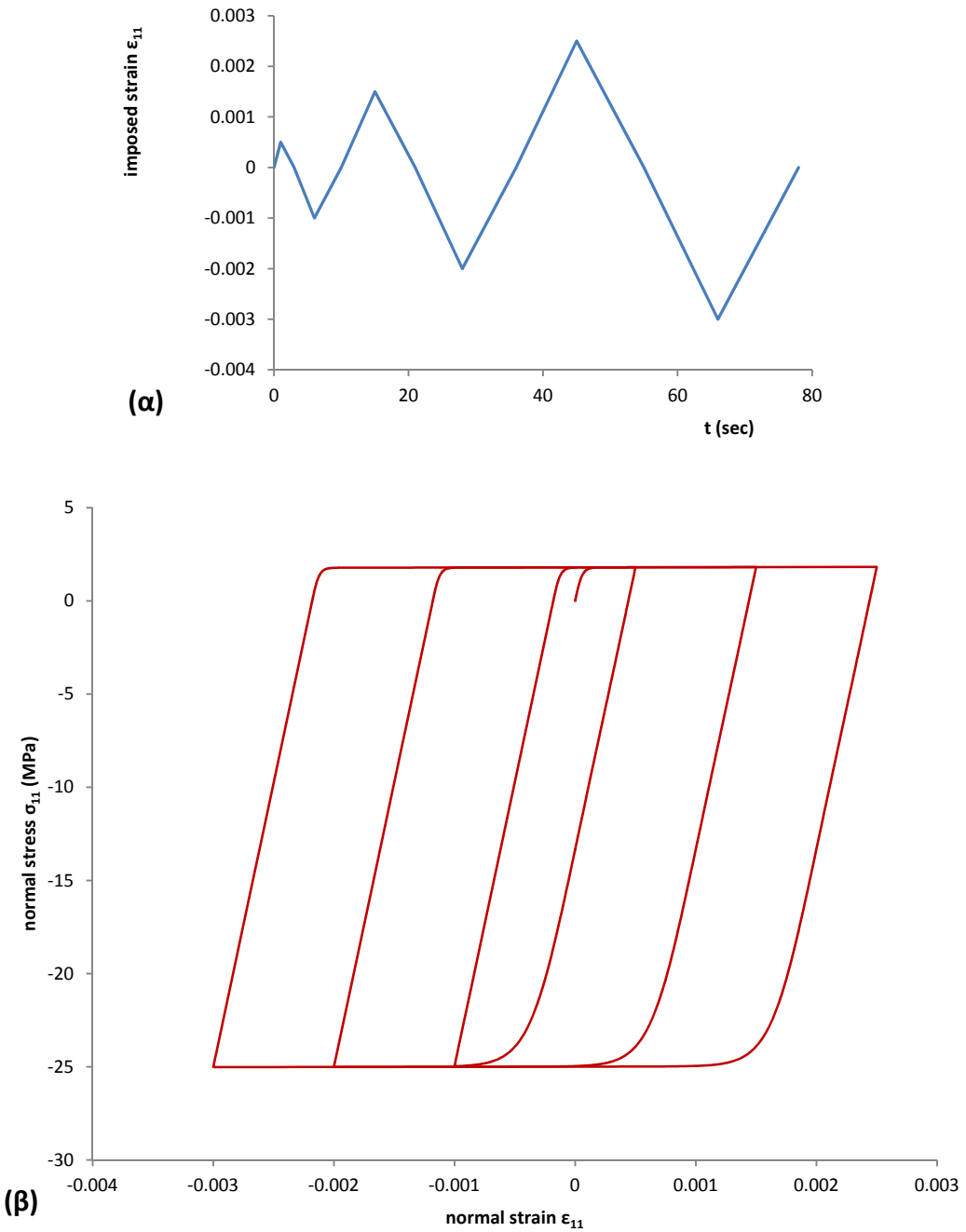
Παράδειγμα 2ο[3]

Θεωρείται δοκίμιο από σκυρόδεμα με τις ακόλουθες ιδιότητες: $\sigma_c = 25MPa$, $\sigma_t = 1.8MPa$ ενώ η αντοχή του σκυροδέματος υπό διαξονική θλίψη $\sigma_b = 1.15\sigma_c = 28.75MPa$ (Newman και Choo, 2003). Επίσης, εφαρμόζεται το κριτήριο διαρροής Bresler-Pister. Το μέτρο ελαστικότητας και ο λόγος του Poisson είναι $E = 30.5GPa$ και $\nu = 0.2$ αντίστοιχα. Οι παράμετροι του προσομοιώματος Bouc-Wen που χρησιμοποιούνται σ' αυτήν την προσομοίωση είναι $\beta = \gamma = 0.5$ και

[3] Ο κώδικας του παραδείγματος βρίσκεται στο 3.6.3

$n = 2$. Δεδομένου ότι το άοπλο σκυρόδεμα δεν εμφανίζει σημαντική κράτυνση, θεωρείται μια μικρή σταθερή κινηματική κράτυνση $c = 9MPa$.

Προσομοιώνεται ένα πείραμα ανακυκλιζόμενης επιβαλλόμενης παραμόρφωσης με μέγιστη επιβαλλόμενη ανηγμένη παραμόρφωση $\varepsilon_{11} = 0.003$. Η επιβαλλόμενη παραμόρφωση παρουσιάζεται στην Εικόνα 3.9(α).



Εικόνα 3.9 (α) Επιβαλλόμενη παραμόρφωση (β) Διάγραμμα τάσεων-ανηγμένων παραμορφώσεων

Το προκύπτον διάγραμμα τάσεων-ανηγμένων παραμορφώσεων παρουσιάζεται στην Εικόνα 3.9(β). Όπως υπαγορεύεται από το εφαρμοζόμενο κριτήριο διαρροής, οι υστερητικοί βρόχοι είναι μη συμμετρικοί, καθώς η εφελκυστική αντοχή του δοκιμίου είναι σημαντικά μικρότερη από τη θλιπτική. Έτσι, το προσομοίωμα είναι σε θέση να προσομοιώσει τόσο τη συμμετρική όσο και τη μη συμμετρική υστέρηση διαλέγοντας το κατάλληλο κριτήριο διαρροής, χωρίς να επιστρέψουμε σε μαθηματικές διατυπώσεις χωρίς ξεκάθαρη φυσική ερμηνεία.

3.5 Συμπεράσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο, παρουσιάζονται οι ιδιότητες της υστέρησης και ακολούθως, διατυπώνεται η έκφραση του προσομοιώματος Bouc-Wen. Στη συνέχεια, εξάγεται ένας γενικός τύπος του προσομοιώματος Bouc-Wen σε μορφή τάσεων-ανηγμένων παραμορφώσεων, βασισμένος στις φαινομενολογικές έννοιες της κλασικής θεωρίας της πλαστικότητας. Στον παραπάνω τύπο, ο τανυστής των τάσεων είναι σε διαφορική μορφή και ισχύει για την πλήρη ανακυκλιζόμενη συμπεριφορά του συνεχούς μέσου. Αυτή η διαφορική μορφή είναι γενική με την έννοια ότι ισχύει για κάθε συνδυασμό κριτηρίων διαρροής και νόμων κρατύνσεως, ενώ αντιθέτως οι υπάρχουσες διατυπώσεις περιγράφουν μόνο την υστερητική συμπεριφορά με γραμμική κινηματική κράτυνση. Τέλος, παρατηρούμε ότι η παραπάνω διατύπωση εξαρτάται από τις συνιστώσες των συνολικών τάσεων και όχι από τον αποκλίνοντα τανυστή των τάσεων κι έτσι προκύπτει μια διατύπωση που εύκολα μπορεί να ενσωματωθεί στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων.

3.6 Παράρτημα Ι

3.6.1 Κώδικας σε Matlab του παραδείγματος της σελίδας 47

Main.m

```
clear
clc
global dlmax l w zy n beta gamma E Abw

l=2;
dlmax=.01;
beta=.5;
gamma=.5;
n=5;
E=200*10^9;
zy=500*10^6;
w=2*pi;
A=pi*.018^2/4;
Abw=1;

options = odeset('RelTol',1e-6,'AbsTol',1e-6);
[T,Y] = ode15s(@dynamikh,[0 1.2],0,options);

dl=dlmax*sin(w*T)*1000;
p=E*A*Y/1000;

plot(dl,p)
```

dynamikh.m

```
function dy = dynamikh(t,y)

global dlmax l w zy n beta gamma E Abw

dy = 0;
dy = ((w*dlmax/l)*cos(w*t))*(Abw-(((abs(y*E/zy))^n)/(beta+gamma)...
     *(beta+gamma*sign(y*((w*dlmax/l)*cos(w*t))))));
```

3.6.2 Κώδικας σε Matlab του 1ου παραδείγματος της σελίδας 56

Main.m

```
clear
clc
global  zy n beta gamma E c p bg


beta=0.5;
gamma=0.5;
bg=abs(beta+gamma);
n=25;
E=210*10^3%^9;       % Mpa
zy=235%*10^6;     % Mpa
np=.3;
c=6000; % Mpa
p=1.2*zy;
a=c/(E+c);

TOL=10^-14;
RelErr=10^-14;

kk=1;

tol=zeros(kk,1);
for i1=1:kk
    tol(i1)=TOL;
end
options = odeset('RelTol',RelErr,'AbsTol',tol);

Ttot=4;
vv=.00125;
ss=Ttot/vv;
t=0:vv:Ttot;
bima=zeros(ss,1);
for ii=0:1:ss
    bima(ii+1,1)=ii;
end

[T,Y] = ode15s(@dynamikh,t,zeros(1,kk),options);

ddd=1;
len=length(T);
sig=zeros(len,1);
for dd=1:1:len
    if T(dd,1)>=0 && T(dd,1)<=1
        sig(ddd,1)=p*T(dd,1);
    elseif T(dd,1)>1 && T(dd,1)<=3
        sig(ddd,1)=p*(2-T(dd,1));
    elseif T(dd,1)>3
        sig(ddd,1)=p*(T(dd,1)-4);
    end
    ddd=ddd+1;
end

plot(Y(:,1),sig)
```

dynamikh.m

```
function dy = dynamikh(t,y)

global  zy n beta gamma E c p bg
dy = zeros(1,1);

if t>=0 && t<=1
    sig=p*t;
    sigdot=p;
elseif t>1 && t<=3
    sig=p*(2-t);
    sigdot=-p;
elseif t>3
    sig=p*(t-4);
    sigdot=p;
end

yield=(abs((sig-c*y(1)+c/E*sig)/zy));
if yield^2>1
    yield=1;
end

if sig>=0 && y(1)>=0
    dy(1)=sigdot/(E*(1-E/(E+c)*(yield^(2*n))/bg*...
    (beta+gamma*sign(y(1)*sigdot))));
elseif sig>=0 && y(1)<0
    dy(1)=sigdot/(E*(1-E/(E+c)*(yield^(2*n))/bg*...
    (beta+gamma*sign(-y(1)*sigdot))));
elseif sig<=0 && y(1)>=0
    dy(1)=sigdot/(E*(1-E/(E+c)*(yield^(2*n))/bg*...
    (beta+gamma*sign(-y(1)*sigdot))));
elseif sig<=0 && y(1)<0
    dy(1)=sigdot/(E*(1-E/(E+c)*(yield^(2*n))/bg*...
    (beta+gamma*sign(y(1)*sigdot))));
end

t
```

3.6.3 Κώδικας σε Matlab του 2ου παραδείγματος της σελίδας 58

Main.m

```
clear
clc
global  zy n beta gamma E c p a R matr


matr=[0 0
1   0.5*10^-3
3   0
6   -1*10^-3
10  0
15  1.5*10^-3
21  0
28  -2*10^-3
36  0
45  2.5*10^-3
55  0
66  -3*10^-3
78  0];



beta=.5;
gamma=.5;
n=2;
E=30.5*10^3;
zy=235*10^26;
np=.2;
c=9;

R= E / ( c +  E);

TOL=10^-8;
RelErr=10^-8;

kk=1;

tol=zeros(kk,1);
for i1=1:kk
    tol(i1)=TOL;
end
options = odeset('RelTol',RelErr,'AbsTol',tol);

Ttot=78;
vv=.001;

ss=Ttot/vv;
t=0:vv:Ttot;
bima=zeros(ss,1);
for ii=0:1:ss
    bima(ii+1,1)=ii;
end

[T,Y] = ode15s(@dynamikh,[0 Ttot],zeros(1,kk),options);
```

```
ddd=1;
len=length(T);
str=zeros(len,1);
strdot=zeros(len,1);
for dd=1:1:len
    for im=1:1:length(matr)-1
        if T(dd,1)>=matr(im,1)  && T(dd,1)<matr(im+1,1)
            str(ddd,1)=(matr(im+1,2)-matr(im,2))/...
                        (matr(im+1,1)-matr(im,1))*(T(dd,1)-...
                        matr(im,1))+matr(im,2);
            strdot(ddd,1)=(matr(im+1,2)-matr(im,2))/...
                            (matr(im+1,1)-matr(im,1));
        end
    end
    if T(dd,1)==matr(length(matr),1)
        str(ddd,1)=matr(length(matr),2);
        strdot(ddd,1)=(matr(length(matr),2)-...
                      matr(length(matr)-1,2))/...
                      (matr(length(matr),1)-matr(length(matr)-1,1));
    end
    ddd=ddd+1;
end

plot(str,Y(:,1))
```

dynamikh.m

```
function dy = dynamikh(t,y)

global   n beta gamma E c   R matr
dy = zeros(1,1);

for im=1:1:length(matr)-1
    if t>=matr(im,1)  && t<matr(im+1,1)
        str=(matr(im+1,2)-matr(im,2))/(matr(im+1,1)-matr(im,1))*(t-
matr(im,1))+matr(im,2);
        strdot=(matr(im+1,2)-matr(im,2))/(matr(im+1,1)-matr(im,1));
    end
end
if t==matr(length(matr),1)
    str=matr(length(matr),2);
    strdot=(matr(length(matr),2)-matr(length(matr)-1,2))/...
            (matr(length(matr),1)-matr(length(matr)-1,1));
end

h=c*(str-1/E*y(1));
s=y(1);
F=0.2546105686e0 * sqrt((s - h) ^ 2) + 0.2951464061e0 * s -...
  0.2951464061e0 * h + 0.3221433500e-2 * (s - h) ^ 2;

dy(1)=E*(  1-( R*  ( ( abs(F))^(n))  *...
      (beta+gamma*sign( y(1)*strdot) ) ) )*strdot;

t
```

3.7 Παράρτημα ΙΙ

Παρακάτω παρουσιάζονται οι αναλυτικές σχέσεις του μητρώου αλληλεπίδρασης $[R]$ για την περίπτωση των δύο ευρέως χρησιμοποιούμενων επιφανειών διαρροής, δηλαδή την επιφάνεια διαρροής του von-Mises και των Bresler-Pister. Παρόμοια, μπορούν να χρησιμοποιηθούν και άλλα ομαλά κριτήρια αστοχίας.

3.7.1 Επιφάνεια αστοχίας von-Mises

Για την περίπτωση της διδιάστατης πλαστικότητας, η επιφάνεια διαρροής von-Mises ορίζεται ως ο γεωμετρικός τόπος των σημείων στο χώρο των τάσεων που ορίζεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\left\{\Phi\right\}_{VM} = \frac{\left(\sigma_{11}^{h} - \sigma_{22}^{h}\right)^2 + \left(\sigma_{11}^{h}\right)^2 + \left(\sigma_{22}^{h}\right)^2 + 6\left(\sigma_{12}^{h}\right)^2}{2\left(\sigma_{y}^{h}\right)^2} - 1 = 0 \qquad (\Pi.1)$$

όπου $\sigma_{y}^{h} = \left(1-\alpha\right)\sigma_{y}$.

Η κλίση (gradient) της επιφάνειας διαρροής του von-Mises είναι:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\left\{\sigma\right\}} = \left\{\frac{2\sigma_{11}^{h} - \sigma_{22}^{h}}{\left(\sigma_{y}^{h}\right)^2} \quad \frac{2\sigma_{22}^{h} - \sigma_{11}^{h}}{\left(\sigma_{y}^{h}\right)^2} \quad 6\frac{\sigma_{h12}}{\left(\sigma_{y}^{h}\right)^2}\right\}^T \qquad (\Pi.2)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.34), ο πίνακας αλληλεπίδρασης $[R]$ προκύπτει ως:

$$\left[R\right]_{VM} = \lambda[IR] \qquad (\Pi.3)$$

όπου $[IR]$ είναι ένα 3×3 μητρώο το οποίο ορίζεται ως εξής:

$$[IR] = \begin{bmatrix} -\Delta_1\Sigma_1 & \Delta_1\Sigma_2 & \dfrac{3\sigma_{12}^{h}\Delta_1}{1-\nu} \\ \Delta_2\Sigma_1 & -\Delta_2\Sigma_2 & -\dfrac{3\sigma_{12}^{h}\Delta_2}{1-\nu} \\ 6\sigma_{12}^{h}\Sigma_1 & 6\sigma_{12}^{h}\Sigma_2 & \dfrac{18\left(\sigma_{12}^{h}\right)^2}{1-\nu} \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = \left(2\sigma_{11}^{h} - \sigma_{22}^{h}\right), \;\; \Delta_2 = \left(\sigma_{11}^{h} - 2\sigma_{22}^{h}\right) \qquad (\Pi.4)$$

$$\Sigma_1 = \left(2\sigma_{11}^{h} - \sigma_{22}^{h} + \nu\sigma_{11}^{h} - 2\nu\sigma_{22}^{h}\right), \;\; \Sigma_2 = \left(2\nu\sigma_{11}^{h} - \nu\sigma_{22}^{h} + \sigma_{11}^{h} - 2\sigma_{22}^{h}\right)$$

και λ μια σταθερά:

$$
\begin{aligned}
\lambda &= -\frac{1}{5\mathrm{A} + 2\nu\mathrm{B} - 18\left(\sigma_{12}^{h}\right)^{2} - \Gamma} \\
\mathrm{A} &= \left(\left(\sigma_{11}^{h}\right)^{2} + \left(\sigma_{22}^{h}\right)^{2} - 2\nu\sigma_{11}^{h}\sigma_{22}^{h}\right) \\
\mathrm{B} &= \left(2\left(\sigma_{11}^{h}\right)^{2} + 2\left(\sigma_{22}^{h}\right)^{2} + 9\left(\sigma_{12}^{h}\right)^{2}\right) \\
\Gamma &= 8\sigma_{11}^{h}\sigma_{22}^{h}
\end{aligned}
\tag{Π.5}
$$

Ο πίνακας αλληλεπίδρασης $\left[R\right]$ δεν εξαρτάται από την τάση διαρροής σ_y του υλικού αλλά είναι τη συνάρτηση μόνο του τρέχοντος τανυστή των τάσεων.

3.7.2 Επιφάνεια διαρροής Bresler-Pister

Το κριτήριο διαρροής Bresler-Pister είναι προσομοίωμα τριών παραμέτρων που χρησιμοποιείται για να περιγράψει την πλαστικοποίηση του σκυροδέματος. Η επιφάνεια διαρροής ορίζεται από την εξίσωση:

$$
\begin{aligned}
\Phi_{BP} &= \frac{\frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{J2} - c_1 J1 - c_2\left(\sigma_{11}^{h} + \sigma_{22}^{h}\right)^{2}}{c_0} - 1 = 0 \\
J1 &= \left(\sigma_{11}^{h} + \sigma_{22}^{h}\right) \\
J2 &= \left[\left(\sigma_{11}^{h} - \sigma_{22}^{h}\right)^{2} + \left(\sigma_{11}^{h}\right)^{2} + \left(\sigma_{22}^{h}\right)^{2} + 6\left(\sigma_{12}^{h}\right)^{2}\right]
\end{aligned}
\tag{Π.6}
$$

όπου c_0, c_1, c_2 είναι συντελεστές που εξαρτώνται από το υλικό.

Η κλίση (gradient) της επιφάνειας διαρροής δίνεται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$
\frac{\partial\Phi}{\partial\left\{\sigma^{h}\right\}} = \left\{d\Phi_{11} \quad d\Phi_{12} \quad d\Phi_{13}\right\}^{T} \tag{Π.7}
$$

όπου

$$
d\Phi_{11} = \frac{1}{c_0}\left(\frac{\frac{\sqrt{6}}{6}\left(2\sigma_{11}^{h} - \sigma_{22}^{h}\right)}{\sqrt{\left[\left(\sigma_{11}^{h} - \sigma_{22}^{h}\right)^{2} + \left(\sigma_{11}^{h}\right)^{2} + \left(\sigma_{22}^{h}\right)^{2} + 6\left(\sigma_{12}^{h}\right)^{2}\right]}} - c_1 - 2c_2\left(\sigma_{11}^{h} + \sigma_{22}^{h}\right)\right) \tag{Π.8}
$$

$$d\Phi_{12} = \frac{1}{c_0}\left(-\frac{\frac{\sqrt{6}}{6}\left(2\sigma_{11}^{h} - \sigma_{22}^{h}\right)}{\sqrt{\left[\left(\sigma_{11}^{h} - \sigma_{22}^{h}\right)^2 + \left(\sigma_{11}^{h}\right)^2 + \left(\sigma_{22}^{h}\right)^2 + 6\left(\sigma_{12}^{h}\right)^2\right]}} - c_1 - 2c_2\left(\sigma_{11}^{h} + \sigma_{22}^{h}\right)\right) \quad (\Pi.9)$$

$$d\Phi_{13} = \frac{1}{c_0}\left(\frac{\sqrt{6}\sigma_{12}^{h}}{\sqrt{\left[\left(\sigma_{11}^{h} - \sigma_{22}^{h}\right)^2 + \left(\sigma_{11}^{h}\right)^2 + \left(\sigma_{22}^{h}\right)^2 + 6\left(\sigma_{12}^{h}\right)^2\right]}}\right) \quad (\Pi.10)$$

Το μητρώο αλληλεπίδρασης προκύπτει ανάλογα.

κεφάλαιο 4 Υστερητικά πεπερασμένα στοιχεία πλακών

4.1 Εισαγωγή

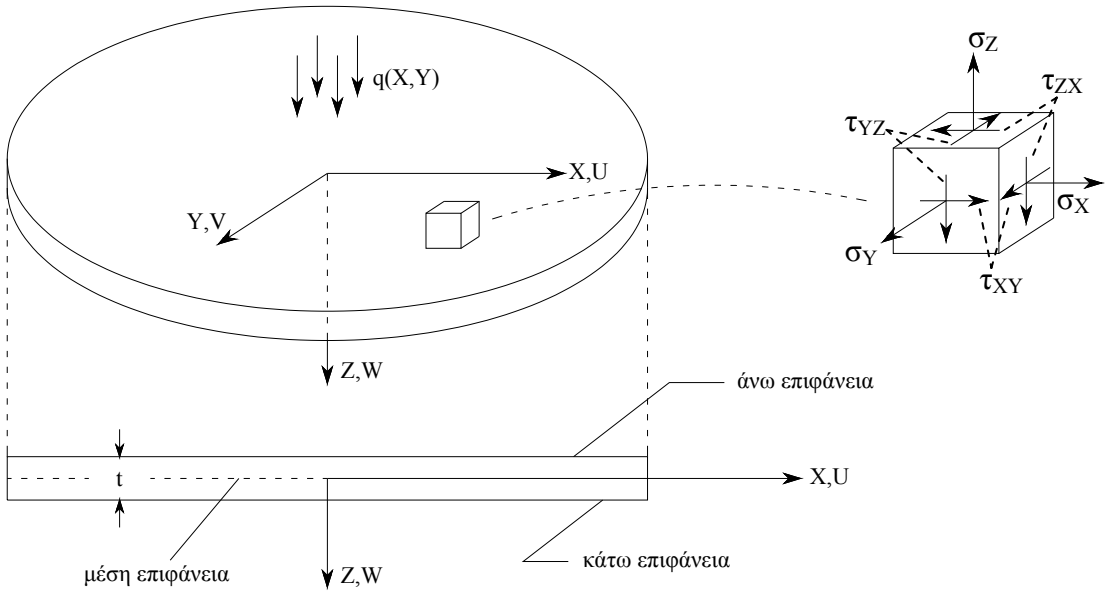
Σε αυτό το κεφάλαιο εξάγονται υστερητικά πεπερασμένα στοιχεία πλακών στα πλαίσια της φαινομενολογικής υστέρησης. Οι κλασικές ελαστικές διατυπώσεις του στοιχείου πλάκας της θεωρίας Kirchhoff και της θεωρίας Reissner-Mindlin επεκτείνονται εισάγοντας επιπρόσθετους υστερητικούς βαθμούς ελευθερίας.

4.2 Κάμψη πλακών – κλασική θεωρία

Πλάκα θεωρείται ο ολόσωμος φορέας ο οποίος εκτείνεται σε δύο διαστάσεις, X και Y, ενώ η τρίτη διάσταση ως προς τον άξονα Z είναι μικρή συγκριτικά με τις άλλες δύο και τα φορτία που ασκούνται είναι παράλληλα προς τον άξονα Z. Η πλάκα περιέχεται μεταξύ δύο παραλλήλων επιπέδων, της άνω και κάτω επιφάνειας, και η απόσταση των δύο επιφανειών ορίζει το πάχος t. Στην Εικόνα 4.1 παριστάνεται μια πλάκα στην οποία η μέση επιφάνεια ταυτίζεται με το επίπεδο XY.

Η γεωμετρία του φορέα-πλάκα συμπίπτει με τη γεωμετρία του φορέα στον οποίο επικρατούν συνθήκες επίπεδης έντασης. Η διαφορά έγκειται στο είδος της φόρτισης η οποία καταπονεί τους δύο φορείς. Στην πρώτη περίπτωση τα φορτία ασκούνται κάθετα προς τη μέση επιφάνεια του φορέα, ενώ στη δεύτερη περίπτωση τα φορτία ασκούνται επί του επιπέδου. Από αυτήν την άποψη, οι ομοιότητες και οι διαφορές μεταξύ του επίπεδου πλαισίου και της εσχάρας μπορούν να παραλληλιστούν με τους φορείς επίπεδης έντασης και πλάκας αντίστοιχα. Τα φορτία στην πλάκα προκαλούν κάμψη της πλάκας η οποία προκαλεί βύθιση κατά τον άξονα Z.

Οι χαρακτηριστικές εξισώσεις της πλάκας προκύπτουν από τις εξισώσεις της τριδιάστατης ελαστικότητας με τη θεώρηση ορισμένων παραδοχών. Οι παραδοχές αυτές απλοποιούν σημαντικά το πρόβλημα της ανάλυσης των πλακών, αλλά την ίδια στιγμή οδηγούν σε προσεγγίσεις που προκαλούν και ορισμένα παράδοξα φαινόμενα. Από την άποψη αυτή, η θεωρία πλακών δεν είναι ακριβής όπως η θεωρία ελαστικότητας. Παρόλα αυτά, για μια μεγάλη κατηγορία προβλημάτων, η θεώρηση αυτή δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα.



Εικόνα 4.1 Πλάκα τυχαίου σχήματος με το στοιχειώδες στερεό των τάσεων

Η κλασική θεωρία πλακών, που ονομάζεται και θεωρία Kirchhoff, είναι αντίστοιχη της θεωρίας Euler-Bernoulli των δοκών, αποτελεί την πλέον αποδεκτή θεωρία των λεπτών πλακών και βασίζεται στις παρακάτω παραδοχές:

(1) Το πάχος της πλάκας είναι μικρό σε σύγκριση με τις διαστάσεις της επιφάνειάς της.

(2) Η βύθιση της πλάκας είναι μικρή σε σύγκριση με το πάχος της, ενώ οι στροφές της παραμορφωμένης μέσης επιφάνειας είναι μικρές συγκριτικά με τη μονάδα.

(3) Επίπεδες επιφάνειες κάθετες στη μέση επιφάνεια της πλάκας πριν την παραμόρφωση παραμένουν επίπεδες μετά την παραμόρφωση και κάθετες στην παραμορφωμένη μέση επιφάνεια.

(4) Στη μέση επιφάνεια της πλάκας (Z=0) οι τάσεις σ_X, σ_Y, τ_{XY} είναι μηδενικές.

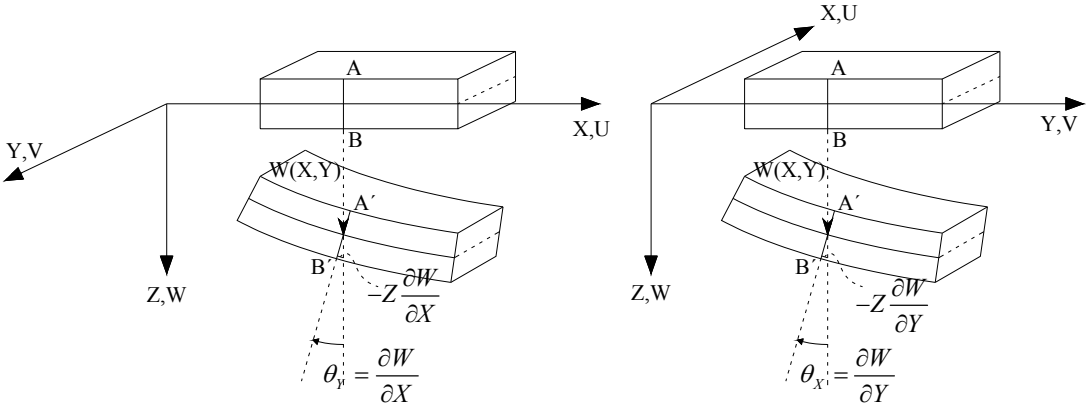
4.2.1 Κινηματικές συνθήκες και συνθήκες ισορροπίας

Στην Εικόνα 4.2 φαίνεται η παραμόρφωση μιας πλάκας στα επίπεδα XZ και YZ σύμφωνα με την κλασική θεωρία. Η παραδοχή (1) μας επιτρέπει να υποθέσουμε ότι

οι κατακόρυφες βυθίσεις των σημείων μιας ευθείας κάθετης στη μέση επιφάνεια είναι ίσες μεταξύ τους:

$$W\left(X,Y,Z\right)=W\left(X,Y\right) \tag{4.1}$$

όπου $W(X,Y)$ είναι η βύθιση της μέσης επιφάνειας της πλάκας στο σημείο με συντεταγμένες X, Y. Η παραδοχή (2) μας επιτρέπει να εκφράσουμε τις εξισώσεις της πλάκας στην απαραμόρφωτη γεωμετρία.



Εικόνα 4.2 Κάμψη πλάκας κατά την κλασική θεωρία Kirchhoff

Από την Εικόνα 4.2 προκύπτει ότι οι μετατοπίσεις ενός επιπέδου της πλάκας κάθετου στον άξονα X δίνονται από τη σχέση

$$U\left(X,Y,Z\right)=-Z\frac{\partial W}{\partial X}\left(X,Y\right) \tag{4.2}$$

και αντίστοιχα ενός επιπέδου κάθετου στον άξονα Y από τη σχέση

$$V\left(X,Y,Z\right)=-Z\frac{\partial W}{\partial Y}\left(X,Y\right) \tag{4.3}$$

Οι εξισώσεις (4.1), (4.2) και (4.3) συνιστούν τις τρεις εξισώσεις του πεδίου των μετατοπίσεων σε κάθε σημείο της πλάκας με βύθιση $W\left(X,Y\right)$.

Το σύνολο των σχέσεων ανηγμένων παραμορφώσεων-μετατοπίσεων σε τρεις διαστάσεις γράφεται ως εξής:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_X &= \partial U/\partial X & \gamma_{XY} &= \partial U/\partial Y + \partial V/\partial X \\
\varepsilon_Y &= \partial V/\partial Y & \gamma_{YZ} &= \partial V/\partial Z + \partial W/\partial Y \\
\varepsilon_Z &= \partial W/\partial Z & \gamma_{ZX} &= \partial W/\partial X + \partial U/\partial Z
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

Σε μητρωική γραφή οι σχέσεις (4.4) μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$
\begin{bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \varepsilon_Z \\ \gamma_{XY} \\ \gamma_{YZ} \\ \gamma_{ZX} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial X & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial Y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial Z \\ \partial/\partial Y & \partial/\partial X & 0 \\ 0 & \partial/\partial Z & \partial/\partial Y \\ \partial/\partial Z & 0 & \partial/\partial X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix}
$$

ή

$$
\{\varepsilon\} = [\partial_\varepsilon]\{U\} \tag{4.5}
$$

όπου το διάνυσμα $\{U\} = [U \quad V \quad W]^T$ συμβολίζει το πεδίο των μετατοπίσεων σε κάποιο σημείο του φορέα και το μητρώο $[\partial_\varepsilon]$ το διαφορικό τελεστή της σχέσης (4.5). Οι παραπάνω σχέσεις διατυπώνονται τώρα συναρτήσει της βύθισης W της πλάκας ως εξής:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_X &= \frac{\partial U}{\partial X} = -Z\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \quad , \quad \gamma_{XY} = \frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} = -2Z\frac{\partial^2 W}{\partial X \partial Y} \\
\varepsilon_Y &= \frac{\partial V}{\partial Y} = -Z\frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \quad , \quad \gamma_{YZ} = \frac{\partial V}{\partial Z} + \frac{\partial W}{\partial Y} = 0 \\
\varepsilon_Z &= \frac{\partial W}{\partial Z} = 0 \quad , \quad \gamma_{ZX} = \frac{\partial W}{\partial X} + \frac{\partial U}{\partial Z} = 0
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

Οι τρεις μη μηδενικές ανηγμένες παραμορφώσεις συμπίπτουν με τις ανηγμένες παραμορφώσεις που υπάρχουν και στην επίπεδη ελαστικότητα σε συνθήκες επίπεδης έντασης.

4.2.2 Συνθήκες ισορροπίας

Σχέσεις τάσεων-μετατοπίσεων

Οι μητρωικές σχέσεις τάσεων-ανηγμένων παραμορφώσεων γραμμικώς ελαστικών υλικών σε ισοθερμική παραμόρφωση γράφονται ως εξής:

$$
\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\} \tag{4.7}
$$

Στην περίπτωση ισότροπων υλικών, το μητρώο ελαστικότητας $[E]$ στη τριδιάστατη ελαστικότητα έχει τη μορφή

$$\underset{(6\times 6)}{[E]} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

Το μητρώο ελαστικότητας $[E]$ της πλάκας προκύπτει από τις σχέσεις τάσεων-ανηγμένων παραμορφώσεων της τριδιάστατης ελαστικότητας με την αντικατάσταση $\varepsilon_Z = \gamma_{YZ} = \gamma_{XZ} = 0$ και λύνοντας ως προς σ_X, σ_Y, τ_{XY}:

$$\begin{bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \tau_{XY} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \gamma_{XY} \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

το οποίο συμπίπτει με εκείνο της επίπεδης έντασης. Αυτό σημαίνει ότι οι λεπτές στρώσεις της πλάκας πάχους dZ βρίσκονται σε συνθήκες επίπεδης έντασης.

Από τις σχέσεις (4.9), προκύπτουν οι τάσεις συναρτήσει της βύθισης W:

$$\begin{aligned} \sigma_X &= -\frac{E}{1-\nu^2} Z \left(\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \right) \\ \sigma_Y &= -\frac{E}{1-\nu^2} Z \left(\frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \right) \\ \tau_{XY} &= -\frac{E}{1+\nu} Z \left(\frac{\partial^2 W}{\partial X \partial Y} \right) \end{aligned} \tag{4.10}$$

Από τη σχέση (4.7) της τριδιάστατης ελαστικότητας προκύπτουν και ορισμένα παράδοξα της θεωρίας πλακών. Έτσι, βλέπουμε ότι παρά το μηδενισμό της ε_Z, λόγω της παραδοχής (1), η αντίστοιχη τάση σ_Z είναι μη μηδενική αν και κατά πολύ μικρότερη των σ_X και σ_Y. Παρατηρούμε επίσης ότι οι διατμητικές ανηγμένες

παραμορφώσεις γ_{YZ} και γ_{XZ} μηδενίζονται λόγω της παραδοχής της καθετότητας των διατομών στη μέση παραμορφωμένη επιφάνεια της πλάκας. Κατά συνέπεια, $\tau_{YZ} = G\,\gamma_{YZ} = 0$ και $\tau_{ZX} = G\,\gamma_{ZX} = 0$. Αυτός ο μηδενισμός των διατμητικών τάσεων δημιουργεί το παράδοξο της κλασικής θεωρίας των πλακών. Ενώ σύμφωνα με τις κινηματικές σχέσεις οι τάσεις είναι μηδενικές, εν τούτοις είναι απαραίτητες για την ικανοποίηση των συνθηκών ισορροπίας της πλάκας προκειμένου να ισορροπήσουν με τα κατακόρυφα εξωτερικά φορτία (βλ. Εικόνα 4.3).

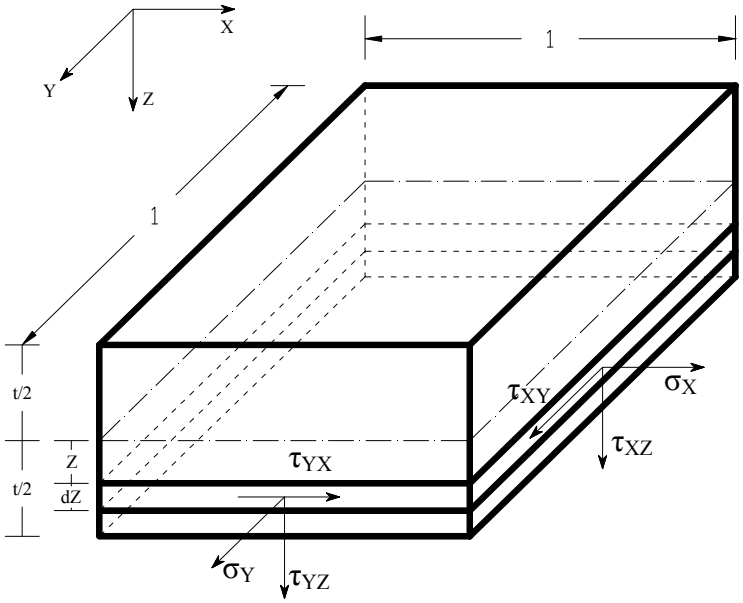
Σχέσεις εντατικών μεγεθών-μετατοπίσεων

Από την Εικόνα 4.3 προκύπτουν τα εντατικά μεγέθη ανά μονάδα μήκους της πλάκας:

$$M_X = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_X Z dZ\,, \quad M_Y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_Y Z dZ$$

$$M_{XY} = M_{YX} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{XY} Z dZ \tag{4.11}$$

$$Q_X = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{ZX} dZ\,, \quad Q_Y = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{YZ} dZ$$

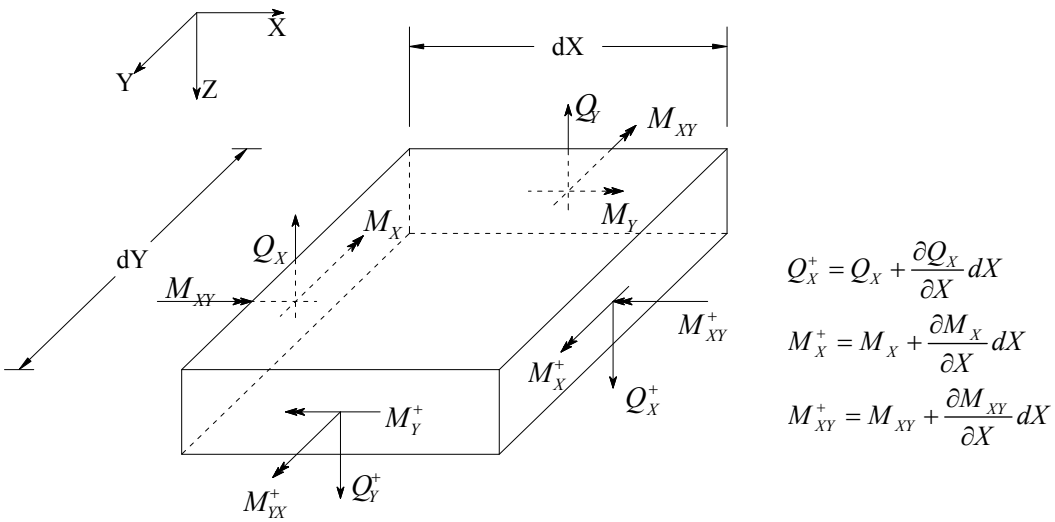


Εικόνα 4.3 Τάσεις που ασκούνται σε ένα λεπτό στρώμα πλάκας

Οι ροπές M_{XY}, M_{YX} ονομάζονται ροπές συστροφής ενώ οι τέμνουσες δυνάμεις Q_X, Q_Y δε μπορούν υπολογιστούν από τις σχέσεις αυτές λόγω της παραδοχής ότι $\tau_{YZ} = \tau_{XZ} = 0$. Οι δυνάμεις Q_X, Q_Y υπολογίζονται από την ισορροπία των εντατικών μεγεθών. Στην Εικόνα 4.4 έχουν σχεδιαστεί τα εντατικά μεγέθη ανά μονάδα μήκους της πλάκας. Παρατηρούμε ότι οι ροπές στη θεωρία των πλακών συμβολίζονται ανορθόδοξα. Οι ροπές M_X, M_Y ασκούνται στα επίπεδα YZ και XZ ενώ τα διανύσματά τους συμπίπτουν με τους άξονες Y και X, αντίστοιχα, και η θετική φορά της M_Y είναι αντίθετη προς τη θετική φορά του άξονα X.

Οι διατμητικές δυνάμεις προκύπτουν από την ισορροπία ροπών του στερεού της Εικόνα 4.4:

$$Q_X = \frac{\partial M_X}{\partial X} + \frac{\partial M_{XY}}{\partial Y} \quad , \quad Q_Y = \frac{\partial M_{XY}}{\partial X} + \frac{\partial M_Y}{\partial Y} \tag{4.12}$$



Εικόνα 4.4 Εντατικά μεγέθη σε στοιχειώδες τμήμα της πλάκας

Ο συνδυασμός των σχέσεων (4.10) και (4.11) δίνει τις ροπές συναρτήσει της βύθισης W:

$$M_X = -D_\kappa \left(\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \right)$$

$$M_Y = -D_\kappa \left(\frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \right) \tag{4.13}$$

$$M_X = -D_\kappa \left(1-\nu\right) \frac{\partial^2 W}{\partial X \partial Y}$$

όπου η ποσότητα

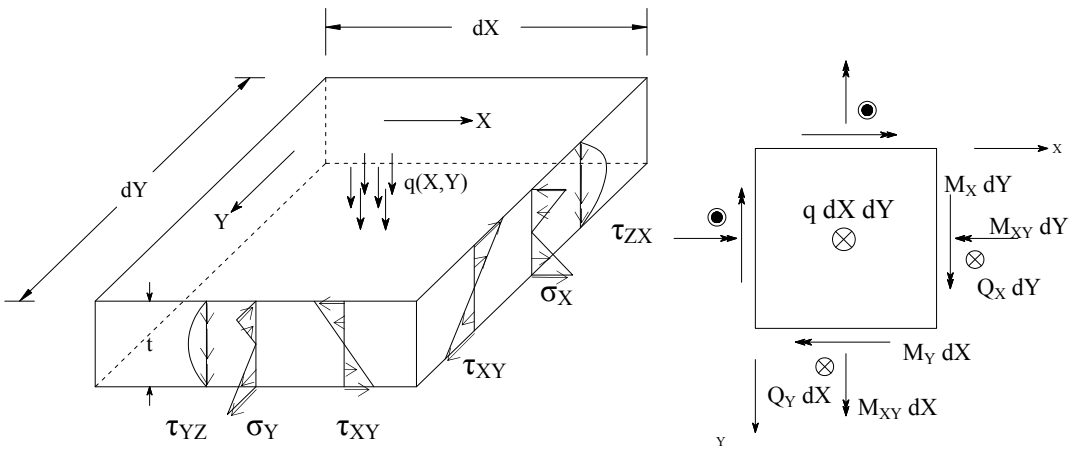
$$D_\kappa = \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-t/2}^{t/2} Z^2 dZ = \frac{Et^3}{12\left(1-\nu^2\right)} \tag{4.14}$$

ονομάζεται καμπτική στιβαρότητα της πλάκας και είναι αντίστοιχη με την καμπτική στιβαρότητα EI της δοκού.

Διαφορική εξίσωση της πλάκας

Από την ισορροπία δυνάμεων του στοιχειώδους τμήματος της πλάκας της Εικόνας 4.5 προκύπτει η σχέση:

$$\frac{\partial^2 M_X}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 M_Y}{\partial Y^2} + 2\frac{\partial^2 M_{XY}}{\partial X \partial Y} = -q\left(X,Y\right) \tag{4.15}$$



Εικόνα 4.5 Στοιχειώδες στερεό με την κατανομή των τάσεων κατά το πάχος της πλάκας

και με την αντικατάσταση των σχέσεων (4.13) στη σχέση (4.15) παίρνουμε:

$$\frac{\partial^4 W}{\partial X^4} + 2\frac{\partial^4 W}{\partial X^2 \partial Y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial Y^4} = q\left(X,Y\right)/D_\kappa \tag{4.16}$$

Η εξίσωση (4.16) αποτελεί τη διαφορική εξίσωση ισορροπίας της πλάκας η οποία δεν είναι απαραίτητο να διατυπωθεί ρητώς για την ανάλυση της πλάκας με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Αξίζει να επισημανθεί ότι η διαφορική εξίσωση της πλάκας είναι τετάρτου βαθμού ως προς τις μετατοπίσεις, ενώ οι αντίστοιχες διαφορικές εξισώσεις της διδιάστατης ή τριδιάστατης ελαστικότητας είναι δευτέρου βαθμού. Αυτό οφείλεται στις παραδοχές που έχουμε εισαγάγει για τη μετατροπή ενός προβλήματος τριδιάστατης ελαστικότητας στη ειδική περίπτωση της διδιάστατης ελαστικότητας της πλάκας.

Σχέσεις ροπών-καμπυλοτήτων

Η σχέση εντατικών μεγεθών-καμπυλοτήτων προκύπτει από τη σχέση (4.13) εάν λάβουμε υπόψη τις σχέσεις:

$$\kappa_X = -\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \quad , \quad \kappa_Y = -\frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \quad , \quad \kappa_{XY} = -2\frac{\partial^2 W}{\partial X \partial Y} \tag{4.17}$$

όπου κ_X , κ_Y , κ_{XY} είναι οι συνιστώσες της καμπυλότητας της πλάκας. Έτσι, έχουμε:

$$\begin{bmatrix} M_X \\ M_Y \\ M_{XY} \end{bmatrix} = D_\kappa \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_X \\ \kappa_Y \\ \kappa_{XY} \end{bmatrix}$$

ή

$$\{M\} = \left[E_\kappa\right]\{\kappa\} \tag{4.18}$$

4.3 Η διατύπωση της υστέρησης Bouc-Wen σε πολλούς άξονες

Το προσομοίωμα Bouc-Wen εισήχθη από τον Bouc (1967) και τροποποιήθηκε ακολούθως από τους Wen (1976), Baber & Noori (1985) και Sivaselvan & Reinhorn (2000). Προκειμένου να ληφθούν υπόψη κριτήρια διαρροής που περιλαμβάνουν περισσότερες από μία συνιστώσες του τανυστή των τάσεων, απαιτείται μία γενική

διατύπωση για να αντιμετωπιστεί η εγγενής αλληλεπίδραση. Σύμφωνα με τους Sivaselvan και Reinhorn (2003), ο τανυστής των τάσεων μπορεί να αναλυθεί σε ένα ελαστικό κι ένα ανελαστικό τμήμα ως εξής:

$$\{\sigma\} = \{\sigma^e\} + \{\sigma^h\} = [\alpha][E]\{\varepsilon\} + ([I] - [\alpha])[E]\{z\} \tag{4.19}$$

όπου $\{\sigma\}$ είναι το διάνυσμα 6×1 των τάσεων, $\{\sigma^e\}$ θεωρείται το ελαστικό τμήμα του τανυστή των τάσεων, $\{\sigma^h\}$ το υστερητικό μέρος του τανυστή των τάσεων, το $[\alpha]$ συμβολίζει έναν τετραγωνικό διαγώνιο πίνακα με τους λόγους μετελαστικής προς την ελαστική δυσκαμψία, οι οποίοι για ένα ισοτροπικό υλικό θεωρούνται σταθεροί, $[E]$ είναι το ελαστικό καταστατικό μητρώο (constitutive matrix), $[I]$ είναι ο ταυτοτικός πίνακας, $\{\varepsilon\}$ είναι το διάνυσμα 6×1 των ανηγμένων παραμορφώσεων και $\{z\}$ είναι το διάνυσμα 6×1 των υστερητικών ανηγμένων παραμορφώσεων. Ως εκ τούτου, το διάνυσμα 6×1 των υστερητικών τάσεων ορίζεται ως:

$$\{\sigma^h\} = [E]\{z\} \tag{4.20}$$

Ο Casciati (2006) απέδειξε ότι εάν το υστερητικό διάνυσμα εξελίσσεται σύμφωνα με τον ακόλουθο υστερητικό νόμο του Bouc-Wen:

$$\{\dot{\sigma}^h\} = [E]\{\dot{z}\} = [E]([I] - H_1 H_2 [R])\{\dot{\varepsilon}\} \tag{4.21}$$

τότε η εξίσωση (4.19) περιγράφει με ακρίβεια τη μη γραμμική υστερητική συμπεριφορά ενός υλικού σε τριδιάστατη εντατική κατάσταση. Στη σχέση (4.21), H_1 και H_2 είναι ομαλές συναρτήσεις Heaviside που εκφράζονται στην ακόλουθη μορφή:

$$\begin{aligned} H_1 &= \left\| \Phi\left(\{\sigma^h\}\right) + 1 \right\|^n, \ n \geq 2 \\ H_2 &= \gamma \operatorname{sgn}\left(\{\sigma^h\}^T \{\dot{\varepsilon}\}\right) + \beta \end{aligned} \tag{4.22}$$

όπου $\Phi\left(\{\sigma^h\}\right)$ είναι ένα κριτήριο διαρροής όπως:

$$\Phi\left(\{\sigma^h\}\right) - 1 \leq 0 \tag{4.23}$$

με την ισότητα να ισχύει όταν εμφανίζεται η διαρροή. Στην εξίσωση (4.22) n είναι η παράμετρος «εξομάλυνσης» (smoothing parameter) και β, γ είναι συντελεστές

σχήματος οι οποίοι ορίζουν το σχήμα των κλάδων φόρτισης και αποφόρτισης των υστερητικών βρόχων. Η πρώτη από τις εξισώσεις (4.22) εξομαλύνει τη μετάβαση από την ελαστική στην ανελαστική περιοχή. Η δεύτερη ελέγχει τις φάσεις αποφόρτισης κάτω από ανακυκλιζόμενη διέγερση. Οι εξισώσεις (4.19) ως (4.23) μπορούν εναλλακτικά να διατυπωθούν για συνισταμένες τάσεων (δυνάμεις, ροπές) (stress-resultants space) θεωρώντας το κατάλληλο ελαστικό καταστατικό μητρώο και το κατάλληλο διάνυσμα των παραμορφώσεων, οι οποίες αντιστοιχούν στις συνισταμένες των τάσεων (Symeonov et al., 2000).

Δεδομένου ότι και στα δύο μέλη της εξίσωσης (4.21) εμφανίζονται παράγωγοι της αντίστοιχης παραμέτρου, το υστερητικό διάνυσμα z είναι ανεξάρτητο της ταχύτητας παραμορφώσεως (rate independent). Η τυπική ελαστική-απολύτως πλαστική συμπεριφορά μπορεί να προκύψει για $\beta = \gamma = 0.5$, $n > 6$ και $\alpha = 0$,ενώ μπορεί να ληφθεί μια ποικιλία άλλων αποκρίσεων.

Ο πίνακας $[R]$ στη σχέση (4.21) είναι ένα μητρώο αλληλεπίδρασης το οποίο εξαρτάται από τη συνάρτηση διαρροής:

$$[R] = \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \{\sigma^h\}} \right)^T [E] \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \{\sigma^h\}} \right) \right]^{-1} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \{\sigma^h\}} \right) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \{\sigma^h\}} \right)^T [E] \right] \tag{4.24}$$

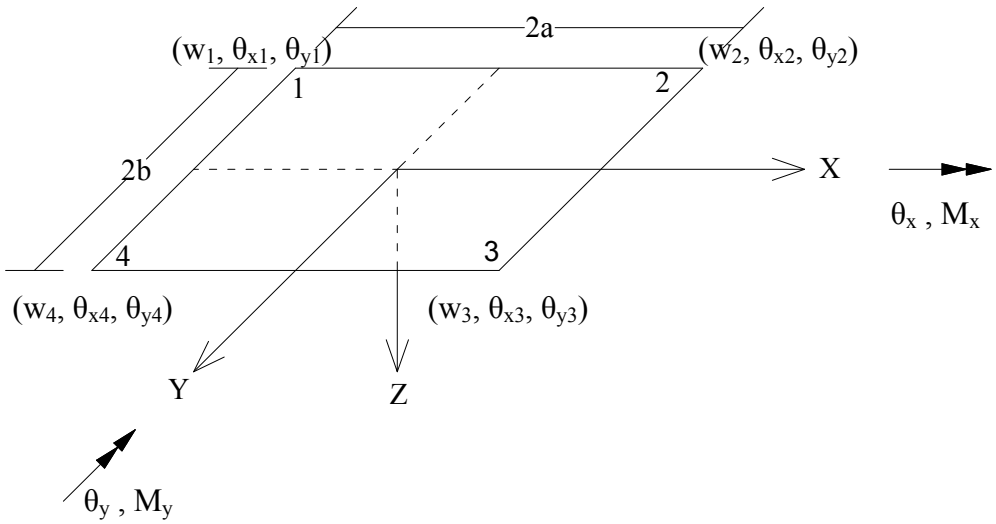
Ο πίνακας αλληλεπίδρασης $[R]$ προκύπτει λαμβάνοντας υπόψη τη συνθήκη συνεκτικότητας (consistency condition) της συσχετισμένης πλαστικότητας (associative plasticity). Οι εξισώσεις (4.19) και (4.21) δίνουν μία ευέλικτη διατύπωση μέσα στα πλαίσια της κλασικής πλαστικότητας, όπου οι περισσότεροι από τους νόμους της συσχετισμένης ροής εκφράζονται σε όρους τάσεων.

4.4 Ορθογωνικό στοιχείο τεσσάρων κόμβων και δώδεκα βαθμών ελευθερίας

Στην Εικόνα 4.6 φαίνεται ένα ορθογωνικό στοιχείο πλάκας τεσσάρων κόμβων με δώδεκα βαθμούς ελευθερίας. Η αρχή του συστήματος των αξόνων βρίσκεται στο κέντρο βάρους του ορθογωνίου χωρίς αυτό να είναι δεσμευτικό. Σε ευθεία αναλογία με το στοιχείο δοκού, θεωρούμε ως βαθμούς ελευθερίας κάθε κόμβου τη βύθιση w και τις κλίσεις της μέσης επιφάνειας του στοιχείου κατά τις διευθύνσεις x και y.

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y} \quad , \quad \theta_y = \frac{\partial w}{\partial x} \tag{4.25}$$

όπου τα διανύσματα των στροφών θ_x και θ_y είναι παράλληλα με τους άξονες x και y, αντίστοιχα. Οι θετικές φορές των στροφών θ_x και θ_y ακολουθούν τις θετικές φορές της κλασικής θεωρίας (βλ. Εικόνα 4.2). Αντιθέτως, οι ροπές M_x , M_y , όπως φαίνεται στην Εικόνα 4.6, ακολουθούν τη σύμβαση των στροφών θ_x, θ_y και όχι τη σύμβαση της κλασικής θεωρίας πλακών των ποσοτήτων M_x , M_y του εδαφίου 4.2, οι οποίες εκφράζουν ροπές ανά μονάδα μήκους της πλάκας (βλ. Εικόνα 4.4). Οι ροπές M_{xi} , M_{yi} (i=1,2,3,4) εκφράζουν επικόμβιες ροπές στον κόμβο i.



Εικόνα 4.6 Ορθογωνικό στοιχείο πλάκας τεσσάρων κόμβων με τις θετικές φορές στροφών και ροπών

Συναρτήσεις σχήματος

Η πολυωνυμική έκφραση του πεδίου των μετατοπίσεων θα περιέχει 12 όρους οι οποίοι προκύπτουν από το τρίγωνο Pascal. Οι μετατοπίσεις κατά μήκος κάθε πλευράς του στοιχείου ορίζονται συναρτήσει τεσσάρων επικόμβιων μετατοπίσεων, δύο βυθίσεων και δύο στροφών, οι οποίες και προσδιορίζουν ένα κυβικό πολυώνυμο ως προς x και y αντίστοιχα. Επομένως, το πεδίο των μετατοπίσεων θα προκύψει από το γινόμενο δύο κυβικών πολυωνύμων το οποίο συνολικά περιέχει 16 όρους του τριγώνου Pascal (βλ. Εικόνα 4.7). Οι όροι αυτοί αντιστοιχούν στο πλήρες ανάπτυγμα ενός κυβικού πολυωνύμου σε δύο διευθύνσεις. Από τους 16 όρους επιλέγονται οι 12 όροι, μετά την αφαίρεση των όρων ανωτέρας τάξεως, προκειμένου να εκφράσουν το πεδίο των μετατοπίσεων του στοιχείου.

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & x & & y & & \\
 & x^2 & & xy & & y^2 & \\
x^3 & & x^2y & & xy^2 & & y^3 \\
 & x^3y & & x^2y^2 & & xy^3 & \\
 & & x^3y^2 & & x^2y^3 & & \\
 & & & x^3y^3 & & &
\end{array}
$$

Εικόνα 4.7 Τρίγωνο Pascal: Οι 16 όροι του γινομένου δύο πλήρων κυβικών πολυωνύμων και οι 12 όροι που επιλέγονται για το πεδίο των μετατοπίσεων του ορθογωνικού στοιχείου πλάκας 12 βαθμών ελευθερίας

Έτσι ,το πεδίο των μετατοπίσεων ορίζεται από τη σχέση

$$
\begin{aligned}
w = {} & \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 \\
& + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3
\end{aligned}
\tag{4.26}
$$

ή

$$
w = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 & x^3y & xy^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{12} \end{bmatrix}
$$

ή

$$\{u\} = [x]\{a\} \tag{4.27}$$

Παρατηρούμε ότι η σχέση (4.26) ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση (4.16) της πλάκας, όταν $q(x,y)=0$, αν και αυτό δεν είναι αναγκαίο για την καταλληλότητα του πεδίου των μετατοπίσεων στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων.

Τα διανύσματα των επικόμβιων μετατοπίσεων και των επικόμβιων δράσεων έχουν τη μορφή

$$\{d\} = \begin{bmatrix} w_1 & \theta_{x1} & \theta_{y1} & w_2 & \theta_{x2} & \theta_{y2} & w_3 & \theta_{x3} & \theta_{y3} & w_4 & \theta_{x4} & \theta_{y4} \end{bmatrix}^T \tag{4.28}$$

$$\{r\} = \begin{bmatrix} P_1 & M_{x1} & M_{y1} & P_2 & M_{x2} & M_{y2} & P_3 & M_{x3} & M_{y3} & P_4 & M_{x4} & M_{y4} \end{bmatrix}^T \tag{4.29}$$

Από τη σχέση (4.26) μπορούμε να εκφράσουμε την κατανομή των δύο στροφών ή των κλίσεων $\theta_x = \dfrac{\partial w}{\partial y}$, $\theta_y = \dfrac{\partial w}{\partial x}$ της μέσης επιφάνειας ως εξής:

$$\theta_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y & 0 & x^2 & 2xy & 3y^2 & x^3 & 3xy^2 \end{bmatrix}\{\alpha\} \tag{4.30}$$

$$\theta_y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2x & y & 0 & 3x^2 & 2xy & y^2 & 0 & 3x^2y & y^3 \end{bmatrix}\{\alpha\} \tag{4.31}$$

Το μητρώο $[\mathrm{A}]$ που συνδέει τις επικόμβιες μετατοπίσεις $\{d\}$ με τις γενικευμένες συντεταγμένες $\{\alpha\}$ θα προκύψει από τη σχέση (4.28) σε συνδυασμό με τη σχέση (4.25) και τις διαδοχικές αντικαταστάσεις $x=\pm a$, $y=\pm b$:

$$\{d\} = [\mathrm{A}]\{\alpha\} \tag{4.32}$$

Η λύση ως προς $\{\alpha\}$ θα δώσει:

$$\{\alpha\} = [\mathrm{A}]^{-1}\{d\} \tag{4.33}$$

Οι συναρτήσεις σχήματος προκύπτουν από τη σχέση :

$$\{u\} = [x][\mathrm{A}]^{-1}\{d\} \tag{4.34}$$

η οποία εκφράζεται αναλυτικά ως εξής:

$$\begin{aligned} w = {} & N_1 w_1 + N_{\theta_x}^1 \theta_{x1} + N_{\theta_y}^1 \theta_{y1} + N_2 w_2 + N_{\theta_x}^2 \theta_{x2} + N_{\theta_y}^2 \theta_{y2} \\ & + N_3 w_3 + N_{\theta_x}^3 \theta_{x3} + N_{\theta_y}^3 \theta_{y3} + N_4 w_4 + N_{\theta_x}^4 \theta_{x4} + N_{\theta_y}^4 \theta_{y4} \end{aligned} \tag{4.35}$$

ή

$$\underset{(1\times1)}{\{u\}} = \underset{(1\times12)}{[N]}\underset{(12\times1)}{\{d\}} \tag{4.36}$$

όπου

$$\begin{aligned}
N_i &= \frac{1}{8}(1+x_i'x')(1+y_i'y')\left[2+x_i'x(1-x_i'x')+y_i'y'(1-y_i'y')\right] \\
N_{\theta_x}^i &= -\frac{by_i'}{8}(1+x_i'x')(1+y_i'y')(1+y_i'y')(1-y_i'y') \\
N_{\theta_y}^i &= -\frac{ax_i'}{8}(1+x_i'x')(1+x_i'x')(1-x_i'x')(1+y_i'y')
\end{aligned} \tag{4.37}$$

με $x' = x/a$, $y' = y/b$ και $i = 1,2,3,4$.

Μητρώο παραμορφώσεως

Το διάνυσμα των καμπυλοτήτων, όπως δίνεται από τη σχέση (4.17) σε συνδυασμό με τη σχέση (4.26), εκφράζεται ως εξής:

$$\{\kappa\} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6x & 2y & 0 & 0 & 6xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2x & 6y & 0 & 6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4x & 4y & 0 & 6x^2 & 6y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{12} \end{bmatrix}$$

ή

$$\{\kappa\} = [\beta]\{\alpha\} \tag{4.38}$$

Η σχέση (4.38) σε συνδυασμό με τη σχέση (4.33) δίνει τη σχέση:

$$\{\kappa\} = [\beta][\mathrm{A}]^{-1}\{d\}$$

ή

$$\underset{(3\times1)}{\{\kappa\}} = \underset{(3\times12)}{[B_k]}\underset{(12\times1)}{\{d\}} \tag{4.39}$$

απ' όπου υπολογίζεται ένα τροποποιημένο μητρώο παραμορφώσεως του στοιχείου το οποίο συνδέει τις καμπυλότητες με τις επικόμβιες μετατοπίσεις.

4.4.1 Ενσωμάτωση του υστερητικού προσομοιώματος Bouc-Wen-υστερητικές παραμορφώσεις

Το πεδίο των ελαστικών καμπυλοτήτων επεκτείνεται με την εισαγωγή ενός επιπλέον διανύσματος των αντιστοίχων υστερητικών καμπυλοτήτων:

$$\{\kappa\} = \{\kappa_X \quad \kappa_Y \quad \kappa_{XY}\}^T \rightarrow \{\tilde{\kappa}\} = \left\{\{\kappa\} \mid \{\kappa^h\}\right\}^T = \{\kappa_X \quad \kappa_Y \quad \kappa_{XY} \mid z_X \quad z_Y \quad z_{XY}\}^T$$

(4.40)

Στην εξίσωση (4.40) , το διάνυσμα των ελαστικών καμπυλοτήτων $\{\kappa\}$ επεκτείνεται στο αντίστοιχό του γενικευμένο $\{\tilde{\kappa}\}$, το οποίο αποτελείται από το διάνυσμα των συνολικών καμπυλοτήτων $\{\kappa\}$ και το διάνυσμα των υστερητικών καμπυλοτήτων $\{\kappa^h\}$.

Βασιζόμενοι στα παραπάνω και στη σχέση (4.18), θεωρούμε τον ακόλουθο μη γραμμικό υστερητικό νόμο για τις ροπές:

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_X \\ M_Y \\ M_{XY} \end{Bmatrix} = [\alpha][E_\kappa] \begin{Bmatrix} \kappa_X \\ \kappa_Y \\ \kappa_{XY} \end{Bmatrix} + ([I]-[\alpha])[E_\kappa] \begin{Bmatrix} z_X \\ z_Y \\ z_{XY} \end{Bmatrix} \tag{4.41}$$

όπου $[\alpha]$ συμβολίζει έναν τετραγωνικό διαγώνιο πίνακα με τους λόγους μετελαστικής προς την ελαστική δυσκαμψία, οι οποίοι για ένα ισοτροπικό υλικό θεωρούνται σταθεροί. Εάν $[\alpha]$ είναι ο μηδενικός πίνακας, τότε η αντίστοιχη μη γραμμική σχέση οδηγεί σε ελαστική-απολύτως πλαστική συμπεριφορά. Αν $[\alpha] = [I]$, τότε η αντίστοιχη συμπεριφορά είναι ελαστική. Πιο αναλυτικά η σχέση (4.41) μπορεί να γραφεί:

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_X \\ M_Y \\ M_{XY} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_X^e \\ M_Y^e \\ M_{XY}^e \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} M_X^h \\ M_Y^h \\ M_{XY}^h \end{Bmatrix} = [\alpha][E_\kappa] \begin{Bmatrix} \kappa_X \\ \kappa_Y \\ \kappa_{XY} \end{Bmatrix} + ([I]-[\alpha])[E_\kappa] \begin{Bmatrix} z_X \\ z_Y \\ z_{XY} \end{Bmatrix}$$

(4.42)

Οι εξισώσεις εξέλιξης των υστερητικών συνιστωσών ορίζονται ως εξής:

$$\begin{Bmatrix} \dot{M}_X^h \\ \dot{M}_Y^h \\ \dot{M}_{XY}^h \end{Bmatrix} = \left([I]-[\alpha]\right)[E_\kappa]\begin{Bmatrix} \dot{z}_X \\ \dot{z}_Y \\ \dot{z}_{XY} \end{Bmatrix}$$
$$= \left([I]-[\alpha]\right)[E_\kappa]\left([I]-H_1 H_2 [R]\right)\begin{Bmatrix} \dot{\kappa}_X \\ \dot{\kappa}_Y \\ \dot{\kappa}_{XY} \end{Bmatrix} \tag{4.43}$$

όπου, σύμφωνα με την εξίσωση (4.22), τα H_1, H_2 μπορούν να πάρουν την ακόλουθη μορφή:

$$H_1 = \left\| \Phi\left(\left\{ M_X^h \quad M_Y^h \quad M_{XY}^h \right\}^T \right) + 1 \right\|^n, \; n \geq 2$$
$$H_2 = \gamma \operatorname{sgn}\left(\left\{ M_X^h \quad M_Y^h \quad M_{XY}^h \right\} \left\{ \dot{\kappa} \right\} \right) + \beta \tag{4.44}$$

όπου η επιφάνεια διαρροής Φ εκφράζεται ως συνάρτηση των υστερητικών τμημάτων των ροπών. Επιπλέον, το μητρώο αλληλεπίδρασης $[R]$ εκφράζεται ως προς μια επιφάνεια διαρροής που διατυπώνεται ως προς τις ροπές:

$$[R] = \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \{M^h\}} \right)^T [E_\kappa] \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \{M^h\}} \right) \right]^{-1} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \{M^h\}} \right) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \{M^h\}} \right)^T [E_\kappa] \right] \tag{4.45}$$

4.4.2 Κριτήριο αστοχίας (Von Mises)

Το κριτήριο αστοχίας του Mises για την εντατική κατάσταση μιας πλάκας, συναρτήσει των συνιστωσών των τάσεων $\sigma_X, \sigma_Y, \tau_{XY}$ δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 - \sigma_X \sigma_Y + 3\tau_{XY}^2 = \sigma_\Delta^2 \tag{4.46}$$

όπου σ_Δ^2 είναι το όριο διαρροής του υλικού σε εφελκυσμό.

Συνεπώς, με βάση τη σχέση (4.46), μπορούμε να ορίσουμε την εξής επιφάνεια διαρροής Φ:

$$\Phi = \frac{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 - \sigma_X \sigma_Y + 3\tau_{XY}^2}{\sigma_\Delta^2} - 1 \tag{4.47}$$

η οποία εκφράζεται σε όρους τάσεων (stresses). Όμως, η σχέση (4.18) συνδέει ροπές με καμπυλότητες, οπότε το κριτήριο διαρροής Φ πρέπει να επαναδιατυπωθεί σε όρους ροπών (stress-resultants). Από τις σχέσεις (4.17) και (4.6) προκύπτει ότι:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \gamma_{XY} \end{Bmatrix} = Z \begin{Bmatrix} \kappa_X \\ \kappa_Y \\ \kappa_{XY} \end{Bmatrix} = Z\{\kappa\} \tag{4.48}$$

Η λύση ως προς $\{\kappa\}$ της σχέσης (4.18) θα δώσει:

$$\{\kappa\} = \begin{Bmatrix} \kappa_X \\ \kappa_Y \\ \kappa_{XY} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12}{Et^3} & -\frac{12\nu}{Et^3} & 0 \\ -\frac{12\nu}{Et^3} & \frac{12}{Et^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{24(\nu+1)}{Et^3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_X \\ M_Y \\ M_{XY} \end{Bmatrix} \tag{4.49}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (4.9), (4.48) και (4.49), προκύπτει:

$$\begin{bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \tau_{XY} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} Z \begin{bmatrix} \frac{12}{Et^3} & -\frac{12\nu}{Et^3} & 0 \\ -\frac{12\nu}{Et^3} & \frac{12}{Et^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{24(\nu+1)}{Et^3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_X \\ M_Y \\ M_{XY} \end{Bmatrix} \tag{4.50}$$

και τελικά:

$$\begin{bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \tau_{XY} \end{bmatrix} = \frac{12Z}{t^3} \begin{Bmatrix} M_X \\ M_Y \\ M_{XY} \end{Bmatrix} \tag{4.51}$$

Αντικαθιστώντας τις συνιστώσες της τάσης (σχέση (4.51)) στο κριτήριο διαρροής (σχέση (4.47)) προκύπτει ότι:

$$\Phi = \frac{144Z^2\left(M_X{}^2 + M_Y{}^2 - M_X M_Y + 3M_{XY}{}^2\right)}{t^6\sigma_\Delta^2} - 1 \tag{4.52}$$

Καθώς καταπονείται η πλάκα, διαρρέουν αρχικά οι ακραίες ίνες και συνεπώς το κριτήριο διαρροής προκύπτει αν τεθεί $Z = \pm t/2$ στη σχέση (4.52):

$$\Phi = \frac{36\left(M_X{}^2 + M_Y{}^2 - M_X M_Y + 3M_{XY}{}^2\right)}{t^4 \sigma_\Delta^2} - 1 \tag{4.53}$$

Η επιφάνεια διαρροής πρέπει να εκφραστεί ως συνάρτηση των υστερητικών τμημάτων των συνιστωσών της τάσης κι έτσι η τελική μορφή είναι η εξής:

$$\begin{aligned}\Phi = &\frac{36\left(M_X^h\right)^2}{t^4\left(1-\alpha(1,1)\right)^2\sigma_\Delta^2} + \frac{36\left(M_Y^h\right)^2}{t^4\left(1-\alpha(2,2)\right)^2\sigma_\Delta^2} \\ &- \frac{36\left(M_X^h\right)\left(M_Y^h\right)}{t^4\left(1-\alpha(1,1)\right)\left(1-\alpha(2,2)\right)\sigma_\Delta^2} + \frac{108\left(M_{XY}^h\right)^2}{t^4\left(1-\alpha(3,3)\right)^2\sigma_\Delta^2} - 1\end{aligned} \tag{4.54}$$

4.4.3 Επιπρόσθετες συναρτήσεις σχήματος για τα υστερητικά μεγέθη

Βασισμένοι στο διάνυσμα παραμορφώσεως, όπως ορίστηκε στην εξίσωση (4.40), το διάνυσμα των επικόμβιων βαθμών ελευθερίας (σχέση (4.28)) επεκτείνεται εδώ σε ένα 24×1 διάνυσμα $\left\{\tilde{d}\right\}$:

$$\begin{aligned}&\left\{\tilde{d}\right\} = \left\{\{d\} \mid \{z\}\right\} = \\ &\left\{w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad \dots \quad w_4 \quad \theta_{x4} \quad \theta_{y4} \mid z_X{}^1 \quad z_Y{}^1 \quad z_{XY}{}^1 \quad \dots \quad z_X{}^4 \quad z_Y{}^4 \quad z_{XY}{}^4\right\}^T\end{aligned}$$

(4.55)

το οποίο αποτελείται από το διάνυσμα των συνολικών μετατοπίσεων $\{d\}$ και το υστερητικό τμήμα των συνολικών παραμορφώσεων (καμπυλοτήτων).

Η σχέση (4.41) μπορεί να ξαναγραφεί στην επόμενη ισοδύναμη γραφή:

$$\{M\}_{(x,y,t)} = \begin{Bmatrix} M_X \\ M_Y \\ M_{XY} \end{Bmatrix}_{(x,y,t)} = \left[E_\kappa\right]\left(\left[\alpha\right]\begin{Bmatrix} \kappa_X \\ \kappa_Y \\ \kappa_{XY} \end{Bmatrix}_{(x,y,t)} + \left(\left[I\right]-\left[\alpha\right]\right)\begin{Bmatrix} z_X \\ z_Y \\ z_{XY} \end{Bmatrix}_{(x,y,t)}\right) \tag{4.56}$$

ή

$$\begin{aligned}&\begin{Bmatrix} M_X \\ M_Y \\ M_{XY} \end{Bmatrix}_{(x,y,t)} = \left[E_\kappa\right]\left\{\tilde{\kappa}(x,y,t)\right\} \\ &\left\{\tilde{\kappa}(x,y,t)\right\} = \left[\alpha\right]\begin{Bmatrix} \kappa_X \\ \kappa_Y \\ \kappa_{XY} \end{Bmatrix}_{(x,y,t)} + \left(\left[I\right]-\left[\alpha\right]\right)\begin{Bmatrix} z_X \\ z_Y \\ z_{XY} \end{Bmatrix}_{(x,y,t)}\end{aligned} \tag{4.57}$$

όπου (x, y, t) συμβολίζει εξάρτηση από τις χωρικές μεταβλητές x, y και τη χρονική μεταβλητή t και το $\{\tilde{\kappa}(x, y, t)\}$ μπορεί να θεωρηθεί ως ένα μέτρο ενός ισοδύναμου γενικευμένου μητρώου παραμορφώσεων (καμπυλοτήτων).

Το διάνυσμα $\{\kappa\}$ των συνολικών παραμορφώσεων-καμπυλοτήτων εξαρτάται αποκλειστικά από το σύνολο του πεδίου μετατοπίσεων μέσω της σχέσης (4.17). Έτσι, οι συναρτήσεις σχήματος της σχέσης (4.37) χρησιμοποιούνται επίσης και στη μη γραμμική περίπτωση για την παρεμβολή του διανύσματος $\{d\}$ της συνολικής μετατόπισης.

Το διάνυσμα των υστερητικών παραμορφώσεων-καμπυλοτήτων θεωρείται ως μια «διατάραξη» του διανύσματος της συνολικής παραμόρφωσης και ως εκ τούτου εισάγονται στο πρόβλημα με τις αντίστοιχες συναρτήσεις σχήματος. Θεωρούμε ότι

$$\{M\}_{(x,y)} = N_z^1\{M_1\} + N_z^2\{M_2\} + N_z^3\{M_3\} + N_z^4\{M_4\} \tag{4.58}$$

όπου $\{M_1\}$, $\{M_2\}$, $\{M_3\}$ και $\{M_4\}$ είναι τα επικόμβια διανύσματα των ροπών του στοιχείου , $\{M\}_{(x,y)}$ το εσωτερικό διάνυσμα ροπών του στοιχείου και

$$\begin{aligned}
N_z^1 &= \frac{1}{4}\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right)\\
N_z^2 &= \frac{1}{4}\left(1+\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right)\\
N_z^3 &= \frac{1}{4}\left(1+\frac{x}{a}\right)\left(1+\frac{y}{b}\right)\\
N_z^4 &= \frac{1}{4}\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1+\frac{y}{b}\right)
\end{aligned} \tag{4.59}$$

Μέσω της σχέσης (4.57) και για $[\alpha] = [0]$, η σχέση (4.56) γίνεται:

$$\begin{Bmatrix} z_X \\ z_Y \\ z_{XY} \end{Bmatrix} = N_z^1 \begin{Bmatrix} z_X{}^1 \\ z_Y{}^1 \\ z_{XY}{}^1 \end{Bmatrix} + N_z^2 \begin{Bmatrix} z_X{}^2 \\ z_Y{}^2 \\ z_{XY}{}^2 \end{Bmatrix} + N_z^3 \begin{Bmatrix} z_X{}^3 \\ z_Y{}^3 \\ z_{XY}{}^3 \end{Bmatrix} + N_z^4 \begin{Bmatrix} z_X{}^4 \\ z_Y{}^4 \\ z_{XY}{}^4 \end{Bmatrix} \tag{4.60}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει:

$$\{\kappa^h\} = [N_z]\{z\} \tag{4.61}$$

όπου $\{z\} = \{z_X{}^1 \quad z_Y{}^1 \quad z_{XY}{}^1 \quad z_X{}^2 \quad z_Y{}^2 \quad z_{XY}{}^2 \quad z_X{}^3 \quad z_Y{}^3 \quad z_{XY}{}^3 \quad z_X{}^4 \quad z_Y{}^4 \quad z_{XY}{}^4\}^T$,

$\{\kappa^h\} = \{z_X \quad z_Y \quad z_{XY}\}^T$ και

$$[N_z] = \begin{bmatrix} N_z^1 & 0 & 0 & N_z^2 & 0 & 0 & N_z^3 & 0 & 0 & N_z^4 & 0 & 0 \\ 0 & N_z^1 & 0 & 0 & N_z^2 & 0 & 0 & N_z^3 & 0 & 0 & N_z^4 & 0 \\ 0 & 0 & N_z^1 & 0 & 0 & N_z^2 & 0 & 0 & N_z^3 & 0 & 0 & N_z^4 \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

4.5 Υπολογισμός μητρώου στιβαρότητας (αρχή των δυνατών έργων)

Η αρχή των δυνατών έργων διατυπώνεται ως εξής: *Όταν ένας φορέας φορτίζεται με εξωτερικά φορτία και ισορροπεί, τότε για οποιαδήποτε «μικρή» δυνατή παραμόρφωση του φορέα, συμβιβαστή με τις συνθήκες στηρίξεώς του, το δυνατό έργο των εσωτερικών δυνάμεων ισούται με το δυνατό έργο των εξωτερικών δυνάμεων.*

Η παραπάνω αρχή εφαρμόζεται και στην περίπτωση της πλάκας προκειμένου να διατυπωθεί η έκφραση του μητρώου στιβαρότητας του πεπερασμένου στοιχείου πλάκας. Το δυνατό έργο των εσωτερικών δυνάμεων του στοιχείου εκφράζεται από τη σχέση:

$$W_{\text{int}} = \int_{V_e} \{\bar{\varepsilon}\}^T [E] \{\varepsilon\} \, dV_e \quad (4.63)$$

Η σχέση (4.63), μέσω της (4.48), γίνεται:

$$W_{\text{int}} = \int_{V_e} \{\bar{\kappa}\}^T [E] \{\kappa\} \, Z^2 dV_e \quad (4.64)$$

η οποία, αν ολοκληρωθεί ως προς Z από $-t/2$ έως $t/2$, δίνει:

$$W_{\text{int}} = \frac{t^3}{12} \int_{V_e} \{\bar{\kappa}\}^T [E] \{\kappa\} \, dA_e \quad (4.65)$$

Ο συνδυασμός των σχέσεων (4.9) και (4.18) θα μας δώσει:

$$W_{\text{int}} = \int_{V_e} \{\bar{\kappa}\}^T [E_\kappa] \{\kappa\} \, dA_e = \int_{-b}^{b} \int_{-a}^{a} \{\bar{\kappa}\}^T \{M\} \, dx \, dy \quad (4.66)$$

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν μόνο επικόμβιες δυνάμεις. Συνεπώς, το δυνατό έργο των εξωτερικών δυνάμεων εκφράζεται από τη σχέση:

$$W_{ext} = \left\{\bar{d}\right\}^T \left\{R_c\right\} \tag{4.67}$$

Η εξίσωση της αρχής των δυνατών έργων γράφεται:

$$W_{\text{int}} = W_{ext}$$

ή

$$\int_{-b}^{b}\int_{-a}^{a} \left\{\bar{\kappa}\right\}^T \left\{M\right\} dx\,dy = \left\{\bar{d}\right\}^T \left\{R_c\right\} \tag{4.68}$$

Μέσω της σχέσης (4.39), η σχέση (4.68) γράφεται:

$$\left\{\bar{d}\right\}^T \int_{-b}^{b}\int_{-a}^{a} \left[B_\kappa\right]^T \left\{M\right\} dx\,dy = \left\{\bar{d}\right\}^T \left\{R_c\right\} \Leftrightarrow \int_{-b}^{b}\int_{-a}^{a} \left[B_\kappa\right]^T \left\{M\right\} dx\,dy = \left\{R_c\right\} \tag{4.69}$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (4.41) στη σχέση (4.69), εξάγεται η ακόλουθη εξίσωση:

$$\int_{-b}^{b}\int_{-a}^{a} \left[B_\kappa\right]^T \left(\left[\alpha\right]\left[E_\kappa\right] \begin{Bmatrix} \kappa_X \\ \kappa_Y \\ \kappa_{XY} \end{Bmatrix} + \left(\left[I\right]-\left[\alpha\right]\right)\left[E_\kappa\right] \begin{Bmatrix} z_X \\ z_Y \\ z_{XY} \end{Bmatrix} \right) dx\,dy = \left\{R_c\right\} \tag{4.70}$$

ή

$$\int_{-b}^{b}\int_{-a}^{a} \left[B_\kappa\right]^T \left(\left[\alpha\right]\left[E_\kappa\right]\left\{\kappa\right\} + \left(\left[I\right]-\left[\alpha\right]\right)\left[E_\kappa\right]\left\{\kappa^h\right\} \right) dx\,dy = \left\{R_c\right\} \tag{4.71}$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (4.39) και (4.61) στην παραπάνω εξίσωση προκύπτει:

$$\int_{-b}^{b}\int_{-a}^{a} \left[B_\kappa\right]^T \left(\left[\alpha\right]\left[E_\kappa\right]\left[B_\kappa\right]\left\{d\right\} + \left(\left[I\right]-\left[\alpha\right]\right)\left[E_\kappa\right]\left[N_z\right]\left\{z\right\} \right) dx\,dy = \left\{R_c\right\} \tag{4.72}$$

ή

$$\left[\underbrace{\int_{-b}^{b}\int_{-a}^{a} \left[B_\kappa\right]^T \left[a\right]\left[E_\kappa\right]\left[B_\kappa\right] dx\,dy}_{12\times 12} \;\middle|\; \underbrace{\int_{-b}^{b}\int_{-a}^{a} \left[B_\kappa\right]^T \left(\left[I\right]-\left[a\right]\right)\left[E_\kappa\right]\left[N_z\right] dx\,dy}_{12\times 12} \right] \left\{ \begin{matrix} \left\{d\right\} \\ \hline \left\{z\right\} \end{matrix} \right\} = \left\{R_c\right\}$$

(4.73)

ή

$$\left[\left[k_e\right] \vdots \left[k_h\right]\right]\left\{\frac{\{d\}}{\{z\}}\right\} = \left[\tilde{k}\right]\left\{\tilde{d}\right\} = \left\{R_c\right\}$$

Η εξίσωση (4.73) μαζί με τις εξισώσεις εξέλιξης της υστέρησης (Bouc-Wen evolution equations), όπως ορίζονται στη σχέση (4.43), περιγράφουν τη μη γραμμική ανακυκλιζόμενη απόκριση ενός πεπερασμένου στοιχείου πλάκας. Ακολουθούν οι εξισώσεις Bouc-Wen, διατυπωμένες για κάθε κόμβο του στοιχείου:

$$\left\{\begin{matrix} \dot{z}_X \\ \dot{z}_Y \\ \dot{z}_{XY} \end{matrix}\right\}_{i=1,2,3,4} = \left(\left[I\right] - H_1 H_2 \left[R\right]\right)\left[B_\kappa\right]_{i=1,2,3,4}\left\{\dot{d}\right\} \tag{4.74}$$

4.6 Ισοπαραμετρικά στοιχεία πλάκας

4.6.1 Κάμψη πλακών-θεωρία Reissner-Mindlin

Η θεωρία Reissner-Mindlin στις πλάκες αντιστοιχεί με τη θεωρία Timoshenko στις δοκούς, κατά τις οποίες λαμβάνεται υπόψη και το έργο των διατμητικών παραμορφώσεων. Αποτέλεσμα αυτής της διευρυμένης θεωρίας είναι να τροποποιηθεί η παραδοχή (3) της κλασικής θεωρίας πλακών (βλ. κεφάλαιο 4.2) και να διατυπωθεί ως εξής: *Επίπεδες επιφάνειες, κάθετες στη μέση επιφάνεια της πλάκας πριν την παραμόρφωση, παραμένουν επίπεδες και μετά την παραμόρφωση αλλά όχι αναγκαστικά κάθετες στην παραμορφωμένη μέση επιφάνεια της πλάκας.* Οι διατμητικές παραμορφώσεις γ_{XZ} και γ_{YZ} θεωρούνται ομοιόμορφα κατανεμημένες κατά τη διεύθυνση του πάχους της πλάκας και εκφράζονται με την απόκλιση του παραμορφωμένου κατακόρυφου επιπέδου της πλάκας από το κάθετο επίπεδο στην παραμορφωμένη μέση επιφάνεια της πλάκας (βλ. Εικόνα 4.8).

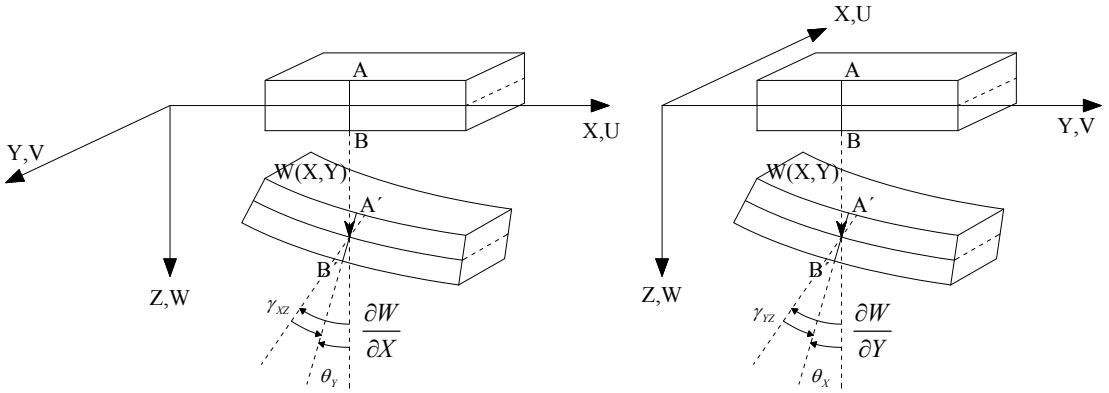
Οι μετατοπίσεις των σχέσεων (4.2) και (4.3) ορίζονται τώρα από τη σχέση:

$$\begin{aligned} U\left(X,Y,Z\right) &= -Z\theta_Y\left(X,Y\right) \\ V\left(X,Y,Z\right) &= -Z\theta_X\left(X,Y\right) \end{aligned} \tag{4.75}$$

ενώ οι σχέσεις (4.6) των ανηγμένων παραμορφώσεων της κλασικής θεωρίας πλακών τροποποιούνται ως εξής:

$$\begin{aligned} \varepsilon_X &= \frac{\partial U}{\partial X} = -Z\frac{\partial \theta_Y}{\partial X} \quad , \quad \gamma_{XY} = \frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} = -Z\left(\frac{\partial \theta_Y}{\partial Y} + \frac{\partial \theta_X}{\partial X}\right) \\ \varepsilon_Y &= \frac{\partial V}{\partial Y} = -Z\frac{\partial \theta_X}{\partial Y} \quad , \quad \gamma_{YZ} = \frac{\partial V}{\partial Z} + \frac{\partial W}{\partial Y} = -\theta_X + \frac{\partial W}{\partial Y} \\ \varepsilon_Z &= \frac{\partial W}{\partial Z} = 0 \quad , \quad \gamma_{ZX} = \frac{\partial W}{\partial X} + \frac{\partial U}{\partial Z} = -\theta_Y + \frac{\partial W}{\partial X} \end{aligned} \tag{4.76}$$

Παρατηρούμε ότι οι διατμητικές παραμορφώσεις γ_{YZ} και γ_{XZ} δεν προκύπτουν μηδενικές όπως στην κλασική θεωρία πλακών.

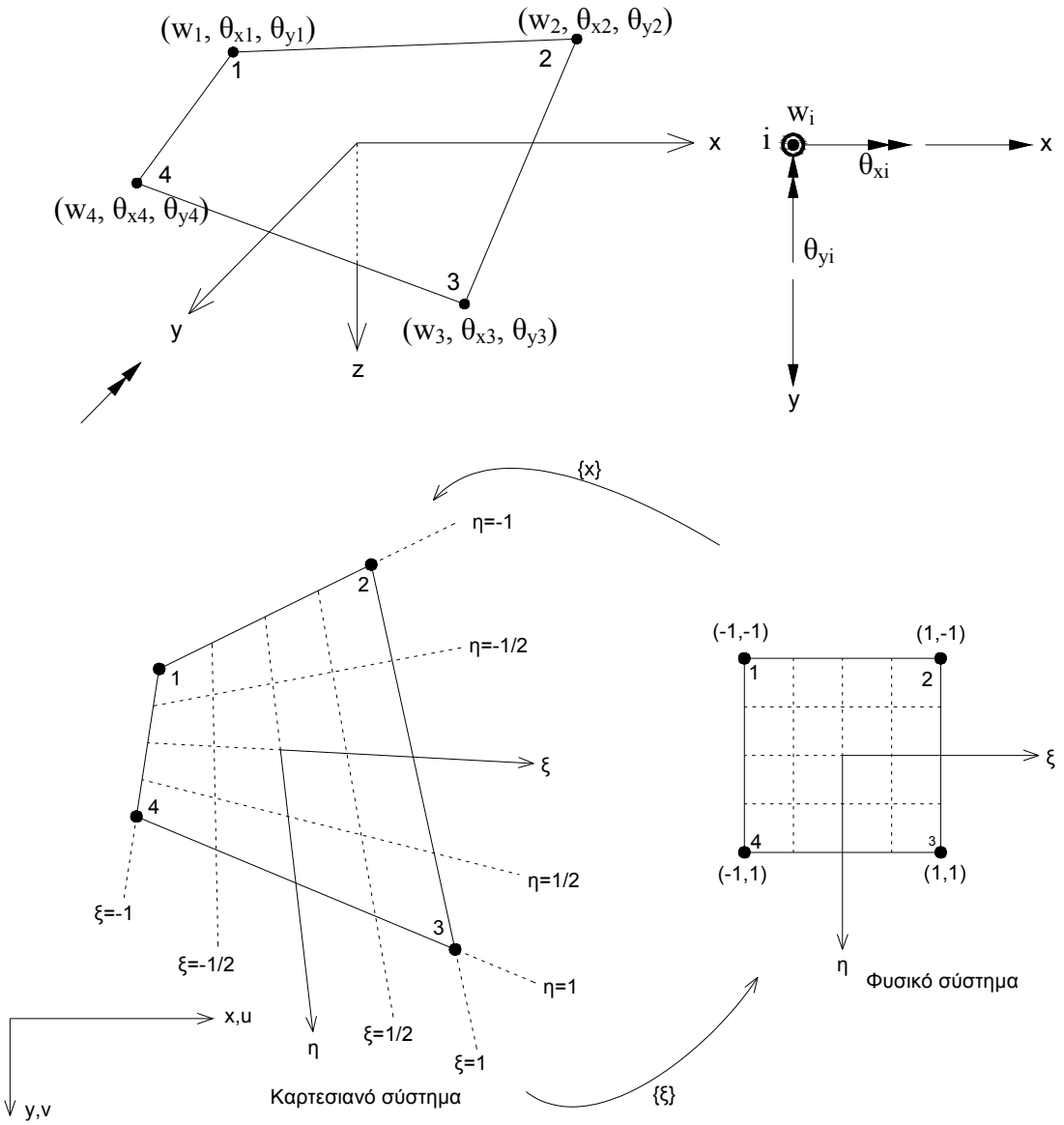


Εικόνα 4.8 Κάμψη πλάκας κατά τη θεωρία Reissner-Mindlin

Τα στοιχεία πλάκας τύπου Reissner-Mindlin μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την ανάλυση κυρίως παχέων πλακών, όπου η συμμετοχή των διατμητικών παραμορφώσεων στο συνολικό έργο παραμορφώσεως της πλάκας δεν είναι αμελητέα, καθώς και για την ανάλυση λεπτών πλακών. Θα πρέπει όμως να επισημανθεί ότι τα στοιχεία Reissner-Mindlin σε λεπτές πλάκες μπορεί να είναι λιγότερο ακριβή από τα στοιχεία Kirchhoff τα οποία αγνοούν την επιρροή των διατμητικών παραμορφώσεων.

4.6.2 Τετραπλευρικά ισοπαραμετρικά στοιχεία πλάκας Reissner-Mindlin

Στην Εικόνα 4.9 φαίνεται το τετραπλευρικό στοιχείο τεσσάρων κόμβων και στα δύο συστήματα συντεταγμένων (καρτεσιανό και φυσικό) και η αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση. Η απεικόνιση του φυσικού συστήματος στο καρτεσιανό δεν είναι απαραίτητα ένα ορθογωνικό σύστημα αξόνων. Οι άξονες ξ, η στο καρτεσιανό σύστημα διέρχονται από τα μέσα των πλευρών και είναι ευθύγραμμοι διότι η απεικόνιση είναι γραμμική.



Εικόνα 4.9 Τετραπλευρικό ισοπαραμετρικό στοιχείο πλάκας τεσσάρων κόμβων

Συναρτήσεις σχήματος

Ο μετασχηματισμός των συντεταγμένων ορίζεται από γραμμικά πολυώνυμα ως προς ξ και η αφού δύο είναι οι κόμβοι σε κάθε πλευρά του στοιχείου. Κατά συνέπεια η πολυωνυμική απεικόνιση των συντεταγμένων x, y θα έχει τη μορφή:

$$x = \alpha_1 + \alpha_2\xi + \alpha_3\eta + \alpha_4\xi\eta$$

$$y = \alpha_5 + \alpha_6\xi + \alpha_7\eta + \alpha_8\xi\eta$$

ή

$$x = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & \xi\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} \tag{4.77}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & \xi\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \end{bmatrix} \tag{4.78}$$

Ακολουθεί ο υπολογισμός των γενικευμένων συντεταγμένων $\{\alpha\}$

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 \quad (\xi = -1, \eta = -1) \\ x_2 &= \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 \quad (\xi = 1, \eta = -1) \\ x_3 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \quad (\xi = 1, \eta = 1) \\ x_4 &= \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 \quad (\xi = -1, \eta = 1) \end{aligned} \tag{4.79}$$

ή

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} \tag{4.80}$$

Από τη σχέση (4.80) προκύπτει το διάνυσμα των γενικευμένων συντεταγμένων:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \tag{4.81}$$

Με την αντικατάσταση της σχέσης (4.81) στη σχέση (4.77) παίρνουμε την έκφραση της συντεταγμένης x ενός τυχαίου σημείου του στοιχείου ως προς τις συντεταγμένες x_i (i=1, 2, 3, 4) των τεσσάρων κόμβων του στοιχείου. Έτσι, έχουμε

$$x = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) & \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) & \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) & \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

ή

$$x = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \tag{4.82}$$

όπου

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\ N_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\ N_4 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{aligned} \tag{4.83}$$

είναι οι συναρτήσεις σχήματος του στοιχείου. Με αντίστοιχο τρόπο ορίζεται και η συντεταγμένη y:

$$y = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \tag{4.84}$$

Λόγω ισοπαραμετρικής θεώρησης, οι παραπάνω συναρτήσεις σχήματος χρησιμοποιούνται ως συναρτήσεις παρεμβολής και για τις τρεις συνιστώσες w, θ_x, θ_y του πεδίου των μετατοπίσεων. Έτσι, έχουμε:

$$\begin{bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{4} \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{bmatrix}$$

ή

$$\underset{(3\times1)}{\{u\}} = \underset{(3\times12)}{[N]} \underset{(12\times1)}{\{d\}} \tag{4.85}$$

με

$$\{d\} = \{w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y2} \quad w_2 \quad \theta_{x2} \quad \theta_{y2} \quad w_3 \quad \theta_{x3} \quad \theta_{y3} \quad w_4 \quad \theta_{x4} \quad \theta_{y4}\}^T \tag{4.86}$$

Μητρώο παραμορφώσεως

Το διάνυσμα των γενικευμένων καμπυλοτήτων στη θεωρία Reissner-Mindlin έχει πέντε όρους αντί των τριών όρων της θεωρίας Kirchhoff (βλ. σχέσεις (4.17)):

$$\{\kappa\} = \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ -\dfrac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ -\dfrac{\partial \theta_x}{\partial y} - \dfrac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ -\theta_x + \dfrac{\partial w}{\partial y} \\ -\theta_y + \dfrac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{4.87}$$

Προκειμένου να εκφράσουμε τις γενικευμένες καμπυλότητες συναρτήσει των φυσικών συντεταγμένων χρησιμοποιούμε τη σχέση:

$$\begin{bmatrix} f_{,x} \\ f_{,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* \\ J_{21}^* & J_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{,\xi} \\ f_{,\eta} \end{bmatrix} \tag{4.88}$$

όπου J_{ij}^* είναι οι όροι του αντίστροφου Ιακωβιανού μητρώου $[J]$[1]

[1] βλ. και Παράρτημα, 4.9.1

Ο συνδυασμός των σχέσεων (4.87) και (4.88) δίνει την έκφραση του διανύσματος των γενικευμένων καμπυλοτήτων συναρτήσει των θ_x, θ_y και των μερικών παραγώγων των w, θ_x, θ_y ως προς ξ, η:

$$\{\kappa\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -J_{11}^* & -J_{12}^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -J_{21}^* & -J_{22}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -J_{11}^* & -J_{12}^* & -J_{21}^* & -J_{22}^* \\ -1 & 0 & J_{21}^* & J_{22}^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & J_{11}^* & J_{12}^* & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ \partial w/\partial\xi \\ \partial w/\partial\eta \\ \partial\theta_x/\partial\xi \\ \partial\theta_x/\partial\eta \\ \partial\theta_y/\partial\xi \\ \partial\theta_y/\partial\eta \end{bmatrix}$$

ή

$$\{\kappa\} = \frac{1}{J_{11}J_{22} - J_{21}J_{12}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -J_{22} & J_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & J_{21} & -J_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -J_{22} & J_{12} & J_{21} & -J_{11} \\ J_{21}J_{12} - J_{11}J_{22} & 0 & -J_{21} & J_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{21}J_{12} - J_{11}J_{22} & J_{22} & -J_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ \partial w/\partial\xi \\ \partial w/\partial\eta \\ \partial\theta_x/\partial\xi \\ \partial\theta_x/\partial\eta \\ \partial\theta_y/\partial\xi \\ \partial\theta_y/\partial\eta \end{bmatrix}$$

ή

$$\{\kappa\} = [B_{\kappa 1}]\{d_{,\xi}\} \tag{4.89}$$

Το διάνυσμα των μερικών παραγώγων $\{d_{,\xi}\}$ προκύπτει με ην παραγώγιση των μετατοπίσεων (4.85) ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ \partial w/\partial\xi \\ \partial w/\partial\eta \\ \partial\theta_x/\partial\xi \\ \partial\theta_x/\partial\eta \\ \partial\theta_y/\partial\xi \\ \partial\theta_y/\partial\eta \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c|ccc} 0 & N_1 & 0 & & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & & 0 & 0 & N_4 \\ N_{1,\xi} & 0 & 0 & & N_{4,\xi} & 0 & 0 \\ N_{1,\eta} & 0 & 0 & \dots & N_{4,\eta} & 0 & 0 \\ 0 & N_{1,\xi} & 0 & & 0 & N_{4,\xi} & 0 \\ 0 & N_{1,\eta} & 0 & & 0 & N_{4,\eta} & 0 \\ 0 & 0 & N_{1,\xi} & & 0 & 0 & N_{4,\xi} \\ 0 & 0 & N_{1,\eta} & & 0 & 0 & N_{4,\eta} \end{array}\right] \begin{bmatrix} w_1 \\ \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ \vdots \\ \vdots \\ w_4 \\ \theta_{x4} \\ \theta_{y4} \end{bmatrix}$$

ή

$$\{d_{,\xi}\} = [B_{\kappa 2}]\{d\} \tag{4.90}$$

Επομένως, το τροποποιημένο μητρώο παραμορφώσεως $[B_\kappa]$, που συνδέει τις γενικευμένες καμπυλότητες με τις επικόμβιες μετατοπίσεις, προκύπτει από τη σχέση:

$$\underset{(5\times1)}{\{\kappa\}} = \underset{(5\times8)}{[B_{\kappa 1}]}\underset{(8\times12)}{[B_{\kappa 1}]}\underset{(12\times1)}{\{d\}}$$

ή

$$\underset{(5\times1)}{\{\kappa\}} = \underset{(5\times12)}{[B_\kappa]}\underset{(12\times1)}{\{d\}} \tag{4.91}$$

Μητρώο ελαστικότητας

Το μητρώο ελαστικότητας που συνδέει το διάνυσμα των τάσεων με το διάνυσμα των ανηγμένων παραμορφώσεων, για την περίπτωση της θεωρίας Reissner-Mindlin, είναι ένα μητρώο διαστάσεων (5×5) αντί του μητρώου (3×3) της θεωρίας Kirchhoff. Οι σχέσεις σ-ε της πλάκας Reissner-Mindlin προκύπτουν από τις αντίστοιχες σχέσεις (4.8) της τριδιάστατης ελαστικότητας θέτοντας $\sigma_z = 0$ και λύνοντας ως προς σ_x , σ_y , τ_{xy} , τ_{yz} και τ_{zx}. Έτσι, έχουμε:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix}$$

ή

$$\underset{(5\times1)}{\{\sigma\}} = \underset{(5\times5)}{[E]}\underset{(5\times1)}{\{\varepsilon\}} \tag{4.92}$$

Η ύπαρξη των διατμητικών τάσεων τ_{yz} και τ_{zx} στη σχέση σ-ε μας δίνει τη δυνατότητα να συμπεριλάβουμε και τις διατμητικές δυνάμεις Q_x και Q_y των σχέσεων (4.11) στα εντατικά μεγέθη τα οποία παράγουν έργα παραμορφώσεως στο στοιχείο. Έτσι, με την αντικατάσταση των εκφράσεων των ανηγμένων παραμορφώσεων (4.76) στη σχέση

(4.92) και στη συνέχεια, την αντικατάσταση της τελευταίας στις σχέσεις των εντατικών μεγεθών (4.11) προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_\kappa & \nu D_\kappa & 0 & 0 & 0 \\ \nu D_\kappa & D_\kappa & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} D_\kappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & tG & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & tG \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ -\frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ -\theta_x + \frac{\partial w}{\partial y} \\ -\theta_y + \frac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix}$$

ή

$$\underset{(5\times1)}{\{M\}} = \underset{(5\times5)}{[E_\kappa]} \underset{(5\times1)}{\{\kappa\}} \tag{4.93}$$

όπου D_κ είναι η καμπτική στιβαρότητα της πλάκας και G το μέτρο διατμήσεως:

$$D_\kappa = \frac{Et^3}{12\left(1-\nu^2\right)}, \quad G = \frac{E}{2(1-\nu)} \tag{4.94}$$

Οι σχέσεις (4.93) προέκυψαν με την παραδοχή της σταθερής κατανομής των διατμητικών τάσεων κατά μήκος του πάχους της πλάκας. Προκειμένου να ληφθεί υπόψη η παραβολική κατανομή των διατμητικών τάσεων (βλ. Εικόνα 4.5) το μέτρο διατμήσεως πρέπει να πολλαπλασιαστεί με το συντελεστή $c_s = 5/6$.

Μητρώο στιβαρότητας

Το μητρώο στιβαρότητας του τετραπλευρικού ισοπαραμετρικού στοιχείου Reissner-Mindlin με 4 κόμβους δίνεται από τη γενική σχέση:

$$\underset{(12\times12)}{[k]} = \int_{A_e} \underset{(12\times5)}{[B_\kappa]^T} \underset{(5\times5)}{[E_\kappa]} \underset{(5\times12)}{[B_\kappa]} dA_e \tag{4.95}$$

ή

$$[k] = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} [B_\kappa]^T [E_\kappa][B_\kappa] \det[J] d\xi d\eta \tag{4.96}$$

Το μητρώο στιβαρότητας ενός στοιχείου πλάκας Reissner-Mindlin μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από το άθροισμα ενός μητρώου $[k_b]$ που οφείλεται στην καμπτική στιβαρότητα της πλάκας και ενός μητρώου $[k_s]$ που οφείλεται στην εγκάρσια διατμητική στιβαρότητα:

$$[k]=[k_b]+[k_s]$$

ή

$$[k]=\int_{A_e}[B_b]^T[E_b][B_b]dA_e+\int_{A_e}[B_s]^T[E_s][B_s]dA_e \tag{4.97}$$

όπου τα μητρώα $[B_b]$ και $[E_b]$ προέρχονται από τα μητρώα $[B_k]$ και $[E_k]$ των σχέσεων (4.91) και (4.93) με το μηδενισμό των γραμμών και στηλών 4, 5, ενώ τα μητρώα $[B_s]$ και $[E_s]$ προέρχονται από τα μητρώα $[B_k]$ και $[E_k]$ με το μηδενισμό των γραμμών και στηλών 1, 2, 3.

Οι βυθίσεις μιας λεπτής πλάκας επηρεάζονται αποκλειστικά από το καμπτικό μητρώο $[k_b]$ διότι η διατμητική παραμόρφωση είναι αμελητέα. Καθώς όμως μικραίνει το πάχος το πάχος της πλάκας, ο όρος $G\,t$, που υπάρχει στο μητρώο $[k_s]$, γίνεται πολύ μεγαλύτερος του όρου $Et^3/12$, που περιέχεται στο μητρώο $[k_b]$, με αποτέλεσμα η λύση της εξίσωσης ισορροπίας $([k_b]+[k_s])\{d\}=\{r\}$ του στοιχείου πλάκας να δίνει πολύ μικρές επικόμβιες μετατοπίσεις ($\{d\}\to 0$). Το φαινόμενο αυτό της θεωρίας πλακών Reissner-Mindlin, όταν το πάχος της πλάκας είναι μικρό, λέγεται παρασιτική διατμητική στιβαρότητα (shear locking).

4.6.3 Ενσωμάτωση του υστερητικού προσομοιώματος Bouc-Wen-υστερητικές παραμορφώσεις

Το πεδίο των ελαστικών καμπυλοτήτων επεκτείνεται με την εισαγωγή ενός επιπλέον διανύσματος των αντιστοίχων υστερητικών καμπυλοτήτων:

$$\{\kappa\} = \{\kappa_x \quad \kappa_y \quad \kappa_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}\}^T \rightarrow$$
$$\{\tilde{\kappa}\} = \left\{\{\kappa\} \mid \{\kappa^h\}\right\}^T = \{\kappa_x \quad \kappa_y \quad \kappa_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx} \mid z_x \quad z_y \quad z_{xy} \quad z_{yz} \quad z_{zx}\} \tag{4.98}$$

Στην εξίσωση (4.98), το διάνυσμα των ελαστικών καμπυλοτήτων $\{\kappa\}$ επεκτείνεται στο αντίστοιχό του γενικευμένο $\{\tilde{\kappa}\}$, το οποίο αποτελείται από το διάνυσμα των συνολικών καμπυλοτήτων $\{\kappa\}$ και το διάνυσμα των υστερητικών καμπυλοτήτων $\{\kappa^h\}$.

Βασιζόμενοι στα παραπάνω και στη σχέση (4.93), θεωρούμε τον ακόλουθο μη γραμμικό υστερητικό νόμο για τις ροπές:

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = [\alpha][E_\kappa]\begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} + ([I]-[\alpha])[E_\kappa]\begin{Bmatrix} z_x \\ z_y \\ z_{xy} \\ z_{yz} \\ z_{zx} \end{Bmatrix} \tag{4.99}$$

όπου $[\alpha]$ συμβολίζει έναν τετραγωνικό διαγώνιο πίνακα με τους λόγους μετελαστικής προς την ελαστική δυσκαμψία, οι οποίοι για ένα ισοτροπικό υλικό θεωρούνται σταθεροί. Εάν $[\alpha]$ είναι ο μηδενικός πίνακας, τότε η αντίστοιχη μη γραμμική σχέση οδηγεί σε ελαστική-απολύτως πλαστική συμπεριφορά. Αν $[\alpha] = [I]$, τότε η αντίστοιχη συμπεριφορά είναι ελαστική. Πιο αναλυτικά η σχέση (4.99) μπορεί να γραφεί:

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_x^{\ e} \\ M_y^{\ e} \\ M_{xy}^{\ e} \\ Q_y^{\ e} \\ Q_x^{\ e} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} M_x^{\ h} \\ M_y^{\ h} \\ M_{xy}^{\ h} \\ Q_y^{\ h} \\ Q_x^{\ h} \end{Bmatrix} = [\alpha][E_\kappa]\begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} + ([I]-[\alpha])[E_\kappa]\begin{Bmatrix} z_x \\ z_y \\ z_{xy} \\ z_{yz} \\ z_{zx} \end{Bmatrix} \tag{4.100}$$

Οι εξισώσεις εξέλιξης των υστερητικών συνιστωσών ορίζονται ως εξής:

$$\begin{Bmatrix} \dot{M}_x{}^h \\ \dot{M}_y{}^h \\ \dot{M}_{xy}{}^h \\ \dot{Q}_y{}^h \\ \dot{Q}_x{}^h \end{Bmatrix} = \left([I]-[\alpha]\right)[E_\kappa]\begin{Bmatrix} \dot{z}_x \\ \dot{z}_y \\ \dot{z}_{xy} \\ \dot{z}_{yz} \\ \dot{z}_{zx} \end{Bmatrix}$$

$$= \left([I]-[\alpha]\right)[E_\kappa]\left([I]-H_1 H_2 [R]\right)\begin{Bmatrix} \dot{\kappa}_x \\ \dot{\kappa}_y \\ \dot{\kappa}_{xy} \\ \dot{\gamma}_{yz} \\ \dot{\gamma}_{zx} \end{Bmatrix} \tag{4.101}$$

όπου, σύμφωνα με την εξίσωση (4.22), τα H_1, H_2 μπορούν να πάρουν την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{aligned} H_1 &= \left\| \Phi\left(\left\{ M_x{}^h \quad M_y{}^h \quad M_{xy}{}^h \quad Q_y{}^h \quad Q_x{}^h \right\}^T \right) + 1 \right\|^n, \; n \geq 2 \\ H_2 &= \gamma \, \mathrm{sgn}\left(\left\{ M_x{}^h \quad M_y{}^h \quad M_{xy}{}^h \quad Q_y{}^h \quad Q_x{}^h \right\} \left\{ \dot{\kappa} \right\} \right) + \beta \end{aligned} \tag{4.102}$$

όπου η επιφάνεια διαρροής Φ εκφράζεται ως συνάρτηση των υστερητικών τμημάτων των ροπών. Επιπλέον, το μητρώο αλληλεπίδρασης $[R]$ εκφράζεται ως προς μια επιφάνεια διαρροής που διατυπώνεται ως προς τις ροπές:

$$[R] = \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \left\{ M^h \right\}} \right)^T [E_\kappa] \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \left\{ M^h \right\}} \right) \right]^{-1} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \left\{ M^h \right\}} \right) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \left\{ M^h \right\}} \right)^T [E_\kappa] \right] \tag{4.103}$$

4.6.4 Κριτήριο αστοχίας (Von Mises)

Το κριτήριο αστοχίας του Mises για την εντατική κατάσταση μιας πλάκας, συναρτήσει των συνιστωσών των τάσεων σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{yz} και τ_{zx} ($\sigma_z = 0$) δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + \left(\sigma_y - \sigma_z\right)^2 + \left(\sigma_z - \sigma_x\right)^2 + 6\tau_{xy}{}^2 + 6\tau_{yz}{}^2 + 6\tau_{xz}{}^2 = 2\sigma_\Delta{}^2 \qquad (4.104)$$

όπου σ_Δ^2 είναι το όριο διαρροής του υλικού σε εφελκυσμό.

Συνεπώς, με βάση τη σχέση (4.104), μπορούμε να ορίσουμε την εξής επιφάνεια διαρροής Φ:

$$\Phi = \frac{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + \left(\sigma_y - \sigma_z\right)^2 + \left(\sigma_z - \sigma_x\right)^2 + 6\tau_{xy}{}^2 + 6\tau_{yz}{}^2 + 6\tau_{xz}{}^2}{2\sigma_\Delta{}^2} - 1 \qquad (4.105)$$

η οποία εκφράζεται σε όρους τάσεων (stresses). Από τις σχέσεις (4.76) και (4.87) προκύπτει:

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} Z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \{\kappa\} = [Z]\{\kappa\} \qquad (4.106)$$

Για να διατυπώσουμε το κριτήριο διαρροής σε όρους ροπών και τεμνουσών συνδυάζουμε τις σχέσεις (4.92), (4.106) και (4.93), οπότε:

$$\{\sigma\} = [E][Z][E_\kappa]^{-1}[M] = \begin{Bmatrix} \dfrac{12ZM_x}{t^3} \\ \dfrac{12ZM_y}{t^3} \\ \dfrac{12ZM_{xy}}{t^3} \\ \dfrac{6}{5}\dfrac{Q_y}{t} \\ \dfrac{6}{5}\dfrac{Q_x}{t} \end{Bmatrix} \qquad (4.107)$$

Το κριτήριο διαρροής, για $Z = t/2$ και εκφρασμένο ως προς τις υστερητικές συνιστώσες των ροπών και των τεμνουσών γίνεται:

$$\Phi = \frac{36\left(M_x^h\right)^2}{t^4\left(1-\alpha(1,1)\right)^2\sigma_\Delta^2} - \frac{36\left(M_x^h\right)\left(M_y^h\right)}{t^4\left(1-\alpha(1,1)\right)\left(1-\alpha(2,2)\right)\sigma_\Delta^2} + \frac{36\left(M_y^h\right)^2}{t^4\left(1-\alpha(2,2)\right)^2\sigma_\Delta^2}$$
$$+\frac{108\left(M_{xy}^h\right)^2}{t^4\left(1-\alpha(3,3)\right)^2\sigma_\Delta^2} + \frac{108}{25}\frac{\left(Q_y^h\right)^2}{t^2\left(1-\alpha(4,4)\right)^2\sigma_\Delta^2} + \frac{108}{25}\frac{\left(Q_x^h\right)^2}{t^2\left(1-\alpha(5,5)\right)^2\sigma_\Delta^2} - 1$$

(4.108)

4.6.5 Επιπρόσθετες συναρτήσεις σχήματος για τα υστερητικά μεγέθη

Βασισμένοι στο διάνυσμα παραμορφώσεως, όπως ορίστηκε στην εξίσωση (4.98), το διάνυσμα των επικόμβιων βαθμών ελευθερίας (σχέση (4.86)) επεκτείνεται εδώ σε ένα 32×1 διάνυσμα $\left\{\tilde{d}\right\}$:

$$\left\{\tilde{d}\right\} = \left\{\{d\} \mid \{z\}\right\} =$$
$$\left\{w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad \dots \quad w_4 \quad \theta_{x4} \quad \theta_{y4} \mid z_x^{\,1} \quad z_y^{\,1} \quad z_{xy}^{\,1} \quad z_{yz}^{\,1} \quad z_{zx}^{\,1} \quad \cdots \quad z_x^{\,4} \quad z_y^{\,4} \quad z_{xy}^{\,4} \quad z_{yz}^{\,4} \quad z_{zx}^{\,4}\right\}^T$$

(4.109)

Αντίστοιχα με τη διαδικασία που αναπτύχθηκε στο 4.4.3, προκύπτει ότι:

$$\left\{\kappa^h\right\} = \left[\begin{array}{ccccc|c|ccccc} N_z^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & N_z^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_z^1 & 0 & 0 & 0 & & 0 & N_z^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_z^1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & N_z^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_z^1 & 0 & & 0 & 0 & 0 & N_z^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_z^1 & & 0 & 0 & 0 & 0 & N_z^4 \end{array}\right]\{z\}$$

ή

$$\left\{\kappa^h\right\} = \left[N_z\right]\{z\} \tag{4.110}$$

όπου $N_z^i, \quad i = 1, 2, 3, 4$ είναι οι συναρτήσεις παρεμβολής των σχέσεων (4.59).

4.6.6 Υπολογισμός μητρώου στιβαρότητας

Για να υπολογίσουμε το μητρώο στιβαρότητας ακολουθούμε τη διαδικασία που αναπτύχθηκε στο 4.6.2 (Μητρώο στιβαρότητας) λαμβάνοντας υπόψη και τις υστερητικές συνιστώσες των ροπών και των διατμητικών δυνάμεων. Οπότε:

$$\int_{A_e} [B_\kappa]^T \{M\} dA_e = \{R_c\} \rightarrow \int_{A_e} [B_\kappa]^T \left([\alpha][E_\kappa] \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} + \left([I]-[\alpha]\right)[E_\kappa] \begin{Bmatrix} z_x \\ z_y \\ z_{xy} \\ z_{yz} \\ z_{zx} \end{Bmatrix} \right) dA_e = \{R_c\}$$

(4.111)

Η σχέση (4.111) γράφεται πιο συνοπτικά:

$$\int_{A_e} [B_\kappa]^T \left([\alpha][E_\kappa]\{\kappa\} + \left([I]-[\alpha]\right)[E_\kappa]\left\{\kappa^h\right\} \right) dA_e = \{R_c\} \tag{4.112}$$

και χρησιμοποιώντας τις (4.91) και (4.110) προκύπτει:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left[B_\kappa(\xi,\eta)\right]^T \left([\alpha][E_\kappa]\left[B_\kappa(\xi,\eta)\right]\{d\} + \left([I]-[\alpha]\right)[E_\kappa]\left[N_z(\xi,\eta)\right]\{z\} \right) \det[J]\, d\xi\, d\eta = \{R_c\}$$

(4.113)

ή

$$\left[[k_e] \,\vdots\, [k_h] \right] \begin{Bmatrix} \{d\} \\ \hline \{z\} \end{Bmatrix} = \left[\tilde{k}\right]\left\{\tilde{d}\right\} = \{R_c\} \tag{4.114}$$

όπου:

$$[k_e] = \underbrace{\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left[B_\kappa(\xi,\eta)\right]^T [\alpha][E_\kappa]\left[B_\kappa(\xi,\eta)\right] \det[J]\, d\xi\, d\eta}_{12\times 12} \tag{4.115}$$

και

$$[k_h] = \underbrace{\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left[B_\kappa(\xi,\eta)\right]^T \left([I]-[\alpha]\right)[E_\kappa]\left[N_z(\xi,\eta)\right] \det[J]\, d\xi\, d\eta}_{12\times 20} \tag{4.116}$$

Η εξίσωση (4.116) μαζί με τις εξισώσεις εξέλιξης της υστέρησης (Bouc-Wen evolution equations), όπως ορίζονται στη σχέση (4.101), περιγράφουν τη μη γραμμική ανακυκλιζόμενη απόκριση ενός ισοπαραμετρικού πεπερασμένου στοιχείου πλάκας. Ακολουθούν οι εξισώσεις Bouc-Wen, διατυπωμένες για κάθε κόμβο του στοιχείου:

$$\begin{Bmatrix} \dot{z}_x \\ \dot{z}_y \\ \dot{z}_{xy} \\ \dot{z}_{yz} \\ \dot{z}_{zx} \end{Bmatrix}_{i=1,2,3,4} = \left([I] - H_1 H_2 [R] \right) [B_\kappa]_{i=1,2,3,4} \{\dot{d}\} \tag{4.117}$$

4.7 Διαδικασία επίλυσης

Η αριθμητική επίλυση των εξισώσεων των πεπερασμένων στοιχείων στηρίζεται στον κατάλληλο ορισμό μιας μαθηματικής μεθοδολογίας η οποία θα είναι απλή ως προς το σκεπτικό της και υπολογιστικά ακριβής. Τα μητρώα στιβαρότητας των πεπερασμένων στοιχείων, που έχουν προκύψει με τις μεθόδους που αναφέρθηκαν σε αυτό το κεφάλαιο, «συντίθενται» με εφαρμογή της μεθόδου της άμεσης δυσκαμψίας, έτσι ώστε να σχηματίσουν το μητρώο δυσκαμψίας της κατασκευής $[K_s]$, το οποίο, στη γενική του μορφή, αποτελείται από ένα σταθερό ελαστικό μέρος και από ένα υστερητικό μέρος. Συνεπώς, η εξίσωση κίνησης διατυπώνεται ως εξής:

$$[M_s]\{\ddot{U}\} + [C_s]\{\dot{U}\} + [K_s]\{U\} + [H_s]\{z\} = \{P(t)\} \tag{4.118}$$

όπου $[M_s]$, $[C_s]$, $[K_s]$ είναι τα τετραγωνικά, συμμετρικά μητρώα της μάζας, της ιξώδους αποσβέσεως και της στιβαρότητας της κατασκευής αντίστοιχα με διάσταση $(n_f \times n_f)$ ενώ $[H_s]$ είναι το ορθογώνιο καθολικό υστερητικό μητρώο της κατασκευής με διάσταση $(n_f \times n_{hys})$ και $\{z\}$ είναι το διάνυσμα $(n_{hys} \times 1)$ των υστερητικών βαθμών ελευθερίας, με το n_{hys} να είναι ο αριθμός των υστερητικών βαθμών ελευθερίας. Επιπλέον, $\{P(t)\}$ είναι το διάνυσμα $(n_f \times 1)$ των εξωτερικών δυνάμεων, με το n_f να είναι ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας της κατασκευής. Το σύστημα εξισώσεων (4.118) μαζί με τις εξισώσεις εξέλιξης του Bouc-Wen (π.χ. εξισώσεις (4.74) ή (4.117)) περιγράφουν πλήρως την απόκριση του συστήματος σε μια δεδομένη εξωτερική φόρτιση και σε δεδομένες αρχικές συνθήκες.

Για να επιλύσουμε το παραπάνω σύστημα εξισώσεων, το μετατρέπουμε σε σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης. Αυτό επιτυγχάνεται εισάγοντας ως βοηθητικό άγνωστο το διάνυσμα των καθολικών επικόμβιων ταχυτήτων $\{\dot{U}\}$ κι έτσι προκύπτουν οι ακόλουθες $2n_f$ γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης:

$$\begin{Bmatrix} \{\dot{U}\} \\ \{\ddot{U}\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ \hline -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[C] & -[M]^{-1}[H] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U\} \\ \{\dot{U}\} \\ \{z\} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \{P(t)\} \end{Bmatrix} \quad (4.119)$$

Αυτές είναι συζευγμένες με το μη γραμμικό σύστημα των n_{hys} εξισώσεων εξέλιξης της μορφής:

$$\{\dot{z}\} = f\left(\{\dot{U}\},\{z\}\right) \quad (4.120)$$

4.8 Συμπεράσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο, παρουσιάζεται το πεπερασμένο στοιχείο πλάκας Kirchhoff που ενσωματώνει την υστέρηση Bouc-Wen. Για να ενσωματωθεί το προσομοίωμα Bouc-Wen, θεωρούμε ως υστερητικές παραμέτρους τα υστερητικά τμήματα των καμπυλοτήτων και κατά συνέπεια το υστερητικό μητρώο στιβαρότητας παραμένει σταθερό σε όλη τη διάρκεια της διέγερσης. Στη συνέχεια, παρουσιάζεται το υστερητικό στοιχείο πλάκας Reissner-Mindlin, στο οποίο θεωρούμε ως υστερητικές παραμέτρους τα υστερητικά τμήματα των καμπυλοτήτων και των γωνιών διάτμησης. Και στα δύο στοιχεία απαιτείται η ύπαρξη κάποιου κριτηρίου διαρροής, το οποίο κατασκευάζεται με βάση το κριτήριο von Mises. Τέλος, παρουσιάζεται μια μέθοδος επίλυσης των εξισώσεων που περιγράφουν την υστερητική δυναμική απόκριση μιας κατασκευής.

4.9 Παράρτημα

4.9.1 Απεικόνιση του καρτεσιανού συστήματος στο φυσικό σύστημα στην ισοπαραμετρική θεώρηση- Ιακωβιανό μητρώο

Για τον υπολογισμό του μητρώου στιβαρότητας των ισοπαραμετρικών στοιχείων απαιτείται η απεικόνιση του καρτεσιανού συστήματος στο φυσικό. Η ορθή απεικόνιση ορίζει τις συντεταγμένες x, y, z συναρτήσει των φυσικών συντεταγμένων ξ, η, ζ:

$$\begin{aligned} x &= x(\xi,\eta,\zeta) \\ y &= y(\xi,\eta,\zeta) \\ z &= z(\xi,\eta,\zeta) \end{aligned} \tag{Π.1}$$

Η αντίστροφη απεικόνιση ορίζει τις συντεταγμένες ξ, η, ζ συναρτήσει των x, y, z:

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(x,y,z) \\ \eta &= \eta(x,y,z) \\ \zeta &= \zeta(x,y,z) \end{aligned} \tag{Π.2}$$

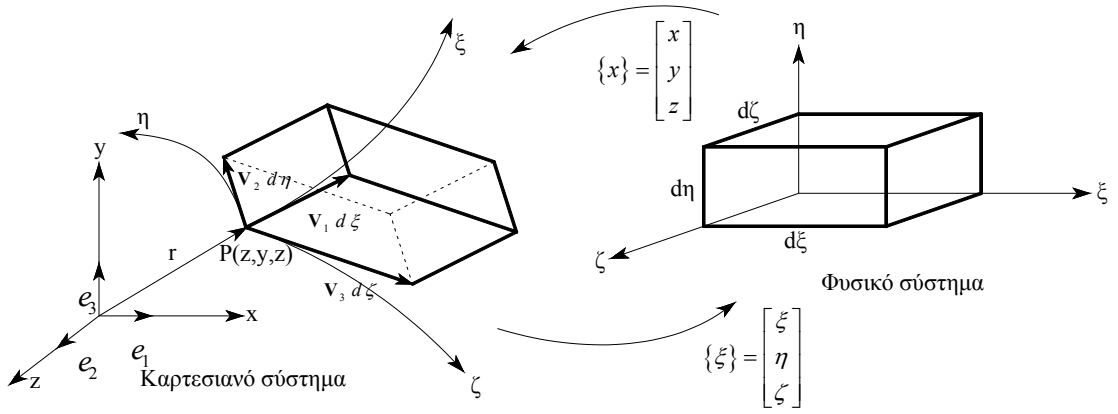
Η απεικόνιση μεταξύ των καμπυλόγραμμων και των καρτεσιανών συντεταγμένων πρέπει να είναι αμφιμονοσήμαντη έτσι ώστε κάθε σημείο με συντεταγμένες x, y, z να έχει αντίστοιχες συντεταγμένες ξ ,η, ζ και το αντίστροφο.

Η απεικόνιση του φυσικού συστήματος στο καρτεσιανό δίνει ένα καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων σε κάθε σημείο P, όπως φαίνεται στην Εικόνα 4.10. Οι καμπυλόγραμμοι άξονες ξ ,η, ζ του σημείου P προκύπτουν από την ορθή απεικόνιση και ορίζονται από την τροχιά του σημείου P όταν μεταβάλλεται μόνο η μια φυσική συντεταγμένη ενώ οι άλλες δύο παραμένουν σταθερές. Έτσι, η καμπύλη ξ προκύπτει όταν διατηρούνται σταθερές οι τιμές των η, ζ. Αντίστοιχα, προκύπτουν και οι άλλες καμπύλες.

Το διάνυσμα θέσης $\{r\}$ του σημείου P δίνεται από τη σχέση:

$$\{r\} = x\{e_1\} + y\{e_2\} + z\{e_3\} \tag{Π.3}$$

όπου x, y, z είναι οι συντεταγμένες του σημείου P και $\{e_i\}$ $(i = 1,2,3)$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων x, y, z, αντίστοιχα.



Εικόνα 4.10 Φυσικό και καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Ορθή και αντίστροφη απεικόνιση ενός στοιχειώδους ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου dξ-dη-dζ

Τα εφαπτομενικά διανύσματα στις καμπύλες ξ, η, ζ ορίζονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned}
\{V_1\} &= \frac{\partial\{r\}}{\partial\xi} = \frac{\partial x}{\partial\xi}\{e_1\} + \frac{\partial y}{\partial\xi}\{e_2\} + \frac{\partial z}{\partial\xi}\{e_3\} \\
\{V_2\} &= \frac{\partial\{r\}}{\partial\eta} = \frac{\partial x}{\partial\eta}\{e_1\} + \frac{\partial y}{\partial\eta}\{e_2\} + \frac{\partial z}{\partial\eta}\{e_3\} \\
\{V_3\} &= \frac{\partial\{r\}}{\partial\zeta} = \frac{\partial x}{\partial\zeta}\{e_1\} + \frac{\partial y}{\partial\zeta}\{e_2\} + \frac{\partial z}{\partial\zeta}\{e_3\}
\end{aligned} \tag{Π.4}$$

Κατά συνέπεια, οι πλευρές του στοιχειώδους παραλληλεπιπέδου δίνονται από τα διανύσματα $\{V_1\}\,d\xi$, $\{V_2\}\,d\eta$ και $\{V_3\}\,d\zeta$, όπως φαίνονται στην Εικόνα 4.10.

Ο όγκος του παραλληλεπιπέδου δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned}
dV &= \left(\{V_1\}\,d\xi\right)\cdot\left[\left(\{V_2\}\,d\eta\right)\times\left(\{V_3\}\,d\zeta\right)\right] \\
&= \{V_1\}\cdot\left(\{V_2\}\times\{V_3\}\right)d\xi d\eta d\zeta
\end{aligned} \tag{Π.5}$$

Με την αξιοποίηση των σχέσεων (Π.4), η σχέση (Π.5) γράφεται

$$dV = \left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\{e_1\} + \frac{\partial y}{\partial\xi}\{e_2\} + \frac{\partial z}{\partial\xi}\{e_3\}\right)\begin{vmatrix} \{e_1\} & \{e_2\} & \{e_3\} \\ \dfrac{\partial x}{\partial\eta} & \dfrac{\partial y}{\partial\eta} & \dfrac{\partial z}{\partial\eta} \\ \dfrac{\partial x}{\partial\zeta} & \dfrac{\partial y}{\partial\zeta} & \dfrac{\partial z}{\partial\zeta} \end{vmatrix} d\xi d\eta d\zeta$$

ή

$$dV = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix} d\xi d\eta d\zeta = \det\left[J\right] d\xi d\eta d\zeta \qquad (\Pi.6)$$

όπου $\det\left[J\right]$ είναι η ορίζουσα του Ιακωβιανού μητρώου $\left[J\right]$.

Στην περίπτωση της διδιάστατης απεικόνισης, το εμβαδόν dA του στοιχειώδους παραλληλογράμμου στο καρτεσιανό σύστημα δίνεται από τη σχέση:

$$dA = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} d\xi d\eta = \det\left[J\right] d\xi d\eta \qquad (\Pi.7)$$

Η παραγώγιση των w, θ_x, θ_y ως προς x, y δε μπορεί να γίνει άμεσα από τις εξισώσεις (4.85) του πεδίου των μετατοπίσεων διότι τα w, θ_x, θ_y έχουν εκφραστεί αναλυτικά ως προς τις φυσικές συντεταγμένες ξ, η και όχι ως προς τις καρτεσιανές συντεταγμένες x, y. Για να παρακάμψουμε αυτήν τη δυσκολία, ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία.

Έστω μια συνάρτηση φ που ορίζεται στα δύο συστήματα συντεταγμένων $\varphi = \varphi\left(x, y\right)$ και $\varphi = \varphi\left(\xi, \eta\right)$. Οι παράγωγοι της φ ως προς x, y δίνονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} \end{aligned} \qquad (\Pi.8)$$

Εάν οι παράγωγοι της φ ως προς x, y δεν είναι δυνατόν να εκφραστούν με μία αναλυτική σχέση, όπως εκφράζονται οι παράγωγοι της φ ως προς ξ, η, τότε ο υπολογισμός των $\varphi_{,x}$, $\varphi_{,y}$ γίνεται έμμεσα με την παραγώγιση της συνάρτησης φ ως προς ξ, η:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi}$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta} \qquad (\Pi.9)$$

ή

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{bmatrix}$$

ή

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \end{bmatrix} = [J] \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{bmatrix} \qquad (\Pi.10)$$

όπου το μητρώο $[J]$ είναι το Ιακωβιανό μητρώο, το οποίο προκύπτει αναλυτικά από την παραγώγιση των σχέσεων (4.82) και (4.84) ως προς ξ, η.

Το Ιακωβιανό μητρώο δίνεται από τη σχέση:

$$[J] = \begin{bmatrix} N_{1,\xi} & N_{2,\xi} & N_{3,\xi} & N_{4,\xi} \\ N_{1,\eta} & N_{2,\eta} & N_{3,\eta} & N_{4,\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} \qquad (\Pi.11)$$

Η σχέση (Π.11) γράφεται επίσης με τη μορφή

$$[J] = [D_N] \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} \qquad (\Pi.12)$$

όπου

$$[D_N] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & -(1+\eta) \\ -(1-\xi) & -(1+\xi) & (1+\xi) & (1-\xi) \end{bmatrix} \qquad (\Pi.13)$$

Προκειμένου να υπολογιστούν οι ζητούμενες παράγωγοι της συνάρτησης φ ως προς x, y δεν έχουμε παρά να λύσουμε την εξίσωση (Π.10) ως προς τις παραγώγους αυτές:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{Π.14}$$

Το μητρώο $[J]^{-1}$ δίνεται από τη σχέση

$$[J]^{-1} = \begin{bmatrix} J_{11}^{*} & J_{12}^{*} \\ J_{21}^{*} & J_{22}^{*} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} \tag{Π.15}$$

όπου

$$\det[J] = J_{11}J_{22} - J_{21}J_{12} \tag{Π.16}$$

J_{ij} είναι τα στοιχεία του Ιακωβιανού μητρώου και J_{ij}^{*} είναι τα στοιχεία του $[J]^{-1}$.

κεφάλαιο 5

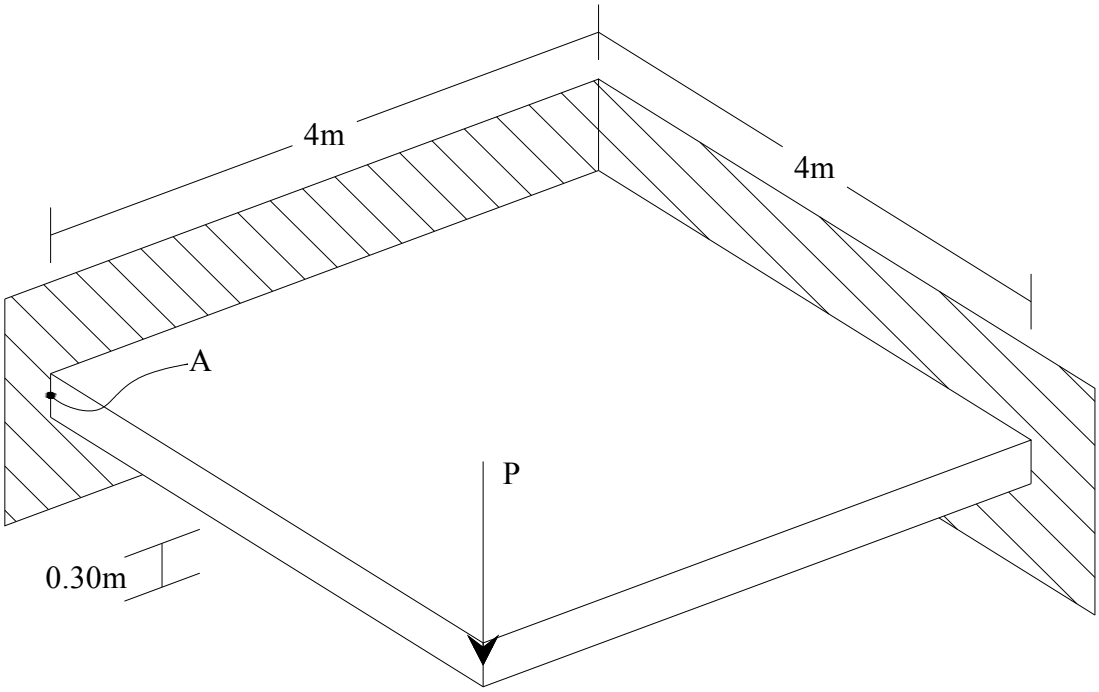
Παραδείγματα-
Αριθμητικές εφαρμογές

5.1 Εισαγωγή

Σ' αυτό το κεφάλαιο, παρουσιάζονται ορισμένα παραδείγματα τα οποία αποδεικνύουν την ισχύ της προτεινόμενης διατύπωσης μέσω της σύγκρισης με το πρόγραμμα Femap v10. Όλα τα παραδείγματα που ακολουθούν αφορούν πλάκες οι οποίες υποβάλλονται σε διάφορες φορτίσεις. Τα προσομοιώματα των παραδειγμάτων για λόγους επαλήθευσης έγιναν με τα λιγότερα στοιχεία χωρίς να μελετηθεί η σύγκλισή τους. Η ταυτοποίηση των παραμέτρων των προσομοιωμάτων με το Femap έγινε σε κατάλληλη διακριτοποίηση που αντιστοιχεί σε συγκλίνοντα αποτελέσματα.

5.2 Πρώτο παράδειγμα

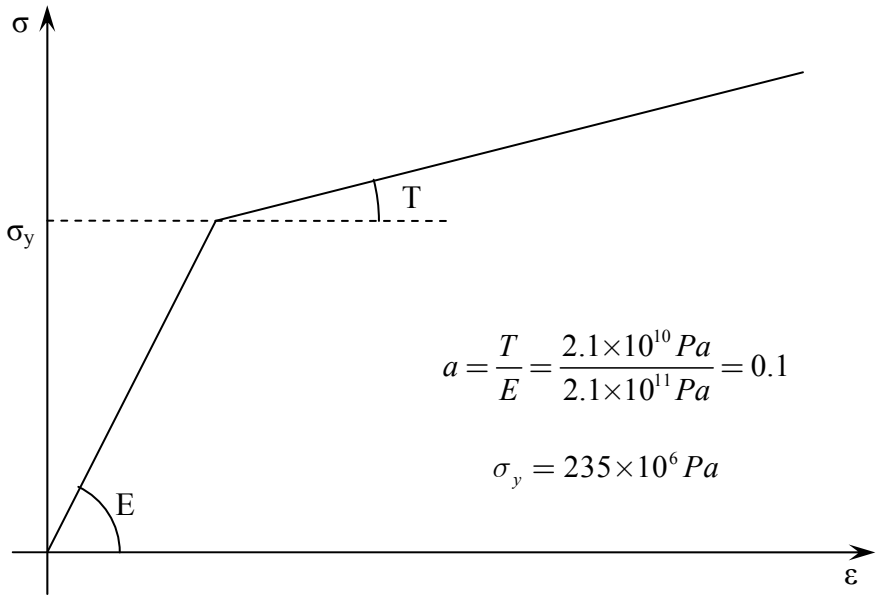
Αρχικά, στο 1° παράδειγμα, θα εξεταστεί μια τετραγωνική πλάκα διαστάσεων $4m \times 4m$ και πάχους $0.30m$. Όσον αφορά στις συνοριακές συνθήκες της πλάκας αυτής, οι δύο διαδοχικές πλευρές της είναι πακτωμένες ενώ οι άλλες δύο είναι ελεύθερες. Στην ελεύθερη γωνία της πλάκας ασκείται συγκεντρωμένο φορτίο P, όπως φαίνεται στην Εικόνα 5.1.



Εικόνα 5.1 Φορέας 1^{ου} παραδείγματος

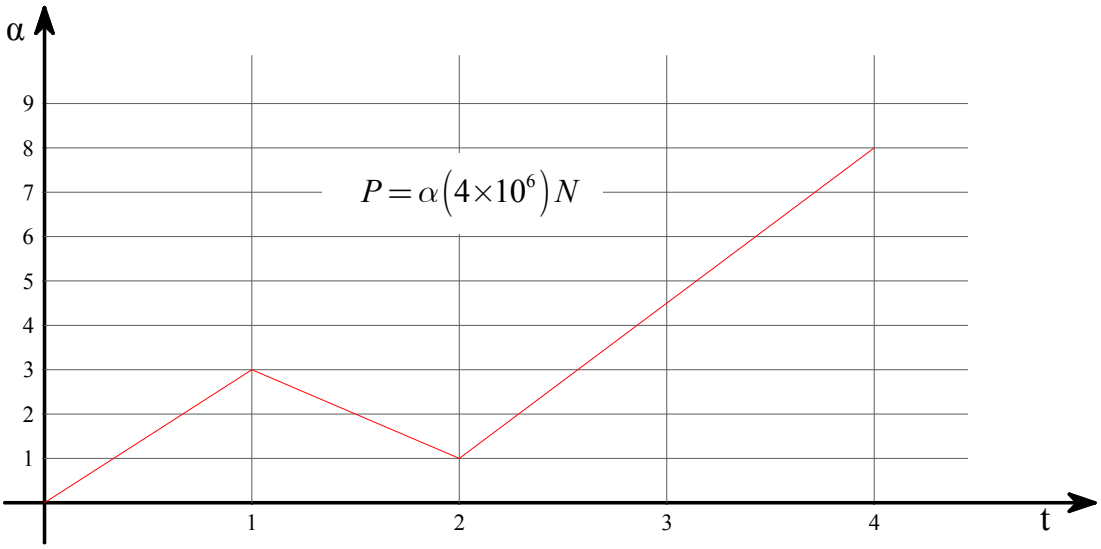
Θεωρούμε ότι η πλάκα αυτή είναι κατασκευασμένη από ισότροπο, ομογενές ελαστοπλαστικό υλικό πυκνότητας $d = 7850 kg/m^3$, μέτρου ελαστικότητας $E = 2.1 \times 10^{11} Pa$ και με λόγο Poisson $\nu = 0.3$. Το υλικό αυτό, στη δοκιμή του

μονοαξονικού εφελκυσμού, διαρρέει σε τάση $\sigma_y = 235\times10^6\,Pa$ και παρουσιάζει κράτυνση με εφαπτομενικό μέτρο κράτυνσης (tangent modulus) $T = 2.1\times10^{10}\,Pa$ (Εικόνα 5.2). Το πλαστικό μέτρο κράτυνσης H (plastic modulus) δίνεται από τη σχέση $\frac{1}{H} = \frac{1}{T} - \frac{1}{E}$ και συνεπώς $H = 2.333\times10^{10}\,Pa$.



Εικόνα 5.2 Διάγραμμα τάσεων-ανηγμένων παραμορφώσεων του υλικού σε δοκιμή εφελκυσμού

Τέλος, ορίζουμε το συγκεντρωμένο φορτίο που επιβάλλεται στην ελεύθερη γωνία της πλάκας, το οποίο μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου σύμφωνα με την Εικόνα 5.3.

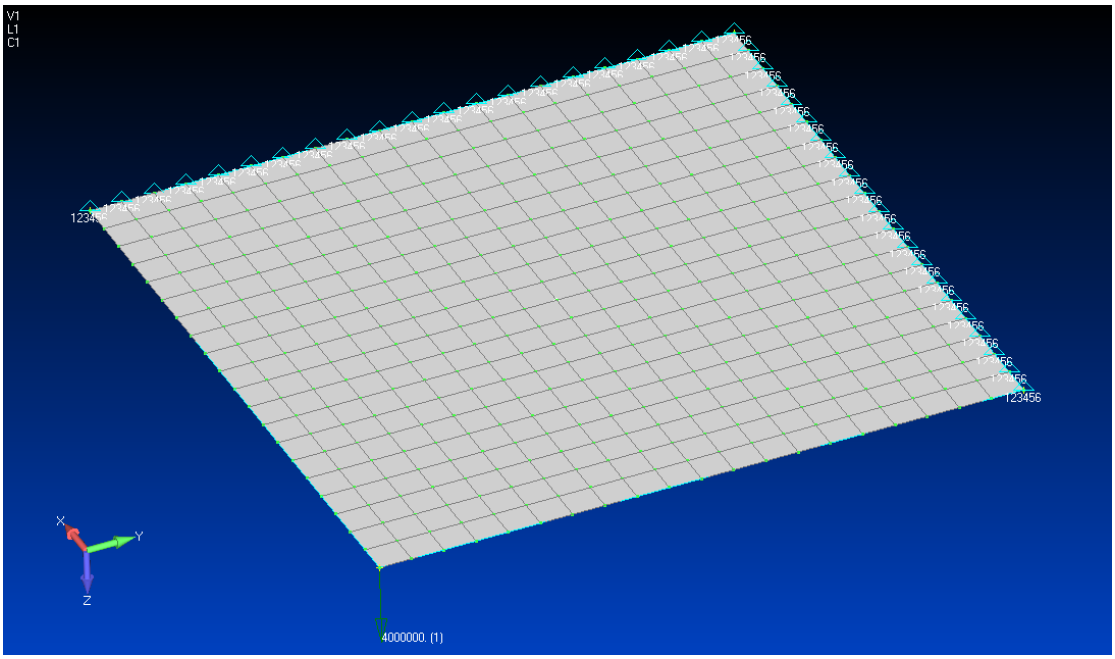


Εικόνα 5.3 Φόρτιση ελεύθερης γωνίας της πλάκας

5.2.1 Επίλυση του φορέα

Σε πρώτο στάδιο θα γίνει η επίλυση του φορέα μέσω του προγράμματος Femap. Ακολουθεί η συνοπτική παρουσίαση της διαδικασίας:

1) Εισάγονται τα δεδομένα της γεωμετρίας του φορέα.
   Geometry → Point… δίνονται τις συντεταγμένες των γωνιών της πλάκας
   Geometry → Surface → Corners… ορίζεται μια επιφάνεια με γωνίες τα παραπάνω σημεία
2) Ορίζεται η συνάρτηση της φόρτισης ακολουθώντας τα βήματα Model → Function… Στο type επιλέγεται 1..vs. Time και στο data entry δίνονται οι συντεταγμένες των σημείων της συνάρτησης φόρτισης.
3) Ορίζονται οι παράμετροι του υλικού από το Model → Material… Στο Define material – ISOTROPIC, General συμπληρώνονται τα Young' Modulus, Poisson' s ratio και Mass Density και στο Define material – ISOTROPIC, Nonlinear επιλέγεται το Elasto-Plastic (Bi-Linear) στο Nonlinearity type και συμπληρώνονται τα Plasticity Modulus, H και Initial Yield Stress.
4) Ορίζεται ο τύπος του πεπερασμένου στοιχείου από το Model → Property… ως plate.

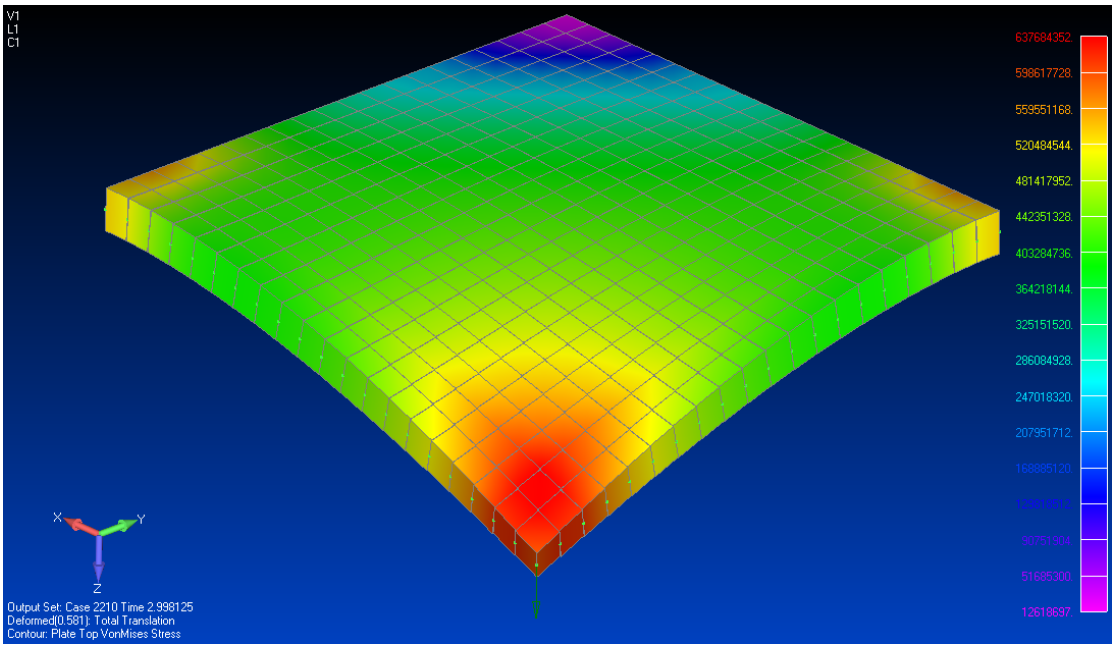


Εικόνα 5.4 Διακριτοποίηση του φορέα

5) Ακολουθεί η διακριτοποίηση του φορέα σε πεπερασμένα στοιχεία. Αυτό γίνεται από το Mesh → Mesh Control → Size on Surface…, όπου επιλέγεται ένα αρχικό

μέγεθος διακριτοποίησης και από το Mesh → Geometry → Surface, όπου εφαρμόζεται τελικά η διακριτοποίηση (Εικόνα 5.4).

6) Καθορίζονται οι στηρίξεις και η φόρτιση του φορέα από το Model → Constraint → Nodal… και από το Model → Load → Nodal…, αντίστοιχα.
7) Ρυθμίζονται οι παράμετροι της ανάλυσης από το Model → Load → Nonlinear Analysis…, όπου, στο Solution Type, επιλέγεται το Transient.
8) Τέλος, από το Model → Analysis επιλέγεται ο τύπος της ανάλυσης που θα πραγματοποιηθεί (12..Nonlinear Transient Response).

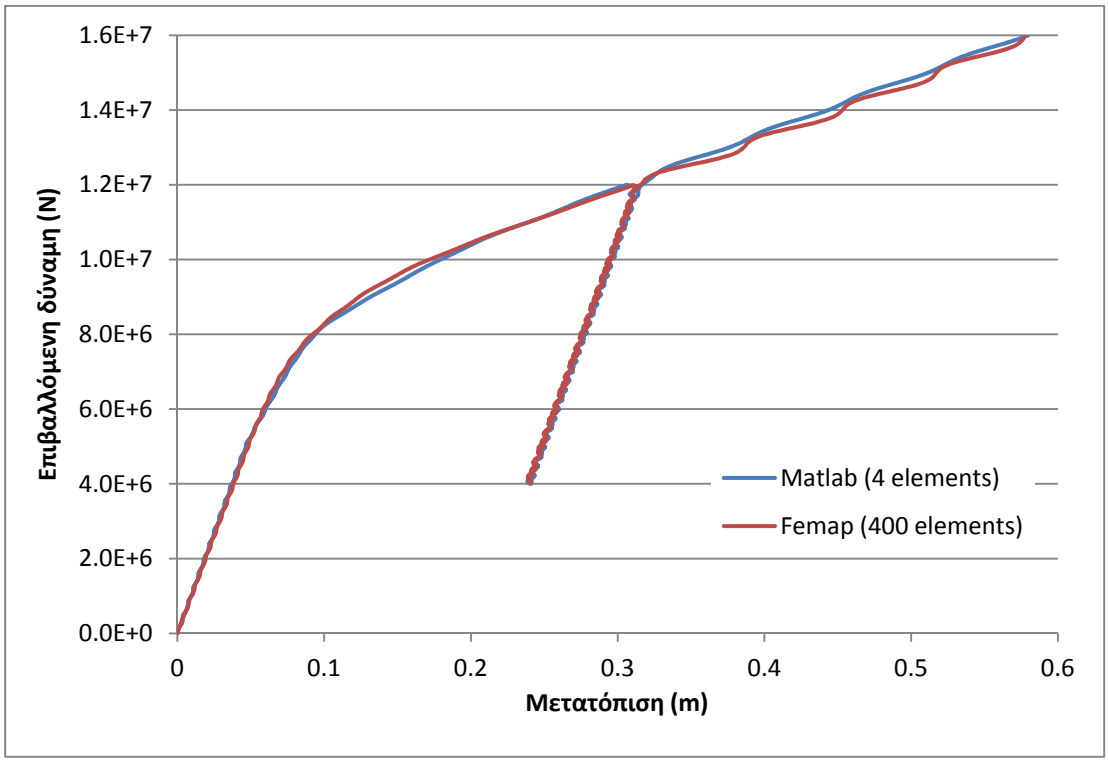


Εικόνα 5.5 Αποτελέσματα ανάλυσης στο Femap

Το παραπάνω πρόβλημα λύνεται και μέσω κώδικα γραμμένου σε Matlab. Ο κώδικας αυτός επιλύει προβλήματα πλακών με βάση τη θεωρία Kirchhoff ή Reissner-Mindlin, ενσωματώνοντας την υστέρηση Bouc-Wen, σύμφωνα με το κεφάλαιο 4. Το πάχος της πλάκας (0.3m) είναι μικρό σε σχέση με τις άλλες διαστάσεις, οπότε η πλάκα μπορεί να θεωρηθεί λεπτή και να επιλυθεί με βάση τη θεωρία Kirchhoff αφού πρώτα ορίσουμε τις παραμέτρους του προσομοιώματος Bouc-Wen:

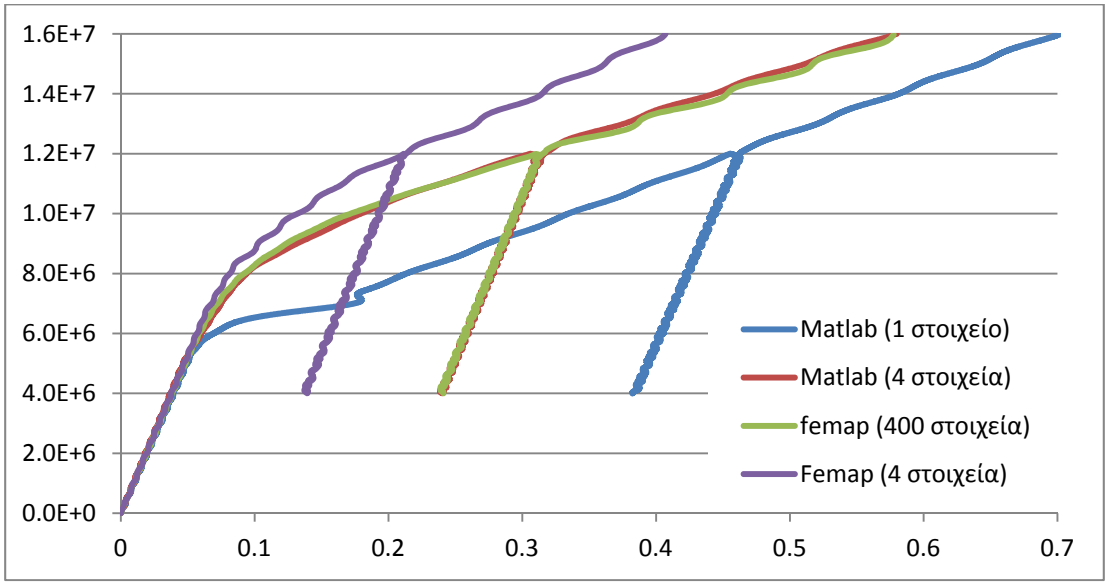
$$n = 18, \quad \beta = 0.5, \quad \gamma = 0.5, \quad \alpha = \begin{bmatrix} 0.127 & 0 & 0 \\ 0 & 0.127 & 0 \\ 0 & 0 & 0.127 \end{bmatrix}.$$

Στην Εικόνα 5.6 παρουσιάζεται η γραφική παράσταση, όπως προκύπτει και από το Femap και από τη Matlab, της μετατόπισης του κόμβου όπου επιβάλλεται το φορτίο ως προς την τιμή του φορτίου αυτού.



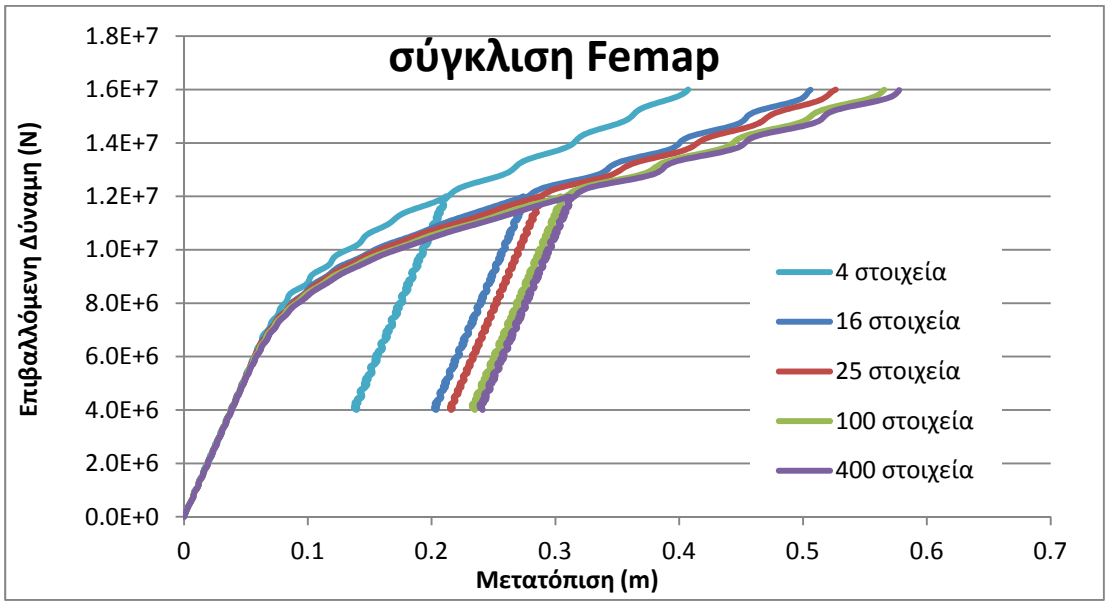
Εικόνα 5.6 Σύγκριση αποτελεσμάτων Matlab και Femap

Στην Εικόνα 5.7 παρουσιάζεται μια σύγκριση των διαγραμμάτων δύναμης-παραμόρφωσης για δύο διαφορετικές διακριτοποιήσεις.

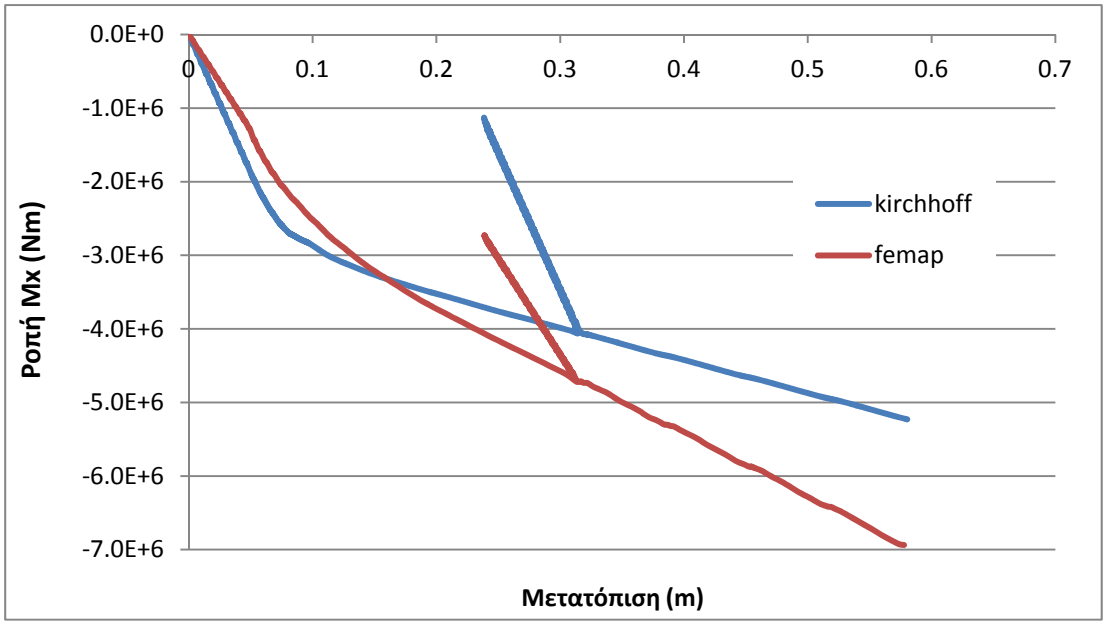


Εικόνα 5.7 Αποτελέσματα για δύο διαφορετικές διακριτοποιήσεις

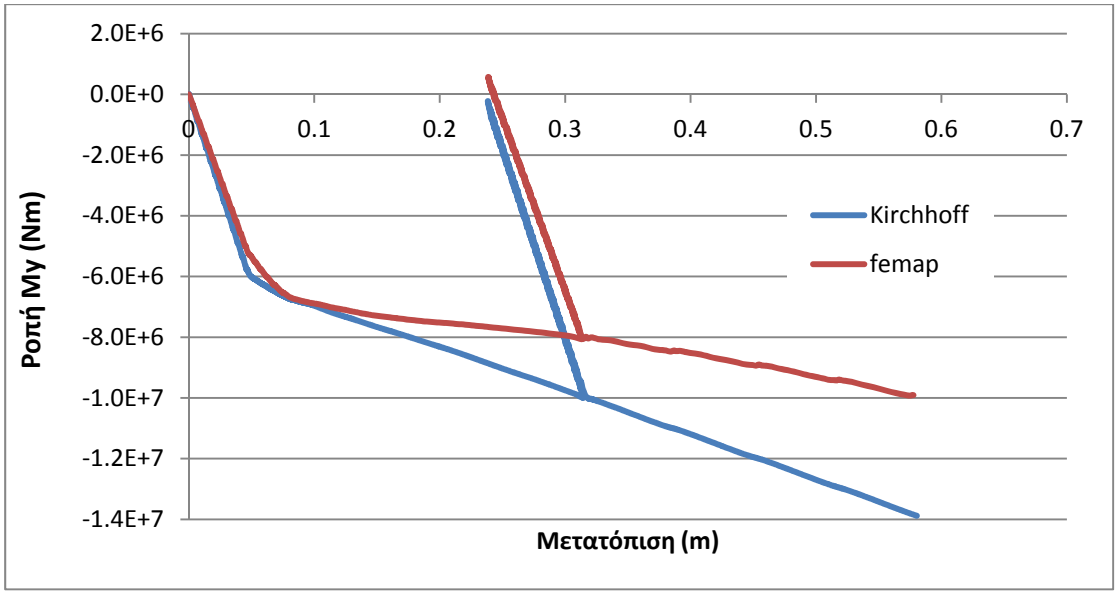
Ακολουθούν διαγράμματα τα οποία παρουσιάζουν τη σύγκλιση του Femap και τα εντατικά μεγέθη Mx και My σε σχέση με τη μετατόπιση.



Εικόνα 5.8 Σύγκλιση Femap



Εικόνα 5.9 Διάγραμμα Ροπής Mx-Μετατόπισης στο σημείο A(Εικόνα 5.1)



Εικόνα 5.10 Διάγραμμα Ροπής My-Μετατόπισης στο σημείο A (Εικόνα 5.1)

5.2.2 Συμπεράσματα-Παρατηρήσεις

Από τις παραπάνω γραφικές παραστάσεις μπορεί να εξαχθεί το συμπέρασμα ότι το προτεινόμενο πεπερασμένο στοιχείο πλάκας με υστέρηση Bouc-Wen παρουσιάζει παρόμοια συμπεριφορά με το στοιχείο plate του Femap, καθώς οι γραφικές παραστάσεις φόρτισης-μετατόπισης βρίσκονται αρκετά «κοντά». Αντίθετα, στα διαγράμματα ροπής-μετατόπισης, ενώ υπάρχει κάποια αντιστοίχηση στον ελαστικό κλάδο, αυτό δεν επιτυγχάνεται στον μετελαστικό κλάδο. Μετά τη διαρροή, στο διάγραμμα Mx-μετατόπιση το διάγραμμα που προκύπτει από το Femap «κατεβαίνει κάτω» από το διάγραμμα που προκύπτει από τη Matlab ενώ στο διάγραμμα My-μετατόπιση συμβαίνει το αντίθετο. Πάντως, στα αποτελέσματα από τη Matlab ο λόγος των κλίσεων του ελαστικού προς το μετελαστικό κλάδο είναι ίσος με αυτόν που ορίζεται στο μητρώο $[\alpha]$ του Bouc-Wen. Πρέπει να σημειωθεί ότι το μητρώο $[\alpha]$ που απαιτείται από το προσομοίωμα Bouc-Wen προσδιορίστηκε με δοκιμές, έτσι ώστε η γραφική παράσταση επιβαλλόμενης δύναμης-μετατόπισης που προκύπτει από το Matlab να προσεγγίσει αυτήν που προκύπτει από το Femap. Το μητρώο $[\alpha]$ υπεισέρχεται στη σχέση $\{M\}=[\alpha][E_\kappa]\{\kappa\}+([I]-[\alpha])[E_\kappa]\{\kappa^h\}$ και προφανώς δε μπορεί να προκύψει άμεση συσχέτιση μεταξύ του $[\alpha]$ και του a (λόγος μετελαστικής προς την ελαστική δυσκαμψία ενός υλικού σε μονοαξονική καταπόνηση, Εικόνα 5.2).

Αυτή η αοριστία οφείλεται στο γεγονός ότι η προτεινόμενη διατύπωση βασίστηκε στη σχέση (3.36) του κεφαλαίου 3 $\left(\{\sigma\}=[\alpha]\{\sigma^e\}+\left([I]-[\alpha]\right)\{\sigma^h\}\right)$.

Για να αποφευχθεί η αοριστία αυτή προτείνεται η παρακάτω διαδικασία. Θεωρούμε π.χ. ότι ισχύει το προσομοίωμα κράτυνσης Melan-Prager:

$$\{\dot{\eta}\}=c\left(\{\eta\}\right)\{\dot{\varepsilon}^p\} \tag{4.17}$$

Για περισσότερη ευκολία θεωρούμε ότι $c\left(\{\eta\}\right)=C$ (σταθερός συντελεστής, δηλαδή περίπτωση γραμμικής κινηματικής κράτυνσης).

$$\{\dot{\eta}\}=C\{\dot{\varepsilon}^p\} \tag{4.18}$$

$$\{\dot{\eta}\}=C\left(\{\dot{\varepsilon}\}-\{\dot{\varepsilon}^{el}\}\right) \tag{4.19}$$

$$\{\dot{\eta}\}=C\left(\{\dot{\varepsilon}\}-[E]^{-1}\{\dot{\sigma}\}\right) \tag{4.20}$$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με Z (Εικόνα 4.1).

$$Z\{\dot{\eta}\}=Z\left(C\left(\{\dot{\varepsilon}\}-[E]^{-1}\{\dot{\sigma}\}\right)\right) \tag{4.21}$$

$$Z\{\dot{\eta}\}dZ=Z\left(C\left(\{\dot{\varepsilon}\}-[E]^{-1}\{\dot{\sigma}\}\right)\right)dZ \tag{4.22}$$

$$\int_{-t/2}^{t/2} Z\{\dot{\eta}\}dZ=C\int_{-t/2}^{t/2} Z\{\dot{\varepsilon}\}dZ-C\int_{-t/2}^{t/2} Z[E]^{-1}\{\dot{\sigma}\}dZ \tag{4.23}$$

$$\{\dot{M}_\eta\}=C\int_{-t/2}^{t/2} Z^2\{\kappa\}dZ-C[E]^{-1}\int_{-t/2}^{t/2} Z\{\dot{\sigma}\}dZ \tag{4.24}$$

$$\{\dot{M}_\eta\}=C\{\kappa\}\int_{-t/2}^{t/2} Z^2dZ-C[E]^{-1}\{\dot{M}\} \tag{4.25}$$

$$\{\dot{M}_\eta\}=\begin{Bmatrix}\dot{M}_{\eta,X}\\ \dot{M}_{\eta,Y}\\ \dot{M}_{\eta,XY}\end{Bmatrix}=C\frac{t^3}{12}\{\kappa\}-C[E]^{-1}\begin{Bmatrix}\dot{M}_X\\ \dot{M}_Y\\ \dot{M}_{XY}\end{Bmatrix} \tag{4.26}$$

$$\left\{\dot{M}_{\eta}\right\}=\begin{Bmatrix}\dot{M}_{\eta,X}\\ \dot{M}_{\eta,Y}\\ \dot{M}_{\eta,XY}\end{Bmatrix}=C\frac{t^3}{12}\left(\left\{\kappa\right\}-\left[E_{\kappa}\right]^{-1}\begin{Bmatrix}\dot{M}_{X}\\ \dot{M}_{Y}\\ \dot{M}_{XY}\end{Bmatrix}\right) \tag{4.27}$$

Οπότε, έτσι ο νόμος κράτυνσης εκφράζεται σε όρους ροπών και καμπυλοτήτων αντί τάσεων και ανηγμένων παραμορφώσεων.

Καθώς κάμπτεται η πλάκα, δεν εμφανίζεται ακαριαία η διαρροή σε ένα σημείο της αλλά αρχικά διαρρέουν οι ακραίες ίνες και στη συνέχεια η διαρροή προχωρά προς τη μέση επιφάνεια της πλάκας. Γι' αυτό πρέπει να ορίσουμε ένα συμβατικό όριο διαρροής, προσδιορίζοντας μια τιμή του Z στη σχέση (4.52). Στο συγκεκριμένο παράδειγμα ορίστηκε $Z=t/3$ έτσι ώστε η διαρροή να εμφανίζεται στο ίδιο σημείο τόσο στα αποτελέσματα της Matlab όσο και του Femap.

Δεδομένης της κράτυνσης, το κριτήριο διαρροής γίνεται:

$$\begin{aligned}\Phi=&\frac{144Z^2\left(\left(M_X-M_{\eta,X}\right)^2+\left(M_Y-M_{\eta,Y}\right)^2\right)}{t^6\sigma_{\Delta}^2}+\\ &\frac{144Z^2\left(-\left(M_X-M_{\eta,X}\right)\left(M_Y-M_{\eta,Y}\right)+3\left(M_{XY}-M_{\eta,XY}\right)^2\right)}{t^6\sigma_{\Delta}^2}-1\end{aligned} \tag{4.28}$$

Το προσομοίωμα Bouc-Wen εκφράζεται ως εξής:

$$\left\{\dot{M}\right\}=\left[E_{\kappa}\right]\left(\left[I\right]-\left|\frac{\Phi}{\Phi_0}\right|^N\left(\beta+\gamma\,\mathrm{sgn}\left(\left\{M\right\}^T\left\{\dot{\kappa}\right\}\right)\right)\left[R\right]\right)\left\{\dot{\kappa}\right\} \tag{4.29}$$

όπου το μητρώο $\left[R\right]$ ορίζεται από τη σχέση:

$$\left[R\right]=\left(-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\left\{M_{\eta}\right\}}\right)^T G\left(\left\{\eta\right\},\Phi\right)+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\left\{M\right\}}\right)^T\left[E_{\kappa}\right]\frac{\partial\Phi\left(\left\{M\right\}\right)}{\partial\left\{M\right\}}\right)^{-1}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\left\{M\right\}}\right)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\left\{M\right\}}\right)^T\left[E_{\kappa}\right] \tag{4.30}$$

Για τη συνάρτηση $G\left(\left\{\eta\right\},\Phi\right)$ ισχύει: $\left\{\dot{M}_{\eta}\right\}=\dot{\lambda}G\left(\left\{\eta\right\},\Phi\right)$

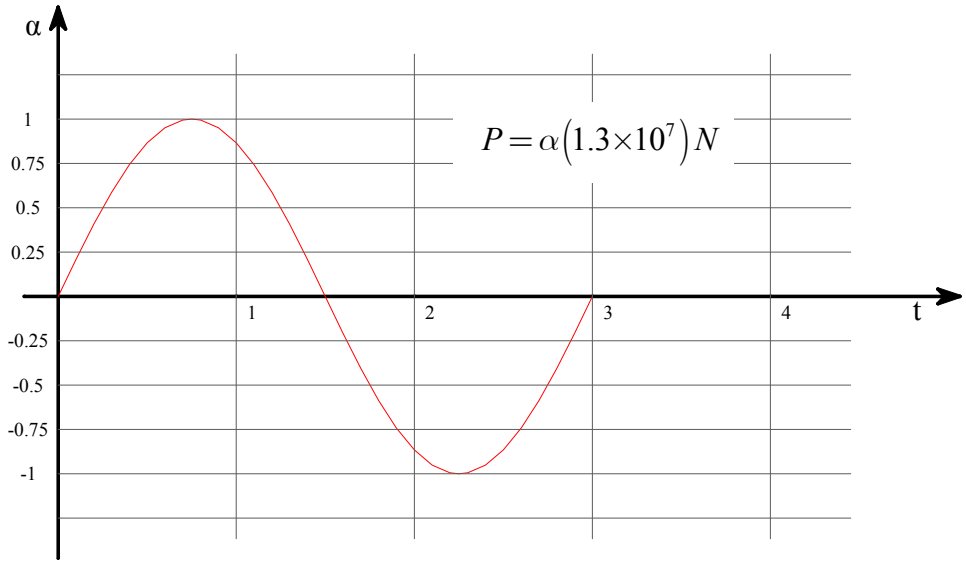
Από τη σχέση (4.27) : $\left\{\dot{M}_{\eta}\right\}=C\frac{t^3}{12}\left\{\kappa^p\right\}$

Από το νόμο της πλαστικής ροής: $\left\{\dot{\kappa}^{p}\right\} = \dot{\lambda}\dfrac{\partial\Phi\left(\{\mathrm{M}\},\{M_{\eta}\}\right)}{\partial\{M\}}$

Άρα, $G\left(\{\eta\},\Phi\right) = C\dfrac{t^{3}}{12}\dfrac{\partial\Phi\left(\{\mathrm{M}\},\{M_{\eta}\}\right)}{\partial\{M\}}$

5.3 Δεύτερο παράδειγμα

Στο δεύτερο παράδειγμα ο ίδιος φορέας με τις ίδιες συνοριακές συνθήκες φορτίζεται με μια ημιτονοειδή φόρτιση (Εικόνα 5.11):

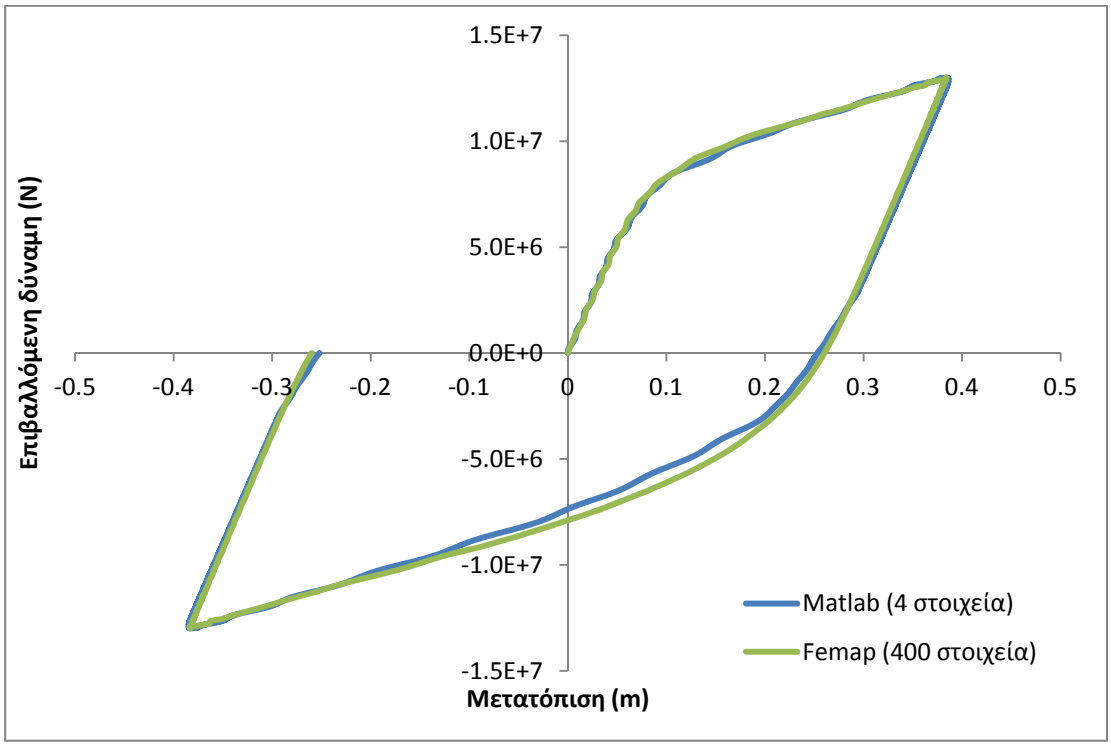


Εικόνα 5.11 Φόρτιση 2ου παραδείγματος

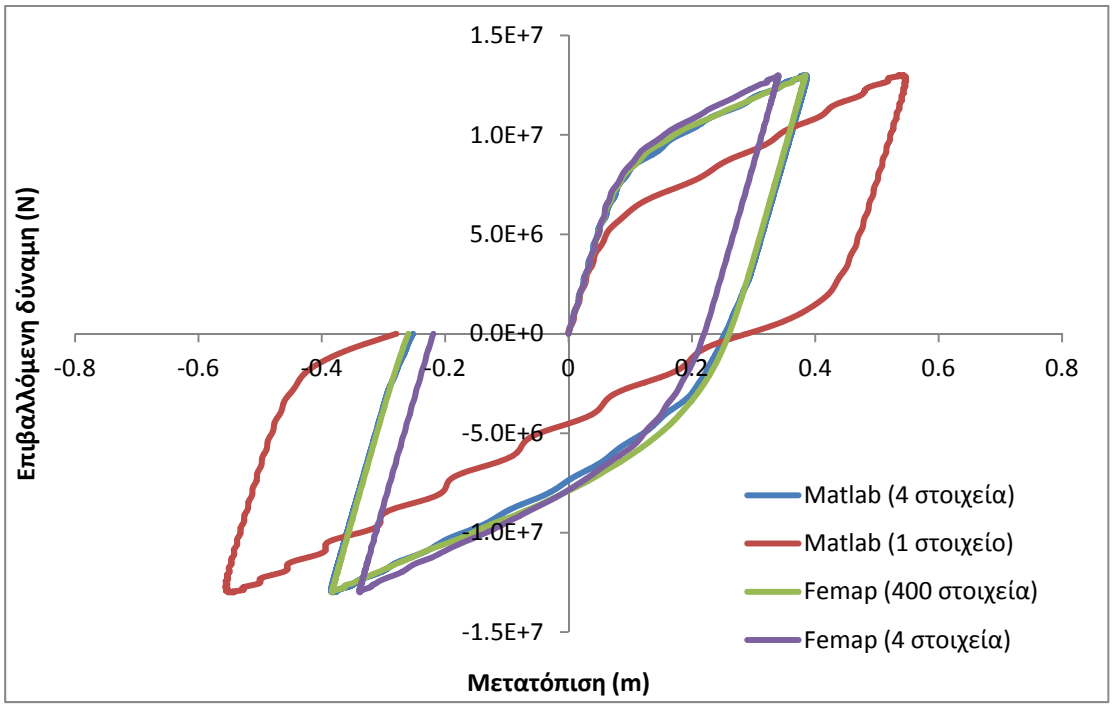
Κατά την επίλυση του παραπάνω παραδείγματος στο Femap ακολουθούμε τη διαδικασία που περιγράφτηκε στην παράγραφο 5.2.1. Στο 3ο βήμα, στο Define material – ISOTROPIC, Nonlinear πρέπει να επιλεχθεί το 1..Kinematic στο Hardening Rule, για να επιλυθεί η πλάκα με κινηματική κράτυνση. Αντίστοιχα, για την επίλυση στον κώδικα της Matlab, ορίζονται οι παράμετροι του προσομοιώματος Bouc-Wen ως εξής:

$$n = 18,\quad \beta = 0.5,\quad \gamma = 0.5,\quad \alpha = \begin{bmatrix} 0.124 & 0 & 0 \\ 0 & 0.124 & 0 \\ 0 & 0 & 0.124 \end{bmatrix}.$$

Στην Εικόνα 5.12 παρουσιάζεται η γραφική παράσταση, όπως προκύπτει και από το Femap και από τη Matlab, της μετατόπισης του κόμβου όπου επιβάλλεται το φορτίο ως προς την τιμή του φορτίου αυτού.

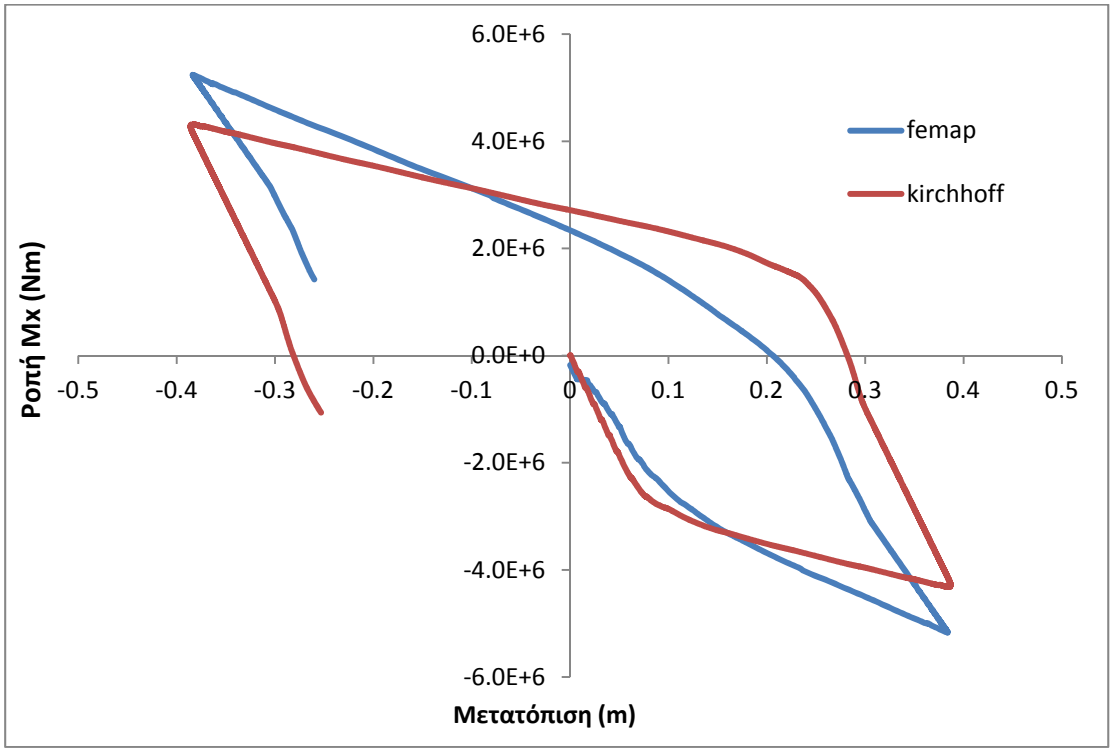


Εικόνα 5.12 Σύγκριση αποτελεσμάτων Matlab και Femap

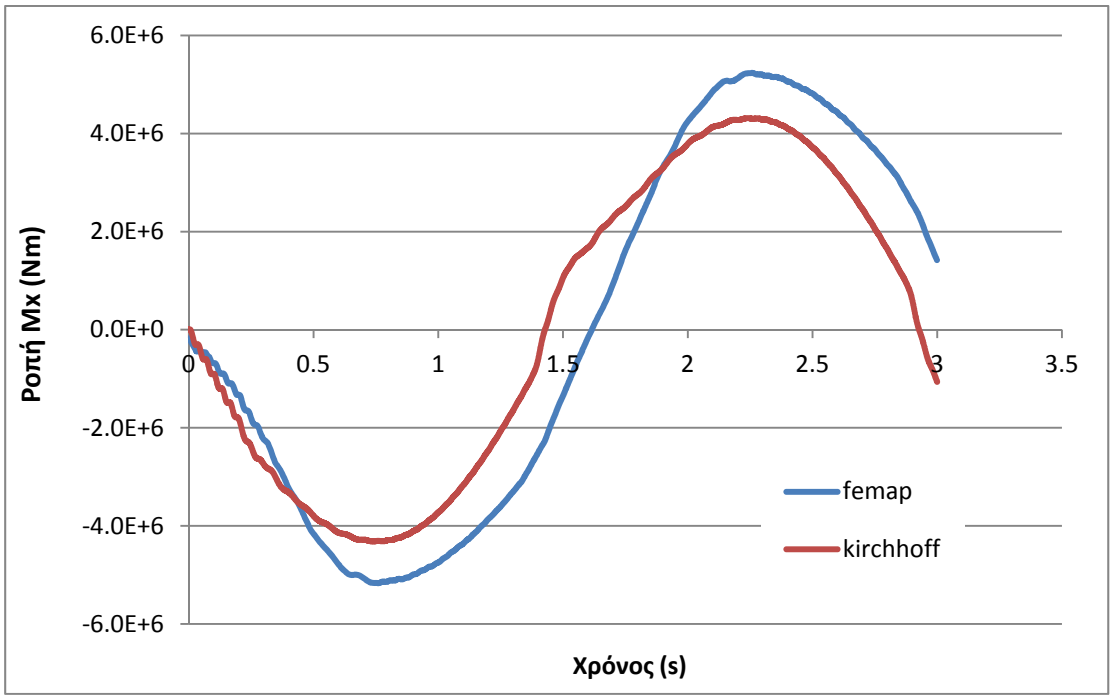


Εικόνα 5.13 Αποτελέσματα για δύο διαφορετικές διακριτοποιήσεις

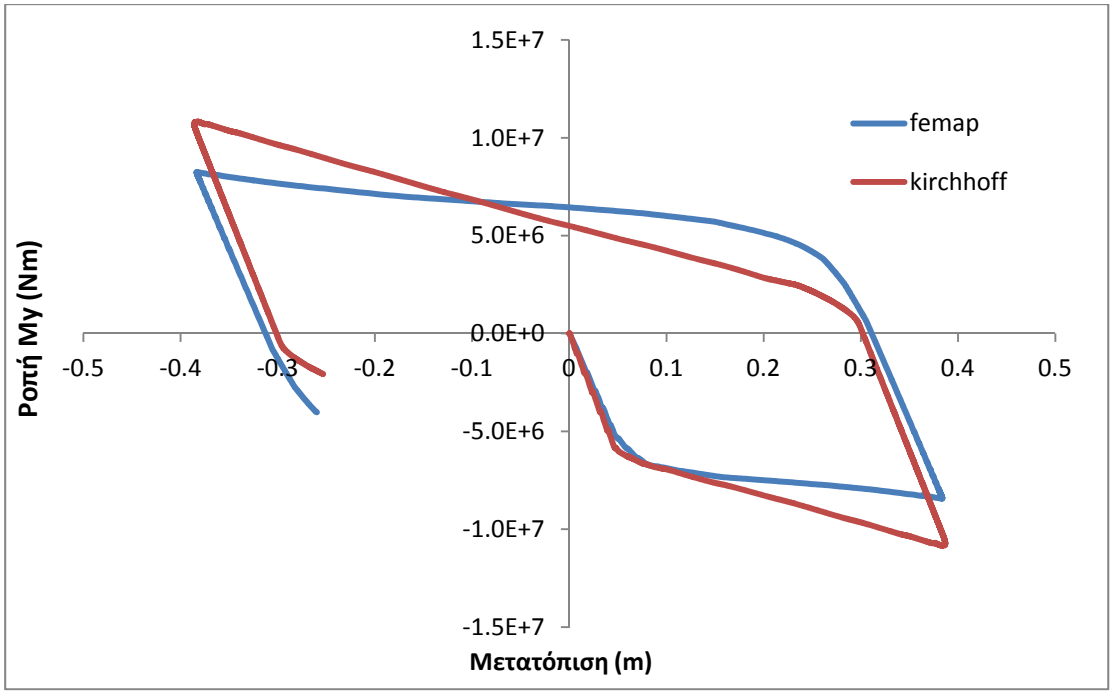
Παρακάτω ακολουθούν τα διαγράμματα των εντατικών μεγεθών σε σχέση με τη μετατόπιση και το χρόνο.



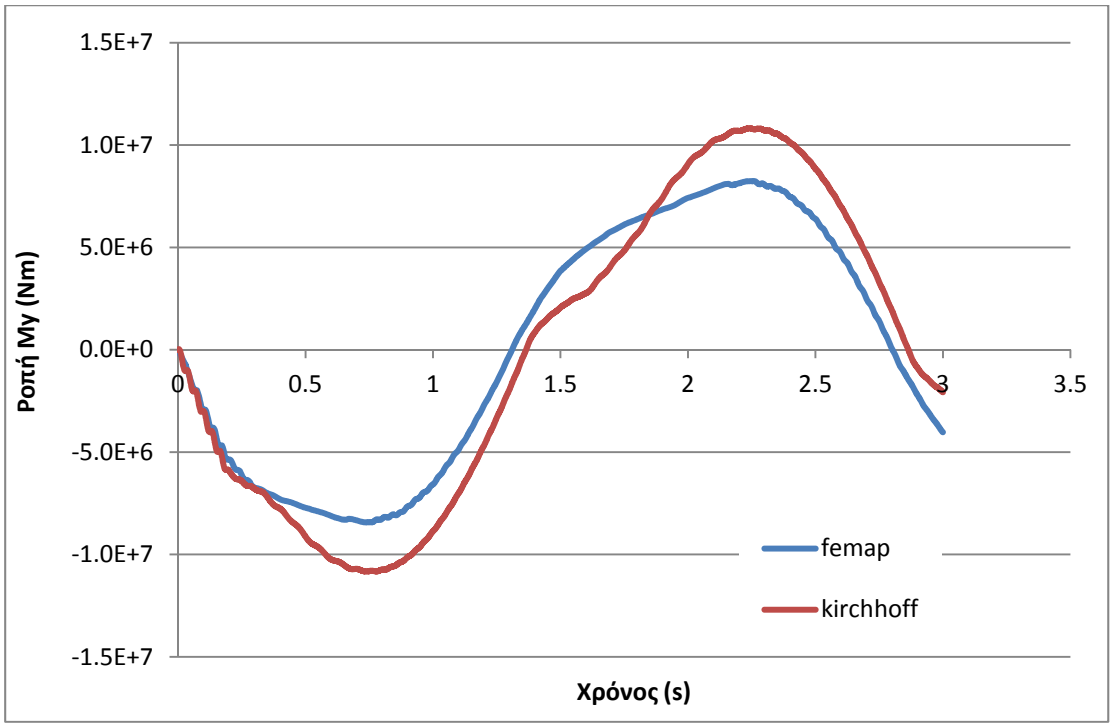
Εικόνα 5.14 Διάγραμμα Ροπής Mx-Μετατόπισης στο σημείο Α



Εικόνα 5.15 Διάγραμμα Ροπής Mx-Χρόνου στο σημείο Α



Εικόνα 5.16 Διάγραμμα Ροπής My-Μετατόπισης στο σημείο Α

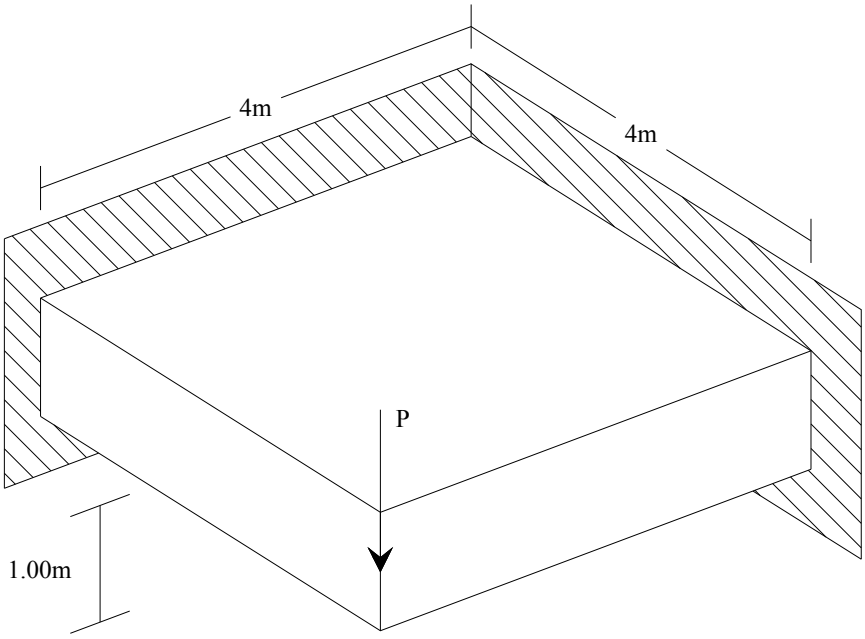


Εικόνα 5.17 Διάγραμμα Ροπής My-Χρόνου στο σημείο Α

Με βάση τα παραπάνω διαγράμματα, μπορούν να εξαχθούν ακριβώς τα ίδια συμπεράσματα με το 1^{ο} παράδειγμα.

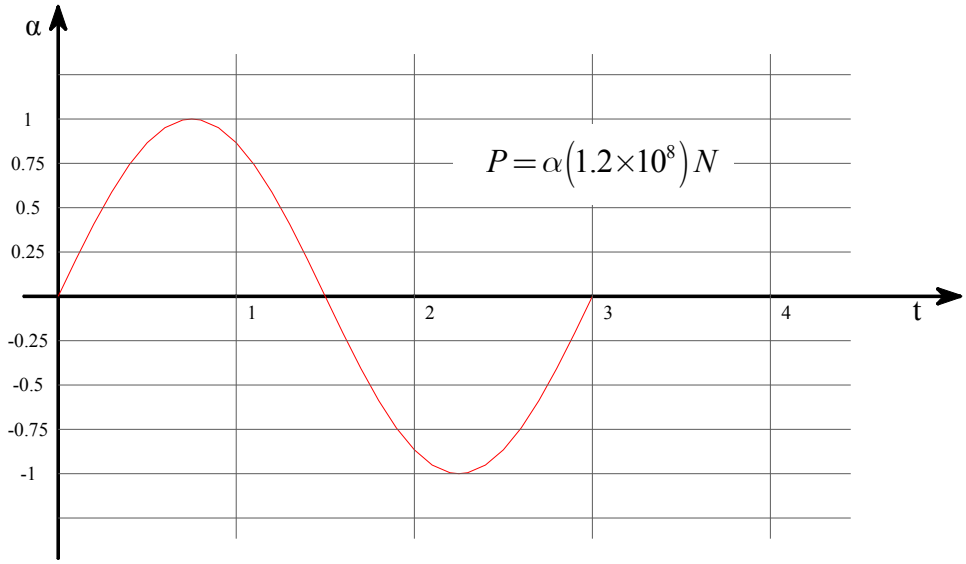
5.4 Τρίτο παράδειγμα

Στο τρίτο παράδειγμα εξετάζουμε το φορέα της Εικόνας 5.18, ο οποίος είναι ο ίδιος με αυτόν των παραπάνω παραδειγμάτων με τη μόνη διαφορά ότι το πάχος του είναι 1m.



Εικόνα 5.18 Φορέας 3ου παραδείγματος

Η φόρτιση φαίνεται στην Εικόνα 5.19:



Εικόνα 5.19 Φόρτιση 3ου παραδείγματος

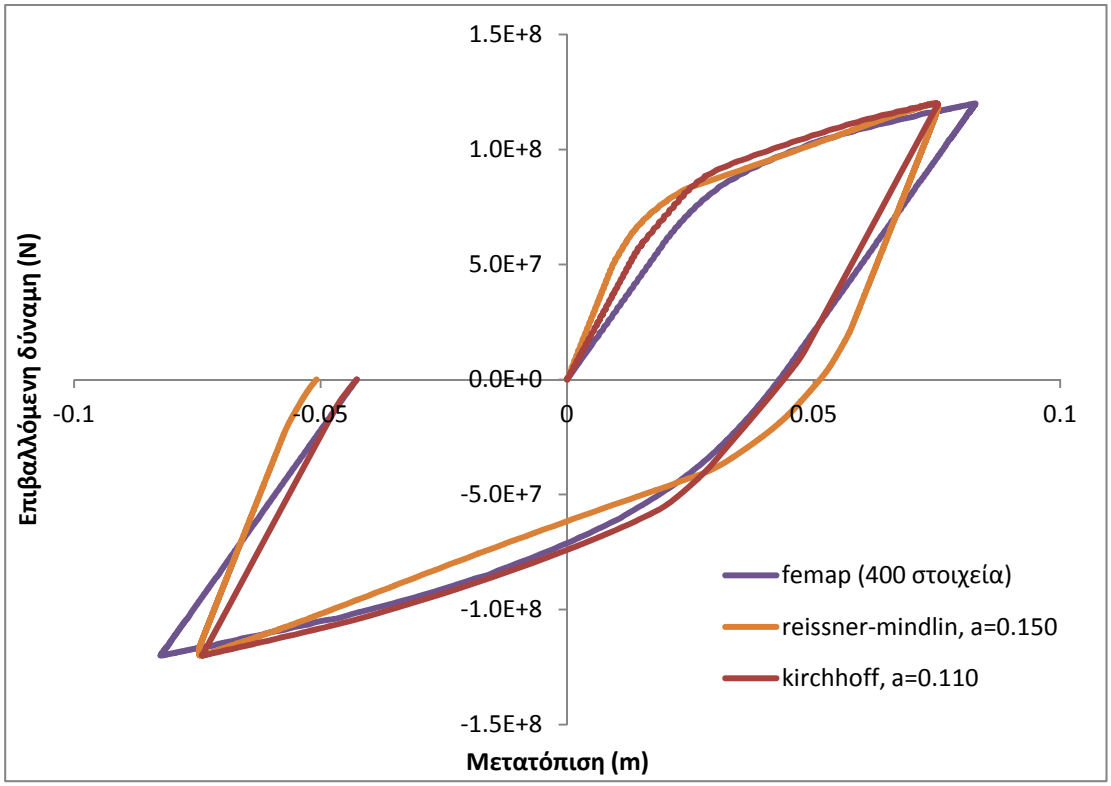
Η επίλυση του φορέα θα γίνει και με τον κώδικα της Matlab που βασίζεται στη θεωρία Reissner-Mindlin, καθώς το πάχος της πλάκας δε μπορεί να θεωρηθεί πια

αμελητέο, οπότε η διατμητική παραμόρφωση αρχίζει να γίνεται σημαντική. Οι παράμετροι του προσομοιώματος Bouc-Wen ορίζονται ως εξής: $n = 18$, $\beta = 0.5$ και $\gamma = 0.5$.

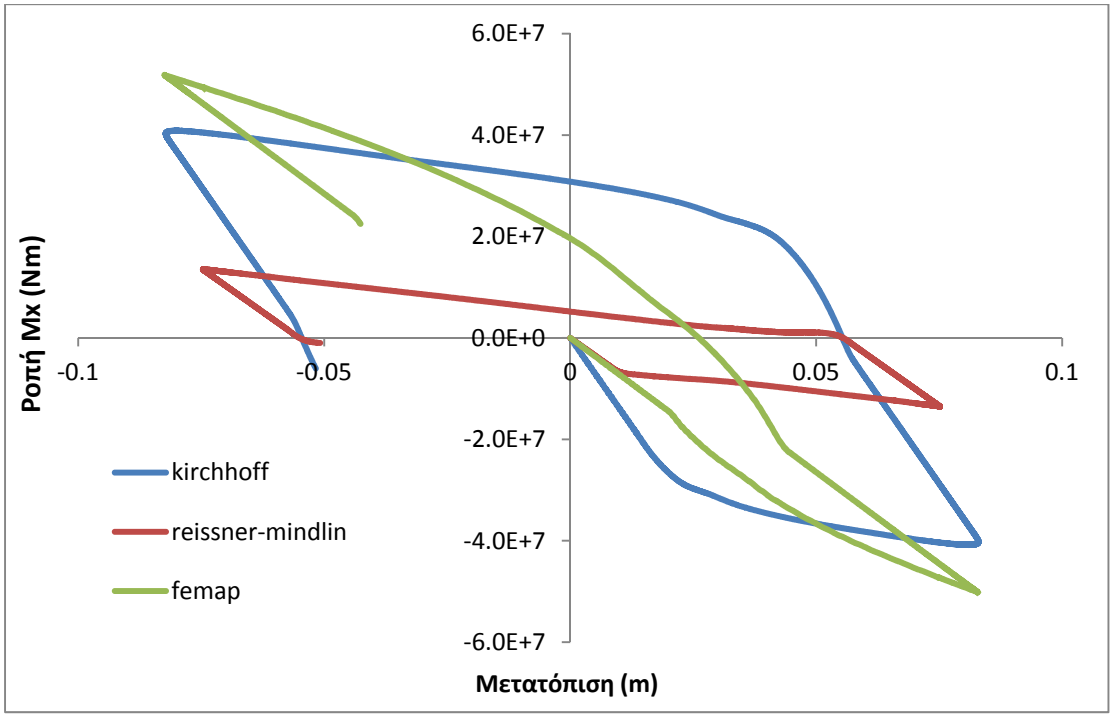
Για τη θεωρία Kirchhoff: $\alpha = \begin{bmatrix} 0.110 & 0 & 0 \\ 0 & 0.110 & 0 \\ 0 & 0 & 0.110 \end{bmatrix}$

Για τη θεωρία Reissner-Mindlin: $\alpha = \begin{bmatrix} 0.150 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.150 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.150 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.150 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.150 \end{bmatrix}$

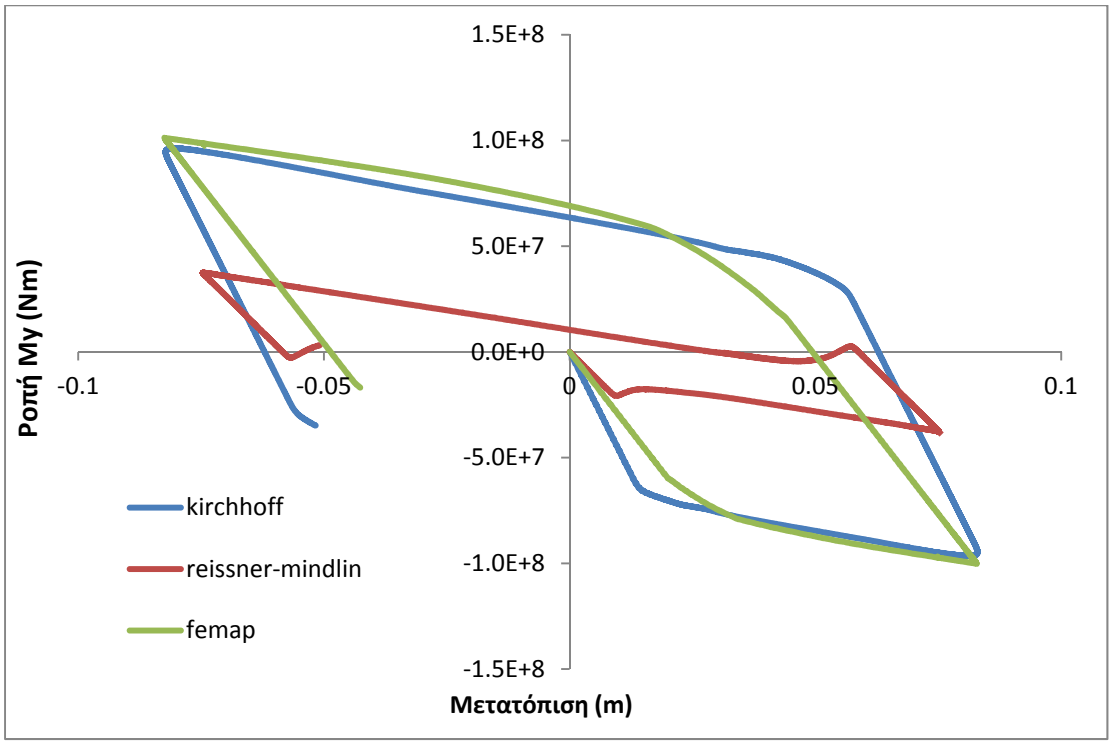
Ακολουθούν τα αποτελέσματα των επιλύσεων σε σύγκριση με τα αποτελέσματα του Femap.



Εικόνα 5.20 Σύγκριση αποτελεσμάτων Matlab και Femap



Εικόνα 5.21 Διάγραμμα Ροπής Mx-Μετατόπισης στο σημείο A



Εικόνα 5.22 Διάγραμμα Ροπής My-Μετατόπισης στο σημείο A

Μπορούμε να παρατηρήσουμε στην Εικόνα 5.6, όπου το πάχος της πλάκας είναι 0.3m, τα αρχικά ελαστικά τμήματα της διαδρομής της φόρτισης που προκύπτουν από

το Femap και το Matlab αντίστοιχα, βρίσκονται πολύ κοντά. Στο τρίτο παράδειγμα, όπου το πάχος της πλάκας είναι σημαντικά μεγάλο, παρατηρούμε αποκλίσεις στα ελαστικά τμήματα, οι οποίες συνεχίζονται κατά την εξέλιξη της φόρτισης. Το στοιχείο της θεωρίας Reissner-Mindlin είναι το πιο δύσκαμπτο, δεδομένου ότι λαμβάνει υπόψη έργα διατμητικών παραμορφώσεων σε αντίθεση με το στοιχείο της θεωρίας Kirchhoff. Το στοιχείο plate του Femap, όπως φαίνεται από την Εικόνα 5.20, είναι το πιο εύκαμπτο. Και στο τρίτο παράδειγμα παρουσιάζονται αποκλίσεις στα διαγράμματα εντατικών μεγεθών-μετατοπίσεων οι οποίες μπορούν να ερμηνευθούν και να λυθούν με βάση τις παρατηρήσεις της παραγράφου 5.2.2.

5.5 Συμπεράσματα

Όπως παρατηρούμε και από τα παραπάνω παραδείγματα, τα πεπερασμένα στοιχεία πλακών που ενσωματώνουν την υστέρηση Bouc-Wen προσφέρουν την δυνατότητα μιας ρεαλιστικής προσομοίωσης της ανελαστικής συμπεριφοράς των πλακών που υφίστανται ανακυκλιζόμενη φόρτιση. Οι λύσεις που προκύπτουν από τον κώδικα σε Matlab βρίσκονται σε αρκετά καλή συμφωνία με αυτές που προκύπτουν από το Femap. Αποκλίσεις παρατηρούνται στα διαγράμματα ροπών-μετατοπίσεων, οι οποίες ερμηνεύονται βάσει της παραγράφου 5.2.2 και θα μπορούσαν να επιλυθούν με τη μεθοδολογία που αναφέρεται στην παράγραφο αυτή ή με ταυτοποίηση μέσω των διαγραμμάτων ροπών-καμπυλοτήτων. Ωστόσο, σκόπιμα δεν έγινε καμία αναφορά στο χρόνο επίλυσης, καθώς η Matlab είναι μια αργή γλώσσα προγραμματισμού, οπότε δε μπορεί να υπάρξει σύγκριση ως προς το χρόνο με το Femap. Όμως, βασιζόμενοι στα συμπεράσματα της Διδακτορικής Διατριβής του Σ. Τριανταφύλλου, μπορούμε βάσιμα να υποθέσουμε ότι ο χρόνος επίλυσης με βάση την προτεινόμενη διατύπωση είναι μικρότερος από αυτόν που απαιτεί το Femap. Αυτό δικαιολογείται από το γεγονός ότι τα καταστατικά μητρώα της κατασκευής, τόσο το ελαστικό όσο και το υστερητικό, προσδιορίζονται πλήρως στο επίπεδο του στοιχείου και υπολογίζονται μια φορά, στην αρχή της υπολογιστικής διαδικασίας, μειώνοντας έτσι σημαντικά το υπολογιστικό κόστος.

κεφάλαιο 6 Συμπεράσματα

Σε αυτή τη διπλωματική εργασία, αναπτύχθηκαν υστερητικά πεπερασμένα στοιχεία πλακών με σκοπό την ανελαστική, δυναμική ανάλυση των φορέων. Για να επιτευχθεί αυτό, αρχικά το γενικευμένο τριαξονικό προσομοίωμα Bouc-Wen, του οποίου οι σχέσεις είναι διατυπωμένες στο χώρο των τάσεων, εκφράστηκε σε όρους συνισταμένων των τάσεων, δηλαδή ροπών. Επιπλέον, επειδή το προσομοίωμα Bouc-Wen απαιτεί κάποια συνάρτηση διαρροής, διατυπώθηκε ένα κριτήριο αστοχίας με βάση το κριτήριο αστοχίας του von Mises. Έτσι, οι κλασικές ελαστικές διατυπώσεις του στοιχείου πλάκας της θεωρίας Kirchhoff και της θεωρίας Reissner-Mindlin επεκτείνονται εισάγοντας επιπρόσθετους υστερητικούς βαθμούς ελευθερίας.

Βάσει της επεξεργασίας του κεφάλαιο 4, αναπτύχθηκαν δύο κώδικες στη Matlab για την ανάλυση φορέων-πλακών με τη μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων. Ο πρώτος κώδικας βασιζόταν στη θεωρία Kirchhoff ενώ ο δεύτερος στη θεωρία Reissner-Mindlin, η οποία είναι πιο ακριβής στην ανάλυση πλακών μεγάλου πάχους λόγω του ότι λαμβάνει υπόψη την εγκάρσια διατμητική στιβαρότητα της πλάκας. Η επίλυση του συστήματος εξισώσεων των πεπερασμένων στοιχείων γίνεται με την μετατροπή του σε σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης και τη χρήση της ode15s στη Matlab.

Προκειμένου να διαπιστωθεί η αξιοπιστία και η ακρίβεια της προτεινόμενης μεθόδου, στο κεφάλαιο 5, παρουσιάστηκαν ορισμένα παραδείγματα φορέων-πλακών που υποβάλλονται σε ανακυκλιζόμενη δυναμική φόρτιση. Τα παραδείγματα αυτά επιλύθηκαν με τη Matlab αλλά και με το Femap και στο τέλος συγκρίθηκαν τα αποτελέσματα των παραπάνω επιλύσεων. Παρατηρήθηκε ότι η απόκριση των πλακών όπως προέκυπτε από τη Matlab βρισκόταν πολύ κοντά σε αυτήν που προέκυπτε από το Femap, με εξαίρεση τα διαγράμματα ροπών-μετακινήσεων όπου παρατηρούνταν κάποιες αποκλίσεις οι οποίες οφείλονταν στο γεγονός ότι αντί νόμου κράτυνσης γινόταν χρήση του μητρώου $[\alpha]$.

Ένα βασικό πλεονέκτημα της προτεινόμενης μεθόδου είναι ότι δε χρειάζεται το φορτίο να επιβάλλεται σε βήματα, μέσα στα οποία να γίνονται επαναλήψεις και να υπολογίζεται ένα εφαπτομενικό μητρώο στιβαρότητας, όπως συμβαίνει στην τυποποιημένη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Αντίθετα, τα καταστατικά μητρώα της κατασκευής, τόσο το ελαστικό όσο και το υστερητικό, προσδιορίζονται πλήρως στο επίπεδο του στοιχείου και υπολογίζονται μια φορά, στην αρχή της

υπολογιστικής διαδικασίας. Επίσης, μετατρέποντας το σύστημα εξισώσεων των πεπερασμένων στοιχείων σε σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης αποφεύγεται η γραμμικοποίηση της καταστατικής εξίσωσης (4.118) και χρησιμοποιούνται μέθοδοι επίλυσης διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης (π.χ. ode15s στη Matlab).

Τέλος, μέσω της προτεινόμενης μεθόδου, είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθεί οποιοδήποτε κριτήριο αστοχίας και κυρίως οποιοσδήποτε νόμος κράτυνσης, πέρα από την γραμμική κινηματική κράτυνση.

Βιβλιογραφία

1. **Akhtar S. Khan & Sujian Huang, Continuum Theory of Plasticity, 1995**
2. **Journal of Applied Physics, Volume 20, Number 3, March, 1949, Recent Developments in the Mathematical Theory of Plasticity, William Prager, 1948**
3. **Παπαδρακάκης Μ., Ανάλυση Φορέων με τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχειών, Αθήνα, 2001**
4. **Πρασιανάκης Ι.Ν. και Κουρκουλής Σ.Κ., Πειραματική Αντοχή των Υλικών, Αθήνα, 1999**
5. **Τριανταφύλλου Σ. Π., Υστερητικά Πεπερασμένα Στοιχεία και Μακροστοιχεία για τη Μη Γραμμική Δυναμική Ανάλυση των Κατασκευών (διδακτορική διατριβή), Αθήνα, 2011**