

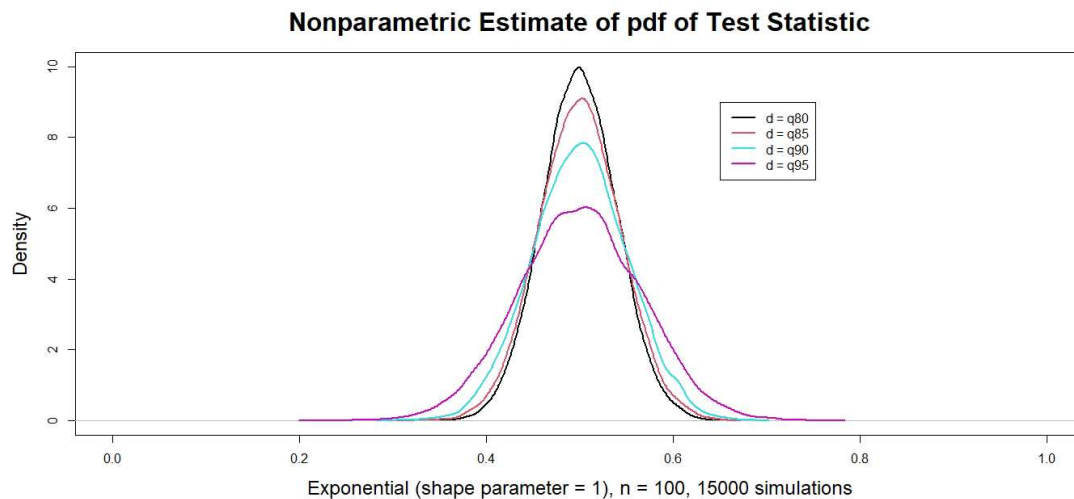


**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**  
**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**  
**ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**

**ΔΠΜΣ: ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ**  
**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

## **Τίτλος**

**‘Μη παραμετρικός έλεγχος  
για την εκθετική κατανομή’**



**Γεωργία Παπασωτηρίου**

**Επιβλέπουσα: Φιλία Βόντα,  
Καθηγήτρια Ε.Μ.Π.**

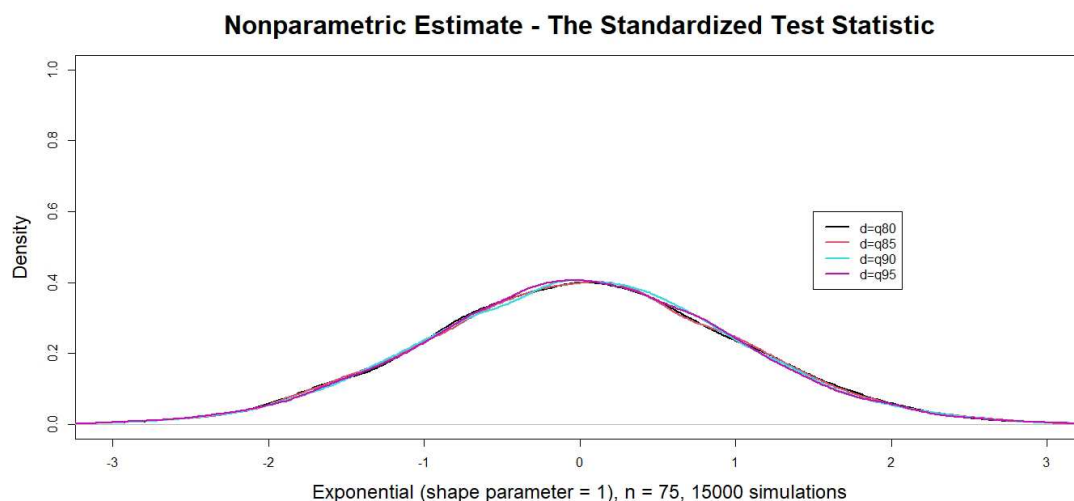
**Αθήνα 2021**

© 2021, ΓΕΩΡΓΙΑ ΠΑΠΑΣΩΤΗΡΙΟΥ. ΜΕ ΕΠΙΦΥΛΑΞΗ  
ΠΑΝΤΟΣ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΟΣ. ALL RIGHTS RESERVED.

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

# **Τίτλος**

## **‘Μη παραμετρικός έλεγχος για την εκθετική κατανομή’**



**Γεωργία Παπασωτηρίου**

**Επιβλέπουσα: Φιλία Βόντα,  
Καθηγήτρια Ε.Μ.Π.**

**Αθήνα 2021**

## Ευχαριστίες

Ευχαριστώ το Θεό, την Παναγία και τον Άγιο Νικόλαο, την καθηγήτριά μου κυρία Φιλία Βόντα, για την εμπιστοσύνη, αγάπη και κατανόηση που μου έδειξε, για τις γνώσεις που μου προσέφερε και γενικά για την όλη βοήθειά της, τον καθηγητή κύριο Αλέξανδρο Καραγρηγορίου για τη συμβολή του στον προτεινόμενο έλεγχο και γενικά για την όλη βοήθειά του, καθώς και για το ότι δέχτηκε να μπει στην τριμελή επιτροπή, την καθηγήτρια κυρία Χρυσής Καρώνη για το ότι δέχτηκε να μπει στην τριμελή επιτροπή και για τις γνώσεις και βοήθεια που μου προσέφερε στις μεταπτυχιακές μου σπουδές και τον αναπληρωτή καθηγητή κύριο Γεώργιο Σμυρλή για την πολύτιμη εν γένει βοήθειά του.



## Περιεχόμενα

Σύνοψη.....	7
Περίληψη.....	9
Abstract.....	10
Εισαγωγή.....	11
1.1. Η διαδικασία Poisson.....	11
1.2. Η Εκθετική Κατανομή.....	13
2.1. Έλεγχοι καλής προσαρμογής (Goodness of fit tests).....	18
2.2. Η σημαντικότητα των ελέγχων για την εκθετική κατανομή.....	18
2.3. Ιστορικά στοιχεία σχετικά με τους ελέγχους για την εκθετική κατανομή.....	18
Κεφάλαιο 1. ΕΛΕΓΧΟΙ ΚΑΛΗΣ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ.....	23
1.1. P-P plot και Q-Q plot (P-P διάγραμμα και Q-Q διάγραμμα).....	24
1.2. Ο έλεγχος $X^2$ (χι-τετράγωνο) καλής προσαρμογής.....	42
1.2.1. Παρατηρήσεις.....	44
1.2.2. Διόρθωση συνέχειας του Yates.....	52
1.3. Ο έλεγχος Kolmogorov-Smirnov (ε.α.σ.κ.).....	54
1.3.1. Ο έλεγχος Kolmogorov για ένα δείγμα.....	56
1.3.2. Ο έλεγχος Smirnov για δύο ανεξάρτητα δείγματα.....	62
1.4. Ο έλεγχος του Lilliefors για την Εκθετική Κατανομή.....	69
1.5. Ο έλεγχος για ένα δείγμα των Cramér-von Mises-Smirnov (ή Cramér-von Mises) και των Anderson-Darling.....	72
1.5.1. Ο έλεγχος των Cramér-von Mises-Smirnov (CMS) (ή Cramér-von Mises (CVM)).....	72
1.5.2. Ο έλεγχος των Anderson-Darling (ή ο έλεγχος άνω ουράς Anderson-Darling).....	73
1.6. Ο έλεγχος Shapiro-Wilk για τη σύνθετη υπόθεση της εκθετικότητας.....	76
1.7. Έτεροι πρότεροι έλεγχοι για την εκθετικότητα (Ascher Steven (1990)).....	78
1.7.1. F-έλεγχος του Gnedenko: Q(R).....	78
1.7.2. Η τροποποίηση του Harris στον F-έλεγχο του Gnedenko: Q' (R).....	78
1.7.3. Ο Bivariate F-έλεγχος των Lin και Mudholkar: BF(R).....	79
1.7.4. Λοξότητα και Κύρτωση (Skewness and Kurtosis): KUSK.....	79
1.7.5. Ο έλεγχος "New Better Than Used" των Hollander και Proschan: HP... 79	
1.7.6. Ο έλεγχος WE: WE1.....	80
1.7.7. Το Gini στατιστικό: G.....	80
1.7.8. Το Lorenz στατιστικό: L.....	81
1.7.9. Το Pietra στατιστικό: P.....	81
1.7.10. Epstein: EPS.....	81
1.7.11. Έλεγχος Kolmogorov-Smirnov(-Lilliefors): KSL (βλέπε 1.4).....	81
1.7.12. Ο έλεγχος του Deshpande: J.b.....	82
1.7.13. Ο F Max έλεγχος του Hartley: HARTF.....	82
1.7.14. Ο Score έλεγχος των Cox και Oakes: COX.....	83
1.7.15. Ο έλεγχος ακραίου πηλίκου των Wong και Wong: EXQT.....	83
1.8. Νεώτεροι έλεγχοι για την εκθετικότητα ( $\alpha$ ) (Henze N. και Meintanis S. G. (2005)).....	84

1.8.1. Ο έλεγχος του Klar (2001) μέσω της ολοκληρωμένης Εμπειρικής Συνάρτησης Κατανομής .....	84
1.8.2. Οι έλεγχοι των Grzegorzewski και Wieczorkowski (1999), Ebrahimi και άλλων (1992) και Taufer (2002) βασισμένοι στο μέτρο εντροπίας... ..	85
1.8.3. Οι έλεγχοι των Baringhaus και Henze (2000) βασισμένοι σ' ένα χαρακτηρισμό μέσω της συνάρτησης μέσης υπολειπόμενης ζώης.....	85
1.8.4. Στατιστικά του ελέγχου που προέρχονται από τον εμπειρικό μετασχηματισμό Laplace.....	86
1.8.4.1. Ο έλεγχος των Baringhaus και Henze (1991).....	86
1.8.4.2. Ο έλεγχος του Henze (1993).....	86
1.8.4.3. Ο έλεγχος των Henze και Meintanis (2002a).....	86
1.8.5. Ο έλεγχος των Henze και Meintanis (2002b) που προέρχεται από την εμπειρική χαρακτηριστική συνάρτηση.....	87
1.9. Νεώτεροι έλεγχοι για την εκθετικότητα ( $\beta$ ) (Torabi H., Montazeri N. H. & Grané (2018) & Baratpour S. & Habibi Rad A. (2012)).....	88
1.9.1. Οι έλεγχοι των Ebrahimi και άλλων (1992) & των Alizadeh και Arghami (2011), βασισμένοι στους εκτιμητές εντροπίας και ο έλεγχος των Baratpour and Habibi Rad (2012) βασισμένος στην αθροιστική υπολοιπόμενη εντροπία.....	88
1.9.2. Έλεγχοι βασισμένοι σε διορθωτικές ροπές των εκτιμητών εντροπίας.....	90
1.9.3. Οι έλεγχοι των Alizadeh και Balakrishnan (2016) βασισμένοι στη Φι-απόκλιση.....	91
1.9.4. Ο έλεγχος του Volkova (2010) βασισμένος στον χαρακτηρισμό των Riedl και Rossberg (1994) της εκθετικής κατανομής.....	92
1.9.5. Οι έλεγχοι των Fortiana και Grané (2002) και των Montazeri και Torabi (2013) βασισμένοι στη συσχέτιση και τη συνδιακύμανση (αντίστοιχα)... ..	92
1.10. Ο έλεγχος του Madukaife Mbanefo S. (2019) βασισμένος στην εμπειρική συνάρτηση ποσοστημοριών (βασισμένος στην ιδιότητα ισοδυναμίας μεταξύ k-στής διατεταγμένης στατιστικής και του p-οστού ποσοστημορίου μιας κατανομής).....	94
<b>Κεφάλαιο 2. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ.....</b>	<b>97</b>
2.1. Κατανομές βαριάς ουράς και κατανομές ελαφριάς ουράς.....	98
2.2. Κατανομές λογαριθμο-κοίλες (log-concave) και κατανομές λογαριθμο-κυρτές (log-convex).....	100
2.3. Το θεωρητικό υπόβαθρο του νέου ελέγχου.....	101
2.4. Ο νέος έλεγχος εκθετικότητας.....	102
2.5. Ιδιότητες της Έλεγχοςυνάρτησης.....	111
2.6. Η κατανομή της Έλεγχοςυνάρτησης.....	118
<b>Κεφάλαιο 3. ΜΕΓΕΘΟΣ ΚΑΙ ΙΣΧΥΣ ΤΟΥ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ .....</b>	<b>127</b>
3.1. Το μέγεθος και η ισχύς του προτεινόμενου ελέγχου εκθετικότητας.....	128
3.2. Συμπερασματικές παρατηρήσεις.....	137
<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ.....</b>	<b>138</b>
<b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....</b>	<b>145</b>

## Σύνοψη

Η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία γράφτηκε στο πλαίσιο της απόκτησης μεταπτυχιακού διπλώματος στην περιοχή των εφαρμοσμένων μαθηματικών και ειδικότερα στην περιοχή των πιθανοτήτων και της στατιστικής. Ασχολείται με ελέγχους καλής προσαρμογής για την εκθετική κατανομή. Εν μέρει από την ήδη υπάρχουσα βιβλιογραφία παρουσιάζει παλαιότερους αλλά και νεότερους ελέγχους για την εκθετική κατανομή και εν μέρει η εργασία είναι ερευνητική και παρουσιάζει ένα νέο έλεγχο για την εκθετική κατανομή, το θεωρητικό του υπόβαθρο, τις ιδιότητές του, την κατανομή του, καθώς και το μέγεθος και την ισχύ του. Η εργασία είναι εμπλουτισμένη με πολλά παραδείγματα, γραφήματα και πίνακες. Για τη δημιουργία των διαφόρων γραφημάτων που κατασκευάστηκαν από μας, χρησιμοποιήθηκε η γλώσσα προγραμματισμού της στατιστικής R. Αλλά και οι προσομοιώσεις έγιναν με την R και γενικά όλοι οι κώδικες που χρησιμοποιήθηκαν, κατασκευάστηκαν με την R.

Στην εισαγωγή θα δούμε την κατανομή και τη διαδικασία Poisson, την εκθετική κατανομή και πώς αυτή εμφανίζεται τελείως φυσιολογικά στα πλαίσια της διαδικασίας Poisson, θα γνωρίσουμε τι είναι οι έλεγχοι καλής προσαρμογής, θα τονιστεί η σημασία των ελέγχων αυτών για την εκθετική κατανομή, η οποία παίζει βασικό ρόλο στην ανάλυση επιβίωσης, αλλά και στις φυσικές επιστήμες και τέλος θα δούμε μερικά ιστορικά στοιχεία σχετικά με τους ελέγχους για την εκθετική κατανομή ξεκινώντας πριν πάνω από έναν αιώνα με το διάσημο έλεγχο  $X^2$  που πρότεινε ο Άγγλος μαθηματικός Karl Pearson το 1900 και ταξιδεύοντας μέσα στο χρόνο και συναντώντας διάφορους ελέγχους, που κάποιοι απ' αυτούς μελετώνται σ' αυτή την εργασία και κάποιοι άλλοι όχι, φθάνουμε ως τις μέρες μας με τον προτεινόμενο έλεγχο (2021).

Στο κεφάλαιο 1 θα ξεκινήσουμε την παρουσίαση των ελέγχων καλής προσαρμογής για την εκθετική κατανομή από κάποιους «εμπειρικούς» ελέγχους, οι οποίοι γίνονται μέσω κάποιων γραφημάτων (*P-P* και *Q-Q plots* (1968)), ώστε να πάρουμε μια πρώτη εποπτική εικόνα για τα δεδομένα (τα γραφήματα αυτά δεν οδηγούν με σχετική «ασφάλεια» σε κάποια απόφαση), ενώ στη συνέχεια θα μελετήσουμε τον έλεγχο  $X^2$  (χι-τετράγωνο) (1900), τον έλεγχο Kolmogorov για ένα δείγμα (1933) και τον έλεγχο Smirnov για δύο ανεξάρτητα δείγματα (1939) (έλεγχοι Kolmogorov-Smirnov), τον έλεγχο του Lilliefors για την εκθετική κατανομή (1969), τον έλεγχο Cramér-von Mises-Smirnov (CMS) (1928-1930, 1937) (ή Cramér-von Mises (CVM)), τον έλεγχο Anderson-Darling (1954), τον έλεγχο Shapiro-Wilk (1972), άλλους παλαιούς ελέγχους για την εκθετικότητα από τη συλλογή του S. Ascher (1990) (τον F-έλεγχο του Gnedenko, την τροποποίηση του Harris στον F-έλεγχο του Gnedenko, τον Bivariate F-έλεγχο των Lin και Mudholkar, τη Λοζότητα και Κόρτωση, τον έλεγχο "New Better Than Used" των Hollander και Proschan, τον έλεγχο WE, το Gini στατιστικό, το Lorenz στατιστικό, το Pietra στατιστικό, τον έλεγχο του Epstein, τον έλεγχο του Deshpande, τον F Max έλεγχο του Hartley, τον Score έλεγχο των Cox και Oakes και τον έλεγχο ακραίου ηηλικίου των Wong και Wong), νεότερους ελέγχους για την εκθετικότητα από τις συλλογές των N. Henze και S. G. Meintanis (2005) και H. Torabi, N. H. Montazeri και A. Grané (2018) και θα διαπιστώσουμε την ύπαρξη του ελέγχου του Klar (2001) μέσω της ολοκληρωμένης Εμπειρικής Συνάρτησης Κατανομής, των ελέγχων των Grzegorzewski και Wiczorkowski (1999), Ebrahimi και άλλων (1992) και Taufer (2002) βασισμένων στο μέτρο εντροπίας, των ελέγχων των Baringhaus και Henze (2000) βασισμένων σ' ένα χαρακτηρισμό μέσω της συνάρτησης μέσης υπολειπόμενης ζωής, ελέγχων που προέρχονται από τον εμπειρικό μετασχηματισμό Laplace (έλεγχος των Baringhaus και Henze (1991), έλεγχος του Henze (1993), έλεγχος των Henze και Meintanis (2002a)), του ελέγχου των Henze και Meintanis (2002b) που προέρχεται από την εμπειρική χαρακτηριστική συνάρτηση, των ελέγχων των Ebrahimi και άλλων (1992) και των Alizadeh και Arghami (2011) βασισμένων στους εκτιμητές εντροπίας, του ελέγχου των Baratpour και Habibi Rad (2012) βασισμένου στην αθροιστική υπολοιπόμενη εντροπία, ελέγχων βασισμένων σε διορθωτι-

κές ροπές των εκτιμητών εντροπίας, των ελέγχων των Alizadeh και Balakrishnan (2016) βασισμένων στη Φι-απόκλιση, του ελέγχου του Volkona (2010) βασισμένου στον χαρακτηρισμό των Riedl και Rossberg (1994) της εκθετικής κατανομής, των ελέγχων των Fortiana και Grané (2002) και των Montazeri και Torabi (2013) βασισμένων στη συσχέτιση και τη συνδιακύμανση αντίστοιχα και τέλος θα μελετήσουμε τον έλεγχο του Mbanefo S. Madukaiife (2019) βασισμένο στην εμπειρική συνάρτηση ποσοστημορίων. Επίσης στο κεφάλαιο 1 γίνεται μνεία στην εμπειρική αθροιστική συνάρτηση κατανομής (ε.α.σ.κ.)· παραθέτουμε τον ορισμό της, καθώς και κάποιες χρήσιμες ιδιότητές της.

Στο κεφάλαιο 2 θα γνωρίσουμε τις κατανομές βαριάς ουράς και τις κατανομές ελαφριάς ουράς, καθώς και τις υποκατηγορίες κατανομών βαριών ουρών (κατανομή παχιάς ουράς, υποεκθετική, κατανομή μακριάς ουράς), καθώς και τις κατανομές λογαριθμο-κοίλες (log-concave) και τις λογαριθμο-κυρτές (log-convex). Στη συνέχεια θα γνωρίσουμε το θεωρητικό υπόβαθρο του προτεινόμενου ελέγχου (την αρχή ενός ενιαίου μεγάλου άλματος (Foss και άλλοι, (2007)) και τις θεωρίες του Lehtomaa (2015) και των Asmussen και Lehtomaa (2017)) και κατόπιν θα συναντήσουμε τον νέο (προτεινόμενο) έλεγχο για την εκθετικότητα με εναλλακτική κατανομή ελαφριάς ή βαριάς ουράς που βασίζεται στην αρχή του λεγομένου, ενιαίου μεγάλου άλματος και θα δούμε με γραφήματα το σχήμα της ελεγχουσυνάρτησης καθώς και την εμπειρική α.σ.κ. (αθροιστική συνάρτηση κατανομής) της ελεγχουσυνάρτησης κάτω από την εκθετικότητα, κάτω από την κατανομή Weibull (βαριά - ελαφριά ουρά), κάτω από την κατανομή Gamma (βαριά - ελαφριά ουρά) και κάτω από τη λογαριθμοκανονική κατανομή (βαριά - ελαφριά ουρά). Στη συνέχεια θα αναφερθούμε στις ιδιότητες της ελεγχουσυνάρτησης, όπου αξιοσημείωτο είναι ο υπολογισμός της ασυμπτωτικής μέσης τιμής, της ασυμπτωτικής διακύμανσης (διασποράς) και της ασυμπτωτικής τυπικής απόκλισης της ελεγχουσυνάρτησης και με γραφήματα θα δούμε την τυποποιημένη ελεγχουσυνάρτηση. Επίσης θα συναντήσουμε τα κρίσιμα σημεία για τον έλεγχο καλής προσαρμογής εκθετικότητας και μάλιστα προτείνονται κρίσιμα σημεία που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για κάθε μέγεθος δείγματος για τυπικά μεγέθη δείγματος ( $n = 30$  έως  $n = 500$ ). Τέλος θα δοθεί η κατανομή της ελεγχουσυνάρτησης όχι μόνο κάτω από την εκθετικότητα, αλλά και κάτω από την κατανομή Weibull (βαριά - ελαφριά ουρά), κάτω από την κατανομή Gamma (βαριά - ελαφριά ουρά) και κάτω από τη λογαριθμοκανονική κατανομή (βαριά - ελαφριά ουρά), παρουσιάζοντας και γραφήματα.

Στο κεφάλαιο 3 θα παρουσιάσουμε το μέγεθος και την ισχύ του προτεινόμενου ελέγχου με πίνακες που φτιάχτηκαν μέσω προσομοιώσεων. Για την ισχύ θα χρησιμοποιήσουμε ως εναλλακτική υπόθεση κατανομές Weibull με βαριές - ελαφριές ουρές, κατανομές Gamma με βαριές - ελαφριές ουρές και κατανομές λογαριθμοκανονικές με βαριές - ελαφριές ουρές, που μετακινούνται από την εκθετική κατανομή προς κάθε κατεύθυνση. Θα φανεί ότι η ισχύς αυξάνεται καθώς προχωράμε πιο μακριά δίνοντας αξιοσέβαστα αποτελέσματα ακόμη και για εναλλακτικές υποθέσεις πολύ κοντά στην εκθετική κατανομή (μηδενική υπόθεση). Τα εξαιρετικά αποτελέσματα καθιστούν τον έλεγχο ένα σημαντικό εργαλείο για πρακτικούς σκοπούς στη θεωρία αξιοπιστίας οπότε η υποκείμενη κατανομή πρέπει να καθοριστεί για συμπερασματικούς σκοπούς.

Υπάρχει και παράρτημα (για το κεφάλαιο 1) και βιβλιογραφία. Στο παράρτημα υπάρχουν πίνακες, όπου δίνονται τα αντίστροφα ποσοστιαία σημεία της  $X^2$  κατανομής, οι κρίσιμες τιμές του Kolmogorov στατιστικού, οι κρίσιμες τιμές του Smirnov στατιστικού για δύο ισομεγέθη δείγματα και για δύο ανισομεγέθη δείγματα, τα p-ποσοστιαία σημεία της ελεγχουσυνάρτησης Lilliefors για τον έλεγχο καλής προσαρμογής της εκθετικής κατανομής και οι κρίσιμες τιμές για το  $W(E)$  στατιστικό του ελέγχου (την ελεγχουσυνάρτηση των Shapiro και Wilk) για την εκθετικότητα. Η βιβλιογραφία είναι εκτενής και περιλαμβάνει πηγές ξενόγλωσσες και ελληνικές. Πολύτιμος βοηθός μας υπήρξε το διαδίκτυο, αλλά και η εργασία των Karagrigoriou, A., Papasotiriou, G., Vonta, I. (2021).

## Περίληψη

Η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία γράφτηκε στο πλαίσιο της απόκτησης μεταπτυχιακού διπλώματος στην περιοχή των εφαρμοσμένων μαθηματικών και ειδικότερα στην περιοχή των πιθανοτήτων και της στατιστικής. Ασχολείται με ελέγχους καλής προσαρμογής για την εκθετική κατανομή. Εν μέρει παρουσιάζει παλαιότερους αλλά και νεότερους ελέγχους για την εκθετική κατανομή και εν μέρει η εργασία είναι ερευνητική και παρουσιάζει ένα νέο έλεγχο για την εκθετική κατανομή.

Στην εισαγωγή θα δούμε την κατανομή και τη διαδικασία Poisson, την εκθετική κατανομή και πώς αυτή εμφανίζεται τελείως φυσιολογικά στα πλαίσια της διαδικασίας Poisson, θα γνωρίσουμε τι είναι οι έλεγχοι καλής προσαρμογής, θα τονιστεί η σημασία των ελέγχων αυτών για την εκθετική κατανομή, η οποία παίζει βασικό ρόλο στην ανάλυση επιβίωσης, αλλά και στις φυσικές επιστήμες και τέλος θα δούμε μερικά ιστορικά στοιχεία σχετικά με τους ελέγχους για την εκθετική κατανομή.

Στο κεφάλαιο 1 θα ξεκινήσουμε την παρουσίαση των ελέγχων καλής προσαρμογής για την εκθετική κατανομή από κάποιους «εμπειρικούς» ελέγχους, οι οποίοι γίνονται μέσω κάποιων γραφημάτων, ώστε να πάρουμε μια πρώτη εποπτική εικόνα για τα δεδομένα, ενώ στη συνέχεια θα μελετήσουμε διάφορους ελέγχους παλαιούς και νεώτερους. Επίσης στο κεφάλαιο 1 γίνεται μνεία στην εμπειρική αθροιστική συνάρτηση κατανομής (ε.α.σ.κ.)· παραθέτουμε τον ορισμό της, καθώς και κάποιες χρήσιμες ιδιότητές της.

Στο κεφάλαιο 2 θα γνωρίσουμε το θεωρητικό υπόβαθρο του προτεινόμενου ελέγχου και κατόπιν θα συναντήσουμε και θα μελετήσουμε το νέο (προτεινόμενο) έλεγχο για την εκθετικότητα με εναλλακτική κατανομή ελαφριάς ή βαριάς ουράς που βασίζεται στην αρχή του λεγομένου, ενιαίου μεγάλου άλματος.

Στο κεφάλαιο 3 θα παρουσιάσουμε το μέγεθος και την ισχύ του προτεινόμενου ελέγχου με πίνακες που φτιάχτηκαν μέσω προσομοιώσεων. Τα εξαιρετικά αποτελέσματα καθιστούν τον έλεγχο ένα σημαντικό εργαλείο για πρακτικούς σκοπούς στη θεωρία αξιοπιστίας οπότε η υποκείμενη κατανομή πρέπει να καθοριστεί για συμπερασματικούς σκοπούς.

Υπάρχει και παράρτημα (για το κεφάλαιο 1) και βιβλιογραφία εκτενής με πηγές ξενόγλωσσες και ελληνικές.

## Abstract

This master's thesis was written in the context of obtaining a master's degree in the field of applied mathematics and in particular in the field of probability and statistics. It deals with goodness-of-fit tests for exponential distribution. In part it presents older but also newer tests for the exponential distribution and in part this is research work and presents a new test for the exponential distribution.

In the introduction we will look at the Poisson distribution and process, the exponential distribution and how it occurs quite normally under the Poisson process, we will present the goodness-of-fit tests, the importance of these tests for the exponential distribution will be emphasized, which plays a key role in survival analysis, but also in natural sciences, and finally we will look at some historical facts about exponential distribution tests.

In Chapter 1 we will start the presentation of the goodness-of-fit tests for the exponential distribution by some "empirical" tests, which are done through some graphs, in order to get a first visual picture of the data, and then we will study various tests old and new. Also in chapter 1 reference is made to the empirical cumulative distribution function (e.c.d.f.)- we quote its definition, as well as some of its useful properties.

In Chapter 2 we will get to know the theoretical background of the proposed test and then we will meet and study the new (proposed) test for exponentiality with an alternative distribution of light or heavy tail based on the principle of the so-called, single big jump.

In Chapter 3 we will present the size and power of the proposed test with tables made through simulations. Excellent results making the test an important tool for practical purposes in reliability theory whenever the underlying distribution needs to be established for inferential purposes.

There is also an appendix (for chapter 1) and an extensive bibliography with sources from Greek and international sources.

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην παρούσα μεταπτυχιακή εργασία θα παρουσιάσουμε ελέγχους, παλαιότερους αλλά και νεότερους, για την εκθετική κατανομή (κεφάλαιο 1) και στη συνέχεια θα προτείνουμε ένα νέο έλεγχο για την κατανομή αυτή και θ' ασχοληθούμε εκτενώς μ' αυτόν (κεφάλαια 2 & 3). Προηγουμένως όμως στην εισαγωγή θα δούμε την κατανομή και τη διαδικασία Poisson, την εκθετική κατανομή και πώς αυτή εμφανίζεται τελείως φυσιολογικά στα πλαίσια της διαδικασίας Poisson, θα γνωρίσουμε τι είναι οι έλεγχοι καλής προσαρμογής, θα τονιστεί η σημασία των ελέγχων αυτών για την εκθετική κατανομή και τέλος θα δούμε μερικά ιστορικά στοιχεία σχετικά με τους ελέγχους για την εκθετική κατανομή.

### 1.1. Η διαδικασία Poisson

#### Ορισμός 1

Λέμε ότι μία διακριτική <sup>(1)</sup> (διακριτή, discrete) τ.μ.  $X$ , που παίρνει τιμές  $0, 1, 2, 3, \dots$ , έχει την κατανομή Poisson αν και μόνον αν η πυκνότητά της δίνεται από τον τύπο

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, k = 0, 1, 2, \dots,$$

όπου  $\lambda$  είναι μη αρνητικός πραγματικός αριθμός, που λέγεται παράμετρος της κατανομής.

#### Ορισμός 2

Έστω  $a$  θετικός πραγματικός και  $f, g : [0, a) \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συναρτήσεις συνεχείς στο  $0$  με την  $g$  να μην μηδενίζεται στο  $(0, a)$ . Τότε ο συμβολισμός

$$f(t) = o(g(t))$$

σημαίνει ότι

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{g(t)} = 0.$$

Ο συμβολισμός αυτός λέγεται ο-μικρόν του Landau, και πολλές φορές απλοποιεί τη διατύπωση.

#### Διαδικασία Poisson (Poisson Process)

Θεωρούμε κάποιο τυχαίο γεγονός  $\Gamma$ , που γίνεται μέσα στο χρόνο  $[0, +\infty)$ , σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές. Δυνατά παραδείγματα του  $\Gamma$  είναι τα εξής:

- 1) Κάποιος κάτοικος της Αθήνας έγινε 100 ετών.
- 2) Κάποιο αυτοκίνητο πέρασε από τη διασταύρωση των οδών Κορίνθου-Κολοκοτρώνη, στην Πάτρα.
- 3) Η Γραμματεός του Πρύτανη του Πανεπιστημίου Πατρών πατάει το λάθος πλήκτρο στη γραφομηχανή της.

---

(1) Έτσι εμφανίζεται στην πηγή

- 4) Κάποιος κάτοικος Πατρών σχηματίζει έναν αριθμό στο τηλέφωνό του.
- 5) Μία λάμπα από αυτές που φωτίζουν κάποιο σπίτι στην Αθήνα, καίγεται.
- 6) Ένας πελάτης μπαίνει στο κεντρικό ταχυδρομείο της Αθήνας.
- 7) Ένα τρανζίστορ μιας ηλεκτρονικής συσκευής που λειτουργεί κάπου στην Αθήνα, καίγεται.
- 8) Ένα συγκεκριμένο ραδιενεργό υλικό εκπέμπει ένα σωματίο  $\alpha$ .

Για το γεγονός  $\Gamma$ , δεχόμαστε ότι υπάρχει μία θετική σταθερά  $\lambda$ , ώστε να ισχύουν τα παρακάτω:

α) Η πιθανότητα να συμβεί το  $\Gamma$  ακριβώς μια φορά, μέσα σ' ένα χρονικό διάστημα, μήκους  $t$ , είναι η ίδια για όλα τα χρονικά διαστήματα μήκους  $t$ , και είναι,  $\lambda t + o(t)$ . (Σημείωση: Επαναλαμβάνουμε ότι το  $o(t)$ , είναι κάποια άγνωστη συνάρτηση  $f(t)$ , που έχει την ιδιότητα  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} = 0$ . Έτσι η  $f(t)$  θα μπορούσε να ήταν η  $t^{3/2}$ , δεν θα μπορούσε όμως να ήταν η  $t^{1/2}$ ).

(Η πιθανότητα να εμφανιστεί το ενδεχόμενο σ' ένα μικρό χρονικό διάστημα μια φορά είναι ανάλογη του μήκους του).

β) Η πιθανότητα να συμβεί το  $\Gamma$  τουλάχιστον 2 φορές, μέσα σ' ένα χρονικό διάστημα μήκους  $t$ , είναι  $o(t)$  και είναι η ίδια για όλα τα χρονικά διαστήματα μήκους  $t$ .

(Η πιθανότητα να εμφανιστεί το ενδεχόμενο δύο ή περισσότερες φορές σ' ένα μικρό χρονικό διάστημα είναι αμελητέα).

γ) Έστω  $I_1, I_2, \dots, I_n$ , είναι  $n$  χρονικά διαστήματα που δεν έχουν επικαλύψεις μεταξύ τους, και  $k_1, k_2, \dots, k_n$  είναι μη αρνητικοί ακέραιοι. Έστω τα γεγονότα

$E_\mu = \{\text{Το } \Gamma \text{ συμβαίνει } k_\mu \text{ φορές, στο χρονικό διάστημα } I_\mu\}$  για  $\mu = 1, 2, \dots, n$ . Τότε τα γεγονότα  $E_1, E_2, \dots, E_n$  είναι ανεξάρτητα.

(Οι εμφανίσεις του ενδεχομένου σε δύο ξένα χρονικά διαστήματα είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα).

Έστω λοιπόν  $N(t)$  το πλήθος των εμφανίσεων του  $\Gamma$ , στο χρονικό διάστημα  $[0, t]$ . Μας ενδιαφέρει η πιθανότητα  $P(N(t) = k)$ , για  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Αποδεικνύεται (Παπασταυρίδης (1988)) ότι είναι:

$$P(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \quad (1)$$

δηλαδή, η τ.μ.  $N(t)$  έχει την κατανομή Poisson με παράμετρο  $\lambda t$  και επομένως μέση τιμή  $\lambda t$ . Το  $\lambda$  εκφράζει το μέσο αριθμό εμφανίσεων του ενδεχομένου στη μονάδα του χρόνου ή αλλιώς το ρυθμό εμφάνισης του ενδεχομένου. Στην πράξη, το  $\lambda$  εκτιμάται εμπειρικά από στατιστικά στοιχεία.

Έτσι, για κάθε  $t \geq 0$  έχουμε μια τυχαία μεταβλητή  $N(t)$  που εκφράζει πόσες φορές εμφανί-



στηκε το ενδεχόμενο σε διάστημα  $t$ . Πρόκειται δηλαδή για μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών  $\{N(t), t \geq 0\}$ , η οποία ονομάζεται **στοχαστική διαδικασία (ανέλιξη) Poisson (Poisson stochastic process)**.

## 1.2. Η Εκθετική Κατανομή

### Ορισμός 3

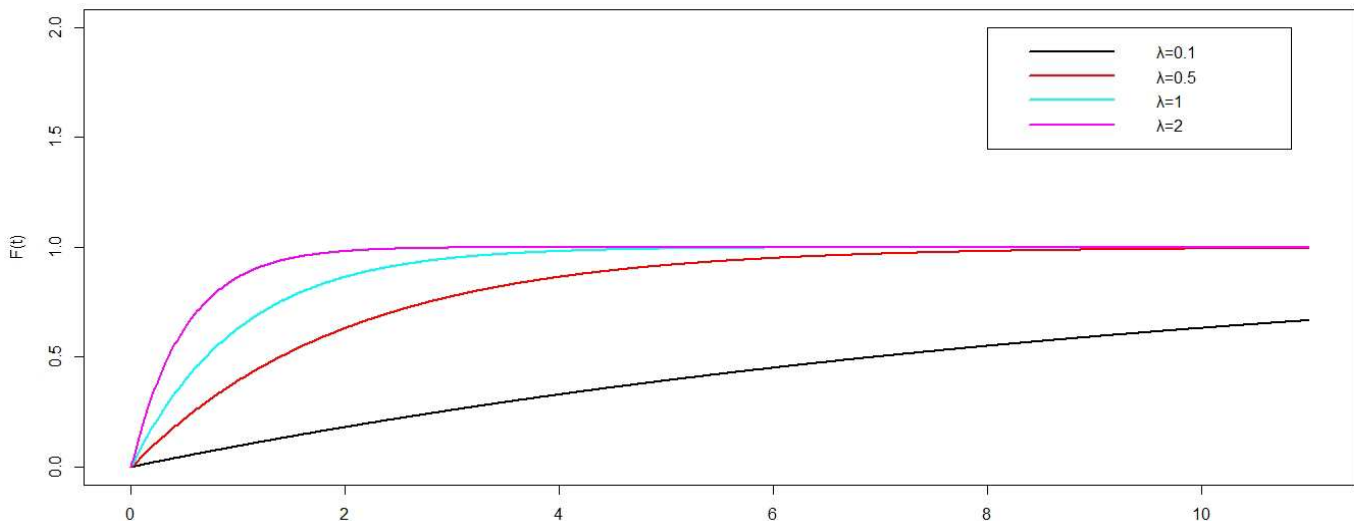
Ονομάζουμε Εκθετική (Exponential) Κατανομή, με παράμετρο  $\lambda$ , (όπου  $\lambda > 0$ ), την κατανομή  $F$  που έχει τύπο

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Προφανώς η εκθετική κατανομή έχει πυκνότητα

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

### Συνάρτηση κατανομής



για τιμές της παραμέτρου  $\lambda=0.1, 0.5, 1, 2$

Σχήμα 1

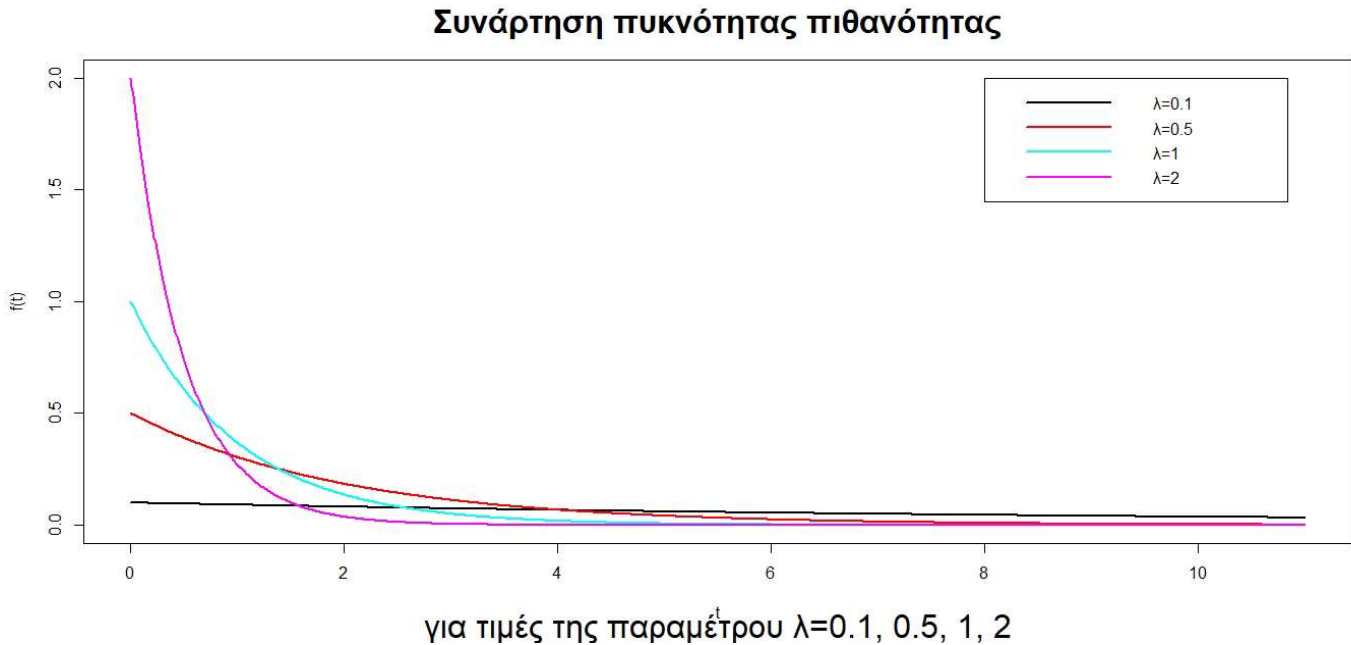
Κώδικας στην R για την εξαγωγή του σχήματος 1

```
t = seq(0, 11, by=0.01)
y1 = pexp(t, 0.1)
y2 = pexp(t, 0.5)
y3 = pexp(t, 1)
y4 = pexp(t, 2)
plot(t, y1, type="l", lty=1, ylab="F(t)", xlim=c(0,11), ylim=c(0,2), lwd=2, col=1)
lines(t, y2, lty=1, lwd=2, col=2)
lines(t, y3, lty=1, lwd=2, col=5)
```

```

lines(t, y4, lty=1, lwd=2, col=6)
legend(8, 2, lty=c(1,1,1,1), col=c(1,2,5,6), legend=c("λ=0.1", "λ=0.5", "λ=1", "λ=2"), lwd=2)
title(main="Συνάρτηση κατανομής", cex.main=2, sub="για τιμές της παραμέτρου λ=0.1, 0.5, 1, 2", cex.sub=2)

```



Σχήμα 2

Κώδικας στην R για την εξαγωγή του σχήματος 2

```

t = seq(0, 11, by=0.01)
y1 = dexp(t, 0.1)
y2 = dexp(t, 0.5)
y3 = dexp(t, 1)
y4 = dexp(t, 2)
plot(t, y1, type="l", lty=1, ylab="f(t)", xlim=c(0,11), ylim=c(0,2), lwd=2, col=1)
lines(t, y2, lty=1, lwd=2, col=2)
lines(t, y3, lty=1, lwd=2, col=5)
lines(t, y4, lty=1, lwd=2, col=6)
legend(8, 2, lty=c(1,1,1,1), col=c(1,2,5,6), legend=c("λ=0.1", "λ=0.5", "λ=1", "λ=2"), lwd=2)
title(main="Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας", cex.main=2, sub="για τιμές της παραμέτρου λ=0.1, 0.5, 1, 2", cex.sub=2)

```

**Παράδειγμα 1.** Θεωρούμε ένα γεγονός  $\Gamma$ , που ακολουθεί τη διαδικασία Poisson. Έστω  $t_0$  μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή, και έστω  $T$  ο χρόνος που πρέπει να περιμένουμε μετά την  $t_0$ , ώστε να εμφανιστεί το  $\Gamma$ , για πρώτη φορά μετά την  $t_0$ . Ο χρόνος αναμονής (waiting time)  $T$ , είναι μια τ.μ. και μας ενδιαφέρει η κατανομή της. Προφανώς, το γεγονός  $T \leq t$ , είναι το ίδιο με το γεγονός  $N(t) \geq 1$ , διότι το να περιμένουμε το πολύ χρόνο  $t$  για την εμφάνιση του  $\Gamma$ , είναι ισοδύναμο με το να πούμε ότι το  $\Gamma$  εμφανίσθηκε τουλάχιστον μια φορά μέσα σε διάρκεια χρόνου  $t$ . Άρα από την (1) είναι:

$$\begin{aligned}
P(T \leq t) &= P(N(t) \geq 1) \\
&= 1 - P(N(t)=0) \\
&= 1 - e^{-\lambda t}
\end{aligned}$$

όταν  $t \geq 0$ . Φυσικά, όταν  $t < 0$  είναι  $P(T \leq t) = 0$ . Άρα η μεταβλητή  $T$  ακολουθεί εκθετική κατανομή.

Βλέπουμε έτσι ότι η εκθετική κατανομή εμφανίζεται τελείως φυσιολογικά στα πλαίσια της διαδικασίας Poisson, σαν ο χρόνος αναμονής ενός γεγονότος.

Χρησιμοποιείται για να εκφράσει:

- το χρόνο μεταξύ αφίξεων διαφορετικών πελατών σε κατάστημα,
- το χρόνο συνομιλίας σε μια τηλεφωνική επικοινωνία,
- το χρόνο ζωής ηλεκτρονικών κομματιών σε μια συσκευή.

### Ιδιότητα αμνησίας ή απώλειας μνήμης

Πρόταση 1. Έστω  $X$  είναι μια τυχαία μεταβλητή που παίρνει θετικές τιμές. Τότε οι δύο παρακάτω συνθήκες είναι ισοδύναμες:

- α) Η  $X$  έχει εκθετική κατανομή.
- β) Αν  $\alpha > \beta > 0$ , τότε  $P(X > \alpha | X > \beta) = P(X > (\alpha - \beta))$ .

Απόδειξη

α) Έστω ότι  $P(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$  για  $t \geq 0$ . Τότε είναι:

$$\begin{aligned}
P(X > \alpha | X > \beta) &= P(X > \alpha) / P(X > \beta) \\
&= (1 - P(X \leq \alpha)) / (1 - P(X \leq \beta)) \\
&= e^{-\lambda \alpha} / e^{-\lambda \beta} \\
&= e^{-\lambda(\alpha - \beta)} \\
&= 1 - P(X \leq (\alpha - \beta)) \\
&= P(X > (\alpha - \beta))
\end{aligned}$$

β) Έστω ότι είναι  $P(X > \alpha | X > \beta) = P(X > (\alpha - \beta))$  για κάθε  $\alpha, \beta$  με  $\alpha > \beta > 0$ .

Έστω η συνάρτηση,  $\varphi: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , με  $\varphi(t) = P(X > t) = 1 - P(X \leq t)$ . Τότε η προηγούμενη σχέση μεταφράζεται σε

$$\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) \varphi(\alpha - \beta) \quad (2)$$

για κάθε  $\alpha, \beta$  με  $0 < \beta < \alpha$ . Επιπλέον η  $\varphi$  είναι δεξιά συνεχής.

Στη σχέση (2) αντικαθιστούμε  $\mu, \nu$  θετικούς ακέραιους, έτσι ώστε:

$$\varphi((\mu + 1) / \nu) = \varphi(\mu / \nu) \varphi(1 / \nu).$$

Με επαγωγή ως προς  $\mu$ , η σχέση αυτή δίνει:

$$\varphi(\mu / \nu) = (\varphi(1 / \nu))^{\mu} \quad (3)$$

για  $\mu, \nu$  θετικούς ακεραίους. Η (3) για  $\mu = \nu$  δίνει:

$$\varphi(1) = (\varphi(1 / \nu))^{\nu}$$

$$\text{ή } \varphi(1 / \nu) = (\varphi(1))^{1/\nu},$$

οπότε η (3) γίνεται:

$$\varphi(\mu / \nu) = (\varphi(1))^{\mu/\nu},$$

οπότε έχουμε, θέτοντας  $\lambda = -\log\varphi(1)$

$$\varphi(t) = e^{-\lambda t}$$

όπου  $t$  ένας θετικός ρητός αριθμός. Όμως επειδή η  $\varphi$  είναι δεξιά συνεχής, θα είναι:

$$\varphi(t) = e^{-\lambda t}$$

για  $t > 0$ , άρα

$$\varphi(t) = P(X > t) = 1 - P(X \leq t) = e^{-\lambda t},$$

άρα

$$P(X \leq t) = 1 - e^{-\lambda t},$$

άρα η  $X$  ακολουθεί εκθετική κατανομή.

**Έτσι βλέπουμε ότι η εκθετική κατανομή χαρακτηρίζεται από μια βασική ιδιότητα (Πρόταση 1β).** Η σημασία της φαίνεται παραστατικά στην επόμενη εφαρμογή.

**Εφαρμογή 1.** Έστω  $X$  να είναι ο χρόνος ζωής ενός εξαρτήματος, (π.χ. λάμπας, τρανζίστορ, μηχανής αυτοκινήτου). Υποθέτουμε ότι η  $X$  έχει εκθετική κατανομή με παράμετρο  $\lambda$ . Τότε αν  $\alpha, \beta > 0$ , η Πρόταση 1β γράφεται:

$$P(X > \alpha + \beta | X > \beta) = P(X > \alpha).$$

Αυτή τη σχέση μπορούμε να τη δούμε ως εξής: Το δεύτερο μέλος της δηλώνει την πιθανότητα να ζήσει το εξάρτημα αυτό, χρόνο μεγαλύτερο του  $\alpha$ . Το πρώτο μέλος δηλώνει την πιθανότητα να ζήσει το εξάρτημα χρόνο  $\alpha$  περισσότερο από τώρα, υπό την συνθήκη ότι τώρα λειτουργεί. Η ισότητα αυτή μας λέει ότι το εξάρτημα δεν «γερνάει», δεν φθείρεται σιγά-σιγά κατά τη λειτουργία του. Η υπόθεση ότι ο χρόνος ζωής ακολουθεί την εκθετική κατανομή, σημαίνει ότι υπάρχουν εξαρτήματα που θα λειτουργούν  $10^{10000}$  χρόνια!!! Φυσικά, κάτι τέτοιο δεν το διαφημίζει ούτε η εταιρεία που τα παράγει!

Έχει αποδειχθεί από μετρήσεις ότι υπάρχουν εξαρτήματα που ακολουθούν αρκετά πιστά την εκθετική κατανομή.

**Δηλαδή, η εκθετικά κατανομημένη τυχαία μεταβλητή δεν «γερνάει».**

**Η εκθετική είναι η μόνη συνεχής κατανομή με την ιδιότητα της αμνησίας.**

Παράδειγμα 2. Έχει υπολογισθεί από στατιστικές μετρήσεις, ότι η διάρκεια των τηλεφωνημάτων που γίνονται από δημόσιους τηλεφωνικούς θαλάμους, μετρούμενη σε λεπτά, ακολουθεί με ικανοποιητική πιστότητα την εκθετική κατανομή με παράμετρο  $\lambda = 1/8$ .

Ο W. Feller με χιουμοριστική διάθεση σχολιάζει: «Η υπόθεση ότι η χρονική διάρκεια των τηλεφωνημάτων ακολουθεί την εκθετική κατανομή, σημαίνει ότι η διάθεση των συνομιλητών για φλυαρία παραμένει σταθερή και ακμαία μέχρι τέλους του τηλεφωνήματος».

Πηγές:

Δασκαλάκη, Σ. (2006), *Χρήσιμες Κατανομές*, Πανεπιστήμιο Πατρών, Πολυτεχνική Σχολή Γενικό Τμήμα

[http://www.des.upatras.gr/amm/daskalaki/UsefulDistributions\\_2006.pdf](http://www.des.upatras.gr/amm/daskalaki/UsefulDistributions_2006.pdf)

Παπαδόπουλος, Γ., *Σημειώσεις Παραδόσεων*, Γεωπονικό Πανεπιστήμιο Αθηνών

[https://www.aua.gr/gpapadopoulos/files/6discr\\_distrib16.pdf](https://www.aua.gr/gpapadopoulos/files/6discr_distrib16.pdf)

Παπασταυρίδης, Σ. (1988), «*Εισαγωγή στην θεωρία των πιθανοτήτων και τις εφαρμογές (συμπλήρωμα τόμος β΄)*», εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών

## 2.1. Έλεγχοι καλής προσαρμογής (Goodness of fit tests)

Ένα σημαντικό πρόβλημα στη στατιστική είναι η εξεύρεση πληροφορίας σχετικά με τη μορφή της κατανομής από την οποία προέρχεται ένα τυχαίο δείγμα. Είναι γνωστό ότι οι περισσότεροι έλεγχοι γίνονται με την προϋπόθεση ότι υπό τη μηδενική υπόθεση ( $H_0$ ) το τυχαίο δείγμα προέρχεται από μια συγκεκριμένη κατανομή. Έλεγχοι αυτής της μορφής καλούνται **έλεγχοι καλής προσαρμογής** (goodness of fit tests) των δεδομένων σε μια συγκεκριμένη κατανομή (της  $H_0$ ) και έχουν προταθεί αρκετοί. Γίνεται άμεσα αντιληπτό ότι οι έλεγχοι καλής προσαρμογής μάς δίνουν το βαθμό ασυμφωνίας ή το βαθμό εγγύτητας των παρατηρούμενων τιμών (observed values) από τις τιμές που αναμένονται (expected values) αν υιοθετήσουμε τη συγκεκριμένη κατανομή (της  $H_0$ ). Τέλος, ένα ενδιαφέρον παρεμφερές πρόβλημα αφορά δύο δείγματα και τον έλεγχο της υπόθεσης ότι τα δείγματα αυτά προέρχονται από τον ίδιο πληθυσμό (δηλαδή από την ίδια κατανομή).

## 2.2. Η σημαντικότητα των ελέγχων για την εκθετική κατανομή

Η εκθετική κατανομή, όπως έγινε ήδη μνεία, θεωρείται σε καταστάσεις όπου λαμβάνονται υπόψη τα διαστήματα μεταξύ των συμβάντων. Επίσης και όπου είναι κατάλληλη μια λοξή κατανομή. Η εκθετική κατανομή παίζει βασικό ρόλο στην ανάλυση επιβίωσης. Έλεγχοι καλής προσαρμογής για την εκθετική κατανομή είναι **ζωτικής σημασίας**, καθώς στις φυσικές επιστήμες, ορισμένες από τις κοινώς χρησιμοποιούμενες κατανομές, όπως οι κατανομές Γάμμα και Weibull, είναι μεταφρασμένες εκδόσεις των εκθετικών κατανομών.

## 2.3. Ιστορικά στοιχεία σχετικά με τους ελέγχους για την εκθετική κατανομή

Έχουμε στη διάθεσή μας μια πλειάδα ελέγχων για την εκθετική κατανομή. Θα κάνουμε ένα ταξίδι στο χρόνο και θα τους συναντήσουμε. Είναι τόσοι πολλοί που δεν μπορούμε να τους αναφέρουμε όλους. Γι' αυτό θα περιοριστούμε σε κάποιους απ' αυτούς.

Σ' αυτό το ταξίδι στο χρόνο, περισσότερο από έναν αιώνα πριν, συναντάμε το διάσημο έλεγχο  $X^2$  που πρότεινε ο Άγγλος μαθηματικός Karl Pearson το 1900 για οποιαδήποτε συνεχή ή διακριτή κατανομή. Το 1933 ο Σοβιετικός μαθηματικός Andrey Nikolaevich Kolmogorov βασισμένος στο θεώρημα Glivenco-Cantelli (1933) πρότεινε έναν έλεγχο για ένα δείγμα για οποιαδήποτε συνεχή κατανομή. Το 1939 ο Σοβιετικός μαθηματικός Nikolai Vasilyevich Smirnov επέκτεινε τον στατιστικό έλεγχο του Kolmogorov (1933) για τη σύγκριση δύο κατανομών στη βάση δύο ανεξάρτητων δειγμάτων από κάθε πληθυσμό. Οι στατιστικοί έλεγχοι των Kolmogorov και Smirnov (έλεγχος Kolmogorov-Smirnov για ένα δείγμα και για δύο δείγματα) στηρίζονται στην εμπειρική αθροιστική συνάρτηση κατανομής (ε.α.σ.κ). Μια (δεύτερη) παραλλαγή του ελέγχου Kolmogorov εξετάστηκε από τον Αμερικανό μαθηματικό Hubert Whitman Lilliefors το 1969. Ο έλεγχος αυτός χρησιμοποιείται για τον έλεγχο της υπόθεσης ότι ο γεννήτορας πληθυσμός είναι εκθετικός, όπου η άγνωστη παράμετρος πρέπει να εκτιμηθεί με βάση τα δεδομένα. Επίσης το 1969 οι V. Seshadri, M. Csörgö και M. A. Stephens παρουσίασαν ελέγχους, χρησιμοποιώντας στατιστικά τύπου Kolmogorov. *(Άλλη παραλλαγή του ελέγχου Kolmogorov είναι αυτή για τον έλεγχο της σύνθετης υπόθεσης της κανονικότητας, δηλαδή, της υπόθεσης ότι ο πληθυσμός ανήκει στην οικογένεια των κανονικών κατανομών, χωρίς να προσδιορίζεται η μέση τιμή ή η διασπορά της κανονικής κατανομής. Ο έλεγχος αυτός μελετήθηκε για πρώτη φορά από τον Lilliefors το 1967. Για το λόγο αυτό ο έλεγχος αυτός είναι γνωστός ως έλεγχος κανονικότητας του Lilliefors. Ο έλεγχος Kolmogorov έχει επίσης επεκταθεί από τον Lilliefors το 1973 για τον έλεγχο της υπόθεσης ότι ο γεννήτορας πληθυσμός ακολουθεί την κατανομή γάμμα στην περίπτωση που υπάρχουν άγνωστες παράμετροι.)*

Μια εναλλακτική στον έλεγχο Kolmogorov-Smirnov (1933) είναι ο έλεγχος Cramér-von Mises (CVM) (ή Cramér-von Mises-Smirnov (CMS)) που προτάθηκε για πρώτη φορά από τον Σουηδό μαθηματικό Harald Cramér και τον Αυστριακο-εβραίο μαθηματικό Richard Edler von Mises τα έτη 1928-1930. Η γενίκευση σε δύο δείγματα οφείλεται στον Αμερικανό μαθηματικό Theodore Wilbur Anderson (1962). Ο Theodore Wilbur Anderson μαζί με τον Αμερικανό στατιστικό Donald Allan Darling το 1954 εισήγαγαν ένα νέο έλεγχο (και) για την εκθετικότητα, γνωστό ως έλεγχο Anderson-Darling. Οι ελεγχοσυναρτήσεις Anderson-Darling και Cramér-von Mises ανήκουν στην τάξη των τετραγωνικών edf (empirical distribution function) ελεγχοσυναρτήσεων (οι έλεγχοι βασίζονται στην εμπειρική συνάρτηση κατανομής). Σε σύγκριση με την απόσταση Cramér-von Mises, η απόσταση Anderson-Darling δίνει μεγαλύτερο βάρος στις παρατηρήσεις στις ουρές της κατανομής. Ο έλεγχος Anderson-Darling ονομάζεται και έλεγχος άνω ουράς Anderson-Darling.

Το 1968 έχουμε τους διάσημους γραφικούς ελέγχους, τα *pp* και *qq* διαγράμματα (*probability-probability plot* ή *percent-percent plot* ή *p value plot* και *quantile-quantile plot*), τα οποία μας βοηθούν να ελέγξουμε (και) αν κάποια δεδομένα προέρχονται από κάποια συγκεκριμένη κατανομή (και από την εκθετική) και τα οποία προτάθηκαν από τον Ινδό στατιστικολόγο Ramanathan Gnanadesikan και τον Καναδό στατιστικό Martin Bradbury Wilk. Το έργο τους προέκυψε εν μέρει εκτός εργασίας στην αναγνώριση ηχείων (speakers), καθώς διαπιστώθηκε ότι η στατιστική κατανομή ενέργειας μεταξύ των ζωνών συχνοτήτων ήταν διαφορετική για διαφορετικά ηχεία (speakers). Η πολυαναφερόμενη μονογραφία του 1977 για την ανάλυση δεδομένων πολλαπλών παραλλαγών έχει μεταφραστεί στα ιαπωνικά και τα ρωσικά και μια δεύτερη έκδοση δημοσιεύθηκε το 1997.

Το 1972 ο Αμερικανός στατιστικός και μηχανικός Samuel Sanford Shapiro και ο Καναδός στατιστικός Martin Bradbury Wilk πρότειναν έναν έλεγχο για τη σύνθετη υπόθεση της εκθετικότητας. Ο έλεγχος είναι γνωστός ως έλεγχος Shapiro-Wilk. Επίσης το 1972 οι Dahiya και Gurland παρουσίασαν έναν έλεγχο καλής προσαρμογής για την εκθετική κατανομή, χρησιμοποιώντας τους γενικευμένους ελαχίστου  $X^2$  εκτιμητές.

Άλλοι αξιόλογοι έλεγχοι για την εκθετικότητα είναι ο F-έλεγχος του Gnedenko (1969), η τροποποίηση του Harris στον F-έλεγχο του Gnedenko (1980), ο Bivariate F-έλεγχος των Lin και Mudholkar (1980) που είναι ουσιαστικά ένας συνδυασμός των δύο προηγούμενων ελέγχων, η Λοξότητα και Κύρτωση, ο έλεγχος "New Better Than Used" των Hollander και Proschan (1972), ο έλεγχος WE (WE1) των Hahn και Shapiro (1967), τα στατιστικά Gini, Lorenz και Pietra (Gail και Gastwirth (1978)), ο έλεγχος Epstein (1960), ο έλεγχος του Deshpande (1983), ο F Max έλεγχος του Hartley (1950) που προέκυψε από έναν έλεγχο για την ομοιογένεια των διασπορών, ο Score έλεγχος των Cox και Oakes (1984) και ο έλεγχος ακραίου ηγλικού των Wong και Wong (1979).

Κάποιοι παλαιοί έλεγχοι για την εκθετικότητα περιλαμβάνουν τη χρήση των στατιστικών Cramér-von Mises με λογοκριμένα δεδομένα (Pettit (1977) και Sirvanci και Levent (1982)), τροποποιήσεις του ελέγχου του Epstein σε K ομάδες των R στοιχείων (Epstein (1960)), επεκτάσεις του WE1 ελέγχου (Shapiro και Wilk (1972)), τροποποιήσεις της διαδικασίας των Kolmogorov-Smirnov (Margolin και Maurer (1976) και Durbin (1975)), ένας έλεγχος βασίζεται στην εμπειρική χαρακτηριστική συνάρτηση (Erps και Pulley (1986)) και διαδικασίες (έλεγχοι) προτάθηκαν από τον Jackson (1967), Moran (1951), Proschan και Pyke (1967), Bickel και Doksum (1969), Chen, Hollander και Langberg (1983), Koul (1978), Kimber (1985) και Spinelli και Stephens (1987). Οι τελευταίοι ανέπτυξαν πέντε ελέγχους που βασίζονται στην εμπειρική συνάρτηση κατανομής ή στην παλινδρόμηση.

Στα νεώτερα χρόνια συναντάμε τον έλεγχο του Klar (2001) μέσω της ολοκληρωμένης εμπειρικής συνάρτησης κατανομής, τους ελέγχους των Grzegorzewski και Wieczorkowski (1999), Ebrahimi και άλλων (1992) και Taufer (2002) που είναι βασισμένοι στο χαρακτηρισμό εντροπίας, τους ελέγχους των Baringhaus και Henze (2000) που είναι βασισμένοι σ' ένα χαρακτηρισμό μέσω της συνάρτησης μέσης υπολειπόμενης ζωής, τους ελέγχους των Baringhaus και Henze (1991), του Henze (1993) και των Henze και Meintanis (2002a) που προέρχονται από τον εμπειρικό μετασχηματισμό Laplace, τον έλεγχο των Henze και Meintanis (2002b) και τον έλεγχο των Henze και Meintanis (2002c) που προέρχονται από την εμπειρική χαρακτηριστική συνάρτηση.

Συνεχίζοντας στα νεώτερα χρόνια συναντάμε τους ελέγχους των Fortiana και Grané (2002) και των Montazeri και Torabi (2013) που είναι βασισμένοι στη συσχέτιση και τη συνδιακύμανση αντίστοιχα, τον έλεγχο του Tchirina (2005), τον έλεγχο των Mimoto και Zitiki (2008) που εισήγαγε το στατιστικό Atkinson για εκθετικότητα, τον έλεγχο  $X^2$  του Wang (2008) για παραγόμενα (progressively) τύπου II λογοκριμένα δεδομένα, τον έλεγχο των Acosta και Rojas (2009) που κατασκεύασαν έναν απλό πίνακα πληροφορίας (misspecification) έλεγχο που μπορεί να εφαρμοστεί σε μοντέλα διάρκειας και η ελεγχοσυνάρτηση ακολουθεί την  $X^2$  κατανομή με ένα βαθμό ελευθερίας, τον έλεγχο του Volkova (2010) που είναι βασισμένος στον χαρακτηρισμό των Riedl και Rossberg (1994) της εκθετικής κατανομής, τον έλεγχο των Alizadeh και Arghami (2011) που είναι βασισμένος στους εκτιμητές εντροπίας, τον έλεγχο των Baratpour και Habibi Rad (2012) που είναι βασισμένος στην αθροιστική υπολοιπόμενη εντροπία, τον έλεγχο των Zardasht, Parsi και Mousazadeh (2014) που είναι βασισμένος στην εμπειρική αθροιστική υπολοιπόμενη εντροπία, ελέγχους που είναι βασισμένοι στις διορθωτικές ροπές των εκτιμητών εντροπίας, τον έλεγχο του Adhikari (2014) που χρησιμοποιεί έναν τροποποιημένο έλεγχο του Lilliefors, τους ελέγχους των Alizadeh και Balakrishnan (2016) που είναι βασισμένοι στη Φι-απόκλιση, δύο ελέγχους των Hamzeh Torabi, Narges H. Montazeri και Aurea Grané (2017-2018), που είναι βασισμένοι στη σύγκριση των συναρτήσεων της θεωρητικής και της εμπειρικής κατανομής και τον έλεγχο του Νιγηριανού Madukaife Mbanefo S. (2019) που είναι βασισμένος στην εμπειρική συνάρτηση ποσοστημορίων.

Τέλος το 2021 ένας νέος έλεγχος προτείνεται με εναλλακτική κατανομή ελαφριάς ή βαριάς ουράς που βασίζεται στην αρχή του λεγομένου, ενιαίου μεγάλου άλματος και παρουσιάζεται και σ' αυτή την εργασία (βλέπε και Karagrigoriou, A., Papasotiriou, G., Vonta, I. (2021)).

Πηγές:

#### Ξενόγλωσσες

Adhikari, A. P. (2014), *Exponentiality Test Using a Modified Lilliefors Test*, University of Northern Colorado, Dissertations, Paper 63

<https://digscholarship.unco.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1062&context=dissertations>

Anderson, T. W. and Darling D. A. (1954), *A test of goodness of fit*, Journal of the American Statistical Association, Vol. 49, No. 268, pp. 765-769

<http://www.hep.caltech.edu/~fcp/statistics/hypothesisTest/PoissonConsistency/AndersonDarling1954.pdf>

Ascher, S. (1990), *A survey of tests for exponentiality*, Communications in Statistics - Theory and Methods, 19:5, 1811-1825

[https://ami.nstu.ru/~post/teaching/ktad/Ascher\\_1990.pdf](https://ami.nstu.ru/~post/teaching/ktad/Ascher_1990.pdf)

Baratpour, S. and Habibi, R. A. (2012), *Testing goodness-of-fit for exponential distribution based on cumulative residual entropy*, Communications in Statistics - Theory and Methods, 41:8, 1387-1396

<https://profdoc.um.ac.ir/articles/a/1027517.pdf>



Henze, N. and Meintanis, S. G. (2005), *Recent and classical tests for exponentiality: a partial review with comparisons*, *Metrika* 61: 29-45  
[https://ami.nstu.ru/~post/teaching/ktad/Henze\\_2005.pdf](https://ami.nstu.ru/~post/teaching/ktad/Henze_2005.pdf)

Madukaife, M. S. (2019), *An adaptive test for exponentiality based on empirical quantile function*, *International Journal of Statistics and Applications* 2019, 9(4): 111-116  
<http://article.sapub.org/10.5923.j.statistics.20190904.02.html>

Novikov, A., Pusev, R. and Yakovlev, M. (2015), *Tests for Exponentiality, Tests for the composite hypothesis of exponentiality*, package 'exptest', CRAN  
<https://cran.r-project.org/web/packages/exptest/exptest.pdf>

Rahman, M. and Wu, H. (2017), *Tests for exponentiality: A comparative study*, *American Journal of Applied Mathematics and Statistics*, vol. 5, no. 4 (2017): 125-135.  
[https://www.researchgate.net/publication/321217987\\_Tests\\_for\\_Exponentiality\\_A\\_Comparative\\_Study](https://www.researchgate.net/publication/321217987_Tests_for_Exponentiality_A_Comparative_Study)

Rogozhnikov, A. P. and Lemeshko, B. Yu. (2012), *A review of tests for exponentiality*, 11th international conference, conference paper  
[https://www.researchgate.net/publication/236170192\\_A\\_Review\\_of\\_Tests\\_for\\_Exponentiality](https://www.researchgate.net/publication/236170192_A_Review_of_Tests_for_Exponentiality)

Seshadri, V., Csörgö, M. and Stephens, M. A. (1969), *Tests for the exponential distribution using Kolmogorov-type statistics*, *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, Volume 31, Issue 3, Pages 499-509.  
<https://rss.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/j.2517-6161.1969.tb00809.x>

Torabi, H., Montazeri, N. H. and Grané, A. (2018), *A wide review on exponentiality tests and two competitive proposals with application on reliability*, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 88:1, 108-139  
[https://www.researchgate.net/publication/319983396\\_A\\_wide\\_review\\_on\\_exponentiality\\_tests\\_and\\_two\\_competitive\\_proposals\\_with\\_application\\_on\\_reliability](https://www.researchgate.net/publication/319983396_A_wide_review_on_exponentiality_tests_and_two_competitive_proposals_with_application_on_reliability)

Wikipedia

Wilk M. B. and Gnanadesikan R. (1968), *Probability plotting methods for the analysis of data*, *Biometrika*, 55, 1  
<https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.860.6347&rep=rep1&type=pdf>

Zardasht, V., Parsi, S. and Mousazadeh, M. (2014), *On empirical cumulative residual entropy and a goodness-of-fit test for exponentiality*, in *Statistical Papers* · June 2014  
<https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/s00362-014-0603-9.pdf>

#### Ελληνικές

Μπατσίδης, Α. Δ. (2014), «*Εισαγωγή στη μη παραμετρική στατιστική*», *Διδακτικές σημειώσεις*, Τμήμα Μαθηματικών, Τομέας Πιθανοτήτων-Στατιστικής & Επιχειρησιακής Έρευνας, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων  
<http://users.uoi.gr/abatsidis/NonParametricClassNotes2014.pdf>

Μπούτσικας, Μ. (2004), *Σημειώσεις μαθήματος «Στατιστικά Προγράμματα»*, Τμήμα Στατιστικής & Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς  
[http://www.unipi.gr/faculty/mbouts/statprog/SPSS\\_lesson5-6.pdf](http://www.unipi.gr/faculty/mbouts/statprog/SPSS_lesson5-6.pdf)

Ξεκαλάκη, Ε. (2001), *Μη Παραμετρική Στατιστική*, (Τμήμα Στατιστικής του Οικονομικού Πανεπιστημίου Αθηνών), Αθήνα  
<http://www2.stat-athens.aueb.gr/~exek/NPar-Statistics/chapter4.pdf>



# Κεφάλαιο 1

**ΕΛΕΓΧΟΙ ΚΑΛΗΣ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ  
ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ**

Θα ξεκινήσουμε την παρουσίαση των ελέγχων καλής προσαρμογής για την εκθετική κατανομή από κάποιους «εμπειρικούς» ελέγχους, οι οποίοι γίνονται μέσω κάποιων γραφημάτων (*P-P* και *Q-Q plots* (1968)), ώστε να πάρουμε μια πρώτη εποπτική εικόνα για τα δεδομένα (τα γραφήματα αυτά δεν οδηγούν με σχετική «ασφάλεια» σε κάποια απόφαση), ενώ στη συνέχεια θα μελετήσουμε τον έλεγχο  $X^2$  (χι-τετράγωνο) (1900), τον έλεγχο Kolmogorov για ένα δείγμα (1933) και τον έλεγχο Smirnov για δύο ανεξάρτητα δείγματα (1939) (έλεγχοι Kolmogorov-Smirnov), τον έλεγχο του Lilliefors για την εκθετική κατανομή (1969), τον έλεγχο Cramér-von Mises-Smirnov (CMS) (1928-1930, 1937) (ή Cramér-von Mises (CVM)), τον έλεγχο Anderson-Darling (1954), τον έλεγχο Shapiro-Wilk (1972), άλλους παλαιούς ελέγχους για την εκθετικότητα από τη συλλογή του S. Ascher (1990), νεότερους ελέγχους για την εκθετικότητα από τις συλλογές των N. Henze και S. G. Meintanis (2005) και H. Torabi, N. H. Montazeri & A. Grané (2018) και τέλος τον έλεγχο του Mbanefo S. Madukaiife (2019). Επίσης στο παρόν κεφάλαιο γίνεται μνεία στην εμπειρική αθροιστική συνάρτηση κατανομής (ε.α.σ.κ.)· παραθέτουμε τον ορισμό της, καθώς και κάποιες χρήσιμες ιδιότητές της.

### 1.1. *P-P plot* και *Q-Q plot* (*P-P* διάγραμμα και *Q-Q* διάγραμμα)

Wilk and Gnanadesikan (1968)

#### Γραφικοί έλεγχοι

Να αναφέρουμε αρχικά ότι τα *P-P plot* (*Probability-Probability plot* ή *Percent-Percent plot* ή *P value plot*) και *Q-Q plot* (*Quantile-Quantile plot*) είναι δύο γραφήματα τα οποία μας βοηθούν να ελέγξουμε και αν κάποια δεδομένα προέρχονται από κάποια συγκεκριμένη κατανομή (π.χ. από την εκθετική). Τα γραφήματα αυτά βασίζονται στην ακόλουθη πρόταση:

#### Πρόταση 1.1.1

Αν  $X_1, X_2, \dots, X_n$  είναι ένα τυχαίο δείγμα (ανεξάρτητες τ.μ.) από μια (συνεχή) κατανομή με σ.κ.  $F$ , τότε οι νέες τ.μ.  $Y_1 = F(X_1), Y_2 = F(X_2), \dots, Y_n = F(X_n)$  είναι και αυτές ανεξάρτητες και ακολουθούν την ομοιόμορφη  $U(0,1)$  κατανομή.

#### Απόδειξη

Θα αποδείξουμε πρώτα ότι οι τ.μ.  $Y_1 = F(X_1), Y_2 = F(X_2), \dots, Y_n = F(X_n)$  είναι ανεξάρτητες, δηλαδή ότι ισχύει  $P(Y_1 \in B_1, Y_2 \in B_2, \dots, Y_n \in B_n) = P(Y_1 \in B_1) \cdot P(Y_2 \in B_2) \dots P(Y_n \in B_n)$ , για οποιαδήποτε υποσύνολα  $B_1, B_2, \dots, B_n$  του συνόλου των πραγματικών αριθμών.

Είναι:

$$P(Y_1 \in B_1, Y_2 \in B_2, \dots, Y_n \in B_n) = P(F(X_1) \in B_1, F(X_2) \in B_2, \dots, F(X_n) \in B_n)$$

$$= P(X_1 \in F^{-1}(B_1), X_2 \in F^{-1}(B_2), \dots, X_n \in F^{-1}(B_n)).$$

Και επειδή οι τ.μ.  $X_1, X_2, \dots, X_n$  είναι ανεξάρτητες, έχουμε:

$$P(X_1 \in F^{-1}(B_1), X_2 \in F^{-1}(B_2), \dots, X_n \in F^{-1}(B_n)) = P(X_1 \in F^{-1}(B_1)) P(X_2 \in F^{-1}(B_2)) \dots P(X_n \in F^{-1}(B_n)).$$

Επομένως

$$P(Y_1 \in B_1, Y_2 \in B_2, \dots, Y_n \in B_n) = P(X_1 \in F^{-1}(B_1)) P(X_2 \in F^{-1}(B_2)) \dots P(X_n \in F^{-1}(B_n))$$

$$= P(F(X_1) \in B_1) P(F(X_2) \in B_2) \dots P(F(X_n) \in B_n)$$

$$= P(Y_1 \in B_1) P(Y_2 \in B_2) \dots P(Y_n \in B_n).$$

Άρα οι τ.μ.  $Y_1 = F(X_1), Y_2 = F(X_2), \dots, Y_n = F(X_n)$  είναι ανεξάρτητες.

Επιπλέον οι τ.μ.  $Y_1 = F(X_1), Y_2 = F(X_2), \dots, Y_n = F(X_n)$  ακολουθούν την ομοιόμορφη  $U(0,1)$  κατανομή, διότι για κάθε  $i = 1, 2, \dots, n$  είναι:

$$P(F(X_i) \leq x) = P(X_i \leq F^{-1}(x)) = F(F^{-1}(x)) = x, x \in [0,1].$$

□

Επιπλέον ισχύει η ακόλουθη πρόταση:

### Πρόταση 1.1.2

Αν  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n \sim U(0,1)$  ( $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  ανεξάρτητες τ. μ., συνεχείς), τότε κάθε μια από τις διατεταγμένες τ.μ.  $Y_{(1)}, Y_{(2)}, \dots, Y_{(n)}$  (διατεταγμένες στατιστικές, order statistics) ακολουθεί την κατανομή βήτα και συγκεκριμένα  $Y_{(i)} \sim \text{Beta}(i, n-i+1)$  με  $E(Y_{(i)}) = i / (n+1), i = 1, 2, \dots, n$ .

### Απόδειξη

Έστω  $f_y$  η κοινή συνάρτηση πυκνότητας των ανεξάρτητων τ. μ.  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  και  $F_y$  η κοινή συνάρτηση κατανομής τους.

Για να είναι ίση με  $x$  η τυχαία μεταβλητή  $Y_{(i)}$ , θα πρέπει  $i - 1$  από τις  $n$  τιμές των τυχαίων μεταβλητών  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  να είναι μικρότερες από  $x$ ,  $n - i$  τιμές να είναι μεγαλύτερες από  $x$  και ακριβώς μία τιμή να είναι ίση με  $x$ . Η συνάρτηση πυκνότητας οποιουδήποτε συνόλου τιμών των τυχαίων μεταβλητών  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  τέτοιου ώστε  $i - 1$  τιμές να είναι όλες μικρότερες από  $x$ ,  $n - i$  τιμές να είναι όλες μεγαλύτερες από  $x$  και ακριβώς μία τιμή να είναι ίση με  $x$ , είναι

$$[F_y(x)]^{i-1} [1-F_y(x)]^{n-i} f_y(x).$$

Επειδή υπάρχουν  $\binom{n}{i-1, n-i, 1} = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!1!} = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}$  διαφορετικοί τρόποι έτσι ώστε ένα σύνολο  $n$  τιμών των τυχαίων μεταβλητών  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  να είναι τέτοιο ώστε  $i - 1$  τιμές του να είναι όλες μικρότερες από  $x$ ,  $n - i$  τιμές του να είναι όλες μεγαλύτερες από  $x$  και ακριβώς μία τιμή του να είναι ίση με  $x$ , καταλήγουμε ότι η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής  $Y_{(i)}$  είναι

$$f_{Y_{(i)}}(x) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} [F_y(x)]^{i-1} [1-F_y(x)]^{n-i} f_y(x).$$

Η συνάρτηση κατανομής της  $i$ - διατεταγμένης στατιστικής  $Y_{(i)}$  μπορεί να εξαχθεί ολοκληρώνοντας την προηγούμενη σχέση. Είναι

$$F_{Y_{(i)}}(x) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} \int_{-\infty}^x [F_y(t)]^{i-1} [1-F_y(t)]^{n-i} f_y(t) dt. \quad (1.1.1)$$

Επειδή  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n \sim U(0,1)$ , έχουμε  $F_y(x) = \frac{x-0}{1-0} = \frac{x}{1} = x, 0 \leq x \leq 1$  και  $f_y(x) = \frac{1}{1-0} = \frac{1}{1} = 1, 0 \leq x \leq 1$ , οπότε από την (1.1.1) έχουμε:

$$F_{Y_{(i)}}(x) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} \int_0^x t^{i-1} (1-t)^{n-i} dt, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (1.1.2)$$

Επειδή  $\Gamma(n+1)=n!$  όταν  $n$  θετικός ακέραιος, η (1.1.2) γράφεται:

$$F_{Y_{(i)}}(x) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(i)\Gamma(n-i+1)} \int_0^x t^{i-1} (1-t)^{n-i} dt, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (1.1.3)$$

Όμως  $B(i, n-i+1) = \frac{\Gamma(i)\Gamma(n-i+1)}{\Gamma(i+n-i+1)} = \frac{\Gamma(i)\Gamma(n-i+1)}{\Gamma(n+1)}$ , οπότε η (1.1.3) γράφεται:

$$F_{Y_{(i)}}(x) = \frac{1}{B(i, n-i+1)} \int_0^x t^{i-1} (1-t)^{n-i} dt, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Δηλαδή 
$$F_{Y_{(i)}}(x) = \frac{1}{B(i, n-i+1)} \int_0^x t^{i-1} (1-t)^{n-i+1-1} dt, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (1.1.4)$$

Από την (1.1.4) έχουμε ότι  $Y_{(i)} \sim \text{Beta}(i, n-i+1)$ .

$$\text{Είναι } E(Y_{(i)}) = \frac{i}{i+n-i+1} = \frac{i}{n+1}.$$

□

Επομένως, για μεγάλο  $n$  θα ισχύει προσεγγιστικά ότι, για  $i = 1, 2, \dots, n$ ,

$$Y_{(i)} = F(X_{(i)}) \approx \frac{i}{n+1} \text{ ή ισοδύναμα } X_{(i)} \approx F^{-1}\left(\frac{i}{n+1}\right)$$

(διότι και  $V(Y_{(i)}) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$ , αφού  $V(Y_{(i)}) = \frac{i(n-i+1)}{(i+n-i+1)^2(i+n-i+1+1)} = \frac{i(n-i^2+i)}{(n+1)^2(n+2)}$  και πράγματι τείνει στο 0 καθώς το  $n$  τείνει στο  $\infty$ ).

Με άλλα λόγια, αν  $X_i \sim F_0$  περιμένουμε ότι τα  $n$  σημεία του επιπέδου

$$\left(F_0(X_{(i)}), \frac{i}{n+1}\right), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

ή ισοδύναμα τα  $n$  σημεία του επιπέδου

$$\left(X_{(i)}, F_0^{-1}\left(\frac{i}{n+1}\right)\right), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

θα βρίσκονται «κοντά» στην διαγώνιο ( $y = x$ ) που περνά από την αρχή των αξόνων. Το **P-P plot** ακριβώς είναι το γράφημα των **πρώτων  $n$  σημείων** (μαζί με τη διαγώνιο) ενώ το **Q-Q plot** είναι το γράφημα των **δεύτερων  $n$  σημείων** (μαζί με τη διαγώνιο). Αντί της επιλογής  $i / (n+1)$ , υπάρχουν και άλλες επιλογές στις οποίες θ' αναφερθούμε στη συνέχεια. Ενδέχεται να μην είναι γνωστές όλες οι

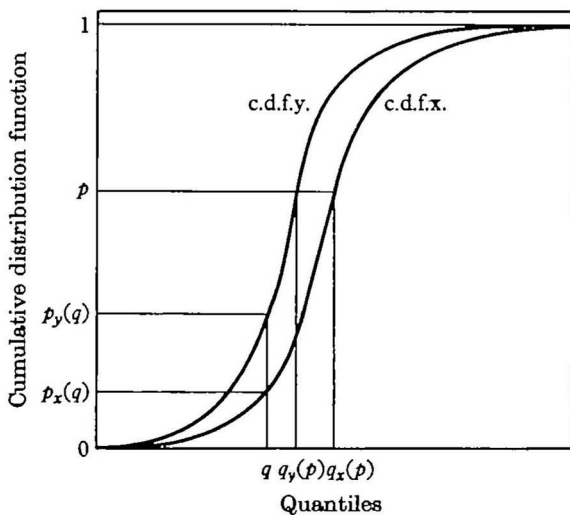
παράμετροι της κατανομής  $F_0$ . Σε αυτή την περίπτωση οι άγνωστοι παράμετροι εκτιμώνται από τα δεδομένα.

Ένα P-P plot συγκρίνει την εμπειρική αθροιστική συνάρτηση κατανομής(\*) μιας μεταβλητής (ενός συνόλου δεδομένων) με μια καθορισμένη θεωρητική αθροιστική συνάρτηση κατανομής  $F_0(\cdot)$ . Ένα Q-Q plot συγκρίνει τις διατεταγμένες τιμές μιας μεταβλητής (τα ποσοστημόρια μιας κατανομής δεδομένων) με τα ποσοστημόρια μιας καθορισμένης θεωρητικής κατανομής.

Και στα δύο γραφήματα, αν τα σημεία βρίσκονται «κοντά» στη διαγώνιο (και «τυχαία» γύρω από αυτήν) (βλ. λεπτομέρειες στη συνέχεια), τότε μπορεί να θεωρηθεί ότι τα δεδομένα προέρχονται από την  $F_0$ .

Εκτός από τη σύγκριση ενός δείγματος με μία κατανομή, μπορούμε να συγκρίνουμε δύο δείγματα ή δύο κατανομές μεταξύ τους.

Από την εργασία των M. B. Wilk και R. Gnanadesikan “Probability plotting methods for the analysis of data” (1968) πήραμε το ακόλουθο σχήμα (Σχ. 1.1.1), το οποίο δείχνει δύο αθροιστικές συναρτήσεις κατανομών και απεικονίζει τον ορισμό των P-P και Q-Q plots (διαγραμμάτων).



Για κάθε τιμή της τεταγμένης  $p$  υπάρχουν δύο τιμές ποσοστημορίων, οι  $q_x(p)$  και  $q_y(p)$ , που αντιστοιχούν. Ένα Q-Q plot των δειγμάτων  $x$  και  $y$  είναι τότε απλά ένα διάγραμμα σημείων των  $q_x(p)$  έναντι των  $q_y(p)$  για διάφορα  $p$ . Για κάθε τιμή της τεταγμένης  $q$  υπάρχουν δύο τιμές των αθροιστικών συναρτήσεων κατανομών, οι  $p_x(q)$  και  $p_y(q)$  αντίστοιχα. Ένα P-P plot των δειγμάτων  $x$  και  $y$  είναι τότε απλά ένα διάγραμμα σημείων των  $p_y(q)$  έναντι των  $p_x(q)$  για διάφορα  $q$ .

Σχήμα 1.1.1. Απεικόνιση για P-P και Q-Q plots.

Το κύριο βήμα για την κατασκευή ενός Q-Q plot είναι ο υπολογισμός ή η εκτίμηση των ποσοστημορίων που θα σχεδιαστούν. Εάν ένας ή και οι δύο άξονες σ' ένα Q-Q plot βασίζονται (βασίζονται) σε μια θεωρητική κατανομή με μια συνεχή αθροιστική συνάρτηση κατανομής (α.σ.κ.), όλα τα ποσοστημόρια προσδιορίζονται με μοναδικό τρόπο και μπορούν να ληφθούν αντιστρέφοντας την α.σ.κ. Εάν μία θεωρητική κατανομή πιθανότητας με ασυνεχή α.σ.κ. είναι μία από τις δύο κατανομές που συγκρίνονται, ορισμένα από τα ποσοστημόρια μπορεί να μην ορίζονται, επομένως μπορεί να σχεδιαστεί ποσοστημόριο με παρεμβολή. Εάν το Q-Q plot βασίζεται σε δεδομένα, χρησιμοποιούνται πολλοί εκτιμητές ποσοστημορίων. Οι κανόνες για τον σχηματισμό των Q-Q plots όταν τα ποσοστημόρια πρέπει να εκτιμηθούν ή να προκύψουν με παρεμβολή ονομάζονται θέσεις σχεδίασης (plotting positions).

(\*) βλέπε λεπτομέρειες κυρίως σελ. 54-56

Μία επιλογή ποσοστημορίων, δεδομένου ενός δείγματος μεγέθους  $n$ , είναι  $i/n$  για  $i = 1, 2, \dots, n$ , καθώς αυτά είναι τα ποσοστημόρια της κατανομής δειγματοληψίας. Το τελευταίο απ' αυτά,  $n/n$ , αντιστοιχεί στο 100ο εκατοστημόριο – τη μέγιστη τιμή της θεωρητικής κατανομής, η οποία μερικές φορές είναι άπειρη. Άλλες επιλογές είναι η χρήση του  $(i - 1/2)/n$  ή του  $(i - 3/8)/(n + 1/4)$  ή, αντίθετα, ομαλός διαχωρισμός των σημείων στην ομοιόμορφη κατανομή, χρησιμοποιώντας  $i/(n + 1)$  (στο οποίο αναφερθήκαμε στην αρχή του κεφαλαίου). Έχουν προταθεί πολλές άλλες επιλογές με βάση τη θεωρία ή τις προσομοιώσεις. Για μέτρια ή μεγάλα δείγματα δεν υπάρχει ουσιαστική διαφορά οποιαδήποτε έκφραση και αν επιλέξουμε.

Έτσι, όταν σχεδιάζουμε ένα Q-Q plot προκειμένου να αντιληφθούμε αν ένα τυχαίο δείγμα  $X_1, X_2, \dots, X_n$  προέρχεται από πληθυσμό με συνάρτηση κατανομής  $F_0$ , απεικονίζουμε τα σημεία  $(X_{(i)}, F_0^{-1}(p_i))$  ή  $(F_0^{-1}(p_i), X_{(i)})$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , όπου  $p_i = i/(n + 1)$  ή  $(i - 1/2)/n$  ή  $(i - 3/8)/(n + 1/4)$  ή  $i/n$  ή άλλο και  $F_0^{-1}(p_i)$  είναι το (κάτω)  $p_i$  - ποσοστιαίο σημείο της κατανομής  $F_0$ . Αν τα σημεία του διαγράμματος αγκαλιάζουν την ευθεία  $y = x$ , τότε συμπεραίνουμε ότι το τυχαίο δείγμα προέρχεται από πληθυσμό με συνάρτηση κατανομής  $F_0$ . Αν τα σημεία αγκαλιάζουν μια άλλη ευθεία (έστω την  $y = \alpha x + \beta$ ), τότε το τυχαίο δείγμα προέρχεται από μια ευρύτερη οικογένεια κατανομών που τα μέλη της διαφέρουν μόνο ως προς τη θέση ή την κλίμακα και ένας «τυπικός» αντιπρόσωπός της είναι η  $F_0$ . Τα  $\alpha, \beta$  είναι οπτικές εκτιμήσεις των παραμέτρων κλίμακας και θέσης αντίστοιχα της θεωρητικής κατανομής. Οπότε από το γράφημα (Q-Q plot) εκτιμούμε οπτικά παραμέτρους της κατανομής (βλέπε και παρακάτω).

Υπάρχουν πολλοί λόγοι για τους οποίους το μοτίβο των σημείων σ' ένα Q-Q plot μπορεί να μην είναι γραμμικό. Παραθέτουμε τον ακόλουθο πίνακα (από συζητήσεις των Chambers και άλλων (1983) και Fowlkes (1987)):

**Πίνακας 1.1.1. Διαγνωστικά σ' ένα Q-Q plot**

<b>Περιγραφή του μοτίβου των σημείων</b>	<b>Πιθανή ερμηνεία</b>
Όλα εκτός από μερικά σημεία πέφτουν στη γραμμή.	Έκτροπα σημεία (outliers) στα δεδομένα.
Το αριστερό άκρο του μοτίβου είναι κάτω από τη γραμμή. Το δεξί άκρο του μοτίβου είναι πάνω από τη γραμμή.	Μακριές ουρές και στα δύο άκρα της κατανομής δεδομένων.
Το αριστερό άκρο του μοτίβου είναι πάνω από τη γραμμή. Το δεξί άκρο του μοτίβου είναι κάτω από τη γραμμή.	Κοντές ουρές και στα δύο άκρα της κατανομής δεδομένων.
Καμπύλο μοτίβο με κλίση που αυξάνεται από αριστερά προς τα δεξιά.	Η κατανομή δεδομένων είναι λοξή προς τα δεξιά.
Καμπύλο μοτίβο με κλίση που μειώνεται από αριστερά προς τα δεξιά.	Η κατανομή δεδομένων είναι λοξή προς τα αριστερά.
Μοτίβο σκάλας (οροπέδια και κενά).	Τα δεδομένα έχουν στρογγυλοποιηθεί ή είναι διακριτά.

(Πηγή: SAS Institute)

Όταν σχεδιάζουμε ένα Q-Q plot προκειμένου να αντιληφθούμε αν οι κατανομές δύο συνόλων δεδομένων (έστω των δύο ανεξάρτητων δειγμάτων  $X_1, X_2, \dots, X_n$  και  $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ ) είναι ίδιες ή διαφέρουν μόνο ως προς θέση / κλίμακα, εφόσον τα δύο σύνολα δεδομένων έχουν ίδιο μέγεθος ( $n = m$ ), απεικονίζουμε τα ζεύγη  $(X_{(i)}, Y_{(i)})$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  και όταν τα μεγέθη είναι άνισα (έστω  $n > m$ ), απεικονίζουμε τα ζεύγη  $(X_{p_i}, Y_{(i)})$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , όπου  $p_i = i/(n + 1)$  ή  $(i - 1/2)/n$  ή  $(i - 3/8)/(n + 1/4)$  ή  $i/n$  ή άλλο και  $X_{p_i}$  είναι το (κάτω)  $p_i$  - ποσοστιαίο σημείο του πρώτου δείγματος. Αν τα σημεία του διαγράμματος πέφτουν σε μια νοητή ευθεία τότε τα δύο σύνολα δεδομένων προέρχονται από την ίδια οικογένεια κατανομών. Αν η νοητή ευθεία συμπίπτει με την  $y = x$  οι δύο κατανομές είναι ίδιες, ενώ αν είναι παράλληλη προς την  $y = x$  διαφέρουν μόνο ως προς θέση.



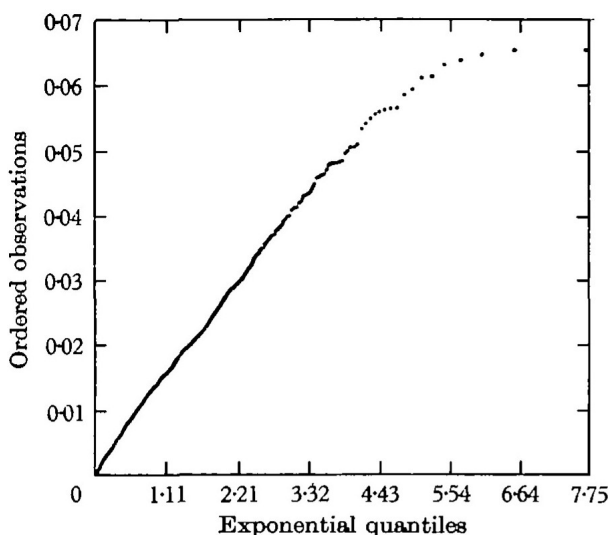
Εάν η γενική τάση του Q-Q plot είναι πιο επίπεδη από τη γραμμή  $y = x$ , η κατανομή που απεικονίζεται στον οριζόντιο άξονα είναι πιο διασκορπισμένη από την κατανομή που απεικονίζεται στον κατακόρυφο άξονα. Αντίθετα, εάν η γενική τάση του Q-Q plot είναι πιο απότομη από τη γραμμή  $y = x$ , η κατανομή που απεικονίζεται στον κατακόρυφο άξονα είναι πιο διασκορπισμένη από την κατανομή που απεικονίζεται στον οριζόντιο άξονα. Τα Q-Q plots συχνά σχηματίζονται με τόξο ή σχήμα "S", υποδεικνύοντας ότι μία από τις κατανομές είναι πιο λοξή από την άλλη ή ότι μία από τις κατανομές έχει βαρύτερες ουρές από την άλλη.

Η χρήση Q-Q plots έχει γίνει ελκυστική και πολύτιμη χάρη στην γραμμικά αναλλοίωτη ιδιότητα: Εάν μία μεταβλητή είναι γραμμική συνάρτηση μιας άλλης, τότε το αντίστοιχο Q-Q plot θα εξακολουθεί να είναι γραμμικό, αλλά με πιθανώς αλλαγμένη θέση και κλίση. Και έχει γίνει ελκυστική και πολύτιμη, κυρίως επειδή η γραμμικότητα φαίνεται να είναι μία γεωμετρική διαμόρφωση την οποία οι άνθρωποι μπορούν ν' αντιληφθούν πιο εύκολα. Επιπλέον, αποκλίσεις από τη γραμμικότητα εκτιμώνται ευαίσθητα.

Για την περίπτωση όμως στην οποία οι μεταβλητές έχουν μεγάλες ουρές (απεριόριστο εύρος), το Q-Q plot τείνει να τονίζει τη συγκριτική δομή στις ουρές και να θολώνει τις διακρίσεις στο «μεσαίο» όπου οι πυκνότητες είναι υψηλές. Ο λόγος γι' αυτό είναι ότι το ποσοστημόριο είναι μια ταχέως μεταβαλλόμενη συνάρτηση του  $p$ , όταν η πυκνότητα είναι αραιή (στις ουρές) και μια αργά μεταβαλλόμενη συνάρτηση του  $p$ , όπου η πυκνότητα είναι υψηλή (στη μέση).

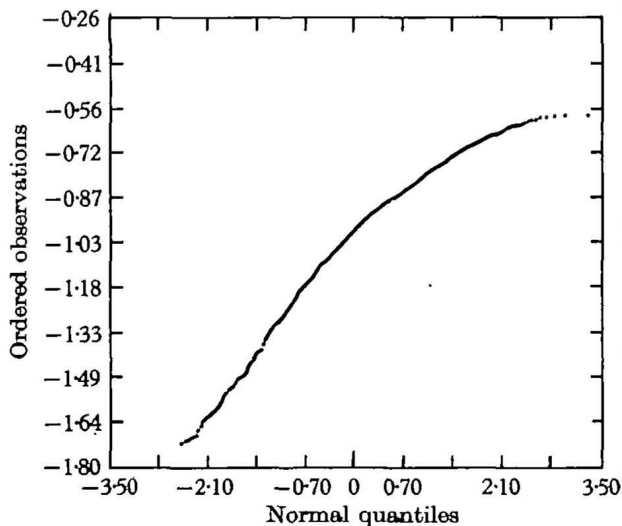
Έτσι το Q-Q plot χρησιμοποιείται και για τη σύγκριση των σχημάτων των κατανομών, παρέχοντας γραφικά μία εικόνα για το πώς ιδιότητες όπως η θέση, η κλίμακα και η λοξότητα είναι παρόμοιες ή διαφορετικές στις δύο κατανομές.

Από την προαναφερθείσα εργασία των M. B. Wilk και R. Gnanadesikan πήραμε τα ακόλουθα σχήματα (Σχ. 1.1.2 - Σχ. 1.1.7) και τις ερμηνείες τους.

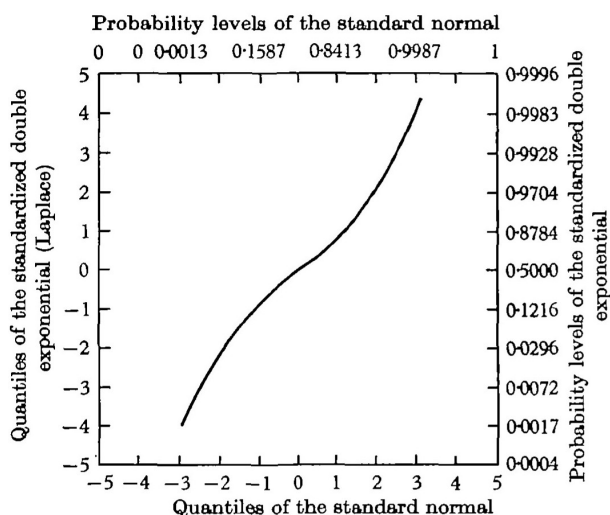


Το σχήμα 1.1.2 δείχνει ένα Q-Q plot δεδομένων κινητού ραδιοφώνου σε κλίμακα βολτ έναντι των ποσοστημορίων της εκθετικής κατανομής (δηλαδή, γάμμα με παράμετρο σχήματος 1). Αν και ορισμένες θεωρητικές εκτιμήσεις υποδηλώνουν ότι μια τέτοια κατανομή μπορεί να ισχύει, είναι προφανές ότι τα δεδομένα δεν συμμορφώνονται τόσο, τουλάχιστον στις ουρές.

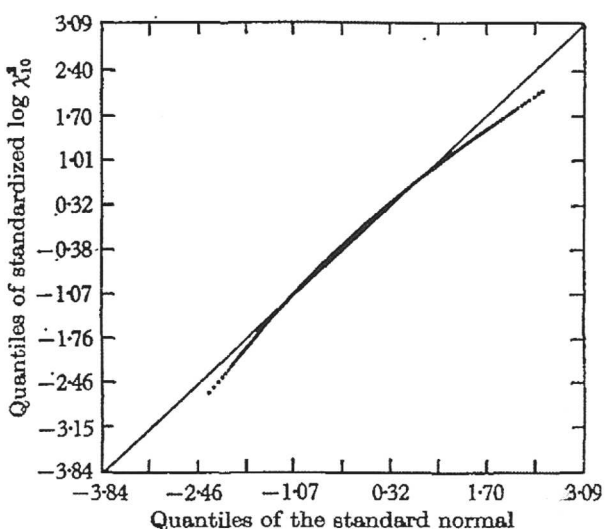
Σχήμα 1.1.2. Εκθετικό Q-Q plot των βολτ για δεδομένα κινητού ραδιοφώνου.



Σχήμα 1.1.3. Κανονικό Q-Q plot των log-βολτ για δεδομένα κινητού ραδιοφώνου.



Σχήμα 1.1.4. Q-Q plot της Laplace έναντι της κανονικής.

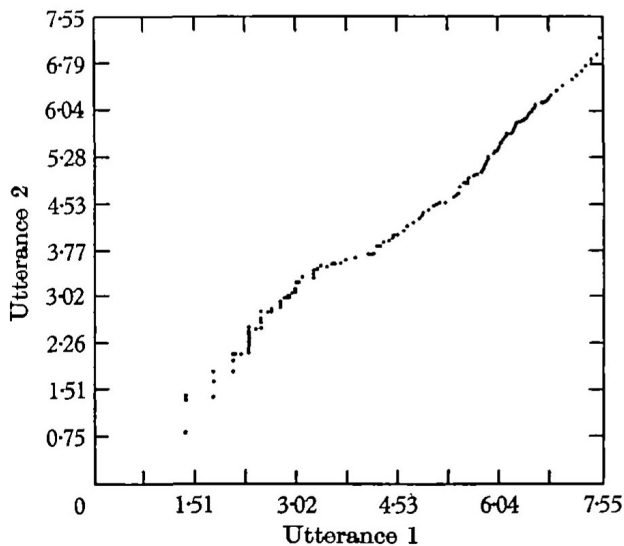


Σχήμα 1.1.5. Q-Q plot της τυποποιημένης  $\log \chi^2_{10}$  έναντι της κανονικής.

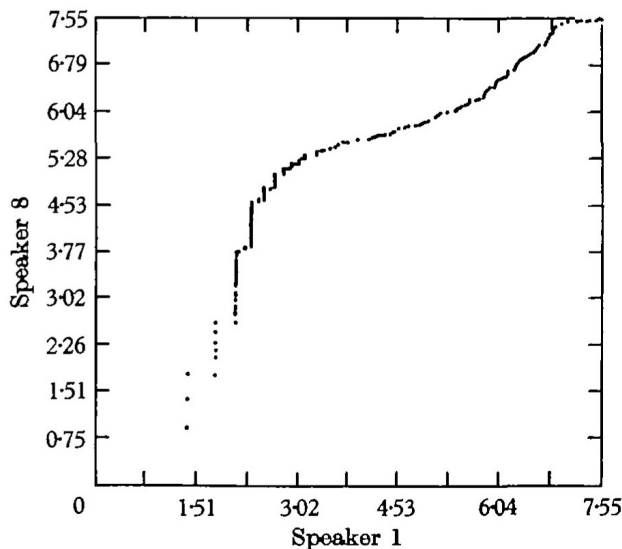
Το σχήμα 1.1.3 δείχνει ένα κανονικό Q-Q plot αυτών των δεδομένων κινητού ραδιοφώνου σε λογαριθμική κλίμακα. Οι αποκλίσεις από την κανονικότητα είναι σαφώς εμφανείς, τα πραγματικά δεδομένα έχουν μικρότερες ουρές από τα κανονικά, καθώς και είναι κάπως ασύμμετρα.

Ένα παράδειγμα ενός Q-Q plot για τη σύγκριση δύο κατανομών δίνεται στο σχήμα 1.1.4, που δείχνει τα ποσοστημόρια της διπλής εκθετικής κατανομής να απεικονίζονται σε σχέση με αυτά της κανονικής (ελήφθησαν από μη δημοσιευμένο έργο των Blake και Fowlkes). Αυτό το διάγραμμα δείχνει μια ομαλή μη-γραμμικότητα παντού, που φανερώνει γενική αποχώρηση της διπλής εκθετικής από την κανονική. Οι 'παχύτερες ουρές' της διπλής εκθετικής φαίνονται από την κλίση της καμπύλης που υπερβαίνει το 1, ολόενα και περισσότερο, σε μεγάλες απόλυτες τιμές ποσοστημορίων. Η μεγαλύτερη συγκέντρωση στο κέντρο της διπλής εκθετικής σε σχέση με την κανονική φαίνεται από την κλίση που είναι μικρότερη από 1 στην κεντρική περιοχή.

Το σχήμα 1.1.5 παρουσιάζει τη χρήση ενός Q-Q plot ως έναν τρόπο μέτρησης της επάρκειας της προσέγγισης της κατανομής μιας τυποποιημένης  $\log \chi^2_{10}$  από μια τυπική κανονική μεταβλητή. Προέρχεται από μη δημοσιευμένο έργο του M. Gnanadesikan. Η σύγκριση της διαμόρφωσης των σχεδιασμένων σημείων με τη γραμμή  $45^\circ$  ( $y = x$ ) υποδηλώνει το συστηματικό σφάλμα στις ουρές, δείχνει μια μικρή αλλά σαφή ασύμμετρία στην προσέγγιση και υποδηλώνει την περιοχή στην οποία η ποσοστημοριακή προσέγγιση μπορεί να θεωρηθεί επαρκής. Άλλες γραφικές διαδικασίες για την αξιολόγηση αυτής της προσέγγισης συζητούνται παρακάτω.



Σχήμα 1.1.6. Q-Q plot των ε.α.σ.κ. των προφορών 1 και 2 του ομιλητή 1.



Σχήμα 1.1.7. Q-Q plot των ε.α.σ.κ. της ίδιας λέξης των ομιλητών 1 και 8.

Περαιτέρω εφαρμογές των Q-Q plots παρουσιάζονται στα σχήματα 1.1.6 & 1.1.7. Αυτά αφορούν ενεργειακά δεδομένα του ομιλητή και το καθένα δείχνει ένα διάγραμμα των εμπειρικών ποσοστημοριών τού ενός δείγματος έναντι αυτών ενός άλλου. Το σχήμα 1.1.6 περιλαμβάνει δύο προφορές της ίδιας λέξης από τον ίδιο ομιλητή. Το σχήμα 1.1.7 περιλαμβάνει προφορές της ίδιας λέξης από δύο διαφορετικούς ομιλητές. Συγκρίνοντας αυτά, είναι προφανές ότι το πρώτο είναι πολύ πιο συμμετρικό και γραμμικό από το δεύτερο. Είναι σαφές, ότι αυτά τα διαγράμματα σχετίζονται με το πρόβλημα των διακρίσεων μεταξύ των ομιλητών.

Και άλλα σχήματα με τις ερμηνείες τους μπορεί ο αναγνώστης να βρει στην προαναφερθείσα εργασία των M. B. Wilk και R. Gnanadesikan.



Όπως προαναφέρθηκε προκειμένου να αξιολογήσουμε το κατά πόσο κοντά συμφωνούν δύο σύνολα δεδομένων (δύο δείγματα, δύο κατανομές ή δείγμα και κατανομή) μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα διάγραμμα πιθανότητας, το P-P plot, απεικονίζοντας τις δύο (εμπειρικές) αθροιστικές συναρτήσεις κατανομών (εμπειρική α.σ.κ. αν έχουμε δείγμα). Καθώς η α.σ.κ. έχει εύρος  $[0, 1]$ , το γράφημα έχει εύρος  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Η γραμμή σύγκρισης είναι η γραμμή  $45^\circ$  ( $y = x$ ) από το  $(0, 0)$  έως το  $(1, 1)$ . Ισότητα έχουμε εάν και μόνο εάν το διάγραμμα πέσει σε αυτήν τη γραμμή. Οποιαδήποτε απόκλιση υποδηλώνει διαφορά.

Έτσι, εάν  $x$  και  $y$  είναι ταυτοτικά κατανεμημένες (ισόνομες) μεταβλητές, τότε ένα P-P plot για τις  $x$  και  $y$  θα είναι ένα σχήμα ευθείας γραμμής από  $(0, 0)$  έως  $(1, 1)$ . Ωστόσο, σε αντίθεση με το Q-Q plot, το P-P plot δεν θα παραμείνει γραμμικό σε περίπτωση που μία από τις  $x$  και  $y$  υπόκειται σε γραμμικό μετασχηματισμό. Αυτό περιορίζει τη γενική χρησιμότητα των P-P plots.

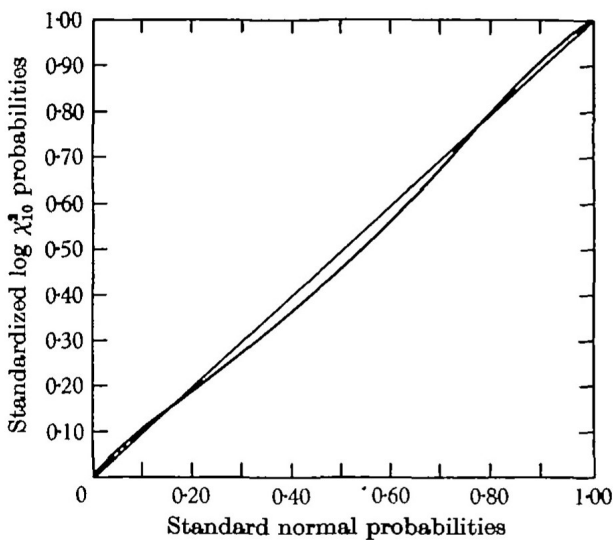
Τα P-P plots περιορίζονται μερικές φορές σε συγκρίσεις μεταξύ δύο δειγμάτων παρά μεταξύ ενός δείγματος με ένα μοντέλο θεωρητικής κατανομής. Επομένως, σχετικά μικρή χρήση έχει γίνει των P-P plots στην περιοχή της καλής προσαρμογής. Για έλεγχο καλής προσαρμογής (έλεγχο κανονικότητας), αναφέρουμε ως παράδειγμα, τη χρήση P-P plot από τους Gan και Koehler (1990), με θέση σχεδίασης  $p_i = i / (n+1)$  (βλ. λεπτομέρειες Henry C. Thode (2002)). Μη κανονικά δεδομένα υποδεικνύονται με τον ίδιο τρόπο όπως με τα Q-Q plots, π.χ. καμπύλες σχήματος S για συμμετρικές κοντών-ουρών πυκνότητες. Ωστόσο εκτιμήσεις παραμέτρων και εκατοστημόρια δεν μπορούν να προσδιοριστούν άμεσα χρησιμοποιώντας ένα P-P plot.

Το P-P plot χρησιμοποιείται ευρέως για την αξιολόγηση της ασυμμετρίας μιας κατανομής. Είναι ιδιαίτερα ευαίσθητο σε ασυμφωνίες στη μέση μιας κατανομής παρά στις ουρές, για λόγους συγκρίσιμους μ' αυτούς στην περίπτωση των Q-Q plots (βλ. και παρακάτω).

Το P-P plot είναι χρήσιμο για τη σύγκριση κατανομών πιθανότητας που έχουν κοντινή ή ίση τοποθεσία – εάν οι κατανομές διαχωρίζονται στο διάστημα, το P-P plot θα δώσει πολύ λίγα σημεία. Συγκεκριμένα, θα περάσει από το σημείο (1/2, 1/2) εάν και μόνο εάν οι δύο κατανομές έχουν την ίδια διάμεσο.

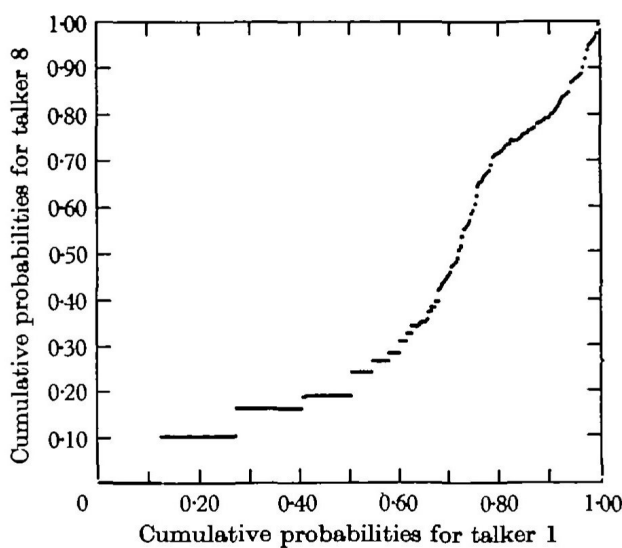
Σε μια ειδική περίπτωση, τα P-P και Q-Q plots είναι στην πραγματικότητα ολόγρια, όταν οι δύο μεταβλητές  $x$  και  $y$  ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή  $U(0, 1)$ .

Πάλι από την προαναφερθείσα εργασία των M. B. Wilk και R. Gnanadesikan πήραμε το ακόλουθα σχήματα (Σχ. 1.1.8 - Σχ. 1.1.10) και τις ερμηνείες τους.



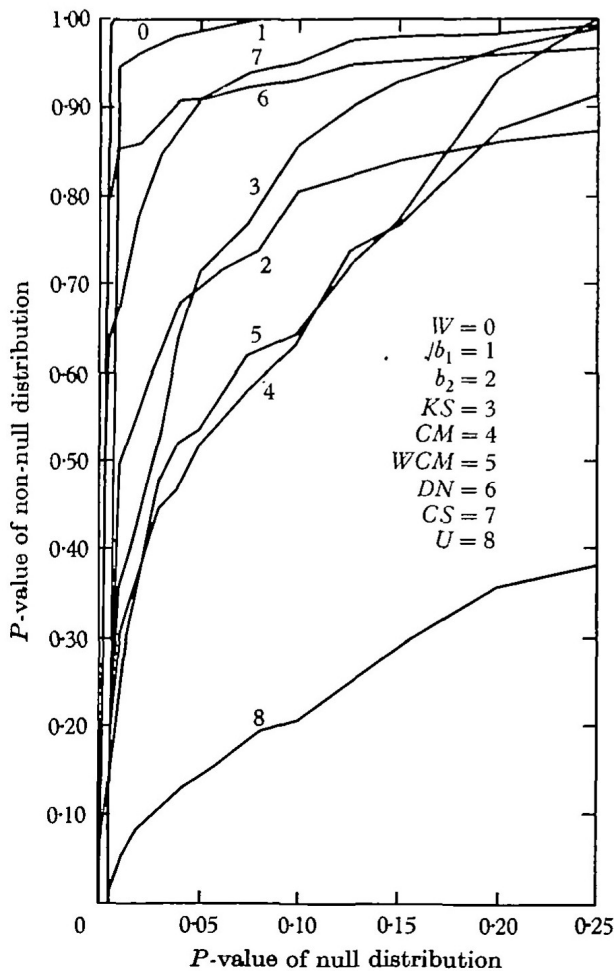
Ένα παράδειγμα της χρήσης ενός P-P plot δίνεται στο σχήμα 1.1.8 που δείχνει τα αποτελέσματα για την κανονική προσέγγιση στην κατανομή του  $\log \chi^2_{10}$  και που αντιστοιχεί στο Q-Q plot του σχ. 1.1.5. Μπορεί να δει κανείς σε αυτή την κλίμακα εκατοστημορίων ότι οι κατανομές διαφέρουν όχι μόνο στις ουρές αλλά και στη μέση.

Σχήμα 1.1.8. P-P plot της τυποποιημένης  $\log \chi^2_{10}$  έναντι της κανονικής.



Ένα P-P plot, που αντιστοιχεί στο Q-Q plot του σχήματος 1.1.7, δίνεται στο σχήμα 1.1.9 για τα δεδομένα στις ενέργειες από δύο ομιλητές. Αυτό το διάγραμμα δείχνει μια αξιοσημείωτη απόκλιση από τη γραμμή  $45^\circ$  ( $y = x$ ), αν και σε αυτά τα δεδομένα το επίπεδο ενέργειας μπορεί να διαφέρει από ομιλητή σε ομιλητή λόγω τεχνητών εφέ. Μια τέτοια αλλαγή της θέσης θα καταστρέψει τη χρησιμότητα του P-P plot αλλά όχι του Q-Q plot.

Σχήμα 1.1.9. P-P plot των ε.α.σ.κ. της ίδιας λέξης από τους ομιλητές 1 και 8.



## P-P plot - Ισχύς ελέγχων

Μια συγκεκριμένη περίπτωση χρήσης P-P plots είναι στην παρουσίαση των αποτελεσμάτων για την ισχύ ενός στατιστικού ελέγχου ως συνάρτηση του λεγομένου επιπέδου σημαντικότητας. Πράγματι, η συνάρτηση ισχύος είναι απλώς η α.σ.κ. του επιτευχθέντος επιπέδου σημαντικότητας,  $p$ , το οποίο είναι φυσικά μια τυχαία μεταβλητή. Έτσι η τετμημένη είναι η  $p$  value της μηδενικής κατανομής ενώ η τεταγμένη είναι η  $p$  value της μη μηδενικής κατανομής. Ένα παράδειγμα μιας τέτοιας χρήσης φαίνεται στο Σχ. 1.1.10 που δίνει τις συγκριτικές εμπειρικές ισχύες 9 ελέγχων για κανονικότητα, σε δείγματα μεγέθους 15 για την εναλλακτική  $\chi_2^2$  (ελήφθησαν από μια μη δημοσιευμένη έκθεση των Shapiro, Wilk & Chen).

Σχήμα 1.1.10. P-P plot για συγκρίσεις εμπειρικής ισχύος αρκετών ελέγχων για κανονικότητα (εναλλακτική είναι  $\chi_2^2$ , μέγεθος δείγματος 15).



Υπάρχουν **τρεις σημαντικές διαφορές** στον τρόπο κατασκευής και ερμηνείας των P-P plots και Q-Q plots:

1) Η κατασκευή ενός Q-Q plot **δεν απαιτεί** να καθοριστούν οι παράμετροι θέσης ή κλίμακας της  $F_0(\cdot)$ . Τα θεωρητικά ποσοστημόρια υπολογίζονται από μια τυπική κατανομή εντός της καθορισμένης οικογένειας. Ένα γραμμικό μοτίβο σημείων υποδηλώνει ότι η καθορισμένη οικογένεια περιγράφει εύλογα την κατανομή των δεδομένων και οι παράμετροι θέσης και κλίμακας μπορούν να εκτιμηθούν οπτικά ως η τομή (intercept) και η κλίση (slope) του γραμμικού μοτίβου. Η τομή (intercept) είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας (γραμμικού μοτίβου) με τον κάθετο άξονα ( $yy'$ ) και η κλίση (slope) είναι η εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία (γραμμικό μοτίβο) με τον οριζόντιο άξονα ( $xx'$ ). Αν η εξίσωση της ευθείας είναι  $y = a x + b$ , το  $a$  είναι η κλίση (slope) και το  $b$  είναι η τομή (intercept). Αντίθετα, η κατασκευή ενός P-P plot **απαιτεί** τις παραμέτρους θέσης και κλίμακας της  $F_0(\cdot)$  για τον υπολογισμό της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής στις τιμές των διατεταγμένων δεδομένων.

2) Η **γραμμικότητα** του μοτίβου των σημείων σ' ένα Q-Q plot **δεν επηρεάζεται** από αλλαγές στη θέση ή την κλίμακα. Σ' ένα P-P plot, οι αλλαγές στη θέση ή την κλίμακα **δεν διατηρούν απαραίτητα τη γραμμικότητα**.

3) Σ' ένα Q-Q plot, η γραμμή αναφοράς που αντιπροσωπεύει μια συγκεκριμένη θεωρητική κατανομή εξαρτάται από τις παραμέτρους θέσης και κλίμακας αυτής της κατανομής, έχοντας τομή (intercept) και κλίση (slope) ίσες με τις παραμέτρους θέσης και κλίμακας. Σε ένα P-P plot, η γραμμή αναφοράς για οποιαδήποτε κατανομή είναι πάντα η διαγώνια γραμμή  $y = x$ .

Κατά συνέπεια, θα πρέπει να χρησιμοποιήσετε ένα Q-Q plot εάν ο στόχος σας είναι να συγκρίνετε την κατανομή των δεδομένων με μια οικογένεια κατανομών που διαφέρουν μόνο σε θέση και κλίμακα, ειδικά αν θέλετε να εκτιμήσετε τις παραμέτρους θέσης και κλίμακας από το γράφημα.

Ένα πλεονέκτημα των P-P plot είναι ότι κάνουν διάκριση σε περιοχές υψηλής πυκνότητας πιθανότητας, καθώς σε αυτές τις περιοχές οι εμπειρικές και θεωρητικές αθροιστικές κατανομές αλλάζουν πιο γρήγορα από ό,τι σε περιοχές χαμηλής πυκνότητας πιθανότητας. Για παράδειγμα, εάν συγκρίνετε μια κατανομή δεδομένων με μια συγκεκριμένη κανονική κατανομή, οι διαφορές στη μέση των δύο κατανομών είναι πιο εμφανείς σε ένα P-P plot παρά σε ένα Q-Q plot.

Ωστόσο ο έλεγχος μέσω των παραπάνω γραφημάτων δεν μπορεί να είναι αξιόπιστος, διότι δεν βασίζεται σε κάποιο στατιστικό κριτήριο που μας οδηγεί σε σωστή απόφαση π.χ. στο  $1-a$  % των περιπτώσεων. Συνήθως γίνεται για να πάρουμε μια πρώτη εποπτική εικόνα και για να δούμε αν υπάρχουν κάποιες έκτροπες, σε σχέση με τις αναμενόμενες υπό την  $F_0$ , παρατηρήσεις.



Θα τελειώσουμε την αναφορά μας στα P-P και Q-Q plots δίνοντας το παράδειγμα 1.1. Θα προσπαθήσουμε να φτιάξουμε εμείς αυτά τα διαγράμματα προκειμένου να τα χρησιμοποιήσουμε ως έλεγχο καλής προσαρμογής.

#### Παράδειγμα 1.1.1

Οι μετρήσεις της απόστασης μεταξύ δύο οπών που κόβονται σε 50 φύλλα χάλυβα αποθηκεύονται ως τιμές της μεταβλητής ΑΠΟΣΤΑΣΗ στο ακόλουθο σύνολο δεδομένων:

9.80	10.20	10.27	9.70	9.76
10.11	10.24	10.20	10.24	9.63
9.99	9.78	10.10	10.21	10.00
9.96	9.79	10.08	9.79	10.06
10.10	9.95	9.84	10.11	9.93
10.56	10.47	9.42	10.44	10.16
10.11	10.36	9.94	9.77	9.36
9.89	9.62	10.05	9.72	9.82
9.99	10.16	10.58	10.70	9.54
10.31	10.07	10.33	9.98	10.15

Να ελεγχθεί γραφικά (μέσω Q-Q plot και P-P plot) αν το παραπάνω σύνολο δεδομένων προέρχεται από την εκθετική κατανομή ή την κανονική κατανομή.

(Πηγή: Δεδομένα από SAS Institute)

Λύση:

Πρώτα θα ελέγξουμε με Q-Q plot αν τα δεδομένα προέρχονται από την εκθετική κατανομή.

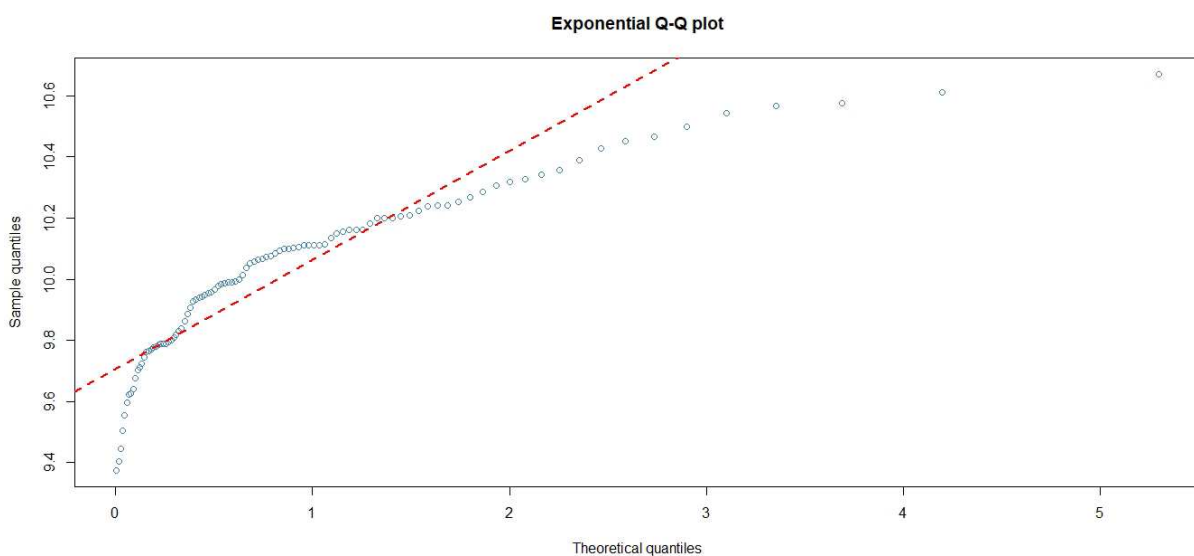
Τρέχουμε στην κονσόλα της R τον παρακάτω κώδικα:

```

z <- c(9.80, 10.20, 10.27, 9.70, 9.76, 10.11, 10.24, 10.20, 10.24, 9.63, 9.99, 9.78, 10.10, 10.21,
10.00, 9.96, 9.79, 10.08, 9.79, 10.06, 10.10, 9.95, 9.84, 10.11, 9.93, 10.56, 10.47, 9.42, 10.44,
10.16, 10.11, 10.36, 9.94, 9.77, 9.36, 9.89, 9.62, 10.05, 9.72, 9.82, 9.99, 10.16, 10.58, 10.70, 9.54,
10.31, 10.07, 10.33, 9.98, 10.15)
p <- ppoints(100) # 100 equally spaced points on (0,1), excluding endpoints
q <- quantile(z, p=p) # percentiles of the sample distribution
plot(qexp(p), q, main="Exponential Q-Q plot", xlab="Theoretical quantiles", ylab="Sample
quantiles", col='steelblue')
qqline(q, distribution=qexp, col="red", lwd=2, lty=2)

```

με τον οποίο παράγουμε 100 δειγματικά ποσοστημόρια και τα αντίστοιχα 100 θεωρητικά (από την εκθετική κατανομή) και παίρνουμε το Q-Q plot για την εκθετική κατανομή:



Σχήμα 1.1.11α. Εκθετικό Q-Q plot της απόστασης των οπών των 50 φύλλων χάλυβα.

Τα σημεία απέχουν πολύ από τη γραμμή. Επομένως τα δεδομένα δεν προέρχονται από την εκθετική κατανομή.



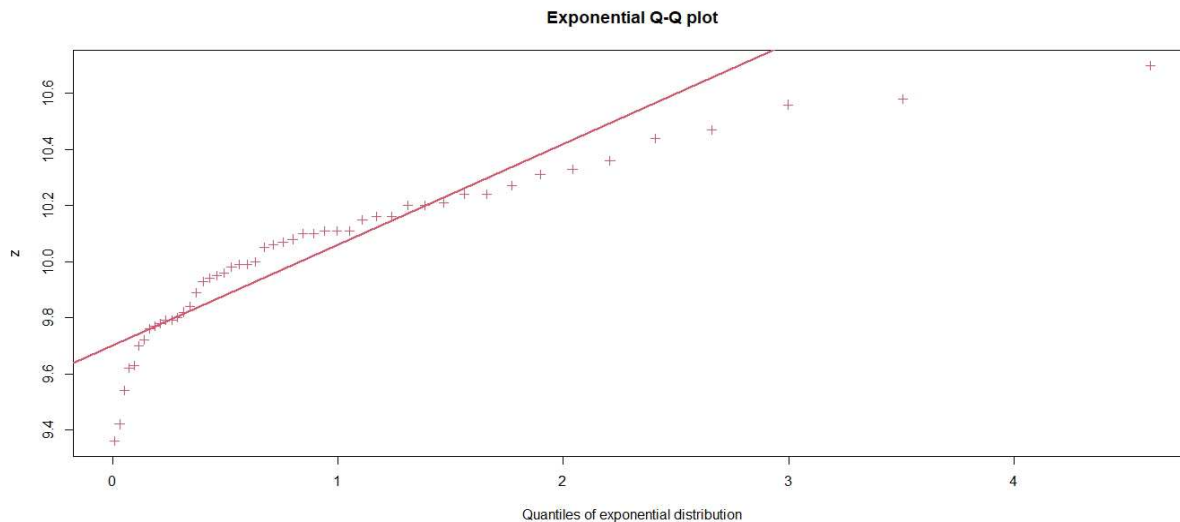
Άλλος τρόπος για να παραχθεί εκθετικό Q-Q plot είναι να τρέξουμε τον κώδικα:

```

z <- c(9.80, 10.20, 10.27, 9.70, 9.76, 10.11, 10.24, 10.20, 10.24, 9.63, 9.99, 9.78, 10.10, 10.21,
10.00, 9.96, 9.79, 10.08, 9.79, 10.06, 10.10, 9.95, 9.84, 10.11, 9.93, 10.56, 10.47, 9.42, 10.44,
10.16, 10.11, 10.36, 9.94, 9.77, 9.36, 9.89, 9.62, 10.05, 9.72, 9.82, 9.99, 10.16, 10.58, 10.70, 9.54,
10.31, 10.07, 10.33, 9.98, 10.15)
StatDA::qqplot.das(z, distribution="exp", col=2, envelope=FALSE, datax=FALSE, ylab="z",
xlab="Quantiles of exponential distribution", main="Exponential Q-Q plot", line="quartiles",
pch=3, cex=1)

```

οπότε παίρνουμε το παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 1.1.11β. Εκθετικό Q-Q plot της απόστασης των οπών των 50 φύλλων χάλυβα.

Το σχήμα 1.1.11β είναι παρόμοιο με τον σχήμα 1.1.11α και το συμπέρασμα το ίδιο.

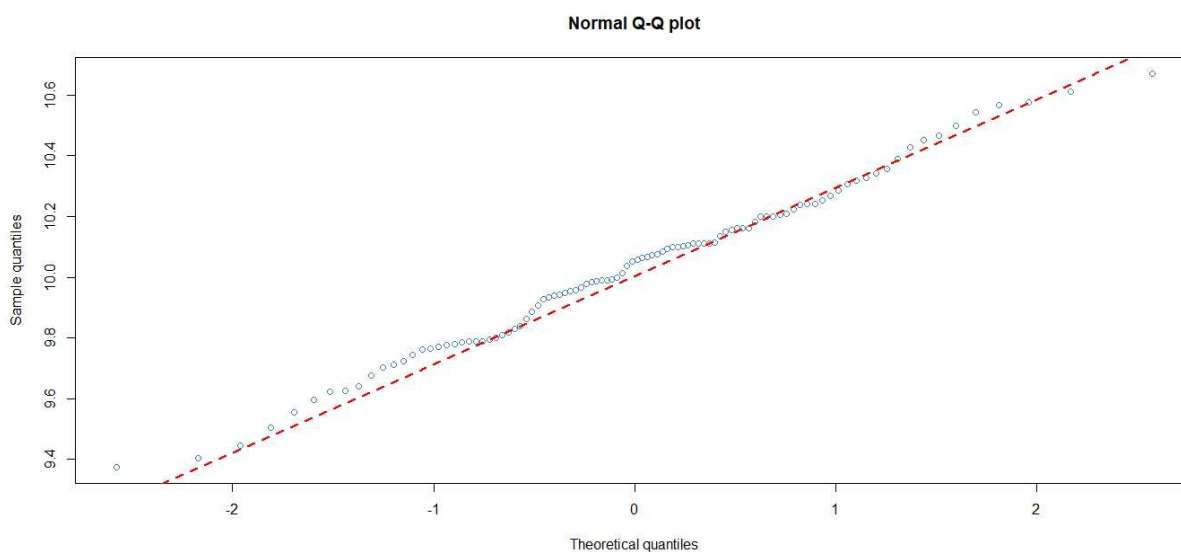


Θα ελέγξουμε τώρα με Q-Q plot αν τα δεδομένα προέρχονται από την κανονική κατανομή.

Τρέχουμε στην κονσόλα της R τον παρακάτω κώδικα:

```
z <- c(9.80, 10.20, 10.27, 9.70, 9.76, 10.11, 10.24, 10.20, 10.24, 9.63, 9.99, 9.78, 10.10, 10.21,
10.00, 9.96, 9.79, 10.08, 9.79, 10.06, 10.10, 9.95, 9.84, 10.11, 9.93, 10.56, 10.47, 9.42, 10.44,
10.16, 10.11, 10.36, 9.94, 9.77, 9.36, 9.89, 9.62, 10.05, 9.72, 9.82, 9.99, 10.16, 10.58, 10.70,
9.54, 10.31, 10.07, 10.33, 9.98, 10.15)
p <- ppoints(100) # 100 equally spaced points on (0,1), excluding endpoints
q <- quantile(z, p=p) # percentiles of the sample distribution
qqnorm(q, main="Normal Q-Q plot", xlab="Theoretical quantiles", ylab="Sample quantiles", col
='steelblue')
qqline(q, distribution=qnorm, col="red", lwd=2, lty=2)
```

με τον οποίο παράγουμε 100 δειγματικά ποσοστημόρια και τα αντίστοιχα 100 θεωρητικά (από την κανονική κατανομή) και παίρνουμε το Q-Q plot για την κανονική κατανομή:



Σχήμα 1.1.12α. Κανονικό Q-Q plot της απόστασης των οπών των 50 φύλλων χάλυβα.



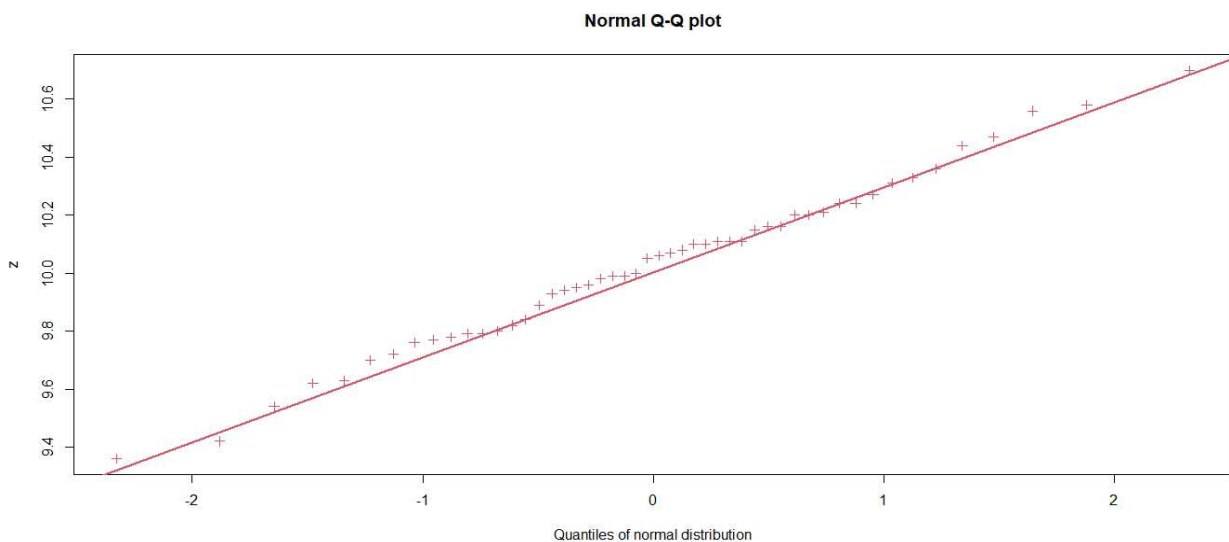
Τα σημεία είναι πολύ κοντά στη γραμμή ή πάνω στη γραμμή. Επομένως μπορούμε να συμπεράνουμε ότι τα δεδομένα προέρχονται από την κανονική κατανομή.

□

Άλλος τρόπος για να παραχθεί κανονικό Q-Q plot είναι να τρέξουμε τον κώδικα:

```
z <- c(9.80, 10.20, 10.27, 9.70, 9.76, 10.11, 10.24, 10.20, 10.24, 9.63, 9.99, 9.78, 10.10, 10.21,
10.00, 9.96, 9.79, 10.08, 9.79, 10.06, 10.10, 9.95, 9.84, 10.11, 9.93, 10.56, 10.47, 9.42, 10.44,
10.16, 10.11, 10.36, 9.94, 9.77, 9.36, 9.89, 9.62, 10.05, 9.72, 9.82, 9.99, 10.16, 10.58, 10.70, 9.54,
10.31, 10.07, 10.33, 9.98, 10.15)
StatDA::qqplot.das(z, distribution="norm", col=2, envelope=FALSE, datax=FALSE, ylab="z",
xlab="Quantiles of normal distribution", main="Normal Q-Q plot", line="quartiles", pch=3, cex=1)
```

οπότε παίρνουμε το παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 1.1.12β. Κανονικό Q-Q plot της απόστασης των οπών των 50 φύλλων χάλυβα.

Το σχήμα 1.1.12β είναι παρόμοιο με τον σχήμα 1.1.12α και το συμπέρασμα το ίδιο.

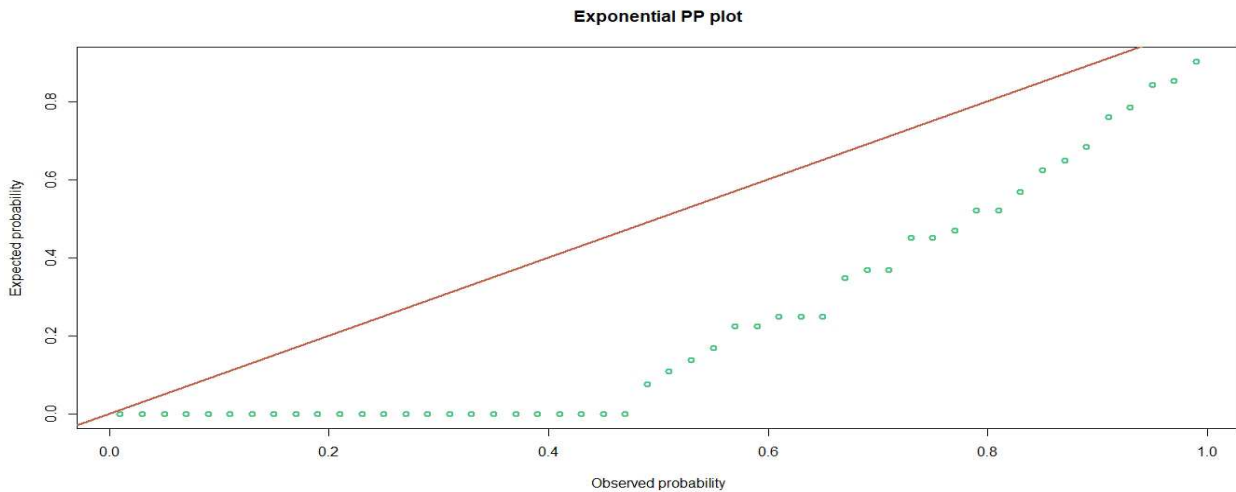
□ □

Τώρα θα γίνουν οι έλεγχοι με P-P plot. Και πρώτα για την εκθετική κατανομή.

Τρέχουμε στην κονσόλα της R τον παρακάτω κώδικα:

```
z <- c(9.80, 10.20, 10.27, 9.70, 9.76, 10.11, 10.24, 10.20, 10.24, 9.63, 9.99, 9.78, 10.10, 10.21,
10.00, 9.96, 9.79, 10.08, 9.79, 10.06, 10.10, 9.95, 9.84, 10.11, 9.93, 10.56, 10.47, 9.42, 10.44,
10.16, 10.11, 10.36, 9.94, 9.77, 9.36, 9.89, 9.62, 10.05, 9.72, 9.82, 9.99, 10.16, 10.58, 10.70, 9.54,
10.31, 10.07, 10.33, 9.98, 10.15)
stdz=(z-mean(z))/sd(z)
probDist <- pexp(stdz)
plot(ppoints(length(stdz)), sort(probDist), main = "Exponential PP plot", xlab = "Observed
probability", ylab = "Expected probability", col='seagreen3', lwd=2)
abline(0,1,col='coral3',lwd=2)
```

και παίρνουμε το P-P plot για την εκθετική κατανομή:

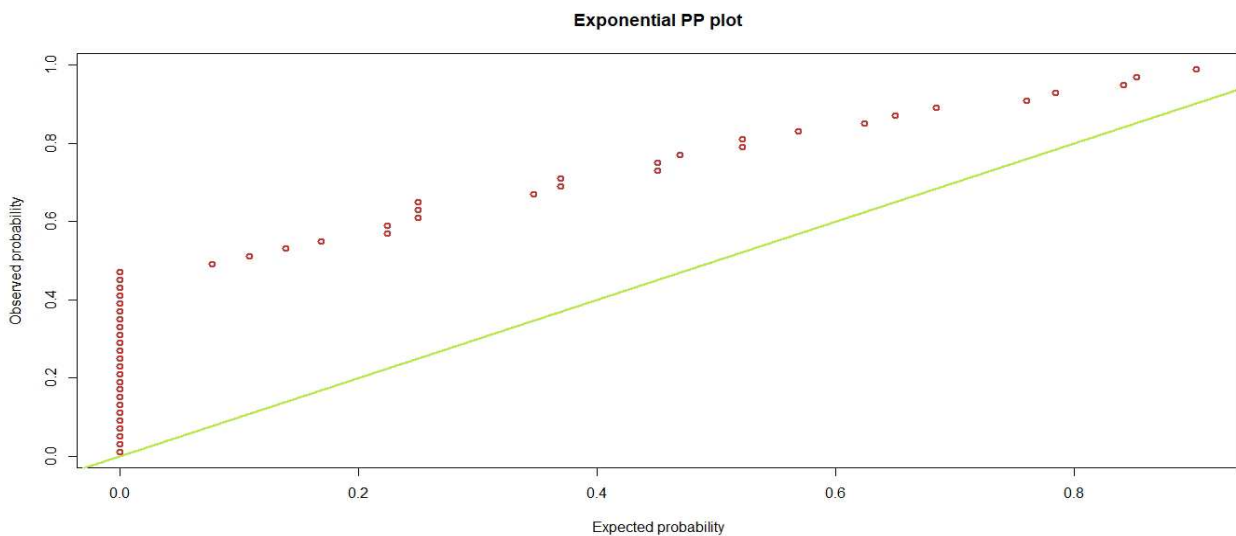


Σχήμα 1.1.13α. Εκθετικό P-P plot της απόστασης των οπών των 50 φύλλων χάλυβα.

Αν κάνουμε εναλλαγή των απεικονίσεων στους άξονες, τρέχοντας στην κονσόλα της R τον κώδικα:

```
z <- c(9.80, 10.20, 10.27, 9.70, 9.76, 10.11, 10.24, 10.20, 10.24, 9.63, 9.99, 9.78, 10.10, 10.21,
10.00, 9.96, 9.79, 10.08, 9.79, 10.06, 10.10, 9.95, 9.84, 10.11, 9.93, 10.56, 10.47, 9.42, 10.44,
10.16, 10.11, 10.36, 9.94, 9.77, 9.36, 9.89, 9.62, 10.05, 9.72, 9.82, 9.99, 10.16, 10.58, 10.70, 9.54,
10.31, 10.07, 10.33, 9.98, 10.15)
stdz=(z-mean(z))/sd(z)
probDist <- pexp(stdz)
plot(sort(probDist), ppoints(length(stdz)), main = "Exponential PP plot", xlab = "Expected
probability", ylab = "Observed probability", col='brown3', lwd=2)
abline(0, 1, col='olivedrab2', lwd=2)
```

παίρνουμε το σχήμα:



Σχήμα 1.1.13β. Εκθετικό P-P plot της απόστασης των οπών των 50 φύλλων χάλυβα.

Όπως φαίνεται στα σχήματα 1.1.13α και 1.1.13β τα σημεία απέχουν πολύ από τη γραμμή. Επομένως μπορούμε να συμπεράνουμε ότι τα δεδομένα δεν προέρχονται από την εκθετική κατανομή.

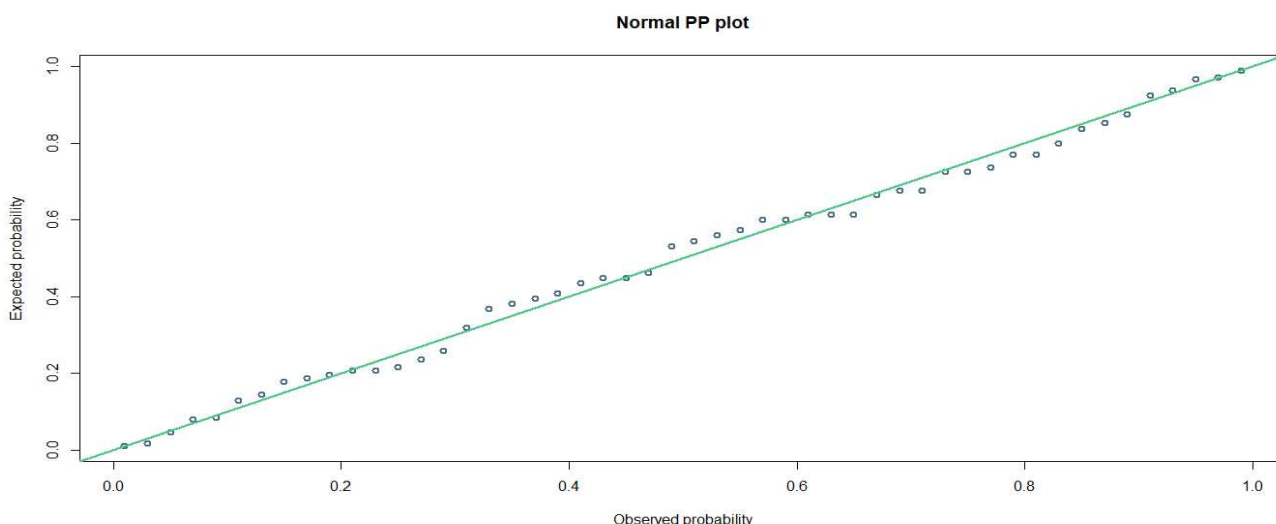


Θα ελέγξουμε με P-P plot αν τα δεδομένα προέρχονται από την κανονική κατανομή.

Τρέχουμε στην κονσόλα της R τον παρακάτω κώδικα:

```
z <- c(9.80, 10.20, 10.27, 9.70, 9.76, 10.11, 10.24, 10.20, 10.24, 9.63, 9.99, 9.78, 10.10, 10.21,
10.00, 9.96, 9.79, 10.08, 9.79, 10.06, 10.10, 9.95, 9.84, 10.11, 9.93, 10.56, 10.47, 9.42, 10.44,
10.16, 10.11, 10.36, 9.94, 9.77, 9.36, 9.89, 9.62, 10.05, 9.72, 9.82, 9.99, 10.16, 10.58, 10.70, 9.54,
10.31, 10.07, 10.33, 9.98, 10.15)
stdz=(z-mean(z))/sd(z)
probDist <- pnorm(stdz)
plot(ppoints(length(stdz)), sort(probDist), main = "Normal PP plot", xlab = "Observed probability",
ylab = "Expected probability", col='skyblue4', lwd=2)
abline(0, 1, col='seagreen3', lwd=2)
```

και παίρνουμε το P-P plot για την κανονική κατανομή:



Σχήμα 1.1.14α. Κανονικό P-P plot της απόστασης των οπών των 50 φύλλων χάλυβα.

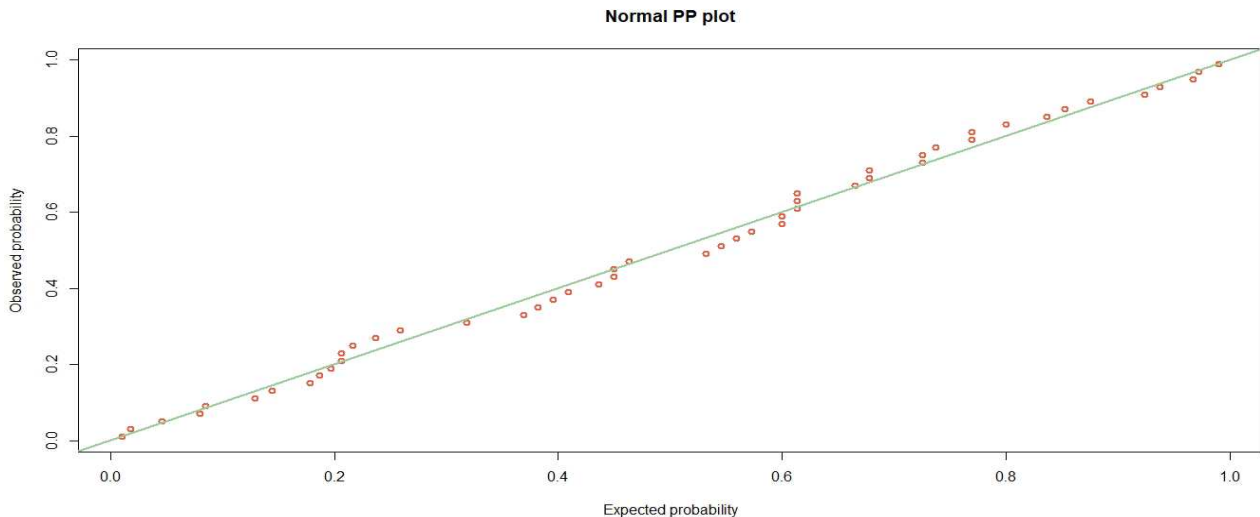
Τα σημεία είναι πολύ κοντά στη γραμμή ή πάνω στη γραμμή. Επομένως τα δεδομένα προέρχονται από την κανονική κατανομή.

Αν κάνουμε εναλλαγή των απεικονίσεων στους άξονες, τρέχοντας στην κονσόλα της R τον κώδικα:

```
z <- c(9.80, 10.20, 10.27, 9.70, 9.76, 10.11, 10.24, 10.20, 10.24, 9.63, 9.99, 9.78, 10.10, 10.21,
10.00, 9.96, 9.79, 10.08, 9.79, 10.06, 10.10, 9.95, 9.84, 10.11, 9.93, 10.56, 10.47, 9.42, 10.44,
10.16, 10.11, 10.36, 9.94, 9.77, 9.36, 9.89, 9.62, 10.05, 9.72, 9.82, 9.99, 10.16, 10.58, 10.70, 9.54,
10.31, 10.07, 10.33, 9.98, 10.15)
stdz=(z-mean(z))/sd(z)
probDist <- pnorm(stdz)
```

```
plot(sort(probDist), ppoints(length(stdz)), main = "Normal PP plot", xlab = "Expected probability",
ylab = "Observed probability", col='tomato2', lwd=2)
abline(0, 1, col='darkseagreen3', lwd=2)
```

παίρνουμε το σχήμα:



Σχήμα 1.1.14β. Κανονικό P-P plot της απόστασης των οπών των 50 φύλλων χάλυβα.

Όπως φαίνεται στα σχήματα 1.1.14α και 1.1.14β τα σημεία είναι πολύ κοντά στη γραμμή ή πάνω στη γραμμή. Επομένως μπορούμε να συμπεράνουμε ότι τα δεδομένα προέρχονται από την κανονική κατανομή.

Πηγές:

Ξενόγλωσσες

SAS Institute

<https://v8doc.sas.com/sashtml/qc/index.htm>

Thode, H. C. (2002), *Testing for Normality*, CRC Press

Università di Trento

<http://www.cs.unitn.it/~taufer/SR/V-Distributions.html>

Wikipedia

Wilk, M. B. and Gnanadesikan, R. (1968), *Probability plotting methods for the analysis of data*, *Biometrika*, 55, 1

<https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.860.6347&rep=rep1&type=pdf>

Ελληνικές

Αντζουλάκος, Δ. (2013), *Ανάλυση δεδομένων με τη χρήση στατιστικών πακέτων, Εισαγωγή στο R, Σημειώσεις παραδόσεων*, Τμήμα Στατιστικής & Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική, Πανεπιστήμιο Πειραιώς

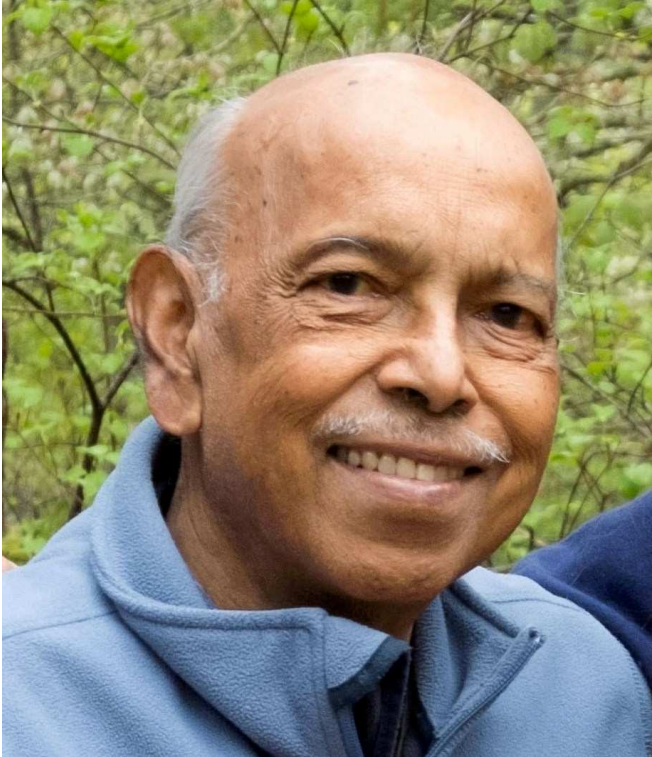
[http://www.unipi.gr/faculty/dantz/Introduction\\_to\\_R.pdf](http://www.unipi.gr/faculty/dantz/Introduction_to_R.pdf)

Δημητράκος, Θ. (2008), *Σημειώσεις για το μάθημα «Θεωρία Πιθανοτήτων II»*, Τμήμα Στατιστικής & Αναλογιστικών-Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Σάμος

<http://www.samos.aegean.gr/math/dimitheo/THEORIA-PITHANOTHTON-II.htm>

Μπούτσικας, Μ. (2004), Σημειώσεις μαθήματος «Στατιστικά Προγράμματα», Τμήμα Στατιστικής & Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς  
[http://www.unipi.gr/faculty/mbouts/statprog/SPSS\\_lesson5-6.pdf](http://www.unipi.gr/faculty/mbouts/statprog/SPSS_lesson5-6.pdf)

Σημειώσεις του μαθήματος «Θεωρία Πιθανοτήτων II» (1990), Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών



**Ramanathan Gnanadesikan**  
**1932 - 2015**  
(Πηγή: Wikipedia)



**Martin B. Wilk**  
**1922 - 2013**  
(Πηγή: Institute of Mathematical Statistics)

## 1.2. Ο έλεγχος $X^2$ (χι-τετράγωνο) καλής προσαρμογής

Pearson (1900)

**(Έλεγχος για οποιαδήποτε διακριτή ή συνεχή κατανομή)**

Έστω ότι  $X_1, X_2, \dots, X_n$  είναι τυχαίες παρατηρήσεις μίας τυχαίας μεταβλητής  $X$  με αθροιστική συνάρτηση κατανομής (α.σ.κ.)  $F(x)$ , η οποία είναι άγνωστη. Θέλουμε να ελέγξουμε την υπόθεση:

$$H_0 : F(x) = F_0(x),$$

όπου  $F_0(x)$  είναι μία ειδική α.σ.κ., η οποία μπορεί να είναι είτε συνεχής είτε διακριτή.

Ο αρχαιότερος και περισσότερο γνωστός έλεγχος καλής προσαρμογής είναι ο  $X^2$ , ο οποίος προτάθηκε το 1900 από τον Karl Pearson. Για αυτήν τη διαδικασία, το διάστημα τιμών της μεταβλητής  $X$ , έστω το  $(\alpha, \beta)$ , χωρίζεται σε  $k$  μη επικαλυπτόμενα υποδιαστήματα,  $I_1 = (\alpha, x_1]$ ,  $I_2 = (x_1, x_2]$ , ...,  $I_k = (x_{k-1}, \beta)$ . Στην ουσία δηλαδή διακριτοποιούμε ή κατηγοριοποιούμε την κατανομή σε  $k$  κατηγορίες. Αν με  $p_0^i$  συμβολίσουμε την πιθανότητα μία τυχαία παρατήρηση πάνω στη μεταβλητή  $X$  να ανήκει στην κατηγορία  $i$ , κάτω από την υπόθεση ότι  $F_0(x)$  είναι η συνάρτηση κατανομής της  $X$ , τότε:

$$p_0^1 = F_0(x_1) - F_0(\alpha), p_0^2 = F_0(x_2) - F_0(x_1), \dots, p_0^k = F_0(\beta) - F_0(x_{k-1}).$$

Επιπρόσθετα, έστω  $n_i$  οι παρατηρούμενες συχνότητες των  $I_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , δηλαδή  $n_i$  είναι το πλήθος των δειγματικών τιμών στο διάστημα  $I_i$ , με  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ . Τότε, ο αναμενόμενος αριθμός των παρατηρήσεων που ανήκουν στο διάστημα  $I_i$ , υπό την  $H_0$ , είναι  $e_i = n p_0^i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ . Ο έλεγχος  $X^2$  του Pearson αντιπαραβάλλει τον αριθμό των παρατηρήσεων που ανήκουν στο  $i$  υποδιάστημα με τον αναμενόμενο αριθμό  $e_i$  αυτών υπό την  $H_0$  και δίνεται από τη στατιστική συνάρτηση:

$$X^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - e_i)^2}{e_i}. \quad (1.2.1)$$

Αν το μέγεθος του δείγματος  $n$  είναι μεγάλο και με την προϋπόθεση ότι  $e_i \geq 5$  (όταν η ανισότητα δεν ικανοποιείται τότε ενοποιούμε τις μικρότερες κατηγορίες έτσι ώστε να ισχύει), κάτω από τη μηδενική υπόθεση, έχουμε ότι η κατανομή τού πιο πάνω στατιστικού προσεγγίζεται από τη  $X^2$  κατανομή με  $k - 1$  βαθμούς ελευθερίας. Μεγάλες τιμές της συνάρτησης αυτής αποτελούν ενδείξεις υπέρ της εναλλακτικής υπόθεσης. Επομένως, απορρίπτουμε την  $H_0$  σε επίπεδο σημαντικότητας  $\alpha$ , αν:

$$X^2 \geq X_{k-1, 1-\alpha}^2,$$

όπου  $X_{k-1, 1-\alpha}^2$  είναι το αντίστροφο εκατοστιαίο σημείο της  $X_{k-1}^2$  (τιμές των αντίστροφων εκατο-

στιαίων σημείων παρατίθενται στον Πίνακα 1 του Παραρτήματος) και ορίζεται:

$$P(X_{k-1}^2 \geq X_{k-1,1-\alpha}^2) = 1 - \alpha,$$

όπου η τυχαία μεταβλητή  $X_{k-1}^2$  ακολουθεί την  $X^2$  κατανομή με  $k - 1$  βαθμούς ελευθερίας. Η παραπάνω μεθοδολογία πρωτοθεμελιώθηκε από τον Fisher (1924) και μία πλήρη απόδειξή της παρατίθεται από τον Cramer (1946). Το αντίστοιχο (προσεγγιστικό)  $p$ -value είναι:

$$p\text{-value} \approx P(X^2 \geq X^2(\text{obs})) = 1 - F_{X_{k-1}^2}(X^2(\text{obs})),$$

όπου  $X^2(\text{obs})$  είναι η τιμή της σ.σ.  $X^2$  υπολογισμένη με βάση τις παρατηρήσεις.

Η περίπτωση μίας πλήρους ορισμένης υποθετικής κατανομής είναι πολύ σπάνια στις πρακτικές εφαρμογές. Πολύ συχνά αντιμετωπίζουμε περιπτώσεις, όπου η υποθετική κατανομή περιέχει έναν αριθμό άγνωστων παραμέτρων. Στη γενικότερη περίπτωση ενός τέτοιου ελέγχου έχουμε  $s$  (με  $s < k - 1$ ) απροσδιόριστες παραμέτρους  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s$ , τις οποίες μπορούμε να συμβολίσουμε συνολικά με το  $\theta$ . Όπως πρωτύτερα, χωρίζουμε πάλι το σύνολο τιμών της τυχαίας μεταβλητής σε  $k$  κατηγορίες, όμως τώρα οι πιθανότητες  $p_0^i$  δεν είναι άμεσα υπολογίσιμες καθώς είναι συναρτήσεις του  $\theta$ . Σε αυτήν τη συνήθη περίπτωση θα πρέπει να εκτιμήσουμε τις απροσδιόριστες παραμέτρους, θα πρέπει δηλαδή να εκτιμήσουμε το  $\theta$  με κάποιο διάνυσμα εκτιμητών, έστω  $\hat{\theta}$ .

Διαφορετικές μέθοδοι εκτίμησης των παραμέτρων αυτών, αντανακλούν στις ιδιότητες της δειγματικής κατανομής του  $X^2$ . Τώρα για τον έλεγχο της σύνθετης υπόθεσης θα χρησιμοποιήσουμε το στατιστικό:

$$X^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - n p_0^i(\hat{\theta}))^2}{n p_0^i(\hat{\theta})} \quad (1.2.2)$$

το οποίο προκύπτει από την (1.2.1) αντικαθιστώντας τις άγνωστες ποσότητες με τους εκτιμητές τους. Είναι φυσικό να προσπαθήσουμε να ορίσουμε τις καλύτερες τιμές των παραμέτρων έτσι ώστε το  $X^2$  της σχέσης (1.2.2) να γίνεται όσο το δυνατό μικρότερο. Αυτή είναι η γνωστή στη στατιστική βιβλιογραφία ως minimum chi-square method of estimation (μέθοδος εκτίμησης του ελάχιστου  $X^2$ ). Τότε έχουμε να επιλύσουμε τις εξισώσεις:

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial X^2}{\partial \theta_i} = 0, \text{ όπου } i = 1, 2, \dots, s. \quad (1.2.3)$$

Η οριακή κατανομή του  $X^2$  για αυτήν τη μέθοδο εκτίμησης αναπτύχθηκε από τους Neyman και E. S. Pearson (1928). Ακόμα και σε απλές περιπτώσεις το σύστημα (1.2.3) είναι συνήθως πολύ δύσκολο να επιλυθεί, έτσι η εύρεση των εκτιμητών είναι δύσκολη. Το παραπάνω στατιστικό, αν το μέγεθος του δείγματος  $n$  είναι μεγάλο και η μηδενική υπόθεση είναι αληθής, ασυμπτωματικά κατανέμεται ως  $X_{k-1-s}^2$ , δηλαδή ακολουθεί μία  $X^2$  κατανομή με  $k - 1 - s$  βαθμούς ελευθερίας, όπου ως σύνολο εκτιμητών των απροσδιόριστων παραμέτρων έχουμε επιλέξει τους εκτιμητές των  $\theta_1, \theta_2, \dots$ ,

$\theta_s$  που αποκτούνται ως συναρτήσεις των στατιστικών  $n_i, i = 1, 2, \dots, s$ . Έτσι, απορρίπτουμε τη μη-δενική υπόθεση αν και μόνο αν το παραπάνω στατιστικό είναι τέτοιο ώστε:

$$X^2 \geq X_{k-1-s, 1-\alpha}^2,$$

με αντίστοιχο (προσεγγιστικό)  $p$ -value:

$$p\text{-value} \approx P(X^2 \geq X^2(\text{obs}) | H_0) = 1 - F_{X_{k-1-s}^2}(X^2(\text{obs})).$$

### 1.2.1. Παρατηρήσεις

1. Στο παραπάνω στατιστικό τα  $\theta_i, i = 1, 2, \dots, s$ , εκτιμήθηκαν χρησιμοποιώντας τα  $n_i$  αντί των  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , όπου τα στατιστικά  $n_i$  δίνουν τον αριθμό των παρατηρήσεων που ανήκουν στο  $i$  υποδιάστημα, αφού στην πράξη μπορεί τα  $X_i$  να μην καταγράφονται. Στην περίπτωση όμως που οι παρατηρήσεις είναι διαθέσιμες, τότε κάποιος μπορεί να εκτιμήσει τα  $\theta_i, i = 1, 2, \dots, s$ , πιο αποτελεσματικά χρησιμοποιώντας π.χ. τους εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας που βασίζονται στις παρατηρήσεις  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Όταν τέτοιοι εκτιμητές χρησιμοποιούνται, η οριακή κατανομή του  $X^2$  στη σχέση (1.2.2) παύει να είναι  $X^2$  με  $k - 1 - s$  βαθμούς ελευθερίας. Όπως έδειξαν οι Chernoff και Lehmann (1954), οι οποίοι θεώρησαν τα άκρα των διαστημάτων γνωστά, όταν  $s$  παράμετροι εκτιμώνται από το δείγμα τότε η οριακή κατανομή του  $X^2$  της σχέσης (1.2.2) φράσσεται μεταξύ μίας  $X^2$  με  $k - 1 - s$  βαθμούς ελευθερίας και μίας  $X^2$  με  $k - 1$  βαθμούς ελευθερίας.

Για μεγάλες τιμές του  $k$  υπάρχει μικρή διαφορά μεταξύ των  $X_{k-1-s, 1-\alpha}^2$  και  $X_{k-1, 1-\alpha}^2$  και μπορεί να αγνοηθεί, αλλά για μικρό  $k$  η επίδραση της χρήσης της  $X_{k-1-s}^2$  κατανομής για ελέγχους μπορεί να οδηγήσει σε σοβαρά σφάλματα.

2. Ο έλεγχος  $X^2$  τις περισσότερες φορές δεν είναι ο καλύτερος έλεγχος καλής προσαρμογής για συνεχή δεδομένα διότι προϋποθέτει ομαδοποίηση των δεδομένων (διαμερίζουμε το πεδίο τιμών των παρατηρήσεων σε  $k$  σύνολα) με συνέπεια την απώλεια πληροφορίας (επίσης η διαμέριση είναι τις περισσότερες φορές αυθαίρετη). Σε αυτήν την περίπτωση (δεδομένα από συνεχή κατανομή) συνήθως προτιμάται ο έλεγχος Kolmogorov-Smirnov (K-S) ο οποίος βασίζεται στην εμπειρική συνάρτηση κατανομής του δείγματος και δεν προϋποθέτει κάποια ομαδοποίηση των δεδομένων. Στον έλεγχο Kolmogorov-Smirnov στη σύγκριση συμμετέχουν αυτά καθαυτά τα δεδομένα και όχι κλάσεις στις οποίες κατανέμονται. Η χρήση του  $X^2$  ελέγχου για τον έλεγχο της σύνθετης υπόθεσης της κανονικότητας δεν προτείνεται λόγω της μικρής ισχύος του σε σύγκριση με τις υπόλοιπες διαδικασίες. Το ίδιο ισχύει και για τον έλεγχο Kolmogorov-Smirnov. Επιπρόσθετα όπως αναφέρει και ο D. S. Moore (1986) δε συνίσταται η χρήση του  $X^2$  ελέγχου στις περιπτώσεις που τα δεδομένα είναι διαθέσιμα, παρά μόνο αν γνωρίζουμε τις συχνότητες εμφάνισης σε διαστήματα του άξονα των πραγματικών αριθμών.

3. Ο έλεγχος  $X^2$  προτιμάται όταν έχουμε κατηγορικά δεδομένα που παίρνουν τιμές σε ένα πεπερασμένο σύνολο. Όταν το δείγμα είναι μικρό, ο έλεγχος  $X^2$  ενδεχομένως και να μην μπορεί να εφαρμοσθεί, ενώ ο έλεγχος Kolmogorov-Smirnov σε αυτές τις περιπτώσεις είναι πιο ισχυρός έλεγχος.

Για τη διακριτή περίπτωση δίνουμε το ακόλουθο παράδειγμα (Δ. Αντζουλάκος (2013)):



### Παράδειγμα 1.2.1 (chisq.test - κατανομή Poisson)

Στον ακόλουθο πίνακα δίνεται ο αριθμός των γκολ που μπήκαν στους τελευταίους  $n = 232$  ποδοσφαιρικούς αγώνες της SuperLeague

# Γκολ ( $i$ )	0	1	2	3	4	5	6	7	8
#Αγώνων ( $n_i$ )	19	49	60	47	32	18	3	3	1

Θέλουμε να ελέγξουμε αν τα δεδομένα προέρχονται από την κατανομή Poisson με  $\lambda = 2.5$ .

Λύση:

Εργαζόμαστε με την R ως εξής: Αρχικά οι τιμές  $n_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, 8$ , αποθηκεύονται στο διάνυσμα Obs1. Στη συνέχεια υπολογίζουμε τις πιθανότητες  $p_i = P(X = i)$ ,  $0 \leq i \leq 7$ , και την πιθανότητα  $p_8 = P(X \geq 8)$  για  $X \sim P(2.5)$  (δείτε το διάνυσμα Prob1). Σημειώνουμε ότι  $p_0 + p_1 + \dots + p_8 = 1$ . Στη συνέχεια υπολογίζουμε τις ποσότητες  $n p_i$  (δείτε το διάνυσμα Expr1). Ο έλεγχος που μας ενδιαφέρει είναι ο

$$H_0 : P(E_0) = p_0, P(E_1) = p_1, \dots, P(E_8) = p_8$$

$$H_1 : \text{Όχι } H_0$$

όπου  $E_i$ ,  $0 \leq i \leq 7$ , είναι το ενδεχόμενο να σημειωθούν  $i$  γκολ σε ένα ματς και  $E_8$  είναι το ενδεχόμενο να σημειωθούν τουλάχιστον 8 γκολ σε ένα ματς. Μη απόρριψη της  $H_0$  οδηγεί στο συμπέρασμα ότι τα δεδομένα προέρχονται από την κατανομή  $P(2.5)$ .

Τρέχουμε στην κονσόλα της R τον παρακάτω κώδικα:

```
a = c(0:8)
Obs1 = c(19,49,60,47,32,18,3,3,1)
goals = rep(a, Obs1)
table(goals)
Prob1 = c(dpois(0:7,2.5), 1-ppois(7,2.5)) ; Expr1 = 232*Prob1
ans1 = cbind(Prob1, Expr1, Obs1)
row.names(ans1) = c("X=0", "X=1", "X=2", "X=3", "X=4", "X=5", "X=6", "X=7", "X>=8")
ans1
```

και παίρνουμε:

```
> a = c(0:8)
> Obs1 = c(19,49,60,47,32,18,3,3,1)
> goals = rep(a, Obs1)
> table(goals)
goals
 0  1  2  3  4  5  6  7  8
19 49 60 47 32 18  3  3  1
> Prob1 = c(dpois(0:7,2.5), 1-ppois(7,2.5)) ; Expr1 = 232*Prob1
> ans1 = cbind(Prob1, Expr1, Obs1)
> row.names(ans1) = c("X=0", "X=1", "X=2", "X=3", "X=4", "X=5", "X=6", "X=7", "X>=8")
> ans1
```

	Prob1	Exp1	Obs1
X=0	0.082084999	19.0437197	19
X=1	0.205212497	47.6092992	49
X=2	0.256515621	59.5116240	60
X=3	0.213763017	49.5930200	47
X=4	0.133601886	30.9956375	32
X=5	0.066800943	15.4978188	18
X=6	0.027833726	6.4574245	3
X=7	0.009940617	2.3062230	3
X>=8	0.004246695	0.9852334	1

Παρατηρούμε ότι  $n p_7 = 2.3062230 < 5$  και  $n p_8 = 0.9852334 < 5$  οπότε ο έλεγχος  $X^2$  καλής προσαρμογής δεν θα είναι αξιόπιστος. Να το δούμε αυτό και με την R. Γράφουμε στην κονσόλα της R:

```
chisq.test(x=Obs1, p=Prob1)
```

και εκτελώντας τον έλεγχο παίρνουμε:

Chi-squared test for given probabilities

data: Obs1

X-squared = 2.6769, df = 8, p-value = 0.953

Warning message:

In chisq.test(x = Obs1, p = Prob1) :

Chi-squared approximation may be incorrect

Για επιβεβαίωση της *p-value*, τρέχουμε στη συνέχεια στην κονσόλα της R τον παρακάτω κώδικα:

```
chi.obs1 = sum((Obs1-Exp1)^2/Exp1)
```

```
df = length(Obs1)-1
```

```
cat("Επιβεβαίωση: p-value = ", 1-pchisq(chi.obs1,df), "\n")
```

και παίρνουμε:

Επιβεβαίωση: p-value = 0.9529691

Βλέπουμε ότι υπάρχει προειδοποιητικό μήνυμα, ότι η  $X^2$  προσέγγιση μπορεί να μην είναι αξιόπιστη, αφού παραβιάζεται η συνθήκη  $n p_i \geq 5$  για τουλάχιστον ένα  $i$  ( $0 \leq i \leq 8$ ).

Αποφασίζουμε να ενοποιήσουμε τις παρατηρήσεις 6, 7, 8 και να κάνουμε τον έλεγχο

$$H_0 : P(E_0) = p_0, P(E_1) = p_1, \dots, P(E_6) = p_6$$

$$H_1 : \text{Όχι } H_0$$

όπου  $p_i = P(X = i)$ ,  $0 \leq i \leq 5$  και  $p_6 = P(X \geq 6)$  για  $X \sim P(2.5)$ . Δουλεύοντας όπως πριν ορίζουμε το διάνυσμα Prob και υπολογίζουμε τα διανύσματα Exp και Obs.

Συνεχίζοντας στην κονσόλα της R τρέχουμε τον κώδικα:

```
Prob = c(dpois(0:5,2.5),1-ppois(5,2.5))
Exp = 232*Prob
Obs = c(19,49,60,47,32,18,7)
ans = cbind(Prob,Exp,Obs)
row.names(ans) = c("X=0", "X=1", "X=2", "X=3", "X=4", "X=5", "X=6")
ans
```

και παίρνουμε:

```
> Prob = c(dpois(0:5,2.5),1-ppois(5,2.5))
> Exp = 232*Prob
> Obs = c(19,49,60,47,32,18,7)
> ans = cbind(Prob,Exp,Obs)
> row.names(ans) = c("X=0", "X=1", "X=2", "X=3", "X=4", "X=5", "X=6")
> ans
```

	Prob	Exp	Obs
X=0	0.08208500	19.043720	19
X=1	0.20521250	47.609299	49
X=2	0.25651562	59.511624	60
X=3	0.21376302	49.593020	47
X=4	0.13360189	30.995638	32
X=5	0.06680094	15.497819	18
X=6	0.04202104	9.748881	7

Παρατηρούμε ότι  $np_i > 5$  για  $0 \leq i \leq 6$ , οπότε προχωρούμε στην εκτέλεση του ελέγχου.

Γράφουμε στην κονσόλα της R:

```
chisq.test(x=Obs, p=Prob)
```

και εκτελώντας τον έλεγχο παίρνουμε:

Chi-squared test for given probabilities

```
data: Obs
X-squared = 1.3919, df = 6, p-value = 0.9663
```

Για επιβεβαίωση της *p-value*, τρέχουμε στη συνέχεια στην κονσόλα της R τον παρακάτω κώδικα:

```
chi.obs = sum((Obs-Exp)^2/Exp)
df = length(Obs)-1
cat("Επιβεβαίωση: p-value = ", 1-pchisq(chi.obs,df), "\n")
```

και παίρνουμε:

Επιβεβαίωση: p-value = 0.9663469

Επομένως καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι πράγματι τα δεδομένα μας προέρχονται από την κατανομή Poisson με  $\lambda = 2.5$  (δεν απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση).

Όταν παραβιάζεται η συνθήκη  $np_i \geq 5$  για τουλάχιστον ένα  $i$ , όπως προηγουμένως, μία εναλλακτική λύση, πέραν της κλασικής λύσης της ομαδοποίησης των δεδομένων που είδαμε, είναι να χρησιμοποιηθεί ένα Monte Carlo τεστ που πρότεινε ο Hope (1968) με χρήση του ορίσματος `simulate.p.value`. Έτσι για το παράδειγμα 1.2.1 τρέχουμε στην κονσόλα της R τον κώδικα:

```
a = c(0:8)
Obs1 = c(19,49,60,47,32,18,3,3,1)
goals = rep(a, Obs1)
table(goals)
Prob1 = c(dpois(0:7,2.5), 1-ppois(7,2.5)) ; Exp1 = 232*Prob1
ans1 = cbind(Prob1, Exp1, Obs1)
row.names(ans1) = c("X=0", "X=1", "X=2", "X=3", "X=4", "X=5", "X=6", "X=7", "X>=8")
ans1
chisq.test(x=Obs1, p=Prob1, simulate.p.value = TRUE, B=2000)
```

(`simulate.p.value`: Το όρισμα TRUE δηλώνει αν θα χρησιμοποιηθεί προσομοίωση Monte Carlo για τον υπολογισμό της p-value (default τιμή FALSE), B: δηλώνει τον αριθμό των επαναλήψεων της προσομοίωσης)

και παίρνουμε:

Chi-squared test for given probabilities with simulated p-value (based on 2000 replicates)

```
data: Obs1
X-squared = 2.6769, df = NA, p-value = 0.9555
```

Επομένως δεν απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση. Τα δεδομένα μας προέρχονται από την κατανομή Poisson με  $\lambda = 2.5$ .

Αν δεν δινόταν η τιμή του  $\lambda$  θα έπρεπε να εκτιμηθεί από τα δεδομένα και θα χρησιμοποιούσαμε για τον έλεγχο την κατανομή  $X^2_{k-2}$ . Είναι γνωστό ότι η παράμετρος  $\lambda$  είναι η μέση τιμή της κατανομής Poisson. Επομένως, η εκτιμήτρια της παραμέτρου  $\lambda$  είναι:

$$\hat{\lambda} = \bar{X} \text{ (E.M.Π.)}$$

Για τη συνεχή περίπτωση δίνουμε το ακόλουθο παράδειγμα (North Dakota State University (2002)):

Παράδειγμα 1.2.2 (`chisq.test` - Εκθετική κατανομή)

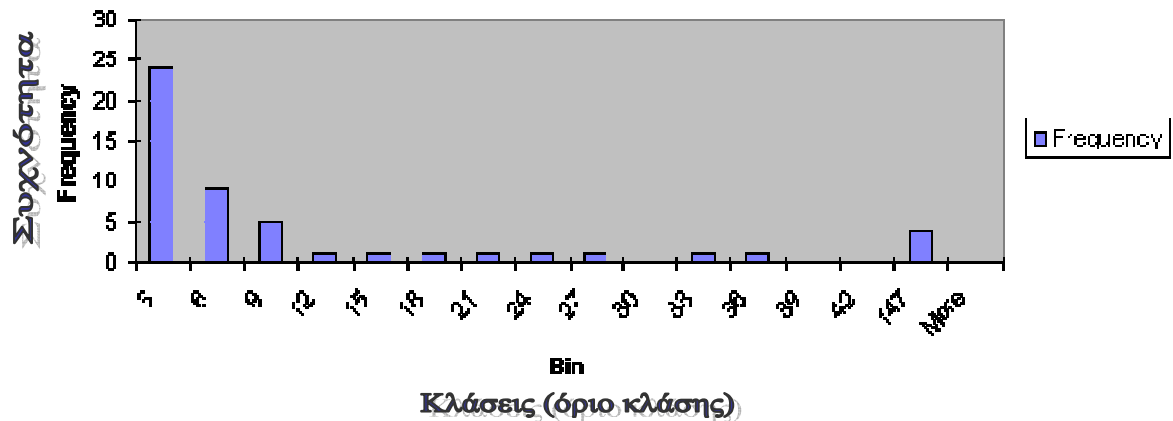
Τα ακόλουθα δεδομένα είναι μια δειγματοληψία της παρατηρούμενης διάρκειας ζωής σε ημέρες 50 μικροεπεξεργαστών που λειτουργούν σε 1.5 φορές ονομαστική τάση για παροχή δοκιμών υπό πίεση:

79.919	3.081	0.062	1.961	5.845
3.027	6.505	0.021	0.013	0.123
6.769	59.899	1.192	34.760	5.009
18.387	0.141	43.565	24.420	0.433
144.695	2.663	17.967	0.091	9.003
0.941	0.878	3.371	2.157	7.579
0.624	5.380	3.148	7.078	23.960
0.590	1.928	0.300	0.002	0.543
7.004	31.764	1.005	1.147	0.219
3.217	14.382	1.008	2.336	4.562

ΟΡΙΟ ΚΛΑΣΗΣ	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ
3	24
6	9
9	5
12	1
15	1
18	1
21	1
24	1
27	1
30	0
33	1
36	1
39	0
42	0
147	4

### Ιστόγραμμα συχνοτήτων

### Histogram



Σημειώστε ότι υπάρχουν μερικά παραδείγματα πολύ μεγάλων τιμών, αλλά οι περισσότερες από τις τιμές είναι πολύ μικρότερες (π.χ. περίπου 30 από τις 50 είναι 5 ημέρες ή λιγότερο). Μια γενική ματιά στα δεδομένα, συμπεριλαμβανομένου ενός γραφικού ιστογράμματος, υποδηλώνει ότι η εκθετική κατανομή μπορεί να είναι λογική.

Θυμηθείτε ότι η εκθετική κατανομή έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που δίνεται από:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \lambda \geq 0.$$

Σημειώστε ότι η μέση τιμή των δεδομένων είναι 11.905, με τιμή αντιστρόφου ρυθμού (reciprocal rate value)  $\lambda = 0.084$  (Ε.Μ.Π.  $\lambda = n / \sum_{i=1}^{50} x_i$ , όπου  $x_i$  τα δεδομένα, η παρατηρούμενη διάρκεια ζωής και  $n = 50$ ). Με την R βρήκαμε  $\sum_{i=1}^{50} x_i = 594.674$ . Ο Ε.Μ.Π. προέκυψε από την

$$\text{επίλυση της εξίσωσης } \frac{\partial(\ln(\prod_{i=1}^n f(x_i / \lambda)))}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial(\ln(\prod_{i=1}^n \lambda e^{-\lambda x_i}))}{\partial \lambda} = 0.$$

Για να χρησιμοποιήσουμε έναν  $X^2$  έλεγχο καλής προσαρμογής, διαμορφώνουμε τις υποθέσεις ως εξής:

Μηδενική υπόθεση  $H_0$ : Η τυχαία μεταβλητή ακολουθεί την εκθετική κατανομή.

Εναλλακτική υπόθεση  $H_1$ : Η τυχαία μεταβλητή δεν ακολουθεί την εκθετική κατανομή.

Προχωράμε εκτελώντας τον έλεγχο  $X^2$  με διαστήματα ίσης πιθανότητας. Εάν επιλέξουμε  $k = 8$  διαστήματα, η πιθανότητα μιας παρατήρησης να πέσει σε οποιοδήποτε από αυτά θα είναι  $p = 0.125$ . Δεδομένου ότι η αθροιστική κατανομή για την εκθετική δίνεται από

$$F(a_i) = 1 - \exp(-\lambda a_i),$$

όπου  $a_i$  είναι το τελικό σημείο του διαστήματος  $i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , ο διαχωρισμός του εύρους της εξαρτώμενης μεταβλητής σε ίσα μέρη δίνει  $F(a_i) = ip$ , ώστε να μπορούμε να γράψουμε

$$ip = 1 - \exp(-\lambda a_i),$$

την οποία μπορούμε να λύσουμε ως προς  $a_i$  με το ακόλουθο αποτέλεσμα:

$$a_i = -(1/\lambda) \ln(1 - ip), \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Με την εκτίμηση του  $\lambda$  που δίνεται από 0.084 και  $k = 8$ , παίρνουμε το πρώτο σημείο διακοπής

$$a_1 = -(1/0.084) \ln(1 - 1 \cdot 0.125) = 1.590.$$

Εφαρμόζοντας την εξίσωση ξανά παίρνουμε τα επόμενα σημεία 3.425, 5.595,...

Ο παρακάτω πίνακας δίνει τις παρατηρούμενες και τις αναμενόμενες τιμές.

Διάστημα	$n_i$	$e_i$	$(n_i - e_i)^2 / e_i$
[0, 1.590)	19	6.25	26.01
[1.590, 3.425)	10	6.25	2.25
[3.425, 5.595)	3	6.25	1.69
[5.595, 8.252)	6	6.25	0.01
[8.252, 11.677)	1	6.25	4.41
[11.677, 16.504)	1	6.25	4.41
[16.504, 24.755)	4	6.25	0.81
[24.755, $\infty$ )	6	6.25	0.01

Το άθροισμα της τελευταίας στήλης δίνει τιμή  $X^2 = 39.6$ . Οι βαθμοί ελευθερίας δίδονται από  $k - s - 1 = 8 - 1 - 1 = 6$ . Από πίνακες της  $X^2$  (βλέπε και Πίνακα 1 του Παραρτήματος), με επίπεδο σημαντικότητας 0.05 η τιμή από πίνακα είναι 12.6. Δεδομένου ότι  $12.6 < 39.6$ , η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται.

Επίλυση με την R.

Στην κονσόλα της R τρέχουμε τον κώδικα:

```
a = c(1:8)
Obs = c(19,10,3,6,1,1,4,6)
lifetime = rep(a, Obs)
table(lifetime)
Prob = c(0.125, 0.125, 0.125, 0.125, 0.125, 0.125, 0.125, 0.125)
Exp = c(6.25, 6.25, 6.25, 6.25, 6.25, 6.25, 6.25, 6.25)
ans = cbind(Prob, Exp, Obs)
row.names(ans) = c("[0, 1.590)", "[1.590, 3.425)", "[3.425, 5.595)", "[5.595, 8.252)", "[8.252, 11.677)", "[11.677, 16.504)", "[16.504, 24.755)", "[24.755, )")
ans
chisq.stat = sum((Obs-Exp)^2/Exp)
chisq.stat
#p-value
1-pchisq(sum(chisq.stat),df=6)
#κρίσιμη τιμή
qchisq(0.95, df=6)
```

και παίρνουμε:

```
> a = c(1:8)
> Obs = c(19,10,3,6,1,1,4,6)
> lifetime = rep(a, Obs)
> table(lifetime)
```

```

lifetime
  1  2  3  4  5  6  7  8
19 10  3  6  1  1  4  6
> Prob = c(0.125, 0.125, 0.125, 0.125, 0.125, 0.125, 0.125, 0.125)
> Exp = c(6.25, 6.25, 6.25, 6.25, 6.25, 6.25, 6.25, 6.25)
> ans = cbind(Prob, Exp, Obs)
> row.names(ans) = c("[0, 1.590)", "[1.590, 3.425)", "[3.425, 5.595)", "[5.595, 8.252)", "[8.252, 11.677)", "[11.677, 16.504)", "[16.504, 24.755)", "[24.755, )")
> ans
      Prob  Exp  Obs
[0, 1.590) 0.125 6.25  19
[1.590, 3.425) 0.125 6.25  10
[3.425, 5.595) 0.125 6.25   3
[5.595, 8.252) 0.125 6.25   6
[8.252, 11.677) 0.125 6.25   1
[11.677, 16.504) 0.125 6.25   1
[16.504, 24.755) 0.125 6.25   4
[24.755, )      0.125 6.25   6
> chisq.stat = sum((Obs-Exp)^2/Exp)
> chisq.stat
[1] 39.6
> #p-value
> 1-pchisq(sum(chisq.stat),df=6)
[1] 5.458441e-07
> #κρίσιμη τιμή
> qchisq(0.95, df=6)
[1] 12.59159

```

Επομένως η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται.

### 1.2.2. Διόρθωση συνέχειας του Yates

Επειδή ο έλεγχος  $X^2$  βασίζεται στην προσέγγιση της κατανομής της ελεγχοσυνάρτησης  $X^2$  που είναι διακριτή (Γ. Παπαδόπουλος, Γεωπονικό Πανεπιστήμιο Αθηνών) από μια συνεχή κατανομή που είναι η  $X^2$ , προτείνεται, στην περίπτωση που οι βαθμοί ελευθερίας είναι μόνο ένας, να γίνεται «διόρθωση συνέχειας» ώστε να βελτιώνεται η προσέγγιση και να διασφαλίζεται ότι ο έλεγχος γίνεται πράγματι σε επίπεδο σημαντικότητας  $\alpha$  και όχι σε μεγαλύτερο. Συγκεκριμένα, στην περίπτωση που οι βαθμοί ελευθερίας είναι μόνο ένας, προτείνεται ως στατιστική συνάρτηση ελέγχου να χρησιμοποιείται η  $X_c^2$ , όπου

$$X_c^2 = \sum_{i=1}^2 \frac{(|n_i - e_i| - 0.5)^2}{e_i}.$$

Η διόρθωση αυτή είναι γνωστή στη βιβλιογραφία ως *διόρθωση συνέχειας του Yates (Yates correction for continuity)*. Βέβαια, παρότι χρησιμοποιείται ευρέως, έχει δεχθεί κριτική ότι κάνει τον έλεγχο (υπερ)συντηρητικό, δηλαδή, ότι αυξάνει αρκετά την πιθανότητα σφάλματος τύπου II. Βέβαια, αν το  $n$  είναι πολύ μεγάλο οι επιπτώσεις της ασυνέχειας (ακόμη και για ένα βαθμό ελευθερίας) είναι μικρές και η αλλαγή στην τιμή της  $X^2$  λόγω της διόρθωσης είναι επίσης μικρή.



Πηγές:

Ξενόγλωσσες

North Dakota State University (2002)

[http://www.cs.ndsu.nodak.edu/~nygard/csci418/lecture\\_slides/lec3\\_stat2.htm](http://www.cs.ndsu.nodak.edu/~nygard/csci418/lecture_slides/lec3_stat2.htm)

Ελληνικές

Αντζουλάκος, Δ. (2013), *Ανάλυση δεδομένων με τη χρήση στατιστικών πακέτων, Εισαγωγή στο R, Σημειώσεις παραδόσεων*, Τμήμα Στατιστικής & Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική, Πανεπιστήμιο Πειραιώς  
[http://www.unipi.gr/faculty/dantz/Introduction\\_to\\_R.pdf](http://www.unipi.gr/faculty/dantz/Introduction_to_R.pdf)

Μπατσίδης, Α. Δ. (2014), «*Εισαγωγή στη μη παραμετρική στατιστική*», *Διδακτικές σημειώσεις*, Τμήμα Μαθηματικών, Τομέας Πιθανοτήτων-Στατιστικής & Επιχειρησιακής Έρευνας, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων  
<http://users.uoi.gr/abatsidis/NonParametricClassNotes2014.pdf>

Μπούτσικας, Μ. (2004), *Σημειώσεις μαθήματος «Στατιστικά Προγράμματα»*, Τμήμα Στατιστικής & Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς  
[http://www.unipi.gr/faculty/mbouts/statprog/SPSS\\_lesson5-6.pdf](http://www.unipi.gr/faculty/mbouts/statprog/SPSS_lesson5-6.pdf)

Παπαδόπουλος, Γ., Γεωπονικό Πανεπιστήμιο Αθηνών  
<https://www.aua.gr/gpapadopoulos/files/14x2test14-15.pdf>



**Karl Pearson**

**1857 - 1936**

(Πηγή: Wikimedia Commons)

### 1.3. Ο έλεγχος Kolmogorov-Smirnov

Οι στατιστικοί έλεγχοι των Kolmogorov και Smirnov στηρίζονται στην εμπειρική αθροιστική συνάρτηση κατανομής (ε.α.σ.κ.). Για το λόγο αυτό στη συνέχεια παραθέτουμε τον ορισμό της, καθώς και κάποιες χρήσιμες ιδιότητές της.

#### Ορισμός 1.3.1

Έστω  $X_1, X_2, \dots, X_n$  ένα τυχαίο δείγμα από έναν πληθυσμό με αθροιστική συνάρτηση κατανομής (α.σ.κ.)  $F(\cdot)$ . Η εμπειρική αθροιστική κατανομή, συμβολίζεται με  $F_n(x)$  και ορίζεται ως εξής:

$$F_n(x) = \frac{\text{αριθμός } X_i \leq x}{n}, \quad x \in R,$$

ή ισοδύναμα

$$F_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^n I_{(-\infty, x]}(X_i)}{n}, \quad x \in R,$$

όπου

$$I_C(X_i) = \begin{cases} 1 & X_i \in C \\ 0 & X_i \notin C. \end{cases}$$

Από τον ορισμό της εμπειρικής αθροιστικής συνάρτησης κατανομής γίνεται άμεσα αντιληπτό ότι πρόκειται για μία στατιστική συνάρτηση, ένα στατιστικό καθώς είναι συνάρτηση των δειγματικών τιμών  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Στη συνέχεια θα παρουσιαστούν κάποιες χρήσιμες ιδιότητες της εμπειρικής αθροιστικής συνάρτησης κατανομής.

#### Θεώρημα 1.3.1

Έστω  $X_1, X_2, \dots, X_n$  ένα τυχαίο δείγμα από έναν πληθυσμό με συνεχή αθροιστική συνάρτηση κατανομής  $F(x)$ , τότε για σταθερό  $x$ , η κατανομή του στατιστικού  $nF_n(x)$ , όπου  $F_n(x)$  η εμπειρική αθροιστική συνάρτηση κατανομής είναι διωνυμική με παραμέτρους  $n$  και  $F(x)$ .

#### Απόδειξη

Από τον ορισμό της εμπειρικής αθροιστικής συνάρτησης κατανομής εύκολα προκύπτει ότι οι δυνατές της τιμές ανήκουν στο ακόλουθο σύνολο:  $\{0, 1/n, 2/n, \dots, (n-1)/n, 1\}$ . Για σταθερό  $x$ , η τιμή της εμπειρικής αθροιστικής συνάρτησης είναι ίση με  $k/n$ ,  $k = 0, \dots, n$ , αν και μόνο αν  $k$  το πλήθος δειγματικές τιμές είναι μικρότερες ή ίσες του  $x$ .

Επομένως ο υπολογισμός της πιθανότητας  $P(F_n(x) = \frac{k}{n})$  ανάγεται στην εύρεση της πιθανότητας να έχουμε  $k$  το πλήθος επιτυχίες σε  $n$  δοκιμές ενός διωνυμικού πειράματος, όπου επιτυχία θεωρείται όταν μία δειγματική τιμή  $X_i$  είναι ίση ή μικρότερη από τη σταθεροποιημένη τιμή  $x$ , με πιθανότητα επιτυχίας  $p = P(X_i \leq x) = F(x)$ . Άρα

$$P(F_n(x) = \frac{k}{n}) = \binom{n}{k} [F(x)]^k [1-F(x)]^{n-k}, k = 0, \dots, n,$$

ή ισοδύναμα

$$P(nF_n(x) = k) = \binom{n}{k} [F(x)]^k [1-F(x)]^{n-k}, k = 0, \dots, n,$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη. □

### Θεώρημα 1.3.2

α) Η εμπειρική αθροιστική συνάρτηση κατανομής  $F_n(x)$  είναι συνεπής εκτιμητής της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής  $F(x)$ .

β) Η εμπειρική αθροιστική συνάρτηση κατανομής  $F_n(x)$  ακολουθεί ασυμπτωτικά κανονική κατανομή με μέση τιμή  $F(x)$  και διακύμανση  $\{F(x)(1-F(x))\}/n$ .

### Απόδειξη

α) Για να αποδείξουμε ότι μία εκτιμήτρια στατιστική συνάρτηση, έστω  $T_n$ , μιας παραμέτρου  $\theta$  είναι συνεπής εκτιμήτρια της παραμέτρου αυτής, δηλαδή ότι  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\theta - \varepsilon < T_n < \theta + \varepsilon) = 1$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ , αρκεί να δείξουμε ότι η  $T_n$  είναι αμερόληπτη (ή ασυμπτωτικά αμερόληπτη) εκτιμήτρια της παραμέτρου  $\theta$ , δηλαδή  $ET_n = \theta$ ,  $\forall \theta$  (ή  $ET_n \rightarrow \theta$ ,  $n \rightarrow \infty$ ), και επιπλέον  $VarT_n \rightarrow 0$ , καθώς το  $n \rightarrow \infty$ .

Επομένως αρχικά θα δείξουμε ότι η εμπειρική αθροιστική συνάρτηση κατανομής είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της αθροιστικής συνάρτησης. Στο Θεώρημα 1.3.1 αποδείχτηκε ότι  $nF_n(x) \sim$  Διωνυμική  $(n, F(x))$ . Επομένως άμεσα προκύπτει, από τις ιδιότητες της Διωνυμικής κατανομής και της μέσης τιμής, ότι

$$E(nF_n(x)) = nF(x) \Leftrightarrow E(F_n(x)) = F(x).$$

Επιπλέον, έχουμε ότι:

$$Var(nF_n(x)) = nF(x)(1-F(x)) \Leftrightarrow Var(F_n(x)) = \frac{F(x)(1-F(x))}{n}$$

και επομένως  $Var(F_n(x)) \rightarrow 0$ , καθώς το  $n \rightarrow \infty$ , και η απόδειξη του α) ολοκληρώθηκε.

β) Είναι γνωστό από τον ορισμό της εμπειρικής αθροιστικής συνάρτησης κατανομής ότι:

$$F_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^n I_{(-\infty, x]}(X_i)}{n}, x \in R.$$

Επομένως το στατιστικό  $F_n(x)$  είναι ο δειγματικός μέσος των τυχαίων μεταβλητών  $I_{(-\infty, x]}(X_i)$ , η κατανομή των οποίων είναι Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας  $F(x)$ , μέση τιμή  $F(x)$  και διακύμανση  $F(x)(1-F(x))$ . Εφαρμόζοντας το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα προκύπτει άμεσα ότι:

$$F_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^n I_{(-\infty, x]}(X_i)}{n} \stackrel{\text{ασυμπτ.}}{\sim} N \left( \frac{E \left( \sum_{i=1}^n I_{(-\infty, x]}(X_i) \right)}{n}, \frac{\text{Var} \left( \sum_{i=1}^n I_{(-\infty, x]}(X_i) \right)}{n^2} \right),$$

ή ισοδύναμα:

$$F_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^n I_{(-\infty, x]}(X_i)}{n} \stackrel{\text{ασυμπτ.}}{\sim} N \left( F(x), \frac{F(x)(1-F(x))}{n} \right).$$

□

Από τα παραπάνω προκύπτουν ότι αν κάποιος ενδιαφέρεται να εκτιμήσει την αθροιστική συνάρτηση κατανομής  $F(x)$ , για κάθε  $x$ , τότε θα ήθελε να διαπιστώσει πόσο κοντά είναι η εμπειρική αθροιστική συνάρτηση στην αθροιστική συνάρτηση.

Στο επόμενο θεώρημα, η απόδειξη του οποίου παραλείπεται, θεμελιώνεται ότι με πιθανότητα 1 η σύγκλιση της  $F_n(x)$  στην  $F(x)$  είναι ομοιόμορφη στο  $x$  ή διαφορετικά για μεγάλο μέγεθος δείγματος η προσέγγιση της  $F(x)$  από την  $F_n(x)$  είναι αρκετά ακριβής.

### Θεώρημα 1.3.3 (Glivenco-Cantelli, 1933)

Αν  $F_n(x)$  είναι η εμπειρική αθροιστική συνάρτηση κατανομής ενός τυχαίου δείγματος  $X_1, X_2, \dots, X_n$  από έναν πληθυσμό με αθροιστική συνάρτηση κατανομής  $F(x)$  τότε

$$\sup_x |F_n(x) - F(x)| \stackrel{\text{σχεδόν βεβαίως}}{\rightarrow} 0,$$

δηλαδή  $P(\sup_x |F_n(x) - F(x)| \rightarrow 0) = 1$ .

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω θεώρημα ο Kolmogorov (1933) πρότεινε μία στατιστική συνάρτηση που ουσιαστικά αποτελεί ένα μέτρο της εγγύτητας των  $F_n(x)$  και  $F(x)$ . Αργότερα ο Smirnov (1939 a, b) επέκτεινε το στατιστικό αυτό για να συγκρίνει δύο πληθυσμούς στηριζόμενος σε 2 ανεξάρτητα δείγματα ένα από καθένα από αυτούς (βλέπε Conover (1971), σελ. 317). Οι στατιστικοί αυτοί έλεγχοι αποτελούν αντικείμενο των επόμενων παραγράφων.

#### 1.3.1. Ο έλεγχος Kolmogorov για ένα δείγμα

Kolmogorov (1933)

### (Έλεγχος για οποιαδήποτε συνεχή κατανομή)

Έστω  $X_1, X_2, \dots, X_n$  ένα τυχαίο δείγμα από έναν πληθυσμό με συνεχή αλλά άγνωστη αθροιστική συνάρτηση κατανομής  $F(x)$ . Θέλουμε να ελέγξουμε μία από τις εξής τρεις υποθέσεις:

- A. Τη μηδενική υπόθεση  $H_0 : F(x) = F_0(x), \forall x \in R$ , έναντι της εναλλακτικής  $H_1 : F(x) \neq F_0(x)$ , για κάποιο  $x \in R$ .
- B. Τη μηδενική υπόθεση  $H_0 : F(x) = F_0(x), \forall x \in R$ , έναντι της εναλλακτικής  $H_{1+} : F(x) > F_0(x)$ , για κάποιο  $x \in R$ .

Γ. Τη μηδενική υπόθεση  $H_0 : F(x) = F_0(x), \forall x \in R$ , έναντι της εναλλακτικής  $H_1 : F(x) < F_0(x)$ , για κάποιο  $x \in R$ ,

όπου  $F_0(x)$  είναι μία, γνωστή, ειδική αθροιστική συνάρτηση κατανομής.

Η στατιστική συνάρτηση για τον έλεγχο των παραπάνω υποθέσεων βασίζεται στην εμπειρική αθροιστική συνάρτηση κατανομής, καθώς ως αμερόληπτη εκτιμήτρια της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής δε θα πρέπει να αποκλίνει σημαντικά από την τελευταία. Για καθένα από τα τρία διαφορετικά σύνολα υποθέσεων, η στατιστική συνάρτηση ορίζεται ως εξής:

A. Χρησιμοποιείται η στατιστική συνάρτηση

$$\sqrt{n} D_n = \sqrt{n} \sup_x |F_n(x) - F_0(x)|,$$

η οποία στην ουσία μετρά πόσο αποκλίνει η ε.α.σ.κ.  $F_n(\cdot)$  από την α.σ.κ.  $F_0(\cdot)$  και αναζητά τη μέγιστη κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των γραφημάτων των  $F_n(x)$  και  $F(x)$ . Επομένως γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση  $H_0$  για μεγάλες τιμές της στατιστικής αυτής συνάρτησης.

Καθώς η  $F_n(\cdot)$  είναι, εξ ορισμού της, βηματική συνάρτηση και η  $F_0(\cdot)$  ως αθροιστική συνάρτηση κατανομής είναι μη φθίνουσα, η μέγιστη απόκλιση-ασυμφωνία μεταξύ τους συμβαίνει είτε στις παρατηρούμενες τιμές είτε στα όρια από αριστερά. Επομένως, προκύπτει ότι:

$$\sqrt{n} D_n = \sqrt{n} \max \left\{ \max_i |F_n(X_i) - F_0(X_i)|, \max_i |F_n(X_i^-) - F_0(X_i)| \right\}.$$

Στο ακόλουθο θεώρημα αποδεικνύεται ότι η κατανομή του  $D_n$  υπό τη μηδενική υπόθεση είναι ίδια για όλες τις  $F_0(\cdot)$ , αλλά διαφορετική για διαφορετικά μεγέθη δείγματος  $n$ .

#### Θεώρημα 1.3.4

Αν η αθροιστική συνάρτηση κατανομής  $F_0(x)$  είναι συνεχής, τότε η κατανομή του  $D_n = \sup_x |F_n(x) - F_0(x)|$  είναι ανεξάρτητη της  $F_0$ .

#### Απόδειξη

Ισχύει ότι

$$P(\sup_x |F_n(x) - F_0(x)| \leq d) \stackrel{\theta \tau \omega Y = F_0(X)}{=} P(\sup_x |F_n(F_0^{-1}(y)) - y| \leq d).$$

Από τον ορισμό της εμπειρικής αθροιστικής συνάρτησης κατανομής προκύπτει ότι

$$F_n(F_0^{-1}(y)) = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{I}_{(-\infty, F_0^{-1}(y)]}(X_i)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{I}_{(-\infty, y]}(F_0(X_i))}{n}.$$

Επομένως

$$P(\sup_x |F_n(F_0^{-1}(y)) - y| \leq d) = P\left(\sup_x \left| \frac{\sum_{i=1}^n I_{(-\infty, y]}(F_0(X_i))}{n} - y \right| \leq d\right).$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι η κατανομή της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής είναι ομοιόμορφη στο διάστημα  $(0, 1)$  (βλ. Πρόταση 1.1.1) και θέτοντας  $U_i = F_0(X_i) \sim U(0, 1)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , έχουμε ότι:

$$P\left(\sup_x \left| \frac{\sum_{i=1}^n I_{(-\infty, y]}(F_0(X_i))}{n} - y \right| \leq d\right) = P\left(\sup_x \left| \frac{\sum_{i=1}^n I_{(-\infty, y]}(U_i)}{n} - y \right| \leq d\right)$$

που δεν εξαρτάται από την  $F_0$ , αλλά εξαρτάται από το μέγεθος του δείγματος  $n$ .

□

Κλειστές μορφές της κατανομής του  $D_n$  υπό την  $H_0$  και πίνακας της συνάρτησης κατανομής για  $n \leq 100$  μπορούν να βρεθούν στη βιβλιογραφία (Birnbbaum, 1952). Ο Kolmogorov (1933) απέδειξε ότι η οριακή κατανομή του  $K_n = \sqrt{n} D_n$  υπό τη μηδενική υπόθεση είναι απαλλαγμένη παραμέτρων (distribution-free).

### Θεώρημα 1.3.5

Αν η  $H_0$  είναι αληθής, τότε αποδεικνύεται ότι η ασυμπτωτική κατανομή του  $K_n$  είναι η  $H(x)$ , όπου αυτή δίνεται από τη σχέση:

$$H(x) = [1 - 2 \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} e^{-2j^2 x^2}] I_{(0, \infty)}(x).$$

Έτσι ο έλεγχος για τον έλεγχο της υπόθεσης  $A$  ορίζεται ως εξής:

$$\text{Απορρίπτουμε την } H_0 \text{ αν και μόνο αν } K_n \geq c_a,$$

όπου  $c_a$  τέτοιο ώστε  $P(K_n \geq c_a) \approx \alpha$ . Η τιμή του  $c_a / \sqrt{n}$  δίνεται από πίνακα (Miller (1956)) που παρατίθεται στο Παράρτημα (Πίνακας 2) και ο οποίος μπορεί, όπως θα δούμε παρακάτω, να χρησιμοποιηθεί με κατάλληλη τροποποίηση και για τους μονόπλευρους ελέγχους (έλεγχοι Β και Γ).

### Παρατήρηση 1.3.1

Ένας άλλος τρόπος ορισμού του πιο πάνω στατιστικού που έχει παρουσιαστεί στη βιβλιογραφία, με χρήση των διατεταγμένων στατιστικών  $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$ , είναι ο ακόλουθος:

$$K_n = \sqrt{n} \max(D_n^+, D_n^-),$$

όπου

$$D_n^+ = \sup_x (F_n(x) - F_0(x)) = \max \left\{ \max_i (i/n - F_0(X_{(i)})), 0 \right\},$$

και

$$D_n^- = \sup_x (F_0(x) - F_n(x)) = \max \left\{ \max_i (F_0(X_{(i)}) - (i-1)/n), 0 \right\}.$$

Επιπρόσθετα, αποδεικνύεται ότι η κατανομή των  $D_n^+$  και  $D_n^-$  υπό τη μηδενική υπόθεση είναι ίδια.

Β. Χρησιμοποιείται το στατιστικό

$$\sqrt{n} D_n^+ = \sqrt{n} \sup_x (F_n(x) - F_0(x)) = \sqrt{n} \max \left\{ \max_i (i/n - F_0(X_{(i)})), 0 \right\},$$

και η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται για μεγάλες τιμές του. Προκύπτει ότι απορρίπτουμε την  $H_0$  αν και μόνο αν

$$\sqrt{n} D_n^+ \geq c_{\alpha/2},$$

όπου  $c_\alpha$  τέτοιο ώστε  $P(K_n \geq c_\alpha) \approx \alpha$ .

Γ. Χρησιμοποιείται το στατιστικό

$$\sqrt{n} D_n^- = \sqrt{n} \sup_x (F_0(x) - F_n(x)) = \sqrt{n} \max \left\{ \max_i (F_0(X_{(i)}) - (i-1)/n), 0 \right\},$$

και η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται για μεγάλες τιμές του. Προκύπτει ότι απορρίπτουμε την  $H_0$  αν και μόνο αν

$$\sqrt{n} D_n^- \geq c_{\alpha/2},$$

όπου  $c_\alpha$  τέτοιο ώστε  $P(K_n \geq c_\alpha) \approx \alpha$ .

Παράδειγμα 1.3.1α (Απόστολος Δ. Μπατσίδης (2014))

Έστω οι ακόλουθες 5 δειγματικές τιμές: 0.1, 0.3, 0.24, 0.58, 0.68. Να ελέγξετε αν τα δεδομένα προέρχονται από την  $U(0, 1)$ , με επίπεδο σημαντικότητας 5%.

Λύση:

Έχουμε ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους 5 και θέλουμε να ελέγξουμε την υπόθεση

$$H_0 : F(x) = F_0(x), \forall x \in R$$

έναντι της εναλλακτικής

$$H_1 : F(x) \neq F_0(x), \text{ για κάποιο } x \in R,$$

όπου  $F_0(x)$  η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της  $U(0, 1)$ . Επομένως

$$F_0(x) = \begin{cases} 0, & \alpha\nu \ x < 0 \\ x, & \alpha\nu \ 0 \leq x < 1 \\ 1, & \alpha\nu \ x \geq 1. \end{cases}$$

Θέλοντας να υπολογίσουμε το στατιστικό

$$\sqrt{n} D_n = \sqrt{n} \max \left\{ \max_i |F_n(X_i) - F_0(X_i)|, \max_i |F_n(X_i-) - F_0(X_i)| \right\}$$

αρχικά διατάσσουμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα τάξη μεγέθους και υπολογίζουμε τις ποσότητες  $F_n(X_i)$ ,  $F_n(X_i-)$  και  $F_0(X_i)$ . Είναι:

$X_i$	$F_n(X_i)$	$F_n(X_i-)$	$F_0(X_i)$	$ F_n(X_i) - F_0(X_i) $	$ F_n(X_i-) - F_0(X_i) $
0.1	$1/5 = 0.2$	0	0.1	0.1	0.1
0.24	$2/5 = 0.4$	0.2	0.24	0.16	0.04
0.3	$3/5 = 0.6$	0.4	0.3	0.3	0.1
0.58	$4/5 = 0.8$	0.6	0.58	0.22	0.02
0.68	$5/5 = 1$	0.8	0.68	0.32	0.12

Επομένως, καθώς ο Πίνακας 2 του Παραρτήματος μάς δίνει τιμές του  $c_\alpha / \sqrt{n}$  συγκρίνουμε την τιμή του  $D_n = 0.32$  με την τιμή του πίνακα για  $\alpha = 0.05$  που είναι ίση με 0.563. Επομένως δεν απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση, άρα τα δεδομένα μπορούν να θεωρηθούν ότι προέρχονται από έναν πληθυσμό που περιγράφεται από την  $U(0, 1)$ .

Επίλυση και με την R

Στην κονσόλα της R γράφουμε:

```
x=c(0.1, 0.24, 0.3, 0.58, 0.68)
ks.test(x, "punif", 0, 1)
```

και παίρνουμε:

One-sample Kolmogorov-Smirnov test

```
data: x
D = 0.32, p-value = 0.585
alternative hypothesis: two-sided
```

Από την p-τιμή συμπεραίνουμε, ότι δεν απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση. Άρα τα δεδομένα μπορούν να θεωρηθούν ότι προέρχονται από έναν πληθυσμό που περιγράφεται από την  $U(0, 1)$ .

*Γραφικός έλεγχος με τις γραφικές παραστάσεις της εμπειρικής κατανομής του δείγματος του παραδείγματος 1.3.1α και ενός δείγματος από την ομοιόμορφη κατανομή  $U(0, 1)$  μεγέθους 50.*

Στην κονσόλα της R γράφουμε:

```
z1=c(0.1, 0.24, 0.3, 0.58, 0.68)
```

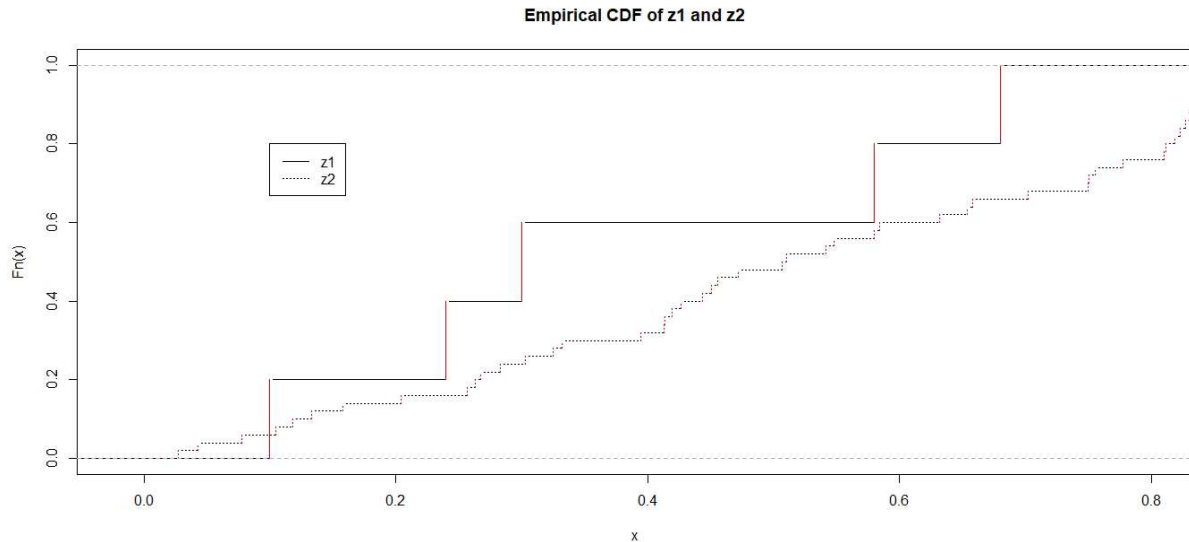


```

z2=runif(50, 0, 1)
plot.ecdf(z1, verticals=TRUE, col.p="white", col.v="red", main="Empirical CDF of z1 and z2")
plot(ecdf(z2), add=TRUE, verticals=TRUE, col.p="white", col.v="red", lty="dotted")
legend(0.1, 0.8, lty=c(1,3), col=c("1","1"), legend=c("z1 ","z2"), lwd=1)

```

και παίρνουμε το παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 1.3.1

Βλέπουμε ότι οι δύο γραφικές παραστάσεις είναι «κοντά». Άρα τα δεδομένα μπορούν να θεωρηθούν ότι προέρχονται από έναν πληθυσμό που περιγράφεται από την  $U(0, 1)$ . Στο σχήμα 1.3.1 βλέπουμε για  $x = 0.68$ , την κατακόρυφη απόσταση των δύο κατανομών να είναι  $D_n = 0.32$ .

Παράδειγμα 1.3.1β. Αν θέλαμε να εξετάσουμε, αν οι 5 δειγματικές τιμές του παραδείγματος 1.3.1α προέρχονται από την εκθετική κατανομή με παράμετρο  $\lambda = 2.63$ , μπορούμε με τη βοήθεια της R πολύ εύκολα να εκτελέσουμε τον έλεγχο.

Στην κονσόλα της R γράφουμε:

```

x=c(0.1, 0.24, 0.3, 0.58, 0.68)
ks.test(x, "pexp", 2.63)

```

και παίρνουμε:

One-sample Kolmogorov-Smirnov test

```

data: x
D = 0.26805, p-value = 0.7847
alternative hypothesis: two-sided

```

Από την p-τιμή συμπεραίνουμε, ότι δεν απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση. Άρα τα δεδομένα μπορούν να θεωρηθούν ότι προέρχονται από έναν πληθυσμό που περιγράφεται από την εκθετική κατανομή με  $\lambda = 2.63$ .

### Παρατηρήσεις 1.3.2

1. Ο έλεγχος Kolmogorov-Smirnov καλής προσαρμογής υποθέτει ότι η μηδενική υπόθεση είναι πλήρως ορισμένη, δηλαδή ελέγχουμε μία απλή υπόθεση. Με άλλα λόγια θεωρεί ότι η  $F_0(x)$  είναι πλήρως ορισμένη χωρίς την «παρουσία» άγνωστων παραμέτρων. Κάποιος ίσως αναρωτηθεί κατά πόσο ένας τέτοιος έλεγχος μπορεί να επεκταθεί σε περιπτώσεις ελέγχου σύνθετης υπόθεσης. Για τέτοιες υποθέσεις το  $\sup_x |F_n(x) - F_0(x)|$ , παύει να είναι στατιστικό, αφού εξαρτάται από άγνωστες παραμέτρους. Ένας προφανής τρόπος να απαλλαγούμε από τις άγνωστες παραμέτρους, τις οποίες συμβολίζουμε με  $\theta$ , είναι να αντικαταστήσουμε τις άγνωστες παραμέτρους με τους εκτιμητές τους. Δυστυχώς όμως το στατιστικό που προκύπτει, δηλαδή το:

$$D_n^* = \sup_x |F_n(x) - F(x, \hat{\theta})|$$

δεν έχει την κατανομή του  $D_n$  και κλειστή μορφή για αυτό είναι άγνωστη. Όμως, αν η μηδενική υπόθεση είναι αληθής, το στατιστικό  $\sqrt{n} D_n^*$  έχει οριακή κατανομή καθώς το  $n \rightarrow \infty$ . Ο Stephens (1974) έδωσε τα ασυμπτωτικά ποσοστιαία σημεία και πίνακες αυτών είναι διαθέσιμοι στη βιβλιογραφία.

2. Ο στατιστικός έλεγχος των Kolmogorov-Smirnov εφαρμόζεται σε κατανομές με **συνεχή αθροιστική κατανομή** και τείνει να είναι πιο ευαίσθητος στο κέντρο της κατανομής απ' ό,τι στις ουρές.

3. Στη βιβλιογραφία έχουν μελετηθεί αρκετές παραλλαγές του ελέγχου Kolmogorov-Smirnov, οι οποίες επιτρέπουν τη χρήση του σε περιπτώσεις όπου οι παράμετροι εκτιμώνται από τα δεδομένα. Στην πραγματικότητα, η στατιστική συνάρτηση παραμένει η ίδια, αλλά χρησιμοποιούνται διαφορετικοί πίνακες ποσοστιαίων σημείων και κρίσιμων τιμών. Οι πίνακες αυτοί δεν είναι οι ίδιοι για όλες τις κατανομές, αλλά εξαρτώνται από τη μηδενική υπόθεση.



### 1.3.2. Ο έλεγχος Smirnov για δύο ανεξάρτητα δείγματα

*Smirnov (1939)*

Ο Smirnov (1939 a, b) επέκτεινε τον στατιστικό έλεγχο του Kolmogorov (1933) για τη σύγκριση δύο κατανομών στη βάση δύο ανεξάρτητων δειγμάτων από κάθε πληθυσμό.

Αναλυτικότερα, έστω ότι  $X_1, X_2, \dots, X_n$  ένα τυχαίο δείγμα από έναν πληθυσμό με άγνωστη αθροιστική συνάρτηση κατανομής  $F_X(\cdot)$  και  $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$  ένα τυχαίο δείγμα από έναν πληθυσμό με άγνωστη αθροιστική συνάρτηση κατανομής  $G_Y(\cdot)$ . Έστω επιπρόσθετα  $F_n(\cdot)$  και  $G_m(\cdot)$  οι αντίστοιχες εμπειρικές αθροιστικές συναρτήσεις κατανομής αυτών των πληθυσμών. Θέλουμε να ελέγξουμε μία από τις εξής τρεις υποθέσεις:

- A. Τη μηδενική υπόθεση  $H_0 : F_X(x) = G_Y(x), \forall x \in R$ , έναντι της εναλλακτικής  $H_1 : F_X(x) \neq G_Y(x)$ , για κάποιο  $x \in R$ .
- B. Τη μηδενική υπόθεση  $H_0 : F_X(x) = G_Y(x), \forall x \in R$ , έναντι της εναλλακτικής  $H_{1+} : F_X(x) > G_Y(x)$ , για κάποιο  $x \in R$ .
- Γ. Τη μηδενική υπόθεση  $H_0 : F_X(x) = G_Y(x), \forall x \in R$ , έναντι της εναλλακτικής  $H_{1-} : F_X(x) < G_Y(x)$ , για κάποιο  $x \in R$ .

Με παρόμοιο σκεπτικό με αυτό που αναπτύχθηκε για τον έλεγχο Kolmogorov για ένα δείγμα, γίνεται αντιληπτό ότι η στατιστική συνάρτηση για τον έλεγχο των παραπάνω υποθέσεων θα βασίζεται στις εμπειρικές συναρτήσεις κατανομής αυτών και θα αποτελεί ένα μέτρο της εγγύτητάς τους. Ειδικότερα, η στατιστική συνάρτηση για καθένα από τους τρεις διαφορετικούς ελέγχους είναι:

A. Χρησιμοποιείται το στατιστικό

$$D_{m,n} = \sup_x |F_n(x) - G_m(x)| = \max_i |F_n(Z_i) - G_m(Z_i)|,$$

όπου  $Z_1, \dots, Z_{n+m}$  είναι το διατεταγμένο δείγμα που προκύπτει από τη σύνθεση των  $X_1, X_2, \dots, X_n$  και  $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ . Προφανώς η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται για μεγάλες τιμές του  $D_{m,n}$ .

B. Χρησιμοποιείται το στατιστικό

$$D_{m,n}^+ = \sup_x [F_n(x) - G_m(x)],$$

Γ. Χρησιμοποιείται το στατιστικό

$$D_{m,n}^- = \sup_x [G_m(x) - F_n(x)].$$

Αποδεικνύονται τότε τα ακόλουθα (βλέπε, μεταξύ άλλων, Kvam and Vidakovic (2007)):

### Θεώρημα 1.3.6

α) Όταν  $n = m$  η κατανομή των στατιστικών

$$D_{n,n}^+ = \sup_x [F_n(x) - G_m(x)]$$

και

$$D_{n,n}^- = \sup_x [G_m(x) - F_n(x)]$$

υπό τη μηδενική υπόθεση  $H_0 : F_X(x) = G_Y(x), \forall x \in R$ , δίνεται από τη σχέση

$$P(D_{n,n}^+ > d) = P(D_{n,n}^- > d) = \frac{\binom{2n}{[n(d+1)]}}{\binom{2n}{n}},$$

όπου με  $[n(d+1)]$  συμβολίζουμε το μεγαλύτερο ακέραιο που είναι μικρότερος από  $n(d+1)$ .

β) Όταν  $n$  και  $m$  μεγάλα ( $n, m > 30$ ) τότε ασυμπτωτικά ισχύει ότι

$$P\left(\sqrt{\frac{mn}{m+n}} D_{m,n} \leq d\right) \approx 1 - 2 \sum_{j=1}^{\infty} e^{-2j^2 d^2}.$$

Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα του παραπάνω θεωρήματος προκύπτουν τα ακριβή ποσοστιαία σημεία (περίπτωση  $m = n$ ) όσο και προσεγγίσεις αυτών για διάφορα μεγέθη δείγματος. Η μηδενική υπόθεση  $H_0 : F_X(x) = G_Y(x), \forall x \in R$ , απορρίπτεται, σε επίπεδο σημαντικότητας  $\alpha$ , αν η τιμή της ελεγχοσυνάρτησης είναι μεγαλύτερη από τις κρίσιμες τιμές του στατιστικού του Smirnov, που παρατίθενται στους Πίνακες 3 και 4 του Παραρτήματος.

Παράδειγμα 1.3.2 (Απόστολος Δ. Μπασιδής (2014))

Στον πίνακα που ακολουθεί καταγράφονται οι τιμές δύο ανεξάρτητων τυχαίων δειγμάτων, μεγέθους 6 και 9, αντίστοιχα από δύο πληθυσμούς με αθροιστικές συναρτήσεις κατανομής  $F_X(\cdot)$  και  $G_Y(\cdot)$ , αντίστοιχα. Να ελεγχθεί, με επίπεδο σημαντικότητας 5%, τη μηδενική υπόθεση  $H_0 : F_X(x) = G_Y(x), \forall x \in R$ , έναντι της εναλλακτικής  $H_1 : F_X(x) \neq G_Y(x)$ , για κάποιο  $x \in R$ .

$X_i$	5.2	5.4	5.9	6.5	8.2	9.1			
$Y_i$	7.4	9.8	8.4	9.3	10.1	7.5	6.4	6.9	7.2

Λύση:

Από τη θεωρία έχουμε ότι η ελεγχοσυνάρτηση που θα χρησιμοποιηθεί είναι η:

$$D_{6,9} = \sup_x |F_n(x) - G_m(x)| = \max_i |F_n(Z_i) - G_m(Z_i)|,$$

όπου  $Z_1, \dots, Z_{n+m}$  είναι το διατεταγμένο δείγμα που προκύπτει από τη σύνθεση των  $X_1, X_2, \dots, X_n$  και  $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ , ενώ με  $F_n(\cdot)$  και  $G_m(\cdot)$  συμβολίζονται οι εμπειρικές αθροιστικές συναρτήσεις κατανομής. Είναι τότε (για διευκόλυνση με χρώμα πετρόλ οι τιμές  $X_i$  και με μια απόχρωση του ροζ-μωβ οι τιμές  $Y_i$ ):

$Z_i$	$F_n(Z_i)$	$G_m(Z_i)$	$ F_n(Z_i) - G_m(Z_i) $
5.2	1/6	0	1/6 = 3/18
5.4	2/6	0	2/6 = 6/18
5.9	3/6	0	3/6 = 9/18
6.4	3/6	1/9	3/6 - 1/9 = 7/18
6.5	4/6	1/9	4/6 - 1/9 = 10/18
6.9	4/6	2/9	4/6 - 2/9 = 8/18
7.2	4/6	3/9	4/6 - 3/9 = 6/18
7.4	4/6	4/9	4/6 - 4/9 = 4/18
7.5	4/6	5/9	4/6 - 5/9 = 2/18
8.2	5/6	5/9	5/6 - 5/9 = 5/18
8.4	5/6	6/9	5/6 - 6/9 = 3/18
9.1	6/6 (=1)	6/9	3/9 = 6/18
9.3	1	7/9	2/9 = 4/18
9.8	1	8/9	1/9 = 2/18
10.1	1	9/9 (=1)	0

Επομένως είναι  $D_{6,9} = 10/18 \approx 0.556$ . Από τον Πίνακα 4 του Παραρτήματος έχουμε ότι η κρίσιμη τιμή του δίπλευρου ελέγχου σε επίπεδο σημαντικότητας 5% είναι ίση με  $2/3 \approx 0.667$ . Επομένως δεν μπορεί να απορριφθεί η μηδενική υπόθεση ότι οι αθροιστικές συναρτήσεις των δύο κατανομών συμπίπτουν.

### Επίλυση και με την R

Στην κονσόλα της R γράφουμε:

```
x=c(5.2, 5.4, 5.9, 6.5, 8.2, 9.1)
y=c(7.4, 9.8, 8.4, 9.3, 10.1, 7.5, 6.4, 6.9, 7.2)
ks.test(x, y)
```

και παίρνουμε:

Two-sample Kolmogorov-Smirnov test

```
data: x and y
D = 0.55556, p-value = 0.1758
alternative hypothesis: two-sided
```

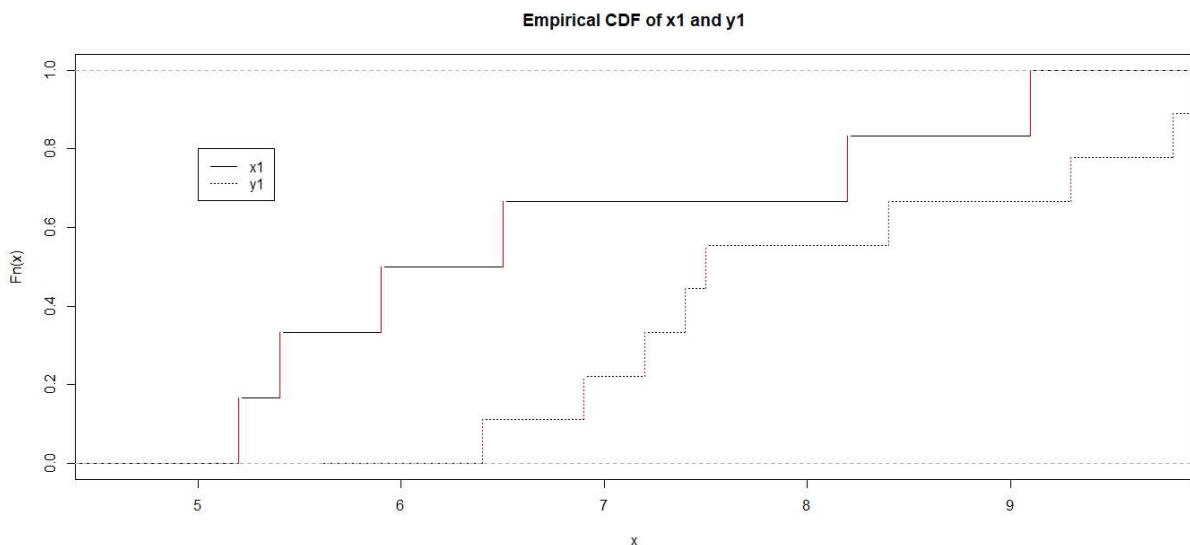
Από την p-τιμή συμπεραίνουμε, ότι δεν μπορεί ν' απορριφθεί η μηδενική υπόθεση ότι οι αθροιστικές συναρτήσεις των δύο κατανομών συμπίπτουν.

*Γραφικός έλεγχος με τις γραφικές παραστάσεις της εμπειρικής κατανομής των δύο δειγμάτων του παραδείγματος 1.3.2*

Στην κονσόλα της R γράφουμε:

```
x1=c(5.2, 5.4, 5.9, 6.5, 8.2, 9.1)
y1=c(7.4, 9.8, 8.4, 9.3, 10.1, 7.5, 6.4, 6.9, 7.2)
plot.ecdf(x1, verticals=TRUE, col.p="white", col.v="red", main="Empirical CDF of x1 and y1")
plot(ecdf(y1), add=TRUE, verticals=TRUE, col.p="white", col.v="red", lty="dotted")
legend(5, 0.8, lty=c(1,3), col=c("1", "1"), legend=c("x1 ", "y1"), lwd=1)
```

και παίρνουμε το παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 1.3.2

Βλέπουμε ότι οι δύο γραφικές παραστάσεις είναι «κοντά», και μάλιστα καθώς μεγαλώνει το  $x$  πλησιάζουν πολύ κοντά. Άρα δεν μπορεί ν' απορριφθεί η μηδενική υπόθεση. Στο σχήμα 1.3.2 βλέπουμε για  $x = 6.5$ , την κατακόρυφη απόσταση των δύο κατανομών να είναι  $D = 0.556$ .

### Παράδειγμα 1.3.3 (βασισμένο στους Κ. Φωκιανό & Χ. Χαραλάμπους (2010))

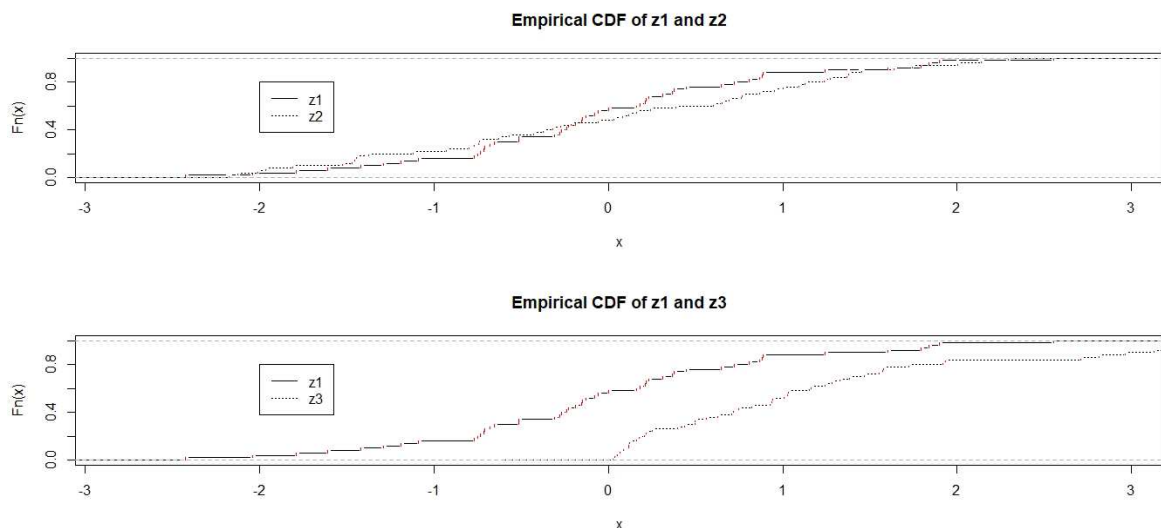
Να συγκριθούν γραφικά οι κατανομές δύο δειγμάτων που προέρχονται από την κανονική κατανομή και οι κατανομές δύο δειγμάτων που προέρχονται από την κανονική και την εκθετική κατανομή. Να γίνουν και έλεγχοι Kolmogorov - Smirnov.

Λύση:

Στην κονσόλα της R γράφουμε:

```
z1=rnorm(50)
z2=rnorm(50)
z3=rexp(50)
par(mfrow=c(2,1))
plot.ecdf(z1, verticals=TRUE, col.p="white", col.v="red", main="Empirical CDF of z1 and z2")
plot(ecdf(z2), add=TRUE, verticals=TRUE, col.p="white", col.v="red", lty="dotted")
legend(-2, 0.8, lty=c(1,3), col=c("1","1"), legend=c("z1 ","z2"), lwd=1)
plot.ecdf(z1, verticals=TRUE, col.p="white", col.v="red", main="Empirical CDF of z1 and z3")
plot(ecdf(z3), add=TRUE, verticals=TRUE, col.p="white", col.v="red", lty="dotted")
legend(-2, 0.8, lty=c(1,3), col=c("1","1"), legend=c("z1 ","z3"), lwd=1)
ks.test(z1,"pnorm")
ks.test(z2,"pnorm")
ks.test(z3,"pexp")
ks.test(z1,z2)
ks.test(z1,z3)
```

και παίρνουμε το παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 1.3.3. Σύγκριση γραφήματος εμπειρικής συνάρτησης κατανομής δύο δειγμάτων.

και τα αποτελέσματα των ελέγχων Kolmogorov - Smirnov:

### One-sample Kolmogorov-Smirnov test

data: z1  
D = 0.093605, p-value = 0.7381  
alternative hypothesis: two-sided

### One-sample Kolmogorov-Smirnov test

data: z2  
D = 0.12597, p-value = 0.3743  
alternative hypothesis: two-sided

### One-sample Kolmogorov-Smirnov test

data: z3  
D = 0.14464, p-value = 0.2237  
alternative hypothesis: two-sided

### Two-sample Kolmogorov-Smirnov test

data: z1 and z2  
D = 0.16, p-value = 0.5487  
alternative hypothesis: two-sided

### Two-sample Kolmogorov-Smirnov test

data: z1 and z3  
D = 0.58, p-value = 4.048e-08  
alternative hypothesis: two-sided

Στο πάνω γράφημα του σχήματος 1.3.3 συγκρίνονται τα δύο δείγματα από την ίδια κατανομή (κανονική), ενώ στο δεύτερο δύο δείγματα από διαφορετική κατανομή (κανονική και εκθετική). Η διαφορά τους είναι εμφανής.

Ο πρώτος έλεγχος Kolmogorov-Smirnov συγκρίνει ένα δείγμα (το z1) με την κανονική κατανομή, ο δεύτερος παρομοίως συγκρίνει ένα δείγμα (το z2) με την κανονική κατανομή, ο τρίτος συγκρίνει ένα δείγμα (το z3) με την εκθετική κατανομή, ο τέταρτος δύο όμοια δείγματα μεταξύ τους (τα z1 και z2) και ο πέμπτος δύο διαφορετικά δείγματα μεταξύ τους (τα z1 και z3). Από τις p-τιμές έχουμε ότι στον πρώτο, δεύτερο, τρίτο και τέταρτο έλεγχο η μηδενική υπόθεση δεν απορρίπτεται, ενώ στον πέμπτο απορρίπτεται, όπως αναμενόταν.

### Παρατήρηση 1.3.3

Στη βιβλιογραφία έχουν προταθεί διάφορες παραλλαγές αυτού του στατιστικού ελέγχου καθώς και επεκτάσεις του στην περίπτωση  $k$  δειγμάτων,  $k \geq 3$ . Για περισσότερες πληροφορίες παραπέμπουμε στους Kvam and Vidakovic (2007).

Πηγές:

Ξενόγλωσσες

Wikipedia

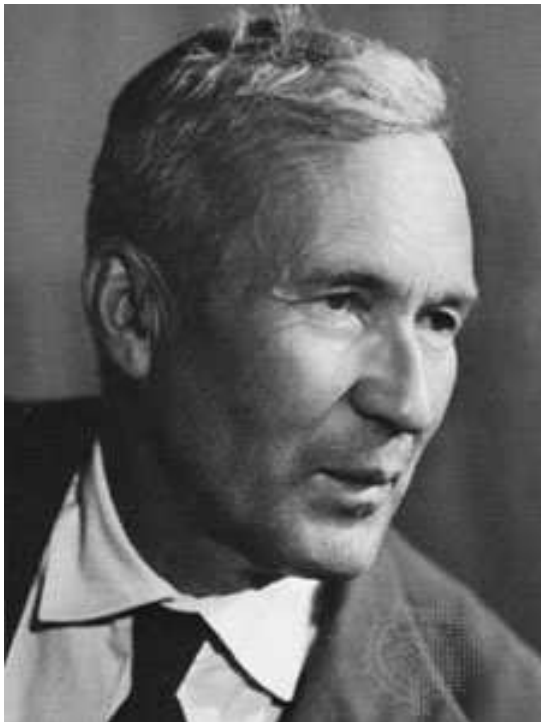
Ελληνικές

Μπατσίδης, Α. Δ. (2014), «Εισαγωγή στη μη παραμετρική στατιστική», *Διδακτικές σημειώσεις*, Τμήμα Μαθηματικών, Τομέας Πιθανοτήτων-Στατιστικής & Επιχειρησιακής Έρευνας, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

<http://users.uoi.gr/abatsidis/NonParametricClassNotes2014.pdf>

Φωκιανός, Κ. & Χαραλάμπους, Χ. (2010), «Εισαγωγή στην R. Πρόχειρες σημειώσεις», Τμήμα Μαθηματικών & Στατιστικής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

<https://cran.r-project.org/doc/contrib/mainfokianoscharalambous.pdf>



**Andrey Nikolaevich Kolmogorov**

**1903 - 1987**

(Πηγή: Britannica)



**Nikolai Vasilyevich Smirnov**

**1900 - 1966**

(Πηγή: Wikipedia)



#### 1.4. Ο έλεγχος του Lilliefors για την Εκθετική Κατανομή

Lilliefors (1969)

Μια (δεύτερη) παραλλαγή του ελέγχου Kolmogorov εξετάστηκε από τον Lilliefors το 1969. Ο έλεγχος αυτός χρησιμοποιείται για τον έλεγχο της υπόθεσης ότι ο γεννήτορας πληθυσμός είναι εκθετικός με συνάρτηση κατανομής

$$F(x) = 1 - e^{-x/\mu}, x > 0,$$

όπου  $\mu$  είναι μία άγνωστη παράμετρος, η οποία πρέπει να εκτιμηθεί με βάση τα δεδομένα.

Όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή, η εκθετική κατανομή χρησιμοποιείται για την περιγραφή της κατανομής του χρονικού διαστήματος μεταξύ δύο διαδοχικών γεγονότων, όταν αυτά συμβαίνουν τυχαία μέσα στο χρόνο. Επομένως, ένας έλεγχος για την εκθετική κατανομή, όπως αυτός που θα περιγράψουμε, χρησιμοποιείται στην πραγματικότητα κυρίως ως έλεγχος τυχαιότητας.

Έστω  $X_1, X_2, \dots, X_n$  ένα τυχαίο δείγμα  $n$  παρατηρήσεων πάνω στην τυχαία μεταβλητή  $X$  της οποίας η συνάρτηση κατανομής είναι

$$F_X(x), x \in \mathbb{R}.$$

Οι υποθέσεις που ενδιαφερόμαστε να ελέγξουμε είναι

$$H_0: F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x/\mu} & x > 0, \mu \text{ άγνωστη παράμετρος} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$H_1$ : η κατανομή της  $X$  δεν είναι εκθετική.

Από τη μορφή της κατανομής της μηδενικής υπόθεσης, είναι προφανές ότι ο κατάλληλος μετασχηματισμός των δεδομένων, ο οποίος θα οδηγήσει στην παραλλαγή του ελέγχου Kolmogorov που απαιτείται στην προκειμένη περίπτωση, είναι ο

$$Z_i = X_i / \bar{X}, i = 1, 2, \dots, n,$$

όπου  $\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i / n$ . Έτσι, η στατιστική συνάρτηση που θα χρησιμοποιηθεί, αντί να εκφράζει ένα μέτρο της απόστασης μεταξύ της εμπειρικής συνάρτησης κατανομής  $F_n(x)$  από τη συνάρτηση κατανομής κάτω από τη μηδενική υπόθεση  $F_0(x) = 1 - e^{-x/\mu}, x > 0$ , θα εκφράζει την απόσταση μεταξύ της εμπειρικής συνάρτησης κατανομής  $F_n^*(z)$  των μετασχηματισμένων δεδομένων  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  από τη συνάρτηση κατανομής

$$F^*(z) = 1 - e^{-z}, z > 0.$$

Δηλαδή, ως στατιστική συνάρτηση, στην προκειμένη περίπτωση, χρησιμοποιείται η μέγιστη απόσταση μεταξύ των συναρτήσεων  $F_n^*(z)$  και  $F^*(z)$ :

$$T = \sup_z |F_n^*(z) - F^*(z)|.$$

Είναι προφανές ότι μεγάλες τιμές της στατιστικής συνάρτησης  $T$  αποτελούν ένδειξη ότι η μηδενική υπόθεση δεν αληθεύει. Επομένως, ο κανόνας απόφασης έχει τη μορφή:

Απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση  $H_0$  σε επίπεδο σημαντικότητας  $\alpha$  αν η τιμή της στατιστικής συνάρτησης  $T$  υπερβαίνει το  $(1-\alpha)$ -ποσοστιαίο σημείο της κατανομής της, όπως αυτό δίνεται στον Πίνακα 5 του Παραρτήματος.

Ο Lilliefors μελέτησε την κατανομή της στατιστικής συνάρτησης  $T$  και προσδιόρισε κατά προσέγγιση τα ποσοστιαία σημεία της, αλλά η πραγματική κατανομή της συνάρτησης αυτής μελετήθηκε αργότερα από τον Durbin το 1975. Ο Πίνακας 5 του Παραρτήματος αναφέρεται στην πραγματική κατανομή της στατιστικής συνάρτησης  $T$ .

#### Παράδειγμα 1.4.1 (Ευδοκία Ξεκαλάκη (2001))

Πιστεύεται ότι ο αριθμός των υπεραστικών τηλεφωνημάτων μέσω κάποιου τηλεφωνικού κέντρου είναι μία τυχαία διαδικασία με χρόνους μεταξύ των διαδοχικών τηλεφωνημάτων οι οποίοι ακολουθούν την εκθετική κατανομή. Ας υποθέσουμε ότι τα 10 πρώτα τηλεφωνήματα μετά την 1:00 το μεσημέρι κάποιας Δευτέρας έγιναν κατά τις εξής ώρες:

1:06 1:08 1:16 1:22 1:23 1:34 1:44 1:47 1:51 1:57.

Να ελεγχθεί η υπόθεση ότι ο χρόνος μεταξύ διαδοχικών τηλεφωνημάτων ακολουθεί την εκθετική κατανομή έναντι της εναλλακτικής ότι η κατανομή του χρόνου αυτού δεν είναι η εκθετική.

Λύση:

Οι διαδοχικοί χρόνοι μεταξύ τηλεφωνημάτων, μετρώντας ως πρώτο διάστημα το διάστημα μεταξύ 1:00 και 1:06, είναι (σε πρώτα λεπτά) 6, 2, 8, 6, 1, 11, 10, 3, 4, 6, με μέσο  $\bar{X} = 5.7$ . Οι προκύπτουσες τιμές των  $Z_i$ ,  $F_n^*(Z_i)$  και  $F^*(Z_i) = 1 - e^{-Z_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , καθώς και των διαφορών μεταξύ  $F_n^*(z)$  και  $F^*(z)$  και στις δύο πλευρές καθενός από τα άλματα της  $F_n^*(z)$  δίνονται στον πίνακα που ακολουθεί. (Σημειώνεται ότι οι τιμές των  $X_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  έχουν διαταχθεί κατά αύξουσα σειρά μεγέθους).

$i$	$X_i$	$Z_i = X_i / \bar{X}$	$F^*(Z_i) = 1 - e^{-Z_i}$	$F_n^*(Z_i)$	$F^*(Z_i) - F_n^*(Z_i)$	$F^*(Z_i) - F_n^*(Z_{i-1})$
1	1	0.1754	0.1609	1/10 = 0.1	0.0609	0.1609
2	2	0.3509	0.2959	2/10 = 0.2	0.0959	0.1959
3	3	0.5263	0.4092	3/10 = 0.3	0.1092	0.2092
4	4	0.7018	0.5043	4/10 = 0.4	0.1043	0.2043
5	6	1.0526	0.6510	7/10 = 0.7	-0.0490	0.2510
6	8	1.4035	0.7543	8/10 = 0.8	-0.0457	0.0543
7	10	1.7544	0.8270	9/10 = 0.9	-0.0730	0.0270
8	11	1.9298	0.8548	10/10 = 1.0	-0.1452	-0.0452

Από τις δύο τελευταίες στήλες του πίνακα, είναι προφανές ότι η μέγιστη απόλυτη απόκλιση μεταξύ  $F_n^*(z)$  και  $F^*(z)$  είναι ίση με 0.2510. Η μηδενική υπόθεση ότι η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής  $X$  είναι εκθετική πρέπει να απορριφθεί σε επίπεδο σημαντικότητας  $\alpha = 0.05$  μόνο εάν η τιμή της στατιστικής συνάρτησης  $T$  υπερβαίνει την τιμή 0.3244, η οποία προκύπτει από τον Πίνακα 5 του Παραρτήματος για  $n = 10$  και  $1-\alpha = 0.95$ . Επειδή, όμως,  $T = 0.2510$ , η μηδενική υπόθεση δεν απορρίπτεται σε επίπεδο σημαντικότητας 5%. Το κρίσιμο επίπεδο προκύπτει από τον σχετικό πίνα-

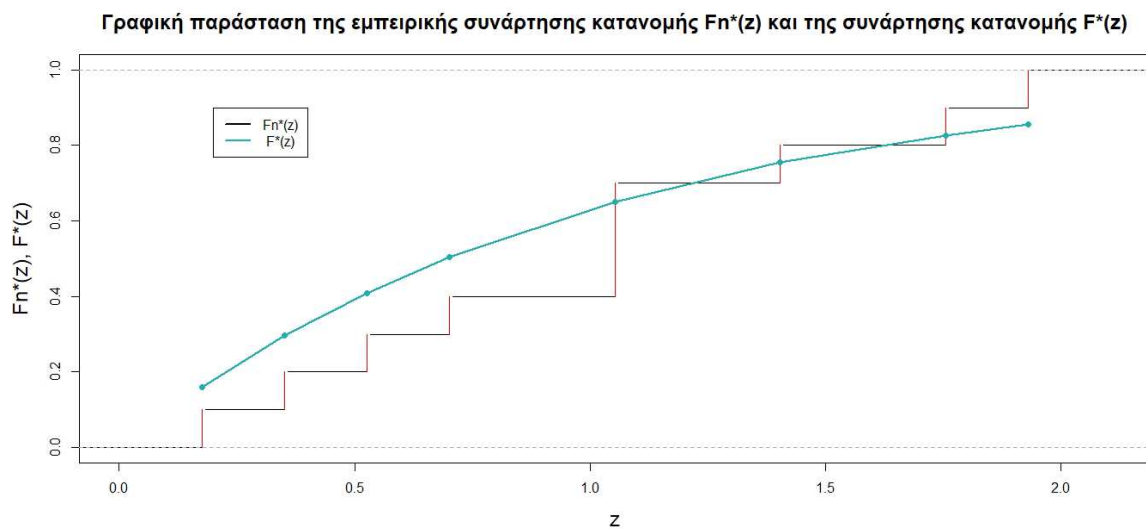
κα, με τη χρήση γραμμικής παρεμβολής, ότι είναι ίσο με  $\hat{\alpha} = 0.25$ . Επομένως, η υπόθεση ότι ο χρόνος μεταξύ διαδοχικών τηλεφωνημάτων ακολουθεί την εκθετική κατανομή είμαι μία *εύλογη* υπόθεση.

Ο έλεγχος αυτός, στην πράξη, γίνεται κυρίως με γραφικό τρόπο, χρησιμοποιώντας τη γραφική παράσταση της εμπειρικής συνάρτησης κατανομής  $F_n^*(z)$  και της συνάρτησης κατανομής  $F^*(z)$ . Οι γραφικές αυτές παραστάσεις γίνονται με βάση τιμές μόνο στα  $n$  σημεία των μετασχηματισμένων δεδομένων  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ .

Στην κονσόλα της R γράφουμε:

```
x=c(1,2,3,4,6,6,6,8,10,11)
z=x/5.7
y=1-exp(-z)
plot.ecdf(z, verticals=TRUE, col.p="white", col.v="red", xlab="z", ylab="Fn*(z), F*(z)",
cex.lab=1.5, main="Γραφική παράσταση της εμπειρικής συνάρτησης κατανομής Fn*(z) και της
συνάρτησης κατανομής F*(z)", cex.main=1.5)
lines(z, y, type="o", pch=16, lty=1, lwd=2, col="lightseagreen")
legend(0.2, 0.9, lty=c(1,1), col=c("1","lightseagreen"), legend=c("Fn*(z) "," F*(z)"), lwd=2)
```

και παίρνουμε:



Σχήμα 1.4.1

Στο σχήμα 1.4.1 φαίνεται η μέγιστη κατακόρυφη απόσταση των δύο γραφικών παραστάσεων να γίνεται για τιμή του  $z$  λίγο μετά το 1 (συγκεκριμένα όπως αναφέρθηκε για 1.0526) και να είναι γύρω στο 0.25 (όπως αναφέρθηκε είναι 0.2510).

Πηγή (ελληνική):

Ξεκαλάκη, Ε. (2001), *Μη Παραμετρική Στατιστική*, (Τμήμα Στατιστικής του Οικονομικού Πανεπιστημίου Αθηνών), Αθήνα  
<http://www2.stat-athens.aueb.gr/~exek/NPar-Statistics/chapter4.pdf>

### 1.5. Ο έλεγχος για ένα δείγμα των *Cramér-von Mises-Smirnov* (ή *Cramér-von Mises*) και των *Anderson-Darling*

Τα στατιστικά των Anderson-Darling και Cramér-von Mises ανήκουν στην τάξη των τετραγωνικών EDF (Empirical Distribution Function) στατιστικών (έλεγχος που βασίζονται στην εμπειρική συνάρτηση κατανομής). Εάν η υποθεθείσα κατανομή είναι  $F$  και η εμπειρική (δειγματική) αθροιστική συνάρτηση κατανομής είναι  $F_n$ , τότε τα τετραγωνικά EDF στατιστικά μετρούν την απόσταση μεταξύ  $F$  και  $F_n$  με

$$n \int_{-\infty}^{\infty} (F_n(x) - F(x))^2 w(x) dF(x),$$

όπου  $n$  το μέγεθος του δείγματος και  $w(x)$  μία συνάρτηση βάρους. Όταν η συνάρτηση βάρους είναι  $w(x) = 1$ , το στατιστικό είναι για  $n$  φορές το στατιστικό των Cramér-von Mises. Ο έλεγχος των Anderson-Darling (1954) βασίζεται στην απόσταση

$$A^2 = n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(F_n(x) - F(x))^2}{F(x)(1 - F(x))} dF(x),$$

η οποία λαμβάνεται όταν η συνάρτηση βάρους είναι  $w(x) = [F(x)(1 - F(x))]^{-1}$ . Έτσι, σε σύγκριση με την απόσταση Cramér-von Mises, η απόσταση Anderson-Darling δίνει μεγαλύτερο βάρος στις παρατηρήσεις στις ουρές της κατανομής.

Για την εκθετική κατανομή: Έστω  $Exp(\theta)$  η εκθετική κατανομή με την πυκνότητα  $f(x) = \exp(-x/\theta)/\theta$ ,  $x \geq 0$ ,  $\theta \equiv \lambda^{-1} > 0$  και  $X_1, X_2, \dots, X_n$  οι δοσμένες ανεξάρτητες τυχαίες παρατηρήσεις της μη αρνητικής τυχαίας μεταβλητής  $X$ . Η σύνθετη υπόθεση που ελέγχεται είναι:  $H_0 : X$  ακολουθεί  $Exp(\theta)$  για κάποια τιμή του  $\theta$ .

Στα στατιστικά των ελέγχων θα χρησιμοποιήσουμε βαθμωτές (κλιμακωτές) παρατηρήσεις  $Y_j = X_j / \hat{\theta}_n$  ή τις μετασχηματισμένες τιμές τους  $Z_j = 1 - \exp(-Y_j)$ ,  $1 \leq j \leq n$ , όπου  $\hat{\theta}_n = \bar{X}_n = n^{-1} \sum_{j=1}^n X_j$  είναι ο εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας της παραμέτρου  $\theta$ .

Ας συμβολίσουμε τις διατεταγμένες στατιστικές των  $X_j$ ,  $Y_j$  και  $Z_j$  ως  $X_{(j)}$ ,  $Y_{(j)}$  και  $Z_{(j)}$  αντίστοιχα.

#### 1.5.1. Ο έλεγχος των *Cramér-von Mises-Smirnov* (CMS) (ή *Cramér-von Mises* (CVM))

*Cramér Harald, von Mises Richard Edler (1928-1930),  
Smirnov Nikolai Vasilyevich (1937)*

Το στατιστικό του ελέγχου παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned} \omega_n^2 \text{ (ή CMS}_n) &= \int_0^{\infty} (F_n(x) - (1 - \exp(-x)))^2 \exp(-x) dx, \\ &= \frac{1}{12n} + \sum_{j=1}^n \left( Z_{(j)} - \frac{2j-1}{2n} \right)^2, \end{aligned}$$

όπου  $F_n$  η εμπειρική συνάρτηση κατανομής των βαθμωτών (κλιμακωτών) παρατηρήσεων  $Y_j$ .

Η υπόθεση της εκθετικότητας απορρίπτεται για μεγάλες τιμές του στατιστικού.

Η p-value υπολογίζεται με προσομοίωση Monte Carlo.

### 1.5.2. Ο έλεγχος των Anderson-Darling (ή ο έλεγχος άνω ουράς Anderson-Darling)

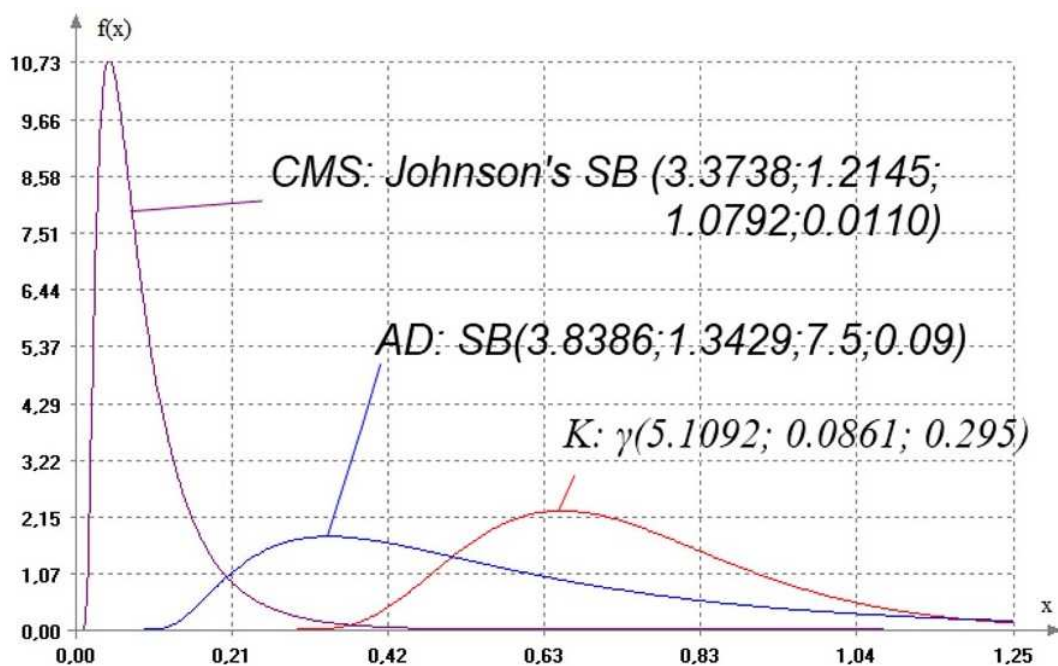
*Anderson Theodore Wilbur, Darling Donald Allan (1954)*

Το στατιστικό του ελέγχου παίρνει τη μορφή:

$$AD_n = -n - 2 \sum_{j=1}^n \left[ \frac{2j-1}{2n} \ln Z_j + \left( 1 + \frac{2j-1}{2n} \right) \ln(1 - Z_j) \right].$$

Η υπόθεση της εκθετικότητας απορρίπτεται για μεγάλες τιμές του στατιστικού.

Η p-value υπολογίζεται με προσομοίωση Monte Carlo.



Σχήμα 1.5.1. Πυκνότητες των κατανομών των στατιστικών  $K$ ,  $CMS$  και  $AD$  εφόσον είναι αληθής η μηδενική υπόθεση. (Πηγή: Rogozhnikov Andrey P., Lemeshko Boris Yu. (2012), A review of tests for exponentiality, 11th international conference, conference paper)

Όπου:

$K_n = (6n D_n + 1) / 6\sqrt{n}$  (το στατιστικό του ελέγχου Kolmogorov με τη διόρθωση του Bolshev για να μειωθεί η εξάρτηση του στατιστικού από τον όγκο του δείγματος)

και

$$D_n = \max \left\{ \max_{1 \leq j \leq n} \left[ \frac{j}{n} - Z_{(j)} \right], \max_{1 \leq j \leq n} \left[ Z_{(j)} - \frac{j-1}{n} \right] \right\} \text{ (που χρησιμοποιείται ως ένα μέτρο της δια-}$$

φοράς μεταξύ της εμπειρικής κατανομής και του εκθετικού νόμου).

Ένα καλό μοντέλο για την κατανομή του  $K_n$  με δεδομένο ότι είναι αληθής η σύνθετη μηδενική υπόθεση και  $n \geq 25$  είναι η γάμμα κατανομή  $\gamma(5.1092; 0.0861; 0.2950)$  με πυκνότητα

$$f(x) = \frac{1}{\theta_1^{\theta_0} \Gamma(\theta_0)} (x - \theta_2)^{\theta_0 - 1} e^{-(x - \theta_2)/\theta_1}, x > \theta_2,$$

για το  $CMS_n$  - η κατανομή του Johnson SB,  $Sb(3.3738; 0.2145; 1.0792; 0.011)$  με πυκνότητα

$$f(x) = \frac{\theta_1 \theta_2}{\sqrt{2\pi} (x - \theta_3) (\theta_2 + \theta_3 - x)} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \theta_0 + \theta_1 \ln \frac{x - \theta_3}{\theta_2 + \theta_3 - x} \right)^2 \right\}, x \in [\theta_3, \theta_3 + \theta_2]$$

για το  $AD_n - Sb(3.8386; 1.3429; 7.500; 0.090)$  (βλ. σχ. 1.5.1)

### Παράδειγμα 1.5.1

Παίρνουμε από το Παράδειγμα 1.4.1 τους διαδοχικούς χρόνους μεταξύ των τηλεφωνημάτων, που είναι (σε πρώτα λεπτά) 6, 2, 8, 6, 1, 11, 10, 3, 4, 6. Να ελεγχθεί η υπόθεση ότι ο χρόνος μεταξύ διαδοχικών τηλεφωνημάτων ακολουθεί την εκθετική κατανομή έναντι της εναλλακτικής ότι η κατανομή του χρόνου αυτού δεν είναι η εκθετική με τους ελέγχους Cramér-von Mises και Anderson-Darling.

Λύση:

Με τον έλεγχο Cramér-von Mises:

Τρέχουμε στην κονσόλα της R τον κώδικα

```
x=c(6, 2, 8, 6, 1, 11, 10, 3, 4, 6)
expptest::cvm.exp.test(x, nrepl=20000)
```

όπου nrepl είναι ο αριθμός των επαναλήψεων στην προσομοίωση Monte Carlo και παίρνουμε:

Cramer-von Mises test for exponentiality

```
data: x
Wn = 0.15128, p-value = 1
```

Από την p-τιμή, η μηδενική υπόθεση δεν απορρίπτεται.

Με τον έλεγχο Anderson-Darling:

Τρέχουμε στην κονσόλα της R τον κώδικα

```
x=c(6, 2, 8, 6, 1, 11, 10, 3, 4, 6)
EWGoF::EDF_NS.test(x, type = "AD", nsim = 20000)
```

όπου nsim είναι ένας ακέραιος αριθμός, ο αριθμός των επαναλήψεων στην προσομοίωση Monte Carlo και παίρνουμε:

Test of Anderson Darling for the Exponential distribution

```
data: x
S = 0.87904, p-value = 0.1751
sample estimates:
[1] 0.1754386
```

Από την p-τιμή, η μηδενική υπόθεση δεν απορρίπτεται.

Πηγές (ξενόγλωσσες):

Anderson, T. W. and Darling, D. A. (1952), *Asymptotic theory of certain "Goodness of fit" criteria based on stochastic*, The Annals of Mathematical Statistics, Vol. 23, No. 2, pp. 193-212  
<http://www.hep.caltech.edu/~fcp/statistics/hypothesisTest/PoissonConsistency/AndersonDarling1952.pdf>

Anderson, T. W. and Darling, D. A. (1954), *A test of goodness of fit*, Journal of the American Statistical Association, Vol. 49, No. 268, pp. 765-769  
<http://www.hep.caltech.edu/~fcp/statistics/hypothesisTest/PoissonConsistency/AndersonDarling1954.pdf>

Henze, N. and Meintanis, S. G. (2005), *Recent and classical tests for exponentiality: a partial review with comparisons*, Metrika 61: 29-45  
[https://www.researchgate.net/publication/24060622\\_Recent\\_and\\_classical\\_tests\\_for\\_exponentiality\\_A\\_partial\\_review\\_with\\_comparisons](https://www.researchgate.net/publication/24060622_Recent_and_classical_tests_for_exponentiality_A_partial_review_with_comparisons)

Krit, M. (2019), *Goodness-of-fit tests for the exponential and two-parameter Weibull distributions*, package 'EWGoF', CRAN  
<https://cran.r-project.org/web/packages/EWGoF/EWGoF.pdf>

Novikov, A., Pusev, R. and Yakovlev, M. (2015), *Tests for exponentiality, Tests for the composite hypothesis of exponentiality*, package 'exptest', CRAN  
<https://cran.r-project.org/web/packages/exptest/exptest.pdf>

Rahman, M. and Wu, H. (2017), *Tests for exponentiality: A comparative study*, American Journal of Applied Mathematics and Statistics, vol. 5, no. 4 (2017): 125-135.  
[https://www.researchgate.net/publication/321217987\\_Tests\\_for\\_Exponentiality\\_A\\_Comparative\\_Study](https://www.researchgate.net/publication/321217987_Tests_for_Exponentiality_A_Comparative_Study)

Rogozhnikov, A. P. and Lemeshko, B. Yu. (2012), *A review of tests for exponentiality*, 11th international conference, conference paper  
[https://www.researchgate.net/publication/236170192\\_A\\_Review\\_of\\_Tests\\_for\\_Exponentiality](https://www.researchgate.net/publication/236170192_A_Review_of_Tests_for_Exponentiality)

Wikipedia

### 1.6. Ο έλεγχος Shapiro-Wilk για τη σύνθετη υπόθεση της εκθετικότητας

Shapiro and Wilk (1972)

Έστω  $X_1, X_2, \dots, X_n$  ένα τυχαίο δείγμα από μία συνεχή συνάρτηση κατανομής  $F(x)$ . Ο έλεγχος Shapiro-Wilk για τη μηδενική υπόθεση

$$H_0 : F(x) = 1 - \exp \{ - (x - \alpha) / \beta \}, \quad x \geq \alpha$$

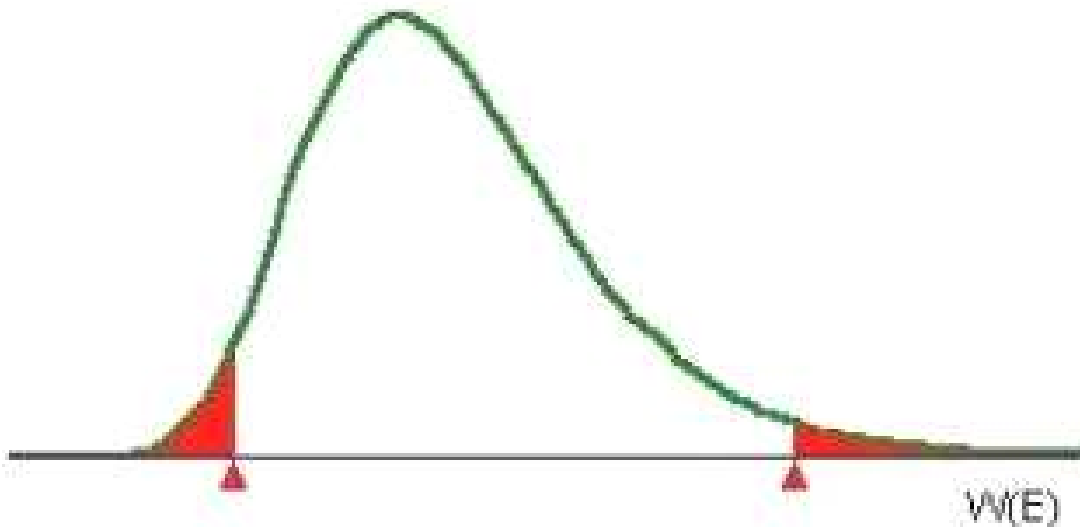
χρησιμοποιεί το ακόλουθο στατιστικό:

$$W(E) = \frac{n (\bar{X} - X_{\min})^2}{[(n-1) s]^2} = \frac{n (\bar{X} - X_{\min})^2}{(n-1) \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2},$$

όπου  $s$  είναι η δειγματική τυπική απόκλιση,  $X_{\min}$  η ελάχιστη τιμή των δεδομένων και  $n$  το μέγεθος του δείγματος.

Η ακριβής μηδενική κατανομή του  $W(E)$  δεν είναι γνωστή, αλλά δεν εξαρτάται από τα  $a$  και  $\beta$ . Οι Shapiro και Wilk (1972) παρουσίασαν πίνακες με τα άνω και κάτω εκατοστημόρια του  $W(E)$  που ελήφθησαν με προσομοίωση, για  $n$  από 3 έως 100.

Χρησιμοποιώντας τον Πίνακα 6 του Παραρτήματος βρίσκουμε τις κρίσιμες τιμές για τον έλεγχο Shapiro-Wilk για την εκθετικότητα. Απαιτούνται δύο κρίσιμες τιμές. Αποδεχόμαστε τη μηδενική υπόθεση, εάν το στατιστικό του ελέγχου  $W(E)$  πέφτει ανάμεσα στις δύο τιμές.



Σχήμα 1.6.1. Το στατιστικό του ελέγχου  $W(E)$  (Πηγή: <https://mvppprograms.com>)



Ας σημειωθεί ότι οι κρίσιμες τιμές είναι τιμές μονής ουράς, οπότε χρησιμοποιούμε τις τιμές  $\alpha/2$  και  $(1-\alpha)/2$  για να λάβουμε τις κατάλληλες κρίσιμες τιμές, δεδομένου ότι πρόκειται για αμφί-πλευρο έλεγχο. Για παράδειγμα, με  $\alpha = 0.05$ , επιλέγουμε τις κρίσιμες τιμές που αντιστοιχούν στα 0.025 και 0.975.

Η p-value υπολογίζεται με προσομοίωση Monte Carlo.

#### Παράδειγμα 1.6.1

Παίρνουμε από το Παράδειγμα 1.4.1 τους διαδοχικούς χρόνους μεταξύ των τηλεφωνημάτων, που είναι (σε πρώτα λεπτά) 6, 2, 8, 6, 1, 11, 10, 3, 4, 6. Να ελεγχθεί η υπόθεση ότι ο χρόνος μεταξύ διαδοχικών τηλεφωνημάτων ακολουθεί την εκθετική κατανομή έναντι της εναλλακτικής ότι η κατανομή του χρόνου αυτού δεν είναι η εκθετική με τον έλεγχο Shapiro-Wilk.

Λύση:

Τρέχουμε στην κονσόλα της R τον κώδικα

```
x=c(6, 2, 8, 6, 1, 11, 10, 3, 4, 6)
exptest::shapiro.exp.test(x, nrepl=2000)
```

όπου nrepl είναι ο αριθμός των αναπαραγωγών στην προσομοίωση Monte Carlo και παίρνουμε:

Shapiro-Wilk test for exponentiality

```
data: x
W = 0.2502, p-value = 0.943
```

Άρα η μηδενική υπόθεση δεν απορρίπτεται.

Ακόμη από τον Πίνακα 6 του Παραρτήματος σε επίπεδο σημαντικότητας 0.05 βρίσκουμε τις κρίσιμες τιμές που αντιστοιχούν στα 0.025 και 0.975 και είναι 0.0487 και 0.2879 αντιστοίχως. Έχουμε  $W = 0.2502$  και επειδή ισχύει  $0.0487 < W < 0.2879$ , αποδεχόμαστε τη μηδενική υπόθεση.

Πηγές (ξενόγλωσσες):

Novikov, A., Pusev, R. and Yakovlev, M. (2015), *Tests for Exponentiality, Tests for the composite hypothesis of exponentiality*, package 'exptest', CRAN  
<https://cran.r-project.org/web/packages/exptest/exptest.pdf>

Petrovich, M. V. (2000 - 2021), MVP Programs  
<https://mvpprograms.com/help/mvpstats/distributions/shapiro-wilk-expon-test>

Samanta, M. and Schwarz, C. J. (1988), *The Shapiro-Wilk test for exponentiality based on censored data*, Journal of the American Statistical Association, Vol. 83, No. 402 (Jun., 1988), pp. 528-531 (4 pages), published by: Taylor & Francis, Ltd.  
<https://www.jstor.org/stable/2288873?seq=1>

### 1.7. Έτεροι πρότεροι έλεγχοι για την εκθετικότητα (Ascher Steven (1990))

Έστω  $X_1, X_2, \dots, X_n$  ένα τυχαίο δείγμα από ένα πληθυσμό με συνάρτηση πυκνότητας  $f_X(\cdot)$ . Η μηδενική υπόθεση που εξετάζεται είναι  $H_0: f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$  (δηλαδή, η τυχαία μεταβλητή  $X$  είναι εκθετικά κατανομημένη με παράμετρο  $\lambda$ ), όπου  $x \geq 0$  και  $\lambda > 0$ . Κάθε ένας από τους ελέγχους που συζητούνται εδώ είναι αμετάβλητος στη κλίμακα (δηλαδή, το  $\lambda$  δεν χρειάζεται να προσδιοριστεί). Οι κανονικοποιημένες αποστάσεις, οι οποίες χρησιμοποιούνται σε διάφορους ελέγχους, ορίζονται ως:  $D_i = (n-i+1)(X_{(i)} - X_{(i-1)})$ , όπου  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $X_{(0)} = 0$ , και  $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$  είναι οι διατεταγμένες στατιστικές. Ακολουθεί μια περιγραφή των ελέγχων.

#### 1.7.1. F-έλεγχος του Gnedenko: $Q(R)$

Αυτή η διαδικασία οφείλεται στον Gnedenko (1969) και συζητήθηκε από τους Lin και Mudholkar (1980) και από τους Fercho και Ringer (1972). Τα  $n$  δεδομένα είναι διατεταγμένα και χωρίζονται σε δύο ομάδες, με την ομάδα ένα να περιέχει τα πρώτα  $R$  και την ομάδα δύο τα υπόλοιπα  $n-R$ . Το στατιστικό του ελέγχου είναι:

$$Q(R) = \frac{\sum_{i=1}^R D_i / R}{\sum_{i=R+1}^n D_i / (n-R)}.$$

Αν η μηδενική υπόθεση της εκθετικότητας είναι αληθινή, τότε το  $Q(R)$  έχει μια F κατανομή με  $2R$  και  $2(n-R)$  βαθμούς ελευθερίας. Η υπόθεση απορρίπτεται για μικρές και για μεγάλες τιμές του  $Q(R)$ . Οι Fercho και Ringer συνιστούσαν να τεθεί  $R = n/2$  και ισχυρίζονταν ότι ο έλεγχος είναι κατάλληλος και για την Weibull κατανομή ως εναλλακτική και για τις Γάμμα κατανομές με μονότονους ρυθμούς κινδύνου.

#### 1.7.2. Η τροποποίηση του Harris στον F-έλεγχο του Gnedenko: $Q'(R)$

Αυτός ο έλεγχος προτάθηκε από τον Harris (1976) και συζητήθηκε από τους Lin και Mudholkar (1980). Το στατιστικό του ελέγχου είναι:

$$Q'(R) = \frac{(\sum_{i=1}^R D_i + \sum_{i=n-R+1}^n D_i) / 2R}{\sum_{i=R+1}^{n-R} D_i / (n-2R)}.$$

Το  $Q'(R)$  κατανέμεται σαν μία F με  $4R$  και  $2(n-2R)$  βαθμούς ελευθερίας, με δεδομένο ότι η μηδενική υπόθεση είναι αληθής. Η υπόθεση απορρίπτεται για μικρές και για μεγάλες τιμές του  $Q'(R)$ . Αυτή η διαδικασία φαίνεται να είναι ισχυρή έναντι της λογαριθμοκανονικής κατανομής (της οποίας η συνάρτηση κινδύνου έχει σχήμα U) και ασθενέστερη για μονότονες συναρτήσεις κινδύνου. Ο Harris συνιστά να τεθεί  $R = n/4$ .

### 1.7.3. Ο Bivariate F-έλεγχος των Lin και Mudholkar: BF(R)

Αυτός ο έλεγχος, που είναι ουσιαστικά ένας συνδυασμός των παραπάνω ελέγχων 1.7.1 και 1.7.2, προτάθηκε από τους Lin και Mudholkar (1980). Έστω:

$$F_L = \frac{\sum_{i=1}^R D_i / R}{\sum_{i=R+1}^{n-R} D_i / (n-2R)} \quad \text{και} \quad F_U = \frac{\sum_{i=n-R+1}^n D_i / R}{\sum_{i=R+1}^{n-R} D_i / (n-2R)}.$$

Κάτω από τη μηδενική υπόθεση, οι  $F_L$  και  $F_U$  από κοινού ακολουθούν μια διμεταβλητή (bivariate) F κατανομή. Απόρριψη της εκθετικότητας θα συμβεί εάν υπάρχει  $F_L$  ή  $F_U$  που δεν είναι μέσα σε κάποιο διάστημα (a, b). Αυτό το διάστημα προσδιορίζεται χρησιμοποιώντας το επόμενο θεώρημα από τους Hewett και Bulgren (1971): Για κάθε  $0 \leq a \leq b < +\infty$ ,  $P(a \leq F_L \leq b, a \leq F_U \leq b | H_0) \leq [P(a \leq F \leq b)]^2$ , όπου F είναι η F του Snedecor τυχαία μεταβλητή με  $2R$  και  $2(n-2R)$  βαθμούς ελευθερίας. Το δεξί μέλος της ανισότητας ορίζεται ίσο με  $1 - \alpha$  (όπου  $\alpha$  είναι το επιθυμητό σφάλμα τύπου I) και υποθέτοντας ίσες ουρές πιθανότητας για την F, τα a και b μπορούν εύκολα να ληφθούν. Αυτή η διαδικασία φαίνεται να είναι ισχυρή έναντι εναλλακτικών με μη μονότονες συναρτήσεις κινδύνων (π.χ. λογαριθμοκανονική). Οι Lin και Mudholkar (1980) συνιστούν να χρησιμοποιηθεί  $R = n / 10$ .

### 1.7.4. Λοξότητα και Κύρτωση (Skewness and Kurtosis): KUSK

Το στατιστικό του ελέγχου που προτείνεται εδώ είναι:  $K = (\hat{\beta}_1 + 0.5) / \hat{\beta}_2$ , όπου  $\hat{\beta}_1 = \hat{\mu}_3^2 / \hat{\mu}_2^3$  (ο δειγματικός συντελεστής λοξότητας) και  $\hat{\beta}_2 = \hat{\mu}_4 / \hat{\mu}_2^2$  (ο δειγματικός συντελεστής κύρτωσης). Όταν η μηδενική υπόθεση είναι αληθής, το  $(\beta_1 + 0.5) / \beta_2$  παίρνει την τιμή 0.5. Οι κατώτερες και οι ανώτερες κρίσιμες τιμές για το K λαμβάνονται χρησιμοποιώντας προσομοιώσεις. Για μικρά μεγέθη δείγματος, αυτός ο έλεγχος θα είναι παραπλανητικός, καθώς και τα δύο,  $\hat{\beta}_1$  και  $\hat{\beta}_2$  είναι ευαίσθητα σε απόμακρα (ή άτυπα) σημεία (outliers).

### 1.7.5. Ο έλεγχος "New Better Than Used" των Hollander και Proschan: HP

Αυτή η διαδικασία, η οποία προτάθηκε από τους Hollander και Proschan (1972), εφαρμόζεται συνήθως σε μονόπλευρες εναλλακτικές υποθέσεις (η νέα υπόθεση είναι καλύτερη από την χρησιμοποιούμενη ή η νέα υπόθεση είναι χειρότερη από την χρησιμοποιούμενη). Σε αυτή την εργασία, δεδομένου ότι έχει υποτεθεί ότι δεν γνωρίζουμε την εναλλακτική υπόθεση, ο έλεγχος ήταν αμφίπλευρος. Το στατιστικό του ελέγχου είναι:

$$T = \sum_{i>j>k} G(X_{(i)}, X_{(j)} + X_{(k)}), \quad \text{όπου}$$

$$G(a, b) = \begin{cases} 1, & \text{εάν } a > b \\ 0.5, & \text{εάν } a = b \\ 0, & \text{εάν } a < b. \end{cases}$$

Οι συγγραφείς παρέχουν ένα πίνακα με κατά προσέγγιση κατώτερες και ανώτερες κρίσιμες τιμές και την ακόλουθη Κανονική προσέγγιση:

$$T^* = \frac{T - E(T|H_0)}{[\text{VAR}(T|H_0)]^{1/2}},$$

όπου  $E(T|H_0) = n(n-1)(n-2)/8$

και  $\text{VAR}(T|H_0) = \{1.5n(n-1)(n-2)[(5/2592)(n-3)(n-4) + (n-3)(7/432) + (1/48)]\}$ .

Όταν η μηδενική υπόθεση είναι αληθής και το  $n$  τείνει στο άπειρο, το  $T^*$  έχει μια ασυμπτωτικά Κανονική Κατανομή με μέση τιμή 0 και διασπορά 1.

### 1.7.6. *O έλεγχος WE: WE1*

Το στατιστικό του ελέγχου WE προτάθηκε από τους Hahn και Shapiro (1967) και συζητήθηκε από τον Lee (1980) και τους Lee, Locke και Spurrier (1980) και είναι:

$$\text{WE1} = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 / (\sum_{i=1}^n X_i)^2 = (n-1)S^2 / n^2 \bar{X}^2$$

όπου  $S^2$  είναι η δειγματική διασπορά και  $\bar{X}$  είναι ο δειγματικός μέσος. Ένας πίνακας με κατώτερες και ανώτερες κρίσιμες τιμές μπορεί να βρεθεί στον Lee (1980).

### 1.7.7. *To Gini στατιστικό: G*

Αυτή η διαδικασία, που εισήχθη από τους Gail και Gastwirth (1978), έχει το ακόλουθο στατιστικό του ελέγχου:

$$\begin{aligned} G &= \left[ \sum_{i=1}^{n-1} i(n-i)(X_{(i+1)} - X_{(i)}) \right] / \left[ (n-1) \sum_{i=1}^n X_i \right] \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} i D_{i+1} / (n-1) \sum_{i=1}^n X_i. \end{aligned}$$

Οι συγγραφείς παρείχαν έναν πίνακα με κατά προσέγγιση κατώτερες και ανώτερες κρίσιμες τιμές και την ακόλουθη κανονική προσέγγιση:

$$G^* = \frac{G - E(G|H_0)}{[\text{VAR}(G|H_0)]^{1/2}},$$

όπου  $E(G|H_0) = 0.5$  και  $\text{VAR}(G|H_0) = 1/[12(n-1)]$ . Υπό την προϋπόθεση της εκθετικότητας, το  $G^*$  ακολουθεί μια ασυμπτωτικά τυπική κανονική κατανομή, ακόμη και για δείγματα τόσο μικρά όσο ίσα με 10. Έχει καλή ισχύ για εναλλακτικές υποθέσεις από τις κατανομές Weibull, Uniform (ομοιόμορφη) και Γάμμα. Το Gini στατιστικό μπορεί επίσης να προσαρμοστεί στα δεδομένα που είναι λογοκριμένα στο  $X_{(R)}$ , όπου  $R \leq n$ .

### 1.7.8. *To Lorenz στατιστικό: L*

Οι Gail και Gastwirth (1978) βρήκαν ότι το Lorenz στατιστικό αποτελούσε έναν ισχυρό έλεγχο για την εκθετικότητα. Το στατιστικό του ελέγχου είναι:

$$L_{(n)}(p) = \sum_{i=1}^{[np]} X_{(i)} / n \bar{X},$$

όπου  $0 < p < 1$  και  $[np]$  είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος που είναι μικρότερος ή ίσος με το  $np$  (το ακέραιο μέρος του  $np$ ). Οι συγγραφείς παρέχουν κατώτερες και ανώτερες κρίσιμες τιμές και πρότειναν να τεθεί  $p = 0.5$ .

### 1.7.9. *To Pietra στατιστικό: P*

Αυτή η διαδικασία συζητήθηκε από τους Gail και Gastwirth (1978), οι οποίοι παρέχουν το ακόλουθο στατιστικό του ελέγχου:

$$P = \sum_{i=1}^n |X_i - \bar{X}| / 2n\bar{X}.$$

Οι συγγραφείς παρέχουν κατώτερες και ανώτερες κρίσιμες τιμές.

### 1.7.10. *Epstein: EPS*

Αυτός ο έλεγχος οφείλεται στον Epstein (1960) και συζητήθηκε από τους Fercho και Ringer (1972). Το στατιστικό του ελέγχου είναι:

$$EPS = 2n [\text{Ln}(\sum_{i=1}^n D_i / n) - n^{-1} \sum_{i=1}^n \text{Ln}(D_i)] / [1 + (n+1) / 6n],$$

όπου  $\text{Ln}$  είναι ο φυσικός λογάριθμος.

Δεδομένου ότι η μηδενική υπόθεση είναι αληθής, ο EPS είναι κατά προσέγγιση κατανομημένος σαν μία  $X^2$  με  $n - 1$  βαθμούς ελευθερίας. Η υπόθεση απορρίπτεται για μεγάλες τιμές του EPS. Αυτή η διαδικασία είναι ισχυρή έναντι εναλλακτικών Γάμμα και Weibull.

1.7.11. *Ο συγγραφέας αναφέρεται στον έλεγχο Kolmogorov-Smirnov(-Lilliefors): KSL, που παρουσιάσαμε αναλυτικά στην ενότητα 1.4.*

### 1.7.12. *O έλεγχος του Deshpande: J.b*

Αυτή η διαδικασία προτάθηκε από τον Deshpande (1983) για τον έλεγχο της εκθετικότητας έναντι κατανομών με αυξανόμενους ρυθμούς αποτυχίας. Το στατιστικό του ελέγχου υπολογίζεται ως εξής: Πολλαπλασιάζουμε τα  $X_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  με  $b$  ( $b = 0.5$  ή  $0.9$  εδώ) και διατάσσουμε τα  $X_1, \dots, X_n$  και  $bX_1, \dots, bX_n$  μαζί σε αύξουσα τάξη μεγέθους. Υπολογίζουμε την ποσότητα

$$S = \sum_{i=1}^n R_i - 0.5 n (n + 1) - n$$

όπου  $R_i$  είναι η τάξη του  $X_i$ . Κρίσιμες τιμές για μονόπλευρους ελέγχους, που αποκτήθηκαν με προσομοίωση για αυτό το Wilcoxon-τύπου στατιστικό, παρέχονται από τον συγγραφέα για  $b = 0.5$  και  $0.9$ , όταν  $n \leq 15$ . Ο συγγραφέας προτείνει να χρησιμοποιείται το  $0.5$ , όταν η εναλλακτική κατανομή υπάρχει υποψία ότι ανήκει στην ευρύτερη κατηγορία 'η νέα είναι καλύτερη από αυτήν που χρησιμοποιείται' και το  $0.9$ , όταν η εναλλακτική περιορίζεται στην κατηγορία με αυξανόμενο μέσο ρυθμό αποτυχίας. Αφού δεν γνωρίζουμε εκ των προτέρων την εναλλακτική κατανομή, κρίσιμες τιμές για αμφίπλευρο έλεγχο για  $n = 20$  αποκτήθηκαν με προσομοίωση και χρησιμοποιήθηκαν σ' αυτή τη μελέτη. Ο Deshpande δίνει επίσης την ακόλουθη κανονική προσέγγιση στον έλεγχο: το  $n^{1/2} [J.b - M(F)]$  είναι ασυμπτωτικά κανονικά κατανομημένο με μέση τιμή  $0$  και διασπορά  $4c$ , όπου κάτω από το σύμπερασμα της εκθετικότητας,  $M(F) = (b+1)^{-1}$  και

$$c = \frac{1}{4} \left[ 1 + \frac{b}{b+2} + \frac{1}{2b+1} + \frac{2(1-b)}{b+1} - \frac{2b}{b^2+b+1} - \frac{4}{(b+1)^2} \right].$$

### 1.7.13. *O F Max έλεγχος του Hartley: HARTF*

Αυτός ο έλεγχος, ο οποίος προτάθηκε από τον Hartley (1950) και συζητήθηκε από τους Fercho και Ringer (1972), προέκυψε από έναν έλεγχο για την ομοιογένεια των διασπορών. Το στατιστικό του ελέγχου είναι:

$$\text{HARTF} = \text{Max}(W_i) / \text{Min}(W_i), \text{ όπου } 1 \leq i \leq K,$$

$$W_i = \sum_{j=(i-1)R+1}^{iR} D_j,$$

$K$  = ο αριθμός των ομάδων και  $R$  = το μέγεθος κάθε ομάδας. Δεδομένου ότι η μηδενική υπόθεση είναι αληθής, το HARTF έχει μία F Max κατανομή με  $2R$  και  $K$  βαθμούς ελευθερίας. Η υπόθεση απορρίπτεται για μεγάλες τιμές του HARTF. Όταν  $n = 20$ , οι Fercho και Ringer συνέστησαν να τεθεί  $K = 2$  και  $R = 10$ .

#### 1.7.14. *O Score έλεγχος των Cox και Oakes: COX*

Αυτή η διαδικασία, η οποία βρίσκεται στους Cox και Oakes (1984), βασίζεται στη συνάρτηση score:

$$U = d + \sum \text{Ln}(X_i) - d \sum_{i=1}^n X_i \text{Ln}(X_i) / \sum_{i=1}^n X_i,$$

όπου το πρώτο άθροισμα λαμβάνεται πάνω σε όλα τα μη λογοκριμένα (παρατηρήσιμα) σημεία και  $d$  είναι ο αριθμός των μη λογοκριμένων σημείων. Στην παρούσα περίπτωση, όλα τα σημεία είναι παρατηρήσιμα (δηλ.  $d = n$ ). Με τη χρήση του πίνακα πληροφορίας, μία ασυμπτωτικά τυπική κανονική απόκλιση μπορεί να υπολογιστεί. Η υπόθεση της εκθετικότητας απορρίπτεται και για τα δύο, για μεγάλες και για μικρές τιμές της απόκλισης. Μία ευχάριστη λειτουργία αυτής της διαδικασίας είναι η ικανότητα να χειρίζεται λογοκριμένα δεδομένα. Οι συγγραφείς ισχυρίζονται ότι ο έλεγχος είναι χρήσιμος έναντι εναλλακτικών υποθέσεων οι οποίες προσδιορίζουν μονότονες συναρτήσεις κινδύνου.

#### 1.7.15. *O έλεγχος ακραίου ηηλικίου των Wong και Wong: EXQT*

Αυτός ο έλεγχος, ο οποίος προτάθηκε από τους Wong και Wong (1979), βασίζεται σε μία ποσότητα γνωστή ως το ακραίο ηηλικίο:  $Q = X_{(n)} / X_{(1)}$ , όπου  $X_{(1)}$  και  $X_{(n)}$  είναι η μικρότερη και η μεγαλύτερη διατεταγμένη στατιστική του δείγματος, αντίστοιχα. Οι συγγραφείς δίνουν κρίσιμες τιμές για αυτόν τον έλεγχο, ο οποίος απορρίπτει τη μηδενική υπόθεση για μεγάλες τιμές του  $Q$ .



Όταν συζητάμε κρίσιμες περιοχές για απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης στους παραπάνω ελέγχους, υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει γνώση της εναλλακτικής υπόθεσης. Ως εκ τούτου, για ελέγχους που θα μπορούσαν να ήταν μονόπλευροι ή αμφίπλευροι, χρησιμοποιήθηκε η επιλογή αμφίπλευροι. Οι έλεγχοι με αυτή την επιλογή περιελήφθησαν στους αριθμούς (1.7.) 1, 2, 4-9 και 14.



Οι υπολογισμοί ισχύος, χρησιμοποιώντας προσομοιώσεις, έγιναν για κάθε διαδικασία. Ορισμένοι έλεγχοι (π.χ. του Gnedenko (1969), των Lin και Mudholkar (1980), του Harris (1976), των Cox και Oakes (1984) και του Deshpande (1983)) είχαν καλή απόδοση για εναλλακτικές κατανομές με μη-μονοτονικό ρυθμό κινδύνου, ενώ άλλοι (π.χ. του Deshpande (1983), των Gail και Gastwirth (1978), των Kolmogorov-Smirnov (του Lilliefors (1969)), των Hahn και Shapiro (1967), των Hollander και Proschan (1972) και των Cox και Oakes (1984)) τα πήγαν καλά για μονοτονικούς ρυθμούς κινδύνου. Από όλες τις διαδικασίες που συγκρίθηκαν, ο score έλεγχος που παρουσιάστηκε στους Cox και Oakes (1984) εμφανίζεται να είναι ο καλύτερος, εάν δεν έχει κανείς υπ' όψιν του κάποια συγκεκριμένη εναλλακτική.

Πηγή (ξενόγλωσση):

Ascher, S. (1990), *A survey of tests for exponentiality*, Communications in Statistics - Theory and Methods, 19:5, 1811-1825  
[https://ami.nstu.ru/~post/teaching/ktad/Ascher\\_1990.pdf](https://ami.nstu.ru/~post/teaching/ktad/Ascher_1990.pdf)

### 1.8. Νεότεροι έλεγχοι για την εκθετικότητα ( $\alpha$ ) (Henze N. και Meintanis S. G. (2005))

Έστω ότι  $Exp(\theta)$  υποδηλώνει την εκθετική κατανομή με πυκνότητα  $\exp(-x/\theta)/\theta$ ,  $x \geq 0$ . Στη συνέχεια εξετάζουμε ελέγχους καλής προσαρμογής για την τάξη  $\mathcal{E}xp = \{Exp(\theta): \theta > 0\}$  των εκθετικών κατανομών. Συγκεκριμένα, δοθέντος μιας μη αρνητικής τυχαίας μεταβλητής  $X$  με πυκνότητα  $f$ , συνάρτηση κατανομής  $F$  και μέση τιμή  $\mu = E(X)$ , επιθυμούμε να ελέγξουμε τη μηδενική υπόθεση

$$H_0 : \text{Ο νόμος της } X \text{ είναι } Exp(\theta) \text{ για κάποιο } \theta > 0,$$

έναντι γενικών εναλλακτικών, βάσει των ανεξάρτητων αντιγράφων  $X_1, \dots, X_n$  της  $X$ . Αφού κάθε στατιστικό  $T_n$  που θεωρείται, θα είναι μία συνάρτηση των κλιμακωτών παρατηρήσεων  $Y_j = X_j / \hat{\theta}_n$  ή των μετασχηματισμένων τιμών τους  $Z_j = 1 - \exp(-Y_j)$ ,  $1 \leq j \leq n$ , όπου  $\hat{\theta}_n = \bar{X}_n = n^{-1} / \sum_{j=1}^n X_j$  είναι ο εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας της παραμέτρου  $\theta$ , είναι αμετάβλητο στην κλίμακα. Κατά συνέπεια, η μηδενική κατανομή του  $T_n$  δεν θα εξαρτάται από την παράμετρο  $\theta$ .

Στη συνέχεια, οι διατεταγμένες στατιστικές των  $X_j$ ,  $Y_j$  και  $Z_j$  θα συμβολίζονται με  $X_{(j)}$ ,  $Y_{(j)}$  και  $Z_{(j)}$ , αντίστοιχα.  $\mathbf{1}\{A\}$  δηλώνει τη δείκτρια ενός γεγονότος  $A$ , που είναι 1 εάν συμβεί το  $A$  και 0, σε διαφορετική περίπτωση.

#### 1.8.1. Ο έλεγχος του Klar (2001) μέσω της ολοκληρωμένης Εμπειρικής Συνάρτησης Κατανομής

Ο Klar (2001) μελέτησε έναν έλεγχο για εκθετικότητα που βασίζεται στο σταθμισμένο  $L^2$ -στατιστικό

$$T_{n,a} = n \alpha^3 \int_0^\infty [\Psi_n(t) - \Psi(t)]^2 \exp(-\alpha t) dt,$$

$$\text{όπου } \Psi(t) = \int_t^\infty (1 - F(x;1)) dx = \exp(-t) \text{ και } \Psi_n(t) = \int_t^\infty (1 - F_n(x)) dx = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \max(Y_j - t, 0)$$

είναι η ολοκληρωμένη συνάρτηση επιβίωσης της μοναδιαίας εκθετικής κατανομής και η εμπειρική της ομολογή, αντίστοιχα και  $\alpha > 0$  είναι μια σταθερά. Ένας υπολογιστικά βολικός τύπος για το  $T_{n,a}$  είναι

$$T_{n,a} = \frac{2(3\alpha + 2)n}{(2 + a)(1 + a)^2} - 2\alpha^3 \sum_{j=1}^n \frac{\exp(-(1+a)Y_j)}{(1+a)^2} - \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n \exp(-\alpha Y_j) + \frac{2}{n} \sum_{j < k} [a(Y_{(k)} - Y_{(j)}) - 2] \exp(-\alpha Y_{(j)}).$$

Ένας έλεγχος που απορρίπτει την  $H_0$  για μεγάλες τιμές του  $T_{n,a}$  είναι σύμφωνος έναντι κάθε εναλλακτικής κατανομής με πεπερασμένη θετική προσδοκία (μέση τιμή).

Βασισμένος σε προσομοιώσεις ο Klar (2001) συνιστά να απορριφθεί η  $H_0$  εάν τουλάχιστον ένας από τους ελέγχους που βασίζονται στα  $T_{n,1}$  και  $T_{n,10}$  απορρίπτει την  $H_0$ . Για να δοθεί μία τυπική περιγραφή αυτής της διαδικασίας, συμβολίζεται με  $KL_n$  και έστω  $\varphi_{\alpha,\alpha} = \mathbf{1}\{T_{n,\alpha} > z_{n,\alpha}(\alpha)\}$  συμβολίζει τον επιπέδου- $\alpha$ -έλεγχο βασισμένο στο  $T_{n,\alpha}$ . Ο έλεγχος έχει αποτέλεσμα 1 (απόρριψη) ή 0 (όχι απόρριψη). Ο συνδυασμένος επιπέδου- $\alpha$ -έλεγχος είναι  $\varphi_{1,10}(\alpha) = \max(\varphi_{1,\beta}, \varphi_{10,\beta})$ , όπου  $\alpha/2 \leq \beta \leq \alpha$  και το  $\beta$  καθορίζεται μοναδικά από τη συνθήκη  $E[\varphi_{1,10}(\alpha)] = \alpha$  κάτω από την  $H_0$ . Στην πράξη, το  $\beta$  και τα σχετικά ποσοστημόρια των  $T_{n,1}$  και  $T_{n,10}$  πρέπει να βρεθούν εμπειρικά από έναν αλγόριθμο αναζήτησης (βλέπε Klar (2001) για ειδικές αριθμητικές τιμές). Χρησιμοποιώντας τα ποσοστημόρια που αντιστοιχούν στο  $\frac{\alpha}{2}$  οδηγεί σ' έναν συντηρητικό έλεγχο.



**1.8.2. Οι έλεγχοι των Grzegorzewski και Wieczorkowski (1999), Ebrahimi και άλλων (1992) και Taufer (2002) βασισμένοι στο μέτρο εντροπίας**

Είναι πολύ γνωστό ότι μεταξύ όλων των κατανομών με πυκνότητα  $f$  που επικεντρώνονται στο  $[0, \infty)$  και σταθερή μέση τιμή  $\mu$ , η εντροπία  $-\int_0^{\infty} f(x) \log f(x) dx$  μεγιστοποιείται από την εκθετική κατανομή. Οι Grzegorzewski και Wieczorkowski (1999) και οι Ebrahimi et al. (1992) χρησιμοποιούν αυτό το αποτέλεσμα για να κατασκευάσουν ελέγχους καλής προσαρμογής για εκθετικότητας που βασίζονται στον εκτιμητή εντροπίας

$$H_{m,n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \log \left\{ \frac{n}{2m} [X_{(j+m)} - X_{(j-m)}] \right\}$$

του Vasicek (1976). Εδώ, το  $m$  είναι ένας ακέραιος που ικανοποιεί  $1 \leq m \leq n/2$  και  $X_{(j-m)} = X_{(1)}$ ,  $X_{(j+m)} = X_{(n)}$ , εάν  $j - m \leq 0$  ή  $j + m \geq n$ , αντίστοιχα. Απόρριψη της  $H_0$  γίνεται για μικρές τιμές του  $H_{m,n}$ .

Οι Ebrahimi et al. (1992) δείχνουν ότι, εάν  $m, n \rightarrow \infty$  και  $m/n \rightarrow 0$ , ο έλεγχός τους είναι εφαρμόζεται έναντι κατανομών με πεπερασμένη μέση τιμή, ενώ οι Grzegorzewski και Wieczorkowski (1999) αφαίρεσαν την παρούσα συνθήκη. (Για μια καλύτερη ανάλυση της σύγκλισης του  $H_{m,n}$  στην αντίστοιχη πληθυσμιακή εντροπία ο αναγνώστης παραπέμπεται στον Song (2000)). Ο Taufer (2002) εξετάζει το  $H_{m,n}$ , καθώς και τον εκτιμητή της εντροπίας του Van Es (1992), και εναλλακτικούς μετασχηματισμούς των πρωτότυπων παρατηρήσεων, με σκοπό τη μεγιστοποίηση της ισχύος του προκύπτοντος ελέγχου. Όπως στην περίπτωση του προηγούμενου στατιστικού, η σύστασή του είναι η χρήση των μετασχηματισμένων παρατηρήσεων  $U_j$ ,  $1 \leq j \leq n - 1$  και του αντίστοιχου εκτιμητή εντροπίας  $H_{m,n-1}$ . Ο Taufer (2002) σημειώνει ότι ο έλεγχος που απορρίπτει την  $H_0$  για μικρές τιμές του  $H_{m,n-1}$  είναι συνεπής. (Για τον έλεγχο των Ebrahimi και άλλων (1992) βλέπε και στην ενότητα 1.9.1)

**1.8.3. Οι έλεγχοι των Baringhaus και Henze (2000) βασισμένοι σ' ένα χαρακτηρισμό μέσω της συνάρτησης μέσης υπολειπόμενης ζωής**

Υπό την προϋπόθεση  $0 < \mu < \infty$ , η κατανομή της  $X$  είναι εκθετική εάν και μόνο εάν  $E(X - t | X > t) = \mu$  για κάθε  $t > 0$ . Αφού αυτή η συνθήκη είναι ισοδύναμη με  $E[\min(X, t)] = \mu \cdot F(t)$  για κάθε  $t > 0$ , οι Baringhaus και Henze (2000) πρότειναν το στατιστικό τύπου Kolmogorov-Smirnov

$$\begin{aligned} \overline{KS}_n &= \sqrt{n} \sup_{t \geq 0} \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \min(Y_j, t) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{1}\{Y_j \leq t\} \right| \\ &= \sqrt{n} \max(KS_n^+, KS_n^-), \end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned} KS_n^+ &= \max_{j=0,1,\dots,n-1} \left[ \frac{1}{n} (Y_{(1)} + \dots + Y_{(j)}) + Y_{(j+1)} \left( 1 - \frac{j}{n} \right) - \frac{j}{n} \right], \\ KS_n^- &= \max_{j=0,1,\dots,n-1} \left[ \frac{j}{n} - \frac{1}{n} (Y_{(1)} + \dots + Y_{(j)}) - Y_{(j)} \left( 1 - \frac{j}{n} \right) \right], \end{aligned}$$

και το στατιστικό τύπου Cramér-von Mises

$$\overline{CM}_n = n \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \min(Y_j, t) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{1}\{Y_j \leq t\} \right)^2 \exp(-t) dt$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{j,k=1}^n \left[ 2 - 3e^{-\min(Y_j, Y_k)} - 2 \min(Y_j - Y_k) (e^{-Y_j} + e^{-Y_k}) + 2e^{-\max(Y_j, Y_k)} \right].$$

Απόρριψη της  $H_0$  γίνεται για μεγάλες τιμές των  $\overline{KS}_n$  ή  $\overline{CM}_n$ . Οι έλεγχοι που βασίζονται στο  $\overline{KS}_n$  ή  $\overline{CM}_n$  εφαρμόζονται έναντι κάθε σταθερής εναλλακτικής κατανομής που έχει θετική, πιθανώς άπειρη, μέση τιμή.

#### 1.8.4. Στατιστικά του ελέγχου που προέρχονται από τον εμπειρικό μετασχηματισμό Laplace

Σ' αυτούς τους ελέγχους, ο μετασχηματισμός Laplace  $\psi(t) = (1+t)^{-1}$  της μοναδιαίας εκθετικής κατανομής εκτιμάται από το εμπειρικό του αντίστοιχο  $\psi_n(t) = n^{-1} \sum_{j=1}^n \exp(-tY_j)$ .

##### 1.8.4.1. Ο έλεγχος των Baringhaus και Henze (1991)

Αυτή η προσέγγιση χρησιμοποιεί το γεγονός ότι το  $\psi$  ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση  $(1+t)\psi'(t) + \psi(t) = 0$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Κατά συνέπεια, επιλέγοντας μια σταθερά  $a > 0$  και απορρίπτοντας την  $H_0$  για μεγάλες τιμές του

$$\begin{aligned} BH_n &= n \int_0^\infty [(1+t)\psi'_n(t) + \psi_n(t)]^2 \exp(-at) dt \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j,k=1}^n \left[ \frac{(1-Y_j)(1-Y_k)}{Y_j + Y_k + a} - \frac{Y_j + Y_k}{(Y_j + Y_k + a)^2} + \frac{2Y_j Y_k}{(Y_j + Y_k + a)^2} + \frac{2Y_j Y_k}{(Y_j + Y_k + a)^3} \right] \end{aligned}$$

θα πρέπει να δώσει έναν ικανοποιητικό έλεγχο για την  $H_0$ . Ο έλεγχος εφαρμόζεται έναντι κάθε κατανομής με (θετική) πεπερασμένη μέση τιμή  $\mu$ .

##### 1.8.4.2. Ο έλεγχος του Henze (1993)

Σε αντίθεση με το  $BH_n$ , ο έλεγχος του Henze (1993) χρησιμοποιεί ένα 'πιο άμεσο'  $L^2$ -απόσταση τύπου στατιστικό μεταξύ  $\psi_n$  και  $\psi$  και απορρίπτει τη μηδενική υπόθεση για μεγάλες τιμές του

$$\begin{aligned} HE_n &= n \int_0^\infty \left( \psi_n(t) - \frac{1}{1+t} \right)^2 \exp(-at) dt \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j,k=1}^n \frac{1}{Y_j + Y_k + a} - 2 \sum_{j=1}^n \exp(Y_j + a) E_1(Y_j + a) + n(1 - a \exp(a) E_1(a)), \end{aligned}$$

όπου  $E_1(z) = \int_z^\infty [\exp(-t)/t] dt$  είναι το εκθετικό ολοκλήρωμα και  $a > 0$  είναι μία σταθερά. Ο έλεγχος εφαρμόζεται έναντι κάθε σταθερής εναλλακτικής κατανομής μη εκφυλισμένης σε 0.

##### 1.8.4.3. Ο έλεγχος των Henze και Meintanis (2002a)

Εκτός από τους ελέγχους που βασίζονται στα  $BH_n$  και  $HE_n$ , παραπέμπουμε σε αποτελέσματα προσομοίωσης από τους Henze και Meintanis (2002a) στα οποία η γενικευμένη έκδοση

$$L_n = n \int_0^\infty [(1+t)\psi_n(t) - 1]^2 w(t) \exp(-at) dt$$

του  $HE_n$  θεωρείται (παρατηρήστε ότι η επιλογή  $w(t) = 1 / (1 + t)^2$  αποδίδει το στατιστικό  $HE_n$ ). Ο έλεγχος που βασίζεται στο  $L_n$  εφαρμόζεται έναντι κάθε σταθερής εναλλακτικής κατανομής μη εκφυλισμένης σε 0 υπό την προϋπόθεση ότι  $w(t) > 0$  για κάθε  $t$ .

### 1.8.5. Ο έλεγχος των Henze και Meintanis (2002b) που προέρχεται από την εμπειρική χαρακτηριστική συνάρτηση

Σ' αυτόν τον έλεγχο, η χαρακτηριστική συνάρτηση (CF)  $\varphi(t) = C(t) + i S(t)$  της  $X$  εκτιμάται από την εμπειρική CF (ECF)

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \exp(itX_j) = C_n(t) + i S_n(t).$$

Αυτή η διαδικασία βασίζεται στο γεγονός ότι η κατανομή της  $X$  είναι  $Exp(\theta)$ , εάν και μόνο εάν, η CF της  $X$  ικανοποιεί την εξίσωση  $S(t) = \theta t C(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  (Meintanis και Pliopoulos (2003)). Γράφοντας  $c_n(\cdot)$  και  $s_n(\cdot)$  για το πραγματικό και το φανταστικό μέρος, αντίστοιχα, της ECF  $\varphi_n(t) = n^{-1} \sum_{j=1}^n \exp(itY_j)$  των κλιμακωτών δεδομένων  $Y_1, \dots, Y_n$ , το στατιστικό των Henze και Meintanis (2002b) είναι

$$W_n = n \int_{-\infty}^{\infty} (s_n(t) - t c_n(t))^2 w(t) dt, \quad (1.8.5.1)$$

όπου  $w(\cdot)$  υποδηλώνει μια μη αρνητική συνάρτηση βάρους που ικανοποιεί  $\int_0^{\infty} t^2 w(t) dt < \infty$ . Ένας έλεγχος για εκθετικότητα που απορρίπτει την  $H_0$  για μεγάλες τιμές του  $W_n$  είναι καθολικά συνεπής.

Εκφράσεις κλειστού τύπου για το  $W_n$  σε όρους αθροισμάτων προκύπτουν για τις συναρτήσεις βάρους  $w_1(t) = \exp(-at)$  και  $w_2(t) = \exp(-at^2)$ ,  $a > 0$ , στην (1.8.5.1). Γράφοντας  $W_n^{(1)}$  και  $W_n^{(2)}$  για τα προκύπτοντα στατιστικά, έχουμε

$$W_n^{(1)} = \frac{\alpha}{2n} \sum_{j,k=1}^n \left[ \frac{1}{\alpha^2 + (Y_j - Y_k)^2} - \frac{1}{\alpha^2 + (Y_j + Y_k)^2} - \frac{4(Y_j + Y_k)}{(\alpha^2 + (Y_j + Y_k)^2)^2} + \frac{2\alpha^2 - 6(Y_j - Y_k)^2}{(\alpha^2 + (Y_j - Y_k)^2)^3} + \frac{2\alpha^2 - 6(Y_j + Y_k)^2}{(\alpha^2 + (Y_j + Y_k)^2)^3} \right]$$

και

$$W_n^{(2)} = \frac{\sqrt{\pi}}{4n\sqrt{\alpha}} \sum_{j,k=1}^n \left[ \left( 1 + \frac{2\alpha - (Y_j - Y_k)^2}{4a^2} \right) \exp\left(-\frac{(Y_j - Y_k)^2}{4a}\right) + \left( \frac{2\alpha - (Y_j + Y_k)^2}{4a^2} - \frac{Y_j + Y_k}{a} - 1 \right) \exp\left(-\frac{(Y_j + Y_k)^2}{4a}\right) \right].$$



Για επιπλέον λεπτομέρειες, καθώς και για άλλους ελέγχους για την εκθετικότητα παραπέμπουμε τον αναγνώστη στους Henze και Meintanis (2005).

Πηγή (ξενόγλωσση):

Henze, N. and Meintanis, S. G. (2005), *Recent and classical tests for exponentiality: a partial review with comparisons*, *Metrika* 61: 29-45

[https://www.researchgate.net/publication/24060622\\_Recent\\_and\\_classical\\_tests\\_for\\_exponentiality\\_A\\_partial\\_review\\_with\\_comparisons](https://www.researchgate.net/publication/24060622_Recent_and_classical_tests_for_exponentiality_A_partial_review_with_comparisons)

1.9. *Νεώτεροι έλεγχοι για την εκθετικότητα (β) (Torabi H., Montazeri N. H. & Grané A. (2018) & Baratpour S. & Habibi Rad A. (2012))*

Εισαγωγή

Γενικά:

Έστω  $X_1, \dots, X_n$   $n$  ανεξάρτητες και ταυτοτικά κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές με συνεχή αθροιστική συνάρτηση κατανομής  $F(\cdot)$ . Θα δηλώνουμε τις διατεταγμένες στατιστικές με  $(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})$ . Με βάση το παρατηρούμενο δείγμα  $x_1, \dots, x_n$ , μας ενδιαφέρει ο ακόλουθος έλεγχος καλής προσαρμογής για μία τοποθεσίας-κλίμακας οικογένεια:

$$\begin{aligned} H_0 : F \in \mathcal{F} \\ H_1 : F \notin \mathcal{F}, \end{aligned} \tag{1.9.1}$$

όπου  $\mathcal{F} = \{F_0(\cdot; \theta) = F_0((x - \mu) / \sigma) | \theta = (\mu, \sigma) \in \Theta\}$ ,  $\Theta = \mathbb{R} \times (0, \infty)$  και  $\mu$  και  $\sigma$  είναι μη καθορισμένες παράμετροι. Η οικογένεια  $\mathcal{F}$  καλείται τοποθεσίας-κλίμακας οικογένεια, όπου  $F_0(\cdot) = F_0(\cdot; \theta)$  είναι η τυπική περίπτωση για  $\theta = (0, 1)$ .

Για τους ελέγχους εκθετικότητας:

Έστω  $X_1, \dots, X_n$   $n$  ανεξάρτητες και ταυτοτικά κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές με συνεχή αθροιστική συνάρτηση κατανομής  $F(\cdot)$ . Έστω ότι  $F_0(x; \theta) = 1 - e^{-x/\theta}$ ,  $\theta > 0$ , δηλώνει μία εκθετική αθροιστική συνάρτηση κατανομής, όπου  $\theta > 0$  είναι μία άγνωστη παράμετρος. Το πρόβλημα του ενδιαφέροντος είναι:

$$\begin{aligned} H_0 : F(x) = F_0(x, \theta) \\ H_1 : F(x) \neq F_0(x, \theta). \end{aligned} \tag{1.9.2}$$

Το πρόβλημα καλής προσαρμογής στην εξίσωση (1.9.2) είναι μία ειδική περίπτωση της εξίσωσης (1.9.1).

1.9.1. *Οι έλεγχοι των Ebrahimi και άλλων (1992) & των Alizadeh και Arghami (2011), βασισμένοι στους εκτιμητές εντροπίας και ο έλεγχος των Baratpour and Habibi Rad (2012) βασισμένος στην αθροιστική υπολοιπόμενη εντροπία*

Στην παράγραφο 1.8.2 είδαμε τον ορισμό της εντροπίας, καθώς και τον εκτιμητή εντροπίας του Vasicek (1976). Ας ξαναδούμε εδώ την εντροπία και ας δώσουμε το συμβολισμό της.

Έστω  $X$  μία τυχαία μεταβλητή με αθροιστική συνάρτηση κατανομής  $F$  και συνεχή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας  $f$ . Ο Shannon (1948) όρισε την εντροπία της  $X$  ως

$$H(f) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log f(x) dx.$$

Για να εκτιμηθεί η εντροπία, οι Van Es (1992), Correa (1995), Vasicek (1976), Ebrahimi et al. (1994), Zamanzade και Arghami (2011), Alizadeh και Arghami (2010) και Arghami (2010) πρότειναν εκτιμητές, τους  $HVE_{mn}$ ,  $HC_{mn}$ ,  $HV_{mn}$ ,  $HE_{mn}$ ,  $HZ_{mn}$ ,  $HA1_{mn}$ ,  $HA2_{mn}$ , αντίστοιχα (βλέπε λεπτομέρειες στους Torabi H., Montazeri N. H. & Grané A. (2018)).

Ας πάμε στο πρόβλημα καλής προσαρμογής που περιγράφεται στην εξίσωση (1.9.2) και υποθέτουμε ότι η σ.π.π.  $f(x)$  έχει μία μη αρνητική υποστήριξη. Η ασύμμετρη Kullback-Leibler απόσταση της  $f$  από μία δεδομένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας  $f_0$  δίνεται από:

$$D(f, f_0) = \int f(x; \theta) \log \frac{f(x; \theta)}{f_0(x; \theta)} dx = -H(f) - \int f(x; \theta) \log f_0(x; \theta) dx. \quad (1.9.3)$$

Η ποσότητα  $D(f, f_0) \geq 0$  και η ισότητα ισχύει εάν και μόνο εάν η μηδενική υπόθεση είναι αληθινή. Όταν η  $f_0$  είναι η εκθετική κατανομή με παράμετρο  $\theta$ ,

$$D(f, f_0) = -H(f) - \log \theta + \theta E_f(X) = -H(f) + \log \theta + 1.$$

Αντικαθιστώντας το  $\theta$  με τον εκτιμητή μέγιστης πιθανοφάνειάς του,  $\hat{\theta}$  και εφαρμόζοντας έναν μονοτονικό μετασχηματισμό στο  $D(f, f_0)$ , έχουμε ότι

$$\exp(-D(f, f_0)) = \exp(H(f) - \log \bar{x} - 1) = \frac{\exp(H(f))}{\exp(\log \bar{x} + 1)},$$

όπου το  $H(f)$  μπορεί να εκτιμηθεί από τους εκτιμητές εντροπίας, δημιουργώντας διαφορετικές προτάσεις για τον έλεγχο εκθετικότητας.

Ο Ebrahimi et al. (1992) χρησιμοποίησαν τον εκτιμητή εντροπίας του Vasicek (1976) (όπως είδαμε και στην ενότητα 1.8.2) και πρότειναν το στατιστικό:

$$TV1_{mn} = \frac{\exp\{HV_{mn}\}}{\exp(\log(\bar{X}) + 1)}.$$

Βασισμένοι στους εκτιμητές εντροπίας των Ebrahimi et al. (1994) και Alizadeh (2010), οι Alizadeh and Arghami (2011) πρότειναν τα στατιστικά:

$$TE1_{mn} = \frac{\exp\{HE_{mn}\}}{\exp(\log(\bar{X}) + 1)}, \quad TA1_{mn} = \frac{\exp\{HA1_{mn}\}}{\exp(\log(\bar{X}) + 1)}.$$

Ο Ebrahimi et al. (1994) έδειξαν μία γραμμική σχέση μεταξύ του δικού τους εκτιμητή και του Vasicek. Έτσι για ένα σταθερό μέγεθος δείγματος  $n$  και σταθερό  $m$ , οι έλεγχοι που βασίζονται στα  $TV1_{mn}$  και  $TE1_{mn}$  έχουν την ίδια ισχύ.

Οι Ebrahimi et al. (1992) συνιστούν  $m = 3$  για  $n = 10$ ,  $m = 4$  για  $n = 20$  και  $m = 6$  για  $n = 50$ . Η μηδενική υπόθεση  $H_0$  απορρίπτεται για μικρές τιμές των  $TV1_{mn}$ ,  $TE1_{mn}$  και  $TA1_{mn}$ .

Οι Baratpour και Habibi Rad (2012) εισήγαγαν μία νέα απόσταση μεταξύ δύο κατανομών, παρόμοια με την Kullback-Leibler απόκλιση που περιγράφεται στην εξίσωση (1.9.3). Το στατιστικό του ελέγχου είναι βασισμένο στην αθροιστική υπολειπόμενη εντροπία και είναι:

$$T_n = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} ((n-i)/n) \log((n-i)/n) (X_{(i+1)} - X_{(i)}) + (\sum_{i=1}^n X_i^2 / 2 \sum_{i=1}^n X_i)}{\sum_{i=1}^n X_i^2 / 2 \sum_{i=1}^n X_i}.$$

Η μηδενική υπόθεση  $H_0$  απορρίπτεται για μεγάλες τιμές του  $T_n$  (βλέπε Baratpour και H. Rad (2012)).

### 1.9.2. Έλεγχοι βασισμένοι σε διορθωτικές ροπές των εκτιμητών εντροπίας

Οι Park και Park (2003) εισήγαγαν τη μη παραμετρική συνάρτηση κατανομής των Vasicek  $HV_{mn}$  και Ebrahimi  $HE_{mn}$  εκτιμητών:

$$g_v(x) = \begin{cases} 0 & x < \xi_1 \text{ ή } x > \xi_{n+1} \\ \frac{2m}{n(x_{(i+m)} - x_{(i-m)})} & \xi_i < x \leq \xi_{i+1} \quad i = 1, \dots, n, \end{cases}$$

και

$$g_e(x) = \begin{cases} 0 & x < \eta_1 \text{ ή } x > \eta_{n+1} \\ \frac{1}{n(n_{i+1} - n_i)} & n_i < x \leq n_{i+1} \quad i = 1, \dots, n, \end{cases}$$

αντίστοιχα, όπου  $\xi_i = (x_{(i-m)} + \dots + x_{(i+m-1)})/2m$ , και

$$\eta_i = \begin{cases} \xi_{m+1} - \frac{1}{m} \sum_{k=i}^m (x_{(m+k)} - x_{(1)}) & 1 \leq i \leq m \\ \frac{1}{2m} (x_{(i-m)} + \dots + x_{(i+m-1)}) & m+1 \leq i \leq n-m+1 \\ \xi_{n-m+1} + \frac{1}{n+m-k+1} \sum_{k=n-m+2}^i (x_{(n)} - x_{(k-m-1)}) & n-m+2 \leq i \leq n+1. \end{cases}$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τους Park και Park (2003), οι Alizadeh και Arghami (2013) και οι Zamanzade και Arghami (2011) όρισαν τη μη παραμετρική συνάρτηση κατανομής των εκτιμητών τους, αντίστοιχα:

$$g_a(x) = \begin{cases} 0 & x < \eta_1 \text{ ή } x > \eta_{n+1} \\ \frac{1}{n(n_{i+1} - n_i)} & n_i < x \leq n_{i+1} \quad i = 1, \dots, n, \end{cases}$$

όπου

$$\eta_i = \begin{cases} \xi_{m+1} - \frac{1}{m} \sum_{k=i}^m (x_{(m+k)} - x_{(1)}) & 1 \leq i \leq m \\ \frac{1}{2m} (x_{(i-m)} + \dots + x_{(i+m-1)}) & m+1 \leq i \leq n-m+1 \\ \xi_{n-m+1} + \frac{1}{m} \sum_{k=n-m+2}^i (x_{(n)} - x_{(k-m-1)}) & n-m+2 \leq i \leq n+1 \end{cases}$$

και

$$g_z(x) = \begin{cases} 0 & x < \eta_1 \text{ ή } x > \eta_{n+1} \\ \frac{1}{n(n_{i+1} - n_i)} & n_i < x \leq n_{i+1} \quad i = 1, \dots, n, \end{cases}$$

όπου

$$\eta_i = \begin{cases} \xi_{m+1} - \sum_{k=i}^m \frac{1}{k} (x_{(m+k)} - x_{(1)}) & 1 \leq i \leq m \\ \frac{1}{2m} (x_{(i-m)} + \dots + x_{(i+m-1)}) & m+1 \leq i \leq n-m+1 \\ \xi_{n-m+1} + \sum_{k=n-m+2}^i \frac{1}{n-k+2} (x_{(n)} - x_{(k-m-1)}) & n-m+2 \leq i \leq n+1. \end{cases}$$

Επιστρέφοντας στο πρόβλημα ελέγχου που περιγράφεται στην εξίσωση (1.9.2), έχουμε ότι

$$D(f, f_0) = -H(f) + \log \theta + 1,$$

όπου τώρα το  $H(f)$  μπορεί να εκτιμηθεί από τους εκτιμητές εντροπίας των Vasicek (1976), Ebrahimi et al. (1994), Alizadeh και Arghami (2010) και Zamanzade και Arghami (2011), δημιουργώντας τις ακόλουθες προτάσεις:

$$\text{TV}2_{mn} = -\text{HV}_{mn} + \log \hat{\theta}_v + 1,$$

$$\text{TE}2_{mn} = -\text{HE}_{mn} + \log \hat{\theta}_e + 1,$$

$$\text{TA}2_{mn} = -\text{HA}2_{mn} + \log \hat{\theta}_a + 1,$$

$$\text{TZ}_{mn} = -\text{HZ}_{mn} + \log \hat{\theta}_z + 1,$$

όπου  $\hat{\theta}_v = E_{g_v}(X)$ ,  $\hat{\theta}_e = E_{g_e}(X)$ ,  $\hat{\theta}_a = E_{g_a}(X)$ ,  $\hat{\theta}_z = E_{g_z}(X)$  και  $m = \lceil \sqrt{n} - 1 \rceil$ , όπου  $\lceil x \rceil$  σημαίνει το ακέραιο μέρος του  $x$ . Συγκεκριμένα,  $m = 2$  για  $n = 10$ ,  $m = 3$  για  $n = 20$  και  $m = 6$  για  $n = 50$ . Η μηδενική υπόθεση  $H_0$  απορρίπτεται για μεγάλες τιμές των  $\text{TV}2_{mn}$ ,  $\text{TE}2_{mn}$ ,  $\text{TA}2_{mn}$  και  $\text{TZ}_{mn}$ .

### 1.9.3. Οι έλεγχοι των Alizadeh και Balakrishnan (2016) βασισμένοι στη Φι-απόκλιση

Οι Alizadeh και Balakrishnan (2016) εισήγαγαν τα ακόλουθα στατιστικά που βασίζονται στη Φι-απόκλιση:

$$\hat{D}_\varphi = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{f_0(x_i, \hat{\theta})}{\hat{f}(x_i)} \varphi \left( \frac{\hat{f}(x_i)}{f_0(x_i, \hat{\theta})} \right).$$

Η  $\hat{f}$  είναι η εκτιμήτρια της πυκνότητας του πυρήνα

$$\hat{f}(X_i) = \frac{1}{nh} \sum_{j=1}^n k \left( \frac{X_i - X_j}{h} \right),$$

όπου η συνάρτηση του πυρήνα  $k$  επιλέγεται να είναι η τυπική κανονική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και εύρος ζώνης  $h = 1.06 s n^{-1.5}$  επιλέγεται να είναι ο κανονικός βέλτιστος τύπος εξομάλυνσης, με  $s$  να είναι η δειγματική τυπική απόκλιση. Μερικές κατάλληλες επιλογές για το  $\varphi$  είναι:

- Kullback-Leibler (KL) απόκλιση:  $\varphi(t) = t \log(t)$
- Hellinger απόσταση:  $\varphi(t) = \frac{1}{2} (\sqrt{t} - 1)^2$
- Jeffreys απόσταση:  $\varphi(t) = (t - 1) \log(t)$
- Ολικής διασποράς απόσταση:  $\varphi(t) = |t - 1|$
- $\chi^2$ -απόκλιση:  $\varphi(t) = (t - 1)^2$ .

Οι Alizadeh και Balakrishnan (2016) χρησιμοποίησαν τους όρους TKL, TH, TJ, TT και  $T_\chi$  για να δηλώσουν τα στατιστικά του ελέγχου που βασίζονται στην KL, Hellinger, Jeffreys, ολικής διασποράς και Χι-τετράγωνο απόσταση, αντίστοιχα. Η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται για μεγάλες τιμές των TKL, TH, TJ, TT και  $T_\chi$ .

#### 1.9.4. Ο έλεγχος του Volkona (2010) βασισμένος στον χαρακτηρισμό των Riedl και Rossberg (1994) της εκθετικής κατανομής

Ο Volkona (2010) κατασκεύασε έναν ολοκληρωματικού τύπου έλεγχο για εκθετικότητα βασισμένο στον χαρακτηρισμό των Riedl και Rossberg (1994) για τον εκθετικό νόμο. Η αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι η  $F$  εκθετική προϋποθέτει την ίδια κατανομή των τυχαίων μεταβλητών  $(X_{(i+s)} - X_{(i)})$  και  $X_{s, \{1, 2, \dots, n-i\}}$  για κάποιο  $s \geq 1$  και  $n$ , όπου  $X_{s, \{1, 2, \dots, n-i\}}$  είναι η  $s$ -στή διατεταγμένη στατιστική του δείγματος  $X_1, \dots, X_{n-i}$ . Το στατιστικό σύμφωνα με τον χαρακτηρισμό των Riedl και Rossberg είναι

$$I_1 = \int_0^\infty (H_n(t) - C_n(t)) dF_n(t),$$

όπου

$$H_n(t) = \binom{n}{3}^{-1} \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \mathbb{I}[X_{2, \{i, j, k\}} - X_{1, \{i, j, k\}} < t] \quad \text{για } t \geq 0,$$

$$G_n(t) = \binom{n}{2}^{-1} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{I}[\min(X_i, X_j) < t] \quad \text{για } t \geq 0,$$

όπου  $X_{s, \{i, j, k\}}$   $s = 1, 2$  είναι οι  $s$ -στές διατεταγμένες στατιστικές του δείγματος  $X_i, X_j, X_k$ . Η μηδενική υπόθεση  $H_0$  απορρίπτεται για μικρές ή μεγάλες τιμές του  $I_1$ .

#### 1.9.5. Οι έλεγχοι των Fortiana και Grané (2002) και των Montazeri και Torabi (2013) βασισμένοι στη συσχέτιση και τη συνδιακύμανση (αντίστοιχα)

Οι Fortiana και Grané πρότειναν το ακόλουθο στατιστικό που βασίζεται στη μέγιστη συσχέτιση του Hoeffding,  $\rho^+$ ,

$$Q_n = \frac{s_n}{x_n} \rho^+(F_n, F_0) = \frac{\sum_{i=1}^n l_i x_{(i)}}{\sum_{i=1}^n x_{(i)}},$$



όπου  $\bar{x}_n$  είναι ο δειγματικός μέσος και  $s_n^2$  η δειγματική διασπορά και

$$l_i = (n - i) \log(n - i) - (n - i + 1) \log(n - i + 1) + \log(n), i = 1, \dots, n, \text{ με } 0 \log 0 = 0.$$

Η μηδενική υπόθεση  $H_0$  απορρίπτεται για μικρές ή μεγάλες τιμές του στατιστικού  $Q_n$ . Όπως εξηγείται στους Grané και Fortiana (2009), η δεξιά ουρά του  $Q_n$  είναι σημαντική για DFR (decreasing failure rate) (ελλατούμενου ρυθμού αποτυχίας) εναλλακτικές, ενώ η αριστερή ουρά είναι σημαντική για IFR (increasing failure rate) (αυξανόμενου ρυθμού αποτυχίας) εναλλακτικές.

Ομοίως, οι Montazeri και Torabi (2013) εφάρμοσαν την προηγούμενη ιδέα βασισμένοι στη δειγματική συνδιακύμανση μεταξύ  $F_n$  και μιας δοσμένης αθροιστικής συνάρτησης κατανομής  $F_0$  με τη μορφή ενός ειδικού ελέγχου. Ο στόχος τους ήταν να αποκτηθεί ένας πολύ απλός και πολύ ισχυρός έλεγχος για εκθετικότητα. Θέτουμε  $\mathbf{y} = (y_{(1)}, \dots, y_{(n)})$ ,  $F_0(\mathbf{y}) := (F_0(y_{(1)}), \dots, F_0(y_{(n)}))$  και  $F_n(\mathbf{y}) := (F_n(y_{(1)}), \dots, F_n(y_{(n)}))$ .

$$\text{COV} := \text{COV}(F_0(\mathbf{y}), F_n(\mathbf{y}))$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (F_0(y_{(i)}) i / n) - \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F_0(y_{(i)}) \right) \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i / n \right) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n i F_0(y_{(i)}) - \frac{n+1}{2n^2} \sum_{i=1}^n F_0(y_{(i)}) \\ &= \frac{1}{2n^2} \sum_{i=1}^n (2i - n - 1) F_0(y_{(i)}). \end{aligned}$$

Όπως συμβαίνει με το προηγούμενο στατιστικό, η μηδενική υπόθεση  $H_0$  απορρίπτεται για μικρές τιμές του COV.

Το στατιστικό COV μπορεί να θεωρηθεί ως γενίκευση του στατιστικού των Fortiana και Grané (2003). Αυτοί οι συγγραφείς βρήκαν την ακριβή και ασυμπτωτική κατανομή του στατιστικού του ελέγχου στην περίπτωση που μπορεί να εφαρμοστεί το θεώρημα πιθανότητας μετασχηματισμένου ολοκληρώματος (Probability Integral Transformation Theorem), δηλ.  $F_0(Y) \stackrel{d}{=} X$ , όπου  $X \sim U(0, 1)$  ( $d = \text{κατά νόμο, κατά κατανομή}$ ).

Για περισσότερους ελέγχους για την εκθετικότητα παραπέμπουμε τον αναγνώστη στους Torabi Hamzeh, Montazeri Narges H. & Grané Aurea (2018).

Πηγές (ξενόγλωσσες):

Baratpour, S. and Habibi, R. A. (2012), *Testing goodness-of-fit for exponential distribution based on cumulative residual entropy*, Communications in Statistics - Theory and Methods, 41:8, 1387-1396 <https://profdoc.um.ac.ir/articles/a/1027517.pdf>

Torabi, H., Montazeri, N. H. and Grané, A. (2018), *A wide review on exponentiality tests and two competitive proposals with application on reliability*, Journal of Statistical Computation and Simulation, 88:1, 108-139

[https://www.researchgate.net/publication/319983396\\_A\\_wide\\_review\\_on\\_exponentiality\\_tests\\_and\\_two\\_competitive\\_proposals\\_with\\_application\\_on\\_reliability](https://www.researchgate.net/publication/319983396_A_wide_review_on_exponentiality_tests_and_two_competitive_proposals_with_application_on_reliability)

1.10. Ο έλεγχος του Madukaiife Mbanefo S. (2019) βασισμένος στην εμπειρική συνάρτηση ποσοστημορίων (βασισμένος στην ιδιότητα ισοδυναμίας μεταξύ  $k$ -στής διατεταγμένης στατιστικής και του  $p$ -οστού ποσοστημορίου μιας κατανομής)

Υποθέτουμε ότι  $X$  είναι μία μη αρνητική τυχαία μεταβλητή η οποία είναι κατανομημένη εκθετικά με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας  $f(x, \theta) = \theta e^{-\theta x}$ ,  $x > 0$ ,  $\theta > 0$  και αθροιστική συνάρτηση κατανομής  $F(x) = 1 - e^{-\theta x}$ ,  $x > 0$ ,  $\theta > 0$ . Η συνάρτηση ποσοστημορίων  $Q(p)$  δίνεται από:

$$Q(p) = F^{-1}(p) = \frac{-\log(1-p)}{\theta}, p \in (0, 1).$$

Εάν η  $X$  είναι τυποποιημένη (κλιμακωτή) σε  $Y = X / \theta$  έτσι ώστε η παράμετρος  $\theta$  στην προκύπτουσα μεταβλητή  $Y$  να είναι ίση με 1, τότε η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και η αθροιστική συνάρτηση κατανομής θα είναι αντίστοιχα  $f_y(y) = e^{-y}$ ,  $y > 0$  και  $F_y(y) = 1 - e^{-y}$ ,  $y > 0$  και η συνάρτηση ποσοστημορίων που σχετίζεται με την  $F_y(y)$  δίνεται από:

$$Q_y(p) = F_y^{-1}(p) = -\log(1-p), p \in (0, 1).$$

Τώρα, για ένα τυχαίο δείγμα  $X_1, X_2, \dots, X_n$  που αποκτήθηκε από μία άγνωστη μη-αρνητική συνεχή κατανομή, οι διατεταγμένες στατιστικές που αποκτήθηκαν από το τυχαίο δείγμα είναι  $X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n}$  όπου  $X_{j:n}$  είναι η  $j$ -στή μικρότερη παρατήρηση στο δείγμα των  $n$  παρατηρήσεων. Αυτό είναι,  $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$ . Οι Xu και Miao (2011) διατύπωσαν ότι το  $p$ -στό ποσοστημόριο μιας κατανομής μπορεί να εκτιμηθεί είτε από το δειγματικό  $p$ -στό ποσοστημόριο της κατανομής είτε από την κατάλληλη  $k$ -στή διατεταγμένη στατιστική ενός δείγματος που προέρχεται από την κατανομή. Το δειγματικό  $p$ -στό ποσοστημόριο μιας κατανομής, που συμβολίζεται με  $\hat{\xi}_p$  αποκτήθηκε ως η αντίστροφη της δειγματικής συνάρτησης κατανομής, επίσης γνωστή ως η εμπειρική συνάρτηση κατανομής, η οποία συμβολίζεται με  $F_n(x)$  (στην οποία έχουμε ήδη αναφερθεί). Για  $p \in (0, 1)$ ,

$$\hat{\xi}_p = F_n^{-1}(p) = \inf\{x: F_n(x) \geq p\}$$

όπου (ξαναθυμίζουμε)  $F_n(x) = n^{-1} \sum_{j=1}^n I(X \leq x)$  που είναι ο αριθμός των παρατηρήσεων στο τυχαίο δείγμα που είναι μικρότερες ή ίσες με  $x$  διαιρούμενος με  $n$ . Έστω ότι ο αριθμός των παρατηρήσεων στο δείγμα που είναι μικρότερες ή ίσες με  $x$  είναι  $j$ . Τότε  $F_n(x) = j/n$ . Συνεπώς, το  $p \in (0, 1)$  μπορεί να προσεγγιστεί από  $j/n$ . Ο Madukaiife (2018) έδειξε ότι η προσέγγιση ισχύει, εφόσον  $j/n \rightarrow p$ ,  $\left| X_{j:n} - \hat{\xi}_p \right| \xrightarrow{\sigma.β.} 0$ , βλέπε επίσης Xu και Miao (2011) και Serfling (1980).

Από τα προηγούμενα, το δειγματικό  $p$ -στό ποσοστημόριο μιας κατανομής μπορεί να δοθεί σαν  $X_{j:n}$ ,  $p \in (0, 1)$  όπου  $p \rightarrow j/n$ . Το πρόβλημα τώρα είναι να αποκτηθεί μία συνάρτηση απόστασης  $D(X_{j:n}, Q_x(p))$ ,  $p = j/n$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , όπου για κάθε  $j$  μετράει την απόσταση χωριστά μεταξύ των δειγματικών και πληθυσμιακών ποσοστημορίων. Αυτή η συνάρτηση τροποποιήθηκε από τον Madukaiife (2017) και τους Madukaiife και Okafor (2018, 2019) ως το άθροισμα των τετραγωνικών αποκλίσεων των δειγματικών ποσοστημορίων από τα πληθυσμιακά ποσοστημόρια. Για τον έλεγχο εκθετικότητας, δίνεται από:

$$D(X_{j:n}, Q_x(p)) = \sum_{j=1}^n [X_{j:n} + \log(1-p)]^2.$$

Για να αποκτηθεί ένα μέτρο που δεν εξαρτάται από το  $\theta$ , την παράμετρο της εκθετικής κατανομής, οι δειγματικές παρατηρήσεις πρέπει πρώτα να γίνουν κλιμακωτές (τυποποιηθούν) μέσω  $y_j = x_j / \bar{X}$  όπου  $\bar{X} = n^{-1} \sum_{j=1}^n x_j$ . Τότε οι διατεταγμένες στατιστικές των κλιμακωτών παρατηρήσεων λαμβάνονται ως  $Y_{1:n}, Y_{2:n}, \dots, Y_{n:n}$  έτσι ώστε  $Y_{j:n}$  είναι η  $j$ -στή διατεταγμένη στατιστική των κλιμακωτών παρατηρήσεων. Επίσης, η εκτίμηση του  $p$  από  $j/n$  θα δίνει προφανώς ακατάλληλα αποτελέσματα ειδικά στις ακραίες διατεταγμένες στατιστικές. Ο van der Vaart (1998) έδειξε ότι  $F_n^{-1}(p) = Y_{j:n}$  για  $p \in \left(\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right)$ . Παίρνοντας το μέσο όρο των άκρων στο διάστημα του  $p$  για το οποίο το δειγματικό ποσοστημόριο μιας κατανομής ισούται με τη  $j$ -στή διατεταγμένη στατιστική δίνει  $p = \frac{j-0.5}{n}$ . Άρα, ένα κατάλληλο στατιστικό για τον έλεγχο της καλής προσαρμογής για εκθετικότητα ενός συνόλου δεδομένων δίνεται από:

$$M_n = \sum_{j=1}^n \left[ Y_{j:n} + \log\left(\frac{(n-j+0.5)}{n}\right) \right]^2 \quad (1.10.1)$$

Το στατιστικό στην (1.10.1) είναι και τα δύο, συγγενικώς αμετάβλητο και σύμφωνο έναντι όλων των σταθερών εναλλακτικών. Η συγγενική αμεταβλητότητα του προέρχεται από το γεγονός ότι είναι βασισμένο στην κλιμακωτή μηδενική κατανομή και συνεπώς δεν εξαρτάται από την παράμετρο  $\theta$ . Επίσης, η εφαρμογή του έναντι κάθε σταθερής εναλλακτικής είναι εγγυημένη από το ότι η συνάρτηση ποσοστημορίων της μηδενικής κατανομής είναι μοναδική. Ο έλεγχος απορρίπτει τη μηδενική υπόθεση της εκθετικότητας για μεγάλες τιμές του στατιστικού  $M_n$ .

Πηγή (ξενόγλωσση):

Madukaife, M. S. (2019), *An adaptive test for exponentiality based on empirical quantile function*, International Journal of Statistics and Applications 2019, 9(4): 111-116  
<http://article.sapub.org/10.5923.j.statistics.20190904.02.html>



# Κεφάλαιο 2

## **ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ**

*Έλεγχος καλής προσαρμογής για την εκθετικότητα  
με εναλλακτική κατανομή ελαφριάς ή βαριάς ουράς*

Σ' αυτήν την εργασία προτείνουμε έναν έλεγχο καλής προσαρμογής για την εκθετικότητα προκειμένου να χρησιμοποιηθεί για τη διάκριση μεταξύ της εκθετικής κατανομής και των ελαφριών ή βαριών ουρών κατανομών. Η ελεγχοσυνάρτηση βασίζεται στην αρχή του λεγομένου, ενιαίου μεγάλου άλματος. Η απόδοση της προτεινόμενης ελεγχοσυνάρτησης εξετάζεται μέσω μιας εκτεταμένης μελέτης προσομοίωσης (βλέπε κεφάλαιο 3 της παρούσας εργασίας).

## 2.1. Κατανομές βαριάς ουράς και κατανομές ελαφριάς ουράς

### Ορισμός 2.1.1

Η κατανομή μιας τυχαίας μεταβλητής  $X$  με συνάρτηση κατανομής  $F$  λέγεται ότι έχει μια βαριά (δεξιά) ουρά (κατανομή βαριάς ουράς), εάν η ροπογεννήτρια συνάρτηση της  $X$ ,  $M_X(t)$ , είναι άπειρη για όλα τα  $t > 0$ .

Αυτό σημαίνει:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} dF(x) = \infty \text{ για όλα τα } t > 0.$$

Μια συνέπεια αυτού είναι ότι

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{tx} P[X > x] = \infty \text{ για όλα τα } t > 0.$$

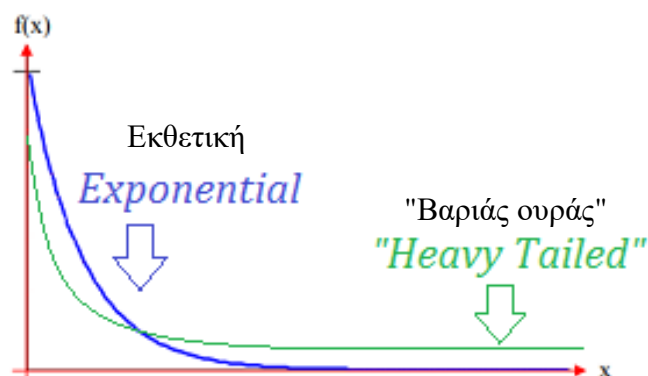
Αυτό γράφεται επίσης σε όρους της ουράς της συνάρτησης κατανομής

$$\bar{F}(x) \equiv P[X > x]$$

και

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{tx} \bar{F}(x) = \infty \text{ για όλα τα } t > 0. \quad (2.1.1)$$

Μια κατανομή βαριάς ουράς έχει μια ουρά που είναι βαρύτερη από μια εκθετική κατανομή (Bryson (1974)). Με άλλα λόγια, μια κατανομή με βαριά ουρά πηγαίνει στο μηδέν πιο αργά από μια με εκθετικές ουρές (βλέπε και σχέση (2.1.1)). Άρα θα υπάρχει περισσότερος όγκος (χώρος) κάτω από την καμπύλη της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας. Οι κατανομές βαριών ουρών τείνουν να έχουν πολλά απόμακρα ή άτυπα σημεία με πολύ υψηλές τιμές. Όσο βαρύτερη είναι η ουρά, τόσο μεγαλύτερη είναι η πιθανότητα να ληφθεί μία ή περισσότερες δυσανάλογες τιμές σε ένα δείγμα.



Σχήμα 2.1.1. Εκθετική κατανομή και κατανομή βαριάς ουράς  
(Πηγή: <https://www.statisticshowto.com>)

Κατανομές βαριάς ουράς είναι π.χ. η Weibull κατανομή στο  $\mathbb{R}^+$  με θετική παράμετρο σχήματος (shape)  $< 1$ , η Pareto κατανομή στο  $\mathbb{R}^+$ , η Cauchy κατανομή στο  $\mathbb{R}$ .

### Ορισμός 2.1.2

Η κατανομή μιας τυχαίας μεταβλητής  $X$  με συνάρτηση κατανομής  $F$  λέγεται ότι έχει μια ελαφριά ουρά (κατανομή ελαφριάς ουράς), εάν η ροπογεννήτρια συνάρτηση της  $X$ ,  $M_X(t)$ , είναι πεπερασμένη για κάποιο  $t > 0$ .

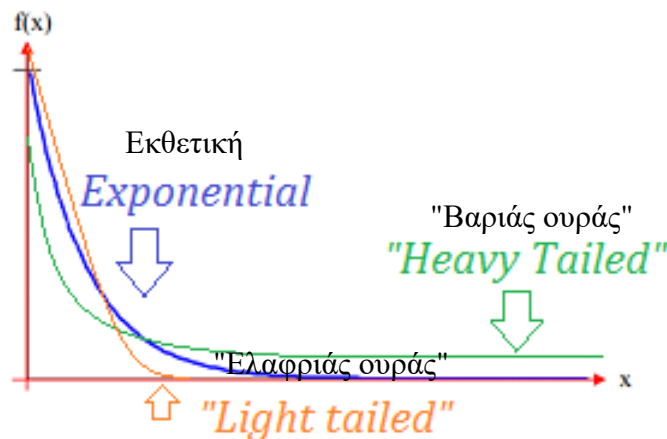
Αυτό σημαίνει:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} dF(x) < \infty \text{ για κάποιο } t > 0,$$

δηλαδή εάν και μόνο εάν αποτύχει να είναι βαριάς ουράς.

Οι κατανομές πιθανότητας που έχουν λεπτότερες ουρές από μια εκθετική κατανομή είναι κατανομές με ελαφριά ουρά. Πηγαίνουν στο μηδέν πολύ πιο γρήγορα από την εκθετική και έτσι έχουν λιγότερη μάζα στην ουρά.

Κατανομές ελαφριάς ουράς είναι π.χ. η κανονική κατανομή, η Gumbel, η Weibull με παράμετρο σχήματος (shape)  $> 1$ .



Σχήμα 2.1.2. Εκθετική κατανομή, κατανομή βαριάς ουράς & κατανομή ελαφριάς ουράς (Πηγή: <https://www.statisticshowto.com>)

### **Υποκατηγορίες κατανομών βαριών ουρών**

**α) Κατανομή παχιάς ουράς:** Μια κατανομή βαριάς ουράς με άπειρη διασπορά.

**β) Υποεκθετική:** Μια κατανομή όπου η μεγαλύτερη τιμή σ' ένα δείγμα συμβάλλει πολύ στο συνολικό άθροισμα (Mikosch, 1999) (βλέπε και παρακάτω στην ενότητα 2.3).

**γ) Κατανομή μακριάς ουράς:** Μια κατανομή βαριάς ουράς με μεγάλη ουρά.

### Ορισμός 2.1.3

Η κατανομή μιας τυχαίας μεταβλητής  $X$  με συνάρτηση κατανομής  $F$  λέγεται ότι έχει μια μακριά δεξιά ουρά, εάν για όλα τα  $t > 0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} P[X > x+t / X > x] = 1$$

ή ισοδύναμα

$$\bar{F}(x+t) \sim \bar{F}(x) \text{ καθώς } x \rightarrow \infty.$$

Αυτό έχει τη διαισθητική ερμηνεία για μια δεξιάς μακριάς ουράς κατανεμημένη ποσότητα ότι εάν η μακριάς ουράς ποσότητα υπερβαίνει κάποιο υψηλό επίπεδο, η πιθανότητα πλησιάζει 1 ότι θα υπερβεί οποιοδήποτε άλλο υψηλότερο επίπεδο.

Όλες οι κατανομές με μεγάλη ουρά έχουν βαριά ουρά, αλλά το αντίστροφο δεν είναι αληθές και είναι δυνατή η κατασκευή κατανομών με βαριά ουρά που δεν έχουν μεγάλη ουρά.

Πηγές (ξενόγλωσσες):

S. G. Foss, S., S., Korshunov, D., Zachary, S. (1970), *Heavy-tailed and long-tailed distributions*, in book: *An introduction to heavy-tailed and subexponential distributions* (pp.7-38)  
[https://www.researchgate.net/publication/226229954\\_Heavy-Tailed\\_and\\_Long-Tailed\\_Distributions](https://www.researchgate.net/publication/226229954_Heavy-Tailed_and_Long-Tailed_Distributions)

Statistics how to

<https://www.statisticshowto.com/heavy-tailed-distribution/>

## Wikipedia

2.2. Κατανομές λογαριθμο-κοίλες (log-concave) και κατανομές λογαριθμο-κυρτές (log-convex)

### Ορισμός 2.2.1

Ένα διάνυσμα συνεχών τυχαίων μεταβλητών,  $\mathbf{X}$ , κατανέμεται λογαριθμο-κοίλα (log-concavely) εάν, για κάθε  $x_1, x_2 \in \Omega \equiv \{x \in \mathbf{R}^k : f(x) > 0\}$ , όπου  $f(x) : \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}^+$ , η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ( $\Omega$  το στήριγμα της κατανομής) και για κάθε  $\lambda \in [0, 1]$ ,

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) \geq [f(x_1)]^\lambda [f(x_2)]^{1-\lambda}. \quad (2.2.1)$$

Το  $\mathbf{X}$  κατανέμεται λογαριθμο-κυρτά (log-convexly), εάν η ανισότητα (2.2.1) ισχύει σε αντίθετη κατεύθυνση.

Λογαριθμο-κοίλες (log-concave) κατανομές είναι π.χ. η  $K$ -διάστατη κανονική κατανομή, η μονοδιάστατη (αρνητική) εκθετική κατανομή, η μονοδιάστατη Weibull κατανομή με παράμετρο σχήματος (shape)  $\geq 1$ , η μονοδιάστατη Gamma κατανομή με παράμετρο σχήματος (shape)  $\geq 1$ . Λογαριθμο-κυρτές (log-convex) κατανομές είναι π.χ. η (αρνητική) εκθετική κατανομή, η Weibull κατανομή με παράμετρο σχήματος (shape)  $\leq 1$ , η Gamma κατανομή με παράμετρο σχήματος (shape)  $\leq 1$ .

Πηγή (ξενόγλωσση):

An, M. Y. (1995), *Log-concave probability distributions: theory and statistical testing*, department of Economics, Duke University, Durham, NC 27708-0097.  
<https://econwpa.ub.uni-muenchen.de/econ-wp/game/papers/9611/9611002.pdf>



### 2.3. Το θεωρητικό υπόβαθρο του νέου ελέγχου

Μια σημαντική κατηγορία κατανομών με βαριά ουρά είναι, όπως είδαμε και στην ενότητα 2.1, η υποεκθετική τάξη η οποία για δύο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές  $X$  και  $Y$  με κοινή αθροιστική συνάρτηση κατανομής (cdf)  $F$ , ορίζεται από την ιδιότητα

$$P(X + Y > d) \sim 2F(d).$$

Σημειώστε ότι όλες οι υποεκθετικές κατανομές έχουν μεγάλη ουρά, αλλά το αντίστροφο δεν είναι απαραίτητα αλήθεια. Η διαίσθηση που βασίζεται σε αυτόν τον ορισμό είναι η αρχή ενός ενιαίου μεγάλου άλματος (Foss και άλλοι, 2007): το άθροισμα  $X + Y$  είναι μεγάλο εάν ένα από τα  $X, Y$  είναι μεγάλο, ενώ το άλλο παραμένει τυπικό. Αυτή η παρατήρηση υπονοεί ότι

$$R = \frac{|X - Y|}{X + Y} \quad (2.3.1)$$

είναι κοντά στο 1. Από την άλλη πλευρά, εάν οι δύο μεταβλητές συμβάλλουν εξίσου στην άθροισή τους, τότε το  $R$  θα είναι κοντά στο 0 και μια ελαφριά ουρά είναι πιθανή.

Πρέπει να επισημανθεί ότι για μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών  $X_1, \dots, X_n$ , με  $X_{(n)} = \max(X_1, \dots, X_n)$ , η παραπάνω ιδιότητα μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$P(X_1 + X_2 + \dots + X_n > d) \sim P(X_{(n)} > d).$$

Πρόσφατα αποδείχθηκε (Lehtomaa, 2015) ότι αυτές οι ιδιότητες του  $R$  ισχύουν σε μεγαλύτερη γενικότητα και ότι οι ασυμπτωτικές ιδιότητες της αντίστοιχης δεσμευμένης τυχαίας μεταβλητής

$$C_d = R \mid X + Y > d \quad (2.3.2)$$

παρέχουν μια ευκρινή οριακή γραμμή μεταξύ λογαριθμο-κυρτότητας (log-convexity) και λογαριθμο-κοιλότητας (log-concavity). Σημειώστε ότι η λογαριθμο-κοιλότητα (log-concavity) σχετίζεται με κατανομές ελαφριάς ουράς, ενώ η λογαριθμο-κυρτότητα (log-convexity) με βαριές ουρές (βλέπε An 1998). Τότε, η (μαθηματική) ελπίδα του  $C_d$  στην (2.3.2) που δίνεται από

$$E(C_d) \equiv h(d) = E \left[ \frac{|X - Y|}{X + Y} \mid X + Y > d \right] \quad (2.3.3)$$

μπορεί να θεωρηθεί ως γενίκευση των παραπάνω με μια παρόμοια ερμηνεία: είναι κοντά στο 0 για μεγάλο  $d$  εάν οι δύο μεταβλητές συμβάλλουν εξίσου στο άθροισμα και κοντά στο 1 για μεγάλο  $d$  εάν μία από τις μεταβλητές είναι του ίδιου μεγέθους με το άθροισμα.

Οι Asmussen και Lehtomaa (2017) απέδειξαν ότι για τις λογαριθμο-κοίλες (log-concave) κατανομές έχουμε

$$\limsup_{d \rightarrow \infty} h(d) \leq \frac{1}{2} \quad (2.3.4)$$

ενώ για λογαριθμο-κυρτές (log-convex) κατανομές έχουμε

$$\liminf_{d \rightarrow \infty} h(d) \geq \frac{1}{2}. \quad (2.3.5)$$

Οι Asmussen και Lahtomaa (2017) χρησιμοποίησαν την εμπειρική αντίστοιχη της (2.3.3) για μια γραφική ανάλυση. Σ' αυτή την εργασία αναλύουμε πλήρως τη συμπεριφορά της εμπειρικής αντίστοιχης της (2.3.3) και τη χρησιμοποιούμε για την κατασκευή ενός ελέγχου καλής προσαρμογής για την εκθετικότητα έναντι εναλλακτικών βαριών και / ή ελαφριών ουρών.

Πηγή (ξενόγλωσση):

Karagrigoriou, A., Papasotiriou, G., Vonta, I. (2021), *Goodness of fit exponentiality test against light and heavy tail alternatives*, In "Statistical Modeling of Reliability Structures and Industrial Processes", CRC Press, Taylor & Francis Group

#### 2.4. Ο νέος έλεγχος εκθετικότητας

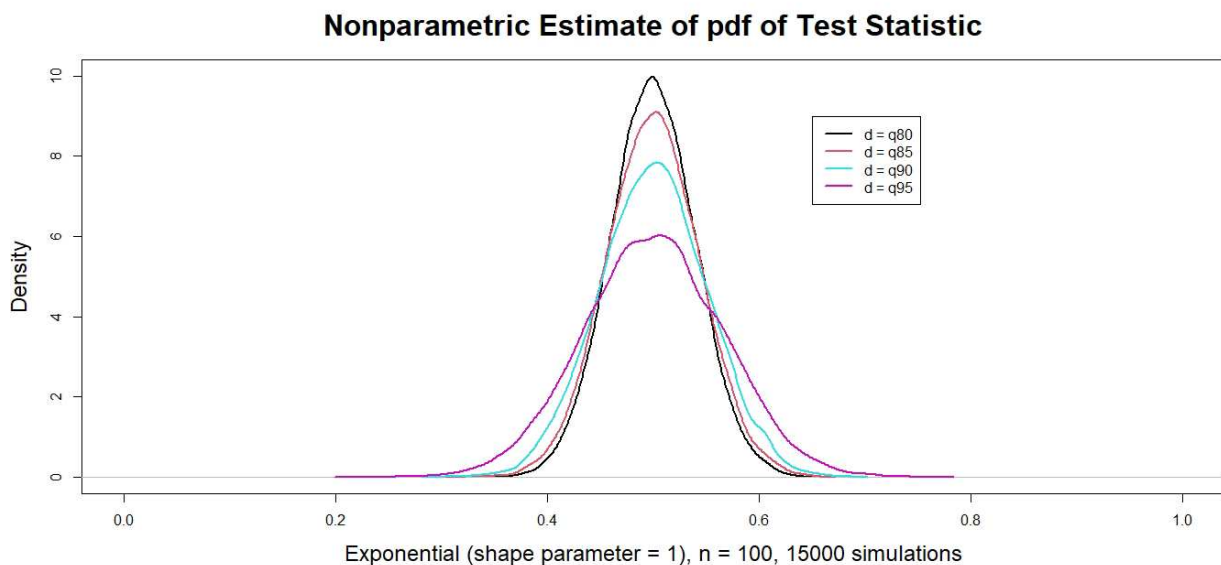
Θεωρείστε μια δισδιάστατη ακολουθία τυχαίων μεταβλητών  $X_1, \dots, X_n$  και  $Y_1, \dots, Y_n$ . Η εμπειρική αντίστοιχη της (2.3.3) ορίζεται ως η ελεγχοσυνάρτηση που δίνεται από

$$T(d, n) = \frac{\sum_{i=1}^n R_i 1(X_i + Y_i > d)}{\sum_{i=1}^n 1(X_i + Y_i > d)} \quad (2.4.1)$$

όπου

$$R_i = \frac{|X_i - Y_i|}{X_i + Y_i}, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.4.2)$$

και  $1(A)$  είναι η δείκτρια του  $A$ .

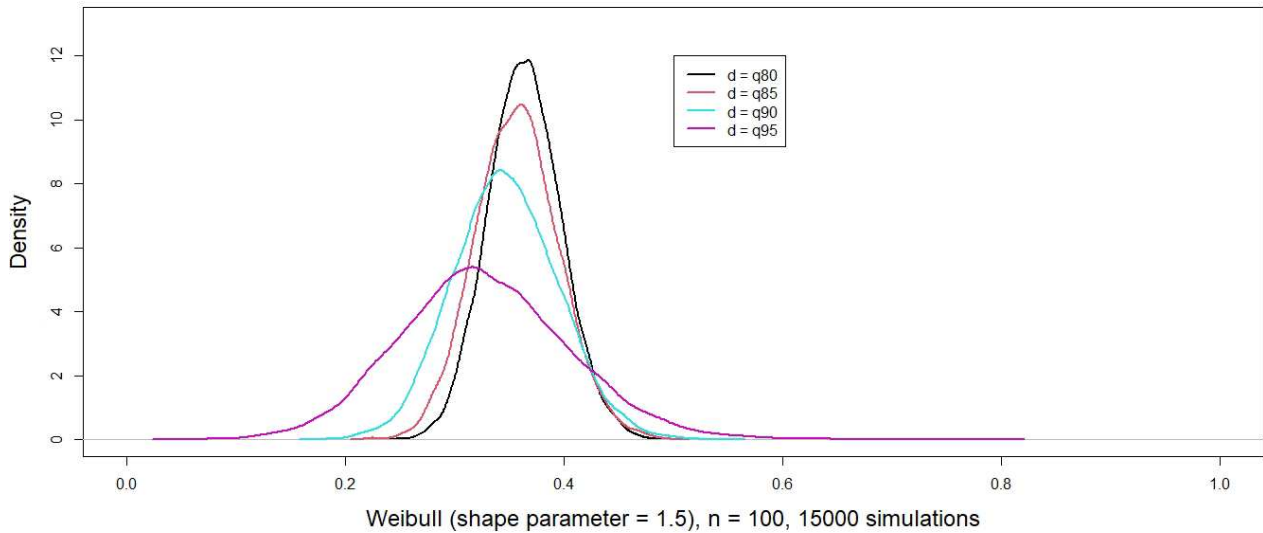


**Σχήμα 2.4.1.** Εκθετική κατανομή - Σχήμα της ελεγχοσυνάρτησης  $T(d, n)$  για διαφορετικές τιμές του  $d$  (Βλέπε και Karagrigoriou, A., Papasotiriou, G., Vonta, I. (2021))

Παρατηρούμε στο πιο πάνω γράφημα ότι η κατανομή της ελεγχοσυνάρτησης είναι περίπου κανονική με μέση τιμή 0.5 και αύξουσα διασπορά όσο το  $d$  αυξάνει. Η επιλογή του  $d$  θα εξηγηθεί πιο κάτω.

**Παρατήρηση 2.4.1.** Η ελεγχουσυνάρτηση (2.4.1) απαιτεί ως εισαγωγή μια δισδιάστατη ακολουθία τυχαίων μεταβλητών. Για την περίπτωση των ανεξάρτητων και ταυτοτικά κατανομημένων τυχαίων μεταβλητών  $Z_1, \dots, Z_{2n}$  θα μπορούσε κανείς να χρησιμοποιήσει, χωρίς απώλεια της γενικότητας, οποιοδήποτε ζεύγος των σχετικών μεταβλητών. Για παράδειγμα, κάποιος θα μπορούσε να πάρει  $X_i = Z_{2i-1}$  και  $Y_i = Z_{2i}$ .

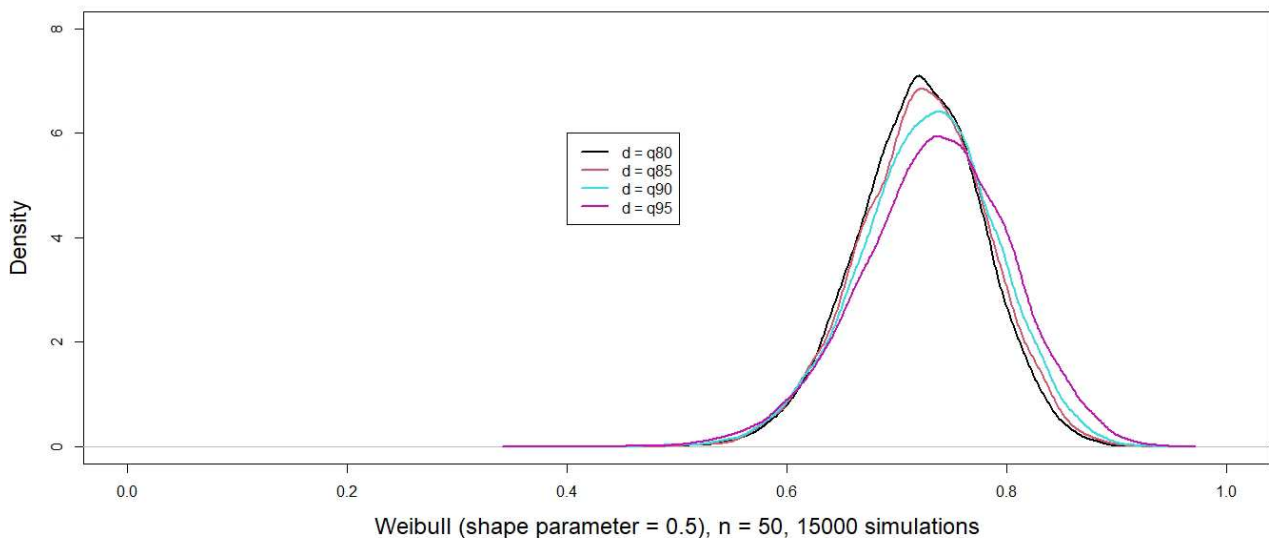
### Nonparametric Estimate of pdf of Test Statistic



**Σχήμα 2.4.2.** Weibull με ελαφριά ουρά (παράμετρος σχήματος (shape) = 1.5),  $n = 100$  - Σχήμα της ελεγχουσυνάρτησης για διαφορετικές τιμές του  $d$  (Βλέπε και Karagrigoriou, A., Papasotiriou, G., Vonta, I. (2021))

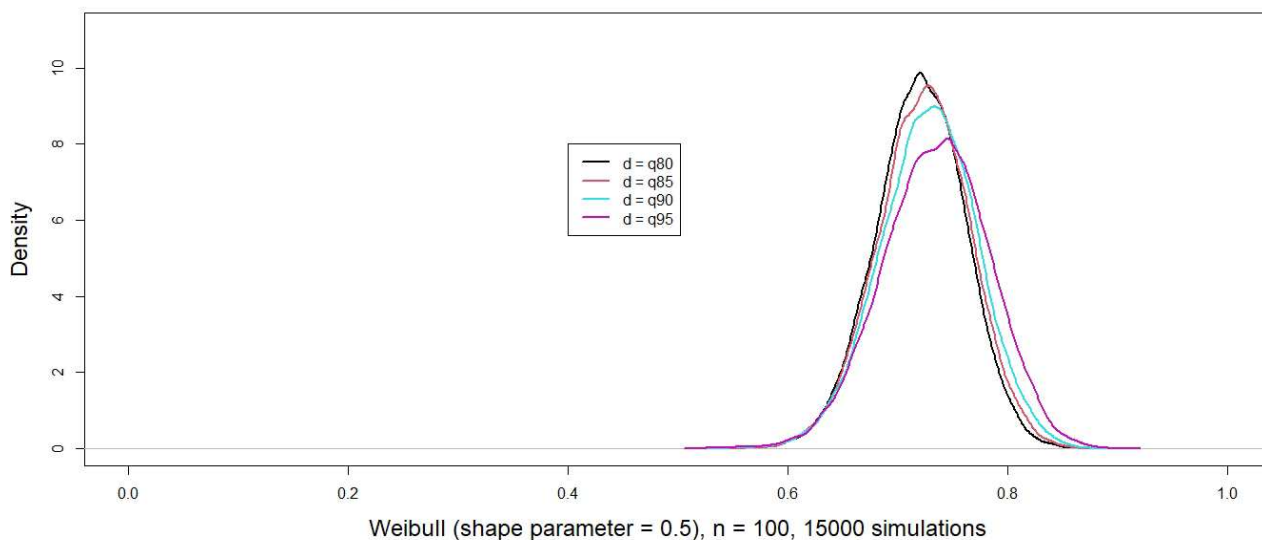
### Κατανομή Weibull με βαριά ουρά $n = 50$ & $n = 100$

#### Nonparametric Estimate of pdf of Test Statistic



**Σχήμα 2.4.3.a.** Weibull με βαριά ουρά (παράμετρος σχήματος (shape) = 0.5),  $n = 50$  - Σχήμα της ελεγχουσυνάρτησης για διαφορετικές τιμές του  $d$  (Βλέπε και Karagrigoriou, A., Papasotiriou, G., Vonta, I. (2021))

### Nonparametric Estimate of pdf of Test Statistic



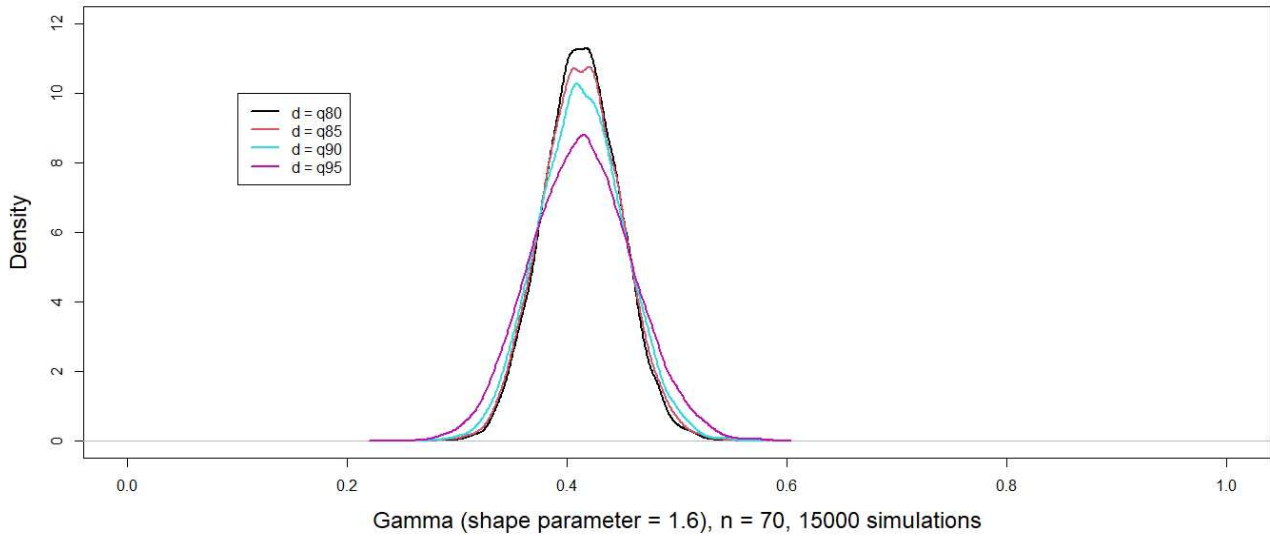
**Σχήμα 2.4.3.β.** Weibull με βαριά ουρά (παράμετρος σχήματος (shape) = 0.5),  $n = 100$  - Σχήμα της ελεγχουσυνάρτησης για διαφορετικές τιμές του  $d$  (Βλέπε και Karagrigoriou, A., Papasotiriou, G., Vonta, I. (2021))

Τα σχήματα 2.4.1, 2.4.2, 2.4.4.α & 2.4.5.α δείχνουν ξεκάθαρα ότι η ελεγχουσυνάρτηση που δίνεται στην (2.4.1) έχει μέση τιμή 0.5 για την εκθετική κατανομή, ενώ για κατανομές ελαφριάς ουράς όπως η Weibull με παράμετρο σχήματος (shape) ίση με 1.5 (και παράμετρο κλίμακας 1), ή η Gamma με παράμετρο σχήματος (shape) ίση με 1.6 (και παράμετρο κλίμακας 1) ή η λογαριθμοκανονική LN με παράμετρο σχήματος (sdlog) ίση με 0.4 (και παράμετρο κλίμακας (meanlog) 1) έχει μέση τιμή μικρότερη από 0.5. Για κατανομές βαριάς ουράς όπως η Weibull με παράμετρο σχήματος (shape) ίση με 0.5 (και παράμετρο κλίμακας 1), ή η Gamma με παράμετρο σχήματος (shape) ίση με 0.6 (και παράμετρο κλίμακας 1) ή η λογαριθμοκανονική LN με παράμετρο σχήματος (sdlog) ίση με 1.6 (και παράμετρο κλίμακας (meanlog) 1) η ελεγχουσυνάρτηση έχει μέση τιμή μεγαλύτερη από 0.5 (βλέπε σχήματα 2.4.3.α, 2.4.3.β, 2.4.4.β & 2.4.5.β). Παρατηρήστε ότι τα αποτελέσματα ισχύουν για διάφορες τιμές του δείκτη  $d$ . Σ' αυτήν τη συγκεκριμένη περίπτωση χρησιμοποιήσαμε διαφορετικές τιμές για το  $d$  ίσες με τέσσερα διαφορετικά εκατοστημόρια της συσχετισμένης κατανομής κάτω από τη μηδενική, και συγκεκριμένα το  $80^\circ$  ( $q80$ ),  $85^\circ$  ( $q85$ ),  $90^\circ$  ( $q90$ ) και  $95^\circ$  ( $q95$ ) εκατοστημόριο, εκτός από την περίπτωση της λογαριθμοκανονικής LN κατανομής όπου χρησιμοποιήσαμε για το  $d$  τα προαναφερθέντα εκατοστημόρια, όμως όχι της κατανομής κάτω από τη μηδενική, αλλά της εναλλακτικής κατανομής LN. Αν και το σχήμα της κατανομής και συνεπώς η μεταβλητότητα διαφέρει, η μέση τιμή φαίνεται να παραμένει σταθερή με την έννοια ότι είναι πάντοτε μεγαλύτερη από 0.5 για βαριές ουρές και μικρότερη από 0.5 για ελαφριές ουρές. Τέλος σημειώστε ότι οι τιμές των παραμέτρων που χρησιμοποιούνται στα σχήματα 2.4.1, 2.4.2, 2.4.3.α, 2.4.3.β, 2.4.4.α, 2.4.4.β, 2.4.5.α και 2.4.5.β δεν επηρεάζουν τη θέση της σχετικής κατανομής.

Η θέση της εκθετικής κατανομής στο σχήμα 2.4.1 είναι η ίδια ανεξάρτητα από την τιμή της παραμέτρου (εδώ θεωρείται ότι είναι ίση με 2). Το ίδιο ισχύει για την παράμετρο σχήματος της Weibull κατανομής, της Gamma κατανομής και της λογαριθμοκανονικής LN κατανομής (τόσο για ελαφριά όσο και για βαριά ουρά) στα σχήματα 2.4.2, 2.4.3.α και 2.4.3.β (για τη Weibull), στα σχήματα 2.4.4.α και 2.4.4.β (για τη Gamma) και στα σχήματα 2.4.5.α και 2.4.5.β (για τη λογαριθμοκανονική LN) (διατηρώντας την παράμετρο κλίμακας σταθερή και ίση με 1 αφού η κατανομή είναι αναλλοίωτη κλίμακας).

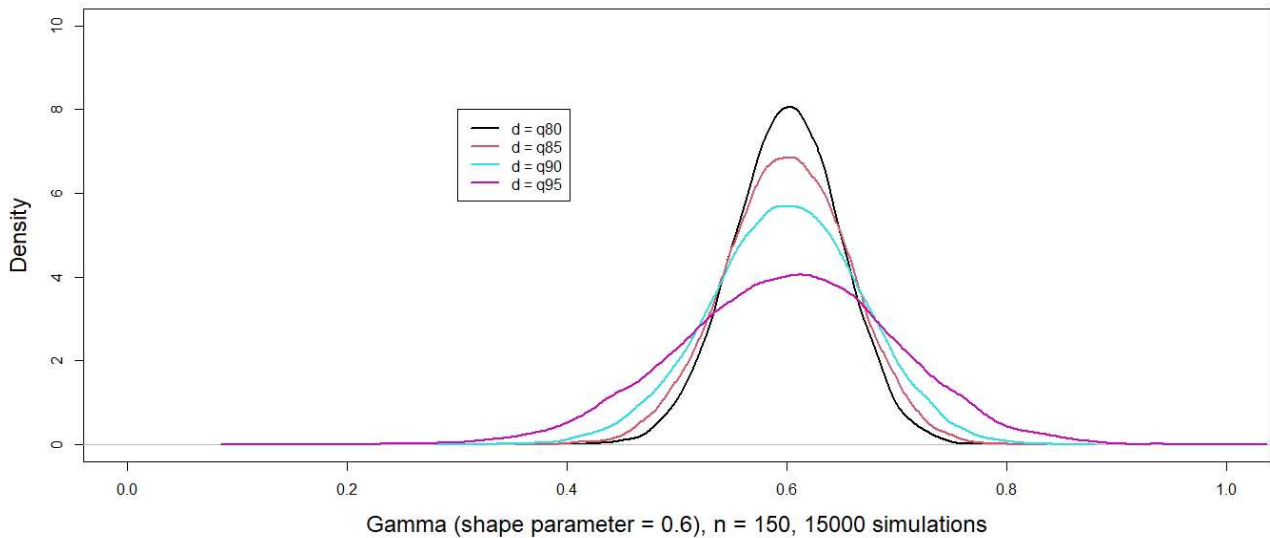
## Κατανομή Gamma με ελαφριά - βαριά ουρά

### Nonparametric Estimate of pdf of Test Statistic



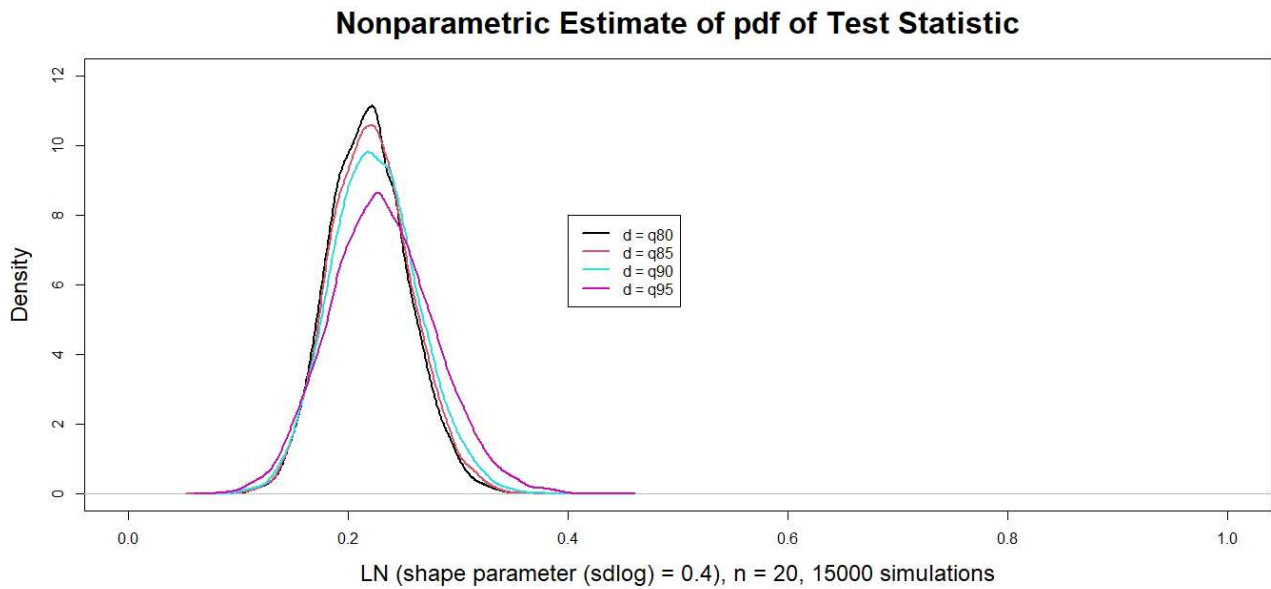
**Σχήμα 2.4.4.α.** Gamma με ελαφριά ουρά (παράμετρος σχήματος (shape) = 1.6),  $n = 70$  - Σχήμα της ελεγχοσυνάρτησης για διαφορετικές τιμές του  $d$

### Nonparametric Estimate of pdf of Test Statistic

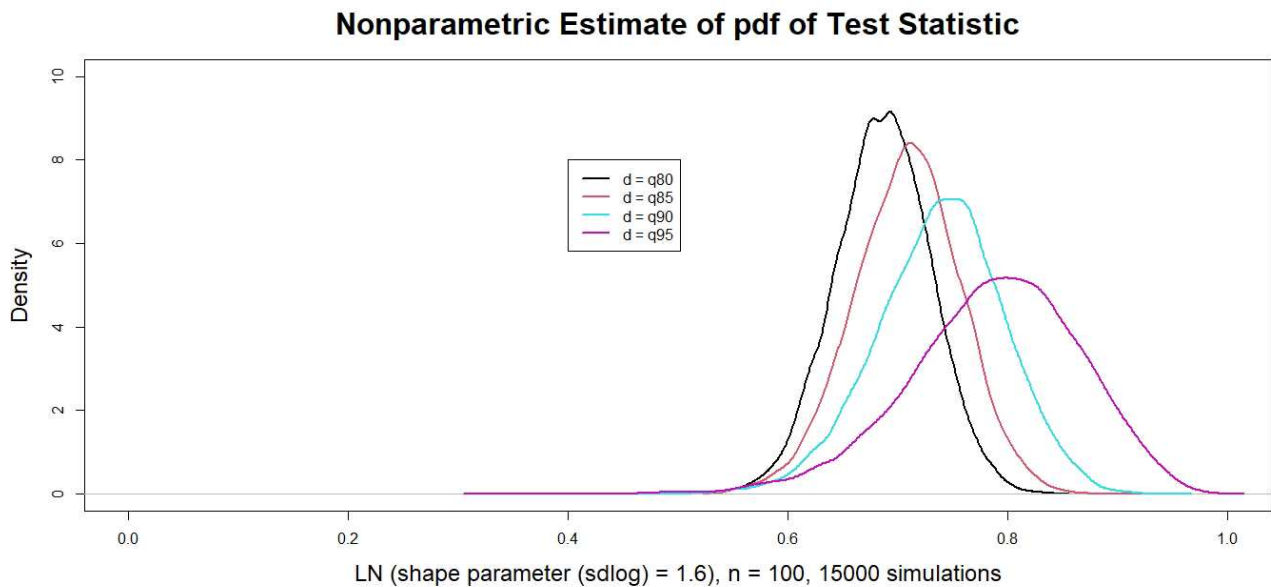


**Σχήμα 2.4.4.β.** Gamma με βαριά ουρά (παράμετρος σχήματος (shape) = 0.6),  $n = 150$  - Σχήμα της ελεγχοσυνάρτησης για διαφορετικές τιμές του  $d$

## Κατανομή LN (λογαριθμοκανονική) με ελαφριά - βαριά ουρά

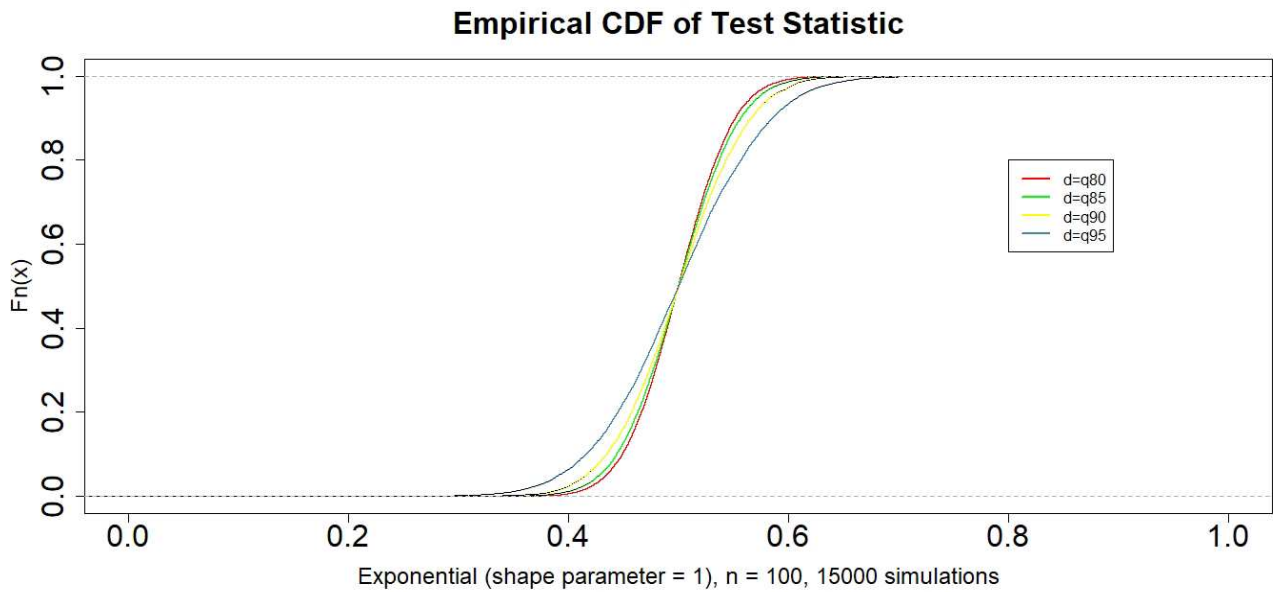


**Σχήμα 2.4.5.α.** LN με ελαφριά ουρά (παράμετρος σχήματος (sdlog) = 0.4),  $n = 20$  - Σχήμα της ελεγχοσυνάρτησης για διαφορετικές τιμές του  $d$

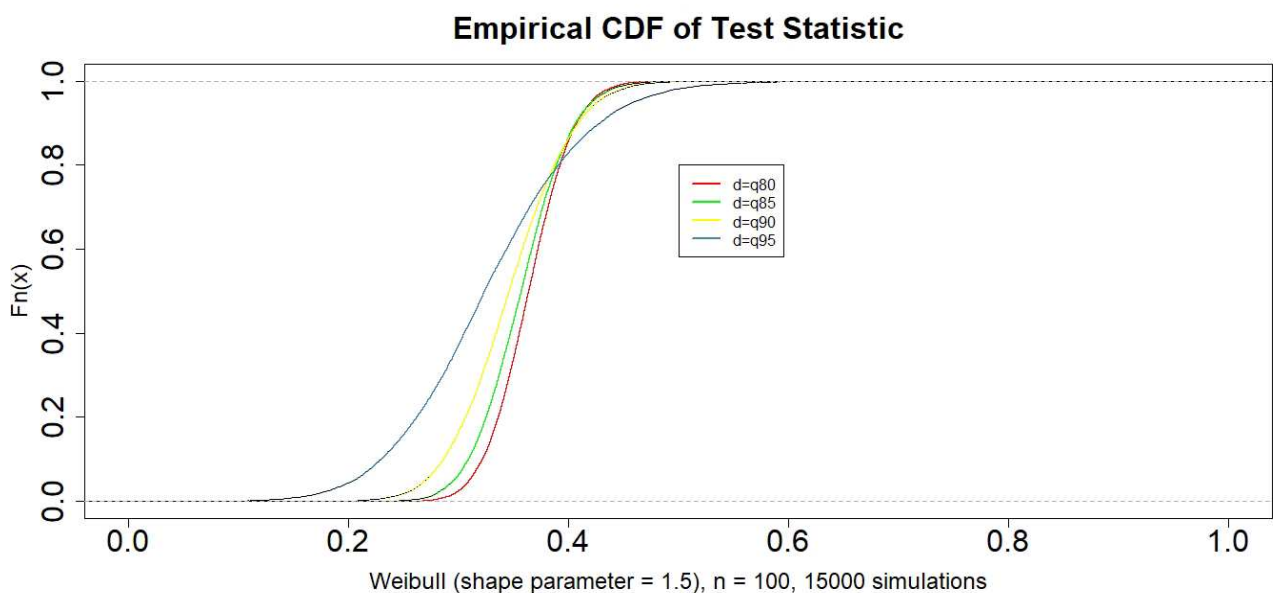


**Σχήμα 2.4.5.β.** LN με βαριά ουρά (παράμετρος σχήματος (sdlog) = 1.6),  $n = 100$  - Σχήμα της ελεγχοσυνάρτησης για διαφορετικές τιμές του  $d$

Παρακάτω παρουσιάζουμε τις εμπειρικές αθροιστικές συναρτήσεις κατανομής (α.σ.κ.) της ελεγχοσυνάρτησης για τις προαναφερθείσες περιπτώσεις της παρούσας ενότητας απ' όπου προκύπτουν αντίστοιχα συμπεράσματα με αυτά των δύο προηγούμενων παραγράφων (βλέπε σχήματα 2.4.6, 2.4.7, 2.4.8.α, 2.4.8.β, 2.4.9.α., 2.4.9.β, 2.4.10.α και 2.4.10.β)



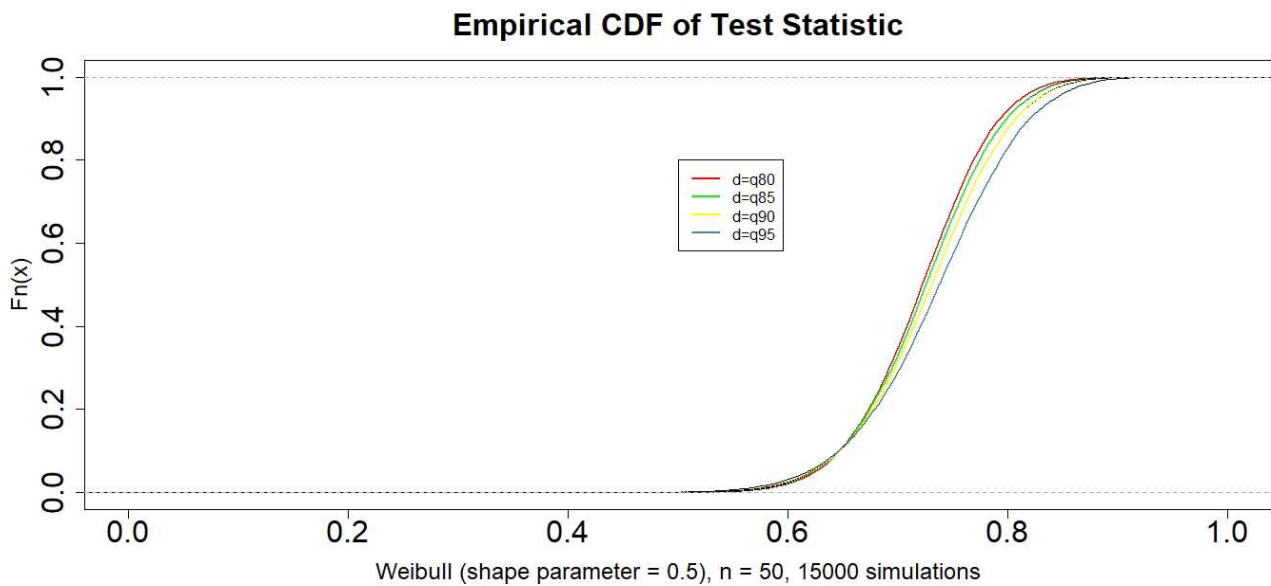
**Σχήμα 2.4.6.** Εκθετική κατανομή - Εμπειρική α.σ.κ. της ελεγχοσυνάρτησης για διαφορετικές τιμές του  $d$



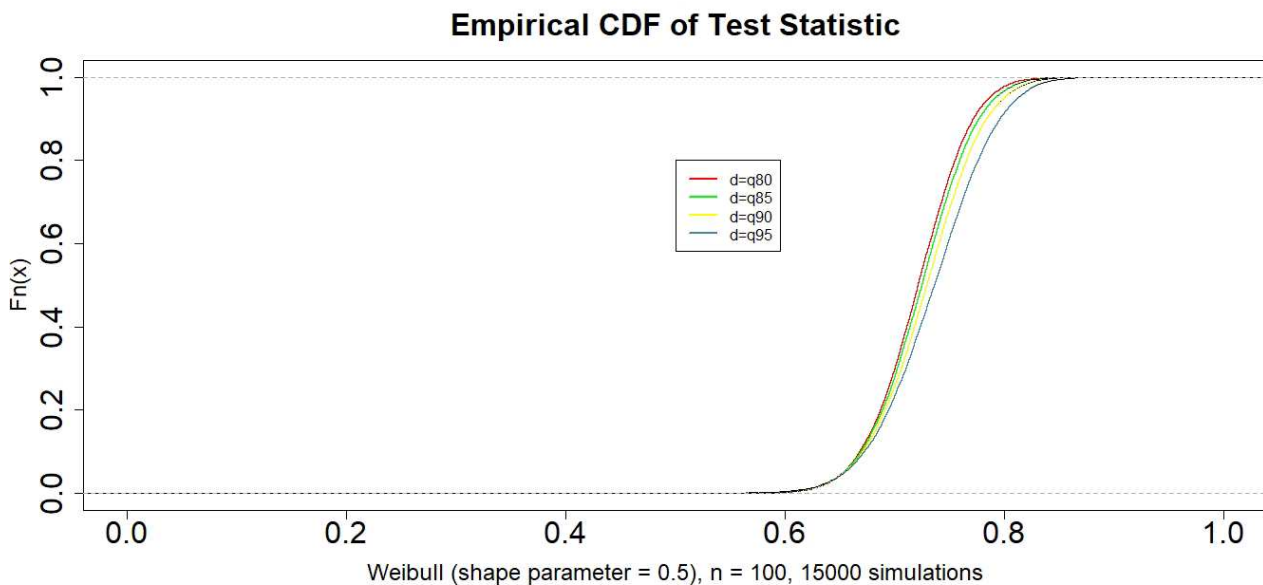
**Σχήμα 2.4.7.** Weibull με ελαφριά ουρά (παράμετρος σχήματος (shape) = 1.5),  $n = 100$  - Εμπειρική α.σ.κ. της ελεγχοσυνάρτησης για διαφορετικές τιμές του  $d$



## Κατανομή Weibull με βαριά ουρά $n = 50$ & $n = 100$



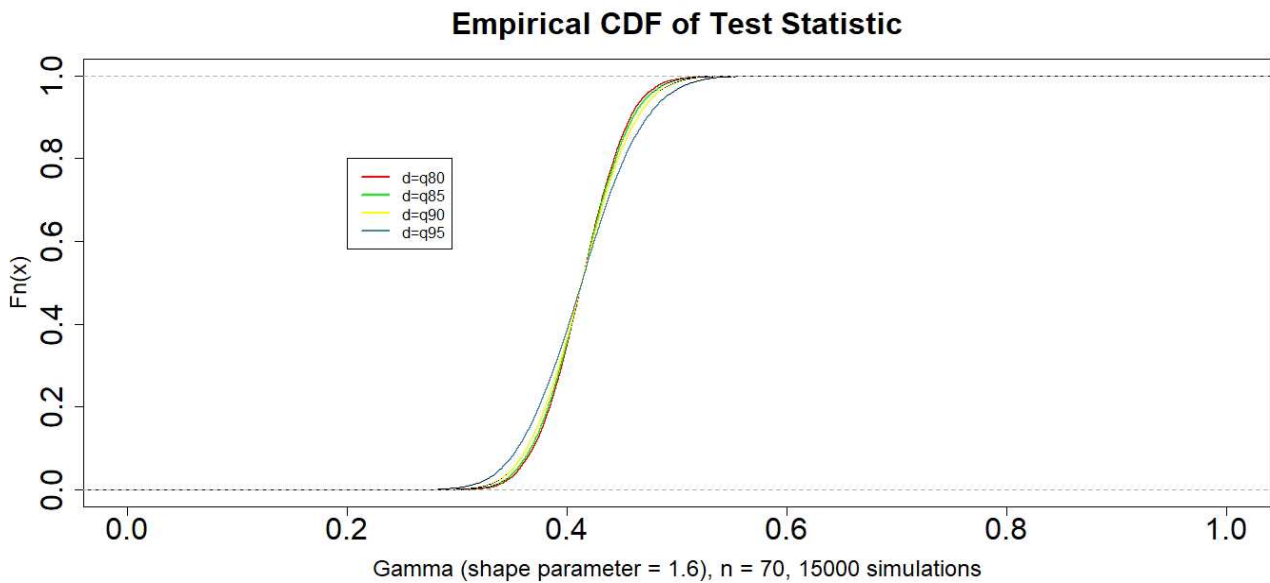
**Σχήμα 2.4.8.α.** Weibull με βαριά ουρά (παράμετρος σχήματος (shape) = 0.5),  $n = 50$  - Εμπειρική α.σ.κ. της ελεγχουσυνάρτησης για διαφορετικές τιμές του  $d$



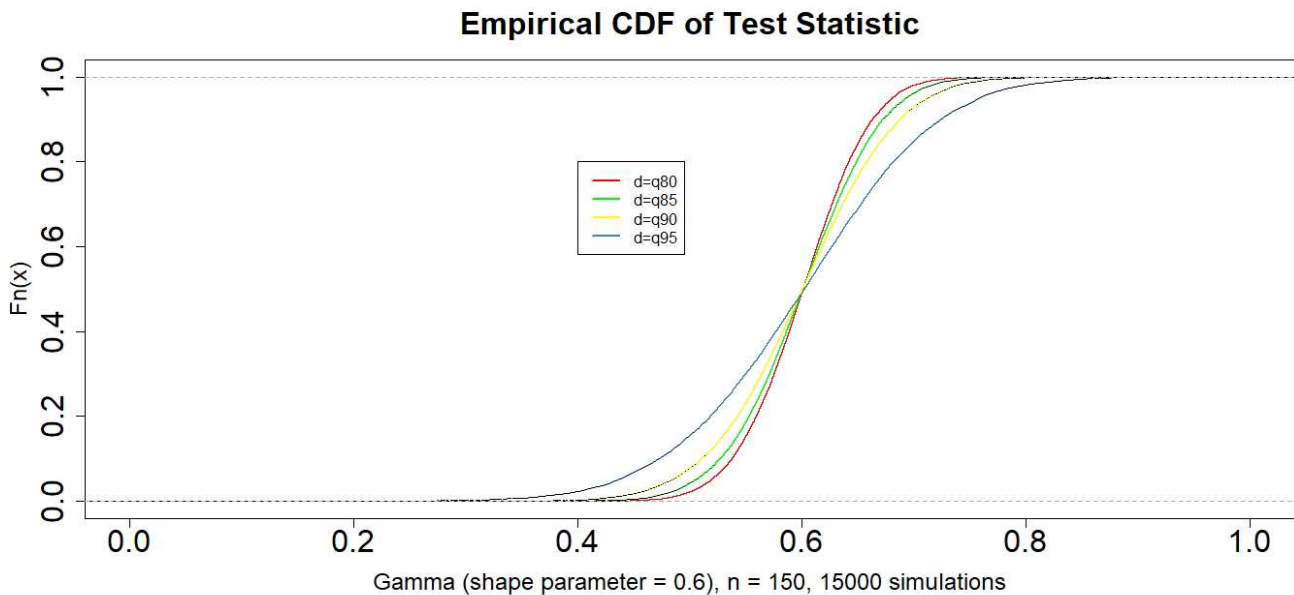
**Σχήμα 2.4.8.β.** Weibull με βαριά ουρά (παράμετρος σχήματος (shape) = 0.5),  $n = 100$  - Εμπειρική α.σ.κ. της ελεγχουσυνάρτησης για διαφορετικές τιμές του  $d$



## Κατανομή Gamma με ελαφριά - βαριά ουρά

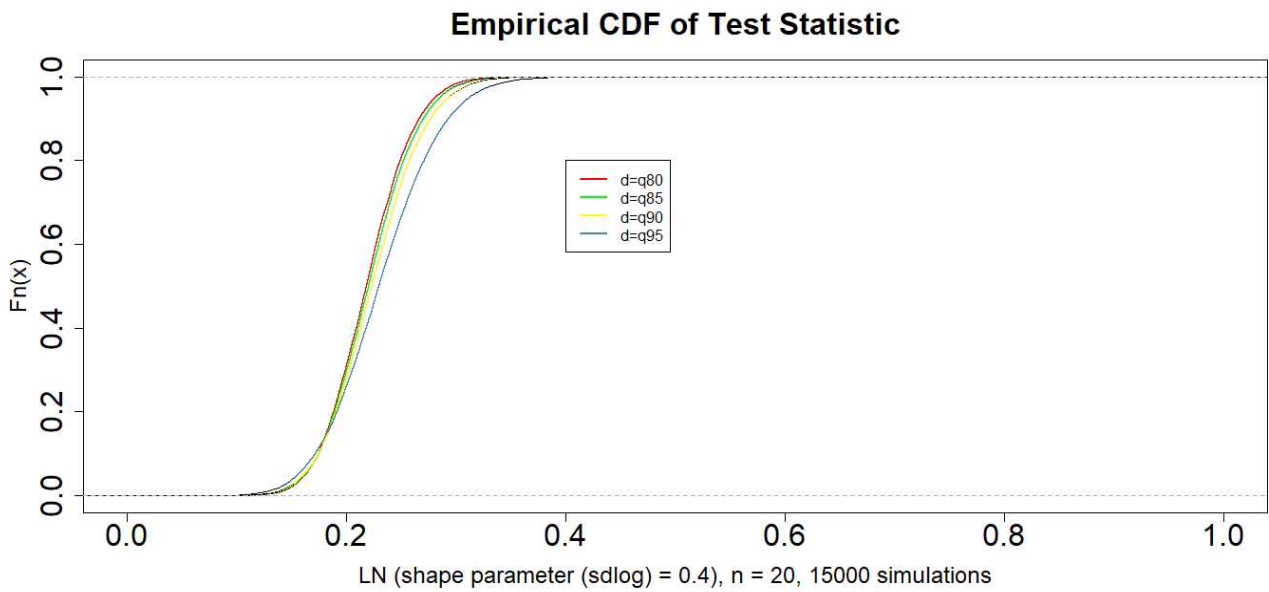


**Σχήμα 2.4.9.α.** Gamma με ελαφριά ουρά (παράμετρος σχήματος (shape) = 1.6),  $n = 70$  - Εμπειρική α.σ.κ. της ελεγχουσυνάρτησης για διαφορετικές τιμές του  $d$

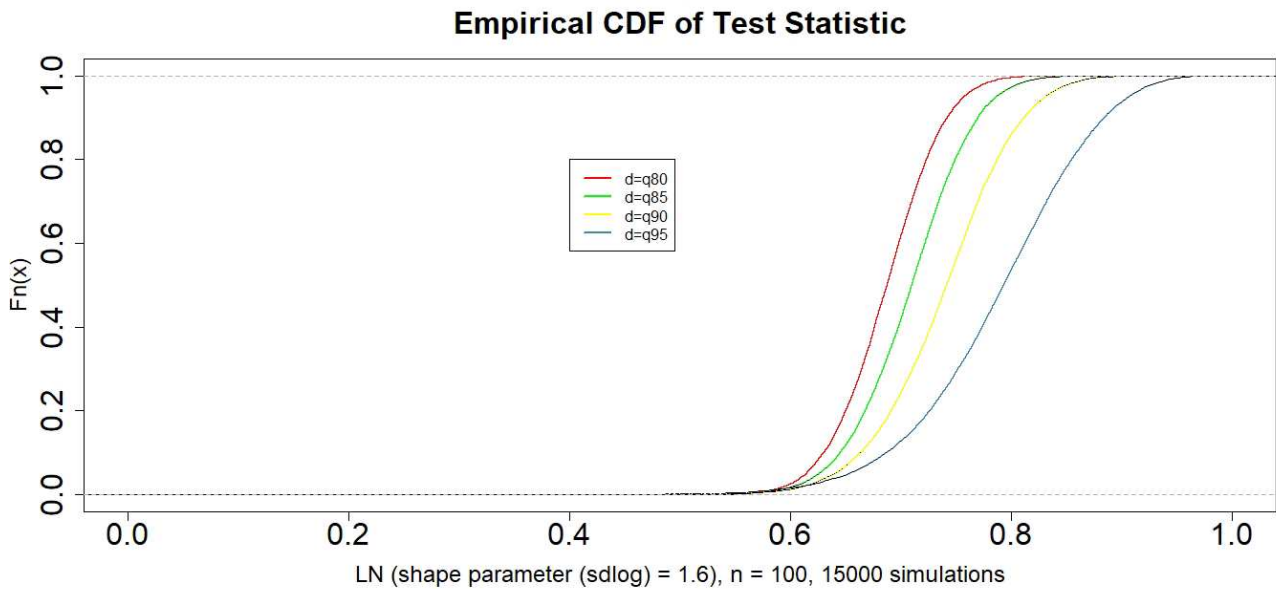


**Σχήμα 2.4.9.β.** Gamma με βαριά ουρά (παράμετρος σχήματος (shape) = 0.6),  $n = 150$  - Εμπειρική α.σ.κ. της ελεγχουσυνάρτησης για διαφορετικές τιμές του  $d$

## Κατανομή LN (λογαριθμοκανονική) με ελαφριά - βαριά ουρά



**Σχήμα 2.4.10.α.** LN με ελαφριά ουρά (παράμετρος σχήματος (sdlog) = 0.4),  $n = 20$  - Εμπειρική α.σ.κ. της ελεγχοσυνάρτησης για διαφορετικές τιμές του  $d$



**Σχήμα 2.4.10.β.** LN με βαριά ουρά (παράμετρος σχήματος (sdlog) = 1.6),  $n = 100$  - Εμπειρική α.σ.κ. της ελεγχοσυνάρτησης για διαφορετικές τιμές του  $d$

Όλες οι παραπάνω σκέψεις οδηγούν στη χρήση της ελεγχοσυνάρτησης που δίνεται στην (2.4.1) για έλεγχο εκθετικότητας έναντι ελαφριών ή βαριών ουρών εναλλακτικών. Στην πραγματικότητα, σε όρους  $h(d)$  το πρόβλημα υπόθεσης διατυπώνεται ως εξής:

$$H_0: h(d) = \frac{1}{2} \text{ έναντι } H_1: h(d) < \frac{1}{2} \quad (2.4.3)$$

για την περίπτωση της λογαριθμο-κοιλότητας (log-concavity) όπου η εκθετική κατανομή ερευνάται έναντι εναλλακτικών ελαφριών ουρών και

$$H_0: h(d) = \frac{1}{2} \text{ έναντι } H_1: h(d) > \frac{1}{2} \quad (2.4.4)$$

για την περίπτωση της λογαριθμο-κυρτότητας (log-convexity) όπου η εκθετική κατανομή ερευνάται έναντι εναλλακτικών βαριών ουρών.

Αν και οι έλεγχοι που δίνονται στις (2.4.3) και (2.4.4) επαρκούν για την κάλυψη όλων των πρακτικών σκοπών, πρέπει να σημειωθεί ότι ένας αμφίπλευρος έλεγχος είναι δυνατόν να ερευνηθεί για την περίπτωση μη εκθετικών εναλλακτικών:

$$H_0: h(d) = \frac{1}{2} \text{ έναντι } H_1: \left| h(d) - \frac{1}{2} \right| > 0. \quad (2.4.5)$$

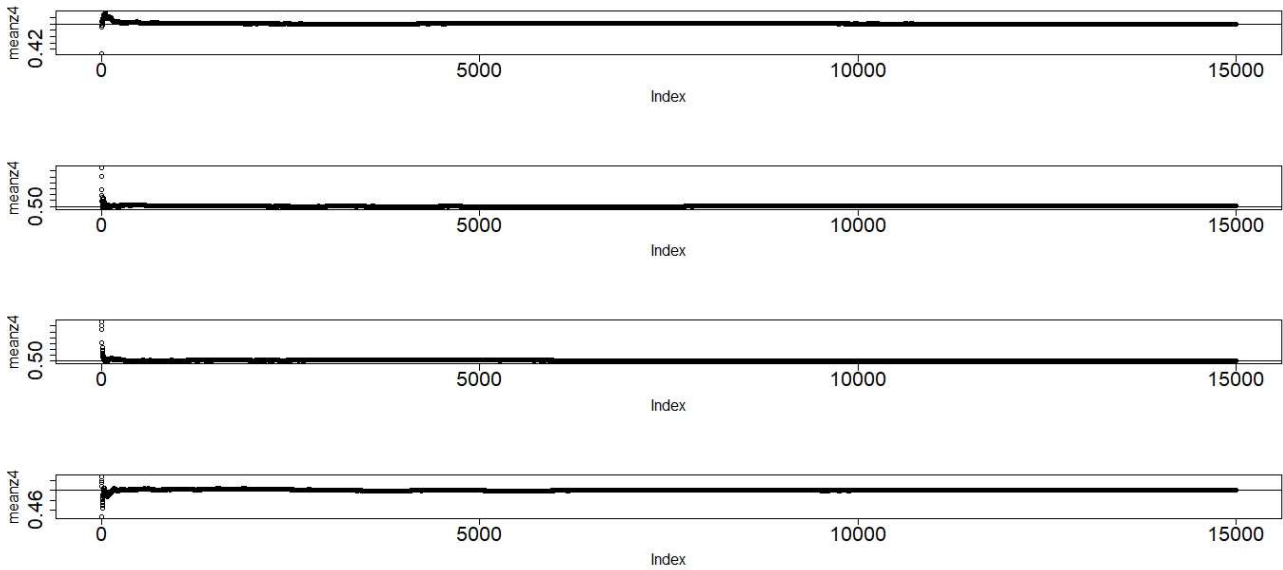
Πηγή (ξενόγλωσση):

Karagrigoriou, A., Papasotiriou, G., Vonta, I. (2021), *Goodness of fit exponentiality test against light and heavy tail alternatives*, In “*Statistical Modeling of Reliability Structures and Industrial Processes*”, CRC Press, Taylor & Francis Group

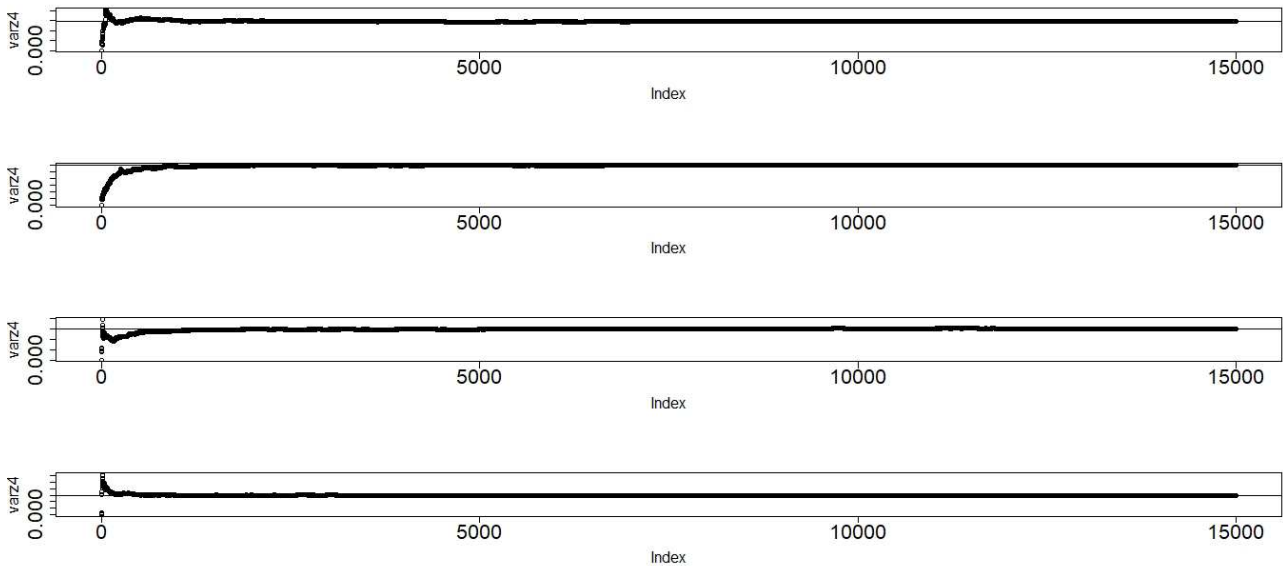
## 2.5. Ιδιότητες της Ελεγχοσυνάρτησης

Ένα από τα πιο σημαντικά ζητήματα για την ελεγχοσυνάρτηση που προτείνεται στην (2.4.1) είναι ότι η ασυμπτωτική της μέση τιμή και η ασυμπτωτική της διακύμανση είναι δυνατόν να ληφθούν για οποιαδήποτε τιμή του  $d$ . Με τον ασθενή νόμο των μεγάλων αριθμών και την R βρίσκουμε την ασυμπτωτική μέση τιμή και την ασυμπτωτική διακύμανση. Για να ελέγξουμε τη σύγκλιση επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία τέσσερις φορές κάθε φορά. Στα σχήματα 2.5.1.α και 2.5.1.β παρουσιάζουμε την ασυμπτωτική μέση τιμή και την ασυμπτωτική διακύμανση για την ελεγχοσυνάρτηση κάτω από τη μηδενική υπόθεση (εδώ εκθετική με παράμετρο 2) με  $n = 75$  και με τιμή του  $d$  ίση με το  $95^\circ$  εκατοστημόριο της κατανομής κάτω από τη μηδενική. Όπως φαίνεται η ασυμπτωτική μέση τιμή είναι 0.50, ενώ η ασυμπτωτική διακύμανση 0.00595.

## Ασυμπτωτική μέση τιμή - ασυμπτωτική διακύμανση της Ελεγχουσυνάρτησης



**Σχήμα 2.5.1.α.** Εκθετική Κατανομή - Ασυμπτωτική μέση τιμή ( $= 0.50$ ) της Ελεγχουσυνάρτησης,  $n = 75, d = q95$



**Σχήμα 2.5.1.β.** Εκθετική Κατανομή - Ασυμπτωτική διακύμανση ( $= 0.00595$ ) της Ελεγχουσυνάρτησης,  $n = 75, d = q95$

Στον πίνακα 2.5.1 παρουσιάζουμε την ασυμπτωτική μέση τιμή, την ασυμπτωτική διακύμανση και την ασυμπτωτική τυπική απόκλιση της ελεγχουσυνάρτησης κάτω από την εκθετικότητα για τέσσερις τιμές του  $d$  ίσες με τέσσερα διαφορετικά εκατοστημόρια της εκθετικής κατανομής (της κατανομής της μηδενικής υπόθεσης), και συγκεκριμένα το  $80^\circ$  ( $q80$ ),  $85^\circ$  ( $q85$ ),  $90^\circ$  ( $q90$ ) και  $95^\circ$  ( $q95$ ) εκατοστημόριο και  $n = 30, 50, 75, 100, 150, 200$  και  $500$ . Διάφορες μικροδιαφορές στα νούμερα είναι αναμενόμενο να εμφανιστούν από ερευνητή σε ερευνητή. Εδώ χρησιμοποιήθηκε εκθετική κατανομή με παράμετρο κλίμακας 2, αλλά αφού το στατιστικό του ελέγχου είναι αναλλοίωτο στην κλίμακα, θα μπορούσε κάποιος να χρησιμοποιήσει άλλη τιμή για αυτήν την παράμετρο με τα ίδια αποτελέσματα.

**Πίνακας 2.5.1. Εκθετική κατανομή - ασυμπτωτική μέση τιμή, ασυμπτωτική διακύμανση και ασυμπτωτική τυπική απόκλιση της ελεγχουσυνάρτησης**

$d$	Εκθετική κατανομή			
	$n$	ασυμπτ. μέση τιμή	ασυμπτ. διακύμανση (διασπορά)	ασυμπτ. τυπική απόκλιση
$q80$	30	0.5	0.0055	0.074
	50	0.5	0.00325	0.057
	75	0.5	0.00216	0.0465
	100	0.5	0.0016	0.04
	150	0.5	0.001065	0.0326
	200	0.5	0.000805	0.0284
	500	0.5	0.00032	0.018
$q85$	30	0.5	0.00675	0.082
	50	0.5	0.00395	0.06285
	75	0.5	0.00262	0.0512
	100	0.5	0.001935	0.044
	150	0.5	0.001285	0.03585
	200	0.5	0.000965	0.031
	500	0.5	0.000385	0.0196
$q90$	30	0.5	0.0091	0.0954
	50	0.5	0.0053	0.0728
	75	0.5	0.0035	0.0592
	100	0.5	0.00255	0.0505
	150	0.5	0.0017	0.0412
	200	0.5	0.00127	0.03564
	500	0.5	0.00051	0.0226
$q95$	30	0.5	0.0165	0.128
	50	0.5	0.00925	0.096
	75	0.5	0.00595	0.077
	100	0.5	0.00435	0.066
	150	0.5	0.00286	0.0535
	200	0.5	0.00215	0.0464
	500	0.5	0.00084	0.029

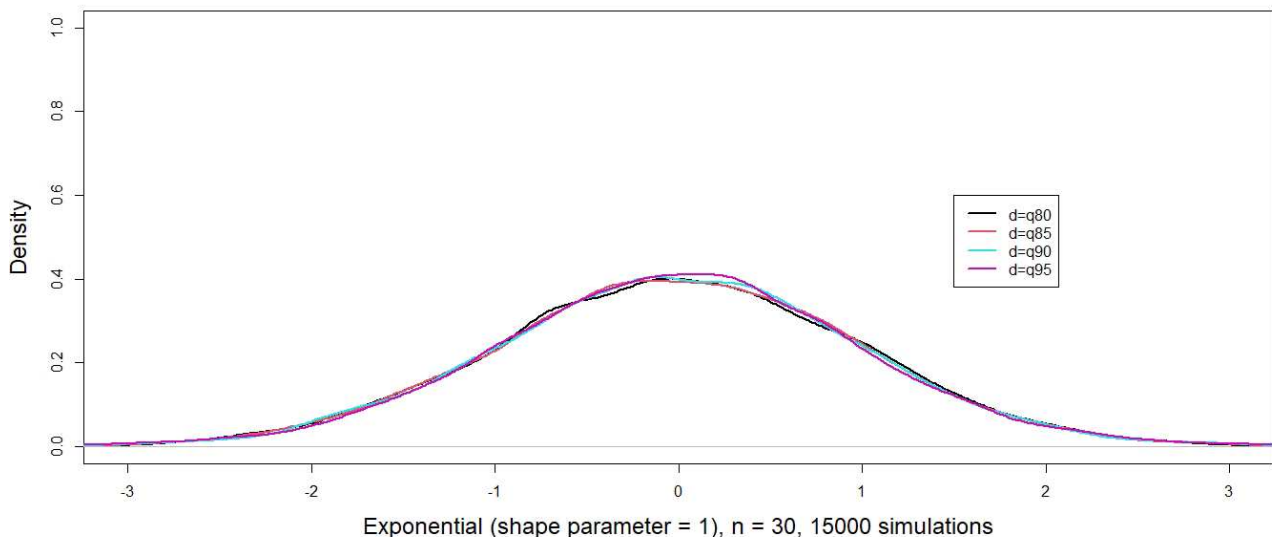
Κάτω από εκθετικότητα η ασυμπτωτική μέση τιμή είναι πάντα ίση με  $\frac{1}{2}$  ανεξάρτητα από την τιμή του  $d$  (βλέπε σχήματα 2.4.1 και 2.4.6, καθώς και πίνακα 2.5.1). Επιπλέον, αυτό ισχύει για

οποιοδήποτε πεπερασμένο μέγεθος δείγματος (τιμές του  $n$  τόσο μικρές όσο το 30 έχουν χρησιμοποιηθεί). Όσον αφορά τη μεταβλητότητα (ασυμπτωτική διακύμανση, ασυμπτωτική τυπική απόκλιση), όπως φαίνεται στα σχήματα 2.4.1, 2.4.2, 2.4.3.α, 2.4.3.β, 2.4.4.α, 2.4.4.β, 2.4.5.α, 2.4.5.β, 2.4.6, 2.4.7, 2.4.8.α, 2.4.8.β, 2.4.9.α, 2.4.9.β, 2.4.10.α και 2.4.10.β και στον πίνακα 2.5.1 εξαρτάται από το  $d$  και το  $n$ . Όσο μεγαλώνει το  $n$  για το ίδιο  $d$ , μικραίνει η ασυμπτωτική διακύμανση (πιο "μαζεμένες" οι καμπύλες) και όσο μεγαλώνει το  $d$  για το ίδιο  $n$ , αυξάνει η ασυμπτωτική διακύμανση (πιο "απλωμένες" οι καμπύλες). Ωστόσο, για πρακτικούς λόγους, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τιμή για τη μεταβλητότητα που εξαρτάται μόνο από το  $d$  και όχι από το  $n$  για τυπικά μεγέθη δείγματος ( $n = 30$  έως  $n = 500$ ) και κυμαίνεται η μεταβλητότητα (συγκεκριμένα η ασυμπτωτική τυπική απόκλιση), κάτω από την εκθετικότητα, από 0.047 (για  $d$  ίσο με το 80<sup>ο</sup> εκατοστημόριο της εκθετικής κατανομής) έως 0.077 για  $d$  ίσο με το 95<sup>ο</sup> εκατοστημόριο, ενώ για τιμές του  $d$  ίσες με το 85<sup>ο</sup> και το 90<sup>ο</sup> εκατοστημόριο της εκθετικής κατανομής (δηλαδή κάτω από τη μηδενική), η ασυμπτωτική τυπική απόκλιση είναι ίση με 0.051 και 0.060 αντίστοιχα (βλέπε Karagrigoriou, A., Papasotiriou, G., Vonta, I. (2021)). Οι ασυμπτωτικές διακυμάνσεις για τις παραπάνω τέσσερις τιμές του  $d$  πλησιάζουν, όπως αναμενόταν, την τιμή 0, αφού ασυμπτωτικά η ελεγχοσυνάρτηση είναι ακριβώς ίση με 1/2 κάτω από την υπόθεση της εκθετικότητας. Με βάση την παραπάνω συζήτηση η ακόλουθη αξίωση φαίνεται να ισχύει για τυπικά μεγέθη δείγματος:

$$Z = \frac{T(d, n) - 0.5}{sd(d)} \underset{\text{προσεγγιστικά}}{\sim} N(0, 1) \quad (2.5.1)$$

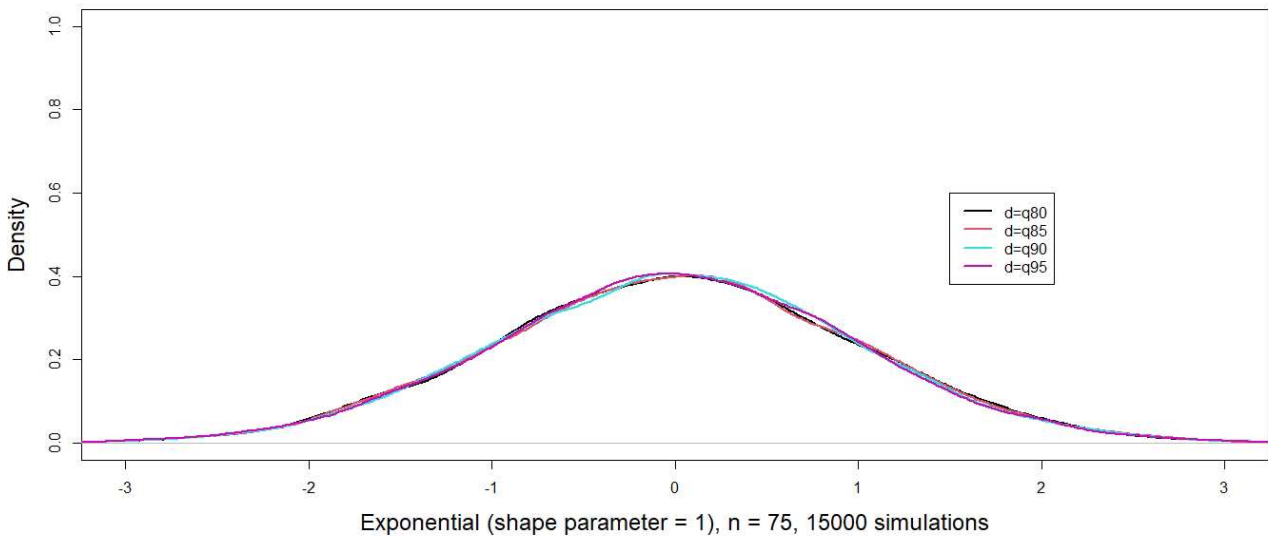
όπου  $sd(d)$  σημαίνει την τυπική απόκλιση της ελεγχοσυνάρτησης κάτω από την εκθετικότητα για τυπικά μεγέθη δείγματος, που σχετίζεται με την τιμή του δείκτη  $d$ . Συνεπώς, όπως αναμενόταν, με τη χρήση της ασυμπτωτικής μέσης τιμής και διακύμανσης, η τυποποιημένη ελεγχοσυνάρτηση είναι ασυμπτωτικά τυπική κανονική όπως φαίνεται στα σχήματα 2.5.2.α. και 2.5.2.β.

### Nonparametric Estimate - The Standardized Test Statistic



**Σχήμα 2.5.2.α.** Τυποποιημένη Ελεγχοσυνάρτηση  $n = 30$   
(Βλέπε και Karagrigoriou, A., Papasotiriou, G., Vonta, I. (2021))

### Nonparametric Estimate - The Standardized Test Statistic



**Σχήμα 2.5.2.β.** Τυποποιημένη Ελεγχοςυνάρτηση  $n = 75$   
(Βλέπε και Karagrigoriou, A., Papasotiriou, G., Vonta, I. (2021))

Παρόλο που θα μπορούσαμε να βασιστούμε στην τυποποιημένη ελεγχοςυνάρτηση για την καλή προσαρμογή με τα τυπικά κρίσιμα σημεία (π.χ.  $1.645$  για  $\alpha=5\%$  και  $1.28$  για  $\alpha=10\%$ ), μπορεί κάποιος να προτιμά να αποκτήσει τα μη τυποποιημένα κρίσιμα σημεία και να τα χρησιμοποιήσει μαζί με την αρχική ελεγχοςυνάρτηση. Η προσέγγιση (με τα τυπικά κρίσιμα σημεία) φαίνεται να είναι ιδανική αφού τα κρίσιμα σημεία είναι ανεξάρτητα από το μέγεθος του δείγματος που καθιστά την προτεινόμενη μεθοδολογία ελκυστική για επαγγελματίες.

Ο πίνακας 2.5.2 δίνει τόσο τα άνω όσο και τα κάτω μη τυποποιημένα κρίσιμα σημεία για υποθέσεις έναντι και των δύο, ελαφριών και βαριών ουρών εναλλακτικών. Πράγματι για τα τυποποιημένα κρίσιμα σημεία, απορρίπτουμε την εκθετικότητα υπέρ μιας εναλλακτικής βαριάς ουράς (βλέπε (2.4.4)) σε ένα  $5\%$  επίπεδο εάν

$$Z = \frac{T(d, n) - 0.5}{sd(d)} > 1.645$$

και υπέρ μιας εναλλακτικής ελαφριάς ουράς (βλέπε (2.4.3)) εάν

$$Z = \frac{T(d, n) - 0.5}{sd(d)} < -1.645.$$

Οι αντίστοιχες τιμές για ένα  $10\%$  επίπεδο σημαντικότητας είναι  $1.28$  και  $-1.28$ .

Συνδυάζοντας τα παραπάνω τυποποιημένα κρίσιμα σημεία μαζί με την ασυμπτωτική μέση τιμή (0.5 ανεξάρτητα από το  $d$ ) και την ασυμπτωτική τυπική απόκλιση (που εξαρτάται από το  $d$ ) παίρνουμε τις μη τυποποιημένες τιμές που δίνονται παρακάτω (για συγκεκριμένες τιμές  $d$  βλέπε πίνακα 2.5.2):

$$T(d, n) > 0.5 + z_a sd(d) \quad (2.5.2)$$

για βαριές ουρές και για ελαφριές ουρές

$$T(d, n) < 0.5 + z_{1-a} sd(d). \quad (2.5.3)$$

Σημειώστε ότι για τον αμφίπλευρο έλεγχο μια μη εκθετική εναλλακτική γίνεται δεκτή εάν:

$$|T(d, n)| > 0.5 + z_{a/2} sd(d).$$

Για συγκριτικούς λόγους ο πίνακας 2.5.3 παρέχει και τα μη τυποποιημένα σημεία μαζί με τα ακριβή κρίσιμα σημεία. Οι τιμές αναφέρονται στα ανώτερα σημεία (κατανομές βαριάς ουράς). Τα κατώτερα σημεία (κατανομές ελαφριάς ουράς) είναι επίσης διαθέσιμα και εμφανίζονται στον πίνακα 2.5.4. Τα αποτελέσματα στους πίνακες 2.5.3 και 2.5.4 δείχνουν ότι τα κρίσιμα σημεία που προτείνονται για πρακτικούς σκοπούς για όλα τα μεγέθη δείγματος (εμφανίζονται στον πίνακα 2.5.2 και επίσης με έντονη γραφή στους πίνακες 2.5.3 και 2.5.4) είναι κοντά στο μέσο όρο των ακριβών κρίσιμων σημείων για μεγέθη δείγματος που κυμαίνονται από  $n = 30$  έως  $n = 500$ . Πράγματι, για  $d = q95$  και βαριά ουρά, το κρίσιμο σημείο για κάθε μέγεθος δείγματος για  $a = 5\%$  είναι ίσο με 0.626665 που είναι στη μέση περίπου μεταξύ της τιμής 0.5473111 (ακριβές κρίσιμο σημείο για  $n = 500$ ) έως το 0.7066 (ακριβές κρίσιμο σημείο για  $n = 30$ ). Η καταλληλότητα της προτεινόμενης ελεγχουσυνάρτησης με τα κρίσιμα σημεία όπως στον πίνακα 2.5.2 που εξαρτώνται μόνο από την τιμή του  $d$  και όχι από το μέγεθος του δείγματος, θα εμφανιστεί μέσω μιας σειράς προσομοιώσεων τόσο για το μέγεθος όσο και για την ισχύ στο επόμενο κεφάλαιο.

**Πίνακας 2.5.2. Κρίσιμα σημεία για τον έλεγχο καλής προσαρμογής εκθετικότητας**

<b>ΒΑΡΙΑ ΟΥΡΑ</b>			
$\alpha$	$d = q95$	$d = q90$	τυπ. σημείο
5%	$1.645*0.077+0.5=0.626665$	$1.645*0.060+0.5=0.5987$	1.645
10%	$1.28*0.077+0.5=0.5986$	$1.28*0.060+0.5=0.5768$	1.28
<b>ΕΛΑΦΡΙΑ ΟΥΡΑ</b>			
5%	$-1.645*0.077+0.5=0.373335$	$-1.645*0.060+0.5=0.4013$	-1.645
10%	$-1.28*0.077+0.5=0.4014$	$-1.28*0.060+0.5=0.4232$	-1.28

(Πηγή: Karagrigoriou, A., Papatotiriou, G., Vonta, I. (2021))



**Πίνακας 2.5.3. Κρίσιμα σημεία για τον έλεγχο καλής προσαρμογής εκθετικότητας (βαριά ουρά)***a = 5%*

<i>n</i>	<i>d = q95</i>	<i>d = q90</i>	<i>τυποπ. σημείο</i>
<i>μη τυποπ. σημείο</i>	<b>0.626665</b>	<b>0.5987</b>	
500	0.5473111 (0.547705)	0.5367998 (0.537177)	
100	0.6081175 (0.60857)	0.5836378 (0.5830725)	
75	0.6258382 (0.626665)	0.59744 (0.597384)	1.645
50	0.6544912 (0.65792)	0.6182006 (0.619756)	
30	0.7066 (0.71056)	0.6537647 (0.656933)	

*a = 10%*

<i>μη τυποπ. σημείο</i>	<b>0.5986</b>	<b>0.5768</b>	
500	0.5372985 (0.53712)	0.5290265 (0.528928)	
100	0.5849879 (0.58448)	0.565686 (0.56464)	
75	0.5974592 (0.59856)	0.575677 (0.575776)	1.28
50	0.6195537 (0.62288)	0.5921176 (0.593184)	
30	0.659948 (0.66384)	0.6195243 (0.622112)	

(Πηγή: Karagrigoriou, A., Papasotiriou, G., Vonta, I. (2021))

**Σημείωση 2.5.1:** Οι τιμές εντός παρενθέσεων του πίνακα 2.5.3 προέκυψαν χρησιμοποιώντας τις τιμές του πίνακα 2.5.1 για την τυπική απόκλιση.

**Πίνακας 2.5.4. Κρίσιμα σημεία για τον έλεγχο καλής προσαρμογής εκθετικότητας (ελαφριά ουρά)**

<i>a = 5%</i>			
<i>n</i>	<i>d = q95</i>	<i>d = q90</i>	<i>τυποπ. σημείο</i>
<i>μη τυποπ. σημείο</i>	<b>0.373335</b>	<b>0.4013</b>	
500	0.452295	0.462823	
100	0.39143	0.4169275	
75	0.373335	0.402616	-1.645
50	0.34208	0.380244	
30	0.28944	0.343067	
<i>a = 10%</i>			
<i>μη τυποπ. σημείο</i>	<b>0.4014</b>	<b>0.4232</b>	
500	0.46288	0.471072	
100	0.41552	0.43536	
75	0.40144	0.424224	-1.28
50	0.37712	0.406816	
30	0.33616	0.377888	

**Σημείωση 2.5.2:** Οι τιμές του πίνακα 2.5.4 προέκυψαν χρησιμοποιώντας τις τιμές του πίνακα 2.5.1 για την τυπική απόκλιση.

Πηγή (ξενόγλωσση):

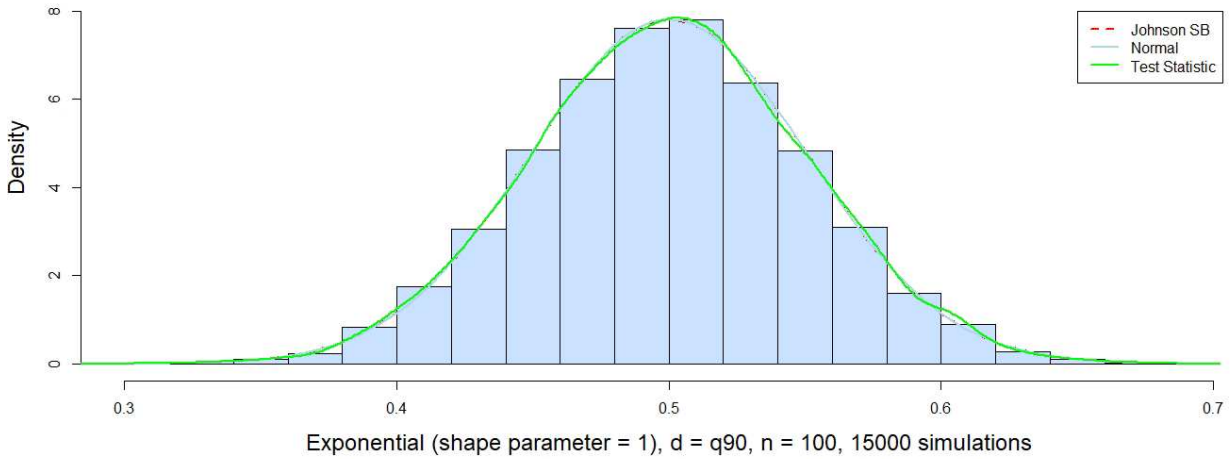
Karagrigoriou, A., Papasotiriou, G., Vonta, I. (2021), *Goodness of fit exponentiality test against light and heavy tail alternatives*, In “*Statistical Modeling of Reliability Structures and Industrial Processes*”, CRC Press, Taylor & Francis Group

## 2.6. Η κατανομή της Ελεγχουσυνάρτησης

Λόγω της μορφής της ελεγχουσυνάρτησης που δίνεται στην (2.4.1), η οποία είναι μέση τιμή (κάποιων)  $R_i$ , ανεξαρτήτως αν είμαστε ή όχι κάτω από την εκθετικότητα, περιμένουμε η ελεγχουσυνάρτηση να ακολουθεί ασυμπτωτικά κανονική κατανομή. Ωστόσο, για μεγέθη δείγματος που χρησιμοποιούμε συνήθως (τυπικά μεγέθη δείγματος), η κατανομή της ελεγχουσυνάρτησης δεν είναι πάντα κανονική, όπως θα φανεί στα παρακάτω σχήματα. Στην παρούσα εργασία προτείνεται μία κατανομή που ταιριάζει σ’ όλες τις περιπτώσεις που έχουν μελετηθεί.

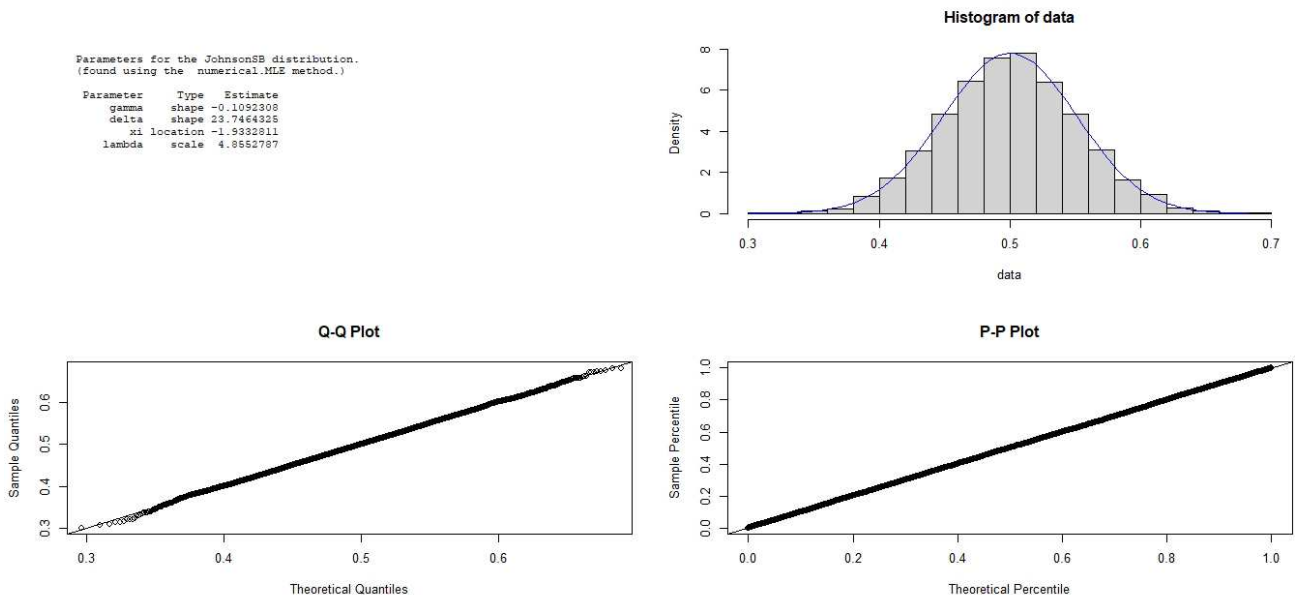
α) Εκθετική κατανομή (Κάτω από τη μηδενική υπόθεση)

Histogram - Nonparametric Estimate of pdf of Test Statistic, Normal, Johnson SB



Σχήμα 2.6.1. Εκθετική κατανομή - Ιστόγραμμα - σχήμα της ελεγχουσυνάρτησης για  $d = q90$ ,  $n = 100$ , Κανονική & Johnson SB Κατανομή

Η πυκνότητα της κανονικής κατανομής στο σχήμα 2.6.1 σχεδιάστηκε με μέση τιμή την μέση τιμή της ελεγχουσυνάρτησης (εδώ 0.4999394) και τυπική απόκλιση την τυπική απόκλιση της ελεγχουσυνάρτησης (εδώ: 0.05109458). Για να σχεδιαστεί η πυκνότητα της Johnson SB κατανομής, εκτιμήθηκαν πρώτα οι παράμετροί της. Η εκτίμηση των παραμέτρων της Johnson SB κατανομής, η πυκνότητά της καθώς και τα Q-Q και P-P διαγράμματα έγιναν με την R και φαίνονται στο σχήμα 2.6.2.

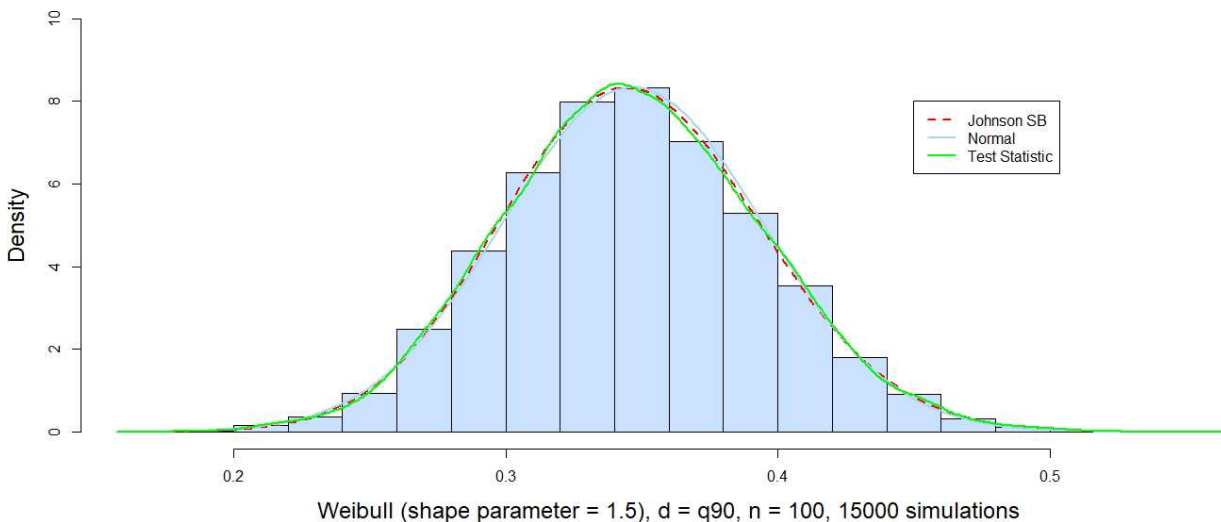


Σχήμα 2.6.2. Εκθετική κατανομή (παράμετρος σχήματος (shape) = 1),  $d = q90$ ,  $n = 100$ , 15000 προσομοιώσεις - Εκτίμηση παραμέτρων της Johnson SB κατανομής, ιστόγραμμα των τιμών της ελεγχουσυνάρτησης & πυκνότητα της Johnson SB κατανομής, Q-Q και P-P διαγράμματα

Με βάση τα σχήματα 2.6.1 & 2.6.2 η ελεγχοσυνάρτηση ακολουθεί κανονική, αλλά και Johnson SB κατανομή. Και σε όλες τις άλλες περιπτώσεις που έχουν μελετηθεί (εδώ δεν εμφανίζονται), κάτω από την εκθετικότητα, το συμπέρασμα είναι το ίδιο, η ελεγχοσυνάρτηση ακολουθεί κανονική, αλλά και Johnson SB κατανομή. Επιπλέον υπολογίσαμε την (υπερβάλλουσα) κύρτωση ((excess) kurtosis) και τη λοξότητα (skewness) των τιμών της ελεγχοσυνάρτησης και είναι  $-0.0009594067$  και  $-0.005878913$  αντίστοιχα, δηλαδή περίπου 0, όπως της κανονικής κατανομής. Επομένως, αφού η κύρτωση είναι περίπου 0, οι τιμές της ελεγχοσυνάρτησης εκτείνονται προς τα άκρα όπως περίπου της κανονικής κατανομής και αφού η λοξότητα είναι περίπου 0, οι ουρές της ελεγχοσυνάρτησης είναι όπως περίπου της κανονικής κατανομής.

β) Weibull ελαφριά ουρά (παράμετρος σχήματος (shape) = 1.5) (Εναλλακτική υπόθεση)

**Histogram - Nonparametric Estimate of pdf of Test Statistic, Normal, Johnson SB**



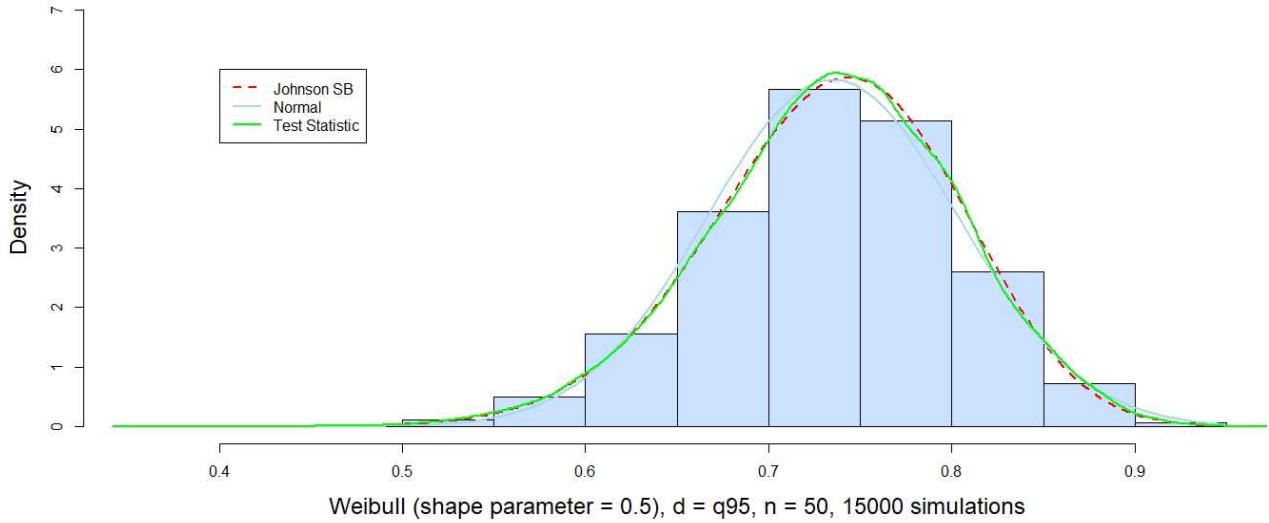
**Σχήμα 2.6.3.** Weibull με ελαφριά ουρά (παράμετρος σχήματος (shape) = 1.5),  $d = q90$ ,  $n = 100$  - Ιστόγραμμα - σχήμα της ελεγχοσυνάρτησης, Κανονική & Johnson SB Κατανομή

Με παρόμοιο τρόπο όπως στην εκθετική κατανομή, προέκυψε το σχήμα 2.6.3 για την κατανομή Weibull με ελαφριά ουρά (παράμετρος σχήματος (shape) = 1.5 και παράμετρος κλίμακας (scale) = 1). Εδώ η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της ελεγχοσυνάρτησης είναι  $0.346592$  και  $0.04780165$  αντίστοιχα, ενώ η (υπερβάλλουσα) κύρτωση και η λοξότητα είναι  $0.01707696$  και  $0.09283394$  αντίστοιχα. Βλέπουμε ότι οι τιμές της (υπερβάλλουσας) κύρτωσης και της λοξότητας είναι θετικές. Αφού η ελεγχοσυνάρτηση έχει θετική κύρτωση, οι τιμές της εκτείνονται προς τα άκρα περισσότερο από αυτές της κανονικής κατανομής και αφού έχει θετική λοξότητα, παρουσιάζει μικρή ουρά προς τα δεξιά ή απομακρυσμένες τιμές προς τα δεξιά.

Με βάση το σχήμα 2.6.3 μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η ελεγχοσυνάρτηση ακολουθεί Johnson SB κατανομή, αλλά και περίπου κανονική κατανομή, ενώ ισχύουν τα συμπεράσματα που αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο που απορρέουν από την κύρτωση και τη λοξότητα. Και σε όλες τις άλλες περιπτώσεις που έχουν μελετηθεί (εδώ δεν εμφανίζονται), κάτω από Weibull ελαφριά ουρά, το συμπέρασμα είναι το ίδιο, η ελεγχοσυνάρτηση ακολουθεί Johnson SB κατανομή, αλλά και περίπου κανονική κατανομή με τα συμπεράσματα που απορρέουν από την κύρτωση και τη λοξότητα.

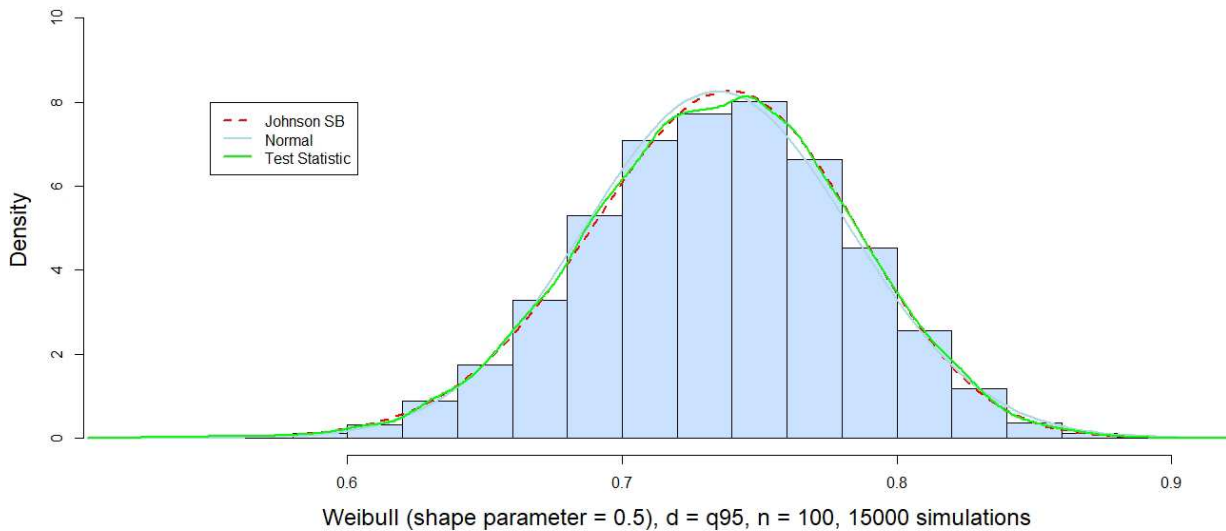
γ) Weibull βαριά ουρά (παράμετρος σχήματος (shape) = 0.5) (Εναλλακτική υπόθεση)  
 $n = 50$  &  $n = 100$

Histogram - Nonparametric Estimate of pdf of Test Statistic, Normal, Johnson SB



Σχήμα 2.6.4.α. Weibull με βαριά ουρά (παράμετρος σχήματος (shape) = 0.5),  $d = q95$ ,  $n = 50$  - Ιστόγραμμα - σχήμα της ελεγχουσυνάρτησης, Κανονική & Johnson SB Κατανομή

Histogram - Nonparametric Estimate of pdf of Test Statistic, Normal, Johnson SB



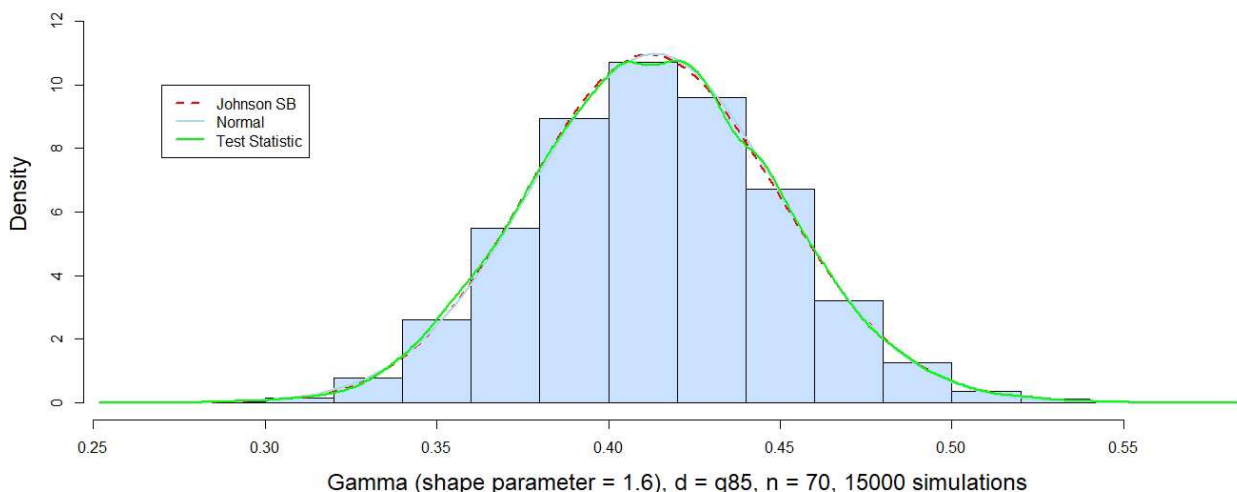
Σχήμα 2.6.4.β. Weibull με βαριά ουρά (παράμετρος σχήματος (shape) = 0.5),  $d = q95$ ,  $n = 100$  - Ιστόγραμμα - σχήμα της ελεγχουσυνάρτησης, Κανονική & Johnson SB Κατανομή

Με παρόμοιο τρόπο όπως στις περιπτώσεις  $\alpha$  και  $\beta$  (Εκθετική και Weibull ελαφριά ουρά), προέκυψαν τα σχήματα 2.6.4.α και 2.6.4.β για την κατανομή Weibull με βαριά ουρά (παράμετρος σχήματος (shape) = 0.5 και παράμετρος κλίμακας (scale) = 1). Εδώ η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της ελεγχουσυνάρτησης για το σχήμα 2.6.4.α είναι 0.7349113 και 0.06835904 αντίστοιχα και για το σχήμα 2.6.4.β είναι 0.7345843 και 0.04831066 αντίστοιχα, ενώ η (υπερβάλλουσα) κύρτωση και η λοξότητα για το σχήμα 2.6.4.α είναι 0.1455739 και -0.2593728 αντίστοιχα και για το σχήμα 2.6.4.β είναι 0.07802566 και -0.1748451 αντίστοιχα. Βλέπουμε ότι οι τιμές της (υπερβάλλουσας) κύρτωσης είναι θετικές, ενώ της λοξότητας αρνητικές. Αφού η ελεγχουσυνάρτηση έχει θετική κύρτωση, οι τιμές της εκτείνονται προς τα άκρα περισσότερο από αυτές της κανονικής κατανομής (περισσότερο στο σχήμα 2.6.4.α όπου η κύρτωση είναι μεγαλύτερη) και αφού έχει αρνητική λοξότητα, παρουσιάζει μικρή ουρά προς τα αριστερά ή απομακρυσμένες τιμές προς τα αριστερά (περισσότερο στο σχήμα 2.6.4.α όπου η λοξότητα κατ' απόλυτη τιμή είναι μεγαλύτερη).

Με βάση τα σχήματα 2.6.4.α και 2.6.4.β μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η ελεγχουσυνάρτηση ακολουθεί Johnson SB κατανομή, η οποία ταιριάζει καλύτερα από την κανονική κατανομή (ειδικά για μικρές τιμές του  $n$ , βλέπε σχήμα 2.6.4.α). Βεβαίως και η κανονική κατανομή ταιριάζει (ειδικά για μεγάλες τιμές του  $n$ ), αλλά ισχύουν τα συμπεράσματα που αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο που απορρέουν από την κύρτωση και τη λοξότητα. Και σε όλες τις άλλες περιπτώσεις που έχουν μελετηθεί (εδώ δεν εμφανίζονται), κάτω από Weibull βαριά ουρά, το συμπέρασμα είναι το ίδιο, η ελεγχουσυνάρτηση ακολουθεί Johnson SB κατανομή, αλλά και περίπου κανονική κατανομή (ειδικά για μεγάλα  $n$ ) με τα συμπεράσματα που απορρέουν από την κύρτωση και τη λοξότητα.

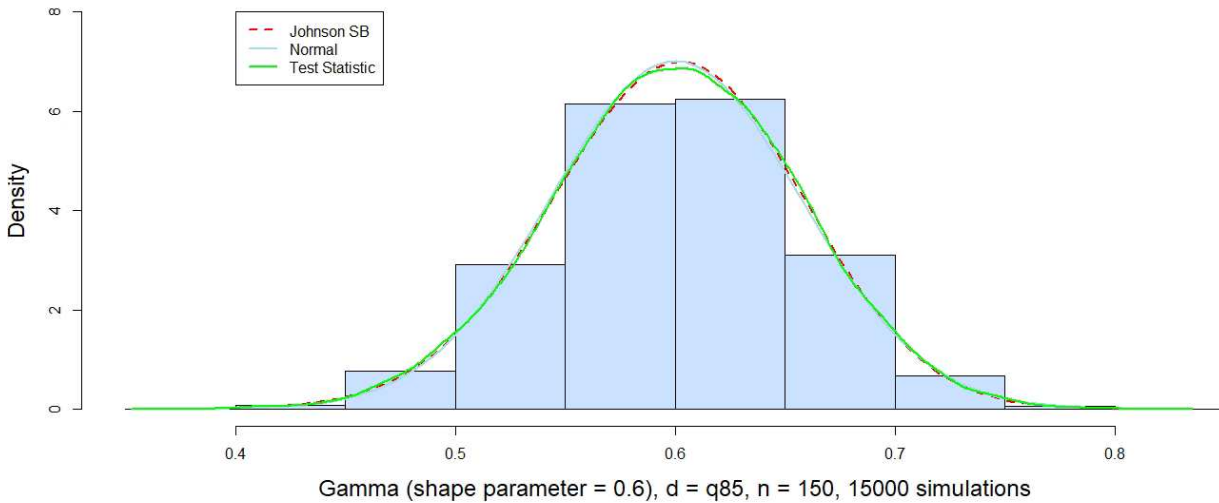
δ) Gamma ελαφριά ουρά (παράμετρος σχήματος (shape) = 1.6) (Εναλλακτική υπόθεση)  
& Gamma βαριά ουρά (παράμετρος σχήματος (shape) = 0.6) (Εναλλακτική υπόθεση)

**Histogram - Nonparametric Estimate of pdf of Test Statistic, Normal, Johnson SB**



**Σχήμα 2.6.5.α.** Gamma με ελαφριά ουρά (παράμετρος σχήματος (shape) = 1.6),  $d = q85$ ,  $n = 70$  - Ιστόγραμμα - σχήμα της ελεγχουσυνάρτησης, Κανονική & Johnson SB Κατανομή

Histogram - Nonparametric Estimate of pdf of Test Statistic, Normal, Johnson SB



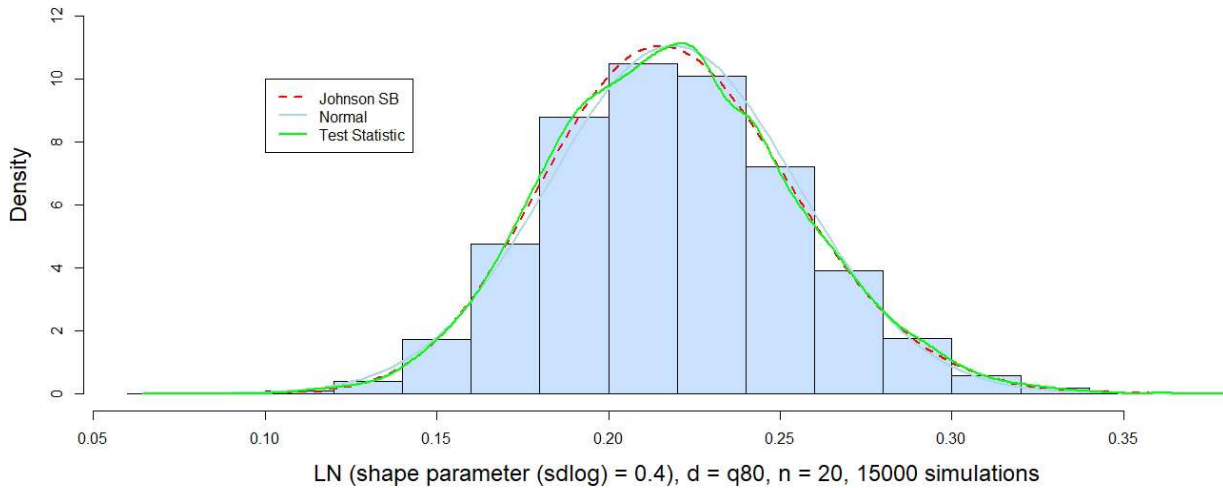
**Σχήμα 2.6.5.β.** Gamma με βαριά ουρά (παράμετρος σχήματος (shape) = 0.6),  $d = q85$ ,  $n = 150$  - Ιστόγραμμα - σχήμα της ελεγχουσυνάρτησης, Κανονική & Johnson SB Κατανομή

Παρόμοια όπως με τα προηγούμενα σχήματα αυτής της ενότητας προέκυψαν τα σχήματα 2.6.5.α και 2.6.5.β για την κατανομή Gamma με ελαφριά ουρά (παράμετρος σχήματος (shape) = 1.6 και παράμετρος κλίμακας (scale) = 1) και με βαριά ουρά (παράμετρος σχήματος (shape) = 0.6 και παράμετρος κλίμακας (scale) = 1). Εδώ η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της ελεγχουσυνάρτησης για το σχήμα 2.6.5.α είναι 0.4132566 και 0.03637321 αντίστοιχα και για το σχήμα 2.6.5.β είναι 0.6001166 και 0.05691612 αντίστοιχα, ενώ η (υπερβάλλουσα) κύρτωση και η λοξότητα για το σχήμα 2.6.5.α είναι 0.03576991 και 0.06826947 αντίστοιχα και για το σχήμα 2.6.5.β είναι -0.004391308 και -0.07354873 αντίστοιχα. Επομένως ισχύουν τα συμπεράσματα που έχουμε προαναφέρει για θετική κύρτωση και λοξότητα (σχήμα 2.6.5.α) και για κύρτωση περίπου 0 και για αρνητική λοξότητα (σχήμα 2.6.5.β).

Με βάση τα σχήματα 2.6.5.α και 2.6.5.β μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η ελεγχουσυνάρτηση ακολουθεί Johnson SB κατανομή, αλλά και περίπου κανονική κατανομή με τα συμπεράσματα που απορρέουν από την κύρτωση και τη λοξότητα κάθε φορά. Και σε όλες τις άλλες περιπτώσεις που έχουν μελετηθεί (εδώ δεν εμφανίζονται), κάτω από Gamma ελαφριά και βαριά ουρά, το συμπέρασμα είναι το ίδιο, η ελεγχουσυνάρτηση ακολουθεί Johnson SB κατανομή, αλλά και περίπου κανονική κατανομή με τα συμπεράσματα που απορρέουν από την κύρτωση και τη λοξότητα.

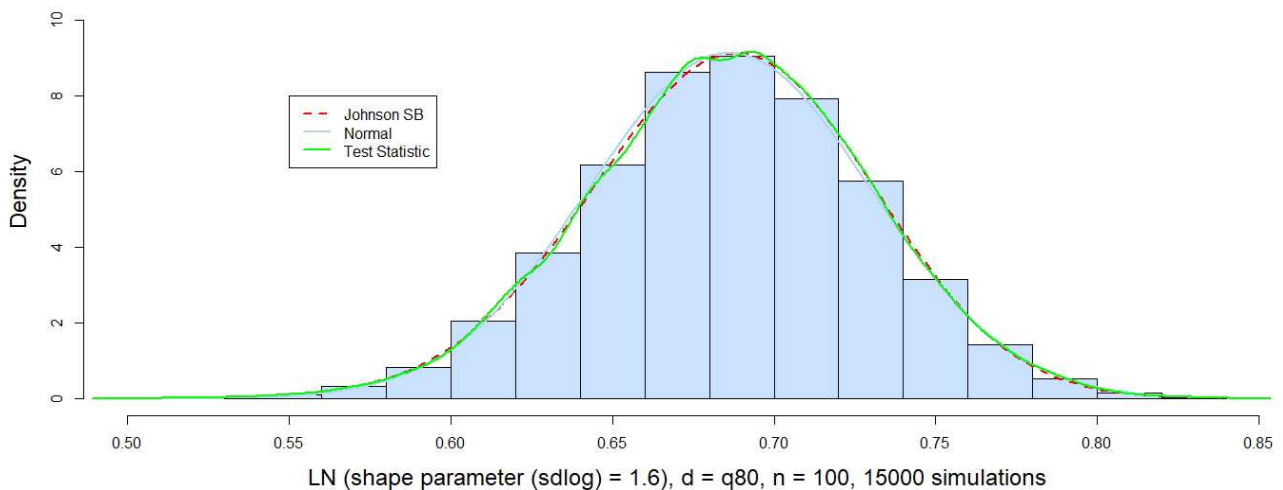
ε) LN ελαφριά ουρά (παράμετρος σχήματος (sdlog) = 0.4) (Εναλλακτική υπόθεση)  
 & LN βαριά ουρά (παράμετρος σχήματος (sdlog) = 1.6) (Εναλλακτική υπόθεση)

**Histogram - Nonparametric Estimate of pdf of Test Statistic, Normal, Johnson SB**



**Σχήμα 2.6.6.α.** LN με ελαφριά ουρά (παράμετρος σχήματος (sdlog) = 0.4),  $d = q80$ ,  $n = 20$  - Ιστόγραμμα - σχήμα της ελεγχοσυνάρτησης, Κανονική & Johnson SB Κατανομή

**Histogram - Nonparametric Estimate of pdf of Test Statistic, Normal, Johnson SB**



**Σχήμα 2.6.6.β.** LN με βαριά ουρά (παράμετρος σχήματος (sdlog) = 1.6),  $d = q80$ ,  $n = 100$  - Ιστόγραμμα - σχήμα της ελεγχοσυνάρτησης, Κανονική & Johnson SB Κατανομή



Όπως εργαστήκαμε προηγουμένως για την παραγωγή σχημάτων αυτής της ενότητας, εργαστήκαμε και για την παραγωγή των σχημάτων 2.6.6.α και 2.6.6.β για τη λογαριθμοκανονική LN κατανομή με ελαφριά ουρά (παράμετρος σχήματος (sdlog) = 0.4 και παράμετρος κλίμακας (scale) = 1) και με βαριά ουρά (παράμετρος σχήματος (sdlog) = 1.6 και παράμετρος κλίμακας (scale) = 1). Εδώ η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της ελεγχοσυνάρτησης για το σχήμα 2.6.6.α είναι 0.2186727 και 0.03606583 αντίστοιχα και για το σχήμα 2.6.6.β είναι 0.6861717 και 0.04368113 αντίστοιχα, ενώ η (υπερβάλλουσα) κύρτωση και η λοξότητα για το σχήμα 2.6.6.α είναι 0.003687514 και 0.1875808 αντίστοιχα και για το σχήμα 2.6.6.β είναι 0.07815982 και -0.1037471 αντίστοιχα. Επομένως ισχύουν τα συμπεράσματα που έχουμε προαναφέρει για κύρτωση περίπου 0 και θετική λοξότητα (σχήμα 2.6.6.α) και για θετική κύρτωση και αρνητική λοξότητα (σχήμα 2.6.6.β).

Με βάση τα σχήματα 2.6.6.α και 2.6.6.β μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η ελεγχοσυνάρτηση ακολουθεί Johnson SB κατανομή, η οποία ταιριάζει καλύτερα από την κανονική κατανομή, αλλά και περίπου κανονική κατανομή με τα συμπεράσματα που απορρέουν από την κύρτωση και τη λοξότητα κάθε φορά. Και σε όλες τις άλλες περιπτώσεις που έχουν μελετηθεί (εδώ δεν εμφανίζονται), κάτω από λογαριθμοκανονική LN ελαφριά και βαριά ουρά, το συμπέρασμα είναι το ίδιο, η ελεγχοσυνάρτηση ακολουθεί Johnson SB κατανομή, αλλά και περίπου κανονική κατανομή με τα συμπεράσματα που απορρέουν από την κύρτωση και τη λοξότητα.

Για τα σχήματα 2.6.1, 2.6.2, 2.6.3, 2.6.4.α, 2.6.4.β, 2.6.5.α και 2.6.5.β χρησιμοποιήθηκε  $d$  από την εκθετική κατανομή, ενώ για τα σχήματα 2.6.6.α και 2.6.6.β χρησιμοποιήθηκε  $d$  από την εκάστοτε εναλλακτική (λογαριθμοκανονική LN) κατανομή.



# Κεφάλαιο 3

## **ΜΕΓΕΘΟΣ ΚΑΙ ΙΣΧΥΣ ΤΟΥ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ**

*Exp(2) μηδενικό μοντέλο: Μέγεθος και ισχύς  
του προτεινόμενου ελέγχου καλής προσαρμογής  
για εκθετικότητα για  $n = 20, 50, 70, 100, 200$*

### 3.1. Το μέγεθος και η ισχύς του προτεινόμενου ελέγχου εκθετικότητας

Η απόδοση του προτεινόμενου ελέγχου εκθετικότητας έχει εξεταστεί ως προς το μέγεθος του ελέγχου (το οποίο είναι η (μέγιστη) πιθανότητα διάπραξης σφάλματος τύπου I, δηλαδή (εσφαλμένης) απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης, όταν αυτή είναι αληθής). Για το σκοπό αυτό πραγματοποιήθηκαν 15000 προσομοιώσεις για διάφορα μεγέθη δείγματος που κυμαίνονται από  $n = 20$  έως  $n = 200$  (συγκεκριμένα  $n = 20, 50, 70, 100, 200$ ) και για  $d$  ίσο με το 80ο, 85ο, 90ο και 95ο εκατοστημόριο της εκθετικής κατανομής. Θυμηθείτε ότι η κατανομή είναι αναλλοίωτη στην κλίμακα και επομένως η τιμή της επιλεγμένης παραμέτρου δεν έχει σημασία (εδώ επιλέξαμε κλίμακα 2). Τα αποτελέσματα για μεγέθη  $\alpha = 1\%$  και  $\alpha = 5\%$  δίδονται στους πίνακες 3.1-3.8 για το κάθε εκατοστημόριο στην πρώτη γραμμή πριν από την ισχύ.

Για την ισχύ του ελέγχου ( $=P(H_0|H_1)$ ) εξετάζουμε και τα δύο και ελαφριές και βαριές (ουρές) εναλλακτικές με πραγματοποίηση 15000 προσομοιώσεων για διάφορα μεγέθη δείγματος που κυμαίνονται από  $n = 20$  έως  $n = 200$  (συγκεκριμένα  $n = 20, 50, 70, 100, 200$ ). Πρώτα, εστιάζουμε στην κατανομή Weibull με παράμετρο σχήματος (shape parameter) που μετακινείται από την εκθετική προς οποιαδήποτε κατεύθυνση. Τιμές μεγαλύτερες από 1 αναφέρονται σε ελαφριάς ουράς εναλλακτικές (Πίνακες 3.1-3.2), ενώ τιμές μικρότερες από 1 σε βαριάς ουράς εναλλακτικές (Πίνακες 3.3-3.4). Η ισχύς αυξάνεται καθώς προχωράμε πιο μακριά δίνοντας αξιολογούμενα αποτελέσματα ακόμη και για εναλλακτικές κατανομές πολύ κοντά στην εκθετική κατανομή (μηδενική υπόθεση). Οι εντός παρενθέσεων αριθμοί είναι η ισχύς που προέκυψε χρησιμοποιώντας  $d$  ίσο με το 80ο, 85ο, 90ο και 95ο εκατοστημόριο της εκθετικής κατανομής, ενώ οι εκτός παρενθέσεων αριθμοί είναι η ισχύς που προέκυψε χρησιμοποιώντας  $d$  ίσο με τα προαναφερθέντα εκατοστημόρια της εναλλακτικής κατανομής (το ίδιο ισχύει και στους επόμενους πίνακες). Επαναλαμβάνουμε ότι η κατανομή είναι αναλλοίωτη στην κλίμακα. Για τις Weibull ελαφριές ουρές χρησιμοποιήθηκε κλίμακα 1 (είναι το ίδιο όμως σαν να χρησιμοποιήθηκε κλίμακα 2), ενώ για τις Weibull βαριές ουρές κλίμακα 2. Οι Πίνακες 3.5-3.6 και 3.7-3.8 παρέχουν την ισχύ όταν εστιάζουμε στις εναλλακτικές κατανομές Γάμμα και λογαριθμοκανονική. Οι εξεταζόμενες περιπτώσεις μετακινούνται ξανά από την εκθετική κατανομή προς κάθε κατεύθυνση. Πιο συγκεκριμένα, η απόδοση ισχύος διερευνάται για διάφορες τιμές ( $\alpha$ ) της παραμέτρου σχήματος (shape parameter) στην περίπτωση της κατανομής Γάμμα (ελαφριές ουρές για τιμές μεγαλύτερες από 1 και βαριές ουρές για τιμές μικρότερες από 1) και ( $\beta$ ) τον λογάριθμο της τυπικής απόκλισης (sdlog) στην περίπτωση της λογαριθμοκανονικής κατανομής (ελαφριές ουρές για τιμές μικρότερες από 1 και βαριές ουρές για τιμές μεγαλύτερες από 1). Για τις κατανομές Γάμμα και λογαριθμοκανονική χρησιμοποιήθηκε κλίμακα 2. Για τη λογαριθμοκανονική ισχύει ότι η ελεγχοσυνάρτηση είναι αναλλοίωτη στην κλίμακα όταν χρησιμοποιείται  $d$  από την εναλλακτική (λογαριθμοκανονική) κατανομή και όχι από την εκθετική. Όπως αναμενόταν, τα αποτελέσματα σε όλα τα εναλλακτικά σενάρια είναι πολύ παρόμοια λόγω του γεγονότος ότι η προτεινόμενη ελεγχοσυνάρτηση που δίνεται στην (2.4.1), είναι ασυμπτωτικά κανονική ανεξάρτητα από την υποκείμενη κατανομή. Η μόνη διαφορά είναι ότι η πυκνότητα της ελεγχοσυνάρτησης κάτω από την εκθετικότητα επικεντρώνεται στο 0,5, ενώ κάτω από όλες τις άλλες κατανομές, το κέντρο της είναι είτε μεγαλύτερο ή μικρότερο από 0,5, ανάλογα με το αν πρόκειται για βαριά ή ελαφριά ουρά αντίστοιχα (π.χ. βλ. σχήματα 2.4.1, 2.4.2, 2.4.3.α, 2.4.3.β, 2.4.4.α., 2.4.4.β, 2.4.5.α και 2.4.5.β). Η ισχύς αυξάνει καθώς το  $n$  μεγαλώνει, αυξάνει επίσης όταν χρησιμοποιείται  $d$  ίσο με το 80ο εκατοστημόριο (της εκθετικής ή της εναλλακτικής κατανομής), εκτός από την περίπτωση της λογαριθμοκανονικής βαριάς ουράς με  $d$  από την εναλλακτική (λογαριθμοκανονική) κατανομή. Καλύτερα είναι γενικά να χρησιμοποιείται  $d$  από την εκθετική κατανομή για ελαφριές ουρές, εκτός από την περίπτωση της κατανομής Γάμμα όπου είναι καλύτερα να χρησιμοποιείται  $d$  από την εναλλακτική κατανομή, ενώ για τις βαριές ουρές είναι γενικά καλύτερα να χρησιμοποιείται  $d$  από την εναλλακτική κατανομή, εκτός από την περίπτωση της Γάμμα, όπου είναι καλύτερα να χρησιμοποιείται  $d$  από την εκθετική κατανομή.

**Πίνακας 3.1. Μέγεθος για τον προτεινόμενο έλεγχο εκθετικότητας  
& Ισχύς του ελέγχου - Εναλλακτική: ελαφριές ουρές Wei 1.9-1.2**

$\alpha = 1\%$

Ελαφριά ουρά	Προτεινόμενος έλεγχος				
	20	50	70	100	200
<b>d = q95</b>	95° εκατοστημόριο				
	0.009	0.012	0.010	0.010	0.012
Wei 1.9	0.001 (0.195)	0.365 (0.667)	0.781 (0.806)	0.968 (0.902)	1.000 (0.991)
Wei 1.8	0.002 (0.170)	0.273 (0.600)	0.642 (0.759)	0.913 (0.873)	1.000 (0.988)
Wei 1.7	0.003 (0.140)	0.190 (0.531)	0.503 (0.688)	0.800 (0.819)	0.998 (0.978)
Wei 1.6	0.002 (0.112)	0.131 (0.421)	0.359 (0.587)	0.635 (0.735)	0.980 (0.948)
Wei 1.5	0.004 (0.088)	0.085 (0.326)	0.241 (0.465)	0.433 (0.611)	0.906 (0.887)
Wei 1.4	0.005 (0.067)	0.058 (0.224)	0.140 (0.336)	0.266 (0.453)	0.708 (0.757)
Wei 1.3	0.005 (0.044)	0.036 (0.138)	0.073 (0.207)	0.136 (0.283)	0.416 (0.527)
Wei 1.2	0.006 (0.029)	0.023 (0.071)	0.043 (0.105)	0.061 (0.134)	0.170 (0.265)
<b>d = q90</b>	90° εκατοστημόριο				
	0.009	0.009	0.009	0.012	0.010
Wei 1.9	0.100 (0.329)	0.798 (0.856)	0.964 (0.958)	0.998 (0.993)	1.000 (1.000)
Wei 1.8	0.075 (0.278)	0.681 (0.775)	0.902 (0.919)	0.991 (0.981)	1.000 (1.000)
Wei 1.7	0.059 (0.217)	0.540 (0.683)	0.796 (0.847)	0.961 (0.954)	1.000 (1.000)
Wei 1.6	0.045 (0.164)	0.395 (0.549)	0.650 (0.729)	0.878 (0.891)	0.999 (0.997)
Wei 1.5	0.036 (0.121)	0.265 (0.407)	0.468 (0.582)	0.703 (0.767)	0.988 (0.981)
Wei 1.4	0.028 (0.086)	0.162 (0.271)	0.288 (0.408)	0.481 (0.573)	0.908 (0.912)
Wei 1.3	0.020 (0.057)	0.089 (0.156)	0.152 (0.237)	0.259 (0.348)	0.667 (0.702)
Wei 1.2	0.016 (0.034)	0.046 (0.078)	0.072 (0.108)	0.105 (0.156)	0.317 (0.368)
<b>d = q85</b>	85° εκατοστημόριο				
	0.010	0.008	0.010	0.010	0.012
Wei 1.9	0.247 (0.392)	0.916 (0.934)	0.988 (0.988)	1.000 (1.000)	1.000 (1.000)
Wei 1.8	0.189 (0.323)	0.839 (0.875)	0.957 (0.963)	0.998 (0.998)	1.000 (1.000)
Wei 1.7	0.142 (0.254)	0.722 (0.779)	0.890 (0.913)	0.988 (0.985)	1.000 (1.000)
Wei 1.6	0.104 (0.184)	0.570 (0.641)	0.769 (0.805)	0.944 (0.951)	1.000 (1.000)
Wei 1.5	0.077 (0.129)	0.401 (0.485)	0.589 (0.649)	0.826 (0.854)	0.995 (0.994)
Wei 1.4	0.052 (0.091)	0.257 (0.322)	0.385 (0.451)	0.614 (0.668)	0.946 (0.951)
Wei 1.3	0.034 (0.058)	0.141 (0.184)	0.203 (0.255)	0.358 (0.411)	0.743 (0.759)
Wei 1.2	0.024 (0.034)	0.069 (0.092)	0.091 (0.113)	0.153 (0.184)	0.367 (0.393)
<b>d = q80</b>	80° εκατοστημόριο				
	0.011	0.009	0.010	0.010	0.012
Wei 1.9	0.370 (0.452)	0.956 (0.965)	0.995 (0.995)	1.000 (1.000)	1.000 (1.000)
Wei 1.8	0.293 (0.371)	0.903 (0.917)	0.979 (0.982)	0.999 (0.999)	1.000 (1.000)
Wei 1.7	0.218 (0.286)	0.806 (0.838)	0.935 (0.947)	0.993 (0.993)	1.000 (1.000)
Wei 1.6	0.157 (0.209)	0.670 (0.703)	0.841 (0.852)	0.968 (0.968)	1.000 (1.000)
Wei 1.5	0.112 (0.143)	0.491 (0.540)	0.674 (0.709)	0.871 (0.887)	0.998 (0.997)
Wei 1.4	0.075 (0.099)	0.327 (0.359)	0.467 (0.502)	0.681 (0.708)	0.968 (0.969)
Wei 1.3	0.045 (0.059)	0.179 (0.204)	0.249 (0.287)	0.411 (0.441)	0.809 (0.811)
Wei 1.2	0.030 (0.033)	0.086 (0.098)	0.108 (0.125)	0.173 (0.192)	0.422 (0.444)

**Πίνακας 3.2. Μέγεθος για τον προτεινόμενο έλεγχο εκθετικότητας  
& Ισχύς του ελέγχου - Εναλλακτική: ελαφριές ουρές Wei 1.9-1.2**

$\alpha = 5\%$

Ελαφριά ουρά	Προτεινόμενος έλεγχος				
	20	50	70	100	200
<b>d = q95</b>	95° εκατοστημόριο				
	0.049	0.050	0.048	0.053	0.054
Wei 1.9	0.216 (0.543)	0.887 (0.830)	0.986 (0.905)	0.999 (0.955)	1.000 (0.997)
Wei 1.8	0.180 (0.498)	0.803 (0.788)	0.957 (0.881)	0.996 (0.943)	1.000 (0.996)
Wei 1.7	0.148 (0.442)	0.695 (0.740)	0.898 (0.845)	0.979 (0.920)	1.000 (0.993)
Wei 1.6	0.126 (0.379)	0.562 (0.662)	0.795 (0.784)	0.934 (0.879)	1.000 (0.984)
Wei 1.5	0.111 (0.316)	0.431 (0.574)	0.656 (0.700)	0.815 (0.804)	0.992 (0.964)
Wei 1.4	0.091 (0.247)	0.304 (0.463)	0.484 (0.585)	0.642 (0.687)	0.938 (0.906)
Wei 1.3	0.074 (0.192)	0.208 (0.337)	0.318 (0.438)	0.433 (0.525)	0.766 (0.760)
Wei 1.2	0.063 (0.131)	0.130 (0.213)	0.192 (0.277)	0.243 (0.324)	0.471 (0.523)
<b>d = q90</b>	90° εκατοστημόριο				
	0.051	0.050	0.049	0.055	0.050
Wei 1.9	0.555 (0.670)	0.979 (0.965)	0.999 (0.993)	1.000 (0.999)	1.000 (1.000)
Wei 1.8	0.475 (0.603)	0.950 (0.931)	0.993 (0.983)	1.000 (0.998)	1.000 (1.000)
Wei 1.7	0.384 (0.529)	0.891 (0.889)	0.973 (0.961)	0.998 (0.992)	1.000 (1.000)
Wei 1.6	0.312 (0.442)	0.797 (0.805)	0.922 (0.909)	0.986 (0.974)	1.000 (0.999)
Wei 1.5	0.245 (0.361)	0.659 (0.695)	0.820 (0.829)	0.936 (0.928)	0.999 (0.997)
Wei 1.4	0.185 (0.277)	0.491 (0.562)	0.657 (0.689)	0.817 (0.823)	0.984 (0.978)
Wei 1.3	0.130 (0.205)	0.331 (0.399)	0.447 (0.510)	0.609 (0.642)	0.893 (0.883)
Wei 1.2	0.098 (0.138)	0.194 (0.240)	0.261 (0.307)	0.348 (0.397)	0.606 (0.625)
<b>d = q85</b>	85° εκατοστημόριο				
	0.051	0.047	0.048	0.053	0.053
Wei 1.9	0.717 (0.763)	0.994 (0.991)	1.000 (0.999)	1.000 (1.000)	1.000 (1.000)
Wei 1.8	0.638 (0.690)	0.979 (0.976)	0.998 (0.997)	1.000 (1.000)	1.000 (1.000)
Wei 1.7	0.531 (0.604)	0.944 (0.944)	0.990 (0.986)	0.999 (0.998)	1.000 (1.000)
Wei 1.6	0.438 (0.511)	0.875 (0.876)	0.961 (0.958)	0.995 (0.992)	1.000 (1.000)
Wei 1.5	0.346 (0.402)	0.760 (0.769)	0.891 (0.892)	0.962 (0.964)	1.000 (0.999)
Wei 1.4	0.254 (0.315)	0.589 (0.622)	0.755 (0.764)	0.874 (0.878)	0.993 (0.991)
Wei 1.3	0.180 (0.223)	0.405 (0.446)	0.541 (0.565)	0.675 (0.697)	0.931 (0.927)
Wei 1.2	0.125 (0.141)	0.240 (0.262)	0.322 (0.349)	0.395 (0.428)	0.663 (0.677)
<b>d = q80</b>	80° εκατοστημόριο				
	0.051	0.049	0.048	0.049	0.052
Wei 1.9	0.785 (0.803)	0.997 (0.997)	1.000 (1.000)	1.000 (1.000)	1.000 (1.000)
Wei 1.8	0.708 (0.733)	0.989 (0.989)	0.999 (0.998)	1.000 (1.000)	1.000 (1.000)
Wei 1.7	0.603 (0.649)	0.965 (0.966)	0.994 (0.993)	1.000 (1.000)	1.000 (1.000)
Wei 1.6	0.499 (0.544)	0.912 (0.908)	0.973 (0.974)	0.998 (0.997)	1.000 (1.000)
Wei 1.5	0.397 (0.426)	0.812 (0.816)	0.917 (0.919)	0.979 (0.980)	1.000 (1.000)
Wei 1.4	0.295 (0.328)	0.650 (0.667)	0.796 (0.793)	0.913 (0.913)	0.997 (0.997)
Wei 1.3	0.207 (0.226)	0.460 (0.481)	0.582 (0.602)	0.733 (0.744)	0.953 (0.951)
Wei 1.2	0.140 (0.145)	0.270 (0.289)	0.343 (0.367)	0.450 (0.463)	0.720 (0.723)

**Πίνακας 3.3. Μέγεθος για τον προτεινόμενο έλεγχο εκθετικότητας  
& Ισχύς του ελέγχου - Εναλλακτική: βαριές ουρές Wei 0.9-0.2**

$\alpha = 1\%$

Βαριά ουρά	Προτεινόμενος έλεγχος				
	20	50	70	100	200
<b>d = q95</b>	95° εκατοστημόριο				
	0.009	0.012	0.010	0.010	0.012
Wei 0.9	0.027 (0.011)	0.043 (0.022)	0.048 (0.025)	0.059 (0.033)	0.110 (0.080)
Wei 0.8	0.050 (0.015)	0.117 (0.050)	0.156 (0.080)	0.215 (0.125)	0.422 (0.336)
Wei 0.7	0.100 (0.021)	0.265 (0.129)	0.357 (0.216)	0.474 (0.355)	0.788 (0.775)
Wei 0.6	0.197 (0.032)	0.478 (0.299)	0.605 (0.486)	0.756 (0.703)	0.959 (0.980)
Wei 0.5	0.333 (0.060)	0.690 (0.581)	0.818 (0.799)	0.917 (0.946)	0.996 (1.000)
Wei 0.4	0.505 (0.127)	0.844 (0.853)	0.927 (0.967)	0.981 (0.997)	1.000 (1.000)
Wei 0.3	0.697 (0.280)	0.937 (0.978)	0.981 (0.999)	0.996 (1.000)	1.000 (1.000)
Wei 0.2	0.840 (0.536)	0.978 (0.999)	0.995 (1.000)	0.999 (1.000)	1.000 (1.000)
<b>d = q90</b>	90° εκατοστημόριο				
	0.009	0.009	0.009	0.012	0.010
Wei 0.9	0.027 (0.016)	0.044 (0.033)	0.056 (0.044)	0.077 (0.057)	0.131 (0.116)
Wei 0.8	0.065 (0.039)	0.143 (0.098)	0.197 (0.149)	0.288 (0.234)	0.537 (0.491)
Wei 0.7	0.146 (0.073)	0.344 (0.261)	0.460 (0.392)	0.625 (0.578)	0.900 (0.902)
Wei 0.6	0.279 (0.154)	0.611 (0.530)	0.746 (0.728)	0.891 (0.887)	0.993 (0.997)
Wei 0.5	0.447 (0.300)	0.819 (0.817)	0.927 (0.937)	0.981 (0.990)	1.000 (1.000)
Wei 0.4	0.637 (0.524)	0.942 (0.967)	0.984 (0.996)	0.998 (1.000)	1.000 (1.000)
Wei 0.3	0.801 (0.754)	0.987 (0.998)	0.998 (1.000)	1.000 (1.000)	1.000 (1.000)
Wei 0.2	0.905 (0.929)	0.998 (1.000)	1.000 (1.000)	1.000 (1.000)	1.000 (1.000)
<b>d = q85</b>	85° εκατοστημόριο				
	0.010	0.008	0.010	0.010	0.012
Wei 0.9	0.029 (0.026)	0.046 (0.041)	0.064 (0.058)	0.085 (0.071)	0.157 (0.149)
Wei 0.8	0.081 (0.060)	0.163 (0.136)	0.243 (0.215)	0.332 (0.302)	0.619 (0.589)
Wei 0.7	0.187 (0.134)	0.400 (0.356)	0.552 (0.512)	0.708 (0.684)	0.947 (0.951)
Wei 0.6	0.346 (0.268)	0.692 (0.650)	0.828 (0.835)	0.941 (0.941)	0.998 (0.999)
Wei 0.5	0.552 (0.478)	0.887 (0.894)	0.967 (0.974)	0.994 (0.997)	1.000 (1.000)
Wei 0.4	0.735 (0.709)	0.974 (0.987)	0.996 (0.999)	1.000 (1.000)	1.000 (1.000)
Wei 0.3	0.882 (0.884)	0.998 (0.999)	1.000 (1.000)	1.000 (1.000)	1.000 (1.000)
Wei 0.2	0.957 (0.976)	1.000 (1.000)	1.000 (1.000)	1.000 (1.000)	1.000 (1.000)
<b>d = q80</b>	80° εκατοστημόριο				
	0.011	0.009	0.010	0.010	0.012
Wei 0.9	0.031 (0.028)	0.050 (0.046)	0.064 (0.062)	0.085 (0.075)	0.184 (0.178)
Wei 0.8	0.085 (0.071)	0.181 (0.160)	0.260 (0.246)	0.356 (0.334)	0.681 (0.667)
Wei 0.7	0.196 (0.163)	0.436 (0.410)	0.599 (0.573)	0.747 (0.732)	0.970 (0.971)
Wei 0.6	0.375 (0.326)	0.736 (0.717)	0.870 (0.875)	0.961 (0.958)	0.999 (1.000)
Wei 0.5	0.587 (0.556)	0.922 (0.928)	0.981 (0.985)	0.998 (0.998)	1.000 (1.000)
Wei 0.4	0.784 (0.779)	0.986 (0.994)	0.998 (1.000)	1.000 (1.000)	1.000 (1.000)
Wei 0.3	0.920 (0.924)	0.999 (1.000)	1.000 (1.000)	1.000 (1.000)	1.000 (1.000)
Wei 0.2	0.978 (0.988)	1.000 (1.000)	1.000 (1.000)	1.000 (1.000)	1.000 (1.000)

**Πίνακας 3.4. Μέγεθος για τον προτεινόμενο έλεγχο εκθετικότητας  
& Ισχύς του ελέγχου - Εναλλακτική: βαριές ουρές Wei 0.9-0.2**

$\alpha = 5\%$

Βαριά ουρά	Προτεινόμενος έλεγχος				
	20	50	70	100	200
<b>d = q95</b>	95° εκατοστημόριο				
	0.049	0.050	0.048	0.053	0.054
Wei 0.9	0.103 (0.066)	0.140 (0.103)	0.150 (0.116)	0.192 (0.149)	0.271 (0.236)
Wei 0.8	0.176 (0.102)	0.280 (0.201)	0.344 (0.268)	0.441 (0.376)	0.641 (0.617)
Wei 0.7	0.291 (0.156)	0.487 (0.393)	0.580 (0.519)	0.706 (0.688)	0.907 (0.934)
Wei 0.6	0.435 (0.248)	0.690 (0.640)	0.785 (0.801)	0.892 (0.921)	0.986 (0.997)
Wei 0.5	0.590 (0.407)	0.836 (0.870)	0.914 (0.958)	0.968 (0.993)	0.999 (1.000)
Wei 0.4	0.728 (0.610)	0.928 (0.976)	0.967 (0.998)	0.992 (1.000)	1.000 (1.000)
Wei 0.3	0.850 (0.810)	0.971 (0.999)	0.991 (1.000)	0.999 (1.000)	1.000 (1.000)
Wei 0.2	0.924 (0.949)	0.991 (1.000)	0.998 (1.000)	1.000 (1.000)	1.000 (1.000)
<b>d = q90</b>	90° εκατοστημόριο				
	0.051	0.050	0.049	0.055	0.050
Wei 0.9	0.110 (0.091)	0.154 (0.135)	0.177 (0.157)	0.221 (0.189)	0.316 (0.300)
Wei 0.8	0.206 (0.167)	0.342 (0.302)	0.419 (0.385)	0.526 (0.494)	0.755 (0.752)
Wei 0.7	0.352 (0.288)	0.591 (0.559)	0.697 (0.674)	0.822 (0.821)	0.968 (0.976)
Wei 0.6	0.524 (0.452)	0.809 (0.804)	0.888 (0.912)	0.964 (0.973)	0.999 (1.000)
Wei 0.5	0.693 (0.654)	0.926 (0.953)	0.976 (0.989)	0.994 (0.999)	1.000 (1.000)
Wei 0.4	0.824 (0.834)	0.980 (0.995)	0.996 (1.000)	0.999 (1.000)	1.000 (1.000)
Wei 0.3	0.913 (0.947)	0.996 (1.000)	0.999 (1.000)	1.000 (1.000)	1.000 (1.000)
Wei 0.2	0.964 (0.991)	1.000 (1.000)	1.000 (1.000)	1.000 (1.000)	1.000 (1.000)
<b>d = q85</b>	85° εκατοστημόριο				
	0.051	0.047	0.048	0.053	0.053
Wei 0.9	0.115 (0.104)	0.164 (0.152)	0.187 (0.174)	0.233 (0.212)	0.354 (0.345)
Wei 0.8	0.223 (0.199)	0.375 (0.358)	0.457 (0.444)	0.574 (0.551)	0.820 (0.811)
Wei 0.7	0.382 (0.350)	0.645 (0.638)	0.759 (0.748)	0.868 (0.871)	0.985 (0.989)
Wei 0.6	0.574 (0.539)	0.866 (0.863)	0.932 (0.944)	0.983 (0.986)	1.000 (1.000)
Wei 0.5	0.748 (0.741)	0.961 (0.972)	0.990 (0.995)	0.999 (1.000)	1.000 (1.000)
Wei 0.4	0.872 (0.896)	0.991 (0.998)	0.999 (1.000)	1.000 (1.000)	1.000 (1.000)
Wei 0.3	0.949 (0.972)	0.999 (1.000)	1.000 (1.000)	1.000 (1.000)	1.000 (1.000)
Wei 0.2	0.983 (0.996)	1.000 (1.000)	1.000 (1.000)	1.000 (1.000)	1.000 (1.000)
<b>d = q80</b>	80° εκατοστημόριο				
	0.051	0.049	0.048	0.049	0.052
Wei 0.9	0.118 (0.108)	0.169 (0.164)	0.198 (0.189)	0.238 (0.227)	0.378 (0.376)
Wei 0.8	0.231 (0.217)	0.398 (0.387)	0.493 (0.489)	0.605 (0.589)	0.857 (0.848)
Wei 0.7	0.402 (0.389)	0.682 (0.683)	0.800 (0.792)	0.896 (0.899)	0.993 (0.994)
Wei 0.6	0.605 (0.583)	0.895 (0.892)	0.954 (0.961)	0.990 (0.991)	1.000 (1.000)
Wei 0.5	0.782 (0.787)	0.977 (0.982)	0.995 (0.997)	0.999 (1.000)	1.000 (1.000)
Wei 0.4	0.904 (0.921)	0.996 (0.999)	1.000 (1.000)	1.000 (1.000)	1.000 (1.000)
Wei 0.3	0.968 (0.980)	1.000 (1.000)	1.000 (1.000)	1.000 (1.000)	1.000 (1.000)
Wei 0.2	0.993 (0.998)	1.000 (1.000)	1.000 (1.000)	1.000 (1.000)	1.000 (1.000)



**Πίνακας 3.5. Μέγεθος για τον προτεινόμενο έλεγχο εκθετικότητας  
& Ισχύς του ελέγχου - Εναλλακτική: ελαφριές ουρές  
Gamma 1.6, 1.8, 2.0, LN 0.8, 0.6, 0.4**

$\alpha = 1\%$

Ελαφριά ουρά	Προτεινόμενος έλεγχος				
	20	50	70	100	200
<b>d = q95</b>	95° εκατοστημόριο				
	0.009	0.012	0.010	0.010	0.012
Gamma 1.6	0.006 (0.000)	0.025 (0.004)	0.059 (0.015)	0.099 (0.035)	0.279 (0.212)
Gamma 1.8	0.005 (0.000)	0.036 (0.005)	0.088 (0.028)	0.156 (0.081)	0.492 (0.484)
Gamma 2.0	0.004 (0.000)	0.050 (0.007)	0.134 (0.048)	0.255 (0.271)	0.708 (0.774)
LN 0.8	0.008 (0.000)	0.007 (0.000)	0.009 (0.006)	0.009 (0.043)	0.012 (0.572)
LN 0.6	0.003 (0.000)	0.057 (0.114)	0.166 (0.640)	0.342 (0.967)	0.852 (1.000)
LN 0.4	0.002 (0.000)	0.918 (0.994)	0.999 (1.000)	1.000 (1.000)	1.000 (1.000)
<b>d = q90</b>	90° εκατοστημόριο				
	0.009	0.009	0.009	0.012	0.010
Gamma 1.6	0.018 (0.003)	0.071 (0.035)	0.122 (0.079)	0.213 (0.158)	0.572 (0.590)
Gamma 1.8	0.021 (0.003)	0.117 (0.064)	0.221 (0.155)	0.370 (0.336)	0.833 (0.888)
Gamma 2.0	0.026 (0.003)	0.192 (0.121)	0.340 (0.297)	0.555 (0.583)	0.949 (0.986)
LN 0.8	0.010 (0.000)	0.021 (0.049)	0.031 (0.158)	0.044 (0.408)	0.124 (0.968)
LN 0.6	0.036 (0.021)	0.392 (0.782)	0.654 (0.978)	0.894 (1.000)	0.999 (1.000)
LN 0.4	0.450 (0.538)	1.000 (1.000)	1.000 (1.000)	1.000 (1.000)	1.000 (1.000)
<b>d = q85</b>	85° εκατοστημόριο				
	0.010	0.008	0.010	0.010	0.012
Gamma 1.6	0.031 (0.012)	0.125 (0.082)	0.188 (0.143)	0.331 (0.302)	0.704 (0.743)
Gamma 1.8	0.043 (0.015)	0.212 (0.172)	0.325 (0.290)	0.543 (0.559)	0.918 (0.957)
Gamma 2.0	0.059 (0.021)	0.336 (0.294)	0.496 (0.498)	0.747 (0.804)	0.985 (0.996)
LN 0.8	0.019 (0.009)	0.056 (0.186)	0.082 (0.354)	0.146 (0.689)	0.377 (0.991)
LN 0.6	0.130 (0.156)	0.730 (0.950)	0.904 (0.996)	0.993 (1.000)	1.000 (1.000)
LN 0.4	0.863 (0.908)	1.000 (1.000)	1.000 (1.000)	1.000 (1.000)	1.000 (1.000)
<b>d = q80</b>	80° εκατοστημόριο				
	0.011	0.009	0.010	0.010	0.012
Gamma 1.6	0.044 (0.024)	0.173 (0.134)	0.249 (0.218)	0.405 (0.395)	0.802 (0.843)
Gamma 1.8	0.065 (0.034)	0.293 (0.267)	0.429 (0.418)	0.645 (0.669)	0.962 (0.984)
Gamma 2.0	0.094 (0.054)	0.443 (0.432)	0.620 (0.642)	0.832 (0.883)	0.996 (0.999)
LN 0.8	0.029 (0.030)	0.117 (0.318)	0.174 (0.514)	0.291 (0.795)	0.679 (0.997)
LN 0.6	0.248 (0.326)	0.890 (0.982)	0.979 (0.999)	0.999 (1.000)	1.000 (1.000)
LN 0.4	0.965 (0.978)	1.000 (1.000)	1.000 (1.000)	1.000 (1.000)	1.000 (1.000)

**Πίνακας 3.6. Μέγεθος για τον προτεινόμενο έλεγχο εκθετικότητας  
& Ισχύς του ελέγχου - Εναλλακτική: ελαφριές ουρές  
Gamma 1.6, 1.8, 2.0, LN 0.8, 0.6, 0.4**

$\alpha = 5\%$

Ελαφριά ουρά	Προτεινόμενος έλεγχος				
	20	50	70	100	200
<b>d = q95</b>	95° εκατοστημόριο				
	0.049	0.050	0.048	0.053	0.054
Gamma 1.6	0.069 (0.019)	0.159 (0.091)	0.251 (0.181)	0.335 (0.282)	0.639 (0.673)
Gamma 1.8	0.071 (0.015)	0.225 (0.142)	0.360 (0.302)	0.482 (0.477)	0.834 (0.913)
Gamma 2.0	0.079 (0.014)	0.304 (0.217)	0.483 (0.462)	0.638 (0.706)	0.941 (0.989)
LN 0.8	0.039 (0.001)	0.045 (0.091)	0.055 (0.281)	0.053 (0.542)	0.069 (0.980)
LN 0.6	0.086 (0.046)	0.362 (0.875)	0.573 (0.994)	0.764 (1.000)	0.986 (1.000)
LN 0.4	0.524 (0.697)	1.000 (1.000)	1.000 (1.000)	1.000 (1.000)	1.000 (1.000)
<b>d = q90</b>	90° εκατοστημόριο				
	0.051	0.050	0.049	0.055	0.050
Gamma 1.6	0.120 (0.067)	0.290 (0.242)	0.396 (0.376)	0.545 (0.554)	0.842 (0.893)
Gamma 1.8	0.152 (0.088)	0.413 (0.393)	0.570 (0.585)	0.733 (0.791)	0.963 (0.990)
Gamma 2.0	0.190 (0.121)	0.550 (0.562)	0.721 (0.780)	0.874 (0.942)	0.994 (0.999)
LN 0.8	0.065 (0.060)	0.115 (0.436)	0.156 (0.684)	0.201 (0.899)	0.362 (0.999)
LN 0.6	0.303 (0.471)	0.814 (0.994)	0.939 (1.000)	0.992 (1.000)	1.000 (1.000)
LN 0.4	0.974 (0.993)	1.000 (1.000)	1.000 (1.000)	1.000 (1.000)	1.000 (1.000)
<b>d = q85</b>	85° εκατοστημόριο				
	0.051	0.047	0.048	0.053	0.053
Gamma 1.6	0.169 (0.121)	0.383 (0.361)	0.512 (0.521)	0.644 (0.674)	0.913 (0.950)
Gamma 1.8	0.225 (0.177)	0.535 (0.546)	0.705 (0.744)	0.836 (0.884)	0.988 (0.997)
Gamma 2.0	0.291 (0.244)	0.685 (0.724)	0.847 (0.896)	0.940 (0.977)	0.999 (1.000)
LN 0.8	0.109 (0.172)	0.226 (0.637)	0.320 (0.842)	0.411 (0.955)	0.705 (1.000)
LN 0.6	0.534 (0.730)	0.953 (0.999)	0.994 (1.000)	1.000 (1.000)	1.000 (1.000)
LN 0.4	0.998 (0.999)	1.000 (1.000)	1.000 (1.000)	1.000 (1.000)	1.000 (1.000)
<b>d = q80</b>	80° εκατοστημόριο				
	0.051	0.049	0.048	0.049	0.052
Gamma 1.6	0.199 (0.160)	0.452 (0.444)	0.581 (0.599)	0.733 (0.771)	0.954 (0.976)
Gamma 1.8	0.275 (0.241)	0.626 (0.643)	0.774 (0.812)	0.900 (0.937)	0.996 (0.999)
Gamma 2.0	0.356 (0.326)	0.770 (0.813)	0.899 (0.933)	0.972 (0.990)	1.000 (1.000)
LN 0.8	0.157 (0.258)	0.363 (0.738)	0.481 (0.895)	0.638 (0.977)	0.909 (1.000)
LN 0.6	0.681 (0.826)	0.988 (1.000)	0.999 (1.000)	1.000 (1.000)	1.000 (1.000)
LN 0.4	1.000 (1.000)	1.000 (1.000)	1.000 (1.000)	1.000 (1.000)	1.000 (1.000)

**Πίνακας 3.7. Μέγεθος για τον προτεινόμενο έλεγχο εκθετικότητας  
& Ισχύς του ελέγχου - Εναλλακτική: βαριές ουρές  
Gamma 0.8, 0.6, 0.4, LN 1.2, 1.4, 1.6**

$\alpha = 1\%$

Βαριά ουρά	Προτεινόμενος έλεγχος				
	20	50	70	100	200
<b>d = q95</b>	95° εκατοστημόριο				
	0.009	0.012	0.010	0.010	0.012
Gamma 0.8	0.024 (0.047)	0.044 (0.074)	0.048 (0.086)	0.056 (0.098)	0.115 (0.157)
Gamma 0.6	0.064 (0.142)	0.144 (0.252)	0.188 (0.290)	0.250 (0.325)	0.478 (0.490)
Gamma 0.4	0.171 (0.307)	0.373 (0.489)	0.491 (0.529)	0.616 (0.580)	0.896 (0.738)
LN 1.2	0.107 (0.000)	0.347 (0.000)	0.455 (0.000)	0.612 (0.000)	0.902 (0.000)
LN 1.4	0.216 (0.000)	0.587 (0.000)	0.725 (0.000)	0.854 (0.002)	0.988 (0.058)
LN 1.6	0.340 (0.000)	0.737 (0.005)	0.856 (0.024)	0.946 (0.097)	0.999 (0.661)
<b>d = q90</b>	90° εκατοστημόριο				
	0.009	0.009	0.009	0.012	0.010
Gamma 0.8	0.030 (0.058)	0.050 (0.080)	0.063 (0.096)	0.085 (0.119)	0.156 (0.189)
Gamma 0.6	0.093 (0.199)	0.204 (0.284)	0.280 (0.345)	0.389 (0.419)	0.671 (0.626)
Gamma 0.4	0.247 (0.410)	0.544 (0.546)	0.690 (0.616)	0.836 (0.705)	0.984 (0.868)
LN 1.2	0.117 (0.000)	0.284 (0.000)	0.397 (0.000)	0.568 (0.000)	0.876 (0.000)
LN 1.4	0.254 (0.000)	0.595 (0.006)	0.745 (0.013)	0.887 (0.036)	0.993 (0.200)
LN 1.6	0.399 (0.004)	0.791 (0.068)	0.906 (0.161)	0.974 (0.369)	1.000 (0.875)
<b>d = q85</b>	85° εκατοστημόριο				
	0.010	0.008	0.010	0.010	0.012
Gamma 0.8	0.039 (0.063)	0.059 (0.087)	0.084 (0.113)	0.105 (0.135)	0.205 (0.234)
Gamma 0.6	0.127 (0.217)	0.260 (0.317)	0.370 (0.405)	0.488 (0.489)	0.799 (0.731)
Gamma 0.4	0.336 (0.450)	0.668 (0.610)	0.821 (0.696)	0.924 (0.793)	0.997 (0.941)
LN 1.2	0.102 (0.000)	0.227 (0.000)	0.334 (0.000)	0.469 (0.001)	0.807 (0.002)
LN 1.4	0.253 (0.004)	0.576 (0.018)	0.743 (0.041)	0.877 (0.083)	0.993 (0.318)
LN 1.6	0.427 (0.026)	0.806 (0.151)	0.921 (0.313)	0.981 (0.520)	1.000 (0.932)
<b>d = q80</b>	80° εκατοστημόριο				
	0.011	0.009	0.010	0.010	0.012
Gamma 0.8	0.042 (0.058)	0.067 (0.089)	0.091 (0.120)	0.115 (0.146)	0.249 (0.274)
Gamma 0.6	0.142 (0.218)	0.302 (0.349)	0.432 (0.446)	0.549 (0.541)	0.875 (0.805)
Gamma 0.4	0.388 (0.465)	0.747 (0.658)	0.885 (0.761)	0.958 (0.851)	1.000 (0.973)
LN 1.2	0.077 (0.000)	0.172 (0.000)	0.252 (0.001)	0.357 (0.001)	0.709 (0.004)
LN 1.4	0.227 (0.008)	0.528 (0.032)	0.704 (0.065)	0.839 (0.114)	0.991 (0.409)
LN 1.6	0.409 (0.048)	0.793 (0.217)	0.918 (0.390)	0.979 (0.593)	1.000 (0.958)

**Πίνακας 3.8. Μέγεθος για τον προτεινόμενο έλεγχο εκθετικότητας  
& Ισχύς του ελέγχου - Εναλλακτική: βαριές ουρές  
Gamma 0.8, 0.6, 0.4, LN 1.2, 1.4, 1.6**

$\alpha = 5\%$

Βαριά ουρά	Προτεινόμενος έλεγχος				
	20	50	70	100	200
<b>d = q95</b>	95° εκατοστημόριο				
	0.049	0.050	0.048	0.053	0.054
Gamma 0.8	0.101 (0.141)	0.140 (0.176)	0.149 (0.197)	0.187 (0.230)	0.269 (0.305)
Gamma 0.6	0.196 (0.297)	0.321 (0.388)	0.381 (0.430)	0.473 (0.480)	0.687 (0.633)
Gamma 0.4	0.370 (0.470)	0.591 (0.581)	0.692 (0.625)	0.804 (0.676)	0.957 (0.804)
LN 1.2	0.348 (0.000)	0.583 (0.000)	0.687 (0.000)	0.812 (0.001)	0.964 (0.004)
LN 1.4	0.505 (0.001)	0.779 (0.022)	0.863 (0.044)	0.943 (0.116)	0.996 (0.430)
LN 1.6	0.624 (0.012)	0.871 (0.161)	0.941 (0.315)	0.980 (0.585)	1.000 (0.960)
<b>d = q90</b>	90° εκατοστημόριο				
	0.051	0.050	0.049	0.055	0.050
Gamma 0.8	0.120 (0.160)	0.168 (0.200)	0.193 (0.228)	0.238 (0.270)	0.353 (0.370)
Gamma 0.6	0.255 (0.340)	0.421 (0.451)	0.511 (0.504)	0.622 (0.581)	0.847 (0.769)
Gamma 0.4	0.481 (0.533)	0.760 (0.655)	0.851 (0.716)	0.935 (0.793)	0.996 (0.916)
LN 1.2	0.318 (0.002)	0.548 (0.006)	0.654 (0.004)	0.787 (0.008)	0.959 (0.013)
LN 1.4	0.508 (0.027)	0.806 (0.101)	0.891 (0.152)	0.960 (0.265)	0.999 (0.612)
LN 1.6	0.653 (0.107)	0.915 (0.403)	0.967 (0.571)	0.993 (0.788)	1.000 (0.987)
<b>d = q85</b>	85° εκατοστημόριο				
	0.051	0.047	0.048	0.053	0.053
Gamma 0.8	0.130 (0.161)	0.188 (0.221)	0.219 (0.248)	0.268 (0.295)	0.416 (0.429)
Gamma 0.6	0.293 (0.361)	0.494 (0.500)	0.603 (0.566)	0.707 (0.657)	0.922 (0.850)
Gamma 0.4	0.560 (0.564)	0.846 (0.720)	0.922 (0.787)	0.975 (0.864)	1.000 (0.967)
LN 1.2	0.270 (0.006)	0.482 (0.013)	0.580 (0.012)	0.712 (0.015)	0.932 (0.023)
LN 1.4	0.488 (0.058)	0.794 (0.165)	0.888 (0.229)	0.959 (0.346)	0.999 (0.689)
LN 1.6	0.660 (0.184)	0.926 (0.519)	0.974 (0.672)	0.995 (0.846)	1.000 (0.993)
<b>d = q80</b>	80° εκατοστημόριο				
	0.051	0.049	0.048	0.049	0.052
Gamma 0.8	0.139 (0.159)	0.205 (0.229)	0.244 (0.276)	0.291 (0.316)	0.462 (0.474)
Gamma 0.6	0.319 (0.371)	0.547 (0.538)	0.667 (0.620)	0.771 (0.710)	0.954 (0.898)
Gamma 0.4	0.615 (0.583)	0.894 (0.771)	0.960 (0.845)	0.988 (0.912)	1.000 (0.985)
LN 1.2	0.225 (0.012)	0.407 (0.020)	0.499 (0.020)	0.618 (0.020)	0.877 (0.031)
LN 1.4	0.461 (0.084)	0.768 (0.202)	0.874 (0.285)	0.944 (0.388)	0.998 (0.729)
LN 1.6	0.648 (0.235)	0.922 (0.576)	0.974 (0.728)	0.996 (0.872)	1.000 (0.994)

### 3.2. Συμπερασματικές παρατηρήσεις

Σ' αυτή την εργασία προτείνεται ένας έλεγχος καλής προσαρμογής που συγκρίνει την εκθετική κατανομή με εναλλακτικές βαριές ή ελαφριές ουρές. Η απόδοση του ελέγχου αξιολογείται μέσω προσομοιώσεων που δείχνουν εξαιρετικά αποτελέσματα καθιστώντας τον έλεγχο ένα σημαντικό εργαλείο για πρακτικούς σκοπούς στη θεωρία αξιοπιστίας όποτε η υποκείμενη κατανομή πρέπει να καθοριστεί για συμπερασματικούς σκοπούς.

Πηγή (ξενόγλωσση):

**Karagrigoriou, A., Papasotiriou, G., Vonta, I. (2021),** *Goodness of fit exponentiality test against light and heavy tail alternatives*, In “*Statistical Modeling of Reliability Structures and Industrial Processes*”, CRC Press, Taylor & Francis Group

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

**Πίνακας 1. Αντίστροφα ποσοστιαία σημεία της  $\chi^2$  κατανομής.**

Ο πίνακας δίνει τα σημεία  $\chi^2_{k,\alpha}$  τέτοια ώστε  $P(\chi^2_k \geq \chi^2_{k,\alpha}) = \alpha$

<b>Β.ε. /α</b>	<b>.995</b>	<b>.990</b>	<b>.975</b>	<b>.950</b>	<b>.050</b>	<b>.025</b>	<b>.010</b>	<b>.005</b>
1	0.00004	0.00016	0.00098	0.00393	3.84146	5.02389	6.63490	7.87944
2	0.01003	0.02010	0.05064	0.10259	5.99146	7.37776	9.21034	10.59663
3	0.07172	0.11483	0.21580	0.35185	7.81473	9.34840	11.34487	12.83816
4	0.20699	0.29711	0.48442	0.71072	9.48773	11.14329	13.27670	14.86026
5	0.41174	0.55430	0.83121	1.14548	11.07050	12.83250	15.08627	16.74960
6	0.67573	0.87209	1.23734	1.63538	12.59159	14.44938	16.81189	18.54758
7	0.98926	1.23904	1.68987	2.16735	14.06714	16.01276	18.47531	20.27774
8	1.34441	1.64650	2.17973	2.73264	15.50731	17.53455	20.09024	21.95495
9	1.73493	2.08790	2.70039	3.32511	16.91898	19.02277	21.66599	23.58935
10	2.15586	2.55821	3.24697	3.94030	18.30704	20.48318	23.20925	25.18818
11	2.60322	3.05348	3.81575	4.57481	19.67514	21.92005	24.72497	26.75685
12	3.07382	3.57057	4.40379	5.22603	21.02607	23.33666	26.21697	28.29952
13	3.56503	4.10692	5.00875	5.89186	22.36203	24.73560	27.68825	29.81947
14	4.07467	4.66043	5.62873	6.57063	23.68479	26.11895	29.14124	31.31935
15	4.60092	5.22935	6.26214	7.26094	24.99579	27.48839	30.57791	32.80132
16	5.14221	5.81221	6.90766	7.96165	26.29623	28.84535	31.99993	34.26719
17	5.69722	6.40776	7.56419	8.67176	27.58711	30.19101	33.40866	35.71847
18	6.26480	7.01491	8.23075	9.39046	28.86930	31.52638	34.80531	37.15645
19	6.84397	7.63273	8.90652	10.11701	30.14353	32.85233	36.19087	38.58226
20	7.43384	8.26040	9.59078	10.85081	31.41043	34.16961	37.56623	39.99685
21	8.03365	8.89720	10.28290	11.59131	32.67057	35.47888	38.93217	41.40106
22	8.64272	9.54249	10.98232	12.33801	33.92444	36.78071	40.28936	42.79565
23	9.26042	10.19572	11.68855	13.09051	35.17246	38.07563	41.63840	44.18128
24	9.88623	10.85636	12.40115	13.84843	36.41503	39.36408	42.97982	45.55851
25	10.51965	11.52398	13.11972	14.61141	37.65248	40.64647	44.31410	46.92789
26	11.16024	12.19815	13.84390	15.37916	38.88514	41.92317	45.64168	48.28988
27	11.80759	12.87850	14.57338	16.15140	40.11327	43.19451	46.96294	49.64492
28	12.46134	13.56471	15.30786	16.92788	41.33714	44.46079	48.27824	50.99338
29	13.12115	14.25645	16.04707	17.70837	42.55697	45.72229	49.58788	52.33562
30	13.78672	14.95346	16.79077	18.49266	43.77297	46.97924	50.89218	53.67196

(Πηγή: Απόστολος Δ. Μπατσίδης (2014))

**Πίνακας 2. Κρίσιμες τιμές του Kolmogorov στατιστικού**

Μέγεθος Δείγματος (n)	Επίπεδο σημαντικότητας α για δίπλευρο έλεγχο ή α/2 για μονόπλευρο			
	.20	.10	.05	.01
1	.900	.950	.975	.995
2	.684	.776	.842	.929
3	.565	.636	.708	.829
4	.493	.565	.624	.734
5	.447	.509	.563	.669
6	.410	.468	.519	.617
7	.381	.436	.483	.576
8	.358	.410	.454	.542
9	.339	.387	.430	.513
10	.323	.369	.409	.489
11	.308	.352	.391	.468
12	.296	.338	.375	.449
13	.285	.325	.361	.432
14	.275	.314	.349	.418
15	.266	.304	.338	.404
16	.258	.295	.327	.392
17	.250	.286	.318	.381
18	.244	.279	.309	.371
19	.237	.271	.301	.361
20	.232	.265	.294	.352
21	.226	.259	.287	.344
22	.221	.253	.281	.337
23	.216	.247	.275	.330
24	.212	.242	.269	.323
25	.208	.238	.264	.317
26	.204	.233	.259	.311
27	.200	.229	.254	.305
28	.197	.225	.250	.300
29	.193	.221	.246	.295
30	.190	.218	.242	.290
31	.187	.214	.238	.285
32	.184	.211	.234	.281
33	.182	.208	.231	.277
34	.179	.205	.227	.273
35	.177	.202	.224	.269
36	.174	.199	.221	.265
37	.172	.196	.218	.262
38	.170	.194	.215	.258
39	.168	.191	.213	.255
40	.165	.189	.210	.252
n > 40	$\frac{1.07}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.22}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.36}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.63}{\sqrt{n}}$

(Πηγή: Απόστολος Δ. Μπασιόδης (2014))

**Πίνακας 3. Κρίσιμες τιμές του Smirnov στατιστικού για δύο ισομεγέθη δείγματα**

Μέγεθος Δείγματος (n)	Επίπεδο σημαντικότητας α για δίπλευρο έλεγχο ή α/2 για μονόπλευρο			
	.20	.10	.05	.02
3	2/3	2/3		
4	3/4	3/4	3/4	
5	3/5	3/5	4/5	4/5
6	3/6	4/6	4/6	5/6
7	4/7	4/7	5/7	5/7
8	4/8	4/8	5/8	5/8
9	4/9	5/9	5/9	6/9
10	4/10	5/10	6/10	6/10
11	5/11	5/11	6/11	7/11
12	5/12	5/12	6/12	7/12
13	5/13	6/13	6/13	7/13
14	5/14	6/14	7/14	7/14
15	5/15	6/15	7/15	8/15
16	6/16	6/16	7/16	8/16
17	6/17	7/17	7/17	8/17
18	6/18	7/18	8/17	9/17
19	6/19	7/19	8/19	9/19
20	6/20	7/20	8/20	9/20
21	6/21	7/21	8/21	9/21
22	7/22	8/22	8/22	10/22
23	7/23	8/23	9/23	10/23
24	7/24	8/24	9/24	10/24
25	7/25	8/25	9/25	10/25
26	7/26	8/26	9/26	10/26
27	7/27	8/27	9/27	11/27
28	8/28	9/28	10/28	11/28
29	8/29	9/29	10/29	11/29
30	8/30	9/30	10/30	11/30
31	8/31	9/31	10/31	11/31
32	8/32	9/32	10/32	12/32
34	8/34	10/34	11/34	12/34
36	9/36	10/36	11/36	12/36
38	9/38	10/38	11/38	13/38
40	9/40	10/40	12/40	13/40
n > 40	$\frac{1.52}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.73}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.92}{\sqrt{n}}$	$\frac{2.15}{\sqrt{n}}$

(Πηγή: Απόστολος Δ. Μπασιδής (2014))



**Πίνακας 4. Κρίσιμες τιμές του Smirnov στατιστικού για δύο ανισομεγέθη δείγματα**

Μέγεθος Δείγματος (m)	Μέγεθος Δείγματος (n)	Επίπεδο σημαντικότητας α για δίπλευρο έλεγχο ή α/2 για μονόπλευρο			
		a=.20	a=.10	a=.05	a=.02
1	9	17/18			
	10	9/10			
2	3	5/6			
	4	3/4			
	5	4/5	4/5		
	6	5/6	5/6		
	7	5/7	6/7		
	8	3/4	7/8	7/8	
	9	7/9	8/9	8/9	
	10	7/10	4/5	9/10	
3	4	3/4	3/4		
	5	2/3	3/4	4/5	
	6	2/3	4/5	5/6	
	7	2/3	2/3	6/7	6/7
	8	5/8	5/7	3/4	7/8
	9	2/3	3/4	7/9	8/9
	10	3/5	2/3	4/5	9/10
	12	7/12	7/10	3/4	5/6
4	5	3/5	3/4	4/5	4/5
	6	7/12	2/3	3/4	5/6
	7	17/28	5/7	3/4	6/7
	8	5/8	5/8	3/4	7/8
	9	5/9	2/3	3/4	7/9
	10	11/20	13/20	7/10	4/5
	12	7/12	2/3	2/3	3/4
	16	9/16	5/8	11/16	3/4
5	6	3/5	2/3	2/3	5/6
	7	4/7	23/35	5/7	29/35
	8	11/20	5/8	27/40	4/5
	9	5/9	3/5	31/45	7/9
	10	1/2	3/5	7/10	7/10
	15	8/15	3/5	2/3	11/15
	20	1/2	11/20	3/5	7/10
6	7	23/42	4/7	29/42	5/7
	8	1/2	7/12	2/3	3/4
	9	1/2	5/9	2/3	13/18
	10	1/2	17/30	19/30	7/10
	12	1/2	7/12	7/12	2/3
	18	4/9	5/9	11/18	2/3
	24	11/24	1/2	7/12	5/8
7	8	27/56	33/56	5/8	41/56
	9	31/63	5/9	40/63	5/7
	10	33/70	39/70	43/70	7/10
	14	3/7	1/2	4/7	9/14
	28	3/7	13/28	15/28	17/28

(Πηγή: Απόστολος Δ. Μπατούδης (2014))

**Πίνακας 4. Κρίσιμες τιμές του Smirnov στατιστικού για δύο ανισομεγέθη δείγματα (συνέχεια)**

Μέγεθος Δείγματος (m)	Μέγεθος Δείγματος (n)	Επίπεδο σημαντικότητας α για δίπλευρο έλεγχο ή α/2 για μονόπλευρο			
		a=.20	a=.10	a=.05	a=.02
8	9	4/9	13/24	5/8	2/3
	10	19/40	21/40	23/40	27/40
	12	11/24	1/2	7/12	5/8
	16	7/16	1/2	9/16	5/8
	32	13/32	7/16	1/2	9/16
9	10	7/15	1/2	26/45	2/3
	12	4/9	1/2	5/9	11/18
	15	19/45	22/45	8/15	3/5
	18	7/18	4/9	1/2	5/9
	36	13/36	5/12	17/36	19/36
10	15	2/5	7/15	1/2	17/30
	20	2/5	9/20	1/2	11/20
	40	7/20	2/5	9/20	1/2
12	15	23/60	9/20	1/2	11/20
	16	3/8	7/16	23/48	13/24
	18	13/36	5/12	17/36	19/36
	20	11/30	5/12	7/15	31/60
15	7	7/20	2/5	13/30	29/60
16	20	27/80	31/80	17/40	19/40
Για μεγαλύτερα μεγέθη		$1.07 \sqrt{\frac{m+n}{mn}}$	$1.22 \sqrt{\frac{m+n}{mn}}$	$1.36 \sqrt{\frac{m+n}{mn}}$	$1.52 \sqrt{\frac{m+n}{mn}}$

(Πηγή: Απόστολος Δ. Μπασιδής (2014))

Πίνακας 5. p-ποσοστιαία σημεία της ελεγχουσυνάρτησης Lilliefors για τον έλεγχο καλής προσαρμογής της Εκθετικής Κατανομής

	$p = .05$	.10	.20	.30	.50	.70	.80	.90	.95	.99	.999
$n = 2$	.3127	.3200	.3337	.3617	.4337	.5034	.5507	.5934	.6133	.6284	.6317
3	.2299	.2544	.2899	.3166	.3645	.4122	.4508	.5111	.5508	.6003	.6296
4	.2072	.2281	.2545	.2766	.3163	.3685	.4007	.4442	.4844	.5574	.6215
5	.1884	.2052	.2290	.2483	.2877	.3317	.3603	.4045	.4420	.5127	.5814
6	.1726	.1882	.2102	.2290	.2645	.3045	.3320	.3732	.4085	.4748	.5497
7	.1604	.1750	.1961	.2136	.2458	.2838	.3098	.3481	.3811	.4459	.5181
8	.1506	.1646	.1845	.2006	.2309	.2671	.2914	.3274	.3590	.4208	.4913
9	.1426	.1561	.1746	.1897	.2186	.2529	.2758	.3101	.3404	.3995	.4679
10	.1359	.1486	.1661	.1805	.2082	.2407	.2626	.2955	.3244	.3813	.4473
12	.1249	.1364	.1524	.1657	.1912	.2209	.2411	.2714	.2981	.3511	.4132
14	.1162	.1268	.1418	.1542	.1778	.2054	.2242	.2525	.2774	.3272	.3858
16	.1091	.1191	.1332	.1448	.1669	.1929	.2105	.2371	.2606	.3076	.3632
18	.1032	.1127	.1260	.1369	.1578	.1824	.1990	.2242	.2465	.2911	.3441
20	.0982	.1073	.1199	.1303	.1501	.1735	.1893	.2132	.2345	.2771	.3277
22	.0939	.1025	.1146	.1245	.1434	.1657	.1809	.2038	.2241	.2649	.3135
24	.0901	.0984	.1099	.1195	.1376	.1590	.1735	.1954	.2150	.2542	.3010
26	.0868	.0947	.1058	.1150	.1324	.1530	.1670	.1881	.2069	.2447	.2899
28	.0838	.0914	.1021	.1110	.1278	.1477	.1611	.1815	.1997	.2362	.2799
30	.0811	.0885	.0988	.1074	.1236	.1428	.1559	.1756	.1932	.2286	.2709
35	.0754	.0822	.0918	.0997	.1148	.1326	.1447	.1630	.1793	.2123	.2517
40	.0707	.0771	.0861	.0935	.1077	.1243	.1356	.1528	.1681	.1990	.2361
45	.0668	.0729	.0814	.0884	.1017	.1174	.1281	.1443	.1588	.1880	.2231
50	.0636	.0693	.0774	.0840	.0966	.1116	.1217	.1371	.1509	.1787	.2121
60	.0582	.0635	.0708	.0769	.0885	.1021	.1114	.1255	.1381	.1635	.1943
70	.0541	.0589	.0658	.0714	.0821	.0946	.1033	.1164	.1281	.1517	<sup>h</sup>
80	.0507	.0553	.0616	.0669	.0769	.0887	.0968	.1090	.1200	.1421	<sup>h</sup>
90	.0479	.0522	.0582	.0632	.0726	.0838	.0914	.1029	.1132	.1341	<sup>h</sup>
$n = 100$	.0455	.0496	.0553	.0600	.0690	.0796	.0868	.0977	.1075	.1274	<sup>h</sup>
Approximation	.4550	.4959	.5530	.6000	.6898	.7957	.8678	.9773	1.0753	1.2743	<sup>h</sup>
for $n > 100$	$\sqrt{n}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt{n}$	

Η  $H_0$  απορρίπτεται σε επίπεδο σημαντικότητας  $\alpha$  αν η τιμή της ελεγχουσυνάρτησης υπερβαίνει το  $(1-\alpha)$ -ποσοστιαίο σημείο της κατανομής. Αυτά τα ποσοστιαία σημεία δεν είναι διαθέσιμα.

(Πηγή: Ευδοκία Ξεκαλάκη (2001))





## BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Πηγές:

Ξενόγλωσσες

Adhikari, A. P. (2014), *Exponentiality Test Using a Modified Lilliefors Test*, University of Northern Colorado, Dissertations, Paper 63  
<https://digscholarship.unco.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1062&context=dissertations>

An, M. Y. (1995), *Log-concave probability distributions: theory and statistical testing*, department of Economics, Duke University, Durham, NC 27708-0097.  
<https://econwpa.ub.uni-muenchen.de/econ-wp/game/papers/9611/9611002.pdf>

Anderson, T. W. and Darling, D. A. (1952), *Asymptotic theory of certain "Goodness of fit" criteria based on stochastic*, The Annals of Mathematical Statistics, Vol. 23, No. 2, pp. 193-212  
<http://www.hep.caltech.edu/~fcp/statistics/hypothesisTest/PoissonConsistency/AndersonDarling1952.pdf>

Anderson, T. W. and Darling, D. A. (1954), *A test of goodness of fit*, Journal of the American Statistical Association, Vol. 49, No. 268, pp. 765-769  
<http://www.hep.caltech.edu/~fcp/statistics/hypothesisTest/PoissonConsistency/AndersonDarling1954.pdf>

Ascher, S. (1990), *A survey of tests for exponentiality*, Communications in Statistics - Theory and Methods, 19:5, 1811-1825  
[https://ami.nstu.ru/~post/teaching/ktad/Ascher\\_1990.pdf](https://ami.nstu.ru/~post/teaching/ktad/Ascher_1990.pdf)

Baratpour, S. and Habibi, R. A. (2012), *Testing goodness-of-fit for exponential distribution based on cumulative residual entropy*, Communications in Statistics - Theory and Methods, 41:8, 1387-1396  
<https://profdoc.um.ac.ir/articles/a/1027517.pdf>

Henze, N. and Meintanis, S. G. (2005), *Recent and classical tests for exponentiality: a partial review with comparisons*, Metrika 61: 29-45  
[https://www.researchgate.net/publication/24060622\\_Recent\\_and\\_classical\\_tests\\_for\\_exponentiality\\_A\\_partial\\_review\\_with\\_comparisons](https://www.researchgate.net/publication/24060622_Recent_and_classical_tests_for_exponentiality_A_partial_review_with_comparisons)

Karagrigoriou, A., Papatotiriou, G., Vonta, I. (2021), *Goodness of fit exponentiality test against light and heavy tail alternatives*, In "Statistical Modeling of Reliability Structures and Industrial Processes", Triantafyllou, I. and Ram, M. (eds), CRC Press, Taylor & Francis Group

Krit, M. (2019), *Goodness-of-fit tests for the exponential and two-parameter Weibull distributions*, package 'EWGoF', CRAN  
<https://cran.r-project.org/web/packages/EWGoF/EWGoF.pdf>

Madukaife, M. S. (2019), *An adaptive test for exponentiality based on empirical quantile function*, International Journal of Statistics and Applications 2019, 9(4): 111-116  
<http://article.sapub.org/10.5923.j.statistics.20190904.02.html>

North Dakota State University (2002)  
[http://www.cs.ndsu.nodak.edu/~nygard/csci418/lecture\\_slides/lec3\\_stat2.htm](http://www.cs.ndsu.nodak.edu/~nygard/csci418/lecture_slides/lec3_stat2.htm)

Novikov, A., Pusev, R. and Yakovlev, M. (2015), *Tests for Exponentiality, Tests for the composite hypothesis of exponentiality*, package 'exptest', CRAN  
<https://cran.r-project.org/web/packages/exptest/exptest.pdf>

Petrovich, M. V. (2000 - 2021), MVP Programs  
<https://mvpprograms.com/help/mvpstats/distributions/shapiro-wilk-expon-test>

Rahman, M. and Wu, H. (2017), *Tests for exponentiality: A comparative study*, American Journal of Applied Mathematics and Statistics, vol. 5, no. 4 (2017): 125-135.  
[https://www.researchgate.net/publication/321217987\\_Tests\\_for\\_Exponentiality\\_A\\_Comparative\\_Study](https://www.researchgate.net/publication/321217987_Tests_for_Exponentiality_A_Comparative_Study)

Rogozhnikov, A. P. and Lemeshko, B. Yu. (2012), *A review of tests for exponentiality*, 11th international conference, conference paper  
[https://www.researchgate.net/publication/236170192\\_A\\_Review\\_of\\_Tests\\_for\\_Exponentiality](https://www.researchgate.net/publication/236170192_A_Review_of_Tests_for_Exponentiality)

S. G. Foss, S., S., Korshunov, D., Zachary, S. (1970), *Heavy-tailed and long-tailed distributions*, in book: An introduction to heavy-tailed and subexponential distributions (pp.7-38)  
[https://www.researchgate.net/publication/226229954\\_Heavy-Tailed\\_and\\_Long-Tailed\\_Distributions](https://www.researchgate.net/publication/226229954_Heavy-Tailed_and_Long-Tailed_Distributions)

Samanta, M. and Schwarz, C. J. (1988), *The Shapiro-Wilk test for exponentiality based on censored data*, Journal of the American Statistical Association, Vol. 83, No. 402 (Jun., 1988), pp. 528-531 (4 pages), published by: Taylor & Francis, Ltd.  
<https://www.jstor.org/stable/2288873?seq=1>

SAS Institute  
<https://v8doc.sas.com/sashtml/qc/index.htm>

Seshadri, V., Csörgö, M. and Stephens, M. A. (1969), *Tests for the exponential distribution using Kolmogorov-type statistics*, Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological), Volume 31, Issue 3, Pages 499-509.  
<https://rss.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/j.2517-6161.1969.tb00809.x>

Statistics how to  
<https://www.statisticshowto.com/heavy-tailed-distribution/>

Thode, H. C. (2002), *Testing for Normality*, CRC Press

Torabi, H., Montazeri, N. H. and Grané, A. (2018), *A wide review on exponentiality tests and two competitive proposals with application on reliability*, Journal of Statistical Computation and Simulation, 88:1, 108-139  
[https://www.researchgate.net/publication/319983396\\_A\\_wide\\_review\\_on\\_exponentiality\\_tests\\_and\\_two\\_competitive\\_proposals\\_with\\_application\\_on\\_reliability](https://www.researchgate.net/publication/319983396_A_wide_review_on_exponentiality_tests_and_two_competitive_proposals_with_application_on_reliability)

Università di Trento  
<http://www.cs.unitn.it/~taufer/SR/V-Distributions.html>

Wikipedia

Wilk M. B. and Gnanadesikan R. (1968), *Probability plotting methods for the analysis of data*, *Biometrika*, 55, 1  
<https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.860.6347&rep=rep1&type=pdf>

Zardasht, V., Parsi, S. and Mousazadeh, M. (2014), *On empirical cumulative residual entropy and a goodness-of-fit test for exponentiality*, in *Statistical Papers* · June 2014  
<https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/s00362-014-0603-9.pdf>

### Ελληνικές

Αντζουλάκος, Δ. (2013), *Ανάλυση δεδομένων με τη χρήση στατιστικών πακέτων, Εισαγωγή στο R, Σημειώσεις παραδόσεων*, Τμήμα Στατιστικής & Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική, Πανεπιστήμιο Πειραιώς  
[http://www.unipi.gr/faculty/dantz/Introduction\\_to\\_R.pdf](http://www.unipi.gr/faculty/dantz/Introduction_to_R.pdf)

Δασκαλάκη, Σ. (2006), *Χρήσιμες Κατανομές*, Πανεπιστήμιο Πατρών, Πολυτεχνική Σχολή Γενικό Τμήμα  
[http://www.des.upatras.gr/amm/daskalaki/UsefulDistributions\\_2006.pdf](http://www.des.upatras.gr/amm/daskalaki/UsefulDistributions_2006.pdf)

Δημητράκος, Θ. (2008), *Σημειώσεις για το μάθημα «Θεωρία Πιθανοτήτων II»*, Τμήμα Στατιστικής & Αναλογιστικών-Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Σάμος  
<http://www.samos.aegean.gr/math/dimitheo/THEORIA-PITHANOTHTON-II.htm>

Μπατσιδης, Α. Δ. (2014), *«Εισαγωγή στη μη παραμετρική στατιστική», Διδακτικές σημειώσεις*, Τμήμα Μαθηματικών, Τομέας Πιθανοτήτων-Στατιστικής & Επιχειρησιακής Έρευνας, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων  
<http://users.uoi.gr/abatsidis/NonParametricClassNotes2014.pdf>

Μπούτσικας, Μ. (2004), *Σημειώσεις μαθήματος «Στατιστικά Προγράμματα»*, Τμήμα Στατιστικής & Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς  
[http://www.unipi.gr/faculty/mbouts/statprog/SPSS\\_lesson5-6.pdf](http://www.unipi.gr/faculty/mbouts/statprog/SPSS_lesson5-6.pdf)

Ξεκαλάκη, Ε. (2001), *Μη Παραμετρική Στατιστική*, (Τμήμα Στατιστικής του Οικονομικού Πανεπιστημίου Αθηνών), Αθήνα  
<http://www2.stat-athens.aueb.gr/~exek/NPar-Statistics/chapter4.pdf>

Παπαδόπουλος, Γ., Γεωπονικό Πανεπιστήμιο Αθηνών  
<https://www.aua.gr/gpapakopoulos/files/14x2test14-15.pdf>

Παπαδόπουλος, Γ., *Σημειώσεις Παραδόσεων*, Γεωπονικό Πανεπιστήμιο Αθηνών  
[https://www.aua.gr/gpapakopoulos/files/6discr\\_distrib16.pdf](https://www.aua.gr/gpapakopoulos/files/6discr_distrib16.pdf)

Παπασταυρίδης, Σ. (1988), *«Εισαγωγή στην θεωρία των πιθανοτήτων και τις εφαρμογές (συμπλήρωμα τόμος β΄)»*, εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών

*Σημειώσεις του μαθήματος «Θεωρία Πιθανοτήτων II» (1990)*, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών

Φωκιανός, Κ. & Χαραλάμπους, Χ. (2010), *«Εισαγωγή στην R. Πρόχειρες σημειώσεις»*, Τμήμα Μαθηματικών & Στατιστικής, Πανεπιστήμιο Κύπρου  
<https://cran.r-project.org/doc/contrib/mainfokianoscharalambous.pdf>