



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΜΗΧΑΝΩΝ

EXTENDED ABSTRACT

**Ανάπτυξη μεθόδου βελτιστοποίησης κατατομών μετωπικών  
οδοντωτών τροχών για την ελαχιστοποίηση της εμφάνισης  
επιφανειακής κόπωσης**

Παναγιώτης Κορωναίος

Επιβλέπων:  
Βασίλειος Σπιτάς  
Αναπληρωτής Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Ιούλιος 2021



## Περίληψη

Οι οδοντωτοί τροχοί χρησιμοποιούνται υπό απαιτητικές συνθήκες που συχνά οδηγούν στην καταστροφή τους λόγω των μηχανισμών φθοράς στους οποίους υπόκεινται. Υπάρχουν διάφοροι μηχανισμοί φθοράς και κόπωσης και ένας από τους πλέον σημαντικούς είναι η ανάπτυξη εκκοιλάνσεων επί της επιφάνειας της κατατομής. Αυτό το φαινόμενο συχνά προκαλεί μικρό-ρωγμές στην επιφάνεια του οδόντα προκαλώντας έντονες καταπονήσεις και τάσεις. Σύμφωνα με τη θεωρία του Hertz που παρουσιάζεται διεξοδικά, αυτές οι τάσεις σχετίζονται άμεσα με την ισοδύναμη καμπυλότητα των σωμάτων που έρχονται σε επαφή. Ως αποτέλεσμα αυτής της ανάλυσης, προτείνονται μέθοδοι για τη μείωση της ισοδύναμης καμπυλότητας και συνεπώς της καταπόνησης των κατατομών, συμπεριλαμβανομένου του επανασχεδιασμού της γεωμετρίας των οδοντωτών τροχών. Ωστόσο, υπάρχουν ορισμένα γεωμετρικά κριτήρια και περιορισμοί που πρέπει να πληρούνται σύμφωνα με τη θεωρία των οδοντώσεων, όπως μεταξύ άλλων ο βασικός νόμος οδοντώσεων (BNO) ή η συμβατότητα του βήματος. Επιπλέον, οι περιορισμοί είναι βασική πτυχή της παρούσας εργασίας. Η βελτιστοποίηση των κατατομών επιχειρείται με γενετικούς αλγόριθμους, με τον αλγόριθμο Fmincon (gradient based optimization) και με την μέθοδο της απότομης καθόδου (steepest descent) (ντετερμινιστική βελτιστοποίηση) στο περιβάλλον της MATLAB/SIMULINK τόσο για κλειστή τροχιά επαφών όσο και για ανοικτή τροχιά επαφών. Μοντελοποιείται είτε το πινιόν είτε ο κανόνας, ανάλογα τι εξυπηρετεί καλύτερα στην κάθε περίπτωση, με B-Splines 4ου βαθμού, ενώ, ο αλγόριθμος δέχεται ως είσοδο τη θέση των σημείων ελέγχου και καθορίζει την ισοδύναμη καμπύλη καμπυλότητας σε ολόκληρη την κατατομή σύμφωνα με τη θεωρία του Hertz. Αυτή η ανάλυση οδηγεί στη σύγκριση των τριών μεθόδων βελτιστοποίησης δεδομένων των αποτελεσμάτων που παρέχονται και του υπολογιστικού κόστους τους. Επιτεύχθηκε μια βέλτιστη λύση που αντιστοιχεί σε ένα ζεύγος οδοντωτών τροχών που η ισοδύναμη καμπυλότητα είναι σημαντικά βελτιωμένη σε σχέση με τους οδοντωτούς τροχούς εξειλιγμένης και ημιτονοειδούς κανόνα όσον αφορά τόσο την αντοχή όσο και στην εμφάνιση εκκοιλάνσεων. Τέλος, τα αποτελέσματα επιβεβαιώνονται με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων και συγκρίνεται η βέλτιστη λύση με αυτή τα αντίστοιχα γρανάζια εξειλιγμένης.



## Περιεχόμενα

Περίληψη .....	3
1. Εισαγωγή.....	6
2. Θεωρία επαφής Hertz .....	7
3. Θεωρία οδοντωτών τροχών.....	9
4. Διαδικασία Βελτιστοποίησης.....	11
5. Κλειστή τροχιά επαφών .....	13
6. Ανοιχτή τροχιά επαφών .....	17
7. Ανάλυση με Πεπερασμένα Στοιχεία.....	21
8. Συμπεράσματα.....	23
9. Βιβλιογραφία.....	24

## 1. Εισαγωγή

Τα γρανάζια είναι ένα από τα πιο κοινά στοιχεία μηχανών που χρησιμοποιούνται στη σύγχρονη βιομηχανία. Αν και η χρήση τους ήταν γνωστή από την αρχαιότητα, η ευρεία χρήση τους επιτεύχθηκε μετά τη βελτίωση των κατασκευαστικών μηχανημάτων τους, οι οποίες μπόρεσαν να παράγουν τροχούς υψηλής ακρίβειας και ποιότητας προφίλ και να παραδώσουν σχήματα κατάλληλα για πιο περίπλοκες μορφές μετάδοσης. Η ικανότητά τους να επιτρέπουν σταθερή μετάδοση και μεταφορά υψηλής ισχύος σε υψηλή απόδοση έχει καταστήσει την εφαρμογή τους πολύτιμη ή ακόμη και απαραίτητη σε ένα ευρύ φάσμα εφαρμογών και επέτρεψε την ενσωμάτωσή τους σε μηχανές και μηχανισμούς μεγάλης σημασίας. Για το λόγο αυτό, η παραγωγή τους σήμερα είναι τεράστια και η ποιότητά τους παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον για τη βιομηχανία.

Η παρούσα εργασία χωρίζεται σε 7 κεφάλαια. Το πρώτο θέμα στο οποίο γίνεται λόγος είναι η θεωρία της Hertz σχετικά με την επαφή και την επιφανειακή κόπωση ως μηχανισμός αστοχίας. Σε αυτό το κεφάλαιο προτείνονται πιθανοί τρόποι για τη μείωση του φαινομένου αποκόλλησης (pitting [6]). Στο επόμενο κεφάλαιο συζητούνται μερικές από τις πιο σημαντικές εξισώσεις σύμφωνα με τις οποίες επιτυγχάνεται η βελτιστοποίηση. Στο 4ο κεφάλαιο συζητείται η διαδικασία βελτιστοποίησης που προτάθηκε. Η χρήση των καμπυλών B-Spline, η κινηματική και η μοντελοποίηση του πλέγματος και οι μέθοδοι βελτιστοποίησης που είναι πιο αποτελεσματικές για αυτό το πρόβλημα είναι μερικά από τα θέματα που συζητούνται σε αυτό το κεφάλαιο. Επιπλέον, στο 5ο και 6ο κεφάλαιο η ανάλυση κλειστής τροχιάς επαφών και η ανάλυση ανοικτής τροχιάς επαφών και τα αντίστοιχα αποτελέσματα παρουσιάζονται διεξοδικά. Στο κεφάλαιο 7, μια μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων επιβεβαιώνει τα αποτελέσματα βελτιστοποίησης σε σύγκριση με τα γρανάζια εξειλιγμένης. Τέλος, παρουσιάζονται συμπεράσματα προκειμένου να εκτιμηθεί η αποτελεσματικότητα της παρούσας μοντελοποίησης.

## 2. Θεωρία επαφής Hertz

Σύμφωνα με τη θεωρία του Hertz για δύο σώματα σε επαφή έχουμε την ακόλουθη έκφραση:

$$(k_1 + k_2) \iint \frac{q dA}{r} = d - Ax^2 - By^2 \quad (2.1)$$

Όπου  $q dA$  το απειροστό φορτίο που ασκείται σε μια απειροστή επιφάνεια  $dA$  σε απόσταση  $r$  από το κέντρο της ζώνης επαφής (θεωρητικό σημείο επαφής). Η ολοκλήρωση εκτείνεται σε όλη τη ζώνη (επιφάνεια) επαφής.  $E_1, E_2$  είναι το μέτρο ελαστικότητας του υλικού του σώματος 1 και 2 αντίστοιχα και  $\nu_1, \nu_2$  οι λόγοι Poisson.

Θέτουμε ως:

$$k_1 = \frac{1 - \nu_1^2}{\pi E_1} \quad (2.2)$$

$$k_2 = \frac{1 - \nu_2^2}{\pi E_2} \quad (2.3)$$

Βάσει της εξίσωσης (2.1) το ζητούμενο είναι να βρούμε μια κατανομή τάσεων  $q$  που να την επαληθεύει. Αν το φορτίο που ασκείται μεταξύ των επιφανειών είναι  $P$  τότε η μέγιστη πίεση αναπτύσσεται στο κέντρο του έλλειψης επαφής και είναι :

$$q_0 = \frac{2}{3} \frac{P}{\pi ab} \quad (2.3)$$

Όπου  $a, b$  οι ημιάξονες της έλλειψης επαφής και υπολογίζονται ως εξής:

$$a = m \sqrt[3]{\frac{3 \pi P (k_1 + k_2)}{4 (A + B)}} \quad (2.5)$$

$$b = n \sqrt[3]{\frac{3 \pi P (k_1 + k_2)}{4 (A + B)}} \quad (2.6)$$

όπου οι συντελεστές  $m, n$  προκύπτουν πειραματικά [4].

Από τις εξισώσεις (2.4), (2.5) and (2.6) έχουμε του παράγοντες που καθορίζουν την επιφανειακή πίεση και είναι οι ακόλουθοι:

- 1) Μείωση του επιβαλλόμενου φορτίου  $P$
- 2) Το υλικό των οδοντωτών τροχών
- 3) Η καμπυλότητα των οδόντων στο σημείο επαφής

Τα παραπάνω μπορούν να εφαρμοστούν στους οδοντωτούς τροχούς με τις ακόλουθες παραδοχές:

- 1) Οι ακτίνες καμπυλότητάς τείνουν να απειριστούν καθώς οι μετωπικοί οδόντες δεν έχουν καμπυλότητα στη διεύθυνση του πλάτους και η ισοδύναμη καμπυλότητα δίνεται από:

$$A + B = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (2.7)$$

- 2) Μεταξύ των επιπέδων που περιέχουν τις  $R_1, R_2$ , τότε ισχύει  $\psi = 0$
- 3) Η θεωρητική επαφή γίνεται κατά γενέτειρα και όχι σημείο οπότε πλέον η έλλειψη γίνεται παραλληλόγραμμο με πλευρές:

$$b = \sqrt{\frac{4P'(k_1 + k_2)R_1R_2}{R_1 + R_2}} \quad (2.8)$$

$$P' = \frac{P}{h} \quad (2.9)$$

- 4) Η κατανομή των τάσεων είναι ελλειψοειδής αλλά σταθερού προφίλ κατά μήκος της θεωρητικής γενέτειρας επαφής
- 5) Η μέγιστη αναπτυσσόμενη τάση είναι:

$$q_o = \frac{2P'}{\pi b} \quad (2.10)$$

*Τρόποι μείωση της επιφανειακής κόπωσης [7]*

Σύμφωνα με τα παραπάνω για να πετύχουμε μείωση του pitting μπορούμε να κάνουμε ένα από τα ακόλουθα:

- 1) Μείωση του εφαρμοζόμενου φορτίου.
- 2) Μείωση της ισοδύναμης καμπυλότητας.
- 3) Διατήρηση της ισοδύναμης καμπυλότητας σε σταθερή τιμή.



### 3. Θεωρία οδοντωτών τροχών

Οι οδοντωτοί τροχοί θα πρέπει να ικανοποιούν ορισμένα γεωμετρικά κριτήρια αλλά και τους στόχους που θέσαμε προηγουμένως ώστε η βελτιστοποίηση να θεωρηθεί επιτυχημένη. Συγκεκριμένα θέλουμε να ικανοποιούνται τα ακόλουθα:

1. Ικανοποίηση του Βασικού Νόμου Οδόντωσης
2. Να υπάρχει συμβατότητα βήματος
3. Ο βαθμός επικάλυψης να είναι μεγαλύτερος ή ίσος της μονάδας
4. Ικανοποίηση την ελαχιστοποίηση σε μία σταθερή τιμή της ισοδύναμης ακτίνας καμπυλότητας

Επίσης οι ακόλουθες σχέσεις είναι απαραίτητο να ικανοποιούνται ώστε να εξασφαλίζεται η συνεργασία μεταξύ των οδοντωτών τροχών [1].

$$K = \theta r_0 \quad (3.1)$$

$K$  θέτουμε την μετατόπιση του κανόνα,  $\theta$  είναι η γωνία περιστροφής και  $r_0$  ο κύκλος κύλισης του πινιόν ενώ  $x, y$  είναι οι συντεταγμένες του κανόνα.

$$K = - \left( y \frac{dy}{dx} + x \right) \quad (3.2)$$

Οι συντεταγμένες της κατατομής του πινιόν είναι  $(x_1, y_1)$  και δίνονται από την ακόλουθη σχέση:

$$x_1 = (x + K) \cos \theta - (y + r_0) \sin \theta \quad (3.3)$$

$$y_1 = (x + K) \sin \theta + (y + r_0) \cos \theta - r_0 \quad (3.4)$$

Οι συντεταγμένες της τροχιάς επαφών είναι  $(x_{CL}, y_{CL})$  και δίνονται από την ακόλουθη σχέση:

$$x_{CL} = x + K \quad (3.5)$$

$$y_{CL} = y \quad (3.6)$$

Οι συντεταγμένες του συνεργαζόμενου τροχού δίνονται από:

$$x_2 = x_{CL} \cos \theta_2 - (y_{CL} - r_{02}) \sin \theta_2 \quad (3.7)$$

$$y_2 = x_{CL} \sin \theta_2 + (y_{CL} + r_{02}) \cos \theta_2 + r_{02} \quad (3.8)$$

όπου,

$$r_{02} \theta_2 = -r_0 \theta \quad (3.9)$$

Η καμπυλότητα για κάθε τροχό είναι :

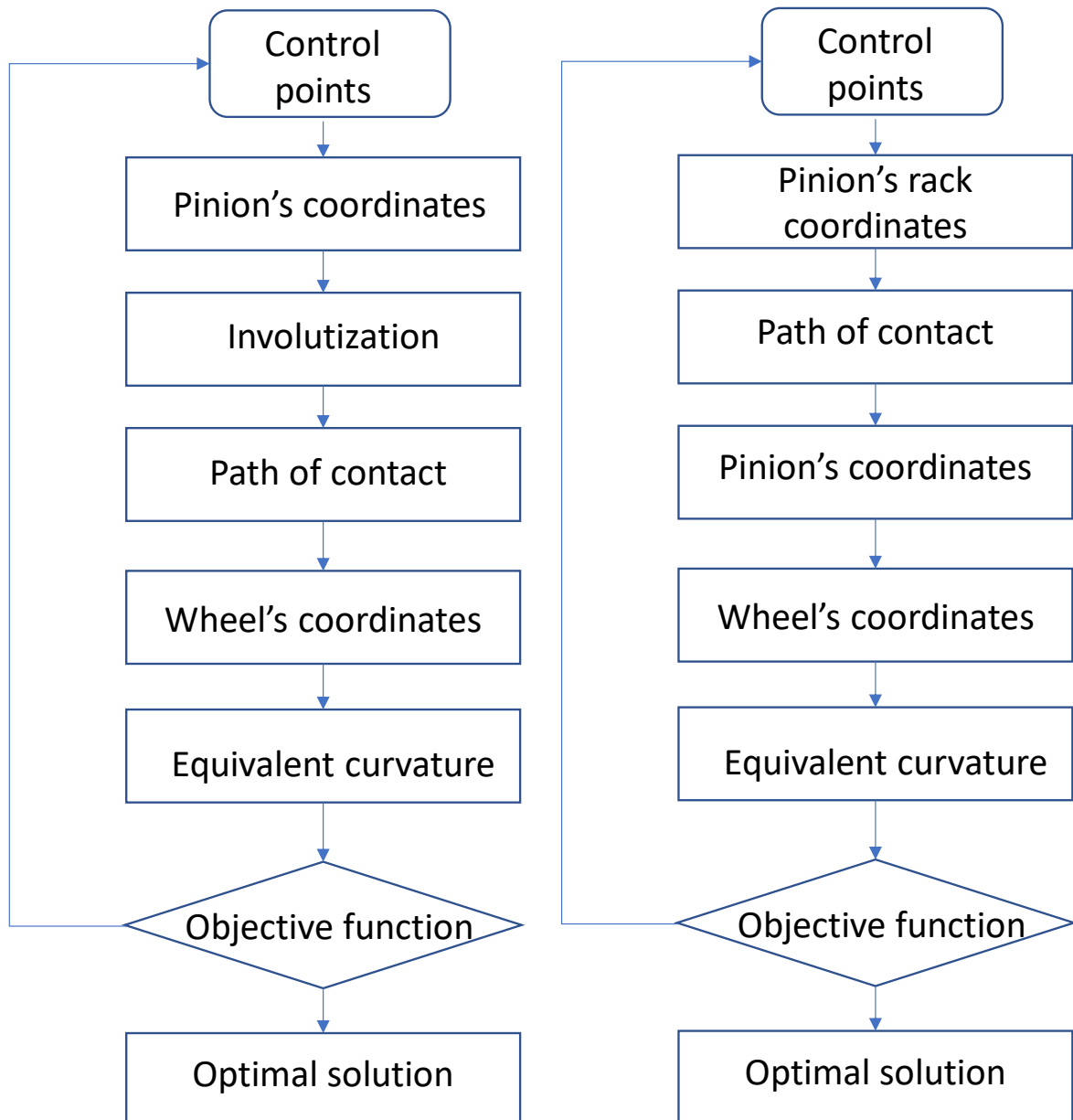
$$\frac{1}{R_i} = \frac{\frac{d^2 y_i}{dx_i^2}}{\left(1 + \left(\frac{dy_i}{dx_i}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.10)$$

ενώ η ισοδύναμη υπολογίζεται με τον ακόλουθο τύπο. Ο δείκτης 1 αναφέρεται στο πινιόν και ο δείκτης 2 στον συνεργαζόμενο τροχό.

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \quad (3.11)$$

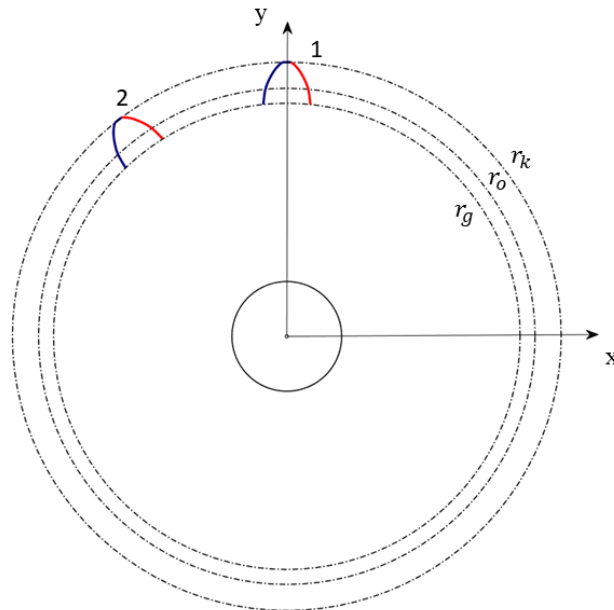
#### 4. Διαδικασία Βελτιστοποίησης

Για τις περιπτώσεις κλειστής τροχιάς επαφών μοντελοποιήθηκε ο κανόνας του πινιόν ενώ για τις περιπτώσεις ανοιχτής τροχιάς επαφών μοντελοποιήθηκε η κατατομή του πινιόν. Στη δεύτερη περίπτωση απαραίτητη είναι απαραίτητο και ένα ενδιάμεση βήμα αυτό της εξειλιγμενοποίησης [3]. Σε κάθε περίπτωση οι καμπύλες μοντελοποιούνται με πολυώνυμα B-Splines 4<sup>ο</sup> βαθμού ενώ οι μέθοδοι βελτιστοποίησης που χρησιμοποιηθήκαν είναι τρεις. Αρχικά έγινε προσπάθεια με γενετικούς αλγορίθμους [5], στη συνέχεια με την μέθοδο της απότομης καθόδου [2] ενώ τέλος χρησιμοποιήθηκε και η Fmincon στο περιβάλλον της MATLAB/SIMULINK. Οι τελευταίες δύο κατέληξαν σε παρόμοια αποτελέσματα στην περίπτωση της ανοιχτής τροχιάς επαφών κάτι που δείχνει το robust design του αλγορίθμου βελτιστοποίησης που δομήθηκε.



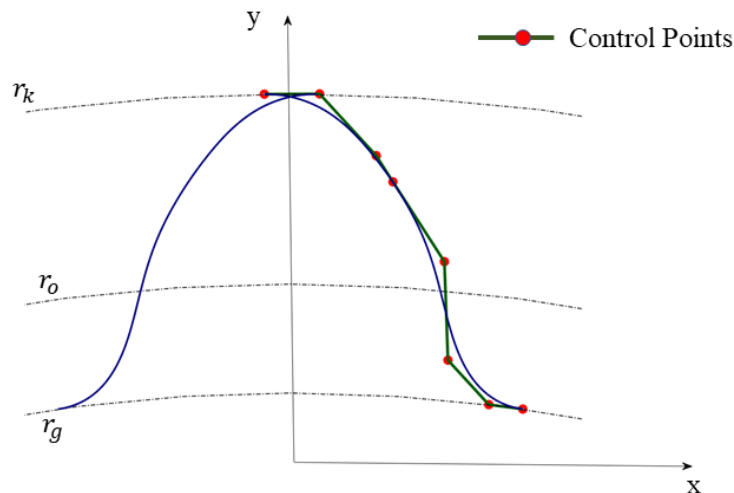
Διάγραμμα 4.1. Διάγραμμα ροής κύκλου βελτιστοποίησης

Σημαντικό μέρος του παρόντος κεφαλαίου αποτελούν και οι περιορισμοί που διέπουν το πρόβλημα. Συγκεκριμένα επιλέγουμε οι υπολογισμοί σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης να γίνονται όταν η κατατομή βρίσκεται στη θέση 2 του διαγράμματος 4.2. Στην πραγματικότητα πρόκειται για στροφή κατά δύο οδόντες αριστερά (για την περίπτωση που το πινιόν έχει 19 δόντια) ώστε να εξασφαλιστεί ότι ακόμα και στην περίπτωση της εξειλιγμένης η συνάρτηση της κατατομής του οδόντα θα είναι μία γνησίως φθίνουσα συνάρτηση. Αντίθετα στην θέση 1 η συνάρτηση της εξειλιγμένης δεν αποτελεί συνάρτηση με τον μαθηματικό ορισμό (κάθε  $x$  να αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο  $y$ ). Οπότε ο πρώτος περιορισμός που επιβάλλεται είναι η συνάρτηση της κατατομής του οδόντα θα είναι μία γνησίως φθίνουσα συνάρτηση όταν το δόντι βρίσκεται στη θέση 2.



**Διάγραμμα 4.2.** Πιθανές θέσεις υπολογισμού της ισοδύναμης καμπυλότητας κατά τη βελτιστοποίηση

Ένας άλλος βασικός περιορισμός είναι όταν το δόντι βρίσκεται στη θέση 1 του διαγράμματος 4.2 να έχει πάντα μη αρνητικό  $x$  καθώς σε διαφορετική περίπτωση θα είχαμε αλληλοεπικάλυψη των κατατομών του ίδιου οδόντα όπως φαίνεται στο διάγραμμα 4.3



**Διάγραμμα 4.3.** Ανεπιθύμητο αποτέλεσμα όπου οι κατατομές του ίδιου οδόντα αλληλεπικαλύπτονται

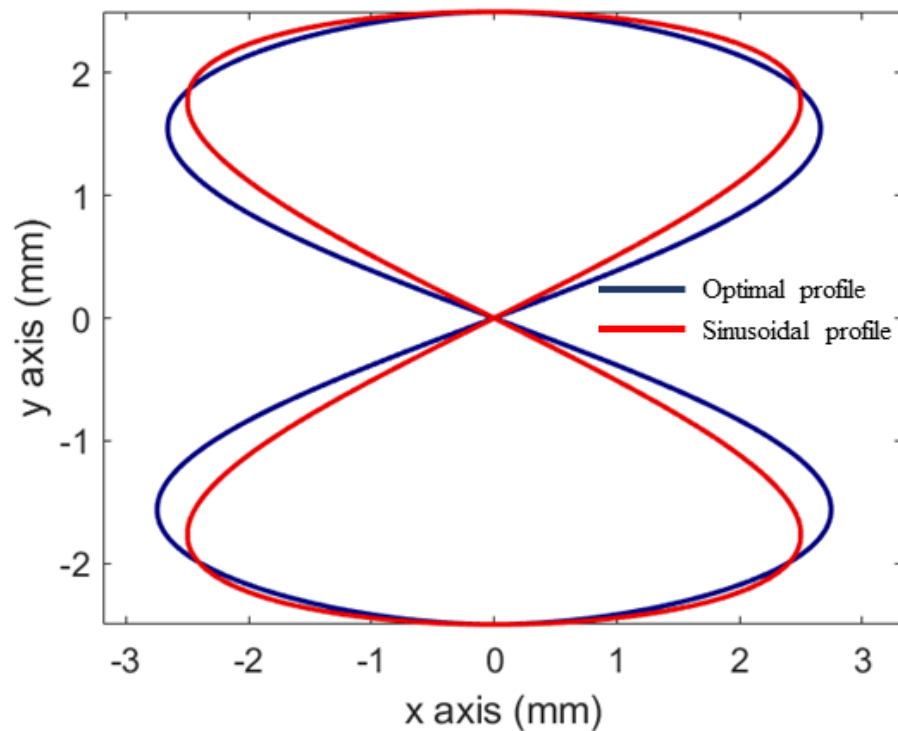
## 5. Κλειστή τροχιά επαφών

Στο παρόν κεφάλαιο θα παρουσιαστεί το πιο βελτιωμένο αποτέλεσμα που κατέληξαν οι αλγόριθμοι και επιτεύχθηκε με τη μέθοδο της απότομης καθόδου.

<i>Optimization parameters</i>	
Modeled with Control Points	Pinion's rack gear
Number of Control Points	5
Number of variables	4
Number of iterations	100
Tolerance (Golden Section)	$1e^{-8}$
Number of searching steps	100
Objective function	$\max\left(\text{abs}\left(\frac{1}{R}\right)\right) + \text{mean}\left(\text{abs}\left(\frac{1}{R}\right)\right) + \text{std}\left(\frac{1}{R}\right)$
<i>Gear parameters</i>	
Gear ( $Z_1$ )	19
Conjugate Gear ( $Z_2$ )	55
module	2.5
<i>B-Spline parameters</i>	
Polynomial's degree	4

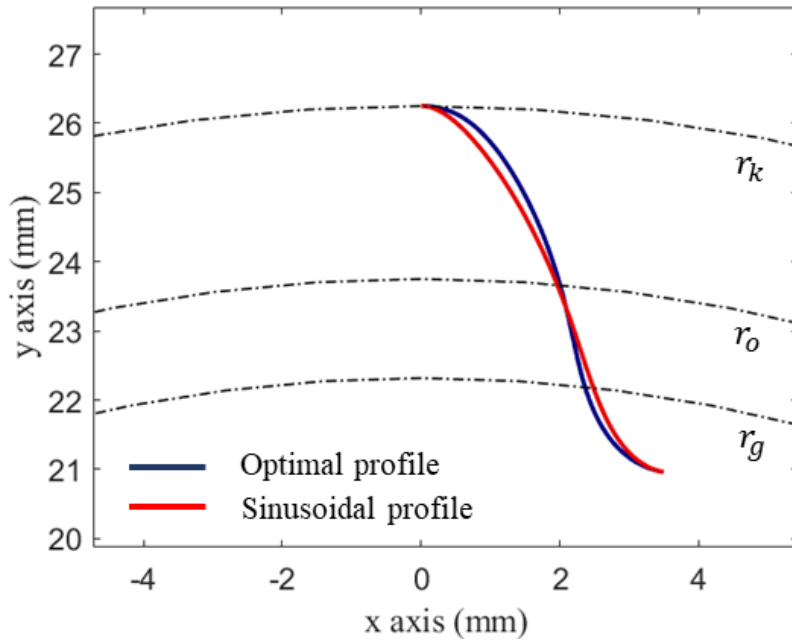
**Πίνακας 5.1.** Παράμετροι Βελτιστοποίησης - case 1

Στο ακόλουθο διάγραμμα έχουμε μία σύγκριση της τροχιάς επαφών των γραναζιών ημιτονοειδούς κανόνα και των βελτιστοποιημένων.

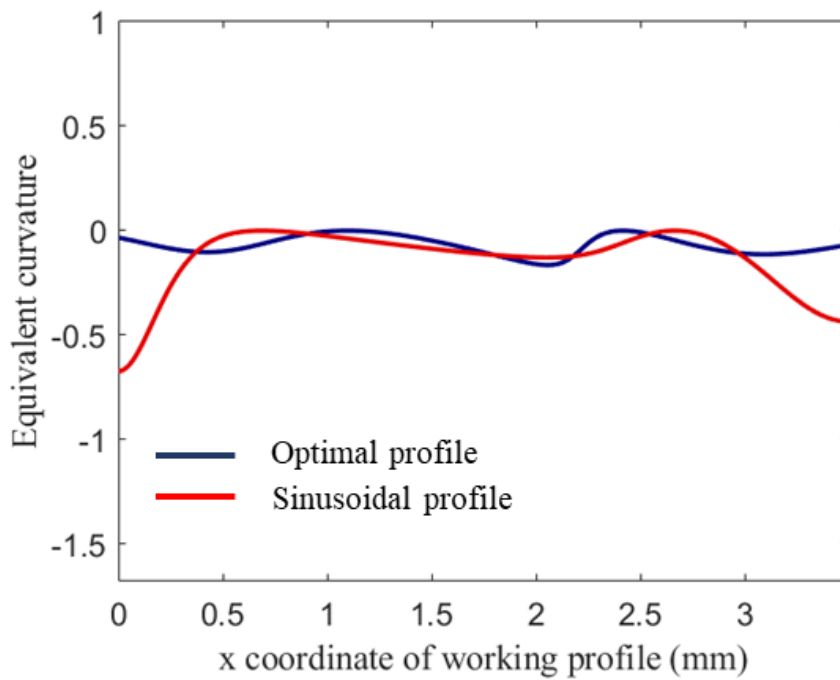


**Διάγραμμα 5.1.** Τροχιές επαφών - case 1

Ενώ στο παρακάτω διάγραμμα φαίνεται η αντίστοιχη σύγκριση των κατατομών του πινιόν.



Διάγραμμα 5.2. Κατατομές οδόντων- case 1

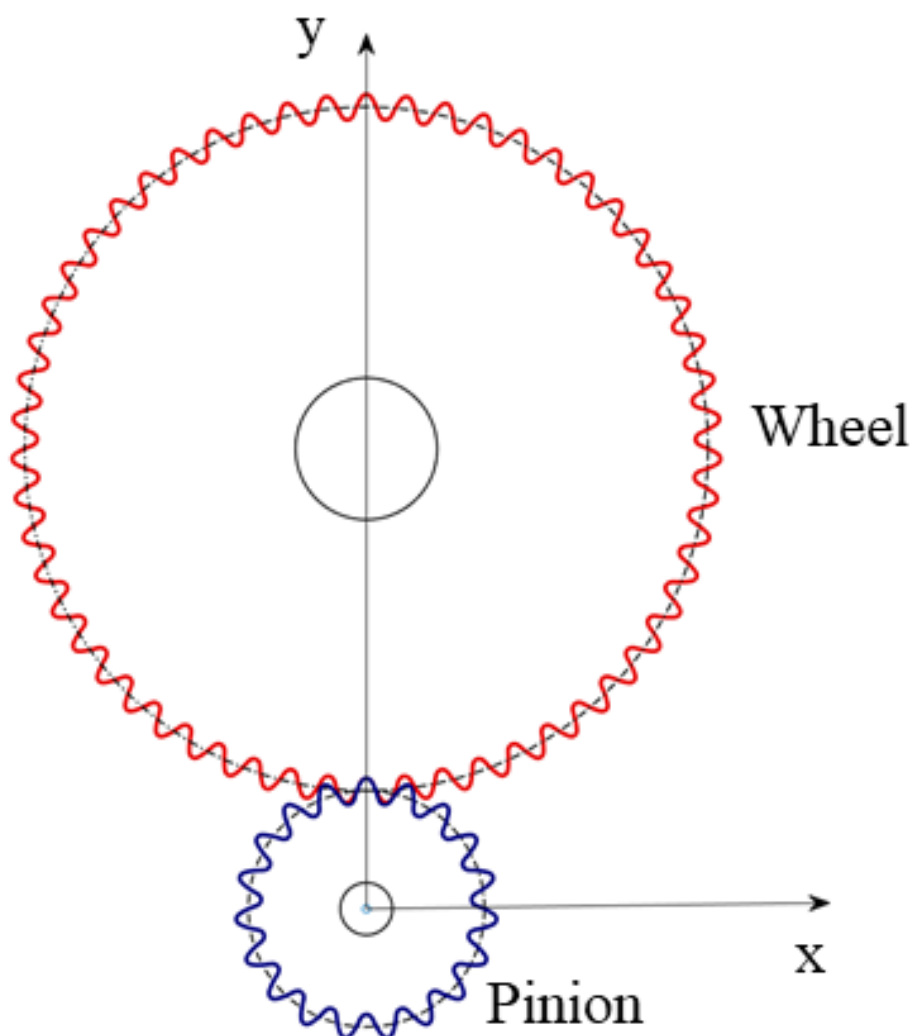


Διάγραμμα 5.3. Ισοδύναμη καμπυλότητα - case 1

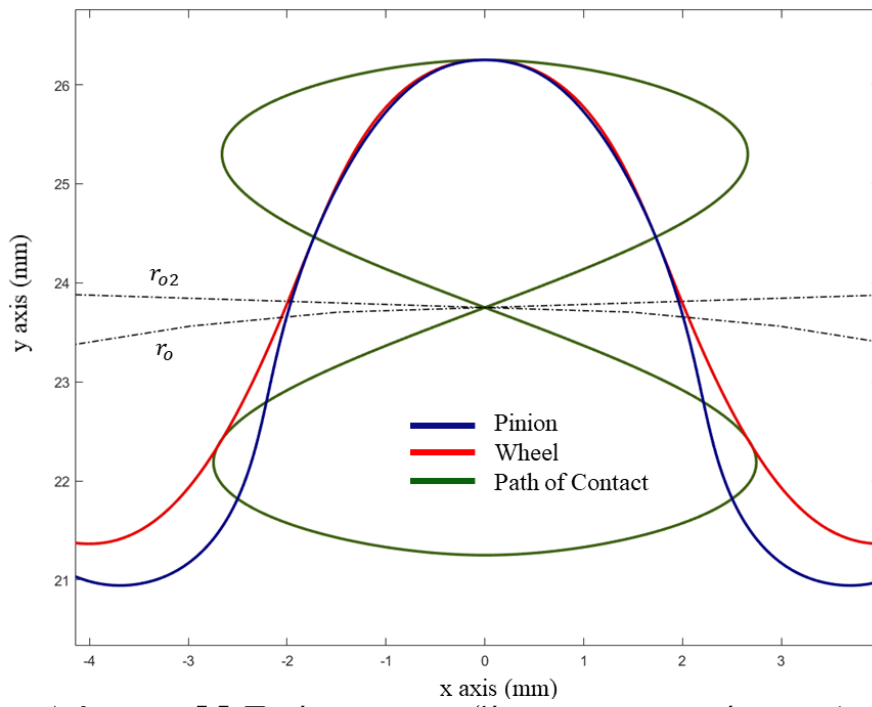
Η καμπύλη της ισοδύναμης καμπυλότητας παρά το γεγονός ότι είναι αρκετά βελτιωμένη σε σχέση με αυτή των γραναζιών ημιτονοειδούς κανόνα δεν είναι σταθερή και αρκετά κοντά στο μηδέν. Η προσπάθεια της βελτιστοποίησης επεκτείνεται και στην ανοιχτή τροχιά επαφών που συνιστά γενικότερη περίπτωση ώστε να διερευνηθεί πλήρως το πρόβλημα.

<i>Optimization Results (absolute values)</i>			Sinusoidal profile	Optimal profile	Decrease (%)
mean of curvature	equivalent		0.1333	0.0708	94.69
max of curvature	equivalent		0.6719	0.1644	75.53
std of curvature	equivalent		0.1542	0.0490	68.21

**Πίνακας 5.2.** Αποτελέσματα Βελτιστοποίησης – case 1



**Διάγραμμα 5.4.** Πινιόν και συνεργαζόμενος τροχός - case 1



**Διάγραμμα 5.5.** Πινιόν και συνεργαζόμενος σε συνεργασία - case 1

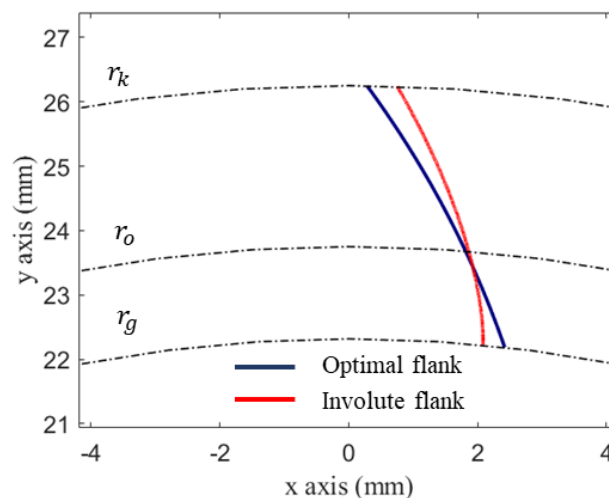


## 6. Ανοιχτή τροχιά επαφών

Το ακόλουθο αποτέλεσμα επετεύχθη με τη μέθοδο της απότομης καθόδου και με μόλις 5 σημεία ελέγχου κατορθώθηκε όχι μόνο να σταθεροποιηθεί η καμπύλη της ισοδύναμης καμπυλότητας αλλά και να έχει μικρότερη τιμή από της εξειλιγμένης.

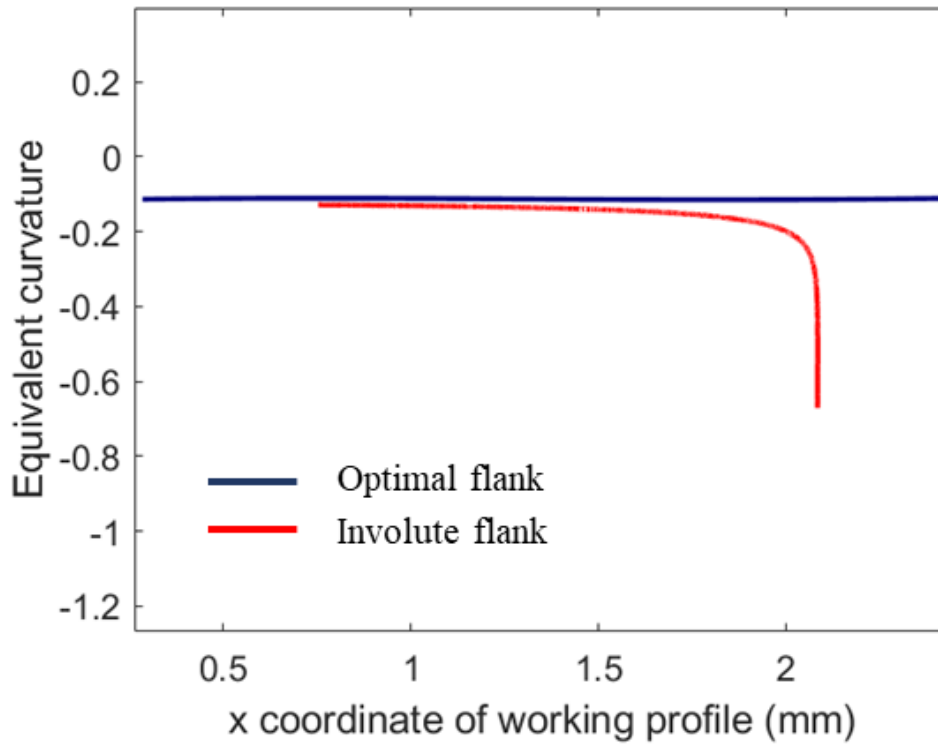
<i>Optimization parameters</i>	
Modeled with Control Points	Pinion's flank
Number of Control Points	5
Number of variables	8
Number of iterations	100
Tolerance (Golden Section)	$1e^{-8}$
Number of searching steps	100
Objective function	$2.5 \int \left(\frac{1}{R}\right)^2 dx + std\left(\frac{1}{R}\right) + 0.1 \frac{1}{\text{overlap ratio}}$
<i>Gear parameters</i>	
Gear ( $Z_1$ )	19
Conjugate Gear ( $Z_2$ )	55
module	2.5
overlap	1.04
<i>B-Spline parameters</i>	
Polynomial's degree	4

**Πίνακας 6.1.** Παράμετροι Βελτιστοποίησης – case 2



**Διάγραμμα 6.1.** Κατατομές οδόντων - case 2

Η καμπύλη της ισοδύναμης καμπυλότητας φαίνεται στο ακόλουθο διάγραμμα και είναι πιο βελτιωμένη σε σχέση με αυτή της εξειλιγμένης. Είναι πιο κοντά στο μηδέν και παρουσιάζει σταθερή συμπεριφορά κάτι που σημαίνει ότι ο στόχος επετεύχθη.



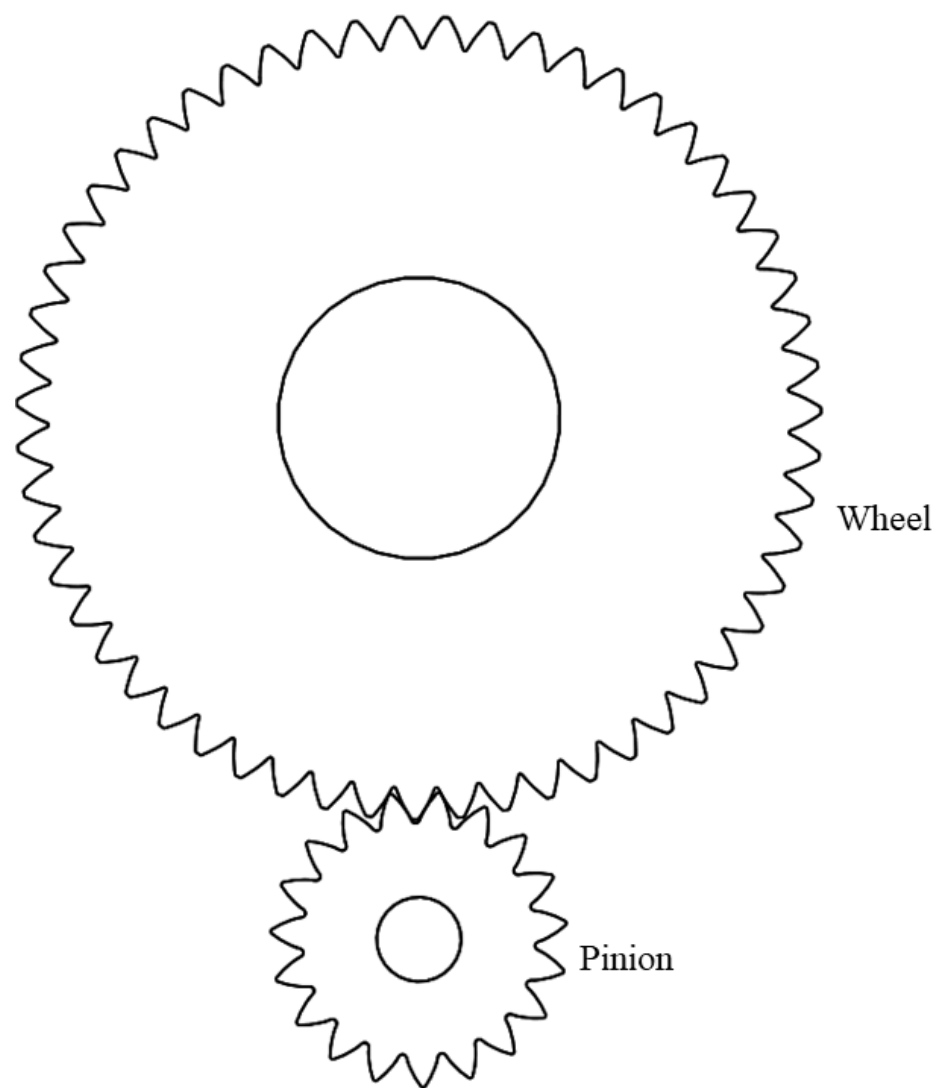
Διάγραμμα 6.2. Ισοδύναμη καμπυλότητα - case 2

*Optimization Results (absolute values)*

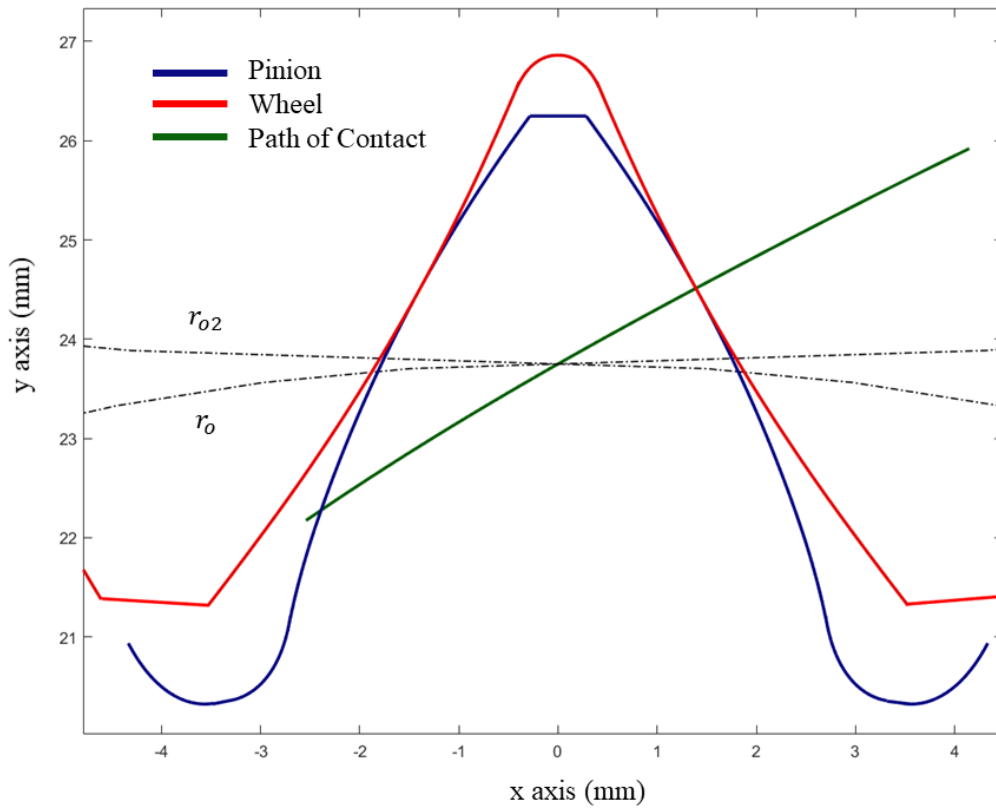
	Sinusoidal profile	Involute profile	Optimal profile	Decrease (%) (rel. to Sin)	Decrease (%) (rel. to Inv)
mean of equivalent curvature	0.1333	0.1783	0.1130	91.52	36.62
max of equivalent curvature	0.6719	0.6708	0.1148	82.92	82.89
std of equivalent curvature	0.1542	0.0762	0.0014	99.10	98.18

**Πίνακας 6.1.** Αποτελέσματα Βελτιστοποίησης – case 2

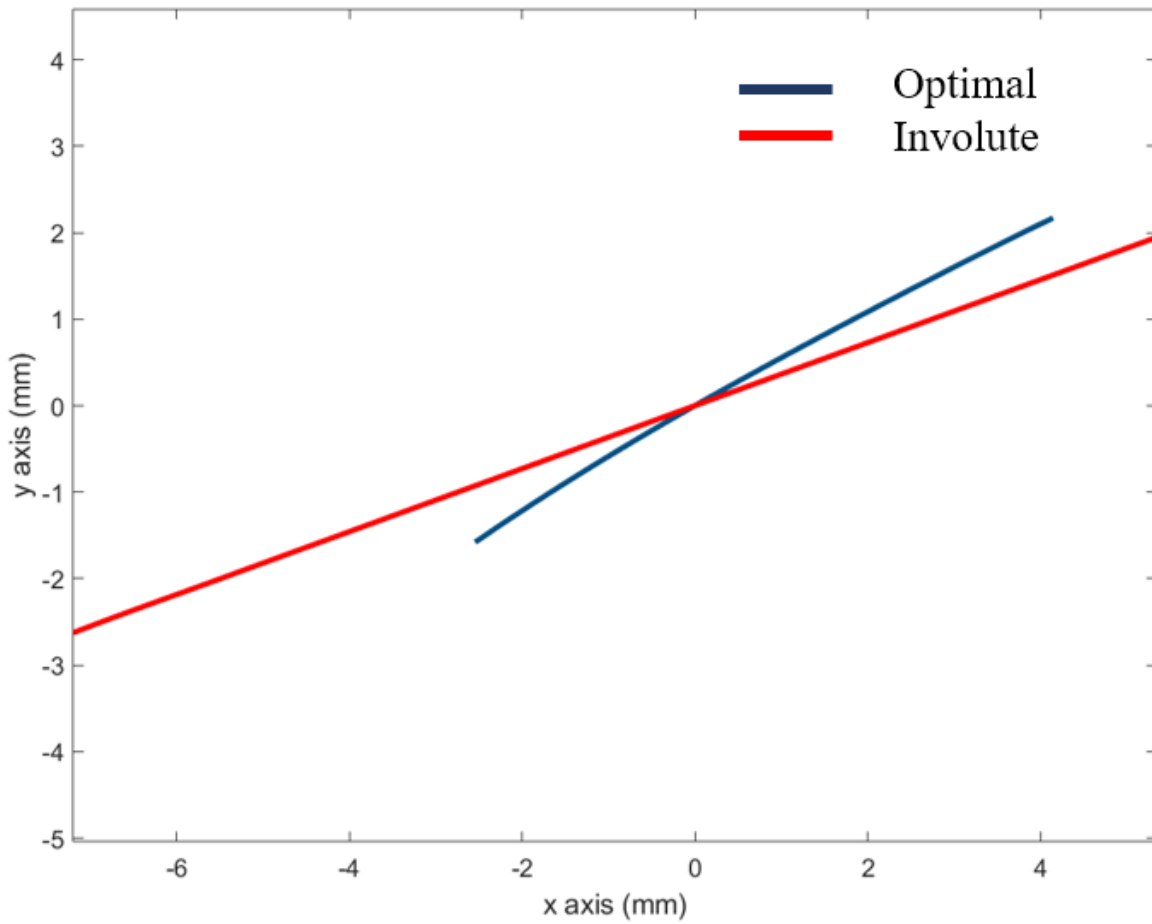
Παρατηρούμε στον παραπάνω πίνακα μείωση της τυπικής απόκλισης έως και 98% σε σχέση με αυτή της εξειλιγμένης. Είναι από του πιο κατάλληλους δείκτες για να εκφράσουν τις απότομες μεταβολές στην καμπύλη δεδομένου ότι είναι ανεπιθύμητες.



**Διάγραμμα 6.3.** Πινιόν και συνεργαζόμενος τροχός - case 2



**Διάγραμμα 6.4.** Πινιόν και συνεργαζόμενος σε συνεργασία - case 2



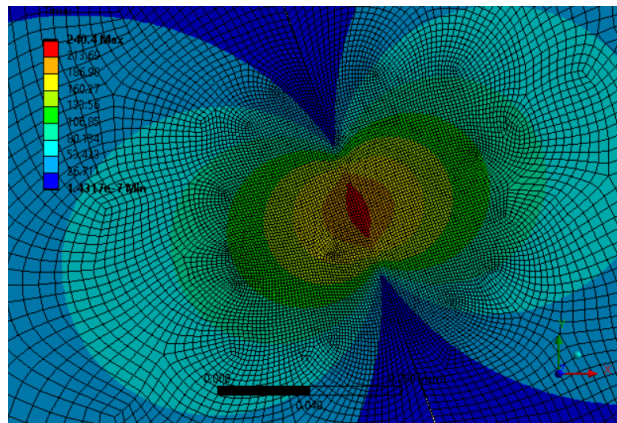
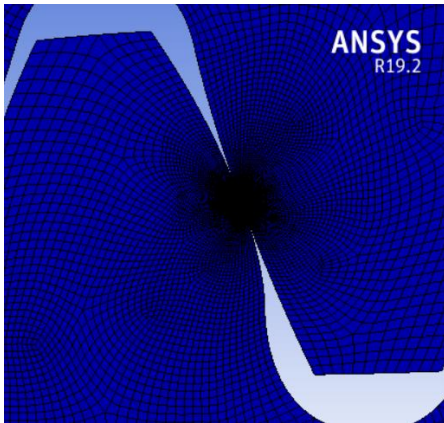
**Διάγραμμα 6.5.** Τροχιές επαφών - case 2

## 7. Ανάλυση με Πεπερασμένα Στοιχεία

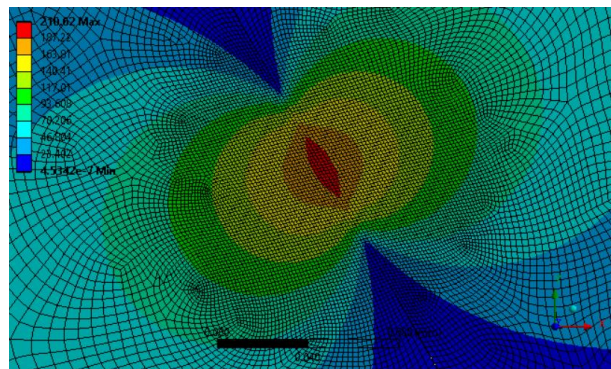
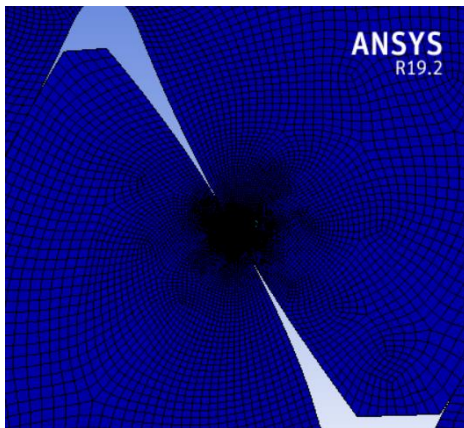
Αυτή η ανάλυση αποτελεί σύγκριση των βελτιστοποιημένων οδόντων ανοιχτής τροχιάς επαφών και των οδόντων εξειλιγμένης. Έγινε στο περιβάλλον του ANSYS ενώ τα CAD αρχεία εξήχθησαν από το SOLIDWORKS. Εφαρμόστηκε ροπή 5000 Nmm στο πινιόν.

### Equivalent Von-Mises Stress

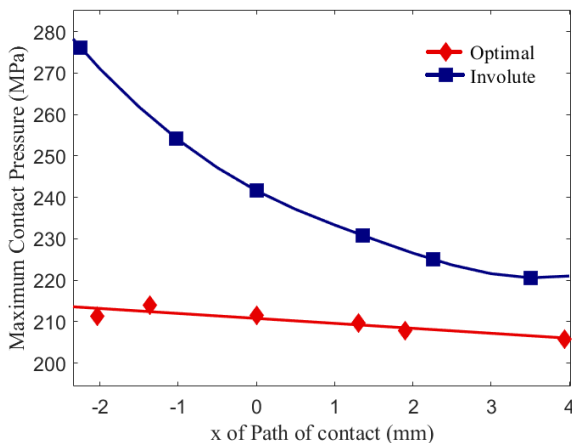
Στη συνέχεια φαίνεται το τασικό πεδίο στο σημείο κύλισης για τα γρανάζια εξειλιγμένης και τα βελτιστοποιημένα.



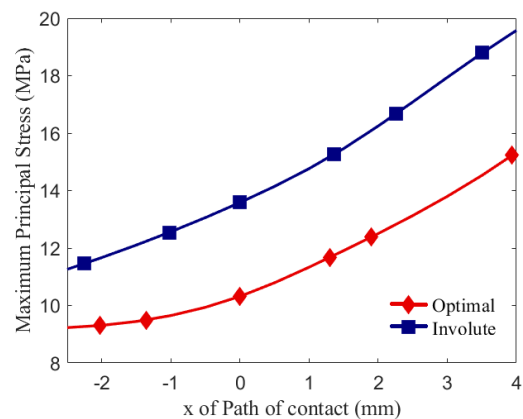
**Διάγραμμα 7.1.** Von-Mises stress – Οδοντωτοί τροχοί εξειλιγμένης, Maximum stress 240.4 MPa



**Διάγραμμα 7.2.** Von-Mises stress – Βελτιστοποιημένοι οδοντωτοί τροχοί, Maximum stress 210.62 MPa



**Διάγραμμα 7.3.α** Επιφανειακή πίεση στο σημείο επαφής κατά μήκος της τροχιάς επαφών



**Διάγραμμα 7.3.β** Καμπτικές τάσεις στον πόδα κατά μήκος της τροχιάς επαφών

Στον ακόλουθο πίνακα φαίνεται η σύγκριση στις τάσεις κατά μήκος της τροχιάς επαφών.

$Z_1=19, Z_2=55, m=2.5$	Involute gears	Optimal gears - case 2
Mean of equivalent curvature	0.1783	0.1130
Mean surface pressure (MPa)	241.4067	210.02
Mean bending stress (MPa)	14.7187	11.40

**Πίνακας 7.1.** Σύγκριση μεταξύ βελτιστοποιημένων οδόντων και οδόντων εξειλιγμένης

## 8. Συμπεράσματα

Λαμβάνοντας υπόψη όλα τα αποτελέσματα παρατηρούμε ότι η λύση του αλγορίθμου της απότομης καθόδου στην ανοιχτή τροχιά επαφών έχει το πιο βελτιωμένο αποτέλεσμα. Ο αλγόριθμος Fmincon βρήκε λύσεις πολύ κοντά σε εκείνες που κατέληξε στο Steepest Descent, δεδομένου ότι και οι δύο μέθοδοι κατέληξαν σε κατατομές οδόντων με σταθερές καμπύλες ισοδύναμης καμπυλότητας. Η ισοδύναμη καμπυλότητα της περίπτωσης 2 είναι μόνιμα πάνω από την ισοδύναμη καμπυλότητα της εξειλιγμένης και είναι πολύ πιο σταθερή από τα γρανάζια ημιτονοειδούς κανόνα. Αυτό επιβεβαιώνεται από τους αντίστοιχους δείκτες που χρησιμοποιήθηκαν για την αξιολόγηση των αποτελεσμάτων (μέση καμπυλότητα, τυπική απόκλιση και μέγιστη ισοδύναμη καμπυλότητα). Ως αποτέλεσμα, περιμένουμε μια βελτιωμένη συμπεριφορά στο στις τάσεις σε σύγκριση με τα γρανάζια εξειλιγμένης η οποία επιβεβαιώνεται μετά από την ανάλυση με πεπερασμένα στοιχεία. Η ανάλυση αυτή έδειξε ότι πράγματι οι τάσεις επαφής μπορούν να είναι σταθερές κατά μήκος της τροχιάς επαφών. Ωστόσο έγινε και αξιολόγηση των καμπτικών τάσεων ώστε να μην είναι μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες στα γρανάζια εξειλιγμένης. Τα διαγράμματα καταδεικνύουν ότι και οι καμπτικές τάσεις είναι χαμηλότερες ενώ σε ένα πιο εξειλιγμένο μοντέλο ο αλγόριθμος θα μπορούσε να τις λαμβάνει υπόψη ώστε να παρουσιάζουν και αυτές σταθερή συμπεριφορά.

## 9. Βιβλιογραφία

- [1] Costopoulos T. N. (1991), Gears and Gearboxes, B' Edition, Simeon's Publications, Athens (in Greek).
- [2] Provatidis C. G. (2017), Optimization & CAD: Finite Elements, Isogeometric Elements, Boundary Elements, TZIOLA'S Publications, Athens (in Greek).
- [3] Spitas V. A., Costopoulos T. N., Spitas C. A., (2002) A quick and efficient algorithm for the calculation of gear profiles based on flank involutization, Athens.
- [4] D. H. Cooper (1968), Tables of hertzian contact-stress coefficients
- [5] Saraswat M., Sharma A. K., (2013) Genetic Algorithm for optimization using MATLAB, International Journal of Advanced Research in Computer Science, Volume 4, No. 3.
- [6] Max Weibring, Leonard Gondecki, Peter Tenberge (2018), Simulation of fatigue failure on tooth flanks in consideration of pitting initiation and growth, Bochum.
- [7] Kostakis F., (2013), Optimal design of gears of closed contact path in order to even distribute stresses (Diploma Thesis), Athens (in Greek).