ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΦΟΙΒΟΣ ΣΚΑΡΠΕΛΟΣ

«Θεωρία Κατηγοριών και Εφαρμογές: Ασάφεια»

ΣΤΗΝ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΠΕΡΙΟΧΗ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ:

ΠΕΤΡΟΣ ΣΤΕΦΑΝΕΑΣ, ΑΝΑΠΛΗΡΩΤΗΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ, ΣΕΜΦΕ

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΕΠΙΤΡΟΠΗ
ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΣ ΑΡΒΑΝΙΤΑΚΗΣ, ΕΠΙΚΟΥΡΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ, ΣΕΜΦΕ
ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ ΚΑΝΕΛΛΟΠΟΥΛΟΣ, ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ, ΣΕΜΦΕ
ΠΕΤΡΟΣ ΣΤΕΦΑΝΕΑΣ, ΑΝΑΠΛΗΡΩΤΗΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ, ΣΕΜΦΕ

ΑΘΗΝΑ, ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ/2021

Φοίβος Σκαρπέλος

Περιεχόμενα

1 Πρόλογος

Τις τελευταίες δεκαετίες η Θεωρία Κατηγοριών γνωρίζει μεγάλη ανάπτυξη, και στο πλαίσιο της αυτοτελούς ανάπτυξής της ως αντικείμενο, αλλά και ιδιαίτερα σε σχέση με τις εφαρμογές της σε διάφορους τομείς, είτε αυτό αφορά τη χρήση της ως εργαλείο σε άλλους τομείς των μαθηματικών, είτε σε άλλους κλάδους, και ιδιαίτερα στην πληροφορική.

Η βασική ιδέα πίσω από τις κατηγορίες είναι πως αν πάρουμε ομοειδή αντικείμενα και τους ομομορφισμούς μεταξύ τους, με τη βοήθεια της πράξης της σύνθεσης και ορισμένων στοιχειοδών ιδιοτήτων, μπορούμε να κατασκευάσουμε μια αυτοτελή θεωρία. Δηλαδή με ελάχιστα αξιώματα προκύπτουν συγκρητικά αρκετά αποτελέσματα. Το μεγάλο επίπεδο αφαίρεσης αυτό, επιτρέπει στις κατηγορίες να μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως εργαλεία σε διάφορους κλάδους, απλώς επιλέγοντας τα αντίστοιχα αντικείμενα.

Ταυτόχρονα, η σχεσιακή αντίληψη των μαθηματικών αντικειμένων που προκύπτει από τις κατηγορίες έχει ενδιαφέρουσες μεθοδολογικές και φιλοσοφικές απολήξεις.

Τα δύο πρώτα κεφάλαια είναι αφιερωμένα στα βασικά στοιχεία της θεωρίας κατηγοριών. Η βάση είναι το *Categories for the Working Mathematician* του *Saunders MacLane*, το οποίο θεωρείται το θεμελιώδες σύγγραμα στο αντικείμενο. Στο δεύτερο κεφάλαιο, στη πλειοψηφία των κατασκευών, ακολουθούμε κυρίως την προσέγγιση του *Benjamin C. Pierce* στο *Basic Category Theory for Computer Scientists*. Ένας από τους βασικούς στόχους της εργασίας είναι να αποτυπώσει τα θεμέλια και τα βασικά εργαλεία του αντικειμένου, αλλά και να αγγίξει τα βασικα μεθοδολογικά ερωτήματα που θέτει, σε ένα συνεκτικό σύνολο που θα μπορούσε να λειτουργήσει ως εισαγωγή ενός αναγνώστη στο αντικείμενο.

Στη συνέχεια μελετάμε κάποια πεδία εφαρμοφών της Θεωρίας Κατηγοριών, σε πεδία για τα οποία υπάρχει ελάχοστη εώς μηδενική βιβλιογραφία στα ελληνικά.

Στο 3ο Κεφάλαιο μελετάμε τη Θεωρία Ασάφειας, η οποία προσπαθεί να περιγράψει προβλήματα, που λόγω της φύσης τους δεν μπορούν να περιγραφούν από τη συνήθη αποτίμηση αληθοτιμών ψευδές/αληθές (0/1). Περιγράφουμε την πρωτότυπη προβληματική του *Zadeh*, η οποία επεκτείνει την αληθοτιμή στο διάστημα [0,1], η οποία όμως άπτεται περισσότερο της περιοχής της βελτιστοποίησης, και η βιβλιογραφία στα ελληνικά είναι σχετικα εκτεταμένη. Η βάση μας είναι στη δουλειά του *J.A.Goguen* στα κείμενα *Logic of Inexact Concepts* και $L - fuzzy$ *Sets* τα οποία επεκτείνουν το σύνολο αληθοτιμών σε διάφορα πλέγματα/δικτυωτά (*lattices*), και στη συνέχεια γενικέυει τα ασαφή σύνολα σε κατηγορίες. Ακολουθούμε μια μεθοδολογία η οποία περιγράφει τα αιτήματα που προκύπτουν από τη σημασιολογία (*semantics*), και το πώς καταλήγουμε στα αντίστοιχα πλέγματα που θα χρησιμοποιήσουμε. Τελικά, η γενίκευση μέσω της θεωρίας κατηγοριών επιτρέπει να περιγράψουμε τη διαδικασία ασαφοποίησης (*fuzzification*) η οποία αποτελεί μια μέθοδο για να επισυνάψουμε τη δομή ασάφειας σε διάφορα μαθηματικά αντικείμενα, όσο γίνεται ανεξάρτητα των εκάστοτε ειδικών τους χαρακτηριστικών.

Στο 4ο κεφάλαιο, περνάμε σε εφαρμογές στη λογική (αφηρημένη θεωρία μοντέλων). Οι *Goguen* και *Burstall* στο *Institutions : Abstract Model Theory for Specification and Programming* κατασκευάζουν τη Θεωρία Θεσμών (*institution* *theory*), ώστε να απαντήσουν στο διαρκώς αυξανόμενο αριθμό λογικών συστημάτων που ακολούθησαν την ανάπτυξη της πληροφορικής. Θεσμός είναι μια κατασκευή που, μεσω εργαλείων της θεωρίας κατηγοριών και της σύνδεσης *Galois* μεταξύ συντακτικού/*semantics*, αποτελεί ένα αφηρημένο πλαίσιο που περιγράφει οποιοδήποτε λογικό σύστημα. Θα μπορούσαμε να το περιγράψουμε ως ¨αφηρημένο λογικό σύστημα¨, το οποίο όταν εξειδικεύεται είναι μια συγκεκριμένη λογική. Τα βασικά κείμενα που ακολουθούμε είναι το προαναφερόμενο και το *What is a Logic*? των *Mossakowski*, *Diaconescu*, *Tarlecki* και *Goguen*. Τέλος συνδυάζουμε τους θεσμούς και την ασαφοποίηση ώστε να κατασκευάσουμε τους ασαφείς θεσμούς, δηλαδή θεσμούς με επισύναψη ασαφούς δομής, ακολουθόντας το *Institutional Semantics for Many−Valued Logics* του *Razvan Diaconescu*.

Σημαντικός στόχος αυτής της εργασίας είναι να διαπεράσει τη θεωρητική δουλειά σε αυτά τα αντικείμενα, σε ένα συνεκτικό σύνολο, να αποτυπώσει, κάποια από αυτά πρώτη φορά στα ελληνικά, και να διερευνήσει κατευθύνσεις για πιθανή περεταίρω έρευνα.

Λέξεις-Κλειδιά

Κατηγορία, Θεωρία Κατηγοριών, Συναρτητής, Φυσικός Μετασχηματισμός, Ζεύγη Προσάρτησης, Προσαρτημένος, Ασάφεια, Ασαφές Σύνολο, $L-$σύνολο Πλέγμα, Ασαφοποίηση, Αφηρημένη Θεωρία Μοντέλων, Θεσμός, Θεωρία Θεσμών, Ασαφής Θεσμός

Keywords

Category, *Category Theory*, *Functor*, *Natural Transformation*, *Adjoint Pair*, *Adjoint*, *Inexact*, *Fuzzy Set*, $L-Set$, *Lattice*, *Fuzzification*, *Abstract Model Theory*, *Institution*, *Institution Theory*, *Fuzzy Institution*

2 Βασικά Στοιχεία Θεωρίας Κατηγοριών

Ορισμός. *Μια **κατηγορία** $\mathcal{C}$ αποτελείται από:*

1. *Μια συλλογή από αντικείμενα (συμβ. $ob(\mathcal{C})$ ή $|\mathcal{C}|$)*
2. *Μια συλλογή από μορφισμούς (αλλιώς βέλη[1] συμβ. $morph_{\mathcal{C}}(a,b)$). Ο συμβολισμός ενός βέλους f μεταξύ των αντικειμένων[2] A και B είναι $f : A \to B$.*
3. *Τελεστές που σε κάθε βέλος/μορφισμό f επισυνάπτουν αντικείμενα $domf$ (πεδίο) και $codf$ (συνπεδίο).*
4. *Τελεστής σύνθεσης (συμβολίζεται $\circ$) που ορίζεται ως εξής:*

   Έστω $f : A \to B$ και $g : B \to C$, τότε ο τελεστής της σύνθεσης στέλνει τα 2 βέλη αυτά σε ένα βέλος $g \circ f : A \to C$ ή αλλιώς $g \circ f : domf \to codg$.

   Επιπροσθέτως ικανοποιεί την προσεταιριστική ιδιότητα (δηλαδή εάν $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$, τότε $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$).
5. *Για όλα τα αντικείμενα υπάρχει ταυτοτικός μορφισμός, δηλαδή ένα βέλος $id_A : A \to A$ τέτοιο ώστε $\forall f : A \to B$, $f \circ id_A = f$ και $\forall f : B \to A$, $id_A \circ f = f$.*

Παρατήρηση. *Το $morph_{\mathcal{C}}(a,b)$ συναντάται και ως $Hom_{\mathcal{C}}(a,b)$, και καλείται $Hom - Set$ (ενώ, παρά το όνομά του δεν είναι απαραίτητο να είναι σύνολο).*

Βασικό παράδειγμα κατηγορίας είναι η κατηγορία Set (κατηγορία των συνόλων), με σύνολα ως αντικείμενα και πράξεις μεταξύ συνόλων ως βέλη.[3] Μπορούμε όμοια να κατασκευάσουμε την κατηγορία $PoSet$ με αντικείμενα μερικά διατεταγμένα σύνολα και βέλη συναρτήσεις που διατηρούν τη μερική διάταξη.

Σημαντικό εργαλείο αποτελούν τα *διαγράμματα/γραφήματα* τα οποία θα περιγράψουμε διαισθητικά. Αρκει να αντιστοιχήσουμε με τις ακμές ενός κατευθυνόμενου γράφου τους μορφισμούς (μορφισμός $f : A \to B$ με κατευθυνόμενη ακμή (A, B) και τους κόμβους με αντικείμενα. Για παράδειγμα η ιδιότητα της σύνθεσης των βελών σε μια κατηγορία μπορεί να απεικονιστεί με το παρακάτω διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f \circ g"] & B \arrow[d, "f"] \\ & C \end{tikzcd}$$

[1] Ο όρος 'βέλη' χρησιμοποιείται συχνότερα ως γενικότερος και στη συνέχεια θα τον χρησιμοποιούμε κατά κανόνα.

[2] Θα δούμε στη συνέχεια πως τα αντικείμενα λαμβάνουν μια πολύ πιο ευρεία σημασία από αυτή που αναμένουμε αρχικά, καθώς μπορεί να περιγράφουν ο,τιδήποτε, ακόμα και βέλη.

[3] Το παράδειγμα αυτό μπορούμε να το θεωρήσουμε "υλοποίηση" της γενικής/αφηρημένης κατηγορίας όπως την ορίσαμε αρχικά.

Όπου τα A, B, C είναι αντικείμενα μιας κατηγορίας $\mathcal{C}$ και f, g είναι βέλη στην κατηγορία αυτή. Τα διαγράμματα, αν οριστούν αυστηρά (όπως θα γίνει στην αμέσως επόμενη ενότητα) αποκτούν αξία ως αποδεικτικό εργαλείο κεντρικό στη θεωρία κατηγοριών, η οποία βασίζεται πάνω στην επόμενη κεντρική ιδιότητα.

Ορισμός. *Ένα διάγραμμα καλείται **μεταθετικό** (commutative), όταν για κάθε ζεύγος αντικειμένων που εμφανίζονται στο διάγραμμα, κάθε "διαδρομή" (από βέλη) που τα συνδέει είναι ισοδύναμη. Δηλαδή όταν, με τη χρήση της σύνθεσης, κάθε διαφορετική διαδρομή από βέλη (με κοινή αρχή και τέλος), δίνει τελικά το ίδιο βέλος.*[4]

Για παράδειγμα το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό αν και μόνο αν $h = f \circ g$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "h"] & B \arrow[d, "f"] \\ & C \end{tikzcd}$$

Ακόμα το ακόλουθο τετραγωνικό διάγραμμα είναι μεταθετικό αν και μόνο αν $g \circ f = k \circ h$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"] & B \arrow[d, "g"] \\ D \arrow[r, "k"] & C \end{tikzcd}$$

Με την έννοια της μεταθετικότητας μπορούμε να εκφράσουμε κάθε πρόταση και ιδιότητα στην γλώσσα των (μεταθετικών) διαγραμμάτων. Για παράδειγμα η προσεταιριστική ιδιότητα της σύνθεσης βελών είναι ισοδύναμη με το να λέμε οτι το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "h"] \arrow[dr, bend right, "g \circ h"'] & X \arrow[d, "g"] \arrow[dr, bend left, "f \circ g"] & \\ & Y \arrow[r, "f"] & Z \end{tikzcd}$$

Ορισμός. ***Υποκατηγορία*** *$\mathcal{A}$ μιας κατηγορίας $\mathcal{C}$ καλείται μια κατηγορία $\mathcal{A}$ όταν:*

1. *κάθε αντικείμενό της είναι και αντικείμενο της $\mathcal{C}$,*
2. *για κάθε ζεύγος αντικειμένων της (έστω a, a') η συλλογή των βελών μεταξύ των δύο αντικειμένων στην $\mathcal{A}$ περιέχεται στην αντίστοιχη συλλογή βελών στην $\mathcal{C}$, δηλαδή $Hom_{\mathcal{A}}(a, a') \subseteq Hom_{\mathcal{C}}(a, a')$ και*

[4] Στη βιβλιογραφία δεν δίνεται αυστηρός ορισμός της ιδιότητας της μεταθετικότητας. Οι ορισμοί είναι σε διαφορετικούς βαθμούς διαισθητικοί. Δεδομένου ότι στη συγκεκριμένη περίπτωση δεν προκαλείται αμφισημία, επιλέγουμε να το διατηρήσουμε, καθώς η διαισθητική ισχύς της θεωρίας κατηγοριών είναι ένα απο τα σημαντικά προτερήματά της.

3. *σύνθεση και ταυτότητες είναι κοινά στις 2 κατηγορίες, δηλαδή η σύνθεση και οι ταυτότητες της $\mathcal{A}$ ταυτίζονται με τον περιορισμό των αντίστοιχων πράξεων της $\mathcal{C}$ στην $\mathcal{A}$.*

2.1 Κατηγορίες και Μετακατηγορίες

Με μια πιο προσεκτική μελέτη του ορισμού της κατηγορίας προκύπτουν αρκετά ερωτήματα. Λόγου χάρην υπάρχει κατηγορία όλων των κατηγοριών; Μπορούμε να αποφύγουμε τα προβλήματα που είχε η θεωρία συνόλων, δεδομένου ότι πράγματι οι κατηγορίες φαίνεται να περιγράφουν και δομές αρκετά "μεγάλες" ώστε σε αντίστοιχες περιπτώσεις η θεωρία συνόλων έφτανε στο οριό της; Κατά πόσο είναι απαραίτητη η θεωρία συνόλων ή άλλα μαθηματικά πλαίσια στη θεμελίωση των κατηγοριών; Ποια η αξιωματική τους θεμελίωση; Σε αυτά τα ερωτήματα έρχονται να απαντήσουν πιο αναλυτικές προσεγγίσεις στον ορισμό της κατηγορίας, οι οποίες, αν και ισοδύναμες με την αρχική κάνουν συγκεκριμένες διακρίσεις οι οποίες απαντούν στα προηγούμενα ερωτήματα. Τέτοιες διακρίσεις είναι **κατηγορία/μετακατηγορία**, **γράφημα/μεταγράφημα** και **μικρή/μεγάλη κατηγορία**. Πέραν της τελευταίας, η οποία θα εξεταστεί στο τέλος του κεφαλαίου, θα τις εξετάσουμε εδώ.

Ορισμός. *Ένα **μέταγραφημα** αποτελείται από μία συλλογη αντικειμένων, μία συλλογή απο βέλη και τους τελεστές domain και codomain, όπως στον αρχικό ορισμό που δώσαμε για την κατηγορία. Μία **μετακατηγορία** είναι ένα μεταγράφημα εφοδιασμένο με το ταυτοτικό βέλος ορισμένο ως πριν και τον τελεστή της σύνθεσης, ορισμένο για τυχόν ζεύγος βελών $< g, f >$ ως $g \circ f : domf \to codg$, όπου $domg = codf$. Επιπλέον ικανοποιούνται ως αξιώματα η μεταβατικότητα και ο νόμος της ταυτότητας (unit law) ορισμένα ως πάνω.*

Η παραπάνω περιγραφή είναι αξιωματική στη θεωρία κατηγοριών, και το κεντρικό νόημα των ορισμών του μεταγραφήματος και της μετακατηγορίας είναι ότι ορίζονται μόνο από τα αξιώματα και χωρίς συνολοθεωρία.

Παρατήρηση. *Όταν η $g \circ f$ ορίζεται, το $< g, f >$ καλείται* συνθέσιμο ζεύγος *(composable pair).*

Πλέον μπορούμε να ορίσουμε εκ νέου την κατηγορία[5]*. Η μετακατηγορία είναι κατηγορία που ορίζεται μέσω αξιωμάτων και χωρις συνολοθεωρία, και ταυτόχρονα όλες οι δυνατές ερμηνίες της αξιωματικοποίησης αυτής. Αντιπαραβάλλουμε σε αυτή μία κατηγορία η οποία όμως δεν είναι μετακατηγορία, δηλαδή μια κατηγορία που χρησιμοποιεί συνολοθεωρία (όπως η Set), είναι μια* ερμηνεία *(interpretation) των αξιωμάτων, ή αλλιώς μια συγκεκριμένη υλοποίηση του πλαισίου που μας προσφέρει η αξιωματικοποίηση. Αυτή η ερμηνεία, όπως θα δούμε στη συνέχεια θα αποτελεί και αυτοτελή μαθηματική θεωρία (συγκεκριμένα όλα τα παραδείγματα που*

[5]Στη συνέχεια, δεδομένου ότι διατηρούμε τη διάκριση που κάνουμε αυτή τη στιγμή θα καλούμε για συντομία κατηγορίες, και τις μετακατηγορίες. Η "κατηγορία" υπονοεί κατηγορία που χρησιμοποιεί συνολοθεωρία, μόνο όταν αντιπαραβάλλεται με την μετακατηγορία

αναφέραμε πιο πάνω αποτελούν θεωρίες με δική τους αξιωματικοποίηση).

Ορισμός. *Ένα* ***κατευθυνόμενο γράφημα*** *(directed graph ή diagram scheme) αποτελείται από σύνολο αντικειμένων O, σύνολο βελών A και συναρτήσεις $dom : A \to O$ και $cod : A \to O$.* ***Συνθέσιμο ζεύγος βελών****, καλείται το σύνολο*

$$A \times_{\circ} A := \{< g, f >: g, f \in A \quad \& \quad domg = codf\} \tag{1}$$

Κατηγορία *καλείται ένα κατευθυνόμενο γράφημα εφοδιασμένο με τις συναρτήσεις ταυτότητας ($id : 0 \to A$, $c \mapsto id_c$) και σύνθεσης ($A \times_o A$, $< g, f > \mapsto g \circ f$). Τέτοιες ώστε*

$$dom(id_a) = a = cod(id_a) \tag{2}$$

$$dom(g \circ f) = domf \tag{3}$$

$$cod(g \circ f) = codf \tag{4}$$

$\forall < g, f > \in A \times_0 A$ *και ισχύουν τα αξιώματα μεταβατικότητας και ταυτότητας.*

.

2.2 Συναρτητές

Η βασική φιλοσοφία της θεωρίας κατηγοριών είναι οτι για κάθε αφηρημένο μαθηματικό αντικείμενο (/μαθηματική δομή) θα πρέπει να ορίσουμε (σαν ζευγάρι) και μορφισμούς που διατηρούν αυτή την δομή. Αυτή η ιδέα βρίσκεται πίσω από τον ορισμό της κατηγορίας όπως έχουμε αναφέρει ηδη. Πηγαίνοντας ένα βήμα παραπέρα μπορούμε να δούμε και την ίδια έννοια της κατηγορίας σαν ένα αφηρημένο μαθηματικό αντικείμενο οπότε είναι αναγκαίο να ορίσουμε και μορφισμούς ανάμεσα σε κατηγορίες που να διατηρούν την δομή τους. Αυτό τον ρόλο παίζει η έννοια του συναρτητή.

Μπορούμε όμως να δικαιολογήσουμε την ύπαρξη της έννοιας του συναρτητή και με έναν άλλο πιο διαισθητικό τρόπο. Είπαμε πως μπορούμε να σκεφτόμαστε τις κατηγορίες διαισθητικά ως το πεδίο που αναπτύσουμε μια μαθηματική θεωρία (π.χ. μεσα στην κατηγορία των ομάδων αναπτύσουμε την Θεωρία Ομάδων). Όποιος όμως έχει μια εμπειρία στα μαθηματικά ξέρει οτι, μετά απο ένα σημείο, για να εργαστούμα πάνω σε μια θεωρία ή για να κάνουμε ουσιαστική πρόοδο σε ένα πρόβλημα συνήθως απαιτείται να δουλέψουμε πάνω από πολλές κατηγορίες (αντίστοιχα θεωρίες). Για παράδειγμα στην θεωρία $Galois$ για να κατανοήσουμε την δομή των αλγεβρικών επεκτάσεων αναγκαζόμαστε να φύγουμε από την κατηγορία των σωμάτων και να λάβουμε υπ όψιν μας και την κατηγορία των ομάδων (μέσω της ομάδας $Galois$). Υπάρχουν πάρα πολλά παρόμοια παραδείγματα. Ο συναρτητής λοιπόν είναι κατά κάποιον τρόπο ο φορμαλισμός με τον οποίο συκρίνουμε μαθηματικές θεωρίες (αντίστοιχα ο τρόπος που συγκρίνουμε κατηγορίες).

Έτσι καταλήγουμε στον ορισμό:

Ορισμός. *Έστω $\mathcal{C}$ και $\mathcal{D}$ δυο κατηγορίες. Ένας* **συναρτητής** *(Functor) $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ αποτελείται από τα ακόλουθα:*

1. *Ένα αντικείμενο $Fc \in \mathcal{D}$ για κάθε αντικείμενο $c \in \mathcal{C}$.*
2. *Ένα βέλος $Ff : Fc \to Fd$ για κάθε βέλος $f : c \to d$.*
3. *Πρέπει να έχουμε: $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$, όποτε το $g \circ f$ ορίζεται και για κάθε αντικείμενο $c \in \mathcal{C}$ έχουμε $F(id_c) = id_{F(c)}$. Η πρώτη συνθήκη μεταφράζεται στο ότι το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό:*

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "F(g)"] \arrow[dr, "F(f \circ g)"'] & F(B) \arrow[d, "F(f)"] \\ & F(C) \end{tikzcd}$$

Δηλαδή ένας συναρτητής απεικονίζει αντικείμενα της $\mathcal{C}$ σε αντικείμενα της $\mathcal{D}$ και βέλη της $\mathcal{C}$ σε βέλη της $\mathcal{D}$ με τέτοιον τρόπο έτσι ώστε να διατηρήται η δομή της $\mathcal{C}$ (δηλαδή 'σέβεται' τα πεδία, τα συνπεδία, την σύνθεση βελών, και τα ταυτοτικά βέλη). Ένας συναρτητής (για παράδειγμα $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$) ορίζεται πλήρως μέσω 2 συναρτήσεων. Της **συνάρτησης αντικειμένων** ($F : c \to Fc$) και της **συνάρτησης βελών** ($F : f \to Tf$ όπου $f : c \to c'$ της $\mathcal{C}$ και $Tf : Tc \to Tc'$ της $\mathcal{D}$)[6].

Παραδείγματα. .

1. *Έστω Set η κατηγορία των συνόλων. Ορίζουμε τότε τον συναρτητή $P : Set \to Set$ που στέλνει κάθε σύνολο A στο δυναμοσύνολό του $P(A)$ και κάθε συνάρτηση $f : A \to B$ στην $P(f) : P(A) \to P(B), C \subseteq A \longmapsto f(C) \subseteq B$. Εύκολα επαληθεύουμε οτι ο P είναι όντως συναρτητής.*
2. *Έστω κατηγορία, που για κάθε ζεύγος αντικειμένων της υπάρχει το πολύ ένα βέλος. Ο ορισμός ισοδυναμεί με το να ορίζαμε μια διμελή σχέση διάταξης $\leq$, όπου*[7] *$a \leq b$ αν−ν $a \to b$. Αυτές οι κατηγορίες ονομάζονται* προδιατάξεις *(preorder). Κάθε μερικώς διατεταγμένο σύνολο είναι τέτοια κατηγορία, και επίσης μπορούμε να ορίσουμε κατηγορία* **PoSet***, πάνω σε ένα σύμπαν στοιχείων, η οποία επίσης είναι προδιάταξη (με τη σχέση του περιέχεσθαι ως διάταξη). Πιο γενικά μπορούμε να ορίσουμε την* **PoSet** *ως κατηγορία με αντικείμενα όλα τα μερικώς διατεταγμένα σύνολα και μορφισμούς όλες τις συναρτήσεις που σέβονται όλη τη διάταξη (οι μονότονες συναρτήσεις). Δηλαδή, για $(P, \leq_P), (Q, \leq_Q)$ να είναι posets $p \leq_P p'$ συνεπάγεται $f(p) \leq_Q f(p')$, $\forall p, p' \in P$. Κάθε βέλος της* **PoSet** *είναι συναρτητής αν θεωρήσουμε κάθε poset κατηγορία ως προδιάταξη.*

[6] Η λέξη συνάρτηση χρησιμοποιείται με κάθε παραδοχή σε σχέση με τη χρήση συνολοθεωρίας που έγινε στην παράγραφο "Κατηγορίες και Μετακατηγορίες" όπως επίσης και θα γίνει στην παράγραφο "Μεγάλες και Μικρές Κατηγορίες"

[7] Η ανακλαστική ιδιότητα είναι το ταυτοτικό βέλος, η μεταβατική ιδιότητα είναι η σύνθεση, και η αντισυμμετρικότητα αντιστοιχεί στο ότι για κάθε ζεύγος στοιχείων υπάρχει το πολύ ένα βέλος.

3. *Έστω Top η κατηγορία των τοπολογικών χώρων. Ορίζουμε τότε τον συναρτητή $F : Top \to Set$ ως εξής: Αν $\mathcal{X}$ είναι ένας τοπολογικός χώρος τότε $F(\mathcal{X})$ ειναι απλά το σύνολο $\mathcal{X}$ και κάθε συνεχής συνάρτηση f απεικονίζεται στην αντίστοιχη συνάρτηση f όπου τώρα απλά έχουμε ξεχάσει την τοπολογική δομή.*

4. *Έστω Grp η κατηγορία των ομάδων. Όριζουμε τον συναρτητή $F : Grp \to Set$ που στέλνει και κάθε ομάδα G στο σύνολο G και κάθε ομομρφισμό ομάδων ϕ στην συνάρτηση ϕ. Εύκολα βλέπουμε οτι ο F είναι όντως συναρτητής.*

5. *Γενικότερα αν έχουμε μια κατηγορία C που τα αντικείμενά της είναι σύνολα με μια δομή και οι μορφισμοί της είναι συναρτήσεις που διατηρούν την δομή αυτή τότε ο κανόνας που αντιστοιχεί το κάθε αντικείμενο A στο σύνολο A και κάθε "ομομοσρφισμό" f στην συνάρτηση f είναι ένας συναρτητής από την κατηγορία C στην κατηγορία Set.*

6. *Αν Rng είναι η κατηγορία των δακτυλίων τότε ο κανόνας που στέλνει κάθε δακτύλιο R στην αντίστοιχη αβελιανή ομάδα R και κάθε ομομορφισμό δακτυλίων f στον αντίστοιχο ομορφισμό ομάδων f είναι προφανώς ένας συναρτητής $Rng \to Grp$.*

7. *Ο κανόνας που απεικονίζει κάθε σύνολο S στην ελεύθερη ομάδα που παράγει $F(S)$ και κάθε συνάρτηση f στον αντίστοιχο ομομορφισμό που παράγεται από την καθολική ιδιότητα*[8] *της κατασκευής της ελεύθερης ομάδας είναι ένας συναρτητής από την Set στην $Groups$.*

8. *Γενικότερα σχεδόν κάθε κατασκευή στην άλγεβρα που ικανοποιεί μια οικουμενική ιδιότητα (π.χ. η κατασκευή της ελεύθερης (αβελιανής) ομάδας, η κατασκευή του τανυστικού γινομένου μεταξύ ενός R-προτύπου και ενός δακτυλίου που περιέχει τον δακτύλιο R, η κατασκευή του σώματος κλασμάτων ενός πεδίου ακεραιότητας, η κατασκευή της ελεύθερης R-άλγεβρας με n γεννήτορες...) μπορεί να ερμηνευτεί σαν ένας συναρτητής με φυσιολογικό τρόπο.*

9. *Τέλος αναφέρουμε το πρώτο (ιστορικά) μη τετριμμένο παράδειγμα συναρτητή: Έστω X ένας τοπολογικός χώρος. Ορίζεται μία ομάδα για τον κάθε τοπολογικό χώρο που ονομάζεται πρώτη θεμελιώδης ομάδα $\pi_1(X)$. Αυτή κατασκευάζεται από την ομοτοπία ως σχέση ισοδυναμίας, δηλαδή σε μια κλάση ισοδυναμίας ανήκουν όλες οι κλειστές καμπύλες (με σημείο αναφοράς ένα x_0, δηλαδή όλοι οι βρόγχοι του x_0) που είναι ομοτοπικοί μεταξύ τους (υπάρχει συνεχής μετασχηματισμός από τον ένα στον άλλο). Κάθε κλάση ισοδυναμίας είναι ένα στοιχείο της ομάδας, δηλαδή αν ονομάσουμε Π όλους τους συνεχείς βρόγχους από το x_0, τότε $\pi(X) = \Pi/\simeq$. Επίσης αποδυκνείεται ότι όταν ο χώρος είναι συνεκτικός, τότε η θεμελιώδης ομάδα δεν εξαρτάται από το αρχικό σημείο x_0. Αυτό μας επιτρέπει να ορίζουμε την "απεικόνιση" $X \mapsto \pi(X)$. Αυτό έχει την σημαντική συνέπεια οτι αν δυο χώροι έχουν μη ισομορφικές*

[8] Το τι ακριβώς σημαίνει οικουμενική/καθολική ιδιότητα θα το συναντήσουμε στο επόμενο κεφάλαιο.

θεμελειώδεις ομάδες τότε δεν είναι ομοιομορφικοί. Η $X \mapsto \pi_1(X)$ γενικεύεται σε συναρτητή $\pi_1 : Top \to Grp$ (ή στη περίπτωση που μας νοιάζει το x_0, $Top* \to Set$), με αυτή την απεικόνιση ως απεικόνιση των αντικειμένων. Η απεικόνιση μορφισμών είναι $(f : X \to Y) \mapsto (\pi_1 f : \pi_1(X) \to \pi_1(Y))$, στέλνει δηλαδή ομομορφισμούς τοπολογικών χώρων σε ομομορφισμούς ομάδων.

Παρατήρηση. *Οι συναρτητές στα παραδείγματα 3,4,5 αναφέρονται στην βιβλιογραφία και ως επιλήσμονες συναρτητές. Ο όρος επιλήσμων συναρτητής ($forgetful$ $functor$) χρησιμοποιείται για να υποδείξει οτι τα αντικείμενα του 'συνπεδίου' του συναρτητή έχουν λιγότερη δομή από τα αντικέιμενα του πεδίου του. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι οι προβολές[9], οι οποίες "κατεβάζουν" διάσταση. Ουσιαστικά ο επιλήσμων συναρτητής ερμηνεύεται ως οποιαδήποτε διαδικασία "χάνει/ξεχνά" πληροφορία. Η γνωστή σε όλους προβολή χάνει διάσταση, στο παράδειγμα 3 χάνει τη τοπολογική δομή, στο παράδειγμα 4 χάνει την εσωτερική δομή της ομάδας η οποία πηγάζει από την εσωτερική πράξη, στο παράδειγμα 5 (που ουσιαστικά είναι η γενική περίπτωση στην οποία εμπίπτουν τα υπόλοιπα παραδείγματα) χάνει την ιδιαίτερη δομή της θεωρίας η οποία αποτελεί την ιδιαίτερη ερμηνεία της εκάστοτε κατηγορίας C. Συγκεκριμένα, αν γενικεύσουμε το παράδειγμα 5, αντικαθιστώντας την κατηγορία Set με οποιαδήποτε κατηγορία αναπαριστά δομή που προκύπτει με αφαίρεση αξιωμάτων από τη δομή της C, περιγράφουμε πλήρως την έννοια του επιλήσμονα συναρτητή.*

Υπάρχει και ένα δεύτερο είδος συναρτητή που είναι αρκετά χρήσιμο. Ορίζουμε λοπόν τον συναλλοίωτο συναρτητή να είναι το ίδιο πράγμα με ένα συνηθησμένο ($covariant$) συναρτητή μέ τη διαφορά ότι αντιστρέφει την διεύθυνση των βελών. Πιο συγκεκριμένα έχουμε:

Ορισμός. *Έστω $\mathcal{C}$ και $\mathcal{D}$ δυο κατηγορίες. Ένας* ***συναλλοίωτος*** *(contravariant) συναρτητής $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ αποτελείται από τα ακόλουθα:*

1. *Ένα αντικείμενο $Fc \in \mathcal{D}$ για κάθε αντικείμενο $c \in \mathcal{C}$.*
2. *Ένα μορφισμό $Ff : Fc \to Fd$ για κάθε μορφισμό $f : d \to c$.*
3. *Ακόμα πρέπει να έχουμε οτι $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$ όποτε το $g \circ f$ έχει νόημα και για κάθε αντικείμενο $c \in \mathcal{C}$ έχουμε $F(id_c) = id_{F(c)}$*

Ορίζουμε την σύνθεση δυο συναρτητών με τον προφανή τρόπο δηλαδή όπως στους μορφισμούς, καθως τελικα μιλάμε και στις 2 περιπτώσεις για σύνθεση βελών. Θα αναφέρουμε τον ορισμό για λόγους διευκόλυνσης. Αν $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}, G : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ τότε $G \circ F$ στέλνει το $\mathcal{A}-$αντικείμενο A στο $\mathcal{C}-$αντικείμενο $G(F(A))$ και το

[9] Το οποίο θα μελετήσουμε σε απλούστερη μορφή στην αρχή του επόμενου κεφαλαίου στο γινόμενο και το συνγινόμενο, καθώς οι κατασκευές θα μελετηθούν κατά κόρων με μία προσέγγιση αντικειμένων/μορφισμών.

$\mathcal{A}-$βέλος $f : A \to A'$ στο $\mathcal{C}-$βέλος $G(F(f)) : G(F(A)) \to G(F(A'))$. Ακόμα όταν λέμε συναρτητής θα το εννοούμε με την έννοια του πρώτου ορισμού που δώσαμε.

2.2.1 Μερικές Ιδιότητες Συναρτητών

1. Οι συναρτητές διατηρούν τη μεταθετικότητα (δηλ. στέλνουν μεταθετικά διαγράμματα σε μεταθετικά διαγράμματα).[10]

2. Η σύνθεση δυο συναρτητών είναι συναρτητής. Η σύνθεση δυο συναλλοίωτων συναρτητών είναι συναρτητής[11] και η σύνθεση ενός συναρτητή και ενός συναλλοίωτου συναρτητή και ενός συναρτητή είναι συναλλοίωτος συναρτητής.

3. Ένας συναρτητής σέβεται τον ισομορφισμό (δηλ. στέλνει ισόμορφα αντικείμενα σε ισόμορφα αντικείμενα).[12] Αν δηλαδή f ισομορφισμός μεταξύ αντικειμένων της $\mathcal{C}$, τότε $F(f)$ ισομορφισμός αντικειμένων της $\mathcal{D}$, για $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. Το ίδιο ισχύει και για τους συναλλοίωτους συναρτητές.

4. [13]Αν $\mathcal{C}$ και $\mathcal{D}$ είναι δυο κατηγορίες και $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ένας συναλλοίωτος συναρτητής τότε υπάρχει μοναδικός συναρτητής $G : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}$ τέτοιος ώστε $F = G \circ L_{\mathcal{C}}$ όπου $L_{\mathcal{C}}$ είναι ο φυσιολογικός συναλλοίωτος συναρτητής $\mathcal{C} \to \mathcal{C}^{op}$.

Τέλος ορίζουμε μια σημαντική ειδική κατηγορία (συναλλοίωτων) συναρτητών που θα μας φανούν χρήσιμοι στην επόμενη ενότητα:

Έστω $\mathcal{C}$ μια κατηγορία και $A, B \in ob(\mathcal{C})$. Για $f : X \to Y$ ορίζουμε $f^* : Hom_{\mathcal{C}}(Y, B) \to Hom_{\mathcal{C}}(X, B)$ ως $g \longmapsto g \circ f$ και $f_* : Hom_{\mathcal{C}}(A, X) \to Hom_{\mathcal{C}}(A, Y)$ ως $g \longmapsto f \circ g$. Τότε ο κανόνας:

$$F(X) = Hom_{\mathcal{C}}(A, X) F(f) = f_*$$

είναι ένας συναρτητής από την $\mathcal{C}$ στην Set και ο κανόνας:

$$G(X) = Hom_{\mathcal{C}}(X, B) G(f) = f^*$$

είναι ένας συναλλοίωτος συναρτητής από την $\mathcal{C}$ στην Set. Όπου $f : X \to Y$.

[10] Προκύπτει άμεσα από τον ορισμό της μεταθετικότητας και του συναρτητή.

[11] Προκύπτει από το πόσες φορές "αντιστρέφονται" τα βέλη.

[12] Προκύπτει άμεσα από ορισμούς συναρτητή και ισομορφισμού (τον 2ο θα τον συναντήσουμε στη συνέχεια).

[13] Η $\mathcal{C}^{op}$ είναι η λεγόμενη δυϊκή/δυαδική κατηγορία της $\mathcal{C}$. Προς το παρόν αρκεί να την θεωρήσουμε ως την $\mathcal{C}$ με ανεστραμμένη τη φορά όλων των βελών της. Η έννοια της δυϊκότητας θα μελετηθεί στη συνέχεια εκτενώς.

2.3 Φυσικοί Μετασχηματισμοί

Όπως είπαμε οι συναρτητές είναι- διαισθητικά- φορμαλισμοί για να συγκρίνουμε μαθηματικές θεωρίες. Λίγο διαφορετικά, από ιστορικής απόψεως, η έννοια του φυσικού μετασχηματισμού κάνει την διαισθητική ιδέα της 'φυσικής κατασκευής' μαθηματικά αυστηρή. Πολλές φορές στα μαθηματικά χρειάζεται να συγκρίνουμε/συσχετίσουμε δυο φυσικές κατασκευές μεταξύ τους. Αυτή η ανάγκη μας οδηγεί στον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός. *Έστω $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ και $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ δυο συναρτητές. Ένας φυσικός μετασχηματισμός $\phi : F \to G$ είναι ένας 'κανόνας' που αντιστοιχεί για κάθε $X \in Ob(\mathcal{C})$ ένα μορφισμό $\phi_X : F(X) \to G(X)$ τέτοιο ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι μεταθετικό για κάθε f μορφισμό της $\mathcal{C}$:*

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\phi_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\phi_Y"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

Ο μετασχηματισμός ϕ λέγεται φυσικός μετασχηματισμός αν ο μορφισμός ϕ_X είναι ισομορφισμός[14] *για κάθε X.Σε αυτή την περίπτωση γράφουμε $F \simeq G$. Ένας φυσικός μετασχηματισμός επίσης συχνά συμβολίζεται $F \Rightarrow G$*

Δηλαδή ένας φυσικός μετασχηματισμός μεταξύ δυο συναρτητών είναι ένας κανόνας που μας δείχνει για κάθε αντικείενο της $\mathcal{C}$ πως να πάμε από αυτό που αντιστοιχεί ο F σε αυτό που αντιστοιχεί ο G με τέτοιον τρόπο ώστε αυτή η αλλαγή να εξαρτάται μόνο από το αρχικό αντικείμενο. Ο φυσικός μετασχηματισμός ϕ περιγράφεται πλήρως από τα στοιχεία του (ϕ_x, για όλα τα $x \in Ob(\mathcal{C})$)Ανάλογα μπορούμε να ορίσουμε φυσικούς μετασχηματισμούς ανάμεσα σε δυο συναλλοίωτους συναρτητές. Αναφέρουμε τώρα μερικά βασικά παραδείγματα:

Παραδείγματα. .

1. *Έστω $\phi : A \to B$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$. Άκομα έστω οι συναρτητές $F : X \longmapsto Hom_{\mathcal{C}}(X, A)$, $G : X \longmapsto Hom_{\mathcal{C}}(X, B)$. Αλλιώς, $F = Hom_{\mathcal{C}}(\_, A)$, $G = Hom_{\mathcal{C}}(\_, B)$. Τότε ο 'κανόνας' $\Phi_X = \phi_*$ είναι ένας φυσικός μετασχηματισμός $F \to G$. Αντίστοιχα αν ορίσουμε τους συναρτητές $H, I : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ από τους κανόνες $H : X \longmapsto Hom_{\mathcal{C}}(A, X)$ και $I : X \longmapsto Hom_{\mathcal{C}}(B, X)$ (αλλιώς $H = Hom_{\mathcal{C}}(A, \_)$, $I = Hom_{\mathcal{C}}(B, \_)$) τότε ο κανόνας $\Phi_X = \phi^*$ είναι ένας φυσικός μετασχηματισμός.*

[14] Προς το παρόν, δεν έχουμε ορίσει αυστηρά τους ισομορφισμούς, κάτι που θα γίνει στην επόμενη παράγραφο. Προς το παρόν κάτι τέτοιο δεν απαιτείται, καθώς τα πράγματα δεν αλλάζουν ουσιοδώς από αυτά που γνωρίζει κανείς απο άλγεβρα και συνολοθεωρία

2. *Έστω $Vect(R)$ η κατηγορία των πραγματικών διανυσματικών χώρων και ο συναρτητής $F : V \longmapsto Hom(R, V)$. Γενικά είναι εύκολο να δείξουμε οτι ο χώρος V είναι ισομορφικός με τον $Hom(R, V)$. Μάλιστα υπάρχει μια προφανής επιλογή ισομορφισμού μεταξύ αυτών των δυο χώρων που μας δείχνει οτι ο συναρτητής F είναι φυσιολογικά ισομορφικός με τον ταυτοτικό συναρτητή. Συνήθως σε τέτοιες περιπτώσεις λέμε οτι ο V και ο $Hom(R, V)$ είναι φυσιολογικά ισομορφικοί.*

3. [15] *Έστω αντιμεταθετικοί δακτύλιοι (αντικείμενα της* **CRng***) R, S και ομομορφισμός μεταξύ τους (μορφισμός της ίδιας κατηγορίας) $f : R \to S$. Η ομάδα αντιστρέψιμων πινάκων ενός δακτυλίου $GL_n(R)$ ανήκει στην κατηγορία των ομάδων* **Grp***, και ο GL_n είναι συναρτητής* **CRng** $\to$ **Grp** *($GL_n(f) : GL_n(R) \to GL_n(S)$ είναι η f να εφαρμόζεται σε κάθε στοιχείο του πίνακα). Άλλος συναρτητής είναι ο $*$:* **CRng** $\to$ **Grp***, ο οποίος δίνει την ομάδα των αντιστρέψιμων στοιχείων του δακτυλίου και για κάθε ομομορφισμό δακτυλίων δίνει τον περιορισμό του στα αντιστρέψιμα στοιχεία του. Η ορίζουσα είναι ομομορφισμός ομάδων $det_{\_} : GL_n(\_) \to \_*$. Επίσης, για κάθε δακυτύλιο ορίζεται από τον ίδιο τύπο*[16]*, επομένως δρά "με τον ίδιο τρόπο", άρα έχουμε $f * \circ det_R = det_S \circ GL_n(f)$, που είναι το διάγραμμα του φυσικού μετασχηματισμού.*

4. [17] *Για να μελετήσουμε παραπάνω την φράση "ορίζεται από τον ίδιο τύπο", και τη διαίσθηση ότι συναρτήσεις που δεν εξαρτώνται από το συγκεκριμένο αντικείμενο που λαμβάνουν ως είσοδο είναι φυσικοί μετασχηματισμοί, θα κοιτάξουμε ένα παράδειγμα εφαρμογής στον προγραμματισμό. Έστω λίστες με στοιχεία από ένα σύνολο L_1 (σύνολο συμβόλων), και έναν ομομορφισμό λιστών (σε κάποιο άλλο σύνολο συμβόλων πιθανώς L_2) $f : List(L_1) \to List(L_2)$, όπου $f = maplist(g)$, όπου g ομομορφισμός "τύπων" ($L_1 \to L_2$) και $maplist$ η εντολή/συνάρτηση που απεικονίζει μία λίστα μέσω ενός κανόνα. Η συνάρτηση $reverse\_list$ είναι φυσικός μετασχηματισμός, γιατί λειτουργεί με τον ίδιο τρόπο, ανεξάρτητα με τα συγκεκριμένα αντικείμενα εισόδου, και συγκεκριμένα εδώ*[18] *$reverse\_list_{L_2} \circ f = f \circ reverse\_list_{L_1}$:*

$$\begin{tikzcd}
{[6,8,12]} \arrow[r, mapsto, "reverse_list_{L_1}"] \arrow[d, mapsto, "f"] & {[12,8,6]} \arrow[d, mapsto, "f"] \\
{[f(6), f(8), f(12)]} \arrow[r, mapsto, "reverse_list_{L_2}"] & {[f(12), f(8), f(6)]}
\end{tikzcd}$$

Παρατήρηση. *Αν έχουμε τρεις συναρτητές $F, G, H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ και φυσικούς μετασχηματισμούς $\eta : F \to G$, $\phi : G \to H$ τότε μπορούμε να ορίσουμε τον φυσικό μετασχηματισμό $\phi \circ \eta$ που αποτελείται από τους μορφισμούς $\phi_x \circ \eta_x$ για κάθε*

[15] Από τα πιο βασικά παραδείγματα σε κάθε εισαγωγικό κείμενο.

[16] φόρμουλα *Leibniz*

[17] Το παράδειγμα βρίσκεται στον *Pierce*, [10] σ.42

[18] Παράδειγμα για $L_1 = \mathbb{N}$ και μέγεθος λίστας 3.

αντικείμενο $x \in Ob(\mathcal{C})$. Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να ορίσουμε την κατηγορία $Func(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ που αποτελείται από όλους τους συναρτητές $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ (σαν αντικείμενα), με μορφισμούς φυσικούς μετασχηματισμούς ανάμεσα στους συναρτητές και με την σύνθεση όπως ορίσαμε πιο πάνω.

Επιπλέον ισχύει πως η σύνθεση φυσικών μετασχηματισμών είναι φυσικός μετασχηματισμός.

Στο πρώτο παράδειγμα είδαμε κάποιους φυσικούς μετασχηματισμούς ανάμεσα σε δυο (συναλλοίωτους/ *contravariant*) συναρτητές ειδικού τύπου. Ένα από τα πιο σημαντικά θεωρήματα της θεωρίας κατηγορίων μας δίνει μια πλήρη περιγραφή των φυσικών μετασχηματισμών ανάμεσα σε τέτοιους συναρτητές. Το θεώρημα αυτό λέγεται το λήμμα του $Yoneda$ το οποίο θα αναφέρουμε τώρα:

Λήμμα του $Yoneda$**.** *Έστω $\mathcal{C}$ κατηγορία, r αντικείμενό της, και συναρτητής $K : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$. Ισχύει $Nat(D(r, \_), K) \cong Kr$. Δηλαδή η K-εικόνα του r είναι ισόμορφη με το σύνολο των φυσικών μετασχηματισμών από το συναρτητή $D(r,$-$)$ στο συναρτητή K. Ο ισομορφισμός (αφού βρισκόμαστε στη $\mathbf{Set}$) είναι μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία $(\alpha : D(r, \_) \to K) \mapsto \alpha_r 1_r$, δηλαδή κάθε φυσικός μετασχηματισμός α αντιστοιχεί στην α-εικόνα της ταυτότητας του r.*

Το παραπάνω Λήμμα είναι κεντρικό αποτέλεσμα της θεωρίας κατηγοριών. Χρησιμοποιεί την $\mathbf{Set}$ ώστε να βρει έναν ισομορφισμό μεταξύ 2 τελείως διαφορετικών επιπέδων αφαίρεσης. Από τη μία έχουμε τους φυσικούς μετασχηματισμούς, μεταξύ δύο συναρτητών, δηλαδή ένα $hom - set$ μιας κατηγορίας συναρτητών και από την άλλη έχουμε απλώς ένα σύνολο. Η απόδειξη λειτουργεί ως εξής: Ο α είναι φυσικός μετασχηματισμός, επομένως έχουμε τα μεταθετικά διαγράμματα για κάθε x, y αντικείμενα της $\mathcal{C}$ που έχουν βέλος μεταξύ τους.

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[d, "f"] & D(r,x) \arrow[r, "\alpha_x"] \arrow[d, "D(r,f)=f_*"] & Kx \arrow[d, "Kf"] \\
y & D(r,y) \arrow[r, "\alpha_y"] & Ky
\end{tikzcd}
$$

Έτσι αυτό θα ισχύει και για $x = r$. Όμως στο $D(r, r)$ υπάρχει το ταυτοτικό βέλος του r. Θα κατασκευάσουμε το συγκεκριμένο διάγραμμα για $x = r$ (που γνωρίζουμε ήδη πως είναι μεταθετικό από φυσικότητα α και θα ακολουθήσουμε το ταυτότικό βέλος του r

$$
\begin{tikzcd}
& D(r,r) \arrow[rrr, "\alpha_r"] \arrow[ddd, "D(r,f)=f_*"] & & & Kr \arrow[ddd, "Kf"] \\
r \arrow[d, "f"] & & 1_r \arrow[r, mapsto] \arrow[d] & \alpha_r 1_r \arrow[d] & \\
y & & f \arrow[r, mapsto] & Kf(\alpha_r 1_r) = \alpha_y f & \\
& D(r,y) \arrow[rrr, "\alpha_y"] & & & Ky
\end{tikzcd}
$$

Όπου η ισότητα ισχύει επειδή το διάγραμμα είναι μεταθετικό, αφού α φυσικός μετασχηματισμός. Επομένως, επιλέξαμε απλώς την α_r της ταυτότητας του r και αυτή καθόρισε πλήρως την α_y εικόνα της f. Όμως το y είναι αυθαίρετα επιλεγμένο, άρα η εικόνα της ταυτότητας καθορίζει πλήρως και μονοσήμαντα κάθε στοιχείο του φυσικού μετασχηματισμού, άρα και τον ίδιο τον φυσικό μετασχηματισμό. Άρα οι φυσικοί μετασχηματισμοί αντιστοιχούν ακριβώς στα στοιχεία του Kr, δηλαδή στις επιλογές α_r-εικόνας για την ταυτότητα του r.

Το λήμμα $Yoneda$, αν θεωρήσουμε τους συναρτητές $\mathcal{C} \to \mathbf{Set}$, όπως στο παράδειγμα 1, ισοδυναμεί με

1. Υπάρχει μια ένα προς ένα και επί αντιστοιχία από τους φυσικούς μετασχηματισμσούς $I \to H$ και με το $Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ και
2. Υπάρχει μια ένα προς ένα και επί αντιστοιχία τους φυσικούς μετασχηματισμούς $F \to G$ και με το $Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$

Πιο συγκεκριμένα αν $\Phi : I \to H$ είναι ένας φυσικός μετασχηματισμός τότε υπάρχει ένα μοναδικό βέλος $\phi : A \to B$ τέτοιο ώστε $\Phi_X = \phi^*$. Ανάλογα αν $\Phi : F \to G$ είναι ένας φυσικός μετασχηματισμός τότε υπάρχει ένα μοναδικό βέλος $\phi : A \to B$ τέτοιο ώστε $\Phi_X = \phi_*$.

Μάλιστα οι συναρτητές F, G είναι φυσιολογικά ισόμορφοι αν και μόνο αν τα αντικείμενα A, B είναι ισόμορφα στην $\mathcal{C}$. Αξίζει να παρατηρήσουμε οτι αυτό δεν ισχύει αν αφαιρέσουμε την λέξη 'φυσιολογικά' δηλαδή μπορούμε να έχουμε $F(X) \cong G(X)$ για κάθε X αλλά $A \ncong B$.

Το Λήμμα $Yoneda$ αποτελεί σημαντική γενίκευση του θεωρήματος του $Cayley$ της θεωρίας ομάδων. Το θεώρημα $Cayley$ λέει πως κάθε ομάδα G είναι ισομορφική με μια υποομάδα της ομάδας μεταθέσεών/συμμετρικής ομάδας της. Αν θεωρήσουμε κατηγορία ενός αντικειμένου $*$, και κάθε στοιχείο της ομάδας ως ένα μορφισμό $* \to *$, τότε η ομάδα είναι το $hom(*,*)$ με πράξη τη σύνθεση. Ο K είναι ο συναρτητής $hom(*,\_)$. Έτσι, το λήμμα παίρνει την ειδική μορφή $Nat(hom(*,\_), hom(*.\_) \cong hom(*,*)$.

2.4 Διάφορα Χαρακτηριστικά Βελών και Ισομορφισμών

Ορισμός. Μονομορφισμός *καλείται ένα βέλος* $f : B \to C$*, όταν για κάθε ζεύγος βελών της ίδιας κατηγορίας* $g : A \to B, h : A \to B$ *(*$\forall A$ *αντικείμενο της κατηγορίας) η ισότητα* $f \circ g = f \circ h$ *συνεπάγεται* $g = h$*.*

Στην κατηγορία Set, οι μονομορφισμοί είναι οι $1-1$ συναρτήσεις ($injections$).

Ορισμός. Επιμορφισμός *καλείται ένα βέλος* $f : A \to B$*, όταν για κάθε ζεύγος βελών της ίδιας κατηγορίας* $g : B \to C, h : B \to C$ *(*$\forall C$ *αντικείμενο της κατηγορίας) η ισότητα* $g \circ f = h \circ f$ *συνεπάγεται* $g = h$*.*

Στην κατηγορία Set, οι μονομορφισμοί είναι οι *επί* συναρτήσεις ($surjections$).

Ο μονομορφισμός και ο επιμορφισμός είναι, όπως πιθανώς γνωρίζει κανείς και από την άλγεβρα, δυϊκές ιδιότητες. Όμως, παρά το γεγονός ότι στην Set και σε άλλες κατηγορίες, οι $1-1$& επί συναρτήσεις ($bijections$), που καλούμε ισομορφικές, και πράγματι πληρούν τον ορισμό του ισομορφισμού που θα δώσουμε στη συνέχεια, αυτό δεν ισχύει γενικά. Μάλιστα ο ισομορφισμός *δεν* ορίζεται ως ένα βέλος που είναι και μονομορφισμός και επιμορφισμός όπως πιθανώς να περίμενε κανείς.

Ορισμός. Ισομορφισμός *καλείται ένα βέλος* $f : A \to B$*, όταν υπάρχει βέλος* $f^{-1} : B \to A$ *τέτοιο ώστε* $f^{-1} \circ f = id_A$ *και* $f \circ f^{-1} = id_B$*.*

Το βέλος f^{-1} καλείται *αντίστροφος 2 πλευρών* ή *αμφίπλευρη αντίστροφος* ($2-sided\ inverse$). Στις περιπτώσεις που ισχύει μόνο η $f^{-1} \circ f = id_A$ καλείται *αριστερή αντίστροφος*, ενώ όταν ισχύει μόνο η $f \circ f^{-1} = id_B$, *δεξιά αντίστροφος*. Ισοδύναμος με τον ορισμό που δώσαμε για τους ισομορφισμούς είναι ο παρακάτω ορισμός που δίνει ο $MacLain$ για τον ισομορφικό συναρτητή[19]: Συναρτητής T καλείται ισομορφισμός όταν είναι 1-1 και επί αντιστοιχία *και ως προς τα αντικείμενα και ως προς τα βέλη*.

Ένα αντικείμενο Α με μία ιδιότητα P καλείται *μοναδικό ως προς ισομορφισμό*, όταν κάθε αντικείμενο που ικανοποιεί την P είναι ισομορφικό του Α.

[19] Πάλι καταλήγει στο συμπέρασμα, ξεκινώντας από τα βέλη οτι ακόμα κι αν έχουμε 1-1 και επί αντιστοιχία των βελών, μπορεί η εικόνα των αντικειμένων της μίας κατηγορίας να είναι γνήσιο υποσύνολο των αντικειμένων της άλλης. Εδώ ανακύπτουν δύο ζητήματα. Το πρώτο είναι ότι φαίνεται να απαιτεί μόνο την επί αντιστοιχία στα αντικείμενα. Πράγματι ένας πλήρης και πιστός (1-1 και επί ως προς βέλη) συναρτητής έπεται πως είναι και 1-1 ως προς αντικείμενα εώς ισομορφισμό. Το δεύτερο είναι τι πρόβλημα προκαλείται όταν περνάμε σε κατηγορίες χωρίς αντικείμενα. Εδώ, όπως θα παρατηρήσουμε στον ορισμό του πλήρους συναρτητή, απαιτούνται μόνο τα βέλη της "δεύτερης" κατηγορίας που "παράγονται" από αντικείμενα που υπάρχουν στην "πρώτη" κατηγορία. Επιπλέον, εύκολα το ζήτημα 1-1 και επί αντιστοιχίας αντικειμένων, ανάγεται στο αν η "δεύτερη" κατηγορία έχει παραπάνω δομή από την "πρώτη", σχηματικά μιλώντας "έξω" από το μέρος της που είναι απεικόνιση της "πρώτης".

Τώρα ας δούμε τώρα δύο σημαντικές ιδιότητες για έναν συναρτητή, τις ιδιότητες πλήρης $(full)$ και πιστός $(faithfull)$.

Ορισμός. *Έχουμε τα ακόλουθα είδη συναρτητών:*

1. Πλήρης *ονομάζεται ένας συναρτητής* $T : A \to B$, *όταν* $\forall$ *ζεύγος* a, a' *αντικειμένων της* A *και βέλος* $g : Ta \to Ta'$ *της* B, $\exists$ *βέλος* $f : a \to a'$ *της* A, *με* $g = Tf$.

   Ισοδύναμα, ο συναρτητής T *είναι πλήρης όταν κάθε συνάρτηση τύπου* $T_{a,a'}$ *είναι επί.*

2. Πιστός *ονομάζεται ένας συναρτητής* $T : A \to B$, *όταν* $\forall$ *ζεύγος* a, a' *αντικειμένων της* A *και ζεύγος παράλληλων βελών* $f_1, f_2 : a \to a'$ *μεταξύ τους, η ισότητα* $Tf_1 = Tf_2 : Ta \to Ta'$ *να έπεται* $f_1 = f_2$

   Ισοδύναμα, ο συναρτητής T *είναι πιστός όταν κάθε συνάρτηση τύπου* $T_{a,a'}$ *είναι* $1 - 1$.

όπου η $T_{a,a'}$ *είναι η συνάρτηση που επάγεται από το συναρτητή* $T : A \to B$ *με κανόνα* $T_{a,a'} : Hom_A(a, a') \to Hom_B(Ta, Ta')$ *για κάθε ζεύγος* a, a' *της* A.

Εδώ παρατηρούμε ότι οι ιδιότητες πληρότητας και πιστότητας είναι αυτές που καλύπτουν το ζήτημα ¨ένα-προς-ένα και επί ως προς τα βέλη' που υπήρχε στον συναρτητή/ισομορφισμό.

2.5 Ισοδυναμίες Κατηγοριών

Τώρα θέλουμε να δούμε πότε δυο κατηγορίες είναι ίδιες, πότε δηλαδή κωδικοποιούν τα ίδια μαθηματικά. Υπάρχει ένας προφανής τρόπος να ορίσουμε πότε δυο κατηγορίες είναι ίδιες. Έστω $\mathcal{C}$,$\mathcal{D}$ δυο κατηγορίες. Τότε λέμε είναι ισομορφικές ανν υπάρχουν δυο συναρτητές $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$,$G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ τέτοιοι ώστε $F \circ G = id_{\mathcal{D}}$ και $G \circ F = id_{\mathcal{C}}$. Αν και είναι πόλυ εύκολο να σκεφτεί κάποιος την έννοια του ισομορφισμού κατηγοριών δυστυχώς δεν μας αρκεί. Για παράδειγμα μπορούμε να έχουμε δυο κατηγορίες που από όλες τις απόψεις κωδικοποιούν τα ίδια μαθηματικά αλλά δεν είναι ισόμορφες, δηλαδή η έννοια του ισομορφισμού κατηγοριών δεν κάνει την δουλειά που θέλουμε. Ουσιαστικά, ως ιδιότητα είναι ”υπερβολικά ισχυρή” για να είναι χρήσιμη.

Ένα παράδειγμα μη ισομορφικών κατηγοριών που κωδικοποιούν την ίδια θεωρία είναι το ακόλουθο: Έστω $\mathcal{C}$ η κατηγορία όλων των διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης πάνω από ένα σώμα K με μορφισμούς τις γραμμικές συναρτήσεις και έστω $\mathcal{D}$ η υποκατηγορία όλων των διανυσματικών χώρων της μορφής K^n όπου n φυσικός. Προφανώς από στοιχειώδη γραμμική άλγεβρα οι κατηγορίες αυτές κωδικοποιούν τα ίδια μαθηματικά. Όμως δεν είναι ισόμορφες. Πράγματι το σύνολο $ob(\mathcal{D})$ είναι αριθμήσιμο ενώ η $\mathcal{C}$ έχει υπεραρθμήσιμο πλήθος αντικειμένων, συνεπώς δεν είναι ισόμορφες. Για να αποφύγουμε αυτό το πρόβλημα εισάγουμε μια πιο ακριβή έννοια για το πότε δυο κατηγορίες είναι ουσιαστικά ίδιες:

Ορισμός. *Δυο κατηγορίες $\mathcal{C}$,$\mathcal{D}$ λέγονται ισοδύναμες αν υπάρχουν συναρτητές $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$,$G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ τέτοιοι ώστε $F \circ G \simeq id_{\mathcal{D}}$ και $G \circ F \simeq id_{\mathcal{C}}$. Τότε λέμε συνήθως οτι ο συναρτητής F (ή G) επάγει (induces) μια ισοδυναμία κατηγοριών.*

Ουσιαστικά δηλαδή δυο κατηγορίες είναι ισοδύναμες αν είναι ισομορφικές με "φυσιολογικό τρόπο"[20]. Ακόμα το πρόβλημα που είχε η έννοια του ισομορφισμού λύνεται καθώς οι δυο κατηγορίες που αναφέραμε είναι ισοδύναμες. Για να δούμε τώρα πότε δυο κατηγορίες είναι ισοδύναμες είναι δύσκολο σχετικά να το κάνουμε με τον ορισμό και γι αυτό θα διατυπώσουμε ένα χρήσιμο κριτήριο. Πρώτα εισάγουμε λίγη ορολογία:

Ορισμός. *Ένας συναρτητής $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ λέγεται* πλήρως πιστός *αν ο 'κανόνας' $F : Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \to Hom_{\mathcal{D}}(FX, FY)$ είναι ένα προς ένα κι επί για κάθε $X, Y \in Ob(\mathcal{C})$.*

Επίσης λέγεται ουσιαστικά έπι *αν κάθε αντικείμενο της $\mathcal{D}$ είναι ισομορφικό με ένα αντικείμενο που ανήκει στην εικόνα του F.*

Για παράδειγμα ο *inclusion* συναρτητής από μια πλήρη υποκατηγορία είναι πλήρως πιστός (μια υποκατηγορία λέγεται πλήρης αν τα $Hom - sets$ της είναι ίδια με αυτά της μεγαλύτερης κατηγορίας). Ο επιλήσμων συναρτητής από την κατηγορία των ομάδων στην κατηγορία των συνόλων δεν είναι πλήρως πιστός γιατί δεν είναι κάθε συνάρτηση ανάμεσα σε δυο σύνολα αυτόματα ομομορφισμός ομάδων. Γενικότερα δεν συμβαίνει ένας επιλήσμων συναρτητής να είναι πλήρως πιστός.

Το κριτήριό μας τώρα είναι το ακόλουθο:

Θεώρημα. *Ένας συναρτητής $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ επάγει μια ισοδυναμία κατηγορίων αν και μόνο αν είναι πλήρως πιστός και ουσιαστικά επί.*

Η απόδειξη θα δωθεί μαζί σε μια πληρέστερη εκδοχή του θεωρήματος στο τέλος του επόμενου κεφαλαίου.

Συνοψίζοντας τις παραπάνω λεπτές διακρίσεις μεταξύ ισομορφισμού κατηγοριών και ισοδυναμίας κατηγοριών. Ο ισομορφισμός κατηγοριών, όπως ορίζεται είναι μία πολύ ισχυρή ιδιότητα, τόσο ισχυρή, που ακόμα και κατηγορίες οι οποίες είναι "ουσιαστικά ίδιες", δεν είναι ισόμορφες. Επομένως, δεν επαρκεί. Η ισοδυναμία κατηγοριών είναι ακριβώς η ιδιότητα που ορίζουμε για να περιγράψει "ουσιαστικά ίδιες" κατηγορίες, η διαφορά είναι ότι δεν απαιτείται ισότητα συνθέσεων συναρτητών με ταυτοτικά βέλη, αλλά φυσικοί μετασχηματισμοί μεταξύ τους.

[20] $F \circ G \simeq id_{\mathcal{D}}$ και $G \circ F \simeq id_{\mathcal{C}}$ σημείνει η ύπαρξη φυσικού μετασχηματισμού μεταξυ $F \circ G$ και $id_{\mathcal{D}}$ όπως και μεταξύ $G \circ F$ και $id_{\mathcal{C}}$

2.6 Αρχικά και Τελικά Αντικείμενα

Ορισμός. *Ένα αντικείμενο* 0 *μιας κατηγορίας καλείται αρχικό, όταν για κάθε άλλο αντικείμενο* A *της κατηγορίας, υπάρχει μοναδικό βέλος* $0 \to A$*. Ακόμα ένα αντικείμενο* 1 *μιας κατηγορίας καλείται τελικό, όταν για κάθε άλλο αντικείμενο* A *της κατηγορίας, υπάρχει μοναδικό βέλος* $A \to 1$*.*

Παραδείγματα. *1. Το χαρακτηριστικότερο παράδειγμα είναι η κατηγορία* **Set***, η οποία έχει αρχικό αντικείμενο το κενό σύνολο* $\emptyset$ *και τελικά αντικείμενα τα μονοσύνολα.*[21]

2.Σε ένα $PoSet$ *αρχικό αντικείμενο είναι το* $\perp$ *και τελικό το* $\top$*.*[22]

3.Ορισμένες προσεγγίσεις στη πληροφορική[23] *ορίζουν τους αφηρημένους τύπους δεδομένων ως αρχικές/τελικές άλγεβρες, δηλαδή ως αρχικά (αντίστοιχα τελικά) αντικείμενα σε κατηγορίες* Σ*-αλγεβρών.*

2.7 Δυϊκότητα

Ας γυρίσουμε πίσω στην Ευκλίδεια Γεωμετρία. Μια βασική πρότασή της είναι πως δύο (τεμνόμενες) ευθείες ορίζουν μονοσήμαντα ένα σημείο. Αντίστοιχα, δύο (διαφορετικά μεταξύ τους) σημεία ορίζουν μονοσήμαντα μία ευθεία. Αυτή είναι και η πρώτη επαφή συνήθως ενός ανθρώπου με μία ισχυρή αρχή στα μαθηματικά, την *αρχή της δυϊκότητας*[24]. Η αρχή ορίζει μια αμφίδρομη σχέση μεταξύ οντοτήτων που αντιπαραβάλλονται και ετεροκαθορίζονται. Στη γεωμετρία, πολλές προτάσεις οι οποίες περιλαμβάνουν την έννοια του σημείου και της ευθείας αντιστρέφονται (με ταυτόχρονη αναστροφή της θέσης του σημείου και της ευθείας στην σημασιολογία της πρότασης). Κάθε μερική διάταξη ορίζει την δυϊκή της (με ανεστραμμένη τη διάταξη των στοιχείων), και τη δυϊκότητα αυτή θα τη ξανασυναντήσουμε στην αφηρημένη θεωρία μοντέλων όπου το συντακτικό και η σημασιολογία($semantics$) σχηματίζουν σύνδεση $Galois$ με τη δυϊκή διάταξη εγλεισμού. Οι νόμοι $deMorgan$ είναι ζεύγος δυϊκών προτάσεων. Στην άλγεβρα $Boole$ το 0 και το 1 είναι δυϊκα, και αναστρέφοντάς τα παραμένουμε στην άλγεβρα $Boole$. Όλα τα παραπάνω παραδείγματα, εκτός των άλλων ενέχουν και μία διαισθητική ισχύ, η οποία πηγάζει από την ισχυρή διαισθητική ισχύ της έννοιας του δυϊκότητας γενικότερα. Προφανώς, στη θεωρία κατηγοριών, η οποία αξιώνει να είναι μία θεώρηση που συμπλέει με τη μαθηματική διαίσθηση, η αρχή της δυϊκότητας έχει κεντρικό ρόλο.

Ως τώρα έχουμε συναντήσει δυϊκά ζεύγη στη θεωρία κατηγοριών. Αυτά είναι τα ζεύγη μονομορφισμός/επιμορφισμός και αρχικό/τελικό αντικείμενο. Πολλές από τις κατασκευές που θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, είναι δυϊκές ανα ζεύγη. Συγκεκριμένα για να αναφέρω μερικές: γινόμενο/συνγινόμενο, όριο/συνόριο, εξισωτής/συνεξισωτής, κώνος/σύνκωνος κτλ.

---

[21] Τετριμμένα βέλος από τα στοιχεία του κενού σε οτιδήποτε. Βέλος προς μονοσύνολο από τυχαίο άλλο σύνολο είναι η συνάρτηση που απεικονίζει κάθε στοιχείο του συνόλου στο στοιχείο του μονοσυνόλου.

[22] Από τον ορισμό των βελών για κάθε *poset* ως προδιάταξη.

[23] βλέπε [3], αλλά και την ομάδα ADJ του *Goguen*

[24] ή δυϊσμού

Ορισμός. Αντίθετη (ή δυαδική) κατηγορία $\mathcal{C}^{op}$ *της κατηγορίας* $\mathcal{C}$ *καλέιται η κατηγορία με αντικείμενα ίδια με τη* $\mathcal{C}$, *αλλά όλα τα βέλη ανεστραμένα (δηλαδή* $\forall f : A \to B$ *βέλος της* $\mathcal{C}$, $\exists f : B \to A$ *βέλος της* $\mathcal{C}^{op}$ *και αντίστροφα κάθε βέλος της αντίθετης κατηγορίας αντιστοιχεί στο αντίστροφό της στην αρχική).*

Παρατήρηση. *Πολλά χαρακτηριστικά, κατασκευές και δομές της* $\mathcal{C}$ *αντικαθιστώνται από τα δϋικά τους στην* $\mathcal{C}^{op}$. *Για παράδειγμα ένας μονομορφισμός στην* $\mathcal{C}^{op}$ *αντιστοιχεί σε επιμορφισμό στην* $\mathcal{C}$. *Ένας συναλλοίωτος συναρτητής της* $\mathcal{C}$ *είναι συναρτητής της* $\mathcal{C}^{op}$, *ενώ ένας συναρτητής της* $\mathcal{C}$ *είναι συναλλοίωτος της* $\mathcal{C}^{op}$. *Το ίδιο ισχύει για αρχικό/τελικό αντικείμενο και για τα ζεύγη κατασεκυών που αναφέραμε και θα ορίσουμε στο επόμενο κεφάλαιο. Αυτή η παρατήρηση μπορεί να γενικευθεί και να συστηματικοποιηθεί γενικότερα για προτάσεις, όπως θα δούμε στο επόμενο θεώρημα.*

Σε περίπτωση που δεν είναι ξεκάθαρο, θα ορίσουμε πρώτα τις προτάσεις (*statements*) οι οποίες συγκροτούν την *θεμελιώδη θεωρία μιας αφηρημένης κατηγορίας* (*elementary theory of an abstract category* ή *ETAC*). Θεωρούμε ως συστατικά στοιχεία/γράμματα μιας έκφρασης τα αντικείμενα $(a, b, c, ...)$ και τα βέλη $(f, g, h, ...)$. Μία ατομική πρόταση κατασκευάζεται από αυτά χωρίς λογικά σύμβολα (αλλά πιθανώς με σύμβολα ή έννοιες της θεωρίας, πχ dom ή $=$).

Για παράδειγμα οι προτάσεις "$a = b$", "$a = dom f$", "b cod of f", $g \circ h = f$" είναι ατομικές προτάσεις. Το σύμπαν των προτάσεων κατασκευάζεται επαγωγικά χρησιμοποιώντας ατομικές προτάσεις, προτασιακούς συνδέσμους της πρωτοβάθμιας λογικής ($\wedge$ $\vee$, $\neg$, $\to$[25], $\leftrightarrow$) και ποσοδείκτες ($\forall$, $\exists$), και κάθε έγκυρο συνδυασμό τους που προκύπτει επαγωγικά. (πχ οι "$a = dom f$", "$b = cod f$" με το σύνδεσμο και($\wedge$) μεταξύ τους, δίνουν "$f : a \to b$".

Θεώρημα. *Έστω πρόταση* $\mathcal{S}$ *στην κατηγορία* $\mathcal{C}$. *Για να κατασκευάσουμε τη* δυαδική πρότασή *της (dual statement)* $\mathcal{S}^{op}$ *στην κατηγορία* $\mathcal{C}^{op}$, *εναλλάσουμε τα domain και codomain στην* $\mathcal{S}$ *μεταξύ τους. Επίσης εναλλάσσουμε* $g \circ f$ *με* $f \circ g$.[26] *Ισχύει ότι*

$$\mathcal{S} \quad \text{αληθής στην} \quad \mathcal{C} \quad \iff \quad \mathcal{S}^{op} \quad \text{αληθής στην} \quad \mathcal{C}^{op} \tag{5}$$

[27]

Δεδομένου ότι η $\mathcal{C}^{op}$ οποιασδήποτε κατηγορίας είναι κατηγορία, μπορούμε να καταγράψουμε πιο αυστηρά την αρχή της δυϊκότητας για προτάσεις:

Αρχή της Δυϊκότητας

$$\mathcal{S} \quad \text{αληθής} \quad \forall \mathcal{C} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{S}^{op} \quad \text{αληθής} \quad \forall \mathcal{C} \tag{6}$$

[25] Προσοχή, το σύμβολο της συνεπαγωγής είναι το ίδιο από το σύμβολο του βέλους που χρησιμοποιούμε διαρκώς στην θεωρία κατηγοριών

[26] Η λογική μένει αναλλοίωτη. Η αναστροφή των βελών έχει γίνει στις κατηγορίες, οπότε δεν την ξανακάνουμε στις προτάσεις.

[27] Αντίστοιχα η $\mathcal{S}$ αληθής για τα $f, g, h, ...$ και η $\mathcal{S}^{op}$ αληθής για τα $f^{op}, g^{op}, h^{op}, ...$

Παρατήρηση. *Έστω πρόταση Σ. Η δυϊκή πρόταση της δυϊκής πρότασης είναι η αρχική πρόταση (δηλαδή*[28] $\Sigma^{**} = \Sigma$ *).*

Το δϋικό αξιώματος για κατηγορία είναι επίσης αξίωμα.

2.8 Μεγάλες και Μικρές Κατηγορίες

Υπάρχουν κατηγορίες με αντικείμενα κατηγορίες; Μπορούμε να κατασκευάσουμε την κατηγορία όλων των συνόλων δεδομένου σύμπαντος; Προφανώς ο ορισμός της *μετακατηγορίας* δεν μας εμποδίζει σε κάτι τέτοιο. Τα συνολοθεωρητικά προβλήματα αρχίζουν μόνο όταν ερμηνεύουμε τις κατηγορίες, και συγκεκριμένα όταν θεωρούμε πως οι συλλογές αντικειμένων και μορφισμών είναι σύνολα. Ο *Pierce*[29] μας διαβεβαιώνει πως η θεωρία κατηγοριών απομακρύνεται αφαιρετικά από τα αντικείμενα. Τα αντικείμενα δεν έχουν εσωτερική δομή. Η δομή υπάρχει στις σχέσεις μεταξύ αντικειμένων. Έτσι, απολήγουμε σε μια "μορφοθεωρητική" θεώρηση για τις κατηγορίες.

Υπό αυτό το πρίσμα ο *MacLain* εξηγεί πως με τα αξιώματά της, η μετακατηγορία με αντικείμενα και βέλη είναι ισοδύναμη με μια μετακατηγορία που έχει μόνο βέλη ($arrows - only\ metacategory$). Μερικές φορές, θα ακολουθηθεί αυτή η λογική στην παρούσα εργασία για λόγους απλοποίησης.

Τα αντικείμενα είναι ένα "μαύρο κουτί"[30], το οποίο μπορεί να ερμηνευθεί με όποιο τρόπο θέλουμε, και δεν έχει εσωτερική δομή (τουλάχιστον όσο επιρρεάζει την κατασκευή μας). Η οπτική αυτή μοιάζει αρκετά με την οπτική του *Riemann* για τις συναρτήσεις.

Όμως, η ερμηνεία μιας μετακατηγορίας σε κατηγορία της οποίας οι κλάσεις αντικειμέων και βελών είναι σύνολα, παραμένει σημαντική. Αν και μπορούμε να δουλέψουμε θεωρητικά στην παραπάνω αφαιρετική ερμηνεία (και συχνά είναι προτιμότερο), όταν θα εφαρμόσουμε τη θεωρία, θα πρέπει να μιλήσουμε για τις κατηγορίες *Set*, *Grp*, *Mon*, κτλ. Δεν θα μας αρκεί μια αφηρημένη μετακατηγορία. Θα πρέπει να γνωρίζουμε αν χτυπάμε πάνω στην αρχή της συμπερίληψης και τα παράδοξα της αφελούς συνολοθεωρίας η όχι κάθε φορά. Θα πρέπει να γνωρίζουμε αν η δεδομένη κατηγορία έχει συλλογές που είναι κλάσεις ή είναι σύνολα. Έτσι κάνουμε τη διάκριση στην οποία αναφερθήκαμε στην παράγραφο 1.1 μεταξύ *μεγάλης κατηγορίας* και *μικρής κατηγορίας*.

Ορισμός. Μικρή κατηγορία *καλούμε μία κατηγορία της οποίας και η συλλογή αντικειμένων και η συλλογή βελών είναι σύνολα.* Μεγάλη κατηγορία *καλούμε κάθε κατηγορία που δεν είναι μικρή, δηλαδή τουλάχιστον μία απο τις δύο προαναφερθείσες συλλογές δεν είναι σύνολο (δηλαδή είναι αρκετά "μεγάλη' ώστε να μην περιγράφεται από τη συνολοθεωρία).*[31]

[28] εδώ το $*$ έχει ίδια σημασία με το *op*

[29] [10] σελίδα 17, αρχή ενότητας 1.5

[30] [10], η ίδια

[31] Ο παραπάνω ορισμός δίνεται από τον *Pierce*. Στη βιβλιογραφία (*MacLane*), συχνά συναντάται και ένας άλλος ορισμός ο οποίος *δεν* είναι ισοδύναμος με τον παραπάνω, συγκεκριμένα

Εδώ είναι ξεκάθαρο πως η αντίθεση μεγάλης και μικρής κατηγορίας αφορά τη δυνατότητα επεξαργασίας και μελέτης τους μέσω συνολοθεωρίας. Σε αντίθεση όμως με την αντίθεση μετακατηγορίας/κατηγορίας, το ερώτημα που απαντάται δεν είναι αν αποτελεί αφηρημένη οντότητα ή ερμηνεία, αλλά το "μέγεθος" της κατασκευής. Δηλαδή υπάρχουν κατηγορίες, που αποτελούν ερμηνείες, οι οποίες είναι μεγάλες κατηγορίες.

Παράδειγμα μεγάλης κατηγορίας είναι η **Cat**[32], κατηγορία όλων των μικρών κατηγοριών. Παρατηρήστε ότι η έκφραση "A όλων των A" βρίσκεται και στο παράδοξο του *Russel* και είναι η βασική *apriori* ένδειξη ότι μία οντότητα είναι πολύ "μεγάλη" για να περιγραφεί από τη συνολοθεωρία. Επίσης, ενδιαφέρον παρουσιάζουν παραδείγματα στα οποία μόνο μία απο τις δύο συλλογές είναι σύνολο (εκεί δηλαδή που οι δύο προσεγγίσεις που αναφέραμε διαφέρουν ως προς το χαρακτηρισμό). Το πιο ενδιαφέρον που συναντήσαμε στη μελέτη μας είναι μια κατηγορία όπως η **Cat**, και γενικά που η πρόταση "A όλων των A" καθιστά τη συλλογή αντικειμένων αδύνατο να είναι σύνολο, αλλά επιλέγουμε ως μορφισμό μόνο τον ταυτοτικό.

Συχνά στη βιβλιογραφία, μία κατηγορία της οποίας όλα τα $hom-set$ είναι σύνολα καλείται *Τοπικά Μικρή*. Προφανώς κάθε μικρή κατηγορία είναι και τοπικά μικρή.

2.9 Διάσταση Κατηγοριών

Φυσικά η παραπάνω συζήτηση καταλήγει σε πολύ γενικότερο πλαίσιο, που ξεκινά ερώτημα περί ύπαρξης κατηγορίας όλων των κατηγοριών. Ορίζοντας την κατηγορία όλων των μικρών κατηγοριών, μπρούμε να κάνουμε μαθηματικά που έχουν ως αντικείμενο τις κατηγορίες, σε ένα κατηγοριοθεωρητικό πλαίσιο. Όμως αν μπορούμε να ορίσουμε την κατηγορία όλων των μικρών κατηγοριών ως μεγάλη κατηγορία, δεν προκύπτει ένα ζήτημα μεγέθους όταν μιλάμε για την κατηγορία όλων των μεγάλων κατηγοριών; Ακόμα κι αν ορίσουμε μια νέα έννοια για τόσο μεγάλες κατηγορίες, τι συμβαίνει για την κατηγορία αυτών των καινούριων "πολύ μεγάλων" κατηγοριών;. Η Τελικά το πρόβλημα του μεγέθους το υπερβαίνουμε αλλάζοντας πλαίσιο αναφοράς, με έναν τρόπο ακόμα πιο γενικό από τη διάκριση μικρών και μεγάλων κατηγοριών, που προκύπτει από τον τρόπο που ορίζουμε αυτό το "άλμα" μεγέθους.

Αν λάβουμε υπ όψιν τους φυσικούς μετασχηματισμούς, θα δούμε πως η θεώρηση της σύνθεσης που κάναμε ήταν κάπως επιπόλαιη. Έστω 3 κατηγορίες $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ και συναρτητές μεταξύ τους $P, S, T : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ και $P', S', T' : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$, και τους φυσικούς μετασχηματισμούς μεταξύ των συναρτητών $\alpha : P \Rightarrow S$, $\alpha' : P' \Rightarrow S'$, $\beta : S \Rightarrow T$, $\beta' : S' \Rightarrow T'$, δηλαδή το διάγραμμα:

ότι μεγάλη κατηγορία είναι αυτή της οποίας και η συλλογή βελών και η συλλογή αντικειμένων δεν είναι σύνολα, ενώ μικρή είναι αυτή που τουλάχιστον μία είναι. Οι ορισμοί είναι προφανώς ουσιαστικά μη ισοδύναμοι στις κατηγορίες που ακριβώς μία από τις δύο συλλογές είναι σύνολο.

[32] Επίσης ορίζονται και οι κατηγορίες **Cls**, **Cat**$'$ οι οποίες είναι η κατηγορία των κλάσεων και η κατηγορία των μεγάλων κατηγοριών, οι οποίες ξεφεύγουν από το παρόν επίπεδο μελέτης μας

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\mathcal{C} \arrow[r, bend left=60, "P"{name=P}] \arrow[r, "S"{name=S, description}] \arrow[r, bend right=60, "T"'{name=T}] & \mathcal{B} \arrow[r, bend left=60, "P'"{name=P2}] \arrow[r, "S'"{name=S2, description}] \arrow[r, bend right=60, "T'"'{name=T2}] & \mathcal{A}
\arrow[Rightarrow, from=P, to=S, "\alpha"']
\arrow[Rightarrow, from=S, to=T, "\beta"']
\arrow[Rightarrow, from=P2, to=S2, "\alpha'"']
\arrow[Rightarrow, from=S2, to=T2, "\beta'"']
\end{tikzcd}$$

Με τον τρόπο που ορίσαμε τη σύνθεση μεταξύ φυσικών μετασχηματισμών ορίζονται οι συνθέσεις $\beta\circ\alpha$ και $\beta'\circ\alpha'$ τις οποίες θα τις αποκαλούμε *κάθετη σύνθεση*, και όταν χρειάζεται, για λόγους σαφήνειας συμβολισμού συμβολίζεται $\cdot$. Όμως, από τη σύνθεση των συναρτητών έχουμε τους συναρτητές $P'\circ P, S'\circ S, T'\circ T : C \to \mathcal{A}$, και τα αντίστοιχα μεταθετικά διαγράμματα με τους συναρτητές των συντειθέμενων ζευγών του κάθε ενός. Επομένως, (από την ύπαρξη των $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$) επάγονται και φυσικοί μετασχηματισμοί μεταξύ αυτών των συναρτητών. Έτσι, χρειάζεται να ορίσουμε την *οριζόντια σύνθεση* φυσικών μετασηματισμών, η οποία θα συμβολίζεται με το σύνηθες σύμβολο $\circ$. Το τετράγωνο που προκύπτει από τη σύνθεση των συναρτητών, για κάθε αντικείμενο είναι μεταθετικό διότι ο α είναι φυσικός μετασχηματισμός.

$$\begin{tikzcd}
P'\circ Pc \arrow[r, "\alpha' Pc"] \arrow[d, "P'\alpha c"'] & S'\circ Pc \arrow[d, "S'\alpha c"] \\
P'\circ Sc \arrow[r, "\alpha' Sc"] & S'\circ Sc
\end{tikzcd}$$

Η μεταβατικότητα είναι ισοδύναμη με την πρόταση $S'\alpha c\circ\alpha'\circ Pc = \alpha' Sc\circ P'\alpha c$ που αλλιώς είναι το διαγώνιο βέλος του τετραγώνου. Η οριζόντια σύνθεση $\alpha'\circ\alpha$ ορίζεται από τα στοιχεία της (ως μετασχηματισμός), δηλαδή από τα $(\alpha'\circ\alpha)c$, τα οποία είναι ακριβώς αυτή η διαγώνιος:

$$(\alpha'\circ\alpha)c := S'\alpha c\circ\alpha'\circ Pc = \alpha' Sc\circ P'\alpha c \tag{7}$$

Το ότι ο $(\alpha'\circ\alpha)$ είναι φυσικός προκύπτει από τη μεταθετικότητα του διαγράμματος που προκύπτει από την εφαρμογή στους α, α' ενός βέλους $f : c \to b$, για κάθε βέλος.

$$\begin{tikzcd}
P'\circ Pc \arrow[r, "P'\alpha c"] \arrow[d, "P'Pf"'] & P'\circ Sc \arrow[r, "\alpha' Sc"] \arrow[d, "P'Sf"] & S'\circ Sc \arrow[d, "S'Sf"] & c \arrow[d, "f"] \\
P'\circ Pb \arrow[r, "P'\alpha b"] & P'\circ Sb \arrow[r, "\alpha' Sb"] & S'\circ Sb & b
\end{tikzcd}$$

Το αριστερό τετράγωνο είναι μεταθετικό επειδή α φυσικός και P' συναρτητής. Το δεξί επειδή α' φυσικός και Sf βέλος (γιατί S συναρτητής). Το εξωτερικό είναι μεταθετικό διότι τα εσωτερικά είναι μεταθετικά. Η μεταβατικότητα του εξωτερικού είναι ακριβώς η πρόταση πως ο $\alpha'\circ\alpha$ είναι φυσικός.

Παρατηρούμε ότι τα αντικείμενα της οριζόντιας σύνθεσης είναι κατηγορίες (αντικείμενα) ενώ της κάθετης είναι συναρτητές (βέλη). Η οριζόντια σύνθεση είναι προσεταιριστική, και έχει την ίδια ταυτότητα με την κάθετη σύνθεση: τον ταυτοτικό φυσικό μετασχηματισμό $1_{\mathcal{C}}$ (που στέλνει τον ταυτοτικό συναρτητή μιας κατηγορίας στον εαυτό του). Επίσης η σχέση των δύο συνθέσεων μεταξύ τους καθορίζεται (βλέπε το πρώτο διάγραμμα της ενότητας) πλήρως από την παρακάτω σχέση, που ονομάζεται *Νόμος Εναλλαγής*:

$$(\beta' \cdot \alpha') \circ (\beta \cdot \alpha) = (\beta' \circ \beta) \cdot (\alpha' \circ \alpha) \tag{8}$$

Μια συλλογή βελών με δύο συνθέσεις που ικανοποιούν το νόμο εναλλαγής ονομάζεται *Διπλή Κατηγορία ή Δικατηγορία*. Μία διπλή κατηγορία που επιπλέον οι συνθεσεις έχουν ίδια ταυτότητα ονομάζεται *2-κατηγορία*. Τέτοιες κατασκευές γενικεύονται επαγωγικά, ώστε να κατασκευάζουμε την *Ασθενή n-κατηγορία*, και την *n-κατηγορία*, και έτσι να υπερβαίνουμε κάθε φορά, πέρα από όλα τα άλλα, και τα ζητήματα μεγέθους[33].

Πλέον, με την έννοια της διάστασης, υπάρχουν ενδιαφέρουσες παρατηρήσεις που μπορούν να γίνουν: για παράδειγμα, στο εσωτερικό της **Set** (δηλαδή μεταξύ αντικειμένων) ισομορφισμός είναι το βέλος που ως συνάρτηση είναι ισομορφισμός. Στο εσωτερικό της **Cat** ο ισομορφισμός είναι και μεταξύ αντικειμένων, και μεταξύ μορφισμών. Οπότε κατασκευάζουμε την -λιγότερο ισχυρή- έννοια της ισοδυναμίας (που θα μπορούσαμε να την περιγράψουμε και ως 2 αντικείμενα που είναι ισοδύναμα είναι "ισομορφικά μέχρι ισομορφισμού"[34]. Με έναν αντίστοιχο τρόπο όταν ανεβαίνουμε διάσταση επιβεβαιώνεται πως οι αντίστοιχες έννοιες που αιτούμαστε για να παίξουν αυτό το ρόλο είναι και λιγότερο ισχυρές (πχ στις 2-κατηγορίες, η ασθενής ισοδυναμία), κάτι που αντιστοιχεί στο ότι πλέον πέρα από τα αντικείμενα και τους μορφισμούς, έχω να μελετήσω και τα βέλη μεταξύ βελών (φυσικοί μετασχηματισμοί με κάθετη σύνθεση).

Η ορολογία που εισάγεται στις μεγαλύτερες διαστάσεις είναι αυτή του $n-cell$. Το αντικείμενο είναι το $0-cell$, το βέλος μεταξύ αντικειμένων είναι $1-cell$, το βέλος μεταξύ βελών $2-cell$ κτλ.

[33]Η λογική θυμίζει τα σύμπαντα *Grothendieck*, και το αξίωμα ότι για κάθε σύνολο x, υπάρχει U σύμπαν *Groethendieck* ώστε $x \in U$, και ότι δημιουργούμε πλαίσια U, ώστε κάθε σύνολο να είναι U-μικρό, ή U-μεγάλο. Σε αυτή τη λογική οι μεγάλες και μικρές κατηγορίες της προηγούμενης ενότητας είναι **Cat**-μικρές/μεγάλες

[34]Βλέπε ορισμο ισοδυναμίας, που αντί να έχουμε ισότητα με το ταυτοτικό συναρτητή, έχουμε ισομορφισμό.

3 Θεωρία Κατηγοριών: Κατασκευές

3.1 Γινόμενο

Η πρώτη κατασκευή που θα μελετήσουμε, το *γινόμενο*, όπως και κάθε άλλη κατασκευή, έχει τις ρίζες της στην μαθηματική πρακτική, και συγκεκριμένα σε αντικείμενα που υπήρχαν ήδη ως διακριτές μαθηματικές οντότητες. Τελικά, μέσω της θεωρίας κατηγοριών, καταλήγουμε να ανιχνεύουμε δομικά όμορρες οντότητες σε άλλες θεωρίες και κατασκευές (σε άλλες κατηγορίες), από αυτές που ανιχνεύσαμε το εκάστοτε αντικείμενο αρχικά. Έτσι καταλήγουμε να αντιλαμβανόμαστε ιδιότητες και κατασκευές που είναι αντίστοιχες σε διαφορετικές μεταξύ τους θεωρίες.

Πολύ πριν τη θεωρία κατηγοριών,τα μαθηματικά είχαν ονομάσει το καρτεσιανό γινόμενο, και το είχαν αναγνωρίσει ως ένα κεντρικό αντικείμενο στα μαθηματικά. Στην απλή μορφή του, μεταξύ δύο συνόλων ορίζεται ως

$$A \times B = \{(a,b) | a \in A \quad \& \quad b \in B\} \tag{9}$$

Μαζί με το γινόμενο ορίζονται και οι προβολές $\pi_1 : A \times B \to A$ (*πρώτη προβολή*) και $\pi_2 : A \times B \to B$ (*δεύτερη προβολή*), με τύπους $(a,b) \mapsto a$, $(a,b) \mapsto b$ αντίστοιχα.

Έτσι φτάνουμε να ορίσουμε το γινόμενο στις κατηγορίες (αρχικά προσσεγγίζουμε το θέμα με αντικείμενα και μορφισμούς):

Ορισμός. Γινόμενο (αντικειμένων A,B) *είναι ένα αντικείμενο ($A \times B$) μαζί με τους προβολικούς μορφισμούς $\pi_1 : A \times B \to A$ και $\pi_2 : A \times B \to B$, έτσι ώστε, για κάθε αντικείμενο Γ και ζεύγος μορφισμών $f : \Gamma \to A$ και $g : \Gamma \to B$ υπάρχει ακριβώς ένας ενδιάμμεσος μορφισμός $< f, g >: \Gamma \to A \times B$ για τον οποίο το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό:*

$$\begin{tikzcd} & \Gamma \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "\exists!(f,g)"] \arrow[dr, "g"] & \\ A & A \times B \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & B \end{tikzcd}$$

έτσι ώστε $\pi_1 \circ < f, g >= f$ και $\pi_2 \circ < f, g >= g$.

Σημείωση. Γενικότερα μπορούμε να αντιληφθούμε την έννοια του γινομένου (στις κατηγορίες, όχι μόνο του καρτεσιανού) θεωρώντας όλες τις τριάδες (X, f_1, f_2) με $f_1 : X \to A$, $f_2 : X \to B$. Το γινόμενο αποτελεί μία τέτοια τριάδα (συγκεκριμένα την $(A \times B, \pi_1, \pi_2)$). Μάλιστα, το γινόμενο είναι η μοναδική από αυτές τις τριάδας που έχει και τις δύο ιδιότητες $\pi_1 \circ < f, g >= f$, $\pi_2 \circ < f, g >= g$ (βλ. μεταθετικότητα διαγράμματος). Αυτό καθιστά το γινόμενο τον *βέλτιστο εκπρόσωπο* των τριάδων αυτών.

Ο παραπάνω ορισμός του γινομένου (και του συνγινομένου στη συνέχεια) μπορεί να οριστεί γενικότερα μεταξύ κατηγοριών (στη θέση στοιχείων) και συναρτητών (ως βέλη στη θέση των μορφισμών), και κατά τα άλλα ακριβώς όμοια. Συχνά, θα ορίζουμε κατασκευές με ορισμούς αντικειμένων και μορφισμών (παρά το ότι έχουμε εξηγήσει προσεγγίσεις με συναρτητές ή $arrow - only$) για λόγους απλότητας, καθώς δεν υπάρχουν σοβαρές διαφορές (σε κάθε περίπτωση όπου υπάρχουν θα γίνεται ειδική μνεία).

Ορισμός. *Αν μια κατηγορία $\mathcal{C}$ έχει γινόμενο $A \times B$ για κάθε ζεύγος αντικειμένων της, λέμε πως η* κατηγορία έχει γινόμενα ή *πως* έχει όλα τα δυαδικά[35] γινόμενα.

Αν η κατηγορία $\mathcal{C}$ έχει ένα ή περισσότερα γινόμενα $A \times B$ (δηλαδή όχι απαραίτητα όλα τα γινόμενα), τότε λέμε ότι η $\mathcal{C}$ έχει διακεκριμένα/επιλεγμένα γινόμενα.

Στη συνέχεια θα ορίσμουμε την δυϊκή κατασκευή του γινομένου, το συνγινόμενο, αλλά και τη λεγόμενη απεικόνιση γινόμενο.

Ορισμός. Συνγινόμενο (αντικειμένων Α,Β) *είναι ένα αντικείμενο $(A + B)$ μαζί με δύο μορφισμούς $i_1 : A \to A + B$ και $i_2 : B \to A + B$, έτσι ώστε, για κάθε αντικείμενο Γ και ζεύγος μορφισμών $f : A \to \Gamma$ και $g : B \to \Gamma$ υπάρχει ακριβώς ένας ενδιάμμεσος μορφισμός $[f, g] : A + B \to \Gamma$ για τον οποίο το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό,*

$$\begin{tikzcd} & \Gamma & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "\pi_1"'] & A+B \arrow[u, dashed, "\exists ! [f,g]"] & B \arrow[ul, "g"'] \arrow[l, "\pi_2"] \end{tikzcd}$$

Ορισμός. *Έστω $A \times C$ και $B \times D$ γινόμενα για κάθε ζεύγος μορφισμών $f : A \to B$ και $g : C \to D$.* Απεικόνιση γινόμενο *καλείται ο μορφισμός $f \times g : A \times C \to B \times D$. ώστε το αντίστοιχο διάγραμμα να είναι μεταθετικό:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] & A \times C \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "f \times g"] & C \arrow[d, "g"] \\ B & B \times D \arrow[l, "\pi'_1"] \arrow[r, "\pi'_2"'] & D \end{tikzcd}$$

Όμοια ορίζεται και με συναρτητές, αν θεωρήσουμε $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{A}', \mathcal{B}'$ κατηγορίες (αντίστοιχες με αντικείμενα A, B, C, D), τα γινόμενά τους $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ $\mathcal{A}' \times \mathcal{B}'$ (αντίστοιχα με τα $A \times C$ και $B \times D$ πιο πάνω), τους επιλήσμονες συναρτητές $P_1 : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \mathcal{A}'$,$P_2 : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ (αντιστοιχία με προβολές), τους συναρτητές $U : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ και $V : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$(σε αντιστοιχία με τις φ,γ). Έτσι, απεικόνιση γινίμενο καλούμε τον μοναδικό συναρτητή $U \times V$ που κάνει μεταθετικό το αντίστοιχο διάγραμμα, και ορίζεται στα αντικείμενα ως $(U \times V) < a, b > = < Ua, Vb >$, $(U \times V) < f, g > = < Uf, Vg >$.

[35] το δυαδικά μεταφράζεται από το $binary$ και έχει σχέση με την αντιστοιχία του καρτεσιανού γινομένου για 2 διαστάσεις, δεν προέρχεται από το $dual$, δηλαδή δεν έχει αναφορά στην αρχή του δυϊσμού

Τα στοιχεία $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ και $\mathcal{A}' \times \mathcal{B}'$ από πάνω ονομάζονται *κατηγορία γινόμενο*. Ένας συναρτητής του οποίου το βέλος καταλήγει στην κατηγορία γινόμενο (πχ $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B} \times \mathcal{C}$) ονομάζεται *συναρτητής προς κατηγορία γινόμενο*. Ενώ ο δυϊκός του (πχ $S : \mathcal{B} \times \mathcal{C} \to: \mathcal{A}$) καλείται *δισυναρτητής* ($Bifunctor$). Ένας δισυναρτητής στην Set δίνει ορισμό των συναρτήσεων δύο μεταβλητών, ενώ στην Top των συνεχών συναρτήσεων δύο μεταβλητών. Σταθεροποιώντας το ένα από τα δύο ορίσματα στο δισυναρτητή, καταλήγουμε με τον συνήθη συναρτητή του άλλου ορίσματος. Ο δισυναρτητής ορίζεται και περιγράφεται από το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα. *Έστω $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ κατηγορίες, και $\forall c \in \mathcal{C}, b \in \mathcal{B}$, και ορίζονται συναρτητές $L_c : \mathcal{B} \to \mathcal{C}, M_b : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ τέτοιοι ώστε $M_b(c) = L_c(b), \forall b, c$.*

Τότε, υπάρχει δισυναρτητής $S : \mathcal{B} \times \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, με $S(-, c) = L_c$ και $S(b, -) = M_b$ αν και μόνο εάν για κάθε ζεύγος βελών $f : b \to b'$, $g : c \to g'$ ισχύει $M_{b'} g \circ L_c f = L_{c'} f \circ M_b g$.

Η απόδειξη προκύπτει από τον ορισμό της σύνθεσης: $< 1_{b'}, g > \circ < f, 1_c >=< 1_{b'} \circ f, g \circ 1_c >=< f, g >=< f \circ 1_b, 1_{c'} \circ g >=< f, 1_{c'} > \circ < 1_b, g >$ για τα αντικείμενα και τα βέλη όπως στο θεώρημα. Αν εφαρμόσουμε τον δισυναρτητή στην παραπάνω ισότητα έχουμε $S(1_{b'}, g) \circ S(f, 1_c) = S(f, 1_{c'}) \circ S(1_b, g)$ δηλαδή η συνθήκη $M_{b'} g \circ L_c f = L_{c'} f \circ M_b g$. Αντίστροφα η συνθήκη αυτή, δεδομένων των L_c, M_b για ολα τα b, c, καθορίζει πλήρως όλα τα $S(f, g)$, άρα και τον S.

Παρατήρηση.

1. *Τα γινόμενα επεκτείνονται και σε παραπάνω από 2 κατηγορίες, αρκεί για την κατασκευή τους να πάρουμε το γινόμενο μιας κατηγορίας με το γινόμενο 2 αλλων (και επαγωγικά για περισσότερα).*
2. *Ισχύει*

$$(\mathcal{B} \times \mathcal{C})^{op} \cong \mathcal{B}^{op} \times \mathcal{C}^{op} \tag{10}$$

3.1.1 Καθολικές Κατασκευές

Ας γυρίσουμε πίσω στην περιγραφή του γινομένου ως τριάδα. Έστω, για συγκεκριμένα A, B παίρνουμε όλες αυτές τις τριάδες (X, f_1, f_2) και την κατηγορία τους $\mathcal{C}$.Ένα βέλος σε αυτή τη κατηγορία είναι το βέλος $a : (X, f_1, f_2) \to (Y, g_1, g_2)$.

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dr, "f_2"] & \\
A & Y \arrow[l, "g_1"] \arrow[r, "g_2"'] & B
\end{tikzcd}$$

Στην $\mathcal{C}$, έστω τελικό αντικείμενο (P, p_1, p_2), δηλαδή ένα αντικείμενο που κάθε τριάδα-αντικείμενο της $\mathcal{C}$ έχει μοναδικό βέλος προς το (P, p_1, p_2). Αυτό το τελικό αντικείμενο είναι το εσωτερικό γινόμενο[36].

[36] Βλέπε στη παράγραφο "Γινόμενο" το γιατί.

Ορισμός. *Τέτοιες δομές (στο παράδειγμά μας οι τριάδες), δηλαδή δομές οι οποίες καταλήγουν σε τελικά αντικείμενα, λέγονται καθολικές κατασκευές. Οντότητες που ορίζονται από καθολικές κατασκευές ονομάζονται καθολικές μεταξύ οντοτήτων που ικανοποιούν τη δεδομένη ιδιότητα (εδώ γινόμενο μεταξύ των τριάδων), η - αλλιώς- έχουν την καθολική ιδιότητα.*

Παρατήρηση. *Η προσέγγιση που ακολουθούμε για την περιγραφή των καθολικών κατασκευών φαίνεται μάλλον απλοϊκή, καθώς επιλέγουμε να δώσουμε βάρος στη μορφή των διαγραμμάτων της εκάστοτε κατασκευής. Αυτό συμβαίνει επειδή αυτή η προσέγγιση είναι πιο χρήσιμη στης εφαρμογές και τη βιβλιογραφία τους. Από τις διάφορες προσεγγίσεις αυτή του Mac Lane είναι πιο αφαιρετική, και θα ταίριαζε περισσότερο αν θέλαμε να ξεκινήσουμε από μια γενικότητα και να εξειδικεύουμε κάθε φορά: θα την αναφέρουμε εδώ, αλλά δεν θα δουλέψουμε με αυτή. Οι κατασκευές που περιγράφουμε είναι "καθολικά αντικείμενα", τα οποία θεωρεί ειδικές περιπτώσεις του "καθολικού βέλους" από αντικείμενο σε συναρτητή (δίνει τα δυϊκά των καθολικών κατασκευών), ή από συναρτητή σε αντικείμενο (δίνει τις καθολικές κατασκευές). Στη δεύτερη περίπτωση (η πρώτη είναι δυϊκή της) παίρνουμε συναρτητή $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ και αντικείμενο c της $\mathcal{C}$. Το καθολικό βέλος ορίζεται ως ζεύγος $< d_u, g_u >$ όπου d_u αντικείμενο της $\mathcal{D}$ και $g_u : Fd_u \to c$ μορφισμός της $\mathcal{C}$ ώστε κάθε άλλο ζεύγος $< d, g >$ αντικειμένου της $\mathcal{D}$ και βέλους $Fd \to c$ στην $\mathcal{C}$ να υπάρχει μοναδικό $!f : d \to d_u$ βέλος της $\mathcal{D}$ ώστε $g = g_u \circ F(!f)$, δηλαδή ώστε να είναι μεταθετικό το παρακάτω διάγραμμα:*

$$\begin{tikzcd} Fd \arrow[r, "g"] \arrow[d, dashed, "F(!f)"'] & c \\ Fd_u \arrow[ur, "g_u"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} d \arrow[d, "!f"] \\ d_u \end{tikzcd}$$

Δυϊκή της καθολικής κατασκευής είναι η *συνκαθολική κατασκευή*[37]. Τα βέλη είναι αντίστροφα και επιλέγονται τα αρχικά αντικείμενα αντί των τελικών.

3.2 Εξισωτές

Έστω βέλη $f, g : A \to B$, και κλάση βελών $e_i : Y_i \to A$ με την ιδιότητα $f \circ e_i = g \circ e_i$. Προκύπτει καθολική κατασκευή με τελικό αντικείμενο $e : X \to A$ (από τα e_i), το οποίο ονομάζεται *εξισωτής*, για την οποία το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ Y_i \arrow[u, "\alpha_i"] \arrow[ur, "e_i"'] & & \end{tikzcd}$$

Ισοδύναμα ο ορισμός του εξισωτή είναι το βέλος απο την κλάση των e_i με $e \circ a_i = e_i$ για κάθε $a_i : Y_i \to X$.

Δυϊκός του εξισωτή είναι ο *συνεξισωτής*.

[37] *couniversal construction*

Στην Set εξισωτής είναι μια συνάρτηση $X \to A$, όπου $X \subseteq A$, με τύπο $x \mapsto x$, όταν το X είναι το ακριβές υποσύνολο του A στο οποίο οι συναρτήσεις f, g είναι ίσες. Αντίστοιχα, ο συνεξισωτής είναι η σχέση ισοδυναμίας.

3.3 Όρια

Μία από τις σημαντικότερες και πιο γενικές κατασκευές (και γενικά και σε σχέση με αυτές που θα μελετήσουμε εδώ) είναι το *όριο*. Για να γίνει αυτό πρώτα πρέπει να μελετήσουμε τον *κώνο*, για τη κατανόηση του οποίου θα πάμε ένα βήμα πίσω.

Έστω μία κατηγορία $\mathcal{C}$ και μία κατηγορία $\mathcal{D}$. Έστω τώρα κάποια αντικείμενα, x, y, z και τα βέλη μεταξύ τους f, g, h στην $\mathcal{C}$. Ενας συναρτητής $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ απεικονίζει αυτή τη δομή στην $\mathcal{D}$. Η εικόνα είναι τα αντικείμενα D_x, D_y, D_z και τα βέλη D_f, D_g, D_h.Επίσης θα πάρουμε τον σταθερό συναρτητή Δ_c, ο οποίος απεικονίζει όλα τα αντικείμενα της $\mathcal{C}$ στο αντικείμενο c της $\mathcal{D}$, και όλα τα βέλη στην id_c.[38]. Αν έχουμε δηλαδή το παρακάτω τρίγωνο στην C:

$$\begin{tikzcd}
 & y \arrow[dr, "g"] & \\
x \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h"] & & z
\end{tikzcd}$$

Τότε με τους συναρτητές Δ_c και F θα έχουμε το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[loop above] \arrow[d] \arrow[ddl, bend right] \arrow[ddr, bend left] & \\
 & Dy \arrow[dr, "Dg"] & \\
Dx \arrow[ur, "Df"] \arrow[rr, "Dh"] & & Dz
\end{tikzcd}$$

Τα βέλη $c \to D_x, c \to D_y, c \to D_z$, είναι αυτά που θα ονομάσουμε κώνο. Όμως, για να ισχύει κάτι τέτοιο, πρέπει επίσης τα τρίγωνα που σχηματίζει κάθε ζευγάρι με το αντίστοιχο εκ των D_f, D_g, D_h να είναι μεταθετικά. Αυτή η συνθήκη ισοδυναμεί με το να είναι φυσικός ο μετασχηματισμός $a : \Delta_c \to F$. Δηλαδή, να είναι μεταθετικό το παρακάτω τετράγωνο:

$$\begin{tikzcd}
\Delta_c x \arrow[r, "\Delta_c f"] \arrow[d, "\alpha_x"'] & \Delta_c y \arrow[d, "\alpha_y"] \\
Dx \arrow[r, "Df"'] & Dy
\end{tikzcd}$$

[38]Στην ταυτότητα πέρα από τα βέλη απεικονίζονται και οι ταυτότητες των αντικειμένων. Εδώ, χάρην ευκολίας χρησιμοποιούμε αντικείμενα, αλλά ας μη ξεχνάμε ότι, όταν επιλέγουμε να εργαζόμαστε χωρίς αντικείμενα, τα αντικείμενα δεν είναι τίποτα παραπάνω από τις ταυτότητες τους. Σε μια τέτοια προσέγγιση θα λέγαμε ότι όλη η δομή απεικονίζεται στην id_c.

Το οποίο, επειδή ο Δ_c είναι ταυτοτικός, ισοδυναμεί με τη μεταθετικότητα του παρακάτω τριγώνου:

$$\begin{tikzcd}
 & \Delta_c \arrow[dl, "\alpha_x"'] \arrow[dr, "\alpha_y"] & \\
Dx \arrow[rr, "Df"] & & Dy
\end{tikzcd}$$

Προσέχουμε τώρα το σχήμα που θυμίζει το διάγραμμα θυμίζει πυραμίδα. Γενικά, το πλήθος των αντικειμένων που επιλέξαμε ήταν τυχαίο και εξαρτώμενο από το παράδειγμα, θα μπορούσαν να είναι πολλά περισσότερα. Από αυτή την παρατήρηση προκύπτει η ονομασία κώνος. Πάμε τώρα να δώσουμε τον ορισμό του.

Έστω οικογένεια αντικειμένων $\mathbf{C}$, με τα αντίστοιχα βέλη μεταξύ τους. Κώνο ονομάζουμε το αντικείμενο c και τα βέλη $a_i : c \to D_i$, ώστε κάθε τρίγωνο που σχηματίζουν c με ζεύγος στοιχείων της $\mathbf{C}$ να είναι μεταθετικά

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "\alpha_i"'] \arrow[dr, "\alpha_j"] & \\
D_i \arrow[rr] & & D_j
\end{tikzcd}$$

Από δω και πέρα για να ορίσουμε τον "καθολικό κώνο" ή "καλύτερο αντιπρόσωπο των κώνων", που ονομάζεται *όριο*. Μεταξύ των αντικειμένων c (διατηρούμε τους συμβολισμούς της ενότητας αυτής), υπάρχει ένα, ας το ονομάσουμε lim, το οποίο για κάθε c_i έχει μοναδικό βέλος $c_i \to lim$, ώστε για κάθε c_i, όλα τα τρίγωνα που σχηματίζουν τα c_i, lim με κάθε ένα από τα αντικείμενα D_i να είναι μεταθετικα.

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "!"] \arrow[d] & lim \arrow[dl] \\
D_k &
\end{tikzcd}$$

για κάθε i και για κάθε k.

Δηλαδή το όριο, είναι τα τελικά αντικείμενο της κατηγορίας των κώνων. Δυϊκά του κώνου και του ορίου είναι ο *συνκώνος* και το *συνόριο* αντίστοιχα. Η ύπαρξη του ορίου στην εκάστοτε κατηγορία *δεν* είναι πάντα απλό ερώτημα. Η ύπαρξη συνορίου έχει πολλές εφαρμογές, καθώς συχνά χρησιμοποιείται για να περιγράψει το να "βάζουμε αντικείμενα μαζί" "συνδέουμε όμοι αντκείμενα". Τη χρήση του τη συναντάμε σε πολλές εφαρμογές, όπως στο να "ενώνουμε" $specifications$ σε γλώσσες προγραμματισμού[39], ή, στη κατηγορία των θεωριών **Th** (την οποία θα συναντήσουμε στην Αφηρημένη Θεωρία μοντέλων)[40].

3.4 *Pullback*, *Pushout*

Έστω βέλη $f : A \to C$ και $g : B \to C$. Θα θεωρήσουμε όλες τις τριάδες (X_i, x_{i1}, x_{i2}), όπου $x_{i1} : X_i \to A$, $x_{i2} : X_i \to B$, με την ιδιότητα $f \circ x_{i1} =$

[39]βλέπε [3]
[40]βλέπε [4]

$g \circ x_{i2}$.Αντοίστιχα, είναι όλα τα μεταθετικά τετράγωνα:

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "\chi_{i,2}"] \arrow[d, "\chi_{i,1}"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

Σε αυτή τη κατασκευή, το τελικό αντικέιμενο (P, g', f'), ονομάζεται $Pullback$, που μπορούμε να τον αντιληφθούμε ως τον καλύτερο εκπρόσωπο όλων των βελών που συμπληρώνουν το μεταθετικό τετράγωνο.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

Ισοσύναμα, τα βέλη $k : X_i \to P$ είναι τα μοναδικά τα οποία κάνουν μεταθετικό το διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[dr, "k"] \arrow[drr, "\chi_{i,2}"] \arrow[ddr, "\chi_{i,1}"'] & & \\ & P \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

Ως παράδειγμα στη Set έχουμε P το υποσύνολο του $A \times B$ για το οποίο ισχύει $f(a) = g(b)$ ($a \in A$ και $b \in B$) και g', f' αντίστοιχα η πρώτη και δεύτερη προβολή του. Ουσιαστικά είναι ο περιορισμός του γινομένου, στο $f(a) = g(b)$.

Pullback Lemma Στο διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[d] \\ F \arrow[r] & E \arrow[r] & D \end{tikzcd}$$

α)Αν και τα δύο εσωτερικά τετράγωνα είναι *pullback*, τότε και το εξωτερικό είναι *pullback*.

β)Αν το εξωτερικό και το δεξί εσωτερικό τετράγωνο είναι *pullback* και το διάγραμμα είναι μεταθετικό τότε το αριστερό εσωτερικό διάγραμμα είναι *pullback*.

Προφανώς, στη πρώτη περίπτωση, η μεταθετικότητα του εξωτερικού τετραγώνου εγγυάται από την μεταθετικότητα των εσωτερικών.

Για την απόδειξη χρησιμοποιούμε μόνο τους ορισμούς του *pullback* για τα διάφορα δοσμένα τετράγωνα, και κατασκευάζουμε το ζητούμενο που θέλουμε να δείξουμε ότι είναι *pullback* ξεκινόντας από το διάγραμμα που του λείπει η η τριάδα και το μοναδικό k.

Δυϊκό του *pullback* είναι το *pushout*.

3.5 Ζεύγη Προσάρτησης

Οι καθολικές κατασκευές, όταν ειδωθούν ως καθολικά βέλη (από συναρτητές σε αντικείμενα ή από αντικείμενα σε συναρτητές) οδηγούν σε μια γενίκευση: τα ζεύγη *προσαρτημένων συναρτητών* (*adjoint functors*), αλλιώς *προσάρτηση* (*adjunction*).

Ορισμός. *Έστω ζεύγος κατηγοριών και ζεύγος συναρτητών μεταξύ τους*

$$\mathcal{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{D}$$

Όταν για κάθε ζεύγος αντικειμένων $c \in \mathcal{C}, d \in \mathcal{D}$ υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία, δηλαδή ισομορφισμός (έστω ϕ) μεταξύ των $hom - set$:

$$\phi_{c,d} : \mathcal{D}(Fc, d) \cong \mathcal{C}(c, Gd) \tag{11}$$

*Τότε η τριάδα $< F, G, \phi >$ καλείται προσάρτηση, και οι συναρτητές λέγονται ζεύγος προσαρτημένων συναρτητών. Ο F καλείται αριστερός προσαρτημένος του G, και ο G δεξιός προσαρτημένος του F. Οι $\mathcal{D}(Fc, d), \mathcal{C}(c, Gd)$ είναι δισυναρτητές $\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D} \to$ **Set** και $\mathcal{C} \times \mathcal{D}^{op} \to$ **Set** αντίστοιχα. Αν θέλουμε να ξεφύγουμε από τα σύνολα, εναλλακτικά ορίζουμε την ϕ ως αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ βελών $(f : Fc \to d) \mapsto (\phi f : c \to Gd)$*

Για κάθε προσάρτηση προκύπτουν δύο χαρακτηριστικοί φυσικοί μετασχηματισμοί η, ϵ. Αν θέσουμε $d = Fc$ προκύπτει $\mathcal{D}(Fc, Fc) \cong \mathcal{C}(c, GFc)$. Το $D(Fc, Fc)$ περιέχει το $1 : Fc \to Fc$, και ονομάζουμε την ϕ-εικόνα του $(\phi(1_{F_c}))$, $\eta_c : c \to GFc$, καθολικό βέλος από το c στον G, για κάθε c. Ο $\eta : I_{\mathcal{C}} \to GF$ είναι φυσικός μετασχηματισμός, κάτι που αποδυκνείεται από τη μεταθετικότητα του παρακάτων διαγράμματος για κάθε $c \in \mathcal{C}$ και h μορφισμού της $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd} c' \arrow[r, "\eta_{c'}"] \arrow[d, "h"] & GFc' \arrow[d, "GFh"] \\ c \arrow[r, "\eta_c"] & GFc \end{tikzcd}$$

Η μεταθετικότητα αποδυκνείεται από την $GFh \circ \phi(1_{F_{c'}}) = \phi(Fh \circ 1_{F_{c'}}) = \phi(1_{F_c} \circ Fh) = \phi(1_{Fc}) \circ h$. Όπου 1η και 3η ισότητα από ϕ ως αντιστοιχία βελών και 2η από φυσικότητα ϕ.

Με αντίστοιχη διαδικασία, ξεκινόντας από $c = Gd$ προκύπτει αντίστοιχα ο $\epsilon : FG \to I_{\mathcal{D}}$.

Ορισμός. *Για κάθε προσάρτηση ορίζονται 2 ειδικοί φυσικοί μετασχηματισμοί η, ϵ, που καλούνται μονάδα/unit και συνμονάδα/counit αντίστοιχα*[41] *οι οποίοι προκύπτουν ως εικόνα υπό-προσάρτηση των ταυτοτήτων.*

Επίσης προκύπτουν οι παρακάτω ταυτότητες:

$$G \xrightarrow{\eta G} GFG \xrightarrow{G\epsilon} G$$

$$F \xrightarrow{F\eta} FGF \xrightarrow{\epsilon F} F$$

οι οποίες λέγονται τριγωνικές ταυτότητες και σημαίνουν ότι και οι 2 συνθέσεις είναι οι αντίστοιχοι ταυτοτικοί φυσικοί μετασχηματισμοί.

Παρατήρηση. *Παραπάνω αναφέραμε ότι τα στοιχεία των η, ϵ είναι καθολικά βέλη. Αυτό είναι πόρισμα του $Yoneda$: αποδυκνείεται ότι η καθολικότητα βέλους από αντικείμενο σε συναρτητή*[42] *ισοδυναμεί με την ύπαρξη 1-1 και επί αντιστοιχίας μεταξύ $hom - set$*[43]*: $Hom_{\mathcal{D}}(d_u, d) \cong Hom_{\mathcal{C}}(c, F_d)$, και κάθε τέτοια αντιστοιχία καθορίζεται πλήρως από το καθολικό βέλος. (Όπως είδαμε στον $Yoneda$ αυτό το βέλος προκύπτει ως εικόνα της ταυτότητας. Με τον ίδιο τρόπο προκύπτει και το κάθε η_x, ως εικόνα της ταυτότητας του x).*

Παρατήρηση. *Αποδυκνείεται πως για να καθοριστεί πλήρως μια προσάρτηση μπορούμε να έχουμε διάφορους συνδυασμούς αρχικών δεδομένων, που ισοδυναμούν με την τριάδα $< F, G, \phi >$, είτε είναι το ζεύγος των προσαρτημένων συναρτητών με είτε το unit, είτε counit, με τα στοιχεία τους να ορίζονται ως καθολικά βέλη, είτε είναι το ζεύγος των συναρτητών μαζί με το unit και το counit, και τις τριγωνικές τατυτότητες να ισχύουν, είτε είναι ο ένας συναρτητής, με την αντιστοιχία αντικειμένων του άλλου και τα στοιχεία του unit/counit (αν έχω τον F θέλω του counit, αν έχω του G θέλω του unit) ως καθολικά βέλη.*

Θεώρημα. *Έστω συναρτητής $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$. Έστω F, F' αριστεροί προσαρτημένοι συναρτητές του G. Τότε F, F' φυσικά ισομορφικοί (δηλαδή ο αριστερός προσαρτημένος είναι μοναδικός εώς ισομορφισμό).*

Έστω δύο προσαρτήσεις $< F, G, \phi >$, $< F', G, \phi' >$ για κάθε αντικείμενο x έχουμε τα βέλη $\eta_x : x \to GFx$, $\eta'_x : x \to GF'x$. Τα βέλη αυτά είναι καθολικά από αντικείμενο σε συναρτητή, Τα καθολικά βέλη είναι εξ ορισμού μοναδικά εώς ισομορφισμό.

Τελικά ως εφαρμογή θα δώσουμε το κριτήριο ισοδυναμίας κατηγοριών σε πληρέστερη μορφή:

[41] Επιλέγουμε ως ορολογία την αγγλική, γιατί υπάρχει και άλλο αντικείμενο που μεταφράζεται ως μονάδα/συνμονάδα στα ελληνικά, το *monad/comonad*.

[42] ανάποδα από αυτό που ορίσαμε στην αρχή του κεφαλαίου

[43] Κρατάμε τους συμβολισμούς για τα αντικείμενα όπως τα είχαμε γράψει στην αρχή του κεφαλαίου, με ανεστραμμένα βέλη

Θεώρημα. *Ένας συναρτητής $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$:*

-Επάγει μια ισοδυναμία κατηγορίων αν και μόνο αν

-Είναι πλήρως πιστός και ουσιαστικά επί αν και μόνο αν

-Είναι μέρος προσάρτησης-ισοδυναμίας $< F, G, \eta, \epsilon >: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$

Προσάρτηση ισοδυναμίας καλούμε μια προσάρτηση όταν *unit* και *counit* είναι φυσικοί ισομορφισμοί. Επομένως, η τρίτη πρόταση αυτόματα συνεπάγεται την πρώτη.

Έστω τώρα ισοδυναμία που επάγεται από τον G. $GF \cong I$ σημαίνει πως κάθε c αντικείμενο της $\mathcal{C}$ είναι ισομορφικό με το $G(Fc)$ για κάποιο Fc αντικείμενο της $\mathcal{D}$. Επομένως ο F είναι ουσιαστικά επί. Επίσης αν ονομάσουμε α τον $FG \cong I$ έχουμε για κάθε $f : x \to y$ μεταθετικό τετράγωνο

$$\begin{tikzcd} FGx \arrow[r, "\alpha_x"] \arrow[d, "FGf"'] & x \arrow[d, "f"] \\ FGy \arrow[r, "\alpha_y"] & y \end{tikzcd}$$

και $f = \alpha_y \circ FGf \circ \alpha_x^{-1}$. Άρα $Gf_1 = Gf_2 : Gx \to Gy$ συνεπάγεται πως $f_1 = f_2$, και G πιστός (συμμετρικά, F πιστός, από το ίδιο επιχείρημα για $GF \cong I$). Έστω τώρα βέλος $h : Gx \to Gy$ και $f = \alpha_y \circ Fh \circ \alpha_x^{-1}$. Το πάνω τετράγωνο επίσης είναι μεταθετικό με Fh στη θέση του FGf, άρα $Fh = FGf$. Από πιστότητα F, αυτό δίνει $h = Gf$, άρα G πλήρης.

Έστω τώρα ο G είναι πλήρως πιστός και ουσιαστικά επί. Έστω d αντικείμενο της $\mathcal{D}$ επιλέγουμε (προς κατασκευή του F) για κάθε διαφορετικό d ένα c_0 στην $\mathcal{C}$ ώστε να θέσουμε $c_0 = F_0 d$ και έναν ισομορφισμό $\eta_d : d \cong G(F_0 d)$ (ο οποίος διασφαλίζουμε πως υπάρχει αφού G ουσιαστικά επί). Αφού ο G είναι πλήρης, για κάθε βέλος $f : d \to Gc$, το $f \circ \eta_c^{-1}$ είναι $G(F_0 d) \to Gc$ για κάποιο βέλος $F_0 d \to c$. Επίσης αφού ο G είναι πιστός, τότε το $F_0 d \to c$ είναι και το μοναδικό που δίνει το $G(F_0 d) \to Gc$ μέσω G. Δηλαδή, αν ονομάσουμε $f' : F_0 d \to c$, τότε έχουμε $f = Gf' \circ \eta_d$ για μοναδικό f' και η_d καθολικό βέλος:

$$\begin{tikzcd} d \arrow[drr, "f"] \arrow[d, phantom, "\eta_d \cong"] & & \\ {} & & Gc \\ G(F_0 d) \arrow[urr, "Gf'"'] & & \end{tikzcd}$$

$$F_0 d \xrightarrow{\quad f' \quad} c$$

Επομένως μπορούμε να κατασκευάσουμε από τη συνάρτηση αντικειμένων F_0 τον συναρτητή $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ με ακριβώς ένα τρόπο ώστε να είναι φυσικός ο $\eta : I \to GF$. Κατασκευάσαμε επομένως προσάρτηση, και η *counit* είναι αντιστρέψιμη, αφού για κάθε c, $G\epsilon_c = \eta_{Gc}$ και ο G είναι πλήρως πιστός. Επομένως έχουμε την προσάρτηση ισοδυναμίας.

4 Ασάφεια

4.1 Τοποθέτηση του Προβλήματος

Οι πρώτες προσπάθειες αυστηρά μαθηματικής περιγραφής της έννοιας της ασάφειας γίνονται από τους *Zadeh* [44] και *Goguen*[45]. Όλα ξεκινούν από ένα πολύ απλό πρόβλημα, θεωρούμε την πρόταση "Ο άνθρωπος Α είναι κοντός" και ψάχνουμε την αληθοτιμή της. Έστω επίσης πως έχουμε ένα μεγάλο πλήθος-δείγμα ανθρώπων, και ένα διάστημα τιμών για τα ύψη τους. Τα άκρα του διαστήματος δεν είναι σημαντικά, χαριν παραδείγματος ας επιλέξουμε το $(150, 200)$ σε εκατοστά. Επίσης το πόσο μεγάλο είναι το πλήθος είναι ποιοτικό ζήτημα και όχι ποσοτικό, θέλουμε να είναι αρκετά μεγάλο, ώστε για κάθε άνθρωπο ο αμέσως ψηλότερος να μην έχει ουσιαστική διαφορά από τον προηγούμενο. Και εδώ η λέξη "ουσιαστική" έχει σχετικό με την εμπιρεία και τη κλίμακα νόημα, για το οποίο θα εξηγηθούμε στη συνέχεια. Όμως, αυτό που αρχικά μας ενδιαφέρει, είναι πως αν για κάθε διάστημα μεγέθους, ας υποθέσουμε, ενός εκατοστού υπάρχει και ένας τουλάχιστον άνθρωπος που ανήκει σε αυτό, εμφανίζεται το πρόβλημα ότι δύο διαδοχικά άτομα στη διάταξη ύψους δεν διαχωρίζονται σε σχέση με το νόημα της πρότασης. Έτσι είναι δύσκολο, εώς αδύνατο να τους αποδοθεί αληθοτιμή. Είτε θα πρέπει να ορίσουμε αυθαίρετα ένα όριο για τη λέξη "κοντός", οπότε θα καταλήξουμε με άτομα που έχουν "ουσιαστικά" το ίδιο ύψος, και στην καθημερινότητα θα ήταν αξεχώριστοι σε σχέση με το ύψος τους, τον ένα ως κοντό και τον άλλο ως όχι κοντο, είτε θα ξεκινήσουμε από τον κοντύτερο, και θα μελετάμε τον αμέσως ψηλότερο, με βάση τη διαφορά τους, κάτι που με τόσο μεγάλο πλήθος δείγματος κινδυνεύει να δώσει αληθοτιμή 1 για όλο το δείγμα (ή 0 αν ξεκινούσαμε από τον ψηλότερο)[46].

Το πρόβλημα επιλύεται ορίζοντας εκ νέου την αληθοτιμή, αντί για το σύνολο $\{0, 1\}$, στο διάστημα $[0, 1]$. Έτσι δε μιλάμε απλά για τις αξιολογήσεις "αληθές" ή "ψευδές" για μια πρόταση, αλλά για μια αξιολόγηση που πλησιάζει στο "αληθές" (αντίστοιχα στο "ψευδές") όσο πιο κοντά στο 1 (αντίστοιχα στο 0) πλησιάζει η αληθοτιμή. Μπορούμε να έχουμε λοιπόν αξιολογήσεις όπως "σχετικά αληθές" ή "σχετικά ψευδές", ή ακόμα "ούτε αληθές, ούτε ψευδές" για κάθε αντίστοιχο πρόβλημα. Εδώ αυτό που περιγράφεται είναι ο "βαθμός του ανήκειν" ενός αντικειμένου στο σύνολο που ορίζεται από την αρχική πρόταση "Ο άνθρωπος Α είναι κοντός". Δεν περιοριζόμαστε σε μια δυαδική αξιολόγηση "ανήκει/δεν ανήκει".

Ο τρόπος που συμβαίνει αυτό είναι μέσω μιας συνάρτησης $A : X \to [0, 1]$. Το X είναι το σύνολο των ανθρώπων που μελετάμε, το οποίο θα ονομάσουμε *σύμπαν*,

[44] [13], το 1965

[45] [5*a*],[5*b*] το 1967 και το 1969

[46] Η συγκεκριμένη διαδικασία περιγράφεται από μια σχέση, που όταν η διαφορά του ύψους 2 ατόμων είναι αρκετά μικρή και ο ένας ικανοποιεί την αρχική πρόταση -είναι κοντός- τότε και ο άλλος είναι κοντός. Αν έχουμε αρκετά μεγάλο πλήθος ατόμων ώστε οι διαφορές τους να είναι επαρκώς μικρές, κάτι που είναι πιθανότατο αν πάρουμε όλο το πληθυσμό στο συγκεκριμένο διάστημα που δώθηκε, τότε με πεπερασμένο αριθμό επαγωγικών βημάτων μπορούμε να καταλήξουμε σε συμπεράσματα όπως ¨όλοι οι άνθρωποι είναι κοντοί' ή ¨ένας άνθρωπος ύψους 2 μέτρων είναι κοντός¨, με κατάλληλες προσαρμογές στο διάστημα ύψους

ενώ το $[0,1]$ είναι το *σύνολο αλήθειας*. Η A ονομάζεται $[0,1]$-*σύνολο*. Η ίδια η συνάρτηση επακριβώς δεν είναι το ζητούμενο, καθώς τα ακριβή της χαρακτηρηστικά έχουν σχέση με τα χαρακτηρηστικά του εκάστοτε προβλήματος. Στη συγκεκριμένη περίπτωση θέλουμε μια συνεχή φθίνουσα συνάρτηση, που εξαρτάται μόνο από το ύψος, και θα πλησιάζει το 1 όσο πιο κοντα βρισκόμαστε στο 150 και το 0 όσο πλησιάζουμε το 200, πχ η $(h-x)/50$, όπου h το ύψος σε εκατοστά, ή η $e^{-P(h)}$ με Π κάποια συνάρτηση που να μας δίνει τα ζητούμενα. Επομένως, το *μοντέλο* της έννοιας "κοντός" είναι όλα τα $[0,1]$-*σύνολα* που ορίζονται μονοσήμαντα από συνεχείς, μονότονα φθίνουσες συναρτήσεις ύψους, που είναι οι "ερμηνείες" της έννοιας "κοντός":

$$\overline{A} := \{A : X \to J\} \tag{12}$$

Όπου το X είναι κάποιο συγκεκριμένο σύμπαν και J ένα σύνολο αλήθειας (όχι απαραίτητα το $[0,1]$)

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα η "ασάφεια" προκύπτει από τα εγγενή χαρακτηριστικά της φυσικής γλώσσας και της χρήσης της. Από εκεί προκύπτει και η λέξη "ουσιαστική", ή "μεγάλο" δείγμα. Υπάρχουν και άλλοι λόγοι που προκύπτει ασάφεια σε προβλήματα (κάποιους εκ των οποίων θα συναντήσουμε στη συνέχεια), ενώ μια απλή αλλαγή της αληθοτιμής στο διάστημα $[0,1]$ επίσης είναι σχετικά τετριμμένη. Όμως έτσι εισαγόμαστε στο πρόβλημα του "Πώς μπορεί η ασάφεια να περιγραφεί, και να τη χειριστούμε στη μαθηματική πρακτική με έναν αυστηρό τρόπο;". [47]

Πριν ξεκινήσουμε τη μελέτη του ζητήματος, είναι φανερό από το εισαγωγικό παράδειγμα ήδη πως το ζήτημα είναι η αυστηρή κατασκευή εργαλείων ερμηνείας της πραγματικότητας. Ο ίδιος ο *Goguen* στην αρχή της θεμελιώδους εργασίας του στο ζήτημα[48] εξηγεί πως το ζήτημα είναι η ίδια η αλληλεπίδραση με τα μαθηματικά ως κοινωνική πρακτική (μαθηματική πρακτική), η οποία διαπερνάται από μια συγκεκριμένη αντίθεση: η τυπική λογική περιγράφει ακριβείς έννοιες με ακριβή τρόπο (τις τυπικές γλώσσες όπως η πρωτοβάθμια λογική ή η αριστοτελική λογική), ενώ η κοινωνική πρακτική και η φυσική γλώσσα ενέχουν την ασάφεια. Αυτό είναι το ζήτημα που μελετά, ένα ζήτημα που αφορά καθαρά τη μαθηματική πρακτική και τη κατασκευή μοντέλων, ενώ εξ αρχής δηλώνει πως δεν ενδιαφέρεται για μια πλατωνική (οντολογικά ρεαλιστική) ερμηνεία της "έννοιας" (εδώ η ασάφεια), της οποίας η λογική που θα κατασκευάσει περιγράφει την "ουσία" της. Αξίζει να αναφέρουμε εξ αρχής πως σε αυτό η αρχή του αποκλειόμενου τρίτου αποτελεί εμπόδιο, και θα δούμε συχνά στη συνέχεια την υπέρβασή της στις λογικές κατασκευές μας.

[47] Εδώ να αναφέρουμε πως η ασάφεια είναι κάτι τελείως διαφορετικό από την αβεβαιότητα. Στο παραπάνω παράδειγμα, δεν αντιμετωπίζουμε κάποιο δεδομένο στο οποίο δε γνωρίζουμε την τιμή του, ή η τιμή του μπορεί να κυμαίνεται με τυχαίο τρόπο, αλλά μη-τυχαία πειράματα και μεταβλητές.

[48] [5*b*] *Logic of Inexact Concepts*

4.2 Ασαφή Σύνολα (*Fuzzy Sets*)

Ουσιαστικά θέλουμε να δουλέψουμε σε προβλήματα τα οποία μπορεί να μην έχουν μία βέλτιστη λύση, ή να έχουν αντιφατικά κριτήρια μεταξύ τους, όπως η αναγνώριση και ανάλυση εικόνας[49] ή η ανάλυση και σύνθεση προδιαγραφών στο σχεδιασμό ενός προϊόντος[50]. Αυτά τα προβλήματα συχνά θα μπορούσαν να θεωρηθούν κακώς τοποθετημένα σε άλλες περιπτώσεις.

Η απάντηση στο πως να χειριστούμε την ασάφεια ξεκινά από τον αυστηρό ορισμό του αντικείμενου το οποίο αρχίσαμε να περιγράφουμε στη προηγούμενη ενότητα, σε έναν επαρκή βαθμό γενικότητας:

Ορισμός. *Ασαφές Σύνολο (Fuzzy Set ή $L-Set$) ονομάζεται ένα σύνολο X, εφοδιασμένο με μία συνάρτηση $A : X \to L$ με σύνολο άφιξης ένα μεταβατικό μερικά διατεταγμένο σύνολο*[51][52] *(transitive poset)*[53]*. Συχνά ως ασαφές σύνολο μπορούμε να αναφερόμαστε και μόνο στην ίδια τη συνάρτηση.*

Στην ειδική περίπτωση που $L = \{0, 1\}$, τότε A είναι απλώς μια *χαρακτηριστική συνάρτηση* σε κλασσικά προβλήματα, που αποφαίνεται για το ανήκειν ενός στοιχείου σε ένα δεδομένο σύνολο (αντίστοιχα για την αλήθεια ή όχι μίας πρότασης σε ένα δεδομένο μοντέλο). Επομένως, τα ασαφή σύνολα μπορούν να ειδωθούν ως *γενικευμένες χαρακτηρηστικές συναρτήσεις* (οι οποίες αποφαίνονται για το βαθμό του ανήκειν), και μπορούμε να αντιμετωπίσουμε τα προβλήματα ασάφειας ως γενίκευση των κλασσικών προβλημάτων. Τα προβλήματα όπου $L = \{0, 1\}$ ονομάζονται *crisp*.

Εφόσον ορίσαμε ένα αντικείμενο μελέτης, το επόμενο ερώτημα είναι ποιές πράξεις μπορούν να οριστούν σε αυτό, και ταυτόχρονα παραμένει το ζήτημα του καθορισμού του L. Τα δύο αυτά ερωτήματα συνδέονται άμεσα. Για το A ως τώρα γνωρίζουμε μόνο πως ανήκει στην κλάση L^X, όπου L κάποιου είδους διάταξη, και X σύνολο. Είτε μελετήσουμε το L, είτε το X, θα βγάλουμε κάποια συμπεράσματα για τις πράξεις του A. Ξεκινάμε[54] με τη προσέγγιση των *semantics* μιας λογικής. Αφού κάθε $L-set$ μπορεί να ερμηνευθεί ως μια πρόταση που αληθέυει περισσότερο ή λιγότερο για κάθε μέλος του σύμπαντος X, πρέπει και τα λογικά "ή/και" να υπάρχουν ως πράξεις μεταξύ $L-set$ και να προκύπτει ένα $L-set$ (Δηλαδή πρέπει

[49] [5*a*], $L-FS$

[50] βλέπε [11]

[51] Αυτή η γενίκευση προέρχεται από το $l-fuzzysets$ του Γογυεν (1967). Συχνά χρησιμοποιείται η ονομασία $L-fuzzy$ για τον ορισμό που δώσαμε, ενώ η ονομασία $fuzzy$ αναφέρεται σε σύνολα όπου L είναι το μοναδιαίο διάστημα. Υπάρχει εκτεταμένη βιβλιογραφία για αυτή τη περίπτωση, αλλά εμείς ενδιαφερόμαστε για την γενική περίπτωση που L μπορεί να είναι διάφορες αλγεβρικές δομές με κάποιου είδους διάταξη.

[52] Η μεταβατική μερική διάταξη συνήθως ονομάζεται L, από εκεί προκύπτει και η ονομασία $L-set$.

[53] Διμελής ανακλαστική, αντισυμμετρική, μεταβατική σχέση σε όλο το L. Από εδώ και πέρα συχνά θα λέμε απλά *poset*.

[54] [5*b*] *LoIC*

να υπάρχουν ως πράξεις του L^X).

Η αναλογία που γίνεται είναι μεταξύ λογικού ή/συνολοθεωρητικής ένωσης/"μέγιστου" από τη μία και λογικού και/συνολοθεωρητικής τομής/"ελάχιστου" από την άλλη[55]. Έστω δεδομένα Λ-σετ $A : X \to L$ και $B : Y \to L$, με $L = [0, 1]$.

Ορισμός. *Τομή μεταξύ $L-set$ ορίζεται κατα σημείο ως* $(A \cap B)(x) = A(x) \wedge B(x)$. *Ένωση μεταξύ $L-set$ ορίζεται κατα σημείο ως* $(A \cup B)(x) = \begin{cases} A(x), x \in X \setminus Y \\ A(x) \vee B(x), x \in X \cap Y \\ B(x), x \in Y \setminus X \end{cases}$

Αν $X \cap Y = \emptyset$ τότε ορίζουμε το *κενό* $L-set$ ως $\emptyset : \emptyset \to L$, που είναι προφανώς μοναδικό[56] για κάθε L^X. Οι παραπάνω ορισμοί γίνονται διαισθητικά προφανείς αν μελετήσουμε τις αληθοτιμές (δηλαδή, όπως κάνει ο $Goguen$[57], $L = [0, 1]$), όπου πράγματι μία φυσική προέκταση του ορισμού αλήθειας του $Tarski$ συμπίπτει με τους ορισμούς, η "Α ή Β" είναι *όσο* αληθής είναι η "Α" ή η "Β", όπου η λέξη όσο είναι το κλειδί: αν η αληθοτιμή του Α(x) είναι 0,9 και η αληθοτιμή του Β(x) είναι 0,1, είναι επόμενο η αληθοτιμή του "Α ή Β" να είναι 0,9. Αντίστοιχα για τον ορισμό της τομής. Προς το παρόν δε θα συνεχίσουμε την μελέτη των αληθοτιμών, διότι μας ενδιαφέρουν περισσότερο οι ιδιότητες των νέων πράξεων που ορίσαμε.

Πρόταση. *Οι παρακάτω ιδιότητες ισχύουν για* $[0, 1]-$*σύνολα:*

$$A \cap A = A, \quad A \cup A = A \tag{13}$$

(ουδετερότητα)

$$A \cap B = B \cap A, \quad A \cup B = B \cup A \tag{14}$$

(αντιμεταθετική)

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \tag{15}$$

(προσεταιριστική)

$$A \cap (A \cup B) = A, \quad A \cup (A \cap B) = A \tag{16}$$

(απορροφητική)

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \tag{17}$$

(επιμεριστική)

$$A \cup \emptyset = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset \tag{18}$$

(ουδετερότητα και απορροφητικότητα του μηδενικού στοιχείου)

[55] Στην πραγματικότητα η αναλογία είναι ευρύτερη με τη διατακτική ένωση και τη διατακτική τομή αντί για το μέγιστο και το ελάχιστο αντίστοιχα. Γι αυτό και θα χρησιμοποιηθούν τα σύμβολά τους

[56] Είναι ήδη φανερό ότι όταν κατασκευάσουμε κατάλληλη κατηγορία είναι αρχικό αντικείμενο

[57] [5b] $LoIC$

Κάθε μία ιδιότητα ισχύει και για απλά σύνολα. Οι αποδείξεις προκύπτουν άμεσα από τη χρήση του ορισμού των πράξεων κατά σημείο, τη χρήση της αντίστοιχης συνολοθεωρητικής ταυτότητας, και του ορισμού του μέγιστου και του ελάχιστου.

Ταυτόχρονα, οι παραπάνω ιδιότητες, σε ένα σύνολο με 2 διμελείς πράξεις αποτελούν τον αξιωματικό/αλγεβρικό ορισμό του πλέγματος (*lattice*). Συγκεκριμένα ένα σύνολο X με 2 διμελείς πράξεις[58] $\vee, \wedge : X \times X \to X$, που ικανοποιούν την ουδετερότητα, την αντιμεταθετική, την προσεταιριστική, και την απορροφητική είναι *πλέγμα*, όταν πληροί και την επιμεριστική ονομάζεται *επιμεριστικό πλέγμα* (*distributive lattice*), ενώ όταν υπάρχει μηδενικό στοιχείο (που ορίζεται ως να πληροί την τελευταία) ονομάζεται *επιμεριστικό πλέγμα με μηδέν*. Αν για κάθε $Y \subseteq X$ υπάρχουν *supremum* (συμβ. $\bigvee Y$) και *infimum* (συμβ. $\bigwedge Y$), τότε το X είναι *πλήρες (ή ολοκληρωμένο) πλέγμα* (*complete lattice*).

Ένα πλήρες πλέγμα, όταν ικανοποιεί μια πιο ισχυρή μορφή της επιμεριστικότητας, τον *πλήρη επιμεριστικό νόμο* ονομάζεται *πλήρως επιμεριστικό πλέγμα* (*completely distributive lattice*), αλλιώς *cdl*. Ο πλήρης επιμεριστικός νόμος εμφανίζεται σε διάφορες ισοδύναμες μορφές, στην περίπτωσή μας, θα τον ορίσουμε ως

$$A \cup (\bigcap_{i \in I} B_i) = \bigcap_{i \in I} (A \cup B_i) \tag{19}$$

και τη δυϊκή της

$$A \cap (\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i) \tag{20}$$

για A $[0.1]-$σύνολο και B_i οικογένεια $[0.1]-$συνόλων.

Πριν προχωρήσουμε περεταίρω στη μελέτη των πράξεων σε πιο γενικευμένα επίπεδα, αξίζει να μείνουμε στο επίπεδο του $[0,1]$ και των *semantics*, για να διαπιστώσουμε πως δεν μεταφέρονται τετριμμένα όλες οι συνολοθεωρητικές ταυτότητες στις πράξεις ασαφών συνόλων, με βασικό χαρακτηριστικό την *αρχή του αποκλειόμενου τρίτου* και προτάσεις που την προϋποθέτουν. Αν θεωρήσουμε τις προτάσεις Α και $\neg A$ για κάποιο $x \in X$, έχουμε αληθοτιμή $A(x) \vee (1 - A(x)) \neq 1$, για κάθε άλλη περίπτωση πέρα από $A(x) = \{0,1\}$ (δηλαδή την *crisp*).

Όσο συνεχίζει η μελέτη των *semantics*, και σε πιο γενικευμένα επίπεδα από το $L = [0,1]$, το οποίο σταματά να μας ενδιαφερει (παρα μόνο ως ειδική περίπτωση), προκύπτει μια πράξη $*$ με την οποία ο *Goguen* επεκτείνει/γενικεύει τον πολλαπλασιασμό (για $L = [0,1]$), και προκύπτει όταν αποτιμούμε αληθοτιμές στο *Modus Ponens*. Ένα πλήρες πλέγμα εφοδιασμένο και με μία προσεταιριστική πράξη (εδώ η $*$) και δύο ιδιότητες:

- τον γενικό επιμεριστικό νόμο $x * \bigvee_i y_i = \bigvee_i (x * y_i)$
- ως ουδέτερο στοιχείο, την απειρία του πλέγματος[59] $x * I = x = I * x, \forall x \in L$

ονομάζεται *διατεταγμένη ως πλήρες πλέγμα ημιομάδα* (*complete lattice ordered*

[58] εδώ οι πράξεις είναι αυτές που συμβολίσαμε $\cup, \cap$

[59] Η οποία μπορεί να προστεθεί, όπως και το μηδέν του πλέγματος χωρίς βλάβη της γενικότητας.

semigroup), αλλιώς *closg*, καθώς είναι ημιομάδα[60] ως προς την πράξη $*$.

4.2.1 Επεκτάσεις της δομής του L στο L^X

Η προηγούμενη προσέγγιση, δηλαδή η μελέτη των *semantics*, μας δίνει αιτήματα για τα στοιχεία του L^X - δηλαδή το "πως θα θέλαμε να είναι η δομή των στοιχείων αυτών ώστε να ταιριάζει με τα προβλήματα που θέλουμε να αντιμετωπίζουν". Συγκεκριμένα προκύπτει ότι κάποιες δομές (*cdl*, *closg*) παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον γιατί μπορούν να υποστηρίξουν μία γλώσσα που μπορεί να περιγράφει και να χειρίζεται ασαφή φαινόμενα.

Όλα αυτά μπορούμε να τα "ζητάμε", και το επόμενο βήμα στη μελέτη μας διερευνεί εάν, και αν ναι πώς, μπορούν να προκύπτουν και να διασφαλίζονται. Εφόσον έχουμε εξάρχής ορίσει το L ως οποιοδήποτε *poset*,[61] οπότε ανάλογα με τη δομή του εκάστοτε L θέλουμε να προκύπτουν τα αντίστοιχα αιτήματα στο L^X. Μελετώντας το L λοιπόν προσπαθούμε να δούμε εάν και εώς ποιο βαθμό κληρονομείται η δομή του στο L^X.

Πρόταση. [62] *Κάθε πράξη που εφοδιάζει την L επεκτείνεται στην L^X. Κάθε νόμος που ισχύει για τις πράξεις της L, ισχύει για τις ίδιες και στην L^X, εφόσον επεκτείνεται κατά σημείο.*

Ως *επέκταση κατά σημείο* εννοούμε τη γνωστή διαδικασία ορισμού μίας πράξης $* : L^X \times L^X \to L^X$ ως $A*B := (A*B)(x) = A(x)*B(x) \quad \forall x \in X$, με $A, B \in L^X$, $A(x), B(x) \in L$.

Αυτή η πρόταση, αν και απλή, ίσως και τετριμμένη σε βαθμό που θα μπορούσε να είναι απλώς μια παρατήρηση, είναι κομβική, γιατί έχει άμεσα σημαντικά αποτελέσματα:

-Βασικές ιδιότητες πράξεων, όπως η προσεταιριστική, η αντιμεταθετική, η απορροφητική, η επιμεριστική και το ουδέτερο επιβεβαιώνεται τετριμμένα[63] πως μεταφέρονται στο L^X. Επομένως *Αν L είναι επιμεριστικό πλέγμα τότε L^X θα είναι επίσης επιμεριστικό πλέγμα.* Οι νόμοι διαγραφής (όπως συνήθως στην άλγεβρα) *δεν* επεκτείνονται κατα σημείο.

-Όλη η συζήτηση που έγινε σε σχέση με τον εκ νέου ορισμό πράξεων δε χρειάζεται να γίνεται κάθε φορά, αρκεί να ορίσουμε $(L, \wedge, \vee, *)$,

$$\wedge : L \times L \to L, (a,b) \mapsto inf(a,b), \quad \vee : L \times L \to L, (a,b) \mapsto sup(a,b) \tag{21}$$

και να μελετήσουμε τις ιδιότητες που προκύπτουν στο L από αυτές τις πράξεις (η ακριβής μορφή του L δεν είναι σημαντική, επιλέγεται ανάλογα με το εκάστοτε πρόβλημα που προσπαθούμε να περιγράψουμε).

[60] σύνολο εφοδιασμένο με προσεταιριστική πράξη

[61] Το οποίο προκύπτει ως δομή από τα αξιώματα του επιμεριστικού πλέγματος.

[62] [5a] $L - FS$

[63] εφαρμογή του κατά σημείο ορισμού της πράξης, και της δεδομένης ιδιότητας για το L

Επομένως αρκεί το L να είναι cdl ή $closg$.[64]

-Δεν χρειάζεται να περιοριζόμαστε στη περίπτωση $L = [0, 1]$, για να ισχύσουν όσα αναφέραμε (τουλάχιστον κατ΄ αναλογία) στην προηγούμενη ενότητα. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κάθε L το οποίο είναι τουλάχιστον πλήρες πλέγμα.

Παρατήρηση. *Όπως έχουμε αναφέρει, πλήρες πλέγμα είναι κάθε poset, όπου κάθε μη κενό υποσύνολό του έχει ελάχιστο άνω φράγμα και μέγιστο κάτω φράγμα (supremum, infimum). Οι πράξεις με τις οποίες εφοδιάζεται δεν είναι απαραίτητο να είναι αυτές οι 2, θα μπορούσαν να ορίζονται και διαφορετικά, αλλά τα ίδια τα προβλήματα στα οποία απαντάμε, και έχουν στο εσωτερικό τους το ερώτημα της διάταξης, οδηγούν σε αυτά, ως τους πιο "φυσικούς" τρόπους να αποκτηθούν φράγματα, όπως αναφέρει και ο Goguen. Το μηδέν 0 και το άπειρο I μπορούν να προστεθούν χωρίς βλάβη της γενικότητας, οριζόμενα ως $0 \vee a = a = a \vee 0$ (δυϊκά $0 \wedge a = 0 = a \wedge 0$) και $I \wedge a = a = a \wedge I$ (δυϊκά $I \vee a = I = a \vee I$). Υπάρχει η σύμβαση $\bigvee \emptyset = 0$, $\bigwedge \emptyset = I$. Η περίληψη των $0, I$ στο L είναι σημαντική καθώς διασφαλίζει πως η crisp περίπτωση περιέχεται πάντα ως υποπερίπτωση της ασαφούς. Η περίπτωση αυτή δίνεται από την $L = \{0, I\}, 0 < I$, η οποία για συντομία ονομάζεται $L = 2$, και αντιστοιχεί στην απλή συνολοθεωρία (κάθε στοιχείο του 2^X ένα μοντέλο του X/χαρακτηρηστικές συναρτήσεις για κάθε υποσύνολό του).*

Ο συμβολισμός $\bigwedge A$, $\bigvee A$, χρησιμοποιείται για το ελάχιστο άνω φράγμα/ μέγιστο κάτω φράγμα σε σύνολα[65] (αφού οι πράξεις αυτές με φυσιολογικό τρόπο επεκτείνονται για περισσότερα -τουλάχιστον πεπερασμένα- στοιχεία).

Η *αρχή του δυϊσμού* υπάρχει και στις προτάσεις των ασαφών συνόλων[66], όπου μία αληθής πρόταση με την εναλλαγή $\wedge, \vee$ και την εναλλαγή $\geq, \leq$ παράγει την (δυϊκή της) αληθή πρόταση.

Σε σχέση με το δομή που επάγεται από τις $\wedge, \vee$: Ως πλέγμα, το L, είναι αντιμεταθετική ημιομάδα για κάθε μία από τις πράξεις. Επομένως ισχύουν ο γενικευμένος αντιμεταθετικός νόμος, και ο γενικευμένος προσεταιριστικός νόμος[67]. Εφόσον μιλάμε για πλήρη πλέγματα ισχύουν αρκετοί γενικευμένοι νόμοι, μέσα στους περιλαμβάνουν και όλες τις γενικεύσεις των ιδιοτήτων πλήν της επιμεριστικής[68]. Αυτοί οι νόμοι περιλαμβάνονται στον παρακάτω γενικευμένο νόμο (που οφείλεται στον $Birkhoff$, ο οποίος τον κατασκεύασε ως συνδυασμό των νόμων αυτών)[69]:

$$\bigvee_i \bigvee_{j \in \Phi_i} \alpha_j = \bigvee_{j \in \Phi} \alpha_j, \quad \Phi = \bigcup_i \Phi_i \tag{22}$$

[64]Οι ορισμοί στη προηγούμενη ενότητα δεν είναι ακριβώς οι κατά σημείο, γιατί γενικεύουν στη περίπτωση που $X \neq Y$ ως σύμπαντα των διαφορετικών $fuzzy\ set$. Αν όλα τα στοιχεία ήταν του L^X για κοινό σύνολο X, τότε και οι ορισμοί των πράξεων στη προηγούμενη ενότητα γίνονται απλώς οι κατά σημείο. Για να μην υπάρχει σύγχηση στους συμβολισμούς, χρησιμοποιούμε μόνο τους $\wedge, \vee$ του L αντί για τους $\cup, \cap$.

[65]και οικογένειες

[66]Προς το παρόν, ως επέκταση της ίδιας αρχής στο L. Το πως ορίζονται οι κατηγορίες θα το δούμε στη συνέχεια.

[67][5a]$L - FS$, ο προσεταιριστικός είναι προϋπόθεση της ημιομάδας

[68][5a]$L - FS$

[69][1] $2nded.$ σ.53

Όπου Φ_i σύνολο δεικτών που αντιστοιχεί στον δείκτη i και a_j οικογένεια στοιχείων του L με δείκτη (/είδους) j. Οι επιλογές του Φ οδηγούν στους επιμέρους γενικευμένους νόμους. Ισχύει και η δυϊκή της.

Ξεχωριστή συνθήκη είναι η ικανοποίηση του *πλήρους επιμεριστικού νόμου* (βλ. προηγούμενη ενότητα), ένα πλήρες πλέγμα που τον ικανοποιεί είναι cdl, και επάγει αυτή τη δομή στα στοιχεία του L^X.

Όσον αφορά την $*$, θέλουμε η L να είναι κλειστή ως προς την πράξη αυτή και *πολλαπλασιαστική*, δηλαδή να ικανοποιούνται οι παρακάτω νόμοι :

$$x * (y \vee z) = (x * y) \vee (x * z), \quad (x \vee y) * z = (x * z) \vee (y * z) \tag{23}$$

Οι νόμοι αυτοί είναι αριστερές και δεξιές εκδοχές επιμεριστικού νόμου, η πράξη όμως δεν είναι απαραίτητα αντιμεταθετική. Η αρχή του δυϊσμού δεν ισχύει, όπως όταν λαμβάνουμε υπ όψιν μόνο τις $\leq, \geq, \wedge, \vee$. Υπάρχουν όμως συμμετρίες, όπως στην περίπτωση του ορισμού, αλλά επίσης και $x \leq z \Rightarrow \begin{cases} z * x \leq z * y \\ x * z \leq y * z \end{cases}$.

Όπως αναφέραμε και παραπάνω, η αναγκαιότητα να ορίσουμε μια πολλαπλασιαστική πράξη προκύπτει για την αποτίμηση των αληθοτιμών του *modus ponens* (σε γενικότερες περιπτώσεις από το $L = [0, 1]$, όπου είναι ο συνήθης πολλαπλασιασμός πραγματικών) και να ορίσουμε τη λογική συνεπαγωγή ($\rightarrow$) με ένα "φυσικό" τρόπο σε σχέση με το *modus ponens*. Σε *crisp* (μία αληθοτιμή είναι 0 ή 1) περιπτώσεις, για τις αληθοτιμές επαληθεύεται $[P] \cdot [P \Rightarrow Q] = [Q]$, με $\cdot$ το γινόμενο. Σε περιπτώσεις που L είναι κάποιο διάστημα στους πραγματικούς θέλουμε, να διασφαλίζουμε πως $[P] \geq [Q]$, καθώς κάθε αποτέλεσμα μιας (σχεδόν ορθής)[70] λογικής συνεπαγωγής είναι "λιγότερο σίγουρο" από την προκείμενή της. Επομένως, ο *Goguen*[71] καταλήγει να ορίζει και την $*$, και την $\rightarrow$ μέσω των σχέσεων $a * (a \rightarrow b) \leq b$ και $a \rightarrow b := \bigvee\{x | a * x \leq b\}$

Τα αιτήματα που προκύπτουν για την $*$ είναι η προσεταιριστικότητα[72], "αριστερή" και "δεξιά" μορφή του γενικού επιμεριστικού νόμου: $a * \bigvee_i(b_i) = \bigvee_i(a * b_i)$ και $(\bigvee_i(b_i)) * a = \bigvee_i(b_i * a)$, για όποιο $a \in L$, και b_i οικογένεια στοιχείων του L, και η ύπαρξη ταυτότητας για την $*$ η οποία θα πρέπει να ταυτίζεται με την απειρία[73] της L, δηλαδή $a * I = a = I * a$, εφόσον $a \vee I = I = I \vee a$, $\forall a \in L$.

Η σχέση της $*$ εξ ορισμού με την $\vee$ εξηγεί επίσης για ποιο λόγο δεν ισχύει η αρχή του δυϊσμού.[74]

---

[70] Μην ξεχνάμε πως μελετάμε *semantics* για *ασαφείς* έννοιες

[71] [5b] *LoIC*

[72] προκύπτει από την $((a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow c)) \rightarrow (a \rightarrow c)$

[73] προκύπτει από την περίπτωση που $[P] \leq [Q]$

[74] Επίσης, αν μπορούμε να πούμε ότι η $*$ επάγει κάποια δομή στην L, αυτό γίνεται μόνο "συνδυαστικά" με την $\vee$.

Όπως είδαμε, ένα πλήρες πλέγμα L που ικανοποιεί τα παραπάνω αιτήματα ως προς την $*$ ($(L,*)$ ημιομάδα, "γενικός επιμεριστικός νόμος", η απειρία της L ως ταυτότητα της $*$), είναι η *διατεταγμένη ως πλήρες πλέγμα ημιομάδα*, $(closg)$. Αν στην $(L, \vee, \wedge)$ θεωρήσουμε την $\wedge$ ως την τυχαία $*$, τότε πράγματι η $\wedge$ είναι προσεταιριστική, και η ταυτότητά της είναι το I. Επειδή η $\wedge$ είναι αντιμεταθετική πράξη, το τελευταίο αίτημα ταυτίζεται με τον γενικό επιμεριστικό νόμο (γι' αυτό και καταχρηστικά ονομάσαμε το αίτημα αυτό "αριστερή" και "δεξιά" μορφή του γενικού επιμεριστικού νόμου). Επομένως, *αν $* = \wedge$, η $closg$ είναι ακριβώς η cdl*. Μάλιστα, αφού η $\wedge$ είναι αντιμεταθετική, η cdl είναι *αντιμεταθετική/commutative closg*, και επειδή η L ως πλέγμα είναι επιμεριστικό, η cdl είναι *επιμεριστική/distributive closg*.

Στη γενική περίπτωση, που δεν θεωρούμε απαραίτητα πως $* = \wedge$, αλλά μόνο πως έχουμε μια $(L, \leq)$ δομή (πλέγμα) και μία $(L,*)$ δομή (ημιομάδα), αν ως προς το πλέγμα είναι cdl και ως προς την $*$ είναι $closg$[75], τότε L είναι *πλήρως επιμεριστική closg*. Αυτή είναι και η πιο πολύπλοκη δομή που μπορούμε να μελετήσουμε σε αυτό το πλαίσιο.

Η $*$ και οι ιδιότητες που μελετήσαμε επιβεβαιώνεται πως επεκτείνονται στην L^X κατά σημείο.

4.2.2 Μορφισμοί

Ορισμός. *Έστω L_1, L_2 πλήρη πλέγματα. Η απεικόνιση $\ell : L_1 \to L_2$ είναι* ομομορφισμός για πλήρη πλέγματα *εφόσον σέβεται τα ελάχιστα άνω φράγματα/μέγιστα κάτω φράγματα, δηλαδή εφόσον $\ell(\bigvee_i a_i) = \bigvee_i(\ell a_i)$ και δυϊκά $\ell(\bigwedge_i a_i) = \bigwedge_i(\ell a_i)$ για κάθε οικογένεια a_i στο L_1.*

Ορισμός. *Έστω L_1, L_2 closg. Η απεικόνιση $\ell : L_1 \to L_2$ είναι closg-* ομομορφισμός *εφόσον σέβεται*[76] *τις πράξεις $\bigvee, \bigwedge, *$*

Σημείωση: Για να αποδείξουμε ότι η L_2 είναι $closg$ αποδυκνείουμε ότι συνεχίζουν να ισχύουν οι δύο "επιμεριστικοί" νόμοι:

$\ell a * \bigvee_i \ell(b_i) = \ell a * \ell \bigvee_i(b_i) = \ell(a * \bigvee_i(b_i)) = \ell(\bigvee_i(a * b_i)) = \bigvee_i \ell(a * b_i) = \bigvee_i(\ell a * \ell b_i)$

Όπου η 3η ισότητα είναι ο ίδιος νόμος στην L_1 και οι υπόλοιπες από τον ορισμό του $closg$-ομομορφισμού. Όμοια και για τον "δεξιό".

Οι αντίστοιχες κατηγορίες συγκροτούνται με την απλή σύνθεση ($\ell_2 \circ \ell_1(x) = \ell_2(\ell_1(x))$), με ταυτότητα την ταυτοτική απεικόνιση για το κάθε πλέγμα.

4.3 Ασαφοποίηση και Ασαφείς Κατηγορίες

Τελικά μπορούμε να περιγράψουμε τη διαδικασία της "Ασαφοποίησης" (μετάφραση του $Fuzzification$), ως αρχή για την κατασκευή μοντέλων ασαφών προβλημάτων,

[75] Δηλαδή, πλήρες πλέγμα, ημιομάδα ως προς την $*$ με ταυτότητα την απειρία του πλέγματος, ικανοποιεί τον πλήρη επιμεριστικό νόμο ως πλέγμα $-\vee, \wedge-$ και ικανοποιεί τους αντίστοιχους "επιμεριστικούς νόμους" ως ημιομάδα $-\vee, *$

[76] $\ell(\bigvee_i a_i) = \bigvee_i(\ell a_i)$, $\ell(\bigwedge_i a_i) = \bigwedge_i(\ell a_i)$, $\ell(a * b) = \ell a * \ell b$

όποιο και να είναι το αντίστοιχο *crisp* αντικείμενο το οποίο εμπλουτίζουμε με την ασαφή δομή, με ένα τρόπο που δε θα εξαρτάται από το αντικείμενο αυτό, και τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά και περιορισμούς του. Επομένως χωρίς να χρειάζεται να κατασκευάσουμε ειδικές θεωριες κάθε φορά, όπως κάναμε για τα σύνολα. Επίσης το παραπάνω θα θέλαμε να το γενικεύσουμε σε αντικείμενα-κατηγορίες, δηλαδή σε ολόκληρες θεωρίες (ή τουλάχιστον στη θεωρία συνόλων).

Η αρχή είναι ότι μια απεικόνιση $A : X \to L$, δηλαδή ένα στοιχείο της L^X για κάποιο "αντικείμενο" X και το πλέγμα L που επιλέγουμε, είναι ένα *ασαφές "αντικείμενο"*. Όπως λέει χαρακτηριστικά ο *Goguen* "Ένα ασαφές (ή $L-$, ή $L-$ασαφές) "κάτι" είναι το ασαφές σύνολο πάνω σε αυτό το "κάτι"".

Παρακάτω ένας πίνακας με διάφορες ορολογίες και τα αντίστοιχα στοιχεία στα οποία αναφέρεται:

ορολογία	αντικείμενο της:
L-ασαφές σύνολο στο X (ή L-σύνολο στο X)	L^X
L-ασαφές L-σύνολο στο X	L^{L^X}
L-ασαφής σχέση μεταξύ X και Y (ή L-σχέση μεταξύ X και Y)	L^{XY}
L-ασαφής L-σχέση μεταξύ X και Y	$L^{L^{XY}}$
L-ασαφής απεικόνιση από το X στο Y (ή L-απεικόνιση από το X στο Y)	L^{Y^X}

Η παραπάνω μέθοδος δεν είναι αυστηρή -ο ίδιος ο *Goguen* περιγράφει τη μέθοδο ως μάλλον ευρετική (*heuristic*) παρά αυστηρή. Επομένως θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα πλαίσιο που, μέχρι ενός σημείου, να διασφαλίζει την ορθότητα αυτής της διαδικασίας, έξω από την εκάστοτε συγκεκριμένη θεωρία (δηλαδή σε ένα γενικότερο πλαίσιο, το οποίο θα περιέχει τη θεωρία ως αντικείμενο). Η λύση βρίσκεται στην ασαφοποίηση των κατηγοριών. Αν ως τώρα μελετήθηκε η ασαφοποίηση αντικειμένων της θεωρίας συνόλων, στη γλώσσα της θεωρίας κατηγοριών θα λέγαμε πως κατασκευάστηκε μία διαδικασία για αντικείμενα της κατηγορίας **Set** (προσοχή, όχι για την **Set** ως κατηγορία). Πρώτον, θα θέλαμε να κατασκευάσουμε μια πλήρη διαδικασία για την ασαφοποίηση της ίδιας της κατηγορίας **Set**. Δεύτερον, η **Set**, ως αντικείμενο της **Cat**, λειτουργεί για την **Cat** όπως ένα σύνολο για την **Set**. Δηλαδή μια ασαφοποίησή της θα παίξει τον ίδιο ρόλο για την **Cat** όπως η προηγούμενη διαδικασία για την **Set**. Τρίτον, αν μπορεί το ίδιο να γίνει για την **Cat**, με έναν τρόπο που να συμφωνεί με την αρχή του *Fuzzification*, τότε ισχύει αυτόματα για μαθηματικά αντικείμενα, ακόμη και ολόκληρες μαθηματικές θεωρίες, εφόσον αυτές αποτελούν κατηγορίες, αντικείμενα της **Cat**. Οπότε, αν το *Fuzzification* δεν είναι μια αυστηρά ορισμένη διαδικασία, παρά μια χαλαρά διατυπωμένη κατεύθυνση, μπορεί να διορθωθεί εφόσον κατασκευάσουμε τις *L-ασαφείς κατηγορίες* (ή L-κατηγορίες, ή ασαφείς κατηγορίες). Αλλά δε θα φτάσουμε εκεί στα πλαίσια αυτής της εργασίας, αυτό που θα κάνουμε όμως είναι η πλήρης ασαφοποίηση της **Set**, που θα καλύψει εν μέρει και το δεύτερο αίτημα και θα περιγράψουμε τη γενική διαδικασία για κάθε κατηγορία-αντικείμενο της **Cat**.

Έστω κατηγορία $\mathcal{C}$. Αρχικά θα διατηρήσουμε τα αντικείμενά της *crisp* και θα επισυνάψουμε ασαφή δομή στα βέλη της. Με αυτόν τον τρόπο θα οριστεί η $L^{\mathcal{C}}$, η οποία, θα δείξουμε μέσω της κατασκευής της πως είναι επίσης κατηγορία.

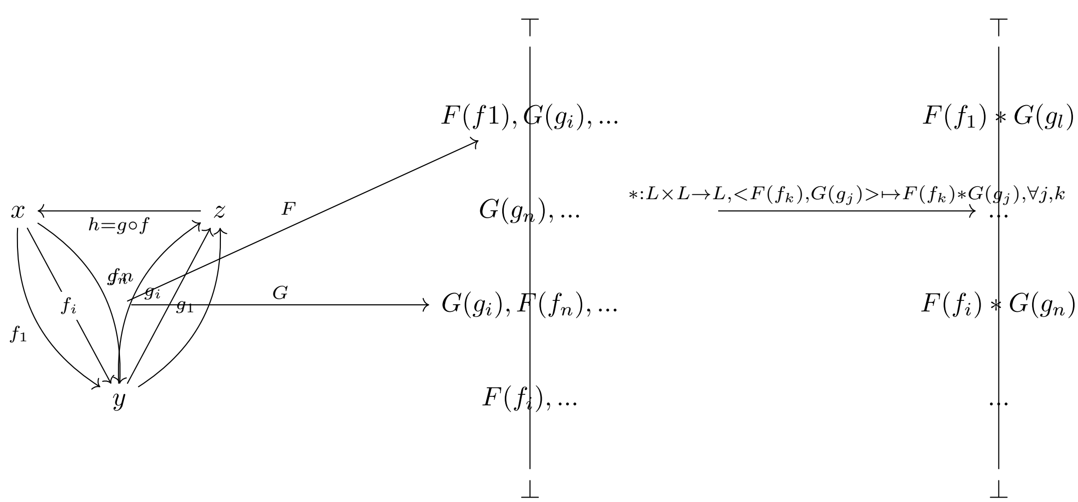
Ορισμός. *L-ασαφής μορφισμός μεταξύ αντικειμένων x, y στη κατηγορία $\mathcal{C}$, ονομάζεται ένα ασαφές σύνολο μορφισμών $x \to y$, δηλαδή ένα στοιχείο της $L^{hom_{\mathcal{C}}(x,y)}$.*

Επομένως, οι L-ασαφείς μορφισμοί ορίζονται πάνω στα $hom - set$ (όχι στα μεμονωμένα βέλη).

Ορισμός. *Έστω x, y, z αντικείμενα της $\mathcal{C}$. Έστω μορφισμοί της $\mathcal{C}$, $f : x \to y$, $g : y \to z$, $< f, g >$ συνθέσιμο ζεύγος, με $g \circ f = h : x \to z$. Για L-ασαφείς μορφισμούς $F \in L^{Hom_{\mathcal{C}}(x,y)}$, $G \in L^{Hom_{\mathcal{C}}(y,z)}$, η σύνθεσή[77] τους ορίζεται ως*

$$(G \circ F)(h) := \bigvee_{f,g} \{G(g) * F(f) | f \in hom(x, y), \quad g \in hom(y, z), \quad h = g \circ f\} \quad (24)$$

Για να εξηγήσουμε την σύνθεση μεταξύ 2 L-ασαφών μορφισμών (εδώ των F, G), θα θεωρήσουμε το αποτέλεσμα της σύνθεσης (εδώ $G \circ F$) έναν L-ασαφή μορφισμό στο $hom - set$ το οποίο προκύπτει από τη σύνθεση στα βέλη των $hom - set$ πάνω στα οποία ορίζονται τα συντειθέμενα μέρη (αφού F, G ορίζονται πάνω στα $hom(x, y)$, $hom(y, z)$ αντίστοιχα, το $G \circ F$ ορίζεται πάνω στο $hom(x, z)$). Θα ορίσουμε την σύνθεση κατά σημείο (δηλαδή για κάθε $h \in hom(x, z)$). Από όλα τα συνθέσιμα ζεύγη $< f, g >$ με $g \circ f = h$ παίρνουμε τις τιμες $\{G(g) * F(f)\}$, το ελάχιστο άνω φράγμα των οποίων είναι η τιμή της σύνθεσης στο h. Η τιμή που παίρνει η σύνθεση αποτελεί ταυτόχρονα επιλογή του "καλύτερου" συνθέσιμου ζεύγους πίσω στα $hom - set$, δηλαδή αυτού του οποίου η $G * F$-εικόνα στο L είναι η μεγαλύτερη.[78]



Στο παραπάνω παράδειγμα, $(G \circ F)(h) = F(f_1) * G(g_l)$.[79]

[77] Στη περίπτωση που $* = \bigwedge$ ορίζεται και δυϊκή σύνθεση

[78] Εφόσον αυτό υπάρχει, ειδάλλως του "ιδανικού".

[79] Στην παραπάνω εικόνα έχουμε φτιάξει ένα παράδειγμα που αποτελεί ένα σχηματικό για ευκολότερη κατανόηση τη διαδικασίας. Πέρα από το αριστερό μέρος του, δεν είναι διάγραμμα (στο πνεύμα της Θ.Κατηγοριών). Επίσης η L εμφανίζεται δύο φορές για να δείξει τον ομομορφισμό $*$. Η L απεικονίζεται ως απλή διάταξη μόνο για λόγους απλότητας.

Η σύνθεση είναι προσεταιριστική (προκύπτει άμεσα από τον ορισμό της σύνθεσης, και την επιμεριστικότητα της $*$ στην $\bigvee$).

Η ταυτότητα της σύνθεσης ορίζεται σε κάθε αντικείμενο της κατηγορίας. Πρέπει, εφόσον $F \in L^{Hom_{\mathcal{C}}(x,y)}$, να ισχύει $1_y \circ F = F = F \circ 1_x$. Επομένως, από τον ορισμό της $*$ πρέπει να παίρνει την τιμή I όπου το όρισμα της 1_x είναι ο ταυτοτικός μορφισμός, και τη τιμή 0 σε όλα τα υπόλοιπα στοιχεία του $hom(x)$.

Τα όρια αυτής της προσέγγισης είναι εμφανή. Αρχικά, διατηρεί τα αντικείμενα $crisp$ το οποίο είναι από μόνο του σοβαρός περιορισμός. Δεύτερον, τα βέλη όπως είναι ορισμένα είναι μακριά από τον κλασσικό ορισμό της κατηγορίας, $(domain, codomain$ είναι αντικείμενα της κατηγορίας), δηλαδή υπάρχει μια απόσταση μεταξύ αντικειμένων και μορφισμών. Θυμίζει πιο πολύ κάτι που θα ταίριαζε στα $homset$ ως αντικείμενα, κάτι που ενώ υπερβαίνεται εύκολα σε μια $arrow-only$ προσέγγιση, για να είμαστε ορθοί, μειώνει τις δυνατότητές μας αποκόπτωντας τα αντικείμενα, που έχουν τη σημασία τους στα πραγματικά προβλήματα και εφαρμογές.

Στη προσπάθεια να υπερβούμε αυτά τα ζητήματα, θα στραφούμε στη μελέτη των διμελών σχέσεων, ένα συχνό εργαλείο στη βιβλιογραφία όταν αντιμετωπίζουμε προβλήματα που επιλύονται με γενίκευση. Εκεί θα δούμε κάθε L-σύνολο ως ειδική περίπτωση διμελούς σχέσης, και θα μπορέσουμε να εντάξουμε ομαλά όσα κατασκευάσαμε ως τώρα (μέσω ισομορφισμών) σε ένα ευρύτερο πλαίσιο στο οποίο θα είναι δυνατοί πιο αραγείς ορισμοί κατηγοριών, μέσα από τα εργαλεία που δίνει η **Rel**.

Ορισμός. *Έστω R στοιχείο της L^{XY}. Δηλαδή μία L-σχέση από το X στο Y. Το σύνολο αυτών των σχέσεων συμβολίζεται ως $R(X,Y;L)$. Θα ορίσουμε τη σύνθεση μεταξύ L-σχέσεων ως εξής: έστω S, R L-σχέσεις από το $X \to Y$ και $Y \to Z$ αντίστοιχα, τότε η σύνθεση $R \circ S$ ορίζεται κατα σημείο ως:*

$$(R \circ S)(x,z) = \bigvee_{y \in Y} \{S(x,y) * R(y,z)\} \tag{25}$$

Η σύνθεση είναι προσεταιριστική (προκύπτει άμεσα από τον ορισμό της σύνθεσης, και την επιμεριστικότητα της $*$ στην $\bigvee$). Η ταυτότητα της σύνθεσης είναι η $crisp$ ταυτοτική σχέση του X, που ονομάζεται E_X: για $x, x' \in X$, $E_X(x,x') = \begin{cases} I, & x' = x \\ 0, & x' \neq x \end{cases}$. Δηλαδή για R, μια L-σχέση από το X στο Y, ισχύει $R \circ E_X = R = E_Y \circ R$.

Η παραπάνω διαδικασία συνεπάγεται πως:

Θεώρημα. *Η $R(L)$, με αντικείμενα σύνολα, και μορφισμούς L-σχέσεις (δηλ $hom(X,Y) = R(X,Y;L)$) είναι κατηγορία, με την παραπάνω σύνθεση.*

Επίσης αν $* = \bigwedge$ τότε και η δυϊκή σύνθεση ορίζει κατηγορία. Επίσης, μπορούμε να ορίσουμε τα παρακάτω:

Ορισμός. $R \in L^{XY}$ *ονομάζεται συναρτησιακή εφόσον* $\forall x \in X, \quad \exists ! y \in Y$ *ώστε* $R(x,y) > 0$.

Συνάρτηση ονομάζεται η crisp συναρτησιακή σχέση.

Ανάστροφη σχέση μιας $R \in R(X,Y;L)$ *είναι η* $R^c \in R(Y,X;L)$, *η τιμή της οποίας δίνεται από τον τελεστή* $\_^c : (\_,\_) \to (\_,\_)$, $(x,y) \mapsto (y,x)$.

Αντίστροφη σχέση μιας $R \in R(X,Y;L)$ *είναι η* $R^{-1} \in R(Y,X;L)$, *η οποία, όταν υπάρχει, ορίζεται από τη συνθήκη* $R \circ R^{-1} = E_Y$, $R^{-1} \circ R = E_X$.

Παρατηρούμε ότι η συναρτησιακή σχέση είναι γενίκευση της συνάρτησης. Εφόσον στη κλασσική θεωρία συνάρτηση είναι η σχέση που το κάθε x του πεδίου ορισμού, δίνει μοναδικό y του συνόλου τιμών μέσω της συνάρτησης, έτσι, στη συναρτησιακή σχέση, κάθε x έχει μοναδικό y για το οποίο δίνει μη-μηδενική ασαφή τιμή (δηλαδή μοναδικό y όπου η πρόταση $f(x) = y$ δεν είναι τελείως ψευδής/ είναι τουλάχιστον μερικώς αληθής). Όταν η ασαφής τιμή είναι I, τότε έχουμε την κλασσική περίπτωση $f(x) = y$ αληθής.

Η *σχέση της σύνθεσης με τις πράξεις του πλέγματος* καθορίζονται από κάποιες ιδιότητες[80]: Μία μηδενική σχέση, η οποία συμβολίζεται 0, δηλαδή μια σχέση αποτιμάει όλα τα ζεύγη στη τιμή $0(x,y) = 0$ είναι απορροφητικό στοιχείο για τη σύνθεση ($R \circ 0 = 0 = 0 \circ R$). Η σύνθεση σέβεται τη διάταξη ($R \leq S \Rightarrow R \circ A \leq S \circ A$, και αντίστοιχα από τα αριστερά). Η επιμεριστική ιδιότητα ισχύει για την $\bigvee$, ($R \circ \bigvee_i (S_i) = \bigvee_i (R \circ S_i)$), και η αντίστοιχη από τα δεξιά), και, εφόσον $* = \bigwedge$, υπάρχει αντίστοιχη ανισότητα για την $\bigwedge$, ($R \circ \bigwedge_i (S_i) \leq \bigwedge_i (R \circ S_i)$, και η αντίστοιχη από τα δεξιά).[81]

Η *σχέση του ανάστροφου με τη σύνθεση και τις πράξεις του πλέγματος* καθορίζεται παρακάτω:

Με τη σύνθεση: $(R \circ S)^c = R^c \circ S^c$

Με τις πράξεις του πλέγματος: $(\bigvee_i R_i)^c = \bigvee_i (R_i^c)$ (δυϊκά για $\bigwedge$)

Με τον εαυτό του: $(R^c)^c = R$

Οι L-ασαφείς L-σχέσεις μεταξύ X, Y, τα στοιχεία δηλαδή της $L^{XY} \to L$, θα τα συμβολίζουμε με αντίστοιχα γράμματα, αλλά καλλιγραφικό συμβολισμό[82] (δηλαδή $\mathcal{R}$). Το σύνολο των L-ασαφών L-σχέσεων από το X στο Y γράφεται $\mathcal{R}(X,Y;L)$. Από τη διαδικασία της ασαφοποίησης μπορούμε να κατασκευάσουμε την κατηγορία $L^{\mathcal{R}(L)}$, της οποίας τα αντικείμενα είναι σύνολα και τα $hom - set$ $\mathcal{R}(\_,\_;L)$. Η σύνθεση ορίζεται κατα σημείο μέσω της διαδικασίας ασαφοποίησης ως:

$$(\mathcal{R} \circ \mathcal{S})(T) = \bigvee_{R,S} \{\mathcal{R}(R) * \mathcal{S}(S) | R \circ \ S = T\} \tag{26}$$

---

[80] Απόδειξη [5a] $L - FS$ σ.19

[81] Η απόδειξη κάνει χρήση του ορισμού της σύνθεσης και της επιμεριστικής $\bigvee, *$ και $\bigwedge, *$ αντίστοιχα. Στην περίπτωση που $* = \bigwedge$ χρησιμοποιείται και η ανισότητα $minimax$, η οποία ισχύει για πλέγματα γενικά, και για άπειρα σύνολα δεικτών σε πλήρη πλέγματα, και δίνει τον $\leq$ αντί για $=$.

[82] αντίστοιχο με αυτό των κατηγοριών, όπου όμως χρησιμοποιούνται διαφορετικά γράμματα - $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ για τις κατηγορίες, $\mathcal{R}, \mathcal{S}, \mathcal{T}$ για τις L-ασαφείς L-σχέσεις

Ή ως επέκταση του προηγούμενου ορισμού, η οποία έχει νόημα εφόσον είναι και η ίδια L-σύνολο, άρα κληρονομέι την αλγεβρική δομή του L. Η κατηγορία $Poset$ όπου το βέλος $x \to y$ αντιστοιχεί στο $x \leq y$ είναι παράδειγμα για το πώς μπορεί να λειτουργεί)

$$(\mathcal{R} \circ \mathcal{S})(T) = \bigvee_{R,S} \{\mathcal{R}(R) * \mathcal{S}(S) | R \circ \ S \leq T\} \tag{27}$$

Ταυτότητες της σύνθεσης για κάθε αντικείμενο X οι $(E_X)^+$, που θα συμβολίζονται ως $\mathcal{E}_X$.

Έτσι η $L^{R(L)}$ είναι πράγματι κατηγορία και συμβολίζεται $\mathcal{R}(L)$.

Και με τους 2 οριμούς της σύνθεσης, οι ορισμοί[83] και οι ιδιότητες που αναφέραμε για την $R(L)$ ισχύουν και στην $\mathcal{R}(L)$.

Όσον αφορά την ύπαρξη αντιστρόφων, επιβεβαιώνεται[84] η διαισθητική παρατήρηση πως μία σχέση που αντιστρέφεται είναι τουλάχιστον κοντά σε *crisp*. Συγκεκριμένα, εάν η $*$ δεν έχει διαιρέτες του 0 τότε οι αντίστρέψιμες σχέσεις του $R(L)$ είναι οι (*crisp*) ισομορφισμού συνόλων. Στην $\mathcal{R}(L)$ οι αντιστρέψιμες L-ασαφείς L-σχέσεις είναι της μορφής R^+, όπου R είναι αντιστρέψιμη L-σχέση[85]. Και στις 2 περιπτώσεις η αντίστροφη ταυτίζεται με την ανάστροφη.

Ενδιαφέρον αποτέλεσμα προκύπτει αν μελετήσουμε τα $R(X;L)$ και $\mathcal{R}(X;L)$[86], όπου αν συνδιάσουμε τη σχέση της σύνθεσης με τις πράξεις του πλέγματος, με τον ισχυρισμό ότι είναι ημιομάδες με ταυτότητα ως προς τη σύνθεση καταλήγουμε ότι και οι δύο είναι *closg με μηδεν και άπειρο ως προς τη σύνθεση*.

Η απόδειξη του ισχυρισμού προκύπτει από τη θεωρία κατηγοριών, όπου ορίζουμε το $End(X)$ σύνολο των *ενδομορφισμών* (δηλαδή των βελών $X \to X$). Η σύνθεση είναι προσεταιριστική και έχει ταυτότητα την 1_X που ανήκει στο $End(X)$, από τον ορισμό της κατηγορίας. Επομένως οι $R(X;L)$, $\mathcal{R}(X;L)$ είναι *closg* ως προς την $*$ (κληρονομούμενο από την L), αλλά και ως προς τη σύνθεση.

4.3.1 Ασαφοποίηση της Set

Η κατασκευή κατηγοριών ασαφών σχέσεων θα μας επιτρέψει την πλήρη ασαφοποίηση της **Set**, ειδωμένη ως αντικείμενο της **Cat**, καθώς θα άρει τα εμπόδια που βρήκαμε στην ατελή ασαφοποίησή μιας κατηγορίας (μόνο ως προς μορφισμούς) πριν. Θα μιλάμε πλέον και για ασαφή αντικείμενα, και για ασαφεις μορφισμούς. Για να γίνει αυτό θα θεωρήσουμε το L^X ως ειδική περίπτωση L^{XY}.

[83] Στην περίπτωση της συναρτησιακής L-ασαφούς L-σχέσης, ο ορισμός είναι γενίκευση του αρχικού ως η σχέση που είναι μη-μηδενική μόνο όταν παίρνει όρισμα σναρτησιακές L-σχέσεις.

[84] [5a] $L - FS$

[85] Στον δεύτερο ορισμό σύνθεσης δεν υπάρχουν τέτοιες σχέσεις

[86] Συμβολισμοί για τα $R(X,X;L)$ και $\mathcal{R}(X,X;L)$

Έστω $X \times Y$ και $X = \{\alpha\}$ μονοσύνολο. Τότε προφανώς $X \times Y \cong Y$, αφού $(\alpha, y) \mapsto y$, $y \mapsto (\alpha, y)$ είναι $1-1$. Με το ίδιο σκεπτικό ένα L-σύνολο $A : Y \to L$ είναι ταυτόχρονα L-σχέση από το α στο Y, απλώς αναθέτοντας $A(\alpha, y) := A(y)$ και αντίστροφα κάθε L-σχέση από ένα μονοσύνολο στο Y είναι L-σύνολο στο Y. Έτσι καταλήγουμε στο $L^{aY} \cong L^{Y}$, και με αντίστοιχο τρόπο στο $L^{Xb} \cong L^{X}$, άρα και στο $L^{ab} \cong L$.

Το παραπάνω αποτέλεσμα επιτρέπει τη σύνθεση L-σύνολων και L-σχέσεων, αφού τα L-σύνολα είναι (ισομορφικά με) L-σχέσεις. Επομένως αίρει τα προβλήματα που εμφανίζονταν στα αντικείμενα της $L^{\mathcal{C}}$. Αν $A \in R(\alpha, X; L)$ δηλαδή $A : X \to L$ και $R \in R(X, Y : L)$ τότε ορίζεται σύνθεση $R \circ A \in R(\alpha, Y : L)$, άρα $R \circ A : Y \to L$. Επομένως κατασκευάσαμε ένα βέλος μεταξύ L-συνόλων. Επίσης μπορούμε να ορίσουμε την $(R \circ S)(A) := R(S(A))$ (άμεσα από την προσεταιριστικότητα της σύνθεσης L-σχέσεων.

Από την άποψη της ασάφειας, η L-σχέση είναι ένα σύστημα στην οποία δίνουμε ένα *input* (το L-σύνολο) και το L-σύνολο $R(A) := R \circ A$ είναι το ασαφές *output* (ονομάζεται *εικόνα του A υπό την R, ή R-εικόνα του A*). Από μεριάς κατηγοριών, κάθε βέλος $X \to Y$, πλέον ορίζεται πάνω στα $X \to L$, $Y \to L$ (έχουμε ασαφοποιήσει και τα αντικείμενα), και έτσι το πρόβλημα του ορισμού της $L^{\mathcal{C}}$ αίρεται.

Πλέον μπορούμε να ορίσουμε την κατηγορία $\mathbf{S}(L)$ ως L-ασαφή $\mathbf{Set}$, την κατηγορία των L-συνόλων και L-σχέσεων. Έχει αντικείμενα L-σύνολα $A : \_ \to L$ (με $\_$ τη θέση του αντίστοιχου αντικειμένου της $\mathbf{Set}$), μορφισμούς μεταξύ αντικειμένων A, B τις τριάδες (A, B, R), όπου R είναι L-σχέση από το $\mathbf{Set}$-αντικείμενο του A στο $\mathbf{Set}$-αντικείμενο του B, τέτοια ώστε $R(A) \leq B$. Όσον αφορά τη σύνθεση, $(A, B, R), (B, C, S)$ είναι συνθέσιμο ζεύγος, εφόσον τα $\mathbf{Set}$-αντικείμενα των A, B, C έχουν αντίστοιχα συνθέσιμα ζεύγη βελών, και η σύνθεση ορίζεται ως $(B, C, S) \circ (A, B, R) := (A, C, S \circ R)$, και ανήκει στο $Hom_{\mathbf{S}(L)}(A, C)$ από την προσεταιριστικότητα της σύνθεσης L-σχέσεων. Από αυτή προκύπτει και η προσεταιριστικότητα της σύνθεσης. Η $(A, A, 1_X)$, είναι η ταυτότητα του $A : X \to L$ (και στα αριστερά και στα δεξιά, αφού είναι στοιχείο της $L^{\alpha X}$ ή της $L^{X\alpha}$), και ανήκει στο $Hom_{\mathbf{S}(L)}(A, A)$. Αν περιοριστούν οι μορφισμοί στις συναρτησιακές σχέσεις προκύπτει η υποκατηγορία $\mathbf{F}(L)$.

Με τον ίδιο τρόπο έχουμε και αντίστοιχες κατηγορίες L-ασαφών L-συνόλων και L-ασαφών L-σχέσεων ($\mathcal{S}(L)$) και L-ασαφών L-συνόλων και συναρτησιακών L-ασαφών L-σχέσεων ($\mathcal{F}(L)$).

Έτσι, καταλήγουμε στη πλήρη ασαφοποίηση της $\mathbf{Set}$, η οποία λειτουργεί ως 1)επισύναψη ασαφούς δομής σε μια ολόκληρη θεωρία (συνολοθεωρία), 2)απόδειξη ότι υπάρχουν κατηγορίες που μπορούν να ασαφοποιηθούν, 3)(ως αντικείμενο της $\mathbf{Cat}$ πρότυπο για την ασαφοποίηση άλλων θεωριών. Επομένως βγαίνει και το συμπέρασμα ότι αν θέλαμε, για παράδειγμα, να επισυνάψουμε ασαφ΄γ δομή σε μια ομάδα G, δε θα χρειαζόταν να λάβουμε υπ όψιν τα ειδικά της χαρακτηρηστικά, αλλά θα επαρκούσε να εξειδικεύσουμε την αφηρημένη δομή της $L^{\mathcal{C}}$ στην $\mathbf{Grp}$, και να κατασκευάσουμε την $\mathbf{Grp}(L)$.

5 Αφηρημένη Θεωρία Μοντέλων

5.1 Θεσμοί

Ο σκοπός της ανάπτυξης της θεωρίας των θεσμών (*institutions*) από τους *Burstall* και *Goguen*[87] ήταν η προσπάθεια περιγραφής με έναν ενιαίο τρόπο των όλο και πολλαπλασιαζόμενων συστημάτων λογικής[88]. Το κάθε λογικό σύστημα έχει τις δικές του ιδιαιτερότητες και χαρακτηριστικά. Ο θεσμός είναι μια αφαιρετική κατασκευή που τυποποιεί αυτό που αποκαλούμε λογικό σύστημα. Θέλουμε η αφαιρετική κατασκευή και τα γενικά αποτελέσματα τα οποία θα προκύπτουν για αυτή να είναι ανεξάρτητα από το υποκείμενο λογικό σύστημα, και αναλλοίωτα υπό αλλαγή λογικού συστήματος. Αυτό αντανακλά τη βασική θέση πως "*Η αλήθεια είναι αναλλοίωτη υπό αλλαγή συμβολισμού*"[89].

1. Ορίζουμε την κατηγορία **Sign**, την *κατηγορία υπογραφών*. Τα αντικείμενά της είναι S-*πολυειδείς συμβολογραφές* (συμβ. Σ), τις οποίες ονομάζουμε[90] *υπογραφές*. Η υπογραφή είναι το αντικείμενο που καθορίζει τα μη-λογικά σύμβολα και τους τελεστές πάνω σε αυτά, είναι "το λεξιλόγιο που χρησιμοποιούμε για να κατασκευάσουμε προτάσεις σε ένα λογικό σύστημα"[91]. Τα *semantics*, η ικανοποίηση, και λοιπές έννοιες της λογικής, υπάρχουν στο πλαίσιο των υπογραφών.

Μία υπογραφή πάνω σε ένα σύνολο τύπων S, είναι -τουλάχιστον- μια πολυειδής $S \times S^*$-οικογένεια συνόλων, δηλαδή μια οικογένεια συνόλων με ένα σύνολο-μέλος για κάθε ζεγάρι μιας πεπερασμένης λίστας ειδών και ενός είδους: $\{\Sigma_{<w,s>} | w \in S^*, s \in S\}$. Συνήθως τα στοιχεία ενός $\Sigma_{<w,s>}$ είναι συναρτησιακά σύμβολα, από την $n-$άδα $s_1 s_2 ... s_n$(αν υποθέσουμε ότι n το μήκος του w) στο είδος s. Αν $w = \emptyset$, το αντίστοιχο Σ είναι σύνολο σταθερών.

Το πώς ορίζουμε τις υπογραφές διαφέρει ανάλογα με τις προδιαγραφές κάθε λογικής, συνήθως αρκεί ένα ζεύγος $< S, S \times S^* >$ ή μία τριάδα $< S, S \times S^*, S^* >$, όπου το τελευταίο είναι μια πολυειδής οικογένεια σχεσιακών συμβόλων.

2. Συναρτητής $Sen : \mathbf{Sign} \to \mathbf{Set}$. Για κάθε υπογραφή της **Sign** δίνει το σύνολο *προτάσεων πάνω σε αυτή την υπογραφή* (ως αντικείμενο της **Set**) και για κάθε μορφισμό υπογραφών $\phi : \Sigma \to \Sigma'$ δίνει ένα μορφισμό συνόλων προτάσεων $Sen(\phi) : Sen(\Sigma) \to Sen(\Sigma')$. Ο συναρτητής αυτός δηλαδή, από "ορθογραφίες" και "γραμματικές" παράγει προτάσεις, είναι ο χώρος που υπάρχει το συντακτικό. Κάθε ζεύγος $(\mathbf{Sign}, Sen)$ που στη 2η θέση έχει συναρτητή $\mathbf{Sign} \to \mathbf{Set}$ θα το ονομάζουμε *συντακτικό λογικής*.

3. Συναρτητής[92] $\mathbf{Mod} : \mathbf{Sign} \to \mathbf{Cat^{op}}$. Για κάθε υπογραφή Σ δίνει μία κατηγορία $Mod(\Sigma)$, της οποίας τα αντικείμενα ονομάζονται Σ-*Μοντέλα*, και οι μορφισμοί είναι μορφισμοί μοντλεων της Σ. Η κατάσταση μπορεί να απλοποιηθεί αν ορίσουμε έναν πιο απλό συναρτητή $\mathbf{Mod} : \mathbf{Sign} \to \mathbf{Set^{op}}$, όπου η $Mod(\Sigma)$ δίνει απλώς τη

[87] [4]
[88] [4]
[89] [4] σ.7 (στον τόμο σ.101)
[90] Με σκοπό την συμφωνία με τη διεθνή βιβλιογραφία. Επίσης υπάρχει η μετάφραση *οπλισμός*
[91] [4], σ.2 (στον τόμο σ.96)
[92] Συναλλοίωτος του $\mathbf{Mod} : \mathbf{Sign} \to \mathbf{Cat}$, σε τμήματα της βιβλιογραφίας (βλ.*whatisalogic*) επιλλέγεται η εναλλακτική γραφή, $\mathbf{Mod} : \mathbf{Sign^{op}} \to \mathbf{Cat}$ η οποία δεν έχει ουσιαστική διαφορά.

συλλογή των μοντέλων της υπογραφής[93]. Ο συναρτητής **Mod** είναι ο χώρος που υπάρχουν τα *semantics*.
4. Για κάθε υπογραφή Σ ορίζουμε μια σχέση η οποία ονομάζεται Σ-*ικανοποίηση*, και συμβολίζεται $\models_{\Sigma}$. Η σχέση ορίζεται ως $\models_{\Sigma} \subseteq |\mathbf{Mod(\Sigma)}| \times Sen(\Sigma)$, δηλαδή ως διμελής σχέση μεταξύ των μοντέλων της υπογραφής[94] και των προτάσεών της. Οι σχέσεις Σ-ικανοποίηση πρέπει να είναι ορισμένες έτσι ώστε για κάθε μορφισμό υπογραφών $\phi : \Sigma \to \Sigma'$ πρέπει να ισχύει η *συνθήκη ικανοποίησης*:

$$m' \models_{\Sigma'} Sen(\phi(e)) \quad \alpha\nu - \nu \quad Mod(\phi(m')) \models_{\Sigma} e \tag{28}$$

για κάθε m' μοντέλο της Σ' και για κάθε e πρόταση της Σ.

Πιο απλοποιημένη μορφή της συνθήκης ικανοποίησης (εφόσον δεν προκύπτει σύγχηση) είναι η:

$$m' \models \phi e \quad \alpha\nu - \nu \quad \phi m' \models e \tag{29}$$

Η σχέση ικανοποίησης $\models$, αν μπορούμε καταχρηστικά να μιλήσουμε για κάτι τέτοιο[95], είναι η γενίκευση/αφαίρεση των αντίστοιχων εννοιών στα διάφορα συγκεκριμένα πλαίσια λογικής: θέλουμε να μπορεί να περιγράφει και να γενικεύει τη συμπερασματολογία μιας λογικής, και την ικανοποίηση μιας πρότασης από ένα μοντέλο (τελικά το πως οι αληθοτιμές μιας συλλογής προτάσεων μπορεί να είναι συνεπής με ή/και να αποφαίνεται για την αληθοτιμή μιας άλλης πρότασης[96]). Οι σχέσεις Σ-ικανοποίησης είναι καλώς ορισμένες, καθώς είναι οι συγκεκριμένες σχέσεις $\models_{\Sigma} \subseteq |\mathbf{Mod(\Sigma)}| \times Sen(\Sigma)$ για τις οποίες ισχύει η συνθήκη ικανοποίησης. Το παραπάνω είναι αρκετό για να είναι αρκετά συγκεκριμένος ο ορισμός μας, και ταυτόχρονα είναι επαρκές για να καθορίσει αρκετά καλά τη σχέση μεταξύ των 2 συναρτητών και η κατασκευή *institution* να μην είναι υπερβολικά αόριστη. Είναι αυτή η οποία καθορίζει τη συναρμογή όλων των μερών της κατασκευής μας, και τη σύνδεση συντακτικού και *semantics* (συγκεκριμένα, πως οι αλλαγές στη σύνταξη αντιστοιχούν σε αλλαγές στην αλήθεια).
Συγκεκριμένα, τα παραπάνω περιγράφονται από τα ακόλουθα σχήματα:

$$\begin{tikzcd}
 & Set \arrow[d, phantom, "\models"] \\
Sign \arrow[ur, "Sen"] \arrow[dr, "Mod"'] & {} \\
 & Cat^{op}
\end{tikzcd}$$

[93] Ο λόγος που θέλουμε να υπάρχει ο γενικευμένος ορισμός είναι -πέρα από τη κατηγοριοθεωρητική συνέπεια, τα *liberal institutions* να είναι *institution*.

[94] Χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $|\mathcal{C}|$ ισοδύναμα με τον $Ob(\mathcal{C})$, δηλαδή τα αντικείμενα της κατηγορίας $\mathcal{C}$.

[95] Η ικανοποίηση υπάρχει μόνο ως Σ-ικανοποίηση. Το πεδίο ύπαρξης των λογικών εννοιών, για τους θεσμούς, είναι οι υπογραφές.

[96] Αναγνωρίζουμε πόσο θεμελιωδώς διαφορετικά είναι τα δύο αυτά ερωτήματα

$$
\begin{tikzcd}
\Sigma \arrow[d, "\phi"'] & Mod(\Sigma) & \models_{\Sigma} & Sen(\Sigma) \arrow[d, "Sen(\phi)"] \\
\Sigma' & Mod(\Sigma') \arrow[u, "Mod(\phi)"] & \models_{\Sigma'} & Sen(\Sigma')
\end{tikzcd}
$$

Το μέγεθος των προτάσεων και των μοντέλων μπορεί να διαφέρει ανάλογα τον ορισμό. Είδαμε για παράδειγμα ότι τα μοντέλα μπορεί να ορίζονται στη **Set** ή στην **Cat**. Αντίστοιχες προσαρμογές μπορούν να γίνουν στον ορισμό και για τις προτάσεις. Έτσι μπορούμε να μιλάμε για διάφορα είδη θεσμών[97]: set/set, set/cat, cat/set, cat/cat, που αντιστοιχεί σε προτάσεις/μοντέλα. Εδώ τα περισσότερα αποτελέσματα έχουν σχέση με τις set/set και set/cat περιπτώσεις που ορίσαμε παραπάνω.

Για να ορίσουμε τους μορφισμούς μεταξύ θεσμών, είτε θα πρέπει να λάβουμε υπ όψιν το σεβασμό της σχέσης ικανοποίησης, είτε θα πρέπει να εκφράσουμε τη Σ-ικανοποίηση σε κατηγοριοθεωρητικά πλαίσια, άρα να ορίσουμε τους θεσμούς στα πλαίσια μιας κατηγορίας, και όχι απλά χρησιμοποιώντας κατηγορίες για τα συστατικά του μέρη. Θα χρησιμοποιήσουμε τη βοήθεια της κατηγορίας **Rel** των διμελών σχέσεων, με αντικείμενα σύνολα και βέλη διμελείς σχέσεις μεταξύ τους (δηλαδή μεταξύ δύο συνόλων A, B, βέλος $A \to B$ είναι η διατεταγμένη τριάδα[98] (A, B, R), ή (A, R, B), με $R \subseteq A \times B$), ταυτότητα την $id_A \subseteq A \times A$, $a \mapsto a$, και σύνθεση σχέσεων. Ορίζουμε την **Trel**, μια κατηγορία τετραγώνων[99] πάνω στη **Rel**-μία συνήθη κατασκευή όπου παίρνουμε τα βέλη μιας κατηγορίας ως αντικείμενα και τα μεταθετικά τετράγωνα που σχηματίζουν ως βέλη. Δηλαδή, για αντικείμενα $R : A \to B$, $R' : A' \to B'$, το ζεύγος βελών της **Set** $< f : A' \to A, g : B \to B' >$, ώστε το παρακάτω τετράγωνο να είναι μεταθετικό:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "R"] & B \\
A' \arrow[u, "f"] \arrow[r, "R'"] & B' \arrow[u, "g^{op}"']
\end{tikzcd}
$$

Το ότι έχουμε ορίσε ένα ζεύγος και ζητάμε να είναι μεταθετικό το τετράγωνο που ορίζεται από το αντίστροφο βελος του 2ου μας προδιαθέτει ήδη για την

[97] Αυτή η διάκριση εισάγεται στο [9]

[98] Οποιαδήποτε τριάδα από τις 2 μπορεί να οριστεί ισοδύναμα και σε διαφορετικά σημεία της βιβλιογραφίας μπορούμε να συναντήσουμε όποιον από τους δύο τετριμμένα ισοδύναμους ορισμούς.

[99] Αυστηρά είναι η υποκατηγορία της κατηγορίας τετραγώνων πάνω στη **Set**, όπου ένα ζεύγος παράλληλων βελών είναι σχέσεις.

κατασκευή αυτή, αφού σε ένα θεσμό ο συναρτητής των μοντέλων είναι συναλοίωτος και των προτάσεων όχι. Με τη βοήθεια των συναρτητών-προβολών π_1, π_2 $\mathbf{Trel} \to \mathbf{Set}$, που για κάθε αντικείμενο (σχέση) της $\mathbf{Trel}$ δίνουν το πεδίο (αντίστοιχα συνπεδίο) και για κάθε βέλος (ζεύγος συναρτήσεων) δίνει τη συνάρτηση μεταξύ πεδίων (αντίστοιχα μεταξύ συνπεδίων).

Ορισμός. *Θεσμός είναι ένας συναρτητής* $\mathcal{I} : \mathbf{Sign} \to \mathbf{Trel}$, *όπου* $\pi_1^{op} \circ \mathcal{I} : \mathbf{Sign} \to \mathbf{Set^{op}}$ *είναι ο συναρτητής* Mod, *και* $\pi_2 \circ \mathcal{I} : \mathbf{Sign} \to \mathbf{Set}$ *ο συναρτητής* Sen. *Για κάθε αντικείμενο της* $\mathbf{Sign}$, *η* Σ*-ικανοποίηση γίνεται απλώς* $\mathcal{I}(\Sigma)$.

Παρατήρηση. *Ο ορισμός προφανώς μπορεί να αλλάξει τετριμμένα - να ορίσουμε ανάστροφη την πρώτη συνάρτηση και όχι την δεύτερη, να κατασκευάσουμε το τετράγωνο με συναρτήσεις* f, g *που έχουν ίδια φορά με τον ορισμό του βέλους* $R \to R'$ *κτλ. Αρκεί μετά να πάρουμε τους αντίστοιχους συναρτητές και συναλλοίωτους και να τους ταιριάξουμε σωστά με τους συναρτητές προτάσεων και μοντέλων. Για να πάρουμε τον ορισμό του συναρτητή μοντέλων με συνπεδίο την* $\mathbf{Cat}$, *τροποποιούμε την* $\mathbf{Trel}$ *ώστε το* A *κάθε αντικειμένου να είναι κατηγορία, αλλά δε θα αναλωθούμε εδώ σε αυτή την τροποποίση, η οποία όμως δεν είναι τετριμμένη*[100].

Και οι 2 ορισμοί έχουν τη χρησιμότητά τους. Ο δεύτερος είναι κατηγοριοθεωρητικός, και όπως θα δούμε στην επόμενη ενότητα επιτρέπει έναν κομψό ορισμό των μορφισμών θεσμών (και τελικά τον ορισμό της κατηγορίας τους), ενώ οι ορισμοί των μορφισμών με βάση τον πρώτο ορισμό μπορούν να ειδωθούν ως εξειδικεύσεις, και είναι πιο πολύπλοκοι. Από την άλλη ο πρώτος ορισμός είναι πιο χρηστικός (και έτσι χρησιμοποιείται περισσότερο στη βιβλιογραφία). Επίσης ο πρώτος ορισμός έχει πιο φανερή μέσα του (λόγω των διακεκριμένων μεταξύ τους προτάσεων και μοντέλων και τη συσχέτισή τους μέσω της Σ-ικανοποίησης) τη σύνδεση συντακτικού και *semantics*, όπως συναντάται γενικά σε λογικά συστήματα ως *σύνδεση Galois*[101] (η μόνη ουσιαστική διαφορά με είναι ότι αυτή είναι βασισμένη στην ικανοποίηση και όχι στη λογική συνεπαγωγή ως σχέση που επάγει τη σύνδεση *Galois*). Στους θεσμούς αυτή θα περιγραφεί ως κάτω:

Έστω S κλάση προτάσεων. Το ζεύγος (Σ, S) καλείται Σ-παρουσίαση. Ένα Σ-μοντέλο m λέμε πως ικανοποιεί την S, όταν $m \models \sigma, \forall \sigma \in S$. Ορίζουμε δύο διαφορετικές πράξεις με το ίδιο σύμβολο $*$ και τις ονομάζουμε *κλειστότητα*. Η μία $* : Sen(\Sigma) \to Mod(\Sigma)$ ορίζεται ως S^* το σύνολο των μοντέλων που ικανοποιούν τη S. Αντίστοιχα, $* : Mod(\Sigma) \to Sen(\Sigma)$ ορίζεται ως M^* το σύνολο των προτάσεων που ικανοποιούνται από όλα τα μοντέλα της κλάσης μοντέλων M.

Αν τώρα εφαρμόσουμε στην $* : Mod(\Sigma) \to Sen(\Sigma)$ το S^*, παίρνουμε την S^{**} και όλες τις προτάσεις που ικανοποιούνται από το σύνολο των μοντέλων που ικανοποιούν τις S, (η S^{**} λέγεται κλειστότητα της S, και όταν $S^{**} = S$ η S λέγεται *κλειστή*). Αντίστοιχα, αν εφαρμόσουμε την $* : Sen(\Sigma) \to Mod(\Sigma)$ στη M^* παίρνουμε την M^{**}, όλα δηλαδή τα μοντέλα που ικανοποιούν όλες τις προτάσεις οι οποίες ικανοποιούνται από τα μοντέλα της M. *Θεωρία* καλούμε μια S-παρουσίαση (Σ, S) όπου η S είναι κλειστή. Οι θεωρίες έχουν τη δική τους κατηγορία $\mathbf{Th}$

[100] βλ.[4] σ.16-18 (στον τόμο σ.110-112)
[101] [7]

η οποία καταλήγει σε σημαντικά αποτελέσματα αλλά ξεφεύγει από το σκοπό της εργασίας αυτής[102].

Η σύνδεση *Galois* ορίζεται μεταξύ 2 *poset*, $(P, \leq_1)$, $(Q, \leq_2)$ ως ζεύγος συναρτήσεων $f^* : Q \to P, f_* : P \to Q$ για τις οποίες ισχύει

$$f_*(p) \leq_2 q \quad \alpha\nu - \nu \quad p \leq_1 f^*(q) \quad \forall p \in P, q \in Q \tag{30}$$

Ισοδύναμος ορισμός[103] είναι ότι οι f_*, f^* είναι μονότονες (δηλαδή διατηρούν τη διάταξη) και $p \leq_1 f^*(f_*(p))$, $q \leq_2 f_*(f^*(q))$. Αυτός ο ορισμός κάνει την απόδειξή της περίπτωσής μας τετριμμένη. Αν ορίσουμε ως διάταξη τον εγκλεισμό υποσυνόλων ($\subseteq$ και $\supseteq$, με τις αντίστοιχες προσαρμογές καθώς μιλάμε για κλάσεις), είναι φυσικό να ορίσουμε αντίστροφες διατάξεις για τις προτάσεις και τα μοντέλα βασισμένοι στη παραδοχή/ισχυρισμό ότι όσο αυξάνω τις προτάσεις μιας κλάσης προτάσεων, τόσο λιγότερα μοντέλα μπορούν να τις ικανοποιήσουν (επαγωγικό βήμα στην απόδειξη του ισχυρισμού, αν προσθέσω μια πρόταση, η ικανοποίηση των υπόλοιπων προτάσεων από τα μοντέλα δεν αλλάζει, ενω πιθανώς τα υπάρχει ένα μοντέλο που να μην ικανοποιεί τη νέα πρόταση, στην καλύτερη όλα τα μοντέλα θα ικανοποιούν τη νέα πρόταση), ενώ όσο αυξάνω τα μοντέλα, δεν αυξάνεται (είτε στην καλύτερη περίπτωση μένει ίδιος, είτε μειώνεται) ο αριθμός των προτάσεων που ικανοποιούνται από όλα τα μοντέλα (αντίστοιχα). Επομένως από τους ορισμούς των $*$ και τον ορισμό των αντίστροφων διατάξεων προκύπτει η μονοτονία των πράξεων ($S \subseteq S'$ συνεπάγεται $S'^* \subseteq S^*$ και $M \subseteq M'$ συνεπάγεται $M'^* \subseteq M^*$). Επίσης $S \subseteq S^{**}$ ταυτολογικά, καθώς ο ορισμός της S^{**} είναι η κλάση όλων των προτάσεων που ικανοποιούνται από όλα τα μοντέλα που ικανοποιούν όλες τις προτάσεις της κλάσης S, οπότε κάθε πρόταση της S είναι και πρόταση της S^{**} (αντίστοιχα για μοντέλα).

Ο *Lawvere*[104] αποδυκνείει πως το δυναμοσύνολο όλων των δυνατών αξιωμάτων μιας γλώσσας ως *poset* με τη διάταξη $\subseteq$ και το δυναμοσύνολο όλων των δυνατών μαθηματικών δομών αυτής της γλώσσας ως *poset* με τη διαταξη $\supseteq$ με απεικονίσεις αντίστοιχα ορισμένες με τις δικές μας (f_* αντιστοιχεί στη $* : Sen(\Sigma) \to Mod(\Sigma)$ και f^* στη $* : Mod(\Sigma) \to Sen(\Sigma)$) είναι σύνδεση *Galois*, η οποία είναι και η γνωστή *Galois* σύνδεση συντακτικού-*semantics*, την οποία απλώς μεταφράσαμε παραπάνω στη γλώσσα των θεσμών.

5.1.1 Μορφισμοί θεσμών

Ορισμός. *Μορφισμός μεταξύ 2 θεσμών $\mathcal{I} \to \mathcal{J}$ είναι το ζεύγος $< \Phi, \eta >$, του συναρτητή υπογραφών $\Phi : \mathbf{Sign}_{\mathcal{I}} \to \mathbf{Sign}_{\mathcal{J}}$ και του φυσικού μετασχηματισμού η, ορισμένο στους στους συναρτητές $\mathbf{Sign}_{\mathcal{I}} \to$ **Trel** (οι οποίοι όμως είναι οι θεσμοί ως συναρτητές της Cat), ως $\eta : \mathcal{J} \circ \Phi \Rightarrow \mathcal{I}$.*

[102] Για περισσότερα βλέπε [4] και [3]

[103] [12]

[104] [6],[12]

$$
\begin{tikzcd}
Sign_{\mathcal{I}} \arrow[rr, "\mathcal{J}\circ\Phi"] \arrow[rr, bend left=50, "\mathcal{I}"] \arrow[d, "\Phi"'] & \arrow[phantom, u, "\Uparrow\eta"] & Trel \\
Sign_{\mathcal{J}} \arrow[urr, "\mathcal{J}"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Ορισμός. *Κατηγορία* **Ins** *είναι η κατηγορία θεσμών με μορφισμούς τα παραπάνω ζεύγη. Η σύνθεση ορίζεται ως εξής:*

$$< \Phi', \eta' > \circ < \Phi, \eta > := < \Phi' \circ \Phi, \eta' \circ (\Phi \cdot \eta) > \tag{31}$$

$$
\begin{tikzcd}
Sign_{\mathcal{I}} \arrow[rr, "\mathcal{J}\circ\Phi"] \arrow[rr, bend left=50, "\mathcal{I}"] \arrow[d, "\Phi"'] & \arrow[phantom, u, "\Uparrow\eta"] & Trel \\
Sign_{\mathcal{J}} \arrow[urr, "\mathcal{J}"] \arrow[urr, bend right, "\mathcal{K}\circ\Phi'"'] \arrow[d, "\Phi'"'] & \arrow[phantom, u, "\Uparrow\eta'"] & \\
Sign_{\mathcal{K}} \arrow[uurr, bend right, "\mathcal{K}"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Με $\cdot$ *την κάθετη σύνθεση συναρτητή/φυσικού μετασχηματισμού.*

Ο εναλλακτικός ορισμός[105] που αντιστοιχεί στον βασικό ορισμό του θεσμού χρησιμοποιεί δύο φυσικούς μετασχηματισμούς αντί για έναν: $\alpha : Sen_{\mathcal{J}} \circ \Phi \Rightarrow Sen_{\mathcal{I}}$, $\beta : Mod_{\mathcal{I}} \Rightarrow Mod_{\mathcal{J}} \circ \Phi^{op}$. Οι φυσικοί μετασχηματισμοί αυτοί δεν είναι τίποτα άλλο παρά το αποτέλεσμα του η στους συναρτητές προτάσεων και μοντέλων, αλλά χρειάζονται επιπλέον τη συνθήκη να σέβονται την Σ-ικανοποίηση:

$$M \models_{\Sigma,\mathcal{I}} \alpha_{\Sigma}(\phi) \quad \alpha\nu - \nu \quad \beta_{\Sigma}(M) \models_{\Phi(\Sigma),\mathcal{I}} \phi \tag{32}$$

Για κάθε υπογραφή του $\mathcal{I}$, για κάθε Σ-μοντέλο και $\Phi(\Sigma)$-πρόταση. Έτσι, το να οριστεί κατηγορία θεσμών γίνεται πιο δύσκολο, αλλά είναι ισοδύναμη[106].

Παίρνοντας τα δυϊκά του η παίρνουμε τους *συμμορφισμούς θεσμών*.

[105] [9] σ.8-9 (στον τόμο σ.118/119), επομένως και με την αντίστοιχη γραφή του συναρτητή μοντέλων

[106] [9]

Ορισμός. *Συμμορφισμός θεσμών ορίζεται ως η τριάδα $< \Phi, \alpha, \beta >$, όπου*

1. Συναρτητής $\Phi : \mathbf{Sign}_{\mathcal{I}} \to \mathbf{Sign}_{\mathcal{J}}$.

2. Φυσικός μετασχηματισμός $\alpha : Sen_{\mathcal{I}} \Rightarrow Sen_{\mathcal{J}} \circ \Phi$.

3. Φυσικός μετασχηματισμός $\beta : Mod_{\mathcal{J}} \circ \Phi^{op} \Rightarrow Mod_{\mathcal{I}}$

Θέλουμε επίσης να σέβονται την Σ-ικανοποίηση

$$M' \models_{\Phi(\Sigma),\mathcal{J}} \alpha_{\Sigma}(\phi) \quad \alpha\nu-\nu \quad \beta_{\Sigma}(M') \models_{\Sigma,\mathcal{I}} \phi \tag{33}$$

Για κάθε υπογραφή του $\mathcal{I}$, για κάθε $Mod_{\mathcal{J}}(\Phi(\Sigma))$-μοντέλο και Σ-πρόταση (εδώ και στον επόμενο ορισμό ϕ αντιστοιχούν σε προτάσεις, και όχι σε μορφισμούς υπογραφών).

Οι συμμορφισμοί μοντέλων είναι μορφισμοί της κατηγορίας **CoIns** (με αντικείμενα θεσμούς).

5.1.2 Λογικες

Οι *Lawvere&Schanuel*[107] κάνουν την παρατήρηση πως η σύνθεση και ο ισομορφισμός υπάρχουν ως δίπολο όμοιο με αυτό του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης στην αριθμητική. Αυτό αποτελεί γενική εννοιολογική παρατήρηση, η οποία έχει να κάνει με γενικεύσεις κατασκευών στα μαθηματικά όπως η ομάδα πηλίκο στην άλγεβρα, όπου κατασκευάζουμε κλάσεις ισοδυναμίας τις οποίες ορίζει ένας ομομορφισμός - κάθε ομομορφισμός ομάδας G επάγει έναν ισομορφισμό, μεταξύ της εικόνας του G και μιας ομάδας πηλίκο του G.[108]. Με του ίδιο τρόπο, ένας ισομορφισμός 2 αντικειμένων x, y, κλείνει ένα μεταθετικό τρίγωνο των μορφισμών $x \to z, y \to z$. Αυτή η αρχή θα εφαρμοστεί στους θεσμούς, όπου ξεκινάμε από την ιδέα πως ένας "ισομορφισμός" μεταξύ θεσμών, ένας δημαδή μορφισμός που διατηρεί δομικά χαρακτηριστικά, ορίζει κλάσεις ισοδυναμίας μεταξύ τους, οι οποίες με τη σειρά τους είναι συλλογές θεσμών, που -για κάποιο πλαίσιο- είναι ουσιαστικά ίδιες.

Έτσι, θέλουμε να κατασκευάσουμε κλάσσεις ισοδυναμίας θεσμών. Για να γίνει αυτό, θα ορίσουμε κάποιους συμμορφισμούς ως σχέσεις ισοδυναμίας μεταξύ θεσμών. Συγκεκριμένα:

Ορισμός. *Ένας συμμορφισμός θεσμών είναι ισοδυναμία θεσμών*[109] *όταν:*

1. Ο Φ είναι ισοδυναμία κατηγοριών.

2. Κάθε στοιχείο του α, α_{Σ} έχει, φυσικό στη Σ αντίστροφο α_{Σ}^{-1} (ως semantic ισοδυναμίας[110]*)*

3. Κάθε στοιχείο του β, β_{Σ} είναι ισοδυναμία κατηγοριών, και ο (εώς ισομορφισμού) αντίστροφός του, και ο αντίστοιχος ισομορφισμός είναι φυσικοί μετασχηματισμοί για τη Σ.

---

[107] [6] σ.63-67

[108] 1ο θεώρημα ισομορφισμού

[109] Ορίζεται ως ισοδυναμία 2-κατηγοριών, οι **Ins**, **CoIns** είναι 2-κατηγορίες.

[110] $\alpha_{\Sigma}(\alpha_{\Sigma}^{-1}(\phi)) \models |_{\Sigma}\phi$ και αντίστροφα

Όπως είδαμε αρχικά στις κατηγορίες, ο ισομορφισμός[111] είναι υπερβολικά ισχυρή συνθήκη, όπου ουσιαστικά ίδιες κατηγορίες δεν είναι ισομορφικές. Επομένως είναι λογικό να θέλουμε να επεκτείνουμε και την έννοια του *σκελετού* μιας κατηγορίας στους θεσμούς. Σκελετός μιας κατηγορίας είναι η μικρότερη υποκατηγορία της με την οποία είναι ισοδύναμη, και κανονικός εκπρόσωπος κάθε κλάσης ισοδυναμίας κατηγοριών. Ο σκελετός είναι μια κατηγορία που δεν έχει ισομορφικά μεταξύ τους αντικείμενα και κάθε αντικείμενό της αρχικής κατηγορίας είναι ισομορφικό με ένα αντικείμενο του σκελετού. Το $hom - set$ κάθε ζεύγους αντικειμένων είναι ισομορφικό στον σκελετό και τη κατηγορία του. Δηλαδή ο σκελετός μιας κατηγορίας είναι μια κατηγορία της οποίας τα αντικείμενα ισοδυναμούν με πιθανώς παραπάνω από ένα αντικείμενο της αρχικής.

Η φυσική επέκταση του ορισμού του σκελετού στους θεσμούς αντιστοιχεί στην επέκταση στις 2-κατηγορίες. Ο $Sk_{\mathcal{I}}$ είναι σκελετός του $\mathcal{I}$, εφόσον:

-Η $\mathbf{Sign}_{Sk_{\mathcal{I}}}$ είναι κατηγορία σκελετός της $\mathbf{Sign}_{\mathcal{I}}$,

-$Sen_{Sk_{\mathcal{I}}}(\Sigma) \cong Sen_{\mathcal{I}}(\Sigma)/ \models |$ για κάθε υπογραφή του $Sk_{\mathcal{I}}$. Δηλαδή για κάθε υπογραφή του σκελετού υπάρχει μια προς ένα και επί αντιστοιχία (set/set, set/cat περιπτώσεις) από τις προτάσεις της στις κλάσεις $semantic$ ισοδυναμίας προτάσεων του αντίστοιχου θεσμού. Αν δηλαδή επιλέξουμε κάποια υπογραφή Σ_i του σκελετού, που αντιστοιχεί σε κλάση ισοδυναμίας υπογραφών του θεσμού Σ_{ij}, τότε και οι αντίστοιχες προτάσεις της Σ_i θα έχουν ένα προς άνα και επί απεικόνιση τις κλάσεις $semantic$ ισοδυναμίας των προτάσεων των Σ_{ij}. Κάθε $s : \Sigma \to \Sigma'$ δίνει τον $Sen_{\mathcal{I}}(s)$. $Sen_{Sk\mathcal{I}}(s)$ είναι η επαγόμενη απεικόνιση μεταξύ των κλάσεων $semantic$ ισοδυναμίας των προτάσεων των αντίστοιχων κλάσεων ισοδυναμίας (από το σκελετό υπογραφών) υπογραφών.

-Η $\mathbf{Mod}_{Sk_{\mathcal{I}}}$ είναι κατηγορία σκελετός της $\mathbf{Mod}_{\mathcal{I}}$ (στη Set/Set περίπτωση ορίζεται όμοια με τις προτάσεις). Κάθε $s : \Sigma \to \Sigma'$ δίνει τον $Mod_{\mathcal{I}}(s)$. $Mod_{Sk\mathcal{I}}(s)$ είναι ο περιορισμός της $Mod_{\mathcal{I}}(s)$.

-Όσον αφορά τη σχέση ικανοποίησης ίδια μοντέλα ικανοποιούν ακριβώς τις αντίστοιχες κλάσεις $semantic$ ισοδυναμίας προτάσεων, των προτάσεων που ικανοποιούν στο $\mathcal{I}$ (δηλαδή $M \models_{Sk_{\mathcal{I}},\Sigma} [\phi] \quad \alpha\nu - \nu \quad M \models_{\mathcal{I},\Sigma} \phi$, όπου εδώ ϕ είναι προτάσεις).

Επομένως, μια κλάση ισοδυναμίας, εμπεριέχει θεσμούς που μεταξύ τους υπάρχει ισοδυναμία θεσμών στην **CoIns**. Κάθε θεσμός είναι ισοδύναμος με όποιο σκελετό του. Επομένως 2 θεσμοί είναι ισοδύναμοι αν οι σκελετοί τους είναι ισοδύναμοι. Η ύπαρξη σκελετού για κάθε θεσμό ισοδυναμεί με το αξίωμα της επιλογής.

Αν θέλουμε λοιπόν να ορίσουμε αυστηρά την έννοια της λογικής στα πλαίσια της θεωρίας θεσμών, θεωρούμε ότι *λογική είναι μια κλάση ισοδυναμίας θεσμών*. Ο τύπος του σκελετού είναι η ταυτότητα της λογικής αυτής, οι ιδιότητες δηλαδή της λογικής είναι αναλλοίωτες-υπό-ισοδυναμία ιδιότητες θεσμών.

Παραδείγματα

[111] Όπου ισομορφισμός θεσμών είναι ένας συμμορφισμός που κάθε στοιχείο του (δηλ. $\forall\Sigma$) είναι ισομορφισμός.

5.2 Ασαφείς Θεσμοί

Σε αυτή την ενότητα θα δούμε πως μπορούμε να επισυνάψουμε ασαφή δομή στους θεσμούς, μέσω διαδικασίας ασαφοποίησής τους. Ο *Razvan Diaconescu*[112] (2012) ξεκινάει από την ιδέα πως οι λογικές πολλών τιμών (συμβ. MVL), οι οποίες επάγονται μια αποτίμηση αληθοτιμών γενικότερη του $\{0,1\}$, είναι ανεξάρτητες από οποιοδήποτε συντακτικό πλαίσιο. Αυτή η παραδοχή είναι παρόμοια με την αντίστοιχη που βρίσκεται στη βάση της θεωρίας των θεσμών, πως "η αλήθεια είναι ανεξάρτητη του [δεδομένου/συγκεκριμένου[113]] συμβολισμού"[114].

Δεδομένων της κατηγορίας υπογραφών και του συναρτητή προτάσεων θα κατασκευάσουμε συντακτικό, θεωρία μοντέλων και σχέση ικανοποίησης μεταξύ τους. Για τους θεσμούς τυπικά θα κρατήσουμε τον ορισμό του συναλλοίωτου συναρτητή μοντέλων ως $Mod_{\mathcal{I}} : (\mathbf{Sign}_{\mathcal{I}})^{op} \to \mathbf{Cat}$.

Για τους συμμορφισμούς θεσμών, ο *Diaconescu* κάνει την παραδοχή πως $\mathbf{Sign}_{\mathcal{I}} = \mathbf{Sign}_{\mathcal{J}}$. Δηλαδή $\Phi = id_{\mathbf{Sign}_{\mathcal{I}}}$, Άρα ο συμμορφισμός γίνεται τριάδα $(id_{\mathbf{Sign}_{\mathcal{I}}}, \alpha, \beta)$. Δηλαδή απλοποιείται σε (α, β) ζεύγος φυσικών μετασχηματισμών. Επίσης πάνω σε αυτή τη παραδοχή μας δίνει την παρακάτω πρόταση [115]

Πρόταση. $\forall \Sigma, \quad \forall \alpha_\Sigma : Sen_{\mathcal{I}}(\Sigma) \to Sen_{\mathcal{J}}(\Sigma), \quad$ *Αν* $\exists \beta_\Sigma : |\mathbf{Mod}_{\mathcal{J}}(\Sigma)| \to |\mathbf{Mod}_{\mathcal{I}}(\Sigma)|$ *τέτοιο ώστε* $\beta_\Sigma(M') \models_{\Sigma,\mathcal{I}} e \quad αν-ν \quad M' \models_{\Sigma,\mathcal{J}} \alpha_\Sigma(e)$,
Τότε $\forall E, \Gamma$ *σύνολα* Σ*-προτάσεων ισχύει*

$$E \models_{\Sigma,\mathcal{I}} \Gamma \quad συνεπάγεται \quad \alpha_\Sigma(E) \models_{\Sigma,\mathcal{J}} \alpha_\Sigma(\Gamma) \tag{34}$$

Επίσης αν $\exists \beta'_\Sigma$ *που είτε είναι αντίστροφος του* β_Σ $(\beta_\Sigma(\beta'_\Sigma(M)) = M$, *για όλα τα* Σ,M), *είτε εάν* $\beta'_\Sigma(M) \models_{\Sigma,\mathcal{J}} e \quad αν-ν \quad M \models_{\Sigma,\mathcal{I}} e$ *Τότε*

$$E \models_{\Sigma,\mathcal{I}} \Gamma \quad αν\text{-}ν \quad \alpha_\Sigma(E) \models_{\Sigma,\mathcal{J}} \alpha_\Sigma(\Gamma) \tag{35}$$

[112][2] *InstitutionalSemanticsforManyValuedInstitutions*
[113]Προσθέτουμε αυτή τη λέξη στην αρχική θέση, καθώς αυτή η φράση δε σημαίνει πως η αληθοτιμή υπάρχει εκτός του πλαισίου των συμβολισμών και των συμβολικών πλαισίων - των γλωσσών δηλαδή, αντίθετα δεν ορίζεται έξω από αυτά. Όμως η αληθοτιμή είναι αναλλοίωτη όσον αφορά την αλλαγή-μετάφραση από ένα πλαίσιο-γλώσσα σε ένα άλλο.
[114][4]
[115]Απλοποιημένη μορφή γενικότερων αποτελεσμάτων.

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large]
 & & Set \\
Sign_{\mathcal{I}} \arrow[loop left, "\Phi=id_{Sign_{\mathcal{I}}}"] \arrow[urr, bend left=50, "Sen_{\mathcal{J}}(\_)"] \arrow[urr, "Sen_{\mathcal{I}}(\_)"'] \arrow[urr, phantom, bend left=25, "\Uparrow \alpha_{\_}"] \arrow[drr, "(Mod_{\mathcal{I}}(\_))^{OP}"] \arrow[drr, bend right=50, "(Mod_{\mathcal{J}}(\_))^{OP}"'] \arrow[drr, phantom, bend right=25, "\Uparrow \beta_{\_}"] & & \\
 & & Cat^{OP}
\end{tikzcd}
$$

Είμαστε έτοιμοι να κατασκευάσουμε έναν (γενικό/αφηρημένο) ασαφή θεσμό $\mathcal{I}(L)$:

Ορισμός. *Το συντακτικό ενός ασαφούς θεσμού καθορίζεται πλήρως από τη πεντάδα* $(\mathbf{Sign}, FSen, CSen, CSen_0, \mathcal{D})$. *Η* $\mathbf{Sign}$ *είναι η κατηγορία των υπογραφών, ενώ οι* $FSen, CSen, CSen_0$ *είναι συναρτητές* $\mathbf{Sign} \to \mathbf{Set}$. *Το συντακτικό λογικής* $(\mathbf{Sign}, FSen)$ *ονομάζεται ασαφές συντακτικο, το* $(\mathbf{Sign}, CSen)$ *ονομάζεται* $crisp$ *ατομικό συντακτικό. Για κάθε υπογραφή ισχύει*[116] $FSen(\Sigma) \cap CSen(\Sigma) = \emptyset$. *Ο* $CSen_0$ *είναι ο υποσυναρτητής "*$crisp$ *αλήθειας" του* $CSen$*, και τον χρειαζόμαστε για την αποτίμηση της ικανοποίησης των "*$crisp$*" προτάσεων. Η* $\mathcal{D}$ *είναι χώρος ποσοτικοποίησης.*

Χώρο ποσοτικοποίησης $\mathcal{D}$ ονομάζουμε μια υποκλάση βελών της $\mathbf{Sign}$ η οποία ορίζεται ακόλουθα: για κάθε βέλος $x : \Sigma \to \Sigma'$ του $\mathcal{D}$, για κάθε ζεύγος $(x, \phi : \Sigma \to \Sigma_1)$:

1)Υπάρχει ένα $pushout$ χαρακτηρηστικό για το ζεύγος (x, ϕ), στο οποίο το παράλληλο βέλος του x, το $x(\phi) : \Sigma_1 \to \Sigma_1'$, ανήκει στην $\mathcal{D}$.

2)Μεταξύ 2 τέτοιων $pushout$, των χαρακτηριστικών για τα ζεύγη (x, ϕ), $(x(\phi), \theta : \Sigma_1 \to \Sigma_2)$, ορίζεται πράξη σύνθεσης μέσα στο $\mathcal{D}$. Η "οριζόντια" σύνθεση που φαίνεται στο διάγραμμα μεταξύ των $pushout$ δίνει το χαρακτηρηστικό $pushout$ για το ζεύγος $(x, \theta \circ \phi)$.

$$
\begin{tikzcd}
\Sigma \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "x"] & \Sigma_1 \arrow[d, "x(\phi)"] \\
\Sigma' \arrow[r, "\phi[x]"] & \Sigma_1'
\end{tikzcd}
$$

[116]Η επιλογή ξεχωριστών συντακτικών για την ασαφή και την $crisp$ περίπτωση γίνεται γιατί συμφέρει σε διάφορες εφαρμογές/mvl να έχουμε το ξεκάθαρο και διακριτό συντακτικό για $crisp$ ικανοποίηση που θα ορίσουμε παρακάτω. Έτσι πρέπει να ορίσουμε και το ξένο μεταξύ των 2 περιπτώσεων.

$$\begin{tikzcd}
\Sigma \arrow[r, "\phi"] \arrow[rr, bend left, "\theta\circ\phi"] \arrow[d, "x"] & \Sigma_1 \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "x(\phi)"] & \Sigma_2 \arrow[d, "(x(\phi))(\theta)"] \\
\Sigma' \arrow[r, "\phi[x]"] \arrow[rr, bend right, "\theta[x(\phi)]\circ\phi[x]"'] & \Sigma_1' \arrow[r, "\theta[x(\phi)]"] & \Sigma_2'
\end{tikzcd}$$

Παρατήρηση. *Ο χώρος ποσοτικοποίησης είναι ένα σημαντικό εργαλείο που χρησιμεύει στο να καλύπτει τις επεκτάσεις υπογραφών με τις οποίες λειτουργούν διάφοροι συγκεκριμένοι θεσμοί, όπως αυτός της πρωτοβάθμιας λογικής. Στο πλαίσιο του αφηρημένου ασαφούς θεσμού θα καλύψει τους ποσοδείκτες και τη λειτουργία τους (θα δούμε πως στον ορισμό και τις αποδείξεις που αφορούν ποσοδείκτες θα μιλάμε για τα βέλη του χώρου ποσοτικοποίησης - και θα διατηρήσουμε τον συμβολισμό του παραπάνω ορισμού για να το καταδείξουμε), αντίστοιχα με το πώς η προσθήκη συμβόλων για τους ποσοδείκτες σε μια λογική επιτυγχάνεται με την επέκταση της υπογραφής της.*

Επιπλέον, η κλειστή και προσεταιριστική σύνθεση που περιγράψαμε πάνω μας κάνει να αναμένουμε να επάγεται και ο ορισμός μιας κατηγορίας που επάγεται από τον χώρο ποσοτικοποίησης και την **Sign**.

Ορίζουμε ένα νέο συναρτητή Sen^*, ώστε ο ορισμός του να δίνει τα σύνολο προτάσεων, ως τον *μικρότερο* συναρτητή που περιέχει τα παρακάτω για κάθε Σ:

-$FSen(\Sigma) \cup CSen(\Sigma) \subseteq Sen^*(\Sigma)$ (περιέχει τα σύνολα προτάσεων που παράγουν τα συντακτικά λογικής)

-$\top, \bot \in Sen^*(\Sigma)$ (ως λογικές προτάσεις)

-Σέβεται/είναι ομομορφισμός ως προς τις πράξεις $\vee, \wedge, \circ, \Rightarrow$

-Για όλες τις προτάσεις $\rho \in Sen^*(\Sigma')$ και κάθε μορφισμό $x : \Sigma \to \Sigma' \in \mathcal{D}$, οι $(\forall x)(\rho), (\exists x)(\rho)$ επίσης ανήκουν στο $Sen^*(\Sigma)$

Και για κάθε μορφισμό $\phi : \Sigma \to \Sigma'$:

$Sen^*(\phi(\rho)) = FSen(\phi(\rho))$ για κάθε πρόταση της $FSen(\Sigma)$, αντίστοιχα για τις προτάσεις του $CSen(\Sigma)$

$Sen(\phi(\top)) = \top$ (στα αριστερά ως λογική πρόταση, στα δεξιά ως απειρία του πλέγματος[117] I), όμοια για $\bot$

Σέβεται τις υπό τη ϕ πράξεις $\wedge, \vee, \circ, \Rightarrow$ (Δηλ $Sen^*(\phi(\rho_1 \vee \rho_2)) = Sen^*(\phi(\rho_1)) \vee Sen^*(\phi(\rho_2))$ κτλ)

Σέβεται τους ποσοδείκτες: για τον $\forall$ (αντίστοιχα για $\exists$) $Sen^*(\phi((\forall x)\rho)) = (\forall x(\phi))Sen^*(\phi[x](\rho))$, για κάθε πρόταση $\rho \in Sen^*(\Sigma')$ όπου έχουμε διατηρήσει το συμβολισμό του χώρου ποσοτικοποίησης.

[117] Από εδώ και πέρα θα διατηρήσουμε τον συμβολισμό που είχαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, και όταν αναφερόμαστε στο πλέγμα, αντί για $\bot, \top$ θα γράφουμε $0, I$, εκτός αν υπάρχει σύγχυση που θα ξεκαθαρίζεται. Τα $\bot, \top$ θα τα χρησιμοποιούμε όταν συμβολίζουν λογικές προτάσεις.

Όπως έχουμε ορίσει τον Sen^* περιέχει τις προτάσεις του θεσμού (ασαφείς και $crisp$), έχουμε διασφαλίσει πως θα δέχεται τις πράξεις και τα ειδικά αντικείμενα του πλέγματος, έχουμε διασφαλίσει τους ποσοδείκτες (και τις επεκτάσεις υπογραφών των συνήθων λογικών συστημάτων μέσω του χώρου ποσοτικοποίησης), και τίποτα παραπάνω. Το μόνο που απομένει είναι η ίδια η ένταξη ενός πλέγματος σε αυτή τη κατασκευή, ώστε να έχουμε την αποτίμηση κάθε πρότασης σε αληθοτιμές. Τελικά:

Ορισμός. *Ο ασαφής συναρτητής προτάσεων ορίζεται ως* $Sen_{\mathcal{I}(L)} : \mathbf{Sign} \to \mathbf{Set}$, *για αντικείμενα* $\Sigma \mapsto Sen^*(\Sigma) \times L$, *για μορφισμούς υπογραφών* $\phi(\rho, x) \mapsto (Sen^*(\phi(\rho)), x)$, *για* ϕ *μορφισμο υπογραφών,* $x \in L$, *και* ρ *Σ-ημιπρόταση*[118].

Αποδυκνείεται[119] πως ο $Sen_{\mathcal{I}(L)}$ είναι πράγματι συναρτητής.

Όσον αφορά τα $semantics$ η κατάσταση είναι αρκετά πιο απλή:

Ορισμός. *Σ-μοντέλο, για δεδομένη υπογραφή καλείται ένα ζεύγος (έστω* (χ, x)*), ενός μορφισμού υπογραφών (*$\chi : \Sigma \to \Sigma_\chi$*) και συνάρτησης προς το πλέγμα* $x : FSen(\Sigma_x) \to L$, *προφανώς ασχολούμαστε μόνο με το ασαφές συντακτικό, γιατί η αληθοτιμή των* $crisp$ *προτάσεων είναι επίσης* $crisp$, *και μπορεί να οριστεί τετριμμένα).*

Ορισμός. *(Σ-)Ομομορφισμός Σ-μοντέλων* $h : (\chi, x) \to (\psi, y)$ *είναι ένας μορφισμός υπογραφών* $\Sigma_\chi \to \Sigma_\psi$, *ώστε το τρίγωνο στη* **Sign** *να είναι μεταθετικό (*$h \circ \chi = \psi$*), και να ισχύει* $n \circ FSen(h) \geq m$.

$$\begin{tikzcd}
\Sigma \arrow[r, "\chi"] \arrow[dr, "\psi"'] & \Sigma_\chi \arrow[d, "h"] \\
& \Sigma_\psi
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
FSen(\Sigma_\chi) \arrow[d, "FSen(h)"'] \arrow[rr, bend left, "y \circ FSen(h)"] \arrow[drr, bend right, "x"] & \arrow[d, phantom, "\leq"] & \\
FSen(\Sigma_\psi) \arrow[rr, "y"'] & & L
\end{tikzcd}$$

Η σύνθεση (Σ-)ομομορφισμών Σ-μοντέλων είναι η σύνθεση της **Sign**. Έτσι ορίζεται η κατηγορία των μοντέλων της υπογραφής Σ, η $\mathbf{Mod}_{\mathcal{I}(L)}(\Sigma)$. Οι μορφισμοί υπογραφών μεταφράζονται σε συναρτητές μεταξύ των κατηγοριών μοντέλων των αντίστοιχων υπογραφών ως $Mod_{\mathcal{I}(L)}(\phi) : \mathbf{Mod}_{\mathcal{I}(L)}(\Sigma') \to \mathbf{Mod}_{\mathcal{I}(L)}(\Sigma)$ (συναλλοίωτοι) συναρτητές. Ο $Mod_{\mathcal{I}(L)} : \mathbf{Sign} \to \mathbf{Cat}$ είναι συναρτητής[120].

Το ασαφές αντίστοιχο της Σ-ικανοποίησης θα το ονομάσουμε $\mathcal{I}(L)_\Sigma$-ικανοποίηση:

[118] Πλέον προτάσεις θεωρούμε το ζευγάρι της πρότασης με το στοιχείο του πλέγματος, οπότε το αποτέλεσμα του συντακτικού το ονομάζουμε "ημιπρόταση", όρο που σε διάφορους συγκεκριμένους θεσμούς (ασαφείς ή μη) παίρνει διαφορετικό περιεχόμενο.
[119] [2] σ.10-11
[120] Προσοχή στα μεγέθη των κατηγοριών, αφου μιλόντας για την Cat πάμε σε 2-κατηγορία.

Ορισμός. *Θεωρούμε μια L-σχέση για κάθε Σ την οποία θα ορίσουμε ως σχέση ικανοποίησης:* $\_ \models \_ : |Mod_{\mathcal{I}(L)}(\Sigma)| \times Sen^*(\Sigma) \to L$. *(Στη βιβλιογραφία συναντάται και ως "συνάρτηση βαθμού ικανοποίησης") Η σχέση αυτή ορίζεται αναδρομικά ως:*

-Για τις ασαφείς προτάσεις $(\forall \rho \in FSen(\Sigma))$, $((\mu, m) \models \rho) = x(FSen(\mu)(\rho))$.

-Για τις $crisp$ *προτάσεις* $(\forall \rho \in CSen(\Sigma))$, $((\mu, m) \models \rho) = I$ *εφόσον* $CSen(\mu)(\rho) \in CSen_0(\Sigma_\mu)$. *Ειδάλλως* $((\mu, m) \models \rho) = 0$.

-$((\mu, m) \models \top) = I$, $((\mu, m) \models \bot) = 0$

-$((\mu, m) \models \rho_1 \vee \rho_2) = ((\mu, m) \models \rho_1) \vee ((\mu, m) \models \rho_2)$ *(όμοια για* $\wedge, *, \Rightarrow$*)*

-$((\mu, m) \models (\forall x)\rho) = \bigwedge\{(\mu', m) \models \rho | \mu' : \Sigma' \to \Sigma_\mu, \mu = \mu' \circ x\}$, *όμοια για* $\exists, \bigvee$.

Έτσι, ορίζουμε την $\mathcal{I}(L)_\Sigma$-ικανοποίηση, με βάση την προηγούμενη L-σχέση:

Ορισμός. *Για* (μ, m) Σ*-μοντέλο και* $\rho \in Sen_{\mathcal{I}(L)}(\Sigma)$, *ορίζουμε την* $\mathcal{I}(L)_\Sigma$*-ικανοποίηση ως:*

$$(\mu, m) \models_{\mathcal{I}(L),\Sigma} (\rho, l) \quad \alpha\nu - \nu \quad l \leq ((\mu, m) \models \rho) \tag{36}$$

Η $\mathcal{I}(L)_\Sigma$-ικανοποίηση, λοιπόν, μπορεί να περιγραφεί ακόλουθα με όρους L-πρότασης: Ένα μοντέλο ικανοποιεί την L-πρόταση (δηλαδή την πρόταση του $Sen^* \times L$, ή αλλιώς $Sen_{\mathcal{I}(L)}$), εφόσον ο *βαθμός ικανοποίησης* της αντίστοιχης πρότασης της Sen^* από το ίδιο μοντέλο, είναι μεγαλύτερος από το στοιχείο του πλέγματος της L-πρότασης.

Αντίστοιχα, η $\mathcal{I}(L)$*-συνθήκη ικανοποίησης* ορίζεται ανάλογα με την κλασσική ενός $\mathcal{I}$: Για κάθε μορφισμό υπογραφών[121] $\phi : \Sigma \to \Sigma_1$, κάθε $Sen^*(\Sigma)$-πρόταση ρ, και κάθε Σ_1-μοντέλο (μ, m):

$$((\mu \circ \phi, m) \models \rho) \quad = \quad ((\mu, m) \models Sen^*(\phi)(\rho)) \tag{37}$$

Η απόδειξη[122] γίνεται αναδρομικά στη δομή της ρ.

5.2.1 Ορισμός της L

Ως τώρα θεωρήσαμε "κατάλληλη" L, χωρίς να ορίσουμε από πριν τα χαρακτηριστικά που την καθιστούν κατάλληλη. Αυτά τα χαρακτηριστικά θα προκύπτουν ως αιτήματα από τον ορισμό του γενικού ασαφούς θεσμού $\mathcal{I}(L)$.

Η διάταξη απαιτείται από την $\mathcal{I}(L)_\Sigma$-ικανοποίηση. Η αποτίμηση των προτάσεων $\top, \bot$ και των $crisp$ προτάσεων απαιτεί την απειρία και το μηδέν του πλέγματος (αλήθεια και ψεύδος). Η "συνάρτηση βαθμού ικανοποίησης" απαιτεί την κλειστότητα του πλέγματος με τα $\bigvee, \bigwedge$ για τα $\exists, \forall$, ενώ οι ίδιες οι πράξεις $\vee, \wedge$ στο πλέγμα χρειάζονται για να αποτιμηθούν οι $\vee, \wedge$ λογικοί σύνδεσμοι. Η κλειστότητα των πράξεων διασφαλίζεται από την πληρότητα. Η ταυτότητα της $*$ είναι το I και η

[121] Διατηρούμε το συμβολισμό του *Diaconescu*, διότι εμπλέκεται ο χώρος ποσοτικοποίησης όσον αφορά την αναδρομή στους ποσοδείκτες.

[122] [2] σ.10-11 (στον τόμο σ.41/42)

$\Rightarrow$ ορίζεται από τη σχέση[123] $y \leq (x \Rightarrow z) \quad αν - ν \quad x * y \leq z$, και ονομάζεται *υπόλειμμα*[124] σε ένα πολλαπλασιαστικό πλέγμα. Η αντιμεταθετικότητα της $*$ μας δίνει τη δυνατότητα να μη χρειάζεται να έχουμε αριστερό και δεξί υπόλειμμα (βλ. θεωρία διατάξεων), θα την προσθέσουμε επομένως ως αίτημα. Η αντιμεταθετικότητα, επίσης, επιδρά στους "επιμεριστικούς νόμους" της *closg* και τους κάνει ταυτόσημους ως έναν επιμεριστικό νόμο.

Ο *Diaconescu* αιτείται πλήρες, αντιμεταθετικό, υπολειμματικό πλέγμα (*complete commutative residuated lattice*) L. Ορίζεται ως πλήρες πλέγμα (με τις $\wedge, \vee$ πράξεις) με επιπλέον διμελή πράξη $*$ η οποία είναι προσεταιριστική με ταυτότητα την απειρία του πλέγματος (δηλαδή $(L, *, I)$ μονοειδές). Η $*$ είναι επίσης αντιμεταθετική και ισχύει 1)$x * y \leq x * z$ αν $y \leq z$, 2)ορίζεται το "υπόλοιπο", δηλαδή το αντικείμενο $x \Rightarrow z$ που ορίζεται από την σχέση $y \leq (x \Rightarrow z) \quad αν - ν \quad x * y \leq z$. Επίσης η $*$ είναι αντιμεταθετική (οπότε δεν έχουμε τη διάκριση σε αριστερά και δεξιά υπόλείμματα).

Ο *Birkhoff*[125] αποδυκνείει πως κάθε *closg* (ονομάζει *cm*-πλέγμα την *closg* χωρίς την ιδιότητα του 0 ως απορροφητικού για την πολλαπλασιαστική πράξη) είναι υπολειματικό πλέγμα, καθώς $\exists z/y \in L$ εφόσον $\exists x \in L$ ώστε $x * y \leq z$ (από τον ορισμό του υπολείματος[126], ο οποίος προκύπτει για να ικανοποιεί αυτό το θεώρημα: $y/z := \bigvee\{x | x * y \leq z\}$, και την επιμεριστική ιδιότητα προκύπτει άμεσα ότι $\bigvee\{x * y\} \leq z$ για όλα τα x με $x * y \leq z$). Ταυτόχρονα $0 * y \leq z \ \forall y, z \in L$, αφού το 0 είναι απορροφητικό.

---

[123] [5b] *LoIC*. Βλέπε τη σημείωση για το πώς τη λογική συνεπαγωγή και το *Modus Ponens* είναι το μέρος των *semantics* που οδηγεί στην ανάγκη ορισμού της πολλαπλασιαστικής πράξης εξάρχής.

[124] Ο συμβολισμός $\Rightarrow$ οφείλεται στο λογικό σύμβολο που αναπαριστά στην ασαφή λογική, στη θεωρία διατάξεων συναντάται ως x/y.

[125] [1] 2η έκδοση αγγ. σ.202, Πόρισμα 2

[126] βλ. προηγούμενο κεφάλαιο τον ορισμό του $\Rightarrow$

6 Βιβλιογραφία

[1]Garret Birkhoff, Lattice Theory, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 15, 1940, 2nd edition, 1948
[2]Razvan Diaconescu, Institutional Semantics for Many Valued Logics, Fuzzy Sets and Systems, vol.218 (σ.32-52), 2013
[3]Hartmut Ehrig; Hans-Jorg Kreowski; Bernd Mahr; Peter Padawitz, Algebraic Implementation of Abstract Data Types, Theoretical Computer Science, vol.20.3 (σ.209-263), 1982
[4]Joseph A. Goguen; Rod M. Burstall, Institutions: Abstract Model Theory for Specification and Programming, Journal of the Association for Computing Machinery, vol.39.1 (σ. 95-146), 1992
[5a]Joseph A. Goguen, L-fuzzy Sets, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol.18.1 (σ.145-174), 1967
[5b]Joseph A. Goguen, The Logic of Inexact Concepts, Synthese, vol.19 (σ.325-373), 1969
[6]F. William Lawvere; Stephen H. Schanuel, Conceptual Mathematics: A First Introduction to Categories, Cambridge University Press, 1997
[7]F. William Lawvere, Adjointness in Foundations, Dialectica, vol.23 (σ. 281-296), 1969
[8]Saunders Mac Lane, Categories for the Working Mathematician, Springer, 1971 (2nd edition 1998), USA
[9]Till Mossakowski; Joseph A. Goguen; Razvan Diaconescu; Andrzej Tarlecki, What is a Logic?, Jean-Yves Beziau (editor), Logica Universalis (σ. 111-133), Springer, 2007
[10]Benjamin C. Pierce, Basic Category Theory for Computer Scientists, MIT Press, 1991, Cambridge; MA; USA
[11]Mehrdad Sabetzadeh, A Category-Theoretic Approach to Representation and Analysis of Incosistency, University of Toronto 2003, (Master's Thesis)
[12]Peter Smith, The Galois Connection Between Syntax and Semantics
[13]Lotfi A. Zadeh, Fuzzy Sets, Information and Control, vol.8.3 (σ.338-353), 1965

Τα $[5a]$, $[5b]$ συχνά, πέρα από την αναφορά του αριθμού τους αναφέρονται αντίστοιχα και ως $L-FS$ και $LoIC$ αντίστοιχα στις υποσημειώσεις.