



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

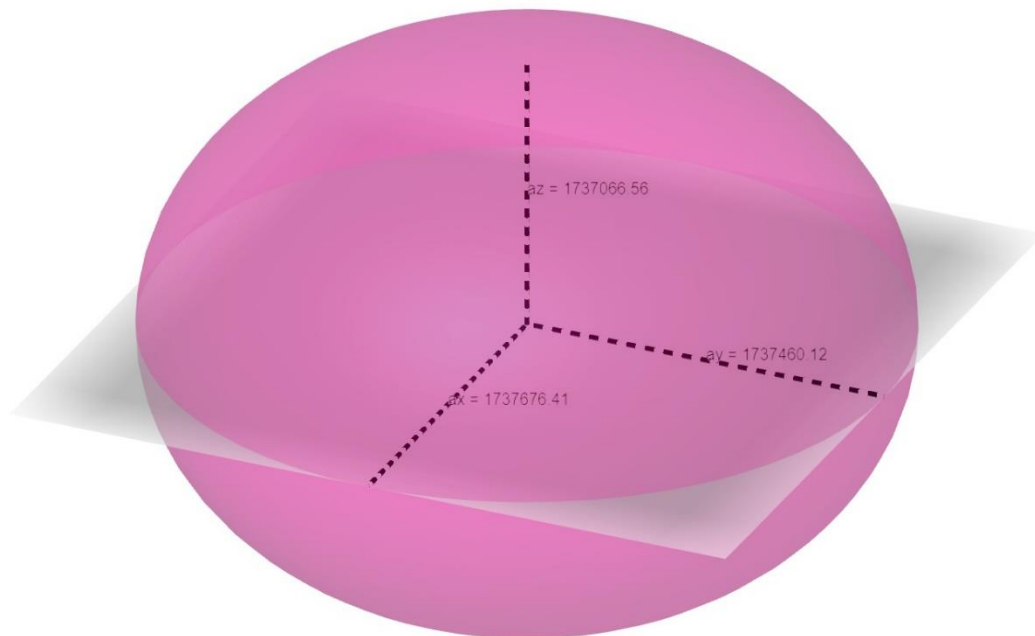
ΣΧΟΛΗ ΑΓΡΟΝΟΜΩΝ ΚΑΙ ΤΟΠΟΓΡΑΦΩΝ

ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ – ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΓΕΩΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΤΟΜΕΑΣ ΤΟΠΟΓΡΑΦΙΑΣ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΣ

**ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΤΟΥ
ΕΛΛΕΙΨΟΕΙΔΟΥΣ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ ΣΤΗΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ
ΤΗΣ ΣΕΛΗΝΗΣ**



Ελισάβετ Κοντού

Διπλωματική Εργασία

Επιβλέπων:

Γεώργιος Πανταζής

Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Ιούλιος 2021



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΑΓΡΟΝΟΜΩΝ ΚΑΙ ΤΟΠΟΓΡΑΦΩΝ

ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ – ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΓΕΩΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΤΟΜΕΑΣ ΤΟΠΟΓΡΑΦΙΑΣ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΣ

**ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΤΟΥ
ΕΛΛΕΙΨΟΕΙΔΟΥΣ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ ΣΤΗΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ
ΤΗΣ ΣΕΛΗΝΗΣ**

Διπλωματική Εργασία

της

Ελισάβετ Κοντού

Επιβλέπων:

Γεώργιος Πανταζής

Καθηγητής ΕΜΠ

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή:

(Υπογραφή)

.....
Γεώργιος Πανταζής
Καθηγητής ΕΜΠ

(Υπογραφή)

.....
Μαρία Τσακίρη
Καθηγήτρια ΕΜΠ

(Υπογραφή)

.....
Ορθοδοξία Αραμπατζή
Επίκουρος Καθηγήτρια ΕΜΠ

Αθήνα, Ιούλιος 2021

(Υπογραφή)

.....

ΕΛΙΣΑΒΕΤ ΚΟΝΤΟΥ

Διπλωματούχος Αγρονόμος και Τοπογράφος Μηχανικός Ε.Μ.Π.

Copyright © Κοντού Ελισάβετ, 2021

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας διπλωματικής εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν στη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τη συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Πλησιάζοντας στο πέρας των σπουδών μου και με την ολοκλήρωσή της διπλωματικής μου εργασίας θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες και την ευγνωμοσύνη μου σε όλους όσοι συνέβαλλαν, άμεσα και έμμεσα, στην προσπάθειά μου.

Οφείλω ένα τεράστιο ευχαριστώ στον Καθηγητή κ. Γεώργιο Πανταζή και τον Δρ. Αγρονόμο & Τοπογράφο Μηχανικό κ. Γεώργιο Πάνου για την εμπιστοσύνη που μου έδειξαν διατυπώνοντας και αναθέτοντάς μου ένα τόσο ενδιαφέρον, πρωτότυπο και απαιτητικό θέμα. Η βοήθεια, η στήριξη και η καθοδήγηση που μου προσέφεραν ήταν κομβικής σημασίας για την εκπόνηση αυτής της εργασίας, ενώ το απaráμιλλο επιστημονικό και παιδαγωγικό τους ήθος συνέβαλλαν στο χτίσιμο μίας πολύτιμης διδακτικής εμπειρίας.

Ακόμη, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου, η οποία αποτελεί τη μόνιμη πηγή έμπνευσής μου.

Ελισάβετ Κοντού

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η Σελήνη είναι το πρώτο ουράνιο σώμα – μετά τη Γή – που απασχόλησε τον άνθρωπο τόσο από την οπτική γωνία του επιστημονικού ενδιαφέροντος, όσο και από την πολιτιστική και κοινωνική οπτική γωνία. Αποτέλεσε, επιπλέον, την πρώτη αφορμή για την έξοδο του ανθρώπου από το πεδίο βαρύτητας της Γης και το πρώτο μέρος εκτός αυτής που εκείνος «πάτησε το πόδι του». Στη σημερινή εποχή, πληθώρα διεθνών και εμπορικών οργανισμών αποσκοπούν σε νέες επανδρωμένες αποστολές προς τη Σελήνη, σε δημιουργία τηλεπικοινωνιακών δικτύων που θα συνδέουν τη Γη με το φεγγάρι της και ακόμη και στην κατασκευή κατοικήσιμων δομών στην επιφάνειά του.

Επιπρόσθετα, η περιγραφή ενός ουράνιου σώματος χρησιμοποιώντας μαθηματικές επιφάνειες είναι κάτι που απασχόλησε τον τοπογράφο μηχανικό από τις πρώτες μελέτες της επιφάνειας της Γης και συνοδεύει το επάγγελμά του έως σήμερα. Επιπλέον, οποιοδήποτε μέρος – εντός ή εκτός Γης – πρόκειται να φιλοξενήσει ανθρώπινη ζωή ή/ και να εξερευνηθεί από τον άνθρωπο, απαιτεί την παρουσία τοπογράφου μηχανικού: ο τοπογράφος είναι εκείνος που θα μελετήσει τη φυσική επιφάνεια ενός σώματος, θα χαρτογραφήσει μία περιοχή, θα μελετήσει το πεδίο βαρύτητας και τις γεωφυσικές συνθήκες του, θα αναπτύξει μία μέθοδο προσανατολισμού και, μετέπειτα, ένα σύστημα αναφοράς για το – έως τότε – άγνωστο σώμα.

Για τους προαναφερόμενους λόγους, η ανάπτυξη μίας μεθόδου προσαρμογής μαθηματικών επιφανειών, η οποία μπορεί να εφαρμοστεί στη Σελήνη, σε άλλους φυσικούς δορυφόρους, αλλά και οποιοδήποτε τριδιάστατο νέφος σημείων, αφορά εξ ολοκλήρου τον τοπογράφο μηχανικό, ενώ μπορεί να βοηθήσει σημαντικά στην επικείμενη εξερεύνηση της Σελήνης και να ανοίξει τον δρόμο για όμοιες μελέτες άλλων φεγγαριών και ουράνιων σωμάτων ενδιαφέροντος.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ	II
ΠΡΟΛΟΓΟΣ	IV
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ	VI
ΕΙΚΟΝΕΣ	IX
ΣΧΗΜΑΤΑ	IX
ΠΙΝΑΚΕΣ	XI
ΠΕΡΙΛΗΨΗ	XII
ABSTRACT	XV
ΕΙΣΑΓΩΓΗ	1
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1	3
1.1 Θεωρητικό Υπόβαθρο	3
1.2 Η Σελήνη	5
1.2.1 Σχηματισμός της Σελήνης	6
1.2.2 Τροχιά της Σελήνης – Σεληνιακές Φάσεις	6
1.2.3 Σχήμα, Μέγεθος, Εσωτερική Δομή, Γεωλογία και Τοπογραφία	8
1.2.4 Ατμόσφαιρα – Μαγνητόσφαιρα	13
1.2.5 Σεληνιακό Βαρυτικό Πεδίο	13
1.2.6 Νερό στη Σελήνη	14
1.2.7 Παρατήρηση & Εξερεύνηση της Σελήνης	15
1.3 Βιβλιογραφική Ανασκόπηση	19
1.4 Επικαιρότητα	20
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2	23
ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ – ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ	23
2.1 Ορισμός και Περιγραφή Δεδομένων	23
2.2 Επεξεργασία Δεδομένων	28
2.3 Γεωμετρική Απεικόνιση Μοντέλων	31
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3	41
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΕΛΛΕΙΨΟΕΙΔΟΥΣ	41

3.1 Μη Γραμμικά Μοντέλα Ελλειψοειδούς	41
3.1.1 Γενική Καρτεσιανή Εξίσωση Ελλειψοειδούς	41
3.1.2 Ειδική Περίπτωση T_2	44
3.1.3 Ειδική Περίπτωση T_3	45
3.1.4 Ειδική Περίπτωση T_4	46
3.2 Εκφυλισμένες Περιπτώσεις	47
3.2.1 Ελλειψοειδές εκ περιστροφής	47
3.2.1.1 Γενική καρτεσιανή εξίσωση ελλειψοειδούς εκ περιστροφής	48
3.2.2 Ειδική περίπτωση O_2	50
3.2.3 Ειδική περίπτωση O_3	51
3.2.4 Ειδική Περίπτωση O_4	52
3.2.5 Σφαίρα	53
3.3 Γραμμικά Μοντέλα Ελλειψοειδούς – Εύρεση προσωρινών τιμών	54
3.3.1 Τριαξονικό Ελλειψοειδές	54
3.3.2 Ειδική Περίπτωση T_2	61
3.3.3 Ειδική Περίπτωση T_3	63
3.3.4 Ειδική Περίπτωση T_4	67
3.4 Εκφυλισμένες Περιπτώσεις	68
3.4.1 Ελλειψοειδές εκ περιστροφής	68
3.4.2 Ειδική Περίπτωση O_2	69
3.4.3 Ειδική Περίπτωση O_4	72
3.4.4 Σφαίρα	73
3.4.5 Ειδική Περίπτωση S_2	75
3.5 Σύνοψη	76
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4	77
ΜΕΘΟΔΟΙ ΣΥΝΟΡΘΩΣΗΣ	77
4.1 Γενικά	77
4.2 Γενική Μέθοδος Συνόρθωσης	78
4.3 Μέθοδος Εμμέσων Παρατηρήσεων	82
4.4 Γραμμική Ελαχιστοτετραγωνική Προσαρμογή	83
4.4.1 Γενική Καρτεσιανή Εξίσωση Ελλειψοειδούς	84
4.4.2 Ειδική περίπτωση T_2	85
4.4.3 Ειδική Περίπτωση T_3	86
4.4.4 Ειδική Περίπτωση T_4	87

4.4.5 Εκφυλισμένες Περιπτώσεις	88
4.4.5.1 Ελλειψοειδές εκ περιστροφής	88
4.4.5.1.1 Ειδική Περίπτωση O_2	88
4.4.5.1.2 Ειδική Περίπτωση O_4	89
4.4.5.2 Σφαίρα	90
4.4.5.2.1 Ειδική Περίπτωση S_2	90
4.5 Μη Γραμμική Ελαχιστοτετραγωνική Προσαρμογή	91
4.5.1 Γενική Καρτεσιανή Εξίσωση Ελλειψοειδούς	91
4.5.1.1 Ειδική Περίπτωση T_2	94
4.5.1.2 Ειδική Περίπτωση T_3	95
4.5.1.3 Ειδική Περίπτωση T_4	96
4.5.2 Εκφυλισμένες Περιπτώσεις	96
4.5.2.1 Ελλειψοειδές εκ περιστροφής	97
4.5.2.2 Ειδική περίπτωση O_2	98
4.5.2.3 Ειδική περίπτωση O_3	99
4.5.2.4 Ειδική Περίπτωση O_4	100
4.5.3 Σφαίρα	101
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5	103
ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ	103
5.1 Περιγραφή της Προσαρμογής Μαθηματικών Μοντέλων στα Μοντέλα Σφαιρικών Αρμονικών	103
5.2 Επιλογή Ανάλυσης Μοντέλων Σφαιρικών Αρμονικών – Επιλογή Προσωρινών Τιμών	104
5.3 Επιλογή Κατάλληλου Μαθηματικού Μοντέλου Ελλειψοειδούς	106
5.4 Προσαρμογή Ελλειψοειδούς T_4	110
5.5 Επιλογή Τελικού Ελλειψοειδούς Προσαρμογής στην Επιφάνεια της Σελήνης	115
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6	117
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ	117
6.1 Συμπεράσματα	117
6.2 Προτάσεις	123
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	124
ΙΣΤΟΓΡΑΦΙΑ	126

EΙΚΟΝΕΣ

<u>Εικόνα 1.1:</u> Το αποτύπωμα του αστροναύτη Neil Armstrong στη Σελήνη (https://www.nasa.gov/).....	5
<u>Εικόνα 1.2:</u> "Έναστρο Νύχτα", Vincent Van Gogh (el.wikipedia.org/wiki/Έναστρο_Νύχτα)	6
<u>Εικόνα 1.3:</u> Η τροχιά της Σελήνης και οι Σεληνιακές Φάσεις (https://solarsystem.nasa.gov/).....	8
<u>Εικόνα 1.4:</u> Εσωτερική Δομή της Σελήνης (el.wikipedia.org/wiki/Σελήνη)	9
<u>Εικόνα 1.5:</u> Εικόνα 1.5: Ο κρατήρας Tycho από την αποστολή Lunar Orbiter 4, 1967 (en.wikipedia.org/wiki/Tycho_(lunar_crater))	10
<u>Εικόνα 1.6:</u> Κρατήρας Clavius (en.wikipedia.org/wiki/Clavius_(crater))	14
<u>Εικόνα 1.7:</u> Mappa Selenographica (davidrumsey.com).....	16
<u>Εικόνα 1.8:</u> Σημεία προσγείωσης αποστολών προς τη Σελήνη (https://solarsystem.nasa.gov/).....	18
<u>Εικόνα 3.1:</u> Ελλειψοειδές σφάλματος με κέντρο το (0,0,0).....	58
<u>Εικόνα 5.1:</u> Ελλειψοειδές Αναφοράς από το μοντέλο GLGM-1	110
<u>Εικόνα 5.2:</u> Τριαξονικό Ελλειψοειδές Προσαρμογής της Σελήνης	116
<u>Εικόνα 6.1:</u> Ελλειψοειδές Προσαρμογής στην Επιφάνεια της Σελήνης	122

ΣΧΗΜΑΤΑ

<u>Σχήμα 1.1:</u> Τοπογραφικός Χάρτης Σελήνης (en.wikipedia.org/wiki/Moon)	12
<u>Σχήμα 1.2:</u> Γεωλογικά Χαρακτηριστικά της Σελήνης (en.wikipedia.org/wiki/Moon)	12
<u>Σχήμα 1.3:</u> Χάρτης του σεληνιακού βαρυτικού πεδίου, αποστολή GRAIL (en.wikipedia.org/wiki/Moon)	13
<u>Σχήμα 2.1:</u> Γεωμετρική Απεικόνιση Μοντέλου GLGM-1, Grid $2^{\circ}.57x2^{\circ}.57$ (icgem.gfz-potsdam.de/home).....	31
<u>Σχήμα 2.2:</u> Γεωμετρική Απεικόνιση Μοντέλου GLGM-2, Grid $2^{\circ}.57x2^{\circ}.57$ (icgem.gfz-potsdam.de/home).....	32
<u>Σχήμα 2.3:</u> Γεωμετρική Απεικόνιση Μοντέλου JGL075D1, Grid $2^{\circ}.40x2^{\circ}.40$ (icgem.gfz-potsdam.de/home).....	32

<u>Σχήμα 2.4:</u> Γεωμετρική Απεικόνιση Μοντέλου JGL075G1, Grid 2°.40x2°.40 (icgem.gfz-potsdam.de/home).....	33
<u>Σχήμα 2.5:</u> Γεωμετρική Απεικόνιση Μοντέλου JGL100J1, Grid 1°.80x1°.80 icgem.gfz-potsdam.de/home).....	33
<u>Σχήμα 2.6:</u> Γεωμετρική Απεικόνιση Μοντέλου JGL100K1, Grid 1°.80x1°.80 (icgem.gfz-potsdam.de/home).....	34
<u>Σχήμα 2.7:</u> Γεωμετρική Απεικόνιση Μοντέλου JGL150Q1, Grid 1°.20x1°.20 (icgem.gfz-potsdam.de/home).....	34
<u>Σχήμα 2.8:</u> Γεωμετρική Απεικόνιση Μοντέλου JGL165P1, Grid 1°.09x1°.09 (icgem.gfz-potsdam.de/home).....	35
<u>Σχήμα 2.9:</u> Γεωμετρική Απεικόνιση Μοντέλου GL0660B, Grid 0°.27x0°.27 (icgem.gfz-potsdam.de/home).....	35
<u>Σχήμα 2.10:</u> Γεωμετρική Απεικόνιση Μοντέλου GRGM660PRIM, Grid 0°.27x0°.27 (icgem.gfz-potsdam.de/home).....	36
<u>Σχήμα 2.11:</u> Γεωμετρική Απεικόνιση Μοντέλου AIUB-GRL200A, Grid 0°.90x0°.90 (icgem.gfz-potsdam.de/home).....	36
<u>Σχήμα 2.12:</u> Γεωμετρική Απεικόνιση Μοντέλου AIUB-GRL200B, Grid 0°.90x0°.90 (icgem.gfz-potsdam.de/home).....	37
<u>Σχήμα 2.13:</u> Γεωμετρική Απεικόνιση Μοντέλου GrazLGM300c, Grid 0°.60x0°.60 (icgem.gfz-potsdam.de/home).....	37
<u>Σχήμα 2.14:</u> Γεωμετρική Απεικόνιση Μοντέλου GrazLGM420a, Grid 0°.43x0°.43 (icgem.gfz-potsdam.de/home).....	38
<u>Σχήμα 2.15:</u> Γεωμετρική Απεικόνιση Μοντέλου GrazLGM420b, Grid 0°.43x0°.43 (icgem.gfz-potsdam.de/home).....	38
<u>Σχήμα 2.16:</u> Γεωμετρική Απεικόνιση Μοντέλου GrazLGM420b+, Grid 0°.43x0°.43 (icgem.gfz-potsdam.de/home).....	39
<u>Σχήμα 5.1:</u> Διαχρονική Εξέλιξη Άξονα a_x του Ελλειψοειδούς Προσαρμογής.....	113
<u>Σχήμα 5.2:</u> Διαχρονική Εξέλιξη Άξονα a_y του Ελλειψοειδούς Προσαρμογής.....	113
<u>Σχήμα 5.3:</u> Διαχρονική Εξέλιξη Άξονα a_z του Ελλειψοειδούς Προσαρμογής.....	114
<u>Σχήμα 5.4:</u> Διαχρονική Εξέλιξη Ποιότητας Προσαρμογής.....	114
<u>Σχήμα 5.5:</u> Διαχρονική Σύγκριση των Τριών Αξόνων του Ελλειψοειδούς Προσαρμογής.....	115
<u>Σχήμα 6.1:</u> Διαχρονική σύγκριση των τριών αξόνων του ελλειψοειδούς προσαρμογής στην επιφάνεια της Σελήνης.....	120
<u>Σχήμα 6.2:</u> Διαχρονική εξέλιξη ποιότητας προσαρμογής.....	121

ΠΙΝΑΚΕΣ

<u>Πίνακας 2.1:</u> Μοντέλα σφαιρικών αρμονικών του σεληνιακού πεδίου βαρύτητας	25
<u>Πίνακας 2.2:</u> Χωρική Ανάλυση & Ακρίβεια μοντέλων σφαιρικών αρμονικών του σεληνιακού πεδίου βαρύτητας	28
<u>Πίνακας 2.3:</u> Μέγιστη Πυκνότητα Επιλεγμένων Μοντέλων Σφαιρικών Αρμονικών	29
<u>Πίνακας 3.1:</u> Ειδικές περιπτώσεις τριαξονικού ελλειψοειδούς.....	43
<u>Πίνακας 3.2:</u> Ειδικές περιπτώσεις ελλειψοειδούς εκ περιστροφής.....	47
<u>Πίνακας 3.3:</u> Ειδικές περιπτώσεις σφαίρας.....	53
<u>Πίνακας 3.4:</u> Σύνοψη Μαθηματικών Μοντέλων.....	76
<u>Πίνακας 5.1:</u> Αποτελέσματα συνόρθωσης μαθηματικού μοντέλου T1 στα δεδομένα του μοντέλου GLGM-1, $2^{\circ}.57 \times 2^{\circ}.57$	104
<u>Πίνακας 5.2:</u> Αποτελέσματα συνόρθωσης μαθηματικού μοντέλου T1 στα δεδομένα του μοντέλου GLGM-1, $10^{\circ} \times 10^{\circ}$	105
<u>Πίνακας 5.3:</u> Προσωρινές τιμές προσαρμογής όλων των μαθηματικών μοντέλων ελλειψοειδούς στο μοντέλο σφαιρικών αρμονικών GLGM-1 ($10^{\circ} \times 10^{\circ}$).....	107
<u>Πίνακας 5.4:</u> Τελικές τιμές προσαρμογής όλων των μαθηματικών μοντέλων ελλειψοειδούς στο μοντέλο σφαιρικών αρμονικών GLGM-1 ($10^{\circ} \times 10^{\circ}$).....	107
<u>Πίνακας 5.5:</u> Προσωρινές τιμές προσαρμογής όλων των μαθηματικών μοντέλων ελλειψοειδούς εκ περιστροφής στο μοντέλο σφαιρικών αρμονικών GLGM-1 ($10^{\circ} \times 10^{\circ}$).....	108
<u>Πίνακας 5.6:</u> Τελικές τιμές προσαρμογής όλων των μαθηματικών μοντέλων ελλειψοειδούς εκ περιστροφής στο μοντέλο σφαιρικών αρμονικών GLGM-1 ($10^{\circ} \times 10^{\circ}$).....	108
<u>Πίνακας 5.7:</u> Προσωρινές τιμές προσαρμογής όλων των μαθηματικών μοντέλων σφαίρας στο μοντέλο σφαιρικών αρμονικών GLGM-1 ($10^{\circ} \times 10^{\circ}$).....	109
<u>Πίνακας 5.8:</u> Τελικές τιμές προσαρμογής όλων των μαθηματικών μοντέλων σφαίρας στο μοντέλο σφαιρικών αρμονικών GLGM-1 ($10^{\circ} \times 10^{\circ}$).....	109
<u>Πίνακας 5.9:</u> Αποτελέσματα προσαρμογής ελλειψοειδούς T4 σε όλα τα επιλεγμένα μοντέλα σφαιρικών αρμονικών	111
<u>Πίνακας 6.1:</u> Συνοπτική παρουσίαση μοντέλων σφαιρικών αρμονικών του σεληνιακού πεδίου βαρύτητας.....	117

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Αντικείμενο της παρούσας διπλωματικής εργασίας αποτελεί ο προσδιορισμός των παραμέτρων του ελλειψοειδούς προσαρμογής στην επιφάνεια της Σελήνης. Η προσαρμογή αυτή πραγματοποιείται σε δεδομένα τα οποία αφορούσαν στο σεληνιακό πεδίο βαρύτητας με χρήση της Μεθόδου Ελαχίστων Τετραγώνων.

Στόχος της εργασίας αυτής δεν είναι μόνο η περιγραφή της επιφάνειας της Σελήνης μέσω μίας απλής μαθηματικής επιφάνειας, όπως είναι το ελλειψοειδές, αλλά και η ανάπτυξης μίας μεθόδου προσαρμογής τέτοιων επιφανειών, η οποία να δύναται να εφαρμοστεί και σε άλλα ουράνια σώματα, όπως φυσικοί δορυφόροι, πλανήτες, κ.α., αλλά και σε κάθε τριδιάστατο νέφος σημείων και με χρήση διαφορετικών ειδών δεδομένων.

Η συγκεκριμένη διπλωματική εργασία αποτελείται στο σύνολο της από έξι (6) κεφάλαια, τα οποία συνοψίζονται ως εξής:

- **Στο πρώτο κεφάλαιο** δίνονται στον αναγνώστη όλα τα απαραίτητα θεωρητικά εφόδια για την κατανόησή της. Επιπλέον, αναφέρονται βασικά στοιχεία για την εσωτερική και εξωτερική δομή της Σελήνης και παρουσιάζεται το χρονικό εξερεύνησής της. Στη συνέχεια, πραγματοποιείται μία σύντομη βιβλιογραφική ανασκόπηση, όπου και περιγράφονται προηγούμενες μελέτες που ενέπνευσαν και βοήθησαν στην εκπόνηση της παρούσας εργασίας. Τέλος, δίνεται έμφαση στην επικαιρότητα του εξεταζόμενου θέματος.
- **Στο δεύτερο κεφάλαιο** πραγματοποιείται μίας εκτενής ανάλυση των δεδομένων που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα διπλωματική εργασία. Αναλυτικότερα, δίνεται μία πλήρης επεξήγηση του είδους δεδομένων που χρησιμοποιήθηκαν, τα οποία είναι μοντέλα σφαιρικών αρμονικών του σεληνιακού πεδίου βαρύτητας και αναφέρονται στο σχεδόν – γεωειδές της Σελήνης, και παρουσιάζονται όλα τα υπόλοιπα απαραίτητα στοιχεία που τα αφορούν, όπως είναι οι πηγές κι η ακρίβειά τους. Φυσικά, περιγράφεται και κάθε βήμα της επεξεργασίας των δεδομένων.
- **Στο τρίτο κεφάλαιο** αναπτύσσεται το γενικό μαθηματικό μοντέλο ενός τριαξονικού ελλειψοειδούς και κάθε ειδική και εκφυλισμένη περίπτωση αυτού, όπως προκύπτει από αφαίρεση κάποιων παραμέτρων του, σε μη γραμμική και γραμμική μορφή – όπου αυτό είναι δυνατό.

- **Στο τέταρτο κεφάλαιο** περιγράφονται οι μέθοδοι συνόρθωσης που επρόκειτο να χρησιμοποιηθούν: η γενική μέθοδος και η μέθοδος εμμέσεων παρατηρήσεων. Συγκεκριμένα, η μέθοδος εμμέσεων παρατηρήσεων χρησιμοποιήθηκε για τη συνόρθωση των γραμμικών μοντέλων, με στόχο την εύρεση των προσωρινών τιμών των παραμέτρων του ελλειψοειδούς για την μετέπειτα προσαρμογή των μη γραμμικών μοντέλων στα δεδομένα με χρήση της γενικής μεθόδου. Στο κεφάλαιο αυτό, οι δύο μέθοδοι περιγράφονται αναφορικά με τη γενική τους θεωρία και εφαρμοσμένες σε κάθε μαθηματικό μοντέλο του τρίτου κεφαλαίου.
- **Στο πέμπτο κεφάλαιο** παρουσιάζονται και περιγράφονται τα αποτελέσματα όλων των πειραμάτων προσαρμογής που πραγματοποιήθηκαν κατά τη διάρκεια της εκπόνησης αυτής της διπλωματικής εργασίας. Συγκεκριμένα, εκτελέστηκαν δύο (2) πειράματα που σχετίζονταν με την απαιτούμενη ανάλυση των δεδομένων, δέκα (10) πειράματα που αφορούσαν στην επιλογή του καταλληλότερου μαθηματικού μοντέλου ελλειψοειδούς για την περιγραφή της επιφάνειας της Σελήνης και, τέλος, δεκαέξι (16) πειράματα προσαρμογής του προηγούμενου μοντέλου σε διαφορετικά δεδομένα, με στόχο την επιλογή των βέλτιστων τιμών των παραμέτρων του.
- **Στο έκτο και τελευταίο κεφάλαιο** παρουσιάζονται τα συμπεράσματα που προέκυψαν από την ολοκλήρωση της παρούσας διπλωματικής εργασίας, τα προβλήματα που προέκυψαν κατά τη διάρκεια της εκπόνησής της και οι πιθανές λύσεις τους, καθώς και προτάσεις για μεταγενέστερες έρευνες επί του θέματος.

Η παρούσα μελέτη έδωσε ως αποτέλεσμα το εξής ελλειψοειδές προσαρμογής στην επιφάνεια της Σελήνης: ένα τριαξονικό ελλειψοειδές με άξονες μήκους $\alpha_x = 1737677.033 \pm 9.318$ m, $\alpha_y = 1737460.737 \pm 9.643$ m και $\alpha_z = 1737065.986 \pm 5.322$ m και μηδενικές στροφές και μεταθέσεις ως προς το κέντρο αυτών. Οι τιμές αυτών των παραμέτρων προέκυψαν από την προσαρμογή του μαθηματικού μοντέλου τριαξονικού ελλειψοειδούς μηδενικών στροφών και μεταθέσεων στο μοντέλο σφαιρικών αρμονικών GLGM-2, χρονολογίας 1994 και ανάλυσης $10^\circ \times 10^\circ$.

Επιπλέον, συμπεραίνεται πως η ενδεχόμενη χρήση των μοντέλων σφαιρικών αρμονικών του σεληνιακού πεδίου βαρύτητας στη μέγιστη ανάλυσή τους θα έδινε μία ρεαλιστικότερη εικόνα της πραγματικότητας,

ενώ πιθανότατα βέλτιστη θα ήταν η προσαρμογή σε κάποιο πιο πρόσφατο μοντέλο βαρύτητας. Για τον λόγο αυτό, προτείνεται η επανάληψη της περιγραφόμενης έρευνας με χρήση των δεδομένων στην κατάλληλη ανάλυση ή/ και σε πιο ρεαλιστικό κάρναβο βάσει των αποστάσεων των σημείων ή η εκτέλεση διαδοχικών συνορθώσεων με πρόσθεση νέων δεδομένων σε κάθε μία από αυτές ή/ και η χρήση κατάλληλων βαρών στα δεδομένα.

Τέλος, η μέθοδος που περιγράφεται στην παρούσα διπλωματική εργασία μπορεί να έχει διάφορες μελλοντικές εφαρμογές. Για παράδειγμα, πέραν της επανάληψης της μελέτης με πληρέστερα δεδομένα, θα μπορούσαν να πραγματοποιηθούν προσαρμογές μαθηματικών επιφανειών στα δύο αντίθετα ημισφαίρια της Σελήνης, καθότι είναι γνωστό πως αυτά χαρακτηρίζονται από έντονες τοπογραφικές μεταβολές. Ακόμη, μία ενδιαφέρουσα προσέγγιση θα ήταν η χρήση διαφορετικών ειδών δεδομένων αντί των μοντέλων βαρύτητας, όπως είναι δεδομένα που αφορούν στην τοπογραφία της Σελήνης και αναφέρονται, άρα, στη φυσική σεληνιακή επιφάνεια, και η σύγκριση των αποτελεσμάτων με προηγούμενες έρευνες. Δεν πρέπει, όμως, να ξεχνάει κανείς πως η μέθοδος που αναπτύχθηκε έχει εφαρμογές και εκτός της Σελήνης, καθώς μπορεί να ανταποκριθεί σε κάθε άλλο ουράνιο σώμα όπου υπάρχουν τα απαραίτητα δεδομένα ή/ και κάθε τριδιάστατο νέφος σημείων.

Determination of the parameters of the fitting ellipsoid on the lunar surface

ABSTRACT

The object of this diploma thesis is the determination of the parameters of the fitting ellipsoid on the lunar surface. In this case, the adjustment was executed using data concerning the lunar gravity field and the Least Squares Method.

The purpose of the research conducted during the elaboration of this diploma thesis was, not only to determine a mathematical surface that could successfully describe the Moon's surface but to also develop a method to do so on other celestial bodies and 3D cloud – points with the use of different types of data.

This diploma thesis consists of six (6) chapters in total, which can be summarized as such:

- **In the first chapter**, the reader is presented with the sum of theoretical supplies needed to fully comprehend the scientific text. In addition, basic facts about the external and internal structure of the Moon are presented, as well as a brief historic analysis of the Moon's exploration. Subsequently, a bibliographic review of all the previous published research papers which inspired and contributed to this thesis is carried out. Lastly, emphasis is placed on the timeliness of the subject matter.
- **The second chapter** presents an extensive analysis of the data used in this thesis. Moreover, a theoretical explanation of the data type – spherical harmonical model of the lunar gravity field referent to the Moon's quasi – geoid – is given, alongside all the needed characteristics of the chosen models (source, accuracy, etc.). At last, all the steps of the data processing are noted in full detail.
- **The third chapter** describes the general mathematical model of the triaxial ellipsoid and its special and degenerate cases, which are developed by subtracting some of its parameters, in non – linear and linear form – where possible.

- **The fourth chapter** contains the description of the adjustment methods used in this thesis: the general method and the method of indirect observations. In more detail, the second method is used for the adjustment of the linear models, providing the approximate values of the ellipsoid's parameters used during the adjustment of the non – linear models with the general method. Both of those adjustment methods are described from a theoretical point of view and specifically applied to each mathematical model from the previous chapter.
- **The fifth chapter** presents and describes the results of all the experiments carried out during this diploma thesis. Specifically, one of the conducted experiments was aiming at the estimation of the needed data's accuracy, ten (10) were concerning the selection of the best fitted mathematical model, and sixteen (16) were carried out using different spherical harmonic models in order to determine the most accurate parameters' values.
- **The sixth and last chapter** contains the conclusions drawn upon the completion of this diploma thesis, the problems faced during its execution, and their possible solutions and suggestions for future research endeavors concerning this subject matter.

This particular study resulted in the following ellipsoid as the one best fitted on the lunar surface: a triaxial ellipsoid with its respected axials' lengths equal to $\alpha_x = 1737677.033 \pm 9.318$ m, $\alpha_y = 1737460.737 \pm 9.643$ m and $\alpha_z = 1737065.986 \pm 5.322$ m, each rotation angle equal to zero, and with its center coordinates being (0, 0, 0). The previous values were estimated by adjusting the mathematical model described to the spherical harmonic model GLGM-2 of the year 1994 and a resolution of $10^\circ \times 10^\circ$.

However, it is concluded that the possible use of the gravity models with their highest resolution could provide a more realistic result and would most probably qualify an adjustment to a more recent gravity model as the best one. For that reason, a repetition of these experiments with the use of data with a more suitable resolution and/ or a more realistic grid based on the points' range and/ or the conductions of consecutive adjustments with the addition of extra data in each one and/ or the use of suitable weights to the data.

Finally, the method described in this diploma thesis has a plethora of potential future applications. For example and except the repetition of the conducted experiments using more realistic data, one interesting application could be the adjustment of different ellipsoid models to the two opposite hemispheres of the Moon, as it is well known that they show very different topographies. Moreover, the use of a different type of data referent to other surfaces of the moon, i.e. the physical lunar surface and its topography, could provide even more inclusive results and the opportunity for comparison to earlier studies. Of course, it should not be forgotten that the examined method is not limited to the lunar surface and can be applied to any celestial body, provided the existence of the needed data, and any 3D point – cloud.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το πρόβλημα προσαρμογής μαθηματικών μοντέλων, όπως είναι το τριαξονικό ελλειψοειδές, σε επιφάνειες ενδιαφέροντος είναι κάτι που απασχολεί το επιστημονικό πεδίο του τοπογράφου, ενώ έχει επιλυθεί με χρήση πληθώρα μεθόδων, η κάθε μία με τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματά της. Επιπλέον, η ανάγκη για τη βέλτιστη περιγραφή της επιφάνειας της Σελήνης γίνεται όλο και πιο επιτακτική, ακολουθώντας την αύξηση του επιστημονικού ενδιαφέροντος προς το ουράνιο αυτό σώμα και την επιθυμία για *in situ* εξερεύνηση και επίσκεψη αυτού.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία, περιγράφεται μία μέθοδος προσαρμογής μη γραμμικών μοντέλων τριαξονικών ελλειψοειδών με χρήση της γενικής μεθόδου συνόρθωσης, λαμβάνοντας τις προσωρινές τιμές των παραμέτρων του ελλειψοειδούς από την συνόρθωση γραμμικών μοντέλων της ίδιας μαθηματικής επιφάνειας με τη μέθοδο των εμμέσων παρατηρήσεων. Λόγω της τρέχουσας επικαιρότητας, η μέθοδος αυτή εφαρμόστηκε στην επιφάνεια της Σελήνης μέσω μοντέλων σφαιρικών αρμονικών του πεδίου βαρύτητάς της.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

1.1 Θεωρητικό Υπόβαθρο

Αρχικά, δίνονται οι ορισμοί βασικών όρων και εννοιών που συναντώνται στην παρούσα διπλωματική εργασία με στόχο την πλήρη κατανόηση του κειμένου από τον αναγνώστη.

- *Φεγγάρι* : Φεγγάρι ή φυσικός δορυφόρος αποτελούν μικρά αστρονομικά σώματα, τα οποία κινούνται σε τροχιά γύρω από έναν πλανήτη.
- *Επιφάνεια αναφοράς* : Επιφάνεια αναφοράς αποτελεί ένα μαθηματικό μοντέλο (π.χ. σφαίρα, ελλειψοειδές εκ περιστροφής, κ.α.) που χρησιμοποιείται βοηθητικά για την περιγραφή της φυσικής επιφάνειας ενός σώματος, όπως είναι η Γη και η Σελήνη.
- *Έλξη και Δυναμικό* : Σύμφωνα με το νόμο της παγκόσμιας έλξης του Newton δύο σώματα με μάζες m_1 , m_2 που βρίσκονται σε απόσταση l , έλκουν το ένα το άλλο με μία δύναμη:

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{l^2} \quad (1.1)$$

Η δύναμη αυτή έχει διεύθυνση κατά μήκος της ευθείας που συνδέει τα δύο σώματα, όπου G η σταθερά έλξης του Newton. (B. Hofmann, W. H. Moritz, 2006). Ονομάζοντας τις μάζες έλκουσα και ελκόμενη, αντίστοιχα, και θέτοντας την ελκόμενη μάζα ίση με τη μονάδα και την έλκουσα ίση με m , λαμβάνεται ο τύπος

$$F = G \cdot \frac{m}{l^2} \quad (1.2)$$

απ' όπου προκύπτει το δυναμικό έλξης V του σώματος μάζας m :

$$V = G \cdot \frac{m}{l} \quad (1.3)$$

- *Ισοδυναμική ή Χωροσταθμική Επιφάνεια* : Ισοδυναμική ή χωροσταθμική ονομάζεται μία επιφάνεια του πεδίου βαρύτητας ενός σώματος (λ.χ. γήινου πεδίου βαρύτητας) πάνω στην οποία η τιμή του δυναμικού είναι σταθερή.

- *Βαρύτητα* : Βαρύτητα ονομάζεται η συνολική δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα σε κατάσταση ηρεμίας στην επιφάνεια ενός σώματος (λ.χ. της Γης ή της Σελήνης) (B. Hofmann, W. H. Moritz, 2006).
- *Γεωειδές* : Γεωειδές ονομάζεται η ισοδυναμική επιφάνεια του πραγματικού γήινου πεδίου βαρύτητας που πλησιάζει περισσότερο τη «φυσική πραγματικότητα». (Ε. Λάμπρου, Γ. Πανταζής, 2010).
- *Ελλειψοειδές εκ περιστροφής* : Το ελλειψοειδές εκ περιστροφής είναι μία μαθηματική επιφάνεια η οποία δημιουργείται από την περιστροφή μίας έλλειψης γύρω από τον μικρό άξονά της. (Ε. Λάμπρου, Γ. Πανταζής, 2010).
- *Σχεδόν Γεωειδές* : Ως «σχεδόν – γεωειδές» ορίζεται η επιφάνεια που απέχει ένα υψόμετρο ζ (ανωμαλία υψομέτρου ζ) από το ελλειψοειδές αναφοράς. (Γ. Βέης, Χ. Μπιλλήρης, Κ. Παπαζήση, 2011). Το υψόμετρο αυτό μπορεί να υπολογιστεί και να χαρτογραφηθεί με ακρίβεια ως προς κάποιο γνωστό ελλειψοειδές αναφοράς. Η επιφάνεια αυτή προτάθηκε από τον Molodensky με στόχο την ανεξαρτητοποίηση των υψομέτρων από τη γνώση της εσωτερικής πυκνότητας των τοπογραφικών μαζών, αλλά δεν έχει καμία φυσική έννοια, πρόκειται για μία μαθηματική επιφάνεια που χρησιμοποιείται ως αφετηρία ενός είδους υψομέτρων.
- *Συνόρθωση* : Συνόρθωση ονομάζεται η διαδικασία απόδοσης μίας και μοναδικής τιμής στα μεγέθη που ενδιαφέρουν χρησιμοποιώντας όλες τις διαθέσιμες μετρήσεις, όταν αυτές είναι περισσότερες από τις απαραίτητες.
- *Ανεξάρτητες καθοριστικές παράμετροι* : Ανεξάρτητες καθοριστικές παράμετροι ενός μοντέλου ονομάζονται τα ικανά και αναγκαία στοιχεία που το ορίζουν. (Α. Μ. Αγατζά – Μπαλοδήμου, Γ. Πάνου, 2018).
- *Βαθμός Ελευθερίας* : Βαθμός ελευθερίας ενός μοντέλου ονομάζεται η διαφορά μεταξύ του αριθμού των μετρήσεων και του πλήθους των ανεξάρτητων καθοριστικών παραμέτρων που μπορούν να προσδιοριστούν από αυτές.
- *Μεταβλητότητα – Τυπικό Σφάλμα* : Η μεταβλητότητα μίας παραμέτρου εκφράζει τη διασπορά των ενδεχόμενων τιμών της. Η τετραγωνική ρίζα της ονομάζεται τυπικό σφάλμα.

1.2 Η Σελήνη

Η Σελήνη αποτελεί το μοναδικό φυσικό δορυφόρο της Γης και τον πέμπτο (5^ο) μεγαλύτερο φυσικό δορυφόρο του Ηλιακού Συστήματος. Συχνά αναφέρεται απλώς ως «Φεγγάρι», καθώς μέχρι το 1610 που ο Γαλιλαίος ανακάλυψε τέσσερα φεγγάρια του Δία, δεν ήταν γνωστό πως υπήρχαν κι άλλα φεγγάρια.

Η επιρροή της Σελήνης στη Γη είναι μεγάλης σημασίας: η παρουσία φεγγαριού συμμετέχει στην σταθεροποίηση της κίνησης της Γης στον άξονα της και, κατά συνέπεια, την σταθεροποίηση του κλίματός της, ενώ αποτελεί την κύρια αιτία των παλιρροιών. Ακόμη, συγκεντρώνει υψηλά ποσοστά του ανθρώπινου ενδιαφέροντος, τόσο σε επιστημονικό, όσο και σε κοινωνικό – πολιτιστικό επίπεδο, καθώς υπήρξε ένα από τα πρώτα ουράνια σώματα που κίνησε την ανθρώπινη επιστημονική περιέργεια, ενώ μελετάται εκτενώς από την αρχαιότητα έως τώρα. Επιπρόσθετα, αποτέλεσε το πρώτο και μοναδικό – έως τώρα – ουράνιο σώμα που επισκέφτηκε ο άνθρωπος (Εικόνα 1.1) και μεγάλη πηγή έμπνευσης πληθώρας μορφών τέχνης (Εικόνα 1.2).



*Εικόνα 1.1: Το αποτύπωμα του αστροναύτη Neil Armstrong στη Σελήνη
(<https://www.nasa.gov/>)*



*Εικόνα 1.2: "Έναστρο Νύχτα", Vincent Van Gogh
(el.wikipedia.org/wiki/Έναστρο_Νύχτα)*

1.2.1 Σχηματισμός της Σελήνης

Η επικρατέστερη θεωρία για το σχηματισμό της Σελήνης αναφέρει πως ένα σώμα στο μέγεθος του Άρη – ο υποθετικός πλανήτης Θεία – συγκρούστηκε με τη Γη 50 εκατομμύρια χρόνια μετά τη γέννηση του Ηλιακού Συστήματος, δηλαδή περίπου 4.5 δισεκατομμύρια χρόνια πριν. Η σύγκρουση είχε ως αποτέλεσμα θραύσματα να τεθούν σε τροχιά γύρω από τη Γη, να συσσωρευτούν και να σχηματίσουν το Φεγγάρι.

1.2.2 Τροχιά της Σελήνης – Σεληνιακές Φάσεις

Η Σελήνη απέχει περίπου 400000 km ή 1.28 δευτερόλεπτα φωτός (περίπου 30 φορές η διάμετρος της Γης) από τη Γη και κινείται σε σύγχρονη περιστροφή γύρω από αυτήν. Πιο αναλυτικά, η χρονική διάρκεια μίας πλήρους τροχιάς της Σελήνης γύρω από τη Γη είναι ίση με την περίοδο περιστροφής της γύρω από τον άξονά της. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται «παλιρροιακό κλείδωμα» και έχει ως αποτέλεσμα το Φεγγάρι να «δείχνει» πάντα το ίδιο ημισφαίριό του στη Γη. Το ημισφαίριο αυτό αναφέρεται, συνήθως, ως η κοντινή πλευρά της Σελήνης, ενώ το αντίθετο ημισφαίριο ως η μακρινή ή σκοτεινή πλευρά της Σελήνης.

Αξίζει να σημειωθεί πως η Σελήνη απομακρύνεται κατά, περίπου, μία ίντσα (2.54 cm) από τη Γη κάθε χρόνο.

Επιπρόσθετα, μία πλήρης περιστροφή της Σελήνης γύρω από τη Γη διαρκεί 27.3 γήινες ημέρες. Ταυτόχρονα, όμως, κινείται και η Γη (γύρω από τον άξονά της και γύρω από τον Ήλιο) και, κατά συνέπεια, η διάρκεια αυτή αντιλαμβάνεται, από έναν παρατηρητή στη Γη, ως 29.5 ημέρες.

Ο τρόπος που ο άνθρωπος αντιλαμβάνεται την τροχιά της Σελήνης γύρω από τη Γη και, άρα, την αλλαγή στην θέση της, είναι μέσω των Σεληνιακών Φάσεων. Αναλυτικότερα, το φως του Ήλιου «χτυπά» στην επιφάνεια της Σελήνης και εκείνη το αντικατοπτρίζει, καθιστώντας δυνατή την παρατήρησή της με γυμνό μάτι τη νύχτα. Καθώς, όμως, η Σελήνη κινείται, το φως του Ήλιου «πέφτει» σε διαφορετική θέση σε κάθε φάση. Για παράδειγμα, την 29^η ημέρα της τροχιάς της Σελήνης, ο Ήλιος φωτίζει την σκοτεινή πλευρά και, κατά συνέπεια, το Φεγγάρι δεν είναι ορατό από την Γη. Η φάση αυτή ονομάζεται «Νέα Σελήνη» και σημαίνει την ολοκλήρωση μίας τροχιάς της Σελήνης γύρω από την Γη. Αντιθέτως, όταν παρατηρείται Πανσέληνος, ο Ήλιος φωτίζει την κοντινή πλευρά της Σελήνης εξ ολοκλήρου. Οι Σεληνιακές Φάσεις είναι οχτώ (Εικόνα 1.3): Νέα Σελήνη ή Νουμηνία (New Moon), Αύξων Μηνίσκος (Waxing Crescent), Πρώτο Τέταρτο (First Quarter), Αύξων Αμφίκυρτος (Waxing Gibbous), Πανσέληνος (Full Moon), Φθίνων Αμφίκυρτος (Waning Gibbous), Τελευταίο Τέταρτο (Third Quarter) και Φθίνων Μηνίσκος (Waning Crescent).

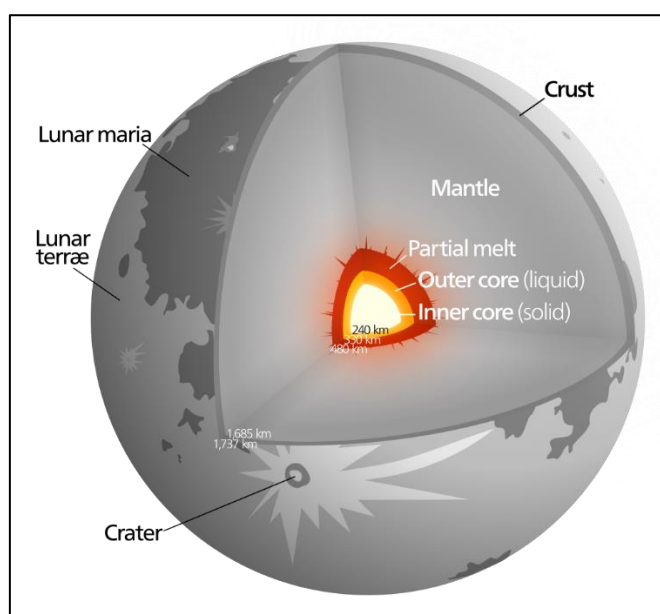


Εικόνα 1.3: Η τροχιά της Σελήνης και οι Σεληνιακές Φάσεις (<https://solarsystem.nasa.gov/>)

1.2.3 Σχήμα, Μέγεθος, Εσωτερική Δομή, Γεωλογία και Τοπογραφία

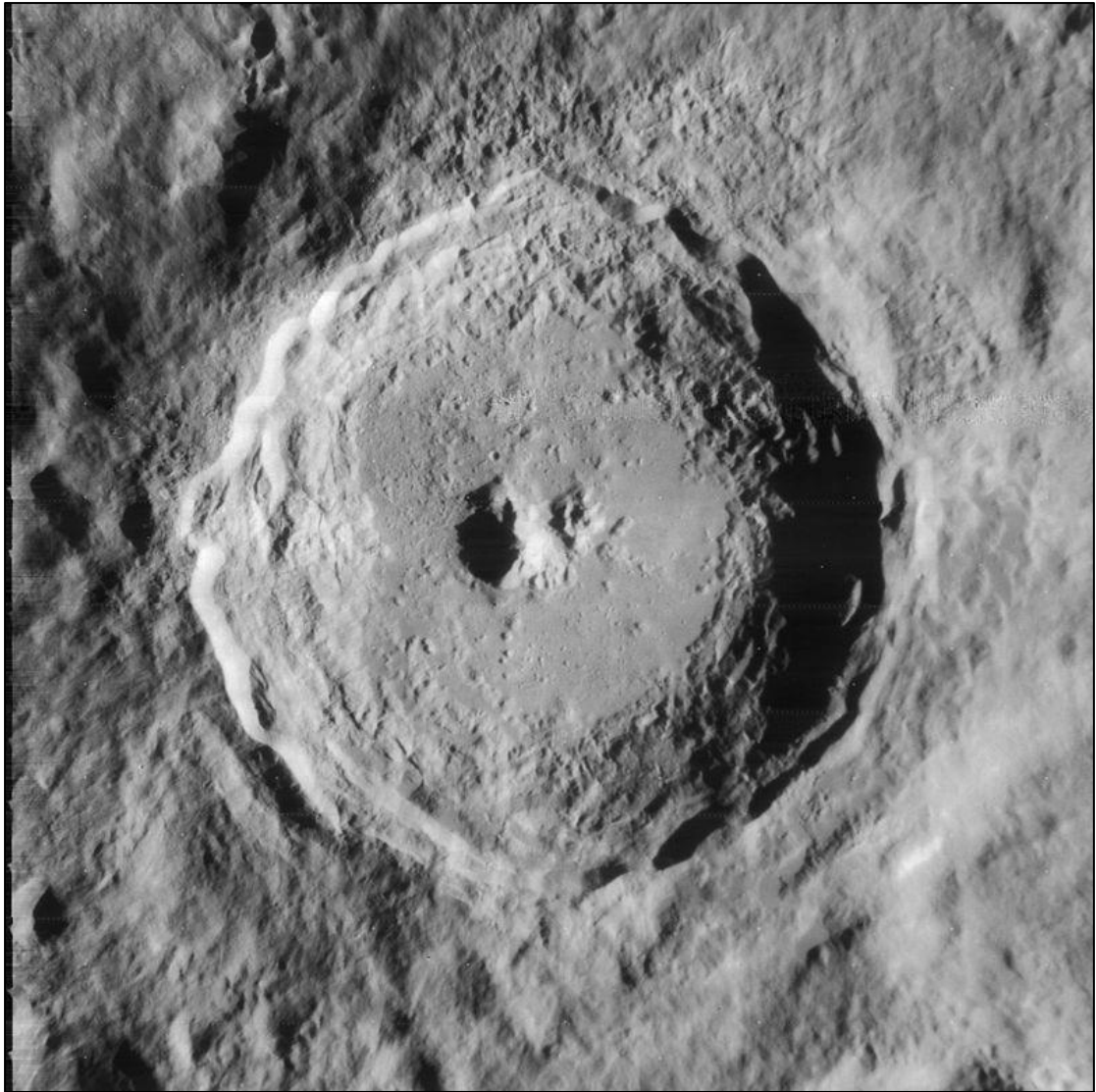
Το Φεγγάρι είναι σχήματος πεπλατυσμένου ελλειψοειδούς με μέση ακτίνα 1737.40 km, δηλαδή λιγότερο από το 1/3 της ακτίνας της Γης. Είναι μεγαλύτερο από κάθε πλανήτη – νάνο και έχει κατηγοριοποιηθεί ως φεγγάρι μάζας πλανήτη με «γήινο» σώμα (δηλαδή σώμα που αποτελείται κυρίως από πετρώματα ή/και μέταλλα). Αναλυτικότερα, η Σελήνη είναι το δεύτερο πυκνότερο φεγγάρι του Ηλιακού Συστήματος και το σώμα της είναι διαφοροποιημένο: αποτελείται από γεωφυσικά διακριτό φλοιό, μανδύα και πυρήνα. Ο πυρήνας της Σελήνης είναι μικρότερος σε μέγεθος σε σχέση με άλλα ουράνια σώματα, ακτίνας περίπου 240 km, ενώ είναι

στέρεος και πλούσιος σε σίδηρο. Τον εσωτερικό αυτόν πυρήνα περιβάλλει ένας υγρός εξωτερικός πυρήνας ακτίνας 300 km, φτιαγμένος κατά κύριο λόγο από υγρό σίδηρο, τον οποίο περιβάλλει με τη σειρά της μία εν μέρει λεία στρώση πάχους 150 km. Ο μανδύας της Σελήνης εκτείνεται από την επιφάνεια της στρώσης αυτής έως τη βάση του φλοιού της Γης και εμπεριέχει μεταλλικά στοιχεία, όπως ολιβίνη και πυροξένια. Τέλος, γεωφυσικές τεχνικές έχουν δείξει πως ο φλοιός της Σελήνης είναι πάχους 70 km στο ημισφαίριο που «κοιτάει» τη Γη και 93 km στο άλλο ημισφαίριο και αποτελείται, κυρίως, από ανορθοσίτη.



Εικόνα 1.4: Εσωτερική Δομή της Σελήνης (el.wikipedia.org/wiki/Σελήνη)

Η επιφάνεια της Σελήνης έχει επηρεαστεί σε πολύ μεγάλο βαθμό από τους κρατήρες πρόσκρουσης. Συγκεκριμένα, η ατμόσφαιρά της δεν ήταν αρκετά πυκνή ώστε να μπορέσει να συγκρατήσει βροχές μετεωριτών, κομητών και αστεροειδών από το να συγκρουστούν με τη σεληνιακή επιφάνεια, με αποτέλεσμα τη δημιουργία κρατήρων. Υπολογίζεται πως μόνο στην κοντινή πλευρά της Σελήνης υφίστανται 300000 κρατήρες με διάμετρο μεγαλύτερη του ενός (1) χιλιομέτρου (km), ενώ ο κρατήρας Tycho έχει διάμετρο 85 km.



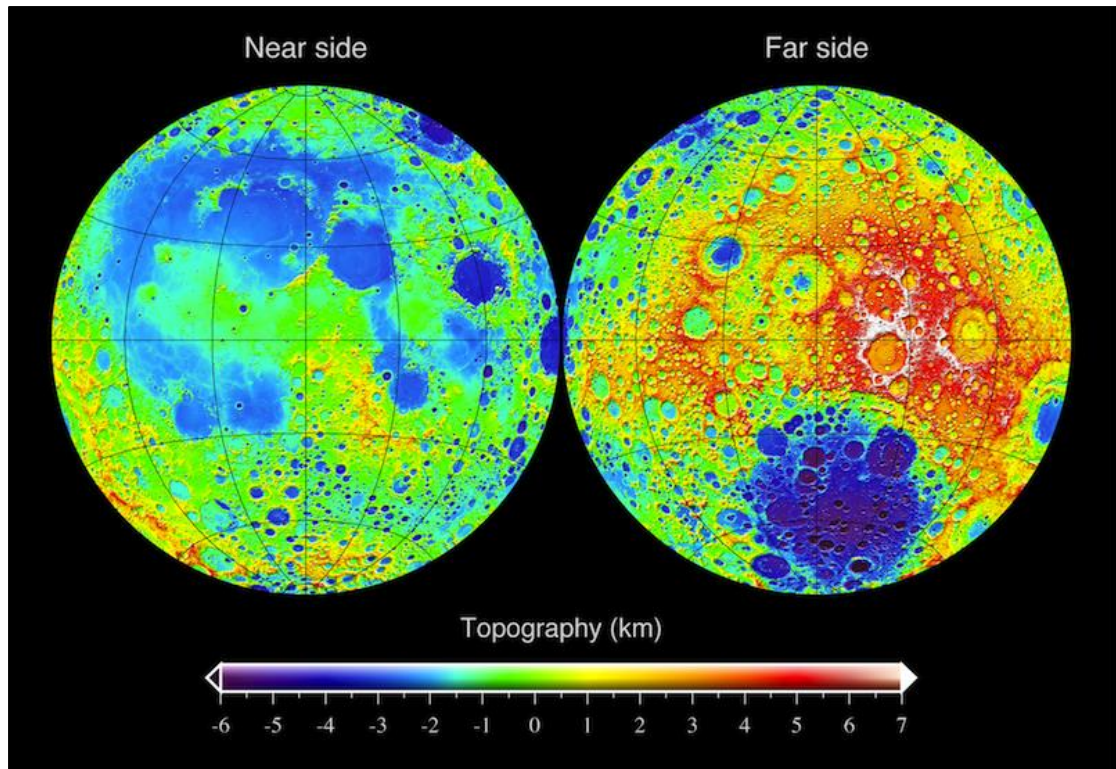
Εικόνα 1.5: Εικόνα 1.5: Ο κρατήρας Tycho από την αποστολή Lunar Orbiter 4, 1967 ([en.wikipedia.org/wiki/Tycho_\(lunar_crater\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Tycho_(lunar_crater)))

Ως άμεσο αποτέλεσμα των προαναφερόμενων προσκρούσεων, η επιφάνεια της Σελήνης καλύπτεται από τον σεληνιακό ρηγόλιθο: ένα γκρίζο στρώμα αραιών ετερογενών επιφανειακών κοιτασμάτων [8], το οποίο περιλαμβάνει σκόνη, χώμα, θραύσματα πετρώματος κ.α. και καλύπτει το ραγισμένο, στέρεο πέτρωμα της Σελήνης, τον «μέγα – ρηγόλιθο». Ρηγόλιθος, όμως, δεν συναντάται μόνο στην Σελήνη, αλλά και στη Γη, τον Άρη, τον αστεροειδή Έρως και άλλα ουράνια σώματα, η επιφάνεια των οποίων έχει επηρεαστεί από τέτοιου είδους συγκρούσεις.

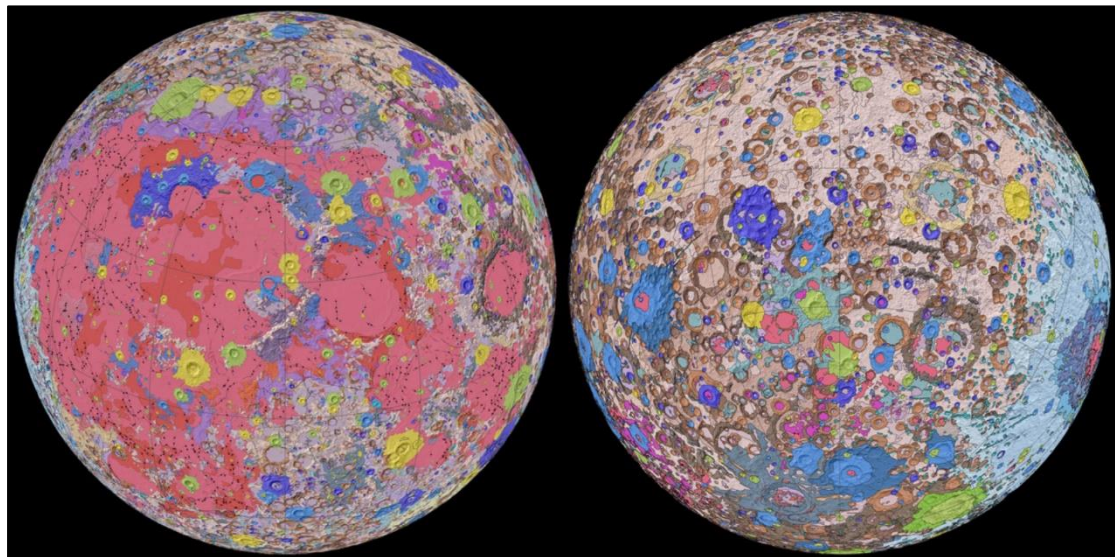
Οι σκοτεινές πεδιάδες της Σελήνης ονομάζονται «Maria», είναι ορατές με το γυμνό μάτι και αποτελούν λεκάνες πρόσκρουσης που πριν 4.2 με 1.2 δισεκατομμύρια χρόνια ήταν γεμάτες βασαλτική λάβα. Η ονομασία Maria

προέρχεται από το λατινικό «θάλασσες», καθώς παλαιότερα λανθασμένα εικαζόταν πως οι πεδιάδες αυτές ήταν γεμάτες νερό. Οι περισσότερες θάλασσες βρίσκονται στην κοντινή πλευρά της Σελήνης και καλύπτουν το 31% αυτής (εν αντιθέσει, καλύπτουν το 2% της μακρινής πλευράς). Οι φωτεινές πλευρές της Σελήνης ονομάζονται γαίες ή υψίπεδα, λόγω του μεγαλύτερου υψομέτρου τους σε σχέση με τις θάλασσες, αλλά σε αντίθεση με τη γήινη επιφάνεια, δεν θεωρείται πως δημιουργήθηκαν από τεκτονική δραστηριότητα. Οι διαφορές αυτές στον χρωματισμό αντικατοπτρίζουν τη διαφορετική σύσταση και χρονολογία σχηματισμού των πετρωμάτων και βοηθούν στον προσδιορισμό του σεληνιακού γεωλογικού χρονοδιαγράμματος. Συγκεκριμένα, παρέχουν πληροφορίες για το πότε σχηματίστηκε ο πρώτος φλοιός της Σελήνης. Επιπλέον, λόγω της έλλειψης ατμόσφαιρας και καιρικών φαινομένων, μπορεί να θεωρηθεί πως οι κρατήρες πρόσκρουσης έχουν διατηρηθεί στο πέρασμα δισεκατομμυρίων χρόνων, παρέχοντας πληροφορίες για το ιστορικό συγκρούσεων του Φεγγαριού και άλλων ουράνιων σωμάτων.

Επιπλέον, μέσω μετρήσεων αλτιμετρίας με laser και ανάλυση στερεοσκοπικών εικόνων, καθίσταται δυνατή η μελέτη της τοπογραφίας της Σελήνης. Τα υψηλότερα υψόμετρα της επιφάνειάς της παρατηρούνται στα βορειοανατολικά, ενώ το σημαντικό τοπογραφικό χαρακτηριστικό της είναι ο κρατήρας νότιου πόλου – Αίτκεν. Ο κρατήρας αυτός αποτελεί τον μεγαλύτερο κρατήρα της Σελήνης, διαμέτρου 2240 km, ενώ ο πυθμένας του σε βάθος 13 km αποτελεί το χαμηλότερο σημείο του Φεγγαριού. Ακόμη, ο κρατήρας Αίτκεν είναι ο δεύτερος μεγαλύτερος επιβεβαιωμένος κρατήρας πρόσκρουσης του Ηλιακού Συστήματος. Θεωρείται πως το μεγαλύτερο πάχος στη βορειοανατολική πλευρά της Σελήνης προκλήθηκε από την πλάγια πρόσκρουση που δημιούργησε τον κρατήρα Αίτκεν.



Σχήμα 1.1: Τοπογραφικός Χάρτης Σελήνης (en.wikipedia.org/wiki/Moon)



Σχήμα 1.2: Γεωλογικά Χαρακτηριστικά της Σελήνης (en.wikipedia.org/wiki/Moon)

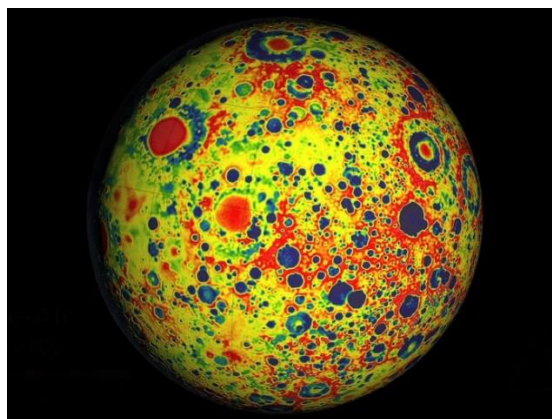
1.2.4 Ατμόσφαιρα – Μαγνητόσφαιρα

Η ατμόσφαιρα της Σελήνης ονομάζεται εξώσφαιρα, είναι πολύ λεπτή και αδύναμη και δεν μπορεί να προστατεύσει την επιφάνεια από τις ακτίνες του Ηλίου ή βροχές μετεωριτών, αστεροειδών και κομητών. Επιπρόσθετα, το μαγνητικό πεδίο της Σελήνης είναι απειροελάχιστο (μικρότερο από 0.2 nanoteslas, δηλαδή μικρότερο από το 1 εκατοστό χιλιοστό αυτού της Γης), παρότι θεωρείται πως στις αρχές του σχηματισμού της είχε αναπτύξει εσωτερικό δυναμό – η μέθοδος κατασκευής μαγνητικών πεδίων από ουράνια σώματα [18].

1.2.5 Σεληνιακό Βαρυτικό Πεδίο

Η μέση επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνεια της Σελήνης είναι ίση με 1.625 m/s^2 , δηλαδή το 16.6% της επιτάχυνσης της βαρύτητας στη Γη. Για το λόγο αυτό και καθώς το βάρος εξαρτάται από την επιτάχυνση της βαρύτητας, το βάρος ενός αντικειμένου στη Σελήνη θα είναι 16.6% μικρότερο από ότι στη Γη και οι άνθρωποι που περπάτησαν στη Σελήνη φαίνεται να «αναπηδούσαν» στην επιφάνειά της [18].

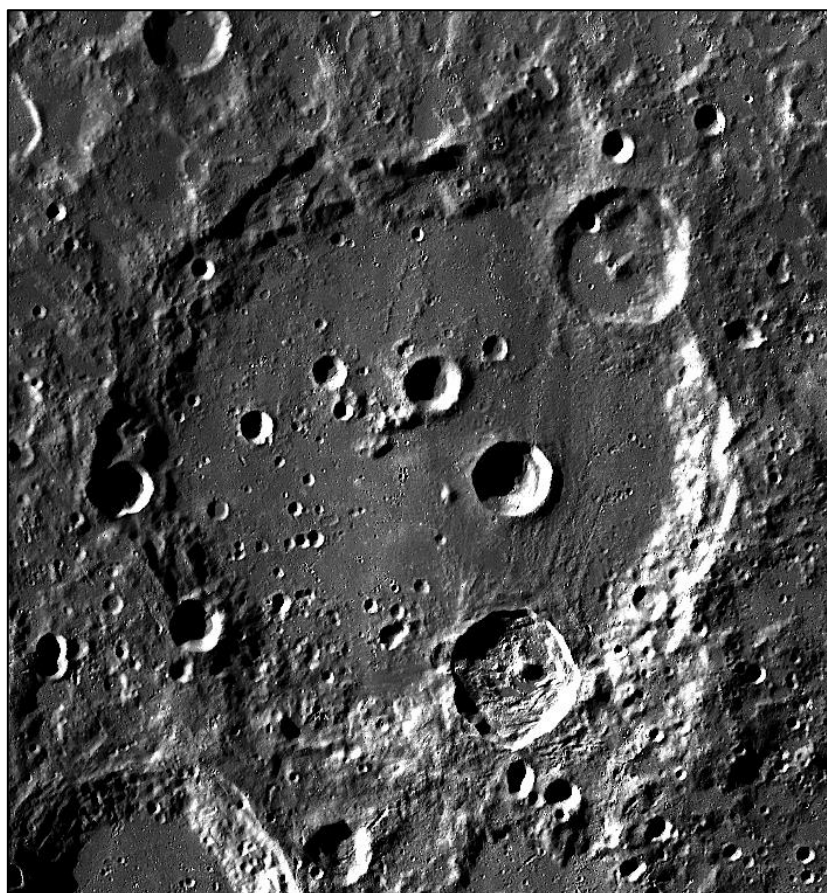
Το σεληνιακό βαρυτικό πεδίο έχει μετρηθεί μέσω της ανίχνευσης του Doppler effect ραδιομετρικών σημάτων που εξήγαγαν διαστημικά σκάφη σε τροχιά και μοντέλα σφαιρικών αρμονικών που παρήχθησαν από τέτοιου είδους μετρήσεις αναλύονται εκτενώς στο Κεφάλαιο 2.



Σχήμα 1.3: Χάρτης του σεληνιακού βαρυτικού πεδίου, αποστολή GRAIL (en.wikipedia.org/wiki/Moon)

1.2.6 Νερό στη Σελήνη

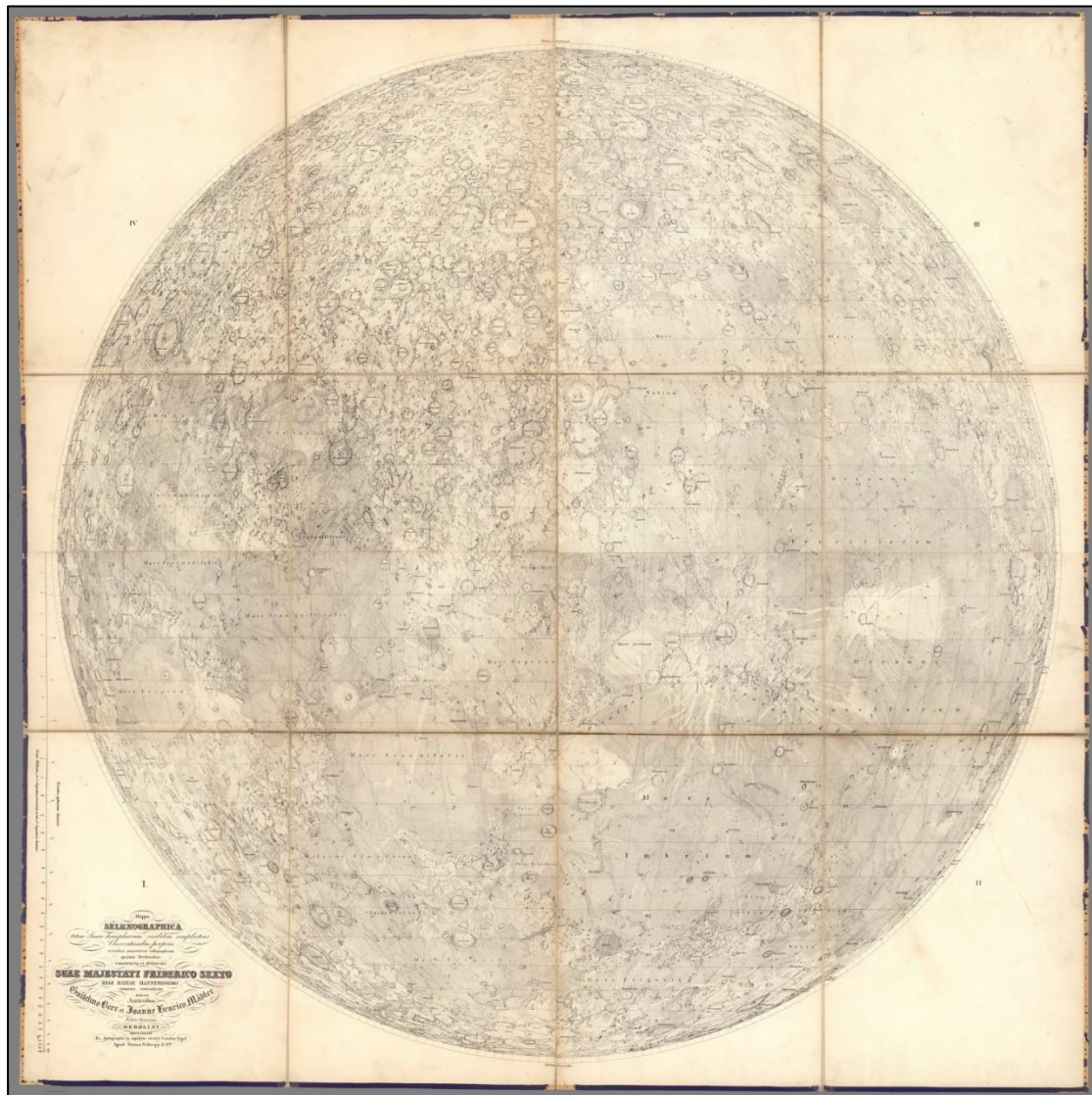
Μία από τις πιο αξιοσημείωτες ανακαλύψεις, ήταν εκείνη σωματιδίων υδροξυλίου στην επιφάνεια της Σελήνης και συγκεντρωμένα στους πόλους της από την ινδική αποστολή Chandrayaan-1 το 2008. Η παρατήρηση αυτή ήταν η πρώτη που επιβεβαίωσε την ύπαρξη νερού στη Σελήνη. Έκτοτε, έχει αποδειχθεί από αποστολές, όπως εκείνη του Lunar Prospector, πως η ύπαρξη νερού στη Σελήνη δεν περιορίζεται στην υγρασία της επιφάνειάς της, αλλά υφίστανται υψηλές συσσωρεύσεις πάγου στις περιοχές της Σελήνης που βρίσκονται μόνιμα υπό σκιά. Ύστερα, τον Οκτώβριο του 2020, εντοπίστηκε για πρώτη φορά νερό σε περιοχή της Σελήνης φωτιζόμενη από το φως του Ήλιου από το Stratospheric Observatory for Infrared Astronomy (SOFIA) της NASA. Συγκεκριμένα, το SOFIA εντόπισε σωματίδια νερού στο κρατήρα Clavius του νότιου ημισφαιρίου της Σελήνης. Επιπρόσθετα, έχει βρεθεί πως η επιφάνεια του Φεγγαριού εκκρίνει νερό όταν έρθει σε σύγκρουση με μικρο – μετεωρίτες.



Εικόνα 1.6: Κρατήρας Clavius (en.wikipedia.org/wiki/Clavius_crater)

1.2.7 Παρατήρηση & Εξερεύνηση της Σελήνης

Η μελέτη της Σελήνης απασχόλησε την ανθρωπότητα από τα πολύ αρχαία χρόνια. Μάλιστα, η πρώτη αναφορά του Φεγγαριού που έχει ανακαλυφθεί βρίσκεται σκαλισμένη σε μία πέτρα 5000 ετών στην Ιρλανδία. Επιπλέον, η κατανόηση των σεληνιακών φάσεων αποτέλεσε την πρώτη μορφή αστρονομίας. Συγκεκριμένα, τον 4^ο αιώνα π.Χ., ο κινέζος αστρονόμος Shi Shen έδωσε οδηγίες για την πρόρρηση ηλιακών και σεληνιακών εκλείψεων, ενώ τον 5^ο αιώνα π.Χ., Βαβυλώνιοι αστρονόμοι κατέγραψαν τον κύκλο του Σάρο, ο οποίος προέβλεπε της σεληνιακές εκλείψεις με περίοδο 18 ετών. Ύστερα, ο Έλληνας φιλόσοφος Αναξαγόρας το 428 π.Χ. είπε πως ο Ήλιος και το Φεγγάρι είχαν σφαιρική μορφή και το ένα αντανακλούσε το φως του άλλου. Στην Κίνα, κατά τη διάρκεια της Δυναστείας Χαν, οι θεωρίες περί της ενέργειας «τσι» αναγνώριζαν το Φεγγάρι ως την αντανάκλαση του Ηλίου, ενώ ο Jing Fang (78 – 37 π.Χ.) αναγνώριζε το σφαιρικό του σχήμα. Τον 2^ο αιώνα π.Χ., ο μαθηματικός και αστρονόμος Σέλευκος, αναγνώρισε τη σύνδεση των παλιρροιών με τη Σελήνη, καθώς ανέπτυξε τη θεωρία πως αυτές οφείλονται σε έλξη που ασκείται από τη Σελήνη, ενώ ο Αρίσταρχος υπολόγισε το μέγεθος της Σελήνης και την απόστασή της από την Γη, μεγέθη που αργότερα βελτίωσε ο Πτολεμαίος. Ο Αρχιμήδης (287 – 212 π.Χ.) κατασκεύασε ένα πλανητάριο που μπορούσε να προσδιορίσει τις κινήσεις της Σελήνης και άλλων ουράνιων σωμάτων. Κατά τη διάρκεια του Μεσαίωνα και πριν την εφεύρεση του τηλεσκοπίου, αναγνωριζόταν το σφαιρικό σχήμα της Σελήνης, αλλά θεωρούταν πως η επιφάνειά της είναι λεία. Αντίθετα, το 1609 ο Γαλιλαίος χρησιμοποίησε την πρώτη μορφή ενός τηλεσκοπίου για να σχεδιάσει το Φεγγάρι, εικάζοντας πως η επιφάνεια αυτού έχει βουνά και κρατήρες, γεγονός που οδήγησε μετέπειτα σε ακόμα περισσότερες χαρτογραφήσεις της Σελήνης βάσει παρατηρήσεων με τηλεσκόπιο. Συγκεκριμένα, η χαρτογράφηση της Σελήνης αργότερα τον 17^ο αιώνα από τους Giovanni Battista Riccioli και Francesco Maria Grimaldi οδήγησαν στις ονομασίες των σεληνιακών χαρακτηριστικών που χρησιμοποιούνται έως σήμερα, ενώ το 1834 – 1836 κατασκευάστηκε ο χάρτης *Mappa Selenographica* από τους Wilhelm Beer και Johann Heinrich Mädler που σε συνδυασμό με το βιβλίο τους *Der Mond*, αποτέλεσε την πρώτη ακριβή τριγωνομετρική μελέτη της Σελήνης. [\[20\]](#)



Εικόνα 1.7: Mappa Selenographica (davidrumsey.com)

Στα τέλη της δεκαετίας του 1950 έως το 1970, το ενδιαφέρον για την εξερεύνηση της Σελήνης ήταν πολύ μεγάλο. Συγκεκριμένα, το πρώτο τεχνητό αντικείμενο που πέτυχε να εξέλθει από το βαρυτικό πεδίο της Γης και να περάσει κοντά στο Φεγγάρι ήταν το διαστημόπλοιο Luna 1 του διαστημικού προγράμματος Luna της Σοβιετικής Ένωσης το 1958. Στη συνέχεια, το διαστημόπλοιο Luna 2 υπήρξε το πρώτο τεχνητό αντικείμενο που συγκρούστηκε με την επιφάνεια της Σελήνης, ενώ το Luna 3 ήταν το πρώτο που φωτογράφησε την μακρινή της πλευρά το 1959. Το 1996, το διαστημόπλοιο Luna 9 κατάφερε να προσγειωθεί στη Σελήνη, ενώ το Luna

10 αποτέλεσε την πρώτη μη επανδρωμένη αποστολή που τέθηκε σε τροχιά γύρω από το Φεγγάρι. Την δεκαετία του 1970 διαστημόπλοια του ίδιου προγράμματος επέστρεψαν δείγματα από την επιφάνεια της Σελήνης, ενώ το Σοβιετικό πρόγραμμα Lunokhod προσγείωσε δύο από τα πρώτα ρομποτικά rovers.

Από την πλευρά των Ηνωμένων Πολιτειών, το 1961 ο πρόεδρος John F. Kennedy έθεσε ως στόχο την προσγείωση επανδρωμένης αποστολής στο Φεγγάρι. Ως αποτέλεσμα και υπό την καθοδήγηση της NASA, γεννήθηκε πληθώρα διαστημικών προγραμμάτων με στόχο την προετοιμασία των επανδρωμένων αποστολών. Συγκεκριμένα, ελήφθησαν οι πρώτες κοντινές εικόνες της Σελήνης από το πρόγραμμα Ranger του Jet Propulsion Laboratory (JPL), παρήχθη ο πρώτος χάρτης της επιφάνειας της από το πρόγραμμα του Lunar Orbiter, ενώ το πρόγραμμα Surveyor προσγείωσε το δεύτερο παγκοσμίως διαστημόπλοιο στο Φεγγάρι, τέσσερις μήνες μετά την Σοβιετική αποστολή Luna. Το επανδρωμένο πρόγραμμα Apollo αναπτύχθηκε παράλληλα, εκτελώντας την πρώτη του αποστολή με το Apollo 8 το 1968. Εν συνεχεία, στις 21 Ιουλίου του 1969, ώρα 02:56 UTC, ο αστροναύτης Neil Armstrong έγινε ο πρώτος άνθρωπος που πάτησε το πόδι του στο Φεγγάρι, μετά την επιτυχή προσγείωση του διαστημόπλοιου Apollo 9 στην επιφάνειά του. Οι επόμενες αποστολές Apollo επέστρεψαν μεγάλο ποσοστό γεωλογικών δειγμάτων από τη Σελήνη, ενώ εγκατέστησαν σε αυτή διάφορους μηχανισμούς παρακολούθησής της, όπως σεισμόμετρα και μαγνητόμετρα.

Το 1990, η Ιαπωνία έθεσε σε τροχιά γύρω από τη Σελήνη το διαστημόπλοιο Hiten. Στο 1994, οι Ηνωμένες Πολιτείες με το πρόγραμμα Clementine, απέσπασαν τον πρώτο σχεδόν πλήρη τοπογραφικό χάρτη της Σελήνης και τις πρώτες πολυφασματικές εικόνες της επιφάνειάς της. Ακόμη, το 1998 με το πρόγραμμα Lunar Prospector επιβεβαιώθηκε η παρουσία σωματιδίων υδρογόνου στους πόλους της Σελήνης.

Έπειτα, το ευρωπαϊκό πρόγραμμα Smart – 1 τέθηκε σε τροχιά γύρω από την Σελήνη στις 15 Νοεμβρίου του 2004, ενώ ήρθε σε επαφή με το σώμα της στις 3 Σεπτεμβρίου του 2006 και μέσω αυτού κατασκευάστηκε ο πρώτος λεπτομερής χάρτης των χημικών στοιχείων της επιφάνειάς της.

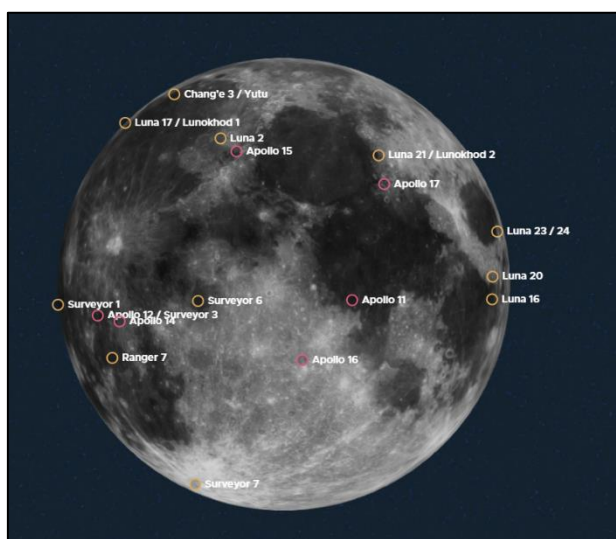
Το 2009, η Κίνα μέσω του προγράμματος Chinese Lunar Exploration Program και του διαστημοπλοίου Chang'e 1, κατασκεύασε τον πρώτο πλήρη χάρτη του Φεγγαριού, ενώ το 2010 με το διαστημόπλοιο Chang'e 2, επανέλαβε τη χαρτογράφηση σε καλύτερη ανάλυση και καλύτερο χρόνο.

Η αποστολή Selene (4 Οκτωβρίου 2004 με 10 Ιουνίου 2009) της Ιαπωνίας μέσω ενός σεληνιακού δορυφόρου, ο οποίος περιείχε βιντεοκάμερα υψηλής ανάλυσης και δύο μικρούς ραδιοφωνικούς πομπούς, έδωσε ως αποτέλεσμα σεληνιακά γεωφυσικά δεδομένα και τράβηξε το πρώτο βίντεο εκτός της γήινης τροχιάς.

Η πρώτη Ινδική αποστολή προς τη Σελήνη, με το διαστημόπλοιο Chandrayaan-1, το οποίο βρισκόταν σε τροχιά γύρω από εκείνη από τις 8 Νοεμβρίου του 2008 έως της 27 Αυγούστου του 2009, επιβεβαίωσε την ύπαρξη νερού στην επιφάνεια της Σελήνης.

Επιπρόσθετα, το 2009 οι Ηνωμένες Πολιτείες εκτόξευσαν τους δορυφόρους Lunar Reconnaissance Orbiter (LRO) και LCROSS. Ο LCROSS έχει ολοκληρώσει την αποστολή του, εκτελώντας μία προγραμματισμένη σύγκρουση με τον κρατήρα Cabeus, ενώ ο LRO είναι ακόμα σε λειτουργία και έχει ως στόχο τη λήψη δεδομένων αλτιμετρίας υψηλής ακρίβειας και εικόνες υψηλής ανάλυσης από τη Σελήνη. Το 2012, δύο σκάφη του προγράμματος GRAIL της NASA ξεκίνησαν την τροχιά τους, με σκοπό την περαιτέρω μελέτη της εσωτερικής δομής της Σελήνης, ενώ το 2013 το πρόγραμμα LADEE της NASA με στόχο τη μελέτη της εξώσφαιρας της Σελήνης τέθηκε σε τροχιά. [\[5, 6, 20\]](#)

Στην επόμενη εικόνα παρουσιάζονται τα σημεία προσγείωσης επανδρωμένων αποστολών προς τη Σελήνη (κόκκινο χρώμα) και ρομποτικών αποστολών (πορτοκαλί χρώμα).



Εικόνα 1.8: Σημεία προσγείωσης αποστολών προς τη Σελήνη (<https://solarsystem.nasa.gov/>)

1.3 Βιβλιογραφική Ανασκόπηση

Σημαντικές υπήρξαν οι συνεισφορές του γεωδαίτη Milan Burša για την τριαξονικότητα φεγγαριών και άλλων μικρών ουράνιων σωμάτων, καθώς υπολόγισε τα μεγέθη των τριών αξόνων των ελλειψοειδών προσαρμογής τεσσάρων φεγγαριών με σύγχρονη τροχιά και, συγκεκριμένα, του Φόβου (φυσικός δορυφόρος του πλανήτη Άρη), της Αμαλθείας και Ιούς (φυσικοί δορυφόροι του Δία) και του Μίμα (φυσικός δορυφόρος του Κρόνου). Ο M. Burša συνέδεσε την τριαξονικότητα των φεγγαριών αυτών με τις παλιρροιακές και περιστροφικές στρεβλώσεις που προκαλούνται από τις σύγχρονες τροχιές τους, συμπεραίνοντας πως οφείλονται πλήρως για το σχήμα τους. Συνέχισε την έρευνά του πάνω στο προκείμενο ζήτημα, δημοσιεύοντας τον Μάρτιο του 1990 το άρθρο του για τον υπολογισμό των μέσων πυκνοτήτων εννέα σύγχρονων τριαξονικών φυσικών δορυφόρων του Κρόνου, ενώ τον Απρίλιο του 1992 απέδειξε πως ο κομήτης Halley, λόγω της τριαξονικής του μορφής, θα ήταν δυνατό να τεθεί σε σύγχρονη τροχιά γύρω από έναν υποθετικό πλανήτη (ή ουράνιο σώμα τύπου πλανήτη) με περίοδο 0.7 ημερών. Στη συνέχεια, τον Οκτώβριο του 1994, ανέπτυξε τη θεωρία του προσδιορισμού των παραμέτρων τριαξονικών ελλειψοειδών που προσομοιάζαν τις εξωτερικές ισοδυναμικές επιφάνειες σύγχρονων φεγγαριών. Τέλος, τον Φεβρουάριο του 1996 και αφότου είχαν δημοσιευτεί από την επιστημονική ομάδα Davies et al. το προηγούμενο έτος, τα μεγέθη των τριών αξόνων 21 φυσικών δορυφόρων του Ηλιακού Συστήματος, δημοσίευσε τη γενική θεωρία πίσω από την τριαξονικότητα φυσικών δορυφόρων και μικρών ουράνιων σωμάτων, καθώς λογικά θεωρούσε πως το πραγματικό πλήθος των ουράνιων σωμάτων τέτοιου είδους μορφής είναι πολύ υψηλότερο από 21.

Στα συμπεράσματα των μελετών του M. Burša έχει βασιστεί κάθε επόμενη έρευνα που αφορά στην τριαξονικότητα ουράνιων σωμάτων, συμπεριλαμβανομένης και της Σελήνης. Συγκεκριμένα, μία από τις έρευνες που έδωσε το έναυσμα για την εκπόνηση της προκείμενης διπλωματικής εργασίας αποτελεί εκείνη του γεωδαίτη H. Bâki Iz, όπου το 2009 δημοσίευσε νέες παραμέτρους των γεωμετρικών επιφανειών (ελλειψοειδούς, ελλειψοειδούς εκ περιστροφής και σφαίρας) που προσομοιάζουν καλύτερα την επιφάνεια της Σελήνης, χρησιμοποιώντας δεδομένα που προέρχονται από τις συντεταγμένες 271610 σημείων ελέγχου του τότε νεότερου διαθέσιμου σεληνιακού δικτύου ULCN 2005. Τότε συμπέρανε πως τα μοντέλα που καλύτερα προσαρμόζονται στην επιφάνεια της Σελήνης δεν είναι σεληνοκεντρικά, καθιστώντας

προτιμότερη την απλούστερη λύση που παρείχε ένα μη – σεληνοκεντρικό ελλειψοειδές εκ περιστροφής. Στη συνέχεια, το 2011 ο ίδιος δημοσίευσε ξανά τις παραμέτρους των γεωμετρικών επιφανειών που βέλτιστα προσομοιάζουν τη Σελήνη, χρησιμοποιώντας επιπλέον δεδομένα από τις αποστολές Chang’E – 1 και Selene και λαμβάνοντας υπόψιν και τις κατευθύνσεις των τριών αξόνων της.

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί πως τα μαθηματικά μοντέλα που αναπτύσσονται και προσαρμόζονται στην επιφάνεια της Σελήνης, βασίστηκαν στην ερευνητική δουλειά των Γ. Πάνου, Ρ. Κορακίτη και Γ. Παντάζη, όπου στο άρθρο τους “Fitting a triaxial ellipsoid to a geoid model (2020)”, περιγράφονται διεξοδικά και αναφορικά με την προσαρμογή τους στην επιφάνεια της Γης, βάσει μοντέλων γεωειδούς της. Επιπλέον, η μέθοδος προσαρμογής βασίζεται άμεσα στη δημοσίευση των Γ. Πάνου και Α. Μ. Αγατζά – Μπαλοδήμου το 2021, όπου και αναπτύσσεται εδώ με στόχο την άμεση εκτίμηση του πίνακα μεταβλητότητας – συμμεταβλητότητας των παραμέτρων ενός τριαξονικού ελλειψοειδούς προσαρμογής.

1.4 Επικαιρότητα

Η εξερεύνηση της Σελήνης ήταν κάτι που πάντα ενδιέφερε την ανθρωπότητα και συνεχίζει να την αφορά έως και σήμερα, καθώς είναι προφανές πως είναι αδύνατο να πει κανείς πως γνωρίζει τα πάντα για το ουράνιο αυτό σώμα. Μάλιστα, οι προγραμματισμένες, προτεινόμενες και υπό ανάπτυξη αποστολές προς τη Σελήνη – επανδρωμένες και μη – είναι πολλές και προέρχονται από πληθώρα χωρών (Ηνωμένες Πολιτείες, Ρωσία, Ιαπωνία, Γερμανία, Νότια Κορέα, Ηνωμένο Βασίλειο κ.α.), αλλά και ιδιωτικές εταιρίες, όπως είναι η Google, η Nokia, η Vodafone κ.α.

Συγκεκριμένα, η Ρωσία με το πρόγραμμα Luna – Glob αποσκοπεί στην τοποθέτηση ενός σετ σεισμομέτρων στην επιφάνεια της Σελήνης, ενώ η NASA ήδη από το 2004, έχει κινήσει τις διαδικασίες για νέες επανδρωμένες αποστολές προς το Φεγγάρι και ακόμη και την κατασκευή μίας σεληνιακής βάσης. Το τρέχον πρόγραμμα της NASA που αποσκοπεί στην επιστροφή των ανθρώπων στη Σελήνη είναι το Artemis. Την ίδια επιθυμία για επανδρωμένη αποστολή προς την Σελήνη έχει εκφράσει και η Ινδία.

Όσον αφορά σε ιδιωτικές αποστολές και πρωτοβουλίες, η Google το 2007 ίδρυσε τον διαγωνισμό Google Lunar X Prize, όπου ένα υψηλό χρηματικό ποσό θα αποδιδόταν σε όποια ομάδα κατάφερνε να προσγειώσει ένα ρομπότ στην επιφάνεια του Φεγγαριού. Δυστυχώς, καμία από τις συμμετέχουσες ομάδες δεν κατάφερε να τηρήσει την προθεσμία και το έπαθλο δεν αποδόθηκε. Το 2018, οι εταιρίες SpaceX, Vodafone, Nokia και Audi ανακοίνωσαν τη συνεργασία τους με στόχο την εγκατάσταση ενός τηλεπικοινωνιακού δικτύου 4G στη Σελήνη, με στόχο την μετάδοση ζωντανών πλάνων της στη Γη. Επιπλέον, τον Αύγουστο του 2016, η Αμερικανική κυβέρνηση έδωσε για πρώτη φορά άδεια στην ιδιωτική εταιρία start – up Moon Express να προσγειωθεί στο Φεγγάρι, ως μία προσπάθεια να καθοριστούν οι κανόνες ιδιωτικής δραστηριότητας στο διάστημα. Στη συνέχεια, το 2018 η NASA ανακοίνωσε πως εννέα ιδιωτικές εταιρίες θα διαγωνίζονταν για τη σύμβαση μεταφοράς μικρών φορτιών στη Σελήνη, πρόγραμμα γνωστό ως Commercial Lunar Payload Service, το οποίο βάσει του Jim Bridenstine, διευθύνων της NASA, αποσκοπεί εδραίωση της δυνατότητας ταξιδιών aller – retour από την Αμερική στην επιφάνεια της Σελήνης. Επιπρόσθετα, ιδρύθηκε η επιχείρηση Moonlight από την Ευρωπαϊκή Διαστημική Υπηρεσία (ESA), σε συνεργασία με διάφορες βρετανικές, ευρωπαϊκές και καναδέζικες εταιρίες, η οποία έχει ως στόχο τη δημιουργία ενός δορυφορικού και τηλεπικοινωνιακού δικτύου στη Σελήνη, καθιστώντας την ως την «8^η ήπειρο» της Γης. Όπως και η NASA, έτσι και η ESA προβλέπει μελλοντικά ταξίδια από τη Γη στο Φεγγάρι και αντίστροφα, τα οποία θα διαφέρουν σημαντικά από τις αποστολές Apollo, κυρίως από άποψη δυσκολίας.

Γίνεται, λοιπόν, αντιληπτό από τις τόσες πρωτοβουλίες για εγκαθίδρυση τηλεπικοινωνιακών δικτύων στη Σελήνη, τη δημιουργία βάσεων και την αποστολή επανδρωμένων σκαφών προς αυτήν, πως ο άνθρωπος πλέον όχι μόνο σκοπεύει στην άμεση και in situ εξερεύνηση της Σελήνης, αλλά και στην περιστασιακή επίσκεψη αυτής ή και ακόμα στη μελλοντική δημιουργία μόνιμων κατοικιών σε αυτήν. Οπουδήποτε ο άνθρωπος σκοπεύει να εξερευνήσει, να επισκεφτεί ή και να ζήσει, η συμμετοχή του τοπογράφου είναι απαραίτητη. Πιο συγκεκριμένα, η ίδρυση ενός Σεληνιακού Συστήματος Αναφοράς είναι το προφανές επόμενο και απαραίτητο, εάν επρόκειτο να εγκατασταθούν στη Σελήνη βάσεις και τηλεπικοινωνιακά δίκτυα. Για τον λόγο αυτόν, η περιγραφή μίας μεθόδου προσδιορισμού της επιφάνειας αναφοράς που βέλτιστα προσομοιάζει το προκείμενο σώμα, καθώς και η εκτίμηση των παραμέτρων αυτής, αποτελούν το πρώτο βήμα προς αυτή την κατεύθυνση. Σημαντικό είναι,

επίσης, πως μία τέτοια μέθοδος προσαρμογής σίγουρα δεν περιορίζεται μόνο στο σώμα της Σελήνης, αλλά μπορεί να εφαρμοστεί τόσο για τη Γη, όσο και για όλα τα υπόλοιπα ουράνια σώματα για τα οποία παρέχονται τα απαραίτητα δεδομένα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ – ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

2.1 Ορισμός και Περιγραφή Δεδομένων

Με στόχο την προσαρμογή ενός ελλειψοειδούς αναφοράς στην επιφάνεια της Σελήνης, έγινε χρήση δεδομένων που προήλθαν από μοντέλα σφαιρικών αρμονικών του σεληνιακού πεδίου βαρύτητας.

Το ελκτικό δυναμικό V ενός σώματος με μάζα m δίνεται από τη βαθμωτή συνάρτηση:

$$V = \frac{G \cdot m}{l} \quad (2.1)$$

όπου G : η σταθερά έλξης Newton και l : η απόσταση ενός σημείου μοναδιαίας μάζας από το σώμα μάζας m .

Το δυναμικό V σε μία περιοχή v στο εξωτερικό του σώματος ικανοποιεί την εξίσωση Laplace (2.2) σε κάθε σημείο της v . Αναλυτικότερα, το άθροισμα των δεύτερων παραγωγών της εξίσωσης (2.1) ως προς τις τρισδιάστατες καρτεσιανές συνταγμένες (x, y, z) ενός σημείου της περιοχής v είναι ίσο με το μηδέν:

$$\Delta V = 0 \quad (2.2)$$

Οι συναρτήσεις που ικανοποιούν την εξίσωση Laplace (2.2) ονομάζονται αρμονικές συναρτήσεις. Αν μία αρμονική συνάρτηση εκφραστεί σε σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, λ) , όπου r : ακτινική απόσταση ενός σημείου από το κέντρο της σφαίρας, θ : η πολική απόσταση και λ : το γεωγραφικό μήκος, τότε ονομάζεται σφαιρική αρμονική συνάρτηση.

Οι σφαιρικές αρμονικές συναρτήσεις είναι δύο ειδών: στέρες (2.3) και επιφανειακές (2.4).

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y_n(\theta, \lambda)}{r^{n+1}} \quad (2.3)$$

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta, \lambda) \quad (2.4)$$

όπου n : ακέραιος και Y : μία συνάρτηση των θ, λ .

Αποδεικνύεται ότι για δύο ακέραιους αριθμούς m και n , με $m \leq n$, οι συναρτήσεις Legendre (2.5)

$$g(\theta) = P_{nm}(\cos\theta) \quad (2.5)$$

θεωρώντας ως $t = \cos\theta$, ορίζονται ως:

$$\begin{aligned} \bar{g}(t) &= P_{nm}(t) \rightarrow \\ P_{nm}(t) &= \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot (1 - t^2)^{m/2} \cdot \frac{d^{n+m}}{dt^{n+m}} (t^2 - 1)^n \end{aligned} \quad (2.6)$$

ενώ οι ακέραιοι m, n αποτελούν την τάξη και το βαθμό τους, αντίστοιχα.

Πολλαπλασιάζοντας τις συναρτήσεις Legendre με $\cos(m \cdot \lambda)$ και $\sin(m \cdot \lambda)$, λαμβάνονται οι συναρτήσεις:

$$Y_n(\theta, \lambda) = P_{nm}(\cos\theta) \cdot \cos(m \cdot \lambda) \quad (2.7)$$

$$Y_n(\theta, \lambda) = P_{nm}(\cos\theta) \cdot \sin(m \cdot \lambda) \quad (2.8)$$

Εφόσον οι λύσεις αυτές είναι γραμμικές, κάθε γραμμικός συνδυασμός τους είναι, επίσης, λύση. Με τον τρόπο αυτό, μπορεί να γραφεί η γενική μορφή των επιφανειακών σφαιρικών αρμονικών ως εξής:

$$Y_n(\theta, \lambda) = \sum_{m=0}^n [a_{nm} \cdot P_{nm}(\cos\theta) \cdot \cos(m \cdot \lambda) + b_{nm} \cdot P_{nm}(\cos\theta) \sin(m \cdot \lambda)] \quad (2.9)$$

όπου a_{nm}, b_{nm} : σταθερές.

Τελικά, επιφανειακές σφαιρικές αρμονικές συναρτήσεις είναι οι συναρτήσεις Legendre πολλαπλασιασμένες με $\cos(m \cdot \lambda)$ και $\sin(m \cdot \lambda)$ (B. Hofmann, W. H. Moritz, 2006).

Η ανάγκη χρήσης μοντέλων σφαιρικών αρμονικών προέκυψε από την ελλιπή γνώση της πυκνότητας στο εσωτερικό των μαζών του σώματος. Η γεωμετρική τους απεικόνιση περιγράφει την επιφάνεια που χρησιμοποιείται για την περιγραφή του ουράνιου σώματος (γεωειδές, σχεδόν - γεωειδές/τελλουροειδές), ενώ όσο αυξάνεται ο βαθμός n , υπάρχει και καλύτερη φασματική προσέγγιση.

Συγκεκριμένα, στη διπλωματική εργασία, επιλέγονται και χρησιμοποιούνται τα εξής δεκαέξι (16) μοντέλα σφαιρικών αρμονικών από τη βιβλιοθήκη του "International Center for Global Earth Models (ICGEM)", τα οποία αναφέρονται στο σχεδόν - γεωειδές της Σελήνης.

Πίνακας 2.1: Μοντέλα σφαιρικών αρμονικών του σεληνιακού πεδίου βαρύτητας

ΜΟΝΤΕΛΟ	ΧΡΟΝΟΛΟΓΙΑ	ΒΑΘΜΟΣ
GLGM-1	1994	70
GLGM-2	1995	70
JGL075D1	1998	75
JGL075G1	1998	75
JGL100J1	1999	100
JGL100K1	1999	100
JGL150Q1	2000	150
JGL165P1	2000	165
GL0660B	2013	660
GRGM660PRIM	2013	660
AIUB-GRL200A	2015	200
AIUB-GRL200B	2015	200
GrazLGM300c	2016	300
GrazLGM420a	2017	420
GrazLGM420b	2018	420
GrazLGM420b+	2018	420

Τα μοντέλα GLGM-1 και GLGM-2 δημοσιεύθηκαν από την επιστημονική ομάδα Lemoine et al. το 1994 και 1995, αντίστοιχα. Είναι μοντέλα ίδιου βαθμού και τάξης, τα οποία κατασκευάστηκαν με δεδομένα από την αποστολή Clementine προς τη Σελήνη. Η βασική διαφορά τους έγκειται στο ότι για το μοντέλο GLGM-2 χρησιμοποιήθηκαν και ιστορικά δεδομένα από τους υποδορυφόρους των αποστολών Apollo 15 και 16 και από τους Lunar Orbiters 1 έως 5. Επιπλέον, κατά τη δημιουργία του μοντέλου GLGM-2, τα αποτελέσματα βαθμονομήθηκαν με στόχο την ενιαία σχετική διαφορά μεταξύ των υπολοίπων των διαφόρων λύσεων και των τυπικών σφαλμάτων τους. Σημαντική διαφορά ήταν, επίσης, το διαφορετικό βάρος μεταξύ των δεδομένων που χρησιμοποιήθηκαν για το μοντέλο GLGM-1 και GLGM-2.

Στη συνέχεια, τα μοντέλα JGL075D1, JGL075G1, JGL100J1, JGL100K1, JGL150Q1 και JGL165P1 δημιουργήθηκαν από την επιστημονική ομάδα Binder et al. με χρήση δεδομένων από την αποστολή Lunar Prospector. Η σημαντική διαφορά της προκείμενης αποστολής με κάθε άλλη προηγούμενη ήταν η σχεδόν πολική τροχιά της γύρω από τη Σελήνη που κατέστησε δυνατή την πλήρη κάλυψη της επιφάνειάς της.

Το 2013, η επιστημονική ομάδα Konopliv, A.S., et al. δημοσίευσε το μοντέλο GL0660B με χρήση δεδομένων από την αποστολή GRAIL προς τη Σελήνη. Η σπουδαιότητα του μοντέλου αυτού δεν έχει να κάνει μόνο με τον υψηλό βαθμό του ($n = 660$). Μέχρι και την αποστολή Lunar Prospector, η γνώση για το βαρυτικό πεδίο της Σελήνης περιοριζόταν στην «κοντινή πλευρά» της Σελήνης (near side of the Moon) – δηλαδή την πλευρά που βλέπει πάντα προς τη Γη – κι αυτό διότι η «μακρινή πλευρά» (far side of the Moon) δεν μπορούσε να παρατηρηθεί άμεσα από αποστολές σαν εκείνη τους Lunar Prospector. Η πρώτη αποστολή που κατέστησε δυνατή την άμεση παρατήρηση της «μακρινής πλευράς» της Σελήνης ήταν η Selene, αλλά το μοντέλο σφαιρικών αρμονικών που προέκυψε από τα δεδομένα της περιοριζόταν σε βαθμό μικρότερο ή ίσο του 70. Με την αποστολή GRAIL, το μοντέλο GL0660B παρέχει πληροφορίες για το πλήρες βαρυτικό πεδίο της Σελήνης, με σημαντικά υψηλή φασματική προσέγγιση και 98% συνοχή, ενώ βελτιώνεται και η ακρίβεια των αρμονικών μικρού βαθμού σε σχέση με μοντέλα προηγούμενων ετών και αποστολών. Το ίδιο έτος, μάλιστα, η επιστημονική ομάδα Lemoine et al., δημοσίευσε μεταξύ άλλων το μοντέλο GRGM660PRIM με δεδομένα που προήλθαν, επίσης, από την αποστολή GRAIL. Αξιοσημείωτο είναι, στην περίπτωση του μοντέλου αυτού, πως ο βαθμός του μοντέλου ($n = 660$) ήταν ο διπλάσιος από τον αναμενόμενο,

όπως αυτός είχε προβλεφθεί από μελέτες πριν την ολοκλήρωση της αποστολής GRAIL, γεγονός που οδήγησε την ομάδα σε σημαντική τροποποίηση του κώδικα που χρησιμοποιήσαν. Επιπλέον, το RMS των ανωμαλιών βαρύτητας μειώθηκε κατά 28.23 mGal σε σχέση με το μοντέλο που προέκυψε από την αποστολή Selene.

Δύο χρόνια μετά, τα μοντέλα AIUB-GRL200A και AIUB-GRL200B δημοσιεύθηκαν από την επιστημονική ομάδα Arnold et al., χρησιμοποιώντας δεδομένα από την αρχική φάση της αποστολής GRAIL. Τα μοντέλα αυτά είναι βαθμού και τάξης 200, ενώ προσδιορίστηκαν βάσει μεθόδου βασισμένης στην προσέγγιση CMA (Celestial Mechanics Approach)¹. Η μελέτη των Arnold et al. απέδειξε πως με χρήση της CMA είναι δυνατό να αναπτυχθούν ακριβή μοντέλα του σεληνιακού βαρυτικού πεδίου, χρησιμοποιώντας ακόμη και μοντέλα προ – GRAIL ως a priori πεδία (Arnold et al., 2015). Το μοντέλο AIUB-GRL200A δεν χρησιμοποιεί πληροφορίες από μοντέλα βαθμού μεγαλύτερου του 200, ενώ το μοντέλο AIUB-GRL200B χρησιμοποιεί ως a priori πληροφορία το μοντέλο GRGM900C² μέχρι βαθμό και τάξη 660.

Τέλος, τα μοντέλα GrazLGM300c, GrazLGM420a, GrazLGM420b και GrazLGM420b+ δημιουργήθηκαν στο πλαίσιο του προγράμματος GRAZIL. Στόχος του προγράμματος αυτού είναι ο ακριβής προσδιορισμός του βαρυτικού πεδίου της Σελήνης με χρήση μετρήσεων της αποστολής GRAIL και προσανατολίζεται κυρίως προς τον διαχωρισμό των παραμέτρων του βαρυτικού πεδίου και των γεωφυσικών παραμέτρων. Συγκεκριμένα, το μοντέλο GrazLGM300c παρουσιάστηκε το 2016 στο European Geoscience Union της Βιέννης από την επιστημονική ομάδα Krauss et al., είναι βαθμού 300 και χρησιμοποιεί δεδομένα από την αρχική φάση της αποστολής GRAIL (1^η Μαρτίου έως 29 Μαΐου, 2012). Το 2017, κατά τον ίδιο τρόπο, παρουσιάστηκε από την ομάδα Wirnsberger et al., (2017) το μοντέλο GrazLGM420a, επιλυμένο ως τον βαθμό 420, ενώ έναν χρόνο μετά, δημοσιεύθηκαν από την ομάδα Wirnsberger et al., (2018) τα μοντέλα GrazLGM420b και GrazLGM420b+, ίδιου βαθμού ($n = 420$). Τα μοντέλα αυτά διαφέρουν κατά τα a priori δεδομένα τους και την εφημερίδα της Σελήνης.

¹ Η CMA έχει τις βάσεις της στο λογισμικό Bernese GNSS και χρησιμοποιήθηκε, αρχικά, για τον προσδιορισμό των τροχιών δορυφόρων υψηλής τροχιάς. Σε νεότερα χρόνια, εξελίχθηκε περαιτέρω και άρχισε να χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό βαρυτικών πεδίων. Η CMA αναπτύχθηκε στο Αστρονομικό Ινστιτούτο του Πανεπιστημίου Bern και παρουσιάζεται από τη θεωρητική οπτική της γωνία στο (Beutler et al., 2010).

² Lemoine et al., 2014

2.2 Επεξεργασία Δεδομένων

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, ο βαθμός ενός μοντέλου σφαιρικών αρμονικών αντικατοπτρίζει τη φασματική προσέγγισή του. Συγκεκριμένα, εφόσον πρόκειται για μοντέλα σφαιρικών αρμονικών, είναι δυνατό να γίνεται λόγος για μήκη κύματος (B. Hofmann, W. H. Moritz, 2006). Ο βαθμός n του εκάστοτε μοντέλου, δηλαδή ο μέγιστος βαθμός του αναπτύγματος των σφαιρικών αρμονικών, συνδέεται με το μισό του μήκους κύματος λ μικρότερης ανάλυσης ως εξής:

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{\pi \cdot R}{n} = \frac{180^\circ}{n} \quad (2.10)$$

Η ποσότητα $\frac{\lambda}{2}$ αποτελεί την χωρική ανάλυση του μοντέλου, όταν εκφράζεται σε χιλιόμετρα (km), και την ακρίβειά του, όταν εκφράζεται σε μοίρες ($^\circ$). Επομένως, θεωρώντας μία σφαίρα αναφοράς με ακτίνα ίση της μέσης ακτίνας της Σελήνης ($R = 1737.40$ km), προκύπτουν τα μεγέθη αυτά για τα επιλεγμένα μοντέλα του Πίνακα 2.1.

Πίνακας 2.2: Χωρική Ανάλυση & Ακρίβεια μοντέλων σφαιρικών αρμονικών του σεληνιακού πεδίου βαρύτητας

ΜΟΝΤΕΛΟ	ΒΑΘΜΟΣ	ΧΩΡΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ (km)	ΑΚΡΙΒΕΙΑ ($^\circ$)
GLGM-1	70	77.97	2.57
GLGM-2	70	77.97	2.57
JGL075D1	75	72.78	2.40
JGL075G1	75	72.78	2.40
JGL100J1	100	54.58	1.80
JGL100K1	100	54.58	1.80
JGL150Q1	150	36.39	1.20
JGL165P1	165	33.08	1.09
GL0660B	660	8.27	0.27
GRGM660PRIM	660	8.27	0.27
AIUB-GRL200A	200	27.29	0.90
AIUB-GRL200B	200	27.29	0.90
GrazLGM300c	300	18.19	0.60
GrazLGM420a	420	13.00	0.43
GrazLGM420b	420	13.00	0.43
GrazLGM420b+	420	13.00	0.43

Επιπρόσθετα, μία σφαιρικά αρμονική συνάρτηση έχει κατά μέγιστο $2 \cdot n$ ρίζες σε ένα διάστημα $0 \leq \theta \leq (2 \cdot \pi)$, ενώ το διάστημα αυτό επαναλαμβάνεται κατά μέγιστο $n + 1$ φορές. Επομένως, η μέγιστη πυκνότητα κάθε μοντέλου υπολογίζεται ως:

$$2 \cdot n \cdot (n + 1) \quad (2.11)$$

Η μέγιστη πυκνότητα για κάθε επιλεγμένο μοντέλο φαίνεται στον Πίνακα 2.3.

Πίνακας 2.3: Μέγιστη Πυκνότητα Επιλεγμένων Μοντέλων Σφαιρικών Αρμονικών

ΜΟΝΤΕΛΟ	ΜΕΓΙΣΤΗ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑ
GLGM-1	9940
GLGM-2	9940
JGL075D1	11400
JGL075G1	11400
JGL100J1	20200
JGL100K1	20200
JGL150Q1	45300
JGL165P1	54780
GL0660B	872520
GRGM660PRIM	872520
AIUB-GRL200A	80400
AIUB-GRL200B	80400
GrazLGM300c	180600
GrazLGM420a	353640
GrazLGM420b	353640
GrazLGM420b+	353640

Στο σημείο αυτό, πρέπει να προσδιοριστούν οι παράμετροι του βαρυτικού πεδίου της Σελήνης, όπως αυτές προκύπτουν από κάθε επιλεγμένο μοντέλο σφαιρικών αρμονικών. Για τον λόγο αυτό, επιλέγεται, αρχικά, μία σφαίρα αναφοράς με στοιχεία ταυτότητας:

- Ακτίνα ίση με τη μέση ακτίνα της Σελήνης ($R = 1737.40 \text{ km}$)
- Μηδενική επιπλάτυνση ($f = 0$)
- Σταθερά έλξης $GM = 4.90 \cdot 10^{12}$
- Γωνιακή ταχύτητα περιστροφής $\omega = 2.66 \cdot 10^{-6}$

Πάνω στην σφαίρα αυτήν, κατασκευάζεται από κάθε μοντέλο ένας κάρναβος με σημεία σφαιρικών συντεταγμένων (φ, λ, h), όπου h : η υψομετρική ανωμαλία ή το υψόμετρο του σχεδόν-γεωειδούς (αντίστοιχα με την αποχή του γεωειδούς), ενώ πραγματοποιείται και η γεωμετρική απεικόνιση των μοντέλων. Το βήμα του καννάβου ορίζεται σε κάθε περίπτωση ως η μέγιστη ακρίβεια σε ($^\circ$) του εκάστοτε μοντέλου κατά σφαιρικό πλάτος και μήκος, αντίστοιχα. Για παράδειγμα, όσον αφορά στο μοντέλο GLGM-1, το βήμα του καννάβου ορίστηκε $(\varphi \times \lambda) = (2^\circ.57 \times 2^\circ.57)$. Επιπλέον, το σφαιρικό πλάτος και μήκος κυμαίνεται, αντίστοιχα, στα διαστήματα $(-90^\circ, 90^\circ)$ και $(-180^\circ, 180^\circ)$. Οι παραπάνω ενέργειες εκτελούνται στην υπολογιστική υπηρεσία του ICGEM.

Αξίζει να σημειωθεί πως η προαναφερόμενη υπηρεσία προσδιορίζει την ανωμαλία υψομέτρου από την επιφάνεια της σφαίρας αναφοράς, χρησιμοποιώντας τον τύπο του Bruns (2.12):

$$h = \frac{T}{\gamma} \quad (2.12)$$

όπου T : το διαταρακτικό δυναμικό και γ : η βαρύτητα.

Στην επόμενη παράγραφο, παρουσιάζονται οι γεωμετρικές απεικονίσεις κάθε μοντέλου του Πίνακα 2.1.

Τα σημεία του καννάβου που δημιουργήθηκε από κάθε μοντέλο πρόκειται να χρησιμοποιηθούν ως δεδομένα στην προσαρμογή ενός ελλειψοειδούς αναφοράς στην επιφάνεια της Σελήνης. Τα μαθηματικά μοντέλα που παρουσιάζονται στο Κεφάλαιο 3 και που χρησιμοποιούνται για την προσαρμογή είναι εκφρασμένα σε τριδιάστατο καρτεσιανό σύστημα (X, Y, Z). Για το λόγο αυτό και για την απεξάρτηση των δεδομένων από οποιαδήποτε επιφάνεια, οι συντεταγμένες (φ, λ, h) μετατρέπονται σε (X, Y, Z) με χρήση κώδικα στο περιβάλλον της MATLAB. Χρησιμοποιούνται

οι σχέσεις που συνδέουν τις σφαιρικές συντεταγμένες με τις καρτεσιανές συντεταγμένες, όπως αυτές σημειώνονται παρακάτω:

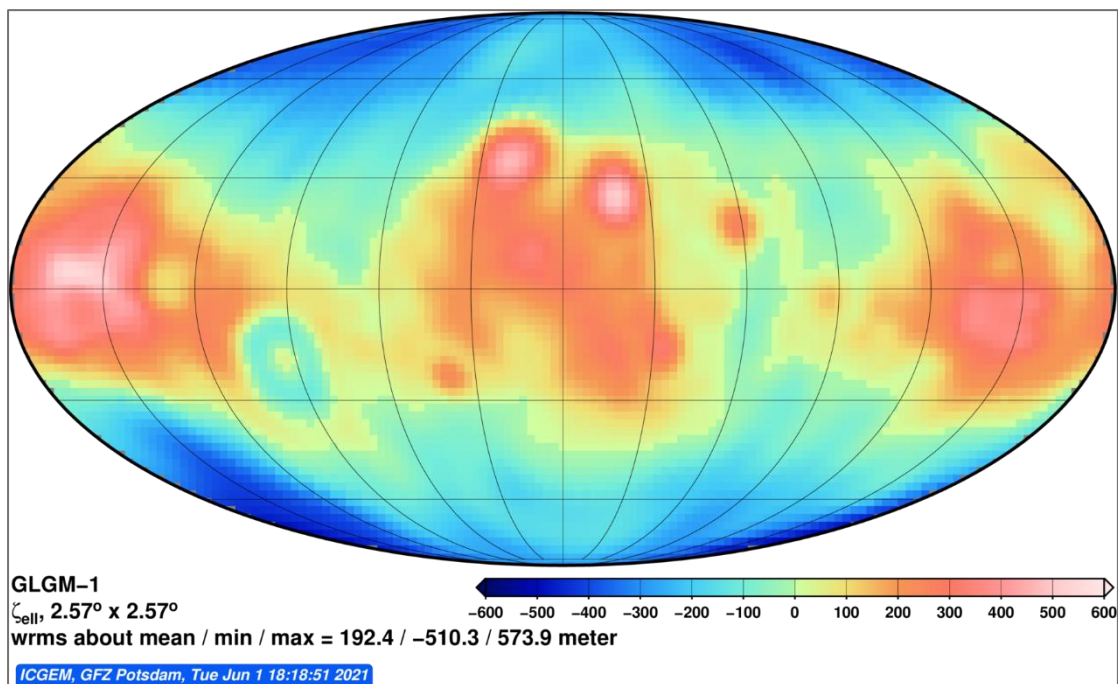
$$\begin{aligned} X &= (N + h) \cdot \cos\varphi \cdot \cos\lambda \\ Y &= (N + h) \cdot \cos\varphi \cdot \sin\lambda \\ Z &= [(1 - e) \cdot N + h] \cdot \sin\varphi \end{aligned} \quad (2.13)$$

όπου N : ίσο με την ακτίνα R της σφαίρας αναφοράς και $e = 0$.

2.3 Γεωμετρική Απεικόνιση Μοντέλων

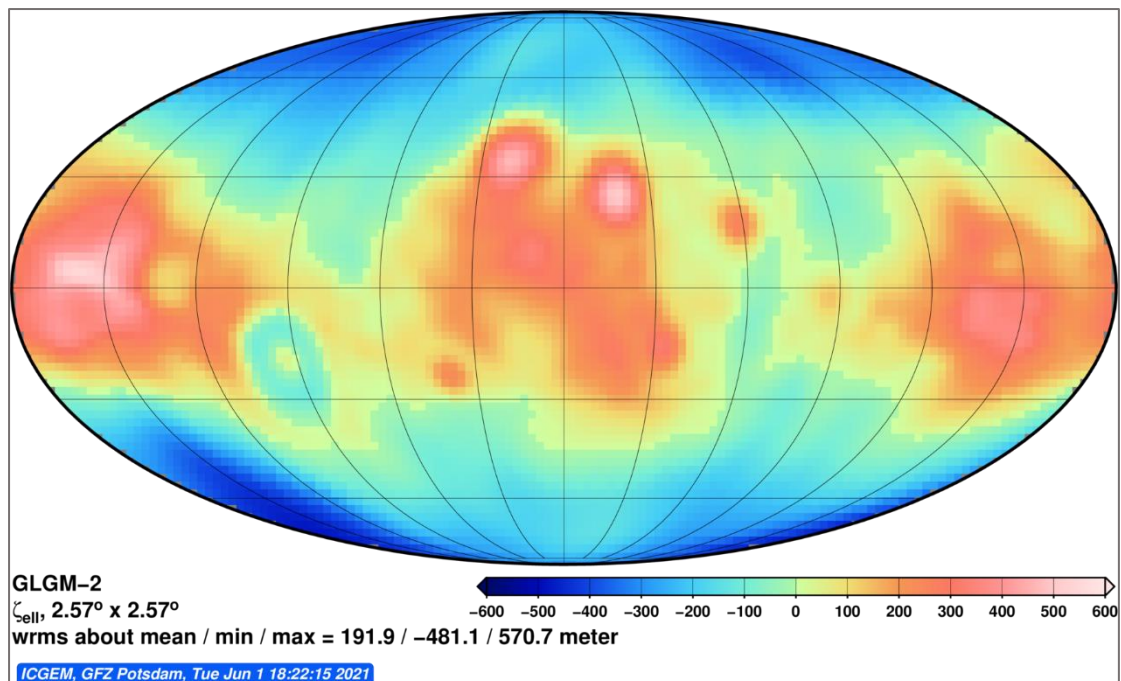
Στα παρακάτω σχήματα, απεικονίζεται η γεωμετρική απεικόνιση των επιλεγμένων μοντέλων σφαιρικών αρμονικών στη μέγιστη ανάλυσή τους. Αναλυτικότερα, απεικονίζεται σε χρωματική κλίμακα το ύψος του σχεδόν – γεωειδούς ή η ανωμαλία υψομέτρου h , όπως προκύπτει από το εκάστοτε μοντέλο, πάνω στην επιφάνεια του σχεδόν – γεωειδούς. Επιπλέον, σημειώνονται η μέγιστη, ελάχιστη και μέση τιμή της υψομετρικής ανωμαλίας.

- GLGM-1



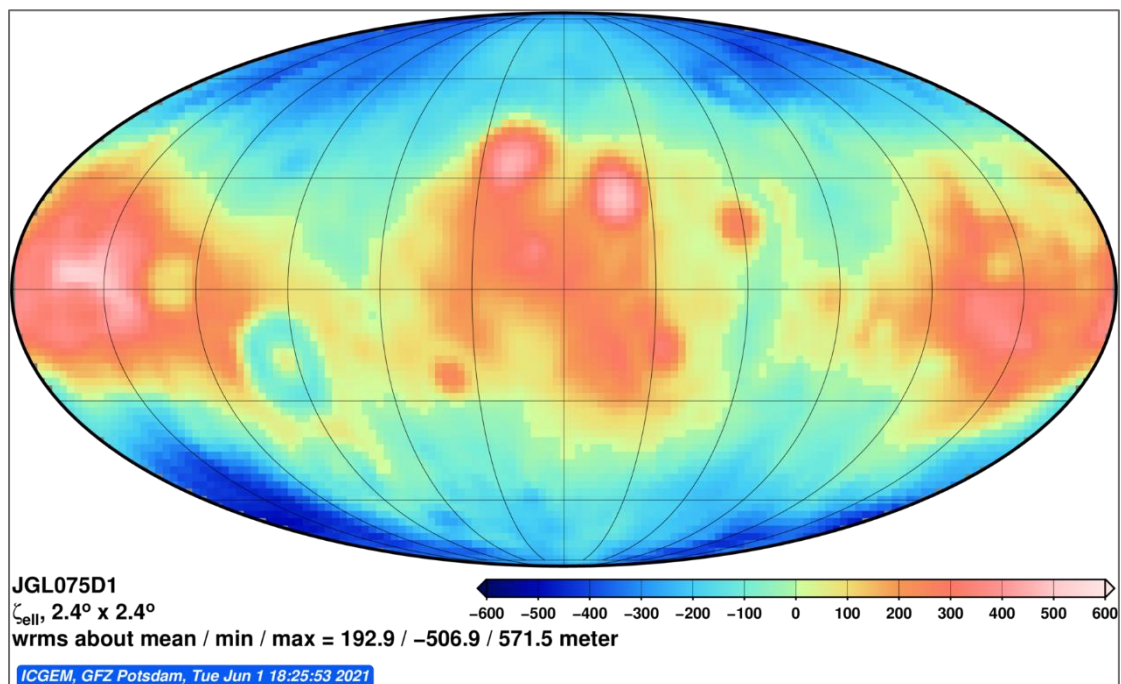
Σχήμα 2.1: Γεωμετρική Απεικόνιση Μοντέλου GLGM-1, Grid 2°.57x2°.57 (icgem.gfz-potsdam.de/home)

- GLGM-2



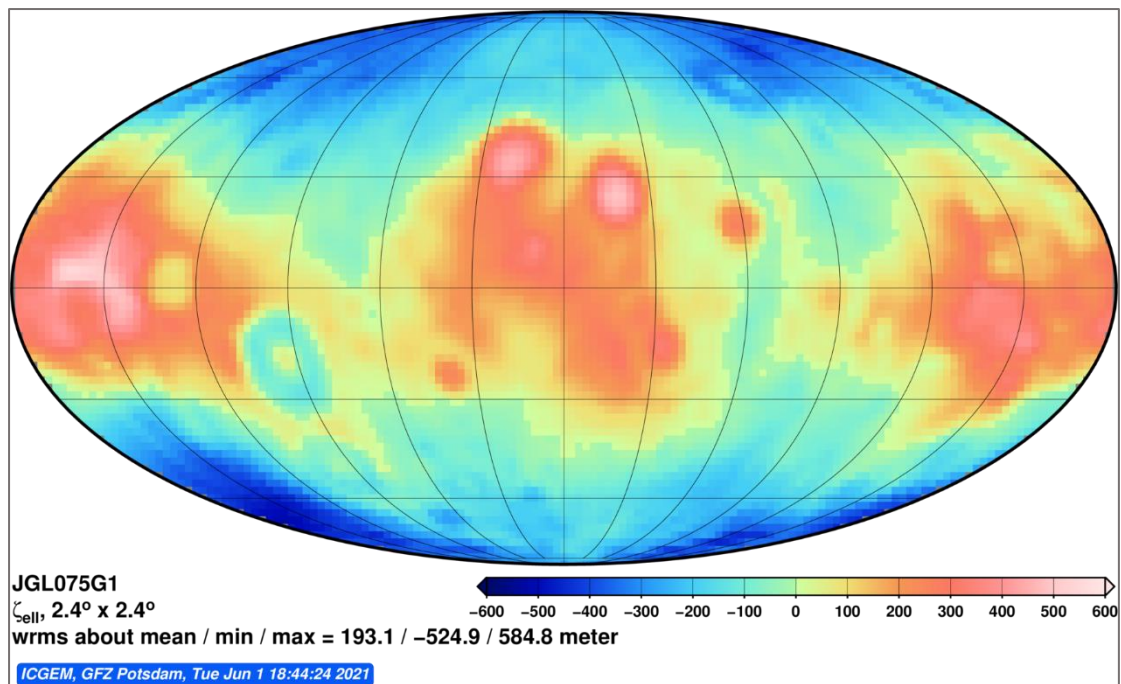
Σχήμα 2.2: Γεωμετρική Απεικόνιση Μοντέλου GLGM-2, Grid 2°.57x2°.57 (icgem.gfz-potsdam.de/home)

- JGL075D1



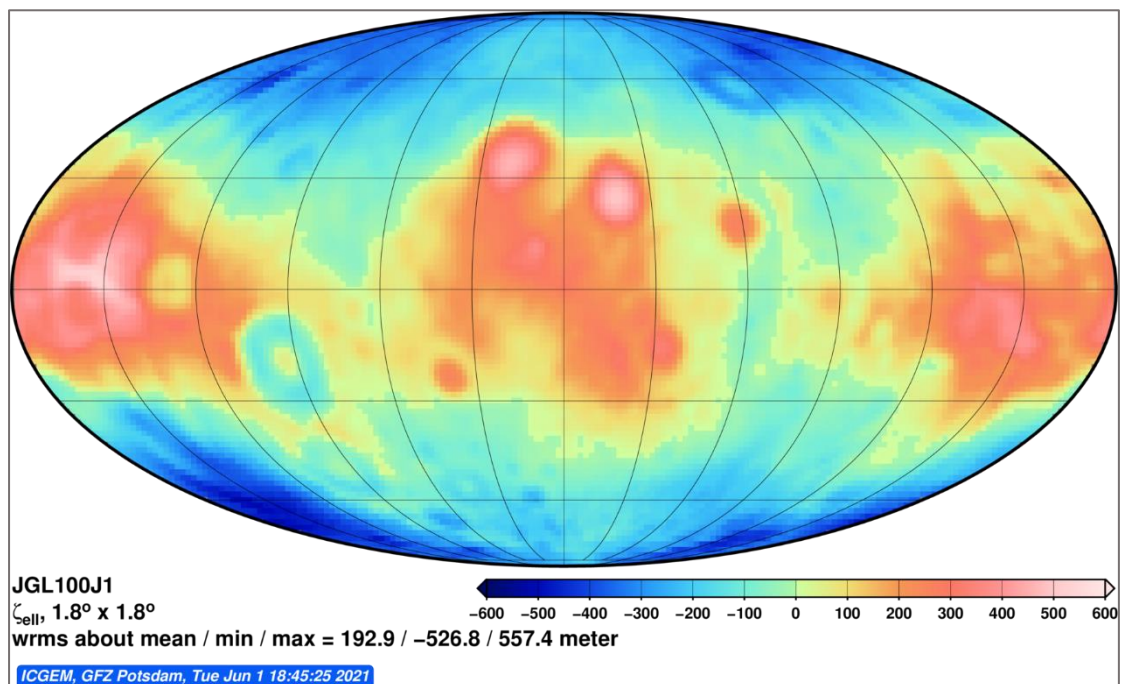
Σχήμα 2.3: Γεωμετρική Απεικόνιση Μοντέλου JGL075D1, Grid 2°.40x2°.40 (icgem.gfz-potsdam.de/home)

- JGL075G1



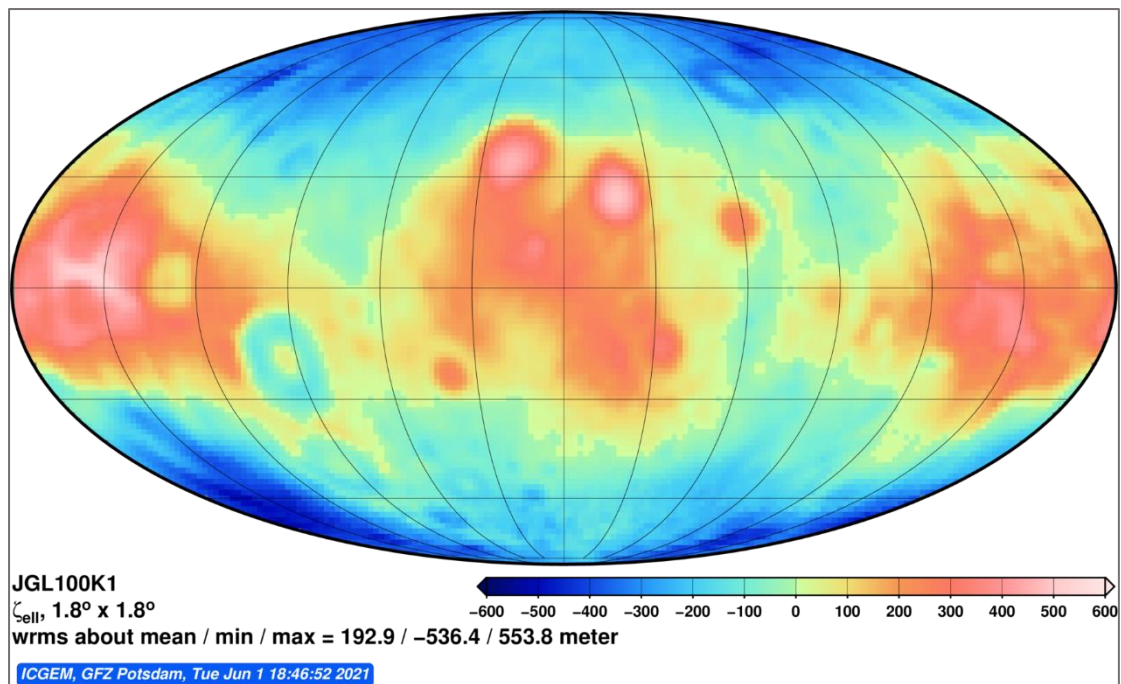
Σχήμα 2.4: Γεωμετρική Απεικόνιση Μοντέλου JGL075G1, Grid 2°.40x2°.40 (icgem.gfz-potsdam.de/home)

- JGL100J1



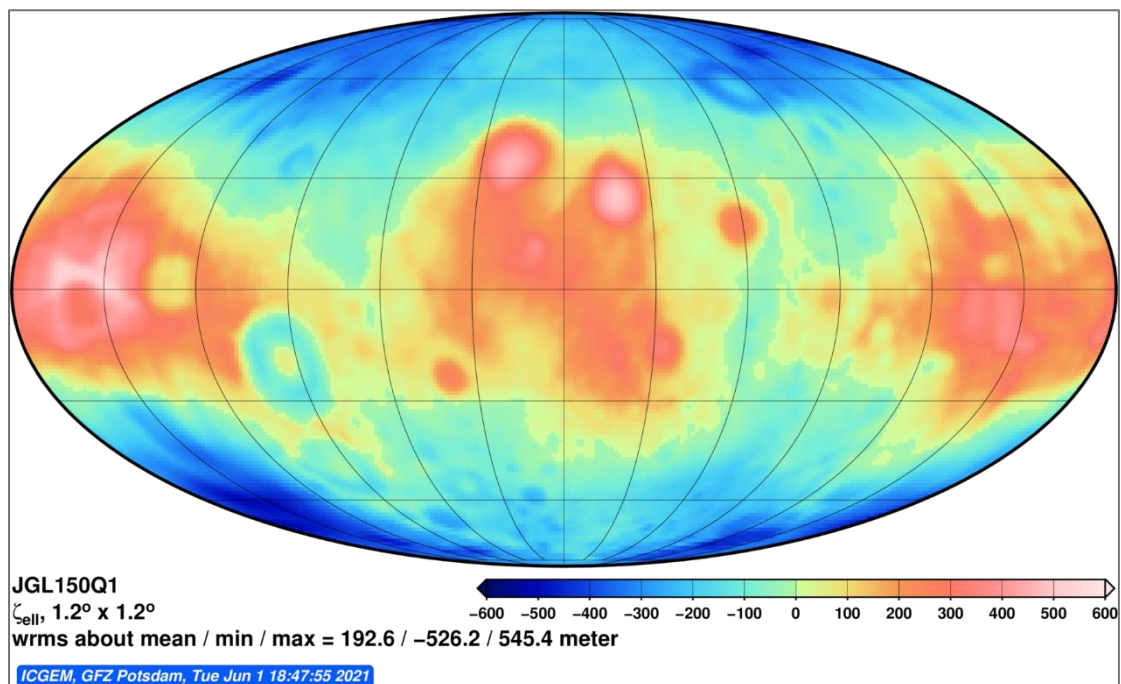
Σχήμα 2.5: Γεωμετρική Απεικόνιση Μοντέλου JGL100J1, Grid 1°.80x1°.80 (icgem.gfz-potsdam.de/home)

- JGL100K1



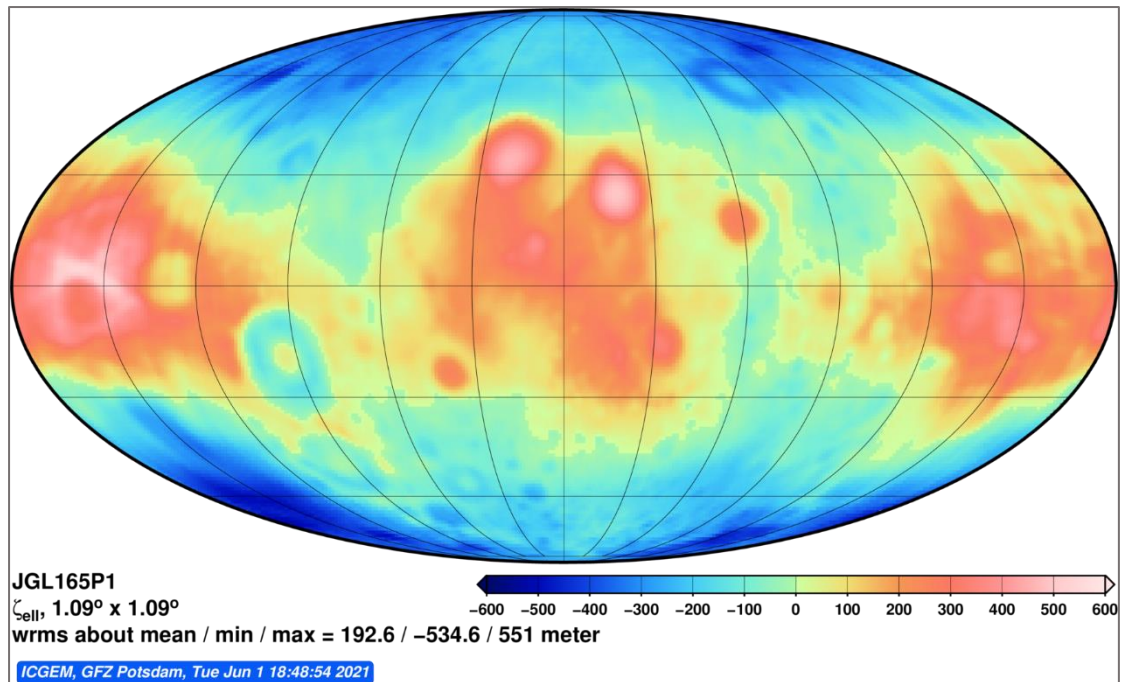
Σχήμα 2.6: Γεωμετρική Απεικόνιση Μοντέλου JGL100K1, Grid 1°.80x1°.80 (icem.gfz-potsdam.de/home)

- JGL150Q1



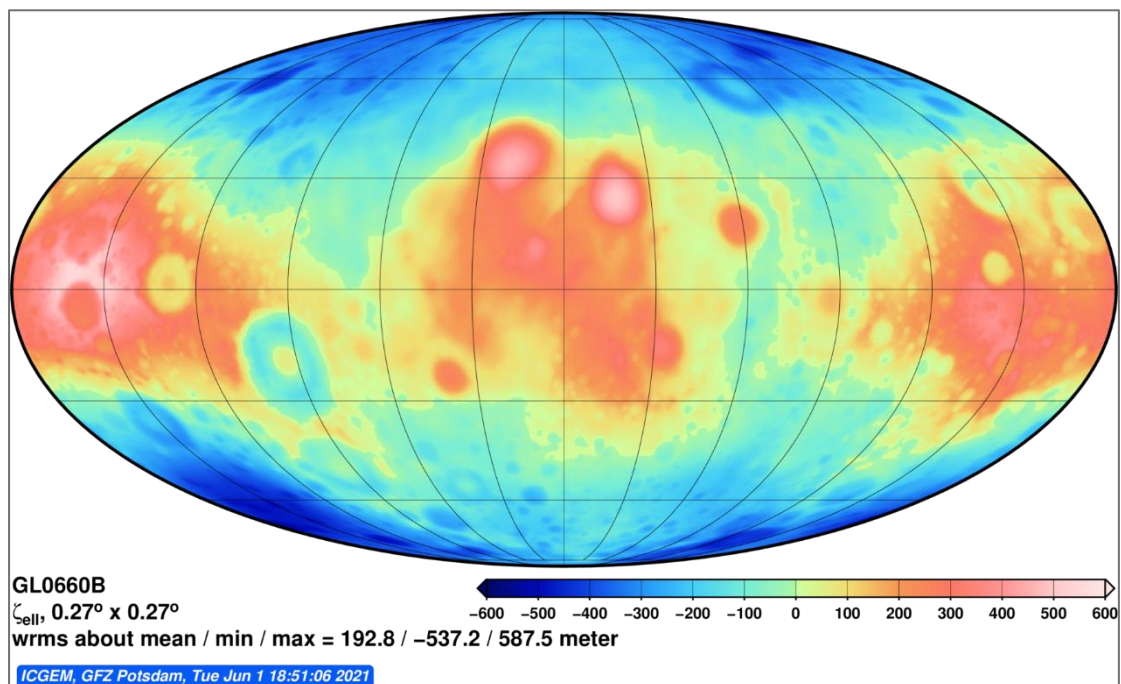
Σχήμα 2.7: Γεωμετρική Απεικόνιση Μοντέλου JGL150Q1, Grid 1°.20x1°.20 (icgem.gfz-potsdam.de/home)

- JGL165P1



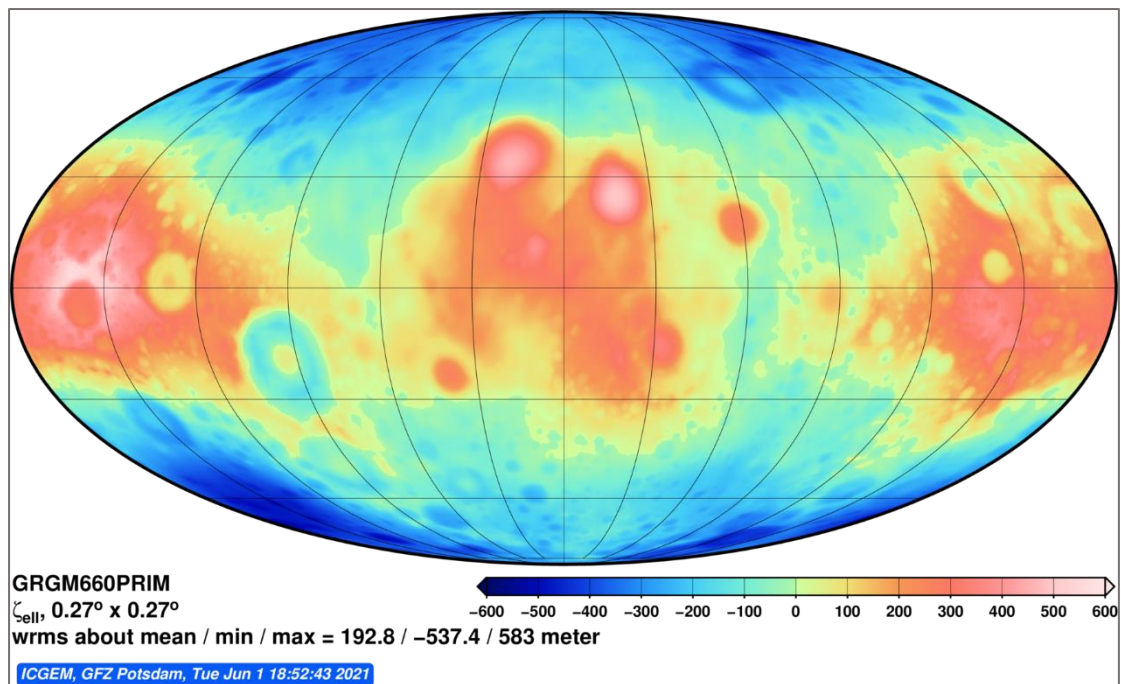
Σχήμα 2.8: Γεωμετρική Απεικόνιση Μοντέλου JGL165P1, Grid $1^\circ.09 \times 1^\circ.09$ (icgem.gfz-potsdam.de/home)

- GL0660B



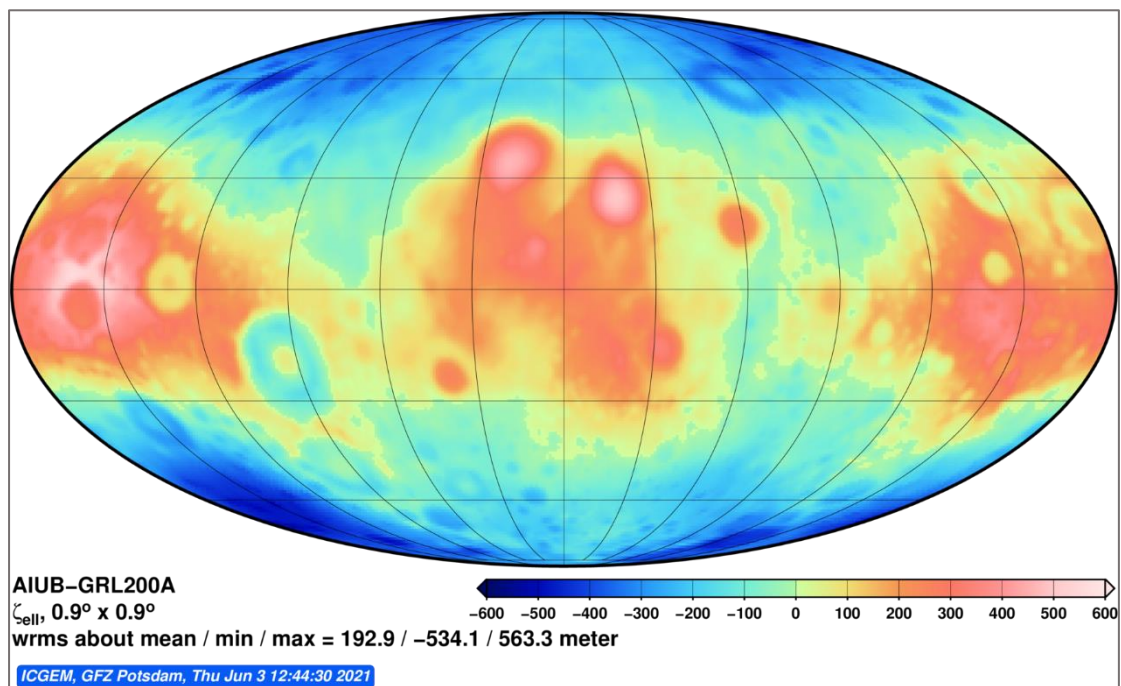
Σχήμα 2.9: Γεωμετρική Απεικόνιση Μοντέλου GL0660B, Grid $0^\circ.27 \times 0^\circ.27$ (icgem.gfz-potsdam.de/home)

- GRGM660PRIM



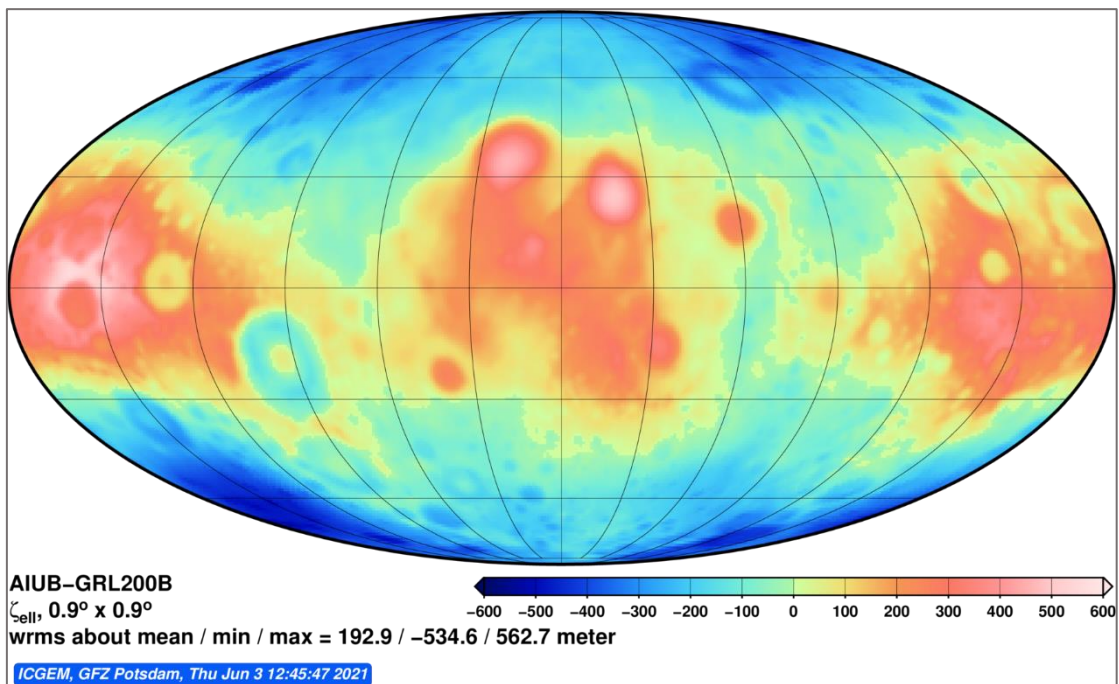
Σχήμα 2.10: Γεωμετρική Απεικόνιση Μοντέλου GRGM660PRIM, Grid $0^\circ.27 \times 0^\circ.27$ (icgem.gfz-potsdam.de/home)

- AIUB-GRL200A



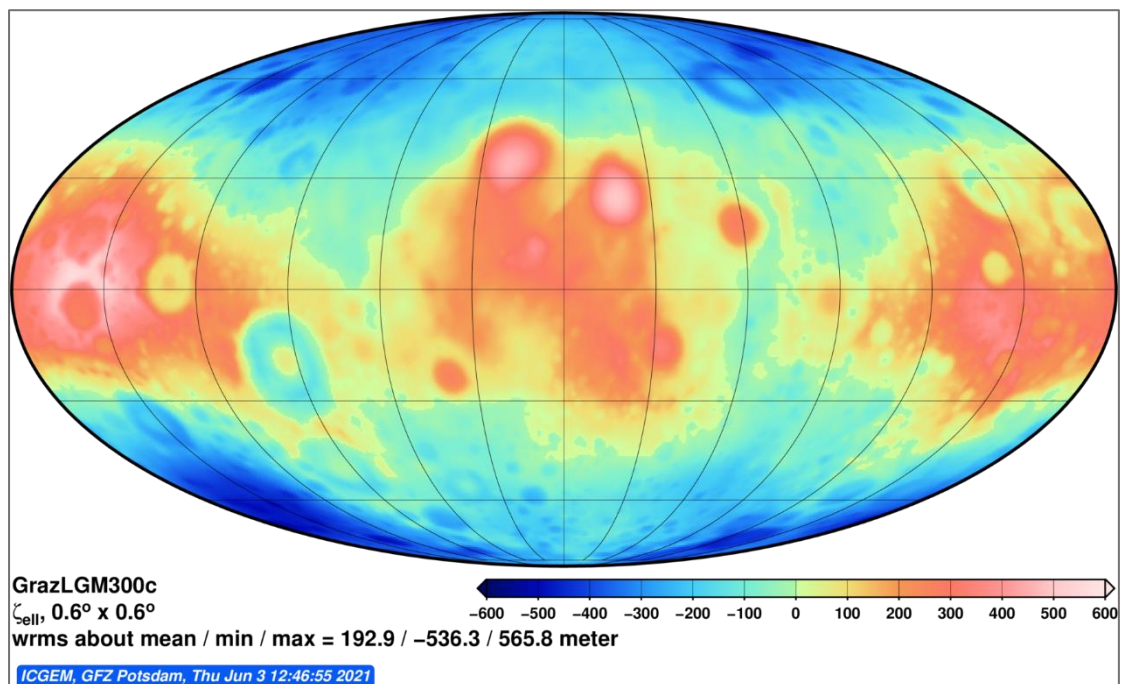
Σχήμα 2.11: Γεωμετρική Απεικόνιση Μοντέλου AIUB-GRL200A, Grid $0^\circ.90 \times 0^\circ.90$ (icgem.gfz-potsdam.de/home)

- AIUB-GRL200B



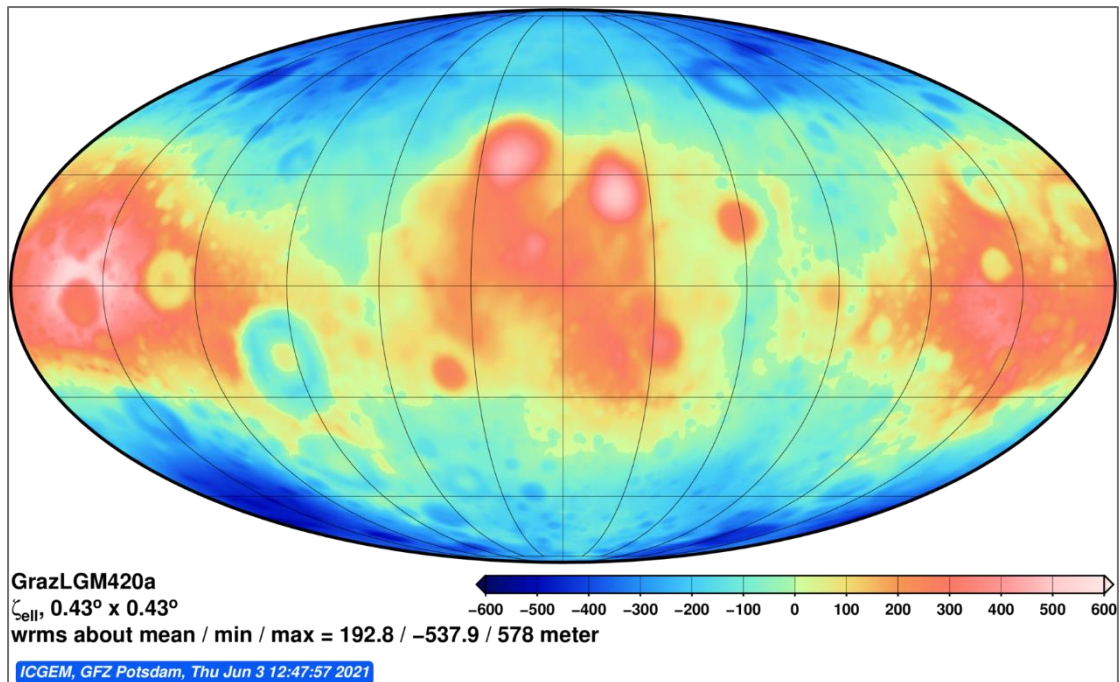
Σχήμα 2.12: Γεωμετρική Απεικόνιση Μοντέλου AIUB-GRL200B, Grid $0^\circ.90 \times 0^\circ.90$ (icgem.gfz-potsdam.de/home)

- GrazLGM300c



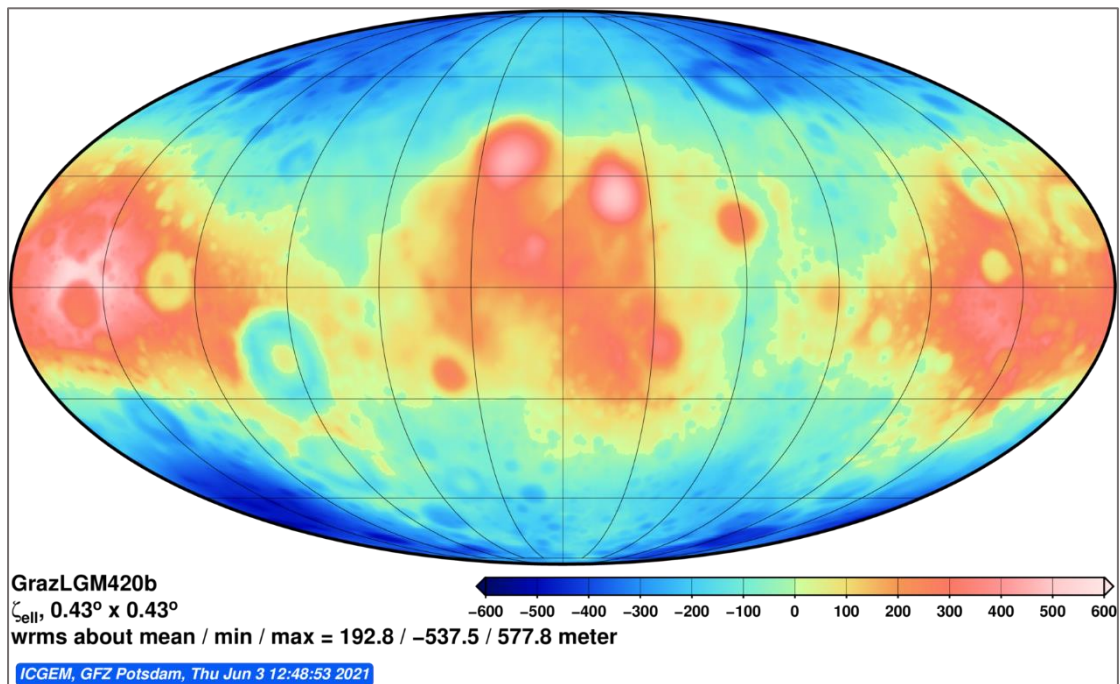
Σχήμα 2.13: Γεωμετρική Απεικόνιση Μοντέλου GrazLGM300c, Grid $0^\circ.60 \times 0^\circ.60$ (icgem.gfz-potsdam.de/home)

- GrazLGM420a



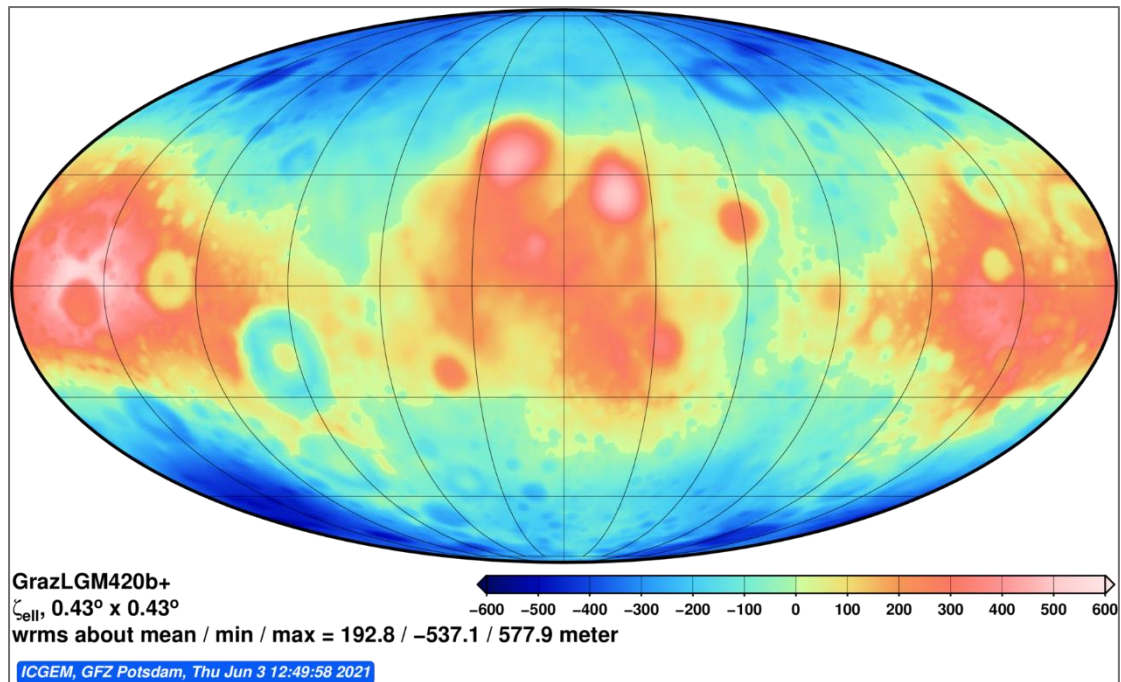
Σχήμα 2.14: Γεωμετρική Απεικόνιση Μοντέλου GrazLGM420a, Grid 0°.43x0°.43 (icgem.gfz-potsdam.de/home)

- GrazLGM420b



Σχήμα 2.15: Γεωμετρική Απεικόνιση Μοντέλου GrazLGM420b, Grid 0°.43x0°.43 (icgem.gfz-potsdam.de/home)

- GrazLGM420b+



Σχήμα 2.16: Γεωμετρική Απεικόνιση Μοντέλου GrazLGM420b+, Grid $0^{\circ}.43 \times 0^{\circ}.43$ (icgem.gfz-potsdam.de/home)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΕΛΛΕΙΨΟΕΙΔΟΥΣ

3.1 Μη Γραμμικά Μοντέλα Ελλειψοειδούς

3.1.1 Γενική Καρτεσιανή Εξίσωση Ελλειψοειδούς

Κάθε τριαξονικό ελλειψοειδές περιγράφεται από εννέα παραμέτρους: τις συντεταγμένες του κέντρου του, τους τρεις ημιάξονες (ως προς τις διευθύνσεις x, y, z) και τις γωνίες στροφής μεταξύ των διευθύνσεων (x, y, z) και των ημιαξόνων του ελλειψοειδούς.

Σε μορφή πινάκων, η γενική καρτεσιανή εξίσωση που περιγράφει ένα ελλειψοειδές γράφεται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} x - t_x & y - t_y & z - t_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{xy} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{xz} & p_{yz} & p_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x - t_x \\ y - t_y \\ z - t_z \end{bmatrix} - 1 = 0 \quad (3.1)$$

όπου:

- οι παράμετροι t_x, t_y, t_z σχηματίζουν το διάνυσμα μετάθεσης

$$t = [t_x \ t_y \ t_z]^T \quad (3.2)$$

και αποτελούν τις συντεταγμένες του κέντρου του ελλειψοειδούς ως προς την αφετηρία $(0, 0, 0)$ του συστήματος.

- τα στοιχεία του συμμετρικού πίνακα

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{xy} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{xz} & p_{yz} & p_{zz} \end{bmatrix} = \mathbf{R}^T \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha_x^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha_y^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha_z^2} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{R} \quad (3.3)$$

όπου \mathbf{R} ο πίνακας στροφής:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \quad (3.4)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta_y \cdot \cos\theta_z & \cos\theta_x \cdot \sin\theta_z + \sin\theta_x \cdot \sin\theta_y \cdot \cos\theta_z & \sin\theta_x \cdot \sin\theta_z - \cos\theta_x \cdot \sin\theta_y \cdot \cos\theta_z \\ -\cos\theta_y \cdot \sin\theta_z & \cos\theta_x \cdot \cos\theta_z - \sin\theta_x \cdot \sin\theta_y \cdot \sin\theta_z & \sin\theta_x \cdot \cos\theta_z + \cos\theta_x \cdot \sin\theta_y \cdot \sin\theta_z \\ \sin\theta_y & -\sin\theta_x \cdot \cos\theta_y & \cos\theta_x \cdot \cos\theta_y \end{bmatrix}$$

είναι συναρτήσεις των τριών ημιαξόνων του ελλειψοειδούς a_x , a_y & a_z και των τριών γωνιών στροφής θ_x , θ_y & θ_z .

Τα στοιχεία του διανύσματος t , οι ημιάξονες a_x , a_y & a_z και οι γωνίες στροφής θ_x , θ_y & θ_z , αποτελούν τις παραμέτρους του ελλειψοειδούς.

Η εξίσωση (3.1), αν αυτή γραφεί για ένα σημείο i (x_i , y_i , z_i) της επιφάνειας του ελλειψοειδούς, γίνεται:

$$F_i = p_{xx} \cdot (x_i - t_x)^2 + p_{yy} \cdot (y_i - t_y)^2 + p_{zz} \cdot (z_i - t_z)^2 + 2 \cdot p_{xy} \cdot (x_i - t_x) \cdot (y_i - t_y) + 2 \cdot p_{xz} \cdot (x_i - t_x) \cdot (z_i - t_z) + 2 \cdot p_{yz} \cdot (y_i - t_y) \cdot (z_i - t_z) - 1 = 0 \quad (3.5)$$

όπου:

$$p_{xx} = \frac{r_{11}^2}{a_x^2} + \frac{r_{21}^2}{a_y^2} + \frac{r_{31}^2}{a_z^2}, \quad p_{yy} = \frac{r_{12}^2}{a_x^2} + \frac{r_{22}^2}{a_y^2} + \frac{r_{32}^2}{a_z^2},$$

$$p_{zz} = \frac{r_{13}^2}{a_x^2} + \frac{r_{23}^2}{a_y^2} + \frac{r_{33}^2}{a_z^2} \quad \text{και}$$

$$p_{xy} = \frac{r_{11} \cdot r_{12}}{a_x^2} + \frac{r_{21} \cdot r_{22}}{a_y^2} + \frac{r_{31} \cdot r_{32}}{a_z^2}, \quad (3.6)$$

$$p_{xz} = \frac{r_{11} \cdot r_{13}}{a_x^2} + \frac{r_{21} \cdot r_{23}}{a_y^2} + \frac{r_{31} \cdot r_{33}}{a_z^2},$$

$$p_{yz} = \frac{r_{13} \cdot r_{12}}{a_x^2} + \frac{r_{21} \cdot r_{23}}{a_y^2} + \frac{r_{31} \cdot r_{33}}{a_z^2}$$

Παραλείποντας παραμέτρους από την παραπάνω εξίσωση, σχηματίζονται οι ειδικές περιπτώσεις του γενικού μαθηματικού μοντέλου ενός τριαξονικού ελλειψοειδούς.

Συγκεκριμένα, οι ειδικές περιπτώσεις ενός ελλειψοειδούς σχηματίζονται θεωρώντας πως το κέντρο του ταυτίζεται με το κέντρο του εκάστοτε συστήματος αναφοράς ή/και πως υπάρχουν μηδενικές στροφές μεταξύ του συστήματος αναφοράς και του ελλειψοειδούς.

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται συνοπτικά οι τέσσερις ειδικές περιπτώσεις του μαθηματικού μοντέλου (3.1) αναφορικά με τις παραμέτρους που λαμβάνονται υπόψιν (είναι μη μηδενικές) σε κάθε μία.

Πίνακας 3.1: Ειδικές περιπτώσεις τριαξονικού ελλειψοειδούς

Παράμετρος/ Περίπτωση	t_x	t_y	t_z	α_x	α_y	α_z	θ_x	θ_y	θ_z
T_1	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
T_2	✗	✗	✗	✓	✓	✓	✓	✓	✓
T_3	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✗	✗	✗
T_4	✗	✗	✗	✓	✓	✓	✗	✗	✗

(✓: Η παράμετρος υπάρχει/ ✗: Η παράμετρος δεν υπάρχει)

Γίνεται εύκολα αντιληπτό πως η περίπτωση T_1 αντιστοιχεί στην γενική καρτεσιανή εξίσωση ενός τριαξονικού ελλειψοειδούς.

3.1.2 Ειδική Περίπτωση T₂

Στην περίπτωση που το κέντρο του ελλειψοειδούς ταυτίζεται με το κέντρο του εκάστοτε συστήματος αναφοράς, το διάνυσμα μετάθεσης t μηδενίζεται, ενώ ο πίνακας \mathbf{P} παραμένει αμετάβλητος.

Συνεπώς, σε μορφή πινάκων η εξίσωση (3.1) γράφεται ως εξής:

$$[x \ y \ z] \cdot \begin{bmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{xy} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{xz} & p_{yz} & p_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - 1 = 0 \quad (3.7)$$

ενώ για κάθε σημείο $i (x_i, y_i, z_i)$ του ελλειψοειδούς, η εξίσωση (3.5) γίνεται:

$$F_i = p_{xx} \cdot x_i^2 + p_{yy} \cdot y_i^2 + p_{zz} \cdot z_i^2 + 2 \cdot p_{xy} \cdot x_i \cdot y_i + 2 \cdot p_{xz} x_i \cdot z_i + 2 \cdot p_{yz} \cdot y_i \cdot z_i - 1 = 0 \quad (3.8)$$

όπου:

$$p_{xx} = \frac{r_{11}^2}{a_x^2} + \frac{r_{21}^2}{a_y^2} + \frac{r_{31}^2}{a_z^2}, \quad p_{yy} = \frac{r_{12}^2}{a_x^2} + \frac{r_{22}^2}{a_y^2} + \frac{r_{32}^2}{a_z^2},$$

$$p_{zz} = \frac{r_{13}^2}{a_x^2} + \frac{r_{23}^2}{a_y^2} + \frac{r_{33}^2}{a_z^2} \text{ και}$$

$$p_{xy} = \frac{r_{11} \cdot r_{12}}{a_x^2} + \frac{r_{21} \cdot r_{22}}{a_y^2} + \frac{r_{31} \cdot r_{32}}{a_z^2}, \quad (3.9)$$

$$p_{xz} = \frac{r_{11} \cdot r_{13}}{a_x^2} + \frac{r_{21} \cdot r_{23}}{a_y^2} + \frac{r_{31} \cdot r_{33}}{a_z^2},$$

$$p_{yz} = \frac{r_{13} \cdot r_{12}}{a_x^2} + \frac{r_{21} \cdot r_{23}}{a_y^2} + \frac{r_{31} \cdot r_{33}}{a_z^2}$$

3.1.3 Ειδική Περίπτωση T₃

Στην περίπτωση μηδενικών στροφών μεταξύ των διευθύνσεων (x, y, z) του συστήματος αναφοράς και των ημιαξόνων του ελλειψοειδούς, ο πίνακας στροφής \mathbf{R} ταυτίζεται με το μοναδιαίο πίνακα \mathbf{I} και, κατά συνέπεια, ο πίνακας \mathbf{P} ισούται με:

$$\begin{bmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{xy} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{xz} & p_{yz} & p_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha_x^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha_y^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha_z^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & p_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & p_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Έτσι, σε μορφή πινάκων η εξίσωση του ελλειψοειδούς γράφεται:

$$\begin{bmatrix} x - t_x & y - t_y & z - t_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha_x^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha_y^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha_z^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x - t_x \\ y - t_y \\ z - t_z \end{bmatrix} - 1 = 0 \quad (3.10)$$

ενώ για κάθε σημείο $i (x_i, y_i, z_i)$ της επιφάνειάς του:

$$F_i = p_{xx} \cdot (x_i - t_x)^2 + p_{yy} \cdot (y_i - t_y)^2 + p_{zz} \cdot (z_i - t_z)^2 - 1 = 0 \quad (3.11)$$

όπου:

$$p_{xx} = \frac{1}{\alpha_x^2}, p_{yy} = \frac{1}{\alpha_y^2}, p_{zz} = \frac{1}{\alpha_z^2} \quad (3.12)$$

3.1.4 Ειδική Περίπτωση T₄

Η περίπτωση T₄, όπου δεν υπάρχουν ούτε μεταθέσεις ούτε στροφές, αποτελεί το απλούστερο μαθηματικό μοντέλο ελλειψοειδούς και προκύπτει συνδυάζοντας τις περιπτώσεις T₂ και T₃.

Αναλυτικότερα, το διάνυσμα μετάθεσης t είναι μηδενικό και ο πίνακας στροφής \mathbf{R} ταυτίζεται με τον μοναδιαίο πίνακα \mathbf{I} , οπότε προκύπτουν οι παρακάτω δύο εξισώσεις σε μορφή πινάκων και για κάθε σημείο του ελλειψοειδούς, αντίστοιχα:

$$[x \ y \ z] \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{a_x^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_y^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_z^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - 1 = 0 \quad (3.13)$$

και

$$F_i = p_{xx} \cdot x_i^2 + p_{yy} \cdot y_i^2 + p_{zz} \cdot z_i^2 - 1 = 0 \quad (3.14)$$

όπου:

$$p_{xx} = \frac{1}{a_x^2}, p_{yy} = \frac{1}{a_y^2}, p_{zz} = \frac{1}{a_z^2} \quad (3.15)$$

3.2 Εκφυλισμένες Περιπτώσεις

3.2.1 Ελλειψοειδές εκ περιστροφής

Το τριαξονικό ελλειψοειδές εκφυλίζεται σε ελλειψοειδές εκ περιστροφής με άξονα περιστροφής τον άξονα z αν ισχύει $a_x = a_y > a_z$ (θεωρείται επιπλάτυνση στον άξονα περιστροφής) και η γωνία στροφής κατά τον άξονα περιστροφής θ_z είναι μηδενική. Συνεπώς, το ελλειψοειδές εκ περιστροφής περιγράφεται – κατά το μέγιστο – από επτά (7) παραμέτρους: τρεις μεταθέσεις (t_x, t_y, t_z), δύο ημιάξονες (a_x ή a_y και a_z) και δύο γωνίες στροφής (θ_x, θ_y). Όπως και στο τριαξονικό ελλειψοειδές, παραλείποντας κάποιες από τις παραμέτρους, δημιουργούνται οι ειδικές περιπτώσεις του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής. Στον παρακάτω πίνακα, λοιπόν, αναφέρονται οι περιπτώσεις του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής αναφορικά με τις παραμέτρους που λαμβάνονται υπόψιν σε κάθε μία από αυτές.

Πίνακας 3.2: Ειδικές περιπτώσεις ελλειψοειδούς εκ περιστροφής

Παράμετρος/ Περίπτωση	t_x	t_y	t_z	$a_x =$ a_y	a_z	θ_x	θ_y
O_1	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
O_2	✓	✓	✓	✓	✓	✗	✗
O_3	✗	✗	✗	✓	✓	✓	✓
O_4	✗	✗	✗	✓	✓	✗	✗

(✓: Η παράμετρος υπάρχει/ ✗: Η παράμετρος δεν υπάρχει)

3.2.1.1 Γενική καρτεσιανή εξίσωση ελλειψοειδούς εκ περιστροφής

Η πρώτη περίπτωση του Πίνακα 3.3 αναφέρεται στη γενική καρτεσιανή εξίσωση του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής, η οποία προκύπτει από την εξίσωση (3.1) μηδενίζοντας τη γωνία στροφής θ_z και εξισώνοντας τους ημιάξονες α_x και α_y . Στην περίπτωση αυτή, μεταβάλλεται ο πίνακας \mathbf{P} ως εξής:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{xy} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{xz} & p_{yz} & p_{zz} \end{bmatrix} = \mathbf{R}^T \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha_x^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha_x^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha_z^2} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{R} \quad (3.16)$$

με \mathbf{R} τον πίνακα στροφής:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta_y & \sin\theta_x \cdot \sin\theta_y & -\cos\theta_x \cdot \sin\theta_y \\ 0 & \cos\theta_x & \sin\theta_x \\ \sin\theta_y & -\sin\theta_x \cdot \cos\theta_y & \cos\theta_x \cdot \cos\theta_y \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.17)$$

διότι $\sin\theta_z = \sin 0 = 0$ και $\cos\theta_z = \cos 0 = 1$.

Η μορφή της εξίσωσης αυτή καθ' αυτή δεν μεταβάλλεται, διαφοροποιούνται μόνο οι παράγοντες του συμμετρικού πίνακα \mathbf{P} . Δηλαδή, σε μορφή πινάκων η γενική καρτεσιανή εξίσωση ενός ελλειψοειδούς εκ περιστροφής έχει ως εξής:

$$[x - t_x \quad y - t_y \quad z - t_z] \cdot \begin{bmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{xy} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{xz} & p_{yz} & p_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x - t_x \\ y - t_y \\ z - t_z \end{bmatrix} - 1 = 0 \quad (3.18)$$

ενώ αν γραφεί για ένα σημείο i (x_i, y_i, z_i) της επιφάνειας του, γίνεται:

$$\begin{aligned}
 F_i = & p_{xx} \cdot (x_i - t_x)^2 + p_{yy} \cdot (y_i - t_y)^2 + p_{zz} \cdot (z_i - t_z)^2 + \\
 & + 2 \cdot p_{xy} \cdot (x_i - t_x) \cdot (y_i - t_y) + 2 \cdot p_{xz} \cdot (x_i - t_x) \cdot \\
 & \quad (z_i - t_z) + \\
 & + 2 \cdot p_{yz} \cdot (y_i - t_y) \cdot (z_i - t_z) - 1 = 0
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

όπου:

$$\begin{aligned}
 p_{xx} = & \frac{r_{11}^2}{a_x^2} + \frac{r_{31}^2}{a_z^2}, & p_{yy} = & \frac{r_{12}^2}{a_x^2} + \frac{r_{22}^2}{a_x^2} + \frac{r_{32}^2}{a_z^2}, \\
 p_{zz} = & \frac{r_{13}^2}{a_x^2} + \frac{r_{23}^2}{a_x^2} + \frac{r_{33}^2}{a_z^2} \text{ και}
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}
 p_{xy} = & \frac{r_{11} \cdot r_{12}}{a_x^2} + \frac{r_{31} \cdot r_{32}}{a_z^2}, & p_{xz} = & \frac{r_{11} \cdot r_{13}}{a_x^2} + \frac{r_{31} \cdot r_{33}}{a_z^2}, \\
 p_{yz} = & \frac{r_{13} \cdot r_{12}}{a_x^2} + \frac{r_{31} \cdot r_{33}}{a_z^2}
 \end{aligned}$$

3.2.2 Ειδική περίπτωση O_2

Στην περίπτωση που οι γωνίες στροφής κατά τους άξονες x και y είναι και αυτές μηδενικές, ο πίνακας στροφής \mathbf{R} ταυτίζεται με το μοναδιαίο πίνακα \mathbf{I} και ο συμμετρικός πίνακας \mathbf{P} ισούται με:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{a_x^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_x^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_z^2} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Άρα, η εξίσωση του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής σε μορφή πινάκων γίνεται:

$$[x - t_x \quad y - t_y \quad z - t_z] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{a_x^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_x^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_z^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x - t_x \\ y - t_y \\ z - t_z \end{bmatrix} - 1 = 0 \quad (3.22)$$

ενώ για κάθε σημείο i (x_i, y_i, z_i):

$$F_i = p_{xx} \cdot (x_i - t_x)^2 + p_{yy} \cdot (y_i - t_y)^2 + p_{zz} \cdot (z_i - t_z)^2 - 1 = 0 \quad (3.23)$$

όπου:

$$p_{xx} = \frac{1}{a_x^2}, p_{yy} = \frac{1}{a_x^2}, p_{zz} = \frac{1}{a_z^2} \quad (3.24)$$

3.2.3 Ειδική περίπτωση O_3

Στην περίπτωση μηδενικού διανύσματος μετάθεσης t , ο πίνακας \mathbf{P} μένει αμετάβλητος και οι εξισώσεις του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής έχουν ως εξής:

$$[x \ y \ z] \cdot \begin{bmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{xy} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{xz} & p_{yz} & p_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - 1 = 0 \quad (3.25)$$

και

$$F_i = p_{xx} \cdot x_i^2 + p_{yy} \cdot y_i^2 + p_{zz} \cdot z_i^2 + 2 \cdot p_{xy} \cdot x_i \cdot y_i + 2 \cdot p_{xz} \cdot x_i \cdot z_i + 2 \cdot p_{yz} \cdot y_i \cdot z_i - 1 = 0 \quad (3.26)$$

όπου:

$$p_{xx} = \frac{r_{11}^2}{a_x^2} + \frac{r_{31}^2}{a_z^2}, \quad p_{yy} = \frac{r_{12}^2}{a_x^2} + \frac{r_{22}^2}{a_x^2} + \frac{r_{32}^2}{a_z^2},$$

$$p_{zz} = \frac{r_{13}^2}{a_x^2} + \frac{r_{23}^2}{a_x^2} + \frac{r_{33}^2}{a_z^2} \text{ και}$$

$$p_{xy} = \frac{r_{11} \cdot r_{12}}{a_x^2} + \frac{r_{31} \cdot r_{32}}{a_z^2}, \quad p_{xz} = \frac{r_{11} \cdot r_{13}}{a_x^2} + \frac{r_{31} \cdot r_{33}}{a_z^2}, \quad (3.27)$$

$$p_{yz} = \frac{r_{13} \cdot r_{12}}{a_x^2} + \frac{r_{31} \cdot r_{33}}{a_z^2}$$

3.2.4 Ειδική Περίπτωση Ο₄

Στην τελευταία και απλούστερη περίπτωση του μαθηματικού μοντέλου ενός ελλειψοειδούς εκ περιστροφής δεν υπάρχουν ούτε μεταθέσεις ούτε στροφές και οι εξισώσεις του προκύπτουν συνδυάζοντας εκείνες των δύο προηγούμενων περιπτώσεων. Δηλαδή:

Η εξίσωση του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής σε μορφή πινάκων είναι:

$$[x \ y \ z] \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{a_x^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_x^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_z^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - 1 = 0 \quad (3.28)$$

ενώ για κάθε σημείο i (x_i, y_i, z_i):

$$F_i = p_{xx} \cdot x_i^2 + p_{yy} \cdot y_i^2 + p_{zz} \cdot z_i^2 - 1 = 0 \quad (3.29)$$

όπου:

$$p_{xx} = \frac{1}{a_x^2}, p_{yy} = \frac{1}{a_x^2}, p_{zz} = \frac{1}{a_z^2} \quad (3.30)$$

3.2.5 Σφαίρα

Αν οι τρεις ημιάξονες του ελλειψοειδούς ισούνται μεταξύ τους, τότε εκφυλίζεται σε **σφαίρα**. Στην περίπτωση αυτή, περιγράφεται – κατά το μέγιστο – με τέσσερις (4) παραμέτρους: τρεις μεταθέσεις (t_x, t_y, t_z) και μία ακτίνα (r). Προφανώς, στροφές δεν υπάρχουν. Επιπλέον, το μαθηματικό μοντέλο της σφαίρας μπορεί να απλουστευθεί αν το κέντρο της ταυτίζεται με το κέντρο του συστήματος αναφοράς. Τότε οι μεταθέσεις είναι μηδενικές και αρκεί η γνώση της ακτίνας της, για να οριστεί. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι περιπτώσεις του μαθηματικού μοντέλου της αναφορικά με τις μεταβλητές που λαμβάνονται υπόψιν σε κάθε μία από αυτές.

Πίνακας 3.3: Ειδικές περιπτώσεις σφαίρας

Παράμετρος/ περίπτωση	t_x	t_y	t_z	r
S_1	✓	✓	✓	✓
S_2	✗	✗	✗	✓

(✓: Η παράμετρος υπάρχει/ ✗: Η παράμετρος δεν υπάρχει)

Γίνεται αντιληπτό πως η περίπτωση S_1 αποτελεί την γενική περίπτωση του μαθηματικού μοντέλου της σφαίρας. Γνωρίζοντας πως οι στροφές είναι μηδενικές και, άρα, ο πίνακας στροφής R ισούται με το μοναδιαίο πίνακα I και πως η ακτίνα ισούται με r ως προς κάθε διεύθυνση, η γενική καρτεσιανή εξίσωση της σφαίρας μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$(x - t_x)^2 + (y - t_y)^2 + (z - t_z)^2 - r^2 = 0 \quad (3.31)$$

Στη δεύτερη περίπτωση, το διάνυσμα μετάθεσης $t=(t_x, t_y, t_z)$ είναι μηδενικό και, συνεπώς, η εξίσωση (3.16) γίνεται:

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0 \quad (3.32)$$

3.3 Γραμμικά Μοντέλα Ελλειψοειδούς – Εύρεση προσωρινών τιμών

3.3.1 Τριαξονικό Ελλειψοειδές

Η γενική καρτεσιανή εξίσωση του τριαξονικού ελλειψοειδούς (3.1) παρουσιάζει έντονη μη γραμμικότητα ως προς τις εννέα παραμέτρους του. Το γεγονός αυτό καθιστά ιδιαίτερα δύσκολη τόσο τη γραμμικοποίηση του μοντέλου, όσο και την επιλογή των προσωρινών τιμών των άγνωστων παραμέτρων του.

Η εξίσωση (3.1), όμως, μπορεί να γραφεί σε πολυωνυμική μορφή ως εξής:

$$C_{xx} \cdot x^2 + C_{yy} \cdot y^2 + C_{zz} \cdot z^2 + C_{xy} \cdot x \cdot y + C_{xz} \cdot x \cdot z + C_{yz} \cdot y \cdot z + C_x \cdot x + C_y \cdot y + C_z \cdot z - 1 = 0 \quad (3.33)$$

Η εξίσωση (3.33) είναι γραμμική ως προς του συντελεστές C του πολυωνύμου, οι οποίοι ορίζονται ως συνάρτηση των εννέα παραμέτρων του ελλειψοειδούς. Συνορθώνοντας, λοιπόν, με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων και μαθηματικό μοντέλο το πολυώνυμο (3.33), με χρήση ενός νέφους σημείων στο χώρο και τις συντεταγμένες τους ως μετρήσεις, προσδιορίζονται οι καλύτερες τιμές των συντελεστών του και, ως αποτέλεσμα, προσεγγιστικές τιμές για τις εννέα παραμέτρους του τριαξονικού ελλειψοειδούς.

Αντίστοιχα, η εξίσωση (3.1) γράφεται και στην μορφή:

$$\begin{bmatrix} x - t_x & y - t_y & z - t_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_{xx} & q_{xy} & q_{xz} \\ q_{xy} & q_{yy} & q_{yz} \\ q_{xz} & q_{yz} & q_{zz} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x - t_x \\ y - t_y \\ z - t_z \end{bmatrix} - 1 = 0 \quad (3.34)$$

Με τον τρόπο αυτό, ορίζεται ο πίνακας \mathbf{Q} .

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{xx} & q_{xy} & q_{xz} \\ q_{xy} & q_{yy} & q_{yz} \\ q_{xz} & q_{yz} & q_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

τα στοιχεία του οποίου μπορούν να προσδιοριστούν συναρτήσει των συντελεστών του πολυωνύμου (3.33).

Αναλυτικότερα, οι συντελεστές C προκύπτουν ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα:

- 1) Πραγματοποιώντας τις πράξεις μεταξύ των πινάκων της εξίσωσης (3.1), προκύπτει η σχέση:

$$\begin{aligned} & p_{xx} \cdot (x - t_x)^2 + p_{yy} \cdot (y - t_y)^2 + p_{zz} \cdot (z - t_z)^2 + \\ & + 2 \cdot p_{xy} \cdot (x - t_x) \cdot (y - t_y) + 2 \cdot p_{xz} \cdot (x - t_x) \cdot (z - t_z) + \\ & + 2 \cdot p_{yz} \cdot (y - t_y) \cdot (z - t_z) - 1 = 0 \rightarrow \\ & p_{xx} \cdot (x^2 - 2 \cdot t_x \cdot x + t_x^2) + p_{yy} \cdot (y^2 - 2 \cdot t_y \cdot y + t_y^2) + \\ & + p_{zz} \cdot (z^2 - 2 \cdot t_z \cdot z + t_z^2) + 2 \cdot p_{xy} \cdot (x - t_x) \cdot (y - t_y) + \\ & + 2 \cdot p_{xz} \cdot (x - t_x) \cdot (z - t_z) + 2 \cdot p_{yz} \cdot (y - t_y) \cdot (z - t_z) - 1 = 0 \rightarrow \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} & p_{xx} \cdot x^2 + (-2 \cdot p_{xx} \cdot t_x - 2 \cdot p_{xy} \cdot t_y - 2 \cdot p_{xz} \cdot t_z) \cdot x + \\ & + p_{yy} \cdot y^2 + (-2 \cdot p_{xy} \cdot t_x - 2 \cdot p_{yy} \cdot t_y - 2 \cdot p_{yz} \cdot t_z) \cdot y + \\ & + p_{zz} \cdot z^2 + (-2 \cdot p_{xz} \cdot t_x - 2 \cdot p_{yz} \cdot t_y - 2 \cdot p_{zz} \cdot t_z) \cdot z + \\ & + 2 \cdot p_{xy} \cdot x \cdot y + 2 \cdot p_{xz} \cdot x \cdot z + 2 \cdot p_{yz} \cdot y \cdot z + \\ & + p_{xx} \cdot t_x^2 + p_{yy} \cdot t_y^2 + p_{zz} \cdot t_z^2 + \\ & + 2 \cdot p_{xy} \cdot t_x \cdot t_y + 2 \cdot p_{xz} \cdot t_x \cdot t_z + 2 \cdot p_{yz} \cdot t_y \cdot t_z - 1 = 0 \end{aligned}$$

- 2) Ορίζεται η ποσότητα:

$$\begin{aligned} D = 1 - & (p_{xx} \cdot t_x^2 + p_{yy} \cdot t_y^2 + p_{zz} \cdot t_z^2 + 2 \cdot p_{xy} \cdot t_x \cdot t_y + \\ & + 2 \cdot p_{xz} \cdot t_x \cdot t_z + 2 \cdot p_{yz} \cdot t_y \cdot t_z) \end{aligned} \quad (3.37)$$

3) Η σχέση (3.36) διαιρείται με D :

$$\begin{aligned}
& \frac{p_{xx}}{D} \cdot x^2 + \frac{(-2 \cdot p_{xx} \cdot t_x - 2 \cdot p_{xy} \cdot t_y - 2 \cdot p_{xz} \cdot t_z)}{D} \cdot x + \\
& + \frac{p_{yy}}{D} \cdot y^2 + \frac{(-2 \cdot p_{xy} \cdot t_x - 2 \cdot p_{yy} \cdot t_y - 2 \cdot p_{yz} \cdot t_z)}{D} \cdot y + \\
& + \frac{p_{zz}}{D} \cdot z^2 + \frac{(-2 \cdot p_{xz} \cdot t_x - 2 \cdot p_{yz} \cdot t_y - 2 \cdot p_{zz} \cdot t_z)}{D} \cdot z + \\
& + \frac{2 \cdot p_{xy}}{D} \cdot x \cdot y + \frac{2 \cdot p_{xz}}{D} \cdot x \cdot z + \frac{2 \cdot p_{yz}}{D} \cdot y \cdot z - 1 = 0
\end{aligned} \tag{3.38}$$

4) Ορίζονται οι έξι συντελεστές:

$$\begin{aligned}
C_{xx} &= \frac{p_{xx}}{D}, \quad C_{yy} = \frac{p_{yy}}{D}, \quad C_{zz} = \frac{p_{zz}}{D} \\
C_{xy} &= \frac{2p_{xy}}{D}, \quad C_{xz} = \frac{2p_{xz}}{D}, \quad C_{yz} = \frac{2p_{yz}}{D}
\end{aligned} \tag{3.39}$$

και, κατά συνέπεια, προκύπτει:

$$\begin{aligned}
p_{xx} &= C_{xx} \cdot D, \quad p_{yy} = C_{yy} \cdot D, \quad p_{zz} = C_{zz} \cdot D \\
p_{xy} &= C_{xy} \cdot \frac{D}{2}, \quad p_{xz} = C_{xz} \cdot \frac{D}{2}, \quad p_{yz} = C_{yz} \cdot \frac{D}{2}
\end{aligned} \tag{3.40}$$

$$\mathbf{P} = \frac{D}{2} \begin{bmatrix} 2 \cdot C_{xx} & C_{xy} & C_{xz} \\ C_{xy} & 2 \cdot C_{yy} & C_{yz} \\ C_{xz} & C_{yz} & 2 \cdot C_{zz} \end{bmatrix} \tag{3.41}$$

5) Αντικαθιστώντας τους συντελεστές της σχέσης (3.39) στην σχέση (3.37), προκύπτει:

$$\begin{aligned}
D &= 1 - \left(\frac{C_{xx} \cdot D \cdot t_x^2 + C_{yy} \cdot D \cdot t_y^2 + C_{zz} \cdot D \cdot t_z^2 +}{+ C_{xy} \cdot D \cdot t_x \cdot t_y + C_{xz} \cdot D \cdot t_x \cdot t_z + C_{yz} \cdot D \cdot t_y \cdot t_z} \right) \rightarrow \\
1 &= \frac{1}{D} - (C_{xx} \cdot t_x^2 + C_{yy} \cdot t_y^2 + C_{zz} \cdot t_z^2 + C_{xy} \cdot t_x \cdot t_y + C_{xz} \cdot t_x \cdot t_z + C_{yz} \cdot t_y \cdot t_z) \xrightarrow{1/D=d}
\end{aligned} \tag{3.42}$$

$$d = 1 + (C_{xx} \cdot t_x^2 + C_{yy} \cdot t_y^2 + C_{zz} \cdot t_z^2 + C_{xy} \cdot t_x \cdot t_y + C_{xz} \cdot t_x \cdot t_z + C_{yz} \cdot t_y \cdot t_z)$$

6) Ορίζονται, επιπλέον, οι τρεις συντελεστές:

$$\begin{aligned}
 C_x &= -\frac{1}{D} \cdot (2 \cdot p_{xx} \cdot t_x + 2 \cdot p_{xy} \cdot t_y + 2 \cdot p_{xz} \cdot t_z) \\
 C_y &= -\frac{1}{D} \cdot (2 \cdot p_{xy} \cdot t_x + 2 \cdot p_{yy} \cdot t_y + 2 \cdot p_{yz} \cdot t_z) \\
 C_z &= -\frac{1}{D} \cdot (2 \cdot p_{xz} \cdot t_x + 2 \cdot p_{yz} \cdot t_y + 2 \cdot p_{zz} \cdot t_z)
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

7) Από τις σχέσεις (3.40) και (3.43):

$$\begin{bmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{bmatrix} = -2 \cdot \begin{bmatrix} C_{xx} & \frac{C_{xy}}{2} & \frac{C_{xz}}{2} \\ \frac{C_{xy}}{2} & C_{yy} & \frac{C_{yz}}{2} \\ \frac{C_{xz}}{2} & \frac{C_{yz}}{2} & C_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} \tag{3.44}$$

Στη συνέχεια, βάσει της σχέσης (3.44), προσδιορίζεται το διάνυσμα της μετάθεσης t :

$$\begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 2 \cdot C_{xx} & C_{xy} & C_{xz} \\ C_{xy} & 2 \cdot C_{yy} & C_{yz} \\ C_{xz} & C_{yz} & 2 \cdot C_{zz} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{bmatrix} \tag{3.45}$$

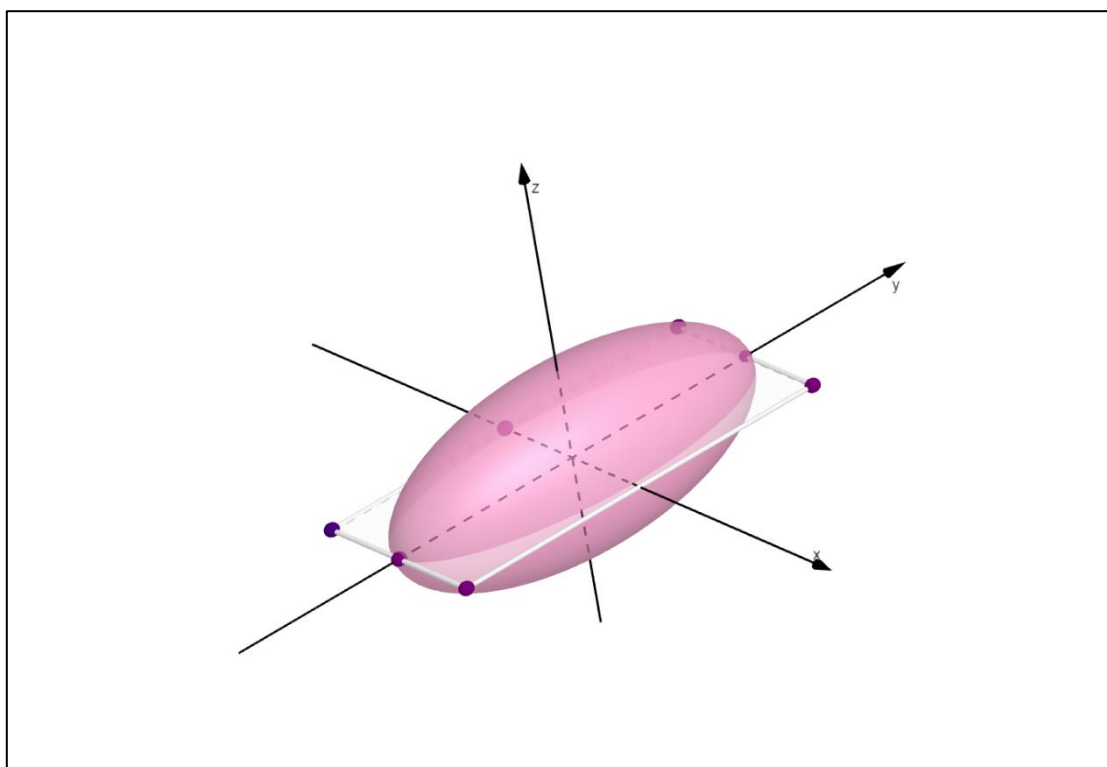
Επιπρόσθετα, συγκρίνοντας τις σχέσεις (3.1) και (3.34), συμπεραίνεται πως:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1} \rightarrow \begin{bmatrix} q_{xx} & q_{xy} & q_{xz} \\ q_{xy} & q_{yy} & q_{yz} \\ q_{xz} & q_{yz} & q_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{xy} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{xz} & p_{yz} & p_{zz} \end{bmatrix}^{-1} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} q_{xx} & q_{xy} & q_{xz} \\ q_{xy} & q_{yy} & q_{yz} \\ q_{xz} & q_{yz} & q_{zz} \end{bmatrix} = \frac{d}{2} \cdot \begin{bmatrix} 2 \cdot C_{xx} & C_{xy} & C_{xz} \\ C_{xy} & 2 \cdot C_{yy} & C_{yz} \\ C_{xz} & C_{yz} & 2 \cdot C_{zz} \end{bmatrix}^{-1} \quad (3.46)$$

Με τον τρόπο αυτό, είναι πλέον γνωστά τα στοιχεία του διανύσματος t και του πίνακα \mathbf{Q} , αν είναι γνωστοί οι συντελεστές C του πολυωνύμου.

Ύστερα, παρατηρώντας τη σχέση (3.34), γίνεται αντιληπτό πως ταυτίζεται με την εξίσωση ενός ελλειψοειδούς σφάλματος, εγγεγραμμένου σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμα με κέντρο (t_x, t_y, t_z) και ακμές $2 \cdot q_{xx}$, $2 \cdot q_{yy}$, $2 \cdot q_{zz}$ (Εικόνα 3.1).



Εικόνα 3.1: Ελλειψοειδές σφάλματος με κέντρο το $(0,0,0)$

Συμπερασματικά, καθίσταται δυνατός ο υπολογισμός των ημιαξόνων a_x , a_y & a_z του ελλειψοειδούς αυτού και των γωνιών στροφής του θ_x , θ_y & θ_z , χρησιμοποιώντας τους τύπους αναλυτικής διαγωνοποίησης του πίνακα \mathbf{Q} , όπως φαίνεται στη συνέχεια.

Οι ημιάξονες του τριαξονικού ελλειψοειδούς δίνονται από:

$$\begin{aligned} a_x &= \sqrt{q_1 + 2 \cdot \sqrt{q_1^2 - q_2} \cdot \cos\left(\frac{\omega}{3}\right)} \\ a_y &= \sqrt{q_1 + 2 \cdot \sqrt{q_1^2 - q_2} \cdot \cos\left(\frac{\omega - 2 \cdot \pi}{3}\right)} \\ a_z &= \sqrt{q_1 + 2 \cdot \sqrt{q_1^2 - q_2} \cdot \cos\left(\frac{\omega + 2 \cdot \pi}{3}\right)} \end{aligned} \quad (3.47)$$

όπου:

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{1}{3} \cdot (q_{xx} + q_{yy} + q_{zz}) \\ q_2 &= \frac{1}{3} \cdot (q_{yy} \cdot q_{zz} + q_{xx} \cdot q_{zz} + q_{xx} \cdot q_{yy} - q_{yz}^2 - q_{xz}^2 - q_{xy}^2) \\ \omega &= \cos^{-1} \left[\frac{Q + 2 \cdot q_1^3 - 3 \cdot q_1 \cdot q_2}{2 \cdot (q_1^2 - q_2)^{3/2}} \right] \\ Q &= q_{xx} \cdot (q_{yy} \cdot q_{zz} - q_{yz}^2) + q_{xy} \cdot (q_{xz} \cdot q_{yz} - q_{xy} \cdot q_{zz}) + \\ &\quad + q_{xz} \cdot (q_{xy} \cdot q_{yz} - q_{xz} \cdot q_{yy}) \end{aligned} \quad (3.48)$$

ενώ οι γωνίες στροφής:

$$\begin{aligned}
\theta_x &= \tan^{-1} \left(-\frac{r_{32}}{r_{33}} \right) = \tan^{-1} \left(-\frac{C_3}{B_3} \right) \\
\theta_y &= \sin^{-1}(r_{31}) = \text{asin}^{-1} \left(\frac{1}{A_3 \cdot E_3} \right) = \\
&= \tan^{-1} \left(\frac{r_{31}}{\sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2}} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{A_1 \cdot E_1 \cdot A_2 \cdot E_2}{A_3 \cdot E_3 \cdot \sqrt{A_1^2 \cdot E_1^2 + A_2^2 \cdot E_2^2}} \right) \\
\theta_z &= \tan^{-1} \left(-\frac{r_{21}}{r_{11}} \right) = \tan^{-1} \left(-\frac{A_1 \cdot E_1}{A_2 \cdot E_2} \right)
\end{aligned} \tag{3.49}$$

όπου:

$$E_1 = \sqrt{\frac{1}{A_1^2} + \frac{1}{B_1^2} + \frac{1}{C_1^2}}, E_2 = \sqrt{\frac{1}{A_2^2} + \frac{1}{B_2^2} + \frac{1}{C_2^2}}, E_3 = \sqrt{\frac{1}{A_3^2} + \frac{1}{B_3^2} + \frac{1}{C_3^2}} \tag{3.50}$$

$$\begin{aligned}
A_1 &= q_{xy} \cdot q_{xz} - q_{yz} \cdot q_{xx} + a_x^2 \cdot q_{yz} \\
A_2 &= q_{xy} \cdot q_{xz} - q_{yz} \cdot q_{xx} + a_y^2 \cdot q_{yz} \\
A_3 &= q_{xy} \cdot q_{xz} - q_{yz} \cdot q_{xx} + a_z^2 \cdot q_{yz}
\end{aligned} \tag{3.51}$$

$$\begin{aligned}
B_1 &= q_{xy} \cdot q_{yz} - q_{xz} \cdot q_{yy} + a_x^2 \cdot q_{xz} \\
B_2 &= q_{xy} \cdot q_{yz} - q_{xz} \cdot q_{yy} + a_y^2 \cdot q_{xz} \\
B_3 &= q_{xy} \cdot q_{yz} - q_{xz} \cdot q_{yy} + a_z^2 \cdot q_{xz}
\end{aligned} \tag{3.52}$$

$$\begin{aligned}
C_1 &= q_{xz} \cdot q_{yz} - q_{xy} \cdot q_{zz} + a_x^2 \cdot q_{xy} \\
C_2 &= q_{xz} \cdot q_{yz} - q_{xy} \cdot q_{zz} + a_y^2 \cdot q_{xy} \\
C_3 &= q_{xz} \cdot q_{yz} - q_{xy} \cdot q_{zz} + a_z^2 \cdot q_{xy}
\end{aligned} \tag{3.53}$$

Εν τέλει, έχουν προσδιοριστεί προσεγγιστικές τιμές και για τις εννέα παραμέτρους του τριαξονικού ελλειψοειδούς, οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως *προσωρινές τιμές* στη μετέπειτα προσαρμογή του στο ίδιο νέφος σημείων στο χώρο.

Με τον ίδιο τρόπο είναι δυνατό να προσδιοριστούν και οι πολυωνυμικές μορφές των ειδικών περιπτώσεων του τριαξονικού ελλειψοειδούς, όπως αναλύεται στις αμέσως επόμενες παραγράφους.

3.3.2 Ειδική Περίπτωση T₂

Στην ειδική περίπτωση T₂, θεωρείται πως το διάνυσμα μετάθεσης t είναι μηδενικό και το τριαξονικό ελλειψοειδές περιγράφεται από την εξίσωση (3.7).

Πραγματοποιώντας τις πράξεις μεταξύ των πινάκων της σχέσης (3.7), προκύπτει:

$$p_{xx} \cdot x^2 + p_{yy} \cdot y^2 + p_{zz} \cdot z^2 + 2 \cdot p_{xy} \cdot x \cdot y + 2 \cdot p_{xz} \cdot x \cdot z + 2 \cdot p_{yz} \cdot y \cdot z - 1 = 0 \quad (3.54)$$

Επομένως, αρκεί να οριστούν οι εξής έξι συντελεστές για να γραφεί σε πολυωνυμική μορφή:

$$\begin{aligned} C_{xx} &= p_{xx} & C_{xy} &= 2 \cdot p_{xy} \\ C_{yy} &= p_{yy} & C_{xz} &= 2 \cdot p_{xz} \\ C_{zz} &= p_{zz} & C_{yz} &= 2 \cdot p_{yz} \end{aligned} \quad (3.55)$$

Ως αποτέλεσμα, η εξίσωση (3.7) γίνεται:

$$C_{xx} \cdot x^2 + C_{yy} \cdot y^2 + C_{zz} \cdot z^2 + C_{xy} \cdot x \cdot y + C_{xz} \cdot x \cdot z + C_{yz} \cdot y \cdot z - 1 = 0 \quad (3.56)$$

Αντίστοιχα, η ίδια μπορεί να γραφεί και ως:

$$[x \ y \ z] \cdot \begin{bmatrix} q_{xx} & q_{xy} & q_{xz} \\ q_{xy} & q_{yy} & q_{yz} \\ q_{xz} & q_{yz} & q_{zz} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - 1 = 0 \quad (3.57)$$

Επιλύοντας την εξίσωση (3.55) ως προς τους συντελεστές p , προκύπτει:

$$\begin{aligned} p_{xx} &= C_{xx} & p_{xy} &= C_{xy}/2 \\ p_{yy} &= C_{yy} & p_{xz} &= C_{xz}/2 \\ p_{zz} &= C_{zz} & p_{zz} &= C_{zz}/2 \end{aligned} \quad (3.58)$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} C_{xx} & \frac{C_{xy}}{2} & \frac{C_{xz}}{2} \\ \frac{C_{xy}}{2} & C_{yy} & \frac{C_{yz}}{2} \\ \frac{C_{xz}}{2} & \frac{C_{yz}}{2} & C_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

Συγκρίνοντας τις εξισώσεις (3.7) και (3.57), παρατηρείται πως:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1} &\rightarrow \begin{bmatrix} q_{xx} & q_{xy} & q_{xz} \\ q_{xy} & q_{yy} & q_{yz} \\ q_{xz} & q_{yz} & q_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{xy} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{xz} & p_{yz} & p_{zz} \end{bmatrix}^{-1} \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} q_{xx} & q_{xy} & q_{xz} \\ q_{xy} & q_{yy} & q_{yz} \\ q_{xz} & q_{yz} & q_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{xx} & \frac{C_{xy}}{2} & \frac{C_{xz}}{2} \\ \frac{C_{xy}}{2} & C_{yy} & \frac{C_{yz}}{2} \\ \frac{C_{xz}}{2} & \frac{C_{yz}}{2} & C_{zz} \end{bmatrix}^{-1} \end{aligned} \quad (3.60)$$

Τέλος, για τον υπολογισμό των προσεγγιστικών τιμών των ημιάξωνων και των γωνιών στροφής του τριαξονικού ελλειμοειδούς της περίπτωσης T_2 χρησιμοποιούνται οι αναλυτικές σχέσεις διαγωνιοποίησης του προηγούμενου πίνακα, όπως φαίνονται στις εξισώσεις (3.47) και (3.49), αντίστοιχα.

3.3.3 Ειδική Περίπτωση T₃

Στην τρίτη ειδική περίπτωση του τριαξονικού ελλειψοειδούς, οι γωνίες στροφής θεωρούνται μηδενικές και, ως αποτέλεσμα, μηδενίζονται τα στοιχεία εκτός της κύριας διαγωνίου του πίνακα **P**.

Ισχύει, δηλαδή:

$$p_{xy} = p_{xz} = p_{yz} = 0$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & p_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & p_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

Συνεπώς, η εξίσωση (3.10) σε πολυωνυμική μορφή έχει ως εξής:

$$C_{xx} \cdot x^2 + C_{yy} \cdot y^2 + C_{zz} \cdot z^2 + C_x \cdot x + C_y \cdot y + C_z \cdot z - 1 = 0 \quad (3.62)$$

ενώ αντιστοίχως μηδενίζονται και τα στοιχεία εκτός της διαγωνίου του πίνακα **Q**.

Άρα, η εξίσωση (3.10) γράφεται:

$$\begin{bmatrix} x - t_x & y - t_y & z - t_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & q_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & q_{zz} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x - t_x \\ y - t_y \\ z - t_z \end{bmatrix} - 1 = 0 \quad (3.63)$$

Εκτελώντας τις πράξεις μεταξύ των πινάκων της εξίσωσης (3.10), προκύπτει:

$$p_{xx} \cdot (x - t_x)^2 + p_{yy} \cdot (y - t_y)^2 + p_{zz} \cdot (z - t_z)^2 - 1 = 0 \rightarrow$$

$$p_{xx} \cdot x^2 + p_{yy} \cdot y^2 + p_{zz} \cdot z^2 - 2 \cdot p_{xx} \cdot t_x \cdot x -$$

$$- 2 \cdot p_{yy} \cdot t_y \cdot y - 2 \cdot p_{zz} \cdot t_z \cdot z +$$

$$+ p_{xx} \cdot t_x^2 + p_{yy} \cdot t_y^2 + p_{zz} \cdot t_z^2 - 1 = 0 \quad (3.64)$$

Ορίζεται, έτσι, η ποσότητα D ως:

$$D = 1 - (p_{xx} \cdot t_x^2 + p_{yy} \cdot t_y^2 + p_{zz} \cdot t_z^2) \quad (3.65)$$

Με την ποσότητα αυτή διαιρείται η εξίσωση (3.64), δίνοντας το αποτέλεσμα:

$$\begin{aligned} \frac{p_{xx}}{D} \cdot x^2 + \frac{p_{yy}}{D} \cdot y^2 + \frac{p_{zz}}{D} \cdot z^2 - \frac{2 \cdot p_{xx} \cdot t_x}{D} \cdot x - \\ - \frac{2 \cdot p_{yy} \cdot t_y}{D} \cdot y - \frac{2 \cdot p_{zz} \cdot t_z}{D} \cdot z - 1 = 0 \end{aligned} \quad (3.66)$$

Με τον τρόπο αυτόν, καθίσταται δυνατός ο ορισμός των συντελεστών του πολυωνύμου (3.62), όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\begin{aligned} C_{xx} &= \frac{p_{xx}}{D} \\ C_{yy} &= \frac{p_{yy}}{D} \\ C_{zz} &= \frac{p_{zz}}{D} \end{aligned} \quad (3.67)$$

$$\begin{aligned} C_x &= -\frac{2 \cdot p_{xx} \cdot t_x}{D} \\ C_y &= -\frac{2 \cdot p_{yy} \cdot t_y}{D} \\ C_z &= -\frac{2 \cdot p_{zz} \cdot t_z}{D} \end{aligned} \quad (3.68)$$

Επιλύοντας την εξίσωση (3.67) ως προς τα στοιχεία της διαγωνίου του πίνακα \mathbf{P} , προκύπτει:

$$\begin{aligned} p_{xx} &= C_{xx} \cdot D \\ p_{yy} &= C_{yy} \cdot D \\ p_{zz} &= C_{zz} \cdot D \end{aligned} \quad (3.69)$$

Επιπλέον, από τις σχέσεις (3.65) και (3.69):

$$\begin{aligned} D &= 1 - C_{xx} \cdot D \cdot t_x^2 - C_{yy} \cdot D \cdot t_y^2 - C_{zz} \cdot D \cdot t_z^2 \xrightarrow{\div D} \\ 1 &= 1/D - C_{xx} \cdot t_x^2 - C_{yy} \cdot t_y^2 - C_{zz} \cdot t_z^2 \xrightarrow{d=1/D} \\ d &= C_{xx} \cdot t_x^2 + C_{yy} \cdot t_y^2 + C_{zz} \cdot t_z^2 + 1 \end{aligned} \quad (3.70)$$

Από τις εξισώσεις (3.67) και (3.68), συμπεραίνεται πως:

$$\begin{bmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{bmatrix} = -2 \cdot \begin{bmatrix} C_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & C_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & C_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

Άρα, το διάνυσμα μετάθεσης t ισούται με:

$$\begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} C_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & C_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & C_{zz} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

Επιπρόσθετα, συγκρίνοντας τις εξισώσεις (3.10) και (3.63), παρατηρείται πως:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1} &\rightarrow \begin{bmatrix} q_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & q_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & q_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & p_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & p_{zz} \end{bmatrix}^{-1} \rightarrow \\
 \begin{bmatrix} q_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & q_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & q_{zz} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C_{xx} \cdot D & 0 & 0 \\ 0 & C_{yy} \cdot D & 0 \\ 0 & 0 & C_{zz} \cdot D \end{bmatrix}^{-1} \rightarrow \quad (3.73) \\
 \begin{bmatrix} q_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & q_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & q_{zz} \end{bmatrix} &= d \cdot \begin{bmatrix} C_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & C_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & C_{zz} \end{bmatrix}^{-1}
 \end{aligned}$$

Τέλος, για τον υπολογισμό των προσεγγιστικών τιμών των ημιαξόνων του τριαξονικού ελλειψοειδούς της ειδικής περίπτωσης T_4 , η σχέση (3.47) τροποποιείται ως εξής:

$$\begin{aligned}
 a_x &= \sqrt{q_1 + 2 \cdot \sqrt{q_1^2 - q_2} \cdot \cos\left(\frac{\omega}{3}\right)} \\
 a_y &= \sqrt{q_1 + 2 \cdot \sqrt{q_1^2 - q_2} \cdot \cos\left(\frac{\omega - 2 \cdot \pi}{3}\right)} \\
 a_z &= \sqrt{q_1 + 2 \cdot \sqrt{q_1^2 - q_2} \cdot \cos\left(\frac{\omega + 2 \cdot \pi}{3}\right)}
 \end{aligned} \quad (3.74)$$

όπου:

$$\begin{aligned}
 q_1 &= \frac{1}{3} \cdot (q_{xx} + q_{yy} + q_{zz}) \\
 q_2 &= \frac{1}{3} \cdot (q_{yy} \cdot q_{zz} + q_{xx} \cdot q_{zz} + q_{xx} \cdot q_{yy}) \\
 \omega &= \cos^{-1} \left[\frac{Q + 2 \cdot q_1^3 - 3 \cdot q_1 \cdot q_2}{2 \cdot (q_1^2 - q_2)^{3/2}} \right] \\
 Q &= q_{xx} \cdot q_{yy} \cdot q_{zz}
 \end{aligned} \tag{3.75}$$

3.3.4 Ειδική Περίπτωση T₄

Όσον αφορά στην τέταρτη ειδική περίπτωση του τριαξονικού ελλειψοειδούς, αυτή αποτελεί συνδυασμό των δύο προηγούμενων. Αναλυτικότερα, τόσο οι μεταθέσεις, όσο και οι γωνίες στροφής του ελλειψοειδούς θεωρούνται μηδενικές και εκείνο περιγράφεται από την εξίσωση (3.13). Κατά συνέπεια, ο πίνακας **P** έχει τη μορφή της σχέσης (3.61).

Εκτελώντας τις απαραίτητες πράξεις μεταξύ των πινάκων στη σχέση (3.13), προκύπτει:

$$p_{xx} \cdot x^2 + p_{yy} \cdot y^2 + p_{zz} \cdot z^2 - 1 = 0 \tag{3.76}$$

Η εξίσωση (3.78) είναι ήδη σε πολυωνυμική μορφή με συντελεστές τα p_{xx} , p_{yy} και p_{zz} , για τα οποία ισχύει:

$$p_{xx} = \frac{1}{a_x^2}, p_{yy} = \frac{1}{a_y^2}, p_{zz} = \frac{1}{a_z^2} \tag{3.77}$$

Γίνεται αντιληπτό πως υπολογίζοντας, μέσω συνόρθωσης στο πολυώνυμο (3.76), τις καλύτερες τιμές των συντελεστών p_{xx} , p_{yy} και p_{zz} , υπολογίζονται ως αποτέλεσμα και οι προσωρινές τιμές των τριών μη μηδενικών παραμέτρων του τριαξονικού ελλειψοειδούς της ειδικής περίπτωσης T_4 ως:

$$\alpha_x = \sqrt{\frac{1}{p_{xx}}}, \alpha_y = \sqrt{\frac{1}{p_{yy}}}, \alpha_z = \sqrt{\frac{1}{p_{zz}}} \quad (3.78)$$

3.4 Εκφυλισμένες Περιπτώσεις

Με τη μεθοδολογία που αναλύθηκε παραπάνω, είναι δυνατό να προσδιοριστούν και οι πολυωνυμικές μορφές των εκφυλισμένων περιπτώσεων του τριαξονικού ελλειψοειδούς.

3.4.1 Ελλειψοειδές εκ περιστροφής

Το ελλειψοειδές εκ περιστροφής στη γενική του μορφή περιγράφεται από την εξίσωση (3.18), εφόσον θεωρηθεί πως οι ημιάξονες α_x και α_y είναι ίσοι και μεγαλύτεροι από τον άξονα α_z , ενώ κατά τον άξονα z δεν υπάρχει στροφή. Επιπλέον, η ειδική περίπτωση O_3 του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής, όπου μόνο οι μεταθέσεις (t_x, t_y, t_z) είναι μηδενικές, περιγράφεται από την εξίσωση (3.25).

Οι εξισώσεις (3.18) και (3.25) δεν μπορούν να εκφραστούν σε πολυωνυμική μορφή, καθώς οι συντελεστές των πολυωνύμων δεν μπορούν να οριστούν ανεξάρτητα.

Για τον λόγο αυτό, ως προσεγγιστικές τιμές των παραμέτρων του μπορούν να χρησιμοποιηθούν εκείνες που υπολογίζονται για τη γενική περίπτωση του τριαξονικού ελλειψοειδούς, επιλέγοντας δύο από τις τρεις τιμές ημιαξόνων που ικανοποιούν τις προαναφερόμενες συνθήκες και τις αντίστοιχες γωνίες στροφής.

Οι υπόλοιπες ειδικές περιπτώσεις του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής είναι δυνατό να γραφούν σε πολυωνυμική μορφή με αντίστοιχο τρόπο με εκείνον που περιγράφεται στα προηγούμενα κεφάλαια και αναλύεται ειδικότερα παρακάτω.

3.4.2 Ειδική Περίπτωση O_2

Στην ειδική περίπτωση O_2 του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής, οι γωνίες στροφής θ_x και θ_y θεωρούνται μηδενικές και το ελλειψοειδές περιγράφεται από την εξίσωση (3.22).

Επομένως, τα στοιχεία εκτός της διαγωνίου του πίνακα P μηδενίζονται και ισχύει:

$$p_{xy} = p_{xz} = p_{yz} = 0$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha_x^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha_x^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha_z^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

Συνεπώς, η εξίσωση (3.24) σε πολυωνυμική μορφή έχει ως εξής:

$$C \cdot x^2 + C \cdot y^2 + C_{zz} \cdot z^2 + C_x \cdot x + C_y \cdot y + C_z \cdot z - 1 = 0 \quad (3.80)$$

ενώ αντιστοίχως μηδενίζονται και τα στοιχεία εκτός της κύριας διαγωνίου του πίνακα Q .

Άρα, η εξίσωση (3.22) γράφεται:

$$\begin{bmatrix} x - t_x & y - t_y & z - t_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & q_{zz} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x - t_x \\ y - t_y \\ z - t_z \end{bmatrix} - 1 = 0 \quad (3.81)$$

Εκτελώντας τις πράξεις μεταξύ των πινάκων της εξίσωσης (3.24), προκύπτει:

$$p \cdot (x - t_x)^2 + p \cdot (y - t_y)^2 + p_{zz}(z - t_z)^2 - 1 = 0 \rightarrow$$

$$p \cdot x^2 + p \cdot y^2 + p_{zz} \cdot z^2 - 2 \cdot p \cdot t_x \cdot x -$$

$$-2 \cdot p \cdot t_y \cdot y - 2 \cdot p_{zz} \cdot t_z \cdot z +$$

$$+ p \cdot t_x^2 + p \cdot t_y^2 + p_{zz} \cdot t_z^2 - 1 = 0 \quad (3.82)$$

Ορίζεται, έτσι, η ποσότητα D ως:

$$D = 1 - (p \cdot t_x^2 + p \cdot t_y^2 + p_{zz} \cdot t_z^2) \quad (3.83)$$

Με την ποσότητα αυτή διαιρείται η εξίσωση (3.82), δίνοντας το αποτέλεσμα:

$$\begin{aligned} \frac{p}{D} \cdot x^2 + \frac{p}{D} \cdot y^2 + \frac{p_{zz}}{D} \cdot z^2 - \frac{2 \cdot p \cdot t_x}{D} \cdot x - \\ - \frac{2 \cdot p \cdot t_y}{D} \cdot y - \frac{2 \cdot p_{zz} \cdot t_z}{D} \cdot z - 1 = 0 \end{aligned} \quad (3.84)$$

Με τον τρόπο αυτόν, καθίσταται δυνατός ο ορισμός των συντελεστών του πολυωνύμου (3.80), όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\begin{aligned} C &= \frac{p}{D} \\ C_{zz} &= \frac{p_{zz}}{D} \end{aligned} \quad (3.85)$$

$$\begin{aligned} C_x &= -\frac{2 \cdot p \cdot t_x}{D} \\ C_y &= -\frac{2 \cdot p \cdot t_y}{D} \\ C_z &= -\frac{2 \cdot p_{zz} \cdot t_z}{D} \end{aligned} \quad (3.86)$$

Επιλύοντας την εξίσωση (3.85) ως προς τα στοιχεία της διαγωνίου του πίνακα \mathbf{P} , προκύπτει:

$$\begin{aligned} p &= C \cdot D \\ p_{zz} &= C_{zz} \cdot D \end{aligned} \quad (3.87)$$

Επιπλέον, από τις σχέσεις (3.83) και (3.97):

$$\begin{aligned}
 D &= 1 - C \cdot D \cdot t_x^2 - C \cdot D \cdot t_y^2 - C_{zz} \cdot D \cdot t_z^2 \xrightarrow{\div D} \\
 1 &= 1/D - C \cdot t_x^2 - C \cdot t_y^2 - C_{zz} \cdot t_z^2 \xrightarrow{d=\frac{1}{D}} \\
 d &= C \cdot t_x^2 + C \cdot t_y^2 + C_{zz} \cdot t_z^2 + 1
 \end{aligned} \tag{3.88}$$

Από τις εξισώσεις (3.85) και (3.86), συμπεραίνεται πως:

$$\begin{bmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{bmatrix} = -2 \cdot \begin{bmatrix} C & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & C_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} \tag{3.89}$$

Άρα, το διάνυσμα μετάθεσης t ισούται με:

$$\begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} C & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & C_{zz} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{bmatrix} \tag{3.90}$$

Επιπρόσθετα, συγκρίνοντας τις εξισώσεις (3.22) και (3.81), παρατηρείται πως:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1} &\rightarrow \begin{bmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & q_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p_{zz} \end{bmatrix}^{-1} \rightarrow \\
 \begin{bmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & q_{zz} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C \cdot D & 0 & 0 \\ 0 & C \cdot D & 0 \\ 0 & 0 & C_{zz} \cdot D \end{bmatrix}^{-1} \rightarrow \\
 \begin{bmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & q_{zz} \end{bmatrix} &= d \cdot \begin{bmatrix} C & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & C_{zz} \end{bmatrix}^{-1}
 \end{aligned} \tag{3.91}$$

Τέλος, για τον υπολογισμό των προσεγγιστικών τιμών των ημιαξόνων του προκειμένου ελλειψοειδούς εκ περιστροφής, η σχέση (3.47) τροποποιείται ως εξής:

$$a_x = a_y = \sqrt{q_1 + 2 \cdot \sqrt{q_1^2 - q_2} \cdot \cos\left(\frac{\omega}{3}\right)} \quad (3.92)$$

$$a_z = \sqrt{q_1 + 2 \cdot \sqrt{q_1^2 - q_2} \cdot \cos\left(\frac{\omega + 2 \cdot \pi}{3}\right)}$$

όπου:

$$q_1 = \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot q + q_{zz})$$

$$q_2 = \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot q \cdot q_{zz} + q^2)$$

$$\omega = \cos^{-1} \left[\frac{Q + 2 \cdot q_1^3 - 3 \cdot q_1 \cdot q_2}{2 \cdot (q_1^2 - q_2)^{3/2}} \right] \quad (3.93)$$

$$Q = q^2 \cdot q_{zz}$$

3.4.3 Ειδική Περίπτωση O_4

Στην ειδική περίπτωση O_4 του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής, τόσο οι γωνίες στροφής θ_x και θ_y , όσοι και οι μεταθέσεις t_x , t_y & t_z θεωρούνται μηδενικές και το ελλειψοειδές περιγράφεται από την εξίσωση (3.28).

Κατά συνέπεια, ο πίνακας \mathbf{P} έχει τη μορφή της σχέσης (3.79).

Εκτελώντας τις απαραίτητες πράξεις μεταξύ των πινάκων στη σχέση (3.30), προκύπτει:

$$p \cdot x^2 + p \cdot y^2 + p_{zz} \cdot z^2 - 1 = 0 \quad (3.94)$$

Η εξίσωση (3.94) είναι ήδη σε πολυωνυμική μορφή με συντελεστές τα p και p_{zz} , για τα οποία ισχύει:

$$p = \frac{1}{a_x^2}, \quad p_{zz} = \frac{1}{a_z^2} \quad (3.95)$$

Γίνεται αντιληπτό πως υπολογίζοντας, μέσω συνόρθωσης του πολυωνύμου (3.94), τις καλύτερες τιμές των συντελεστών p και p_{zz} , υπολογίζονται ως αποτέλεσμα και οι προσωρινές τιμές των δύο μη μηδενικών παραμέτρων του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής της ειδικής περίπτωσης O_4 ως:

$$\alpha_x = \alpha_y = \sqrt{\frac{1}{p}}, \quad \alpha_z = \sqrt{\frac{1}{p_{zz}}} \quad (3.96)$$

3.4.4 Σφαίρα

Η σφαίρα στη γενική της μορφή περιγράφεται από την εξίσωση (3.31).

Η εξίσωση (3.31) σε μορφή πινάκων μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$[x - t_x \quad y - t_y \quad z - t_z] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x - t_x \\ y - t_y \\ z - t_z \end{bmatrix} - r^2 = 0 \quad (3.97)$$

Με τον τρόπο αυτό θεωρείται πως ο πίνακας \mathbf{P} ταυτίζεται με τον μοναδιαίο. Αναλυτικότερα:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.98)$$

Επιπρόσθετα, σε πολυωνυμική μορφή έχει ως εξής:

$$C \cdot x^2 + C \cdot y^2 + C \cdot z^2 + C_x \cdot x + C_y \cdot y + C_z \cdot z - 1 = 0 \quad (3.99)$$

Αναλύοντας περαιτέρω την εξίσωση (3.16), προκύπτει:

$$x^2 - 2 \cdot t_x \cdot x + y^2 - 2 \cdot t_y \cdot y + z^2 - 2 \cdot t_z \cdot z + t_x^2 + t_y^2 + t_z^2 - r^2 = 0 \quad (3.100)$$

Ορίζεται η ποσότητα D :

$$D = r^2 - (t_x^2 + t_y^2 + t_z^2) \quad (3.101)$$

με την οποία και διαιρείται η σχέση (3.100):

$$\frac{1}{D} \cdot x^2 - \frac{2 \cdot t_x}{D} \cdot x + \frac{1}{D} \cdot y^2 - \frac{2 \cdot t_y}{D} \cdot y + \frac{1}{D} \cdot z^2 - \frac{2 \cdot t_z}{D} \cdot z - 1 = 0 \quad (3.102)$$

Έτσι, ορίζονται οι συντελεστές του πολυωνύμου (3.99):

$$C = \frac{1}{D} \quad (3.103)$$

$$C_x = -\frac{2 \cdot t_x}{D}$$
$$C_y = -\frac{2 \cdot t_y}{D} \quad (3.104)$$
$$C_z = -\frac{2 \cdot t_z}{D}$$

Από την εξίσωση (3.98) προκύπτει πως $1 = p$. Κατά συνέπεια, η (3.103) μπορεί να γραφεί και ως:

$$C = \frac{p}{D} \quad (3.105)$$

Άρα:

$$p = C \cdot D \rightarrow 1 = C \cdot D \quad (3.106)$$

Συνδυαστικά από τις σχέσεις (3.101) και (3.106) προκύπτει πως:

$$\begin{aligned}
 D &= r^2 - C \cdot D \cdot t_x^2 - C \cdot D \cdot t_y^2 - C \cdot D \cdot t_z^2 \xrightarrow{\div D} \\
 1 &= r^2/D - C \cdot t_x^2 - C \cdot t_y^2 - C \cdot t_z^2 \xrightarrow{d=r^2/D} \\
 d &= C \cdot t_x^2 + C \cdot t_y^2 + C \cdot t_z^2 + 1
 \end{aligned} \tag{3.107}$$

Στην συνέχεια, από τις σχέσεις (3.103) και (3.104):

$$\begin{bmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{bmatrix} = -2 \cdot \begin{bmatrix} C & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} \tag{3.108}$$

Άρα, το διάνυσμα μετάθεσης t ισούται με:

$$\begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} C & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{bmatrix} \tag{3.109}$$

Γίνεται αντιληπτό πως υπολογίζοντας, μέσω συνόρθωσης του πολυωνύμου (3.99), τις καλύτερες τιμές των συντελεστών C , C_x , C_y & C_z , υπολογίζονται ως αποτέλεσμα και οι προσωρινές τιμές των τεσσάρων παραμέτρων της σφαίρας.

3.4.5 Ειδική Περίπτωση S_2

Στην ειδική περίπτωση της σφαίρας όπου το διάνυσμα μετάθεσης t θεωρείται μηδενικό, εκείνη περιγράφεται από το μαθηματικό μοντέλο (3.32).

Σε μορφή πολυωνύμου, το μοντέλο αυτό γράφεται ως:

$$C \cdot x^2 + C \cdot y^2 + C \cdot z^2 - 1 = 0 \tag{3.110}$$

όπου

$$C = \frac{1}{r^2} \quad (3.111)$$

Προφανώς, προσδιορίζοντας, μέσω συνόρθωσης του πολυωνύμου (3.110), την καλύτερη τιμή του συντελεστή C , προσδιορίζεται και η απαιτούμενη προσεγγιστική τιμή της ακτίνας της σφαίρας.

3.5 Σύνοψη

Συνοψίζοντας, στον επόμενο πίνακα παρουσιάζονται τα δέκα μη γραμμικά μαθηματικά μοντέλα και οι αντίστοιχες γραμμικές τους μορφές – όπου αυτές υπάρχουν – που αναπτύχθηκαν στο προκείμενο κεφάλαιο, καθώς και το πλήθος των ανεξάρτητων καθοριστικών παραμέτρων που τα περιγράφουν.

Πίνακας 3.4: Σύνοψη Μαθηματικών Μοντέλων

Περίπτωση	Μη γραμμική εξίσωση	Γραμμική εξίσωση	Πλήθος παραμέτρων
T_1	(3.1)	(3.33)	9
T_2	(3.7)	(3.56)	6
T_3	(3.9)	(3.62)	6
T_4	(3.13)	(3.78)	3
O_1	(3.18)	-	7
O_2	(3.22)	(3.80)	5
O_3	(3.25)	-	4
O_4	(3.28)	(3.94)	2
S_1	(3.31)	(3.99)	4
S_2	(3.32)	(3.110)	1

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΜΕΘΟΔΟΙ ΣΥΝΟΡΘΩΣΗΣ

4.1 Γενικά

Στην περίπτωση προσαρμογής ενός ελλειψοειδούς σε ένα νέφος σημείων στον χώρο, τα απαραίτητα δεδομένα είναι k σημεία του χώρου και η ακρίβεια με την οποία έχουν αυτά προσδιοριστεί. Επομένως, το διάνυσμα των μετρήσεων r αποτελείται από τις τρισδιάστατες καρτεσιανές συντεταγμένες των προαναφερόμενων σημείων (x_i, y_i, z_i) , $i=1, \dots, k$, ενώ γνωστός είναι και ο πίνακας μεταβλητότητας - συμμεταβλητότητας \mathbf{V}_r αυτών. Επίσης, αν θεωρηθεί πως οι συντεταγμένες αυτές δεν συσχετίζονται, ο πίνακας μεταβλητότητας - συμμεταβλητότητας θα είναι διαγώνιος.

Τα δεδομένα, λοιπόν, έχουν ως εξής:

$$r = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ \vdots \\ x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

$$\mathbf{V}_r = \begin{bmatrix} \sigma_{x_1}^2 & \sigma_{x_1 y_1} & \sigma_{x_1 z_1} & \cdots & \sigma_{x_1 x_k} & \sigma_{x_1 y_k} & \sigma_{x_1 z_k} \\ & \sigma_{y_1}^2 & \sigma_{x_1 z_1} & \cdots & \sigma_{y_1 x_k} & \sigma_{y_1 y_k} & \sigma_{y_1 z_k} \\ & & \sigma_{z_1}^2 & \cdots & \sigma_{z_1 x_k} & \sigma_{z_1 y_k} & \sigma_{z_1 z_k} \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & & \sigma_{x_k}^2 & \sigma_{x_k y_k} & \sigma_{y_k z_k} \\ & & & & & \sigma_{y_k}^2 & \sigma_{y_k z_k} \\ & & & & & & \sigma_{z_k}^2 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Ζητούμενο αποτελούν το ελλειψοειδές – όπως αυτό περιγράφεται από τις (έως και) εννέα παραμέτρους του, οι οποίες αναλύονται στο Κεφ. 3 – που προσαρμόζεται με βέλτιστο τρόπο στα σημεία του διανύσματος r και η ακρίβεια της προσαρμογής αυτής.

Τα προαναφερόμενα μεγέθη θα προσδιοριστούν με συνόρθωση βάσει της αρχής της Μεθόδου των Ελαχίστων Τετραγώνων (Μ.Ε.Τ.), με χρήση της εξίσωσης του ελλειψοειδούς, όπως αυτή γράφεται για κάθε σημείο $i=1, \dots, k$ της επιφάνειας του, ως εξίσωση παρατήρησης. Για παράδειγμα, για τη γενική περίπτωση του τριαξονικού ελλειψοειδούς, η εξίσωση αυτή είναι η (3.5).

Οι άγνωστοι του μοντέλου (3.5) είναι οι καλύτερες τιμές των καθοριστικών παραμέτρων του, όπως φαίνεται και στο αντίστοιχο διάνυσμα.

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \\ \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Το ίδιο ισχύει και για τις ειδικές και εκφυλισμένες περιπτώσεις T_2 έως S_2 , απλώς τα στοιχεία του διανύσματος \hat{x} είναι λιγότερα.

Παρατηρείται ότι κάθε εξίσωση παρατήρησης περιέχει τις ζητούμενες παραμέτρους και περισσότερες από μία μετρήσεις. Για το λόγο αυτό, θα χρησιμοποιηθεί η **γενική μέθοδος συνόρθωσης**.

4.2 Γενική Μέθοδος Συνόρθωσης

Η γενική μέθοδος συνόρθωσης χρησιμοποιείται όταν στο προς συνόρθωση μοντέλο συμμετέχουν περισσότερες από μία μετρήσεις. Στην περίπτωση αυτή, οι άγνωστοι του μοντέλου είναι πλήθους:

$$m = n + m_0 \quad (4.4)$$

όπου n : το πλήθος των μετρήσεων (άγνωστα είναι τα n υπόλοιπα των μετρήσεων) και m_0 : οι άγνωστες καθοριστικές παράμετροι του μοντέλου.

Ακόμη, ο βαθμός ελευθερίας του μοντέλου δίνεται από τη σχέση:

$$r = n - m \quad (4.5)$$

και το πλήθος των εξισώσεων παρατήρησης:

$$c = r + m_0 \quad (4.6)$$

Στην περίπτωση γραμμικών εξισώσεων παρατήρησης, οι οποίες περιέχουν τις ζητούμενες παραμέτρους και παραπάνω από μία μετρήσεις, το σύστημα εξισώσεων – αγνώστων λαμβάνει τη μορφή:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \ell = \mathbf{k} \quad (4.7)$$

Για να είναι, όμως, οι εξισώσεις του συστήματος συμβιβαστές και διότι το διάνυσμα ℓ περιέχει μετρήσεις με τυχαία σφάλματα, το σύστημα (4.7) τροποποιείται με τον εξής τρόπο:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B} \cdot \hat{\ell} &= \mathbf{k} \rightarrow \\ \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B} \cdot (\ell + \mathbf{v}) &= \mathbf{k} \end{aligned} \quad (4.8)$$

όπου:

A : ο πίνακας σχεδιασμού, δηλαδή ο πίνακας των συντελεστών των καλύτερων τιμών των αγνωστων καθοριστικών παραμέτρων του μοντέλου

B : ο πίνακας των συντελεστών των καλύτερων τιμών των μετρήσεων

$\hat{\mathbf{x}}$: το διάνυσμα των καλύτερων τιμών των αγνωστων καθοριστικών παραμέτρων του μοντέλου

ℓ : το διάνυσμα των μετρήσεων

\mathbf{v} : το διάνυσμα των υπολοίπων των μετρήσεων

\mathbf{k} : το διάνυσμα των σταθερών όρων

Επιπλέον, αν θεωρηθεί το διάνυσμα σφαλμάτων κλεισίματος των εξισώσεων παρατήρησης

$$\mathbf{w} = \mathbf{k} - \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\ell} \quad (4.9)$$

το σύστημα (4.8) γράφεται ως:

$$\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{w} \quad (4.10)$$

Οι διαστάσεις των προαναφερόμενων πινάκων και διανυσμάτων έχουν ως εξής:

$$\mathbf{A}_{c \times m_0}, \mathbf{B}_{c \times n}, \hat{\mathbf{x}}_{m_0 \times 1}, \boldsymbol{\ell}_{n \times 1}, \mathbf{v}_{n \times 1}, \mathbf{k}_{c \times 1}, \mathbf{w}_{c \times 1}$$

Η βέλτιστη λύση του συστήματος (4.10) θα είναι εκείνη που ικανοποιεί και την αρχή της Μεθόδου των Ελαχίστων Τετραγώνων (MET):

$$S = \mathbf{v}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{v} \quad (4.11)$$

όπου \mathbf{P} : ο πίνακας βαρών των μετρήσεων.

Κατά συνέπεια και μέσω της εφαρμογής της μεθόδου του δεσμευμένου ακροτάτου Lagrange, προκύπτει η σχέση που δίνει το διάνυσμα των καλύτερων τιμών των άγνωστων καθοριστικών παραμέτρων του μοντέλου.

$$\hat{\mathbf{x}} = [\mathbf{A}^T \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{B}^T)^{-1} \cdot \mathbf{A}]^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{B}^T)^{-1} \cdot \mathbf{w} \quad (4.12)$$

Επιπλέον, τα υπόλοιπα των μετρήσεων δίνονται από την σχέση:

$$\mathbf{v} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{B}^T \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{B}^T)^{-1} \cdot (\mathbf{w} - \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}}) \quad (4.13)$$

ενώ οι καλύτερες τιμές των μετρήσεων υπολογίζονται ως:

$$\hat{\boldsymbol{\ell}} = \boldsymbol{\ell} + \mathbf{v} \quad (4.14)$$

Όσον αφορά στο a posteriori σφάλμα της μονάδας του βάρους $\hat{\sigma}_0$, το οποίο εκφράζει την ποιότητα της προσαρμογής του ελλειψοειδούς, αυτό δίνεται από τη σχέση:

$$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{v^T \cdot P \cdot v}{r}} \quad (4.15)$$

Στη συνέχεια, ο a posteriori πίνακας μεταβλητότητας - συμμεταβλητότητας του διανύσματος \hat{x} , ο οποίος δίνει το a posteriori σφάλμα κάθε καθοριστικής παραμέτρου του μοντέλου και τις συμμεταβλητότες αυτών, υπολογίζεται ως:

$$\hat{V}_{\hat{x}} = \hat{\sigma}_0^2 \cdot [A^T \cdot (B \cdot P^{-1} \cdot B^T)^{-1} \cdot A]^{-1} \quad (4.16)$$

Στην περίπτωση που έστω και μία από τις εξισώσεις παρατήρησης δεν είναι γραμμική, πρέπει να δοθεί προσωρινή τιμή x^0 στο διάνυσμα των άγνωστων καθοριστικών παραμέτρων \hat{x} και όλες οι εξισώσεις του αγνώστου συστήματος να αναπτυχθούν κατά Taylor στη θέση x^0 , ℓ .

Τελικά, ισχύει

$$\hat{x} = x^0 + \delta x \quad (4.17)$$

με δx τη διαφορά μεταξύ των καλύτερων και προσωρινών τιμών των καθοριστικών παραμέτρων του μοντέλου και το σύστημα (4.10) λαμβάνει τη μορφή:

$$A \cdot \delta x + B \cdot v = w \quad (4.18)$$

όπου οι πίνακες **A** και **B** ονομάζονται Ιακωβιανοί πίνακες και περιέχουν τις μερικές παραγώγους των εξισώσεων παρατήρησης ως προς κάθε άγνωστη καθοριστική παράμετρο και την καλύτερη τιμή κάθε μέτρησης, αντίστοιχα, στη θέση x^0 , ℓ . Ακόμα, το διάνυσμα **w** αποτελεί τη διαφορά των σταθερών όρων με την προσωρινή τιμή που λαμβάνει κάθε μία από τις εξισώσεις παρατήρησης στην ίδια θέση.

4.3 Μέθοδος Εμμέσων Παρατηρήσεων

Η μέθοδος των εμμέσων παρατηρήσεων αποτελεί ειδική περίπτωση της γενικής μεθόδου συνόρθωσης για $m_0=m$. Με άλλα λόγια, εφαρμόζεται στην περίπτωση που οι άγνωστοι του μοντέλου είναι ίσες με τις άγνωστες καθοριστικές παραμέτρους αυτού.

Αναλυτικότερα, η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται ως επί των πλείστων όταν ενδιαφέρει ο προσδιορισμός μεγεθών που δεν μετρούνται άμεσα. Για την εφαρμογή της, σχηματίζονται τόσες εξισώσεις παρατήρησης, όσες οι διαθέσιμες μετρήσεις, οι οποίες συνδέουν γραμμικά τις καλύτερες τιμές των άγνωστων καθοριστικών παραμέτρων του μοντέλου και δεν περιέχουν πάνω από μία μέτρηση η κάθε μία. Ως αποτέλεσμα, δημιουργείται ένα σύστημα της μορφής:

$$\mathbf{A} \cdot \hat{x} = \delta\ell + v \quad (4.19)$$

με

$$\delta\ell = \ell - a \quad (4.20)$$

όπου:

\mathbf{A} : ο πίνακας σχεδιασμού, δηλαδή ο πίνακας των συντελεστών των καλύτερων τιμών των άγνωστων καθοριστικών παραμέτρων του μοντέλου

\hat{x} : το διάνυσμα των καλύτερων τιμών των άγνωστων καθοριστικών παραμέτρων του μοντέλου

ℓ : το διάνυσμα των μετρήσεων

v : το διάνυσμα των υπολοίπων των μετρήσεων

a : το διάνυσμα των σταθερών όρων

Η βέλτιστη λύση του συστήματος (4.19) θα είναι και πάλι εκείνη που ικανοποιεί και την αρχή της MET (4.11).

Τελικά, το διάνυσμα των καλύτερων τιμών των αγνώστων δίνεται από την σχέση:

$$\hat{x} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \delta\ell \quad (4.21)$$

με \mathbf{P} τον πίνακα βαρών των μετρήσεων.

Επιπλέον, το διάνυσμα των υπολοίπων επιλύοντας το σύστημα (4.19), γράφεται

$$v = \mathbf{A} \cdot \hat{x} - \delta \ell \quad (4.22)$$

Το a posteriori σφάλμα της μονάδας του βάρους υπολογίζεται από τη σχέση (4.15), ενώ ο a posteriori πίνακας μεταβλητότητας - συμμεταβλητότητας του διανύσματος των καλύτερων τιμών των αγνώστων δίνεται από:

$$\hat{\mathbf{V}}_{\hat{x}} = \hat{\sigma}_0^2 \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{A})^{-1} \quad (4.23)$$

Γίνεται αντιληπτό πως στην περίπτωση συνόρθωσης των πολυωνυμικών εξισώσεων του ελλειψοειδούς κάθε περίπτωσης, είναι δυνατή η εφαρμογή της μεθόδου των εμμέσων παρατηρήσεων για τον προσδιορισμό των καλύτερων τιμών των συντελεστών του πολυωνύμου και επιπλέον οι εξισώσεις είναι γραμμικές ως προς τους αγνώστους.

4.4 Γραμμική Ελαχιστοτετραγωνική Προσαρμογή

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, τα μαθηματικά μοντέλα T_1 έως S_2 παρουσιάζουν έντονη μη γραμμικότητα. Επιπλέον, η προσαρμογή τους στο δείγμα σημείων r θα πραγματοποιηθεί μέσω συνόρθωσης με τη γενική μέθοδο. Συνεπώς, απαιτείται η γραμμικοποίησή τους βάσει του αναπτύγματος Taylor στη θέση των προσωρινών τιμών των καθοριστικών παραμέτρων του μοντέλου.

Οι προσωρινές τιμές των παραμέτρων του κάθε μοντέλου μπορούν να υπολογιστούν προσδιορίζοντας τις καλύτερες τιμές των συντελεστών του αντίστοιχου πολυωνύμου του, όπως αυτό ορίστηκε στο Κεφάλαιο 3.2. Για τον λόγο αυτό, κάθε πολυώνυμο θα προσαρμοστεί μέσω συνόρθωσης με τη χρήση της μεθόδου των εμμέσων παρατηρήσεων στο ίδιο δείγμα σημείων r .

Στην συνέχεια, θα σχηματιστούν οι εξισώσεις παρατήρησης και οι πίνακες συνόρθωσης κάθε πολυωνύμου του Κεφαλαίου 3.2.

4.4.1 Γενική Καρτεσιανή Εξίσωση Ελλειψοειδούς

Ως εξίσωση παρατήρησης, θα χρησιμοποιηθεί η πολυωνυμική εξίσωση (3.33), αν αυτή γραφεί για κάθε σημείο $i=1, \dots, k$ του διανύσματος r . Δηλαδή:

$$F_i = C_{xx} \cdot x_i^2 + C_{yy} \cdot y_i^2 + C_{zz} \cdot z_i^2 + C_{xy} \cdot x_i \cdot y_i + C_{xz} \cdot x_i \cdot z_i + C_{yz} \cdot y_i \cdot z_i + C_x \cdot x_i + C_y \cdot y_i + C_z \cdot z_i - 1 \quad (4.24)$$

Οι εξισώσεις παρατήρησης είναι τόσες, όσα τα μετρημένα σημεία (k).

Το διάνυσμα που ενδιαφέρει να προσδιοριστεί είναι το:

$$\widehat{C}_{9 \times 1} = \begin{bmatrix} \widehat{C}_{xx} \\ \widehat{C}_{yy} \\ \widehat{C}_{zz} \\ \widehat{C}_{xy} \\ \widehat{C}_{xz} \\ \widehat{C}_{yz} \\ \widehat{C}_x \\ \widehat{C}_y \\ \widehat{C}_z \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Η εξίσωση F_i είναι γραμμική ως προς τα στοιχεία του διανύσματος \widehat{C} και, άρα, το σύστημα των αγνώστων γράφεται:

$$\mathbf{A} \cdot \widehat{C} = \delta \ell + v \quad (4.26)$$

με πλήθος μετρήσεων $n=k$ και αγνώστων καθοριστικών παραμέτρων $m_0=9$, ενώ ο πίνακας των συντελεστών των συντελεστών των αγνώστων \mathbf{A} έχει ως εξής:

$$\mathbf{A}_{k \times 9} = \begin{bmatrix} x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & x_1 \cdot y_1 & x_1 \cdot z_1 & y_1 \cdot z_1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2^2 & y_2^2 & z_2^2 & x_2 \cdot y_2 & x_2 \cdot z_2 & y_2 \cdot z_2 & x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_k^2 & y_k^2 & z_k^2 & x_k \cdot y_k & x_k \cdot z_k & y_k \cdot z_k & x_k & y_k & z_k \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

και το διάνυσμα $\delta\ell$:

$$\delta\ell_{k \times 1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

4.4.2 Ειδική περίπτωση T₂

Στην ειδική περίπτωση T₂, θεωρείται πως το διάνυσμα μετάθεσης t είναι μηδενικό και το τριαξονικό ελλειψοειδές περιγράφεται γραμμικά από το πολυώνυμο (3.56). Επομένως, ως εξίσωση παρατήρησης του προς συνόρθωση μοντέλου θεωρείται:

$$F_i = C_{xx} \cdot x_i^2 + C_{yy} \cdot y_i^2 + C_{zz} \cdot z_i^2 + C_{xy} \cdot x_i \cdot y_i + C_{xz} \cdot x_i \cdot z_i + C_{yz} \cdot y_i \cdot z_i - 1 \quad (4.29)$$

Επιπλέον, στην περίπτωση αυτή, διάνυσμα των άγνωστων καθοριστικών παραμέτρων αποτελεί το:

$$\widehat{C}_{6 \times 1} = \begin{bmatrix} \widehat{C}_{xx} \\ \widehat{C}_{yy} \\ \widehat{C}_{zz} \\ \widehat{C}_{xy} \\ \widehat{C}_{xz} \\ \widehat{C}_{yz} \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

Το σύστημα γράφεται και πάλι στη μορφή του (4.26), ενώ οι μετρήσεις και, συνεπώς και το πλήθος των εξισώσεων παρατήρησης, παραμένουν ίσες με k , ενώ οι άγνωστες καθοριστικές παράμετροι είναι ίσες με $m_0=6$.

Ο πίνακας σχεδιασμού γράφεται ως:

$$\mathbf{A}_{k \times 6} = \begin{bmatrix} x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & x_1 \cdot y_1 & x_1 \cdot z_1 & y_1 \cdot z_1 \\ x_2^2 & y_2^2 & z_2^2 & x_2 \cdot y_2 & x_2 \cdot z_2 & y_2 \cdot z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_k^2 & y_k^2 & z_k^2 & x_k \cdot y_k & x_k \cdot z_k & y_k \cdot z_k \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

και το διάνυσμα $\delta \ell$ παραμένει ίσο με το (4.28).

4.4.3 Ειδική Περίπτωση T₃

Στην τρίτη ειδική περίπτωση του τριαξονικού ελλειψοειδούς, οι γωνίες στροφής θεωρούνται μηδενικές και το ίδιο περιγράφεται γραμμικά από το πολυώνυμο (3.62).

Η εξίσωση:

$$F_i = C_{xx} \cdot x_i^2 + C_{yy} \cdot y_i^2 + C_{zz} \cdot z_i^2 + C_x \cdot x_i + C_y \cdot y_i + C_z \cdot z_i - 1 \quad (4.32)$$

περιγράφει τις k εξισώσεις παρατήρησης του συστήματος, το οποίο έχει τη μορφή του (4.26) και οι 6 άγνωστες καθοριστικές παράμετροι αυτού είναι τα στοιχεία του παρακάτω διανύσματος.

$$\widehat{C}_{6 \times 1} = \begin{bmatrix} \widehat{C}_{xx} \\ \widehat{C}_{yy} \\ \widehat{C}_{zz} \\ \widehat{C}_x \\ \widehat{C}_y \\ \widehat{C}_z \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

Επιπλέον, ο πίνακας σχεδιασμού γράφεται ως εξής:

$$\mathbf{A}_{k \times 6} = \begin{bmatrix} x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2^2 & y_2^2 & z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_k^2 & y_k^2 & z_k^2 & x_k & y_k & z_k \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

και το διάνυσμα $\delta \ell$ παραμένει ίσο με το (4.28)

4.4.4 Ειδική Περίπτωση T₄

Όσον αφορά στην τέταρτη ειδική περίπτωση του τριαξονικού ελλειψοειδούς, αυτή αποτελεί συνδυασμό των δύο προηγούμενων. Αναλυτικότερα, τόσο οι μεταθέσεις, όσο και οι γωνίες στροφής του ελλειψοειδούς θεωρούνται μηδενικές και εκείνο περιγράφεται γραμμικά από το πολυώνυμο (3.76).

Κατά συνέπεια, οι k εξισώσεις παρατήρησης του συστήματος λαμβάνουν την μορφή:

$$F_i = p_{xx} \cdot x_i^2 + p_{yy} \cdot y_i^2 + p_{zz} \cdot z_i^2 - 1 \quad (4.35)$$

ενώ το διάνυσμα των τριών καθοριστικών παραμέτρων του:

$$\widehat{p}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} \widehat{p}_{xx} \\ \widehat{p}_{yy} \\ \widehat{p}_{zz} \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

Το προς συνόρθωση σύστημα παραμένει στη μορφή (4.26), όπου ο πίνακας σχεδιασμού γίνεται ίσως με:

$$\mathbf{A}_{k \times 3} = \begin{bmatrix} x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 \\ x_2^2 & y_2^2 & z_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_k^2 & y_k^2 & z_k^2 \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

και το διάνυσμα $\delta \ell$ παραμένει ίσο με το (4.28).

4.4.5 Εκφυλισμένες Περιπτώσεις

Με τη μεθοδολογία που αναλύθηκε παραπάνω, είναι δυνατό να προσδιοριστούν οι καλύτερες τιμές των συντελεστών των πολυωνύμων που περιγράφουν τις εκφυλισμένες περιπτώσεις (ελλειψοειδές εκ περιστροφή, σφαίρα) του τριαξονικού ελλειψοειδούς.

4.4.5.1 Ελλειψοειδές εκ περιστροφής

Όσον αφορά στο ελλειψοειδές εκ περιστροφής, γραμμικά μπορούν να γραφούν μόνο οι ειδικές περιπτώσεις O_2 και O_4 , όπου οι γωνίες στροφής μεταξύ των αξόνων του θεωρούνται μηδενικές.

4.4.5.1.1 Ειδική Περίπτωση O_2

Στην ειδική περίπτωση O_2 του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής, οι γωνίες στροφής θ_x και θ_y θεωρούνται μηδενικές και το ελλειψοειδές περιγράφεται γραμμικά από το πολυώνυμο (3.80).

Έτσι, μπορούν να γραφούν οι εξισώσεις παρατήρησης του προς συνόρθωση μοντέλου για κάθε σημείο που ανήκει στο διάλυμα μετρήσεων r .

$$F_i = C \cdot x_i^2 + C \cdot y_i^2 + C_{zz} \cdot z_i^2 + C_x \cdot x_i + C_y \cdot y_i + C_z \cdot z_i - 1 \quad (4.38)$$

Όπως έχει προαναφερθεί, οι εξισώσεις παρατήρησης είναι σε πλήθος ίσες με τα μετρημένα σημεία, δηλαδή $n=k$, ενώ στην προκειμένη περίπτωση, οι άγνωστες καθοριστικές παράμετροι είναι ίσες με $m_0=5$.

Επομένως, το σύστημα των αγνώστων λαμβάνει την μορφή (4.26), όπου κάθε στοιχείο του έχει ως εξής:

$$\widehat{C_{5 \times 1}} = \begin{bmatrix} \widehat{C} \\ \widehat{C_{zz}} \\ \widehat{C_x} \\ \widehat{C_y} \\ \widehat{C_z} \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

$$\mathbf{A}_{k \times 5} = \begin{bmatrix} x_1^2 + y_1^2 & z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2^2 + y_2^2 & z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_k^2 + y_k^2 & z_k^2 & x_k & y_k & z_k \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

και το διάνυσμα $\delta \ell$ παραμένει ίσο με το (4.28).

4.4.5.1.2 Ειδική Περίπτωση O_4

Στην ειδική περίπτωση O_4 του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής, τόσο οι γωνίες στροφής θ_x και θ_y , όσοι και οι μεταθέσεις t_x , t_y & t_z θεωρούνται μηδενικές και το ελλειψοειδές περιγράφεται από το πολυώνυμο (3.95).

Κατά συνέπεια, οι k εξισώσεις παρατήρησης του συστήματος λαμβάνουν τη μορφή:

$$F_i = p \cdot x_i^2 + p \cdot y_i^2 + p_{zz} \cdot z_i^2 - 1 \quad (4.41)$$

ενώ το διάνυσμα των δύο καθοριστικών παραμέτρων του:

$$\widehat{p}_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} \widehat{p} \\ \widehat{p}_{zz} \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

Το προς συνόρθωση σύστημα παραμένει στη μορφή (4.26), όπου ο πίνακας σχεδιασμού γίνεται ίσος με:

$$\mathbf{A}_{k \times 2} = \begin{bmatrix} x_1^2 + y_1^2 & z_1^2 \\ x_2^2 + y_2^2 & z_2^2 \\ \vdots & \vdots \\ x_k^2 + y_k^2 & z_k^2 \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

και το διάνυσμα $\delta \ell$ παραμένει ίσο με το (4.28).

4.4.5.2 Σφαίρα

Η σφαίρα στη γενική της μορφή περιγράφεται από το πολυώνυμο (3.99).

Επομένως, οι k εξισώσεις του προς συνόρθωση συστήματος μπορούν να γραφούν ως:

$$F_i = C \cdot x_i^2 + C \cdot y_i^2 + C \cdot z_i^2 + C_x \cdot x_i + C_y \cdot y_i + C_z \cdot z_i - 1 \quad (4.44)$$

ενώ το διάνυσμα των τεσσάρων καθοριστικών παραμέτρων του μοντέλου έχει ως εξής:

$$\widehat{C}_{4 \times 1} = \begin{bmatrix} \widehat{C} \\ \widehat{C}_x \\ \widehat{C}_y \\ \widehat{C}_z \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

Το σύστημα παραμένει στη μορφή (4.26), όπου ο πίνακας σχεδιασμού είναι ίσος με:

$$\mathbf{A}_{k \times 4} = \begin{bmatrix} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_k^2 + y_k^2 + z_k^2 & x_k & y_k & z_k \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

και το διάνυσμα $\delta \ell$ είναι ίσο με το (4.28).

4.4.5.2.1 Ειδική Περίπτωση S_2

Στην ειδική περίπτωση της σφαίρας όπου το διάνυσμα μετάθεσης t θεωρείται μηδενικό, εκείνη περιγράφεται από το γραμμικό μαθηματικό μοντέλο (3.110).

Έτσι, η εξίσωση παρατήρησης είναι ίση με:

$$F_i = C \cdot x_i^2 + C \cdot y_i^2 + C \cdot z_i^2 - 1 \quad (4.47)$$

με μοναδικό άγνωστο την καλύτερη τιμή του συντελεστή \widehat{C} .

Το σύστημα γράφεται και πάλι στη μορφή (4.26), όπου αυτήν τη φορά ο πίνακας σχεδιασμού είναι ίσος με το διάνυσμα:

$$\mathbf{A}_{k \times 1} = \begin{bmatrix} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 \\ \vdots \\ x_k^2 + y_k^2 + z_k^2 \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

και το διάνυσμα $\delta \ell$ παραμένει ίσο με το (4.28).

4.5 Μη Γραμμική Ελαχιστοτετραγωνική Προσαρμογή

Όπως αναφέρθηκε και στην αρχή του κεφαλαίου, τα μη γραμμικά μοντέλα T_1 έως S_2 περιέχουν τις ζητούμενες παραμέτρους του κάθε μοντέλου και παραπάνω από μία μέτρηση. Επομένως, θα συνορθωθούν με τη γενική μέθοδο συνόρθωσης, ενώ θα αναπτυχθούν κατά Taylor στη θέση των προσωρινών τιμών των παραμέτρων τους, όπως αυτές προκύπτουν από την συνόρθωση των αντίστοιχων γραμμικών μοντέλων.

Στην συνέχεια, θα σχηματιστούν οι εξισώσεις παρατήρησης και οι πίνακες συνόρθωσης κάθε μοντέλου, όπως αυτό σχηματίστηκε στο Κεφάλαιο 3.1.

4.5.1 Γενική Καρτεσιανή Εξίσωση Ελλειψοειδούς

Το τριαξονικό ελλειψοειδές στη γενική του μορφή περιγράφεται από την εξίσωση (3.1). Αν αυτή γραφεί για κάθε σημείο $i = 1, \dots, k$ του διανύσματος r , σχηματίζεται η εξίσωση:

$$\begin{aligned} F_i = & p_{xx} \cdot (x_i - t_x)^2 + p_{yy} \cdot (y_i - t_y)^2 + p_{zz} \cdot (z_i - t_z)^2 + \\ & + 2 \cdot p_{xy} \cdot (x_i - t_x) \cdot (y_i - t_y) + 2 \cdot p_{xz} \cdot (x_i - t_x) \cdot (z_i - t_z) \\ & + \\ & + 2 \cdot p_{yz} \cdot (y_i - t_y) \cdot (z_i - t_z) - 1 = 0 \end{aligned} \quad (4.49)$$

η οποία ταυτίζεται με την εξίσωση (3.5).

Οι άγνωστοι του μοντέλου είναι οι καλύτερες τιμές των καθοριστικών παραμέτρων, όπως φαίνεται και στο αντίστοιχο διάνυσμα:

$$\widehat{x}_{9 \times 1} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \\ \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

το πλήθος των μετρήσεων βρίσκεται ίσο με $n=3 \cdot k$, το πλήθος των ανεξάρτητων παραμέτρων που ενδιαφέρει να προσδιοριστούν ίσο με $m_0=9$, το συνολικό πλήθος των ανεξάρτητων παραμέτρων $m=m_0+k$ και ο βαθμός ελευθερίας $r=n-m$. Η επίλυση είναι προφανώς δυνατή όταν και μόνον όταν $m_0 > k$ ή αλλιώς $r > 0$.

Οι εξισώσεις παρατήρησης (4.49), οι οποίες είναι ίσες με k , θα αναπτυχθούν κατά Taylor στη θέση x_0 , r , όπου x_0 είναι το διάνυσμα των προσωρινών τιμών των παραμέτρων του μοντέλου. Δηλαδή:

$$x_{9 \times 1}^0 = \begin{bmatrix} t_x^0 \\ t_y^0 \\ t_z^0 \\ \alpha_x^0 \\ \alpha_y^0 \\ \alpha_z^0 \\ \theta_x^0 \\ \theta_y^0 \\ \theta_z^0 \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

Συνεπώς, για τις ζητούμενες παραμέτρους ισχύει:

$$\hat{x} = x^0 + \delta x \quad (4.52)$$

και το σύστημα των εξισώσεων έχει ως εξής:

$$\mathbf{A} \cdot \delta x + \mathbf{B} \cdot v = \mathbf{w} \quad (4.53)$$

Ο πίνακας των συντελεστών των διορθώσεων των άγνωστων παραμέτρων είναι ίσος με:

$$A_{k \times 9} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial F_1}{\partial t_x} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_1}{\partial t_y} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_1}{\partial t_z} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_1}{\partial \alpha_x} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_1}{\partial \alpha_y} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_1}{\partial \alpha_z} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_1}{\partial \theta_x} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_1}{\partial \theta_y} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_1}{\partial \theta_z} \right|^0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \left. \frac{\partial F_k}{\partial t_x} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_k}{\partial t_y} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_k}{\partial t_z} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_k}{\partial \alpha_x} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_k}{\partial \alpha_y} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_k}{\partial \alpha_z} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_k}{\partial \theta_x} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_k}{\partial \theta_y} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_k}{\partial \theta_z} \right|^0 \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

ο πίνακας συντελεστών των καλύτερων τιμών των μετρήσεων:

$$B_{k \times n} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_1}{\partial y_1} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_1}{\partial z_1} \right|^0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left. \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_2}{\partial z_2} \right|^0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \left. \frac{\partial F_k}{\partial x_k} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_k}{\partial y_k} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_k}{\partial z_k} \right|^0 \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

και το διάνυσμα σφαλμάτων κλεισίματος των εξισώσεων:

$$w_{k \times 1} = \begin{bmatrix} -F_1^0 \\ -F_2^0 \\ \vdots \\ -F_k^0 \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

4.5.1.1 Ειδική Περίπτωση T₂

Στην ειδική περίπτωση T₂, θεωρείται πως το διάνυσμα μετάθεσης t είναι μηδενικό και το τριαξονικό ελλειψοειδές περιγράφεται από την εξίσωση (3.7), ενώ η εξίσωση (3.8) περιγράφει τις εξισώσεις του συστήματος.

$$F_i = p_{xx} \cdot x_i^2 + p_{yy} \cdot y_i^2 + p_{zz} \cdot z_i^2 + 2 \cdot p_{xy} \cdot x_i \cdot y_i + 2 \cdot p_{xz} x_i \cdot z_i + 2 \cdot p_{yz} \cdot y_i \cdot z_i - 1 = 0 \quad (4.57)$$

Στην περίπτωση αυτή, το διάνυσμα των έξι άγνωστων καθοριστικών παραμέτρων είναι ίσο με:

$$\hat{x}_{6 \times 1} = \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

και των αντίστοιχων προσωρινών τιμών τους:

$$x_{6 \times 1}^0 = \begin{bmatrix} \alpha_x^0 \\ \alpha_y^0 \\ \alpha_z^0 \\ \theta_x^0 \\ \theta_y^0 \\ \theta_z^0 \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

Το ίδιο το σύστημα παραμένει στην μορφή του (4.53), ο πίνακας των συντελεστών των διορθώσεων των παραμέτρων γράφεται ως:

$$A_{kx6} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial F_1}{\partial \alpha_x} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_1}{\partial \alpha_y} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_1}{\partial \alpha_z} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_1}{\partial \theta_x} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_1}{\partial \theta_y} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_1}{\partial \theta_z} \right|^0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \left. \frac{\partial F_k}{\partial \alpha_x} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_k}{\partial \alpha_y} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_k}{\partial \alpha_z} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_k}{\partial \theta_x} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_k}{\partial \theta_y} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_k}{\partial \theta_z} \right|^0 \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

ενώ οι πίνακες \mathbf{B} και \mathbf{w} μένουν ίδιοι με (4.55) και (4.56), αντίστοιχα.

4.5.1.2 Ειδική Περίπτωση T₃

Στην τρίτη ειδική περίπτωση του τριαξονικού ελλειψοειδούς, οι γωνίες στροφής θεωρούνται μηδενικές και το ίδιο περιγράφεται από την εξίσωση (3.1), ενώ η εξίσωση του μοντέλου έχει τη μορφή (3.11).

$$F_i = p_{xx} \cdot (x_i - t_x)^2 + p_{yy} \cdot (y_i - t_y)^2 + p_{zz} \cdot (z_i - t_z)^2 - 1 = 0 \quad (4.61)$$

Στην περίπτωση αυτή, το διάνυσμα των έξι άγνωστων καθοριστικών παραμέτρων είναι ίσο με:

$$\widehat{x}_{6 \times 1} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \\ \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

και των αντίστοιχων προσωρινών τιμών τους:

$$x_{6 \times 1}^0 = \begin{bmatrix} t_x^0 \\ t_y^0 \\ t_z^0 \\ \alpha_x^0 \\ \alpha_y^0 \\ \alpha_z^0 \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

Το ίδιο το σύστημα παραμένει στη μορφή του (4.53), ο πίνακας των συντελεστών των διορθώσεων των παραμέτρων γράφεται ως:

$$A_{k \times 6} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial F_1}{\partial t_x} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_1}{\partial t_y} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_1}{\partial t_z} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_1}{\partial \alpha_x} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_1}{\partial \alpha_y} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_1}{\partial \alpha_z} \right|^0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \left. \frac{\partial F_k}{\partial t_x} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_k}{\partial t_y} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_k}{\partial t_z} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_k}{\partial \alpha_x} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_k}{\partial \alpha_y} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_k}{\partial \alpha_z} \right|^0 \end{bmatrix} \quad (4.64)$$

ενώ οι πίνακες **B** και **w** μένουν ίδιοι με (4.55) και (4.56), αντίστοιχα.

4.5.1.3 Ειδική Περίπτωση T4

Όσον αφορά στην τέταρτη ειδική περίπτωση του τριαξονικού ελλειψοειδούς, αυτή αποτελεί συνδυασμό των δύο προηγούμενων. Αναλυτικότερα, τόσο οι μεταθέσεις, όσο και οι γωνίες στροφής του ελλειψοειδούς θεωρούνται μηδενικές και εκείνο περιγράφεται (3.13), ενώ η εξίσωση του μοντέλου έχει τη μορφή (3.14).

$$F_i = p_{xx} \cdot x_i^2 + p_{yy} \cdot y_i^2 + p_{zz} \cdot z_i^2 - 1 = 0 \quad (4.65)$$

Στην περίπτωση αυτή, το διάνυσμα των τριών άγνωστων καθοριστικών παραμέτρων είναι ίσο με:

$$\widehat{x}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

και των αντίστοιχων προσωρινών τιμών τους:

$$x_{3 \times 1}^0 = \begin{bmatrix} \alpha_x^0 \\ \alpha_y^0 \\ \alpha_z^0 \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

Το ίδιο το σύστημα παραμένει στη μορφή του (4.53), ο πίνακας των συντελεστών των διορθώσεων των παραμέτρων γράφεται ως:

$$A_{kx3} = \begin{bmatrix} \left[\frac{\partial F_1}{\partial \alpha_x} \right]^0 & \left[\frac{\partial F_1}{\partial \alpha_y} \right]^0 & \left[\frac{\partial F_1}{\partial \alpha_z} \right]^0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \left[\frac{\partial F_k}{\partial \alpha_x} \right]^0 & \left[\frac{\partial F_k}{\partial \alpha_y} \right]^0 & \left[\frac{\partial F_k}{\partial \alpha_z} \right]^0 \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

ενώ οι πίνακες **B** και **w** μένουν ίδιοι με (4.55) και (4.56), αντίστοιχα.

4.5.2 Εκφυλισμένες Περιπτώσεις

Με τη μεθοδολογία που αναλύθηκε παραπάνω, είναι δυνατό να προσδιοριστούν οι καλύτερες τιμές των παραμέτρων των μαθηματικών μοντέλων που περιγράφουν τις εκφυλισμένες περιπτώσεις (ελλειψοειδές εκ περιστροφής, σφαίρα) του τριαξονικού ελλειψοειδούς.

4.5.2.1 Ελλειψοειδές εκ περιστροφής

Το ελλειψοειδές εκ περιστροφής στη γενική του μορφή περιγράφεται από την εξίσωση (3.18), ενώ οι k εξισώσεις του μοντέλου δίνονται από τη σχέση (3.19), όπως αυτή επαναλαμβάνεται παρακάτω.

$$\begin{aligned} F_i = & p_{xx} \cdot (x_i - t_x)^2 + p_{yy} \cdot (y_i - t_y)^2 + p_{zz} \cdot (z_i - t_z)^2 + \\ & + 2 \cdot p_{xy} \cdot (x_i - t_x) \cdot (y_i - t_y) + 2 \cdot p_{xz} \cdot (x_i - t_x) \cdot \\ & (z_i - t_z) + \\ & + 2 \cdot p_{yz} \cdot (y_i - t_y) \cdot (z_i - t_z) - 1 = 0 \end{aligned} \quad (4.69)$$

Οι άγνωστοι του μοντέλου είναι οι καλύτερες τιμές των καθοριστικών παραμέτρων, όπως φαίνεται και στο αντίστοιχο διάνυσμα:

$$\widehat{x}_{7 \times 1} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \\ \alpha_x \\ \alpha_z \\ \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

και των αντίστοιχων προσωρινών τιμών τους:

$$x_{7 \times 1}^0 = \begin{bmatrix} t_x^0 \\ t_y^0 \\ t_z^0 \\ \alpha_x^0 \\ \alpha_z^0 \\ \theta_x^0 \\ \theta_y^0 \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

Το ίδιο το σύστημα παραμένει στη μορφή του (4.53), ο πίνακας των συντελεστών των διορθώσεων των παραμέτρων γράφεται ως:

$$A_{k \times 7} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial F_1}{\partial t_x} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_1}{\partial t_y} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_1}{\partial t_z} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_1}{\partial \alpha_x} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_1}{\partial \alpha_z} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_1}{\partial \theta_x} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_1}{\partial \theta_y} \right|^0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \left. \frac{\partial F_k}{\partial t_x} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_k}{\partial t_y} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_k}{\partial t_z} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_k}{\partial \alpha_x} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_k}{\partial \alpha_z} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_k}{\partial \theta_x} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_k}{\partial \theta_y} \right|^0 \end{bmatrix} \quad (4.72)$$

ενώ οι πίνακες \mathbf{B} και \mathbf{w} μένουν ίδιοι με (4.55) και (4.56), αντίστοιχα.

4.5.2.2 Ειδική περίπτωση O_2

Στην περίπτωση που οι γωνίες στροφής των αξόνων του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής κατά τους άξονες x και y είναι και αυτές μηδενικές, αυτό περιγράφεται από την εξίσωση (3.22), ενώ η κάθε εξίσωση του μοντέλου γράφεται στην μορφή (3.23).

$$F_i = p_{xx} \cdot (x_i - t_x)^2 + p_{yy} \cdot (y_i - t_y)^2 + p_{zz} \cdot (z_i - t_z)^2 - 1 = 0 \quad (4.73)$$

Στην περίπτωση αυτή, το διάνυσμα των πέντε άγνωστων καθοριστικών παραμέτρων είναι ίσο με:

$$\widehat{x}_{5 \times 1} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \\ \alpha_x \\ \alpha_z \end{bmatrix} \quad (4.74)$$

και των αντίστοιχων προσωρινών τιμών τους:

$$x_{5 \times 1}^0 = \begin{bmatrix} t_x^0 \\ t_y^0 \\ t_z^0 \\ \alpha_x^0 \\ \alpha_z^0 \end{bmatrix} \quad (4.75)$$

Το ίδιο το σύστημα παραμένει στην μορφή του (4.53), ο πίνακας των συντελεστών των διορθώσεων των παραμέτρων γράφεται ως:

$$A_{k \times 5} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial F_1}{\partial t_x} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_1}{\partial t_y} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_1}{\partial t_z} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_1}{\partial \alpha_x} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_1}{\partial \alpha_z} \right|^0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \left. \frac{\partial F_k}{\partial t_x} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_k}{\partial t_y} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_k}{\partial t_z} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_k}{\partial \alpha_x} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_k}{\partial \alpha_z} \right|^0 \end{bmatrix} \quad (4.76)$$

ενώ οι πίνακες \mathbf{B} και \mathbf{w} μένουν ίδιοι με (4.55) και (4.56), αντίστοιχα.

4.5.2.3 Ειδική περίπτωση O_3

Στην περίπτωση μηδενικού διανύσματος μετάθεσης t , το ελλειψοειδές εκ περιστροφής περιγράφεται από την εξίσωση (3.25) και οι εξισώσεις του μοντέλου από την εξίσωση (3.26).

$$F_i = p_{xx} \cdot x_i^2 + p_{yy} \cdot y_i^2 + p_{zz} \cdot z_i^2 + 2 \cdot p_{xy} \cdot x_i \cdot y_i + \\ + 2 \cdot p_{xz} \cdot x_i \cdot z_i + 2 \cdot p_{yz} \cdot y_i \cdot z_i - 1 = 0 \quad (4.77)$$

Στην περίπτωση αυτή, το διάνυσμα των τεσσάρων άγνωστων καθοριστικών παραμέτρων είναι ίσο με:

$$\hat{x}_{4 \times 1} = \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_z \\ \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} \quad (4.78)$$

και των αντίστοιχων προσωρινών τιμών τους:

$$x_{4 \times 1}^0 = \begin{bmatrix} \alpha_x^0 \\ \alpha_z^0 \\ \theta_x^0 \\ \theta_y^0 \end{bmatrix} \quad (4.79)$$

Το ίδιο το σύστημα παραμένει στη μορφή του (4.53), ο πίνακας των συντελεστών των διορθώσεων των παραμέτρων γράφεται ως:

$$A_{kx4} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial F_1}{\partial \alpha_x} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_1}{\partial \alpha_z} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_1}{\partial \theta_x} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_1}{\partial \theta_y} \right|^0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \left. \frac{\partial F_k}{\partial \alpha_x} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_k}{\partial \alpha_z} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_k}{\partial \theta_x} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_k}{\partial \theta_y} \right|^0 \end{bmatrix} \quad (4.80)$$

ενώ οι πίνακες \mathbf{B} και \mathbf{w} μένουν ίδιοι με (4.55) και (4.56), αντίστοιχα.

4.5.2.4 Ειδική Περίπτωση O_4

Στην τελευταία και απλούστερη περίπτωση του μαθηματικού μοντέλου ενός ελλειψοειδούς εκ περιστροφής δεν υφίστανται ούτε μεταθέσεις ούτε στροφές και οι εξισώσεις του προκύπτουν συνδυάζοντας εκείνες των δύο προηγούμενων περιπτώσεων. Περιγράφεται, λοιπόν, από την εξίσωση (3.28) και οι εξισώσεις δίνονται από τη σχέση (3.29).

$$F_i = p_{xx} \cdot x_i^2 + p_{yy} \cdot y_i^2 + p_{zz} \cdot z_i^2 - 1 = 0 \quad (4.81)$$

Στην περίπτωση αυτή, το διάνυσμα των δύο άγνωστων καθοριστικών παραμέτρων είναι ίσο με:

$$\widehat{x}_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_z \end{bmatrix} \quad (4.82)$$

και των αντίστοιχων προσωρινών τιμών τους:

$$x_{2 \times 1}^0 = \begin{bmatrix} \alpha_x^0 \\ \alpha_z^0 \end{bmatrix} \quad (4.83)$$

Το ίδιο το σύστημα παραμένει στη μορφή του (4.53), ο πίνακας των συντελεστών των διορθώσεων των παραμέτρων γράφεται ως:

$$A_{k \times 2} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial F_1}{\partial \alpha_x} \right|_0 & \left. \frac{\partial F_1}{\partial \alpha_z} \right|_0 \\ \vdots & \vdots \\ \left. \frac{\partial F_k}{\partial \alpha_x} \right|_0 & \left. \frac{\partial F_k}{\partial \alpha_z} \right|_0 \end{bmatrix} \quad (4.84)$$

ενώ οι πίνακες \mathbf{B} και \mathbf{w} μένουν ίσοι με (4.55) και (4.56), αντίστοιχα.

4.5.3 Σφαίρα

Η σφαίρα στη γενική της περίπτωση περιγράφεται από την εξίσωση (3.31), η οποία αν γραφεί για κάθε σημείο $i = 1, \dots, k$ του διανύσματος r , σχηματίζεται η εξίσωση:

$$F_i = x_i^2 - 2 \cdot t_x \cdot x_i + y_i^2 - 2 \cdot t_y \cdot y_i + z_i^2 - 2 \cdot t_z \cdot z_i + t_x^2 + t_y^2 + t_z^2 - r^2 = 0 \quad (4.85)$$

Οι άγνωστοι του μοντέλου είναι οι καλύτερες τιμές των καθοριστικών παραμέτρων, όπως φαίνεται και στο αντίστοιχο διάνυσμα:

$$\widehat{x}_{4 \times 1} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \\ r \end{bmatrix} \quad (4.86)$$

και των αντίστοιχων προσωρινών τιμών τους:

$$x_{4 \times 1}^0 = \begin{bmatrix} t_x^0 \\ t_y^0 \\ t_z^0 \\ r^0 \end{bmatrix} \quad (4.87)$$

Το ίδιο το σύστημα παραμένει στη μορφή του (4.53), ο πίνακας των συντελεστών των διορθώσεων των παραμέτρων γράφεται ως:

$$A_{kx4} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial F_1}{\partial t_x} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_1}{\partial t_y} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_1}{\partial t_z} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_1}{\partial r} \right|^0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \left. \frac{\partial F_k}{\partial t_x} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_k}{\partial t_y} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_k}{\partial t_z} \right|^0 & \left. \frac{\partial F_k}{\partial r} \right|^0 \end{bmatrix} \quad (4.88)$$

ενώ οι πίνακες \mathbf{B} και \mathbf{w} μένουν ίδιοι με (4.55) και (4.56), αντίστοιχα.

Στη δεύτερη περίπτωση, το διάνυσμα μετάθεσης $t=(t_x, t_y, t_z)$ είναι μηδενικό, η σφαίρα περιγράφεται από την εξίσωση (3.32) και οι εξισώσεις παρατήρησης λαμβάνουν τη μορφή:

$$F_i = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - r^2 = 0 \quad (4.89)$$

με μοναδικό άγνωστο την καλύτερη τιμή της ακτίνας \hat{r} .

Το ίδιο το σύστημα παραμένει στη μορφή του (4.53), ο πίνακας των συντελεστών των διορθώσεων των παραμέτρων είναι ίσος με το διάνυσμα:

$$A_{kx1} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial F_1}{\partial r} \right|^0 \\ \vdots \\ \left. \frac{\partial F_k}{\partial r} \right|^0 \end{bmatrix} \quad (4.90)$$

ενώ οι πίνακες \mathbf{B} και \mathbf{w} μένουν ίδιοι με (4.55) και (4.56), αντίστοιχα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

5.1 Περιγραφή της Προσαρμογής Μαθηματικών Μοντέλων στα Μοντέλα Σφαιρικών Αρμονικών

Η διαδικασία προσαρμογής των μαθηματικών επιφανειών που περιεγράφηκαν στο Κεφάλαιο 3 της παρούσας διπλωματικής εργασίας στα δεδομένα, όπως αυτά προήλθαν από τα επιλεγμένα μοντέλα σφαιρικών αρμονικών (Κεφάλαιο 2^ο), καθώς και η απαραίτητη επεξεργασία των δεδομένων αυτών, αναπτύχθηκε και εκτελέστηκε στο προγραμματιστικό περιβάλλον MATLAB.

Αναλυτικότερα, αναπτύχθηκε ένας κώδικας για τη μετατροπή των σφαιρικών συντεταγμένων (φ , λ , h) σε τρισδιάστατες καρτεσιανές συντεταγμένες (x , y , z) βάσει των μαθηματικών σχέσεων που παρουσιάστηκαν στο 2^ο Κεφάλαιο (σχέση 2.13). Στη συνέχεια, γράφτηκε ένας κώδικας για κάθε περίπτωση μαθηματικού μοντέλου (T_1 , T_2 , ..., S_2), ο οποίος εκτελούσε τη συνόρθωση των μη γραμμικών μοντέλων βάσει της γενικής μεθόδου (Κεφάλαιο 4.2), ενώ έδινε προσωρινές τιμές στις παραμέτρους του κάθε μοντέλου με χρήση ξεχωριστής συνάρτησης. Η λειτουργία της συνάρτησης αυτής ήταν η συνόρθωση των αντίστοιχων γραμμικών μοντέλων (Κεφάλαιο 3.3) με τη μέθοδο των εμμέσων παρατηρήσεων (Κεφάλαιο 4.3) και ο υπολογισμός των προσωρινών τιμών των παραμέτρων του βάσει των σχέσεων του ελλειψοειδούς σφάλματος. Αξίζει να σημειωθεί πως η συνόρθωση των μη γραμμικών μοντέλων τέθηκε να επαναλαμβάνεται έως ότου η διαφορά μεταξύ των διαδοχικών *a posteriori* ακριβειών σ_0 να μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα (δηλαδή μικρότερη του 10^{-4}), με μέγιστο επιτρεπτό όριο επαναλήψεων τις πέντε (5).

5.2 Επιλογή Ανάλυσης Μοντέλων Σφαιρικών Αρμονικών – Επιλογή Προσωρινών Τιμών

Ως πρώτο πείραμα επιλέγεται το μοντέλο σφαιρικών αρμονικών GLGM-1 στη μέγιστη δυνατή ανάλυσή του, δηλαδή σε κάρναβο $2^{\circ}.57 \times 2^{\circ}.57$ (χωρική ανάλυση 77.97 km), και το μαθηματικό μοντέλο ελλειψοειδούς T1. Οι προσωρινές τιμές των παραμέτρων δίνονται από τη συνόρθωση του γραμμικού μαθηματικού μοντέλου T1 με τη μέθοδο εμμέσων παρατηρήσεων (Κεφάλαιο 4.4.1), ενώ οι τελικές τιμές των παραμέτρων βάσει συνόρθωσης με τη γενική μέθοδο (Κεφάλαιο 4.5.1). Στον επόμενο πίνακα παρουσιάζονται τα αποτελέσματα τόσο των προσωρινών, όσο και των τελικών τιμών των παραμέτρων με το αντίστοιχο τυπικό τους σφάλμα και την *a posteriori* ποιότητα της συνόρθωσης (τιμή σ_0).

Πίνακας 5.1: Αποτελέσματα συνόρθωσης μαθηματικού μοντέλου T1 στα δεδομένα του μοντέλου GLGM-1, $2^{\circ}.57 \times 2^{\circ}.57$

MONTEAO	GLGM-1	1994			
Grid	2.57x2.57	°			
ΠΡΟΣΩΡΙΝΕΣ ΤΙΜΕΣ					
tx	20.879	m			
ty	2.313	m			
tz	-1.908	m			
ax	1737738.369	m			
ay	1737347.491	m			
az	1737120.328	m			
θx	4.992	°			
θy	16.172	°			
θz	42.427	°			
ΤΕΛΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ					
tx	20.871	m	σtx	±1.752	m
ty	2.317	m	σty	±1.764	m
tz	-1.905	m	σtz	±1.226	m
ax	1737665.622	m	σax	±2.525	m
ay	1737475.358	m	σay	±2.542	m
az	1737065.175	m	σaz	±1.492	m
θx	-0.065	°	σθx	±0.239	°
θy	0.714	°	σθy	±0.178	°
θz	-177.406	°	σθz	±0.672	°
Σύνολο επαναλήψεων	5	σ ₀ a posteriori	±87.332		

Ύστερα, επαναλήφθηκε το πείραμα προσαρμογής του μαθηματικού μοντέλου T1 με χρήση του μοντέλου σφαιρικών αρμονικών GLGM-1 σε ανάλυση $10^{\circ} \times 10^{\circ}$. Η επανάληψη του πειράματος με μικρότερο σετ δεδομένων είχε ως στόχο να κριθεί αν είναι δυνατή η εξοικονόμηση χρόνου αναμονής του αποτελέσματος από τον κώδικα συνόρθωσης. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας 5.2: Αποτελέσματα συνόρθωσης μαθηματικού μοντέλου T1 στα δεδομένα του μοντέλου GLGM-1, $10^{\circ} \times 10^{\circ}$

ΜΟΝΤΕΛΟ	GLGM-1	1994			
Grid	10x10	°			
ΠΡΟΣΩΡΙΝΕΣ ΤΙΜΕΣ					
tx	23.592	m			
ty	1.468	m			
tz	-0.618	m			
ax	1737734.929	m			
ay	1737347.951	m			
az	1737121.655	m			
θx	3.133	°			
θy	14.546	°			
θz	42.985	°			
ΤΕΛΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ					
tx	23.584	m	σtx	±6.635	m
ty	1.473	m	σty	±6.804	m
tz	-0.617	m	σtz	±4.503	m
ax	1737636.617	m	σαx	±9.583	m
ay	1737500.740	m	σαy	±9.786	m
az	1737067.103	m	σαz	±5.382	m
θx	-0.300	°	σθx	±0.728	°
θy	1.522	°	σθy	±0.858	°
θz	-302.037	°	σθz	±2.976	°
Σύνολο επαναλήψεων	5	σ ₀ a posteriori	±86.587		

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα, γίνεται αντιληπτό πως η χρήση μεγαλύτερου πλήθους δεδομένων μπορεί να προσφέρει μεγαλύτερη μεμονωμένη ακρίβεια στις εκάστοτε παραμέτρους, αλλά δεν συνεπάγεται καλύτερη συνολική ποιότητα προσαρμογής (σ₀ a posteriori). Για το λόγο αυτό, κρίθηκε σκόπιμο για λόγους εξοικονόμησης χρόνου και λόγω των περιορισμών του ηλεκτρονικού υπολογιστή και του λογισμικού MATLAB

όσον αφορά στη μνήμη RAM, τα μοντέλα σφαιρικών αρμονικών να χρησιμοποιηθούν σε ανάλυση $10^\circ \times 10^\circ$ σε κάθε επόμενο πείραμα.

Επιπρόσθετα, παρατηρείται πως οι τιμές των μεταθέσεων και των γωνιών στροφής, είναι γενικά μικρές. Έτσι, για τη συνέχεια των πειραμάτων προσαρμογής, οι προσωρινές τιμές των παραμέτρων αποφασίστηκε να θέτονται χειροκίνητα στον κώδικα συνόρθωσης των μη γραμμικών μοντέλων και έχουν ως εξής:

- $(t_x, t_y, t_z) = (0, 0, 0)$ m
- $(a_x, a_y, a_z) = (1737600, 1737400, 1737000)$ m
- $(\theta_x, \theta_y, \theta_z) = (0, 0, 0)$ °

Οι προσωρινές τιμές των αξόνων a_x , a_y και a_z προέκυψαν από τη μέση τιμή των αντίστοιχων προσωρινών και τελικών τιμών των παραμέτρων αυτών, όπως υπολογίστηκαν στην προσαρμογή του μοντέλου T1 στο μοντέλο GLGM-1 ανάλυσης $10^\circ \times 10^\circ$, στρογγυλοποιημένες στα 100 m.

5.3 Επιλογή Κατάλληλου Μαθηματικού Μοντέλου Ελλειψοειδούς

Στο σημείο αυτό έπρεπε να επιλεγεί ένα μαθηματικό μοντέλο ελλειψοειδούς, το οποίο επρόκειτο να προσαρμοστεί έπειτα σε όλα τα μοντέλα σφαιρικών αρμονικών, έτσι ώστε να ληφθούν οι τελικές τιμές των παραμέτρων του ελλειψοειδούς προσαρμογής της επιφάνειας της Σελήνης. Για το λόγο αυτό, πραγματοποιήθηκε η συνόρθωση όλων των μαθηματικών μοντέλων με βάση το μοντέλο σφαιρικών αρμονικών GLGM-1 σε ανάλυση $10^\circ \times 10^\circ$ και με χρήση των προσωρινών τιμών των παραμέτρων που αναφέρθηκαν προηγουμένως. Το μοντέλο GLGM-1 αποτελεί ένα διαδομένο μοντέλο σφαιρικών αρμονικών του σεληνιακού βαρυτικού πεδίου, καθιστώντας την αξιοπιστία των αποτελεσμάτων δεδομένη. Στους επόμενους πίνακες παρουσιάζονται οι προσωρινές και οι τελικές τιμές των παραμέτρων κάθε μαθηματικού μοντέλου, συνοδευόμενες από τα τυπικά τους σφάλματα, το πλήθος των επαναλήψεων κάθε συνόρθωσης και την *a posteriori* ακρίβεια της προσαρμογής (σ_0).

Πίνακας 5.3: Προσωρινές τιμές προσαρμογής όλων των μαθηματικών μοντέλων ελλειψοειδούς στο μοντέλο σφαιρικών αρμονικών GLGM-1 (10°x10°)

	T1	T2	T3	T4
ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΣ	ΠΡΟΣΩΡΙΝΕΣ ΤΙΜΕΣ			
tx (m)	0		0	
ty (m)	0		0	
tz (m)	0		0	
ax (m)	1737600	1737600	1737600	1737600
ay (m)	1737400	1737400	1737400	1737400
az (m)	1737000	1737000	1737000	1737000
θx (°)	0	0		
θy (°)	0	0		
θz (°)	0	0		

Πίνακας 5.4: Τελικές τιμές προσαρμογής όλων των μαθηματικών μοντέλων ελλειψοειδούς στο μοντέλο σφαιρικών αρμονικών GLGM-1 (10°x10°)

	T1			T2			T3			T4		
ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΣ	ΤΕΛΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ ± a posteriori ΤΥΠΙΚΟ ΣΦΑΛΜΑ											
tx ± σtx (m)	23.583	±	6.636				23.583	±	6.634			
ty ± σty (m)	1.469	±	6.804				1.469	±	6.802			
tz ± σtz (m)	-0.615	±	4.503				-0.403	±	4.500			
ax ± σαx (m)	1737679	±	9.435	1737677	±	9.483	1737678	±	9.433	1737676.4	±	9.480
ay ± σαy (m)	1737459	±	9.749	1737460	±	9.815	1737459	±	9.746	1737460.1	±	9.811
az ± σαz (m)	1737067	±	5.382	1737066	±	5.420	1737067	±	5.378	1737066.6	±	5.415
θx ± σθx (°)	0.131	±	0.992	0.131	±	0.997						
θy ± σθy (°)	0.962	±	0.620	0.962	±	0.626						
θz ± σθz (°)	-0.862	±	2.053	-0.873	±	2.093						
ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΙΣ	3			3			3			3		
σ₀ a posteriori	±86.590			±87.190			±86.565			±87.163		

Πίνακας 5.5: Προσωρινές τιμές προσαρμογής όλων των μαθηματικών μοντέλων ελλειψοειδούς εκ περιστροφής στο μοντέλο σφαιρικών αρμονικών GLGM-1 (10°x10°)

	O1	O2	O3	O4
ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΣ	ΠΡΟΣΩΡΙΝΕΣ ΤΙΜΕΣ			
tx (m)	0	0		
ty (m)	0	0		
tz (m)	0	0		
ax (m)	1737600	1737600	1737600	1737600
ay (m)				
az (m)	1737000	1737000	1737000	1737000
θx (°)	0		0	
θy (°)	1		1	
θz (°)				

Πίνακας 5.6: Τελικές τιμές προσαρμογής όλων των μαθηματικών μοντέλων ελλειψοειδούς εκ περιστροφής στο μοντέλο σφαιρικών αρμονικών GLGM-1 (10°x10°)

	O1			O2			O3			O4		
ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΣ	ΤΕΛΙΚΕΣ ΤΙΜΕΣ ± a posteriori ΣΦΑΛΜΑ											
tx ± σtx (m)	23.584	±	6.639	18.814	±	7.529						
ty ± σty (m)	1.470	±	6.806	1.469	±	7.730						
tz ± σtz (m)	-0.403	±	4.503	-0.405	±	5.113						
ax ± σαx (m)	1737678	±	9.439	1737572	±	6.554	1737676	±	9.487	1737571.2	±	6.566
ay ± σay (m)												
az ± σαz (m)	1736848	±	16.228	1737067	±	6.112	1736851	±	16.323	1737066.6	±	6.126
θx ± σθx (°)	-30.893	±	0.733				-30.774	±	0.745			
θy ± σθy (°)	0.000	±	0.001				0.000	±	0.001			
θz ± σθz (°)												
ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΙΣ	5			3			5			3		
σ₀ a posteriori	±86.626			±98.372			±87.224			±98.602		

Πίνακας 5.7: Προσωρινές τιμές προσαρμογής όλων των μαθηματικών μοντέλων σφαίρας στο μοντέλο σφαιρικών αρμονικών GLGM-1 (10°x10°)

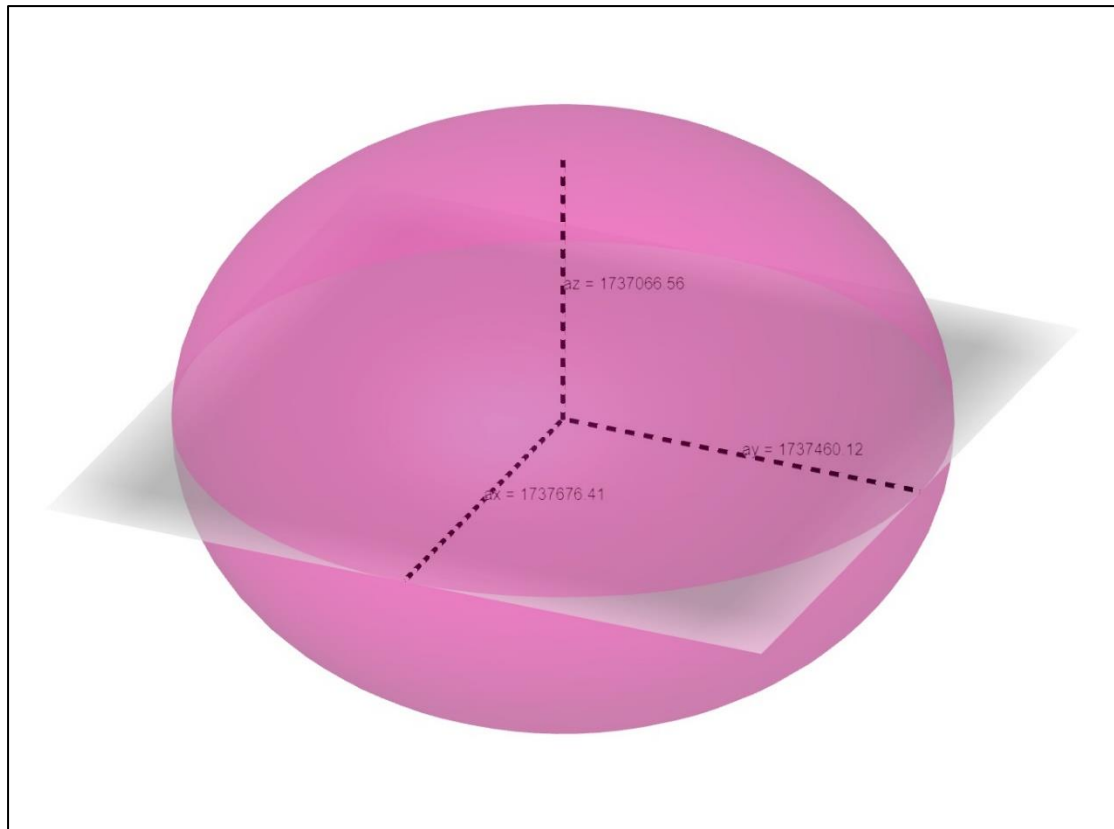
	S1	S2
ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΣ	ΠΡΟΣΩΡΙΝΕΣ ΤΙΜΕΣ	
tx (m)	0	
ty (m)	0	
tz (m)	0	
r (m)	1737000	1737000

Πίνακας 5.8: Τελικές τιμές προσαρμογής όλων των μαθηματικών μοντέλων σφαίρας στο μοντέλο σφαιρικών αρμονικών GLGM-1 (10°x10°)

	S1			S2		
ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΣ						
tx ± σtx (m)	12.251	±	15.908			
ty ± σty (m)	1.472	±	16.335			
tz ± σtz (m)	-0.406	±	10.809			
r ± σr (m)	1737305.733	±	7.846	1737305.534	±	7.828
ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΙΣ	3			2		
σ₀ a posteriori	±207.911			±207.556		

Ως καλύτερη προσαρμογή μπορεί να θεωρηθεί εκείνη με το μικρότερο a posteriori τυπικό σφάλμα σ_0 . Στην περίπτωση αυτή, την ακριβέστερη προσαρμογή δίνει το ελλειψοειδές T3, δηλαδή το ελλειψοειδές με μη μηδενικές μεταθέσεις και άξονες, αλλά μηδενικές γωνίες στροφής. Παρόλα αυτά, τα τυπικά σφάλματα των μεταθέσεων κατά άξονες y και z είναι σημαντικά μεγαλύτερα από τις τιμές των παραμέτρων αυτών και, κατά συνέπεια, δεν μπορεί να θεωρηθεί πως αντικατοπτρίζουν αξιόλογα το μέγεθος. Επιπλέον, παρατηρείται πως οι τιμές των δύο αυτών παραμέτρων δεν είναι στατιστικά αποδεκτές για διάστημα εμπιστοσύνης 95%. Η προσαρμογή με την αμέσως επόμενη καλύτερη ακρίβεια είναι εκείνη του ελλειψοειδούς T1, στο οποίο καμία παράμετρος δεν είναι μηδενική. Στην περίπτωση αυτή, όμως, συναντάται το ίδιο πρόβλημα τόσο στις μεταθέσεις των αξόνων y και z, όσο και στις γωνίες στροφής και των τριών αξόνων. Για το λόγο αυτό, ως μοντέλο ελλειψοειδούς που προσαρμόζεται καλύτερα στην επιφάνεια της Σελήνης επιλέγεται το ελλειψοειδές T4, όπου οι μόνες μη μηδενικές παράμετροι είναι οι τρεις άξονές του, το οποίο προσφέρει το τρίτο μικρότερο a posteriori σφάλμα σ_0 , ικανοποιητική ακρίβεια στις τρεις (3) μη μηδενικές παραμέτρους του και οι τιμές των αξόνων του ικανοποιούν το στατιστικό έλεγχο για διάστημα εμπιστοσύνης 95%.

Εν τέλει, ως πρώτο αποτέλεσμα του ελλειψοειδούς αναφοράς στην επιφάνεια της Σελήνης λαμβάνεται εκείνο με μηδενικές μεταθέσεις και στροφές και άξονες ίσους με $a_x = 1737676.411 \pm 9.480$ m, $a_y = 1737460.116 \pm 9.811$ m και $a_z = 1737066.576 \pm 5.415$ m, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



Εικόνα 5.1: Ελλειψοειδές Αναφοράς από το μοντέλο GLGM-1

5.4 Προσαρμογή Ελλειψοειδούς T4

Στο σημείο αυτό, πραγματοποιήθηκε η προσαρμογή του μαθηματικού μοντέλου ελλειψοειδούς T4 (μηδενικές μεταθέσεις και στροφές) σε όλα τα επιλεγμένα μοντέλα σφαιρικών αρμονικών σε ανάλυση $10^\circ \times 10^\circ$. Τα αποτελέσματα των προσαρμογών αυτών φαίνονται στον επόμενο πίνακα.

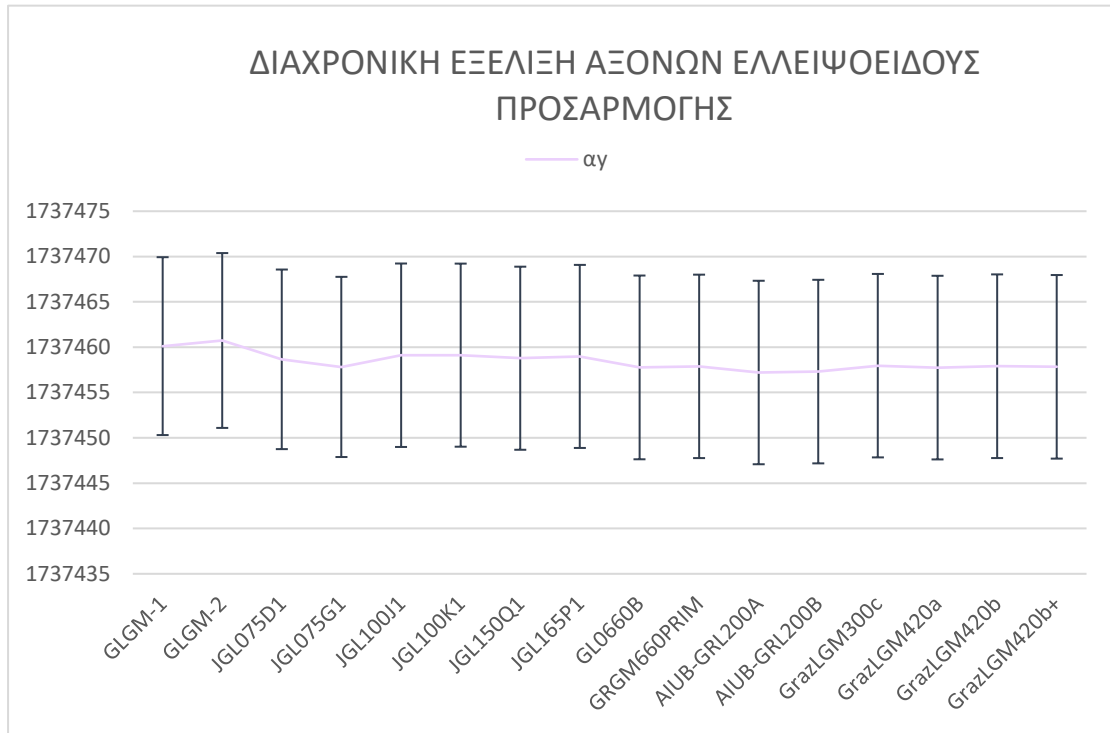
Πίνακας 5.9: Αποτελέσματα προσαρμογής ελλειψοειδούς T4 σε όλα τα επιλεγμένα μοντέλα σφαιρικών αρμονικών

ΜΟΝΤΕΛΟ/ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΣ	GLGM-1			GLGM-2			JGL075D1			JGL075G1		
$\alpha x \pm \sigma_{\alpha x}$ (m)	1737676.411	±	9.480	1737677.033	±	9.318	1737676.956	±	9.570	1737676.463	±	9.601
$\alpha y \pm \sigma_{\alpha y}$ (m)	1737460.116	±	9.811	1737460.737	±	9.643	1737458.661	±	9.905	1737457.821	±	9.937
$\alpha z \pm \sigma_{\alpha z}$ (m)	1737066.576	±	5.415	1737065.986	±	5.322	1737065.766	±	5.467	1737067.388	±	5.484
σ_0 a posteriori (±)	87.163			85.668			87.990			88.276		
ΠΛΗΘΟΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΩΝ	3			3			3			3		
ΜΟΝΤΕΛΟ/ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΣ	JGL100J1			JGL100K1			JGL150Q1			JGL165P1		
$\alpha x \pm \sigma_{\alpha x}$ (m)	1737675.371	±	9.778	1737675.438	±	9.775	1737675.272	±	9.740	1737674.874	±	9.756
$\alpha y \pm \sigma_{\alpha y}$ (m)	1737459.112	±	10.119	1737459.104	±	10.116	1737458.801	±	10.080	1737458.982	±	10.097
$\alpha z \pm \sigma_{\alpha z}$ (m)	1737067.038	±	5.585	1737066.696	±	5.584	1737067.468	±	5.564	1737067.598	±	5.573
σ_0 a posteriori (±)	89.896			89.870			89.552			89.697		
ΠΛΗΘΟΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΩΝ	3			3			3			3		
ΜΟΝΤΕΛΟ/ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΣ	GL0660B			GRGM660PRIM			AIUB-GRL200A			AIUB-GRL200B		
$\alpha x \pm \sigma_{\alpha x}$ (m)	1737675.668	±	9.794	1737675.739	±	9.776	1737675.677	±	9.780	1737675.667	±	9.784
$\alpha y \pm \sigma_{\alpha y}$ (m)	1737457.769	±	10.136	1737457.883	±	10.117	1737457.206	±	10.121	1737457.308	±	10.125
$\alpha z \pm \sigma_{\alpha z}$ (m)	1737068.595	±	5.594	1737067.359	±	5.584	1737067.902	±	5.586	1737067.923	±	5.589
σ_0 a posteriori (±)	90.042			89.876			89.914			89.951		
ΠΛΗΘΟΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΩΝ	3			3			3			3		
ΜΟΝΤΕΛΟ/ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΣ	GrazLGM300c			GrazLGM420a			GrazLGM420b			GrazLGM420b+		
$\alpha x \pm \sigma_{\alpha x}$ (m)	1737676.192	±	9.776	1737675.485	±	9.788	1737675.652	±	9.788	1737675.691	±	9.785
$\alpha y \pm \sigma_{\alpha y}$ (m)	1737457.961	±	10.118	1737457.748	±	10.130	1737457.899	±	10.130	1737457.834	±	10.127
$\alpha z \pm \sigma_{\alpha z}$ (m)	1737068.079	±	5.584	1737067.700	±	5.591	1737067.942	±	5.591	1737067.968	±	5.590
σ_0 a posteriori (±)	89.885			89.991			89.990			89.966		
ΠΛΗΘΟΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΕΩΝ	3			3			3			3		

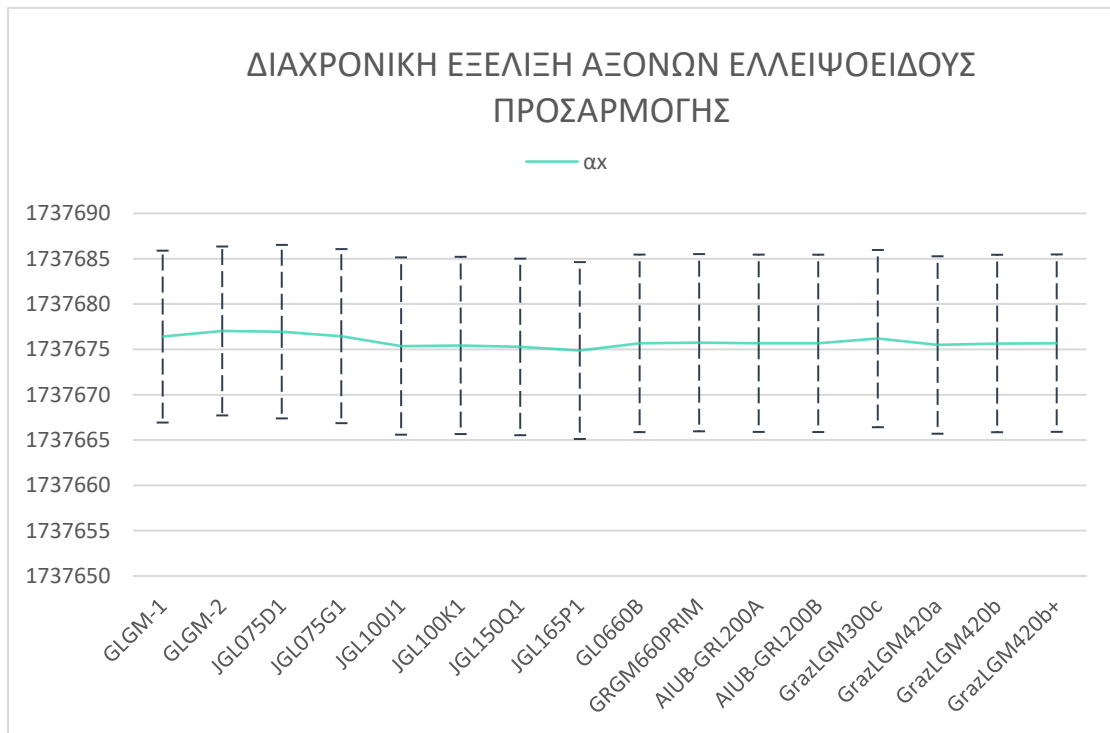
Γίνεται αντιληπτό πως οι σχετικές μεταβολές του μεγέθους των τριών αξόνων μεταξύ των δεκαέξι (16) παραπάνω προσαρμογών είναι πολύ μικρές (της τάξης του 1 cm έως 2 m). Επιπρόσθετα, τα τυπικά σφάλματα των προσδιοριζόμενων αξόνων είναι σχεδόν σταθερά μεταξύ κάθε προσαρμογής, ενώ είναι σημαντικά μικρότερα του μεγέθους των αξόνων, εφόσον το μέγιστο τυπικά σφάλμα είναι της τάξεως των 10 m, ενώ ο κάθε άξονα είναι της τάξεως των 1737 km, και συνεπώς μπορούν να θεωρηθούν ικανοποιητικά. Επιπλέον, σε κάθε περίπτωση οι τιμές των παραμέτρων είναι στατιστικά αποδεκτές για διάστημα εμπιστοσύνης 95%.

Σταθερότητα παρουσιάζει, επίσης, και η a posteriori ακρίβεια της κάθε προσαρμογής. Αξίζει να σημειωθεί πως αν ήταν δυνατή η χρήση των μοντέλων σφαιρικών αρμονικών στη μέγιστη δυνατή ανάλυσή τους, το a posteriori τυπικό σφάλμα σ_0 θα ελαττωνόταν όσο αυξανόταν ο βαθμός του μοντέλου. Η σταθερότητα που παρουσιάζουν οι τιμές των παραμέτρων του και τα αντίστοιχα σφάλματα αντικατοπτρίζουν τόσο την σωστή επιλογή του μαθηματικού μοντέλου ελλειψοειδούς T4, όσο και την ορθότητα της μεθόδου προσαρμογής.

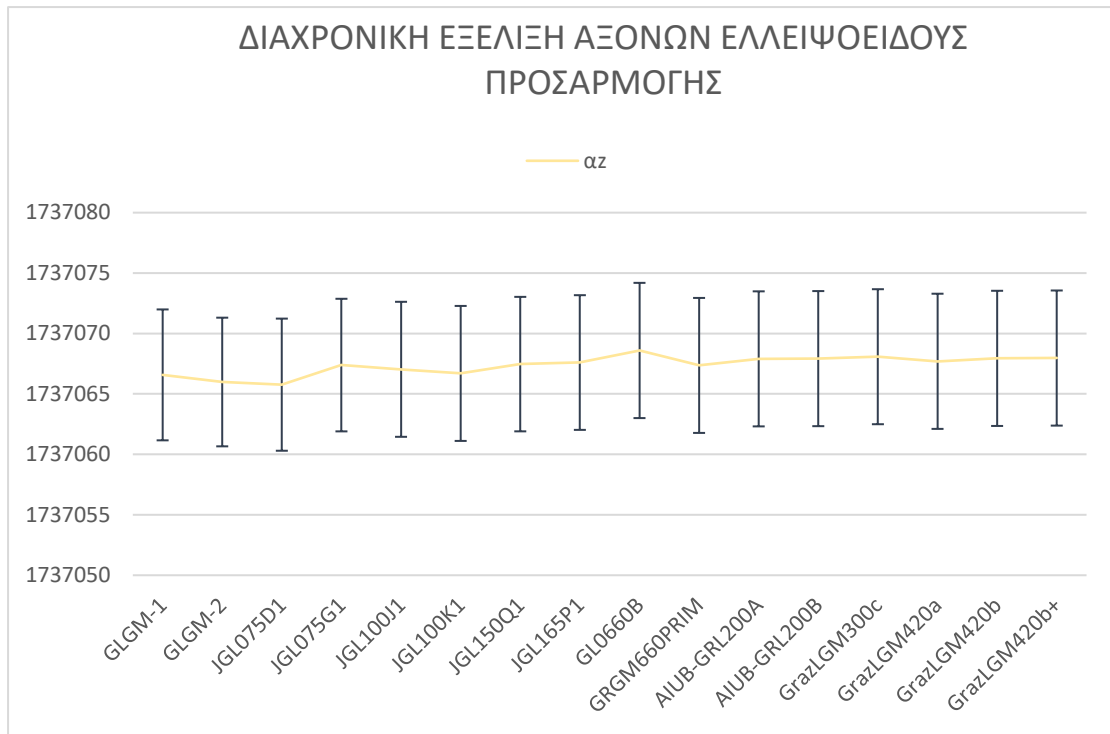
Στα παρακάτω διαγράμματα παρουσιάζεται η διαχρονική εξέλιξη των τιμών των τριών αξόνων του ελλειψοειδούς προσαρμογής και η εξέλιξη της a posteriori ακρίβειας προσαρμογής. Αναλυτικότερα, παρουσιάζονται οι τιμές των τριών αξόνων του ελλειψοειδούς προσαρμογής, όπως αυτές προέκυψαν από τις προαναφερόμενες 16 προσαρμογές διαφορετικών δεδομένων, καθώς και το a posteriori τυπικό σφάλμα σ_0 , συναρτήσει των μοντέλων σφαιρικών αρμονικών που χρησιμοποιήθηκαν ως δεδομένα σε αύξουσα σειρά βάσει του έτους δημοσίευσής τους. Επιπλέον, στα διαγράμματα εξέλιξης των αξόνων, σημειώνεται και το τυπικό σφάλμα της παραμέτρου σε γραμμή κάθετη της γραφικής παράστασης. Ακόμη, στο τελευταίο διάγραμμα συγκρίνονται οι τρεις άξονες του ελλειψοειδούς, με στόχο να σημειωθεί η έντονη τριαξονικότητα της Σελήνης, αφού γίνεται εύκολα αντιληπτό από αυτό πως τα τυπικά σφάλματα καθενός από αυτούς είναι σημαντικά μικρότερα των μεταξύ τους διαφορών.



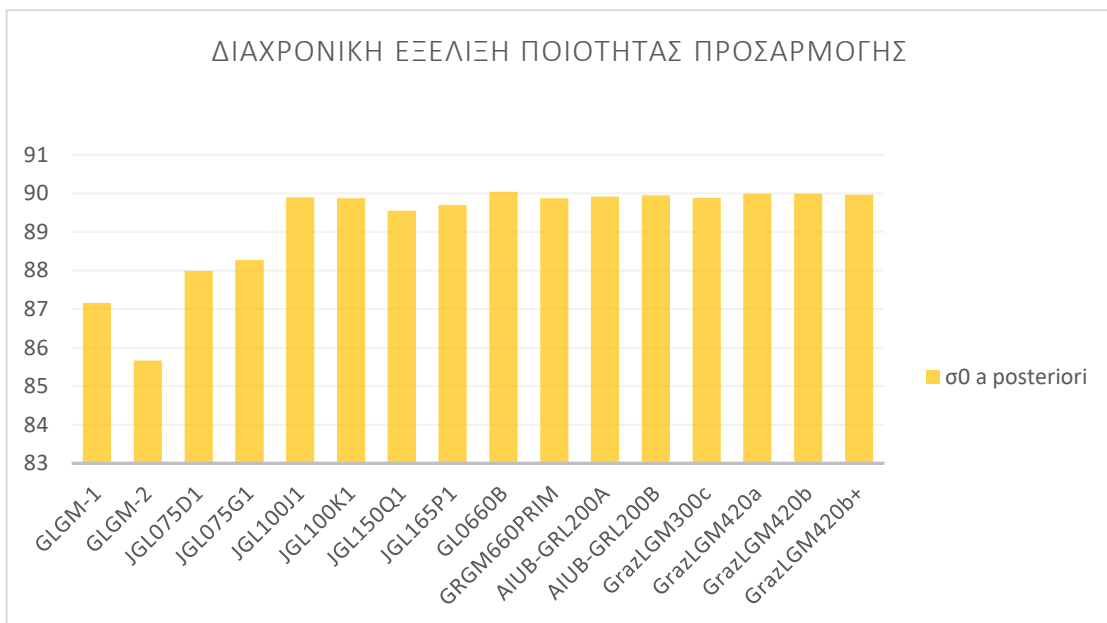
Σχήμα 5.1: Διαχρονική Εξέλιξη Άξονα α_x του Ελλειψοειδούς Προσαρμογής



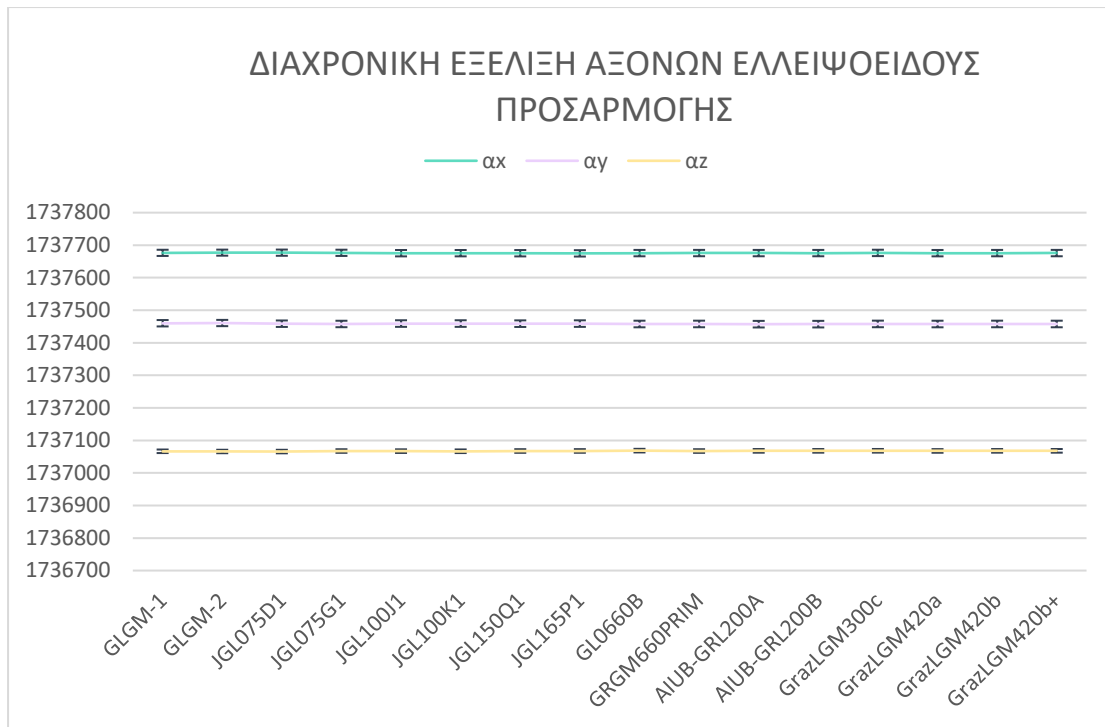
Σχήμα 5.2: Διαχρονική Εξέλιξη Άξονα α_y του Ελλειψοειδούς Προσαρμογής



Σχήμα 5.3: Διαχρονική Εξέλιξη Άξονα α_z του Ελλειψοειδούς Προσαρμογής



Σχήμα 5.4: Διαχρονική Εξέλιξη Ποιότητας Προσαρμογής



Σχήμα 5.5: Διαχρονική Σύγκριση των Τριών Αξόνων του Ελλειψοειδούς Προσαρμογής

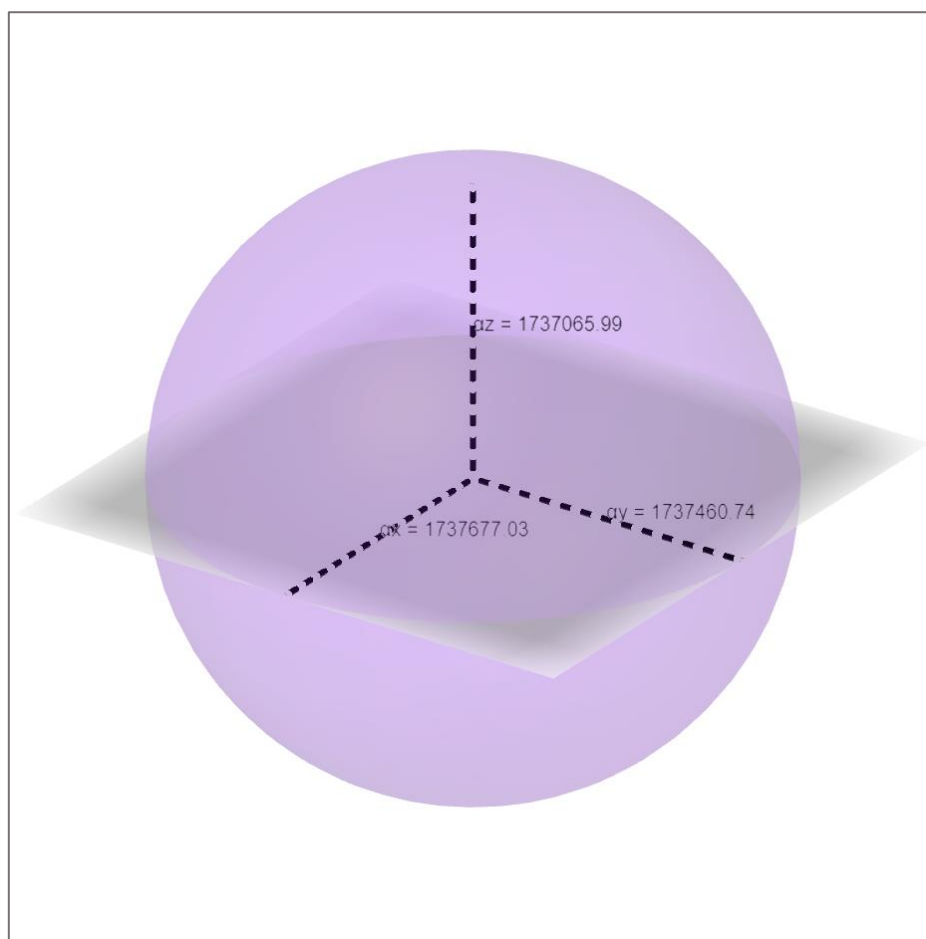
5.5 Επιλογή Τελικού Ελλειψοειδούς Προσαρμογής στην Επιφάνεια της Σελήνης

Η επιλογή του τελικού ελλειψοειδούς προσαρμογής μπορεί εύκολα να πραγματοποιηθεί με κριτήριο την a posteriori ακρίβεια σ_0 της προσαρμογής. Στην προκειμένη περίπτωση, η προσαρμογή με την καλύτερη ακρίβεια (τόσο συνολική, όσο και βάσει των μεμονωμένων τυπικών σφαλμάτων των παραμέτρων) είναι εκείνη που πραγματοποιήθηκε με το μοντέλο σφαιρικών αρμονικών GLGM-2. Κατά συνέπεια, μπορεί να προταθεί για την περιγραφή του ελλειψοειδούς προσαρμογής στην επιφάνεια της Σελήνης. Πρέπει, όμως, να ληφθεί υπόψιν για μελλοντικές έρευνες πως, δύναται η χρήση ευρύτερου σετ δεδομένων βάσει των πιο πρόσφατων και υψηλότερου βαθμού μοντέλων, αυτά κατά πάσα πιθανότητα θα έδιναν ακόμη πιο ακριβή αποτελέσματα από το GLGM-2.

Ένα επιπλέον ενδεχόμενο θα ήταν να ληφθούν ως τιμές των αξόνων του ζητούμενου ελλειψοειδούς προσαρμογής οι καλύτερες τιμές των παραμέτρων που προέκυψαν και από τις δεκαέξι (16) προσαρμογές. Σε αυτήν τη μέθοδο, όμως, παρουσιάζονται τα εξής προβλήματα: κατά τον

υπολογισμό της καλύτερης τιμής κάθε άξονα υπεισερχονται σε αυτήν τα σφάλματα και των δεκαέξι (16) προσαρμογών, ελαττώνοντας σημαντικά την ακρίβεια του αποτελέσματος. Επιπλέον, δυσχεραίνει σημαντικά τη μελλοντική χρήση της μεθόδου προσαρμογής μαθηματικών επιφανειών σε ουράνια σώματα που περιγράφεται σε αυτήν την διπλωματική εργασία, καθώς θα προϋπέθετε τη χρήση πολύ μεγάλου όγκου δεδομένων από πολλαπλές πηγές, αυξάνοντας κιόλας σημαντικά τον χρόνο που πρέπει να αφιερώσει ένας χρήστης κατά την εφαρμογή της.

Συμπεραίνεται, λοιπόν, πως το τριαξονικό ελλειψοειδές που προσομοιάζει βέλτιστα την επιφάνεια της Σελήνης είναι εκείνο με μηδενικές μεταθέσεις και στροφές κατά τους τρεις άξονές του, με μήκη αξόνων $a_x = 1737677.033 \pm 9.318$ m, $a_y = 1737460.737 \pm 9.643$ m και $a_z = 1737065.986 \pm 5.322$ m.



Εικόνα 5.2: Τριαξονικό Ελλειψοειδές Προσαρμογής της Σελήνης

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

6.1 Συμπεράσματα

Αντικείμενο της παρούσας διπλωματικής εργασίας αποτελεί ο προσδιορισμός των παραμέτρων του ελλειψοειδούς προσαρμογής στην επιφάνεια της Σελήνης. Επιπλέον, η εργασία αποσκοπεί στην περιγραφή μίας εύχρηστης και ακριβής μεθόδου προσαρμογής μαθηματικών επιφανειών, η οποία μπορεί να εφαρμοστεί στην επιφάνεια κάθε άλλου ουράνιου σώματος ή τριδιάστατου νέφους σημείων.

Τα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν κατά την εκπόνηση της εργασίας αφορούσαν στο σεληνιακό πεδίο βαρύτητας. Αναλυτικότερα, συλλέχθηκαν δεκαέξι (16) μοντέλα σφαιρικών αρμονικών του σεληνιακού βαρυτικού πεδίου, διαφορετικών χρονολογιών, από την βιβλιοθήκη του ICGEM, τα οποία αναφέρονται στο σχεδόν – γεωειδές της Σελήνης. Τα μοντέλα αυτά μελετήθηκαν ως προς την ακρίβεια και τη χωρική ανάλυσή τους παρουσιάζονται συνοπτικά στον επόμενο πίνακα.

Πίνακας 6.1: Συνοπτική παρουσίαση μοντέλων σφαιρικών αρμονικών του σεληνιακού πεδίου βαρύτητας

ΜΟΝΤΕΛΟ	ΧΡΟΝΟΛΟΓΙΑ	ΒΑΘΜΟΣ	ΧΩΡΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ (km)	ΑΚΡΙΒΕΙΑ (°)
GLGM-1	1994	70	77.97	2.57
GLGM-2	1995	70	77.97	2.57
JGL075D1	1998	75	72.78	2.40
JGL075G1	1998	75	72.78	2.40
JGL100J1	1999	100	54.58	1.80
JGL100K1	1999	100	54.58	1.80
JGL150Q1	2000	150	36.39	1.20
JGL165P1	2000	165	33.08	1.09
GL0660B	2013	660	8.27	0.27
GRGM660PRIM	2013	660	8.27	0.27
AIUB-GRL200A	2015	200	27.29	0.90
AIUB-GRL200B	2015	200	27.29	0.90
GrazLGM300c	2016	300	18.19	0.60
GrazLGM420a	2017	420	13.00	0.43
GrazLGM420b	2018	420	13.00	0.43
GrazLGM420b+	2018	420	13.00	0.43

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας μία σφαίρα αναφοράς ακτίνας ίση με τη μέση ακτίνα της Σελήνης (1737400 m), κατασκευάστηκε από κάθε μοντέλο του προηγούμενου πίνακα ένας κάρναβος σφαιρικών συντεταγμένων (φ, λ, h), όπου h : η υψομετρική ανωμαλία. Ακολούθησε η μετατροπή των σφαιρικών συντεταγμένων των σημείων των καννάβων σε καρτεσιανές (X, Y, Z), έτσι ώστε να είναι δυνατό να χρησιμοποιηθούν ως δεδομένα μετρήσεων κατά την προσαρμογή των μαθηματικών μοντέλων ελλειψοειδούς στην επιφάνεια της Σελήνης και με στόχο την πλήρη ανεξαρτητοποίησή τους από κάθε επιφάνεια αναφοράς.

Έχει διαπιστωθεί πως η Σελήνη, καθώς και άλλοι φυσικοί δορυφόροι παρουσιάζουν έντονη τριαξονικότητα (Burša M., 1989). Για το λόγο αυτό, επιλέχθηκε η προσαρμογή ενός τριαξονικού ελλειψοειδούς στην επιφάνειά της. Παρόλα αυτά, θεωρήθηκε σκόπιμο η παρούσα μελέτη να μην περιοριστεί μόνο στη γενική περίπτωση του τριαξονικού ελλειψοειδούς, αλλά να εκτελεστούν προσαρμογές και όλων των ειδικών και εκφυλισμένων περιπτώσεών του. Αναλυτικότερα, το τριαξονικό ελλειψοειδές στη γενική του μορφή περιγράφεται από εννέα (9) παραμέτρους: τρεις ημιάξονες, τρεις μεταθέσεις και τρεις στροφές. Οι ειδικές περιπτώσεις του προκύπτουν αφαιρώντας κάποιες από τις προαναφερόμενες παραμέτρους (είτε τις στροφές, είτε τις μεταθέσεις, είτε και τις έξι). Επιπλέον, το τριαξονικό ελλειψοειδές εκφυλίζεται σε ελλειψοειδές εκ περιστροφής όταν δύο από τους άξονές του είναι μεταξύ τους ίσοι και μεγαλύτεροι από τον άξονα περιστροφής του, ενώ ταυτόχρονα η γωνία στροφής του άξονα περιστροφής είναι ίση με μηδέν, και σε σφαίρα όταν και οι τρεις άξονές του είναι ίσοι. Επεκτείνοντας, λοιπόν, τη μελέτη αυτή σε όλες τις μορφές του ελλειψοειδούς περιστροφής καθίσταται δυνατή η εύρεση του απλούστερου μαθηματικού μοντέλου που προσομοιάζει με τον καλύτερο τρόπο την επιφάνειά της Σελήνης.

Η προσαρμογή των μαθηματικών μοντέλων του τριαξονικού ελλειψοειδούς επρόκειτο να πραγματοποιηθεί με συνόρθωση με τη Μέθοδο Ελαχίστων Τετραγώνων, καθώς τα διαθέσιμα δεδομένα μετρήσεων ήταν κατά πολύ περισσότερα από τις άγνωστες καθοριστικές παραμέτρους του. Τα μοντέλα αυτά παρουσιάζουν έντονη μη – γραμμικότητα, ενώ περιέχουν παραπάνω από μία μετρήσεις (και τις τρεις τιμές των καρτεσιανών συντεταγμένων X, Y, Z). Για το λόγο αυτό, επιλέχθηκε να συνορθωθούν με χρήση της γενικής μεθόδου. Η πρωταρχική συνόρθωσή τους στην πολυωνυμική και, άρα, γραμμική τους μορφή με χρήση της μεθόδου των εμμέσων παρατηρήσεων, κατέστησε δυνατή την απόδοση προσωρινών τιμών στις άγνωστες παραμέτρους.

Αξίζει να σημειωθεί πως όλες οι μετρήσεις κατά τη συνόρθωση των μοντέλων θεωρήθηκαν ισοβαρείς.

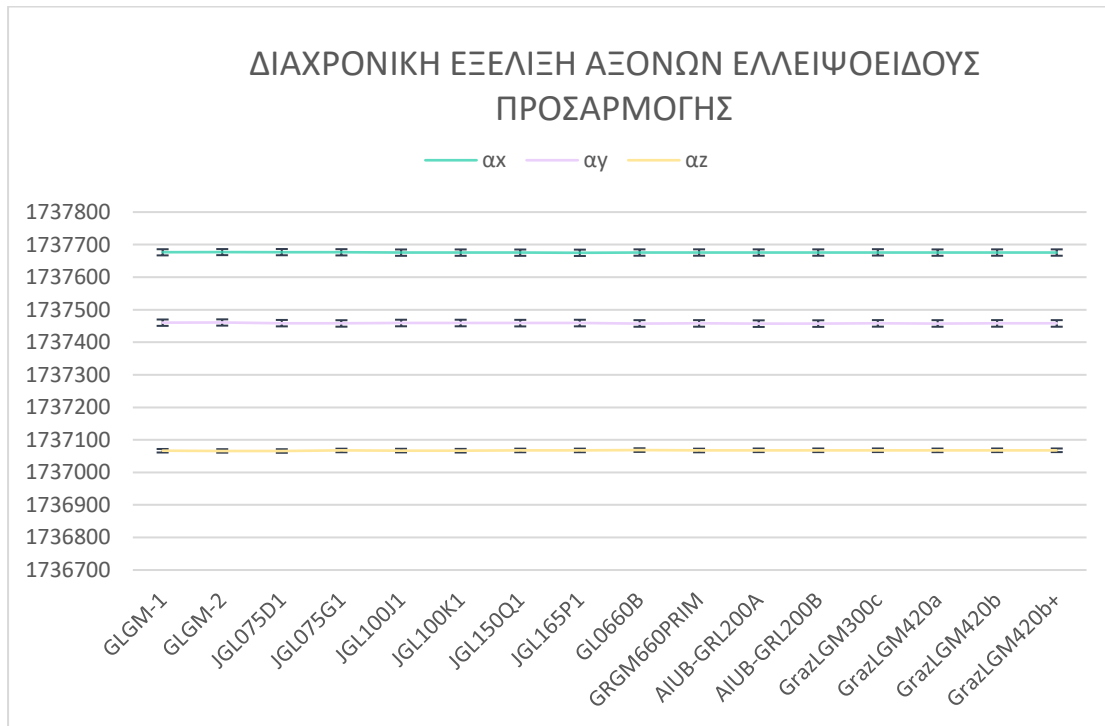
Όλα τα πειράματα προσαρμογών των μαθηματικών μοντέλων ελλειψοειδούς πραγματοποιήθηκαν στο λογισμικό MATLAB. Αναλυτικότερα, εκτελέστηκαν συνολικά 28 πειράματα έως ότου να επιλεγούν οι βέλτιστες τιμές των παραμέτρων του ελλειψοειδούς προσαρμογής στην επιφάνεια της Σελήνης.

Αρχικά, προσαρμόστηκε το τριαξονικό ελλειψοειδές στη γενική του μορφή στο πρώτο, κατά χρονολογική σειρά, μοντέλο σφαιρικών αρμονικών GLGM-1 σε κανονικό κάνναβο δύο διαφορετικών μεγεθών: στη μέγιστη ανάλυσή του $2^{\circ}.57 \times 2^{\circ}.57$ και $10^{\circ} \times 10^{\circ}$. Από τα δύο αυτά πειράματα, εξήχθη το συμπέρασμα πως το μικρότερο μέγεθος καννάβου δεν βελτιώνει αισθητά την ποιότητα της προσαρμογής και, καθώς για την προσαρμογή στη μέγιστη ανάλυση του μοντέλου απαιτήθηκε επεξεργασία μίας ολόκληρης ημέρας για την ολοκλήρωσή της, αποφασίστηκε να χρησιμοποιηθούν όλα τα βαρυτικά μοντέλα σε ανάλυση $10^{\circ} \times 10^{\circ}$. Επιπλέον, ήταν πλέον δυνατή η επιλογή προσωρινών τιμών από τα αποτελέσματα των δύο πειραμάτων και χωρίς τη χρήση των γραμμικών μαθηματικών μοντέλων. Συγκεκριμένα, οι τρεις γωνίες στροφής και οι τρεις μεταθέσεις ορίστηκαν ίσες με 0, ενώ οι τρεις άξονες $(\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z) = (1737600, 1737400, 1737000)$ m.

Στη συνέχεια, πραγματοποιήθηκε η προσαρμογή όλων των μαθηματικών μοντέλων στο μοντέλο βαρύτητας GLGM-1, ανάλυσης $10^{\circ} \times 10^{\circ}$. Τα πειράματα αυτά αποσκοπούσαν στην επιλογή του μαθηματικού μοντέλου ελλειψοειδούς που περιγράφει με καλύτερο τρόπο την επιφάνεια της Σελήνης. Βάσει της συνολικής a posteriori ποιότητας κάθε μίας προσαρμογής, καθώς και της στατιστικής σημαντικότητας των τυπικών σφαλμάτων των ζητούμενων παραμέτρων, ως καλύτερη προσαρμογή κρίθηκε εκείνη του μοντέλου τριαξονικού ελλειψοειδούς με μηδενικές μεταθέσεις και στροφές.

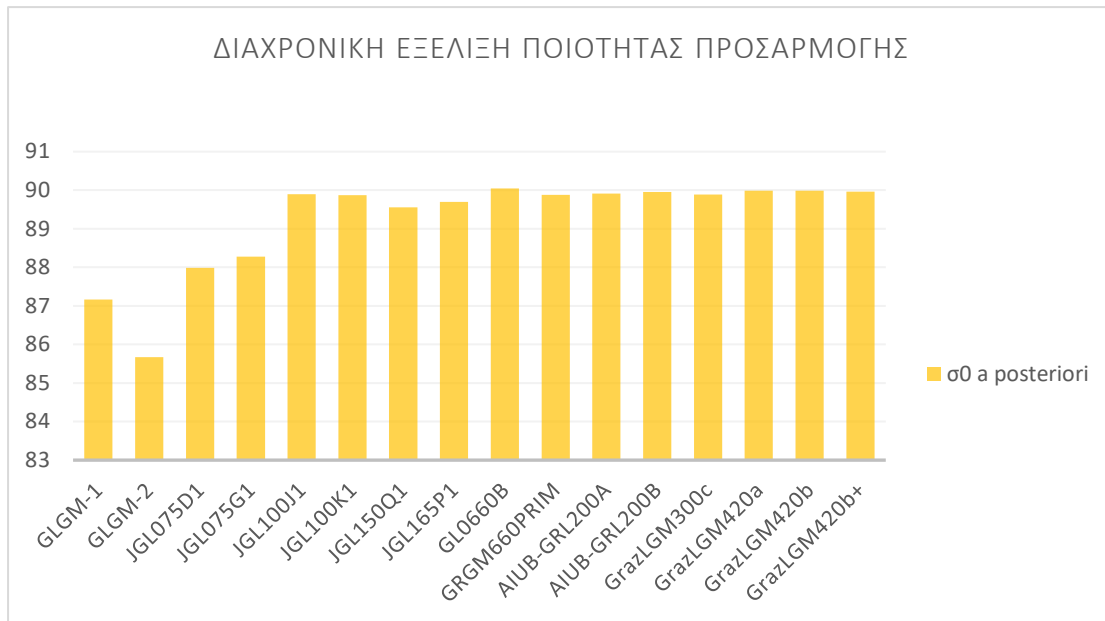
Το μοντέλο ελλειψοειδούς μηδενικών στροφών και μεταθέσεων προσαρμόστηκε, έπειτα, σε όλα τα μοντέλα σφαιρικών αρμονικών ανάλυσης $10^{\circ} \times 10^{\circ}$. Στο σημείο αυτό, αξίζει να αναφερθεί πως οι τιμές των αξόνων του ελλειψοειδούς, όπως προέκυψαν από τις προαναφερόμενες προσαρμογές στα 16 μοντέλα σφαιρικών αρμονικών διαφορετικών χρονολογιών, τα τυπικά τους σφάλματα και η a posteriori ακρίβεια των προσαρμογών, παρουσίαζαν σημαντική διαχρονική σταθερότητα, αποδεικνύοντας την καταλληλότητα του μαθηματικού μοντέλου.

Επιπλέον, αποδεικνύεται η έντονη τριαξονικότητα του σώματος της Σελήνης, καθώς οι τρεις άξονες παρουσιάζουν σημαντικές διαφορές στο μέγεθός τους και τα τυπικά σφάλματα καθενός από αυτούς είναι σημαντικά μικρότερα των μεταξύ τους διαφορών. Στο σχήμα 6.1 που ακολουθεί παρουσιάζονται συγκριτικά τα μεγέθη των τριών αξόνων του ελλειψοειδούς με τα τυπικά τους σφάλματα, όπως αυτά προέκυψαν από την προσαρμογή σε κάθε μοντέλο σφαιρικών αρμονικών.



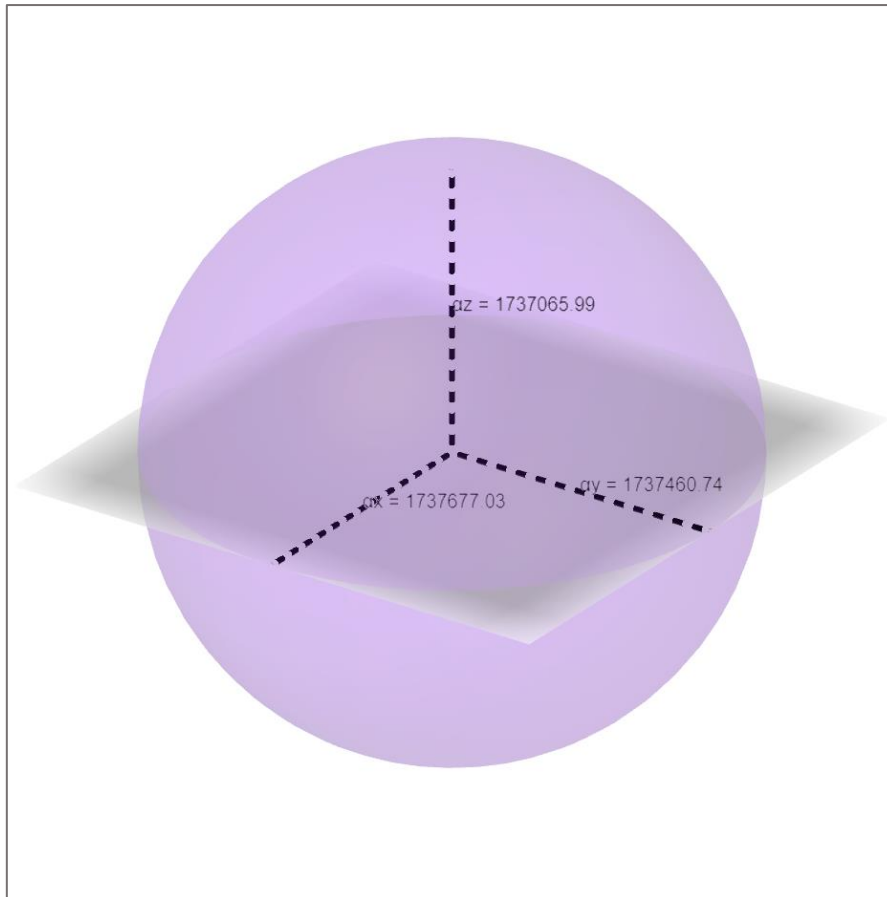
Σχήμα 6.1: Διαχρονική σύγκριση των τριών αξόνων του ελλειψοειδούς προσαρμογής στην επιφάνεια της Σελήνης

Η επιλογή του τελικού ελλειψοειδούς προσαρμογής στην επιφάνεια της Σελήνης πραγματοποιήθηκε με βάση την a posteriori ακρίβεια σ_0 της προσαρμογής. Τα σφάλματα σ_0 των προαναφερόμενων 16 προσαρμογών του τριαξονικού ελλειψοειδούς μηδενικών στροφών και μεταθέσεων φαίνονται στο επόμενο διάγραμμα.



Σχήμα 6.2: Διαχρονική εξέλιξη ποιότητας προσαρμογής

Γίνεται αντιληπτό πως η προσαρμογή με την καλύτερη ποιότητα είναι εκείνη που πραγματοποιήθηκε με τα δεδομένα του μοντέλου σφαιρικών αρμονικών GLGM-2, η οποία έδωσε το τελικό αποτέλεσμα των παραμέτρων του ελλειψοειδούς προσαρμογής στην επιφάνεια της Σελήνης: ένα τριαξονικό ελλειψοειδές μηδενικών μεταθέσεων και στροφών και με μήκη αξόνων $\alpha_x = 1737677.033 \pm 9.318$ m, $\alpha_y = 1737460.737 \pm 9.643$ m και $\alpha_z = 1737065.986 \pm 5.322$ m, όπως φαίνεται και στην εικόνα 6.1. Πρέπει, όμως, να σημειωθεί πως, δύναται η χρήση ευρύτερου σετ δεδομένων βάσει των πιο πρόσφατων και υψηλότερου βαθμού μοντέλων, αυτά κατά πάσα πιθανότητα θα έδιναν ακόμη πιο ακριβή αποτελέσματα από το GLGM-2.



Εικόνα 6.1: Ελλειψοειδές Προσαρμογής στην Επιφάνεια της Σελήνης

Το κυριότερο πρόβλημα που απασχόλησε κατά τη διάρκεια των προαναφερόμενων διαδικασιών ήταν η ανάγκη για αύξηση της ανάλυσης των μοντέλων του σεληνιακού βαρυτικού πεδίου. Όπως σημειώθηκε και προηγουμένως, διαπιστώθηκε πως η εκτέλεση της προσαρμογής ενός ελλειψοειδούς στο μοντέλο GLGM-1 στη μέγιστη ανάλυσή του απαιτούσε μία ολόκληρη ημέρα για την ολοκλήρωσή της. Επιπλέον, η συνόρθωση με χρήση ενός μοντέλου υψηλότερης ακρίβειας στη μέγιστη ανάλυσή του, όχι απλώς απαιτούσε περισσότερο χρόνο εκτέλεσης, αλλά ξεπερνούσε τις δυνατότητες του προγραμματιστικού περιβάλλοντος της MATLAB και του ηλεκτρονικού υπολογιστή που χρησιμοποιήθηκαν, απαιτώντας μεγαλύτερη μνήμη RAM από τη διαθέσιμη. Χρησιμοποιώντας, όμως, τα μοντέλα σε μικρότερη ανάλυση από εκείνη που μπορούν να προσφέρουν δεν δίνει τη σαφέστερη εικόνα της πραγματικότητας. Αναλυτικότερα, αν οι προσαρμογές είχαν πραγματοποιηθεί με τα μοντέλα σφαιρικών αρμονικών στη μέγιστη ανάλυσή τους και σε ρεαλιστικότερο κάρναβο (δηλ. με κριτήριο την απόσταση των σημείων), τα αποτελέσματα θα ήταν πιο αξιόπιστα, γεγονός που επιβεβαιώνεται από τη σταθερότητα που

παρουσίασε η συνολική ποιότητα όλων των προσαρμογών του τριαξονικού ελλειψοειδούς μηδενικών μεταθέσεων και στροφών, παρά την εκτέλεσή τους με διαφορετικά μοντέλα του πεδίου βαρύτητας της Σελήνης. Σε μεταγενέστερες έρευνες επί του θέματος και σε περίπτωση που συναντηθούν οι ίδιοι περιορισμοί χρόνου και μνήμης, τα παραπάνω προβλήματα θα μπορούσαν να ξεπεραστούν εκτελώντας διαδοχικές συνορθώσεις και προσθέτοντας επιπλέον δεδομένα σε κάθε μία από αυτές και με τη χρήση των κατάλληλων βαρών στα δεδομένα.

6.2 Προτάσεις

Ολοκληρώνοντας την εργασία, αξίζει να προταθούν πιθανές μελλοντικές εφαρμογές της μεθόδου και της έρευνας που περιεγράφηκε στη συγκεκριμένη εργασία. Προτείνεται η ξεχωριστή προσαρμογή ενός ελλειψοειδούς αναφοράς σε διαφορετικά μέρη της Σελήνης, όπως είναι η κοντινή και η μακρινή πλευρά της, και η σύγκριση των παραμέτρων τους, γνωρίζοντας πως η Σελήνη παρουσιάζει έντονες διαφορές ανά τα ημισφαίριά της.

Φυσικά, η εκτέλεση των προαναφερόμενων πειραμάτων με χρήση των μοντέλων βαρύτητας στην πραγματική τους ανάλυση, όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, θα έδινε μία καλύτερη εικόνα του εξεταζόμενου σώματος.

Ακόμη, η έρευνα αυτή θα μπορούσε να επαναληφθεί σε άλλες επιφάνειες της Σελήνης, αντί του σχεδόν – γεωειδούς, όπως η φυσική επιφάνειά της, με χρήση δεδομένων σχετικά με την τοπογραφία της και τα αποτελέσματα να συγκριθούν με άλλες έρευνες.

Τέλος, η συγκεκριμένη μέθοδος προσαρμογής μαθηματικών μοντέλων αναφοράς μπορεί να εφαρμοστεί σε κάθε φυσικό δορυφόρο, πλανήτη ή άλλο ουράνιο σώμα και σε οποιοδήποτε τριδιάστατο νέφος σημείων, ενώ η ίδια η έρευνα συνδέεται με μελλοντικές εξερευνήσεις της Σελήνης.

BIBΛIOΓΡΑΦΙΑ

- Barthelmes, Franz. *Definition of Functionals of the Geopotential and their Calculation from Spherical Harmonic Models, Theory and formulas used by the calculation service of the International Centre for Global Earth Models (ICGEM)*. Scientific Technical Report. Potsdam, Germany: Helmholtz Centre Potsdam, GFZ GERMAN RESEARCH CENTRE, 2013.
- Beutler, G., Jäggi, A., Mervart, L. et al. «The celestial mechanics approach: application to data of the GRACE mission.» *Journal of Geodesy* 84 (2010): pp. 661-681.
- . «The celestial mechanics approach: theoretical foundations.» *Journal of Geodesy* 84 (2010): pp. 605-624.
- Binder, Alan & Feldman, William & Hubbard, G. & Konopliv, Alex & Lin, Robert & Acuña, Melina & Hood, Lon. «Lunar Prospector searches for polar ice, a metallic core, gas release events, and the Moon's origin.» *Eos, Transactions American Geophysical Union* 79 (1998): pp. 97-97.
- Burša, Milan & Kopal, Zdeněk & Vanýsek, Vladimír. «Triaxiality of Halley's Comet.» *Earth Moon and Planets* 57 (1992): pp. 65-73.
- Burša, Milan. «Estimating mean densities of Saturnian tri-axial satellites.» *Bulletin of the Astronomical Institutes of Czechoslovakia* (1990).
- . «Tidal origin of tri-axiality of synchronously orbiting satellites.» *Bulletin of the Astronomical Institutes of Czechoslovakia* 40 (1989): pp. 105-108.
- . «Triaxial level ellipsoids representing synchronously orbiting satellites.» *Studia Geophysica et Geodaetica* 38 (1994): pp. 7 -22.
- Carranza, Eric & Konopliv, Alex & Ryne, Mark. «Lunar Prospector Orbit Determination Uncertainties Using the High Resolution Lunar Gravity Models.» *Advances in the Astronautical Sciences* 103 (1999).
- Daniel Arnold, Stefano Bertone, Adrian Jäggi, Gerhard Beutler, Leos Mervart. «GRAIL gravity field determination using the Celestial Mechanics Approach.» *Icarus* 261 (2015): pp. 182-192.

- G. Panou, R. Korakitis, G. Pantazis. «Fitting a triaxial ellipsoid to a geoid model.» *Journal of Geodetic Science* 10.1 (2020): pp. 66-82.
- H Iz, C Shum, Xiaoli Ding, C Dai. «Orientation of the geometrically Best fitting triaxial lunar ellipsoid with respect to the mean earth/polar axis reference frame.» *Journal of geodetic science* 1.1 (2011): pp. 52-58.
- Hofmann, Bernhard και Wellenhof Helmut Moritz. *Φυσική Γεωδαισία*. 2η Έκδοση. ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΤΖΙΟΛΑ, 2017.
- Iz, H Bâki. «New parameters of geometrically best fitting lunar figures.» *Journal of Applied Geodesy* 3.3 (2009): pp. 155-162.
- Konopliv, A. S., et al. «The JPL lunar gravity field to spherical harmonic degree 660 from the GRAIL Primary Mission.» *J. Geophys. Res. Planets* 118.7 (2013): pp. 1415– 1434.
- Krauss, S., Wirnsberger, H., Klinger, B., Mayer-Guerr, T., Baur, O. «Latest developments in lunar gravity field recovery within the project GRAZIL.» *European Geoscience Union*. Vienna, 2016.
- Lemoine, F. G. R., Smith, D. E., Zuber, M. T., Neumann, G. A., and Rowlands, D. D. «A 70th degree lunar gravity model (GLGM-2) from Clementine and other tracking data.» *Journal of Geophysical Research* 102.E7 (1997): pp. 16339– 16359.
- Lemoine, F. G., et al. «High–degree gravity models from GRAIL primary mission data.» *J. Geophys. Res. Planets* 118.8 (2013): pp. 1676– 1698.
- Lemoine, Frank G et al. «GRGM900C: A degree 900 lunar gravity model from GRAIL primary and extended mission data.» *Geophysical research letters* 41.10 (2014): pp. 3382-3389.
- Milan Burša, Vladimir Vanýsek. «Triaxiality of satellites and small bodies in the Solar System.» *Earth, Moon and Planets* 75 (1996): pp. 95-126.
- Panou, G. και A.-M. Agatza-Balodimou. «Direct and Indirect Estimation of the Variance-Covariance Matrix of the Parameters of a Fitted Ellipse and a Triaxial Ellipsoid.» *Journal of Surveying Engineering* 148.1 (2021): pp. 04020026-1 - 04020026-9.

- Wirnsberger H., Klinger B., Krauss S., and Mayer-Gürr, T. «First independent lunar gravity field solution in the framework of project GRAZIL.» *European Geoscience Union*. Vienna, 2017.
- Wirnsberger H., Krauss S., and Mayer-Gürr, T. «First independent Graz Lunar Gravity Field Model derived from GRAIL.» *Icarus* 244 (2018).
- Αγατζά-Μπαλοδήμου, Αμαλία-Μαρία και Γεώργιος Πάνου. *ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΛΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ*. ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΤΖΙΟΛΑ, 2018.
- Γ. Βέης, Χ. Μπιλλήρης, Κ. Παπαζήση. *Κεφάλαια Ανώτερης Γεωδαισίας*. Αθήνα: ΕΜΠ, ΣΑΤΜ, Τομέας Τοπογραφίας, Εργαστήριο Ανώτερης Γεωδαισίας, 2011.
- Δ. Σταθάς, Χ. Μπιλλήρης, Μ. Τσακίρη, Χ. Μητσακάκη, Μ.Α. Αγατζά - Μπαλοδήμου. *Εισαγωγή στη Γεωδαισία*. Αθήνα: ΕΜΠ, ΣΑΤΜ, Τομέας Τοπογραφίας, Εργαστήριο Ανώτερης Γεωδαισίας, 2008.
- Ε. Λάμπρου, Γ. Πανταζής. *Εφαρμοσμένη Γεωδαισία*. Εκδόσεις Ζήτη, 2010.

ΙΣΤΟΓΡΑΦΙΑ

1. http://geodesy.iwf.oeaw.ac.at/p_grazil.html (last access, 06/2021)
2. <http://icgem.gfz-potsdam.de/home> (last access, 06/2021)
3. https://en.wikipedia.org/wiki/Far_side_of_the_Moon (last access, 06/2021)
4. <https://www.geogebra.org/> (last access, 06/2021)
5. <https://en.wikipedia.org/wiki/Moon> (last access, 06/2021)
6. https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_missions_to_the_Moon (last access, 06/2021)
7. <https://www.protothema.gr/technology/article/1126282/epiheirisi-moonlight-doruforiki-obrela-tha-kaluptei-tin-anthropini-apoikia-sto-feggari/> (last access, 06/2021)
8. <https://en.wikipedia.org/wiki/Regolith> (last access, 06/2021)
9. <https://www.astronomia.gr/wiki/> (last access, 06/2021)
10. [https://en.wikipedia.org/wiki/Tycho_\(lunar_crater\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Tycho_(lunar_crater)) (last access, 06/2021)
11. <https://ssd.jpl.nasa.gov/?satellites> (last access, 06/2021)

12. https://el.wikipedia.org/wiki/Φυσικός_δορυφόρος (last access, 06/2021)
13. https://en.wikipedia.org/wiki/Planetary-mass_moon (last access, 06/2021)
14. <https://en.wikipedia.org/wiki/Anorthosite> (last access, 06/2021)
15. https://en.wikipedia.org/wiki/Tidal_locking (last access, 06/2021)
16. https://en.wikipedia.org/wiki/Topography_of_the_Moon (last access, 06/2021)
17. <https://project6astro.wordpress.com/moon/> (last access, 06/2021)
18. <https://solarsystem.nasa.gov/moons/earths-moon/in-depth/> (last access, 06/2021)
19. <https://www.davidrumsey.com/> (last access, 06/2021)
20. https://en.wikipedia.org/wiki/Moon#Observation_and_exploration (last access, 06/2021)