Συνεισφορές στην Ευκλείδεια Θεωρία Ramsey

Μιλτιάδης Καραμανλής

Ιούνιος 2021

Τριμελής Επιτροπή:

Δοδός Παντελής, Αναπληρωτής Καθηγητής ΕΚΠΑ
Κανελλόπουλος Βασίλειος, Αναπληρωτής Καθηγητής ΕΜΠ (Επιβλέπον)
Ψαρράκος Παναγιώτης, Καθηγητής ΕΜΠ

Συμπληρώνουν την επταμελή επιτροπή:

Αρβανιτάκης Αλέξανδρος, Επίκουρος Καθηγητής ΕΜΠ
Γάσπαρης Ιωάννης, Καθηγητής ΕΜΠ
Γρηγοριάδης Βασίλειος, Επίκουρος Καθηγητής ΕΜΠ
Τύρος Κωνσταντίνος, Αναπληρωτής Καθηγητής ΕΚΠΑ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Τομέας Μαθηματικών

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Συνεισφορές στην Ευκλείδεια Θεωρία Ramsey

Μιλτιάδης Καραμανλής

Πρόλογος

Η παρούσα διδακτορική διατριβή, γράφτηκε ως μέρος των απαιτήσεων του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου και της σχολής ΕΜΦΕ για την απόκτηση διδακτορικού διπλώματος. Το περιεχόμενο της, αφορά την έρευνα και τα αποτελέσματα που προέκυψαν τα τέσσερα τελευταία χρόνια της φοίτησης μου ως υποψήφιος διδάκτορας. Το ενδιαφέρον μου για την Ευκλείδεια θεωρία Ramsey προέκυψε κατά την διάρκεια της συμμετοχής μου σε ένα εξαμηνιαίο σεμινάριο για διδακτορικούς φοιτητές, στην Πράγα, με θέματα σχετικά με την θεωρία Ramsey γενικότερα.

Το παρόν κείμενο έχει διαμορφωθεί με τέτοιο τρόπο, ώστε να είναι εύκολο για τον αναγνώστη να επιλέξει τον χρόνο που θα αφιερώσει διαβάζοντας το, ανάλογα με τον βαθμό στον οποίο του έχει προκαλέσει το ενδιαφέρον. Συγκεκριμένα, κάποιος μπορεί να διαβάσει πρώτα την περίληψη για να δει αν είναι πιθανό να βρει κάτι που τον ενδιαφέρει. Στην Εισαγωγή διαπερνάμε όλο το φάσμα του κυρίως θέματος και σχεδόν όλα τα προηγούμενα αποτελέσματα και τα νέα που προέκυψαν από την προσωπική έρευνα του γράφοντος, με την συνεργασία και συμπαράσταση του επιβλέποντος. Επομένως, ολοκληρώνοντας την Εισαγωγή ο αναγνώστης θα έχει αποκτήσει μια αρκετά πλήρη εικόνα της στάθμης της έρευνας όσον αφορά τα Ramsey σύνολα στην Ευκλείδεια θεωρία Ramsey. Στην περίπτωση που κάποιος ενδιαφέρεται να εντρυφήσει στις τεχνικές απόδειξης που χρησιμοποιήσαμε και να κατανοήσει σε περισσότερο βάθος τα σχετικά πορίσματα, μπορεί να προχωρήσει στην ανάγνωση των κεφαλαίων που τον ενδιαφέρουν περισσότερο.

Καλή ανάγνωση!

Μιλτιάδης Καραμανλής
Αθήνα
Ιούνιος 2021

Περίληψη

Η παρούσα διδακτορική διατριβή έχει σαν αντικείμενο μελέτης την Ευκλείδεια θεωρία Ramsey και πιο συγκεκριμένα, τα Ramsey υποσύνολα των ευκλείδειων χώρων. Ένα πεπερασμένο σύνολο X, το οποίο είναι υποσύνολο κάποιου ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^m$ για κάποιο $m \in \mathbb{N}$, λέγεται Ramsey, αν για κάθε αριθμό χρωμάτων $r \in \mathbb{N}$, υπάρχει μια αρκετά μεγάλη διάσταση $N \in \mathbb{N}$, η οποία είναι τέτοια, ώστε για κάθε διαμέριση του ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^N$ διάστασης N σε r σύνολα (την οποία αποκαλούμε χρωματισμό), υπάρχει ένα ισομετρικό (ως προς την ευκλείδεια νόρμα) αντίγραφο του X, το οποίο είναι μονοχρωματικό (περιέχεται σε ένα στοιχείο της διαμέρισης).

Στην Εισαγωγή, αφού κάνουμε μια αναφορά στο θεμελιώδες θεώρημα του Frank Plumpton Ramsey, στην συνέχεια εξετάζουμε κάποια αποτελέσματα από την εργασία του 1973 "Euclidean Ramsey Theorems I" όπου ορίστηκαν για πρώτη φορά τα Ramsey σύνολα και από την οποία ουσιαστικά γεννήθηκε η Ευκλείδεια θεωρία Ramsey. Συγκεκριμένα, βλέπουμε τα πρώτα παραδείγματα Ramsey συνόλων, όπως για παράδειγμα το σύνολο των κορυφών ενός κανονικού simplex και τα πρώτα αντιπαραδείγματα, όπως κάθε σύνολο τριών συνευθειακών σημείων. Στην συνέχεια, αναφέρουμε τα θεμελιώδη δομικά χαρακτηριστικά των Ramsey συνόλων, δηλαδή ότι το καρτεσιανό γινόμενο Ramsey συνόλων είναι Ramsey και ότι κάθε Ramsey σύνολο είναι υποσύνολο της επιφάνειας μιας σφαίρας.

Ύστερα, αναφέρουμε (σχεδόν) όλα τα αποτελέσματα από τα οποία προέκυψαν νέες κλάσεις Ramsey συνόλων, σκιαγραφώντας κάποιες από τις αποδείξεις. Τα πιο σημαντικά αποτελέσματα όσον αφορά το πρόβλημα του χαρακτηρισμού των Ramsey συνόλων είναι τα εξής. Το πρώτο είναι αυτό των Frankl και Rödl οι οποίοι το 1990 κατάφεραν να δείξουν ότι κάθε simplex, δηλαδή κάθε πεπερασμένο αφινικά ανεξάρτητο σύνολο, είναι Ramsey. Το δεύτερο και σημαντικότερο, το οφείλουμε στον Igor Kříž, ο οποίος το 1991 απέδειξε ότι κάθε πεπερασμένο transitive ευκλείδειο σύνολο, για το οποίο υπάρχει μία επιλύσιμη ομάδα συμμετριών, με το πολύ δύο τροχιές, είναι Ramsey. Σαν άμεσο πόρισμα τα κανονικά πολύγωνα και τα σύνολα κορυφών όλων των πλατωνικών στερεών είναι Ramsey.

Στην συνέχεια, περνάμε στην περιγραφή των αποτελεσμάτων που προέκυψαν

κατά την διάρκεια αυτής της διατριβής. Οδηγούμενοι από την διαφαινόμενη εφαρμοστικότητα του θεωρήματος του Křížž, αναρωτιόμαστε αν το θεώρημα των Frankl και Rödl για τα simplices μπορεί να προκύψει από το αποτέλεσμα του Křížž. Απαντάμε καταφατικά, δείχνοντας ότι κάθε simplex μπορεί να εμφυτευτεί ισομετρικά σε έναν κανονικό πολυγωνικό τόρο, που δεν είναι τίποτα άλλο, από το καρτεσιανό γινόμενο ενός πεπερασμένου αριθμού κανονικών πολυγώνων.

Υπάρχουν δύο διαδεδομένες εικασίες όσον αφορά τα Ramsey σύνολα. Η πρώτη, του Graham, υποστηρίζει ότι όλα τα σφαιρικά σύνολα είναι Ramsey. Η δεύτερη και πιο πρόσφατη, από τους Leader, Russell και Walters λέει ότι τα Ramsey σύνολα είναι ακριβώς αυτά που εμφυτεύονται σε κάποιο transitive σύνολο. Οι τελευταίοι, σε μια σειρά από ισοδύναμες εικασίες, εξέφρασαν μια ικανή συνθήκη ώστε όλα τα transitive σύνολα να είναι Ramsey, μετασχηματίζοντας το πρόβλημα σε καθαρά συνδυαστικό. Οι εικασίες αυτές, προσομοιάζουν το γνωστό αποτέλεσμα των Hales και Jewett για μεταβλητές λέξεις και μια από αυτές αφορά μια ιδιότητα που πρέπει να έχει κάθε πεπερασμένη ομάδα. Αφού δώσουμε κατάλληλους ορισμούς, διατυπώνουμε κάποια σχετικά αποτελέσματα που αφορούν γενικές δράσεις επιλύσιμων ομάδων, από τα οποία προκύπτει μια ισχυρότερη μορφή της αντίστοιχης εικασίας των LRW και μια εκλέπτυνση των αποτελεσμάτων του Křížž.

Στα επόμενα δύο κεφάλαια παρουσιάζουμε τις αποδείξεις των αποτελεσμάτων μας. Για τα simplices, πρώτα δείχνουμε ότι κάθε “σχεδόν κανονικό” simplex, εμφυτεύεται ισομετρικά σε έναν κανονικό πολυγωνικό τόρο. Στην συνέχεια, δείχνουμε ότι κάθε πεπερασμένο σύνολο, είναι αυθαίρετα κοντά σε ένα υποσύνολο ενός κανονικού πολυγωνικού τόρου. Τέλος, με την βοήθεια ενός χαρακτηρισμού των πεπερασμένων μετρικών χώρων που εμφυτεύονται ισομετρικά σε κάποιο Ευκλείδειο χώρο, “σπάμε” το simplex, σε μέρη που εμφυτεύονται σε κάποιο πολυγωνικό τόρο και ολοκληρώνουμε την απόδειξη. Για τα αποτελέσματα “τύπου” Hales-Jewett, προσαρμόζουμε ένα γνωστό λήμμα του Shelah στις ανάγκες της απόδειξης και με τεχνικές της σχετικής θεωρίας, εκμεταλλευόμαστε ένα συνδυαστικό επιχείρημα του Křížž χρησιμοποιώντας το ως αρχή του περιστερώνα, για να φτάσουμε στο ζητούμενο.

Στα τελευταία κεφάλαια, αναφέρουμε λίγα πράγματα επιπλέον για μια άλλη από τις ισοδύναμες εικασίες των LRW, που δεν αφορά πεπερασμένες ομάδες και για την οποία απέδειξαν την εικασία τους σε μια πολύ συγκεκριμένη περίπτωση. Στην συνέχεια, δείχνουμε ότι για τα ευκλείδεια σύνολα για τα οποία προκύπτει ότι είναι Ramsey μέσω των αποτελεσμάτων των LRW, υπάρχει εναλλακτική απόδειξη μέσω του θεωρήματος του Křížž και καταλήγουμε στο συμπέρασμα, ότι όλα τα μέχρι σήμερα γνωστά Ramsey σύνολα, έπονται ως τέτοια από το θεώρημα του Křížž. Κλείνουμε αυτή την εργασία κάνοντας μια αφελή εικασία για τα transitive ευκλείδεια σύνολα και προτείνοντας κάποιες πιθανές κατευθύνσεις της σχετικής έρευνας.

Abstract

The subject of this PhD dissertation thesis, is Euclidean Ramsey theory and more specifically the problem of characterization of Ramsey sets. A finite subset X of some Euclidean space $\mathbb{R}^n$ for some $n \in \mathbb{N}$ is Ramsey, if for every number of colors $r \in \mathbb{N}$ there exists a large enough dimension $N \in \mathbb{N}$, such that, for every coloring of $\mathbb{R}^N$ we can find a monochromatic congruent copy of X.

In the Introduction, we start by exploring the wealth of the results and new objects of study that where stated in the work titled "Euclidean Ramsey Theorem I", which is considered the seminal paper for the new theory. We explore the simplest of Ramsey sets, like the regular simplex in any dimension and we see that no three co-linear points are Ramsey. Then we discuss some of the structural properties of Ramsey sets, for example we see that the finite products of Ramsey sets are Ramsey and that every Ramsey set must be spherical.

Continuing our discussion, we list all known Ramsey sets, together with rough sketches for some of the proofs. The most significant results concerning the subject of characterizing Ramsey sets are two. The first is due to Frankl and Rödl, who in 1990 proved that any simplex is Ramsey. The second we owe it to Kříž, who in 1991 proved that, every transitive set with a solvable group of isometries with at most two orbits, is Ramsey. This, gives as a corollary that regular polygons and vertex sets of all platonic solids are Ramsey.

Starting with our results, we describe how the apparent generality of Kříž's theorem led us to wonder if Frankl's and Rödl's theorem about simplices can be induced in a similar fashion. We answer affirmatively this question, by showing that any simplex can be embedded into a regular polygonal torus, that is, the cartesian product of finitely many regular polygons.

Afterwards, we discuss the two rival conjectures about Ramsey sets, the one due to Graham which says that all spherical sets are Ramsey, and the other due to Leader, Russell and Walters which say that Ramsey sets are exactly the sets that embed into some transitive set. The later group, have shown that the sufficient part of their conjecture, corresponds to a series of equivalent conjectures, which

are striped from geometry and resemble the famous theorem of Hales and Jewett. One of these conjectures is a statement about a property that all finite groups must have. After we give necessary definitions, we state two results concerning solvable groups and general actions from solvable groups, that confirm LRW conjecture in a stronger form for the case of solvable groups. Furthermore, we recover refined versions of all of Kříž results.

During the next chapters, we present our proofs. For the simplices, first we show that all "almost regular" simplices embed into some regular polygonal torus. Then we show that regular polygonal tori, are in a specific sense "dense". Finally with the help of a theorem which characterizes finite metric spaces that embed into some Euclidean space, we first break any simplex into one almost regular part and another which also embeds into a regular polygonal torus completing the proof. For the Hales-Jewett type results, we modify a well known lemma due to Shelah, and with techniques from Ramsey theory for product spaces combined with a combinatorial argument due to Kříž we manage to prove the stated results.

In the last chapters, we mention some more things about another of the equivalent conjectures made by LRW. Their proof about a special case of this conjecture produces some new Ramsey sets. We then go and prove, that all these new Ramsey sets can be also obtained from Kříž results, by embedding them into a transitive set with a solvable group of isometries. We conclude with the remark, that until now, all known Ramsey sets, can be shown to be so using Kříž theorem.

Ευχαριστίες

Πρώτα θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα μου Βασίλη Κανελλόπουλο, του οποίου η ερευνητική μεθοδολογία και η οξύτητα του πνεύματος, σε συνδυασμό με την αμέριστη συμπαράσταση του, με έπνευσε και ήταν κινητήριος δύναμη όλα αυτά τα χρόνια! Η απώλεια της αίσθησης του χρόνου προβληματιζόμενοι πάνω στον πίνακα, ήταν από τις πιο πολύτιμες και ευχάριστες στιγμές αυτής της περιόδου!

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τον Παναγιώτη Ψαρράκο και τον Παντελή Δοδό που συμπληρώνουν την τριμελή επιτροπή οι οποίοι ήταν πάντα εύκαιροι να βοηθήσουν σε ότι χρειάστηκε. Ειδικά με τον Παντελή και τον Κώστα τον Τύρο περάσαμε επίσης παραγωγικές στιγμές στον πίνακα και όχι μόνο και εύχομαι να έχουμε ξανά την ευκαιρία να το κάνουμε!

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τον Άρη για την καλή παρέα στις παραγωγικές απομακρυσμένες καραντίνες που κάναμε και την οικογένεια και τους φίλους μου γενικότερα, χάρις στους οποίους την “βγάλαμε καθαρή” όλη αυτή την πανδημική περίοδο.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή 1

Ο σκοπός αυτού του κεφαλαίου, είναι να προετοιμάσει το έδαφος, ώστε ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης ύστερα από την ανάγνωση του, να έχει αποκτήσει μια ολοκληρωμένη εικόνα του πλαισίου στο οποίο κινήθηκε η παρούσα διδακτορική διατριβή. Συγκεκριμένα, αφού αναφερθούμε εν τάχει, στο τι είναι και προς προέκυψε ιστορικά η θεωρία Ramsey, θα επικεντρωθούμε στο μέρος της θεωρίας το οποίο αφορά γεωμετρικού τύπου προβλήματα και ονομάζεται Ευκλείδεια θεωρία Ramsey.

Εξειδικεύοντας περαιτέρω, αρχικά θα δούμε πως ορίζονται τα Ramsey σύνολα στο πλαίσιο της Ευκλείδειας θεωρίας Ramsey, θα αναφέρουμε κάποιες βασικές ιδιότητες τους και στην συνέχεια θα παρουσιάσουμε την ιστορική εξέλιξη του προβλήματος που αφορά τον χαρακτηρισμό των συνόλων Ramsey. Τέλος, θα δούμε πως εντάσσονται στα παραπάνω, τα αποτελέσματα που προέκυψαν κατά την παρούσα διδακτορική έρευνα.

1.1 Οι ρίζες της Ευκλείδειας Θεωρίας Ramsey

Θεωρία Ramsey

Το γενικό ερώτημα το οποίο απασχολεί την θεωρία Ramsey μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: Σε ποιες περιπτώσεις μπορούμε να βρούμε “τάξη” μέσα στο “χάος”; Ποια είναι τα χαρακτηριστικά αυτής της “τάξης” και πόσο μεγάλο μέρος του “χάους” πρέπει οπωσδήποτε να περιέχει αυτή την “τάξη”; Συλλογισμούς τέτοιου είδους κάνουν καθημερινά ακόμη και μη μαθηματικοί και ίσως το απλούστερο παράδειγμα περιγράφεται από την *αρχή του περιστερώνα* σύμφωνα με την οποία αν τοποθετήσουμε n περιστέρια σε $n-1$ φωλιές, τουλάχιστον μία φωλιά θα πρέπει να περιέχει δύο περιστέρια.

Η θεωρία Ramsey παίρνει το όνομα της από τον Frank Plumpton Ramsey, ο οποίος στην εργασία του με τίτλο "On a Problem of Formal Logic" [28] δημοσίευσε το αποτέλεσμα που είναι σήμερα γνωστό ως θεώρημα Ramsey. Πριν το παραθέσουμε θα εισάγουμε κάποια σημειογραφία που θα μας χρησιμεύσει σε όλη την έκταση αυτού του κειμένου.

Το σύμβολο $\mathbb{N}$ χρησιμοποιείται για το σύνολο των μη αρνητικών ακεραίων. Δοθέντος θετικού ακεραίου $n \in \mathbb{N}$ γράφουμε $[n]$ για να περιγράψουμε το σύνολο $\{1, \dots, n\}$. Αν X είναι ένα μη κενό σύνολο και $k \in \mathbb{N}$, γράφουμε $|X|$ για το πλήθος των στοιχείων του X και $X^{(k)}$ για το σύνολο όλων των υποσυνόλων του X με ακριβώς k στοιχεία. Δοθέντος θετικού ακεραίου $r \in \mathbb{N}$ και ενός μη κενού συνόλου X, ένας *r-χρωματισμός c* του X είναι μια συνάρτηση $c : X \to [r]$ και ένα μη κενό υποσύνολο A του X θα λέγεται *μονοχρωματικό* (ως προς τον χρωματισμό c) αν ο περιορισμός $c_{\restriction A}$ της c στο A είναι σταθερή συνάρτηση. Παρατηρήστε ότι ένας χρωματισμός ενός συνόλου X δεν είναι τίποτα άλλο παρά μια διαμέριση του X ενώ ένα μονοχρωματικό σύνολο περιέχεται εξ' ολοκλήρου σε ένα στοιχείο της διαμέρισης.

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω, μια από τις μορφές που μπορεί να πάρει το πεπερασμένο θεώρημα Ramsey είναι η παρακάτω.

Θεώρημα 1.1 (Ramsey 1930)
Δοθέντος θετικούς ακεραίους $m, r, k \in \mathbb{N}$, υπάρχει ένας (αρκετά μεγάλος) θετικός ακέραιος $n = n(m, r, k) \in \mathbb{N}$, τέτοιος ώστε για κάθε r-χρωματισμό $c : [n]^{(k)} \to [r]$ των k-υποσυνόλων του $[n]$, υπάρχει $A \in [n]^{(m)}$ τέτοιο ώστε το σύνολο $A^{(k)}$ να είναι μονοχρωματικό.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η ιστορική εξέλιξη της θεωρίας Ramsey. Αποτελέσματα "τύπου Ramsey" υπήρξαν πριν από τον Ramsey! Ένα παράδειγμα (ίσως το πρώτο) είναι ένα λήμμα που χρησιμοποίησε ο David Hilbert σε μια εργασία του 1892 [18]. Ένα άλλο, είναι ένα λήμμα που χρησιμοποίησε το 1917 ο Issai Schur στο [30]. Πιθανώς το πιο γνωστό από τα προ-Ramsey αποτελέσματα τύπου Ramsey, είναι το θεώρημα του Van der Waerden [33] το οποίο εμφανίστηκε το 1927. Παρόλα αυτά, κανένα από τα προαναφερθέντα αποτελέσματα δεν είχε την απήχηση του θεωρήματος του Ramsey, από το οποίο γεννήθηκαν αμέτρητες εφαρμογές, οι οποίες έδωσαν την ώθηση που χρειαζόταν η νεογέννητη θεωρία!

Παρακάτω, θα επικεντρωθούμε στο μέρος της θεωρίας Ramsey που αφορά γεωμετρικού τύπου προβλήματα και συγκεκριμένα την Ευκλείδεια θεωρία Ramsey. Μία κλασική αναφορά για όποιον θα ήθελε να ενημερωθεί για την θεωρία Ramsey γενικότερα είναι το βιβλίο "Ramsey Theory" των Graham, Rothschild και Spencer [15] ενώ για μία ιστορική ανάλυση της εξέλιξης της θεωρίας Ramsey πολύ ενδιαφέρον είναι το βιβλίο "Ramsey Theory: Yesterday, Today, and Tomorrow" του Alexander Soifer [32].

Ευκλείδεια θεωρία Ramsey

Όπως μπορεί να καταλάβει κάποιος από το όνομα *Ευκλείδεια θεωρία Ramsey*, αντικείμενο της είναι τα προβλήματα "τύπου Ramsey" τα οποία αφορούν δομές ορισμένες σε κάποιο ευκλείδειο χώρο. Αυτός ο κλάδος δημιουργήθηκε ουσιαστικά "εν μία νυκτί" με την πρωτοποριακή εργασία των Erdös, Graham, Montgomery, Rothchild, Spencer και Straus "Euclidean Ramsey Theorems" [5] η οποία είχε δύο συνέχειες [7, 6] και δημιούργησε πολλά περισσότερα προβλήματα από αυτά που έλυσε.

Τα προβλήματα που συναντά κανείς στην Ευκλείδεια θεωρία Ramsey είναι πολλά και διαφορετικά μεταξύ τους, εμείς θα ασχοληθούμε με ένα από τα κεντρικά ερωτήματα που απασχολεί τον κλάδο και αφορά τα Ramsey σύνολα και συγκεκριμένα το πρόβλημα του χαρακτηρισμού τους. Θα ξεκινήσουμε αναφέροντας την ορολογία που θα χρησιμοποιήσουμε σε όλη την διάρκεια του κειμένου και θα συνεχίσουμε δίνοντας τον πρώτο μας ορισμό.

Με τον όρο *Ευκλείδειος χώρος* εννοούμε τον πραγματικό διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^n$, πεπερασμένης διάστασης n για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, ο οποίος είναι εφοδιασμένος με την συνήθη *ευκλείδεια νόρμα*, την οποία συμβολίζουμε απλά με $\|\cdot\|$ καθώς δεν θα χρησιμοποιήσουμε κάποιου άλλου είδους νόρμα. Επομένως η απόσταση δύο σημείων $\boldsymbol{x} = (x_i)_{i\in[n]}$ και $y = (y_i)_{i\in[n]}$ του $\mathbb{R}^n$ δίνεται από την σχέση:

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| = \left(\sum_{i\in[n]} |x_i - y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Τα περισσότερα σύνολα με τα οποία θα ασχοληθούμε θα είναι πεπερασμένα, με τον όρο *ευκλείδειο σύνολο* εννοούμε ένα πεπερασμένο υποσύνολο ενός ευκλείδειου χώρου $\mathrm{X} \subset \mathbb{R}^n$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ και κατά κανόνα θα αμελούμε να αναφέρουμε την διάσταση του χώρου. Δύο ευκλείδεια σύνολα X και Υ θα λέγονται *ισομετρικά* αν υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση $f : X \to Y$ η οποία διατηρεί τις αποστάσεις δηλαδή αν για κάθε $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in X$ ισχύει ότι $\|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2\| = \|f(\boldsymbol{x}_1) - f(\boldsymbol{x}_2)\|$, όπου βεβαίως οι νόρμες υπολογίζονται στους αντίστοιχους χώρους που βρίσκονται τα X και Y. Σε αυτή την περίπτωση θα λέμε ότι το Y είναι ένα αντίγραφο του X ή ότι το X είναι ένα αντίγραφο του Υ. Επιπλέον, λέμε ότι το X εμφυτεύεται σε ένα σύνολο Y αν περιέχει ως υποσύνολο ένα αντίγραφο X' του X.

Τώρα είμαστε έτοιμοι να δώσουμε τον ορισμό των Ramsey συνόλων.

Ορισμός 1.2 (Ramsey σύνολα). *Ένα πεπερασμένο ευκλείδειο σύνολο X λέγεται* Ramsey σύνολο, *αν για κάθε $r \in \mathbb{N}$ υπάρχει $N = N(X, r) \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για* *κάθε r-χρωματισμό $c : \mathbb{R}^N \to [r]$ του $\mathbb{R}^N$, υπάρχει ένα μονοχρωματικό αντίγραφο* X' *του* X.

Παρατηρήστε ότι, από τον ορισμό των Ramsey συνόλων, προκύπτει ότι τα υποσύνολα ενός Ramsey συνόλου είναι Ramsey. Επίσης αν ένα σύνολο $X \subset \mathbb{R}^n$ είναι Ramsey, τότε οποιοδήποτε όμοιο του, δηλαδή οποιοδήποτε σύνολο της μορφής $\boldsymbol{y} + \lambda X'$ με $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \geq 0$ και X' ένα αντίγραφο του X, είναι επίσης Ramsey.

Πριν συνεχίσουμε, να σημειώσουμε ότι στο παρόν κείμενο, όταν αναφερόμαστε σε γεωμετρικά σχήματα όπως τρίγωνα, τετράγωνα, πολύγωνα, πολύεδρα και ούτω καθ' εξής, εννοούμε το σύνολο των κορυφών που τα καθορίζουν και όχι τα αντίστοιχα συμπαγή σύνολα. Ένα παράδειγμα το οποίο θα αναφέρουμε αρκετά είναι το simplex. Χρησιμοποιούμε τον όρο *simplex* για να περιγράψουμε ένα αφινικά ανεξάρτητο σύνολο σημείων ενώ αν όλες αποστάσεις μεταξύ των σημείων του (τα μήκη των πλευρών του) είναι ίσες, το simplex θα λέγεται κανονικό.

Όπως αναφέραμε ένα από τα σημαντικότερα προβλήματα στην Ευκλείδεια θεωρία Ramsey είναι να αναγνωρίσουμε ακριβώς ποια σύνολα είναι Ramsey. Θα ξεκινήσουμε λοιπόν την αναζήτηση μας από τα πρώιμα θετικά αποτελέσματα που εμφανίστηκαν ήδη από την πρώτη σχετική εργασία [5].

Το πρώτο μη τετριμμένο αποτέλεσμα μας λέει ότι ένα σύνολο που αποτελείται από δύο μόνο σημεία $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$, έστω σε απόσταση $\alpha > 0$ μεταξύ τους είναι Ramsey. Πράγματι, έστω $r \in \mathbb{N}$ ο αριθμός των χρωμάτων, θα δείξουμε ότι οποιοσδήποτε r-χρωματισμός του $\mathbb{R}^r$ θα περιλαμβάνει ένα μονοχρωματικό αντίγραφο του $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$. Για να το δούμε αυτό αρκεί να θεωρήσουμε ένα *κανονικό simplex* $\Delta \subset \mathbb{R}^r$ με $r + 1$ κορυφές και μήκος πλευράς α. Από την αρχή του περιστερώνα δύο κορυφές θα έχουν το ίδιο χρώμα.

Χρησιμοποιώντας την γενικότερη μορφή της αρχής του περιστερώνα, δηλαδή το γεγονός ότι αν χρωματίσουμε $(k - 1)r + 1$ αντικείμενα με r χρώματα τουλάχιστον k θα πάρουν το ίδιο χρώμα, μπορούμε με πανομοιότυπο τρόπο να δείξουμε ότι τα ισόπλευρα τρίγωνα και γενικότερα κάθε κανονικό simplex είναι Ramsey.

Σε αυτό το σημείο είναι σκόπιμο να παραθέσουμε την αρχή της συμπάγειας όπως αυτή χρησιμοποιείται στην θεωρία Ramsey και την θεωρία γραφημάτων. Ένα *υπεργράφημα* δεν είναι τίποτα άλλο από ένα ζεύγος (X, E) όπου $X \neq \varnothing$ είναι το σύνολο των *κόμβων* του γραφήματος και E είναι ένα σύνολο υποσυνόλων του X τα οποία ονομάζονται (υπέρ)ακμές του γραφήματος. Η περίπτωση στην οποία όλα τα στοιχεία του E είναι δισύνολα αντιστοιχεί στα συνήθη απλά γραφήματα. Ένα επαγόμενο υπογράφημα (A, E_A) ενός υπεργραφήματος (X, E) είναι το υπεργράφημα που έχει σύνολο κόμβων ένα υποσύνολο A του X και σύνολο ακμών όλες της ακμές του E των οποίων όλα τα στοιχεία ανήκουν στο A.

Ένας *νόμιμος χρωματισμός* ενός υπεργραφήματος, είναι ένας χρωματισμός $c : X \to [r]$ για κάποιο $r \in \mathbb{N}$, τέτοιος ώστε καμία ακμή να μην είναι μονοχρωματική.

Ο *χρωματικός αριθμός* $\chi(X, E)$ ενός υπεργραφήματος (X, E) είναι ο ελάχιστος (πληθικός) αριθμός χρωμάτων για τον οποίο υπάρχει ένας νόμιμος χρωματισμός του X. Μία από τις μορφές της αρχής της συμπάγειας είναι η παρακάτω.

Θεώρημα 1.3 (*Αρχή της συμπάγειας*)
Έστω $X \neq \emptyset$ ένα πιθανώς άπειρο σύνολο και (X, E) ένα υπεργράφημα τέτοιο ώστε όλες οι ακμές να είναι πεπερασμένες. Αν για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο A του X ισχύει ότι $\chi(A, E_A) \leq r$, τότε $\chi(X, E) \leq r$.

Η απόδειξη του παραπάνω χρειάζεται κάποια από τις ισοδύναμες μορφές του αξιώματος της επιλογής και ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί την βρει για παράδειγμα στο [15]. Πολλές φορές η αρχή της συμπάγειας χρησιμοποιείται στην αντιθετοαντίστροφη μορφή της: Αν $\chi(X, E) > r$ τότε υπάρχει πεπερασμένο $A \subset X$ τέτοιο ώστε $\chi(A, E_A) > r$.

Δοθέντος ενός ευκλείδειου συνόλου X και ενός $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να σχηματίσουμε το υπεργράφημα $\mathbb{R}^n(X)$ το οποίο έχει ως σύνολο κόμβων όλα τα στοιχεία του $\mathbb{R}^n$ και ακμές όλα τα ισομετρικά αντίγραφα του X. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τα προαναφερθέντα παρατηρήστε ότι ένας ισοδύναμος ορισμός για τα Ramsey σύνολα είναι ο εξής:

Ορισμός 1.4. *Ένα πεπερασμένο ευκλείδειο σύνολο X είναι Ramsey αν για κάθε $r \in \mathbb{N}$ υπάρχει $N = N(X, r) \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\chi\left(\mathbb{R}^N(X)\right) > r$.*

Η παραπάνω διαφορετική οπτική μπορεί να μας οδηγήσει εύκολα στο εξής χρήσιμο συμπέρασμα:

Πρόταση 1.5. *Έστω $r \in \mathbb{N}$, X ένα πεπερασμένο ευκλείδειο σύνολο και $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε χρωματισμό $c : \mathbb{R}^n \to [r]$ να υπάρχει μονοχρωματικό αντίγραφο X' του X. Τότε υπάρχει $Y \subset \mathbb{R}^n$ πεπερασμένο, τέτοιο ώστε για κάθε r-χρωματισμό του Y να υπάρχει μονοχρωματικό αντίγραφο $X' \subset Y$ του X.*

Απόδειξη
Από την υπόθεση έχουμε ότι $\chi\left(\mathbb{R}^n(X)\right) > r$ και το συμπέρασμα προκύπτει από την αρχή της συμπάγειας. □

Η Πρόταση 1.5 παίζει καίριο ρόλο στην τεκμηρίωση του παρακάτω αποτελέσματος, το οποίο αποτελεί ίσως το κυριότερο εργαλείο για την κατασκευή νέων συνόλων Ramsey από ήδη υπάρχοντα. Να αναφέρουμε εδώ ότι αν $X \subset \mathbb{R}^n$ και $Y \subset \mathbb{R}^m$ το γινόμενο των X και Y είναι το σύνολο

$$X \times Y = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{x} \in X \wedge \boldsymbol{y} \in Y\} \subset \mathbb{R}^{n+m}.$$

Θεώρημα 1.6. *Έστω X και Y δύο Ramsey σύνολα, τότε το γινόμενο τους $X \times Y$ είναι Ramsey.*

Απόδειξη
Έστω $r \in \mathbb{N}$. Αφού το Y είναι Ramsey, υπάρχει $N_1 = N_1(Y, r) \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε r-χρωματισμό του $\mathbb{R}^{N_1}$ να υπάρχει μονοχρωματικό αντίγραφο του Y. Από την Πρόταση 1.5 υπάρχει πεπερασμένο $Z \subset \mathbb{R}^{N_1}$ τέτοιο ώστε κάθε r-χρωματισμός του Z να περιέχει μονοχρωματικό αντίγραφο του Y. Έστω $k = |Z|$ το πλήθος των στοιχείων του Z. Αφού το X είναι Ramsey για r^k χρώματα υπάρχει $N_2 = N_2(X, r^k) \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε κάθε r^k-χρωματισμός του $\mathbb{R}^{N_2}$ να περιέχει μονοχρωματικό αντίγραφο του X.

Υποστηρίζουμε ότι για κάθε χρωματισμό $c : \mathbb{R}^{N_1+N_2} \to [r]$ υπάρχει μονοχρωματικό αντίγραφο του $X \times Y$. Πράγματι, ορίζουμε $c_1 : \mathbb{R}^{N_2} \to [r^k]$ ως $c_1(\boldsymbol{x}) = (c(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}))_{z \in Z}$. Από τον ορισμό του N_2 υπάρχει X' αντίγραφο του X τέτοιο ώστε $c(\boldsymbol{x}_1', \boldsymbol{z}) = c(\boldsymbol{x}_2', \boldsymbol{z})$ για κάθε $\boldsymbol{x}_1', \boldsymbol{x}_2' \in X'$ και $\boldsymbol{z} \in Z$. Έτσι μπορούμε να ορίσουμε $c_2 : Z \to [r]$ ως $c_2(\boldsymbol{z}) = c(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{z})$ για κάποιο $\boldsymbol{x}' \in X'$ (και άρα για όλα). Από τον ορισμό του Z υπάρχει $Y' \subset Z$ τέτοιο ώστε Y' αντίγραφο του Y και $c(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}_1') = c(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}_2')$ για κάθε $\boldsymbol{y}_1', \boldsymbol{y}_2' \in Y'$. Το $X' \times Y'$ είναι ένα αντίγραφο του $X \times Y$ μονοχρωματικό ως προς τον r-χρωματισμό c. $\square$

Είναι προφανές ότι παρόμοιο συμπέρασμα μπορούμε να βγάλουμε για οποιοδήποτε πεπερασμένο γινόμενο Ramsey συνόλων. Αν $\{X_i\}_{i \in [k]}$ είναι μια οικογένεια Ramsey συνόλων, το γινόμενο τους

$$\prod_{i \in [k]} X_i = \left\{ (\boldsymbol{x}_i)_{i \in [k]} \,\middle|\, (\forall i \in [k]) \boldsymbol{x}_i \in X_i \right\}$$

είναι επίσης Ramsey.

Το ότι πεπερασμένα γινόμενα Ramsey συνόλων είναι Ramsey διευρύνει πολύ την "λίστα" με τα Ramsey σύνολα. Είναι για παράδειγμα άμεσο το εξής:

Θεώρημα 1.7. *Έστω $\{\alpha_i\}_{i \in [k]}$ μια πεπερασμένη ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών. Τότε το πολυδιάστατο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο $\prod_{i \in [k]} \{0, \alpha_i\}$ είναι Ramsey.*

Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι τα υποσύνολα ενός Ramsey συνόλου είναι Ramsey, από το Θεώρημα 1.7 άμεσα προκύπτει ότι τα ορθογώνια τρίγωνα είναι επίσης Ramsey.

Μέχρι τώρα είδαμε κάποια σύνολα που ικανοποιούν τον ορισμό των Ramsey συνόλων, στην αντίθετη κατεύθυνση έχουμε το επόμενο πρώτο αποτέλεσμα.

Πρόταση 1.8. *Το σύνολο $\{0, 1, 2\}$ δεν είναι Ramsey.*

Απόδειξη
Πράγματι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να ορίσουμε τον χρωματισμό $c : \mathbb{R}^n \to [4]$ ως $c(x) = \lfloor \|x\|^2 \rfloor (\bmod 4)$, δηλαδή ανάλογα με το υπόλοιπο του ακέραιου μέρους του τετραγώνου της νόρμας. Κάθε σύνολο X τριών σημείων το οποίο είναι ισομετρικό με το $\{0, 1, 2\}$ θα πρέπει να έχει την μορφή $X = \{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}\}$ για κάποιο

$\boldsymbol{x}$ και κάποιο $\boldsymbol{u}$ με $\|\boldsymbol{u}\| = 1$. Αν το X είναι μονοχρωματικό θα πρέπει να υπάρχει $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, ακέραιοι α_i και πραγματικοί αριθμοί $0 \leq \theta_i < 1$ για $i = 1, 2, 3$ τέτοιοι ώστε:

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{u}\|^2 = 4\alpha_1 + k + \theta_1, \quad \|\boldsymbol{x}\|^2 = 4\alpha_2 + k + \theta_2, \quad \|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}\|^2 = 4\alpha_3 + k + \theta_3.$$

Εξισώνοντας καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$4(\alpha_2 + \alpha_3 - 2\alpha_1) - 2 + (\theta_2 + \theta_3 - 2\theta_1) = 0$$

και οδηγούμαστε σε άτοπο. □

Στην πραγματικότητα οποιαδήποτε τρία συνευθειακά σημεία δεν είναι Ramsey, μάλιστα ισχύει ένας ακόμα γενικότερος περιορισμός για τα Ramsey σύνολα τον οποίο εξετάζουμε στην επόμενη υποενότητα.

Τα Ramsey σύνολα είναι σφαιρικά!

Όπως έχουμε δει μέχρι τώρα υπάρχουν ευκλείδεια σύνολα που είναι Ramsey και υπάρχουν άλλα που δεν είναι. Σε αυτή την υποενότητα θα ασχοληθούμε με την απόδειξη της ουσιαστικά μοναδικής μέχρι σήμερα αναγκαίας συνθήκης για να είναι ένα σύνολο Ramsey.

Θεώρημα 1.9. *Έστω $X \subset \mathbb{R}^n$ ένα Ramsey σύνολο. Τότε υπάρχει $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ και $r > 0$ τέτοια ώστε $\|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{x}\|^2 = r$ για κάθε $\boldsymbol{x} \in X$.*

Έτσι βλέπουμε ότι κάθε Ramsey σύνολο περιέχεται σε μία σφαίρα ή πιο απλά είναι σφαιρικό. Για την απόδειξη του Θεωρήματος 1.9 θα χρειαστούμε κάποια αποτελέσματα και θα ξεκινήσουμε από έναν χαρακτηρισμό των πεπερασμένων σφαιρικών συνόλων.

Λήμμα 1.10. *Έστω $X = \{\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1 \ldots, \boldsymbol{x}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Το X δεν είναι σφαιρικό σύνολο αν και μόνο αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\{\lambda_i\}_{i\in[k]}$ όχι όλοι μηδέν τέτοιοι ώστε:*

(i) $\displaystyle\sum_{i\in[k]} \lambda_i(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_0) = 0$ *και*

(ii) $\displaystyle\sum_{i\in[k]} \lambda_i \left(\|\boldsymbol{x}_i\|^2 - \|\boldsymbol{x}_0\|^2\right) = b \neq 0.$

Απόδειξη

Θα δείξουμε ότι αν ένα σύνολο είναι σφαιρικό τότε δεν μπορούν να ισχύουν οι (i) και (ii) συγχρόνως, ενώ αν ένα σύνολο δεν είναι σφαιρικό τότε αναγκαστικά ισχύουν και τα δύο.

Έστω ότι το X είναι σφαιρικό, επομένως υπάρχουν $r > 0$ και $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε $\|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{x}_i\|^2 = r^2$ για $i = 0, 1, \dots, k$. Έστω ότι υπάρχουν $\{\lambda_i\}_{i\in[k]}$ όχι όλα μηδέν τέτοια ώστε να ισχύει η (i). Για κάθε $i \in [k]$ ισχύει:

$$\|\boldsymbol{x}_i\|^2 - \|\boldsymbol{x}_0\|^2 = \|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{v}\|^2 - \|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{v}\|^2 + 2(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{v} = 2(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{v}.$$

Από την (i) παίρνουμε ότι:

$$0 = 2\boldsymbol{v} \sum_{i\in[k]} \lambda_i(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_0) = \sum_{i\in[k]} \lambda_i \left(\|\boldsymbol{x}_i\|^2 - \|\boldsymbol{x}_0\|\right)$$

και επομένως δεν ισχύει η (ii).

Έστω τώρα ότι το X δεν είναι σφαιρικό. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι είναι ελαχιστικά μη σφαιρικό δηλαδή οποιοδήποτε γνήσιο υποσύνολο του είναι σφαιρικό. Κάθε simplex είναι σφαιρικό, επομένως τα διανύσματα $(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_0)$ είναι γραμμικά εξαρτημένα και συνεπώς υπάρχουν $\{\lambda_i\}_{i\in[k]}$ όχι όλα μηδέν, τέτοια ώστε να ισχύει η (i). Ας υποθέσουμε ότι $\lambda_k \neq 0$. Αφού κάθε γνήσιο υποσύνολο του X είναι σφαιρικό υπάρχουν $r > 0$ και $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε $\|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{x}_i\|^2 = r^2$ για $i = 0, 1, \dots, k-1$. Επομένως υπολογίζουμε:

$$\sum_{i\in[k]} \lambda_i \left(\|\boldsymbol{x}_i\|^2 - \|\boldsymbol{x}_0\|^2\right) = \lambda_k(\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{v}\|^2 - r^2) \neq 0.$$

□

Τα δύο επόμενα λήμματα αποτελούν μέρος της πλούσιας και πολύ ενδιαφέρουσας θεωρίας που αφορά την μελέτη των εξισώσεων και γενικότερα των συστημάτων εξισώσεων, για τα οποία υπάρχουν ή δεν υπάρχουν μονοχρωματικές λύσεις.

Λήμμα 1.11. *Έστω $n \in \mathbb{N}$. Υπάρχει ένας $2n$-χρωματισμός $c : \mathbb{R} \to [2n]$ των πραγματικών αριθμών, τέτοιος ώστε η εξίσωση*

$$\sum_{i\in[n]} (x_i - x_i') = 1, \tag{1.1}$$

να μην επιδέχεται καμία λύση τέτοια ώστε $c(x_i) = c(x_i')$ για κάθε $i \in [n]$.

Απόδειξη

Ορίζουμε $c : \mathbb{R} \to [2n]$ θέτοντας $c(x) = j$, οπού $j \in [2n]$ είναι το μοναδικό για το οποίο $x \in [2m + (j-1)/n, 2m + \frac{j}{n})$ για κάποιο ακέραιο m. Παρατηρήστε ότι αν $c(x) = c(x')$ τότε $x - x' = 2k + \theta$ για κάποιο ακέραιο k και κάποιο θ με $|\theta| < \frac{1}{n}$. Επομένως αν $\{x_i\}_{i\in[n]} \cup \{x_i\}_{i\in[n]}$ μία λύση της εξίσωσης τέτοια ώστε $c(x_i) = c(x_i')$ θα πρέπει να έχουμε ότι

$$1 = \sum_{i\in[n]} (x_i - x_i') = 2\sum_{i\in[n]} k_i + \sum_{i\in[n]} \theta_i$$

το οποίο είναι άτοπο καθώς τα k_i είναι ακέραιοι και $-1 < \sum_{i\in[n]} \theta_i < 1$. □

Το επόμενο λήμμα είναι ουσιαστικά μια επέκταση του Λήμματος 1.11.

Λήμμα 1.12. *Έστω $\{\lambda_i\}_{i\in[n]}$ και $b \neq 0$ πραγματικοί αριθμοί. Υπάρχει ένας $(2n)^n$-χρωματισμός $c : \mathbb{R} \to [(2n)^n]$ των πραγματικών αριθμών, τέτοιος ώστε η εξίσωση*

$$\sum_{i\in[n]} \lambda_i (x_i - x_i') = b, \tag{1.2}$$

να μην έχει λύση τέτοια ώστε $c(x_i) = c(x_i')$ για όλα τα $i \in [n]$.

Απόδειξη
Παρατηρήστε ότι θέτοντας $\tilde{\lambda}_i = \dfrac{\lambda_i}{b}$ έχουμε ότι η 1.2 ισχύει αν και μόνο αν

$$\sum_{i\in[n]} \tilde{\lambda}_i (x_i - x_i') = 1 \tag{1.3}$$

Έστω $\tilde{c} : \mathbb{R} \to [2n]$ ο χρωματισμός που χρησιμοποιήσαμε στην απόδειξη του Λήμματος 1.11. Ορίζουμε τον $(2n)^n$-χρωματισμό $c : \mathbb{R} \to [(2n)^n]$ θέτοντας

$$c(x) = \left(\tilde{c}(\tilde{\lambda}_i x)\right)_{i\in[n]}$$

και παρατηρήστε ότι $c(x) = c(x')$ αν και μόνο αν $\tilde{c}(\tilde{\lambda}_i x) = \tilde{c}(\tilde{\lambda}_i x')$ για κάθε $i \in [n]$. Έστω ότι ικανοποιείται η 1.3 για κάποια $\{x_i\}_{i\in[n]} \cup \{x_i'\}_{i\in[n]}$ για τα οποία $c(x_i) = c(x_i')$ για κάθε $i \in [n]$. Τότε $\tilde{c}(\tilde{\lambda}_i x_i) = \tilde{c}(\tilde{\lambda}_i x_i')$ και επομένως όπως και στην απόδειξη του Λήμματος 1.11 έχουμε ότι

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{i\in[n]} \tilde{\lambda}_i (x_i - x_i') \\ &= \sum_{i\in[n]} (\tilde{\lambda}_i x_i - \tilde{\lambda}_i x_i') \\ &= 2\sum_{i\in[n]} k_i + \sum_{i\in[n]} \theta_i \end{aligned}$$

για κάποιους ακέραιους k_i και πραγματικούς θ_i με $|\theta_i| < \frac{1}{n}$ το οποίο είναι άτοπο.□

Είμαστε έτοιμοι τώρα να αποδείξουμε ότι τα Ramsey σύνολα είναι αναγκαστικά σφαιρικά.

Απόδειξη (του Θεωρήματος 1.9)
Έστω $X = \{\boldsymbol{x}_i\}_{i=0}^n$ ένα μη σφαιρικό πεπερασμένο ευκλείδειο σύνολο. Από το Λήμμα 1.10 υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\{\lambda_i\}_{i\in[k]}$ όχι όλοι μηδέν τέτοιοι ώστε:

(i) $\sum_{i\in[k]} \lambda_i (\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_0) = 0$ και

(ii) $\sum_{i\in[k]} \lambda_i \left(\|\boldsymbol{x}_i\|^2 - \|\boldsymbol{x}_0\|^2\right) = b \neq 0.$

Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $c^* : \mathbb{R}^m \to [(2n)^n]$ θέτοντας $c^*(\boldsymbol{x}) = c(\|\boldsymbol{x}\|^2)$ όπου c είναι ο χρωματισμός που αναφέραμε στο Λήμμα 1.12 για τις παραμέτρους $\{\lambda_i\}_{i\in[n]}$ και b. Παρατηρήστε ότι αν X' είναι ένα αντίγραφο του X οι (i) και (ii) παραμένουν σε ισχύ με τις ίδιες παραμέτρους. Επομένως αν βρούμε μονοχρωματικό αντίγραφο του X στον $\mathbb{R}^m$ θα έχουμε βρει και μία λύση της (ii) με $c(\|\boldsymbol{x}_i\|^2) = c(\|\boldsymbol{x}_0\|^2)$ για $i \in [n]$ το οποίο είναι λόγω του Λήμματος 1.12 αδύνατο. Αφού το m που θεωρήσαμε ήταν αόριστο, το X δεν μπορεί να είναι Ramsey. □

Σημειώσεις

Όλα τα αποτελέσματα σχετικά με την Ευκλείδεια θεωρία Ramsey τα οποία αναφέραμε σε αυτή την ενότητα περιλαμβάνονταν στην εργασία [5] οι οποία έθεσε τα θεμέλια αυτού του καινούργιου κλάδου.

Το Θεώρημα 1.9 μας λέει ότι μια αναγκαία συνθήκη, ώστε ένα πεπερασμένο ευκλείδειο σύνολο να είναι Ramsey, είναι να είναι σφαιρικό. Μέχρι σήμερα δεν γνωρίζουμε αν αυτή η συνθήκη είναι και ικανή, με άλλα λόγια δεν έχει αποδειχθεί για κανένα σφαιρικό σύνολο ότι δεν είναι Ramsey. Μάλιστα είναι μια γνωστή εικασία του Ronald Graham ότι όλα τα σφαιρικά σύνολα είναι Ramsey, ένα πρόβλημα το οποίο έχει επικηρύξει με 1000$ μια πρακτική που συνήθιζε ο φίλος του, Erdös.

Αποτελέσματα όπως τα λήμματα 1.11 και 1.12 ξεκίνησαν να μελετούνται από τον Rado [27, 26], ο οποίος ερμήνευσε το γνωστό θεώρημα του δασκάλου του Issai Schur [30] ως μια περίπτωση ύπαρξης μονοχρωματικής λύσης σε μία εξίσωση. Το θεώρημα του Schur λέει ότι για κάθε πεπερασμένο χρωματισμό του $\mathbb{N}$ υπάρχουν $x, y, z \in \mathbb{N}$ του ίδιου χρώματος, τέτοια ώστε $x + y = z$. Ο Rado έδωσε ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε ομογενή και μη ομογενή συστήματα εξισώσεων να έχουν μονοχρωματικές λύσεις. Αποτελέσματα τέτοιου τύπου έχουν μέχρι σήμερα επεκταθεί ακόμα και σε περιπτώσεις μη γραμμικών εξισώσεων.

Αν και τα Ramsey σύνολα μπορεί να πει κανείς ότι είναι το κεντρικό αντικείμενο μελέτης της θεωρίας, υπάρχει μια πληθώρα προβλημάτων άλλου τύπου. Για παράδειγμα, η ασυμπτωτική σχέση μεταξύ της διάστασης του Ευκλείδειου χώρου και του αριθμού των χρωμάτων που απαιτούνται, ώστε να υπάρχει χρωματισμός που να αποκλείει μονοχρωματικό αντίγραφο κάποιου συνόλου είναι ένα πρόβλημα που έχει προσελκύσει μεγάλη μερίδα μαθηματικών. Η εύρεση του χρωματικού αριθμού $\chi(\mathbb{R}^2)$ του επιπέδου είναι η περισσότερο γνωστή περίπτωση και αφορά το ελάχιστο πλήθος των χρωμάτων που απαιτούνται ώστε να μπορεί κανείς να χρωματίσει το επίπεδο χωρίς δύο σημεία με απόσταση 1 στο ίδιο χρώμα. Μάλιστα πολύ πρόσφατα ο Aubrey de Grey [2] βελτίωσε το κάτω φράγμα από 4 στο 5, έτσι μέχρι η εικόνα για τα φράγματα είναι:

$$5 \leq \chi\left(\mathbb{R}^2\right) \leq 7.$$

Μία άλλη κατεύθυνση είναι αντί να αναζητήσει κάποιος ένα μονοχρωματικό αντικείμενο να αναζητήσει δύο! Ένα παράδειγμα είναι το εξής αποτέλεσμα που προέρχεται από το [7]:

Θεώρημα 1.13. *Έστω ότι τα σημεία του επιπέδου χρωματιστούν με δύο χρώματα έστω μπλε και κόκκινο. Τότε είτε υπάρχουν δύο κόκκινα σημεία με απόσταση* 1 *μεταξύ τους, είτε τέσσερα μπλε σημεία σε μία ευθεία όπου κάθε διαδοχικό ζεύγος να έχει απόσταση* 1.

Στην επόμενη ενότητα θα δούμε με ιστορική σειρά όλα (σχεδόν) τα αποτελέσματα που βήμα, βήμα, διεύρυναν την κλάση των γνωστών Ramsey συνόλων. Επίσης στο μέτρο που αυτό είναι δυνατό θα προσπαθήσουμε να σκιαγραφήσουμε τα σημαντικά στοιχεία των αντίστοιχων αποδείξεων.

1.2 Ramsey σύνολα

Όσον αφορά το κύριο πρόβλημα της Ευκλείδειας θεωρίας Ramsey, που είναι να βρεθούν ακριβώς ποια είναι τα Ramsey σύνολα, η πρόοδος τα τελευταία 48 χρόνια ήταν αργή. Από την αρχική δημοσίευση του [5] το 1973, όπου αποδείχτηκε ότι τα κανονικά simplices και όλα τα πολυδιάστατα ορθογώνια παραλληλεπίπεδα είναι Ramsey, χρειάστηκαν 13 χρόνια για να υπάρξει κάποια πρόοδος και να αποδειχθεί τελικά στο [10] από τους Peter Frankl και Vojtech Rödl ότι επίσης όλα τα τρίγωνα είναι Ramsey.

Ο αμέσως επόμενος στόχος που ήταν τα simplices δεν άργησε να έρθει. Οι Frankl και Rödl [12] το 1990 επέκτειναν το αποτέλεσμα τους δείχνοντας ότι όλα τα simplices οποιασδήποτε διάστασης είναι Ramsey. Το 1991 ήρθε το αποτέλεσμα του Igor Křı́ž το οποίο εκμεταλλεύτηκε τις συμμετρίες των transitive συνόλων [1] και είχε σαν πόρισμα ότι το σύνολο των κορυφών των κανονικών πολυγώνων και κάθε πλατωνικού στερεού είναι Ramsey. Το αποτέλεσμα του Křı́ž παίζει κεντρικό ρόλο στην παρούσα διδακτορική διατριβή και συνεπώς θα το εξετάσουμε πιο προσεκτικά από τα υπόλοιπα αποτελέσματα. Ο ίδιος ο Křı́ž ένα χρόνο αργότερα το 1992 έδειξε ότι τα ισοσκελή τραπέζια είναι επίσης Ramsey. Το 2007 ο Kristal Cantwell έδειξε ότι όλα τα κανονικά πολύτοπα είναι και αυτά Ramsey. Από εκεί και ύστερα δεν υπήρξε κάποια άλλη εξέλιξη εκτός από κάποια αποτελέσματα το 2012 που θα συζητήσουμε στο Κεφάλαιο 4.

Βλέπουμε λοιπόν, ότι κατά την διάρκεια σχεδόν μισού αιώνα, έχουμε ουσιαστικά μόνο πέντε αποτελέσματα από τα οποία να προκύπτουν "νέα" Ramsey σύνολα. Επίσης, ενώ η "σφαιρικότητα" ενός συνόλου αποτελεί αναγκαία συνθήκη για ένα σύνολο

[1] Για τον ορισμό και την ακριβή διατύπωση του αποτελέσματος του Křı́ž δείτε την Υποενότητα "Το θεώρημα του Křı́ž και τα πλατωνικά στερεά".

να είναι Ramsey, μέχρι σήμερα δεν έχει υπάρξει κανένα σφαιρικό αντιπαράδειγμα. Το γνωστικό κενό σε σχέση με τα Ramsey σύνολα μοιάζει ακόμα τεράστιο!

Κάθε τρίγωνο είναι Ramsey

Όπως αναφέραμε, το αποτέλεσμα ότι κάθε τρίγωνο είναι Ramsey το οφείλουμε στους Frankl και Rödl [10]. Η απόδειξη χρησιμοποιεί το θεώρημα του Ramsey 1.1 και απλή γεωμετρία.

Θεώρημα 1.14 (Frankl και Rödl 1986). *Όλα τα τρίγωνα είναι Ramsey.*

Ξεκινώντας την απόδειξη, οι συγγραφείς πρώτα δείχνουν ότι μια κλάση από ισοσκελή τρίγωνα είναι Ramsey χρησιμοποιώντας μια συνδυαστική κατασκευή και το θεώρημα του Ramsey. Ύστερα επεκτείνουν το αποτέλεσμα αυτό δείχνοντας ότι όλα τα ισοσκελή τρίγωνα είναι Ramsey. Αυτό το επιτυγχάνουν πραγματοποιώντας μια γεωμετρική κατασκευή και δείχνοντας ότι κάθε ισοσκελές τρίγωνο εμφυτεύεται σε ένα τριγωνικό πρίσμα, με βάση ένα από τα τρίγωνα που από το προηγούμενο βήμα είχαν ήδη αποδειχτεί ότι είναι Ramsey. Καθώς το γινόμενο Ramsey συνόλων είναι Ramsey και το τριγωνικό πρίσμα είναι από μετρικής άποψης το γινόμενο της βάσης με ένα ευθύγραμμο τμήμα, κάθε ισοσκελές τρίγωνο είναι Ramsey.

Στην συνέχεια επεκτείνουν κάθε ένα από τα προηγούμενα βήματα, γενικεύοντας την ισχύ τους. Τέλος, αφού καταφέρνουν να "απελευθερώσουν" την εξάρτηση από την μια γωνία (κάτω από συγκεκριμένες προϋποθέσεις) εφαρμόζουν τις επεκτεταμένες τεχνικές του πρώτου μέρους για να δείξουν ότι όλα τα τρίγωνα είναι Ramsey.

Κάθε simplex είναι Ramsey

Να θυμίσουμε ότι με τον όρο Simplex εννοούμε ένα πεπερασμένο αφινικά ανεξάρτητο σύνολο σε κάποιο Ευκλείδειο χώρο. Ήδη από την εργασία τους [10] οι Frankl και Rödl είχαν υποσχεθεί ότι μπορούσαν να επεκτείνουν το αποτέλεσμα τους για τα τρίγωνα στην περίπτωση όλων των simplices. Τελικά το αποτέλεσμα αυτό δημοσιεύτηκε το 1990 στο [12].

Στην πραγματικότητα οι Frankl και Rödl δεν απέδειξαν μόνο ότι τα simplices είναι Ramsey, αλλά ακόμα περισσότερο δείξανε το ακόλουθο.

Θεώρημα 1.15 (Frankl και Rödl 1990). *Έστω X ένα simplex. Τότε υπάρχει μια σταθερά $C(X)$ τέτοια ώστε αν χρωματίσουμε τον $\mathbb{R}^n$ με λιγότερα από $(1 + C(X))^n$ χρώματα θα βρούμε ένα μονοχρωματικό αντίγραφο του X.*

Αυτό ισοδυναμεί με το να πούμε ότι ο χρωματικός αριθμός $\chi\left(\mathbb{R}^n(X)\right)$ του υπεργραφήματος με κόμβους τα σημεία του $\mathbb{R}^n$ και ακμές τα ισομετρικά αντίγραφα του X, μεγαλώνει εκθετικά σε σχέση με το n για κάθε simplex X. Για τον λόγο αυτό, τα σύνολα που ικανοποιούν μια τέτοια σχέση ονομάζονται εκθετικά Ramsey.

Στην απόδειξη του Θεωρήματος 1.15 οι Frankl και Rödl χρησιμοποίησαν εργαλεία από την Extremal Set Theory (δείτε [13],[14] και [11]) πράγμα που την κάνει περίπλοκη. Εμείς εδώ θα απλοποιήσουμε την παρουσίαση, αποφεύγοντας τις λεπτομέρειες περί εκθετικών Ramsey συνόλων ώστε φανεί η γενική μεθοδολογία.

Όπως είδαμε αν ένα simplex είναι κανονικό, δηλαδή ισόπλευρο, τότε αυτό θα είναι Ramsey. Το πρώτο βήμα της απόδειξης είναι να δεχθεί ότι κάθε simplex που είναι "σχεδόν" κανονικό, είναι Ramsey, αυτό επιβεβαιώνει η επόμενη πρόταση.

Πρόταση 1.16. *Έστω $n \in \mathbb{N}$. Τότε υπάρχει $\varepsilon = \varepsilon(n) > 0$ τέτοιο ώστε κάθε πεπερασμένο ευκλείδειο σύνολο $X = \{\boldsymbol{x}_i\}_{i\in[n]}$ για το οποίο ισχύει ότι $|\|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j\| - 1| < \varepsilon$ για κάθε $i, j \in [n]$ με $i \neq j$, είναι Ramsey.*

Στο επόμενο βήμα, αποδεικνύεται ότι τα simplices τα οποία είναι Ramsey, είναι "πυκνά".

Πρόταση 1.17. *Έστω $Y = \{\boldsymbol{y}_i\}_{i\in[n]}$ ένα ευκλείδειο σύνολο και $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει ένα Ramsey simplex $Z = \{\boldsymbol{z}_i\}_{i\in[n]}$ τέτοιο ώστε $|\|\boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{y}_j\|^2 - \|\boldsymbol{z}_i - \boldsymbol{z}_j\|^2| < \varepsilon$ για κάθε $i, j \in [n]$.*

Τώρα η απόδειξη ολοκληρώνεται ως εξής: Έστω ότι μας δίνεται ένα simplex $\mathrm{X} = \{\boldsymbol{x}_i\}_{i\in[n]}$, από ένα πόρισμα ενός θεωρήματος του Schoenberg[2] [29] υπάρχει $\delta > 0$ και ένα άλλο simplex $Y = \{\boldsymbol{x}_i\}_{i\in[n]}$ τέτοιο ώστε $\|\boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{y}_j\|^2 = \|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j\| - \delta$ για κάθε $i, j \in [n]$. Από την πρόταση 1.17 έπεται ότι για ένα αρκετά μικρό $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα Ramsey simplex $Z = \{\boldsymbol{z}_i\}_{i\in[n]}$ τέτοιο ώστε $|\|\boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{y}_j\|^2 - \|\boldsymbol{z}_i - \boldsymbol{z}_j\|^2| = \varepsilon_{ij}$ με $|\varepsilon_{ij}| < \varepsilon$ για κάθε $i, j \in [n]$. Κάνοντας ακόμα μία χρήση του θεωρήματος του Schoenberg η "διαφορά" του Z από το αρχικό simplex X που κωδικοποιείται από τους αριθμούς $\{\delta + \varepsilon_{ij}\}$, υλοποιείται από τις αποστάσεις μεταξύ των σημείων ενός "σχεδόν κανονικού" simplex το οποίο από την πρόταση 1.16 είναι επίσης Ramsey. Το τελευταίο συνεπάγεται ότι το X εμφυτεύεται ισομετρικά στο γινόμενο του Z και του προαναφερθέντος σχεδόν κανονικού simplex και άρα είναι Ramsey.

Το θεώρημα του Křížκαι τα πλατωνικά στερεά

Το θεώρημα του Křížž [23], είναι μέχρι στιγμής το σημαντικότερο αποτέλεσμα που αφορά τα Ramsey σύνολα. Για να το διατυπώσουμε με ακρίβεια και να μπορέσουμε να σκιαγραφήσουμε τον τρόπο εφαρμογής του, θα χρειαστούμε κάποιους ορισμούς. Την απόδειξη του, δεν θα επιχειρήσουμε να την επεξηγήσουμε εδώ, παρόλα αυτά, τα αποτελέσματα που θα παρουσιάσουμε αναλυτικά στο Κεφάλαιο 3 επεκτείνουν την δουλειά του Křížž ακολουθώντας παρόμοια φιλοσοφία απόδειξης.

Έστω G μία *ομάδα* και X ένα μη κενό σύνολο. Μία *αριστερή δράση* της G στο X είναι μία συνάρτηση από το σύνολο $G \times X$ στο X, που συμβολίζεται με $(g, x) \to gx$

[2] Θα δούμε το αποτέλεσμα του Schoenberg και το σχετικό πόρισμα στο Κεφάλαιο 2

και είναι τέτοια ώστε, $ex = x$ για κάθε $x \in X$ (όπου e είναι το ταυτοτικό στοιχείο της G) και $h(gx) = (hg)x$, για κάθε $x \in X$ και κάθε $h, g \in G$. Αντίστοιχα ορίζεται και μια δεξιά δράση της G.

Για κάθε $x \in X$ το σύνολο $Gx = \{gx : g \in G\}$ ονομάζεται *τροχία* του x μέσω της δράσης της G. Λέμε ότι η ομάδα G *δρα transitively* (ή ότι είναι *transitive*) αν έχει μόνο μία τροχιά δηλαδή αν για κάθε $x, y \in X$ ισχύει ότι $Gx = Gy$.

Στην θεωρία μετρικών χώρων σημαντικό ρόλο παίζει η ομάδα συμμετριών ενός συνόλου.

Ορισμός 1.18. *Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Το σύνολο*

$$S_X = \{f : X \to X \mid (\forall x, y \in X) d(x, y) = d(f(x), f(y))\},$$

όλων των ισομετριών από το X στον εαυτό του, εφοδιασμένο με την πράξη της σύνθεσης συναρτήσεων, αποτελεί μια ομάδα η οποία ονομάζεται ομάδα συμμετριών *του X.*

Η ομάδα συμμετριών του X δρα στο X με τον προφανή τρόπο ενώ αν αυτή η δράση είναι transitive τότε λέμε ότι το X είναι *transitive*.

Κάποιες γενικές παρατηρήσεις σχετικά με τις ομάδες συμμετριών σε Ευκλείδειους χώρους έχουν ως εξής. Η ομάδα συμμετριών του $\mathbb{R}^n$ συμβολίζεται με $E(n)$ και κάθε στοιχείο της είναι της μορφής $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{A}$ για κάποιο $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ και $\boldsymbol{A}$ έναν ορθογώνιο μετασχηματισμό. Αν $X \subset \mathbb{R}^n$ και το X περιέχει $n + 1$ αφινικά ανεξάρτητα διανύσματα, τότε κάθε $g \in S_X$ επεκτείνεται μοναδικά σε μια γραμμική ισομετρία σε ολόκληρο τον $\mathbb{R}^n$ και μπορούμε να ταυτίσουμε το S_X με μια μοναδική υποομάδα της ομάδας συμμετριών $E(n)$ του $\mathbb{R}^n$. Η ομάδα συμμετριών της σφαίρας S_{n-1} του $\mathbb{R}^n$ με κέντρο το 0 συμβολίζεται με $O(n)$ ενώ την ταυτίζουμε με το σύνολο των $n \times n$ ορθογώνιων πινάκων με πράξη τον συνήθη πολλαπλασιασμό πινάκων. Τέλος να αναφέρουμε ότι κάθε πεπερασμένο transitive ευκλείδειο σύνολο είναι σφαιρικό.

Τα αποτελέσματα του Kříž αφορούν περιπτώσεις όπου η ομάδα συμμετριών S_X ενός ευκλείδειου συνόλου X ή κάποια υποομάδα της G, είναι επιλύσιμες, παρακάτω θα θυμίσουμε εν τάχη κάποια πράγματα για τις επιλύσιμες ομάδες.

Έστω G ομάδα και $H < G$ μία υποομάδα της G. Η H λέγεται *κανονική υποομάδα* της G αν $gH = Hg$ για κάθε $g \in G$ όπου $gH = \{gh \mid h \in H\}$, το γεγονός αυτό συμβολίζεται γράφοντας $H \lhd G$. Ισοδύναμα, η H είναι κανονική υποομάδα της G αν η H είναι ο πυρήνας ενός ομομορφισμού $f : G \to F$ για κάποια ομάδα F. Σημαντική λεπτομέρεια είναι ότι αν $F \lhd H$ και $H \lhd G$, δεν συνεπάγεται ότι $F \lhd G$.

Μία ομάδα G λέγεται *επιλύσιμη* αν υπάρχει μια *υποκανονική σειρά* $\{e\} = G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_n = G$, τέτοια ώστε, G_i/G_{i-1} είναι αβελιανή για κάθε $i \in [n]$. Αν η G είναι πεπερασμένη, τότε η G είναι επιλύσιμη, αν και μόνο αν, έχει μία υποκανονική σειρά τέτοια ώστε όλοι οι παράγοντες G_i/G_{i-1} να είναι κυκλικές ομάδες.

Κάθε αβελιανή ομάδα είναι επιλύσιμη, ενώ από το διάσημο θεώρημα των Feit και Thomson [8], κάθε πεπερασμένη ομάδα περιττής τάξης είναι επιλύσιμη. Επίσης, κάθε ομάδα G τάξης $|G| < 60$ είναι επιλύσιμη. Από την άλλη, η συμμετρική ομάδα S_n όλων των μεταθέσεων n το πλήθος στοιχείων, είναι επιλύσιμη μόνο για $n \leq 4$ ενώ η εναλλάσσουσα ομάδα A_5 με $|\mathrm{A}_5| = 60$ είναι η μικρότερη μη επιλύσιμη ομάδα.

Τα κύρια αποτελέσματα στην εργασία [23] του Křížείναι τα παρακάτω.

Θεώρημα 1.19. *Έστω $X \subset \mathbb{R}^n$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ και έστω $G < S_X$ μια επιλύσιμη υποομάδα της ομάδας συμμετριών του X. Τότε, για κάθε $r \in \mathbb{N}$ υπάρχει $N = N(G, r) \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε για κάθε r-χρωματισμό $c : \mathbb{R}^N \to [r]$ του $\mathbb{R}^N$, να υπάρχει μια ισομετρία $f : X \to \widetilde{X} \subset \mathbb{R}^N$ τέτοια ώστε για κάθε $\boldsymbol{x} \in X$ το σύνολο $\{f(g\boldsymbol{x}) \mid g \in G\}$ να είναι μονοχρωματικό.*

Με απλά λόγια το Θεώρημα 1.19 μας υπόσχεται ότι για κάθε επιλύσιμη υποομάδα G συμμετριών του X και για αρκετά μεγάλη διάσταση, κάθε χρωματισμός θα περιέχει ένα αντίγραφο του X το οποίο να έχει μονοχρωματικές τις τροχιές της G.

Από το Θεώρημα 1.19 έχουμε άμεσα το επόμενο.

Θεώρημα 1.20. *Κάθε πεπερασμένο ευκλείδειο σύνολο το οποίο έχει μια επιλύσιμη ομάδα συμμετριών $G < S_X$ η οποία δρα transitively, είναι Ramsey.*

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Ramsey ο Křížεπεκτείνει το Θεώρημα 1.20 ώστε να συμπεριλάβει και την περίπτωση όπου ένα X έχει επιλύσιμη ομάδα συμμετριών με δύο τροχιές.

Θεώρημα 1.21. *Έστω X πεπερασμένο transitive ευκλείδειο σύνολο και $G < S_X$ επιλύσιμη και τέτοια ώστε να υπάρχουν $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ με $G\boldsymbol{x} \cup G\boldsymbol{y} = X$. Τότε το X είναι Ramsey.*

Τα παραπάνω ισχυρά και πολύ γενικά αποτελέσματα του Kříž, του επέτρεψαν να συμπληρώσει τον κατάλογο των Ramsey συνόλων με όλα τα κανονικά πολύγωνα και όλα τα πλατωνικά στερεά (ή ακριβέστερα με τα σύνολα κορυφών τους), ας δούμε πως.

Όσον αφορά τα κανονικά πολύγωνα, η ομάδα συμμετριών τους είναι η διεδρική ομάδα D_n η οποία είναι επιλύσιμη, μάλιστα η υποομάδα όλων των στροφών του πολυγώνου είναι μια κυκλική υποομάδα της D_n η οποία δρα transitively.

Θυμίζουμε εδώ ότι πλατωνικά στερεά ονομάζονται τα κανονικά κυρτά στερεά του τρισδιάστατου χώρου. Ένα πολύεδρο λέγεται κανονικό, αν η ομάδα συμμετριών του δρα transitively, όχι μόνο στις κορυφές, αλλά και στις ακμές και πλευρές του σχήματος. Τα πλατωνικά στερεά είναι πολύ συμμετρικά σχήματα αφού κατασκευάζονται από ίσα κανονικά πολύγωνα, με ίσο αριθμό από αυτά να συναντιούνται σε κάθε κορυφή. Υπάρχουν ακριβώς πέντε πλατωνικά στερεά, αυτά είναι, το κανονικό Τετράεδρο, ο Κύβος, το Οκτάεδρο, το Δωδεκάεδρο και το Εικοσάεδρο.

Όσον αφορά τις Ramsey ιδιότητες τους, είδαμε ήδη ότι το κανονικό Τετράεδρο και ο Κύβος είναι Ramsey. Το κανονικό Οκτάεδρο μπορεί να δει κανείς ότι εμφυτεύεται στον τετραδιάστατο υπερκύβο. Ένας άλλος τρόπος τρόπος να δειχθεί ότι το Οκτάεδρο είναι Ramsey, είναι να παρατηρήσει κανείς ότι η ομάδα συμμετριών του είναι επιλύσιμη και προφανώς δρα transitively.

Το Δωδεκάεδρο και το Εικοσάεδρο, είναι δυϊκά μεταξύ τους και συνεπώς έχουν την ίδια ομάδα συμμετριών η οποία όμως, δεν είναι επιλύσιμη. Παρόλα αυτά, και τα δύο έχουν μια κυκλική υποομάδα με δύο τροχιές και επομένως είναι Ramsey.

Το 1992, ένα χρόνο μετά το [23], ο Křížž στο [22] έδωσε μία απόδειξη για το γεγονός ότι και τα ισοσκελή τραπέζια είναι Ramsey.

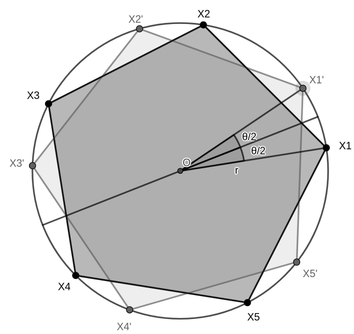
Θεώρημα 1.22. *Κάθε ισοσκελές τραπέζιο είναι Ramsey*

Το αξιοσημείωτο με την απόδειξη που έδωσε ο Křížž, είναι ότι, ενώ θα μπορούσε να δείξει ότι το αποτέλεσμα είναι πόρισμα του δικού του θεωρήματος για τα σύνολα με επιλύσιμη ομάδα συμμετριών, μέσω μιας όμορφης και γλαφυρής γεωμετρικής κατασκευής, αντιθέτως χρησιμοποίησε το θεώρημα του Ramsey και μια συνδυαστικού τύπου κατασκευή.

Συγκεκριμένα ο Křížž ξεκινάει παρατηρώντας ότι αν $ABC'D'$ είναι ένα ισοσκελές τραπέζιο με μικρή βάση AB και μεγάλη $C'D'$, το οποίο είναι Ramsey, τότε κάθε ισοσκελές τραπέζιο $ABCD$ με βάσεις ίδιου μήκους αλλά μήκος πλευράς μεγαλύτερο θα είναι επίσης Ramsey. Στην συνέχεια χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Ramsey με ένα έξυπνο τρόπο, καταφέρνει να δείξει ότι για κάθε ισοσκελές τραπέζιο, υπάρχει ένα άλλο, με ίδιες βάσεις αλλά μικρότερες πλευρές, το οποίο είναι Ramsey.

Για να παρουσιάσουμε μια καθαρά γεωμετρική απόδειξη είναι σκόπιμο να κάνουμε μια παρατήρηση για την γεωμετρία της διεδρικής ομάδας συμμετριών ενός κανονικού n-γώνου. Ένα κανονικό n-γωνο έχει σαν συμμετρίες n στροφές, μία για κάθε ακέραιο πολλαπλάσιο του $2\pi/n$ και n ανακλάσεις κατά άξονες, όπου κάθε δύο διαδοχικοί έχουν μεταξύ τους γωνία π/n. Επομένως συνολικά έχουμε $2n$ συμμετρίες, παρόλο που το n-γωνο έχει μόνο n-κορυφές. Αυτό συμβαίνει διότι το n-γωνο είναι η τροχιά ενός σημείου το οποίο βρίσκεται πάνω σε κάποιο από τους άξονες ανακλάσεων και έτσι, αφού πάρουμε όλα τα σημεία που είναι εικόνες μέσω των στροφών της συγκεκριμένης αναπαράστασης του D_n, η δράση κάθε ανάκλασης δεν θα "παράξει" νέα στοιχεία.

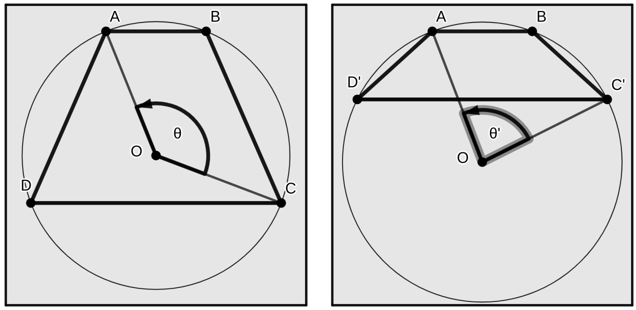
Η δράση μίας ομάδας G σε ένα σύνολο X λέγεται *ελεύθερη* αν $gx = x \Rightarrow g = e$, ή διαφορετικά, αν το μόνο στοιχείο της G που έχει σταθερό σημείο είναι το ταυτοτικό. Σε αυτή την περίπτωση, αν η δράση είναι transitive θα έχουμε ότι $|G| = |X|$. Πηγαίνοντας πίσω στο κανονικό n-γωνο βλέπουμε ότι η δράση της ομάδας δεν είναι ελεύθερη. Αν θεωρήσουμε την ίδια αναπαράσταση της D_n, αν δηλαδή πάρουμε τους ίδιους άξονες ανακλάσεων και την αφήσουμε να δράσει σε ένα άλλο σημείο x_1, το οποίο να μην βρίσκεται πάνω σε κάποιον από τους άξονες ανακλάσεων, τότε η τροχιά που θα παραχθεί θα αντιστοιχεί στην ένωση δύο κανονικών n-γώνων στριμμένα το ένα από το άλλο κατά γωνία διπλάσια της γωνίας μεταξύ του x_1 και του πλησιέστερου άξονα ανάκλασης. Το Σχήμα 1.1 περιγράφει ένα παράδειγμα.



Σχήμα 1.1: Ένα πεντάγωνο και ένα στριμμένο αντίγραφο του με ομάδα συμμετριών D_5 η οποία δρα transitively.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι το σύνολο των $2n$ κορυφών ενός κανονικού n-γώνου και ενός στριμμένου αντιγράφου του έχει σαν ομάδα συμμετριών μια διεδρική ομάδα D_n η οποία είναι βέβαια επιλύσιμη. Επομένως για κάθε κανονικό πολύγωνο Π αν Π_ϕ είναι ένα στριμμένο κατά γωνία ϕ αντίγραφο του η ένωση τους $\Pi \cup \Pi_\phi$ είναι ένα Ramsey σύνολο.

Μια καθαρά γεωμετρική απόδειξη για το γεγονός ότι τα ισοσκελή τραπέζια είναι Ramsey είναι η εξής: Πρώτα παρατηρούμε ότι αν $0 < \alpha \leq b$, τότε για κάθε $c > \frac{1}{2}(b - \alpha)$ υπάρχει ένα ισοσκελές τραπέζιο με μήκος μεγάλης βάσης b μήκος μικρής βάσης α και μήκος πλευρών c. Στην συνέχεια παρατηρούμε (δείτε την εικόνα 1.2) ότι για δεδομένα α και b όπως παραπάνω, όσο μικραίνει το c, τόσο μικραίνουν οι γωνίες που ορίζονται από τις πλευρές του τραπεζίου, όταν αυτές ειδωθούν ως χορδές στον περιγεγραμμένο κύκλο.



Σχήμα 1.2: Όταν τα μήκη των βάσεων του τραπεζίου παραμένουν σταθερά, καθώς μικραίνει η πλευρά, μικραίνει και η γωνία θ.

Με βάση τα παραπάνω και λόγω συνέχειας, δοθέντος ενός ισοσκελούς τραπεζίου $ABCD$ όπου AB είναι η μικρή βάση και CD η μεγάλη, μπορούμε να βρούμε ισοσκελές τραπέζιο $ABC'D'$ τέτοιο ώστε, $|C'D'| = |CD|$, $|BC'| < |BC|$ και αν θεωρήσουμε τον περιγεγραμμένο κύκλο K του $ABC'D'$ με κέντρο το O, η γωνία μεταξύ των OA και OC' να είναι ρητό πολλαπλάσιο του π. Επομένως, υπάρχει ένα κανονικό n-γωνο Π στον κύκλο K του οποίου τα A και C' είναι κορυφές. Τότε στρίβοντας το Π κατά γωνία $\phi = \widehat{C'OB}$ θα έχουμε ότι οι κορυφές του τραπεζίου $ABC'D'$ είναι όλες σημεία του $\Pi \cup \Pi_\phi$ το οποίο είναι Ramsey.

Επομένως αν θέσουμε $\delta = \sqrt{|BC|^2 - |BC'|^2}$ το πρίσμα $\left(\Pi \cup \Pi_\phi\right) \times \{0, \delta\} \subset \mathbb{R}^3$ είναι Ramsey ως γινόμενο Ramsey. Επίσης περιέχει ένα αντίγραφο του $ABCD$ το οποίο μπορούμε να δούμε αν θέσουμε

$$\widetilde{A} = (A, \delta),\ \widetilde{B} = (B, \delta),\ \widetilde{C} = (C', 0),\ \text{και } \widetilde{D} = (D', 0).$$

Όπως προαναφέραμε, έπρεπε να περάσουν δεκαπέντε χρόνια μετά το τελευταίο αποτέλεσμα του Křížγια τα ισοσκελή τραπέζια μέχρι να έχουμε κάποιο νεότερο Ramsey σύνολο. Την συνέχεια την έκανε ο Cantwell [1] αποδεικνύοντας ότι όλα κανονικά πολύτοπα είναι Ramsey, το οποίο κατάφερε εφαρμόζοντας το θεώρημα του Kříž για τις επιλύσιμες ομάδες συμμετριών.

Για τα κανονικά πολύτοπα σε $n \geq 5$ διαστάσεις δεν χρειάστηκε να δείξει κάτι, αυτό διότι σε περισσότερες από πέντε διαστάσεις τα κανονικά πολύτοπα χωρίζονται σε τρεις κατηγορίες, είναι είτε κανονικά simplex, είτε υπερκύβοι, είτε το ανάλογο του κανονικού οκταέδρου το οποίο είναι δυϊκό του υπερκύβου. Στις τέσσερις διαστάσεις υπάρχουν έξι κανονικά πολύτοπα, τα τρία που προαναφέραμε και τα 24-cell, 120-cell και 600-cell. Το 24-cell και το 600-cell εμφυτεύονται στο 120-cell για το οποίο ο Cantwell έδειξε ότι έχει έχει μια επιλύσιμη ομάδα συμμετριών με δύο τροχιές και αφού είναι transitive είναι Ramsey.

Στις επόμενες ενότητες, θα περάσουμε στην ανάπτυξη των αποτελεσμάτων που προέκυψαν κατά την διάρκεια της παρούσης διδακτορικής διατριβής τα οποία αφορούν την Ευκλείδεια Ramsey Θεωρία.

1.3 Μια διαφορετική ματιά στα Simplices

Όπως είδαμε, κάθε simplex είναι Ramsey από το αποτέλεσμα των Franlk και Rödl στο [12], των οποίων η απόδειξη χρησιμοποιεί τεχνικές από την extremal θεωρία συνόλων και δεν φαίνεται να αναδεικνύει κάποια γενική αρχή που "αναγκάζει" τα simplices να είναι Ramsey. Αντιθέτως, το θεώρημα του Křìž για τα transitive σύνολα με επιλύσιμη ομάδα συμμετριών, στηρίζει το γεγονός ότι ένα σύνολο είναι Ramsey σε ένα απτό γεωμετρικό λόγο, αν ένα σύνολο είναι πολύ συμμετρικό (είναι transitive) και αυτές οι συμμετρίες του συνδυάζονται με ένα απλό τρόπο (η ομάδα συμμετριών του είναι επιλύσιμη), τότε αυτό είναι Ramsey.

Ο παραπάνω χαρακτήρας τους αποτελέσματος του Křìž, του προσδίδει ευρεία εφαρμοστικότητα, αφού είναι ξεκάθαρο ότι όλα τα Ramsey σύνολα τα οποία αναφέραμε μέχρι αυτό το σημείο, εκτός των simplices, συμπεριλαμβάνονται στο θεώρημα του Křìž. Παρόλο που ο Křìž πήρε διαφορετική διαδρομή για να αποδείξει το ότι όλα τα ισοσκελή τραπέζια είναι Ramsey, είδαμε ότι αυτή τους η ιδιότητα μπορεί να ιδωθεί ως απόρροια του γεγονότος ότι κάθε ισοσκελές τραπέζιο εμφυτεύεται σε ένα τρισδιάστατο πρίσμα. Για τη πρώτη μη τετριμμένη περίπτωση simplex, που δεν είναι άλλη από το τρίγωνο, μια παρόμοια και απλούστερη γεωμετρική κατασκευή (δείτε στα [19] και [25]) δείχνει ότι κάθε τρίγωνο εμφυτεύεται σε ένα τρισδιάστατο στριμμένο πολυγωνικό πρίσμα.

Ο συγγραφέας και ο επιβλέποντας του Βασίλειος Κανελλόπουλος είχαμε την ειλικρινή απορία αν το αποτέλεσμα των Frankl και Rödl για τα simplices, θα μπορούσε να συναχθεί από αυτό του Křìž. Σε αυτή την ενότητα θα απαντήσουμε καταφατικά στην παραπάνω ερώτηση, ας δούμε πως.

Simplices και κανονικοί πολυγωνικοί τόροι

Για να δείξουμε ότι το θεώρημα των Frankl και Rödl είναι πόρισμα του θεωρήματος του Křìž, θα χρησιμοποιήσουμε μια γενίκευση της έννοιας του πρίσματος σε περισσότερες διαστάσεις. Ένα σύνηθες πρίσμα είναι το γινόμενο ενός πολυγώνου και ενός ευθυγράμμου τμήματος, το οποίο μπορεί να θεωρηθεί ως ένα (εκφυλισμένο) δίγωνο. Έχουμε λοιπόν τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 1.23 (Κανονικός πολυγωνικός τόρος). *Έστω $(T_i)_{i\in[n]}$ μία πεπερασμένη* *ακολουθία κανονικών πολυγώνων του* $\mathbb{R}^2$. *Το γινόμενο*

$$T = \prod_{i\in[n]} T_i = \left\{(\boldsymbol{t}_i)_{i\in[n]} \,\middle|\, (\forall i \in [n])\, \boldsymbol{t}_i \in T_i\right\} \subseteq \mathbb{R}^{2n}$$

θα λέγεται κανονικός πολυγωνικός τόρος.

Ο συνήθης τόρος που "ζει" στον τρισδιάστατο χώρο και ο οποίος έχει την μορφή μίας φουσκωμένης σαμπρέλας, είναι τοπολογικά ισοδύναμος με το γινόμενο δύο κύκλων. Μπορούμε να βλέπουμε τους κανονικούς πολυγωνικούς τόρους σαν διακριτές εκδοχές των λεγόμενων *Clifford τόρων*, δηλαδή του γινομένου ενός πεπερασμένου αριθμού κύκλων.

Παρατηρήστε ότι αν $\{r_i\}_{i\in[n]}$ είναι οι ακτίνες των αντίστοιχων περιγεγραμμένων κύκλων των κανονικών πολυγώνων $(T_i)_{i\in[n]}$, κάθε ένας από τους οποίους έχει κέντρο το 0 και $r^2 = \sum_i r_i^2$ τότε για κάθε $\boldsymbol{x} \in T = \prod_{i\in[n]} T_i$, ισχύει ότι $\|\boldsymbol{x}\| = r$, δηλαδή ο T είναι υποσύνολο της σφαίρας με ακτίνα r. Μία άλλη σημαντική παρατήρηση, είναι ότι κάθε κανονικός πολυγωνικός τόρος έχει μια αβελιανή (και άρα επιλύσιμη) ομάδα συμμετριών που δρα transitively, αφού η δράση του γινομένου των n κυκλικών ομάδων $(C_i)_{i\in[n]}$ των στροφών των πολυγώνων $(T_i)_{i\in[n]}$ είναι μια υποομάδα της ομάδας συμμετριών του τόρου με μία μόνο τροχιά.

Το παρακάτω θεώρημα περιέχεται στο [21] και συνδέει την κλάση των simplices με αυτήν των κανονικών πολυγωνικών τόρων.

Θεώρημα 1.24. *Κάθε simplex εμφυτεύεται ισομετρικά σε κάποιον κανονικό πολυγωνικό τόρο.*

Το Θεώρημα 1.24 μας δίνει άμεσα μια εναλλακτική απόδειξη του θεωρήματος των Franlk και Rödl για τα simplices μέσω του θεωρήματος του Křiž και επομένως, δημιουργεί μία σύνδεση μεταξύ αυτών των δύο θεμελιωδών αποτελεσμάτων. Πράγματι, κάθε κανονικός πολυγωνικός τόρος είναι Ramsey σύνολο και αφού από τον ορισμό της η Ramsey ιδιότητα είναι κληρονομική στα υποσύνολα, κάθε ευκλείδειο σύνολο που εμφυτεύεται σε έναν κανονικό πολυγωνικό τόρο είναι Ramsey.

Μέχρι τώρα, όσα αποτελέσματα έχουμε δει και αφορούν Ramsey σύνολα, μπορούν να προκύψουν ως πορίσματα του θεωρήματος του Křiž. Μέχρι το τέλος αυτού του κειμένου, θα γίνει φανερό ότι στην πραγματικότητα το παραπάνω ισχύει για όλα τα μέχρι σήμερα γνωστά Ramsey σύνολα.

Τις λεπτομέρειες της απόδειξης του θεωρήματος 1.24 θα τις δούμε στο Κεφάλαιο 2. Στην συνέχεια θα περάσουμε στην μελέτη των Transitive συνόλων στην Ευκλείδεια Ramsey θεωρία.

1.4 Transitive σύνολα στην Ευκλείδεια Θεωρία Ramsey

Σε αυτή την ενότητα θα κάνουμε μια σύνοψη ενός μέρους των γνώσεων μας σχετικά με τα transitive ευκλείδεια σύνολα και την σύνδεση που έχει αυτή η γεωμετρική έννοια με την Ευκλείδεια θεωρία Ramsey. Όταν λέμε ότι ένα πεπερασμένο ευκλείδειο σύνολο X είναι *subtransitive* εννοούμε ότι αυτό εμφυτεύεται σε ένα transitive πεπερασμένο ευκλείδειο σύνολο Y, το οποίο πιθανώς βρίσκεται σε κάποιο Ευκλείδειο χώρο μεγαλύτερης διάστασης από αυτήν του X[3]. Όπως είδαμε, όλα τα Ramsey σύνολα που παρουσιάσαμε μέχρι τώρα είναι subtransitive, αυτό το συμπέρασμα (αλλά όχι η επιλυσιμότητα της ομάδας συμμετριών του transitive υπερσυνόλου) μπορεί εύκολα να εξαχθεί αν κοιτάξει κάποιος προσεκτικά τις πρωτότυπες αποδείξεις των αντίστοιχων αποτελεσμάτων. Πράγματι, στην απόδειξη των Frankl και Rödl στο [12] ότι τα simplices είναι Ramsey, καθώς επίσης στη απόδειξη του Křížστο [22] ότι τα ισοσκελή τραπέζια είναι Ramsey, σε κάποια στιγμή της απόδειξης χρησιμοποιείται μια εμφύτευση σε κάποιο transitive σύνολο.

Σε αυτή την παρατήρηση βασίστηκαν οι Leader, Russell και Walters, όταν στο [25] πρότειναν μια εναλλακτική εικασία από αυτή του Graham, σύμφωνα με την οποία τα Ramsey σύνολα είναι ακριβώς τα subtransitive σύνολα.

Εικασία 1.25 (Conjecture A [25])
Ένα πεπερασμένο ευκλείδειο σύνολο είναι Ramsey αν και μόνο αν είναι subtransitive.

Θεωρούμε σκόπιμο να κάνουμε εδώ μία παρένθεση, για να αναδείξουμε το γεγονός ότι η γνώση μας για γύρω από τα subtransitive ευκλείδεια σύνολα είναι ακόμα ελλιπής. Όταν οι παραπάνω εξέφρασαν την εικασία τους, χρειάστηκε να αποδείξουν ότι αυτή είναι όντως γνησίως διαφορετική από αυτή του Graham. Πράγματι, ενώ θεωρείται δεδομένη γνώση ότι τα transitive και άρα τα subtransitive Ευκλείδεια σύνολα είναι σφαιρικά, δεν ισχύει το ίδιο για το ερώτημα αν υπάρχουν σφαιρικά που δεν είναι subtransitive. Στην εργασία τους [25] απόδειξαν τελικά ότι σχεδόν όλα τα υποσύνολα ενός κύκλου δεν είναι σφαιρικά, αποτέλεσμα το οποίο εκλέπτυναν στο [24] δείχνοντας ότι σχεδόν όλα τα κυκλικά τετράπλευρα επίσης δεν είναι subtransitive. Το 2013 ο Eberhard στο [4] γενίκευσε το αποτέλεσμα τους δείχνοντας ότι σχεδόν όλα τα σφαιρικά Ευκλείδεια σύνολα του $\mathbb{R}^d$ με $d+2$ στοιχεία, δεν είναι subtransitive.

Επανερχόμενοι πίσω στην εικασία 1.25 και συγκεκριμένα στην κατεύθυνση που λέει ότι κάθε subtransitive σύνολο είναι Ramsey, οι LRW δείξανε ότι αυτή μπορεί να μετασχηματιστεί σε μία λίστα από ισοδύναμες εικασίες από τις οποίες έχουν αφαιρεθεί οι γεωμετρικές έννοιες, με την ελπίδα ότι αυτές θα είναι πιο εύκολο να επιλυθούν. Μία

[3] Να σημειώσουμε εδώ, ότι μερικοί συγγραφείς σε αντίθεση με εμάς, χρησιμοποιούν τον όρο *finitely subtransitive* για να δώσουν έμφαση στο γεγονός ότι το transitive σύνολο στο οποίο γίνεται η εμφύτευση, είναι πεπερασμένο και γράφουν *subtransitive* αν αυτό μπορεί να είναι και άπειρο.

από αυτές, η (Conjecture C)[25] δηλώνει ότι κάθε πεπερασμένη ομάδα ικανοποιεί μια συνδυαστικού τύπου ιδιότητα η οποία προσομοιάζει το θεώρημα των Hales και Jewett [17].

Στην συνέχεια, αφού αναπτύξουμε τον απαραίτητο συμβολισμό, θα περιγράψουμε την εικασία τους και θα αναφέρουμε ένα πρόσφατο αποτέλεσμα μας [20], σύμφωνα με το οποίο οι πεπερασμένες επιλύσιμες ομάδες ικανοποιούν μια πιο ισχυρή ιδιότητα από αυτή που εικάζεται, επιλύοντας εν μέρη την εικασία τους.

Από την Γεωμετρία στην συνδυαστική των λέξεων

Για την συνέχεια θα χρειαστούμε πρώτα έναν ορισμό.

Ορισμός 1.26. *Έστω $Y \subset \mathbb{R}^n$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Για $r \in \mathbb{N}$ και X κάποιο πεπερασμένο ευκλείδειο σύνολο, το Y θα λέγεται r-Ramsey για το X αν για κάθε χρωματισμό του Y με r χρώματα, υπάρχει ένα μονοχρωματικό υποσύνολο $X' \subset Y$ που είναι ισομετρικό αντίγραφο του X.*

Θυμηθείτε ότι από την Πρόταση 1.5 προκύπτει ότι ένα πεπερασμένο ευκλείδειο σύνολο είναι Ramsey αν και μόνο αν για κάθε $r \in \mathbb{N}$ υπάρχει πεπερασμένο Y το οποίο είναι r-Ramsey για το X.

Όπως προαναφέραμε η μία κατεύθυνση της Εικασίας 1.25 περιγράφεται από μια λίστα ισοδύναμων εικασιών, σκοπός των οποίων είναι να “εξαφανίσουν” τις γεωμετρικές έννοιες με την ελπίδα ότι το πρόβλημα θα γίνει πιο προσιτό. Το πρώτο βήμα προς αυτή την κατεύθυνση γίνεται από την παρακάτω εικασία.

Εικασία 1.27 (Conjecture B [25])
Για κάθε πεπερασμένο transitive ευκλείδειο σύνολο X και για κάθε $r \in \mathbb{N}$, υπάρχει $\lambda = d(X,r) \in \mathbb{R}$ με $\lambda > 0$ και $N = N(X,d) \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε το $\lambda \cdot X^N$ να είναι r-Ramsey για το X.

Γράφοντας $\lambda \cdot X^N$ εννοούμε το σύνολο $\left\{(\lambda \cdot x_i)_{i\in[N]} \,\middle|\, (\forall i \in [N])\, x_i \in X\right\}$. Είναι φανερό ότι αν είναι αληθής η Εικασία 1.27 τότε κάθε transitive σύνολο θα είναι Ramsey και επομένως και κάθε subtransitive θα είναι Ramsey.

Για να περιγράψουμε την επόμενη εικασία η οποία είναι ισοδύναμη με την Εικασία 1.27 θα χρειαστούμε μια αλγεβρική μορφή των *μεταβλητών λέξεων* την οποία εισήγαγαν οι Graham και Rothchild όταν απέδειξαν στην εργασία τους ορόσημο [16] το ομώνυμο θεώρημα.

Έστω G μία πεπερασμένη ομάδα και ένα μη κενό πεπερασμένο σύνολο X. Σκεφτόμαστε το σύνολο X σαν ένα *αλφάβητο*, του οποίου τα στοιχεία είναι τα *γράμματα* του αλφαβήτου και αποκαλούμε τις πεπερασμένες ακολουθίες στοιχείων του X ως *σταθερές λέξεις*. Σταθεροποιούμε επίσης ένα σύνολο $\{v_g \mid g \in G\}$ από διακεκριμένες *μεταβλητές*, μία για κάθε στοιχείο της G, για τις οποίες υποθέτουμε ότι $v_g \notin X$ για κάθε $g \in G$.

Για κάθε μη κενό υποσύνολο H της G, με τον όρο *H-μεταβλητή λέξη επί του X, μήκους $n \in \mathbb{N}$*, εννοούμε μία πεπερασμένη ακολουθία $W = (w_i)_{i=1}^n$ με $w_i \in X \cup \{v_h \mid h \in H\}$ για κάθε $i \in [n]$, η οποία είναι τέτοια ώστε τα σύνολα $F_h = \{i \in [n] \mid w_i = v_h\}$ να είναι μη κενά για κάθε $h \in H$. Ο θετικός ακέραιος $d = \sum_{h \in H} |F_h|$ θα αποκαλείται *βαθμός* της W.

Δοθείσας μίας ομάδας G, ενός μη κενού συνόλου X, ενός $H \subset G$, μιας H-μεταβλητής λέξης W επί του X, μίας δράσης της G επί του X και ενός $x \in X$, με $W(x)$ συμβολίζουμε την σταθερή λέξη ίδιου μήκους, η οποία προκύπτει από την W αν αφήσουμε τα γράμματα της W όπως έχουν και αντικαταστήσουμε κάθε εμφάνιση κάθε μεταβλητής v_h από το αποτέλεσμα hx της δράσης του h στο x. Τυπικά, αν $W = (w_i)_{i=1}^n \in \big(X \cup \{v_h \mid h \in H\}\big)^n$ τότε $W(x) = \big(w_i(x)\big)_{i=1}^n \in X^n$, όπου

$$w_i(x) = \begin{cases} w_i & \text{αν } w_i \in X, \\ hx & \text{αν } w_i = v_h \text{ για κάποιο } h \in H. \end{cases} \tag{1.4}$$

Για να γίνει περισσότερο κατανοητή η παραπάνω έννοια δίνουμε το ακόλουθο παράδειγμα.

Παράδειγμα 1.28. *Έστω $X = [3]$, $G = S_3$ η ομάδα των μεταθέσεων των τριών στοιχείων του $[3]$ και $H = \{e, \tau, \tau^2\}$ η κυκλική υποομάδα της S_3 που παράγεται από τον κύκλο $\tau = (1\ 2\ 3)$. Η ακολουθία $W = (v_e, 1, 2, v_{\tau^2}, v_\tau)$ είναι μία H-μεταβλητή λέξη επί του X μήκους $n = 5$ και βαθμού $d = 3$. Επιπλέον, θεωρώντας την φυσιολογική δράση της S_3 στο $[3]$ έχουμε ότι $W(1) = (1, 1, 2, 3, 2)$, $W(2) = (2, 1, 2, 1, 3)$ και $W(3) = (3, 1, 2, 2, 1)$.*

Σε σχέση με την Ευκλείδεια θεωρία Ramsey, αξίζει να αναφέρουμε την παρακάτω γεωμετρική ερμηνεία των H-μεταβλητών λέξεων.

Παρατήρηση 1.29. *Έστω X ένα πεπερασμένο ευκλείδειο σύνολο του $\mathbb{R}^m$ και G μία υποομάδα της ομάδας συμμετριών του X η οποία δρα με τον φυσιολογικό τρόπο. Έστω $\emptyset \neq H \subseteq G$ και $W = (w_i)_{i=1}^n$ μια H-μεταβλητή λέξη επί του X μήκους n και βαθμού d. Τότε από την Εξίσωση 1.4 είναι εύκολο να δει κανείς ότι, η συνάρτηση $f : X \to d^{-1/2} X^n \subset \mathbb{R}^{mn}$ που ορίζεται από την σχέση $f(\boldsymbol{x}) = d^{-1/2} W(\boldsymbol{x})$ είναι μία ισομετρική εμφύτευση. Πράγματι, είναι άμεσο ότι*

$$\begin{aligned} \|d^{-1/2} W(\boldsymbol{x}) - d^{-1/2} W(\boldsymbol{x}')\|^2 &= \sum_{\substack{i \in [n] \\ (\exists h \in H)\, w_i = v_h}} d^{-1} \|h\boldsymbol{x} - h\boldsymbol{x}'\|^2 \\ &= \sum_{\substack{i \in [n] \\ (\exists h \in H)\, w_i = v_h}} d^{-1} \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'\|^2 \\ &= \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'\|^2 \end{aligned}$$

Τυπικά, στον συμβολισμό $W(x)$ της αντικατάστασης των μεταβλητών από γράμματα θα έπρεπε εμφανίζεται και η συγκεκριμένη δράση που εννοείται, αλλά συνήθως δεν θα υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης και αυτή θα παραλείπεται. Συγκεκριμένα, σε ότι ακολουθεί αν $G = X$ και αμελήσουμε να αναφέρουμε κάποια συγκεκριμένη δράση της ομάδας G στον εαυτό της, πάντα θα εννοούμε ότι η δράση δίνεται από την πράξη της ομάδας G. Επομένως σε αυτή την περίπτωση, αν W είναι μία H-μεταβλητή λέξη επί της G, τότε για κάθε $g \in G$, η $W(g)$ θα συμβολίζει την σταθερή λέξη που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε κάθε μεταβλητή v_h από το γινόμενο hg του h με το g στην G.

Υιοθετώντας τον παραπάνω συμβολισμό η τρίτη σε σειρά εικασία των Leader, Russell και Walters επαναδιατυπώνεται ως εξής.

Εικασία 1.30 (Conjecture C [25])
Έστω G μία πεπερασμένη ομάδα και $r \in \mathbb{N}$. Τότε υπάρχουν θετικοί ακέραιοι $d = d(G,r) \in \mathbb{N}$ και $N = N(G,r) \in \mathbb{N}$ τέτοιοι ώστε, για κάθε r-χρωματισμό $c\colon G^N \to [r]$ του G^N, υπάρχει ένα μη κενό $H \subset G$ και μια H-μεταβλητή λέξη W επί του G μήκους N και βαθμού d, τέτοια ώστε το σύνολο $\{W(g) \mid g \in G\}$ να είναι μονοχρωματικό.

Πριν προχωρήσουμε είναι χρήσιμο να σημειώσουμε το εξής.

Παρατήρηση 1.31. *Δοθείσης μιας H-μεταβλητής λέξης W επί του G μήκους n και βαθμού d, ενός μη κενού X στο οποίο δρα η ομάδα G και ενός $x_0 \in X$, μπορούμε με έναν φυσιολογικό τρόπο να ορίσουμε μια H-μεταβλητή λέξη επί του X ίδιου μήκους και βαθμού, την οποία θα συμβολίζουμε με W_{x_0}, ως εξής:*

$$(w_{x_0})_i = \begin{cases} w_i x_0 & \text{αν } w_i \in G, \\ v_h & \text{αν } w_i = v_h \text{ για κάποιο } h \in H. \end{cases} \tag{1.5}$$

Δηλαδή αντικαθιστούμε τα γράμματα της W σύμφωνα με την δράσης τους στο x_0 και αφήνουμε τις μεταβλητές ως έχουν.

Η επόμενη πρόταση μας λέει ότι η εικασία που αφορά τις πεπερασμένες ομάδες συνεπάγεται την εικασία για το γινόμενο ενός transitive συνόλου.

Πρόταση 1.32. *Εικασία 1.30 $\Longrightarrow$ Εικασία 1.27.*

Απόδειξη
Έστω X ένα πεπερασμένο transitive ευκλείδειο σύνολο και $r \in \mathbb{N}$. Έστω G μια ομάδα συμμετριών του X η οποία δρα transitively και $d, N \in \mathbb{N}$ οι παράμετροι που προκύπτουν από την Εικασία 1.30 για την ομάδα G και για r χρώματα. Θα δείξουμε ότι το σύνολο $d^{-1/2} \cdot X^N$ είναι r-Ramsey για το X.

Έστω $c\colon\ d^{-1/2}\cdot X^N \to [r]$ ένας χρωματισμός του $d^{-1/2}\cdot X^N$. Επιλέγουμε ένα $\boldsymbol{x}_0 \in X$ και ορίζουμε έναν χρωματισμό $c_{\boldsymbol{x}_0}\colon\ G^N \to [r]$ του G^N μέσω της σχέσης

$$c_{\boldsymbol{x}_0}\left(g_1,\ldots,g_N\right) = c\left(d^{-1/2}\cdot\left(g_1\boldsymbol{x}_0,\ldots,g_N\boldsymbol{x}_0\right)\right).$$

Από την επιλογή των d και N υπάρχει μη κενό $H\subset G$ και μία H-μεταβλητή λέξη επί της G τέτοια ώστε το σύνολο $\{W(g)\mid g\in G\}$ να είναι $c_{\boldsymbol{x}_0}$-μονοχρωματικό.

Έστω $f\colon\ X\to d^{-1/2}\cdot X^N$ η οποία ορίζεται από την σχέση

$$f(\boldsymbol{x}) = d^{-1/2}W_{\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{x})$$

όπου $W_{\boldsymbol{x}_0}$ είναι η H-μεταβλητή λέξη επί του X την οποία ορίζουμε όπως αναφέραμε στην Παρατήρηση 1.31. Από την Παρατήρηση 1.29 έπεται ότι η f είναι ισομετρία και άρα το σύνολο $f(X) = \left\{d^{-1/2}W_{\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{x})\,\middle|\,\boldsymbol{x}\in X\right\}$ είναι ένα αντίγραφο του X. Τέλος αφού η δράση της G είναι transitive, για κάθε $\boldsymbol{x}\in X$ έχουμε:

$$\begin{aligned} c\left(d^{-1/2}W_{\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{x})\right) &= c\left(d^{-1/2}W_{\boldsymbol{x}_0}(g\boldsymbol{x}_0)\right)\ (\text{για κάποιο } g\in G)\\ &= c_{\boldsymbol{x}_0}\left(W(g)\right)\\ &= c_{\boldsymbol{x}_0}\left(W(e)\right)\\ &= c\left(d^{-1/2}W_{\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{x}_0)\right). \end{aligned}$$

□

Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι η Εικασία 1.30 η οποία δεν αναφέρει πουθενά κάποια γεωμετρική έννοια, αν αληθεύει, αυτό θα συνεπάγεται ότι κάθε πεπερασμένο subtransitive ευκλείδειο σύνολο είναι Ramsey.

Κάποιος ο οποίος έχει συναντήσει το θεώρημα Hales–Jewett [17] αναπόφευκτα θα αναγνωρίσει κάποιες ομοιότητες με τον ισχυρισμό της Εικασίας 1.30. Πράγματι, αν δεν απαιτούσαμε ο βαθμός d της μεταβλητής λέξης να εξαρτάται μόνο από την ομάδα G και τον αριθμό των χρωμάτων r και αντ' αυτού απαιτούσαμε να καθοριστεί αφού μας διδόταν ο χρωματισμός, τότε εύκολα θα μπορούσαμε με μια απλή εφαρμογή του θεωρήματος Hales–Jewett να βρούμε μια μονοχρωματική $\{e\}$-μεταβλητή λέξη.

Όμως παρατηρήστε ότι, το γεγονός ότι στην εικασία 1.30 "γνωρίζουμε" τον βαθμό d πριν μας δοθεί ο χρωματισμός, μας επιτρέπει να γνωρίζουμε σε πιο "φούσκωμα του X^N θα πρέπει να ψάξουμε το μονοχρωματικό αντίγραφο του X. Αν το d σταθεροποιείται μετά τον χρωματισμό η απόδειξη δεν θα μπορούσε να προχωρήσει και το μόνο που θα μπορούσαμε να δείξουμε, θα ήταν να βρούμε ένα μονοχρωματικό *ομοιόθετο αντίγραφο*, ανακτώντας έτσι το θεώρημα του Tibor Gallai [26][4]

[4]Σύμφωνα με τον Soifer [32] ο Gallai είχε το ασυνήθιστο συνήθειο να μην δημοσιεύει πολλά από τα αποτελέσματα του. Το αρχικό θεώρημα του, αφορούσε ομοιόθετα αντίγραφα στο πολυδιάστατο διακριτό πλέγμα και το δημοσίευσε ο Rado αποδίδοντας το στον Gallai. Η γενίκευση στους Ευκλείδειους χώρους εξάγεται εύκολα [15].

Στην πραγματικότητα μπορεί να αποδειχθεί εύκολα ότι ο βαθμός αν ζητάμε το d να δίνεται πριν τον χρωματισμό, τότε ακόμα και για δύο χρώματα υπάρχει χρωματισμός που αποκλείει κάθε μονοσύνολο H.

Αν και έχουμε να πούμε και άλλα σχετικά με τις εικασίες των Leader, Russel και Walters, σε αυτό το σημείο θα περάσουμε σε κάποια αποτελέσματα που απαντάνε εν μέρη στο αν και πότε αυτές ισχύουν.

Επιλύσιμες μεταβλητές λέξεις

Στην εργασία που ανέπτυξαν τις εικασίες τους οι Leader, Russel και Walters, δείξανε ότι κάποιες από αυτές (οι B,C,D,E και F στο [25]) είναι ισοδύναμες, δείξανε ότι υπάρχουν σφαιρικά σύνολα που δεν είναι subtransitive και επίσης αποδείξανε ότι σε κάποιες πολύ συγκεκριμένες περιπτώσεις, που μπορούν να οριστούν μόνο στην μία από αυτές[5], η εικασία ισχύει. Συγκεκριμένα δεν αποπειράθηκαν να επιλύσουν την Εικασία 1.30 για κάποιες απλές περιπτώσεις πεπερασμένων ομάδων.

Αν και τα αποτελέσματα του Kříž στο [23] φαίνονται πολύ σχετικά με την Εικασία 1.30, αυτά δεν μπορούν να εφαρμοστούν άμεσα, εν μέρη λόγω της επιπλέον δομής που υποθέτει ο Kříž. Για να επιτευχθεί αυτή η "μεταφορά" χρειάζονται οι έννοιες των μεταβλητών λέξεων που αναπτύξαμε προηγουμένως σε συνδυασμό με την στρατηγική του Kříž και με τεχνικές από την θεωρία Ramsey σε χώρους γινόμενα, ένα αντικείμενο για το οποίο μια πολύ καλή αναφορά είναι το βιβλίο [3].

Στην συνέχεια θα αναφέρουμε κάποια αποτελέσματα από τα οποία μπορούμε να συνάγουμε την Εικασία 1.30 για την περίπτωση των επιλύσιμων ομάδων, μάλιστα σε μία ισχυρότερη μορφή. Τις αποδείξεις για αυτά θα τις αναφέρουμε στο αντίστοιχο κεφάλαιο.

Παρακάτω θα ασχοληθούμε σχεδόν αποκλειστικά με H-μεταβλητές λέξεις επί ενός συνόλου X όπου για κάθε $h \in H$ κάθε μεταβλητή θα εμφανίζεται το ίδιο πλήθος φορών. Αυτές οι μεταβλητές λέξεις θα τις αποκαλούμε *uniform* . Αυτή η έννοια εμφανίζεται και στο [25] σε ένα παρόμοιο πλαίσιο.

Πριν προχωρήσουμε στα αποτελέσματα θα χρειαστούμε έναν επιπλέον ορισμό.

Ορισμός 1.33. *Έστω $\{e\} = G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_n = G$ μια υποκανονική σειρά, μιας επιλύσιμης ομάδας G, με κυκλικούς παράγοντες και έστω p_i η τάξη της κυκλικής ομάδας G_i/G_{i-1}, για κάθε $i \in [n]$. Ο αριθμός*

$$\prod_{i=1}^{n} p_i^{(p_i-1)\prod_{j>i} p_j} = p_1^{(p_1-1)\prod_{j=2}^{n} p_j} p_2^{(p_2-1)\prod_{j=3}^{n} p_j} \dots p_n^{p_n-1} \tag{1.7}$$

[5] Κάθε εικασία τους, υπόσχεται διαφορετικού τύπου μονοχρωματική δομή, αργότερα στο κείμενο θα περιγράψουμε και τις υπόλοιπες εικασίες και θα αναφερθούμε στις ειδικές περιπτώσεις για τις οποίες αποδείχτηκε από τους LRW ότι ισχύουν.

θα αποκαλείται ένας HJ-βαθμός της G.

Για παράδειγμα, η σειρά $\{e\} \lhd A_3 \lhd S_3$ μας δίνει ότι ο αριθμός $3^4 \cdot 2$ είναι ένας HJ-βαθμός της S_3. Επιπλέον, από την σειρά $\{e\} \lhd \{e, (1\,2)(3\,4)\} \lhd V_4 \lhd A_4 \lhd S_4$, όπου V_4 είναι η τετραδική ομάδα Klein, υπολογίζουμε ότι ο αριθμός $2^{19} \cdot 3^4$ είναι ένας HJ-βαθμός της S_4. Οι παραπάνω HJ-βαθμοί της S_3 και της S_4 είναι μοναδικοί αφού οι συγκεκριμένες υποκανονικές σειρές είναι οι μοναδικές με κυκλικούς παράγοντες για αυτές. Γενικά, μια επιλύσιμη ομάδα μπορεί να έχει περισσότερους από έναν HJ-βαθμό. Πράγματι, αν συμβολίσουμε με C_n μία κυκλική ομάδα τάξης n, η σειρές $\{e\} \lhd C_6$, $\{e\} \lhd C_2 \lhd C_6$ και $\{e\} \lhd C_3 \lhd C_6$ δείχνουν ότι οι αριθμοί 6^5, $2^3 \cdot 3^2$ και $3^4 \cdot 2$ είναι όλοι HJ-βαθμοί της ομάδας C_6. Ο αριθμός n^{n-1} είναι ο μεγαλύτερος HJ-βαθμός της C_n. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση (1.7), μπορεί να δειχθεί ότι κάθε εκλέπτυνση μιας υποκανονικής σειράς οδηγεί σε μικρότερο HJ-βαθμό.

Το πρώτο κύριο αποτέλεσμα που θα παρουσιάσουμε παρακάτω, μας λέει ότι οι πεπερασμένες επιλύσιμες ομάδες, ικανοποιούν μια ισχυρότερη μορφή της Εικασίας 1.30 υπό την έννοια ότι ότι ο βαθμός d της H-μεταβλητής λέξης του συμπεράσματος, μπορεί να επιλεχθεί να είναι ένας οποιοσδήποτε HJ-βαθμός της αρχικής ομάδας G και επομένως είναι ανεξάρτητος από το πλήθος των χρωμάτων.

Θεώρημα 1.34. *Έστω G μία πεπερασμένη επιλύσιμη ομάδα, d ένας HJ-βαθμός της G και $r \in \mathbb{N}$. Τότε υπάρχει ένας θετικός ακέραιος $N \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε, για κάθε r-χρωματισμό του G^N να υπάρχει μια uniform G-μεταβλητή λέξη W επί του G μήκους N και βαθμού d, για την οποία ισχύει ότι το σύνολο $\{W(g) : g \in G\}$ είναι μονοχρωματικό.*

Το δεύτερο κύριο αποτέλεσμα που αναφέρουμε εδώ, επεκτείνει το θεώρημα 1.34 στην περίπτωση της δράσης μιας επιλύσιμης ομάδας.

Θεώρημα 1.35. *Έστω G μία πεπερασμένη επιλύσιμη ομάδα η οποία δρα σε ένα πεπερασμένο σύνολο X, d ένας HJ-βαθμός της G και $r \in \mathbb{N}$. Τότε υπάρχει ένας θετικός ακέραιος $N \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε, για κάθε r-χρωματισμό του X^N να υπάρχει μια uniform G-μεταβλητή λέξη W επί του X μήκους N και βαθμού d^p, όπου $p \in \mathbb{N}$ είναι το πλήθος των τροχιών της δράσης της G στο X, τέτοια ώστε για κάθε $x \in X$, το σύνολο $\{W(gx) : g \in G\}$ να είναι μονοχρωματικό.*

Είναι φανερό ότι το Θεώρημα 1.35 περιλαμβάνει το Θεώρημα 1.34 σαν ειδική περίπτωση. Παρόλα αυτά όπως θα δούμε αργότερα τα δύο θεωρήματα είναι ισοδύναμα. Για να το συνδέσουμε με την Ευκλείδεια θεωρία Ramsey, παρουσιάζουμε παρακάτω μια από τις συνέπειες του, η οποία αποτελεί μια εκλεπτυσμένη μορφή του Θεωρήματος 1.19 ([23, Theorem 4.3]).

Πόρισμα 1.36. *Έστω X ένα πεπερασμένο ευκλείδειο σύνολο και G μια επιλύσιμη ομάδα συμμετριών του X. Έστω d ένας HJ-βαθμός της G και $\lambda = d^{-p/2}$, όπου p το πλήθος των τροχιών της G στο X. Τότε για κάθε $r \in \mathbb{N}$ υπάρχει ένας θετικός ακέραιος*

$N \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε r-χρωματισμό του λX^N, υπάρχει μια ισομετρική εμφύτευση $f : X \to \lambda X^N$ τέτοια ώστε για κάθε $\boldsymbol{x} \in X$ το σύνολο $\{f(g\boldsymbol{x}) \mid g \in \boldsymbol{G}\}$ να είναι μονοχρωματικό.

Απόδειξη

Πράγματι, έστω $r \in \mathbb{N}$ και $N \in \mathbb{N}$ ο θετικός ακέραιος που προκύπτει από το Θεώρημα 1.35. Έστω $c : \lambda X^N \to [r]$ ένας χρωματισμός. Ορίζουμε ένα δεύτερο χρωματισμό $c_\lambda : X^N \to [r]$ μέσω της σχέσης $c_\lambda\left((\boldsymbol{x}_i)_{i\in[N]}\right) = c\left(\lambda(\boldsymbol{x}_i)_{i\in[N]}\right)$. Από το Θεώρημα 1.35 υπάρχει μια $\boldsymbol{G}$-μεταβλητή λέξη W βαθμού d^p τέτοια ώστε για κάθε $x \in X$, το σύνολο $\{W(g\boldsymbol{x}) : g \in \boldsymbol{G}\}$ να είναι c_λ-μονοχρωματικό. Από την παρατήρηση 1.29 η συνάρτηση $f : X \to \lambda X^N$ που ορίζεται από την σχέση $f(x) = \lambda W(\boldsymbol{x})$ είναι μια ισομετρική εμφύτευση. Επίσης για κάθε $\boldsymbol{x} \in X$ και $g \in \boldsymbol{G}$ έχουμε ότι

$$c(f(g\boldsymbol{x})) = c(\lambda W(g\boldsymbol{x})) = c_\lambda(W(g\boldsymbol{x})) = c_\lambda(W(\boldsymbol{x})) = c(\lambda W(\boldsymbol{x})) = c(f(\boldsymbol{x}))\,.$$

□

Εδώ θα κλείσουμε την εισαγωγή για να προχωρήσουμε στις αποδείξεις των θεωρημάτων 1.24, 1.34 και 1.35. Στην συνέχεια θα δούμε κάποια επιπλέον πράγματα για τα σύνολα Ramsey.

Simplices σε Κανονικούς Πολυγωνικούς Τόρους 2

Σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι να παρουσιάσουμε λεπτομερώς την απόδειξη του Θεωρήματος 1.24 σύμφωνα με το οποίο κάθε simplex εμφυτεύεται σε έναν κανονικό πολυγωνικό τόρο. Πριν προχωρήσουμε είναι σκόπιμο να ορίσουμε τους κανονικούς πολυγωνικούς τόρους με λίγη περισσότερη ακρίβεια.

Δοθέντος $m \in \mathbb{N}$ και $r \in \mathbb{R}$ με $m \geq 2$ και $r > 0$ γράφουμε $T_{m,r} \subset \mathbb{R}^2$ για να συμβολίσουμε το σύνολο των κορυφών ενός *κανονικού m-γώνου* του οποίου η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου ισούται με r. Επομένως, ένας *κανονικός πολυγωνικός τόρος T*, είναι ένα σύνολο της μορφής $T = \prod_{i\in[n]} T_{m_i,r_i}$, όπου $(m_i)_{i\in[n]} \in \mathbb{N}^n$ και $(r_i)_{i\in[n]} \in \mathbb{R}^n_+$. Αν $m_i = m$ για κάθε $i \in [n]$, δηλαδή αν $T = \prod_{i\in[n]} T_{m,r_i}$ τότε ο T θα λέγεται *m-κανονικός*. Αν επιπλέον $r_i = r$ για κάθε $i \in [n]$, τότε ο κανονικός πολυγωνικός τόρος θα συμβολίζεται ως $T = T^n_{m,r}$ και θα λέγεται *(m, r)-κανονικός*.

Να σημειώσουμε ότι αφού τα κανονικά πολύγωνα που συνθέτουν τον τόρο εδράζονται σε κάθετα μεταξύ τους επίπεδα, η τοποθεσία του κέντρου τους δεν μεταβάλει τις μετρικές ιδιότητες του τόρου. Επομένως αν έχουμε καθορίσει το πλήθος των πλευρών κάθε κανονικού πολυγώνου και τις αντίστοιχες ακτίνες, τότε μπορούμε να μιλάμε για "τον τόρο" και όχι "ένα τόρο" με τις συγκεκριμένες παραμέτρους.

Η γενική στρατηγική της απόδειξης

Η γενική στρατηγική της απόδειξης του θεωρήματος 1.24, έχει κάποια κοινά χαρακτηριστικά με την απόδειξη των Frankl και Rödl ότι τα simplices είναι Ramsey αλλά αποφεύγει όλα τα εργαλεία της extremal θεωρίας συνόλων τα οποία χρησιμοποιούνται στο [12]. Ως αποτέλεσμα, παρόλο που δεν μπορεί να μας δώσει τα αριθμητικά φράγματα που προκύπτουν από την απόδειξη των Frankl και Rödl, είναι πολύ απλούστερη και διαισθητικά εύπεπτη.

Μια σκιαγράφηση της απόδειξης πάει ως εξής: Ας συμβολίσουμε με $\mathscr{T}$ την κλάση όλων των υποσυνόλων κάποιου κανονικού πολυγωνικού τόρου. Το πρώτο βήμα είναι να δείξουμε ότι η κλάση $\mathscr{T}$ περιέχει ισομετρικά αντίγραφα όλων των κανονικών simplices και όλων των μικρών διαταραχών αυτών. Με άλλα λόγια αν μπορούμε να μετασχηματίσουμε ένα simplex σε ένα κανονικό simplex μετακινώντας κάποια από τα σημεία του "επαρκώς" λίγο, τότε θα δείξουμε ότι αυτό έχει ένα αντίγραφο σε κάποιο κανονικό πολυγωνικό τόρο.

Το δεύτερο βήμα είναι να δείξουμε ότι η κλάση $\mathscr{T}$ είναι "πυκνή", με την έννοια ότι περιέχει "σχεδόν ισομετρικά αντίγραφα" κάθε πεπερασμένου ευκλείδειου συνόλου. Στο τρίτο βήμα, δείχνουμε ότι κάθε *κανονική επέκταση*, (δείτε τον ορισμό 2.7) ενός οποιουδήποτε πεπερασμένου ευκλείδειου συνόλου, έχει ένα αντίγραφο στην κλαση $\mathscr{T}$. Αυτό ουσιαστικά ολοκληρώνει την απόδειξη αφού από ένα θεώρημα του Schoenberg [29], κάθε simplex είναι η κανονική επέκταση ενός πεπερασμένου ευκλείδειου συνόλου.

2.1 Τα σχεδόν κανονικά simplices εμφυτεύονται σε κανονικούς πολυγωνικούς τόρους

Ξεκινάμε με το ακόλουθο εύκολο λήμμα, το οποίο μας εξασφαλίζει ότι κάθε κανονικό simplex εμφυτεύεται σε έναν κανονικό πολυγωνικό τόρο μέγιστης συμμετρίας, έχοντας μάλιστα την ευχέρεια να επιλέξουμε αυθαίρετα το πλήθος πλευρών των κανονικών πολυγώνων που τον απαρτίζουν.

Λήμμα 2.1. *Έστω $\Delta = \{\boldsymbol{x}_i\}_{i\in[n]}$ ένα κανονικό simplex. Τότε για κάθε $m \in \mathbb{N}$ με $m \geq 2$, υπάρχει $r \in \mathbb{R}$ με $r > 0$, τέτοιο ώστε το Δ να εμφυτεύεται στον (m, r)-κανονικό πολυγωνικό τόρο.*

Απόδειξη
Έστω $m \geq 2$ και $\Delta = \{\boldsymbol{x}_i\}_{i\in[n]}$ ένα κανονικό simplex με μήκος πλευράς α. Μπορούμε να επιλέξουμε $r > 0$ τέτοιο ώστε το κανονικό m-γωνο $T_{m,r}$ να έχει μήκος πλευράς $\alpha/\sqrt{2}$. Έστω $\boldsymbol{p}$ και $\boldsymbol{p}'$ δύο γειτονικές κορυφές του $T_{m,r}$. Για κάθε $\boldsymbol{x}_i \in \Delta$ έστω $\widetilde{\boldsymbol{x}}_i = (\widetilde{\boldsymbol{x}}_{ij})_{j\in[n]} \in T^n_{m,r}$ όπου

$$\widetilde{\boldsymbol{x}}_{ij} = \begin{cases} \boldsymbol{p} & \text{αν } j = i \\ \boldsymbol{p}' & \text{αλλιώς} \end{cases}.$$

Είναι άμεσο να δει κανείς ότι $\|\widetilde{\boldsymbol{x}}_i - \widetilde{\boldsymbol{x}}_{i'}\|^2 = 2\|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}'\|^2 = \alpha^2$ για κάθε $i \neq i'$. Επομένως, το σύνολο $\widetilde{\Delta} = \{\widetilde{\boldsymbol{x}}_i\}_{i\in[n]} \subset T^n_{m,r}$ είναι ισομετρικό με το Δ. $\square$

Το επόμενο βήμα, είναι να επεκτείνουμε το προηγούμενο αποτέλεσμα, δείχνοντας ότι οι μικρές διαταραχές κανονικών simplices επίσης εμφυτεύονται σε κανονικούς πολυγωνικούς τόρους. Σε ότι ακολουθεί, δοθέντος ενός $n \times n$ πίνακα $A = (\alpha_{ij})_{i,j \in [n]}$ και ένας ευκλείδειο σύνολο $Z = \{z_i\}_{i \in [n]}$, θα λέμε ότι ο A *υλοποιείται από* το Z αν $\|z_i - z_j\| = \alpha_{ij}$ για κάθε $i, j \in [n]$. Παρατηρήστε ότι σε αυτή την περίπτωση ο A αναγκαστικά θα είναι συμμετρικός με μηδενικά στην διαγώνιο και όλα τα υπόλοιπα στοιχεία του θετικά.

Το επόμενο λήμμα είναι μια αναδιατύπωση ενός πρόσφατου αποτελέσματος των Frankl, Pach, Reiher και Rödl (Lemma 4.9 στο [9]).

Λήμμα 2.2. *Έστω $A = (\alpha_{ij})_{i,j \in [n]}$ με $n \geq 3$ ένας $n \times n$ πραγματικός και συμμετρικός πίνακας τέτοιος ώστε, $\alpha_{ii} = 0$ για κάθε $i \in [n]$ και $\alpha_{ij} > 0$ για κάθε $i, j \in [n]$ με $i \neq j$. Έστω $\alpha_{\max} = \max_{i,j} \alpha_{ij}$ και υποθέστε ότι ισχύει η ακόλουθη ανισότητα.*

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_{\max}^2 - \alpha_{ij}^2) < \alpha_{\max}^2. \tag{2.1}$$

Τότε υπάρχει μία οικογένεια $\{\Delta_l\}_{l \in [\ell]}$ κανονικών simplices, όπου $\ell \leq \binom{n}{2}$, τέτοια ώστε ο A να υλοποιείται από ένα αφινικά ανεξάρτητο υποσύνολο του γινομένου $\prod_{l \in [\ell]} \Delta_l$.

Παρουσιάζουμε παρακάτω την απόδειξη η οποία δεν διαφέρει από αυτήν στο [9].

Απόδειξη

Έστω $A = (\alpha_{ij})_{i,j \in [n]}$ και $\alpha_{\max} = \max_{i,j} \alpha_{ij}$. Θέτουμε

$$b = \sqrt{\alpha_{\max}^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_{\max}^2 - \alpha_{ij}^2)} \text{ και } b_{ij} = \sqrt{\alpha_{\max}^2 - \alpha_{ij}^2} \text{ for } 1 \leq i < j \leq n.$$

Έστω $\Delta \subset \mathbb{R}^{n-1}$ ένα κανονικό simplex με n κορυφές και μήκος πλευράς b. Για $1 \leq i < j \leq n$ τέτοια ώστε $b_{ij} > 0$ έστω $\Delta_{ij} \subset \mathbb{R}^{n-2}$ ένα κανονικό simplex με $n-1$ κορυφές και μήκος πλευράς b_{ij}. Ορίζουμε

$$X = \Delta \times \prod_{\substack{i<j \\ b_{ij}>0}} \Delta_{ij}.$$

Έστω $\pi : X \to \Delta$ και $\pi_{ij} : X \to \Delta_{ij}$ οι αντίστοιχες φυσιολογικές προβολές. Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι μπορούμε να επιλέξουμε $Z = \{z_i\}_{i=1}^n \subset X$ τέτοιο ώστε $\pi(Z) = \Delta$, $\pi_{ij}(Z) = \Delta_{ij}$ και $\pi_{ij}(z_i) = \pi_{ij}(z_j)$ για κάθε $z_i, z_j \in Z$ με $i < j$ και $b_{ij} > 0$.

Παρατηρήστε ότι για κάθε $s, t \in [n]$ ισχύουν τα επόμενα,

$$\|z_s - z_t\|^2 = b^2 + \left(\sum_{1 \le i < j \le n} b_{ij}^2 \right) - b_{st}^2 = \alpha_{st}^2.$$

Τέλος, αφού το Z έχει n στοιχεία και $\pi(Z) = \Delta$, έπεται ότι αυτή η προβολή θα είναι ένα προς ένα και άρα αν το Z ήταν αφινικά εξαρτημένο το ίδιο θα ίσχυε και για το Δ. □

Σε ότι ακολουθεί, ένας πίνακας που ικανοποιεί τις υποθέσεις του Λήμματος 2.2 θα λέγεται *σχεδόν κανονικός πίνακας*, ενώ κάθε ευκλείδειο σύνολο που υλοποιεί έναν σχεδόν κανονικό πίνακα θα λέγεται *σχεδόν κανονικό simplex*.

Η επόμενη πρόταση είναι η επέκταση του Λήμματος 2.1 που υποσχεθήκαμε για την περίπτωση των σχεδόν κανονικών simplices.

Πρόταση 2.3. *Έστω $Z = \{\boldsymbol{z}_i\}_{i\in[n]}$ ένα σχεδόν κανονικό simplex. Τότε για κάθε $m \geq 2$ υπάρχει ένας m-κανονικός πολυγωνικός τόρος $\boldsymbol{T}$ τέτοιος ώστε το Z να εμφυτεύεται ισομετρικά στον $\boldsymbol{T}$.*

Απόδειξη

Έστω $m \geq 2$ και $Z = \{\boldsymbol{z}_i\}_{i\in[n]}$ ένα σχεδόν κανονικό simplex. Από το Λήμμα 2.2 υπάρχει μια οικογένεια $\{\Delta_l\}_{l\in[\ell]}$ κανονικών simplices, όπου $\ell \leq \binom{n}{2}$, τέτοια ώστε το Z να εμφυτεύεται μέσα στο γινόμενο $\prod_{l\in[\ell]} \Delta_l$. Για κάθε $l \in [\ell]$ έστω $n_l = |\Delta_l|$. Από το Λήμμα 2.1 για κάθε $l \in [\ell]$ υπάρχει $r_l > 0$ τέτοιο ώστε το Δ_l να εμφυτεύεται σε έναν (m, r_l)-κανονικό πολυγωνικό τόρο της μορφής $\boldsymbol{T}_{m,r_l}^{n_l}$. Επομένως το Z εμφυτεύεται μέσα στον m-κανονικό πολυγωνικό τόρο $\boldsymbol{T} = \prod_{l\in[\ell]} \boldsymbol{T}_{m,r_l}^{n_l}$. □

2.2 Κάθε πεπερασμένο ευκλείδειο σύνολο είναι σχεδόν τορικό

Ίσως ο τίτλος της ενότητας αυτής να είναι λίγο ασαφής αλλά η κεντρική ιδέα δεν είναι. Ουσιαστικά αυτό που θέλουμε να πούμε είναι ότι κάθε πεπερασμένο ευκλείδειο σύνολο εμφυτεύεται σχεδόν ισομετρικά σε έναν κανονικό πολυγωνικό τόρο. Ο επόμενος ορισμός δίνει περαιτέρω λεπτομέρειες,

Ορισμός 2.4. *Έστω $\delta > 0$, $X \subset \mathbb{R}^k$ και $Y \subset \mathbb{R}^\ell$. Λέμε ότι $f : X \to Y$ είναι μια δ-εμφύτευση του X στο Y, αν η f είναι ένα προς ένα και για κάθε $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in X$ ισχύει ότι*

$$\left| \|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}')\|^2 - \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'\|^2 \right| < \delta.$$

Η κεντρική ιδέα της παρακάτω απόδειξης είναι διαισθητικά απλή. Κάθε ευθύγραμμο τμήμα μπορεί να προσεγγιστεί με αυθαίρετη ακρίβεια από ένα υποσύνολο ενός κύκλου και κάθε πεπερασμένο υποσύνολο ενός κύκλου μπορεί να προσεγγιστεί από ένα υποσύνολο ενός κανονικού πολυγώνου. Κατά συνέπεια, για κάθε πεπερασμένο ευκλείδειο σύνολο μπορούμε να προσεγγίσουμε τα σύνολα των προβολών των στοιχείων του στους άξονες μιας ορθοκανονικής βάσης, με τις κορυφές κανονικών πολυγώνων. Τότε το γινόμενο αυτών των πολυγώνων θα προσεγγίζει το αρχικό σύνολο.

Το πρώτο λήμμα τυποποιεί τα παραπάνω στην μία διάσταση.

Λήμμα 2.5. *Έστω $\delta > 0$ και $X \subset \mathbb{R}$ με $|X| \geq 2$. Έστω $n_0 \in \mathbb{N}$ το οποίο είναι τέτοιο ώστε*

$$n_0^{-1} \leq |x - x'| \leq n_0 \text{ για κάθε } x, x' \in X \text{ με } x \neq x'. \tag{2.2}$$

Τότε για κάθε $n \geq 2\pi n_0^3 \delta^{-1}$ το σύνολο X είναι δ-εμφυτεύσιμο σε ένα κανονικό πολύγονο $T_{m,r}$ με $m = n^3$ και $r = \dfrac{n_0 n}{2\pi}$.

Απόδειξη

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $X \subset [0, n_0]$. Έστω $n \geq 2\pi n_0^3 \delta^{-1}$, για κάθε $x \in X$ θέτουμε $j(x)$ να είναι ο μοναδικός θετικός ακέραιος ο οποίος ικανοποιεί την παρακάτω ανισότητα.

$$\frac{j(x)}{n^2} \leq \frac{x}{n_0} < \frac{j(x)+1}{n^2}.$$

Από την ανισότητα (2.2) η αντιστοιχία $x \to j(x)$ είναι μια καλώς ορισμένη ένα προς ένα συνάρτηση από το X στο $\{0, 1, \ldots, n^2\}$. Για κάθε $x \in X$ θέτουμε $y(x) = \dfrac{j(x) n_0}{n^2}$. Παρατηρήστε ότι $y(x) \in [0, n_0]$ και $0 < x - y(x) < n_0 n^{-2}$. Επομένως,

$$\left| |y(x) - y(x')|^2 - \left|x - x'\right|^2 \right| < \frac{n_0^3}{n^2} < \frac{\delta}{2}, \tag{2.3}$$

για κάθε $x, x' \in X$.

Έστω ότι $\left(r, \dfrac{2\pi j}{m}\right)$, $j = 0, 1, \ldots, m-1$ είναι μια αναπαράσταση των κορυφών του $T_{m,r}$ σε πολικές συντεταγμένες. Έστω $m = n^3$, $r = n_0 n / 2\pi$ και $f : X \to T_{m,r}$ η οποία ορίζεται από

$$f(x) = \left(r, \frac{2\pi j(x)}{m}\right) = \left(r, \frac{y(x)}{r}\right).$$

Τότε η f είναι ένα προς ένα από το X στο $T_{m,r}$. Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη απομένει να δείξουμε ότι η f είναι μια δ-εμφύτευση. Για κάθε $x, x' \in X$ με $x \neq x'$ έχουμε ότι

$$\left\| f(x) - f(x') \right\| = 2r \sin\left(\frac{|y(x) - y(x')|}{2r}\right).$$

Αν παρατηρήσουμε ότι $\left|\sin^2 t - t^2\right| \leq |t^3|$ και θέσουμε $t = \dfrac{|y(x) - y(x')|}{2r}$ παίρνουμε ότι

$$\left| \|f(x) - f(x')\|^2 - \left|y(x) - y(x')\right|^2 \right| \leq \frac{\pi n_0^2}{n} < \frac{\delta}{2} \tag{2.4}$$

Από την (2.3) και την (2.4) η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. □

Η επόμενη πρόταση είναι το κύριο αποτέλεσμα αυτής της ενότητας.

Πρόταση 2.6. *Για κάθε $\delta > 0$ και για κάθε πεπερασμένο ευκλείδειο σύνολο $X \subset \mathbb{R}^k$, υπάρχουν $m \in \mathbb{N}$ και $r > 0$ τέτοια ώστε το X να είναι δ-εμφυτεύσιμο σε έναν (m, r)-κανονικό πολυγωνικό τόρο $T^k_{m,r}$.*

Απόδειξη
Έστω $X \subset \mathbb{R}^k$ και $\delta > 0$. Έστω ότι $\pi_i : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $i \in [k]$ είναι οι αντίστοιχες φυσιολογικές προβολές. Από το Λήμμα 2.5 μπορούμε να επιλέξουμε ένα κοινό ζεύγος $(m, r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε για κάθε $i \in [k]$ να υπάρχει μια δ/k-εμφύτευση $f_i : \pi_i(X) \to T_{m,r}$. Είναι εύκολο να δούμε ότι, η συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}^{2k}$ η οποία ορίζεται ως $f(x) = \big(f_1(\pi_1(x)), \dots, f_k(\pi_k(x)\big)$, είναι μια δ-εμφύτευση του X στον $T^k_{m,r}$. □

2.3 Κάθε κανονική επέκταση εμφυτεύεται σε ένα κανονικό πολυγωνικό τόρο.

Ας ξεκινήσουμε εξηγώντας ακριβώς τι εννοούμε ότι λέμε "κανονική επέκταση" ενός πεπερασμένου ευκλείδειου συνόλου.

Ορισμός 2.7. *Έστω $X = \{x_i\}_{i\in[n]} \subset \mathbb{R}^k$ και $Y = \{y_i\}_{i\in[n]} \subset \mathbb{R}^d$ δύο πεπερασμένα ευκλείδεια σύνολα. Λέμε ότι το Y είναι μια κανονική επέκταση του $X = \{x_i\}_{i\in[n]}$, αν υπάρχει $\alpha > 0$ τέτοιο ώστε*

$$\|y_i - y_j\|^2 = \|x_i - x_j\|^2 + \alpha^2,$$

για κάθε $i, j \in [n]$ με $i \neq j$.

Είναι προφανές ότι ένα πεπερασμένο ευκλείδειο σύνολο $Y = \{y_i\}_{i\in[n]}$ είναι μια κανονική επέκταση του $X = \{x_i\}_{i\in[n]}$, αν και μόνο αν, υπάρχει ένα κανονικό simplex $\Delta = \{z_i\}_{i\in[n]}$ τέτοιο ώστε το σύνολο Y να είναι ισομετρικό με το σύνολο $Y' = \{(x_i, z_i)\}_{i\in[n]} \subset X \times \Delta$. Συγκεκριμένα, παρατηρήστε ότι αφού το Y' είναι αφινικά ανεξάρτητο, κάθε κανονική επέκταση ενός πεπερασμένου ευκλείδειου συνόλου είναι ένα simplex.

Στην πραγματικότητα αυτή η ιδιότητα χαρακτηρίζει τα simplices δηλαδή ένα πεπερασμένο ευκλείδειο σύνολο είναι simplex αν και μόνο αν είναι κανονική επέκταση ενός ευκλείδειου συνόλου (το οποίο μπορούμε να επιλέξουμε να είναι επίσης simplex). Για να το δείξουμε αυτό θα χρειαστούμε το παρακάτω θεώρημα που είναι πολύ γνωστό στην περιοχή της *distance Geometry* και το οφείλουμε στον Schoenberg [29].

Θεώρημα 2.8 (Schoenberg [29])
Έστω ότι $D = (d_{ij})_{i,j\in[n+1]}$ είναι ένας $(n+1)\times(n+1)$ πραγματικός και συμμετρικός πίνακας, τέτοιος ώστε $d_{ii} = 0$ για κάθε $i \in [n+1]$, και $d_{ij} > 0$ για κάθε $i, j \in [n+1]$ με $i \neq j$. Τότε ο D υλοποιείται από ένα πεπερασμένο ευκλείδειο σύνολο, αν και μόνο αν

$$\sum_{i,j\in[n+1]} d_{i,j}^2 y_i y_j \leq 0 \tag{2.5}$$

Για κάθε επιλογή $(y_i)_{i\in[n+1]} \in \mathbb{R}^{n+1}$ με $\sum_{i\in[n+1]} y_i^2 = 1$ και $\sum_{i\in[n+1]} y_i = 0$. Επιπλέον, ο D υλοποιείται από ένα αφινικά ανεξάρτητο σύνολο, αν και μόνο αν, η ανισότητα 2.5 είναι αυστηρή.

Παρακάτω παραθέτουμε μια σύντομη απόδειξη του Θεωρήματος 2.8.

Απόδειξη
Έστω $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{n+1}$ τέτοιο ώστε $\sum_{i\in[n+1]} y_i = 0$. Τότε

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j\in[n+1]} y_i y_j d_{i,j}^2 &= \sum_{i,j\in[n]} y_i y_j d_{i,j}^2 + 2y_{n+1} \sum_{i\in[n]} y_i d_{i,n+1}^2 \\
&= \sum_{i,j\in[n]} y_i y_j d_{i,j}^2 - 2 \sum_{i,j\in[n]} y_i y_j d_{i,n+1}^2 \\
&= \sum_{i,j\in[n]} y_i y_j d_{i,j}^2 - \sum_{i,j\in[n]} y_i y_j d_{i,n+1}^2 - \sum_{i,j\in[n]} y_i y_j d_{j,n+1}^2 \\
&= \sum_{i,j\in[n]} y_i y_j (d_{i,j}^2 - d_{i,n+1}^2 - d_{j,n+1}^2)
\end{aligned}$$

Επιπλέον, παρατηρήστε ότι η ανισότητα 2.5 ισχύει για κάποιο $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ αν και μόνο αν, ισχύει για $\alpha\boldsymbol{y}$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, επομένως αρκεί να δείξουμε ότι ο D υλοποιείται από ένα σύνολο του $\mathbb{R}^n$, αν και μόνο αν,

$$\sum_{i,j\in[n]} y_i y_j (d_{i,n+1}^2 + d_{j,n+1}^2 - d_{i,j}^2) \geq 0 \tag{2.6}$$

για κάθε $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$.

Έστω ότι $\{\boldsymbol{p}_i\}_{i\in[n+1]}$ είναι $n+1$ σημεία του $\mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε $d_{i,j} = \|\boldsymbol{p}_i - \boldsymbol{p}_j\|$ for $i, j \in [n+1]$ και χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέστε ότι $\boldsymbol{p}_{n+1} = 0$. Παρατηρήστε ότι

$$\|\boldsymbol{p}_i - \boldsymbol{p}_j\|^2 = \|\boldsymbol{p}_i - \boldsymbol{p}_{n+1}\|^2 + \|\boldsymbol{p}_j - \boldsymbol{p}_{n+1}\|^2 - 2 < \boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{p}_j >,$$

επομένως $2 < \boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{p}_j >= (d_{i,n+1}^2 + d_{j,n+1}^2 - d_{i,j}^2)$. Άρα για κάθε $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\sum_{i,j\in[n]} y_i y_j (d_{i,n+1}^2 + d_{j,n+1}^2 - d_{i,j}^2) &= 2 \sum_{i,j\in[n]} y_i y_j < \boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{p}_j > \\ &= 2\|\sum_{i\in[n]} y_i \boldsymbol{p}_i\|^2 \geq 0. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Επιπλέον η ισότητα ισχύει για κάποιο $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \setminus 0$ αν και μόνο αν, τα $\{\boldsymbol{p}_i\}_{i\in[n]}$ δεν είναι γραμμικά εξαρτημένα, δηλαδή, αν και μόνο αν, τα $\{\boldsymbol{p}_i\}_{i\in[n+1]}$ δεν είναι αφινικά ανεξάρτητα.

Για την άλλη κατεύθυνση υποθέστε ότι η ανισότητα 2.6 ισχύει για κάθε $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$. Παρατηρήστε ότι ο $n \times n$ πίνακας $\boldsymbol{A} = \{(d_{i,n+1}^2 + d_{j,n+1}^2 - d_{i,j}^2)/2\}_{i,j\in[n]}$ είναι συμμετρικός, επομένως είναι ίσος με $\boldsymbol{U}\boldsymbol{D}\boldsymbol{U}^T$ για κάποιο ορθογώνιο $n \times n$ πίνακα $\boldsymbol{U}$ και κάποιον διαγώνιο πίνακα $\boldsymbol{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ όπου $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_k > \lambda_{k+1} = \cdots = \lambda_n = 0$ είναι οι (πραγματικές) ιδιοτιμές του $\boldsymbol{A}$ και k είναι ο βαθμός του. Έστω $\{\boldsymbol{e}_i\}_{i\in[n]}$ τα συνήθη ορθοκανονικά διανύσματα του $\mathbb{R}^n$. Αν θέσουμε $\boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{D}^{1/2}\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{e}_i$ και $\boldsymbol{p}_i = 0$ τότε

$$d_{i,n+1}^2 = a_{ii} = \boldsymbol{e}_i^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{e}_i^T \boldsymbol{U}\boldsymbol{D}\boldsymbol{U}^T \boldsymbol{e}_i = \|\boldsymbol{p}_i\|^2 = \|\boldsymbol{p}_i - 0\|^2$$

και

$$d_{i,j}^2 = a_{ii} + a_{jj} - 2a_{ij} = (\boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_j)^T \boldsymbol{A} (\boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_j) = \|\boldsymbol{p}_i - \boldsymbol{p}_j\|^2. \qquad \square$$

Επομένως το σύνολο $X = \{\boldsymbol{p}_i\}_{i\in[n+1]} \subset \mathbb{R}^n$ υλοποιεί τον πίνακα $\boldsymbol{D}$. Επιπλέον αν η ανισότητα 2.5 είναι αυστηρή για κάθε μη μηδενικό $\boldsymbol{y}$ τότε οι ανισότητες 2.6 και 2.7 είναι επίσης αυστηρές και επομένως τα διανύσματα $\{\boldsymbol{p}_i\}_{i\in[n+1]}$ είναι αφινικά ανεξάρτητα.

Από το θεώρημα του Schoenberg με ένα απλό επιχείρημα συνέχειας έχουμε άμεσα το επόμενο λήμμα που αποδεικνύει τον χαρακτηρισμό των simplices ως κανονικές επεκτάσεις ευκλείδειων συνόλων.

Λήμμα 2.9. *Κάθε simplex Y είναι μια κανονική επέκταση ενός άλλου simplex X.*

Λαμβάνοντας υπόψιν το Λήμμα 2.9, είναι φανερό ότι η επόμενη πρόταση ολοκληρώνει την απόδειξη του Θεωρήματος 1.24, που μας λέει ότι κάθε simplex εμφυτεύεται σε έναν κανονικό πολυγωνικό τόρο.

Πρόταση 2.10. *Έστω $X = \{\boldsymbol{x}_i\}_{i\in[n]} \subset \mathbb{R}^k$ ένα πεπερασμένο ευκλείδειο σύνολο. Τότε κάθε κανονική επέκταση του X εμφυτεύεται ισομετρικά σε έναν m-κανονικό πολυγωνικό τόρο για κάποιο $m \in \mathbb{N}$.*

Απόδειξη

Έστω $\alpha > 0$, $X = \{\boldsymbol{x}_i\}_{i\in[n]} \subset \mathbb{R}^k$ και $Y = \{\boldsymbol{y}_i\}_{i\in[n]} \subset \mathbb{R}^d$ τέτοιο ώστε $\|\boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{y}_j\|^2 = \|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j\|^2 + \alpha^2$ για κάθε $i, j \in [n]$ με $i \neq j$. Θέτουμε $\delta = \alpha^2/n^2$. Από το Λήμμα

2.6, μπορούμε να βρούμε $m \in \mathbb{N}$ και $r > 0$ τέτοια ώστε το X να είναι δ-εμφυτεύσιμο σε έναν (m, r)-κανονικό πολυγωνικό τόρο $T^k_{m,r}$, δηλαδή, υπάρχει μια ένα προς ένα συνάρτηση $f : X \to T^k_{m,r}$ τέτοια ώστε

$$\left| \|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j\|^2 - \|f(\boldsymbol{x}_i) - f(\boldsymbol{x}_j)\|^2 \right| < \delta \text{ για κάθε } i, j \in [n].$$

Θέτουμε $\delta_{i,j} = \|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j\|^2 - \|f(\boldsymbol{x}_i) - f(\boldsymbol{x}_j)\|^2$ και ορίζουμε τον πίνακα $A = (\alpha_{ij})_{i,j\in[n]}$, όπου $\alpha_{ii} = 0$ και $\alpha_{ij} = \sqrt{\delta_{ij} + \alpha^2}$ αν $i \neq j$. Είναι εύκολο να ελεγχθεί ότι ο πίνακας A ένας σχεδόν κανονικός πίνακας. Επομένως, από το Λήμμα 2.2, ο πίνακας A υλοποιείται από ένα σχεδόν κανονικό simplex $Z = \{\boldsymbol{z}_i\}_{i\in[n]}$. Από την Πρόταση 2.3, υπάρχει ένας m-κανονικός πολυγωνικός τόρος T_0 και μια ισομετρική εμφύτευση $h : Z \to T_0$. Θέτουμε $Y' = \{\boldsymbol{y}'_i\}_{i\in[n]}$, όπου $\boldsymbol{y}'_i = (f(\boldsymbol{x}_i), h(\boldsymbol{z}_i))$ για κάθε $i \in [n]$. Παρατηρήστε ότι το Y' είναι ένα υποσύνολο του m-κανονικού πολυγωνικού τόρου $T = T^k_{m,r} \times T_0$. Επιπλέον, για κάθε $i, j \in [n]$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{y}_j\|^2 &= \|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j\|^2 + \alpha^2 \\
&= \|f(\boldsymbol{x}_i) - f(\boldsymbol{x}_j)\|^2 + \delta_{ij} + \alpha^2 \\
&= \|f(\boldsymbol{x}_i) - f(\boldsymbol{x}_j)\|^2 + \alpha_{ij}^2 \\
&= \|f(\boldsymbol{x}_i) - f(\boldsymbol{x}_j)\|^2 + \|h(\boldsymbol{z}_i) - h(\boldsymbol{z}_j)\|^2 = \|\boldsymbol{y}'_i - \boldsymbol{y}'_j\|^2.
\end{aligned}$$

Επομένως το Y εμφυτεύεται ισομετρικά στον m-κανονικό πολυγωνικό τόρο T και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. □

Η Ιδιότητα Hales-Jewett των Επιλύσιμων Ομάδων 3

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε τις αποδείξεις των θεωρημάτων 1.34 και 1.35 που αναφέραμε στην Εισαγωγή. Για τον σκοπό αυτό θα ορίσουμε την *ιδιότητα Hales–Jewett* των πεπερασμένων ομάδων και μια επέκταση της που αφορά δράσεις πεπερασμένων ομάδων.

Με αυτούς τους ορισμούς, θα δείξουμε στην επόμενη ενότητα, πως τα κύρια θεωρήματα μπορούν να αποδειχτούν χρησιμοποιώντας τρεις κύριες προτάσεις. Ένα βασικό εργαλείο που θα χρησιμοποιήσουμε είναι μια παραλλαγή ενός πολύ γνωστού λήμματος που οφείλουμε στον Saharon Shelah [31] και το οποίο θα παρουσιάσουμε στην Ενότητα 3.2. Στην Ενότητα 3.3 θα εισάγουμε κάποιους επιπλέον ορισμούς που θα μας φανούν χρήσιμοι για την ολοκλήρωση των αποδείξεων που θα πραγματοποιήσουμε στις ενότητες 3.4,3.5 και 3.6. Τέλος, θα κλείσουμε το κεφάλαιο δείχνοντας πως μπορούμε να πάρουμε ως πόρισμα μια εκλέπτυνση του δεύτερου κύριου αποτελέσματος του Kříž.

3.1 Τα βασικά βήματα για την απόδειξη των θεωρημάτων 1.34 και 1.35.

Σε ότι ακολουθεί, δοθέντος μιας πεπερασμένης ομάδας G, η οποία δρα σε ένα πεπερασμένο σύνολο X και ενός μη κενού υποσυνόλου H της ομάδας G, με $\mathrm{V}^d_{\mathrm{un}}(H;X)$ θα συμβολίζουμε το σύνολο όλων των uniform H-μεταβλητών λέξεων επί του X βαθμού d. Συγκεκριμένα, αν $G = H = X$, με $\mathrm{V}^d_{\mathrm{un}}(G;G)$ θα συμβολίζουμε το σύνολο όλων των uniform G-μεταβλητών λέξεων επί της G βαθμού d.

Απομονώνοντας την ιδιότητα των πεπερασμένων επιλύσιμων ομάδων, η οποία προκύπτει από το Θεώρημα 1.34, σχηματίζουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Απόδειξη 3.1 (Uniform HJ-ιδιότητα)
Έστω G μια πεπερασμένη επιλύσιμη ομάδα και $d \in \mathbb{N}$. Θα λέμε ότι η G έχει την d-uniform Hales–Jewett ιδιότητα *(συνοπτικά, d-UHJP), αν για κάθε $r \in \mathbb{N}$ υπάρχει ένας θετικός ακέραιος $N = N(G, d, r)$, τέτοιος ώστε για κάθε r-χρωματισμό του G^N υπάρχει μια μεταβλητή λέξη $W \in \mathrm{V}^d_{\mathrm{un}}(G; G)$ μήκους N, τέτοια ώστε το σύνολο $\{W(g) \,:\, g \in G\}$ να είναι μονοχρωματικό.*

Δεδομένου του ορισμού 3.1, το θεώρημα 1.34 δηλώνει ότι αν G είναι μια πεπερασμένη επιλύσιμη ομάδα και d είναι ένας HJ-βαθμός της G, τότε η G έχει την d-UHJP.

Η τετριμμένη ομάδα $\{e\}$ έχει την 1-UHJP (απλά θεωρήστε την τετριμμένη μεταβλητή λέξη $W = v_e$). Επιπλέον, είναι εύκολο να δει κανείς ότι, χρησιμοποιώντας για παράδειγμα την αντιστοιχία $g \to (g, \dots, g) \in G^k$, ότι αν η G έχει την d-UHJP τότε επίσης έχει την kd-UHJP, για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Το πρώτο βήμα για την απόδειξη του Θεωρήματος 1.34 είναι η επόμενη πρόταση.

Πρόταση 3.2. *Για κάθε θετικό ακέραιο $p \in \mathbb{N}$ η κυκλική ομάδα G τάξης p έχει την p^{p-1}-UHJP.*

Για την απόδειξη της Πρότασης 3.2 θα επιστρατεύσουμε ένα συνδυαστικό επιχείρημα που χρησιμοποίησε ο Křìž [23]. Εισάγουμε τώρα μια γενίκευση του ορισμού της UHJP έχοντας σαν κίνητρο το Θεώρημα 1.35.

Ορισμός 3.3. *Έστω G μια πεπερασμένη επιλύσιμη ομάδα, η οποία δρα σε ένα πεπερασμένο σύνολο X. Επίσης, έστω H μια υποομάδα της G, E μια σχέση ισοδυναμίας στο X και $d \in \mathbb{N}$. Θα λέμε ότι το ζεύγος (H, X) έχει την (E, d)-UHJP, αν για κάθε $r \in \mathbb{N}$ υπάρχει ένας θετικός ακέραιος $N = N(H, X, E, d, r)$ τέτοιος ώστε για κάθε r-χρωματισμό του X^N, υπάρχει μια μεταβλητή λέξη $W \in \mathrm{V}^d_{\mathrm{un}}(H; X)$ μήκους N, τέτοια ώστε για κάθε $x \in X$ το σύνολο $\left\{W(x') \,:\, x' E x\right\}$ είναι μονοχρωματικό.*

Αν $H = X = G$ τότε για λόγους απλότητας θα λέμε ότι η G έχει την (E, d)-UHJP.

Αν μια ομάδα G δρα σε ένα σύνολο X, τότε ο περιορισμός της δράσης σε μια υποομάδα H της G, παράγει με έναν φυσιολογικό τρόπο μια σχέση ισοδυναμίας στο X, της οποίας οι κλάσεις ισοδυναμίας είναι οι τροχιές της H στο X. Θα συμβολίζουμε αυτή την σχέση ισοδυναμίας με $E_{X|H}$, δηλαδή

$$x' E_{X|H}\, x \Leftrightarrow x' \in Hx. \tag{3.1}$$

Παρατηρήστε ότι δεδομένου του ορισμού 3.3 και της σχέσης 3.1, το Θεώρημα 1.35 δηλώνει ότι αν G είναι μια πεπερασμένη επιλύσιμη ομάδα, η οποία δρα σε ένα πεπερασμένο σύνολο X και d είναι ένας HJ-βαθμός της G, τότε το ζεύγος (G, X) έχει την $(E_{X|G}, d^p)$-UHJP, όπου p το πλήθος των τροχιών της G στο X.

Ένα βασικό συστατικό της απόδειξης των θεωρημάτων 1.34 και 1.35 είναι η επόμενη πρόταση.

Πρόταση 3.4. *Έστω G μια πεπερασμένη ομάδα η οποία δρα σε ένα πεπερασμένο σύνολο X και έστω H μια υποομάδα της G. Αν η ομάδα H έχει την d-UHJP, τότε το ζεύγος (H, X) έχει την $(E_{X|H}, d^p)$-UHJP, όπου p είναι το πλήθος των τροχιών της H στο X.*

Αν $X = G$ (και η δράση δίνεται από την πράξη της G) τότε η $E_{G|H}$ έχει σαν κλάσεις ισοδυναμίας τα δεξιά σύμπλοκα της H στην G. Σε αυτή την περίπτωση η Πρόταση 3.4 παίρνει την ακόλουθη μορφή.

Πόρισμα 3.5. *Έστω G μια πεπερασμένη ομάδα και H μια υποομάδα της G. Αν η ομάδα H έχει την d-UHJP τότε το ζεύγος (H, G) έχει την $\left(E_{G|H}, d^p\right)$-UHJP, όπου p είναι ο δείκτης της H στην G.*

Μία από τις βασικές ιδιότητες της κλάσης των επιλύσιμων ομάδων είναι ότι είναι κλειστή στην πράξη της επέκτασης. Η επόμενη πρόταση λέι ότι το ίδιο ισχύει και για την κλάση των πεπερασμένων ομάδων που έχουν την d-UHJP για κάποιο $d \in \mathbb{N}$. Υπενθυμίζουμε εδώ ότι αν H και K είναι ομάδες, τότε μια *επέκταση της K μέσω της H* είναι μία ομάδα G, μαζί με έναν επιμορφισμό $\pi : G \to K$ και έναν μονομορφισμό $\iota : H \to G$ για του οποίους ισχύει ότι η εικόνα του ι ισούται με τον πυρήνα του π. Συγκεκριμένα, αν H είναι μια κανονική υποομάδα της G τότε η G είναι μια επέκταση της ομάδας πηλίκο G/H μέσω της H (όπου ι είναι η ταυτοτική συνάρτηση στην H και π ο φυσιολογικός επιμορφισμός $g \to gH$ από την G στο πηλίκο G/H).

Ο συνδετικός κρίκος που θα μας επιτρέψει να χρησιμοποιήσουμε επαγωγικά τις προτάσεις 3.2 και 3.4 είναι η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 3.6. *Έστω H και K δυο πεπερασμένες ομάδες και έστω G μια επέκταση της K μέσω της H. Αν η ομάδα H έχει την d_H-UHJP και η ομάδα K έχει την d_K-UHJP τότε η ομάδα G έχει την d-UHJP, όπου $d = d_H^{|K|} \cdot d_K$.*

Υποθέτοντας τις προτάσεις 3.2 και 3.6 παίρνουμε το πρώτο κύριο θεώρημα.

Απόδειξη (Απόδειξη του Θεωρήματος 1.34)

Έστω G μια πεπερασμένη επιλύσιμη ομάδα και d ένας HJ-βαθμός της G. Έστω $\{e\} = G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_n = G$ μια υποκανονική σειρά της G με κυκλικούς παράγοντες και τέτοια ώστε $d = \prod_{i=1}^n p_i^{(p_i-1)\prod_{j>i} p_j}$, όπου $p_i = |G_i/G_{i-1}|$ για όλα τα $i \in [n]$. Πρέπει να δείξουμε ότι η ομάδα G έχει την d-UHJP. Θέτουμε $d_0 = 1$ και επαγωγικά ορίζουμε $d_i = d_{i-1}^{p_i} p_i^{p_i-1}$, για κάθε $i \in [n]$. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η τετριμμένη ομάδα $G_0 = \{e\}$ έχει την d_0-UHJP. Έστω $i \geqslant 1$ και υποθέστε ότι G_{i-1} έχει την d_{i-1}-UHJP. Αφού η ομάδα G_i/G_{i-1} είναι κυκλική τάξης p_i, από την πρόταση 3.2 θα έχει την $p_i^{p_i-1}$-UHJP. Επιπλέον, είναι ξεκάθαρο ότι η ομάδα G_i είναι μια επέκταση της G_i/G_{i-1} μέσω της G_{i-1} και επομένως από την Πρόταση 3.6 και τον επαγωγικό ορισμό του d_i, έχουμε ότι η ομάδα G_i έχει την d_i-UHJP. Από επαγωγή, η ομάδα G έχει την d_n-UHJP. Το ότι $d_n = d$ είναι ένα απλό ζήτημα υπολογισμού. □

Υποθέτοντας το Θεώρημα 1.34 και την Πρόταση 3.4 παίρνουμε το δεύτερο κύριο θεώρημα.

Απόδειξη (Απόδειξη του Θεωρήματος 1.35)
Έστω G μια πεπερασμένη επιλύσιμη ομάδα η οποία δρα σε ένα πεπερασμένο σύνολο X και έστω d ένας HJ-βαθμός της G. Από το Θεώρημα 1.34, η ομάδα G έχει την d-UHJP. Επομένως, από την Πρόταση 3.4 για $H = G$, το ζεύγος (G, X) έχει την $(E_{X|G}, d^p)$-UHJP, όπου p είναι το πλήθος των τροχιών της G στο X. Όπως έχουμε ήδη παρατηρήσει αυτό είναι ακριβώς το περιεχόμενο του Θεωρήματος 1.35. □

3.2 Μια παραλαγή του λήμματος του Shelah

Για την απόδειξη των προτάσεων 3.2, 3.4 και 3.6, θα κάνουμε χρήση μιας κατάλληλης τροποποίησης ενός πολύ γνωστού λήμματος που οφείλουμε στον Shelah, ο οποίος το χρησιμοποίησε στο [31], για να δώσει την πρώτη απόδειξη του Θεωρήματος Hales–Jewett [17] που παρήγαγε πρωτογενώς αναδρομικά φράγματα για τις αντίστοιχες παραμέτρους.

Για την συνέχεια σταθεροποιούμε μια πεπερασμένη ομάδα G η οποία δρα σε ένα πεπερασμένο σύνολο X, μια υποομάδα H της G, μια σχέση ισοδυναμίας E στο X και ένα $d \in \mathbb{N}$. Για κάθε μεταβλητή λέξη $W \in \mathrm{V}^d_{\mathrm{un}}(H; X)$, με $|W|$ θα συμβολίζουμε το μήκος της W. Αν $(W_i)_{i=1}^n$ είναι μια ακολουθία μεταβλητών λέξεων στο $\mathrm{V}^d_{\mathrm{un}}(H; X)$ και $(x_i)_{i=1}^n \in X^n$, τότε για κάθε $j \in [n]$, με $\prod_{i=j}^n W_i(x_i)$ θα συμβολίζουμε την παράθεση $W_j(x_j)^\frown \dots {}^\frown W_n(x_n)$ με την συγκεκριμένη σειρά.

Λήμμα 3.7. *Αν το ζεύγος (H, X) έχει την (E, d)-UHJP, τότε για κάθε $n, r \in \mathbb{N}$ υπάρχει ένας θετικός ακέραιος $N = N(n, r)$ ο οποίος ικανοποιεί την ακόλουθη ιδιότητα. Για κάθε r-χρωματισμό του X^N, υπάρχει μια ακολουθία $(W_i)_{i=1}^n$ μεταβλητών λέξεων στο $\mathrm{V}^d_{\mathrm{un}}(H; X)$, με $\sum_{i=1}^n |W_i| = N$ και τέτοια ώστε για κάθε $(x_i)_{i=1}^n \in X^n$, το σύνολο $\left\{\prod_{i=1}^n W_i(x'_i) \,:\, \forall i \in [n]\, x'_i E x_i\right\}$ να είναι μονοχρωματικό.*

Απόδειξη
Για κάθε $r \in \mathbb{N}$, έστω $f(r) = N(H, X, E, d, r)$, όπου το $N(H, X, E, d, r)$ το παίρνουμε από τον Ορισμό 3.3. Είναι ξεκάθαρο ότι για $n = 1$ μπορούμε να θέσουμε $N(1, r) = f(r)$ για κάθε $r \in \mathbb{N}$. Υποθέστε ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ και για όλα τα

$r \in \mathbb{N}$, οι αριθμοί $N(n,r)$ έχουν οριστεί. Έστω ένα οποιοδήποτε $r \in \mathbb{N}$, θέτουμε

$$N(n+1,r) = N\left(n, r^{|X|}\right) + f\left(r^{|X|^{N\left(n, r^{|X|}\right)}}\right). \tag{3.2}$$

Τώρα έστω $N = N(n+1,r)$ και έστω $c\colon X^N \to [r]$ ένας r-χρωματισμός του X^N. Από την σχέση (3.2) έχουμε ότι $N = N_1 + N_2$ όπου $N_1 = N\left(n, r^{|X|}\right)$ και $N_2 = f(r^{|X|^{N_1}})$. Έστω $c_2 : X^{N_2} \to [r^{|X|^{N_1}}]$ ένας χρωματισμός που ορίζεται από την σχέση $c_2(\boldsymbol{y}) = \left(c\left(\boldsymbol{x}^\frown \boldsymbol{y}\right)\right)_{\boldsymbol{x} \in X^{N_1}}$, για κάθε $\boldsymbol{y} \in X^{N_2}$. Από την επιλογή του N_2, υπάρχει μια μεταβλητή λέξη $W \in \mathrm{V}^d_{\mathrm{un}}(H;X)$ με $|W| = N_2$ η οποία είναι τέτοια ώστε για κάθε $\boldsymbol{x} \in X^{N_1}$,

$$c\left(\boldsymbol{x}^\frown W(x')\right) = c\left(\boldsymbol{x}^\frown W(x)\right) \text{ αν } x' E x. \tag{3.3}$$

Τώρα ορίζουμε $c_1 : X^{N_1} \to [r^{|X|}]$ από την σχέση

$$c_1(\boldsymbol{x}) = \left(c\left(\boldsymbol{x}^\frown W(x)\right)\right)_{x \in X},$$

για κάθε $\boldsymbol{x} \in X^{N_1}$. Από την επιλογή του N_1 υπάρχει μια ακολουθία μεταβλητών λέξεων $(W_i)_{i=1}^n$ στο $\mathrm{V}^d_{\mathrm{un}}(H;X)$ με $\sum_{i=1}^n |W_i| = N_1$, τέτοια ώστε, για κάθε $x \in X$,

$$c\left(\prod_{i=1}^n W_i(x_i')^\frown W(x)\right) = c\left(\prod_{i=1}^n W_i(x_i)^\frown W(x)\right) \text{ αν } (\forall i \in [n])\, x_i' E x_i. \tag{3.4}$$

Θέτουμε $W_{n+1} = W$. Τότε $(W_i)_{i=1}^{n+1}$ είναι μια ακολουθία μεταβλητών λέξεων στο $\mathrm{V}^d_{\mathrm{un}}(H;X)$ με $\sum_{i=1}^{n+1} |W_i| = N_1 + N_2 = N$. Επίσης, έστω $(x_i)_{i=1}^{n+1}, (x_i')_{i=1}^{n+1} \in X^{n+1}$ τέτοια ώστε $x_i E x_i'$ για κάθε $i \in [n+1]$. Τότε

$$c\left(\prod_{i=1}^{n+1} W_i(x_i)\right) \overset{(3.4)}{=} c\left(\prod_{i=1}^{n} W_i(x_i')^\frown W(x_{n+1})\right) \overset{(3.3)}{=} c\left(\prod_{i=1}^{n+1} W_i(x_i')\right)$$

και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. □

3.3 Κάποιοι χρήσιμοι συμβολισμοί

Σε αυτή την ενότητα, θα καθορίσουμε κάποιους επιπλέον συμβολισμούς που χρησιμοποιούμε και οι οποίοι είναι χρήσιμοι για την περαιτέρω ανάπτυξη των επιχειρημάτων μας. Για ότι ακολουθεί, σταθεροποιούμε μια πεπερασμένη ομάδα η οποία δρα σε ένα πεπερασμένο σύνολο X και ένα μη κενό υποσύνολο H της G.

Έστω $(W_i)_{i=1}^n$ μια ακολουθία της οποίας κάθε όρος W_i είναι είτε μια σταθερή, είτε μια uniform H-μεταβλητή λέξη επί του X. Για μια διαμέριση $[n] = \bigcup_{j=1}^m F_j$ του $[n]$, όταν γράφουμε $\prod_{j=1}^m \prod_{i\in F_j} W_i$ θα εννοούμε απλά την παράθεση $W_1{}^\frown \ldots {}^\frown W_n$.

Έστω $W = (w_i)_{i=1}^n \in \mathrm{V}_{\mathrm{un}}^d(H;X)$. Χρησιμοποιούμε την αναπαράσταση ως γινόμενο

$$W = \prod_{i\in F} x_i \times \prod_{h\in H} \prod_{i\in F_h} v_h. \tag{3.5}$$

για να συμβολίσουμε το γεγονός ότι $F = \{i \in [n] : w_i = x_i \in X\}$ και $F_h = \{i \in [n] : w_i = v_h\}$ για κάθε $h \in H$. Από το ορισμό της αντικατάστασης σε μία μεταβλητή λέξη που δώσαμε μέσω της σχέσης (1.4), για κάθε $x \in X$, η σταθερή λέξη $W(x)$ θα αναπαρίσταται ως

$$W(x) = \prod_{i\in F} x_i \times \prod_{h\in H} \prod_{i\in F_h} hx. \tag{3.6}$$

Επιπλέον, για κάθε $\tau \in G$, με W^τ θα συμβολίζουμε την $H\tau$-μεταβλητή λέξη επί του X η οποία προκύπτει από την W αν αφήσουμε τα σταθερά γράμματα όπως έχουν και αντικαταστήσουμε κάθε μεταβλητή v_h με την μεταβλητή $v_{h\tau}$. Παρατηρήστε ότι αν η W αναπαρίσταται όπως στην σχέση (3.5) τότε η W^τ αναπαρίσταται ως

$$W^\tau = \prod_{i\in F} x_i \times \prod_{h\in H} \prod_{i\in F_h} v_{h\tau}. \tag{3.7}$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.6) και (3.7), για κάθε $\tau \in G$ και κάθε $x \in X$, έχουμε ότι

$$W^\tau(x) = \prod_{i\in F} x_i \times \prod_{h\in H} \prod_{i\in F_h} (h\tau)x = \prod_{i\in F} x_i \times \prod_{h\in H} \prod_{i\in F_h} h(\tau x)$$

και επομένως,

$$W^\tau(x) = W(\tau x). \tag{3.8}$$

Τέλος παρατηρήστε ότι αν H είναι μια υποομάδα της G και $\tau \in H$, τότε $W^\tau \in \mathrm{V}_{\mathrm{un}}^d(H;X)$ (αν και $W^\tau \neq W$ για κάθε $\tau \neq e$).

3.4 Απόδειξη της Πρότασης 3.2

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, για την απόδειξη της Πρότασης 3.2 θα χρησιμοποιήσουμε ένα συνδυαστικό επιχείρημα που χρησιμοποίησε και ο Kříž στο [23]. Αυτό το επιχείρημα, απαιτεί ένα αποτέλεσμα τύπου Ramsey, το οποίο αν και είναι άμεσο πόρισμα του κλασσικού θεωρήματος του Ramsey (1.1[28]), θα το παραθέσουμε παρακάτω και θα δώσουμε μια αυτοτελής επαγωγική απόδειξη βασισμένη απλά στην αρχή του περιστερώνα.

Έστω $T : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ μια συνάρτηση την οποία ορίζουμε επαγωγικά από τις σχέσεις $T(1,r) = 1$, $T(2,r) = r+1$ και $T(n+1,r) = T(n,2^r)$ για κάθε $n \geqslant 2$ και κάθε $r \in \mathbb{N}$. Παρατηρήστε ότι $T(n,r)$ είναι μια tower-type συνάρτηση, για παράδειγμα $T(3,r) = 2^r+1$, $T(4,r) = 2^{2^r}+1$, $T(5,r) = 2^{2^{2^r}}+1$ και ούτω καθ' εξής. Δοθέντος ένα σύνολο X και $m \in \mathbb{N}$, θυμίζουμε ότι με $X^{(m)}$ συμβολίζουμε όλα τα υποσύνολα του X με m στοιχεία. Τέλος, για ένα μη κενό $X \subseteq \mathbb{N}$ θέτουμε

$$X_* = X \setminus \{\min X\} \quad \text{και} \quad X^* = X \setminus \{\max X\}.$$

Λήμμα 3.8. *Έστω $p,r \in \mathbb{N}$ με $p \geqslant 2$ και $n = T(p,r)$. Τότε για κάθε r-χρωματισμό του $[n]^{(p-1)}$, υπάρχει $P \subseteq [n]$ με $|P| = p$ τέτοιο ώστε τα σύνολα P_* και P^* να έχουν το ίδιο χρώμα.*

Απόδειξη
Αν $p = 2$ τότε $T(2,r) = r+1$ και το λήμμα ισχύει από την αρχή του περιστερώνα. Προχωρούμε με επαγωγή στο p. Έστω ότι το λήμμα ισχύει για κάποιο $p \geqslant 2$. Έστω $q = p+1$, $n = T(q,r)$ και $c : [n]^{(q-1)} \to [r]$. Ψάχνουμε για ένα $Q \subseteq [n]$ με $|Q| = q$ και τέτοιο ώστε $c(Q_*) = c(Q^*)$. Έστω $\mathscr{P}([r])$ το δυναμοσύνολο του $[r]$, θέτουμε $c' : [n]^{(q-2)} \to \mathscr{P}([r])$, που ορίζεται από

$$c'(B) = \{c(B \cup \{x\}) : \ x \in [n] \text{ και } \max B < x\}, \tag{3.9}$$

για κάθε $B \in [n]^{(q-2)}$.

Μπορούμε να δούμε τον χρωματισμό c' ως έναν 2^r-χρωματισμό του $[n]^{(q-2)} = [n]^{(p-1)}$ και επομένως, αφού $n = T(q,r) = T(p+1,r) = T(p,2^r)$, από την επαγωγική μας υπόθεση, μπορούμε να βρούμε $P \in [n]^{(p)}$ τέτοιο ώστε $c'\left(P_*\right) = c'\left(P^*\right)$. Λόγω του ότι $P = P^* \cup \max P$, έχουμε ότι $c(P) \in c'\left(P^*\right)$ και επομένως, $c(P) \in c'\left(P_*\right)$. Άρα, από την σχέση (3.9) για $B = P_*$, υπάρχει ένα $x \in [n]$ τέτοιο ώστε

$$\max P_* < x \ \text{ και } \ c\left(P_* \cup \{x\}\right) = c(P). \tag{3.10}$$

Θέτουμε $Q = P \cup \{x\}$. Αφού $\max P = \max P_* < x$ έχουμε ότι $|Q| = p+1 = q$. Επιπλέον, παρατηρήστε ότι $c\left(Q_*\right) = c\left(P_* \cup \{x\}\right) \overset{(3.10)}{=} c(P) = c\left(Q^*\right)$. □

Έστω $p \in \mathbb{N}$ με $p \geq 2$ και έστω $G = \{\tau^j : 0 \leqslant j \leqslant p-1\}$ μια κυκλική ομάδα τάξης p. Η Πρόταση 3.2 είναι συνέπεια του επόμενου λήμματος.

Λήμμα 3.9. *Έστω $k \in \{1,\ldots,p-1\}$. Τότε για κάθε $r \in \mathbb{N}$ υπάρχει ένας θετικός ακέραιος N τέτοιος ώστε για κάθε r-χρωματισμό του G^N να υπάρχει μια μεταβλητή λέξη $W \in \mathrm{V}^{p^k}_{\mathrm{un}}(G;G)$ μήκους N τέτοια ώστε το σύνολο $\{W(\tau^j) : 0 \leqslant j \leqslant k\}$ να είναι μονοχρωματικό.*

Απόδειξη
Αρχικά έστω ότι $k = 1$. Έστω $r \in \mathbb{N}$, $N = T(p,r)$ και $c : G^N \to [r]$. Τότε ο χρωματισμός c επάγει έναν r-χρωματισμό του $[N]^{(p-1)}$ ως εξής. Για κάθε $B = \{n_1 < \cdots < n_{p-1}\} \in [N]^{(p-1)}$, θέτουμε $\boldsymbol{\tau}^B = (\tau_i^B)_{i=1}^N \in G^N$, όπου

$$\tau_i^B = \begin{cases} e & \text{if } i \notin B \\ \tau^q & \text{if } i = n_q \text{ για κάποιο } q \in \{1, \ldots, p-1\}. \end{cases} \tag{3.11}$$

Έστω $\tilde{c} : [N]^{(p-1)} \to [r]$ που ορίζεται από την σχέση $\tilde{c}(B) = c\left(\boldsymbol{\tau}^B\right)$. Αφού $N = T(p,r)$, από το Λήμμα 3.8, υπάρχει ένα $P \in [N]^{(p)}$ τέτοιο ώστε

$$\tilde{c}\left(P_*\right) = \tilde{c}\left(P^*\right). \tag{3.12}$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $P = [p]$. θέτουμε $W = \prod_{q=1}^p v_{\tau^{q-1}} \times \prod_{i=p+1}^N e$. Προφανώς, $W \in \mathrm{V}_{\mathrm{un}}^p(G;G)$, επίσης αφού

$$c\left(W(e)\right) = c\left(\prod_{q=1}^p \tau^{q-1} \times \prod_{i=p+1}^N e\right) = c\left(\boldsymbol{\tau}^{P_*}\right) = \tilde{c}\left(P_*\right)$$

και

$$c\left(W(\tau)\right) = c\left(\prod_{q=1}^p \tau^{q} \times \prod_{i=p+1}^N e\right) = c\left(\boldsymbol{\tau}^{P^*}\right) = \tilde{c}\left(P^*\right),$$

από την σχέση (3.12), παίρνουμε ότι $c\left(W(e)\right) = c\left(W(\tau)\right)$ και η απόδειξη για την περίπτωση $k = 1$ έχει ολοκληρωθεί.

Έστω τώρα ότι το λήμμα είναι αληθές για κάποιο $k \leqslant p-2$. Από τον Ορισμό 3.3, η επαγωγική μας υπόθεση σημαίνει ότι η ομάδα G έχει την (E_k, d_k)-UHJP, όπου $d_k = p^k$ και E_k είναι η σχέση ισοδυναμίας στην G η οποία ορίζεται από την σχέση

$$g E_k g' \Leftrightarrow g, g' \in \{\tau^j : 0 \leqslant j \leqslant k\} \text{ ή } g = g'.$$

Έστω $r \in \mathbb{N}$. Θέτουμε $N = N(n,r)$ ορίζοντας το όπως στο Λήμμα 3.7 για τις παραμέτρους $H = X = G$, $E = E_k$, $d = d_k$ και $n = T(p, r^{k+1})$. Έστω $c : G^N \to [r]$ ένας r-χρωματισμός του G^N. Από την επιλογή του N, μπορούμε να βρούμε μια ακολουθία $(W_i)_{i=1}^n$ μεταβλητών λέξεων στο $\mathrm{V}_{\mathrm{un}}^{p^k}(G;G)$ με $\sum_{i=1}^n |W_i| = N$ τέτοια ώστε για κάθε $(g_i)_{i=1}^n \in G^n$, το σύνολο $\left\{\prod_{i=1}^n W_i(g_i') : \forall i \in [n]\ g_i' E_k g_i\right\}$ να είναι μονοχρωματικό.

Για κάθε $j \in \{0, \ldots, k\}$ και κάθε $B = \{n_1 < \cdots < n_{p-1}\} \in [n]^{(p-1)}$ θέτουμε $\boldsymbol{\tau}^{B,j} = \left(\tau_i^{B,j}\right)_{i=1}^n \in G^n$, όπου

$$\tau_i^{B,j} = \begin{cases} e & \text{if } i \notin B \\ \tau^{q+j} & \text{if } i = n_q \text{ για κάποιο } q \in \{1, \ldots, p-1\} \end{cases}. \tag{3.13}$$

Έστω $\tilde{c} : [n]^{(p-1)} \to [r^{k+1}]$ ο χρωματισμός που ορίζεται από την σχέση $\tilde{c}(B) = \left(\tilde{c}_j(B)\right)_{j=0}^{k}$, όπου

$$\tilde{c}_j(B) = c\left(\prod_{i=1}^{n} W_i\left(\tau_i^{B,j}\right)\right). \tag{3.14}$$

Αφού $n = T(p, r^{k+1})$, από το Λήμμα 3.8 υπάρχει $P \in [n]^{(p)}$ τέτοιο ώστε $\tilde{c}\left(P_*\right) = \tilde{c}\left(P^*\right)$, ή ισοδύναμα

$$\tilde{c}_j\left(P_*\right) = \tilde{c}_j\left(P^*\right), \text{ για όλα τα } j = 0, \ldots, k. \tag{3.15}$$

Όπως και στην περίπτωση $k = 1$, θεωρούμε ότι $P = [p]$ και θέτουμε

$$W = \prod_{q=1}^{p} W_q^{\tau^{q-1}} \times \prod_{i=p+1}^{n} W_i(e) \tag{3.16}$$

όπου η $W_q^{\tau^{q-1}}$ ορίζεται όπως και στην (3.7) για κάθε $q \in [p]$. Αφού $W_q \in \mathrm{V}_{\mathrm{un}}^{p^k}(G;G)$, έχουμε ότι $W_q^{\tau^{q-1}} \in \mathrm{V}_{\mathrm{un}}^{p^k}(G;G)$ για κάθε $q \in [p]$ και συνεπώς, $W \in \mathrm{V}_{\mathrm{un}}^{p^{k+1}}(G;G)$.

Απομένει να δείξουμε ότι το σύνολο $\left\{W(\tau^j) : 0 \leqslant j \leqslant k+1\right\}$ είναι μονοχρωματικό. Οντως, έστω $j \in \{0, \ldots, k\}$. Τότε

$$\begin{aligned}
c\left(W(\tau^{j+1})\right) &\overset{(3.8),(3.16)}{=} c\left(\prod_{q=1}^{p-1} W_q(\tau^{q+j}) \times W_p(\tau^j) \times \prod_{i=p+1}^{n} W_i(e)\right)\\
&\overset{\tau^j E_k e}{=} c\left(\prod_{q=1}^{p-1} W_i(\tau^{q+j}) \times W_p(e) \times \prod_{i=p+1}^{n} W_i(e)\right)\\
&\overset{(3.13)}{=} c\left(\prod_{i=1}^{n} W_i\left(\tau_i^{P^*,j}\right)\right) \overset{(3.14)}{=} \tilde{c}_j(P^*).
\end{aligned}$$

Ομοίως έχουμε ότι,

$$\begin{aligned}
c\left(W(\tau^{j})\right) &\overset{(3.8),(3.16)}{=} c\left(W_1(\tau^j) \times \prod_{q=2}^{p} W_q(\tau^{q-1+j}) \times \prod_{i=p+1}^{n} W_i(e)\right)\\
&\overset{\tau^j E_k e}{=} c\left(W_1(e) \times \prod_{q=2}^{p} W_q(\tau^{q-1+j}) \times \prod_{i=p+1}^{n} W_i(e)\right)\\
&\overset{(3.13)}{=} c\left(\prod_{i=1}^{n} W_i(\tau_i^{P_*,j})\right) \overset{(3.14)}{=} \tilde{c}_j(P_*).
\end{aligned}$$

Από τα παραπάνω και την σχέση (3.15), έχουμε ότι $c\left(W(\tau^{j+1})\right) = c\left(W(\tau^{j})\right)$ για κάθε $j \in \{0, \dots, k\}$, δηλαδή το σύνολο $\{W(\tau^j) : 0 \leqslant j \leqslant k+1\}$ είναι μονοχρωματικό. □

3.5 Απόδειξη της Πρότασης 3.4

Για την συνέχεια σταθεροποιούμε μια πεπερασμένη ομάδα G η οποία δρα σε ένα πεπερασμένο σύνολο X και μια υποομάδα H της G η οποία έχει την d-UHJP κάποιο $d \in \mathbb{N}$.

Λήμμα 3.10. *Έστω $y \in X$ και έστω E_y η σχέση ισοδυναμίας στο X που ορίζεται από την σχέση*

$$x' E_y x \Leftrightarrow x', x \in Hy \text{ or } x' = x. \tag{3.17}$$

Τότε το ζεύγος (H, X) έχει την (E_y, d)-UHJP.

Απόδειξη
Έστω $r \in \mathbb{N}$, αφού η ομάδα H έχει την d-UHJP, μπορούμε να θέσουμε $N = N(H, d, r)$ όπως στον ορισμό 3.1 (για H στην θέση της G). Έστω r-χρωματισμός $c : X^N \to [r]$ του X^N και έστω $c_H : H^N \to [r]$ ο χρωματισμός που ορίζεται από την σχέση

$$c_H(h_1, \dots, h_N) = c\left(h_1 y, \dots, h_N y\right). \tag{3.18}$$

Από την επιλογή του N υπάρχει $W_H \in \mathrm{V}^d_{\mathrm{un}}(H; H)$ μήκους N, τέτοια ώστε

$$c_H\left(W_H(h)\right) = c_H\left(W_H(h')\right) \ \forall h, h' \in H. \tag{3.19}$$

Γράφοντας την W_H ως $W_H = \prod_{i\in F} h_i \times \prod_{h\in H} \prod_{i\in F_h} v_h$, ορίζουμε

$$W = \prod_{i\in F} h_i y \times \prod_{h\in H} \prod_{i\in F_h} v_h. \tag{3.20}$$

Είναι φανερό ότι $W \in \mathrm{V}^d_{\mathrm{un}}(H; X)$ και $|W| = N$. Επομένως, για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, απομένει να δείξουμε ότι το σύνολο $\{W(x') : x' E_y x\}$ είναι μονοχρωματικό. Αφού η σχέση E_y είναι η σχέση της ισότητας στο $X \setminus Hy$, αρκεί να δείξουμε ότι $c(W(x)) = c(W(x'))$, για κάθε $x, x' \in Hy$. Πράγματι, έστω $x \in Hy$, τότε υπάρχει $h_x \in H$ τέτοιο ώστε $x = h_x y$. Τότε,

$$\begin{aligned} c\,(W(x)) = c\left(W(h_x y)\right) &\overset{(3.20)}{=} c\left(\prod_{i\in F} h_i y \times \prod_{h\in H}\prod_{i\in F_h} h(h_x y)\right) \\ &= c\left(\prod_{i\in F} h_i y \times \prod_{h\in H}\prod_{i\in F_h} (hh_x)y\right) \\ &\overset{(3.18)}{=} c_H\left(\prod_{i\in F} h_i \times \prod_{h\in H}\prod_{i\in F_h} hh_x\right) = c_H\left(W_H(h_x)\right), \end{aligned}$$

και επομένως, από την σχέση (3.19), το σύνολο $\{W(x) : x \in Hy\}$ είναι μονοχρωματικό. □

Έστω $Hy_1, \ldots, Hy_p$ οι τροχιές της ομάδας H στο X και για κάθε $k \in [p]$, έστω E_k η σχέση ισοδυναμίας στο X η οποία ορίζεται από την σχέση

$$x' E_k\, x \Leftrightarrow \exists j \in [k] \text{ such that } x', x \in Hy_j \text{ or } x' = x. \tag{3.21}$$

Παρατηρήστε ότι $E_p = E_{X|H}$ και επομένως, η Πρόταση 3.4 θα προκύψει ως πόρισμα του επόμενου λήμματος.

Λήμμα 3.11. *Για κάθε $k \in [p]$, το ζεύγος (H, X) έχει την (E_k, d^k)-UHJP.*

Απόδειξη
Η περίπτωση $k = 1$ ισχύει λόγω του Λήμματος 3.10. Προχωρούμε με επαγωγή στο $k \in [p]$. Έστω $k \in [p-1]$ και υποθέστε ότι το ζεύγος (H, X) έχει την (E_k, d^k)-UHJP. Σταθεροποιούμε ένα $r \in \mathbb{N}$ και θέτουμε $n = N(H, X, E_k, d^k, r)$. Από το Λήμμα 3.10, το ζεύγος (H, X) έχει την $(E_{y_{k+1}}, d)$-UHJP. Έστω $N = N(n, r)$ όπως αυτό ορίζεται από το Λήμμα 3.7 για $E = E_{y_{k+1}}$.

Έστω $c : X^N \to [r]$. Από την επιλογή του N, υπάρχει μια ακολουθία $(W_i)_{i=1}^n$ in $\mathrm{V}^d_{\mathrm{un}}(H; X)$ με $\sum_{i=1}^n |W_i| = N$ και η οποία είναι τέτοια ώστε

$$c\left(\prod_{i=1}^n W_i(x_i')\right) = c\left(\prod_{i=1}^n W_i(x_i)\right) \text{ οποτεδήποτε } x_i' E_{y_{k+1}} x_i \ \forall i \in [n]. \tag{3.22}$$

Έστω $c' : X^n \to [r]$ χρωματισμός ο οποίος ορίζεται από την σχέση

$$c'(x_1, \ldots, x_n) = c\left(\prod_{i=1}^n W_i(x_i)\right). \tag{3.23}$$

Από την επιλογή του n και την σχέση (3.21), υπάρχει μια μεταβλητή λέξη $W' \in \mathrm{V}^{d^k}_{\mathrm{un}}(H; X)$ με $|W'| = n$ τέτοια ώστε

$$c'\left(W'(x)\right) = c'\left(W'(y_j)\right), \text{ για κάθε } j \in [k] \text{ και κάθε } x \in Hy_j. \tag{3.24}$$

Έστω $W' = \prod_{i\in F} x_i \times \prod_{h\in H}\prod_{i\in F_h} v_h$. Θέτουμε

$$W = \prod_{i\in F} W_i(x_i) \times \prod_{h\in H}\prod_{i\in F_h} W_i^h. \tag{3.25}$$

Αφού $W_i^h \in \mathrm{V}^d_{\mathrm{un}}(H;X)$ για κάθε $i\in[n]$ και $|H|\cdot|F_h| = d^k$ για κάθε $h\in H$, είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι η W είναι μια uniform H-μεταβλητή λέξη επί του X βαθμού d^{k+1}. Επίσης, είναι προφανές ότι, $|W| = \sum_{i=1}^n |W_i| = N$. Από την σχέση (3.21), για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε $j\in[k+1]$, το σύνολο $\{W(x) : x\in Hy_j\}$ είναι μονοχρωματικό. Πρώτα έστω $j = k+1$ και έστω $x\in Hy_{k+1}$. Τότε $x = h_x y_{k+1}$ για κάποιο $h_x\in H$ και

$$\begin{aligned} c(W(x)) = c\left(W(h_x y_{k+1})\right) &\overset{(3.25)}{=} c\left(\prod_{i\in F} W_i(x_i)\times\prod_{h\in H}\prod_{i\in F_h} W_i\left(h(h_x y_{k+1})\right)\right)\\ &\overset{(3.22)}{=} c\left(\prod_{i\in F} W_i(x_i)\times\prod_{h\in H}\prod_{i\in F_h} W_i\left(hy_{k+1}\right)\right)\\ &\overset{(3.25)}{=} c\left(W(y_{k+1})\right). \end{aligned}$$

Αν τώρα $j\in[k]$ και $x = h_x y_j \in Hy_j$, τότε

$$\begin{aligned} c(W(x)) = c\left(W(h_x y_j)\right) &\overset{(3.25)}{=} c\left(\prod_{i\in F} W_i(x_i)\times\prod_{h\in H}\prod_{i\in F_h} W_i\left(h(h_x y_j)\right)\right)\\ &\overset{(3.23)}{=} c'\left(\prod_{i\in F} x_i\times\prod_{h\in H}\prod_{i\in F_h} h(h_x y_j)\right)\\ &= c'\left(W'(h_x y_j)\right) \overset{(3.24)}{=} c'\left(W'(y_j)\right). \end{aligned}$$

Από τα παραπάνω η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. □

3.6 Απόδειξη της Πρότασης 3.6

Έστω H, G και K πεπερασμένες ομάδες, τέτοιες ώστε, η G να είναι μια επέκταση της K μέσω της H. Έστω $\pi : G\to K$ ο αντίστοιχος επιμορφισμός και $\iota : H\to G$ ο αντίστοιχος μονομορφισμός για τους οποίους ισχύει ότι η εικόνα του ι ισούται με τον πυρήνα του π. Υποθέστε ότι η H έχει την d_H-UHJP. Ταυτίζοντας την H με την εικόνα της $\iota(H)$, από το Πόρισμα 3.5 έχουμε ότι το ζεύγος (H,G) έχει την $(E_{G|H}, d_H^p)$-UHJP, όπου $p = |G/H|$. Επομένως, η Πρόταση 3.6 είναι άμεση συνέπεια του επόμενου λήμματος.

Λήμμα 3.12. *Έστω H, G, K πεπερασμένες ομάδες τέτοιες ώστε υπάρχει ένας επιμορφισμός $\pi : G \to K$ με πυρήνα H. Αν το ζεύγος (H, G) έχει την $(E_{G|H}, d_1)$-UHJP για κάποιο $d_1 \in \mathbb{N}$ και η ομάδα K έχει την d_K-UHJP, τότε η ομάδα G έχει την d-UHJP όπου $d = d_1 d_K$.*

Απόδειξη
Παρατηρήστε ότι η ομάδα H είναι κανονική υποομάδα της G και

$$gE_{G|H}g' \Leftrightarrow \pi(g) = \pi(g'). \tag{3.26}$$

Έστω $r \in \mathbb{N}$. Θέτουμε $N = N(n, r)$ να είναι ο αριθμός που προκύπτει από το Λήμμα 3.7, για $X = G$, $E = E_{G|H}$, $d = d_1$ και $n = N(K, d_K, r)$. Έστω $c : G^N \to [r]$. Από την επιλογή του N και την σχέση (3.26), υπάρχει μια ακολουθία $(W_i)_{i=1}^n$ μεταβλητών λέξεων στο $\mathrm{V}_{\mathrm{un}}^{d_1}(H; G)$, με $\sum_{i=1}^n |W_i| = N$ και η οποία είναι τέτοια ώστε

$$c\left(\prod_{i=1}^n W_i(g_i)\right) = c\left(\prod_{i=1}^n W_i(g_i')\right) \text{ οποτεδήποτε } \pi(g_i) = \pi(g_i') \, \forall\, i \in [n]. \tag{3.27}$$

Έστω $c_K : K^n \to [r]$ ο χρωματισμός που ορίζεται από την σχέση

$$c_K(\kappa_1, \dots, \kappa_n) = c\left(\prod_{i=1}^n W_i(g_i)\right) \text{ if } \kappa_i = \pi(g_i) \, \forall\, i \in [n]. \tag{3.28}$$

Από την σχέση (3.27) και λόγω του ότι η συνάρτηση $\pi : G \to K$ είναι επί, ο χρωματισμός c_K είναι καλώς ορισμένος. Από την επιλογή του n, υπάρχει μια μεταβλητή λέξη $W_K \in \mathrm{V}_{\mathrm{un}}^{d_K}(K; K)$ μήκους n, η οποία είναι τέτοια ώστε

$$c_K\left(W_K(\kappa)\right) = c_K\left(W_K(\kappa')\right) \, \forall \kappa, \kappa' \in K. \tag{3.29}$$

Έστω $W_K = \prod_{i \in F} \kappa_i \times \prod_{\kappa \in K} \prod_{i \in F_\kappa} v_\kappa$. Θέτουμε

$$W = \prod_{i \in F} W_i(g_{\kappa_i}) \times \prod_{\kappa \in K} \prod_{i \in F_\kappa} W_i^{g_\kappa}, \tag{3.30}$$

όπου για κάθε $\kappa \in K$, το $g_\kappa \in G$ είναι τέτοιο ώστε $\pi(g_\kappa) = \kappa$. Είναι εύκολο να δούμε ότι $|W| = \sum_{i=1}^n |W_i| = N$. Επιπλέον, $\bigcup_{\kappa \in K} H g_\kappa = G$ και αφού για κάθε $\kappa \in K$ έχουμε ότι $|K| \cdot |F_\kappa| = d_K$ και $W_i^{g_\kappa} \in \mathrm{V}_{\mathrm{un}}^{d_1}(Hg_\kappa; G)$, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $W \in \mathrm{V}_{\mathrm{un}}^{d}(G; G)$ for $d = d_1 d_K$.

Τέλος, έστω $g \in G$ και έστω $\kappa_g = \pi(g)$. Τότε

$$\begin{aligned}
c\left(W(g)\right) &\overset{(3.30)}{=} c\left(\prod_{i\in F} W_i(g_{\kappa_i}) \times \prod_{\kappa\in K}\prod_{i\in F_\kappa} W_i\left(g_\kappa g\right)\right) \\
&\overset{(3.28)}{=} c_K\left(\prod_{i\in F} \kappa_i \times \prod_{\kappa\in K}\prod_{i\in F_\kappa} \pi\left(g_\kappa g\right)\right) \\
&= c_K\left(\prod_{i\in F} \kappa_i \times \prod_{\kappa\in K}\prod_{i\in F_\kappa} \pi(g_\kappa)\pi(g)\right) \\
&= c_K\left(\prod_{i\in F} \kappa_i \times \prod_{\kappa\in K}\prod_{i\in F_\kappa} \kappa\kappa_g\right) = c_K\left(W_K(\kappa_g)\right),
\end{aligned}$$

και άρα από την σχέση (3.29), το σύνολο $\{W(g) \,:\, g \in G\}$ είναι μονοχρωματικό.□

3.7 Σημειώσεις

Ας δούμε πως με τα παραπάνω αποτελέσματα μπορούμε να πάρουμε σαν πόρισμα μια εκλέπτυνση του Θεωρήματος 1.21 ([23, Theorem 4.4]). Παρατηρήστε ότι αν μια ομάδα δρα transitively σε ένα σύνολο X τότε η σχέση ισοδυναμίας $E_{X|G}$ είναι η τετριμμένη στο X, δηλαδή $xE_{X|G}y$ για κάθε $x, y \in X$. Λαμβάνοντας υπόψιν την μεθοδολογία με την οποία αποδείξαμε το Πόρισμα 1.36, είναι εύκολο να δει κανείς ότι το Θεώρημα 1.21 θα προκύψει από την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 3.13. *Έστω X ένα πεπερασμένο σύνολο και G μια ομάδα που δρα στο X transitively. Έστω H υποομάδα της G, με δύο τροχιές στο X, η οποία έχει την d-UHJP. Τότε το ζεύγος (G, X) έχει την $(E_{X|G}, d^2|H|)$-UHJP.*

Απόδειξη
Έστω ότι η σχέση ισοδυναμίας που ορίζεται από την δράση της H στο X έχει την μορφή $E_{X|H} = \left\{Hx_1, Hx_2\right\}$ για κάποια $x_1, x_2 \in X$. Έστω

$$\mathrm{Stab}_G(x) = \{g \in G \mid gx = x\}$$

ο σταθεροποιητής του $x \in X$. Αφού η ομάδα G δρα transitively στο X, μπορούμε να ορίσουμε τον αριθμό

$$m = \left|\left\{g \in G \;\middle|\; gx \in Hx_1\right\}\right| = \left|Hx_1\right| \cdot |\mathrm{Stab}_G(x)| \tag{3.31}$$

ο οποίος είναι ανεξάρτητος της επιλογής του $x \in X$.

Από το θεώρημα του Ramsey μπορούμε να επιλέξουμε $n = n(m, |G|, r) \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε r-χρωματισμό του $[n]^{(m)}$, να μπορούμε να βρούμε ένα σύνολο $A \in [n]^{(|G|)}$ του οποίου όλα τα m-σύνολα να είναι μονοχρωματικά.

Αφού η H έχει την d-UHJP, από την Πρόταση 3.4 το ζεύγος (H, X) έχει την $(E_{X|H}, d^2)$-UHJP. Επομένως από το Λήμμα 3.7 μπορούμε για κάθε $r \in \mathbb{N}$ να ορίσουμε $N = N(n, r)$ για τις παραμέτρους H,X, $E_{X|H}$,d^2 και $n = n(m, |G|, r)$.

Έστω $r \in \mathbb{N}$ και έστω $c : X^N \to [r]$ ένας r-χρωματισμός του X^N. Από τον ορισμό του N, μπορούμε να βρούμε μια ακολουθία $(W_i)_{i=1}^n$ μεταβλητών λέξεων στο $\mathrm{V}_{\mathrm{un}}^{d^2}(H; X)$, με $\sum_{i=1}^n |W_i| = N$ και η οποία είναι τέτοια ώστε

$$c\left(\prod_{i=1}^n W_i(x_i)\right) = c\left(\prod_{i=1}^n W_i(x_i')\right) \text{ οποτεδήποτε } x_i E_{X|H} x_i' \; \forall\, i \in [n]. \quad (3.32)$$

Έστω $\tilde{c} : [n]^{(m)} \to [r]$ που ορίζεται από την σχέση $\tilde{c}(B) = c\left(W_B\right)$, όπου

$$W_B = \prod_{i \in B} W_i(x_1) \times \prod_{i \in [n] \setminus B} W_i(x_2)$$

για κάθε $B \in [n]^{(m)}$. Από την επιλογή του n μπορούμε να βρούμε $A \in [n]^{(|G|)}$ τέτοιο ώστε $\tilde{c}(B) = \tilde{c}(B')$ για κάθε $B, B' \in A^{(m)}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $A = [|G|]$, τότε για κάθε $B, B' \in [|G|]^{(m)}$, θα ισχύει ότι

$$c\left(\prod_{i \in B} W_i(x_1) \times \prod_{i \in [n] \setminus B} W_i(x_2)\right) = c\left(\prod_{i \in B'} W_i(x_1) \times \prod_{i \in [n] \setminus B'} W_i(x_2)\right). \quad (3.33)$$

Έστω $G = \left\{g_i\right\}_{i \in |G|}$ μια αρίθμηση της ομάδα G. Ορίζουμε

$$W = \prod_{i > |G|} W_i(x_2) \times \prod_{i \leq |G|} W_i^{g_i}, \quad (3.34)$$

όπου για κάθε $i \leq |G|$ ισχύει ότι $W_i^{g_i} \in \mathrm{V}_{\mathrm{un}}^{d^2}(H g_i; X)$ όπως προκύπτει από την σχέση 3.7.

Είναι φανερό ότι $|W| = N$. Επίσης, για κάθε $g \in G$ ισχύει ότι

$$\left|g' \in Gg \in Hg'\right| = |H|.$$

Επομένως $W \in \mathrm{V}_{\mathrm{un}}^{d^2|H|}(G; X)$. Μένει να δείξουμε ότι το σύνολο $\{W(x) : x \in X\}$ είναι μονοχρωματικό. Πράγματι έστω $x, y \in X$, τότε από την σχέση (3.31) έπεται ότι θα υπάρχουν ακριβώς m το πλήθος g_i ώστε $g_i x E_{X|H} x_1$ και m το πλήθος g_i' ώστε $g_i y E_{X|H} x_1$. Από τις σχέσεις (3.32) και (3.34) έπεται ότι για κάποια $B, B' \in [|G|]^{(m)}$ ισχύει ότι

$$c\left(W(x)\right) = c\left(\prod_{i \in B} W_i(x_1) \times \prod_{i \in [n] \setminus B} W_i(x_2)\right)$$

και

$$c\left(W(y)\right) = c\left(\prod_{i\in B'} W_i(x_1) \times \prod_{i\in[n]\setminus B'} W_i(x_2)\right).$$

Από την σχέση (3.33) $c(W(x)) = c(W(y))$ και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. $\square$

Αν έχουμε μια πεπερασμένη ομάδα G που δρα transitively σε κάποιο πεπερασμένο X και μια υποομάδα Η της G με την d-UHJP για κάποιο d, η οποία έχει τρεις τροχιές στο X, η μεθοδολογία που ακολουθήσαμε παραπάνω δεν μπορεί να υλοποιηθεί. Απ' την άλλη, αν η G δρα στον εαυτό της και έχει μια επιλύσιμη ομάδα με δυο τροχιές (σύμπλοκα) τότε η G θα είναι επιλύσιμη και επομένως δεν μπορούμε με αυτόν τον τρόπο να επεκτείνουμε την UHJP σε μη επιλύσιμες ομάδες.

Η κλάση των πεπερασμένων ομάδων που έχουν την d-UHJP για κάποιο $d \in \mathbb{N}$, μοιράζεται κοινά χαρακτηριστικά με τις ιδιότητες που έχει η κλάση των επιλύσιμων ομάδων, δηλαδή, από τις Προτάσεις 3.2 και 3.6, περιέχει όλες τις κυκλικές ομάδες και είναι κλειστή στην πράξη της επέκτασης ομάδων. Επίσης είναι γνωστό ότι υποομάδες επιλύσιμων ομάδων είναι επιλύσιμες και ομάδες πηλίκα επιλύσιμων ομάδων είναι επιλύσιμες. Η επόμενη πρόταση μας δείχνει ότι και αυτό ισχύει για τις πεπερασμένες ομάδες που έχουν την d-UHJP για κάποιο $d \in \mathbb{N}$.

Πρόταση 3.14. *Έστω G μια πεπερασμένη ομάδα η οποία έχει την d-UHJP για κάποιο $d \in \mathbb{N}$. Τότε τα επόμενα ισχύουν.*

1. *Αν H είναι μια υποομάδα της G τότε η H έχει την d-UHJP.*

2. *Αν H είναι μια κανονική υποομάδα της G τότε η G/H έχει την d-UHJP.*

Απόδειξη

1. Έστω H μια υποομάδα της G. Έστω p ο δείκτης της H στην G. Επιλέγουμε $\tau_1, \dots, \tau_{p-1} \in G$ τέτοια ώστε $G/H = \{H, \tau_1 H, \dots, \tau_{p-1} H\}$. Θέτοντας $\tau_0 = e$, παρατηρήστε ότι για κάθε $g \in G$, υπάρχει ένα μοναδικό ζεύγος $(i_g, h_g) \in \{0, \dots, p-1\} \times H$, τέτοιο ώστε $g = \tau_{i_g} h_g$. Έστω $\varphi : G \to H$ το οποίο ορίζεται από την $\varphi(g) = h_g$ για κάθε $g \in G$. Είναι εύκολο να δούμε ότι η φ ικανοποιεί τις επόμενες ιδιότητες. (α) Είναι επί και $\varphi(h) = h$ για κάθε $h \in H$, (β) για κάθε $g \in G$ και κάθε $h \in H$ ισχύει ότι $\varphi(gh) = \varphi(g)h$ και (γ) Για κάθε $h \in H$ έχουμε ότι $|\{g \in G : \varphi(g) = h\}| = p$.

   Σταθεροποιούμε ένα $r \in \mathbb{N}$. Έστω $c \colon H^N \to [r]$ όπου $N = N(G, d, r)$ είναι όπως στον Ορισμό 3.1. Έστω $\tilde{c} : G^N \to [r]$ ο οποίος ορίζεται από την σχέση $\tilde{c}(g_1, \dots, g_N) = c\left(\varphi(g_1), \dots, \varphi(g_N)\right)$. Από την επιλογή του N μπορούμε να βρούμε $\tilde{W} \in \mathrm{V}^d_{\mathrm{un}}(G;G)$ μήκους N και $k_0 \in [r]$ τέτοιο ώστε $\tilde{c}\left(\tilde{W}(g)\right) = k_0$ για όλα τα $g \in G$. Έστω $\tilde{W} = \prod_{i\in F} g_i \times \prod_{g\in G}\prod_{i\in F_g} v_g$, θέτουμε $W = \prod_{i\in F} h_i \times \prod_{h\in H}\prod_{i\in F'_h} v_h$, όπου $h_i = \varphi(g_i)$ για όλα τα $i \in F$ και $F'_h = \cup\{F_g : \varphi(g) = h\}$ για όλα τα $h \in H$. Αφού $\tilde{W} \in \mathrm{V}^d_{\mathrm{un}}(G;G)$, από τη (γ) συμπεραίνουμε ότι $W \in \mathrm{V}^d_{\mathrm{un}}(H;H)$. Μένει να δείξουμε ότι $\{W(h) : h \in H\}$ είναι c-μονοχρωματικό. Πράγματι, έστω $h \in H$, τότε $k_0 = \tilde{c}\left(\tilde{W}(h)\right) = c\left(\prod_{i\in F}\varphi(g_i) \times \prod_{g\in G}\prod_{i\in F_g}\varphi(gh)\right) \overset{(ii)}{=} c\left(\prod_{i\in F}h_i \times \prod_{g\in G}\prod_{i\in F_g}\varphi(g)h\right) = c\,(W(h))$, και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί.

2. Η απόδειξη είναι παρόμοια με την παραπάνω απλά χρησιμοποιούμε το επιμορφισμό $g \to gH$ από την G στην G/H αντί της φ. $\square$

Ramsey Σύνολα, που Βρισκόμαστε? 4

Στην εισαγωγή, αναφέραμε μια λίστα ευκλείδειων συνόλων, τα οποία έχουν αποδειχθεί ότι είναι Ramsey. Υπάρχουν άλλα αποτελέσματα που να μας δίνουν καινούργια Ramsey σύνολα? Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα είναι διττή. Η μόνη οικογένεια που έχει αποδειχθεί ότι είναι Ramsey και δεν την αναφέραμε μέχρι τώρα, μας έρχεται από την δουλειά των Leader, Russell και Walters στο [25], ορίζεται με έναν συνδυαστικό τρόπο και αποτελεί μια πολύ συγκεκριμένη περίπτωση μιας από τις εικασίες τους. Όπως όμως θα δείξουμε παρακάτω, η Ramsey ιδιότητα της ευκλείδειας αναπαράστασης που προκύπτει από αυτή την ειδική περίπτωση, μπορεί να προκύψει σαν πόρισμα του θεωρήματος του Křı́ž. Επομένως, το αποτέλεσμα ναι μεν είναι καινούργιο, αλλά κατά κάποιο τρόπο είναι και παλιό.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ολοκληρώσουμε αυτή την εργασία, με το κεντρικό πόρισμα, ότι κάθε μέχρι σήμερα γνωστό Ramsey σύνολο, είναι ή εμφυτεύεται σε ένα transitive ευκλείδειο σύνολο, το οποίο έχει μια επιλύσιμη ομάδα συμμετριών, με δύο το πολύ τροχιές και άρα η Ramsey ιδιότητα του, προκύπτει από το θεώρημα του Křı́ž.

4.1 Λίγες εικασίες ακόμα!

Θυμίζουμε ότι οι Leader, Russell και Walters, έκαναν την εικασία ότι ένα ευκλείδειο σύνολο είναι Ramsey αν και μόνο αν είναι subtransitive (Εικασία 1.25, [25, Conjecture A]). Στην συνέχεια έκαναν την Εικασία 1.27 ([25, Conjecture B]), η οποία αν ισχύει, τότε κάθε subtransitive ευκλείδειο σύνολο είναι Ramsey. Έπειτα έκαναν την Εικασία 1.30 ([25, Conjecture C]) και δείξανε ότι αν ισχύει, τότε ισχύει και η Εικασία 1.27 (δείτε Πρόταση 1.32).

Οι εικασίες όμως έχουν και συνέχεια! Επειδή οι LRW ήθελαν να μετατρέψουν το πρόβλημα σε κάτι εντελώς συνδυαστικό αλλά και για να καταφέρουν να κλείσουν τον κύκλο και να δείξουν ότι οι εικασίες τους είναι ισοδύναμες μεταξύ τους (εκτός της A), έκαναν ακόμα τρεις, τις D,E και F. Εμείς θα ασχοληθούμε μόνο με την E αφού τα μόνα Ramsey σύνολα που δεν έχουμε δει μέχρι τώρα, παράγονται από κάποιες ειδικές περιπτώσεις της. Οι συνεπαγωγές που έδειξαν τελικά οι LRW περιγράφονται στο παρακάτω σχήμα.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rrrr, Rightarrow, bend left] & C \arrow[l, Rightarrow] \arrow[r, Leftrightarrow] & D \arrow[r, Leftrightarrow] & E & F \arrow[l, Rightarrow] \end{tikzcd}$$

Σχήμα 4.1: Οι συνεπαγωγές μεταξύ των εικασιών B,C,D,E και F στο [25]

Για να περιγράψουμε την εικασία E, θα χρησιμοποιήσουμε την ορολογία που χρησιμοποίησαν οι LRW στο [25]. Έστω $k, \ell \in \mathbb{N}$. Όπως αναφέραμε και στην Εισαγωγή, το σύνολο $[k]^\ell$ συμβολίζει όλες τις *σταθερές λέξεις μήκους* ℓ με *γράμματα* από το *αλφάβητο* $[k]$. Μια λέξη $\tau \in [k]^\ell$ μήκους ℓ της οποίας τα γράμματα εμφανίζονται με μη φθίνον τρόπο, θα λέγεται *πρότυπο*. Για παράδειγμα η λέξη 111233 είναι ένα πρότυπο ενώ η 112133 δεν είναι. Για κάποιο $j \in [k]$ θα συμβολίζουμε με $\#j_\tau$ το πλήθος των εμφανίσεων του γράμματος j στο πρότυπο τ. Σκεφτόμαστε τα πρότυπα ως αντιπροσώπους του συνόλου των *αναγραμματισμών* του προτύπου τ, το οποίο ορίζεται ως

$$A_\tau = \left\{\pi \in [k]^\ell : \left|\left\{i \in [\ell] : \pi_i = j\right\}\right| = \#j_\tau \forall j \in [k]\right\}. \tag{4.1}$$

Ορισμός 4.1. *Έστω $\tau \in [k]^\ell$ ένα πρότυπο και $n \in \mathbb{N}$. Έστω $\{I_s\}_{s\in[\ell]}$ μια ακολουθία συνόλων, τέτοια ώστε $I_s \subset [n]$ για κάθε $s \in [\ell]$ και $I_s \cap I_{s'} = \emptyset$ για κάθε $s \neq s'$. Έστω $T = [n] \setminus \bigcup_{s\in[\ell]} I_s$ και $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_i)_{i\in T}$ μία λέξη στο αλφάβητο $[k]$, όπου $\alpha_i \in [k]$ για κάθε $i \in T$. Για $\{I_s\}_{s\in[\ell]}$,$\boldsymbol{\alpha}$ και T όπως παραπάνω και για κάθε $\pi \in A_\tau$ ορίζουμε την σταθερή λέξη $\boldsymbol{\alpha}^\pi$ από την σχέση*

$$(\boldsymbol{\alpha}^\pi)_i = \begin{cases} \pi_s & \text{αν } i \in I_s \\ \alpha_i & \text{αν } i \in T \end{cases}. \tag{4.2}$$

Ένα σύνολο $B_\tau \subset [k]^n$ θα λέγεται μπλοκ σύνολο για το πρότυπο τ αν είναι της μορφής

$$B_\tau = \left\{\boldsymbol{\alpha}^\pi \in [k]^n : \pi \in A_\tau\right\} \tag{4.3}$$

για κάποιες παραμέτρους όπως παραπάνω.

Ο αριθμός $d = \sum_{s\in[\ell]}\left|I_s\right|$ θα λέγεται *βαθμός* του μπλοκ συνόλου $\boldsymbol{B}_\tau$ ενώ τα μέλη της ακολουθίας $\{I_s\}_{s\in[\ell]}$ θα λέγονται μπλοκς. Με απλά λόγια, ένα μπλοκ σύνολο παράγεται αν επιλέξουμε κάποια σύνολα θέσεων, επιλέξουμε ένα "γέμισμα" για τις υπόλοιπες θέσεις και πάρουμε όλες τις λέξεις που προκύπτουν αν "απλώσουμε" κάθε αναγραμματισμό του προτύπου, βάζοντας το πρώτο γράμμα του αναγραμματισμού στις θέσεις του πρώτου συνόλου και ούτω καθ' εξής.

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω ορολογία οι LRW έκαναν την εξής εικασία.

Εικασία 4.2 (Conjecture E[25])
Έστω $k, \ell, r \in \mathbb{N}$ και έστω τ ένα πρότυπο στο $[k]^\ell$. Τότε υπάρχουν θετικοί ακέραιοι $N, d \in \mathbb{N}$ τέτοιοι ώστε για κάθε r-χρωματισμό του $[k]^N$ υπάρχει ένα μονοχρωματικό μπλοκ σύνολο για το πρότυπο τ το οποίο είναι βαθμού d.

Πάλι, όπως και με την Εικασία 1.30 μπορεί κάποιος να ελέγξει ότι αν ζητούσαμε να καθοριστεί ο βαθμός d, αφού μας έχει δοθεί ο χρωματισμός, η εικασία θα μπορούσε να αποδειχθεί κάνοντας χρήση του θεωρήματος Hales-Jewett [17]. Για την ιστορία και πολύ επιγραμματικά, οι εικασίες που δεν αναφέραμε αντιστοιχούν σε παραλλαγές της παραπάνω. Συγκεκριμένα η εικασία [25, Conjecture D] αντιστοιχεί σε ένα πρότυπο όπου κάθε γράμμα εμφανίζεται μια μόνο φορά και επομένως μιλάμε για μεταθέσεις αντί αναγραμματισμών, ενώ η εικασία [25, Conjecture F] αφορά uniform μπλοκ σύνολα, σε αντιστοιχία με τις uniform μεταβλητές λέξεις με τις οποίες ασχοληθήκαμε προηγουμένως.

4.2 Λίγα ακόμη Ramsey σύνολα!

Οι ειδικές περιπτώσεις προτύπων για τις οποίες οι LRW απέδειξαν ότι ικανοποιούν την Εικασία 4.2 είναι πολύ λίγες. Συγκεκριμένα, τα πρότυπα με δύο μόνο γράμματα και οποιουδήποτε μήκους, είναι μια πολύ απλή εφαρμογή του κλασσικού θεωρήματος του Ramsey, ενώ επίσης, τέτοιου είδους πρότυπα δεν αντιστοιχούν σε "καινούργια" Ramsey ευκλείδεια σύνολα καθώς "παράγουν" υπερκύβους. Το άλλο και τελευταίο παράδειγμα από πρότυπα που δείξανε ότι ικανοποιούν την παραπάνω εικασία, είναι η οικογένεια προτύπων:

$$\tau = \overbrace{11\cdots1}^{n_1}\overbrace{22\cdots2}^{n_2}3,$$

για οποιαδήποτε $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$.

Έχοντας αυτό το αποτέλεσμα, δεν είναι δύσκολο να δείξει κανείς ότι για κάθε πραγματικούς αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ και για κάθε $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ το σύνολο όλων των αναδιατάξεων των συντεταγμένων του διανύσματος

$$\boldsymbol{x} = (\overbrace{\alpha_1, \alpha_1, \cdots, \alpha_1}^{n_1}, \overbrace{\alpha_2, \alpha_2, \cdots, \alpha_2}^{n_2}, \alpha_3) \in \mathbb{R}^{n_1+n_2+1}$$

είναι Ramsey. Στην γενική περίπτωση, αυτό το σύνολο δεν έχει κάποια επιλύσιμη ομάδα συμμετριών με το πολύ δύο τροχιές, επομένως αυτού του είδους τα σύνολα αποτελούν μια καινούργια κλάση Ramsey συνόλων.

Παρακάτω, θα δείξουμε ότι μπορούμε να εμφυτεύσουμε κάθε σύνολο της παραπάνω μορφής, σε ένα transitive σύνολο με επιλύσιμη ομάδα συμμετριών και επομένως, μπορούμε και σε αυτή την περίπτωση να πάρουμε το αποτέλεσμα ότι αυτά τα ευκλείδεια σύνολα είναι Ramsey, σαν πόρισμα του θεωρήματος του Křìž. Μάλιστα, η απόδειξη γίνεται πολύ απλή όταν σκεφτούμε το πρόβλημα στο φυσικό του περιβάλλον δηλαδή τους Ευκλείδειους χώρους.

4.3 Μέχρι τώρα, όλα έπονται από τον Křìž

Πρόταση 4.3. *Έστω $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ και $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$. Τότε το σύνολο X όλων στοιχείων του $\mathbb{R}^{n_1+n_2+1}$, που προκύπτουν από όλες τις αναδιατάξεις των συντεταγμένων του διανύσματος $\boldsymbol{x} = (\overbrace{\alpha_1, \alpha_1, \cdots, \alpha_1}^{n_1}, \overbrace{\alpha_2, \alpha_2, \cdots, \alpha_2}^{n_2}, \alpha_3) \in \mathbb{R}^{n_1+n_2+1}$, εμφυτεύεται σε ένα ευκλείδειο σύνολο το οποίο έχει μια επιλύσιμη ομάδα συμμετριών και η οποία δρα transitively.*

Απόδειξη

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να δουλέψουμε με κάποιο ομοιόθετο του X. Επομένως θέτοντας $n = n_1 + n_2 + 1$ μπορούμε να υποθέσουμε ότι το X είναι το σύνολο

$$X = \left\{(x_i)_{i\in[n]} : \#\{x_i = -1\} = n_1 \wedge \#\{x_i = 1\} = n_2 \wedge \#\{x_i = \alpha\} = 1\right\},$$

για κάποιο $\alpha \in \mathbb{R}$. Για κάθε $j \in [n]$ θέτουμε

$$Y_j = \{-1, 1\}^{j-1} \times \{-\alpha, \alpha\} \times \{-1, 1\}^{n-j}$$

και ορίζουμε $Y = \bigcup_{j\in[n]} Y_j \subset \mathbb{R}^n$. Είναι προφανές ότι το X είναι υποσύνολο του Y. Θα δείξουμε ότι το Y είναι το ζητούμενο σύνολο. Είναι φανερό ότι το Y έχει μια ομάδα συμμετριών ισόμορφη με το $\mathbb{Z}_2^n$ της οποίας κάθε στοιχείο δρα ανακλώντας κάποιες από της συντεταγμένες. Τα στοιχεία αυτής της ομάδας τα συμβολίζουμε με $\boldsymbol{r} = (r_i)_{i\in[n]}$ όπου κάθε r_i είτε αφήνει την i συντεταγμένη όπως έχει είτε την απεικονίζει στο αντίθετο στοιχείο. Το Y έχει μια άλλη ομάδα συμμετριών η οποία δρα μεταθέτοντας τις συντεταγμένες των διανυσμάτων του Y κυκλικά και είναι ισομορφική με την ομάδα C_n των κυκλικών μεταθέσεων n στοιχείων. Τα στοιχεία αυτής της ομάδας τα συμβολίζουμε με τ^ℓ για $\ell \in \{0, \ldots, n-1\}$, όπου υποθέτουμε ότι το $\tau^\ell(y_i)_{i\in[n]} = (y_{i-\ell})_{i\in[n]}$.

Για $\boldsymbol{r} = (r_i)_{i\in[n]} \in \mathbb{Z}_2^n$ και $\tau^\ell \in C_n$ θέτουμε $\boldsymbol{r}^{\tau^\ell} = (r_{i-\ell})_{i\in[n]} \in \mathbb{Z}_2^n$. Έστω το σύνολο $G = \left\{\boldsymbol{r}\cdot\tau^\ell : \boldsymbol{r}\in\mathbb{Z}_2^n \wedge \tau^\ell \in C_n\right\}$, όπου το $\boldsymbol{r}\cdot\tau^\ell$ είναι η σύνθεση των δύο συναρτήσεων. Για $\boldsymbol{r}\in\mathbb{Z}_2^n$, $\tau^\ell \in C_n$ και $\boldsymbol{y} = (y_i)_{i\in[n]} \in Y$ έχουμε ότι

$$\tau^\ell \boldsymbol{r}(y_i)_{i\in[n]} = \tau^\ell (r_i y_i)_{i\in[n]} = (r_{i-\ell} y_{i-\ell})_{i\in[n]} = \boldsymbol{r}^{\tau^\ell} \tau^\ell (y_i)_{i\in[n]}.$$

Από το παραπάνω έπονται τα εξής. Η G είναι ομάδα αφού κάθε γινόμενο στοιχείων της μπορεί μέσω της παραπάνω διαδικασίας να γραφτεί στην μορφή $\boldsymbol{r}\cdot\tau^\ell$ για κάποια $\boldsymbol{r}\in\mathbb{Z}_2^n$ και $\tau^\ell \in C_n$. Επιπλέον η $\mathbb{Z}_2^n$ είναι κανονική υποομάδα της αφού $\tau^\ell \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}^{\tau^\ell}\tau^\ell$. Είναι επίσης φανερό ότι η συνάρτηση $\phi : G \to C_n$ που ορίζεται από την $\boldsymbol{r}\tau^\ell \to \tau^\ell$ είναι ένας επιμορφισμός με πυρήνα την $\mathbb{Z}_2^n$. Επομένως η G είναι μια επέκταση της C_n μέσω της $\mathbb{Z}_2^n$ και πιο συγκεκριμένα είναι το ημιευθή γινόμενο τους. Όπως έχουμε αναφέρει, η κλάση των επιλύσιμων ομάδων είναι κλειστή στην πράξη της επέκτασης και έτσι η G είναι μια επιλύσιμη ομάδα.

Το ότι η G δρα transitively στο Y είναι άμεσο να το δει κανείς και επομένως η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. □

Παρατηρήστε ότι, η Πρόταση 4.3 παρόλο που μας "δίνει" την Ramsey ιδιότητα του συγκεκριμένου συνόλου, δεν συνεπάγεται από αυτή, ότι το αντίστοιχο πρότυπο ικανοποιεί την Εικασία 4.2. Αυτό διότι, τα μπλοκ σύνολα είναι έτσι ορισμένα που επιτρέπουν μόνο αναδιατάξεις των μπλοκ, ενώ αν εφαρμόσουμε για παράδειγμα το Θεώρημα 1.35, στην ομάδα συμμετριών που χρησιμοποιούμε για την απόδειξη της 4.3, τότε αφού οι μεταβλητές λέξεις ουσιαστικά "απλώνουν" τροχιές σε συγκεκριμένες θέσεις και αφού η ομάδα δρα και "εσωτερικά" των συντεταγμένων, δεν μπορούν (εκ πρώτης όψεως) να οριστούν μονοσήμαντα κάποια μπλοκς από τα οποία να παράγονται όλες οι αναδιατάξεις του προτύπου.

Συζήτηση και Ανοιχτά Προβλήματα 4

Μια ξεχωριστή κλάση transitive συνόλων.

Στην παρούσα διδακτορική διατριβή, δώσαμε έμφαση στο μέρος της Ευκλείδειας Ramsey θεωρίας, που αφορά τον χαρακτηρισμό των Ramsey συνόλων. Είδαμε ότι κάθε Ramsey σύνολο, εμφυτεύεται στην επιφάνεια της σφαίρας κάποιου Ευκλείδειου χώρου, ενώ επίσης αναφέραμε όλα τα μέχρι τώρα γνωστά Ramsey σύνολα. Είδαμε επίσης την ισχυρή σύνδεση που υπάρχει μεταξύ των μέχρι τώρα γνωστών Ramsey συνόλων και της ιδιότητας ότι αυτά εμφυτεύονται σε κάποιο transitive ευκλείδειο σύνολο.

Αυτά τα δεδομένα έχουν δημιουργήσει δύο αντιμαχόμενες εικασίες, η μία του Graham, η οποία υποστηρίζει ότι ένα σύνολο είναι Ramsey, αν και μόνο αν είναι σφαιρικό και η δεύτερη των Leader, Russell και Walters, η οποία υποστηρίζει ότι ένα σύνολο είναι Ramsey αν και μόνο αν είναι subtransitive.

Όπως τεκμηριώσαμε στην διάρκεια των προηγουμένων κεφαλαίων, για όλα τα μέχρι τώρα γνωστά Ramsey σύνολα, υπάρχει μια ισομετρική εμφύτευση σε κάποιο ευκλείδειο σύνολο, το οποίο έχει μια επιλύσιμη ομάδα συμμετριών, με το πολύ δύο τροχιές. Είδαμε για παράδειγμα ότι, κάθε simplex, που στην γενική περίπτωση (εκ πρώτης όψεως) δεν έχει καμία συμμετρία, αυτό όχι μόνο εμφυτεύεται σε ένα πολύ συμμετρικό αντικείμενο (όπως θεωρούμε τα transitive σύνολα), αλλά επίσης μπορούμε να επιλέξουμε αυτό το αντικείμενο να έχει πολύ απλή ομάδα συμμετριών όπως οι κανονικοί πολυγωνικοί τόροι. Επίσης, είδαμε transitive σύνολα με μη επιλύσιμες ομάδες συμμετριών, όπως τα παραδείγματα που προκύπτουν μέσω των προτύπων, τα οποία επίσης εμφυτεύονται σε κατάλληλα transitive σύνολα με επιλύσιμη ομάδα συμμετριών.

Μιας και οι εικασίες στην Ευκλείδεια Ramsey θεωρία φαίνονται να είναι στην μόδα, θα κάνουμε και εμείς μια! Έστω $\mathscr{T}$ η κλάση των ευκλείδειων συνόλων που εμφυτεύονται σε κάποιο πεπερασμένο transitive ευκλείδειο σύνολο. Έστω $\mathscr{K} \subset \mathscr{T}$ η κλάση των ευκλείδειων συνόλων που εμφυτεύονται σε κάποιο πεπερασμένο transitive σύνολο, του οποίου κάποια επιλύσιμη ομάδα συμμετριών, έχει το πολύ δύο τροχιές.

Εικασία. $\mathscr{T} = \mathscr{K}$

Παρατηρήστε ότι δεν παίρνουμε θέση στην διαμάχη μεταξύ των εικασιών του Graham και των LRW. Βέβαια, αν η εικασία μας είναι αληθής, τότε κάθε transitive σύνολο θα είναι Ramsey.

Η εικασία που κάναμε παραπάνω για τις κλάσεις $\mathscr{T}$ και $\mathscr{K}$, έχει ενδιαφέρον ανεξάρτητα από το τι πραγματικά συμβαίνει με τα Ramsey σύνολα. Όπως αναφέραμε και στην εισαγωγή, οι γνώσεις που έχουμε για την κλάση $\mathscr{T}$ είναι πολύ λίγες. Μόλις πριν δέκα περίπου χρόνια αναρωτήθηκε "η μαθηματική κοινότητα" αν $\mathscr{S} \neq \mathscr{T}$, πράγμα που απαντήθηκε καταφατικά από τους LRW οι οποίοι και το αναρωτηθήκανε. Μάλιστα, οι ίδιοι στο [24], δείξανε ότι, οι γραμμικές ιδιότητες τους μπορούν να καθορίσουν το αν κάποιο τετρασύνολο ανήκει στην $\mathscr{T}$ και δώσανε ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα που έχει ως εξής:

Πρόταση 4.4. *Το σύνολο*

$$X = \Big\{(-1,0), (0,1), (\alpha, \sqrt{1-\alpha^2}), (\alpha, -\sqrt{1-\alpha^2})\Big\}$$

για $\alpha \in \mathbb{R}$ υπερβατικό αριθμό, δεν εμφυτεύεται σε κανένα transitive σύνολο.

Προφανώς, συνεπείς με την εικασία τους, εικάσανε ότι αυτό το σύνολο αν και κυκλικό, δεν είναι Ramsey.

Σε κάθε περίπτωση ακόμα και αν δεν ισχύει η εικασία μας, ένα παράδειγμα ενός $X \in \mathscr{T} \setminus \mathscr{K}$ θα είχε πολύ ενδιαφέρον, αφού θα μας αποκάλυπτε ένα ακόμα ενδιάμεσο βήμα στον δρόμο του χαρακτηρισμού των Ramsey συνόλων. Θέλουμε λοιπόν να ρωτήσουμε το εξής.

Ερώτηση. *Υπάρχει $X \in \mathscr{T} \setminus \mathscr{K}$? Ποιο είναι το χαρακτηριστικό που το "αναγκάζει" να μην είναι στοιχείο της $\mathscr{K}$?*

Άλλες πιθανές κατευθύνσεις

Όπως είδαμε το Θεώρημα 1.35 αφορά τις δράσεις επιλύσιμων ομάδων σε πεπερασμένα σύνολα. Προφανώς μια γενίκευση σε κάθε πεπερασμένη ομάδα, θα ήταν ένα ιδανικό αποτέλεσμα το οποίο παράλληλα θα αποδείκνυε ότι όλα τα πεπερασμένα transitive ευκλείδεια σύνολα είναι Ramsey.

Μια άλλη κατεύθυνση, θα μπορούσε να είναι να βρεθούν άλλες δομές πάνω στις οποίες δρουν επιλύσιμες ομάδες και να μελετηθούν οι συνέπειες του θεωρήματος αυτού. Το ότι στο Θεώρημα 1.35 δεν υφίσταται κανένας περιορισμός ως προς το είδος της δράσης, παρά μόνο στην ομάδα που δρα, το καθιστά εύκολα εφαρμόσιμο.

Κάτι που θα βοηθούσε ακόμα περισσότερο στην κατανόηση του προβλήματος, είναι η μελέτη του ερωτήματος αν υπάρχει μια γενίκευση των θεωρημάτων 1.34 και 1.35, έστω για κυκλικές ομάδες, ανάλογη της γενίκευσης του θεωρήματος Hales-Jewett που μας δίνεται από το θεώρημα των Graham και Rothchild. Ακόμα και το ποια θα πρέπει να είναι η ακριβής μορφή ενός τέτοιου θεωρήματος, δεν είναι ακόμη ξεκάθαρο για εμάς.

Τέλος, σίγουρα πολύ ενδιαφέρον είναι το αντίστοιχο πρόβλημα στην density εκδοχή του. Κάτι τέτοιο θα είχε την εξής μορφή: Έστω G μια πεπερασμένη ομάδα. Είναι αλήθεια ότι για κάθε $\delta > 0$ υπάρχουν $d, N \in \mathbb{N}$, τέτοια ώστε, οποιοδήποτε σύνολο $A \subset G^N$ για το οποίο $|A|/|G| > \delta$, να περιέχει σαν υποσύνολο το $\{W(g) : g \in G\}$ για μια d-uniform G μεταβλητή λέξη επί του G; Εναλλακτικά όπως στο Θεώρημα 1.34 θα μπορούσαμε να ζητήσουμε το d να δίνεται πριν το δ. Αυτό το πρόβλημα είναι ανοιχτό ακόμα και για την περίπτωση της ομάδας C_3 των κυκλικών μεταθέσεων τριών στοιχείων.

Επίλογος

Ελπίζω η ανάγνωση να ήταν ευχάριστη!

Βιβλιογραφία

[1] K. Cantwell. All Regular Polytopes are Ramsey. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 114(3):555–562, apr 2007.

[2] Aubrey D. N. J. de Grey. The chromatic number of the plane is at least. *Geombinatorics*, 28(1):18–31, 2018.

[3] Pandelis Dodos and Vassilis Kanellopoulos. *Ramsey Theory for Product Spaces*. American Mathematical Society, may 2016.

[4] S. Eberhard. Almost All Sets of $d + 1$ Points on the $(d - 1)$-Sphere are not Subtransitive. *Mathematika*, 59(2):267–268, mar 2013.

[5] P. Erdös, R. L. Graham, P. Montgomery, B. L. Rothschild, J. Spencer, and E. G. Straus. Euclidean Ramsey Theorems I. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 14(3):341–363, may 1973.

[6] P. Erdös, R. L. Graham, P. Montgomery, B. L. Rothschild, J. Spencer, and E. G. Straus. Euclidean Ramsey Theorems III. In *Colloquia Mathematica Socieatis Janos Bolyai*. North-Holland,Amsterdam, 1975.

[7] P. Erdös, R.L Graham, P Montgomery, B.L Rothschild, J Spencer, and E.G Straus. Euclidean ramsey theorems II. In *Colloquia Mathematica Socieatis Janos Bolyai*. North-Holland,Amsterdam, 1975.

[8] Walter Feit and John G. Thompson. Solvability of groups of odd order. *Pac. J. Math.*, 13:775–1029, 1963.

[9] P. Frankl, J. Pach, C. Reiher, and V. Rödl. Borsuk and Ramsey Type Questions in Euclidean Space. In *Connections in Discrete Mathematics*, pages 259–277. Cambridge University Press, 2018.

[10] P. Frankl and V. Rödl. All Triangles are Ramsey. *Transactions of the American Mathematical Society*, 297(2):777–779, feb 1986.

[11] P. Frankl and V. Rödl. Forbidden Intersections. *Transactions of the American Mathematical Society*, 300(1):259–259, jan 1987.

[12] P. Frankl and V. Rödl. A Partition Property of Simplices in Euclidean Space. *Journal of the American Mathematical Society*, 3(1):1–1, jan 1990.

[13] P. Frankl and I. G. Rosenberg. A Finite Set Intersection Theorem. *European Journal of Combinatorics*, 2(2):127–129, jun 1981.

[14] P. Frankl and R. M. Wilson. Intersection Theorems with Geometric Consequences. *Combinatorica*, 1(4):357–368, dec 1981.

[15] Graham, Rothschild, and Spencer. *Ramsey Theory*. John Wiley & Sons, 1990.

[16] R. L. Graham and B. L. Rothschild. Ramsey's theorem for n-parameter sets. *Transactions of the American Mathematical Society*, 159:257–257, 1971.

[17] A. W. Hales and R. I. Jewett. Regularity and positional games , vol. 106, no. 2 (feb., 1963), pp. 222- 229 published by: American mathematical society stable url: http://www.jstor.org/stable/1993764 accessed: 14-02-2016 20:13 utc. 1963.

[18] David Hilbert. Ueber die irreducibilität ganzer rationaler functionen mit ganzzahligen coefficienten. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 110:104–129, 1892.

[19] F. E. A. Johnson. Finite Subtransitive Sets. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 140(1):37–46, 2006.

[20] V. Kanellopoulos and M. Karamanlis. A Hales Jewett Type Property of Finite Solvable Groups. *Mathematika*, 66(4):959–972, aug 2020.

[21] Miltiadis Karamanlis. Simplices and regular polygonal tori in euclidean ramsey theory.

[22] I. Kříž. All trapezoids are Ramsey. *Discrete Mathematics*, 108(1-3):59–62, oct 1992.

[23] I. Kříž. Permutation Groups in Euclidean Ramsey Theory. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 112(3):899, jul 1991.

[24] I. Leader, P. A. Russell, and M. Walters. Transitive Sets and Cyclic Quadrilaterals. *Journal of Combinatorics*, 2(3):457–462, 2011.

[25] I. Leader, P. A. Russell, and M. Walters. Transitive Sets in Euclidean Ramsey Theory. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 119(2):382–396, feb 2012.

[26] R. Rado. Note on combinatorial analysis. *Proceedings of the London Mathematical Society*, s2-48(1):122–160, 1945.

[27] Richard Rado. Studien zur kombinatorik. *Mathematische Zeitschrift*, 36(1):424–470, 1933.

[28] F. P. Ramsey. On a problem of formal logic. *Proceedings of the London Mathematical Society*, s2-30(1):264–286, 1930.

[29] I. J. Schoenberg. Metric Spaces and Positive Definite Functions. *Transactions of the American Mathematical Society*, 44(3):522–522, mar 1938.

[30] I. Schur. Über die Kongruenz $x^m + y^m = z^m (\mod p)$. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 25:114–116, 1916.

[31] Saharon Shelah. Primitive recursive bounds for van der waerden numbers. *Journal of the American Mathematical Society*, 1(3):683–683, sep 1988.

[32] Alexander Soifer, editor. *Ramsey Theory Yesterday, Today, and Tomorrow*. Birkhäuser Boston, 2011.

[33] B. L. Waerden van der. Beweis einer audetschen vermutung. *Nieuw Archief voorWiskunde*, 15:212–216, 1927.

Ευρετήριο

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο