Εθνικο Μετσοβιο Πολυτεχνειο

Σχολη Εφαρμοσμενων Μαθηματικων και Φυσικων Επιστημων

Τομεας μαθηματικων

Εκτιμήσεις Ευστάθειας Για Το Μη-Γραμμικό Μοντέλο Schnakenberg Με Neumann Συνοριακές Συνθήκες

Διπλωματική Εργασία

Αχιλλέας Μαυράκης

Επιβλέπων: Κωνσταντίνος Χρυσαφίνος
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούνιος 2021

Εθνικο Μετσοβιο Πολυτεχνειο

Σχολη Εφαρμοσμενων Μαθηματικων και Φυσικων Επιστημων

Τομεας μαθηματικων

Εκτιμήσεις Ευστάθειας Για Το Μη-Γραμμικό Μοντέλο Schnakenberg Με Neumann Συνοριακές Συνθήκες

Διπλωματική Εργασία

Αχιλλέας Μαυράκης

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή στις _/_/2021

(Υπογραφή)	(Υπογραφή)	(Υπογραφή)
.....	.....	.....
Κωνσταντίνος Χρυσαφίνος	Εμμανουήλ Γεωργούλης	Βασίλειος Κοκκίνης
Καθηγητής	Καθηγητής	Αναπληρώτης Καθηγητής
Ε.Μ.Π.	Ε.Μ.Π.	Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούνιος 2021

(Υπογραφή)

.....

Αχιλλέας Μαυράκης

Διπλωματούχος Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών Ε.Μ.Π

© (2021) Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο. All rights Reserved. Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς το συγγραφέα. Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σ'αυτό το έγγραφο εκφράζουν το συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευτεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Ευχαριστίες

Πρώτον θα ήθελα να ευχαριστήσω το καθηγητή μου κ. Κωνσταντίνο Χρυσαφίνο για την ανάθεση και επίβλεψη της εργασίας καθώς και για την καθοδήγηση του κατα την διάρκεια της. Για άλλη μια φορά θα ήθελα να ευχαριστήσω κ. Κωνσταντίνο Χρυσαφίνο καθώς και τον καθηγητή κ. Εμμανουήλ Γεωργούλη για την στήριξη και βοήθεια τους να συνεχίσω περαιτέρω στον τομέα της αριθμητικής αναλύσης. Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους φίλους, που απέκτησα στην σχολή, οι οποίοι με ενθάρρυναν και με ωθούσαν καθ' όλη την διάρκεια των φοιτητικών χρόνων.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου για την στήριξη τους σε αυτή την πορεία.

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική πραγματεύεται τη μελέτη ευστάθειας για πλήρως διακριτά αριθμητικά σχήματα βιολογικών συστημάτων και συγκεκριμένα του μη γραμμικού συστήματος αντίδρασης-διάχυσης Schnakenberg με συνοριακές συνθήκες Neumann. Στην βιολογία και βιο-χημεία, συστήματα αντίδρασης-διάχυσης χρησιμοποιούνται συνήθως για να μοντελοποιήσουν επουλώματα πληγών, σχηματισμό μοτίβων και αγγειογένεσης. Το παραβολικό σύστημα Schnakenberg σχετίζεται με προβλήματα που αφορούν εξελισσόμενα πεδία και αλλαγές-σχημάτων. Αφού διατυπώσουμε την ασθενή μορφή, θα δείξουμε ότι είναι καλά ορισμένη κάτω από προϋποθέσεις για ελάχιστη ομαλότητα των αρχικών δεδομένων στον χώρο $L^2(\Omega)$. Ύστερα, χρησιμοποιώντας την ασθενή μορφή, θα πάρουμε ευστάθεια για το αριθμητικό σχήμα. Το σχήμα που θα μελετήσουμε χρησιμοποιεί κλασσικά σύμμορφα πεπερασμένα στοιχεία στον χώρο και την έμμεση μέθοδο Euler στον χρόνο.

Λέξεις κλειδία : Sobolev Χώροι, Ασθενή Μορφή, Galerkin-Faedo Μέθοδος, Κλασσικά Σύμμορφα Πεπερασμένα Στοιχεία, Εκτιμήσεις Ευστάθειας, Σύστημα Schnakenberg.

Abstract

The current thesis analyzes the study of stability estimates for fully discrete schemes of biological systems and in particular of the non-linear reaction-diffusion Schnakenberg system. In biology and bio-chemistry reaction-diffusion systems are usually used to model the emergence of wound healing, pattern formation and angiogenesis. The parabolic Schnakenberg system relates to problems involving growth and shape-changes. After we define the weak formulation, we are going to prove the well-posedness under minimal regularity for our initial conditions in $L^2(\Omega)$ space. Thereafter, using the weak formulation, we will extract the stability estimate for our numereical scheme. The scheme that we are going to study in consisting of conforming finite element method in space and backward-implicit Euler in time, for our time-stepping scheme.

Key words : Sobolev Spaces, Weak Formulation, Galerkin-Faedo Method, Conforming Finite Elements, Stability Estimates, Schnakenberg System.

Περιεχόμενα

1 Θεωρία **1**

1.1 Banach χώροι . . . 1

1.1.1 Θεωρία Banach χώρων . . . 1

1.1.2 Φραγμένοι Γραμμικοί Τελεστές - Δυϊκοί χώροι . . . 2

1.2 Hilbert χώροι . . . 3

1.2.1 Θεωρία χώρων Hilbert . . . 3

1.2.2 Δυϊκός των χώρων Hilbert . . . 4

1.2.3 Τελεστές σε χώρους Hilbert . . . 5

1.3 Ασθενή-Ασθενή * τοπολογία . . . 8

1.3.1 Ασθενή τοπολογία . . . 8

1.3.2 Ασθενή * τοπολογία . . . 9

1.3.3 Ανακλαστικοί χώροι . . . 10

1.4 Θεωρία Sobolev . . . 10

1.4.1 L^p χώροι . . . 11

1.4.2 Sobolev χώροι . . . 12

1.4.3 Bochner Χώροι . . . 15

2 Το σύστημα Αντίδρασης-Διάχυσης Schnakenberg **17**

2.1 Το σύστημα Schnakenberg . . . 17

2.1.1 Εισαγωγή . . . 17

2.1.2 Στόχος . . . 18

2.1.3 Υπόβαθρο . . . 19

2.2 Η Ασθενής Λύση του συστήματος Schnakenberg . . . 21

2.2.1 Κατασκευή και ύπαρξη Ασθενούς Λύσης . . . 21

2.2.2 Ενεργειακές Εκτιμήσεις . . . 28

2.2.3 Πέρασμα Ορίων . . . 43

2.2.4 Μοναδικότητα Ασθενής Λύσης . . . 52

3 Το αριθμητικό σχήμα **61**

3.1 Διακριτοποιήση του συστήματος Schnakenberg . . . 61

3.1.1 Ημι-διακριτό και πλήρως-διακριτό σχήμα . . . 61

3.1.2 Εκτιμήσεις Ευστάθειας . . . 64

Βιβλιογραφία **70**

Κεφάλαιο 1

Θεωρία

1.1 Banach χώροι

1.1.1 Θεωρία Banach χώρων

Ορισμός 1.1.1 ([1], Definition, σελ.719). *Έστω X διανυσματικός χώρος. Μια απεικόνιση $\|\cdot\| : X \to [0,\infty)$ λέγεται νόρμα αν ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:*

i) $\|u\| = 0$ *αν και μόνο αν* $u = 0$,

ii) $\|\lambda u\| = |\lambda|\,\|u\|$ *για κάθε* $u \in X,\ \lambda \in \mathbb{R}$,

iii) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ *για κάθε* $u, v \in X$.

Ορισμός 1.1.2 ([1], Definition, σελ.719). *i) Μια ακολουθία $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ καλείται ακολουθία Cauchy αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $N > 0$ τέτοιο ώστε*

$$\|u_k - u_l\| < \epsilon \quad \text{για κάθε} \quad k, l \geq N.$$

ii) Ο διανυσματικός χώρος X με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$ είναι πλήρης αν κάθε Cauchy ακολουθία στον X συγκλίνει.

iii) Ένας Banach χώρος X είναι ένας πλήρης χώρος με νόρμα.

iv) Λέμε ότι ένας χώρος X είναι διαχωρίσιμος αν περιέχει αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο.

Ορισμός 1.1.3. *i) Μία οικογένεια από ανοιχτά σύνολα $\{V_i\}_{i\in I}$ λέγεται ανοιχτό κάλυμμα, με I αριθμησιμο ή όχι, αν και μόνο αν ισχύει ότι $K \subset \cup_{i\in I} V_i$.*

ii) Έστω χώρος X με μια τοπολογία (μετρικοποιήσιμη ή οχι) με $K \subset X$ τότε K λέγεται συμπαγές υποσύνολο του X αν κάθε ανοιχτό κάλυμμα $\{V_i\}_{i\in I}$, με I αριθμησιμο ή όχι, έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα $K \subset \cup_{j=1}^{n} V_{ij}$.

iii) Αν X μετρικός χώρος (ή χώρος με νόρμα) $(Q, \|\cdot\|)$ και K συμπαγές υποσύνολο, τότε κάθε ακολουθία στον K έχει συγκλίνουσα στο K υπακολουθία.

iv) Σε μετρικούς χώρους (ή χώρους με νόρμα) κάθε κλειστό υποσύνολο συμπαγούς είναι συμπαγές.

Παρατήρηση. *Κάθε συμπαγής χώρος είναι πλήρης και διαχωρίσιμος.*

1.1.2 Φραγμένοι Γραμμικοί Τελεστές - Δυϊκοί χώροι

Έστω $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ διανυσματικοί χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$ απεικόνιση. Τότε η απεικόνιση αυτή καλείται γραμμικός τελεστής όταν και μόνον όταν ισχύει:

$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y), \quad \forall x, y \in X \text{ και } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Ορισμός 1.1.4. *Ένας γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$ είναι φραγμένος αν*

$$\|T\| := \sup_{\|u\|_X \leq 1} \{\|Tu\|_Y\} < \infty.$$

Είναι εύκολο κανείς να ελέγξει ότι ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής είναι και συνεχής.

Παρατήρηση. *Ο χώρος $\mathcal{L}(X) = \{T : X \to X,$ γραμμικός και φραγμένος$\}$ είναι διανυσματικός με νόρμα την παραπάνω και μάλιστα Banach αν X Banach χώρος.*

Παρατήρηση. *Ο χώρος $\mathcal{L}(X, Y) = \{T : X \to Y,$ γραμμικός και φραγμένος$\}$ είναι διανυσματικός με νόρμα την παραπάνω και μάλιστα Banach αν Y Banach χώρος.*

Ορισμός 1.1.5. *i) Ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής $x^* : X \to \mathbb{R}$ λέγεται φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό πάνω στον X.*

ii) Ο χώρος των φραγμένων γραμμικών συναρτησιακών από τον $X \to \mathbb{R}$ ονομάζεται δυϊκός χώρος του X και συμβολίζεται με X^*.

Παρατήρηση. *Ο δυϊκός χώρος με την νόρμα τελεστή είναι πάντα Banach εφόσον ο χώρος $\mathbb{R}$ είναι πλήρης.*

Ορισμός 1.1.6 ([1], Definition, σελ.722). *i) Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος Banach τότε αν $x \in X$ και $x^* \in X^*$, τότε δηλώνουμε αυτό το συναρτησιακό μέσω του δυϊκού ζευγαριού μεταξύ X και X^* με*

$$x^*(x) = \langle x^*, x \rangle \quad x \in X, \ x^* \in X^*.$$

ii) Ορίζουμε επίσης την δυϊκή νόρμα (νόρμα τελεστή) η οποία εμπλουτίζει τον δυϊκό χώρο

$$\|x^*\| := \sup_{\|x\| \leq 1} \{\langle x^*, x \rangle\}.$$

Πλέον ήμαστε στην θέση να ορίσουμε και τον δεύτερο δυϊκό που συμβολίζεται με X^{**} και είναι ο δυϊκός του X^*. Επιπλέον, μπορούμε να δούμε τον X^{**} ως ένα υπερσύνολο του αρχικού μας χώρου μέσω της παρακάτω χρήσιμης εμφύτευσης, γνωστή ως κανονική εμφύτευση :
Αν $x \in X$ ορίζουμε την κανονική εμφύτεση $e_x : X \to X^{**}$ ως

$$e_x(x^*) = x^*(x) \quad \forall x \in X, \ x^* \in X^*,$$

όπου $\|e_x\| = \|x\|$ και προφανώς $e(X) \subset X^{**}$. Τότε, αν η παραπάνω εμφύτευση είναι ισομετρική (η παραπάνω συνθήκη για ισομετρία προϋποθέτη την κανονική εμφύτευση να είναι επί) ο X καλείται ανακλαστικός και θεωρούμε καταχρηστικά $X = X^{**}$(ή καλύτερα $e(X) =$

Q^{**}. Οπότε πιο συγκεκριμένα, αυτό σημαίνει ότι για κάθε $x^* \in X^{**}$, υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε

$$\langle x^{**}, x^* \rangle = \langle x^*, x \rangle \quad \textit{για κάθε } x^* \in X^*.$$

Περισσότερες λεπτομέρειες για αποδείξεις και περαιτέρω ανάλυση μπορεί να βρεθούν στα [1, 2, 3].

1.2 Hilbert χώροι

Έστω H ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος.

1.2.1 Θεωρία χώρων Hilbert

Ορισμός 1.2.1 ([1], Definition, σελ.720)**.** *Μία συνάρτηση $(\cdot,\cdot) : H \times H \to \mathbb{R}$ καλείται εσωτερικό γινόμενο αν*

i) $(x,x) \geq 0$ *και* $(x,x) = 0$ *αν και μόνο αν* $x = 0$,

ii) $(x,y) = (y,z)$ *για κάθε* $x, y \in H$,

iii) $(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x,z) + \mu(y,z), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *και* $x, y, z \in H$.

Ορισμός 1.2.2. *Αν $(\cdot,\cdot)$ είναι εσωτερικό γινόμενο, τότε η επαγόμενη νόρμα είναι*

$$\|x\| := (x,x)^{1/2} \quad x \in H,$$

ενώ η ανισότητα Cauchy-Schwarz δηλώνει ότι

$$|(x,y)| \leq \|x\| \, \|y\| \quad x, y \in H.$$

Ορισμός 1.2.3. *Ένας διανυσματικός χώρος $(H, (\cdot,\cdot))$ με εσωτερικό γινόμενο ονομάζεται χώρος Hilbert αν είναι πλήρης ως προς την νόρμα που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο.*

Παρατήρηση. *Θα θεωρούμε πλέον ως H είναι ένας πραγματικός χώρος Hilbert εφοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο $(\cdot,\cdot)$.*

Μία από τις σημαντικότερες ιδιότητες των χώρων Hilbert είναι η καθετότητα, από την οποία και προκύπτουν πολλά από τα χαρακτηριστικά τους.

Ορισμός 1.2.4. *Θα λέμε ότι τα $x, y \in H$ είναι κάθετα αν και μόνο αν $(x,y) = 0$.*

Μία από τις έννοιες που προκύπτουν λόγω της καθετότητας είναι αυτή της 'καλύτερης προσέγγισης' ή προβολής πάνω σε έναν χώρο.

Πρόταση 1.2.1 ([2], Θεώρημα V.5, σελ.110)**.** *Έστω M κλειστός υπόχωρος του χώρου Hilbert και $x \in H$ τότε υπάρχει μοναδικό $w \in M$ τέτοιο ώστε*

$$\|x - w\| = \inf\{\|x - w\|, \ w \in M\}.$$

Παρατήρηση. *Από την παραπάνω πρόταση προκύπτει η έννοια της προβολής για αυτό και συνήθως συμβολίζουμε το μοναδικό $w \in M$ ως $\pi_M x$, όπου ορίζουμε τον π_M ως τον τελεστή προβολής $\pi_M : H \to M$ με την ιδιότητα $(x - \pi_M x, w) \ \ \forall w \in M$.*

Ορισμός 1.2.5. *Αν M κλειστός υπόχωρος του H τότε ορίζουμε $M^{\perp} = \{x \in H : (x, y) = 0 \ \forall y \in M\}$ ως το ορθογώνιο συμπλήρωμα του M.*

Γνωρίζοντας το ορθογώνιο συμπλήρωμα ενός κλειστού υπόχωρου του Hilbert χώρου διατυπώνουμε την παρακάτω χρήσιμη ιδιότητα των χώρων Hilbert.

Πρόταση 1.2.2. *Αν M κλειστός υπόχωρος του Hilbert χώρου H, τότε ισχύει ότι*

$$H = M \oplus M^{\perp}.$$

Επομένως κάθε $x \in H$ έχει μοναδική αναπαράσταση $x = v + u$ για $v \in M$ και $u \in M^{\perp}$.

Έχοντας ορίσει την καθετότητα ήμαστε πλέον σε θέση να ορίσουμε την ορθοκανονική βάση ενός Hilbert χώρου.

Ορισμός 1.2.6 ([2], Ορισμός, σελ.119-120)**.** *Μια μετρήσιμη βάση $\{w_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ ονομάζεται ορθοκανονική αν*

$$\begin{cases} (w_k.w_l) = 0 \quad k, l = 1, \dots \ ; \ k \neq l, \\ \|w_k\| = 1 \quad k = 1, \dots \ . \end{cases}$$

Αν $u \in H$ και $\{w_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ είναι ορθοκανονική βάση, τότε μπορούμε να γράψουμε το u ως

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} (u, w_k) w_k,$$

και γνωρίζουμε ότι η σειρά συγκλίνει. Επιπλέον ισχύει ότι

$$\|u\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (u, w_k)^2.$$

1.2.2 Δυϊκός των χώρων Hilbert

Ένα από τα σημαντικότερα θεωρήματα σστην μελέτη των χώρων Hilbert είναι το θεώρημα αναπαραστάσεως του Riesz.

Θεώρημα 1.2.3 (Θεώρημα αναπαραστάσεως του Riesz, [2], Θεώρημα V.5, σελ.113)**.** *Έστω H χώρος Hilbert και $x^* \in H^*$. Τότε υπάρχει μοναδικό $y \in H$ τέτοιο ώστε*

$$\langle x^*, x \rangle = x^*(x) = (x, y) \quad \forall x \in H,$$

και ισχύει

$$\|x^*\| = \|x\| .$$

Η απεικόνηση $x^* \mapsto y$ είναι ένας ισομετρικός ισομορφισμός που μας επιτρέπει να ταυτίσουμε το H με τον δυϊκό του H^*. Αυτή η ταύτιση γίνεται πολύ συχνά αλλά όχι πάντα, όπως θα δούμε στην παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 1.2.4 (Διαμόρφωση των Hilbert χώρων, [2], Παρατήρηση 1., σελ.114)**.** *Έστω ότι V, H είναι Hilbert χώροι, όπου το εσωτερικό γινόμενο στον H είναι το γνωστό $(\cdot, \cdot)$ τέτοιο ώστε*

$$V \hookrightarrow H, \quad V \text{ πυκνό στον } H.$$

Τότε 'βλέπουμε' του χώρους ως εξής :

i) $V \hookrightarrow H \equiv H^* \hookrightarrow V^*$, H^* *πυκνό στον* V^*,

ii) $\langle Tx, v\rangle_{V^*,V} = (x, v) \quad \forall x \in H,\ v \in V.$

Κατά αυτό τον τρόπο ταυτίζοντας τους H, H^* παίρνουμε την λεγόμενη 'τριπλέτα Gelfand'

$$V \hookrightarrow H \hookrightarrow V^*,$$

όπου κάθε χώρος είναι πυκνά εμφυτευμένος στον προηγούμενο.

Θεώρημα 1.2.5 (Lax - Milgram, [1], Theorem 1, σελ.315)**.** *Έστω* $B : H \times H \to \mathbb{R}$ *μία διγραμμική απεικόνηση. Τότε αν*

i) $\exists c_1 > 0\ \forall u \in H$ *ώστε* $B(u, u) \geq c_1 \|u\|_H^2$,

ii) $\exists c_2 > 0\ \forall u, v \in H$ *ώστε* $|B(u, v)| \leq c_2 \|u\|_H \|v\|_H$,

iii) $\exists c_3 > 0\ \forall v \in H$ *ώστε* $|f(v)| \leq c_3 \|c\|_H \quad (f \in H^*)$,

υπάρχει μοναδική λύση $u \in H$ *ώστε* $B(u, v) = \langle f, v\rangle\ \forall v \in H$.

1.2.3 Τελεστές σε χώρους Hilbert

Αρχικά κάποιοι βασικοί ορισμοί που ισχύουν και σε χώρους Banach.

Ορισμός 1.2.7 ([1], Definition, σελ.721)**.** *Έστω* X *χώρος Banach και τελεστή* $A : X \to X$ *γραμμικός και φραγμένος, δηλαδή* $A \in \mathcal{L}(X)$.

i) Το resolvent set του A *είναι*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} : (A - \lambda I) \text{ είναι 1-1 και επί}\}$$

ii) Το φάσμα του τελεστή A *είναι*

$$\sigma(A) = \mathbb{R} \setminus \rho(A).$$

Αν $\lambda \in \rho(A)$ τότε προκύπτει εύκολα ότι $(A - \lambda I)^{-1} : X \to X$ είναι γραμμικός φραγμένος τελεστής, από το Θεώρημα Ανοιχτής απεικόνησης το οποίο διατυπώνεται παρακάτω.

Θεώρημα 1.2.6 (Θεώρημα Ανοιχτής απεικόνησης)**.** *Έστω* X, Y *χώροι Banach και τελεστής* A *τέτοιος ώστε* $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, *1-1 και επί τότε* $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.

Ορισμός 1.2.8 ([1], Definition, σελ.722)**.** *i) Λέμε ότι* $\lambda \in \sigma(A)$ *είναι ιδιοτιμή του τελεστή* A *αν*

$$N(A - \lambda I) \neq \{0\}. \quad \text{(N ο πυρήνας της απεικόνησης, που ονομάζεται ιδιόχωρος)}$$

Γράφουμε $\sigma_p(A)$ *για να συμβολίσουμε την συλλογή από ιδιοτιμές του* A *(σημειακό φάσμα)*

ii) Αν λ είναι ιδιοτιμή και $w \neq 0$ ικανοποιεί

$$Aw = \lambda w,$$

λέμε οτι w είναι το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα.

Παρατήρηση. *Εφόσον $A \in \mathcal{L}(X)$ τότε το σ_p είναι συμπαγές υποσύνολο του αντίστοιχου σώματος K που ανήκουν οι ιδιοτιμές (στην περίπτωση μας του $\mathbb{R}$).*

Μία σημαντική κατηγορία τελεστών είναι οι συμπαγείς καθώς παίζουν καθοριστικό ρόλο στην μελέτη των διαφορικών εξισώσεων πάνω σε Hilbert χώρους.

Ορισμός 1.2.9 ([1], Definition, σελ.724)**.** *Έστω X, Y χώροι Banach και K ένας γραμμικός φραγμένος τελεστής*

$$K : X \to Y,$$

τότε K είναι συμπαγής αν για κάθε φραγμένη ακολουθία $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$, υπάρχει υπακολουθία $\{u_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ τέτοια ώστε $\{Ku_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ να συγκλίνει στον Y.

Έχουμε ήδη θεωρήσει τον χώρο $\mathcal{L}(X, Y)$ των γραμμικών φραγμένων τελεστών μεταξύ δύο Banach χώρων. Πλέον, περιοριζόμαστε στον $\mathcal{L}(H)$, που αποτελεί τον χώρο φραγμένων γραμμικών τελεστών πάνω σε έναν Hilbert.

Θεώρημα 1.2.7. *Αν $K : H \to H$ είναια συμπαγής, τότε και ο $K^* : H \to H$ είναι επίσης.*

Ορισμός 1.2.10. *i) Αν $A : H \to H$ είναι γραμμικός φραγμένος τελεστής, τότε ο συζηγής του $A^* : H \to H$ ικανοποιεί*

$$(Ax, y) = (x, A^*y), \quad \forall\, x, y \in H.$$

ii) A είναι συμμετρικός αν $A = A^*$.

Παρατήρηση. *Αν $A \in \mathcal{L}(H)$ είναι συμμετρικός τότε έχει μόνο πραγματικές ιδιοτιμές.*

Πριν διατυπώσουμε τα βασικά φασματικά θεωρήματα για συμπαγείς τελεστές, παρουσιάζουμε κάποιες ιδιότητες των φασμάτων τους.

Θεώρημα 1.2.8 (Φάσματα συμπαγών τελεστών, [1], Theorem 6, σελ.727)**.** *Έστω απειροδιάστατος Hilbert χώρος H και $K : H \to H$ συμπαγής τελεστής, τότε*

i) $0 \in \sigma(K)$,

ii) $\sigma(K) - \{0\} = \sigma_p(K) - \{0\}$,

iii)

$$\begin{cases} \sigma(K) - \{0\} \text{ είναι πεπερασμένο, ή διαφορετικά} \\ \sigma(K) - \{0\} \text{ είναι ακολουθία που συγκλίνει στο 0.} \end{cases}$$

Θεώρημα 1.2.9 (Hilbert-Schmidt Θεώρημα, [1], Theorem 7, σελ.728). *Έστω H ένας απειροδιάστατος Hilbert χώρος $S : H \to H$ γραμμικός, φραγμένος, συμπαγής και συμμετρικός τελεστής. Τότε υπάρχει μια ακολουθία μη-μηδενικών, πραγματικών ιδιοτιμών $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ του S, τέτοια ώστε*

$$\lim_{i\to\infty} \lambda_i = 0, \qquad \cdots \leq |\lambda_{i+1}| \leq |\lambda_i| \leq \cdots \leq |\lambda_1|,$$

όπου κάθε ιδιοτιμή επαναλαμβάνεται σύμφωνα με την πολυπλοκότητα της. Επιπλέον, υπάρχει ορθοκανονικό σύνολο $\{z_i\}_{i=1}^{\infty}$ αντίστοιχων ιδιοδιανυσμάτων, δηλαδή

$$Sz_i = \lambda_i z_i,$$

και αποτελεί ορθοκανονική βάση για την εικόνα του τελεστή S.

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω Θεώρημα καταλήγουμε στο παρακάτω πολύ χρήσιμο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 1.2.10 (Φασματικό θεώρημα). *Έστω το ελλειπτικό πρόβλημα ιδιοτιμών*

$$\begin{cases} Sz_i = \lambda_i z_i, & \text{στο } \Omega \\ \gamma_n z_i = 0. \end{cases}$$

όπου $\gamma_n u = \gamma_0 \frac{\partial^n u}{\partial \nu^n}$, γ_0 είναι ο συνήθης τελεστής ίχνους που περιορίζει συναρτήσεις πάνω στο $\partial\Omega$ και ν το μοναδιαίο εξωτερικό διάνυσμα στο $\partial\Omega$. Τότε, για τις περιπτώσεις

a) $S := -\Delta,\ n = 0,\ V := H_0^1(\Omega),\ H := L^2.$

b) $S := -\Delta + I,\ n = 1,\ V := H^1(\Omega),\ H := L^2.$

όπου $H_0^1(\Omega)$ και $H^1(\Omega)$ είναι χώροι Sobolev (θα μελετηθούν στην επόμενη ενότητα), τα παρακάτω δεδομένα ισχύουν σχετικά με τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα

i) Για την περίπτωση a) έχουμε

$$0 < \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_i \leq \cdots \quad \text{με } \lim_{i\to\infty} \lambda_i = \infty.$$

Ενώ για την περίπτωση b) έχουμε

$$1 \leq \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_i \leq \cdots \quad \text{με } \lim_{i\to\infty} \lambda_i = \infty.$$

ii) $\{z_i\}_{i=1}^{\infty}$ είναι ορθογώνια βάση για τον V, με $(z_i, z_j)_V = \lambda_i \delta_{ij}$.

iii) $\{z_i\}_{i=1}^{\infty}$ είναι ορθοκανονική βάση για τον H, με $(z_i, z_j)_H = \delta_{ij}$.

Περισσότερες λεπτομέρειες για αποδείξεις και περαιτέρω ανάλυση μπορει να βρεθούν στα [1, 2, 3].

1.3 Ασθενή-Ασθενή * τοπολογία

1.3.1 Ασθενή τοπολογία

Ορισμός 1.3.1. *i) Ένας τοπολογικός χώρος είναι ένα ζευγάρι $(X, \mathcal{T})$, όπου X είναι ένα σύνολο και $\mathcal{T}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του X τέτοια ώστε :*

a) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$,

b) Η $\mathcal{T}$ είναι κλειστή ως προς τις (αυθαίρετες) ενώσεις,

c) Η $\mathcal{T}$ είναι κλειστή ως προς τις πεπερασμένες τομές.

Η $\mathcal{T}$ ονομάζεται τοπολογία και τα στοιχεία της ανοιχτά σύνολα.

ii) Η ελάχιστη τοπολογία (συμβ. με w ή $\mathcal{T}_w$), δηλαδή εκείνη με τα ελάχιστα ανοιχτά που κάνει όλες τις συναρτήσεις στον X^*, $f : (X, w) \to \mathbb{R}$ συνεχείς, ονομάζεται ασθενής τοπολογία ενός χώρου X.

Παρατήρηση. *i) Προφανώς ισχύει $\mathcal{T}_w \subset \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$, όπου $\mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ η συνήθης τοπολογία, που επάγεται από την norm-τοπολογία, η οποία είναι φυσιολογικά και μετρικοποιήσιμη.*

ii) Ο χώρος θα λέγεται μετρικοποιήσιμος αν η τοπολογία επάγεται από κάποια μετρική, και πιο συγκεκριμένα στην περίπτωση μας, όταν επάγεται από νόρμα.

Η ασθενή τοπολογία έχει κάποιες πολύ σημαντικές ιδιότητες όσο αναφορά τις συγκλίσεις ακολουθιών και την συμπάγεια, που είναι φυσιολογίκο εφόσον όταν παίρνουμε λιγότερα ανοιχτά περιμένουμε 'καλύτερες' ιδιότητες για τα συμπαγή σύνολα.

Ορισμός 1.3.2. *Έστω X Banach χώρος με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$.*

i) Τότε λέμε ότι $x_n \to x$ ισχυρά στον X αν

$$\|x_n - x\|_X \to 0 \quad \text{καθώς } n \to \infty.$$

ii) Τότε λέμε ότι $x_n \xrightarrow{w} x$ στην ασθενή τοπολογία στον X αν

$$\langle x^*, x_n \rangle \to \langle x^*, x \rangle \quad \text{καθώς } n \to \infty, \quad \forall x^* \in X^*.$$

Κάποιες περαιτέρω ιδιότητες παρουσιάζονται παρακάτω.

Πρόταση 1.3.1 ([2], Πρόταση III.5, σελ.51)**.** *Έστω (x_n) ακολουθία του χώρου Banach X. Τότε έχουμε*

i) Αν $x_n \to x$ ισχυρώς, τότε $x_n \xrightarrow{w} x$ ασθενώς στην w-τοπολογία.

ii) Αν $x_n \xrightarrow{w} x$ ασθενώς στην w-τοπολογία, τότε η $\|x_n\|$ είναι φραγμένη και $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.

iii) Αν $x_n \xrightarrow{w} x$ ασθενώς στην w-τοπολογία και αν $x_n^* \to x^*$ ισχυρώς στον X^*, τότε $\langle x_n^*, x_n \rangle \to \langle x^*, x \rangle$.

Παρατήρηση. *Αν χώρος X είναι πεπερασμένης διάστασης, η ασθενής τοπολογία και η ισχυρή τοπολογία ταυτίζονται. Επομένως μια ακολουθία συγκλίνει ασθενώς αν και μόνο αν συγκλίνει ισχυρώς.*

Ένα απο τα σημαντικότρα αποτελέσματα για την ασθενή τοπολογία, αφορά τα συμπαγή σύνολα. Συγκεκριμένα, την ισοδυναμία w-συμπαγών (ασθενώς συμπαγών) συνόλων με την ακολουθιακή συμπάγεια.

Θεώρημα 1.3.2 (Eberlein-Smulian, [2], Θεώρημα III.28, σελ.73). *Έστω X χώρος Banach με νόρμα, $A \subset X$ τότε τα επομένα είναι ισσοδύναμα*

i) A είναι w-συμπαγής (ή ασθενά συμπαγής).

ii) A είναι ακολουθιακά συμπαγής.

1.3.2 Ασθενή * τοπολογία

Θα ορίσουμε, τώρα, μια επιπλέον τοπολογία πάνω στον χώρο X^*, την ασθενή * τοπολογία. Έχοντας ορίσει σε προηγούμενη παράγραφο την κανονική εμφύτευση $e_x : X^* \to \mathbb{R}$ που ορίζεται με $x^* \mapsto e_x(x^*) = \langle x^*, x\rangle$, θεωρούμε πλεόν ως ασθενή * τοπολογία πάνω στον X^*, την τοπολογία εκείνη που κάνει τις $e(X) \subset X^{**}$ συνεχή. Η τάση αυτή για ελάχιστα ανοιχτά σύνολα, μας οδηγεί πάλι σε πολύ ενδιαφέρουσες συνέπειες για τα συμπαγή σύνολα. Επιπλέον, τώρα συγκλίσεις σε αυτή την τοπολογία έχουν 'σημειακό' νόημα.

Ορισμός 1.3.3. *Η ελάχιστη τοπολογία (συμβ. με w^* ή $\mathcal{T}_{w^*}$), δηλαδή εκείνη με τα ελάχιστα ανοιχτά που κάνει όλες τις συναρτήσεις στον X^{**}, $e_x : X^* \to \mathbb{R}$ συνεχείς, ονομάζεται Ασθενής * τοπολογία του χώρου X^*.*

Ορισμός 1.3.4 ([1], Definition, σελ.723). *Έστω X Banach χώρος με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$. Τότε λέμε ότι $x_n \xrightarrow{w^*} x$ στην ασθενή * τοπολογία στον X^* αν*

$$\langle x_n^*, x\rangle \to \langle x^*, x\rangle \quad \text{καθώς } n \to \infty, \quad \forall x \in X.$$

Παρατήρηση. *Εύκολα φαίνεται ότι αν βάλουμε την ασθενή τοπολογία πάνω στον δυϊκό χώρο X^*, αυτή η τοπολογία είναι πιο ισχυρή καθώς γενικα ισχύει $X \subset X^{**}$.*

Πρόταση 1.3.3 ([2], Πρόταση III.12, σελ.58). *Έστω (x_n^*) ακολουθία του χώρου Banach X^*. Τότε έχουμε*

i) Αν $x_n^* \to x^*$ ισχυρώς, τότε $x_n^* \xrightarrow{w} x^*$ ασθενώς για την w-τοπολογία στον X^*.
Αν $x_n^* \xrightarrow{w} x^*$ ασθενώς για την w-τοπολογία στον X^*, τότε $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$ ασθενώς στην w^*-τοπολογία στον X^*.

ii) Αν $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$ ασθενώς για την w^*-τοπολογία στον X^*, τότε η $\|x_n^*\|$ είναι φραγμένη και $\|x^*\| \leq \liminf \|x_n^*\|$.

iii) Αν $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$ ασθενώς για την w^*-τοπολογία στον X^* και αν $x_n \to x$ ισχυρώς στον X, τότε $\langle x_n^*, x_n\rangle \to \langle x^*, x\rangle$.

Για την μετρικοποιησιμότητα της ασθενής * τοπολογίας, γνωρίζουμε ότι ολόκληρως ο χώρος X^* δεν είναι ποτέ μετρικοποιήσιμος, αλλά αν περιοριστούμε έχουμε το παρακάτω αποτέλεσμα.

Πρόταση 1.3.4. *Έστω X διαχωρίσιμος χώρος με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$ και $A \subset X^*$, $\|\cdot\|$ −φραγμένο. Τότε η ασθενης * τοπολογίας περιορισμένη στο φραγμένο σύνολο $(A, \mathcal{T}_{w^*}|_A)$ είναι μετρικοποιήσιμη.*

Ένα από τα σημαντικότερα αποτελέσματα για την ασθενή * τοπολογία που αφορά τα συμπαγή σύνολα είναι το θεώρημα Banach-Alaoglu, που επιβεβαιώνει την προηγούμενη παρατήρηση για περισσότερες ιδιότητες των συμπαγών συνόλων. Συγκεκριμένα, η μοναδιδαία μπάλα του X^* έχει την αξιοσημείωτη ιδιότητα να είναι συμπαγής για την ασθενή * τοπολογία.

Θεώρημα 1.3.5 (Banach-Alaoglu, [2], Θεώρημα III.15, σελ.61). *Εάν X χώρος με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$, τότε (B_{X^*}, w^*) είναι συμπαγής.*

1.3.3 Ανακλαστικοί χώροι

Έχουμε ήδη ορίσει ότι ένας χώρος X είναι ανακλαστικός αν $e(X) = x^{**}$, με e_x να είναι η κανονική εμφύτευση. Στην ειδική αυτή περίπτωση, ανακύπτουν ωραίες ιδιότητες για τις ασθενείς και ασθενεις * τοπολογίες.

Παρατήρηση. *Εύκολα βλέπουμε ότι σε ανακλαστικούς χώρους οι ασθενής και ασθενής * τοπολογίες ταυτίζονται από ορισμό.*
$(X^*, w) \to$ *όλες οι συναρτήσεις* $x^* \in X^{**}$ *που είναι συνεχείς.*
$(X^*, w^*) \to$ *όλες οι συναρτήσεις* $e_x = X^{**}$ *που είναι συνεχείς.*

Θεώρημα 1.3.6 ([2], Θεώρημα III.16, σελ.63). *X ανακλαστικός χώρος αν και μόνο αν B_X, δηλαδή η μοναδιαία μπάλα του X, είναι w-συμπαγής.*

Πρόταση 1.3.7 ([2], Θεώρημα III.27, σελ.72). *X ανακλαστικός αν και μόνο κάθε φραγμένη ακολουθία του X έχει w-συγκλίνουσα υπακολουθία.*

Παρατήρηση. *Αυτό συμβαίνει καθώς εφόσον ο X ειναι ανακλαστικός, τότε (B_X, w) είναι συμπαγής και από θεώρημα Eberlein-Smulian ακολουθιακά συμπαγής, επομένως σε συνδυασμό με την φραγμένη ακολουθία έχουμε το αποτέλεσμα.*

Παρατήρηση. *i) Τα ασθενή και ασθενή * όρια, που ορίσαμε παραπάνω, είναι μοναδικά.*

ii) Εφόσον κάθε χώρος Hilbert είναι ανακλαστικός, ότι αναφέρθηκε σε αυτή την παράγραφο ισχύει, επίσης, για εκείνους τους χώρους.

Περισσότερες λεπτομέρειες για αποδείξεις και περαιτέρω ανάλυση μπορει να βρεθούν στα [1, 2, 3, 4].

1.4 Θεωρία Sobolev

Αρχικά, παραθέτουμε κάποιες βασικές έννοιες και χώρους που θα χρησιμοποιηθούν αργότερα.

Ορισμός 1.4.1 ([2], σελ.96-97). *Ο φορέας μίας συνεχής συνάρτησης f σε ένα ανοιχτό σύνολο $\Omega \subset \mathbb{R}$ ορίζεται ώς*

$$supp f = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}.$$

Επομένως ο φορέας είναι το συμπλήρωμα του μεγαλύτερου ανοιχτού στο οποίο η f μηδενίζεται.
Κάποιοι χρήσιμοι χώροι παρουσιάζονται παρακάτω.

i) $C(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \mid u$ *συνεχής*$\}$.

ii) $C^k(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \mid u$ *k-φορές συνεχώς διαφορίσιμη*$\}$.

iii) $C^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \mid u$ *απείρως συνεχώς διαφορίσιμη*$\} = \cap_{k=0}^{\infty} C^k(\Omega)$.

iv) $C_c(\Omega),\ C_c^k(\Omega)$. δηλώνουν τους χώρους $C(\Omega),\ C^k(\Omega)$ με συμπαγή φορέα.

Με $C_c^\infty(\Omega)$ δηλώνουμε το χώρο των απείρων συνεχών διαφορίσιμων συναρτήσεων με συμπαγή φορέα στο Ω. Συνήθως, τις ονομάζουμε επίσης *συναρτήσεις ελέγχου*.

Παρατήρηση. *Χρησιμοποιείται, επίσης, ο συμβολισμός* $\mathcal{D}(\Omega)$ *ή* $C_0^\infty(\Omega)$ *αντί* $C_c^\infty(\Omega)$.

1.4.1 L^p χώροι

Οι L^p χώροι έχουν πολύ σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη της θεωρίας Sobolev και γενικά για την θεωρία των διαφορικών εξισώσεων.

Ορισμός 1.4.2 ([2], Ορισμός, σελ.79)**.** *Έστω* $1 \le p \le \infty$, *τότε ο χώρος* $L^p(\Omega)$ *αποτελείται από μετρήσιμες συναρτήσεις* $u : \Omega \to \mathbb{R}$, *με*

$$\int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty,$$

και θέτουμε

$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} : u \text{ μετρήσιμη και } |u|^p \in L^1(\Omega)\}.$$

Επιπλέον, $L^\infty(\Omega)$ *είναι ο χώρος των συναρτήσεων* u *που είναι ουσιωδώς φραγμένες (δηλαδή, υπάρχει θετική σταθερά* M *ώστε* $|u(x)| \le M$ *για σχεδόν όλα τα* $x \in \Omega$ *και η μικρότερη τέτοια σταθερά καλείται essential supremum της* $|u(x)|$*), δηλαδή* $esssup_{x\in\Omega}|u(x)| < \infty$.

Αποδεικνύεται ότι ο $L^p(\Omega)$, για $1 \le p \le \infty$, είναι Banach διανυσματικός χώρος με τις αντίστοιχες νόρμες

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \Big[\int_\Omega |u(x)|^p dx\Big]^{1/p},$$

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = esssup_{x\in\Omega}|u(x)|.$$

Παρατήρηση. *Για* $p = 2$, *ο χώρος* $L^2(\Omega)$ *είναι επιπλέον Hilbert με νόρμα και εσωτερικό γινομένο*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \Big[\int_\Omega |u(x)|^2 dx\Big]^{1/2},$$

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)v(x)dx.$$

Ορισμός 1.4.3. *Έστω* $1 \le p \le \infty$, *συμβολίζουμε με* p' *τον συζηγή εκθέτη του* p, *δηλαδή* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Πρόταση 1.4.1 ([2], Θεωρήματα, Κεφ. 3)**.** *i) Οι χώροι* $L^p(\Omega)$, *για* $1 < p < \infty$ *είναι ανακλαστικοί και διαχωρίσιμοι ενώ ο δυϊκός τους είναι ο* $L^{p'}(\Omega)$.

ii) Ο χώρος $L^1(\Omega)$ *είναι διαχωρίσιμος αλλα όχι ανακλαστικός με δυϊκό τον* $L^\infty(\Omega)$.

iii) Ο χώρος $L^\infty(\Omega)$ δεν είναι ούτε ανακλαστικός ούτε διαχωρίσιμος και ο δυϊκος του περιέχει αυστήρα το $L^1(\Omega)$.

iv) Ο χώρος $C_c^\infty(\Omega)$ είναι πυκνός στον $L^p(\Omega)$ για $1 \leq p < \infty$.

Ορισμός 1.4.4. *Έστω $1 \leq p \leq \infty$, τότε ο χώρος $L^p_{loc}(\Omega)$ αποτελείται από μετρήσιμες συναρτήσεις $u : \Omega \to \mathbb{R}$, με*

$$L^p_{loc}(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} : u\chi_K \in L^p(\Omega) \quad \forall K \subseteq \Omega\},$$

όπου χ_K η χαρακτηριστική συνάρτηση.

Ο παραπάνω χώρος, και συγκεκριμένα ο $L^1_{loc}(\Omega)$ γνωστός και ως χώρος των τοπικά ολοκληρώσιμων ή τοπικά αθροίσιμων συναρτήσεων, είναι πολύ χρήσιμος, ειδικά για τον καλώς ορισμένο των ασθενών παραγώγων. Παρακάτω βλέπουμε κάποιες ιδιότητες.

Πρόταση 1.4.2 ([2], Λήμμα IV.2, σελ.87). *i) Ο $L^p(\Omega)$ είναι υπόχωρος του $L^1_{loc}(\Omega)$ για κάθε $1 \leq p \leq \infty$.*

ii) Έστω $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ τέτοιο ώστε

$$\int fu = 0 \qquad \forall u \in C_c^\infty(\Omega).$$

Τότε $f = 0$ σ.π. στο Ω.

1.4.2 Sobolev χώροι

Αρχίζουμε με τον ορισμό της ασθενής παραγώγου ώστε να περιγράψουμε τους χώρους Sobolev. Αλλά πρώτα μια παρατήρηση.

Παρατήρηση. *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοιχτό. Υποθέτουμε επίσης ότι $k \in \mathbb{Z}_+$ και $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ διάνυσμα μη αρνητικών ακεραίων με την ιδιότητα $|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i = k$. Το διάνυσμα αυτό καλείται πολυδείκτης. Υποθέτουμε επίσης ότι $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ ώστε $\phi \in C^k(\Omega)$. Τότε συμβολίζουμε την γενικευμένη παράγωγο με*

$$D^\alpha \phi = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1}\frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n}\phi.$$

Είμαστε σε θέση πλέον να ορίσουμε την ασθενή παράγωγο.

Ορισμός 1.4.5 ([1], Definition, σελ.256). *Έστω $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$, δύο τοπικά ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και α είναι ένας πολυδείκτης. Τότε λέμε ότι v είναι η α τάξεως ασθενή παράγωγος της u, και θα την συμβολίζουμε με*

$$D^\alpha u = v$$

αν και μόνο αν

$$\int_\Omega u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v\phi dx,$$

για κάθε δοκιμαστική συνάρτηση $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Με άλλα λόγια, αν για δοσμένη συνάρτηση u υπάρχει συνάρτηση v η οποία ικανοποιεί την παραπάνω σχέση για κάθε ϕ, λέμε ότι $D^\alpha u = v$ με την ασθενή έννοια.

Λήμμα 1.4.3 (Μοναδικότητα των ασθενών παραγώγων, [1], Remark, σελ.258)**.** *Μια α τάξεως ασθενή παράγωγος της u, αν υπάρχει, είναι μοναδικά ορισμένη σχεδόν παντού στο Ω*

Παρατήρηση. *Η αποδείξη είναι εύκολη, αν αναλογιστούμε ότι $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ και την Πρόταση 1.4.2.*

Πλέον, θα ορίσουμε τον χώρο Sobolev σαν έναν χώρο συναρτήσεων, του οποίου τα μέλη θα έχουν ασθενείς παραγώγους διαφόρων βαθμών σε χώρους $L^p(\Omega)$.

Ορισμός 1.4.6 ([1], Definition, σελ.258)**.** *Θεωρούμε $1 \leq p \leq \infty$ και k έναν μη αρνητικό ακέραιο. Ορίζουμε τον χώρο Sobolev k-τάξης*

$$W^k_p(\Omega),$$

να αποτελείται από όλες τις τοπικά ολοκληρώσιμες συναρτήσεις $u : \Omega \to \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε για κάθε πολυδείκτη α με $|\alpha| \leq k$, $D^\alpha u$ να υπάρχει με την ασθενή έννοια και να ανήκει στον $L^p(\Omega)$. Ή διαφορετικά,

$$W^k_p(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ |\alpha| \leq k\},$$

με νόρμες

$$\|u\|_{W^k_p(\Omega)} := \Big(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \Big)^{1/p},$$

$$\|u\|_{W^k_\infty(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|^p_{L^\infty(\Omega)}\,.$$

Παρατήρηση. *i) Ο χώρος $(W^k_p(\Omega), \|\cdot\|_{W^k_p(\Omega)})$, για $1 \leq p \leq \infty$, είναι χώρος Banach.*

ii) Έστω $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ και $u \in W^k_p(\Omega)$. Θα λέμε ότι η u_m συγκλίνει στην u στον $W^k_p(\Omega)$ και γράφουμεε $u_m \to u$ στον $W^k_p(\Omega)$, αν

$$\lim_{m \to \infty} \|u_m - u\|_{W^k_p(\Omega)}\,.$$

iii) Μάλιστα, για $p = 2$ ο χώρος $W^k_2(\Omega)$, που συμβολίζεται και ως $H^k(\Omega)$, είναι Hilbert, με εσωτερικό γινόμενο,

$$(u, v)_{W^k_2(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v).$$

Ορίζουμε, λοιπόν, τον κλασσικό χώρο Hilbert $H^1(\Omega)$ με την νόρμα του.

$$H^1(\Omega) = \big\{u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^2(\Omega),\ j = 1, ..., n\},$$

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \Big\{ \|u\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{j=1}^n \Big\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \Big\|_{L^2(\Omega)} \Big\}^{1/2}.$$

Μια ειδική περίπτωση, εμφανίζεται όταν οι συναρτήσεις που ανήκουν στους χώρους Sobolev μηδενίζονται στο σύνορο.

Ορισμός 1.4.7 ([1], Definition, σελ.256). *Συμβολίζουμε με $W_0^{k,p}(\Omega)$ την κλειστότητα του $C_c^\infty(\Omega)$ στον $W_p^k(\Omega)$. Επιπλέον $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ αν και μόνο αν υπάρχουν συναρτήσεις $u_m \in C_c^\infty$ τέτοιες ώστε, $u_m \to u \in W_p^k(\Omega)$. Ερμηνεύουμε $W_0^{k,p}(\Omega)$ ως τον χώρο που αποτελείται από συναρτήσεις $u \in W_p^k(\Omega)$ για τις οποίες ισχύουν*

$$\text{`}D^\alpha u = 0\text{'} \ \text{ στο } \partial\Omega \text{ για όλα τα } |\alpha| \leq k-1.$$

Πλέον, θα παρουσιάσουμε ένα από τα πιο σημαντικά αναλυτικά εργαλεία για την μελέτη διαφορικών εξισώσεων τις λεγόμενες "Sobolev ανισότητες". Με αυτές θα απαντήσουμε το εξής ερώτημα : Αν μια συνάρτηση u ανήκει σε ένα χώρο Sobolev τότε ανήκει αυτομάτως σε άλλους χώρους. Θα δούμε ότι αυτό θα εξαρτάται από την διάσταση του προβλήματος και τον $L^p(\Omega)$ που απαιτούμε οι ασθενείς παραγώγοι να ανήκουν :

$$1 \leq p < n, \tag{1.4.1}$$

$$p = n, \tag{1.4.2}$$

$$n < p \leq \infty. \tag{1.4.3}$$

Ορισμός 1.4.8 ([1], Definition, σελ.277). *Έστω $1 \leq p \leq \infty$, ο Sobolev συζυγής του δείκτη p ορίζεται ως*

$$p^* = \frac{np}{n-p} \text{ και ισχύει } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}, \ p^* > p.$$

Θεώρημα 1.4.4 (Γενικευμένες Ανισότητες Sobolev, [1], Theorem 6, σελ.284). *Έστω Ω ένα φραγμένο, ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, με σύνορο $\partial\Omega \in C^1$, και $u \in W_p^k(\Omega)$.*

i) Αν

$$k < \frac{n}{p},$$

τότε $u \in L^q(\Omega)$, όπου $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$. Επιπλέον ισχύει η εκτίμηση

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|u\|_{W_p^k(\Omega)},$$

με την σταθερά C να εξαρτάται από τα k,p,n και Ω.

ii) Αν

$$k > \frac{n}{p},$$

τότε $u \in C^{k-[\frac{n}{p}]-1,\gamma}(\overline{\Omega})$[1], όπου

$$\begin{cases} \left[\frac{n}{p}\right] + 1 - \frac{n}{p} & \text{αν } \frac{n}{p} \text{ δεν είναι ακέραιος,} \\ \text{οποιοσδήποτε θετικός αριθμός } < 1 & \text{αν } \frac{n}{p} \text{ είναι ακέραιος.} \end{cases}$$

Επιπλέον ισχύει η εκτίμηση

$$\|u\|_{C^{k-[\frac{n}{p}]-1,\gamma}(\overline{\Omega})} \leq C \|u\|_{W_p^k(\Omega)}.$$

με την σταθερά C να εξαρτάται από τα k,p,n,γ και Ω.

[1] $C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})$ είναι ο χώρος Hölder με συναρτήσεις k-φόρες παραγωγίσιμες και με την k-οστη παράγωγο Lipschitz με εκθέτη γ.

Το παραπάνω θεώρημα δείχνει εμφυτεύσεις των γενικών χώρων Sobolev σε κατάλληλους χώρους. Τώρα, θα επικεντρωθούμε στους χώρους $W_p^1(\Omega)$ και θα δείξουμε μάλιστα ότι είναι συμπαγώς εμφυτεύσιμοι στον $L^q(\Omega)$, για $1 \leq p < p^*$. Αυτή η συμπάγεια είναι βασική για την μετέπειτα μελέτη της μη γραμμικής μας μερικής διαφορικής εξίσωσης.

Ορισμός 1.4.9 ([1], Definition, σελ.286). *Έστω X, Y Banach χώροι και $X \subset Y$. Τότε λέμε ότι ο χώρος X είναι συμπαγώς εμφυτευμένος στον Y, με συμβολισμό*

$$X \subset\subset Y,$$

αν

i) $\|u\|_Y \leq C \|u\|_X$ *για κάποια σταθερά C,*

ii) κάθε φραγμένη στον X ακολουθία $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ έχει κάποια υπακολουθία $\{u_{k_j}\}_{j=1}^{\infty} \subset \{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ που να συγκλίνει στο Y σε κάποιο όριο u

$$\lim_{j\to\infty} \left\|u_{k_j} - u\right\|_Y = 0.$$

Θεώρημα 1.4.5 (Θεώρημα συμπάγειας Rellich-Kondrachov, [1], Theorem 1, σελ.286). *Έστω Ω ένα φραγμένο, ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με σύνορο $\partial\Omega$ να είναι C^1.*

- *Έστω $1 \leq p < n$. Τότε ισχύει ότι*

$$W_p^1(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega),$$

  για κάθε $1 \leq q < p^*$.

- *Έστω $p = n = 2$. Τότε ισχύει ότι*

$$W_p^1(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega),$$

  για κάθε $1 \leq q < \infty$.

1.4.3 Bochner Χώροι

Εφόσον θα μελετήσουμε μη-γραμμικές παραβολικές εξισώσεις στην συνέχεια, θα χρειαστεί να αναφέρουμε και άλλους τύπου χώρους Sobolev, τέτοιους ώστε να αποτελούνται από συναρτήσεις που απεικονίζουν τον χρόνο σε Banach χώρους.
Έστω X να συμβολίζει ένα πραγματικό χώρο Banach, με νόρμα $\|\cdot\|$.

Ορισμός 1.4.10 ([1], Definition, σελ.301). *Ο χώρος $L^p[0,T;X]$ αποτελείται από μετρήσιμες συναρτήσεις $u : [0,T] \to X$ με :*

$$\|u\|_{L^p[0,T;X]} = \Big(\int_0^T \|u(t)\|_X^p\Big)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|u\|_{L^\infty[0,T;X]} := ess \sup_{0\leq t\leq T} \|u(t)\|_X .$$

Ορισμός 1.4.11 ([1], Definition, σελ.301). *Ο χώρος $C([0,T],X)$ περιέχει συνεχείς συναρτήσεις $u : [0,T] \to X$ με :*

$$\|u\|_{C([0,T],X)} := \max_{0\leq t\leq T} \|u(t)\|_X .$$

Ορισμός 1.4.12 ([1], Definition, σελ.301). *Έστω $u \in L^1[0,T;X]$. Λέμε ότι $v \in L^1[0,T;X]$ είναι η ασθενής παράγωγος της u, γράφοντας $u' = v$, εάν*

$$\int_0^T u(t)\phi(t)dt = -\int_0^T v(t)\phi(t)dt,$$

για όλες τις συναρτήσεις $\phi \in C_c^\infty(0,T)$.

Ορισμός 1.4.13 ([1], Definition, σελ.302). *i) Ο χώρος Sobolev $W_p^1[0,T;X]$ περιλαμβάνει τις συναρτήσεις $u \in L^p[0,T;X]$ έτσι ώστε u' να υπάρχει με την ασθενή έννοια και να ανήκει στον χώρο $L^p[0,T;X]$. Επιπλέον,*

$$\|u\|_{W_p^1[0,T;X]} = \Big(\int_0^T \|u(t)\|_X^p + \|u'(t)\|_X^p\Big)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty,$$

$$\|u\|_{W_\infty^1[0,T;X]} := ess \sup_{0\le t\le T} (\|u(t)\|_X + \|u'(t)\|_X).$$

ii) $H^1[0,T;X] = W_2^1[0,T;X]$.

Παρουσιάζουμε στην συνέχεια ένα σημαντικό θεώρημα, με το οποίο συναρτήσεις των $L^2[0,T;H^m(\Omega)]$ μπορεί να ανήκουν σε 'καλούς' χώρους, κάτω από ορισμένες συνθήκες.

Θεώρημα 1.4.6 ([1], Theorem 4, σελ.304). *Έστω Ω ανοιχτό και φραγμένο σύνολο, με σύνορο $\partial\Omega$ ομαλό. Ακόμη έτσω $u \in L^2[0,T;H^{m+2}(\Omega)]$ με $u' \in L^2[0,T;H^m(\Omega)]$, όπου m ένας μη αρνητικός ακέραιος. Τότε*

i) $u \in C([0,T];H^{m+1}(\Omega))$.

ii) Επιπλέον έχουμε την εκτίμηση

$$\max_{0\le t\le T} \|u(t)\|_{H^{m+1}(\Omega)} \le C\big(\|u\|_{L^2[0,T;H^{m+2}(\Omega)]} + \|u'\|_{L^2[0,T;H^m(\Omega)]}\big),$$

όπου η σταθερά C εξαρτάται μόνο από τα T, Ω και m.

Αναφέρουμε την ειδική μορφή των ανισοτήτων Hölder για τους χώρους Bochner

Θεώρημα 1.4.7 (Hölder ανισότητα, [5], Theorem 1.8, σελ.11). *Έστω $u(t) \in L^p[0,T;X]$, $v(t) \in L^{p'}[0,T;X^*]$. Τότε η απεικόνιση $t \to \langle v(t), u(t)\rangle_{X^*,X}$ είναι μετρήσιμη και*

$$\int_0^T |\langle v(t), u(t)\rangle| dt \le \Big(\int_0^T \|u(t)\|_X^p\Big)^{1/p}\Big(\int_0^T \|v(t)\|_{X^*}^p{}'\Big)^{1/p'}.$$

Τέλος, παρουσιάζουμε τον χαρακτηρισμό του δυϊκού ενός χώρου Bochner $L^p[0,T;X]$

Θεώρημα 1.4.8 (Χαρακτηρισμός δυϊκου Bochner, [5], Theorem 1.9, σελ.11). *Έστω X να είναι ανακλαστικός, διαχωρίσιμος και $1 \le p < \infty$.Τότε για κάθε $F \in (L^p[0,T;X])^*$ υπάρχει $v \in L^{p'}[0,T;X^*]$ τέτοιο ώστε*

$$\langle F, u(t)\rangle_{(L^p[0,T;X])^*, L^p[0,T;X]} = \int_0^T \langle v(t), u(t)\rangle_{X^*,X} dx \quad u \in L^p[0,T;X].$$

Επιπλέον, $v(t)$ είναι μοναδικά ορισμένο και $\|v(t)\|_{L^{p'}[0,T;X^*]} = \|F\|_{(L^p[0,T;X])^*}$.

Επομένως, μπορούμε και ταυτίζουμε του δύο χώρους $(L^p[0,T;X])^* \equiv L^{p'}[0,T;X^*]$.

Περισσότερες λεπτομέρειες για αποδείξεις και περαιτέρω ανάλυση μπορει να βρεθούν στα [1, 2, 3, 4, 5].

Κεφάλαιο 2

Το σύστημα Αντίδρασης-Διάχυσης Schnakenberg

2.1 Το σύστημα Schnakenberg

2.1.1 Εισαγωγή

Το σύστημα Αντίδρασης-Διάχυσης Schnakenberg αποτελείται από δύο παραβολικές Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις που συνδέονται μεταξύ τους μέσω μη γραμμικων όρων. Στην περίπτωση μας θα θεωρήσουμε ότι έχουμε Neumann οριακές συνθήκες (Ομογενής : όπου περιγράφει μηδενική ροή των u,v εκτός και εντός του συνόρου),

$$
\begin{cases}
u_t + \nabla(\mathbf{A}u) - D_u \Delta u &= \gamma\alpha - \gamma u + \gamma u^2 v \quad \text{in } (0,T] \times \Omega \\
v_t + \nabla(\mathbf{A}v) - D_v \Delta v &= \gamma b - \gamma u^2 v \quad \text{in } (0,T] \times \Omega \\
\dfrac{\partial u}{\partial n} = \dfrac{\partial v}{\partial n} &= 0 \quad \text{on } (0,T] \times \partial\Omega \\
u(0,x) &= g(x) \quad \text{in } \{t=0\} \times \Omega \\
v(0,x) &= h(x) \quad \text{in } \{t=0\} \times \Omega.
\end{cases}
\tag{2.1.1}
$$

Όπου Ω υποδηλώνει ένα φραγμένο υπόχωρο $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, με Lipschitz σύνορο, D_u, D_v σταθερές διάχυσης, γ παράμετρος κλιμάκωσης οπότε είναι θετική, α, b θετικές παράμετροι και $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x,t)$ την ταχύτητα ροής πεδίου. Επιπλέον, $g : \Omega \to \mathbb{R}$ και $h : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι τα αρχικά δεδομένα, $u : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ και $v : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ είναι οι άγνωστοι, με $u = u(x,t)$, $v = v(x,t)$. Ορίζουμε επίσης την συνάρτηση $f(u,v) = u^2 v$, που είναι ο μη γραμμικός όρος σύζευξης.

Πολλά συστήματα στην βιολογία, στην βιο-χημεία και οικολογία περιλαμβάνουν αντίδραση ορισμένων "ειδών" στην παρουσία διάχυσης, οπότε και τα συστήματα Αντίδρασης-Διάχυσης προκύπτουν. Συγκεκριμένα, στην βιολογία και την βιο-ιατρική, τέτοια συστήματα συχνά χρησιμοποιούνται για την μοντελοποίηση εμφάνισης σχηματισμού μοτίβου, επούλωσης πληγών, καρκίνου και αγγειογένεσης [6, 7, 8]. Ο Turing [9] πρότεινε ότι, κάτω από ορισμένες συνθήκες, μια χημική αντίδραση στην παρουσία διάχυσης θα μπορούσε να σχηματίσει χωρικά μοτίβα των χημικών συγκεντρώσεων. Ένα από τα γνωστά παραδείγματα συστημάτων Αντίδρασης-Διάχυσης περιλαμβάνουν το σύστημα Schnakenberg [10] που θα μελετήσουμε, το οποίο προκύπτει από την μοντελοποίηση κινηματικών των χημικών αντιδράσεων.

Στην αρχή ο Schnakenberg [10] ανέπτυξε το μοντέλο κινηματικής αντίδρασης του, σύστημα Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων 1ου βαθμού, σε αναζήτηση ενός ελάχιστου, αλλά ακόμη

χημικά λογικού μοντέλου που εμφανίζει συμπεριφορά οριακού κύκλου, δηλαδή χρονικές περιοδικές λύσεις. Η έμπνευση για μια τέτοια ιδέα προήλθε από έρευνα σε διαφορετικούς τομείς της βιολογίας, όπως οικολογικούς κύκλους πυκνότητας πληθυσμού και μεταβολικής ρύθμισης, όπου και οι δύο δείχνουν εξαρτώμενη από το χρόνο συμπεριφορά. Στη συνέχεια μπορεί να εισαχθεί χωρική εξάρτηση των συγκεντρώσεων του χημικού μοντέλου έτσι ώστε να συμπεριληφθεί η κυκλοφορία των χημικών προσθέτοντας διάχυση, δημιουργώντας εν τέλει ένα παρόμοιο σύστημα με το (2.1.1), δίχως τον όρο $\nabla(\mathbf{A}u)$ που υποδηλώνει ροή. Το τελικό σχήμα (2.1.1) που προκύπτει με την εισαγωγή αυτού του όρου μοντελοποιεί, όπως προαναφέρθηκε, εμφάνιση σχηματισμού μοτίβων στην βιολογία [11].

Θα εξετάσουμε, επιπλέον, χωρο-χρονική προσέγγιση του συστήματος Schnakenberg χρησιμοποιώντας γνωστές αριθμητικές μεθόδους, συγκεκριμένα θα παρουσιάσουμε το αριθμητικό σχήμα με σύμμορφα πεπερασμένα στοιχεία στον χώρο και έμμεση Euler μέθοδο στον χρόνο [11]. Ωστόσο, επειδή εξέλλιξη-αύξηση του πεδίου έχει παρατηρηθεί να είναι σημαντική στην πειραματική βιολογία [6], η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων μελετάται, επίσης, πάνω σε συνεχώς εξελισσόμενα πεδία. Επομένως, γίνεται συχνά χρήση μεθόδων με χρονικά σχήματα πάνω σε εξελισσόμενα πεδία και επιφάνειες, όπως για παράδειγμα πεπερασμένα στοιχεία κινούμενου πλέγματος [12, 13, 14].

Πριν την ανάλυση του Schnakenberg μοντέλου, τοποθετούμε ορισμένες παρατηρήσεις σχετικά με τους βιολογικούς / χημικούς περιορισμούς που τίθενται σε αυτό το μοντέλο. Εφόσον, το σύστημα , συνήθως, αφορά την εξέλιξη των χημικών συγκεντρώσεων τα u, v θα είναι θετικά, επίσεις οι παράμετροι $\alpha, b, \gamma, D_u, D_v$, όπως και υπόθηκε παραπάνω, θα είναι, επίσης, θετικές. Τέλος, αυτές οι οριακές συνθήκες επιλέγονται επειδή ενδιαφερόμαστε για την αυτοοργάνωση των μοτίβων δηλαδή ένα απομονωμένο σύστημα χωρίς εξωτερική επιρροή, η οποία διασφαλίζεται από τις οριακές συνθήκες του Neumann.

2.1.2 Στόχος

Κύριος στόχος είναι να παρουσιάσουμε μία αυστηρή ανάλυση του συστήματος Schnakenberg. Συγκεκριμένα, θα δείξουμε, χρησιμοποιώντας βασικές τεχνικές, την ύπαρξη λύσεων του συστήματος σε κατάλληλους χώρους και στην συνέχεια θα βγάλουμε αποτελέσματα για εκτιμήσεις ευστάθειας με χρήση σύμμορφων πεπερασμένων στοιχείων στο χώρο και έμμεσης Euler μέθοδο στον χρόνο, κάτω απο την προϋπόθεση για ελάχιστη ομαλότητα των αρχικών δεδομένων. Στην περίπτωση μας, αρκεί $g(x), h(x) \in L^2(\Omega)$.

Αρχικά, θα κάνουμε χρήση της μεθόδου προσέγγισης Galerkin [1], όπου βασική της ιδέα είναι η κατασκευή προσεγγιστικών λύσεων πεπερασμένης διάστασης του αρχικού προβλήματος, δηλαδή η προβολή της ΜΔΕ σε κατάλληλη ακολουθία υπόχωρων πεπερασμένης διάστασης, και ο υπολογισμός κατάλληλων ενεργειακών εκτιμήσεων, ώστε να περάσουμε το όριο και να επιστρέψουμε στον αρχικό χώρο άπειρης διάστασης, γεγονός που μπορεί να πραγματοποιηθεί εφόσον οι εκτιμήσεις είναι ομοιόμορφες για όλες τις προσεγγιστικές λύσεις σε ολόκληρο το χρονικό διάστημα. Συγκεκριμένα, με κλασικές τεχνικές βασισμένες στις Gronwall τύπου ανισότητες θα υπολογίσουμε τις ενεργειακές εκτιμήσεις, από τις οποίες θα πάρουμε φράγματα για τις πεπερασμένης διάστασης προσεγγίσεις και επομένως θα έχουμε ασθενής συγλίσεις υπακολουθιών, ώστε να έχουμε την δυνατότητα να περάσουμε τα όρια. Η κύρια δυσκολία του συστήματος Schnakenberg προέρχεται από το γεγονός ότι περιέχει δύο παραβολικές ΜΔΕ οι οποίες συνδέονται μέσω μη γραμμικών όρων, όπου η παραπάνω ασθενής σύγλιση δεν αρκεί ώστε να περάσουν τα όρια. Για αυτό το λόγο, για την αντιμετώπιση των μη γραμμικών όρων κάνουμε χρήση του Λήμματος Συμπάγειας Aubin-Lions [3, 4], το

οποίο επιτρέπει ισχυρή σύγλιση σε κατάλληλη νόρμα.

2.1.3 Υπόβαθρο

Το μαθηματικό υπόβαθρο που θα χρησιμοποιήσουμε για την μελέτη του παραπάνω προβλήματος, είναι η Τριπλέτα Gelfand (ή Hilbert) : Θεωρούμε τον χώρο V να είναι διαχωρίσιμος, ανακλαστικός και πυκνά εμφυτέψιμος σε ένα χώρο Hilbert H τότε με Τριπλέτα Gelfand εννοούμε :

$$V \hookrightarrow H \equiv H' \hookrightarrow V',$$

όπου $' \hookrightarrow'$ συμβολίζει συνεχής εμφυτεύσεις, V πυκνός στον H και H' πυκνός στον V'. Θα ακολουθήσουμε τη κλασσική σημειογραφεία, όπου συμβολίζουμε τους χώρους που περιλαμβάνουν χρόνο, ως χώρους Bochner $L^p[0,T;X]$, $L^\infty[0,T;X]$ με νόρμες :

$$\|u\|_{L^p[0,T;X]} = \Big(\int_0^T \|u\|_X^p \, dt\Big)^{\frac{1}{p}}, \quad \|u\|_{L^\infty[0,T;X]} = esssup_{t\in[0,T]} \|u\|_X \, .$$

Οπως έχει ήδη αναφερθεί, οι χώροι Sobolev, με $p = 2$, ορίζονται ως $H^s(\Omega)$, $0 < s \in \mathbb{R}$. Με $(H^1(\Omega))^*$ ορίζουμε το δυικό του χώρου Sobolev $H^1(\Omega)$, όπου χρησιμοποιούμε την σημειογραφία $\langle\cdot,\cdot\rangle$ για να δείξει το δυικό ζευγάρι, και $(\cdot,\cdot)$ για το L^2 εσωτερικό γινόμενο. Παραθέτουμε παρακάτω κάποιες χρήσιμες ιδιότητες των χώρων Bochner (χώροι εξέλιξης) τις οποίες και θα χρησιμοποιήσουμε (βλ. [5]).
Ιδιότητες : Έστω χώροι X, Y να είναι χώροι Banach, $1 \le p < \infty$ και $m \in \mathbb{N}$. Τότε

- Αν X επιπλέον ανακλαστικός και $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Τότε και ο χώρος $L^p[0,T,X]$ είναι επίσης ανακλαστικός ενώ επιπλέον,

  $$(L^p[0,T;X])' \cong L^{p'}[0,T;X'].$$

  Επομένως ο δυικός του είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον Hölder συζυγή Bochner χώρο του δυικού X'.

- Αν η εμφύτευση $X \hookrightarrow Y$ είναι συνεχής, τότε η εμφύτευση

  $$L^r[0,T,X] \hookrightarrow L^q[0,T,Y], \qquad 1 \le q \le r \le \infty,$$

  είναι επίσης συνεχής.

- Οι χώροι $C^m([0,T],X)$ είναι πυκνοί στους $L^p[0,T;X]$ και η εμφύτευση

  $$C^m([0,T],X) \hookrightarrow L^p[0,T;X],$$

  είναι συνεχής.

Κάποιες επιπλέον χρήσιμες σχέσεις που θα χρησιμοποιήσουμε και παρακάτω :

Γενική Hölder Ανισότητα ([1], σελ.706) : Αν $1 \le p_1, ..., p_m \le \infty$, $\frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_m} = 1$ και $u_k \in L^{p_k}(\Omega)$, $k = 1, ..., m$, έχουμε :

$$\int_\Omega |u_1 ... u_m| dx \le \prod_{k=1}^m \|u_k\|_{L^{p_k}(\Omega)} \, . \tag{2.1.2}$$

Γενική ανισότητα του Young ([1], σελ.706) : Για κάθε $a, b > 0$, $\epsilon > 0$ και $p, q > 1$:

$$ab \leq \epsilon a^p + C(\epsilon) b^q, \quad \mu\varepsilon \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \tag{2.1.3}$$

με $C(\epsilon) = (\epsilon p)^{-q/p} q^{-1}$ και συγκεκριμένα για $p = q = 2$ έχουμε $C(\epsilon) = 1/4\epsilon$.

Landyzeshkayka-Gagliardo-Nirenberg Ανισότητες [15] : Υπάρχει σταθερά $C > 0$ που εξαρτάται μόνο από τον υπόχωρο Ω του $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$ τέτοιο ώστε, για κάθε $u \in H^1(\Omega)$

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} \leq C \|u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|u\|_{H^1(\Omega)}^{1/2}, \quad n = 2, \tag{2.1.4}$$

$$\|u\|_{L^3(\Omega)} \leq C \|u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|u\|_{H^1(\Omega)}^{1/2}, \quad n = 3, \tag{2.1.5}$$

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} \leq C \|u\|_{L^2(\Omega)}^{1/4} \|u\|_{H^1(\Omega)}^{3/4}, \quad n = 3. \tag{2.1.6}$$

Gronwall Ανισότητα ([1], σελ.708) : Για $\eta(\cdot)$ μη αρνητικό, απολύτος συνεχής συνάρτηση στο $[0, T]$, το οποίο ικανοποιεί για σ.π. t την διαφορική ανισότητα

$$\eta'(t) \leq \phi(t)\eta(t) + \psi(t)$$

όπου $\phi(t)$ και $\psi(t)$ είναι μη αρνητικές και αριθμήσιμες συναρτήσεις στο $[0, T]$ τότε :

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \phi(s)ds} \Big[\eta(0) + \int_0^t \psi(s)ds\Big] \quad \forall t \in [0, T]. \tag{2.1.7}$$

Διακριτή Gronwall Ανισότητα ([16], Lemma 2.2, σελ.545 ή [17]) : Για ακέραιο $n \geq 0$, έστω $\Delta t, H$ και a_n, b_n, c_n, d_n μη αρνητικοί αριθμοί οι οποίοι ικανοποιούν την σχέση

$$\begin{aligned}
&a_\ell + \Delta t \sum_{n=1}^{\ell} b_n \leq \Delta t \sum_{n=1}^{\ell} d_n a_n + \Delta t \sum_{n=1}^{\ell} c_n + H \quad \textit{for} \quad \ell > 0, \\
&a_0 \leq H, \\
&\Delta t d_n < 1, \quad \forall n = 1, \cdots, \ell.
\end{aligned}$$

Τότε

$$a_\ell + \Delta t \sum_{n=1}^{\ell} b_n \leq e^{\Delta t \sum_{n=1}^{\ell} \frac{d_n}{1 - \Delta t d_n}} \Big(\Delta t \sum_{n=1}^{\ell} c_n + H\Big). \tag{2.1.8}$$

Τέλος παρουσιάζουμε το Θεώρημα συμπάγειας Aubin-Lions και Λήμμα Lions τα οποίο θα παράξουν δυνατή σύγλιση που χρειαζόμαστε.

Θεώρημα 2.1.1 (Aubin-Lions λήμμα συμπάγειας, [5], Theorem 1.13, σελ.16). *Έστω Υ, X, Z χώροι Banach, τέτοιοι ώστε Y, Z ανακλαστικοί και*

$$Y \hookrightarrow\hookrightarrow X \hookrightarrow Z.$$

Έστω T πεπερασμένο και $1 < p, q < \infty$ τότε ο χώρος

$$W = \Big\{ u \in L^p[0,T;Y] \big|\ u_t = \frac{du}{dt} \in L^q[0,T;Z] \Big\},$$

με την νόρμα

$$\|w\|_W := \|u\|_{L^p[0,T;Y]} + \|u_t\|_{L^q[0,T;Z]},$$

τότε είναι χώρος Banach και η εμφύτευση του W στον $L^p[0,T;X]$ είναι συμπαγής.

Λήμμα 2.1.2 ([4], Lemma 1.3., σελ.12)**.** *Έστω $\Omega_T := \Omega \times (0,T)$ είναι φραγμένο ανοιχτό υποσύνολο στον $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ και $\{f^k\}$, $f \in L^q(\Omega_T) \equiv L^q(0,T;L^q(\Omega))$, όπου $\{f^k\}$ είναι μία ακολουθία συναρτήσεων τ.ω. :*

$$\left\|f^k\right\|_{L^q(\Omega_T)} \le C\ ,\quad f^k \to f \quad (\text{'σημειακά'})\ \text{σ.π. στον}\ \ \Omega_T,$$

τότε $f^k \xrightarrow{w} f$ στον $L^q(\Omega_T)$.

2.2 Η Ασθενής Λύση του συστήματος Schnakenberg

2.2.1 Κατασκευή και ύπαρξη Ασθενούς Λύσης

Για την ανάλυση του συστήματος Schnakenberg στην Τριπλετα Gelfand θα θεωρήσουμε τους διαχωρίσιμους χώρους Hilbert $V = H^1(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$, $V' = (H^1(\Omega))^*$, όπου, μάλιστα, από θεώρημα συμπάγειας Rellich-Kondrachov γνωρίζουμε ότι $H^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\Omega)$, δηλαδή έχουμε συμπαγής εμφύτευση. Επίσης σημειώνουμε ότι για την διαφορική θα υποθέσουμε την ομαλότητα του πεδίου ροής, επομένως έχουμε ότι $\mathbf{A} = ((A^i(x,t)))$ τέτοιο ώστε $\boxed{A^i \in L^\infty(\Omega_T)}$ $\forall i = 1,2,...n$, και $\boxed{\nabla \cdot \mathbf{A} \in L^\infty(\Omega_T)}$.

Παρατήρηση. *Σε περίπτωση που στο πρόβλημα είχαμε Dirichlet αρχικές συνθήκες, θα μπορούσαμε να αποφύγουμε την συνθήκη $\nabla \cdot \boldsymbol{A} \in L^\infty(\Omega_T)$, κάνοντας χρήση της φόρμουλας για ολοκλήρωση κατα μέλη.*

Ορισμός 2.2.1 (Ασθενής Διατύπωση του συστήματος Schnakenberg)**.** *Λέμε ότι $u, v \in L^2[0,T;H^1(\Omega)]$, με $u', v' \in L^2[0,T;(H^1(\Omega))^*] + L^{4/3}[0,T;L^{4/3}]$ για $n = 2$ διαστάσεις* **ή** *$u, v \in L^2[0,T;H^1(\Omega)]$, με $u', v' \in L^2[0,T;(H^1(\Omega))^*] + L^{6/5}[0,T;L^{6/5}]$ για $n = 3$ διαστάσεις είναι ασθενείς λύσεις του συστήματος* (2.1.1)*, αν*

$$\text{(2.2.1)}\qquad \begin{cases} \langle u', w\rangle + (\nabla(\boldsymbol{A}u), w) + (D_u \nabla u, \nabla w) & = (\gamma\alpha - \gamma u, w) + \langle \gamma u^2 v, w\rangle, \\ \langle v', w\rangle + (\nabla(\boldsymbol{A}v), w) + (D_v \nabla v, \nabla w) & = (\gamma b, w) - \langle \gamma u^2 v, w\rangle, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = \dfrac{\partial v}{\partial n} & = 0 \qquad on\ \ (0,T] \times \partial\Omega, \\ u(0,x) & = g(x) \qquad in\ \ \{t = 0\} \times \Omega, \\ v(0,x) & = h(x) \qquad in\ \ \{t = 0\} \times \Omega. \end{cases}$$

για σ.π. $0 \le t \le T$ και για κάθε $w \in H^1(\Omega)$.

Όπως προαναφέρθηκε θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο Galerkin για να αποδείξουμε την ύπαρξη και ομαλότητα της ασθενής λύση της Μερικής Διαφορικής Εξίσωσης. Πρώτα θα κατασκευάσουμε λύσεις για το προσεγγιστικό πρόβλημα σε ακολουθία πεπερασμένης διάστασης υπόχωρων του $H^1(\Omega)$ και ύστερα θα περάσουμε τα όρια για να ξαναβρεθούμε στον αρχικό χώρο άπειρης διάστασης. Επομένως, πρώτα θα πρέπει να κατασκευάσουμε τους κατάλληλους χώρους πεπερασμένης διάστασης και για αυτή την διαδικασία θα κάνουμε χρήση του Θεωρήματος Hilbert-Schmidt 1.2.9 και του Φασματικού Θεωρήματος 1.2.10. Συγκεκριμένα, θεωρούμε το πρόβλημα ιδιοτιμών με τελεστή $\mathcal{L} = -\Delta + I$, domain($\mathcal{L}$):= $\{u \in H^1(\Omega) \mid \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \ on \ \partial\Omega\}$, δηλαδή

$$\begin{cases} \mathcal{L}w_i = \lambda_i w_i \quad \forall i, \\ \\ \frac{\partial w_i}{\partial n} = 0 \quad on \ \partial\Omega. \end{cases}$$

Τότε ο $\mathcal{L}^{-1}$ είναι ένας συμμετρικός, φραγμένος, συμπαγής, τελεστής από τον $L^2(\Omega)$ στον $L^2(\Omega)$ και άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Hilbert-Schmidt 1.2.9. Επομένως, από το Φασματικό Θεώρημα 1.2.10 για αυτόν τον τελεστή παίρνουμε ότι τα παραπάνω ιδιοδιανύσματα $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ που εμφανίζονται θα αποτελούν ορθογώνια βάση για τον $H^1(\Omega)$ και ορθοκανονική βάση για τον $L^2(\Omega)$, όπου για τις ιδιοτιμές θα ισχύει :

$$1 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_m \leq \cdots \qquad \lim_{i\to\infty} \lambda_i = \infty.$$

Σημειώνουμε, τότε, ότι $(w_i, w_j) = \delta_{ij}$ και από την ασθενής μορφή του προβλήματος ιδιοτιμών προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} (w_i, w_j)_{H^1(\Omega)} = \lambda_i \delta_{ij} \quad & \textit{ή ισοδύναμα} \quad (\nabla w_i, \nabla w_j) + (w_i, w_j) = \lambda_i \delta_{ij} \\ & \textit{ή ισοδύναμα} \quad (\nabla w_i, \nabla w_j) = (\lambda_i - 1)\delta_{ij}. \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Κατά αυτόν τον τρόπο, κατασκευάζουμε μια ακολουθία από πεπερασμένης διάστασης υπόχωρων

$$W_m = span\{w_1, ..., w_m\} \subset H^1(\Omega),$$

όπου προφανώς

$$W_m \subset W_{m+1} \qquad \overline{\cup W_m} = H^1(\Omega).$$

Συνεπώς, για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ψάχνουμε τις προσεγγιστικές λύσεις $v_m : [0,T] \to W_m, \ u_m : [0,T] \to W_m$ της μορφής

$$\begin{cases} u_m(t) = \sum_{k=1}^{m} c_m^k(t) w_k, \\ \\ v_m(t) = \sum_{k=1}^{m} d_m^k(t) w_k, \end{cases} \tag{2.2.3}$$

όπου θα επιλέξουμε τα $c_m^k(t), d_m^k(t)$ $(0 \leq t \leq T, k = 1, .., m)$ έτσι ώστε να είναι κατάληλλα ομαλά και $c_m^k(0) = (g, w_k)$, $d_m^k(0) = (h, w_k)$ (k=1,...,m). Τα u_m, v_m θα πρέπει εν τέλει να ικανοποιούν το παρακάτω προσεγγιστικό πρόβλημα του (2.1.1) σε πεπερασμένης διάστασης υπόχωρο που παράγεται από τα ιδιοδιανύσματα $\{w_k\}_{k=1}^{m}$:

(2.2.4)
$$\begin{cases} (u_m', w_k) + (\nabla(\mathbf{A}u_m), w_k) + (D_u \nabla u_m, \nabla w_k) & = (\gamma\alpha - \gamma u_m + \gamma u_m^2 v_m, w_k) \quad k = 1, 2, ..., m \\ (v_m', w_k) + (\nabla(\mathbf{A}v_m), w_k) + (D_v \nabla v_m, \nabla w_k) & = (\gamma b - \gamma u_m^2 v_m, w_k) \qquad k = 1, 2, ..., m \\ \dfrac{\partial u_m}{\partial n} = \dfrac{\partial v_m}{\partial n} & = 0 \qquad \text{on} \quad (0, T] \times \partial\Omega \\ u_m(0, x) & = \sum_{k=1}^m (g, w_k) w_k = u_{m0} \quad \text{in} \quad \{t = 0\} \times \Omega \\ v_m(0, x) & = \sum_{k=1}^m (h, w_k) w_k = v_{m0} \quad \text{in} \quad \{t = 0\} \times \Omega \end{cases}$$

για σ.π. $0 \leq t \leq T$, όπου u_{m0}, v_{m0} είναι οι ορθογώνιες προβολές στον $L^2(\Omega)$ των $u(0, x) = g(x), v(0, x) = h(x)$.
Πιο συγκριμένα θεωρούμε $P^m : L^2(\Omega) \to W_m$ να είναι ο ορθογώνιος προβολικός τελεστής από τον $L^2(\Omega)$ στον W_m που ικανοποιεί την σχέση

$$(P^m u, u_m) = (u, u_m), \quad \forall u_m \in W_m, \ u \in L^2(\Omega). \tag{2.2.5}$$

Επιπλέον ισχύει οποιαδήποτε απαραίτητη γνωστή ιδιότητα των ορθογώνιων προβολικών τελεστών που επιδρούν πάνω σε Hilbert χώρους. Λόγω των ιδιοτήτων της βάσης του χώρου γνωρίζουμε ότι

$$\begin{aligned} \|P^m u\|_{H^1(\Omega)} &\leq \|u\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall u \in H^1(\Omega). \\ \|P^m u\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|u\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in L^2(\Omega). \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

Τότε είναι προφανές ότι $\|u_{m0}\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|g(x)\|^2_{L^2(\Omega)}$ και $\|v_{m0}\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|h(x)\|^2_{L^2(\Omega)}$.
Τέλος σαν παρατήρηση, γνωρίζουμε ότι

$$\nabla(\mathbf{A}\varphi) = (\nabla \cdot \mathbf{A})\varphi + \nabla\varphi \cdot \mathbf{A}, \tag{2.2.7}$$

για βαθμωτή συνάρτηση ϕ. Κατα αυτό τον τρόπο οι εξισώσεις (2.1.1) μπορούν να ξαναγραφθούν σε μορφή

$$\boldsymbol{u_m} + L\boldsymbol{u_m} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u_m}),$$

με $\boldsymbol{u_m} = [u_m, v_m]^T$, L να είναι της μορφής $L\boldsymbol{u} = \sum_{i,j=1}^n \boldsymbol{a}^{ij}(x,t)\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{x_i x_j}} + \sum_{i=1}^n \boldsymbol{b}^i(x,t)u_{x_i} + \boldsymbol{c}(x,t)\boldsymbol{u}$ και τέλος $\boldsymbol{f}$ μία μη γραμμική συνάρτηση διανυσματική συνάρτηση.

Πρώτα θα δείξουμε ότι η κατασκευή των προσεγγιστικών λύσεων είναι φυσιολογική και καλά ορισμένη, διαφορετικά το παραπάνω προβαλόμενο σε πεπερασμένης διάστασης υποχώρους πρόβλημα δεν θα μπορούσε να οριστεί. Αρχίζουμε με μία πολύ σημαντική παρατήρηση σχετικά με τους όρους πηγής της διαφορικής μας (2.1.1).

Πρόταση 2.2.1 (Τοπικά Lipschitz συνθήκη των όρων σύζευξης)**.** *Οι συναρτήσεις πηγής* $F_1(u, v) = \alpha - u + u^2 v$ *και* $F_2(u, v) = b - u^2 v$ *είναι τοπικά Lipschitz με την εννοία ότι*

$$\begin{aligned} |F_1(u, v) - F_1(\overline{u}, \overline{v})| &\leq L_{F_1}(\mu)(|u - \overline{u}| + |v - \overline{v}|), \\ |F_2(u, v) - F_2(\overline{u}, \overline{v})| &\leq L_{F_2}(\mu)(|u - \overline{u}| + |v - \overline{v}|), \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

όπου $\max\{|u|, |\overline{u}|, |v|, |\overline{v}|\} \leq \mu$ *για κάποιο* $\mu > 0$.

Αποδείξη. Έστω $u, \overline{u} \in \mathbb{R}$, τότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned}|F_1(u,v) - F_1(\overline{u},\overline{v})| &= |\alpha - u + u^2 v - \alpha - \overline{u} + \overline{u}^2\overline{v}| \leq |u - \overline{u}| + |u^2 v - \overline{u}^2\overline{v}| \\ &\leq |u - \overline{u}| + |u^2 v \pm u^2\overline{v} - \overline{u}^2\overline{v}| \\ &\leq |u - \overline{u}| + |u - \overline{u}||u + \overline{u}||\overline{v}| + |u|^2|v - \overline{v}| \\ &\leq L_{F_1}(\mu)(|u - \overline{u}| + |v - \overline{v}|)\end{aligned}$$

και επομένως δείξαμε το ζητούμενο. Με παρόμοιο τρόπο προκύπτει και η δεύτερη σχέση. ■

Αναζητάμε, πλέον, την ύπαρξη συναρτήσεων u_m, v_m της μορφής (2.2.3) που να ικανοποιούν την προβολή (2.2.4) του προβλήματος (2.1.1) πάνω στην ακολουθία πεπερασμένων διάστασεις υποχωρών W_m.

Θεώρημα 2.2.2 (Κατασκευή και Ύπαρξη προσεγγιστικών λύσεων)**.** *Για κάθε ακέραιο m=1,2,... υπάρχουν μοναδικές συναρτήσεις u_m, v_m της μορφής* (2.2.3) *που να ικανοποιούν την* (2.2.4)*, για $t \in (0, T_m]$ για κάποιο $T_m < T$.*

Απόδειξη. Από την μορφή των συναρτήσεων u_m, v_m (2.2.3), το γεγονός οτι οι συναρτήσεις βάσεις είναι ορθοκανονικές καθώς και τις σχέσεις (2.2.2) έχουμε ότι

$$\begin{aligned}(u_m', w_k) &= c_m^k(t)' & (v_m', w_k) &= d_m^k(t)' \\ (\nabla u_m, \nabla w_k) &= c_m^k(t)(\lambda_k - 1) & (\nabla v_m, \nabla w_k) &= d_m^k(t)(\lambda_k - 1)\end{aligned}$$

Τότε με την παραπάνω αντικατάσταση των u_m, v_m στην πεπερασμένης διάστασης ασθενή μορφή (2.2.4) οδηγούμαστε στην παρακάτω σχέση

$$\begin{aligned}{c_m^k}'(t) + D_u c_m^k(t)(\lambda_k - 1) + ((\nabla \cdot \mathbf{A})u_m, w_k) + (\mathbf{A} \cdot \nabla u_m, w_k) &= \gamma(F_1(u_m, v_m), w_k), \\ {d_m^k}'(t) + D_v d_m^k(t)(\lambda_k - 1) + ((\nabla \cdot \mathbf{A})v_m, w_k) + (\mathbf{A} \cdot \nabla v_m, w_k) &= \gamma(F_2(u_m, v_m), w_k),\end{aligned}$$

όπου ${c_m^k}'(0) = (g, w_k)$ και ${d_m^k}'(0) = (h, w_k)$, για $k = 1, .., m$. Εν τέλει, θα αποκτήσουμε την προβολή-προσέγγιση Galerkin της (2.1.1), πολλαπλασιάζοντας το σύστημα με τον όρο w_k και προσθέτοντας τις εξισώσεις που προκύπτουν για $k = 1, ..., m$. Γνωρίζοντας ταυτόχρονα ότι

$$-\Delta u_m = \sum_{k=1}^{m}(\lambda_k - 1)w_k c_m^k(t), \qquad -\Delta v_m = \sum_{k=1}^{m}(\lambda_k - 1)w_k d_m^k(t),$$

έχουμε το τελικό αποτέλεσμα

$$\begin{aligned}u_m' - D_u\Delta u_m + P^m(\nabla \cdot \mathbf{A})u_m + P^m\mathbf{A} \cdot \nabla u_m &= \gamma P^m F_1(u_m, v_m), \\ v_m' - D_v\Delta v_m + P^m(\nabla \cdot \mathbf{A})v_m + P^m\mathbf{A} \cdot \nabla v_m &= \gamma P^m F_2(u_m, v_m),\end{aligned} \tag{2.2.9}$$

με $u_m(\cdot, 0) = P^m g$ και $v_m(\cdot, 0) = P^m h$. Σημειώνουμε επιπλέον ότι επειδή $\dfrac{\partial w_k}{\partial n} = 0$, εύκολα συνεπάγεται ότι

$$\frac{\partial u_m}{\partial n} = \frac{\partial v_m}{\partial n} = 0.$$

Επομένως έχουμε συνολικά την παρακάτω προσέγγιση Galerkin

(2.2.10)
$$\begin{cases} u_m' - D_u\Delta u_m + P^m(\nabla\cdot\mathbf{A})u_m + P^m\mathbf{A}\cdot\nabla u_m &= \gamma P^m F_1(u_m,v_m), \\ v_m' - D_v\Delta v_m + P^m(\nabla\cdot\mathbf{A})v_m + P^m\mathbf{A}\cdot\nabla v_m &= \gamma P^m F_2(u_m,v_m), \\ \dfrac{\partial u_m}{\partial n} = \dfrac{\partial v_m}{\partial n} &= 0 \qquad \text{on } (0,T_m]\times\partial\Omega, \\ u_m(0,x) &= P^m g \qquad \text{in } \{t=0\}\times\Omega, \\ v_m(0,x) &= P^m h \qquad \text{in } \{t=0\}\times\Omega. \end{cases}$$

Για να δείξουμε, τώρα, την ύπαρξη και μοναδικότητα των προσεγγιστικών λύσεων θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα σταθερού σημείου Banach. Συγκεκριμένα, θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα Banach πάνω στον χώρο

$$C([0,T_m],L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)),$$

όπου $T_m\in(0,T]$ και θα επιλεχθεί αργότερα, με νόρμα

$$\|\mathbf{v}\| = \max_{0\le t\le T_m}\|\mathbf{v}(t)\|_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)}\,.$$

Ορίζουμε πλέον τον τελεστή A με τον ακόλουθο τρόπο. Έστω $\mathbf{q}\in C([0,T_m],L^2(\Omega;\mathbb{R}^2))$ (μπορεί $\mathbf{q}=(v_m,v_m)$ για κάποιο $m\in\mathbb{N}$, από τα παρακάτω *θεωρήματα* 2.2.3, 2.2.4), θέτουμε $\mathcal{F}(t)=(\mathcal{F}_1(t),\mathcal{F}_2(t)) := (P^mF_1(\mathbf{q}(t)),P^mF_2(\mathbf{q}(t)))$. Τότε λόγω της σχέσης (2.2.8) γνωρίζουμε ότι $\mathcal{F}\in L^2[0,T_m;L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)]$. Συνεπώς, το βοηθητικό παραβολικό διαφορικό σύστημα

$$\text{(2.2.11)}\quad \begin{cases} x_m' - D_u\Delta x_m + P^m(\nabla\cdot\mathbf{A})x_m + P^m\mathbf{A}\cdot\nabla x_m &= \gamma\mathcal{F}_1(t) \quad \text{in } \Omega_{T_m}, \\ y_m' - D_v\Delta y_m + P^m(\nabla\cdot\mathbf{A})y_m + P^m\mathbf{A}\cdot\nabla y_m &= \gamma\mathcal{F}_2(t) \quad \text{in } \Omega_{T_m}, \\ \dfrac{\partial x_m}{\partial n} = \dfrac{\partial y_m}{\partial n} &= 0 \qquad \text{on } (0,T_m]\times\partial\Omega, \\ x_m(0,x) &= P^m g \quad \text{in } \{t=0\}\times\Omega, \\ y_m(0,x) &= P^m h \quad \text{in } \{t=0\}\times\Omega, \end{cases}$$

σύμφωνα και με την κλασσική θεωρία για ύπαρξη, των γραμμικών παραβολικών ΜΔΕ (βλέπε Evans [1], Κεφ.7), εφόσον βέβαια όπως ειπώθηκε $\mathcal{F}\in L^2[0,T_m;L^2(\Omega;\mathbb{R}^2)]$, έχει μοναδική ασθενής λύση τέτοια ώστε

$$x_m,y_m\in L^2[0,T_m;H^1(\Omega)],\ \ \mu\epsilon\ x_m',y_m'\in L^2[0,T_m;(H^1(\Omega))^*].$$

Κατά αυτό τον τρόπο θέτωντας $\mathbf{r}=(x_m,y_m)$ βλέπουμε ότι η ασθενής λύση $\mathbf{r}\in\ C([0,T_m],L^2(\Omega;\mathbb{R}^2))$ ικανοποιεί την σχέση

$$\text{(2.2.12)}\quad \begin{aligned} &\langle x_m',z\rangle + D_u(\nabla x_m,\nabla z) + (P^m(\nabla\cdot\mathbf{A})x_m,z) + (P^m\mathbf{A}\cdot\nabla x_m,z) = (\mathcal{F}_1,z), \\ &\langle y_m',z\rangle + D_v(\nabla y_m,\nabla z) + (P^m(\nabla\cdot\mathbf{A})y_m,z) + (P^m\mathbf{A}\cdot\nabla y_m,z) = (\mathcal{F}_2,z), \end{aligned}$$

για σ.π. $0\le t\le T_m$ και για κάθε $z\in H^1(\Omega)$, με $x_m(0)=P^mg$ και $y_m(0)=P^mh$.
Εφόσον η ασθενής λύση θα εξαρτάται από τον μη ομογενή όρο, ορίζουμε φυσικά το τελεστή

$$A: C([0,T_m],L^2(\Omega;\mathbb{R}^2))\to C([0,T_m],L^2(\Omega;\mathbb{R}^2))$$

$$A[\mathbf{q}] = \mathbf{r},$$

όπου $\mathbf{r}$ είναι η μοναδική ασθενής λύση του (2.2.11). Η κύρια παρατήρηση είναι ότι, από κατασκευής, τα σταθερά σημεία του τελεστή A είναι οι ασθενείς λύσης του (2.2.10). Τώρα για να δείξουμε ότι το A έχει σταθερό σημείο στον $C([0,T_m], L^2(\Omega;\mathbb{R}^2))$ θεωρούμε $\mathbf{q} = (u_m, v_m)$, $\overline{\mathbf{q}} = (\overline{u}_m, \overline{v}_m)$ με $\mathbf{q}, \overline{\mathbf{q}} \in C([0,T_m], L^2(\Omega;\mathbb{R}^2))$ για κάποιο δεδομένο $m = 1, 2, ...$, θέτουμε $A[\mathbf{q}] = \mathbf{r}$ και $A[\overline{\mathbf{q}}] = \overline{\mathbf{r}}$ και διαπιστώνουμε ότι οι διαφορές $\eta := x_m - \overline{x}_m$ και $\theta := y_m - \overline{y}_m$ ικανοποιούν την διαφορική

$$\begin{cases} (x_m - \overline{x}_m)' - D_u\Delta(x_m - \overline{x}_m) & +P^m(\nabla\cdot\mathbf{A})(x_m - \overline{x}_m) \\ & +P^m\mathbf{A}\cdot\nabla(x_m - \overline{x}_m) = P^mF_1(u_m, v_m) - P^mF_1(\overline{u}_m, \overline{v}_m), \\ (y_m - \overline{y}_m)' - D_v\Delta(y_m - \overline{y}_m) & +P^m(\nabla\cdot\mathbf{A})(y_m - \overline{y}_m) \\ & +P^m\mathbf{A}\cdot\nabla(y_m - \overline{y}_m) = P^mF_2(u_m, v_m) - P^mF_2(\overline{u}_m, \overline{v}_m), \\ \dfrac{\partial(x_m - \overline{x}_m)}{\partial n} = \dfrac{\partial(y_m - \overline{y}_m)}{\partial n} & = 0 \quad \text{on} \quad (0,T_m]\times\partial\Omega, \\ (x_m - \overline{x}_m)(0,x) & = 0 \quad \text{in} \quad \{t=0\}\times\Omega, \\ (y_m - \overline{y}_m)(0,x) & = 0 \quad \text{in} \quad \{t=0\}\times\Omega. \end{cases}$$

όπου από την ασθενή μορφή για $z = x_m - \overline{x}_m$ και $z = y_m - \overline{y}_m$ αντίστοιχα και κάνοντας χρήση της τριγωνικής ανισότητας συνεπάγεται ότι

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|x_m - \overline{x}_m\|^2_{L^2(\Omega)} + D_u\|\nabla(x_m - \overline{x}_m)\|^2_{L^2(\Omega)} \le \left|(P^m(\nabla\cdot\mathbf{A})(x_m - \overline{x}_m), x_m - \overline{x}_m)\right| \\ + \left|(P^m\mathbf{A}\cdot\nabla(x_m - \overline{x}_m), x_m - \overline{x}_m)\right| + \left|(P^mF_1(u_m, v_m) - P^mF_1(\overline{u}_m, \overline{v}_m), x_m - \overline{x}_m)\right|,$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|y_m - \overline{y}_m\|^2_{L^2(\Omega)} + D_v\|\nabla(y_m - \overline{y}_m)\|^2_{L^2(\Omega)} \le \left|(P^m(\nabla\cdot\mathbf{A})(y_m - \overline{y}_m), y_m - \overline{y}_m)\right| \\ + \left|(P^m\mathbf{A}\cdot\nabla(y_m - \overline{y}_m), y_m - \overline{y}_m)\right| + \left|(P^mF_2(u_m, v_m) - P^mF_2(\overline{u}_m, \overline{v}_m), y_m - \overline{y}_m)\right|.$$

Εφαρμόζοντας την γενικευμένη ανισότητα Young για $p = q = 2$ μαζί με την παρατήρηση (2.2.6) λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|x_m - \overline{x}_m\|^2_{L^2(\Omega)} + D_u\|\nabla(x_m - \overline{x}_m)\|^2_{L^2(\Omega)} &\le \|\nabla\cdot\mathbf{A}\|_{L^\infty(\Omega)}\|x_m - \overline{x}_m\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &+ \sum_{i=1}^n \|A^i\|_{L^\infty(\Omega)}\left(\epsilon_1\|\nabla(x_m - \overline{x}_m)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{4\epsilon_1}\|x_m - \overline{x}_m\|^2_{L^2(\Omega)}\right) \\ &+ \frac{1}{4\epsilon_2}\|F_1(u_m, v_m) - F_1(\overline{u}_m, \overline{v}_m)\|^2_{L^2(\Omega)} + \epsilon_2\|x_m - \overline{x}_m\|^2_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|y_m - \overline{y}_m\|^2_{L^2(\Omega)} + D_v\|\nabla(y_m - \overline{y}_m)\|^2_{L^2(\Omega)} &\le \|\nabla\cdot\mathbf{A}\|_{L^\infty(\Omega)}\|y_m - \overline{y}_m\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &+ \sum_{i=1}^n \|A^i\|_{L^\infty(\Omega)}\left(\epsilon_3\|\nabla(y_m - \overline{y}_m)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{4\epsilon_3}\|y_m - \overline{y}_m\|^2_{L^2(\Omega)}\right) \\ &+ \frac{1}{4\epsilon_4}\|F_2(u_m, v_m) - F_2(\overline{u}_m, \overline{v}_m)\|^2_{L^2(\Omega)} + \epsilon_4\|y_m - \overline{y}_m\|^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Σε αυτό το σημείο εφαρμόζουμε ένα kickback argument διαλέγοντας ϵ_2, ϵ_4 κατάλληλα και τα ϵ_1, ϵ_3 έτσι ώστε $\epsilon_1 \sum_{i=1}^{n} \|A^i\|_{L^\infty(\Omega)} < D_u$ και $\epsilon_3 \sum_{i=1}^{n} \|A^i\|_{L^\infty(\Omega)} < D_v$ παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|x_m - \overline{x}_m\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq C_1 \|x_m - \overline{x}_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \|F_1(u_m, v_m) - F_1(\overline{u}_m, \overline{v}_m)\|^2_{L^2(\Omega)}, \\
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|y_m - \overline{y}_m\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq C_2 \|y_m - \overline{y}_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \|F_2(u_m, v_m) - F_2(\overline{u}_m, \overline{v}_m)\|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την συνθήκη Lipschitz (2.2.8) διαπιστώνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|x_m - \overline{x}_m\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq C_1 \|x_m - \overline{x}_m\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + CL_{F_1}(\mu)\|u_m - \overline{u}_m\|^2_{L^2(\Omega)} + CL_{F_1}(\mu)\|v_m - \overline{v}_m\|^2_{L^2(\Omega)}, \\
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|y_m - \overline{y}_m\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq C_2 \|y_m - \overline{y}_m\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + CL_{F_2}(\mu)\|u_m - \overline{u}_m\|^2_{L^2(\Omega)} + CL_{F_2}(\mu)\|v_m - \overline{v}_m\|^2_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

όπου μ τέτοιο ώστε $\max\{|u_m|, |\overline{u}_m|, |v_m|, |\overline{v}_m|\} \leq \mu$. Τέλος, κάνοντας χρήση της ανισότητας Gronwall 2.1.7 και τις αρχικές συνθήκες για τις $\eta := x_m - \overline{x}_m$ και $\theta := y_m - \overline{y}_m$ βρίσκουμε ότι για όλα τα $t \in [0, T_m]$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\|x_m - \overline{x}_m\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq CL_{F_1}(\mu)\int_0^t \|u_m - \overline{u}_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v_m - \overline{v}_m\|^2_{L^2(\Omega)}\, ds \\
&\leq CL_{F_1}(\mu)T_m \max_{0\leq t\leq T_m}\left\{\|u_m - \overline{u}_m\|^2 + \|v_m - \overline{v}_m\|^2\right\}, \\
\|y_m - \overline{y}_m\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq CL_{F_2}(\mu)\int_0^t \|u_m - \overline{u}_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v_m - \overline{v}_m\|^2_{L^2(\Omega)}\, ds \\
&\leq CL_{F_2}(\mu)T_m \max_{0\leq t\leq T_m}\left\{\|u_m - \overline{u}_m\|^2 + \|v_m - \overline{v}_m\|^2\right\}.
\end{aligned}$$

Τότε αθροίζοντας τις δύο διαφορικές ανισότητες και μεγιστοποιώντας το αριστερό μέρος ως προς t συνεπάγεται ότι

$$\max_{0\leq t\leq T_m}\left\{\|x_m - \overline{x}_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \|y_m - \overline{y}_m\|^2\right\} \leq C'T_m \max_{0\leq t\leq T_m}\left\{\|u_m - \overline{u}_m\|^2 + \|v_m - \overline{v}_m\|^2\right\},$$

όπου $C' = C'(L_{F_1}(\mu), L_{F_2}(\mu))$ και από το οποίο προκύπτει ότι

$$\|A[\mathbf{q}] - A[\overline{\mathbf{q}}]\| \leq (C'T_m)^{1/2}\|\mathbf{q} - \overline{\mathbf{q}}\|.$$

Διαλέγωντας λοιπόν το T_m κατάλληλα μπορούμε να δείξουμε ότι ο τελεστής A είναι συστολή και άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα σταθερού σημείου Banach, το οποίο υποδηλώνει την ύπαρξη μοναδικού σταθερού σημείου

$$A[\mathbf{q}_0] = \mathbf{q}_0,$$

έτσι ώστε η $\mathbf{q}_0 = (u_m, v_m)$ να είναι ασθενή λύση του (2.2.10) και κατα συνέπεια και του (2.2.4) στο χρονικό διάστημα $[0, T_m]$. ■

Παρατήρηση. *Μένει, λοιπόν, να επεκτείνουμε την λύση πέρα από τον χρόνο T_m. Στα παρακάτω θεωρήματα θα δείξουμε a priori φραγμένες εκτιμήσεις για τα u_m, v_m, $\forall\ m = 1, 2, ...$ σε κατάλληλους χώρους Banach και επομένως θα έχουμε ομοιόμορφα φράγματα σε ολόκληρο το χρονικό διάστημα μας. Τότε, εφόσον έχουμε δείξει την τοπική ύπαρξη, η μόνη περίπτωση να μην έχουμε ύπαρξη πέρα από τον χρόνο T_m σε όλο το διάστημα $[0, T]$ είναι οι νόρμες να "εκρίγνονται" (να απειρίζονται) για κάποιο χρόνο $T_m \leq t \leq T$. Όμως, αυτή η δυνατότητα αποκλείεται από τις a priori εκτιμήσεις.*

2.2.2 Ενεργειακές Εκτιμήσεις

Στην συνέχεια θα δείξουμε ότι κάθε προσεγγιστική λύση u_m, v_m ικανοποιεί κάποιες ενεργειακές νόρμες (όπως προείπαμε παραπάνω), και οι οποίες είναι ομοιόμορφα φραγμένες σε κατάλληλους χώρους Hilbert ($L^\infty[0, T; L^2(\Omega)], L^2[0, T; H^1(\Omega)]$). Συνεπώς, λόγω της ανακλαστικότητας των χώρων Hilbert και με την βοήθεια του θεωρήματος Banach-Alaoglu, θα εξάγουμε υπακολουθίες των λύσεων του προσεγγιστικού προβλήματος (2.2.4) που θα συγκλίνουν σε ασθενή λύση του (2.2.1). Για να αποδείξουμε τέτοιες εκτιμήσεις στην περίπτωση μας πρέπει να είμαστε προσεκτικοί. Για την μεταβλητή v_m, λόγω του προσήμου του μη-γραμμικού όρου οι εκτιμήσεις προκύπτουν άμεσα, ωστόσο για την μεταβλητή u_m χρειαζόμαστε άλλη μεταχείρηση. Συγκεκριμένα, θα αναπτύξουμε εκτιμήσεις για το άθροισμα των δύο συναρτήσεων, $u_m + v_m$, εφόσον με αυτό τον τρόπο "αφαιρούμε" την μη-γραμμικότητα και το αποτέλεσμα προκύπτει, ύστερα, εύκολα με σωστή χρήση Gronwall ανισοτήτων. Τότε, τέλος, θα είμαστε πλεόν σε θέση ναα υπολογίσουμε τις ενεργειακές εκτιμήσεις για την μεταβλητή u_m, κάνοντας χρήση της τριγωνικής ανισότητας.

Θεώρημα 2.2.3 (Ενεργειακές Εκτιμήσεις I). *Υπάρχει σταθερά C, που εξαρτάται μόνο από τα $\Omega, T, D_v, \boldsymbol{A}$ και $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$, τέτοιο ώστε*

(2.2.13)

$$\max_{0\leq t\leq T} \|v_m\|^2_{L^2(\Omega)} + D_v \|\nabla v_m\|^2_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} + 2\gamma \|u_m v_m\|^2_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} \leq C\Big(\|h(x)\|^2_{L^2(\Omega)} + (\gamma b)^2\Big)$$

για $m = 1, 2, \ldots$

Αποδείξη. Θεωρούμε την δεύτερη εξίσωση της (2.2.4), την πολλαπλασιάζουμε με τον όρο $d^k_m(t)$ και μετά προσθέτουμε για $k = 1, 2, \ldots, m$, οπότε παίρνουμε

$$(v'_m, v_m) + ((\nabla \cdot \mathbf{A})v_m, v_m) + (\nabla v_m \cdot \mathbf{A}, v_m) + (D_v \nabla v_m, \nabla v_m) = (\gamma b - \gamma u^2_m v_m, v_m),$$

σ.π. $0 \leq t \leq T$, εφόσον όπως ειπώθηκε, ισχύει η (2.2.7). Τότε επειδή επιπλέον $(v'_m, v_m) = \dfrac{d}{dt}(\dfrac{1}{2} \|v_m\|^2_{L^2(\Omega)})$ για σ.π. $0 \leq t \leq T$, αν πραγματοποιήσουμε κατάλληλες πράξεις έχουμε τα παρακάτω

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2} \|v_m\|^2_{L^2(\Omega)}\Big) + D_v(\nabla v_m, \nabla v_m) + \gamma(u^2_m v_m, v_m) \\
&= -((\nabla \cdot \mathbf{A})v_m, v_m) - (\nabla v_m \cdot \mathbf{A}, v_m) + \int_\Omega \gamma b v_m dx \\
&\leq \Big| - ((\nabla \cdot \mathbf{A})v_m, v_m) - (\nabla v_m \cdot \mathbf{A}, v_m) + \int_\Omega \gamma b v_m dx\Big|,
\end{aligned}$$

και τότε χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα και την ομαλότητα του πεδιού ροής, που έχουμε υποθέσει, λαμβάνουμε

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}\left\|v_m\right\|^2_{L^2(\Omega)}\Big)+D_v\left\|\nabla v_m\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\gamma\left\|u_m v_m\right\|^2_{L^2(\Omega)}$$
$$\leq\int_\Omega|\gamma b v_m|dx+\sum_{i=1}^n\left\|A^i\right\|_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega|\nabla v_m||v_m|dx+\left\|\nabla\cdot\mathbf{A}\right\|_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega v_m v_m dx,$$

για σ.π. $0\leq t\leq T$. Θέτουμε $\boxed{\ell=\sum_{i=1}^n\left\|A^i\right\|_{L^\infty(\Omega)}}$ και χρησιμοποιούμε την γενικευμένη ανισότητα Young (2.1.3) για $p=q=2$ ώστε να δημιουργήσουμε την ανισότητα

(2.2.14)
$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}\left\|v_m\right\|^2_{L^2(\Omega)}\Big)+D_v\left\|\nabla v_m\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\gamma\left\|u_m v_m\right\|^2_{L^2(\Omega)}$$
$$\leq\epsilon_1|\Omega|(\gamma b)^2+\frac{1}{4\epsilon_1}\left\|v_m\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\ell\epsilon_2\left\|\nabla v_m\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\ell\frac{1}{4\epsilon_2}\left\|v_m\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\left\|\nabla\cdot\mathbf{A}\right\|_{L^\infty(\Omega)}\left\|v_m\right\|^2_{L^2(\Omega)},$$

για σ.π. $0\leq t\leq T$. Στην συνέχεια εφαρμόζουμε kickback argument θέτοντας καταλλήλως τα ϵ_1,ϵ_2. Συγκεκριμένα, $\boxed{\epsilon_2=\frac{D_v}{\ell}}$ και $\boxed{\epsilon_1=\frac{1}{2}}$. Συνεπώς οδηγούμαστε στην ανισοτική σχέση

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}\left\|v_m\right\|^2_{L^2(\Omega)}\Big)+D_v\left\|\nabla v_m\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\gamma\left\|u_m v_m\right\|^2_{L^2(\Omega)}$$
$$\leq\frac{|\Omega|}{2}(\gamma b)^2+\Big(\frac{1}{2}+\frac{\ell^2}{4D_v}+\left\|\nabla\cdot\mathbf{A}\right\|_{L^\infty(\Omega)}\Big)\left\|v_m\right\|^2_{L^2(\Omega)}+D_v\left\|\nabla v_m\right\|^2_{L^2(\Omega)},$$

για σ.π. $0\leq t\leq T$. Τότε αφαιρώντας από το τα δύο μέλη τον όρο $D_v\left\|\nabla v_m\right\|^2_{L^2(\Omega)}$ λαμβάνουμε

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}\left\|v_m\right\|^2_{L^2(\Omega)}\Big)\leq\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}\left\|v_m\right\|^2_{L^2(\Omega)}\Big)+\gamma\left\|u_m v_m\right\|^2_{L^2(\Omega)}$$
$$\leq\frac{|\Omega|}{4}(\gamma b)^2+\Big(1+\frac{\ell^2}{2D_v}+2\left\|\nabla\cdot\mathbf{A}\right\|_{L^\infty(\Omega)}\Big)\frac{1}{2}\left\|v_m\right\|^2_{L^2(\Omega)},$$

για σ.π. $0\leq t\leq T$. Εφαρμόζοντας, τώρα, την Gronwall ανισότητα (2.1.7) για $\eta(t)=\frac{1}{2}\left\|v_m\right\|^2_{L^2(\Omega)}$ και $\psi(t)=\frac{|\Omega|}{2}(\gamma b)^2$, ενώ όπως προαναφέρθηκε ισχύει ότι $\left\|v_m(0)\right\|^2_{L^2(\Omega)}=\left\|v_{m0}\right\|^2_{L^2(\Omega)}\leq\left\|h(x)\right\|^2_{L^2(\Omega)}$, παίρνουμε την παρακάτω εκτίμηση για την v_m

$$\frac{1}{2}\left\|v_m\right\|^2_{L^2(\Omega)}\leq e^{\int_0^t\left(1+\frac{\ell^2}{2D_v}+2\|\nabla\cdot\mathbf{A}(x,s)\|_{L^\infty(\Omega)}\right)ds}\Big(\frac{1}{2}\left\|v_m(0)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\int_0^t\frac{|\Omega|}{4}(\gamma b)^2ds\Big)$$
$$\leq e^{\int_0^t\left(1+\frac{\ell^2}{2D_v}+2\|\nabla\cdot\mathbf{A}(x,s)\|_{L^\infty(\Omega)}\right)ds}\Big(\frac{1}{2}\left\|h(x)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{|\Omega|}{4}(\gamma b)^2t\Big)\qquad(0\leq t\leq T)$$
$$\leq e^{\int_0^T\left(1+\frac{\ell^2}{2D_v}+2\|\nabla\cdot\mathbf{A}(x,s)\|_{L^\infty(\Omega)}\right)ds}\Big(\left\|h(x)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{|\Omega|}{2}(\gamma b)^2T\Big).$$

Επομένως υπάρχει σταθερά $C=C(T,\Omega,D_v,\mathbf{A},\nabla\cdot\mathbf{A})$ τέτοια ώστε

$$\max_{0\leq t\leq T}\left\|v_m\right\|^2_{L^2(\Omega)}\leq C\Big(\left\|h(x)\right\|^2_{L^2(\Omega)}+(\gamma b)^2\Big).\tag{2.2.15}$$

Για να υπολογίσουμε τις υπόλοιπες εκτιμήσεις, επιστρέφουμε στην εξίσωση (2.2.14), πολλαπλασιάζουμε την ανισότητα με 2 και ξαναεπιλέγουμε τις θετικές σταθερές της ανισότητας Young, αυτή την φορά θέτοντας $\boxed{\epsilon_2 = \frac{D_v}{2\ell}}$ και $\boxed{\epsilon_1 = \frac{1}{2}}$,

$$\frac{d}{dt}\Big(\|v_m\|^2_{L^2(\Omega)} \Big) + 2D_v \|\nabla v_m\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\gamma \|u_m v_m\|^2_{L^2(\Omega)}$$
$$\leq |\Omega|(\gamma b)^2 + \Big(1 + \frac{\ell^2}{D_v} + 2\|\nabla\cdot\mathbf{A}\|_{L^\infty(\Omega)}\Big)\|v_m\|^2_{L^2(\Omega)} + D_v\|\nabla v_m\|^2_{L^2(\Omega)},$$

για σ.π. $0 \leq t \leq T$, οπότε εφόσον φέρουμε τον όρο $D_v \|\nabla v_m\|^2_{L^2(\Omega)}$ στο πρώτο μέλος, λαμβάνουμε

$$\frac{d}{dt}\Big(\|v_m\|^2_{L^2(\Omega)} \Big) + D_v \|\nabla v_m\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\gamma \|u_m v_m\|^2_{L^2(\Omega)}$$
$$\leq |\Omega|(\gamma b)^2 + \Big(1 + \frac{\ell^2}{D_v} + 2\|\nabla\cdot\mathbf{A}\|_{L^\infty(\Omega)}\Big)\|v_m\|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{2.2.16}$$

για σ.π. $0 \leq t \leq T$. Τελος ολοκληρώνοντας την (2.2.16) από την χρονική στιγμή 0 εώς την χρονική στιγμή T και εφαρμόζοντας την ανισότητα που κατασκευάσαμε (2.2.15) υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} &\|v_m\|^2_{L^2(\Omega)} + D_v\|\nabla v_m\|^2_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} + 2\gamma\|u_m v_m\|^2_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} \\ &\leq |\Omega|(\gamma b)^2 T + \int_0^T \Big(1 + \frac{\ell^2}{D_v} + 2\|\nabla\cdot\mathbf{A}\|_{L^\infty(\Omega)}\Big) C\Big(\|h(x)\|^2_{L^2(\Omega)} + (\gamma b)^2\Big) dt. \end{aligned} \tag{2.2.17}$$

Συνεπώς, θέτοντας καταλλήλως μια νέα σταθερά $C = C(T, \Omega, D_v, \mathbf{A}, \nabla\cdot\mathbf{A})$, προκύπτει το επιθυμητό αποτέλεσμα

$$\max_{0\leq t\leq T} \|v_m\|^2_{L^2(\Omega)} + D_v\|\nabla v_m\|^2_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} + 2\gamma\|u_m v_m\|^2_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} \leq C\Big(\|h(x)\|^2_{L^2(\Omega)} + (\gamma b)^2\Big).$$

■

Τώρα, απομένει να υπολογίσουμε εκτίμηση για την u_m. Για να γίνει αυτό, θα εκμεταλευτούμε την μορφή της διαφορικής, οπως εξηγήσαμε παραπάνω, δηλαδή ότι έχουμε σύστημα Αντίδρασης-Διάχυσης με ένα μη γραμμικό όρο σύζευξης. Συγκεκριμένα, θα βρούμε ενεργειακές εκτιμήσεις για το άθροισμα των δύο μεταβλητών, εφόσον με αυτό τον τρόπο μπορούμε να αφαιρέσουμε την εξάρτηση της από τον μη γραμμικό όρο, και ύστερα μαζί με το Θεώρημα 2.2.3 θα βρούμε κατάλληλες εκτιμήσεις και για το u_m.

Θεώρημα 2.2.4 (Ενεργειακές Εκτιμήσεις II). *Υπάρχει σταθερά C, που εξαρτάται μόνο από τα $\Omega, T, D_v, D_u, \boldsymbol{A}$ και $\nabla\cdot\boldsymbol{A}, \gamma$, τέτοια ώστε*

$$\max_{0\leq t\leq T} \|u_m\|^2_{L^2(\Omega)} + D_u\|\nabla u_m\|^2_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} \leq C\Big(\|g(x)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|h(x)\|^2_{L^2(\Omega)} + (\gamma\alpha)^2 + (\gamma b)^2\Big), \tag{2.2.18}$$

για $m = 1, 2, \ldots$

Αποδείξη. Θεωρούμε την πρώτη και δεύτερη εξίσωση της (2.2.4), τις πολλαπλασιάζουμε με τον όρο $(d_m^k(t) + c_m^k(t))$ και μετά προσθέτουμε για $k = 1, 2, \ldots, m$, άρα σχηματίζετε

$$\begin{cases} (u_m', u_m + v_m) + (\nabla(\mathbf{A}u_m), u_m + v_m) + (D_u \nabla u_m, \nabla(u_m + v_m)) \\ = (\gamma\alpha - \gamma u_m + \gamma u_m^2 v_m, u_m + v_m), \\ (v_m', u_m + v_m) + (\nabla(\mathbf{A}v_m), u_m + v_m) + (D_v \nabla v_m, \nabla(u_m + v_m)) \\ = (\gamma b - \gamma u_m^2 v_m, u_m + v_m), \end{cases}$$

για σ.π. $0 \leq t \leq T$. Οπότε, αφού προσθέσουμε τις δύο παραπάνω διαφορικές, για να διώξουμε την μη γραμμική εξάρτηση του προβλήματος, ακολουθούμε την ίδια λογική όπως και στο Θεώρημα 2.2.3. Γνωρίζουμε ήδη ότι ισχύει η (2.2.7) και επομένως έχουμε μια νέα παραβολική Μερική Διαφορική Εξίσωση για το άθροισμα των $u_m + v_m$, η οποία παριστάνεται παρακάτω

$$\begin{aligned} \big((v_m + u_m)', v_m + u_m\big) + (D_u \nabla u_m, \nabla(u_m + v_m)) + (D_v \nabla v_m, \nabla(u_m + v_m)) \\ + \big((\nabla \cdot \mathbf{A})(u_m + v_m), u_m + v_m\big) + \big(\nabla(u_m + v_m) \cdot \mathbf{A}, u_m + v_m\big) \\ = \int_\Omega (\gamma\alpha + \gamma b)(u_m + v_m) dx - (\gamma u_m, u_m + v_m), \end{aligned}$$

για σ.π. $0 \leq t \leq T$. Προσθαφαιρούμε στην συνέχεια $(\gamma v_m, u_m + v_m)$ και μεταφέρουμε τον τελευταίο όρο της παραπάνω εξίσωσης στο πρώτο μέλος, ώστε να την διαμορφώσουμε κατάλληλα

$$\begin{aligned} \big((v_m + u_m)', v_m + u_m\big) + (D_u \nabla u_m, \nabla(u_m + v_m)) + (D_v \nabla v_m, \nabla(u_m + v_m)) \\ + \big((\nabla \cdot \mathbf{A} + \gamma)(u_m + v_m), u_m + v_m\big) + \big(\nabla(u_m + v_m) \cdot \mathbf{A}, u_m + v_m\big) \\ = \int_\Omega (\gamma\alpha + \gamma b)(u_m + v_m) dx + (\gamma v_m, u_m + v_m). \end{aligned} \tag{2.2.19}$$

Τώρα, θα χρειαστεί να πάρουμε περιπτώσεις σχετικά με τις τιμές των D_v, D_u. Έχουμε δύο περιπτώσεις, για $D_v \geq D_u$ και για $D_v < D_u$. Στην πρώτη περιπτώση μπορούμε, όπως θα δειχθεί, να κάνουμε χρήση του Θεωρήματος 2.2.3 για να βγάλουμε τις εκτιμήσεις που ζητάμε. Αντίθετα, στην δεύτερη περίπτωση θα χρειαστεί μια τροποποίηση για να μπορέσουμε να το χρησιμοποιήσουμε, καθώς στο δεύτερο μέλος της νέας διαφορικής (2.2.19) θα υπάρχει εξάρτηση από τό ανάδελτα της u_m, για το οποίο δεν έχουμε πληροφορίες. Εν τέλει, πάντως, η απόδειξη θα είναι παρομοία με αυτής του Θεωρήματος 2.2.3 και θα χρησιμοποιηθούν όμοιες τεχνικές.

Περίπτωση I : $D_v \geq D_u \implies (D_v - D_u) \geq 0$

Έχουμε την δυνατότητα να γράψουμε τον όρο $(D_v \nabla v_m, \nabla u_m + v_m)$ ως εξής :

$$\begin{aligned} (D_v \nabla v_m, \nabla(u_m + v_m)) &= \big((D_u + (D_v - D_u))\nabla v_m, \nabla(u_m + v_m)\big) \\ &= (D_u \nabla v_m, \nabla(u_m + v_m)) + \big((D_v - D_u)\nabla v_m, \nabla(u_m + v_m)\big) \end{aligned}$$

Τότε, λοιπόν, εφόσον αντικαταστήσουμε την παραπάνω σχέση, η εξίσωση (2.2.19) μπορεί

να ξαναγραφθεί με την ακόλουθη μορφή :

$$
\begin{aligned}
&\big((v_m+u_m)', v_m+u_m\big) + \big(D_u\nabla(u_m+v_m), \nabla(u_m+v_m)\big)\\
&+ \big((\nabla\cdot\mathbf{A}+\gamma)(u_m+v_m), u_m+v_m\big) + \big(\nabla(u_m+v_m)\cdot\mathbf{A}, u_m+v_m\big)\\
&= \int_\Omega (\gamma\alpha+\gamma b)(u_m+v_m)dx + (\gamma v_m, u_m+v_m)\\
&- \big((D_v-D_u)\nabla v_m, \nabla(u_m+v_m)\big),
\end{aligned}
\tag{2.2.20}
$$

για σ.π. $0 \le t \le T$. Πλέον, έχουμε την διαφορική σε κατάλληλη μορφή για να επιχειρήσουμε τον υπολογισμό ενεργειακών εκτιμήσεων της $u_m + v_m$. Όμοια με το προηγούμενο θεώρημα ξέρουμε ότι, $((v_m+u_m)', v_m+u_m) = \dfrac{d}{dt}(\dfrac{1}{2}\|v_m+u_m\|^2_{L^2(\Omega)})$ για σ.π. $0 \le t \le T$ και συνεπώς, αν πραγματοποιήσουμε κατάλληλες πράξεις έχουμε τα παρακάτω

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}\|v_m+u_m\|^2_{L^2(\Omega)}\Big) + D_u\|\nabla(u_m+v_m)\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&= \int_\Omega (\gamma\alpha+\gamma b)(u_m+v_m)dx + (\gamma v_m, u_m+v_m) - \big((D_v-D_u)\nabla v_m, u_m+v_m\big)\\
&- \big((\nabla\cdot\mathbf{A}+\gamma)(u_m+v_m), u_m+v_m\big) - \big(\nabla(u_m+v_m)\cdot\mathbf{A}, u_m+v_m\big)\\
&\le \Big|\int_\Omega (\gamma\alpha+\gamma b)(u_m+v_m)dx + (\gamma v_m, u_m+v_m) - \big((D_v-D_u)\nabla v_m, u_m+v_m\big)\\
&- \big((\nabla\cdot\mathbf{A}+\gamma)(u_m+v_m), u_m+v_m\big) - \big(\nabla(u_m+v_m)\cdot\mathbf{A}, u_m+v_m\big)\Big|.
\end{aligned}
\tag{2.2.21}
$$

Τότε χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα και την ομαλότητα του πεδιού ροής που έχουμε υποθέσει λαμβάνουμε

(2.2.22)

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}\|v_m+u_m\|^2_{L^2(\Omega)}\Big) + D_u\|\nabla(u_m+v_m)\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&\le \int_\Omega |(\gamma\alpha+\gamma b)(u_m+v_m)|dx + |(\gamma v_m, u_m+v_m)| + (D_v-D_u)|(\nabla v_m, u_m+v_m)|\\
&+ \big(\|\nabla\cdot\mathbf{A}\|_{L^\infty(\Omega)}+\gamma\big)|(u_m+v_m, u_m+v_m)| + \sum_{i=1}^n \|A^i\|_{L^\infty(\Omega)}\,|(\nabla(u_m+v_m), u_m+v_m)|.
\end{aligned}
$$

Θέτουμε $\boxed{\ell = \sum_{i=1}^n \|A^i\|_{L^\infty(\Omega)}}$ και χρησιμοποιούμε την γενικευμένη ανισότητα Young (2.1.3) για $p = q = 2$ ώστε να δημιουργήσουμε την ανισότητα

(2.2.23)

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}\|v_m+u_m\|^2_{L^2(\Omega)}\Big) + D_u\|\nabla(u_m+v_m)\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&\le \epsilon_1|\Omega|(\gamma\alpha+\gamma b)^2 + \frac{1}{4\epsilon_1}\|u_m+v_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \epsilon_2\gamma^2\|v_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{4\epsilon_2}\|u_m+v_m\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&+ \epsilon_3(D_v-D_u)\|\nabla v_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{(D_v-D_u)}{4\epsilon_3}\|\nabla(u_m+v_m)\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&+ \big(\|\nabla\cdot\mathbf{A}\|_{L^\infty(\Omega)}+\gamma\big)\|u_m+v_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \epsilon_4\ell\|\nabla(u_m+v_m)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\ell}{4\epsilon_4}\|u_m+v_m\|^2_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}
$$

για σ.π. $0 \leq t \leq T$. Από το Θεώρημα 2.2.3 γνωρίζουμε φράγματα για τις ποσότητες $\|v_m\|_{L^2(\Omega)}$ και $\|\nabla v_m\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}$. Εφαρμόζουμε, λοιπόν kickback argument θέτοντας καταλλήλως τα $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ και ϵ_4. Συγκεκριμένα, $\boxed{\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1}$, $\boxed{\epsilon_3 = \frac{(D_v - D_u)}{2D_u}}$ και $\boxed{\epsilon_4 = \frac{D_u}{2\ell}}$. Συνεπώς οδηγούμαστε στην ανισοτική σχέση

(2.2.24)
$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}\|v_m + u_m\|^2_{L^2(\Omega)}\Big) + D_u\|\nabla(u_m + v_m)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq |\Omega|(\gamma\alpha + \gamma b)^2 + \frac{1}{4}\|u_m + v_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \gamma^2 C\Big(\|h(x)\|^2_{L^2(\Omega)} + (\gamma b)^2\Big) + \frac{1}{4}\|u_m + v_m\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&+ \frac{(D_v - D_u)^2}{2D_u}\|\nabla v_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{D_u}{2}\|\nabla(u_m + v_m)\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&+ \big(\|\nabla\cdot\mathbf{A}\|_{L^\infty(\Omega)} + \gamma\big)\|u_m + v_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{D_u}{2}\|\nabla(u_m + v_m)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\ell^2}{2D_u}\|u_m + v_m\|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Τακτοποιούμε τους όρους της ανισοτικής σχέσης, μετακινώντας τους $\frac{D_u}{2}\|\nabla(u_m + v_m)\|^2_{L^2(\Omega)}$ στο αριστερό μέλος και βγάζοντας κοινό παράγοντα τον όρο $\|u_m + v_m\|^2_{L^2(\Omega)}$, ώστε να είναι σε κατάλληλη μορφή για να εφαρμόσουμε την ανισότητα Gronwall 2.1.7

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}\|v_m + u_m\|^2_{L^2(\Omega)}\Big) \leq |\Omega|(\gamma\alpha + \gamma b)^2 + \gamma^2 C\Big(\|h(x)\|^2_{L^2(\Omega)} + (\gamma b)^2\Big) \\
&+ \frac{(D_v - D_u)^2}{2D_u}\|\nabla v_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \Big(1 + 2\|\nabla\cdot\mathbf{A}\|_{L^\infty(\Omega)} + 2\gamma + \frac{\ell^2}{D_u}\Big)\frac{1}{2}\|u_m + v_m\|^2_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

για σ.π. $0 \leq t \leq T$. Εφαρμόζοντας, τώρα, την Gronwall ανισότητα (2.1.7) για :

- $\boxed{\eta(t) = \frac{1}{2}\|u_m + v_m\|^2_{L^2(\Omega)}}$

- $\boxed{\phi(t) = 1 + 2\|\nabla\cdot\mathbf{A}\|_{L^\infty(\Omega)} + 2\gamma + \frac{\ell^2}{D_u}}$

- $\boxed{\psi(t) = |\Omega|(\gamma\alpha + \gamma b)^2 + \gamma^2 C\Big(\|h(x)\|^2_{L^2(\Omega)} + (\gamma b)^2\Big) + \frac{(D_v - D_u)^2}{2D_u}\|\nabla v_m\|^2_{L^2(\Omega)}}$

μαζί με το γεγονός ότι $\|u_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)} = \|u_{m0}\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|g(x)\|^2_{L^2(\Omega)}$ και $\|v_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)} = \|v_{m0}\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|h(x)\|^2_{L^2(\Omega)}$, παίρνουμε την παρακάτω εκτίμηση για την $u_m + v_m$:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|u_m+v_m\|^2_{L^2(\Omega)} &\le e^{\int_0^t\left(1+2\|\nabla\cdot\mathbf{A}\|_{L^\infty(\Omega)}+2\gamma+\frac{\ell^2}{D_u}\right)ds}\Big(\|u_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|v_m(0)\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&+T|\Omega|(\gamma\alpha+\gamma b)^2+\int_0^t\gamma^2C\big(\|h(x)\|^2_{L^2(\Omega)}+(\gamma b)^2\big)ds\\
&+\frac{(D_v-D_u)^2}{2D_u}\int_0^t\|\nabla v_m\|^2_{L^2(\Omega)}\Big)\\
&\le e^{\int_0^T\left(1+2\|\nabla\cdot\mathbf{A}\|_{L^\infty(\Omega)}+2\gamma+\frac{\ell^2}{D_u}\right)ds}\Big(\|g(x)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|h(x)\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&+T|\Omega|C_2\big((\gamma\alpha)^2+(\gamma b)^2\big)+\int_0^T\gamma^2C\big(\|h(x)\|^2_{L^2(\Omega)}+(\gamma b)^2\big)ds\\
&+\frac{(D_v-D_u)^2}{2D_u}\|\nabla v_m\|^2_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}\Big)\\
&\le e^{\int_0^T\left(1+2\|\nabla\cdot\mathbf{A}\|_{L^\infty(\Omega)}+2\gamma+\frac{\ell^2}{D_u}\right)ds}\Big(\|g(x)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|h(x)\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&+T|\Omega|C_2\big((\gamma\alpha)^2+(\gamma b)^2\big)+\gamma^2C'\big(\|h(x)\|^2_{L^2(\Omega)}+(\gamma b)^2\big)\\
&+\frac{(D_v-D_u)^2}{2D_u}C\big(\|h(x)\|^2_{L^2(\Omega)}+(\gamma b)^2\big)\Big),
\end{aligned}
$$

για $0\le t\le T$. Επομένως, έχοντας χρησιμοποιήσει το Θεώρημα 2.2.3 και επειδή $\mathbf{A},\ \nabla\cdot\mathbf{A}\in L^\infty(\Omega_T)$ υπάρχει, εν τέλει, σταθερά $C=C(T,\Omega,D_v,D_u,\mathbf{A},\nabla\cdot\mathbf{A},\gamma)$ τέτοια ώστε

$$
\max_{0\le t\le T}\|u_m+v_m\|^2_{L^2(\Omega)}\le C\Big(\|g(x)\|^2_{L^2(\Omega)}+\|h(x)\|^2_{L^2(\Omega)}+(\gamma\alpha)^2+(\gamma b)^2\Big), \tag{2.2.25}
$$

για $m=1,2,\dots$. Για να συνεχίσουμε, επιστρέφουμε στην εξίσωση (2.2.23), πολλαπλασιάζουμε την ανισότητα με 2 και ξαναεπιλέγουμε τις θετικές σταθερές της ανισότητας Young, αυτή την φορά θέτοντας $\boxed{\epsilon_1=\epsilon_2=1}$, $\boxed{\epsilon_3=\frac{(D_v-D_u)}{D_u}}$ και $\boxed{\epsilon_4=\frac{D_u}{4\ell}}$

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\Big(\|v_m+u_m\|^2_{L^2(\Omega)}\Big)+2D_u\|\nabla(u_m+v_m)\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&\le 2|\Omega|(\gamma\alpha+\gamma b)^2+\frac{1}{2}\|u_m+v_m\|^2_{L^2(\Omega)}+2\gamma^2\|v_m\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{2}\|u_m+v_m\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&+\frac{(D_v-D_u)^2}{D_u}\|\nabla v_m\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{D_u}{2}\|\nabla(u_m+v_m)\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&+\big(\|\nabla\cdot\mathbf{A}\|_{L^\infty(\Omega)}+\gamma\big)\|u_m+v_m\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{D_u}{2}\|\nabla(u_m+v_m)\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{2\ell^2}{D_u}\|u_m+v_m\|^2_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}
$$

για σ.π. $0\le t\le T$. Αναπροσαρμόζοντας τους όρους κατάλληλα, λαμβάνουμε την παρακάτω ανισότητα :

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\Big(\|v_m+u_m\|^2_{L^2(\Omega)}\Big)+D_u\|\nabla(u_m+v_m)\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&\qquad\le 2|\Omega|(\gamma\alpha+\gamma b)^2+\frac{(D_v-D_u)^2}{D_u}\|\nabla v_m\|^2_{L^2(\Omega)}+2\gamma^2\|v_m\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&\qquad+\Big(1+\big(\|\nabla\cdot\mathbf{A}\|_{L^\infty(\Omega)}+\gamma\big)+\frac{2\ell^2}{D_u}\Big)\|u_m+v_m\|^2_{L^2(\Omega)},
\end{aligned} \tag{2.2.26}
$$

για σ.π. $0 \leq t \leq T$. Τελος ολοκληρώνοντας την (2.2.26) από την χρονική στιγμή 0 εώς την χρονική στιγμή T και εφαρμόζοντας την ανισότητα που κατασκευάσαμε (2.2.25) σε συνδυασμό με τα φράγματα από το Θεώρημα 2.2.3 για τους όρους $\|v_m\|^2_{L^2(\Omega)}$ και $\|\nabla v_m\|^2_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}$ υπολογίζουμε

$$
\begin{aligned}
&\|v_m + u_m\|^2_{L^2(\Omega)} + D_u \|\nabla(u_m + v_m)\|^2_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} \\
&\leq 2T|\Omega|(\gamma\alpha + \gamma b)^2 + \frac{(D_v - D_u)^2}{D_u} \|\nabla v_m\|^2_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} + 2\gamma^2 \int_0^T C\Big(\|h(x)\|^2_{L^2(\Omega)} + (\gamma b)^2\Big) ds \\
&+ \int_0^T \Big(1 + \big(\|\nabla \cdot \mathbf{A}\|_{L^\infty(\Omega)} + \gamma\big) + \frac{2\ell^2}{D_u}\Big) C\Big(\|g(x)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|h(x)\|^2_{L^2(\Omega)} + (\gamma\alpha)^2 + (\gamma b)^2\Big) ds \\
&\leq 2T|\Omega| C_2\big((\gamma\alpha)^2 + (\gamma b)^2\big) + \frac{(D_v - D_u)^2}{D_u} C\Big(\|h(x)\|^2_{L^2(\Omega)} + (\gamma b)^2\Big) \\
&+ 2\gamma^2 \int_0^T C\Big(\|h(x)\|^2_{L^2(\Omega)} + (\gamma b)^2\Big) ds \\
&+ \int_0^T \Big(1 + \big(\|\nabla \cdot \mathbf{A}\|_{L^\infty(\Omega)} + \gamma\big) + \frac{2\ell^2}{D_u}\Big) C\Big(\|g(x)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|h(x)\|^2_{L^2(\Omega)} + (\gamma\alpha)^2 + (\gamma b)^2\Big) ds,
\end{aligned}
$$

για $0 \leq t \leq T$. Συνεπώς, εν τέλει, θέτοντας καταλλήλως μια νέα σταθερά $C = C(T, \Omega, D_v, D_u, \mathbf{A}, \nabla \cdot \mathbf{A}, \gamma)$, προκύπτει το παρακάτω αποτέλεσμα στην περίπτωση που έχουμε $\boxed{D_v \geq D_u}$

$$
\begin{aligned}
\max_{0 \leq t \leq T} \|u_m + v_m\|^2_{L^2(\Omega)} + D_u \|\nabla(u_m + v_m)\|^2_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} \\
\leq C\Big(\|g(x)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|h(x)\|^2_{L^2(\Omega)} + (\gamma\alpha)^2 + (\gamma b)^2\Big).
\end{aligned} \tag{2.2.27}
$$

<u>Περίπτωση ΙΙ :</u> $D_v < D_u \implies (D_u - D_v) > 0$

Η Περίπτωση ΙΙ είναι πιο πολύπλοκη από την Περίπτωση Ι, εφόσον όπως θα φανεί στο δεύτερο μέλος θα έχουμε εξάρτηση από τον όρο u_m για τον οποίο δεν έχουμε πληροφορίες. Για αυτό τον λόγο, όπως αναφέρθηκε ήδη, θα χρειαστεί μια τροποποίηση ώστε να καταλήξουμε σε μια ανισοτική σχέση όμοια με την (2.2.23), και ύστερα με την ίδια μεθοδολογία να καταλήξουμε στο ίδιο αποτέλεσμα.
Ξαναγυρνάμε στη εξίσωση (2.2.19), όπου έχουμε την δυνατότητα να γράψουμε τον όρο $(D_v \nabla v_m, \nabla(u_m + v_m))$ ως εξής :

$$
\begin{aligned}
(D_u \nabla u_m, \nabla(u_m + v_m)) &= \big((D_v + (D_u - D_v))\nabla u_m, \nabla(u_m + v_m)\big) \\
&= (D_v \nabla u_m, \nabla(u_m + v_m)) + \big((D_u - D_v)\nabla u_m, \nabla(u_m + v_m)\big).
\end{aligned}
$$

Τότε, λοιπόν, εφόσον αντικαταστήσουμε την παραπάνω σχέση, η εξίσωση (2.2.19) μπορεί να ξαναγραφθεί με την ακόλουθη μορφή :

$$
\begin{aligned}
&\big((v_m + u_m)', v_m + u_m\big) + \big((\nabla \cdot \mathbf{A} + \gamma)(u_m + v_m), u_m + v_m\big) \\
&+ \big(D_v \nabla(u_m + v_m), \nabla(u_m + v_m)\big) + \big(\nabla(u_m + v_m) \cdot \mathbf{A}, u_m + v_m\big) \\
&= \int_\Omega (\gamma\alpha + \gamma b)(u_m + v_m) dx + \gamma(v_m, u_m + v_m) - (D_u - D_v)\big(\nabla u_m, \nabla(u_m + v_m)\big),
\end{aligned}
$$

για σ.π. $0 \leq t \leq T$. Σε αυτό το σημείο διαφοροποιούμαστε από την Περίπτωση I, και προσθαφαιρούμε το όρο $\big((D_u - D_v)\nabla v_m, \nabla(u_m + v_m)\big)$, ώστε να αποκτήσουμε μια πιο χρήσιμη εξίσωση :

$$\begin{aligned}
&\big((v_m + u_m)', v_m + u_m\big) + \big(D_v \nabla(u_m + v_m), \nabla(u_m + v_m)\big) + \big((\nabla \cdot \mathbf{A} + \gamma)(u_m + v_m), u_m + v_m\big) \\
&+ \big(\nabla(u_m + v_m) \cdot \mathbf{A}, u_m + v_m\big) = \int_\Omega (\gamma\alpha + \gamma b)(u_m + v_m)dx + (\gamma v_m, u_m + v_m) \\
&- \big((D_u - D_v)\nabla(u_m + v_m), \nabla(u_m + v_m)\big) + (D_u - D_v)\big(\nabla v_m, \nabla(u_m + v_m)\big),
\end{aligned}$$

για σ.π. $0 \leq t \leq T$. Κάνοντας τις κατάλληλες τροποποιήσεις μεταφέροντας τον όρο $-\big((D_u - D_v)\nabla(u_m + v_m), \nabla(u_m + v_m)\big)$ στο αριστερό μέλος, παρατηρούμε ότι προκύπτει η εξής μορφή

(2.2.28)
$$\begin{aligned}
&\big((v_m + u_m)', v_m + u_m\big) + \big(D_u \nabla(u_m + v_m), \nabla(u_m + v_m)\big) \\
&+ \big((\nabla \cdot \mathbf{A} + \gamma)(u_m + v_m), u_m + v_m\big) + \big(\nabla(u_m + v_m) \cdot \mathbf{A}, u_m + v_m\big) \\
&= \int_\Omega (\gamma\alpha + \gamma b)(u_m + v_m)dx + (\gamma v_m, u_m + v_m) + \big((D_u - D_v)\nabla v_m, \nabla(u_m + v_m)\big),
\end{aligned}$$

για σ.π. $0 \leq t \leq T$, όπου είναι ακριβώς όμοια με την εξίσωση (2.2.20), εκτός από τον όρο $(D_u - D_v)$, ο οποίος έχει απλώς αλλάξει πρόσημο. Κατά αυτό τον τρόπο, έχουμε αναγάγει την Περίπτωση II στην Περίπτωση I, με αποτέλεσμα οι εκτιμήσεις για το άθροισμα $u_m + v_m$ να ακολουθούν ακριβώς την ίδια διαδικασία με προηγουμένως. Επομένως, γνωρίζουμε απευθείας ότι έχουμε το επιθυμητο απότελεσμα, δηλαδή υπάρχει σταθερά $C = C(T, \Omega, D_v, D_u, \mathbf{A}, \nabla \cdot \mathbf{A}, \gamma)$ για την οποία η ανισότητα (2.2.27) ισχύει και στην περίπτωση όπου $\boxed{D_v < D_u}$.

Συνολικά εχουμε, λοιπόν, δείξει ότι σε οποιαδήποτε περίπτωση σχετικά με τις τιμές των D_u, D_v ισχύουν οι a-priori εκτιμήσεις για το άθροισμα των u_m, v_m

$$\begin{aligned}
&\max_{0 \leq t \leq T} \|u_m + v_m\|^2_{L^2(\Omega)} + D_u \|\nabla(u_m + v_m)\|^2_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} \\
&\qquad \leq C\Big(\|g(x)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|h(x)\|^2_{L^2(\Omega)} + (\gamma\alpha)^2 + (\gamma b)^2 \Big).
\end{aligned} \tag{2.2.29}$$

Σε αυτή την περίσταση, μπορούμε εύκολα να βγάλουμε τις αντίστοιχες ενεργειακές για την u_m με το ακόλουθο τρόπο

$$\begin{cases}
\max_{0 \leq t \leq T} \|u_m\|^2_{L^2(\Omega)} &= \max_{0 \leq t \leq T} \|u_m + v_m - v_m\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \max_{0 \leq t \leq T} \|u_m + v_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \max_{0 \leq t \leq T} \|v_m\|^2_{L^2(\Omega)}, \\
\|\nabla u_m\|^2_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} &= \|\nabla(u_m + v_m - v_m)\|^2_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} \\
&\leq \|\nabla(u_m + v_m)\|^2_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} + \|\nabla v_m\|^2_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]}.
\end{cases}$$

Επομένως γνωρίζοντας τα φραξήματα από το Θεώρημα 2.2.3 και την (2.2.29) ολοκληρώνεται η απόδειξη. ■

Επιπλέον, παραθέτουμε ένα σημαντικό αποτέλεσμα των παραπάνω δύο Θεωρημάτων 2.2.3, 2.2.4, με το οποίο βρίσκουμε ενεργειακές εκτιμήσεις για τις δύο μεταβλητές μας u_m και v_m σε κατάλληλη νόρμα, ώστε να βγάλουμε ομοιόμορφα φράγματα για την ασθενή λύση της διαφορικής εξίσωσης Schnakenberg και να έχουμε την δυνατότητα να περάσουμε τα όρια στην προσεγγιστική λύσης.

Πόρισμα 2.2.4.1 (Ενεργειακές Εκτιμήσεις III). *Υπάρχει σταθερά C, που εξαρτάται μόνο από τα $\Omega, T, D_v, D_u, \boldsymbol{A}$ και $\nabla \cdot \boldsymbol{A}, \gamma$, τέτοιο ώστε*

(2.2.30)
$$\|u_m\|^2_{L^2[0,T,H^1(\Omega)]} + \|v_m\|^2_{L^2[0,T,H^1(\Omega)]} \leq C\Big(\|g(x)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|h(x)\|^2_{L^2(\Omega)} + (\gamma\alpha)^2 + (\gamma b)^2\Big),$$

για $m = 1, 2, \dots$.

Αποδείξη. Εύκολα μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι,

- $$\|u_m\|^2_{L^2[0,T,H^1(\Omega)]} = \int_0^T \|u_m\|^2_{H^1(\Omega)}\, dt = \int_0^T \|u_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u_m\|^2_{L^2(\Omega)}\, dt$$
$$\leq T \max_{0\leq t\leq T} \|u_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u_m\|^2_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]},$$

- $$\|v_m\|^2_{L^2[0,T,H^1(\Omega)]} = \int_0^T \|v_m\|^2_{H^1(\Omega)}\, dt = \int_0^T \|v_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla v_m\|^2_{L^2(\Omega)}\, dt$$
$$\leq T \max_{0\leq t\leq T} \|v_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla v_m\|^2_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]},$$

για $0 \leq t \leq T$. Το πόρισμα ολοκληρώνετε αν κανείς παρατηρήσει τις σχέσεις (2.2.13) του Θεωρήματος 2.2.3 και (2.2.18) του Θεωρήματος 2.2.4.

■

Μέχρι τώρα είχαμε αποφύγει να έχουμε τα διαφορετικά αποτελέσματα για τις 2 και 3 διαστάσεις, ωστόσο στην συνέχεια θα δούμε ότι εν γένει είναι δυό διαφορετικές περιπτώσεις. Παρακάτω παρουσιάζουμε ένα πολύ σημαντικό αποτέλεσμα, για το φράξιμο του συζευγμένου μη γραμμικού όρου του συστήματος Schnakenberg, το οποίο θα χρειαστεί τόσο για τον υπολογισμό ενεργειακών εκτιμήσεων, συγκεκριμένα για τις u'_m, v'_m, όσο και για την ισχυρή σύγκλιση στην εφαρμογή Θεωρήματος Aubin-Lions (2.1.1) και του λήμματος Lions (2.1.2), όπως θα δούμε.

Λήμμα 2.2.5 (Φράξιμο μη γραμμικού όρου). *Έστω ο συζευγμένος μη γραμμικος όρος του συστήματος Schnakenberg, $f : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ με $f(u_m(x,t), v_m(x,t)) = u_m^2 v_m$, τότε για $u_m, v_m \in L^\infty[0,T; L^2(\Omega)] \cap L^2[0,T; H^1(\Omega)]$ έχουμε ότι*

$$f(u_m, v_m) \in L^{4/3}[0,T; L^{4/3}(\Omega)] \quad \text{για} \quad n = 2. \tag{2.2.31}$$

$$f(u_m, v_m) \in L^{6/5}[0,T; L^{6/5}(\Omega)] \quad \text{για} \quad n = 3. \tag{2.2.32}$$

δηλαδή υπάρχει σταθερά C_f που εξάρταται απο τα Ω, T, τις σταθερές και τις αρχικές συνθήκες της διαφορικής (2.1.1) τέτοια ώστε

$$\|f(u_m,v_m)\|^{4/3}_{L^{4/3}[0,T;L^{4/3}(\Omega)]} = \left\|u_m^2 v_m\right\|^{4/3}_{L^{4/3}[0,T;L^{4/3}(\Omega)]} \le C_f \quad \textit{για} \quad n=2, \tag{2.2.33}$$

$$\|f(u_m,v_m)\|^{6/5}_{L^{6/5}[0,T;L^{6/5}(\Omega)]} = \left\|u_m^2 v_m\right\|^{6/5}_{L^{6/5}[0,T;L^{6/5}(\Omega)]} \le C_f \quad \textit{για} \quad n=3, \tag{2.2.34}$$

για $m=1,2,\ldots$

Απόδειξη. Για την περίπτωση $\boxed{\mathbf{n=2}}$:

$$\begin{aligned}\left\|u_m^2 v_m\right\|^{4/3}_{L^{4/3}[0,T;L^{4/3}(\Omega)]} &= \int_0^T \left\|u_m^2 v_m\right\|^{4/3}_{L^{4/3}(\Omega)} dt = \int_0^T \int_\Omega (u_m^2 v_m)^{4/3} dxdt \\ &= \int_0^T \int_\Omega u_m^{8/3} v_m^{4/3} dxdt \\ &\le \int_0^T \int_\Omega \frac{2}{3} u_m^4 + \frac{1}{3} v_m^4 dxdt \le C_1 \|u_m\|^4_{L^4[0,T;L^4(\Omega)]} + C_2 \|v_m\|^4_{L^4[0,T;L^4(\Omega)]},\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα Young για $p=3/2$ και $q=3$. Επιπλέον, εφαρμόζοντας την Landyzeshkayka-Gagliardo-Nirenberg Ανισότητα για 2 διαστάσεις (2.1.4) γνωρίζουμε ότι $\|u_m\|^4_{L^4(\Omega)} \le C \|u_m\|^2_{L^2(\Omega)} \|u_m\|^2_{H^1(\Omega)}$ και $\|v_m\|^4_{L^4(\Omega)} \le C \|v_m\|^2_{L^2(\Omega)} \|v_m\|^2_{H^1(\Omega)}$. Τότε, από τα Θεωρήματα 2.2.3, 2.2.4 και Λήμμα 2.2.4.1, έχουμε ότι υπάρχει σταθερά C_f που εξάρταται απο τα Ω, T, τις σταθερές και τις αρχικές συνθήκες της διαφορικής (2.1.1) τέτοια ώστε

$$\begin{aligned}\|u_m\|^4_{L^4(\Omega)} \le C \|u_m\|^2_{L^2(\Omega)} \|u_m\|^2_{H^1(\Omega)} &\implies \int_0^T \|u_m\|^4_{L^4(\Omega)} dt \le \int_0^T C \|u_m\|^2_{L^2(\Omega)} \|u_m\|^2_{H^1(\Omega)} dt \\ &\implies \|u_m\|^4_{L^4[0,T;L^4(\Omega)]} \le C \|u_m\|^2_{L^\infty[0,T;L^2(\Omega)]} \|u_m\|^2_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]} \le C_f,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|v_m\|^4_{L^4(\Omega)} \le C \|v_m\|^2_{L^2(\Omega)} \|v_m\|^2_{H^1(\Omega)} &\implies \int_0^T \|v_m\|^4_{L^4(\Omega)} dt \le \int_0^T C \|v_m\|^2_{L^2(\Omega)} \|v_m\|^2_{H^1(\Omega)} dt \\ &\implies \|v_m\|^4_{L^4[0,T;L^4(\Omega)]} \le C \|v_m\|^2_{L^\infty[0,T;L^2(\Omega)]} \|v_m\|^2_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]} \le C_f.\end{aligned}$$

Επομένως επαληθεύεται ότι $\|u_m^2 v_m\|^{4/3}_{L^{4/3}[0,T;L^{4/3}(\Omega)]} \le C_f$.

Για την περίπτωση $\boxed{\mathbf{n=3}}$:

$$\begin{aligned}\left\|u_m^2 v_m\right\|^{6/5}_{L^{6/5}[0,T;L^{6/5}(\Omega)]} &= \int_0^T \left\|u_m^2 v_m\right\|^{6/5}_{L^{6/5}(\Omega)} dt = \int_0^T \int_\Omega (u_m^2 v_m)^{6/5} dxdt \\ &= \int_0^T \int_\Omega u_m^{6/5} (u_m v_m)^{6/5} dxdt \\ &\le \int_0^T \int_\Omega \frac{2}{5} u_m^3 + \frac{3}{5} (u_m v_m)^2 dxdt \le C_1 \|u_m\|^3_{L^3[0,T;L^3(\Omega)]} + C_2 \|u_m v_m\|^2_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]},\end{aligned} \tag{2.2.35}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα Young για $p=5/2$ και $q=5/3$. Επιπλέον, εφαρμόζοντας την Landyzeshkayka-Gagliardo-Nirenberg Ανισότητα για 3 διαστάσεις (2.1.5) γνωρίζουμε ότι

$\|u_m\|^3_{L^3(\Omega)} \leq C\,\|u_m\|^{3/2}_{L^2(\Omega)}\,\|u_m\|^{3/2}_{H^1(\Omega)}$ και $\|v_m\|^3_{L^3(\Omega)} \leq C\,\|v_m\|^{3/2}_{L^2(\Omega)}\,\|v_m\|^{3/2}_{H^1(\Omega)}$. Τότε, από τα Θεωρήματα 2.2.3, 2.2.4 και Λήμμα 2.2.4.1, έχουμε ότι υπάρχει σταθερά C_f που εξάρταται απο το Ω, T, τις σταθερές και τις αρχικές συνθήκες της διαφορικής (2.1.1) τέτοια ώστε $\|u_m v_m\|_{L^2[0,T;L^2(\Omega)]} \leq C_f$, και $\|u_m\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]} \leq C$, $\|v_m\|_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]} \leq C$ και άρα χρησιμοποιώντας την εμφύτευση $\boxed{L^r(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)}$ για $r = 2$ και $q = 3/2$

(2.2.36)

$$\|u_m\|^3_{L^3(\Omega)} \leq C\,\|u_m\|^{3/2}_{L^2(\Omega)}\,\|u_m\|^{3/2}_{H^1(\Omega)} \implies \int_0^T \|u_m\|^3_{L^3(\Omega)}\,dt \leq \int_0^T C\,\|u_m\|^{3/2}_{L^2(\Omega)}\,\|u_m\|^{3/2}_{H^1(\Omega)}\,dt$$
$$\overset{\text{Εμφύτευση}}{\implies} \|u_m\|^3_{L^3[0,T;L^3(\Omega)]} \leq C\,\|v_m\|^{3/2}_{L^\infty[0,T;L^2(\Omega)]}\,\|u_m\|^2_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]} \leq C_f.$$

Επομένως επαληθεύεται, βλέποντας την (2.2.35) και (2.2.36), ότι :
$\|u_m^2 v_m\|^{6/5}_{L^{6/5}[0,T;L^{6/5}(\Omega)]} \leq C_f$.

■

Στην συνέχεια, υπολογίζουμε τις ενεργειακές εκτιμήσεις για τις u_m', v_m', χρησιμοποιώντας το παραπάνω Λήμμα 2.2.5. Όπως προαναφέρθηκε, η διαδικασία προσδιορισμού τους για $n = 2$ και $n = 3$ διαστάσεις, είναι διαφορετικές. Εν τέλει προκύπτει το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2.2.6 (Ενεργειακές Εκτιμήσεις IV). *Έστω ότι ισχύουν οι υποθέσεις του Λήμματος 2.2.5 ενώ για το $\boldsymbol{A} = ((A^i(x,t)))$ ισχύει ότι $A^i \in L^\infty(\Omega_T)$ $\forall i = 1, 2, ...n$, και $\nabla \cdot \boldsymbol{A} \in L^\infty(\Omega_T)$. Τότε, υπάρχει σταθερά C_*, που εξαρτάται μόνο από απο τα Ω, T, τις σταθερές, τις αρχικές συνθήκες της διαφορικής* (2.1.1) *και τις σταθερές C_f του Λήμματος 2.2.5 τέτοια ώστε*

$$\text{(2.2.37)} \qquad \begin{cases} \|u_m'\|_{L^{4/3}[0,T;(H^1)^*]} \leq C_* \\ \\ \|v_m'\|_{L^{4/3}[0,T;(H^1)^*]} \leq C_* \end{cases} \qquad \text{για} \quad n = 2,$$

$$\text{(2.2.38)} \qquad \begin{cases} \|u_m'\|_{L^{6/5}[0,T;(H^1)^*]} \leq C_* \\ \\ \|v_m'\|_{L^{6/5}[0,T;(H^1)^*]} \leq C_* \end{cases} \qquad \text{για} \quad n = 3.$$

για $m = 1, 2, \cdots$.

Απόδειξη. Εφόσον $u_m, v_m \in W_m = span\{w_1, \cdots, w_m\} \subset H^1(\Omega)$, τότε θεωρούμε συνάρτηση $z \in H^1(\Omega)$, τέτοια ώστε $\|z\|_{H^1(\Omega)} \leq 1$, και την γράφουμε ως εξής, $z = z^1 + z^2$, όπου $z^1 \in W_m$ και $(z^2, w_k) = 0$ $(k = 1, \cdots, m)$. Τότε, επειδή, όπως δείξαμε οι συναρτήσεις $\{w_k\}_{k=0}^\infty$ είναι ορθογώνιες στον $H^1(\Omega)$, γνωρίζουμε ότι, $\|z^1\|_{H^1(\Omega)} \leq \|z\|_{H^1(\Omega)} \leq 1$ και επομένως χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.2.4) και (2.2.7) διαπιστώνουμε ότι για σ.π. $0 \leq t \leq T$ ισχύει

$$\begin{aligned}\langle u_m', z\rangle = (u_m', z) = (u_m', z^1) = -((\nabla \cdot \mathbf{A})u_m, z^1) - (\nabla u_m \cdot \mathbf{A}, z^1) - (D_u \nabla u_m, \nabla z^1) \\ + (\gamma\alpha - \gamma u_m + \gamma u_m^2 v_m, z^1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle v_m', z\rangle = (v_m', z) = (v_m', z^1) = -((\nabla \cdot \mathbf{A})v_m, z^1) - (\nabla v_m \cdot \mathbf{A}, z^1) - (D_v \nabla v_m, \nabla z^1) \\ + (\gamma b - \gamma u_m^2 v_m, z^1),\end{aligned}$$

άρα τότε,

$$|\langle u_m', z\rangle| \leq D_u \int_\Omega \left|\nabla u_m \nabla z^1\right| dx + \sum_{i=1}^n \left\|A^i\right\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |\nabla u_m z^1| dx + \|\nabla \cdot \mathbf{A}\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |u_m z^1| dx$$
$$+ \int_\Omega |\gamma \alpha z^1| dx + \gamma \int_\Omega |u_m z^1| dx + \gamma \int_\Omega |u_m^2 v_m z^1| dx,$$

$$|\langle v_m', z\rangle| \leq D_v \int_\Omega \left|\nabla v_m \nabla z^1\right| dx + \sum_{i=1}^n \left\|A^i\right\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |\nabla v_m z^1| dx + \|\nabla \cdot \mathbf{A}\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |v_m z^1| dx$$
$$+ \int_\Omega |\gamma b z^1| dx + \gamma \int_\Omega |u_m^2 v_m z^1| dx.$$

Πραγματοποιώντας κατάλληλες πράξεις, ενώ θέτουμε $\boxed{\ell = \sum_{i=1}^n \|A^i\|_{L^\infty(\Omega)}}$, λαμβάνουμε

(2.2.39)
$$|\langle u_m', z\rangle| \leq D_u \int_\Omega \left|\nabla u_m \nabla z^1\right| dx + \ell \int_\Omega |\nabla u_m z^1| dx + \left(\|\nabla \cdot \mathbf{A}\|_{L^\infty(\Omega)} + \gamma\right) \int_\Omega |u_m z^1| dx$$
$$+ \int_\Omega |\gamma \alpha z^1| dx + \gamma \int_\Omega |u_m^2 v_m z^1| dx,$$

(2.2.40)
$$|\langle v_m', z\rangle| \leq D_v \int_\Omega \left|\nabla v_m \nabla z^1\right| dx + \ell \int_\Omega |\nabla v_m z^1| dx + \|\nabla \cdot \mathbf{A}\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |v_m z^1| dx$$
$$+ \int_\Omega |\gamma b z^1| dx + \gamma \int_\Omega |u_m^2 v_m z^1| dx.$$

Τώρα θεωρούμε περιπτώσεις σχετικά με το αν βρισκομάστε σε χώρο διάστασης $n = 2$ ή $n = 3$, καθώς όπως φάνηκε και στο Λήμμα 2.2.5, θα χρειαστούμε νόρμες σε διαφορετικούς χώρους.

Για την περίπτωση $\boxed{\mathbf{n{=}2}}$:

Εφαρμόζοντας στις σχέσεις (2.2.39) και (2.2.40) ανισότητες Hölder στους όρους του δεξιού μέλους για $p = q = 2$ και $p = 4, q = 4/3$ διαπιστώνουμε ότι

(2.2.41)
$$|\langle u_m', z\rangle| \leq D_u \|\nabla u_m\|_{L^2(\Omega)} \left\|\nabla z^1\right\|_{L^2(\Omega)} + \ell \|\nabla u_m\|_{L^2(\Omega)} \left\|z^1\right\|_{L^2(\Omega)} + \gamma\alpha|\Omega|^{1/2} \left\|z^1\right\|_{L^2(\Omega)}$$
$$+ \left(\|\nabla \cdot \mathbf{A}\|_{L^\infty(\Omega)} + \gamma\right) \|u_m\|_{L^2(\Omega)} \left\|z^1\right\|_{L^2(\Omega)} + \gamma \left\|u_m^2 v_m\right\|_{L^{4/3}(\Omega)} \left\|z^1\right\|_{L^4(\Omega)},$$

(2.2.42)
$$|\langle v_m', z\rangle| \leq D_u \|\nabla v_m\|_{L^2(\Omega)} \left\|\nabla z^1\right\|_{L^2(\Omega)} + \ell \|\nabla v_m\|_{L^2(\Omega)} \left\|z^1\right\|_{L^2(\Omega)} + \gamma b|\Omega|^{1/2} \left\|z^1\right\|_{L^2(\Omega)}$$
$$+ \|\nabla \cdot \mathbf{A}\|_{L^\infty(\Omega)} \|v_m\|_{L^2(\Omega)} \left\|z^1\right\|_{L^2(\Omega)} + \gamma \left\|u_m^2 v_m\right\|_{L^{4/3}(\Omega)} \left\|z^1\right\|_{L^4(\Omega)},$$

και επειδή γνωρίζουμε ότι πρώτον, $\|u_m\|_{L^2(\Omega)}$, $\|\nabla u_m\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_m\|_{H^1(\Omega)}$ και $\|v_m\|_{L^2(\Omega)}$, $\|\nabla v_m\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v_m\|_{H^1(\Omega)}$, δεύτερον $\|z^1\|_{L^2(\Omega)}$, $\|\nabla z^1\|_{L^2(\Omega)} \leq \|z^1\|_{H^1(\Omega)}$ και τρίτον από την Landyzeshkayka-Gagliardo-Nirenberg Ανισότητα για 2 διαστάσεις (2.1.4)

ότι $\|z^1\|_{L^4(\Omega)} \leq C\,\|z^1\|^{1/2}_{L^2(\Omega)}\,\|z^1\|^{1/2}_{H^1(\Omega)} \leq C \times 1^{1/2} \times 1^{1/2} \leq C$, οι παραπάνω ανισότητες ξαναδιατυπώνονται με την ακόλουθη μορφή

$$|\langle u_m', z\rangle| \leq C\big[D_u + \ell + \|\nabla\cdot\mathbf{A}\|_{L^\infty(\Omega)} + \gamma + \gamma\alpha|\Omega|^{1/2}\big]\,\|u_m\|_{H^1(\Omega)} + C\gamma\,\big\|u_m^2 v_m\big\|_{L^{4/3}(\Omega)},$$

$$|\langle v_m', z\rangle| \leq C\big[D_u + \ell + \|\nabla\cdot\mathbf{A}\|_{L^\infty(\Omega)} + \gamma b|\Omega|^{1/2}\big]\,\|v_m\|_{H^1(\Omega)} + C\gamma\,\big\|u_m^2 v_m\big\|_{L^{4/3}(\Omega)},$$

για κάθε $z \in H^1(\Omega)$ με $\|z\|_{H^1(\Omega)} \leq 1$, οπότε επειδή γνωρίζουμε ότι

$$\|u_m'\|_{(H^1(\Omega))^*} = \sup_{z\in H^1(\Omega),\|z\|_{H^1(\Omega)}\leq 1}\Big\{|\langle u_m', z\rangle|\Big\},$$

$$\|v_m'\|_{(H^1(\Omega))^*} = \sup_{z\in H^1(\Omega),\|z\|_{H^1(\Omega)}\leq 1}\Big\{|\langle v_m', z\rangle|\Big\},$$

έχουμε εν τέλει ότι υπάρχει σταθερά C_* που εξαρτάται από τα T, Ω και τις σταθερές της μερικής διαφορικής (2.1.1) τέτοια ώστε

$$\|u_m'\|_{(H^1(\Omega))^*} \leq C_*\big(\,\|u_m\|_{H^1(\Omega)} + \big\|u_m^2 v_m\big\|_{L^{4/3}(\Omega)}\big),$$

$$\|v_m'\|_{(H^1(\Omega))^*} \leq C_*\big(\,\|v_m\|_{H^1(\Omega)} + \big\|u_m^2 v_m\big\|_{L^{4/3}(\Omega)}\big),$$

τότε υψώνοντας στην 4/3 δύναμη, εφαρμόζοντας την γνωστή ανισότητα $(a+b)^p \leq C_p(a^p + b^p)$, για $C_p > 0$ και τέλος χρησιμοποιώντας την εμφύτευση $\boxed{L^r(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)}$ για $r = 2$ και $q = 4/3$ έχουμε

(2.2.43)
$$\|u_m'\|^{4/3}_{(H^1(\Omega))^*} \leq C_*\big(\,\|u_m\|_{H^1(\Omega)} + \big\|u_m^2 v_m\big\|_{L^{4/3}(\Omega)}\big)^{4/3} \leq C_* C_{4/3}\big(\,\|u_m\|^{4/3}_{H^1(\Omega)} + \big\|u_m^2 v_m\big\|^{4/3}_{L^{4/3}(\Omega)}\big) \overset{\text{Εμφύτευση}}{\leq} C_*\big(\,\|u_m\|^2_{H^1(\Omega)} + \big\|u_m^2 v_m\big\|^{4/3}_{L^{4/3}(\Omega)}\big),$$

(2.2.44)
$$\|v_m'\|^{4/3}_{(H^1(\Omega))^*} \leq C_*\big(\,\|v_m\|_{H^1(\Omega)} + \big\|v_m^2 v_m\big\|_{L^{4/3}(\Omega)}\big)^{4/3} \leq C_* C_{4/3}\big(\,\|v_m\|^{4/3}_{H^1(\Omega)} + \big\|u_m^2 v_m\big\|^{4/3}_{L^{4/3}(\Omega)}\big) \overset{\text{Εμφύτευση}}{\leq} C_*\big(\,\|v_m\|^2_{H^1(\Omega)} + \big\|u_m^2 v_m\big\|^{4/3}_{L^{4/3}(\Omega)}\big).$$

Τέλος, εφόσον ολοκληρώσουμε τις παραπάνω ανισότητες (2.2.43) και (2.2.44), από την χρονική στιγμή 0 εώς την χρονική στιγμή T, παίρνουμε ότι

$$\|u_m'\|^{4/3}_{L^{4/3}[0,T;(H^1(\Omega))^*]} = \int_0^T \|u_m'\|^{4/3}_{(H^1(\Omega))^*}\,dt \leq C_*\big(\,\|u_m\|^2_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]} + \big\|u_m^2 v_m\big\|^{4/3}_{L^{4/3}[0,T;L^{4/3}(\Omega)]}\big),$$

$$\|v_m'\|^{4/3}_{L^{4/3}[0,T;(H^1(\Omega))^*]} = \int_0^T \|v_m'\|^{4/3}_{(H^1(\Omega))^*}\,dt \leq C_*\big(\,\|v_m\|^2_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]} + \big\|u_m^2 v_m\big\|^{4/3}_{L^{4/3}[0,T;L^{4/3}(\Omega)]}\big).$$

Επομένως η απόδειξη για $n = 2$ διαστάσεις της σχέσης (2.2.37), προκύπτει εφόσον θεωρήσουμε το Πόρισμα 2.2.4.1 και το Λήμμα 2.2.5 και διαπιστώνουμε ότι $u_m', v_m' \in L^{4/3}[0,T;(H^1(\Omega))^*]$.

Εν τέλει, θα γνωρίζουμε ότι η τελική σταθερά C_* του Θεωρήματος θα εξαρτάται και από τις σταθερές C_f του Λήμματος 2.2.5.

Για την περίπτωση $\boxed{\mathbf{n=3}}$:

Όμοια και σε αυτήν την περίπτωση εφαρμόζοντας στις σχέσεις (2.2.39) και (2.2.40) ανισότητες Hölder στους όρους του δεξιού μέλους για $p = q = 2$ και αυτή την φορά $p = 6, q = 6/5$, διαπιστώνουμε ότι

(2.2.45)
$$\begin{aligned}|\langle u_m', z\rangle| &\leq D_u \|\nabla u_m\|_{L^2(\Omega)} \left\|\nabla z^1\right\|_{L^2(\Omega)} + \ell \|\nabla u_m\|_{L^2(\Omega)} \left\|z^1\right\|_{L^2(\Omega)} + \gamma\alpha|\Omega|^{1/2} \left\|z^1\right\|_{L^2(\Omega)} \\ &+ \big(\|\nabla\cdot\mathbf{A}\|_{L^\infty(\Omega)} + \gamma\big) \|u_m\|_{L^2(\Omega)} \left\|z^1\right\|_{L^2(\Omega)} + \gamma \left\|u_m^2 v_m\right\|_{L^{6/5}(\Omega)} \left\|z^1\right\|_{L^6(\Omega)},\end{aligned}$$

(2.2.46)
$$\begin{aligned}|\langle v_m', z\rangle| &\leq D_u \|\nabla v_m\|_{L^2(\Omega)} \left\|\nabla z^1\right\|_{L^2(\Omega)} + \ell \|\nabla v_m\|_{L^2(\Omega)} \left\|z^1\right\|_{L^2(\Omega)} + \gamma b|\Omega|^{1/2} \left\|z^1\right\|_{L^2(\Omega)} \\ &+ \|\nabla\cdot\mathbf{A}\|_{L^\infty(\Omega)} \|v_m\|_{L^2(\Omega)} \left\|z^1\right\|_{L^2(\Omega)} + \gamma \left\|u_m^2 v_m\right\|_{L^{6/5}(\Omega)} \left\|z^1\right\|_{L^6(\Omega)},\end{aligned}$$

και επειδή γνωρίζουμε ότι πρώτον, $\|u_m\|_{L^2(\Omega)}$, $\|\nabla u_m\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_m\|_{H^1(\Omega)}$ και $\|v_m\|_{L^2(\Omega)}$, $\|\nabla v_m\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v_m\|_{H^1(\Omega)}$, δεύτερον $\|z^1\|_{L^2(\Omega)}$, $\|\nabla z^1\|_{L^2(\Omega)} \leq \|z^1\|_{H^1(\Omega)}$ και τρίτον από τις Γενικευμένες Ανισότητες Sobolev 1.4.4 έχουμε για $n = 3$ διαστάσεις $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$ και άρα $\|z^1\|_{L^6(\Omega)} \leq C\|z^1\|_{H^1(\Omega)} \leq C$, οι παραπάνω ανισότητες ξαναδιατυπώνονται με την ακόλουθη μορφή

$$|\langle u_m', z\rangle| \leq C\big[D_u + \ell + \|\nabla\cdot\mathbf{A}\|_{L^\infty(\Omega)} + \gamma + \gamma\alpha|\Omega|^{1/2}\big] \|u_m\|_{H^1(\Omega)} + C\gamma \left\|u_m^2 v_m\right\|_{L^{6/5}(\Omega)},$$

$$|\langle v_m', z\rangle| \leq C\big[D_u + \ell + \|\nabla\cdot\mathbf{A}\|_{L^\infty(\Omega)} + \gamma b|\Omega|^{1/2}\big] \|v_m\|_{H^1(\Omega)} + C\gamma \left\|u_m^2 v_m\right\|_{L^{6/5}(\Omega)},$$

για κάθε $z \in H^1(\Omega)$ με $\|z\|_{H^1(\Omega)} \leq 1$, οπότε επειδή γνωρίζουμε ότι

$$\|u_m'\|_{(H^1(\Omega))^*} = \sup_{z\in H^1(\Omega), \|z\|_{H^1(\Omega)}\leq 1} \Big\{|\langle u_m', z\rangle|\Big\},$$
$$\|v_m'\|_{(H^1(\Omega))^*} = \sup_{z\in H^1(\Omega), \|z\|_{H^1(\Omega)}\leq 1} \Big\{|\langle v_m', z\rangle|\Big\},$$

έχουμε εν τέλει ότι υπάρχει σταθερά C_* που εξαρτάται από τα T, Ω και τις σταθερές της μερικής διαφορικής (2.1.1) τέτοια ώστε

$$\|u_m'\|_{(H^1(\Omega))^*} \leq C_*\big(\|u_m\|_{H^1(\Omega)} + \left\|u_m^2 v_m\right\|_{L^{6/5}(\Omega)}\big),$$

$$\|v_m'\|_{(H^1(\Omega))^*} \leq C_*\big(\|v_m\|_{H^1(\Omega)} + \left\|u_m^2 v_m\right\|_{L^{6/5}(\Omega)}\big),$$

τότε υψώνοντας στην 6/5 δύναμη, εφαρμόζοντας την γνωστή ανισότητα $(a+b)^p \leq C_p(a^p + b^p)$, για $C_p > 0$ και τέλος χρησιμοποιώντας την εμφύτευση $\boxed{L^r(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)}$ για $r = 2$ και $q = 6/5$ έχουμε

(2.2.47)
$$\|u_m'\|^{6/5}_{(H^1(\Omega))^*} \leq C_*\big(\|u_m\|_{H^1(\Omega)} + \|u_m^2 v_m\|_{L^{6/5}(\Omega)}\big)^{6/5} \leq C_* C_{6/5}\big(\|u_m\|^{6/5}_{H^1(\Omega)} + \|u_m^2 v_m\|^{6/5}_{L^{6/5}(\Omega)}\big)$$
$$\overset{\textit{Εμφύτευση}}{\leq} C_*\big(\|u_m\|^2_{H^1(\Omega)} + \|u_m^2 v_m\|^{6/5}_{L^{6/5}(\Omega)}\big),$$

(2.2.48)
$$\|v_m'\|^{6/5}_{(H^1(\Omega))^*} \leq C_*\big(\|v_m\|_{H^1(\Omega)} + \|v_m^2 v_m\|_{L^{6/5}(\Omega)}\big)^{6/5} \leq C_* C_{6/5}\big(\|v_m\|^{6/5}_{H^1(\Omega)} + \|u_m^2 v_m\|^{6/5}_{L^{6/5}(\Omega)}\big)$$
$$\overset{\textit{Εμφύτευση}}{\leq} C_*\big(\|v_m\|^2_{H^1(\Omega)} + \|u_m^2 v_m\|^{6/5}_{L^{6/5}(\Omega)}\big).$$

Τέλος, εφόσον ολοκληρώσουμε τις παραπάνω ανισότητες (2.2.47) και (2.2.48), από την χρονική στιγμή 0 εώς την χρονική στιγμή T, παίρνουμε ότι

$$\|u_m'\|^{6/5}_{L^{6/5}[0,T;(H^1(\Omega))^*]} = \int_0^T \|u_m'\|^{6/5}_{(H^1(\Omega))^*}\, dt \leq C_*\big(\|u_m\|^2_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]} + \|u_m^2 v_m\|^{6/5}_{L^{6/5}[0,T;L^{6/5}(\Omega)]}\big),$$

$$\|v_m'\|^{6/5}_{L^{6/5}[0,T;(H^1(\Omega))^*]} = \int_0^T \|v_m'\|^{6/5}_{(H^1(\Omega))^*}\, dt \leq C_*\big(\|v_m\|^2_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]} + \|u_m^2 v_m\|^{6/5}_{L^{6/5}[0,T;L^{6/5}(\Omega)]}\big).$$

Επομένως η απόδειξη για $n = 3$ διαστάσεις της σχέσης (2.2.38), προκύπτει εφόσον θεωρήσουμε το Πόρισμα 2.2.4.1 και το Λήμμα 2.2.5 και διαπιστώνουμε ότι $u_m', v_m' \in L^{6/5}[0,T;(H^1(\Omega))^*]$. Εν τέλει, θα γνωρίζουμε ότι η τελική σταθερά C_* του Θεωρήματος θα εξαρτάται και από τις σταθερές C_f του Λήμματος 2.2.5.

■

2.2.3 Πέρασμα Ορίων

Σε αυτή την παράγραφο, θα δείξουμε πως μπορούμε να περάσουμε τα όρια στην προσεγγιστική ασθενή λύση του συστήματος Schnakenberg. Υπενθυμίζουμε ότι οι χώροι $L^2[0,T;L^2(\Omega)] \equiv L^2(\Omega_T)$, $L^2[0,T;H^1(\Omega)]$ είναι Hilbert χώροι και άρα Ανακλαστικοί. Η ανακλαστικότητα θα φανεί πολύ χρήσιμη εφόσον σε συνδυασμό με τα ομοιόμορφα φραξίματα που δείξαμε στην προηγουμενη υποπαράγραφο, θα μας δώσει ασθενής συγκλίνουσες υπακολουθίες. Παρακάτω, παραθέτουμε τις ασθενείς συγκλίσεις που έχουμε στο πρόβλημα μας.

Θεώρημα 2.2.7 (Συγκλίσεις). *Έστω ότι ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος 2.2.6 και του Λήμματος 2.2.5. Επιπλέον, έστω το σύστημα 2.1.1 και $h(x), g(x) \in L^2(\Omega)$ οι αρχικές συνθήκες τότε ισχύουν οι παρακάτω :*

$$u_m \xrightarrow{w} u \ \textit{στον}\ L^2[0,T;H^1(\Omega)], \qquad u_m \xrightarrow{w*} u \ \textit{στον}\ L^\infty[0,T;L^2(\Omega)],$$

$$u_m' \xrightarrow{w} u' \ \textit{στον}\ L^{4/3}[0,T;(H^1(\Omega))^*], \quad \textit{για} \ \ n = 2$$
$$u_m' \xrightarrow{w} u' \ \textit{στον}\ L^{6/5}[0,T;(H^1(\Omega))^*], \quad \textit{για} \ \ n = 3,$$

$$v_m \xrightarrow{w} v \text{ στον } L^2[0,T;H^1(\Omega)], \qquad v_m \xrightarrow{w*} v \text{ στον } L^\infty[0,T;L^2(\Omega)],$$

$$\begin{aligned} v_m' &\xrightarrow{w} v' \text{ στον } L^{4/3}[0,T;(H^1(\Omega))^*], \quad \text{για } n=2,\\ v_m' &\xrightarrow{w} v' \text{ στον } L^{6/5}[0,T;(H^1(\Omega))^*], \quad \text{για } n=3, \end{aligned}$$

$$u_m \longrightarrow u \text{ ισχυρά στον } L^2[0,T;L^2(\Omega)], \qquad v_m \longrightarrow v \text{ ισχυρά στον } L^2[0,T;L^2(\Omega)].$$

Επιπλέον,

$$\begin{aligned} f(u_m,v_m) &\xrightarrow{w} f(u,v) \text{ στον } L^{4/3}[0,T;L^{4/3}(\Omega)], \quad \text{για } n=2,\\ f(u_m,v_m) &\xrightarrow{w} f(u,v) \text{ στον } L^{6/5}[0,T;L^{6/5}(\Omega)], \quad \text{για } n=3. \end{aligned}$$

Απόδειξη. Από το Πόρισμα 2.2.4.1, τα Θεωρήματα 2.2.3, 2.2.4 και την παρατήρηση ότι οι χώροι $L^2[0,T;L^2(\Omega)] \equiv L^2(\Omega_T)$, $L^2[0,T;H^1(\Omega)]$ είναι Hilbert, γνωρίζουμε ότι η μοναδιαία μπάλα με την ασθενή τοπολογία θα είναι συμπαγής, Θεώρημα 1.3.6, και επομένως από Θεώρημα Eberlein-Smulian 1.3.2, κάθε φραγμένη ακολουθία, εφόσον μπορεί να περιοριστεί μέσα σε αυτή, θα έχει συγκλίνουσα ασθενή υπακολουθία, Πρόταση 1.3.7. Όμοια, εφόσον ο χώρος $L^1[0,T;L^2(\Omega)]$ είναι διαχωρίσιμος, τότε από Πρόταση 1.3.4 η μοναδιαία σφαίρα του $L^\infty[0,T;L^2(\Omega)]$ είναι μετρικοποιήσιμη και σε συνδυασμό με το Θεώρημα Banach-Alaoglu 1.3.5 είναι w^* ακολουθιακά συμπαγής και επομένως, κάθε φραγμένη ακολουθία, όπως προηγουμένος, θα έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Δηλαδή, εφόσον έχουμε φράξει ομοιόμορφα τις u_m, v_m στους χώρους $L^2[0,T;H^1(\Omega)], L^\infty[0,T;L^2(\Omega)]$, από την παραπάνω παρατήρηση η προσεγγιστική ακολουθία λύσεων θα έχει συγκλίνουσα ασθενή και ασθενή άστρο, αντίστοιχα, υπακολουθία (τις υπακολουθίες θα τις συμβολίζουμε όπως και τις ακολουθίες χωρίς βλάβη της γενικότητας). Άρα, $u_m \xrightarrow{w} u$, $v_m \xrightarrow{w} v$ στον $L^2[0,T;H^1(\Omega)]$ ([1]) και $u_m \xrightarrow{w*} u$, $v_m \xrightarrow{w*} v$ στον $L^\infty[0,T;L^2(\Omega)]$. Με παρόμοιο τρόπο, από το θεώρημα 2.2.6, έχουμε ομοιόφορφα φράγματα των u_m', v_m' στους χώρους $L^{4/3}[0,T;(H^1(\Omega))^*]$ για $n=2$ διαστάσεις και $L^{6/5}[0,T;(H^1(\Omega))^*]$ για $n=3$ διαστάσεις, επομένως γνωρίζουμε ότι $u_m' \xrightarrow{w*} x$, $v_m' \xrightarrow{w*} y$ στον $L^{4/3}[0,T;(H^1(\Omega))^*]$ για $n=2$ διαστάσεις και $u_m' \xrightarrow{w*} x, v_m' \xrightarrow{w*} y$ στον $L^{6/5}[0,T;(H^1(\Omega))^*]$ για $n=3$ διαστάσεις. Αρκεί να δείξουμε ότι εν τέλει, και στις δύο περιπτώσεις, είτε $n=2$ είτε $n=3$, $x=u'$ και $y=v'$. Θα το δείξουμε μόνο για 2 διαστάσεις και για την μεταβλητή u_m, εφόσον με παρόμοιο τρόπο δείχνεται και για 3 διαστάσεις και την αλλη μεταβλητή. Θεωρούμε $\phi \in C_c^1(0,T), w \in H^1(\Omega)$, τότε εφόσον γνωρίζουμε ότι $C_c^1([0,T],H^1(\Omega)) \hookrightarrow L^4[0,T;H^1(\Omega)]$, έχουμε ότι :

$$\begin{aligned} \langle u_m', \phi(t)w\rangle_{L^{4/3}[0,T;(H^1(\Omega))^*],L^4[0,T;H^1(\Omega)]} &= \langle u_m', \phi(t)w\rangle_{L^{4/3}[0,T;(H^1(\Omega))^*],C_c^1([0,T];H^1(\Omega))}\\ &= \int_0^T \langle u_m', \phi(t)w\rangle_{(H^1(\Omega))^*,H^1(\Omega)}dt\\ &= -\int_0^T \langle u_m, \phi'(t)w\rangle_{H^1(\Omega),(H^1(\Omega))^*}dt, \end{aligned}$$

[1] με $\xrightarrow{w}$, $\xrightarrow{w^*}$ συμβολίζουμε την ασθενή και ασθενή άστρο σύγκλιση, αντίστοιχα

τότε επειδή $u_m \xrightarrow{w} u$ στον $L^2[0,T;H^1(\Omega)]$ και $\phi'(t)w \in C([0,T];H^1(\Omega))$ (γνωρίζω ότι $H^1(\Omega) \hookrightarrow (H^1(\Omega))^*$) έχουμε ότι

$$\langle u_m', \phi(t)w\rangle = -\int_0^T \langle u_m, \phi'(t)w\rangle_{H^1(\Omega),(H^1(\Omega))^*}dt \longrightarrow -\int_0^T \langle u, \phi'(t)w\rangle_{H^1(\Omega),(H^1(\Omega))^*}dt,$$

όπου

$$-\int_0^T \langle u, \phi'(t)w\rangle_{H^1(\Omega),(H^1(\Omega))^*}dt = \int_0^T \langle u', \phi(t)w\rangle_{(H^1(\Omega))^*,H^1(\Omega)}dt,$$

επομένως, λόγω πυκνότητας του χώρους $C_c^1([0,T],H^1(\Omega))$ στον $L^4[0,T;H^1(\Omega)]$, δείξαμε ότι $x \equiv u'$.

Τώρα, για την ισχυρή σύγλιση, θα κάνουμε χρήση του Θεωρήματος 2.1.1 συμπάγειας Aubin-Lions και συγκεκριμένα με τους χώρους $H^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow (H^1(\Omega))^*$, όπου με '$\hookrightarrow\hookrightarrow$' συμβολίζουμε την συμπαγή εμφύτευση την οποία έχουμε από το Θεώρημα Συμπάγειας Rellich-Kondrachov 1.4.5. Συνεπώς, θα έχουμε

$$W = \left\{u \in L^2[0,T;H^1(\Omega)] \,\middle|\, u_t = \frac{du}{dt} \in L^{4/3}[0,T;(H^1)^*]\right\} \quad \textit{για } n=2,$$

$$W = \left\{u \in L^2[0,T;H^1(\Omega)] \,\middle|\, u_t = \frac{du}{dt} \in L^{6/5}[0,T;(H^1)^*]\right\} \quad \textit{για } n=3,$$

και τότε από το Θεώρημα 2.1.1 και στις δύο περιπτώσεις

$$W \hookrightarrow\hookrightarrow L^2[0,T;L^2(\Omega)].$$

Επομένως εφόσον $u_m, v_m \in W$, θα υπάρχει υπακολουθία (πάλι την συμβολίζουμε σαν την ακολουθία) τέτοια ώστε $u_m \longrightarrow u$, $v_m \longrightarrow v$ ισχυρά στον $L^2[0,T;L^2(\Omega)] \equiv L^2(\Omega_T)$ για $n=2,3$.

Τέλος, απομένει να δείξουμε ότι η $f(u_m,v_m)$ συγκλίνει ασθενά στο $f(u,v)$ πάνω στον $L^{4/3}[\Omega_T]$ για $n=2$ διαστάσεις και πάνω στον $L^{6/5}[\Omega_T]$ για $n=3$ διαστάσεις. Αυτό θα αποδειχθεί με χρήση του Λήμματος 2.1.2 του Lions. Γνωρίζουμε ήδη από Λήμμα 2.2.5 ότι

$$\|f(u_m,v_m)\|^{4/3}_{L^{4/3}[0,T;L^{4/3}(\Omega)]} \le C_f \quad \textit{για} \quad n=2,$$

$$\|f(u_m,v_m)\|^{6/5}_{L^{6/5}[0,T;L^{6/5}(\Omega)]} \le C_f \quad \textit{για} \quad n=3,$$

και επιπλέον, εφόσον δείξαμε ότι $u_m \longrightarrow u$, $v_m \longrightarrow v$ ισχυρά στον $L^2[0,T;L^2(\Omega)] \equiv L^2(\Omega_T)$ για $n=2,3$, ξερούμε ότι η ισχυρή σύγκλιση συνεπάγει σημειακή σύγκλιση, όπως φαίνεται στα [2, 5],

$$u_m(x,t) \longrightarrow u(x,t) \quad \textit{'σημειακά'} \quad \textit{σ.π.} \quad \textit{στον} \quad \Omega_T, \quad \textit{για} \quad n=2,3,$$
$$v_m(x,t) \longrightarrow v(x,t) \quad \textit{'σημειακά'} \quad \textit{σ.π.} \quad \textit{στον} \quad \Omega_T, \quad \textit{για} \quad n=2,3.$$

Επειδή, όμως, η συνάρτηση $f(x,y) = x^2y$ είναι συνεχής, αφού έχει μερικές παραγώγους συνεχείς έχουμε ότι

$$f_m = f(u_m(x,t),v_m(x,t)) = u_m^2(x,t)v_m(x,t) \longrightarrow u^2(x,t)v(x,t) = f(u,v) \quad \textit{'σημειακά'} \quad \textit{σ.π.} \quad \textit{στον } \Omega_T, \quad \textit{για} \quad n=2,3.$$

Τότε το Λήμμα Lions 2.1.2 δίνει την ασθενή σύγκλιση που ζητάμε. ■

Θεώρημα 2.2.8 (Ύπαρξη ασθενούς λύσης)**.** *Έστω ότι ισχύουν οι υποθέσεις των Θεωρημάτων 2.2.6, 2.2.7 και του Λήμματος 2.2.5. Τότε, υπάρχει ασθενής λύση του συστήματος Schnakenberg* (2.1.1) *όπως στον Ορισμός 2.2.1.*

Απόδειξη. Για να αποδείξουμε οτι υπάρχει ασθενής λύση, θα κάνουμε χρήση των παραπάνω ασθενών συγκλίσεων, ώστε να περάσουμε τα όρια. Θα κοιτάξουμε και την περιπτώση που έχουμε $n = 2$ διαστάσεις και $n = 3$ διαστάσεις, αν και όπως θα δειχθεί η λογική τους είναι αρκετά παρόμοια.

Περίπτωση I : Για $\boxed{\text{n=2}}$.

Θεωρούμε την σχέση (2.2.4), επιλέγουμε N και διαλέγουμε συνάρτηση $w \in C^1([0,T], H^1(\Omega))$ της μορφής

$$w(t,x) = \sum_{k=1}^{N} d^k(t) w_k, \tag{2.2.49}$$

όπου $\{d^k\}_{k=1}^N$ είναι δεδομένες ομαλές συναρτήσεις. Τότε, διαλέγουμε $m \geq N$, πολλαπλασιάζουμε τις δύο πρώτες εξισώσεις της (2.2.4), προσθέτουμε για $k = 1, \cdots, N$ και ολοκληρώνουμε ως προς τον χρόνο t για να βρούμε :

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle u_m', w\rangle dt + \int_0^T ((\nabla \cdot \mathbf{A}) u_m, w) + (\nabla u_m \cdot \mathbf{A}, w) + (D_u \nabla u_m, \nabla w) dt \\ = \int_0^T (\gamma\alpha - \gamma u_m, w) dt + \int_0^T \langle \gamma u_m^2 v_m, w\rangle dt, \end{aligned} \tag{2.2.50}$$

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle v_m', w\rangle dt + \int_0^T ((\nabla \cdot \mathbf{A}) v_m, w) + (\nabla v_m \cdot \mathbf{A}, w) + (D_u \nabla v_m, \nabla w) dt \\ = \int_0^T (\gamma b, w) dt + \int_0^T \langle \gamma u_m^2 v_m, w\rangle dt. \end{aligned} \tag{2.2.51}$$

Είμαστε, πλέον, σε θέση να περάσουμε τα όρια, κάνοντας κατάλληλη χρήση του Θεωρήματος 2.2.7 :

i) Έχουμε από την ασθενή σύγκλιση στον $L^{4/3}[0,T;(H^1(\Omega)^*)]$:

$$\int_0^T \langle u_m', w\rangle dt \longrightarrow \int_0^T \langle u', w\rangle dt,$$

$$\int_0^T \langle v_m', w\rangle dt \longrightarrow \int_0^T \langle v', w\rangle dt,$$

εφόσον γνωρίζουμε ότι $w \in C^1([0,T]; H^1(\Omega))$ και $C^1([0,T]; H^1(\Omega)) \hookrightarrow L^4[0,T; H^1(\Omega)] \equiv \left(L^{4/3}[0,T;(H^1(\Omega)^*)]\right)^*$, από το Θεώρημα συμπάγειας Rellich-Kondrachov 1.4.5.

ii) Έχουμε από την ισχυρή σύγκλιση στον $L^2[0,T;L^2(\Omega)]$:

$$\int_0^T \langle u_m, w\rangle dt = \int_0^T (u_m, w)dt \longrightarrow \int_0^T (u,w)dt,$$

$$\int_0^T \langle v_m, w\rangle dt = \int_0^T (v_m, w)dt \longrightarrow \int_0^T (v,w)dt,$$

εφόσον γνωρίζουμε ότι $w \in C^1([0,T];H^1(\Omega))$, ενώ $C^1([0,T];H^1(\Omega)) \hookrightarrow L^2[0,T;L^2(\Omega)]$, από το Θεώρημα συμπάγειας Rellich-Kondrachov 1.4.5, $H^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow (H^1(\Omega))^*$.

iii) Έχουμε από την ασθενή σύγκλιση στον $L^2[0,T;L^2(\Omega)]$ της βαθμίδας:

$$\int_0^T (\nabla u_m, w)dt \longrightarrow \int_0^T (\nabla u, w)dt,$$

$$\int_0^T (\nabla v_m, w)dt \longrightarrow \int_0^T (\nabla v, w)dt,$$

εφόσον γνωρίζουμε ότι $w \in C^1([0,T];H^1(\Omega))$, ενώ $C^1([0,T];H^1(\Omega)) \hookrightarrow L^2[0,T;L^2(\Omega)]$, από το Θεώρημα συμπάγειας Rellich-Kondrachov 1.4.5, $H^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow (H^1(\Omega))^*$.

iv) Έχουμε από την ασθενή σύγκλιση στον $L^2[0,T;L^2(\Omega)]$ της βαθμίδας:

$$\int_0^T (\nabla u_m, \nabla w)dt \longrightarrow \int_0^T (\nabla u, \nabla w)dt,$$

$$\int_0^T (\nabla v_m, \nabla w)dt \longrightarrow \int_0^T (\nabla v, \nabla w)dt,$$

εφόσον γνωρίζουμε ότι $\nabla w \in C^1([0,T];L^2(\Omega))$, ενώ $C^1([0,T];L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2[0,T;L^2(\Omega)]$.

v) Έχουμε από την ασθενή σύγκλιση στον $\mathrm{L}^{4/3}[0,T;L^{4/3}(\Omega)]$:

$$\int_0^T \langle f(u_m,v_m), w\rangle_{L^{4/3},H^1(\Omega)} dt \longrightarrow \int_0^T \langle f(u,v), w\rangle_{L^{4/3},H^1(\Omega)} dt,$$

εφόσον γνωρίζουμε ότι $w \in C^1([0,T];H^1(\Omega))$, ενώ $C^1([0,T];H^1(\Omega)) \hookrightarrow L^4[0,T;L^4(\Omega)] \equiv \left(L^{4/3}[0,T;L^{4/3}(\Omega)]\right)^*$, από το Θεώρημα συμπάγειας Rellich-Kondrachov 1.4.5 ($H^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$) και επομένως $L^{4/3}(\Omega) \hookrightarrow (H^1(\Omega))^*$. Άρα μπορεί να ξαναγραφτεί ως εξής :

$$\int_0^T \langle f(u_m,v_m), w\rangle_{L^{4/3},H^1(\Omega)} dt = \int_0^T \langle f(u_m,v_m), w\rangle dt \longrightarrow \int_0^T \langle f(u,v), w\rangle dt.$$

Εν τέλει περνώντας τα ασθενή όρια στις σχέσεις (2.2.50) και (2.2.51), αφού $\mathbf{A} = ((A^i(x,t)))$ τέτοιο ώστε $\boxed{A^i \in L^\infty(\Omega_T)}$ $\forall i = 1,2,...n,$ και $\boxed{\nabla\cdot\mathbf{A} \in L^\infty(\Omega_T)}$, διαπιστώνουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_0^T \langle u', w\rangle dt + \int_0^T ((\nabla\cdot\mathbf{A})u, w) + (\nabla u\cdot\mathbf{A}, w) + (D_u\nabla u, \nabla w)dt \\ = \int_0^T (\gamma\alpha - \gamma u, w)dt + \int_0^T \langle \gamma u^2 v, w\rangle dt,\end{aligned} \tag{2.2.52}$$

$$\int_0^T \langle v', w\rangle dt + \int_0^T ((\nabla\cdot\mathbf{A})v, w) + (\nabla v\cdot\mathbf{A}, w) + (D_u\nabla v, \nabla w)dt = \int_0^T (\gamma b, w)dt + \int_0^T \langle \gamma u^2 v, w\rangle dt, \tag{2.2.53}$$

και αυτές οι ισότητες μάλιστα θα ισχύουν για κάθε συνάρτηση $w \in L^4[0,T;H^1(\Omega)]$, αφού συναρτήσεις της μορφή (2.2.49) είναι πυκνές στον χώρο αυτό. Συνεπώς, συγκεκριμένα έχουμε

$$\langle u', w\rangle + ((\nabla\cdot\mathbf{A})u, w) + (\nabla u\cdot\mathbf{A}, w) + D_u(\nabla u, \nabla w) = (\gamma\alpha - \gamma u, w) + \langle \gamma u^2 v, w\rangle, \tag{2.2.54}$$

$$\langle v', w\rangle + ((\nabla\cdot\mathbf{A})v, w) + (\nabla v\cdot\mathbf{A}, w) + D_v(\nabla v, \nabla w) = (\gamma b, w) + \langle \gamma u^2 v, w\rangle, \tag{2.2.55}$$

για κάθε $z \in H^1(\Omega)$ και σ.π. στο χρόνο $0 \le t \le T$. Επιπλέον, αναδιαμορφώνοντας τις παραπάνω εξισώσεις

$$\langle u', w\rangle = -((\nabla\cdot\mathbf{A})u, w) - (\nabla u\cdot\mathbf{A}, w) - D_u(\nabla u, \nabla w) + (\gamma\alpha - \gamma u, w) + \langle \gamma u^2 v, w\rangle,$$

$$\langle v', w\rangle = -((\nabla\cdot\mathbf{A})v, w) - (\nabla v\cdot\mathbf{A}, w) - D_v(\nabla v, \nabla w) + (\gamma b, w) + \langle \gamma u^2 v, w\rangle,$$

βλέπουμε ότι $u', v' \in L^2[0,T;(H^1(\Omega))^*] + L^{4/3}[0,T;L^{4/3}]$.
Τώρα απομένει να δείξουμε ότι $\boxed{\text{u(0,x)= g(x)}}$ και $\boxed{\text{v(0,x)=h(x)}}$. Διαλέγοντας $w \in C^1([0,T];H^1(\Omega))$ με $v(T,x) = 0$, παρατηρούμε ότι

$$\int_0^T -\langle u, w'\rangle dt + \int_0^T ((\nabla\cdot\mathbf{A})u, w) + (\nabla u\cdot\mathbf{A}, w) + D_u(\nabla u, \nabla w)dt = \int_0^T (\gamma\alpha - \gamma u, w)dt + \int_0^T \langle \gamma u^2 v, w\rangle dt + (u(0), w(0)),$$

$$\int_0^T -\langle v, w'\rangle dt + \int_0^T ((\nabla\cdot\mathbf{A})v, w) + (\nabla v\cdot\mathbf{A}, w) + D_v(\nabla v, \nabla w)dt = \int_0^T (\gamma b, w)dt + \int_0^T \langle \gamma u^2 v, w\rangle dt + (v(0), w(0)).$$

Τότε, παρόμοια με τις (2.2.50) και (2.2.51) διαπιστώνουμε ότι

$$\int_0^T -\langle u_m, w'\rangle dt + \int_0^T ((\nabla\cdot\mathbf{A})u_m, w) + (\nabla u_m\cdot\mathbf{A}, w) + D_u(\nabla u_m, \nabla w)dt = \int_0^T (\gamma\alpha - \gamma u_m, w)dt + \int_0^T \langle \gamma u_m^2 v_m, w\rangle dt + (u_m(0), w(0)),$$

$$\int_0^T -\langle v_m, w'\rangle dt + \int_0^T ((\nabla\cdot\mathbf{A})v_m, w) + (\nabla v_m\cdot\mathbf{A}, w) + D_v(\nabla v_m, \nabla w)dt = \int_0^T (\gamma b, w)dt + \int_0^T \langle \gamma u_m^2 v_m, w\rangle dt + (v_m(0), w(0)),$$

και τελικά περνώντας ξανά τα όρια όμοια με πριν παίρνουμε ότι

$$\int_0^T -\langle u, w'\rangle dt + \int_0^T ((\nabla\cdot\mathbf{A})u, w) + (\nabla u\cdot\mathbf{A}, w) + D_u(\nabla u, \nabla w)dt$$
$$= \int_0^T (\gamma\alpha - \gamma u, w)dt + \int_0^T \langle \gamma u^2 v, w\rangle dt + (g, w(0)),$$

$$\int_0^T -\langle v, w'\rangle dt + \int_0^T ((\nabla\cdot\mathbf{A})v, w) + (\nabla v\cdot\mathbf{A}, w) + D_v(\nabla v, \nabla w)dt$$
$$= \int_0^T (\gamma b, w)dt + \int_0^T \langle \gamma u^2 v, w\rangle dt + (h, w(0)),$$

εφόσον, $u_m(0,x) \longrightarrow g$ και $u_m(0,x) \longrightarrow g$ στον $L^2(\Omega)$. Έτσι, έχουμε ότι $\boxed{\text{u(0,x)= g(x)}}$, $\boxed{\text{v(0,x)=h(x)}}$ και άρα τελειώνει η απόδειξη για $n = 2$ διαστάσεις. Για τις $n = 3$ διαστάσεις, όπως θα δούμε, η αποδείξη είναι ίδια, απλά θα χρησιμοποιήσουμε διαφορετικές εμφυτεύσεις.

Περίπτωση ΙΙ : Για $\boxed{\text{n=3}}$.
Θεωρούμε την σχέση (2.2.4), επιλέγουμε πάλι N και διαλέγουμε συνάρτηση $w \in C^1([0,T], H^1(\Omega))$ της μορφής

$$w(t,x) = \sum_{k=1}^{N} d^k(t) w_k, \tag{2.2.56}$$

όπου $\{d^k\}_{k=1}^N$ είναι δεδομένες ομαλές συναρτήσεις. Τότε, διαλέγουμε $m \geq N$, πολλαπλασιάζουμε τις δύο πρώτες εξισώσεις της (2.2.4), προσθέτουμε για $k = 1, \cdots, N$ και ολοκληρώνουμε ως προς τον χρόνο t για να βρούμε :

$$\int_0^T \langle u_m', w\rangle dt + \int_0^T ((\nabla\cdot\mathbf{A})u_m, w) + (\nabla u_m\cdot\mathbf{A}, w) + (D_u\nabla u_m, \nabla w)dt$$
$$= \int_0^T (\gamma\alpha - \gamma u_m, w)dt + \int_0^T \langle \gamma u_m^2 v_m, w\rangle dt, \tag{2.2.57}$$

$$\int_0^T \langle v_m', w\rangle dt + \int_0^T ((\nabla\cdot\mathbf{A})v_m, w) + (\nabla v_m\cdot\mathbf{A}, w) + (D_u\nabla v_m, \nabla w)dt$$
$$= \int_0^T (\gamma b, w)dt + \int_0^T \langle \gamma u_m^2 v_m, w\rangle dt. \tag{2.2.58}$$

Είμαστε, πλέον, σε θέση να περάσουμε τα όρια, κάνοντας κατάλληλη χρήση του Θεωρήματος 2.2.7 :

i) Έχουμε από την ασθενή σύγκλιση στον $L^{6/5}[0,T;(H^1(\Omega)^*)]$:

$$\int_0^T \langle u_m', w\rangle dt \longrightarrow \int_0^T \langle u', w\rangle dt,$$

$$\int_0^T \langle v_m', w\rangle dt \longrightarrow \int_0^T \langle v', w\rangle dt,$$

εφόσον γνωρίζουμε ότι $w \in C^1([0,T]; H^1(\Omega))$ και $C^1([0,T]; H^1(\Omega)) \hookrightarrow L^6[0,T; H^1(\Omega)] \equiv \big(L^{6/5}[0,T; (H^1(\Omega)^*)]\big)^*$, από τις Γενικευμένες Ανισότητες 1.4.4 και το Θεώρημα συμπάγειας Rellich-Kondrachov 1.4.5.

ii) Έχουμε από την ισχυρή σύγκλιση στον $L^2[0,T; L^2(\Omega)]$:

$$\int_0^T \langle u_m, w\rangle dt = \int_0^T (u_m, w) dt \longrightarrow \int_0^T (u, w) dt,$$

$$\int_0^T \langle v_m, w\rangle dt = \int_0^T (v_m, w) dt \longrightarrow \int_0^T (v, w) dt,$$

εφόσον γνωρίζουμε ότι $w \in C^1([0,T]; H^1(\Omega))$, ενώ $C^1([0,T]; H^1(\Omega)) \hookrightarrow L^2[0,T; L^2(\Omega)]$, από το Θεώρημα συμπάγειας Rellich-Kondrachov 1.4.5, $H^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow (H^1(\Omega))^*$.

iii) Έχουμε από την ασθενή σύγκλιση στον $L^2[0,T; L^2(\Omega)]$ της βαθμίδας :

$$\int_0^T (\nabla u_m, w) dt \longrightarrow \int_0^T (\nabla u, w) dt,$$

$$\int_0^T (\nabla v_m, w) dt \longrightarrow \int_0^T (\nabla v, w) dt,$$

εφόσον γνωρίζουμε ότι $w \in C^1([0,T]; H^1(\Omega))$, ενώ $C^1([0,T]; H^1(\Omega)) \hookrightarrow L^2[0,T; L^2(\Omega)]$, από το Θεώρημα συμπάγειας Rellich-Kondrachov 1.4.5, $H^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow (H^1(\Omega))^*$.

iv) Έχουμε από την ασθενή σύγκλιση στον $L^2[0,T; L^2(\Omega)]$ της βαθμίδας :

$$\int_0^T (\nabla u_m, \nabla w) dt \longrightarrow \int_0^T (\nabla u, \nabla w) dt,$$

$$\int_0^T (\nabla v_m, \nabla w) dt \longrightarrow \int_0^T (\nabla v, \nabla w) dt,$$

εφόσον γνωρίζουμε ότι $\nabla w \in C^1([0,T]; L^2(\Omega))$, ενώ $C^1([0,T]; L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2[0,T; L^2(\Omega)]$.

v) Έχουμε από την ασθενή σύγκλιση στον $\mathrm{L}^{6/5}[0,T; L^{6/5}(\Omega)]$:

$$\int_0^T \langle f(u_m, v_m), w\rangle_{L^{6/5}, H^1(\Omega)} dt \longrightarrow \int_0^T \langle f(u, v), w\rangle_{L^{6/5}, H^1(\Omega)} dt,$$

φόσον γνωρίζουμε ότι $w \in C^1([0,T]; H^1(\Omega))$, ενώ $C^1([0,T]; H^1(\Omega)) \hookrightarrow L^6[0,T; L^6(\Omega)] \equiv \big(L^{6/5}[0,T; L^{6/5}(\Omega)]\big)^*$, από από τις Γενικευμένες Ανισότητες 1.4.4 ($H^1(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$) και επομένως $L^{6/5}(\Omega) \hookrightarrow (H^1(\Omega))^*$. Άρα μπορεί να ξαναγραφτεί ως εξής :

$$\int_0^T \langle f(u_m, v_m), w\rangle_{L^{6/5}, H^1(\Omega)} dt = \int_0^T \langle f(u_m, v_m), w\rangle dt \longrightarrow \int_0^T \langle f(u, v), w\rangle dt.$$

Εν τέλει περνώντας τα ασθενή όρια στις σχέσεις (2.2.57) και (2.2.58), αφού $\mathbf{A} = ((A^i(x,t)))$ τέτοιο ώστε $\boxed{A^i \in L^\infty(\Omega_T)}$ $\forall i = 1, 2, ...n,$ και $\boxed{\nabla \cdot \mathbf{A} \in L^\infty(\Omega_T)}$, διαπιστώνουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_0^T \langle u', w\rangle dt + \int_0^T ((\nabla \cdot \mathbf{A})u, w) + (\nabla u \cdot \mathbf{A}, w) + D_u(\nabla u, \nabla w)dt \\ = \int_0^T (\gamma\alpha - \gamma u, w)dt + \int_0^T \langle \gamma u^2 v, w\rangle dt,\end{aligned} \tag{2.2.59}$$

$$\begin{aligned}\int_0^T \langle v', w\rangle dt + \int_0^T ((\nabla \cdot \mathbf{A})v, w) + (\nabla v \cdot \mathbf{A}, w) + D_v(\nabla v, \nabla w)dt \\ = \int_0^T (\gamma b, w)dt + \int_0^T \langle \gamma u^2 v, w\rangle dt,\end{aligned} \tag{2.2.60}$$

και αυτές οι ισότητες μάλιστα θα ισχύουν για κάθε συνάρτηση $w \in L^6[0,T; H^1(\Omega)]$, αφού συναρτήσεις της μορφή (2.2.56) είναι πυκνές στον χώρο αυτό. Συνεπώς, συγκεκριμένα έχουμε

$$\langle u', w\rangle + ((\nabla \cdot \mathbf{A})u, w) + (\nabla u \cdot \mathbf{A}, w) + D_u(\nabla u, \nabla w) = (\gamma\alpha - \gamma u, w) + \langle \gamma u^2 v, w\rangle, \tag{2.2.61}$$

$$\langle v', w\rangle + ((\nabla \cdot \mathbf{A})v, w) + (\nabla v \cdot \mathbf{A}, w) + D_v(\nabla v, \nabla w) = (\gamma b, w) + \langle \gamma u^2 v, w\rangle, \tag{2.2.62}$$

για κάθε $z \in H^1(\Omega)$ και σ.π. στο χρόνο $0 \le t \le T$. Επιπλέον, αναδιαμορφώνοντας τις παραπάνω εξισώσεις

$$\langle u', w\rangle = -((\nabla \cdot \mathbf{A})u, w) - (\nabla u \cdot \mathbf{A}, w) - D_u(\nabla u, \nabla w) + (\gamma\alpha - \gamma u, w) + \langle \gamma u^2 v, w\rangle,$$

$$\langle v', w\rangle = -((\nabla \cdot \mathbf{A})v, w) - (\nabla v \cdot \mathbf{A}, w) - D_v(\nabla v, \nabla w) + (\gamma b, w) + \langle \gamma u^2 v, w\rangle,$$

βλέπουμε ότι $u', v' \in L^2[0,T; (H^1(\Omega))^*] + L^{6/5}[0,T; L^{6/5}]$.
Τώρα απομένει να δείξουμε ότι $\boxed{\text{u(0,x)= g(x)}}$ και $\boxed{\text{v(0,x)=h(x)}}$. Διαλέγοντας $w \in C^1([0,T]; H^1(\Omega))$ με $v(T,x) = 0$, παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\int_0^T -\langle u, w'\rangle dt + \int_0^T ((\nabla \cdot \mathbf{A})u, w) + (\nabla u \cdot \mathbf{A}, w) + D_u(\nabla u, \nabla w)dt \\ = \int_0^T (\gamma\alpha - \gamma u, w)dt + \int_0^T \langle \gamma u^2 v, w\rangle dt + (u(0), w(0)),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^T -\langle v, w'\rangle dt + \int_0^T ((\nabla \cdot \mathbf{A})v, w) + (\nabla v \cdot \mathbf{A}, w) + D_v(\nabla v, \nabla w)dt \\ = \int_0^T (\gamma b, w)dt + \int_0^T \langle \gamma u^2 v, w\rangle dt + (v(0), w(0)).\end{aligned}$$

Τότε, παρόμοια με τις (2.2.57) και (2.2.58) διαπιστώνουμε ότι

$$\int_0^T -\langle u_m, w'\rangle dt + \int_0^T ((\nabla\cdot\mathbf{A})u_m, w) + (\nabla u_m\cdot\mathbf{A}, w) + D_u(\nabla u_m, \nabla w)dt$$
$$= \int_0^T (\gamma\alpha - \gamma u_m, w)dt + \int_0^T \langle \gamma u_m^2 v_m, w\rangle dt + (u_m(0), w(0)),$$

$$\int_0^T -\langle v_m, w'\rangle dt + \int_0^T ((\nabla\cdot\mathbf{A})v_m, w) + (\nabla v_m\cdot\mathbf{A}, w) + D_v(\nabla v_m, \nabla w)dt$$
$$= \int_0^T (\gamma b, w)dt + \int_0^T \langle \gamma u_m^2 v_m, w\rangle dt + (v_m(0), w(0)),$$

και τελικά περνώντας ξανά τα όρια όμοια με πριν παίρνουμε ότι

$$\int_0^T -\langle u, w'\rangle dt + \int_0^T ((\nabla\cdot\mathbf{A})u, w) + (\nabla u\cdot\mathbf{A}, w) + D_u(\nabla u, \nabla w)dt$$
$$= \int_0^T (\gamma\alpha - \gamma u, w)dt + \int_0^T \langle \gamma u^2 v, w\rangle dt + (g, w(0)),$$

$$\int_0^T -\langle v, w'\rangle dt + \int_0^T ((\nabla\cdot\mathbf{A})v, w) + (\nabla v\cdot\mathbf{A}, w) + D_v(\nabla v, \nabla w)dt$$
$$= \int_0^T (\gamma b, w)dt + \int_0^T \langle \gamma u^2 v, w\rangle dt + (h, w(0)),$$

εφόσον, $u_m(0,x) \longrightarrow g$ και $u_m(0,x) \longrightarrow g$ στον $L^2(\Omega)$. Έτσι, έχουμε ότι $\boxed{\text{u(0,x)= g(x)}}$, $\boxed{\text{v(0,x)=h(x)}}$ και άρα τελειώνει η απόδειξη για $n = 3$ διαστάσεις. Δείξαμε, τελικώς, το πέρασμα του ορίου των Galerkin (πεπερασμένης διάστασης) προσεγγίσεων, στην αντίστοιχη ασθενή λύση (2.2.1).

■

2.2.4 Μοναδικότητα Ασθενής Λύσης

Στην παρόν παράγραφο θα αποδείξουμε την μοναδικότητα της προηγούμενης ασθενής λύσης, ολοκληρώνοντας την μελέτη του συστήματος Schnakenberg. Για την απόδειξη της μοναδικότητας θα χρειαστούμε διαφορετικά επιχειρήματα για διαφορετικές Διαστάσεις ($n = 2$ ή $n = 3$), καθώς οι ασθενείς λύσεις μας εμφυτεύονται σε διαφορετικούς χώρους.
Για $\boxed{n = 2}$ Διαστάσεις έχουμε ότι

$$u, v \in L^4[0,T; L^4(\Omega)], \tag{2.2.63}$$

εφόσον από Landyzeshkayka-Gagliardo-Nirenberg Ανισότητα και Θεωρήματα 2.2.7, 2.2.8 έχουμε ότι

$$\|u\|^4_{L^4(\Omega)} \le \|u\|^2_{L^2(\Omega)}\|u\|^2_{H^1(\Omega)} \implies \int_0^T \|u\|^4_{L^4(\Omega)}\,dt \le \int_0^T \|u\|^2_{L^2(\Omega)}\|u\|^2_{H^1(\Omega)}\,dt$$
$$\implies \|u\|^4_{L^4[0,T;L^4(\Omega)]} \le \|u\|^2_{L^\infty[0,T;L^2(\Omega)]}\|u\|^2_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]} \le C_1,$$

$$\|v\|^4_{L^4(\Omega)} \leq \|v\|^2_{L^2(\Omega)} \|v\|^2_{H^1(\Omega)} \implies \int_0^T \|v\|^4_{L^4(\Omega)}\, dt \leq \int_0^T \|v\|^2_{L^2(\Omega)} \|v\|^2_{H^1(\Omega)}\, dt$$
$$\implies \|v\|^4_{L^4[0,T;L^4(\Omega)]} \leq \|v\|^2_{L^\infty[0,T;L^2(\Omega)]} \|v\|^2_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]} \leq C_2,$$

όπου οι σταθερές εξαρτώνται απο τα Ω, T, τις σταθερές, τις αρχικές συνθήκες της διαφορικής (2.1.1) και τα φραξήματα των συναρτήσεων u, v σε κατάλληλους χώρους, εφόσον δείξαμε ότι οι ασθενείς λύσεις της διαφορικής (2.1.1) ανήκουν στους χώρους $L^\infty[0,T;L^2(\Omega)]$ και $L^2[0,T;H^1(\Omega)]$ για $n = 2$ Διαστάσεις.
Για $\boxed{n = 3}$ Διαστάσεις έχουμε ότι

$$u, v \in L^{8/3}[0,T;L^4(\Omega)], \tag{2.2.64}$$

εφόσον από Landyzeshkayka-Gagliardo-Nirenberg Ανισότητα και Θεωρήματα 2.2.7, 2.2.8 έχουμε ότι

$$\|u\|^{8/3}_{L^4(\Omega)} \leq \|u\|^{2/3}_{L^2(\Omega)} \|u\|^2_{H^1(\Omega)} \implies \int_0^T \|u\|^{8/3}_{L^4(\Omega)}\, dt \leq \int_0^T \|u\|^{2/3}_{L^2(\Omega)} \|u\|^2_{H^1(\Omega)}\, dt$$
$$\implies \|u\|^{8/3}_{L^4[0,T;L^4(\Omega)]} \leq \|u\|^{3/2}_{L^\infty[0,T;L^2(\Omega)]} \|u\|^2_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]} \leq C_1,$$

$$\|v\|^{8/3}_{L^4(\Omega)} \leq \|v\|^{2/3}_{L^2(\Omega)} \|v\|^2_{H^1(\Omega)} \implies \int_0^T \|v\|^{8/3}_{L^4(\Omega)}\, dt \leq \int_0^T \|v\|^{2/3}_{L^2(\Omega)} \|v\|^2_{H^1(\Omega)}\, dt$$
$$\implies \|v\|^{8/3}_{L^4[0,T;L^4(\Omega)]} \leq \|v\|^{3/2}_{L^\infty[0,T;L^2(\Omega)]} \|v\|^2_{L^2[0,T;H^1(\Omega)]} \leq C_2,$$

όπου οι σταθερές εξαρτώνται απο τα Ω, T, τις σταθερές και τις αρχικές συνθήκες της διαφορικής (2.1.1), εφόσον δείξαμε ότι οι ασθενείς λύσεις της διαφορικής (2.1.1) ανήκουν στους χώρους $L^\infty[0,T;L^2(\Omega)]$ και $L^2[0,T;H^1(\Omega)]$ για $n = 3$ Διαστάσεις.
Στην συνέχεια δείχνουμε τη μοναδικότητα της ασθενής λύσης με το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 2.2.9 (Μοναδικότητα ασθενούς λύσης). *Υπάρχει μοναδική ασθενής λύση του συστήματος Schnakenberg* (2.1.1)*, όπως περιγράφθηκε στην διατύπωση* (2.2.1).

Απόδειξη. Θεωρώ αρχικά δύο λύσεις u, v και $\overline{u}, \overline{v}$ οι οποίες έχουν τα ίδια αρχικά δεδομένα $g(x), h(x)$. Τότε η $\boxed{\eta = v - \overline{v}}$ και $\boxed{\theta = u - \overline{u}}$ είναι λύση με μηδενικά αρχικά δεδομένα $h = g = 0$. Για να αποδειχθεί η μοναδικότητα, αρκεί να δείξουμε ότι η μόνη ασθενή λύση με μηδενικά δεδομένα είναι η $\boxed{\eta = \theta = 0}$.

Εφόσον πραγματοποιήσουμε τις κατάλληλες πράξεις, κυρίως θεωρώντας δύο διαφορετικές λύσεις για την ασθενή μορφή του μοντέλου Schnakenberg (2.1.1) και παίρνοντας, εν τέλει, την διαφορά τους, λόγω της γραμμικότητας του αριστερού μέλους, είμαστε σε θέση να οδηγηθούμε, πλέον, από την εξίσωση (2.2.1) της ασθενής μορφή του, στο παρακάτω σύστημα με μηδενικά αρχικά δεδομένα

(2.2.65)
$$\begin{cases} \langle \theta', w\rangle + ((\nabla\cdot\mathbf{A})\theta, w) + (\mathbf{A}\cdot\nabla\theta, w) + D_u(\nabla\theta, \nabla w) &= -\gamma(\theta, w) + \gamma(u^2 v - \overline{u}^2\overline{v}, w), \\ \langle \eta', w\rangle + ((\nabla\cdot\mathbf{A})\eta, w) + (\mathbf{A}\cdot\nabla\eta, w) + D_v(\nabla\eta, \nabla w) &= -\gamma(u^2 v - \overline{u}^2\overline{v}, w), \\ \dfrac{\partial\theta}{\partial n} = \dfrac{\partial\eta}{\partial n} &= 0 \qquad \text{on } (0,T]\times\partial\Omega, \\ \theta(0,x) &= 0 \qquad \text{in } \{t=0\}\times\Omega, \\ \eta(0,x) &= 0 \qquad \text{in } \{t=0\}\times\Omega, \end{cases}$$

για σ.π. $0 \leq t \leq T$ και για κάθε $w \in H^1(\Omega)$. Επιπλέον, επειδή γνωρίζουμε ότι $\eta(t),\ \theta(t) \in H^1(\Omega)$, μπορούμε να θεωρήσουμε, πλέον, $w = \eta(t)$ και $w = \theta(t)$, ως συναρτήσεις ελέγχου (ή διαφορετικά γνωστές ως βοηθητικές συναρτήσεις) και να τις αντικαταστήσουμε στην παραπάνω εξίσωση (2.2.65), ώστε να οδηγηθούμε στο εξής αποτέλεσμα για τις δύο συναρτήσεις διαφορών,

(2.2.66)
$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\Big(\dfrac{1}{2}\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)}\Big) + ((\nabla\cdot\mathbf{A})\theta,\theta) + (\mathbf{A}\cdot\nabla\theta,\theta) & +D_u\|\nabla\theta\|^2_{L^2(\Omega)} \\ & = -\gamma\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)} + \gamma(u^2v - \overline{u}^2\overline{v},\theta), \\ \dfrac{d}{dt}\Big(\dfrac{1}{2}\|\eta\|^2_{L^2(\Omega)}\Big) + ((\nabla\cdot\mathbf{A})\eta,\eta) + (\mathbf{A}\cdot\nabla\eta,\eta) & +D_v\|\nabla\eta\|^2_{L^2(\Omega)} \\ & = -\gamma(u^2v - \overline{u}^2\overline{v},\eta), \\ \dfrac{\partial\theta}{\partial n} = \dfrac{\partial\eta}{\partial n} & = 0 \qquad \text{on } (0,T]\times\partial\Omega, \\ \theta(0,x) & = 0 \qquad \text{in } \{t=0\}\times\Omega, \\ \eta(0,x) & = 0 \qquad \text{in } \{t=0\}\times\Omega, \end{cases}$$

όπου το σύστημα αυτό ισχύει σημειακά σ.π. στο χρονικό διάστημα [0,T]. Πλέον, είμαστε σε θέση να πάρουμε περιπτώσεις για τις διαφορετικές διαστάσεις του προβλήματος.

Για την περίπτωση $\boxed{n=2}$, μεταφέροντας και προσθαφερόντας τους κατάλληλους όρους στην (2.2.66), λαμβάνουμε ότι

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)}\Big) + D_u\|\nabla\theta\|^2_{L^2(\Omega)} + \gamma\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)} = -((\nabla\cdot\mathbf{A})\theta,\theta) - (\mathbf{A}\cdot\nabla\theta,\theta) \\ &+\gamma(u^2v \pm u^2\overline{v} - \overline{u}^2\overline{v},\theta) \\ &\leq |((\nabla\cdot\mathbf{A})\theta,\theta)| + |(\mathbf{A}\cdot\nabla\theta,\theta)| + \gamma|(u^2(v-\overline{v}) + (u^2-\overline{u}^2)\overline{v},\theta)| \\ &\leq \|\nabla\mathbf{A}\|_{L^\infty(\Omega)}\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \|A^i\|_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega|\nabla\theta||\theta|dx + \gamma\int_\Omega|u^2\eta\theta|dx + \gamma\int_\Omega|\theta^2(u+\overline{u})\overline{v}|dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}\|\eta\|^2_{L^2(\Omega)}\Big) + D_v\|\nabla\eta\|^2_{L^2(\Omega)} = -((\nabla\cdot\mathbf{A})\eta,\eta) - (\mathbf{A}\cdot\nabla\eta,\eta) \\ &-\gamma(u^2v \pm u^2\overline{v} - \overline{u}^2\overline{v},\eta) \\ &\leq |((\nabla\cdot\mathbf{A})\eta,\eta)| + |(\mathbf{A}\cdot\nabla\eta,\eta)| + \gamma|(u^2(v-\overline{v}) + (u^2-\overline{u}^2)\overline{v},\eta)| \\ &\leq \|\nabla\mathbf{A}\|_{L^\infty(\Omega)}\|\eta\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \|A^i\|_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega|\nabla\eta||\eta|dx + \gamma\int_\Omega|u^2\eta^2|dx + \gamma\int_\Omega|\theta(u+\overline{u})\eta\overline{v}|dx, \end{aligned}$$

για σ.π. στον $0 \leq t \leq T$. Θέτουμε $\boxed{\ell = \sum_{i=1}^n \|A^i\|_{L^\infty(\Omega_T)}}$ και χρησιμοποιώντας την γενικευμένη ανισότητα Young (2.1.3) κατάλληλα για $p = q = 2$ λαμβάνουμε ότι

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)}\Big) &+ D_u\|\nabla\theta\|^2_{L^2(\Omega)} + \gamma\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)}\\ &\le \|\nabla\mathbf{A}\|_{L^\infty(\Omega)}\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)} + \ell\epsilon_1\|\nabla\theta\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\ell}{4\epsilon_1}\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)}\\ &+ \frac{\gamma}{2}\int_\Omega u^2\eta^2dx + \frac{\gamma}{2}\int_\Omega u^2\theta^2dx + \frac{\gamma}{2}\int_\Omega \theta^2(u+\overline{u})^2dx + \frac{\gamma}{2}\int_\Omega \theta^2\overline{v}^2dx,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}\|\eta\|^2_{L^2(\Omega)}\Big) &+ D_v\|\nabla\eta\|^2_{L^2(\Omega)}\\ &\le \|\nabla\mathbf{A}\|_{L^\infty(\Omega)}\|\eta\|^2_{L^2(\Omega)} + \ell\epsilon_1'\|\nabla\eta\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\ell}{4\epsilon_1'}\|\eta\|^2_{L^2(\Omega)}\\ &+ \gamma\int_\Omega u^2\eta^2dx + \frac{\gamma}{2}\int_\Omega \theta^2(u+\overline{u})^2dx + \frac{\gamma}{2}\int_\Omega \eta^2\overline{v}^2dx.\end{aligned}$$

Στην συνέχεια προσθέτουμε τις δύο παραπάνω αυτές ανισότητες ώστε να καταλήξουμε σε μία τρίτη χρήσιμη συνολική ανισότητα

(2.2.67)
$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\eta\|^2_{L^2(\Omega)}\Big) + D_u\|\nabla\theta\|^2_{L^2(\Omega)} + D_v\|\nabla\eta\|^2_{L^2(\Omega)} + \gamma\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)}\\ &\le \|\nabla\mathbf{A}\|_{L^\infty(\Omega)}\big(\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\eta\|^2_{L^2(\Omega)}\big) + \ell\epsilon_1\|\nabla\theta\|^2_{L^2(\Omega)} + \ell\epsilon_1'\|\nabla\eta\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\ell}{4\epsilon_1}\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)}\\ &+ \frac{\ell}{4\epsilon_1'}\|\eta\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\gamma}{2}\int_\Omega u^2\eta^2dx + \frac{3\gamma}{2}\int_\Omega u^2\theta^2dx + \gamma\int_\Omega \theta^2(u+\overline{u})^2dx + \frac{\gamma}{2}\int_\Omega \theta^2\overline{v}^2dx + \frac{\gamma}{2}\int_\Omega \eta^2\overline{v}^2dx\end{aligned}$$

Μένει να φράξουμε τα τελευταία πέντε ολοκληρώματα. Οι πέντε όροι μπορούν να αντιμετωπιστούν με την κατάλληλη χρήση ανισότητας Hölder, των ανισοτήτων Landyzeshkayka-Gagliardo-Nirenberg 2.1.4 για δύο-διαστάσεις και της γενικευμένης ανισότητας Young για $p = 2,\ q = 2$. Η διαδικασία θα είναι ίδια και για τους πέντε όρους και επομένως παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\int_\Omega u^2\eta^2dx &\le \|u^2\|_{L^2(\Omega)}\|\eta^2\|_{L^2(\Omega)} = \|u\|^2_{L^4(\Omega)}\|\eta\|^2_{L^4(\Omega)} \le C\|u\|^2_{L^4(\Omega)}\|\eta\|_{H^1(\Omega)}\|\eta\|_{L^2(\Omega)}\\ &\le C\|u\|^2_{L^4(\Omega)}\left(\|\eta\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\eta\|_{L^2(\Omega)}\right)\|\eta\|_{L^2(\Omega)}\\ &\le C\|u\|^2_{L^4(\Omega)}\|\eta\|^2_{L^2(\Omega)} + C\|u\|^2_{L^4(\Omega)}\|\eta\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\eta\|_{L^2(\Omega)}\\ &\le C\big(\|u\|^2_{L^4(\Omega)} + \frac{1}{4\epsilon_2'}\|u\|^4_{L^4(\Omega)}\big)\|\eta\|^2_{L^2(\Omega)} + C\epsilon_2'\|\nabla\eta\|^2_{L^2(\Omega)}\\ &\le C_{u\epsilon_2'}\|\eta\|^2_{L^2(\Omega)} + C\epsilon_2'\|\nabla\eta\|^2_{L^2(\Omega)},\end{aligned}$$

όπου σαν $C_{u\epsilon_2'}$ θεωρούμε $C_{u\epsilon_2'} = C\big(\|u\|^2_{L^4(\Omega)} + \frac{1}{4\epsilon_2'}\|u\|^4_{L^4(\Omega)}\big)$. Τότε έχουμε την δυνατότητα να γράψουμε τους όλους τους όρους με παρόμοια μορφή. Επομένως, έχουμε τα ακόλουθα φραξήματα των πέντε ολοκληρωμάτων

- $$\begin{aligned}\int_\Omega u^2\eta^2dx &\le C\big(\|u\|^2_{L^4(\Omega)} + \frac{1}{4\epsilon_2'}\|u\|^4_{L^4(\Omega)}\big)\|\eta\|^2_{L^2(\Omega)} + C\epsilon_2'\|\nabla\eta\|^2_{L^2(\Omega)}\\ &\le C_{u\epsilon_2'}\|\eta\|^2_{L^2(\Omega)} + C\epsilon_2'\|\nabla\eta\|^2_{L^2(\Omega)},\end{aligned}$$

- $$\int_\Omega u^2\theta^2 dx \le C\big(\|u\|^2_{L^4(\Omega)} + \frac{1}{4e_2'}\|u\|^4_{L^4(\Omega)}\big)\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)} + C\epsilon_2\|\nabla\theta\|^2_{L^2(\Omega)}$$
$$\le C_{u\epsilon_2}\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)} + C\epsilon_2\|\nabla\theta\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

- $$\int_\Omega (u+\overline{u})^2\theta^2 dx \le C_{(u+\overline{u})\epsilon_3}\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)} + C\epsilon_3\|\nabla\theta\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

- $$\int_\Omega \overline{v}^2\theta^2 dx \le C\big(\|\overline{v}\|^2_{L^4(\Omega)} + \frac{1}{4\epsilon_4}\|\overline{v}\|^4_{L^4(\Omega)}\big)\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)} + C\epsilon_4\|\nabla\theta\|^2_{L^2(\Omega)}$$
$$\le C_{\overline{v}\epsilon_4}\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)} + C\epsilon_4\|\nabla\theta\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

- $$\int_\Omega \overline{v}^2\eta^2 dx \le C\big(\|\overline{v}\|^2_{L^4(\Omega)} + \frac{1}{4\epsilon_4'}\|\overline{v}\|^4_{L^4(\Omega)}\big)\|\eta\|^2_{L^2(\Omega)} + C\epsilon_4'\|\nabla\eta\|^2_{L^2(\Omega)}$$
$$\le C_{\overline{v}\epsilon_4'}\|\eta\|^2_{L^2(\Omega)} + C\epsilon_4'\|\nabla\eta\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Χρησιμοποιώντας τους παραπάνω υπολογισμούς, επιστρέφουμε στην εξίσωση (2.2.67) και με βασικές πράξεις καταλήγουμε

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\eta\|^2_{L^2(\Omega)}\Big) + D_u\|\nabla\theta\|^2_{L^2(\Omega)} + D_v\|\nabla\eta\|^2_{L^2(\Omega)} + \gamma\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)}$$
$$\le \max\Big(\|\nabla\mathbf{A}\|_{L^\infty(\Omega)}, \frac{\ell}{4\epsilon_1}, \frac{\ell}{4\epsilon_1'}, \frac{\gamma C_{u\epsilon_2'}}{2}, \frac{3\gamma C_{u\epsilon_2}}{2}, \gamma C_{(u+\overline{u})\epsilon_3}, \frac{\gamma C_{\overline{v}\epsilon_4}}{2}, \frac{\gamma C_{\overline{v}\epsilon_4'}}{2}\Big)\big(\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\eta\|^2_{L^2(\Omega)}\big)$$
$$+ \ell\epsilon_1\|\nabla\theta\|^2_{L^2(\Omega)} + \ell\epsilon_1'\|\nabla\eta\|^2_{L^2(\Omega)} + C\gamma(\frac{\epsilon_2'}{2} + \frac{\epsilon_4'}{2})\|\nabla\eta\|^2_{L^2(\Omega)} + C\gamma(\frac{3\epsilon_2}{2} + \epsilon_3 + \frac{\epsilon_4}{2})\|\nabla\theta\|^2_{L^2(\Omega)},$$

όπου με μία απλή εφαρμογή ενός Kickback argument με την καταλάλληλη επιλογή των $\epsilon_i,\ \epsilon_i'\ i = 1, ..., 4$, συγκεκριμένα $\epsilon_1 = \frac{D_u}{2\ell}, \frac{3\epsilon_2}{2} = \epsilon_3 = \frac{\epsilon_4}{2} = \frac{D_u}{6C\gamma}$ και $\epsilon_1' = \frac{D_v}{2\ell}, \frac{\epsilon_2'}{2} = \frac{\epsilon_4'}{2} = \frac{D_u}{4C\gamma}$, καταλαβαίνουμε ότι

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\eta\|^2_{L^2(\Omega)}\Big) \le \frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\eta\|^2_{L^2(\Omega)}\Big) + \gamma\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)}$$
$$\le \max\Big(\|\nabla\mathbf{A}\|_{L^\infty(\Omega)}, \frac{\ell^2}{2D_u}, \frac{\ell^2}{2D_v}, \frac{\gamma C_{u\epsilon_2'}}{2}, \frac{3\gamma C_{u\epsilon_2}}{2}, \gamma C_{(u+\overline{u})\epsilon_3}, \frac{\gamma C_{\overline{v}\epsilon_4}}{2}, \frac{\gamma C_{\overline{v}\epsilon_4'}}{2}\Big)\big(\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\eta\|^2_{L^2(\Omega)}\big),$$

και άρα συνολικά παίρνουμε την παρακάτω χρήσιμη διαφορική ανισότητα

$$\frac{d}{dt}\Big(\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\eta\|^2_{L^2(\Omega)}\Big)$$
$$\le 2\max\Big(\|\nabla\mathbf{A}\|_{L^\infty(\Omega)}, \frac{\ell^2}{2D_u}, \frac{\ell^2}{2D_v}, \frac{\gamma C_{u\epsilon_2'}}{2}, \frac{3\gamma C_{u\epsilon_2}}{2}, \gamma C_{(u+\overline{u})\epsilon_3}, \frac{\gamma C_{\overline{v}\epsilon_4}}{2}, \frac{\gamma C_{\overline{v}\epsilon_4'}}{2}\Big)\big(\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\eta\|^2_{L^2(\Omega)}\big).$$

Σε αυτό το σημείο εφαρμόζουμε την Gronwall Ανισότητα (2.1.7), από την οποία συνεπάγεται ότι

$$\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\eta\|^2_{L^2(\Omega)}$$
$$\leq e^{\int_0^t 2\max\left(\|\nabla \mathbf{A}\|_{L^\infty(\Omega)}, \frac{\ell^2}{2D_u}, \frac{\ell^2}{2D_v}, \frac{\gamma C_{u\epsilon_2'}}{2}, \frac{3\gamma C_{u\epsilon_2}}{2}, \gamma C_{(u+\overline{u})\epsilon_3}, \frac{\gamma C_{\overline{v}\epsilon_4}}{2}, \frac{\gamma C_{\overline{v}\epsilon_4'}}{2}\right) ds} \left(\|\theta(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\eta(0)\|^2_{L^2(\Omega)} \right),$$

όπου όμως κάθε ποσότητα μέσα στο ολοκλήρωμα είναι ολοκληρώσιμη και άρα φραγμένη. Συγκεκριμένα, οι τρεις πρώτοι όροι είναι προφρανείς, ενώ για τους υπόλοιπους αρκεί η παρατήρηση που έγινε στην αρχή στην σχέση (2.2.63) , όπου γνωρίζουμε ότι οποιαδήποτε ασθενής λύση της διαφορικής θα ανήκει εν τέλει στον χώρο $L^4[0,T;L^4(\Omega)]$. Τότε $u, \overline{v}, u+\overline{u} \in L^4[0,T;L^4(\Omega)]$ και λόγω του εγκλισμού $L^4[0,T;L^4(\Omega)] \hookrightarrow L^2[0,T;L^4(\Omega)]$ έχουμε επιπλέον $u, \overline{v}, u+\overline{u} \in L^2[0,T;L^4(\Omega)]$. Τότε για την επιλογή των $\epsilon_i,\ \epsilon_i'$ $i=1,...,4$ που ήδη πραγματοποιήθηκε έχουμε ότι $C_{u\epsilon_2'}, C_{u\epsilon_2}, C_{(u+\overline{u})\epsilon_3}, C_{\overline{v}\epsilon_4}, C_{\overline{v}\epsilon_4'} \in L^4[0,T;L^4(\Omega)]$. Όμως, από την (2.2.65) παρατηρούμε ότι θα ισχύει $\|u(0)\|_{L^2(\Omega)} = \|u(0)\|_{L^2(\Omega)} = 0$ από όπου συνεπάγεται ότι

$$\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\eta\|^2_{L^2(\Omega)} = 0,$$

και επομένως έχουμε ότι

$$\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)} = 0,$$
$$\|\eta\|^2_{L^2(\Omega)} = 0,$$

για κάθε $t \geq 0$, οπότε $\boxed{\eta = 0}$, $\boxed{\theta = 0}$, και επομένως απόδήχθηκε η μοναδικότητα της ασθενής λύσης για στο Δισδιάστατο πρόβλημα.

Για την περίπτωση $\boxed{n=3}$, μεταφέροντας και προσθαφερόντας τους κατάλληλους όρους στην (2.2.66), λαμβάνουμε ότι

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)}\right) + D_u\|\nabla\theta\|^2_{L^2(\Omega)} + \gamma\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)} = -((\nabla\cdot\mathbf{A})\theta,\theta) - (\mathbf{A}\cdot\nabla\theta,\theta)\\
&+\gamma(u^2v \pm u^2\overline{v} - \overline{u}^2\overline{v},\theta)\\
&\leq |((\nabla\cdot\mathbf{A})\theta,\theta)| + |(\mathbf{A}\cdot\nabla\theta,\theta)| + \gamma|(u^2(v-\overline{v})(u-\overline{u}^2)\overline{v},\theta)|\\
&\leq \|\nabla\mathbf{A}\|_{L^\infty(\Omega)}\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left\|A^i\right\|_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega |\nabla\theta||\theta|dx\\
&+\gamma\int_\Omega |u^2\eta\theta|dx + \gamma\int_\Omega |\theta^2(u+\overline{u})\overline{v}|dx,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|\eta\|^2_{L^2(\Omega)}\right) + D_v\|\nabla\eta\|^2_{L^2(\Omega)} = -((\nabla\cdot\mathbf{A})\eta,\eta) - (\mathbf{A}\cdot\nabla\eta,\eta)\\
&-\gamma(u^2v \pm u^2\overline{v} - \overline{u}^2\overline{v},\eta)\\
&\leq |((\nabla\cdot\mathbf{A})\eta,\eta)| + |(\mathbf{A}\cdot\nabla\eta,\eta)| + \gamma|(u^2(v-\overline{v})(u-\overline{u}^2)\overline{v},\eta)|\\
&\leq \|\nabla\mathbf{A}\|_{L^\infty(\Omega)}\|\eta\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left\|A^i\right\|_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega |\nabla\eta||\eta|dx\\
&+\gamma\int_\Omega |u^2\eta^2|dx + \gamma\int_\Omega |\theta(u+\overline{u})\eta\overline{v}|dx,
\end{aligned}$$

για σ.π. στον $0 \leq t \leq T$. Θέτουμε $\boxed{\ell = \sum_{i=1}^{n} \|A^i\|_{L^\infty(\Omega)}}$ και χρησιμοποιώντας την γενικευμένη ανισότητα Young (2.1.3) κατάλληλα για $p = q = 2$ λαμβάνουμε ότι

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)}\Big) + D_u\|\nabla\theta\|^2_{L^2(\Omega)} + \gamma\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\qquad \leq \|\nabla\mathbf{A}\|_{L^\infty(\Omega)}\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)} + \ell\epsilon_1\|\nabla\theta\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\ell}{4\epsilon_1}\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\qquad + \frac{\gamma}{2}\int_\Omega u^2\eta^2 dx + \frac{\gamma}{2}\int_\Omega u^2\theta^2 dx + \frac{\gamma}{2}\int_\Omega \theta^2(u+\overline{u})^2 dx + \frac{\gamma}{2}\int_\Omega \theta^2\overline{v}^2 dx,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}\|\eta\|^2_{L^2(\Omega)}\Big) + D_v\|\nabla\eta\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\qquad \leq \|\nabla\mathbf{A}\|_{L^\infty(\Omega)}\|\eta\|^2_{L^2(\Omega)} + \ell\epsilon_1'\|\nabla\eta\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\ell}{4\epsilon_1'}\|\eta\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\qquad + \gamma\int_\Omega u^2\eta^2 dx + \frac{\gamma}{2}\int_\Omega \theta^2(u+\overline{u})^2 dx + \frac{\gamma}{2}\int_\Omega \eta^2\overline{v}^2 dx.
\end{aligned}$$

Στην συνέχεια προσθέτουμε τις δύο παραπάνω αυτές ανισότητες ώστε να καταλήξουμε σε μία τρίτη χρήσιμη συνολική ανισότητα

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\eta\|^2_{L^2(\Omega)}\Big) + D_u\|\nabla\theta\|^2_{L^2(\Omega)} + D_v\|\nabla\eta\|^2_{L^2(\Omega)} + \gamma\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \|\nabla\mathbf{A}\|_{L^\infty(\Omega)}\big(\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\eta\|^2_{L^2(\Omega)}\big) + \ell\epsilon_1\|\nabla\theta\|^2_{L^2(\Omega)} + \ell\epsilon_1'\|\nabla\eta\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\ell}{4\epsilon_1}\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&+ \frac{\ell}{4\epsilon_1'}\|\eta\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\gamma}{2}\int_\Omega u^2\eta^2 dx + \frac{\gamma}{2}\int_\Omega u^2\theta^2 dx + \gamma\int_\Omega \theta^2(u+\overline{u})^2 dx + \frac{\gamma}{2}\int_\Omega \theta^2\overline{v}^2 dx + \frac{\gamma}{2}\int_\Omega \eta^2\overline{v}^2 dx,
\end{aligned}$$

ενώ παράλληλα προσθαφαιρούμε τους όρους, $D_v\|\eta\|^2_{L^2(\Omega)}$ και $D_u\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)}$, και χρησιμοποιούμε την γνωστή σχέση $\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|^2_{H^1(\Omega)}$ για $u \in H^1(\Omega)$, ώστε να σχηματιστεί η παρακάτω ανισοτική σχέση

(2.2.68)
$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\eta\|^2_{L^2(\Omega)}\Big) + D_u\|\theta\|^2_{H^1(\Omega)} + D_v\|\eta\|^2_{H^1(\Omega)} + \gamma\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \|\nabla\mathbf{A}\|_{L^\infty(\Omega)}\big(\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\eta\|^2_{L^2(\Omega)}\big) + \ell\epsilon_1\|\theta\|^2_{H^1(\Omega)} + \ell\epsilon_1'\|\eta\|^2_{H^1(\Omega)} \\
&+ (\frac{\ell}{4\epsilon_1} + D_u)\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)} + (\frac{\ell}{4\epsilon_1'} + D_v)\|\eta\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&+ \frac{\gamma}{2}\int_\Omega u^2\eta^2 dx + \frac{\gamma}{2}\int_\Omega u^2\theta^2 dx + \gamma\int_\Omega \theta^2(u+\overline{u})^2 dx + \frac{\gamma}{2}\int_\Omega \theta^2\overline{v}^2 dx + \frac{\gamma}{2}\int_\Omega \eta^2\overline{v}^2 dx.
\end{aligned}$$

Μένει να φράξουμε τα τελευταία πέντε ολοκληρώματα. Οι πέντε όροι μπορούν να αντιμετωπιστούν με την κατάλληλη χρήση ανισότητας Hölder, των ανισοτήτων Landyzeshkayka-Gagliardo-Nirenberg για τρεις-διαστάσεις και της γενικευμένης ανισότητας Young για $p = 4,\ q = 4/3$. Η διαδικασία θα είναι ίδια και για τους πέντε όρους και επομένως παρατηρούμε ότι

$$\int_\Omega u^2\eta^2 dx \leq \left\|u^2\right\|_{L^2(\Omega)} \left\|\eta^2\right\|_{L^2(\Omega)} = \|u\|^2_{L^4(\Omega)} \|\eta\|^2_{L^4(\Omega)} \leq C \|u\|^2_{L^4(\Omega)} \|\eta\|^{3/2}_{H^1(\Omega)} \|\eta\|^{1/2}_{L^2(\Omega)}$$
$$\overset{Young}{\leq} \frac{C}{4\epsilon_2'} \|\eta\|^2_{L^2(\Omega)} + C\epsilon_2' \|u\|^{8/3}_{L^4(\Omega)} \|\eta\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Τότε μπορούμε να γράψουμε τους όλους τους όρους με παρόμοια μόρφη. Επομένως, έχουμε τα ακόλουθα φραξήματα των πέντε ολοκληρωμάτων

- $\displaystyle\int_\Omega u^2\eta^2 dx \leq \frac{C}{4\epsilon_2'} \|\eta\|^2_{L^2(\Omega)} + C\epsilon_2' \|u\|^{8/3}_{L^4(\Omega)} \|\eta\|^2_{H^1(\Omega)}.$
- $\displaystyle\int_\Omega u^2\theta^2 dx \leq \frac{C}{4\epsilon_2} \|\theta\|^2_{L^2(\Omega)} + C\epsilon_2 \|u\|^{8/3}_{L^4(\Omega)} \|\theta\|^2_{H^1(\Omega)}.$
- $\displaystyle\int_\Omega (u+\overline{u})^2\theta^2 dx \leq \frac{C}{4\epsilon_3} \|\theta\|^2_{L^2(\Omega)} + C\epsilon_3 \|u+\overline{u}\|^{8/3}_{L^4(\Omega)} \|\theta\|^2_{H^1(\Omega)}.$
- $\displaystyle\int_\Omega \overline{v}^2\theta^2 dx \leq \frac{C}{4\epsilon_4} \|\theta\|^2_{L^2(\Omega)} + C\epsilon_4 \|\overline{v}\|^{8/3}_{L^4(\Omega)} \|\theta\|^2_{H^1(\Omega)}.$
- $\displaystyle\int_\Omega \overline{v}^2\eta^2 dx \leq \frac{C}{4\epsilon_4'} \|\eta\|^2_{L^2(\Omega)} + C\epsilon_4' \|\overline{v}\|^{8/3}_{L^4(\Omega)} \|\eta\|^2_{H^1(\Omega)}.$

Χρησιμοποιώντας τους παραπάνω υπολογισμούς, επιστρέφουμε στην εξίσωση (2.2.68) και με βασικές πράξεις καταλήγουμε

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\eta\|^2_{L^2(\Omega)}\Big) + D_u\|\theta\|^2_{H^1(\Omega)} + D_v\|\eta\|^2_{H^1(\Omega)} + \gamma\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \max\Big(\|\nabla\mathbf{A}\|_{L^\infty(\Omega)}, (\frac{\ell}{4\epsilon_1} + D_u), (\frac{\ell}{4\epsilon_1'} + D_v), \frac{C\gamma}{8\epsilon_2'}, \frac{3C\gamma}{8\epsilon_2}, \frac{C\gamma}{4\epsilon_3}, \frac{C\gamma}{8\epsilon_4}, \frac{C\gamma}{8\epsilon_4'}\Big)\big(\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\eta\|^2_{L^2(\Omega)}\big) \\
&+ \ell\epsilon_1\|\theta\|^2_{H^1(\Omega)} + \ell\epsilon_1'\|\eta\|^2_{H^1(\Omega)} + C\gamma\big(\frac{\epsilon_2'}{2}\|u\|^{8/3}_{L^4(\Omega)} + \frac{\epsilon_4'}{2}\|\overline{v}\|^{8/3}_{L^4(\Omega)}\big)\|\eta\|^2_{H^1(\Omega)} \\
&+ C\gamma\big(\frac{3\epsilon_2}{2}\|u\|^{8/3}_{L^4(\Omega)} + \epsilon_3\|u+\overline{u}\|^{8/3}_{L^4(\Omega)} + \frac{\epsilon_4}{2}\|\overline{v}\|^{8/3}_{L^4(\Omega)}\big)\|\theta\|^2_{H^1(\Omega)},
\end{aligned}$$

όπου με μία απλή εφαρμογή ενός Kickback argument με την καταλάλληλη επιλογή των $\epsilon_i,\ \epsilon_i'\ i = 1, ..., 4$, συγκεκριμένα $\epsilon_1 = \dfrac{D_u}{2\ell}, \dfrac{3\epsilon_2}{2} = \dfrac{D_u}{6\gamma\|u\|^{8/3}_{L^4(\Omega)}}, \epsilon_3 = \dfrac{D_u}{6\gamma\|u+\overline{u}\|^{8/3}_{L^4(\Omega)}}, \dfrac{\epsilon_4}{2} = \dfrac{D_u}{6\gamma\|\overline{v}\|^{8/3}_{L^4(\Omega)}}$ και $\epsilon_1' = \dfrac{D_v}{2\ell}, \dfrac{\epsilon_2'}{2} = \dfrac{D_v}{4\gamma\|u\|^{8/3}_{L^4(\Omega)}}, \dfrac{\epsilon_4'}{2} = \dfrac{D_v}{4\gamma\|\overline{v}\|^{8/3}_{L^4(\Omega)}}$, καταλαβαίνουμε ότι

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\eta\|^2_{L^2(\Omega)}\Big) \leq \frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\eta\|^2_{L^2(\Omega)}\Big) + \gamma\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \max\Big(\|\nabla\mathbf{A}\|_{L^\infty(\Omega)}, (\frac{\ell^2}{2D_u} + D_u), (\frac{\ell^2}{2D_v} + D_v), \frac{C\gamma^2}{4D_v}\|u\|^{8/3}_{L^4(\Omega)}, \frac{18C\gamma^2}{8D_u}\|u\|^{8/3}_{L^4(\Omega)} \\
&, \frac{3C\gamma^2}{2D_u}\|u+\overline{u}\|^{8/3}_{L^4(\Omega)}, \frac{3C\gamma^2}{8D_u}\|\overline{v}\|^{8/3}_{L^4(\Omega)}, \frac{C\gamma^2}{4D_v}\|\overline{v}\|^{8/3}_{L^4(\Omega)}\Big)\big(\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\eta\|^2_{L^2(\Omega)}\big),
\end{aligned}$$

και άρα συνολικά παίρνουμε την παρακάτω χρήσιμη διαφορική ανισότητα

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\Big(\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\eta\|^2_{L^2(\Omega)} \Big) \\
&\leq 2\max\Big(\|\nabla \mathbf{A}\|_{L^\infty(\Omega)}, (\frac{\ell^2}{2D_u} + D_u), (\frac{\ell^2}{2D_v} + D_v), \frac{C\gamma^2}{4D_v}\|u\|^{8/3}_{L^4(\Omega)}, \frac{18C\gamma^2}{8D_u}\|u\|^{8/3}_{L^4(\Omega)} \\
&, \frac{3C\gamma^2}{2D_u}\|u+\overline{u}\|^{8/3}_{L^4(\Omega)}, \frac{3C\gamma^2}{8D_u}\|\overline{v}\|^{8/3}_{L^4(\Omega)}, \frac{C\gamma^2}{4D_v}\|\overline{v}\|^{8/3}_{L^4(\Omega)} \Big)\big(\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\eta\|^2_{L^2(\Omega)} \big)
\end{aligned}$$

Σε αυτό το σημείο εφαρμόζουμε την Gronwall Ανισότητα (2.1.7), από την οποία συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned}
&\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\eta\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq e^{\int_0^t 2\max\left(\|\nabla \mathbf{A}\|_{L^\infty(\Omega)}, (\frac{\ell^2}{2D_u}+D_u), (\frac{\ell^2}{2D_v}+D_v), \frac{C}{4D_v}\|u\|^{8/3}_{L^4(\Omega)}, \frac{18C}{8D_u}\|u\|^{8/3}_{L^4(\Omega)}, \frac{3C}{2D_u}\|u+\overline{u}\|^{8/3}_{L^4(\Omega)}, \frac{3C}{8D_u}\|\overline{v}\|^{8/3}_{L^4(\Omega)}, \frac{C}{4D_v}\|\overline{v}\|^{8/3}_{L^4(\Omega)} \right) ds} \\
&\times \big(\|\theta(0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\eta(0)\|^2_{L^2(\Omega)} \big),
\end{aligned}$$

όπου πλέον το νέο C είναι το $C\gamma^2$. Όμως, γνωρίζουμε επιπλέον ότι κάθε ποσότητα μέσα στο ολοκλήρωμα είναι ολοκληρώσιμη και άρα φραγμένη. Συγκεκριμένα, οι τρεις πρώτοι όροι είναι προφανείς, ενώ για τους υπόλοιπους αρκεί η παρατήρηση που έγινε στην αρχή στην σχέση (2.2.64) , όπου γνωριζούμε ότι οποιαδήποτε ασθενής λύση της διαφορικής θα ανήκει εν τέλει στον χώρο $L^{8/3}[0,T;L^4(\Omega)]$. Τότε $u, \overline{v}, u+\overline{u} \in L^{8/3}[0,T;L^4(\Omega)]$. Τότε για την επιλογή των ϵ_i, ϵ_i' $i = 1,...,4$ που ήδη πραγματοποιήθηκε όλοι οι όροι θα ανήκουν στον χώρο $L^{8/3}[0,T;L^4(\Omega)]$. Όμως, από την (2.2.65) παρατηρούμε ότι θα ισχύει $\|u(0)\|_{L^2(\Omega)} = \|u(0)\|_{L^2(\Omega)} = 0$ από όπου συνεπάγεται ότι

$$\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\eta\|^2_{L^2(\Omega)} = 0,$$

και επομένως έχουμε ότι

$$\|\theta\|^2_{L^2(\Omega)} = 0,$$
$$\|\eta\|^2_{L^2(\Omega)} = 0,$$

για κάθε $t \geq 0$, οπότε $\boxed{\eta = 0}$, $\boxed{\theta = 0}$, και επομένως απόδήχθηκε η μοναδικότητα της ασθενής λύσης και για το τρισδιάστατο πρόβλημα.

■

Κεφάλαιο 3

Το αριθμητικό σχήμα

3.1 Διακριτοποιήση του συστήματος Schnakenberg

Στην προηγούμενη παράγραφο αποδείξαμε την μοναδικότητα και ύπαρξη ασθενής λύσης του Schnakenberg συστήματος σε κατάλληλους χώρους. Πλέον, κάνοντας χρήση της ασθενής μορφής μπορούμε να διακριτοποιήσουμε το σύστημα, με κατάλληλη αριθμητική μέθοδο, και να το μελετήσουμε. Για το διακριτό κομμάτι, λοιπόν, θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων, η οποία βασίζεται στην ασθενή μορφή της μερικής διαφορικής εξίσωσης. Συγκεκριμένα θα χρησιμοποιήσουμε κλασσικά σύμμορφα πεπερασμένα στοιχεία στο χώρο και έμμεση Euler μέθοδο για την χρονική διακριτοποίηση. Η παρούσα ανάλυση του διακριτού σχήματος αφορά τις περιπτώσεις ομαλού πεδίου $\mathbf{A}$, για το οποίο υπερισχύει ο "παραβολικός" χαρακτήρας.
Θα υπολογίσουμε, έπειτα, εκτιμήσεις ευστάθειας κάτω απο την προϋπόθεση για ελάχιστη ομαλότητα των αρχικών δεδομένων. Στην περίπτωση μας, αρκεί $g(x), h(x) \in L^2(\Omega)$.

3.1.1 Ημι-διακριτό και πλήρως-διακριτό σχήμα

Η κλασσική θεωρία των πεπερασμένων στοιχείων για παραβολικές μερικές διαφορικές εξισώσεις παρουσιάζεται στο βιβλίο του Thomée [18]. Μπορούν να βρεθούν Θεωρήματα για συγκλίσεις και εκτιμήσεις σφαλμάτων για σύμμορφα κλασσικά πεπερασμένα στοιχεία, με διαφορετικές χρονικές διακριτοποιήσεις, πέραν της μεθόδου Euler, στην εξίσωση της θερμότητας ([18], Κεφ. 1) καθώς και σε γενικές μη-γραμμικές ([18], Κεφ. 13) και ημι-γραμμικές ([18], Κεφ. 14) διαφορικές εξισώσεις, κάτω από ορισμένες συνθήκες ομαλότητας των αρχικών δεδομένων και των σταθερών της διαφορικής. Επιπλέον, στις σημειώσεις [19], μπορούν να βρεθούν εκτιμήσεις ευστάθειας για σύμμορφα πεπερασμένα στοιχεία με χρήση της μεθόδου Euler, για την χρονική διακριτοποίηση, στη εξίσωση θερμότητας.
Αποτελέσματα για συγκλίσεις, εκτιμήσεις ευστάθειας πάνω σε κατάλληλους χώρους για συναφή συστήματα μη γραμμικών και ημι-γραμμικών παραβολικών συστημάτων (π.χ. το σύστημα Brusselator), μπορούν να βρεθούν στα [20] για ασυνεχής πεπερασμένα στοιχεία στο μοντέλο Brusselator, [12] για γενικά συστήματα αντίδρασης-διάχυσης πάνω και σε εξελλισόμενα πεδία, [14] για μελέτη παρόμοιων συστημάτων με έμμεση-άμμεση χρονική διακριτοποίηση με πεπερασμένα στοιχεία πάνω σε εξελλισόμενα πεδία και τέλος στο [11] μπορούν να βρεθούν υπολογιστικές λύσεις για την πλήρως έμμεση χρονική διακριτοποίηση συστημάτων αντίδρασης-διάχυσης με σύμμορφα πεπερασμένα στοιχεία.
Γυρνώντας, λοιπόν, στη μέθοδο μας, όπως προαναφέρθηκε θα χρειαστεί να προχωρήσουμε

με δύο διαφορετικά βήματα για τον προσδιορισμό και την μελέτη της προσέγγιστικής λύσης του (2.1.1), με την χρήση σύμμορφων πεπερασμένων στοιχείων [18, 19, 21]. Εφόσον θεωρήσουμε την ασθενή μορφή, πρώτα, διακριτοποιούμε το πρόβλημα χωρικά και προσεγγίζουμε τις συναρτήσεις $u(x,t), v(x,t)$ από συναρτήσεις $u_h(x,t),\ v_h(x,t)$ οι οποίες, για κάθε προκαθορισμένο χρόνο t, ανήκουν σε ένα χώρο συναρτήσεων πεπερασμένης διάστασης με κατάλληλες ιδιότητες. Αυτές οι συναρτήσεις θα είναι λύσεις ενός πεπερασμένου συστήματος συνήθων διαφορικών εξισώσεων ως προς την χρονική μεταβλητή και θα ονομάζεται ημι-διακριτή λύση.
Πρέπει, λοιπόν, να δημιουργήσουμε ένα πλέγμα ώστε να διακριτοποιήσουμε το πρόβλημα σε μία οικογένεια πεπερασμένων χώρων (βλέπε [21, 22, 19]).
Αρχικά, έχουμε ήδη θεωρήσει ότι $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$. Τότε, ορίζουμε μια διαμέριση (συγκεκριμένα κανονική (regular) τριγωνοποίηση) του χωρίου μας $\mathcal{T}^h = \{\tau\}$ σε ξένα μεταξύ τους στοιχεία (τρίγωνα) τ, έτσι ώστε καμμία κορυφή των στοιχείων να μην κείτεται στο εσωτερικό ενός άλλου και με $h_\tau := diam\tau$ και $h := \max_{\tau\in\mathcal{T}^h} h_\tau$. Την τριγωνοποιήση θα την ονομάζουμε κανονική (regular shape) εφόσον υπάρχει σταθερά σ τέτοια ώστε

$$\sigma = \frac{h_\tau}{\rho_\tau},$$

με ρ_τ να συμβολίζει την διάμετρο της μεγαλύτερης μπάλας που περιέχεται στο στοιχείο $\tau \in \mathcal{T}$. Τότε, έστω V_h η οικογένεια υποχώρων πεπερασμένων στοιχείων του $H^1(\Omega)$, αποτελούμενη από τμηματικά συνεχείς συναρτήσεις, ορισμένη πάνω στην regular τριγωνοποίηση του Ω.

$$V_h = \{v \in C(\overline{\Omega}) : v|_\tau \in \mathcal{P}_r \ \ \forall \tau \in \mathcal{T}^h\} \subset H^1(\Omega),$$

με $\mathcal{P}_r$ να είναι ο χώρος πολυωνύμων βαθμού $r \in \mathcal{N}$. Θα θεωρήσουμε ότι ο πεπερασμένων στοιχείων χώρος συναρτήσεων V_h ικανοποιεί την παρακάτω σχέση,

- Υπάρχει σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε για κάθε $v \in H^s(\Omega)$ και για κάποιον ακέραιο $r \geq 2$

  $$\inf_{v_h\in V_h}\{\|v - v_h\|_{H^k(\Omega)}\} \leq Ch^{s-k}\,\|v\|_{H^s(\Omega)} \qquad \textit{για} \quad 1 \leq s \leq r, \qquad k = 0, 1,$$

  όπου το r καθορίζεται από την τάξη των τμηματικών πολυωνύμων που καθορίζουν τον χώρο V_h. Συγκεκριμένα, για δισδιάστατο χωρίο και $r = 2$ αρκεί η κλασσική οικογένεια τμηματικά γραμμικών συνεχών συναρτήσεων που συμβολίζεται

  $$V_h := \{v \in C(\Omega) : v|_\tau \in \mathcal{P}_1 \ \ \forall \tau \in \mathcal{T}^h\} \subset H^1(\Omega),$$

  με $\mathcal{P}_1$ να είναι ο χώρος πολυωνύμων 1ου βαθμού.

- Θεωρούμε ότι η παραπάνω τριγωνοποιήση είναι quasi-uniform, έτσι ώστε η παρακάτω αντίστροφη ανισότητα να ισχύει :

  $$\|v_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^{-1}\,\|v_h\|_{L^2(\Omega)} \qquad \forall v_h \in V_h.$$

  Για περισσότερες λεπτομέριες πάνω στην κατασκευή πεπερασμένων στοιχείων με τις παραπάνω ιδιότητες [21, 22, 19, 18].

Επομένως, για την πεπερασμένων στοιχείων οικογένεια $V_h \subset H^1(\Omega)$, ορίζουμε την ημι-διακριτή πεπερασμένων στοιχείων προσσέγιση του προβλήματος (2.1.1) ως εξής :
βρες $u_h, v_h \in V_h$:

(3.1.1)
$$\begin{cases} \langle u_h', w_h\rangle + (\nabla(\mathbf{A}u_h), w_h) + (D_u\nabla u_h, \nabla w_h) & = (\gamma\alpha - \gamma u_h, w_h) + \gamma(u_h^2 v_h, w_h), \\ \langle v_h', w_h\rangle + (\nabla(\mathbf{A}v_h), w_h) + (D_v\nabla v_h, \nabla w_h) & = (\gamma b - \gamma u_h^2 v_h, w_h), \\ \dfrac{\partial u_h}{\partial n} = \dfrac{\partial v_h}{\partial n} & = 0, \\ u_h(0) & = u_h^0, \\ v_h(0) & = v_h^0, \end{cases}$$

$\forall w_h \in V_h$, σ.π. $t \in [0,T]$, όπου u_h^0, v_h^0 είναι κατάλληλες προσεγγίσεις των αρχικών συνθηκών πάνω στον V_h (π.χ. με χρήση $L^2(\Omega)$ ορθογώνιας προβολής ή παρεμβολικού τελεστή).

Όσο αναφορά την βάση του χώρου V_h, θεωρούμε $\{N_j\}_{j=1}^{N_h}$ τους κόμβους της τριγωνοποίησης, οι οποίοι καθορίζουν πλήρως τα πεπερασμένα στοιχεία και επομένως κάθε συνάρτηση εξαρτάται μοναδικά από N_h παράγοντες. Συγκεκριμένα, από την τριγωνοποίηση και τους κόμβους $\{N_j\}_{j=1}^{N_h}$ μπορούμε να συσχετίσουμε μια κομβική βάση, η οποία (αν θεωρήσουμε Lagrange πεπερασμένα στοιχεία) είναι ίση με 1 πάνω σε κάθε αντίστοιχο κόμβο και 0 στους υπόλοιπους $\{\phi_1, ..., \phi_{N_h}\}$. Τότε, για το ημι-διακριτό πρόβλημα κάθε συνάρτηση-λύση $v_h, u_h \in V_h$ παριστάνεται μοναδικά :

$$v_h(x,t) = \sum_{j=1}^{N_h} V_j(t)\phi_j(x),$$

$$u_h(x,t) = \sum_{j=1}^{N_h} U_j(t)\phi_j(x),$$

και επομένως, αναζητάμε κατάλληλα $V_j(t), U_j(t)$ που αν αντικαταστήσουμε τις παραπάνω αναπαραστάσεις στην (3.1.1) είναι, εν τέλει, η λύση ενός συστήματος συνήθων διαφορικών ως προς το χρόνο.
Τελευταία παρατήρηση για την χωρική διακριτοποίηση, είναι ότι πρόκειται για σύμμορφων πεπερασμένων στοιχείων μέθοδο, εφόσον ο χώρος πεπερασμένων στοιχείων είναι υπόχωρος του $H^1(\Omega) \cap C^0(\Omega)$.

Το δεύτερο βήμα για τον προσδιορισμό της προσεγγιστικής λύσης, είναι η πλέον διακριτοποίηση του συνήθης διαφορικού συστήματος 1ου βήματος στον χρόνο με την μέθοδο πεπερασμένων διαφορών για την χρονική παράγωγο. Ειδικότερα, θα κάνουμε χρήση της έμμεσης Euler μεθόδου.
Διαμερίζουμε λοιπόν το διάστημα $[0,T]$ ομοιόμορφα $0 = t^0 < t^1 < \cdots < t^N$ με χρονικό βήμα Δt τέτοιο ώστε

$$\Delta t = \frac{T}{N}, \qquad N > 0,$$

Οπότε κατασκευάζουμε το πλήρως-διακριτό σχήμα και προσεγγίζουμε το αρχικό μας πρόβλημα με την μέθοδο πεπερασμένων διαφορών, γνωστή ως σχήμα έμμεσης Euler.

Τότε, η πλήρως-διακριτή προσεγγιστική λύση ορίζεται ως εξής : Αν ορίσουμε $V_h^n,\ U_h^n \in V^h$ την προσέγγιση της $v(t^n),\ u(t^n)$ έχουμε,
βρες $U_h^n, V_h^n \in V_h$:

(3.1.2)
$$\begin{cases} \langle \frac{U_h^n - U_h^{n-1}}{\Delta t}, w_h\rangle + (\nabla(\mathbf{A}^n U_h^n), w_h) + (D_u \nabla U_h^n, \nabla w_h) & = (\gamma\alpha - \gamma U_h^n, w_h) + \gamma((U_h^n)^2 V_h^n, w_h), \\ \langle \frac{V_h^n - V_h^{n-1}}{\Delta t}, w_h\rangle + (\nabla(\mathbf{A}^n V_h^n), w_h) + (D_v \nabla V_h^n, \nabla w_h) & = (\gamma b - \gamma(U_h^n)^2 V_h^n, w_h), \\ \dfrac{\partial U_h^n}{\partial n} = \dfrac{\partial V_h^n}{\partial n} & = 0, \quad n = 1, .., M, \\ U_h^0 & = u_h, \\ V_h^0 & = v_h, \end{cases}$$

$\forall w_h \in V_h,\ 1 \le m \le M$, σ.π. $t \in [0, T]$. Όπου με $\mathbf{A}^n$ συμβολίζουμε το πεδίο ροής την χρονική στιγμή t^n, $\mathbf{A}^n = \mathbf{A}(x, t^n)$ και u_h, v_h είναι κατάλληλες προσεγγίσεις των αρχικών συνθηκών.

3.1.2 Εκτιμήσεις Ευστάθειας

Σε αυτή την υποπαράγραφο θα μελετήσουμε εκτιμήσεις ευστάθειας για την παραπάνω μέθοδο που αναλύσαμε. Αρχικά κάνοντας χρήση του προσήμου του μη γραμμικού όρου θα υπολογίσουμε εκτιμήσεις ευστάθειας για την V_h^n. Ύστερα, για το άθροισμα $U_h^n + V_h^n$, έφοσον παρατηρήσουμε ότι με αυτόν τον τρόπο "αφαιρούμε" την μη γραμμικότητα. Τέλος, κάνοντας χρήση τριγωνικών ανισοτήτων και απλών πράξεων παίρνουμε τις εκτιμήσεις ευστάθειας για την U_h^n. Η διαδικασία είναι λοιπόν παρόμοια με αυτή για τον υπολογισμό των ενεργειακών νορμών.

Θεώρημα 3.1.1 (Εκτιμήσεις Ευστάθειας I). *Έστω $U_h^0, V_h^0 \in L^2(\Omega)$, τότε η λύση V_h^n του* (3.1.2) *είναι υπό όρους σταθερή*

$$\Delta t < \frac{1}{\Lambda(\epsilon_1)},$$

και ικανοποιεί τα παρακάτω φράγματα

(3.1.3)
$$\max_{1\le k\le N} \left\|V_h^k\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{n=1}^{N} \left\|V_h^n - V_h^{n-1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + D_v \Delta t \sum_{n=1}^{N} \|\nabla V_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\gamma\Delta t \sum_{n=1}^{N} \|U_h^n V_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2$$
$$\le e^{T\frac{\Lambda(\epsilon_1)}{1-\Delta t\Lambda(\epsilon_1)}} \Big(\left\|V_h^0\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + T\frac{|\Omega|(\gamma b)^2}{2\epsilon_1}\Big),$$

όπου ϵ_1 είναι ένας σταθερός θετικός αριθμός, $\|\nabla\cdot\boldsymbol{A}\|_{L^\infty(\Omega)} = \max_{1\le n\le N} \|\nabla\cdot\boldsymbol{A}^n\|_{L^\infty(\Omega)}$ και $\ell = \max_{1\le n\le N} \ell^n = \max_{1\le n\le N} \sum_{i=1}^d \|A^{n,i}\|_{L^\infty(\Omega)}$ (d είναι οι διαστάσεις του προβλήματος), και $\Lambda(\epsilon_1) = 2\big(\|\nabla\cdot\boldsymbol{A}\|_{L^\infty(\Omega)} + \frac{\ell^2}{2D_v} + \epsilon_1\big)$.

Απόδειξη. Παίρνοντας την δεύτερη εξίσωση της (3.1.2) και την σωστή δοκιμαστική συνάρτηση, στην περίπτωση μας $w_h = V_h^n$ παίρνουμε ότι

$$\langle \frac{V_h^n - V_h^{n-1}}{\Delta t}, V_h^n \rangle + ((\nabla \cdot \mathbf{A}^n) V_h^n, V_h^n) + (\mathbf{A}^n \cdot \nabla V_h^n, V_h^n) + D_v (\nabla V_h^n, \nabla V_h^n) \\ = (\gamma b - \gamma (U_h^n)^2 V_h^n, V_h^n),$$

τότε περνόντας κατάλληλα όρους στο άλλο μέλος και παρατηρώντας ότι

$$V_h^n = \frac{V_h^n - V_h^{n-1}}{2} + \frac{V_h^n + V_h^{n-1}}{2},$$

έχουμε το εξής αποτέλεσμα

$$\frac{1}{2\Delta t}\Big(\left\|V_h^n - V_h^{n-1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|V_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 - \left\|V_h^{n-1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \Big) + D_v \|\nabla V_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \gamma \|U_h^n V_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ = -((\nabla \cdot \mathbf{A}^n) V_h^n, V_h^n) - (\mathbf{A}^n \cdot \nabla V_h^n, V_h^n) + (\gamma b, V_h^n) \\ \leq \left| (\gamma b, V_h^n) - ((\nabla \cdot \mathbf{A}^n) V_h^n, V_h^n) - (\mathbf{A}^n \cdot \nabla V_h^n, V_h^n) \right|.$$

Χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα και την γενικευμένη ανισότητα Young (2.1.3) για $p = q = 2$ παράλληλα με την ομαλότητα του πεδίου ροής που έχουμε υποθέσει και θέτοντας $\boxed{\ell^n = \sum_{i=1}^d \|A^{n,i}\|_{L^\infty(\Omega)}}$, όπου d είναι οι διαστάσεις του προβλήματος, δημιουργούμε την ανισότητα

$$\frac{1}{2\Delta t}\Big(\left\|V_h^n - V_h^{n-1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|V_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 - \left\|V_h^{n-1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \Big) + D_v \|\nabla V_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \gamma \|U_h^n V_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \leq \big(\|\nabla \cdot \mathbf{A}^n\|_{L^\infty(\Omega)} + \frac{\ell^n}{4\epsilon_2} + \epsilon_1 \big) \|V_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \ell^n \epsilon_2 \|\nabla V_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{|\Omega|(\gamma b)^2}{4\epsilon_1} \\ \leq \big(\|\nabla \cdot \mathbf{A}\|_{L^\infty(\Omega)} + \frac{\ell}{4\epsilon_2} + \epsilon_1 \big) \|V_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \ell \epsilon_2 \|\nabla V_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{|\Omega|(\gamma b)^2}{4\epsilon_1},$$

όπου $\|\nabla \cdot \mathbf{A}\|_{L^\infty(\Omega)} = \max_{1 \leq n \leq N} \|\nabla \cdot \mathbf{A}^n\|_{L^\infty(\Omega)}$ και $\ell = \max_{1 \leq n \leq N} \ell^n$. Στην συνέχεια θέτουμε

$$\epsilon_2 = \frac{D_v}{2\ell},$$

οπότε πραγματοποιώντας πρώτα kickback argument για τον όρο $D_v \|\nabla V_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2$ και ύστερα πολλαπλασιάζοντας επίσης με '$2\Delta t$' σχηματίζεται η παρακάτω ανισοτική σχέση

$$\left\|V_h^n - V_h^{n-1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|V_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 - \left\|V_h^{n-1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + D_v \Delta t \|\nabla V_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\gamma \Delta t \|U_h^n V_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \leq 2\big(\|\nabla \cdot \mathbf{A}\|_{L^\infty(\Omega)} + \frac{\ell^2}{2D_v} + \epsilon_1 \big) \Delta t \|V_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\Delta t \frac{|\Omega|(\gamma b)^2}{4\epsilon_1}.$$

Θέτοντας $\Lambda(\epsilon_1) = 2\big(\|\nabla \cdot \mathbf{A}\|_{L^\infty(\Omega)} + \frac{\ell^2}{2D_v} + \epsilon_1 \big)$ και αθροίζοντας ως προς n, $n = 1, ..., k$ παίρνουμε

(3.1.4)
$$\sum_{n=1}^k \left\|V_h^n - V_h^{n-1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\|V_h^k\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + D_v \Delta t \sum_{n=1}^k \|\nabla V_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\gamma \Delta t \sum_{n=1}^k \|U_h^n V_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \leq \Lambda(\epsilon_1) \Delta t \sum_{n=1}^k \|V_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\|V_h^0\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \Delta t \sum_{n=1}^k \frac{|\Omega|(\gamma b)^2}{2\epsilon_1}.$$

Κάνοντας χρήση της διακριτής Gronwall ανισότητας (2.1.8) έχουμε ότι περιορίζοντας το μέγεθος του βήματος

$$\Delta t < \frac{1}{\Lambda(\epsilon_1)},$$

παίρνουμε την παρακάτω εκτίμηση

(3.1.5)

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{k} \left\|V_h^n - V_h^{n-1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\|V_h^k\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + D_v \Delta t \sum_{n=1}^{k} \|\nabla V_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\gamma \Delta t \sum_{n=1}^{k} \|U_h^n V_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \leq e^{\Delta t \sum_{n=1}^{k} \frac{\Lambda(\epsilon_1)}{1-\Delta t \Lambda(\epsilon_1)}} \Big(\left\|V_h^0\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \Delta t \sum_{n=1}^{k} \frac{|\Omega|(\gamma b)^2}{2\epsilon_1} \Big) \\ \leq e^{\Delta t \sum_{n=1}^{N} \frac{\Lambda(\epsilon_1)}{1-\Delta t \Lambda(\epsilon_1)}} \Big(\left\|V_h^0\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \Delta t \sum_{n=1}^{N} \frac{|\Omega|(\gamma b)^2}{2\epsilon_1} \Big),\end{aligned}$$

για κάθε k, $1 \leq k \leq N$, από την οποία ακολουθεί, αφού μεγιστοποιήσουμε το αριστερό μέλος, ότι

(3.1.6)

$$\begin{aligned}\max_{1\leq k\leq N} \left\|V_h^k\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{n=1}^{N} \left\|V_h^n - V_h^{n-1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + D_v \Delta t \sum_{n=1}^{N} \|\nabla V_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\gamma \Delta t \sum_{n=1}^{N} \|U_h^n V_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \leq e^{T \frac{\Lambda(\epsilon_1)}{1-\Delta t \Lambda(\epsilon_1)}} \Big(\left\|V_h^0\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + T \frac{|\Omega|(\gamma b)^2}{2\epsilon_1} \Big),\end{aligned}$$

όπου ϵ_1 είναι ένας σταθερός θετικός αριθμός. ■

Θεώρημα 3.1.2 (Εκτιμήσεις Ευστάθειας II). *Έστω $U_h^0, V_h^0 \in L^2(\Omega)$, τότε η λύση $V_h^n + U_h^n$ είναι υπό όρους σταθερή*

$$\Delta t < \min\Big\{ \frac{1}{\Lambda(\epsilon_1)}, \frac{1}{M(\epsilon_1')} \Big\},$$

και ικανοποιεί τα παρακάτω φράγματα

$$\begin{aligned}&\max_{1\leq k\leq N} \left\|U_h^k + V_h^k\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{n=1}^{N} \left\|(U_h^n + V_h^n) - (U_h^{n-1} + V_h^{n-1})\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + D_u \Delta t \sum_{n=1}^{N} \|\nabla (U_h^n + V_h^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq e^{T \frac{M(\epsilon_1')}{1-\Delta t M(\epsilon_1')}} C(\Lambda(\epsilon_1), \gamma, T, D_u, D_v) \Big(\left\|U_h^0\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\|V_h^0\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + T \frac{|\Omega|(\gamma b)^2}{2\epsilon_1} + T \frac{|\Omega|(\gamma\alpha + \gamma b)^2}{2\epsilon_1'} \Big),\end{aligned}$$

όπου ϵ_1, ϵ_1' είναι σταθεροί θετικοί αριθμοί, $\|\nabla \cdot \boldsymbol{A}\|_{L^\infty(\Omega)} = \max_{1\leq n\leq N} \|\nabla \cdot \boldsymbol{A}^n\|_{L^\infty(\Omega)}$ και $\ell = \max_{1\leq n\leq N} \ell^n = \max_{1\leq n\leq N} \sum_{i=1}^{d} \|A^{n,i}\|_{L^\infty(\Omega)}$ (d είναι οι διαστάσεις του προβλήματος), και $\Lambda(\epsilon_1) = 2\big(\|\nabla \cdot \boldsymbol{A}\|_{L^\infty(\Omega)} + \frac{\ell^2}{2D_v} + \epsilon_1 \big)$, $M(\epsilon_1') = 2\big(\|\nabla \cdot \boldsymbol{A}\|_{L^\infty(\Omega)} + \frac{3}{2}\gamma + \frac{\ell^2}{D_u} + \epsilon_1' \big)$.

Απόδειξη. Προσθέτοντας τις δύο εξισώσεις στην (3.1.2), παρατηρώντας ότι οι μη-γραμμικοί όροι ακυρώνονται και με απλές πράξεις καταλήγουμε

$$\langle \frac{U_h^n + V_h^n - (U_h^{n-1} + V_h^n)}{\Delta t}, w_h \rangle + (\nabla \cdot \mathbf{A}^n (U_h^n + V_h^n), w_h) + (\mathbf{A}^n \cdot \nabla (U_h^n + V_h^n), w_h)$$
$$+ D_u(\nabla U_h^n, \nabla w_h) + D_v(\nabla V_h^n, \nabla w_h) = (\gamma\alpha + \gamma b, w_h) - \gamma(U_h^n, w_h),$$

θέτοντας κατάλληλη δοκιμαστική συνάρτηση, $w_h = U_h^n + V_h^n$ και με παρόμοιες διαδικασίες όπως στο Θεώρημα 2.2.4, προσθέτοντας, δηλαδή, τον όρο $\gamma(V_h^n, U_h^n + V_h^n)$ και στα δύο μέλη και μεταφέροντας τον τελευταίο στο πρώτο μέλος παίρνουμε την σχέση

$$\langle \frac{U_h^n + V_h^n - (U_h^{n-1} + V_h^{n-1})}{\Delta t}, U_h^n + V_h^n \rangle + D_u(\nabla U_h^n, \nabla (U_h^n + V_h^n)) + D_v(\nabla V_h^n, \nabla (U_h^n + V_h^n))$$
$$+ (\nabla \cdot \mathbf{A}^n (U_h^n + V_h^n), U_h^n + V_h^n) + (\mathbf{A}^n \cdot \nabla (U_h^n + V_h^n), U_h^n + V_h^n) + \gamma(U_h^n + V_h^n, U_h^n + V_h^n)$$
$$= (\gamma\alpha + \gamma b, U_h^n + V_h^n) + \gamma(V_h^n, U_h^n + V_h^n).$$

Χωρίς άρση της γενικότητα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $\boxed{D_v \geq D_u}$, καθώς η άλλη περίπτωση, $\boxed{D_v \leq D_u}$, προκύπτει παρόμοια με την πρώτη, όπως φάνηκε και στο Θεώρημα 2.2.4 ύστερα από κατάλληλες πράξεις. Τότε αναδιαμορφώνουμε τον όρο $D_u(\nabla U_h^n, \nabla (U_h^n + V_h^n))$ ως εξής

$$\begin{aligned} D_v(\nabla V_h^n V_h^n, \nabla (U_h^n + V_h^n)) &= (D_u + (D_v - D_u))\big(\nabla V_h^n, \nabla (U_h^n + V_h^n)\big) \\ &= D_u(\nabla V_h^n, \nabla (U_h^n + V_h^n)) + (D_v - D_u)\big(\nabla V_h^n, \nabla (U_h^n + V_h^n)\big). \end{aligned}$$

Εφόσον αντικαταστήσουμε την παραπάνω σχέση και με παρόμοιες πράξεις όπως στο Θεώρημα 3.1.1, η εξίσωση μπορεί να ξαναγραφθεί με την ακόλουθη μορφή :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\Delta t}\Big(\big\|(U_h^n + V_h^n) - (U_h^{n-1} + V_h^{n-1})\big\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|U_h^n + V_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 - \big\|U_h^{n-1} + V_h^{n-1}\big\|_{L^2(\Omega)}^2 \Big) \\ &+ D_u \|\nabla (U_h^n + V_h^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= -((\nabla \cdot \mathbf{A}^n + \gamma)(U_h^n + V_h^n), U_h^n + V_h^n) - (\mathbf{A}^n \cdot \nabla (U_h^n + V_h^n), U_h^n + V_h^n) \\ &+ \gamma(V_h^n, U_h^n + V_h^n) - (D_v - D_u)(\nabla V_h^n, \nabla (U_h^n + V_h^n)) + (\gamma\alpha + \gamma b, U_h^n + V_h^n) \\ &\leq \big| - ((\nabla \cdot \mathbf{A}^n + \gamma)(U_h^n + V_h^n), U_h^n + V_h^n) - (\mathbf{A}^n \cdot \nabla (U_h^n + V_h^n), U_h^n + V_h^n) \\ &+ \gamma(V_h^n, U_h^n + V_h^n) - (D_v - D_u)(\nabla V_h^n, \nabla (U_h^n + V_h^n)) + (\gamma\alpha + \gamma b, U_h^n + V_h^n)\big|. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα και την γενικευμένη ανισότητα Young (2.1.3) για $p = q = 2$ παράλληλα με την ομαλότητα του πεδίου ροής που έχουμε υποθέσει και θέτοντας $\boxed{\ell^n = \sum_{i=1}^d \|A^{n,i}\|_{L^\infty(\Omega)}}$, όπου d είναι οι διαστάσεις του προβλήματος, δημιουργούμε την ανισότητα

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\Delta t}\left\|(U_h^n+V_h^n)-(U_h^{n-1}+V_h^{n-1})\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{1}{2\Delta t}\left\|U_h^n+V_h^n\right\|_{L^2(\Omega)}^2-\frac{1}{2\Delta t}\left\|U_h^{n-1}+V_h^{n-1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2\\
&+D_u\left\|\nabla(U_h^n+V_h^n)\right\|_{L^2(\Omega)}^2\\
&\leq\big(\left\|\nabla\cdot\mathbf{A}^n\right\|_{L^\infty(\Omega)}+\frac{3}{2}\gamma+\frac{\ell^n}{4\epsilon_2'}+\epsilon_1'\big)\left\|U_h^n+V_h^n\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{(D_v-D_u)}{4\epsilon_3'}\left\|\nabla V_h^n\right\|_{L^2(\Omega)}^2\\
&+\frac{\gamma}{2}\left\|V_h^n\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\big((D_v-D_u)\epsilon_3'+\ell^n\epsilon_2'\big)\left\|\nabla(U_h^n+V_h^n)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{|\Omega|(\gamma\alpha+\gamma b)^2}{4\ \epsilon_1'}\\
&\leq\big(\left\|\nabla\cdot\mathbf{A}\right\|_{L^\infty(\Omega)}+\frac{3}{2}\gamma+\frac{\ell}{4\epsilon_2'}+\epsilon_1'\big)\left\|U_h^n+V_h^n\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{(D_v-D_u)}{4\epsilon_3'}\left\|\nabla V_h^n\right\|_{L^2(\Omega)}^2\\
&+\frac{\gamma}{2}\left\|V_h^n\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\big((D_v-D_u)\epsilon_3'+\ell\epsilon_2'\big)\left\|\nabla(U_h^n+V_h^n)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{|\Omega|(\gamma\alpha+\gamma b)^2}{4\ \epsilon_1'},
\end{aligned}
$$

όπου $\left\|\nabla\cdot\mathbf{A}\right\|_{L^\infty(\Omega)}=\max_{1\leq n\leq N}\left\|\nabla\cdot\mathbf{A}^n\right\|_{L^\infty(\Omega)}$ και $\ell=\max_{1\leq n\leq N}\ell^n$. Στην συνέχεια θέτουμε

$$\epsilon_2'=\frac{D_u}{4\ell},$$

και

$$\epsilon_3'=\frac{D_u}{4(D_v-D_u)}.$$

Οπότε πραγματοποιώντας πρώτα kickback argument για τον όρο $D_v\left\|\nabla U_h^n+V_h^n\right\|_{L^2(\Omega)}^2$ και ύστερα πολλαπλασιάζοντας επίσης με '$2\Delta t$' και χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 3.1.1 εφόσον περιορίσουμε το βήμα

$$\Delta t<\frac{1}{\Lambda(\epsilon_1)},$$

σχηματίζεται

$$
\begin{aligned}
&\left\|(U_h^n+V_h^n)-(U_h^{n-1}+V_h^{n-1})\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|U_h^n+V_h^n\right\|_{L^2(\Omega)}^2-\left\|U_h^{n-1}+V_h^{n-1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2\\
&+D_u\Delta t\left\|\nabla(U_h^n+V_h^n)\right\|_{L^2(\Omega)}^2\\
&\leq 2\big(\left\|\nabla\cdot\mathbf{A}\right\|_{L^\infty(\Omega)}+\frac{3}{2}\gamma+\frac{\ell^2}{D_u}+\epsilon_1'\big)\Delta t\left\|U_h^n+V_h^n\right\|_{L^2(\Omega)}^2\\
&+2\frac{(D_v-D_u)^2}{D_u}\Delta t\left\|\nabla V_h^n\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\Delta t\frac{|\Omega|(\gamma\alpha+\gamma b)^2}{2\epsilon_1'}+\gamma\Delta tC(\Lambda(\epsilon_1))\Big(\left\|V_h^0\right\|_{L^2(\Omega)}^2+T\frac{|\Omega|(\gamma b)^2}{2\epsilon_1}\Big),
\end{aligned}
$$

όπου $C(\Lambda(\epsilon_1))$ σταθερά που εξαρτάται από το $\Lambda(\epsilon_1)$ του Θεωρήματος 3.1.1 και ϵ_1 ένας σταθερός θετικός αριθμός. Θέτοντας $M(\epsilon_1')=2\big(\left\|\nabla\cdot\mathbf{A}\right\|_{L^\infty(\Omega)}+\frac{3}{2}\gamma+\frac{\ell^2}{D_u}+\epsilon_1'\big)$ και αθροίζοντας ως προς n , $n=1,...k$ παίρνουμε

$$\sum_{n=1}^{k}\left\|(U_h^n+V_h^n)-(U_h^{n-1}+V_h^{n-1})\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|U_h^k+V_h^k\right\|_{L^2(\Omega)}^2+D_u\Delta t\sum_{n=1}^{k}\|\nabla(U_h^n+V_h^n)\|_{L^2(\Omega)}^2$$
$$\leq M(\epsilon_1')\Delta t\sum_{n=1}^{k}\|U_h^n+V_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2+\gamma\Delta t\sum_{n=1}^{k}C(\Lambda(\epsilon_1))\Big(\left\|V_h^0\right\|_{L^2(\Omega)}^2+T\frac{|\Omega|(\gamma b)^2}{2\epsilon_1}\Big)$$
$$+2\frac{(D_v-D_u)^2}{D_u}\Delta t\sum_{n=1}^{k}\|\nabla V_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2+\Delta t\sum_{n=1}^{k}\frac{|\Omega|(\gamma\alpha+\gamma b)^2}{2\ \epsilon_1'}+\left\|U_h^0+V_h^0\right\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Εφαρμόζοντας ξανά το Θεώρημα 3.1.1 για τον όρο $\frac{(D_v-D_u)^2}{D_u}\Delta t\sum_{n=1}^{k}\|\nabla V_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2$ έχουμε ότι

(3.1.7)
$$\sum_{n=1}^{k}\left\|(U_h^n+V_h^n)-(U_h^{n-1}+V_h^{n-1})\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|U_h^k+V_h^k\right\|_{L^2(\Omega)}^2+D_u\Delta t\sum_{n=1}^{k}\|\nabla(U_h^n+V_h^n)\|_{L^2(\Omega)}^2$$
$$\leq M(\epsilon_1')\Delta t\sum_{n=1}^{k}\|U_h^n+V_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2+\gamma\Delta t\sum_{n=1}^{k}C(\Lambda(\epsilon_1))\Big(\left\|V_h^0\right\|_{L^2(\Omega)}^2+T\frac{|\Omega|(\gamma b)^2}{2\epsilon_1}\Big)$$
$$+2\frac{(D_v-D_u)^2}{D_u}C(\Lambda(\epsilon_1))\Big(\left\|V_h^0\right\|_{L^2(\Omega)}^2+T\frac{|\Omega|(\gamma b)^2}{2\epsilon_1}\Big)+\Delta t\sum_{n=1}^{k}\frac{|\Omega|(\gamma\alpha+\gamma b)^2}{2\ \epsilon_1'}+\left\|U_h^0+V_h^0\right\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Κάνοντας χρήση της διακριτής Gronwall ανισότητας (2.1.8) στην (3.1.7) έχουμε ότι, αφού περιορίσουμε πλέον το μέγεθος του βήματος

$$\Delta t<\min\Big\{\frac{1}{\Lambda(\epsilon_1)},\frac{1}{M(\epsilon_1')}\Big\}$$

σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1.1, παίρνουμε την παρακάτω εκτίμηση

$$\sum_{n=1}^{k}\left\|(U_h^n+V_h^n)-(U_h^{n-1}+V_h^{n-1})\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|U_h^k+V_h^k\right\|_{L^2(\Omega)}^2+D_u\Delta t\sum_{n=1}^{k}\|\nabla(U_h^n+V_h^n)\|_{L^2(\Omega)}^2$$
$$\leq e^{\Delta t\sum_{n=1}^{k}\frac{M(\epsilon_1')}{1-\Delta tM(\epsilon_1')}}\Big[\gamma\Delta t\sum_{n=1}^{k}C(\Lambda(\epsilon_1))\Big(\left\|V_h^0\right\|_{L^2(\Omega)}^2+T\frac{|\Omega|(\gamma b)^2}{2\epsilon_1}\Big)+\Delta t\sum_{n=1}^{k}\frac{|\Omega|(\gamma\alpha+\gamma b)^2}{2\epsilon_1'}$$
$$+2\frac{(D_v-D_u)^2}{D_u}C(\Lambda(\epsilon_1))\Big(\left\|V_h^0\right\|_{L^2(\Omega)}^2+T\frac{|\Omega|(\gamma b)^2}{2\epsilon_1}\Big)+\left\|U_h^0+V_h^0\right\|_{L^2(\Omega)}^2\Big]$$
$$\leq e^{\Delta t\sum_{n=1}^{N}\frac{M(\epsilon_1')}{1-\Delta tM(\epsilon_1')}}\Big[\gamma\Delta t\sum_{n=1}^{N}C(\Lambda(\epsilon_1))\Big(\left\|V_h^0\right\|_{L^2(\Omega)}^2+T\frac{|\Omega|(\gamma b)^2}{2\epsilon_1}\Big)+\Delta t\sum_{n=1}^{N}\frac{|\Omega|(\gamma\alpha+\gamma b)^2}{2\epsilon_1'}$$
$$+2\frac{(D_v-D_u)^2}{D_u}C(\Lambda(\epsilon_1))\Big(\left\|V_h^0\right\|_{L^2(\Omega)}^2+T\frac{|\Omega|(\gamma b)^2}{2\epsilon_1}\Big)+\left\|U_h^0+V_h^0\right\|_{L^2(\Omega)}^2\Big].$$

Ύστερα από πράξεις στο δεύτερο μέλος προκύπτει ότι

(3.1.8)

$$\sum_{n=1}^{k}\left\|(U_h^n+V_h^n)-(U_h^{n-1}+V_h^{n-1})\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|U_h^k+V_h^k\right\|_{L^2(\Omega)}^2+D_u\Delta t\sum_{n=1}^{k}\|\nabla(U_h^n+V_h^n)\|_{L^2(\Omega)}^2$$
$$\leq e^{T\frac{M(\epsilon_1')}{1-\Delta tM(\epsilon_1')}}C(\Lambda(\epsilon_1),\gamma,T,D_u,D_v))\Big(\left\|U_h^0\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|V_h^0\right\|_{L^2(\Omega)}^2+T\frac{|\Omega|(\gamma b)^2}{2\epsilon_1}+T\frac{|\Omega|(\gamma\alpha+\gamma b)^2}{2\epsilon_1'}\Big)$$

για κάθε k, $1\leq k\leq N$, από την οποία ακολουθεί, αφού μεγιστοποιήσουμε το αριστερό μέλος, ότι

$$\max_{1\leq k\leq N}\left\|U_h^k+V_h^k\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\sum_{n=1}^{N}\left\|(U_h^n+V_h^n)-(U_h^{n-1}+V_h^{n-1})\right\|_{L^2(\Omega)}^2+D_u\Delta t\sum_{n=1}^{N}\|\nabla(U_h^n+V_h^n)\|_{L^2(\Omega)}^2$$
$$\leq e^{T\frac{M(\epsilon_1')}{1-\Delta tM(\epsilon_1')}}C(\Lambda(\epsilon_1),\gamma,T,D_u,D_v)\Big(\left\|U_h^0\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|V_h^0\right\|_{L^2(\Omega)}^2+T\frac{|\Omega|(\gamma b)^2}{2\epsilon_1}+T\frac{|\Omega|(\gamma\alpha+\gamma b)^2}{2\epsilon_1'}\Big).$$

■

Θεώρημα 3.1.3 (Εκτιμήσεις Ευστάθειας ΙΙΙ). *Έστω $U_h^0,V_h^0\in L^2(\Omega)$, τότε η λύση U_h^n είναι υπό όρους σταθερή*

$$\Delta t<\min\Big\{\frac{1}{\Lambda(\epsilon_1)},\frac{1}{M(\epsilon_1')}\Big\},$$

και ικανοποιεί τα παρακάτω φράγματα

$$\max_{1\leq k\leq N}\left\|U_h^k\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\sum_{n=1}^{N}\left\|U_h^n-U_h^{n-1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2+D_u\Delta t\sum_{n=1}^{N}\|\nabla U_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2$$
$$\leq C(\Lambda(\epsilon_1),M(\epsilon_1'),\gamma,T,D_u,D_v)\Big(\left\|U_h^0\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|V_h^0\right\|_{L^2(\Omega)}^2+T\frac{|\Omega|(\gamma b)^2}{2\epsilon_1}+T\frac{|\Omega|(\gamma\alpha+\gamma b)^2}{2\epsilon_1'}\Big),$$

όπου ϵ_1,ϵ_1' είναι σταθεροί θετικοί αριθμοί, $\|\nabla\cdot\boldsymbol{A}\|_{L^\infty(\Omega)}=\max_{1\leq n\leq N}\|\nabla\cdot\boldsymbol{A}^n\|_{L^\infty(\Omega)}$ και $\ell=\max_{1\leq n\leq N}\ell^n=\max_{1\leq n\leq N}\sum_{i=1}^{d}\|A^{n,i}\|_{L^\infty(\Omega)}$ (d είναι οι διαστάσεις του προβλήματος), και $\Lambda(\epsilon_1)=2\big(\|\nabla\cdot\boldsymbol{A}\|_{L^\infty(\Omega)}+\frac{\ell^2}{2D_v}+\epsilon_1\big)$, $M(\epsilon_1')=2\big(\|\nabla\cdot\boldsymbol{A}\|_{L^\infty(\Omega)}+\frac{3}{2}\gamma+\frac{\ell^2}{D_u}+\epsilon_1'\big)$.

Απόδειξη. Η απόδειξη προκύπτει πολύ εύκολα αν αναλογιστούμε το Θεώρημα 3.1.1 και 3.1.2, χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα και κάνοντας απλές πράξεις. Συγκεκριμένα έχουμε τις παρακάτω σχέσεις πραγματοποιώντας τριγωνικές ανισότητες

$$\max_{1\leq k\leq N}\left\|U_h^k\right\|_{L^2(\Omega)}^2\leq\max_{1\leq k\leq N}\left\|V_h^k\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\max_{1\leq k\leq N}\left\|U_h^k+V_h^k\right\|_{L^2(\Omega)}^2,$$
$$\sum_{n=1}^{N}\left\|U_h^n-U_h^{n-1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2\leq\sum_{n=1}^{N}\left\|(U_h^n+V_h^n)-(U_h^{n-1}-V_h^{n-1})\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\sum_{n=1}^{N}\left\|V_h^n-V_h^{n-1}\right\|_{L^2(\Omega)}^2,$$
$$\sum_{n=1}^{N}\|\nabla U_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2\leq\sum_{n=1}^{N}\|\nabla(U_h^n+V_h^n)\|_{L^2(\Omega)}^2+\sum_{n=1}^{N}\|\nabla V_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

και παρατηρώντας τις σχέσεις ευστάθειας για τις μεταβλητές $U_h^n+V_h^n$ και V_h^n, οι οποίες προκύπτουν από τα Θεωρήματα 3.1.1 και 3.1.2, παίρνουμε το επιθυμητό μας αποτέλεσμα.

■

Βιβλιογραφία

[1] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations.* AMS, Providence, RI, 2nd edition, 2010.

[2] Haim Brezis. *Συναρτησιακή Ανάλυση, Θεωρία και Εφαρμογές.* Πανεπιστημιακές εκδόσεις Ε.Μ.Π., Αθήνα, 1997.

[3] James C. Robinson. *Infinite-Dimensional Dynamical Systems.* Cambridge texts in applied mathematics, Cambridge, 2001.

[4] J.-L. Lions. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires (French).* Dunod,Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[5] Dalibor Pražák Radim Cajzl. *Partial differential equations II (Lecture Notes).* MFF UK, 2016.

[6] R. Asai S. Kondo. A reaction–diffusion wave on the skin of the marine angelfish pomacanthus. *Nature*, 376:765–768, 1995.

[7] J. Timmer S. Sick, S. Reinker and T. Schlake. Wnt and dkk determine hair follicle spacing through a reaction-diffusion mechanism. *Science*, 314(5804):1447–1450, 2006.

[8] L. Solnica-Krezel. Vertebrate development: taming the nodal waves. *Current Biology*, 13(1):R7–9, 2003.

[9] A. M. Turing. The chemical basis of morphogenesis. *Philos. Trans. R. Soc. Lond. B*, 237(641):37–72, 1952.

[10] J.Schnackenberg. Simple chemical reaction systems with limit cycle behaviour. *Journal of Theoretical Biology*, 81(3):389–400, 1979.

[11] Anotida Madzvamuse and Andy H.W. Chung. Fully implicit time-stepping schemes and non-linear solvers for systems of reaction-diffusion equations. *Applied Mathematics and Computation*, 244(1):361–374, 2014.

[12] Anotida Madzvamuse. Time-stepping schemes for moving grid finite elements applied to reaction-diffusion systems on fixed and growing domains. *Journal of Computational Physics*, 214(1):239–263, 2006.

[13] B. Stinner C. M. Elliott and C. Venkataraman. Modelling cell motility and chemotaxis with evolving surface finite elements. *Journal of the Royal Society Interface*, 9(76):3027–3044, 2012.

[14] A. Madzvamuse O. Lakkis and C. Venkataraman. Implicit-explicit time-stepping with finite element approximation of rdes on evolving domains. *SIAM*, 51(4):2309–2330, 2013.

[15] Petru Mironescu Haim Brezis. Where sobolev interacts with gagliardo-nirenberg. *Journal of Functional Analysis. Elsevier, In press. hal-01982813v2.*

[16] Jianping Zhaoe Yunzhang Zhang, Yanren Hou. Error analysis of a fully discrete finite element variational multiscale method for the natural convection problem. *Computers Mathematics with Applications*, 68(4):543–564, 2014.

[17] R. Rannacher J.G. Heywood. Finite-element approximation of the nonstationary navier–stokes problem part iv: error analysis for second-order. *SIAM J. Numer. Anal.*, 27(2):353–384, 1990.

[18] Vidar Thomeé. *Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems.* Springer, Berlin, 2nd edition, 2006.

[19] E. Suli. *Lecture Notes on Finite Element Methods for Partial Differential Equations.* 2012.

[20] E. N. Karatzas K. Chrysafinos and D. Kostas. Stability and error estimates of fully-discrete schemes for the brusselator system. *SIAM J. Numer. Anal.*, 57(2):828–853, 2019.

[21] Susanne C. Brenner and L. Ridgway Scott. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods.* Springer, New York, 3rd edition, 2008.

[22] L. Chen. *Introduction to Finite Elements (Lecture Notes).* 2003.