



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

---

Καθιερωμένο Πρότυπο και το  
Μεγαλοενοποιημένο Μοντέλο  $SU(5)$

---

ΓΑΪΤΑΝΗ ΝΑΥΣΙΚΑ

ΑΡΙΘΜΟΣ ΜΗΤΡΩΟΥ: GE16017

ΕΠΙΒΛΕΠΟΝΤΕΣ:

ΖΟΥΠΙΑΝΟΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ, ΤΡΑΚΑΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ

ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ, ΕΜΠ

ΑΘΗΝΑ, ΙΟΥΝΙΟΣ 2021

Η παρούσα διπλωματική εργασία αποτελείται από δύο σκέλη. Το πρώτο είναι το Καθιερωμένο Πρότυπο της Φυσικής, που άπτεται της μελέτης των στοιχειωδών σωματιδίων και των μεταξύ τους αλληλεπιδράσεων. Αναλύει επίσης τον μηχανισμό Higgs, δηλαδή τον τρόπο με τον οποίο τα φερμιόνια και τα πεδία βαθμίδας αποκτούν μάζα. Το δεύτερο κομμάτι αναφέρεται στο Μεγαλοενοποιημένο Μοντέλο  $SU(5)$ , το οποίο αποτελεί την πρώτη προσπάθεια δημιουργίας μίας ενοποίησης των αλληλεπιδράσεων της φύσης, εξαιρουμένης της βαρύτητας. Παρατίθεται σε μαθηματική μορφή η δομή του, καθώς και οι φαινομενολογικές συνέπειες του. Τέλος υπογραμμίζονται τα σημεία που το Καθιερωμένο Πρότυπο αδυνατεί να εξηγήσει. Παρέχεται η ερμηνεύσή τους από το Μοντέλο  $SU(5)$  και ασκείται κριτική και στις δύο θεωρίες.

The present thesis consists of two parts. The first is the Standard Model of Physics, which deals with the study of elementary particles and their interactions. It also analyses the Higgs mechanism and the way fermions and gauge bosons gain mass. The second part refers to the Grand Unified Model  $SU(5)$ , which is the first attempt to create a unification of the interactions of nature, excluding gravity. Its structure is presented in a mathematical form, as well as its phenomenological consequences. Finally, the points that the Standard Model fails to explain are underlined. Their interpretation is provided by the  $SU(5)$  Model and then both theories are criticised.

# Πρόλογος

Αρχικά οφείλω να ευχαριστήσω θερμά τον ομότιμο καθηγητή του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου Ζουπάνο Γεώργιο για την επίβλεψη και καθοδήγηση της παρούσας εργασίας, καθώς και για την εμπιστοσύνη του προς το πρόσωπό μου, μέσω της ένταξης μου σε ποικίλες δραστηριότητες. Ακόμα εκτιμώ πολύ το εξαιρετικά φιλικό και συνεργατικό κλίμα που φρόντισε να διατηρηθεί σε όλη τη διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου Τράκα Νικόλαο για την καθοδήγηση και το υλικό που μου προσέφερε, για την ολοκλήρωση της διπλωματικής αυτής εργασίας, καθώς και για την προσπάθεια διεύρυνσης των γνώσεων μου μέσα από τα μαθήματα που παρέδωσε.

Οφείλω και στους δύο αυτούς καθηγητές ευγνωμοσύνη για τον ρόλο που διαδραμάτισαν στην ακαδημαϊκή μου πορεία, αφού μέσα από τα μαθήματά τους, αλλά και την συμπεριφορά τους, με μύησαν στον χώρο αυτόν της φυσικής.

Ακόμα θα ήθελα να ευχαριστήσω το τρίτο μέλος της εξεταστικής επιτροπής της εργασίας, καθηγητή του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου, Κουτσούμπα Γεώργιο, για την συνεισφορά του.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω το οικογενειακό και φιλικό μου περιβάλλον για την όλη υποστήριξη.

# Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία φέρει τον τίτλο: Καθιερωμένο Πρότυπο και το Μεγαλοενοποιημένο Μοντέλο  $SU(5)$ . Στις εισαγωγικές ενότητες, παρατίθενται κάποια απαραίτητα στοιχεία για την μαθηματική και εννοιολογική κατανόηση, όλης της έκτασης της εργασίας. Ακόμα αναφέρεται το φυσικό υπόβαθρο που επικρατούσε στην επιστημονική κοινότητα, το οποίο αποτέλεσε και την αφορμή για την δημιουργία του Καθιερωμένου Προτύπου.

Στο δεύτερο κεφάλαιο αναφέρεται η δομή της αναλυτικής μηχανικής, ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο που χρησιμοποιήθηκε για την διατύπωση μίας θεωρίας πεδίου μέσω του Λαγκρανζιανού φορμαλισμού. Στη συνέχεια περιγράφεται η ανάγκη της ύπαρξης των μετασχηματισμών βαθμίδας, μέσω των οποίων αναπτύσσονται οι διάφορες Λαγκρανζιανές πυκνότητες που περιγράφουν τα πεδία.

Στο τρίτο κεφάλαιο γίνεται μία μικρή παρένθεση, που αφορά την παραγωγή γνωστών εξισώσεων, αλλά αυτή τη φορά με τη χρήση του Λαγκρανζιανού φορμαλισμού.

Στο τέταρτο κεφάλαιο θεμελιώνεται το Καθιερωμένο Πρότυπο και η απόδοση μάζας στα φερμιόνια και τα μποζόνια βαθμίδας, μέσω του μηχανισμού Higgs. Περιγράφεται επίσης η «ενοποίηση» της ηλεκτρομαγνητικής με την ασθενή αλληλεπίδραση, μέσω του μοντέλου Weinberg-Salam.

Με το πέμπτο κεφάλαιο, περνάμε στο δεύτερο σκέλος της εργασίας, όπου αρχικά γίνεται μία γενική περιγραφή των μεγαλοενοποιημένων θεωριών. Έπειτα εξειδικεύουμε συγκεκριμένα στο Μοντέλο  $SU(5)$ , το οποίο και αποτελεί την πρώτη προσπάθεια ενοποίησης των τριών αλληλεπιδράσεων της φύσης. Αρχικά υπογραμμίζεται η δομή της ομάδας από αλγεβρική σκοπιά και έπειτα τοποθετούνται μποζόνια και φερμιόνια σε συγκεκριμένες αναπαραστάσεις. Ακολουθεί η εξήγηση της κβάντωσης του ηλεκτρικού φορτίου.

Στο τελευταίο κεφάλαιο εξηγείται το αυθόρμητο σπάσιμο της συμμετρίας, δηλαδή ο τρόπος με τον οποίο η  $SU(5)$  ανάγεται στο Καθιερωμένο Πρότυπο. Αναλύεται ως συνέπεια των παραπάνω η διάσπαση του πρωτονίου και άλλες θεωρητικές προβλέψεις, όπως ο υπολογισμός του ημιτόνου της γωνίας Weinberg, που επιβεβαιώνονται και πειραματικά. Ακόμα επεξεργάζονται οι σταθερές σύζευξης και φαίνεται πως τελικά δεν υπάρχει πραγματική ενοποίηση των τριών σταθερών. Τέλος ασκείται κριτική στα παραπάνω και αναφέρονται οι λόγοι που μας οδηγούν στην μελέτη της υπερσυμμετρίας, προκειμένου να απαλειφθούν οι αποτυχίες του μοντέλου.

# Περιεχόμενα

<b>I</b>	<b>Καθιερωμένο Πρότυπο</b>	<b>6</b>
<b>1</b>	<b>Εισαγωγικές έννοιες</b>	<b>7</b>
1.1	Μη σχετικιστική κβαντομηχανική . . . . .	7
1.2	Στοιχεία ειδικής σχετικότητας . . . . .	9
1.3	Εξίσωση Klein Gordon . . . . .	13
1.4	Εξίσωση Dirac . . . . .	15
1.5	Λύσεις εξίσωσης Dirac . . . . .	20
<b>2</b>	<b>Θεωρία πεδίου</b>	<b>27</b>
2.1	Λαγκρανζιανή Διατύπωση . . . . .	27
2.2	Αρχή ελάχιστης δράσης . . . . .	28
2.3	Λαγκρανζιανή σε Θεωρία Πεδίου . . . . .	29
2.4	Συμμετρίες και νόμοι διατήρησης . . . . .	32
2.5	Μετασχηματισμοί βαθμίδας . . . . .	33
2.6	Αβελιανές κα μη αβελιανές θεωρίες βαθμίδας . . . . .	36
2.6.1	U(1) . . . . .	36
2.6.2	SU(2) . . . . .	36
2.6.3	SU(3) . . . . .	40
<b>3</b>	<b>Εξαγωγή εξισώσεων από γνωστές Λαγκρανζιανές</b>	<b>43</b>
3.1	Εξισώσεις Maxwell . . . . .	43
3.2	Λαγκρανζιανή Proca . . . . .	45
3.3	Μάζα φωτονίου . . . . .	46
3.4	Εξίσωση Klein-Gordon . . . . .	47
3.5	Εξίσωση Dirac . . . . .	47
<b>4</b>	<b>Καθιερωμένο Πρότυπο</b>	<b>49</b>
4.1	Αυθόρμητο σπάσιμο διακριτής συμμετρίας βαθμίδας . . . . .	49
4.2	Αυθόρμητο σπάσιμο εκτεταμένης συμμετρίας βαθμίδας . . . . .	52
4.3	Αυθόρμητο σπάσιμο τοπικής συμμετρίας βαθμίδας, μηχανισμός Higgs - Αβελιανή περίπτωση . . . . .	53
4.4	Αυθόρμητο σπάσιμο τοπικής συμμετρίας βαθμίδας, μηχανισμός Higgs- Μη αβελιανή περίπτωση . . . . .	56
4.5	Θεωρίες βαθμίδας στο Καθιερωμένο Πρότυπο . . . . .	59
4.5.1	Συμμετρία $U(1)_Y$ . . . . .	59
4.5.2	Συμμετρία $SU(2)_L$ . . . . .	59

4.5.3	Συμμετρία $SU(3)_c$ . . . . .	61
4.5.4	$SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ . . . . .	62
4.6	Ηλεκτρασθενείς αλληλεπιδράσεις (Weinberg-Salam) . . . . .	62
4.6.1	Φορτισμένα και αφόρτιστα ρεύματα . . . . .	68
4.6.2	Μάζες φερμιονίων . . . . .	71
4.7	Φερμιονικές μάζες και ανάμιξη γενεών . . . . .	74
4.8	Γωνία Cabibbo . . . . .	77
4.9	Ισχυρές αλληλεπιδράσεις . . . . .	79
4.10	Σύνοψη . . . . .	84
4.11	Ανάγκη επέκτασης του καθιερωμένου προτύπου . . . . .	84
<b>II</b>	<b>Ενοποίηση</b> . . . . .	<b>85</b>
<b>5</b>	<b>Το πρότυπο <math>SU(5)</math></b> . . . . .	<b>86</b>
5.1	Ενοποίηση . . . . .	86
5.2	Επιλογή της ομάδας $SU(5)$ . . . . .	88
5.2.1	Γενικά χαρακτηριστικά των ομάδων $SU(n)$ . . . . .	88
5.2.2	$SU(5)$ . . . . .	89
5.3	Βασικές αναπαραστάσεις της $SU(5)$ . . . . .	94
5.4	Η χβάντωση του φορτίου ως συνέπεια της $SU(5)$ . . . . .	99
5.5	$SU(5)$ και Επανακανονικοποίηση . . . . .	102
5.6	Μποζονικά πεδία βαθμίδας . . . . .	103
5.7	Συνοπτική παρουσίαση . . . . .	104
<b>6</b>	<b>Αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας</b> . . . . .	<b>105</b>
6.1	Σπάσιμο της $SU(5)$ . . . . .	105
6.2	Ενοποίηση σταθερών ζεύξης . . . . .	111
6.3	Διάσπαση πρωτονίου . . . . .	120
6.4	Συμπεράσματα . . . . .	124

# Κατάλογος Σχημάτων

1.1	Τετρανύσματα βάσης κατά τους άξονες συντεταγμένων. . . . .	9
1.2	Θάλασσα του Dirac. Κίτρινο: σωματίδια, μπλε: αντισωματίδια. . . . .	15
1.3	Σωματίδια και αντισωματίδια . . . . .	26
2.1	Πιθανές τροχιές . . . . .	28
4.1	$\mu^2 > 0$ . . . . .	50
4.2	$\mu^2 < 0$ . . . . .	50
4.3	Δυναμικό $V(\phi)$ μιγαδικού βαθμωτού πεδίου για $\mu^2 > 0$ και $\lambda > 0$ . . . . .	52
4.4	Συμπεριφορά της σύζευξης της $QCD$ . . . . .	83
4.5	Εξάρτηση του $\frac{1}{\alpha_s}$ , για $\mu = Q$ , σε λογαριθμική κλίμακα. . . . .	83
6.1	Φάσμα μάζας βαθμωτών πεδίων της $SU(5)$ , $H$ και $\Phi$ . . . . .	107
6.2	Ενοποίηση σταθερών ζεύξης. . . . .	112
6.3	Πειραματικές τιμές σύγκλισης σταθερών ζεύξης. . . . .	119
6.4	Το μποζόνιο $X$ ως leptoquark και diquark αντίστοιχα. . . . .	122
6.5	Παραβίαση βαρυονικού αριθμού, μέσω ανταλλαγής μποζονίων $X, Y$ . . . . .	122
6.6	Διασπάσεις πρωτονίου. . . . .	123



Μέρος Ι  
Καθιερωμένο Πρότυπο

# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγικές έννοιες

### 1.1 Μη σχετικιστική κβαντομηχανική

Να σημειωθεί για αρχή, πως σε όλο το μήκος της εργασίας θα υιοθετήσουμε το σύστημα των φυσικών μονάδων θέτοντας  $c = \hbar = 1$ , στις διάφορες εκφράσεις (στην πλειοψηφία τους). Αυτή η πρακτική οδηγεί σε πιο απλούς και κομψούς τύπους, ενώ μπορούμε ανά πάσα στιγμή να μεταβούμε σε ένα συνηθισμένο σύστημα μονάδων, αποκαθιστώντας μέσω διαστατικής ανάλυσης τις κατάλληλες δυνάμεις των  $c$  και  $\hbar$ , που λείπουν.

Αρχικά να αναφέρουμε πως η εξίσωση του Schrodinger είναι μία μη σχετικιστική κυματική εξίσωση, γεγονός που οφείλεται στον τρόπο κατασκευής της. Αφετηρία ήταν η μη σχετικιστική σχέση ενέργειας-ορμής για ελεύθερο σωματίδιο

$$E = \frac{p^2}{2m} \quad (1.1)$$

που διέπει την κλασική φυσική. Στην κβαντομηχανική, τα φυσικά μεγέθη σχετίζονται με ερμιτιανούς τελεστές, δηλαδή με μετασχηματισμούς που επενεργούν πάνω στις κυματοσυναρτήσεις. Συγκεκριμένα για τους τελεστές ενέργειας και ορμής ισχύει

$$E \rightarrow \hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad (1.2)$$

$$p \rightarrow \hat{p} = -i\hbar \vec{\nabla} \quad (1.3)$$

Έτσι η εξίσωση (1.1) γίνεται

$$\hat{E}\Psi = \frac{\hat{p}^2}{2m}\Psi \Rightarrow i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 \Psi \quad (1.4)$$

όπου  $\Psi = \Psi(\vec{x}, t)$  η μιγαδική κυματοσυνάρτηση που περιγράφει την φυσική κατάσταση ενός συστήματος. Γράφοντας την (1.4) ως εξής

$$\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 \Psi + i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0 \quad (1.5)$$

έχουμε παράξει την εξίσωση Schrodinger, η οποία είναι μία διαφορική εξίσωση πρώτου βαθμού ως προς  $t$  και δευτέρου ως προς  $x$ , που με τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες προσδιορίζει την κυματοσυνάρτηση  $\Psi$ , δηλαδή την χρονική εξέλιξη του συστήματος.

Ορίζουμε τον πλήρη τελεστή της Χαμιλτονιανής στις τρεις διαστάσεις ως:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{x}) \quad (1.6)$$

του οποίου οι ιδιοτιμές αποτελούν τις πιθανές τιμές  $E$  που μπορεί να πάρει η ενέργεια του συστήματος, δηλαδή

$$\hat{H}\Psi = E\Psi \quad (1.7)$$

Η μεγάλη χρησιμότητα της κυματοσυνάρτησης  $\Psi$ , έγκειται στην στατιστική της ερμηνεία, άρα στο γεγονός ότι η κυματοσυνάρτηση δεν αντιπροσωπεύει ένα φυσικά παρατηρήσιμο κλασικό κύμα, αλλά ένα «κύμα πιθανότητας». Το τετράγωνο της απόλυτης τιμής της, ισούται με την πυκνότητα πιθανότητας, δηλαδή  $\rho = |\Psi|^2$ , άρα την πιθανότητα ανά μονάδα όγκου, να βρούμε το σωματίδιο σε μια συγκεκριμένη περιοχή του χώρου. Κατά την στατιστική ερμηνεία λοιπόν, η πιθανότητα να βρούμε το σωματίδιο σε στοιχείο όγκου  $d^3x$  δίνεται από τη σχέση

$$P = |\Psi|^2 d^3x \quad (1.8)$$

Όσον αφορά την στατιστική ερμηνεία, ο χρόνος  $t$  είναι μία παράμετρος χωρίς ιδιαίτερη σημασία. Η ολική πιθανότητα να βρούμε το σωματίδιο οπουδήποτε στον χώρο, είναι

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi|^2 d^3x = 1 \quad (1.9)$$

και αυτή πρέπει όπως βλέπουμε να ισούται με τη μονάδα, για να έχει νόημα η στατιστική ερμηνεία της  $\Psi$ . Η (1.9) λέγεται συνθήκη κανονικοποίησης και μία κυματοσυνάρτηση που την ικανοποιεί λέγεται κανονικοποιημένη. Για να μπορεί όμως να κανονικοποιηθεί μία κυματοσυνάρτηση, πρέπει αρχικά να ισχύει

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi|^2 d^3x < \infty \quad (1.10)$$

δηλαδή το ολοκλήρωμα του τετραγώνου της από το  $-\infty$ , ως το  $+\infty$  να συγκλίνει. Οι συναρτήσεις με αυτήν την ιδιότητα ονομάζονται τετραγωνικά ολοκληρώσιμες. Αν μία κυματοσυνάρτηση είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη, μπορεί να πολλαπλασιαστεί με κατάλληλο συντελεστή κανονικοποίησης, ώστε η συνολική πιθανότητα να είναι ίση με τη μονάδα. Επομένως η βασική απαίτηση για να κρίνουμε αν μία κυματοσυνάρτηση περιγράφει μία πραγματοποιήσιμη φυσική κατάσταση του σωματιδίου, είναι το αν είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη ή όχι.

Για την πυκνότητα πιθανότητας ισχύει πως η αύξηση σε μία περιοχή συνεπάγεται μείωση σε κάποια άλλη, αφού υπάρχει μεταφορά πιθανότητας, ώστε η συνολική πιθανότητα να παραμένει αμετάβλητη. Με άλλα λόγια, η χρονική εξέλιξη θα προκαλεί μία συνεχή μεταφορά πιθανότητας από τη μία περιοχή του χώρου στην άλλη. Ακόμα ισχύει ότι  $\rho = \rho(t)$ . Ο ρυθμός ελάττωσης της πυκνότητας πιθανότητας σε έναν δεδομένο όγκο  $V$  είναι  $-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV$  και ισούται με την ολική ροή σωματιδίων που βγαίνουν από αυτόν τον όγκο, από μία συνοριακή επιφάνεια  $S$ . Για το ρεύμα πιθανότητας  $\vec{J}$ , σύμφωνα και με τον νόμο του Gauss, ότι δηλαδή το ολοκλήρωμα όγκου της απόκλισης ενός διανυσματικού πεδίου ισούται με το επιφανειακό ολοκλήρωμα του διανυσματικού πεδίου πάνω στην επιφάνεια που περικλείει τον εξεταζόμενο όγκο, έχουμε:

$$\int_S \vec{J} d\vec{S} = \int_S \vec{J} \vec{n} dS = \int_V \nabla \cdot \vec{J} dV \quad (1.11)$$

όπου  $\vec{n}$  το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια  $S$ . Άρα για την πυκνότητα πιθανότητας γράφουμε

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{J} dV \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad (1.12)$$

Η παραπάνω ονομάζεται εξίσωση συνέχειας και δείχνει πως η μεταβολή της πυκνότητας πιθανότητας, επιφέρει μεταβολή στη ροή πιθανότητας, άρα ένα ρεύμα πιθανότητας  $\vec{J}$ . Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε το ρεύμα πιθανότητας. Για τον σκοπό αυτό πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση (1.5) με  $(i\Psi)^*$ , καθώς και την συζηγή της με  $(i\Psi)$  και τις προσθέτουμε:

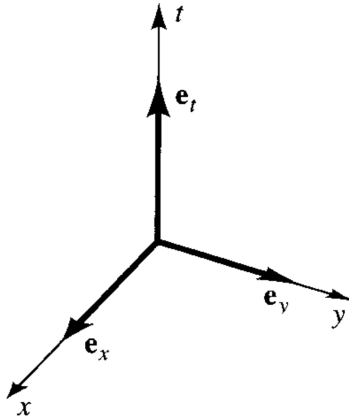
$$\begin{aligned} (i\Psi)^* \left( \frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 \Psi + i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) + (i\Psi) \left( \frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 \Psi + i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^* &= 0 \\ \Rightarrow -\frac{i\hbar^2}{2m} \Psi^* \vec{\nabla}^2 \Psi + \hbar \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{i\hbar^2}{2m} \Psi \vec{\nabla}^2 \Psi^* + \hbar \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} (\Psi \Psi^*) - \frac{i\hbar}{2m} (\Psi^* \vec{\nabla}^2 \Psi - \Psi \vec{\nabla}^2 \Psi^*) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} (|\Psi|^2) + \vec{\nabla} \cdot \left[ -\frac{i\hbar}{2m} (\Psi^* \vec{\nabla} \Psi - \Psi \vec{\nabla} \Psi^*) \right] &= 0 \end{aligned}$$

Συγκρίνοντας την παραπάνω με την εξίσωση συνέχειας, βλέπουμε ότι το ρεύμα πιθανότητας είναι

$$\vec{J} = \frac{\hbar}{2im} (\Psi^* \vec{\nabla} \Psi - \Psi \vec{\nabla} \Psi^*) \quad (1.13)$$

## 1.2 Στοιχεία ειδικής σχετικότητας

Το τετρανύσμα, ορίζεται ως ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα στον τετραδιάστατο επίπεδο χωρόχρονο, με τον ίδιο τρόπο που ένα τρισδιάστατο διάνυσμα ορίζεται ως ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα στον Ευκλείδειο χώρο. Σε κάθε αδρανειακό σύστημα αναφοράς μπορούμε να αντιστοιχήσουμε μία βάση τετρανυσμάτων, με μοναδιαίο μήκος και κατευθύνσεις παράλληλες στους άξονες  $t, x, y, z$ , του παρακάτω σχήματος



Σχήμα 1.1: Τετρανύσματα βάσης κατά τους άξονες συντεταγμένων.

Συμβολίζουμε τα τετρανύσματα ως  $\mathbf{e}_t, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ , ή ισοδύναμα  $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ , όπου το 0 αντιπροσωπεύει το  $t$ , το 1 αντιπροσωπεύει το  $x$ , το 2 αντιπροσωπεύει το  $y$  και το 3 αντιπροσωπεύει το  $z$ . Το σύνολο αυτών αποκαλείται βάση τετραδιανυσμάτων και οποιοδήποτε τετρανύσμα μπορεί να γραφεί ως ένας γραμμικός συνδυασμός αυτών. Για παράδειγμα το τετρανύσμα  $\mathbf{a}$ , στην βάση των  $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  γράφεται

$$\mathbf{a} = \alpha^t \mathbf{e}_t + \alpha^x \mathbf{e}_x + \alpha^y \mathbf{e}_y + \alpha^z \mathbf{e}_z \quad (1.14)$$

ή ισοδύναμα

$$\mathbf{a} = \alpha^0 \mathbf{e}_0 + \alpha^1 \mathbf{e}_1 + \alpha^2 \mathbf{e}_2 + \alpha^3 \mathbf{e}_3 \quad (1.15)$$

δηλαδή

$$\mathbf{a} = \sum_{\alpha=0}^3 \alpha^\alpha \mathbf{e}_\alpha \quad (1.16)$$

Μέσω της σύμβασης άθροισης, σύμφωνα με την οποία η παρουσία διαδοχικών εκθετών-δεικτών υπονοεί την άθροιση τους, γράφεται

$$\mathbf{a} = \alpha^\alpha \mathbf{e}_\alpha \quad (1.17)$$

Ένας τρόπος γραφής ενός διανύσματος θέσης είναι η έκφραση του μέσω των συνιστωσών του και των τετρανυσμάτων βάσης, δηλαδή

$$x^\mu = (x^t, x^x, x^y, x^z) = (t, x, y, z) = (t, \vec{x}) \quad (1.18)$$

Μία απειροστή μετατόπιση του τετρανύσματος γράφεται:

$$dx^\mu = (dt, d\vec{x}) \quad (1.19)$$

Τα τετρανύσματα που φέρουν δείκτες άνω λέγονται συναλλοίωτα, ενώ αυτά που φέρουν δείκτες κάτω λέγονται ανταλλοίωτα και γράφονται ως εξής:

$$x_\mu = (t, -x, -y, -z) = (t, -\vec{x}) \quad (1.20)$$

Το στοιχειώδες μήκος, σύμφωνα με το πυθαγόρειο θεώρημα, στον τρισδιάστατο ευκλείδειο χώρο, δίνεται από τη σχέση

$$dS^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \sum_{\alpha=0}^2 dx_\alpha dx^\alpha \quad (1.21)$$

Σε πολικές συντεταγμένες, στο επίπεδο, ισχύει  $x = r \cos \theta$  και  $y = r \sin \theta$ , όπου  $r \in [0, +\infty]$  και  $\theta \in [0, 2\pi]$ , το στοιχείο μήκους δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} dS^2 &= dx^2 + dy^2 = (d(r \cos \theta))^2 + (d(r \sin \theta))^2 = (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta)^2 + (\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta)^2 \\ &= \cos^2 \theta dr^2 + r^2 \sin^2 \theta d\theta^2 - \underline{2r \sin \theta \cos \theta dr d\theta} + \sin^2 \theta dr^2 + r^2 \cos^2 \theta d\theta^2 + \underline{2r \sin \theta \cos \theta dr d\theta} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow dS^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 \quad (1.22)$$

Σε κάθε περίπτωση, ορίζεται ένας ταυυστής  $g_{\mu\nu}$  που αρκεί για να βρεθεί το στοιχειώδες μήκος κάθε χώρου. Ο ορισμός των τετρανυσμάτων δεν είναι τυχαίος, αλλά συνδέεται με τον μετρικό ταυυστή, ο οποίος είναι ένας  $4 \times 4$  διαγώνιος συμμετρικός πίνακας, δηλαδή  $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$  και ορίζεται ως εξής:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.23)$$

Έτσι καταλήγουμε να γράφουμε τα τετρανύσματα ως  $v_\mu = g_{\mu\nu}v^\nu$ , όπου το  $\nu$  είναι ο κλειστός δείκτης και το  $\mu$  ο ελεύθερος δείκτης. Διαφορετικά γράφουμε  $v^\mu = g^{\mu\nu}v_\nu$ , ενώ η μετρική έχει την ιδιότητα

$$g^{\nu\rho}g_{\rho\mu} = \delta_\mu^\nu \quad (1.24)$$

Περνώντας τώρα στο εσωτερικό γινόμενο, το οποίο αποτελεί μία σημαντική έννοια του διανυσματικού λογισμού, γνωρίζουμε ότι για δύο διανύσματα  $\mathbf{a}$  και  $\mathbf{b}$ , αυτό γράφεται

$$\mathbf{ab} = a^\alpha b_\alpha = g_{\alpha\beta}a^\alpha b^\beta \quad (1.25)$$

Έστω τώρα ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων  $x - y$  και ένα σημείο αυτού  $P(x, y)$ , με  $x = r\cos\theta$  και  $y = r\sin\theta$ , όπου  $r$  το μήκος του διανύσματος που σχηματίζει το σημείο  $P$  με την αρχή των αξόνων. Στρίβουμε το σύστημα κατά γωνία  $\theta$  άρα δημιουργούμε ένα νέο σύστημα  $x' - y'$ . Το διάνυσμα βρίσκεται σε γωνία  $\phi$  από τον άξονα των  $x$  και σε γωνία  $\omega$  από τον άξονα των  $x'$ . Μετά τη στροφή, οι συντεταγμένες του διανύσματος γίνονται

$$x' = r\cos\omega = r\cos(\phi - \theta) \quad (1.26)$$

$$y' = r\sin\omega = r\sin(\phi - \theta) \quad (1.27)$$

Όμως ισχύουν οι σχέσεις

$$\sin(\phi - \theta) = \sin\phi\cos\theta - \sin\theta\cos\phi \quad (1.28)$$

$$\cos(\phi - \theta) = \cos\phi\cos\theta + \sin\theta\sin\phi \quad (1.29)$$

Άρα οι νέες συντεταγμένες γράφονται

$$x' = r(\cos\phi\cos\theta + \sin\theta\sin\phi) = x\cos\theta + y\sin\theta \quad (1.30)$$

$$y' = r(\sin\phi\cos\theta - \sin\theta\cos\phi) = y\cos\theta - x\sin\theta \quad (1.31)$$

Τελικά οι νέες συντεταγμένες, συναρτήσεως των παλιών γράφονται

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (1.32)$$

Ο παραπάνω, ονομάζεται πίνακας στροφής του επιπέδου  $x - y$  κατά γωνία  $\theta$ .

Τώρα θεωρούμε αδρανειακό σύστημα αναφοράς ( $\Sigma$ ) κινούμενο με σχετική ταχύτητα  $v$  ως προς ένα άλλο αδρανειακό σύστημα αναφοράς ( $\Sigma'$ ). Έστω μετασχηματισμός Lorentz για τις συντεταγμένες

$$x'^0 = \gamma(x^0 - \beta x^1) = t - v \frac{x}{\sqrt{1-v^2}} \quad (1.33)$$

$$x'^1 = \gamma(x^1 - \beta x^0) = t - v \frac{x}{\sqrt{1-v^2}} \quad (1.34)$$

$$x'^2 = x^2, x'^3 = x^3 \quad (1.35)$$

όπου

$$\beta = v, \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \Rightarrow \gamma^2 = 1 + v^2\gamma^2 \quad (1.36)$$

Θα δείξουμε στη συνέχεια ότι ο μετασχηματισμός Lorentz μπορεί να θεωρηθεί ως μία στροφή στο επίπεδο  $(it, \vec{x})$  κατά μία μιγαδική γωνία  $i\theta$ . Αρχικά να υπενθυμίσουμε τη σχέση  $\cosh^2\theta - \sinh^2\theta = 1$ . Αναφέρουμε ότι το  $\sinh\theta$  παίρνει τιμές σε όλο το φάσμα των πραγματικών αριθμών. Άρα υπάρχει  $\theta$ , τέτοιο ώστε  $\sinh\theta = v\gamma$ , άρα σύμφωνα με την σχέση (1.36) ισχύει

$$\gamma^2 = 1 + v^2\gamma^2 \Rightarrow \gamma^2 = 1 + \sinh^2\theta \Rightarrow \gamma^2 = \cosh^2\theta \xrightarrow{\cosh\theta > 0, v < \gamma < \infty} \gamma = \cosh\theta \quad (1.37)$$

Επομένως οι μετασχηματισμένες συντεταγμένες γίνονται

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \gamma & -v\gamma & 0 & 0 \\ -v\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cosh\theta & -\sinh\theta & 0 & 0 \\ -\sinh\theta & \cosh\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Όμως ισχύει ότι

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \Rightarrow \cos(i\theta) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \cosh\theta \quad (1.38)$$

Με την ίδια λογική επίσης έχουμε  $\sinh\theta = -i\sin(i\theta)$ . Επομένως οι συντεταγμένες γίνονται:

$$\begin{bmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(i\theta) & i\sin(i\theta) & 0 & 0 \\ i\sin(i\theta) & \cos(i\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης με τον πίνακα  $\begin{bmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  έχουμε:

$$\begin{bmatrix} it' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i\cos(i\theta) & i\sin(i\theta) & 0 & 0 \\ i\sin(i\theta) & i\cos(i\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} it' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(i\theta) & i\sin(i\theta) & 0 & 0 \\ i\sin(i\theta) & \cos(i\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} it \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Γενικά για έναν μετασχηματισμό Lorentz ισχύει

$$x'^{\mu} = \sum_{\nu=0}^3 \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu} = \Lambda_{\nu}^{\mu} x^{\nu} \quad (1.39)$$

$$\text{όπου } \Lambda_{\nu}^{\mu} = \begin{bmatrix} -\gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε πως ο πίνακας  $\Lambda$  δεν είναι διαγώνιος, επομένως επιβεβαιώνεται το γεγονός ότι οι μετασχηματισμοί Lorentz εμπλέκουν τον χώρο και χρόνο των εκάστοτε αδρανειακών συστημάτων.

### 1.3 Εξίσωση Klein Gordon

Στην ειδική σχετικότητα, η εξίσωση Schrodinger είναι ανίκανη να περιγράψει την κίνηση των σωματιδίων, αφού πρόκειται για μία μη σχετικιστική κυματική εξίσωση και παραβιάζει το αναλλοίωτο Lorentz. Σε πρώτη φάση, γράφουμε την σχετικιστική σχέση ενέργειας-ορμής

$$E^2 = p^2 + m^2 \quad (1.40)$$

και αντικαθιστούμε σε αυτήν, τον τελεστή της ενέργειας  $E = i\frac{\partial}{\partial t}$  και  $p = -i\vec{\nabla}$ . Επομένως έχουμε

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \vec{\nabla}^2 \psi = m^2 \psi \quad (1.41)$$

Η εξίσωση (1.41), ονομάζεται εξίσωση Klein Gordon και περιγράφει την κίνηση ενός σωματιδίου με κυματοσυνάρτηση  $\psi$  και μάζα αδράνειας  $m$ . Θα απλοποιήσουμε λίγο την μορφή της γράφοντας αρχικά το τετραδιάνυσμα της ορμής που δίνεται από τη σχέση

$$p^{\mu} = \left( i\frac{\partial}{\partial t}, -i\vec{\nabla} \right) = i \left( \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right) = i\partial^{\mu} \quad (1.42)$$

Ακόμα ισχύει η σχέση

$$\partial_{\mu} \partial^{\mu} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \quad (1.43)$$

Επομένως η εξίσωση (1.40) γίνεται

$$E^2 - p^2 = m^2 \Rightarrow p^{\mu} p_{\mu} = m^2 \Rightarrow i\partial^{\mu} i\partial_{\mu} = m^2 \Rightarrow -\partial^{\mu} \partial_{\mu} = m^2$$

Το  $\partial^{\mu} \partial_{\mu}$  ονομάζεται τελεστής D'Alembert και συμβολίζεται με  $\square$ . Άρα συνοπτικά η Klein Gordon γράφεται

$$(\square + m^2)\psi = 0 \quad (1.44)$$



Θα υπολογίσουμε στην συνέχεια την πυκνότητα  $\rho$  και το ρεύμα πιθανότητας  $\vec{j}$ , μέσω της Klein Gordon, στην μορφή (1.41). Αρχικά την πολλαπλασιάζουμε με  $(-i\psi^*)$  και παίρνουμε:

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}(-i\psi^*) + \vec{\nabla}^2 \psi(-i\psi^*) = m^2 \psi(-i\psi^*) \Rightarrow i \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \psi^* - i\psi^* \vec{\nabla}^2 \psi = -im^2 \psi \psi^* \quad (1.45)$$

Στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε την (1.41\*) με  $(-i\psi)$  και παίρνουμε

$$-\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial t^2}(-i\psi) + \vec{\nabla}^2 \psi^*(-i\psi) = m^2 \psi^*(-i\psi) \Rightarrow i \frac{\partial^2 (\psi^*)}{\partial t^2} \psi - i\psi \vec{\nabla}^2 \psi^* = -im^2 \psi \psi^* \quad (1.46)$$

Αφαιρώντας τις (1.45) και (1.46) κατά μέλη έχουμε:

$$\begin{aligned} i\psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - i\psi \frac{\partial^2 (\psi^*)}{\partial t^2} - i\psi^* \vec{\nabla}^2 \psi + i\psi \vec{\nabla}^2 \psi^* &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left[ i \left( \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) \right] + \vec{\nabla} \cdot [-i(\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*)] &= 0 \end{aligned} \quad (1.47)$$

Η (1.47) είναι η εξίσωση συνέχειας, επομένως η πυκνότητα πιθανότητας ορίζεται ως εξής:

$$\rho = i \left( \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) \quad (1.48)$$

ενώ το ρεύμα πιθανότητας δίνεται από τη σχέση

$$\vec{j} = -i(\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*) \quad (1.49)$$

έτσι ώστε η (1.47) να γράφεται

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad (1.50)$$

Στην σχετικιστική διατύπωση, η εξίσωση συνέχειας, γράφεται ως μία εξίσωση διατήρησης του τετραδιανύσματος του ρεύματος  $j^\mu$ , ως  $\partial_\mu j^\mu = 0$ , όπου

$$\begin{aligned} j^\mu &= (\rho, \vec{j}) = \left( i \left( \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right), -i(\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*) \right) \\ &= i \left( \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t}, -\psi^* \vec{\nabla} \psi \right) - i \left( \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t}, -\psi \vec{\nabla} \psi^* \right) = i\psi^* \left( \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right) \psi - i\psi \left( \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right) \psi^* \\ &= i\psi^* \partial^\mu \psi - i\psi \partial^\mu \psi^* \Rightarrow \\ j^\mu &= i(\psi^* \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \psi^*) \end{aligned} \quad (1.51)$$

Για ένα ελεύθερο σωματίδιο, η λύση της Klein Gordon είναι επίπεδα κύματα της μορφής

$$\psi(t, \vec{x}) = N e^{(i\vec{p}\vec{x} - iEt)} \quad (1.52)$$

Τότε η πυκνότητα πιθανότητας γίνεται

$$\rho = i \left( \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) = i(|N|^2 e^{i\vec{p}\vec{x}} (-iE) e^{i\vec{p}\vec{x}} - |N|^2 e^{-i\vec{p}\vec{x}} (iE) e^{i\vec{p}\vec{x}}) = 2|N|^2 E \quad (1.53)$$

ενώ το ρεύμα γίνεται:

$$\vec{j} = -i(|N|^2 e^{i\vec{p}\vec{x}} (i\vec{p}) e^{-i\vec{p}\vec{x}} - |N|^2 e^{-i\vec{p}\vec{x}} (-i\vec{p}) e^{i\vec{p}\vec{x}}) = 2|N|^2 \vec{p} \quad (1.54)$$

Άρα συνολικά το τετραρεύμα γίνεται

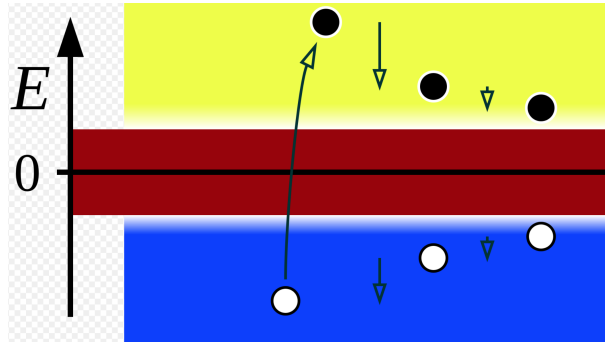
$$j^\mu = (\rho, \vec{j}) = (2|N|^2 E, 2|N|^2 \vec{p}) = 2|N|^2 (E, \vec{p}) = 2|N|^2 p^\mu \quad (1.55)$$

Από την (1.53) συμπεραίνουμε ότι η πυκνότητα πιθανότητας έχει όμοιο πρόσημο με την  $E$ . Όμως για την ενέργεια ισχύει

$$E = \pm \sqrt{p^2 + m^2} \quad (1.56)$$

Το πρόβλημα στην παρούσα κατάσταση είναι ότι η πυκνότητα πιθανότητας  $\rho$  δεν είναι μία θετικά ορισμένη ποσότητα, αλλά παίρνει και αρνητικές τιμές. Το γεγονός αυτό οδηγεί σε αδιέξοδο, καθώς γίνονται δυνατές οι μεταπτώσεις σε συνεχώς χαμηλότερα ενεργειακές στάθμες. Επίσης δεν μπορεί να αγνοηθούν γενικότερα οι αρνητικές ενέργειες, διότι οφείλει να δημιουργείται ένα πλήρες σύνολο ιδιοκαταστάσεων. Ένα επιπλέον πρόβλημα της είναι πως πρόκειται για μία εξίσωση δευτέρου βαθμού ως προς τον χρόνο, επομένως για την επίλυση της απαιτείται η γνώση όχι μόνο της κυματοσυνάρτησης την χρονική στιγμή μηδέν, αλλά και της πρώτης παραγώγου της. Αυτό αντιβαίνει στην κβαντομηχανική, όπου ο τελεστής χρονικής εξέλιξης απαιτεί τη γνώση μόνο της κυματοσυνάρτησης την αρχική χρονική στιγμή. Το γεγονός αυτό συνεπάγεται μία δυσκολία στην φυσική ερμηνεία της Klein Gordon. Ιστορικά, το πρόβλημα των αρνητικών ενεργειών οδήγησε στην εγκατάλειψη της εξίσωσης Klein Gordon, ως εξίσωσης που περιγράφει σωματίδιο με κυματοσυνάρτηση  $\psi$ . Το πρόβλημα των αρνητικών ενεργειών, αντιμετωπίζεται με την εξίσωση Dirac. Παρόλα αυτά, η συνεπής ερμηνεία της σχετικιστικής εξίσωσης Klein Gordon έγκειται στο πλαίσιο μίας κβαντικής θεωρίας πεδίου, όπου το  $\psi$  είναι ένα κβαντικό πεδίο και η Klein Gordon είναι μία εξίσωση πεδίου που αντιστοιχεί σε περισσότερα από ένα σωματίδια. Επειδή έχουμε μόνο ένα πεδίο  $\psi$ , χωρίς άλλο βαθμό ελευθερίας, λέμε ότι πρόκειται για ένα βαθμωτό πεδίο που αντιστοιχεί σε βαθμωτά σωματίδια, δηλαδή αυτά με μηδενικό σπιν.

## 1.4 Εξίσωση Dirac



Σχήμα 1.2: Θάλασσα του Dirac. Κίτρινο: σωματίδια, μπλε: αντισωματίδια.

Η εξίσωση Dirac αν και αποτελεί μία σωστή ερμηνεία της φυσικής, έγκειται στο πλαίσιο μίας κβαντικής θεωρίας πεδίου. Αφετηρία της, αποτέλεσε η θέληση του ίδιου του Dirac να γράψει μία σχετικιστική κυματική εξίσωση γραμμική ως προς την χωρική, αλλά και την χρονική παράγωγο. Ήθελε να περιγράψει το ηλεκτρόνιο, συμπεριλαμβάνοντας το σπιν και ταυτόχρονα να αποφύγει το πρόβλημα των αρνητικών πιθανοτήτων, όπου κατέληγε η εξίσωση Klein Gordon. Αξίωσε λοιπόν πως στο κενό, όλες οι καταστάσεις με αρνητική ενέργεια είναι κατειλημμένες από ηλεκτρόνια. Υπάρχει δηλαδή μία άπειρη «θάλασσα» ηλεκτρονίων. Η απαγορευτική αρχή του Pauli απαγορεύει σε ένα ηλεκτρόνιο με θετική ενέργεια να πέσει σε κατώτερο του μηδενός ενεργειακό επίπεδο, καθώς αυτό είναι ήδη κατειλημμένο από άλλο ηλεκτρόνιο. Από την άλλη, αν κάποιο ηλεκτρόνιο αρνητικής ενέργειας, διεγερθεί και καταλάβει μία ενεργειακή στάθμη πάνω από το μηδέν, τότε αυτομάτως δημιουργείται μία οπή στην παλιά του θέση. Η απουσία αυτή ηλεκτρονίου, ερμηνεύεται ως παρουσία αντισωματιδίου με ενέργεια μεγαλύτερη του μηδενός. Το αποτέλεσμα της διέγερσης λοιπόν, είναι η παραγωγή ενός ζεύγους σωματιδίου - αντισωματιδίου με θετική και αρνητική ενέργεια αντίστοιχα. Στο σημείο αυτό φαίνεται η αρχική ιδέα για την πρόβλεψη του αντισωματιδίου.

Πως ερμηνεύονται όμως οι αρνητικές λύσεις της Klein Gordon για μποζόνια, όπου δεν ισχύει η απαγορευτική αρχή του Pauli; Οι Pauli και Weisskopf εισάγουν το 1934 το φορτίο του ηλεκτρονίου στο τετραρέυμα και το ερμηνεύουν ως πυκνότητα φορτίου ρεύματος του αρνητικά φορτισμένου σωματιδίου. Συνεπώς, τώρα το  $\rho$  είναι η πυκνότητα φορτίου και όχι πιθανότητας. Οι αρνητικές ενέργειες επομένως, μπορούν να εξηγηθούν ως σωματίδιο με αντίθετο φορτίο, δηλαδή αντισωματίδιο. Αντίθετα με την θεωρία των οπών, η παραπάνω εφαρμόζεται και σε μποζόνια και σε φερμιόνια.

Το 1941 ο Stueckelberg και το 1948 ο Feynman προτείνουν μία λύση που υποστηρίζει πως οι αρνητικές ενέργειες περιγράφουν σωματίδια που διαδίδονται πίσω στον χρόνο, ή ισοδύναμα αντισωματίδια που διαδίδονται μπροστά στον χρόνο. Για παράδειγμα, για ηλεκτρόνιο με θετική ενέργεια και ορμή  $\vec{p}$ , το τετραρέυμα υπολογίζεται ως εξής

$$j^\mu = -2e|N|^2(E, \vec{p}) \quad (1.57)$$

Για ένα ποζιτρόνιο με θετική επίσης ενέργεια και ορμή  $\vec{p}$ , αυτό είναι

$$j^\mu = 2e|N|^2(E, \vec{p}) = -2e|N|^2(-E, -\vec{p}) \quad (1.58)$$

Το ρεύμα αυτό αντιστοιχεί, όπως φαίνεται σε ηλεκτρόνιο αρνητικής ενέργειας και ορμής. Γενικότερα, η εκπομπή ή απορρόφηση σωματιδίου τετραορμής  $p^\mu$  αντιστοιχεί σε απορρόφηση ή εκπομπή αντίστοιχα σωματιδίου τετραορμής  $-p^\mu$ .

Πίσω στην Dirac τώρα, απαιτούμε μία γραμμική εξίσωση ως προς την χρονική παράγωγο, για να υπάρξει το θετικό  $\rho$ , αλλά και ως προς την χωρική, για να έχουμε Lorentz invariance. Ακόμα πρέπει οι κυματοσυναρτήσεις που θα προκύψουν να ικανοποιούν την εξίσωση Klein Gordon. Αρχικά προτάθηκε μία γενική εξίσωση της μορφής

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(x) = (-i\vec{\alpha}\vec{\nabla} + \beta m)\psi(x) \quad (1.59)$$

$$= [-i(\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial x^3}) + \beta m]\psi(x) \equiv H_D \psi(x) \quad (1.60)$$

Ο τελεστής  $H_D = -i\vec{\alpha}\vec{\nabla} + \beta m$  λέγεται χαμιλτονιανή Dirac, ενώ οι συντελεστές  $\vec{\alpha}$  και  $\beta$  θα καθοριστούν στην συνέχεια από τις φυσικές συνθήκες. Αν κάνουμε μία αναδρομή στους πίνακες

Pauli  $\sigma_i$ , που περιγράφουν μη σχετικιστικές καταστάσεις με σπιν  $\frac{1}{2}$ , υπακούουν σε μη μεταθετικές σχέσεις. Υπάρχει λοιπόν η πιθανότητα οι ποσότητες  $\alpha_i$  και  $\beta$  να μην μετατίθενται μεταξύ τους. Θα συγκρίνουμε όμως για αρχή την προτεινόμενη εξίσωση Dirac που γράψαμε, με την εξίσωση Klein Gordon, όπως δίνεται από τη σχέση (1.41). Για αυτόν τον σκοπό δρούμε με την ακόλουθη τελεστική σχέση στην εξίσωση Dirac:

$$i \frac{\partial}{\partial t} = -i\vec{\alpha}\vec{\nabla} + \beta m \quad (1.61)$$

επομένως έχουμε

$$\begin{aligned} \left(i \frac{\partial}{\partial t}\right)^2 &= (-i\vec{\alpha}\vec{\nabla} + \beta m)(-i\vec{\alpha}\vec{\nabla} + \beta m) \\ &= -\sum_{i=1}^3 \alpha_i^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \sum_{j=1}^3 (\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + im \sum_{i=1}^3 (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) \frac{\partial}{\partial x_i} + \beta^2 m^2 \end{aligned}$$

Υπενθυμίζουμε την Klein Gordon

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t}\right)^2 = -\sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + m^2 \quad (1.62)$$

Συγκρίνοντας τις δύο εξισώσεις καταλήγουμε στις ακόλουθες σχέσεις αντιμετάθεσης

$$\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 0 \Rightarrow \{\alpha_i, \alpha_j\} = 0, (i, j = 1, 2, 3, i \neq j) \quad (1.63)$$

$$\alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0 \Rightarrow \{\alpha_i, \beta\} = 0, (i = 1, 2, 3) \quad (1.64)$$

ενώ ταυτόχρονα πρέπει να ισχύει

$$\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = \alpha_3^2 = \beta^2 = 1 \quad (1.65)$$

Οι παραπάνω συνθήκες παραπέμπουν όντως στις σχέσεις αντιμετάθεσης των πινάκων Pauli. Ο Dirac λοιπόν πρότεινε πως οι ποσότητες  $\alpha_i, \beta$  μπορούν να ερμηνευτούν ως πίνακες που δρουν σε μία κυματοσυνάρτηση  $\psi$ , η οποία έχει τη μορφή ενός πίνακα στήλης που ονομάζουμε σπίνορα  $\psi$ . Κάθε συνιστώσα λοιπόν αυτού του σπίνορα πρέπει να υπακούει στην ίδια εξίσωση άρα οι φυσικές καταστάσεις που παριστάνει κάθε συνιστώσα θα έχουν την ίδια ενέργεια. Επομένως αυτές θα παριστάνουν ένα σύνολο εκφυλισμένων καταστάσεων και θα συνδέονται με έναν βαθμό ελευθερίας, ο οποίος δεν είναι άλλος από το σπιν. Θα παραθέσουμε στη συνέχεια μερικές ιδιότητες των πινάκων  $\alpha_i, \beta$ . Αρχικά, είναι ερμιτιανοί εφόσον η χαμιλτονιανή Dirac είναι ένας ερμιτιανός τελεστής, με πραγματικές ιδιοτιμές. Ακόμα ισχύει

$$\begin{aligned} \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 0 &\Rightarrow \alpha_j = -\alpha_i^{-1} \alpha_j \alpha_i \Rightarrow Tr(\alpha_j) = -Tr(\alpha_i^{-1} \alpha_j \alpha_i) \\ &= -Tr(\alpha_j \alpha_i \alpha_i^{-1}) = -Tr(\alpha_j) \Rightarrow 2Tr(\alpha_j) = 0 \\ &\Rightarrow Tr(\alpha_j) = 0 \end{aligned} \quad (1.66)$$

όπου χρησιμοποιήθηκε η ιδιότητα ότι το ίχνος παραμένει αναλλοίωτο κάτω από κυκλική εναλλαγή των πινάκων εντός του. Ομοίως υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} \alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0 &\Rightarrow \beta = -\alpha_i^{-1} \beta \alpha_i \Rightarrow \text{Tr}(\beta) = -\text{Tr}(\alpha_i^{-1} \beta \alpha_i) \\ &= -\text{Tr}(\beta \alpha_i \alpha_i^{-1}) = -\text{Tr}(\beta) \Rightarrow 2\text{Tr}(\beta) = 0 \\ &\Rightarrow \text{Tr}(\beta) = 0 \end{aligned} \quad (1.67)$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε πως οι πίνακες είναι άιχνοι. Ακόμα σύμφωνα με την (1.65) γνωρίζουμε ότι οι ιδιοτιμές τους είναι  $\pm 1$ , γεγονός που επαληθεύει το ότι έχουν μηδενικό ίχνος, αφού το ίχνος ενός πίνακα είναι το άθροισμα των ιδιοτιμών του και στην συγκεκριμένη περίπτωση το άθροισμα των ιδιοτιμών  $\pm 1$  ισούται με μηδέν. Άρα

$$\text{Tr}(\alpha_i) = 0 \Rightarrow k \times 1 + l \times (-1) = 0 \Rightarrow k = l \quad (1.68)$$

Το πλήθος των φορών δηλαδή, που εμφανίζεται η ιδιοτιμή  $+1$  είναι ίδιο με το πλήθος των φορών εμφάνισης της ιδιοτιμής  $-1$ . Έτσι δικαιολογείται ο μηδενισμός του ίχνους. Αυτό μπορεί όμως να συμβαίνει μόνο όταν έχουμε άρτιο αριθμό ιδιοτιμών. Η διάσταση των πινάκων δίνεται από την σχέση  $D = k + l = 2l$ , δηλαδή είναι επίσης ένας άρτιος αριθμός. Η μικρότερη δυνατή διάσταση των πινάκων είναι  $D = 4$ , διότι για  $D = 2$  υπάρχουν μόνο τρεις αντιμετατιθέμενοι πίνακες Pauli. Για  $D = 4$  λοιπόν, ικανοποιείται η ακόλουθη άλγεβρα

$$\{\alpha_i, \beta\} = 0 \quad (1.69)$$

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij}I_4 \quad (1.70)$$

$$\beta^2 = I_4 \quad (1.71)$$

Δεν υπάρχει μοναδική επιλογή των πινάκων  $\alpha_i, \beta$ , αλλά στην πραγματικότητα μπορούν να αναπαρασταθούν με πολλούς τρόπους αρκεί να ικανοποιούν τις παραπάνω σχέσεις. Στην αναπαράσταση *Dirac* ισχύει

$$\alpha_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \sigma_i \\ \sigma_i & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} I_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -I_2 \end{bmatrix}, \sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (1.72)$$

Αφού λοιπόν οι πίνακες  $\alpha_i, \beta$  είναι  $4 \times 4$ , τότε οι κυματοσυναρτήσεις θα είναι  $4 \times 1$  πίνακες στήλες. Εκ πρώτης όψεως, κάθε σωματίδιο με σπιν  $\frac{1}{2}$  έχει δύο βαθμούς ελευθερίας (σπιν πάνω και σπιν κάτω) και όχι τέσσερις. Οι δύο επιπλέον βαθμοί όχι μόνο δεν είναι ανεπιθύμητοι, αλλά τελικά συνδράμουν στην περιγραφή του αντίστοιχου αντισωματιδίου.

Είναι πολύ χρήσιμη η εισαγωγή τώρα, των πινάκων  $\gamma$  που ορίζονται ως εξής:

$$\vec{\gamma} = \beta \vec{\alpha}, \quad \gamma^0 = \beta \quad (1.73)$$

Οι πίνακες αυτοί μπορούν να γραφούν με τη μορφή τετραδιανυσμάτων, αν και δεν μετασχηματίζονται με τον ίδιο τρόπο, όπως φαίνεται στην συνέχεια

$$\gamma^\mu = (\gamma^0, \vec{\gamma}) \quad (1.74)$$

Οι πίνακες  $\gamma$  έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (1.75)$$

$$(\gamma^0)^2 = I, \quad (\gamma^i)^2 = -I \quad (1.76)$$

$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0, \quad (\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i \quad (1.77)$$

Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση Dirac (1.59), από αριστερά με τον πίνακα  $\beta$  έχουμε

$$i\beta \frac{\partial}{\partial t} \psi = (-i\beta \vec{\alpha} \vec{\nabla} + m)\psi \Rightarrow i\beta \frac{\partial \psi}{\partial t} + i\beta \vec{\alpha} \vec{\nabla} \psi - m\psi = 0 \Rightarrow i(\beta, \beta \vec{\alpha}) \left( \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right) \psi - m\psi = 0$$

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 \quad (1.78)$$

Η παραπάνω είναι η πιο συνηθισμένη σχετικιστικά αναλλοίωτη γραφή της εξίσωσης Dirac. Για να την απλοποιήσουμε, μπορούμε να ορίσουμε  $\gamma^\mu \partial_\mu = \not{\partial}$  και  $\gamma^\mu p_\mu = \not{p}$ . Επομένως γράφεται

$$(\not{p} - m)\psi = 0 \quad (1.79)$$

Η εξίσωση (1.79) αποτελεί την ισοδύναμη εξίσωση Dirac, στον χώρο των ορμών.

Έπειτα θα υπολογίσουμε το διατηρούμενο ρεύμα με την ίδια διαδικασία που χρησιμοποιήσαμε στην εξίσωση Klein Gordon. Αρχικά γράφουμε την ερμιτιανή συζυγή της εξίσωσης Dirac:

$$\begin{aligned} (i\gamma^0 \frac{\partial \psi}{\partial t} + i\gamma^\kappa \frac{\partial \psi}{\partial x^\kappa} - m\psi)^\dagger &= 0 \\ \Rightarrow -i \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} \gamma^{0\dagger} - i \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial x^\kappa} (\gamma^\kappa)^\dagger - m\psi^\dagger &= 0 \Rightarrow -i \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} \gamma^0 - i \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial x^\kappa} (-\gamma^\kappa) - m\psi^\dagger &= 0 \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας με  $\gamma^0$  έχουμε

$$-i \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} \gamma^0 \gamma^0 - i \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial x^\kappa} (-\gamma^\kappa \gamma^0) - m\psi^\dagger \gamma^0 = 0$$

Θέτουμε  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$  και έχουμε

$$i\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0 \quad (1.80)$$

Άρα πήραμε την εξίσωση Dirac για τον σπίνορα  $\bar{\psi}$ , στον χώρο των θέσεων. Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση Dirac με  $\bar{\psi}$  και προκύπτει

$$i\bar{\psi} \partial_\mu \psi \gamma^\mu - m\bar{\psi} \psi = 0 \quad (1.81)$$

Τώρα πολλαπλασιάζουμε την ερμιτιανή συζυγή της, (1.80), με  $\psi$ :

$$i\psi \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu + m\bar{\psi} \psi = 0 \quad (1.82)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1.81) και (1.82) παίρνουμε

$$\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi + \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi = 0 \Rightarrow \partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) = 0 \quad (1.83)$$

Υπενθυμίζουμε την εξίσωση συνέχειας  $\partial_\mu j^\mu = 0$ . Επομένως για το ρεύμα έχουμε  $j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ , ενώ για την πυκνότητα ισχύει  $\rho = j^0 = \bar{\psi} \gamma^0 \psi = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \psi = \psi^\dagger \psi = \sum_{i=1}^4 |\psi_i|^2$ , η οποία είναι θετική ανεξάρτητη της ενέργειας. Ξεπεράστηκε λοιπόν το πρόβλημα της αρνητικής πυκνότητας πιθανότητας.

## 1.5 Λύσεις εξίσωσης Dirac

Για ένα ελεύθερο σωματίδιο, οι ιδιοκαταστάσεις του δίνονται ανάλογα με τις λύσεις επιπέδου κύματος ως εξής

$$\psi = ue^{-ipx} = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} e^{-ipx} \quad (1.84)$$

όπου  $\phi, \chi$  πίνακες μίας στήλης και δύο γραμμών. Ο σπίνορας  $\psi$  είναι πάντα ένας σπίνορας τεσσάρων συνιστωσών ενώ οι  $\phi, \chi$  δύο, όπως ορίζονται παρακάτω:

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \quad \chi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} \quad (1.85)$$

Υπολογίζουμε εν συνεχεία τις ιδιοτιμές της ενέργειας, για την χαμιλτονιανή Dirac:

$$H\psi = E\psi \Rightarrow (\vec{\alpha}\vec{p} + \beta m)ue^{-ipx} = Eue^{-ipx} \Rightarrow (\vec{\alpha}\vec{p} + \beta m) \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (1.86)$$

Περίπτωση ακίνητου σωματιδίου:

Θα υπολογίσουμε τώρα τις λύσεις της εξίσωσης Dirac για την περίπτωση του ακίνητου σωματιδίου, όπου  $\vec{p} = 0$

$$\beta mu = Eu \Rightarrow \beta m \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} m \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E\phi \\ E\chi \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} mI\phi \\ -mI\chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E\phi \\ E\chi \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow E\phi = mI\phi, \quad E\chi = -mI\chi$$

$$\Rightarrow E \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \quad E \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m & 0 \\ 0 & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow E\phi_1 = m\phi_1, \quad E\phi_2 = m\phi_2 \quad (1.87)$$

$$E\chi_1 = -m\chi_1, \quad E\chi_2 = -m\chi_2 \quad (1.88)$$

Οι ιδιοτιμές της ενέργειας επομένως είναι  $m, m, -m, -m$ . Η ιδιοτιμή  $E = m$  αντιστοιχεί σε σωματίδιο θετικής ενέργειας, με ιδιοκαταστάσεις  $E\phi = Im\phi \Rightarrow m\phi = Im\phi$

$$\Rightarrow m \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \phi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \phi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \chi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Άρα συνολικά έχουμε

$$u^{(1),(2)} = \begin{pmatrix} \phi^{(1)}, \phi^{(2)} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (1.89)$$

Η ιδιοτιμή  $E = -m$  αντιστοιχεί σε αντισωματίδια θετικής ενέργειας, με ιδιοκαταστάσεις  $E\chi = -Im\chi \Rightarrow -m\chi = -Im\chi$

$$\Rightarrow -m \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m & 0 \\ 0 & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \chi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \chi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \phi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Άρα συνολικά έχουμε

$$u^{(3),(4)} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \chi^{(1)}, \chi^{(2)} \end{pmatrix} \quad (1.90)$$

Περίπτωση κινούμενου σωματιδίου:

Για την περίπτωση του κινούμενου σωματιδίου έχουμε  $\vec{p} \neq 0$ , άρα

$$(\vec{\alpha}\vec{p} + \beta m)ue^{-ipx} = Eue^{-ipx} \Rightarrow \left[ \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \vec{p} + \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} m \right] u = Eu$$

$$\Rightarrow \left[ \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma}\vec{p} \\ \vec{\sigma}\vec{p} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} mI & 0 \\ 0 & -mI \end{pmatrix} \right] u = Eu$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} mI & \vec{\sigma}\vec{p} \\ \vec{\sigma}\vec{p} & -mI \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} mI\phi & \vec{\sigma}\vec{p}\chi \\ \vec{\sigma}\vec{p}\phi & -mI\chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E\phi \\ E\chi \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{\sigma}\vec{p}\chi = (E - m)\phi, \vec{\sigma}\vec{p}\phi = (E + m)\chi$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E - m}\chi, \chi = \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E + m}\phi \quad (1.91)$$

έχουμε δηλαδή δύο συζευγμένες εξισώσεις για τα  $\phi, \chi$ . Επειδή ισχύει η σχέση  $(\vec{\sigma}\vec{p})^2 = \vec{p}^2 I$ , βρίσκουμε τις ιδιοτιμές όπως παρακάτω

$$\chi = \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E + m}\phi = \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E + m} \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E - m}\chi \Rightarrow \chi = \frac{(\vec{\sigma}\vec{p})^2}{E^2 - m^2}\chi \Rightarrow (E^2 - m^2)\chi = \vec{p}^2\chi$$

$$\Rightarrow E = \pm\sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \quad (1.92)$$



Αντίστοιχα για τα  $\phi$  έχουμε

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E-m}\chi = \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E+m}\frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E-m}\phi \Rightarrow \phi = \frac{(\vec{\sigma}\vec{p})^2}{E^2-m^2}\phi \Rightarrow (E^2-m^2)\phi = \vec{p}^2\phi \\ &\Rightarrow E = \pm\sqrt{\vec{p}^2+m^2}\end{aligned}\quad (1.93)$$

Άρα για κάθε ιδιοτιμή έχουμε δύο λύσεις  $u$ :

$$E = \sqrt{\vec{p}^2+m^2} \rightarrow u^{(1),(2)} = N \begin{pmatrix} \phi^{(1),(2)} \\ \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E+m}\phi^{(1),(2)} \end{pmatrix} \quad (1.94)$$

$$E = -\sqrt{\vec{p}^2+m^2} \rightarrow u^{(3),(4)} = N \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E-m}\chi^{(1),(2)} \\ \chi^{(1),(2)} \end{pmatrix} \quad (1.95)$$

όπου  $N$  είναι ένας συντελεστής κανονικοποίησης. Κανονικοποιώντας τους σπίνορες  $u$ , έτσι ώστε να ισχύει  $u^\dagger u = 2|E|$ , προκύπτει ότι  $N = \sqrt{|E|+m}$ . Έχουμε λοιπόν δύο λύσεις θετικής ενέργειας  $u^{(1),(2)}$  και δύο αρνητικής ενέργειας, τις  $u^{(3),(4)}$ .

Υπάρχει ακόμα δεύτερης τάξης εκφυλισμός, επομένως υπάρχει και μέγεθος, δηλαδή ερμιτιανός τελεστής, που μετατίθεται με τα  $H_D, \vec{p}$ , ώστε οι ιδιοτιμές του να αποτελούν καλό κβαντικό αριθμό για τη διάκριση των λύσεων. Η παρουσία των πινάκων Pauli στην χαμιλτονιανή, καθώς και στους σπίνορες συνεπάγεται ότι το καινούριο αυτό μέγεθος έχει σχέση με το σπιν. Στην μη σχετικιστική κβαντομηχανική, για το σπιν  $\frac{1}{2}$  έχουμε

$$\vec{s} = \frac{1}{2}\vec{\sigma} \quad (1.96)$$

Ακόμα ορίζουμε την ελικότητα  $\lambda$  ως την προβολή του σπιν στην διεύθυνση κίνησης του σωματιδίου ως εξής:

$$\hat{\lambda} = \vec{s} \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} = \frac{1}{2}\vec{\sigma} \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \quad (1.97)$$

Αν θεωρήσουμε την κίνηση ενός σωματιδίου στην κατεύθυνση του άξονα  $z$ , με  $\vec{p} = (0, 0, p)$ , τότε η ιδιοκατάσταση  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  (σπιν πάνω) αντιστοιχεί σε ιδιοτιμή  $\lambda = +\frac{1}{2}$ :

$$\hat{\lambda}\vec{s} = \frac{1}{2}\vec{\sigma} \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\sigma_z \frac{p_z}{p_z} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.98)$$

ενώ η ιδιοκατάσταση  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  (σπιν κάτω) αντιστοιχεί σε ιδιοτιμή  $\lambda = -\frac{1}{2}$ :

$$\hat{\lambda}\vec{s} = \frac{1}{2}\vec{\sigma} \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\sigma_z \frac{p_z}{p_z} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.99)$$

Η ιδιοτιμή  $\lambda = +\frac{1}{2}$  αντιστοιχεί σε δεξιόστροφο σωματίδιο, ενώ η  $\lambda = -\frac{1}{2}$  σε αριστερόστροφο σωματίδιο.

Στην σχετικιστική κβαντική θεωρία, η ελικότητα ορίζεται ως:

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{2} \hat{\Sigma} \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \vec{\sigma} \end{pmatrix} \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \vec{\sigma} \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \vec{\sigma} \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \end{pmatrix} \quad (1.100)$$

όπου  $\hat{\Sigma} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$  ο  $4 \times 4$  τελεστής του σπιν για τον οποίο ισχύουν οι σχέσεις

$$\left[ \frac{1}{2} \Sigma_x, \frac{1}{2} \Sigma_y \right] = i \frac{1}{2} \Sigma_z, \quad \left( \frac{1}{2} \vec{\Sigma} \right)^2 = \frac{3}{4} I \quad (1.101)$$

Πίσω στην περίπτωση ακίνητου σωματιδίου:

Ο  $\vec{\Sigma}$  από μόνος του διαχωρίζει τις δύο λύσεις στο σύστημα μάζας ηρεμίας, εκεί δηλαδή όπου  $\vec{p} = 0$  και μετατίθεται με τον τελεστή της χαμιλτονιανής Dirac

$$\begin{aligned} [H_D, \vec{\Sigma}] &= [\beta m, \vec{\Sigma}] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} mI & 0 \\ 0 & -mI \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} mI & 0 \\ 0 & -mI \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & -\vec{\sigma} \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & -\vec{\sigma} \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Επομένως είναι ο καλός τελεστής που ψάχνουμε. Αν ο  $\vec{\Sigma}$  δράσει στους σπίνορες  $u^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  και

$u^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , οι οποίοι έχουν την ίδια ιδιοτιμή ενέργειας, θα δώσει διαφορετική ιδιοτιμή. Υποθέτουμε

ότι το σπιν είναι ευθυγραμμισμένο στην κατεύθυνση του άξονα  $z$ . Τότε ισχύει

$$\frac{1}{2} \vec{\Sigma} u^{(1)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma}_z & 0 \\ 0 & \vec{\sigma}_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} u^{(1)}$$

$$\frac{1}{2} \vec{\Sigma} u^{(2)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma}_z & 0 \\ 0 & \vec{\sigma}_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} u^{(2)}$$

Επομένως ο  $\vec{\Sigma}$  αίρει τον εκφυλισμό των καταστάσεων με  $E = m$ . Ακόμα ισχύει

$$\frac{1}{2} \vec{\Sigma} u^{(3)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma}_z & 0 \\ 0 & \vec{\sigma}_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} u^{(3)}$$

$$\frac{1}{2}\vec{\Sigma}u^{(4)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma}_z & 0 \\ 0 & \vec{\sigma}_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}u^{(4)}$$

Επομένως ο  $\vec{\Sigma}$  αίρει και τον εκφυλισμό των καταστάσεων με  $E = -m$ .

Πίσω στην περίπτωση κινούμενου σωματιδίου:

Τώρα  $\vec{p} \neq 0$  και ο  $\vec{\Sigma}$  δεν διαχωρίζει αυτές τις λύσεις αφού

$$\left[ H_D, \frac{1}{2}\vec{\Sigma} \right] = \frac{1}{2}[\vec{\alpha}\vec{p} + \beta m, \vec{\Sigma}] = \frac{1}{2}[\vec{\alpha}\vec{p}, \vec{\Sigma}] + \frac{1}{2}[\beta m, \vec{\Sigma}] = \frac{1}{2}[\vec{\alpha}\vec{p}, \vec{\Sigma}] \neq 0$$

Ο  $\vec{\Sigma}$  δεν μετατίθεται με την χαμιλτονιανή για  $\vec{p} \neq 0$ . Το μέγεθος όμως που μετατίθεται με την χαμιλτονιανή σε αυτήν την περίπτωση είναι το  $\lambda$ , όπως θα δείξουμε στη συνέχεια, επομένως αίρει και τον εκφυλισμό. Έστω πάλι πως το σωματίδιο κινείται στην κατεύθυνση του άξονα  $z$ , τότε  $\vec{p} = p_z \hat{z}$ ,  $p_z = p$ , τότε

$$\hat{\lambda}u^{(1),(2)} = \frac{1}{2}\vec{\Sigma} \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \begin{pmatrix} \phi^{(1),(2)} \\ \frac{\sigma_z p}{E+m} \phi^{(1),(2)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^{(1),(2)} \\ \frac{\sigma_z p}{E+m} \phi^{(1),(2)} \end{pmatrix}$$

Θα υπολογίσουμε τώρα ξεχωριστά την παραπάνω σχέση για τα  $u^{(1)}$  και  $u^{(2)}$ .

$u^{(1)}$ :

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^{(1)} \\ \frac{\sigma_z p}{E+m} \phi^{(1)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\sigma_z p}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\sigma_z p}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.102)$$

$u^{(2)}$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^{(2)} \\ \frac{\sigma_z p}{E+m} \phi^{(2)} \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{\sigma_z p}{E+m} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -\frac{\sigma_z p}{E+m} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{\sigma_z p}{E+m} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.103)$$

Θα εργαστούμε με τον ίδιο τρόπο και για τις  $u^{(3)}$  και  $u^{(4)}$ .

$u^{(3)}$ :

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sigma_z p}{E-m} \chi^{(1)} \\ \chi^{(1)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sigma_z p}{E-m} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\sigma_z p}{E-m} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.104)$$

$u^{(4)}$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sigma_z p}{E-m} \chi^{(2)} \\ \chi^{(2)} \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sigma_z p}{E-m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sigma_z p}{E-m} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sigma_z p}{E-m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.105)$$

Άρα υπάρχει διαχωρισμός των εκφυλισμένων καταστάσεων μέσω του τελεστή της ελικότητας. Πρέπει όμως όλα τα σωματίδια και αντισωματίδια να φέρουν θετική ενέργεια και ορμή. Για να εκφράσουμε λοιπόν τις λύσεις συναρτήσει της φυσικής ενέργειας και ορμής του αντισωματιδίου, αλλάζουμε τα πρόσημα των  $E, \vec{p}$ , άρα η τετραορμή των αντισωματιδίων γίνεται  $-p^\mu = (-E, -\vec{p})$ . Συνεπώς οι λύσεις για τα αντισωματίδια είναι

$$\psi = u^{(3),(4)}(-E, -\vec{p}) e^{-i(-p)x} u^{(3),(4)}(-E, -\vec{p}) e^{ipx} \quad (1.106)$$

Σε αυτήν την μορφή, ονομάζουμε τους σπίνορες  $v$  και τους συμβολίζουμε

$$v^{(1)}(E, \vec{p}) = u^{(4)}(-E, -\vec{p}) \equiv N \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E+m} \chi^{(2)} \\ \chi^{(2)} \end{pmatrix} \quad (1.107)$$

$$v^{(2)}(E, \vec{p}) = u^{(3)}(-E, -\vec{p}) \equiv N \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{E+m} \chi^{(1)} \\ \chi^{(1)} \end{pmatrix} \quad (1.108)$$

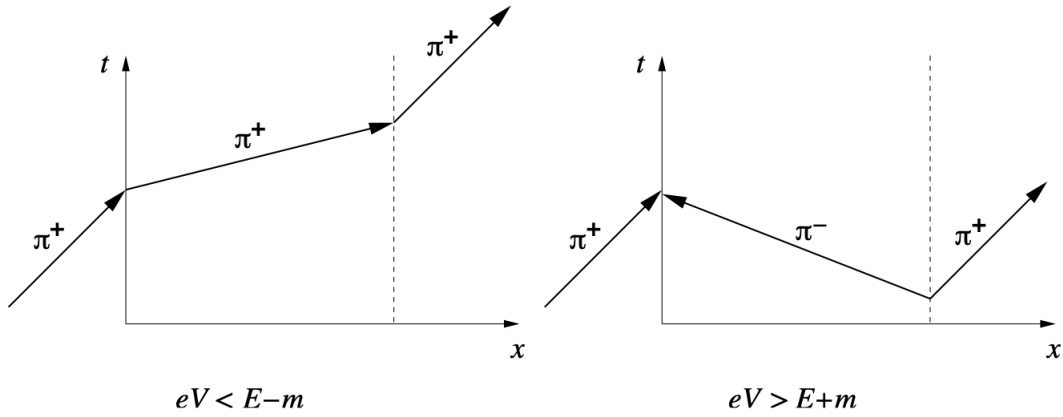
$$\psi = v^{(1),(2)}(E, \vec{p}) e^{ipx} \quad (1.109)$$

με  $E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} > 0$ ,  $v^\dagger v = 2E$  και  $N = \sqrt{E + m}$ . Χρησιμοποιούμε λοιπόν τους νέους αυτούς σπίνορες για να περιγράψουμε αντισωματίδια ενέργειας  $E$  και ορμής  $\vec{p}$ . Οι προηγούμενοι σπίνορες  $u$  περιγράφουν σωματίδια ενέργειας  $E$  και ορμής  $\vec{p}$  και ικανοποιούν την εξίσωση Dirac στον χώρο των ορμών

$$(p^\mu \gamma_\mu - m)u = 0 \quad (1.110)$$

ενώ οι νέοι σπίνορες  $v$  υπακούουν στην αντίστοιχη εξίσωση

$$(p^\mu \gamma_\mu + m)v = 0 \quad (1.111)$$



Σχήμα 1.3: Σωματίδια και αντισωματίδια

Όπως βλέπουμε στο σχήμα, υπάρχουν δύο διαγράμματα που αντιστοιχούν στην ίδια παρατήρηση. Άρα και δύο διαφορετικοί τρόποι διάταξης του χρόνου. Οι λύσεις θετικής ενέργειας ( $\pi^+$ ), ερμηνεύονται σαν να ταξιδεύουν εμπρός στον χρόνο, ενώ οι λύσεις αρνητικής ενέργειας ( $\pi^-$ ) ταξιδεύουν μόνο πίσω στον χρόνο.

Συνοψίζοντας οφείλουμε να τονίσουμε για μία ακόμη φορά, πως η απουσία ενός ηλεκτρονίου αρνητικής ενέργειας, ερμηνεύθηκε από τον Dirac ως παρουσία ποζιτρονίου θετικής ενέργειας. Με όμοιο τρόπο εξήγησε την απουσία ενός ηλεκτρονίου με σπιν πάνω και αρνητικής ενέργειας, ως παρουσία ποζιτρονίου με σπιν κάτω και θετικής ενέργειας. Αυτό φαίνεται ξεκάθαρα στον τρόπο που αντιστοιχήθηκαν οι σπίνορες  $v^{(1),(2)}$ , σε αυτούς αρνητικής ενέργειας  $u^{(4),(3)}$ . Έτσι οι σπίνορες με εκθέτη (1) περιγράφουν σωματίδια με σπιν πάνω ενώ αυτοί με εκθέτη (2) σωματίδια με σπιν κάτω. Ο τρόπος αντιμετώπισης των αρνητικών λύσεων, του Dirac για τα φερμιόνια εντείνει την ανάγκη δημιουργίας μίας κβαντικής θεωρίας πεδίου.

## Κεφάλαιο 2

# Θεωρία πεδίου

### 2.1 Λαγκρανζιανή Διατύπωση

Στην κλασική αλλά και κβαντική θεώρηση της θεωρίας πεδίων αποδεικνύεται πολύ χρήσιμο να εργαστούμε χρησιμοποιώντας τον λαγκρανζιανό φορμαλισμό. Η ιδέα προέρχεται ιστορικά από την αρχή του Fermat, σύμφωνα με την οποία «το φως διαδίδεται μέσω της συντομότερης διαδρομής». Με αυτήν την αφετηρία πλαισιώνεται μία ευρύτερη περιγραφή της κίνησης, από την οποία απορρέουν οι μέχρι τότε εμπειρικοί Νόμοι του Νεύτωνα. Ξεκινώντας από την αρχή της ελάχιστης δράσης φτάνουμε λοιπόν στις εξισώσεις κίνησης, με τη δράση να ορίζεται συναρτήσει μίας Λαγκρανζιανής. Στην κλασική μηχανική σωματιδίων, η Λαγκρανζιανή ορίζεται ως

$$L = T - V \quad (2.1)$$

όπου  $T$  η κινητική ενέργεια και  $V$  η δυναμική ενέργεια του συστήματος. Η Λαγκρανζιανή είναι συνάρτηση λοιπόν των συντεταγμένων  $q$ , καθώς και των χρονικών παραγώγων τους

$$L = L(q(t), \dot{q}(t)) \quad (2.2)$$

Η Λαγκρανζιανή διατύπωση έχει το πλεονέκτημα πως δεν υποχρεούμαστε να θεωρήσουμε συγκεκριμένο σύστημα αναφοράς.

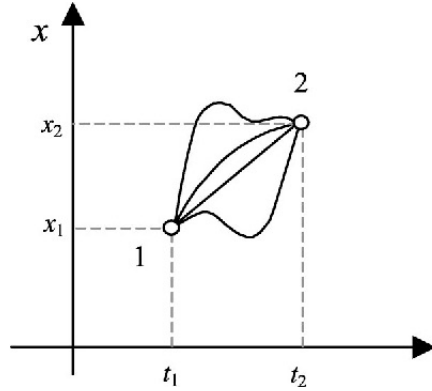
Έστω τώρα σωματίδιο που ρίπτεται κατακόρυφα σε βαρυτικό πεδίο για χρονικό διάστημα  $\Delta t = t_2 - t_1$ . Θεωρούμε πως το σωματίδιο μπορεί να κινηθεί μόνο κατακόρυφα και ακολουθεί την τροχιά  $x(t)$ , η οποία συμβολίζει το ύψος του από το έδαφος. Επομένως η κινητική και δυναμική του ενέργεια κάθε χρονική στιγμή δίνονται αντίστοιχα από τους τύπους

$$T = \frac{1}{2}m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \quad V = mgx \quad (2.3)$$

Στο ακόλουθο σχήμα φαίνονται μερικές πιθανές τροχιές που μπορεί να ακολουθήσει το σωματίδιο για τη μετάβασή του από τη θέση  $x_1$ , στην θέση  $x_2$ .

Αν υπολογίσουμε την ποσότητα  $\int_{t_1}^{t_2} (T - V) dt$  για κάθε μία από τις άπειρες πιθανές τροχιές του σωματιδίου, θα παρατηρήσουμε πως μόνο η πραγματική τροχιά ελαχιστοποιεί το μέγεθος αυτό. Το ολοκλήρωμα αυτό ονομάζεται Δράση και γενικεύοντας στον λαγκρανζιανό φορμαλισμό ορίζεται ως

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t)) dt \quad (2.4)$$



Σχήμα 2.1: Πιθανές τροχιές

Η  $S$  ονομάζεται συναρτησοειδές, αφού αποτελεί μία απεικόνιση από έναν χώρο συναρτήσεων, στον χώρο των πραγματικών αριθμών.

## 2.2 Αρχή ελάχιστης δράσης

Σύμφωνα με την αρχή της ελάχιστης δράσης η πραγματική τροχιά από ένα σημείο  $q(t_1)$  σε ένα άλλο σημείο  $q(t_2)$  είναι εκείνη για την οποία η δράση γίνεται ελάχιστη. Αν γίνει μία μεταβολή πρώτης τάξης στο μέγεθος της δράσης, τότε η απόκλιση από το ελάχιστο θα είναι μόλις δεύτερης τάξης. Σε οποιοδήποτε άλλο σημείο, η μεταβολή πρώτης τάξης αλλάζει την δράση κατά μία τιμή πρώτης τάξης.

Θεωρούμε μία μεταβολή πρώτης τάξης  $q(t) \rightarrow q'(t) = q(t) + dq(t)$ , για όλες τις τροχιές που ξεκινούν από το  $q(t_1)$  και καταλήγουν στο  $q(t_2)$ . Επομένως κατόπιν της μεταβολής θα έχουμε

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0 \quad (2.5)$$

Γνωρίζουμε ότι

$$\delta \dot{q}(t) = \frac{d\delta q(t)}{dt} \quad (2.6)$$

Η μεταβολή της δράσης θα είναι

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} \delta q(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q}(t) \right) dt \quad (2.7)$$

Αντικαθιστώντας την (2.6) στην (2.7) έχουμε

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} \delta q(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d\delta q(t)}{dt} \right) dt$$

Ας αναλύσουμε τώρα ξεχωριστά τον όρο  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d\delta q(t)}{dt}$ . Μέσω παραγοντικής ολοκλήρωσης έχουμε:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \delta \dot{q}(t) \right) = \delta q(t) \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \frac{d\delta q(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \frac{d\delta q(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \delta \dot{q}(t) \right) - \delta q(t) \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \right) \quad (2.8)$$

Αντικαθιστώντας την (2.8) στην (2.7) έχουμε

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial L}{\partial q} \delta q(t) - \delta q(t) \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \right) + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \delta \dot{q}(t) \right) \right] \quad (2.9) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial L}{\partial q(t)} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \right) \right] \delta q(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \delta q(t) \right] dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial L}{\partial q(t)} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \right) \right] \delta q(t) dt + \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \delta q(t) \right]_{t_1}^{t_2} \end{aligned}$$

Σημειώνουμε ότι  $\left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \delta q(t) \right]_{t_1}^{t_2} = 0$ , λόγω της (2.5). Επομένως έχουμε

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial L}{\partial q(t)} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t)} \right) \right] \delta q(t) dt \quad \forall \delta q(t)$$

Η απαίτηση η  $S$  να είναι στάσιμη δηλαδή  $\delta S = 0$  για αυθαίρετο  $\delta q$  μας δίνει την εξίσωση

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 \quad (2.10)$$

Αυτές είναι οι εξισώσεις **Euler-Lagrange** της κίνησης. Λύνοντας αυτήν την διαφορική παίρνουμε την πραγματική τροχιά  $q_0(t)$ .

Για παράδειγμα για την απλή περίπτωση όπου

$$L = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q)$$

παίρνουμε αμέσως τους νόμους του Newton  $m\ddot{q} = -\frac{\partial V}{\partial q}$ .

Τελικά παρατηρούμε πως δεν ανακαλύψαμε κάποια καινούρια φυσική θεώρηση ή νόμο, απλώς διατυπώσαμε σε μία ισοδύναμη και προφανώς πιο γενική περιγραφή την κλασική φυσική, που ως τώρα ήταν εμπειρική, καθώς βασιζόνταν στο πείραμα.

## 2.3 Λαγκρανζιανή σε Θεωρία Πεδίου

Περνώντας τώρα σε μία σωματιδιακή θεωρία πεδίου, κλασική ή κβαντική, η Λαγκρανζιανή διατύπωση γίνεται συναρτήσει μίας Λαγκρανζιανής πυκνότητας  $\mathcal{L}$ , η οποία έχει διαστάσεις ενέργειας προς όγκο. Μέσω αυτής η Λαγκρανζιανή γράφεται:

$$L(t) = \int d^3x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \quad (2.11)$$



Η δράση λοιπόν είναι

$$S[\phi] = \int L dt = \int dt \int d^3x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \quad (2.12)$$

όπου με  $\phi$  παριστάνεται ένα οποιοδήποτε πεδίο  $\phi(\vec{x}, t)$ . Με τον όρο πεδίο εννοούμε μία φυσική ποσότητα που αναπαρίσταται με έναν αριθμό ή έναν ταυστή και έχει συγκεκριμένη τιμή σε κάθε σημείο του χωροχρόνου. Ας αναφερθούμε ενδεικτικά σε ένα σύστημα  $N$  μαζών με  $N \rightarrow \infty$ . Αυτό μπορεί κανείς να το σκεφτεί ως μία χορδή με τους βαθμούς ελευθερίας να τείνουν επίσης στο  $\infty$ . Κάπως έτσι μπορούμε να φανταστούμε ένα πεδίο, το οποίο είναι ένα σύστημα «συνεχών» βαθμών ελευθερίας και η μετατόπιση σε οποιοδήποτε σημείο αυτού δίνεται από την συνάρτηση  $\phi(\vec{x}, t)$ .

Στο εξής θα χρησιμοποιούμε κυρίως την Λαγκρανζιανή πυκνότητα, αντί της Λαγκρανζιανής. Η δράση γράφεται εκ νέου :

$$S = \int \mathcal{L} \left( \phi, \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \right) dx^\mu = \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) dx^\mu \quad (2.13)$$

Πρόκειται για μία σχετικιστικά αναλλοίωτη ποσότητα, εφόσον η Λαγκρανζιανή πυκνότητα είναι μία σχετικιστικά αναλλοίωτη ποσότητα. Ομοίως με πριν απαιτούμε την ίδια βασική αρχή ελάχιστης δράσης. Χρειαζόμαστε λοιπόν μία μεταβολή της μορφής

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) + \delta\phi(x) \quad (2.14)$$

Οπότε πρέπει να βρούμε πότε ισχύει

$$\delta S = \int \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu(\delta\phi) \right] d^4x = 0 \quad (2.15)$$

$$= \int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi dt dx + \int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \delta\dot{\phi} dt dx + \int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\frac{\partial \phi}{\partial x})} \delta \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dt dx \quad (2.16)$$

Όμως γνωρίζουμε ότι

$$\delta\dot{\phi} = \delta \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)$$

και μέσω της (2.14) η προηγούμενη εξίσωση γίνεται

$$\delta\dot{\phi} = \delta \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \frac{\partial \phi'}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial(\phi + \delta\phi)}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \delta\phi}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \delta\phi}{\partial t}$$

ομοίως προκύπτει ότι

$$\delta \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = \frac{\partial \delta\phi}{\partial x}$$

Αντικαθιστώντας τις δύο παραπάνω εξισώσεις και στην (2.16) προκύπτει

$$\delta S = \int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi dt dx + \int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\frac{\partial \phi}{\partial t})} \frac{\partial \delta \phi}{\partial t} dx dt + \int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\frac{\partial \phi}{\partial x})} \frac{\partial(\delta \phi)}{\partial x} dx dt$$

Έπειτα από παραγοντικές ολοκληρώσεις παίρνουμε

$$\begin{aligned} \delta S &= \int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi dx dt + \left( \int \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\frac{\partial \phi}{\partial t})} \delta \phi \right] dx dt - \int \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\frac{\partial \phi}{\partial t})} \right] \delta \phi dx dt \right) + \\ &+ \left( \int \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\frac{\partial \phi}{\partial x})} \delta \phi \right] dx dt - \int \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\frac{\partial \phi}{\partial x})} \right] \delta \phi dx dt \right) \\ &\Rightarrow \delta S = \int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi dx dt + \int \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\frac{\partial \phi}{\partial t})} \delta \phi \right]_{t_1}^{t_2} dx - \\ &- \int \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\frac{\partial \phi}{\partial t})} \right] \delta \phi dx dt + \int \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\frac{\partial \phi}{\partial x})} \delta \phi \right]_{x_1}^{x_2} dt - \int \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\frac{\partial \phi}{\partial x})} \right] \delta \phi dx dt \\ &\Rightarrow \delta S = \int \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\frac{\partial \phi}{\partial t})} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\frac{\partial \phi}{\partial x})} \right) \right] \delta \phi dx dt = 0 \end{aligned}$$

Η απαίτηση η δράση  $S$  να είναι στάσιμη, δηλαδή  $\delta S = 0$  για αυθαίρετο  $\delta \phi$  δίνει

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\frac{\partial \phi}{\partial x})} = 0 \quad (2.17)$$

δηλαδή τις αντίστοιχες εξισώσεις Euler-Lagrange για το πεδίο  $\phi$  στην μία διάσταση. Για τον τρισδιάστατο χώρο έχουμε

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} - \vec{\nabla} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla} \phi)} \right) = 0 \quad (2.18)$$

ενώ σε συναλλοίωτη μορφή γράφουμε

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) = 0 \quad (2.19)$$

Οι παραπάνω αποτελούν τις εξισώσεις κίνησης των πεδίων.

## 2.4 Συμμετρίες και νόμοι διατήρησης

Σύμφωνα με το θεώρημα Noether, κάθε συμμετρία της φύσης συνεπάγεται έναν νόμο διατήρησης και αντίστροφα, κάθε νόμος διατήρησης συνεπάγεται μία υποκείμενη συμμετρία. Σε πιο μαθηματική τώρα βάση, η ύπαρξη μίας συμμετρίας σημαίνει ότι η δράση  $S$  είναι αναλλοίωτη κάτω από έναν μετασχηματισμό συμμετρίας και ισοδύναμα, η Λαγκρανζιανή θα είναι αναλλοίωτη κάτω από τον αντίστοιχο μετασχηματισμό συμμετρίας.

Θα εξετάσουμε, για εξοικείωση αρχικά τις συμμετρίες μίας Λαγκρανζιανής  $\mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t))$  της κλασικής μηχανικής. Θεωρούμε την μεταβολή  $q(t) \rightarrow q'(t) = q(t) + \delta q(t)$ , όπου  $\delta q(t) = X(q(t))\epsilon$  με  $X(q(t))$  να είναι μία συνάρτηση που καθορίζει η εκάστοτε μεταβολή  $\delta q(t)$  και  $\epsilon$  μία απειροστή σταθερά. Αν η Λαγκρανζιανή λοιπόν είναι αναλλοίωτη κάτω από την παραπάνω μεταβολή, τότε πρόκειται για έναν μετασχηματισμό συμμετρίας. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να ισχύει  $\delta\mathcal{L} = 0$ , δηλαδή:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q}\delta q + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}\delta\dot{q} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q}\delta q + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}\frac{d}{dt}(\delta q) = 0 \\ &\xrightarrow{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}\right)} \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}\delta q + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}\frac{d}{dt}(\delta q) = 0 \\ &\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}\delta q\right) = 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

Η εξίσωση που εξαγάγαμε δείχνει την διατήρηση του φορτίου, επομένως ισχύει

$$\begin{aligned} \epsilon Q &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}\delta q \Rightarrow \epsilon Q = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}\epsilon X(q(t)) \\ &\Rightarrow Q = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}X(q(t)) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Έστω τώρα μία Λαγκρανζιανή  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\dot{q})$ , η οποία είναι αναλλοίωτη κάτω από μεταβολές της μορφής  $q(t) \rightarrow q'(t) = q(t) + \epsilon$ , δηλαδή είμαστε στην ειδική περίπτωση όπου  $X(q(t)) = 1$ . Σε αυτήν την περίπτωση ισχύει

$$\epsilon Q = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}\epsilon \Rightarrow Q = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}} = p \quad (2.22)$$

Καταλήξαμε δηλαδή στην διατήρηση της ορμής.

Στην περίπτωση των πεδίων, οι μετασχηματισμοί, υπό τους οποίους η Λαγκρανζιανή παραμένει αναλλοίωτη, συνεπάγονται την ύπαρξη διατηρούμενων ρευμάτων  $j^\mu = (\rho, \vec{j})$ , δηλαδή σχέσεις της μορφής  $\partial_\mu j^\mu = 0$ . Ομοίως με πριν, θεωρούμε μία μεταβολή στο πεδίο  $\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) + \delta\phi(x)$ , όπου  $\delta\phi(x) = \epsilon H(\phi(x))$ . Στη συνέχεια θα χρησιμοποιηθεί η σχέση εναλλαγής της διαφορίσης  $\delta(\partial_\mu\phi(x)) = \partial_\mu\phi(x) - \partial_\mu\phi(x) = \partial_\mu(\delta\phi(x))$ . Η μεταβολή της Λαγκρανζιανής είναι:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi(x)}\delta\phi(x) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi(x))}\delta(\partial_\mu\phi(x)) = 0$$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(x)} \delta \phi(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi(x))} \partial_\mu (\delta \phi(x)) = 0 \\
 &\xrightarrow{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(x)} = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi(x))}} \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi(x))} \delta \phi(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi(x))} \partial_\mu (\delta \phi(x)) = 0 \\
 &\Rightarrow \partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi(x))} \delta \phi(x) \right] = 0 \\
 &\Rightarrow \epsilon_j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi(x))} \delta \phi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi(x))} \epsilon H(\phi(x)) \\
 &\Rightarrow j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi(x))} H(\phi(x)) \tag{2.23}
 \end{aligned}$$

Η ύπαρξη διατηρούμενου ρεύματος συνεπάγεται ένα διατηρούμενο φορτίο που δίνεται από τη σχέση

$$Q(t) = \int_V j^0(t, \vec{x}) d^3x = \int_V \rho(t, \vec{x}) d^3x \tag{2.24}$$

και υπολογίζοντας την χρονική της παράγωγο, μέσω του θεωρήματος απόκλισης, έχουμε

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \int_V \frac{\partial j^0(t, \vec{x})}{\partial t} d^3x = - \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{j} d^3x = - \int_V \vec{j} \cdot d\vec{A} \tag{2.25}$$

διότι η σχέση που αναφέραμε παραπάνω  $\partial_\mu j^\mu = 0$  είναι ισοδύναμη με την εξίσωση συνέχειας

$$\frac{\partial j^0}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \tag{2.26}$$

Ακόμα ο όγκος που θεωρήσαμε είναι τόσο μεγάλος, ώστε το ρεύμα να μηδενίζεται στην επιφάνεια  $A$  που τον περιβάλλει. Επομένως το φορτίο  $Q$  είναι ανεξάρτητο του χρόνου και λέμε ότι διατηρείται

$$\frac{dQ}{dt} = 0 \tag{2.27}$$

## 2.5 Μετασχηματισμοί βαθμίδας

Σε αυτό το σκέλος της εργασίας, θα δούμε τον σημαντικό ρόλο που έχουν οι μετασχηματισμοί βαθμίδας, στην διατύπωση μίας κβαντικής θεωρίας πεδίου. Θα ξεκινήσουμε με ένα απλό παράδειγμα, θεωρώντας την Λαγκρανζιανή ενός μιγαδικού πεδίου βαθμίδας

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)^* (\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi \tag{2.28}$$

Αυτή είναι αναλλοίωτη κάτω από τους ακόλουθους μετασχηματισμούς

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{i\alpha} \phi, \quad \phi^* \rightarrow \phi'^* = e^{-i\alpha} \phi \tag{2.29}$$

όπου  $\alpha$  είναι μία σταθερή παράμετρος. Το διατηρούμενο ρεύμα, όπως υπολογίζεται από την εξίσωση (2.23) θα είναι

$$j^\mu = i(\phi\partial^\mu\phi^* - \phi^*\partial^\mu\phi), \quad \partial_\mu j^\mu = 0 \quad (2.30)$$

ενώ το διατηρούμενο φορτίο σύμφωνα με την (2.24):

$$Q = i \int (\phi\partial^0\phi^* - \phi^*\partial^0\phi)d^3x, \quad \frac{dQ}{dt} = 0 \quad (2.31)$$

Οι μετασχηματισμοί (2.29), για ιστορικούς λόγους, είναι γνωστοί ως μετασχηματισμοί βαθμίδας και σε πιο σύγχρονη έκφραση, εκτεταμένοι μετασχηματισμοί βαθμίδας (global gauge transformations), καθώς η παράμετρος  $\alpha$  είναι μία σταθερά.

Είναι βέβαια προτιμότερο να θεωρήσουμε μετασχηματισμούς όπου αυτή η παράμετρος, θα εξαρτάται από το χωροχρονικό σημείο  $x^\mu : \alpha(x^\mu)$ , για να είμαστε συνεπείς με την σχετικότητα. Αυτοί οι μετασχηματισμοί μπορούν να γραφούν ως

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{i\alpha(x)}\phi, \quad \phi^* \rightarrow \phi'^* = e^{-i\alpha(x)}\phi^* \quad (2.32)$$

Αυτοί είναι γνωστοί ως τοπικοί μετασχηματισμοί βαθμίδας (local gauge transformations).

Γνωρίζουμε επίσης ότι το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο  $A^\mu$  χαρακτηρίζεται από τους ακόλουθους μετασχηματισμούς βαθμίδας:

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu\chi \quad (2.33)$$

όπου  $\chi$  μία αυθαίρετη συνάρτηση του χώρου και του χρόνου. Έτσι ο τανυστής  $F^{\mu\nu}$  είναι αναλλοίωτος κάτω από τους παραπάνω μετασχηματισμούς, επομένως ισχύει και  $F'^{\mu\nu} = F^{\mu\nu}$ . Θα προσπαθήσουμε στη συνέχεια να συνδυάσουμε τους δύο μετασχηματισμούς. Επαληθεύουμε ότι η Λαγκρανζιανή

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu\phi^* - iqA_\mu\phi^*)(\partial^\mu\phi + iqA^\mu\phi) - m^2\phi^*\phi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (2.34)$$

που περιγράφει την αλληλεπίδραση του βαθμωτού πεδίου  $\phi$  με το ανυσματικό πεδίο  $A^\mu$  είναι αναλλοίωτη κάτω από τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{i\alpha(x)}\phi, \quad A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{q}\partial_\mu\alpha \quad (2.35)$$

Ορίζουμε την συναλλοίωτη παράγωγο ως εξής

$$D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu \quad (2.36)$$

Έτσι η παραπάνω Λαγκρανζιανή γράφεται

$$\mathcal{L} = (D_\mu\phi^*)(D^\mu\phi) - m^2\phi^*\phi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (2.37)$$

η οποία είναι αναλλοίωτη κάτω από τους μετασχηματισμούς (2.35), αφού η συναλλοίωτη παράγωγος του πεδίου μετασχηματίζεται όπως παρακάτω:

$$(D_\mu\phi) \rightarrow (D_\mu\phi)' = (\partial_\mu + iqA'_\mu)\phi' = (\partial_\mu + iq(A_\mu - \frac{1}{q}\partial_\mu\alpha))e^{i\alpha(x)}\phi =$$

$$= e^{i\alpha(x)} \partial_\mu \phi + i \partial_\mu \alpha(x) e^{i\alpha(x)} \phi + iq A_\mu e^{i\alpha(x)} \phi - i \partial_\mu \alpha(x) e^{i\alpha(x)} \phi = e^{i\alpha(x)} (\partial_\mu \phi + iq A_\mu) \phi = e^{i\alpha(x)} D_\mu \phi$$

Άρα συνολικά  $(D_\mu \phi) = e^{i\alpha(x)} (D_\mu \phi)$ . Συνεπώς η χρήση της συναλλοιώτης παραγώγου εξασφαλίζει την αναλλοιώτητα της Λαγκρανζιανής κάτω από τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας. Στο ίδιο συμπέρασμα θα καταλήξουμε αν θεωρήσουμε αντί του βαθμωτού πεδίου, ένα σπινორιακό  $\psi$ , για τους τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\alpha(x)} \psi, \quad A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{q} \partial_\mu \alpha(x) \quad (2.38)$$

με αναλλοιώτη Λαγκρανζιανή

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} i \gamma^\mu (D_\mu \psi) - m \bar{\psi} \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (2.39)$$

Το γενικότερο συμπέρασμα που προκύπτει είναι πως η αναλλοιώτητα κάτω από τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας απαιτεί την παρουσία ενός ανυσματικού πεδίου του φωτονίου  $A_\mu$  στην Λαγκρανζιανή. Έτσι περιγράφονται και οι ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις φορτισμένων σωματιδίων, όπως παρατηρούνται στη φύση. Το φορτίο  $q$  είναι ουσιαστικά μία σταθερά ζεύξης, μέσω της συναλλοιώτης παραγώγου, μεταξύ ενός φορτισμένου σωματιδίου και του πεδίου του φωτονίου  $A_\mu$ . Επομένως το  $q$ , εκ πρώτης όψης μετρά την ένταση, με την οποία το φορτισμένο σωματίδιο αλληλεπιδρά με το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Επίσης δεν είναι μία διατηρούμενη ποσότητα.

Θα κλείσουμε αυτήν την ενότητα με μία γενικότερη περιγραφή των παραπάνω, σε οποιοδήποτε φορτίο και οποιουδήποτε τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας. Για τον λόγο αυτόν, θα πρέπει να υπάρχουν ανυσματικά πεδία που ονομάζονται πεδία βαθμίδας και αντίστοιχα σωματίδια - κβάντα του πεδίου με σπιν 1 που ονομάζονται μποζόνια βαθμίδας, που περιγράφουν τις αλληλεπιδράσεις, ως φορείς τους. Επομένως ένας γενικός μετασχηματισμός βαθμίδας για πεδίο  $\Psi$  γράφεται

$$\Psi \rightarrow \Psi' = U \Psi \quad (2.40)$$

όπου  $U$  ένας μοναδιαίος μετασχηματισμός συμμετρίας. Η συναλλοιώτη παράγωγος γίνεται

$$D_\mu \Psi = (\partial_\mu + ig A_\mu) \Psi \quad (2.41)$$

με το  $g$  να είναι η σταθερά ζεύξης. Η συναλλοιώτη παράγωγος μετασχηματίζεται όπως δείχνουμε παρακάτω

$$D_\mu \Psi \rightarrow (D_\mu \Psi)' = U (D_\mu \Psi) \quad (2.42)$$

Το πεδίο βαθμίδας μετασχηματίζεται ως εξής

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = U A_\mu U^{-1} + \frac{i}{g} (\partial_\mu U) U^{-1} \quad (2.43)$$

Εν γένει τα  $U$  και  $A_\mu$  δεν μετατίθενται. Αν για παράδειγμα πάρουμε  $U = e^{i\alpha(x)}$  και  $g = q$  βρίσκουμε τον μετασχηματισμό βαθμίδας του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{q} \partial_\mu \alpha(x) \quad (2.44)$$

## 2.6 Αβελιανές και μη αβελιανές θεωρίες βαθμίδας

### 2.6.1 U(1)

Οι μοναδιακές ομάδες και ιδίως οι ειδικές μοναδιακές ομάδες έχουν εξέχουσα θέση στην σωματιδιακή φυσική. Οι απλούστερες ομάδες, όπως οι  $U(1)$ ,  $SU(2)$  και  $SU(3)$  θεμελιώνουν τις θεωρίες βαθμίδας που περιγράφουν τις βασικές αλληλεπιδράσεις και συνιστούν το καθιερωμένο πρότυπο. Μία από τις αβελιανές θεωρίες βαθμίδας είναι η  $U(1)$ , την οποία αναλύσαμε στο τέλος της προηγούμενης υποενότητας και βασίζεται στην αβελιανή ομάδα  $U(1)$ . Για τους τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας γράφουμε γενικά

$$\Psi \rightarrow \Psi' = e^{i\theta(x)}\Psi \quad (2.45)$$

Η συναλλοίωτη παράγωγος γίνεται

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + ig_1 B_\mu \quad (2.46)$$

όπου  $B_\mu$  ένα ανυσματικό πεδίο βαθμίδας και  $g_1$  είναι η σταθερά ζεύξης της θεωρίας βαθμίδας  $U(1)$ . Η συναλλοίωτη παράγωγος μετασχηματίζεται όπως δείχνουμε παρακάτω

$$D_\mu \Psi \rightarrow (D_\mu \Psi)' = e^{i\theta(x)}(D_\mu \Psi) \quad (2.47)$$

ενώ το πεδίο βαθμίδας:

$$B_\mu \rightarrow B'_\mu = B_\mu - \frac{1}{g_1} \partial_\mu \theta(x) \quad (2.48)$$

Η Λαγκρανζιανή είναι

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \quad (2.49)$$

με το  $B_{\mu\nu}$  να είναι

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \quad (2.50)$$

Επομένως η Λαγκρανζιανή της αλληλεπίδρασης του πεδίου  $B_\mu$  με ένα σπινωριακό πεδίο ύλης  $\Psi$  γράφεται

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} + \bar{\psi} i \gamma^\mu D_\mu \psi \quad (2.51)$$

### 2.6.2 SU(2)

Θα περάσουμε τώρα σε μία μη αβελιανή θεωρία βαθμίδας που θεμελιώνεται στην μη αβελιανή ομάδα  $SU(2)$ . Οι μετασχηματισμοί γράφονται

$$\Psi \rightarrow \Psi' = e^{i\theta^i(x) \frac{\tau_i}{2}} \Psi, \quad \bar{\Psi} \rightarrow \bar{\Psi}' = e^{-i\theta^i(x) \frac{\tau_i}{2}} \bar{\Psi} \quad (2.52)$$

όπου  $\theta^i(x)$  τρεις παράμετροι και  $\frac{\tau_i}{2}$  οι τρεις γεννήτορες της ομάδας  $SU(2)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , για τους οποίους ισχύει

$$\left[ \frac{\tau_i}{2}, \frac{\tau_j}{2} \right] = i \epsilon_{ijk} \frac{\tau_k}{2} \quad (2.53)$$

οι σταθερές δομής λοιπόν της ομάδας είναι οι αριθμοί  $\epsilon_{ijk}$ . Οι πίνακες αυτοί είναι οι τρεις πίνακες Pauli που ορίζονται ως εξής

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.54)$$

Η συναλλοίωτη παράγωγος θα είναι

$$\partial_\mu \Psi \rightarrow \partial_\mu \Psi' = \partial_\mu (e^{i\theta^i(x) \frac{\tau_i}{2}}) \Psi + e^{i\theta^i(x) \frac{\tau_i}{2}} \partial_\mu \Psi = i \partial_\mu (\theta_i(x)) \frac{\tau_i}{2} e^{i\theta^i(x) \frac{\tau_i}{2}} \Psi + e^{i\theta^i(x) \frac{\tau_i}{2}} \partial_\mu \Psi \quad (2.55)$$

Ο πρώτος όρος δηλαδή, μας δημιουργεί πρόβλημα αναλλοιώτητας. Αναβαθμίζουμε τώρα την παράγωγο στην συναλλοίωτη απαιτώντας να μετασχηματίζεται όπως το πεδίο

$$D_\mu \Psi \rightarrow (D_\mu \Psi)' = U D_\mu \Psi = e^{i\theta^i(x) \frac{\tau_i}{2}} (D_\mu \Psi) \quad (2.56)$$

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + ig_2 \frac{\tau_i}{2} W_\mu^i \quad (2.57)$$

όπου  $g_2$  η σταθερά ζεύξης της θεωρίας βαθμίδας  $SU(2)$  και  $W_\mu^i$  τρία πεδία βαθμίδας που αντιστοιχούν στους τρεις γεννήτορες της ομάδας. Στη συνέχεια θα βρούμε τον νόμο μετασχηματισμού των πεδίων.

$$\begin{aligned} (D_\mu \Psi)' = U(D_\mu \Psi) &\Rightarrow [(\partial_\mu + ig_2 \frac{\tau_i}{2} W_\mu^i) \Psi]' = U(\partial_\mu + ig_2 \frac{\tau_i}{2} W_\mu^i) \Psi \\ &\Rightarrow [(\partial_\mu + ig_2 \frac{\tau_i}{2} W_\mu^i) \Psi'] = U(\partial_\mu + ig_2 \frac{\tau_i}{2} W_\mu^i) \Psi \end{aligned} \quad (2.58)$$

Όμως ισχύει  $\Psi' = U\Psi$  και

$$\begin{aligned} (\partial_\mu \Psi') &= \partial_\mu (U\Psi) = (\partial_\mu U) \Psi + U(\partial_\mu \Psi) \Rightarrow (\partial_\mu U) \Psi + U(\partial_\mu \Psi) + i \frac{g_2}{2} (\tau_i W_\mu^i)' U \Psi \\ &= U(\partial_\mu \Psi) + i \frac{g_2}{2} U(\tau_i W_\mu^i) \Psi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_\mu U + i \frac{g_2}{2} (\tau_i W_\mu^i)' U &= i \frac{g_2}{2} U(\tau_i W_\mu^i) \xrightarrow{\times U^{-1}} (\partial_\mu U) U^{-1} + i \frac{g_2}{2} (\tau_i W_\mu^i)' U U^{-1} = i \frac{g_2}{2} U(\tau_i W_\mu^i) U^{-1} \\ &\Rightarrow \frac{\tau_i}{2} W_\mu^i = U(\frac{\tau_i}{2} W_\mu^i) U^{-1} + \frac{i}{g_2} (\partial_\mu U) U^{-1} \end{aligned} \quad (2.59)$$

Επίσης θεωρούμε απειροστούς μετασχηματισμούς  $\theta^i(x) \ll 1$ , άρα θα ισχύει

$$U = e^{i\theta^i(x) \frac{\tau_i}{2}} \approx 1 + i\theta^i(x) \frac{\tau_i}{2} \quad (2.60)$$

Έπειτα παίρνουμε μία πολύ μικρή μεταβολή των πεδίων βαθμίδας

$$W_\mu^i \rightarrow W_\mu^i = W_\mu^i + \delta W_\mu^i \quad (2.61)$$

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε τις (2.60) και (2.61) στην (2.56) και έχουμε

$$(D_\mu \Psi)' = e^{i\theta^i(x) \frac{\tau_i}{2}} (D_\mu \Psi) \Rightarrow (\partial_\mu + ig_2 \frac{\tau_i}{2} W_\mu^i) (1 + i\theta^j \frac{\tau_j}{2}) \Psi$$



$$\begin{aligned}
 &= (1 + i\theta^i \frac{\tau_i}{2})(\partial_\mu + ig_2 \frac{\tau_j}{2} W_\mu^j) \Psi \\
 \Rightarrow &\partial_\mu \Psi + i \frac{g_2}{2} \tau_i W_\mu^i \Psi + i \frac{\tau_j}{2} \partial_\mu (\theta^j \Psi) - g_2 \frac{\tau_i}{2} W_\mu^i \theta^j \frac{\tau_j}{2} \Psi \\
 &= \partial_\mu \Psi + ig_2 \frac{\tau_j}{2} W_\mu^j + i\theta^i \frac{\tau_i}{2} \partial_\mu \Psi - g_2 \frac{\tau_i}{2} \theta^i \frac{\tau_j}{2} W_\mu^j \Psi \\
 \Rightarrow &\cancel{ig_2 \frac{\tau_i}{2} W_\mu^i \Psi} + ig_2 \frac{\tau_i}{2} \delta W_{\mu i} \Psi + i \frac{\tau_j}{2} (\partial_\mu \theta^j) \Psi \\
 &+ i \frac{\tau_j}{2} (\theta^j \partial_\mu \Psi - g_2 \frac{\tau_i}{2} W_\mu^i \theta^j \frac{\tau_j}{2} \Psi - \cancel{g_2 \frac{\tau_i}{2} \delta W_\mu^i \theta^j \frac{\tau_j}{2} \Psi}) \xrightarrow{0(2nd\ order)} \\
 &= \cancel{ig_2 \frac{\tau_j}{2} W_\mu^j \Psi} + i\theta^i \frac{\tau_i}{2} \partial_\mu \Psi - g_2 \frac{\tau_i}{2} \theta^i \frac{\tau_j}{2} W_\mu^j \Psi \\
 \Rightarrow &ig_2 \frac{\tau_i}{2} \delta W_\mu^i \Psi + i \frac{\tau_j}{2} (\partial_\mu \theta^j) \Psi + \cancel{i \frac{\tau_j}{2} \theta^j \partial_\mu \Psi} - g_2 \frac{\tau_i}{2} W_\mu^i \theta^j \frac{\tau_j}{2} \Psi = \cancel{i\theta^i \frac{\tau_i}{2} \partial_\mu \Psi} - g_2 \frac{\tau_i}{2} \theta^i \frac{\tau_j}{2} W_\mu^j \Psi \\
 \Rightarrow &ig_2 \frac{\tau_i}{2} \delta W_\mu^i \Psi = -i \frac{\tau_j}{2} (\partial_\mu \theta^j) \Psi + g_2 \frac{\tau_i}{2} W_\mu^i \theta^j \frac{\tau_j}{2} \Psi - g_2 \frac{\tau_i}{2} \theta^i \frac{\tau_j}{2} W_\mu^j \Psi \\
 &= -i \frac{\tau_j}{2} (\partial_\mu \theta^j) \Psi + \frac{g_2}{4} (\tau_i W_\mu^i \theta^j \tau_j - \tau_i \theta^i \tau_j W_\mu^j) \Psi \\
 &= -i \frac{\tau_i}{2} (\partial_\mu \theta^i) \Psi + \frac{g_2}{4} \theta^i W_\mu^j (\tau_j \tau_i - \tau_i \tau_j) \Psi \\
 &= -i \frac{\tau_i}{2} (\partial_\mu \theta^i) \Psi - \frac{g_2}{4} \theta^i W_\mu^j 2i \epsilon_{ijk} \tau_k \Psi \\
 &= -i \frac{\tau_i}{2} (\partial_\mu \theta^i) \Psi - i \frac{g_2}{2} \epsilon_{ijk} \theta^j W_\mu^k \tau_i \Psi \\
 \Rightarrow &\delta W_\mu^i = -\frac{1}{g_2} \partial_\mu \theta^i - \epsilon_{ijk} \theta^j W_\mu^k \quad (2.62)
 \end{aligned}$$

Άρα ο νόμος μετασχηματισμού των πεδίων είναι

$$\Rightarrow W_\mu^i \rightarrow W_\mu^i = W_\mu^i - \frac{1}{g_2} \partial_\mu \theta^i(x) - \epsilon_{ijk} \theta^j(x) W_\mu^k \quad (2.63)$$

Επόμενο βήμα είναι η εύρεση της ελεύθερης Λαγκρανζιανής αυτού του πεδίου. Θα ξεκινήσουμε με την εύρεση του αναλλοίωτου κινητικού όρου και συνεπώς του ταχυστή που γενικεύει τον ηλεκτρομαγνητικό  $F_{\mu\nu}$ . Όπως και με την ομάδα  $U(1)$ , οι όροι μάζας απαγορεύονται, καθώς δημιουργούν πρόβλημα αναλλοιώτητας. Αρχικά αναφέρουμε πως για τον μετασχηματισμό της παραγώγου ισχύει

$$(D_\mu \Psi') = U(D_\mu \Psi) = U D_\mu U^{-1}(U \Psi) = U D_\mu U^{-1} \quad (2.64)$$

Άρα ο μεταθέτης τους θα είναι

$$\begin{aligned}
 [D'_\mu, D'_\nu] &= [UD_\mu U^{-1}, UD_\nu U^{-1}] = UD_\mu U^{-1}UD_\nu U^{-1} - UD_\nu U^{-1}UD_\mu U^{-1} \\
 &= UD_\mu D_\nu U^{-1} - UD_\nu D_\mu U^{-1} = U[D_\mu, D_\nu]U^{-1} \Rightarrow \\
 [D'_\mu, D'_\nu] &= U[D_\mu, D_\nu]U^{-1}
 \end{aligned} \tag{2.65}$$

Ακόμα υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
 [D_\mu, D_\nu] &= (\partial_\mu + ig_2 \frac{\tau_i}{2} W_\mu^i)(\partial_\nu + ig_2 \frac{\tau_j}{2} W_\nu^j) - (\partial_\nu + ig_2 \frac{\tau_j}{2} W_\nu^j)(\partial_\mu + ig_2 \frac{\tau_i}{2} W_\mu^i) \\
 &= \cancel{\partial_\mu \partial_\nu} + ig_2 \frac{\tau_j}{2} \partial_\mu W_\nu^j + ig_2 \frac{\tau_i}{2} W_\mu^i \partial_\nu - g_2^2 \frac{\tau_i}{2} W_\mu^i \frac{\tau_j}{2} W_\nu^j - \cancel{\partial_\nu \partial_\mu} - ig_2 \frac{\tau_i}{2} \partial_\nu W_\mu^i \\
 &\quad - ig_2 \frac{\tau_j}{2} W_\nu^j \partial_\mu + g_2^2 \frac{\tau_j}{2} W_\nu^j \frac{\tau_i}{2} W_\mu^i \\
 &= ig_2 \frac{\tau_i}{2} \partial_\mu W_\nu^i + \cancel{ig_2 \frac{\tau_i}{2} g_{\mu\nu} W_\mu^i \partial^\mu} - ig_2 \frac{\tau_i}{2} \partial_\nu W_\mu^i - \cancel{ig_2 \frac{\tau_i}{2} g_{\mu\nu} W^{\mu i} \partial_\mu} \\
 &\quad - \frac{g_2^2}{4} g_{\mu\nu} W^{\nu i} W_\nu^j \tau_i \tau_j + \frac{g_2^2}{4} g_{\mu\nu} W_\nu^j W^{\nu i} \tau_j \tau_i \\
 &= ig_2 \frac{\tau_i}{2} (\partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i) - \frac{g_2^2}{4} g_{\mu\nu} W^{\nu i} W_\nu^j (\tau_i \tau_j - \tau_j \tau_i) \\
 &= ig_2 \frac{\tau_i}{2} (\partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i) - \frac{g_2^2}{4} W^{\nu i} W_\nu^j 2i\epsilon_{ijk} \tau_k \\
 \Rightarrow [D_\mu, D_\nu] &= ig_2 \frac{\tau_i}{2} (\partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i - g_2 \epsilon_{ijk} W^{\nu i} W_\nu^j) \\
 \Rightarrow [D_\mu, D_\nu] &= ig_2 \frac{\tau_i}{2} W_{\mu\nu}^i
 \end{aligned} \tag{2.66}$$

Επομένως η ελεύθερη Λαγκρανζιανή για τα  $W_\mu^i$  είναι

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} W_{\mu\nu}^i W^{\mu\nu i} \tag{2.67}$$

Υπολογίζουμε επίσης τον μεταθέτη

$$[D'_\mu, D'_\nu] = U[D_\mu, D_\nu]U^{-1} = ig_2 \frac{\tau_i}{2} U W_{\mu\nu}^i U^{-1} = ig_2 \frac{\tau_i}{2} W_{\mu\nu}^i \Rightarrow W_{\mu\nu}^i = U W_{\mu\nu}^i U^{-1} \tag{2.68}$$

Άρα η Λαγκρανζιανή μετασχηματίζεται ως

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{4} W_{\mu\nu}^i W^{\mu\nu i} = -\frac{1}{4} U W_{\mu\nu}^i U^{-1} U W^{\mu\nu i} U^{-1} = \frac{1}{4} e^{i\theta^i(x) \frac{\tau_i}{2}} W_{\mu\nu}^i W^{\mu\nu i} e^{-i\theta^i(x) \frac{\tau_i}{2}} = \mathcal{L} \tag{2.69}$$

Για την αλληλεπίδραση λοιπόν τώρα  $SU(2)$  πεδίων βαθμίδας  $W_{\mu\nu}^i$  με ένα σπινორιακό πεδίο ύλης  $\psi$  γράφουμε την Λαγκρανζιανή

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} W_{\mu\nu}^i W^{\mu\nu i} + \bar{\psi} i \gamma^\mu D_\mu \psi \tag{2.70}$$

Θα μπορούσαμε να περιγράψουμε τις ασθενείς αλληλεπιδράσεις με την παραπάνω θεωρία, όμως στην πραγματικότητα, τα διανυσματικά μποζόνια των ασθενών αλληλεπιδράσεων  $W^\pm, Z^0$  έχουν μάζα, ενώ εδώ, τα πεδία  $W_{\mu\nu}^i$  πρέπει να είναι άμαζα για να είναι αναλλοίωτη η Λαγκρανζιανή κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας.

### 2.6.3 SU(3)

Η μη αβελιανή θεωρία βαθμίδας αυτή, προκύπτει άμεσα ως γενίκευση των αλληλεπιδράσεων των  $SU(2)$  πεδίων βαθμίδας. Για τους τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας γράφουμε

$$\Psi \rightarrow \Psi' = e^{i\theta^\alpha(x)T_\alpha} \Psi \quad (2.71)$$

όπου υπονοείται άθροιση υπό τον επαναλαμβανόμενο δείκτη  $\alpha$ , για τιμές  $\alpha = 1, \dots, 8$ . Οι  $T_\alpha$  είναι μία ομάδα γραμμικά ανεξάρτητων  $3 \times 3$  πινάκων και γεννήτορες της ομάδας  $SU(3)$ , η οποία είναι μη αβελιανή και τα  $\theta_i$ , ένα σύνολο παραμέτρων. Μία βολική επιλογή των  $T_\alpha$  είναι συνήθως οι οκτώ  $3 \times 3$  πίνακες του Gell-Mann  $\lambda_\alpha$ . Γνωρίζουμε πως ο μεταθέτης τους γράφεται ως εξής

$$[T_\alpha, T_b] = if_{abc}T_c \quad (2.72)$$

όπου  $f_{abc}$  είναι πραγματικές σταθερές που ονομάζονται σταθερές δομής της ομάδας.

Στη συνέχεια θα παραθέσουμε μερικές ιδιότητες των πινάκων  $T_\alpha$ , καθώς και των σταθερών δομής, προκειμένου να εξάγουμε το συμπέρασμα, πως οι  $f_{abc}$  είναι αντισυμμετρικές κάτω από οποιαδήποτε εναλλαγή κάποιου ζεύγους δεικτών.

Αρχικά γράφουμε πιο αναλυτικά

$$[T_\alpha, T_b] = i \sum_{c=1}^8 f_{abc}T_c \quad (2.73)$$

Μπορούμε έπειτα να εκφράσουμε τις σταθερές δομής επαναπροσδιορίζοντας το δεξί τμήμα της παραπάνω σχέσης ως εξής

$$Tr[[T_\alpha, T_b]T_{c'}] = Tr \left[ i \sum_{c=1}^8 f_{abc}T_cT_{c'} \right] = i \sum_{c=1}^8 f_{abc}Tr[T_cT_{c'}] = \frac{if_{abc'}}{2}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα  $Tr[T_cT_{c'}] = \frac{1}{2}\delta_{cc'}$ , όταν  $T_c \equiv \frac{\lambda_c}{2}$ . Επομένως έχουμε εξάγει ότι

$$f_{abc} = -2iTr[[T_\alpha, T_b]T_c] \quad (2.74)$$

Ακόμα γνωρίζουμε από τις ιδιότητες της άλγεβρας Lie, ότι  $[A, B] = -[B, A]$ , καθώς και για τα ίχνη, ότι  $Tr[ABC] = Tr[BCA] = Tr[CAB]$ , μέσω κυκλικής εναλλαγής των πινάκων. Συγκεκριμένα για τους πίνακες  $T_\alpha$  θα έχουμε

$$\begin{aligned} Tr[[T_\alpha, T_b]T_c] &= Tr[T_\alpha T_b T_c - T_b T_\alpha T_c + T_\alpha T_c T_b - T_\alpha T_c T_b] = Tr[T_\alpha [T_b, T_c] - T_b T_\alpha T_c + T_\alpha T_c T_b] = \\ &= Tr[T_\alpha [T_b, T_c] - T_\alpha T_c T_b + T_\alpha T_c T_b] = Tr[[T_b, T_c]T_\alpha] \end{aligned}$$

Συνολικά λοιπόν έχουμε

$$Tr[[T_\alpha, T_b]T_c] = Tr[[T_b, T_c]T_\alpha] \quad (2.75)$$

Επομένως σύμφωνα με την (2.74) βλέπουμε ότι  $f_{abc} = f_{bca}$ , λόγω της εναλλαγής 2 ζευγών δεικτών,  $a \rightarrow c$  και  $c \rightarrow b$  και  $f_{abc} = -f_{cba}$ , μέσω της εναλλαγής ενός ζεύγους δεικτών  $a \rightarrow c$ . Φαίνεται

δηλαδή η αντισυμμετρικότητα των σταθερών δομής στην εναλλαγή ενός ζεύγους δεικτών. Ακόμα παραθέτουμε τις μη μηδενικές σταθερές δομής της ομάδας  $SU(3)$  που είναι οι αριθμοί:

$$f_{123} = 1, f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}, f_{147} = f_{516} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{637} = \frac{1}{2} \quad (2.76)$$

Για να επιβάλλουμε τώρα,  $SU(3)$  τοπική συμμετρία βαθμίδας στην Λαγκρανζιανή μας, θεωρούμε απειροστό μετασχηματισμό φάσης στο πεδίο, της μορφής

$$\Psi \rightarrow [1 + i\theta^\alpha(x)T_\alpha]\Psi \quad (2.77)$$

Επομένως η παράγωγός του γίνεται:

$$\partial_\mu \Psi \rightarrow [1 + i\theta^\alpha(x)T_\alpha]\partial_\mu \Psi + iT_\alpha \Psi \partial_\mu \theta^\alpha \quad (2.78)$$

όπου ο δεύτερος όρος κάνει την Λαγκρανζιανή να μην είναι αναλλοίωτη κάτω από τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας. Για αυτόν τον λόγο αναβαθμίζουμε στην συναλλοίωτη παράγωγο

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + ig_3 T_\alpha G_\mu^\alpha \quad (2.79)$$

όπου  $g_3$  είναι η σταθερά ζεύξης μίας θεωρίας βαθμίδας  $SU(3)$  και  $G_\mu^\alpha$  είναι τα οκτώ πεδία βαθμίδας που αντιστοιχούν στους οκτώ γεννήτορες της ομάδας  $SU(3)$ . Ο νόμος μετασχηματισμού των πεδίων, για απειροστές παραμέτρους, είναι:

$$G_\mu^i \rightarrow G_\mu'^i = G_\mu^i - \frac{1}{g_3} \partial_\mu \theta^i(x) - f_{ijk} \theta^j G_\mu^k \quad (2.80)$$

Έτσι ο ταυνοστής των πεδίων γίνεται

$$G_{\mu\nu}^i = \partial_\mu G_\nu^i - \partial_\nu G_\mu^i - g_3 f_{ijk} G_\mu^j G_\nu^k \quad (2.81)$$

Στην κβαντική χρωμοδυναμική ισχύει

$$[D_\mu, D_\nu] = igT_\alpha G_{\mu\nu}^\alpha \quad (2.82)$$

Αντικαθιστώντας στην (2.82) την (2.79) έχουμε αναλυτικά:

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu] &= igT_\alpha G_{\mu\nu}^\alpha \Rightarrow D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu = igT_\alpha G_{\mu\nu}^\alpha \\ &\Rightarrow (\partial_\mu + igT_\alpha G_\mu^\alpha)(\partial_\nu + igT_b G_\nu^b) - (\partial_\nu + igT_b G_\nu^b)(\partial_\mu + igT_\alpha G_\mu^\alpha) = igT_\alpha G_{\mu\nu}^\alpha \\ &\Rightarrow \partial_\mu \partial_\nu + igT_b \partial_\mu G_\nu^b + igT_\alpha \partial_\nu G_\mu^\alpha - g^2 T_\alpha G_\mu^\alpha T_b G_\nu^b - \partial_\nu \partial_\mu - igT_\alpha \partial_\nu G_\mu^\alpha - igT_b \partial_\mu G_\nu^b + g^2 T_b G_\nu^b T_\alpha G_\mu^\alpha \\ &= igT_\alpha G_{\mu\nu}^\alpha \\ &\Rightarrow igT_b \partial_\mu G_\nu^b + igT_\alpha \partial_\nu G_\mu^\alpha - g^2 T_\alpha G_\mu^\alpha T_b G_\nu^b - igT_\alpha \partial_\nu G_\mu^\alpha - igT_b \partial_\mu G_\nu^b + g^2 T_b G_\nu^b T_\alpha G_\mu^\alpha = igT_\alpha G_{\mu\nu}^\alpha \\ &\Rightarrow igT_\alpha \partial_\mu G_\nu^\alpha + \cancel{igT_\alpha g_{\mu\nu} G_\mu^\alpha \partial_\nu} \overset{0}{\rightarrow} - igT_\alpha \partial_\nu G_\mu^\alpha - \cancel{igT_\alpha g_{\mu\nu} G_\nu^\alpha \partial_\mu} \overset{0}{\rightarrow} + g^2 g_{\mu\nu} G_\nu^b G_\mu^\alpha T_b T_\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -g^2 g_{\mu\nu} G^{\nu\alpha} G_\nu^b T_\alpha T_b = ig T_\alpha G_{\mu\nu}^\alpha \\
 \Rightarrow & ig T_\alpha \partial_\mu G_\nu^\alpha - ig T_\alpha \partial_\nu G_\mu^\alpha + g^2 g_{\mu\nu} G_\nu^b G^{\nu\alpha} T_b T_\alpha - g^2 g_{\mu\nu} G^{\nu\alpha} G_\nu^b T_\alpha T_b = ig T_\alpha G_{\mu\nu}^\alpha \\
 \Rightarrow & ig T_\alpha (\partial_\mu G_\nu^\alpha - \partial_\nu G_\mu^\alpha) - g^2 g_{\mu\nu} G^{\nu\alpha} G_\nu^b (T_\alpha T_b - T_b T_\alpha) = ig T_\alpha G_{\mu\nu}^\alpha \\
 \Rightarrow & ig T_\alpha (\partial_\mu G_\nu^\alpha - \partial_\nu G_\mu^\alpha) - ig^2 G_\mu^\alpha G_\nu^b f_{abc} T_c = ig T_\alpha G_{\mu\nu}^\alpha \\
 \xrightarrow{f_{abc}=f_{bca}} & ig T_\alpha (\partial_\mu G_\nu^\alpha - \partial_\nu G_\mu^\alpha - g G_\mu^b G_\nu^c f_{abc}) = ig T_\alpha G_{\mu\nu}^\alpha \\
 \Rightarrow & G_{\mu\nu}^\alpha = \partial_\mu G_\nu^\alpha - \partial_\nu G_\mu^\alpha - g f_{abc} G_\mu^b G_\nu^c
 \end{aligned}$$

Επομένως η ελεύθερη Λαγκρανζιανή είναι

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^i G^{\mu\nu i} \quad (2.83)$$

η οποία είναι αναλλοίωτη κάτω από τοπικούς μετασχηματισμούς βαθμίδας, αφού για έναν μετασχηματισμό βαθμίδας

$$\Psi \rightarrow \Psi' = e^{i\theta^i(x)T_i} \Psi = Uq(x)$$

η συναλλοίωτη παράγωγος και συνεπώς ο ταυστής μετασχηματίζονται ως εξής

$$D_\mu \rightarrow UD_\mu U^{-1}, G_{\mu\nu} \rightarrow UG_{\mu\nu}U^{-1}$$

Άρα ο κινητικός όρος γίνεται, μέσω κυκλικών μεταθέσεων:

$$Tr(G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}) \rightarrow Tr(UG_{\mu\nu}U^{-1}UG^{\mu\nu}U^{-1}) \stackrel{UU^{-1}=I}{=} Tr(G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}U^{-1}U) = Tr(G_{\mu\nu}G^{\mu\nu})$$

Η Λαγκρανζιανή που περιγράφει την αλληλεπίδραση των φερμιονίων, με τα διανυσματικά μποζόνια βαθμίδας  $G_\mu^i$  είναι

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^i G^{\mu\nu i} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi \quad (2.84)$$

Αυτή είναι η θεωρία της Κβαντικής Χρωμοδυναμικής που περιγράφει την αλληλεπίδραση των quarks μέσω γκλουονίων 8 διαφορετικών χρωμάτων. Πρόκειται για την Λαγκρανζιανή που προκύπτει από την απαίτηση να είναι αναλλοίωτη κάτω από τοπικούς μετασχηματισμούς χρώματος των πεδίων. Παράγει κουάρκ με χρώμα και γκλουόνια και είναι αναλλοίωτη κάτω από τους μετασχηματισμούς της ομάδας  $SU(3)$ . Ακόμα, τα γκλουόνια είναι άμαζα. Επίσης ο κινητικός όρος συμπεριλαμβάνει μία αυτο-αλληλεπίδραση μεταξύ των γκλουονίων, λόγω της μορφής του ταυστή των πεδίων  $G_{\mu\nu}^\alpha$ .

## Κεφάλαιο 3

# Εξαγωγή εξισώσεων από γνωστές Λαγκρανζιανές

### 3.1 Εξισώσεις Maxwell

Η Λαγκρανζιανή του Ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, από την οποία θα δείξουμε ότι παράγονται οι εξισώσεις Maxwell είναι η ακόλουθη:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu \quad (3.1)$$

όπου  $j^\mu$  το ρεύμα και  $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$  ο αντισυμμετρικός ηλεκτρομαγνητικός τανυστής του πεδίου, του οποίου οι διάφορες συνιστώσες αποτελούν το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο. Σε μορφή πίνακα γράφεται

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Εισάγουμε τώρα την Λαγκρανζιανή αυτή στις εξισώσεις Euler-Lagrange. Επομένως για το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο  $A_\nu$  έχουμε

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \right) = 0 \quad (3.2)$$

Υπολογίζουμε αρχικά τον πρώτο όρο  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu}$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = -j^\mu \frac{\partial A_\mu}{\partial A_\nu} = -j^\mu \delta_\mu^\nu = -j^\nu$$

Για τον υπολογισμό του όρου  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}$  έχουμε

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -\frac{1}{4} \frac{\partial(F_{\kappa\lambda}F^{\kappa\lambda})}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} [(\partial_\kappa A_\lambda - \partial_\lambda A_\kappa)(\partial^\kappa A^\lambda - \partial^\lambda A^\kappa)] =$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} [\partial_\kappa A_\lambda \partial^\kappa A^\lambda - \partial_\kappa A_\lambda \partial^\lambda A^\kappa - \partial_\lambda A_\kappa \partial^\kappa A^\lambda + \partial_\lambda A_\kappa \partial^\lambda A^\kappa] \\
 &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} [(\partial_\kappa A_\lambda)(\partial^\kappa A^\lambda) - (\partial_\kappa A_\lambda)(\partial^\lambda A^\kappa)] = \frac{1}{2} \frac{\partial(\partial_\kappa A_\lambda)(\partial^\lambda A^\kappa)}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} - \frac{1}{2} \frac{\partial(\partial_\kappa A_\lambda)(\partial^\kappa A^\lambda)}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \\
 &= \frac{1}{2} (\partial^\lambda A^\kappa) \frac{\partial(\partial_\kappa A_\lambda)}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} + \frac{1}{2} (\partial_\kappa A_\lambda) \frac{\partial(\partial^\lambda A^\kappa)}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} - \frac{1}{2} (\partial^\kappa A^\lambda) \frac{\partial(\partial_\kappa A_\lambda)}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} - \frac{1}{2} (\partial_\kappa A_\lambda) \frac{\partial(\partial^\kappa A^\lambda)}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \\
 &= \frac{1}{2} (\partial^\lambda A^\kappa) \delta_\kappa^\mu \delta_\lambda^\nu + \frac{1}{2} (\partial_\kappa A_\lambda) g^{\alpha\lambda} g^{\beta\kappa} \frac{\partial(\partial_\alpha A_\beta)}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} - \frac{1}{2} (\partial^\kappa A^\lambda) \delta_\kappa^\mu \delta_\lambda^\nu - \frac{1}{2} (\partial_\kappa A_\lambda) g^{\alpha\kappa} g^{\beta\lambda} \frac{\partial(\partial_\alpha A_\beta)}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \\
 &= \frac{1}{2} [\partial^\nu A^\mu + (\partial^\beta A^\alpha) \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu - \partial^\mu A^\nu - (\partial^\alpha A^\beta) \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu] = \frac{1}{2} [2\partial^\nu A^\mu - 2\partial^\mu A^\nu] = -(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)
 \end{aligned}$$

Για τον υπολογισμό των παραπάνω χρησιμοποιήθηκαν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\partial_\kappa A_\lambda \partial^\kappa A^\lambda = \partial_\lambda A_\kappa \partial^\lambda A^\kappa \quad \partial_\lambda A_\kappa \partial^\kappa A^\lambda = \partial_\kappa A_\lambda \partial^\lambda A^\kappa \quad (3.3)$$

Τελικά έχουμε

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = -F^{\mu\nu} \quad (3.4)$$

Επομένως ο δεύτερος όρος της εξίσωσης Euler-Lagrange ισούται με:

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \right) = -\partial_\mu F^{\mu\nu}$$

Συνολικά λοιπόν οι Euler-Lagrange δίνουν

$$-j^\nu + \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$$

Άρα οι εξισώσεις κίνησης του πεδίου είναι

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \quad (3.5)$$

δηλαδή οι εξισώσεις Maxwell. Ακόμα, αφού όπως αναφέραμε, ο ταυιστής  $F^{\mu\nu}$  είναι αντισυμμετρικός, ισχύει  $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$  επομένως έχουμε

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \Rightarrow \partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\nu j^\nu \quad (3.6)$$

Έπειτα εναλλάσσουμε τους δείκτες  $\mu$  και  $\nu$  άρα έχουμε

$$\partial_\mu \partial_\nu F^{\nu\mu} = \partial_\mu j^\mu \Rightarrow -\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\nu j^\nu \quad (3.7)$$

Από την πρόσθεση των (3.6) και (3.7) παίρνουμε

$$\partial_\nu \partial_\mu (F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu}) = 2\partial_\nu j^\nu \Rightarrow \partial_\nu j^\nu = 0 \quad (3.8)$$

Άρα με την χρήση των εξισώσεων κίνησης προκύπτει και η εξίσωση (3.8) η οποία εκφράζει την διατήρηση του ρεύματος και είναι ισοδύναμη με την εξίσωση συνέχειας. Χωρίς πηγές, οι μη ομογενείς εξισώσεις Maxwell (3.5) γράφονται  $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$ .

Να σημειωθεί πως δουλέψαμε στο σύστημα των φυσικών μονάδων. Επιστρέφοντας λοιπόν στο σύστημα των ατομικών μονάδων, οι εξισώσεις Maxwell γράφονται

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu \quad (3.9)$$

### 3.2 Λαγκρανζιανή Proca

Σε αυτήν την ενότητα θα λάβουμε υπόψη την πιθανή ύπαρξη όρου μάζας για το φωτόνιο. Για να είναι η Λαγκρανζιανή του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου σύμφωνη με την περίπτωση αυτή, εισάγουμε έναν επιπλέον όρο  $\frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu$ . Έχουμε κατασκευάσει με τον τρόπο αυτό, την γνωστή Λαγκρανζιανή Proca:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu \quad (3.10)$$

Οι εξισώσεις Euler-Lagrange για την Λαγκρανζιανή του Ηλεκτρομαγνητικού πεδίου με όρο μάζας, λοιπόν είναι:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \right) = 0 \quad (3.11)$$

Υπολογίζουμε ομοίως με την προηγούμενη ενότητα τον πρώτο όρο χωριστά ως εξής:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} &= -j^\mu \frac{\partial A_\mu}{\partial A_\nu} + \frac{1}{2}m^2 \frac{\partial (A_\mu A^\mu)}{\partial A_\nu} = -j^\mu \delta_\mu^\nu + \frac{1}{2}m^2 \frac{\partial (g^{\mu\lambda} A_\mu A_\lambda)}{\partial A_\nu} = \\ &= -j^\nu + \frac{1}{2}m^2 g^{\mu\lambda} (\delta_\mu^\nu A_\lambda + \delta_\lambda^\nu A_\mu) = -j^\nu + \frac{1}{2}m^2 (g^{\nu\lambda} A_\lambda + g^{\mu\nu} A_\mu) \end{aligned}$$



$$= -j^\nu + \frac{1}{2}m^2 2A^\nu = -j^\nu + m^2 A^\nu$$

Συνολικά δηλαδή έχουμε

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = -j^\nu + m^2 A^\nu \quad (3.12)$$

Ο υπολογισμός του όρου  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}$  δεν επηρεάζεται από τον πρόσθετο όρο της μάζας φωτονίου, επομένως ομοίως με πριν έχουμε για τον δεύτερο όρο της Euler-Lagrange:

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \right) = -\partial_\mu F^{\mu\nu}$$

Τελικά οι Euler-Lagrange, για την Λαγκρανζιανή Proca δίνουν τις εξισώσεις κίνησης του πεδίου:

$$-j^\nu + \partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = j^\nu \quad (3.13)$$

Στην βαθμίδα Lorenz έχουμε  $\partial_\mu A^\mu = 0$ . Με αυτό το δεδομένο, ο πρώτος όρος της εξίσωσης (3.13) γίνεται σύμφωνα και με τον ορισμό του  $F^{\mu\nu}$ :

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \cancel{\partial_\mu \partial^\nu A^\mu} = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \square A^\nu$$

Επομένως οι εξισώσεις κίνησης γίνονται

$$(\square + m^2)A^\mu = j^\mu \quad (3.14)$$

Έχουμε παράξει δηλαδή την παραπάνω εξίσωση κίνησης, εισάγοντας στις εξισώσεις Euler-Lagrange, την Λαγκρανζιανή Proca.

### 3.3 Μάζα φωτονίου

Αξιωματικά γνωρίζουμε ότι η θεωρία μας πρέπει να είναι αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας. Αυτό σημαίνει πως η εκάστοτε Λαγκρανζιανή πρέπει επίσης να είναι αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \alpha \quad (3.15)$$

όπου  $\alpha = \alpha(x)$  μία αυθαίρετη συνάρτηση. Αν εξετάσουμε το κατά πόσο οι επιμέρους όροι της Λαγκρανζιανής Proca είναι αναλλοίωτοι κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας, θα συμπεράνουμε ότι μόνο ο κινητικός όρος  $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$  είναι όντως αναλλοίωτος αφού:

$$\begin{aligned} F'_{\mu\nu} &= \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu = \partial_\mu (A_\nu - \partial_\nu \alpha) - \partial_\nu (A_\mu - \partial_\mu \alpha) = \partial_\mu A_\nu - \cancel{\partial_\mu \partial_\nu \alpha} - \partial_\nu A_\mu + \cancel{\partial_\nu \partial_\mu \alpha} \\ &\Rightarrow F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Αντιθέτως, για τον όρο μάζας ισχύει:

$$\frac{1}{2}m^2 A'_\mu A'^\mu = \frac{1}{2}m^2 (A_\mu - \partial_\mu \alpha)(A^\mu - \partial^\mu \alpha) = \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}m^2 [-A_\mu \partial^\mu \alpha - A^\mu \partial_\mu \alpha + \partial_\mu \alpha \partial^\mu \alpha]$$

Αφού λοιπόν  $-A_\mu \partial^\mu \alpha - A^\mu \partial_\mu \alpha + \partial_\mu \alpha \partial^\mu \alpha \neq 0$ , τότε

$$\frac{1}{2}m^2 A'_\mu A'^\mu \neq \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu$$

Επομένως ο όρος μάζας του φωτονίου δεν είναι αναλλοίωτος κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας. Απαγορεύεται λοιπόν να υπάρχει στις εξισώσεις, άρα αναγκαστικά η μάζα του φωτονίου ισούται με μηδέν.

### 3.4 Εξίσωση Klein-Gordon

Σε αυτό το σκέλος της εργασίας θα μελετήσουμε πώς προκύπτει η εξίσωση Klein-Gordon από την εφαρμογή της εξίσωσης Euler-Lagrange, στην ακόλουθη Λαγκρανζιανή:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (3.17)$$

όπου  $\phi$  πεδίο μάζας  $m$ . Εισάγουμε την παραπάνω Λαγκρανζιανή στις εξισώσεις Euler-Lagrange. Υπολογίζουμε τους δύο επιμέρους όρους και έχουμε:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi} \left( -\frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right) = -m^2 \phi \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} &= \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu \phi)} \left( \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \right) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial(\partial_\mu \phi)}{\partial(\partial_\mu \phi)} (\partial^\mu \phi) + (\partial_\mu \phi) \frac{\partial(\partial^\mu \phi)}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ (\partial^\mu \phi) + (\partial_\mu \phi) g^{\mu\nu} \frac{\partial(\partial_\nu \phi)}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right] = \frac{1}{2} [(\partial^\mu \phi) + (\partial^\nu \phi) \delta_\nu^\mu] = \partial^\mu \phi \end{aligned} \quad (3.19)$$

Τελικά, συνολικά οι Euler-Lagrange δίνουν:

$$-m^2 \phi - \partial_\mu (\partial^\mu \phi) \Rightarrow (\square + m^2) \phi = 0 \quad (3.20)$$

δηλαδή την εξίσωση Klein-Gordon.

### 3.5 Εξίσωση Dirac

Σε αυτήν την ενότητα θα μελετήσουμε πως προκύπτει η εξίσωση Dirac από την εφαρμογή της εξίσωσης Euler-Lagrange, στην Λαγκρανζιανή ενός σπινοριακού πεδίου  $\psi$  και μάζας  $m$ , η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi} \psi \quad (3.21)$$

Θα μεταχειριστούμε στο εξής τα  $\psi$  και  $\bar{\psi}$  σαν ανεξάρτητα πεδία. Υπολογίζουμε αρχικά ξεχωριστά τους δύο όρους της εξίσωσης Euler-Lagrange για το πεδίο  $\bar{\psi}$  και παίρνουμε

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} = 0 \quad (3.23)$$

Συνολικά λοιπόν έχουμε

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} \right) = 0 \quad (3.24)$$

$$\Rightarrow i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0 \quad (3.25)$$

Παρατηρούμε λοιπόν πως προκύπτει η εξίσωση Dirac για τον σπίνορα  $\psi$ . Εφαρμόζουμε ακριβώς την ίδια διαδικασία και για το  $\psi$ , επομένως έχουμε

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = -m\bar{\psi} \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} = i\gamma^\mu \bar{\psi} \quad (3.27)$$

Και τελικά προκύπτει

$$i\gamma^\mu (\partial_\mu \bar{\psi}) + m\bar{\psi} = 0 \quad (3.28)$$

Δηλαδή η εξίσωση Dirac για τον σπίνορα  $\bar{\psi}$ . Παρατηρούμε λοιπόν πως από την δοθείσα Λαγκρανζιανή προκύπτει η εξίσωση Dirac για τους δύο σπίνορες  $\psi$  και  $\bar{\psi}$  εφαρμόζοντας απλά την εξίσωση Euler-Lagrange.

## Κεφάλαιο 4

# Καθιερωμένο Πρότυπο

Τα πεδία βαθμίδας στα οποία έχουμε καταλήξει, απαγορεύεται να έχουν μάζα, όπως και τα πεδία των φερμιονίων, καθώς η προσθήκη τέτοιων όρων, θα δημιουργούσε προβλήματα με την αναλλοιωτότητα της Λαγκρανζιανής κάτω από τους μετασχηματισμούς βαθμίδας του καθιερωμένου προτύπου. Πρέπει λοιπόν να βρούμε έναν τρόπο να παραβιάσουμε την συμμετρία βαθμίδας.

### 4.1 Αυθόρμητο σπάσιμο διακριτής συμμετρίας βαθμίδας

Γενικά αναφερόμαστε σε αυθόρμητο σπάσιμο μίας συμμετρίας, όταν αυτή εκδηλώνεται σε μία φυσική θεωρία, αλλά δεν ισχύει για την βασική κατάσταση της, δηλαδή για το κενό. Το σπάσιμο ονομάζεται αυθόρμητο, γιατί δεν συμβαίνει από κάποιον εμφανή εξωτερικό παράγοντα. Μπορούμε να το παρομοιάσουμε με την απώλεια της αρχικής συμμετρίας, μέσω της δημιουργίας μίας μη συμμετρικής βασικής κατάστασης. Θα δούμε πως για τον σκοπό αυτό, θα χρειαστεί να εισάγουμε κάποια νέα βαθμωτά πεδία.

Έστω η Λαγκρανζιανή πραγματικού βαθμωτού πεδίου  $\phi$ :

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \left( \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 + \frac{1}{4} \lambda \phi^4 \right), \quad \lambda > 0 \quad (4.1)$$

η οποία υπακούει την διακριτή συμμετρία  $\phi \rightarrow \phi' = -\phi$ . Έχουμε πάρει  $\lambda > 0$ , ώστε το δυναμικό να είναι φραγμένο από κάτω. Η μετασχηματισμένη Λαγκρανζιανή λοιπόν γίνεται

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi')^2 - \left( \frac{1}{2} \mu^2 \phi'^2 + \frac{1}{4} \lambda \phi'^4 \right) = \frac{1}{2} (\partial_\mu (-\phi))^2 - \left( \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 + \frac{1}{4} \lambda \phi^4 \right) = \mathcal{L} \quad (4.2)$$

Το δυναμικό που αντιστοιχεί στην παραπάνω Λαγκρανζιανή είναι

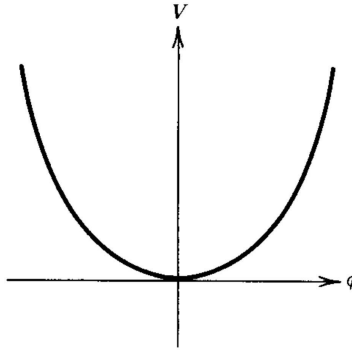
$$V(\phi) = \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 + \frac{1}{4} \lambda \phi^4 \quad (4.3)$$

Η μορφή που λαμβάνει η γραφική παράσταση του παραπάνω δυναμικού εξαρτάται άμεσα από το πρόσημο του  $\mu^2$ , το οποίο δεν είναι το τετράγωνο μίας άλλης ποσότητας, αλλά μία ανεξάρτητη παράμετρος.

Στην συνέχεια θα μελετήσουμε δύο διαφορετικές περιπτώσεις, για τα δύο πρόσημα του  $\mu^2$ , αναζητώντας το ελάχιστο δυναμικό της βασικής κατάστασης, ώστε να αναπτύξουμε τα πεδία γύρω από

αυτές τις τιμές, προκειμένου να βρούμε τις διεγερμένες καταστάσεις, δηλαδή τα σωματίδια της θεωρίας μας.

Περίπτωση 1:  $\mu^2 > 0$



Σχήμα 4.1:  $\mu^2 > 0$

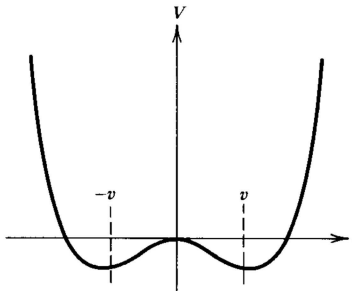
Το σχήμα περιγράφει ένα βαθμωτό σωματίδιο μάζας  $\mu$  και τότε η Λαγκρανζιανή αντιστοιχεί σε αυτήν της Klein Gordon. Υπάρχει όμως ο όρος με το  $\phi^4$ , που σημαίνει πως υπάρχει κορυφή τεσσάρων πεδίων με σταθερά σύζευξης  $\lambda$ . Δείχνει δηλαδή ότι το πεδίο  $\phi$  αλληλεπιδρά με τον εαυτό του. Ελάχιστη ενέργεια παρατηρείται όταν:

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 + \frac{1}{4} \lambda \phi^4 \right) = 0 \quad (4.4)$$

$$\Rightarrow \mu^2 \phi + \lambda \phi^3 = \phi(\mu^2 + \lambda \phi^2) = 0 \Rightarrow \phi = 0, \quad \phi^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda} \quad (4.5)$$

Όμως επειδή ισχύει  $\lambda > 0$  και  $\mu^2 > 0$  δεν μπορεί να ισχύει  $\phi^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda}$ , άρα στην συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε ελάχιστο για  $\phi = 0$ .

Περίπτωση 2:  $\mu^2 < 0$



Σχήμα 4.2:  $\mu^2 < 0$

Υπολογίζουμε το ελάχιστο:

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow \phi = 0, \quad \phi = \pm \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}} = \pm v \quad (4.6)$$

Όπως φαίνεται στο σχήμα, το  $\phi = 0$  δεν ελαχιστοποιεί το δυναμικό καθώς είναι τοπικό μέγιστο, επομένως η λύση σε αυτήν την περίπτωση είναι  $\phi = \pm v$ .

Για να βρούμε το φάσμα της θεωρίας παίρνουμε μικρές διαταραχές, δηλαδή κβαντικές διακυμάνσεις, γύρω από το ελάχιστο σημείο  $\phi = \pm v$ . Έστω λοιπόν ότι  $\phi = +v$  και οι διαταραχές είναι  $\phi(x) = v + n(x)$ . Με τον ίδιο τρόπο θα μπορούσαμε να εργαστούμε και για την περίπτωση όπου  $\phi = -v$ . Αντικαθιστώντας την διαταραχή στην Λαγκρανζιανή έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \frac{1}{2}(\partial_\mu(v + n(x)))^2 - \frac{1}{2}\mu^2(v + n(x))^2 - \frac{1}{4}\lambda(v + n(x))^4 \\ &= \frac{1}{2}(\cancel{\partial_\mu v}^0 + \partial_\mu n(x))^2 - \frac{1}{2}\mu^2 v^2 - \mu^2 v n(x) - \frac{1}{2}\mu^2 n^2(x) \\ &\quad - \frac{1}{4}\lambda v^4 - \lambda v^3 n(x) - \frac{3}{2}\lambda v^2 n^2(x) - \lambda v n^3(x) - \frac{1}{4}\lambda n^4(x) \\ &\stackrel{\mu^2 = -\lambda v^2}{=} \frac{1}{2}(\partial_\mu n(x))^2 - \frac{1}{2}\mu^2 v^2 - \frac{1}{2}\mu^2 n^2(x) - \cancel{\mu^2 v n(x)} - \frac{1}{4}\lambda v^4 \\ &\quad - \cancel{\lambda v^3 n(x)} - \frac{3}{2}\lambda v^2 n^2(x) - \lambda v n^3(x) - \frac{1}{4}\lambda n^4(x) \\ &\Rightarrow \mathcal{L}' = \frac{1}{2}(\partial_\mu n(x))^2 - \lambda v^2 n^2(x) - \lambda v n^3(x) - \frac{1}{4}\lambda n^4(x) + const. \end{aligned}$$

Ο όρος  $\lambda v^2 n^2(x)$  είναι ο όρος μάζας του πεδίου, άρα ισχύει

$$\frac{1}{2}m_n^2 = \lambda v^2 \Rightarrow m_n = \sqrt{2\lambda v^2} = \sqrt{-2\mu^2} \quad (4.7)$$

Άρα η Λαγκρανζιανή μας περιγράφει ένα φυσικό βαθμωτό πεδίο με μάζα διάφορη του μηδενός και με όρους αλληλεπίδρασης  $\lambda v n^3(x)$  και  $\frac{1}{4}\lambda n^4(x)$ .

Η αρχική συμμετρία  $\phi \rightarrow -\phi$  έχει χαθεί λόγω του όρου  $n^3(x)$ . Η επιλογή του κενού έχει λοιπόν σπάσει τη συμμετρία. Επομένως το κενό της συμμετρίας μας δεν έχει την αρχική συμμετρία της Λαγκρανζιανής, άρα το ίδιο ισχύει και για τις λύσεις του. Ο σταθερός όρος αποτελεί την τιμή του δυναμικού στο ελάχιστο σημείο. Πρόκειται δηλαδή για την συνεισφορά του αυθορμήτου σπασίματος της συμμετρίας στην πυκνότητα ενέργειας του κενού.

## 4.2 Αυθόρμητο σπάσιμο εκτεταμένης συμμετρίας βαθμίδας

Έστω τώρα δύο πραγματικά βαθμωτά πεδία  $\phi_1$  και  $\phi_2$ , τα οποία χρησιμοποιούμε για να γράψουμε το βαθμωτό μιγαδικό πεδίο  $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)$  με Λαγκρανζιανή

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_1)(\partial^\mu \phi_1) + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_2)(\partial^\mu \phi_2) - \left[ \frac{1}{2}\mu^2(\phi_1^2 + \phi_2^2) + \frac{1}{4}\lambda(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2 \right] \\ &= (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - [\mu^2 \phi^* \phi + \lambda(\phi^* \phi)^2] \end{aligned} \quad (4.8)$$

Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε την εκτεταμένη συμμετρία βαθμίδας, δηλαδή μία εκτεταμένη συμμετρία  $U(1)$

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{i\alpha} \phi \quad (4.9)$$

Ελαχιστοποιούμε ομοίως με πριν το δυναμικό, για να βρούμε την ελάχιστη κατάσταση και έχουμε

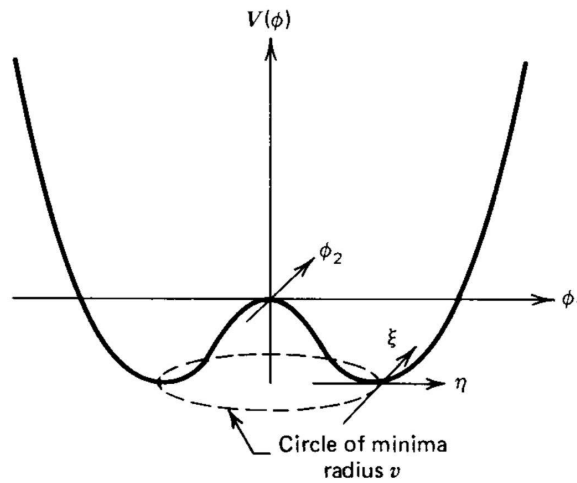
$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow \phi^* [\mu^2 + 2\lambda(\phi^* \phi)] = 0 \quad (4.10)$$

Αν  $\mu^2 > 0$ , το ελάχιστο είναι το  $\phi = \phi^* = 0$ . Τότε το  $\mu^2$  ερμηνεύεται ως (μάζα)<sup>2</sup> των πεδίων  $\phi$  και  $\phi^*$ .

Αν  $\mu^2 < 0$ , τότε υπάρχει ένα τοπικό μέγιστο στο  $\phi = \phi^* = 0$  και ένα ελάχιστο

$$\phi^2 = \frac{\phi_1^2 + \phi_2^2}{2} = -\frac{\mu^2}{2\lambda} \equiv \frac{v^2}{2} \Rightarrow \phi_1^2 + \phi_2^2 = v^2 \quad (4.11)$$

Πρόκειται για έναν κύκλο ελαχίστου δυναμικού, στο επίπεδο των  $\phi_1$  και  $\phi_2$ , ακτίνας  $v$  όπως φαίνεται και στο ακόλουθο σχήμα.



Σχήμα 4.3: Δυναμικό  $V(\phi)$  μιγαδικού βαθμωτού πεδίου για  $\mu^2 > 0$  και  $\lambda > 0$ .

Μπορούμε να επιλέξουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας  $\phi_1 = v$  και  $\phi_2 = 0$ . Τα φυσικά πεδία που αντιστοιχούν σε διεγερμένες καταστάσεις γύρω από το κενό, βρίσκονται θεωρώντας τη διαταραχή γύρω από το  $\phi$  ως εξής

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[v + h(x) + i\xi(x)] \quad (4.12)$$

Επομένως το  $\phi_1 = v$  έχει αντικατασταθεί από το  $\phi_1 = v + h(x)$ , ενώ το  $\phi_2 = 0$ , από το  $\phi_2 = \xi(x)$ .  $\eta(x)$  είναι η ακτινική διαταραχή και  $\xi(x)$  η διαταραχή στην κατεύθυνση της περιφέρειας του ελαχίστου. Αντικαθιστώντας στην Λαγκρανζιανή έχουμε

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2}(\partial_\mu \xi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)^2 + \mu^2 \eta^2 + \text{σταθερές} + \text{κυβικοί όροι των } \eta \text{ και } \xi \quad (4.13)$$

Παρατηρούμε ότι

$$-\frac{1}{2}m_\eta^2 = \mu^2 \Rightarrow m_\eta^2 = \sqrt{-2\mu^2} \quad (4.14)$$

Άρα το πεδίο  $\eta$  έχει μάζα, όμως το πεδίο  $\xi$  είναι άμαζο και ονομάζεται «μποζόνιο» Goldstone. Επιβεβαιώνουμε επομένως το Θεώρημα Goldstone, το οποίο αναφέρει πως κάθε φορά που παραβιάζουμε αυθόρμητα μία ολική συμμετρία, εμφανίζονται άμαζα βαθμωτά πεδία.

### 4.3 Αυθόρμητο σπάσιμο τοπικής συμμετρίας βαθμίδας, μη-χανισμός Higgs - Αβελιανή περίπτωση

Θεωρούμε την τοπική  $U(1)$  συμμετρία βαθμίδας

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{i\alpha(x)}\phi \quad (4.15)$$

με την Λαγκρανζιανή

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^*(D^\mu \phi) - (\mu^2 \phi^* \phi + \lambda(\phi^* \phi)^2) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (4.16)$$

όπου  $D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu$  είναι η συναλλοίωτη παράγωγος και  $A_\mu$  ένα βαθμωτό πεδίο βαθμίδας που μετασχηματίζεται ως

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{g}\partial_\mu \alpha(x) \quad (4.17)$$

Αν  $\mu^2 > 0$ , τότε η παραπάνω Λαγκρανζιανή περιγράφει ένα φορτισμένο βαθμωτό πεδίο μάζας  $\mu$  και φορτίου  $g$ , το οποίο αλληλεπιδρά με ανυσματικό πεδίο βαθμίδας  $A_\mu$ , τέτοιο ώστε  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ . Επομένως τότε πρόκειται για την Λαγκρανζιανή της κβαντικής ηλεκτροδυναμικής. Άρα μας ενδιαφέρει εδώ η περίπτωση όπου  $\mu^2 < 0$  ώστε να βρούμε τις μάζες από το αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας. Οι βαθμοί ελευθερίας είναι ένας για το  $\phi$ , ένας για το  $\phi^*$  και δύο για τις εγκάρσιες συνιστώσες για το άμαζο πεδίο βαθμίδας  $A_\mu$ . Επομένως πρόκειται για τέσσερις βαθμούς ελευθερίας στο σύνολο. Επιβάλλοντας τους παραπάνω μετασχηματισμούς στην Λαγκρανζιανή (4.16), αυτή γίνεται

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu + igA^\mu)\phi^*(\partial_\mu - igA_\mu)\phi - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda(\phi^* \phi)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (4.18)$$



Επιλέγουμε τώρα να γράψουμε το  $\phi$  ως το ανάπτυγμα του πεδίου γύρω από μία τιμή κενού

$$\phi(x) = \frac{v + n(x) + i\xi(x)}{\sqrt{2}} \quad (4.19)$$

και αντικαθιστούμε στην παραπάνω Λαγκρανζιανή. Ακόμα την ομαδοποιούμε σε τρία διαφορετικά τμήματα:

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}'_{\text{kin}} + \mathcal{L}'_{\text{pot}} + \mathcal{L}'_{\text{boson}} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}(\partial^\mu + ieA^\mu)(v + n(x) - i\xi(x))(\partial_\mu - ieA^\mu)(v + n(x) + i\xi(x)) \\ &\quad - \frac{\mu^2}{2}(v + n(x) - i\xi(x))(v + n(x) + i\xi(x)) - \frac{\lambda}{4}[(v + n(x) - i\xi(x))(v + n(x) + i\xi(x))]^2 \\ &\quad - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Ο δυναμικός όρος  $\mathcal{L}'_{\text{pot}}$  δεν αλλάζει έπειτα από την αναβάθμιση της παραγώγου, επομένως θα είναι ίδιος με τον δυναμικό όρο που πήραμε στην περίπτωση της παραβίασης της εκτεταμένης συμμετρίας.

Ο μποζονικός όρος είναι  $\mathcal{L}'_{\text{bos}} = \mathcal{L}_{\text{bos}}$ , δηλαδή παραμένει αναλλοίωτος.

Ο δυναμικός όρος  $\mathcal{L}'_{\text{kin}}$  είναι αυτός που διαφοροποιεί το αποτέλεσμα από την περίπτωση του σπασίματος της εκτεταμένης συμμετρίας βαθμίδας:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_{\text{kin}} &= \frac{1}{2}(\partial^\mu + ieA^\mu)(v + n + i\xi)(\partial_\mu - ieA_\mu)(v + n - i\xi) \\ &= \frac{1}{2}(\partial^\mu n - i\partial^\mu \xi + ievA^\mu + ieA^\mu n + eA^\mu \xi)(\partial_\mu n + i\partial_\mu \xi - ievA_\mu - ieA_\mu n + eA_\mu \xi) \\ &= \frac{1}{2}[(\partial_\mu n)(\partial^\mu n) + i\partial^\mu n \partial_\mu \xi - ievA_\mu \partial^\mu n - ieA_\mu n \partial^\mu n] + e\partial^\mu n A_\mu \xi - i\partial^\mu \xi \partial_\mu n + (\partial^\mu \xi)(\partial_\mu \xi) \\ &\quad - ev\partial^\mu \xi A_\mu - e\partial^\mu \xi A_\mu n - ie\partial^\mu \xi A_\mu \xi + ievA^\mu \partial_\mu n + e^2 v^2 A^\mu A_\mu - evA^\mu \partial_\mu \xi \\ &\quad + e^2 v A^\mu A_\mu n + ie^2 v A_\mu A^\mu \xi + ieA_\mu \partial^\mu n - e\partial_\mu \xi A^\mu n + e^2 v A^\mu A_\mu n + e^2 A^\mu A_\mu n^2 + ie^2 A^\mu A_\mu n \xi \\ &\quad + eA^\mu \xi \partial_\mu n + ieA^\mu \xi \partial_\mu \xi - ie^2 v A^\mu A_\mu \xi - ie^2 A^\mu A_\mu \xi n + e^2 A^\mu A_\mu \xi^2 \\ &= \frac{1}{2}[(\partial^\mu n)(\partial_\mu n) + (\partial^\mu \xi)(\partial_\mu \xi)] + eA_\mu \xi \partial^\mu n - evA_\mu \partial^\mu \xi - eA_\mu n \partial^\mu \xi + \frac{1}{2}e^2 v^2 A^\mu A_\mu \end{aligned}$$

$$+e^2vA^\mu A_\mu n + \frac{1}{2}e^2A^\mu A_\mu n^2 + \frac{1}{2}e^2A^\mu A_\mu \xi^2$$

Γράφοντας και πάλι ολόκληρη την Λαγκρανζιανή του συστήματος, έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' = & \frac{1}{2}(\partial_\mu n)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \xi)^2 + \frac{1}{2}e^2v^2A^\mu A_\mu + e\partial^\mu n A_\mu \xi - ev\partial^\mu \xi A_\mu - e\partial^\mu \xi A_\mu n + e^2vA^\mu A_\mu n \\ & + \frac{1}{2}A^\mu A_\mu n^2 + \frac{1}{2}e^2A^\mu A_\mu \xi^2 - \mu^2 n^2 - \frac{\mu^4}{4\lambda} - \lambda v(vn - n^3 - n\xi^3) - \frac{\lambda}{4}n^4 - \frac{\lambda}{2}n^2\xi^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Η Λαγκρανζιανή αυτή περιέχει δύο φυσικά πεδία και ένα άμαζο μποζόνιο Goldstone  $\xi$ . Έχουμε λοιπόν ένα βαθμωτό πεδίο  $n$ , με μάζα

$$m_n = \sqrt{-2\mu^2} \quad (4.23)$$

και ένα διανυσματικό μποζόνιο με μάζα

$$m_{A_\mu} = ev \quad (4.24)$$

Κατορθώσαμε λοιπόν να αναδείξουμε τη μάζα του πεδίου βαθμίδας  $A_\mu$ . Δυστυχώς όμως υπάρχει ένα μποζόνιο Goldstone. Ακόμα υπάρχει ένας όρος  $-ev\partial_\mu \xi A^\mu$ , ο οποίος δεν μπορεί να ερμηνευτεί ως αλληλεπίδραση. Τώρα όμως αντιμετωπίζουμε πρόβλημα με τους βαθμούς ελευθερίας, οι οποίοι είναι ένας για το πεδίο  $n$ , ένας για το  $\xi$  και τρεις για το  $A_\mu$ . Επομένως έχουμε ερμηνεύσει λανθασμένα τους επιμέρους όρους της Λαγκρανζιανής. Πρέπει να την απαλλάξουμε λοιπόν από ένα σωματίδιο. Για αυτόν τον σκοπό, γράφουμε το πεδίο ως

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + n(x))e^{i\theta} \quad (4.25)$$

Η αρχική Λαγκρανζιανή είναι αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας  $U(1)$ . Άρα γράφουμε το πεδίο

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi e^{-i\theta} = \frac{v + n(x)}{\sqrt{2}} \quad (4.26)$$

Επίσης το πεδίο  $A_\mu$  μετασχηματίζεται ως

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{ev}\partial_\mu \theta \quad (4.27)$$

Επιλέξαμε το  $\theta(x)$ , ώστε το πεδίο  $n(x)$  να είναι πραγματικό. Αντικαθιστώντας λοιπόν στην αρχική Λαγκρανζιανή έχουμε τελικά

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'' = & \frac{1}{2}(\partial_\mu n)(\partial^\mu n) + \frac{1}{2}e^2v^2A^\mu A_\mu + \frac{1}{2}eA^\mu A_\mu n^2 + e^2vA^\mu A_\mu n \\ & + \mu^2 n^2 - \lambda v^3 n - \frac{\lambda}{4}n^4 - \lambda v n^3 - \frac{\mu^4}{4\lambda} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (4.28)$$

Τελικά η θεωρία μας είναι ανεξάρτητη από το  $\theta$ , άρα εξαφανίζεται το μποζόνιο Goldstone. Τώρα έχουμε ένα φυσικό βαθμωτό πεδίο  $n$  με μάζα  $m_n = \sqrt{-2\mu^2}$  και ένα διανυσματικό πεδίο βαθμίδας  $A_\mu$  με μάζα  $m_{A_\mu} = ev$ . Οι βαθμοί ελευθερίας λοιπόν είναι ένας για το  $n$  και ομοίως με πριν τρεις για το  $A_\mu$ , συνολικά δηλαδή τέσσερις. Επομένως οι εκφράσεις (4.22) και (4.28) είναι ισοδύναμες, με την διαφορά ότι η δεύτερη, ταυτοποιεί σωστά τα φυσικά σωματίδια. Το μποζόνιο Goldstone έχει πλέον απορροφηθεί από το διανυσματικό μποζόνιο βαθμίδας, το οποίο έχει αποκτήσει μάζα, δηλαδή έναν ακόμα βαθμό ελευθερίας. Αυτό είναι το περιεχόμενο του αυθορμήτου σπασίματος συμμετρίας βαθμίδας, δηλαδή ο λεγόμενος μηχανισμός Higgs. Το φυσικό βαθμωτό πεδίο, που εξακολουθεί να υφίσταται, ονομάζεται μποζόνιο *Higgs*.

## 4.4 Αυθόρμητο σπάσιμο τοπικής συμμετρίας βαθμίδας, μη-χανισμός Higgs- Μη αβελιανή περίπτωση

Συνεχίζοντας με την ίδια μεθοδολογία, για την περίπτωση της  $SU(2)$  θεωρίας βαθμίδας γράφουμε την Λαγκρανζιανή

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi) - \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 \quad (4.29)$$

όπου

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_\alpha \\ \phi_\beta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

όπως συμπεράναμε στην προηγούμενη ενότητα (αβελιανή), πρέπει να καταλήξουμε σε μία Λαγκρανζιανή αναλλοίωτη κάτω από τοπικούς μετασχηματισμούς  $SU(2)$ . Αναβαθμίζουμε την συναλλοίωτη παράγωγο ως εξής:

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + ig \frac{\tau_i}{2} W_\mu^i \quad (4.31)$$

ενώ τα πεδία βαθμίδας  $W_\mu^i$  μετασχηματίζονται ως

$$W_\mu^i \rightarrow W_\mu'^i = W_\mu^i - \frac{1}{g} \partial_\mu \theta_i(x) - \epsilon_{ijk} \theta_j(x) W_\mu^k \quad (4.32)$$

Ο ταυιστής πεδίου ορίζεται όπως έχουμε δείξει σε προηγούμενη ενότητα ως

$$W_{\mu\nu}^i = \partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i - g \epsilon_{ijk} \theta^j W_\mu^k \quad (4.33)$$

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω στην Λαγκρανζιανή (4.29) έχουμε

$$\mathcal{L}' = (D_\mu \phi)^\dagger (D_\mu \phi) - \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^i W^{\mu\nu i} \quad (4.34)$$

Για  $\mu^2 > 0$  η Λαγκρανζιανή αυτή περιγράφει το σύστημα τεσσάρων βαθμωτών μποζονίων με μάζα  $\mu$  το κάθε ένα, που αλληλεπιδρούν με τρία άμαζα διανυσματικά μποζόνια βαθμίδας.

Για  $\mu^2 < 0$  το δυναμικό είναι ελάχιστο όταν

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi} (\mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2) = \mu^2 \phi^\dagger + 2\lambda \phi^\dagger \phi = 0$$

$$\Rightarrow \phi^\dagger (\mu^2 + 2\lambda \phi^\dagger \phi) = 0$$

$$\Rightarrow \phi^\dagger = 0, \quad |\phi|^2 = -\frac{\mu^2}{2\lambda}$$

$$\Rightarrow \phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda} \quad (4.35)$$

Τα ελάχιστα σημεία συνεπώς του συστήματος δημιουργούν μία τετραδιάστατη σφαίρα. Χωρίς βλάβη της γενικότητας επιλέγουμε  $\phi_1 = \phi_2 = \phi_4 = 0$  και  $\phi_3 = -\frac{\mu^2}{\lambda} \equiv v^2$ . Τότε η κατάσταση κενού θα είναι

$$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

και παίρνοντας μικρές διαταραχές θα γίνει

$$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} n_1(x) + in_2(x) \\ v + n_3(x) + in_4(x) \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

Με την τυχαία επιλογή όμως θα προκύψουν μποζόνια Goldstone. Για τον λόγο αυτό, θα χρησιμοποιήσουμε τα πραγματικά πεδία  $\theta_i(x)$  και  $h$ . Επομένως το  $\phi$  γράφεται

$$\phi(x) = e^{i\frac{\tau_i}{v}\theta_i(x)} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+h(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (4.38)$$

Επιλέξαμε το εκθετικό, έτσι ώστε να αντιπροσωπεύει έναν  $SU(2)$  μετασχηματισμό. Τα τέσσερα από τα πεδία που καταλήξαμε είναι πραγματικά και ανεξάρτητα μεταξύ τους και θα παραμετροποιούν πλήρως την διαταραχή γύρω από το κενό  $\phi_0$ . Η επιλογή μας λοιπόν θα είναι έγκυρη. Στη συνέχεια κάνοντας μετασχηματισμό βαθμίδας το εκθετικό θα αναιρεθεί και τέλος το διαταραγμένο πεδίο θα είναι

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{pmatrix} \quad (4.39)$$

Θα το δείξουμε στην συνέχεια αναλυτικά θεωρώντας μικρές διαταραχές:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= e^{i\frac{\tau_i}{v}\theta_i(x)} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+h(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \approx \left(1 + i\frac{\tau_i\theta_i(x)}{v}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+h(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \frac{\theta_1}{v} + i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \frac{\theta_2}{v} + i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{\theta_3}{v} \right] \begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 + \theta_3/v & i(\theta_1 - i\theta_2)/v \\ i(\theta_1 + i\theta_2)/v & 1 - i\theta_3/v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Κρατώντας μόνο όρους πρώτης τάξης προκύπτει

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \theta_2 + i\theta_1 \\ v + h(x) - i\theta_3 \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

Με έναν  $SU(2)$  μετασχηματισμό θα έχουμε

$$\phi \rightarrow \phi' = U\phi = Ue^{i\frac{\tau_i}{v}\theta_i(x)} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+h(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = e^{-i\frac{\tau_i}{v}\theta_i(x)} e^{i\frac{\tau_i}{v}\theta_i(x)} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+h(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+h(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

Έχουμε γράψει λοιπόν το πεδίο  $\phi$ , χωρίς το  $\theta_i$ . Αντικαθιστούμε τώρα στην Λαγκρανζιανή. Υπενθυμίζουμε ότι η ποσότητα  $W_{\mu\nu}^i W^{\mu\nu i}$  είναι αναλλοίωτη κάτω από μοναδιακούς μετασχηματισμούς.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}' &= (U^{-1} D'_\mu \phi')^\dagger (U^{-1} D'^\mu \phi') - \frac{\mu^2}{2} (v + h(x))^2 - \frac{\lambda}{4} (v + h(x))^4 - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^i W^{\mu\nu i} \\
&= (D'_\mu \phi')^\dagger (U^{-1})^\dagger U^{-1} (D'^\mu \phi') - \frac{\mu^2}{2} (v + h(x))^2 - \frac{\lambda}{4} (v + h(x))^4 - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^i W^{\mu\nu i} \\
&= (\partial_\mu \phi' + \frac{ig}{2} \tau_i W_\mu^i \phi')^\dagger (\partial^\mu \phi' + \frac{ig}{2} \tau_i W'^{\mu i} \phi') \\
&\quad - \frac{\mu^2}{2} (v + h(x))^2 - \frac{\lambda}{4} (v + h(x))^4 - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^i W^{\mu\nu i}
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Οι όροι μάζας είναι τετραγωνικοί ως προς τα πεδία. Ένας τέτοιος όρος της παραπάνω Λαγκρανζιανής είναι ο ακόλουθος:

$$\begin{aligned}
& (\frac{ig}{2} \tau_i W_\mu^i \phi)^\dagger (\frac{ig}{2} \tau_i W_\mu^i \phi) \\
&= \frac{g^2}{8} \left[ \begin{pmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ W_\mu^1 + iW_\mu^2 & W_\mu^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \right]^\dagger \begin{pmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ W_\mu^1 + iW_\mu^2 & W_\mu^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \\
&= \frac{g^2}{8} \left[ \begin{pmatrix} v(W_\mu^{1\dagger} - iW_\mu^{2\dagger}) & vW_\mu^{3\dagger} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(W_\mu^1 - iW_\mu^2) \\ vW_\mu^3 \end{pmatrix} \right] \\
&= \frac{g^2 v^2}{8} [(W_\mu^1)^2 + (W_\mu^2)^2 + (W_\mu^3)^2]
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Άρα η μάζα κάθε μποζονίου θα είναι

$$\frac{1}{2} m_w^2 = \frac{g^2 v^2}{8} \Rightarrow m_w = \frac{g v}{2} \tag{4.44}$$

Ο όρος μάζας του  $h$  προκύπτει από τον δυναμικό όρο της Λαγκρανζιανής, ο οποίος είναι

$$V(\phi) = \frac{\mu^2}{2} (v + h)^2 + \frac{\lambda}{4} (v + h)^4 = \frac{\mu^4}{4\lambda} + \mu^2 h^2 + \lambda v^3 h + \frac{\lambda}{4} h^4 + \lambda v h^3 \tag{4.45}$$

Από τον όρο  $\mu^2 h^2$  προκύπτει ότι η μάζα του πεδίου Higgs είναι

$$-\frac{1}{2} m_h^2 = \mu^2 \Rightarrow m_h = \sqrt{-2\mu^2} \tag{4.46}$$

Τελικά η Λαγκρανζιανή που προκύπτει από το αυθόρμητο σπάσιμο της  $SU(2)$  συμμετρίας περιγράφει τρία διανυσματικά πεδία βαθμίδας  $W_\mu^i$  με μάζα  $m_w = \frac{1}{2} g v$  και ένα βαθμωτό πεδίο βαθμίδας  $h$  με μάζα  $m_h = \sqrt{-2\mu^2}$ . Σε αυτήν την περίπτωση, τα πεδία βαθμίδας απορρόφησαν τα μποζόνια Goldstone και έτσι απέκτησαν μάζα.

## 4.5 Θεωρίες βαθμίδας στο Καθιερωμένο Πρότυπο

Στην σωματιδιακή φυσική, χρειαζόμαστε τις εσωτερικές συμμετρίες, για να διαμορφώσουμε τις διάφορες Λαγκρανζιανές. Είναι συμμετρίες που δεν αφορούν τον εξωτερικό χωρόχρονο. Για να περιγράψουμε τα στοιχειώδη σωματίδια και τις θεμελιώδεις αλληλεπιδράσεις τους, απαιτούνται τρεις εσωτερικές συμμετρίες βαθμίδας, τις οποίες και θα περιγράψουμε στην συνέχεια. Πρόκειται για τις τρεις απλούστερες, οι οποίες μέχρι στιγμής μπορούν να περιγράψουν τις βασικές αλληλεπιδράσεις των σωματιδίων της θεωρίας μας.

### 4.5.1 Συμμετρία $U(1)_Y$

Πρόκειται για μία εσωτερική συμμετρία βαθμίδας, η οποία δεν ταυτίζεται ακριβώς με την συμμετρία  $U(1)$  των ηλεκτρομαγνητικών αλληλεπιδράσεων. Ονομάζουμε το αντίστοιχο πεδίο βαθμίδας  $B_\mu$ , που δεν είναι ίδιο με ο πεδίο του φωτονίου και τον αντίστοιχο κβαντικό αριθμό υπερφορτίο  $Y$ , για αυτό και η συμμετρία συμβολίζεται ως  $U(1)_Y$ . Ο τοπικός μετασχηματισμός βαθμίδας είναι

$$U(1)_Y \equiv e^{i\frac{Y}{2}\theta(x)} \quad (4.47)$$

δηλαδή ένα πεδίο  $\Psi$  θα μετασχηματίζεται ως εξής

$$\Psi \rightarrow \Psi' = U_Y \Psi = e^{i\frac{Y}{2}\theta(x)} \Psi \quad (4.48)$$

και η συναλλοίωτη παράγωγος:

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_1 \frac{Y}{2} B_\mu \quad (4.49)$$

### 4.5.2 Συμμετρία $SU(2)_L$

Πρόκειται για μία επίσης εσωτερική συμμετρία βαθμίδας που συνδέεται τόσο με τις ασθeneίς, όσο και με τις ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις. Εισάγουμε τον κβαντικό αριθμό του ασθενούς ισοτοπικού σπιν  $T$ . Το ισχυρό ισοτοπικό σπιν έχει χρησιμοποιηθεί αρχικά από την πυρηνική φυσική για να διακρίνει τα πρωτόνια από τα νετρόνια. Οι δεξιόστροφες συνιστώσες των κυματοσυναρτήσεων των σωματιδίων της ύλης, δηλαδή των λεπτονίων και κουάρκ γράφονται

$$\psi_R = \frac{1 + \gamma^5}{2} \psi \quad (4.50)$$

και αποτελούν τις τετριμμένες  $T = 0$  αναπαραστάσεις:

$$f_R : \begin{array}{ccc} e_R^- & u_R & d_R \\ \mu_R^- & c_R & s_R \\ \tau_R^- & t_R & b_R \end{array} \quad (4.51)$$

ενώ οι αριστερόστροφες συνιστώσες των φερμιονίων είναι

$$\psi_L = \frac{1 - \gamma^5}{2} \psi \quad (4.52)$$

και συνιστούν τις θεμελιώδεις αναπαραστάσεις για  $T = \frac{1}{2}$ :

$$f_{eL} = \left( \begin{array}{c} \nu_e \\ e^- \end{array} \right)_L \quad \left( \begin{array}{c} \nu_\mu \\ \mu^- \end{array} \right)_L \quad \left( \begin{array}{c} \nu_\tau \\ \tau^- \end{array} \right)_L \quad \begin{array}{l} T_3 = \frac{1}{2} \\ T_3 = -\frac{1}{2} \end{array} \quad (4.53)$$

$$f_{qL} = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L \quad \begin{matrix} T_3 = \frac{1}{2} \\ T_3 = -\frac{1}{2} \end{matrix} \quad (4.54)$$

Παρατηρούμε λοιπόν πως υπάρχουν τρεις οικογένειες κουάρκ και τρεις οικογένειες λεπτονίων, αριστερότροφων και στις δύο περιπτώσεις.

Τα πεδία βαθμίδας  $W_\mu^i$ , με  $i = 1, 2, 3$  της  $SU(2)$  συμμετρίας, αποτελούν την  $T = 1$  αναπαράσταση

$$W_\mu = \begin{pmatrix} W_\mu^1 \\ W_\mu^2 \\ W_\mu^3 \end{pmatrix} \quad (4.55)$$

ενώ οι ηλεκτρικά φορτισμένες καταστάσεις γράφονται

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \mp iW_\mu^2) \quad (4.56)$$

$$W_\mu^0 = W_\mu^3 \quad (4.57)$$

Επειδή η  $SU(2)$  συμμετρία βαθμίδας συνδέεται με τις αριστερόστροφες συνιστώσες των πεδίων της ύλης, την συμβολίζουμε  $SU(2)_L$  και γράφεται

$$SU(2)_L \equiv e^{i\frac{\tau_i}{2}\theta^i(x)}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.58)$$

με συναλλοίωτη παράγωγο

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_2 \frac{\tau_i}{2} W_\mu^i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.59)$$

Το ηλεκτρικό φορτίο  $Q$  συνδέεται με το ασθενές ιστοτοπικό σπιν μέσω της σχέσης

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2} \quad (4.60)$$

Άρα η συμμετρία  $U(1)_Q$  του ηλεκτρομαγνητισμού είναι

$$U(1)_Q = e^{iQ\theta(x)} \quad (4.61)$$

με συναλλοίωτη παράγωγο

$$D_\mu = \partial_\mu + iQeA_\mu \quad (4.62)$$

Συμπεραίνουμε πως το γινόμενο των  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  περιγράφει τις ασθενείς και τις ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις. Αυτό το κομμάτι του καθιερωμένου προτύπου συνολικά λοιπόν, περιγράφει τις ηλεκτρασθενείς αλληλεπιδράσεις. Το γινόμενο αυτό ( $SU(2)_L \times U(1)_Y$ ) προτάθηκε αρχικά από τον Glashow και συμπληρώθηκε αργότερα με το αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας από τους Weinberg και Salam. Έτσι προστέθηκε ο μηχανισμός Higgs με τον οποίο τα πεδία βαθμίδας και ύλης απέκτησαν μάζα. Στη συνέχεια παραθέτουμε τους χβαντικούς αριθμούς του ασθενούς ιστοτοπικού σπιν, του υπερφορτίου και του ηλεκτρικού φορτίου για την πρώτη οικογένεια λεπτονίων και κουάρκ. Με όμοιο τρόπο εργαζόμαστε και για τις υπόλοιπες οικογένειες.

		$SU(2)_L$	$U(1)_Y$	$U(1)_Q$
Σωματίδια	T	$T_3$	$Y$	$Q = T_3 + \frac{Y}{2}$
$f_{eL} = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L$	$\frac{1}{2}$	$\begin{pmatrix} +\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	-1	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
$e_R^-$	0	0	-2	-1
$f_{qL} = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$	$\frac{1}{2}$	$\begin{pmatrix} +\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\frac{1}{3}$	$\begin{pmatrix} +\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$
$u_R$	0	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$
$d_R$	0	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$

### 4.5.3 Συμμετρία $SU(3)_c$

Είναι ακόμα μία εσωτερική συμμετρία βαθμίδας που σχετίζεται με τις ισχυρές αλληλεπιδράσεις. Ο αντίστοιχος κβαντικός αριθμός είναι το χρώμα και αναφέρεται μόνο στα κουάρκ. Κάθε κουάρκ έρχεται σε τρία χρώματα. Για την πρώτη οικογένεια κουάρκ έχουμε

$$u_R \equiv (u_1, u_2, u_3)_R, \quad d_R \equiv (d_1, d_2, d_3)_R \quad (4.63)$$

$$f_{qL} = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \equiv \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}_L \quad (4.64)$$

Με ακριβώς αντίστοιχο τρόπο γράφονται και οι υπόλοιπες. Τα οκτώ πεδία βαθμίδας της  $SU(3)$  είναι οκτώ γκλουόνια  $G_\mu^i$  με  $i = 1, \dots, 8$ . Η αντίστοιχη θεωρία βαθμίδας ονομάζεται κβαντική χρωμοδυναμική (QCD). Συμβολίζεται με  $SU(3)_c$  και περιγράφει τις ισχυρές αλληλεπιδράσεις. Τα αδρόνια γράφονται ως συνδυασμοί των κουάρκ, τα οποία αλληλεπιδρούν μεταξύ τους μέσω των γκλουονίων. Τα αδρόνια επίσης είναι άχρωμα. Κάθε κουάρκ φέρει ένα χρώμα, όμως όταν συνδυάζονται σε αδρόνια, προκύπτει μία άχρωμη κατάσταση. Έτσι για τα μεσόνια έχουμε τους εξής συνδυασμούς:  $\frac{1}{\sqrt{3}}q_i\bar{q}_i$  με  $i = 1, 2, 3$ , ενώ τα βαρυόνια ακολουθούν τη σχέση  $\frac{1}{\sqrt{6}}\epsilon_{ijk}q_iq_jq_k$ , με  $i, j, k = 1, 2, 3$ . Στο καθιερωμένο πρότυπο χρησιμοποιούμε την συμμετρία  $SU(3)$  ως συμμετρία βαθμίδας για τη συμμετρία χρώματος της κβαντικής χρωμοδυναμικής  $SU(3)_c$ , προκειμένου να περιγράψουμε τις ισχυρές αλληλεπιδράσεις

$$SU(3)_c \equiv e^{i\frac{\lambda_i}{2}\theta^i(x)}, \quad i = 1, \dots, 8 \quad (4.65)$$

με συναλλοίωτη παράγωγο

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_3 \frac{\lambda_i}{2} G_\mu^i, \quad i = 1, \dots, 8 \quad (4.66)$$



#### 4.5.4 $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$

Συνοψίζοντας όλα τα παραπάνω για τις τρεις συμμετρίες, μπορούμε να πούμε πως οι συμμετρίες βαθμίδας του καθιερωμένου προτύπου αποτελούνται από

$$SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y \quad (4.67)$$

Η συνολική συναλλοίωτη παράγωγος είναι

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_1 \frac{Y}{2} B_\mu + ig_2 \frac{\tau_i}{2} W_\mu^i + ig_3 \frac{\lambda_i}{2} G_\mu^i \quad (4.68)$$

και η Λαγκρανζιανή του καθιερωμένου προτύπου, χωρίς τους όρους μάζας, μπορεί να γραφεί ως

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^i W^{\mu\nu i} - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^i G^{\mu\nu i} + \sum_j \bar{f} i \gamma^\mu D_\mu f \quad (4.69)$$

όπου στον τελευταίο όρο, το άθροισμα αναφέρεται σε όλα τα φερμιόνια της ύλης και οι όροι της συναλλοίωτης παραγώγου, δρουν πάντα σε φερμιόνια ίδιας αναπαράστασης. Ακόμα πρέπει να υπογραμμιστεί ότι μέχρι στιγμής οι όροι μάζας για τα πεδία βαθμίδας, καθώς και για τα φερμιόνια, απαγορεύονται, λόγω του αναλλοίωτου των συμμετριών βαθμίδας. Οι μάζες θα προκύψουν μέσω του μηχανισμού Higgs.

## 4.6 Ηλεκτρασθενείς αλληλεπιδράσεις (Weinberg-Salam)

Θα εστιάσουμε αρχικά στο πρώτο κομμάτι του καθιερωμένου προτύπου, δηλαδή στις ηλεκτρασθενείς αλληλεπιδράσεις. Παρά το γεγονός ότι οι δυνάμεις αυτές, στην φύση έχουν μία πολύ διαφορετική συμπεριφορά, πέρα από το ενεργειακό κατώφλι των  $100\text{GeV}$ , φαίνονται σαν μία ενοποιημένη δύναμη. Κάτω από αυτό το κατώφλι όμως έχουν δύο τελείως διαφορετικές μορφές, φαινόμενο που αποδεικνύεται πειραματικά. Θα περιοριστούμε τώρα στα λεπτόνια της πρώτης οικογένειας, που με ίδιο τρόπο θα γίνεται η επεξεργασία για τις υπόλοιπες οικογένειες και τα κουάρκ. Η Λαγκρανζιανή που θα χρησιμοποιήσουμε γράφεται

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{kin}^{mater} + \mathcal{L}_{kin}^{gauge} - V(\phi) + \mathcal{L}_{Yuk} \quad (4.70)$$

με συναλλοίωτη παράγωγο

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_1 \frac{Y}{2} B_\mu - i \frac{g_2}{2} \tau^i W_\mu^i \quad (4.71)$$

με

$$\frac{Y}{2} = Q - \frac{T_3}{2} \quad (4.72)$$

Θα εξετάσουμε στην συνέχεια ξεχωριστά κάθε όρο της Λαγκρανζιανής.

$$\begin{aligned} \bullet \mathcal{L}_{kin}^{mater} &= \sum_i \left[ i \bar{Q}_L^{(i)} \gamma^\mu \left( \partial_\mu - i \frac{g_2}{2} \tau^i W_\mu^i - i \frac{g_1}{2} B_\mu \right) Q_L^{(i)} \right] \\ &+ i \bar{l}_L^{(i)} \gamma^\mu \left( \partial_\mu - i \frac{g_2}{2} \tau^i W_\mu^i + i \frac{g_1}{2} B_\mu \right) l_L^{(i)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +i\bar{l}_R^{(i)}\gamma^\mu(\partial_\mu + ig_1 B_\mu)l_R^{(i)} \\
 & +i\bar{U}_R^{(i)}\gamma^\mu\left(\partial_\mu - i\frac{2}{3}g_1 B_\mu\right)U_R^{(i)} \\
 & +i\bar{D}_R^{(i)}\gamma^\mu\left(\partial_\mu + i\frac{g_1}{3}B_\mu\right)D_R^{(i)} \\
 & +\left|\left(\partial_\mu - i\frac{g_2}{2}\tau^i W_\mu^i - i\frac{g_1}{2}B_\mu\right)\phi\right|^2
 \end{aligned} \tag{4.73}$$

$$\bullet \mathcal{L}_{kin}^{gauge} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i - g_2 \epsilon_{ijk} W_\mu^j W_\nu^k)^2 - \frac{1}{4}(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)^2 \tag{4.74}$$

$$\bullet V(\phi) = -\mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda(\phi^\dagger \phi)^2, \quad \mu^2 > 0 \tag{4.75}$$

$$\bullet \mathcal{L}_{Yuk} = \sum f_l^{(ij)} \bar{l}_L^{(i)} \phi_L^{(j)} + f_U^{(ij)} \bar{Q}_L^{(i)} \tilde{\phi}_U^{(j)} + f_D^{(ij)} \bar{Q}_L^{(i)} \phi_D^{(j)} + h.c. \tag{4.76}$$

Ο όρος  $\mathcal{L}_{Yuk}$  είναι υπεύθυνος για την γέννηση των φερμιονικών μαζών. Θα συνεχίσουμε με το αυθόρμητο σπάσιμο της συμμετρίας. Θα χρησιμοποιήσουμε στον ρόλο του βαθμωτού πεδίου, την διπλέτα

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^\dagger \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix} \tag{4.77}$$

Θα υπολογίσουμε αρχικά το ελάχιστο δυναμικό, για το συγκεκριμένο πεδίο:

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = -\mu^2 \phi^\dagger + 2\lambda \phi^\dagger \phi = 0 \Rightarrow \phi^\dagger (-\mu^2 + 2\lambda \phi^\dagger \phi) = 0$$

$$\phi^\dagger = 0, \quad |\phi|^2 = \frac{\mu^2}{2\lambda} \Rightarrow \phi^\dagger \phi = \frac{1}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2) = \frac{\mu^2}{2\lambda} \tag{4.78}$$

Πρόκειται ομοίως με την προηγούμενη φορά για μία τετραδιάστατη σφαίρα. Σπάμε τη συμμετρία επιλέγοντας ως ελάχιστο το σημείο

$$\phi_1 = \phi_2 = \phi_4 = 0, \quad \phi_3^2 = \frac{\mu^2}{2\lambda} \equiv v^2 \tag{4.79}$$

Άρα για το κενό, το πεδίο είναι

$$\phi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \tag{4.80}$$

Διαταράσσουμε το σύστημα γύρω από το κενό, ως εξής:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \eta(x) \end{pmatrix} \tag{4.81}$$

και αντικαθιστούμε ξεχωριστά στα τρία κομμάτια της Λαγκρανζιανής.

$$\begin{aligned}
 \bullet V(\phi) &= -\frac{\mu^2}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \eta(x) \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} 0 \\ v + \eta(x) \end{pmatrix} + \frac{\lambda}{4} \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ v + \eta(x) \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} 0 \\ v + \eta(x) \end{pmatrix} \right]^2 \\
 &= -\frac{\mu^2}{2} (0 \quad v + \eta(x)) \begin{pmatrix} 0 \\ v + \eta(x) \end{pmatrix} + \frac{\lambda}{4} \left[ (0 \quad v + \eta(x)) \begin{pmatrix} 0 \\ v + \eta(x) \end{pmatrix} \right]^2 \\
 &\Rightarrow V(\phi) = -\frac{\mu^2}{2} (v + \eta(x))^2 + \frac{\lambda}{4} (v + \eta(x))^4 \tag{4.82}
 \end{aligned}$$

Κρατώντας μόνο τους τετραγωνικούς όρους του πεδίου  $\eta$ , δηλαδή τους όρους μάζας, έχουμε

$$\begin{aligned}
 V(\phi) &= -\frac{\mu^2}{2} \eta^2 + \frac{3}{2} \lambda v^2 \eta^2 = -\frac{\mu^2}{2} \eta^2 + \frac{3}{2} v^2 \eta^2 \\
 &\Rightarrow V(\phi) = -\frac{\mu^2}{2} \eta^2 + \frac{3}{2} \mu^2 \eta^2 = \mu^2 \eta^2 \tag{4.83}
 \end{aligned}$$

Τελικά η μάζα του βαθμωτού πεδίου Higgs υπολογίζεται ως

$$-\frac{1}{2} m_\eta^2 = \mu^2 \Rightarrow m_\eta = \sqrt{-2\mu^2} \tag{4.84}$$

Από το τμήμα  $\mathcal{L}_{kin}^{matter}$ , κρατάμε τον τελευταίο όρο και ορίζουμε

$$\begin{aligned}
 D &\equiv (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) = \phi^\dagger \left( \partial^\mu + ig_2 \frac{\tau^i}{2} W_\mu^i + i \frac{g_1}{2} B_\mu \right) \left( \partial^\mu - ig_2 \frac{\tau^i}{2} W^{\mu i} - i \frac{g_1}{2} B^\mu \right) \phi \\
 &= \frac{1}{2} (0 \quad v + \eta(x)) \left( \partial^\mu + ig_2 \frac{\tau^i}{2} W_\mu^i + i \frac{g_1}{2} B_\mu \right) \left( \partial^\mu - ig_2 \frac{\tau^i}{2} W^{\mu i} - i \frac{g_1}{2} B^\mu \right) \begin{pmatrix} 0 \\ v + \eta(x) \end{pmatrix} \\
 &\Rightarrow D = \frac{1}{2} (0 \quad v + \eta(x)) |g_2 \frac{\tau^i}{2} W_\mu^i + \frac{g_1}{2} B_\mu|^2 \begin{pmatrix} 0 \\ v + \eta(x) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Για τον υπολογισμό της τελευταίας ισότητας, κρατήσαμε μόνο τους όρους που δεν περιείχαν παράγωγο, αφού ψάχνουμε τους όρους μάζας. Επίσης θα συνεχίσουμε μόνο με τους τετραγωνικούς όρους:

$$D = \frac{v^2}{2} (0 \quad 1) |g_2 \frac{\tau^i}{2} W_\mu^i + \frac{g_1}{2} B_\mu|^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.85}$$

Υπολογίζουμε ξεχωριστά τον όρο:

$$\tau^i W_\mu^i = \tau^1 W_\mu^1 + \tau^2 W_\mu^2 + \tau^3 W_\mu^3 = \begin{pmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ W_\mu^1 + iW_\mu^3 & -W_\mu^3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow g_2 \frac{\tau^i}{2} W_\mu^i + \frac{g_1}{2} B_\mu &= \begin{pmatrix} g_2 W_\mu^3 + \frac{g_1}{2} B_\mu & \frac{g_2}{2} (W_\mu^1 - iW_\mu^2) \\ \frac{g_2}{2} (W_\mu^1 + iW_\mu^2) & -\frac{g_2}{2} W_\mu^3 + \frac{g_1}{2} B_\mu \end{pmatrix} \\
 \Rightarrow D &= \frac{v^2}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_2 W_\mu^3 + \frac{g_1}{2} B_\mu & \frac{g_2}{2} (W_\mu^1 - iW_\mu^2) \\ \frac{g_2}{2} (W_\mu^1 + iW_\mu^2) & -\frac{g_2}{2} W_\mu^3 + \frac{g_1}{2} B_\mu \end{pmatrix} \\
 &\begin{pmatrix} g_2 W_\mu^3 + \frac{g_1}{2} B_\mu & \frac{g_2}{2} (W_\mu^1 - iW_\mu^2) \\ \frac{g_2}{2} (W_\mu^1 + iW_\mu^2) & -\frac{g_2}{2} W_\mu^3 + \frac{g_1}{2} B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{v^2}{2} \begin{pmatrix} \frac{g_2}{2} (W_\mu^1 + iW_\mu^2) & -\frac{g_2}{2} W_\mu^3 + \frac{g_1}{2} B_\mu \\ \frac{g_2}{2} (W_\mu^1 - iW_\mu^2) & -\frac{g_2}{2} W_\mu^3 + \frac{g_1}{2} B_\mu \end{pmatrix} \\
 \Rightarrow D &= \frac{v^2}{8} (g_2^2 (W_\mu^1)^2 + g_2^2 (W_\mu^2)^2 + g_2^2 (W_\mu^3)^2 + g_1^2 (B_\mu)^2 - 2g_1 g_2 W_\mu^3 B_\mu) \quad (4.86)
 \end{aligned}$$

Αξιωματικά απαιτούμε

$$D = M_W^2 W_\mu^+ W^{\mu-} + \frac{1}{2} M_Z^2 Z_\mu Z^\mu \quad (4.87)$$

Απαιτούμε δηλαδή να αποτελείται μόνο από τετραγωνικούς όρους μαζών. Στο  $D$ , όμως που υπολογίσαμε περιέχονται και μη τετραγωνικοί όροι, άρα ο πίνακας μαζών δεν είναι διαγώνιος. Για να διορθωθεί αυτό ταυτοποιούμε τα παρακάτω

$$M_W^2 W_\mu^+ W^{\mu-} = \frac{g_2^2 v^2}{8} [(W_\mu^1)^2 + (W_\mu^2)^2] \quad (4.88)$$

Επομένως ορίζουμε

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \mp iW_\mu^2) \quad (4.89)$$

Επομένως η (4.88) γίνεται

$$M_W^2 W_\mu^+ W^{\mu-} = \frac{g_2^2 v^2}{4} W_\mu^+ W^{\mu-} \Rightarrow M_W = \frac{g_2 v}{2} \quad (4.90)$$

Βρήκαμε λοιπόν την μάζα των φυσικών μποζονίων  $W_\mu^\pm$ . Επίσης έχουμε

$$\frac{1}{2} M_Z^2 Z_\mu Z^\mu = \frac{v^2}{8} [g_2^2 (W_\mu^3)^2 + g_1^2 (B_\mu)^2 - 2g_1 g_2 W_\mu^3 B_\mu] \quad (4.91)$$

Θεωρούμε ότι τα  $W_\mu^3$  και  $B_\mu$  αποτελούν στοιχεία της διπλέτας  $\begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix}$  ώστε να γράψουμε την παραπάνω έκφραση ως γινόμενο πινάκων:

$$\frac{1}{2} M_Z^2 Z_\mu Z^\mu = \frac{v^2}{8} (g_2 W_\mu^3 - g_1 B_\mu)(g_2 W_\mu^3 - g_1 B_\mu)$$

$$= \frac{v^2}{8} \begin{pmatrix} W_\mu^3 & B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_2^2 & -g_1 g_2 \\ -g_1 g_2 & g_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} \quad (4.92)$$

Ορίζουμε και πάλι μία διπλέτα, αυτήν την φορά των φυσικών μποζονίων  $Z_\mu$  και  $A_\mu$  και απαιτούμε ο πίνακας  $M$  να είναι διαγώνιος και  $M_{22} = 0$ , αφού το φωτόνιο είναι ένα άμαζο μποζόνιο

$$\frac{1}{2} M_Z^2 Z_\mu Z^\mu = \begin{pmatrix} Z_\mu & A_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_Z^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z^\mu \\ A^\mu \end{pmatrix} \quad (4.93)$$

Μέσω της διαγωνοποίησης του πίνακα  $M$  έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} M_Z^2 Z_\mu Z^\mu &= \frac{v^2}{8} \begin{pmatrix} W_\mu^3 & B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_2^2 & -g_1 g_2 \\ -g_1 g_2 & g_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^{\mu 3} \\ B^\mu \end{pmatrix} \\ &= \frac{v^2}{8} \begin{pmatrix} W_\mu^3 & B_\mu \end{pmatrix} U U^{-1} \begin{pmatrix} g_2^2 & -g_1 g_2 \\ -g_1 g_2 & g_1^2 \end{pmatrix} U U^{-1} \begin{pmatrix} W^{\mu 3} \\ B^\mu \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.94)$$

όπου  $U = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ . Διακρίνουμε την παραπάνω σχέση σε τρία τμήματα

• Πρώτο μέρος:

$$\begin{pmatrix} W_\mu^3 & B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta W_\mu^3 - \sin\theta B_\mu & \sin\theta W_\mu^3 + \cos\theta B_\mu \end{pmatrix} \quad (4.95)$$

• Δεύτερο μέρος:

$$M' = \frac{v^2}{8} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_2^2 & -g_1 g_2 \\ -g_1 g_2 & g_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (4.96)$$

Θα γράψουμε τώρα τα επιμέρους στοιχεία του πίνακα  $M'$ :

$$M'_{11} = \frac{v^2}{8} (g_2^2 \cos^2\theta + 2g_1 g_2 \sin\theta \cos\theta + g_1^2 \sin^2\theta)$$

$$M'_{12} = \frac{v^2}{8} (g_2^2 \cos\theta \sin\theta - g_1 g_2 \cos^2\theta + g_1 g_2 \sin^2\theta - g_1^2 \cos\theta \sin\theta)$$

$$M'_{21} = \frac{v^2}{8} (g_2^2 \cos\theta \sin\theta + g_1 g_2 \sin^2\theta - g_1^2 \sin\theta \cos\theta - g_1 g_2 \cos^2\theta)$$

$$M'_{22} = \frac{v^2}{8} (g_2^2 \sin^2\theta - 2g_1 g_2 \sin\theta \cos\theta + g_1^2 \cos^2\theta) \quad (4.97)$$

• Τρίτο μέρος:

$$U^{-1} \begin{pmatrix} W^{\mu 3} \\ B^\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^{\mu 3} \\ B^\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta W^{\mu 3} - \sin\theta B^\mu \\ \sin\theta W^{\mu 3} + \cos\theta B^\mu \end{pmatrix} \quad (4.98)$$

Πρέπει όμως

$$\begin{aligned}
 M'_{12} = M'_{21} = 0 &\Rightarrow g_2 \sin\theta (g_2 \cos\theta + g_1 \sin\theta) - g_1 \cos\theta (g_2 \cos\theta + g_1 \sin\theta) = 0 \\
 &\Rightarrow (g_2 \cos\theta + g_1 \sin\theta)(g_2 \sin\theta - g_1 \cos\theta) = 0 \\
 \Rightarrow \tan\theta_W &= \frac{g_1}{g_2} \xrightarrow{\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1} \sin\theta_W = \frac{g_1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}, \quad \cos\theta_W = \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \quad (4.99)
 \end{aligned}$$

Η γωνία αυτή είναι γνωστή ως γωνία Weinberg και συμβολίζεται με  $\theta_W$ . Πειραματικά έχει βρεθεί  $\sin^2\theta_W \approx 0.23$ , γεγονός που επαληθεύεται από την απαίτηση  $M'_{22} = 0$ . Συγκρίνοντας τις σχέσεις (4.93) και (4.94) έχουμε:

$$(Z_\mu \quad A_\mu) = (W_\mu^3 \quad B_\mu)U \quad (4.100)$$

$$\begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} = U^{-1} \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} \quad (4.101)$$

Σύμφωνα με τις (4.95) και (4.98), οι δύο παραπάνω εξισώσεις γίνονται

$$Z_\mu = \cos\theta_W W_\mu^3 - \sin\theta_W B_\mu \quad (4.102)$$

$$A_\mu = \sin\theta_W W_\mu^3 + \cos\theta_W B_\mu \quad (4.103)$$

Αυτές οι σχέσεις συνδέουν τα πεδία βαθμίδας  $W_\mu^i$  και  $B_\mu$  με τα φυσικά πεδία των  $W_\mu^\pm$ ,  $Z_\mu$  και  $A_\mu$ . Μέσω της (4.99) οι παραπάνω εξισώσεις των φυσικών πεδίων γίνονται

$$Z_\mu = \frac{g_2 W_\mu^3 - g_1 B_\mu}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \quad (4.104)$$

$$A_\mu = \frac{g_1 W_\mu^3 + g_2 B_\mu}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \quad (4.105)$$

Το στοιχείο  $M'_{11}$ , του πίνακα  $M'$  μας δίνει το τετράγωνο της μάζας του φυσικού μποζονίου  $Z_\mu$ , άρα έχουμε:

$$\begin{aligned}
 M_Z^2 &= \frac{v^2}{8} (g_2^2 \cos^2\theta_W + 2g_1 g_2 \sin\theta_W \cos\theta_W + g_1^2 \sin^2\theta_W) \\
 \Rightarrow M_Z^2 &= \frac{v^2}{8} (g_2 \cos\theta_W + g_1 \sin\theta_W)^2 = \frac{v^2}{4} (g_1^2 + g_2^2) \\
 \Rightarrow M_Z &= \frac{v}{2} \sqrt{g_1^2 + g_2^2} \quad (4.106)
 \end{aligned}$$

και αφού  $M'_{22} = 0$ , τότε  $M_A = 0$ , άρα η μάζα του φωτονίου ισούται με μηδέν. Διαιρούμε τώρα κατά μέλη τις εξισώσεις (4.90) και (4.106) και έχουμε

$$\frac{M_W}{M_Z} = \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \Rightarrow M_W = \cos\theta_W M_Z \quad (4.107)$$

Η διαφορά στις μάζες των  $W^\pm$  και  $Z$  προκύπτει από την ανάμιξη των  $W^3$  και  $B_\mu$ . Όταν όμως  $\theta_W = 0$ , τότε οι μάζες γίνονται ίσες  $M_W = M_Z$ .

## 4.6.1 Φορτισμένα και αφόρτιστα ρεύματα

Οι κινητικοί όροι της Λαγκρανζιανής (4.73) θα μας δώσουν τα ρεύματα.

$$\mathcal{L}'_{kin} = \sum_i i\bar{Q}_L^{(i)} \gamma^\mu \left( \partial_\mu - i\frac{g_2}{2} \tau^i W_\mu^i - i\frac{g_1}{6} B_\mu \right) Q_L^{(i)} \quad (4.108)$$

$$+ i\bar{l}_L^{(i)} \gamma^\mu \left( \partial_\mu - i\frac{g_2}{2} \tau^i W_\mu^i + i\frac{g_1}{2} B_\mu \right) l_L^{(i)} \quad (4.109)$$

$$+ i\bar{l}_R^{(i)} \gamma^\mu (\partial_\mu + ig_1 B_\mu) l_R^{(i)} \quad (4.110)$$

$$+ i\bar{U}_R^{(i)} \gamma^\mu \left( \partial_\mu - i\frac{2}{3} g_1 B_\mu \right) U_R^{(i)} \quad (4.111)$$

$$+ i\bar{D}_R^{(i)} \gamma^\mu \left( \partial_\mu + i\frac{g_1}{3} B_\mu \right) D_R^{(i)} \quad (4.112)$$

Θα υπολογίσουμε ξεχωριστά κάθε σκέλος της παραπάνω σχέσης, μόνο για την πρώτη οικογένεια κουάρκ και λεπτονίων. Αρχικά, αναλύουμε το τμήμα (4.108) χωρίς όμως τους όρους αλληλεπίδρασης με το  $B_\mu$

$$\frac{g_2}{2} \bar{Q}_L^{(i)} \gamma^\mu \tau^i W_\mu^i Q_L^{(i)} = \frac{g_2}{2} (\bar{u} \quad \bar{d})_L \gamma^\mu \tau^1 W_\mu^1 \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$$

$$+ \frac{g_2}{2} (\bar{u} \quad \bar{d})_L \gamma^\mu \tau^2 W_\mu^2 \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$$

$$+ \frac{g_2}{2} (\bar{u} \quad \bar{d})_L \gamma^\mu \tau^3 W_\mu^3 \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$$

$$= \frac{g_2}{2} (\bar{u} \quad \bar{d})_L \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \gamma^\mu W_\mu^1 \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$$

$$+ \frac{g_2}{2} (\bar{u} \quad \bar{d})_L \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \gamma^\mu W_\mu^2 \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$$

$$+ \frac{g_2}{2} (\bar{u} \quad \bar{d})_L \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \gamma^\mu W_\mu^3 \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$$

$$= \frac{g_2}{2} (\bar{d}_L \gamma^\mu u_L + \bar{u}_L \gamma^\mu d_L) W_\mu^1 + \frac{g_2}{2} (i\bar{d}_L \gamma^\mu u_L - i\bar{u}_L \gamma^\mu d_L) W_\mu^2 + \frac{g_2}{2} (\bar{u}_L \gamma^\mu u_L - \bar{d}_L \gamma^\mu d_L) W_\mu^3 \quad (4.113)$$

Όμοια εργαζόμαστε για το σκέλος (4.109)

$$\frac{g_2}{2} \bar{l}_L^{(i)} \gamma^\mu \tau^i W_\mu^i l_L^{(i)} =$$

$$\frac{g_2}{2} (\bar{e}_L \gamma^\mu v_L^e + \bar{\nu}_L^e \gamma^\mu e_L) W_\mu^1 + \frac{g_2}{2} (i \bar{e}_L \gamma^\mu v_L^e - i \bar{\nu}_L^e \gamma^\mu e_L) W_\mu^2 + \frac{g_2}{2} (\bar{\nu}_L^e \gamma^\mu v_L^e - \bar{e}_L \gamma^\mu e_L) W_\mu^3 \quad (4.114)$$

Τα παραπάνω αποτελέσματα θα είναι πλήρη αν προσθέσουμε τους αντίστοιχους όρους για τις υπολοίπες οικογένειες κουάρκ και λεπτονίων.

Η Λαγκρανζιανή της αλληλεπίδρασης μποζονίων ασθενούς αλληλεπίδρασης με φερμιόνια γράφεται ως εξής:

$$\mathcal{L} = g_2 j^{\mu i} W_\mu^i = g_2 j^{\mu 1} W_\mu^1 + g_2 j^{\mu 2} W_\mu^2 + g_2 j^{\mu 3} W_\mu^3 \quad (4.115)$$

Ταυτοποιούμε την (4.115) με τις (4.113) και (4.114):

$$j^{\mu 1} = \frac{1}{2} (\bar{e}_L \gamma^\mu v_L^e + \bar{\nu}_L^e \gamma^\mu e_L + \bar{d}_L \gamma^\mu u_L + \bar{u}_L \gamma^\mu d_L) \quad (4.116)$$

$$j^{\mu 2} = \frac{1}{2} (i \bar{e}_L \gamma^\mu v_L^e - i \bar{\nu}_L^e \gamma^\mu e_L + i \bar{d}_L \gamma^\mu u_L - i \bar{u}_L \gamma^\mu d_L) \quad (4.117)$$

$$j^{\mu 3} = \frac{1}{2} (\bar{\nu}_L^e \gamma^\mu v_L^e - \bar{e}_L \gamma^\mu e_L + \bar{u}_L \gamma^\mu u_L + \bar{d}_L \gamma^\mu d_L) \quad (4.118)$$

Μπορούμε να γράψουμε την Λαγκρανζιανή, χωρίζοντάς την, σε δύο σκέλη, ένα charged και ένα uncharged ως εξής:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{ch} + \mathcal{L}_{unch} \quad (4.119)$$

όπου

$$\mathcal{L}_{ch} = \frac{g_2}{\sqrt{2}} (j^{\mu+} W_\mu^+ + j^{\mu-} W_\mu^-) \quad (4.120)$$

δηλαδή ισχύει  $j^{\mu\pm} = j^{\mu 1} \pm i j^{\mu 2}$ . Τότε τα φορτισμένα ρεύματα θα γράφονται

$$j^{\mu+} = \frac{1}{2} (\bar{e}_L \gamma^\mu v_L^e + \bar{\nu}_L^e \gamma^\mu e_L + \bar{d}_L \gamma^\mu u_L + \bar{u}_L \gamma^\mu d_L - \bar{e}_L \gamma^\mu v_L^e + \bar{\nu}_L^e \gamma^\mu e_L - \bar{d}_L \gamma^\mu u_L + \bar{u}_L \gamma^\mu d_L)$$

$$\Rightarrow j^{\mu+} = \bar{\nu}_L^e \gamma^\mu e_L + \bar{u}_L \gamma^\mu d_L \quad (4.121)$$

και

$$j^{\mu-} = \frac{1}{2} (\bar{e}_L \gamma^\mu v_L^e + \bar{\nu}_L^e \gamma^\mu e_L + \bar{d}_L \gamma^\mu u_L + \bar{u}_L \gamma^\mu d_L + \bar{e}_L \gamma^\mu v_L^e - \bar{\nu}_L^e \gamma^\mu e_L + \bar{d}_L \gamma^\mu u_L - \bar{u}_L \gamma^\mu d_L)$$

$$\Rightarrow j^{\mu-} = \bar{e}_L \gamma^\mu v_L^e + \bar{d}_L \gamma^\mu u_L \quad (4.122)$$



Το κομμάτι  $\mathcal{L}_{unch}$  περιγράφει την αλληλεπίδραση των  $j^{\mu 3}$ ,  $W_\mu^3$ , καθώς και του υπερφορτίου της  $U(1)$  με το πεδίο  $B_\mu$ . Την γράφουμε ως:

$$\mathcal{L}_{unch} = g_2 j^{\mu 3} W_\mu^3 + \frac{g_1}{2} j^{\mu Y} B_\mu \quad (4.123)$$

Ενώ στην φυσική βάση γράφεται

$$\mathcal{L}_{unch}^{nb} = e j_{em}^\mu A_\mu + \frac{g_2}{\cos\theta_W} j_0^\mu Z_\mu^0 \quad (4.124)$$

Πρέπει τώρα να συμπεριλάβουμε στην  $\mathcal{L}_{kin}^{mater}$  τους όρους αλληλεπίδρασης με το  $B_\mu$ . Πρώτα θα κάνουμε την διαδικασία για το σκέλος (4.108)

$$\begin{aligned} \bar{Q}_L \gamma^\mu \frac{g_1}{6} B_\mu Q_L &= (\bar{u} \quad \bar{d})_L \gamma^\mu \frac{g_1}{6} B_\mu \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \\ &= \frac{g_1}{6} (\bar{u}_L \gamma^\mu B_\mu u_L + \bar{d}_L \gamma^\mu B_\mu d_L) \\ &= \frac{g_1}{6} (\bar{u}_L \gamma^\mu u_L + \bar{d}_L \gamma^\mu d_L) B_\mu \end{aligned} \quad (4.125)$$

Συνεχίζουμε με τον όρο (4.109):

$$\begin{aligned} -\bar{l}_L^{(i)} \gamma^\mu \frac{g_1}{2} B_\mu l_L^{(i)} &= -(\bar{\nu}^e \quad \bar{e})_L \gamma^\mu \frac{g_1}{2} B_\mu \begin{pmatrix} \nu^e \\ e \end{pmatrix}_L \\ &= -\frac{g_1}{2} (\bar{\nu}_L^e \gamma^\mu B_\mu \nu_L^e + \bar{e}_L \gamma^\mu B_\mu e_L) \\ &= -\frac{g_1}{2} (\bar{\nu}_L^e \gamma^\mu \nu_L^e + \bar{e}_L \gamma^\mu e_L) B_\mu \end{aligned} \quad (4.126)$$

Για την (4.110) έχουμε:

$$-\bar{l}_R^{(i)} \gamma^\mu g_1 B_\mu l_R^{(i)} = -g_1 \bar{e}_R \gamma^\mu e_R B_\mu \quad (4.127)$$

Για την (4.111) έχουμε:

$$\bar{U}_R^{(i)} \gamma^\mu \frac{2}{3} g_1 B_\mu U_R^{(i)} = \frac{2}{3} g_1 \bar{u}_R \gamma^\mu u_R B_\mu \quad (4.128)$$

Για την (4.112) έχουμε:

$$-\bar{D}_R^{(i)} \gamma^\mu \frac{g_1}{3} B_\mu D_R^{(i)} = -\frac{g_1}{3} \bar{d}_R \gamma^\mu d_R B_\mu \quad (4.129)$$

Άρα συνολικά το ρεύμα  $j^{\mu Y}$  δίνεται από την σχέση

$$j^{\mu Y} = \frac{1}{2} (\bar{u}_L \gamma^\mu u_L + \bar{d}_L \gamma^\mu d_L - \bar{\nu}_L^e \gamma^\mu \nu_L^e - \bar{e}_L \gamma^\mu e_L - 2\bar{e}_R \gamma^\mu e_R + \frac{4}{3} \bar{u}_R \gamma^\mu u_R - \frac{2}{3} \bar{d}_R \gamma^\mu d_R) \quad (4.130)$$

Υπενθυμίζουμε τις ακόλουθες δύο εκφράσεις:

$$\begin{pmatrix} Z^\mu \\ A^\mu \end{pmatrix} = U^{-1} \begin{pmatrix} W^{\mu 3} \\ B^\mu \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} W^{\mu 3} \\ B^\mu \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} Z^\mu \\ A^\mu \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} W^{\mu 3} \\ B^\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z^\mu \\ A^\mu \end{pmatrix}$$

$$W_\mu^3 = \cos\theta Z_\mu + \sin\theta A_\mu \quad (4.131)$$

$$B_\mu = -\sin\theta Z_\mu + \cos\theta A_\mu \quad (4.132)$$

Αντικαθιστούμε τις δύο παραπάνω εξισώσεις στην  $\mathcal{L}_{unch}$  και παίρνουμε

$$\mathcal{L}_{unch} = g_2 j^{\mu 3} (\cos\theta Z_\mu + \sin\theta A_\mu) + \frac{g_1}{2} j^{\mu Y} (-\sin\theta Z_\mu + \cos\theta A_\mu)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}_{unch} = (g_2 j^{\mu 3} \sin\theta + \frac{g_1}{2} j^{\mu Y} \cos\theta) A_\mu + (g_2 j^{\mu 3} \cos\theta - \frac{g_1}{2} j^{\mu Y} \sin\theta) Z_\mu \quad (4.133)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις  $\tan\theta = \frac{g_1}{g_2}$  και  $g_2 \sin\theta = g_1 \cos\theta = e$  έχουμε

$$\mathcal{L}_{unch} = (e j^{\mu 3} + \frac{e}{2} j^{\mu Y}) A_\mu + \frac{g_2}{\cos\theta} (j^{\mu 3} \cos^2\theta - \frac{\sin^2\theta}{2} j^{\mu Y}) Z_\mu \quad (4.134)$$

Ταυτοποιώντας την παραπάνω με την έκφραση της  $\mathcal{L}_{unch}^{nb}$  έχουμε

$$j_{em}^\mu = j^{\mu 3} + \frac{j^{\mu Y}}{2} \quad (4.135)$$

$$j_0^\mu = \cos^2\theta j^{\mu 3} - \frac{\sin^2\theta}{2} j^{\mu Y} \quad (4.136)$$

Λύνουμε την πρώτη ως προς  $j^{\mu Y}$  και αντικαθιστούμε στην δεύτερη

$$j_0^\mu = \cos^2\theta j^{\mu 3} - \frac{\sin^2\theta}{2} 2(j_{em}^\mu - j^{\mu 3}) = j^{\mu 3} - \sin^2\theta j_{em}^\mu \quad (4.137)$$

Από όλη την παραπάνω διαδικασία, κατορθώσαμε από την  $\mathcal{L}_{kin}^{mater}$  να βρούμε τα φορτισμένα ρεύματα, καθώς και τα ουδέτερα, που δημιουργούνται λόγω της ηλεκτρασθενούς αλληλεπίδρασης.

### 4.6.2 Μάζες φερμιονίων

Σε αυτήν την ενότητα θα κατανοήσουμε τον τρόπο με τον οποίο τα φερμιόνια αποκτούν μάζα. Θα δούμε αναλυτικά μία οικογένεια λεπτονίων. Θα χρησιμοποιήσουμε σαν βαθμωτό πεδίο και πάλι την διπλέτα

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix} \quad (4.138)$$

Οι αλληλεπιδράσεις των φερμιονίων με τα βαθμωτά πεδία αναφέρονται και ως αλληλεπιδράσεις Yukawa με αντίστοιχες σταθερές ζεύξης. Για το παραπάνω πεδίο η Λαγκρανζιανή Yukawa δίνεται από τη σχέση

$$\mathcal{L}_Y^e = F_e^{11} \left[ (\bar{\nu}^e \quad \bar{e})_L \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi_0 \end{pmatrix} e_R + \bar{e}_R (\phi^- \quad \bar{\phi}^0) \begin{pmatrix} \nu^e \\ e \end{pmatrix}_L \right] \quad (4.139)$$

Σπάμε τη συμμετρία επιλέγοντας ένα ελάχιστο

$$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (4.140)$$

και παίρνουμε μία διαταραχή  $H(x)$ , που αντιπροσωπεύει το φυσικό πεδίο Higgs, γύρω από την τιμή κενού  $v$ . Άρα το πεδίο γίνεται

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix} \quad (4.141)$$

Αντικαθιστούμε την διαταραχή αυτή, στην Λαγκρανζιανή  $\mathcal{L}_{Yuk}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Yuk}^l &= \frac{F_e^{(11)}}{\sqrt{2}} \left[ (\bar{\nu}^e \quad \bar{e})_L \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix} e_R + \bar{e}_R (0 \quad v + H(x)) \begin{pmatrix} \nu^e \\ e \end{pmatrix}_L \right] \\ &= \frac{F_e^{(11)}}{\sqrt{2}} [\bar{e}_L (v + H(x)) e_R + \bar{e}_R (v + H(x)) e_L] \\ &= \frac{F_e^{(11)}}{\sqrt{2}} v [\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L] + \frac{F_e^{(11)}}{\sqrt{2}} H(x) [\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L] \end{aligned} \quad (4.142)$$

Ο δεύτερος όρος της Λαγκρανζιανής αυτής είναι ένας όρος αλληλεπίδρασης. Ο πρώτος όρος της παραπάνω Λαγκρανζιανής είναι ένας όρος μάζας, με

$$m_e = \frac{F_e^{(11)} v}{\sqrt{2}} \quad (4.143)$$

Θεωρούμε  $m_e \bar{e} e = m_e (\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L)$  και έτσι η ανωτέρα Λαγκρανζιανή γράφεται

$$\mathcal{L}_{Yuk}^l = m_e \bar{e} e + \frac{m_e}{v} m_e \bar{e} e H(x) \quad (4.144)$$

Αναφέραμε παραπάνω πως ο δεύτερος όρος της Λαγκρανζιανής αφορά κάποια αλληλεπίδραση. Στην μορφή (4.144) φαίνεται πιο καθαρά πως πρόκειται για την σύζευξη του ηλεκτρονίου με το βαθμωτό πεδίο  $H(x)$ , Higgs. Η σταθερά σύζευξης είναι  $\frac{m_e}{v}$ . Αυτή παίρνει πολύ μικρές τιμές, επομένως το φαινόμενο της σύζευξης αυτής δεν είναι ανιχνεύσιμο στις ηλεκτρασθενείς αλληλεπιδράσεις.

Περνώντας τώρα στην περίπτωση των κουάρκ, θα εργαστούμε με τον ίδιο ακριβώς τρόπο. Θα υπολογίσουμε τις μάζες των κάτω στοιχείων των οικογενειών των κουάρκ, δηλαδή τα  $d, s, b$  και

αργότερα θα δείξουμε την παραγωγή μάζας των  $u, c, t$ . Για τα down type κουάρκ γράφουμε την Λαγκρανζιανή

$$\mathcal{L}_{Yuk}^d = F_d^{(11)} \left[ (\bar{u} \quad \bar{d})_L \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} d_R + \bar{d}_R (\phi^- \quad \bar{\phi}^0) \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \right] \quad (4.145)$$

Επαναλαμβάνοντας ακριβώς ίδια διαδικασία με αυτήν που ακολουθήσαμε για την εύρεση της μάζας του ηλεκτρονίου προηγουμένως, θα βρούμε τις μάζες των κουάρκ με isospin  $T_3 = -\frac{1}{2}$ . Άρα έχουμε

$$\mathcal{L}_{Yuk}^d = \frac{F_d^{(11)}}{\sqrt{2}} v [\bar{d}_L d_R + \bar{d}_R d_L] + \frac{F_d^{(11)}}{\sqrt{2}} H(x) [\bar{d}_L d_R + \bar{d}_R d_L] = m_d \bar{d} d + \frac{m_d}{v} \bar{d} d H(x) \quad (4.146)$$

όπου

$$m_d = \frac{F_d^{(11)} v}{\sqrt{2}} \quad (4.147)$$

Τα κουάρκ με isospin  $T_3 = \frac{1}{2}$  αποκτούν μάζα με την ίδια διαδικασία. Ορίζουμε την νέα διπλέτα για το πεδίο Higgs ως εξής

$$\begin{aligned} \tilde{\phi} = i\tau^2 \phi^* &= i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^{+*} \\ \phi^{0*} \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_1 - i\phi_2 \\ \phi_3 - i\phi_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_3 - i\phi_4 \\ -(\phi_1 - i\phi_2) \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \tilde{\phi} = \begin{pmatrix} \bar{\phi}^0 \\ -\phi^- \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.148)$$

Το  $\tilde{\phi}$  μετασχηματίζεται όπως και το  $\phi$  κάτω από την  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ , αλλά με αντίθετο υπερφορτίο  $Y = -1$ . Το χρησιμοποιούμε για να βρούμε την gauge αναλλοίωτη συμπεριφορά στη Λαγκρανζιανή. Γράφουμε στη συνέχεια τη Λαγκρανζιανή που αντιστοιχεί στα up τύπου κουάρκ, από την οποία θα βρούμε τις μάζες τους. Μετά από το ανθόρητο σπάσιμο συμμετρίας θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Yuk}^u &= F_u^{(11)} \left[ (\bar{u} \quad \bar{d})_L \begin{pmatrix} \bar{\phi}^0 \\ -\phi^- \end{pmatrix} u_R + \bar{u}_R (\phi^0 \quad -\phi^+ \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \right] \\ &= \frac{F_u^{(11)}}{\sqrt{2}} \left[ (\bar{u} \quad \bar{d})_L \begin{pmatrix} v + H(x) \\ 0 \end{pmatrix} u_R + \bar{u}_R (v + H(x) \quad 0) \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \right] \\ &= \frac{F_u^{(11)}}{\sqrt{2}} v [\bar{u}_L u_R + \bar{u}_R u_L] + \frac{F_u^{(11)}}{\sqrt{2}} H(x) [\bar{u}_L u_R + \bar{u}_R u_L] \\ &\Rightarrow \mathcal{L}_{Yuk}^u = m_u \bar{u} u + \frac{m_u}{v} H(x) \bar{u} u, \quad m_u = \frac{F_u^{(11)} v}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (4.149)$$

Τελικά μπορούμε να γράψουμε την συνολική Λαγκρανζιανή Yukawa των φερμιονίων που ανήκουν στις οικογένειες

$$f_{e-L} = \begin{pmatrix} \nu^e \\ e^- \end{pmatrix}_L, \quad f_{u-L} = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \quad (4.150)$$

ως εξής

$$L_{Yuk} = m_e \bar{e}e + m_d \bar{d}d + m_u \bar{u}u + \frac{m_e}{v} H(x) \bar{e}e + \frac{m_d}{v} H(x) \bar{d}d + \frac{m_u}{v} H(x) \bar{u}u \quad (4.151)$$

Οι μάζες παρόλα αυτά δεν μπορούν να προβλεφθούν ακριβώς, καθώς οι σταθερές  $F_i^{(11),i=u,d,l}$  είναι αυθαίρετες. Αντιθέτως, οι πειραματικές τιμές των μαζών είναι αυτές που θα καθορίσουν την τιμή των σταθερών αυτών. Παρατηρούμε πως οι όροι της παραπάνω Λαγκρανζιανής που περιγράφουν την αλληλεπίδραση των φερμιονίων με το πεδίο Higgs έχουν σταθερά σύζευξης που εξαρτάται από τη μάζα. Έτσι λοιπόν καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως τα βαρύτερα φερμιόνια αλληλεπιδρούν εντονότερα με το πεδίο Higgs, σε σχέση με τα πιο ελαφριά.

## 4.7 Φερμιονικές μάζες και ανάμιξη γενεών

Λεπτόνια: Η σύζευξη των λεπτονίων με τα μποζόνια  $W^\pm$  είναι δυνατή, μόνο εντός μίας οικογένειας, δηλαδή

$$e^- \rightarrow \nu^e + W^-$$

$$\mu^- \rightarrow \nu^\mu + W^-$$

$$\tau^- \rightarrow \nu^\tau + W^-$$

Δεν μπορούμε όμως να έχουμε για παράδειγμα

$$e^- \rightarrow \nu^\tau + w^-$$

Δεν παρατηρούνται δηλαδή αλληλεπιδράσεις που αναμιγνύουν γενιές. Μαθηματικά, το παραπάνω φαινόμενο διατυπώνεται μέσω της διατήρησης του λεπτονικού αριθμού, του ηλεκτρονίου, μιονίου και ταυ.

Κουάρκ: Παρόλο που και τα κουάρκ διακρίνονται σε τρεις οικογένειες, η σύζευξή τους με τα  $W^\pm$  δεν λειτουργεί όπως στα λεπτόνια. Στην περίπτωση αυτή, δεν διατηρείται η διαφορετικότητα των οικογενειών. Μαθηματικά δηλαδή δεν υπάρχει η διατήρηση κάποιου αριθμού, γεγονός που θα απαγόρευε την ανάμιξη των γενεών.

Οι εκφράσεις των  $j^{m\pm}$  και  $j_0^m$  που καταλήξαμε με τις σχέσεις (4.121), (4.122) και (4.137) περιέχουν όρους που δεν επιτρέπουν τη σύζευξη μεταξύ δύο κουάρκ διαφορετικής γένεσης. Όπως φαίνεται και από τη μορφή της Λαγκρανζιανής Yukawa που γράψαμε παραπάνω, εννοείται ότι ο πίνακας μαζών είναι διαγώνιος στην βάση των ρευμάτων, γεγονός που δεν ισχύει αφού η ανάμιξη γενεών έχει παρατηρηθεί και πειραματικά. Αυτό σημαίνει ότι έχουμε υπολογίσει τις μάζες, σαν να βρίσκονται στη δικιά τους φυσική βάση, ενώ δουλεύουμε στη βάση των ρευμάτων. Πρέπει λοιπόν να διαφοροποιήσουμε τις ιδιοκαταστάσεις της μάζας, στη φυσική βάση των μαζών, από τις ιδιοκαταστάσεις της αλληλεπίδρασης, στην βάση των ρευμάτων. Με τις ιδιοκαταστάσεις εκφρασμένες στη φυσική βάση, περιγράφουμε ένα κουάρκ που διαδίδεται ελεύθερο. Με τις ιδιοκαταστάσεις εκφρασμένες στην βάση των ρευμάτων, περιγράφουμε ένα κουάρκ κατά την διάρκεια κάποιας αλληλεπίδρασής του. Η μετάβαση από τη φυσική βάση, στη βάση των ρευμάτων, γίνεται μέσω του πίνακα Cabibbo-Kobayashi-Maskawa. Πρόκειται

για έναν μοναδιακό πίνακα που φέρει πληροφορία για την ισχύ των διασπάσεων που αλλάζουν γεύση.

Ιστορικά, υπήρχαν μόνο δύο οικογένειες κουάρκ. Ο Cabibbo το 1963 πρότεινε ότι τα  $d$  και  $s$  κουάρκ που συμμετέχουν στις ασθενείς αλληλεπιδράσεις αναμιγνύονται έχοντας στραφεί κατά γωνία ανάμιξης  $\theta_c$ . Η γωνία αυτή σχετίζεται με την πιθανότητα να διασπαστεί για παράδειγμα το  $u$  κουάρκ σε  $d$  ή  $s$ . Στην ουσία το κουάρκ που αλληλεπιδρά με το  $u$ , μέσω των ασθενών αλληλεπιδράσεων, δεν είναι μόνο το  $d$  ή το  $s$ , αλλά ένας γραμμικός συνδυασμός τους:

$$d' = d\cos\theta_c + s\sin\theta_c \quad (4.152)$$

$$s' = -d\sin\theta_c + s\cos\theta_c \quad (4.153)$$

Η γωνία Cabibbo  $\theta_c$  αναπαριστά την στροφή του διανύσματος της ιδιοκατάστασης της μάζας, στον χώρο που δημιουργούν οι ιδιοκαταστάσεις της μάζας, σε ένα διάνυσμα της ασθενούς ιδιοκατάστασης στον χώρο που σχηματίζουν οι ασθενείς ιδιοκαταστάσεις. Η τιμή της γωνίας έχει βρεθεί  $\theta_c = 13.04$ .

Επομένως συμβολίζουμε με  $\begin{pmatrix} d' \\ s' \end{pmatrix}$  τις ιδιοκαταστάσεις των ασθενών αλληλεπιδράσεων στον χώρο των ρευμάτων, για τις συνιστώσες των κουάρκ με ασθενές isospin  $T_3 = -\frac{1}{2}$ , των δύο οικογενειών.

Η σύνδεσή τους με τις ιδιοκαταστάσεις της μάζας  $\begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}$ , στον φυσικό χώρο γράφεται ως εξής

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_c & \sin\theta_c \\ -\sin\theta_c & \cos\theta_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix} \quad (4.154)$$

Το  $W$  συζεύγνυται με τις στραμμένες κατά  $\theta_c$  καταστάσεις όπως και με τα λεπτονικά ζευγάρια. Οι συζεύξεις με τα φυσικά κουάρκ γράφονται:

$$\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ d\cos\theta_c + s\sin\theta_c \end{pmatrix} \quad (4.155)$$

$$\begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ -d\sin\theta_c + s\cos\theta_c \end{pmatrix} \quad (4.156)$$

Παραδόξως, η παραπάνω στροφή δεν επηρεάζει τη μορφή των ασθενών ρευμάτων. Θα επεξεργαστούμε στην συνέχεια την έκφραση (4.137) που έχουμε βρει παραπάνω για το ασθενές ρεύμα, κρατώντας μόνο τους όρους που μας ενδιαφέρουν και αντικαθιστώντας τα  $j^{\mu 3}$  και  $j^{\mu Y}$ :

$$j_0^\mu = \frac{\cos^2\theta}{2}(\bar{d}_L\gamma^\mu d_L + \bar{s}_L\gamma^\mu d_L + \bar{s}_L\gamma^\mu s_L) - \frac{\sin^2\theta}{4} \left( \bar{d}_L\gamma^\mu d_L + \bar{s}_L\gamma^\mu d_L + \bar{s}_L\gamma^\mu s_L - \frac{2}{3}\bar{d}_R\gamma^\mu d_R - \frac{2}{3}\bar{s}_R\gamma^\mu s_R \right) \quad (4.157)$$

Αντικαθιστούμε τα  $d$  με  $d'$  και τα  $s$  με τα  $s'$  και έχουμε

$$j_0^\mu = \frac{\cos^2\theta_W}{2}[(\bar{d}_L\cos\theta_c + \bar{s}_L\sin\theta_c)\gamma^\mu(d_L\cos\theta_c + s_L\sin\theta_c)]$$

$$\begin{aligned}
 & +(-\bar{d}_L \sin\theta_c + \bar{s}_L \cos\theta_c)\gamma^\mu(-d_L \sin\theta_c + s_L \cos\theta_c)] \\
 & +\frac{\sin^2\theta_W}{4}[(\bar{d}_L \cos\theta_c + \bar{s}_L \sin\theta_c)\gamma^\mu(d_L \cos\theta_c + s_L \sin\theta_c) \\
 & +(-\bar{d}_L \sin\theta_c + \bar{s}_L \cos\theta_c)\gamma^\mu(-d_L \sin\theta_c + s_L \cos\theta_c) \\
 & -\frac{2}{3}(\bar{d}_R \cos\theta_c + \bar{s}_R \sin\theta_c)\gamma^\mu(d_R \cos\theta_c + s_R \sin\theta_c) \\
 & -\frac{2}{3}(-\bar{d}_R \sin\theta_c + \bar{s}_R \cos\theta_c)\gamma^\mu(-d_R \sin\theta_c + s_R \cos\theta_c) \tag{4.158}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & =\frac{\cos^2\theta_W}{2}[\cos^2\theta_c \bar{d}_L \gamma^\mu d_L + \sin^2\theta_c \bar{s}_L \gamma^\mu s_L + \sin\theta_c \cos\theta_c \bar{s}_L \gamma^\mu d_L \\
 & +\sin\theta_c \cos\theta_c \bar{d}_L \gamma^\mu s_L + \sin^2\theta_c \bar{d}_L \gamma^\mu d_L + \cos^2\theta_c \bar{s}_L \gamma^\mu s_L \\
 & -\sin\theta_c \cos\theta_c \bar{d}_L \gamma^\mu s_L - \sin\theta_c \cos\theta_c \bar{s}_L \gamma^\mu d_L + \frac{\sin^2\theta_W}{4}[\dots] = j_0^\mu \tag{4.159}
 \end{aligned}$$

Η παράσταση εντός της αγκύλης δίνει αναλλοίωτο αποτέλεσμα. Η απουσία μεταβάσεων ουδέτερων ρευμάτων αλλαγής γεύσης αποτελεί μία πρόβλεψη με πειραματική επιβεβαίωση. Ο μηχανισμός GIM, που διατυπώθηκε από τους Glashow, Hλιόπουλος και Maiani αναλύει την καταπίεση της μετάβασης μέσω ουδέτερων ρευμάτων και των ασθενών αλληλεπιδράσεων με μεταβολή της παραδοξότητας κατά 2 μονάδες, δηλαδή  $\Delta S = 2$ . Ήταν γνωστό πως στις ασθενείς αλληλεπιδράσεις, όπου αλλάζει η γεύση και στην περίπτωση μας η παραδοξότητα, αλλάζει μόνο κατά μία μονάδα. Οι επιτρεπόμενες αλληλεπιδράσεις όπου παρατηρείται αλλαγή τη γεύσης κατά ένα είναι πιθανές μόνο μέσω μεταβάσεων φορτισμένων ρευμάτων. Τα παρατηρούμενα φορτισμένα ρεύματα παρόλα αυτά, που παρατηρούνταν δεν συμφωνούσαν με την θεωρία. Έτσι με βάση την απουσία μεταβάσεων ουδέτερων ρευμάτων αλλαγής του κβαντικού αριθμού της γεύσης, διατυπώθηκαν οι στραμμένες καταστάσεις των  $d$  και  $s$  κουάρκ κατά γωνία Cabibbo με την εισαγωγή ενός ακόμα κουάρκ  $c$ . Έτσι διορθώνεται το ρεύμα.

Στο καθιερωμένο πρότυπο υπάρχουν τρεις οικογένειες κουάρκ. Η παρουσία της τρίτης, εντείνει την ανάγκη κατασκευής ενός  $3 \times 3$  μοναδιακού πίνακα που θα περιγράφει την ισχύ των ασθενών διασπάσεων αλλαγής γεύσης. Όμως οι ιδιοκαταστάσεις των κουάρκ στην φυσική βάση δεν συμμετέχουν στις ασθενείς αλληλεπιδράσεις. Ο πίνακας που συνδέει τις κβαντικές ιδιοκαταστάσεις των δύο βάσεων, δηλαδή της φυσικής και της βάσης ρευμάτων, αντιπροσωπεύεται από τον πίνακα Cabibo-Kobayashi-Maskawa. Επιλέγουμε αυθαίρετα ως καθαρές καταστάσεις τα  $u, c, t$  κουάρκ. Οι καταστάσεις των  $d, s, b$  κουάρκ αναμιγνύονται μέσω του μετασχηματισμού

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} \tag{4.160}$$

Το αριστερό σκέλος της παραπάνω εξίσωσης αποτελείται από το διάνυσμα των κουάρκ στην βάση των ρευμάτων. Ο  $3 \times 3$  πίνακας που γράφουμε, είναι ο πίνακας μετασχηματισμού και δεξιά αυτού είναι η κατάσταση των κουάρκ γραμμένη στην φυσική βάση.

Για  $N_g$  οικογένειες κουάρκ, έχουμε  $2N_g$  γεύσεις επομένως ο πίνακας μετασχηματισμού θα πρέπει να είναι  $N_g \times N_g$  και να είναι μοναδιακός, δηλαδή να υπακούει στην σχέση  $V^\dagger V = I$ . Το πλήθος των παραμέτρων που πρέπει να προσδιορίσουμε είναι  $N_g^2$ . Το πλήθος των σχέσεων μεταξύ πεδίων και κουάρκ είναι  $2N_g - 1$ . Τελικά οι παρατηρήσιμες παράμετροι, ανεξαρτήτως βάσης, θα είναι  $N_g^2 - 2N_g + 1 = (N_g - 1)^2$ . Από αυτές, οι  $N_g(N_g - 1)/2$  θα είναι γωνίες περιστροφής, που διαφορετικά αποκαλούνται γωνίες ανάμειξης οικογενειών. Οι υπόλοιπες  $(N_g - 1)(N_g - 2)/2$  παράμετροι, θα είναι μιγαδικές φάσεις.

Στην δική μας περίπτωση, για  $N_g = 3$ , άρα  $(N_g - 1)^2 = 4$  και  $N_g(N_g - 1)/2 = 3$  έχουμε τρεις πραγματικές γωνίες στροφής και  $(N_g - 1)(N_g - 2)/2 = 1$  μιγαδική φάση. Επομένως ο πίνακας  $V$  παραμετροποιείται ως εξής:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow V = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}s_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{-i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \quad (4.161)$$

όπου

$$\begin{bmatrix} c_{ij} = \cos\theta_{ij} \\ s_{ij} = \sin\theta_{ij} \end{bmatrix}$$

Ακόμα  $\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}$  είναι οι γωνίες ανάμειξης και ισχύει  $\theta_{12} = \theta_c$ . Τέλος  $\delta$  είναι η γωνία που παραμετροποιεί την παραβίαση της  $CP$  συμμετρίας. Τελικά η σχέση

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}s_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{-i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} \quad (4.162)$$

δίνει τους γραμμικούς συνδυασμούς των κάτω τύπου κουάρκ όταν αλληλεπιδρούν ασθενώς.

## 4.8 Γωνία Cabibbo

Θα προχωρήσουμε τώρα σε ένα παράδειγμα, ώστε τα προηγούμενα να γίνουν περισσότερο αντιληπτά. Στην υποθετική περίπτωση όπου υπάρχουν μόνο δύο οικογένειες κουάρκ, δηλαδή  $N_g = 2$

$$f_{u-L} = \begin{pmatrix} u \\ c \end{pmatrix}_L, \quad f_{d-L} = \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}_L \quad (4.163)$$

έχουμε αντίστοιχους υποθετικούς πίνακες μαζών

$$M_U = \begin{pmatrix} 0 & n \\ n & n' \end{pmatrix}, \quad M_D = \begin{pmatrix} 0 & m \\ m & m' \end{pmatrix} \quad (4.164)$$



Η Λαγκρανζιανή που περιέχει τους όρους μάζας των κουάρκ, στην βάση των αλληλεπιδράσεων θα είναι

$$\mathcal{L} = (\bar{d}_0 \quad \bar{s}_0)_L M_D \begin{pmatrix} d_0 \\ s_0 \end{pmatrix}_R + (\bar{u}_0 \quad \bar{c}_0)_L M_U \begin{pmatrix} u_0 \\ c_0 \end{pmatrix}_R + h.c. \quad (4.165)$$

Ορίζουμε τα  $P_L$  και  $P_R$  ως τα ιδιοδιανύσματα των στραμμένων κουάρκ της δεύτερης οικογένειας στη βάση των ρευμάτων

$$P_L = \begin{pmatrix} d_0 \\ s_0 \end{pmatrix}_L, \quad P_R = \begin{pmatrix} d_0 \\ s_0 \end{pmatrix}_R \quad (4.166)$$

Ορίζουμε τα  $N_L$  και  $N_R$  ως τα ιδιοδιανύσματα των στραμμένων κουάρκ της πρώτης οικογένειας στη βάση των ρευμάτων

$$N_L = \begin{pmatrix} u_0 \\ c_0 \end{pmatrix}_L, \quad N_R = \begin{pmatrix} u_0 \\ c_0 \end{pmatrix}_R \quad (4.167)$$

Ορίζουμε τα  $p_L$  και  $p_R$  ως τα ιδιοδιανύσματα των κουάρκ της δεύτερης οικογένειας στη φυσική βάση

$$p_L = \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}_L, \quad p_R = \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}_R \quad (4.168)$$

Ορίζουμε τα  $n_L$  και  $n_R$  ως τα ιδιοδιανύσματα των κουάρκ της πρώτης οικογένειας στη φυσική βάση

$$n_L = \begin{pmatrix} u \\ c \end{pmatrix}_L, \quad n_R = \begin{pmatrix} u \\ c \end{pmatrix}_R \quad (4.169)$$

Ορίζουμε τους πίνακες στροφής Cabibbo  $U_p$  και  $V_p$  για τα κουάρκ της δεύτερης οικογένειας, για τους οποίους, ισχύει  $U_p = V_p$  και αφού είναι μοναδιαίοι  $U_p^{-1} = V_p^{-1} = U_p^\dagger = V_p^\dagger$ .

Ορίζουμε τους πίνακες στροφής Cabibbo  $U_N$  και  $V_N$  για τα κουάρκ της πρώτης οικογένειας, για τους οποίους, ισχύει  $U_N = V_N$  και αφού είναι μοναδιαίοι  $U_N^{-1} = V_N^{-1} = U_N^\dagger = V_N^\dagger$ . Επομένως οι διπλέτες των κουάρκ των δύο διαφορετικών βάσεων θα είναι

$$P_L = U_p p_L, \quad P_R = V_p p_R \quad (4.170)$$

$$N_L = U_N n_L, \quad N_R = V_N n_R \quad (4.171)$$

Έπειτα από τα παραπάνω, η Λαγκρανζιανή (4.165) γίνεται

$$\mathcal{L} = \bar{P}_L M_D P_R + \bar{N}_L M_U N_R = \bar{P}_L U_p U_p^{-1} M_D V_p V_p^{-1} P_R + \bar{N}_L U_N U_N^{-1} M_U V_N V_N^{-1} N_R$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \bar{p}_L (U_p^{-1} M_D V_p) p_R + \bar{n}_L (U_N^{-1} M_U V_N) n_R$$

Οι όροι εντός των παρενθέσεων συμπίπτουν με την διαγωνοποίηση των πινάκων μαζών. Για τον πρώτο όρο εντός της παρένθεσης έχουμε

$$U_p^{-1} M_D V_p = U_p^{-1} M_D U_p = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & m \\ m & m' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow U_p^{-1} M_D V_p = \begin{pmatrix} -2scm + s^2 m' & (c^2 - s^2)m - scm' \\ (c^2 - s^2)m - scm' & 2scm + c^2 m' \end{pmatrix} \quad (4.172)$$

Χάρη συντομίας θέσαμε  $c = \cos\theta$ ,  $s = \sin\theta$ . Απαιτούμε τώρα ο πίνακας αυτός να είναι διαγώνιος:

$$\begin{pmatrix} m_d & 0 \\ 0 & m_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2scm + s^2 m' & (c^2 - s^2)m - scm' \\ (c^2 - s^2)m - scm' & 2scm + c^2 m' \end{pmatrix} \quad (4.173)$$

Επομένως βρίσκουμε

$$\tan^2\theta_1 = \frac{m_d}{m_s} \quad (4.174)$$

Για τον δεύτερο όρο εντός της παρένθεσης στην Λαγκρανζιανή έχουμε

$$\begin{aligned} U_N^{-1} M_U V_N &= U_N^{-1} M_U U_N = \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & m \\ m & m' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \\ \Rightarrow U_N^{-1} M_U V_N &= \begin{pmatrix} -2scm + s^2 m' & (c^2 - s^2)m - scm' \\ (c^2 - s^2)m - scm' & 2scm + c^2 m' \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.175)$$

Απαιτούμε τώρα ο πίνακας αυτός να είναι διαγώνιος:

$$\begin{pmatrix} m_u & 0 \\ 0 & m_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2scm + s^2 m' & (c^2 - s^2)m - scm' \\ (c^2 - s^2)m - scm' & 2scm + c^2 m' \end{pmatrix} \quad (4.176)$$

Επομένως βρίσκουμε

$$\tan^2\theta_2 = \frac{m_u}{m_c} \quad (4.177)$$

Άρα για την γωνία Cabibbo έχουμε

$$\begin{aligned} U &= U_p^\dagger U_N = \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 \\ s_1 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2 & s_2 \\ -s_2 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 c_2 + s_1 s_2 & c_1 s_2 - s_1 c_2 \\ s_1 c_2 - s_2 c_1 & s_1 s_2 + c_1 c_2 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow U &= \begin{pmatrix} c_{1-2} & -s_{1-2} \\ s_{1-2} & c_{1-2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.178)$$

Γνωρίζοντας τις μάζες των κουάρκ η γωνία Cabibbo θα βρεθεί  $\theta_c = \theta_1 - \theta_2 \approx 13^\circ$ .

## 4.9 Ισχυρές αλληλεπιδράσεις

Θα αναλύσουμε στην συνέχεια το κομμάτι της Λαγκρανζιανής του καθιερωμένου προτύπου που περιγράφει τις ισχυρές αλληλεπιδράσεις, δηλαδή την κβαντική χρωμοδυναμική. Για τους όρους αλληλεπίδρασης των κουάρκ με τα γκλουόνια γράφουμε την Λαγκρανζιανή

$$\mathcal{L}(SU(3)_c) = \frac{g_3}{2} \bar{q}_\alpha \gamma^\mu \lambda_i^{\alpha\beta} q_\beta G_\mu^i, \quad i = 1, \dots, 8 \quad (4.179)$$

όπου έχουμε σημειώσει με  $\alpha, \beta = 1, 2, 3$  τα τρία χρώματα ενός οποιοδήποτε κουάρκ  $q$ . Οι ισχυρές αλληλεπιδράσεις μπορούν να προκαλέσουν μεταβολή χρώματος ενός κουάρκ μέσω της ανταλλαγής

ενός γκλουονίου. Το γκλουόνιο έχει τη δυνατότητα να μεταφέρει χρώμα. Αυτό σημαίνει ότι συζεύγνυται μεταξύ τους. Για παράδειγμα, ένα κουάρκ χρώματος «1» μπορεί να αποκτήσει το χρώμα «2» εκπέμποντας ένα γκλουόνιο που μεταφέρει τους χβαντικούς αριθμούς χρώματος «1» και «2». Αυτό σημαίνει πως κάθε γκλουόνιο μεταφέρει μία μονάδα χρώματος και μία μονάδα αντιχρώματος. Τα γκλουόνια  $G_\mu^3$  και  $G_\mu^8$  μεταφέρουν μία μονάδα χρώματος και μία μονάδα ίδιου αντιχρώματος, καθώς οι γεννήτορες  $\lambda_3$  και  $\lambda_8$  είναι διαγώνιοι. Για τη συμμετρία χρώματος  $SU(3)_c$  έχουμε αναλυτικά τις ακόλουθες οκτώ καταστάσεις

$$|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1\bar{2} + \bar{1}2)$$

$$|2\rangle = -\frac{i}{\sqrt{2}}(1\bar{2} - \bar{1}2)$$

$$|3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1\bar{1} - 2\bar{2})$$

$$|4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(1\bar{3} + \bar{1}3)$$

$$|5\rangle = -\frac{i}{\sqrt{2}}(1\bar{3} - \bar{1}3)$$

$$|6\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(2\bar{3} + \bar{2}3)$$

$$|7\rangle = -\frac{i}{\sqrt{2}}(2\bar{3} - \bar{2}3)$$

$$|8\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}[(1\bar{1}) + (2\bar{2}) - 2(3\bar{3})]$$

Το γεγονός ότι τα γκλουόνια μεταφέρουν χρώμα και συζεύγνυται μεταξύ τους, αντικατοπτρίζει το ότι η θεωρία βαθμίδας  $SU(3)_c$  δεν είναι αβελιανή, φαινόμενο που συναντάται και στα διανυσματικά μποζόνια βαθμίδας της ασθενούς αλληλεπίδρασης. Αντίθετα, το φωτόνιο δεν μεταφέρει ηλεκτρικό φορτίο με αποτέλεσμα να μην συζεύγνυται με τον εαυτό του. Το γεγονός αυτό είναι απορρέει από την αβελιανότητα της θεωρίας βαθμίδας του ηλεκτρομαγνητισμού  $U(1)_Q$ .

Τα σωματίδια που παρατηρούμε αποτελούν καταστάσεις χωρίς χρώμα, δηλαδή μονές καταστάσεις χρώματος. Τα κουάρκ και τα γκλουόνια παραμένουν σε δέσιμες καταστάσεις μέσα στα αδρόνια και δεν μπορούν να παρατηρηθούν ως ελεύθερα σωματίδια. Αυτό το φαινόμενο ονομάζεται εγκλωβισμός.

Στη συνέχεια θα αναλύσουμε τα αδρόνια, ως μονές, δηλαδή άχρωμες καταστάσεις. Στην  $QCD$  υπάρχουν τρία χρώματα και στην θεμελιώδη αναπαράσταση τα κουάρκ αποτελούν τριάδες. Είναι πολύ βοηθητικό να σχεφτούμε την αναλογία με την ομάδα  $SU(3)$  του σπιν. Μπορούμε να κατασκευάσουμε

μία μονή κατάσταση σπιν, συνδυάζοντας τα σπιν δύο σωματιδίων σε μία αντισυμμετρική κατάσταση με μηδενικό συνολικό σπιν, δηλαδή  $\chi_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_{\uparrow}^{(1)}\chi_{\downarrow}^{(2)} - \chi_{\downarrow}^{(1)}\chi_{\uparrow}^{(2)})$ . Στην περίπτωση χρώματος  $SU(3)_c$ , η βασική κατάσταση, έχει τρεις συνιστώσες, αντί για δύο, επομένως υπάρχουν δύο τρόποι έναντι του ενός για να δημιουργήσουμε μία άχρωμη κατάσταση. Ένας τέτοιος συνδυασμός είναι ο  $\frac{1}{\sqrt{3}}q_i^{(1)}\bar{q}_i^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{3}}(q_1^{(1)}\bar{q}_1^{(2)} + q_2^{(1)}\bar{q}_2^{(2)} + q_3^{(1)}\bar{q}_3^{(2)})$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Πρόκειται για έναν συμμετρικό συνδυασμό που προκύπτει από καταστάσεις κουάρκ-αντικουάρκ και αντιστοιχεί στα μεσόνια. Ο άλλος συνδυασμός που αποτελεί την δεύτερη άχρωμη κατάσταση με συνολικό χρώμα μηδέν είναι αντισυμμετρικός και προκύπτει από κουάρκ και αντιστοιχεί στα βαρυόνια  $\frac{1}{\sqrt{6}}\epsilon_{ijk}q_i^{(1)}q_j^{(2)}q_k^{(3)}$ ,  $i, j, k = 1, 2, 3$ . Συνεπώς, ο εγκλωβισμός του χρώματος οδηγεί στην ύπαρξη μόνο δύο ειδών βασικών αδρονικών καταστάσεων που δεν έχουν χρώμα, τα μεσόνια και τα βαρυόνια.

Το δυναμικό που περιγράφει την αλληλεπίδραση κουάρκ-αντικουάρκ σε μικρές αποστάσεις, θα είναι ίδιο με το δυναμικό Coulomb της κβαντικής ηλεκτροδυναμικής, μεταξύ αντίθετων φορτίων, με τη διαφορά ότι η σταθερά λεπτής υφής  $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$  αντικαθίσταται από μία σταθερά  $\alpha_3 = g_3^2/4\pi$

$$V(r) = -f \frac{\alpha_3}{r} \quad (4.180)$$

όπου ο παράγοντας χρώματος  $f$  εξαρτάται από την κατάσταση χρώματος των αλληλεπιδρώντων κουάρκ. Είναι επίσης θετικός όταν τα κουάρκ βρίσκονται σε μονή κατάσταση χρώματος. Τότε το δυναμικό είναι αρνητικό, δηλαδή τα κουάρκ έλκονται ισχυρότερα, όταν βρίσκονται σε μονή κατάσταση χρώματος.

Τα κουάρκ αλληλεπιδρούν ασθενώς στις υψηλές ενέργειες, επιτρέποντας έτσι να γίνουν κάποιοι υπολογισμοί μέσω της θεωρίας διαταραχών. Στις χαμηλές ενέργειες, η αλληλεπίδραση γίνεται έντονη και οδηγούμαστε έτσι στο φαινόμενο του εγκλωβισμού (confinement), δηλαδή τον περιορισμό κουάρκ και γκλουονίων εντός των αδρονίων.

Ενδιαφέρον έχει η μελέτη του ενεργού δυναμικού που υφίσταται μεταξύ των κουάρκ σε μεγάλες αποστάσεις, δηλαδή του δυναμικού της κβαντικής χρωμοδυναμικής. Το ενεργό δυναμικό μεταξύ ενός κουάρκ και ενός αντικουάρκ σε ένα μεσόνιο περιέχει ένα όρο που αυξάνεται, ανάλογα με την απόσταση των  $q$  και  $\bar{q}$ . Ο όρος αυτός δηλαδή είναι ανάλογος της απόστασης ( $\propto r$ ). Για μεγάλες το δυναμικό είναι γραμμικό

$$V(r) = br \quad (4.181)$$

Η γραμμικότητα της παραπάνω σχέσης αναδεικνύει το φαινόμενο του εγκλωβισμού. Στο confinement δηλαδή το δυναμικό αναμένεται να είναι ανάλογο της απόστασης, γεγονός που δεν αποδεικνύεται όμως αναλυτικά στην θεωρία διαταραχών. Σημειώνουμε πως σε μία σύγκρουση υψηλής ενέργειας δεν θα παρατηρήσουμε κουάρκ ή γκλουόνια σε ελεύθερη μορφή, αλλά πίδακες αδρονίων. Σε σύγκρουση ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου μεγάλης ενέργειας παρατηρούνται δύο διαφορετικά κανάλια από τα οποία εν τέλει προκύπτουν πίδακες αδρονίων

$$e^+ + e^- \rightarrow q + \bar{q} \rightarrow j + \bar{j} \quad (4.182)$$

$$e^+ + e^- \rightarrow q + \bar{q} + G \rightarrow j + \bar{j} + j \quad (4.183)$$

Το γκλουόνιο της τελευταίας σχέσης έχει εκπεμφθεί από ένα από τα κουάρκ της τελικής κατάστασης. Η δημιουργία τριών πιδάκων προκύπτει από την κβαντική χρωμοδυναμική με αποτέλεσμα την

έμμεση επιβεβαίωση των γκλουονίων και των αλληλεπιδράσεών τους με τα κουάρκ.

Πιο καθοριστική ιδιότητα της κβαντικής χρωμοδυναμικής είναι αυτό που ονομάζουμε ασυμπτωτική ελευθερία. Ανακαλύφθηκε το 1973 από τους David Gross και Frank Wilczek και ανεξάρτητα από τον David Politzer την ίδια χρονιά. Βραβεύτηκαν και οι τρεις με το βραβείο Nobel στην Φυσική το 2004. Οι σταθερές ζεύξης που έχουμε ορίσει, δεν είναι ακριβώς σταθερές, αλλά εξαρτώνται από τις ενέργειες που μετράμε, άρα και από την απόσταση. Για την μελέτη του φαινομένου αυτού, χρησιμοποιείται η θεωρία διαταραχών. Συγκεκριμένα η ασυμπτωτική ελευθερία μπορεί να προκύψει υπολογίζοντας τη συνάρτηση  $\beta$  που περιγράφει τις αλλαγές της σταθεράς σύζευξης της θεωρίας κάτω από την ομάδα επανακανονικοποίησης. Για επαρκώς μικρές αποστάσεις ή μεγάλες ανταλλαγές ορμής καταλήγουμε στο φαινόμενο του εγκλωβισμού. Συνοπτικά μπορούμε να αναφέρουμε κάποια αποτελέσματα που προκύπτουν αναφορικά με το φαινόμενο της ασυμπτωτικής ελευθερίας. Ο υπολογισμός της συνάρτησης  $\beta$  είναι θέμα αξιολόγησης των διαγραμμάτων Feynman που περιγράφουν την αλληλεπίδραση ενός κουάρκ που εκπέμπει ή απορροφά ένα γκλουόνιο. Ουσιαστικά, η συνάρτηση αυτή περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο οι σταθερές σύζευξης διαφοροποιούνται καθώς κλιμακώνεται το σύστημα. Σε μη αβελιανές θεωρίες, όπως η  $QCD$ , η ύπαρξη ασυμπτωτικής ελευθερίας εξαρτάται από την ομάδα βαθμίδας και τον αριθμό των γεύσεων των αλληλεπιδρώντων σωματιδίων. Στην χαμηλότερη, μη τετριμμένη τάξη, η συνάρτηση  $\beta$  για μία  $SU(N)$  θεωρία βαθμίδας, για  $n_f$  γενιές φερμιονίων, δίνεται από την σχέση

$$\beta(\alpha_s) = -\frac{2(\alpha_s)^2}{4\pi} \left( 11 - \frac{2}{3}n_f \right) \quad (4.184)$$

Στην φύση απαντώνται έξι γενιές φερμιονίων, άρα  $n_f = 6$ . Επομένως η προηγούμενη σχέση γίνεται

$$\beta(\alpha_s) = -(\alpha_s)^2 \frac{7}{2\pi} \quad (4.185)$$

Ακόμα, στην περίπτωση της  $SU(3)$ , για 1-loop, το  $\beta_0$  έχει την μορφή

$$\beta_0 = \frac{11}{3}C_A - \frac{4}{3}n_f T_f \quad (4.186)$$

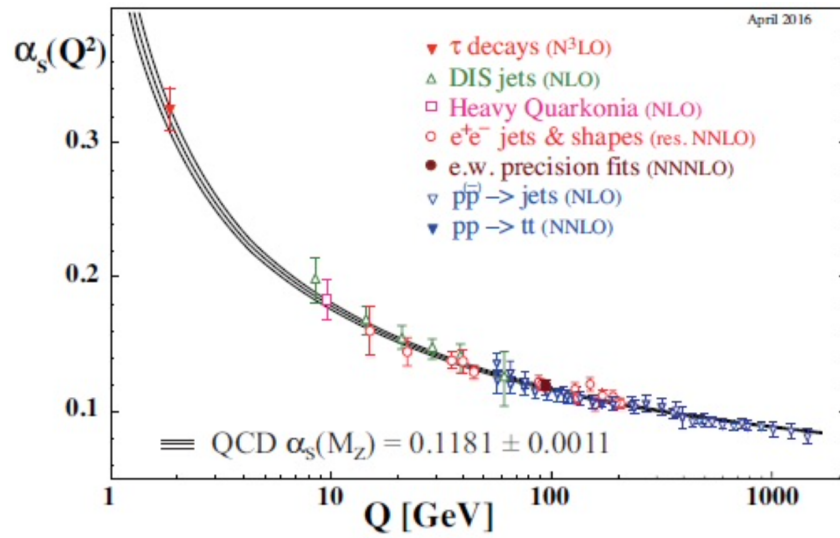
όπου  $C_A = 3$  και  $T_f = \frac{1}{2}$ . Άρα  $\beta_0 = 7$ . Γράφουμε τώρα την διαφορική επίσωση

$$\beta(\alpha_s) = \mu \frac{d}{d\mu} \alpha_s = -(\alpha_s)^2 \frac{7}{2\pi} \quad (4.187)$$

και λύνοντας ως προς  $\alpha_s$  καταλήγουμε στην σχέση

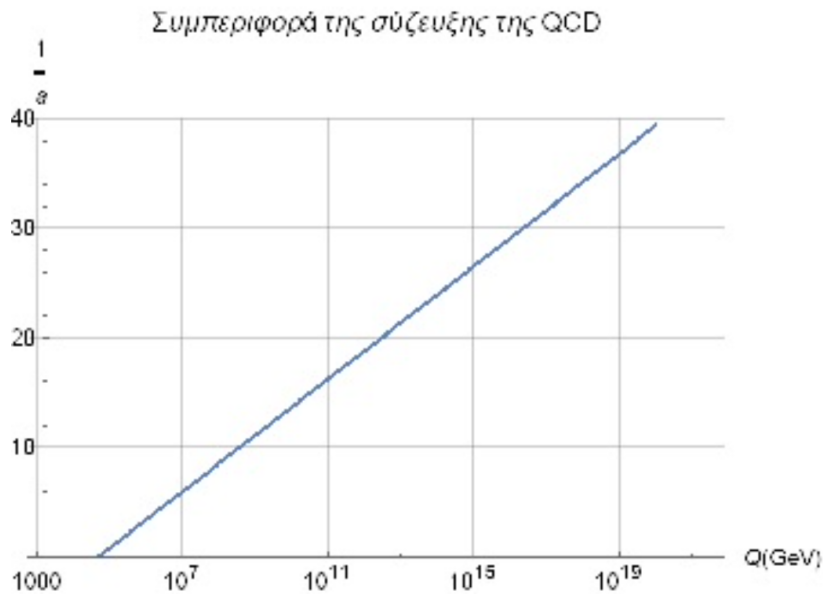
$$\alpha_s(\mu) = \frac{2\pi}{7} \frac{1}{\ln\left(\frac{\mu}{\Lambda_{QCD}}\right)} \quad (4.188)$$

όπου  $\Lambda_{QCD}$  είναι μία σταθερά ολοκλήρωσης. Για 1-loop συνεισφορά, πειραματικά αποδεικνύεται  $\alpha(91.1876\text{GeV}) = 0.11875$ , άρα  $\Lambda_{QCD} = 46.81\text{MeV}$ . Για συνεισφορά μέχρι και 4-loop έχουμε  $\Lambda_{QCD} = 213\text{MeV}$ . Παρατηρούμε τον μεγάλο ρόλο που διαδραματίζουν οι συνεισφορές μεγαλύτερης τάξης βρόγχων. Ακολουθεί ένα πειραματικό διάγραμμα:



Σχήμα 4.4: Συμπεριφορά της σύζευξης της  $QCD$ .

Για την τιμή του  $\Lambda_{QCD}$  έχουμε την ακόλουθη γραφική παράσταση του  $\alpha_s(\mu)$ :



Σχήμα 4.5: Εξάρτηση του  $\frac{1}{\alpha_s}$ , για  $\mu = Q$ , σε λογαριθμική κλίμακα.

Παρατηρούμε ότι η σύζευξη μειώνεται, με την ελάττωση της απόστασης, επομένως επιβεβαιώνεται η ασυμπτωτική ελευθερία της θεωρίας μας. Ακόμα με την αύξηση της απόστασης, αυξάνεται και η σύζευξη, γεγονός που δικαιολογεί το ότι δεν συναντάμε μεμονωμένα κουάρκ, δηλαδή το confinement.

## 4.10 Σύνοψη

Ολοκληρώσαμε στο σημείο αυτό, την περιγραφή του καθιερωμένου προτύπου  $U(1)_Y \times SU(2)_L \times SU(3)_c$ . Την ανάπτυξή του καθοδήγησε η ανάγκη ύπαρξης μίας ενιαίας θεωρίας που περιλαμβάνει όλες τις αλληλεπιδράσεις της φύσης. Τα πειράματα που έχουν διεξαχθεί προς το παρόν, επιβεβαιώνουν τις προβλέψεις της θεωρίας αυτής, με αποτέλεσμα να θεωρείται επιτυχημένη. Πρόκειται για ένα ικανοποιητικό μοντέλο περιγραφής του μικρόκοσμου, καθώς είναι μία θεωρία βαθμίδας επανακανονικοποιήσιμη με μεγάλη προβλεπτική ισχύ. Ακόμα τα πειραματικά αποτελέσματα των φορτισμένων και ουδετέρων ρευμάτων συμφωνούν σε πολύ μεγάλο βαθμό με τις θεωρητικές προβλέψεις. Προδίδεται όμως η πορεία προς μία ενοποιημένη θεωρία, λόγω και της ανάμιξης της ασθενούς και της ηλεκτρομαγνητικής αλληλεπίδρασης. Από μία μόνο διπλέτα, με την οποία πραγματοποιείται το αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας της ομάδας  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  στην  $U(1)_{em}$ , ο μηχανισμός Higgs, μας παρέχει όλες τις φερμιονικές μάζες.

## 4.11 Ανάγκη επέκτασης του καθιερωμένου προτύπου

Ως αυτό το σημείο, το καθιερωμένο πρότυπο αποδεικνύεται ιδιαίτερα χρήσιμο και λειτουργικό. Προκύπτει λοιπόν άμεσα απορία, για τον λόγο που χρειάζεται να επεκταθεί. Γενικότερα, η πορεία της φυσικής μέχρι και σήμερα δείχνει πως το μέγιστο φυσικό νόημα, αναδεικνύεται όταν οι νόμοι έχουν καθολική ισχύ και δεν εφαρμόζονται σε μεμονωμένες περιπτώσεις. Πιο συγκεκριμένα όμως, στην περίπτωση του καθιερωμένου προτύπου, ωθούμαστε στην επέκταση, λόγω της μη μηδενικής μάζας των νετρίνων, την αδυναμία ως προς τον προσδιορισμό της μάζας του μποζονίου Higgs, καθώς και στην δυσκολία που αντιμετωπίζουμε να εξηγήσουμε, γιατί το ηλεκτρικό φορτίο είναι κβαντωμένο. Τροχοπέδη, ακόμα αποτελεί το πλήθος των αυθαίρετων παραμέτρων που παρουσιάζονται και συνδέονται με τις μάζες των σωματιδίων. Το καθιερωμένο πρότυπο δεν αποτελεί μία ενοποιημένη θεωρία, αφού παραμερίζει την βαρύτητα. Ακόμα κι αν επιμείνουμε μόνο στις τρεις προαναφερθείσες αλληλεπιδράσεις, η ισχυρή δεν αναμιγνύεται με καμία από τις άλλες δύο. Παρά την ανάμιξη της ασθενούς με την ηλεκτρομαγνητική, δεν μπορούμε να αναφερθούμε σε ενοποίηση, καθώς σε κάθε μία αντιστοιχίζεται διαφορετική σταθερά ζεύξης. Οι σταθερές ζεύξης των τριών αλληλεπιδράσεων διαφέρουν, ενώ σε μία ενοποιημένη θεωρία θα αναμέναμε την ισότητά τους. Επίσης, κατά την χρήση του μηχανισμού Higgs υπάρχει μία αυθαρεσία, καθώς ο αριθμός και οι αναπαραστάσεις των πεδίων Higgs αποτελούν αυθαίρετες επιλογές. Επιπλέον δεν παρέχεται καμία εξήγηση, έστω και εννοιολογική, για τον λόγο που οι μάζες των κουάρκ και λεπτονίων είναι τόσο μικρότερες από τις μάζες των πεδίων βαθμίδας. Τα νετρίνα ακόμα θεωρούνται άμαζα, λόγω της απουσίας των δεξιόστροφων, αλλά απουσιάζει ο λόγος που εξαιρούνται από τον γενικότερο κανόνα.

Η δυσχέρεια λοιπόν του καθιερωμένου προτύπου να εδραιωθεί ως μία θεωρία ενοποίησης, ανάγκασε το επιστημονικό ενδιαφέρον, να βασιστεί σε αυτό αναζητώντας ταυτόχρονα μία πιο θεμελιώδη θεωρία. Οι μεγαλοενοποιημένες θεωρίες (*GUTs*), συνεπάγονται την ύπαρξη μίας ενιαίας σταθεράς ζεύξης. Έχουν ως συνέπεια την ερμηνεία της κβάντωσης του ηλεκτρικού φορτίου, την πρόβλεψη του  $\sin^2\theta_W$ , που στο καθιερωμένο πρότυπο αποτελεί μία ελεύθερη παράμετρο και την συσχέτιση των φερμιονικών μαζών. Εξειδικεύοντας έπειτα στο εκάστοτε μοντέλο, προκύπτουν επιπλέον πλεονεκτήματα.

Μέρος II  
Ενοποίηση



## Κεφάλαιο 5

# Το πρότυπο $SU(5)$

### 5.1 Ενοποίηση

Τα βήματα που θα ακολουθήσουμε για την δημιουργία του μεγαλοενοποιημένου μοντέλου, ξεκινούν με την επιλογή μίας κατάλληλης ομάδας  $G$ . Αυτή μέσω της απαίτησης τοπικής αναλλοιωτότητας, μας παρέχει τα σπιν 1 μποζόνια βαθμίδας. Επιλέγουμε στην συνέχεια την αναπαράσταση των φερμιονίων, ώστε να έπεται η δομή του Καθιερωμένου Προτύπου σε χαμηλές ενέργειες. Διαλέγουμε έπειτα την αναπαράσταση των βαθμωτών πεδίων βαθμίδας ώστε έπειτα από το σπάσιμο συμμετρίας της  $G$  να παίρνουμε την  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ .

Στο Καθιερωμένο Πρότυπο, οι αναπαραστάσεις των αριστερόστροφων και δεξιόστροφων σωματιδίων της ύλης είναι ασύμμετρες. Για παράδειγμα τα αριστερόστροφα κουάρκ  $up$  και  $down$   $\begin{pmatrix} u^\alpha \\ d^\alpha \end{pmatrix}_L$ , ανήκουν σε μία διπλέτα, σύμφωνα με την  $SU(2)$ , έχουν τρία χρώματα και υπερφορτίο  $\frac{1}{2}Y = \frac{1}{6}$ . Άρα μπορούμε να εκφράσουμε τον μετασχηματισμό του κάθε πεδίου, ως προς  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  ως  $(\mathbf{3}, \mathbf{2}, \frac{1}{6})_L$ . Από την άλλη, το δεξιόστροφο κουάρκ  $u_R^\alpha$  είναι μία τριπλέτα σύμφωνα με την ομάδα  $SU(3)$ , μία κατάσταση singlet σύμφωνα με την  $SU(2)$  και έχει υπερφορτίο  $\frac{1}{2}Y = \frac{2}{3}$ . Άρα έχουμε  $(\mathbf{3}, \mathbf{1}, \frac{2}{3})_R$ . Συνοψίζοντας, τα σωματίδια μίας γενιάς γράφονται ως προς  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  ως εξής

$$\begin{pmatrix} u^\alpha \\ d^\alpha \end{pmatrix}_L \rightarrow (\mathbf{3}, \mathbf{2}, \frac{1}{6})_L$$

$$u_R^\alpha \rightarrow (\mathbf{3}, \mathbf{1}, \frac{2}{3})_R$$

$$d_R^\alpha \rightarrow (\mathbf{3}, \mathbf{1}, -\frac{1}{3})_R$$

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L \rightarrow (\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\frac{1}{2})_L$$

$$e_R^\alpha \rightarrow (\mathbf{1}, \mathbf{1}, -1)_R \tag{5.1}$$

Προκύπτουν επομένως  $6 + 3 + 3 + 2 + 1 = 15$  πεδία για το καθιερωμένο πρότυπο, τα οποία αναλυτικά είναι

$$\gamma, W^\pm, Z, G_\beta^\alpha \text{ μποζονικά πεδία με σπιν } 1$$

$$e^-, \mu^-, \tau^-, \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau \text{ λεπτονικά πεδία}$$

$u, d, c, s, t, b$  πεδία γεύσης κουάρκ για κάθε ένα από τα τρία χρώματα μπλε, κόκκινο, πράσινο

$$\Phi^+, \phi^0 \text{ πεδία Higgs με σπιν } 0$$

Η ανομοιογένεια των αναπαραστάσεων των πεδίων προδίδει την ύπαρξη μίας ευρύτερης συμμετρίας. Κεντρική ιδέα είναι η ύπαρξη μίας ομάδας μεγαλύτερης αυτής του καθιερωμένου προτύπου. Έστω

$$G \supset SU(3) \times SU(2) \times U(1) \quad (5.2)$$

Θέλουμε η  $G$  να συγκεντρώσει τις παραπάνω αναπαραστάσεις σε μία πιο ενοποιημένη μορφή. Θα πρέπει η φυσική που την διέπει να ισχύει σε υψηλές ενέργειες, ενώ ταυτόχρονα απαιτούμε για ενέργειες χαμηλότερες μίας οριακής, το αυθόρμητο σπάσιμο της συμμετρίας να οδηγεί στο Καθιερωμένο Πρότυπο. Επιθυμούμε λοιπόν, μέσω των μποζονίων βαθμίδας της  $G$ , και όχι αυτών του Καθιερωμένου Προτύπου, να επιτύχουμε μία σύζευξη των αναπαραστάσεων. Για να δημιουργήσουμε την κατάλληλη ομάδα, οφείλουμε να λάβουμε υπόψιν πως οι μετασχηματισμοί βαθμίδας μετατίθενται με την ομάδα Lorentz. Επομένως δεν θα μπορούμε να μετασχηματίσουμε αριστερόστροφα σε δεξιόστροφα σωματίδια. Για τον λόγο αυτόν, μέσω του ακόλουθου συμβολισμού θα μετατρέψουμε όλα τα σωματίδια της θεωρίας μας σε αριστερόστροφα. Αυτό θα γίνει μέσω της συζυγίας φορτίου

$$(\psi_R)^c = (\psi^c)_L = \psi_L^c \quad (5.3)$$

και άρα θα είναι

$$\psi^c = C\gamma_0\psi^* = i\gamma^2\psi^* \quad (5.4)$$

Επομένως οι αναπαραστάσεις των σωματιδίων θα γράφονται

$$\begin{pmatrix} u^\alpha \\ d^\alpha \end{pmatrix}_L \rightarrow \left( \mathbf{3}, \mathbf{2}, \frac{1}{6} \right)$$

$$u_L^{\alpha c} \rightarrow \left( \mathbf{3}^*, \mathbf{1}, -\frac{2}{3} \right)$$

$$d_L^{\alpha c} \rightarrow \left( \mathbf{3}^*, \mathbf{1}, \frac{1}{3} \right)$$

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L \rightarrow \left( \mathbf{1}, \mathbf{2}, -\frac{1}{2} \right)$$

$$e_L^c \rightarrow (\mathbf{1}, \mathbf{1}, 1) \quad (5.5)$$

Επομένως για τα δεξιόστροφα σωματίδια, επιλέξαμε τα αντισωματίδιά τους και στις αναπαραστάσεις αυτών θεωρήσαμε την συζυγή αναπαράσταση κάτω από την αντίστοιχη ομάδα. Η ελικότητα πλέον δεν χρειάζεται να αναφερθεί, καθώς όλα τα σωματίδια είναι αριστερόστροφα.

## 5.2 Επιλογή της ομάδας $SU(5)$

### 5.2.1 Γενικά χαρακτηριστικά των ομάδων $SU(n)$

Οι ειδικές μοναδιακές ομάδες  $SU(n)$  είναι μη αβελιανές και αποτελούνται από  $n \times n$  μοναδιακούς πίνακες με ορίζουσα ίση με τη μονάδα. Πρόκειται για ένα υποσύνολο των  $U(n)$  ομάδων, με διάσταση  $n^2 - 1$  αριθμός που υποδεικνύει και το πλήθος των γεννητόρων, τους οποίους θα συμβολίσουμε με  $T_\alpha^b$ , όπου  $\alpha, b = 1, 2, \dots, n$ . Ένας γενικός μετασχηματισμός αυτών των ομάδων μπορεί να γραφεί ως

$$U = \exp \left( -i \sum_{i=1}^{n^2-1} \beta^i L^i \right) = \exp(-i\beta \mathbf{L}) \quad (5.6)$$

Ο πίνακας  $U$  είναι μοναδιαίος με  $\det U = 1$ . Επομένως οι γεννήτορες  $T_\alpha^b$  είναι ερμιτιανοί με μηδενικό ίχνος. Μία βάση των πινάκων της ομάδας  $SU(n)$  μπορεί να είναι η εξής

$$(L_b^\alpha)_{cd} = (L_b^\alpha)_d^c = \delta_b^c \delta_d^\alpha - \frac{1}{n} \delta_b^\alpha \delta_d^c \quad (5.7)$$

Για  $\alpha \neq b$ , ο  $L_b^\alpha$  δεν είναι ερμιτιανός με  $(L_b^\alpha)_{b\alpha} = 1$ , με  $(L_b^\alpha)^\dagger = (L_b^\alpha)$ . Άρα οι  $n(n-1)$ , στο πλήθος ερμιτιανοί πίνακες  $\frac{1}{2}(L_\alpha^b + L_b^\alpha)$  και  $\frac{-i}{2}(L_\alpha^b - L_b^\alpha)$  είναι οι μη διαγώνιοι γεννήτορες της ομάδας  $SU(n)$ .

Για  $\alpha = b$ , ο πίνακας  $(L_\alpha^b)$  είναι ερμιτιανός και διαγώνιος με  $(L_\alpha^\alpha)_\alpha^\alpha = (n-1)/n$  και για  $\alpha \neq b$   $(L_\alpha^\alpha)_\alpha^\alpha = -1/n$ . Αφού το άθροισμα των  $(L_\alpha^\alpha)$  για οποιοδήποτε  $\alpha$  ισούται με μηδέν, τότε οι πίνακες αυτοί δεν είναι ανεξάρτητοι. Υπάρχει λοιπόν μία πιο βολική βάση για τους διαγώνιους γεννήτορες

$$\frac{1}{\sqrt{2k(k+1)}} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & 0 \\ & 1 & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & & -k & & & \\ & & & & & & & & 0 & & \\ 0 & & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

όπου το πλήθος των μονάδων είναι  $k$  και  $k = 1, \dots, n-1$ . Ακόμα ισχύουν οι μεταθετικές σχέσεις

$$[L_b^\alpha, L_b^\alpha] = \delta_d^\alpha L_d^c - \delta_b^c L_d^\alpha, \quad [T_b^\alpha, T_d^c] = \delta_d^\alpha T_b^c - \delta_b^c T_d^\alpha \quad (5.9)$$

$$[T_b^\alpha, \psi^c] = -(L_b^\alpha)_d^c \psi^d, \quad [T_b^\alpha, \chi_c] = -(L_b^\alpha(n^*))_c^d \chi_d \quad (5.10)$$

όπου  $\psi^c$  τα πεδία με  $c = 1$  και  $\chi_\psi$  τα συζυγοανάστροφα πεδία, για τα οποία ισχύει  $\chi_c = (\psi^c)^\dagger = (\psi^\dagger)_c$ . Κάτω από απειροστούς μετασχηματισμούς, τα πεδία μετασχηματίζονται ως εξής

$$\psi^c \rightarrow U_d^c \psi^d = (U\psi)^c \quad (5.11)$$

$$\chi_c \rightarrow \chi_d (U^\dagger)_c^d = (\chi U^\dagger)_c \quad (5.12)$$

Άρα οι ποσότητες της μορφής  $(\psi^\dagger)_c \psi^c$  παραμένουν αναλλοίωτες κάτω από μετασχηματισμούς της ομάδας  $SU(n)$ . Για τα ερμιτιανά πεδία βαθμίδας  $A^i$  της ομάδας ισχύει

$$\frac{1}{\sqrt{2}}A = \sum_{i=1}^{n^2-1} L^i A^i = \frac{\lambda \mathbf{A}}{2} \quad (5.13)$$

Οι συναλλοίωτες παράγωγοι ορίζονται ως εξής

$$(D_\mu \psi)^\alpha = [\partial_\mu \delta_b^\alpha - ig(\mathbf{A}_\mu \mathbf{L}(n))^\alpha_b] \psi^b = [\partial_\mu \delta_b^\alpha - \frac{ig}{\sqrt{2}}(\mathbf{A}_\mu)_b^\alpha] \psi^b \quad (5.14)$$

$$(D_\mu \chi)_\alpha = [\partial_\mu \delta_b^\alpha - ig(\mathbf{A}_\mu \mathbf{L}(n^*))_\alpha^b] \chi_b = [\partial_\mu \delta_b^\alpha + \frac{ig}{\sqrt{2}}(\mathbf{A}_\mu)_\alpha^b] \chi_b \quad (5.15)$$

Για μία αντισυμμετρική αναπαράσταση  $\psi^{ab} = -\psi^{ba}$ ,  $n(n-1)/2$  διαστάσεων, η συναλλοίωτη παράγωγος είναι

$$(D_\mu \psi)^{ab} = \partial_\mu \psi^{ab} - ig(\mathbf{A}_\mu \mathbf{L})^\alpha_c \psi^{cb} - ig(\mathbf{A}_\mu \mathbf{L})^b_d \psi^{ad} = \partial_\mu \psi^{ab} - \frac{ig}{\sqrt{2}}(\mathbf{A}_\mu)_d^b \psi^{ad} \quad (5.16)$$

### 5.2.2 $SU(5)$

Θα εξετάσουμε στην συνέχεια τις απαιτήσεις που θα πρέπει να πληροί μία ομάδα  $G$  ώστε να αποτελεί μία βιώσιμη επιλογή ενός μεγαλοενοποιημένου μοντέλου. Το καθιερωμένο πρότυπο βασίζεται στο ευθύ γινόμενο  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ . Είναι δηλαδή τάξης 4. Επομένως περιέχει τέσσερις ανεξάρτητους γεννήτορες που διαγωνοποιούνται ταυτόχρονα, δύο από τους οποίους αντιστοιχούν στην  $SU(3)$ , ένας στην  $SU(2)$ , που ονομάζεται  $T_3$  και ένας στην  $U(1)$ , δηλαδή ο γεννήτορας του υπερφορτίου. Πρέπει λοιπόν η ομάδα  $G$  που ψάχνουμε να έχει ελάχιστη τάξη 4, άρα

$$\text{rank} G \geq 4 \quad (5.17)$$

ώστε να εμβαπτίζει την ομάδα του Καθιερωμένου Προτύπου.

Λογικά κινούμενοι, θα αναζητήσουμε αρχικά ομάδες τάξης ίσης με τέσσερα. Αυτές είναι ποικίλες, αλλά μόνο μία είναι κατάλληλη για την επέκταση του καθιερωμένου προτύπου. Αυτό συμβαίνει καθώς μόνο μία περιέχει ως υποομάδες, αυτές του καθιερωμένου προτύπου και ταυτόχρονα επιτρέπει την ύπαρξη μιγαδικών αναπαραστάσεων, ώστε να μπορούν να εκφραστούν τα πεδία. Πρόκειται για την ομάδα  $SU(5)$  που προτάθηκε από τους Georgi και Glashow ως η πρώτη θεωρία Μεγάλης Ενοποίησης.

Θα ήταν λάθος να θεωρήσουμε μία ομάδα της μορφής

$$SU(3) \times W \quad (5.18)$$

διότι καμία ομάδα της μορφής αυτής δεν μπορεί να περιγράψει τα αδρόνια, καθώς ο γεννήτορας του ηλεκτρικού φορτίου που διέπει τις ομάδες αυτές δεν δέχεται κλασματικές τιμές. Για την περιγραφή νετρονίων και πρωτονίων χρειαζόμαστε κλασματικές τιμές για το ηλεκτρικό φορτίο του κάθε κουάρκ. Οι υπόλοιπες ομάδες τάξης τέσσερα είναι οι ακόλουθες

$$[SU(2)]^4, [O(5)]^5, [SU(3)]^2, [G_2]^2, O(8), O(9), Sp(8), F_4, SU(5) \quad (5.19)$$

Οι πρώτες δύο απορρίπτονται αμέσως διότι δεν περιέχουν ως υποομάδα την  $SU(3)$ , καθώς στην  $G$  απαιτούμε να περιέχονται όλες οι ομάδες του καθιερωμένου προτύπου. Η  $[SU(3)]^2$  επίσης απορρίπτεται καθώς είναι της μορφής  $SU(3) \times W$ , άρα δεν μπορεί να περιγράψει τα αδρόνια. Οι  $[G_2]^2, O(8), O(9), Sp(8), F_4$  δεν ικανοποιούν τις απαιτήσεις μας, διότι δεν μπορούν να έχουν μιγαδικές αναπαράστασεις, άρα ούτε και να εκφράσουν όλα τα σωματίδια της θεωρίας μας. Όπως είδαμε σε προηγούμενη παράγραφο η αναπαράσταση των  $up$  και  $down$  τύπου antiquarks στην  $SU(3)$  είναι μία  $\mathbf{3}^*$ . Μένει λοιπόν όπως αναφέραμε και στην αρχή του κεφαλαίου, η ομάδα  $SU(5)$ , ως απλούστερη επιλογή.

Θα ελέγξουμε για αρχή αν οι αναπαράστασεις της  $SU(5)$  είναι κατάλληλες, ώστε να περιέχουν όλες τις αναπαράστασεις σωματιδίων του καθιερωμένου προτύπου. Όπως έχουμε αναφέρει, οι γεννήτορες της είναι 24 και είναι τέτοιοι ώστε να αναπαρίστανται ως  $5 \times 5$  ερμιτιανοί πίνακες που δρουν σε πέντε στοιχεία που συμβολίζουμε με  $\psi^\mu$ , όπου  $\mu = 1, 2, \dots, 5$ . Τα πέντε αυτά αντικείμενα είναι η θεμελιώδης αναπαράσταση της ομάδας και τα συμβολίζουμε με  $\mathbf{5}$ . Από τους 24 γεννήτορες, οι 8 έχουν την μορφή

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

όπου  $A$  είναι οι  $3 \times 3$  ερμιτιανοί πίνακες Gell-Mann της ομάδας  $SU(3)$ . Υπάρχουν επίσης τρεις πίνακες της μορφής

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

όπου  $B$  είναι οι τρεις  $2 \times 2$  πίνακες Pauli της ομάδας  $SU(2)$ . Ο αντίστοιχος γεννήτορας της ομάδας  $U(1)$  είναι ο  $5 \times 5$  πίνακας του υπερφορτίου:

$$\frac{1}{2}Y = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & & & & \\ & -\frac{1}{3} & & & \\ & & -\frac{1}{3} & & \\ & & & \frac{1}{2} & \\ & & & & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (5.22)$$

Έχουμε δηλαδή ήδη εκφράσει τους 12 γεννήτορες του καθιερωμένου προτύπου σε γεννήτορες της  $SU(5)$ . Απομένουν 12, οι οποίοι είναι αυτοί που δεν ανήκουν στο καθιερωμένο πρότυπο. Πρέπει τώρα να αναλύσουμε την θεμελιώδη αναπαράσταση της  $SU(5)$  στις ομάδες  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ . Αυτό σημαίνει πως όταν γράψουμε την ανάλυση της θεμελιώδους αναπαράστασης, θα γνωρίζουμε ήδη την ανάλυση οποιασδήποτε άλλης αναπαράστασης στις ομάδες του καθιερωμένου προτύπου, αφού κάθε μία προκύπτει από την θεμελιώδη. Για να εξασφαλίσουμε την ενσωμάτωση του καθιερωμένου προτύπου ( $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ ) λοιπόν, στην  $SU(5)$  θα χωρίσουμε το πεδίο  $\psi^\mu$  σε ένα κομμάτι που μετασχηματίζεται σύμφωνα με την  $SU(3)$  και ένα που μετασχηματίζεται σύμφωνα με την  $SU(2)$ . Για να εξασφαλίσουμε το παραπάνω, διακρίνουμε τους δείκτες  $\mu$  σε

$$\mu = (\alpha, i), \quad \alpha = 1, 2, 3 \text{ και } i = 4, 5 \quad (5.23)$$

ώστε να υπάρχει συνέπεια με την μορφή των 12 γεννητόρων που εκφράσαμε παραπάνω. Με αυτόν τον τρόπο η ομάδα  $SU(3)$  δρα στον δείκτη  $\alpha$  και η  $SU(2)$  στον δείκτη  $i$ , ενώ η  $U(1)$ , δρα σε όλους τους δείκτες. Τα τρία αντικείμενα  $\psi^\alpha$  μετασχηματίζονται ως τρισδιάστατη αναπαράσταση κάτω από την  $SU(3)$ , άρα μπορεί να είναι είτε μία  $\mathbf{3}$ , είτε μία  $\mathbf{3}^*$ . Έστω ότι επιλέγουμε να μετασχηματίζονται

ως **3**. Στη συνέχεια θα συμπεράνουμε πως πρόκειται για την σωστή επιλογή με τον δεδομένο πίνακα υπερφορτίου. Κάτω από την  $SU(2)$  δεν μετασχηματίζονται καθόλου, επομένως κάθε ένα από τα τρία αντικείμενα αυτά ανήκει σε μία *singlet* αναπαράσταση **1**. Επιπλέον για την ομάδα  $U(1)$ , παρατηρούμε από τον πίνακα του υπερφορτίου ότι όλα τα αντικείμενα αυτά έχουν υπερφορτίο  $-1/3$ . Καταλήγουμε πως τα αντικείμενα  $\psi^\alpha$  της θεμελιώδους αναπαράστασης  $\psi^\mu$ , αναλύονται στις ομάδες του καθιερωμένου προτύπου ως  $(\mathbf{3}, \mathbf{1}, -1/3)$ .

Τα αντικείμενα  $\psi^i$ , της θεμελιώδους αναπαράστασης  $\psi^\mu$ , αντίστοιχα μετασχηματίζονται ως *singlet*, δηλαδή **1**, κάτω από την ομάδα  $SU(3)$ , ως διπλέτα, δηλαδή **2** κάτω από την  $SU(2)$  και η τιμή του υπερφορτίου είναι  $1/2$ . Συνολικά έχουμε  $(\mathbf{1}, \mathbf{2}, 1/2)$ .

Μέχρι τώρα, έχουμε ενσωματώσει όλες τις ομάδες του καθιερωμένου προτύπου,  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  στην  $SU(5)$ , έχοντας αναλύσει ακριβώς τον τρόπο που γράφεται η θεμελιώδης αναπαράσταση **5** της  $SU(5)$  στις ομάδες αυτές, δηλαδή

$$\mathbf{5} \rightarrow (\mathbf{3}, \mathbf{1}, -1/3) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2}, 1/2) \quad (5.24)$$

Συγκρίνοντας τις σχέσεις (5.5) και (5.24), παρατηρούμε ότι κανένα από τα σωματίδια δεν ταιριάζει. Αν γράψουμε όμως την complex conjugate αναπαράσταση  $\mathbf{5}^*$ , έχουμε

$$\mathbf{5}^* \rightarrow (\mathbf{3}^*, \mathbf{1}, 1/3) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2}, -1/2) \quad (5.25)$$

Ισχύει κάτω από την  $SU(2)$  ότι  $2^* = \mathbf{2}$ . Σε αυτό το συμπέρασμα καταλήγουμε ευκολότερα από τα young tableaux. Για την  $SU(2)$  έχουμε:

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} = \mathbf{1} \quad \square = \mathbf{2} \quad \mathbf{2} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}$$

Για την  $SU(3)$  έχουμε:

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} = \mathbf{1} \quad \square = \mathbf{3} \quad \mathbf{3}^* = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \neq \mathbf{3}$$

Τα young tableaux δείχνουν την διάσταση μίας αναπαράστασης, σύμφωνα με την ομάδα στην οποία ανήκουν. Είναι ιδιαίτερα χρήσιμα εργαλεία για τον υπολογισμό του άμεσου γινομένου αναπαράστασεων. Για την εύρεση των young tableaux μίας  $\mathbf{n}$  αναπαράστασης υπολογίζουμε αρχικά την *singlet* **1**, βρίσκουμε το young tableaux, το οποίο αν ενσωματωθεί με αυτό της  $\mathbf{n}$ , μας δίνει την **1** και το στρέφουμε κατά  $\pi$ . Έχουμε δημιουργήσει με τον τρόπο αυτόν, το young tableaux της αναπαράστασης  $\mathbf{n}^*$ .

Επιστρέφουμε στην περίπτωση της αναπαράστασης  $\mathbf{5}^*$ , την οποία αναλύσαμε στις ομάδες του καθιερωμένου προτύπου. Πέντε από τα δεκαπέντε πεδία χωράνε σε μία μόνο αναπαράσταση της  $SU(5)$ .

Πιο συγκεκριμένα αυτά είναι τα  $d_L^{\alpha c}$ ,  $\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L$  και χωρούν στην  $\mathbf{5}^*$ . Απομένουν δέκα πεδία των οποίων έχουμε υπολογίσει τις αναπαράστασεις ως εξής

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L : (\mathbf{3}, \mathbf{2}, 1/6), \quad u_L^{\alpha c} : (\mathbf{3}, \mathbf{1}, -2/3), \quad e_L^c : (\mathbf{1}, \mathbf{1}, 1) \quad (5.26)$$

Ψάχνουμε κάποια αναπαράσταση της ομάδας  $SU(5)$  μεγαλύτερης διάστασης που να χωράει τις υπόλοιπες αναπαραστάσεις. Ιδανικά, θα θέλαμε να χωρέσουμε και τα δέκα πεδία σε μία μοναδική αναπαράσταση με διάσταση δέκα. Σύμφωνα με την Θεωρία Ομάδων, οι αναπαραστάσεις μία ομάδας, κατασκευάζονται με την χρήση τανυστών, για την εκάστοτε διάσταση. Οι μη αναγωγίσιμες αναπαραστάσεις που ενδιαφέρουν εμάς, για μία ομάδα  $SU(N)$ , είναι άιχνοι τανυστές με συγκεκριμένες συμμετρίες που αφορούν την εναλλαγή των δεικτών τους. Οι αναπαραστάσεις (τανυστές) που ξεχωρίζουν είναι  $\psi^i$  (όπως η  $\psi^\mu$  που ήδη αναλύσαμε),  $\psi^{ij}$  (αντισυμμετρικοί στην εναλλαγή δεικτών),  $\psi^{ij}$  (συμμετρικοί),  $\psi_j^i$  (adjoint αναπαράσταση) και  $\psi_k^{ij}$  (αντισυμμετρικοί στους πάνω δείκτες). Στη συνέχεια γράφουμε τις διαστάσεις τους για μία ομάδα  $SU(N)$  και έπειτα γίνεται εφαρμογή για την ομάδα  $SU(5)$ :

$$\begin{aligned}\psi^i &\rightarrow N \xrightarrow{SU(5)} \mathbf{5} \text{ (fundamental)} \\ \psi^{ij}(\text{antis}) &\rightarrow \frac{N(N-1)}{2} \xrightarrow{SU(5)} \mathbf{10} \text{ (antis)} \\ \psi^{ij}(\text{sym}) &\rightarrow \frac{N(N+1)}{2} \xrightarrow{SU(5)} \mathbf{15} \text{ (sym)} \\ \psi_j^i &\rightarrow N^2 - 1 \xrightarrow{SU(5)} \mathbf{24} \text{ (adjoint)} \\ \psi_K^{ij} &\rightarrow \frac{1}{2}N^2(N-1) - N \xrightarrow{SU(5)} \mathbf{45}\end{aligned}\tag{5.27}$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, φαίνεται πως θα πρέπει να κινηθούμε στην κατεύθυνση της αντισυμμετρικής αναπαράστασης  $\mathbf{10}$ . Το θετικό της είναι ότι έχει την κατάλληλη διάσταση για να χωρέσει και τα υπόλοιπα σωματίδια της θεωρίας μας. Θα δούμε στη συνέχεια πως αυτή αναλύεται στις αναπαραστάσεις του  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ . Για τον σκοπό αυτόν, παίρνουμε το τανυστικό γινόμενο δύο θεμελιωδών αναπαραστάσεων, δηλαδή  $\psi^i \phi^j$ . Έτσι θα προκύψει ο τανυστής  $T^{ij}$ . Αυτός μπορεί να αναλυθεί σε ένα ευθύ άθροισμα δύο αναπαραστάσεων  $\psi^{ij}$ , μίας συμμετρικής και μίας αντισυμμετρικής ( $\mathbf{10}$  και  $\mathbf{15}$ ), δηλαδή

$$\mathbf{5} \otimes \mathbf{5} = \mathbf{10} \oplus \mathbf{15}\tag{5.28}$$

Η αναπαράσταση  $\mathbf{10}$  είναι αντισυμμετρική, ενώ η  $\mathbf{15}$  συμμετρική. Γνωρίζοντας λοιπόν την ανάλυση της  $\mathbf{5}$ , για να βρούμε την ανάλυση της  $\mathbf{10}$  σε αναπαραστάσεις της  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ , θα πρέπει να υπολογίσουμε το γινόμενο  $\mathbf{5} \times \mathbf{5}$  και έπειτα να πάρουμε το αντισυμμετρικό του κομμάτι. Από αυτό θα προκύψει η αναπαράσταση  $\mathbf{10}$ . Αυτή που θα απομείνει, θα είναι η  $\mathbf{15}$ . Έχουμε λοιπόν

$$\mathbf{5} \rightarrow (\mathbf{3}, \mathbf{1}, -1/3) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2}, 1/2)\tag{5.29}$$

Γράφουμε τώρα το αντισυμμετρικό γινόμενο δύο θεμελιωδών:

$$\begin{aligned}\mathbf{5} \otimes_A \mathbf{5} &= \{(\mathbf{3}, \mathbf{1}, -1/3) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2}, 1/2)\} \otimes_A \{(\mathbf{3}, \mathbf{1}, -1/3) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2}, 1/2)\} \\ &= \{(\mathbf{3}, \mathbf{1}, -1/3) \otimes_A (\mathbf{3}, \mathbf{1}, -1/3)\} \oplus \{(\mathbf{3}, \mathbf{1}, -1/3) \otimes_A (\mathbf{1}, \mathbf{2}, 1/2)\} \oplus \{(\mathbf{1}, \mathbf{2}, 1/2) \otimes_A (\mathbf{1}, \mathbf{2}, 1/2)\}\end{aligned}$$

Αφού τα γινόμενα είναι μεταξύ των αναπαραστάσεων της ίδιας ομάδας, η παραπάνω παράσταση θα γίνει

$$\mathbf{5} \otimes_A \mathbf{5} = (\mathbf{3} \otimes_A \mathbf{3}, \mathbf{1} \otimes_A \mathbf{1}, -1/3 \otimes_A -1/3)$$

$$\oplus (\mathbf{3} \otimes_A \mathbf{1}, \mathbf{1} \otimes_A \mathbf{2}, -1/3 \otimes_A 1/2) \oplus (\mathbf{1} \otimes_A \mathbf{1}, \mathbf{2} \otimes_A \mathbf{2}, 1/2 \otimes_A 1/2)$$

Για τα φορτία έχουμε

$$-1/3 \otimes_A -1/3 = -2/3, \quad -1/3 \otimes_A 1/2 = 1/6, \quad 1/2 \otimes_A 1/2 = 1 \quad (5.30)$$

Τα γινόμενα με singlet αναπαραστάσεις γράφονται για την  $SU(2)$  :

$$\mathbf{1} \otimes_A \mathbf{1} = \mathbf{1}, \quad \mathbf{1} \otimes_A \mathbf{2} = \mathbf{2} \quad (5.31)$$

και για την  $SU(3)$  :

$$\mathbf{3} \otimes_A \mathbf{1} = \mathbf{3}, \quad \mathbf{1} \otimes_A \mathbf{1} = \mathbf{1} \quad (5.32)$$

Απομένουν λοιπόν δύο γινόμενα, ένα της  $SU(3)$  και ένα της  $SU(2)$ , που θα υπολογίσουμε με τη βοήθεια των young tableaux. Για την  $SU(3)$  έχουμε

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \alpha \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \alpha \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \alpha \\ \hline \end{array} = \mathbf{6} \oplus \mathbf{3}^*$$

όπου αναγνωρίζουμε τις διαστάσεις των αναπαραστάσεων της  $SU(3)$  ως την  $\mathbf{6}^*$  και την  $\mathbf{3}^*$ . Σε ένα young tableaux, οι γραμμές δηλώνουν τους συμμετρικούς δείκτες, ενώ οι στήλες τους αντισυμμετρικούς, άρα ισχύει

$$\mathbf{3} \otimes_A \mathbf{3} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes_A \begin{array}{|c|} \hline \alpha \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \alpha \\ \hline \end{array} = \mathbf{3}^*$$

και ομοίως

$$\mathbf{3} \otimes_S \mathbf{3} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes_S \begin{array}{|c|} \hline \alpha \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \alpha \\ \hline \end{array} = \mathbf{6}$$

Άρα για το αντισυμμετρικό γινόμενο που ψάχνουμε κρατάμε μόνο την  $\mathbf{3}^*$ . Αντίστοιχα εργαζόμαστε για το γινόμενο στην  $SU(2)$

$$\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \alpha \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \alpha \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \alpha \\ \hline \end{array} = \mathbf{3} \oplus \mathbf{1}$$

οπότε έχουμε

$$\mathbf{2} \otimes_A \mathbf{2} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes_A \begin{array}{|c|} \hline \alpha \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \alpha \\ \hline \end{array} = \mathbf{1}$$

και ομοίως



$$\mathbf{2} \otimes_S \mathbf{2} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes_S \begin{array}{|c|} \hline \alpha \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \alpha \\ \hline \end{array} = \mathbf{3}$$

Για το αντισυμμετρικό γινόμενο, ομοίως με πριν, κρατάμε την  $\mathbf{1}$ . Συγκεντρωτικά λοιπόν, τα αποτελέσματά μας θα είναι

$$(\mathbf{3}, \mathbf{1}, -1/3) \otimes_A (\mathbf{3}, \mathbf{1}, -1/3) = (\mathbf{3}^*, \mathbf{1}, -2/3) \quad (5.33)$$

$$(\mathbf{3}, \mathbf{1}, -1/3) \otimes_A (\mathbf{1}, \mathbf{2}, 1/2) = (\mathbf{3}, \mathbf{2}, 1/6) \quad (5.34)$$

$$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, 1/2) \otimes_A (\mathbf{1}, \mathbf{2}, 1/2) = (\mathbf{1}, \mathbf{1}, 1) \quad (5.35)$$

Η  $\mathbf{10}$  είναι το αντισυμμετρικό γινόμενο δύο θεμελιωδών αναπαραστάσεων της  $SU(5)$  και αναλύεται σε αναπαραστάσεις του  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  ως εξής

$$\mathbf{10} = \mathbf{5} \otimes_A \mathbf{5} = (\mathbf{3}^*, \mathbf{1}, -2/3) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{2}, 1/6) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}, 1) \quad (5.36)$$

Οι τρεις αναπαραστάσεις που εμφανίζονται, αντιστοιχούν στα υπόλοιπα δέκα πεδία του καθιερωμένου προτύπου  $u_L^{c\alpha}, \begin{pmatrix} u^\alpha \\ d^\alpha \end{pmatrix}_L, e_L^c$ . Μέχρι στιγμής έχουμε συμπεριλάβει όλα τα πεδία μας μέσα σε δύο αναπαραστάσεις της  $SU(5)$ , τις  $\mathbf{5}^*$  και  $\mathbf{10}$ . Συμπληρώνουμε στη συνέχεια τα στοιχεία των αναπαραστάσεων στην μορφή των πεδίων του καθιερωμένου προτύπου. Τότε οι αναπαραστάσεις μας θα είναι

$$\mathbf{5}^* : \psi^\mu = \begin{pmatrix} \psi^\alpha \\ \psi^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d^{c1} \\ d^{c2} \\ d^{c3} \\ e \\ -\nu_e \end{pmatrix} \quad (5.37)$$

και

$$\mathbf{10} : \psi_{\mu\nu} = \{\psi_{\alpha\beta}, \psi_{\alpha i}, \psi_{ij}\} = \begin{pmatrix} 0 & u^{c3} & -u^{c2} & u_1 & d_1 \\ -u^{c3} & 0 & u^{c1} & u_2 & d_2 \\ u^{c2} & -u^{c1} & 0 & u_3 & d_3 \\ -u_1 & -u_2 & -u_3 & 0 & e^c \\ -d_1 & -d_2 & -d_3 & -e^c & 0 \end{pmatrix} \quad (5.38)$$

Όλα τα φερμιόνια έχουν πλέον ενταχθεί στην  $\mathbf{5}^*$  και στην αντισυμμετρική  $\mathbf{10}$ . Οι υπόλοιπες φερμιονικές γενιές θα αντιστοιχηθούν σε μία  $\mathbf{5}^* + \mathbf{10}$  αναπαράσταση σε αντίστοιχη μορφή.

### 5.3 Βασικές αναπαραστάσεις της $SU(5)$

Στο καθιερωμένο πρότυπο, τα φερμιονικά πεδία αναπαρίστανται κατάλληλα στις θεμελιώδεις ή singlet αναπαραστάσεις των ομάδων του  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ , σύμφωνα με το αν συμμετέχουν ή όχι τα στις αντίστοιχες αλληλεπιδράσεις. Τα λεπτόνια για παράδειγμα δεν συμμετέχουν στις ισχυρές αλληλεπιδράσεις και για τον λόγο αυτόν αναπαρίστανται σε *singlets* στην  $SU(3)$ . Τα κουάρκ από την άλλη που συμμετέχουν στις ισχυρές αλληλεπιδράσεις βρίσκονται σε κάποια από τις τρεις καταστάσεις χρώματος και επομένως τοποθετούνται σε τριπλέτες ως προς την  $SU(3)$ . Ως προς την  $SU(2)$ , τα

αριστερόστροφα λεπτόνια και κουάρκ αναπαρίστανται σε διπλέτες, ενώ το ίδιο δεν ισχύει και για τα δεξιόστροφα τα οποία αναπαρίστανται σε singlets. Ως προς την  $U(1)$ , όλα τα σωματίδια φέρουν υπερφορτίο. Τα αντισωματίδια αναπαρίστανται σε μιγαδικά συζυγείς αναπαραστάσεις σε σχέση με αυτές των σωματιδίων. Έπειτα τα πεδία βαθμίδας τοποθετούνται στην συζυγοανάστροφη αναπαράσταση της κάθε ομάδας. Οι διαφορετικές αντιδράσεις μέσω αλληλεπιδράσεων αντιστοιχούν σε μετακίνηση των σωματιδίων μέσα στην αναπαράσταση, όπου υφίστανται, μέσω της δράσης αντίστοιχων τελεστών, δηλαδή των μποζονίων βαθμίδας. Οι συνδυασμοί των ανωτέρω αναπαραστάσεων, δηλαδή το ευθύ γινόμενό τους, συντάσσουν αναπαραστάσεις ανώτερης τάξης, οι οποίες αντιστοιχούν σε πιο σύνθετα σωματίδια, όπως για παράδειγμα τα μεσόνια.

Αυτήν την λογική ακολουθήσαμε και στην περίπτωση της ομάδας  $SU(5)$ . Βρήκαμε την θεμελιώδη  $\mathbf{5}$  και αναλύσαμε το περιεχόμενό της σε  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ . Έτσι αναδείξαμε πως τα γνωστά σε εμάς πεδία, χωράνε όλα ακριβώς σε μία  $\mathbf{5}^*$  και μία  $\mathbf{10}$ . Το επόμενο βήμα είναι να αναπαραστήσουμε και τα μποζονικά πεδία βαθμίδας, δηλαδή να αναζητήσουμε την συζυγοανάστροφη αναπαράσταση  $\mathbf{24}$ . Ακόμα οφείλουμε να αναλύσουμε τα γινόμενα αναπαραστάσεων των  $\mathbf{5}$ ,  $\mathbf{5}^*$  και  $\mathbf{10}$ , αφού θα εμφανίζονται συχνά, λόγω των αλληλεπιδράσεων των σωματιδίων. Συνοπτικά δηλαδή, θα υπολογίσουμε τις μεγαλύτερης τάξης αναπαραστάσεις της  $SU(5)$  και θα τις αναλύσουμε στις αναπαραστάσεις  $SU(3) \times SU(2)$ . Θα αμελήσουμε προς στιγμήν την  $U(1)$ , αφού όπως έχουμε αναφέρει, τα υπερφορτία απλά αθροίζονται. Θα ξεκινήσουμε με τις ήδη γνωστές σε εμάς αναπαραστάσεις και την ανάλυσή τους σε  $SU(3) \times SU(2)$ :

$$\mathbf{5} \rightarrow (\mathbf{3}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2}) \quad (5.39)$$

$$\mathbf{5}^* \rightarrow (\mathbf{3}^*, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2}) \quad (5.40)$$

Με τη βοήθεια των ταυιστών βρήκαμε

$$\mathbf{5} \otimes \mathbf{5} = \mathbf{10} \oplus \mathbf{15} \quad (5.41)$$

όπου η  $\mathbf{10}$  είναι αντισυμμετρική και η  $\mathbf{15}^*$  συμμετρική. Για την ανάλυση της παραπάνω σε  $SU(3) \times SU(2)$  γράφουμε τα γινόμενα

$$\begin{aligned} \mathbf{5} \otimes \mathbf{5} &= \{(\mathbf{3}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2})\} \otimes \{(\mathbf{3}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2})\} \\ &= (\mathbf{3} \otimes \mathbf{3}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2} \otimes \mathbf{2}) \\ &= (\mathbf{3}^* \oplus \mathbf{1}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1} \oplus \mathbf{3}) \\ \Rightarrow \mathbf{5} \otimes \mathbf{5} &= \{(\mathbf{3}^*, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1})\} \oplus \{(\mathbf{6}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{3})\} \end{aligned} \quad (5.42)$$

Στην παραπάνω σχέση, διακρίναμε το συμμετρικό κομμάτι, από το αντισυμμετρικό βάσει των young tableaux που είδαμε νωρίτερα. Άρα έχουμε τις ακόλουθες αντιστοιχίες:

$$\mathbf{10} \rightarrow \{(\mathbf{3}^*, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1})\} \quad (5.43)$$

$$\mathbf{15}^* \rightarrow \{(\mathbf{6}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{3})\} \quad (5.44)$$

Γράφουμε τώρα τις συζυγείς αναπαραστάσεις των παραπάνω, ενθυμούμενοι ότι για την  $SU(2)$  ισχύει  $\mathbf{2}^* = \mathbf{2}$ . Άρα θα έχουμε

$$\mathbf{5}^* \otimes \mathbf{5}^* = \mathbf{10}^* \oplus \mathbf{15} \quad (5.45)$$

όπου έκαστη αναπαράσταση γράφεται

$$\mathbf{10}^* \rightarrow \{(\mathbf{3}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}^*, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1})\} \quad (5.46)$$

$$\mathbf{15}^* \rightarrow \{(\mathbf{6}^*, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}^*, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{3}^*)\} \quad (5.47)$$

Τότε το ευθύ γινόμενο της θεμελιώδους  $\mathbf{5}$ , με την συζυγή της  $\mathbf{5}^*$  γράφεται με τη χρήση τανυστών

$$\mathbf{5} \otimes \mathbf{5}^* = \phi_i \eta^j = T_i^j \quad (5.48)$$

Από αυτήν την σχέση, μπορούμε να διακρίνουμε μόνο ένα ίχνος  $T_i^j$  και αυτό είναι

$$\mathbf{5} \otimes \mathbf{5}^* = \mathbf{1} \oplus \mathbf{24} \quad (5.49)$$

Μπορούμε τώρα να αναλύσουμε την ανάστροφη αναπαράσταση

$$\mathbf{5} \otimes \mathbf{5}^* = \{(\mathbf{3}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2})\} \otimes \{(\mathbf{3}^*, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2})\}$$

$$\Rightarrow \mathbf{5} \otimes \mathbf{5}^* = (\mathbf{3} \otimes \mathbf{3}^*, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{3}^*, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2} \otimes \mathbf{2}) \quad (5.50)$$

Όμως μπορούμε να γράψουμε  $\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{3}$  για την  $SU(2)$ . Για το γινόμενο  $\mathbf{3}^* \otimes \mathbf{3}$  χρησιμοποιούμε τα young tableaux ως εξής για την  $SU(3)$

$$\mathbf{3}^* \otimes \mathbf{3} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \alpha \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \alpha \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \alpha \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \quad (5.51)$$

Θα έχουμε λοιπόν

$$\mathbf{5} \otimes \mathbf{5}^* = (\mathbf{1} \oplus \mathbf{8}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{3}^*, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{3} \oplus \mathbf{1})$$

$$\Rightarrow \mathbf{5} \otimes \mathbf{5}^* = \{(\mathbf{1}, \mathbf{1})\} \oplus \{(\mathbf{8}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{3}^*, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{3}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1})\} \quad (5.52)$$

Επομένως ισχύει

$$\mathbf{24} \rightarrow \{(\mathbf{8}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{3}^*, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{3}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1})\} \quad (5.53)$$

και

$$\mathbf{1} \rightarrow \{(\mathbf{1}, \mathbf{1})\} \quad (5.54)$$

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε το ευθύ γινόμενο των αναπαραστάσεων, στις οποίες έχουμε τοποθετήσει όλα μας τα σωματίδια με την χρήση τανυστών.

$$\mathbf{5}^* \otimes \mathbf{10} = \phi_k \eta^{ij} = T_k^{ij} \quad (5.55)$$

Διακρίνουμε και πάλι το  $T_k^{ij}$  που αντιστοιχεί στην αναπαράσταση  $\mathbf{5}$  και έχουμε

$$\mathbf{5}^* \otimes \mathbf{10} = \mathbf{5} \oplus \mathbf{45} \quad (5.56)$$

Εκτελούμε ομοίως με πριν το γινόμενο για να βρούμε την ανάλυση της  $\mathbf{45}$

$$\mathbf{5}^* \otimes \mathbf{10} = \{(\mathbf{3}^*, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2})\} \otimes \{(\mathbf{3}^*, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1})\}$$

$$\Rightarrow \mathbf{5}^* \otimes \mathbf{10} = (\mathbf{3}^* \otimes \mathbf{3}^*, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}^* \otimes \mathbf{3}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{3}^*, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}^*, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{2} \otimes \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2}) \quad (5.57)$$

Έχουμε ήδη υπολογίσει τα γινόμενα  $\mathbf{3}^* \otimes \mathbf{3} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8}$  για την  $SU(3)$  και  $\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{3}$  για την  $SU(2)$ , και για το γινόμενο  $\mathbf{3}^* \otimes \mathbf{3}^*$  θα ισχύει για την  $SU(3)$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{3}^* \otimes \mathbf{3}^* &= \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \alpha \\ \hline b \\ \hline \end{array} = \mathbf{6}^* \oplus \mathbf{3} = \left\{ \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \alpha \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \alpha \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \right\} \otimes \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \beta \\ \hline \end{array} \\ &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \alpha & \beta \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \alpha \\ \hline \square & b \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \alpha \\ \hline \square & \\ \hline \beta & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \alpha \\ \hline \beta \\ \hline \end{array} \\ &= \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \alpha \\ \hline \square & b \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \alpha \\ \hline \square & \\ \hline \beta & \\ \hline \end{array} \\ &\Rightarrow \mathbf{3}^* \otimes \mathbf{3}^* = \mathbf{6}^* \oplus \mathbf{3} \quad (5.58) \end{aligned}$$

Το πρώτο young tableaux το έχουμε διαγράψει καθώς δεν ακολουθεί τους κανόνες, καθώς έχει την ακολουθία χαρακτήρων  $ba$ . Το τέταρτο έχει τέσσερα κουτάκια, ενώ μία  $SU(3)$  αναπαράσταση μπορεί να έχει μέχρι τρία. Στο τρίτο young tableaux μπορούμε να σβήσουμε την πρώτη στήλη. Τότε θα απομένει η  $\mathbf{3}$ . Επομένως έχουμε

$$\mathbf{5}^* \otimes \mathbf{10} = (\mathbf{6}^* \oplus \mathbf{3}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1} \oplus \mathbf{8}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{3}^*, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}^*, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2})$$

$$\Rightarrow \mathbf{5}^* \otimes \mathbf{10} = \{(\mathbf{6}^*, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{8}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{3}^*, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}^*, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{3})\} \oplus \{(\mathbf{3}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2})\}$$

Άρα η  $\mathbf{45}$  θα γράφεται ως εξής

$$\mathbf{45} \rightarrow \{(\mathbf{6}^*, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{8}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{3}^*, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}^*, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{3})\} \quad (5.59)$$

Με την ίδια λογική εργαζόμαστε και για το γινόμενο  $\mathbf{10} \otimes \mathbf{10}$  όπου έχουμε

$$\mathbf{10} \otimes \mathbf{10} = \phi^{ij} \eta^{kl} = \phi^{ij} \epsilon_{mnhk} \eta^{kl} = T_{mnh}^{ij} \quad (5.60)$$

Σύμφωνα με τα ακριβώς προηγούμενα θα ισχύει

$$\mathbf{10} \otimes \mathbf{10} = \mathbf{5}^* \oplus \mathbf{45}^* \oplus \mathbf{50}^* \quad (5.61)$$

Η ανάλυση της  $\mathbf{45}^*$  προκύπτει άμεσα από την σχέση (5.59) αρκεί να χρησιμοποιήσουμε ότι  $\mathbf{8}^* = \mathbf{8}$  για την  $SU(3)$  και  $\mathbf{3}^* = \mathbf{3}$  για την  $SU(2)$ . Άρα θα ισχύει

$$\mathbf{45}^* \rightarrow \{(\mathbf{6}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{8}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{3}^*, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{3}^* \mathbf{3})\} \quad (5.62)$$

Εκτελώντας το γινόμενο θα έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{10} \otimes \mathbf{10} &= \{(\mathbf{3}^*, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1})\} \otimes \{(\mathbf{3}^*, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1})\} \\ \Rightarrow \mathbf{10} \otimes \mathbf{10} &= (\mathbf{3}^* \otimes \mathbf{3}^*, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}^* \otimes \mathbf{3}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{3}^*, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3} \otimes \mathbf{3}^*, \mathbf{2}) \\ &\quad \oplus (\mathbf{3} \otimes \mathbf{3}, \mathbf{2} \otimes \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{3}^*, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}) \end{aligned} \quad (5.63)$$

Έχουμε υπολογίσει τα εξής  $\mathbf{3}^* \otimes \mathbf{3}^* = \mathbf{6}^* \oplus \mathbf{3}$ ,  $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{6} \oplus \mathbf{3}^*$ ,  $\mathbf{3}^* \otimes \mathbf{3} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8}$  για την  $SU(3)$  και  $\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{3}$  για την  $SU(2)$  άρα παίρνουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{10} \otimes \mathbf{10} &= (\mathbf{6}^* \oplus \mathbf{3}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1} \oplus \mathbf{8}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{3}^*, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1} \oplus \mathbf{8}, \mathbf{2}) \\ &\quad \oplus (\mathbf{6} \oplus \mathbf{3}^*, \mathbf{1} \oplus \mathbf{3}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{3}^*, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}) \\ &= (\mathbf{6}^*, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{8}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{3}^*, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{8}, \mathbf{2}) \\ &\quad \oplus (\mathbf{6}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}^*, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{6}, \mathbf{3}) \oplus (\mathbf{3}^*, \mathbf{3}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{3}^*, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1}) \end{aligned}$$

Διαχωρίζοντας τις επιμέρους αναπαραστάσεις θα πάρουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{10} \otimes \mathbf{10} &= \{(\mathbf{8}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{6}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}^*, \mathbf{3}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}^*, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2})\} \\ &\quad \oplus \{(\mathbf{8}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{6}, \mathbf{3}) \oplus (\mathbf{6}^*, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{3}^*, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1})\} \\ &\quad \oplus \{(\mathbf{3}^*, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{2})\} \end{aligned} \quad (5.64)$$

Τελικά η  $\mathbf{50}^*$  αναλύεται στις αναπαραστάσεις του  $SU(3) \times SU(2)$  ως εξής

$$\mathbf{50}^* \rightarrow \{(\mathbf{8}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{6}, \mathbf{3}) \oplus (\mathbf{6}^*, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{3}, \mathbf{2}) \oplus (\mathbf{3}^*, \mathbf{1}) \oplus (\mathbf{1}, \mathbf{1})\} \quad (5.65)$$

Θεωρούμε τώρα τους εκτεταμένους μετασχηματισμούς ως εξής:

$$\begin{aligned} \mathbf{5}_f &\rightarrow \mathbf{5}'_f = e^{3i\alpha} \mathbf{5}_f \Rightarrow F(\mathbf{5}_f) = 3 \\ \mathbf{5}_f^* &\rightarrow \mathbf{5}'_f{}^* = e^{-3i\alpha} \mathbf{5}_f^* \Rightarrow F(\mathbf{5}_f^*) = -3 \\ \mathbf{10}_f &\rightarrow \mathbf{10}'_f = e^{i\alpha} \mathbf{10}_f \Rightarrow F(\mathbf{10}_f) = 1 \end{aligned}$$

$$\mathbf{5}_H \rightarrow \mathbf{5}'_H = e^{-2i\alpha} \mathbf{5}_H \Rightarrow F(\mathbf{5}_H) = -2$$

$$\mathbf{5}_H^* \rightarrow \mathbf{5}'_H^* = e^{2i\alpha} \mathbf{5}_H^* \Rightarrow F(\mathbf{5}_H^*) = 2$$

$$\mathbf{24}_\phi \rightarrow \mathbf{24}'_\phi = \mathbf{24}_\phi \Rightarrow F(\mathbf{24}_\phi) = 0$$

Τώρα μπορούμε να γράψουμε την Λαγκρανζιανή Yukawa συμβολικά όπως παρακάτω

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_{Yuk} &= f^{(1)}(\mathbf{10}'_f)(\mathbf{10}'_f)(\mathbf{5}'_H) + f^{(2)}(\mathbf{10}'_f)(\mathbf{5}'_f^*)(\mathbf{5}'_H^*) \\ &= f^{(1)}e^{i\alpha}(\mathbf{10}_f)e^{i\alpha}(\mathbf{10}_f)e^{-2i\alpha}(\mathbf{5}_H) + f^{(2)}e^{i\alpha}(\mathbf{10}_f)e^{-3i\alpha}(\mathbf{5}_f^*)e^{2i\alpha}(\mathbf{5}_H^*) \\ &\Rightarrow \mathcal{L}'_{Yuk} = f^{(1)}(\mathbf{10}_f)(\mathbf{10}_f)(\mathbf{5}_H) + f^{(2)}(\mathbf{10}_f)(\mathbf{5}_f^*)(\mathbf{5}_H^*) = \mathcal{L}_{Yuk} \end{aligned} \quad (5.66)$$

Παρατηρούμε λοιπόν πως η Λαγκρανζιανή Yukawa παραμένει αναλλοίωτη κάτω από τους μετασχηματισμούς που επιβάλλαμε. Άρα η θεωρία μας διέπεται από μία global συμμετρία  $U(1)$ .

## 5.4 Η κβάντωση του φορτίου ως συνέπεια της $SU(5)$

Ως τώρα, έχουμε τοποθετήσει όλα τα φερμιόνια σε δύο αναπαραστάσεις της  $SU(5)$  και έχουμε αναλύσει αυτές, στις αναπαραστάσεις του καθιερωμένου προτύπου. Επόμενο βήμα είναι να μελετήσουμε τα μποζόνια. Πρωτού προχωρήσουμε όμως, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η  $SU(5)$  έχει προσδώσει τα σωστά παρατηρούμενα φορτία στα σωματίδια, αντίθετα με το καθιερωμένο πρότυπο, το οποίο αποτυγχάνει να εξηγήσει την κβάντωση του φορτίου. Αυτή είναι μία άμεση συνέπεια της  $SU(5)$ . Με αυτόν τον τρόπο, αποκτούν τα κουάρκ τα σωστά τους φορτία. Προκύπτει λοιπόν το ερώτημα, γιατί το καθιερωμένο πρότυπο αποτυγχάνει να εξηγήσει την κβάντωση του φορτίου. Ακόμα, είναι η  $SU(5)$  η μοναδική θεωρία που την προβλέπει. Τα ερωτήματα αυτά έχουν κοινή απάντηση που προέρχεται από την θεωρία ομάδων. Η δυναμική της  $SU(5)$  προδίδει πως πρόκειται για μία απλή ομάδα. Το γεγονός αυτό, σε συνδυασμό με το ότι είναι μη αβελιανή, σημαίνει ότι έχει διακριτές ιδιοτιμές, σε αντίθεση με την  $U(1)$  που έχει συνεχείς. Επομένως ο γεννήτορας του ηλεκτρικού φορτίου είναι ένας προσθετικός κβαντικός αριθμός, άρα και ένας γραμμικός συνδυασμός των διαγωνίων γεννητόρων της ομάδας. Υπενθυμίζουμε ότι ισχύει

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2} \quad (5.67)$$

Στο καθιερωμένο πρότυπο, ο αριθμός  $\frac{Y}{2}$  παίρνει εκ φύσεως συνεχείς τιμές. Οφείλουμε εμείς να επέμβουμε ώστε να τις περιορίσουμε. Αντιθέτως, η  $SU(5)$ , που είναι μία απλή ομάδα, οδηγεί στην σωστή κβάντωση του ηλεκτρικού φορτίου. Αυτό βέβαια, δεν αποτελεί γνώρισμα αποκλειστικά της  $SU(5)$ , της οποίας οι γεννήτορες παίρνουν διακριτές τιμές.

Θα υπολογίσουμε τώρα τον γεννήτορα του ηλεκτρικού φορτίου. Ως προσθετικός κβαντικός αριθμός, θα είναι γραμμικός συνδυασμός των διαγωνίων γεννητόρων της  $SU(5)$ , η οποία είναι τάξης 4, άρα έχει τέσσερις διαγώνιους γεννήτορες. Αυτοί είναι οι ακόλουθοι

$$T_0 = \frac{\lambda_0}{2} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{15}} \text{diag}(2, 2, 2, -3, -3) \in U(1) \quad (5.68)$$

$$T_3 = \frac{\lambda_3}{2} = \frac{1}{2} \text{diag}(0, 0, 0, 1, -1) \in SU(2) \quad (5.69)$$

$$T_6 = \frac{\lambda_6}{2} = \frac{1}{2} \text{diag}(1, -1, 0, 0, 0) \in SU(3) \quad (5.70)$$

$$T_{11} = \frac{\lambda_{11}}{2} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{3}} \text{diag}(1, 1, -2, 0, 0) \in SU(3) \quad (5.71)$$

Γνωρίζουμε πως οι διαφορετικές καταστάσεις χρώματος των κουάρκ φέρουν το ίδιο ηλεκτρικό φορτίο. Το γεγονός αυτό σημαίνει πως το  $Q$  πρέπει να μεταπίθεται με τους γεννήτορες της  $SU(3)_c$ , άρα θα είναι γραμμικός συνδυασμός των γεννητόρων της  $SU(2)$  και  $U(1)$ . Για τον λόγο αυτόν, θα έχει τη μορφή

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2} = T_3 + cT_0 \quad (5.72)$$

Το  $\frac{Y}{2}$  όμως δεν μπορεί να είναι γεννήτορας της ομάδας  $SU(5)$ , καθώς δεν είναι κατάλληλα κανονικοποιημένος για να είναι. Θα πρέπει όμως να υπακούει την άλγεβρά της, δηλαδή

$$\left[ \frac{\lambda^\alpha}{2}, \frac{\lambda^b}{2} \right] = iC^{abc} \frac{\lambda^c}{2}, \text{ για } \alpha, b, c = 1, 2, \dots, 24 \quad (5.73)$$

$$\text{tr} \left( \frac{\lambda^\alpha}{2}, \frac{\lambda^b}{2} \right) = 2\delta^{ab} \text{ για } \alpha, b, c = 1, 2, \dots, 24 \quad (5.74)$$

Εξισώνουμε τη θεμελιώδη έκφραση του  $Y/2$  της εξίσωσης (5.22),  $Y(\mathbf{5})/2$ , με την  $cT_0$  ώστε να υπολογίσουμε την σταθερά  $c$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}Y(\mathbf{5}) &= \text{diag}\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = c \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{15}} \text{diag}(2, 2, 2, -3, -3) = cT_0 \\ &\Rightarrow -\frac{1}{3} = c \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{15}} 2 \\ &\Rightarrow c = -\sqrt{\frac{5}{3}} \end{aligned} \quad (5.75)$$

Άρα το φορτίο της θεμελιώδους αναπαράστασης  $\mathbf{5}$  θα γράφεται

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2} = \frac{1}{2} \text{diag}(0, 0, 0, 1, -1) + \text{diag}\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad (5.76)$$

$$\mathbf{5} : Q = Q(\psi_i) = \text{diag}\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1, 0\right) = Q_i \delta_{ij} \quad (5.77)$$

Άρα το φορτίο της συζυγούς αναπαράστασης θα είναι

$$\mathbf{5}^* : Q = Q(\psi^i) = \text{diag}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -1, 0\right) = -Q_i \delta_{ij} \quad (5.78)$$

Τα αποτελέσματα που προέκυψαν είναι σωστά, αφού όπως είδαμε νωρίτερα, η αναπαράσταση  $\mathbf{5}^*$  αντιστοιχεί στα ακόλουθα πέντε φερμιονικά πεδία

$$\mathbf{5} : \psi_L^\mu = \begin{pmatrix} \psi^\alpha \\ \psi^i \end{pmatrix}_L = \begin{pmatrix} d^{c1} \\ d^{c2} \\ d^{c3} \\ e \\ -\nu_e \end{pmatrix}_L \quad (5.79)$$

όπου φαίνεται ότι πλέον αποδίδονται σωστά τα παρατηρούμενα πειραματικά φορτία. Αυτό διότι οι τρεις καταστάσεις χρώματος του down antiquark έχουν φορτίο  $1/3$ , το ηλεκτρόνιο  $-1$  και το νεutrino ηλεκτρονίου  $0$ .

Οι επόμενες αναπαραστάσεις που μας ενδιαφέρουν είναι η  $\mathbf{10}$  και η  $\mathbf{24}$ . Με όμοια διαδικασία καταλήγουμε σε

$$\mathbf{10} : Q_{\psi_{ij}} = Q_i + Q_j \quad (5.80)$$

$$\mathbf{24} : Q(\psi_i^j) = Q_i - Q_j \quad (5.81)$$

όπου ο συμβολισμός αναφέρεται στα διαγώνια στοιχεία των πινάκων φορτίου.

Η κβάντωση λοιπόν του ηλεκτρικού φορτίου ερμηνεύθηκε με φυσικό τρόπο και μάλιστα βρήκαμε τις αναμενόμενες τιμές, σύμφωνα με την

$$\mathbf{5} : (d_1, d_2, d_3, e^+, -\nu) \quad (5.82)$$

Αν εφαρμόσουμε την συνθήκη  $trQ = 0$  για τον πίνακα φορτίων της  $\mathbf{5}$ , θα έχουμε

$$trQ = 3Q_d + Q_{e^+} = 0 \quad (5.83)$$

$$Q_d = -\frac{1}{3}Q_{e^+} \quad (5.84)$$

Τελικά, το down quark έχει το  $1/3$  του φορτίου του ηλεκτρονίου. Αυτό είναι συνέπεια του χρώματος. Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε το ηλεκτρικό φορτίο

$$p = uud$$

$$Q_p = 2Q_u + Q_d = 2(Q_d + 1) + Q_d = 3 \left( -\frac{1}{3}Q_{e^+} \right) + 2$$

$$\Rightarrow Q_p = +1 \quad (5.85)$$

Αποκομίζουμε λοιπόν το αναμενόμενο φορτίο για το πρωτόνιο. Φαίνεται πλέον ξεκάθαρα η επιτυχία της ομάδας  $SU(5)$



## 5.5 $SU(5)$ και Επανακανονικοποίηση

Όταν αναφερόμαστε σε ανωμαλίες εννοούμε το σπάσιμο των κλασικών συμμετριών από κβαντομηχανικές διορθώσεις ακτινοβολίας, δηλαδή αυτές που προκύπτουν από την θεωρία διαταραχών. Οι διορθώσεις αυτές είναι συνέπεια των ομαλοποιήσεων που απαιτούνται για να υπολογιστούν μικροί φερμιονικοί βρόγχοι διαγραμμάτων Feynman, οι οποίες συγκρούονται με τις κλασικές συμμετρίες της εκάστοτε θεωρίας.

Πολύ σημαντικό είναι το γεγονός, ότι η  $SU(5)$  είναι επανακανονικοποιήσιμη, κάτι που σημαίνει ότι μπορούν να απορροφηθούν όλοι οι απειρισμοί. Θα δείξουμε την ιδιότητα αυτή με έναν αρκετά απλό τρόπο. Αρχικά θα υπολογίσουμε την ανωμαλία της θεωρίας. Για κάθε φερμιονική αναπαράσταση η συνθήκη απουσίας ανωμαλιών δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$\frac{1}{2}A(R)d^{abc} = \text{tr}(\{T^a(R), T^b(R)\}, T^c(R)) \quad (5.86)$$

όταν η  $A(R)$ , δηλαδή η ποσότητα που χαρακτηρίζει την ανωμαλία για κάθε αναπαράσταση γίνει μηδέν.  $T^a(R)$  είναι ένας πίνακας αναπαράστασης του  $R$ . Παρόλα αυτά, στην περίπτωση αυτή, η  $A(R)$  είναι ήδη κανονικοποιημένη σε μία από τις θεμελιώδεις αναπαραστάσεις και ανεξάρτητη από τους γεννήτορες. Άρα αρκεί να πάρουμε μια απλή αναπαράσταση και να υπολογίσουμε την ανωμαλία μέσω αυτής. Θα χρησιμοποιήσουμε τις  $\mathbf{5}^*$  και  $\mathbf{10}$  στην αναπαράσταση του φορτίου  $Q$ . Όπως έχουμε ήδη δείξει είναι

$$\begin{aligned} \mathbf{5}^* : \quad Q(\psi^i) &= \text{diag}(1/3, 1/3, 1/3, -1, 0) \\ \Rightarrow \text{tr}Q^3(\psi^i) &= 3(1/3)^3 + (-1)^3 = -\frac{8}{9} \end{aligned} \quad (5.87)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{10} : \quad Q(\psi_{ij}) &= Q_i + Q_j \\ \Rightarrow \text{tr}Q^3(\psi_{ij}) &= 3\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right)^3 + 3\left(\frac{1}{3} + 1\right)^3 + 3\left(-\frac{1}{3} + 0\right)^3 + (1 - 0)^3 = \frac{8}{9} \end{aligned} \quad (5.88)$$

Επομένως για την ανωμαλία της  $SU(5)$  θα υπολογίσουμε το άθροισμα των δύο επιμέρους ανωμαλιών

$$A(\mathbf{5}^*) + A(\mathbf{10}) = 0 \quad (5.89)$$

ενώ ο λόγος τους είναι

$$\frac{A(\mathbf{5}^*)}{A(\mathbf{10})} = \frac{\text{tr}Q^3(\psi^i)}{\text{tr}Q^3(\psi_{ij})} = \frac{-8/9}{8/9} = -1 \quad (5.90)$$

Επομένως για τα φερμιόνια οι ανωμαλίες αλληλοαναιρούνται. Αυτό συνεπάγεται μία επανακανονικοποιήσιμη θεωρία, γεγονός που σημαίνει ότι μπορούμε να απορροφήσουμε όλους τους απειρισμούς. Αφού παρατηρήσαμε πως οι ανωμαλίες των  $\mathbf{5}^*$  και  $\mathbf{10}$  αλληλοαναιρούνται, μπορούμε να προχωρήσουμε σε περαιτέρω ενοποίηση. Ωθούμαστε δηλαδή στην αναζήτηση μίας ακόμα πιο συμμετρικής θεωρίας που θα περιέχει τις δύο παραπάνω αναπαραστάσεις σε μία μοναδική. Αυτό σημαίνει πως αναζητούμε μία ομάδα μεγαλύτερη της  $SU(5)$  που θα χωράει τις δύο αναπαραστάσεις. Και σε αυτήν την περίπτωση δεν θα υπάρχει πρόβλημα απειρισμών και επομένως και αυτή η θεωρία θα είναι επανακανονικοποιήσιμη. Μία τέτοια ομάδα είναι η  $SO(10)$ .

## 5.6 Μποζονικά πεδία βαθμίδας

Αφού είδαμε τι προβλέπει η  $SU(5)$  για το φορτίο των σωματιδίων, μπορούμε να ασχοληθούμε με την εύρεση των μποζονίων. Τα 12 μποζόνια του καθιερωμένου προτύπου οφείλουν να περιέχονται στα μποζόνια που προβλέπει η  $SU(5)$ , τα οποία είναι στο πλήθος  $5^2 - 1 = 24$  μποζόνια βαθμίδας. Επομένως προβλέπονται 12 νέα πεδία βαθμίδας. Αυτά τα 12 αντιστοιχούν στην adjoint αναπαράσταση της ομάδας, η διάσταση της οποίας είναι 24. Φαίνεται λοιπόν ότι θα χωράει όλα τα σωματίδια της θεωρίας μας. Στο καθιερωμένο πρότυπο, τα πεδία βαθμίδας είναι: α) ένα  $B$  για την  $U(1)$ , το οποίο μετασχηματίζεται ως singlet κάτω από τις  $SU(2)$  και  $SU(3)$ , δηλαδή  $(\mathbf{1}, \mathbf{1})$ , β) τρία  $W$  μποζόνια ασθενών αλληλεπιδράσεων της  $SU(2)$ , τα οποία μετασχηματίζονται ως triplets κάτω από την  $SU(2)$  και ως singlets κάτω από την  $SU(3)$ , είναι δηλαδή  $(\mathbf{1}, \mathbf{3})$  και γ) οκτώ γκλουόνια  $G_\beta^\alpha$  των ισχυρών αλληλεπιδράσεων της  $SU(3)$ , που μετασχηματίζονται ως 8plets κάτω από την  $SU(3)$  και ως singlets κάτω από την  $SU(2)$ .

Η adjoint 24 αναπαράσταση της  $SU(5)$  γράφεται στις αναπαραστάσεις του καθιερωμένου προτύπου ως εξής

$$\mathbf{24} \rightarrow \{(\mathbf{8}, \mathbf{1}) + (\mathbf{3}, \mathbf{2}) + (\mathbf{3}^*, \mathbf{2}) + (\mathbf{1}, \mathbf{3}) + (\mathbf{1}, \mathbf{1})\} \quad (5.91)$$

Εκτός από τα πεδία του καθιερωμένου προτύπου, εδώ φαίνεται και η ανάλυση των αναπαραστάσεων των 12 νέων πεδίων βαθμίδας της  $SU(5)$ . Όλα τα πεδία βαθμίδας μας βρίσκονται στην adjoint αναπαράσταση. Υιοθετώντας τον συμβολισμό με τους δείκτες  $\alpha, \beta = 1, 2, 3$  και  $r, s = 4, 5$ , αντιστοιχίζουμε τα πεδία του καθιερωμένου προτύπου και τα 12 νέα στις ακόλουθες εκφράσεις

$$\begin{aligned} (\mathbf{1}, \mathbf{1}) &\rightarrow -\frac{1}{\sqrt{15}}A_\alpha^\alpha + \sqrt{\frac{3}{20}}A_r^r \rightarrow \text{πεδίο } B \text{ της } U(1) \\ (\mathbf{1}, \mathbf{3}) &\rightarrow A_s^r \rightarrow 3 \text{ } W \text{ μποζόνια με } W^\pm = \frac{1}{2}(W^1 \mp W^2) \\ (\mathbf{8}, \mathbf{1}) &\rightarrow A_\beta^\alpha \rightarrow 8 \text{ γκλουόνια } G_\beta^\alpha \\ (\mathbf{3}, \mathbf{2}) &\rightarrow A^r_\alpha \equiv (X_\alpha, Y_\alpha) \rightarrow 6 \text{ νέα πεδία} \\ (\mathbf{3}^*, \mathbf{2}) &\rightarrow A^\alpha_r \equiv \begin{pmatrix} X^\alpha \\ Y^\alpha \end{pmatrix} \rightarrow 6 \text{ νέα πεδία} \end{aligned}$$

Συγκεντρωτικά μπορούμε να γράψουμε σε έναν πίνακα τα πεδία της αναπαράστασης ως εξής:

$$A = \sum_{\alpha=0}^{23} A^\alpha \frac{\lambda^\alpha}{2} = \begin{pmatrix} G_1^1 - \frac{2B}{\sqrt{30}} & G_1^2 & G_1^3 & X^1 & Y^1 \\ G_1^2 & G_2^2 - \frac{2B}{\sqrt{30}} & G_2^3 & X^2 & Y^2 \\ G_1^3 & G_2^3 & G_3^3 - \frac{2B}{\sqrt{30}} & X^3 & Y^3 \\ X^1 & X^2 & X^3 & \frac{W^3}{\sqrt{2}} + \frac{3B}{\sqrt{30}} & W^+ \\ Y^1 & Y^2 & Y^3 & W^- & -\frac{W^3}{\sqrt{2}} + \frac{3B}{\sqrt{30}} \end{pmatrix} \quad (5.92)$$

όπου  $G_1^1 = \frac{G^3}{\sqrt{2}} + \frac{G^8}{\sqrt{6}}$ ,  $G_2^2 = -\frac{G^3}{\sqrt{2}} + \frac{G^8}{\sqrt{6}}$ ,  $G_3^3 = -\frac{G^8}{\sqrt{6}}$  και  $W^\pm = (W^1 \mp iW^2)/\sqrt{2}$ , ως προς τις υποομάδες της  $SU(5)$ ,  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ . Τελικά τα ηλεκτρικά φορτία για τα νέα πεδία  $X$  και  $Y$  θα είναι

$$Q_X = -\frac{4}{3}, \quad Q_Y = -\frac{1}{3} \quad (5.93)$$

Το γεγονός ότι στην ίδια αναπαράσταση περιέχονται τόσο λεπτόνια, όσο και κουάρκ σημαίνει ότι θα υπάρχουν κάποια διανυσματικά μποζόνια, τα οποία θα είναι οι διαμεσολαβητές, στις αλληλεπιδράσεις όπου από κουάρκ θα παίρνουμε λεπτόνια. Τα νέα διανυσματικά πεδία της θεωρίας μας αναλαμβάνουν τον ρόλο αυτό, γεγονός στο οποίο οφείλουν και την ονομασία τους *leptoquarks*.

## 5.7 Συνοπτική παρουσίαση

Στην ενότητα αυτή θα αναφέρουμε κάποια συμπεράσματα που προκύπτουν, έπειτα από την τοποθέτηση των σωματιδίων στις αναπαραστάσεις της  $SU(5)$ . Ομαδοποιούμε τα φερμιόνια ανάλογα με την γενιά τους, ως προς τις αναπαραστάσεις  $\mathbf{5}^*$  και  $\mathbf{10}$ :

$$\mathbf{5}^* : \begin{pmatrix} \nu_e & & \\ & d_\alpha^c & \\ e^- & & \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu & & \\ & s_\alpha^c & \\ \mu^- & & \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau & & \\ & b_\alpha^c & \\ \tau^- & & \end{pmatrix}_L \quad (5.94)$$

$$\mathbf{10} : \begin{pmatrix} & u^\alpha & & \\ e^+ & & u_\alpha^c & \\ & d^\alpha & & \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} & c^\alpha & & \\ \mu^+ & & c_\alpha^c & \\ & s^\alpha & & \end{pmatrix}_L \quad \begin{pmatrix} & t^\alpha & & \\ \tau^+ & & t_\alpha^c & \\ & b^\alpha & & \end{pmatrix}_L \quad (5.95)$$

Τα κουάρκ, τα λεπτόνια και τα αντικουάρκ της ίδιας γενιάς, εμφανίζονται μαζί σε κάθε αναπαράσταση, όπως για παράδειγμα τα  $u^c$ ,  $d^c$  και  $e^c$  στην  $\mathbf{10}$ . Υπάρχει ακόμα μία άτυπη σύμβαση, ότι τα ελαφρύτερα κουάρκ θα σχετίζονται με τα ελαφρύτερα λεπτόνια, γεγονός καθόλου προφανές, καθώς θα πρέπει να εξαχθεί από τη διαγωνιοποίηση του πίνακα μαζών των φερμιονίων. Στην ομαδοποίηση αυτή, τα ζεύγη που σχετίζονται μέσω της  $SU(2)$  οργανώνονται σε στήλες, ενώ οι μεταβάσεις της  $SU(3)$  εκφράζονται μέσω του δείκτη  $\alpha$ . Τα ρεύματα της  $SU(5)$ , λόγω των  $Q$  και  $Y$  σημαίνουν μεταβάσεις μεταξύ γειτονικών στηλών. Η διάσπαση του πρωτονίου είναι μία από τις πιο χαρακτηριστικές προβλέψεις της  $SU(5)$  και οφείλεται στην συνύπαρξη των  $u$ ,  $d$  και  $u^c$  σε μία αναπαράσταση, γεγονός που οδηγεί στην παραβίαση της διατήρησης του αριθμού των φερμιονίων.

## Κεφάλαιο 6

# Αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας

### 6.1 Σπάσιμο της $SU(5)$

Ανακεφαλαιώνοντας την επιλογή της ομάδας  $SU(5)$ , φαίνεται αρκετά ενδιαφέρουσα, στον τομέα της ενοποίησης των αλληλεπιδράσεων. Είναι δυνατό με αυτήν την επιλογή να περιγράψουμε όλα τα φερμιονικά πεδία με δύο μόνο αναπαραστάσεις, ενώ όλα τα μποζονικά πεδία χωράνε στην αναπαράσταση **24**. Ακόμα ξεφύγαμε από την εξάρτηση της ομάδας από την  $U(1)$  και ταυτόχρονα εξηγήσαμε την κβάντωση του ηλεκτρικού φορτίου, χωρίς να χάνεται η ιδιότητα της επανακανονικοποιησιμότητας.

Τα προβλήματα που αντιμετωπίζουμε είναι τα εξής: Πρώτον ο τρόπος που θα αποδοθεί μάζα στα σωματίδια, καθώς η Λαγκρανζιανή μέχρι τώρα έχει μόνο κινητικούς όρους. Δεύτερον η ενεργειακή κλίμακα, καθώς αυτά που περιγράφουμε ισχύουν σε ενέργειες μίας τάξης μεγέθους ανώτερες από αυτές του καθιερωμένου προτύπου. Θα πρέπει λοιπόν να δείξουμε πως η θεωρία που φτιάχνουμε κατεβαίνοντας ενεργειακά, καταλήγει στο Καθιερωμένο Πρότυπο και δίνει τις σωστές μάζες στα σωματίδιά του, τα οποία είναι και τα μόνα παρατηρήσιμα σε αυτές τις κλίμακες, καθώς τα νέα σωματίδια είναι πολύ βαριά.

Απαιτούνται και σε αυτό το σημείο δύο στάδια εφαρμογής του μηχανισμού Higgs, ένα για ενεργειακές κλίμακες στην  $M_X$  και ένα στην  $M_W$ . Χρειαζόμαστε ένα πεδίο Higgs που θα είναι η διαταραχή που σπάει την  $SU(5)$  συμμετρία σε  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ , σε υψηλές ενέργειες και θα αποδίδει μάζα στα νέα πεδία. Έστω η αναμενόμενη τιμή αυτού του πεδίου ως προς το κενό ότι είναι  $u_1$ . Ένα δεύτερο πεδίο Higgs που χρειαζόμαστε είναι αυτό που σπάει στην ενεργειακή κλίμακα του καθιερωμένου προτύπου τη συμμετρία  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  στην  $SU(3) \times U(1)$ , αποδίδοντας στα σωματίδια τις κατάλληλες μάζες, με αναμενόμενη τιμή ως προς το κενό  $u_2$ . Συνοπτικά θέλουμε

$$SU(5) \xrightarrow{u_1} SU(3) \times SU(2) \times U(1) \xrightarrow{u_2} SU(3) \times U(1) \quad (6.1)$$

Θα ισχύει  $u_1 \gg u_2$  αφού  $M_{X,Y} \gg M_{W,Z}$ , για τα μποζόνια της θεωρίας για τις δύο διαφορετικές ενεργειακές κλίμακες. Αυτό δεν αποτελεί μοναδικό τρόπο να σπάσει η συμμετρία από την μεγαλοενοποιημένη θεωρία στο καθιερωμένο πρότυπο. Θα μπορούσαμε επίσης να εφαρμόσουμε τον μηχανισμό Higgs μέχρι να καταλήξουμε σε ενδιάμεσες ομάδες πριν φτάσουμε στο καθιερωμένο πρότυπο.

Πίσω στην δικιά μας μεθοδολογία, βάζουμε στο πρώτο σπάσιμο πεδία στην adjoint αναπαράσταση **24**, όπου βρίσκονται τα μποζόνια, ενώ στο δεύτερο σπάσιμο θα τοποθετήσουμε τα πεδία στην

διανυσματική αναπαράσταση **5**. Σχηματικά έχουμε

$$SU(5) \xrightarrow{\langle H \rangle} SU(3) \times SU(2) \times U(1) \xrightarrow{\langle \Phi \rangle} SU(3) \times U(1) \quad (6.2)$$

όπου το  $H$  ανήκει στην adjoint **24** ( $H_j^i$ ) και το  $\Phi$  στην διανυσματική **5** ( $\Phi_i$ ). Πρέπει λοιπόν να βρούμε έναν όρο δυναμικού της Λαγκρανζιανής για τα πεδία  $H$  και  $\Phi$ . Θα είναι δηλαδή  $V(H, \Phi)$  για μία θεωρία  $\phi^4$ , καθώς αυτή και η  $\phi^3$  είναι οι μόνες επανακανονικοποιήσιμες. Θα περιέχει δηλαδή όρους των πεδίων  $H$  και  $\Phi$  μέχρι τέταρτης τάξης το πολύ. Απαιτούμε ακόμα τα πεδία αυτά να ικανοποιούν τις συμμετρίες  $H \rightarrow -H$  και  $\Phi \rightarrow -\Phi$ , προκειμένου να απορρίψουμε τις θεωρίες  $\phi^1$  και  $\phi^3$ , που δεν ικανοποιούν αυτήν την συμμετρία. Ο δυναμικός όρος μίας Λαγκρανζιανής, που είναι αναλλοίωτος κάτω από μία ομάδα  $SU(N)$ , ανεπτυγμένος ως προς  $H$  και ως προς  $\Phi$  πρέπει να έχει την ακόλουθη μορφή:

$$V(H, \Phi) = V(H) + V(\Phi) + \lambda_4 (tr H^2) \Phi^\dagger \Phi + \lambda_5 \Phi^\dagger (tr H^2) \Phi \quad (6.3)$$

Ο  $H$  είναι ερμιτιανός άιχνος πίνακας αφού ανήκει στην adjoint αναπαράσταση **24**. Ακόμα ισχύουν

$$V(H) = -m_1^2 tr H^2 + \lambda_1 (tr H^2)^2 + \lambda_2 tr H^4 \quad (6.4)$$

και

$$V(\Phi) = -m_2^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 \quad (6.5)$$

Για τα δυο πρόσημα του συντελεστή  $\lambda_2$ , έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις: Για  $\lambda_2 > 0$  η  $SU(5)$  σπάει σε  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ , ενώ για  $\lambda_2 < 0$  η  $SU(5)$  σπάει σε  $SU(4) \times U(1)$ . Επομένως μας αφορά η περίπτωση όπου  $\lambda_2 > 0$ . Ακόμα το αυθόρμητο σπάσιμο της συμμετρίας συμβαίνει για  $\lambda_1 > -\frac{7\lambda_2}{30}$ .

Στο πρώτο στάδιο, κατά το σπάσιμο της συμμετρίας,  $SU(5) \xrightarrow{\langle H \rangle} SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  το πεδίο  $\Phi$  απουσιάζει, για αυτό και θεωρούμε  $\Phi = 0$ . Αυτό που ψάχνουμε είναι η αναμενόμενη τιμή του  $H$  ως προς το κενό, άρα η τιμή  $\langle H \rangle \neq 0$ , η οποία ελαχιστοποιεί το δυναμικό, δηλαδή

$$\left. \frac{\partial V}{\partial H} \right|_{\Phi=0, H=\langle H \rangle \neq 0} = 0 \quad (6.6)$$

Στο δεύτερο στάδιο  $SU(3) \times SU(2) \times U(1) \xrightarrow{\langle \Phi \rangle} SU(3) \times U(1)$  ψάχνουμε ελάχιστα του δυναμικού για μη μηδενικές τιμές του  $\Phi$ , δηλαδή

$$\left. \frac{\partial V}{\partial \Phi} \right|_{\Phi=\langle \Phi \rangle} = 0 \quad (6.7)$$

Να σημειώσουμε ότι απαιτείται πολύ λεπτή ρύθμιση, δηλαδή fine tuning των όρων  $\lambda_4$  και  $\lambda_5$  για να περιοριστεί η τεράστια συνεισφορά τους και να πάρουμε τη ζητούμενη σχέση μεταξύ  $u1$  και  $u2$ .

- Πρώτο στάδιο αυθορμήτου σπασίματος συμμετρίας:

Για  $\Phi = 0$  το δυναμικό γίνεται

$$V(H, 0) = -m_1^2 tr H^2 + \lambda_1 (tr H^2)^2 + \lambda_2 tr H^4 \quad (6.8)$$

Ψάχνουμε τις τιμές  $H = \langle H \rangle$  που ελαχιστοποιούν το δυναμικό (6.8). Εφαρμόζοντας μοναδιακό μετασχηματισμό  $UHU^{-1} = H_j^i = H_i \delta_j^i$ . Μπορούμε να διαγωνοποιήσουμε τον πίνακα  $H$ , ενώ ταυτόχρονα θα παραμένει άιχνος, δηλαδή  $\sum H_i = 0$ . Την εύρεση του ελαχίστου δυναμικού συνεπάγονται οι εξισώσεις

$$\frac{\partial V}{\partial H_i} = 0 \quad (6.9)$$

οι οποίες είναι τρίτης τάξης ως προς τα διαγώνια στοιχεία του  $H$  και μπορούν να πάρουν μέχρι τρεις διαφορετικές τιμές. Για τις τιμές  $\lambda_2 > 0, \lambda_1 > -\frac{7}{30}\lambda_2$ , για τις σταθερές ζεύξης, το δυναμικό ελαχιστοποιείται μόνο για δύο τιμές των  $H_i$  και μπορούμε να τις ομαδοποιήσουμε ως εξής:

$$\langle H \rangle = u_1 \begin{pmatrix} 2 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & -3 & \\ & & & & -3 \end{pmatrix}, \quad u_1^2 = \frac{m_1^2}{60\lambda_1 + 14\lambda_2} \quad (6.10)$$

Το  $H = \langle H \rangle = u_1 \text{diag}(2, 2, 2, -3, -3)$  είναι το κενό της θεωρίας μας στην  $GUT$  scale. Στη συνέχεια διαταράσσουμε το κενό της θεωρίας μας. Τοποθετώντας τα 24 πεδία διαταραχές γύρω από το κενό που επιλέξαμε θα έχουμε

$$H' = H - \langle H \rangle = u_1 \begin{pmatrix} [H_8]^\alpha_\beta - 2H_0/\sqrt{30} & & & H_{X_1} & H_{Y_1} \\ & & & H_{X_2} & H_{Y_2} \\ & & & H_{X_3} & H_{Y_3} \\ H_{X_1}^\dagger & H_{X_2}^\dagger & H_{X_3}^\dagger & & \\ H_{Y_1}^\dagger & H_{Y_2}^\dagger & H_{Y_3}^\dagger & [H_3]_s^r + 3H_0/\sqrt{30} & \end{pmatrix} \quad (6.11)$$

Οι μάζες των πεδίων αυτών μπορούν να υπολογιστούν από την δεύτερη παράγωγο του δυναμικού για  $H = \langle H \rangle$ , δηλαδή

$$\text{Φάσμα μάζας : } \frac{\partial^2 V}{\partial H^2} \Big|_{H=\langle H \rangle} \quad (6.12)$$

Τα πεδία  $H_{X_i}$  και  $H_{Y_i}$  είναι τα πιθανά Goldstone μποζόνια, τα οποία θα απορροφηθούν όταν κάνουμε μετασχηματισμό και μεταφερθούν στην φυσική βαθμίδα. Τα υπόλοιπα πεδία, από την δεύτερη παράγωγο θα πάρουν τις ακόλουθες τιμές

<i>scalar fields</i>	$SU(3) \otimes SU(2)$	$[mass]^2$
$[H_8]^\alpha_\beta$	<b>(8, 1)</b>	$20\lambda_2 u_1^2$
$[H_3]_s^r$	<b>(1, 3)</b>	$80\lambda_2 u_1^2$
$H_0$	<b>(1, 1)</b>	$4m_1^2$
$(H_{X_\alpha}, H_{Y_\alpha})$	<b>(3, 2)</b>	0
$(H_{X_\alpha}^\dagger, H_{Y_\alpha}^\dagger)$	<b>(3*, 2)</b>	0
$\Phi_{t\alpha}$	<b>(3, 1)</b>	$-m_2^2 + (30\lambda_4 + 4\lambda_3)u_1^2$
$\Phi_{dr}$	<b>(1, 2)</b>	$-m_2^2 + (30\lambda_4 + 9\lambda_3)u_1^2$

Σχήμα 6.1: Φάσμα μάζας βαθμωτών πεδίων της  $SU(5)$ ,  $H$  και  $\Phi$ .

Εφαρμόζοντας τον μηχανισμό Higgs δίνουμε μάζα και στα υπόλοιπα μποζονικά πεδία, δηλαδή αυτά που βρίσκονται στην  $\Phi$  και τα πεδία  $X$  και  $Y$ . Υπενθυμίζουμε ότι το  $\Phi$  ανήκει στην αναπαράσταση **5**. Μπορούμε λοιπόν να χωρίσουμε τα πέντε στοιχεία της σε μία τριπλέτα με δείκτη  $\alpha = 1, 2, 3$  και μία διπλέτα με δείκτη  $r = 1, 2$ , δηλαδή

$$\Phi = (\Phi_1 \ \Phi_2 \ \Phi_3 \ \Phi_4 \ \Phi_5)^T = (\Phi_{t\alpha} \ \Phi_{dr}), \text{ όπου } \alpha = 1, 2, 3 \text{ και } r = 1, 2 \quad (6.13)$$

Στο πρώτο σπάσιμο, παρόλο που θεωρούμε, λόγω της υψηλής ενέργειας, αμελητέα την παρουσία του  $\Phi$ , αυτό δεν συνεπάγεται ότι δεν του αντιστοιχεί όρος μάζας. Μέσω του δυναμικού λοιπόν  $V(H, \Phi)$  θα πάρουμε όρο μάζας για τα πεδία  $\Phi$ , δηλαδή για τους τετραγωνικούς όρους του  $\Phi$ , οι οποίοι είναι ανάλογοι του  $\Phi^\dagger \Phi$ :

$$V_{M_\Phi} = -m_2^2(\Phi^\dagger \Phi) + \lambda_4(tr H^2)(\Phi^\dagger \Phi) + \lambda \Phi^\dagger H^2 \Phi \quad (6.14)$$

Θα υπολογίσουμε αρχικά το  $tr H^2$ :

$$H^2 = u_1^2 \text{diag}(4, 4, 4, 9, 9) \rightarrow tr H^2 = 30u_1^2 \quad (6.15)$$

Ακόμα

$$\Phi^\dagger \Phi = (\Phi_{t\alpha} \ \Phi_{dr})^\dagger \begin{pmatrix} \Phi_{t\alpha} \\ \Phi_{dr} \end{pmatrix} = \Phi_{t\alpha}^\dagger \Phi_{t\alpha} + \Phi_{dr}^\dagger \Phi_{dr} \quad (6.16)$$

Άρα ο όρος  $\Phi^\dagger H^2 \Phi$  θα γίνει

$$\Phi^\dagger H^2 \Phi = u_1^2 (\Phi_{t\alpha} \ \Phi_{dr})^\dagger \begin{pmatrix} 4 & & & & \\ & 4 & & & \\ & & 4 & & \\ & & & 9 & \\ & & & & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_{t\alpha} \\ \Phi_{dr} \end{pmatrix} = 4\Phi_{t\alpha}^\dagger \Phi_{t\alpha} u_1^2 + 9\Phi_{dr}^\dagger \Phi_{dr} u_1^2 \quad (6.17)$$

Άρα το δυναμικό γίνεται

$$V_{M_\Phi}|_{H=\langle H \rangle} = [-m_2^2 + (30\lambda_4 + 4\lambda_3)u_1^2](\Phi_{t\alpha}^\dagger \ \Phi_{t\alpha}) + [-m_2^2 + (30\lambda_4 + 9\lambda_3)u_1^2](\Phi_{dr}^\dagger \ \Phi_{dr})$$

Οι συντελεστές των  $\Phi^\dagger \Phi$  είναι το τετράγωνο των αντιστοιχών μαζών, άρα:

$$m_{\Phi_{t\alpha}}^2 = -m_2^2 + (30\lambda_4 + 4\lambda_3)u_1^2 \quad (6.18)$$

$$m_{\Phi_{dr}}^2 = -m_2^2 + (30\lambda_4 + 9\lambda_3)u_1^2 \quad (6.19)$$

Σχετικά με τα μποζόνια της θεωρίας μας, παρατηρούμε πως αφού το  $H$  ανήκει στην adjoint αναπαράσταση, μπορούμε να γράψουμε μία συναλλοίωτη παράγωγο, με όμοιο τρόπο που το κάναμε και στο Καθιερωμένο Πρότυπο ως εξής:

$$D_\mu H = \partial H + ig[A_\mu, H] \quad (6.20)$$

Για  $H' = H - \langle H \rangle \Rightarrow H = H' + \langle H \rangle$ , η παράγωγος αυτή γίνεται

$$D_\mu H = \partial(H' + \langle H \rangle) + ig[A_\mu, H' + \langle H \rangle] = \partial H' + ig[A_\mu, H'] + ig[A_\mu, \langle H \rangle]$$

$$\Rightarrow D_\mu H = D_\mu H' + ig[A_\mu, \langle H \rangle] \quad (6.21)$$

Οι όροι μάζας προκύπτουν από το  $|D_\mu H|^2$  για τα μποζονία μας. Υπενθυμίζουμε αρχικά το  $A_\mu$ :

$$A_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} & & & X_1 & Y_1 \\ & G_\beta^\alpha & & X_2 & Y_2 \\ & & & X_3 & Y_3 \\ X^1 & X^2 & X^3 & W^{3+} & W^+ \\ Y^1 & Y^2 & Y^3 & W^- & W^{3-} \end{pmatrix} \quad (6.22)$$

όπου  $G_\beta^\alpha = (G - \frac{2B}{\sqrt{30}})^\alpha_\beta$  και  $W^{3+} = \pm \frac{W^3}{\sqrt{2}} + \frac{3B}{\sqrt{30}}$  Αναπτύσσοντας την  $|D_\mu H|^2$ , ο όρος που τελικά θα μας δώσει τις μάζες είναι ο  $-g^2|[A_\mu, \langle H \rangle]|^2$ . Άρα έχουμε

$$\begin{aligned} [A_\mu, \langle H \rangle] &= A_\mu \langle H \rangle - \langle H \rangle A_\mu \\ &= \frac{u_1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2G_1^1 & 2G_2^1 & 2G_3^1 & -3X_1 & -3Y_1 \\ 2G_1^2 & G_2^2 & 2G_3^2 & -3X_2 & -3Y_2 \\ 2G_1^3 & 2G_2^3 & 2G_3^3 & -3X_3 & -3Y_3 \\ 2X^1 & 2X^2 & 2X^3 & -3W^{3+} & -3W^+ \\ 2Y^1 & 2Y^2 & 2Y^3 & -3W^- & -3W^{3-} \end{pmatrix} \\ &\quad - \frac{u_1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2G_1^1 & 2G_2^1 & 2G_3^1 & 2X_1 & 2Y_1 \\ 2G_1^2 & G_2^2 & 2G_3^2 & 2X_2 & Y_2 \\ 2G_1^3 & 2G_2^3 & 2G_3^3 & 2X_3 & 2Y_3 \\ -3X^1 & -3X^2 & -3X^3 & -3W^{3+} & -3W^+ \\ -3Y^1 & -3Y^2 & -3Y^3 & -3W^- & -3W^{3-} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow [A_\mu, \langle H \rangle] &= \frac{u_1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -5X_1 & -5Y_1 \\ 0 & 0 & 0 & -5X_2 & -5Y_2 \\ 0 & 0 & 0 & -5X_3 & -5Y_3 \\ 5X^1 & 5X^2 & 5X^3 & 0 & 0 \\ 5Y^1 & 5Y^2 & 5Y^3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.23) \end{aligned}$$

Η μάζα προκύπτει συγκεκριμένα από τον όρο  $-g^2|[A_\mu, \langle H \rangle]|^2$ , ο οποίος μέσω της (6.23) γίνεται

$$\begin{aligned} -g^2|[A_\mu, \langle H \rangle]|^2 &= -g^2 \frac{u_1^2}{2} |(-5X_1)(5X^1) + (-5Y_1)(5Y^1) + (-5X_2)(5X^2) + \dots| \\ \Rightarrow -g^2|[A_\mu, \langle H \rangle]|^2 &= -\frac{25u_1^2}{2}(X^2 + Y^2) \quad (6.24) \end{aligned}$$

Παίρνουμε λοιπόν άμεσα από την ανωτέρω σχέση, τις μάζες των βαρέων μποζονίων  $X$  και  $Y$ :

$$M_X = M_Y = \frac{5\sqrt{2}}{2} g u_1 \quad (6.25)$$

Ως εδώ έχουμε αναλύσει πλήρως το πρώτο στάδιο του σπασίματος συμμετρίας. Βλέπουμε πως οι μη μηδενικές μάζες, μετά από αυτό το πρώτο σπάσιμο είναι της τάξης του  $u_1$ , δηλαδή λαμβάνουν αρκετά



μεγάλες τιμές. Το φάσμα της θεωρίας μας φαίνεται συγκεντρωτικά στον πίνακα που παραθέσαμε παραπάνω.

- Δεύτερο στάδιο αυθορμήτου σπασίματος συμμετρίας:

Επόμενο βήμα είναι να φτάσουμε και στις χαμηλότερες ενεργειακές κλίμακες, εισερχόμενοι στην περιοχή του καθιερωμένου προτύπου, δηλαδή για ενέργειες της τάξης των  $250\text{GeV}$ . Εκεί θα σπάσουμε την συμμετρία  $SU(2)$  χρησιμοποιώντας και πάλι τον μηχανισμό *Higgs*, με αναμενόμενη τιμή ως προς το κενό της τάξης του  $u_1 \gg u_2$ . Χρειαζόμαστε λοιπόν για τον σκοπό αυτόν μία διπλέτα  $SU(2)$  με αναμενόμενη μάζα  $m_{\Phi_d} \ll M_X$ . Εδώ θα θεωρήσουμε, αντίθετα με το πρώτο σπάσιμο, ότι σε χαμηλές ενέργειες, τα βαριά μποζόνια σταματούν να αλληλεπιδρούν με τα σωματίδια της θεωρίας μας, δηλαδή δεν υπάρχει σύζευξη. Τελικά απομένουν μόνο τα ελαφριά μποζόνια, άρα η διπλέτα  $\Phi_d$ . Η διαδικασία αυτή ονομάζεται decoupling.

**Decoupling theorem:** Αν μία gauge invariant Λαγκρανζιανή περιέχει δύο τάξεις μαζών, έστω  $m$  και  $M$ , με  $m \ll M$ , και είναι επανακανονικοποιήσιμη σε ενέργειες της τάξης  $E \ll M$ , τότε η θεωρία μπορεί να περιγραφεί πλήρως από μία επανακανονικοποιήσιμη Λαγκρανζιανή που περιέχει μόνο τα ελαφριά σωματίδια. Η δράση των βαρέων σωματιδίων επιφέρει μόνο ένα rescale στις σταθερές ζεύξης και τις παραμέτρους επανακανονικοποίησης.

Το ενεργό δυναμικό στην περιοχή ενεργειών των  $250\text{GeV}$  θα είναι

$$V_{eff}(\phi) = -m_d^2(\phi^\dagger\phi) + \lambda_3(\phi^\dagger\phi)^2 \quad (6.26)$$

Με  $\phi$  συμβολίζουμε την διπλέτα του  $\Phi$  που ορίσαμε νωρίτερα. Με βάση τα προηγούμενα, καθώς και τον πίνακα μαζών, για τη μάζα του  $\Phi_d \equiv \phi$  ισχύει  $m_d^2 \simeq m_d^2$ . Το δυναμικό αυτό είναι ίδιο με το δυναμικό Higgs του Καθιερωμένου Προτύπου. Διαλέγουμε και πάλι αναμενόμενη τιμή ως προς το κενό  $u_2 \ll u_1$ . Το βαθύτερο κενό της θεωρίας θα είναι πλέον το εξής

$$\langle \phi_d \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (6.27)$$

με

$$u_2 = \sqrt{\frac{m_d^2}{\lambda_3}} \simeq 250\text{GeV} \quad (6.28)$$

Έχουμε δηλαδή περιγράψει το δεύτερο στάδιο του σπασίματος  $SU(3) \times SU(2) \times U(1) \xrightarrow{u_2} SU(3) \times U(1)$ . Παρατηρούμε πως υπάρχει μία πολύ μεγάλη διαφορά στις δύο τάξεις μεγέθους των ενεργειών που αναφερόμαστε, δηλαδή  $u_1 \sim 10^{12}u_2$ . Ακόμα ο περιορισμός μας σε ελαφριά σωματίδια, μπορεί να γίνει σε διάφορες τάξεις της θεωρίας διαταραχών, αλλά απαιτείται fine tuning σε κάθε τάξη. Τελική λύση στα προβλήματα αυτά παρέχεται από τη θεωρία της Υπερσυμμετρίας. Ακόμα στο τεχνικό κομμάτι του προβλήματος ιεραρχίας, η «λεπτή ρύθμιση» που συμβαίνει στη μηδενικής τάξης θεωρία διαταραχών είναι ασταθής. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να χαλάνε οι διορθώσεις ακτινοβολίας, γεγονός που επίσης θα επιλύσει η θεωρία της Υπερσυμμετρίας.

Πρέπει να σημειώσουμε ότι η παραπάνω ανάλυση παραμερίζει το γεγονός ότι οι όροι διασταύρωσης συνεισφέρουν στην αναμενόμενη τιμή του κενού, κατά τη διάρκεια του πρώτου σπασίματος συμμετρίας. Ουσιαστικά πήραμε ως δεδομένο ότι τα σπασίματα συμμετρίας βαθμίδας είναι ανεξάρτητα

μεταξύ τους. Αν θέλουμε να συμπεριλάβουμε την συνεισφορά των προαναφερθέντων όρων, η αναμενόμενη τιμή στο πρώτο σπάσιμο συμμετρίας θα είναι ελαφρώς μετατοπισμένη από αυτήν που βρήκαμε. Παρόλα αυτά, η εισαγωγή όρων διασταύρωσης δεν συμβαίνει για λόγους επανακανονικοποίησης.

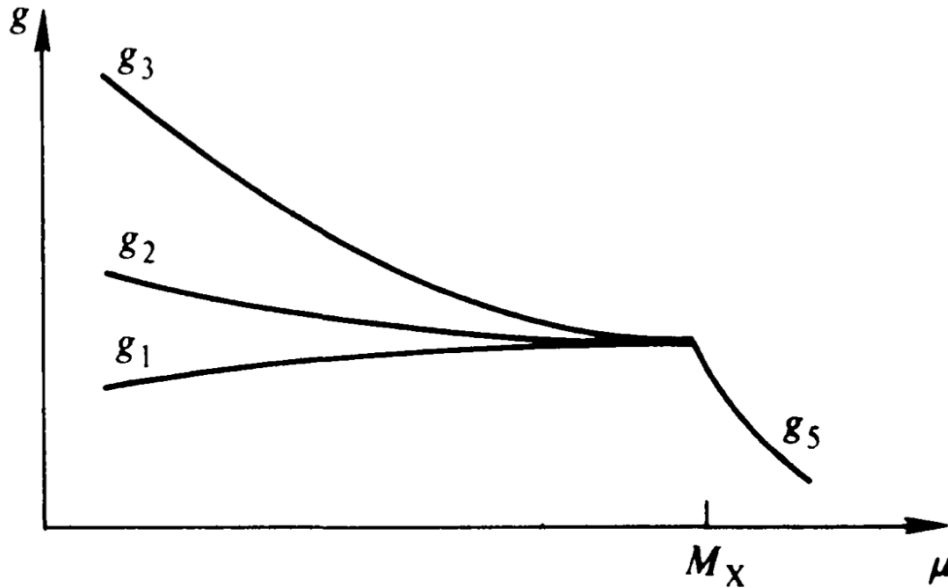
## 6.2 Ενοποίηση σταθερών ζεύξης

Στο σημείο αυτό θα αναλυθεί η ισχύς της θεωρίας μας. Ας προχωρήσουμε λοιπόν στην ουσία της, δηλαδή τις προβλέψεις. Στο Καθιερωμένο Πρότυπο οι ισχυρές και ηλεκτρασθενείς αλληλεπιδράσεις περιγράφονται από τρεις σταθερές ζεύξης  $g_s$ ,  $g$  και  $g'$ . Έχειδειχτεί και πειραματικά ότι αυτές έχουν διαφορετική ένταση και εξέλιξη, ανάλογα με την ενέργεια. Οι σταθερές ζεύξης  $g_s$  και  $g$  που αντιστοιχούν στις  $SU(3)$  και  $SU(2)$  μειώνονται λογαριθμικά όσο αυξάνεται η ενέργεια, ενώ η  $g'$  της  $U(1)$  αυξάνεται με την αύξηση της ενέργειας. Το Καθιερωμένο Πρότυπο δεν παρέχει κάποια εξήγηση για τα παραπάνω. Στην θεωρία ενοποίησης όμως, υπάρχει μόνο μία σταθερά ζεύξης, στην δική μας περίπτωση η  $g_5$ , για αρκετά υψηλές ενέργειες (GUT scale).

Η φιλοσοφία των μεγαλοενοποιημένων θεωριών είναι λοιπόν, η περιγραφή όλων των αλληλεπιδράσεων από μία ενιαία σταθερά ζεύξης. Οι Georgi, Quinn και Weinberg παρατήρησαν ότι οι σταθερές αυτές πρέπει να μεταβάλλονται με την ενέργεια και αν τελικά η υπόθεση των GUTs ισχύει, θα πρέπει τελικά να εξισώνονται σε μία σύζευξη, για κάποια μεγάλη μάζα.

Συγκεκριμένα για την  $SU(5)$  αυτή η σταθερά ζεύξης  $g_5$  θα πρέπει να εφαρμόζεται στις διάφορες υποομάδες της. Η δυνατότητα ύπαρξης διαφορετικών σταθερών για την κάθε υποομάδα, στις χαμηλές ενέργειες, είναι αποτέλεσμα του πρώτου αυθόρμητου σπασίματος συμμετρίας. Τα λεπτοκουάρκ  $X, Y$  της  $SU(5)$  αποκτούν μάζα και αποσυζεύγγονται από τις εξισώσεις της ομάδας επανακανονικοποίησης των σταθερών σύζευξης. Αυτή η αποσύζευξη θα έχει διαφορετικές επιδράσεις στις διορθώσεις ακτινοβολίας των διαφόρων σταθερών ζεύξης, επάγοντας έτσι διαφορετικές ενεργούς συζεύξεις στις χαμηλές ενέργειες.

Μεταφερόμενοι σε χαμηλότερες ενεργειακές κλίμακες, θα πρέπει να καταλήγουμε στο καθιερωμένο πρότυπο. Αυτή η δυνατότητα προκύπτει από το αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας, όπου το πρώτο στάδιο του σπασίματος της συμμετρίας παρέχει την δυνατότητα ύπαρξης μοναδικής σταθεράς ζεύξης, η οποία χωρίζεται σε τρεις, οδεύοντας προς τα κάτω στις τιμές των ενεργειών, για κάθε υποομάδα της  $SU(5)$ . Έστω τώρα ότι σε κάποια υψηλή ενέργεια οι τρεις σταθερές ζεύξης του καθιερωμένου προτύπου συμπίπτουν σε κάποιο σημείο, από το οποίο και έπειτα, η θεωρία μας περιγράφεται από την μοναδική πλέον  $g_5$ , όπως φαίνεται στο σχήμα.



Σχήμα 6.2: Ενοποίηση σταθερών ζεύξης.

Σχηματικά θα έχουμε

$$SU(5) \rightarrow SU(3) \times SU(2) \times U(1) \quad (6.29)$$

$$g_5(\sim M_X) \rightarrow g_s, g, g'(\sim M_Z)$$

Δηλαδή για  $\mu > M_X$ , όπου η μάζα του μποζονίου  $X$  μπορεί να αμεληθεί, οι σταθερές ζεύξης που αντιστοιχούν σε διαφορετική ομάδα, παραμένουν ενοποιημένες. Αντίθετα για  $\mu < M_X$  οι σταθερές εξελίσσονται με τρόπο που εξαρτάται από την ομάδα βαθμίδας. Αφού η ενεργειακή εξάρτηση των σταθερών είναι αποκλειστικά λογαριθμική, οι  $g_s, g$  και  $g'$  διαφέρουν σημαντικά, άρα είναι φυσικό επακόλουθο ότι η  $M_X$  θα πρέπει να είναι πολλές τάξεις μεγέθους μεγαλύτερη από την  $M_W$ . Ακόμα γνωρίζουμε από τις εξισώσεις επανακανονικοποίησης ότι για τις μη αβελιανές ομάδες, η σταθερά ζεύξης μειώνεται με την αύξηση της ενέργειας, ενώ για τις αβελιανές συμβαίνει το αντίθετο. Άρα για τις ενέργειες χαμηλότερες του  $M_X$ , η διάταξη των σταθερών ζεύξης θα είναι  $g_s > g > g'$ , γεγονός που συμφωνεί με τις πειραματικές παρατηρήσεις. Κάτω από το  $M_X$  οι τροχιές των σταθερών σύζευξης πρέπει να έχουν την σωστή σχετική ισχύ, ώστε να ενώνονται όλες σε ένα σημείο, όταν φτάνουν στο  $M_X$ . Αυτό συνεπάγεται μία μη τετριμμένη συνεπή συνθήκη ανάμεσα στις  $g_s, g, g'$ . Η σχέση αυτή προβλέπει την γωνία Weinberg.

Ας δούμε τις προβλέψεις, στις οποίες οδηγούμαστε. Εξετάζουμε αρχικά τι συμβαίνει στις υψηλές ενέργειες του παραπάνω διαγράμματος. Γράφουμε τις συναλλοίωτες παραγώγους της  $SU(5)$  και του καθιερωμένου προτύπου αντίστοιχα, στην ενεργειακή κλίμακα της ενοποίησης:

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_5 \sum_{\alpha=0}^{23} A_\mu^\alpha \frac{\lambda^\alpha}{2} \quad (6.30)$$

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_s \sum_{\alpha=1}^8 G_\mu^\alpha \frac{\lambda^\alpha}{2} + ig \sum_{r=1}^3 W_\mu^r \frac{\tau^r}{2} + ig' B_\mu \frac{Y}{2} \quad (6.31)$$

Έστω ότι οι σταθερές ζεύξης  $g_s, g$  και  $g'$  του καθιερωμένου προτύπου στην GUT scale θα είναι  $g_3$  για την ισχυρή  $SU(3)$ ,  $g_2$  για την ασθενή  $SU(2)$  και  $g_1$  για την ηλεκτρομαγνητική. Ο ορισμός της σχέσης των σταθερών ζεύξης εξαρτάται από την κανονικοποίηση των γεννητόρων της ομάδας. Στις μη αβελιανές ομάδες δεν έχουμε κάποιο πρόβλημα, αφού έχουν ίδιες συνθήκες κανονικοποίησης, δηλαδή τις άλγεβρες Lie:

$$SU(5) : \text{tr}(\lambda^\alpha \lambda^\beta) = 2\delta^{\alpha\beta}, \text{ γενικευμένοι πίνακες Gell-Man} \quad (6.32)$$

$$SU(3) : \text{tr}(\lambda^a \lambda^b) = 2\delta^{ab}, \text{ πίνακες Gell-Man} \quad (6.33)$$

$$SU(2) : \text{tr}(\tau^r \tau^m) = 2\delta^{rm}, \text{ πίνακες Pauli} \quad (6.34)$$

Ακόμα για την ενοποίηση θα ισχύει

$$g_5 = g_3 = g_2 = g_1 \quad (6.35)$$

Αυτές φαίνονται συγκεντρωτικά στην συναλλοίωτη παράγωγο (6.30). Σύμφωνα με τις σχέσεις κανονικοποίησης των γεννητόρων που έχουμε επιβάλει νωρίτερα, θα έχουμε

$$g_3 \equiv g_s, \quad g_2 \equiv g \quad (6.36)$$

Συγκρίνοντας τις δύο συναλλοίωτες παραγώγους προκύπτει ότι

$$ig_1 A_\mu^0 \frac{\lambda^0}{2} = ig' B_\mu \frac{Y}{2} \quad (6.37)$$

Άρα το πεδίο  $A_\mu^0$  ταυτοποιείται με το  $B_\mu$  της  $U(1)$ , πριν από την μίξη της με την  $SU(2)$ , όπως στο καθιερωμένο πρότυπο. Επομένως έχουμε

$$g_1 \lambda^0 = g' Y \quad (6.38)$$

Η  $U(1)$  ως αβελιανή ομάδα έχει τετριμμένη άλγεβρα και δεν υπάρχει περιορισμός στην κανονικοποίηση του γεννήτορά της. Όμοιο πρόβλημα αντιμετωπίζαμε και κατά την απόδοση του υπερφορτίου στο καθιερωμένο πρότυπο, όπου εν τέλει επιβάλλαμε τα επιθυμητά φορτία χωρίς κάποια φυσική ανάγκη. Τα  $Y$  και  $\lambda^0$  μπορούν να μεταβάλλονται ανεξάρτητα. Το γεγονός που μπορεί στην περίπτωσή μας, να οδηγήσει σε επιλογή συνθήκης είναι πως έχουμε ήδη υπολογίσει τον πίνακα  $Y$  για την θεμελιώδη αναπαράσταση  $\mathbf{5}$ . Μέσω της ταυτοποίησης σωματιδίων της  $SU(5)$  απαιτούμε:

$$Y = c\lambda^0 \quad (6.39)$$

όπου  $c$  μία σταθερά. Έχουμε υπολογίσει τον τελεστή του υπερφορτίου

$$Y = \begin{pmatrix} -2/3 & & & & \\ & -2/3 & & & \\ & & -2/3 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad (6.40)$$

Για την αναπαράσταση

$$\mathbf{5} : (\psi_i)_R = (d_1 \ d_2 \ d_3 \ e^+ \ -\nu_1^c)_R \quad (6.41)$$

Από την άλγεβρα της ομάδας  $SU(5)$  και τις αναπαράστασεις της σε  $5 \times 5$  πίνακες έχουμε

$$\lambda^0 = \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} 2 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & -3 & \\ & & & & -3 \end{pmatrix} \quad (6.42)$$

Αντίθετα με το καθιερωμένο πρότυπο μπορούμε να επιβάλλουμε συνθήκη. Πρέπει μόνο να υπολογίσουμε την σταθερά  $c$ . Ακόμα από την σχέση (6.38) που αποτελεί προϊόν της ενοποίησης, παρατηρούμε ότι έπειτα από την επιβολή της συνθήκης μπορούμε να υπολογίσουμε ακριβώς την σχέση των δύο σταθερών ζεύξης των ασθενών και ηλεκτρομαγνητικών αλληλεπιδράσεων. Εκτελώντας τις πράξεις για ένα στοιχείο των πινάκων, βρίσκουμε

$$1 = -\frac{3}{\sqrt{15}}c \quad (6.43)$$

$$c = -\sqrt{\frac{5}{3}} \quad (6.44)$$

Πολλαπλασιάζοντας όλα τα στοιχεία του  $\lambda^0$  με  $c$  παίρνουμε τον  $Y$ . Άρα θα έχουμε

$$g_1 \lambda^0 = g' Y \quad (6.45)$$

$$g_1 \lambda^0 = -\sqrt{\frac{5}{3}} \lambda^0 g' \quad (6.46)$$

Από τις δύο αυτές σχέσεις προκύπτει

$$g' = -\sqrt{\frac{3}{5}} g_1 \quad (6.47)$$

Συνεπώς σε συνδυασμό με τη σχέση που προβλέπει το  $\sin^2 \theta_W$ , από το μοντέλο Weinberg-Salam των ηλεκτρασθενών αλληλεπιδράσεων. Άρα παίρνουμε

$$\sin^2 \theta_W = \frac{g'^2}{g^2 + g'^2} = \frac{\frac{3g_5^2}{5}}{g_5^2 + \frac{3g_5^2}{5}} = \frac{3}{8} \quad (6.48)$$

Τα αποτελέσματα που προέκυψαν για το  $\sin \theta_W$  και την εξίσωση των σταθερών ζεύξης, είναι έγκυρα στο όριο του  $\mu > M_X$ . Τώρα απομένει να μελετήσουμε την περίπτωση κάτω από την GUT scale, δηλαδή για  $\mu < M_X$ .

Θεωρούμε ότι η εξέλιξη των σταθερών ζεύξης καθορίζεται από τις εξισώσεις επανακανονικοποίησης στην ενδιάμεση περιοχή ενεργειών, μέχρι και το GUT scale

$$\beta(g_n) = \frac{dg_n}{d(\ln \mu)} = -b_n g_n^3, \quad n = 1, 2, 3 \quad (6.49)$$

όπου

$$b_n = \frac{11n - 2N_F}{48\pi^2}, \quad b_1 = -\frac{N_F}{24\pi^2} \text{ και } b_n - b_1 = \frac{11n}{48\pi^2} \quad (6.50)$$

$N_F$  είναι ο αριθμός των γεύσεων, δηλαδή 6 για την περίπτωση των τριών οικογενειών. Από τις παραπάνω σχέσεις, εύκολα υπολογίζουμε τους συντελεστές  $b_1, b_2, b_3$ , για  $N_F = 6$ , ως εξής

$$b_1 = -\frac{N_F}{24\pi^2} = -\frac{1}{4\pi^2}, \quad b_2 = \frac{11n - 2N_F}{48\pi^2} \stackrel{n=2}{=} \frac{5}{24\pi^2}, \quad b_3 = \frac{11n - 2N_F}{48\pi^2} \stackrel{n=3}{=} \frac{7}{16\pi^2} \quad (6.51)$$

Αγνοώντας τις συνεισφορές *higgs* επιλύουμε ως εξής για τις  $\beta$ -συναρτήσεις

$$\begin{aligned} \frac{dg_1}{d\ln\mu} &= -b_1 g_1^3, \quad t = \ln\mu \\ \Rightarrow \frac{dg_1(t)}{dt} &= -b_1 g_1^3(t) \\ \Rightarrow dg_1(t) &= -b_1 g_1^3(t) dt \\ \Rightarrow \frac{dg_1(t)}{g_1^3(t)} &= -b_1 dt \\ \Rightarrow \int_{t_0}^t g_1^{-3} dg_1(t) &= - \int_{t_0}^t b_1 dt \\ \Rightarrow -\frac{1}{2} g_1^{-2}(t) + \frac{1}{2} g_1^{-2}(t_0) &= -b_1(t - t_0) \\ \Rightarrow -\frac{1}{2} (g_1^{-2}(t) - g_1^{-2}(t_0)) &= -b_1 t + b_1 t_0 \\ \Rightarrow g_1^{-2}(t) - g_1^{-2}(t_0) &= 2(b_1 t - b_1 t_0) \\ \Rightarrow g_1^{-2}(\mu) &= g_1^{-2}(\mu_0) + 2b_1(\ln\mu - \ln\mu_0) \\ \Rightarrow g_1^{-2}(\mu) &= g_1^{-2}(\mu_0) + 2b_1 \ln \frac{\mu}{\mu_0} \end{aligned} \quad (6.52)$$

Ομοίως για  $n = 2, 3$  προκύπτει

$$\Rightarrow g_2^{-2}(\mu) = g_2^{-2}(\mu_0) + 2b_2 \ln \frac{\mu}{\mu_0} \quad (6.53)$$

$$\Rightarrow g_3^{-2}(\mu) = g_3^{-2}(\mu_0) + 2b_3 \ln \frac{\mu}{\mu_0} \quad (6.54)$$

Μεταφερόμενοι σε χαμηλή ενεργειακή κλίμακα, έχουμε:

$$g_3 \rightarrow g_s, g_2 \rightarrow g, g_1 \rightarrow -\sqrt{\frac{5}{3}}g' \quad (6.55)$$

με  $\tan \theta_W = \frac{g'}{g} \rightarrow g^2 \sin^2 \theta_W = g'^2 \cos^2 \theta_W$ . Ακόμα ισχύουν οι σχέσεις  $e = g \sin \theta_W$  και  $\alpha(\mu) = \frac{e^2(\mu)}{4\pi}$ . Άρα για την  $g_1$  έχουμε

$$\begin{aligned} g^2 \sin^2 \theta_W = g'^2 \cos^2 \theta_W &\Rightarrow \frac{3}{5}g_1^2 \cos^2 \theta_W = \frac{3}{5}(g \sin \theta_W)^2 \frac{g_1^2}{4\pi} \cos^2 \theta_W = \frac{e^2}{4\pi} \\ &\Rightarrow \frac{g_1^2(\mu)}{4\pi} = \frac{5}{3} \frac{\alpha(\mu)}{\cos^2 \theta_W} \end{aligned} \quad (6.56)$$

Με ακριβώς ίδια διαδικασία, για τα  $g_2$  και  $g_3$  έχουμε:

$$\begin{aligned} e = g \sin \theta_W &\xrightarrow{g=g_2} g_2^2 = \frac{e^2}{\sin^2 \theta_W} \\ &\Rightarrow \frac{g_2^2}{4\pi} = \frac{e^2}{4\pi \sin^2 \theta_W} \\ \frac{g_2^2(\mu)}{4\pi} &= \frac{\alpha(\mu)}{\sin^2 \theta_W} \end{aligned} \quad (6.57)$$

$$\frac{g_3^2(\mu)}{4\pi} = \frac{g_s^2(\mu)}{4\pi} = \alpha_s(\mu) \quad (6.58)$$

Στην συνέχεια θα θεωρήσουμε  $g_1(M_X) = g_2(M_X) = g_3(M_X) = g_5$  και  $\frac{g_5^2}{4\pi} = \alpha_5$ . Συνδυάζοντας τις (6.52) και (6.56) έχουμε:

$$\begin{aligned} \left( \frac{5}{3} \frac{\alpha(\mu)}{\cos^2 \theta_W} 4\pi \right)^{-1} &= g_1^{-2}(M_X) + 2b_1 \ln \left( \frac{\mu}{M_X} \right) \\ \Rightarrow \frac{3}{5} \alpha^{-1}(\mu) \frac{\cos^2 \theta_W}{4\pi} &= \frac{1}{g_1^2(M_X)} + 2b_1 \ln \left( \frac{\mu}{M_X} \right) \\ \Rightarrow \frac{3}{5} \alpha^{-1}(\mu) \cos^2 \theta_W &= \frac{4\pi}{g_5^2} + 8\pi b_1 \ln \left( \frac{\mu}{M_X} \right) \\ \Rightarrow \frac{3}{5} \alpha^{-1}(\mu) \cos^2 \theta_W &= \alpha_5^{-1} + 8\pi b_1 \ln \left( \frac{\mu}{M_X} \right) \end{aligned} \quad (6.59)$$

Συνδυάζοντας τις (6.53) και (6.57) έχουμε:

$$\left( \frac{\alpha(\mu)}{\sin^2 \theta_W} 4\pi \right)^{-1} = g_2^{-2}(M_X) + 2b_2 \ln \left( \frac{\mu}{M_X} \right)$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \alpha^{-1}(\mu) \frac{\sin^2 \theta_W}{4\pi} &= \frac{1}{g_2^2(M_X)} + 2b_2 \ln \left( \frac{\mu}{M_X} \right) \\
 \Rightarrow \alpha^{-1}(\mu) \sin^2 \theta_W &= \frac{4\pi}{g_2^2} + 8\pi b_2 \ln \left( \frac{\mu}{M_X} \right) \\
 \Rightarrow \alpha^{-1}(\mu) \sin^2 \theta_W &= \alpha_5^{-1} + 8\pi b_2 \ln \left( \frac{\mu}{M_X} \right) \tag{6.60}
 \end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τις (6.54) και (6.58) έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{\alpha(\mu)}{4\pi} \right)^{-1} &= g_3^{-2}(M_X) + 2b_3 \ln \left( \frac{\mu}{M_X} \right) \\
 \Rightarrow \alpha^{-1}(\mu) &= \frac{4\pi}{g_3^2(M_X)} + 8\pi b_3 \ln \left( \frac{\mu}{M_X} \right) \\
 \Rightarrow \alpha^{-1}(\mu) &= \frac{4\pi}{g_5^2} + 8\pi b_3 \ln \left( \frac{\mu}{M_X} \right) \\
 \Rightarrow \alpha^{-1}(\mu) &= \alpha_5^{-1} + 8\pi b_3 \ln \left( \frac{\mu}{M_X} \right) \tag{6.61}
 \end{aligned}$$

Γράφουμε τώρα την σχέση 2(6.61) - 3(6.60) + (6.59):

$$\begin{aligned}
 &2\alpha_s^{-1}(\mu) - 3\alpha^{-1}(\mu) \sin^2 \theta_W + \frac{3}{5}\alpha^{-1}(\mu) \cos^2 \theta_W \\
 &= 2\alpha_5^{-1} + 16\pi b_3 \ln \left( \frac{\mu}{M_X} \right) - 3\alpha_5^{-1} - 24\pi b_2 \ln \left( \frac{\mu}{M_X} \right) + \alpha_5^{-1} + 8\pi b_1 \ln \left( \frac{\mu}{M_X} \right) \\
 &= (16\pi b_3 - 24\pi b_2 + 8\pi b_1) \ln \left( \frac{\mu}{M_X} \right) \\
 &= 8\pi [2(b_3 - b_1) - 3(b_2 - b_1)] \ln \left( \frac{\mu}{M_X} \right) \\
 &\stackrel{(6.50)}{\implies} 2\alpha^{-1}(\mu) - 3\alpha^{-1}(\mu) \sin^2 \theta_W + \frac{3}{5}\alpha^{-1}(\mu) \cos^2 \theta_W = 8\pi \left( 2\frac{33}{48\pi^2} - 3\frac{22}{48\pi^2} \right) \ln \left( \frac{\mu}{M_X} \right) = 0 \\
 &\Rightarrow 2\alpha_s^{-1}(\mu) - 3\alpha^{-1}(\mu) \sin^2 \theta_W + \frac{3}{5}\alpha^{-1}(\mu) \cos^2 \theta_W = 0
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow 10\alpha_s^{-1}(\mu) - 15\alpha^{-1}(\mu)\sin^2\theta_W + 3\alpha^{-1}(\mu)\cos^2\theta_W = 0 \\
 &\Rightarrow 10\alpha_s^{-1}(\mu) - 15\alpha^{-1}(\mu)\sin^2\theta_W + 3\alpha^{-1}(\mu) - 3\alpha^{-1}(\mu)\sin^2\theta_W = 0 \\
 &\Rightarrow 10\alpha_s^{-1}(\mu) - 18\alpha^{-1}(\mu)\sin^2\theta_W + 3\alpha^{-1}(\mu) = 0 \\
 &\Rightarrow \sin^2\theta_W = \frac{3\alpha^{-1}(\mu)}{18\alpha^{-1}(\mu)} + 10\frac{10\alpha_s^{-1}(\mu)}{18\alpha^{-1}(\mu)} \\
 &\Rightarrow \sin^2\theta_W = \frac{1}{6} + \frac{5\alpha(\mu)}{9\alpha_s(\mu)} \tag{6.62}
 \end{aligned}$$

Γράφουμε τώρα την σχέση 8/3(6.61) - (6.60) - 5/3(6.59) και αντικαθιστούμε σε αυτήν του συντελεστές  $b_1, b_2$  και  $b_3$ . Επομένως έχουμε

$$\begin{aligned}
 &\frac{8}{3}\alpha_s^{-1}(\mu) - \alpha^{-1}(\mu)\sin^2\theta_W + \alpha^{-1}(\mu)\cos^2\theta_W \\
 &= \frac{8}{3}\alpha_5^{-1} + \frac{8}{3}8\pi b_3 \ln\left(\frac{\mu}{M_X}\right) - \alpha_5^{-1} - 8\pi b_2 \ln\left(\frac{\mu}{M_X}\right) - \frac{5}{3}\alpha_5^{-1} - \frac{5}{3}8\pi b_1 \ln\left(\frac{\mu}{M_X}\right) \\
 &\Rightarrow \frac{8}{3}\alpha_s^{-1}(\mu) - \alpha_s^{-1}(\mu) = \frac{64}{3}\pi b_3 \ln\left(\frac{\mu}{M_X}\right) - 8\pi b_2 \ln\left(\frac{\mu}{M_X}\right) - \frac{40}{3}\pi b_1 \ln\left(\frac{\mu}{M_X}\right) \\
 &= \frac{8\pi}{3}(8b_3 - 3b_2 - 5b_1) \ln\left(\frac{\mu}{M_X}\right) \\
 &= \frac{8\pi}{3}\left(8\frac{7}{16\pi^2} - 3\frac{5}{24\pi^2} + 5\frac{1}{4\pi^2}\right) \ln\left(\frac{\mu}{M_X}\right) \\
 &= \frac{11}{\pi} \ln\left(\frac{\mu}{M_X}\right) \\
 &\Rightarrow \frac{\pi}{11}\left[\frac{8}{3\alpha_s(\mu)} - \frac{1}{\alpha(\mu)}\right] = \ln\left(\frac{\mu}{M_X}\right) \\
 &\Rightarrow \ln\left(\frac{M_X}{\mu}\right) = \frac{\pi}{11}\left(\frac{1}{\alpha(\mu)} - \frac{8}{3\alpha_s(\mu)}\right) \tag{6.63}
 \end{aligned}$$

Η παραπάνω εξίσωση, καθορίζει την κλίμακα της ενοποίησης. Αν την γράψουμε στην ακόλουθη μορφή:

$$\frac{1}{\alpha_s(\mu)} = -\frac{33}{8\pi} \ln\left(\frac{M_X}{\mu}\right) + \frac{3}{8\alpha(\mu)} \tag{6.64}$$

και την συνδυάσουμε με το αποτέλεσμα που βρήκαμε για το  $\sin^2\theta_W$  έχουμε:

$$\begin{aligned} \sin^2\theta_W &= \frac{1}{6} + \frac{5\alpha(\mu)}{9} \left[ -\frac{33}{8\pi} \ln\left(\frac{M_X}{\mu}\right) + \frac{3}{8\alpha(\mu)} \right] \\ &= \frac{1}{6} - \frac{5\alpha(\mu)}{9} \frac{33}{8\pi} \ln\left(\frac{M_X}{\mu}\right) + \frac{5\alpha(\mu)}{9} \frac{3}{8\alpha(\mu)} \\ &= \frac{1}{6} + \frac{5}{24} - \frac{55\alpha(\mu)}{24\pi} \ln\left(\frac{M_X}{\mu}\right) \\ \sin^2\theta_W &= \frac{3}{8} - \frac{55\alpha(\mu)}{24\pi} \ln\left(\frac{M_X}{\mu}\right) \end{aligned} \quad (6.65)$$

Έτσι βρίσκουμε την εξέλιξη της γωνίας Weinberg συναρτήσει της ενέργειας. Στο όριο  $\mu \rightarrow M_X$  αναπαράγεται η αρχική συνθήκη, δηλαδή  $\sin^2\theta_W = \frac{3}{8}$ . Οφείλουμε να σημειώσουμε, ότι για τον υπολογισμό των  $b_n$  έχουμε θεωρήσει ότι για ένα ενδιάμεσο σωματίδιο ( $m < \mu$ ) η μάζα θεωρείται μηδενική, ενώ για  $m > \mu$  η μάζα θεωρείται άπειρη και το σωματίδιο αποσυνζεύγνυται.

Συμπεριλαμβάνοντας το βαθμωτό πεδίο Higgs του μοντέλου Weinberg-Salam, προκύπτουν τα ακόλουθα:

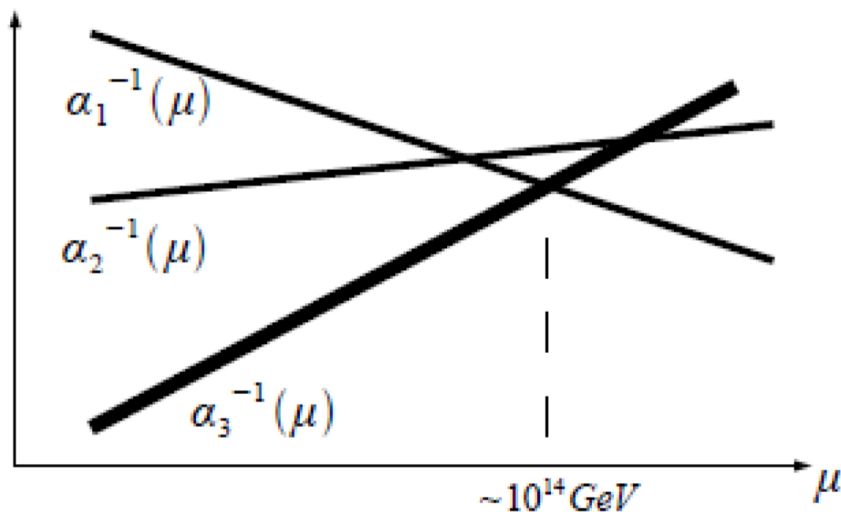
$$M_X \sim 4 \cdot 10^{14} GeV \quad (6.66)$$

$$\sin^2\theta_W^{th} \approx 0.21 \quad (6.67)$$

Η τιμή αυτή δεν συμφωνεί με τα πειραματικά αποτελέσματα όπου έχει βρεθεί

$$\sin^2\theta_W^{exp} = 0.23161 \pm 0.00018 \quad (6.68)$$

Όλα τα παραπάνω αποτυπώνονται στα πειραματικά μας αποτελέσματα, όπως φαίνεται και στο ακόλουθο διάγραμμα



Σχήμα 6.3: Πειραματικές τιμές σύγκλισης σταθερών ζεύξης.

Φαίνεται δηλαδή ότι οι σταθερές ζεύξης δεν συγκλίνουν μόνο σε ένα σημείο. Η ιδέα της ενοποίησης φαίνεται να δέχεται μεγάλη κριτική, αφού δεν μπορεί να καθορίσει ένα σημείο ταύτισης των σταθερών ζεύξης. Με την εισαγωγή της υπερσυμμετρίας θα δούμε ότι αυτές, όντως συναντώνται σε κάποιο σημείο, στο «ενεργειακό μέλλον».

### 6.3 Διάσπαση πρωτονίου

Παρατηρώντας από μία πιο απομακρυσμένη σκοπιά, συμπεραίνουμε πως οι μεγαλοενοποιημένες θεωρίες, ποιοτικά προβλέπουν πάντα την ενοποίηση των σταθερών ζεύξης του Καθιερωμένου Προτύπου, όπως και την διάσπαση του πρωτονίου. Το πρώτο αποτέλεσμα δεν φαίνεται απευθείας, αφού η ενοποίηση συμβαίνει, όπως έχουμε προαναφέρει σε υψηλή ενεργειακή κλίμακα. Η διάσπαση του πρωτονίου από την άλλη, αποτελεί ένα εύκολο τρόπο να ελέγξουμε την εκάστοτε θεωρία ενοποίησης.

Η πρωτονιακή διάσπαση συμβαίνει λόγω της ύπαρξης κουάρκ και λεπτονίων στην ίδια αναπαράσταση, άρα και της μη διατήρησης του βαρυονικού αριθμού σε κάποιες αλληλεπιδράσεις. Αυτές είναι και οι αλληλεπιδράσεις που ευθύνονται για την διάσπαση του πρωτονίου. Πρέπει λοιπόν να βρούμε τις συναλλοίωτες παραγώγους στις αναπαράστασεις **5**,  $\bar{5}$  και **10**. Στην συνέχεια θα γράψουμε το κομμάτι της Λαγκρανζιανής που περιγράφει τις αλληλεπιδράσεις των κουάρκ με τα λεπτόνια.

- Συναλλοίωτη παράγωγος της **5**:

$$(D_\mu \psi)_i = \left( \partial_\mu \delta_i^j + i \frac{g}{\sqrt{2}} (A_\mu)_i^j \right) \psi_j \quad (6.69)$$

- Συναλλοίωτη παράγωγος της  $\bar{5}$ :

$$(D_\mu \psi)^i = \left( \partial_\mu \delta_j^i - i \frac{g}{\sqrt{2}} (A_\mu)_j^i \right) \psi^j \quad (6.70)$$

- Συναλλοίωτη παράγωγος της **10**:

$$(D_\mu \chi)_{ij} = \partial_\mu \chi_{ij} + i \frac{g}{\sqrt{2}} (A_\mu)_i^k \chi_{kj} + i \frac{g}{\sqrt{2}} (A_\mu)_j^l \chi_{il} \quad (6.71)$$

όπου  $i, j, k, l = 1, \dots, 5$ . Τις αλληλεπιδράσεις των φερμιονίων με τα μποζόνια βαθμίδας, παίρνουμε από τον κινητικό όρο της Λαγκρανζιανής που γράφεται:

$$\mathcal{L}_{kin}^{mat} = i \bar{\psi}_i \gamma^\mu (D_\mu \psi)^i + i \bar{\chi}^{ij} \gamma^\mu (D_\mu \chi)_{ij} \quad (6.72)$$

Αναπτύσσοντας την παραπάνω παίρνουμε τις επιπλέον αλληλεπιδράσεις που εμπλέκουν τα μποζόνια  $X, Y$ . Για συντομία κρατάμε μόνο τους όρους που περιέχουν τις αλληλεπιδράσεις με τα μποζόνια αυτά. Έτσι ο πρώτος όρος της Λαγκρανζιανής γίνεται

$$\begin{aligned} i \bar{\psi}_i \gamma^\mu (D_\mu \psi)^i &= i \bar{\psi}_i \gamma^\mu \left( -i \frac{g}{\sqrt{2}} (A_\mu)_j^i \psi^j \right) = \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{\psi}_i \gamma^\mu (A_\mu)_j^i \psi^j \\ &= \frac{g}{\sqrt{2}} \{ \bar{\psi}_1 \gamma^\mu (A_\mu)_1^1 \psi^1 + \bar{\psi}_1 \gamma^\mu (A_\mu)_2^1 \psi^2 + \dots + \bar{\psi}_1 \gamma^\mu (A_\mu)_5^1 \psi^5 + \bar{\psi}_2 \gamma^\mu (A_\mu)_1^2 \psi^1 + \bar{\psi}_2 \gamma^\mu (A_\mu)_2^2 \psi^2 + \dots \} \end{aligned}$$

Κρατώντας μόνο τους όρους των αλληλεπιδράσεων που περιέχουν τα  $X, Y$  έχουμε

$$\begin{aligned}
 & i\bar{\psi}_i\gamma^\mu(D_\mu\psi)^i = \\
 & = \frac{g}{\sqrt{2}}\{\bar{\psi}_1\gamma^\mu(A_\mu)_4^1\psi^4 + \bar{\psi}_1\gamma^\mu(A_\mu)_5^1\psi^5 + \bar{\psi}_2\gamma^\mu(A_\mu)_4^2\psi^4 + \bar{\psi}_2\gamma^\mu(A_\mu)_5^2\psi^5 + \bar{\psi}_3\gamma^\mu(A_\mu)_4^3\psi^4 + \bar{\psi}_3\gamma^\mu(A_\mu)_5^3\psi^5 \\
 & + \bar{\psi}_4\gamma^\mu(A_\mu)_1^4\psi^1 + \bar{\psi}_4\gamma^\mu(A_\mu)_2^4\psi^2 + \bar{\psi}_4\gamma^\mu(A_\mu)_3^4\psi^3 + \bar{\psi}_5\gamma^\mu(A_\mu)_1^5\psi^1 + \bar{\psi}_5\gamma^\mu(A_\mu)_2^5\psi^2 + \bar{\psi}_5\gamma^\mu(A_\mu)_3^5\psi^3\} \\
 & = \frac{g}{\sqrt{2}}\{\bar{d}_{L_1}^c\gamma^\mu X_\mu^1 e_L + \bar{d}_{L_1}^c\gamma^\mu Y_\mu^1(-\nu_{e_L}) + \bar{d}_{L_2}^c\gamma^\mu X_\mu^2 e_L + \bar{d}_{L_2}^c\gamma^\mu Y_\mu^2(-\nu_{e_L}) + \bar{d}_{L_3}^c\gamma^\mu X_\mu^3 e_L + \bar{d}_{L_3}^c\gamma^\mu Y_\mu^3(-\nu_{e_L}) \\
 & + \bar{e}_L\gamma^\mu X_{\mu_1} d_L^{c_1} + \bar{e}_L\gamma^\mu X_{\mu_2} d_L^{c_2} + \bar{e}_L\gamma^\mu X_{\mu_3} d_L^{c_3} + (-\bar{\nu}_{e_L})\gamma^\mu Y_{\mu_1} d_L^{c_1} + (-\bar{\nu}_{e_L})\gamma^\mu Y_{\mu_2} d_L^{c_2} + (-\bar{\nu}_{e_L})\gamma^\mu Y_{\mu_3} d_L^{c_3}\} \\
 & = \frac{g}{\sqrt{2}}\{\bar{d}_{L_\alpha}^c\gamma^\mu X_\mu^\alpha e_L - \bar{d}_{L_\alpha}^c\gamma^\mu Y_\mu^\alpha \nu_{e_L} + \bar{e}_L\gamma^\mu X_{\mu_\alpha} d_L^{c_\alpha} - \bar{\nu}_{e_L}\gamma^\mu Y_{\mu_\alpha} d_L^{c_\alpha}\} \\
 & = \frac{g}{\sqrt{2}}\{\bar{e}_L\gamma^\mu X_{\mu_\alpha} d_L^{c_\alpha} - \bar{\nu}_{e_L}\gamma^\mu Y_{\mu_\alpha} d_L^{c_\alpha} + h.c.\} \tag{6.73}
 \end{aligned}$$

Από το δεύτερο κομμάτι της κινητικής Λαγκρανζιανής που γράψαμε, κρατάμε μόνο τους όρους αλληλεπίδρασης:

$$\begin{aligned}
 & i\bar{\chi}^{ij}\gamma^\mu(D_\mu\chi)_{ij} = -\frac{g}{\sqrt{2}}\left(\bar{\chi}^{ij}\gamma^\mu(A_\mu)_i^k\chi_{kj} + \bar{\chi}^{ij}\gamma^\mu(A_\mu)_j^l\chi_{il}\right) \\
 & = -\frac{g}{\sqrt{2}}\{(\bar{\chi}^{11}\gamma^\mu(A_\mu)_1^1\chi_{11} + \bar{\chi}^{11}\gamma^\mu(A_\mu)_1^2\chi_{21} + \dots) + (\bar{\chi}^{11}\gamma^\mu(A_\mu)_1^1\chi_{11} + \bar{\chi}^{11}\gamma^\mu(A_\mu)_1^2\chi_{12} + \dots)\}
 \end{aligned}$$

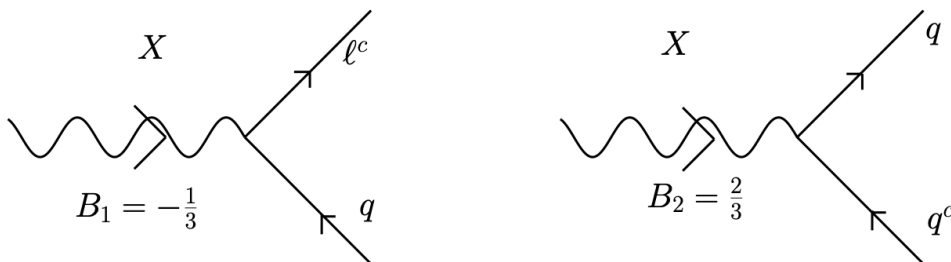
Επιτρέποντας μόνο τους όρους των αλληλεπιδράσεων που εμπλέκουν τα  $X$  και  $Y$  έχουμε

$$\begin{aligned}
 & i\bar{\chi}^{ij}\gamma^\mu(D_\mu\chi)_{ij} = -\frac{g}{\sqrt{2}}\{\bar{d}_{L_\alpha}^c\gamma^\mu X_\mu^\alpha e_L^c + \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\bar{u}_L^{c\gamma}\gamma^\mu\bar{X}_{\mu_\alpha}^\alpha u_L^\beta \\
 & - \bar{u}_{L_\alpha}\gamma^\mu Y_\mu^\alpha e_L^c + \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\bar{u}_L^{c\gamma}\gamma^\mu\bar{Y}_{\mu_\alpha}^\alpha d_L^\beta + h.c.\} \tag{6.74}
 \end{aligned}$$

Συνολικά η Λαγκρανζιανή των αλληλεπιδράσεων των φερμιονίων με τα  $X$  και  $Y$  θα δίνεται από την σχέση:

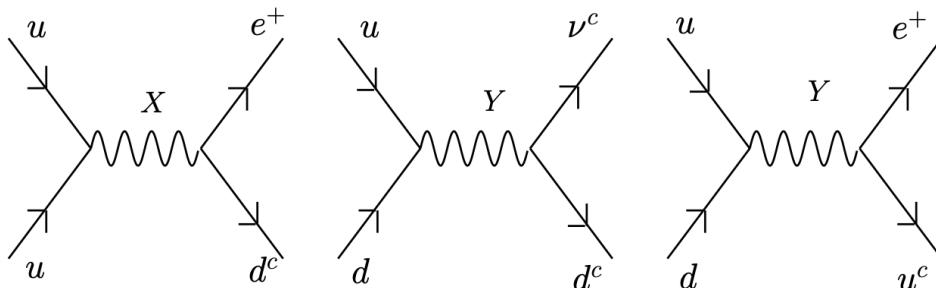
$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{interaction}^{X,Y} & = -\frac{g}{\sqrt{2}}\overbrace{(\bar{e}_L\gamma^\mu X_{\mu_\alpha} d_L^{c_\alpha} - \bar{\nu}_{e_L}\gamma^\mu Y_{\mu_\alpha} d_L^{c_\alpha} + h.c.)}^{\text{leptoquarkvertices}} \\
 & - \frac{g}{\sqrt{2}}\underbrace{(\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\bar{u}_L^{c\gamma}\gamma^\mu\bar{X}_{\mu_\alpha} u_L^\beta + \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\bar{u}_L^{c\gamma}\gamma^\mu\bar{Y}_{\mu_\alpha}^\alpha d_L^\beta + h.c.)}_{\text{diquarkvertices}} \tag{6.75}
 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι τα μποζόνια  $X$  συζεύγγονται σε δύο διαφορετικά κανάλια και με διαφορετικούς βαρυονικούς αριθμούς, όπως στην ακόλουθη εικόνα.



Σχήμα 6.4: Το μποζόνιο  $X$  ως leptiquark και diquark αντίστοιχα.

Στην αριστερή εικόνα έχουμε  $B_1 = -\frac{1}{3}$ , άρα το μποζόνιο  $X$  συζεύγγεται με κουάρκ και λεπτόνια, ενώ στην δεξιά, για  $B_2 = \frac{2}{3}$  ένα κουάρκ μετατρέπεται σε αντικουάρκ. Άρα με την παρουσία ενός τέτοιου μποζονίου, ένα  $B_1$  κανάλι μπορεί να μετατραπεί σε  $B_2$ . Η αλληλεπίδραση λοιπόν που συμβαίνει, δεν διατηρεί τον βαρυονικό αριθμό σε επίπεδο μηδενικής τάξης θεωρίας διαταραχών.



Σχήμα 6.5: Παραβίαση βαρυονικού αριθμού, μέσω ανταλλαγής μποζονίων  $X, Y$ .

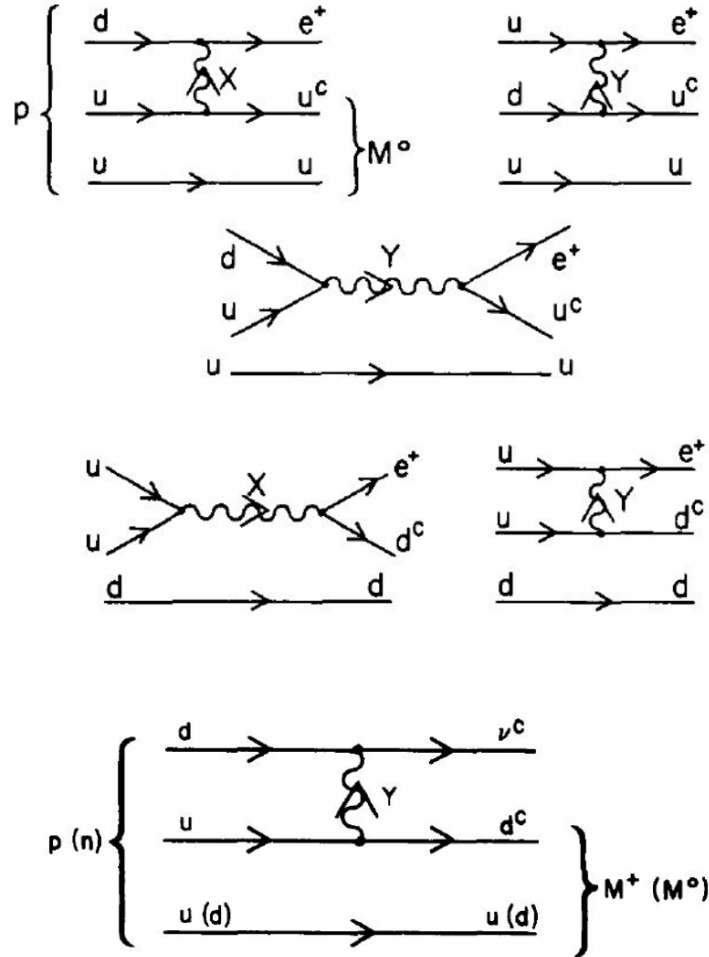
Από την κινητική Λαγκρανζιανή που έχουμε γράψει, παρατηρούμε πως η  $M_X$  είναι πολύ μεγάλη και συγκεκριμένα πολλές τάξεις μεγαλύτερη από τη μάζα φερμιονίων. Παίρνουμε λοιπόν τις αλληλεπιδράσεις τεσσάρων φερμιονίων όπου μεσολαβούν τα μποζόνια  $X, Y$  και ο βαρυονικός αριθμός δεν διατηρείται, όπως βλέπουμε στην παραπάνω εικόνα, δηλαδή  $\Delta B \neq 0$ . Άρα έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{eff}^{\Delta B=1} &= \frac{g^2}{8M_X^2} (\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \bar{u}_L^{c\gamma} \gamma_\mu u_L^\beta) (\bar{e}_L^c \gamma_\mu d_L^\alpha) + h.c. \\ &+ \frac{g^2}{8M_Y^2} (\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \bar{u}_L^{c\gamma} \gamma_\mu d_L^\beta) (-\bar{e}_L^c \gamma_\mu u_L^\alpha - \bar{\nu}_L \gamma_\mu d_L^{c\alpha}) + h.c. \end{aligned} \quad (6.76)$$

Η Λαγκρανζιανή αυτή έχει τις εξής ιδιότητες:

- $\Delta(B - L) = 0$ : Διατηρείται η διαφορά του βαρυονικού μείον τον λεπτονικό αριθμό, ώστε η αλληλεπίδραση  $p \rightarrow e^+ \pi^0$  να επιτρέπεται, ενώ η  $n \rightarrow e^- \pi^+$  να απαγορεύεται.

- Αναλλοιώτητα  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ : Όλοι οι δείκτες χρώματος και γεύσης «κλείνουν» και το ηλεκτρικό φορτίο διατηρείται.



Σχήμα 6.6: Διασπάσεις πρωτονίου.

Η πρώτη πεντάδα διαγραμμάτων αναδεικνύει τους διάφορους μηχανισμούς διάσπασης  $p \rightarrow e^+ + \bar{q} + q$ . Στο τελευταίο διάγραμμα φαίνονται διασπάσεις όπως οι  $p \rightarrow \bar{\nu} + \pi^+$ ,  $p \rightarrow \bar{\nu} + \rho^+$  και  $n \rightarrow \bar{\nu} + \pi^0$  κλπ.

Αν οι μάζες των μποζονίων είναι πολύ μεγαλύτερες από την μάζα του πρωτονίου, μπορούμε να προσεγγίσουμε την ισχύ των παραπάνω αλληλεπιδράσεων, μέσω της διαχείρισής τους ως αλληλεπιδράσεις τεσσάρων φερμιονίων με ισχύ  $\alpha_5/M_X^2$ , με  $\alpha_5 = g_5^2/4\pi$ . Έτσι βρίσκουμε την θεωρητική πρόβλεψη του χρόνου ζωής του πρωτονίου

$$\tau_p \sim \frac{1}{\alpha_5^2} \frac{M_X^4}{m_p^5} \tag{6.77}$$

Αν προχωρήσουμε μέσω της  $\alpha_5 \sim \alpha$  καταλήγουμε προσεγγιστικά στον ελάχιστο χρόνο ζωής του πρωτονίου  $\tau_p > 10^{34} yr$ . Επομένως από την εκτίμηση της μάζας του μποζονίου  $X$  προκύπτει  $M_X \geq 10^{16} GeV$ . Άρα το μποζόνιο  $X$  έχει 14 τάξεις μεγέθους μεγαλύτερη μάζα από τα  $W$  και

$Z$ . Η μάζα αυτή θα προκύπτει από το αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας.

Πριν προχωρήσουμε σε περαιτέρω συμπεράσματα της  $SU(5)$ , που ουσιαστικά αποτελεί την ενοποίηση των τριών αλληλεπιδράσεων του καθιερωμένου προτύπου, θα πρέπει να μελετήσουμε τον τρόπο, που σε χαμηλότερες ενέργειες, η  $SU(5)$  σπάει αυθόρμητα στο γνωστό  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ .

## 6.4 Συμπεράσματα

Όπως και στο Καθιερωμένο Πρότυπο, έτσι και το μοντέλο  $SU(5)$ , οφείλει να περάσει την διαδικασία της κριτικής. Ξεκινώντας από τα θετικά του αποτελέσματα, οφείλουμε να αναφέρουμε πως είναι η μόνη μεγαλοενοποιημένη θεωρία που ενσωματώνει την ομάδα  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ , ως μέγιστη υποομάδα της. Άλλα μεγαλοενοποιημένα μοντέλα έχουν τάξη μεγαλύτερη του 4, επομένως διέπονται από περισσότερες επιλογές στον τρόπο σπασίματος της συμμετρίας και επομένως από λιγότερη προβλεψιμότητα. Πρόκειται επίσης για ένα μοντέλο που εξηγεί την κβάντωση του ηλεκτρικού φορτίου και προβλέπει την τιμή του  $\sin^2\theta_W$ , η οποία συμφωνεί με τα πειραματικά αποτελέσματα του 1984. Διατηρείται η συμμετρία  $B - L$ , και επομένως προκύπτουν άμαζα νετρίνα. Το μοντέλο στερείται ανωμαλιών, ενώ έχει ελαττώσει κατά πολύ την μεγάλη αυθαιρεσία που συνδέεται με την παρουσία των πεδίων Higgs στο Καθιερωμένο Πρότυπο. Τέλος προβλέπει τον λόγο  $m_b/m_t = 3$  στις χαμηλές ενέργειες, γεγονός που έρχεται σε καλή συμφωνία με τα πειραματικά δεδομένα.

Με τα θετικά όμως πάντα έρχονται και ορισμένα ελαττώματα. Ένα εξ' αυτών είναι ότι τα φερμιόνια τοποθετούνται σε αναγωγίσιμη αναπαράσταση, με το φάσμα των μαζών τους να μην εξηγείται ακόμα. Εμφανώς δεν έχουμε καταφέρει να συμπεριλάβουμε την βαρύτητα στην ενοποίηση αυτήν. Υπάρχει μεγάλο χάσμα μεταξύ των  $M_X$  και  $M_W$ , χωρίς να συμβαίνει κανένα ενδιάμεσο σπάσιμο συμμετρίας. Τέλος παρουσιάζεται το πρόβλημα της ιεραρχίας. Τα αρνητικά που παρουσιάσαμε, ενώ φαίνονται μοιραία, δεν μας κάνουν να παραμερίσουμε εντελώς το μοντέλο, αφού η αναβάθμισή του σε υπερσυμμετρική θεωρία μεγάλης ενοποίησης, θα κατορθώσει να εξαλείψει κάποια από αυτά.





# Βιβλιογραφία

- [1] James B. Hartle. *BAPYTHTA: Εισαγωγή στη γενική σχετικότητα του Einstein*. Εκδόσεις Τζιόλα, 2016.
- [2] Francis Halzen, Alan D. Martin. *QUARKS AND LEPTONS: An Introductory Course in Modern Particle Physics*. Wiley, 1984.
- [3] Ian J.R. Aitchison, Anthony J.G. Hey. *GAUGE THEORIES IN PARTICLE PHYSICS: A practical introduction, Volume 1: From Relativistic Quantum Mechanics to QED*. CRC Press, 2013.
- [4] Ian J.R. Aitchison, Anthony J.G. Hey. *GAUGE THEORIES IN PARTICLE PHYSICS: A practical introduction, Volume 2: Non-Abelian Gauge Theories*. CRC Press, 2013.
- [5] Graham G. Ross. *Grand Unified Theories*. Benjamin-Cummings Pub Co, 1984.
- [6] Ta-Pei Cheng and Ling-Fong Li. *Gauge Theory of elementary particle physics*. Oxford University Press, 1999.
- [7] C.Kounnas, A.Masiero, D.V.Nanopoulos, K.A.Olive. *Grand Unification with and without Supersymmetry*. World Scientific Publishing Company, 1985.
- [8] Peskin, Schroeder. *Grand Unification with and without Supersymmetry*. CRC Press, 1995.
- [9] Richard Slansky. *Group Theory for unified model building*. North-Holland, 1981.
- [10] Κωνσταντίνος Ε. Βαγιονάκης. *ΣΩΜΑΤΙΔΙΑΚΗ ΦΥΣΙΚΗ: Μία εισαγωγή στη Βασική Δομή της Ύλης*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π., 2013.
- [11] Στέφανος Λ. Τραχανάς. *ΚΒΑΝΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ I: Θεμελιώδεις αρχές, απλά συστήματα, δομή της ύλης*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2016.
- [12] Στέφανος Λ. Τραχανάς. *ΚΒΑΝΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ II: Θεμελιώδεις αρχές και μέθοδοι, κβαντικοί υπολογιστές*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2016.
- [13] Στέφανος Λ. Τραχανάς. *ΣΧΕΤΙΚΙΣΤΙΚΗ ΚΒΑΝΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ: Μία εισαγωγή στη μεγάλη σύνθεση*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2016.
- [14] Ζουπάνος Γεώργιος. *Σημειώσεις μαθήματος «Στοιχειώδη Σωματίδια II»*.
- [15] Τράκας Νικόλαος. *Σημειώσεις μαθήματος «Θεωρητική Φυσική»*.

