



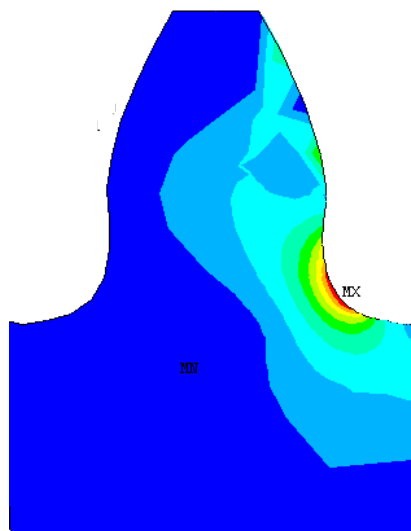
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

**ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ ΚΑΙ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ
ΕΛΕΓΧΟΥ**

Μελέτη Αντοχής Μετωπικών Οδοντωτών Τροχών με:

- τη Μέθοδο της Φωτοελαστικότητας
- τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων



ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Εμμανουήλ Ε. Γκιθώνας

Επιβλέπων: Θεόδωρος Ν. Κωστόπουλος

Αναπλ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Οκτώβριος 2007

.....

Εμμανουήλ Ε. Γκιθώνας

Διπλωματούχος Μηχανολόγος Μηχανικός Ε.Μ.Π.

Copyright © Εμμανουήλ Γκιθώνας, 2007.

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ευχαριστώ ιδιαίτερα τον επιβλέποντα αυτής της εργασίας, Αναπληρωτή Καθηγητή Ε.Μ.Π. Θεόδωρο Κωστόπουλο καθώς και τα υπόλοιπα μέλη της τριμελούς επιτροπής, Επίκουρο Καθηγητή Ε.Μ.Π. Στέφανο Διπλάρη και Αναπληρωτή Καθηγητή Ε.Μ.Π. Χριστόφορο Προβατίδη για τη πολύτιμη βοήθεια τους.

Εμμανουήλ Ε. Γκιθώνας

Διπλ. Μηχανολόγος Μηχανικός Ε.Μ.Π.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Πρόλογος.....	3
Περιεχόμενα	4
Ευρετήριο Σχημάτων.....	7
Ευρετήριο Πινάκων.....	12
Κεφάλαιο 1 ^ο : Εισαγωγή.....	13
1.1 Γενικά Περί Οδοντωτών Τροχών.....	14
1.2 Είδη Οδοντωτών Τροχών.....	14
1.2.1 Μετωπικοί Οδοντωτοί Τροχοί.....	15
1.2.2 Κωνικοί Οδοντωτοί Τροχοί.....	17
1.2.3 Ελικοειδείς Οδοντωτοί Τροχοί Ασυμβάτων Αξόνων.....	19
1.2.4 Σύστημα Ατέρμονα Κοχλία – Οδοντωτού Τροχού.....	20
1.3 Αντικείμενο Εργασίας.....	21
1.4 Διάρθρωση Κεφαλαίων.....	21
1.5 Βιβλιογραφία.....	23
Κεφάλαιο 2 ^ο : Θεωρία Μετωπικών Οδοντωτών Τροχών.....	29
2.1 Γενικά.....	30
2.2 Βασικός Νόμος Οδοντώσεως.....	31
2.3 Ταχύτητα Ολισθήσεως.....	36
2.4 Συνεργαζόμενες Κατατομές.....	38
2.4.1 Γραφική Μέθοδος (Relaux).....	38
2.4.2 Αναλυτική Μέθοδος (Γενικευμένη Θεωρία Οδοντώσεως).....	41
2.5 Η Εξειλιγμένη Καμπύλη.....	48
2.6 Μεγέθη Οδοντώσεων.....	52
2.6.1 Βήμα Οδόντων – Μέτρο Οδοντώσεως.....	52
2.6.2 Πάχος Οδόντων.....	53
2.6.3 Σχέση Μετάδοσης - Απόσταση Αξόνων.....	55
2.6.4 Γωνία Επαφής.....	56
2.6.5 Βαθμός Επικαλύψεως ή Διάρκεια Επαφής.....	57
2.7 Φόρτιση των Οδοντωτών Τροχών.....	63

2.8	Ανώτερο Σημείο Μονής Επαφής Οδόντος (HPSTC)	66
2.9	Υπολογισμός της Θέσης Εμφάνισης της Επικίνδυνης Διατομής Ποδός	70
2.9.1	Η Μέθοδος της Εγγεγραμμένης Παραβολής του Lewis	70
2.9.2	Η Μέθοδος της Εφαπτομένης των 30°	73
2.10	Υπολογισμός της Μεγίστης Τάσης στην Επικίνδυνη Διατομή Ποδός	74
2.10.1	Η Μέθοδος κατά το πρότυπο AGMA	74
2.10.2	Η Μέθοδος κατά το πρότυπο DIN 3990	77
2.10.3	Η Ημιεμπειρική Μέθοδος του Heywood	79
2.10.4	Ο Εμπειρικός Τύπος των Dolan – Broghamer	81
2.11	Παρατηρήσεις	83
2.12	Βιβλιογραφία	83

Κεφάλαιο 3ο: Φωτοελαστικότητα.....86

3.1	Γενικά	87
3.2	Βασικές Έννοιες της Θεωρίας του Φωτός	88
3.3	Αρμονική ή Ημιτονοειδής Ταλάντωση	89
3.4	Πόλωση του Φωτός	96
3.4.1	Διπλοδιάθλαση	98
3.4.2	Πολωτές	99
3.5	Φωτοτασεοπτικός Νόμος	101
3.6	Πολωσισκόπιο	103
3.6.1	Επίπεδο πολωσισκόπιο	103
3.6.2	Κυκλικό πολωσισκόπιο	104
3.7	Τροχιές Κυρίων Τάσεων	106
3.8	Υπολογισμός της Μεγίστης Τάσης στον Πόδα Δοκιμίου	111
3.9	Πειραματικός Υπολογισμός της Φωτοτασεοπτικής Σταθεράς	116
3.10	Η Διάταξη Φόρτισης Δοκιμίων Οδόντων του Εργαστηρίου Στοιχείων Μηχανών του Ε.Μ.Π.	118
3.11	Προετοιμασία των Δοκιμίων	123
3.12	Πειραματικά Αποτελέσματα	127
3.12.1	Πειραματικός Προσδιορισμός του Μέτρου Ελαστικότητας και της Τασεοπτικής Σταθεράς των Δοκιμίων	128
3.12.2	Πειραματικός Προσδιορισμός της Μεγίστης Τάσης	130
3.13	Παρατηρήσεις	153
3.14	Βιβλιογραφία	153

Κεφάλαιο 4ο: Τεχνολογία CAD & CAE – Πεπερασμένα Στοιχεία.....155

4.1	Γενικά	156
4.2	Ορισμός CAD	156

4.3	Ορισμός CAE	157
4.4	Πεπερασμένα Στοιχεία	159
4.4.1	Μοντελοποίηση – Τύποι Πεπερασμένων Στοιχείων	160
4.4.2	Αυτόματη Γένεση Πλέγματος	164
4.4.2.1	Μέθοδος Σύνδεσης Κόμβων	164
4.4.2.2	Μέθοδος Αποσύζευξης Τοπολογίας	168
4.4.2.3	Μέθοδος Αποσύζευξης Γεωμετρίας	171
4.4.2.4	Μέθοδος Βάσει Πλέγματος	173
4.4.2.5	Μέθοδος Απεικόνισης	176
4.4.2.6	Βελτίωση Ποιότητας Πλέγματος	179
4.4.3	Είδη Ανάλυσης Πεπερασμένων Στοιχείων	182
4.4.3.1	Καθορισμός Του Είδους Ανάλυσης	182
4.4.3.2	Στάδια Ανάλυσης Πεπερασμένων Στοιχείων	184
4.4.3.3	Είδος Πεπερασμένων Στοιχείων	185
4.5	Λογισμικά CAD – CAE	186
4.5.1	Autodesk Inventor	186
4.5.2	Ansys Multi-Physics	187
4.6	Εφαρμογή στους Τροχούς του Πειράματος	187
4.6.1	Κατασκευή 3-D Μοντέλων	187
4.6.2	Προσδιορισμός του HPSTC	193
4.6.3	Πεπερασμένα Στοιχεία	196
4.7	Παρατηρήσεις	223
4.8	Βιβλιογραφία	224
 Κεφάλαιο 5ο: Σύγκριση Αποτελεσμάτων – Συμπεράσματα		 227
5.1	Αδιαστατοποίηση των Τάσεων	228
5.2	Συγκέντρωση – Σύγκριση Αποτελεσμάτων	229
5.3	Έλεγχος Αντοχής Μετωπικών Οδοντωτών Τροχών	235
5.3.1	Έλεγχος Κατά Το Πρότυπο AGMA	237
5.4	Παρατηρήσεις	239
5.5	Βιβλιογραφία	240
 Κεφάλαιο 6ο: Παραρτήματα		 241
6.1	Παράρτημα Α: Κώδικες MathCAD	242
6.2	Παράρτημα Β: Μετατροπές Μονάδων	252
6.3	Παράρτημα Γ: Χρησιμοποιηθέν Λογισμικό	252

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Σχήμα 1.1: Σχετική θέση αξόνων συνεργαζομένων τροχών.....	15
Σχήμα 1.2: 3-D μοντέλο ζεύγους εξωτερικών μετωπικών οδοντωτών τροχών ευθείας οδοντώσεως.....	16
Σχήμα 1.3: 3-D μοντέλο ζεύγους εξωτερικών μετωπικών οδοντωτών τροχών ελικοειδούς οδοντώσεως.....	17
Σχήμα 1.4: 3-D μοντέλο ζεύγους κωνικών οδοντωτών τροχών ευθείας οδοντώσεως.....	18
Σχήμα 1.5: Βαθμίδα ελικοειδών τροχών ασυμβάτων τροχών.....	19
Σχήμα 1.6: 3-D μοντέλο συστήματος ατέρμονος κοχλία – οδοντωτού τροχού.....	20
Σχήμα 2.1: Συνεργαζόμενες κατατομές.....	31
Σχήμα 2.2: Ο βασικός νόμος οδοντώσεως.....	32
Σχήμα 2.3: Καμπύλες ψ_1, ψ_2	34
Σχήμα 2.4: Τριγωνομετρικός κύκλος.....	35
Σχήμα 2.5: Κατατομή $\psi = f(x)$	35
Σχήμα 2.6: Περιστροφική ταχύτητα στερεού S.....	36
Σχήμα 2.7: Κατασκευή Relaux – Τμήμα επαφών TE.....	39
Σχήμα 2.8: Κατασκευή Relaux – Συνεργασία δύο τροχών.....	40
Σχήμα 2.9: Δεδομένη τροχιά επαφών.....	42
Σχήμα 2.10: Δεδομένη κατατομή οδόντος $\psi = F(\chi)$ του κανόνα.....	44
Σχήμα 2.11: Δεδομένη κατατομή οδόντος του τροχού.....	46
Σχήμα 2.12: Η εξειλιγμένη καμπύλη.....	49
Σχήμα 2.13: Τροχιά επαφών ευθεία γραμμή.....	50
Σχήμα 2.14: Συνεργασία μετωπικών οδοντωτών τροχών με κατατομές οδόντων δι' εξειλιγμένης καμπύλης.....	51
Σχήμα 2.15: Πάχος οδόντος.....	54
Σχήμα 2.16: Συνεργαζόμενες κατατομές.....	58
Σχήμα 2.17: Χαρακτηριστικά μεγέθη συνεργαζομένων τροχών.....	61
Σχήμα 2.18: Βαθμός επικάλυψης ϵ συναρτήσει της σχέσης μεταδόσεως i_{12} βαθμίδας.....	63
Σχήμα 2.19: Δυνάμεις επί των οδόντων.....	64
Σχήμα 2.20: (α) Συνεργαζόμενες κατατομές τροχών βαθμίδας και (β) θέσεις αλλαγής του φορτίου οδόντος.....	66
Σχήμα 2.21: Αρχή συνεργασίας οδόντων – Σημείο A.....	67
Σχήμα 2.22: Τέλος συνεργασίας οδόντων – Σημείο B.....	67
Σχήμα 2.23: Γεωμετρικός προσδιορισμός του HPSTC.....	68
Σχήμα 2.24: Η μέθοδος της εγγεγραμμένης παραβολής.....	71
Σχήμα 2.25: Η θεωρία της επαπτομένης των 30 μοιρών.....	73
Σχήμα 2.26: Δυναμικός συντελεστής K_v	76
Σχήμα 2.27: Γεωμετρικός συντελεστής J.....	76
Σχήμα 2.28: Γεωμετρία οδόντων και επικίνδυνη διατομή κατά DIN 3990.....	78
Σχήμα 2.29: Η μέθοδος του Heywood.....	80

Σχήμα 3.1: (α) Ανάκλαση, (β) Διάθλαση φωτεινών ακτινών, (γ) Διάδοση μετωπών κύματος και (δ) Μέτωπα κύματος σε άπειρη απόσταση.....	88
Σχήμα 3.2: Σύνθεση απλών αρμονικών ταλαντώσεων.....	94
Σχήμα 3.3: Αρμονικό κύμα.....	95
Σχήμα 3.4: Σχηματική παράσταση του κοινού φωτός.....	96
Σχήμα 3.5: (α) Επίπεδα πολωμένο φως, (β) Κυκλικά πολωμένο φως, (γ) Ελλειπτικά πολωμένο φως.....	96
Σχήμα 3.6: Ανάλυση επίπεδα πολωμένου φωτός από διπλοδιαθλαστική πλάκα.....	100
Σχήμα 3.7: Επίπεδο πολωσισκόπιο σκοτεινού πεδίου.....	104
Σχήμα 3.8: Κυκλικό πολωσισκόπιο σκοτεινού πεδίου.....	105
Σχήμα 3.9: Ισοκλινείς κλίσεως (παραμέτρου) φ_1 , φ_2 και φ_3	106
Σχήμα 3.10: Σχεδίαση των τροχιών των κυρίων τάσεων από το δίκτυο των ισοκλινών.....	108
Σχήμα 3.11: Ακριβής χάραξη των τροχιών των κυρίων τάσεων.....	109
Σχήμα 3.12: Προσέγγιση των τροχιών των κυρίων τάσεων και των ακτινών καμπυλότητάς τους.....	110
Σχήμα 3.13: Το δίκτυο των ισοχρώμων σε δοκίμιο καθαρής κάμψης.....	117
Σχήμα 3.14: Το δίκτυο των ισοχρώμων σε κυκλικό δίσκο υπό αντιδιαμετρική θλίψη.....	118
Σχήμα 3.15: Πολωσισκόπιο και συσκευή φόρτισης δοκιμίων φωτοελαστικότητας.....	120
Σχήμα 3.16: Πολωσισκόπιο και συσκευή φόρτισης δοκιμίων φωτοελαστικότητας.....	121
Σχήμα 3.17: Διάταξη κυκλικού πολωσισκοπίου.....	122
Σχήμα 3.18: Δοκίμιο κανονικού τροχού 15 οδόντων.....	124
Σχήμα 3.19: Δοκίμιο κανονικού τροχού 18 οδόντων.....	125
Σχήμα 3.20: Δοκίμιο κανονικού τροχού 22 οδόντων.....	125
Σχήμα 3.21: Δοκίμιο κανονικού τροχού 28 οδόντων.....	126
Σχήμα 3.22: Δοκίμιο κανονικού τροχού 50 οδόντων.....	126
Σχήμα 3.23: Πρισματικό δοκίμιο.....	127
Σχήμα 3.24: Διάταξη μέτρησης μηχανικών – οπτικών ιδιοτήτων του υλικού των δοκιμίων.....	128
Σχήμα 3.25: Πρισματικό δοκίμιο σε κάμψη – Μονοχρωματικό φως.....	129
Σχήμα 3.26: Πρισματικό δοκίμιο σε κάμψη – Λευκό φως.....	129
Σχήμα 3.27: Δοκιμή 1 – 15/18 – Πινιόν – Μονοχρωματικό φως.....	132
Σχήμα 3.28: Δοκιμή 1 – 15/18 – Πινιόν – Λευκό φως.....	132
Σχήμα 3.29: Δοκιμή 2 – 15/18 – Συνεργαζόμενος – Μονοχρωματικό φως.....	133
Σχήμα 3.30: Δοκιμή 2 – 15/18 – Συνεργαζόμενος – Λευκό φως.....	133
Σχήμα 3.31: Δοκιμή 3 – 15/22 – Πινιόν – Μονοχρωματικό φως.....	134
Σχήμα 3.32: Δοκιμή 3 – 15/22 – Πινιόν – Λευκό φως.....	134
Σχήμα 3.33: Δοκιμή 4 – 15/22 – Συνεργαζόμενος – Μονοχρωματικό φως.....	135
Σχήμα 3.34: Δοκιμή 4 – 15/22 – Συνεργαζόμενος – Λευκό φως.....	135
Σχήμα 3.35: Δοκιμή 5 – 15/28 – Πινιόν – Μονοχρωματικό φως.....	136
Σχήμα 3.36: Δοκιμή 5 – 15/28 – Πινιόν – Λευκό φως.....	136
Σχήμα 3.37: Δοκιμή 6 – 15/28 – Συνεργαζόμενος – Μονοχρωματικό φως.....	137
Σχήμα 3.38: Δοκιμή 6 – 15/28 – Συνεργαζόμενος – Λευκό φως.....	137
Σχήμα 3.39: Δοκιμή 7 – 15/50 – Πινιόν – Μονοχρωματικό φως.....	138
Σχήμα 3.40: Δοκιμή 7 – 15/50 – Πινιόν – Λευκό φως.....	138

Σχήμα 3.41: Δοκιμή 8 – 15/50 – Συνεργαζόμενος – Μονοχρωματικό φως.....	139
Σχήμα 3.42: Δοκιμή 8 – 15/50 – Συνεργαζόμενος – Λευκό φως.....	139
Σχήμα 3.43: Δοκιμή 9 – 18/22 – Πινιόν – Μονοχρωματικό φως.....	140
Σχήμα 3.44: Δοκιμή 9 – 18/22 – Πινιόν – Λευκό φως.....	140
Σχήμα 3.45: Δοκιμή 10 – 18/22 – Συνεργαζόμενος – Μονοχρωματικό φως.....	141
Σχήμα 3.46: Δοκιμή 10 – 18/22 – Συνεργαζόμενος – Λευκό φως.....	141
Σχήμα 3.47: Δοκιμή 11 – 18/28 – Πινιόν – Μονοχρωματικό φως.....	142
Σχήμα 3.48: Δοκιμή 11 – 18/28 – Πινιόν – Λευκό φως.....	142
Σχήμα 3.49: Δοκιμή 12 – 18/28 – Συνεργαζόμενος – Μονοχρωματικό φως.....	143
Σχήμα 3.50: Δοκιμή 12 – 18/28 – Συνεργαζόμενος – Λευκό φως.....	143
Σχήμα 3.51: Δοκιμή 13 – 18/50 – Πινιόν – Μονοχρωματικό φως.....	144
Σχήμα 3.52: Δοκιμή 13 – 18/50 – Πινιόν – Λευκό φως.....	144
Σχήμα 3.53: Δοκιμή 14 – 18/50 – Συνεργαζόμενος – Μονοχρωματικό φως.....	145
Σχήμα 3.54: Δοκιμή 14 – 18/50 – Συνεργαζόμενος – Λευκό φως.....	145
Σχήμα 3.55: Δοκιμή 15 – 22/28 – Πινιόν – Μονοχρωματικό φως.....	146
Σχήμα 3.56: Δοκιμή 15 – 22/28 – Πινιόν – Λευκό φως.....	146
Σχήμα 3.57: Δοκιμή 16 – 22/28 – Συνεργαζόμενος – Μονοχρωματικό φως.....	147
Σχήμα 3.58: Δοκιμή 16 – 22/28 – Συνεργαζόμενος – Λευκό φως.....	147
Σχήμα 3.59: Δοκιμή 17 – 22/50 – Πινιόν – Μονοχρωματικό φως.....	148
Σχήμα 3.60: Δοκιμή 17 – 22/50 – Πινιόν – Λευκό φως.....	148
Σχήμα 3.61: Δοκιμή 18 – 22/50 – Συνεργαζόμενος – Μονοχρωματικό φως.....	149
Σχήμα 3.62: Δοκιμή 18 – 22/50 – Συνεργαζόμενος – Λευκό φως.....	149
Σχήμα 3.63: Δοκιμή 19 – 28/50 – Πινιόν – Μονοχρωματικό φως.....	150
Σχήμα 3.64: Δοκιμή 19 – 28/50 – Πινιόν – Λευκό φως.....	150
Σχήμα 3.65: Δοκιμή 20 – 28/50 – Συνεργαζόμενος – Μονοχρωματικό φως.....	151
Σχήμα 3.66: Δοκιμή 20 – 28/50 – Συνεργαζόμενος – Λευκό φως.....	151
Σχήμα 4.1: Τύποι πεπερασμένων στοιχείων για (a) μονοδιάστατα, (b) δισδιάστατα και (c) τρισδιάστατα προβλήματα.....	162
Σχήμα 4.2: Μέθοδος σύνδεσης κόμβων.....	164
Σχήμα 4.3: Μέθοδος γένεσης κόμβων κατά Cavendish.....	165
Σχήμα 4.4: Διάγραμμα Voronoi και η αντιστοιχούσα τριγωνοποίηση Delaunay.....	167
Σχήμα 4.5: Αλγόριθμος τριγωνοποίησης του Watson.....	168
Σχήμα 4.6: Παράδειγμα μεθόδου τοπολογικής αποσύζευξης.....	168
Σχήμα 4.7: Τελεστές που χρησιμοποιούνται για να διαμορφώσουν τρίγωνα.....	169
Σχήμα 4.8: Μέθοδοι εκλέπτυνσης τριγώνων.....	170
Σχήμα 4.9: Τελεστές αποσύζευξης γεωμετρίας στις 3 διαστάσεις.....	171
Σχήμα 4.10: Υποδιαίρεση με διαχωριστική γραμμή (split line).....	172
Σχήμα 4.11: Παράδειγμα γένεσης πλέγματος με χρήση μιας επαναληπτικής μεθόδου.....	172
Σχήμα 4.12: Χρήση ορθογωνικού grid για τη μέθοδο “grid-based”.....	173
Σχήμα 4.13: Αναπαράσταση quadree.....	174
Σχήμα 4.14: Γένεση πλέγματος με χρήση παράστασης quadree.....	175
Σχήμα 4.15: Υποδιαίρεση του τριγώνου και τετραέδρου.....	176
Σχήμα 4.16: Απεικόνιση περιοχής τεσσάρων πλευρών.....	177

Σχήμα 4.17: Απεικόνιση περιοχής τριών πλευρών.....	178
Σχήμα 4.18: Ισοπαραμετρική απεικόνιση.....	179
Σχήμα 4.19: Μετατροπή τετραπλεύρων και bricks τρίγωνα και τετράεδρα, αντίστοιχα.....	180
Σχήμα 4.20: Μετατροπή τριγώνου και τετραέδρου σε τετράπλευρα και bricks, αντίστοιχα.....	180
Σχήμα 4.21: Μη συμβατά πλέγματα και η τροποποίησή τους.....	181
Σχήμα 4.22: Γειτονικοί κόμβοι ενός εσωτερικού κόμβου i.....	182
Σχήμα 4.23: Χαρακτηριστικά τροχού 15 οδόντων.....	188
Σχήμα 4.24: Γεωμετρικά χαρακτηριστικά τροχού 15 οδόντων.....	189
Σχήμα 4.25: 3-D μοντέλο τροχού 15 οδόντων.....	189
Σχήμα 4.26: 3-D μοντέλο τροχού 15 οδόντων με σπή.....	190
Σχήμα 4.27: 3-D μοντέλο τροχού 18 οδόντων.....	191
Σχήμα 4.28: 3-D μοντέλο τροχού 22 οδόντων.....	191
Σχήμα 4.29: 3-D μοντέλο τροχού 28 οδόντων.....	191
Σχήμα 4.30: 3-D μοντέλο τροχού 50 οδόντων.....	191
Σχήμα 4.31: Γεωμετρικός προσδιορισμός του HPSTC σε τροχό 15 οδόντων που συνεργάζεται με τροχό 18 οδόντων.....	194
Σχήμα 4.32: Προφίλ τροχού 15 οδόντων.....	196
Σχήμα 4.33: Προφίλ ενός οδόντος του τροχού των 15 οδόντων.....	197
Σχήμα 4.34: Επιφάνεια οδόντος του τροχού των 15 οδόντων.....	198
Σχήμα 4.35: Γεωμετρία πεπερασμένου στοιχείου PLANE183.....	199
Σχήμα 4.36: Πλέγμα πεπερασμένων στοιχείων οδόντος του τροχού των 15 οδόντων.....	200
Σχήμα 4.37: Δοκιμή 1 – 15/18 – Πινιόν – Διάγραμμα Τάσεων.....	203
Σχήμα 4.38: Δοκιμή 2 – 15/18 – Συνεργαζόμενος – Διάγραμμα Τάσεων.....	204
Σχήμα 4.39: Δοκιμή 3 – 15/22 – Πινιόν – Διάγραμμα Τάσεων.....	205
Σχήμα 4.40: Δοκιμή 4 – 15/22 – Συνεργαζόμενος – Διάγραμμα Τάσεων.....	206
Σχήμα 4.41: Δοκιμή 5 – 15/28 – Πινιόν – Διάγραμμα Τάσεων.....	207
Σχήμα 4.42: Δοκιμή 6 – 15/28 – Συνεργαζόμενος – Διάγραμμα Τάσεων.....	208
Σχήμα 4.43: Δοκιμή 7 – 15/50 – Πινιόν – Διάγραμμα Τάσεων.....	209
Σχήμα 4.44: Δοκιμή 8 – 15/50 – Συνεργαζόμενος – Διάγραμμα Τάσεων.....	210
Σχήμα 4.45: Δοκιμή 9 – 18/22 – Πινιόν – Διάγραμμα Τάσεων.....	211
Σχήμα 4.46: Δοκιμή 10 – 18/22 – Συνεργαζόμενος – Διάγραμμα Τάσεων.....	212
Σχήμα 4.47: Δοκιμή 11 – 18/28 – Πινιόν – Διάγραμμα Τάσεων.....	213
Σχήμα 4.48: Δοκιμή 12 – 18/28 – Συνεργαζόμενος – Διάγραμμα Τάσεων.....	214
Σχήμα 4.49: Δοκιμή 13 – 18/50 – Πινιόν – Διάγραμμα Τάσεων.....	215
Σχήμα 4.50: Δοκιμή 14 – 18/50 – Συνεργαζόμενος – Διάγραμμα Τάσεων.....	216
Σχήμα 4.51: Δοκιμή 15 – 22/28 – Πινιόν – Διάγραμμα Τάσεων.....	217
Σχήμα 4.52: Δοκιμή 16 – 22/28 – Συνεργαζόμενος – Διάγραμμα Τάσεων.....	218
Σχήμα 4.53: Δοκιμή 17 – 22/50 – Πινιόν – Διάγραμμα Τάσεων.....	219
Σχήμα 4.54: Δοκιμή 18 – 22/50 – Συνεργαζόμενος – Διάγραμμα Τάσεων.....	220
Σχήμα 4.55: Δοκιμή 19 – 28/50 – Πινιόν – Διάγραμμα Τάσεων.....	221
Σχήμα 4.56: Δοκιμή 20 – 28/50 – Συνεργαζόμενος – Διάγραμμα Τάσεων.....	222
Σχήμα 5.1: Σύγκριση πειραματικά και θεωρητικά μετρηθείσας αδιάστατης τάσης για κανονικούς τροχούς με $z_1 = 15$	231

Σχήμα 5.2: Σύγκριση πειραματικά και θεωρητικά μετρηθείσας αδιάστατης τάσης για κανονικούς τροχούς με $z_1 = 18$	231
Σχήμα 5.3: Σύγκριση πειραματικά και θεωρητικά μετρηθείσας αδιάστατης τάσης για κανονικούς τροχούς με $z_1 = 22$	232
Σχήμα 5.4: Σύγκριση πειραματικά και θεωρητικά μετρηθείσας αδιάστατης τάσης για κανονικούς τροχούς με $z_1 = 28$	232
Σχήμα 5.5: Σύγκριση πειραματικά και θεωρητικά μετρηθείσας αδιάστατης τάσης για κανονικούς τροχούς με $z_1 = 50$	233
Σχήμα 5.6: Απόκλιση θεωρητικής και πειραματικής αδιάστατης τάσης στον πόδα του οδόντος τροχού με $z_1 = 15, 18, 22, 28, 50$	233
Σχήμα 5.7: Σύγκριση θεωρητικής και πειραματικής αδιάστατης τάσης στον πόδα του οδόντος τροχού με $z_1 = 15, 18, 22, 28, 50$	234

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΠΙΝΑΚΩΝ

Πίνακας 2.1: Τυποποιημένες τιμές του module m σε mm για οδόντες δι' εξελιγμένης.....	52
Πίνακας 2.2: Συντελεστής εφαρμογής K_a	75
Πίνακας 2.3: Συντελεστής κατανομής φορτίου K_m	75
Πίνακας 3.1: Γεωμετρικά χαρακτηριστικά δοκιμών.....	124
Πίνακας 3.2: Πειράματα δοκιμών – HPSTC.....	131
Πίνακας 3.3: Πειραματικές μέγιστες τάσεις δοκιμών.....	152
Πίνακας 4.1: Γεωμετρικά χαρακτηριστικά όλων των οδοντωτών τροχών.....	192
Πίνακας 4.2: Γωνίες κλίσεις των αξόνων των τροχών από την κατακόρυφο.....	192
Πίνακας 4.3: Θέσεις HPSTC όλων των τροχών.....	195
Πίνακας 4.4: Δυνάμεις επί του HPSTC των δοκιμών.....	201
Πίνακας 4.5: Θεωρητικές μέγιστες τάσεις των δοκιμών.....	202
Πίνακας 5.1: Πειραματικές και Θεωρητικές μέγιστες τάσεις των δοκιμών.....	229
Πίνακας 5.2: Πειραματικές και Θεωρητικές μέγιστες αδιάστατες τάσεις των δοκιμών.....	230
Πίνακας 5.3: Αντοχές υλικών χάλυβα – χυτοσίδηρου.....	236
Πίνακας 5.4: Συντελεστής ασφαλείας K_R σε κόπωση.....	237
Πίνακας 5.5: Συντελεστής ασφαλείας K_R σε διαρροή.....	237
Πίνακας 5.6: Επιτρεπόμενες τάσεις υλικών.....	238
Πίνακας 5.7: Συντελεστής διάρκειας ζωής K_L	239
Πίνακας 6.1: Πίνακας μετατροπής βασικών μονάδων.....	252

ΚΕΦΑΛΑΙΟ	
1	Εισαγωγή

Περιεχόμενα:

- 1.1 Γενικά Περί Οδοντωτών Τροχών
- 1.2 Είδη Οδοντωτών Τροχών
 - 1.2.1 Μετωπικοί Οδοντωτοί Τροχοί
 - 1.2.2 Κωνικοί Οδοντωτοί Τροχοί
 - 1.2.3 Ελικοειδείς Οδοντωτοί Τροχοί Ασυμβάτων Αξόνων
 - 1.2.4 Σύστημα Ατέρμονα Κοχλία – Οδοντωτού Τροχού
- 1.3 Αντικείμενο Εργασίας
- 1.4 Διάρθρωση Κεφαλαίων
- 1.5 Βιβλιογραφία

1.1 Γενικά Περί Οδοντωτών Τροχών

Για την μετάδοση περιστροφικής κινήσεως και την μεταφορά ισχύος από κινητήρια σε κινούμενη άτρακτο, δηλαδή από την άτρακτο της κινητήριας μηχανής (ηλεκτροκινητήρας, μηχανή εσωτερικής καύσεως, αεριο-ατμο-υδρο-στρόβιλος κλπ.) στην άτρακτο της κινουμένης μηχανής (εργομηχανή) χρησιμοποιούνται, εκτός των άλλων μηχανικών (ιμάντες, αλυσίδες, σύνδεσμοι, κλπ.) ή υδραυλικών-πνευματικών κλπ. τρόπων, και διάφοροι συνδυασμοί οδοντωτών τροχών (Costopoulos [1]).

Οι οδοντωτοί τροχοί είναι στοιχεία μηχανών που επιτυγχάνουν μετάδοση κινήσεως και μεταφορά ισχύος με την κατάλληλη διαδοχική εμπλοκή συνεργαζομένων οδόντων. Οι οδόντες είναι αλληπάλληλες εσοχές και προεξοχές της επιφανείας ενός οδοντωτού τροχού, τέτοιες ώστε να είναι δυνατή η συνεργασία του της εσοχής του ενός τροχού με την προεξοχή του συνεργαζομένου οδοντωτού τροχού.

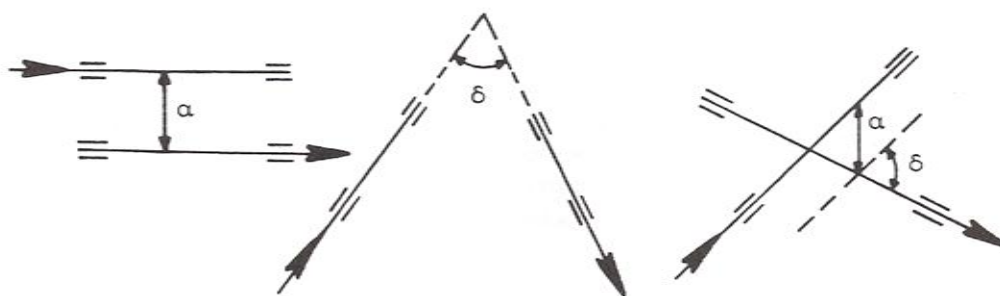
Στους περισσότερους τύπους οδοντωτών τροχών οι οδόντες δεν είναι θεωρητικά απαραίτητοι για την μετάδοση περιστροφικής κινήσεως. Όμως, η ανάγκη μεταφοράς μεγάλης στρεπτικής ροπής (δηλαδή μεγάλης ισχύος) και σταθερής μεταδόσεως κινήσεως (δηλαδή σταθερών σχέσεων μεταδόσεως στροφών) από την κινητήρια στην κινούμενη άτρακτο καθιστά αναγκαία την ύπαρξη οδόντων.

1.2 Είδη Οδοντωτών Τροχών

Οι άξονες περί τους οποίους περιστρέφονται δύο συνεργαζόμενοι οδοντωτοί τροχοί μπορεί να είναι:

- παράλληλοι σε απόσταση α
- τεμνόμενοι υπό γωνία δ
- ασύμβατοι σε απόσταση α και υπό γωνία δ

όπως φαίνονται στο Σχ. 1.1 της επομένης σελίδας.



Σχήμα 1.1: Σχετική θέση αξόνων συνεργαζομένων τροχών

Η σχετική θέση των αξόνων αυτών είναι βασικής σημασίας για την μορφή των τροχών που θα χρησιμοποιηθούν. Έτσι οι τροχοί μπορεί να είναι (Costopoulos [1]):

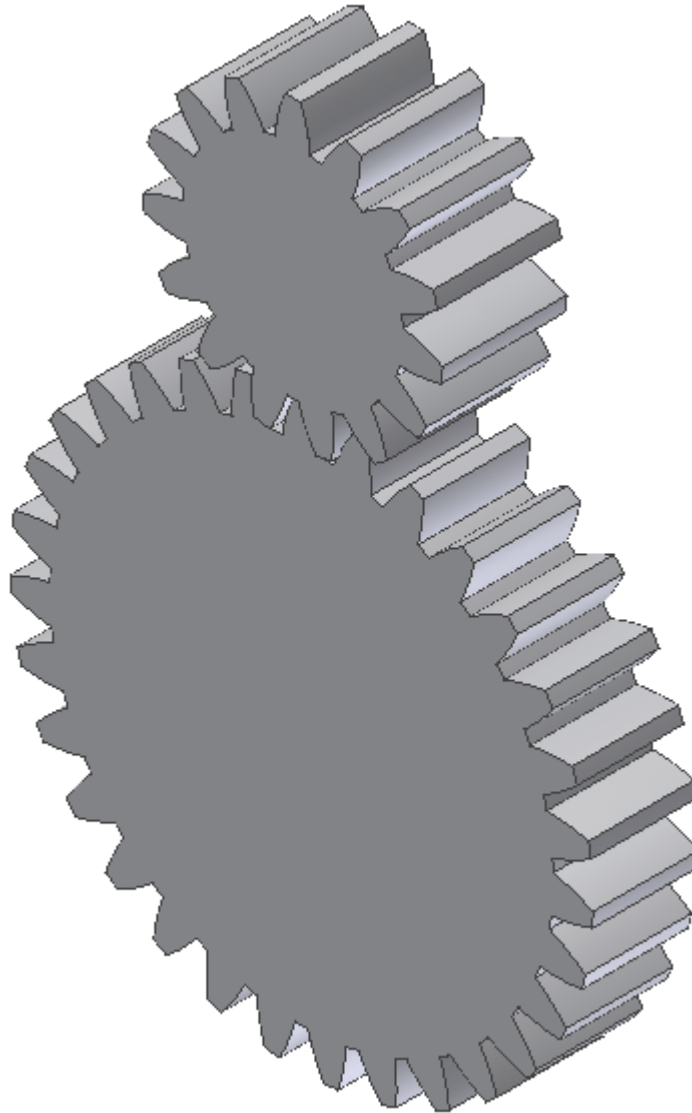
- Μετωπικοί (με ευθείς ή ελικοειδείς οδόντες) οι οποίοι ονομάζονται και κυλινδρικοί
- Κωνικοί
- Ελικοειδείς ασύμβατων αξόνων
- Σύστημα ατέρμονα κοχλία – οδοντωτού τροχού

όπως αναλυτικότερα παρουσιάζονται παρακάτω.

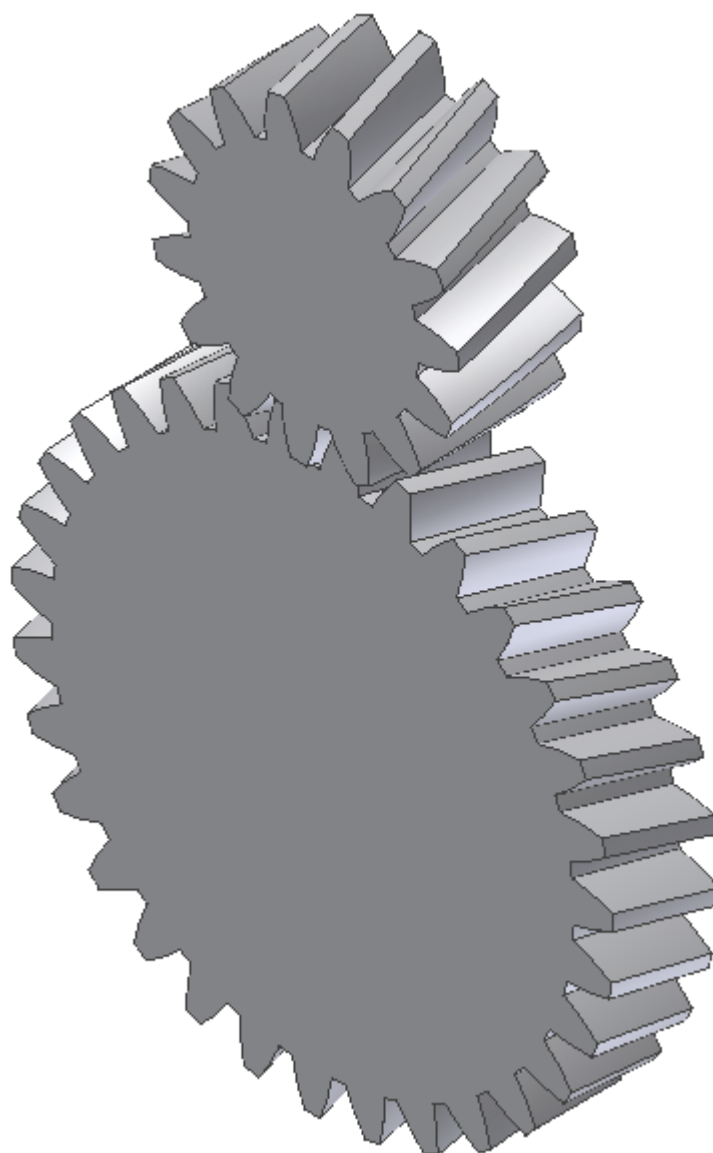
1.2.1 Μετωπικοί Οδοντωτοί Τροχοί

Οι μετωπικοί οδοντωτοί τροχοί χωρίζονται σε αυτούς με ευθείς οδόντες και σε αυτούς με ελικοειδείς οδόντες. Στην πρώτη κατηγορία οι οδόντες είναι παράλληλοι με τον άξονα του τροχού, ενώ στη δεύτερη είναι κεκλιμένοι ως προς τον άξονα του τροχού, ως τμήματα έλικας, σχηματίζοντας σταθερή γωνία μ' αυτόν, ενώ για μπορέσει να γίνει συνεργασία μεταξύ τους πρέπει σε μία βαθμίδα ο ένας να έχει δεξιόστροφους και ο άλλος αριστερόστροφους οδόντες. Οι μετωπικοί τροχοί ευθείας οδοντώσεως έχουν βαθμό επικάλυψης 1 έως 2 ενώ δεν ενδείκνυνται για μεγάλα φορτία γιατί προκαλούν θόρυβο και δημιουργούν μεγάλα δυναμικά φορτία. Αντίθετα οι μετωπικοί τροχοί ελικοειδούς οδοντώσεως έχουν μεγαλύτερο βαθμό επικάλυψης, αλλά μειονεκτούν στο θέμα ότι η ύπαρξη της γωνίας έλικας έχει ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη αξονικού φορτίου επί των οδόντων, το οποίο καταπονεί τις σταθερές εδράσεις των ατράκτων. Οι μετωπικοί

οδοντωτοί τροχοί μπορούν να έχουν εξωτερική οδόντωση, δηλαδή οι οδόντες να βρίσκονται στην εξωτερική επιφάνεια του τροχού ή εσωτερική οδόντωση, δηλαδή να βρίσκονται στην εσωτερική επιφάνεια του τροχού. 3-D μοντέλα ζευγών των παραπάνω τροχών παρατίθενται στα παρακάτω Σχ. 1.2 & 1.3 κατασκευασμένα με τη βοήθεια του προγράμματος CAD Autodesk Inventor.



Σχήμα 1.2: 3-D μοντέλο ζεύγους εξωτερικών μετωπικών οδοντωτών τροχών ευθείας οδοντώσεως



Σχήμα 1.3: 3-D μοντέλο ζεύγους εξωτερικών μετωπικών οδοντωτών τροχών ελικοειδούς οδοντώσεως

1.2.2 Κωνικοί Οδοντωτοί Τροχοί

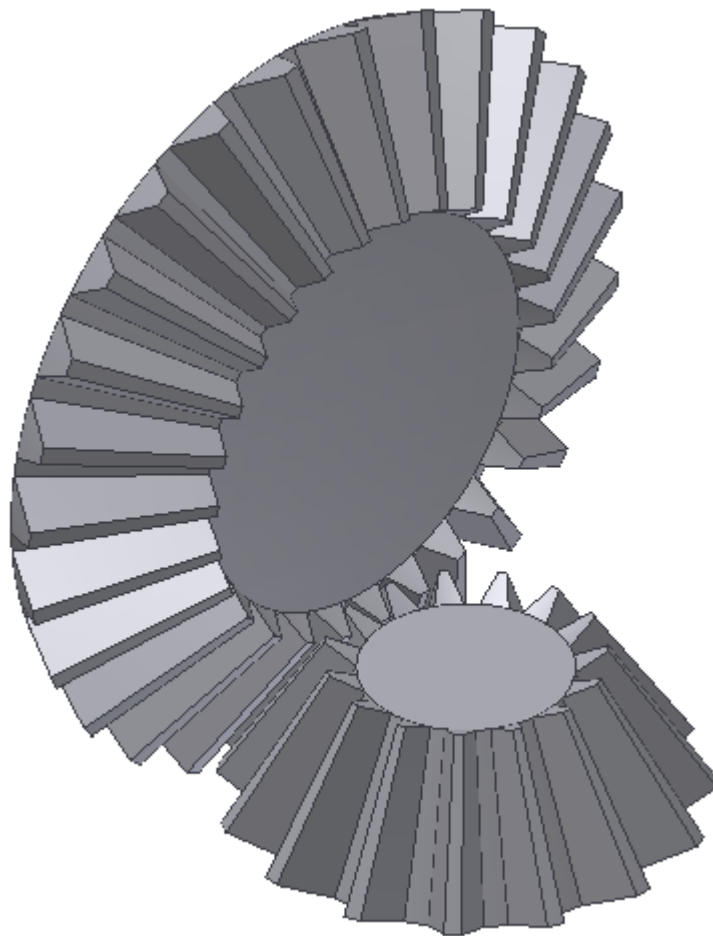
Οι κωνικοί τροχοί χρησιμοποιούνται για την μετάδοση κινήσεως και μεταφορά ισχύος μεταξύ τεμνομένων ατράκτων. Οι τροχοί αυτοί έχουν μορφή κολουρου κώνου του οποίου οι οδόντες μπορεί να είναι ευθείς ή τμήματα εξελιγμένης ή τόξα κύκλου κλπ. Περισσότερο χρησιμοποιούμενοι είναι οι κωνικοί τροχοί με άξονες τεμνόμενους υπό γωνία 90° . Μολονότι, τόσο η κατασκευή των κωνικών τροχών (η οποία γίνεται σε ειδικές

μηχανές κοπής) όσο και η συναρμολόγηση του μηχανισμού είναι πολυπλοκότερη εκείνης των μετωπικών τροχών, εν τούτοις οι κωνικοί τροχοί εφαρμόζονται συχνά στη μετάδοση κινήσεως και μεταφορά ισχύος.

Υπάρχουν διάφορα είδη κωνικών τροχών:

- Κωνικοί τροχοί με ευθείς οδόντες (Straight Bevel Gears)
- Κωνικοί τροχοί ZEROL
- Τοξωτοί κωνικοί τροχοί (Spiral Bevel Gears)
- Υποειδείς τροχοί (Hypoid Gears)

Ένα 3-D μοντέλο ζεύγους κωνικών τροχών με ευθείς οδόντες παρατίθεται στο παρακάτω Σχ. 1.4 κατασκευασμένο με τη βοήθεια του προγράμματος CAD Autodesk Inventor.



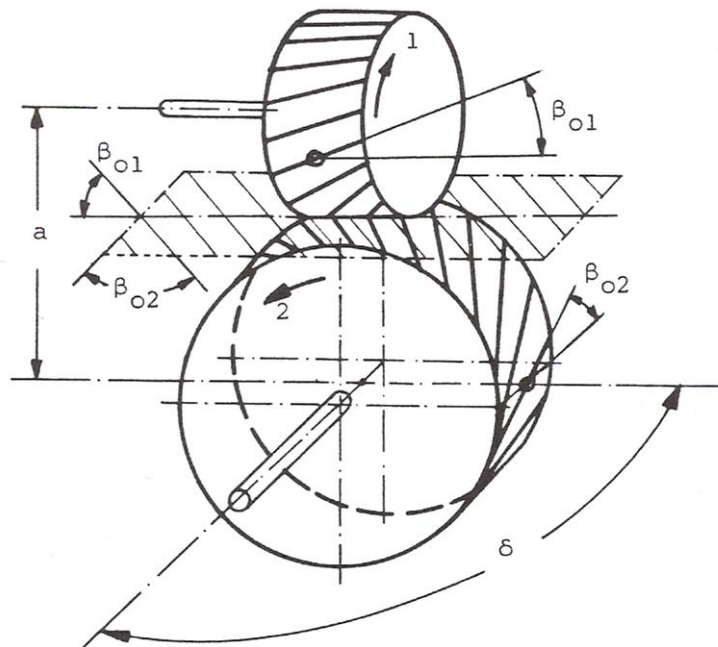
Σχήμα 1.4: 3-D μοντέλο ζεύγους κωνικών οδοντωτών τροχών ευθείας οδοντώσεως

1.2.3 Ελικοειδείς Οδοντωτοί Τροχοί Ασυμβάτων Αξόνων

Οι οδοντωτοί αυτοί τροχοί είναι κυλινδρικοί και έχουν άξονες ασύμβατους σε απόσταση a και υπό γωνία δ , η οποία είναι τέτοια ώστε:

$$\delta = \beta_{o1} + \beta_{o2}$$

όπου β_{o1} και β_{o2} είναι οι κλίσεις των οδόντων των τροχών, Σχ. 1.5. Γενικώς είναι $\beta_{o1} = \beta_{o2}$.

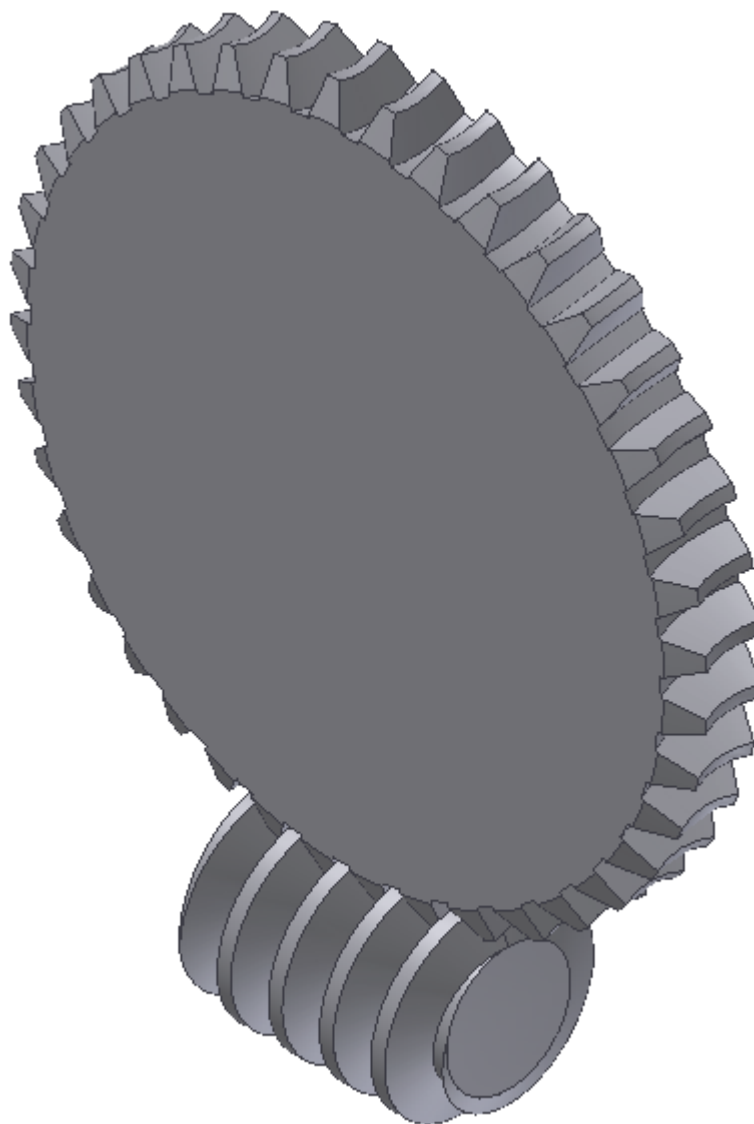


Σχήμα 1.5: Βαθμίδα ελικοειδών τροχών ασυμβάτων τροχών

Οι οδόντες δύο συνεργαζομένων ελικοειδών τροχών ασυμβάτων αξόνων έχουν σημειακή επαφή, η οποία μετατρέπεται σε γραμμική καθώς αυξάνει η φθορά των κατατομών. Λόγω του τρόπου επαφής τους οι τροχοί μπορούν να μεταφέρουν μικρά φορτία και για αυτό χρησιμοποιούνται κατά βάση μόνο για μετάδοση κινήσεως (όπως πχ. σε όργανα) και δεν ενδείκνυνται για μεταφορά ισχύος. Σ' αυτό συνηγορεί και ο μικρός βαθμός αποδόσεως των οδοντώσεών τους. Τέλος χρησιμοποιούνται για σχέσεις μετάδοσεως έως 5 και δεν είναι ευαίσθητοι σε μικρές μεταβολές αποστάσεως ή κλίσεως των αξόνων τους.

1.2.4 Σύστημα Ατέρμονα Κοχλία – Οδοντωτού Τροχού

Το σύστημα αυτό αποτελείται από έναν ατέρμονα κοχλία, που είναι ουσιαστικά ένας κοχλίας κινήσεως καταλλήλου σπειρώματος μίας η περισσοτέρων αρχών, ο οποίος συνεργάζεται με έναν οδοντωτό τροχό κατά τέτοιο τρόπο ώστε η συνεργασία τους μοιάζει με τον τρόπο εμπλοκής στη συνεργασία ενός κοχλία με το περικόχλιό του. Οι άξονές τους είναι συνήθως κάθετοι, αν και είναι δυνατόν να σχηματίζουν άλλη γωνία. Το σύστημα αυτό ενδείκνυται για μεταφορά μεγάλων φορτίων και για μεγάλες σχέσεις μεταδόσεως, έως και $200 : 1$. Ένα 3-D μοντέλο του συγκεκριμένου συστήματος παρατίθεται στο παρακάτω Σχ. 1.6 κατασκευασμένο με τη βοήθεια του προγράμματος CAD Autodesk Inventor.



Σχήμα 1.6: 3-D μοντέλο συστήματος ατέρμονος κοχλία – οδοντωτού τροχού

1.3 Αντικείμενο Εργασίας

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω οι οδοντωτοί τροχοί είναι τα πλέον χρησιμοποιούμενα μηχανικά στοιχεία για την μετάδοση περιστροφικής κινήσεως και την μεταφορά ισχύος από τον ένα άξονα στον άλλο. Άρα, αυτή είναι μία απόδειξη ότι υπάρχει η ανάγκη για αξιοπιστία και μεγαλύτερη διάρκεια ζωής, η οποία απαιτεί επακριβή και σαφή γνώση του τασικού πεδίου στον οδόντα του οδοντωτού τροχού. Στην προκείμενη εργασία, σκοπός μας είναι ο υπολογισμός των μεγίστων τάσεων που αναπτύσσονται στην επικίνδυνη διατομή ποδός των οδόντων των οδοντωτών τροχών όταν αυτοί φορτίζονται στο δυσμενέστερο σημείο τους (HPSTC) τόσο με αριθμητικές όσο και με πειραματικές μεθόδους. Η αριθμητική μέθοδος που χρησιμοποιείται δεν είναι άλλη από την Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων (FEM) η οποία χρησιμοποιείται ευρέως σήμερα με πολύ μεγάλη αξιοπιστία. Από την άλλη, η πειραματική μέθοδος με την οποία θα ασχοληθούμε και έχει χρησιμοποιηθεί από πολλούς ερευνητές έως τώρα και συνεχίζει να χρησιμοποιείται με επιτυχία στην μέτρηση της μέγιστης τάσης σε οδοντώσεις είναι η Μέθοδος της Φωτοελαστικότητας.

1.4 Διάρθρωση Κεφαλαίων

Η παρούσα εργασία χωρίζεται σε 6 κεφάλαια η περίληψη των οποίων παρατίθεται συνοπτικά αμέσως παρακάτω.

Στο 1^ο κεφάλαιο, που είναι ουσιαστικά είναι η εισαγωγή στην οποία βρισκόμαστε τώρα, γίνεται μια γενική αναφορά στους οδοντωτούς τροχούς και την χρήση τους, στα είδη των οδοντωτών τροχών που χρησιμοποιούνται, στο αντικείμενο της παρούσης εργασίας και σε μια σύντομη περίληψη των κεφαλαίων που την απαρτίζουν.

Στο 2^ο κεφάλαιο αναπτύσσονται οι ισχύουσες μέθοδοι προσδιορισμού της γεωμετρίας των συνεργαζομένων κατατομών των οδόντων μετωπικών οδοντωτών τροχών ευθείας οδοντώσεως σε 2 διαστάσεις (Costopoulos [1] [16] [17] , Spitas [4] , Niemann [40] , Litvin [36] [37] , [Colbourne [15] , Dudley [20] [21] , Townsend [48] ,

Buckingham [11]). Αυτές περιλαμβάνουν τη γνωστή γραφική μέθοδο Relaux και τη Γενικευμένη Θεωρία Οδοντώσεων, η οποία συνοψίζει τις αναλυτικές μεθόδους. Επίσης αναφέρεται ο βασικός νόμος των οδοντώσεων πάνω στον οποίο βασίζεται η συνεργασία των κατατομών, η εξειλιγμένη καμπύλη και βασικά μεγέθη των μετωπικών οδοντωτών τροχών όπως το module, ο βαθμός επικάλυψης κ.α. Στην συνέχεια αναπτύσσεται θεωρία υπολογισμού της θέσης του Ανώτερου Σημείου Μονής Επαφής Οδόντος (HPSTC) στο οποίο θα εφαρμοστούν οι φορτίσεις στα επόμενα κεφάλαια και τέλος εκτίθενται οι επικρατούσες αναλυτικές και εμπειρικές μέθοδοι προσδιορισμού της επικίνδυνης διατομής και του μεγέθους της μεγίστης τάσης σε οδόντες εξειλιγμένης (Costopoulos [1] [16] , Spitas [4] , Wilhaber [50] [51]). Συγκεκριμένα αναπτύσσονται οι μέθοδοι της εγγεγραμμένης παραβολής του Lewis που υιοθετείται από το αμερικάνικο πρότυπο AGMA, και της εφαπτομένης των 30° που υιοθετείται από το γερμανικό πρότυπο DIN και το διεθνές πρότυπο ISO (Lewis [35] , DIN [18] , ISO [30]). Επίσης αναφέρεται ο εμπειρικός τύπος του Heywood, ο επίσης εμπειρικός τύπος των Dolan και Broghamer, ο τύπος κατά το αμερικάνικο πρότυπο AGMA και ο τύπος κατά το γερμανικό πρότυπο DIN για τον προσδιορισμό του συντελεστή συγκέντρωσης τάσης (Heywood [27] , Dolan & Broghamer [19] , AGMA [7] , DIN [18]).

Στο 3^ο κεφάλαιο περιγράφεται η πειραματική μέθοδος μέτρησης των τάσεων ποδός των οδόντων με τη Μέθοδο της Φωτοελαστικότητας, η οποία για τη μέτρηση της μεγίστης τάσης σε οδοντώσεις συνεχίζει να χρησιμοποιείται με επιτυχία (Niemann [40] , Hongbin, Guanghui & Masana [28]). Γίνεται αναφορά στις αρχές της Θεωρίας του Φωτός, στην πόλωση του φωτός και στον Φωτοτασσοπτικό Νόμο στον οποίο βασίζεται η συγκεκριμένη μέθοδος (Papadopoulos [2] , Frocht [22]). Επίσης αναφέρονται οι αρχές λειτουργίας του Πολωσισκοπίου, της συσκευής εφαρμογής της μεθόδου της φωτοελαστικότητας ενώ για την άσκηση του φορτίου επί της κατατομής του οδόντος – δοκιμίου χρησιμοποιήθηκε ένας πρωτότυπος και εύκολος τρόπος που εξασφαλίζει ότι η διεύθυνση άσκησής του είναι πάντοτε κάθετη προς την κατατομή, όπως ακριβώς συμβαίνει στις οδοντώσεις εξειλιγμένης (Papadopoulos [2] , Spitas [4]).

Στο 4^ο κεφάλαιο περιγράφεται η αριθμητική μέθοδος μέτρησης των τάσεων στον πόδα των οδόντων με την Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων (FEM) (Provatidis & Antoniadis [3] , Provatidis [41] [42] , Kanarachos, Grekas & Provatidis [32] , Dimitriou [5] [6] , Zeid [55]). Γίνεται αναφορά στους τύπους και τα είδη των περασμένων στοιχείων, στις μεθόδους αυτόματης γένεσης πλέγματος που χρησιμοποιούνται καθώς και στα είδη

ανάλυσής τους (Lee [34], Ho-Le [29] , Heighway [24] , Hermann [26] , Barnhill, Birkhoff & Gordon [9] , Szabo & Babuska [46] , Mills [39] , MacNeal [38] , Kikushi [33] , Wordenweber [53]). Συνοπτικά αναφέρονται οι δυνατότητες του λογισμικού CAD (Autodesk Inventor) και CAE (Ansys) και χρησιμοποιήθηκε για την ανάλυση και τέλος γίνεται εφαρμογή στα μοντέλα των δοκιμών που χρησιμοποιήθηκαν στη Μέθοδο της Φωτοελαστικότητας του 3ου κεφαλαίου για να είναι οι τιμές συγκρίσιμες.

Στο 5ο κεφάλαιο εισάγεται η έννοια της αδιαστατοποίησης του προβλήματος της φόρτισης οδοντωτών τροχών ως προς το φορτίο, το πλάτος και το module της οδόντωσης (Costopoulos [1] [16] [17] , Spitas [4]). Στη συνέχεια συγκεντρώνονται οι τιμές των μεγίστων τάσεων από τη Μέθοδο της Φωτοελαστικότητας (3ο κεφάλαιο) και την Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων (4ο κεφάλαιο) και αφού μετατραπούν σε αδιάστατες συγκρίνονται για να βρεθεί η απόκλιση τους. Τέλος γίνεται αναφορά στον έλεγχο αντοχής μετωπικών οδοντωτών τροχών, στον υπολογισμό της επιτρεπόμενης τάσης η οποία πρέπει να είναι πάντοτε μεγαλύτερη της μέγιστης που αναπτύσσεται στον πόδα του οδόντος για το εκάστοτε υλικό προκειμένου να αντέχει ο τροχός (Costopoulos [1] , AGMA [7]).

Στο 6ο και τελευταίο κεφάλαιο παρατίθενται σε μορφή παραρτημάτων οι κώδικες των λογισμικών που αναπτύχθηκαν, οι βασικές μετατροπές μονάδων που χρησιμοποιήθηκαν στην εργασία και τα λογισμικά πακέτα που χρησιμοποιήθηκαν για την διεκπεραίωσή της.

Τέλος, πρέπει να αναφέρουμε ότι στο τέλος κάθε κεφαλαίου, πλην του τελευταίου (6ου), αναφέρεται η βιβλιογραφία που λήφθηκε υπ' όψη για την συγγραφή του.

1.5 Βιβλιογραφία

1. Κωστόπουλος Θ. Ν., *Οδοντώσεις και Μειωτήρες Στροφών*, Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα, 1991.

2. Παπαδόπουλος Γ. Α., *Ειδικά Κεφάλαια Μηχανικής, Πειραματικές Μέθοδοι Ανάλυσης των Τάσεων*, Εκδόσεις Ε.Μ.Π., Αθήνα, 1994.
3. Προβατίδης Χ., Αντωνιάδης Ι., *Υπολογιστικές Μέθοδοι στις Κατασκευές*, Εκδόσεις Ε.Μ.Π., Αθήνα 2004.
4. Σπιτάς Β. Α., *Μοντελοποίηση και Σχεδιασμός Βέλτιστων Οδοντώσεων με Χρήση Αναλυτικών, Αριθμητικών και Πειραματικών Μεθόδων*, Διδακτορική Διατριβή (επιβλέπων καθ. Θ. Ν. Κωστόπουλος), Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2001.
5. Δημητρίου Β., *Η Μέθοδος Coons στην Κατασκευή Πλεγμάτων*, Μεταπτυχιακή Εργασία, ΔΠΜΣ «Συστήματα Αυτοματισμού» (επιβλέπων καθ. Α. Κανάραχος), Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2000.
6. Δημητρίου Β., *Προσαρμοστικά Πεπερασμένα Στοιχεία και Συναφή Πλέγματα*, Διδακτορική Διατριβή (επιβλέπων καθ. Α. Κανάραχος), Ε.Μ.Π., Αθήνα, Αύγουστος 2004.
7. AGMA 2101-C95, "Fundamental rating factors and calculation methods for involute spur and helical gear. (Metric Version)", *American Gear Manufacturers Association*, 1995.
8. Armstrong C.G., Robinson D.J., McKeage D.J., Li T.S., Bridgett S.J., Donaghy R.J., and McGleenan C.A., Medials for Meshing and More, *4th Annual International Meshing Roundtable*, (sponsored by Sandia National Laboratories), October 16-17, 1995.
9. Barnhill RE, Birkhoff G, and Gordon WJ, *Smooth interpolation in triangles*, *J. Approx. Theory*, Vol. 8, pp. 114-128, 1973.
10. Brebbia CA, *Finite Element Systems: A Handbook*, Springer-Verlag, Berlin, 1982.
11. Buckingham E., *Analytical Mechanics of Gears*, Dover Publications Inc., New York, 1988.

12. Bykat A, Automatic generation of triangular grid: I – Subdivision of a general polygon into convex subregions; II – Triangular of convex polygons, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 10, pp. 1329-1342, 1976.
13. Cavendish J., Automatic triangulation of arbitrary planar domains for the finite element method, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 8, pp. 679-696, 1974.
14. Cavendish JC, Field DA, and Frey WH, An approach to automatic three-dimensional finite element mesh generation, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 21, pp. 329-347, 1985.
15. Colbourne J. R., *The Geometry of Involute Gears*, Springer - Verlag, New York, 1987.
16. Costopoulos T. N., "Generalized Theory of Gearing and Tooth Stress", *Proceedings of Ninth World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*, Vol. 1, p. 369, Milan, Italy, 1995.
17. Costopoulos Th. and Spitas V. A., "Analytical Mechanics of Spur Gears", *Proceedings of the 4th National Congress of Mechanics*, Vol. 1, pp. 187-194, Xanthi, Greece 1994.
18. DIN 3990 – "Calculation of load capacity of cylindrical gears", *Deutsches Institut für Normung E.V.*, 1987.
19. Dolan T. J. and Broghamer E. L., "A Photo-elastic Study of Stresses in Gear Tooth Fillets", *Uni. Ill. Eng. Sta. Bull.* 335, 1942.
20. Dudley D. W., *Gear Handbook, The Design, Manufacture, and Application of Gears*, Mc-Graw Hill , New York, 1962.
21. Dudley D. W., *Handbook of Practical Gear Design*, Mc-Graw Hill , New York, 1984.
22. Frocht M. M., *Photoelasticity*, John Wiley and Sons Inc., New York, 1941.
23. Green PJ, and Sibson R, Computing Dirichlet Tessellations in the Plane, *The Computer J.*, Vol. 21, pp. 168-173, 1977.

24. Heighway, E. A., A mesh generator for automatically subdividing irregular polygons into quadrilaterals, *IEEE Transaction on Magnetics*, Vol. 6, pp. 2535-2538, 1983.
25. Henriot G., *Traite Theorique et Pratique des Engrenages*, Borda, Paris, 1979.
26. Hermann LR, Laplacian-isoparametric grid generation scheme, *J. of Eng. Mech. Div. Proceedings ASCE*, Vol. 102 (EM5), 1976.
27. Heywood R. B., *Designing against Fatigue of Metals*, Reinhold Publishing Coproration, 1962.
28. Hongbin X., Guanghui Z., Masana K., "Research for photoelastic experiment and bending strength experiment of double involute gear with ladder shape teeth", *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, Vol. 36, Is. 10, pp 39-42, 2000.
29. Ho-Le, K., Finite Element Methods: A Review and Classification, *Computer-Aided Design*, Vol. 20 (1), pp. 27-38, 1988.
30. ISO 6336:3-1996, "Calculation of the load capacity of spur and helical gears-Part 3: Calculation of tooth bending strength", 1996.
31. Jung YH, and Lee K, Tetrahedron-based Octree Encoding for Automatic Mesh Generation, *Computer-Aided Design*, Vol. 25 (3), 1993.
32. Kanarachos A, Grekas D, and Provatidis C, Generalized Formulation of Coons' Interpolation. In: Kaklis PD, and Sapidis NS (editors), *Computer aided geometric design: from theory to practice*. Athens: National Technical University of Athens Press: 1995, pp. 65-76 [Chapter 7]
33. Kikuchi N, Adaptive grid design methods for finite element analysis, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 55, pp. 129-160, 1986.
34. Lee, Y.T., *Automatic Finite Element Generation Based on Constructive Solid Geometry*, Ph.D Thesis, Mechanical Engineering Dept, University of Leeds, Leeds, UK, 1983.

35. Lewis W., "Investigation of Strenght of Gear Teeth", *Proceedings of the Engineering Club No. 1*, Philadelphia, 1882.
36. Litvin F. L., "Theory of Gearing", NASA Reference Publication 1212, *AVSCOM Technical Report*, 88-C-035, 1989.
37. Litvin F. L., *Theory of Gearing*, 2nd ed., Nauka, Moscow, 1968.
38. MacNeal, R. H, *Finite Elements: Their Design and Performance*, Marcel Dekker, New York, 1994.
39. Mills R., Making Models Move, *Computer-Aided Engineering*, pp. 30-38, February 1997.
40. Niemann G., *Maschinelemente*, Band 2, Springer - Verlag, New York, 1965.
41. Provatidis, C.G., Three-dimensional Coons macroelements in Laplace and acoustic problems, *Computers & Structures*, 2005.
42. Provatidis, C.G., Analysis of box-like structures using 3-D Coons' interpolation, *Commun. Numer. Meth. Eng*, 2005.
43. Quiregga J. A., Gonzalez-Cano A., "Stress separation from photoelastic data by a multigrid method", *Measurement Science & Technology*, Vol. 9, Is. 8, pp. 1204-1210, 1998
44. Shu Xiao-Long, "Determination of load sharing factor for planetary gearing with small tooth number difference", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 30, Is. 2, pp. 313-321, 1995.
45. Shimada K, and Gossard D.C., Computational Methods for physically based FE mesh generation, In: G.J. Ollig and F. Kamura (eds.), *Human Aspects in Computer Integrated Manufacturing*, pp. 41-42, Elsevier Science, Amsterdam, 1992.
46. Szabo B. and Babuska I., *Finite Element Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1991.

47. Thacker WC, Gonzalez A, and Putland GE, A method for automatic the construction of irregular computational grids for storm forecast models, *J. Comput. Physics*, Vol. 37, pp. 371-387, 1980.
48. Townsend D. P., *Dudley's Gear Handbook*, Mc-Graw Hill , New York, 1992.
49. Watson, D. F., Computing the n -dimensional Delaunay Tessellation with Application to Voronoi Polygons, *Comput. J.*, Vol. 24, pp. 167-172, 1981.
50. Wilhaber E., "Conjugate Pitch Surfaces", *American Machinist*, Vol. 90, No 13, 1946b, pp. 150-152.
51. Wilhaber E., "Tooth Contact", *American Machinist*, Vol. 90, No 12, 1946c, pp. 110-114.
52. Woo TC, and Thomasma T, An algorithm for generating solid elements in objects with holes, *Computers & Structures*, Vol. 18 (2), pp. 333-342, 1984.
53. Wordenweber, B., Finite-Elements Mesh Generation, *Computer-Aided Design*, Vol. 6 (5), pp. 285-291, 1984.
54. Yerry MA, and Shephard MS, A modified quadree approach to Finite-Element Mesh Generation, *IEEE Comput. Graph. and Appl.*, pp. 39-46, "Construction for Polyhedral in Geometric Modeling" CAD Group Document No. 100, Cambridge University Computer Laboratory, 1978.
55. Zeid, I., *CAD/CAM Theory and Practice*, McGraw-Hill, New York, 1991.

Περιεχόμενα:

- 2.1 Γενικά
- 2.2 Βασικός Νόμος Οδοντώσεως
- 2.3 Ταχύτητα Ολισθήσεως
- 2.4 Συνεργαζόμενες Κατατομές
 - 2.4.1 Γραφική Μέθοδος (Relaux)
 - 2.4.2 Αναλυτική Μέθοδος (Γενικευμένη Θεωρία Οδοντώσεως)
- 2.5 Η Εξειλιγμένη Καμπύλη
- 2.6 Μεγέθη Οδοντώσεων
 - 2.6.1 Βήμα Οδόντων – Μέτρο Οδοντώσεως
 - 2.6.2 Πάχος Οδόντων
 - 2.6.3 Σχέση Μετάδοσης - Απόσταση Αξόνων
 - 2.6.4 Γωνία Επαφής
 - 2.6.5 Βαθμός Επικαλύψεως ή Διάρκεια Επαφής
- 2.7 Φόρτιση των Οδοντωτών Τροχών
- 2.8 Σημείο Μεγίστης Φόρτισης κατά τη Συνεργασία Οδόντων (HPSTC)
- 2.9 Υπολογισμός της Θέσης Εμφάνισης της Επικίνδυνης Διατομής Ποδός
 - 2.9.1 Η Μέθοδος της Εγγεγραμμένης Παραβολής του Lewis
 - 2.9.2 Η Μέθοδος της Εφαπτομένης των 30°
- 2.10 Υπολογισμός της Μεγίστης Τάσης στην Επικίνδυνη Διατομή Ποδός
 - 2.10.1 Η Μέθοδος κατά το πρότυπο AGMA
 - 2.10.2 Η Μέθοδος κατά το πρότυπο DIN 3990
 - 2.10.3 Η Ημιεμπειρική Μέθοδος του Heywood
 - 2.10.4 Ο Εμπειρικός Τύπος των Dolan - Broghamer
- 2.11 Παρατηρήσεις
- 2.12 Βιβλιογραφία

2.1 Γενικά

Η προσπάθεια για τη μοντελοποίηση της γεωμετρίας, της κινηματικής και της αντοχής των οδοντώσεων ξεκινά από τα τέλη του 18^{ου} και τις αρχές του 19^{ου} αιώνα με την ανακάλυψη της εξειλιγμένης από τον Euler και την μοντελοποίηση της κινηματικής των οδοντώσεων από τον Relaux αντίστοιχα. Παρά το γεγονός ότι στην αρχή οι οδοντωτοί τροχοί που επικρατούσαν ήταν εκείνοι με οδόντωση δια κυκλοειδών, γρήγορα εκτοπίστηκαν από τις οδοντώσεις εξειλιγμένης των 20°, το οποίο συνδυάζει επαρκή αλληλοκάλυψη μεταξύ συνεργαζομένων οδόντων και αυξημένη ικανότητα παραλαβής φορτίων (Buckingham [4]). Βασική αρχή για την ομαλή μετάδοση κινήσεως και μεταφορά ισχύος σε μία βαθμίδα, αποτελεί ο βασικός νόμος οδοντώσεως πάνω στον οποίο βασίζονται τόσο η γραφική μέθοδος Relaux όσο και η αναλυτική μέθοδος της γενικευμένης θεωρίας οδοντώσεως του Buckingham για τις συνεργαζόμενες κατατομές.

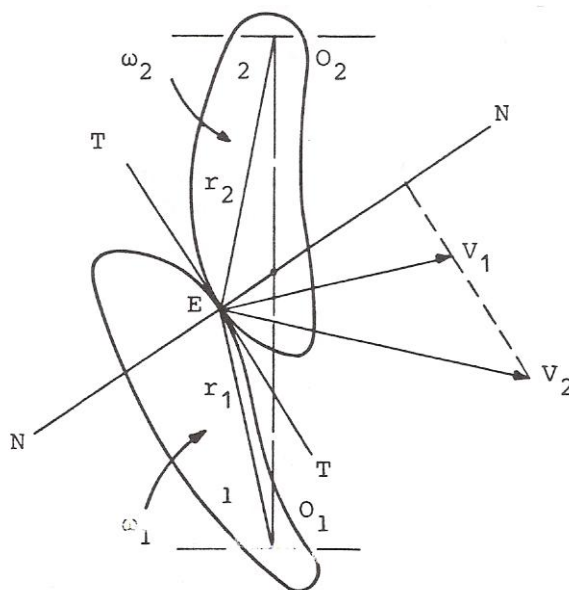
Γύρω στα μέσα του 20^{ου} αιώνα, ο F. Litvin άρχισε να αναπτύσσει τη Θεωρία Οδοντώσεων, η οποία ολοκληρώθηκε πρόσφατα από τον ίδιο (Litvin [16] [17]). Σύμφωνα με τη θεωρία αυτή, ήταν δυνατός ο υπολογισμός όχι μόνον των επίπεδων μετωπικών τροχών, αλλά οποιουδήποτε ζεύγους συνεργαζόμενων κατατομών στο χώρο. Παράλληλα με τις εργασίες του Litvin, αναπτύχθηκαν διάφορες μεθοδολογίες και θεωρίες υπολογισμού της γεωμετρίας των οδοντώσεων είτε από μεμονωμένους ερευνητές (Baxter, Colbourne, Dudley, Henriot, Merritt, Salamoun, Stipelman, Wildhaber) είτε από κατασκευαστές (Gleason, Illinois Tool Works).

Η πρώτη προσπάθεια για τον υπολογισμό των τάσεων σε οδοντώσεις ανήκει στον Lewis, ο οποίος διατύπωσε τη μέθοδο της εγγεγραμμένης παραβολής και η οποία ακόμα και σήμερα υιοθετείται και εφαρμόζεται (Lewis [15]). Ο πρώτος που συγκέντρωσε τις προϋπάρχουσες θεωρίες και τύπους υπολογισμού, που αφορούσαν τους οδοντωτούς τροχούς με οδόντωση εξειλιγμένης, ήταν ο Buckingham. Αργότερα ακολουθούν πολλοί ερευνητές (Timoshenko, Kelley, Niemann, Small, Wellauer, Heywood) οι οποίοι ασχολήθηκαν κυρίως με το πρόβλημα της ανάπτυξης των τάσεων στις οδοντώσεις και ιδιαίτερα με τον προσδιορισμό του συντελεστή συγκέντρωσης τάσης στον πόδα των οδόντων ευθείας οδόντωσης εξειλιγμένης, με πιο σημαντικούς τους Dolan και Broghamer, οι οποίοι υπολόγισαν με τη μέθοδο της φωτοελαστικότητας έναν εμπειρικό τύπο υπολογισμού του συντελεστή συγκέντρωσης τάσης, που χρησιμοποιείται ακόμα και

σήμερα από το αμερικάνικο πρότυπο AGMA (Niemann [18] , Heywood [13] , Dolan & Broghamer [9] , AGMA [3] , Wilhaber [20] [21]).

2.2 Βασικός Νόμος Οδοντώσεως

Οι συνεργαζόμενες κατατομές 1 και 2 του Σχ. 2.1 εφάπτονται σε κάποια χρονική στιγμή στο σημείο E και περιστρέφονται η μεν 1 ως προς άξονα δια του σημείου O_1 με γωνιακή ταχύτητα ω_1 η δε 2 ως προς άξονα δια του σημείου O_2 με γωνιακή ταχύτητα ω_2 (Costopoulos [1] [6] , Buckingham [4] , Colbourne [5] , Henriot [12] , Niemann [18]).



Σχήμα 2.1: Συνεργαζόμενες κατατομές

Το σημείο επαφής E θεωρούμενο ως σημείο της κατατομής 1 έχει περιφερειακή ταχύτητα $V_1 = \omega_1 r_1$ και ως σημείο της κατατομής 2 έχει περιφερειακή ταχύτητα $V_2 = \omega_2 r_2$. Εάν T – T είναι η κοινή εφαπτομένη των κατατομών στο σημείο E και N – N η κοινή κάθετος αυτών στο ίδιο σημείο E, τότε οι προβολές C1 και C2 των V1 και V2 αντίστοιχα επί την N – N πρέπει να είναι ίσες. Τούτο αποτελεί προϋπόθεση της συνεχούς επαφής των κατατομών, οι οποίες πρέπει να συνεχίσουν να έχουν συνεργασία

Εάν η C_1 ήταν μεγαλύτερη από την C_2 τότε η κατατομή με το σκληρότερο υλικό θα εισχωρούσε εντός της κατατομής με το μαλακότερο υλικό, ενώ εάν η C_2 ήταν μεγαλύτερη από την C_1 τότε η κατατομή 2 θα απομακρυνόταν από την 1, δηλαδή θα έπαυε η επαφή και συνεπώς η συνεργασία των κατατομών. Αυτές οι δύο ανεπιθύμητες



καταστάσεις αποφεύγονται από την συνθήκη $C_1 = C_2 = C$ από την οποία, από το Σχ. 2.2 προκύπτει:

$$C = V_1 \cos \chi = \frac{g_1}{R_1} V_1 = V_2 \sin \psi = \frac{g_2}{R_2} V_2 \quad (2.1)$$

από την οποία προκύπτει ότι:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{R_2 g_1}{R_1 g_2} \quad (2.2)$$

Όμως, $V_1 = \omega_1 R_1$ και $V_2 = \omega_2 R_2$ οπότε η (2.2) γίνεται:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{g_1}{g_2} \quad (2.3)$$

Εάν η κοινή κάθετος $N - N$ των κατατομών στο σημείο επαφής E του Σχ. 2.2 τέμνει την διάκεντρο $O_1 O_2$ στο σημείο C' , τότε από τις ομοιότητες των τριγώνων $KC'O_1$ και $LC'O_2$ θα είναι:

$$\frac{O_2 C'}{O_1 C'} = \frac{g_1}{g_2} \quad (2.4)$$

Από τον συνδυασμό των δύο τελευταίων σχέσεων (2.3) και (2.4) τελικά προκύπτει:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{O_2 C'}{O_1 C'} \quad (2.5)$$

η οποία κανονικά ισχύει μόνο για ένα σημείο της διακέντρου, το οποίο δεν μπορεί να είναι άλλο από το σημείο επαφής των αρχικών κύκλων στην περίπτωση των κανονικών οδοντώσεων. Από τα παραπάνω, καθίσταται φανερό ότι το σημείο C' ταυτίζεται με το σημείο κυλίσεως C . Συνεπώς ο βασικός νόμος της συνεργασίας δύο κατατομών ή ο βασικός νόμος της οδοντώσεως μπορεί να διατυπωθεί ως εξής (Costopoulos [1] [6]):

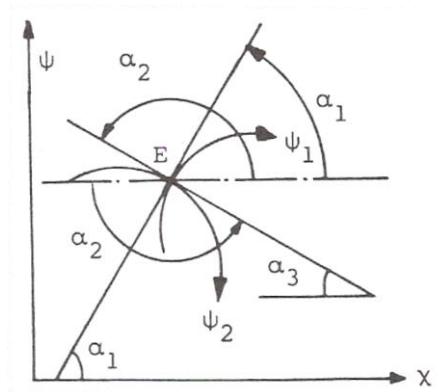
Για την ομαλή μετάδοση κινήσεως και μεταφορά ισχύος από τον κινητήριο στον κινούμενο οδοντωτό τροχό θα πρέπει σε κάθε σημείο επαφής των συνεργαζομένων κατατομών των οδόντων η κοινή κάθετος αυτών να διέρχεται από το σημείο κυλίσεως

C. Αυτό εξασφαλίζει ομοιόμορφη μετάδοση κινήσεως και μεταφορά ισχύος από τον κινητήριο στον κινούμενο οδοντωτό τροχό, χωρίς ολίσθηση χωρίς ολίσθηση των αρχικών κύκλων, η οποία εάν υπήρχε θα προκαλούσε ανομοιομορφία της μεταδιδόμενης κινήσεως και δημιουργία αδρανειακών δυνάμεων επί των οδόντων.

Η ανυπαρξία ολίσθήσεως των αρχικών κύκλων δεν συνεπάγεται και ανυπαρξία ολίσθήσεως των κατατομών μεταξύ τους σε όλα τα σημεία επαφής, εκτός βεβαίως της περιπτώσεως που η επαφή των κατατομών γίνεται στο σημείο κυλίσεως.

Πολύ χρήσιμη και ενδιαφέρουσα είναι η μαθηματική διατύπωση του βασικού νόμου οδοντώσεως, όπως αυτή προκύπτει από την εφαρμογή των πιο κάτω απλών σχέσεων.

Στο Σχ. 2.3 φαίνονται οι καμπύλες $\psi_1 = f(x)$ και $\psi_2 = \varphi(x)$ που είναι κάθετες στο σημείο E.



Σχήμα 2.3: Καμπύλες ψ_1, ψ_2

Από την γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου θα είναι:

$$\varepsilon\varphi\alpha_1 = \frac{df}{dx} > 0 \quad (2.6)$$

$$\varepsilon\varphi\alpha_2 = \frac{d\varphi}{dx} < 0 \quad (2.7)$$

Από τον τριγωνομετρικό κύκλο, Σχ. 2.4, προκύπτει ότι:

$$\varepsilon\varphi\alpha_2 = -\varepsilon\varphi\alpha_3 \quad (2.8)$$

Όμως:

$$\varepsilon\varphi\alpha_3 = \sigma\varphi\alpha_1 \quad (2.9)$$

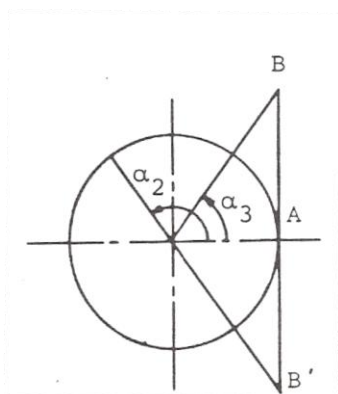
Από τα παραπάνω αποδεικνύεται εύκολα ότι:

$$\varepsilon\varphi\alpha_1 \varepsilon\varphi\alpha_2 = -1 \quad (2.10)$$

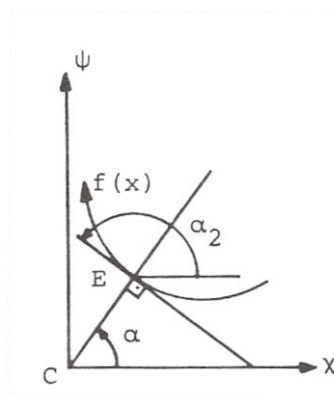
Με εφαρμογή του αποτελέσματος αυτού στην κατατομή $\psi = f(x)$, Σχ. 2.5, όπου η αρχή C των αξόνων είναι το σημείο κυλίσεως του τροχού στον οποίο ανήκει η εν λόγω κατατομή, μπορούμε να γράψουμε για το σημείο E

$$\varepsilon\varphi\alpha = -\frac{1}{\varepsilon\varphi\alpha_2} = -\frac{dx}{df} \quad (2.11)$$

η οποία αποτελεί την μαθηματική διατύπωση του βασικού νόμου των οδοντώσεων.



Σχήμα 2.4: Τριγωνομετρικός κύκλος



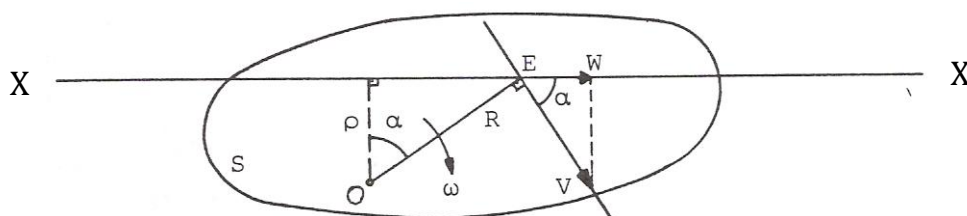
Σχήμα 2.5: Κατατομή $\psi = f(x)$

2.3 Ταχύτητα Ολισθήσεως

Στο παρακάτω Σχ. 2.6 το στερεό S περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω περί άξονα από το σημείο O . Η γραμμική ταχύτητα του σημείου E κατά την ευθεία $X-X$ υπολογίζεται ως εξής (Costopoulos [1] [6]):

$$V = \omega R \quad (2.12)$$

$$W = V \sin \alpha = \omega R \sin \alpha = \omega \rho \quad (2.13)$$



Σχήμα 2.6: Περιστροφική ταχύτητα στερεού S

Χρησιμοποιώντας τη παραπάνω παρατήρηση στο Σχ. 2.2 του βασικού νόμου της οδοντώσεως προκύπτουν οι προβολές των περιφερειακών ταχυτήτων V_1 και V_2 επί την κοινή εφαπτομένη $T-T$ των συνεργαζομένων κατατομών στο σημείο επαφής E , έχουμε:

$$W_1 = \omega_1 \rho_1 \quad \text{και} \quad W_2 = \omega_2 \rho_2 \quad (2.14)$$

ενώ η διαφορά των ταχυτήτων ορίζεται ως ταχύτητα ολισθήσεως:

$$u_g = W_1 - W_2 = \omega_1 \rho_1 - \omega_2 \rho_2 \quad (2.15)$$

που είναι η σχετική ταχύτητα με την οποία, στο σημείο E , η κατατομή 1 κινείται ως προς την κατατομή 2. Παρατηρώντας το Σχ. 2.2 μπορούμε να γράψουμε:

$$e = KC - \rho_1 = \rho_2 - LC \quad (2.16)$$

από τις οποίες η (2.14) γίνεται:

$$u_g = (\omega_1 KC - \omega_2 \Lambda C) - (\omega_1 + \omega_2)e \quad (2.17)$$

Με εφαρμογή του βασικού νόμου της οδοντώσεως και από την ομοιότητα των τριγώνων KCO_1 , KCO_2 προκύπτει:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{CO_2}{CO_1} = \frac{\Lambda C}{KC} \rightarrow \omega_1 KC = \omega_2 \Lambda C \quad (2.18)$$

με βάση την οποία η εξ. (2.17) γράφεται:

$$u_g = -(\omega_1 + \omega_2)e \quad (2.19)$$

όπου e είναι η απόσταση του σημείου επαφής E από το σημείο κυλίσεως C . Για την περιφερειακή ταχύτητα V_C του σημείου C , εφόσον ακολουθείται ο βασικός νόμος της οδοντώσεως, ισχύει:

$$V_C = \omega_1 r_{c1} = \omega_2 r_{c2} \quad (2.20)$$

από τις οποίες η (2.19) γίνεται:

$$\frac{u_g}{V_C} = -e \left(\frac{1}{r_{c1}} + \frac{1}{r_{c2}} \right) \quad (2.21)$$

Για το σημείο E που εξετάστηκε, θεωρούμενο ως σημείο της κατατομής που περιστρέφεται περί το O_1 και το οποίο βρίσκεται στην κατατομή ποδός κάθε σημείο της οποίας έχει ακτίνα $R_1 < r_{c1}$, ισχύει το αρνητικό πρόσημο της ταχύτητας ολισθήσεως, όπως ορίστηκε παραπάνω. Στο σημείο κυλίσεως C είναι $e = 0$, οπότε $u_g = 0$, όπως εξ άλλου αναμενόταν από την διατύπωση του βασικού νόμου της οδοντώσεως, για ομαλή και χωρίς ολίσθηση μετάδοσης κινήσεως και μεταφοράς ισχύος. Όταν το σημείο E γίνει σημείο της κατατομής κεφαλής, για την οποία $R_1 > r_{c1}$, οπότε και η επαφή των κατατομών, για την διάταξη του Σχ. 2.2 του βασικού νόμου οδοντώσεως, θα γίνεται δεξιά της διακέντρου O_1O_2 , τότε θα ισχύει για την ταχύτητα ολισθήσεως:

$$\frac{u_g}{V_C} = +e \left(\frac{1}{r_{c1}} + \frac{1}{r_{c2}} \right) \quad (2.22)$$

2.4 Συνεργαζόμενες Κατατομές

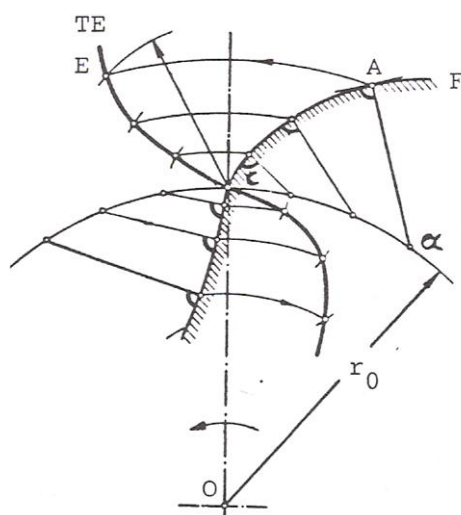
Η ομοιόμορφη μετάδοση κινήσεως και μεταφορά ισχύος από τον κινητήριο στον κινούμενο οδοντωτό τροχό εξασφαλίζεται με τον βασικό νόμο της οδοντώσεως, κατά τον οποίο οι συνεργαζόμενες κατατομές των οδόντων πρέπει να είναι τέτοιες ώστε η κοινή κάθετος των κατατομών στο τυχόν σημείο επαφής τους να διέρχεται από το σημείο κυλίσεως του τροχών (Costopoulos [1] [6] , Buckingham [4] , Colbourne [5] , Henriot [12] , Niemann [18] , Litvin [16] [17]). Με βάση αυτόν τον νόμο και με δεδομένη την γεωμετρία της μίας κατατομής, αποδεικνύεται παρακάτω ότι μπορεί να βρεθεί η γεωμετρία της άλλης κατατομής. Οι κατατομές αυτές λέγονται συνεργαζόμενες με την έννοια ότι κατά την συνεργασία τους ακολουθούν τον βασικό νόμο της οδοντώσεως. Η αναζήτηση των αποδοτικότερων συνεργαζομένων κατατομών αποτέλεσε πάντοτε ένα από τα βασικότερα αντικείμενα της θεωρίας των οδοντώσεων. Έτσι έχουν χρησιμοποιηθεί ως κατατομές οδόντων διάφορες καμπύλες, όπως είναι η εξελιγμένη καμπύλη, τόξα κύκλου, οι διάφορες κυκλοειδείς καμπύλες (ορθοκυκλοειδής, επικυκλοειδής, περικυκλοειδής, υποκυκλοειδής), σπείρα, και άλλες, αρκεί να ακολουθείται ο βασικός νόμος της οδοντώσεως. Η μέθοδος που ακολουθείται μπορεί να είναι γραφική όπου ακολουθείται η κατασκευή Relaux ή αναλυτική που βασίζεται στη γενικευμένη θεωρία οδοντώσεως, της οποίας οι βάσεις τέθηκαν από τον E. Buckingham (Buckingham [4]).

2.4.1 Γραφική Μέθοδος (Relaux)

Αρχικά, για δεδομένη ακτίνα αρχικού κύκλου r_0 , γνωστής κατατομής F του οδόντος ενός οδοντωτού τροχού που έχει κέντρο περιστροφής το σημείο O κατασκευάζεται εύκολα το τμήμα επαφών TE του Σχ. 2.7 όπως παρακάτω (Costopoulos [1] , Henriot [12]):

Σε τυχόν σημείο A της κατατομής F φέρεται η κάθετος επ' αυτήν, που τέμνει τον αρχικό κύκλο στο σημείο α . Καθώς ο τροχός περιστρέφεται, όπως στο σχήμα, από τον βασικό νόμο της οδοντώσεως προκύπτει ότι το σημείο A θα έρθει σε επαφή με το αντίστοιχο σημείο B της συνεργαζόμενης κατατομής όταν η κάθετος $A\alpha$ επί την F διέρχεται από το σημείο κυλίσεως, δηλαδή όταν το σημείο α συμπίπτει με το σημείο C .

Τότε το σημείο A θα βρεθεί στη θέση E, το οποίο σημαίνει ότι η απόσταση EC ισούται με την Aα. Επίσης το A διαγράφει κυκλική τροχιά με κέντρο το O και ακτίνα την OA. Έτσι, προκύπτει ότι το σημείο E του τμήματος επαφών βρίσκεται στην τομή των περιφερειών (O, OA) και (C, Aα). Με αυτόν τον τρόπο μπορούν να βρεθούν όλα τα σημεία του τμήματος επαφών, όπως στο Σχ. 2.7, έχοντας υπόψη ότι λόγω της ιδιομορφίας και της δυσκολίας εποπτείας των συνεργαζομένων οδοντώσεων, είναι εύκολο το λάθος που θα οδηγήσει σε συμπεράσματα που δεν ελέγχονται. Για να γίνουμε σαφέστεροι ως παρατηρήσουμε το Σχ. 2.7. Η κάθετος Aα επί την κατατομή, λαμβανομένη σε τυχαίο σημείο της F, μπορεί να τέμνει τον αρχικό κύκλο σε δύο σημεία, πράγμα το οποίο μας δίνει τέσσερα σημεία E στα οποία θα μπορούσε, θεωρητικά, να βρεθεί το σημείο A. Όμως για την δεδομένη κατατομή F και για την δεδομένη φορά περιστροφής μόνο το ευρεθέν σημείο E ισχύει, ενώ τα υπόλοιπα τρία απορρίπτονται, πράγμα το οποίο σημαίνει ότι με αυτά τα δεδομένα ορίζεται μονοσήμαντα το τμήμα επαφών TE.



Σχήμα 2.7: Κατασκευή Relaux – Τμήμα επαφών TE

Αλλά και η κατατομή οδόντος του συνεργαζομένου οδοντωτού τροχού μπορεί να βρεθεί με την παραπάνω μέθοδο, όπως στο Σχ. 2.8, με δεδομένη φυσικά την ακτίνα του αρχικού κύκλου αυτού του τροχού, όταν πρόκειται για εξωτερικά συνεργαζόμενους οδοντωτούς τροχούς, ως εξής:

Στο ευρεθέν σημείο E του τμήματος επαφών αντιστοιχεί το σημείο B της συνεργαζόμενης κατατομής, το οποίο προφανώς θα κείται επί της περιφέρειας του κύκλου (O_2, O_2E). Επίσης, λόγω της κυλίσεως των αρχικών κύκλων χωρίς ολίσθηση, το

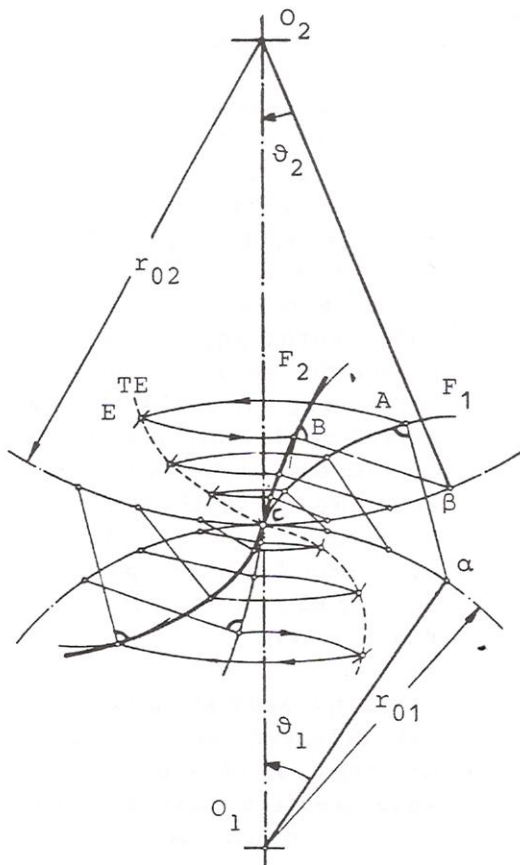
τόξο αC του αρχικού κύκλου του τροχού 1 θα ισούται με το τόξο βC του αρχικού κύκλου του τροχού 2, το οποίο σημαίνει ότι στη γνωστή γωνία στροφής θ_1 του τροχού 1 αντιστοιχεί η υπολογιζόμενη γωνία στροφής θ_2 του τροχού 2, δηλαδή:

$$\theta_1 r_{o1} = \alpha C = \beta C = \theta_2 r_{o2} \quad (2.23)$$

Επειδή στο E θα συμπέσουν τα σημεία A και B, και επειδή θα ισχύει ο βασικός νόμος της οδοντώσεως, με βάση τα παραπάνω, θα πρέπει το μήκος CE να είναι τέτοιο ώστε:

$$CE = \alpha A = B\beta \quad (2.24)$$

Έτσι προκύπτει ότι το σημείο B της υπό εύρεση κατατομής βρίσκεται στην τομή των περιφερειών (O_2 , O_2E) και (β , EC). Απαιτείται μεγάλη προσοχή στην εκλογή του κατάλληλου σημείου B από τα δύο της τομής των παραπάνω περιφερειών. Όπως και προηγουμένως, πρέπει να ληφθούν υπόψη η φορά περιστροφής, η θέση του Bβ, η γωνία θ_2 και το γεγονός ότι το υλικό του τροχού 2 δεν μπορεί να βρίσκεται σε θέσεις ήδη κατειλημμένες από υλικό του τροχού 1.



Σχήμα 2.8: Κατασκευή Relaux – Συνεργασία δύο τροχών

2.4.2 Αναλυτική Μέθοδος (Γενικευμένη Θεωρία Οδοντώσεως)

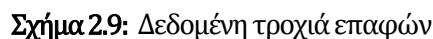
Κατ' αρχήν γίνεται χρήση του γεγονότος ότι, όπως αποδείχθηκε παραπάνω, υπάρχει μονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ της κατατομής οδόντος ενός τροχού, της κατατομής οδόντος του συνεργαζομένου τροχού και της τροχιάς επαφών τους, με τα δεδομένα και τις προϋποθέσεις που αναφέρθηκαν. Έτσι, γνωρίζοντας το ένα από αυτά, τα άλλα δύο υπολογίζονται αναλυτικά με την αναπτυσσόμενη θεωρία οδοντώσεως, η οποία ονομάζεται γενικευμένη γιατί εξετάζει την κατατομή κατά γενικό τρόπο, ανεξάρτητα αν αυτή είναι εξελιγμένη ή κυκλοειδής ή οποιαδήποτε καμπύλη $\psi = F(\chi)$. Αυτός ο τρόπος εξέτασης της γεωμετρίας συνεργαζομένων κατατομών έχει πολλά πλεονεκτήματα που γίνονται φανερά κατά τη σχεδίαση και ειδικότερα την βελτιστοποίηση των οδοντωτών τροχών (Costopoulos [1] [6]).

Στην αναλυτική μέθοδο μελέτης συνεργαζομένων κατατομών εξετάζονται με την γενικευμένη θεωρία οδοντώσεως οι εξής τρεις περιπτώσεις:

- a) Δίνεται η τροχιά επαφών $\psi = F(\chi)$ και η ακτίνα r_o του κύκλου κυλίσεως του τροχού. Ζητούνται να υπολογιστούν οι κατατομές των οδόντων του τροχού ακτίνας r_o και του κανόνα.

Από το Σχ. 2.9 προκύπτει ότι εφόσον το σημείο C έχει ληφθεί ως σημείο κυλίσεως του τροχού και του κανόνα του, τότε η εφαπτομένη του κύκλου ακτίνας r_o είναι η γραμμή κυλίσεως του κανόνα. Το σημείο C λαμβάνεται ως η αρχή των αξόνων (χ , ψ), δηλαδή ο άξονας των χ ταυτίζεται με την γραμμή κυλίσεως του κανόνα και ο άξονας των ψ διέρχεται από το σημείο O που είναι το κέντρο του τροχού ακτίνας r_o . Ας είναι E_o το σημείο επαφής των άγνωστων κατατομών σε κάποια χρονική στιγμή και E το σημείο επαφής τους σε κάποια μελλοντική χρονική στιγμή. Στο σημείο E οι κατατομές θα εφάπτονται στα σημεία τους εκείνα που όταν η επαφή των κατατομών γινόταν στο E_o αυτά τα σημεία είχαν τις θέσεις (χ_1 , ψ_1) για τον κανόνα και (χ_2 , ψ_2) για τον τροχό. Όλα τα σημεία του κανόνα εκτελούν κίνηση παράλληλη με τον άξονα των χ , και μάλιστα κατά τα θετικά χ , δηλαδή:

$$\psi_1 = \psi \quad \text{και} \quad \chi_1 = \chi - K \quad \text{με} \quad K \geq 0 \quad (2.25)$$


$$\tan\alpha = \frac{\psi}{\chi} \quad (2.26)$$
$$\tan\alpha = \frac{-d\chi_1}{d\psi_1} \quad (2.27)$$

Επειδή με βάση τα παραπάνω ισχύουν: $d\chi_1 = d\chi - dK$ και $d\psi_1 = d\psi$ προκύπτει ότι:

$$dK = d\chi + \frac{\psi}{\chi} \frac{d\psi}{d\chi} d\chi \quad (2.28)$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία σχέση μεταξύ των σημείων E_o και E , μπορούμε να υπολογίσουμε την απόσταση K κατά την οποία μετακινήθηκε ο κανόνας κατά τα θετικά χ , στον χρόνο τον οποίο ο τροχός στράφηκε δεξιόστροφα κατά γωνία θ . Επειδή η κύλιση γίνεται χωρίς ολίσθηση θα είναι:

$$\theta r_o = K = \int_{\chi_o}^{\chi} \left(1 + \frac{\psi}{\chi} \frac{d\psi}{d\chi} \right) d\chi \quad (2.29)$$

Σε δεδομένο σημείο (χ, ψ) της τροχιάς επαφών αντιστοιχεί ένα K και με βάση την (2.25) ένα σημείο (χ_1, ψ_1) της κατατομής οδόντος του κανόνα. Επί της κατατομής οδόντος του τροχού αντιστοιχεί το σημείο (χ_2, ψ_2) του οποίου οι συντεταγμένες υπολογίζονται από το Σχ. 2.9 ως εξής:

$$\chi_2 = -R \sin \varphi = -R \sin(\theta - \omega) = -R \sin \theta \cos \omega + R \cos \theta \sin \omega \quad (2.30)$$

Ομοίως,

$$\psi_2 = R \cos(\theta - \omega) - r_o = R \cos \theta \sin \omega + R \sin \theta \cos \omega - r_o \quad (2.31)$$

Επειδή όμως $\chi = R \sin \omega$ και $\psi + r_o = R \cos \omega$ με αντικατάσταση στις (2.30) και (2.31) προκύπτει:

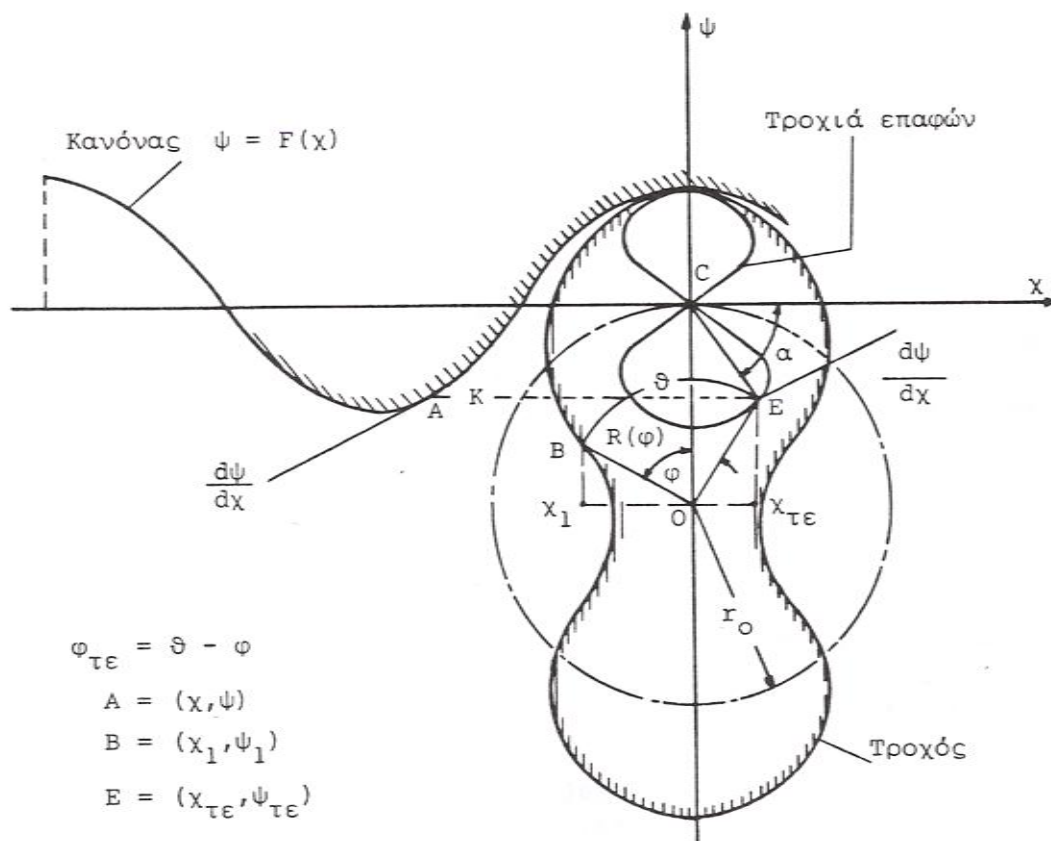
$$\chi_2 = \chi \cos \theta - (\psi + r_o) \sin \theta \quad (2.32)$$

$$\psi_2 = \chi \sin \theta + (\psi + r_o) \cos \theta - r_o \quad (2.33)$$

όπου τα χ, ψ λαμβάνονται με τα πρόσημά τους.

b) Δίνεται η κατατομή οδόντος $\psi = F(\chi)$ του κανόνα και η ακτίνα r_0 του κύκλου κυλίσεως του τροχού. Ζητείται να υπολογιστεί η κατατομή των οδόντων του τροχού ακτίνας r_0 και η τροχιά επαφών.

Με ανάλογο τρόπο με την προηγούμενη περίπτωση και χρησιμοποιώντας το ίδιο σύστημα συντεταγμένων, είναι δυνατόν με βάση το Σχ. 2.10 να βρεθούν οι σχέσεις υπολογισμού της ζητούμενης κατατομής οδόντος του τροχού και της αντίστοιχης τροχιάς επαφών. Ας είναι (χ, ψ) οι συντεταγμένες ενός σημείου της κατατομής του κανόνα, η οποία ακολουθεί την καμπύλη $\psi = F(\chi)$, και $(\chi_{τε}, \psi_{τε})$, (χ_1, ψ_1) οι συντεταγμένες των σημείων της τροχιάς επαφών και της κατατομής οδόντος του τροχού αντίστοιχα, που θα συνεργαστούν με το σημείο (χ, ψ) της κατατομής του κανόνα. Αυτό σημαίνει όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, ότι το σημείο (χ, ψ) της κατατομής του κανόνα και το σημείο (χ_1, ψ_1) της κατατομής οδόντος του τροχού θα έρθουν σε επαφή στο σημείο $(\chi_{τε}, \psi_{τε})$ της τροχιάς επαφών,



Σχήμα 2.10: Δεδομένη κατατομή οδόντος $\psi = F(\chi)$ του κανόνα

Στη μετακίνηση του κανόνα κατά $K > 0$ αντιστοιχεί στροφή του τροχού κατά γωνία θ , τέτοια ώστε:

$$K = \theta r_o \quad (2.34)$$

όπως προκύπτει από τον βασικό νόμο οδοντώσεως για την περίπτωση κυλίσεως χωρίς ολίσθηση του κανόνα και του τροχού. Προφανώς θα ισχύουν οι σχέσεις:

$$\psi_{\tau\epsilon} = \psi \quad \text{και} \quad \chi_{\tau\epsilon} = \chi + K \quad (2.35)$$

$$\tan\alpha = \frac{\psi_{\tau\epsilon}}{\chi_{\tau\epsilon}} = -\frac{d\chi}{d\psi} \quad (2.36)$$

από τις οποίες προκύπτει ότι:

$$K = -\left(\psi \frac{d\psi}{d\chi} + \chi\right) \quad (2.37)$$

οι συντεταγμένες του σημείου (χ_1, ψ_1) προκύπτουν κατά τρόπο ανάλογο με την προηγούμενη περίπτωση ως εξής:

$$\begin{aligned} \chi_1 &= -R(\varphi) \sin\varphi = -R(\varphi) \sin(\theta - \varphi_{\tau\epsilon}) = R(\varphi) \sin(\varphi_{\tau\epsilon} - \theta) \\ &= -R(\varphi) \sin\varphi_{\tau\epsilon} \cos\theta - R(\varphi) \cos\varphi_{\tau\epsilon} \sin\theta \end{aligned} \quad (2.38)$$

Ομοίως,

$$\begin{aligned} \psi_1 &= R(\varphi) \cos\varphi - r_o = R(\varphi) \cos(\theta - \varphi_{\tau\epsilon}) - r_o = \\ &= R(\varphi) \cos\theta \cos\varphi_{\tau\epsilon} + R(\varphi) \sin\theta \sin\varphi_{\tau\epsilon} - r_o \end{aligned} \quad (2.39)$$

Επειδή όμως $\chi = R \sin\omega$ και $\psi + r_o = R \cos\omega$ με αντικατάσταση στις (2.38) και (2.39) προκύπτει σε συνδυασμό με την (2.35):

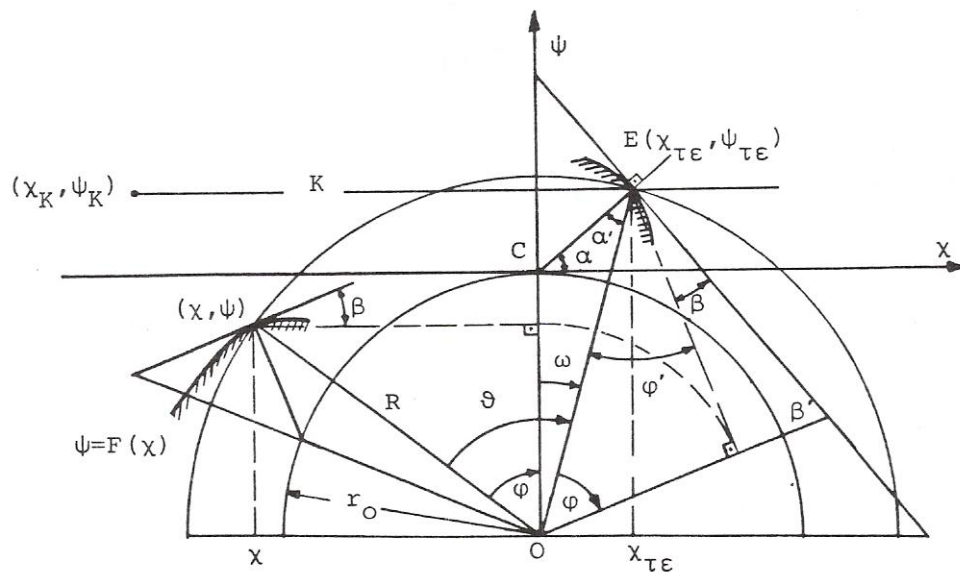
$$\begin{aligned} \chi_1 &= \chi_{\tau\epsilon} \cos\theta - (\psi_{\tau\epsilon} + r_o) \sin\theta \\ &= (\chi + K) \cos\theta - (\psi + r_o) \sin\theta \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \chi_{τε} \sin\theta + (\psi_{τε} + r_o) \cos\theta - r_o \\ &= (\chi + K) \sin\theta + (\psi + r_o) \cos\theta - r_o\end{aligned}\quad (2.41)$$

όπου τα χ, ψ λαμβάνονται με τα πρόσημά τους.

c) Δίνεται η κατατομή οδόντος $\psi = F(\chi)$ του κανόνα και η ακτίνα r_o του κύκλου κυλίσεως του τροχού. Ζητείται να υπολογιστεί η κατατομή των οδόντων του κανόνα και η τροχιά επαφών.

Στο Σχ. 2.11 ας είναι $\chi\psi$ το σύστημα συντεταγμένων στο οποίο η κατατομή οδόντος του τροχού ακολουθεί την καμπύλη $\psi = F(\chi)$. Στο σημείο (χ, ψ) της κατατομής οδόντος του τροχού αντιστοιχεί το σημείο (χ_K, ψ_K) της κατατομής οδόντος του κανόνα. Τα δύο αυτά σημεία θα έρθουν σε επαφή στο σημείο $E(\chi_{τε}, \psi_{τε})$. Στη στροφή του τροχού κατά γωνία θ αντιστοιχεί κίνηση του κανόνα $K > 0$ τέτοιο ώστε $K = \theta r_o$ όπως προκύπτει από την κύλιση χωρίς ολίσθηση των γραμμών κυλίσεως.



Σχήμα 2.11: Δεδομένη κατατομή οδόντος του τροχού

Ισχύουν οι σχέσεις όπως και στην προηγούμενη περίπτωση:

$$\psi_{\tau\varepsilon} = \psi_{\kappa} \quad \text{και} \quad \chi_{\tau\varepsilon} = \chi_{\kappa} + K \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} \chi &= -R \sin(\theta - \omega) = -R \sin\theta \cos\omega + R \cos\theta \sin\omega \\ &= \chi_{\tau\varepsilon} \cos\theta - (\psi_{\tau\varepsilon} + r_o) \sin\theta = \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} \psi &= R \cos(\theta - \omega) - r_o = R \cos\theta \sin\omega + R \sin\theta \cos\omega - r_o \\ &= \chi_{\tau\varepsilon} \sin\theta + (\psi_{\tau\varepsilon} + r_o) \cos\theta - r_o \end{aligned} \quad (2.44)$$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις (2.43) και (2.44) προκύπτει εύκολα:

$$\chi_{\tau\varepsilon} = \chi \cos\theta + (\psi + r_o) \sin\theta \quad (2.45)$$

$$\psi_{\tau\varepsilon} = -\chi \sin\theta + (\psi + r_o) \cos\theta - r_o \quad (2.46)$$

Από την εφαρμογή του βασικού νόμου των οδοντώσεων ισχύει για την γωνία α :

$$\tan\alpha = \frac{\psi_{\tau\varepsilon}}{\chi_{\tau\varepsilon}} \quad (2.47)$$

Σημειώνεται ότι η καμπύλη $\psi = F(\chi)$ δεν μπορεί να είναι τυχαία, αλλά σε κάθε σημείο της (χ, ψ) πρέπει να αντιστοιχίζεται μία γωνία θ τέτοια ώστε, όταν η κατατομή $\psi = F(\chi)$ περιστραφεί περί το κέντρο O του τροχού, η κάθετη επί την κατατομή στο σημείο αυτό να διέρχεται από το σημείο κυλίσεως C για να ισχύει ο βασικός νόμος της οδοντώσεως.

Από το Σχ. 2.11 αποδεικνύεται ότι:

$$\alpha + \omega + \alpha' = 90^\circ, \quad \varphi + \varphi' = 90^\circ, \quad 90^\circ - \beta = \alpha' + \varphi' \quad (2.48)$$

από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει:

$$\alpha + \theta = \beta + 90^\circ \quad (2.49)$$

όπου:

$$\theta = \omega + \varphi \quad \text{και} \quad \tan \beta = \frac{d\psi}{d\chi} \quad (2.50)$$

Από τις εξ. (2.45), (2.46), (2.47), (2.49) και (2.50) προκύπτει τελικά η πεπλεγμένη εξίσωση:

$$\tan^{-1} \left[\frac{\chi \cos \theta + (\psi + r_o) \sin \theta}{-\chi \sin \theta + (\psi + r_o) \cos \theta - r_o} \right] + \theta = 90^\circ + \frac{d\psi}{d\chi} \quad (2.51)$$

την οποία λύνοντας ως προς θ προσδιορίζουμε τελικά την τιμή της γωνίας συνεργασίας. Από εκεί και έπειτα η μετακίνηση συνεργασίας K του κανόνα προσδιορίζεται από την εξ. (2.34) οπότε το αντίστοιχο σημείο του κανόνα προσδιορίζεται τελικά από τις εξ. (2.25).

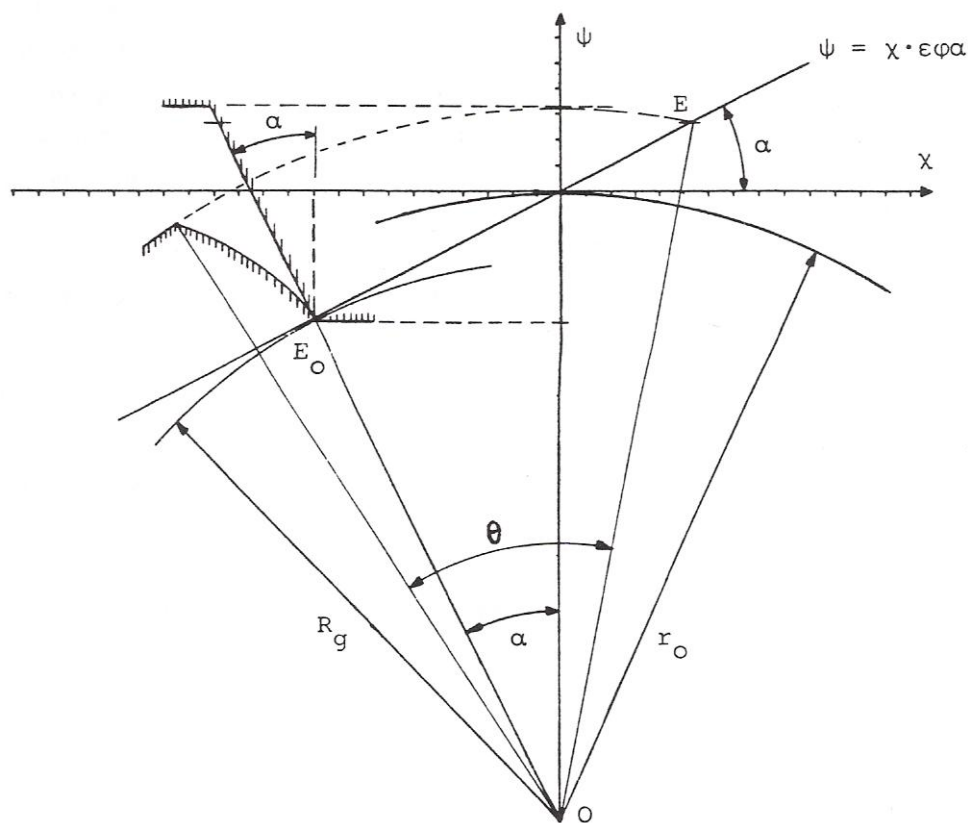
2.5 Η Εξειλιγμένη Καμπύλη

Η τροχιά που διαγράφει ένα σημείο ευθείας γραμμής κυλιόμενης χωρίς ολίσθηση επί της περιφέρειας κύκλου είναι η εξειλιγμένη καμπύλη (Costopoulos [1] [6]). Στο Σχ. 2.12 η ευθεία G_χ κυλίνεται επί του βασικού κύκλου (O, r_g) και το σημείο G διαγράφει την εξειλιγμένη GB ενώ ταυτοχρόνως το σημείο A διαγράφει την εξειλιγμένη AN . Είναι φανερό ότι:

$$\overline{AN} = \overline{GB} \quad \text{και} \quad \overline{GA} = \overline{BN} = \widehat{GN} \quad (2.52)$$

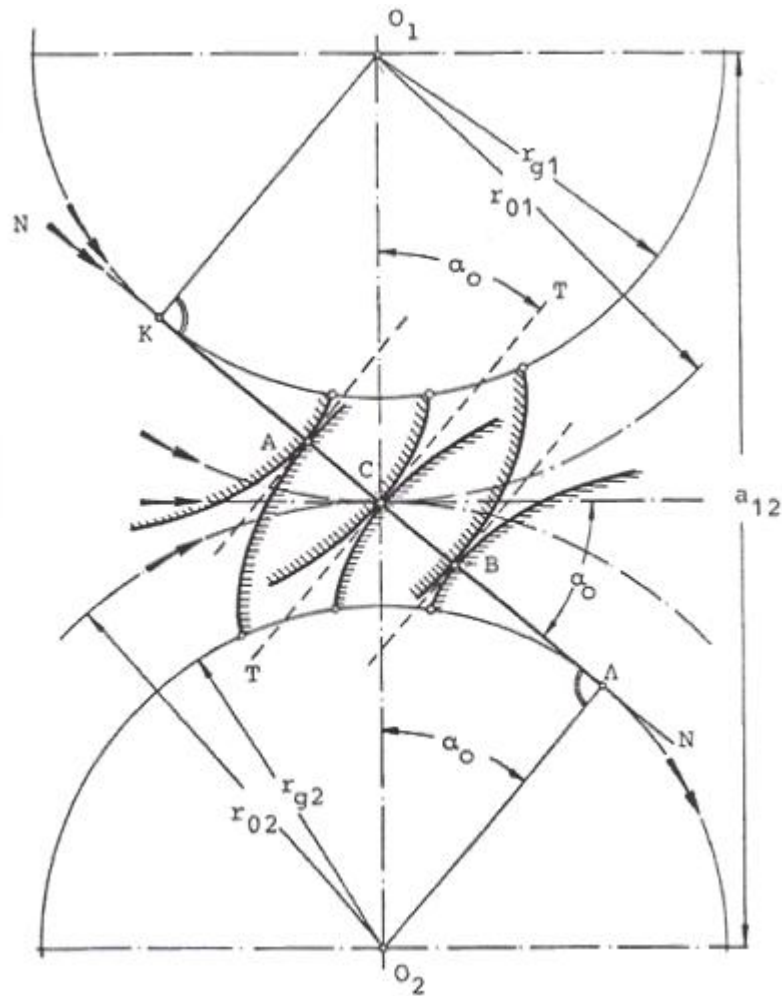
Η γωνία φ λέγεται συνάρτηση της εξειλιγμένης (involute, evolvente) και ορίζεται μονοσήμαντα από την α , συμβολίζεται δε ως $\text{inv}\alpha$ ή $\text{ev}\alpha$ ως εξής:

$$\text{inv}\alpha = \text{ev}\alpha = \varphi = \tan\alpha - \alpha \quad (2.54)$$



Σχήμα 2.13: Τροχιά επαφών ευθεία γραμμή

Στο Σχ. 2.14 φαίνονται συνεργαζόμενες κατατομές δι' εξειλιγμένης δύο οδοντωτών τροχών με κέντρα περιστροφής O_1 και O_2 , ως και η τροχιά επαφών, επί της οποίας βρίσκονται όλες οι θέσεις επαφής των κατατομών.



Σχήμα 2.14: Συνεργασία μετωπικών οδοντωτών τροχών με κατατομές οδόντων δι' εξηλιγμένης καμπύλης

Η θέση του σημείου B μπορεί να ορισθεί και με τις πολικές συντεταγμένες φ και $r = r_g / \cos \alpha$, ενώ η ακτίνα καμπυλότητας της εξελιγμένης στη θέση B είναι $\rho = r_g \tan \alpha$. Όταν το σημείο B γίνει αρχικό σημείο C τότε $r = r_o$ και $\alpha = \alpha_o$, όπως φαίνεται στο Σχ. 2.14, όπου εκτός των άλλων δίνεται και η απόσταση των κέντρων των συνεργαζομένων τροχών.

2.6 Μεγέθη Οδοντώσεων

Με βάση όσα αναφέραμε παραπάνω είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε τα βασικότερα μεγέθη των μετωπικών οδοντωτών τροχών κανονικής οδόντωσης δι' εξειλιγμένης (Costopoulos [1]).

2.6.1 Βήμα Οδόντων – Μέτρο Οδοντώσεως

Εάν Z είναι ο αριθμός οδόντων οδοντωτού τροχού, κανονικής μετωπικής τομής δι' εξειλιγμένης, το βήμα t_o στον αρχικό κύκλο θα είναι:

$$t_o = \frac{\pi d_o}{Z} \quad (2.55)$$

όπου:

- $d_o = 2 r_o$
- $r_o \rightarrow$ η ακτίνα του αρχικού κύκλου

Επίσης, ονομάζεται μέτρο οδοντώσεως (module) το μέγεθος:

$$m = \frac{d_o}{Z} = \frac{t_o}{\pi} \quad (2.56)$$

Το module είναι γεωμετρικό μέγεθος και λαμβάνει τυποποιημένες τιμές σε mm από τον Πίν. 2.1:

0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
1,25	1,50	1,75	2,00	2,25	2,50	2,75	3,00
3,25	3,50	3,75	4,00	4,50	5,00	5,50	6,00
6,50	7,00	7,50	8,00	9,00	10,00	11,00	12,00
13,00	14,00	15,00	16,00	18,00	20,00	22,00	24,00
27,00	30,00	33,00	36,00	39,00	42,00	45,00	50,00

Πίνακας 2.1: Τυποποιημένες τιμές του module m σε mm για οδόντες δι' εξειλιγμένης

Σε τυποποιημένες οδοντώσεις το ύψος κεφαλής h_k ισούται με 1 m ενώ το ύψος ποδός h_f λαμβάνεται συνήθως ίσο με $(1.25 \div 1.30)$ m. Αν ληφθεί το ύψος ποδός ίσο με 1.25 m τότε η ακτινική χάρη ισούται με 0.25 m. Είναι προφανείς οι παρακάτω σχέσεις:

- Διάμετρος κύκλου κεφαλής: $d_k = (Z + 2) m$
- Διάμετρος κύκλου ποδός: $d_f = d_o - 2 h_f = (Z - 2.5) m$

Το εργαζόμενο ύψος οδόντος είναι ίσο με 2 m.

Είναι προφανές ότι δύο συνεργαζόμενοι τροχοί θα έχουν το ίδιο βήμα και συνεπώς το ίδιο module, ως ανήκοντες στην ίδια οικογένεια οδοντωτών τροχών όπως αναφέρθηκε στη γενικευμένη θεωρία οδοντώσεως.

2.6.2 Πάχος Οδόντων

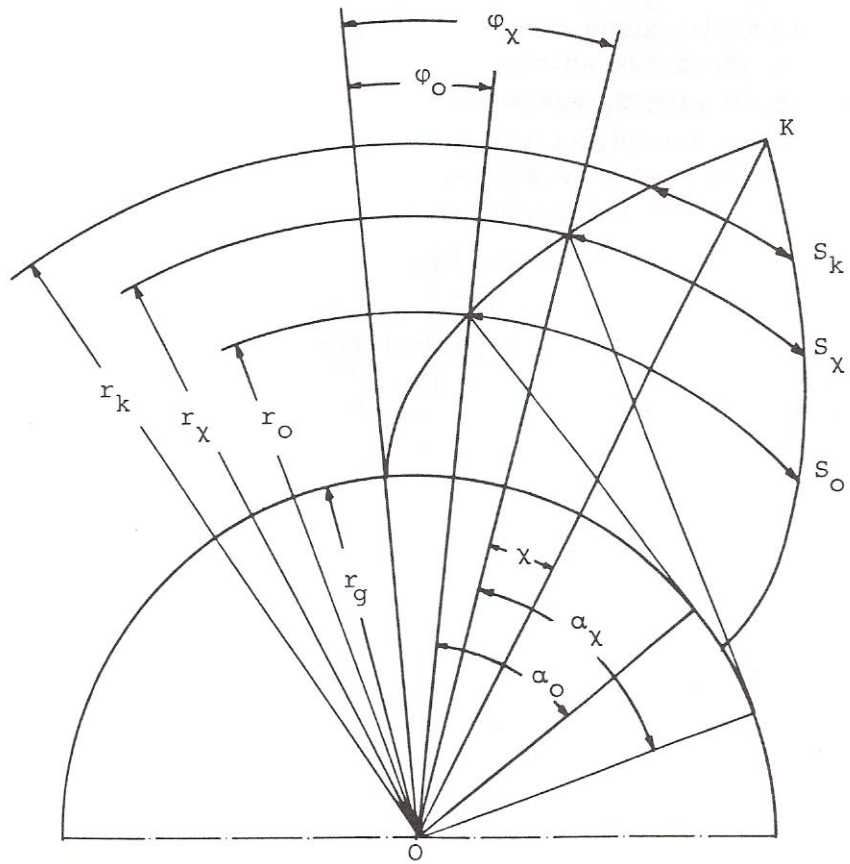
Με βάση αυτά που αναφέραμε παραπάνω περί εξειλιγμένης καμπύλης μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε το πάχος του οδόντος μετωπικού οδοντωτού τροχού στη μετωπική τομή σε ακτίνα r_x , Σχ. 2.15.

Εάν δεχθούμε ότι το πάχος του οδόντος στον αρχικό κύκλο είναι S_o τότε το διάκενο μεταξύ των οδόντων θα είναι:

$$l_o = t_o - S_o \quad (2.57)$$

Για να υπάρξει ομαλή συνεργασία των τροχών πρέπει να δεχθούμε την ύπαρξη τόσο χάρης των κατατομών S_e στον αρχικό κύκλο, όσο και ακτινικής χάρης. Η χάρη S_e των κατατομών στον αρχικό κύκλο δημιουργείται με την ελάττωση του πάχους των οδόντων και την αντίστοιχη αύξηση του διακένου τους, έτσι ώστε το άθροισμά τους να είναι το βήμα t_o . Συνήθως, ανάλογα με την κατεργασία του τροχού, λαμβάνεται:

$$S_o = (0.475 \div 0.5) t_o \quad (2.58)$$



Σχήμα 2.15: Πάχος οδόντος

Επομένως, σε κάθε περίπτωση είναι γνωστό το πάχος του οδόντος στον αρχικό κύκλο και με βάση αυτό υπολογίζεται το πάχος οδόντος σε οποιαδήποτε άλλη ακτίνα r_χ ως κατωτέρω:

Στο Σχ. 2.15 η OK είναι ο άξονας συμμετρίας του οδόντος και S_o, S_χ είναι τα πάχη του στις ακτίνες r_o, r_χ αντίστοιχα, οπότε μπορούν να γραφούν οι εξής σχέσεις:

$$S_\chi = 2 \chi r_\chi \quad (2.59)$$

$$S_o = 2 (\varphi_\chi - \varphi_o + \chi) r_o \quad (2.60)$$

από τις οποίες με εξάλειψη του χ προκύπτει:

$$\frac{S_{\chi}}{r_{\chi}} = \frac{S_o}{r_o} + 2 (\varphi_o - \varphi_{\chi}) \quad (2.61)$$

Λόγοι αντοχής δεν επιτρέπουν την κατασκευή οδόντος με μηδενικό πάχος κεφαλής. δηλαδή σχηματισμό ακμής ή κορυφής K. Αντιθέτως επιβάλλεται στον οδόντα πάχος κεφαλής S_k , το οποίο αντιστοιχεί στην ακτίνα κεφαλής $r_k = r_o + h_k$ όπου το ύψος κεφαλής h_k σε τυποποιημένες οδοντώσεις λαμβάνεται ίσο με το module m της οδοντώσεως.

2.6.3 Σχέση Μετάδοσης - Απόσταση Αξόνων

Από κινηματικής πλευράς δύο συνεργαζόμενοι μετωπικοί οδοντωτοί τροχοί ισοδυναμούν με δύο κυλινδρικούς τροχούς χωρίς οδόντες, που έχουν ως άξονες περιστροφής τους ίδιους τους άξονες των οδοντωτών τροχών. Όταν οι δύο αυτοί κυλινδρικοί τροχοί κυλίνουν ο ένας επί του άλλου χωρίς ολίσθηση, τότε οι περιφερειακές του ταχύτητες στις κυλιόμενες επιφάνειες είναι ίσες, πράγμα το οποίο σημαίνει ότι ο λόγος της γωνιακής ταχύτητας ω_1 της κινητήριας ατράκτου προς την γωνιακή ταχύτητα ω_2 της κινουμένης ατράκτου ισούται με τον λόγο της ακτίνας r_2 του τροχού 2 προς την ακτίνα r_1 του τροχού 1, δηλαδή:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} \quad (2.62)$$

όπως προκύπτει από την περιφερειακή ταχύτητα που είναι κοινή για τους τροχούς 1 και 2, δηλαδή:

$$V_1 = \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2 = V_2 \quad (2.63)$$

Ο λόγος της εξ. (2.62) ονομάζεται σχέση μεταδόσεως της βαθμίδας και μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$i_{12} = \frac{Z_2}{Z_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{d_{o2}}{d_{o1}} \quad (2.64)$$

Εάν Z_1 και Z_2 είναι οι αριθμοί οδόντων δύο συνεργαζομένων τροχών με ευθείς οδόντες, η απόσταση αξόνων των τροχών αυτών βρίσκεται από την σχέση:

$$a_{12} = r_{o1} + r_{o2} = (1 + i_{12}) \frac{m Z_1}{2} \quad (2.65)$$

2.6.4 Γωνία Επαφής

Γωνία επαφής (φ) είναι η οξεία γωνία μεταξύ της γραμμής ενεργείας και της κοινής εφαπτομένης των αρχικών κύκλων στο σημείο κυλίσσεως C, εφ' όσων πρόκειται για κανονικές οδοντώσεις. Στις οδοντώσεις δι' εξειλιγμένης η γωνία αυτή είναι σταθερή και ονομάζεται γωνία εξειλιγμένης, ισούται επίσης με την ημιγωνία οδόντος του κανόνα, κατά τα προβλεπόμενα από την γενικευμένη θεωρία οδοντώσεως. Στο μετρικό σύστημα η γωνία εξειλιγμένης λαμβάνεται ίση με 20° για τυποποιημένες οδοντώσεις, ενώ στο αγγλοσαξονικό σύστημα η τιμή της μπορεί να είναι 20° ή 14.5° .

Σε μη τυποποιημένες οδοντώσεις η γωνία εξειλιγμένης μπορεί να λάβει οποιαδήποτε επιθυμητή τιμή. Η μεταβολή της γωνίας αυτής έχει επίδραση στο μέγεθος των αναπτυσσομένων στους οδόντες φορτίων, στον βαθμό επικαλύψεως και στον ελάχιστο αριθμό οδόντων του τροχού.

2.6.5 Βαθμός Επικαλύψεως ή Διάρκεια Επαφής

Έχει ορισθεί ότι μήκος επαφών είναι το μήκος τόξου του αρχικού κύκλου το οποίο διατρέχει η εργαζόμενη πλευρά του οδόντος ενός οδοντωτού τροχού από το πρώτο μέχρι και το τελευταίο σημείο επαφής της με την συνεργαζόμενη πλευρά του οδόντος του άλλου τροχού.

Αναφερόμενοι στο Σχ. 2.16 της επόμενης σελίδας διακρίνουμε διάφορες θέσεις της κατατομής M_1 του οδόντος του τροχού 1 καθώς αυτή συνεργάζεται, κατά μήκος του τμήματος επαφών AB, με την κατατομή N_2 του οδόντος του τροχού 2. Όταν η κατατομή M_1 διέρχεται από το αρχικό σημείο κυλίσεως C, φέρεται η ακτίνα καμπυλότητας MM' η οποία τέμνει τον αρχικό κύκλο του τροχού 1 στο σημείο F. Ομοίως όταν η κατατομή N_2 διέρχεται από το σημείο C φέρεται η ακτίνα καμπυλότητας της εξειλιγμένης στο σημείο N που είναι εφαπτόμενη του βασικού κύκλου.

Όταν ο τροχός 1 στραφεί κατά γωνία θ_1 τότε το σημείο F θα συμπίσει με το σημείο C και προφανώς το σημείο $1'$ θα συμπίσει με το σημείο 1 και το σημείο 1 θα συμπίσει με το σημείο $1''$, δηλαδή:

$$\theta_1 = \widehat{FO_1C} = \widehat{1'O_11} = \widehat{1O_11''} \quad (2.66)$$

Από τις ιδιότητες της εξειλιγμένης ισχύει:

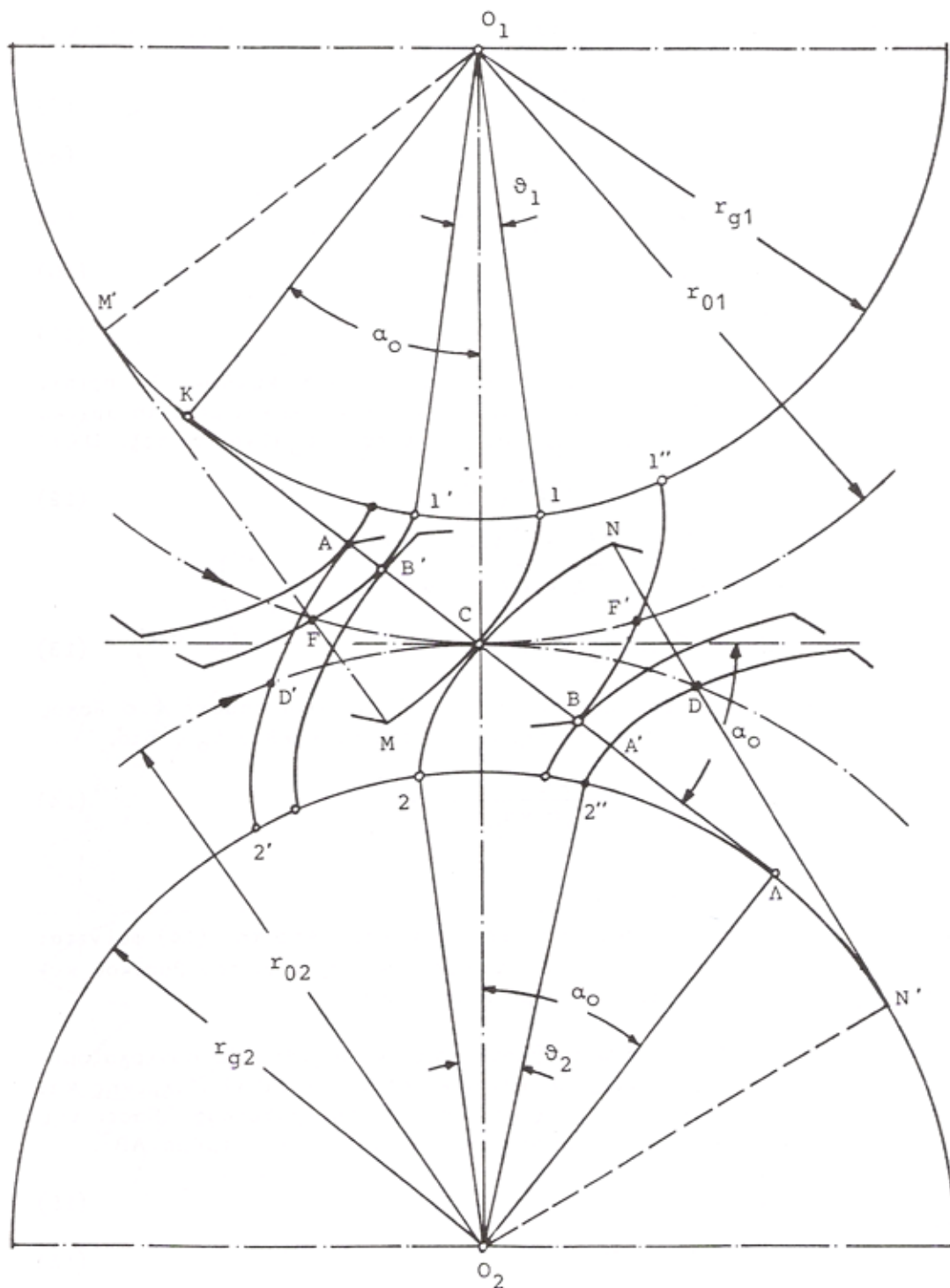
$$\overline{FM} = \widehat{1'1} = r_{g1}\theta_1 = r_{o1}\cos\alpha_o\theta_1 \quad (2.67)$$

όμως

$$\widehat{FC} = \widehat{CF'} = r_{o1}\theta_1 \quad (2.68)$$

οπότε,

$$\overline{FM} = \widehat{FC} \cos\alpha_o \quad (2.69)$$



Σχήμα 2.16: Συνεργαζόμενες κατατομές

Όταν το σημείο M λάβει την θέση B τότε η ακτίνα καμπυλότητας MM' θα συμπίσει με την τροχιά επαφών και θα λάβει την θέση BK . Έτσι, αφού το F θα συμπίσει με το C και η κατατομή $1M$ θα βρεθεί στη θέση $1''B$, από την ισότητα των τετραπλεύρων $MM'O_1$ και BKO_1 , καθώς και από όσα αναφέρθηκαν για τις θέσεις της κατατομής $M1$ προκύπτει

ότι το σημείο B' είναι συμμετρικό του σημείου B προς το σημείο C. Κατόπιν αυτών, θα είναι:

$$\overline{BC} = \overline{MF} \quad (2.70)$$

ως τμήματα της ακτίνας καμπυλότητας περιλαμβανόμενα μεταξύ κύκλου κεφαλής και αρχικού κύκλου. Επομένως,

$$\overline{BC} = \widehat{CF'} \cos \alpha_o \quad (2.71)$$

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι το σημείο A' είναι συμμετρικό του A ως προς το σημείο C και ότι

$$\overline{ND} = \overline{AC} = \overline{CA'} \quad (2.72)$$

$$\theta_2 = \widehat{CO_2D} = \widehat{2O_22''} \quad (2.73)$$

$$\overline{ND} = \widehat{22''} = r_{g2} \theta_2 = r_{o2} \cos \alpha_o \theta_2 \quad (2.74)$$

$$\overline{CD} = r_{o2} \theta_2 \quad (2.75)$$

οπότε,

$$\overline{AC} = \widehat{D'C} \cos \alpha_o \quad (2.76)$$

Επειδή γίνεται κύλιση χωρίς ολίσθηση των αρχικών κύκλων, θα πρέπει τα επιμέρους τόξα των κυλιομένων αρχικών κύκλων πριν και μετά το αρχικό σημείο C να είναι ίσα. Επομένως το μήκος επαφών e_o είναι το τόξο D'CF' έτσι ώστε

$$e_o = \widehat{D'CF'} = \widehat{D'C} + \widehat{CF'} \quad (2.77)$$

Αθροίζοντας κατά μέλη τις (2.72) και (2.77) βρίσκουμε:

$$\overline{AC} + \overline{BC} = (\widehat{D'C} + \widehat{CF'})\cos\alpha_o \quad (2.78)$$

ή

$$AB = e_o\cos\alpha_o \quad (2.79)$$

Έχει ορισθεί ως βαθμός επικάλυψης ή διάρκεια επαφής ε ο λόγος του μήκους επαφών e_o προς το βήμα του αρχικού κύκλου t_o , δηλαδή:

$$\varepsilon = \frac{e_o}{t_o} = \frac{AB}{t_o\cos\alpha_o} = \frac{AB}{t_g} \quad (2.80)$$

όπου: $t_g = t_o\cos\alpha_o = \pi m \cos\alpha_o$

είναι το βήμα της οδοντώσεως στον βασικό κύκλο. Από την (2.80) φαίνεται ότι ο βαθμός επικάλυψης είναι και ο αριθμός των βημάτων του βασικού κύκλου t_g που περιέχονται στο τμήμα επαφών AB.

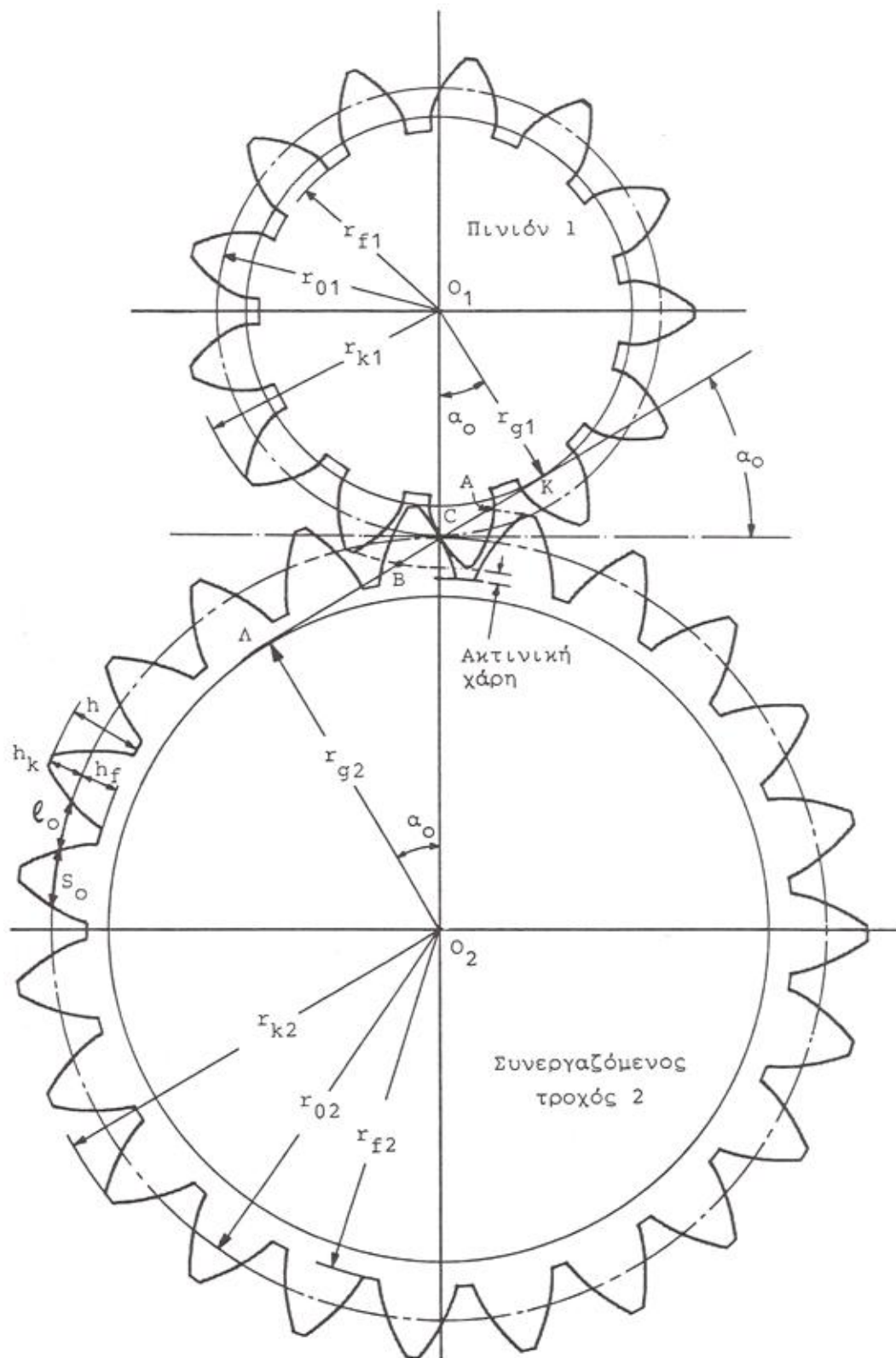
Στο Σχ. 2.17 δίνονται όλα τα χαρακτηριστικά μεγέθη δύο συνεργαζομένων τροχών με ευθείς οδόντες και κανονική οδόντωση δι' εξελιγμένης και ζητείται να υπολογισθεί ο βαθμός επικάλυψης της βαθμίδας. Βάσει της ανωτέρω σχέσης (2.80) αρκεί να υπολογισθεί το ευθύγραμμο τμήμα AB.

Έτσι:

$$AB = BC + CA \quad (2.81)$$

Όμως,

$$BC = BK + CK \quad (2.82)$$



Σχήμα 2.17: Χαρακτηριστικά μεγέθη συνεργαζομένων τροχών

όπου:

$$BK = \sqrt{BO_1^2 - KO_1^2} \quad (2.83)$$

$$BO_1 = r_{k1} = r_{o1} + h_{k1} \quad (2.84)$$

$$KO_1 = r_{g1} = r_{o1} \cos \alpha_o \quad (2.85)$$

Σε τυποποιημένες οδοντώσεις το ύψος κεφαλής οδόντος είναι ίσο με το module, δηλαδή:

$$h_{k1} = h_{k2} = h_k = 1,0 \text{ m} \quad (2.86)$$

Από αντικατάσταση των ανωτέρω στη (2.82) προκύπτει:

$$BC = \sqrt{(r_{o1} + m)^2 - r_{o1}^2 \cos^2 \alpha_o} - r_{o1} \sin \alpha_o \quad (2.87)$$

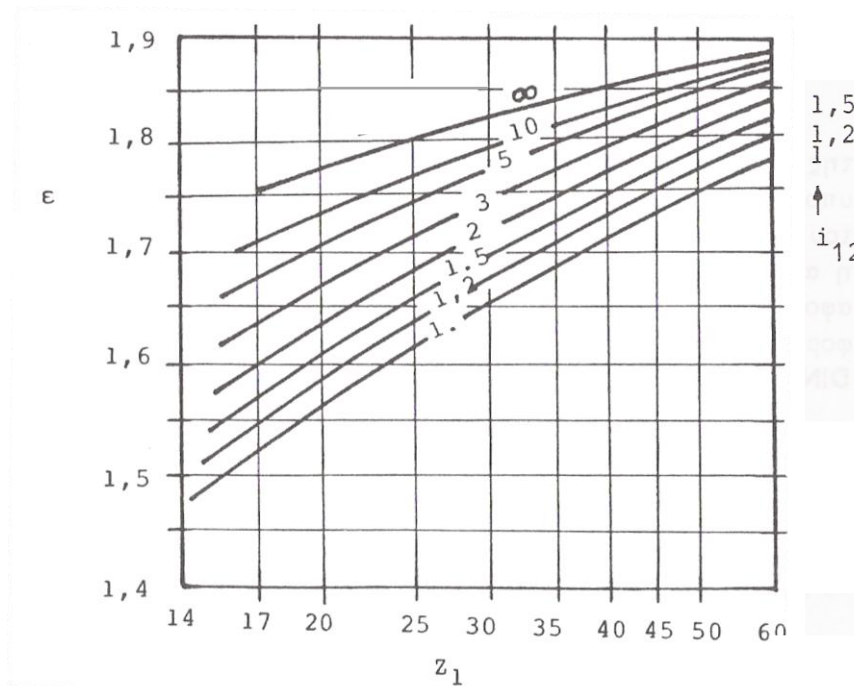
Ομοίως αποδεικνύεται ότι:

$$CA = \sqrt{(r_{o2} + m)^2 - r_{o2}^2 \cos^2 \alpha_o} - r_{o2} \sin \alpha_o \quad (2.88)$$

Τελικά, από την (2.80) σε συνδυασμό με τις (2.81), (2.87) και (2.88) προκύπτει η παρακάτω εξίσωση για τον βαθμό επικάλυψης:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{(r_{o1} + m)^2 - r_{o1}^2 \cos^2 \alpha_o} + \sqrt{(r_{o2} + m)^2 - r_{o2}^2 \cos^2 \alpha_o} - (r_{o1} + r_{o2}) \sin \alpha_o}{\pi m \cos \alpha_o} \quad (2.89)$$

Ένας ακόμη τρόπος υπολογισμού του βαθμού επικάλυψης ο οποίος είναι πιο προσεγγιστικός για δεδομένο αριθμό οδόντων Z_1 του πινιόν και δεδομένη σχέση μετάδοσης i_{12} της βαθμίδας, μπορεί γίνει από το παρακάτω Σχ. 2.18.

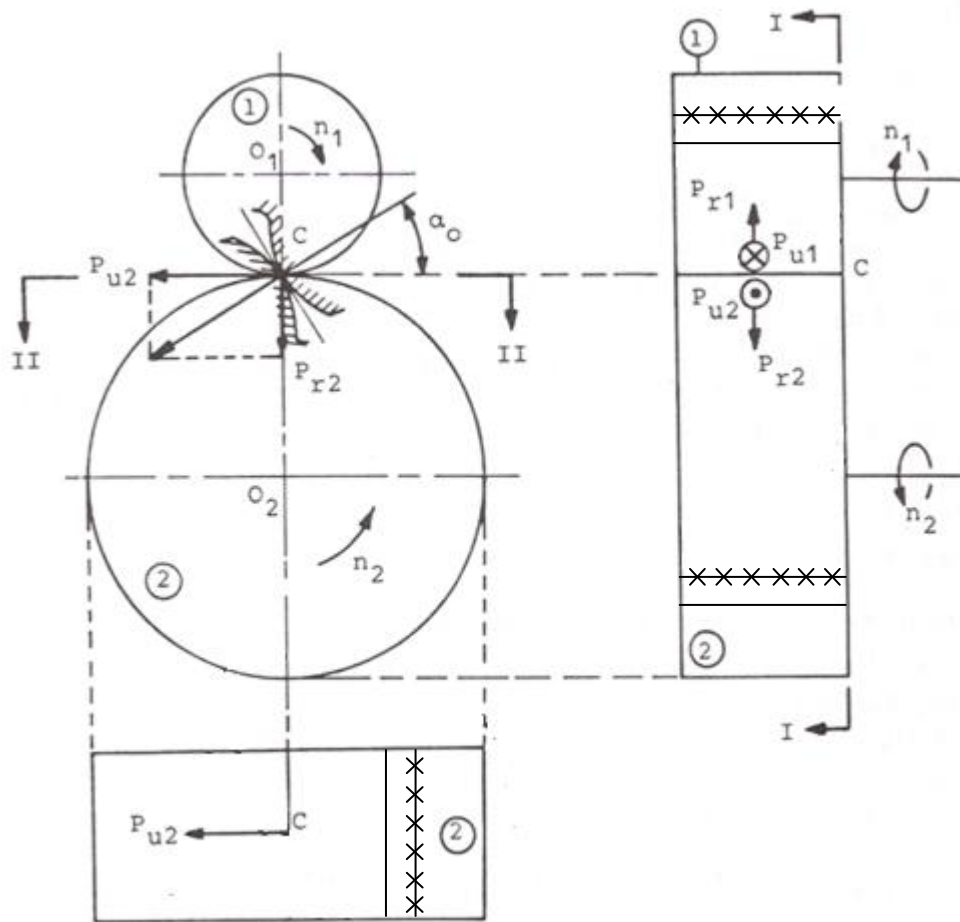


Σχήμα 2.18: Βαθμός επικάλυψης ϵ συναρτήσει της σχέσης μεταδόσεως i_{12} βαθμίδας

2.7 Φόρτιση των Οδοντωτών Τροχών

Στο Σχ. 2.19 οι τροχοί της βαθμίδας είναι μετωπικοί με ευθεία οδόντωση δι' εξελιγμένης. Η ολική δύναμη P που ασκείται στον οδόντα του τροχού 2, επί της γραμμής ενεργείας, αναλύεται σε δύο συνιστώσες, την ακτινική P_{r2} και την περιφερειακή P_{u2} (Costopoulos [1]). Οι δυνάμεις αυτές αναφέρονται στο σημείο κυλίσεως C .

Στον τροχό 1 ασκούνται οι δυνάμεις P_{u1} , P_{r1} , που λόγω της αρχής δράση = αντίδραση είναι ίσες και αντίθετες με τις αντίστοιχες δυνάμεις του τροχού 2. Επομένως θα λέμε ότι στο σημείο κυλίσεως της βαθμίδας ασκούνται οι δυνάμεις P_u , P_r και θα εννοούμε ότι αυτές οι δυνάμεις ασκούνται σε καθεμία από τις συνεργαζόμενες κατατομές.



Σχήμα 2.19: Δυνάμεις επί των οδόντων

Στην επάνω δεξιά θέση του Σχ. 2.19 φαίνονται οι εργαζόμενες πλευρές των οδόντων που συνεργάζονται στο σημείο κυλίσεως C. Η όψη I - I είναι η μετωπική τομή των τροχών και η όψη II - II εξετάζει τον τροχό 2.

Εάν υποτεθεί ότι η προς μεταφορά (μέσω της βαθμίδας) ισχύς είναι N με n_1 στροφές (ανά μονάδα χρόνου) του πινιόν, τότε η στρεπτική ροπή στο πινιόν θα είναι:

$$M_{d1} = \frac{N}{\omega_1} \quad (2.90)$$

όπου $\omega_1 = 2 \pi n_1$ είναι η γωνιακή ταχύτητα του πινιόν.

Ο παρακάτω τύπος χρησιμοποιείται με επιτυχία για τον υπολογισμό της στρεπτικής ροπής:

$$M_d = 71620 \frac{N}{n} \quad (2.91)$$

όπου:

- $M_d \rightarrow$ η στρεπτική ροπή του τροχού ($Kp \cdot cm$)
- $N \rightarrow$ η ισχύς που μεταφέρεται από την βαθμίδα (PS)
- $n \rightarrow$ ο αριθμός στροφών του τροχού (rpm)

Η περιφερειακή δύναμη που θα αναπτυχθεί στην βαθμίδα δίνεται από τη σχέση:

$$P_u = \frac{2 M_{d1}}{d_{o1}} = \frac{2 M_{d2}}{d_{o2}} \quad (2.92)$$

όπου:

- $d_{o1}, d_{o2} \rightarrow$ η διάμετρος του αρχικού κύκλου των τροχών 1 και 2 αντίστοιχα (mm)

Η ακτινική δύναμη προκύπτει από την όψη I – I μέσω της γωνίας α_o ως εξής:

$$P_r = P_u \tan \alpha_o \quad (2.93)$$

Η συνολική δύναμη P που ασκείται στον τροχό δίνεται από την παρακάτω σχέση:

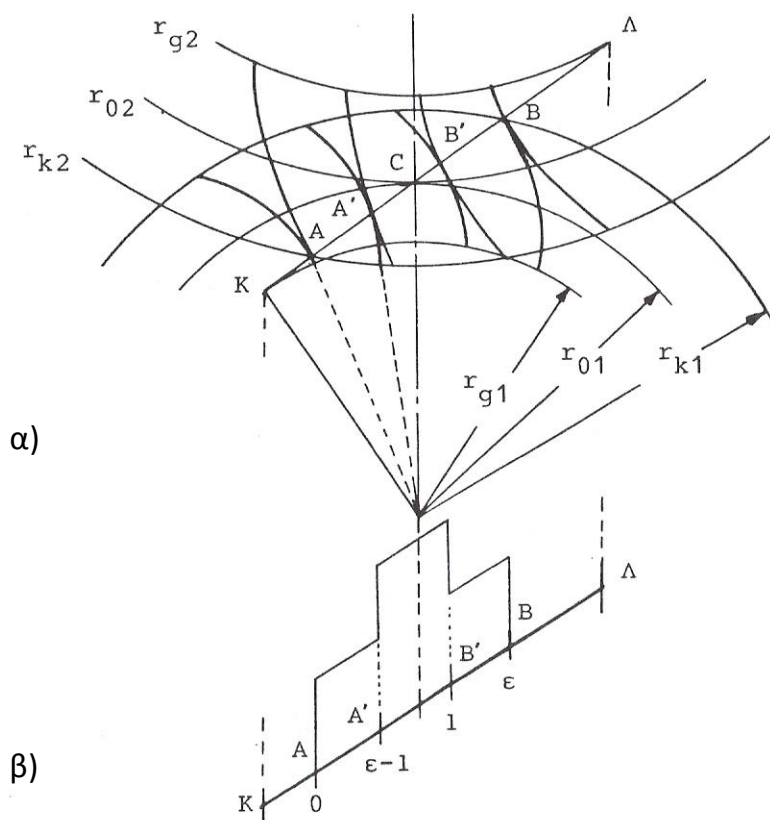
$$P = \sqrt{P_u^2 + P_r^2} \quad (2.94)$$

και με αντικατάσταση των (2.92) και (2.93) στη παραπάνω (2.94) προκύπτει η τελική σχέση της συνολικής δύναμης P :

$$P = \sqrt{\left(\frac{2 M_{d1}}{d_{o1}}\right)^2 + \left(\frac{2 M_{d1}}{d_{o1}} \tan \alpha_o\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2 M_{d2}}{d_{o2}}\right)^2 + \left(\frac{2 M_{d2}}{d_{o2}} \tan \alpha_o\right)^2} \quad (2.95)$$

2.8 Σημείο Μεγίστης Φόρτισης κατά τη Συνεργασία Οδόντων (HPSTC)

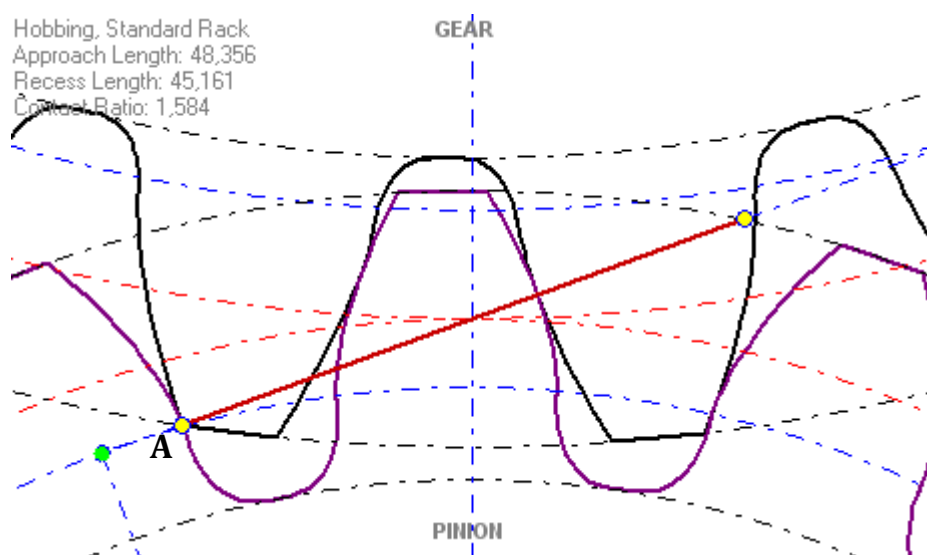
Έχει διαπιστωθεί ότι στον κύκλο κεφαλής η δύναμη P δεν λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της. Έχει ευρεθεί από το παρακάτω Σχ. 2.20 ότι στο διάστημα $A'B'$ του τμήματος επαφών εργάζεται μόνον ένας οδόντας από κάθε τροχό, ενώ στα διαστήματα AA' και BB' εργάζονται συγχρόνως από δύο οδόντες σε κάθε τροχό. Αυτό σημαίνει ότι το μέγιστο φορτίο οδόντος αναπτύσσεται σε σημείο του διαστήματος $A'B'$ (Costopoulos [1] [6], Costopoulos & Spitas [7]).



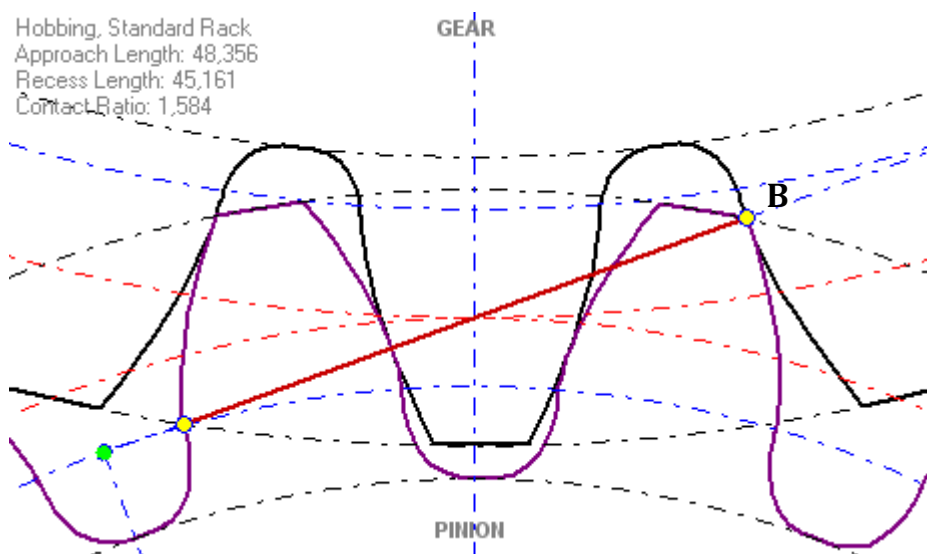
Σχήμα 2.20: (α) Συνεργαζόμενες κατατομές τροχών βαθμίδας
(β) Θέσεις αλλαγής του φορτίου οδόντος

Επομένως, η μεγαλύτερη καμπτική τάση εμφανίζεται όταν η φόρτιση ασκείται σε ένα ειδικό σημείο και όχι στην κεφαλή του δοντιού. Το σημείο αυτό ονομάζεται σημείο μέγιστης φόρτισης κατά τη συνεργασία οδόντων (Highest Point of Single Tooth

Contact – HPSTC). Η θέση του σημείου αυτού καθορίζεται από τη βασική γεωμετρία των οδοντώσεων όπως φαίνεται στο Σχ. 2.23 της επόμενης σελίδας. Η επαφή αρχικά ξεκινά στο σημείο A, Σχ. 2.21, όπου ο πόδας του πινιόν, έρχεται σε επαφή με την κεφαλή του συνεργαζομένου τροχού και τελειώνει στο σημείο B, Σχ. 2.22, όπου και είναι το τελευταίο σημείο της συνεργασίας τους, όπως αναλυτικά δείχνεται στα παρακάτω σχήματα.

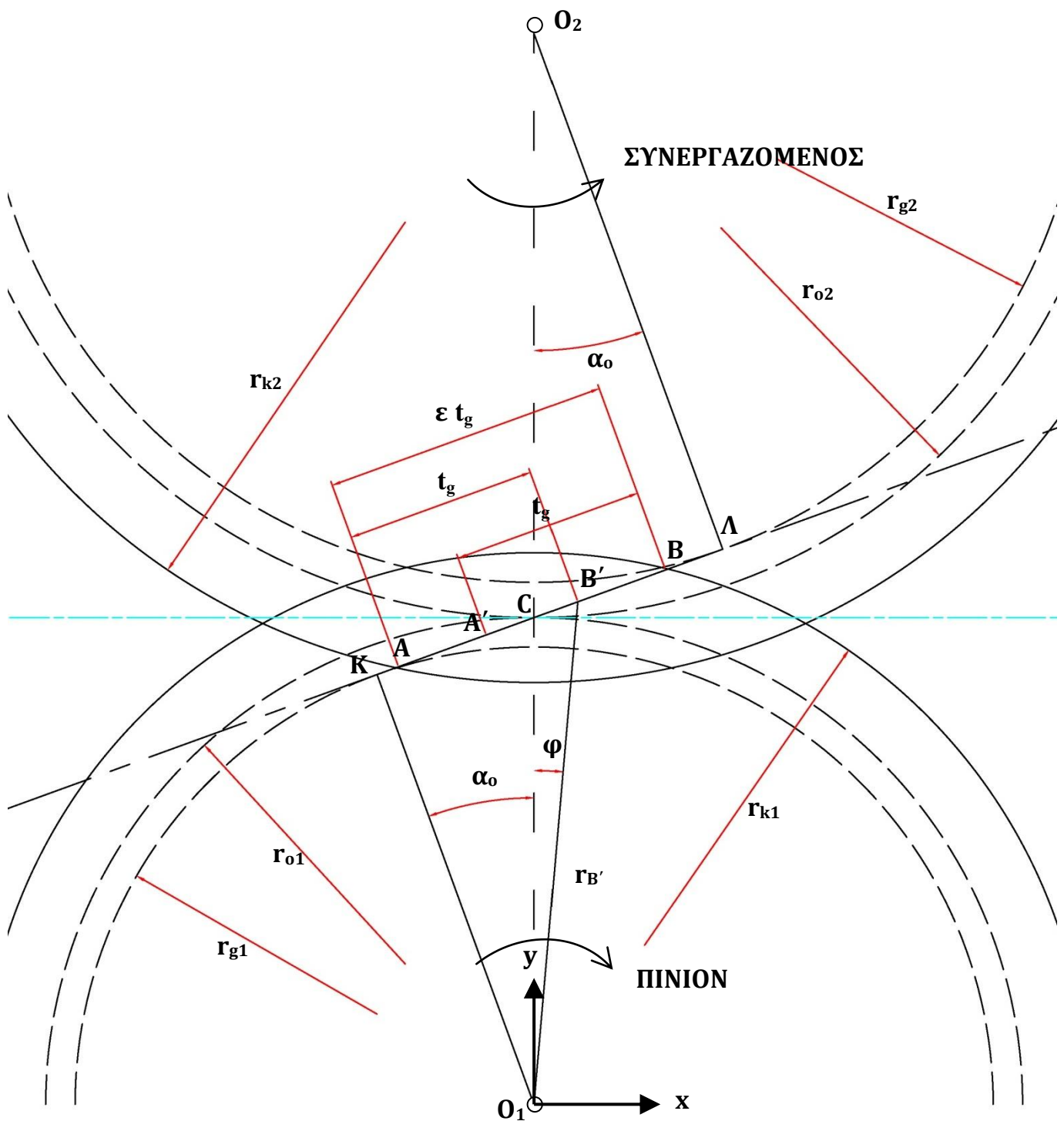


Σχήμα 2.21: Αρχή συνεργασίας οδόντων – Σημείο A



Σχήμα 2.22: Τέλος συνεργασίας οδόντων – Σημείο B

Στην συνέχεια, με την βοήθεια του παρακάτω Σχ. 2.23 θα προσδιορίσουμε γεωμετρικά τις συντεταγμένες του σημείου HPSTC:



Σχήμα 2.23: Γεωμετρικός προσδιορισμός του HPSTC

Η απόσταση AB έχει υπολογιστεί στην προηγούμενη ενότητα (2.81) και ισούται με:

$$AB = \varepsilon t_g = AC + CB$$

και αντικαθιστώντας τις (2.87) και (2.88) έχουμε:

$$AB = \sqrt{(r_{o2} + m)^2 - r_{o2}^2 \cos^2 \alpha_o} + \sqrt{(r_{o1} + m)^2 - r_{o1}^2 \cos^2 \alpha_o} - (r_{o1} + r_{o2}) \sin \alpha_o \quad (2.96)$$

Το σημείο B' είναι το HPSTC. Στα διαστήματα AA' και B'B, δύο ζεύγη οδόντων μεταφέρουν την φόρτιση, ενώ στο διάστημα A'B' μόνον ένα ζεύγος οδόντων την μεταφέρει. Τα μήκη AB' και A'B είναι ίσα με το βήμα της οδοντώσεως στον βασικό κύκλο t_g . Έτσι, η θέση του HSPTC προσδιορίζεται από το Σχ. 2.23 ως εξής:

$$AC = \sqrt{(r_{o2} + m)^2 - r_{o2}^2 \cos^2 \alpha_o} - r_{o2} \sin \alpha_o \quad (2.97)$$

$$CB' = AB' - AC = t_g - AC = \pi m \cos \alpha_o - AC \quad (2.98)$$

και χρησιμοποιώντας το τρίγωνο O₁B'C, η ακτίνα $r_{B'}$ μπορεί να προσδιοριστεί από τη σχέση:

$$r_{B'} = \sqrt{r_{o1}^2 + CB'^2 - 2 r_{o1} CB' \cos(\alpha_o + 90^\circ)} \quad (2.99)$$

Οι συντεταγμένες x και y του σημείου H είναι: $(x, y) = (r_{B'} \sin \varphi, r_{B'} \cos \varphi)$.

2.9 Υπολογισμός της Θέσης Εμφάνισης της Επικίνδυνης Διατομής Ποδός

Η πρώτη συστηματική προσπάθεια υπολογισμού της θέσης εμφάνισης της επικίνδυνης διατομής ανήκει στον W. Lewis, ο οποίος θεώρησε ότι η εγγεγραμμένη ισοσκελής παραβολή που εφάπτεται εσωτερικά της κατατομής στον πόδα του οδόντος ορίζει την επικίνδυνη διατομή σε αυτό ακριβώς το σημείο επαφής της με την κατατομή προς την πλευρά του εφελκυσμού (Lewis [15]). Αργότερα παρατηρήθηκε ότι η επικίνδυνη διατομή πλέον τοποθετείται χαμηλότερα απ' ότι προβλέπει η μέθοδος της εγγεγραμμένης παραβολής, παρατήρηση η οποία συμφωνεί και με τα αποτελέσματα πειραμάτων φωτοελαστικότητας. Τέλος, μία άλλη μέθοδος είναι αυτή της εφαπτομένης των 30° που υποστηρίζει ότι η επικίνδυνη διατομή δεν εξαρτάται από την θέση του φορτίου, αλλά εμφανίζεται σε σταθερή θέση στον πόδα του οδόντος.

2.9.1 Η Μέθοδος της Εγγεγραμμένης Παραβολής του Lewis

Η επικίνδυνη διατομή κατά Lewis βρίσκεται στο σημείο που η εγγεγραμμένη στον οδόντα παραβολή με κορυφή το σημείο C, στο οποίο η διεύθυνση του φορτίου τέμνει τον άξονα συμμετρίας του οδόντος εφάπτεται εσωτερικά στην κατατομή στο σημείο F όπως στο Σχ. 2.24 (Buckingham [4] , Dudley [10] [11] , Townsend [19] , Lewis [15] , Niemann [18]). Θεωρώντας ότι η κατατομή έχει εξίσωση $y = f(x)$ και η εγγεγραμμένη παραβολή εξίσωση $y = p \cdot x^2 + y_C$, αφού εκ κατασκευής αυτή είναι συμμετρική περί τον άξονα συμμετρίας του οδόντος, τότε για τον αναλυτικό υπολογισμό της επικίνδυνης διατομής ακολουθείται η παρακάτω μεθοδολογία:

- Αφού το F ανήκει στην κατατομή τότε θα επαληθεύει την εξίσωσή της:

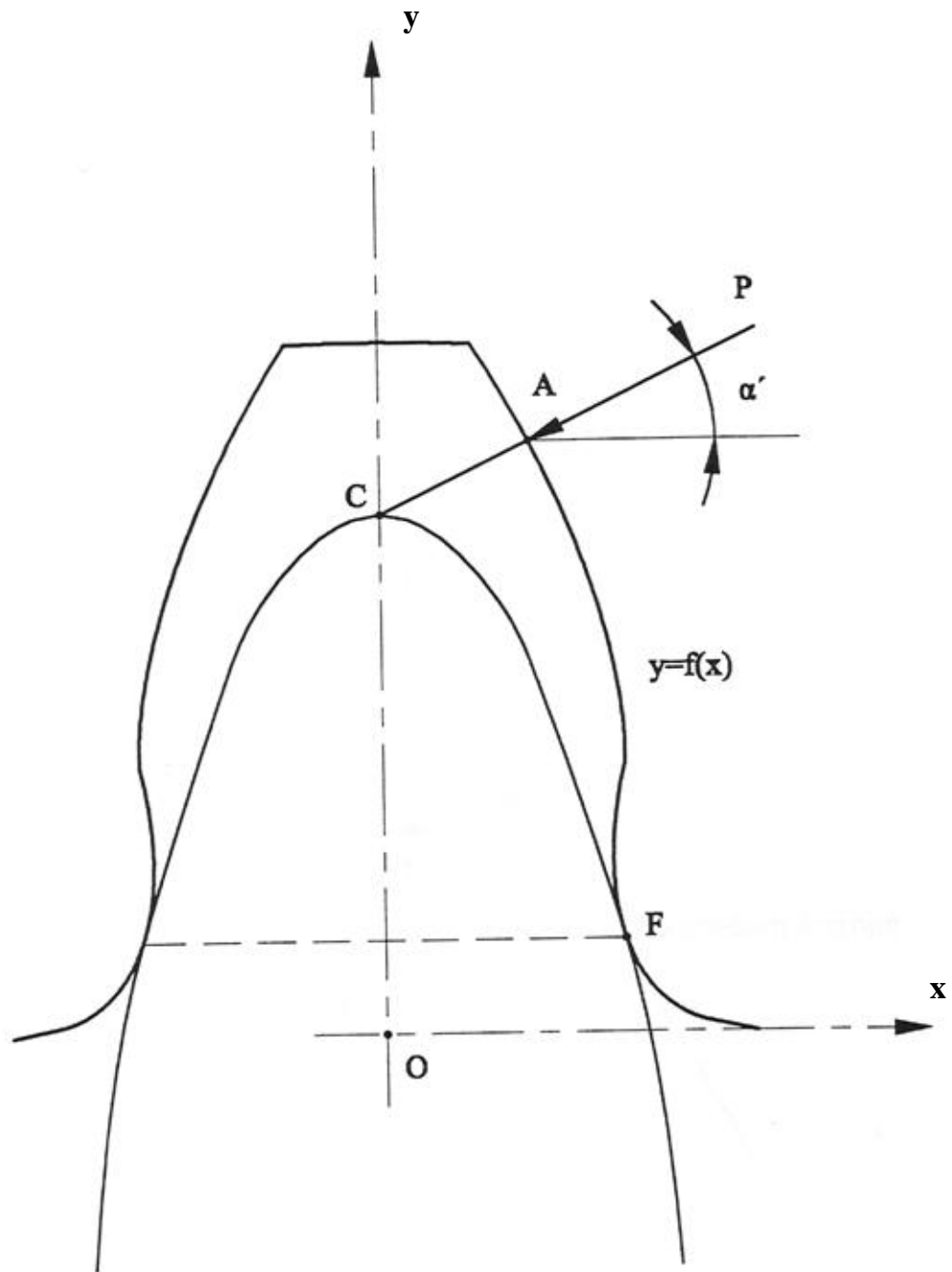
$$y_F = f(x_F) \quad (2.100)$$

- Αφού το F ανήκει στην εγγεγραμμένη παραβολή τότε θα επαληθεύει την εξίσωσή της:

$$y_F = p x_F^2 + y_C \quad (2.101)$$

- Αφού η παραβολή εφάπτεται της κατατομής στο F, θα πρέπει οι δύο αυτές καμπύλες στο σημείο αυτό να έχουν κοινή παράγωγο, δηλαδή να ισχύει:

$$2p x_F = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_F} \quad (2.102)$$



Εγγεγραμμένη παραβολή

Σχήμα 2.24: Η μέθοδος της εγγεγραμμένης παραβολής

- Στη συνέχεια ακολουθούμε τα επόμενα βήματα:

α) Θεωρούμε σημείο επί της κατατομής

$$[x_i, f(x_i)] \in f(x)$$

β) Υπολογίζουμε την παράγωγο στο σημείο αυτό

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_i}$$

γ) Θέτουμε από την επίλυση της (2.102) για την τιμή του p

$$p = \frac{\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_i}}{2 x_i} \quad (2.103)$$

δ) Υπολογίζουμε το αντίστοιχο y_i από την (2.101)

$$y_i = \frac{\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_i} \cdot x_i}{2} + y_c \quad (2.104)$$

ε) Υπολογίζουμε τη διαφορά

$$\Delta_i = f(x_i) - y_i = f(x_i) - \frac{\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_i} \cdot x_i}{2} - y_c \quad (2.105)$$

στ) Το σημείο $[x_i, f(x_i)]$, για το οποίο θα ισχύει:

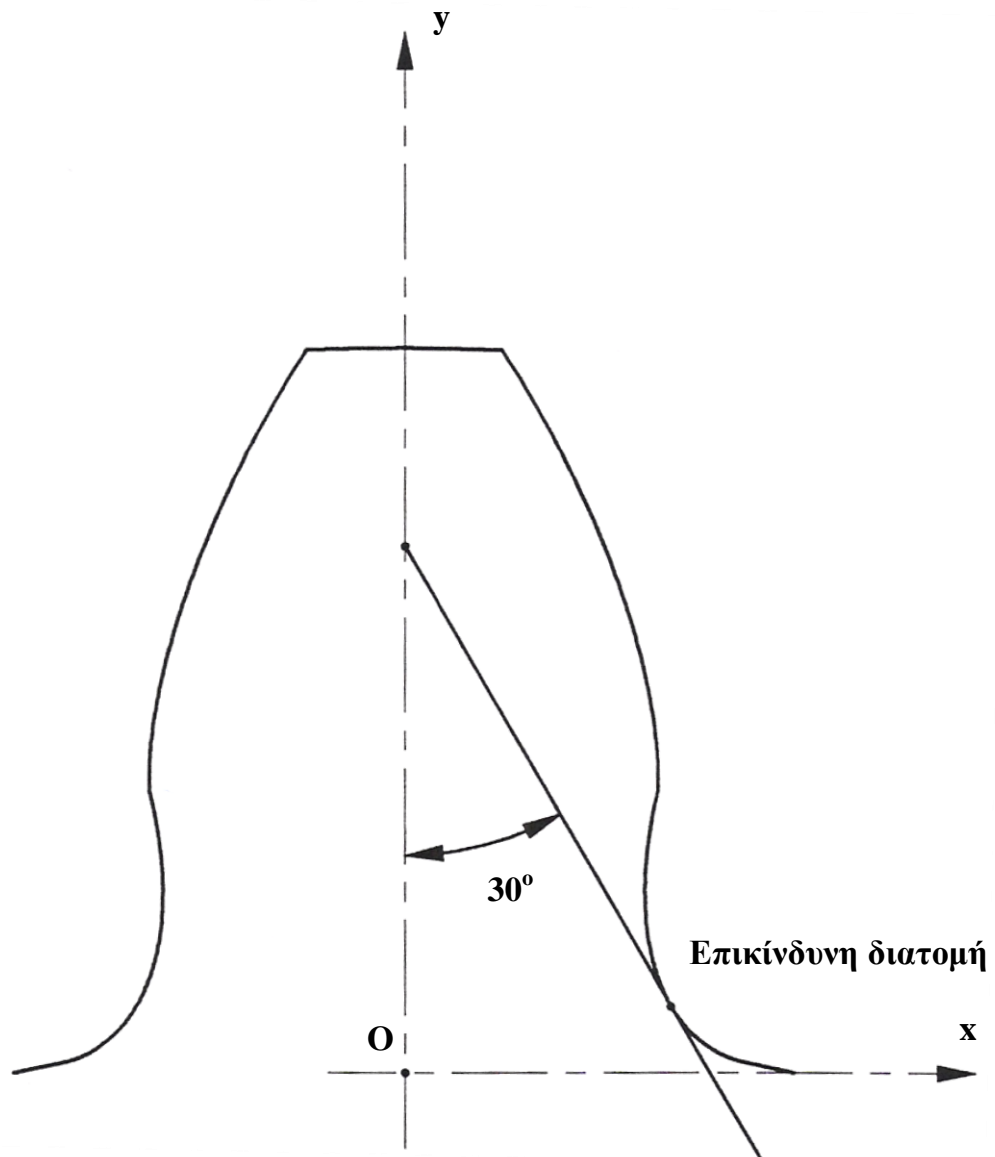
$$|\Delta_i| = \min$$

θα αποτελεί τη θέση της επικίνδυνης διατομής, σύμφωνα με τη θεωρία της εγγεγραμμένης παραβολής.

Αργότερα, οι Kelley και Pedersen πρότειναν τη μετατόπιση του σημείου F χαμηλότερα προς τον πόδα του οδόντος όπως θα δούμε σε παρακάτω ενότητα (βλ. 2.10.3).

2.9.2 Η Μέθοδος της Εφαπτομένης των 30°

Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, η επικίνδυνη διατομή δεν εξαρτάται από τη θέση του φορτίου, σε αντίθεση με τη μέθοδο της εγγεγραμμένης παραβολής, αλλά εμφανίζεται σε σταθερή θέση στον πόδα του οδόντος και ειδικότερα στο σημείο στο οποίο η ευθεία που σχηματίζει γωνία 30° με τον άξονα συμμετρίας του οδόντος εφάπτεται στην κατατομή, όπως φαίνεται στο Σχ. 2.25 (Niemann [18]).



Σχήμα 2.25: Η θεωρία της εφαπτομένης των 30° μοιρών

Η μέθοδος αυτή, αν και χρησιμοποιείται ακόμα από τους κανονισμούς DIN 3990 και ISO 6336, είναι προσεγγιστική και ισχύει μόνο για οδοντωτούς τροχούς που δεν έχουν υποστεί μεγάλες μετατοπίσεις (DIN [8] , ISO [14]).

2.10 Υπολογισμός της Μεγίστης Τάσης στην Επικίνδυνη Διατομή Ποδός

Για τον προσδιορισμό του μεγέθους της πραγματικής τάσης λόγω του φαινομένου της συγκέντρωσης τάσεων στον πόδα του οδόντος, προτείνονται από τη βιβλιογραφία μέθοδοι, όπως η μέθοδος κατά το πρότυπο AGMA, η μέθοδος κατά το πρότυπο DIN 3990, η ημιεμπειρική μέθοδος του Heywood και ο εμπειρικός τύπος των Dolan – Broghamer, ο οποίος προκύπτει από πειράματα φωτοελαστικότητας (AGMA [3] , DIN [8] , Heywood [13] , Dolan & Broghamer [9]).

2.10.1 Η Μέθοδος κατά το πρότυπο AGMA

Με τη μέθοδο κατά το πρότυπο AGMA, η καμπτική τάση που αναπτύσσεται στη βάση του οδόντος είναι:

$$\sigma_{\max} = \frac{P_t}{b m} \frac{K_a K_s K_m}{K_v J} \quad (2.106)$$

όπου:

- $\sigma_{\max} \rightarrow$ η καμπτική τάση στη βάση του οδόντος (MPa)
- $P_t \rightarrow$ εφαπτομενικό φορτίο στον αρχικό κύκλο (N) το οποίο υπολογίζεται από τον τύπο: $P_t = P \cos \alpha_o$
- $m \rightarrow$ module (mm)
- $b \rightarrow$ πλάτος οδόντων (mm)
- $K_a \rightarrow$ συντελεστής εφαρμογής που υπολογίζεται από τον παρακάτω Πίν. (2.2)

Κινητήρας	Φορτίο Εργομηχανής		
	Χωρίς Κρούσεις	Μέτριες Κρούσεις	Ισχυρές Κρούσεις
Χωρίς κρούσεις	1,00	1,25	≥ 1,75
Ελαφρές κρούσεις	1,25	1,50	≥ 2,00
Μέτριες κρούσεις	1,50	1,75	≥ 2,25
Οι ανωτέρω αριθμοί ισχύουν για μειωτήρες στροφών, $n_1 > n_2$ Σε αυξηντήρες στροφών, $n_2 > n_1$, θα πρέπει να προστίθεται στους ανωτέρω αριθμούς ποσό ίσο με $0,01 \cdot (n_2 / n_1)^2$			

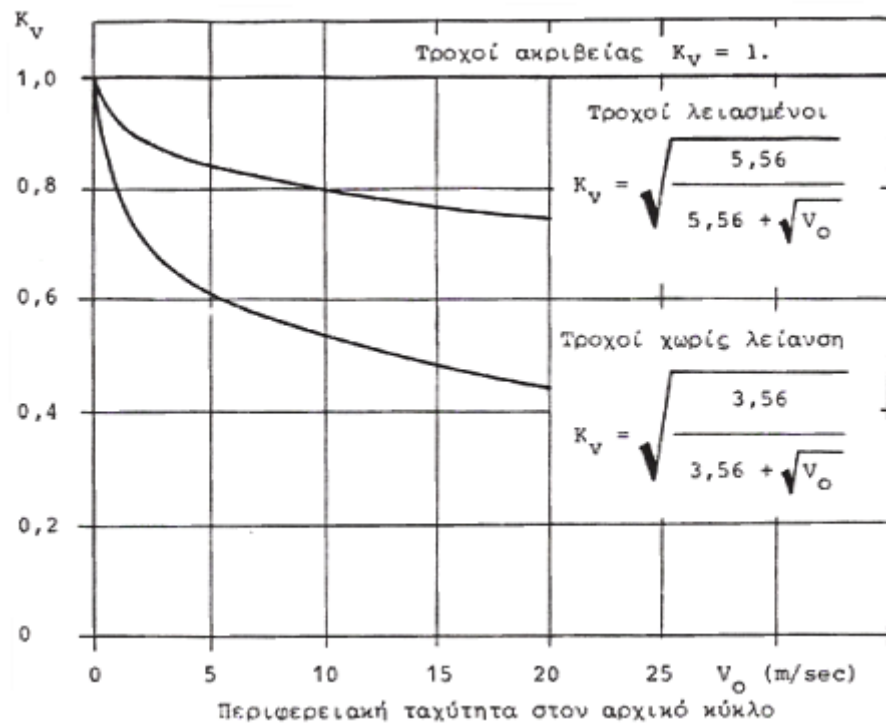
Πίνακας 2.2: Συντελεστής εφαρμογής K_a

- $K_s \rightarrow$ συντελεστής μεγέθους (για τροχούς με ευθείς οδόντες λαμβάνεται συνήθως ίσος με 1.0)
- $K_m \rightarrow$ συντελεστής κατανομής φορτίου που υπολογίζεται από τον παρακάτω Πιν. (2.3)

Είδος στήριξης	Πλάτος τροχού F (mm)			
	$F < 50$	$50 < F < 150$	$150 < F < 225$	$400 < F$
Ακριβής στήριξη, μικρές ανοχές εδράνων, ελαχίστη ελαστική παραμόρφωση, οδοντωτοί τροχοί ακριβείας	1,3	1,4	1,5	1,8
Σχετικά εύκαμπτη στήριξη, τροχοί μικροτέρας ακριβείας, πλήρης επαφή οδόντων σε ολόκληρο το F	1,6	1,7	1,8	2,0
Τροχοί όχι καλής ακριβείας και στήριξη τέτοια ώστε δεν εξασφαλίζεται πλήρης επαφή οδόντων	> 2,0	> 2,0	> 2,0	> 2,0

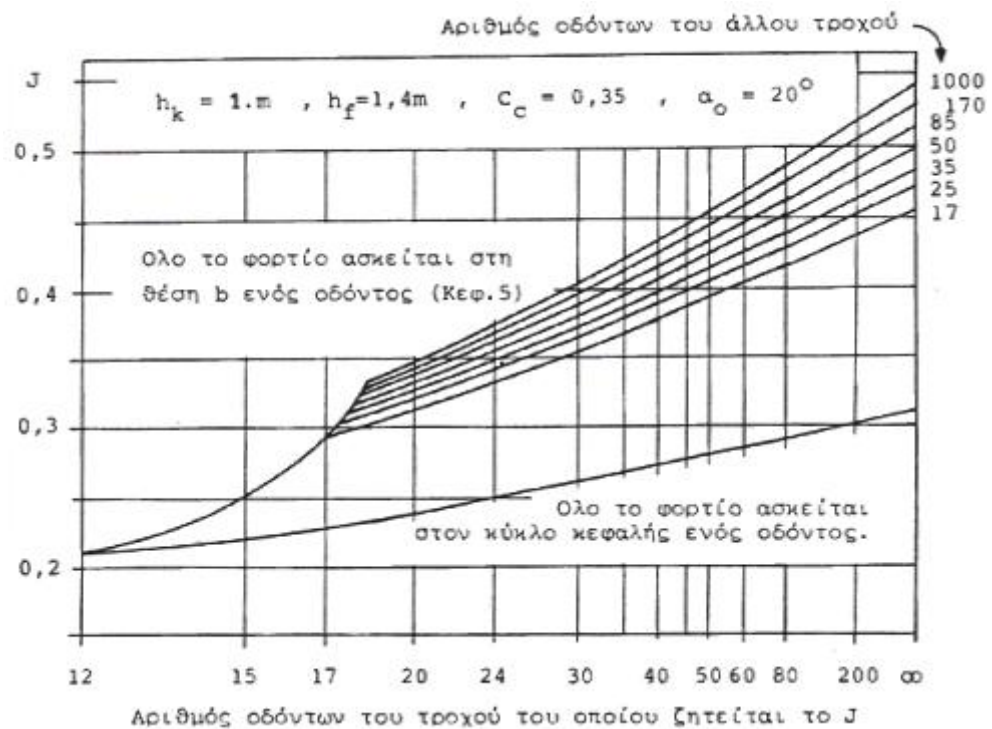
Πίνακας 2.3: Συντελεστής κατανομής φορτίου K_m

- $K_v \rightarrow$ δυναμικός συντελεστής που υπολογίζεται από το παρακάτω Σχ. (2.26)



Σχήμα 2.26: Δυναμικός συντελεστής K_v

- $J \rightarrow$ γεωμετρικός συντελεστής που υπολογίζεται από το παρακάτω Σχ. (2.27)



Σχήμα 2.27: Γεωμετρικός συντελεστής J

2.10.2 Η Μέθοδος κατά το πρότυπο DIN 3990

Με τη μέθοδο κατά το πρότυπο DIN 3990, ο υπολογισμός των καμπτικών τάσεων στον πόδα του οδόντος στηρίζεται στην θεωρία της εφαπτομένης των 30° (βλ. 2.9.2) που έχουμε προαναφέρει, πράγμα που αποτελεί το αδύνατο σημείο της μεθόδου μιας και η θεωρία αυτή είναι προσεγγιστική και δεν ενδείκνυται για οδοντώσεις με μεγάλες μετατοπίσεις.

Στο Σχ. 2.28 της επομένης σελίδας φαίνεται η γεωμετρία των οδόντων. Η μέγιστη τάση που αναπτύσσεται στην επικίνδυνη διατομή δίδεται από την σχέση:

$$\sigma_{\max} = \frac{P_t}{b \cdot m} \cdot Y_F \cdot Y_\varepsilon \quad (2.107)$$

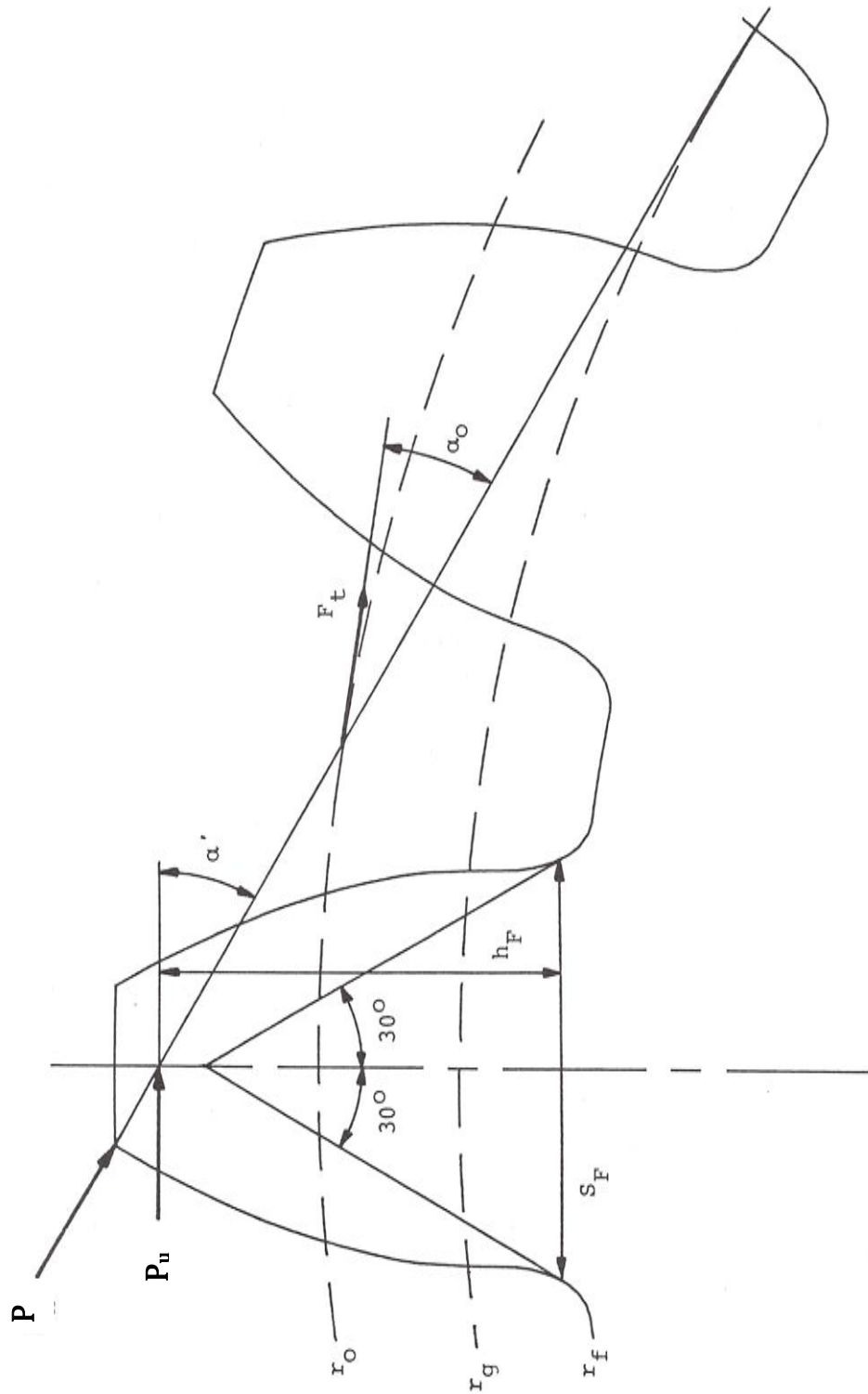
όπου:

- $\sigma_{\max} \rightarrow$ η καμπτική τάση στη βάση του οδόντος (MPa)
- $P_t \rightarrow$ εφαπτομενικό φορτίο στον αρχικό κύκλο (N) το οποίο υπολογίζεται από τον τύπο: $P_t = P \cdot \cos\alpha_o$
- $m \rightarrow$ module (mm)
- $b \rightarrow$ πλάτος οδόντων (mm)
- $\varepsilon \rightarrow$ ο βαθμός επικάλυψης της βαθμίδας
- $Y_F \rightarrow$ γεωμετρικός συντελεστής που υπολογίζεται από τον παρακάτω τύπο:

$$Y_F = \frac{6 \cdot m \cdot h_F \cdot \cos\alpha'}{S_F^2 \cdot \cos\alpha_o} \quad (2.108)$$

Με αντικατάσταση της παραπάνω (2.108) στην αρχική (2.107) σε συνδυασμό με τον τύπο υπολογισμού της εφαπτομενικής δύναμης στον τροχό στο σημείο κυλίσεως C της μετωπικής τομής: $P_u = P \cdot \cos\alpha'$ προκύπτει η τελική σχέση:

$$\sigma_{\max} = \frac{6 \cdot P_u \cdot h_F \cdot Y_\varepsilon}{b \cdot S_F^2} \quad (2.109)$$



Σχήμα 2.28: Γεωμετρία οδόντων και επικίνδυνη διατομή κατά DIN 3990

2.10.3 Η Ημιεμπειρική Μέθοδος του Heywood

Η μέθοδος του Heywood χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό της μέγιστης πραγματικής τάσης στην επικίνδυνη διατομή ποδός μιας δοκού χαμηλού ύψους και σταθερού πλάτους. Ο τύπος του Heywood τροποποιήθηκε στη συνέχεια από τους Kelley και Pedersen όσων αφορά στη θέση εμφάνισης της επικίνδυνης διατομής, η οποία πλέον τοποθετείται χαμηλότερα απ' ότι προβλέπει η μέθοδος της εγγεγραμμένης παραβολής, παρατήρηση η οποία συμφωνεί και με τα αποτελέσματα πειραμάτων φωτοελαστικότητας. Η μέγιστη πραγματική τάση που αναπτύσσεται στον πόδα οδόντος προσδιορίζεται κατά Heywood ως εξής:

Θεωρούμε τον οδόντα του Σχ. 2.29. Κατ' αρχήν προσδιορίζεται η θέση F της άσκησης της μέγιστης ονομαστικής τάσης στον πόδα του οδόντος με τη μέθοδο της εγγεγραμμένης παραβολής (βλ. 2.9.1) και στη συνέχεια άγεται η εφαπτομένη επί της κατατομής στο σημείο αυτό, η οποία σχηματίζει γωνία β με την διεύθυνση άσκησης του φορτίου. Έστω e η απόσταση της επικίνδυνης διατομής από τον άξονα συμμετρίας του οδόντος και α η απόσταση του σημείου C από την επικίνδυνη διατομή. Τότε η μέγιστη εφελκυστική τάση που αναπτύσσεται λόγω κάμψης στο F δίνεται από τη σχέση:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{b} \cdot \left[1 + 0.26 \cdot \left(\frac{S_F}{2\rho} \right)^{0.7} \right] \cdot \left(\frac{3h_F}{2S_F^2} + \frac{\cos\beta}{2S_F} + \frac{0.45}{\sqrt{(AF) \cdot S_F/2}} \right) \quad (2.110)$$

όπου:

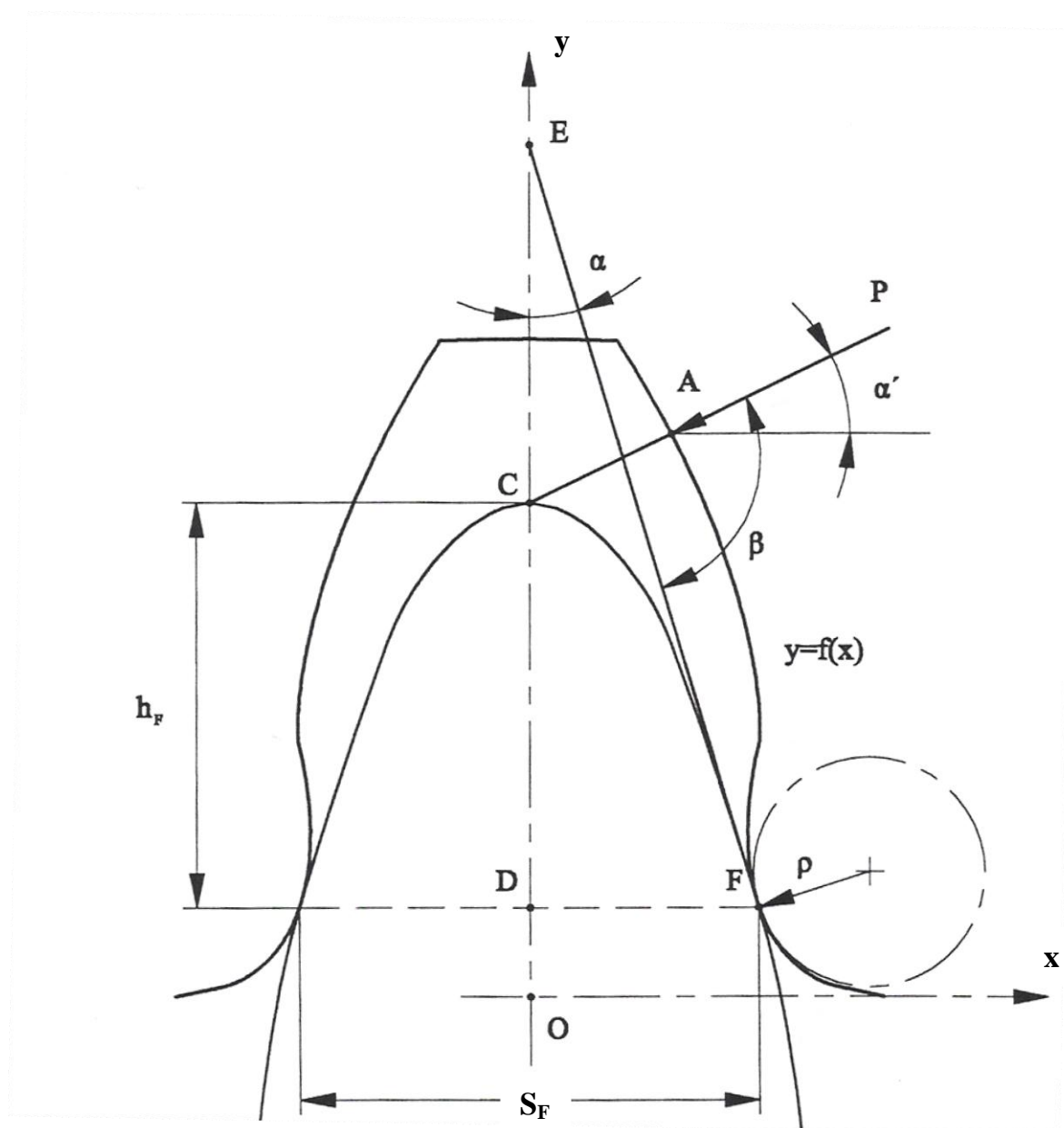
- $\rho \rightarrow$ η ακτίνα καμπυλότητας της διατομής ποδός στο F (mm)
- $\alpha' \rightarrow$ η γωνία άσκησης του φορτίου ($^\circ$)
- $\beta \rightarrow$ η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ της διεύθυνσης άσκησης του φορτίου της εφαπτομένης επί της κατατομής ($^\circ$) και υπολογίζεται από τον παρακάτω τύπο:

$$\beta = -\tan^{-1} \left(\frac{dy}{dx} \right)_F + \alpha'$$

Στην (2.110) ο όρος που βρίσκεται στην πρώτη παρένθεση εκφράζει το συντελεστή συγκέντρωσης τάσης, ενώ στη δεύτερη παρένθεση ο πρώτος όρος εκφράζει την ονομαστική τιμή της τάσης κάμψης, ο δεύτερος την επίδραση της θλιπτικής συνιστώσας του φορτίου και ο τρίτος την επίδραση των εγγεγραμμένων διατμητικών

τάσεων, αφού, όπως είναι γνωστό, ο όρος πάχος οδόντος προς πλάτος οδόντος έχει στις οδοντώσεις μικρή τιμή.

Όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενη ενότητα (βλ. 2.9.1), οι Kelley και Petersen πρότειναν τη μετατόπιση του σημείου F χαμηλότερα προς τον πόδα του οδόντος, έτσι ώστε η γωνία α , Σχ. 2.29, να μεταβληθεί και να λάβει την τιμή $25^\circ - \alpha/2$, ενώ ο ίδιος ο Heywood πρότεινε ως διόρθωση για τη θέση εμφάνισης της επικίνδυνης διατομής τη διακύμανση της ίδιας γωνίας από 30° έως 12° , καθώς αυξάνεται ο λόγος $(AF)/S_F$, ισχυριζόμενος ότι έτσι λαμβάνεται περισσότερο υπόψη και η επίδραση των διατμητικών τάσεων.



Σχήμα 2.29: Η μέθοδος του Heywood

2.10.4 Ο Εμπειρικός Τύπος των Dolan - Broghamer

Οι Dolan και Broghamer από το 1942 είχαν υπολογίσει, με βάση αποτελέσματα από πειράματα φωτοελαστικότητας, μία εμπειρική εξίσωση προσδιορισμού του συντελεστή συγκέντρωσης τάσης στον πόδα οδόντων τροχών ευθείας οδόντωσης εξειλιγμένης, συναρτήσει της γωνίας εξειλιγμένης στον αρχικό κύκλο, του πάχους του οδόντα στη θέση της επικίνδυνης διατομής, του ύψους της άσκησης δύναμης που επενεργεί στην κατατομή του οδόντος από την επικίνδυνη διατομή και της ελάχιστης ακτίνας καμπυλότητας του τροχοειδούς. Η εξίσωση αυτή είναι:

$$K_F = H + \left(\frac{S_F}{\rho_{\min}} \right)^L \cdot \left(\frac{S_F}{h_F} \right)^M \quad (2.111)$$

όπου:

- $H = 0.331 - 0.436 \cdot \alpha_0$
- $L = 0.324 - 0.492 \cdot \alpha_0$
- $M = 0.261 - 0.545 \cdot \alpha_0$

και:

- $S_F \rightarrow$ το πάχος του οδόντος στην επικίνδυνη διατομή (mm)
- $\rho_{\min} \rightarrow$ η ελάχιστη ακτίνα καμπυλότητας του τροχοειδούς (mm)
- $h_F \rightarrow$ το ύψος της άσκησης δύναμης στο σημείο κυλίσεως C έως την επικίνδυνη διατομή (mm)

ενώ η θέση εμφάνισης της επικίνδυνης διατομής προσδιορίζεται με τη μέθοδο της εγγεγραμμένης παραβολής.

Η μέγιστη πραγματική εφελκυστική τάση προσδιορίζεται επομένως από την εξίσωση:

$$\sigma_{\max} = K_F \cdot \sigma_0 \quad (2.112)$$

όπου η ονομαστική τάση σ_0 προσδιορίζεται ως εξής:

Θεωρούμε την κατατομή ενός οδόντος, με εξίσωση $y = f(x)$ που εικονίζεται στο Σχ. 2.29. Η κατατομή αυτή είναι συμμετρική ως προς τον κατακόρυφο άξονα και

φορτίζεται με φορτίο σε κάποιο σημείο A (x_A , y_A) υπό γωνία α' ως προς το οριζόντιο επίπεδο. Έτσι, σε κάποιο τυχαίο σημείο (x , y) το οποίο βρίσκεται πάνω στην κατατομή θα αναπτύσσονται, σύμφωνα με την τεχνική θεωρία της κάμψης, οι ακόλουθες ορθές τάσεις:

- Θλίψη λόγω της κατακόρυφης συνιστώσας του φορτίου:

$$\sigma_c = \frac{\sin \alpha'}{2x} \quad (2.113)$$

όπου: $\alpha' = \cos^{-1}(r_g / r_A) - \sin^{-1}(x_A / r_A) \rightarrow$ η γωνία άσκησης του φορτίου (ϕ)

- Κάμψη λόγω της κατακόρυφης συνιστώσας του φορτίου:

$$\sigma_{b1} = -\frac{3x_A \sin \alpha'}{2x^2} \quad (2.114)$$

- Κάμψη λόγω της οριζόντιας συνιστώσας του φορτίου:

$$\sigma_{b2} = -\frac{3(y_A - y) \cos \alpha'}{2x^2} \quad (2.115)$$

οπότε αθροίζοντας γεωμετρικά τις παραπάνω ορθές τάσεις, προκύπτει η συνισταμένη ορθή τάση:

$$\sigma_o = \frac{\sin \alpha'}{2x} - \frac{3}{2x^2} \cdot [x_A \sin \alpha' - (y_A - y) \cos \alpha'] \quad (2.116)$$

Τελικά, με αντικατάσταση των (2.111) και (2.116) στην (2.112) έχουμε για την μέγιστη πραγματική εφελκυστική τάση σύμφωνα με τους Dolan και Broghamer:

$$\sigma_{\max} = \left[H + \left(\frac{S_F}{\rho_{\min}} \right)^L \cdot \left(\frac{S_F}{h_F} \right)^M \right] \cdot \left\{ \frac{\sin \alpha'}{2x} - \frac{3}{2x^2} \cdot [x_A \sin \alpha' - (y_A - y) \cos \alpha'] \right\} \quad (2.117)$$

2.11 Παρατηρήσεις

- Οι παραπάνω μέθοδοι υπολογισμού της μέγιστης τάσης στον πόδα των οδόντων δεν θα εφαρμοστούν στη συνέχεια της εργασίας λόγω του ότι ο υπολογισμός των απαραίτητων γεωμετρικών μεγεθών που χρειάζονται είναι μια χρονοβόρα διαδικασία με ανάγκη περισσότερων γνώσεων όσων αφορά τη θέση της επικίνδυνης διατομής και τη γεωμετρία της. Θα αρκεστούμε στον υπολογισμό των μεγίστων τάσεων με τη μέθοδο της φωτοελαστικότητας και τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων που είναι δύο μέθοδοι που χρησιμοποιούνται με μεγάλη επιτυχία σήμερα και με αρκετά ακριβή αποτελέσματα όσων αφορά τις μέγιστες τάσεις που εμφανίζονται στις επικίνδυνες διατομές των οδόντων.
- Επίσης, όσων αφορά το είδος των τροχών στους οποίους θα εφαρμόσουμε φορτίσεις με τις δύο προαναφερθείσες μεθόδους και θα υπολογίσουμε τις μέγιστες τάσεις στον πόδα των οδόντων τους, επισημαίνουμε ότι είναι εξωτερικοί, κανονικοί τροχοί, ευθείας οδοντώσεως με γωνία εξελιγμένης 20°, αριθμό module ίσο με 20 mm αριθμού οδόντων: 15, 18, 22, 28 και 50.

2.12 Βιβλιογραφία

1. Κωστόπουλος Θ. Ν., *Οδοντώσεις και Μειωτήρες Στροφών*, Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα, 1991.
2. Σπιτάς Β. Α., *Μοντελοποίηση και Σχεδιασμός Βέλτιστων Οδοντώσεων με Χρήση Αναλυτικών, Αριθμητικών και Πειραματικών Μεθόδων*, Διδακτορική Διατριβή (επιβλέπων καθ. Θ. Ν. Κωστόπουλος), Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2001.
3. AGMA 2101-C95, "Fundamental rating factors and calculation methods for involute spur and helical gear. (Metric Version)", *American Gear Manufacturers Association*, 1995.

4. Buckingham E., *Analytical Mechanics of Gears*, Dover Publications Inc., New York, 1988.
5. Colbourne J. R., *The Geometry of Involute Gears*, Springer - Verlag, New York, 1987.
6. Costopoulos T. N., generalized Theory of Gearing and Tooth Stress", *Proceedings of Ninth World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*, Vol. 1, p. 369, Milan, Italy, 1995.
7. Costopoulos Th. and Spitas V. A., "Analytical Mechanics of Spur Gears", *Proceedings of the 4th National Congress of Mechanics*, Vol. 1, pp. 187-194, Xanthi, Greece 1994.
8. DIN 3990 – "Calculation of load capacity of cylindrical gears", *Deutsches Institut für Normung E.V.*, 1987.
9. Dolan T. J. and Broghamer E. L., "A Photo-elastic Study of Stress in Gear Tooth Fillets", Univ. Ill. Eng. Exp. Sta. Bull. 335, 1942.
10. Dudley D. W., *Gear Handbook, The Design, Manufacture, and Application of Gears*, Mc-Graw Hill , New York, 1962.
11. Dudley D. W., *Handbook of Practical Gear Design*, Mc-Graw Hill , New York, 1984.
12. Henriot G., *Traite Theorique et Pratique des Engrenages*, Borda, Paris, 1979.
13. Heywood R. B., *Designing against Fatigue of Metals*, Reinhold Publishing Coproration, 1962.
14. ISO 6336:3-1996, "Calculation of the load capacity of spur and helical gears-Part 3: Calculation of tooth bending strength", 1996.
15. Lewis W., "Investigation of Strenght of Gear Teeth", *Proceedings of the Engineering Club No. 1*, Philadelphia, 1882.
16. Litvin F. L., "Theory of Gearing", NASA Reference Publication 1212, *AVSCOM Technical Report*, 88-C-035, 1989.
17. Litvin F. L., *Theory of Gearing*, 2nd ed., Nauka, Moscow, 1968.

18. Niemann G., *Maschinelemente*, Band 2, Springer - Verlag, New York, 1965.
19. Townsend D. P., *Dudley's Gear Handbook*, Mc-Graw Hill , New York, 1992.
20. Wilhaber E., "Conjugate Pitch Surfaces", *American Machinist*, Vol. 90, No 13, 1946b, pp. 150-152.
21. Wilhaber E., "Tooth Contact", *American Machinist*, Vol. 90, No 12, 1946c, pp. 110-114.

Περιεχόμενα:

- 3.1 Γενικά
- 3.2 Βασικές Έννοιες της Θεωρίας του Φωτός
- 3.3 Αρμονική ή Ημιτονοειδής Ταλάντωση
- 3.4 Πόλωση του Φωτός
 - 3.4.1 Διπλοδιάθλαση
 - 3.4.2 Πολωτές
- 3.5 Φωτοτασεοπτικός Νόμος
- 3.6 Πολωσισκόπιο
 - 3.6.1 Επίπεδο πολωσισκόπιο
 - 3.6.2 Κυκλικό πολωσισκόπιο
- 3.7 Τροχιές Κυρίων Τάσεων
- 3.8 Υπολογισμός της Μεγίστης Τάσης στον Πόδα Δοκιμίου
- 3.9 Πειραματικός Υπολογισμός της Φωτοτασεοπτικής Σταθεράς
- 3.10 Η Διάταξη Φόρτισης Δοκιμίων Οδόντων του Εργαστηρίου Στοιχείων Μηχανών του Ε.Μ.Π.
- 3.11 Προετοιμασία των Δοκιμίων
- 3.12 Πειραματικά Αποτελέσματα
 - 3.12.1 Πειραματικός Προσδιορισμός του Μέτρου Ελαστικότητας και της Τασεοπτικής Σταθεράς των Δοκιμίων
 - 3.12.2 Πειραματικός Προσδιορισμός της Μεγίστης Τάσης
- 3.13 Παρατηρήσεις
- 3.14 Βιβλιογραφία

3.1 Γενικά

Η φωτοελαστικότητα ως πειραματική μέθοδος μέτρησης του τασικού πεδίου και κατά συνέπεια της μέγιστης αναπτυσσόμενης τάσης σε οδοντώσεις έχει χρησιμοποιηθεί έως τώρα από αρκετούς ερευνητές (Dolan & Broghamer [5] , Hongbin, Guanghui & Masana [8] , Niemann [10] , Shu Xiao-Long [12]). Ιδιαίτερα γνωστός είναι ο εμπειρικός τύπος των Dolan και Broghamer (βλ. 2.10.4) για τον προσδιορισμό του συντελεστή συγκέντρωσης τάσης σε οδοντωτούς τροχούς εξειλιγμένης, ο οποίος βρίσκεται σε χρήση έως και σήμερα από το πρότυπο AGMA καθώς επίσης και η θεωρία της εφαπτομένης των 30° (βλ. 2.9.2) που αφορά στον προσδιορισμό της θέσης της επικίνδυνης διατομής και η οποία υιοθετείται από το γερμανικό πρότυπο DIN και το διεθνές πρότυπο ISO (Dolan & Broghamer [5] , AGMA [3] , DIN [4] , ISO [9]). Για την πειραματική διάταξη απαιτούνται ένα προσομοίωμα της προς μελέτη κατασκευής και δύο πολωτές για δημιουργία πολωμένου φωτός. Έτσι, ο συνδυασμός της εντατικής κατάστασης των σωμάτων και του πολωμένου φωτός συμβάλλει στην γέννηση της φωτοελαστικότητας.

Πολλές θεωρίες περί της φύσεως του φωτός διατυπώθηκαν από αρχαιότατους χρόνους μέχρι σήμερα. Η προσπάθεια των αρχαίων Ελλήνων φιλοσόφων να ερμηνεύσουν τα διάφορα οπτικά φαινόμενα με διάφορες υποθέσεις περί της φύσεως του φωτός, ακολουθείται από την θεωρία περί φωτός του Νεύτωνα, την "κυματική θεωρία" του φωτός του Huygens και την "ηλεκτρομαγνητική θεωρία του φωτός" του Maxwell. Νεώτερες θεωρίες περί φωτός είναι η θεωρία των "κβάντων" ή "φωτονίων" του Plank που συμπληρώνεται με την σχέση του De Broglie.

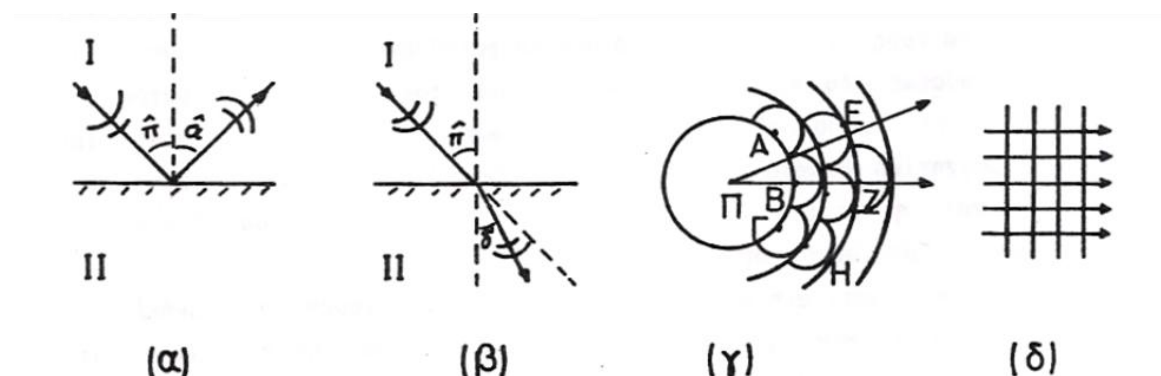
Στην φωτοελαστικότητα χρησιμοποιούνται τα φαινόμενα της ανάκλασης, διάθλασης και πόλωσης του φωτός που ερμηνεύονται με την κυματική ή την ηλεκτρομαγνητική θεωρία περί φωτός. Για την ανάπτυξη της θεωρίας της φωτοελαστικότητας λαμβάνεται υπ' όψη το "διάλυσμα του φωτός" που παριστάνει το μέγιστο πλάτος της ταλάντωσης του κύματος του φωτός ή του ηλεκτρικού ή του μαγνητικού πεδίου του ηλεκτρομαγνητικού κύματος.

Προκειμένου για τον υπολογισμό του τασικού πεδίου που αναπτύσσεται στο εσωτερικό ενός φορτισμένου στερεού σώματος, η μέθοδος της φωτοελαστικότητας συνήθως χρησιμοποιείται για την ποιοτική περιγραφή του, επειδή παρέχει πληροφορίες για τη διαφορά των κυρίων τάσεων σε κάθε σημείο και όχι για την τιμή της κάθε κύριας

τάσης ξεχωριστά, οπότε απαιτείται επεξεργασία των μετρήσεων με γραφική ολοκλήρωση ή με αριθμητική ανάλυση προκειμένου να εξαχθούν χρήσιμα συμπεράσματα. Αυτό γίνεται ιδιαίτερα εμφανές στην περίπτωση ενός συγκεντρωμένου φορτίου, οπότε στο σημείο της άσκησής του αναπτύσσεται πλήθος κροσσών συμβολής, οι οποίοι γίνονται δυσδιάκριτοι, με αποτέλεσμα να είναι πρακτικά αδύνατος ο υπολογισμός του συγκεντρωμένου αυτού φορτίου. Εκεί που η μέθοδος της φωτοελαστικότητας υπερέχει είναι στην περίπτωση του προσδιορισμού της μέγιστης τάσης λόγω κάμψης, η οποία αναπτύσσεται στο αφόρτιστο όριο του σώματος, όπως π.χ. συμβαίνει στις οδοντώσεις. Λόγω της απουσίας συνιστώσας του φορτίου κάθετης προς το όριο, θα υπάρχει μία μόνον τάση με διεύθυνση εφαπτόμενη προς το όριο, η οποία προφανώς θα είναι και κύρια τάση. Η τάση αυτή προσδιορίζεται με πολύ απλό και άμεσο τρόπο από τη γνώση του πεδίου των ισοχρώμων κροσσών, όπως περιγράφεται παρακάτω (Spitas [2]).

3.2 Βασικές Έννοιες της Θεωρίας του Φωτός

Κατά την σωματιδιακή θεωρία του φωτός, τα σωματίδια που εκπέμπονται από την φωτεινή πηγή κινούνται ευθύγραμμα εντός του μέσου έως ότου συναντήσουν την επιφάνεια ενός άλλου μέσου όπου ανακλώνται, Σχ. 3.1(α), ή διαθλώνται, Σχ. 3.1(β). Κατά την θεωρία του Νεύτωνα τα σωματίδια επί της επιφάνειας του δεύτερου μέσου απωθούνται οπότε παρατηρείται η ανάκλαση ή έλκονται οπότε διέρχονται από την επιφάνεια οπότε παρατηρείται η διάθλαση των φωτεινών ακτινών (Papadopoulos [1]).



Σχήμα 3.1: (α) Ανάκλαση, (β) Διάθλαση φωτεινών ακτινών, (γ) Διάδοση μετωπών κύματος και (δ) Μέτωπα κύματος σε άπειρη απόσταση

Κατά την ανάκλαση η γωνία πρόσπτωσης $\hat{\pi}$ είναι ίση με την γωνία ανακλάσεως $\hat{\alpha}$ ($\hat{\pi} = \hat{\alpha}$), ενώ κατά την διάθλαση ισχύει:

$$\eta = \frac{\sin \hat{\pi}}{\sin \hat{\delta}} = \frac{c_1}{c_2} \quad (3.1)$$

όπου η είναι ο δείκτης διαθλάσεως του φωτός, $\hat{\delta}$ η γωνία διαθλάσεως, c_1 η ταχύτητα του φωτός στο μέσο (I) και c_2 η ταχύτητα του φωτός στο μέσο (II).

Κατά την κυματική θεωρία του φωτός, από σημειακή φωτεινή πηγή Π, Σχ. 3.1(γ) εκπέμπεται ένα κύμα που γεννάται από τις δονήσεις των ατόμων της πηγής. Το κύμα διαδίδεται στον χώρο με ταχύτητα c , όπου c η ταχύτητα διάδοσης του φωτός στο χώρο της πηγής. Το κύμα διαδιδόμενο προς όλες τις διευθύνσεις σχηματίζει σφαιρικές επιφάνειες ακτίνας $R = ct$. Όλα τα σημεία της σφαίρας βρίσκονται σε φάση. Οι επιφάνειες αυτές αποτελούν τα μέτωπα του κύματος. Τα σημεία του πρώτου μετώπου καθίστανται νέες φωτεινές πηγές που σχηματίζουν νέα μέτωπα κύματος και η περιβάλλουσα των επί μέρους μετώπων σχηματίζει το νέο μέτωπο του κύματος κατά την αρχή του Huygens. Τα σφαιρικά μέτωπα του κύματος πολύ μακριά της πηγής Π καθίστανται σχεδόν επίπεδα έτσι ώστε σε άπειρη απόσταση από την πηγή Π τα μέτωπα θεωρούνται επίπεδα κάθετα στις φωτεινές ακτίνες όπως φαίνεται στο Σχ. 3.1(δ).

Σύμφωνα με την κυματική θεωρία του φωτός και την αρχή του Huygens, μπορεί εύκολα να εξηγηθεί η ανάκλαση και η διάθλαση του φωτός. Έτσι, όταν ένα μέτωπο κύματος φθάσει στην διαχωριστική επιφάνεια τότε τα σημεία της διαχωριστικής επιφάνειας καθίστανται δευτερεύουσες πηγές κυμάτων με αποτέλεσμα ένα νέο μέτωπο κύματος να γεννιέται και αφ' ενός μεν να ανακλάται αφ' ετέρου δε να διαθλάται, Σχ. 3.1(α) & 3.1(β).

3.3 Αρμονική ή Ημιτονοειδής Ταλάντωση

Η απλούστερη μορφή περιοδικής κίνησης υλικού σημείου είναι η ευθύγραμμη αρμονική ή ημιτονοειδής ταλάντωση, στην οποία παραλείπονται όλες οι αντιστάσεις.

Θεωρεί υλικό σημείο M κινούμενο ευθύγραμμα υπό την ενέργεια δύναμης P διευθυνομένης προς σταθερό κέντρο O και ανάλογης προς την απόσταση $OM = x$, δηλαδή:

$$P = -cx \quad (3.2)$$

Η διαφορική εξίσωση κίνησης σύμφωνα με τον θεμελιώδη νόμο του Νεύτωνα, είναι:

$$P = m\gamma \rightarrow m \frac{d^2x}{dt^2} = -cx \quad (3.3)$$

ή

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \quad (3.4)$$

με:

$$\omega^2 = \frac{c}{m} > 0$$

Η (3.4) είναι ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως με σταθερούς συντελεστές. Η γενική λύση της εξίσωσης αυτής είναι:

$$x = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t \quad (3.5)$$

όπου C_1, C_2 είναι αυθαίρετες σταθερές που καθορίζονται από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος. Εάν για $t = 0$ είναι $x = x_0$ και $v = v_0$, οι σταθερές C_1, C_2 είναι:

$$C_1 = \frac{v_0}{\omega}, \quad C_2 = x_0 \quad (3.6)$$

Εκφράζοντας τις σταθερές αυτές συναρτήσει δύο νέων σταθερών α και β έτσι ώστε:

$$C_1 = \alpha \cos \beta, \quad C_2 = \alpha \sin \beta \quad (3.7)$$

η (3.5) γράφεται:

$$x = \alpha \cos\beta \sin\omega t + \alpha \sin\beta \cos\omega t = \alpha \sin(\omega t + \beta) \quad (3.8)$$

και η ταχύτητα υ είναι:

$$v = \omega\alpha \cos(\omega t + \beta) \quad (3.9)$$

Από τις (3.6) και (3.7) προκύπτει ότι:

$$\alpha = \sqrt{\frac{v_0^2}{\omega^2} + x_0^2} \quad , \quad \tan\beta = \frac{\omega x_0}{v_0} \quad (3.10)$$

Οι (3.8) και (3.9) αποτελούν μια άλλη μορφή της γενικής λύσης του προβλήματος που χρησιμοποιείται συχνά και ουσιαστικά διατυπώνουν την κίνηση υλικού σημείου που ονομάζεται απλή αρμονική ταλάντωση.

Στην (3.8) το α ονομάζεται πλάτος ή εύρος της ταλάντωσης, η γωνία $\omega t + \beta$ ονομάζεται φάση της ταλάντωσης, το ω ονομάζεται κυκλική ή γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης. Ο χρόνος T μιας πλήρους ταλάντωσης ονομάζεται περίοδος της ταλάντωσης η οποία ισούται:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (3.11)$$

Το αντίστροφο της περιόδου ονομάζεται συχνότητα της ταλάντωσης η οποία ισούται:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (3.12)$$

Επομένως η (3.8) μπορεί να γραφεί:

$$x = \alpha \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \beta\right) \quad (3.13)$$

Έστω δύο απλές αρμονικές κινήσεις της αυτής περιόδου με εξισώσεις:

$$x = \alpha \sin(\omega t + \beta) \quad (3.14)$$

$$y = b \sin \omega t \quad (3.15)$$

όπου β είναι η διαφορά φάσης, $\beta = \omega t + \beta - \omega t$, των δύο ταλαντώσεων. Απαλοίφοντας τον χρόνο t από τις (3.14) και (3.15), προκύπτει:

$$x = \alpha \sin \omega t \cos \beta + \alpha \cos \omega t \sin \beta \quad (3.16)$$

Από την (3.15) προκύπτει:

$$\sin \omega t = \frac{y}{b} \text{ και } \cos \omega t = \frac{1}{b} \sqrt{b^2 - y^2} \quad (3.17)$$

Αντικαθιστώντας στην (3.16) προκύπτει:

$$x = \frac{\alpha y}{b} \cos \beta + \frac{\alpha}{b} \sqrt{b^2 - y^2} \sin \beta \quad (3.18)$$

Μετά από πράξεις προκύπτει:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2 \frac{xy}{ab} \cos \beta = \sin^2 \beta \quad (3.19)$$

Η (3.19) παριστάνει έλλειψη στο επίπεδο (x, y) , δηλαδή η συνισταμένη δύο απλών αρμονικών κινήσεων της αυτής περιόδου είναι ελλειπτική κίνηση. Διακρίνονται δύο περιπτώσεις στην κίνηση αυτή:

- 1) Αν $\alpha = b$ και $\beta = \pm \pi/2$, τότε είναι: $\sin^2 \beta = 1$ και $\cos \beta = 0$, οπότε η (3.19) γίνεται:

$$x^2 + y^2 = \alpha^2 \quad (3.20)$$

που παριστάνει κύκλο ακτίνας α , δηλαδή στην περίπτωση αυτή η κίνηση είναι κυκλική.

2) Αν $\alpha = b$ και $\beta = \pm \pi$, τότε είναι: $\sin \beta = 0$ και $\cos \beta = -1$, οπότε η (3.19) γίνεται:

$$x^2 + y^2 + 2xy = 0 \rightarrow (x + y)^2 = 0 \rightarrow x = -y \quad (3.21)$$

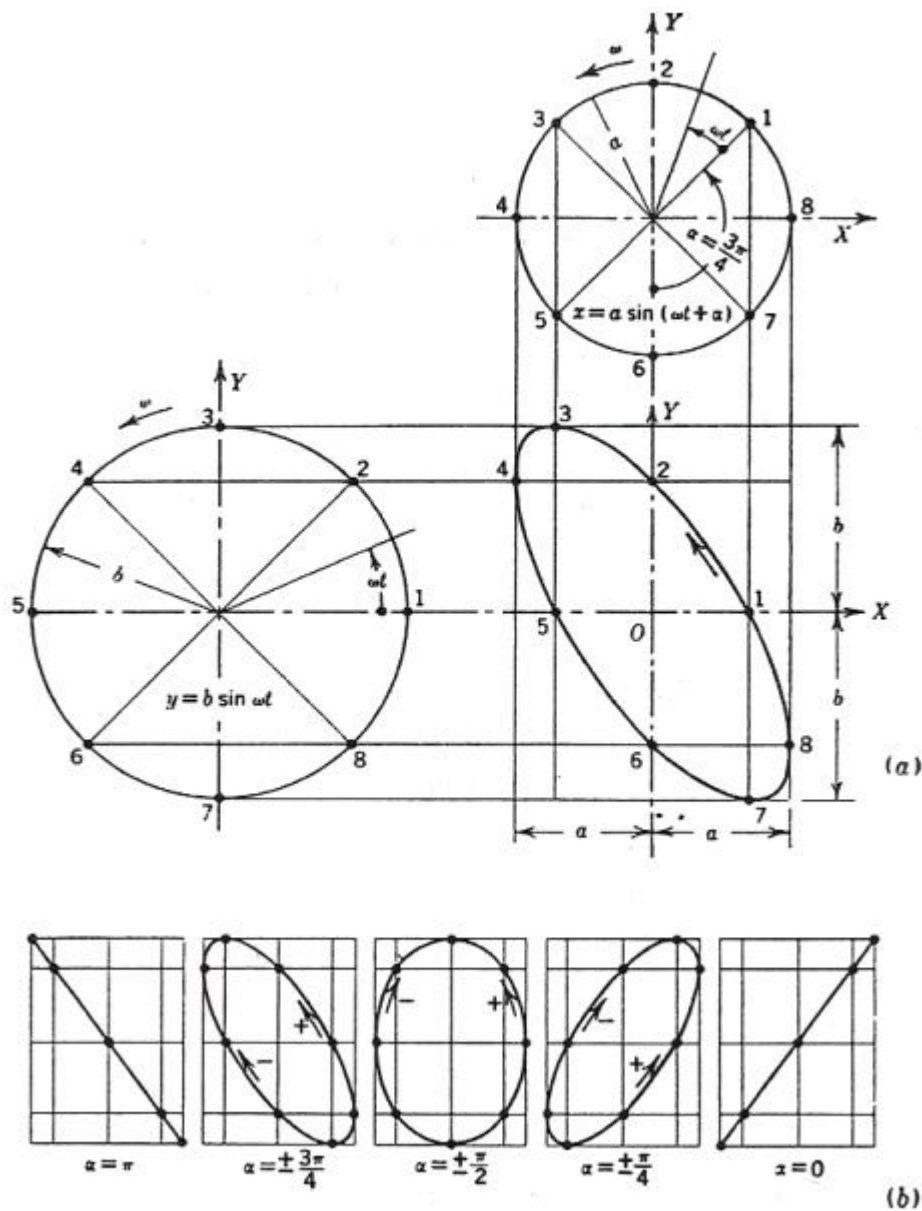
που παριστάνει ευθεία γραμμή διερχόμενη από το δεύτερο και τέταρτο τεταρτημόριο. Ομοίως για $\beta = 0$ είναι: $\sin \beta = 0$ και $\cos \beta = 1$, οπότε η (3.19) γίνεται:

$$x^2 + y^2 - 2xy = 0 \rightarrow (x - y)^2 = 0 \rightarrow x = y \quad (3.22)$$

που παριστάνει ευθεία διερχόμενη από το πρώτο και τρίτο τεταρτημόριο. Στο Σχ. 3.2 φαίνεται η ευθεία των δύο απλών αρμονικών ταλαντώσεων.

Η εξίσωση της εγκάρσιας ταλάντωσης ενός υλικού σημείου σε απόσταση x από την αρχή της διαταραχής δίνεται από την (3.13) δηλαδή:

$$y = \alpha \sin \left(2\pi \frac{t}{T} + \beta \right) \quad (3.23)$$



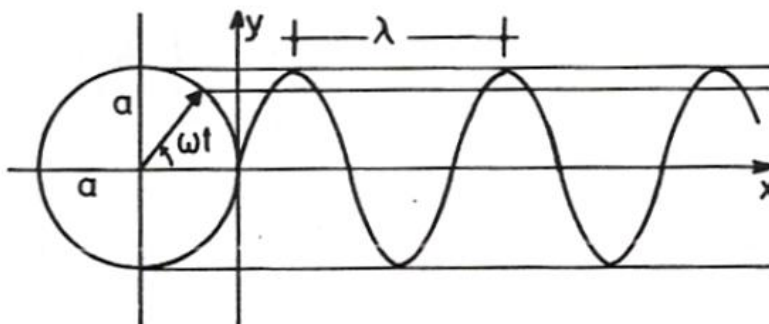
Σχήμα 3.2: Σύνθεση απλών αρμονικών ταλαντώσεων

όπου a το πλάτος της ταλάντωσης και b η διαφορά φάσης μεταξύ της αρχής και του σημείου στη θέση x . Για $t = T$ τα υπ' όψη σημεία βρίσκονται εν φάση, δηλαδή η διαφορά φάσης είναι $\beta = 2\pi$, τότε η διαταραχή έχει προχωρήσει κατά λ . Σε διαφορά φάσης β η διαταραχή έχει προχωρήσει κατά x , οπότε ικανοποιείται η σχέση:

$$\frac{x}{\lambda} = \frac{\beta}{2\pi} \quad (3.24)$$

από την οποία προκύπτει $\beta = 2\pi x/\lambda$, οπότε η (3.23) γράφεται:

$$y = \alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) \quad (3.25)$$



Σχήμα 3.3: Αρμονικό κύμα

Η (3.25) παριστάνει την εξίσωση του αρμονικού κύματος, Σχ. 3.3, όπου λ ονομάζεται μήκος κύματος. Ταχύτητα του κύματος c είναι η ταχύτητα της ομοιόμορφης μετάδοσης της αρχικής διατάραξης. Αφού σε χρόνο μιας περιόδου T η διατάραξη προχωρεί κατά ένα μήκος κύματος λ , η ταχύτητα c θα δίνεται από την σχέση:

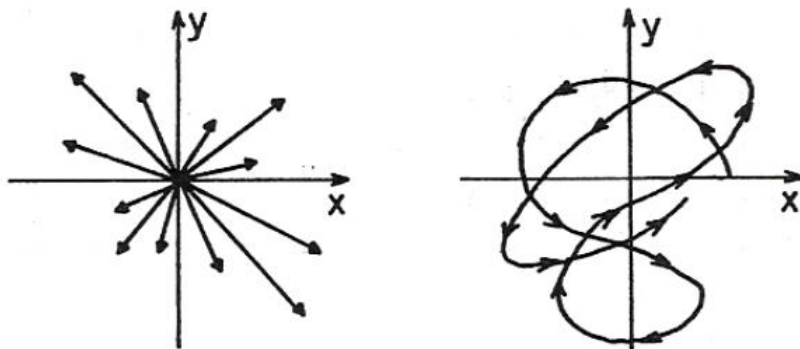
$$c = \frac{\lambda}{T} = \lambda \nu \quad (3.26)$$

Το φως σύμφωνα με την αρχή του Huygens διαδίδεται υπό μορφή εγκάρσιων κυμάτων. Η ταχύτητα του φωτός εξαρτάται από το μέσο διάδοσης. Στο κενό το φως διαδίδεται με ταχύτητα $c = 3 \times 10^{10} \text{ cm/sec} = 300000 \text{ km/sec}$.

Το φάσμα του λευκού φωτός αποτελείται από ακτινοβολίες ή απλά χρώματα ορισμένου μήκους κύματος. Η ορατή περιοχή του φάσματος κυμαίνεται μεταξύ $4000 - 7000 \text{ \AA}$ ($1 \text{ \AA} = 10^{-8} \text{ cm}$). Τα μήκη κύματος των απλών χρωμάτων είναι: Ιώδες: 4000 \AA , Κυανούν: 4500 \AA , Πράσινο: 5200 \AA , Κίτρινο: 5700 \AA , Ερυθρό: 6500 \AA και Βαθύ ερυθρό: 7200 \AA . Το φάσμα επεκτείνεται στο υπέρυθρο με μήκη κύματος μεγαλύτερα των 7200 \AA και στο υπεριώδες με μήκη κύματος μικρότερα των 4000 \AA . Το υπέρυθρο και το υπεριώδες φάσμα είναι αόρατο.

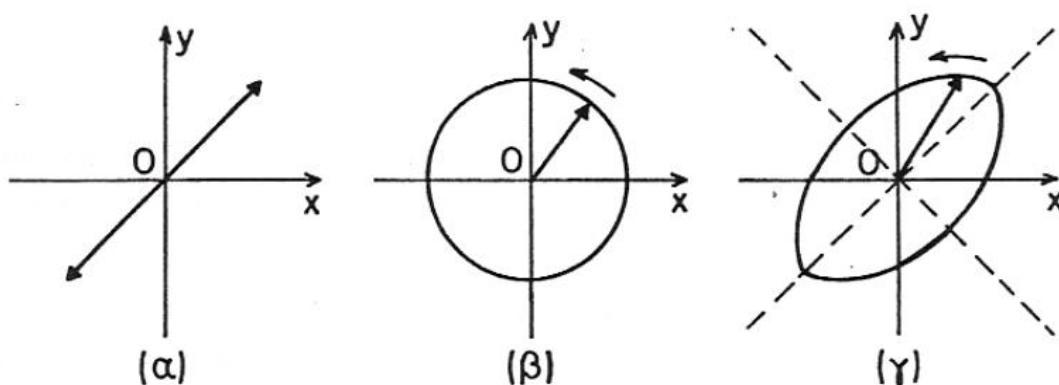
3.4 Πόλωση του Φωτός

Σύμφωνα με την κυματική θεωρία του φωτός, το κοινό φως αποτελείται από εγκάρσια κύματα διαφόρων συχνοτήτων και διευθύνσεων, όπως φαίνεται στο Σχ. 3.4.



Σχήμα 3.4: Σχηματική παράσταση του κοινού φωτός

Εάν το κοινό φως πέσει σε μια γυάλινη πλάκα με κατάλληλη γωνία πρόσπτωσης τότε το ανακλώμενο φως αποτελείται από εγκάρσια κύματα με επίπεδα ταλάντωσης παράλληλα μεταξύ κάθετα στην διάδοση του κύματος. Στην περίπτωση αυτή το φως ονομάζεται πολωμένο. Το διάνυσμα του πολωμένου φωτός κινείται πάνω σε ορισμένη τροχιά, όπως φαίνεται στο Σχ. 3.5, κάθετη στην διεύθυνση διάδοσης του κύματος.



Σχήμα 3.5: (α) Επίπεδα πολωμένο φως. (β) Κυκλικά πολωμένο φως. (γ) Ελλειπτικά πολωμένο φως

- Επίπεδα πολωμένο φως είναι το φως όπου το διάνυσμα του φωτός βρίσκεται πάνω σε ευθεία γραμμή κάθετη προς την διεύθυνση διάδοσης, Σχ. 3.5(α).
- Κυκλικά πολωμένο φως είναι το φως όπου το διάνυσμα του φωτός κινείται επί κυκλικής τροχιάς το επίπεδο της οποίας είναι κάθετο στην διεύθυνση διάδοσης, Σχ. 3.5(β). Επομένως κατά την διάδοση του κυκλικά πολωμένου φωτός σχηματίζεται κυκλική έλικα.
- Ελλειπτικά πολωμένο φως είναι το φως όπου το διάνυσμα του φωτός κινείται επί ελλειπτικής τροχιάς το επίπεδο της οποίας είναι κάθετο στην διεύθυνση διάδοσης, Σχ. 3.5(γ). Κατά την διάδοση του ελλειπτικά πολωμένου φωτός σχηματίζεται ελλειπτική έλικα.

Η πόλωση του φωτός επιτυγχάνεται με τους πολωτές Polaroid. Το 1852 ο Herapath ανακάλυψε ότι ο τεχνητός κρύσταλλος χεραπατίτης (όξινος ιωδιούχος θειική κινίνη) είχε την ιδιότητα να πολώνει το φως. Η πόλωση επιτυγχάνεται με τα επιμήκη πολυϊωδιούχα μόρια που περιέχει ο κρύσταλλος. Έτσι, τα μόρια αυτά που έχουν μικρό πλάτος, μικρότερου του μήκους κύματος του χρησιμοποιούμενου φωτός, και μεγάλο μήκος καθίστανται διαφανή κατά την διεύθυνση του πλάτους και αδιαφανή κατά την διεύθυνση του μήκους τους με αποτέλεσμα την πόλωση του φωτός. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται διχρωϊσμός και οι κρύσταλλοι διχρωϊκοί. Διχρωϊκοί κρύσταλλοι είναι ο φωσικός χαλαζίας και οι κρύσταλλοι Τουρμαλίνου.

Οι πρώτοι πολωτές Polaroid - J αποτελούνταν από διχρωϊκούς μικρό - κρυστάλλους ιωδιούχου θειικής κινίνης εντός διαλύματος κυτταρίνης υψηλού ιξώδους με κατάλληλο προσανατολισμό. Άλλος τύπος πολωτή είναι οι πολωτές Polaroid - H. Στους πολωτές αυτούς ο διχρωϊσμός επιτυγχάνεται με παράλληλο προσανατολισμό μικρομοριακών κενών πάνω στην επιφάνεια φύλλων από πολυβινυλική αλκοόλη. Το φύλλο εμβαπτίζεται σε βάμμα ιωδίου του οποίου τα μόρια γεμίζουν τα κενά σχηματίζοντας παράλληλες αγωγίμες ίνες. Το φως κατά την διεύθυνση των ινών απορροφάται από την δημιουργία ηλεκτρικών ρευμάτων, ενώ κατά την κάθετη διεύθυνση δεν απορροφάται. Έτσι, το εξερχόμενο φως είναι πολωμένο. Το διερχόμενο φως είναι περίπου 32% του προσπίπτοντος.

3.4.1 Διπλοδιάθλαση

Τα φυσικά σώματα, σε σχέση με την ταχύτητα διάδοσης του φωτός σε αυτά, διακρίνονται σε οπτικώς ισότροπα και οπτικώς ανισότροπα ή διπλοαδιαθλαστικά. Στα οπτικώς ισότροπα σώματα η ταχύτητα του φωτός εντός αυτών είναι ίδια προς όλες τις διευθύνσεις, ενώ στα οπτικώς ανισότροπα η ταχύτητα του φωτός εντός αυτών είναι διαφορετική και εξαρτάται από την διεύθυνση πρόσπτωσης του φωτός πάνω στο σώμα. Εντός των οπτικώς ανισοτρόπων σωμάτων το φως χωρίζεται σε δύο επιπέδως πολωμένες δέσμες, τα επίπεδα πόλωσης των οποίων είναι κάθετα μεταξύ τους, με ταχύτητες διάδοσης διαφορετικές. Εάν d είναι το πάχος της οπτικώς ανισότροπης πλάκας και v_1, v_2 οι ταχύτητες διάδοσης των δύο πολωμένων δεσμών εντός της πλάκας, τότε σύμφωνα με την διάθλαση του φωτός ισχύουν:

$$\eta_1 = \frac{c}{v_1} \quad , \quad \eta_2 = \frac{c}{v_2} \quad (3.27)$$

όπου η_1, η_2 είναι οι δείκτες διαθλάσεως του φωτός κατά τις διευθύνσεις διάδοσης των πολωμένων δεσμών εντός του σώματος, c η ταχύτητα του φωτός στο κενό. Ομοίως, εάν t_1, t_2 είναι οι αντίστοιχοι χρόνοι διέλευσης των ακτινών από το πάχος d του σώματος, προκύπτει:

$$v_1 = \frac{d}{t_1} \quad , \quad v_2 = \frac{d}{t_2} \quad (3.28)$$

και εξ αυτών:

$$\eta_1 = \frac{c}{d} t_1 \quad , \quad \eta_2 = \frac{c}{d} t_2 \quad (3.29)$$

Η διαφορά φάσης των κυμάτων κατά τις διευθύνσεις η_1, η_2 , σύμφωνα με την (3.25), είναι:

$$\beta = \frac{2\pi}{T} (t_1 - t_2) = \frac{2\pi d}{T} \frac{1}{c} (\eta_1 - \eta_2) = \frac{2\pi d}{\lambda} (\eta_1 - \eta_2) \quad (3.30)$$

Συγκρίνοντας την (3.30) με την (3.24), προκύπτει:

$$x = d(\eta_1 - \eta_2) \quad (3.31)$$

δηλαδή προκύπτει η διαφορά x του οπτικού δρόμου των δύο κυμανσεων.

3.4.2 Πολωτές

α) Επίπεδος πολωτής, είναι το οπτικό στοιχείο που πολώνει το κοινό φως επίπεδα. Ο επίπεδος πολωτής χαρακτηρίζεται από τον άξονα από τον οποίο διέρχεται φως. Έτσι, όταν το δiάνυσμα του κοινού φωτός προσπέσει πάνω στον επίπεδο πολωτή, αναλύεται σε δύο συνιστώσες εκ των οποίων η κατά τον άξονα πόλωσης διέρχεται ενώ η κάθετη αποκόπτεται με αποτέλεσμα το φως που διέρχεται να αποτελείται από ένα δiάνυσμα παράλληλο προς την διεύθυνση του άξονα πόλωσης (Papadopoulos [1]). Εάν $y = \alpha \sin \omega t$ είναι το προσπίπτον κοινό φως και δ είναι η γωνία που σχηματίζει το δiάνυσμα του φωτός με τον άξονα πόλωσης, τότε οι δύο συνιστώσες του φωτός είναι:

$$y_\delta = y \cos \delta = \alpha \cos \delta \sin \omega t, \quad y_\alpha = y \sin \delta = \alpha \sin \delta \sin \omega t \quad (3.32)$$

Από τις δύο αυτές συνιστώσες η y_δ διέρχεται από το επίπεδο του πολωτή ενώ η y_α αποκόπτεται. Το δiάνυσμα y_δ βρίσκεται πάνω σε επίπεδο που περιέχει τον άξονα πόλωσης του επίπεδου πολωτή.

β) Κυκλικός πολωτής, είναι το οπτικό στοιχείο που πολώνει το κοινό φως κυκλικά. Ένα τέτοιο οπτικό στοιχείο είναι μία διπλοδιαθλαστική πλάκα τέτοιου πάχους ώστε η διαφορά φάσης β να ισούται με $\pi/2$. Από την (3.30), αντικαθιστώντας με $\beta = \pi/2$, προκύπτει διαφορά δρόμου $\chi = \lambda/4$. Επομένως, ένα τέτοιο οπτικό στοιχείο ονομάζεται πλάκα τετάρτου μήκους κύματος, $(\lambda/4)$. Στο κυκλικά πολωμένο φως, το διερχόμενο από τον κυκλικό πολωτή δiάνυσμα διαγράφει κυκλική έλικα.

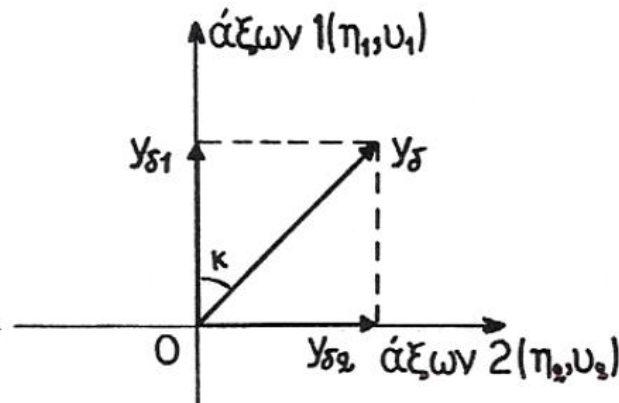
γ) Ελλειπτικά πολωμένο φως, επιτυγχάνεται από οπτικό στοιχείο που αποτελείται από ένα επίπεδο πολωτή και ένα κυκλικό πολωτή. Το φως που εξέρχεται είναι ελλειπτικά πολωμένο, δηλαδή το διερχόμενο δiάνυσμα του φωτός διαγράφει ελλειπτική έλικα. Έτσι, εάν επίπεδα πολωμένο φως, που προκύπτει από επίπεδο πολωτή,

προσπέσει πάνω σε κυκλικό πολωτή (διπλοδιαθλαστική πλάκα) υπό γωνία $\pi/4$ ως προς τους άξονες του κυκλικού πολωτή, τότε το διερχόμενο φως είναι ελλειπτικά πολωμένο. Όπως φαίνεται στο Σχ. 3.6, το διάνυσμα y_δ του επίπεδα πολωμένου φωτός αναλύεται σε δύο συνιστώσες κατά τους άξονες 1 (η_1, ν_1) και 2 (η_2, ν_2) της διπλοδιαθλαστικής πλάκας. Οι συνιστώσες αυτές είναι:

$$y_{\delta 1} = y_\delta \cos \kappa = \alpha \cos \delta \cos \kappa \sin \omega t \quad (3.33)$$

$$y_{\delta 2} = y_\delta \sin \kappa = \alpha \cos \delta \sin \kappa \sin \omega t \quad (3.34)$$

όπου κ η γωνία που σχηματίζει η συνιστώσα y_δ με τον άξονα 1 (η_1, ν_1) του κυκλικού πολωτή.



Σχήμα 3.6: Ανάλυση επίπεδα πολωμένου φωτός από διπλοδιαθλαστική πλάκα

Οι δύο συνιστώσες $y_{\delta 1}, y_{\delta 2}$ εξερχόμενες από τον κυκλικό πολωτή έχουν διαφορά φάσης β , (3.30). Αυτές οι συνιστώσες είναι:

$$y'_{\delta 1} = \alpha \cos \delta \cos \kappa \sin(\omega t + \beta) \quad (3.35)$$

$$y'_{\delta 2} = \alpha \cos \delta \sin \kappa \sin \omega t \quad (3.36)$$

Οι δύο αυτές συνιστώσες προστιθέμενες δίνουν κύμανση ανάλογη προς την ευρεθείσα της (3.19), δηλαδή:

$$\frac{(y'_{\delta 1})^2}{(\alpha \cos \delta \cos \kappa)^2} + \frac{(y'_{\delta 2})^2}{(\alpha \cos \delta \sin \kappa)^2} - 2 \frac{y'_{\delta 1} y'_{\delta 2}}{\alpha^2 \cos^2 \delta \sin \kappa \cos \kappa} \cos \beta = \sin^2 \beta \quad (3.37)$$

Η εξίσωση αυτή, όπως και η (3.19), παριστάνει έλλειψη στο επίπεδο $(y'_{\delta 1}, y'_{\delta 2})$, δηλαδή η εξερχόμενη κύμανση είναι ελλειπτική έλικα. Ανάλογη διερεύνηση γίνεται και σ' αυτή την εξίσωση όπως και στην (3.19).

Εάν η διαφορά φάσης είναι $\beta = \pi/2$, δηλαδή η διπλοδιαθλαστική πλάκα αποτελεί κυκλικό πολωτή και η γωνία $\kappa = \pi/4$, τότε το εξερχόμενο φως είναι κυκλικά πολωμένο. Στην περίπτωση που είναι $\kappa = 0$ ή $\pi/2$ τότε το εξερχόμενο φως είναι επίπεδα πολωμένο.

3.5 Φωτοτασεοπτικός Νόμος

Φυσική διπλοδιάθλαση παρουσιάζουν τα κρυσταλλικά σώματα όπως ο Τουρμαλίνης, η μίκα του ασβεστίου, κλπ. Όμως είναι δυνατόν διπλοδιάθλαση να παρουσιάσουν και τα ισότροπα σώματα όπως η ύαλος, ο βακελίτης, το Lexan μετά από εντατική ή παραμορφωσιακή κατάσταση. Κατά την ένταση ενός σώματος αναπτύσσονται οι κύριες τάσεις πάνω στα κύρια επίπεδα. Οι κύριες τάσεις μεταβάλλουν την εσωτερική δομή του σώματος με αποτέλεσμα την μεταβολή της ισότροπης συμπεριφοράς του σώματος και επομένως παρουσιάζεται μεταβολή και στον δείκτη διαθλάσεως (προκειμένου για διαφανή υλικά) κατά τις διευθύνσεις των κυρίων τάσεων. Η μεταβολή αυτή του δείκτη διαθλάσεως έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση διπλοδιαθλαστικότητας στο σώμα εφ' όσον διαρκεί η φόρτιση. Η διπλοδιάθλαση αυτή είναι ανάλογη της εντατικής κατάστασης. Η αναλογία αυτή διατυπώνεται από τον φωτοτασεοπτικό νόμο (Papadopoulos [1]).

Κατά τον φωτοτασεοπτικό νόμο, εφ' όσον το σώμα φορτίζεται στην ελαστική περιοχή, η εμφανιζόμενη διπλοδιάθλαση είναι ανάλογη της σε κάθε σημείο του σώματος διαφοράς των κυρίων τάσεων, δηλαδή:

$$\eta_1 - \eta_2 = c_\sigma(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (3.38)$$

Αντικαθιστώντας την (3.38) στην (3.30), η διαφορά φάσης των δύο κυμάτων κατά τις διευθύνσεις των κυρίων τάσεων, είναι:

$$\beta = \frac{2\pi d}{\lambda} c_\sigma(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (3.39)$$

Από την (3.39), προκύπτει:

$$\frac{\beta}{2\pi} = \frac{dc_\sigma}{\lambda}(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (3.40)$$

Παρατηρούμε ότι η ποσότητα $\beta/2\pi$ είναι ανάλογη της διαφοράς των κυρίων τάσεων για σταθερό πάχος d του σώματος και μήκος κύματος λ μονοχρωματικής ακτινοβολίας. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που παρουσιάζουν την αυτή διαφορά των κυρίων τάσεων καλείται κροσσός και συμβολίζεται η τάξη του με N . Επομένως, όσο αυξάνεται η εντατική κατάσταση του σώματος αυξάνεται η διαφορά των κυρίων τάσεων με αποτέλεσμα να αναπτύσσονται κροσσοί τάξεως N . Επομένως η (3.40) γράφεται:

$$N = \frac{dc_\sigma}{\lambda}(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{d}{f_\sigma}(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (3.41)$$

όπου $f_\sigma = \lambda/c_\sigma$. Η σταθερά f_σ ονομάζεται φωτοελαστική σταθερά του υλικού του σώματος και εξαρτάται από το μήκος κύματος της ακτινοβολίας. Η φωτοελαστική σταθερά f_σ υπολογίζεται πειραματικά για κάθε σώμα και για κάθε ακτινοβολία μήκους κύματος λ (μονοχρωματικό φως). Η (3.41), αντικαθιστώντας την διαφορά των κυρίων τάσεων με την μέγιστη διατμητική τάση τ_{\max} , γράφεται:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{Nf_\sigma}{2d} \quad (3.42)$$

δηλαδή οι φωτοελαστικοί κροσσοί είναι ο γεωμετρικός τόπος που έχουν την αυτή μέγιστη διατμητική τάση.

3.6 Πολωσισκόπιο

Σύμφωνα με τον αναπτυχθέντα φωτοτασεοπτικό νόμο, όταν φωτεινή ακτίνα προσπέσει κάθετα σε διαφανές σώμα που βρίσκεται υπό ένταση αναλύεται σε δύο κυμάνσεις κατά τις διευθύνσεις των κυρίων τάσεων σ_1 και σ_2 με διαφορά φάσης β , (3.39). Οι δύο κυμάνσεις είναι γραμμικά πολωμένες κατά τις διευθύνσεις των κυρίων τάσεων. Επομένως, οι εξερχόμενες από το σώμα κυμάνσεις δίνουν πληροφορίες ως προς τις διευθύνσεις των κυρίων τάσεων και την διαφορά αυτών σε κάθε σημείο του σώματος. Οι πληροφορίες αυτές είναι δυνατόν να ληφθούν με το πολωσισκόπιο από το οποίο το προσπίπτον φως στο σώμα είναι επίπεδα ή κυκλικά πολωμένο για την καλύτερη λήψη των παραπάνω πληροφοριών. Το πολωσισκόπιο αποτελείται από δύο πολωτές και δύο πλάκες τετάρτου μήκους κύματος. Ανάλογα με την διάταξη των τεσσάρων αυτών οπτικών στοιχείων διακρίνεται το πολωσισκόπιο σε επίπεδο πολωσισκόπιο και σε κυκλικό πολωσισκόπιο (Papadopoulos [1]).

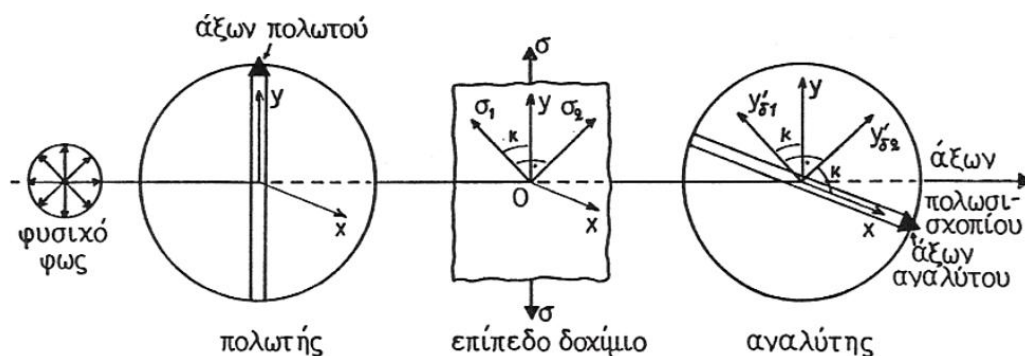
Από το επίπεδο πολωσισκόπιο λαμβάνονται πληροφορίες για τις διευθύνσεις των κυρίων τάσεων σε κάθε σημείο του σώματος, ενώ από το κυκλικό πολωσισκόπιο λαμβάνονται πληροφορίες για την διαφορά των κυρίων τάσεων σε κάθε σημείο του σώματος. Έτσι, σε κάθε σημείο του σώματος τα στοιχεία που λαμβάνονται από το πολωσισκόπιο είναι οι τροχιές των κυρίων τάσεων και η διαφορά αυτών και από αυτά τα στοιχεία υπολογίζονται οι τάσεις σε κάθε σημείο του σώματος, δηλαδή επιτυγχάνεται η πειραματική ανάλυση των τάσεων.

3.6.1 Επίπεδο πολωσισκόπιο

Το επίπεδο πολωσισκόπιο αποτελείται από δύο πολωτές διατεταγμένους έτσι ώστε ο ένας πολωτής να πολώνει το φυσικό φως, οπότε ονομάζεται πολωτής, ενώ ο άλλος τοποθετείται μετά το υπό ένταση σώμα και ονομάζεται αναλυτής. Εάν τα επίπεδα πόλωσης του πολωτή και αναλυτή είναι παράλληλα τότε το πολωμένο φως από τον πολωτή διέρχεται από τον αναλυτή οπότε το επίπεδο πολωσισκόπιο ονομάζεται επίπεδο πολωσισκόπιο φωτεινού πεδίου, ενώ εάν τα επίπεδα πόλωσης είναι κάθετα

τότε το πολωμένο φως από τον πολωτή αποκόπτεται από τον αναλυτή οπότε το επίπεδο πολωσισκόπιο ονομάζεται επίπεδο πολωσισκόπιο σκοτεινού πεδίου.

Στο Σχ. 3.7 δίνεται σχηματικά επίπεδο πολωσισκόπιο σκοτεινού πεδίου. Εντός του πολωσισκοπίου έχει τοποθετηθεί επίπεδο διαφανές δοκίμιο από ομογενές και ισότροπο υλικό το οποίο φορτίζεται με τάση σ στο άπειρο. Μετά την φόρτιση το υλικό καθίσταται οπτικώς ανισότροπο με αποτέλεσμα την διπλοδιάθλαση του διερχομένου φωτός. Σε κάθε σημείο του σώματος η εντατική κατάσταση είναι σ_1 και σ_2 και έστω \hat{k} η γωνία μεταξύ της κυρίας τάσης σ_1 και του άξονα του πολωτή. Το επίπεδο φως που διέρχεται από τον πολωτή είναι της μορφής που δίνεται από την (3.32). Προσπίπτοντας το πολωμένο αυτό φως πάνω στην επίπεδη πλάκα υφίσταται ανάλυση σε δύο συνιστώσες, κατά την διεύθυνση των κυρίων τάσεων, της μορφής που δίνεται από τις (3.33) και (3.34). Οι δύο αυτές συνιστώσες εξερχόμενες από το επίπεδο (μικρού πάχους, plane stress) δοκίμιο έχουν διαφορά φάσης β , (3.39). Οι δύο συνιστώσες $y'_{\delta 1}$ και $y'_{\delta 2}$, (3.35), (3.36), προσπίπτουν πάνω στον αναλυτή (Σχ. 3.7) όπου αναλύονται σε δύο συνιστώσες η κάθεμία, εκ των οποίων διέρχονται από τον αναλυτή οι παράλληλες προς τον άξονα πόλωσης του αναλυτή, ενώ οι κάθετες προς τον άξονα του αναλυτή συνιστώσες αποκόπτονται.

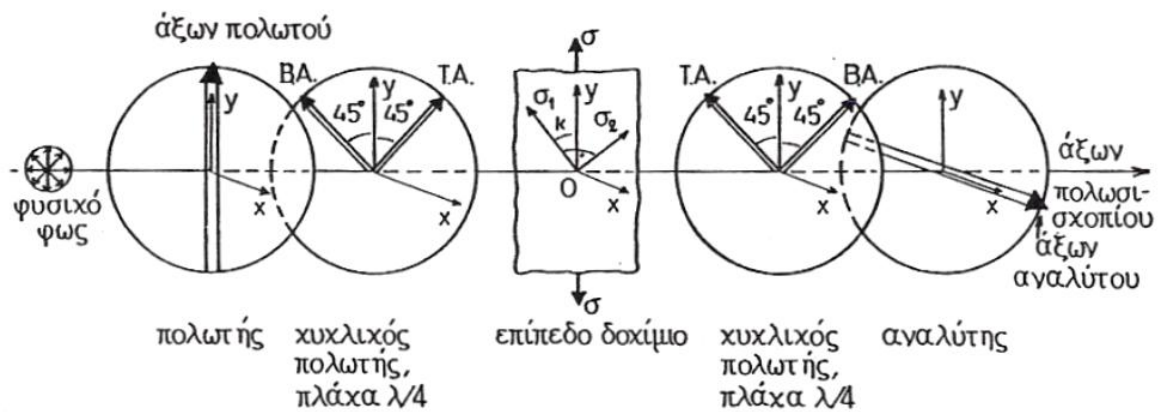


Σχήμα 3.7: Επίπεδο πολωσισκόπιο σκοτεινού πεδίου

3.6.2 Κυκλικό πολωσισκόπιο

Με το κυκλικό πολωσισκόπιο λαμβάνεται το δίκτυο των ισοχρώμων και απαλείφεται το δίκτυο των ισοκλινών. Το κυκλικό πολωσισκόπιο αποτελείται από το

επίπεδο πολωσισκόπιο παρεμβάλλοντας δύο κυκλικούς πολωτές (πλάκες $\lambda/4$). Ο κυκλικός πολωτής χαρακτηρίζεται από δύο κάθετους άξονες, τον ταχύ άξονα (Τ.Α) και τον βραδύ άξονα (Β.Α). Οι κυκλικοί πολωτές τοποθετούνται έτσι ώστε οι δύο άξονες, Τ.Α και Β.Α, να σχηματίζουν γωνία 45° με τον άξονα του πολωτή, όπως φαίνεται στο Σχ. 3.8. Οι κυκλικοί πολωτές τοποθετούνται έτσι ώστε ο Τ.Α του ενός να είναι παράλληλος προς τον Β.Α του άλλου για να μην αλλοιωθεί το εξερχόμενο φως από τον αναλυτή. Σε αντίθετη περίπτωση δηλαδή εάν ο Τ.Α του ενός κυκλικού πολωτή είναι παράλληλος προς τον Τ.Α του άλλου, τότε το εξερχόμενο φως από τον αναλυτή στρέφεται κατά γωνία 90° . Στην πρώτη περίπτωση το κυκλικό πολωσισκόπιο είναι σκοτεινού πεδίου και στην δεύτερη είναι φωτεινού πεδίου. Στο Σχ. 3.8 το κυκλικό πολωσισκόπιο είναι σκοτεινού πεδίου.

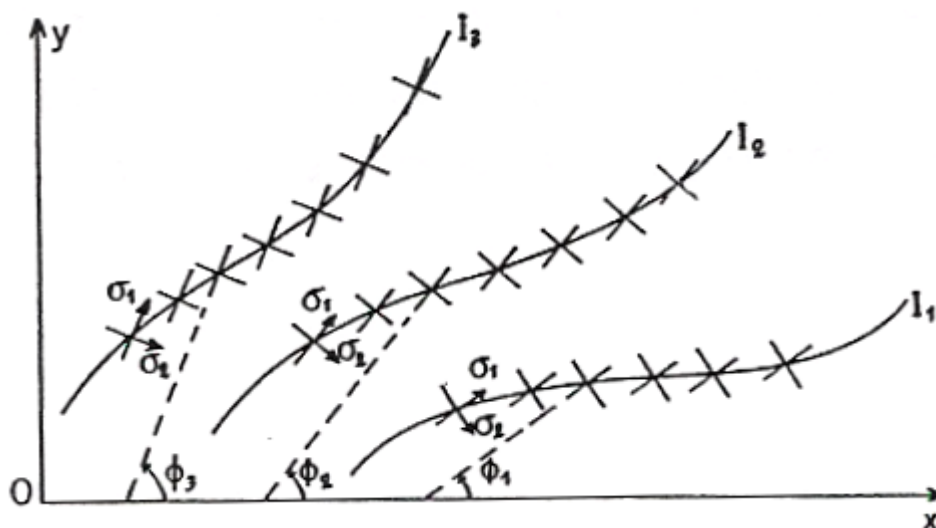


Σχήμα 3.8: Κυκλικό πολωσισκόπιο σκοτεινού πεδίου

Το διερχόμενο επίπεδο φως από τον πολωτή είναι της μορφής που δίνεται από την (3.32). Ακολούθως το φως αυτό προσπίπτει πάνω στον κυκλικό πολωτή, αναλύεται σε δύο συνιστώσες κατά τις διευθύνσεις των αξόνων οπότε το διερχόμενο φως δίνεται από τις (3.35) και (3.36) με $\beta = \pi/2$, αφού ο κυκλικός πολωτής εισάγει διαφορά φάσης $\pi/2$ μεταξύ των κυμάτων των δύο αξόνων.

3.7 Τροχιές Κυρίων Τάσεων

Όπως αναφέρθηκε σε παραπάνω ενότητα (βλ. 3.6.1), ισοκλινής γραμμή είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων όπου η κλίση των κυρίων τάσεων, ως προς καθορισμένη διεύθυνση, είναι ίδια, δηλαδή οι κύριες τάσεις στα σημεία αυτά παραμένουν παράλληλες όπως φαίνεται στο Σχ. 3.9 (Papadopoulos [1]). Κάθε ισοκλινής χαρακτηρίζεται από την γωνία κλίσης. Έτσι, στο Σχ. 3.9 έχουν σχεδιασθεί τρεις ισοκλινείς κλίσεων (παραμέτρων) ϕ_1 , ϕ_2 και ϕ_3 . Το δίκτυο των ισοκλινών λαμβάνεται με το επίπεδο πολωσισκόπιο και με την ταυτόχρονη περιστροφή του πολωτή και αναλυτή. Όπως προκύπτει από τον ορισμό των ισοκλινών, οι τροχιές των κυρίων τάσεων σ_1 και σ_2 καθορίζονται άμεσα από αυτές. Επίσης, ο συνδυασμός των ισοκλινών με το δίκτυο των ισοχρώμων παρέχει τις τιμές των κυρίων τάσεων σ_1 και σ_2 σε κάθε σημείο του σώματος, δηλαδή επιτυγχάνεται πλήρης ανάλυσης των τάσεων.



Σχήμα 3.9: Ισοκλινείς κλίσεως (παραμέτρου) ϕ_1 , ϕ_2 και ϕ_3

Οι ισοκλινείς γραμμές χαρακτηρίζονται από ορισμένες ιδιότητες οι οποίες βοηθούν στην ακριβέστερη χάραξη τους. Οι ιδιότητες αυτές είναι:

(α) Στα αφόρτιστα σύνορα ενός δοκιμίου καταλήγουν ισοκλινείς της ίδιας κλίσης με το σύνορο του δοκιμίου και αυτό γιατί, όπως είναι γνωστό από την θεωρία ελαστικότητας, η μόνη τάση που υπάρχει στο ελεύθερο σύνορο έχει διεύθυνση την εφαπτομένη του συνόρου.

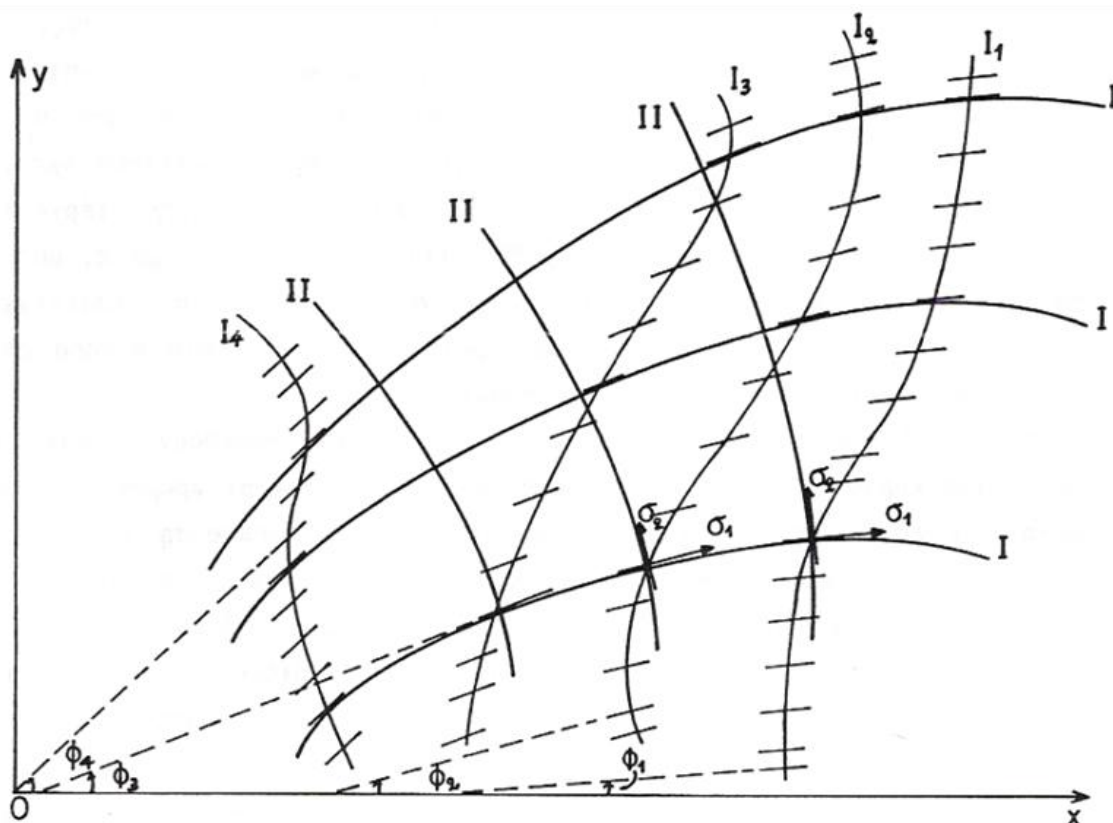
(β) Στα γεωμετρικά συμμετρικά δοκίμια το δίκτυο των ισοκλινών είναι συμμετρικό με παραμέτρους φ και $90^\circ - \varphi$.

(γ) Στην περίπτωση συγκεντρωμένου φορτίου καθέτου στην επιφάνεια ημιεπιπέδου, η αναπτυσσόμενη ακτινική τάση είναι σ_r . Επομένως, οι ισοκλινείς διέρχονται από το σημείο εφαρμογής του φορτίου και συμπίπτουν με τις ακτίνες κατά μήκος των οποίων αναπτύσσεται η κυρία τάση σ_r . Η παράμετρος των ισοκλινών συμπίπτει με την γωνία κλίσης των ακτινών σχετικά με την κατακόρυφη ή οριζόντια διεύθυνση.

(δ) Από το άκρο ρωγμής διέρχονται οι ισοκλινείς παραμέτρου $\varphi = -90^\circ$ έως $\varphi = 90^\circ$.

(ε) Στα ισότροπα σημεία, όπου η διαφορά των κυρίων τάσεων είναι μηδέν δηλαδή $\sigma_1 = \sigma_2$ οι ισοκλινείς διέρχονται από αυτά. Εάν τα ισότροπα σημεία ευρίσκονται στα σύνορα όπου $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, τότε αυτά λέγονται ιδιόμορφα σημεία.

Από το δίκτυο των ισοκλινών είναι εύκολο να χαραχθούν γραφικά οι τροχιές των κυρίων τάσεων. Τροχιές κυρίων τάσεων είναι οι γραμμές σε κάθε σημείο των οποίων η εφαπτομένη συμπίπτει με την διεύθυνση της κυρίας τάσης. Αφού οι κύριες τάσεις είναι κάθετες μεταξύ τους σημαίνει ότι το δίκτυο των τροχιών των κυρίων τάσεων αποτελείται από ορθογώνιες καμπύλες που τέμνονται κάθετα. Στο Σχ. 3.10 φαίνεται η σχεδίαση των τροχιών των κυρίων τάσεων από το δίκτυο των ισοκλινών. Για αυτό χαράσσονται οι ισοκλινείς παραμέτρων $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ και φ_4 , σε σχέση με τον κατακόρυφο άξονα και κυρίως ανά 10° . Ακολούθως χαράσσεται ένα πυκνό δίκτυο μικρών παραλλήλων ευθειών σε κάθε ισοκλινή, με γωνία κλίσης την αντίστοιχη παράμετρο της ισοκλινούς, και εν συνεχεία χαράσσεται καμπύλη γραμμή που εφάπτεται των παραλλήλων ευθειών όλων των ισοκλινών. Η τροχιά αυτή παριστάνει την τροχιά I της κυρίας τάσης σ_1 (ή την τροχιά II της κυρίας τάσης σ_2 , ανάλογα με το πρόβλημα). Κατά τον ίδιο τρόπο χαράσσονται και άλλες τροχιές I με αποτέλεσμα να σχηματισθεί ένα δίκτυο τροχιών κυρίας τάσης σ_1 . Το δίκτυο των τροχιών II της κυρίας τάσης σ_2 σχηματίζεται από τις ορθογώνιες καμπύλες προς τις τροχιές I. Για αυτό χαράσσονται καμπύλες γραμμές που τέμνουν κάθετα τις τροχιές I. Έτσι, με την απλή αυτή γεωμετρική κατασκευή λαμβάνεται το δίκτυο των τροχιών των κυρίων τάσεων.

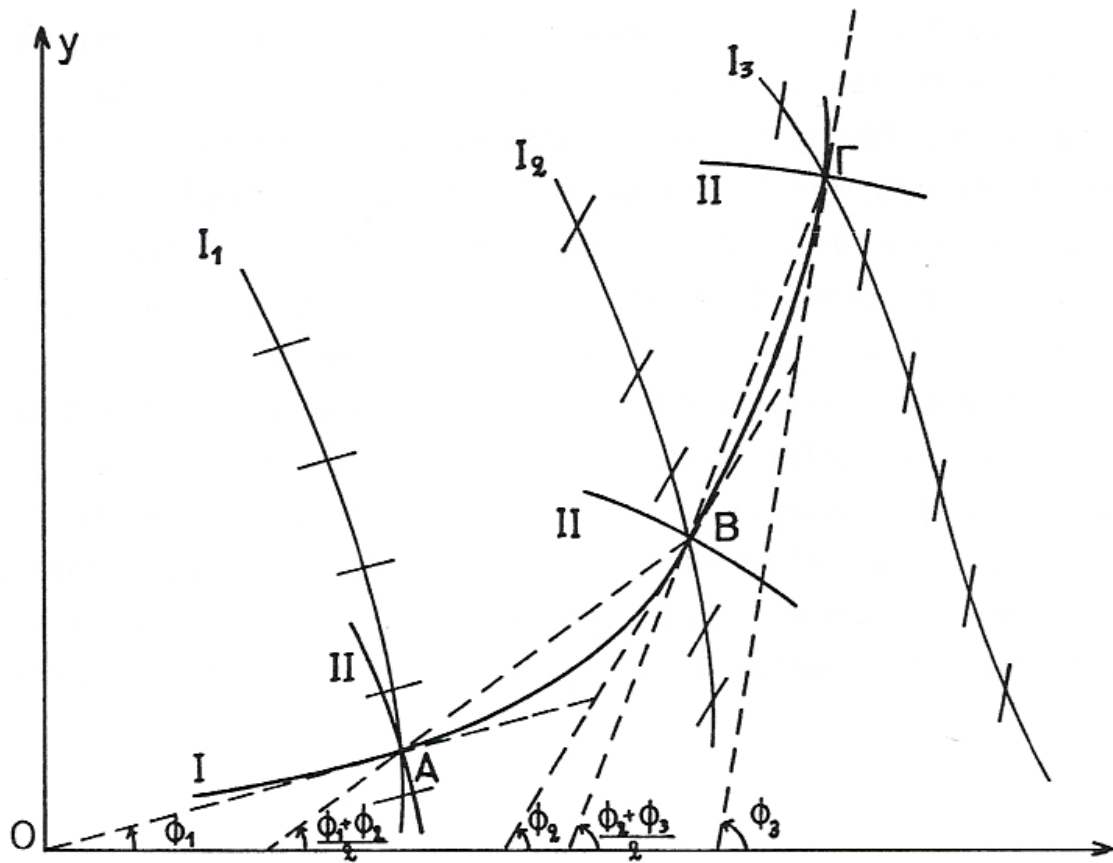


Σχήμα 3.10: Σχεδίαση των τροχιών των κυρίων τάσεων από το δίκτυο των ισοκλινών

Ο γεωμετρικός αυτός τρόπος χάραξης των τροχιών των κυρίων τάσεων δεν είναι πολύ ακριβής. Για μεγαλύτερη ακρίβεια χάραξης των τροχιών προσδιορίζονται γραφικά τα σημεία πάνω στις ισοκλινείς από τα οποία περνά η τροχιά. Για αυτό, όπως φαίνεται στο Σχ. 3.11, από τυχόν σημείο A της ισοκλινούς I_1 χαράσσεται η διεύθυνση κλίσης $(\varphi_1 + \varphi_2)/2$ η οποία τέμνει την ισοκλινή I_2 στο σημείο B. Από το σημείο B χαράσσεται η διεύθυνση με κλίση φ_2 . Ακολουθώντας χαράσσεται η διεύθυνση με κλίση $(\varphi_2 + \varphi_3)/2$ η οποία τέμνει την ισοκλινή I_3 στο σημείο Γ. Από το σημείο Γ χαράσσεται η διεύθυνση με κλίση φ_3 . Η καμπύλη που διέρχεται από τα σημεία A, B, Γ και εφάπτεται τον διευθύνσεων $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ είναι η τροχιά I της κύριας τάσης σ_1 . Κατά τον ίδιο τρόπο ξεκινώντας από άλλα σημεία της ισοκλινούς I_1 χαράσσονται άλλες τροχιές I και εν συνεχεία χαράσσονται κατά τα γνωστά οι τροχιές II της κύριας τάσης σ_2 .

Στα ισότροπα σημεία και στα ιδιόμορφα σημεία οι ισοκλινείς ακολουθούν ορισμένες ιδιότητες και γι' αυτό είναι εύκολο να χαραχθούν οι τροχιές των κυρίων τάσεων. Εάν υπάρχουν διαδοχικά ισότροπα σημεία τότε οι ισοκλινείς εναλλάσσονται και αυτό γιατί τα ισότροπα σημεία χαρακτηρίζονται σε θετικά, όταν οι ισοκλινείς

στρέφονται με την ίδια φορά στροφής του επίπεδου πολωσισκοπίου, και αρνητικά, όταν οι ισοκλινείς στρέφονται αντίθετα προς την φορά στροφής του επίπεδου πολωσισκοπίου. Μεταξύ δύο ομοσήμεων ισότροπων σημείων υπάρχει ιδιόμορφο σημείο. Επειδή όμως το ιδιόμορφο σημείο είναι αρνητικό, τότε τα ισότροπα σημεία, που περιέχουν το ιδιόμορφο σημείο, είναι πάντοτε θετικά.

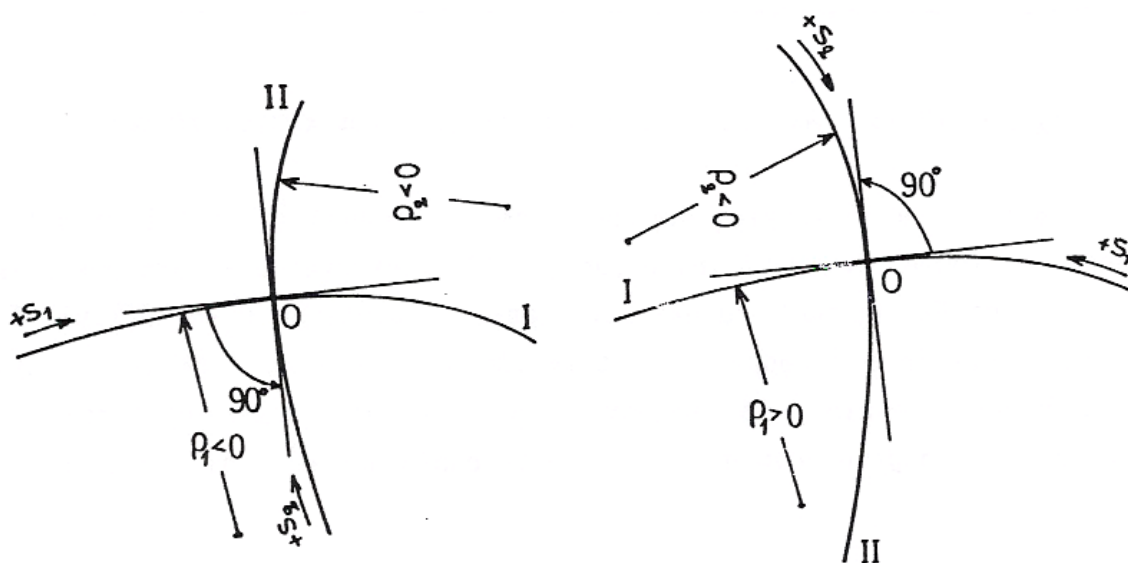


Σχήμα 3.11: Ακριβής χάραξη των τροχιών των κυρίων τάσεων

Κατά μήκος μιας τροχιάς κυρίων τάσεων η διαφορά $|\sigma_1 - \sigma_2|$ διατηρείται σταθερή και αυτό γιατί από την (3.42) προκύπτει ότι κατά μήκος της ίδιας τροχιάς δεν μπορεί να αλλάζει σημείο η συνάρτηση $\sigma_1 - \sigma_2 = f(x, y)$. Για να αλλάξει σημείο η διαφορά των κυρίων τάσεων πρέπει να διέλθει η τροχιά από ισότροπο σημείο. Το πρόσημο της διαφοράς προσδιορίζεται από χαρακτηριστικά σημεία πάνω στο σώμα από τα οποία περνούν οι τροχιές των κυρίων τάσεων. Τέτοια σημεία είναι τα ευρισκόμενα στα σύνορα του σώματος. Στα σύνορα του σώματος προσδιορίζονται οι τάσεις (θετικές, εφελκυστικές ή αρνητικές, θλιπτικές) με την απλή μέθοδο της βελόνης. Για αυτό στο σύνορο, όπου η κύρια τάση είναι παράλληλη προς το σύνορο, επιβάλλεται με αιχμηρό αντικείμενο (βελόνη) μικρή κάθετη πίεση και παρακολουθείται η

μετατόπιση του δικτύου των ισόχρωμων. Εάν σ_1 είναι η παράλληλη προς το σύνορο κύρια τάση, τότε η επιβαλλόμενη με την βελόνη κάθετη μικρή θλιπτική τάση είναι η σ_2 . Εάν η σ_1 είναι εφελκυστική, η διαφορά $\sigma_1 - \sigma_2$ της νέας εντατικής κατάστασης στο σύνορο είναι $|\sigma_1 - \sigma_2| > \sigma_1$ και επομένως η τάξη της ισόχρωμης στο σημείο αυτό αυξάνεται δηλαδή "μπαίνει" νέα ισόχρωμη στο σημείο αυτό. Εάν η σ_1 είναι θλιπτική, η διαφορά $\sigma_1 - \sigma_2$ της νέας εντατικής κατάστασης στο σύνορο είναι $|\sigma_1 - \sigma_2| < \sigma_1$ και επομένως η τάξη της ισόχρωμης στο σημείο αυτό μειώνεται δηλαδή "βγαίνει" ισόχρωμη από το σημείο αυτό.

Οι τροχιές των κυρίων τάσεων εμφανίζουν βασικές ιδιότητες που βοηθούν πάρα πολύ στην φωτοελαστική ανάλυση. Οι τροχιές των κυρίων τάσεων, ως καμπύλες γραμμές, εμφανίζουν ακτίνες καμπυλότητας προσημασμένες ανάλογα με την προσήμανση των τροχιών. Έτσι, όπως φαίνεται στο Σχ. 3.12, έστω I, II οι τροχιές των κυρίων τάσεων σ_1 και σ_2 αντιστοίχως.



Σχήμα 3.12: Προσήμανση των τροχιών των κυρίων τάσεων και των ακτίνων καμπυλότητάς τους

Εάν αυθαίρετα επιλεγεί η θετική φορά $+s$ της τροχιάς I, τότε η θετική φορά της τροχιάς II προκύπτει δια της στροφής της τροχιάς I κατά 90° αντίθετα προς την κίνηση των δεικτών του ωρολογίου. Οι αντίστοιχες ακτίνες καμπυλότητας ρ_1 , ρ_2 των τροχιών I, II των κυρίων τάσεων σ_1 και σ_2 αντιστοίχως, λαμβάνονται θετικές όταν ακολουθώντας την θετική κατεύθυνση πάνω στην τροχιά, η εφαπτομένη αυτής στρέφεται αντίθετα προς την κίνηση των δεικτών του ωρολογίου.

Μία άλλη σημαντική ιδιότητα των τροχιών είναι η εξής: Η κύρια τάση κατά μήκος της τροχιάς της γίνεται μεγίστη ή ελαχίστη στο σημείο όπου η τροχιά αυτή τέμνεται κάθετα από κάποια ισοκλινή γραμμή. Η ιδιότητα αυτή εφαρμόζεται πλήρως στο αφόρτιστο σύνορο ενός σώματος το οποίο αποτελεί τροχιά κύριας τάσης. Έτσι, το σημείο τομής του συνόρου του σώματος κάθετα από κάποια ισοκλινή, συμπίπτει με το σημείο εμφάνισης μεγίστης ή ελαχίστης τάξης ισοχρώμου κατά μήκος του συνόρου. Η ιδιότητα αυτή είναι εύκολο να αποδειχθεί εφαρμόζοντας τις εξισώσεις ισορροπίας Lamé – Maxwell κατά μήκος των τροχιών I και II των κυρίων τάσεων.

3.8 Υπολογισμός της Μεγίστης Τάσης στον Πόδα Δοκιμίου

Οι συνιστώσες αυτές, κατά τον T.A $y_{\delta T}$ και κατά τον B.A $y_{\delta B}$, είναι:

$$y_{\delta T} = \alpha \cos \delta \cos 45^\circ \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha \cos \delta \cos \omega t \quad (3.53)$$

$$y_{\delta B} = \alpha \cos \delta \sin 45^\circ \sin \omega t = \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha \cos \delta \sin \omega t \quad (3.54)$$

Η σύνθεση των δύο αυτών κυμάνσεων δίνει διάνυσμα σταθερού πλάτους που διαγράφει κυκλική έλικα, δηλαδή είναι κυκλικά πολωμένο φως. Το φως αυτό προσπίπτει στο υπό ένταση ευρισκόμενο δοκίμιο και δίνει δύο συνιστώσες κατά τις διευθύνσεις των κυρίων τάσεων σ_1 και σ_2 (Papadopoulos [1]):

$$y_{\delta T1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha \cos \delta \sin(45^\circ - \kappa) \cos \omega t$$

$$y_{\delta T2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha \cos \delta \cos(45^\circ - \kappa) \cos \omega t$$

$$y_{\delta B1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha \cos \delta \cos(45^\circ - \kappa) \sin \omega t$$

$$y_{\delta B2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha \cos\delta \sin(45^\circ - \kappa) \sin\omega t$$

οι οποίες αθροιζόμενες κατά τις διευθύνσεις των κυρίων τάσεων, δίνουν:

$$y_1 = y_{\delta T1} + y_{\delta B1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha \cos\delta [\sin(45^\circ - \kappa) \cos\omega t + \cos(45^\circ - \kappa) \sin\omega t] \quad (3.55)$$

$$y_2 = y_{\delta B2} - y_{\delta T2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha \cos\delta [-\cos(45^\circ - \kappa) \cos\omega t + \sin(45^\circ - \kappa) \sin\omega t] \quad (3.56)$$

Οι δύο αυτές κυμάνσεις διερχόμενες από το δοκίμιο παρουσιάζουν διαφορά φάσης β , δηλαδή:

$$y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha \cos\delta [\sin(45^\circ - \kappa) \cos(\omega t + \beta) + \cos(45^\circ - \kappa) \sin(\omega t + \beta)] \quad (3.57)$$

$$y_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha \cos\delta [-\cos(45^\circ - \kappa) \cos\omega t + \sin(45^\circ - \kappa) \sin\omega t] \quad (3.58)$$

Οι κυμάνσεις αυτές προσπίπτουν πάνω στον δεύτερο κυκλικό πολωτή και δίνουν συνιστώσες κατά τις διευθύνσεις του ταχύ και βραχύ άξονα:

$$y_{1T} = \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha \cos\delta \cos(45^\circ - \kappa) [\sin(45^\circ - \kappa) \cos(\omega t + \beta) + \cos(45^\circ - \kappa) \sin(\omega t + \beta)]$$

$$y_{1B} = \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha \cos\delta \sin(45^\circ - \kappa) [\sin(45^\circ - \kappa) \cos(\omega t + \beta) + \cos(45^\circ - \kappa) \sin(\omega t + \beta)]$$

$$y_{2T} = \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha \cos\delta \sin(45^\circ - \kappa) [-\cos(45^\circ - \kappa) \cos\omega t + \sin(45^\circ - \kappa) \sin\omega t]$$

$$y_{2B} = \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha \cos\delta \cos(45^\circ - \kappa) [-\cos(45^\circ - \kappa) \cos\omega t + \sin(45^\circ - \kappa) \sin\omega t]$$

οι οποίες αθροιζόμενες κατά τις διευθύνσεις των αξόνων του κυκλικού πολωτή, δίνουν:

$$y_T = \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha \cos\delta [\cos(45^\circ - \kappa) \sin(45^\circ - \kappa) \cos(\omega t + \beta) + \cos^2(45^\circ - \kappa) \sin(\omega t + \beta) - \sin(45^\circ - \kappa) \cos(45^\circ - \kappa) \cos\omega t + \sin^2(45^\circ - \kappa) \sin\omega t] \quad (3.59)$$

$$y_B = \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha \cos\delta [\sin^2(45^\circ - \kappa) \cos(\omega t + \beta) + \sin(45^\circ - \kappa) \cos(45^\circ - \kappa) \sin(\omega t + \beta) + \cos^2(45^\circ - \kappa) \cos\omega t - \cos(45^\circ - \kappa) \sin(45^\circ - \kappa) \sin\omega t] \quad (3.60)$$

Οι δύο αυτές κυμάνσεις διερχόμενες από τον κυκλικό πολωτή παρουσιάζουν διαφορά φάσης $\pi/2$, δηλαδή:

$$y_T = \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha \cos\delta [-\cos(45^\circ - \kappa) \sin(45^\circ - \kappa) \sin(\omega t + \beta) + \cos^2(45^\circ - \kappa) \cos(\omega t + \beta) + \sin(45^\circ - \kappa) \cos(45^\circ - \kappa) \sin\omega t + \sin^2(45^\circ - \kappa) \sin\omega t] \quad (3.61)$$

$$y_B = \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha \cos\delta [\sin^2(45^\circ - \kappa) \cos(\omega t + \beta) + \sin(45^\circ - \kappa) \cos(45^\circ - \kappa) \sin(\omega t + \beta) + \cos^2(45^\circ - \kappa) \cos\omega t - \cos(45^\circ - \kappa) \sin(45^\circ - \kappa) \sin\omega t] \quad (3.62)$$

Οι κυμάνσεις (3.61) και (3.62) προσπίπτουν πάνω στον αναλυτή, αναλύονται κατά τον άξονα του αναλυτή και κατά την κάθετο. Οι συνιστώσες κατά τον άξονα διέρχονται από τον αναλυτή, ενώ οι άλλες συνιστώσες, κατά την κάθετο προς τον άξονα του αναλυτή, αποκόπτονται. Οι διερχόμενες συνιστώσες είναι:

$$x_{T\delta} = y_T \frac{\sqrt{2}}{2} , \quad x_{B\delta} = y_B \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Επομένως, η συνισταμένη διερχομένη από τον αναλυτή κύμανση, είναι:

$$x = x_{B\delta} - x_{T\delta} = \frac{\sqrt{2}}{2} (y_B - y_T) = \alpha \cos\delta \sin\frac{\beta}{2} \cos\left(\omega t + \frac{\beta}{2} - 2\kappa\right) \quad (3.63)$$

Η ένταση της διερχομένης αυτής κύμανσης είναι ανάλογη του τετραγώνου του πλάτους της, δηλαδή:

$$I = 2\alpha^2 \cos^2\delta \sin^2\frac{\beta}{2} \quad (3.64)$$

Από την σχέση αυτή προκύπτει ότι η ένταση I του διερχομένου φωτός μηδενίζεται όταν:

$$\sin^2\frac{\beta}{2} = 0 \rightarrow \beta = k\pi, \text{ με } k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.65)$$

Η συνθήκη αυτή είναι ίδια με την συνθήκη (3.50), που σημαίνει ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων απόσβεσης είναι σκοτεινές γραμμές που καλούνται ισόχρωμες, δηλαδή δημιουργείται το δίκτυο των ισοχρώμων.

Εάν ο αναλυτής στραφεί κατά 90° , δηλαδή ο άξονας του αναλυτή γίνει παράλληλος προς τον άξονα του πολωτή, τότε το πολωσισκόπιο γίνεται φωτεινού πεδίου και το διερχόμενο φως είναι:

$$\begin{aligned} y &= y_{T\delta} + y_{B\delta} = \frac{\sqrt{2}}{2} (y_T + y_B) = \frac{1}{2} \alpha \cos\delta [\cos(\omega t + \beta) + \cos\omega t] \\ &= \frac{1}{2} \alpha \cos\delta 2\cos\frac{\omega t + \beta + \omega t}{2} \cos\frac{\omega t + \beta + \omega t}{2} \\ &= \alpha \cos\delta \cos\left(\omega t + \frac{\beta}{2}\right) \cos\frac{\beta}{2} \end{aligned} \quad (3.66)$$

Η ένταση της διερχομένης αυτής κύμανσης είναι ανάλογη του τετραγώνου του πλάτους της, δηλαδή:

$$I = 2\alpha^2 \cos^2 \delta \cos^2 \frac{\beta}{2} \quad (3.67)$$

Η ένταση αυτή μηδενίζεται όταν:

$$\cos^2 \frac{\beta}{2} = 0 \rightarrow \frac{\beta}{2} = \frac{\pi}{2} + k \frac{\pi}{2}, \text{ με } k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.68)$$

δηλαδή:

$$\frac{\beta}{2\pi} = k + \frac{1}{2} = N + \frac{1}{2} \quad (3.69)$$

Από την σχέση αυτή προκύπτει ότι οι λαμβανόμενοι κροσσοί είναι ισόχρωμοι ημιακεραίας τάξεως, δηλαδή τάξεως $1/2, 3/2, 5/2, \dots$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι με το πολωσισκόπιο σκοτεινού πεδίου το δίκτυο των ισοχρώμων είναι ακεραίας τάξεως, $N = 1, 2, 3, \dots$

Η σχέση της διαφοράς των κυρίων τάσεων με την τάξη των κροσσών του δικτύου των ισοχρώμων είναι για το πολωσισκόπιο σκοτεινού πεδίου (Papadopoulos [1]):

$$|\sigma_1 - \sigma_2| = N \frac{f_\sigma}{d} \quad (3.70)$$

3.9 Πειραματικός Υπολογισμός της Φωτοτασεοπτικής Σταθεράς

Η φωτοτασεοπτική σταθερά του υλικού υπολογίζεται πειραματικά. Για αυτό κατασκευάζεται δοκίμιο από το υλικό του οποίου η φωτοτασεοπτική σταθερά ζητείται και ακολούθως γίνεται πείραμα απλού εφελκυσμού ή θλίψης ή πείραμα καθαρής κάμψης (Papadopoulos [1]).

Στο πείραμα του απλού εφελκυσμού υπάρχει μόνο μία κύρια τάση κατά την διεύθυνση της φόρτισης. Επομένως, η ισόχρωμη που αναπτύσσεται είναι παράλληλη προς την διεύθυνση φόρτισης. Τότε σύμφωνα με την (3.70), προκύπτει:

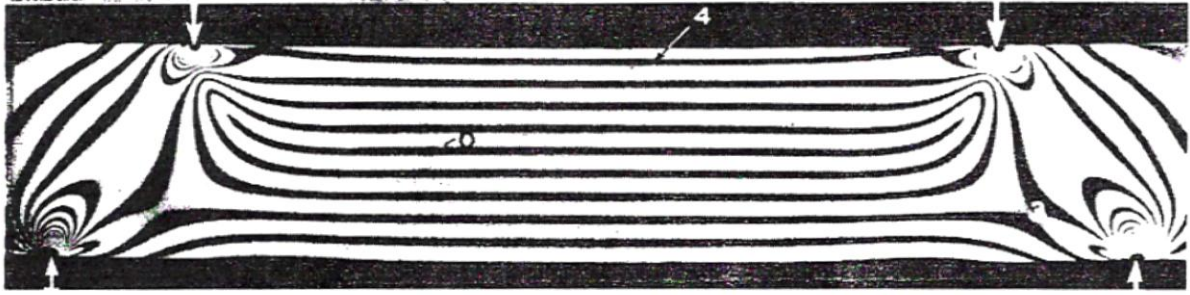
$$\sigma = N \frac{f_{\sigma}}{d} \rightarrow \frac{P}{wd} = N \frac{f_{\sigma}}{d} \rightarrow f_{\sigma} = \frac{1}{N} \left(\frac{P}{w} \right) \quad (3.71)$$

όπου P είναι το φορτίο και w το πλάτος του χρησιμοποιημένου δοκιμίου. Η φωτοτασεοπτική σταθερά υπολογίζεται από την κλίση της καμπύλης $(P/w) = f(N)$. Για αυτό, το δοκίμιο φορτίζεται στην ελαστική περιοχή και για κάθε φορτίο (P/w) μετράται η εμφάνιση των κροσσών N ως προς ένα σημείο αναφοράς πάνω στο δοκίμιο. Στη συνέχεια, σχεδιάζεται η καμπύλη $(P/w) = f(N)$, η κλίση της οποίας δίνει την σταθερά f .

Στο πείραμα της καθαρής κάμψης, υπάρχει μία μόνο κύρια τάση κατά την διεύθυνση του άξονα του δοκιμίου. Ως εκ τούτου, οι εμφανιζόμενοι ισόχρωμοι κροσσοί είναι παράλληλοι προς τον άξονα του δοκιμίου. Ο κροσσός (μαύρος) που συμπίπτει με τον ουδέτερο άξονα του δοκιμίου είναι τάξης $N = 0$ διότι η τάση εκεί είναι μηδέν. Σύμφωνα με την θεωρία της καθαρής κάμψης και την (3.69) προκύπτει:

$$\sigma = \frac{M}{I} y = N \frac{f_{\sigma}}{d} \quad (3.72)$$

Σύμφωνα με την (3.72), γνωρίζοντας την τάση σ σε απόσταση y από τον ουδέτερο άξονα του δοκιμίου και μετρώντας τον αριθμό των κροσσών από τον ουδέτερο άξονα μέχρι την απόσταση y , υπολογίζεται η φωτοτασεοπτική σταθερά f_{σ} . Το δίκτυο των ισοχρώμων σε δοκίμιο καθαρής κάμψης φαίνεται στο Σχ. 3.13.



Σχήμα 3.13: Το δίκτυο των ισοχρώμων σε δοκίμιο καθαρής κάμψης

Επίσης, είναι εύκολο να υπολογιστεί η φωτοτασεοπτική σταθερά f_σ από την αντιδιαμετρική θλίψη κυκλικού δίσκου διαμέτρου D και πάχους d . Η εντατική κατάσταση στο κέντρο του δίσκου δίνει διαφορά κυρίων τάσεων $\sigma_1 - \sigma_2$:

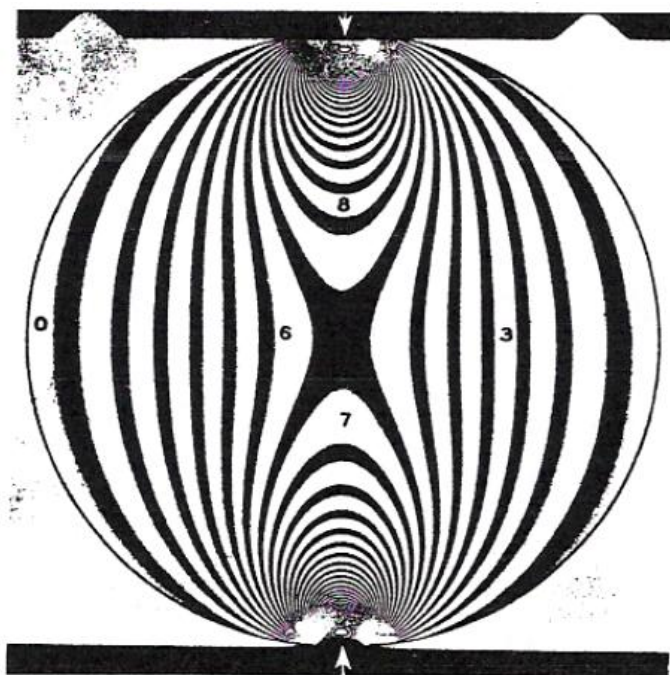
$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{8P}{\pi d D}$$

όπου P το θλιπτικό φορτίο. Η σχέση αυτή σε συνδυασμό με την (3.69), δίνει:

$$\frac{8P}{\pi d D} = N \frac{f_\sigma}{d} \rightarrow f_\sigma = \frac{1}{N} \frac{8P}{D} \quad (3.73)$$

Από την (3.73) προκύπτει ότι υπολογίζοντας την τάξη N της ισοχρώμου στο κέντρο του δίσκου, υπολογίζεται εύκολα η φωτοτασεοπτική σταθερά f_σ του υλικού του κυκλικού δίσκου. Το δίκτυο των ισοχρωμων σε κυκλικό δίσκο φαίνεται στο Σχ. 3.14.

Ο καθορισμός της τάξης των ισοχρώμων κροσσών γίνεται με την παρακολούθηση της εξέλιξης του δικτύου μετά της φόρτισης. Σε περιοχές όπου από την θεωρία ελαστικότητας είναι γνωστό ότι η τάση είναι μηδέν και υπάρχει κροσσός, τότε ο κροσσός αυτός είναι μηδενικής τάξης, $N = 0$. Από τον κροσσό αυτό ξεκινά η αρίθμηση (τάξη) των κροσσών. Επίσης, ένα άλλο σημείο αφετηρίας καθορισμού της τάξης των κροσσών είναι τα ισότροπα σημεία τα οποία εμφανίζονται στο δίκτυο των ισοχρώμων ως σκοτεινά σημεία και αποτελούν εκφυλισμένο κροσσό μηδενικής τάξης. Οι κροσσοί μηδενικής τάξης παραμένουν μαύροι στο έγχρωμο δίκτυο των ισοχρώμων που λαμβάνεται με λευκό φως. Έτσι, χρησιμοποιώντας λευκό φως, καθορίζονται πλήρως οι κροσσοί μηδενικής τάξης και τα ισότροπα σημεία.



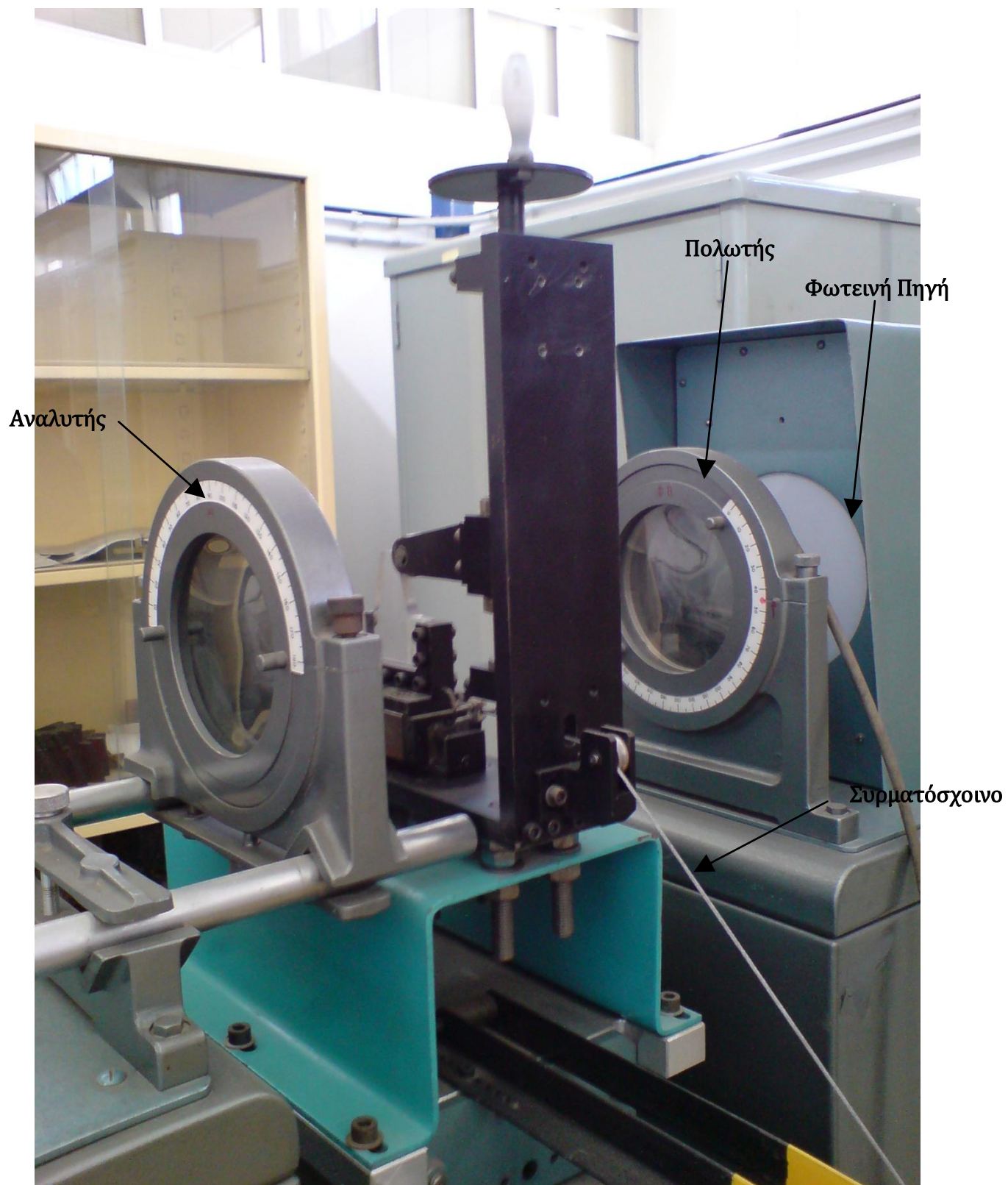
Σχήμα 3.14: Το δίκτυο των ισοχρώμων σε κυκλικό δίσκο υπό αντιδιαμετρική θλίψη

3.10 Η Διάταξη Φόρτισης Δοκιμών Οδόντων του Εργαστηρίου Στοιχείων Μηχανών του Ε.Μ.Π.

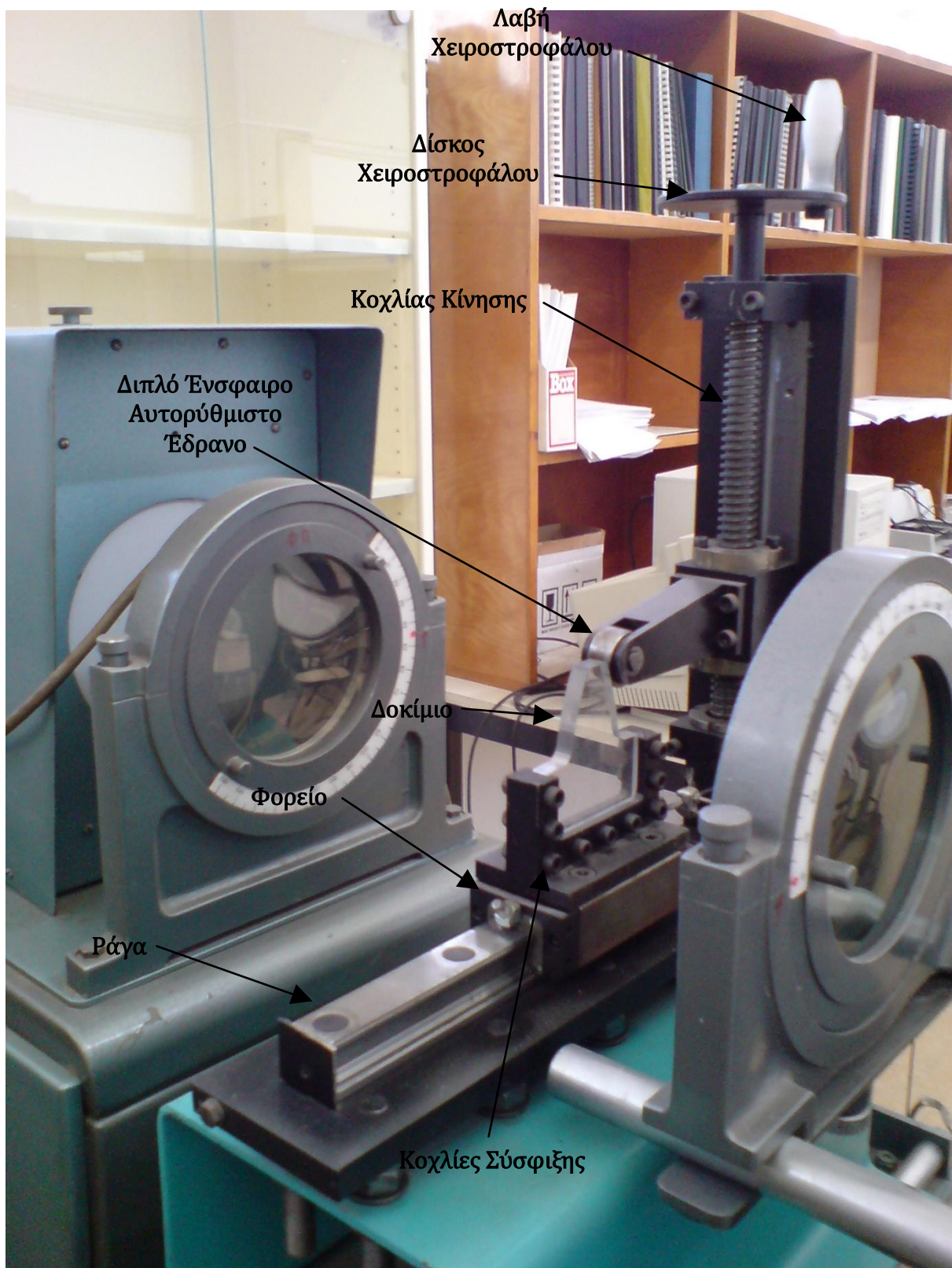
Το κυκλικό πολωσισκόπιο σκοτεινού πεδίου του Εργαστηρίου Στοιχείων Μηχανών, Σχ. 3.15 & 3.16, είναι αγγλικής κατασκευής του εργοστασίου SHARPLES και διαθέτει τον ακόλουθο εξοπλισμό:

- Φωτεινή πηγή η οποία μπορεί να είναι λευκού φωτός (λυχνία πυρακτώσεως ή λυχνία Hg) ή μονοχρωματικού φωτός (λυχνία Na).
- Πολωτή, αναλυτή και δύο πλάκες τετάρτου μήκους τύπου Polaroid. Όλα τα πολωτικά σώματα έχουν διάμετρο 125mm, φέρουν στην περιφέρειά τους διαιρέσεις σε μοίρες και έχουν την δυνατότητα να στραφούν στο επίπεδό τους το καθένα ξεχωριστά.
- Ιδιοσυσκευή φόρτισης δοκιμών οδόντων οδοντωτών τροχών με βάρος, Σχ. 3.15 & 3.16. Η αρχή λειτουργίας της ιδιοσυσκευής φόρτισης είναι η ακόλουθη:

Το δοκίμιο τοποθετείται πάνω στη σταθερή αρπάγη και συσφίγγεται στη θέση του με το κινητό τμήμα της αρπάγης. Το σύστημα το αρπαγών μπορεί να κινείται ευθύγραμμα επί του ενσφαιρού συστήματος γραμμικής κίνησης (φορείο και ράγα). Στο άκρο της διαδρομής υπάρχει ο βραχίονας άσκησης φορτίου ο οποίος φέρει στο ελεύθερο άκρο του το διπλό ένσφαιρο αυτορύθμιστο έδρανο. Η ρύθμιση του ύψους της άσκησης του φορτίου γίνεται με τη βοήθεια του κοχλίας κίνησης ο οποίος εδράζεται ισοστατικά με μία σταθερή και μία ελεύθερη έδραση και παίρνει την κίνησή του με τη χειροστροφάλου (δίσκος και λαβή χειροστροφάλου). Ο κοχλίας κίνησης έχει μηδενική αξονική χάρη εξ' αιτίας του συστήματος των διπλών ρυθμιζόμενων περικοχλίων. Η ολίσθηση και η οδήγηση του κατακόρυφου άξονα επί της κατακόρυφης πλάκας επιτυγχάνεται με τη σφηνοειδή διαμόρφωση στο κάτω άκρο του φορείου ολίσθησης. Η άσκηση της οριζόντιας συνιστώσας του φορτίου σε οποιαδήποτε θέση επί της κατατομής του δοκιμίου γίνεται με την βοήθεια συρματόσχοινου και αναρτώμενων βαρών. Για την αλλαγή της διεύθυνσης του βάρους σε οριζόντια χρησιμοποιείται τροχαλία η οποία εδράζεται με τον άξονα της στη βάση. Τέλος πρέπει να αναφερθεί ότι η οριζόντια πλάκα και κατά συνέπεια όλη η συσκευή μπορεί να ρυθμίζεται καθ' ύψος και να ευθυγραμμίζεται πάνω στη βάση στήριξης με τη βοήθεια των ντιζών και των περικοχλίων τους.

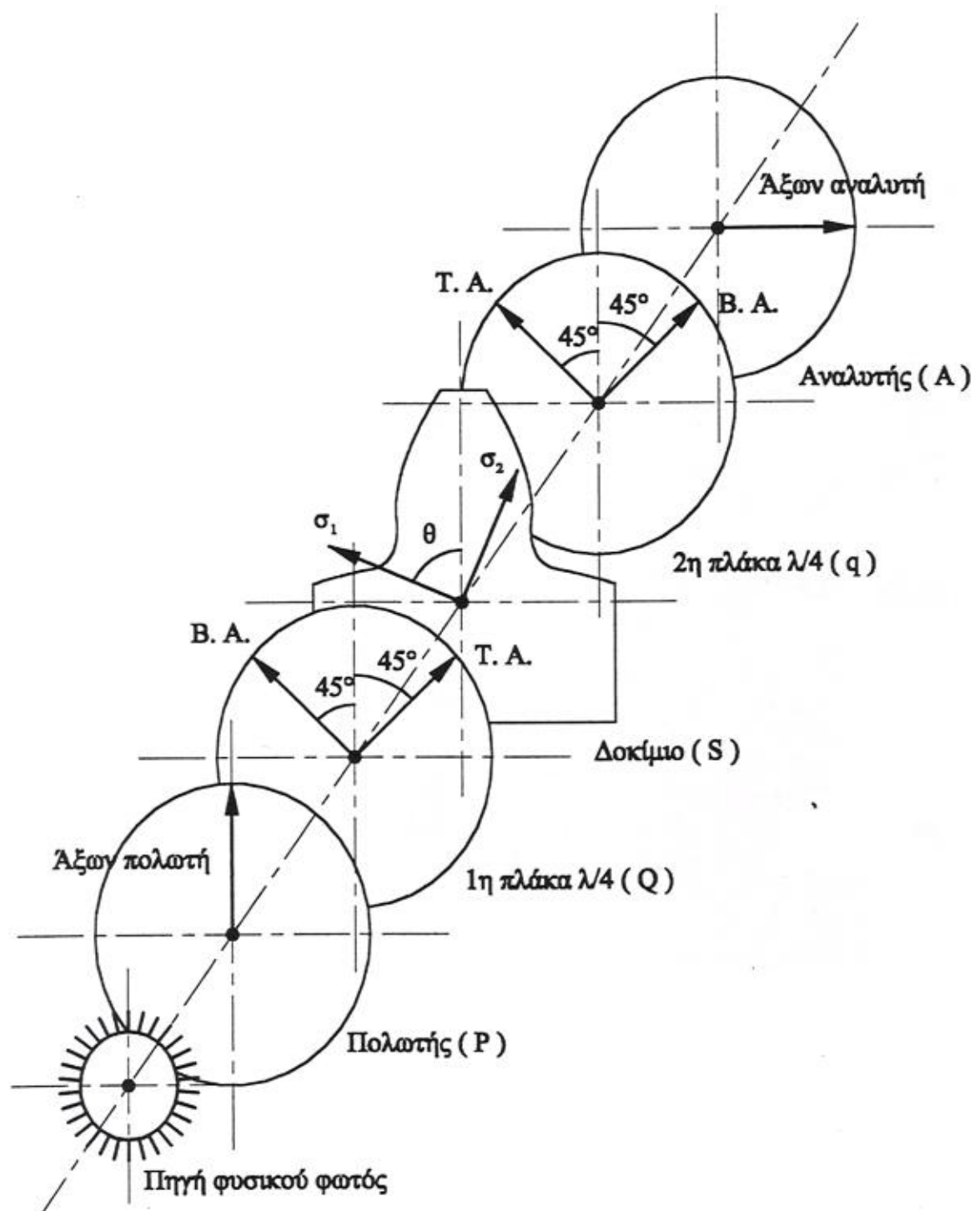


Σχήμα 3.15: Πολωσισκόπιο και συσκευή φόρτισης δοκιμών φωτοελαστικότητας



Σχήμα 3.16: Πολωσισκόπιο και συσκευή φόρτισης δοκιμών φωτοελαστικότητας

Η διάταξη του παραπάνω πολωσισκοπίου παρατίθεται στο παρακάτω Σχ. 3.17 για λόγους πληρότητας:



Σχήμα 3.17: Διάταξη κυκλικού πολωσισκοπίου

3.11 Προετοιμασία των Δοκιμών

Τα δοκίμια είναι κατασκευασμένα από ειδικό φωτοευαίσθητο υλικό PSM – 1 της εταιρείας Measurements Group, Inc., Photolastic Division. Πρόκειται για πολυκαρβονικό πλαστικό υλικό το οποίο ενδείκνυται για πειράματα επίπεδης φωτοελαστικότητας στην ελαστική περιοχή διότι παρουσιάζει εξαίρετη κατεργασιμότητα, έχει υψηλό μέτρο ελαστικότητας, υψηλή οπτική ευαισθησία και κυρίως δεν αναπτύσσει τάσεις λόγω απορρόφησης υγρασίας, γεγονός που καθιστά δυνατή την κοπή του με χρήση ψυκτικού υγρού αποφεύγοντας έτσι την ανάπτυξη παραμενουσών τάσεων στα όρια. Οι ονομαστικές μηχανικές – οπτικές ιδιότητες του υλικού (για λευκό φως) όπως δίνονται από τον κατασκευαστή είναι οι εξής:

- Μέτρο ελαστικότητας: $E = 360\text{kpsi} = 2.5\text{GPa}$
- Τασεοπτική σταθερά: $f_{\sigma} = 40\text{psi/fringe/in} = 7.0\text{kPa/fringe/m}$
- Λόγος Poisson: $\nu = 0.38$

Το αρχικό ακατέργαστο υλικό που χρησιμοποιήθηκε ήταν φύλλο ονομαστικών διαστάσεων 20in x 20in (508mm x 508mm) και πάχους 0.375in (9.5mm) με διπλή αυτοκόλλητη επικάλυψη το οποίο είχε προηγουμένως υποστεί ανόπτηση για την εξάλειψη τυχόν παραμενουσών τάσεων. Το πραγματικό πάχος του φύλλου μετρήθηκε σε διάφορες θέσεις και βρέθηκε διαφορετικό από το ονομαστικό και ίσο με 9.25mm.

Τα δοκίμια που παρήχθησαν είναι ελεύθερα παραμενουσών τάσεων και τυχόν άλλων σφαλμάτων κατασκευής και η διαδικασία κατασκευής τους είναι η ακόλουθη:

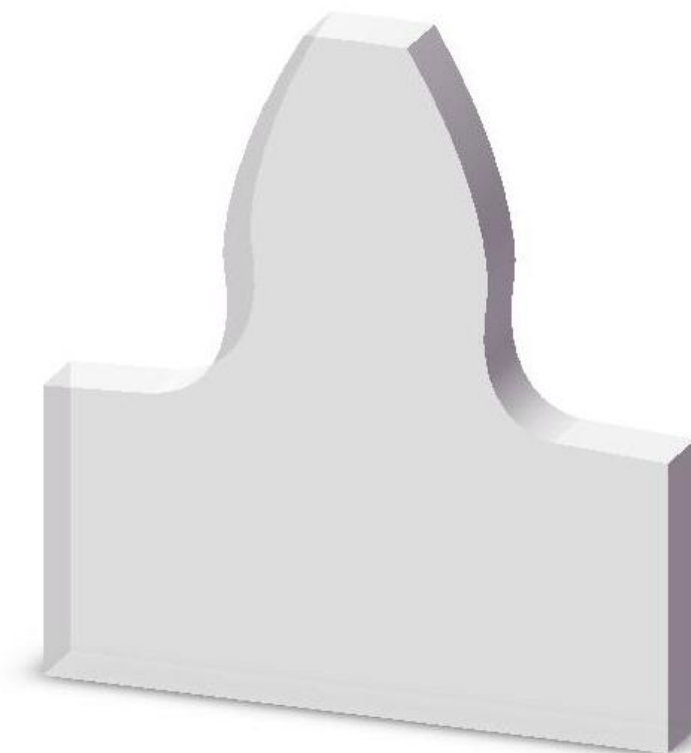
1. Κοπή τετραγωνικών τεμαχίων διαστάσεων 80mm x 95mm με πριονοκορδέλα. Ψύξη με εκτόξευση πεπιεσμένου αέρα.
2. Τετραγωνισμός των τεμαχίων και τελική κοπή διαστάσεων – ανοχών σε συμβατική φρέζα. Κοπτικό εργαλείο 4-φτερο κονδύλι Ø16 HSS, ταχύτητα κοπής 1000rpm με πρόωση 300mm/min. Υγρό κοπής σαπουνέλαιο.
3. Τοποθέτηση τεμαχίου επί ιδιοσυσκευής σε κέντρο κατεργασιών CNC OKUMA VX40. Κοπή του δοκιμίου με εργαλείο 4-φτερο κονδύλι carbide Ø6 και υγρό σαπουνέλαιο στις ακόλουθες φάσεις κατεργασίας:

- a. Ξεχόνδρισμα με 3500rpm και πρόωση 800mm/min
- b. Ημιφινίρισμα με βάθος κοπής 0.1mm, ταχύτητα 3500rpm και πρόωση 800mm/min
- c. Φινίρισμα με βάθος κοπής 0.05mm, ταχύτητα 4000rpm και πρόωση 1000mm/min.

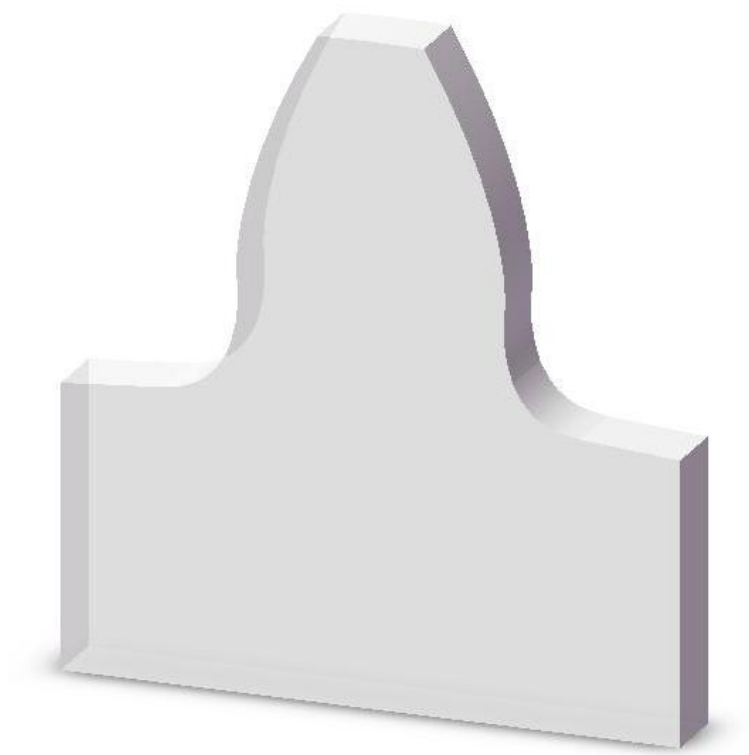
Τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των πέντε (5) συνολικά δοκιμών που κατασκευάστηκαν, Σχ. 3.18 έως 3.22, δίνονται στον παρακάτω Πίν. 3.1:

A/A	Κωδικός	Περιγραφή	z	m (mm)	b (mm)
1	15N	Κανονικός τροχός με 15 οδόντες	15	20	9.25
2	18N	Κανονικός τροχός με 18 οδόντες	18	20	9.25
3	22N	Κανονικός τροχός με 22 οδόντες	22	20	9.25
4	28N	Κανονικός τροχός με 28 οδόντες	28	20	9.25
5	50N	Κανονικός τροχός με 50 οδόντες	50	20	9.25

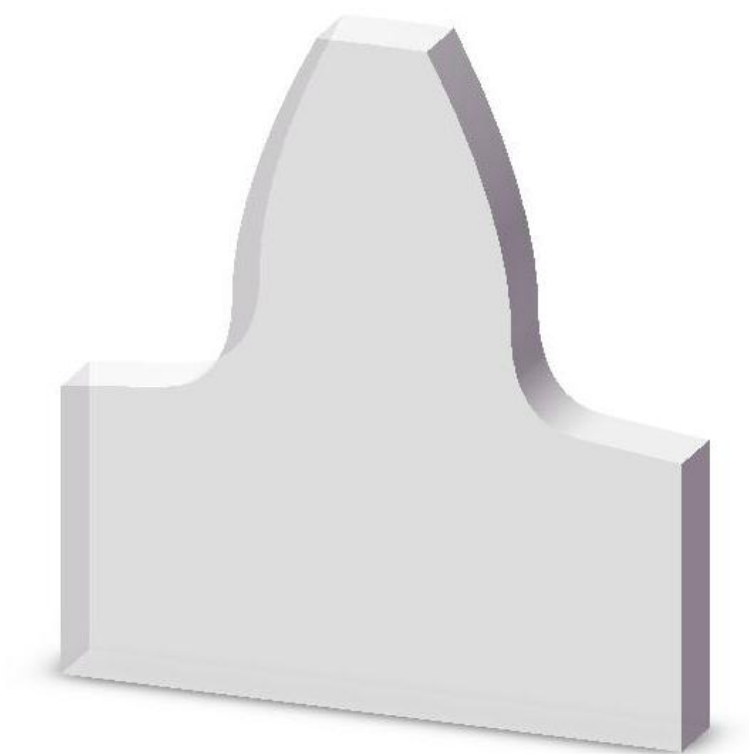
Πίνακας 3.1: Γεωμετρικά χαρακτηριστικά δοκιμών



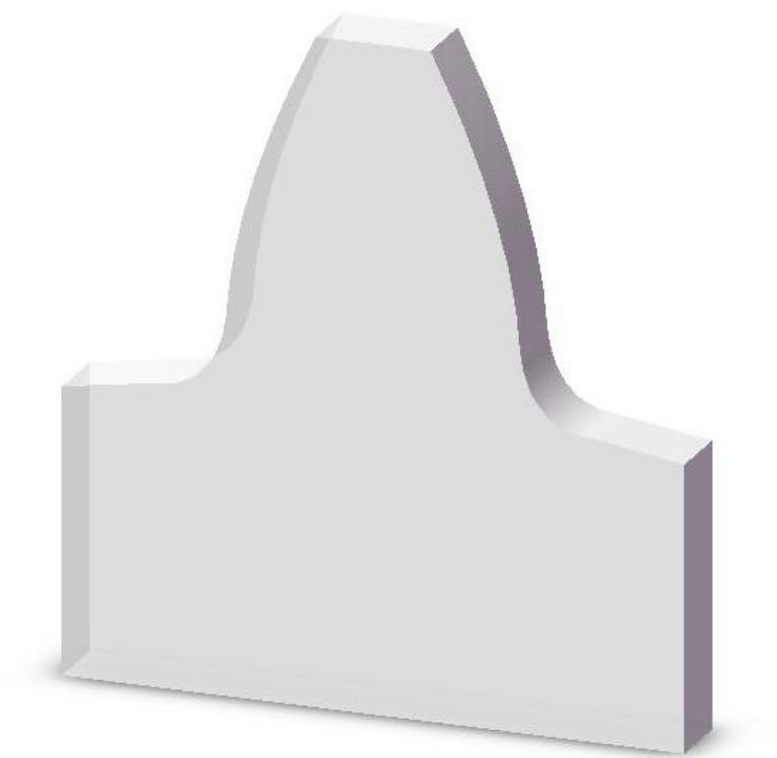
Σχήμα 3.18: Δοκίμιο κανονικού τροχού 15 οδόντων



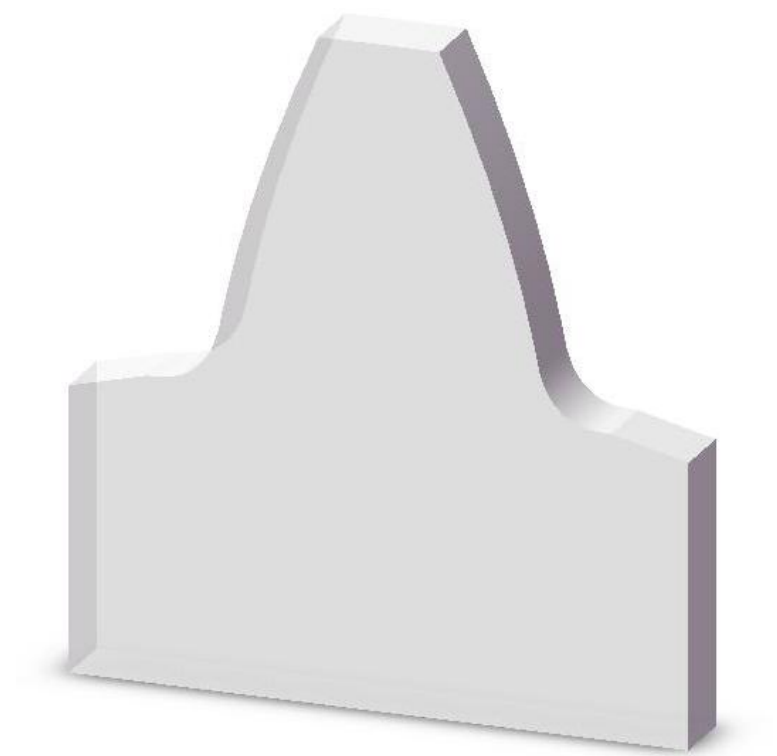
Σχήμα 3.19: Δοκίμιο κανονικού τροχού 18 οδόντων



Σχήμα 3.20: Δοκίμιο κανονικού τροχού 22 οδόντων

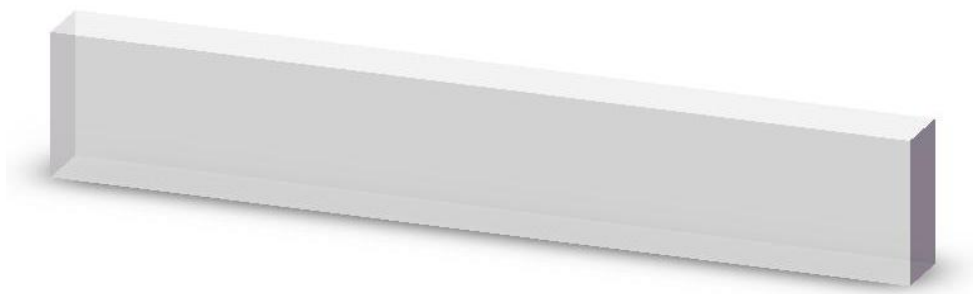


Σχήμα 3.21: Δοκίμιο κανονικού τροχού 28 οδόντων



Σχήμα 3.22: Δοκίμιο κανονικού τροχού 50 οδόντων

Επίσης κατασκευάστηκαν και 4 πρισματικά δοκίμια διαστάσεων 120x20x9.25mm³, Σχ. 3.23, προκειμένου να χρησιμοποιηθούν για τον ακριβή προσδιορισμό του μέτρου ελαστικότητας και της τασεοπτικής σταθεράς του υλικού όταν φωτίζεται από μονοχρωματικό φως λυχνίας νατρίου καθώς επίσης και για την εκτίμηση των διακυμάνσεων των παραπάνω τιμών εντός του ιδίου υλικού.



Σχήμα 3.23: Πρισματικό δοκίμιο

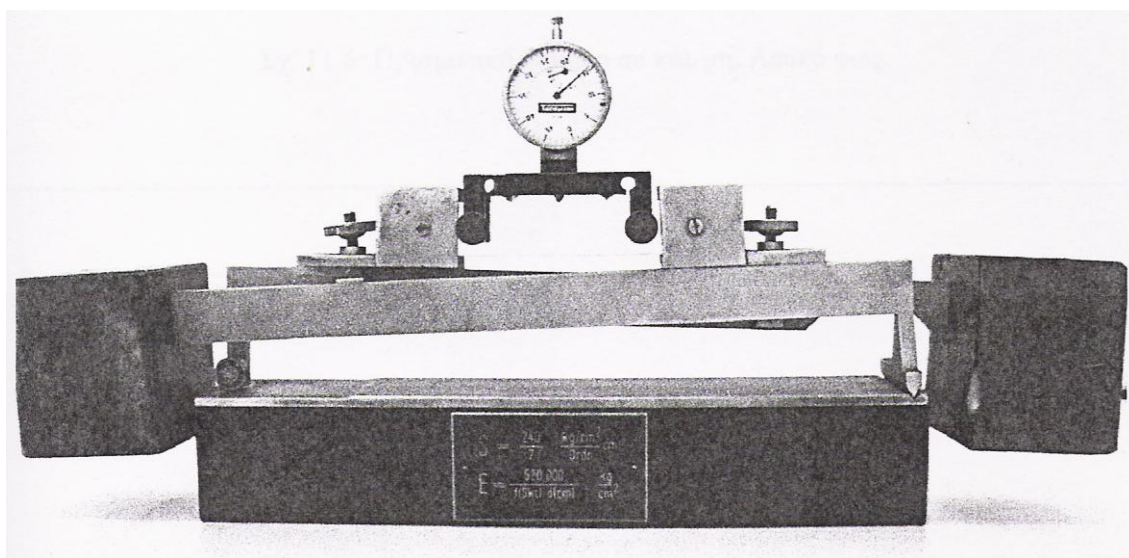
3.12 Πειραματικά Αποτελέσματα

Τα δοκίμια τοποθετούνται επί του ειδικού φορείου της ιδιοσυσκευής φόρτισης και ασφαλίζονται με τη βοήθεια κοχλιών. Στη συνέχεια τοποθετείται ένα μικρό βάρος 5 lb και το δοκίμιο φορτίζεται. Με τη βοήθεια του κοχλία ο μηχανισμός άσκησης της δύναμης τοποθετείται στο σημείο εκείνο της κατατομής που αντιστοιχεί στο HPSTC (βλ. 2.8) του οδόντος και εκεί αυξάνουμε σταδιακά το βάρος έως ότου εμφανιστεί υπό μονοχρωματικό φως ένας κροσσός ακεραίας τάξεως στην επικίνδυνη διατομή. Για τη δεδομένη αυτή φόρτιση λαμβάνονται τα εξής στοιχεία:

1. Το βάρος που έχει αναρτηθεί σε lbs.
2. Μία φωτογραφία του δοκιμίου υπό μονοχρωματικό φως νατρίου για τη μέτρηση της τάξης του κροσσού στην επικίνδυνη διατομή
3. Μία φωτογραφία του δοκιμίου υπό λευκό φως για την εύρεση του κροσσού μηδενικής τάξης.

3.12.1 Πειραματικός Προσδιορισμός του Μέτρου Ελαστικότητας και της Τασεοπτικής Σταθεράς των Δοκιμίων

Πριν από την εκτέλεση των κυρίων πειραμάτων επί των δοκιμών των οδόντων των οδοντωτών τροχών, εκτελέστηκαν πειράματα επί των πρισματικών δοκιμών προκειμένου να μετρηθούν το μέτρο ελαστικότητας του υλικού και η τασεοπτική σταθερά του. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιήθηκε η πειραματική διάταξη που φαίνεται στο Σχ. 3.22 και που περιλαμβάνει ένα σύστημα βαρών και μοχλών ώστε το τοποθετούμενο δοκίμιο να υπόκειται σε απλή κάμψη. Επί του προς μέτρηση δοκιμίου προσαρμόζεται κάθε φορά η γέφυρα με το μετρητικό ρολόι που εικονίζεται στο Σχ. 3.22. Αμέσως μετά την τοποθέτηση του δοκιμίου στη συσκευή, προσαρμόζεται και δένεται πάνω σ' αυτό η γέφυρα που προαναφέρθηκε και μηδενίζεται η ένδειξη του ρολογιού. Κατόπιν, χαλαρώνονται οι κοχλίες και το δοκίμιο φορτίζεται με συγκεκριμένη ροπή, οπότε διαβάζεται η ένδειξη του ρολογιού σε 0.01mm.



Σχήμα 3.24: Διάταξη μέτρησης μηχανικών – οπτικών ιδιοτήτων του υλικού των δοκιμίων

Το μέτρο ελαστικότητας του υλικού προσδιορίζεται από την εξίσωση:

$$E = \frac{520000}{l \cdot d} \quad (3.74)$$

όπου:

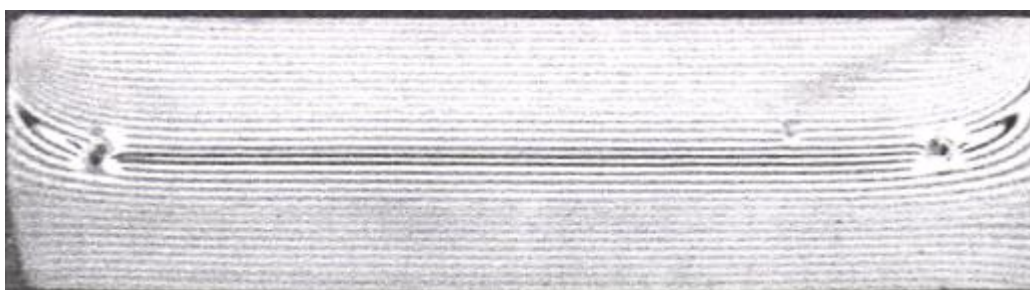
- $E \rightarrow$ το μέτρο ελαστικότητας του υλικού σε kp/cm^2 ,
- $l \rightarrow$ η ένδειξη του μετρητικού ρολογιού σε 0.01mm και
- $d \rightarrow$ είναι το πάχος του υλικού cm .

Όλες οι μετρήσεις που έγιναν στα πρισματικά δοκίμια έδωσαν βέλος κάμψης 0.16mm , οπότε το μέτρο ελαστικότητας υπολογίζεται ίσο με $35135\text{kp}/\text{cm}^2$ ή 3.5GPa , τιμή που είναι κατά 40% μεγαλύτερη από την ονομαστική των 2.5GPa .

Αφού προσδιοριστεί το μέτρο ελαστικότητας του υλικού, στη συνέχεια αφαιρείται η γέφυρα με το μετρητικό ρολόι και η συσκευή μαζί με το δοκίμιο τοποθετείται στο πολωσισκόπιο όπου λαμβάνονται δύο φωτογραφίες, μία σε μονοχρωματικό, Σχ. 3.25, και μία σε λευκό φως, Σχ. 3.26. Στη φωτογραφία που ελήφθη με λευκό φως εντοπίζεται ο κροσσός μηδενικής τάξης ο οποίος έχει και μαύρο χρώμα διότι η τάση σ' αυτόν είναι μηδενική. Στη φωτογραφία με το μονοχρωματικό φως αριθμούνται οι κροσσοί από τον μηδενικής τάξης (ο οποίος βρίσκεται στον ουδέτερο άξονα στο κέντρο του δοκιμίου) προς τα έξω, οπότε και σημειώνεται η τάξη του εξωτερικού κροσσού.



Σχήμα 3.25: Πρισματικό δοκίμιο σε κάμψη – Μονοχρωματικό φως



Σχήμα 3.26: Πρισματικό δοκίμιο σε κάμψη – Λευκό φως

Η τασεοπτική σταθερά για το συγκεκριμένο υλικό και το συγκεκριμένο μήκος κύματος της ακτινοβολίας που χρησιμοποιείται δίνεται από τον τύπο

$$f_{\sigma} = \frac{240}{N} \quad (3.75)$$

όπου:

- $f_{\sigma} \rightarrow$ η τασεοπτική σταθερά σε kp/fringe/cm και
- $N \rightarrow$ η τάξη του εξωτερικού κροσσού συμβολής.

Όλες οι μετρήσεις που έγιναν στα πρισματικά δοκίμια έδωσαν μέγιστη τάξη κροσσού ίση με 17, οπότε η τασεοπτική σταθερά υπολογίζεται ίση με 14.1kp/fringe/cm ή 14.1kPa/fringe/m.

3.12.2 Πειραματικός Προσδιορισμός της Μεγίστης Τάσης

Τα πειράματα που εκτελέστηκαν στα δοκίμια των οδόντων παρουσιάζονται στον ακόλουθο Πίν. 3.2:

A/A Δοκιμής	Δοκίμιο (Τροχός 1)	Τροχός 2	Απόσταση HPSTC από τη βάση του δοκιμίου (mm)
<i>Κανονικοί Τροχοί</i>			
1	15N	18N	72.75
2	18N	15N	72.07
3	15N	22N	72.10
4	22N	15N	70.97
5	15N	28N	71.39
6	28N	15N	69.98
7	15N	50N	69.99
8	50N	15N	68.52
9	18N	22N	70.84
10	22N	18N	70.38
11	18N	28N	70.14

12	28N	18N	69.42
13	18N	50N	68.79
14	50N	18N	67.99
15	22N	28N	69.11
16	28N	22N	68.83
17	22N	50N	67.78
18	50N	22N	67.43
19	28N	50N	66.88
20	50N	28N	66.82

Πίνακας 3.2: Πειράματα δοκιμών - HPSTC

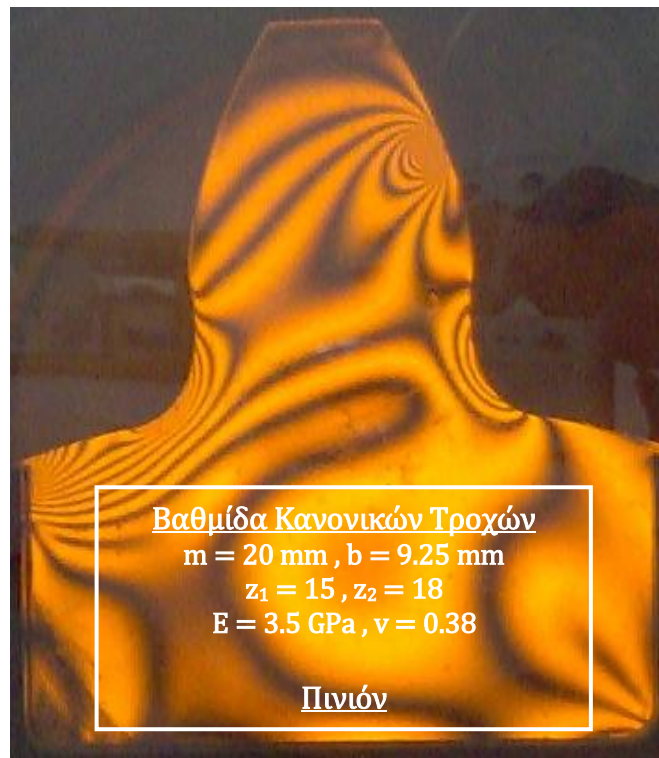
Από το μετρηθέν φορτίο και την τάξη της ισοχρώμου στην επικίνδυνη διατομή, υπολογίζεται η τάση από την (3.69), η οποία έπειτα από αντικατάσταση των τιμών ($b = 0.00925\text{m}$ και $f_\sigma = 1.41\text{kPa/fringe/m}$) λαμβάνει τη μορφή:

$$\sigma = N \frac{f_\sigma}{d} = N \frac{14.1 \text{ kPa/fringe/m}}{0.00925} = 1.524 \cdot N \quad (3.76)$$

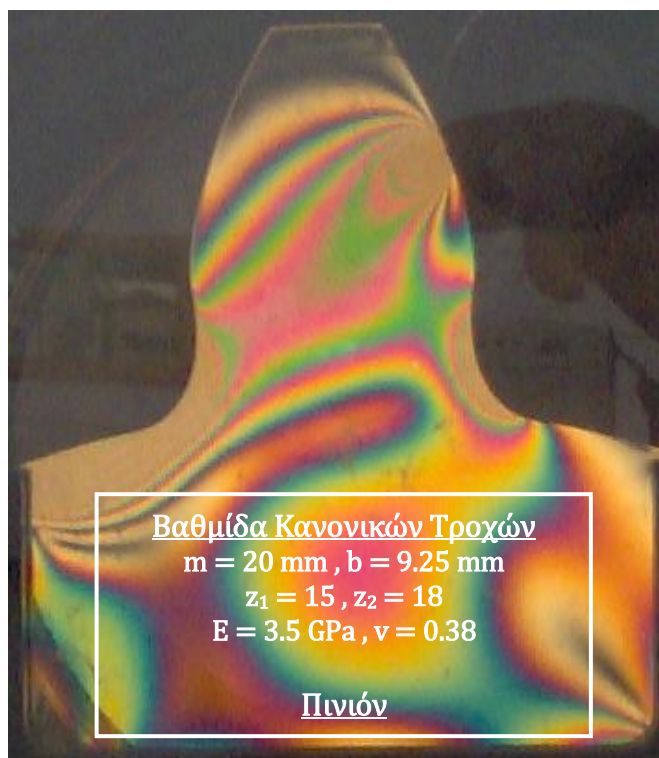
όπου:

- $\sigma \rightarrow$ η αναπτυσσόμενη τάση (MPa)
- $N \rightarrow$ η τάξη του κροσσού συμβολής στην επικίνδυνη διατομή.

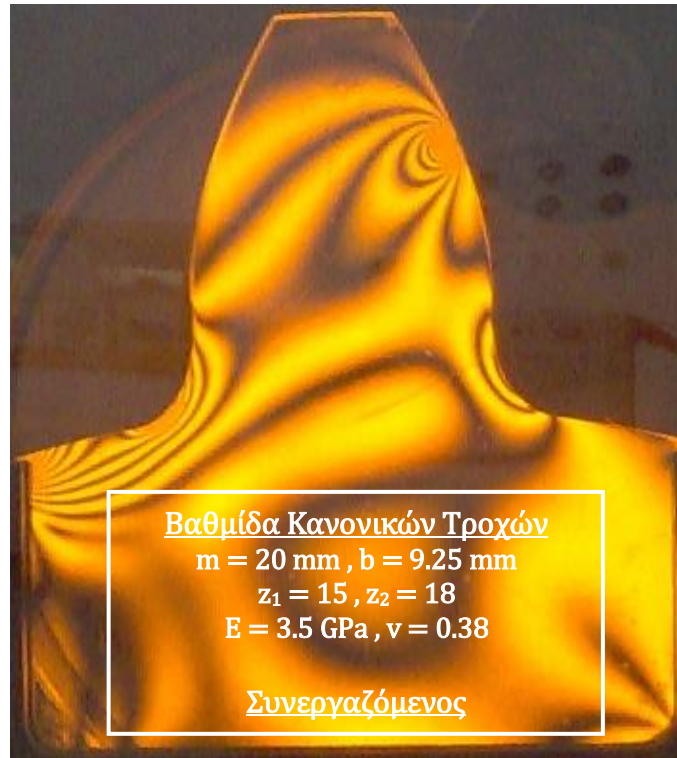
Οι φωτογραφίες των δοκιμών που ελήφθησαν κατά τις δοκιμές δίνονται στα Σχ. 3.27 έως 3.66. Σε κάθε πειραματική μέτρηση αντιστοιχούν δύο φωτογραφίες, από τις οποίες η πρώτη έχει ληφθεί υπό μονοχρωματικό φως ενώ η δεύτερη υπό λευκό φως.



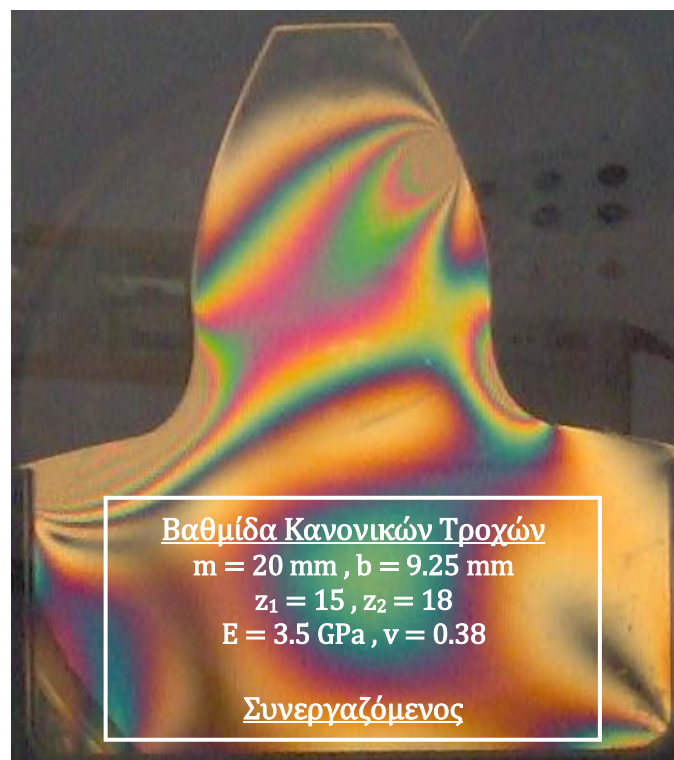
Σχήμα 3.27: Δοκιμή 1 – 15/18 – Πινιόν – Μονοχρωματικό φως



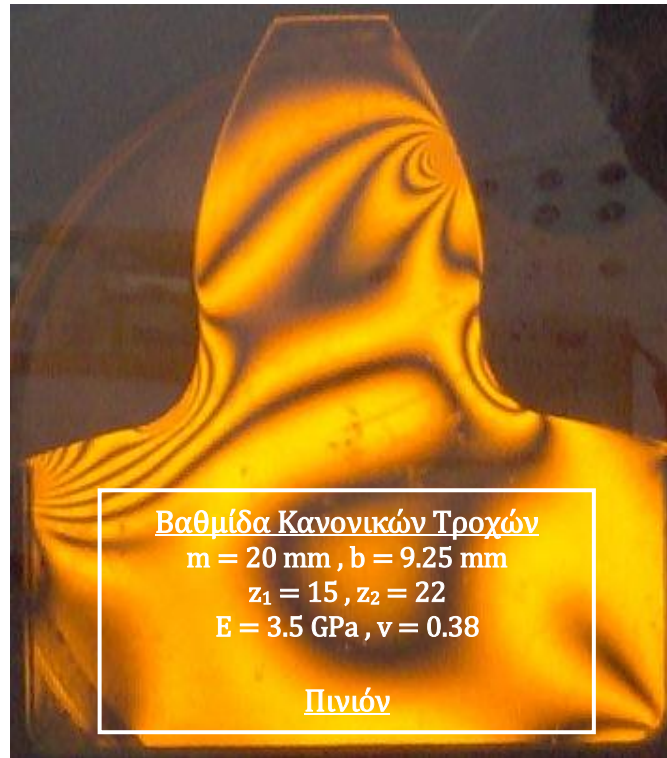
Σχήμα 3.28: Δοκιμή 1 – 15/18 – Πινιόν – Λευκό φως.



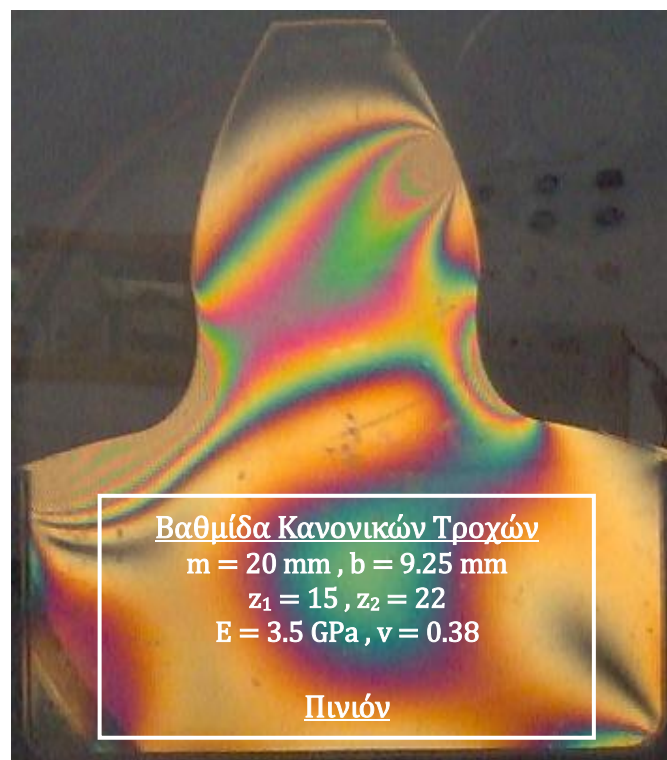
Σχήμα 3.29: Δοκιμή 2 – 15/18 – Συνεργαζόμενος – Μονοχρωματικό φως



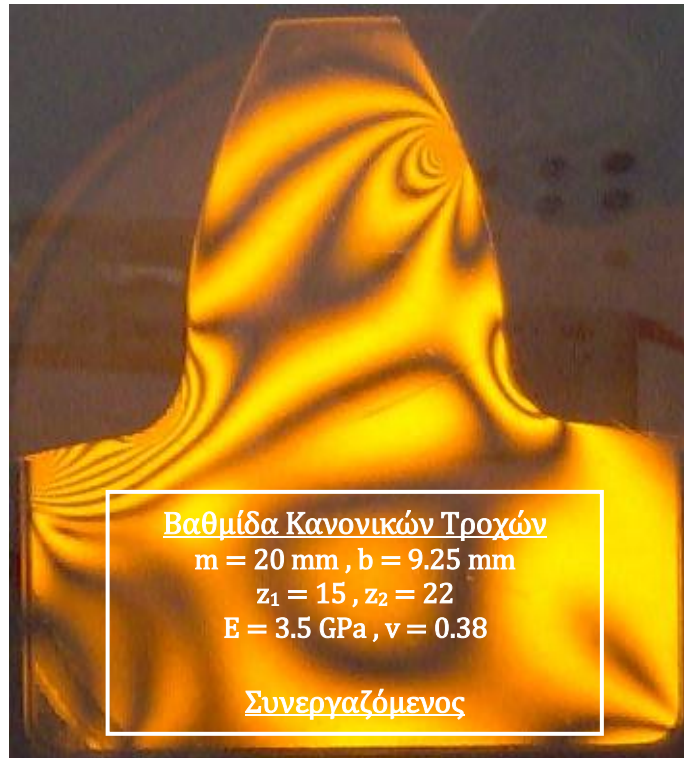
Σχήμα 3.30: Δοκιμή 2 – 15/18 – Συνεργαζόμενος – Μονοχρωματικό φως



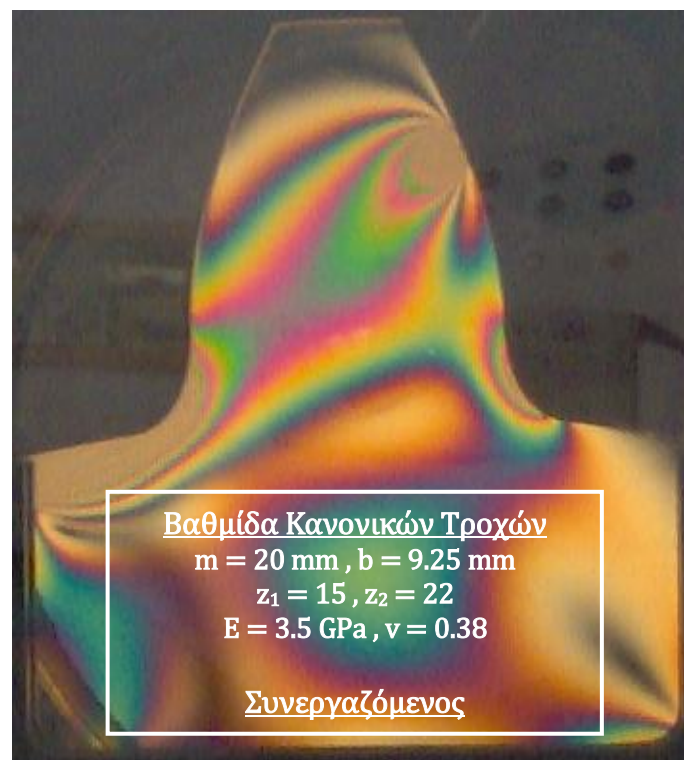
Σχήμα 3.31: Δοκιμή 3 – 15/22– Πινιόν – Μονοχρωματικό φως



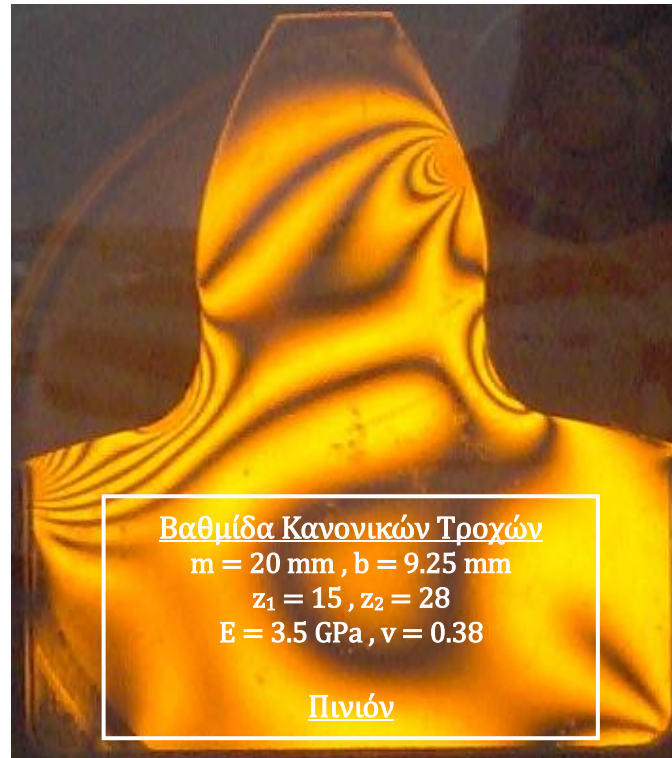
Σχήμα 3.32: Δοκιμή 3 – 15/22– Πινιόν – Λευκό φως



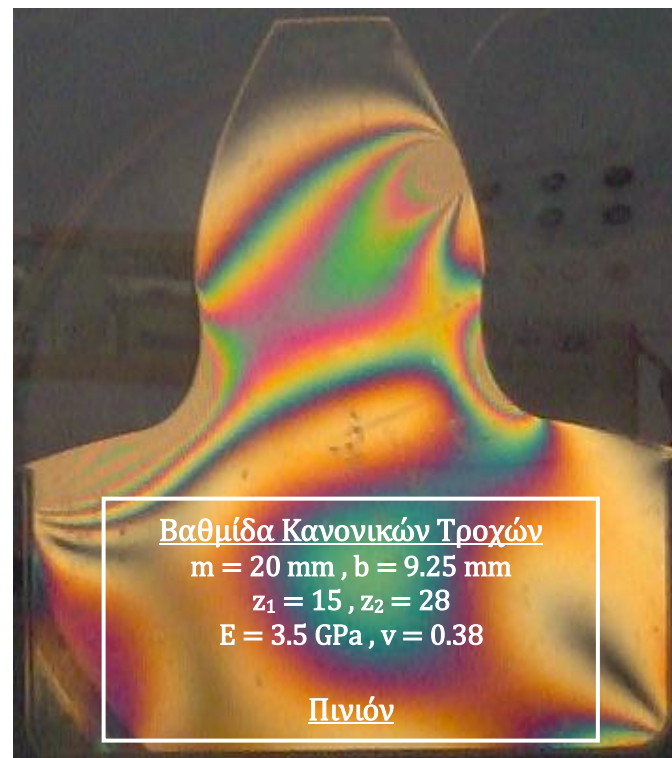
Σχήμα 3.33: Δοκιμή 4 – 15/22 – Συνεργαζόμενος – Μονοχρωματικό φως



Σχήμα 3.34: Δοκιμή 4 – 15/22 – Συνεργαζόμενος – Λευκό φως



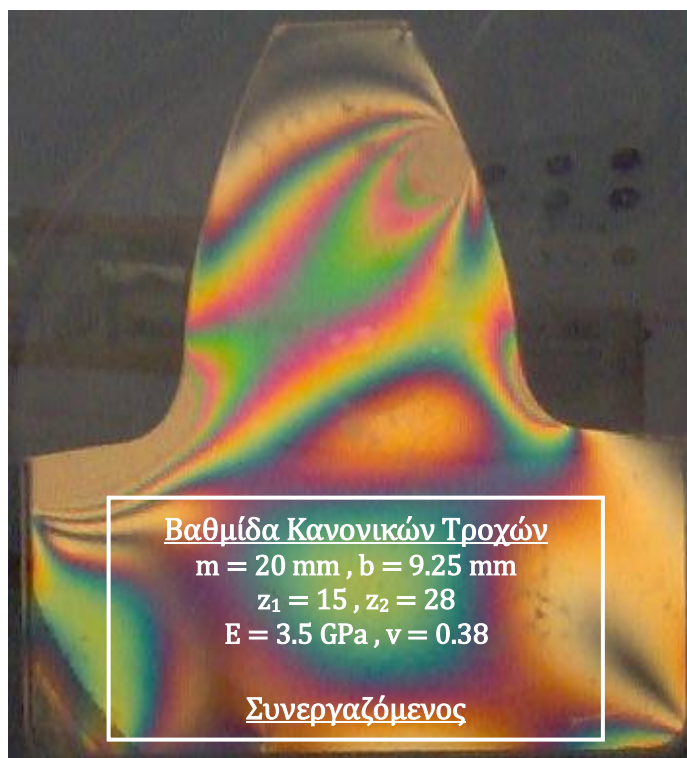
Σχήμα 3.35: Δοκιμή 5 – 15/28 – Πινιόν – Μονοχρωματικό φως



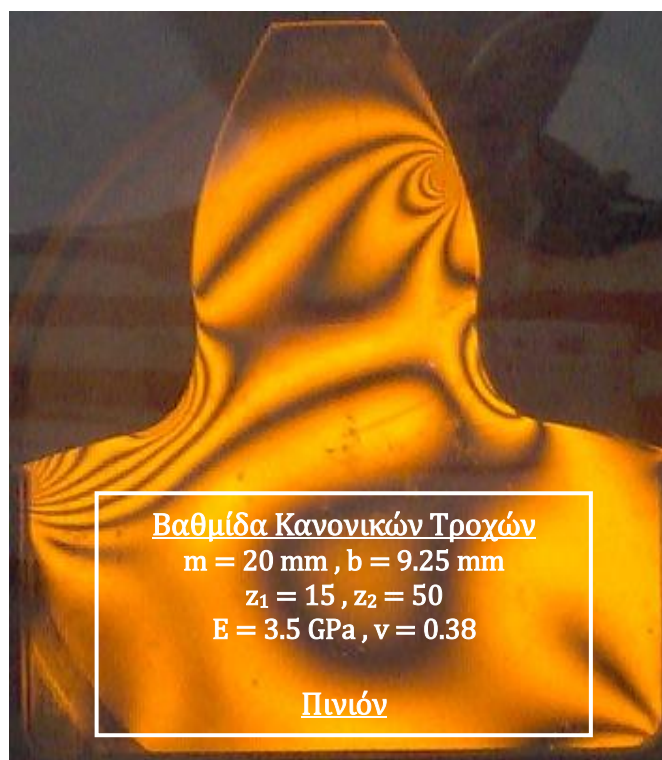
Σχήμα 3.36: Δοκιμή 5 – 15/28 – Πινιόν – Λευκό φως.



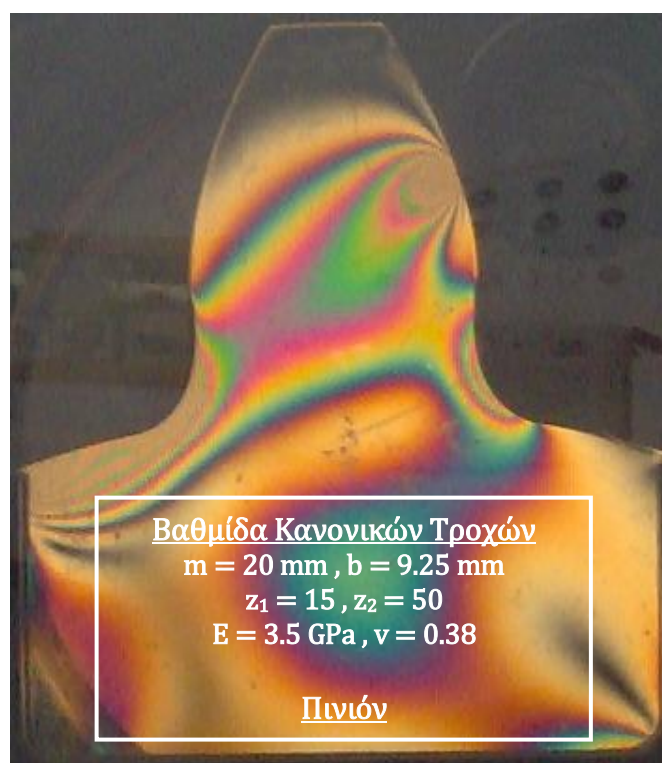
Σχήμα 3.37: Δοκιμή 6 – 15/28 – Συνεργαζόμενος – Μονοχρωματικό φως



Σχήμα 3.38: Δοκιμή 6 – 15/28 – Συνεργαζόμενος – Λευκό φως



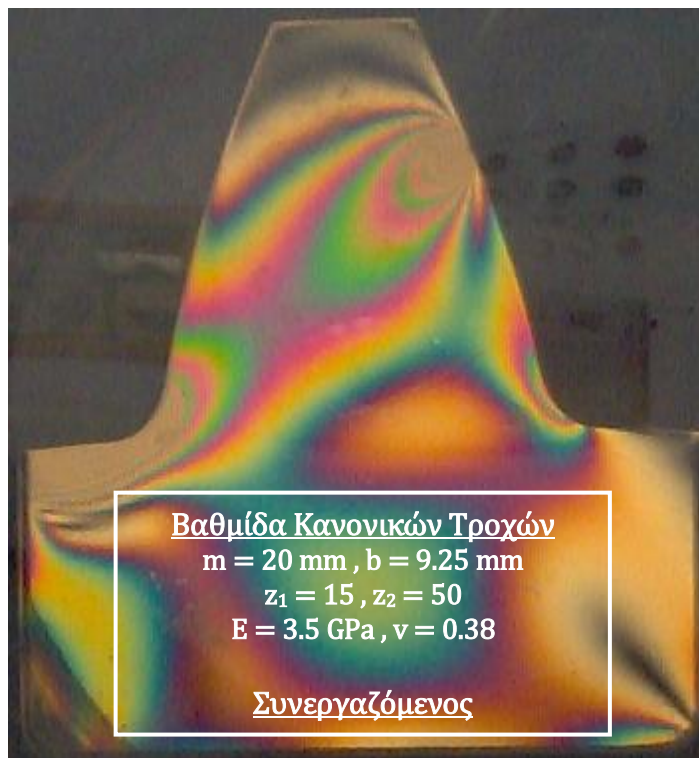
Σχήμα 3.39: Δοκιμή 7 – 15/50 – Πινιόν – Μονοχρωματικό φως



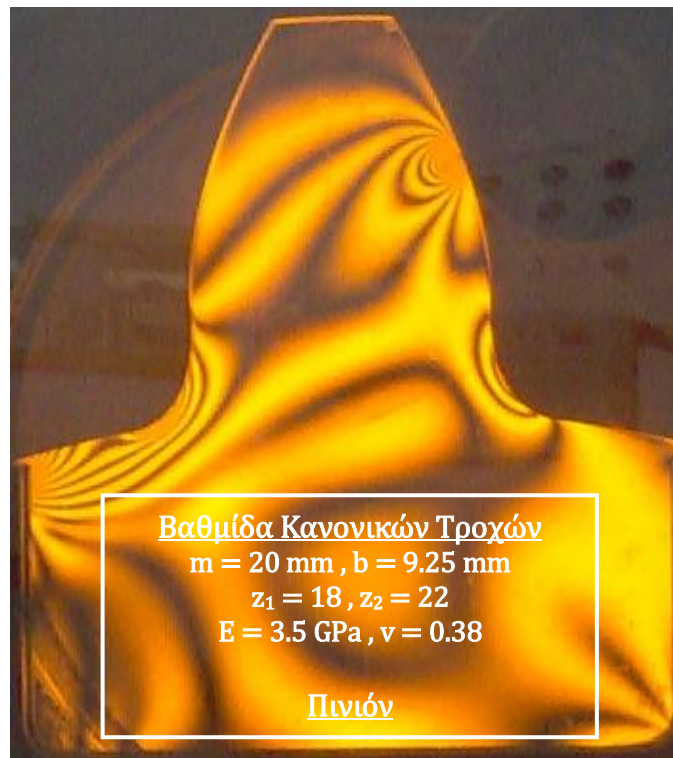
Σχήμα 3.40: Δοκιμή 7 – 15/50 – Πινιόν – Λευκό φως



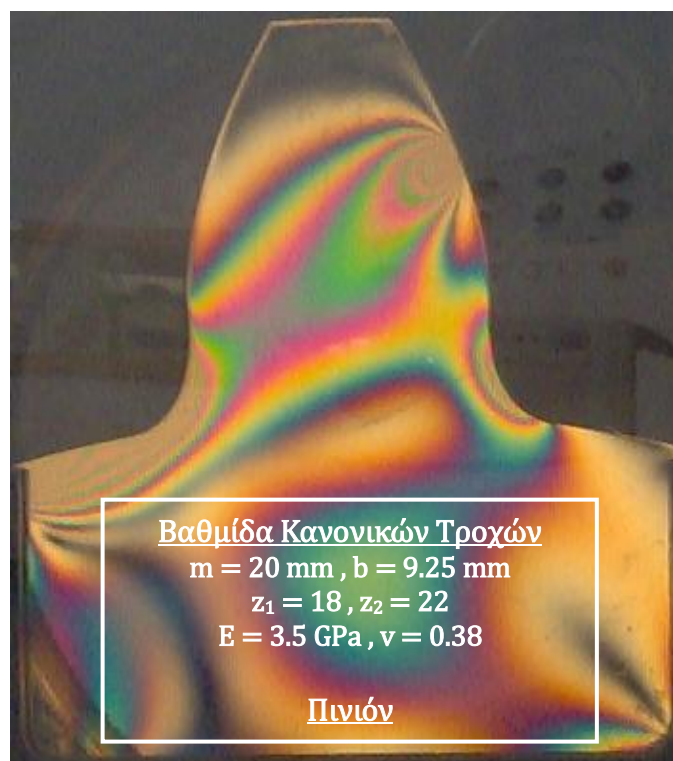
Σχήμα 3.41: Δοκιμή 8 – 15/50 – Συνεργαζόμενος – Μονοχρωματικό φως



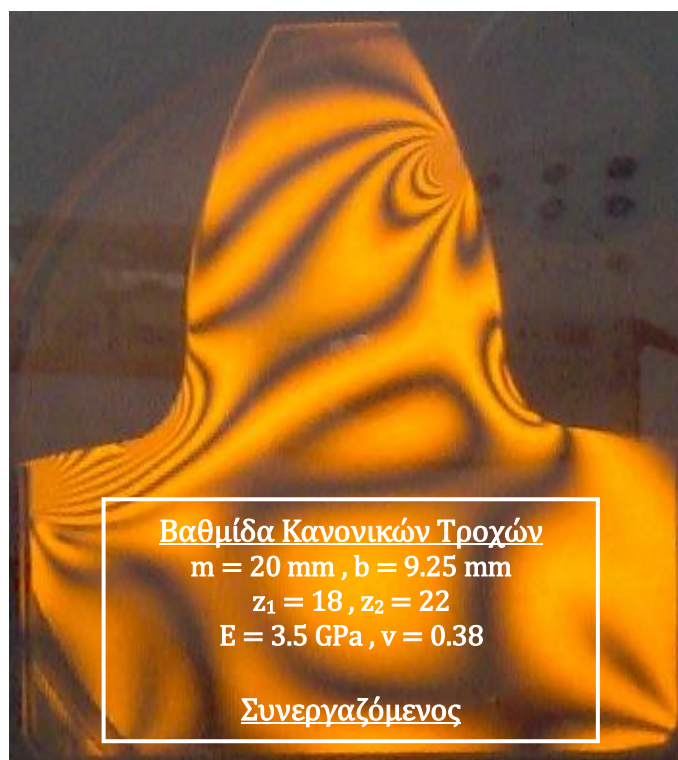
Σχήμα 3.42: Δοκιμή 8 – 15/50 – Συνεργαζόμενος – Λευκό φως



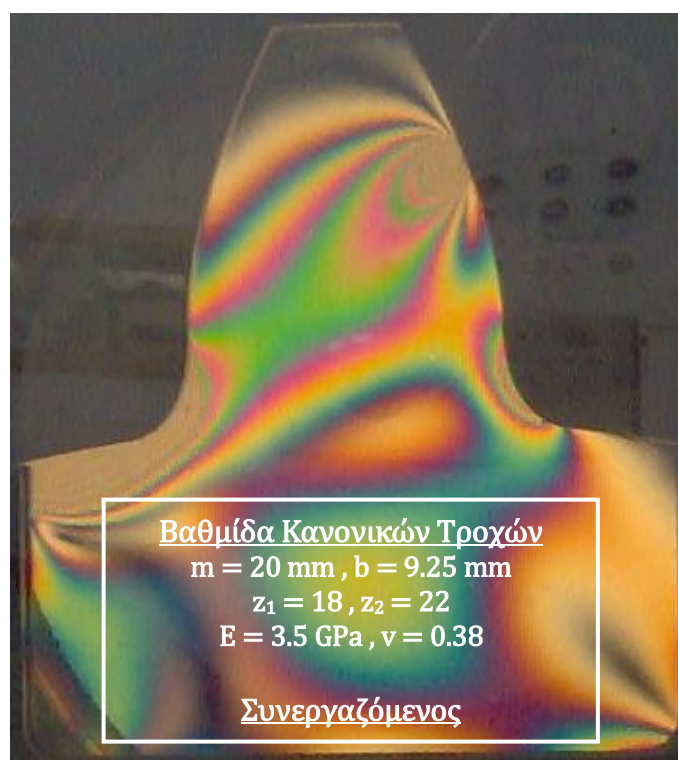
Σχήμα 3.43: Δοκιμή 9 – 18/22 – Πινιόν – Μονοχρωματικό φως



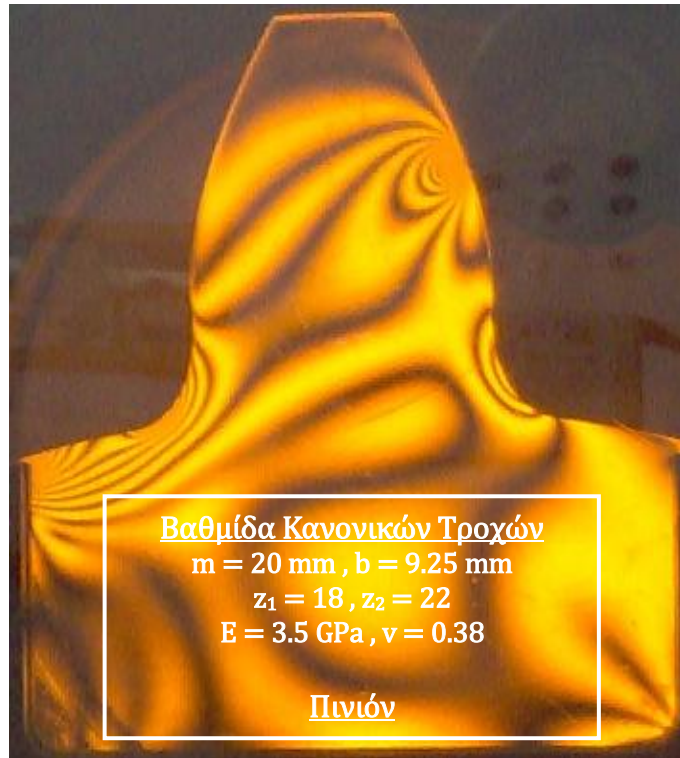
Σχήμα 3.44: Δοκιμή 9 – 18/22 – Πινιόν – Λευκό φως



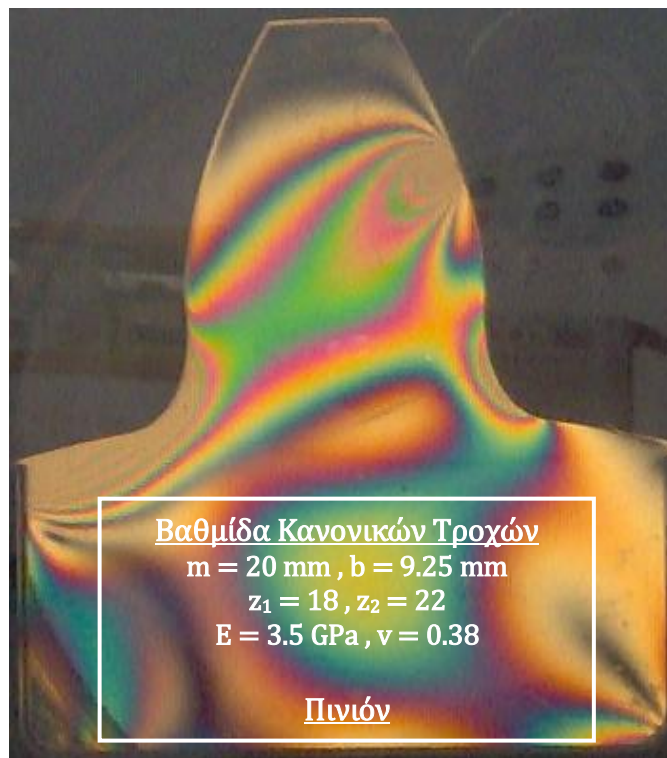
Σχήμα 3.45: Δοκιμή 10 – 18/22 – Συνεργαζόμενος – Μονοχρωματικό φως



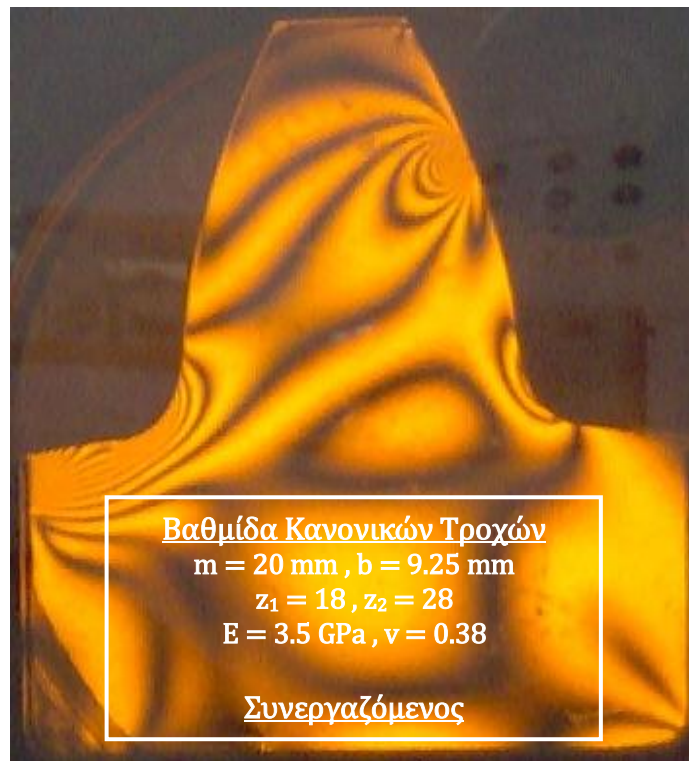
Σχήμα 3.46: Δοκιμή 10 – 18/22 – Συνεργαζόμενος – Λευκό φως



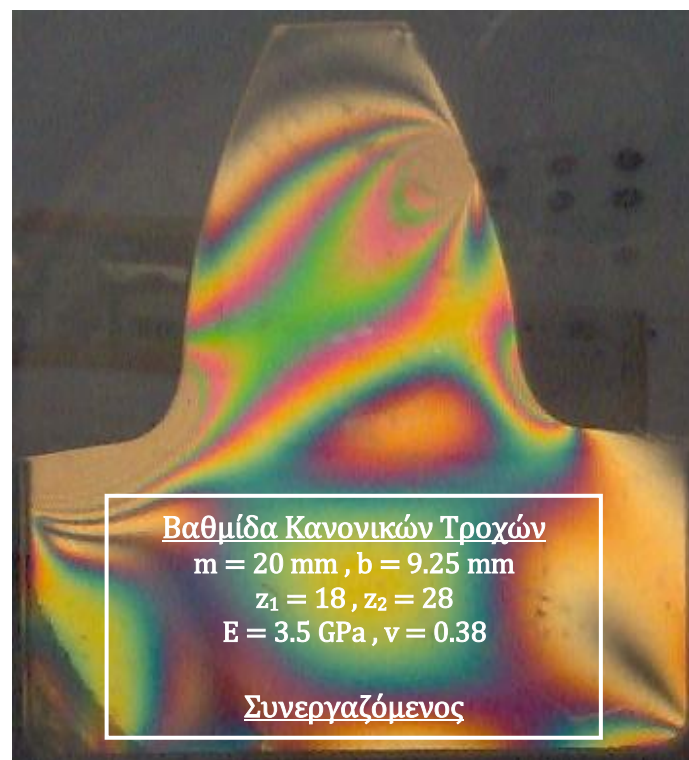
Σχήμα 3.47: Δοκιμή 11 – 18/28 – Πινιόν – Μονοχρωματικό φως



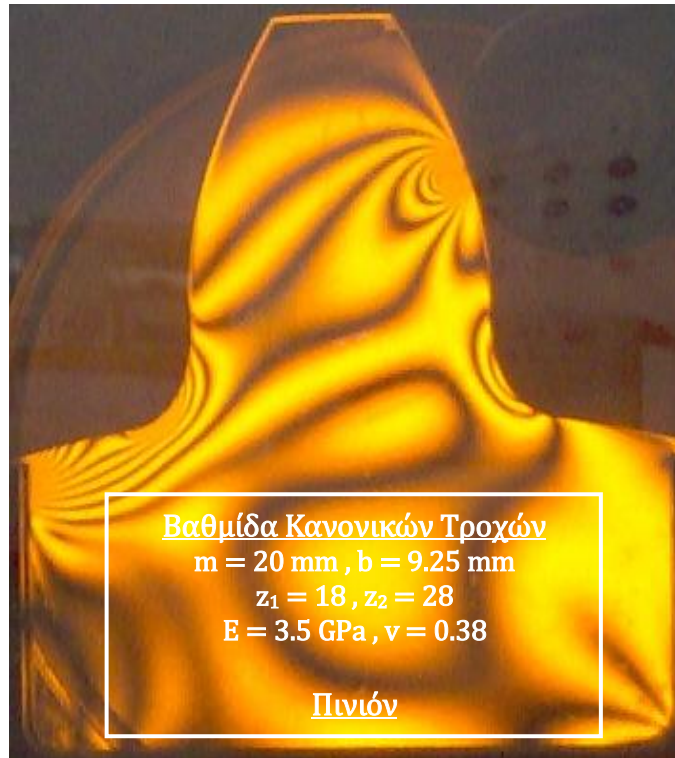
Σχήμα 3.48: Δοκιμή 11 – 18/28 – Πινιόν – Λευκό φως



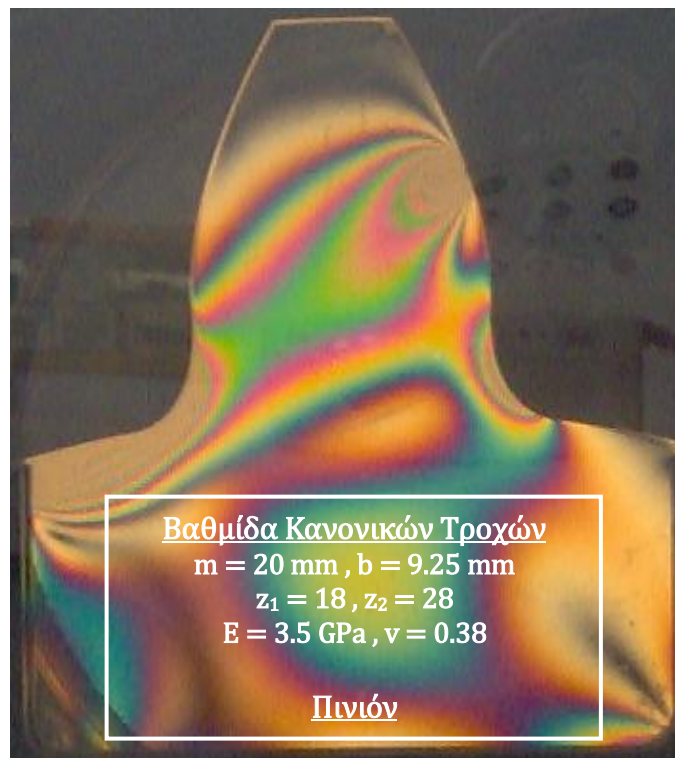
Σχήμα 3.49: Δοκιμή 12 – 18/28 – Συνεργαζόμενος – Μονοχρωματικό φως



Σχήμα 3.50: Δοκιμή 12 – 18/28 – Συνεργαζόμενος – Λευκό φως



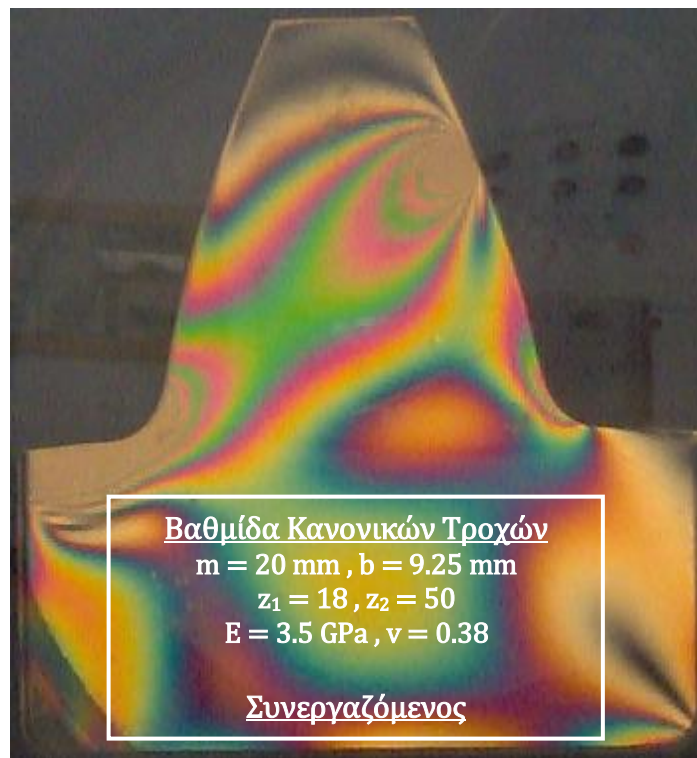
Σχήμα 3.51: Δοκιμή 13 – 18/50 – Πινιόν – Μονοχρωματικό φως



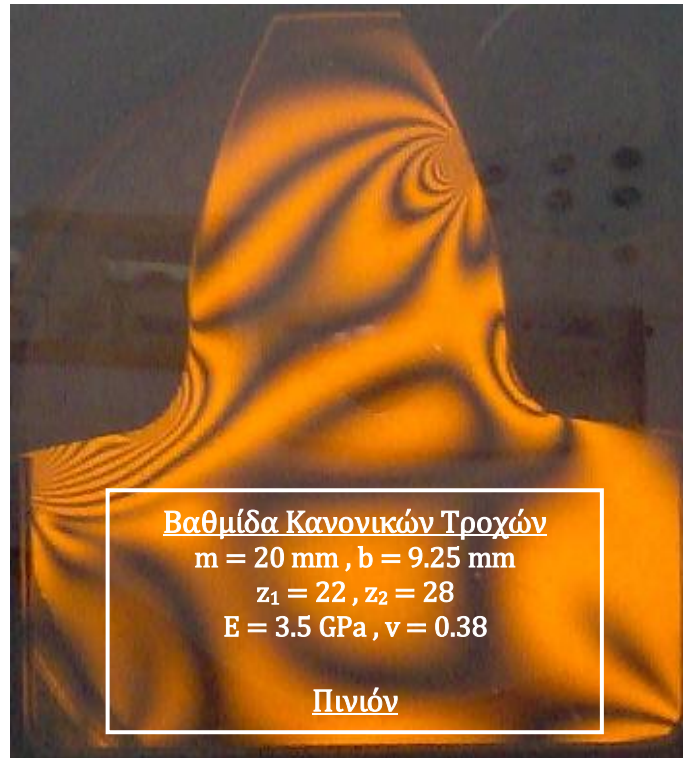
Σχήμα 3.52: Δοκιμή 13 – 18/50 – Πινιόν – Λευκό φως



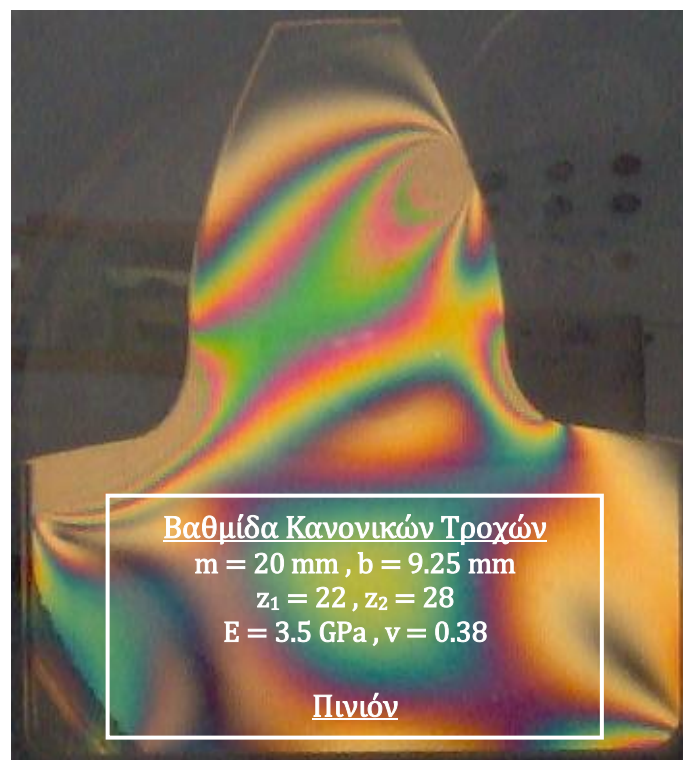
Σχήμα 3.53: Δοκιμή 14 – 18/50 – Συνεργαζόμενος – Μονοχρωματικό φως



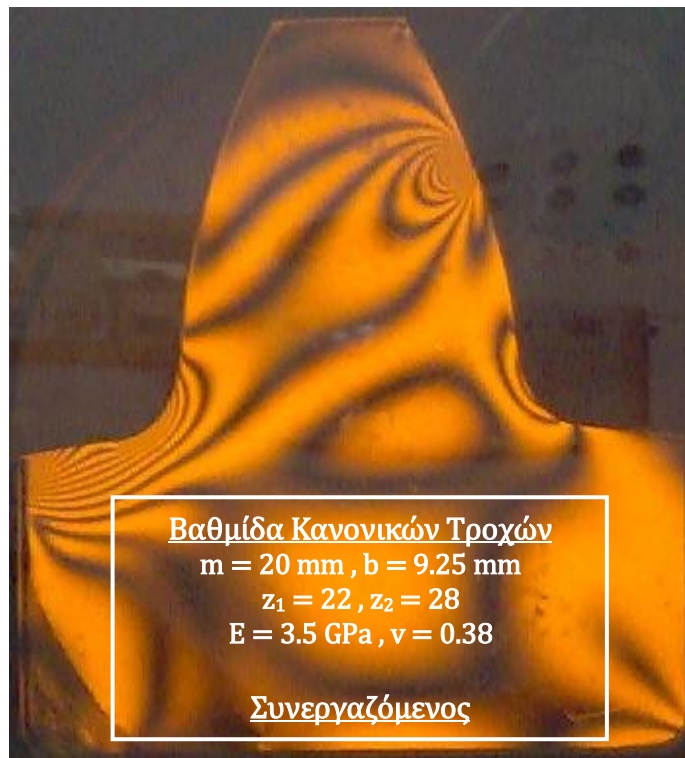
Σχήμα 3.54: Δοκιμή 14 – 18/50 – Συνεργαζόμενος – Λευκό φως



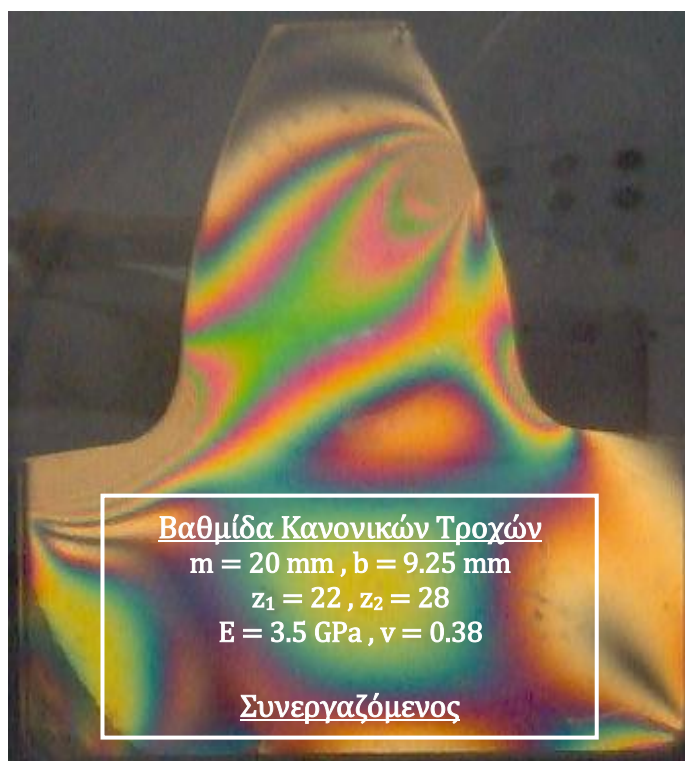
Σχήμα 3.55: Δοκιμή 15 – 22/28 – Πινιόν – Μονοχρωματικό φως



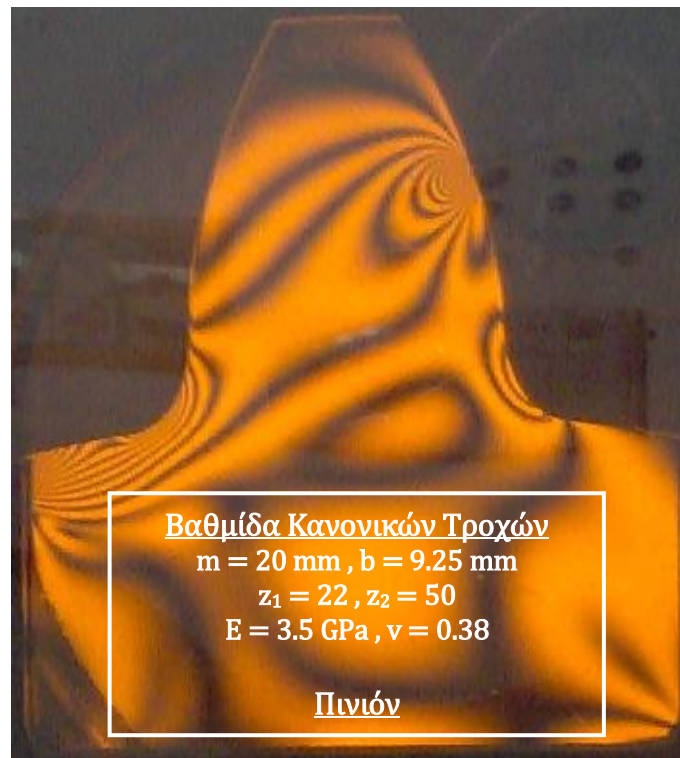
Σχήμα 3.56: Δοκιμή 15 – 22/28 – Πινιόν – Λευκό φως



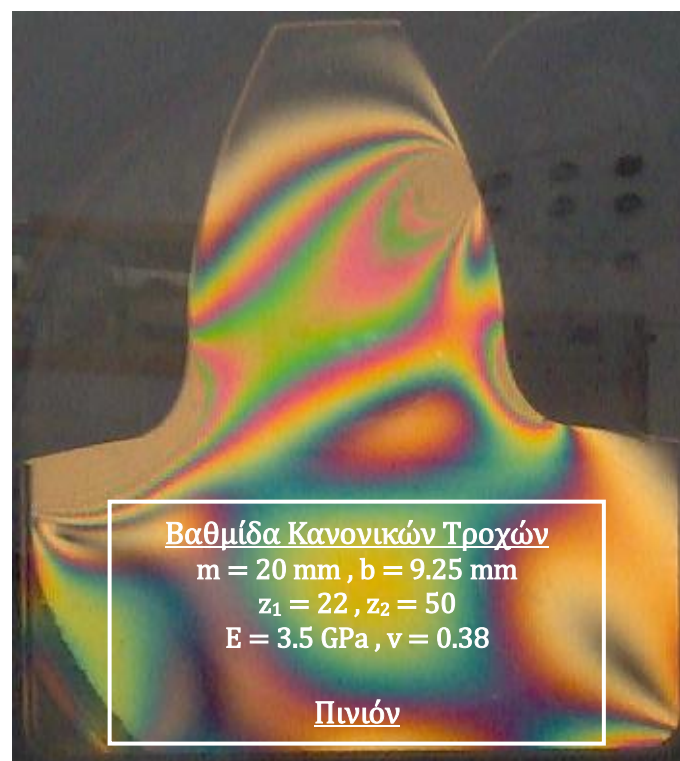
Σχήμα 3.57: Δοκιμή 16 – 22/28– Συνεργαζόμενος – Μονοχρωματικό φως



Σχήμα 3.58: Δοκιμή 16 – 22/28– Συνεργαζόμενος – Λευκό φως



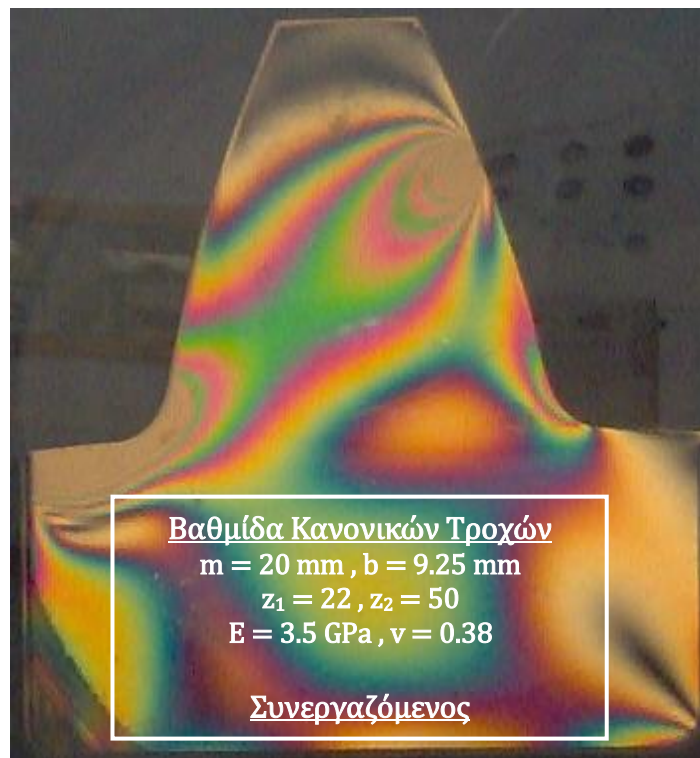
Σχήμα 3.59: Δοκιμή 17 – 22/50 – Πινιόν – Μονοχρωματικό φως



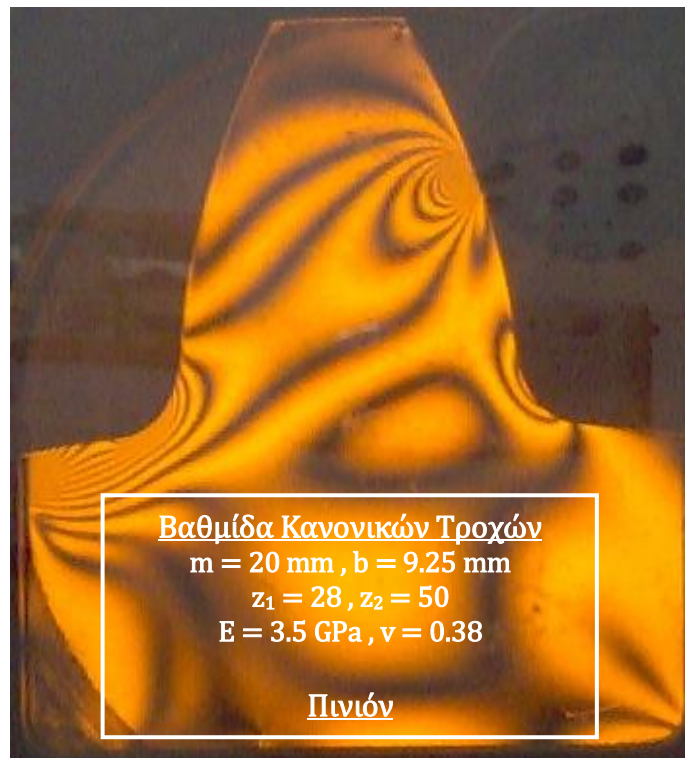
Σχήμα 3.60: Δοκιμή 17 – 22/50 – Πινιόν – Λευκό φως



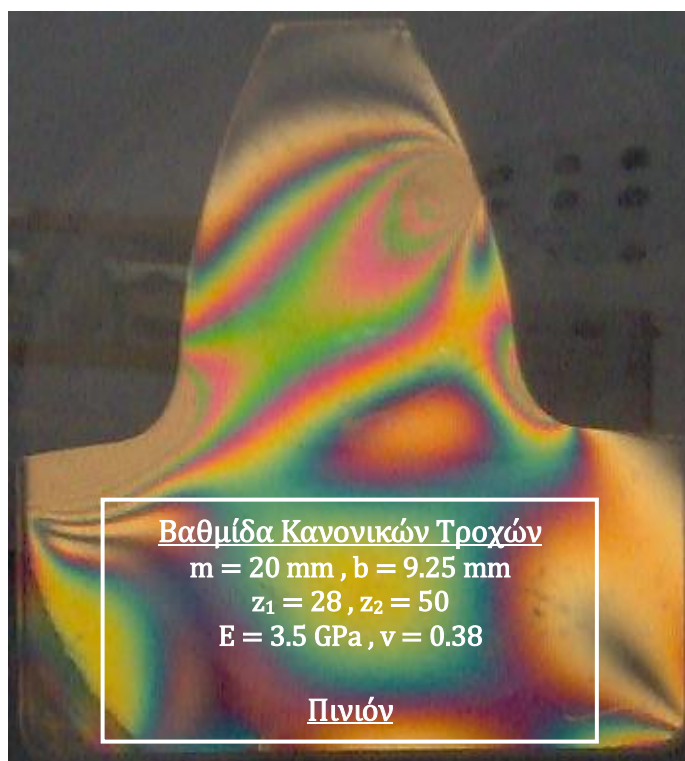
Σχήμα 3.61: Δοκιμή 18 – 22/50 – Συνεργαζόμενος – Μονοχρωματικό φως



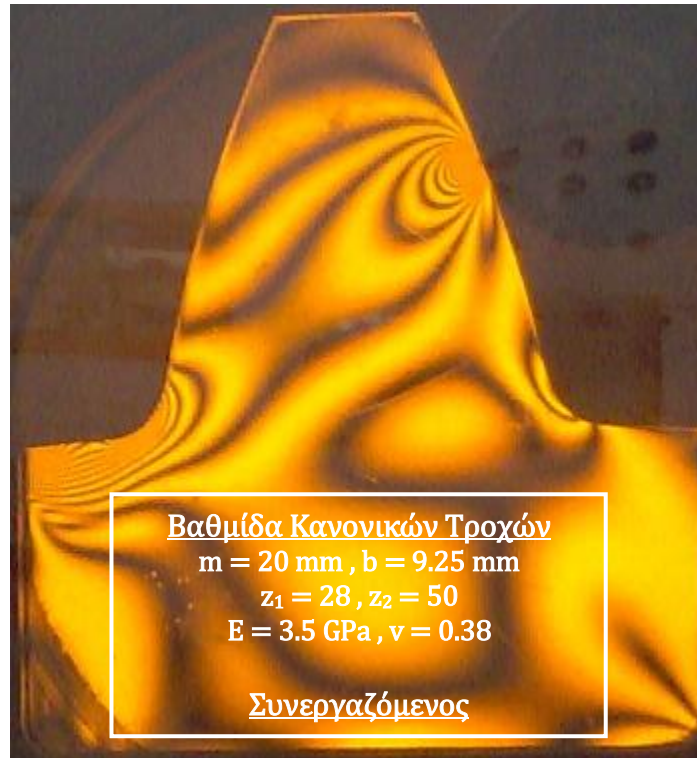
Σχήμα 3.62: Δοκιμή 18 – 22/50 – Συνεργαζόμενος – Λευκό φως



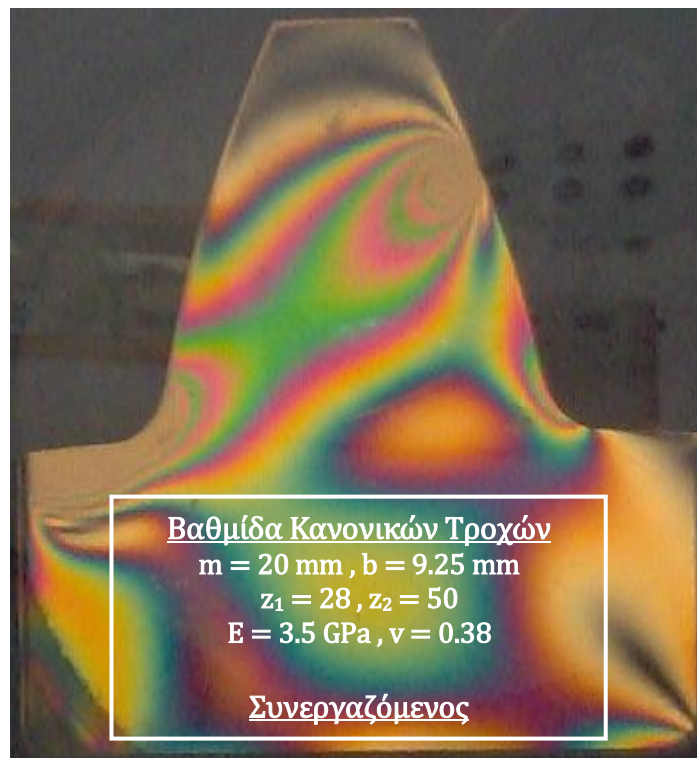
Σχήμα 3.63: Δοκιμή 19 – 28/50 – Πινιόν – Μονοχρωματικό φως



Σχήμα 3.64: Δοκιμή 19 – 28/50 – Πινιόν – Λευκό φως



Σχήμα 3.65: Δοκιμή 20 – 28/50 – Συνεργαζόμενος – Μονοχρωματικό φως



Σχήμα 3.66: Δοκιμή 20 – 28/50 – Συνεργαζόμενος – Λευκό φως

Τα πειραματικά αποτελέσματα δίνονται στον Πίν. 3.3 που ακολουθεί:

A/A Δοκιμής	Οριζόντιο φορτίο στο HPSTC, P_u (lbs)	Οριζόντιο φορτίο στο HPSTC, P_u (N)	Τάξη ισοχρώμου N	Μέγιστη τάση σ (MPa)
<i>Κανονικοί Τροχοί</i>				
1	55.0	244.652	3	4.572
2	38.5	171.257	2	3.048
3	37.5	166.808	2	3.048
4	41.0	182.377	2	3.048
5	38.0	169.032	2	3.048
6	43.5	193.498	2	3.048
7	39.0	173.481	2	3.048
8	47.0	209.066	2	3.048
9	40.0	177.929	2	3.048
10	41.5	184.601	2	3.048
11	41.0	182.377	2	3.048
12	43.5	193.498	2	3.048
13	42.0	186.825	2	3.048
14	47.0	209.066	2	3.048
15	42.5	189.049	2	3.048
16	45.0	200.17	2	3.048
17	45.0	200.17	2	3.048
18	48.5	215.739	2	3.048
19	47.0	209.066	2	3.048
20	49.5	220.187	2	3.048

Πίνακας 3.3: Πειραματικές μέγιστες τάσεις δοκιμών

3.13 Παρατηρήσεις

- Οι μετρούμενες τάσεις από το πείραμα της μεθόδου της φωτοελαστικότητας από την ανάλυση των πεπερασμένων στοιχείων θα παρατεθούν σε σύγκριση, με την κατασκευή και των αντιστοιχών διαγραμμάτων, με τις αντίστοιχες τάσεις που ελήφθησαν από την ανάλυση των πεπερασμένων στοιχείων.

3.14 Βιβλιογραφία

1. Παπαδόπουλος Γ. Α., *Ειδικά Κεφάλαια Μηχανικής, Πειραματικές Μέθοδοι Ανάλυσης των Τάσεων*, Εκδόσεις Ε.Μ.Π., Αθήνα, 1994.
2. Σπιτάς Β. Α., *Μοντελοποίηση και Σχεδιασμός Βέλτιστων Οδοντώσεων με Χρήση Αναλυτικών, Αριθμητικών και Πειραματικών Μεθόδων*, Διδακτορική Διατριβή (επιβλέπων καθ. Θ. Ν. Κωστόπουλος), Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2001.
3. AGMA 2101-C95, "Fundamental rating factors and calculation methods for involute spur and helical gear. (Metric Version)", *American Gear Manufacturers Association*, 1995.
4. DIN 3990 – "Calculation of load capacity of cylindrical gears", *Deutsches Institut für Normung E.V.*, 1987.
5. Dolan T. J. and Broghamer E. L., "A Photo-elastic Study of Stresses in Gear Tooth Fillets", *Uni. Ill. Eng. Sta. Bull.* 335, 1942.
6. Dudley D. W., *Gear Handbook, The Design, Manufacture, and Application of Gears*, Mc-Graw Hill , New York, 1962.
7. Frocht M. M., *Photoelasticity*, John Wiley and Sons Inc., New York, 1941.

8. Hongbin X., Guanghui Z., Masana K., "Research for photoelastic experiment and bending strength experiment of double involute gear with ladder shape teeth", *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, Vol. 36, Is. 10, pp 39-42, 2000.
9. ISO 6336:3-1996, "Calculation of the load capacity of spur and helical gears-Part 3: Calculation of tooth bending strength", 1996.
10. Niemann G., *Maschinelemente*, Band 2, Springer - Verlag, New York, 1965.
11. Quiregga J. A., Gonzalez-Cano A., "Stress separation from photoelastic data by a multigrid method", *Measurement Science & Technology*, Vol. 9, Is. 8, pp. 1204-1210, 1998
12. Shu Xiao-Long, "Determination of load sharing factor for planetary gearing with small tooth number difference", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 30, Is. 2, pp. 313-321, 1995.
13. Townsend D. P., *Dudley's Gear Handbook*, Mc-Graw Hill , New York, 1992.
14. Wilhaber E., "Tooth Contact", *American Machinist*, Vol. 90, No 12, 1946c, pp. 110-114.

Περιεχόμενα:

- 4.1 Γενικά
- 4.2 Ορισμός CAD
- 4.3 Ορισμός CAE
- 4.4 Πεπερασμένα Στοιχεία
 - 4.4.1 Μοντελοποίηση – Τύποι Πεπερασμένων Στοιχείων
 - 4.4.2 Αυτόματη Γένεση Πλέγματος
 - 4.4.2.1 Μέθοδος Σύνδεσης Κόμβων
 - 4.4.2.2 Μέθοδος Αποσύζευξης Τοπολογίας
 - 4.4.2.3 Μέθοδος Αποσύζευξης Γεωμετρίας
 - 4.4.2.4 Μέθοδος Βάσει Πλέγματος
 - 4.4.2.5 Μέθοδος Απεικόνισης
 - 4.4.2.6 Βελτίωση Ποιότητας Πλέγματος
 - 4.4.3 Είδη Ανάλυσης Πεπερασμένων Στοιχείων
 - 4.4.3.1 Καθορισμός Του Είδους Ανάλυσης
 - 4.4.3.2 Στάδια Ανάλυσης Πεπερασμένων Στοιχείων
 - 4.4.3.3 Είδος Πεπερασμένων Στοιχείων
- 4.5 Λογισμικά CAD – CAE
 - 4.5.1 Autodesk Inventor
 - 4.5.2 Ansys Multi-Physics
- 4.6 Εφαρμογή στους Τροχούς του Πειράματος
 - 4.6.1 Κατασκευή 3-D Μοντέλων
 - 4.6.2 Προσδιορισμός του HPSTC
 - 4.6.3 Πεπερασμένα Στοιχεία
- 4.7 Παρατηρήσεις
- 4.8 Βιβλιογραφία

4.1 Γενικά

Η ραγδαία εξέλιξη των τελευταίων ετών στη Μηχανολογία οφείλεται, χωρίς αμφιβολία, στην εισαγωγή των ηλεκτρονικών υπολογιστών σε όλους τους επιμέρους τομείς της. Σε σχέση με τις κατασκευαστικές επιστήμες, η δυνατότητα “απεικόνισης” της γεωμετρίας μιας μηχανολογικής κατασκευής στον ηλεκτρονικό υπολογιστή, καθώς και η δυνατότητα “προσομοίωσης” της στατικής, δυναμικής, θερμικής, ρευστοδυναμικής, κλπ. συμπεριφοράς της, αποτελούν επιτεύγματα των τελευταίων ετών και αλλάζουν σημαντικά τόσο την εκπαίδευση όσο και την επαγγελματική πράξη του μηχανολόγου μηχανικού.

Η σχεδίαση με τη βοήθεια Η/Υ (Computer-Aided Design: CAD) είναι μια τεχνολογία που χρησιμοποιεί Η/Υ για την υποβοήθηση της δημιουργίας, τροποποίησης και βελτιστοποίησης ενός σχεδιασμού.

Η ανάλυση με τη βοήθεια Η/Υ (Computer-Aided Engineering: CAE) είναι μια τεχνολογία που ασχολείται με την χρήση υπολογιστικών συστημάτων για την ανάλυση γεωμετρίας CAD, που επιτρέπει στον σχεδιαστή να προσομοιώσει και μελετήσει τον τρόπο με τον οποίο θα συμπεριφερθεί το προϊόν έτσι ώστε ο σχεδιασμός να επιδέχεται εύκολα αποπεράτωση και βελτιστοποίηση. Η κυρίαρχη μέθοδος CAE είναι αυτή των Πεπερασμένων Στοιχείων (Finite Element Method: FEM).

4.2 Ορισμός CAD

Η σχεδίαση με τη βοήθεια Η/Υ (Computer-Aided Design: CAD) είναι μια τεχνολογία που χρησιμοποιεί Η/Υ για την υποβοήθηση της δημιουργίας, τροποποίησης και βελτιστοποίησης ενός σχεδιασμού. Με τον όρο CAD εννοούμε τη δημιουργία γεωμετρικών απεικονίσεων στον ηλεκτρονικό υπολογιστή. Προφανώς δεν περιοριζόμαστε στην γνωστή διαδικασία αντικατάστασης του drafting, δηλ. του δισδιάστατου (2-D) παραδοσιακού σχεδίου του μηχανικού, αλλά κυρίως στην

περίπτωση τρισδιάστατης (3-D) απεικόνισης κατασκευών ή δομών, όπου χρησιμοποιούνται αυτοματοποιημένες διαδικασίες προσέγγισης επιφανειών (μέσω των παρεμβολών Coons, Bezier και Nurbs) ή/και όγκων. Έτσι, είναι πολύ ευκολότερη και ελέγξιμη η αλλαγή της γεωμετρίας ενός μηχανολογικού εξαρτήματος μέχρις ότου ο μελετητής καταλήξει σε μία καταρχήν αποδεκτή κατασκευαστική λύση. Επιπλέον, όλα τα συστήματα CAD διαθέτουν κατάλληλα φίλτρα – interfaces (DXF, IGES, STEP) που δίνουν τη δυνατότητα μεταφοράς της γεωμετρικής πληροφορίας από το ένα σύστημα στο άλλο (εναλλαξιμότητα).

Τα εργαλεία CAD μπορούν να ποικίλουν μεταξύ γεωμετρικών εργαλείων διαχείρισης σχημάτων (ένα άκρο), μέχρι εξειδικευμένα προγράμματα εφαρμογών όπως ανάλυση και βελτιστοποίηση (άλλο άκρο) (Zeid [33]). Μεταξύ αυτών των δύο άκρων, τυπικά εργαλεία που είναι διαθέσιμα επί του παρόντος, περιλαμβάνουν ανάλυση ανοχών, υπολογισμούς ιδιοτήτων μάζας (κέντρα βάρους, ροπές αδρανείας, κλπ.), μοντελοποίησης με πεπερασμένα στοιχεία (FEM) και οπτικής απεικόνισης (visualization) των αποτελεσμάτων της ανάλυσης, μεταξύ άλλων. Ο σημαντικότερος ρόλος του CAD είναι ο καθορισμός της γεωμετρίας του υπό σχεδιασμού προϊόντος που είναι ουσιώδης σε όλες τις επόμενες φάσεις του κύκλου. Στη συνέχεια, η εν λόγω γεωμετρία αξιοποιείται από το CAE.

4.3 Ορισμός CAE

Η ανάλυση με τη βοήθεια Η/Υ (Computer-Aided Engineering: CAE) είναι μια τεχνολογία που ασχολείται με την χρήση υπολογιστικών συστημάτων για την ανάλυση γεωμετρίας CAD, που επιτρέπει στον σχεδιαστή να προσομοιώσει και μελετήσει τον τρόπο με τον οποίο θα συμπεριφερθεί το προϊόν έτσι ώστε ο σχεδιασμός να επιδέχεται εύκολα αποπεράτωση και βελτιστοποίηση. Τα εργαλεία CAE διατίθενται σε ευρεία κλίμακα αναλύσεων. Κινηματικά προγράμματα, για παράδειγμα, μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την ανάλυση λειτουργίας μηχανών. Προγράμματα δυναμικής ανάλυσης μεγάλων μετατοπίσεων μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην προσομοίωση σύνθετων συναρμολογημένων δομών όπως λ.χ. τα οχήματα ή συσκευασιών σε πτώση επί του εδάφους.

Μεταξύ των πλέον διαδεδομένων μεθόδων ανάλυσης είναι η Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων (Finite Element Method: FEM) που επιτρέπει τη στατική και δυναμική ανάλυση τάσεων και μετατοπίσεων, θερμική ανάλυση, ρευστομηχανική και αεροδυναμική ανάλυση, ακουστική ανάλυση, κατανομή μαγνητικού πεδίου ή και άλλων πεδίων. Η εφαρμογή της FEM απαιτεί τη χρήση ενός απλουστευμένου αφαιρετικού μοντέλου που πρέπει να γεννηθεί είτε με αλληλεπίδραση του χρήστη ή και αυτόματα. Το λογισμικό που καθιστά δυνατή την κατασκευή του αφαιρετικού μοντέλου και τη γένεση των πεπερασμένων στοιχείων αποτελεί τους προ-επεξεργαστές (pre-processors). Μετά την εκτέλεση της ανάλυσης σε κάθε στοιχείο, ο Η/Υ συγκεντρώνει τα αποτελέσματα και τα εμφανίζει με ευανάγνωστο οπτικό τρόπο. Περιοχές υψηλών τάσεων μπορεί να παριστάνονται με κόκκινο χρώμα για παράδειγμα. Το λογισμικό τέτοιων απεικονίσεων αποτελεί τους λεγόμενους μετα-επεξεργαστές (post-processors).

Επίσης, είναι διαθέσιμα πολλά εργαλεία βελτιστοποίησης σχεδιασμού. Παρόλο που τα εργαλεία βελτιστοποίησης μπορούν να θεωρηθούν σαν εργαλεία CAE, συνήθως ταξινομούνται με ξεχωριστό τρόπο. Διάφορες ερευνητικές προσπάθειες εξελίσσονται προς την κατεύθυνση αυτόματου σχεδιασμού με ολοκλήρωση των διαδικασιών βελτιστοποίησης και ανάλυσης (Bendsoe [7]). Σε αυτές τις προσεγγίσεις, γίνεται η παραδοχή ενός απλού αρχικού σχήματος σχεδιασμού, όπως ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο για δισδιάστατο εξάρτημα που αποτελείται από μικρά στοιχεία διαφορετικών πυκνοτήτων. Κατόπιν, εκτελείται η διαδικασία βελτιστοποίησης προς υπολογισμό των βέλτιστων τιμών αυτών των πυκνοτήτων που αποβλέπει στην επίτευξη ενός στόχου με παράλληλη ικανοποίηση των συνθηκών τάσεων ή/και μετατοπίσεων. Συνήθως ο στόχος είναι η επίτευξη του ελάχιστου βάρους. Με βάση τις βέλτιστες τιμές πυκνοτήτων, το βέλτιστο σχήμα του σχεδιασμού λαμβάνεται με απαλοιφή των στοιχείων χαμηλής πυκνότητας.

Η γοητεία των μεθόδων ανάλυσης και βελτιστοποίησης είναι ότι επιτρέπουν στον μηχανικό να δει τον τρόπο με τον οποίο το προϊόν θα συμπεριφερθεί και του επιτρέπει να επισημάνει τα όποια λάθη έχουν γίνει μέχρι τη στιγμή εκείνη, προτού προχωρήσει σε χρονοβόρες και δαπανηρές διαδικασίες κατασκευής και ελέγχου φυσικών πρωτοτύπων. Επειδή το κόστος μελέτης μεταβάλλεται εκθετικά στα τελευταία στάδια ανάπτυξης και παραγωγής του προϊόντος, η πρώιμη βελτιστοποίηση και εξευγενισμός που επιτυγχάνεται από την ανάλυση CAE τελικά αποπληρώνεται με μείωση χρόνου και κόστους.

4.4 Μέθοδος των Πεπερασμένων Στοιχείων

Ένα από τα πρώτα μελήματα του μηχανικού όταν αυτός αναλάβει την ανάπτυξη ενός μοντέλου είναι η επιλογή των κατάλληλων πεπερασμένων στοιχείων. Ακόμη και σε δισδιάστατες κατασκευές η χρήση τριγωνικών στοιχείων τριών κόμβων και τετραπλευρικών στοιχείων τεσσάρων κόμβων δεν είναι η μόνη επιλογή του, ανάλογα με τις δυνατότητες του διαθέσιμου λογισμικού. Πράγματι, μια από τις κρισιμότερες αποφάσεις είναι η επιλογή των κατάλληλων στοιχείων με τον κατάλληλο αριθμό κόμβων από την διαθέσιμη βιβλιοθήκη στοιχείων. Επιπρόσθετα, το πλήθος των στοιχείων (με άλλα λόγια το μέσο μέγεθος των στοιχείων) που πρέπει να χρησιμοποιηθούν για την επίλυση ενός συγκεκριμένου προβλήματος είναι αποτέλεσμα της κρίσης του μηχανικού. Σαν γενικός κανόνας, όσο μεγαλύτερο είναι το πλήθος των κόμβων και των στοιχείων (στην *h* version) ή όσο μεγαλύτερος ο βαθμός πολωνύμου της συνάρτησης μορφής (στην *p* version), τόσο ακριβέστερη είναι η λύση των πεπερασμένων στοιχείων, αλλά επίσης τόσο πιο δαπανηρή είναι η επίλυση. Οι διάφοροι τύποι πεπερασμένων στοιχείων εισάγονται στην επόμενη ενότητα (βλ. 4.4.1). Ένα άλλο σημαντικό πρόβλημα είναι η γένεση πλέγματος του υπό ανάλυση αντικειμένου, ειδικά όταν έχει περίπλοκο γεωμετρικό σχήμα. Η δημιουργία τρισδιάστατων πλεγμάτων είναι μια διαδικασία που απαιτεί πολλές εργατοώρες και είναι επιρρεπής σε σφάλματα. Γίνονται πολλές προσπάθειες αυτόματης γένεσης πλεγμάτων που να συνδέονται με συστήματα μοντελοποίησης όγκου (*solid modeling*).

Στην κλασική μέθοδο (στην *h* version) εάν n είναι το πλήθος των κόμβων τότε το πλήθος των βαθμών ελευθερίας είναι $2n$ και $3n$ για δισδιάστατα και τρισδιάστατα μοντέλα, αντίστοιχα.

Σημειώσεις:

1. Στην κλασική μορφή των πεπερασμένων στοιχείων που ονομάζεται *h*-version, χρησιμοποιούνται πολυώνυμα ορισμένου βαθμού οπότε η αύξηση της ακρίβειας επιτυγχάνεται με μείωση της μέσης διάστασης (π.χ. της ακτίνας, h , του περιγεγραμμένου κύκλου) των στοιχείων, με άλλα λόγια με αύξηση του πλήθους των αυτών (πύκνωση πλέγματος).
2. Στην λεγόμενη *p*-version, χρησιμοποιείται ένα σταθερό πλέγμα αλλά επιτρέπεται η αύξηση του πολωνυμικού βαθμού p της συνάρτησης μορφής (MacNeal [22] ,

(Szabo & Babuska [27]). Στην p-version, οι συντελεστές του εν λόγω υψηλού βαθμού πολυωνύμου είναι επίσης άγνωστοι που υπολογίζονται σαν τμήμα της διαδικασίας επίλυσης.

4.4.1 Μοντελοποίηση – Τύποι Πεπερασμένων Στοιχείων

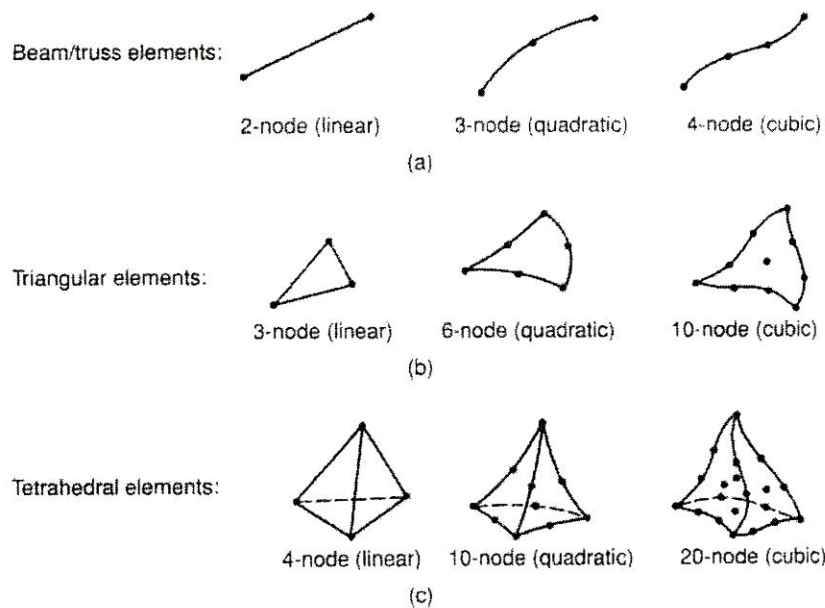
Το σύνολο των απαραίτητων διαδικασιών για την ανάπτυξη ενός πλήρους μοντέλου πεπερασμένων στοιχείων, δηλ. η εισαγωγή της γεωμετρίας, η γένεση του πλέγματος, η επιβολή στηρίξεων και φόρτισης αποτελούν αυτό που συνοπτικά ονομάζεται μοντελοποίηση πεπερασμένων στοιχείων (finite-element modeling), η οποία συνήθως εκτελείται με τη βοήθεια κατάλληλου προ-επεξεργαστή. Πολύ παλαιότερα, η εισαγωγή των δεδομένων δινόταν με γραμμές εντολών με τη βοήθεια ενός αυτόνομου αρχείου δεδομένων (batch file).

Ο προ-επεξεργαστής (pre-processor) ξεκινάει από τη γεωμετρία του αντικείμενου ή του πεδίου ορισμού του προβλήματος. Παραδοσιακά συστήματα FEA (Finite Element Analysis) είχαν μόνο στοιχειώδεις λειτουργίες μοντελοποίησης, αλλά σήμερα τα περισσότερα είτε προσφέρουν προηγμένες δυνατότητες ή έχουν στενούς δεσμούς με συστήματα CAD (μερικές φορές και τα δύο) (Mills [23]). Συστήματα που στηρίζονται σε γεωμετρική μοντελοποίηση CAD είτε εργάζονται απευθείας με το μοντέλο CAD ή μεταφράζουν και εισάγουν τη γεωμετρία. Η απευθείας σύνδεση με CAD κερδίζει όλο και μεγαλύτερο έδαφος διότι εξαλείφει τα βήματα μετάφρασης την απώλεια δεδομένων και μικραίνει τον κύκλο σχεδιασμού-ανάλυσης-αλλαγής. Περαιτέρω, η χρήση συστήματος CAD διευκολύνει τη μοντελοποίηση και παρέχει πιο ισχυρές λειτουργίες δημιουργίας και αλλαγής σύνθετης γεωμετρίας. Πράγματι, σήμερα τα περισσότερα υβριδικά συστήματα μοντελοποίησης (με ολοκληρωμένη μοντελοποίηση όγκου, επιφάνειας και wireframe, και παραμετρικών μεθόδων που στηρίζονται σε features) μπορούν να κτίσουν οποιαδήποτε γεωμετρία απαιτείται για ανάλυση. Τα περισσότερα συστήματα FEA δίνουν επίσης έμφαση στη δυνατότητα που έχουν να εισάγουν τη γεωμετρία, είτε μέσω τυποποιήσεων όπως το IGES ή απευθείας από συγκεκριμένα συστήματα CAD. Ωστόσο, η απευθείας χρήση δεν είναι πάντα άμεσα εφαρμόσιμη. Το μοντέλο μπορεί να φαίνεται στο μάτι ότι είναι τέλειο αλλά μπορεί στην πραγματικότητα να έχει σφάλματα που αποκαλύπτονται στο σύστημα FEA, κυρίως κατά την διαδικασία γένεσης πλέγματος. Μερικά συστήματα

προσφέρουν λειτουργίες που μπορούν να «καθαρίσουν» την εισαγόμενη γεωμετρία. Επιπλέον, ακόμη και αν η γεωμετρία CAD δεν περιέχει σφάλματα, η ανάλυση δεν απαιτεί όλες τις λεπτομέρειές του, οπότε μερικές από αυτές (π.χ. ένα fillet) θα μπορούσαν να απαλειφθούν. Μερικά συστήματα διαθέτουν τέτοιες αυτόματες δυνατότητες απενεργοποίησης γεωμετρικών οντοτήτων (Armstrong, Robinson, McKeage, Bridgett, Donaghy & McGleenan [5]).

Το επόμενο στάδιο είναι η δημιουργία πλέγματος και κατανομής κόμβων. Όταν σε κάθε πλέγμα αποδίδονται κόμβοι, τότε αυτό μετατρέπεται σε πεπερασμένο στοιχείο. Η γένεση πλέγματος είναι το πλέον σημαντικό και δύσκολο στάδιο της μοντελοποίησης πεπερασμένων στοιχείων. Για τη διευκόλυνση αυτού του σταδίου, σήμερα όλα τα συστήματα προσφέρουν δυνατότητες αυτόματης γένεσης πλέγματος. Η τυπική προσέγγιση είναι να προσφέρουν αυτόματο πλέγμα τετραεδρικών στοιχείων για στερεή γεωμετρία και τετραπλευρικά ή τριγωνικά στοιχεία για επιφάνεια στον τρισδιάστατο χώρο (κελύφη, επίπεδη εντατική ή επίπεδη παραμορφωσιακή κατάσταση). Πολλά συστήματα επιτρέπουν στους χρήστες να επέμβουν στις παραμέτρους αυτόματης γένεσης πλέγματος όπως η πυκνότητα πλέγματος. Αυτές επιπλέον επιτρέπουν τοπική επέμβαση σε κρίσιμες περιοχές. Πολλά συστήματα επιτρέπουν τη διασύνδεση πλέγματος με τη γεωμετρία έτσι ώστε κάθε αλλαγή αυτής να αντανακλάται αυτόματα στο πλέγμα.

Τα διάφορα στοιχεία που υποστηρίζονται από ένα σύστημα ανάλυσης πεπερασμένων στοιχείων αποτελούν τη λεγόμενη βιβλιοθήκη στοιχείων (element library). Όσο πιο μεγάλο το είδος των στοιχείων τόσο περισσότερα είδη προβλημάτων μπορούν να επιλυθούν. Το Σχ. 4.1 δείχνει τυπικά πεπερασμένα στοιχεία που υποστηρίζονται από τους περισσότερους κώδικες. Να σημειωθεί ότι το ίδιο πλέγμα μπορεί να αντιστοιχεί σε διαφορετικά πεπερασμένα στοιχεία ανάλογα με τον αριθμό κόμβων που αποδίδονται σε αυτό. Τέλος, οι ζώνες στις οποίες αναμένεται απότομη μεταβολή στη συμπεριφορά των προς επίλυση αγνώστων (όπως συγκέντρωση τάσεων γύρω από οπές) πρέπει να διακριτοποιηθούν από στοιχεία μεγαλύτερης πυκνότητας πλέγματος από εκείνες που εμφανίζουν προοδευτική μεταβολή.



Σχήμα 4.1: Τύποι πεπερασμένων στοιχείων για (a) μονοδιάστατα, (b) δισδιάστατα και (c) τρισδιάστατα προβλήματα

Μια διαφορετική προσέγγιση στο δίλημμα του πλέγματος είναι η χρήση της *p-version* μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων. Αυτή στηρίζεται σε ένα απλούστερο, αυτόματα γεννημένο πλέγμα, αλλά κατόπιν μεταβάλλει αυτόματα τον πολυωνυμικό βαθμό των συναρτήσεων μορφής. Παρόλο που σήμερα είναι διαθέσιμα πολλά τέτοια προγράμματα FEA, δύο προγράμματα (PTC's Pro/MECHANICA και CADSI's PolyFEM) σχεδιάστηκαν ειδικά για ανάλυση τύπου *p-version*. Επιπλέον από το εύκολο πλέγμα, τα πλεονεκτήματα αυτής της προσέγγισης είναι η ικανότητα να καθορίσουν όρια ακρίβειας και πλησιέστερης προσέγγισης της γεωμετρίας του μοντέλου CAD. Χρησιμοποιώντας χαμηλότερο επίπεδο ακρίβειας, ο σχεδιαστής μπορεί να πάρει γρήγορα αποτελέσματα ανάλυσης στο προκαταρκτικό στάδιο σχεδιασμού.

Αφού επιλεγεί η διάταξη των στοιχείων, καθορίζεται ο τύπος της ανάλυσης (π.χ., στατική ή δυναμική, γραμμική ή μη-γραμμική, επίπεδη εντατική κατάσταση, και επίπεδη παραμορφωσιακή κατάσταση). Επίσης, οι άγνωστοι ή αλλιώς οι βαθμοί ελευθερίας συσχετίζονται με τους κόμβους. Οι άγνωστοι περιέχουν μετατοπίσεις, περιστροφές, θερμοκρασία, ροή θερμότητας, κ.ο.κ. Κατόπιν καθορίζονται οι οριακές συνθήκες. Οριακές συνθήκες όπως μετατοπίσεις, δυνάμεις, και θερμοκρασίες συνήθως είναι γνωστές για το συνεχές τμήμα του συνόρου του αντικειμένου. Αυτές οι οριακές συνθήκες πρέπει να

εκφρασθούν σαν ένα σύνολο τιμών μετατοπίσεων, δυνάμεων, ή θερμοκρασιών σε συγκεκριμένους κόμβους των πεπερασμένων στοιχείων. Ωστόσο, μερικές φορές τα πεπερασμένα στοιχεία πρέπει να γεννηθούν χωρίς να έχουν οριακές συνθήκες. Εάν πρόκειται να εισαχθούν σημειακά φορτία, πρέπει να δημιουργηθούν κόμβοι στα αντίστοιχα σημεία εφαρμογής τους. Τα περισσότερα συστήματα που είναι συνδεδεμένα με CAD επιτρέπουν στο χρήστη να ορίσει τις οριακές συνθήκες στη γεωμετρία CAD, και σε αυτή την περίπτωση οι οριακές συνθήκες μετατρέπονται σε ισοδύναμες οριακές συνθήκες στους κόμβους του πλέγματος από το ίδιο το σύστημα. Οι περισσότεροι μοντελοποιητές πεπερασμένων στοιχείων επίσης παρέχουν έναν αριθμό τρόπων εύκολου καθορισμού των φορτίσεων και των οριακών συνθηκών για το χειρισμό ευρείας κλίμακας προβλημάτων και ρεαλιστικών συνθηκών.

Σε κάθε πεπερασμένο στοιχείο πρέπει επίσης να αποδοθούν ιδιότητες υλικού. Αυτές οι ιδιότητες είναι τυπικά το μέτρο ελαστικότητας του Young, και ο λόγος του Poisson (για ελαστικές κατασκευές). Το πάχος στοιχείων κελύφους και πλακών διαχειρίζεται περισσότερο σαν ιδιότητα του υλικού παρά σαν γεωμετρική ιδιότητα για την αποφυγή επίλυσης του προβλήματος στις τρεις διαστάσεις. Άλλες ιδιότητες υλικών περιλαμβάνουν θερμικές ιδιότητες (ειδική θερμότητα, συντελεστής αγωγιμότητας, λανθάνουσα θερμότητα, κλπ), ιξωδοελαστικότητα, κλπ, για άλλου τύπου προβλήματα. Γίνεται μόνο μια απλή παραδοχή: σε διαφορετικές περιοχές στοιχείων αποδίδονται διαφορετικές ιδιότητες υλικών. Αυτό λχ. δίνει τη δυνατότητα στο χρήστη να αναλύσει ένα αντικείμενο κατασκευασμένο από σύνθετο υλικό. Ένα κρίσιμο ζήτημα στην ανάλυση σύνθετων υλικών είναι η διαχείριση της διεπιφάνειας μεταξύ των στρώσεων προκειμένου να υπολογισθεί η αποκόλληση (delamination).

Από τη στιγμή που ορισθεί το μοντέλο των πεπερασμένων στοιχείων επιλέγοντας όλες τις παραμέτρους του πλέγματος, το μοντέλο εισάγεται στον κώδικα που εκτελεί την ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων. Μετά την αριθμητική επίλυση, τα αποτελέσματα απεικονίζονται σε ένα στάδιο που παραδοσιακά ονομάζεται μετα-επεξεργαστής (post-processor). Τα περισσότερα πακέτα προσφέρουν ποικίλους τρόπους καταλογοποίησης, εκτίμησης και απεικόνισης των αποτελεσμάτων, τα οποία τυπικά περιλαμβάνουν τάσεις, παραμορφώσεις, και παραμορφωμένο σχήμα της κατασκευής. Ο παραδοσιακός τρόπος είναι υπό μορφή ζωνών «ισοτασικών» επιφανειών κυρίως με χρήση χρωματικής κλίμακας. Στην περίπτωση δυναμικής ανάλυσης όλα τα πακέτα διαθέτουν animation, τόσο για την εποπτεία των ιδιόμορφων ταλάντωσης όσον και για την προσφερόμενη χρονική ολοκλήρωση που είναι το μοναδικό εργαλείο στην περίπτωση μη-γραμμικών

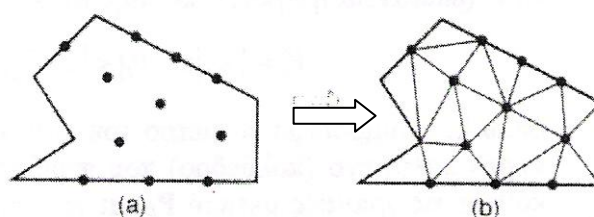
αναλύσεων. Επίσης, πολλά συστήματα διαθέτουν τη δυνατότητα εξαγωγής αποτελεσμάτων σε μορφή που μπορούν να αξιοποιηθούν περαιτέρω, σαν κείμενα, παρουσιάσεις, videos, e-mail, ή αποστολή στο διαδίκτυο.

4.4.2 Αυτόματη Γένεση Πλέγματος

Η γένεση πλέγματος συνεπάγεται τη δημιουργία κομβικών συντεταγμένων και στοιχείων. Περιλαμβάνει επίσης την αυτόματη αρίθμηση των κόμβων και στοιχείων βασισμένων στην ελάχιστη αλληλεπίδραση με τον χρήστη. Έτσι, υποτίθεται ότι οι μέθοδοι αυτόματης γένεσης πλέγματος απαιτούν μόνο το γεωμετρικό μοντέλο (γεωμετρία και τοπολογία) του προς διακριτοποίηση αντικειμένου, τα χαρακτηριστικά του πλέγματος όπως πυκνότητα πλέγματος και τύπος στοιχείου, και τις οριακές συνθήκες, περιλαμβάνοντας σαν είσοδο συνθήκες φόρτισης. Άλλες μέθοδοι που απαιτούν πρόσθετη είσοδο, όπως υποδιαίρεση του αντικειμένου σε υποχωρία ή υποπεριοχές, ταξινομούνται σαν ημιαυτόματες μέθοδοι. Εν συντομία, εισάγουμε τις μεθόδους γένεσης πλέγματος με βάση την ταξινόμηση που πρότεινε ο Ho-Le (1988) (Ho-Le [16]).

4.4.2.1 Μέθοδος Σύνδεσης Κόμβων (N.C.A.)

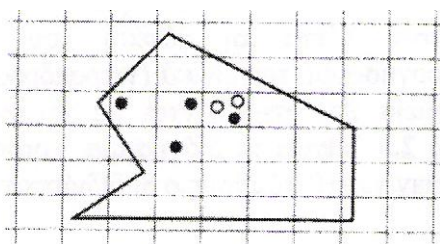
Η μέθοδος σύνδεσης κόμβων (node connection approach) προκειμένου να παράγουν πλέγμα είναι πολύ δημοφιλής διότι είναι πολύ απλή στη σύλληψη της. Οι δύο κύριες φάσεις αυτής της προσέγγισης είναι (i) η γένεση κόμβων που δείχνονται στο Σχ. 4.2 (a), και (ii) η γένεση στοιχείων στο Σχ. 4.2 (b).



Σχήμα 4.2: Μέθοδος σύνδεσης κόμβων

Γένεση κόμβων: Δημοσιευμένα έργα περιλαμβάνουν τα ακόλουθα.

- *Μέθοδος του Cavendish* (1974) (Cavendish [10]). Σε αυτή τη μέθοδο, εισάγονται αρχικά κόμβοι στο σύνορο του αντικειμένου με το χέρι του χρήστη (manually). Κατόπιν οι εσωτερικοί κόμβοι γεννώνται αυτόματα έτσι ώστε να ικανοποιήσουν τις απαιτήσεις πυκνότητας πλέγματος. Το αντικείμενο υποδιαιρείται σε ένα πλήθος ζωνών διαφορετικών επιθυμητών μεγεθών στοιχείων. Στη ζώνη i , υπερτίθεται ένα τετραγωνικό grid βήματος $r(i)$. Το Σχ. 4.3 δείχνει ένα υπερτιθέμενο μονό grid, που βασίζεται στην παραδοχή ότι είναι επιθυμητή η ομοιόμορφη πυκνότητα πλέγματος. Για κάθε τετράγωνο του grid, γεννιέται με τρόπο τυχαίο ένας εσωτερικός κόμβος. Αυτό μπορεί να γίνει παράγοντας τυχαίους αριθμούς μεταξύ 0 και 1 δύο φορές, μια για την κατεύθυνση x και μια για την κατεύθυνση y , και υπολογίζοντας την ισοδύναμη θέση των τιμών x και y . Εάν ο παραγόμενος κόμβος πέφτει μέσα στο αντικείμενο και έχει απόσταση από το σύνορο μεγαλύτερη από το $r(i)$, αλλά και από τους προηγούμενα παραγόμενους κόμβους, τότε γίνεται αποδεκτός. Εάν όχι, ένας άλλος κόμβος παράγεται τυχαία και ελέγχεται. Εάν δεν καταστεί δυνατόν να βρεθεί ένας αποδεκτός κόμβος μετά από ένα συγκεκριμένο αριθμό προσπαθειών (ας πούμε, πέντε), τότε το εν λόγω τετράγωνο παραλείπεται και θεωρείται το επόμενο. Η μέθοδος αυτή είναι επεκτάσιμη και στις 3 διαστάσεις, με τη διαφορά ότι χρησιμοποιείται τρισδιάστατο grid.
- *Μέθοδος του Shimada* (1992) (Shimada & Gossard [26]). Αυτή η μέθοδος γεμίζει το εσωτερικό του προς διακριτοποίηση αντικειμένου με «φυσαλίδες» όπως φαίνεται στο Σχ. 4.3, και λαμβάνει τα κέντρα τους σαν κόμβους. Το μέγεθος κάθε φυσαλίδας προσδιορίζεται από την κατανομή θερμοκρασίας που αντιστοιχεί στην επιθυμητή πυκνότητα πλέγματος. Κατόπιν οι θέσεις των φυσαλίδων προσδιορίζονται από την ικανοποίηση της ισορροπίας των εσωτερικών δυνάμεων μεταξύ αυτών.



Σχήμα 4.3: Μέθοδος γένεσης κόμβων κατά Cavendish

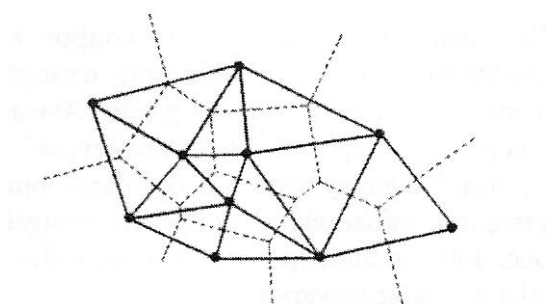
Γένεση στοιχείων: Σε αυτή τη δεύτερη φάση, κόμβοι που γεννήθηκαν στην προηγούμενη φάση συνδέονται για να αποτελέσουν στοιχεία έτσι ώστε να μην επικαλύπτονται και να καλύπτεται ολόκληρο το χωρίο. Αναφερόμαστε στη μέθοδο του Lee διότι αυτή μπορεί να οδηγήσει σε τετραπλευρικά στοιχεία. Ωστόσο, η μέθοδος τριγωνοποίησης του Delaunay είναι η πλέον διαδεδομένη μέθοδος σύνδεσης κόμβων. Στις επεξηγήσεις που ακολουθούν, θεωρούμε στοιχεία που έχουν κόμβους μόνο στις κορυφές τους. Εάν επιθυμούμε στοιχεία με ενδιάμεσους κόμβους, τότε αυτοί προκύπτουν εύκολα από τους γωνιακούς.

- *Μέθοδος Lee* (1983) (Lee [21]). Σε αυτή τη μέθοδο, επί του αντικειμένου υπερτίθεται ένα τετραγωνικό πλέγμα υποβάθρου (grid) του οποίου το βήμα είναι ίσο προς το επιθυμητό μέγεθος στοιχείων. Κατόπιν οι κόμβοι που παρήχθησαν στην προηγούμενη φάση συσχετίζονται με τα κελιά του πλέγματος υποβάθρου. Τα κελιά και οι αντίστοιχοι κόμβοι επισκέπτονται στήλη-προς-στήλη από αριστερά προς τα δεξιά και, μέσα στην ίδια στήλη, από τα κάτω προς τα πάνω. Μέσα σε ένα κελί, οι κόμβοι διατάσσονται κατά σειρά αύξουσας τετμημένης x . Κόμβοι με την ίδια τετμημένη x , διατάσσονται κατά σειρά αύξουσας τεταγμένης y . Οι κόμβοι επισκέπτονται κατά σειρά και, για κάθε κόμβο, οι γειτονικοί κόμβοι βρίσκονται έτσι ώστε να διαμορφώνουν τους κόμβους ενός καλοσχηματισμένου τετραπλεύρου. Στην περίπτωση αδυναμίας σχηματισμού καλώς ορισμένου τετραπλεύρου, δημιουργείται αντίστοιχο τριγωνικό στοιχείο.
- *Μέθοδος τριγωνοποίησης Delaunay* (Watson [29]). Αυτή είναι η πλέον διαδεδομένη μέθοδος γένεσης τριγώνων που συνδέει δεδομένους κόμβους διότι μεγιστοποιεί το άθροισμα των μικρότερων γωνιών σε όλα τα τρίγωνα που δημιουργούνται. Έτσι, αποφεύγονται τα λεπτά τρίγωνα.

Μια τυπική τριγωνοποίηση Delaunay ξεκινάει από ένα διάγραμμα Voronoi ή Dirichlet tessellation (Green & Sibson [12]). Ένα διάγραμμα Voronoi ενός συνόλου N σημείων, $P_i (i=1,2,\dots,N)$, αποτελείται από N πολύγωνα (πολύεδρα στις 3 διαστάσεις), V_i καθένα των οποίων έχει κέντρο το σημείο P_i έτσι ώστε ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου (του χώρου στις 3 διαστάσεις) που είναι πλησιέστερα στον κόμβο i , να περιλαμβάνονται στον V_i . Μαθηματικά, το V_i (επιφάνεια ή όγκος) εκφράζεται ως:

$$V_i = \{x: |x - P_i| < |x - P_j| \text{ για όλα τα } j \neq i\}$$

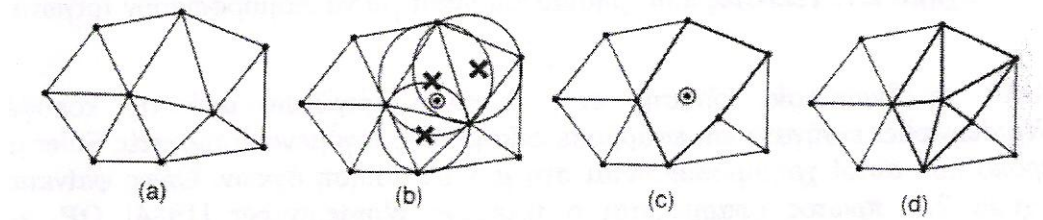
όπου $|\dots|$ συμβολίζει το μέτρο του διανύσματος εντός του και κάθε V_i είναι ένα κυρτό πολύγωνο (πολύεδρο) που περιβάλλεται από γραμμές (επίπεδα) τέμνοντα κάθετα τις γραμμές μεταξύ P_i και των γειτονικών του κόμβων. Αυτή η διαίρεση του (δισδιάστατου ή τρισδιάστατου) χώρου από ένα σύνολο V_i καλείται Dirichlet tessellation. Κάθε πολύγωνο (πολύεδρο) Voronoi έχει έναν κόμβο που συνδέεται με αυτό. Μετά τη γένεση του διαγράμματος Voronoi, μπορούμε να δημιουργήσουμε τριγωνικά (τετραεδρικά, στις 3 διαστάσεις) στοιχεία συνδέοντας τα σημεία που σχετίζονται με γειτονικά πολύγωνα (πολύεδρα) Voronoi. Το Σχ. 4.4 δείχνει το διάγραμμα Voronoi και την αντιστοιχούσα τριγωνοποίηση Delaunay για 10 κόμβους στη δισδιάστατη περίπτωση.



Σχήμα 4.4: Διάγραμμα Voronoi και η αντιστοιχούσα τριγωνοποίηση Delaunay

Η τριγωνοποίηση Delaunay μπορεί να γεννηθεί απευθείας από το δεδομένο σύνολο σημείων (κόμβων) χωρίς να είναι απαραίτητη πρώτα να έχει γίνει το διάγραμμα Voronoi, χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Watson για τη δισδιάστατη τριγωνοποίηση (Watson [29]). Σε αυτόν τον αλγόριθμο, ένα τρίγωνο διαμορφώνεται από τρία μη-συνευθειακά σημεία όταν ένας κύκλος που περνάει από αυτά, και ονομάζεται περιγεγραμμένος του τριγώνου, δεν περιλαμβάνει καθόλου άλλα σημεία. Ο αλγόριθμος υλοποιείται ως ακολούθως. Στην αρχή διαμορφώνεται ένα τρίγωνο T_0 , που περιέχει όλους τους κόμβους· μπορεί να πρέπει να εισαχθούν επιπλέον σημεία στις κορυφές του T_0 . Τότε εισάγουμε κόμβους από ένα δεδομένο σύνολο, έναν προς ένα, και βρίσκουμε τα τρίγωνα έκαστο των οποίων ο περιγεγραμμένος κύκλος περικλείει τον κόμβο. Αυτά τα πολύγωνα, που ονομάζονται τεμνόμενα πολύγωνα (intersection polygons), απαλείφονται. Στο Σχ. 4.5(b), τα τεμνόμενα πολυώνυμα συμβολίζονται με \times όταν ένας νέος κόμβος \odot εισάγεται στα υπάρχοντα τρίγωνα, όπως στο Σχ. 4.5(a), που γεννώνται από τους ήδη εισαχθέντες κόμβους. Το Σχ. 4.5(c) δείχνει το αποτέλεσμα μετά την απαλοιφή των τεμνόμενων αυτών πολυγώνων. Κατόπιν, νέα τρίγωνα διαμορφώνονται συνδέοντας τον νέο κόμβο με τις κορυφές των τεμνόμενων επιπέδων, όπως φαίνεται στο

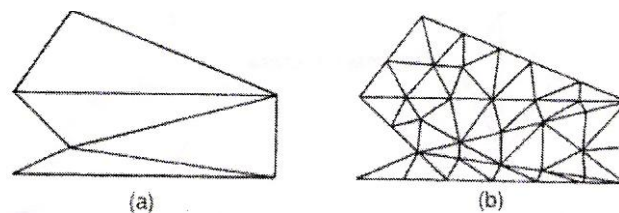
Σχ. 4.5(d). Τελικά, τα τρίγωνα που είναι συνδεδεμένα με τα επιπλέον σημεία που διαμορφώνουν το T_0 , απαλείφονται. Αυτή η διαδικασία μπορεί εύκολα να επεκταθεί για τρισδιάστατη γένεση πλεγμάτων στοιχείων χρησιμοποιώντας περιγεγραμμένες σφαίρες από 4 κόμβους αντί περιγεγραμμένους κύκλους από 3 κόμβους (Cavendish, Field & Frey [11]). Ωστόσο, η τρισδιάστατη τριγωνοποίηση Delaunay μπορεί να περιέχει πολύ λεπτά τετράεδρα, ενώ η δισδιάστατη τριγωνοποίηση Delaunay είναι, με κάποια έννοια, η βέλτιστη τριγωνοποίηση για ένα δεδομένο σύνολο σημείων.



Σχήμα 4.5: Αλγόριθμος τριγωνοποίησης του Watson

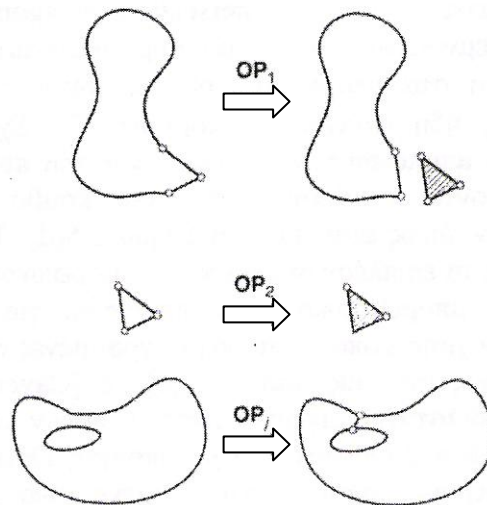
4.4.2.2 Μέθοδος Αποσύζευξης Τοπολογίας (T.D.A.)

Η δισδιάστατη μέθοδος αποσύζευξης τοπολογίας (topology decomposition approach) αναπτύχθηκε από τον Wordenweber (1984) (Wordenweber [31]). Σύμφωνα με αυτήν την προσέγγιση, το αντικείμενο προσεγγίζεται από ένα πολύγωνο και το τελευταίο κατακερματίζεται σε ένα σύνολο μεγάλων στοιχείων συνδέοντας τις κορυφές προς διαμόρφωση τριγώνων, όπως φαίνεται στο Σχ. 2.6(a). Κατόπιν, αυτά τα μεγάλα στοιχεία εκλεπτύνονται ώστε να ικανοποιήσουν την απαιτούμενη πυκνότητα κατανομής πλέγματος, όπως φαίνεται στο Σχ. 2.6(b). Το μέγεθος των στοιχείων και το σχήμα τους δεν είναι δυνατόν να ελεγχθούν εξωτερικά διότι τα μεγάλα στοιχεία προσδιορίζονται μόνο τους από την αρχική τοπολογία του αντικειμένου, ιδιαίτερα από την κατανομή των κορυφών. Οι κορυφές που ανήκουν στο ίδιο μεγάλο στοιχείο μπορούν να προσδιορισθούν από τη μέθοδο τριγωνοποίησης Delaunay που περιγράφηκε σε παραπάνω ενότητα.



Σχήμα 4.6: Παράδειγμα μεθόδου τοπολογικής αποσύζευξης

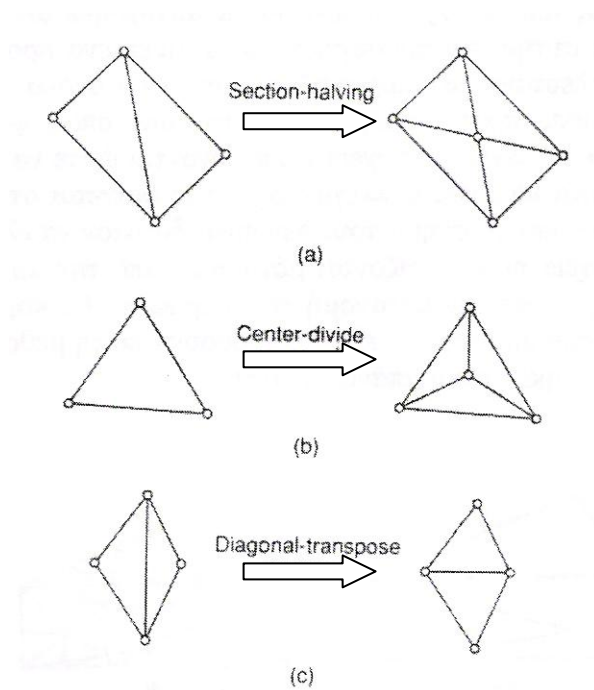
Κατά τη διαδικασία γένεσης ενός συνόλου τριγώνων από τις κορυφές, ο Wordenweber εισήγαγε και εφάρμοσε επίσης τους λεγόμενους τελεστές Euler με τον τρόπο που αυτοί χρησιμοποιούνται στη μοντελοποίηση όγκων. Όπως φαίνεται στο Σχ. 4.7, πρώτος εφαρμόζεται ο τελεστής Wordenweber (1984) OP_1 για να απαλείψει τις τρύπες στο αντικείμενο (Wordenweber [31]). Κατόπιν διαμορφώνονται τα τρίγωνα από τις κορυφές και αποχωρίζονται από το αντικείμενο εφαρμόζοντας επαναληπτικά τον τελεστή OP_1 μέχρις ότου απομείνουν μόνον 3 κορυφές. Τελικά, εφαρμόζεται ο τελεστής OP_2 για να διαμορφώσει το τελευταίο τρίγωνο.



Σχήμα 4.7: Τελεστές που χρησιμοποιούνται για να διαμορφώσουν τρίγωνα

Μόλις το αντικείμενο μετατραπεί σε ένα σύνολο μεγάλων τριγώνων, κάθε τρίγωνο εκλεπτύνεται έτσι ώστε να υπακούει στην απαιτούμενη πυκνότητα πλέγματος. Για την εκλέπτυνση μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι ακόλουθες τρεις μέθοδοι που δείχνονται στο Σχ. 4.8(a). Το Σχ. 4.8(a) δείχνει μια μέθοδο που εφαρμόζεται όταν δύο λεπτά τρίγωνα συναντώνται κατά μήκος της μακρύτερης πλευράς τους. Δηλαδή, προστίθεται ένας κόμβος στην κοινή ακμή, και τα γειτονικά στοιχεία υποδιαίρούνται συνδέοντας τους κόμβους τους με τον νέο κόμβο. Στο Σχ. 4.8(b), ένα μεγάλο τριγωνικό στοιχείο υποδιαίρεται προσθέτοντας ένα νέο κόμβο στο κέντρο βάρους του. Όταν το υποδιαιρέσουμε με τους τρόπους που περιγράψαμε παραπάνω, μπορεί να συναντήσουμε λεπτά τρίγωνα όπως φαίνονται στο Σχ. 4.8(c). Αυτά τα τρίγωνα είναι ήδη αρκετά μικρά για τη δοθείσα πυκνότητα πλέγματος.

Σε αυτή την περίπτωση, μπορούμε να βελτιώσουμε την ποιότητα του πλέγματος στρίβοντας τη διαγώνιο του τετραπλεύρου που διαμορφώνεται από τις κορυφές των δύο αρχικών τριγώνων. Παρατηρείστε ότι το αποτέλεσμα της ανάλυσης των πεπερασμένων στοιχείων μπορεί να μην είναι αρκετά ακριβές εάν υπάρχουν πάρα πολλά λεπτά στοιχεία.

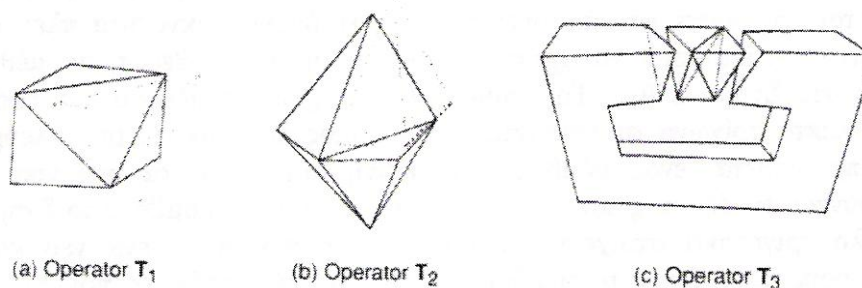


Σχήμα 4.8: Μέθοδοι εκλέπτυνσης τριγώνων

Η μέθοδος της τοπολογικής αποσύζευξης μπορεί να επεκταθεί στην τρισδιάστατη γένεση πλέγματος. Το αντικείμενο προσεγγίζεται από ένα πολύεδρο, και το πολύεδρο κατατέμενεται σε τετραεδρικά στοιχεία συνδέοντας τις κορυφές τους. Κατόπιν, τα τετραεδρικά στοιχεία εκλεπτύνονται με υποδιαίρεση. Οι Woo και Thomasma (1984) πρότειναν τελεστές παραπλήσιους με αυτούς που πρότεινε ο Wordenweber για να διευκολύνει τον σχηματισμό των τετραεδρικών στοιχείων (Woo & Thomasma [30]). Αυτοί οι τελεστές, που δείχνονται στο Σχ. 4.9, χρησιμοποιούνται για τον σχηματισμό τετραέδρων ως εξής:

- Πρώτα, εφαρμόζεται ο τελεστής T_3 για να απαλείψει τις σπές του αντικειμένου αποτέμνοντας το κατάλληλο τμήμα του έτσι ώστε η σπή να αποκαλυφθεί, όπως φαίνεται στο Σχ. 4.9(c). Σημειώστε ότι σε αυτό το στάδιο τρία τετράεδρα διαμορφώνονται σαν αποτέλεσμα παράπλευρης διαδικασίας.

- Κατόπιν, οι κυρτές κορυφές στις οποίες όπου συναντώνται τρεις ακμές, που καλούνται convex trivalent vertices (κορυφές), διαχωρίζονται από το αντικείμενο εφαρμόζοντας τον τελεστή T_1 , όπως εικονίζεται στο Σχ. 4.9(a). Αυτός ο τελεστής εφαρμόζεται επαναληπτικά μέχρις ότου δεν υπάρξει καμία κυρτή trivalent κορυφή. Εάν όλες οι κορυφές που απομένουν δεν είναι convex trivalent, τότε ο τελεστής T_2 εφαρμόζεται για να σκάψει ένα τετράεδρο, όπως εικονίζεται στο Σχ. 4.9(b). Αυτός ο τελεστής παρέχει τις νέες convex trivalent κορυφές και έτσι ο T_1 εφαρμόζεται ξανά.
- Αυτή η διαδικασία συνεχίζεται μέχρις ότου το αντικείμενο περιορισθεί σε ένα μονό τετράεδρο.



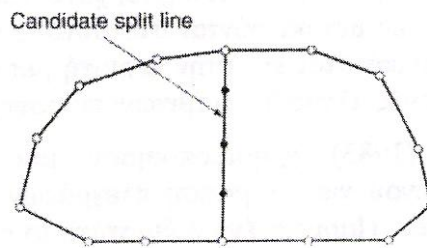
Σχήμα 4.9: Τελεστές αποσύζευξης γεωμετρίας στις 3 διαστάσεις

4.4.2.3 Μέθοδος Αποσύζευξης Γεωμετρίας (G.D.A.)

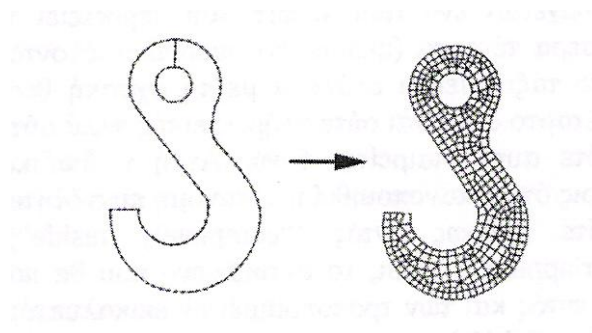
Οι μέθοδοι αποσύζευξης γεωμετρίας (geometry decomposition approaches) εμπίπτουν σε δύο κατηγορίες: σε αυτές που βασίζονται σε αναδρομές και αυτές που βασίζονται σε επαναλήψεις. Στη συνέχεια επεξηγούμε μόνο τη μέθοδο αναδρομής καθώς αυτή είναι επεκτάσιμη στις τρεις διαστάσεις.

Η μέθοδος αναδρομικής αποσύζευξης (recursive geometry decomposition method) γεννά τριγωνικά και τετρακομβικά στοιχεία στις 2 διαστάσεις με τον ακόλουθο τρόπο. Πρώτα, το αρχικό αντικείμενο διαιρείται σε κυρτά μέρη είτε με το χέρι ή αυτόματα. Αυτόματη αποσύζευξη αντικειμένου σε κυρτά τμήματα περιγράφεται από τον Bykat (1976) (Bycat [8]). Για κάθε κυρτό τμήμα, εισάγονται κόμβοι στο σύνορο του έτσι ώστε να ικανοποιήσει την επιθυμητή πυκνότητα πλέγματος. Κατόπιν, κάθε κυρτό τμήμα υποδιαιρείται προσεγγιστικά στο μέσον του «μακρύτερου άξονα», όπως φαίνεται στο Σχ.

4.10. Στη συνέχεια, εισάγονται περισσότεροι κόμβοι κατά μήκος της διαχωριστικής γραμμής σύμφωνα με τις απαιτήσεις της πυκνότητας πλέγματος, και τα δύο ήμισυ υποδιαίρουνται επαναληπτικά μέχρις ότου γίνουν τρίγωνα ή τετράπλευρα. Μερικές μέθοδοι επαναλαμβάνουν την υποδιαίρεση μέχρις ότου μέχρις ότου καταλήξει σε εξάγωνα ή οκτάγωνα και παράγουν τριγωνικά και τετραπλευρικά στοιχεία από αυτά σύμφωνα με προ-αποθηκευμένα πρότυπα. Με αυτό τον τρόπο είναι δυνατόν να πάρουμε περισσότερα τριγωνικά ή τετραπλευρικά στοιχεία. Το Σχ. 4.11 δείχνει ένα παράδειγμα γένεσης πλέγματος με χρήση μιας επαναληπτικής μεθόδου.



Σχήμα 4.10: Υποδιαίρεση με διαχωριστική γραμμή (split line)



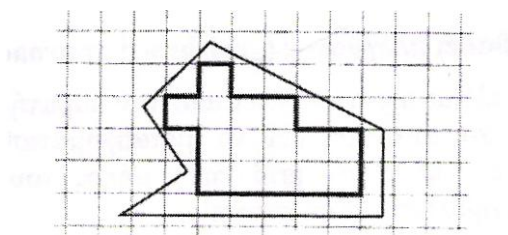
Σχήμα 4.11: Παράδειγμα γένεσης πλέγματος με χρήση μιας επαναληπτικής μεθόδου

Η βασική μέθοδος που περιγράφηκε παραπάνω μπορεί να επεκταθεί και στη γένεση τρισδιάστατου πλέγματος. Σε αυτή την περίπτωση το αντικείμενο υποδιαίρεείται σε δύο υπο-όγκους μέσω ενός διαχωριστικού επιπέδου, μέχρις ότου όλοι οι όγκοι περιορισθούν σε τετράεδρα. Σε αντίθεση με τη δισδιάστατη περίπτωση όπου μπορούν να παραχθούν τετράπλευρα, δεν είναι δυνατόν να γεννηθούν τετράεδρα με απευθείας τρόπο. Ωστόσο, κάθε τετράεδρο μπορεί να υποδιαιρεθεί σε 4 εξάεδρα, ή στοιχεία brick, εάν είναι επιθυμητό.

4.4.2.4 Μέθοδος Βάσει Πλέγματος (G.B.A.)

Η μέθοδος βάσει πλέγματος (grid-based approach) προκύπτει από την παρατήρηση ότι ένα grid μοιάζει με ένα πλέγμα και ότι αυτό μπορεί να μετασχηματισθεί στο τελευταίο υπό την προϋπόθεση ότι τα κελιά του grid κατά μήκος του συνόρου του αντικειμένου μπορούν να μετασχηματιστούν σε στοιχεία.

Η μέθοδος των Thacker, Gonzalez και Putland (1980) είναι ίσως η πρώτη σχετική δημοσίευση που έκανε χρήση της μεθόδου βάσει grid (Thacker, Gonzalez & Putland [28]). Σε αυτή τη μέθοδο ένα αντικείμενο αρχικά επικαλύπτεται από ένα τριγωνικό grid και τα σημεία του grid που πέφτουν εκτός αντικειμένου εξαλείφονται, αφήνοντας ένα σύνορο μορφής zigzag. Τα σημεία του grid που βρίσκονται πάνω στο zigzag σύνορο μετακινούνται προς το σύνορο του αντικειμένου ώστε να αποτελέσουν το τελικό πλέγμα. Οι διαφοροποιήσεις αυτής έγκειται στον τρόπο διαχείρισης του συνόρου. Ο Kikuchi (1986) επέκτεινε τη μέθοδο έτσι ώστε εκτός από κυρίως τετράπλευρα να περιλαμβάνει ακόμη και μερικά τρίγωνα, χρησιμοποιώντας ορθογωνικό grid, όπως φαίνεται στο Σχ. 4.12 (Kikuchi [19]). Ένα πρόβλημα και των δύο αυτών μεθόδων είναι ότι μικρά γεωμετρικά χαρακτηριστικά, με πολύ μικρές ακμές σε σχέση με το βήμα του grid, χάνονται. Σε άλλες μεθόδους τα σημεία του zigzag συνόρου δεν μετακινούνται στο σύνορο του αντικειμένου. Αντ' αυτού, δημιουργούνται τριγωνικά στοιχεία στην περιοχή μεταξύ zigzag και συνόρου αντικειμένου μέσω ενός αλγορίθμου τριγωνοποίησης.



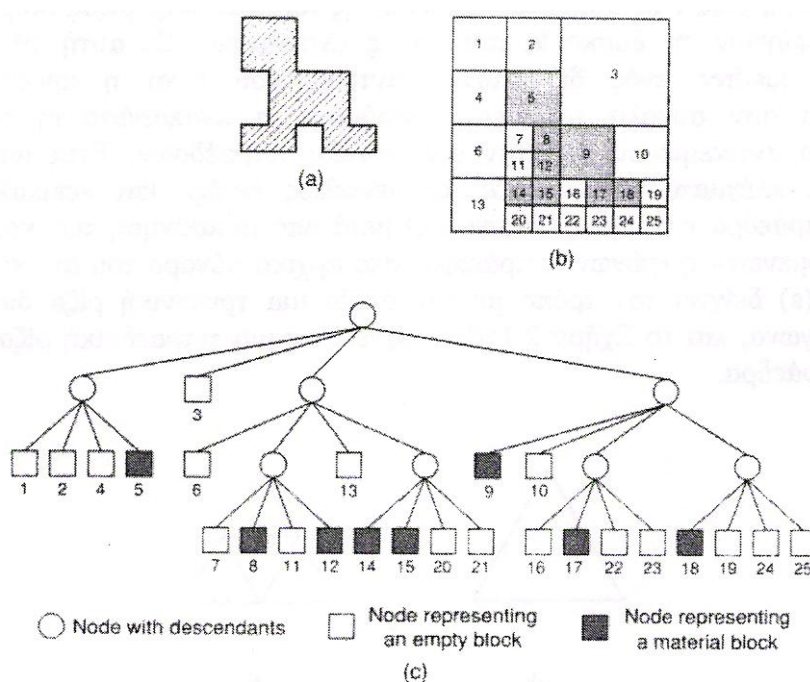
Σχήμα 4.12: Χρήση ορθογωνικού grid για τη μέθοδο “grid-based”

Οι Yerry και Shephard (1983) χρησιμοποίησαν μια δενδριτική (quadree) αναπαράσταση του αντικειμένου για τη γένεση πλεγμάτων (Yerry & Shephard [32]). Ένα quadree είναι το δισδιάστατο ανάλογο του octree. Παριστά ένα δισδιάστατο αντικείμενο, σαν αυτό που φαίνεται στο Σχ. 4.13(a), σαν ένα σύνολο τετραγώνων έκαστο διαφορετικού μεγέθους με επαναληπτική υποδιαίρεση της root square που περικλείει το

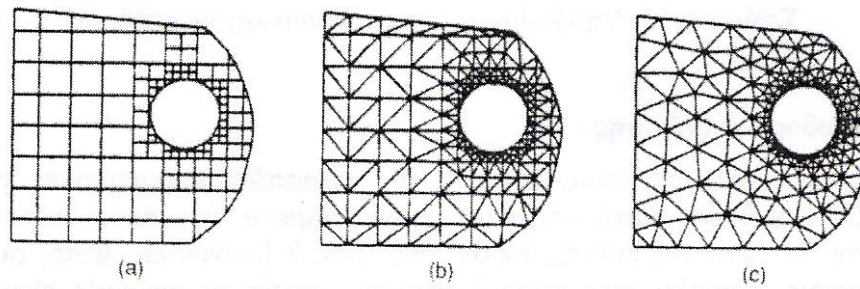
αντικείμενο. Το Σχ. 4.13(b) δείχνει τη διαδικασία υποδιαίρεσης του αντικειμένου, και το Σχ. 4.13(c) δείχνει την αναπαράσταση quadtree αυτής της υποδιαίρεσης. Τα πλέγματα γεννώνται ως εξής:

Βήμα 1: Δημιουργείται ένα root square που περικλείει το αντικείμενο και υποδιαιρείται σε τέσσερα τέταρτα (quadrants) υποδιπλασιάζοντας τις πλευρές του. Κατόπιν κάθε τέταρτο ταξινομείται ανάλογα με τη σχετική θέση του ως προς το αντικείμενο. Εάν το τέταρτο δεν είναι ούτε πλήρως εντός αλλά ούτε και πλήρως εκτός του αντικειμένου, τότε αυτό διαιρείται ξανά. Αυτή η διαδικασία υποδιαίρεσης επαναλαμβάνεται μέχρις ότου ικανοποιηθεί η κατανομή πυκνότητας πλέγματος και τα τέταρτα βρεθούν είτε πλήρως εντός ("completely inside") αντικειμένου ή επικαλύπτονται ("overlapping"). Έτσι, το αντικείμενο που θα παριστάνεται από τη συλλογή των πλήρως εντός και των τροποποιημένων επικαλυπτόμενων τετάρτων θα φαίνεται όπως στο Σχ. 4.14(a)

Βήμα 2: Κάθε τροποποιημένο επικαλυπτόμενο τέταρτο διαιρείται μέσα στα τριγωνικά στοιχεία χρησιμοποιώντας το αποθηκευμένο πρότυπο (prestored template) που βασίζεται στο σχήμα του τετάρτου. Κατόπιν, το «εντελώς εντός» τέταρτο επίσης υποδιαιρείται ώστε να ικανοποιήσει την προσαρμογή του πλέγματος με τα γειτονικά πλέγματα. Δυο γειτονικά στοιχεία ονομάζονται συμβατά (conforming) εάν μοιράζονται μια πλήρη ακμή (μια ολόκληρη έδρα σε 3-D στοιχεία). Το Σχ. 4.14(b) δείχνει το αποτέλεσμα της γένεσης πλέγματος.



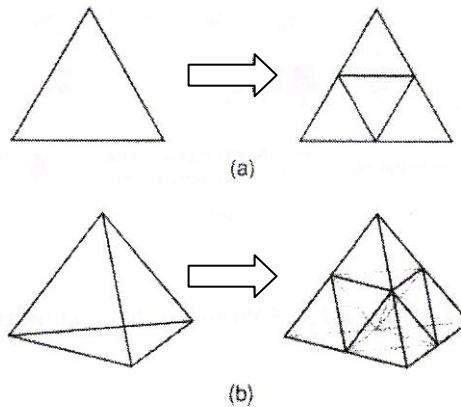
Σχήμα 4.13: Αναπαράσταση quadtree



Σχήμα 4.14: Γένεση πλέγματος με χρήση παράστασης quadree

Βήμα 3: Οι κόμβοι των στοιχείων μετακινούνται ελαφρώς (adjustment) έτσι ώστε να βελτιώσουν τα σχήματα των πλεγμάτων. Το Σχ. 4.14(c) δείχνει το αποτέλεσμα της εξομάλυνσης του πλέγματος. Η μέθοδος εξομάλυνσης αναφέρεται αργότερα. Αυτή η μέθοδος έχει επεκταθεί και στις 3 διαστάσεις χρησιμοποιώντας κωδικοποίηση octree. Στις τρεις διαστάσεις, τα «επικαλυπτόμενα» όγδοα (octants) τροποποιούνται έτσι ώστε να καταλαμβάνουν μόνον τον εσωτερικό χώρο του αντικειμένου και κατόπιν διασπάται σε τετράεδρα όπως τα τροποποιημένα επικαλυπτόμενα τέταρτα διασπώνται σε τρίγωνα στις δύο διαστάσεις. Το τροποποιημένο επικαλυπτόμενο όγδοο πρέπει να διασπασθεί σε τετράεδρα που ικανοποιούν την συμβιβαστότητα του πλέγματος με τα γειτονικά όγδοα. Θεωρώντας όλες τις ειδικές περιπτώσεις, αυτό απαιτεί ένα περίπλοκο αλγόριθμο. Πράγματι, ούτε και η διάσπαση του τροποποιημένου τετάρτου στις δύο διαστάσεις είναι εύκολο πρόβλημα.

Οι Jung και Lee (1993) πρότειναν μια νέα μέθοδο, αρχίζοντας από τη τριγωνική ρίζα (τετράεδρη ρίζα στις 3 διαστάσεις) αντί της τετραγωνικής ρίζας (κυβικής ρίζας) για να αποφύγουν τη δυσκολία που μόλις αναφέραμε (Jung & Lee [17]). Σε αυτή τη μέθοδο, η παράσταση quadree ενός δισδιάστατου αντικειμένου είναι η προσέγγιση του αντικειμένου σαν σύνολο τριγώνων. Παρόμοια, η αναπαράσταση octree ενός τρισδιάστατου αντικειμένου θα ήταν ένα σύνολο τετραέδρων. Έτσι μπορούμε να λάβουμε τα πλέγματα συλλέγοντας τα «εντελώς εντός» και «επικαλυπτόμενα» τρίγωνα (τετράεδρα στις τρεις διαστάσεις) μετά από μετακίνηση των κορυφών των «επικαλυπτόμενων» τριγώνων (τετράεδρα) στο αρχικό σύνορο του αντικειμένου. Το Σχ. 4.15(a) δείχνει τον τρόπο με τον οποίο μια τριγωνική ρίζα διασπάται σε τέσσερα τρίγωνα, και το Σχ. 4.15(b) δείχνει πως μια τετραεδρική ρίζα διασπάται σε οκτώ τετράεδρα.



Σχήμα 4.15: Υποδιαίρεση του τριγώνου και τετραέδρου

4.4.2.5 Μέθοδος Απεικόνισης

Η μέθοδος απεικόνισης χρησιμοποιείται στις περισσότερες εμπορικές γεννήτριες πλέγματος. Η μέθοδος αυτή απαιτεί την υποδιαίρεση του προς διακριτοποίηση αντικειμένου σε περιοχές ειδικής τοπολογίας. Στις 2 διαστάσεις, αυτές οι περιοχές έχουν τέσσερις πλευρές· στις τρεις διαστάσεις, αυτές οι περιοχές είναι μορφής «κουτιού» (boxlike). Μέσα σε κάθε περιοχή, το πλέγμα παράγεται αυτόματα με απεικόνιση της περιοχής προς ένα κανονικοποιημένο χωρίο αναφοράς (ένα κανονικό τρίγωνο ή τετράπλευρο στις δύο διαστάσεις και ένα κύβο στις τρεις διαστάσεις), δημιουργώντας διακριτοποίηση στο κανονικοποιημένο χωρίο με βάση την επιθυμητή πυκνότητα πλέγματος, και επαναπεικόνιση του διακριτοποιημένου χωρίου προς την αρχική περιοχή του πραγματικού αντικειμένου. Κατόπιν, το τελικό πλέγμα προκύπτει από σύνένωση των περιοχών που διακριτοποιήθηκαν ανεξάρτητα μεταξύ τους. Οι κοινές πλευρές που μοιράζονται σε γειτονικές περιοχές πρέπει να έχουν τον ίδιο αριθμό κόμβων έτσι ώστε να ικανοποιούν το συμβιβαστό του πλέγματος (mesh conformity). Η απαίτηση αυτή μπορεί να επιβληθεί με επέμβαση του χρήστη ή αλγοριθμικά την ώρα που παράγονται τα πλέγματα γειτονικών περιοχών. Πολλές μέθοδοι απεικόνισης μπορούν να εφαρμοσθούν.

Δύο τυπικές μέθοδοι είναι:

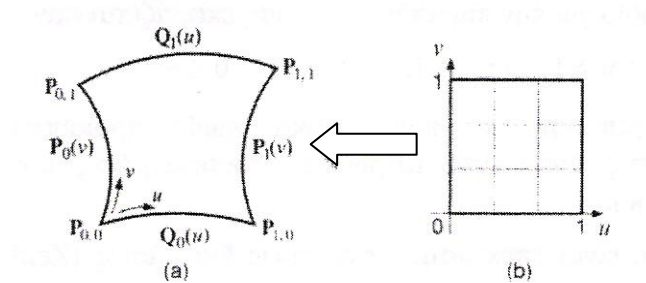
- η transfinite απεικόνιση (παρεμβολή Coons) και
- η ισοπαραμετρική απεικόνιση (isoparametric mapping).

Παρεμβολή Coons: Επιτρέπει σε περιοχές τριών ή τεσσάρων πλευρών (για το επίπεδο) και σε όγκους μορφής κύβου να απεικονισθούν σε αντίστοιχα στοιχεία αναφοράς χωρίς τη δημιουργία γεωμετρικών λαθών. Με άλλα λόγια, τα σημεία του συνόρου της περιοχής πάντοτε απεικονίζονται στο σύνορο του κανονικοποιημένου χωρίου. Μια περιοχή τεσσάρων πλευρών, όπως φαίνεται στο Σχ. 4.16(a), μπορεί να απεικονισθεί σε ένα τετράγωνο στον παραμετρικό χώρο uv που φαίνεται στο Σχ. 4.16(b). Ο τύπος της παρεμβολής που αντιστοιχίζει την τετραπλευρική περιοχή με το τετράγωνο είναι:

$$P(u, v) = (1 - u)P_0(v) + uP_1(v) + (1 - v)Q_0(u) + vQ_1(u) - (1 - u)(1 - v)P_{0,0} - u(1 - v)P_{1,0} - (1 - u)vP_{0,1} - uvP_{1,1} \quad (4.1)$$

$$(0 \leq u, v \leq 1)$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί για την παραγωγή τριγωνικών χωρίων, που προκύπτουν από εκφυλισμό μιας ακμής σε ένα κόμβο. Περαιτέρω εφαρμογές έχουν τόσο σχετικά με τη γένεση πλεγμάτων τριγωνικών όσο και με τη γένεση μεγάλων εκφυλισμένων τριγωνικών στοιχείων (Kanakachos, Grekas & Provatidis [18] , Dimitriou [3] [4]).



Σχήμα 4.16: Απεικόνιση περιοχής τεσσάρων πλευρών

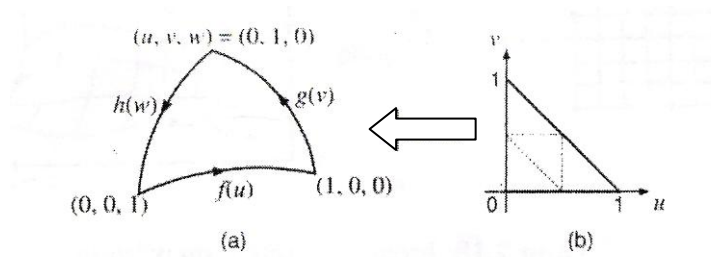
Εάν όμως ενδιαφερόμαστε να έχουμε κυκλική συμμετρία (ισοτιμία όλων των κορυφών του τριγώνου), κατά παρόμοιο τρόπο με τα τετράπλευρα, μια τριγωνική περιοχή μπορεί και αυτή να διαιρεθεί σε ένα πλέγμα τριγωνικών στοιχείων με τη χρήση τριγραμμικών συναρτήσεων επιρροής, όπως έχει περιγραφεί από τους Barnhill, Birkhoff και Gordon (1973) (Barnhill, Birkhoff & Gordon [6]). Η τριγωνική περιοχή που φαίνεται στο Σχ. 4.17(a) μπορεί να απεικονισθεί στον παραμετρικό χώρο που δείχνεται στο Σχ. 4.17(b) από τη σχέση:

$$P(u, v, w) = \frac{1}{2} \left[\frac{ug(v)}{1-v} + \frac{wh(1-v)}{1-v} + \frac{vh(w)}{1-w} + \frac{uf(1-w)}{1-w} + \frac{wf(u)}{1-u} + \frac{vg(1-u)}{1-u} \right] - \frac{1}{2} [wf(0) - ug(0) - vh(0)] \quad (4.2)$$

Το παραμετρικό χωρίο για την παραπάνω εξίσωση εκφράζεται σαν:

$$u + v + w = 1 \quad 0 \leq u \leq 1 \quad 0 \leq v \leq 1 \quad 0 \leq w \leq 1 \quad (4.3)$$

Σε αυτή την περίπτωση, το παραμετρικό χωρίο προκύπτει με ένα βήμα διακριτοποίησης στις ανηγμένες τριγωνικές συντεταγμένες u, v από τις οποίες προκύπτει η τρίτη (w). Οι παραπάνω τύποι είναι επεκτάσιμοι στις τρεις διαστάσεις (Zeid [33] , Provatidis [24] [25]).

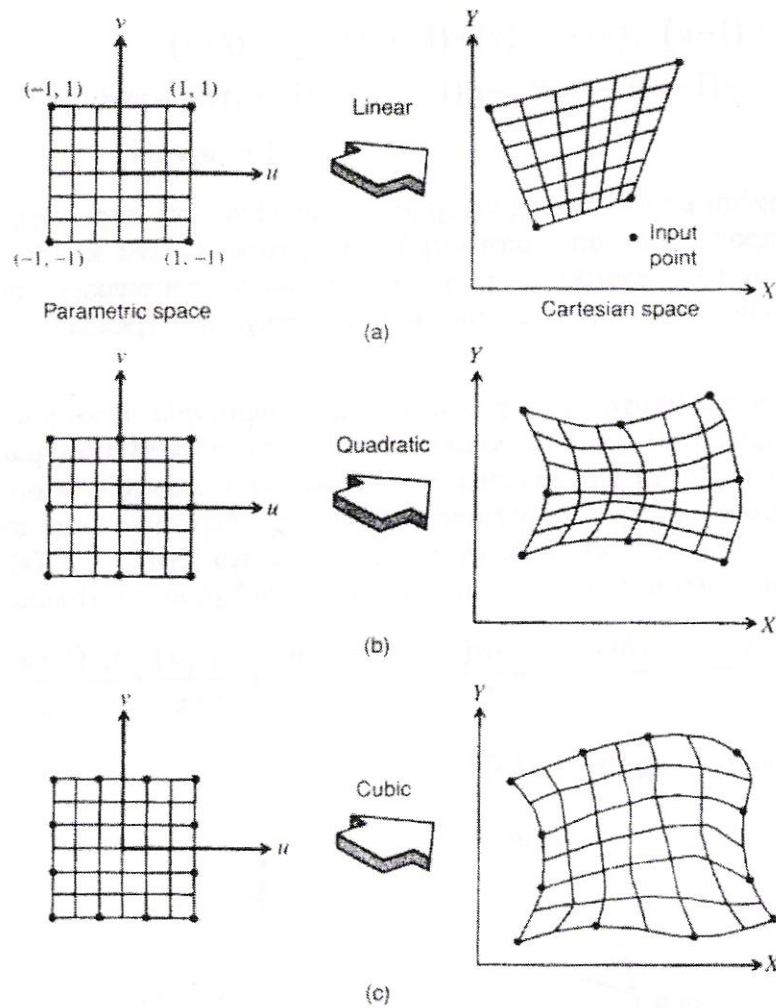


Σχήμα 4.17: Απεικόνιση περιοχής τριών πλευρών

Ισοπαραμετρική απεικόνιση: Είναι μια ειδική περίπτωση transfinite απεικόνισης. Σύμφωνα με αυτή τη μέθοδο, τετραπλευρικές (δισδιάστατες) ή κιβωτοειδείς (τρισδιάστατες) περιοχές απεικονίζονται σε ένα τετράγωνο ή ένα κύβο αναφοράς, αντίστοιχα, έτσι ώστε μόνο τα καθορισμένα σημεία περιοχής του συνόρου (όχι ολόκληρου του συνόρου) απεικονίζονται στα αντίστοιχα σημεία του συνόρου στον παραμετρικό χώρο, όπως φαίνεται στο Σχ. 4.18. Με άλλα λόγια, τα σύνορα ταιριάζουν μόνο σε ένα πεπερασμένο αριθμό σημείων. Έτσι, η εξίσωση απεικόνισης προκύπτει από αντικατάσταση των ακριβών εξισώσεων των συνοριακών εξισώσεων στην (4.1) από τις εξισώσεις παρεμβολής στα προκαθορισμένα σημεία.

Παρόμοια, η εξίσωση των συνοριακών επιφανειών θα αντικατασταθεί από τις εξισώσεις παρεμβολής μιας κιβωτοειδούς περιοχής. Για παράδειγμα, εάν ορισθούν δύο σημεία για

κάθε συνοριακή γραμμή του Σχ. 4.18(a), γραμμικές (linear) εξισώσεις παρεμβολής πρέπει να αντικατασταθούν στην (4.1). Εξισώσεις δεύτερου βαθμού (quadratic) παρεμβολής θα χρησιμοποιούσαμε για τρία σημεία κατά μήκος κάθε συνόρου, όπως φαίνεται στο Σχ. 4.18(b), και κυβικής παρεμβολής (cubic) εξισώσεις για τέσσερα σημεία σε κάθε σύνορο, όπως φαίνεται στο Σχ. 4.18(c).



Σχήμα 4.18: Ισοπαραμετρική απεικόνιση

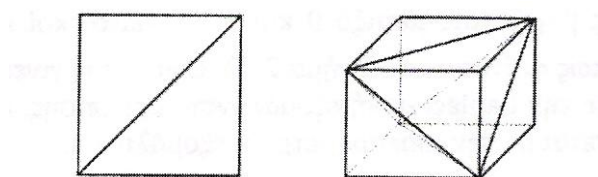
4.4.2.6 Βελτίωση Ποιότητας Πλέγματος

Μερικές μέθοδοι γένεσης πλέγματος, κυρίως εκείνες που βασίζονται στην προσέγγιση κατακερματισμού της τοπολογίας, δεν παράγουν αρχικό πλέγμα επαρκές για

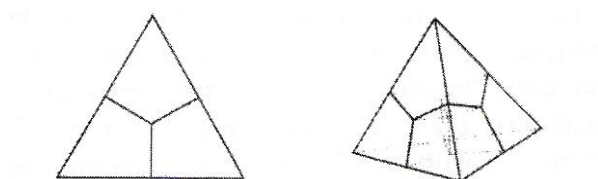
την περαιτέρω ανάλυση. Έτσι, πρέπει να ακολουθήσουμε μια πορεία τριών βημάτων ώστε να το βελτιώσουμε:

- Εάν τα στοιχεία που παράγονται δεν είναι του επιθυμητού τύπου, τότε τα υποδιαιρούμε στον επιθυμητό τύπο.
- Εάν τα στοιχεία δεν έχουν μεγέθη συμβατά με την επιθυμητή κατανομή πυκνότητας πλέγματος, τότε τα εκλεπτύνουμε.
- Εάν τα στοιχεία δεν είναι καλοσχηματισμένα, τότε εφαρμόζουμε μια τεχνική εξομάλυνσης (smoothing technique).

Μετατροπή τύπου στοιχείων: Εάν τα στοιχεία που παράγονται από τη γεννήτρια πλέγματος δεν είναι επιθυμητού τύπου, τότε μετατρέπονται σε έναν άλλο τύπο. Τα τετραπλευρικά και εξαεδρικά στοιχεία μπορούν εύκολα να μετατραπούν σε καλοσχηματισμένα τρίγωνα και τετράεδρα, αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο Σχ. 4.19. Παρόμοια, τρίγωνα και τετράεδρα μπορούν να υποδιαιρεθούν σε τετράπλευρα και εξάεδρα, αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο Σχ. 4.20. Σε αυτή την περίπτωση, ωστόσο, τα προκύπτοντα στοιχεία μπορεί να μην είναι καλοσχηματισμένα διότι οι γωνίες γύρω από τους νεοεισαχθέντες κόμβους είναι κατ' ανάγκη μεγάλες. Είναι επίσης πιθανό να μετατραπεί πλέγμα τριγώνων σε πλέγμα τετραπλεύρων συνδυάζοντας ανά δύο γειτονικά τρίγωνα σε ένα τετράπλευρο (Heighway [14]).

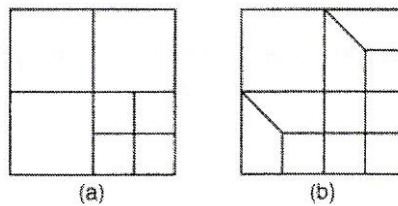


Σχήμα 4.19: Μετατροπή τετραπλεύρων και bricks τρίγωνα και τετράεδρα, αντίστοιχα



Σχήμα 4.20: Μετατροπή τριγώνου και τετράεδρου σε τετράπλευρα και bricks, αντίστοιχα

Εκλέπτυνση πλεγμάτων: Όταν ένα πλέγμα εκλεπτύνεται ώστε να ικανοποιήσει την επιθυμητή πυκνότητα πλέγματος, μερικά στοιχεία υποδιαιρούνται σε μικρότερα στοιχεία ενώ άλλα παραμένουν αναλλοίωτα. Έτσι, μπορεί να προκύψει η πιθανότητα παραβίασης της συμβατότητας μεταξύ γειτονικών στοιχείων, όπως φαίνεται στο Σχ. 4.21(a). Υπενθυμίζουμε ότι δύο γειτονικά στοιχεία λέγονται συμβατά όταν μοιράζονται μια ολόκληρη πλευρά (2-D) ή μια ολόκληρη επιφάνεια (3-D: face). Για τριγωνικά στοιχεία, δύο συμβατά γειτονικά στοιχεία μπορούν να προκύψουν με απλή διχοτόμηση της μεγαλύτερης ακμής ενός μεγαλύτερου τριγώνου. Η λύση δεν είναι τόσο απλή για τα τετραπλευρικά στοιχεία. Τα τετραπλευρικά στοιχεία που δείχνονται στο Σχ. 4.21(a) τροποποιούνται για να προσαρμοσθούν όπως δείχνεται στο Σχ. 4.21(b).



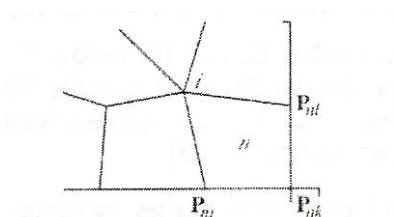
Σχήμα 4.21: Μη συμβατά πλέγματα και η τροποποίησή τους

Εξομάλυνση πλέγματος: Αρκετά συχνά, τα στοιχεία που παράγονται από μια αυτόματη γεννήτρια δεν είναι καλοσχηματισμένα, και πρέπει να εφαρμοσθεί μια τεχνική εξομάλυνσης. Η πλέον διαδεδομένη τεχνική εξομάλυνσης είναι η εξομάλυνση Laplace {Laplacian smoothing}, η οποία αναζητεί επανατοποθέτηση των κόμβων έτσι ώστε κάθε εσωτερικός κόμβος να είναι στο κέντρο βάρους του πολυγώνου που σχηματίζεται από τους συνδεδεμένους γείτονες. Συνήθως, αυτή η επανατοποθέτηση γίνεται επαναληπτικά. Ωστόσο, η Laplace-ιανή τεχνική εξομάλυνσης δεν δουλεύει καλά σε όλες τις περιπτώσεις. Σε αυτά τα πλαίσια, ο Hermann πρότεινε την παρακάτω σχέση επανατοποθέτησης (Hermann [15]):

$$P_i = \frac{1}{N(2-w)} \sum_{n=1}^N (P_{nj} + P_{nl} + P_{nk}) \quad (4.4)$$

όπου N είναι το πλήθος των στοιχείων γύρω από τον κόμβο i και w είναι ο συντελεστής βαρύτητας μεταξύ 0 και 1. Οι γειτονικοί κόμβοι P_{nj} , P_{nl} και P_{nk} ορίζονται όπως φαίνεται στο Σχ. 4.22. Όταν το w γίνει ίσο με 0, η εξομάλυνση ταυτίζεται με την Laplace-ιανή

εξομάλυνση, και επίσης, όταν το w γίνει ίσο με 1, αυτή εξισώνεται με την ισοπαραμετρική εξομάλυνση.



Σχήμα 4.22: Γειτονικοί κόμβοι ενός εσωτερικού κόμβου i

4.4.3 Είδη Ανάλυσης Πεπερασμένων Στοιχείων

Οι δυνατότητες των πακέτων πεπερασμένων στοιχείων είναι πολλές. Εκτός από τις τετριμμένες ελαστικές αναλύσεις, σε πολλά από αυτά τα πακέτα υπάρχουν δυνατότητες επίλυσης ποικίλων άλλων προβλημάτων σε μεγάλο τμήμα των εξισώσεων που διέπουν τα φυσικά φαινόμενα: θερμικά, ακουστικά, ηλεκτρικά, μαγνητικά (δινορεύματα: eddy-current), ηλεκτρομαγνητικά, υδροδυναμικά, ρευστομηχανικά, περιγραφής διάβρωσης υλικών, κλπ. Το σύνολο αυτό των δυνατοτήτων συνήθως αποδίδεται με τον όρο “Multi-Physics”, δηλαδή επίλυση των ποικίλων εξισώσεων της Φυσικής (Provatidis & Antoniadis [2]).

4.4.3.1 Καθορισμός του Είδους Ανάλυσης

Παρόλο που δεν είναι δυνατόν να κωδικοποιήσουμε τον τρόπο ανάλυσης, στη συνέχεια θα δώσουμε κάποιες γενικές κατευθύνσεις (Provatidis & Antoniadis [2]).

Η πλέον αρχική επιλογή είναι ο καθορισμός του φυσικού φαινομένου, το οποίο καλείται ο μελετητής να προσομοιώσει. Για παράδειγμα, ελαστική ανάλυση (elastic analysis) ή πρόβλημα δυναμικού (potential problem). Τα προβλήματα δυναμικού

αφορούν την επίλυση των εξισώσεων Laplace και Poisson που διέπουν τη μηχανική ατρίβους ρευστού, μετάδοση θερμότητας, κ.ο.κ.

Μια δεύτερη επιλογή που καλείται να κάνει ο μελετητής είναι ο καθορισμός του προβλήματος σαν:

- i. *Στατικό πρόβλημα* (static analysis), δηλαδή μη-εξαρτημένο από το χρόνο, ή
- ii. *Δυναμικό πρόβλημα* (dynamic analysis), δηλαδή χρονικά εξαρτώμενο. Παραδείγματα είναι η ταλάντωση μιας μηχανής, ο ερπυσμός και η χαλάρωση, η διάδοση ήχου στον αέρα ή σε άλλο μέσον, κλπ.

Μια άλλη κατάταξη αφορά στο εάν το πρόβλημα είναι γραμμικό (linear) ή μη-γραμμικό (nonlinear)

Γραμμικό λέγεται ένα πρόβλημα στο οποίο εάν διπλασιασθεί το μέγεθος των εξωτερικών δράσεων (π.χ. δυνάμεων) τότε διπλασιάζεται το μέγεθος του αποτελέσματος (π.χ. μετατοπίσεων). Τα περισσότερα προβλήματα της πράξης είναι (ή μάλλον θεωρούνται) γραμμικά.

Μη γραμμικό λέγεται ένα πρόβλημα στο οποίο δεν ισχύει η αναλογία που αναφέρθηκε προηγούμενα. Σε «ελαστικά» προβλήματα η μη-γραμμικότητα μπορεί να οφείλεται στο ελαστοπλαστικό υλικό (material nonlinearity) ή στην μεταβαλλόμενη επαφή μεταξύ δύο ή περισσότερων σωμάτων (geometrical nonlinearity). Και στις δύο αυτές περιπτώσεις, το μητρώο δυσκαμψίας δεν είναι σταθερό αλλά είναι συνάρτηση των μετατοπίσεων. Μη-γραμμικότητες υπάρχουν και σε προβλήματα δυναμικού, π.χ. όταν ο συντελεστής μετάδοσης θερμότητας είναι συνάρτηση της θερμοκρασίας.

Σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις, η μητρική διατύπωση του προβλήματος καταλήγει στην γνωστή μορφή:

$$[M]\{\ddot{u}(t)\} + [C]\{\dot{u}(t)\} + [K]\{u(t)\} = \{f(t)\} \quad (4.5)$$

Προφανώς, εάν το πρόβλημα είναι στατικό, τόσον η ταχύτητα, $\{\dot{u}(t)\}$, όσον και η επιτάχυνση, $\{\ddot{u}(t)\}$, μηδενίζονται.

Τέλος, πρέπει να γίνει κατανοητό ότι, φαινόμενα λυγισμού θλιβόμενων δοκών καθώς και πτύχωσης θλιβόμενων πλακών και κελυφών, δεν είναι δυνατόν να

αντιμετωπισθούν από τη συνήθη γραμμική ανάλυση που περιγράφεται από τη σχέση (4.5), αλλά απαιτούν ιδιαίτερη επίλυση (buckling analysis). Πιο συγκεκριμένα, εκτός από το γνωστό μητρώο δυσκαμψίας $[K]$ που οφείλεται στις μικρές παραμορφώσεις εμφανίζεται και ένα δεύτερο μητρώο $[K_G]$ που οφείλεται στις μεγάλες παραμορφώσεις του λυγισμού ή της πτύχωσης. Η αριθμητική λύση του προβλήματος εξάγεται από την επίλυση ενός προβλήματος ιδιοτιμών της μορφής:

$$([K] - \lambda_i [K_G]) \cdot \{u\} = \{0\} \quad (4.6)$$

του οποίου οι ιδιοτιμές λ αντιστοιχούν στα κρίσιμα φορτία λυγισμού, ενώ τα ιδιοδιανύσματα u αντιστοιχούν στη μορφή που θα λάβει ο λυγισμένος φορέας όταν δέχεται το αντίστοιχο κρίσιμο φορτίο.

Πιο συγκεκριμένα μετά τον σχηματισμό των δύο παραπάνω μητρώων και την επιβολή των στηρίξεων της κατασκευής (διαγραφή αντίστοιχων γραμμών και στηλών), οι ιδιοτιμές υπολογίζονται από τη σχέση:

$$\det \|[K] - \lambda_i [K_G]\| = 0, \quad i = 1, 2, \dots \quad (4.7)$$

όπου ο δείκτης i αντιστοιχεί στο πρώτο, δεύτερο, κοκ, φορτίο λυγισμού ή πτύχωσης.

4.4.3.2 Στάδια Ανάλυσης Πεπερασμένων Στοιχείων

Για τη μοντελοποίηση μιας κατασκευής με πεπερασμένα στοιχεία διακρίνουμε τα ακόλουθα στάδια (Provatidis & Antoniadis [2]):

1ο Στάδιο → Κατασκευή της γεωμετρίας.

2ο Στάδιο → Επιλογή του είδους των πεπερασμένων στοιχείων και διακριτοποίηση της γεωμετρίας σε πεπερασμένα στοιχεία.

3ο Στάδιο → Ορισμός των μηχανικών και φυσικών ιδιοτήτων των υλικών (μπορεί να γίνει και σε προηγούμενο στάδιο) και επιβολή των οριακών συνθηκών.

4ο Στάδιο → Επιλογή του τρόπου επίλυσης (γραμμικό – μη γραμμικό μεταβατικό – υπολογισμός ιδιοσυχνοτήτων κ.α.) και επίλυση.

5ο Στάδιο → Ανάγνωση των αποτελεσμάτων και γραφική αναπαράστασή τους.

4.4.3.3 Είδος Πεπερασμένων Στοιχείων

Τα βασικά πεπερασμένα στοιχεία είναι (Provatidis & Antoniadis [2]):

- Ράβδος (2 κόμβοι)
- Σύρμα – σχοινί
- Δοκός (2 κόμβοι)
- Επίπεδη εντατική καταπόνηση (3 μέχρι 9 κόμβοι)
- Επίπεδη παραμορφωσιακή κατάσταση (3 μέχρι 9 κόμβοι)
- Αξονοσυμμετρικό με αξονοσυμμετρική φόρτιση (3 μέχρι 9 κόμβοι)
- Αξονοσυμμετρικό με τυχαία φόρτιση (που αναλύεται σε αρμονικές)
- Πλάκα (3 μέχρι 9 κόμβοι)
- Μembrάνη
- Κέλυφος
- Ορθοτροπικό – πολυστρωματικό υλικό
- Τετράεδρο (3 κόμβοι)
- Πρίσμα (π.χ. 6 κόμβοι)
- Εξάεδρο (8 κόμβοι)

Ανάλογα με το είδος του προβλήματος, το πλήθος των βαθμών ελευθερίας ανά κόμβο ποικίλει.

4.5 Λογισμικά CAD – CAE

Σήμερα, κυκλοφορούν στην αγορά πολλά εμπορικά πακέτα CAD – CAE που προσπαθούν να καλύψουν τις ανάγκες της βιομηχανίας (Brebbia [9]). Αμέσως παρακάτω αναφέρονται τα σημαντικότερα:

- Μερικά από τα περισσότερο χρησιμοποιούμενα προγράμματα CAD στις μέρες μας είναι τα: AutoCAD και IntelliCAD που εξειδικεύεται στην δισδιάστατη σχεδίαση και τα: Parasolid, Catia, Solidworks και Inventor που χρησιμοποιούνται περισσότερο για τρισδιάστατα σχέδια και ολοκληρωμένους μηχανισμούς.
- Μερικά από τα περισσότερο χρησιμοποιούμενα προγράμματα CAE στις μέρες μας είναι τα: Ansys, Abaqus, Nastran, Patran, Solvia, Cosmos και Algor που χρησιμοποιούν τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων.
- Μερικά από τα περισσότερο χρησιμοποιούμενα ολοκληρωμένα προγράμματα CAD – CAE στις μέρες μας είναι τα: Ideas, Pro/Engineer Inventor, και Solidworks με τα οποία εκτός της σχεδίασης δισδιάστατων και τρισδιάστατων μοντέλων και μηχανισμών δίδεται η δυνατότητα και ανάλυσης πεπερασμένων στοιχείων.

Στην παρούσα εργασία το λογισμικό CAD που θα χρησιμοποιήσουμε για την μοντελοποίηση των οδοντωτών τροχών είναι το Autodesk Inventor, ενώ η μελέτη των πεπερασμένων στοιχείων θα γίνει με το λογισμικό CAE Ansys Multi-Physics όπως αναφέρονται παρακάτω.

4.5.1 Autodesk Inventor

Το Autodesk Inventor είναι ένα λογισμικό CAD το οποίο είναι προσανατολισμένο κυρίως στον τομέα του ολοκληρωμένου σχεδιασμού μηχανημάτων. Έχει εξειδικευμένες λειτουργίες για σχεδίαση μηχανολογικών στοιχείων (οδοντωτών τροχών, ατράκτων,

εδράνων κυλίσεως, ελατηρίων, αλυσιδωτών τροχών και ιμάντων), καλωδίων, πλεξούδων καλωδίων, σωληνώσεων και αγωγών, καθώς και εισαγωγή πλακετών τυπωμένων κυκλωμάτων ενώ μπορούν διαφορετικές ομάδες εργασίας να λειτουργούν πάνω σε μια κοινή πλατφόρμα μειώνοντας τον κύκλο ανάπτυξης ενός προϊόντος.

4.5.2 Ansys Multi-Physics

Το Ansys Multi-Physics είναι ένα εμπορικό πακέτο πεπερασμένων στοιχείων που παρέχει τη δυνατότητα στο μηχανικό της ανάλυσης λαμβάνοντας το συνδυασμό στατικών, θερμικών, ηλεκτρομαγνητικών και ροής φαινομένων, όπου η συμπεριφορά του ενός εξαρτάται από τη συμπεριφορά του άλλου. Δίνει τη δυνατότητα ταχείας παραβολής εικόνας της ιδέας σχεδιασμού, πριν ακόμα δημιουργηθούν πανάκριβα φυσικά πρωτότυπα.

4.6 Εφαρμογή στους Τροχούς του Πειράματος

Με τη βοήθεια του παραπάνω λογισμικού θα μοντελοποιήσουμε τα δοκίμια των οδόντων που χρησιμοποιήσαμε στο πείραμα της φωτοελαστικότητας και στα αντίστοιχα μοντέλα που θα κατασκευάσουμε θα προβούμε σε ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων για τον υπολογισμό των μεγίστων τάσεων στον πόδα των οδόντων των αντιστοίχων οδοντωτών τροχών.

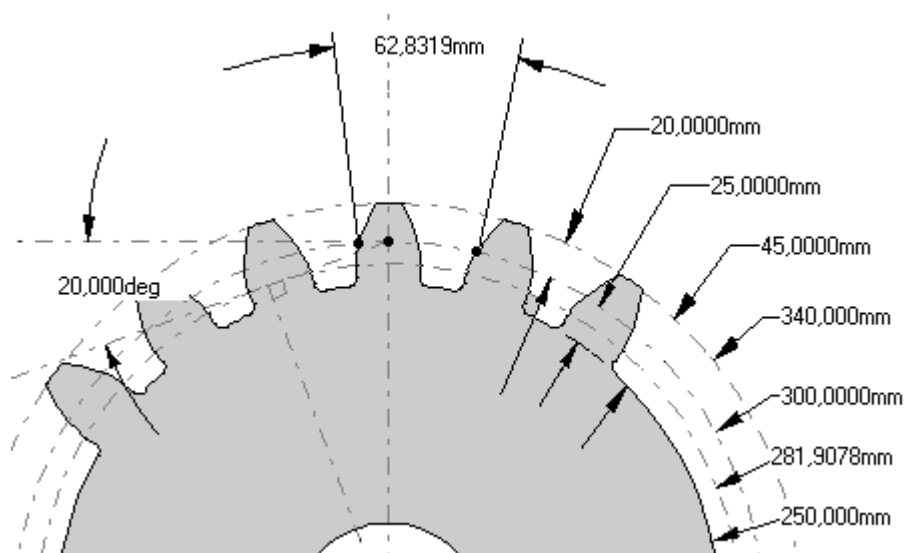
4.6.1 Κατασκευή 3-D Μοντέλων

Στη συνέχεια, θα μοντελοποιήσουμε στο τρισδιάστατο επίπεδο τα δοκίμια του πειράματος της φωτοελαστικότητας στους αντίστοιχους οδοντωτούς τροχούς με τη βοήθεια του λογισμικού CAD (Autodesk Inventor). Παρακάτω θα παραθέσουμε την

διαδικασία δημιουργίας του μοντέλου του οδοντωτού τροχού των 15 οδόντων ενώ για τους υπόλοιπους τροχούς, η διαδικασία είναι παρόμοια. Όσον αφορά το πλάτος των τροχών για λόγους ευκολίας θα επιλέξουμε σε όλους το ίδιο πλάτος ($b = 30 \text{ mm}$). Έτσι έχουμε:

Βήμα 1^ο: Βάζοντας τα απαραίτητα στοιχεία των οδοντωτών τροχών που λαμβάνουμε από τον Πίν. 3.1 του πειράματος της φωτοελαστικότητας στο παράθυρο του Design Accelerator του Autodesk Inventor στον τομέα των μετωπικών οδοντωτών τροχών, Σχ. 4.23 & 4.24, κατασκευάζεται στο περιβάλλον του Autodesk Inventor το μοντέλο του οδοντωτού τροχού, Σχ. 4.25, της επομένης σελίδας:

Σχήμα 4.23: Χαρακτηριστικά τροχού 15 οδόντων



Σχήμα 4.24: Γεωμετρικά χαρακτηριστικά τροχού 15 οδόντων



Σχήμα 4.25: 3-D μοντέλο τροχού 15 οδόντων

Βήμα 2ο: Στη συνέχεια, δουλεύοντας στο περιβάλλον του Autodesk Inventor, κατασκευάζουμε κεντρική οπή στον οδοντωτό τροχό με την βοήθεια της εντολής “Hole” και εν συνεχεία παραθέτουμε το τελικό μοντέλο, Σχ. 4.26:

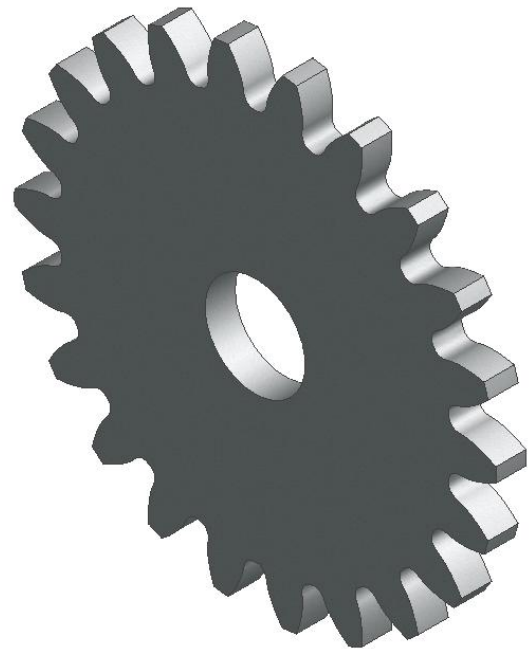


Σχήμα 4.26: 3-D μοντέλο τροχού 15 οδόντων με οπή

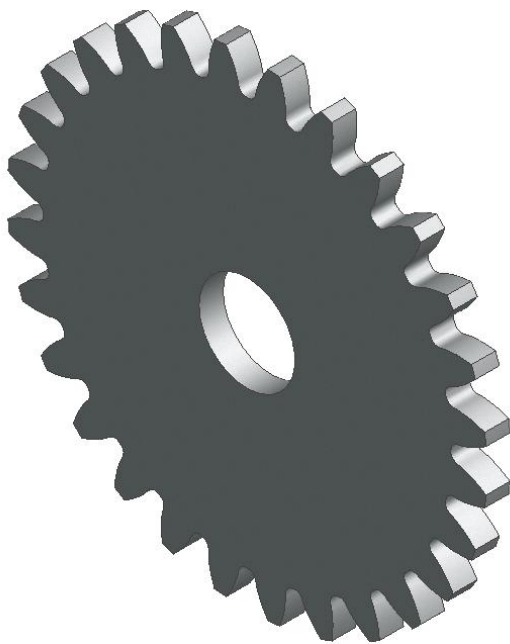
Ομοίως κατασκευάζονται και τα 3-D μοντέλα των υπολοίπων δοκιμών και τα παραθέτουμε στα παρακάτω Σχ. 4.27, 4.28, 4.29 & 4.30:



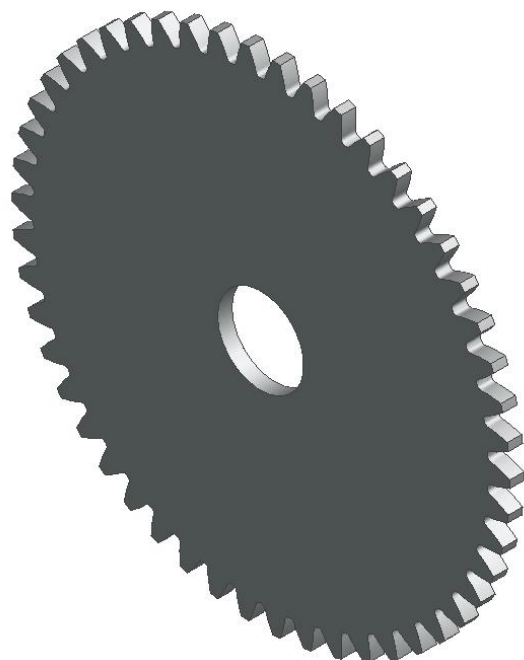
Σχήμα 4.27: 3-D μοντέλο τροχού 18 οδόντων



Σχήμα 4.28: 3-D μοντέλο τροχού 22 οδόντων



Σχήμα 4.29: 3-D μοντέλο τροχού 28 οδόντων



Σχήμα 4.30: 3-D μοντέλο τροχού 50 οδόντων

Στον παρακάτω Πίν. 4.1 παραθέτουμε τα κυριότερα γεωμετρικά στοιχεία και των πέντε (5) οδοντωτών τροχών που δημιουργήσαμε:

A/A	Κωδικός	z	m (mm)	b (mm)	α_o (°)	r_o (mm)	r_g (mm)	r_f (mm)	r_k (mm)
1	15N	15	20	30	20	150	140.9539	125	170
2	18N	18	20	30	20	180	169.1447	155	200
3	22N	22	20	30	20	220	206.7324	195	240
4	28N	28	20	30	20	280	263.1139	255	300
5	50N	50	20	30	20	500	469.8463	475	520

Πίνακας 4.1: Γεωμετρικά χαρακτηριστικά όλων των οδοντωτών τροχών

Εδώ είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι πρέπει να υπολογίσουμε και για τους 5 τροχούς που δημιουργήσαμε την κλίση του άξονα του δοντιού που θα εφαρμόσουμε τη δύναμη από την κατακόρυφο. Αυτό γίνεται με τη βοήθεια της εντολής “Measure Angle” του Autodesk Inventor και οι κλίσεις παρατίθενται στο παρακάτω Πίν. 4.2:

A/A	Κωδικός	Περιγραφή	z	Γωνία κλίσης του άξονα του δοντιού από την κατακόρυφο.
1	15N	Κανονικός τροχός με 15 οδόντες	15	12°
2	18N	Κανονικός τροχός με 18 οδόντες	18	10°
3	22N	Κανονικός τροχός με 22 οδόντες	22	8.182°
4	28N	Κανονικός τροχός με 28 οδόντες	28	6.429°
5	50N	Κανονικός τροχός με 50 οδόντες	50	3.6°

Πίνακας 4.2: Γωνίες κλίσεις των αξόνων των τροχών από την κατακόρυφο

Βήμα 3ο: Τέλος, αποθηκεύουμε τα μοντέλα των τροχών που δημιουργήσαμε σε μορφή IGES (.igs) για να μπορέσουμε να τα εισάγουμε στο περιβάλλον του Ansys.

4.6.2 Προσδιορισμός του HPSTC

Το επόμενο βήμα είναι ο υπολογισμός της θέσης του σημείου HPSTC (Costopoulos [1]). Θα εφαρμόσουμε την μεθοδολογία που αναφέρθηκε στην αντίστοιχη ενότητα (βλ. 3.4) στον οδοντωτό τροχό των 15 οδόντων που συνεργάζεται με τροχό 18 οδόντων (δοκιμή 1), ενώ για τους υπόλοιπους τροχούς η διαδικασία είναι παρόμοια.

Έτσι, το σημείο B' είναι το HPSTC όπως φαίνεται στο Σχ. 4.31 της επόμενης σελίδας και προσδιορίζεται ως εξής:

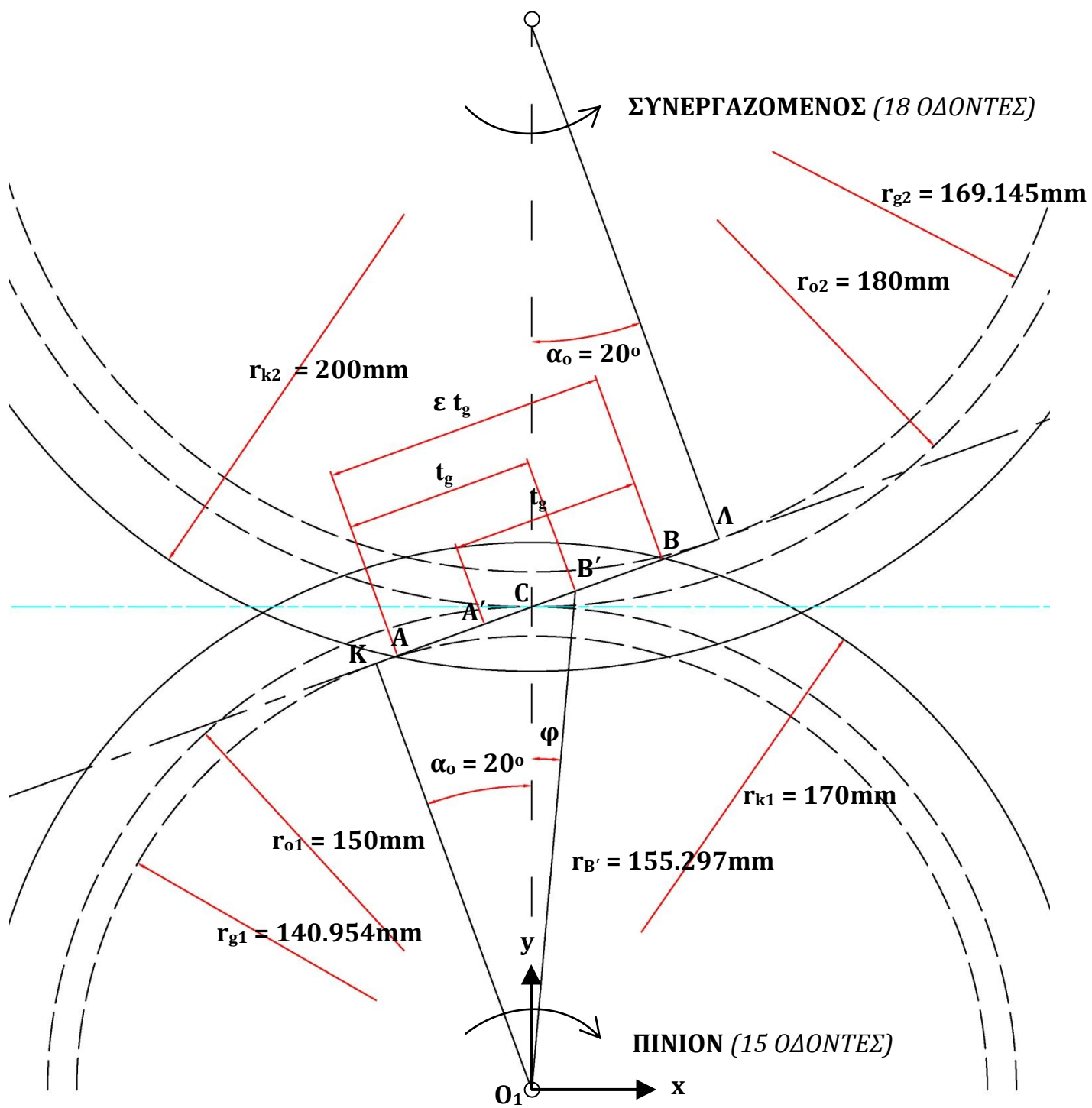
$$AC = \sqrt{(r_{o2} + m)^2 - r_{o2}^2 \cos^2 \alpha_o} - r_{o2} \sin \alpha_o = \\ \sqrt{(180\text{mm} + 20\text{mm})^2 - 180^2 \cos^2 20^\circ} - 180 \sin 20^\circ = \mathbf{45.161\text{mm}}$$

$$CB' = AB' - AC = t_g - AC = \pi m \cos \alpha_o - AC = \\ = \pi 20\text{mm} \cos 20^\circ - 45.161\text{mm} = \mathbf{13.882\text{mm}}$$

και χρησιμοποιώντας το τρίγωνο O₁B'C, η ακτίνα r_{B'} μπορεί να προσδιοριστεί από τη σχέση:

$$r_{B'} = \sqrt{r_{o1}^2 + CB'^2 - 2 r_{o1} CB' \cos(\alpha_o + 90^\circ)} = \\ = \sqrt{150\text{mm}^2 + 13.882\text{mm}^2 - 2 \cdot 150\text{mm} \cdot 13.882\text{mm} \cos(20^\circ + 90^\circ)} = \\ = 155.297\text{mm}$$

Έτσι, το σημείο HPSTC του εν λόγω τροχού βρίσκεται σε απόσταση r_{B'} = 155.297mm από το κέντρο του.



Σχήμα 4.31: Γεωμετρικός προσδιορισμός του HPSTC σε τροχό 15 οδόντων που συνεργάζεται με τροχό 18 οδόντων

Με παρόμοια διαδικασία υπολογίζουμε τις ακτίνες r_B και των υπολοίπων τροχών που χρησιμοποιήσαμε στο πείραμα της φωτοελαστικότητας και τις παραθέτουμε όλες στον παρακάτω Πίν. 4.3:

A/A Δοκιμής	Τροχός 1 (Πινιών)	Τροχός 2	Απόσταση HPSTC από το κέντρο του τροχού r_B (mm)
<i>Κανονικοί Τροχοί</i>			
1	15N	18N	155.297
2	18N	15N	185.794
3	15N	22N	154.672
4	22N	15N	225.695
5	15N	28N	153.983
6	28N	15N	285.598
7	15N	50N	152.629
8	50N	15N	505.441
9	18N	22N	184.600
10	22N	18N	225.126
11	18N	28N	183.929
12	28N	18N	285.047
13	18N	50N	182.604
14	50N	18N	504.916
15	22N	28N	223.880
16	28N	22N	284.472
17	22N	50N	222.581
18	50N	22N	504.368
19	28N	50N	282.559
20	50N	28N	503.755

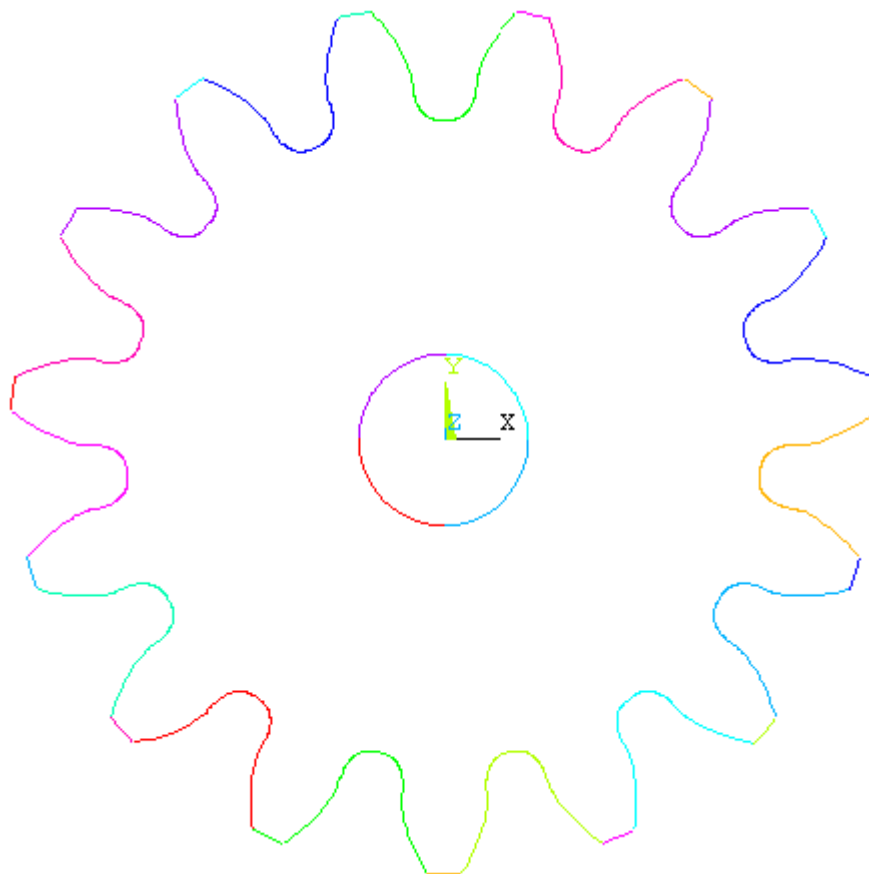
Πίνακας 4.3: Θέσεις HPSTC όλων των τροχών

4.6.3 Πεπερασμένα Στοιχεία

Έχοντας υπολογίσει και την θέση του σημείου HPSTC για όλες τις βαθμίδες, θα συνεχίσουμε με μελέτη πεπερασμένων στοιχείων που θα γίνει με το πρόγραμμα Ansys (Provatidis & Antoniadis [2]). Παρακάτω, θα περιγράψουμε την διαδικασία για τον οδοντωτό τροχό των 15 οδόντων που συνεργάζεται με τροχό 18 οδόντων (δοκιμή 1), ενώ για τους υπόλοιπους τροχούς η διαδικασία είναι παρόμοια. Έτσι έχουμε:

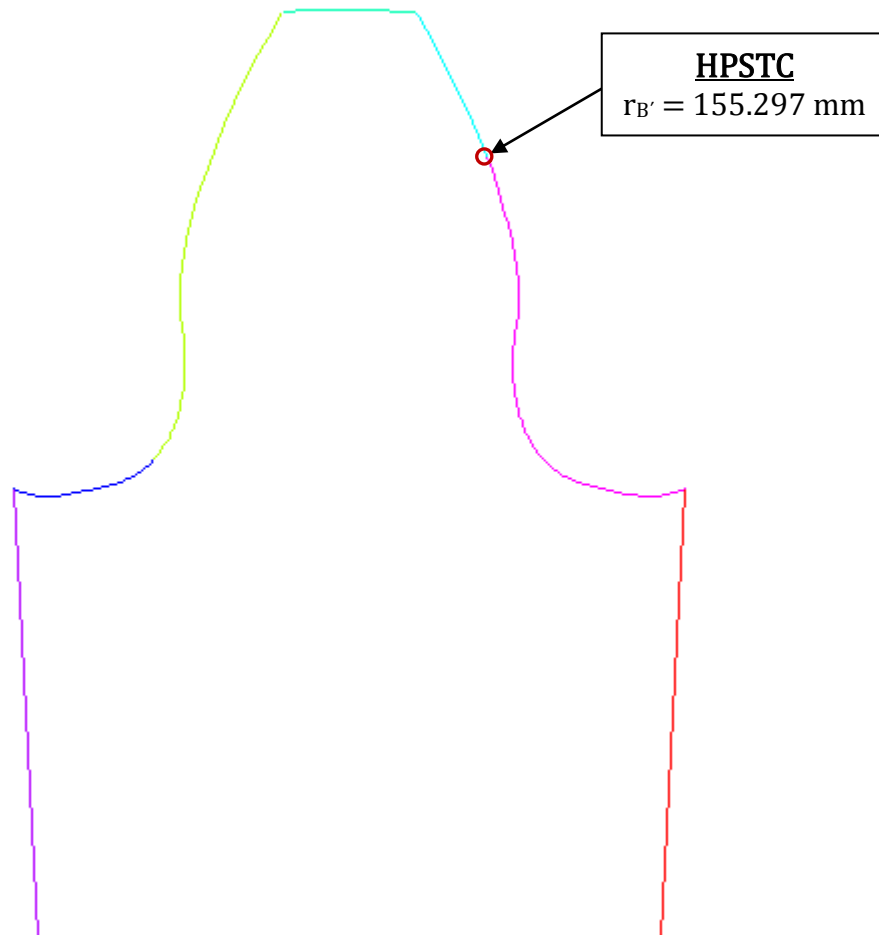
Βήμα 1^ο: Εισάγουμε το αρχείο .igs του τροχού των 15 οδόντων στο περιβάλλον του Ansys όπου και θα εργαστούμε.

Βήμα 2^ο: Διαγράφουμε όγκους και επιφάνειες ώστε να μας μείνει μόνο το προφίλ του τροχού με γραμμές και σημεία όπως φαίνεται στο παρακάτω Σχ. 4.32.



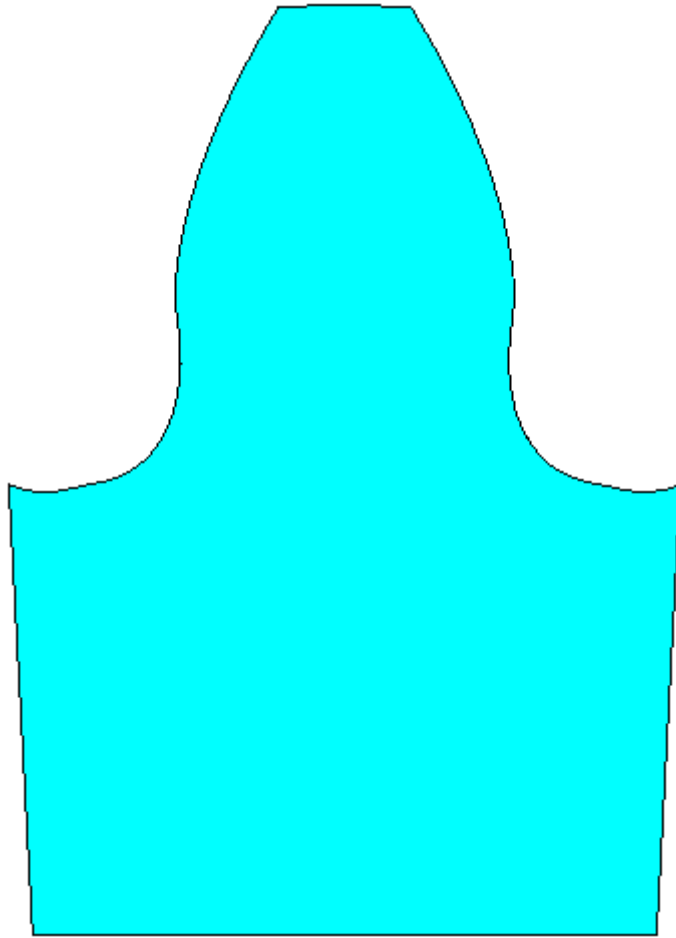
Σχήμα 4.32: Προφίλ τροχού 15 οδόντων

Βήμα 3ο: Θα εργαστούμε μόνο με τον ένα οδόντα του τροχού οπότε διαγράφουμε τα 14 δόντια του τροχού, αφήνοντας μόνο αυτό (επάνω αριστερά) με το οποίο θα εργαστούμε. Στη συνέχεια, περιστρέφουμε τον άξονα Z σύμφωνα με την γωνία κλίσης του Πίν. 4.2 για να “φέρουμε” τον οδόντα σε κατακόρυφη θέση, όπως φαίνεται στο παρακάτω Σχ. 4.33.



Σχήμα 4.33: Προφίλ ενός οδόντος του τροχού των 15 οδόντων

Βήμα 4ο: Το επόμενο, και τελευταίο, βήμα στον σχεδιασμό του οδόντος είναι η κατασκευή επιφάνειας από το προφίλ του οδόντος που έχουμε κατασκευάσει. Το αποτέλεσμα του βήματος αυτού παρατίθεται στο παρακάτω Σχ. 4.34 και ολοκληρώνεται έτσι ο σχεδιασμός του μοντέλου του οδόντος.

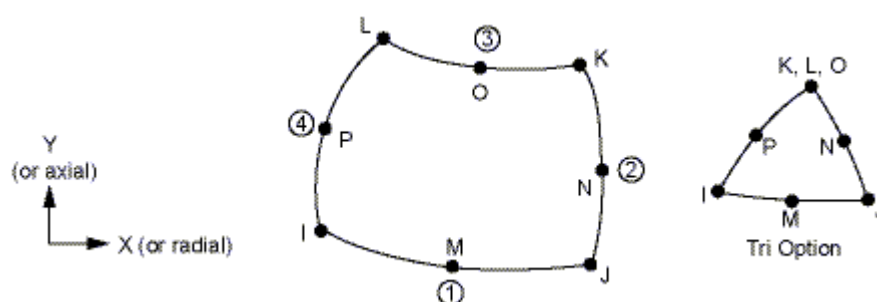


Σχήμα 4.34: Επιφάνεια οδόντος του τροχού των 15 οδόντων

Βήμα 5ο: Έπειτα, καθορίζουμε τις ιδιότητες του υλικού από το οποίο θα αποτελείται ο τροχός. Στην προκειμένη περίπτωση, το υλικό που θα χρησιμοποιήσουμε θα είναι αυτό με το οποίο είναι κατασκευασμένα τα δοκίμια του πειράματος της φωτοελαστικότητας. Δηλαδή, πολυκαρβονικό πλαστικό υλικό PSM – 1 της εταιρείας Measurements Group, Inc., Photolastic Division, με μηχανικές ιδιότητες:

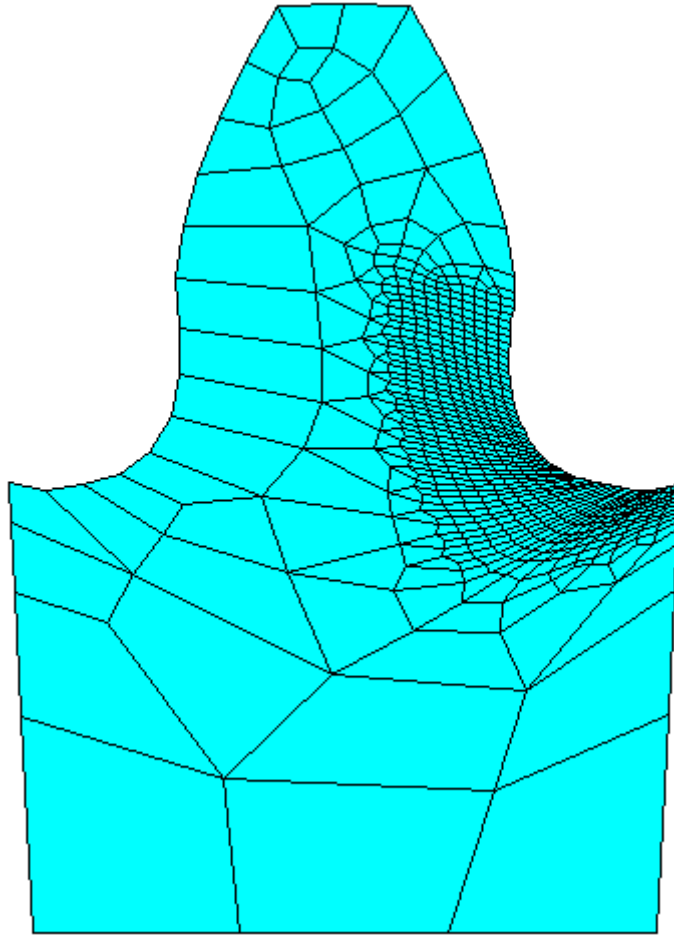
- Μέτρο ελαστικότητας: $E = 3.5\text{GPa}$
- Λόγος Poisson: $\nu = 0.38$

Βήμα 6ο: Έχοντας “φέρει ” πλέον τον οδόντα σε μορφή που πλησιάζει σε αυτή των δοκιμίων του πειράματος της φωτοελαστικότητας επιλέγουμε το είδος της ανάλυσης που είναι στατική. Στη συνέχεια κάνουμε εκλογή των πεπερασμένων στοιχείων που θα χρησιμοποιήσουμε που δεν είναι άλλα από τα 8-node-183 (PLANE183) τα οποία είναι δισδιάστατα με 8 ή 6 κόμβους με δύο βαθμούς ελευθερίας όπως φαίνεται στο παρακάτω Σχ. 4.35. Τα στοιχεία αυτά έχουν πλαστικές, ελαστικές, υπερελαστικές, παραμορφωσιακές, τασικές και ενισχυτικές ιδιότητες και είναι κατάλληλα για επίπεδη εντατική κατάσταση την οποία και θα χρησιμοποιήσουμε, με πάχος ίσο με το πλάτος των δοκιμίων του πειράματος της φωτοελαστικότητας $b = 9.25 \text{ mm}$.



Σχήμα 4.35: Γεωμετρία πεπερασμένου στοιχείου 8-node-183

Βήμα 7ο: Στη συνέχεια, δημιουργούμε αυτόματο πλέγμα πεπερασμένων στοιχείων στο οποίο αφήνουμε το πρόγραμμα να επιλέξει τη θέση και το μέγεθος των στοιχείων, ενώ στην επικίνδυνη διατομή που δεν είναι άλλη από την ρίζα του δοντιού κάνουμε βελτίωση του πλέγματος για να μπορέσουμε μετά την επίλυση του μοντέλου να λάβουμε ακριβέστερα αποτελέσματα. Το πλέγμα που κατασκευάστηκε παρατίθεται στο Σχ. 4.36 της επομένης σελίδας.



Σχήμα 4.36: Πλέγμα πεπερασμένων στοιχείων οδόντος του τροχού των 15 οδόντων

Βήμα 8ο: Στο επόμενο βήμα, επιλέγουμε και εισάγουμε στήριξη στη βάση του δοκιμίου ενώ παράλληλα εφαρμόζουμε ολική δύναμη P κατά την τροχιά επαφών της καθέτου τομής του τροχού στο σημείο HPSTC που ισούται με:

$$P = \frac{P_u}{\cos \alpha'} \quad (4.8)$$

όπου:

- $P_u \rightarrow$ η οριζόντια συνιστώσα του καθέτου φορτίου επί του οδόντος στο HPSTC (κάθετη προς τον άξονα συμμετρίας του οδόντος) σε N που στην συγκεκριμένη δοκιμή (δοκιμή 1) ισούται με: $P_u = 55 \text{ lbs} = 244.652 \text{ N}$.
- $\alpha' \rightarrow$ η γωνία εφαρμογής δύναμης από τον οριζόντιο άξονα η οποία υπολογίζεται και παρατίθεται στον παρακάτω Πίν. 4.4.

Με αντικατάσταση έχουμε για την δοκιμή 1: $P = 260.353 \text{ N}$ ενώ στον παρακάτω Πίν. 4.4 παραθέτουμε τα P και τον υπολοίπων τροχών:

A/A Δοκιμής	Τροχός 1 (Πινιόν)	Τροχός 2 (Συνεργαζ.)	Γωνία εφαρμογής του φορτίου από τον οριζόντιο άξονα α' ($^\circ$)	Οριζόντια συνιστώσα στο HPSTC P_u (N)	Ολικό φορτίο (κάθετο στο οδόντα) στο HPSTC P (N)
<i>Κανονικοί Τροχοί</i>					
1	15N	18N	19.610	244.652	259.716
2	18N	15N	20.116	171.257	182.382
3	15N	22N	19.091	166.808	176.517
4	22N	15N	20.116	182.377	194.225
5	15N	28N	18.377	169.032	178.116
6	28N	15N	20.116	193.498	206.068
7	15N	50N	16.863	173.481	181.275
8	50N	15N	20.116	209.066	222.648
9	18N	22N	19.265	177.929	188.484
10	22N	18N	19.780	184.601	196.176
11	18N	28N	18.558	182.377	192.381
12	28N	18N	19.780	193.498	205.63
13	18N	50N	17.446	186.825	195.834
14	50N	18N	19.948	209.066	222.411
15	22N	28N	20.933	189.049	202.408
16	28N	22N	19.438	200.17	212.269
17	22N	50N	17.824	200.17	210.263
18	50N	22N	19.780	215.739	229.265
19	28N	50N	18.377	209.066	220.302
20	50N	28N	19.438	220.187	233.496

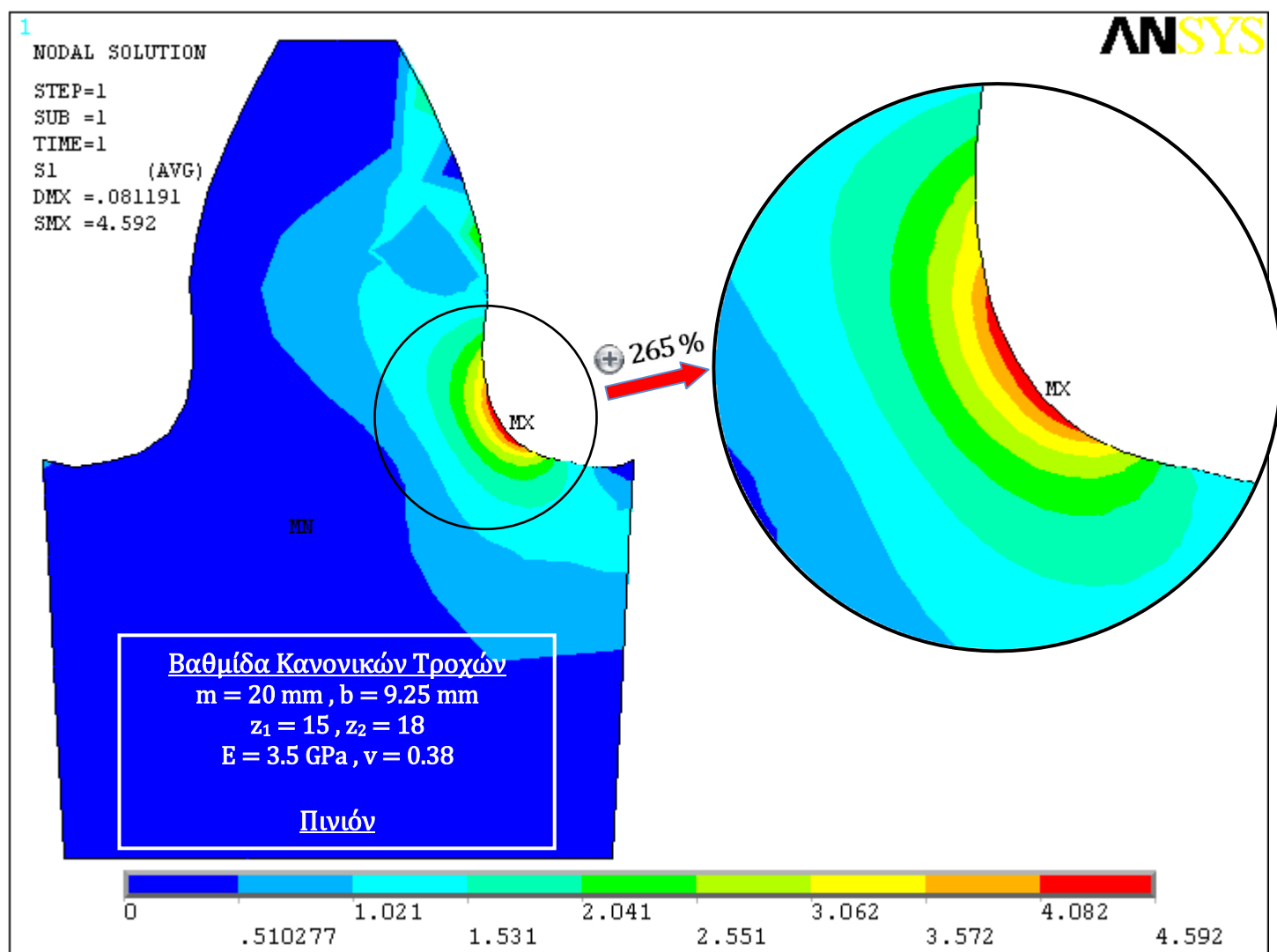
Πίνακας 4.4: Δυνάμεις επί του HPSTC των δοκιμών

Βήμα 9ο: Τέλος, κάνουμε επίλυση της ανάλυσης και απεικονίζουμε γραφικά τις ισοδύναμες τάσεις κατά Von Mises, Σχ. 4.37. Όπως ήταν αναμενόμενο, η μέγιστη τάση, που ισούται με 4.592 MPa εμφανίστηκε στον “πόδα” του δοντιού ενώ οι διάφοροι χρωματισμοί μας βοηθούν να κατανοήσουμε την κατανομή των τάσεων σε όλο το δόντι.

Με παρόμοια διαδικασία υπολογίζουμε τις μέγιστες τάσεις και των υπολοίπων τροχών που χρησιμοποιήσαμε στο πείραμα της φωτοελαστικότητας και τις παραθέτουμε όλες στον Πίν. 4.5 αμέσως παρακάτω:

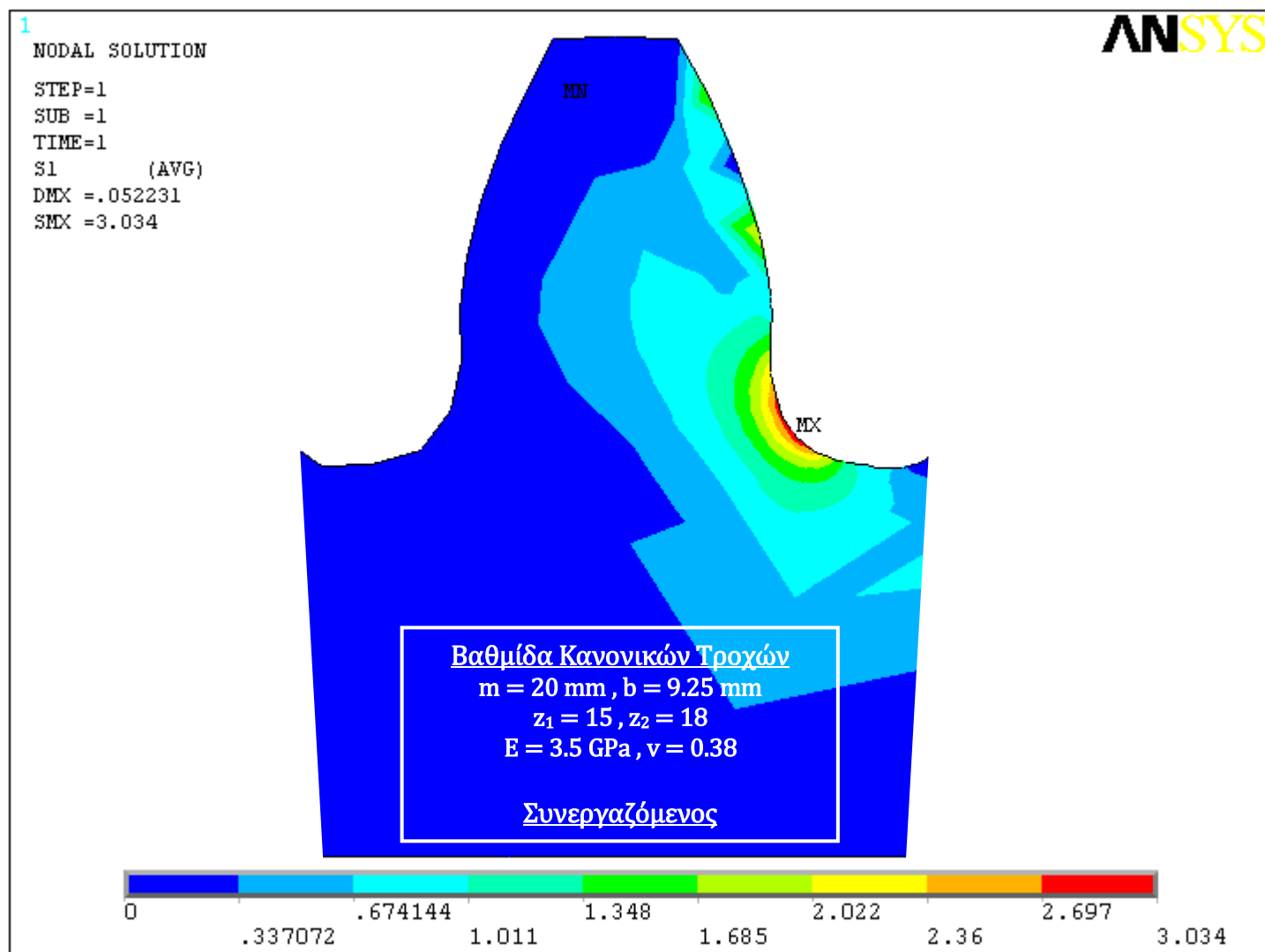
A/A Δοκιμής	Ολικό Φορτίο P (N)	Μέγιστη Τάση σ_{\max} (MPa)
<i>Κανονικοί Τροχοί</i>		
1	259.716	4.592
2	182.382	3.034
3	176.517	3.076
4	194.225	3.101
5	178.116	2.942
6	206.068	3.16
7	181.275	2.98
8	222.648	3.186
9	188.484	3.092
10	196.176	3.047
11	192.381	3.066
12	205.63	3.108
13	195.834	2.989
14	222.411	3.156
15	202.408	3.012
16	212.269	3.167
17	210.263	3.036
18	229.265	3.201
19	220.302	3.09
20	233.496	3.209

Πίνακας 4.5: Θεωρητικές μέγιστες τάσεις των δοκιμών

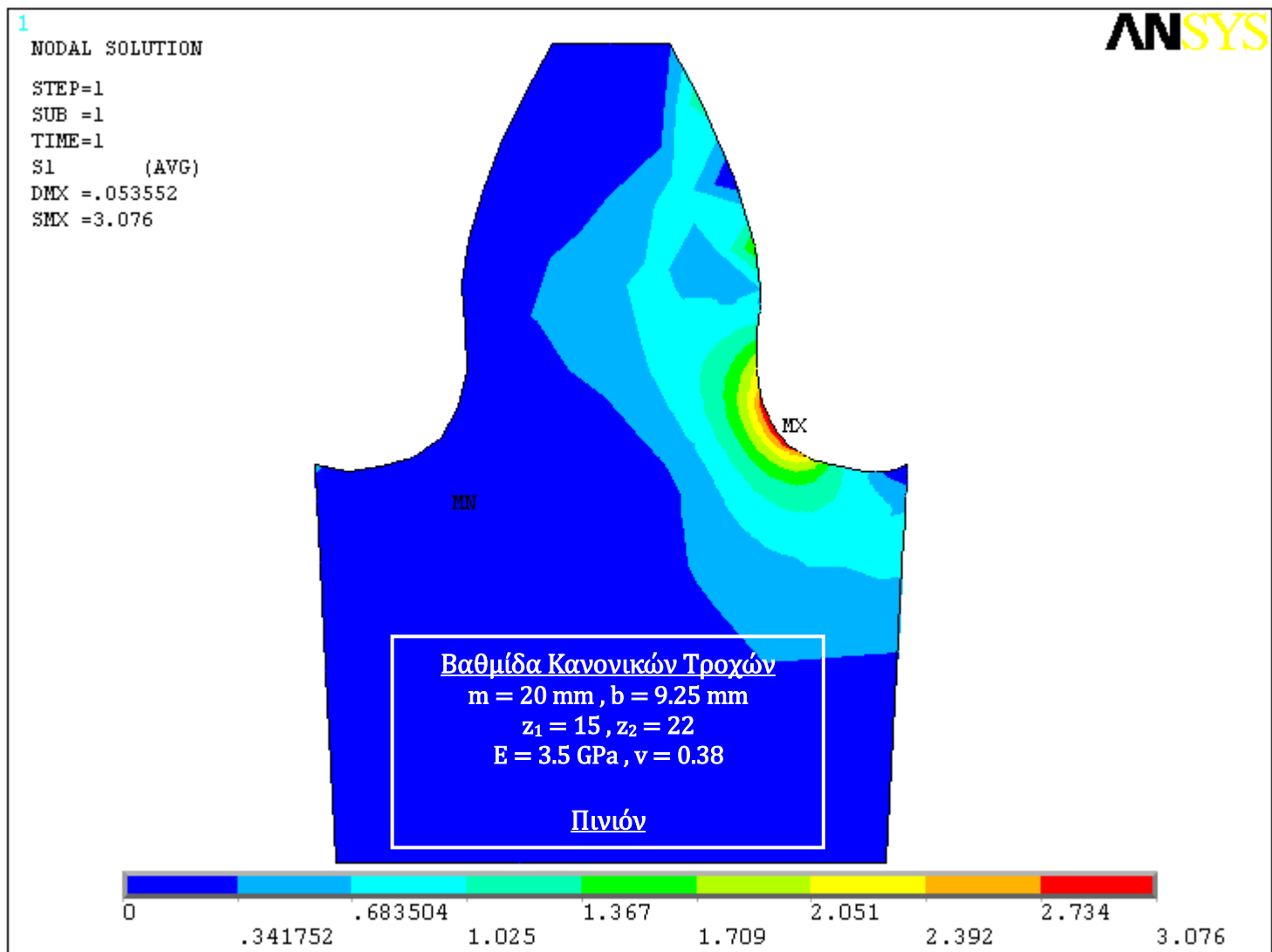


Σχήμα 4.37: Δοκιμή 1 – 15/18 – Πινιόν – Διάγραμμα Τάσεων

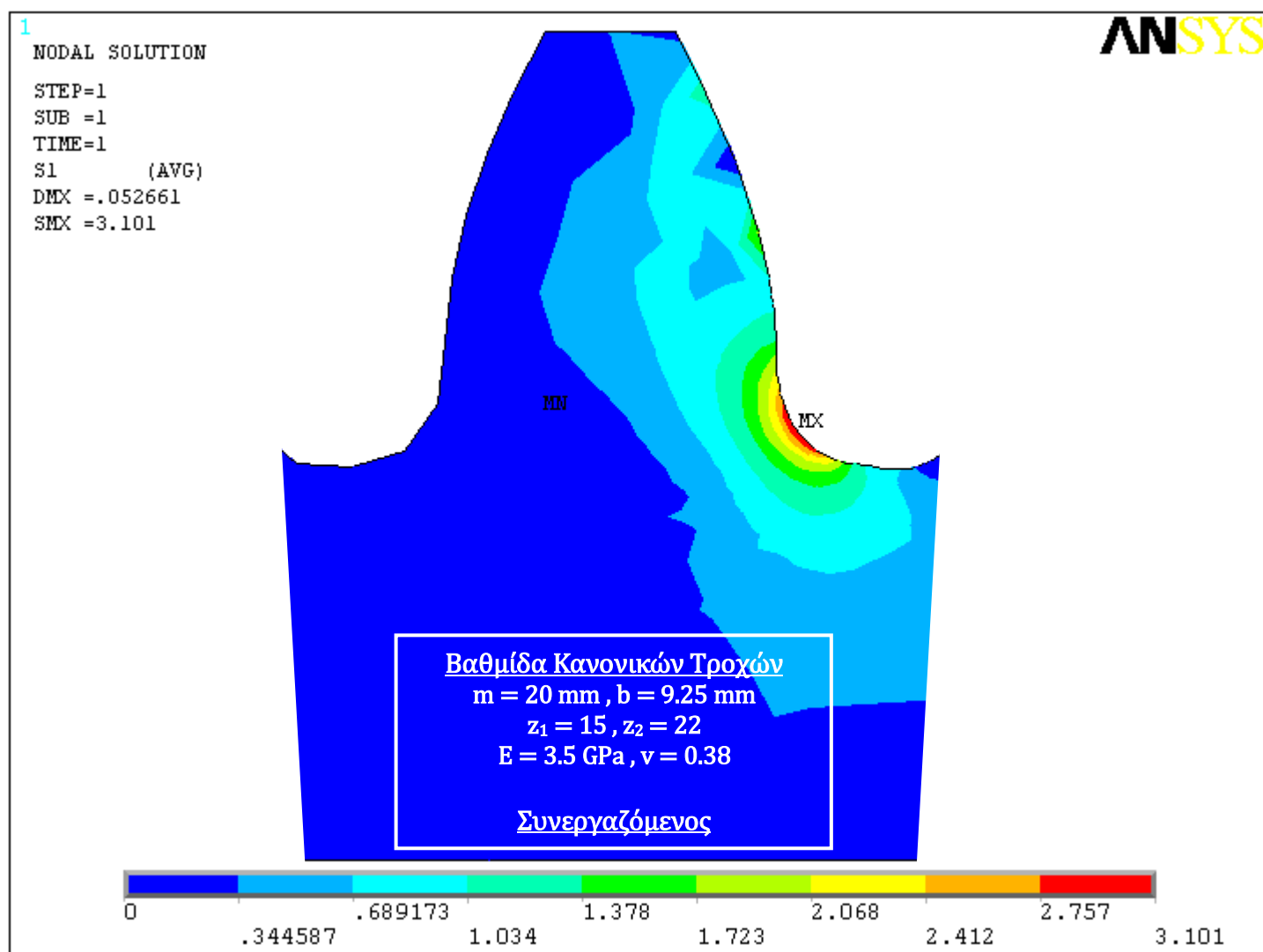
Τα διαγράμματα των τάσεων και των υπολοίπων δοκιμών παρατίθενται στα Σχ. 4.38 έως 4.56 για λόγους πληρότητας:



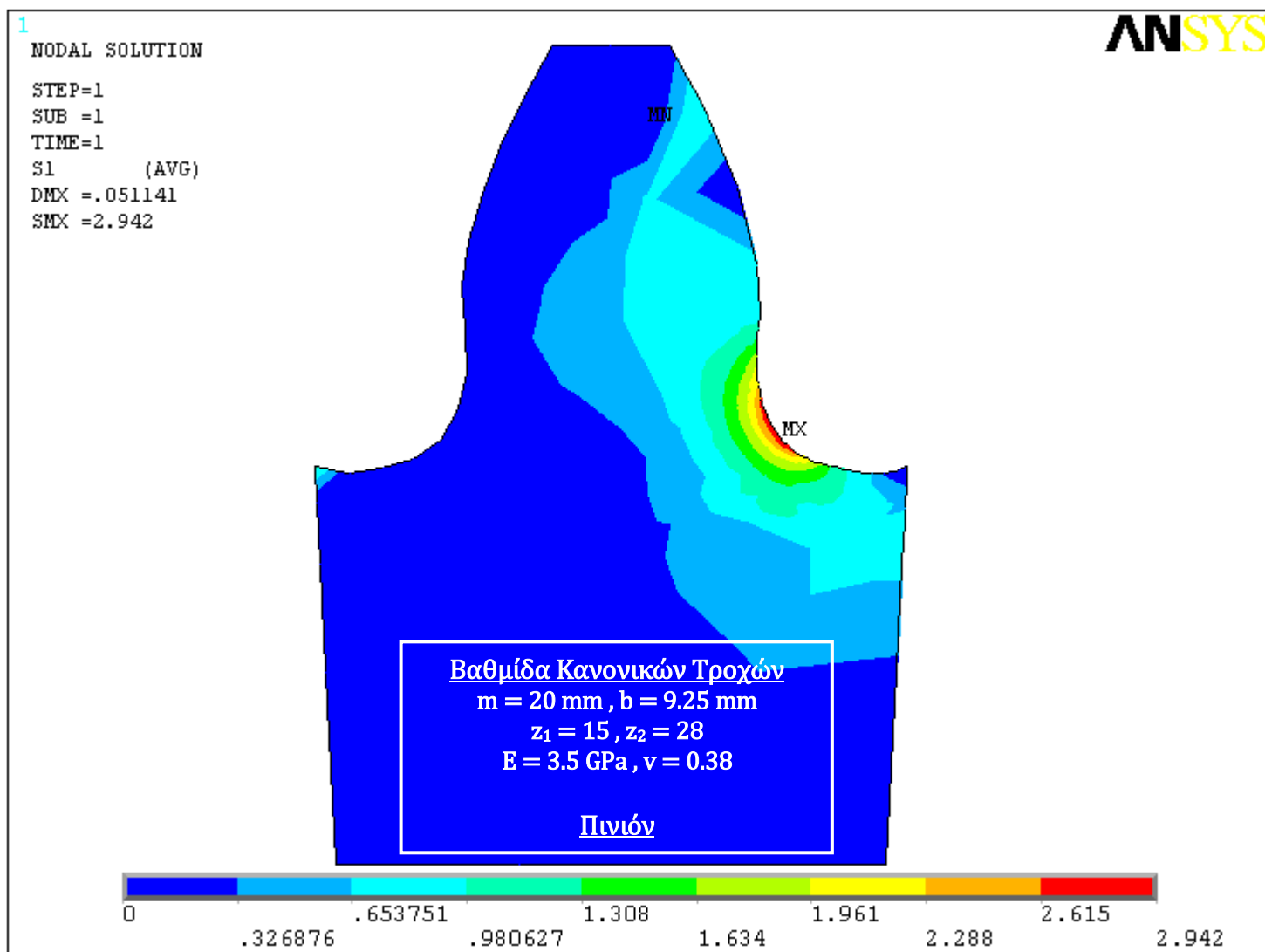
Σχήμα 4.38: Δοκιμή 2 – 15/18 – Συνεργαζόμενος – Διάγραμμα Τάσεων



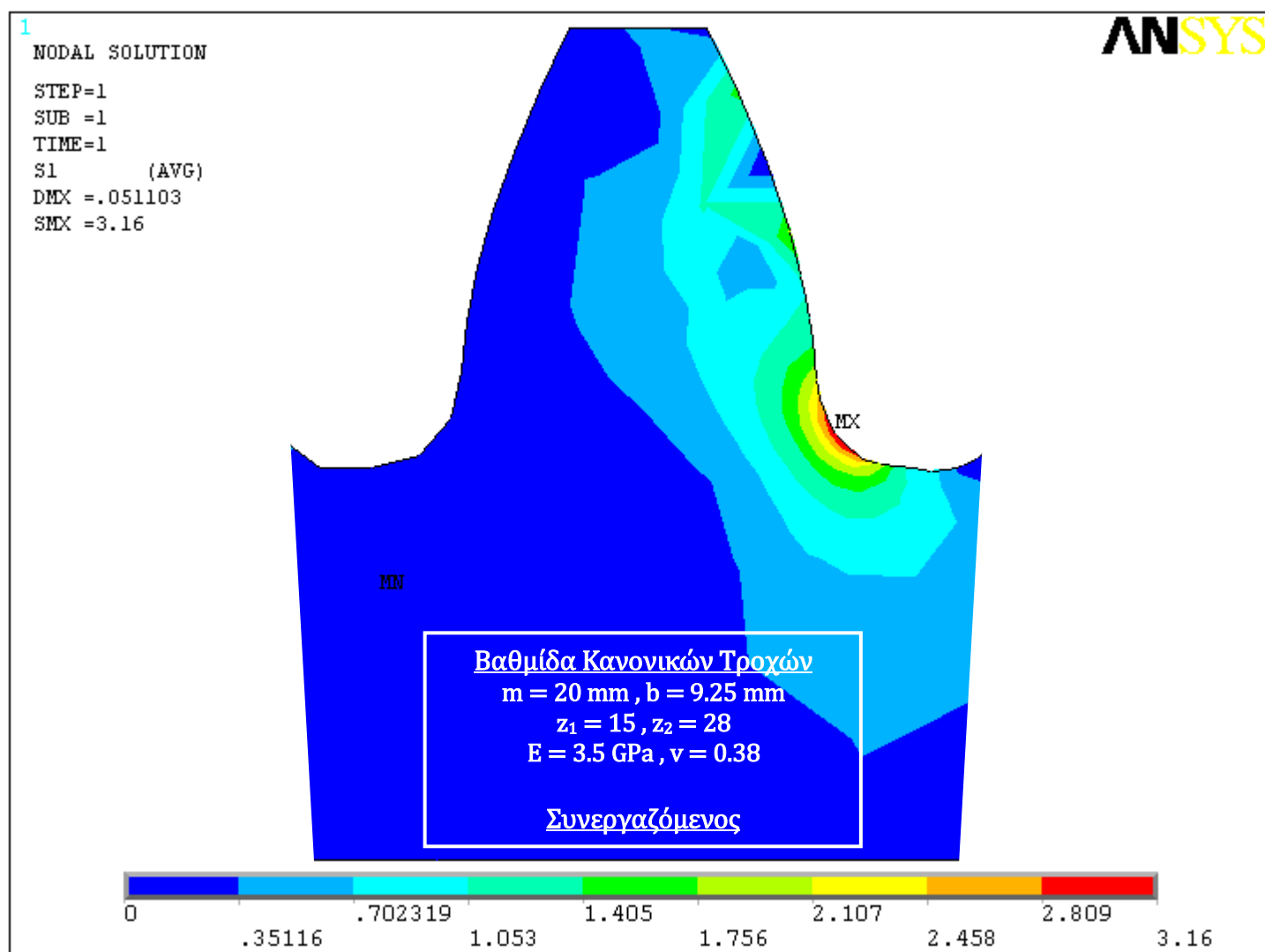
Σχήμα 4.39: Δοκιμή 3 – 15/22 – Πινιόν – Διάγραμμα Τάσεων



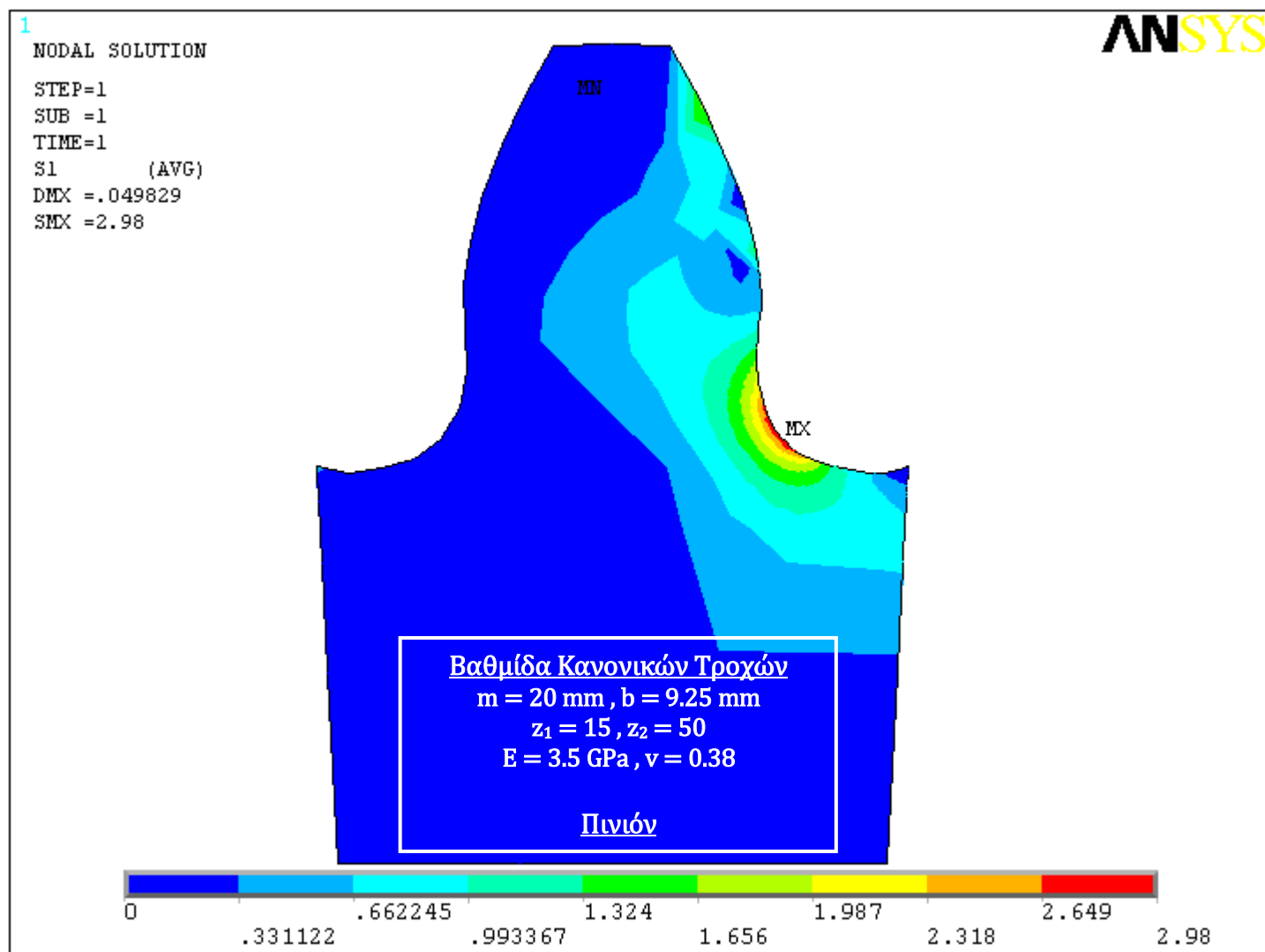
Σχήμα 4.40: Δοκιμή 4 – 15/22 – Συνεργαζόμενος – Διάγραμμα Τάσεων



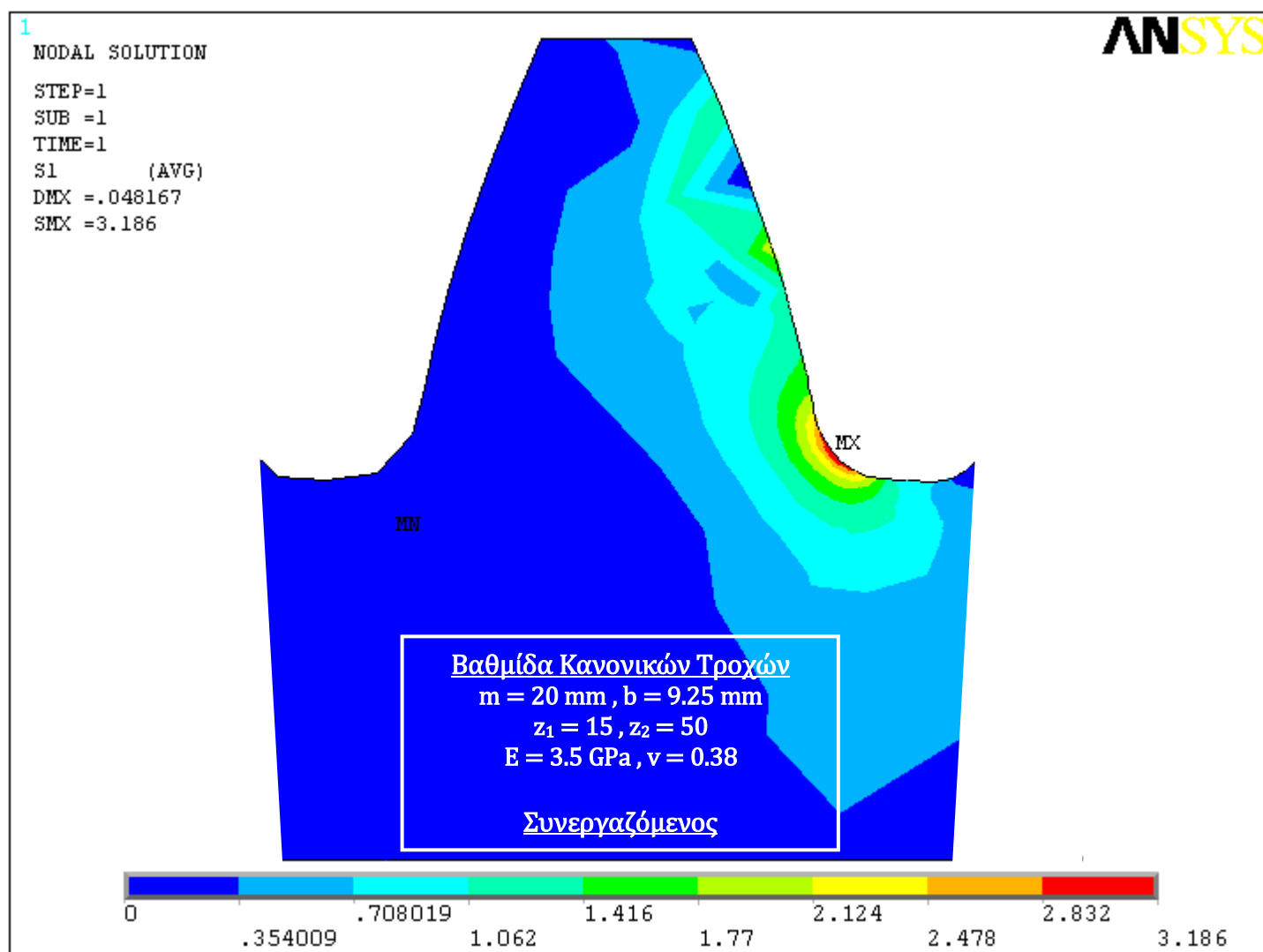
Σχήμα 4.41: Δοκιμή 5 – 15/28 – Πινιόν – Διάγραμμα Τάσεων



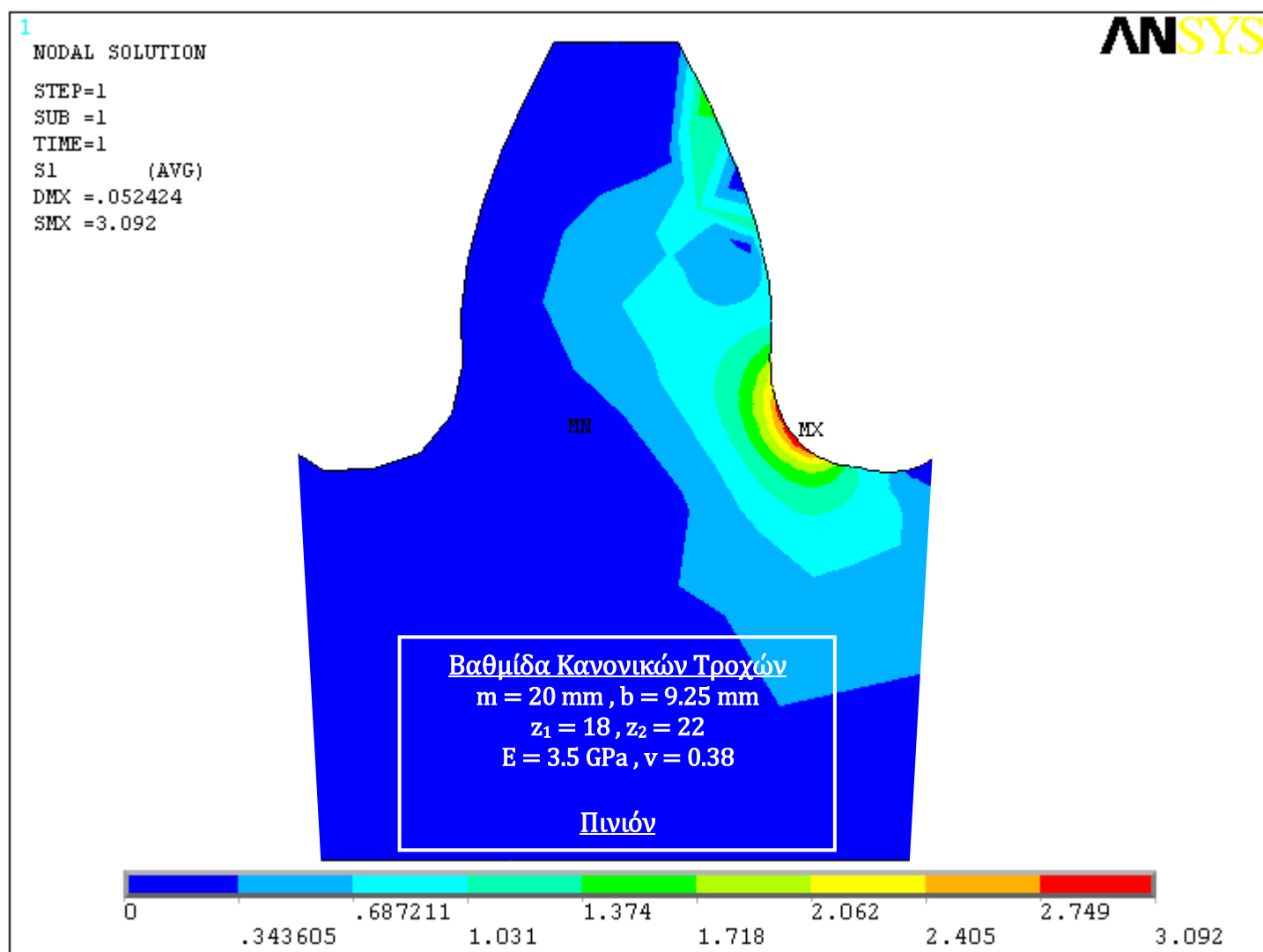
Σχήμα 4.42: Δοκιμή 6 – 15/28 – Συνεργαζόμενος – Διάγραμμα Τάσεων



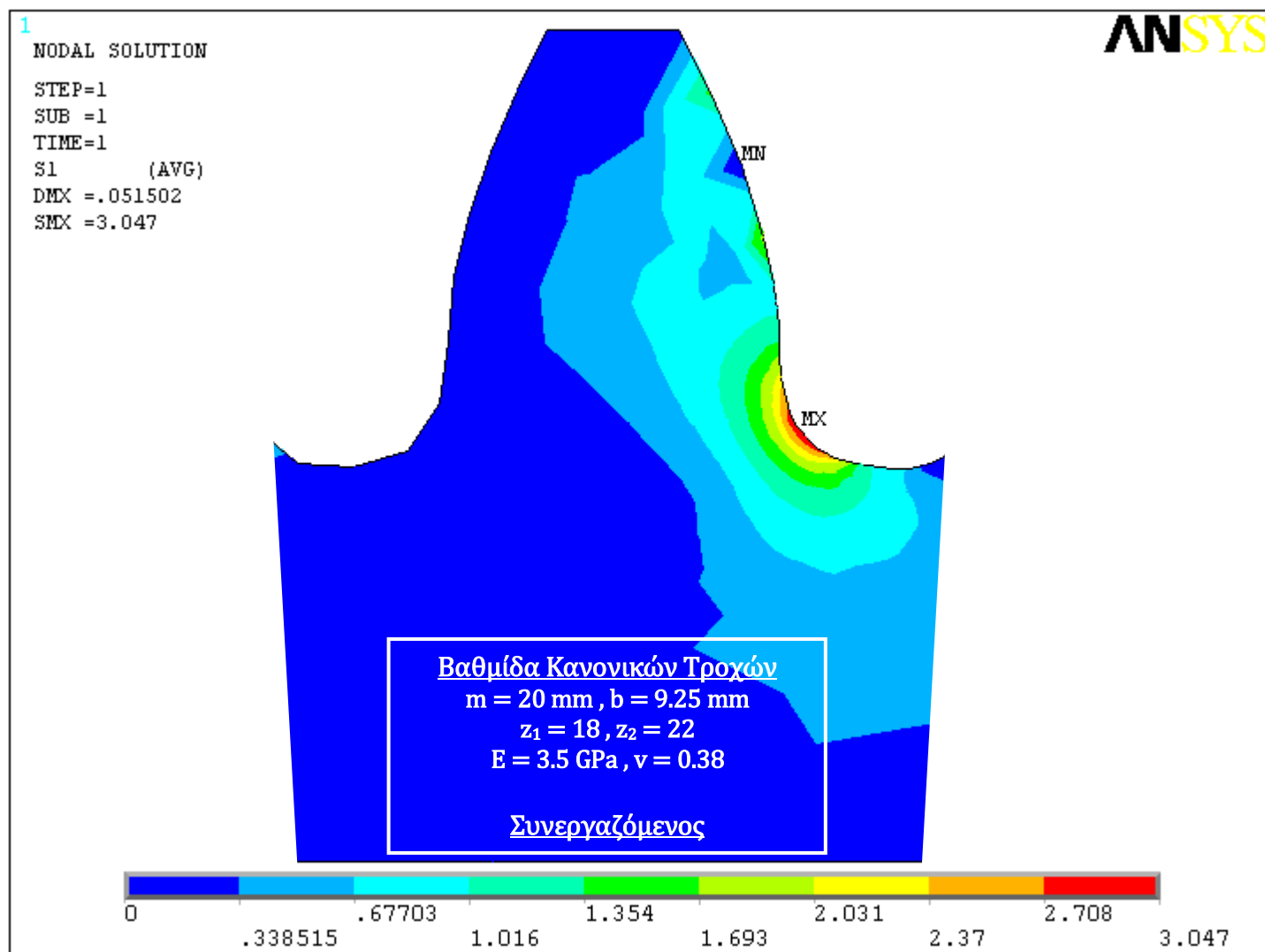
Σχήμα 4.43: Δοκιμή 7 – 15/50 – Πινιόν – Διάγραμμα Τάσεων



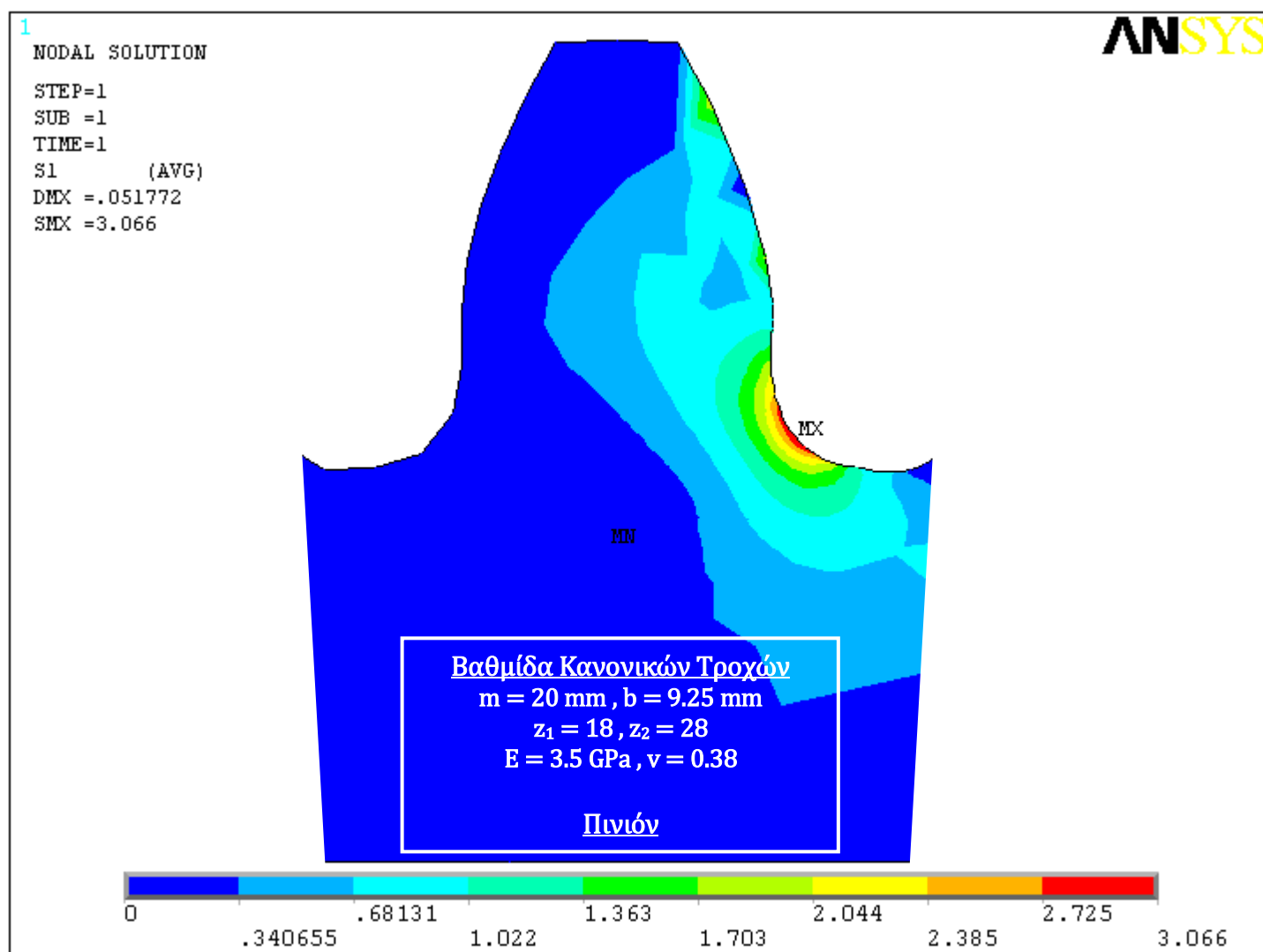
Σχήμα 4.44: Δοκιμή 8 – 15/50 – Συνεργαζόμενος – Διάγραμμα Τάσεων



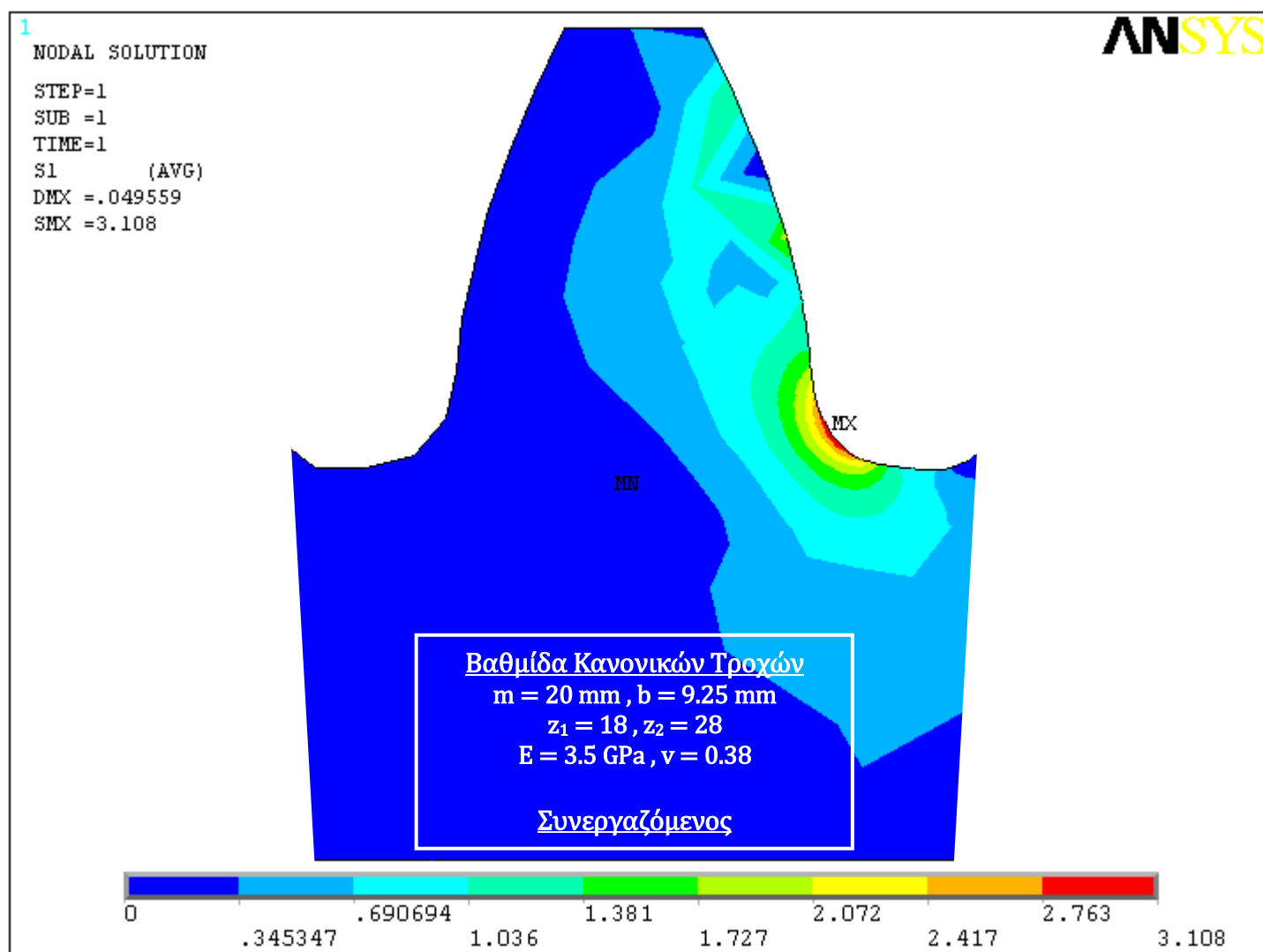
Σχήμα 4.45: Δοκιμή 9 – 18/22 – Πινιόν – Διάγραμμα Τάσεων



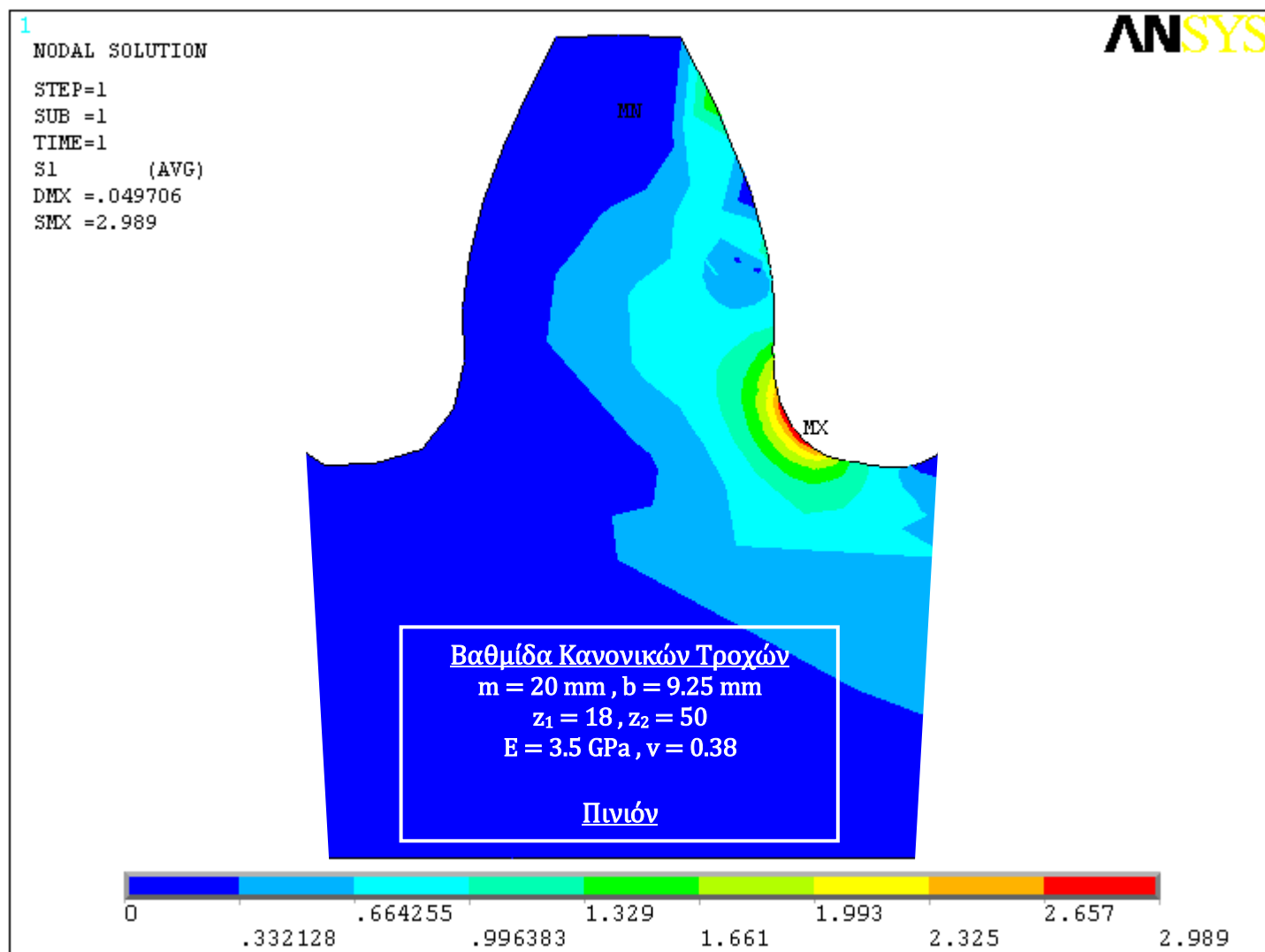
Σχήμα 4.46: Δοκιμή 10 – 18/22 – Συνεργαζόμενος – Διάγραμμα Τάσεων



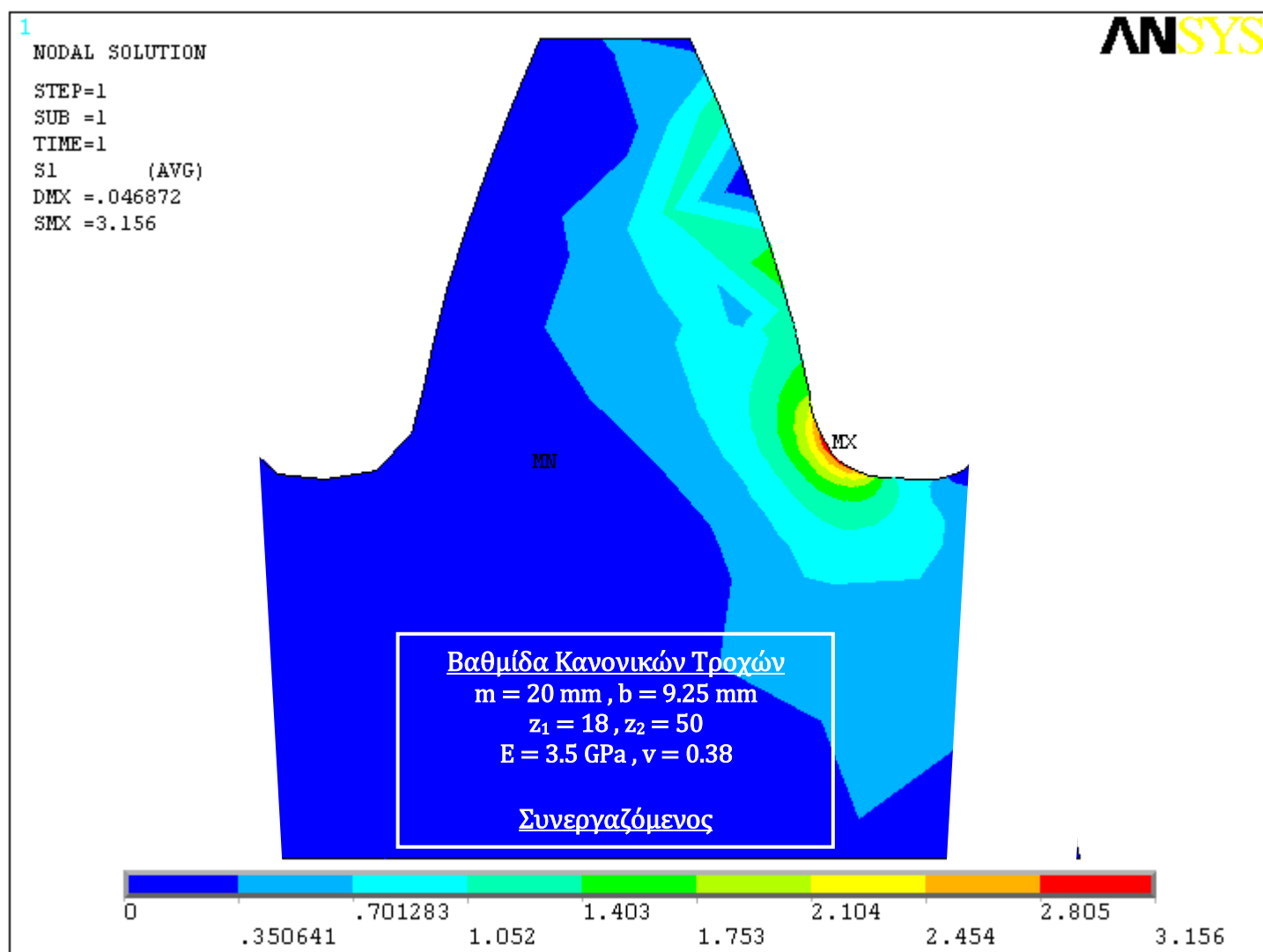
Σχήμα 4.47: Δοκιμή 11 – 18/28 – Πινιόν – Διάγραμμα Τάσεων



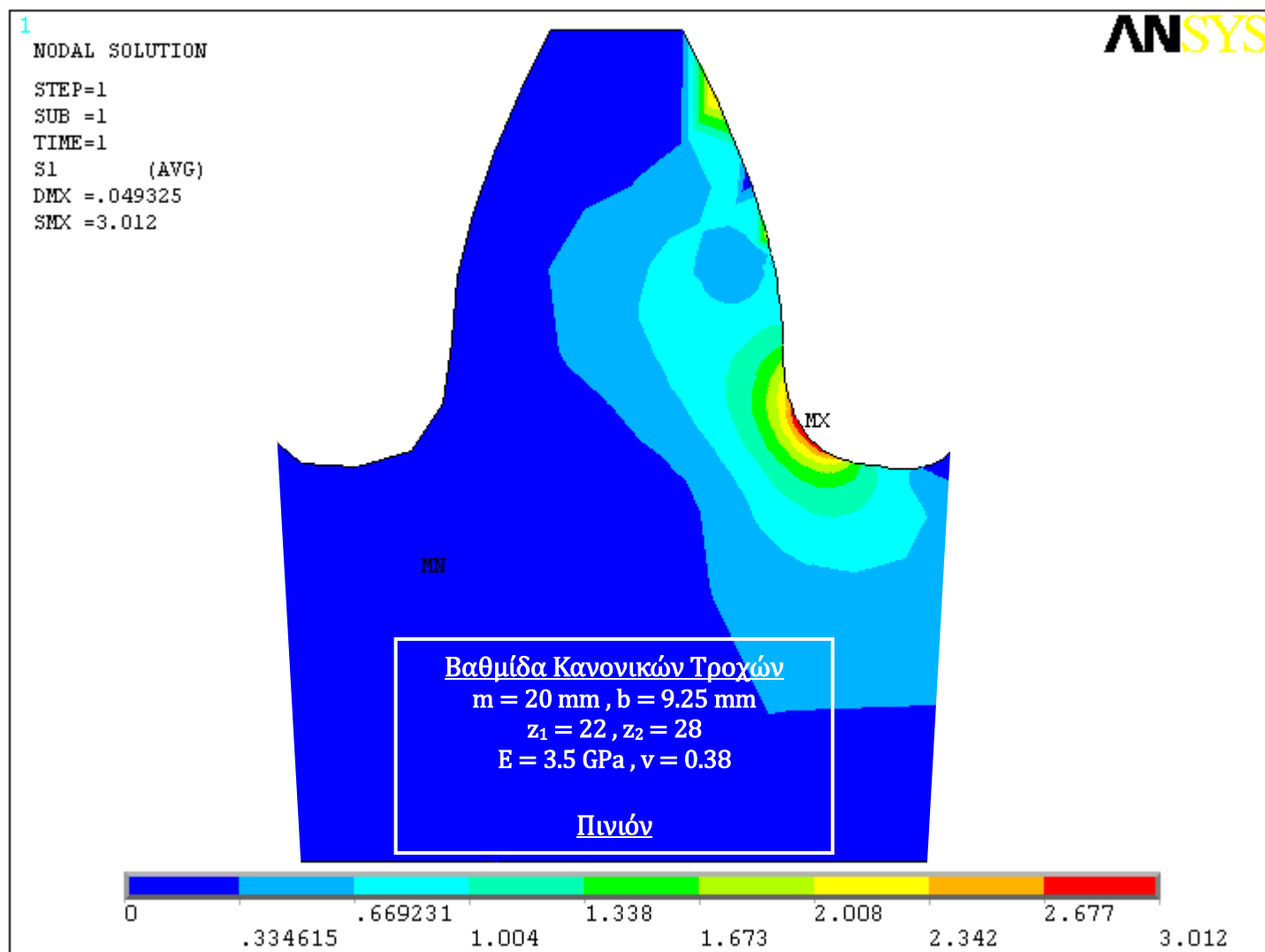
Σχήμα 4.48: Δοκιμή 12 – 18/28 – Συνεργαζόμενος – Διάγραμμα Τάσεων



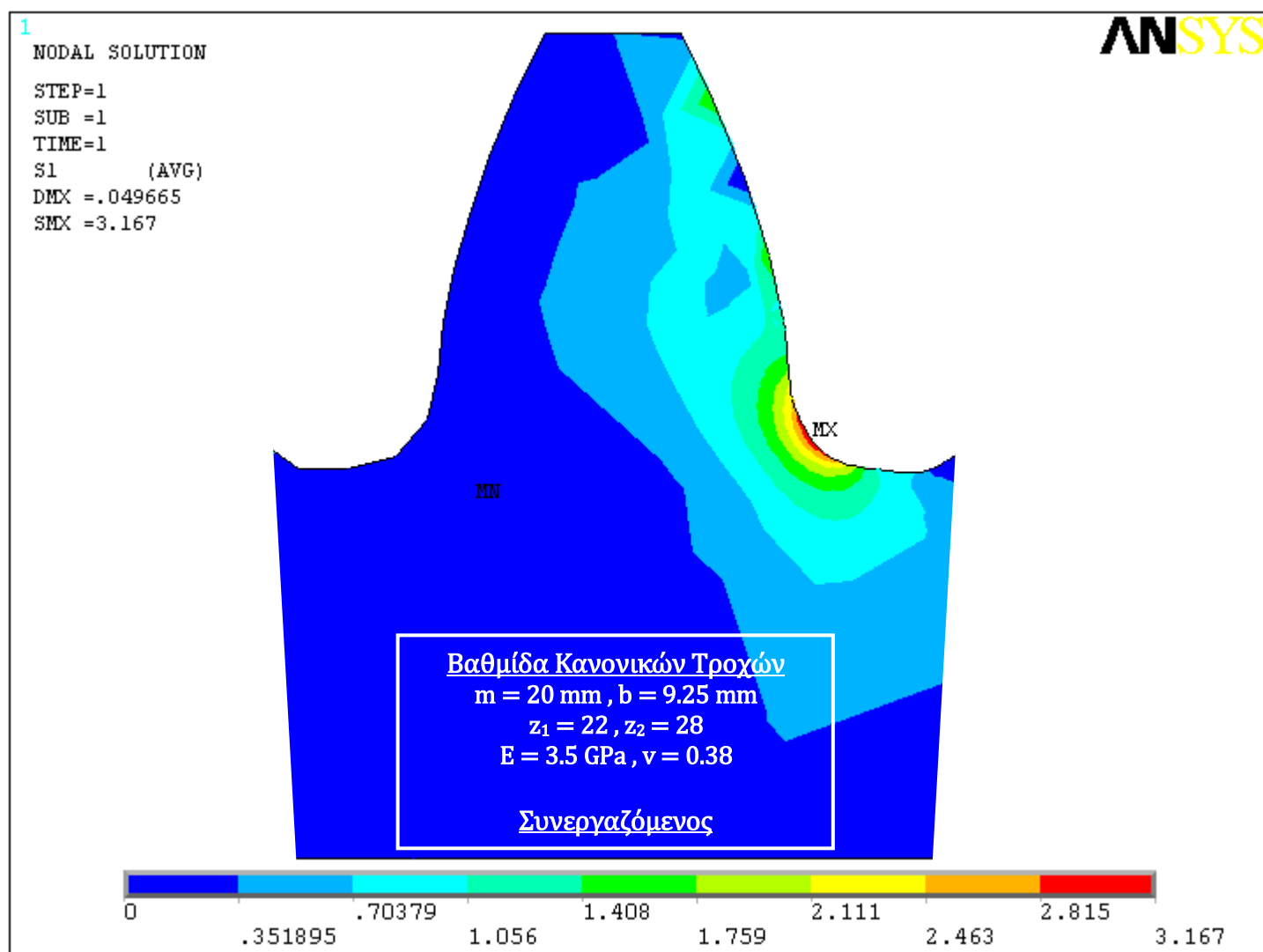
Σχήμα 4.49: Δοκιμή 13 – 18/50 – Πινιόν – Διάγραμμα Τάσεων



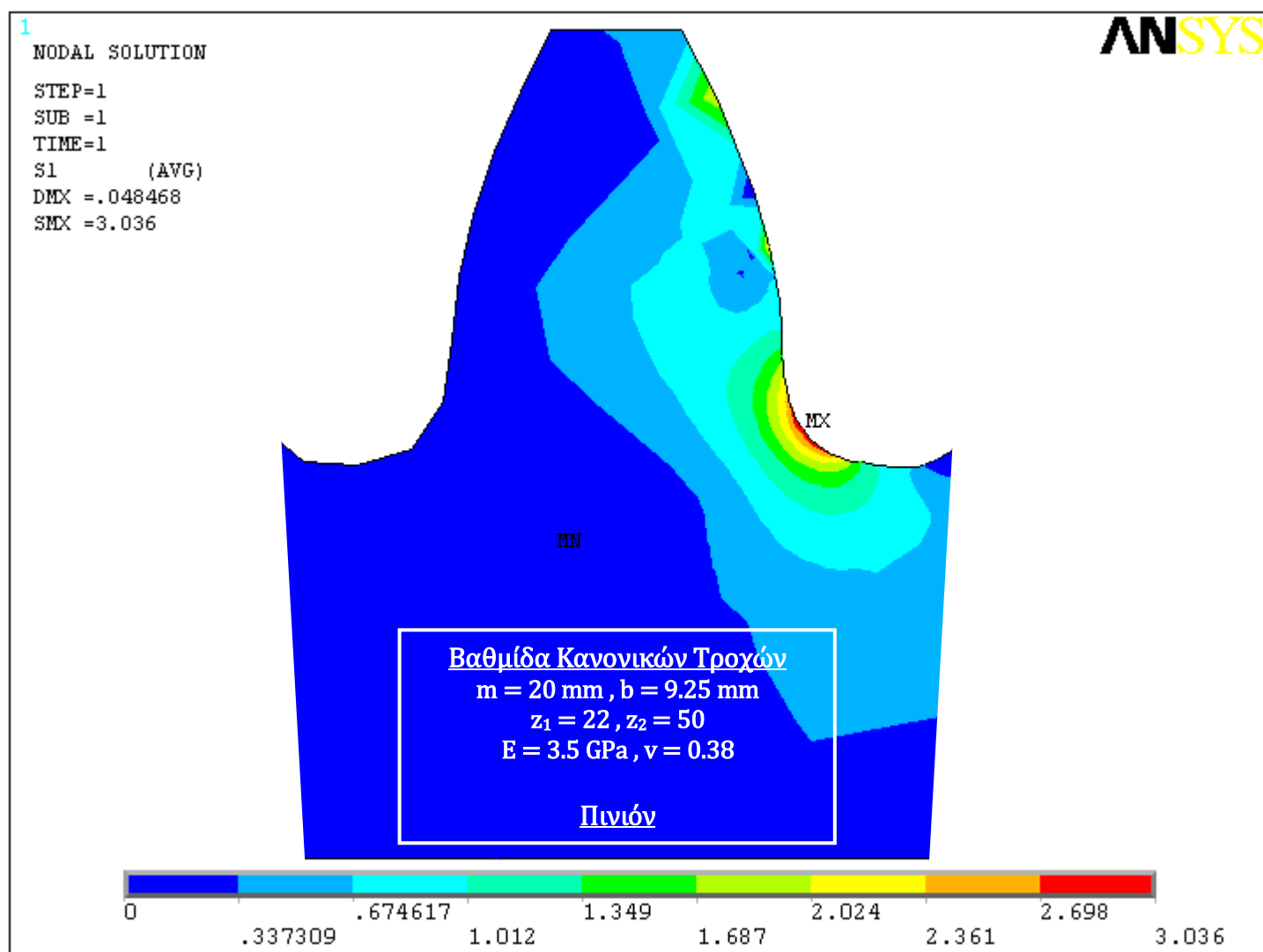
Σχήμα 4.50: Δοκιμή 14 – 18/50 – Συνεργαζόμενος – Διάγραμμα Τάσεων



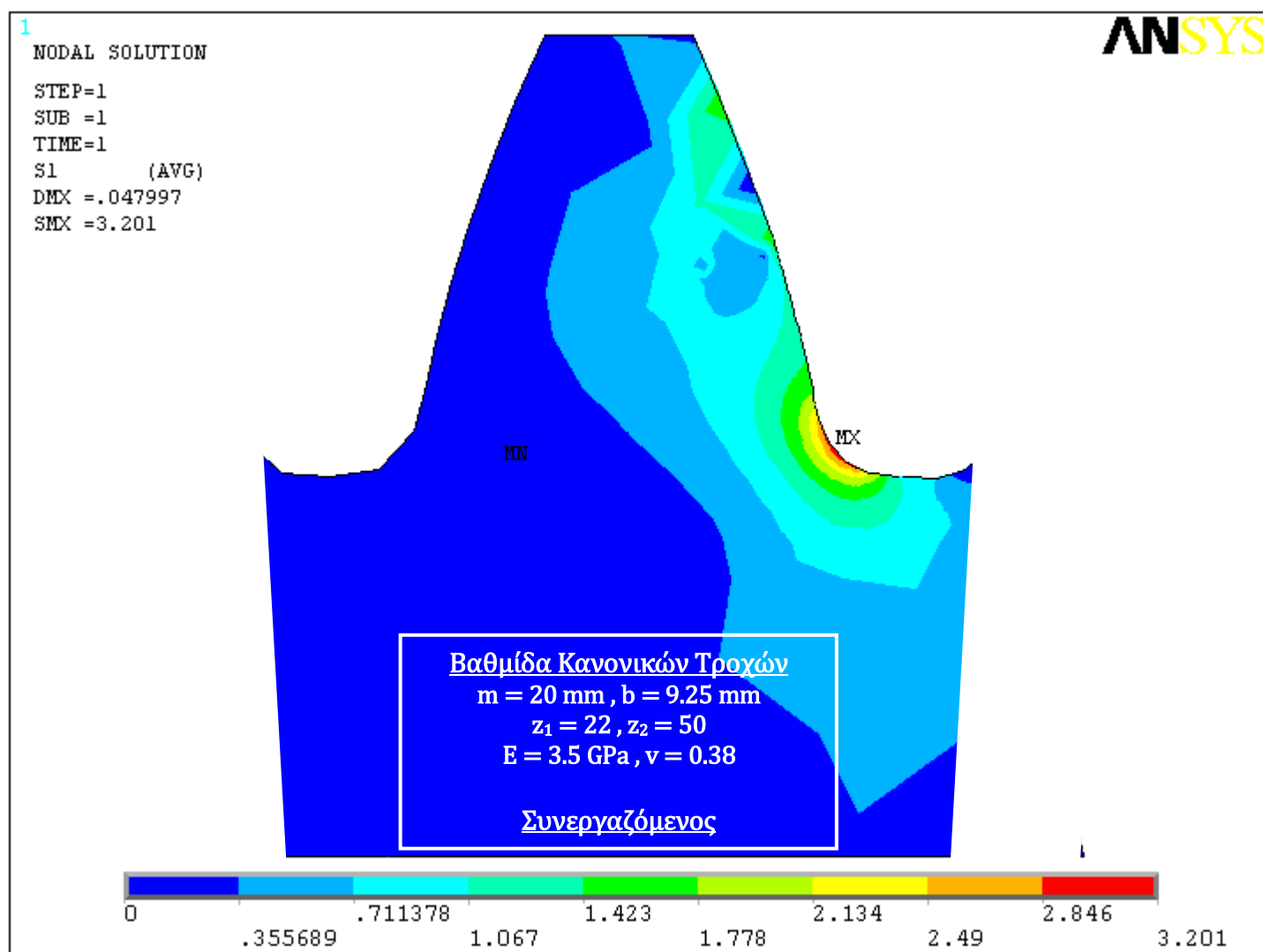
Σχήμα 4.51: Δοκιμή 15 – 22/28 – Πινιόν – Διάγραμμα Τάσεων



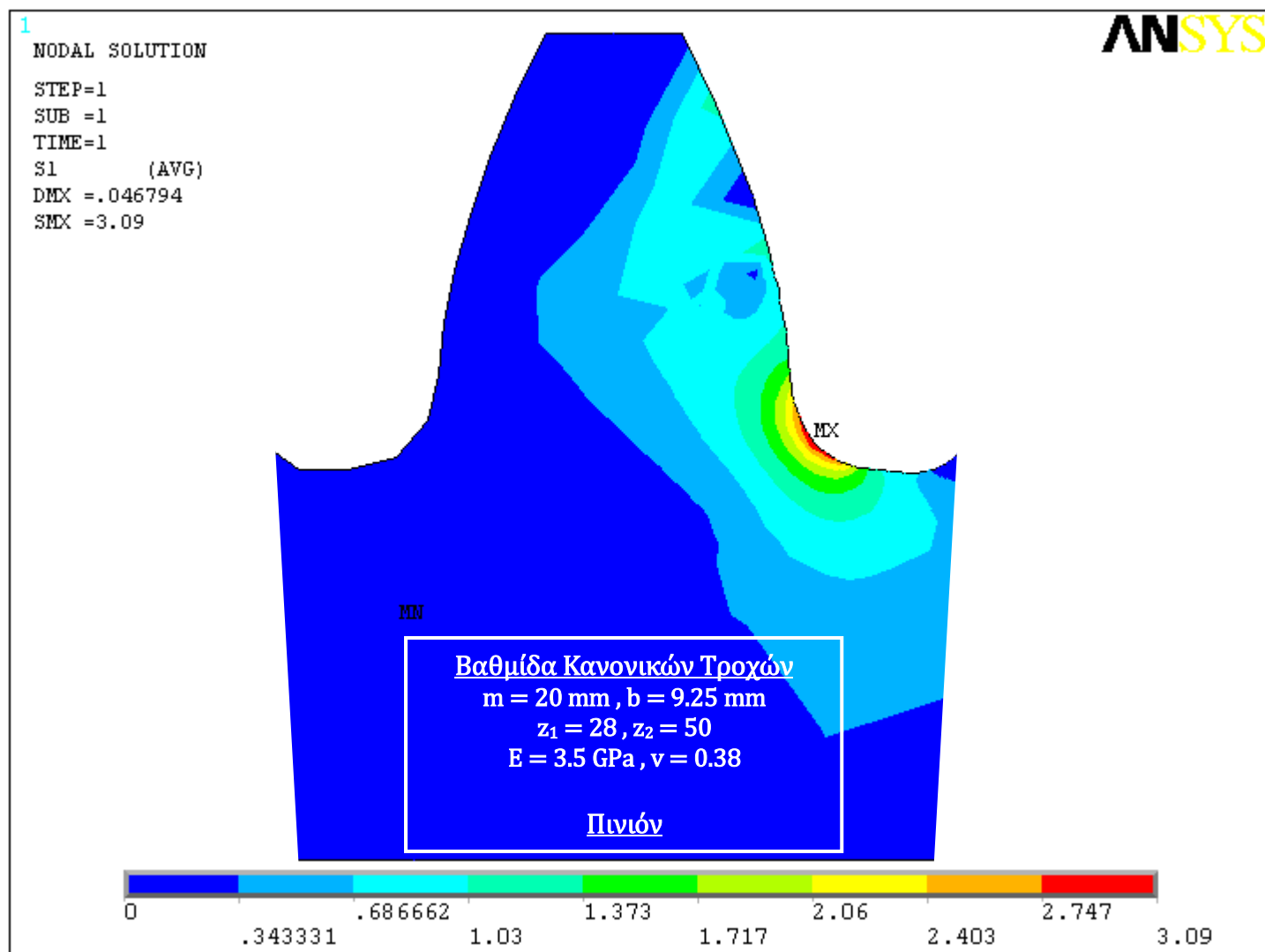
Σχήμα 4.52: Δοκιμή 16 – 22/28 – Συνεργαζόμενος – Διάγραμμα Τάσεων



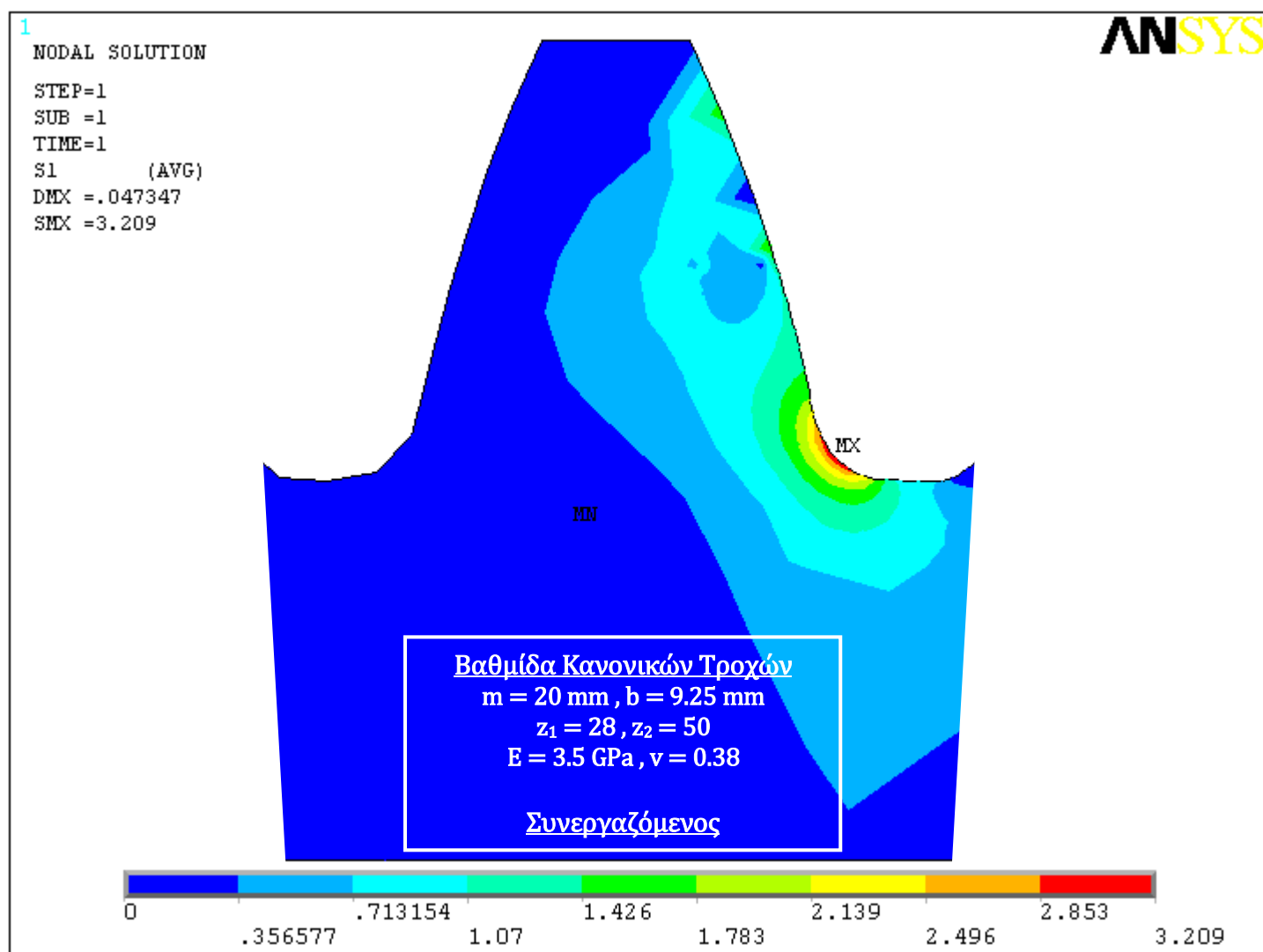
Σχήμα 4.53: Δοκιμή 17 – 22/50 – Πινιόν – Διάγραμμα Τάσεων



Σχήμα 4.54: Δοκιμή 18 – 22/50 – Συνεργαζόμενος – Διάγραμμα Τάσεων



Σχήμα 4.55: Δοκιμή 19 – 28/50 – Πινιόν – Διάγραμμα Τάσεων



Σχήμα 4.56: Δοκιμή 20 – 22/50 – Συνεργαζόμενος – Διάγραμμα Τάσεων

4.7 Παρατηρήσεις

- Στην παρούσα εργασία προτιμήσαμε να χρησιμοποιήσουμε ανάλυση επίπεδης εντατικής κατάστασης στην οποία δημιουργήσαμε το δισδιάστατο μοντέλο, θέσαμε το πάχος του οδόντος ως παράμετρο και κατασκευάσαμε πλέγμα πεπερασμένων στοιχείων στο 2-D μοντέλο. Ένας άλλος τρόπος ανάλυσης θα ήταν η δημιουργία πλέγματος απευθείας στο τρισδιάστατο μοντέλο που είχαμε κατασκευάσει από το πρόγραμμα CAD. Επιλέχθηκε όμως ο πρώτος τρόπος για δύο βασικούς λόγους:
 1. Οι τροχοί στους οποίους πραγματοποιήθηκε η ανάλυση είναι κανονικοί ευθείας οδοντώσεως οπότε το δισδιάστατο προφίλ επαναλαμβάνεται πανομοιότυπο καθ' όλο το πάχος του οδόντος ενώ και η φόρτιση που δέχεται είναι ομοιόμορφη.
 2. Η δισδιάστατη ανάλυση με επιλογή του πάχους ως παράμετρο δίνει αποτελέσματα με πολύ μικρή απόκλιση από την τρισδιάστατη ανάλυση έχοντας όμως πολύ μικρότερες απαιτήσεις σε μνήμη του Η/Υ καθώς και στον χρόνο ολοκλήρωσης μιας ανάλυσης.
- Επίσης, στη συγκεκριμένη ανάλυση χρησιμοποιήσαμε τα οκτακομβικά ή εξακομβικά πεπερασμένα στοιχεία 8-node-183 (PLANE183) με δύο βαθμούς ελευθερίας. Παρόλα αυτά, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τα τετρακομβικά στοιχεία 4-node-182 (PLANE182) ή τα οκτακομβικά στοιχεία 8-node-82 (PLANE82) τα οποία βρίσκονται στην βιβλιοθήκη του προγράμματος των πεπερασμένων στοιχείων. Η συγκεκριμένη επιλογή έγινε ύστερα από σύγκριση και ανάλυση όλων των ιδιοτήτων των παραπάνω πεπερασμένων στοιχείων και λαμβάνοντας υπόψη την γεωμετρία των οδόντων και τις διευθύνσεις των τάσεων που παρουσιάζονται μετά την φόρτισή τους.
- Οι μετρούμενες τάσεις από την ανάλυση των πεπερασμένων στοιχείων θα παρατεθούν σε σύγκριση, με την κατασκευή και των αντιστοίχων διαγραμμάτων, με τις αντίστοιχες τάσεις που ελήφθησαν από το πείραμα της μεθόδου της φωτοελαστικότητας.

4.8 Βιβλιογραφία

1. Κωστόπουλος Θ. Ν., *Οδοντώσεις και Μειωτήρες Στροφών*, Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα, 1991.
2. Προβατίδης Χ., Αντωνιάδης Ι., *Υπολογιστικές Μέθοδοι στις Κατασκευές*, Εκδόσεις Ε.Μ.Π., Αθήνα 2004.
3. Δημητρίου Β., *Η Μέθοδος Coons στην Κατασκευή Πλεγμάτων*, Μεταπτυχιακή Εργασία, ΔΠΜΣ «Συστήματα Αυτοματισμού» (επιβλέπων καθ. Α. Κανάραχος), Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2000.
4. Δημητρίου Β., *Προσαρμοστικά Πεπερασμένα Στοιχεία και Συναφή Πλέγματα*, Διδακτορική Διατριβή (επιβλέπων καθ. Α. Κανάραχος), Ε.Μ.Π., Αθήνα, Αύγουστος 2004.
5. Armstrong C.G., Robinson D.J., McKeage D.J., Li T.S., Bridgett S.J., Donaghy R.J., and McGleenan C.A., Medials for Meshing and More, *4th Annual International Meshing Roundtable*, (sponsored by Sandia National Laboratories), October 16-17, 1995.
6. Barnhill RE, Birkhoff G, and Gordon WJ, *Smooth interpolation in triangles*, *J. Approx. Theory*, Vol. 8, pp. 114-128, 1973.
7. Bendsoe M. P., Diaz A. and Kikushi N., Topology and Generalized Layout Optimization of Elastic Structures, In: Bendsoe and Soares (eds.) "Topology Design of Structures", Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Holland, 1992.
8. Bykat A., Automatic generation of triangular grid: I – Subdivision of a general polygon into convex subregions; II – Triangular of convex polygons, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 10, pp. 1329-1342, 1976.
9. Brebbia CA, *Finite Element Systems: A Handbook*, Springer-Verlag, Berlin, 1982.
10. Cavendish J., Automatic triangulation of arbitrary planar domains for the finite element method, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 8, pp. 679-696, 1974.

11. Cavendish JC, Field DA, and Frey WH, An approach to automatic three-dimensional finite element mesh generation, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 21, pp. 329-347, 1985.
12. Green PJ, and Sibson R, Computing Dirichlet Tessellations in the Plane, *The Computer J.*, Vol. 21, pp. 168-173, 1977.
13. Groover M. P. and Zimmers E. W., CAD/CAM Computer-Aided Design and Manufacturing, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1984.
14. Heighway, E. A., A mesh generator for automatically subdividing irregular polygons into quadrilaterals, *IEEE Transaction on Magnetics*, Vol. 6, pp. 2535-2538, 1983.
15. Hermann LR, Laplacian-isoparametric grid generation scheme, *J. of Eng. Mech. Div. Proceedings ASCE*, Vol. 102 (EM5), 1976.
16. Ho-Le, K., Finite Element Methods: A Review and Classification, *Computer-Aided Design*, Vol. 20 (1), pp. 27-38, 1988.
17. Jung YH, and Lee K, Tetrahedron-based Octree Encoding for Automatic Mesh Generation, *Computer-Aided Design*, Vol. 25 (3), 1993.
18. Kanarachos A, Grekas D, and Provatidis C, Generalized Formulation of Coons' Interpolation. In: Kaklis PD, and Sapidis NS (editors), *Computer aided geometric design: from theory to practice*. Athens: National Technical University of Athens Press: 1995, pp. 65-76 [Chapter 7].
19. Kikuchi N, Adaptive grid design methods for finite element analysis, *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 55, pp. 129-160, 1986.
20. Lee K, Principles of CAD/CAM/CAE Systems, Addison-Wiley, Reading, Massachusetts, 1999.
21. Lee, Y.T., *Automatic Finite Element Generation Based on Constructive Solid Geometry*, Ph.D Thesis, Mechanical Engineering Dept, University of Leeds, Leeds, UK, 1983.
22. MacNeal, R. H, *Finite Elements: Their Design and Performance*, Marcel Dekker, New York, 1994.

23. Mills R, Making Models Move, *Computer-Aided Engineering*, pp. 30-38, February 1997.
24. Provatidis, C.G., Three-dimensional Coons macroelements in Laplace and acoustic problems, *Computers & Structures*, 2005.
25. Provatidis, C.G., Analysis of box-like structures using 3-D Coons' interpolation, *Commun. Numer. Meth. Eng.*, 2005.
26. Shimada K, and Gossard D.C., Computational Methods for physically based FE mesh generation, In: G.J. Ollig and F. Kamura (eds.), *Human Aspects in Computer Integrated Manufacturing*, pp. 41-42, Elsevier Science, Amsterdam, 1992.
27. Szabo B. and Babuska I, *Finite Element Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1991.
28. Thacker WC, Gonzalez A, and Putland GE, A method for automatic the construction of irregular computational grids for storm forecast models, *J. Comput. Physics*, Vol. 37, pp. 371-387, 1980.
29. Watson, D. F., Computing the n -dimensional Delaunay Tessellation with Application to Voronoi Polygons, *Comput. J.*, Vol. 24, pp. 167-172, 1981.
30. Woo TC, and Thomasma T, An algorithm for generating solid elements in objects with holes, *Computers & Structures*, Vol. 18 (2), pp. 333-342, 1984.
31. Wordenweber, B., Finite-Elements Mesh Generation, *Computer-Aided Design*, Vol. 6 (5), pp. 285-291, 1984.
32. Yerry MA, and Shephard MS, A modified quadree approach to Finite-Element Mesh Generation, *IEEE Comput. Graph. and Appl.*, pp. 39-46, "Construction for Polyhedral in Geometric Modeling" CAD Group Document No. 100, Cambridge University Computer Laboratory, 1978.
33. Zeid, I., *CAD/CAM Theory and Practice*, McGraw-Hill, New York, 1991.

Περιεχόμενα:

- 5.1 Αδιαστατοποίηση των Τάσεων
- 5.2 Συγκέντρωση – Σύγκριση Αποτελεσμάτων
- 5.3 Έλεγχος Αντοχής Μετωπικών Οδοντωτών Τροχών
 - 5.3.1 Έλεγχος Κατά Το Πρότυπο AGMA
- 5.4 Παρατηρήσεις
- 5.5 Βιβλιογραφία

5.1 Αδιαστατοποίηση των Τάσεων

Πριν, συγκεντρώσουμε τις πειραματικές και τις θεωρητικές μέγιστες τάσεις που υπολογίσαμε στα κεφάλαια 3 και 4 αντίστοιχα, θα εισάγουμε την έννοια της αδιάστατης τάσης (Spitas [2]). Προκειμένου να συγκριθούν οι τάσεις του Πίν. 3.3, που μετρήθηκαν πειραματικά με τη Μέθοδο της Φωτοελαστικότητας, με τις αντίστοιχες τιμές που υπολογίστηκαν με την Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων (FEM) του Πίν. 4.4 θα πρέπει να αναχθούν σε αδιάστατες σύμφωνα με τον τύπο που προτείνεται από τους Rogers και Townsend (Townsend [4]):

$$\sigma_u = \sigma \cdot \frac{b \cdot m}{P} = \sigma \cdot \frac{b \cdot m \cdot \cos \alpha'}{P_u} \quad (5.1)$$

όπου:

- $\sigma_u \rightarrow$ η αδιάστατη τάση,
- $\sigma \rightarrow$ η πραγματική τάση (*MPa*),
- $b \rightarrow$ το πλάτος του οδόντα (*m*),
- $m \rightarrow$ το module της οδόντωσης (*m*).
- $P \rightarrow$ το κάθετο φορτίο επί του οδόντος στο HPSTC (*N*),
- $P_u \rightarrow$ η οριζόντια συνιστώσα του προηγούμενου φορτίου (κάθετη προς τον άξονα συμμετρίας του οδόντος) (*N*)
- $\alpha' \rightarrow$ η γωνία άσκησης του φορτίου ως προς την οριζόντιο ($^\circ$)

Το πλεονέκτημα που προσφέρει η θεώρηση αυτή είναι ότι σε όλους τους τροχούς τόσο το module (*m*) όσο και το πλάτος (*b*) είναι ίσα με 1 ενώ παράλληλα θεωρείται μοναδιαία φόρτιση ($P = 1$) στο σημείο HPSTC. Έτσι, έχοντας υπολογίσει για συγκεκριμένο πλάτος, module και φόρτιση οδόντος μιας συγκεκριμένης βαθμίδας την αδιάστατη τιμή της μέγιστης τάσης από την (5.1), είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε για την ίδια βαθμίδα την πραγματική τάση για οποιαδήποτε τιμή από τα 3 αυτά μεταβλητά μεγέθη βοηθώντας μας έτσι να γλιτώσουμε πολύ χρόνο, καθώς και να εξάγουμε χρήσιμα συμπεράσματα για τη συγκεκριμένη βαθμίδα.

5.2 Συγκέντρωση – Σύγκριση Αποτελεσμάτων

Από τους Πίν. 3.3 & 4.4 του πειράματος της φωτοελαστικότητας και της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων αντίστοιχα, λαμβάνουμε τις μέγιστες τάσεις όλων των δοκιμών που πραγματοποιήθηκαν και συμπληρώνουμε τον παρακάτω Πίν. 5.1:

A/A Δοκιμής	Module m (m)	Πλάτος b (m)	Ολικό φορτίο στο HPSTC P (N)	Πειραματική μέγιστη τάση σ_{π} (MPa)	Θεωρητική μέγιστη τάση σ_{θ} (MPa)
<i>Κανονικοί Τροχοί</i>					
1	0.020	0.00925	259.716	4.572	4.592
2	0.020	0.00925	182.382	3.048	3.034
3	0.020	0.00925	176.517	3.048	3.076
4	0.020	0.00925	194.225	3.048	3.101
5	0.020	0.00925	178.116	3.048	2.942
6	0.020	0.00925	206.068	3.048	3.16
7	0.020	0.00925	181.275	3.048	2.98
8	0.020	0.00925	222.648	3.048	3.186
9	0.020	0.00925	188.484	3.048	3.092
10	0.020	0.00925	196.176	3.048	3.047
11	0.020	0.00925	192.381	3.048	3.066
12	0.020	0.00925	205.63	3.048	3.108
13	0.020	0.00925	195.834	3.048	2.989
14	0.020	0.00925	222.411	3.048	3.156
15	0.020	0.00925	202.408	3.048	3.012
16	0.020	0.00925	212.269	3.048	3.167
17	0.020	0.00925	210.263	3.048	3.036
18	0.020	0.00925	229.265	3.048	3.201
19	0.020	0.00925	220.302	3.048	3.09
20	0.020	0.00925	233.496	3.048	3.209

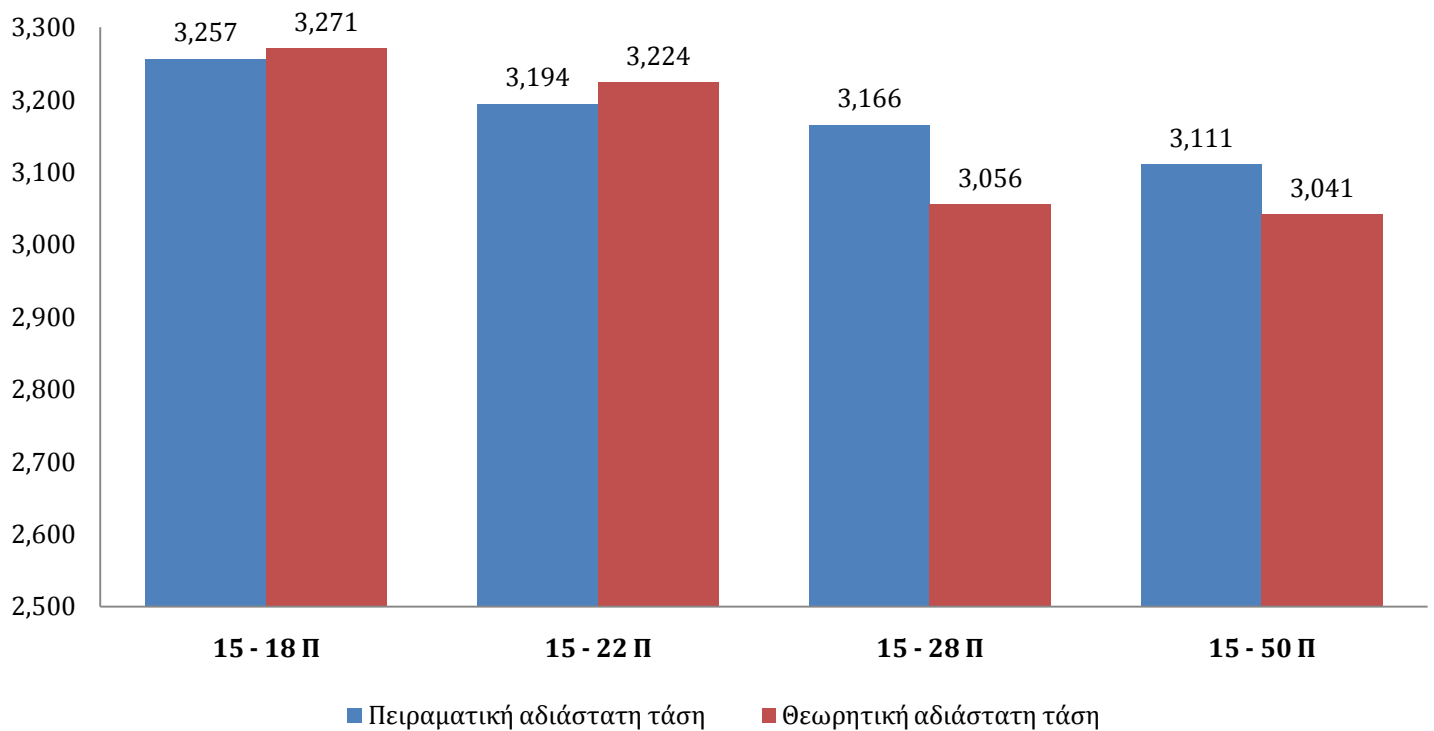
Πίνακας 5.1: Πειραματικές και Θεωρητικές μέγιστες τάσεις των δοκιμών

Στη συνέχεια, με την βοήθεια της 5.1 θα ανάγουμε τις μέγιστες τάσεις του παραπάνω πίνακα σε αδιάστατες και στη συνέχεια συμπληρώνουμε τον παρακάτω Πίν. 5.2 και καταγράφουμε τις αποκλίσεις των τιμών:

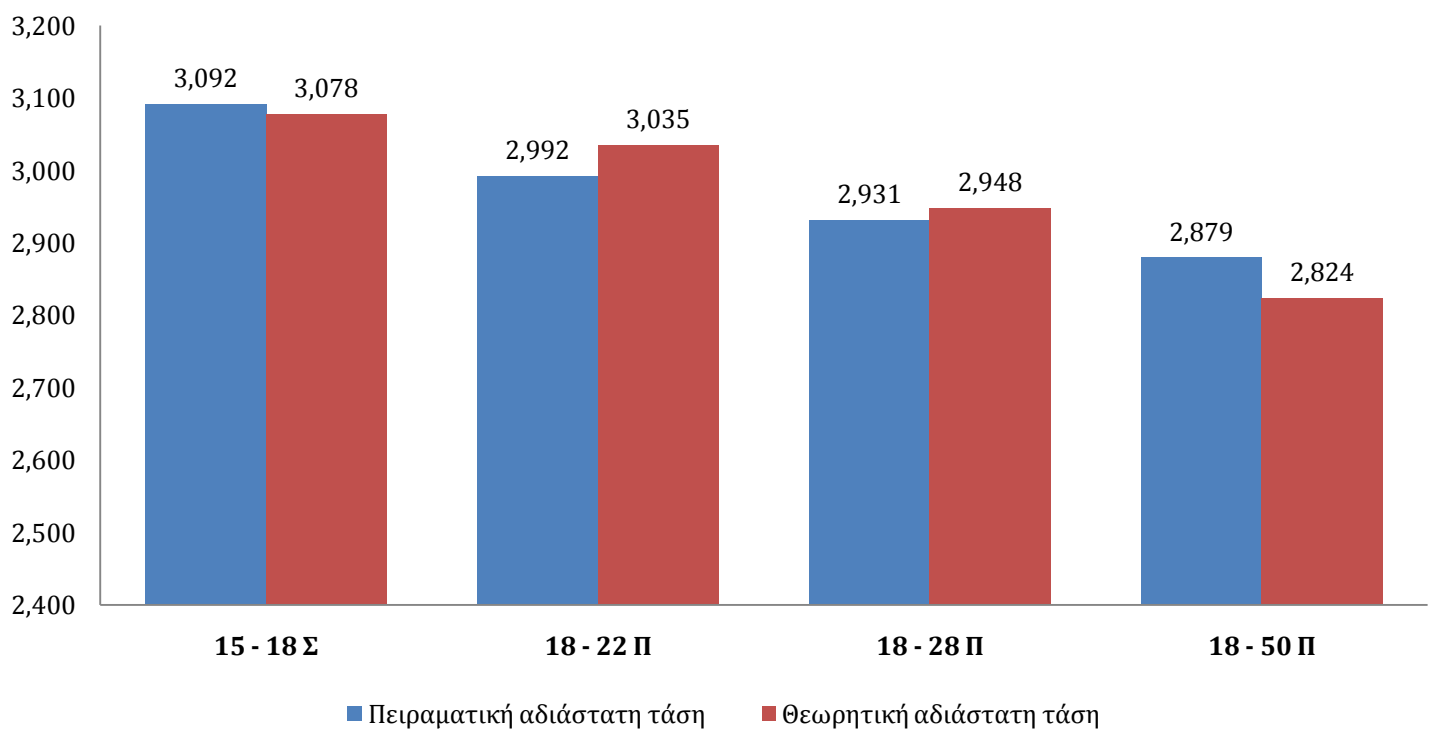
A/A Δοκιμής	Τροχός 1	Τροχός 2	Πειραματική μέγιστη αδιάστατη τάση $\sigma_{\text{μπ}} \text{ (MPa)}$	Θεωρητική μέγιστη αδιάστατη τάση $\sigma_{\text{θε}} \text{ (MPa)}$	Απόκλιση (%)
<i>Κανονικοί Τροχοί</i>					
1	15N	18N	3.257	3.271	-0.4 %
2	18N	15N	3.092	3.078	0.5 %
3	15N	22N	3.194	3.224	-0.9 %
4	22N	15N	2.903	2.954	-1.7 %
5	15N	28N	3.166	3.056	3.6 %
6	28N	15N	2.736	2.837	-3.5 %
7	15N	50N	3.111	3.041	2.3 %
8	50N	15N	2.533	2.647	-4.3 %
9	18N	22N	2.992	3.035	-1.4 %
10	22N	18N	2.874	2.873	0.0 %
11	18N	28N	2.931	2.948	-0.6 %
12	28N	18N	2.742	2.796	-1.9 %
13	18N	50N	2.879	2.824	2.0 %
14	50N	18N	2.535	2.625	-3.4 %
15	22N	28N	2.786	2.753	1.2 %
16	28N	22N	2.656	2.760	-3.8 %
17	22N	50N	2.682	2.671	0.4 %
18	50N	22N	2.460	2.583	-4.8 %
19	28N	50N	2.560	2.595	-1.4 %
20	50N	28N	2.415	2.543	-5.0 %

Πίνακας 5.2: Πειραματικές και θεωρητικές μέγιστες αδιάστατες τάσεις των δοκιμών

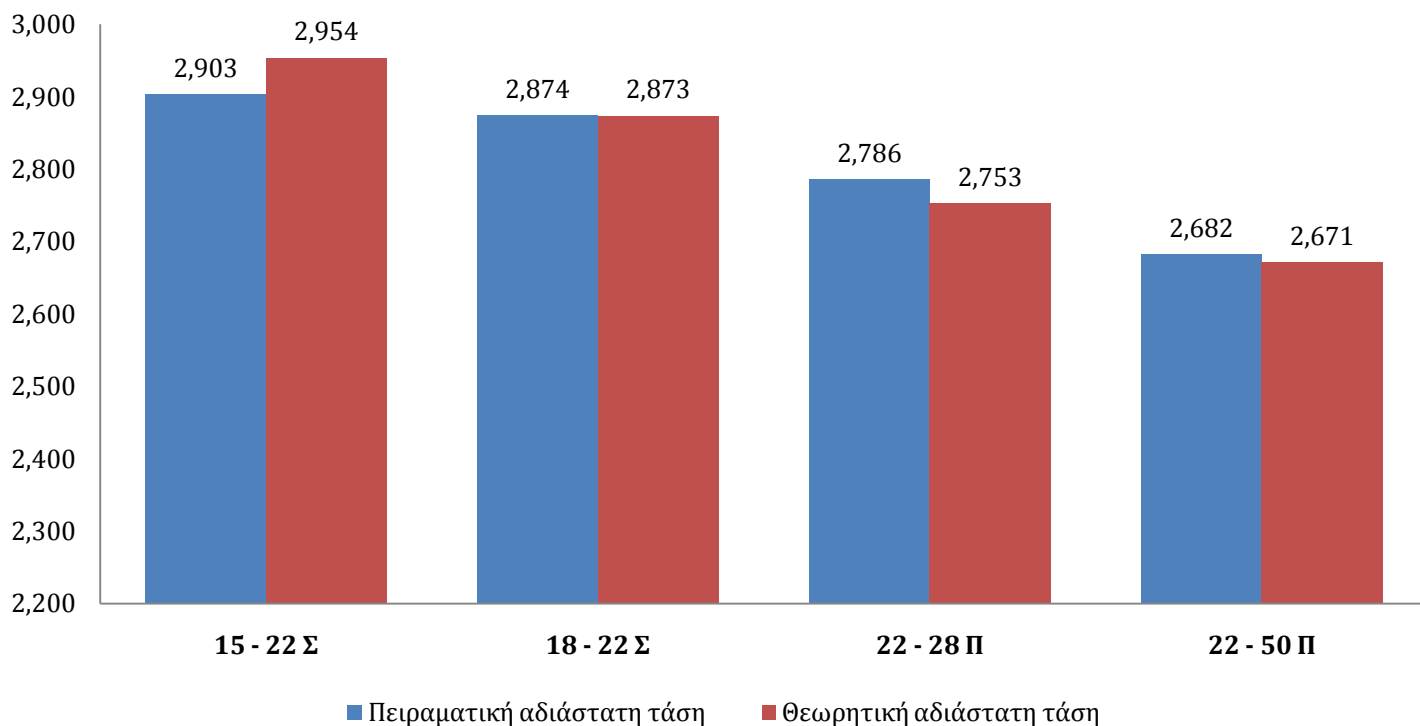
Αμέσως παρακάτω, Σχ. 5.1 έως 5.5, παραθέτουμε διαγράμματα σύγκρισης της πειραματικά και θεωρητικά μετρηθείσας αδιάστατης τάσης για κάθε πινιόν ξεχωριστά, ενώ στα Σχ. 5.6 & 5.7 παραθέτουμε συγκεντρωτικά διαγράμματα των αποκλίσεων και των τάσεων για όλες τις δοκιμές που πραγματοποιήθηκαν.



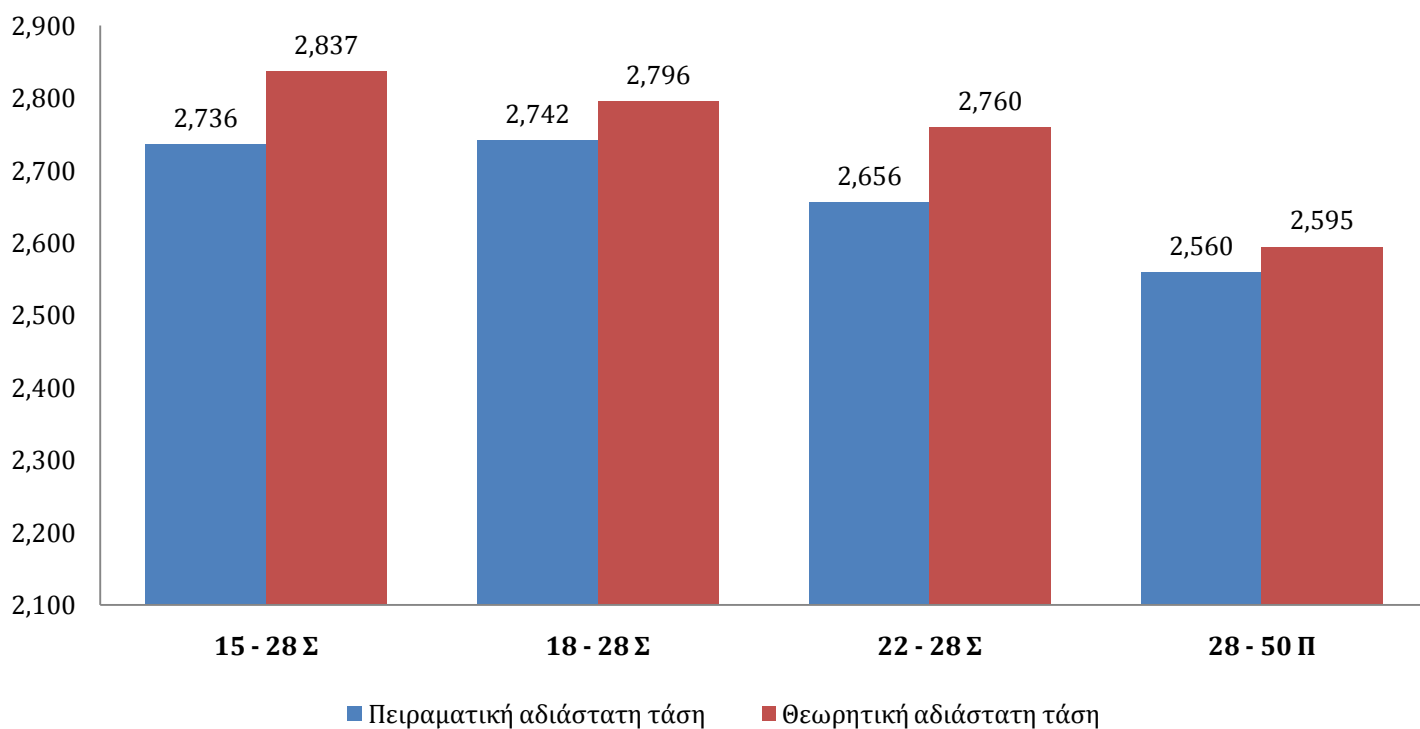
Σχήμα 5.1: Σύγκριση πειραματικά και θεωρητικά μετρηθείσας αδιάστατης τάσης για κανονικούς τροχούς με $z_1 = 15$



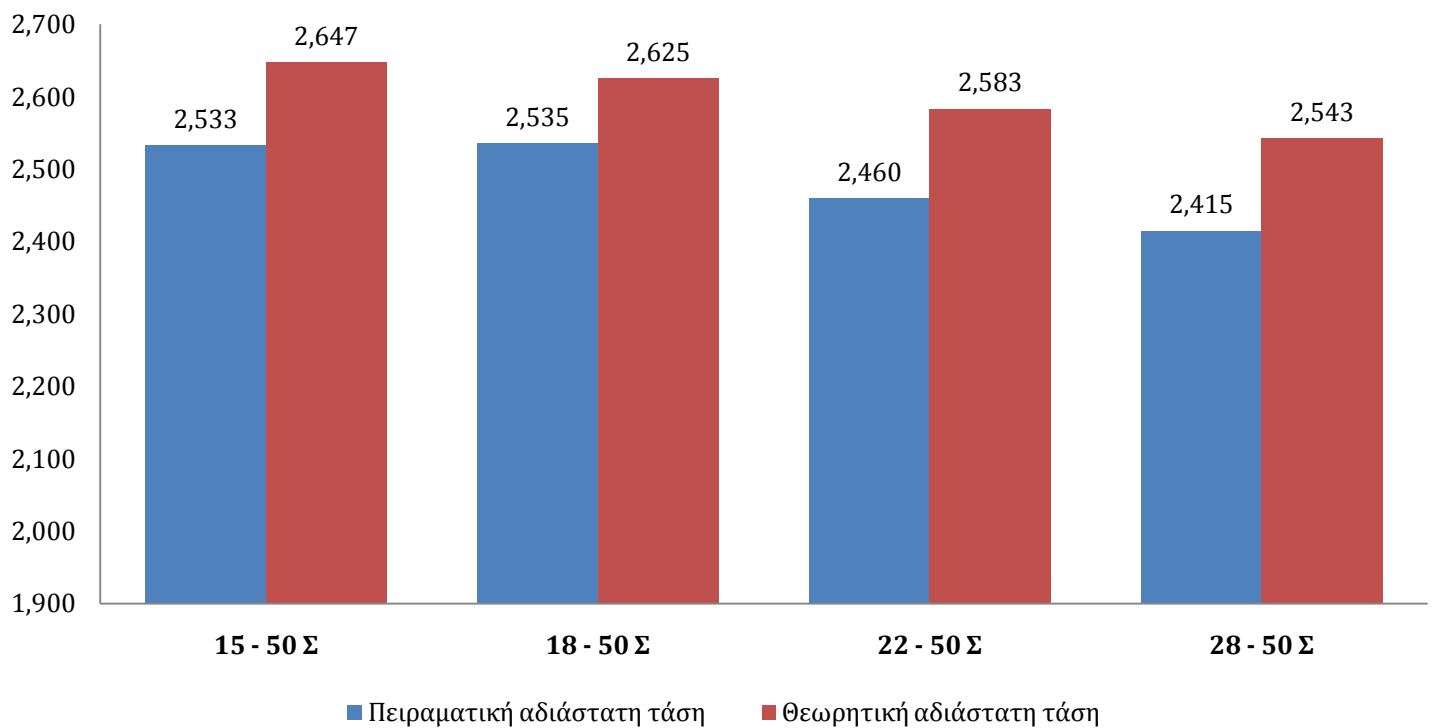
Σχήμα 5.2: Σύγκριση πειραματικά και θεωρητικά μετρηθείσας αδιάστατης τάσης για κανονικούς τροχούς με $z_1 = 18$



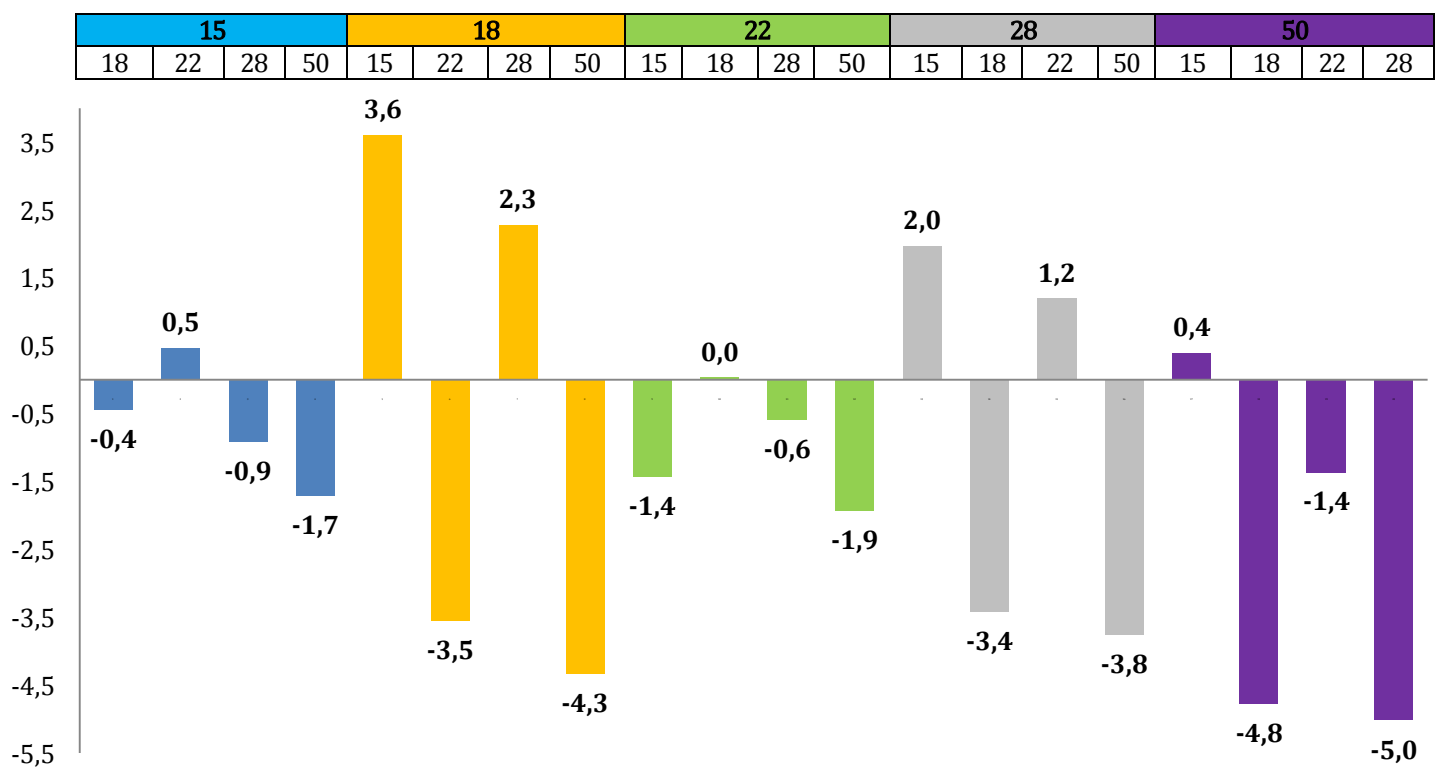
Σχήμα 5.3: Σύγκριση πειραματικά και θεωρητικά μετρηθήσας αδιάστατης τάσης για κανονικούς τροχούς με $z_1 = 22$



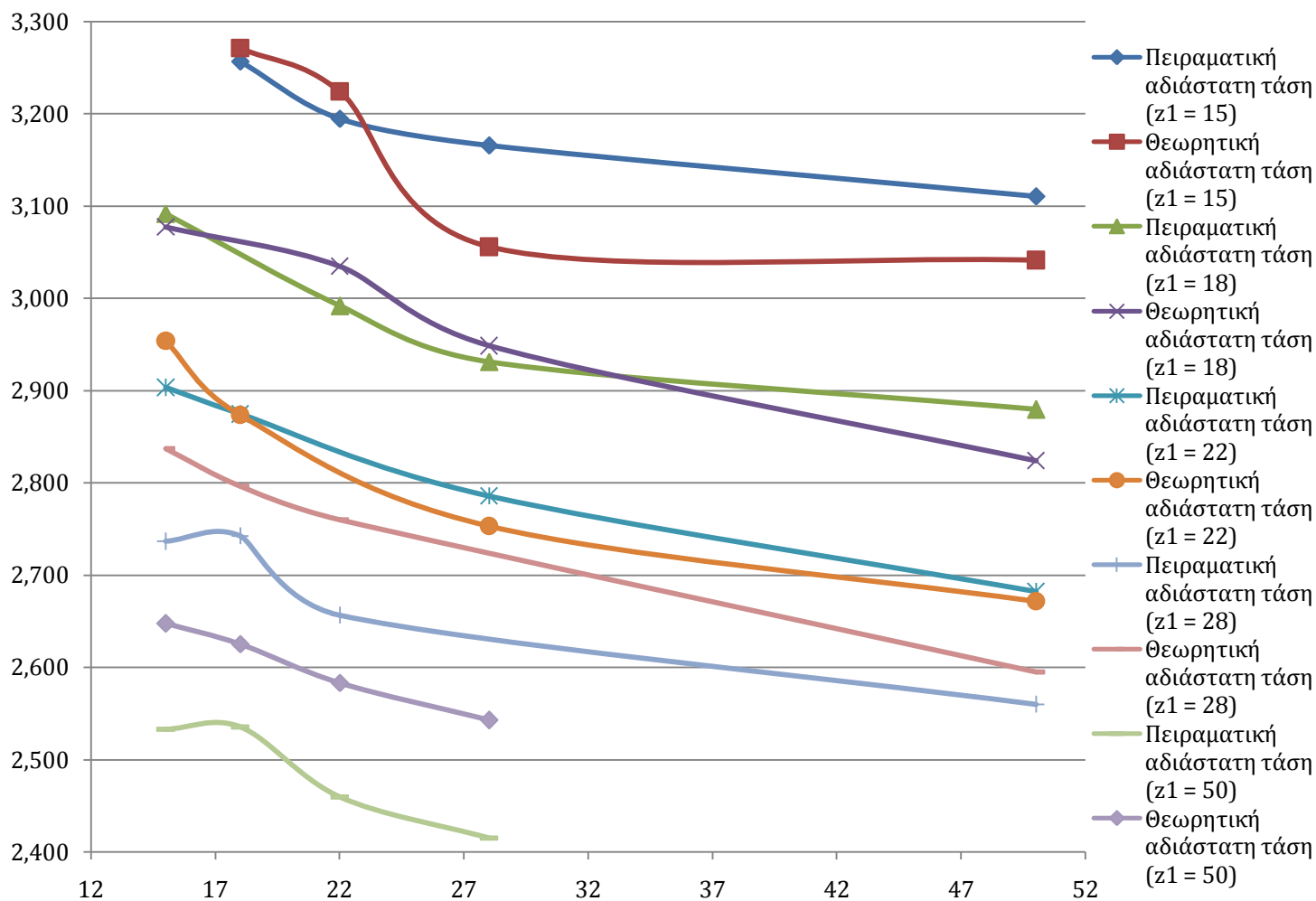
Σχήμα 5.4: Σύγκριση πειραματικά και θεωρητικά μετρηθήσας αδιάστατης τάσης για κανονικούς τροχούς με $z_1 = 28$



Σχήμα 5.5: Σύγκριση πειραματικά και θεωρητικά μετρηθείσας αδιάστατης τάσης για κανονικούς τροχούς με $z_1 = 50$



Σχήμα 5.6: Απόκλιση θεωρητικής και πειραματικής αδιάστατης τάσης στον πόδα του οδόντος τροχού με $z_1 = 15, 18, 22, 28, 50$



Σχήμα 5.7: Σύγκριση θεωρητικής και πειραματικής αδιάστατης τάσης στον πόδα του οδόντος τροχού με $z_1 = 15, 18, 22, 28, 50$

Κατ' αρχήν, όσων αφορά την σύγκριση των τιμών της πειραματικής και θεωρητικής μεγίστης αδιάστατης τάσης, παρατηρούμε ότι οι διαφορές κυμαίνονται από -5.0 % έως 3.6 % με τις αποκλίσεις να αυξάνονται όσο αυξάνει ο αριθμός των οδόντων.

Ακόμη, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι όσο αυξάνει ο αριθμός των οδόντων, τόσο ελαττώνεται η τιμή της μεγίστης τάσεως. Για παράδειγμα, στην βαθμίδα των 15 – 50 οδόντων η μεν αδιάστατη τάση του πινιόν ισούται με: ≈ 3.1 , ενώ η δε αδιάστατη τάση του συνεργαζομένου τροχού ισούται με: ≈ 2.6 . Αυτό το παρατηρούμε σε όλες τις βαθμίδες με την διαφορά να μειώνεται όσο ο αριθμός $z_2/z_1 \rightarrow 1$, ενώ αντίθετα η διαφορά αυξάνει όσο ο αριθμός $z_2/z_1 \gg 1$.

5.3 Έλεγχος Αντοχής Μετωπικών Οδοντωτών Τροχών

Ο υπολογισμός της μέγιστης τάσης στην επικίνδυνη διατομή στον πόδα των οδόντων γίνεται προκειμένου να συγκριθεί με τη μέγιστη επιτρεπόμενη τάση $\sigma_{\text{επ}}$ η οποία εξαρτάται από το υλικό του τροχού, από την περιφερειακή ταχύτητα στο σημείο κυλίσεως και από τον τρόπο εργασίας του τροχού για να ελεγχθεί αν ο τροχός αντέχει στη φόρτιση ή όχι (Costopoulos [1]). Συγκεκριμένα πρέπει να ισχύει ο τύπος:

$$\sigma_{\text{max}} \leq \sigma_{\text{επ}} \quad (5.2)$$

όπου:

- σ_{max} → η μέγιστη τάση στον πόδα του οδόντος (MPa)
- $\sigma_{\text{επ}}$ → η μέγιστη επιτρεπόμενη τάση στην επικίνδυνη διατομή (MPa) η οποία υπολογίζεται ως εξής:
 - για περιφερειακή ταχύτητα του τροχού στον κύκλο κυλίσεως μικρότερη ή ίση των 5 m/sec είναι:

$$\sigma_{\text{επ}} = 9.80665 \frac{\sigma_B}{2 \dots 3} \quad (5.3)$$

- για περιφερειακή ταχύτητα του τροχού στο κύκλο κυλίσεως μεγαλύτερη των 5 m/sec και για φορά περιστροφής του πινιόν πάντοτε την ίδια είναι:

$$\sigma_{\text{επ}} = 9.80665 \frac{\sigma_{\text{bw}}}{1.5 \dots 2} \quad (5.4)$$

όπου:

- σ_B → η αντοχή του υλικού σε εφελκυσμό (Kp/mm²)
- σ_{bw} → η αντοχή του υλικού σε εναλλασσόμενη τάση (Kp/mm²)

όπως αυτές δίδονται στον Πίν. (5.3) των υλικών της επομένης σελίδας:

α/α	Υλικό	σ_B	σ_{bw}	P_0	Παρατηρήσεις
		Kp/mm ²	Kp/mm ²	Kp/mm ²	
1	GG18	18.	9.	32.	Χυτοσίδηρος
2	GG26	26.	12.	42.	
3	GS52	52.	21.	39.	Χυτοχάλυψ
4	GS60	60.	24.	47.	
5	St42	42.	20.	43.	Κοινός χάλυψ χωρίς θερμική επεξεργασία
6	St50	50.	23.	51.	
7	St60	60.	28.	62.	
8	St70	70.	33.	72.	
9	C22	50.	22.	41.	Βελτιωμένος χάλυβας
10	C45	65.	30.	54.	
11	C 60	75.	34.	61.	
12	34Cr4	75.	36.	76.	
13	37MnSi5	70.	36.	73.	
14	42CrMo4	95.	46.	76.	
15	C10	45.	25.	175.	Χάλυβας με επιφανειακή βαφή σε αάδι ή νερό
16	C15	50.	27.	190.	
17	16MnCr5	80.	40.	190.	
18	20MnCr5	100.	50.	190.	
19	14CrNi6	90.	43.	190.	
20	18CrNi8	120.	58.	190.	
21	Ck45	65.	31.	175.	Χάλυβας με επιφανειακή βαφή δι' επαγωγής
22	37MnSi5	90.	44.	165.	
23	53MnSi4	90.	46.	180.	
24	41Cr4	90.	48.	165.	
25	41Cr4	140.	68.	175.	Χάλυψ βαφής σε βουτρό κυανίου
26	37MnSi5	150.	72.	160.	

Πίνακας 5.3: Αντοχές υλικών χάλυβα – χυτοσίδηρου

Η παραπάνω μέθοδος υπολογισμού της επιτρεπόμενης τάσης $\sigma_{\text{επ}}$ βασίζεται σε απλοποιημένη θεωρία. Πλήρης υπολογισμός του $\sigma_{\text{επ}}$ απαιτεί γνώση της ακριβούς θέσης της επικίνδυνης διατομής. Δύο μέθοδοι που έχουν αναφερθεί σε προηγούμενες ενότητες είναι η μέθοδος της εγγεγραμμένης παραβολής του Lewis και η μέθοδος της εφαπτομένης των 30° αντίστοιχα (βλ. 2.9.1 & 2.9.2). Παρακάτω, παρατίθεται ο λεπτομερέστερος υπολογισμός της $\sigma_{\text{επ}}$ κατά το πρότυπο AGMA.

5.3.1 Έλεγχος Κατά Το Πρότυπο AGMA

Σε προηγούμενη ενότητα (βλ. 2.9.1) είχε υπολογιστεί η μέγιστη τάση που αναπτύσσεται στον πόδα ενός οδόντος μετωπικού οδοντωτού τροχού ευθείας οδόντωσης. Ο έλεγχος του τροχού σε αντοχή γίνεται από τον παρακάτω τύπο (Costopoulos [1], AGMA [3]):

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{\text{επ}} = S_{\text{at}} \frac{K_L}{K_T K_R} \quad (5.5)$$

όπου:

- σ_{\max} → η μέγιστη τάση στον πόδα του οδόντος (MPa)
- $\sigma_{\text{επ}}$ → η μέγιστη επιτρεπόμενη τάση στην επικίνδυνη διατομή (MPa)
- K_R → ο συντελεστής ασφαλείας που υπολογίζεται από τους παρακάτω Πίν. (5.4) & (5.5) για κόπωση και διαρροή αντίστοιχα:

Απαιτήσεις εφαρμογής	K_R
Υψηλή αξιοπιστία	$\geq 1,5$
Ολιγότερο από 1 αστοχία στις 100 περιπτώσεις	1,0
Ολιγότερο από 1 αστοχία στις 3 περιπτώσεις	0,7

Πίνακας 5.4: Συντελεστής ασφαλείας K_R σε κόπωση

Απαιτήσεις εφαρμογής	K_R
Υψηλή αξιοπιστία	$\geq 3,0$
Κανονικές απαιτήσεις σχεδιασμού	1,33

Πίνακας 5.5: Συντελεστής ασφαλείας K_R σε διαρροή

- K_T → ο συντελεστής θερμοκρασίας ο οποίος λαμβάνεται ως εξής:
 - Για θερμοκρασία $T < 70^\circ\text{C}$ → $K_T = 1.0$
 - Για θερμοκρασία $70^\circ\text{C} < T < 150^\circ\text{C}$ → $K_T = 492 + (9 \cdot T / 5) / 620$

- S_{at} → η επιτρεπόμενη τάση του υλικού (MPa) που λαμβάνεται από τον παρακάτω Πίν. (5.6):

Υλικό	Θερμική κατεργασία	Ελάχιστη σκληρότητα ή αντοχή σε εφελκυσμό	S_{at} (MPa)
Χάλυβας	Βαφή, επαναφορά	140 BHN	131,0 – 172,4
	Βαφή, επαναφορά	180 BHN	172,4 – 228,5
	Βαφή, επαναφορά	300 BHN	248,2 – 324,1
	Βαφή, επαναφορά	450 BHN	303,4 – 406,8
	Ενανθράκωση	55 R_C	379,2 – 448,2
	Ενανθράκωση	60 R_C	413,7 – 482,6
	Σκλήρυνση με φλόγα ή επαγωγικά		
	Σε βάθος	54 R_C	310,3 – 379,2
	Επιφανειακά	54 R_C	151,7
	Εναζώτωση AISI 4140	53 R_C	255,1 – 289,6
Χυτοσίδηρος AGMA 20 κοινός AGMA 30 AGNA 40			
		175 BHN	34,5 58,6
		200 BHN	89,6
Ειδικοί χάλυβες ASTM 60-40-18 ASTM 80-55-06	Ανόπτηση		103,4 137,9
ASTM 100-70-03 ASTM 120-90-02	Βαφή - Επαναφορά		179,3 206,8
Μπρούντζος AGMA 2C (10% - 12% Κασσίτερος)		275,8 MPa	39,3
Μπρούντζος αλουμινίου ASTM B-148-52 Κράμα 9C-H.T.		620,5 MPa	162,7

BHN = Σκληρότητα BRINELL
 R_C = Σκληρότητα ROCKWELL C

Πίνακας 5.6: Επιτρεπόμενες τάσεις υλικών

- $K_L \rightarrow$ ο συντελεστής διάρκειας ζωής που υπολογίζεται από τον παρακάτω Πίν. (5.7):

Αριθμός κύκλων έως	160 BHN	250 BHN	450 BHN	Επιφανειακή ενανθράκωση 55 - 63 R _C
10^3	1,6	2,4	3,4	2,7
10^4	1,4	1,9	2,4	2,0
10^5	1,2	1,4	1,7	1,5
10^6	1,1	1,1	1,2	1,1
10^7		1,0		
$> 10^7$		1,0 - 0,8		

Πίνακας 5.7: Συντελεστής διάρκειας ζωής K_L

5.4 Παρατηρήσεις

Εκτός από την αστοχία σε αντοχή στην επικίνδυνη διατομή, έχει παρατηρηθεί ότι λόγω κοπώσεως του υλικού εκ των υψηλών πιέσεων στην περιοχή του κύκλου κυλίσεως των τροχών (ολόκληρο το φορτίο μεταφέρεται μόνο από έναν οδόντα του πιινόν), δημιουργούνται ρωγμές στην επιφάνεια του οδόντος στις οποίες εισέρχεται εύκολα ένα λεπτόρρευστο λιπαντικό που βρίσκεται υπό υψηλή πίεση. Με την πάροδο του χρόνου αυτές οι ρωγμές διευρύνονται και δημιουργούνται εκκοιλάνσεις ή εξελκώσεις (pitting). Έτσι, είναι σημαντικό να γίνεται πάντοτε έλεγχος των οδοντωτών τροχών σε πίεση επιφανείας (Costopoulos [1]).

Στην πράξη, σπάνια θα μας δίνεται η τιμή της φόρτισης του οδόντος έτσι ώστε να υπολογίσουμε τη μέγιστη τάση που αναπτύσσεται στην επικίνδυνη διατομή ποδός είτε με τη μέθοδο της φωτοελαστικότητας είτε με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Αντίθετα, θα μας δίνονται στοιχεία όπως: στροφές ατράκτου, σχέσεις μεταδόσεως των βαθμίδων, ωφέλιμες ισχείς των εξόδων, κτλ. και θα πρέπει μέσω αναλυτικού υπολογισμού της ροής ισχύος και εξισώσεων ισορροπίας να υπολογίσουμε τις δυνάμεις φόρτισης των τροχών και έπειτα να χρησιμοποιήσουμε τις παραπάνω μεθόδους (Costopoulos [1]).

5.5 Βιβλιογραφία

1. Κωστόπουλος Θ. Ν., *Οδοντώσεις και Μειωτήρες Στροφών*, Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα, 1991.
2. Σπιτάς Β. Α., *Μοντελοποίηση και Σχεδιασμός Βέλτιστων Οδοντώσεων με Χρήση Αναλυτικών, Αριθμητικών και Πειραματικών Μεθόδων*, Διδακτορική Διατριβή (επιβλέπων καθ. Θ. Ν. Κωστόπουλος), Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2001.
3. AGMA 2101-C95, "Fundamental rating factors and calculation methods for involute spur and helical gear. (Metric Version)", *American Gear Manufacturers Association*, 1995.
4. Townsend D. P., *Dudley's Gear Handbook*, Mc-Graw Hill , New York, 1992.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ	
6	Παραρτήματα

Περιεχόμενα:

- 6.1 Παράρτημα Α: Κώδικες MathCAD
- 6.2 Παράρτημα Β: Μετατροπές Μονάδων
- 6.3 Παράρτημα Γ: Χρησιμοποιηθέν Λογισμικό

6.1 Παράρτημα Α: Κώδικες MathCAD

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΟΛΩΝ ΤΩΝ ΤΡΟΧΩΝ

ΚΟΙΝΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ

$$ao := 20\text{deg}$$

$$m := 20$$

ΤΡΟΧΟΣ 15 ΟΔΟΝΤΩΝ

$$\begin{aligned} do15 &:= 300 & ro15 &:= \frac{do15}{2} = 150 \\ dg15 &:= 281.9078 & rg15 &:= \frac{dg15}{2} = 140.9539 \\ df15 &:= 250 & rf15 &:= \frac{df15}{2} = 125 \\ dk15 &:= 340 & rk15 &:= \frac{dk15}{2} = 170 \end{aligned}$$

ΤΡΟΧΟΣ 18 ΟΔΟΝΤΩΝ

$$\begin{aligned} do18 &:= 360 & ro18 &:= \frac{do18}{2} = 180 \\ dg18 &:= 338.2893 & rg18 &:= \frac{dg18}{2} = 169.1447 \\ df18 &:= 310 & rf18 &:= \frac{df18}{2} = 155 \\ dk18 &:= 400 & rk18 &:= \frac{dk18}{2} = 200 \end{aligned}$$

ΤΡΟΧΟΣ 22 ΟΔΟΝΤΩΝ

$$\begin{aligned} do22 &:= 440 & ro22 &:= \frac{do22}{2} = 220 \\ dg22 &:= 413.4648 & rg22 &:= \frac{dg22}{2} = 206.7324 \\ df22 &:= 390 & rf22 &:= \frac{df22}{2} = 195 \\ dk22 &:= 480 & rk22 &:= \frac{dk22}{2} = 240 \end{aligned}$$

ΤΡΟΧΟΣ 28 ΟΔΟΝΤΩΝ

$$\begin{aligned} do28 &:= 560 & ro28 &:= \frac{do28}{2} = 280 \\ dg28 &:= 526.2279 & rg28 &:= \frac{dg28}{2} = 263.1139 \\ df28 &:= 510 & rf28 &:= \frac{df28}{2} = 255 \\ dk28 &:= 600 & rk28 &:= \frac{dk28}{2} = 300 \end{aligned}$$

ΤΡΟΧΟΣ 50 ΟΔΟΝΤΩΝ

$$\begin{aligned} do50 &:= 1000 & ro50 &:= \frac{do50}{2} = 500 \\ dg50 &:= 939.6926 & rg50 &:= \frac{dg50}{2} = 469.8463 \\ df50 &:= 950 & rf50 &:= \frac{df50}{2} = 475 \\ dk50 &:= 1040 & rk50 &:= \frac{dk50}{2} = 520 \end{aligned}$$

ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΘΕΣΗΣ ΤΟΥ HPSTC

ΔΟΚΙΜΗ 1 - ΒΑΘΜΙΑ 15 - 18 (ΤΡΟΧΟΣ 15 ΟΔΟΝΤΩΝ)

$$AB1518 := \sqrt{(ro18 + m)^2 - (ro18 \cdot \cos(ao))^2} + \sqrt{(ro15 + m)^2 - (ro15 \cdot \cos(ao))^2} - (ro15 + ro18) \cdot \sin(ao)$$

$$AC1518 := \sqrt{(ro18 + m)^2 - ro18^2 \cdot \cos(ao)^2} - ro18 \cdot \sin(ao) = 45.161$$

$$tg := \pi \cdot m \cdot \cos(ao) = 59.043$$

$$CBB1518 := tg - AC1518 = 13.882$$

$$RBB1518 := \sqrt{ro15^2 + CBB1518^2 - 2 \cdot ro15 \cdot CBB1518 \cdot \cos(ao + 90deg)} = 155.29674$$

ΔΟΚΙΜΗ 2 - ΒΑΘΜΙΑ 15 - 18 (ΤΡΟΧΟΣ 18 ΟΔΟΝΤΩΝ)

$$AB1815 := \sqrt{(ro15 + m)^2 - (ro15 \cdot \cos(ao))^2} + \sqrt{(ro18 + m)^2 - (ro18 \cdot \cos(ao))^2} - (ro18 + ro15) \cdot \sin(ao)$$

$$AC1815 := \sqrt{(ro15 + m)^2 - ro15^2 \cdot \cos(ao)^2} - ro15 \cdot \sin(ao) = 43.734$$

$$CBB1815 := tg - AC1815 = 15.309$$

$$RBB1815 := \sqrt{ro18^2 + CBB1815^2 - 2 \cdot ro18 \cdot CBB1815 \cdot \cos(ao + 90deg)} = 185.79368$$

ΔΟΚΙΜΗ 3 - ΒΑΘΜΙΑ 15 - 22 (ΤΡΟΧΟΣ 15 ΟΔΟΝΤΩΝ)

$$AB1522 := \sqrt{(ro22 + m)^2 - (ro22 \cdot \cos(ao))^2} + \sqrt{(ro15 + m)^2 - (ro15 \cdot \cos(ao))^2} - (ro15 + ro22) \cdot \sin(ao)$$

$$AC1522 := \sqrt{(ro22 + m)^2 - ro22^2 \cdot \cos(ao)^2} - ro22 \cdot \sin(ao) = 46.664$$

$$CBB1522 := tg - AC1522 = 12.378$$

$$RBB1522 := \sqrt{ro15^2 + CBB1522^2 - 2 \cdot ro15 \cdot CBB1522 \cdot \cos(ao + 90deg)} = 154.67166$$

ΔΟΚΙΜΗ 4 - ΒΑΘΜΙΑ 15 - 22 (ΤΡΟΧΟΣ 22 ΟΔΟΝΤΩΝ)

$$AB2215 := \sqrt{(ro15 + m)^2 - (ro15 \cdot \cos(ao))^2} + \sqrt{(ro22 + m)^2 - (ro22 \cdot \cos(ao))^2} - (ro22 + ro15) \cdot \sin(ao)$$

$$AC2215 := \sqrt{(ro15 + m)^2 - ro15^2 \cdot \cos(ao)^2} - ro15 \cdot \sin(ao) = 43.734$$

$$CBB2215 := tg - AC2215 = 15.309$$

$$RBB2215 := \sqrt{ro22^2 + CBB2215^2 - 2 \cdot ro22 \cdot CBB2215 \cdot \cos(ao + 90deg)} = 225.69485$$

ΛΟΚΙΜΗ 5 - ΒΑΘΜΙΑ 15 - 28 (ΤΡΟΧΟΣ 15 ΟΔΟΝΤΩΝ)

$$AB1528 := \sqrt{(ro28 + m)^2 - (ro28 \cdot \cos(ao))^2} + \sqrt{(ro15 + m)^2 - (ro15 \cdot \cos(ao))^2} - (ro15 + ro28) \cdot \sin(ao)$$

$$AC1528 := \sqrt{(ro28 + m)^2 - ro28^2 \cdot \cos(ao)^2} - ro28 \cdot \sin(ao) = 48.356$$

$$CBB1528 := tg - AC1528 = 10.687$$

$$RBB1528 := \sqrt{ro15^2 + CBB1528^2 - 2 \cdot ro15 \cdot CBB1528 \cdot \cos(ao + 90deg)} = 153.98283$$

ΛΟΚΙΜΗ 6 - ΒΑΘΜΙΑ 15 - 28 (ΤΡΟΧΟΣ 28 ΟΔΟΝΤΩΝ)

$$AB2815 := \sqrt{(ro15 + m)^2 - (ro15 \cdot \cos(ao))^2} + \sqrt{(ro28 + m)^2 - (ro28 \cdot \cos(ao))^2} - (ro28 + ro15) \cdot \sin(ao)$$

$$AC2815 := \sqrt{(ro15 + m)^2 - ro15^2 \cdot \cos(ao)^2} - ro15 \cdot \sin(ao) = 43.734$$

$$CBB2815 := tg - AC2815 = 15.309$$

$$RBB2815 := \sqrt{ro28^2 + CBB2815^2 - 2 \cdot ro28 \cdot CBB2815 \cdot \cos(ao + 90deg)} = 285.59845$$

ΛΟΚΙΜΗ 7 - ΒΑΘΜΙΑ 15 - 50 (ΤΡΟΧΟΣ 15 ΟΔΟΝΤΩΝ)

$$AB1550 := \sqrt{(ro50 + m)^2 - (ro50 \cdot \cos(ao))^2} + \sqrt{(ro15 + m)^2 - (ro15 \cdot \cos(ao))^2} - (ro15 + ro50) \cdot \sin(ao)$$

$$AC1550 := \sqrt{(ro50 + m)^2 - ro50^2 \cdot \cos(ao)^2} - ro50 \cdot \sin(ao) = 51.8$$

$$CBB1550 := tg - AC1550 = 7.242$$

$$RBB1550 := \sqrt{ro15^2 + CBB1550^2 - 2 \cdot ro15 \cdot CBB1550 \cdot \cos(ao + 90deg)} = 152.62884$$

ΛΟΚΙΜΗ 8 - ΒΑΘΜΙΑ 15 - 50 (ΤΡΟΧΟΣ 50 ΟΔΟΝΤΩΝ)

$$AB5015 := \sqrt{(ro15 + m)^2 - (ro15 \cdot \cos(ao))^2} + \sqrt{(ro50 + m)^2 - (ro50 \cdot \cos(ao))^2} - (ro50 + ro15) \cdot \sin(ao)$$

$$AC5015 := \sqrt{(ro15 + m)^2 - ro15^2 \cdot \cos(ao)^2} - ro15 \cdot \sin(ao) = 43.734$$

$$CBB5015 := tg - AC5015 = 15.309$$

$$RBB5015 := \sqrt{ro50^2 + CBB5015^2 - 2 \cdot ro50 \cdot CBB5015 \cdot \cos(ao + 90deg)} = 505.44068$$

ΔΟΚΙΜΗ 9 - ΒΑΘΜΙΑ 18 - 22 (ΤΡΟΧΟΣ 18 ΟΔΟΝΤΩΝ)

$$AB1822 := \sqrt{(ro22 + m)^2 - (ro22 \cdot \cos(ao))^2} + \sqrt{(ro18 + m)^2 - (ro18 \cdot \cos(ao))^2} - (ro18 + ro22) \cdot \sin(ao)$$

$$AC1822 := \sqrt{(ro22 + m)^2 - ro22^2 \cdot \cos(ao)^2} - ro22 \cdot \sin(ao) = 46.664$$

$$CBB1822 := tg - AC1822 = 12.378$$

$$RBB1822 := \sqrt{ro18^2 + CBB1822^2 - 2 \cdot ro18 \cdot CBB1822 \cdot \cos(ao + 90deg)} = 184.60049$$

ΔΟΚΙΜΗ 10 - ΒΑΘΜΙΑ 18 - 22 (ΤΡΟΧΟΣ 22 ΟΔΟΝΤΩΝ)

$$AB2218 := \sqrt{(ro18 + m)^2 - (ro18 \cdot \cos(ao))^2} + \sqrt{(ro22 + m)^2 - (ro22 \cdot \cos(ao))^2} - (ro22 + ro18) \cdot \sin(ao)$$

$$AC2218 := \sqrt{(ro18 + m)^2 - ro18^2 \cdot \cos(ao)^2} - ro18 \cdot \sin(ao) = 45.161$$

$$CBB2218 := tg - AC2218 = 13.882$$

$$RBB2218 := \sqrt{ro22^2 + CBB2218^2 - 2 \cdot ro22 \cdot CBB2218 \cdot \cos(ao + 90deg)} = 225.12615$$

ΔΟΚΙΜΗ 11 - ΒΑΘΜΙΑ 18 - 28 (ΤΡΟΧΟΣ 18 ΟΔΟΝΤΩΝ)

$$AB1828 := \sqrt{(ro28 + m)^2 - (ro28 \cdot \cos(ao))^2} + \sqrt{(ro18 + m)^2 - (ro18 \cdot \cos(ao))^2} - (ro18 + ro28) \cdot \sin(ao)$$

$$AC1828 := \sqrt{(ro28 + m)^2 - ro28^2 \cdot \cos(ao)^2} - ro28 \cdot \sin(ao) = 48.356$$

$$CBB1828 := tg - AC1828 = 10.687$$

$$RBB1828 := \sqrt{ro18^2 + CBB1828^2 - 2 \cdot ro18 \cdot CBB1828 \cdot \cos(ao + 90deg)} = 183.92937$$

ΔΟΚΙΜΗ 12 - ΒΑΘΜΙΑ 18 - 28 (ΤΡΟΧΟΣ 28 ΟΔΟΝΤΩΝ)

$$AB2818 := \sqrt{(ro18 + m)^2 - (ro18 \cdot \cos(ao))^2} + \sqrt{(ro28 + m)^2 - (ro28 \cdot \cos(ao))^2} - (ro28 + ro18) \cdot \sin(ao)$$

$$AC2818 := \sqrt{(ro18 + m)^2 - ro18^2 \cdot \cos(ao)^2} - ro18 \cdot \sin(ao) = 45.161$$

$$CBB2818 := tg - AC2818 = 13.882$$

$$RBB2818 := \sqrt{ro28^2 + CBB2818^2 - 2 \cdot ro28 \cdot CBB2818 \cdot \cos(ao + 90deg)} = 285.04655$$

ΔΟΚΙΜΗ 13 - ΒΑΘΜΙΑ 18 - 50 (ΤΡΟΧΟΣ 18 ΟΔΟΝΤΩΝ)

$$AB1850 := \sqrt{(ro50 + m)^2 - (ro50 \cdot \cos(ao))^2} + \sqrt{(ro18 + m)^2 - (ro18 \cdot \cos(ao))^2} - (ro18 + ro50) \cdot \sin(ao)$$

$$AC1850 := \sqrt{(ro50 + m)^2 - ro50^2 \cdot \cos(ao)^2} - ro50 \cdot \sin(ao) = 51.8$$

$$CBB1850 := tg - AC1850 = 7.242$$

$$RBB1850 := \sqrt{ro18^2 + CBB1850^2 - 2 \cdot ro18 \cdot CBB1850 \cdot \cos(ao + 90deg)} = 182.6039$$

ΔΟΚΙΜΗ 14 - ΒΑΘΜΙΑ 18 - 50 (ΤΡΟΧΟΣ 50 ΟΔΟΝΤΩΝ)

$$AB5018 := \sqrt{(ro18 + m)^2 - (ro18 \cdot \cos(ao))^2} + \sqrt{(ro50 + m)^2 - (ro50 \cdot \cos(ao))^2} - (ro50 + ro18) \cdot \sin(ao)$$

$$AC5018 := \sqrt{(ro18 + m)^2 - ro18^2 \cdot \cos(ao)^2} - ro18 \cdot \sin(ao) = 45.161$$

$$CBB5018 := tg - AC5018 = 13.882$$

$$RBB5018 := \sqrt{ro50^2 + CBB5018^2 - 2 \cdot ro50 \cdot CBB5018 \cdot \cos(ao + 90deg)} = 504.91644$$

ΔΟΚΙΜΗ 15 - ΒΑΘΜΙΑ 22 - 28 (ΤΡΟΧΟΣ 22 ΟΔΟΝΤΩΝ)

$$AB2228 := \sqrt{(ro28 + m)^2 - (ro28 \cdot \cos(ao))^2} + \sqrt{(ro22 + m)^2 - (ro22 \cdot \cos(ao))^2} - (ro22 + ro28) \cdot \sin(ao)$$

$$AC2228 := \sqrt{(ro28 + m)^2 - ro28^2 \cdot \cos(ao)^2} - ro28 \cdot \sin(ao) = 48.356$$

$$CBB2228 := tg - AC2228 = 10.687$$

$$RBB2228 := \sqrt{ro22^2 + CBB2228^2 - 2 \cdot ro22 \cdot CBB2228 \cdot \cos(ao + 90deg)} = 223.88036$$

ΔΟΚΙΜΗ 16 - ΒΑΘΜΙΑ 22 - 28 (ΤΡΟΧΟΣ 28 ΟΔΟΝΤΩΝ)

$$AB2822 := \sqrt{(ro22 + m)^2 - (ro22 \cdot \cos(ao))^2} + \sqrt{(ro28 + m)^2 - (ro28 \cdot \cos(ao))^2} - (ro28 + ro22) \cdot \sin(ao)$$

$$AC2822 := \sqrt{(ro22 + m)^2 - ro22^2 \cdot \cos(ao)^2} - ro22 \cdot \sin(ao) = 46.664$$

$$CBB2822 := tg - AC2822 = 12.378$$

$$RBB2822 := \sqrt{ro28^2 + CBB2822^2 - 2 \cdot ro28 \cdot CBB2822 \cdot \cos(ao + 90deg)} = 284.47157$$

ΔΟΚΙΜΗ 17 - ΒΑΘΜΙΑ 22 - 50 (ΤΡΟΧΟΣ 22 ΟΔΟΝΤΩΝ)

$$AB2250 := \sqrt{(ro50 + m)^2 - (ro50 \cdot \cos(ao))^2} + \sqrt{(ro22 + m)^2 - (ro22 \cdot \cos(ao))^2} - (ro22 + ro50) \cdot \sin(ao)$$

$$AC2250 := \sqrt{(ro50 + m)^2 - ro50^2 \cdot \cos(ao)^2} - ro50 \cdot \sin(ao) = 51.8$$

$$CBB2250 := tg - AC2250 = 7.242$$

$$RBB2250 := \sqrt{ro22^2 + CBB2250^2 - 2 \cdot ro22 \cdot CBB2250 \cdot \cos(ao + 90deg)} = 222.5811$$

ΔΟΚΙΜΗ 18 - ΒΑΘΜΙΑ 22 - 50 (ΤΡΟΧΟΣ 50 ΟΔΟΝΤΩΝ)

$$AB5022 := \sqrt{(ro22 + m)^2 - (ro22 \cdot \cos(ao))^2} + \sqrt{(ro50 + m)^2 - (ro50 \cdot \cos(ao))^2} - (ro50 + ro22) \cdot \sin(ao)$$

$$AC5022 := \sqrt{(ro22 + m)^2 - ro22^2 \cdot \cos(ao)^2} - ro22 \cdot \sin(ao) = 46.664$$

$$CBB5022 := tg - AC5022 = 12.378$$

$$RBB5022 := \sqrt{ro50^2 + CBB5022^2 - 2 \cdot ro50 \cdot CBB5022 \cdot \cos(ao + 90deg)} = 504.3678$$

ΔΟΚΙΜΗ 19 - ΒΑΘΜΙΑ 28 - 50 (ΤΡΟΧΟΣ 28 ΟΔΟΝΤΩΝ)

$$AB2850 := \sqrt{(ro50 + m)^2 - (ro50 \cdot \cos(ao))^2} + \sqrt{(ro28 + m)^2 - (ro28 \cdot \cos(ao))^2} - (ro28 + ro50) \cdot \sin(ao)$$

$$AC2850 := \sqrt{(ro50 + m)^2 - ro50^2 \cdot \cos(ao)^2} - ro50 \cdot \sin(ao) = 51.8$$

$$CBB2850 := tg - AC2850 = 7.242$$

$$RBB2850 := \sqrt{ro28^2 + CBB2850^2 - 2 \cdot ro28 \cdot CBB2850 \cdot \cos(ao + 90deg)} = 282.55901$$

ΔΟΚΙΜΗ 20 - ΒΑΘΜΙΑ 28 - 50 (ΤΡΟΧΟΣ 50 ΟΔΟΝΤΩΝ)

$$AB5028 := \sqrt{(ro28 + m)^2 - (ro28 \cdot \cos(ao))^2} + \sqrt{(ro50 + m)^2 - (ro50 \cdot \cos(ao))^2} - (ro50 + ro28) \cdot \sin(ao)$$

$$AC5028 := \sqrt{(ro28 + m)^2 - ro28^2 \cdot \cos(ao)^2} - ro28 \cdot \sin(ao) = 48.356$$

$$CBB5028 := tg - AC5028 = 10.687$$

$$RBB5028 := \sqrt{ro50^2 + CBB5028^2 - 2 \cdot ro50 \cdot CBB5028 \cdot \cos(ao + 90deg)} = 503.75513$$

ΦΟΡΤΙΣΕΙΣ ΟΛΩΝ ΤΩΝ ΒΑΘΜΙΑΔΩΝ

ΓΩΝΙΑ ΑΣΚΗΣΗΣ ΦΟΡΤΙΣΕΩΝ ΑΠΟ ΤΗΝ ΟΡΙΖΟΝΤΙΟ

$\text{cosa1518} := 0.942$	$\text{a1518} := \text{acos}(\text{cosa1518}) = 19.61 \cdot \text{deg}$
$\text{cosa1815} := 0.939$	$\text{a1815} := \text{acos}(\text{cosa1815}) = 20.116 \cdot \text{deg}$
$\text{cosa1522} := 0.945$	$\text{a1522} := \text{acos}(\text{cosa1522}) = 19.091 \cdot \text{deg}$
$\text{cosa2215} := 0.939$	$\text{a2215} := \text{acos}(\text{cosa2215}) = 20.116 \cdot \text{deg}$
$\text{cosa1528} := 0.949$	$\text{a1528} := \text{acos}(\text{cosa1528}) = 18.377 \cdot \text{deg}$
$\text{cosa2815} := 0.939$	$\text{a2815} := \text{acos}(\text{cosa2815}) = 20.116 \cdot \text{deg}$
$\text{cosa1550} := 0.957$	$\text{a1550} := \text{acos}(\text{cosa1550}) = 16.863 \cdot \text{deg}$
$\text{cosa5015} := 0.939$	$\text{a5015} := \text{acos}(\text{cosa5015}) = 20.116 \cdot \text{deg}$
$\text{cosa1822} := 0.944$	$\text{a1822} := \text{acos}(\text{cosa1822}) = 19.265 \cdot \text{deg}$
$\text{cosa2218} := 0.941$	$\text{a2218} := \text{acos}(\text{cosa2218}) = 19.78 \cdot \text{deg}$
$\text{cosa1828} := 0.948$	$\text{a1828} := \text{acos}(\text{cosa1828}) = 18.558 \cdot \text{deg}$
$\text{cosa2818} := 0.941$	$\text{a2818} := \text{acos}(\text{cosa2818}) = 19.78 \cdot \text{deg}$
$\text{cosa1850} := 0.954$	$\text{a1850} := \text{acos}(\text{cosa1850}) = 17.446 \cdot \text{deg}$
$\text{cosa5018} := 0.940$	$\text{a5018} := \text{acos}(\text{cosa5018}) = 19.948 \cdot \text{deg}$
$\text{cosa2228} := 0.934$	$\text{a2228} := \text{acos}(\text{cosa2228}) = 20.933 \cdot \text{deg}$
$\text{cosa2822} := 0.943$	$\text{a2822} := \text{acos}(\text{cosa2822}) = 19.438 \cdot \text{deg}$
$\text{cosa2250} := 0.952$	$\text{a2250} := \text{acos}(\text{cosa2250}) = 17.824 \cdot \text{deg}$
$\text{cosa5022} := 0.941$	$\text{a5022} := \text{acos}(\text{cosa5022}) = 19.78 \cdot \text{deg}$
$\text{cosa2850} := 0.949$	$\text{a2850} := \text{acos}(\text{cosa2850}) = 18.377 \cdot \text{deg}$
$\text{cosa5028} := 0.943$	$\text{a5028} := \text{acos}(\text{cosa5028}) = 19.438 \cdot \text{deg}$

ΚΛΙΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΞΟΝΩΝ ΤΩΝ ΟΔΟΝΤΩΝ ΑΠΟ ΤΗΝ ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΟ

$$b_{15} := 12\text{deg} \quad b_{18} := 10\text{deg} \quad b_{22} := 8.181822\text{ deg} \quad b_{28} := 6.42857455\text{ deg} \quad b_{50} := 3.6\text{deg} \quad a_o := 20\text{deg}$$

ΔΟΚΙΜΗ 1 - ΒΑΘΜΙΑ 15-18 - ΤΡΟΧΟΣ 15 ΟΔΟΝΤΩΝ

$$P_{u1518} := 55\text{lib} = 244.652 \quad P_{N1518} := \frac{P_{u1518}}{\cos(a_{1518})} = 259.716 \quad P_{R1518} := P_{N1518} \cdot \sin(a_{1518}) = 87.164$$

$$P_{u1518} := P_{N1518} \cdot \cos(a_{1518} + b_{15}) = 221.18355 \quad P_{RR1518} := P_{N1518} \cdot \sin(a_{1518} + b_{15}) = 136.12524$$

ΔΟΚΙΜΗ 2 - ΒΑΘΜΙΑ 18-15 - ΤΡΟΧΟΣ 18 ΟΔΟΝΤΩΝ

$$P_{u1815} := 38.5\text{lib} = 171.257 \quad P_{N1815} := \frac{P_{u1815}}{\cos(a_{1815})} = 182.382 \quad P_{R1815} := P_{N1815} \cdot \sin(a_{1815}) = 62.724$$

$$P_{u1815} := P_{N1815} \cdot \cos(a_{1815} + b_{18}) = 157.76281 \quad P_{RR1815} := P_{N1815} \cdot \sin(a_{1815} + b_{18}) = 91.5097$$

ΔΟΚΙΜΗ 3 - ΒΑΘΜΙΑ 15-22 - ΤΡΟΧΟΣ 15 ΟΔΟΝΤΩΝ

$$P_{u1522} := 37.5\text{lib} = 166.808 \quad P_{N1522} := \frac{P_{u1522}}{\cos(a_{1522})} = 176.517 \quad P_{R1522} := P_{N1522} \cdot \sin(a_{1522}) = 57.733$$

$$P_{u1522} := P_{N1522} \cdot \cos(a_{1522} + b_{15}) = 151.1597 \quad P_{RR1522} := P_{N1522} \cdot \sin(a_{1522} + b_{15}) = 91.15317$$

ΔΟΚΙΜΗ 4 - ΒΑΘΜΙΑ 22-15 - ΤΡΟΧΟΣ 22 ΟΔΟΝΤΩΝ

$$P_{u2215} := 41\text{lib} = 182.377 \quad P_{N2215} := \frac{P_{u2215}}{\cos(a_{2215})} = 194.225 \quad P_{R2215} := P_{N2215} \cdot \sin(a_{2215}) = 66.797$$

$$P_{u2215} := P_{N2215} \cdot \cos(a_{2215} + b_{22}) = 171.01451 \quad P_{RR2215} := P_{N2215} \cdot \sin(a_{2215} + b_{22}) = 92.07231$$

ΔΟΚΙΜΗ 5 - ΒΑΘΜΙΑ 15-28 - ΤΡΟΧΟΣ 15 ΟΔΟΝΤΩΝ

$$P_{u1528} := 38\text{lib} = 169.032 \quad P_{N1528} := \frac{P_{u1528}}{\cos(a_{1528})} = 178.116 \quad P_{R1528} := P_{N1528} \cdot \sin(a_{1528}) = 56.156$$

$$P_{u1528} := P_{N1528} \cdot \cos(a_{1528} + b_{15}) = 153.6632 \quad P_{RR1528} := P_{N1528} \cdot \sin(a_{1528} + b_{15}) = 90.0725$$

ΔΟΚΙΜΗ 6 - ΒΑΘΜΙΑ 28-15 - ΤΡΟΧΟΣ 28 ΟΔΟΝΤΩΝ

$$P_{u2815} := 43.5\text{lib} = 193.498 \quad P_{N2815} := \frac{P_{u2815}}{\cos(a_{2815})} = 206.068 \quad P_{R2815} := P_{N2815} \cdot \sin(a_{2815}) = 70.87$$

$$P_{u2815} := P_{N2815} \cdot \cos(a_{2815} + b_{28}) = 184.34601 \quad P_{RR2815} := P_{N2815} \cdot \sin(a_{2815} + b_{28}) = 92.08949$$

ΔΟΚΙΜΗ 7 - ΒΑΘΜΙΑ 15-50 - ΤΡΟΧΟΣ 15 ΟΔΟΝΤΩΝ

$$P_{u1550} := 39\text{lib} = 173.481 \quad P_{N1550} := \frac{P_{u1550}}{\cos(a_{1550})} = 181.275 \quad P_{R1550} := P_{N1550} \cdot \sin(a_{1550}) = 52.586$$

$$P_{u1550} := P_{N1550} \cdot \cos(a_{1550} + b_{15}) = 158.75647 \quad P_{RR1550} := P_{N1550} \cdot \sin(a_{1550} + b_{15}) = 87.50536$$

ΔΟΚΙΜΗ 8 - ΒΑΘΜΙΑ 50-15 - ΤΡΟΧΟΣ 50 ΟΔΟΝΤΩΝ

$$P_{u5015} := 47\text{lib} = 209.066 \quad P_{N5015} := \frac{P_{u5015}}{\cos(a_{5015})} = 222.648 \quad P_{R5015} := P_{N5015} \cdot \sin(a_{5015}) = 76.572$$

$$P_{u5015} := P_{N5015} \cdot \cos(a_{5015} + b_{50}) = 203.84585 \quad P_{RR5015} := P_{N5015} \cdot \sin(a_{5015} + b_{50}) = 89.54873$$

ΔΟΚΙΜΗ 9 - ΒΑΘΜΙΑ 18-22 - ΤΡΟΧΟΣ 18 ΟΔΟΝΤΩΝ

$$P_{u1822} := 40\text{lib} = 177.929 \quad P_{N1822} := \frac{P_{u1822}}{\cos(a_{1822})} = 188.484 \quad P_{R1822} := P_{N1822} \cdot \sin(a_{1822}) = 62.189$$

$$P_{u1822} := P_{N1822} \cdot \cos(a_{1822} + b_{18}) = 164.42664 \quad P_{RR1822} := P_{N1822} \cdot \sin(a_{1822} + b_{18}) = 92.14165$$

ΔΟΚΙΜΗ 10 - ΒΑΘΜΙΑ 22-18 - ΤΡΟΧΟΣ 22 ΟΔΟΝΤΩΝ

$$P_{u2218} := 41.5\text{lib} = 184.601 \quad P_{N2218} := \frac{P_{u2218}}{\cos(a_{2218})} = 196.176 \quad P_{R2218} := P_{N2218} \cdot \sin(a_{2218}) = 66.387$$

$$P_{u2218} := P_{N2218} \cdot \cos(a_{2218} + b_{22}) = 173.27435 \quad P_{RR2218} := P_{N2218} \cdot \sin(a_{2218} + b_{22}) = 91.98287$$

ΔΟΚΙΜΗ 11 - ΒΑΘΜΙΑ 18-28 - ΤΡΟΧΟΣ 18 ΟΔΟΝΤΩΝ

$$P_{u1828} := 41\text{lib} = 182.377 \quad P_{N1828} := \frac{P_{u1828}}{\cos(a_{1828})} = 192.381 \quad P_{R1828} := P_{N1828} \cdot \sin(a_{1828}) = 61.229$$

$$P_{u1828} := P_{N1828} \cdot \cos(a_{1828} + b_{18}) = 168.97404 \quad P_{RR1828} := P_{N1828} \cdot \sin(a_{1828} + b_{18}) = 91.96837$$

ΔΟΚΙΜΗ 12 - ΒΑΘΜΙΑ 28-18 - ΤΡΟΧΟΣ 28 ΟΔΟΝΤΩΝ

$$P_{u2818} := 43.5\text{lib} = 193.498 \quad P_{N2818} := \frac{P_{u2818}}{\cos(a_{2818})} = 205.63 \quad P_{R2818} := P_{N2818} \cdot \sin(a_{2818}) = 69.586$$

$$P_{u2818} := P_{N2818} \cdot \cos(a_{2818} + b_{28}) = 184.48975 \quad P_{RR2818} := P_{N2818} \cdot \sin(a_{2818} + b_{28}) = 90.8138$$

ΔΟΚΙΜΗ 13 - ΒΑΘΜΙΑ 18-50 - ΤΡΟΧΟΣ 18 ΟΔΟΝΤΩΝ

$$P_{u1850} := 42\text{lib} = 186.825 \quad P_{N1850} := \frac{P_{u1850}}{\cos(a_{1850})} = 195.834 \quad P_{R1850} := P_{N1850} \cdot \sin(a_{1850}) = 58.712$$

$$P_{u1850} := P_{N1850} \cdot \cos(a_{1850} + b_{18}) = 173.79174 \quad P_{RR1850} := P_{N1850} \cdot \sin(a_{1850} + b_{18}) = 90.26213$$

ΔΟΚΙΜΗ 14 - ΒΑΘΜΙΑ 50-18 - ΤΡΟΧΟΣ 50 ΟΔΟΝΤΩΝ

$$Pu_{5018} := 47lib = 209.066 \quad PN_{5018} := \frac{Pu_{5018}}{\cos(a_{5018})} = 222.411 \quad PR_{5018} := PN_{5018} \cdot \sin(a_{5018}) = 75.881$$

$$Pu_{5018} := PN_{5018} \cdot \cos(a_{5018} + b_{50}) = 203.88927 \quad PRR_{5018} := PN_{5018} \cdot \sin(a_{5018} + b_{50}) = 88.85863$$

ΔΟΚΙΜΗ 15 - ΒΑΘΜΙΑ 22-28 - ΤΡΟΧΟΣ 22 ΟΔΟΝΤΩΝ

$$Pu_{2228} := 42.5lib = 189.049 \quad PN_{2228} := \frac{Pu_{2228}}{\cos(a_{2228})} = 202.408 \quad PR_{2228} := PN_{2228} \cdot \sin(a_{2228}) = 72.315$$

$$Pu_{2228} := PN_{2228} \cdot \cos(a_{2228} + b_{22}) = 176.83366 \quad PRR_{2228} := PN_{2228} \cdot \sin(a_{2228} + b_{22}) = 98.48353$$

ΔΟΚΙΜΗ 16 - ΒΑΘΜΙΑ 28-22 - ΤΡΟΧΟΣ 28 ΟΔΟΝΤΩΝ

$$Pu_{2822} := 45lib = 200.17 \quad PN_{2822} := \frac{Pu_{2822}}{\cos(a_{2822})} = 212.269 \quad PR_{2822} := PN_{2822} \cdot \sin(a_{2822}) = 70.642$$

$$Pu_{2822} := PN_{2822} \cdot \cos(a_{2822} + b_{28}) = 191.00198 \quad PRR_{2822} := PN_{2822} \cdot \sin(a_{2822} + b_{28}) = 92.60944$$

ΔΟΚΙΜΗ 17 - ΒΑΘΜΙΑ 22-50 - ΤΡΟΧΟΣ 22 ΟΔΟΝΤΩΝ

$$Pu_{2250} := 45lib = 200.17 \quad PN_{2250} := \frac{Pu_{2250}}{\cos(a_{2250})} = 210.263 \quad PR_{2250} := PN_{2250} \cdot \sin(a_{2250}) = 64.361$$

$$Pu_{2250} := PN_{2250} \cdot \cos(a_{2250} + b_{22}) = 188.97301 \quad PRR_{2250} := PN_{2250} \cdot \sin(a_{2250} + b_{22}) = 92.19303$$

ΔΟΚΙΜΗ 18 - ΒΑΘΜΙΑ 50-22 - ΤΡΟΧΟΣ 50 ΟΔΟΝΤΩΝ

$$Pu_{5022} := 48.5lib = 215.739 \quad PN_{5022} := \frac{Pu_{5022}}{\cos(a_{5022})} = 229.265 \quad PR_{5022} := PN_{5022} \cdot \sin(a_{5022}) = 77.585$$

$$Pu_{5022} := PN_{5022} \cdot \cos(a_{5022} + b_{50}) = 210.44144 \quad PRR_{5022} := PN_{5022} \cdot \sin(a_{5022} + b_{50}) = 90.97817$$

ΔΟΚΙΜΗ 19 - ΒΑΘΜΙΑ 28-50 - ΤΡΟΧΟΣ 28 ΟΔΟΝΤΩΝ

$$Pu_{2850} := 47lib = 209.066 \quad PN_{2850} := \frac{Pu_{2850}}{\cos(a_{2850})} = 220.302 \quad PR_{2850} := PN_{2850} \cdot \sin(a_{2850}) = 69.456$$

$$Pu_{2850} := PN_{2850} \cdot \cos(a_{2850} + b_{28}) = 199.97525 \quad PRR_{2850} := PN_{2850} \cdot \sin(a_{2850} + b_{28}) = 92.42719$$

ΔΟΚΙΜΗ 20 - ΒΑΘΜΙΑ 50-28 - ΤΡΟΧΟΣ 50 ΟΔΟΝΤΩΝ

$$Pu_{5028} := 49.5lib = 220.187 \quad PN_{5028} := \frac{Pu_{5028}}{\cos(a_{5028})} = 233.496 \quad PR_{5028} := PN_{5028} \cdot \sin(a_{5028}) = 77.706$$

$$Pu_{5028} := PN_{5028} \cdot \cos(a_{5028} + b_{50}) = 214.87329 \quad PRR_{5028} := PN_{5028} \cdot \sin(a_{5028} + b_{50}) = 91.37818$$

6.2 Παράρτημα Β: Μετατροπές Μονάδων

Μήκος	1 in = 0.23495 mm
Μάζα	1 Kgr = 2.204622622 lb
Δύναμη	1 N = 0.101971621 Kp
	1 Kp = 2.204622622 lbf
Ισχύς	1 W = 1 Joule/sec = 1 N · m/sec
	1 KW = 1.359621617 PS
	1 HP = 745.699871582 Watts
Πίεση	1 psi = 1 lbf/in ²
	1 Pa = 1 N/m ²
	1MPa = 1 N/mm ² = 145 psi
	1 bar = 10 ⁵ Pa = 14.5 psi

Πίνακας 6.1: Πίνακας μετατροπής βασικών μονάδων

6.3 Παράρτημα Γ: Χρησιμοποιηθέν Λογισμικό

- Autodesk **AutoCAD** 2007 (Δημιουργία 2-D σχεδίων)
- Autodesk **Inventor** 2007 (Δημιουργία 3-D σχεδίων)
- **Ansys** v.11 (Ανάλυση πεπερασμένων στοιχείων)
- Microsoft **Excel** 2007 (Δημιουργία διαγραμμάτων)
- Microsoft **Word** 2007 (Επεξεργασία κειμένου)
- Mathsoft **MathCAD** v.14 (Επίλυση εξισώσεων)
- **Solidworks** 2007 (Δημιουργία 3-D σχεδίων)