



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Το q -Αριθμητικό Πεδίο Πίνακα

Αγγελική Βούλγαρη

Επιβλέπων: Παναγιώτης Ψαρράκος

Διπλωματική Εργασία

Αθήνα
Ιούλιος 2021



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Το q -Αριθμητικό Πεδίο Πίνακα

Διπλωματική Εργασία
Αγγελική Βούλγαρη

Τριμελής Επιτροπή:
Β. Γρηγοριάδης, Επίκ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.
Π. Στεφανέας, Επίκ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.
Π. Ψαρράκος, Καθηγητής Ε.Μ.Π. (Επιβλέπων)

Αθήνα
Ιούλιος 2021

Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση της παρούσας διπλωματικής εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα κύριο Παναγιώτη Ψαρράκο, Καθηγητή του Τομέα Μαθηματικών της Σχολής Ε.Μ.Φ.Ε. του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, για την άριστη συνεργασία μας, για το ενδιαφέρον θέμα που μου πρότεινε αλλά και για τον χρόνο που αφιέρωσε για να απαντήσει στις ερωτήσεις μου, που δεν ήταν λίγες. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους φίλους μου, George και Jonas, τόσο για τις εποικοδομητικές συζητήσεις που είχαμε με αφορμή κάποιες αποδείξεις όσο και που με προέτρεψαν να μάθω να γράφω σε L^AT_EX, που αποδείχτηκε πολύ χρήσιμο.

Περίληψη

Τις τελευταίες δεκαετίες, η μελέτη του q - αριθμητικού πεδίου έχει προσελκύσει το ενδιαφέρον πολλών μαθηματικών και έχουν προκύψει ενδιαφέροντα αποτελέσματα. Σκοπός της εργασίας αυτής είναι να μελετήσουμε το q - αριθμητικό πεδίο και την σχέση του με το κέλυφος Davis Wielandt καθώς και να τα σχεδιάσουμε, μέσω αλγορίθμων, στο Matlab.

Το πρώτο κεφάλαιο περιέχει ορισμένες βασικές ιδιότητες και θεωρήματα που έχουν διδαχτεί στα προπτυχιακά μαθήματα της Γραμμικής Άλγεβρας και της Ανάλυσης Πινάκων. Αυτά είναι απαραίτητα για την μελέτη του q - αριθμητικού πεδίου και του κελύφους Davis Wielandt στα επόμενα κεφάλαια.

Επίσης, δίνονται ο ορισμός, οι βασικές ιδιότητες και παραδείγματα για το κλασικό αριθμητικό πεδίο.

Στο δεύτερο κεφάλαιο περιγράφουμε μερικές βασικές ιδιότητες του q - αριθμητικού πεδίου ($W_q(A)$), επεκτείνοντας διάφορα γνωστά αποτελέσματα για το κλασικό αριθμητικό πεδίο.

Το τρίτο κεφάλαιο είναι αφιερωμένο στο κέλυφος Davis Wielandt. Στην αρχή δίνεται ο ορισμός του και στη συνέχεια περιγράφεται το σύνορο του q - αριθμητικού πεδίου ενός τετραγωνικού πίνακα χρησιμοποιώντας το κέλυφος Davis Wielandt του πίνακα.

Το αποτέλεσμα χρησιμοποιείται για την δημιουργία ενός αλγορίθμου που σχεδιάζει το q - αριθμητικό πεδίο ενός τετραγωνικού πίνακα.

Στο τελευταίο κεφάλαιο μπορεί κανείς να βρει τα προγράμματα σε Matlab, τα οποία χρησιμοποιήσαμε για να σχεδιάσουμε το κλασικό αριθμητικό πεδίο, το q - αριθμητικό πεδίο και το κέλυφος Davis Wielandt στα παραδείγματα των προηγούμενων κεφαλαίων.

Abstract

In the last decades, the q - numerical range has attracted the attention of many authors and some interesting results have been obtained.

The purpose of this thesis is to study the q - numerical range and its relation to the Davis Wielandt shell.

The first chapter includes some basic properties and theorems that have been taught in the courses of Linear Algebra and Matrix Analysis. They are necessary for the study of the q - numerical range and the Davis Wielandt shell later.

Also, the definition, the basic properties and examples of the classical numerical range are given.

In the second chapter we describe some basic properties of the q - numerical range ($W_q(A)$), extending some known results of the classical numerical range.

The third chapter is dedicated to the Davis Wielandt shell. First we give its definition and then we describe the boundary of the q - numerical range of a square matrix using its Davis Wielandt shell. The result is used to generate an algorithm for plotting the q - numerical range of a square matrix.

In the final chapter can be found the Matlab programs that have been used to generate the classical numerical range, the q - numerical range and the Davis Wielandt shell in the examples of the previous chapters.

Περιεχόμενα

Περίληψη	3
Abstract	4
0 Εισαγωγή	6
1 Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας	9
1.1 Ιδιοτιμές, Ιδιοδιανύσματα και Ιδιόχωροι ενός Τετραγωνικού Πίνακα	9
1.2 Κανονικοί Πίνακες	9
1.3 Το Αριθμητικό Πεδίο Πίνακα	12
1.3.1 Ορισμός του Αριθμητικού Πεδίου	12
1.3.2 Παραδείγματα Αριθμητικών Πεδίων Πινάκων	12
1.3.3 Βασικές Ιδιότητες του Αριθμητικού Πεδίου	12
1.3.4 Κυρτότητα	19
2 q - Αριθμητικό Πεδίο Κανονικών και Κυρτών Πινάκων	20
2.1 Το q - Αριθμητικό Πεδίο Πίνακα	20
2.1.1 Ορισμός του q - Αριθμητικού Πεδίου	20
2.1.2 Ιδιότητες του q - Αριθμητικού Πεδίου	20
2.1.3 Παραδείγματα q - Αριθμητικών Πεδίων	35
2.1.4 q - Αριθμητικό Πεδίο Κανονικών και Κυρτών Πινάκων	37
2.2 Το q - Αριθμητικό Πεδίο σε Απειροδιάστατους Χώρους Hilbert	42
3 q - Αριθμητικό Πεδίο και Κέλυφος Davis - Wielandt	48
3.1 Το q - Αριθμητικό Πεδίο ως Ένωση Δίσκων	48
3.2 Ορισμός του Κελύφους Davis - Wielandt	49
3.3 Αποτελέσματα και Αποδείξεις	49
3.4 Παραδείγματα	60
4 Αλγόριθμοι Σχεδιασμού σε Matlab	64
4.1 Το Σύνορο του Αριθμητικού Πεδίου Τετραγωνικού Μιγαδικού Πίνακα και οι Ιδιοτιμές του	64
4.2 Το Αριθμητικό Πεδίο Τετραγωνικού Πίνακα.	66
4.3 q - Αριθμητικό Πεδίο 3×3 Κανονικού Πίνακα	68
4.4 q - Αριθμητικό Πεδίο Πίνακα	72
4.5 Το Κέλυφος Davis - Wielandt	74
Βιβλιογραφία	74

Κεφάλαιο 0

Εισαγωγή

Το κλασικό αριθμητικό πεδίο (numerical range, field of values) ενός τετραγωνικού πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ορίζεται ως το σύνολο

$$W(A) = \{x^*Ax, x \in \mathbb{C}^n, x^*x = 1\}.$$

και η μελέτη του ξεκίνησε πριν από περίπου εκατό χρόνια. Η σημαντικότερη ιδιότητα του αριθμητικού πεδίου είναι η κυρτότητα. Γνωρίζουμε, από το θεώρημα των Hausdorff και Toeplitz, ότι για κάθε τετραγωνικό πίνακα A , το αριθμητικό πεδίο $W(A)$ είναι ένα κυρτό σύνολο. Μια προτεινόμενη αναφορά, για να μελετήσει κανείς τη βασική θεωρία του αριθμητικού πεδίου, αποτελεί το πρώτο κεφάλαιο του γνωστού βιβλίου "Topics in Matrix Analysis" των Roger A. Horn και Charles R. Johnson.

Το q -αριθμητικό πεδίο αποτελεί γενίκευση του κλασικού αριθμητικού πεδίου και μελετάται τις τελευταίες δεκαετίες. Αν M_n είναι η άλγεβρα των $n \times n$ μιγαδικών πινάκων, όπου $n \geq 2$, και το q είναι ένας μιγαδικός αριθμός με $|q| \leq 1$, τότε το q -αριθμητικό πεδίο ενός τετραγωνικού πίνακα $A \in M_n$ ορίζεται ως εξής:

$$W_q(A) = \{x^*Ay : x, y \in \mathbb{C}^n, x^*x = y^*y = 1, x^*y = q\}.$$

Για $q = 1$ ο ορισμός μας δίνει το κλασικό αριθμητικό πεδίο. Η έννοια του q -αριθμητικού πεδίου εισήχθη για πρώτη φορά το 1977 από τον Marcus Anderson, στην εργασία "Constrained extrema of bilinear functionals" ως γενίκευση του κλασικού αριθμητικού πεδίου του πίνακα A .

Κάπου εδώ θα αναρωτηθεί κανείς εάν η βασική ιδιότητα του κλασικού αριθμητικού πεδίου, η κυρτότητα, επεκτείνεται και στο q -αριθμητικό πεδίο και όπως θα δούμε παρακάτω πράγματι κάτι τέτοιο ισχύει. Τόσο η κυρτότητα όσο και άλλες ιδιότητες του κλασικού αριθμητικού πεδίου επεκτείνονται και στο q -αριθμητικό πεδίο.

Η παρούσα εργασία αποτελείται από τέσσερα κεφάλαια. Το πρώτο κεφάλαιο ξεκινά με μία ανασκόπηση σε βασικές ιδιότητες και θεωρήματα που γνωρίζουμε από τα μαθήματα της Γραμμικής Άλγεβρας και της Ανάλυσης Πινάκων. Επίσης γίνεται εισαγωγή στους κανονικούς και τους κυρτούς πίνακες, που θα χρειαστούν σε επόμενα κεφάλαια της εργασίας. Πιο συγκεκριμένα, ένας τετραγωνικός πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ καλείται κανονικός όταν αντιμετωπίζεται με τον αναστροφosuζυγή του, δηλαδή ικανοποιεί τη σχέση

$$AA^* = A^*A.$$

Ένας τετραγωνικός πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ καλείται κυρτός όταν

$$W(A) = \text{conv } \sigma(A),$$

δηλαδή το αριθμητικό πεδίο του A ισούται με την κυρτή θήκη του φάσματος του A . Προφανώς το σύνολο των κυρτών πινάκων είναι υπερσύνολο του συνόλου των κανονικών πινάκων.

Τέλος, παρουσιάζεται το κλασικό αριθμητικό πεδίο ενός τετραγωνικού πίνακα A , με σχετικά παραδείγματα σχεδιασμού στο Matlab και βέβαια αναφέρονται οι βασικές του ιδιότητες.

Στη συνέχεια, στο δεύτερο κεφάλαιο, ασχολούμαστε με την γενίκευση του κλασικού αριθμητικού πεδίου, που είναι το q - αριθμητικό πεδίο. Αρχικά θα πρέπει κανείς να διερευνήσει τις ιδιότητες του q - αριθμητικού πεδίου με βάση τα όσα γνωρίζουμε για το κλασικό αριθμητικό πεδίο, που αναφέρθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο. Αφού η βασική ιδιότητα του κλασικού αριθμητικού πεδίου είναι η κυρτότητα, είναι λογικό να διερευνήσουμε αν το q - αριθμητικό πεδίο είναι επίσης κυρτό. Πράγματι, το θεώρημα των Hausdorff - Toeplitz επεκτείνεται, όπως και πολλές ακόμα ιδιότητες. Πιο συγκεκριμένα, μελετάμε το q - αριθμητικό πεδίο κανονικών και κυρτών πινάκων και δίνονται παραδείγματα και σχήματα που έγιναν με τη βοήθεια του Matlab. Στο τέλος αυτού του κεφαλαίου γίνεται και μία σύντομη αναφορά στο q - αριθμητικό πεδίο σε απειροδιάστατους χώρους Hilbert.

Το τρίτο κεφάλαιο είναι αφιερωμένο στο κέλυφος Davis - Wielandt

$$DW(A) = \{(x^*Ax, x^*A^*Ax) : x \in \mathbb{C}^n, |x| = 1\},$$

που αποτελεί ουσιαστικά μια ειδική περίπτωση συνθετικού αριθμητικού πεδίου, και θα δούμε πως μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε για να περιγράψουμε το σύνορο του q - αριθμητικού πεδίου. Για τον σκοπό αυτό θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός πως το q - αριθμητικό πεδίο είναι κυρτό σύνολο και μπορεί να γραφεί ως ένωση κυκλικών δίσκων, δηλαδή

$$W_q(A) = \bigcup_x \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - qx^*Ax| \leq \sqrt{1 - q^2} (\|Ax\|^2 - |x^*Ax|^2)^{1/2} \right\}$$

όπου x όλα τα μοναδιαία διανύσματα, όπως έχει αποδείξει ο N. K. Tsing στην εργασία του "The constrained bilinear form and the C-numerical ranges".

Για κάθε $A \in M_n$, το άνω σύνορο του $DW(A)$ ορίζεται ως:

$$\partial_+ DW(A) = \{(z, h(z)) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} : z \in W(A)\} \quad (1)$$

όπου

$$h(z) = \max \{w \in \mathbb{R} : (z, w) \in DW(A)\}.$$

όπου η h ονομάζεται συνάρτηση ύψους. Τότε η ένωση δίσκων του Tsing γράφεται ως εξής:

$$W_q(A) = \bigcup_{z \in W(A)} \left\{ \xi \in \mathbb{C} : |\xi - qz| \leq \sqrt{1 - q^2} \sqrt{h(z) - |z|^2} \right\} \quad (2)$$

Από την σχέση αυτή προκύπτει ότι

$$\partial W_q(A) \subseteq \bigcup_{z \in W(A)} \left\{ \xi \in \mathbb{C} : |\xi - qz| = \sqrt{1 - q^2} \sqrt{h(z) - |z|^2} \right\} \quad (3)$$

Η ποσότητα $\sqrt{h(z) - |z|^2}$ είναι χρήσιμη για τον καθορισμό του q - αριθμητικού πεδίου. Ορίζουμε την συνάρτηση

$$\Phi(z) = \sqrt{h(z) - |z|^2}, \quad z \in W(A).$$

την οποία και θα μελετήσουμε. Στην τελευταία παράγραφο αυτού του κεφαλαίου περιγράφεται ο αλγόριθμος που θα χρειαστούμε για να σχεδιάσουμε το q - αριθμητικό πεδίο.

Στο τέταρτο και τελευταίο κεφάλαιο περιλαμβάνονται όλοι οι αλγόριθμοι που χρησιμοποιήθηκαν για να σχεδιάσουμε στο Matlab τα σχήματα που χρειάστηκαν για τα παραδείγματα των προηγούμενων κεφαλαίων. Τα δύο πρώτα αφορούν στο κλασικό αριθμητικό πεδίο, πιο συγκεκριμένα το πρώτο πρόγραμμα σχεδιάζει το σύνορο του αριθμητικού πεδίου ενός μιγαδικού τετραγωνικού πίνακα A , καθώς και τις ιδιοτιμές του, που σημειώνονται με αστερίσκο, ενώ το δεύτερο αποτελεί μια εναλλακτική επιλογή για τον σχεδιασμό του αριθμητικού πεδίου και βασίζεται σε αλγόριθμο που περιγράφεται στο βιβλίο "Numerical Range " των Karl E. Gustafson και Duggirala K.M. Rao. Το τρίτο πρόγραμμα σχεδιάζει τις ελλείψεις και τους κύκλους που αποτελούν το σύνορο του q - αριθμητικού πεδίου ενός 3×3 διαγώνιου πίνακα, με $0 < q < 1$. Το πρόγραμμα βασίζεται στα αποτελέσματα της εργασίας "The boundary of the range of a constrained sesquilinear form" του H. Nakazato. Στην τέταρτη παράγραφο του κεφαλαίου παρουσιάζεται το πρόγραμμα που σχεδιάζει το q - αριθμητικό πεδίο ενός τετραγωνικού πίνακα και βασίζεται σε εργασία του Chi - Kwong Li. Στο τέλος του κεφαλαίου υπάρχει το πρόγραμμα που σχεδιάζει το κέλυφος Davis - Wielandt ενός τετραγωνικού πίνακα, που βασίζεται στις εργασίες των Chi - Kwong Li και Hiroshi Nakazato και ουσιαστικά σχεδιάζουμε το συνθετικό αριθμητικό πεδίο τριών (συγκεκριμένων) ερμιτιανών πινάκων.

Κεφάλαιο 1

Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας

1.1 Ιδιοτιμές, Ιδιοδιανύσματα και Ιδιόχωροι ενός Τετραγωνικού Πίνακα

Ορισμός 1.1.1.

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος πάνω σε ένα σώμα K και ένας γραμμικός μετασχηματισμός $T \in \mathcal{L}(V)$. Ένας αριθμός $\lambda \in K$ λέγεται ιδιοτιμή ή χαρακτηριστική τιμή του T , αν υπάρχει διάνυσμα $\mathbf{x} \in V$ με $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ τέτοιο ώστε

$$T\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}. \quad (1.1)$$

Κάθε τέτοιο διάνυσμα \mathbf{x} που ικανοποιεί την (1.1) λέγεται ιδιοδιάνυσμα ή χαρακτηριστικό διάνυσμα του T αντίστοιχο της ιδιοτιμής λ .

Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα ενός γραμμικού μετασχηματισμού T λέγονται χαρακτηριστικά ποσά του T .

Ορισμός 1.1.2.

Θεωρούμε έναν γραμμικό μετασχηματισμό $T \in \mathcal{L}(V)$ και $\lambda \in K$ μία ιδιοτιμή του. Θα ονομάζουμε ιδιόχωρο της ιδιοτιμής λ το σύνολο

$$E_\lambda = \{\mathbf{x} \in V : T\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}\}. \quad (1.2)$$

1.2 Κανονικοί Πίνακες

Οι κανονικοί πίνακες εμφανίζονται σε ένα μεγάλο πλήθος σύγχρονων προβλημάτων, στα θεωρητικά αλλά και στα εφαρμοσμένα μαθηματικά. Γι' αυτό και μπορεί κανείς να βρει πολλούς ισοδύναμους ορισμούς στην βιβλιογραφία. Στην παρούσα παράγραφο αναφέρονται ενδεικτικά μερικοί μόνο από αυτούς που θα χρησιμεύσουν σε επόμενα κεφάλαια της εργασίας.

Ορισμός 1.2.1.

Ένας τετραγωνικός πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ καλείται κανονικός όταν αντιμετατίθεται με τον αναστροφосуζυγή του, δηλαδή ικανοποιεί τη σχέση

$$AA^* = A^*A.$$

Πρόταση 1.2.1.

Ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ είναι κανονικός αν και μόνο αν ο πίνακας U^*AU είναι κανονικός για οποιοδήποτε ορθομοναδιαίο πίνακα $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

Απόδειξη.

Έστω ότι ο πίνακας A είναι κανονικός, τότε έχουμε:

$$(U^*AU)(U^*AU)^* = U^*AUU^*A^*U = U^*(AA^*)U$$

και

$$(U^*AU)^*(U^*AU) = U^*A^*UU^*AU = U^*(A^*A)U = U^*(AA^*)U.$$

Επομένως

$$(U^*AU)(U^*AU)^* = (U^*AU)^*(U^*AU)$$

και ο πίνακας U^*AU είναι κανονικός.

Αντίστροφα, έστω ότι ο πίνακας U^*AU είναι κανονικός για οποιοδήποτε ορθομοναδιαίο πίνακα U , τότε και ο πίνακας $A = U(U^*AU)U^*$ είναι κανονικός. □

Πρόταση 1.2.2.

Ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ είναι κανονικός αν και μόνο αν υπάρχει ένας ορθομοναδιαίος πίνακας $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ και ένας διαγώνιος πίνακας $\Lambda \in \mathbb{C}^{n \times n}$ τέτοιοι ώστε $U^*AU = \Lambda$.

Απόδειξη.

Από το Λήμμα του Schur, υπάρχουν ορθομοναδιαίος πίνακας U και άνω τριγωνικός πίνακας T τέτοιοι ώστε

$$A = UTU^* \Leftrightarrow T = U^*AU.$$

Αν ο πίνακας A είναι κανονικός, τότε από την Πρόταση 1.2.1 προκύπτει ότι και ο τριγωνικός πίνακας T είναι κανονικός. Ο T πρέπει υποχρεωτικά να έχει μη μηδενικά όλα τα μη διαγώνια στοιχεία του, επομένως είναι διαγώνιος.

Αντίστροφα, έστω ότι $A = U\Lambda U^*$, όπου ο Λ ως διαγώνιος ικανοποιεί την σχέση $\Lambda\Lambda^* = \Lambda^*\Lambda$. Τότε και ο πίνακας A είναι κανονικός, αφού ισχύει:

$$\begin{aligned} AA^* &= (U\Lambda U^*)(U\Lambda^* U^*) = U\Lambda\Lambda^* U^* \\ &= U\Lambda^* \Lambda U^* = (U\Lambda^* U^*)(U\Lambda U^*) = A^*A. \end{aligned}$$

□

Πρόταση 1.2.3.

Ένας αντιστρέψιμος πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ είναι κανονικός αν και μόνο αν ο A^{-1} είναι κανονικός.

Απόδειξη.

Έστω ότι ο A είναι αντιστρέψιμος κανονικός πίνακας, τότε ισχύει ότι

$$(A^{-1})^* A^{-1} = (A^*)^{-1} A^{-1} = (AA^*)^{-1} = (A^*A)^{-1} = A^{-1}(A^*)^{-1} = A^{-1}(A^{-1})^*,$$

δηλαδή ο A^{-1} είναι κανονικός.

Αντίστροφα, έστω ότι ο A^{-1} είναι κανονικός, τότε από το ευθύ θα είναι κανονικός και ο πίνακας $(A^{-1})^{-1} = A$. □

Πρόταση 1.2.4.

Ένας αντιστρέψιμος πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ είναι κανονικός αν και μόνο αν ο $A^{-1}A^*$ είναι ορθομοναδιαίος.

Απόδειξη.

Έστω ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και κανονικός, τότε θα ισχύει

$$(A^{-1}A^*)(A^{-1}A^*)^* = A^{-1}A^*A(A^{-1})^* = A^{-1}AA^*(A^{-1})^* = I_n$$

και

$$(A^{-1}A^*)^*(A^{-1}A^*) = A(A^{-1})^*A^{-1}A^* = AA^{-1}(A^{-1})^*A^* = I_n.$$

Άρα

$$(A^{-1}A^*)(A^{-1}A^*)^* = (A^{-1}A^*)^*(A^{-1}A^*) = I_n.$$

Αντίστροφα, αν ο $A^{-1}A^*$ είναι ορθομοναδιαίος, τότε

$$(A^{-1}A^*)^* = (A^{-1}A^*)^{-1} \Leftrightarrow A(A^{-1})^* = (A^{-1})^*A \Leftrightarrow A^{-1}A^* = A^*A^{-1}$$

Μένει να πολλαπλασιάσουμε την τελευταία σχέση από αριστερά και από δεξιά με A και προκύπτει $A^*A = AA^*$. Άρα ο πίνακας A είναι κανονικός. \square

Ορισμός 1.2.2.

Έστω ένας τετραγωνικός πίνακας A . Συμβολίζουμε με

$$H(A) = \frac{A + A^*}{2} \quad \text{και} \quad S(A) = \frac{A - A^*}{2}$$

το ερμιτιανό και αντιερμιτιανό μέρος του A αντίστοιχα.

Πρόταση 1.2.5.

Ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ είναι κανονικός αν και μόνο αν

$$H(A)S(A) = S(A)H(A).$$

Απόδειξη.

Έστω ότι ο πίνακας A είναι κανονικός, τότε θα ισχύει ότι

$$\begin{aligned} H(A)S(A) &= \frac{A + A^*}{2} \frac{A - A^*}{2} = \frac{1}{4}(A^2 - AA^* + A^*A - (A^*)^2) \\ &= \frac{A - A^*}{2} \frac{A + A^*}{2} = S(A)H(A). \end{aligned}$$

Αντίστροφα, έχουμε

$$\begin{aligned} H(A)S(A) = S(A)H(A) &\Rightarrow \frac{1}{4}(A^2 - AA^* + A^*A + (A^*)^2) \\ &= \frac{1}{4}((A^*)^2 - A^*A + AA^* + A^2) \\ &\Rightarrow -AA^* + A^*A = AA^* - A^*A, \\ &\Rightarrow 2A^*A = 2AA^* \end{aligned}$$

δηλαδή ο πίνακας A είναι κανονικός. \square

1.3 Το Αριθμητικό Πεδίο Πίνακα

1.3.1 Ορισμός του Αριθμητικού Πεδίου

Ορισμός 1.3.1.

Το αριθμητικό πεδίο (numerical range, field of values) ενός τετραγωνικού πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ορίζεται ως το σύνολο

$$W(A) = \{x^*Ax \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{C}^n, x^*x = 1\}. \quad (1.3)$$

1.3.2 Παραδείγματα Αριθμητικών Πεδίων Πινάκων

Παράδειγμα 1.3.1.

$$\begin{aligned} W(\alpha I_n) &= \{x^*(\alpha I_n)x : x \in \mathbb{C}^n, x^*x = 1\} \\ &= \{\alpha(x^*x) : x \in \mathbb{C}^n, x^*x = 1\} \\ &= \{\alpha\}. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 1.3.2.

$$\begin{aligned} W\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) &= \left\{ \begin{bmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : |x_1|^2 + |x_2|^2 = 1 \right\} \\ &= \{|x_1|^2 : 0 \leq |x_1|^2 \leq 1\} \end{aligned}$$

δηλαδή, το αριθμητικό πεδίο είναι το κλειστό πραγματικό διάστημα $[0,1]$.

Παράδειγμα 1.3.3.

$$\begin{aligned} W\left(\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) &= \left\{ \begin{bmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : |x_1|^2 + |x_2|^2 = 1 \right\} \\ &= \{2x_2\bar{x}_1 : |x_1|^2 + |x_2|^2 = 1\} \end{aligned}$$

δηλαδή το αριθμητικό πεδίο ταυτίζεται με τον κλειστό μοναδιαίο κυκλικό δίσκο $\Delta(0, 1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$.

Ορισμός 1.3.2.

Η αριθμητική ακτίνα (numerical radius) ενός τετραγωνικού πίνακα A ορίζεται ως

$$r(A) = \max\{|z| : z \in W(A)\}.$$

1.3.3 Βασικές Ιδιότητες του Αριθμητικού Πεδίου

Το αριθμητικό πεδίο ενός $n \times n$ μιγαδικού πίνακα παρουσιάζει πολλές και ενδιαφέρουσες ιδιότητες. Άλλες σχετίζονται με τη γεωμετρία του, ενώ άλλες με το γεγονός ότι το σύνολο αυτό είναι εικόνα μίας συνεχούς απεικόνισης από την επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας του \mathbb{C}^n στο μιγαδικό επίπεδο.

Πρόταση 1.3.1. (Συμπάγεια)

Για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, το $W(A)$ είναι ένα συμπαγές (δηλαδή, κλειστό και φραγμένο) υποσύνολο του \mathbb{C} .

Απόδειξη.

Το $W(A)$ είναι η εικόνα της Ευκλείδειας μοναδιαίας σφαίρας $\{x \in \mathbb{C}^n : x^*x = 1\}$ στο μιγαδικό επίπεδο, μέσω της απεικόνισης $x \rightarrow x^*Ax$. Όμως η σφαίρα είναι συμπαγές (δηλαδή, κλειστό και φραγμένο) σύνολο και η απεικόνιση είναι συνεχής. Επομένως, από το Θεώρημα του Weierstrass το $W(A)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου (ως συνεχής εικόνα συμπαγούς συνόλου). \square

Πρόταση 1.3.2.

Για κάθε $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ και $a \in \mathbb{C}$, ισχύουν

$$W(A + aI_n) = W(A) + a \quad \text{και} \quad W(aA) = aW(A).$$

Απόδειξη.

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό και το αποτέλεσμα από το πρώτο παράδειγμα, έχουμε:

$$W(A + aI_n) = \{x^*Ax + x^*aI_nx : x \in \mathbb{C}^n, x^*x = 1\} = W(A) + a$$

και

$$W(aA) = \{ax^*Ax : x \in \mathbb{C}^n, x^*x = 1\} = aW(A).$$

\square

Γνωρίζουμε ότι ένας ορθομοναδιαίος μετασχηματισμός, δηλαδή ένας μετασχηματισμός ισομετρίας, αφήνει αναλλοίωτη την επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας του \mathbb{C}^n . Επομένως θα αφήνει αναλλοίωτο και το αριθμητικό πεδίο. Πράγματι, έχουμε την παρακάτω ιδιότητα.

Πρόταση 1.3.3.

Για κάθε $A, U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ με U ορθομοναδιαίο, ισχύει

$$W(U^*AU) = W(A).$$

Απόδειξη. Έχουμε:

$$\begin{aligned} W(U^*AU) &= \{x^*(U^*AU)x : x \in \mathbb{C}^n, x^*x = 1\} \\ &= \{(Ux)^*A(Ux) : Ux \in \mathbb{C}^n, (Ux)^*(Ux) = 1\}. \end{aligned}$$

\square

Παράδειγμα 1.3.4.

Θεωρούμε τον 2×2 πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

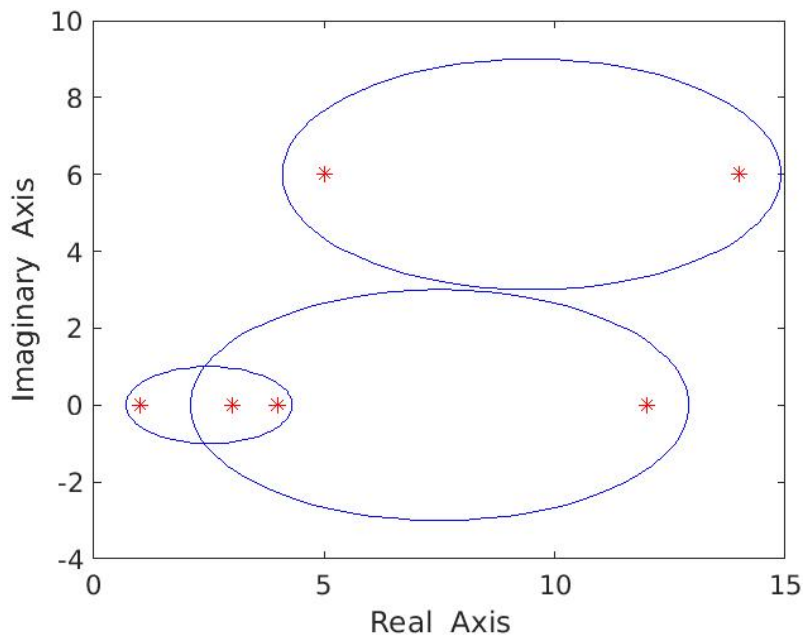
Το αριθμητικό πεδίο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.1, είναι ελλειπτικός δίσκος με εστίες τις δύο ιδιοτιμές του, $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 4$. (Για έναν 2×2 πίνακα ισχύει ότι το αριθμητικό πεδίο είναι πάντα έλλειψη με εστίες τις ιδιοτιμές του.)

Στο ίδιο Σχήμα φαίνονται και τα αριθμητικά πεδία των πινάκων

$$3A = \begin{bmatrix} 12 & 6 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad 3A + (2 + i6)I_2 = \begin{bmatrix} 14 + i6 & 6 \\ 0 & 5 + i6 \end{bmatrix}.$$

Όπως είναι αναμενόμενο από την Πρόταση 1.3.2,

$$W(3A) = 3W(A) \quad \text{και} \quad W(3A + (2 + i6)I_2) = 3W(A) + 2 + i6.$$



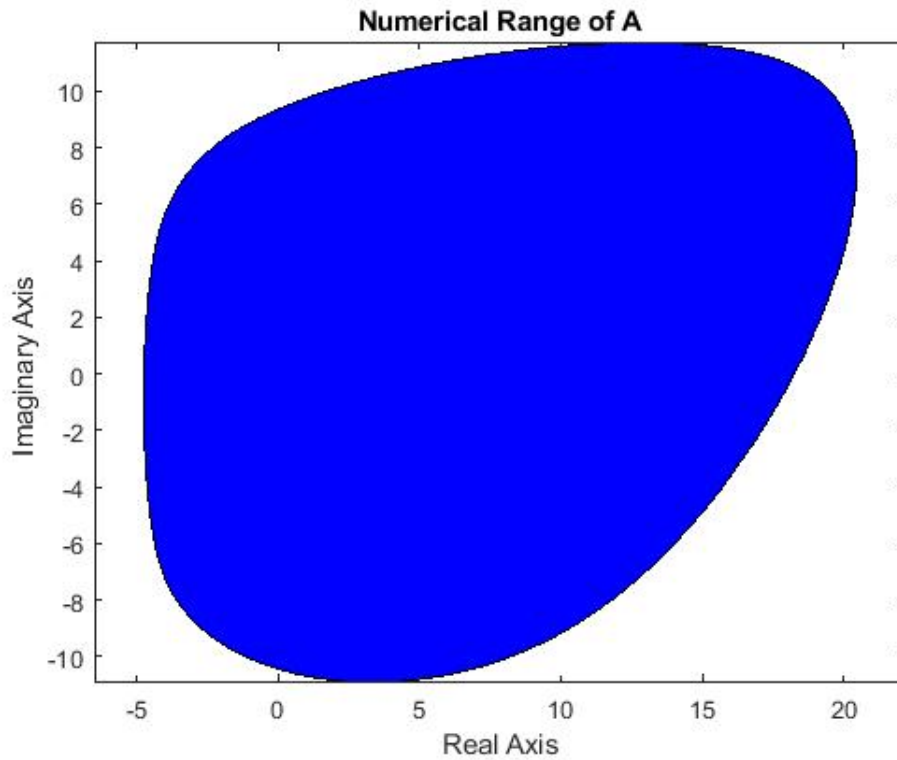
Σχήμα 1.1: Τα αριθμητικά πεδία $W(A)$, $W(3A)$ και $W(3A + (2 + i6)I_2)$

Παράδειγμα 1.3.5.

Για τον πίνακα :

$$A = \begin{bmatrix} 10 + i & 7 + 2i & 5 & i & 2 + 8i \\ 2 + 5i & 4 + i & 0 & 9 + 2i & 0 \\ 2 & 9 & 5i & 4 + i & 8 \\ 3 + i & 4i & 0 & 1 + i & 5 \\ 2i & 9 + i & 5 & 9i & 10 \end{bmatrix}$$

το αριθμητικό πεδίο φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 1.2: Το αριθμητικό πεδίο ενός 5×5 πίνακα.

Πρόταση 1.3.4.

Για έναν πίνακα $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, ισχύει $W(A) = \{a\}$ αν και μόνο αν $A = aI_n$.

Απόδειξη.

Το αντίστροφο το δείξαμε στο Παράδειγμα 1.3.1. Για το ευθύ, από την Πρόταση 1.3.2, χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι $a = 0$ και

$$x^*Ax = \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}\bar{x}_i x_j) = 0,$$

για κάθε διάνυσμα

$$x = [x_i] \in \mathbb{C}^n \quad \text{με} \quad \sum_{i=1}^n |x_i| = 1.$$

Επιλέγοντας για x τα διανύσματα της κανονικής βάσης, προκύπτει άμεσα ότι τα διαγώνια στοιχεία του A είναι μηδενικά. Επιλέγοντας τώρα μοναδιαία διανύσματα x με

$$x_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{και} \quad x_j = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{και με} \quad x_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{και} \quad x_j = i\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{για κάθε} \quad i \neq j,$$

βλέπουμε αντίστοιχα ότι

$$a_{ij} = -a_{ji} \quad \text{και} \quad a_{ij} = a_{ji} \quad \text{για κάθε} \quad i \neq j.$$

Επομένως $a_{ij} = 0$ για κάθε $i \neq j$ και καταλήγουμε στο ότι $A = 0$. □

Γνωρίζουμε ότι $A = H(A) + S(A)$ και ότι οι πίνακες $H(A)$, $-iS(A)$ είναι ερμιτιανοί. Για ένα μιγαδικό αριθμό, το φανταστικό και το πραγματικό του μέρος είναι οι προβολές στον φανταστικό και στον πραγματικό άξονα αντίστοιχα. Κατά ανάλογο τρόπο, το αριθμητικό πεδίο του ερμιτιανού και αντιερμιτιανού μέρους του A είναι οι προβολές του $W(A)$ στον πραγματικό και τον φανταστικό άξονα αντίστοιχα.

Πρόταση 1.3.5.

Για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, ισχύουν

$$W(H(A)) = \text{Re}(W(A)) \quad \text{και} \quad W(S(A)) = i \text{Im}(W(A)).$$

Απόδειξη.

Για τυχαίο μοναδιαίο διάνυσμα $x \in \mathbb{C}^n$, έχουμε

$$x^*H(A)x = x^* \frac{A + A^*}{2} x = \frac{x^*Ax + x^*A^*x}{2} = \frac{x^*Ax + \overline{x^*Ax}}{2} = \text{Re}(x^*Ax)$$

και

$$x^*S(A)x = x^* \frac{A - A^*}{2} x = \frac{x^*Ax - x^*A^*x}{2} = \frac{x^*Ax - \overline{x^*Ax}}{2} = i \text{Im}(x^*Ax).$$

□

Πόρισμα 1.3.1.

Για έναν πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, ισχύει ότι $W(A) \subset \mathbb{R}$ αν και μόνο αν ο A είναι ερμιτιανός.

Πρόταση 1.3.6.

Για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, το φάσμα του, $\sigma(A)$ περιέχεται στο αριθμητικό του πεδίο $W(A)$.

Απόδειξη.

Έστω $\lambda \in \sigma(A)$ και $x \in \mathbb{C}^n$ ένα μοναδιαίο (δηλαδή θα ισχύει $x^*x = 1$) ιδιοδιάνυσμα του πίνακα A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ . Τότε ισχύει

$$\lambda = \lambda(x^*x) = x^*(\lambda x) = x^*Ax \in W(A).$$

□

Επομένως οι ιδιοτιμές ενός θετικά ορισμένου πίνακα είναι θετικοί αριθμοί. Πράγματι, έστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ θετικά ορισμένος ($x^*Ax > 0$ για κάθε διάνυσμα $x \neq 0$) και (λ, x) ένα ιδιοζεύγος του. Τότε, αν

$$y = \frac{x}{\|x\|},$$

έπεται ότι

$$\|y\|_2 = 1$$

και

$$\lambda y^*y = y^*(\lambda y) = y^*Ay \geq 0.$$

Πρόταση 1.3.7. (Υπο-προσθετικότητα)

Για κάθε $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, ισχύει

$$W(A + B) \subseteq W(A) + W(B).$$

Απόδειξη.

Από τον ορισμό του αριθμητικού πεδίου, έχουμε:

$$\begin{aligned} W(A + B) &= \{x^*(A + B)x : x \in \mathbb{C}^n, x^*x = 1\} \\ &= \{x^*Ax + x^*Bx : x \in \mathbb{C}^n, x^*x = 1\} \\ &\subseteq \{x^*Ax : x \in \mathbb{C}^n, x^*x = 1\} + \{y^*By : y \in \mathbb{C}^n, y^*y = 1\} \\ &= W(A) + W(B) \end{aligned}$$

□

Γνωρίζουμε ότι ένας ορθομοναδιαίος μετασχηματισμός (δηλαδή ένας μετασχηματισμός ισομετρίας) αφήνει αναλλοίωτη την επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας του \mathbb{C}^n . Επομένως θα αφήνει αναλλοίωτο και το αριθμητικό πεδίο.

Πρόταση 1.3.8.

Για κάθε $A, U \in \mathbb{C}^{n \times n}$, με U ορθομοναδιαίο, ισχύει

$$W(U^*AU) = W(A).$$

Απόδειξη.

Από τον ορισμό του αριθμητικού πεδίου έχουμε:

$$\begin{aligned} W(U^*AU) &= \{x^*(U^*AU)x : x \in \mathbb{C}^n, x^*x = 1\} \\ &= \{(Ux)^*A(Ux) : Ux \in \mathbb{C}^n, (Ux)^*(Ux) = 1\}. \end{aligned}$$

□

Πρόταση 1.3.9. (Κανονικότητα)

Για κάθε κανονικό πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, ισχύει

$$W(A) = \text{conv } \sigma(A),$$

δηλαδή το αριθμητικό πεδίο κανονικού πίνακα είναι η κυρτή θήκη των ιδιοτιμών του.

Απόδειξη.

Ο κανονικός πίνακας A είναι ορθομοναδιαία όμοιος με τον διαγώνιο πίνακα

$$\Lambda = \text{diag } \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\},$$

όπου $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές του A , όχι απαραίτητα διακεκριμένες.

Δηλαδή, υπάρχει ορθομοναδιαίος πίνακας U τέτοιος ώστε $A = U^* \Lambda U$. Οπότε από την Πρόταση 1.3.8, έχουμε

$$\begin{aligned} W(A) &= W(U^* \Lambda U) = W(\Lambda) \\ &= \{x^* \text{diag } \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} x : x \in \mathbb{C}^n, x^* x = 1\} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^n \bar{x}_i x_i \lambda_i : \sum_{i=1}^n \bar{x}_i x_i = 1 \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \lambda_i : \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = 1 \right\} \\ &= \text{conv } \sigma(A). \end{aligned}$$

□

Ορισμός 1.3.3.

Ένας τετραγωνικός πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ καλείται κυρτός όταν

$$W(A) = \text{conv } \sigma(A),$$

δηλαδή το αριθμητικό πεδίο του A ισούται με την κυρτή θήκη του φάσματος του A .

Δηλαδή το σύνολο των κυρτών πινάκων είναι υπερσύνολο του συνόλου των κανονικών πινάκων.

Πόρισμα 1.3.2.

Αν ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ είναι ερμιτιανός, τότε το αριθμητικό του πεδίο είναι το κλειστό ευθύγραμμο τμήμα με άκρα την ελάχιστη και μέγιστη ιδιοτιμή του A .

Υπενθυμίζεται ότι το ευθύ άθροισμα δύο πινάκων $A \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_1}$ και $B \in \mathbb{C}^{n_2 \times n_2}$ ορίζεται ως ο $(n_1 + n_2) \times (n_1 + n_2)$ πίνακας

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

Πρόταση 1.3.10. Για κάθε $A \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_1}$ και $B \in \mathbb{C}^{n_2 \times n_2}$, ισχύει

$$W(A \oplus B) = \text{conv } (W(A) \cup W(B)).$$

Πρόταση 1.3.11. Για κάθε κύριο υποπίνακα \hat{A} ενός πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, ισχύει

$$W(\hat{A}) \subseteq W(A).$$

1.3.4 Κυρτότητα

Η κυρτότητα αποτελεί θεμελιώδη ιδιότητα του αριθμητικού πεδίου τετραγωνικών πινάκων. Πιο συγκεκριμένα, για τους 2×2 τετραγωνικούς πίνακες ισχύει το επόμενο Θεώρημα.

Θεώρημα 1.3.1. (Ελλειπτικό Θεώρημα)

Εστω $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ με ιδιοτιμές λ_1, λ_2 . Το αριθμητικό πεδίο του A είναι ένας κλειστός ελλειπτικός δίσκος με εστίες λ_1, λ_2 και μήκος μικρού άξονα

$$\sqrt{\text{trace}(A^*A) - |\lambda_1|^2 - |\lambda_2|^2}.$$

Για τετραγωνικούς πίνακες οποιασδήποτε πεπερασμένης διάστασης ισχύει:

Θεώρημα 1.3.2. (Hausdorff - Toeplitz)

Για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, το αριθμητικό πεδίο $W(A)$ είναι κυρτό.

Κεφάλαιο 2

q - Αριθμητικό Πεδίο Κανονικών και Κυρτών Πινάκων

Σε αυτό το κεφάλαιο ορίζεται το q - αριθμητικό πεδίο, που αποτελεί γενίκευση του (κλασικού) αριθμητικού πεδίου που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, δίνονται παραδείγματα q - αριθμητικών πεδίων (με τη βοήθεια του Matlab) και διατυπώνονται θεωρήματα σχετικά με αυτό. Μελετάται το q -αριθμητικό πεδίο των κανονικών και των κυρτών πινάκων.

2.1 Το q - Αριθμητικό Πεδίο Πίνακα

2.1.1 Ορισμός του q -Αριθμητικού Πεδίου

Έστω M_n η άλγεβρα των $n \times n$ μιγαδικών πινάκων, όπου $n \geq 2$. Υποθέτουμε ότι q είναι ένας μιγαδικός αριθμός, για τον οποίο ισχύει $|q| \leq 1$. Το q - αριθμητικό πεδίο ενός τετραγωνικού πίνακα $A \in M_n$ ορίζεται ως:

$$W_q(A) = \{x^*Ay : x, y \in \mathbb{C}^n, x^*x = y^*y = 1, x^*y = q\}.$$

Η έννοια αυτή εισήχθη το 1977, από τον Marcus Anderson, στην εργασία «Constrained extrema of bilinear functionals» (βλ. [16]) ως γενίκευση του (κλασικού) αριθμητικού πεδίου του A , δηλαδή του

$$W(A) = \{x^*Ax : x \in \mathbb{C}^n, x^*x = 1\}.$$

2.1.2 Ιδιότητες του q - Αριθμητικού Πεδίου

Αρχικά θα πρέπει κανείς να διερευνήσει τις ιδιότητες του q - αριθμητικού πεδίου με βάση τα όσα γνωρίζουμε για το κλασικό αριθμητικό πεδίο, που αναφέρθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο. Αφού η βασική ιδιότητα του κλασικού αριθμητικού πεδίου είναι η κυρτότητα, είναι λογικό να διερευνήσουμε αν το q - αριθμητικό πεδίο είναι επίσης κυρτό. Πράγματι, το θεώρημα των Hausdorff - Toeplitz επεκτείνεται:

Θεώρημα 2.1.1.

Το σύνολο $W_q(A)$ είναι πάντα κυρτό.

Απόδειξη.

Εστω

$$p = \sqrt{1 - q^2}$$

και $\{E_{11}, E_{12}, \dots, E_{nn}\}$ να είναι η κανονική βάση του χώρου M_n . Τότε, από την εργασία του Nam - Kiu Tsing «The constrained bilinear form and the C-numerical range», γνωρίζουμε ότι θα ισχύει

$$W_q(A) = W(C : A),$$

όπου

$$C = qE_{11} + pE_{12}.$$

Έτσι, αν $n = 2$, το αποτέλεσμα προκύπτει από το Θεώρημα 1 στην εργασία «Some Convexity Theorems for the Generalized Numerical Ranges» του Chi-Kwong Li.

Υποθέτουμε ότι $n > 2$.

Για κάθε μοναδιαίο διάνυσμα $x \in \mathbb{C}^n$, έστω

$$C(x) = \{y^* Ax : y \in \mathbb{C}^n, y^* y = 1, y^* x = q\} \subseteq W_q(A).$$

και

$$r = \sqrt{\|Ax\|^2 - |x^* Ax|^2}.$$

Τότε, ισχυριζόμαστε ότι ισχύει:

$$C(x) = \{q(x^* Ax) + p\mu : \mu \in \mathbb{C}, |\mu| \leq r\}.$$

Για να αποδείξουμε αυτό τον ισχυρισμό, θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι υπάρχει μοναδιαίο διάνυσμα $z \in \mathbb{C}^n$ τέτοιο ώστε

$$Ax = (x^* Ax)x + rz.$$

Αν $y \in \mathbb{C}^n$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα για το οποίο ισχύει ότι $y^* x = q$, τότε

$$y = qx + pu.$$

για κάποιο μοναδιαίο διάνυσμα $u \in x^\perp$. Έτσι έχουμε ότι

$$y^* Ax = q(x^* Ax) + pr(u^* z), \quad \mu \text{ με } |u^* z| \leq 1.$$

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι για το $\mu \in \mathbb{C}$, ισχύει $|\mu| \leq r$. Εφόσον $n > 2$ θα ισχύει $\dim(x^\perp) > 2$ και θα υπάρχει μοναδιαίο διάνυσμα u στο x^\perp τέτοιο ώστε $r(u^* z) = \mu$.

Εστω

$$y = qx + pu.$$

Τότε το y είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα για το οποίο ισχύει

$$y^* x = q \quad \text{και} \quad y^* Ax = q(x^* Ax) + p\mu.$$

Τώρα μπορούμε να αποδείξουμε την κυρτότητα του $W_q(A)$. Αφού το $W_q(A)$ είναι ένα συμπαγές σύνολο στο \mathbb{C} , αρκεί να δείξουμε ότι

$$\mu = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} \in W_q(A)$$

για κάθε δύο διακριτά σημεία $\mu_1, \mu_2 \in W_q(A)$.

Έστω

$$\mu_i = y_i^* A x_i \in C(x_i)$$

για κάποια μοναδιαία διανύσματα $x_i, y_i \in \mathbb{C}^n$ τέτοια ώστε $y_i^* x_i = q$ για $i = 1, 2$. Αν

$$x_1^* A x_1 = x_2^* A x_2,$$

τότε $C(x_1)$ και $C(x_2)$ είναι κλειστοί κυκλικοί δίσκοι που έχουν το ίδιο κέντρο. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, ας υποθέσουμε ότι ο δίσκος $C(x_1)$ έχει μεγαλύτερη ακτίνα. Τότε $\mu_1, \mu_2 \in C(x_1)$ και επομένως

$$\mu = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} \in C(x_1) \subseteq W_q(A).$$

Έστω

$$\nu_1 = x_1^* A x_1 \neq x_2^* A x_2 = \nu_2.$$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\nu_1 = -1$ και $\nu_2 = 1$.

(Διαφορετικά αντικαθιστούμε τον πίνακα A με

$$B = \frac{2A - (\nu_1 + \nu_2)I}{\nu_2 - \nu_1},$$

χωρίς να επηρεάζεται το αποτέλεσμα μας από αυτή την αντικατάσταση.)

Έστω

$$A x_1 = -x_1 + r_1 z_1 \quad \text{και} \quad A x_2 = x_2 + r_2 z_2$$

για κάποια $r_1, r_2 \geq 0$ και κάποια μοναδιαία διανύσματα $z_1 \in x_1^\perp$ και $z_2 \in x_2^\perp$. Τότε

$$\mu = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} = \frac{p(\eta_1 + \eta_2)}{2}$$

για κάποια $\eta_i \in \mathbb{C}$ με $|\eta_i| \leq r_i$, για $i = 1, 2$. Επομένως, το σημείο μ πρέπει να βρίσκεται στον κυκλικό δίσκο στο \mathbb{C} , ο οποίος έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα

$$\frac{p(r_1 + r_2)}{2}.$$

Έτσι, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει μοναδιαίο διάνυσμα $x \in \mathbb{C}^n$ τέτοιο ώστε $x^* A x = 0$ και

$$C(x) = \{p\nu : \nu \in \mathbb{C}, |\nu| \leq r\},$$

για

$$r \geq (r_1 + r_2)/2.$$

Επομένως, θα προκύψει ότι

$$\mu \in C(x) \subseteq W_q(A).$$

Για τον σκοπό αυτό, αντικαθιστούμε το x_2 με το $e^{ir} x_2$, $r \in [0, 2\pi)$ έτσι ώστε

$$x_1^* A x_2 + x_2^* A x_1 \in \mathbb{R},$$

(για παράδειγμα μπορεί κανείς να ανατρέξει στην σελίδα 53 της εργασίας "C-numerical ranges and C-numerical radii" του Chi - Kwong Li). Επιπλέον μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$x_1^* x_2 + x_2^* x_1 \leq 0.$$

Διαφορετικά, αντικαθιστούμε το x_2 με $-x_2$ και προσαρμόζουμε το z_2 ώστε να ισχύουν οι ισότητες

$$Ax_1 = -x_1 + r_1 z_1 \quad \text{και} \quad Ax_2 = x_2 + r_2 z_2.$$

Αφού $x_1^* Ax_1 \neq x_2^* Ax_2$, τα x_1 και x_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Έτσι μπορούμε να ορίσουμε

$$u(t) = \frac{tx_1 + (1-t)x_2}{\|tx_1 + (1-t)x_2\|},$$

για κάθε $t \in [0, 1]$. Αφού

$$x_1^* Ax_2 + x_2^* Ax_1 \in \mathbb{R},$$

μπορούμε να ορίσουμε την συνεχή συνάρτηση

$$f(t) = u(t)^* Au(t)$$

που παίρνει πραγματικές τιμές στο $[0, 1]$, με $f(0) = 1$ και $f(1) = -1$. Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής, υπάρχει $t_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(t_0) = 0$. Έστω

$$x_3 = u(t_0) = ax_1 + bx_2.$$

Τότε: $a, b > 0$,

$$x_3^* x_3 = a^2 + b^2 + ab(x_1^* x_2 + x_2^* x_1) = 1,$$

και

$$x_3^* Ax_3 = -a^2 + b^2 + ab(x_1^* Ax_2 + x_2^* Ax_1) = 0.$$

Αφού $x_1^* x_2 + x_2^* x_1 \leq 0$, θα υπάρχει $s \in (0, 1]$ τέτοιο ώστε

$$x_4 = s(bx_1 - ax_2)$$

για το οποίο θα ισχύει

$$x_4^* x_4 = s^2(b^2 + a^2 - ab(x_1^* x_2 + x_2^* x_1)) = 1$$

και

$$x_4^* Ax_4 = s^2\{-b^2 + a^2 - ab(x_1^* Ax_2 + x_2^* Ax_1)\} = 0.$$

Έστω $r_i = \|Ax_i\|$ για $i = 3, 4$. Τότε

$$r_3^2 = a^2(1 + r_1^2) + b^2(1 + r_2^2) + ab(x_1^* A^* Ax_2 + x_2^* A^* Ax_1)$$

και

$$r_4^2 = s^2\{b^2(1 + r_1^2) + a^2(1 + r_2^2) - ab(x_1^* A^* Ax_2 + x_2^* A^* Ax_1)\}.$$

Εφόσον

$$s^2 + 1 = s^2 x_3^* x_3 + x_4^* x_4 = 2s^2(a^2 + b^2),$$

προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} s^2 r_3^2 + r_4^2 &= s^2(a^2 + b^2)(2 + r_1^2 + r_2^2) \\ &= \frac{s^2 + 1}{2}(2r_1^2 + r_2^2) \\ &> \frac{(s^2 + 1)(r_1^2 + r_2^2)}{2} \\ &\geq (s^2 + 1) \left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Έτσι, τουλάχιστον ένα από τα r_3^2, r_4^2 είναι μεγαλύτερο του

$$\{(r_1 + r_2)/2\}^2.$$

Άρα το x_3 ή το x_4 είναι το ζητούμενο μοναδιαίο διάνυσμα για το οποίο ισχύει:

$$\mu \in C(x) \subseteq W_q(A).$$

□

Πρόταση 2.1.1.

Έστω $A \in M_n$

(α') $W_q(A) = W_q(U^*AU)$ για κάθε ορθομοναδιαίο U .

(β') $W_q(rA + sI) = rW_q(A) + sq$, για κάθε $r, s \in \mathbb{C}$.

(γ') $W_{qz}(A) = zW_q(A)$, για κάθε $z \in \mathbb{C}$, με $|z| = 1$.

Απόδειξη.

(α') Για κάθε ορθομοναδιαίο πίνακα U , έχουμε:

$$\begin{aligned} W_q(U^*AU) &= \{x^*(U^*AU)y : x, y \in \mathbb{C}^n, x^*x = y^*y = 1, x^*y = q\} \\ &= \{(Ux)^*A(Uy) : Ux, Uy \in \mathbb{C}^n, (Ux)^*(Ux) = (Uy)^*(Uy) = 1, (Ux)^*Uy = q\} \\ &= W_q(A) \end{aligned}$$

(β') Για κάθε $r, s \in \mathbb{C}$, έχουμε:

$$\begin{aligned} W_q(rA + sI) &= \{x^*(rA + sI)y : x, y \in \mathbb{C}^n, x^*x = y^*y = 1, x^*y = q\} \\ &= \{x^*(rA)y + x^*(sI)y : x, y \in \mathbb{C}^n, x^*x = y^*y = 1, x^*y = q\} \\ &= \{r(x^*Ay) + s(x^*Iy) : x, y \in \mathbb{C}^n, x^*x = y^*y = 1, x^*y = q\} \\ &= \{r(x^*Ay) : x, y \in \mathbb{C}^n, x^*x = y^*y = 1, x^*y = q\} + sq \\ &= rW_q(A) + sq \end{aligned}$$

(γ') Για κάθε $z \in \mathbb{C}$, με $|z| = 1$, έχουμε:

$$\begin{aligned} W_{qz} &= \{x^*Ay : x, y \in \mathbb{C}^n, x^*x = y^*y = 1, x^*y = qz\} \\ &= z\{x^*Ay : x, y \in \mathbb{C}^n, x^*x = y^*y = 1, x^*y = q\} \\ &= zW_q(A) \end{aligned}$$

□

Είναι γνωστό (από την εργασία των Horn και Johnson, "Topics in Matrix Analysis") ότι αν ο πίνακας \hat{A} είναι ένας κύριος υποπίνακας του A , τότε $W(\hat{A}) \subseteq W(A)$. Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να επεκταθεί στο q - αριθμητικό πεδίο.

Πρόταση 2.1.2.

Εστω \hat{A} ένας κύριος υποπίνακας του $A \in M_n$. Τότε $W_q(\hat{A}) \subseteq W_q(A)$.

Απόδειξη.

Προφανώς, αν $|q| < 1$ και ο πίνακας \hat{A} έχει διάσταση ένα επί ένα, τότε $W_q(\hat{A}) = \phi$ και η Πρόταση ισχύει.

Εστω ότι δεν είμαστε σε αυτή την περίπτωση όμως.

Υποθέτουμε ότι ο υποπίνακας $\hat{A} \in M_k$ προκύπτει από τις i_1, \dots, i_n γραμμές και στήλες του πίνακα A . Αν για το

$$\gamma = \hat{x}^* A y \in W_q(\hat{A})$$

με

$$\hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_k)^\top, \quad \hat{y} = (\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_k)^\top \in \mathbb{C}^k$$

ισχύει ότι $\hat{x}^* \hat{y} = q$, τότε θέτουμε

$$x = \sum_{j=1}^k \hat{x}_j e_{i_j} \quad \text{και} \quad y = \sum_{j=1}^k \hat{y}_j e_{i_j}$$

και προκύπτει ότι

$$\gamma = x^* A y \in W_q(A).$$

□

Από τις Προτάσεις 2.1.1 και 2.1.2 συμπεραίνουμε ότι

$$W_q(X^* A X) \subseteq W_q(A)$$

για κάθε πίνακα X για τον οποίο ισχύει $X^* X = I$. Είναι γνωστό (επίσης από την εργασία των Horn και Johnson, "Topics in Matrix Analysis") ότι εάν $A = A_1 \oplus A_2$, τότε

$$W(A) = \text{conv} \{W(A_1) \cup W(A_2)\}$$

Από τις Προτάσεις 2.1.2 και 2.1.1 προκύπτει το ακόλουθο Πόρισμα:

Πόρισμα 2.1.1. Εάν $A = A_1 \oplus A_2$, τότε

$$\text{conv} \{W_q(A_1) \cup W_q(A_2)\} \subseteq W_q(A).$$

Η ισότητα ισχύει αν $|q| = 1$.

Θεώρημα 2.1.2.

Εστω $q_1, q_2 \in \mathbb{C}$, για τα οποία ισχύει $0 \leq |q_2| < |q_1| \leq 1$. Τότε για κάθε πίνακα $A \in M_n$, θα έχουμε ότι:

$$q_2 W_{q_1}(A) \subseteq q_1 W_{q_2}(A). \quad (2.1)$$

Επιπλέον, εάν $A = \lambda I$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{C}$ τότε

$$q_2 W_{q_1}(A) = q_1 W_{q_2}(A) = \{q_1 q_2 \lambda\}.$$

Αν ο A δεν είναι βαθμωτός πίνακας τότε το δεξί μέρος της σχέσης (2.1) μπορεί να αντικατασταθεί από το (τοπολογικό) εσωτερικό του $q_1 W_{q_2}(A)$.

Απόδειξη.

Έστω $q_1, q_2 \in \mathbb{C}$, για τα οποία ισχύει ότι $0 \leq |q_2| < |q_1| \leq 1$. Υποθέτουμε ότι $\gamma = x^*Ay \in W_{q_1}(A)$, όπου τα x, y ανήκουν στην μοναδιαία σφαίρα

$$\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{C}^n : x^*x = 1\}$$

με $x^*y = q_1$.

Έστω

$$y = q_1x + \sqrt{1 - |q_1|^2}z$$

όπου $x^*z = 0$.

Θεωρούμε

$$\hat{y}(\mu) = q_2x + \mu\sqrt{1 - |q_2|^2}z.$$

Τότε το $W_{q_2}(A)$ περιέχει τον κύκλο

$$\{x^*A\hat{y}(\mu) : |\mu| = 1\},$$

με ακτίνα

$$\sqrt{1 - |q_2|^2} |x^*Az|$$

και κέντρο q_2x^*Ax .

Από την κυρτότητα του W_q συμπεραίνουμε ότι το $q_1W_{q_2}(A)$ περιέχει τον κυκλικό δίσκο \mathcal{C} με ακτίνα

$$R = |q_1\sqrt{1 - |q_2|^2}x^*Az|$$

και κέντρο $q_1q_2x^*Ax$.

Έχουμε ότι

$$|q_2\gamma - q_1q_2x^*Ax| = |q_2\sqrt{1 - |q_1|^2}x^*Az| \leq R.$$

Επομένως,

$$q_2\gamma \in \mathcal{C} \subseteq q_1W_{q_2}(A)$$

Αν $A = \lambda I$, τότε

$$W_{q_1}(A) = \{q_1\lambda\} \quad \text{και} \quad W_{q_2}(A) = \{q_2\lambda\}$$

και έτσι προκύπτει ο δεύτερος ισχυρισμός του Θεωρήματος.

Υποθέτουμε ότι ο A δεν είναι βαθμωτός πίνακας. Αρκεί να δείξουμε ότι όλα τα συνοριακά σημεία του $q_2W_{q_1}(A)$ είναι εσωτερικά σημεία του $q_1W_{q_2}(A)$. Έστω ότι το

$$\gamma = x^*Ay$$

είναι συνοριακό σημείο του $W_{q_1}(A)$, όπου

$$x, y \in \mathcal{S} \quad \text{με} \quad x^*y = q_1$$

και έστω

$$y = q_1x + \sqrt{1 - |q_1|^2}z,$$

όπου $x^*z = 0$, όπως πριν.

Ισχυριζόμαστε ότι

$$|x^*Az| \geq |x^*Au|, \quad \text{για κάθε } u \in \mathcal{S} \cap x^\perp.$$

Εάν ο ισχυρισμός δεν ισχύει, και είναι

$$|x^*Au| > |x^*Az|, \text{ για κάποιο } u \in \mathcal{S} \cap x^\perp,$$

τότε το $W_{q_1}(A)$ θα περιέχει τον κυκλικό δίσκο με σύνορο

$$\{q_1x^*Ax + \mu\sqrt{1 - |q_1|^2}x^*Au : \mu \in \mathbb{C}, |\mu| = 1\},$$

και επομένως το γ θα είναι εσωτερικό σημείο του $W_{q_1}(A)$.

Έχουμε ότι

$$x^*Az = 0 \Rightarrow x^*Au = 0,$$

για κάθε $u \in x^\perp$.

Επομένως

$$x^*A = \lambda x^*$$

για κάποια ιδιοτιμή λ του πίνακα A και άρα

$$\gamma = q_1\lambda.$$

Από το Θεώρημα 2.1.3 το $q_2\lambda$ είναι ένα εσωτερικό σημείο του $W_{q_2}(A)$.

Οπότε το $q_2\gamma$ είναι εσωτερικό σημείο του $q_1W_{q_2}(A)$. Εάν το

$$x^*Az \neq 0,$$

τότε κατασκευάζουμε R και C όπως στην αρχή της απόδειξης.

Η ανισότητα (2.1.2) είναι γνήσια ανισότητα και επομένως το σημείο $q_2\gamma$ ανήκει στο εσωτερικό του $q_1W_{q_2}(A)$. \square

Γνωρίζουμε ότι το κλασσικό αριθμητικό πεδίο ενός πίνακα περιέχει πάντα τις ιδιοτιμές του πίνακα. Στην περίπτωση του q - αριθμητικού πεδίου, συρρικνώνονται κατά q .

Θεώρημα 2.1.3.

Έστω πίνακας $A \in M_n$. Τότε

$$\text{conv} \{q\sigma(A)\} \subseteq W_q(A).$$

Επιπλέον, αν ο πίνακας A δεν είναι βαθμωτός και αν $|q| < 1$, τότε $\text{conv} \{q\sigma(A)\}$ είναι το τοπολογικό εσωτερικό του $W_q(A)$.

Απόδειξη.

Έστω λ να είναι μια ιδιοτιμή του πίνακα A . Από το Λήμμα του Schur, υπάρχει ορθομοναδιαίος πίνακας U τέτοιος ώστε ο U^*AU να είναι άνω τριγωνικός και το λ να βρίσκεται στην θέση (1,1). Έστω x να είναι η πρώτη στήλη του πίνακα U και

$$y = qx + \sqrt{1 - |q|^2}z,$$

όπου z είναι η δεύτερη στήλη του πίνακα U .

Τότε τα x, y είναι μοναδιαία διανύσματα και ισχύει

$$x^*y = q \quad \text{και} \quad x^*Ay = \lambda.$$

Επομένως προκύπτει ότι το $q\lambda \in W_q(A)$.

Υποθέτουμε ότι ο A δεν είναι βαθμωτός πίνακας. Θέλουμε να δείξουμε ότι το $\gamma = q\lambda$ είναι ένα εσωτερικό σημείο του $W_q(A)$.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Η πρώτη περίπτωση είναι ο πίνακας A να έχει μια ιδιοτιμή $\mu \neq \lambda$.

Πάλι από το Λήμμα του Schur, ο πίνακας A είναι ορθομοναδιαία όμοιος με έναν πίνακα που ο 2×2 κύριος υποπίνακάς του είναι της μορφής

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \lambda & \eta \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Ισχυριζόμαστε ότι

$$W_q(\hat{A}) \supseteq W_q(B), \quad \text{όπου } B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Εάν το

$$z = x^* B y \in W_q(B), \quad \text{με } \|x\| = \|y\| = 1 \quad \text{και} \quad x^* y = q,$$

τότε

$$z = \frac{z_1 + z_2}{2}, \quad \text{με } z_1 = x^* \hat{A} y \quad \text{και} \quad z_2 = x^* D \hat{A} D y,$$

$$\text{όπου } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Αφού $z_1, z_2 \in W_q(\hat{A})$ και το $W_q(\hat{A})$ είναι κυρτό, προκύπτει ότι το $z \in W_q(\hat{A})$.

Ισχύει ότι

$$\begin{aligned} W_q(B) &= W_q(\lambda I_2 + (\mu - \lambda)E_{22}) \\ &= q\lambda + (\mu - \lambda)W_q(E_{22}) \\ &= q\lambda + (\mu - \lambda)W(C_q), \end{aligned}$$

όπου

$$C_q = qE_{11} + \sqrt{1 - |q|^2}E_{12}.$$

Εφόσον το

$$q\lambda + (\mu - \lambda)W(C_q)$$

είναι μη εκφυλισμένος ελλειπτικός δίσκος [6] και το γ είναι μία από τις εστίες του, συμπεραίνουμε ότι το γ είναι ένα εσωτερικό σημείο του $W_q(B)$.

Αφού

$$W_q(B) \subseteq W_q(\hat{A}) \subseteq W_q(A),$$

από την υπόθεσή μας και την Πρόταση 2.1.2, συμπεραίνουμε ότι το γ είναι εσωτερικό σημείο του $W_q(A)$.

Η δεύτερη περίπτωση είναι όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα A να είναι ίσες με λ . Τότε ο A είναι ορθομοναδιαία όμοιος με έναν πίνακα που έχει 2×2 κύριο υποπίνακα \hat{A} , της μορφής

$$\lambda I_2 + nE_{12}, \quad \text{όπου } n \neq 0.$$

Τότε

$$\gamma \in qW_q(\hat{A}) \subseteq W_q(A),$$

όπου $W(\hat{A})$ είναι ένας μη εκφυλισμένος κυκλικός δίσκος με κέντρο το λ .

Άρα το γ είναι ένα εσωτερικό σημείο του $W_q(A)$. □

Η απόδειξη του παρακάτω θεωρήματος βασίζεται στο Θεώρημα 2.1.3.

Θεώρημα 2.1.4.

Υποθέτουμε ότι $|q| \neq 1$ και ότι ο $A \in M_n$ είναι ένας μη βαθμωτός πίνακας. Τότε το σύνολο του $W_q(A)$ είναι μία ομαλή καμπύλη. Ειδικότερα, το $W_q(A)$ δεν μπορεί να είναι ένα μη εκφυλισμένο ευθύγραμμο τμήμα ή ένα κυρτό πολύγωνο.

Απόδειξη.

Αφού το $W_0(A)$ είναι ένας μη εκφυλισμένος κυκλικός δίσκος, το ζητούμενο προκύπτει άμεσα για $q = 0$.

Υποθέτουμε ότι $0 < |q| < 1$. Αφού το $W_q(A)$ είναι κυρτό, αν το γ είναι ένα μη διαφορίσιμο συνοριακό σημείο, τότε θα πρέπει να υπάρχουν περισσότερες από μία εφαιπτόμενες ευθείες του $W_q(A)$ στο γ . Έτσι (βλ. απόδειξη 2.1 στην εργασία [11]) το γ είναι της μορφής $q\lambda$, όπου το λ είναι μία ιδιοτιμή του πίνακα A .

Από το Θεώρημα 2.1.3, τέτοιο γ δεν μπορεί να είναι συνοριακό σημείο του $W_q(A)$. Επομένως το $W_q(A)$ δεν έχει μη διαφορίσιμα σημεία. \square

Έστω \mathcal{K} το σύνολο που περιέχει όλα τα συμπαγή σύνολα στα \mathbb{C} , με την μετρική Hausdorff:

$$\text{dist}(F, G) = \max \left\{ \max_{\lambda \in F} \min_{\mu \in G} |\lambda - \mu|, \max_{\lambda \in G} \min_{\mu \in F} |\lambda - \mu| \right\} \quad \mu \in F, G \in \mathcal{K}.$$

Εφόσον το $W_q(A)$ είναι συμπαγές, μπορούμε να θεωρήσουμε το $W_q(A)$ ως μια συνάρτηση του q και του A με τιμές στο \mathcal{K} . Η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής. Πιο συγκεκριμένα ισχύει το παρακάτω Θεώρημα:

Θεώρημα 2.1.5.

Έστω πίνακες $A, B \in M_n$, $q_1, q_2 \in \mathbb{C}$ με $|q_1| \leq 1$ και $|q_2| \leq 1$.

Θέτουμε

$$M = \max\{\|A\|, \|B\|\}.$$

Τότε

$$\text{dist}(W_{q_1}(A), W_{q_2}(B)) \leq M\sqrt{|q_1 - q_2|^2 + 2|q_1 - q_2|} + \|A - B\| \quad (2.2)$$

Επιπλέον, αν θέσουμε

$$|q_1| = \sin \phi_1, \quad |q_2| = \sin \phi_2, \quad \mu \in \phi_1, \phi_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

και

$$\mu = \begin{cases} \sqrt{2(1 + \cos(\phi_1 - \phi_2))} / (\cos \phi_1 + \cos \phi_2) & \text{αν } |q_1| \neq |q_2|, \\ 1 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

τότε

$$\text{dist}(W_{q_1}(A), W_{q_2}(B)) \leq M\mu|q_1 - q_2| + \|A - B\|. \quad (2.3)$$

Απόδειξη.

Έστω $x^*Ay \in W_{q_1}(A)$, όπου $x, y \in \mathcal{S}$ με $x^*y = q_1$. Τότε

$$y = q_1x + \sqrt{1 - |q_1|^2}z, \quad \text{για } z \in \mathcal{S}.$$

με $x^*z = 0$.

Έστω

$$\hat{y} = q_2x + \sqrt{1 - |q_2|^2}z.$$

Προφανώς, $x^*B\hat{y} \in W_{q_2}(B)$.

Έχουμε

$$\begin{aligned} |x^*Ay - x^*B\hat{y}| &\leq |x^*A(y - \hat{y})| + |x^*(A - B)\hat{y}| \\ &\leq \|A\|\|y - \hat{y}\| + \|A - B\|. \end{aligned}$$

Είναι

$$\|y - \hat{y}\|^2 = |q_1 - q_2|^2 + \left(\sqrt{1 - |q_1|^2} - \sqrt{1 - |q_2|^2}\right)^2.$$

Με πράξεις έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{1 - |q_1|^2} - \sqrt{1 - |q_2|^2}\right)^2 &\leq \left||q_1|^2 - |q_2|^2\right| \\ &= (|q_1| + |q_2|)(|q_1| - |q_2|) \\ &\leq 2|q_1 - q_2|. \end{aligned}$$

Προκύπτει ότι

$$\min_{\lambda \in W_{q_2}(B)} |x^*Ay - \lambda| \leq M\sqrt{|q_1 - q_2|^2 + 2|q_1 - q_2|} + \|A - B\|.$$

Ανάλογα προκύπτει η ανισότητα όπου εναλλάσσονται τα A και B , οπότε καταλήγουμε στην σχέση (2.2).

Για την απόδειξη της σχέσης (2.3) παρατηρούμε ότι αν $|q_1| = |q_2|$, θα ισχύει

$$\|y - \hat{y}\| = |q_1 - q_2|.$$

Αν $|q_1| \neq |q_2|$, τότε

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{1 - |q_1|^2} - \sqrt{1 - |q_2|^2}\right)^2 &= (\cos \phi_1 - \cos \phi_2)^2 \\ &= \frac{(\sin \phi_1 + \sin \phi_2)^2}{(\cos \phi_1 + \cos \phi_2)^2} (\sin \phi_1 - \sin \phi_2)^2 \\ &\leq \frac{(\sin \phi_1 + \sin \phi_2)^2}{(\cos \phi_1 + \cos \phi_2)^2} |q_1 - q_2|^2. \end{aligned}$$

Άρα

$$\|y - \hat{y}\| \leq \sqrt{1 + \frac{(\sin \phi_1 + \sin \phi_2)^2}{(\cos \phi_1 + \cos \phi_2)^2}} |q_1 - q_2| \quad (2.4)$$

$$= \frac{\sqrt{2(1 + \cos(\phi_1 - \phi_2))}}{\cos \phi_1 + \cos \phi_2} |q_1 - q_2|. \quad (2.5)$$

Η σχέση (2.3) προκύπτει όμοια με την (2.2) παραπάνω. \square

Από (γ') της Πρότασης 2.1.1 προκύπτει ότι αρκεί να εστιάσουμε σε εκείνα τα $q \in [0, 1]$ και θα κάνουμε αυτή την υπόθεση από εδώ και στο εξής. Υπάρχει σημαντικό ενδιαφέρον στη μελέτη του σχήματος του $W_q(A)$ και έχουν προκύψει τα παρακάτω αποτελέσματα:

Πρόταση 2.1.3.

Υποθέτουμε ότι $q \in [0, 1]$ και $A \in M_2$. Τότε ο A είναι ορθομοναδιαία όμοιος με $e^{it} \begin{pmatrix} \gamma & \alpha \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$, όπου $0 \leq t \leq 2\pi$ και $0 \leq \beta \leq 2\alpha$, και

$$W_q(A) = e^{it} \{ \gamma q + r[(c + pd)\cos s + i(d - pc)\sin s] : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq s \leq 2\pi \},$$

με

$$c = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad d = \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad p = \sqrt{1 - q^2}.$$

Πρόταση 2.1.4.

Έστω $A \in M_n$. Τότε

$$W_0(A) = \{z : |z| \leq R\}, \quad \mu \in R = \min\{\|A - \lambda I\| : \lambda \in \mathbb{C}\}, \quad (2.6)$$

όπου $\|X\|$ δηλώνει τη νόρμα τελεστή του $X \in M_n$.

Απόδειξη.

Το σύνολο $W_0(A)$ είναι κυκλικό, δηλαδή

$$\mu W_0(A) = W_0(A)$$

για κάθε $\mu \in \mathbb{C}$ με $|\mu| = 1$, και περιέχει το 0, επομένως η σχέση (2.6) ισχύει για κάποιο R . Μένει να υπολογίσουμε αυτό το R .

Για κάθε ζεύγος ορθογώνιων και μοναδιαίων διανυσμάτων $x, y \in \mathbb{C}^n$ και για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$, έχουμε

$$(Ay, x) = ((A - \lambda I)y, x) \leq \|A - \lambda I\|,$$

οπότε

$$W_0(A) \subseteq \{z : |z| \leq R\}.$$

Έστω

$$\Omega = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 2\|A\|\},$$

και για $\epsilon > 0$ επιλέγουμε $\{\lambda_j\}_{j=1}^N$ στο Ω τέτοια ώστε

$$\bigcup_{j=1}^N \{z \in \mathbb{C} : |z - \lambda_j| < \epsilon\} \supseteq \Omega.$$

Για κάθε $j = 1, \dots, N$, έστω $x_j \in \mathbb{C}^n$ τέτοιο ώστε

$$\|x_j\| = 1 \quad \text{και} \quad \|(A - \lambda_j I)x_j\| > \|A - \lambda_j I\| - \epsilon.$$

Έστω U μία ισομετρία στο

$$\text{span} \{x_1, \dots, x_N, (A - \lambda_1 I)x_1, \dots, (A - \lambda_N I)x_N\}.$$

Τότε για κάθε $\lambda \in \Omega$, μπορούμε να επιλέξουμε λ_j με $|\lambda - \lambda_j| < \epsilon$ ώστε

$$\|U^*AU - \lambda I\| \geq \|U^*AU - \lambda_j I\| - |\lambda_j - \lambda| \geq \|A - \lambda_j I\| - 2\epsilon.$$

Αφού για $\lambda \notin \Omega$, έχουμε

$$\|U^*AU - \lambda I\| \geq |\lambda| - \|U^*AU\| \geq \|A\|,$$

προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \min_{\lambda \in \mathbb{C}} \|U^*AU - \lambda I\| &= \min_{\lambda \in \Omega} \|U^*AU - \lambda I\| \\ &\geq \min_{\lambda \in \Omega} \|A - \lambda I\| - 2\epsilon \\ &\geq \min_{\lambda \in \mathbb{C}} \|A - \lambda I\| - 2\epsilon \end{aligned}$$

Από τα αποτελέσματα της εργασίας [23] έχουμε ότι

$$W_0(A) \supseteq W_0(U^*AU) = \{z : |z| < \min_{\lambda \in \mathbb{C}} \|U^*AU - \lambda I\|\}.$$

□

Για οποιοδήποτε $q \in (0, 1]$ και $A \in M_n$, με $n \geq 3$, δεν είναι τόσο εύκολο να προσδιοριστεί το $W_q(A)$. Παρόλα αυτά, υπάρχουν κάποια αποτελέσματα για ειδικές κλάσεις πινάκων και ειδικές τιμές του q :

Πρόταση 2.1.5.

Ένας πίνακας $A \in M_n$ ικανοποιεί τη σχέση $W_q(A) = \{\lambda\}$ αν και μόνο αν $A = \mu I$ τέτοιο ώστε $q\mu = \lambda$.

Αρκεί να δείξουμε ότι αν $|q| < 1$, τότε το $W_q(A)$ δεν μπορεί να είναι ένα μη εκφυλισμένο ευθύγραμμο τμήμα ή κυρτό πολύγωνο. Επιπλέον, αν ο πίνακας A δεν είναι βαθμωτός και εάν $|q| < 1$, τότε το σύνορο του $W_q(A)$ είναι μια λεία καμπύλη.

Πρόταση 2.1.6.

Έστω $A \in M_n$. Τότε $rA + sI$ είναι ερμιτιανός για κάποια $r, s \in \mathbb{C}$ με $r \neq 0$ αν και μόνο αν $W(A)$ είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα. Σε αυτή την περίπτωση τα άκρα, έστω λ_1 και λ_2 , του ευθύγραμμου τμήματος είναι ιδιοτιμές του A και για $q \in (0, 1)$, $W_q(A)$ είναι ένας ελλειπτικός δίσκος με εκκεντρότητα q και εστίες: $q\lambda_1$ και $q\lambda_2$.

Πρόταση 2.1.7.

Αν ο πίνακας $A \in M_n$ είναι κανονικός, τότε $W(A)$ είναι η κυρτή θήκη του φάσματος $\sigma(A)$ του A και

$$W_0(A) = \{z : |z| \leq R\},$$

όπου R είναι η ακτίνα του μικρότερου κύκλου που περικλείει το $\sigma(A)$.

Απόδειξη.

Αν ο πίνακας A είναι κανονικός, τότε $A = U^*\Lambda U$, όπου ο

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

είναι διαγώνιος πίνακας και ο U είναι ορθομοναδιαίος.

Από τις ιδιότητες του αριθμητικού πεδίου, θα έχουμε ότι:

$$W(A) = W(\Lambda)$$

και αφού

$$x^* \Lambda x = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i x_i \lambda_i = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \lambda_i$$

και

$$x^*x = 1, \quad \text{οπότε} \quad \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = 1 \quad \text{και} \quad |x_i|^2 \geq 1,$$

το $W(\Lambda)$ είναι το σύνολο όλων των κυρτών συνδυασμών των διαγώνιων στοιχείων του Λ . Αφού τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου του πίνακα Λ είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A , προκύπτει ότι

$$W(A) = \text{conv}(\sigma(A)).$$

□

Για $q \in (0, 1)$ ισχύουν τα εξής:

Θεώρημα 2.1.6.

Εστω $A \in M_n$ ένας μη βαθμωτός κανονικός πίνακας με ιδιοτιμές $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Αν $n \geq 4$, τότε

$$W_q(A) = \bigcup \left\{ W_q(\text{diag}(\lambda_{j_1}, \lambda_{j_2}, \lambda_{j_3})) : 1 \leq j_1 < j_2 < j_3 \leq n \right\}.$$

Θεώρημα 2.1.7.

Υποθέτουμε ότι $n = 3$ και ότι ο πίνακας A είναι ορθομοναδιαίος. (Διαφορετικά αντικαθιστούμε με $r^{-1}(A - sI)$, όπου r και s είναι η ακτίνα και το κέντρο του μικρότερου κύκλου που περικλύει το $\sigma(A)$.)

Το σύνολο $\partial W_q(A)$ του $W_q(A)$ ικανοποιεί τη σχέση :

$$\partial W_q(A) \setminus \bigcup \left\{ \partial W_q(\text{diag}(\lambda_{j_1}, \lambda_{j_2})) : 1 \leq j_1 < j_2 \leq 3 \right\} = \{e^{it} : t \in [0, 2\pi), qe^{it} \text{ είναι ένα εσωτερικό σημείο του } W(A)\}.$$

Ισχύει ότι αν A είναι ένας κανονικός πίνακας, τότε $\partial W_q(A)$ είναι η ένωση ενός πεπερασμένου αριθμού από αλγεβρικά τόξα που είναι υποσύνολα από κύκλους ή ελλείψεις με εκκεντρότητα $|q|$.

Για την απόδειξη του παραπάνω Θεωρήματος θα χρειαστούμε την δεύτερη συνάρτηση του Tsing:

$$\psi_A(z) = \max\{\|Ax\|^2 : x \in \mathbb{C}^n, \|x\| = 1, (Ax, x) = z\},$$

Απόδειξη.

Θέτουμε

$$A = \text{diag}(\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}).$$

Εάν τα $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ είναι συγγραμικά στο μιγαδικό επίπεδο, τότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3.$$

Έτσι έχουμε ότι

$$W_q(A) = W_q(\text{diag}\{\lambda_1, \lambda_3\}) \quad (\text{βλ. [24]})$$

Οπότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ είναι κορυφές ενός μη εκφυλισμένου τριγώνου K . Αφού ο πίνακας A είναι ορθομοναδιαίος, για την δεύτερη συνάρτηση του Tsing θα ισχύει

$$\psi_A(z) = 1, \quad \text{για κάθε} \quad z \in K = \text{conv}(\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}).$$

Επομένως έχουμε την σχέση

$$\begin{aligned} W_q(A) &\subseteq \{qz + \sqrt{1 - |q|^2}re^{i\theta}\sqrt{1 - |z|^2} : z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1, 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\} \\ &\subseteq \{w \in \mathbb{C} : |w| \leq 1\}. \end{aligned}$$

Πρώτα αποδεικνύουμε τον ισχυρισμό του Θεωρήματος στην περίπτωση $q = 0$.

Εάν $q = 0$, έχουμε την εξίσωση

$$W_0(A) = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq \max\{\sqrt{1 - |w|^2} : w \in K\} \right\}.$$

Λόγω της εξίσωσης αυτής και της ιδιότητας

$$W_{e^{i\theta}q} = e^{i\theta}W_q(A), \quad \text{για } \theta \in \mathbb{R},$$

θεωρούμε ότι $0 < q < 1$. Εάν το σημείο

$$z = qe^{i\theta} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

ανήκει στο σύνολο K , τότε το σημείο

$$\begin{aligned} w &= e^{i\theta} \\ &= q^2e^{i\theta} + (1 - q^2)e^{i\theta} \\ &= qz + \sqrt{1 - q^2}e^{i\theta}\sqrt{1 - q^2} \end{aligned}$$

ανήκει στο σύνορο του $W_q(A)$.

Για σταθερό $\theta \in [0, 2\pi)$, θα μενιστοποιήσουμε την τιμή

$$\operatorname{Re}(we^{i\theta}),$$

όπου

$$w = qz + \sqrt{1 - q^2}e^{i\xi}\sqrt{1 - |z|^2},$$

με $z \in K$ και $\xi \in [0, 2\pi)$.

Τότε για το μέγιστο σημείο (z_0, ξ_0) θα ισχύει

$$\xi_0 = \theta \pmod{2\pi}$$

και

$$\operatorname{Re}(z_0e^{-i\theta}) = \max\{\operatorname{Re}(ze^{-i\theta}) : z \in K, |z| = |z_0|\}$$

Εάν το μέγιστο σημείο z_0 είναι εσωτερικό σημείο του τριγώνου K , τότε

$$z_0 = re^{i\theta}, \quad 0 < r < 1$$

και το σημείο r είναι ένα τοπικό μέγιστο της συνάρτησης

$$x \mapsto qx + \sqrt{1 - q^2}\sqrt{1 - x^2}.$$

Έτσι έχουμε ότι $r = |z_0| = q$. Άρα, προκύπτει η εξίσωση

$$\begin{aligned} &\partial W_q(A) \setminus \bigcup \{\partial W_q(\operatorname{diag}\{\lambda_{j_1}, \lambda_{j_2}\}) : 1 \leq j_1 < j_2 \leq 3\} \\ &= \{e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq 2\pi, qe^{i\theta} \text{ είναι εσωτερικό σημείο του } K\} \end{aligned}$$

□

Έχει αποδειχθεί ότι ο αριθμός των τόξων στο $\partial W_q(\operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\})$ είναι μικρότερος ή ίσος του 6.

2.1.3 Παραδείγματα q - Αριθμητικών Πεδίων

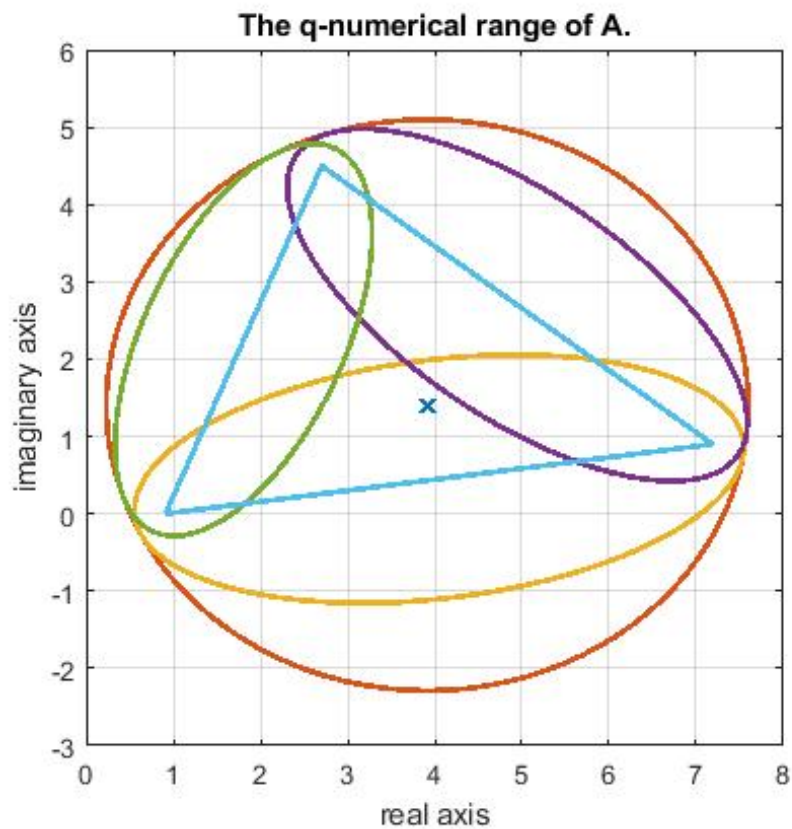
Τα παρακάτω σχήματα έγιναν με την βοήθεια του matlab και ο αντίστοιχος κώδικας βρίσκεται στο Κεφάλαιο 4.

Παράδειγμα 2.1.1.

Βασιζόμενοι στην εργασία 'The boundary of the range of a constrained sesquilinear form' του H. Nakazato, μπορούμε να μελετήσουμε το σύνορο του q - αριθμητικού πεδίου ενός 3×3 διαγώνιου πίνακα, για $0 < q < 1$. Για παράδειγμα, για τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8+i & 0 \\ 0 & 0 & 3+5i \end{bmatrix}$$

και για $q = 0.9$ προκύπτει το παρακάτω σχήμα στο Matlab:



Σχήμα 2.1: Το q - αριθμητικό πεδίο του πίνακα A για $q = 0.9$.

Τα συνοριακά σημεία του q - αριθμητικού πεδίου ανήκουν στον κύκλο και τις ελλείψεις. Το πρόγραμμα σχεδιάζει τρεις ελλείψεις και το τρίγωνο του οποίου οι κορυφές είναι οι εστίες των ελλείψεων. Ο κύκλος, που έχει σχεδιαστεί με κόκκινο χρώμα είναι ο μικρότερος κύκλος που περιέχει το κλασσικό αριθμητικό πεδίο του πίνακα A .

Παράδειγμα 2.1.2.

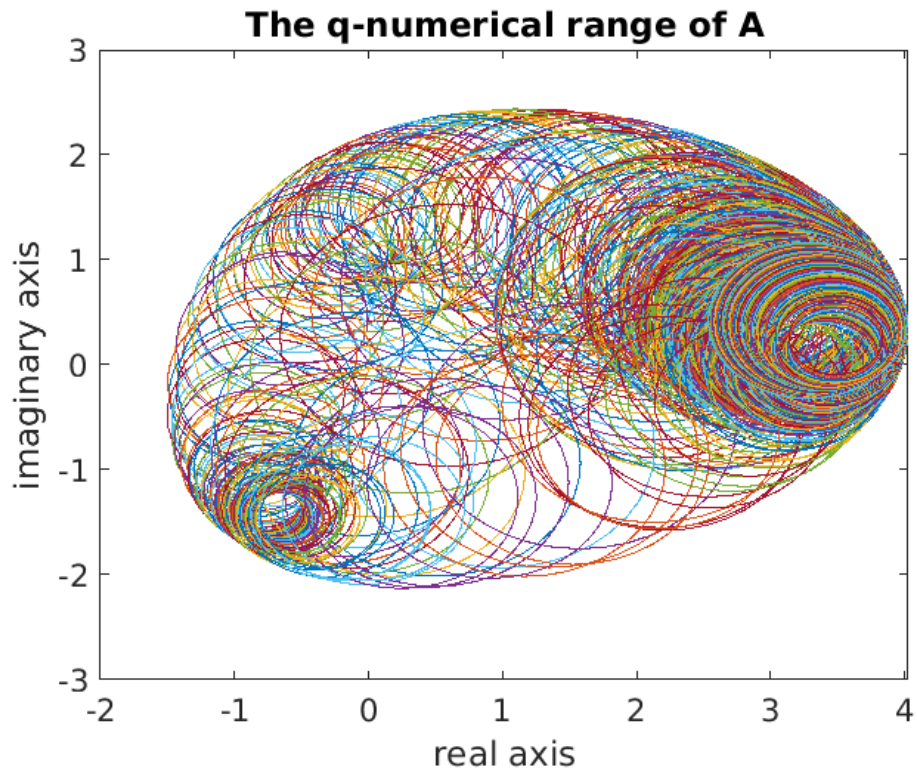
Για τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1+i & 1/2 \\ 2i & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

και για

$$q = \frac{10}{11}$$

προκύπτει το παρακάτω αριθμητικό πεδίο:



Σχήμα 2.2: Το q - αριθμητικό πεδίο του πίνακα A για $q = 10/11$.

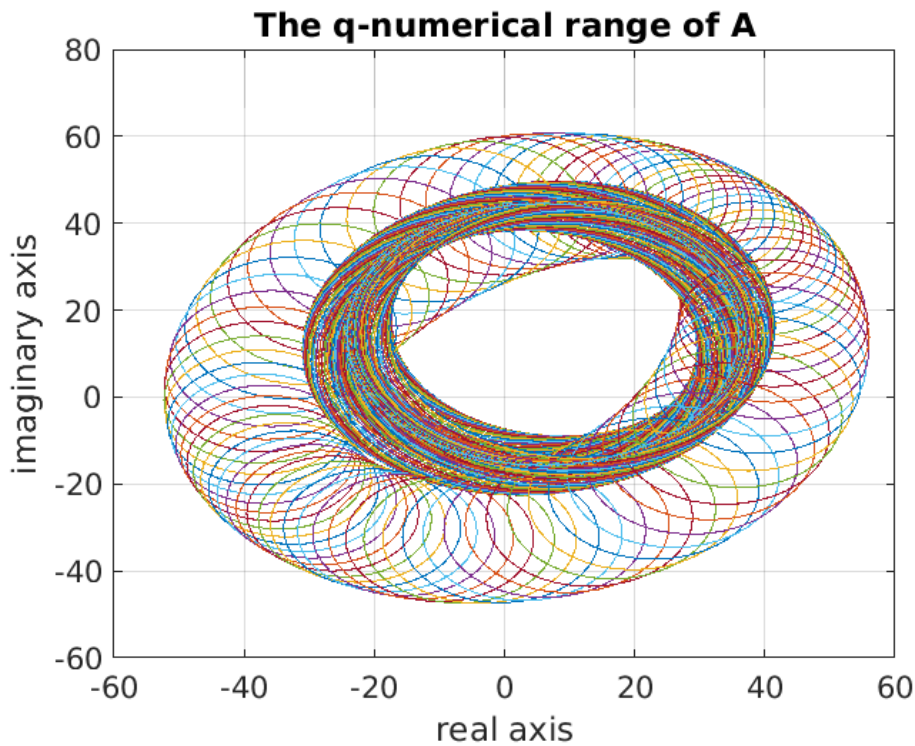
Υπενθυμίζεται ότι το q - αριθμητικό πεδίο είναι κυρτό, οπότε το κενό χωρίο που εμφανίζεται στο εσωτερικό του είναι και αυτό μέρος του πεδίου.

Παράδειγμα 2.1.3.

Ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 + 3i & 2 + i & 5 & 6 & 8 & 80i \\ 3 & 4 + 8i & i & 5 & 6 & 8i \\ 2 + 9i & 8i & 5 + i & 9i & 9 + i & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 9 + 8i & 4 & i \\ 5 + i & 6i & 8i & 7 & 9 & 5 + i \\ 8 & 4 + 5i & 8i & 9 & 5 + 9i & 4 + 10i \end{bmatrix}$$

έχει το εξής q - αριθμητικό πεδίο:



Σχήμα 2.3: Το q - αριθμητικό πεδίο του πίνακα A για $q = 13/14$.

Και σε αυτό το παράδειγμα, αφού το q - αριθμητικό πεδίο είναι κυρτό, το κενό χωρίο που εμφανίζεται στο εσωτερικό του είναι και αυτό μέρος του πεδίου.

2.1.4 q - Αριθμητικό Πεδίο Κανονικών και Κυρτών Πινάκων

Παρακάτω θα θεωρήσουμε την επέκταση των αποτελεσμάτων του Nakazato, σε κυρτούς πίνακες, δηλαδή πίνακες A για τους οποίους το σύνορο του $W(A)$ είναι ένα κυρτό πολύγωνα ή ισοδύναμα,

$$W(A) = \text{conv } \sigma(A),$$

δηλαδή το αριθμητικό πεδίο ισούται με την κυρτή θήκη του $\sigma(A)$.

Για να αποκλείσουμε τις εύκολες περιπτώσεις, συχνά υποθέτουμε ότι $n \geq 3, q \in (0, 1)$ και ότι το $W(A)$ δεν είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα ή ένα σημείο.

Για να αποδείξουμε τα αποτελέσματά μας, χρειαζόμαστε την έννοια του συνθετικού αριθμητικού πεδίου (joint numerical range) τριών ερμιτιανών πινάκων $H, G, K \in M_n$, που ορίζεται ως

$$W(H, G, K) = \{(x^* H x, x^* G x, x^* K x) : x \in \mathbb{C}^n, x^* x = 1\}.$$

Ισχύει ότι το $W(H, G, K)$ είναι κυρτό αν $n \geq 3$ (βλ. [1], [2]).

Λέμε ότι το $(u, v, w) \in W(H, G, K)$ είναι ένα άνω συνοριακό σημείο εάν $(u, v, w') \notin W(H, G, K)$ για κάθε $w' > w$. Η συλλογή των άνω συνοριακών σημείων καλείται άνω φράγμα του $W(H, G, K)$.

Θεώρημα 2.1.8.

Υποθέτουμε ότι $A \in M_n$ είναι ένας κανονικός πίνακας τέτοιος ώστε το $W(A) = \text{conv } \sigma(A)$ να έχει διακεκριμένες κορυφές μ_1, \dots, μ_k με $k \geq 3$. Τότε υπάρχουν 3×3 κύριοι υποπίνακες B_1, \dots, B_{k-2} του πίνακα $B = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_k)$. Τέτοιοι ώστε

$$W_q(A) = \bigcup \{W_q(B_j) : 1 \leq j \leq k-2\}.$$

Απόδειξη.

Από ((α')) μπορούμε να εφαρμόσουμε κατάλληλο ορθομοναδιαίο μετασχηματισμό ομοιότητας στον A και να υποθέσουμε ότι

$$A = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n).$$

Αφού ο $\text{diag}(\mu_{j_1}, \mu_{j_2}, \mu_{j_3})$ είναι ένας κύριος υποπίνακας του A για κάθε $1 \leq j_1 < j_2 < j_3 \leq k$, έχουμε ότι

$$W_q(A) \supseteq \bigcup \{W_q(\text{diag}(\mu_{j_1}, \mu_{j_2}, \mu_{j_3})) : 1 \leq j_1 < j_2 < j_3 \leq k\}.$$

Από [24] (επίσης [10], [14]) γνωρίζουμε ότι

$$W_q(A) = \bigcup \{C(A, x) : x \in \mathbb{C}^n, x^* x = 1\} \quad (2.7)$$

όπου

$$C(A, x) = \{qx^* A x + \eta : \eta \in \mathbb{C}, |\eta| \leq (1 - q^2)f(A, x)\}$$

με

$$f(A, x) = \|Ax\|^2 - |x^* A x|^2.$$

Ως εκ τούτου για να αποδείξουμε το αποτέλεσμα χρειαζόμαστε μόνο να δείξουμε ότι: Υπάρχουν 3×3 κύριοι υποπίνακες B_1, \dots, B_{k-2} του πίνακα B τέτοιοι ώστε για κάθε $x \in \mathbb{C}^n$ με $x^* x = 1$ να ισχύει ότι

$$C(A, x) \subseteq C(B_j, y)$$

για κάποια $1 \leq j \leq k-2$ και $y \in \mathbb{C}^n$ με $y^* y = 1$.

Για να αποδείξουμε αυτό τον ισχυρισμό, έστω

$$A = H + iG \quad \text{με} \quad H = \frac{A + A^*}{2},$$

και θεωρούμε το συνθετικό αριθμητικό πεδίο

$$W(H, G, A^*A) = \{(x^*Hx, x^*Gx, x^*A^*Ax) : x \in \mathbb{C}^n, x^*x = 1\}.$$

Έστω

$$\mu_j = a_j + ib_j \quad \text{για } j = 1, \dots, n.$$

Τότε

$$H = \text{diag}(a_1, \dots, a_n), \quad G = \text{diag}(b_1, \dots, b_n) \quad \text{και} \quad A^*A = \text{diag}(|\mu_1|^2, \dots, |\mu_n|^2).$$

Εύκολα προκύπτει (βλ. [1] ή [2]) ότι

$$W(H, G, A^*A) = \text{conv} \{(a_j, b_j, |\mu_j|^2) : 1 \leq j \leq n\}.$$

Εφόσον οι κορυφές του κυρτού πολυτόπου $W(H, G, A^*A)$ ανήκουν στην κυρτή προς τα κάτω επιφάνεια

$$S = \{(u, v, w) : u, v, w \in \mathbb{R}, w = u^2 + v^2\},$$

μόνο οι κορυφές στο

$$\mathcal{E} = \{(a_j, b_j, |\mu_j|^2) : 1 \leq j \leq k\}$$

βρίσκονται στο άνω σύνορο του $W(H, G, A^*A)$. Θεωρούμε τα ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν δύο κορυφές στο \mathcal{E} στο άνω φράγμα. Το άνω φράγμα μπορεί να χωριστεί σε $k - 2$ τριγωνικές περιοχές από κάποια από αυτά τα ευθύγραμμα τμήματα. Επιπλέον, οι εικόνες αυτών των $k - 2$ τριγωνικών περιοχών κάτω από την προβολή

$$\mathbf{p}(u, v, w) \mapsto (u, v)$$

θα σχηματίσουν έναν τριγωνισμό του

$$\mathbf{p}(W(H, G, A^*A)),$$

που είναι το $W(A)$ αν ταυτίσουμε το \mathbb{R}^2 με το \mathbb{C} . Παρατηρούμε ότι οι κορυφές των $k - 2$ τριγωνικών περιοχών στο \mathbb{C} είναι ιδιοτιμές του διαγώνιου πίνακα B και ως εκ τούτου μπορούμε να τις θεωρήσουμε ως

$$W(B_1), \dots, W(B_{k-2})$$

για κάποιους 3×3 κύριους υποπίνακες B_1, \dots, B_{k-2} του B .

Τώρα για κάθε $x \in \mathbb{C}^n$ με $x^*x = 1$, το σημείο

$$\eta = x^*Ax \in W(A)$$

βρίσκεται σε μία από τις τριγωνικές περιοχές $W(B_j)$.

Έστω

$$B_j = R + iS = \text{diag}(\mu_{j_1}, \mu_{j_2}, \mu_{j_3}), \quad \text{όπου} \quad R = \frac{B_j + B_j^*}{2}.$$

Τότε υπάρχει $y \in \mathbb{C}^3$ τέτοιο ώστε

$$\eta = y^*B_jy.$$

Εφόσον

$$(x^* H x, x^* G x, x^* A^* A x) \in W(H, G, A^* A),$$

και $W(R, S, B_j^*, B_j)$ είναι υποσύνολο του άνω φράγματος του $W(H, G, A^* A)$ τέτοιο ώστε

$$\eta \in \mathbf{p}(W(R, S, B_j^* B_j)),$$

έχουμε

$$x^* A^* A x \leq y^* B_j^* B_j y$$

και ως εκ τούτου

$$f(A, x) \leq f(B_j, y).$$

Έπεται ότι

$$C(A, x) \subseteq C(B_j, y).$$

□

Η περιγραφή του q - αριθμητικού πεδίου, ενός κανονικού (διαγώνιου) πίνακα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να περιγράψει τα q - αριθμητικά πεδία μιας ευρύτερης κλάσης πινάκων, όπως φαίνεται παρακάτω.

Θεώρημα 2.1.9.

Έστω $A = H + iG \in M_n$ με

$$H = \frac{A + A^*}{2}.$$

Υποθέτουμε ότι η κυρτή θήκη του άνω φράγματος του $W(H, G, A^* A)$ είναι ένα πολύτοπο στον \mathbb{R}^3 . Τότε ο A είναι ένας κυρτός πίνακας, με άλλα λόγια

$$W(A) = \text{conv } \sigma(A) \quad \text{και} \quad W_q(A) = W_q(B), \quad \text{για κάθε } q \in [0, 1]$$

με

$$B = \text{diag} (\mu_1, \dots, \mu_k),$$

όπου μ_1, \dots, μ_k είναι διακεκριμένες κορυφές του $W(A)$.

Απόδειξη.

Από τις υποθέσεις είναι προφανές ότι ο A είναι κυρτός και τα συνθετικά αριθμητικά πεδία που προκύπτουν από τους A και B έχουν το ίδιο άνω φράγμα. Από την εξίσωση (2.7), έχουμε ότι $W_q(A) = W_q(B)$ για κάθε $q \in [0, 1]$.

□

Το ακόλουθο παράδειγμα δείχνει ότι το Θεώρημα (2.1.9) δεν μπορεί να επεκταθεί σε αυθαίρετους κυρτούς πίνακες.

Παράδειγμα 2.1.4.

Έστω $A = A_1 \oplus A_2$, όπου

$$A_1 = \text{diag} (1, \mu, \dots, \mu^{k-1}) \quad \text{με} \quad k \geq 4, \quad \mu = e^{2\pi i/k}$$

και

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \cos(\pi/k) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Τότε

$$\alpha') W(A) = W(A_1) = \text{conv } \sigma(A_1),$$

$$\beta') W_q(A_1) \subseteq \{z : |z| \leq 1\}, \text{ και}$$

$$\gamma') W_q(A_2) = \{z : |z| \leq (1 + \sqrt{1 - q^2}) \cos(\pi/k)\}.$$

Σαν αποτέλεσμα, αν $q \leq 1$, τότε το $W_q(A_1)$ είναι γνήσιο υποσύνολο του

$$W_q(A_2) \subseteq W_q(A)$$

οποτεδήποτε

$$(1 + \sqrt{1 - q^2}) \cos\left(\frac{\pi}{k}\right) > 1.$$

Το επόμενο Θεώρημα δείχνει ότι μερικές φορές δεν χρειάζεται να ελέγξουμε την συνθήκη για το άνω φράγμα του $W(H, G, A^*A)$ για να καταλήξουμε στο συμπέρασμα του Θεωρήματος (2.1.9).

Θεώρημα 2.1.10.

Έστω $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_m$, όπου $A_j \in M_{n_j}$, για $j = 1, \dots, m$ με $n_1 + \dots + n_m = n$, τέτοιο ώστε κάθε $W(A)$ να είναι κυρτή πολυγωνική περιοχή (ενδεχομένως εκφυλισμένη) με όχι περισσότερες από τρεις κορυφές. Τότε ο A είναι ένας κυρτός πίνακας και

$$W_q(A) = W_q(B)$$

για κάθε $q \in [0, 1]$ με

$$B = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_k),$$

όπου μ_1, \dots, μ_k είναι διακεκριμένες κορυφές του $W(A)$.

Απόδειξη.

Εάν ο πίνακας A ικανοποιεί την υπόθεση, τότε προφανώς το

$$W(A) = \text{conv} \{W(A_j) : 1 \leq j \leq m\}$$

είναι μία κυρτή πολυγωνική περιοχή και έτσι ο A είναι ένας κυρτός πίνακας. Έστω

$$A_j = H_j + iG_j \quad \text{με} \quad H_j = \frac{A_j + A_j^*}{2}, \quad \text{για} \quad j = 1, \dots, m.$$

Τότε

$$W(H, G, A^*A) = \text{conv} \cup \{W(H_j, G_j, A_j^*A_j) : 1 \leq j \leq m\}.$$

Αν μπορούμε να αποδείξουμε ότι:

η κυρτή θήκη του άνω φράγματος κάθε $W(H_j, G_j, A_j^*A_j)$ είναι ένα πολύτοπο τότε το άνω φράγμα του $W(H, G, A^*A)$ θα ικανοποιεί την ίδια συνθήκη, και το συμπέρασμα θα προκύπτει από το Θεώρημα (2.1.9). Προφανώς ο ισχυρισμός ισχύει εάν το $W(A_j)$ είναι μονοσύνολο, με άλλα λόγια ο A_j είναι ένας βαθμωτός πίνακας από (2.1.5). Επίσης ο ισχυρισμός ισχύει αν το $W(A_j)$ είναι ευθύγραμμο τμήμα, δηλαδή ο A_j είναι ένας κανονικός πίνακας με ιδιοτιμές που βρίσκονται πάνω σε μία ευθεία γραμμή, έστω \mathcal{L} , στο \mathbb{C} από (2.1.6). Σε μία τέτοια περίπτωση, το $W(H_j, G_j, A_j^*A_j)$ είναι πολυγωνική περιοχή που βρίσκεται πάνω σε ένα επίπεδο

$$\mathbf{P} = \{(u, v, w) : u, v, w \in \mathbb{R}, u + iv \in \mathcal{L}\}$$

με κορυφές να βρίσκονται πάνω στην επιφάνεια

$$\mathcal{S} = \{(u, v, w) : u, v, w \in \mathbb{R}, w = u^2 + v^2\}.$$

Τώρα υποθέτουμε ότι $\partial W(A_j)$ είναι μη εκφυλισμένο τρίγωνο με κορυφές a, b, c . Έστω

$$\tilde{B} = R + iS = \text{diag}(a, b, c), \quad \text{όπου} \quad R = \frac{\tilde{B} + \tilde{B}^*}{2}.$$

Τότε $\tilde{B} \in M_3$ είναι κύριος υποπίνακας του B . Από [18] και [19] ισχύει ότι $A_j = U^*(\tilde{B} \otimes I_k)U$, για κάποιο θετικό ακέραιο k και $3k \times n_j$ πίνακα U τέτοιο ώστε $U^*U = I_{n_j}$. Χρησιμοποιώντας τους συμβολισμούς από την απόδειξη του Θεωρήματος (2.1.8), θεωρούμε $x \in \mathbb{C}^n$ με $x^*x = 1$, και κατασκευάζουμε

$$y = Ux = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad \text{με} \quad y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{C}^k,$$

και

$$\tilde{y} = \begin{pmatrix} \|y_1\| \\ \|y_2\| \\ \|y_3\| \end{pmatrix}.$$

Εύκολα προκύπτει ότι

$$\tilde{y}^*\tilde{y} = 1, \quad x^*Ax = \tilde{y}^*\tilde{B}\tilde{y}$$

και

$$\begin{aligned} \|A_j x\| &= \|U^*(\tilde{B} \otimes I_k)y\| \\ &\leq \|U^*\| \|(\tilde{B} \otimes I_k)y\| \\ &\leq \|(\tilde{B} \otimes I_k)y\| \\ &= \|\tilde{B}\tilde{y}\|. \end{aligned}$$

Ως εκ τούτου

$$f(A_j, x) \leq f(\tilde{B}, \tilde{y}) \quad \text{και} \quad C(A_j, x) \subseteq C(\tilde{B}, \tilde{y}).$$

Έτσι η τριγωνική περιοχή $W(R, S, \tilde{B}^*\tilde{B})$ στον \mathbb{R}^3 είναι στην πραγματικότητα το άνω φράγμα του $W(H_j, G_j, A_j^*A_j)$. □

2.2 Το q - Αριθμητικό Πεδίο σε Απειροδιάστατους Χώρους Hilbert

Τα αποτελέσματα και οι αποδείξεις που είδαμε στην αρχή του κεφαλαίου επεκτείνονται και σε απειροδιάστατους χώρους Hilbert H , με βαθμωτό εσωτερικό γινόμενο (\cdot, \cdot) .

Ορισμός 2.2.1.

Για μία σταθερά q , με $|q| < 1$ και έναν φραγμένο γραμμικό τελεστή A στον χώρο H ορίζουμε

$$W_q(A) = \{(Ay, x) : \|x\| = \|y\| = 1, (y, x) = q\}.$$

Σε αυτή την περίπτωση η Πρόταση 2.1.2 παίρνει την μορφή

$$W_q(U^*AU) \subseteq W_q(A),$$

για κάθε ισομετρία U .

Επίσης το Θεώρημα 2.1.5 θα ισχύει, με την μόνη διαφορά ότι στην σχέση (2.1.2) της μετρικής Hausdorff, θα αντικατασταθούν τα \min και \max με \inf και \sup αντίστοιχα. Αυτό γίνεται διότι το $W_q(A)$ δεν είναι κλειστό γενικά.

Το αντίστοιχο του Θεωρήματος 2.1.3 είναι το παρακάτω:

Θεώρημα 2.2.1.

Έστω A ένας τελεστής στον χώρο H και $|q| < 1$. Τότε

$$\text{conv } q\sigma(A) \subseteq \overline{W_q(A)}, \quad (2.8)$$

όπου με $\overline{W_q(A)}$ συμβολίζεται η κλειστότητα του $W_q(A)$.

Επιπλέον, εάν $A \neq \lambda I$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$, και αν $|q| < 1$, τότε το $\text{conv } \{q\sigma(A)\}$ βρίσκεται στο εσωτερικό του $\overline{W_q(A)}$.

Απόδειξη.

Για την σχέση (2.8) αρκεί να δείξουμε ότι

$$\text{conv } \{q\sigma_b(A)\} \subseteq \overline{W_q(A)},$$

όπου $\sigma_b(A)$ είναι το σύνολο των συνοριακών σημείων του $\sigma(A)$.

Έστω $\lambda \in \sigma_b(A)$. Αφού το $\sigma_b(A)$ ανήκει στο προσεγγιστικό φάσμα του A (βλ. στο βιβλίο [5]) υπάρχει ακολουθία $\{A_m\}_{m=1}^\infty$ τέτοια ώστε

$$\|A_m - A\| \rightarrow 0, \quad \text{καθώς } m \rightarrow \infty$$

και το $\bar{\lambda}$ είναι μία ιδιοτιμή του A_m^* . Έστω

$$y_m = qx_m + \sqrt{1 - |q|^2}z_m,$$

όπου x_m είναι ένα κανονικοποιημένο ιδιοδιάνυσμα του A_m^* που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\bar{\lambda}$, και $z_m \perp x_m$, $\|z_m\| = 1$. Τότε

$$(y_m, x_m) = q, \quad (Ay_m, x_m) = q\lambda \quad \text{και} \quad q\lambda \in W_q(A).$$

Από το Θεώρημα 2.1.5,

$$\inf\{|q\lambda - z| : z \in W_q(A)\} = 0$$

και προκύπτει η σχέση (2.8).

Μένει να αποδείξουμε το δεύτερο μέρος του Θεωρήματος. Υποθέτουμε ότι το $\sigma_b(A)$ περιέχει δύο σημεία λ και μ , διαφορετικά μεταξύ τους. Υπάρχουν ακολουθίες

$$\{x_m\}_{m=1}^\infty, \quad \{y_m\}_{m=1}^\infty$$

μοναδιαίων διανυσμάτων στον χώρο H τέτοιες ώστε

$$Ax_m - \lambda x_m \rightarrow 0, \quad Ay_m - \mu y_m \rightarrow 0.$$

Ισχυριζόμαστε ότι

$$\min \left(\inf_{w \in \mathbb{C}} \|x_m - wy_m\|, \inf_{w \in \mathbb{C}} \|y_m - wx_m\| \right) \geq \epsilon > 0, \quad (2.9)$$

όπου το ϵ εξαρτάται από το m .

Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι η (2.9) δεν ισχύει, θα έχουμε

$$x_m - w_m y_m \rightarrow 0, \quad \text{για κάποια } w_m \in \mathbb{C}.$$

Η ακολουθία $\{w_m\}_{m=1}^{\infty}$ θα είναι φραγμένη.

Είναι

$$\|\lambda x_m - w_m \mu y_m\| \leq \|\lambda x_m - A x_m\| + \|A x_m - w_m A y_m\| + \|w_m A y_m - w_m \mu y_m\| \rightarrow 0$$

και

$$\|\lambda x_m - \mu x_m\| \leq \|\lambda x_m - w_m \mu y_m\| + \|w_m \mu y_m - \mu x_m\| \rightarrow 0,$$

που έρχονται σε αντίθεση με την υπόθεση ότι $\lambda \neq \mu$.

Για κάθε $\mu = 1, 2, \dots$, ορίζουμε έναν τελεστή A_m στον χώρο H με

$$A_m x_m = \lambda x_m, \quad A_m y_m = \mu y_m, \quad A_m z = A z \quad \text{για κάθε } z \perp \text{span} \{x_m, y_m\}.$$

Από την ανισότητα (2.9) φαίνεται ότι το A_m είναι καλά ορισμένο και

$$\|A_m - A\| \rightarrow 0.$$

Έστω \hat{A}_m να είναι ο περιορισμός του A_m στο $\text{span} \{x_m, y_m\}$. Σε κατάλληλη ορθοκανονική βάση στο $\text{span} \{x_m, y_m\}$ έχουμε ότι

$$\hat{A}_m = \begin{pmatrix} \lambda & \eta_m \\ 0 & \mu \end{pmatrix},$$

και λόγω της σχέσης (2.9) το σύνολο $\{\eta_m\}_{m=1}^{\infty}$ είναι φραγμένο.

Στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.3 είδαμε ότι

$$W_q(A_m) \supseteq W_q(B),$$

με

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

το οποίο είναι ένας ελλειπτικός δίσκος με το $q\lambda$ να είναι μία από τις εστίες.

Εάν το $q\lambda$ δεν βρίσκεται στο εσωτερικό του $\overline{W_q(A)}$, τότε λόγω της κυρτότητας του $\overline{W_q(A)}$ προκύπτει ότι κάποια σημεία του $W_q(B)$ θα έχουν θετική απόσταση από το $\overline{W_q(A)}$.

Τέλος, υποθέτουμε ότι το $\sigma_b(A)$ αποτελείται από ένα μόνο σημείο. Τότε το $\sigma(A)$ είναι ένα μονοσύνολο, δηλαδή

$$\sigma(A) = \{\lambda\}.$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $\lambda = 0$ και $A \neq 0$.

Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχουν ορθοκανονικά διανύσματα x_1 και x_2 τέτοια ώστε

$$X^* A X = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

όπου το X είναι η ορθογώνια προβολή από το H στο $\text{span}\{x_1, x_2\}$ και τα $a, \beta \in \mathbb{C}$ δεν είναι και τα δύο μηδέν.

Υποθέτουμε πρώτα ότι $\text{Ker}A \neq \{0\}$. Αν υπάρχει y τέτοιο ώστε $Ay = x$ για κάποιο μη μηδενικό $x \in \text{Ker}\{A\}$, τότε επιλέγουμε το x_1 να είναι πολλαπλάσιο του x και το x_2 πολλαπλάσιο του y για να ικανοποιείται η σχέση (2.10).

Αν δεν υπάρχει τέτοιο y , τότε

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$$

και

$$H = \text{Ker}A \oplus (\text{Ker}A)^\perp,$$

όπου $\text{Ker}A_1 = \{0\}$ και μπορούμε να θεωρήσουμε το A_1 στην θέση του A .

Οπότε υποθέτουμε ότι $\text{Ker}A = \{0\}$. Υπάρχει $x \neq 0$ τέτοιο ώστε $(Ax, x) = 0$.

Έστω $y = Ax \neq 0$. Επιλέγουμε

$$z \perp \text{span}\{x, y\}$$

τέτοιο ώστε το Az να μην είναι ορθογώνιο στο z . Τέτοιο z υπάρχει διότι διαφορετικά $(Az, z) = 0$ για κάθε

$z \perp \text{span}\{x, y\}$ και συνεπώς $X^*AX = 0$ εάν το X είναι η ορθογώνια προβολή από το H στο $\text{span}\{x, y\}$. Επομένως

$$\text{rank}A \leq 4,$$

που έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση ότι $\text{Ker}A = \{0\}$.

Υποθέτουμε τώρα ότι το x_1 είναι πολλαπλάσιο του x και το x_2 είναι πολλαπλάσιο του z και προκύπτει η ισότητα (2.10). \square

Βασιζόμενοι στο Θεώρημα 2.8 συμπεραίνουμε ότι η Πρόταση 2.1.5 ισχύει και στην απειροδιάστατη περίπτωση.

Το δεύτερο μέρος του Θεωρήματος 2.1.2 στην απειροδιάστατη περίπτωση μπορεί να αποδειχθεί χρησιμοποιώντας τα ίδια επιχειρήματα που χρησιμοποιήσαμε στην απόδειξη του 2.1.2.

Τέλος μένει να ελέγξουμε το Θεώρημα 2.1.4 στην απειροδιάστατη περίπτωση. Για την περίπτωση $q = 0$ θα χρειαστούμε την επόμενη Πρόταση:

Πρόταση 2.2.1.

Έστω A ένας τελεστής στον χώρο H και

$$R = \min\{\|A - \lambda I\| : \lambda \in \mathbb{C}\}$$

. Τότε

$$W_0(A) = \{z : |z| < R\} \quad \text{ή} \quad W_0(A)\{z : |z| \leq R\} \quad (2.11)$$

Απόδειξη.

Το σύνολο $W_0(A)$ είναι κυκλικό, δηλαδή

$$\mu W_0(A) = W_0(A)$$

για κάθε $\mu \in \mathbb{C}$ με $|\mu| = 1$, και περιέχει το 0, επομένως η σχέση (2.11) ισχύει για κάποιο R . Μένει να υπολογίσουμε αυτό το R .

Για κάθε ζεύγος ορθογώνιων και μοναδιαίων διανυσμάτων $x, y \in H$ και για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$, έχουμε

$$(Ay, x) = ((A - \lambda I)y, x) \leq \|A - \lambda I\|,$$

οπότε οι εγκλεισμοί \subseteq στην σχέση (2.11) ισχύουν.
Μένει να δείξουμε τους αντίθετους εγκλεισμούς. Έστω

$$\Omega = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 2\|A\|\},$$

και για δοθέν $\epsilon > 0$ επιλέγουμε $\{\lambda_j\}_{j=1}^N$ στο Ω τέτοια ώστε

$$\bigcup_{j=1}^N \{z \in \mathbb{C} : |z - \lambda_j| < \epsilon\} \supseteq \Omega.$$

Για κάθε $j = 1, \dots, N$, έστω $x_j \in H$ τέτοιο ώστε

$$\|x_j\| = 1 \quad \text{και} \quad \|(A - \lambda_j I)x_j\| > \|A - \lambda_j I\| - \epsilon.$$

Έστω U μία ισομετρία στο

$$\text{span} \{x_1, \dots, x_N, (A - \lambda_1 I)x_1, \dots, (A - \lambda_N I)x_N\}.$$

Τότε για κάθε $\lambda \in \Omega$, μπορούμε να επιλέξουμε λ_j με $|\lambda - \lambda_j| < \epsilon$ ώστε

$$\|U^*AU - \lambda I\| \geq \|U^*AU - \lambda_j I\| - |\lambda_j - \lambda| \geq \|A - \lambda_j I\| - 2\epsilon. \quad (2.12)$$

Αφού για $\lambda \notin \Omega$, έχουμε

$$\|U^*AU - \lambda I\| \geq |\lambda| - \|U^*AU\| \geq \|A\|,$$

προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \min_{\lambda \in \mathbb{C}} \|U^*AU - \lambda I\| &= \min_{\lambda \in \Omega} \|U^*AU - \lambda I\| \\ &\geq \min_{\lambda \in \Omega} \|A - \lambda I\| - 2\epsilon \\ &\geq \min_{\lambda \in \mathbb{C}} \|A - \lambda I\| - 2\epsilon \end{aligned} \quad (2.13)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την σχέση (2.12).

Εφόσον το U^*AU έχει πεπερασμένη διάσταση, από τα αποτελέσματα της εργασίας [23] έχουμε ότι

$$W_0(A) \supseteq W_0(U^*AU) = \{z : |z| < \min_{\lambda \in \mathbb{C}} \|U^*AU - \lambda I\|\}.$$

Από την (2.13) και αφού το $\epsilon > 0$ είναι τυχαίο, προκύπτει ο εγκλεισμός \supseteq στην σχέση (2.11). \square

Θεώρημα 2.2.2.

Υποθέτουμε ότι $|q| < 1$ και A είναι ένας τελεστής στον χώρο H , με $A \neq \lambda I$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$. Εάν το $\gamma \in W_q(A)$ είναι ένα συνοριακό σημείο του $W_q(A)$, τότε το γ είναι ένα διαφορίσιμο σημείο του συνόρου.

Απόδειξη.

Η περίπτωση $q = 0$ προκύπτει από την Πρόταση 2.2.1, οπότε υποθέτουμε ότι $|q| > 0$. Έστω C_q ο τελεστής στον χώρο H που ορίζεται ως εξής:

$$C_q x = q(x, e_1)e_1 + \sqrt{1 - |q|^2}(x, e_2)e_2,$$

όπου e_1, e_2 είναι ένα σταθερό ορθοκανονικό ζεύγος διανυσμάτων στον χώρο H .

Υποθέτουμε ότι το $\gamma \in W_q(A)$ είναι συνοριακό σημείο του $W_q(A)$ τέτοιο ώστε να

υπάρχουν άπειρες ευθείες που να διέρχονται από το γ , με την ιδιότητα ότι το $W_q(A)$ βρίσκεται στην μία πλευρά αυτών ευθειών.

Έστω

$$\gamma = \text{tr} (C_q X^* A X)$$

για κάποιο unitary X .

Από την απόδειξη του Θεωρήματος 2.1 στην εργασία [11] μπορούμε να συμπεράνουμε ότι τα

$$\hat{A} := X^* A X \quad \text{και} \quad C_q$$

αντιμετατίθενται. Επομένως το e_1 είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του \hat{A} , για παράδειγμα $\hat{A}e_1 = \mu e_1$ για κάποιο μ , και $\gamma = q\mu$.

Άρα το $\gamma \in q\sigma(A)$, που λόγω του Θεωρήματος 2.8 θα ισχύει μόνο αν $A = \lambda I$. □

Κεφάλαιο 3

q - Αριθμητικό Πεδίο και Κέλυφος Davis - Wielandt

Στο κεφάλαιο αυτό περιγράφεται το q - αριθμητικό πεδίο ενός τετραγωνικού πίνακα με την χρήση του κελύφους Davis - Wielandt του πίνακα. Το αποτέλεσμα χρησιμοποιείται για την παραγωγή ενός αλγορίθμου που κατασκευάζει το q - αριθμητικό πεδίο ενός τετραγωνικού πίνακα.

3.1 Το q - Αριθμητικό Πεδίο ως Ένωση Δίσκων

Έστω M_n η άλγεβρα των $n \times n$ μιγαδικών πινάκων. Για $A \in M_n$ και σταθερή παράμετρο $q \in \mathbb{C}$ με $|q| \leq 1$, έχουμε ήδη ορίσει το q - αριθμητικό πεδίο του A ως το σύνολο:

$$W_q(A) = \{x^*Ay : x, y \in \mathbb{C}^n, |x| = |y| = 1, x^*y = q\}$$

Η q - αριθμητική ακτίνα $w_q(A)$ είναι το μέγιστο μέτρο για κάθε σημείο στο $W_q(A)$. Αν $q = 1$, το $W_q(A)$ ανάγεται στο (κλασικό) αριθμητικό πεδίο που συμβολίζεται:

$$W(A) = \{x^*Ax, x \in \mathbb{C}^n, |x| = 1\}$$

Ο Tsing [24] έδειξε ότι το $W_q(A)$ είναι η ένωση κυκλικών δίσκων:

$$W_q(A) = \bigcup_x \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - qx^*Ax| \leq \sqrt{1 - q^2} (\|Ax\|^2 - |x^*Ax|^2)^{1/2} \right\} \quad (3.1)$$

όπου το x διατρέχει όλα τα μοναδιαία διανύσματα.

Στο Κεφάλαιο 1 είδαμε αρκετές σημαντικές ιδιότητες για το q - αριθμητικό πεδίο, όπως:

- (i) $W_q(\alpha A + \beta I_n) = \alpha W_q(A) + \beta q$
- (ii) $W_q(U^*AU) = W_q(A)$, U ορθομοναδιαίος
- (iii) $W_{qz} = zW_q(A)$, $z \in \mathbb{C}, |z| = 1$.

Λόγω των (i) και (iii) μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0 \leq q \leq 1$.

Σκοπός είναι να περιγράψουμε το σύνορο του q - αριθμητικού πεδίου ενός τετραγωνικού πίνακα εμπλέκοντας το κέλυφος Davis - Wielandt. Το αποτέλεσμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να παραχθεί ένας αλγόριθμος που κατασκευάζει το q - αριθμητικό πεδίο ενός τετραγωνικού πίνακα. Επιπλέον, θεωρούμε μια ειδική κλάση πινάκων και υπολογίζουμε το q - αριθμητικό πεδίο με τις μεθόδους που ερευνώνται.

3.2 Ορισμός του Κέλυφους Davis - Wielandt

Ορισμός 3.2.1.

Έστω $A \in M_n$. Το κέλυφος Davis - Wielandt του πίνακα A ορίζεται ως εξής:

$$DW(A) = \{(x^*Ax, x^*A^*Ax) : x \in \mathbb{C}^n, |x| = 1\}. \quad (3.2)$$

Για κάθε $A \in M_n$, το άνω σύνορο του $DW(A)$ ορίζεται ως:

$$\partial_+ DW(A) = \{(z, h(z)) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} : z \in W(A)\} \quad (3.3)$$

όπου

$$h(z) = \max \{w \in \mathbb{R} : (z, w) \in DW(A)\}.$$

Τότε η ένωση δίσκων (3.1) του Tsing γράφεται ως εξής:

$$W_q(A) = \bigcup_{z \in W(A)} \left\{ \xi \in \mathbb{C} : |\xi - qz| \leq \sqrt{1 - q^2} \sqrt{h(z) - |z|^2} \right\} \quad (3.4)$$

Από την σχέση (3.4),

$$\partial W_q(A) \subseteq \bigcup_{z \in W(A)} \left\{ \xi \in \mathbb{C} : |\xi - qz| = \sqrt{1 - q^2} \sqrt{h(z) - |z|^2} \right\} \quad (3.5)$$

Η ποσότητα $\sqrt{h(z) - |z|^2}$ είναι χρήσιμη για τον καθορισμό του q - αριθμητικού πεδίου. Ορίζουμε την συνάρτηση

$$\Phi(z) = \sqrt{h(z) - |z|^2}, \quad z \in W(A).$$

Οι συναρτήσεις $h(z)$ και $\Phi(z)$ είναι μη αρνητικές, ημισυνεχείς κοίλες συναρτήσεις στο $W(A)$. Υπενθυμίζεται ότι ο $A \in M_n$ είναι ουσιωδώς ερμιτιανός αν ο $\alpha A + bI$ είναι ερμιτιανός για κάποια $\alpha, b \in \mathbb{C}$, τέτοια ώστε $|\alpha| = 1$, και γνωρίζουμε ότι ο A είναι ουσιωδώς ερμιτιανός αν και μόνο αν το $W(A)$ είναι ευθύγραμμο τμήμα. Αν το $W(A)$ έχει ένα εσωτερικό σημείο στο \mathbb{C} , τότε η Φ είναι συνεχής στο εσωτερικό $W(A)^\circ$ του $W(A)$ και η Φ είναι συνεχής σε μια κλειστή περιοχή

$$\{z_0 + r \exp(i\theta) : \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, 0 \leq r \leq \epsilon\}$$

που περιέχεται στο $W(A)$, όπου $0 < \theta_2 - \theta_1 < \pi, \epsilon > 0$.

3.3 Αποτελέσματα και Αποδείξεις

Παρακάτω παρουσιάζονται ορισμένα αποτελέσματα για την συνάρτηση Φ , που θα χρησιμοποιηθούν για την παραγωγή ενός αλγορίθμου που σχεδιάζει το q - αριθμητικό πεδίο ενός τετραγωνικού πίνακα.

Θεώρημα 3.3.1.

- (i) Η συνάρτηση Φ έχει μοναδικό μέγιστο σημείο.
- (ii) Έστω ότι η Φ είναι συνεχώς διαφορίσιμη σε μία περιοχή U του $z_0 \in W(A)^\circ$ και $\text{grad}\Phi(z_0) = 0$. Τότε το σημείο z_0 είναι το μοναδικό μέγιστο σημείο της Φ .

Απόδειξη.

- (i) Αν ο A είναι ουσιαδώς ερμιτιανός, μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$W(A) = [a, b] \subset \mathbb{R}$$

και τότε έχουμε

$$\Phi(ta + (1-t)b) = (b-a)\sqrt{t(1-t)}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Ως εκ τούτου η συνάρτηση Φ έχει μοναδικό μέγιστο σημείο

$$\frac{(a+b)}{2}.$$

Αν ο A δεν είναι ουσιαδώς ερμιτιανός, τότε το $W(A)$ έχει ένα εσωτερικό σημείο. Αφού η Φ είναι φραγμένη, παίρνουμε συγκλίνουσα ακολουθία

$$\{z_n : n \in \mathbb{N}\} \subset W(A), z_n \rightarrow z_0,$$

και

$$\lim \Phi(z_n) = \sup\{\Phi(z) : z \in W(A)\}.$$

Η άνω ημισυνέχεια της Φ διαβεβαιώνει ότι το z_0 είναι το μέγιστο σημείο της Φ . Υποθέτουμε ότι η Φ έχει και άλλο μέγιστο σημείο, στο z_1 . Αφού η Φ είναι κοίλη, προκύπτει ότι η

$$\Phi^2(z) = h(z) - |z|^2$$

είναι συνεχής στο ευθύγραμμο τμήμα $[z_0, z_1]$. Ως εκ τούτου η συνάρτηση $h(z)$ περιορισμένη στο $[z_0, z_1]$ γίνεται

$$h(z) = |z|^2 + c, z \in [z_0, z_1]$$

για κάποια σταθερά c . Όμως τότε η $h(z)$ είναι αυστηρά κυρτή σε αυτό το ευθύγραμμο τμήμα, που έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση ότι η $h(z)$ είναι κοίλη.

- (ii) Θα δείξουμε ότι το z_0 είναι μέγιστο της Φ , και είναι επομένως το μοναδικό μέγιστο σημείο, από (i).

Έστω ένα σημείο $z_1 \in W(A)$ τέτοιο ώστε

$$\Phi(z_1) > \Phi(z_0)$$

και επιλέγουμε $t_1 \in (0, 1)$ αρκετά μικρό, ώστε

$$z_2 = (1-t_1)z_0 + t_1z_1 \in U.$$

Τότε

$$\Phi(z_2) \geq (1-t_1)\Phi(z_0) + t_1\Phi(z_1) > \Phi(z_0).$$

Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f(t) = \Phi((1-t)z_0 + tz_2), 0 \leq t \leq 1.$$

Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει σημείο $0 < t_1 < 1$ τέτοιο ώστε

$$f'(t_2) = f(1) - f(0) = \Phi(z_2) - \Phi(z_0) > 0.$$

Τότε $f'(0) > 0$ αφού η f είναι κοίλη. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με το ότι $\text{grad}\Phi(z_0) = 0$.

□

Από τη σχέση (3.5) ορίζουμε

$$B_q(A) = \left\{ z \in W(A) : qz + r\sqrt{1 - |q|^2}\Phi(z) \in \partial W(A) \text{ για κάποιο } r \in \mathbb{C}, |r| = 1 \right\}$$

και προκύπτει το ακόλουθο:

Θεώρημα 3.3.2.

Έστω $A \in M_n$ και $0 < q < 1$. Τότε

$$B_q(A) \cap \{(x + iy) \in W(A)^\circ : \Phi \text{ είναι συνεχώς διαφορίσιμη σε μια περιοχή του } x + iy\} \\ \subset \{x + iy \in W(A)^\circ : \Phi_x(x + iy)^2 + \Phi_y(x + iy)^2 = q^2/(1 - q^2)\}$$

Απόδειξη.

Πρώτα δείχνουμε ότι για κάθε $\eta \in \mathbb{R}$, υπάρχει μοναδικό σημείο $z_0 \in W_q(A)$ τέτοιο ώστε

$$\Re(z_0 e^{-i\eta}) = \max \{ \Re(z e^{-i\eta}) : z \in W_q(A) \}$$

Η ύπαρξη είναι τετριμμένη. Υποθέτουμε ότι w_1 και w_2 είναι ξεχωριστά σημεία στο

$$S_\eta = \{w \in W_q : \Re(w e^{-i\eta}) = \max \{ \Re(z e^{-i\eta}) : z \in W_q(A) \}\}$$

Τότε

$$\{s w_1 + (1 - s) w_2 : 0 \leq s \leq 1\} \subset S_\eta. \quad (3.6)$$

Υποθέτουμε ότι $z_1 \neq z_2$ είναι δύο σημεία στο $W(A)$ τέτοια ώστε

$$w_j = q z_j + \sqrt{1 - q^2} e^{i\eta} \Phi(z_j), \quad j = 1, 2 \quad (3.7)$$

Γνωρίζουμε από [10] ότι το Φ είναι αυστηρά κοίλο στο $W(A)$, δηλαδή

$$\frac{\Phi(x) + \Phi(y)}{2} < \Phi\left(\frac{x + y}{2}\right) \text{ για κάθε } x, y \in W(A).$$

Από το γεγονός αυτό, σε συνδυασμό με την σχέση (3.7), προκύπτει ότι

$$\Re\left(\left(q \frac{z_1 + z_2}{2} + \sqrt{1 - q^2} e^{i\eta} \Phi\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right)\right) e^{-i\eta}\right) > \Re\left(\frac{w_1 + w_2}{2} e^{-i\eta}\right)$$

που έρχεται σε αντίθεση με την σχέση (3.6), για $s = \frac{1}{2}$.

Επομένως προκύπτει η μοναδικότητα.

Αν το $z_0 \in B_q(A)$ και η Φ είναι συνεχώς διαφορίσιμη σε μία περιοχή U του z_0 , τότε το διάνυσμα

$$(\Phi_x(z_0), \Phi_y(z_0)) \neq 0.$$

Διαφορετικά έχουμε ότι

$$\text{grad}\Phi(z_0) = 0.$$

Επιλέγουμε έναν πραγματικό αριθμό θ τέτοιο ώστε

$$q z_0 + \sqrt{1 - q^2} e^{i\theta} \Phi z_0 \in \partial W_q(A). \quad (3.8)$$

Θεωρούμε συναρτήσεις

$$g(t) = q(z_0 + te^{i\theta}) + \sqrt{1 - q^2}e^{i\theta}\Phi(z_0 + te^{i\theta}) \quad (3.9)$$

και

$$g_1(t) = e^{-i\theta}(g(t) - g(0)) \quad (3.10)$$

για $t \in \mathbb{R}$ με $|t|$ αρκετά μικρό. Παρατηρούμε ότι μπορούμε να εκφράσουμε το $g_1(t)$ ως προς Φ :

$$g_1(t) = qt + \sqrt{1 - q^2}(\Phi(z_0 + te^{i\theta}) - \Phi(z_0)).$$

Από (3.8), το $g_1(t)$ είναι τοπικό μέγιστο της συνάρτησης $g_1(t)$.

Όμως $g_1'(0) = q > 0$, που είναι αδύνατο. Επομένως υπάρχει $a > 0$ και $\psi \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$(\Phi_x(z_0), \Phi_y(z_0)) = -a(\cos \psi, \sin \psi). \quad (3.11)$$

Γνωρίζουμε ([14], Theorem 3) ότι το όριο του $W_q(A)$ είναι C^1 - καμπύλη.

Ως εκ τούτου το οριακό σημείο

$$p = qz_0 + \sqrt{1 - q^2}e^{i\eta}\Phi(z_0) \in \partial W_q(A)$$

για κάποιο η έχει μοναδική εφαπτομένη στο $\partial W_q(A)$ που γράφεται:

$$\{p + te^{i(\eta + \frac{\pi}{2})} : t \in \mathbb{R}\}$$

Ορίζουμε δύο συναρτήσεις $h(t)$ και $h_1(t)$, αντικαθιστώντας το θ με η στις (3.9) και (3.10) αντίστοιχα.

$$h(t) = q(z_0 + e^{i\eta}) + \sqrt{1 - q^2}e^{i\eta}\Phi(z_0 + e^{i\eta}), \quad (3.12)$$

και

$$h_1(t) = e^{i\eta}(h(t) - h(0))$$

για $t \in \mathbb{R}$. Τότε η $h_1(t)$ έχει μέγιστο στο $t = 0$, και επομένως $h_1'(0) = 0$. Από την σχέση (3.12) προκύπτει ότι

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi(z_0 + te^{i\eta}) = -\frac{q}{\sqrt{1 - q^2}}. \quad (3.13)$$

Εδώ πρέπει να σημειωθεί ότι η περιοχή

$$\{z \in W(A) : \Phi(z) \geq \Phi(z_0)\}$$

είναι ένα κυρτό σύνολο. Από το Θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων υπάρχει C^1 - καμπύλη Γ σε μία περιοχή U του z_0 τέτοια ώστε

$$\Gamma = \{z \in U : \Phi(z) = \Phi(z_0)\},$$

και η εφαπτομένη του Γ στο z_0 είναι:

$$\{z_0 + e^{i(\psi + \frac{\pi}{2})} : s \in \mathbb{R}\}$$

Επιπλέον

$$\begin{aligned} & \{qz + s \exp(i\eta)\sqrt{1 - q^2}\Phi(z) : z \in \Gamma : 0 \leq s \leq 1\} \\ & = \{qz + s \exp(i\eta)\sqrt{1 - q^2}\Phi(z_0) : z \in \Gamma, 0 \leq s \leq 1\} \subset W_q(A). \end{aligned}$$

Αν το η και το ψ δεν έχουν διαφορά που να είναι πολλαπλάσιο του 2π θα υπάρχει ένα σημείο $z_1 \in W_q(A)$ κοντά στο p τέτοιο ώστε $\Re(z_1 e^{-i\eta}) > \Re(p e^{-i\eta})$, που έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση για το p . Επομένως $\eta = \psi \pmod{2\pi}$, και το ζητούμενο προκύπτει από τις (3.11) και (3.12). \square

Το ακόλουθο αποτέλεσμα βρίσκεται στο [21] και είναι επίσης άμεσο αποτέλεσμα του Θεωρήματος (3.3.2)

Πόρισμα 3.3.1.

Εστω $A = \text{diag}(a_1, a_2, a_3)$ ένας ορθομοναδιαίος πίνακας. Τότε

$$B_q(A) \cap \text{conv}\{a_1, a_2, a_3\}^\circ = \{z : z \in \text{conv}\{a_1, a_2, a_3\}^\circ, |z| = q\}$$

Απόδειξη.

Σε αυτή την περίπτωση,

$$\Phi(z) = (1 - |z|^2)^{1/2},$$

και

$$\left\{ (x + iy) : \Phi_x(x + iy)^2 + \Phi_y(x + iy)^2 = \frac{q^2}{1 - q^2} \right\} = \{(x + iy) : x^2 + y^2 = q^2\}.$$

Όμως, αν $z = qe^{i\theta} \in \text{conv}(a_1, a_2, a_3)^\circ$ για κάποιο θ , τότε

$$qz + \sqrt{1 - q^2}e^{i\theta}\Phi(z) = q^2e^{i\theta} + (1 - q^2)e^{i\theta} = e^{i\theta} \in \partial W_q(A).$$

\square

Στη συνέχεια υπολογίζουμε την περιοχή του Θεωρήματος (3.3.2) για κάποιους συγκεκριμένους πίνακες. Τα παραδείγματα προέρχονται από το [4].

Παράδειγμα 3.3.1.

Εστω

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{bmatrix}, \quad 0 < \beta < \alpha.$$

Από το Ελλειπτικό Θεώρημα για το κλασικό αριθμητικό πεδίο έχουμε ότι

$$W(A) = \{x + iy : (x, y)^2, ((\alpha + \beta)/2)^{-2}x^2 + ((\alpha - \beta)/2)^{-2}y^2 \leq 1\}$$

Στο [20] (επίσης [10], [21]) αποδεικνύεται ότι

$$\Phi(x + iy) =$$

$$\left((\alpha^2 + \beta^2)/2 - (x^2 + y^2) + (1/2)(\alpha^2 - \beta^2)\sqrt{1 - 4(\alpha - \beta)^{-2}x^2 - 4(\alpha - \beta)^{-2}y^2} \right)^{1/2}.$$

Ως εκ τούτου

$$\Phi_x(x + iy)^2 + \Phi_y(x + iy)^2 = 4 \frac{(\alpha - \beta)^2 x^2 + (\alpha + \beta)^2 y^2}{(\alpha^2 - \beta^2)^2 - 4(\alpha - \beta)^2 x^2 - 4(\alpha + \beta)^2 y^2}.$$

Επιπλέον, για $0 < q < 1$,

$$\Phi_x \left(q \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \theta + iq \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \theta \right)^2 + \Phi_y \left(q \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \theta + iq \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \theta \right)^2 = \frac{q^2}{1 - q^2},$$

και επομένως έχουμε:

$$B_q(A) = \left\{ q \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \theta + iq \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \theta : 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\}.$$

Παράδειγμα 3.3.2.

Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \text{diag}(a_1, a_2, a_3),$$

όπου a_1, a_2, a_3 είναι κορυφές ενός τριγώνου. Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$ τέτοιο ώστε

$$|a_1 - z_0| = |a_2 - z_0| = |a_3 - z_0| = R.$$

Τότε από το Πόρισμα 3.3.1

$$\left\{ (x + iy) \in W(A)^\circ : \Phi_x(x + iy)^2 + \Phi_y(x + iy)^2 \leq \frac{q^2}{1 - q^2} \right\} = \{(x + iy) \in \text{conv}\{a_1, a_2, a_3\}^\circ : |x + iy| \leq Rq\}. \quad (3.14)$$

χρησιμοποιώντας το παραπάνω μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν 4×4 διαγώνιο πίνακα A για τον οποίο το σύνολο (3.14) δεν είναι κυρτό.

Για παράδειγμα, έστω

$$A = \text{diag}(a_1, a_2, a_3, a_4),$$

όπου

$$a_1 = \frac{2}{3}, \quad a_2 = -\frac{4}{3}, \quad a_3 = i\frac{\sqrt{20}}{3}, \quad a_4 = -i\frac{\sqrt{20}}{3}.$$

Από το Θεώρημα 1.1 στην εργασία [21] είναι

$$W_q(A) = \bigcup \{W_q(\text{diag}(a_{j_1}, a_{j_2}, a_{j_3})) : 1 \leq j_1 \leq j_2 \leq j_3 \leq 4\}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$A_1 = \frac{1}{2} \left(\text{diag}(a_1, a_3, a_4) + \frac{4}{3}I_3 \right)$$

και

$$A_2 = \frac{2}{3} \left(\text{diag}(a_2, a_3, a_4) - \frac{1}{6}I_3 \right)$$

είναι 3×3 ορθομοναδιαίοι πίνακες. Τότε τα σημεία a_1, a_3, a_4 βρίσκονται πάνω στον κύκλο

$$\left(x + \frac{4}{3}\right)^2 + y^2 = 4,$$

και το a_2 είναι ένα εσωτερικό σημείο αυτού κύκλου.

Όμοια, τα σημεία a_2, a_3, a_4 βρίσκονται πάνω στον κύκλο

$$\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4},$$

και το σημείο a_1 είναι ένα εσωτερικό σημείο αυτού του κύκλου. Ως εκ τούτου, από το Πόρισμα 3.3.1

$$\left\{ (x + iy) \in W(A)^\circ : \Phi_x(x + iy)^2 + \Phi_y(x + iy)^2 \leq \frac{q^2}{1 - q^2} \right\} = \left\{ z = x + iy : x > 0, z \in \text{conv}\{a_1, a_3, a_4\} \mid |z + \frac{4}{3}| \leq 2q \right\} \cup \left\{ z = x + iy : x < 0, z \in \text{conv}\{a_2, a_3, a_4\}, |z - \frac{1}{6}| \leq (3/2)q \right\}.$$

Είναι προφανές ότι αυτό δεν είναι ένα κυρτό σύνολο.

Μέχρι στιγμής εστιάσαμε στα σημεία $z \in W(A)^\circ$ στα οποία η Φ είναι διαφορίσιμη. Τώρα θα εξετάσουμε τα μη διαφορίσιμα σημεία $z \in W(A)^\circ$ της Φ .

Λήμμα 3.3.1.

Υποθέτουμε ότι $F(x, y, z) \in \mathbb{C}[x, y, z]$ είναι ένα πολυώνυμο με $\deg(F) \geq 1$ και $G(x, y, z) \in \mathbb{C}[x, y, z]$ ικανοποιεί μία από τις επόμενες δύο υποθέσεις:

(i) η G είναι ένα πολυώνυμο με $\deg(G) \geq 1$ και ικανοποιεί $G \neq \lambda F$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$,

(ii)

$$G = \frac{\partial F}{\partial z} \quad \text{και} \quad \deg_z(G) = 1.$$

Τότε υπάρχει μη μηδενικό πολυώνυμο $L \in \mathbb{C}[x, y]$ τέτοιο ώστε

$$\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : F(x, y, z) = G(x, y, z) = 0 \text{ για κάποιο } z\} \subset \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : L(x, y) = 0\}.$$

Απόδειξη.

Υποθέτουμε ότι οι μεγιστοβάθμιοι όροι των F και G , ως προς z , είναι $a_n(x, y)$ και $b_m(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$. Τότε το $a_n(x, y)b_m(x, y)$ είναι ένα μη μηδενικό πολυώνυμο. Παίρνουμε την απαλείφουσα $R(x, y)$ των πολυωνύμων $F(x, y, z)$ και $G(x, y, z)$ ως προς z . Από τις υποθέσεις (i) και (ii), τα F και G δεν έχουν κοινό παράγοντα $K(x, y, z) \in \mathbb{C}[x, y, z]$, με $\deg_z(K) \geq 1$. Επομένως το $R(x, y)$ είναι μη μηδενικό πολυώνυμο. Το \mathbb{C} είναι αλγεβρικά κλειστό ως προς το 0. Οπότε για κάθε $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ με

$$a_n(x, y)b_m(x, y) \neq 0,$$

η ύπαρξη z που να ικανοποιεί

$$F(x, y, z) = G(x, y, z) = 0$$

ισοδυναμεί με το ότι $R(x, y) = 0$. Τότε $L = a_n b_m R$ είναι το ζητούμενο πολυώνυμο. \square

Θεώρημα 3.3.3.

Έστω $A \in M_n$ ένας μη ουσιωδώς ερμιτιανός πίνακας. Τότε υπάρχει ένα μη μηδενικό πραγματικό πολυώνυμο $f(x, y)$ για το οποίο $h(z)$ και $\Phi(z)$ είναι πραγματικές αναλυτικές συναρτήσεις στο ανοιχτό σύνολο

$$\{z = x + iy \in W(A)^\circ : (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) \neq 0\}.$$

Επιπλέον οι Εσσιανοί των $-\Phi^2$ και $-\Phi$ είναι θετικά ορισμένοι στο U . Αν το $\text{grad}(|\text{grad}\Phi|^2)$ παίρνει την τιμή $(0, 0)$ σε ένα σημείο z_0 του U , τότε $\text{grad}\Phi(z_0) = 0$ και το z_0 είναι το μέγιστο σημείο της Φ .

Απόδειξη.

Αφού ο πίνακας A είναι μη ουσιωδώς ερμιτιανός, το πεδίο $W(A)$ περιέχει εσωτερικά σημεία. Εφόσον το $h(z) - |z|^2$ είναι αυστηρά κοίλο στο $W(A)^\circ$, θα είναι θετικό στο $W(A)^\circ$. Επομένως για ένα ανοιχτό υποσύνολο V του $W(A)^\circ$ η συνεχής διαφορισιμότητα του h και του Φ στο V είναι ισοδύναμες. Επειδή το $\partial W(A)$ είναι μονοδιάστατο ημιαλγεβρικό σύνολο, θα υπάρχει μη μηδενικό πολυώνυμο $g_1 \in \mathbb{R}[x, y]$ τέτοιο ώστε

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + iy \in \partial W(A)\} \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g_1(x, y) = 0\}.$$

Από την εργασία [22] γνωρίζουμε ότι το σύνολο του $DW(A)$ είναι ημιαλγεβρικό σύνολο και ως εκ τούτου υπάρχει μη μηδενικό πολυώνυμο $F(x, y, z) \in \mathbb{R}[x, y, z]$ τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} & \{(x, y, h(x + iy)) : (x, y) \in \mathbb{R}^2, x + iy \in W(A)\} \\ & \subset \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = 0\}. \end{aligned}$$

Έστω

$$F = F_1 F_2 \dots F_m$$

ανάγωγη παραγοντοποίηση του F στο $\mathbb{C}[x, y, z]$. Τότε από το Λήμμα 3.3.1, για $1 \leq j \neq k \leq m$, υπάρχει μη μηδενικό μιγαδικό πολυώνυμο $f_{j,k}(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} & \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + iy \in W(A)^\circ, F_j(x, y, z) = F_k(x, y, z) = 0 \text{ για κάποιο } z \in \mathbb{R}\} \\ & \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f_{j,k}(x, y) = 0\} \\ & = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \Re f_{j,k} = \Im f_{j,k}(x, y) = 0\}, \end{aligned}$$

όπου τα $\Re f_{j,k}$ και $\Im f_{j,k}(x, y)$ είναι πραγματικά πολυώνυμα και τουλάχιστον ένα από τα δύο είναι μη μηδενικό. Επομένως, υπάρχει μη μηδενικό πραγματικό πολυώνυμο $g(x, y)$ με την ιδιότητα ότι αν

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + iy \in W(A) \text{ και } g(x, y) \neq 0,$$

τότε ο αριθμός των συνόλων

$$\{j \in \{1, 2, \dots, m\}, F_j(x, y, z) = 0 \text{ για κάποιο } z \in \mathbb{R}\}$$

είναι το πολύ 1. Έστω

$$x_0 + iy_0 \in W(A) \text{ και } g(x_0, y_0) \neq 0.$$

Υποθέτουμε ότι

$$F_j(x_0, y_0, h(x_0, y_0)) = 0.$$

Εάν

$$\frac{\partial F_j}{\partial z}(x_0, y_0, h(x_0, y_0)) \neq 0,$$

τότε, από το θεώρημα των πεπλεγμένων συναρτήσεων, η εξίσωση $F_j(x, y, z) = 0$ για z έχει μοναδική λύση κοντά στο $(x_0, y_0, h(x_0, y_0))$, η εξίσωση h είναι συνεχώς διαφορίσιμη και $F_j(x, y, h(x, y)) = 0$ κοντά στο (x_0, y_0) . Εάν

$$\frac{\partial F_j}{\partial z}(x_0, y_0, h(x_0, y_0)) = 0,$$

τότε από το Λήμμα 3.3.1, υπάρχει μη μηδενικό πραγματικό πολυώνυμο $f_j(x, y)$ τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} & \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : F_j(x, y, z) = \frac{\partial F_j}{\partial z}(x, y, z) = 0 \text{ για κάποιο } z \in \mathbb{R} \right\} \\ & \subset \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : f_j(x, y) = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Επομένως η συνάρτηση $f = g f_1 f_2 \dots f_m$ έχει την ιδιότητα από το πρώτο μέρος του Θεωρήματος.

Μένει να αποδείξουμε το δεύτερο μέρος του Θεωρήματος. Αφού

$$\Phi^2(z) = h(z) - |z|^2$$

και η h είναι κοίλη, ο Εσσιανός πίνακας της $-\Phi^2$ είναι θετικά ορισμένος στο U . Θέτουμε $\Psi = \Phi^2$. Τότε $\Psi(z) > 0$ για $z \in U \subset W(A)^\circ$. Έχουμε ότι

$$\begin{pmatrix} -\Phi_{xx} & -\Phi_{xy} \\ -\Phi_{yx} & -\Phi_{yy} \end{pmatrix} = \frac{\Phi^{-3}}{4} \begin{pmatrix} \Psi_x^2 & \Psi_x \Psi_x \Psi_y \\ \Psi_y \Psi_x & \Psi_y^2 \end{pmatrix} + \frac{\Phi^{-1}}{2} \begin{pmatrix} -\Psi_{xx} & -\Psi_{xy} \\ -\Psi_{yx} & -\Psi_{yy} \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

όπου ο πρώτος πίνακας στο δεξί μέλος της εξίσωσης 3.15 είναι θετικά ημιορισμένος. Οπότε ο Εσσιανός πίνακας της Φ στο U είναι επίσης θετικά ορισμένος.

Εάν

$$\text{grad}(|\text{grad}\Phi|^2)(z_0) = 0,$$

τότε έχουμε ότι

$$\Phi_{xx}(z_0)\Phi_x(z_0) + \Phi_{xy}(z_0)\Phi_y(z_0) = 0,$$

$$\Phi_{yx}(z_0)\Phi_x(z_0) + \Phi_{yy}(z_0)\Phi_y(z_0) = 0,$$

και άρα $\text{grad}\Phi(z_0) = 0$.

□

Τα παραπάνω αποτελέσματα μπορούμε να τα χρησιμοποιήσουμε για να δημιουργήσουμε έναν αλγόριθμο που σχεδιάζει το q - αριθμητικό πεδίο ενός τετραγωνικού πίνακα. Παρακάτω περιγράφεται εν συντομία ο αλγόριθμος που βασίζεται στην εργασία [24].

Για έναν πίνακα $A \in M_n$ θεωρούμε την συνάρτηση

$$F(t, x, y, z) = \det \left(tI_3 + \frac{x}{2} (A + A^*) - i \frac{y}{2} (A - A^*) + zAA^* \right).$$

Έστω $G(t, x, y, z) = 0$ να είναι η δεικτική επιφάνεια του $F(t, x, y, z) = 0$.

Από την μέθοδο Kirpenhahn (βλ. εργασία [3]) το άνω σύνορο βρίσκεται στην καμπύλη

$$\{(x + iy, z) : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, G(1, x, y, z) = 0\}.$$

Η καμπύλη έχει πεπλεγμένη έκφραση

$$w = \Phi(x + iy)$$

που ικανοποιεί την σχέση

$$H(x, y, w) \equiv G(1, x, y, x^2 + y^2 + w^2) = 0. \quad (3.16)$$

Από το Θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων, έχουμε τις εξισώσεις

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{H_x(1, x, y, w)}{H_w(x, y, w)}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{H_y(1, x, y, w)}{H_w(x, y, w)}$$

και επομένως

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 = \frac{H_x(1, x, y, w)^2 + H_y(1, x, y, w)^2}{H_w(1, x, y, w)^2}.$$

Η εξίσωση του Θεωρήματος 3.3.2 θα γίνει

$$H_x(1, x, y, z)^2 + H_y(1, x, y, z)^2 - \frac{q^2}{1 - q^2} H_w(1, x, y, z)^2 = 0. \quad (3.17)$$

Έπειτα βρίσκουμε την καμπύλη $K(x, y) = 0$ που αντιπροσωπεύει το $B_q(A)$, απαλείφοντας την μεταβλητή w από τις εξισώσεις 3.16 και 3.17.

Τότε κάθε συνοριακό σημείο του $W_q(A)$ εκφράζεται ως

$$q(x_0 + iy_0) + \sqrt{1 - q^2} \exp(i\theta) \Phi(x_0 + iy_0),$$

για κάποιο $x_0 + iy_0 \in W_q(A)$, με $K(x_0, y_0)$.

Στο ακόλουθο παράδειγμα χρησιμοποιείται ο αλγόριθμος που περιγράψαμε, για να υπολογιστεί το σύνορο του q - αριθμητικού πεδίου.

Παράδειγμα 3.3.3.

Έστω ο 3×3 μηδενοδύναμος πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Από την εργασία [9] γνωρίζουμε ότι το $W(A)$ είναι η κυρτή θήκη ενός καρδιοειδούς. Υπολογίζουμε ότι

$$\begin{aligned} F(t, x, y, z) &= 4\det \left(tI_3 + \frac{x}{2}(A + A^*) - i\frac{y}{2}(A - A^*) + zAA^* \right) \\ &= 4t^3 - 3tx^2 + x^3 - 3ty^2 + xy^2 + 12t^2z - 4txz - x^2z - y^2z + 4tz^2. \end{aligned}$$

Η επιφάνεια $G(t, x, y, z) = 0$ του $F(t, x, y, z) = 0$ δίνεται από το ακόλουθο πολυώνυμο τετάρτου βαθμού:

$$\begin{aligned} G(t, x, y, z) &= t^2x^2 + 4tx^3 + 20x^4 + t^2y^2 + txy^2 + 36x^2y^2 + 16y^4 \\ &\quad - t^3z - 4t^2xz - 24tx^2z + 24x^3z - 20ty^2z + 24xy^2z \\ &\quad + 4t^2z^2 - 24txz^2 + 24x^2z^2 + 24y^2z^2 - 23tz^3 + 2xz^3 + 9z^4. \end{aligned}$$

Η επιφάνεια

$$\{(x + iy, z) : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, G(1, x, y, z) = 0\}$$

που περιέχει το άνω σύνορο $\partial_+ DW(A)$ παραμετροποιείται ως εξής:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{-3 + 6s^2 - 8su + 2u^2 - 2s^2u^2 + u^4}{3 + 6s^2 + 3s^4 - 16su + 10u^2 - 6s^2u^2 + 3u^4} \\ y &= \frac{-8(-s + u)v}{3 + 6s^2 + 3s^4 - 16su + 10u^2 - 6s^2u^2 + 3u^4} \\ z &= \frac{(1 + s^2 - u^2)(5 + s^2 - u^2)}{3 + 6s^2 + 3s^4 - 16su + 10u^2 - 6s^2u^2 + 3u^4} \end{aligned}$$

όπου

$$s = ut + \sqrt{3 + u^2}(1 - t), \quad u = \cos \theta, \quad v = \sin \theta$$

και τα (θ, t) βρίσκονται στο ορθογώνιο:

$$\left\{ (\theta, t) : -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq t \leq 1 \right\}.$$

Οι τιμές

$$\Phi^2(x + iy) = z - x^2 - y^2$$

παραμετροποιούνται ως εξής:

$$\Phi^2(x + iy) = \frac{2(1 + s^2 - u^2)(3 + s^2 - u^2)}{(3 + 6s^2 + 3s^4 - 16su + 10u^2 - 6s^2u^2 + 3u^4)^2}.$$

Με χρήση του Mathematica από τις σχέσεις (3.16) και (3.17), θα έχουμε:

$$\begin{aligned} K(x, y) = & 223389 + 6311034x + 80606961x^2 + 614046456x^3 \\ & + 3085957422x^4 + 10570898604x^5 + 23894495422x^6 \\ & + 28685321136x^7 - 13083233427x^8 - 121117956966x^9 \\ & - 204227302239x^{10} - 9500400900x^{11} + 168927128424x^{12} \\ & + 273611545920x^{13} + 123125195664x^{11} + 10512585y^2 \\ & + 216978696xy^2 + 1955648628x^2y^2 + 9918540024x^3y^2 \\ & + 29134549626x^4y^2 + 36348112944x^5y^2 \\ & - 68307170940x^6y^2 - 386465976792x^7y^2 \\ & - 672250911651x^8y^2 - 257010845400x^9y^2 \\ & + 860396307192x^{10}y^2 + 1340696575008x^{11}y^2 \\ & + 615625978320x^{12}y^2 + 128364246y^4 + 1613072748xy^4 \\ & + 7314311754x^2y^4 + 4831291728x^3y^4 \\ & - 94191742242x^4y^4 - 439439167332x^5y^4 \\ & - 793507344246x^6y^4 - 139445884368x^7y^4 \\ & + 1752313944528x^8y^4 + 2626670840832x^9y^4 \\ & + 1231251956640x^{10}y^4 - 93649778y^6 \\ & - 3689597232xy^6 - 42755420700x^2y^6 - 203952232152x^3y^6 \\ & - 379475837766x^4y^6 + 173687329296x^5y^6 \\ & + 1783835274672x^6y^6 + 2571948531648x^7y^6 \\ & + 1231251956640x^8y^6 - 3787615971y^8 - 29861084646xy^8 \\ & - 46296778203x^2y^8 + 212688975096x^3y^8 \\ & + 907678302408x^4y^8 + 1258613111232x^5y^8 \\ & + 615625978320x^6y^8 + 7695324729y^{10} \\ & + 61562597832xy^{10} + 184687793496x^2y^{10} \\ & + 246250391328x^3y^{10} + 123125195664x^4y^{10}. \end{aligned}$$

Το σύνορο του $W_q(A)$ μπορούμε να το σχεδιάζουμε αν κατασκευάσουμε το διάγραμμα για το

$$q(x + iy) + \sqrt{1 - q^2} \exp(i\theta) \Phi(x + iy),$$

όπου το $x + iy \in W(A)$ βρίσκεται στην καμπύλη $K(x, y) = 0$.

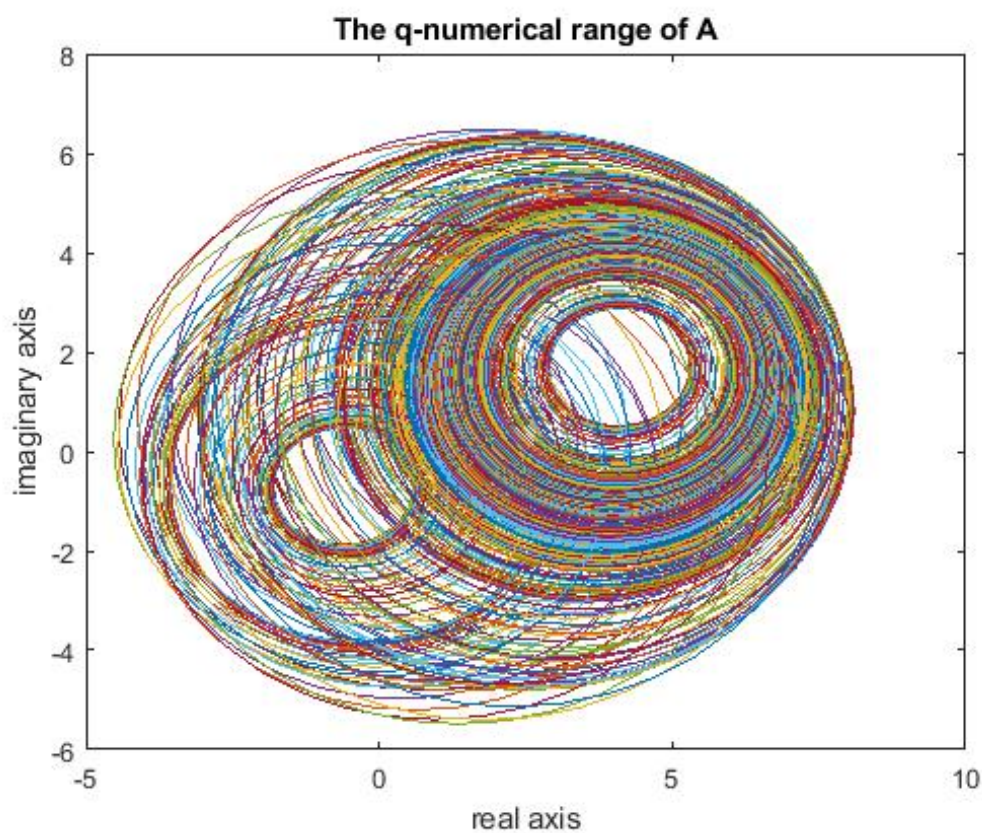
3.4 Παραδείγματα

Με την βοήθεια του Matlab μπορεί κανείς να σχεδιάσει τόσο το q - αριθμητικό πεδίο ενός τετραγωνικού πίνακα, όσο και το κέλυφος Davis - Wielandt. Τα αντίστοιχα προγράμματα παρατίθενται στο κεφάλαιο 4.

Παράδειγμα 3.4.1.

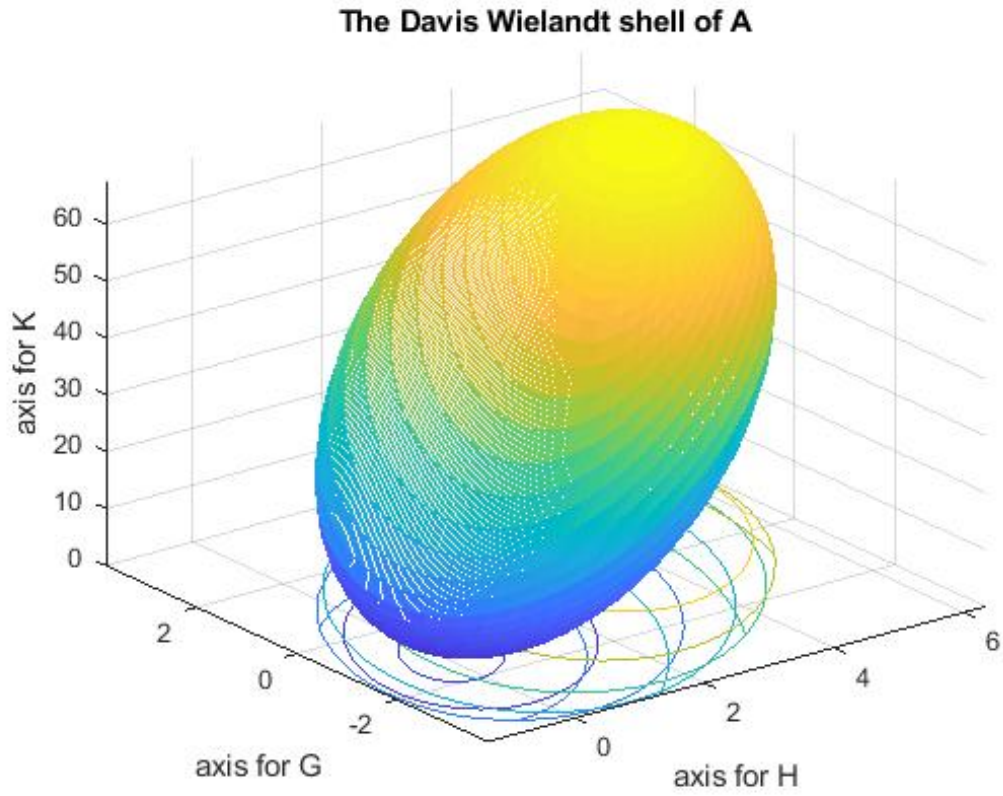
$$A = \begin{bmatrix} 1 + i & 5 + 2i \\ 3 + 3i & 6 + i \end{bmatrix}$$

Για τον πίνακα A το q - αριθμητικό πεδίο φαίνεται στο ακόλουθο Σχήμα:



Σχήμα 3.1: Το q - αριθμητικό πεδίο του πίνακα A για $q = 0.5$.

ενώ το κέλυφος Davis - Wielandt είναι το εξής:

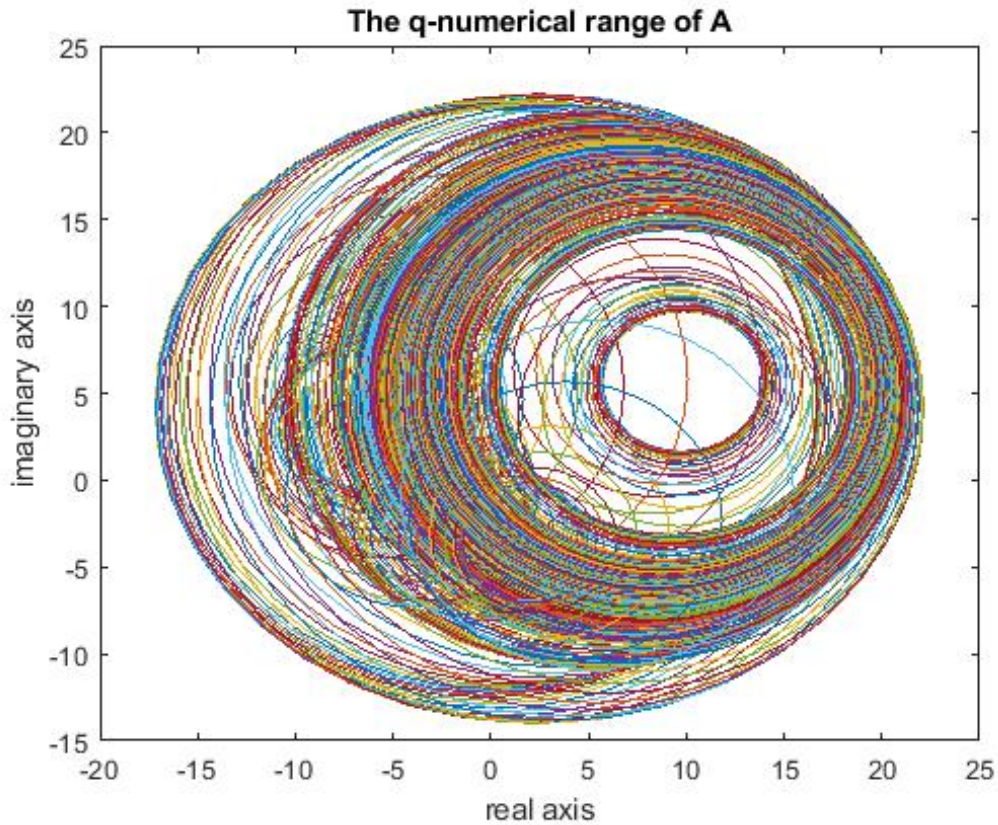


Σχήμα 3.2: Το κέλυφος Davis Wielandt για τον πίνακα A .

Παράδειγμα 3.4.2.

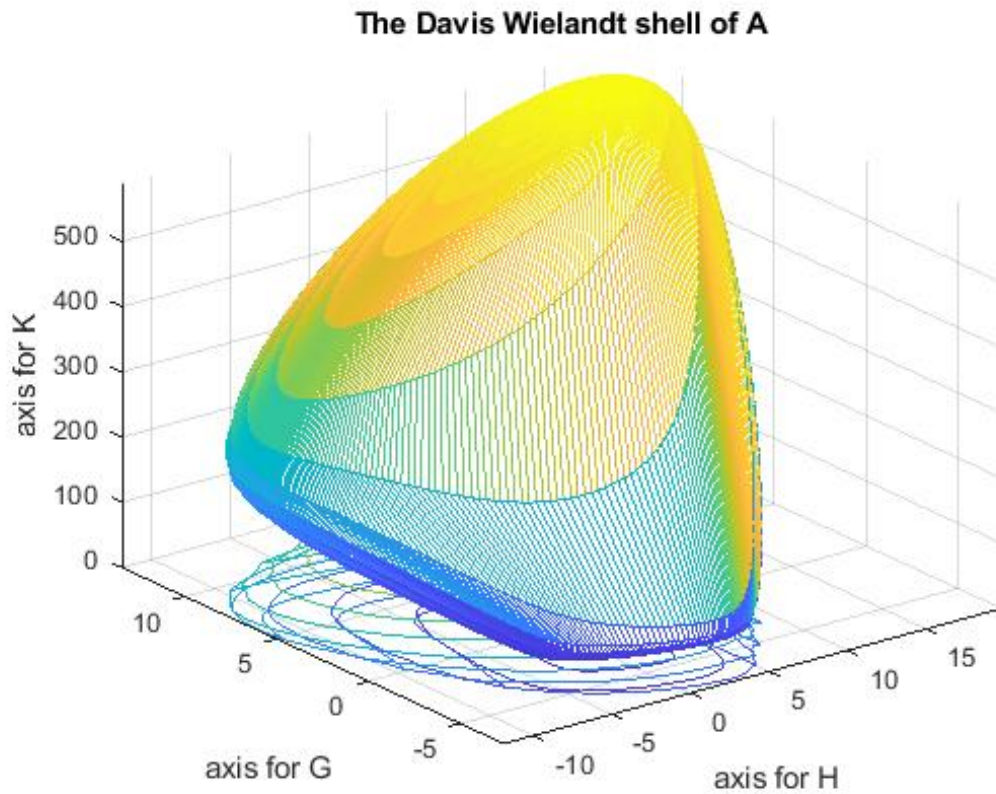
$$A = \begin{bmatrix} 1+i & 5 & 9+2i & 5i & 7+3i \\ 2+2i & 1 & 5+9i & 8 & 9i \\ 7 & 3+2i & 1+2i & 3 & 7i \\ 3+3i & 8+0.5i & 9 & 1+5i & 3 \\ 1+2i & 2 & 4i & 8+i & 5+i \end{bmatrix}$$

Το q - αριθμητικό πεδίο του πίνακα A φαίνεται παρακάτω,



Σχήμα 3.3: Το q - αριθμητικό πεδίο του πίνακα A για $q = 0.5$.

ενώ το κέλυφος Davis - Wielandt απεικονίζεται ως εξής:



Σχήμα 3.4: Το κέλυφος Davis Wielandt για τον πίνακα A .

Κεφάλαιο 4

Αλγόριθμοι Σχεδιασμού σε Matlab

Στο κεφάλαιο αυτό παρατίθεται ο κώδικας Matlab που χρησιμοποιήθηκε για την δημιουργία των σχημάτων των προηγούμενων κεφαλαίων.

4.1 Το Σύνορο του Αριθμητικού Πεδίου Τετραγωνικού Μιγαδικού Πίνακα και οι Ιδιοτιμές του

Ο παρακάτω κώδικας σχεδιάζει το σύνορο του αριθμητικού πεδίου ενός μιγαδικού τετραγωνικού πίνακα A , καθώς και τις ιδιοτιμές του, που σημειώνονται με αστερίσκο. Το πρόγραμμα βρίσκεται στην ιστοσελίδα:

<http://www.math.ntua.gr/~ppsarr/nr.m>

```
1 function c=nr(A);
2
3 % NR(A) estimates the boundary of the numerical range of
4 % a square complex matrix A, and its eigenvalues (stars).
5 %
6 % The command tic-toc prints the execution time.
7 %
8 % Author: Panayiotis Psarrakos,
9 %         Department of Mathematics,
10 %        National Technical University of Athens.
11 %
12 % Let S be the Euclidean unit sphere in C^n and let
13 % <.,.> denote the standard inner product in C^n.
14 %
15 % For any A in C^{n times n}, we define the set
16 %
17 %     W(A) = {<Ax,x>:x in S}
18 %
19 % called the "numerical range" of A. The set W(A) is
20 % also known as the "field of values" of A.
21 %
22 % This procedure uses an algorithm proposed in
23 % [R.A. Horn and C.R. Johnson "Topics in Matrix
```

```

24 % Analysis", Cambridge Univ. Press, New York, 1991].
25
26 tic
27
28 nv=120;
29 n=max(size(A));
30 i=sqrt(-1);
31 e=eig(A);
32
33 for k=1:nv;
34     z=exp(i*(k-1)/nv*2*pi); % the angular of the rotation
35     A1=z*A; % the rotation of matrix A
36     A2=(A1+A1')/2; % the hermitian part of the rotation
37     A1
38     [X,D]=eig(A2); % eigenvectors and eigenvalues of A2
39     [s,w] = sort(real(diag(D)));
40     x=X(:,w(n)); % eigenvector of the maximum
41     eigenvalue of A2
42     f(k)=x'*A*x/(x'*x); % boundary point of W(A)
43 end % for
44
45 toc
46
47 f(nv+1)=f(1); % connection of the last and the first
48 vertices
49 plot(real(f),imag(f),'b') % plot the vertices of the polygon
50 hold on
51 plot(real(e),imag(e),'*r') % plot the eigenvalues
52 xlabel('Real Axis')
53 ylabel('Imaginary Axis')
54 hold off

```

4.2 Το Αριθμητικό Πεδίο Τετραγωνικού Πίνακα.

Το παρακάτω πρόγραμμα είναι η συνάρτηση `nrange`, η οποία σχεδιάζει το αριθμητικό πεδίο ενός τετραγωνικού πίνακα. Ο αλγόριθμος περιγράφεται στο [7] (σελίδα 137) και βρίσκεται στην ιστοσελίδα :

<https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/1085-nrange>

Αποτελεί μία εναλλακτική επιλογή αντί της συνάρτησης `nr` που είδαμε παραπάνω.

```

1 function [rerange, imrange, nradius] = nrange(A, P, C, F);
2 %   NRANGE Numerical range of a square matrix
3 %   [RERANGE, IMRANGE, NRADIUS] = NRANGE(A, P) requires a data
4 %   square
5 %   matrix A and the number of points P to be plotted on the
6 %   boundary
7 %   of the numerical range of A.
8 %
9 %   It returns the real part and the imaginary part of points of
10 %   the
11 %   boundary of the numerical range of A, together with the
12 %   numerical
13 %   radius. It also draws the numerical range.
14 %
15 %   [RERANGE, IMRANGE, NRADIUS] = NRANGE(A, P, C) fills the drawing
16 %   of the numerical range with the specified color C. C can be any
17 %   of
18 %   the following: 'r', 'm', 'y', 'g', 'c', 'b', 'k'. The default
19 %   is 'b'.
20 %
21 %   [RERANGE, IMRANGE, NRADIUS] = NRANGE(A, P, C, F) indicates if
22 %   fill
23 %   is desired or not. F can be 'y' (yes) or 'n' (no). The default
24 %   is 'y'.
25
26 if nargin == 1
27     P = 500;
28     C = 'b';
29     F = 'y';
30 end
31 if nargin == 2
32     C = 'b';
33     F = 'y';
34 end
35 if nargin == 3
36     F = 'y';
37 end
38 [m, n] = size(A);
39 if m ~= n
40     error('Requires a square matrix.');
```

```
38 ReT=.5*(T+T');
39 lambda=max((eig(ReT)));
40 [eigvec,eigval]=eig(ReT);
41 for j=1:n
42     value=eigval(j,j);
43     if value>=lambda;
44         u=eigvec(:,j)/norm(eigvec(:,j));
45         z=u'*A*u;
46         x(count)=real(z);
47         y(count)=imag(z);
48         count = count + 1;
49     end
50 end
51 end
52 rerange = x(1:count-1);
53 imrange = y(1:count-1);
54 disp('The numerical radius is:');
55 nradius = max(sqrt(x.^2+y.^2))
56 if F == 'n'
57     if A == A(1,1)*eye(n)
58         plot(real(A(1,1)),imag(A(1,1)),C);
59     else
60         plot(rerange, imrange, C);
61         axis equal
62     end
63 else
64     if A == A(1,1)*eye(n)
65         plot(real(A(1,1)),imag(A(1,1)),C);
66     else
67         fill(rerange, imrange, C);
68         axis equal
69     end
70 end
```

4.3 q - Αριθμητικό Πεδίο 3×3 Κανονικού Πίνακα

Το παρακάτω πρόγραμμα σχεδιάζει τις ελλείψεις και τους κύκλους που αποτελούν το σύνορο του q - αριθμητικού πεδίου ενός 3×3 διαγώνιου πίνακα, με $0 < q < 1$. Το πρόγραμμα βασίζεται στα αποτελέσματα της εργασίας [21] του H. Nakazato και ο κώδικας βρίσκεται στην ιστοσελίδα:

<https://cklix.people.wm.edu/mathlib/wqnormal.html>

```

1
2 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
3 function z = qrange(q,a,b,c)
4 %
5 % Function qrange(q,a,b,c)
6 %
7 % This is a Matlab program that plots the ellipses
8 % and circle that form the boundary of the q-numerical range of a 3
9 % diagonal matrix % diag(a,b,c) when 0 < q < 1, based on the
10 % result in
11 % [H. Nakazato, The boundary of the range of a constrained
12 % sesquilinear form,
13 % LAMA 40 (1996), 37-43.]
14 %
15 % If a, b, c are not collinear, the following will be plotted:
16 % (i) three ellipses and the triangle whose vertices are their
17 % foci,
18 % (ii) the smallest circle containing the classical numerical
19 % range
20 % of diag(a,b,c) with its center translated to contain the 3
21 % ellipses.
22 %
23 % The convex boundary of the q-numerical range will come from the
24 % ellipses
25 % and the circle. (See the paper of Nakazato for details.)
26 %
27 % To run this program, one also needs the programs:
28 % ellipse.m and circle.m
29 %
30 %
31 % if abs(a-b) + abs(b-c) == 0
32 %     z = 'You have a scalar matrix, whose q-numerical range is a
33 %     singleton!';
34 % else
35 %
36 % We identify the case when we have a scalar matrix above.
37 % In the next few cases, we have to generate circles and ellipses.
38 % Here n is the number of grid points when we plot the ellipses and
39 % circles.
40 %
41 % n = 50;
42 % A = [real(a) imag(a) 1/2 ; real(b) imag(b) 1/2; real(c) imag(c)
43 %     1/2];
44 % if det(A) == 0
45 %

```

```

38 % Here we treat the case when a,b,c are collinear.
39 %
40     [X1, Y1] = ellipse(q*a, q*b, q, n);
41     [X2, Y2] = ellipse(q*b, q*c, q, n);
42     plot(X1,Y1,X2,Y2);
43 else
44 %
45 % Finally, we treat the case when a,b,c are in general positions.
46 % The next few commands compute the center cw and the radius r of
47 % the
48 % smallest circle that contains a,b,c, and shift the center to qw.
49 %
50     w = (inv(A)*[(abs(a))^2 (abs(b))^2 (abs(c))^2]')/2;
51     r = sqrt(w(3) + w(1)^2 + w(2)^2);
52     s = q*r;
53     cw = w(1)+i*w(2);
54     X0 = q*w(1);
55     Y0 = q*w(2);
56     qw = X0+i*Y0;
57 %
58     [X1, Y1] = circle(qw, r, n);
59     [X2, Y2] = circle(qw, s, n);
60 %
61 % Here we determine the 3 ellipses needed to plot the boundary.
62 %
63     a1 = q*a;
64     b1 = q*b;
65     c1 = q*c;
66     [X3, Y3] = ellipse(a1,b1,q,n);
67     [X4, Y4] = ellipse(c1,b1,q,n);
68     [X5, Y5] = ellipse(a1,c1,q,n);
69 %
70 % Now determine W(A) and qW(A) shifted to the new center.
71 %
72     Z6 = [a b c a] + (q-1)*cw*ones(1,4);
73     X6 = real(Z6);
74     Y6 = imag(Z6);
75     Z7 = [a1 b1 c1 a1];
76     X7 = real(Z7);
77     Y7 = imag(Z7);
78     plot(X0,Y0,'x',X1,Y1,X3,Y3,X4,Y4,X5,Y5,X7,Y7,'Linewidth'
79     ,2);
80 end
81 % We choose to display big circle and its center, the 3 ellipses
82 % and the
83 % triangle whose vertice are their foci.
84 % One can choose to plot any of the figures determined above. For
85 % example:
86 %
87     plot(X0,Y0,'x',X1,Y1,X2,Y2,X3,Y3,'g',X4,Y4,'g',X5,Y5,'g',
88     X6,Y6,X7,Y7);
89 %
90     pause
91     plot(X1,Y1,X2,Y2,X3,Y3,X4,Y4,X5,Y5,X6,Y6);
92 %
93     axis('square');
94     title('The q-numerical range of A.');
```



```

91         grid;
92     end
93
94     %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
95
96     function [X, Y] = ellipse(u,v,e,n)
97     %
98     % Function ellipse(u,v,e,n)
99     %
100    % This is a Matlab program that
101    % plots an ellipse on the complex point with the complex numbers
102    % u and v as foci, and eccentricity 0 < e < 1, and 2n grid points.
103    %
104    z = (u-v)/2;
105    if z == 0
106        X = real(u);
107        Y = imag(u);
108    else
109        %
110        c = abs(z);
111        r = angle(z);
112        a = c/e;
113        b = sqrt(a^2 - c^2);
114        z1 = (u+v)/2;
115        p = real(z1);
116        q = imag(z1);
117
118        for k = 1:n
119            t = k*pi/n;
120            X(k) = a*cos(r)*cos(t)-b*sin(r)*sin(t) + p;
121            Y(k) = a*cos(t)*sin(r)+b*sin(t)*cos(r) + q;
122            X(n+k) = -a*cos(r)*cos(t)+b*sin(r)*sin(t) + p;
123            Y(n+k) = -a*cos(t)*sin(r)-b*sin(t)*cos(r) + q;
124            X(2*n+1) = X(1);
125            Y(2*n+1) = Y(1);
126        end
127    end
128    % plot(X,Y);
129    %
130
131    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
132    function [X, Y] = circle(w,r,n)
133    %
134    % Function circle(w,r,n)
135    %
136    % This is a Matlab program that
137    % plots a circle on the complex point with center w and radius r
138    % and 2n grid points.
139    %
140    %
141
142    w1 = real(w);
143    w2 = imag(w);
144        for k = 1:n
145            t = k*pi/n;
146            X(k) = w1 + r*cos(t);
147            Y(k) = w2 + r*sin(t);
148            X(n+k) = w1 - r*cos(t);

```

```
149     Y(n+k) = w2 - r*sin(t);
150     X(2*n+1) = X(1);
151     Y(2*n+1) = Y(1);
152     end
153 %
154 % plot(X,Y);
155 %
156
157 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

4.4 q - Αριθμητικό Πεδίο Πίνακα

Το παρακάτω πρόγραμμα προσεγγίζει το q - αριθμητικό πεδίο ενός πίνακα και βρίσκεται στην ιστοσελίδα:

<https://cklixx.people.wm.edu/mathlib/wqrange.html>

```

1 % This is a program that plots the q-numerical range of a matrix
2
3 %
4 function y = wqrange(q,A)
5 %
6 % Function wqrange(q,A)
7 %
8 %
9 H = (A+A')/2;
10 G = (A-A')/(2*i);
11 K = A'*A;
12 %
13 % You may increase m to get a better approximation.
14 %
15 m = 20;
16 for r=1:(4*m+1)
17     T = cos( (r-1)*pi/(2*m) )*H + sin( (r-1)*pi/(2*m) )*G
18     ;
19     for s=1:(m+1)
20         [U,D] = eig(cos( (s-1)*pi/(2*m) )*T + sin( (s-1)*pi/(2*m) )*K)
21         ;
22         [d,tt] = max(real(diag(D)));
23         u = U(:,tt);
24         P=real(u'*H*u);
25         Q=real(u'*G*u);
26         S=real(u'*K*u);
27         R=sqrt((1-q^2)*(S-P^2-Q^2));
28         P = q*P;
29         Q = q*Q;
30         jj = (m-1)*r+s;
31         for k=1:m
32             t = k*pi/m;
33             X(k,jj) = P + R*cos(t);
34             Y(k,jj) = Q + R*sin(t);
35             X(m+k,jj) = P - R*cos(t);
36             Y(m+k,jj) = Q - R*sin(t);
37             X(2*m+1,jj) = X(1,jj);
38             Y(2*m+1,jj) = Y(1,jj);
39         end
40     end
41 end
42 %
43 %
44 plot(X,Y);
45 title('The q-numerical range of A');
46 xlabel('real axis');
47 ylabel('imaginary axis');
48 pause;
49 grid;
50 %
51 % Now, display a sentence and end the program.

```

```
50 %  
51 y = 'You have just seen the q-numerical range of A!';
```

4.5 Το Κέλυφος Davis - Wielandt

Για να σχεδιάσει κανείς το κέλυφος Davis Wielandt ενός τετραγωνικού πίνακα, ουσιαστικά χρειάζεται ένα πρόγραμμα που να σχεδιάζει το συνθετικό αριθμητικό πεδίο τριών ερμιτιανών πινάκων, όπως το παρακάτω που βρίσκεται στην ιστοσελίδα:

<https://cklix.people.wm.edu/mathlib/wjoint.html>

και για έναν πίνακα A οι τρεις πίνακες που χρειάζονται για τον σχεδιασμό του κελύφους Davis Wielandt θα είναι οι:

$$H = \frac{A + A^*}{2}, \quad G = -i\frac{A - A^*}{2}, \quad K = A^*A.$$

```

1 % This is a program that plots the joint numerical range of 3
2 % hermitian matrices.
3 % W(H,G,K,m), where H,G,K should be hermitian matrices of the same
4 % size, and the program will evaluate 4m^2 boundary
5 % points of the joint numerical range,
6 % is used to plot the inside convex polytope of the joint numerical
7 % of 3 hermitian matrices H, G, K.
8
9
10 function L = wjoint(H,G,K,m)
11 %
12 %
13 %
14 for r=1:(4*m+1)
15     T = cos( (r-1)*pi/(2*m) )*H + sin( (r-1)*pi/(2*m) )*G
16     ;
17     for s=1:(m+1)
18         [U,D] = eig(sin( (s-1)*pi/(2*m) )*T + cos( (s-1)*pi/(2*m) )*K)
19         ;
20         [d1,t1] = max(real(diag(D)));
21         u = U(:,t1);
22         X(r,s)=real(u'*H*u);
23         Y(r,s)=real(u'*G*u);
24         Z(r,s)=real(u'*K*u);
25         [d2,t2] = max(real(diag(-D)));
26         v = U(:,t2);
27         X(r,m+1+s)=real(v'*H*v);
28         Y(r,m+1+s)=real(v'*G*v);
29         Z(r,m+1+s)=real(v'*K*v);
30     end
31 end
32 %
33 %
34 meshc(X,Y,Z);
35 title('The Joint Numerical Range of (H,G,K)');
36 xlabel('axis for H');
37 ylabel('axis for G');
38 zlabel('axis for K');
39 %

```

Βιβλιογραφία

- [1] Au-Yeung, Yik Hoi and Tsing, Nam-Kiu [1983], 'An extension of the Hausdorff-Toeplitz theorem on the numerical range', *Proceedings of the American Mathematical Society* **89**(2), 215–218.
- [2] Binding, Paul and Li, Chi-Kwong [1991], 'Joint ranges of Hermitian matrices and simultaneous diagonalization', *Linear algebra and its applications* **151**, 157–167.
- [3] Chien, Mao-Ting and Nakazato, Hiroshi [1999], 'Boundary generating curves of the c-numerical range', *Linear algebra and its applications* **294**(1-3), 67–84.
- [4] Chien, Mao-Ting and Nakazato, Hiroshi [2002], 'Davis–Wielandt shell and q-numerical range', *Linear algebra and its applications* **340**(1-3), 15–31.
- [5] Conway, John B [2019], *A course in functional analysis*, Springer.
- [6] Goldberg, Moshe and Straus, EG [1977], 'Elementary inclusion relations for generalized numerical ranges', *Linear Algebra and its Applications* **18**(1), 1–24.
- [7] Gustafson, Karl E and Rao, Duggirala KM [1997], *Numerical range, w Numerical Range*, Springer, ππ. 1–26.
- [8] Horn, Roger A and Johnson, Charles R [1991], 'Topics in matrix analysis, 1991', *Cambridge University Press, Cambridge* **37**, 39.
- [9] Keeler, Dennis S and Rodman, Leiba and Spitkovsky, Ilya M [1997], 'The numerical range of 3×3 matrices', *Linear algebra and its applications* **252**(1-3), 115–139.
- [10] Kwong Li, Chi [1996], 'Some convexity theorems for the generalized numerical ranges', *Linear and Multilinear Algebra* **40**(3), 235–240.
- [11] Li, Chi-Kwong [1987], 'The C-convex matrices', *Linear and Multilinear Algebra* **21**(3), 303–312.
- [12] Li, Chi-Kwong [1994], 'C-numerical ranges and C-numerical radii', *Linear and Multilinear Algebra* **37**(1-3), 51–82.
- [13] Li, Chi-Kwong [1998], 'q-Numerical ranges of normal and convex matrices', *Linear and Multilinear Algebra* **43**(4), 377–384.
- [14] Li, Chi-Kwong and Mehta, Paras P and Rodman, Leiba [1994], 'A generalized numerical range: the range of a constrained sesquilinear form', *Linear and Multilinear Algebra* **37**(1-3), 25–49.

- [15] Li, Chi-Kwong and Nakazato, Hiroshi [1998], 'Some Results on the q-Numerical', *Linear and Multilinear Algebra* **43**(4), 385–409.
- [16] Marcus, Marvin and Andresen, Patricia [1977], 'Constrained extrema of bilinear functionals', *Monatshefte für Mathematik* **84**(3), 219–235.
- [17] Marcus, Marvin and Shure, BN [1979], 'The numerical range of certain 0, 1-matrices', *Linear and Multilinear Algebra* **7**(2), 111–120.
- [18] Mirman, BA [1968], 'Numerical range and norm of a linear operator', *Vorone z. Gos. Uni. Trudy Sem. Functional Anal* **10**, 51–55.
- [19] Nakamura, Yoshihiro [1982], 'Numerical range and norm', *Math. Japonica* **27**, 149–150.
- [20] Nakazato, Hiroshi [1994], 'The C-numerical range of a 2×2 matrix', *Sci. Rep. Hirosaki Univ* **41**, 197–206.
- [21] Nakazato, Hiroshi [1995], 'The boundary of the range of a constrained sesquilinear form', *Linear and Multilinear Algebra* **40**(1), 37–43.
- [22] Nakazato, Hiroshi and Nishikawa, Yasutaka and Takaguchi, Makoto [1995], 'On the boundary of the C-numerical range of a matrix', *Linear and Multilinear Algebra* **39**(3), 231–240.
- [23] Stolov, Evgenii L'vovich [1979], 'The Hausdorff set of a matrix', *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika* (10), 98–100.
- [24] Tsing, Nam-Kiu [1984], 'The constrained bilinear form and the C-numerical range', *Linear Algebra and its Applications* **56**, 195–206.
- [25] Walker, Robert John [1950], *Algebraic curves*, Princeton University Press Princeton.
- [26] Καδιανάκης Ν., Καρανάσιος Σ. [2003], *Γραμμική Άλγεβρα Αναλυτική Γεωμετρία και Εφαρμογές*, Ε.Μ.Π.
- [27] Ψαρράκος, Παναγιώτης [2015], *Θέματα Ανάλυσης Πινάκων*, Ε.Μ.Π.