



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

**Σύνολα Birkhoff-James ϵ -ορθογωνιότητας όχι υποχρεωτικά
τετραγωνικών και πολυωνυμικών πινάκων**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Βασιλική Σ. Κυριάκου

Επιβλέπων: Π. Ψαρράκος, Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, 7 Ιουλίου 2021



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ
ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

**Σύνολα Birkhoff-James ϵ -ορθογωνιότητας όχι υποχρεωτικά
τετραγωνικών και πολυωνυμικών πινάκων**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Βασιλική Σ. Κυριάκου

Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή: Α. Αρβανιτάκης, Επίκ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.
Β. Κανελλόπουλος, Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.
Π. Ψαρράκος, Καθηγητής Ε.Μ.Π. (Επιβλέπων)

Αθήνα, 7 Ιουλίου 2021

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Στην παρούσα διπλωματική εργασία διεξάγεται μελέτη επί του θέματος των συνόλων Birkhoff-James προσεγγιστικής ορθογωνιότητας (ϵ -ορθογωνιότητας), που αφορά στους πίνακες που δεν είναι κατ' ανάγκη τετραγωνικοί, αλλά και στους πολυωνυμικούς. Η εκτενής διερεύνηση των συνόλων αυτών, καθώς επίσης και των αριθμητικών πεδίων των προαναφερθέντων πινάκων, αποσκοπεί στην εξαγωγή αποτελεσμάτων σχετικών με τις ιδιότητες και τη χρησιμότητά τους. Το αντικείμενο που πραγματεύεται η εργασία έχει αποτελέσει πόλο έλξης του επιστημονικού ενδιαφέροντος πολλών μαθηματικών τις προηγούμενες δεκαετίες. Αξιοσημείωτα γεγονότα για την εξέλιξη και την πρόοδο της μελέτης των συνόλων Birkhoff-James προσεγγιστικής ορθογωνιότητας αποτελούν η μελέτη της Birkhoff ορθογωνιότητας σε γραμμικούς μετρικούς χώρους από τον G. Birkhoff το 1935, η έκφραση του αριθμητικού πεδίου ως υπεραριθμήσιμη τομή κλειστών κυκλικών δίσκων, από τους ερευνητές J.G. Stampfli και J.P. Williams το 1968, καθώς επίσης και τα αποτελέσματα της έρευνας των F.F. Bonsall και J. Duncan στα αριθμητικά πεδία, το 1973.

Την επίβλεψη της εργασίας αυτής ανέλαβε ο καθηγητής κ. Παναγιώτης Ψαρράκος, στον οποίο επιθυμώ να εκφράσω τις ευχαριστίες μου, τόσο για την πολύτιμη καθοδήγησή του, όσο και για τον χρόνο που διέθετε όποτε χρειαζόμουν τη βοήθειά του, σε απορίες που μου είχαν δημιουργηθεί. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερω την οικογένειά μου για την αγάπη, την κατανόηση και την αμέριστη υποστήριξή τους.

Βασιλική Σ. Κυριάκου

Στους γονείς μου και στην αδερφή μου,

Κωνσταντίνα

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η εργασία πραγματεύεται τα σύνολα Birkhoff-James προσεγγιστικής ορθογωνιότητας πινάκων που δεν είναι υποχρεωτικά τετραγωνικοί, αλλά και των πολυωνυμικών. Με την εκπόνησή της επιχειρούμε να μελετήσουμε τις βασικές ιδιότητες των συνόλων αυτών και τον τρόπο με τον οποίο συνδέονται με τα αριθμητικά πεδία πινάκων. Ξεκινώντας τη μελέτη μας, παραθέτουμε στο πρώτο κεφάλαιο, που αποτελεί και το εισαγωγικό, όλες τις έννοιες και τους ορισμούς που είναι απαραίτητοι για την πλήρη κατανόηση του περιεχομένου του πονήματος. Στο δεύτερο κεφάλαιο, μελετούμε το κλασικό αριθμητικό πεδίο των τετραγωνικών πινάκων. Το αριθμητικό πεδίο αυτό έχει πολλές ιδιότητες, οι οποίες θα αποβούν ιδιαίτερα χρήσιμες στην πορεία της εργασίας, με κυριότερες αυτές της κυρτότητας και της συμπάγειάς του. Στη συνέχεια, αναπαριστούμε το αριθμητικό πεδίο ενός τετραγωνικού πίνακα με τη μορφή υπεραριθμήσιμης τομής κλειστών κυκλικών δίσκων. Η μορφή αυτή που κατασκευάσαμε, μας οδηγεί σε μία νέα έκφραση του αριθμητικού πεδίου τετραγωνικών πινάκων, η οποία βασίζεται στην αποκλειστική χρήση της νόρμας. Στηριζόμενοι στον νέο ορισμό του πεδίου των τετραγωνικών πινάκων που προέκυψε, καταφέρνουμε επεκτείνοντάς τον, να ορίσουμε στο τρίτο κεφάλαιο το αριθμητικό πεδίο πινάκων που δεν είναι κατ' ανάγκη τετραγωνικοί. Επιπλέον, στο τρίτο κεφάλαιο εισάγουμε την έννοια της Birkhoff-James ορθογωνιότητας και παρουσιάζουμε το αριθμητικό πεδίο πινάκων που δεν είναι κατ' ανάγκη τετραγωνικοί, με τη μορφή συνόλου Birkhoff-James ορθογωνιότητας. Συνεχίζοντας, προχωράμε σε επεξήγηση και αιτιολόγηση της χρήσης του γενικού πίνακα $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$, στον ορισμό του αριθμητικού πεδίου όχι υποχρεωτικά τετραγωνικών πινάκων και διερευνούμε τις σημαντικότερες από τις ιδιότητες του. Οδεύοντας προς το τέλος του τρίτου κεφαλαίου, μελετάμε το αριθμητικό πεδίο μιας γραμμικής δέσμης πινάκων, καθώς και τις χαρακτηριστικές τιμές των πινάκων που δεν είναι υποχρεωτικά τετραγωνικοί. Στο τέταρτο κεφάλαιο, επιστούμε το ενδιαφέρον στο να ορίσουμε τις έννοιες της Birkhoff-James προσεγγιστικής ορθογωνιότητας και του συνόλου Birkhoff-James ϵ -ορθογωνιότητας. Μελετάμε εκτενώς τις ιδιότητες του συνόλου ϵ -ορθογωνιότητας, αλλά και το σύνορο του και αποδεικνύουμε τη συνέχειά του ως προς έναν πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ και προς μία παράμετρο ϵ . Αναλύουμε επίσης τι συμβαίνει με τη συνέχεια του συνόλου αυτού ως προς έναν πίνακα $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$. Στο τελευταίο κεφάλαιο της εργασίας, παρουσιάζουμε τους πολυωνυμικούς πίνακες και ορίζουμε το κλασικό αριθμητικό τους πεδίο, αλλά και το αριθμητικό πεδίο ενός πολυωνυμικού πίνακα ως προς έναν όχι υποχρεωτικά τετραγωνικό. Συνεχίζοντας, προσδιορίζουμε το σύνολο Birkhoff-James ϵ -ορθογωνιότητας ενός πολυωνυμικού πίνακα ως προς έναν όχι υποχρεωτικά τετραγωνικό. Τέλος, αναλύουμε τις βασικότερες ιδιότητες του συνόλου που κατασκευάσαμε.

Λέξεις κλειδιά: αριθμητικό πεδίο, q -αριθμητικό πεδίο, Birkhoff-James, ορθογωνιότητα, σύνολο, ιδιοτιμές, ιδιοδιανύσματα, γραμμική δέσμη, ϵ -ορθογωνιότητα, σύνορο, πολυωνυμικός πίνακας

ABSTRACT

This diploma thesis examines the Birkhoff-James approximate orthogonality sets of rectangular matrices, as well as polynomial matrices. We conduct a study of the basic properties of these sets and the way they are associated with the numerical ranges of matrices. In the first, introductory chapter, we present all the mathematical concepts and definitions necessary for a thorough understanding of the thesis. In the second chapter, we study the standard numerical range of square matrices. The numerical range in question has many properties, which will turn out particularly useful in the course of the study. The principal properties we focus on are convexity and compactness. Then, we write the numerical range of a square matrix as an infinite intersection of closed (circular) discs. This new form we created is a new definition of the numerical range of square matrices, based on the exclusive use of the norm. In the third chapter, based on this new definition, we define the numerical range of rectangular matrices, as its extension. Moreover, we introduce the Birkhoff-James orthogonality and present the numerical range of rectangular matrices in the form of a Birkhoff-James orthogonality set. We proceed with the explanation and justification for the use of the (general) matrix $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$, in the definition of numerical range of rectangular matrices and we examine its most important properties. Moving towards the end of the third chapter, we study the characteristic values of rectangular matrices, as well as the numerical range of a linear pencil. In the fourth chapter, we shift our interest to the definition of the Birkhoff-James approximate orthogonality and the Birkhoff-James ϵ -orthogonality set. We study extensively the properties of the Birkhoff-James ϵ -orthogonality set and its boundary and we prove its continuity of the Birkhoff-James ϵ -orthogonality set, with respect to a matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ and the real parameter ϵ . Also, we examine what happens with the continuity of this set, with respect to a matrix $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$. In the last chapter of this thesis, we present the polynomial matrices and define the standard numerical range of a polynomial matrix, as well as the numerical range of a matrix polynomial, with respect to a rectangular matrix. Ultimately, we define the Birkhoff-James ϵ -orthogonality set of a polynomial matrix, with respect to a rectangular matrix and discuss its principal properties.

Keywords: numerical range, q -numerical range, Birkhoff-James, orthogonality, set, eigenvalues, eigenvectors, linear pencil, ϵ -orthogonality, boundary, matrix polynomial

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ.....	iii
ΠΕΡΙΛΗΨΗ.....	v
ABSTRACT.....	vi
Συμβολισμοί.....	x

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο

Εισαγωγικές Έννοιες και Ορισμοί

1.1 Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας.....	1
1.1.1 Διανυσματικός Λογισμός.....	1
1.1.2 Νόρμες Διανυσμάτων.....	4
1.2 Στοιχεία Ανάλυσης Πινάκων.....	5
1.2.1 Νόρμες Πινάκων.....	8
1.2.2 Κανονική Μορφή Jordan.....	10
1.3 Στοιχεία Γενικής Τοπολογίας και Συναρτησιακής Ανάλυσης.....	11
1.3.1 Γενική Τοπολογία.....	11
1.3.2 Τελεστές σε Χώρους Banach.....	14

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο

Αριθμητικό Πεδίο Τετραγωνικών Πινάκων

2.1 Ορισμοί Αριθμητικού Πεδίου	16
2.1.1 Ορισμός Κλασικού Αριθμητικού Πεδίου $F(A)$	17
2.2 Θεμελιώδεις Ιδιότητες του Κλασικού Αριθμητικού Πεδίου.....	17
2.2.1 Ιδιότητα της Συμπάγειας του $F(A)$	19
2.2.2 Ιδιότητα της Κυρτότητας του $F(A)$	21
2.3 Γωνιακό Σημείο του $F(A)$	24
2.4 Ορισμός Αριθμητικού Πεδίου $F_{\ \cdot\ }(A)$ ως Υπεραριθμήσιμη Τομή Δίσκων.....	25
2.5 q – Αριθμητικό Πεδίο Τετραγωνικών Πινάκων.....	26

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο

Σύνολα Birkhoff-James Ορθογωνιότητας και Αριθμητικά Πεδία Όχι Υποχρεωτικά Τετραγωνικών Πινάκων

3.1	Αριθμητικό Πεδίο Όχι Υποχρεωτικά Τετραγωνικών Πινάκων.....	29
3.1.1	Ορθογωνιότητα Birkhoff-James (\perp_{BJ}).....	31
3.2	Επεξήγηση της Χρήσης του Πίνακα B	34
3.3	Βασικές Ιδιότητες του $F_{\ \cdot\ }(A; B)$	40
3.3.1	Σχέση Αριθμητικών Πεδίων $F_{\ \cdot\ }(A; B)$ και $F_{\ \cdot\ }(B; A)$	43
3.3.2	Αριθμητικό Πεδίο $F_{\ \cdot\ }(A; B)$ και Νόρμες Πινάκων Επαγόμενες από Εσωτερικό Γινόμενο Πινάκων.....	45
3.4	Αριθμητικό Πεδίο Γραμμικής Δέσμης Πινάκων $A - \lambda B$	50
3.5	Ιδιοτιμές, Ιδιοδιανύσματα και Αριθμητικό Πεδίο $F_{\ \cdot\ }(A; B)$	53
3.5.1	Όχι Υποχρεωτικά Τετραγωνικών Πινάκων.....	53
3.5.2	Όχι Υποχρεωτικά Τετραγωνικών Διαγώνιων Πινάκων.....	55

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο

Σύνολα Birkhoff-James ϵ -ορθογωνιότητας Όχι Υποχρεωτικά Τετραγωνικών Πινάκων

4.1	q – Αριθμητικό Πεδίο Όχι Υποχρεωτικά Τετραγωνικών.....	58
4.2	Προσεγγιστική Ορθογωνιότητα Birkhoff - James (\perp_{BJ}^ϵ).....	59
4.3	Βασικές Ιδιότητες του $F_{\ \cdot\ }^\epsilon(A; B)$	67
4.3.1	Σύνολο $F_{\ \cdot\ }^\epsilon(A; B)$ και Νόρμες Πινάκων Επαγόμενες από Διανυσματικές Νόρμες.....	70
4.4	Το Σύνορο $\partial F_{\ \cdot\ }^\epsilon(A; B)$, του Συνόλου $F_{\ \cdot\ }^\epsilon(A; B)$	71
4.4.1	Το Σύνορο $\partial F_{\ \cdot\ }(A; B; q)$	74
4.5	Συνέχεια του Συνόλου $F_{\ \cdot\ }^\epsilon(A; B)$	74
4.5.1	Βασικοί Ορισμοί Συνέχειας Μετρικών Χώρων.....	74
4.5.2	Συνέχεια του Συνόλου $F_{\ \cdot\ }^\epsilon(A; B)$ ως προς τον Πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$	75
4.5.3	Συνέχεια του Συνόλου $F_{\ \cdot\ }^\epsilon(A; B)$ ως προς την Παράμετρο ϵ	78

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^ο

Σύνολα Birkhoff-James ϵ -ορθογωνιότητας Πολυωνυμικών Πινάκων

5.1 Πολυωνυμικοί Πίνακες.....	82
5.1.1 Ορισμός Κλασικού Αριθμητικού Πεδίου Πολυωνυμικού Πίνακα.....	83
5.2 Αριθμητικό Πεδίο Πολυωνυμικών Πινάκων.....	83
5.2.1 q –Αριθμητικό Πεδίο Πολυωνυμικών Πινάκων.....	84
5.3 Σύνολα Birkhoff-James ϵ –ορθογωνιότητας Πολυωνυμικών Πινάκων.....	85
5.3.1 Ειδικές Παρατηρήσεις.....	86
5.4 Βασικές Ιδιότητες του $W_{\ \cdot\ }^{\epsilon}(P(z); B)$	87
5.5 Το Σύνορο $\partial W_{\ \cdot\ }^{\epsilon}(P(z); B)$, του Συνόλου $W_{\ \cdot\ }^{\epsilon}(P(z); B)$	93
5.6 Σύνολο $W_{\ \cdot\ }^{\epsilon}(P(z); B)$ και Νόρμες Πινάκων Επαγόμενες από Εσωτερικό Γινόμενο Πινάκων.....	98
Βιβλιογραφία.....	102

Συμβολισμοί

$\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times m}$	Τα σύνολα των πραγματικών αριθμών, διανυσμάτων και $n \times m$ πινάκων, αντίστοιχα
$\mathbb{C}, \mathbb{C}^n, \mathbb{C}^{n \times m}$	Τα σύνολα των μιγαδικών αριθμών, διανυσμάτων και $n \times m$ πινάκων, αντίστοιχα
$B(X)$	Το σύνολο όλων των φραγμένων γραμμικών τελεστών που δρουν πάνω στον νορμικό χώρο X
$B(X)^*$	Ο δυϊκός του $B(X)$
$\ \cdot\ _1, \ \cdot\ _2, \ \cdot\ _\infty$	Η 1- νόρμα, 2- νόρμα και ∞ - νόρμα, αντίστοιχα
$\ \cdot\ _F$	Η νόρμα Frobenius
$\hat{A}, A^T, \bar{A}, A^*$	Ο υποπίνακας, ο ανάστροφος, ο συζυγής και ο αναστροφοσυζυγής του πίνακα A , αντίστοιχα
$\langle \cdot; \cdot \rangle$	Εσωτερικό γινόμενο
$\sigma(A)$	Το φάσμα του τετραγωνικού πίνακα A
$\sigma(A; B)$	Το φάσμα του πίνακα A ως προς τον πίνακα B
$\sigma(P(z))$	Το φάσμα του πολυωνυμικού πίνακα $P(z)$
\perp, \perp^ϵ	Ορθογωνιότητα και ϵ -ορθογωνιότητα
$\perp_{BJ}, \perp_{BJ}^\epsilon$	Birkhoff-James Ορθογωνιότητα και Birkhoff-James ϵ -ορθογωνιότητα
$F(A)$	Το αριθμητικό πεδίο του τετραγωνικού πίνακα A
$F(A; q)$	Το q -αριθμητικό πεδίο του τετραγωνικού πίνακα A
$F(A; B)$	Το αριθμητικό πεδίο του πίνακα A ως προς τον πίνακα B
$F(A; B; q)$	Το q -αριθμητικό πεδίο του πίνακα A ως προς τον πίνακα B
$F_{\ \cdot\ }^\epsilon(A; B)$	Το σύνολο Birkhoff-James ϵ -ορθογωνιότητας του πίνακα A ως προς τον πίνακα B
$\arg(z)$	Το όρισμα του μιγαδικού αριθμού z
$W(P(z))$	Το αριθμητικό πεδίο του πολυωνυμικού πίνακα $P(z)$
$W(P(z); B)$	Το αριθμητικό πεδίο του πολυωνυμικού πίνακα $P(z)$ ως προς τον πίνακα B
$W(P(z); B; q)$	Το q -αριθμητικό πεδίο του πολυωνυμικού πίνακα $P(z)$ ως προς τον πίνακα B
$W_{\ \cdot\ }^\epsilon(P(z); B)$	Το σύνολο Birkhoff-James ϵ -ορθογωνιότητας του πολυωνυμικού πίνακα $P(z)$ ως προς τον πίνακα B

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο

Εισαγωγικές Έννοιες και Ορισμοί

1.1 Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας

1.1.1. Διανυσματικός Λογισμός

Ορισμός 1.1.1. Ένας χώρος X καλείται *διανυσματικός (vector) ή γραμμικός χώρος (linear space)* πάνω στο σώμα K , αν είναι εφοδιασμένος με τις πράξεις:

- της πρόσθεσης: $"+" : X \times X \rightarrow X$ και
- του (βαθμωτού) πολλαπλασιασμού: $"\cdot" : K \times X \rightarrow X$,

(με τον πολλαπλασιασμό $"\cdot"$ να είναι μία εξωτερική πράξη με συντελεστές από ένα σώμα K , εν προκειμένω το \mathbb{C}) για τις οποίες ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

- $x + y = y + x$, για κάθε $x, y \in X$ (αντιμεταθετική ιδιότητα),
- $(x + y) + z = x + (y + z)$, για κάθε $x, y, z \in X$ (προσεταιριστική ιδιότητα),
- υπάρχει $0 \in X$, τέτοιο ώστε: $x + 0 = x$, για κάθε $x \in X$ (ουδέτερο στοιχείο),
- για κάθε $x \in X$, υπάρχει $-x \in X$, τέτοιο ώστε: $x + (-x) = 0$ (αντίθετο στοιχείο),
- $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$, για κάθε $x \in X$ και $\lambda, \mu \in K$ (επιμεριστική ως προς την πρόσθεση του K),
- $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$, για κάθε $x, y \in X$ και $\lambda \in K$ (επιμεριστική ως προς την πρόσθεση του X),
- $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$, για κάθε $x \in X$ και $\lambda, \mu \in K$,
- $1 \cdot x = x$, για κάθε $x \in X$.

Ορισμός 1.1.2. Ένα υποσύνολο $Y \neq \emptyset$ ενός διανυσματικού χώρου X καλείται *διανυσματικός (vector) ή γραμμικός υπόχωρος (linear subspace)* του X , αν ισχύουν:

- $\lambda x \in Y$, για κάθε $x \in Y$ και $\lambda \in K$,
- $x + y \in Y$, για κάθε $x, y \in Y$,
ή ισοδύναμα, αν ισχύει:
- $\lambda x + \mu y \in Y$, για κάθε $x, y \in Y$ και $\lambda, \mu \in K$.

Ορισμός 1.1.3. Έστω $D \subseteq \mathbb{C}$ και $T \subseteq \mathbb{C}^n$, δύο τυχαία μη κενά σύνολα. Ορίζουμε ως *διανυσματική συνάρτηση (vector function)* μίας μεταβλητής με πεδίο ορισμού D και

πεδίο τιμών T , τη μονοσήμαντη απεικόνιση $F : D \rightarrow T$, του συνόλου D στο T . Δηλαδή,

$$D \ni t \rightarrow F(t) = y = \{f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)\} \in T \subseteq \mathbb{C}^n,$$

όπου $f_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ είναι μία συνάρτηση με μεταβλητή t , η οποία καλείται *συνιστώσα της F* .

Ορισμός 1.1.4. Έστω ένας διανυσματικός χώρος X και $Y \subset X$ ένα υποσύνολό του. Ονομάζουμε *γραμμική θήκη (linear hull) του X* και συμβολίζουμε $\langle X \rangle$ ή $[X]$, τον ελάχιστο υπόχωρο του X που περιέχει το Y .

Ορισμός 1.1.5. Έστω ένας διανυσματικός χώρος X και $A \subset X$, ένα υποσύνολό του. Το A ονομάζεται *κυρτό σύνολο (convex set)*, αν ισχύει

$$ax + (1 - a)y \in A \text{ για κάθε } x, y \in A \text{ και } a \in [0, 1].$$

Ορισμός 1.1.6. Έστω ένα σύνολο A υποσύνολο του \mathbb{C}^n . Ορίζουμε ως *κυρτή θήκη (convex hull) του συνόλου A* και συμβολίζουμε $conv\{A\}$ ή απλώς $co\{A\}$, την τομή όλων των κυρτών συνόλων K , τα οποία είναι υποσύνολα του \mathbb{C} , με $A \subseteq K$. Δηλαδή, ισχύει:

$$co\{A\} = \bigcap_{\{K : K \ni A\}} K.$$

Ορισμός 1.1.7. Έστω V ένας διανυσματικός χώρος πάνω σε ένα σώμα K (για παράδειγμα το \mathbb{C}) και τα διανύσματα $v_1, v_2, \dots, v_s \in V$. Τα διανύσματα v_1, v_2, \dots, v_s του διανυσματικού χώρου V ονομάζονται *γραμμικώς ανεξάρτητα (linearly independent)*, αν και μόνο αν υπάρχουν συντελεστές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s \in K$, ώστε από κάθε γραμμικό συνδυασμό:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_s v_s = 0, \text{ να προκύπτει}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_s = 0.$$

Δηλαδή, τα διανύσματα v_1, v_2, \dots, v_s του διανυσματικού χώρου V λέγονται *γραμμικώς ανεξάρτητα*, αν κανένα από αυτά δεν μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Σε κάθε άλλη περίπτωση, στην οποία υπάρχει τουλάχιστον ένα $\lambda_i \neq 0$ και ισχύει:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_s v_s = 0,$$

τα διανύσματα v_1, v_2, \dots, v_s του διανυσματικού χώρου V , ονομάζονται *γραμμικώς εξαρτημένα (linearly dependent)*.

Ορισμός 1.1.8. Έστω V ένας διανυσματικός χώρος πάνω σε ένα σώμα K (για παράδειγμα το \mathbb{C}) και το υποσύνολό του $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Το σύνολο $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ καλείται *βάση (basis) του διανυσματικού χώρου V* , αν ισχύουν:

- i) τα v_1, v_2, \dots, v_n είναι γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα,
 ii) $[v_1, v_2, \dots, v_n] = V$, δηλαδή τα v_1, v_2, \dots, v_n παράγουν τον χώρο V .

Παρατήρηση 1.1.9. Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο \mathbb{C}^n , το τυχόν διάνυσμα $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ και τα γραμμικώς ανεξάρτητα και διατεταγμένα διανύσματα e_1, e_2, \dots, e_n του \mathbb{C}^n . Αν το $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ μπορεί να γραφεί (κατά τρόπο μοναδικό) ως γραμμικώς συνδυασμός των e_1, e_2, \dots, e_n , με τη μορφή:

$$(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n,$$

τότε τα διανύσματα e_1, e_2, \dots, e_n του διανυσματικού χώρου \mathbb{C}^n , πάνω στο σώμα \mathbb{C} των μιγαδικών αριθμών, ορίζουν μία βάση του, την οποία καλούμε *κανονική βάση* (*standard basis*) του \mathbb{C}^n .

Ορισμός 1.1.10. Μία συνάρτηση $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ ονομάζεται *εσωτερικό γινόμενο* (*inner product*), αν για κάθε $x, y, z \in \mathbb{C}^n$, ικανοποιεί τα ακόλουθα:

- i) $\langle x, x \rangle \geq 0$ (μη αρνητική),
 ii) $\langle x, x \rangle = 0$ αν και μόνο αν $x = 0$,
 iii) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ (προσθετική ιδιότητα),
 iv) $\langle ax, y \rangle = a \langle x, y \rangle$, για κάθε $a \in \mathbb{C}$,
 v) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.

Ορισμός 1.1.11. Έστω H ένας γραμμικός μιγαδικός χώρος. Ένα εσωτερικό γινόμενο στον χώρο H είναι μία απεικόνιση της μορφής $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$, που ικανοποιεί τις ιδιότητες του **Ορισμού 1.1.10.** Τότε η απεικόνιση

$$\|\cdot\| : H \rightarrow \mathbb{R}^+ : x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

είναι νόρμα στον H . Ο H ονομάζεται *χώρος Hilbert* (*Hilbert space*), αν είναι πλήρης ως προς την νόρμα που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο.

Ορισμός 1.1.12. Ορίζουμε ως (*επίπεδη*) *αλγεβρική καμπύλη* (*(plane) algebraic curve*) C_F βαθμού k , το σύνολο όλων των σημείων $[x, y, z] \in P_2(\mathbb{C})$, τέτοιων ώστε να ισχύει

$$f(x, y, z) = 0,$$

όπου με f συμβολίζουμε το ομογενές πολυώνυμο βαθμού k , με συντελεστές από το σώμα \mathbb{C} (των μιγαδικών αριθμών) και με $P_2(\mathbb{C})$ το προβολικό επίπεδο

$$P_2(\mathbb{C}) = \{ [x, y, z] : x, y, z \in \mathbb{C}, x, y, z \text{ όχι όλα μηδενικά} \}.$$

Ορισμός 1.1.13. Έστω V^n είναι ένας διανυσματικός χώρος σε ένα σώμα K διάστασης n και X ένα σύνολο. Ονομάζουμε *δράση (action)* του V στο X την απεικόνιση

$$\varphi : X \times V \rightarrow X, (x, v) \mapsto \varphi(x, v),$$

τέτοια ώστε $\varphi(x, 0) = x$, για κάθε $x \in X$ και

$$\varphi(\varphi(x, v), w) = \varphi(x, w + v), \text{ με } v, w \in V^n, x \in X.$$

Σημείωση: Παρατηρούμε ότι η δράση μπορεί να ερμηνευτεί ως ένα είδος πρόσθεσης στα στοιχεία του συνόλου X , διανυσμάτων από τον διανυσματικό χώρο V . Ως εκ τούτου, μπορούμε να παραστήσουμε το αποτέλεσμα της δράσης ως γενικευμένη πρόσθεση (ή μετατόπιση του σημείου κατά διάνυσμα), ως εξής

$$\varphi(x, v) = x \mapsto v.$$

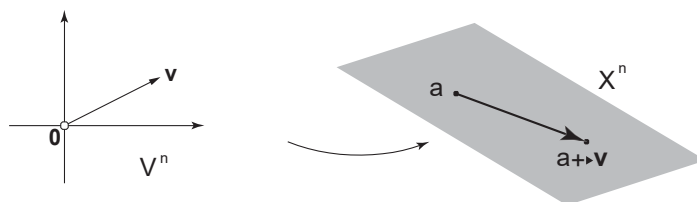
Επομένως, οι ιδιότητες του ορισμού γράφονται με τον ακόλουθο τρόπο:

$$x \mapsto 0 = x, (x \mapsto v) \mapsto w = x \mapsto (v + w).$$

Ορισμός 1.1.14. Ονομάζουμε *αφινικό χώρο (affine space)* X διάστασης n , ένα σύνολο X με μία δοθείσα δράση ενός διανυσματικού χώρου V^n στο X , την οποία καλούμε πρόσθεση διανύσματος, τέτοια ώστε για κάθε επιλογή $a \in X$, η αντιστοίχιση

$$v \mapsto a \mapsto v, v \in V^n$$

από τον διανυσματικό χώρο V στο σύνολο X να είναι *1:1 και επί (bijection)*.



Σχήμα 1.1. Αφινικός χώρος X^n με δράση του διανυσματικού χώρου V^n .

1.1.2 Νόρμες Διανυσμάτων

Ορισμός 1.1.15. Μία συνάρτηση $\|\cdot\| : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ονομάζεται *νόρμα διανυσμάτων (vector norm)*, αν για κάθε $x, y \in \mathbb{C}^n$, ικανοποιεί τα ακόλουθα:

- i) $\|x\| \geq 0$ (μη αρνητική),
- ii) $\|x\| = 0$, αν και μόνο αν $x = 0$,

iii) $\|ax\| = |a| \|x\|$, για κάθε $a \in \mathbb{C}$,

iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (τριγωνική ανισότητα).

Στην ιδιότητα iv, η ισότητα ισχύει μόνο στην περίπτωση που τα διανύσματα x και y είναι συγγραμμικά.

Μία συνάρτηση $\|\cdot\| : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί μόνο τις ιδιότητες i, iii και iv του παραπάνω ορισμού, καλείται *ημι-νόρμα διανυσμάτων (vector semi-norm)*. Η ημι-νόρμα αποτελεί μία γενίκευση της έννοιας της νόρμας, που επιτρέπει σε μη μηδενικά διανύσματα να έχουν μηδενικό μέτρο.

Λήμμα 1.1.16. Έστω $\|\cdot\|$ μία ημι-νόρμα διανυσμάτων στον \mathbb{C}^n . Τότε για κάθε ζεύγος διανυσμάτων $x, y \in \mathbb{C}^n$, ισχύει $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$.

Ορισμός 1.1.17. Μία νόρμα διανυσμάτων $\|\cdot\|$ καλείται *μονότονη (monotonic)*, αν για κάθε $x, y \in \mathbb{C}^n$ η σχέση $|x| \leq |y|$ συνεπάγεται ότι $\|x\| \leq \|y\|$. Επιπλέον, η νόρμα αυτή καλείται *απόλυτη (absolute)*, αν ισχύει $\|x\| = \||x|\|$ για κάθε $x \in \mathbb{C}^n$.

Ορισμός 1.1.18. Για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό $1 \leq p < +\infty$, ορίζουμε την l_p -νόρμα (ή p -νόρμα), ως εξής:

$$\|x\|_p = \|[x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p}.$$

Ορισμός 1.1.19. Θέτοντας $p = 1$ στον **Ορισμό 1.1.18.**, ορίζουμε την l_1 -νόρμα (ή 1-νόρμα, ή *αθροιστική νόρμα*), ως εξής:

$$\|x\|_1 = \|[x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|.$$

Ορισμός 1.1.20. Θέτοντας $p = 2$ στον **Ορισμό 1.1.18.**, ορίζουμε την l_2 -νόρμα (ή 2-νόρμα, ή *Ευκλείδεια νόρμα*), ως εξής:

$$\|x\|_2 = \|[x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T\|_2 = (|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2)^{1/2}.$$

Ορισμός 1.1.21. Ορίζουμε την ∞ -νόρμα (ή *max-νόρμα*, ή *μέγιστη νόρμα*), ως εξής:

$$\|x\|_\infty = \|[x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}.$$

1.2 Στοιχεία Ανάλυσης Πινάκων

Ορισμός 1.2.1. Ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ ονομάζεται *τετραγωνικός (square matrix)*, αν ο αριθμός των στηλών του ισούται με τον αριθμό των γραμμών του, δηλαδή ισχύει $m = n$. Συμβολίζουμε, $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

Ορισμός 1.2.2. Ο πίνακας $I_n = (\delta_{ij})_{n \times n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$, όπου η συνάρτηση

$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν } i = j \\ 0, & \text{αν } i \neq j \end{cases}$ καλείται *δέλτα του Kronecker (Kronecker delta)*, ονομάζεται *μοναδιαίος πίνακας (identity matrix)* και ικανοποιεί τις ακόλουθες σχέσεις:

$$AI_n = I_n A = A, \text{ για κάθε } n \times n \text{ πίνακα } A$$

$$\text{και } AI_n = A, \text{ για κάθε } n \times m \text{ πίνακα } A.$$

Ορισμός 1.2.3. Αν για έναν τετραγωνικό πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, υπάρχει πίνακας X τέτοιος ώστε να ισχύει $AX = XA = I_n$, τότε ο πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ είναι *αντιστρέψιμος (invertible matrix)* και ο πίνακας X καλείται *αντίστροφος πίνακας (inverse matrix)* του A . Συμβολίζουμε, $X = A^{-1}$.

Σημείωση: Αν $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ δύο αντιστρέψιμοι πίνακες, ισχύει $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Ορισμός 1.2.4. Έστω πίνακας $A = (\alpha_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times m}$. Ονομάζουμε *ανάστροφο πίνακα (transpose matrix)* του A και συμβολίζουμε με A^T , τον πίνακα που προκύπτει από τον A με εναλλαγή των γραμμών και των στηλών του, δηλαδή έχουμε $A^T = (\alpha_{ji}) \in \mathbb{C}^{m \times n}$.

Σημείωση: Αν $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ δύο πίνακες, ισχύει $(AB)^T = B^T A^T$.

Ορισμός 1.2.5. Ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ ονομάζεται *συμμετρικός (symmetric matrix)*, αν ισούται με τον ανάστροφό του, δηλαδή αν ισχύει $A = A^T$. Στην περίπτωση που ο $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ ισούται με τον αντίθετο του ανάστροφου πίνακά του, καλείται *αντισυμμετρικός (antisymmetric matrix)* και ισχύει $A = -A^T$.

Ορισμός 1.2.6. Έστω πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$. Καλούμε *υποπίνακα (submatrix)* του πίνακα A , τον πίνακα \hat{A} που θα προκύψει από την απαλοιφή ενός πλήθους γραμμών, ή ενός πλήθους στηλών ή ενός πλήθους γραμμών και στηλών από τον πίνακα A (δηλαδή, διαγράφοντας οποιαδήποτε συλλογή γραμμών ή στηλών).

Ορισμός 1.2.7. Έστω πίνακας $A = (\alpha_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times m}$. Ονομάζουμε *συζυγή πίνακα (conjugate matrix)* του A και συμβολίζουμε \bar{A} , τον πίνακα που έχει ως στοιχεία του, τα μιγαδικά συζυγή του πίνακα A , δηλαδή $\bar{A} = (\bar{\alpha}_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times m}$.

Ορισμός 1.2.8. Έστω πίνακας $A = (\alpha_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times m}$. Ονομάζουμε *ανάστροφο συζυγή πίνακα (conjugate transpose matrix)* του A και συμβολίζουμε A^* , τον ανάστροφο πίνακα του A , που έχει ως στοιχεία του τα μιγαδικά συζυγή του. Δηλαδή, ισχύει $A^* = \bar{A}^T$, με $\bar{A}^T = (\bar{\alpha}_{ji}) \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Αν ισχύει $A = A^*$, ο πίνακας A ονομάζεται *ερμιτιανός (hermitian matrix)*, ενώ αν $A = -A^*$, καλείται *αντιερμιτιανός (antihermitian matrix)*.

Σημείωση: Αν $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ δύο πίνακες, ισχύει $(AB)^* = B^* A^*$.

Ορισμός 1.2.9. Ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ ονομάζεται *κανονικός (normal matrix)*, αν αντιμετατίθεται με τον αναστροφosuζυγή του, δηλαδή αν ικανοποιεί την ακόλουθη σχέση:

$$A A^* = A^* A.$$

Πρόταση 1.2.10. Έστω ένας τετραγωνικός πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Ο A μπορεί να γραφεί με τη μορφή $A = H(A) + S(A)$, όπου:

$$H(A) = \frac{A + A^*}{2} \quad \text{και} \quad S(A) = \frac{A - A^*}{2},$$

είναι το *ερμιτιανό* και το *αντιερμιτιανό μέρος* του πίνακα A , αντίστοιχα.

Σημείωση: Υπενθυμίζουμε ότι οι πίνακες $H(A)$ και $-i S(A)$ είναι ερμιτιανοί.

Πρόταση 1.2.11. Για κάθε τετραγωνικό πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, ισχύουν:

$$F(H(A)) = \text{Re}(F(A)) \quad \text{και} \quad F(S(A)) = i \text{Im}(F(A)),$$

όπου $F(A)$ είναι το αριθμητικό πεδίο του πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

Σημείωση: Το αριθμητικό πεδίο του ερμιτιανού και του αντιερμιτιανού μέρους του πίνακα A , είναι οι προβολές του $F(A)$ στον πραγματικό και στον φανταστικό άξονα, αντίστοιχα.

Ορισμός 1.2.12. Έστω πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Ονομάζουμε *χαρακτηριστική εξίσωση του πίνακα A (characteristic equation of the matrix A)*, την εξίσωση:

$$Ax = \lambda x, \quad \text{όπου } x \in \mathbb{C}^n \text{ και } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι ισοδύναμη με το ομογενές σύστημα $(A - \lambda I_n) x = 0$, όπου $I_n \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ο μοναδιαίος πίνακας. Αναζητούμε μη μηδενικές λύσεις του συστήματος, επομένως η ορίζουσά του θα πρέπει να είναι μηδενική. Δηλαδή, θα έχουμε

$$\det(A - \lambda I_n) = |A - \lambda I_n| = 0.$$

Από την παραπάνω ορίζουσα, προκύπτει το πολυώνυμο:

$$p_A(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0, \quad (1.1)$$

το οποίο καλείται *χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A (characteristic polynomial of matrix A)*.

Ορισμός 1.2.13. Ονομάζουμε *βαθμό (rank)* ενός πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ και τον συμβολίζουμε με $\text{rank}(A)$, τη μέγιστη διάσταση του τετραγωνικού υποπίνακα που έχει μη μηδενική ορίζουσα.

Ορισμός 1.2.14. Οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του πίνακα A , που προκύπτουν από τη σχέση (1.1) είναι οι

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \text{ με } m \leq n$$

κι ονομάζονται *ιδιοτιμές* (*eigenvalues*) του πίνακα. Αν αντικαταστήσουμε τις ιδιοτιμές λ_i , για $i = 1, 2, \dots, m$ στο ομογενές σύστημα $(A - \lambda_i I_n)x = 0$, προκύπτουν γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις του συστήματος, πλήθους s_i , με:

$$s_i = n - \text{rank}(A - \lambda_i I_n).$$

Οι λύσεις αυτές είναι τα διανύσματα $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik_i} \in \mathbb{C}^n$, τα οποία ονομάζονται *ιδιοδιανύσματα* (*eigenvectors*) του πίνακα A , που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές λ_i .

Ορισμός 1.2.15. Ονομάζουμε *φάσμα* (*spectrum*) του πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ και το συμβολίζουμε με $\sigma(A)$, το σύνολο των ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης, δηλαδή το σύνολο των ιδιοτιμών του πίνακα A . Επομένως, ισχύει:

$$\sigma(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : \det(A - \lambda I_n) = 0 \}, \quad \text{ή}$$

$$\sigma(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : p_A(\lambda) = 0 \}.$$

Σημείωση: Διαφορετικά, ο μεγαλύτερος αριθμός γραμμικώς ανεξάρτητων γραμμών ή στηλών του πίνακα A .

1.2.1 Νόρμες Πινάκων

Ορισμός 1.2.16. Μία συνάρτηση $\|\cdot\| : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ ονομάζεται *νόρμα πινάκων* (*matrix norm*), αν για κάθε $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, ικανοποιεί τα ακόλουθα:

- i) $\|A\| \geq 0$ (μη αρνητική).
- ii) $\|A\| = 0$, αν και μόνο αν $A = 0$.
- iii) $\|aA\| = |a| \|A\|$, για κάθε $a \in \mathbb{C}$.
- iv) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ (τριγωνική ανισότητα).
- v) $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ (υπο-πολλαπλασιαστική).

Ειδικότερα, για κάθε νόρμα πινάκων $\|\cdot\|$ και τον μοναδιαίο πίνακα I_n , ισχύει:

$$\|I_n\| = \|I_n^2\| \leq \|I_n\|^2 \text{ και συνεπώς, } \|I_n\| \geq 1.$$

Ορισμός 1.2.17. Η l_1 -νόρμα ενός πίνακα $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ορίζεται ως

$$\|A\|_{l_1} = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|.$$

Ορισμός 1.2.18. Ονομάζουμε *ίχνος* (*trace*) ενός πίνακα $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ και το συμβολίζουμε με $trace(A)$ (ή απλούστερα, $tr(A)$), το άθροισμα των στοιχείων της διαγωνίου του, δηλαδή:

$$trace(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}.$$

Ορισμός 1.2.19. Η l_2 - νόρμα (ή νόρμα *Frobenius*) ενός πίνακα $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ορίζεται ως

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{trace(A^*A)}.$$

Σημείωση: Στον $\mathbb{C}^{n \times n}$ η νόρμα Frobenius είναι ορθομοναδιαία αναλλοίωτη.

Ορισμός 1.2.20. Η l_∞ - νόρμα ενός πίνακα $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ορίζεται ως

$$\|A\|_{l_\infty} = \max \{ |a_{ij}| : i, j = 1, 2, \dots, n \}.$$

Ορισμός 1.2.21. Έστω $\|\cdot\|$ μία νόρμα διανυσμάτων στον \mathbb{C}^n . Η *επαγόμενη* (*induced*) (ή φυσική) νόρμα $\|\cdot\|$, από τη νόρμα $\|\cdot\|$ στον $\mathbb{C}^{n \times n}$, ορίζεται ως:

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \max_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \max_{\|x\| \leq 1} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Ορισμός 1.2.22. Ορίζουμε ως *φασματική* (*spectral*) (ή *τελεστική*) νόρμα πινάκων στον $\mathbb{C}^{n \times n}$ τη νόρμα:

$$\|A\|_2 = \{ \sqrt{\lambda} : \lambda \in \sigma(A^*A) \},$$

όπου $\sigma(A^*A)$ είναι το φάσμα του πίνακα A^*A .

Σημείωση: Η φασματική νόρμα $\|\cdot\|_2$ είναι νόρμα πινάκων, η οποία επάγεται από την Ευκλείδεια νόρμα $\|\cdot\|_2$. Δηλαδή, ισχύει

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2.$$

Ορισμός 1.2.23. Ένας πίνακας $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ονομάζεται *ορθομοναδιαίος* (*unitary matrix*), αν ικανοποιεί τη σχέση $U^*U = UU^* = I_n$.

Ορισμός 1.2.24. Μία νόρμα $\|\cdot\|$ ονομάζεται *ορθομοναδιαία αναλλοίωτη* (*unitarily invariant*), αν για κάθε διάνυσμα $x \in \mathbb{C}^n$ και για κάθε ορθομοναδιαίο πίνακα $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$, ισχύει $\|Ux\| = \|x\|$.

1.2.2 Κανονική Μορφή Jordan

Ορισμός 1.2.25. Έστω ένας τετραγωνικός πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ και λ_0 μία ιδιοτιμή του αλγεβρικής πολλαπλότητας $n_0 > 1$. Ένα μη μηδενικό διάνυσμα $x \in \mathbb{C}^n$ ονομάζεται γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα τάξης r (*generalized eigenvector of order r*) του πίνακα A , που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_0 , ακριβώς όταν για τον ελάχιστο φυσικό αριθμό r , ισχύουν

$$(A - \lambda_0 I_n)^r x = 0 \quad \text{και} \quad (A - \lambda_0 I_n)^{r-1} x \neq 0.$$

Για $r = 1$, τα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα τάξης 1 είναι τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A . Προφανώς, ο αριθμός r είναι το πολύ ίσος με την αλγεβρική πολλαπλότητα της λ_0 στο ελάχιστο πολυώνυμο, έστω $m(\lambda)$, του A . Τα διανύσματα

$$x_{r-1} = (A - \lambda_0 I_n) x, \quad x_{r-2} = (A - \lambda_0 I_n)^2 x, \dots, \quad x_1 = (A - \lambda_0 I_n)^{r-1} x$$

είναι τα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα, που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_0 , τάξης $r - 1$, $r - 2$ και 1, αντίστοιχα, εφόσον ισχύουν

$$(A - \lambda_0 I_n)^l x_l = (A - \lambda_0 I_n)^l (A - \lambda_0 I_n)^{r-l} x = (A - \lambda_0 I_n)^r x = 0 \quad \text{και}$$

$$(A - \lambda_0 I_n)^{l-1} x_l = (A - \lambda_0 I_n)^{r-l} x \neq 0, \quad \text{για } l = 0, 1, \dots, r - 1 \text{ και } x_0 = 0.$$

Έτσι λοιπόν, από το γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα $x_r \equiv x$, τάξης r και λόγω της αναδρομικής σχέσης:

$$x_l = (A - \lambda_0 I_n) x_{l+1}, \tag{1.2}$$

δημιουργείται ένα σύνολο $\mathbb{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_{r-1}, x_r\}$, από r το πλήθος γενικευμένα ιδιοδιανύσματα. Το σύνολο \mathbb{X} που κατασκευάσαμε ονομάζεται *αλυσίδα Jordan* (*Jordan chain*) μήκους r , της οποίας τα διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Ορισμός 1.2.26. Θεωρούμε τον πίνακα με στήλες τα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα της αλυσίδας \mathbb{X} κατά αύξουσα τάξη. Από τη σχέση (1.2) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} A [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_r] &= [A x_1 \quad A x_2 \quad \dots \quad A x_r] \\ &= [\lambda_0 x_1 \quad \lambda_0 x_2 + x_1 \quad \dots \quad \lambda_0 x_r + x_{r-1}] \\ &= [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_r] \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_0 \end{bmatrix} \\ &= [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_r] J_r, \end{aligned} \tag{1.3}$$

όπου ο υποπίνακας $J_r \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ονομάζεται το *Jordan block* και αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_0 .

Ορισμός 1.2.27. Θεωρούμε τον πίνακα $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$, με στήλες τα διανύσματα των αλυσίδων, όπως αυτές διατάσσονται στη σχέση (1.3) και για όλες τις διακεκριμένες ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l$, ως

$$M = [M_{11} \dots M_{1n_1} \quad M_{21} \dots M_{2n_2} \quad \dots \quad M_{l1} \dots M_{ln_l}],$$

όπου οι στήλες του πίνακα $[M_{i1} \dots M_{in_i}]$ είναι το σύνολο των διανυσμάτων των αλυσίδων που αντιστοιχούν στην λ_i . Τότε θα έχουμε

$$\begin{aligned} AM &= [AM_{11} \dots AM_{1n_1} \quad \dots \quad AM_{l1} \dots AM_{ln_l}] \\ &= [M_{11} J_{11} \dots M_{1n_1} J_{1n_1} \quad \dots \quad M_{l1} J_{l1} \dots M_{ln_l} J_{ln_l}] \\ &= M \operatorname{diag}(J_{11} \dots J_{1n_1} \quad \dots \quad J_{l1} \dots J_{ln_l}), \end{aligned} \quad (1.4)$$

όπου J_{i1}, \dots, J_{in_i} είναι οι πίνακες Jordan που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_i . Επιπλέον, ο πίνακας M είναι αντιστρέψιμος και οι στήλες του ονομάζονται *βάση Jordan (Jordan basis)* του πίνακα A . Ο πίνακας της σχέσης (1.4)

$$J = \operatorname{diag}(J_{11} \dots J_{1n_1} \quad \dots \quad J_{l1} \dots J_{ln_l})$$

ονομάζεται *κανονική μορφή Jordan (Jordan normal form)* του πίνακα A .

Σημείωση: Πίνακα Jordan ονομάζουμε κάθε block διαγώνιο πίνακα $J \in \mathbb{C}^{n \times n}$, ο οποίος έχει διαγώνιους τετραγωνικούς υποπίνακες, τους υποπίνακες Jordan (Jordan blocks) που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές του A .

1.3 Στοιχεία Γενικής Τοπολογίας και Συναρτησιακής Ανάλυσης

1.3.1. Γενική Τοπολογία

Ορισμός 1.3.1. Ονομάζουμε *μετρικό χώρο (metric space)* ένα ζεύγος (X, ρ) , όπου X είναι ένα μη κενό σύνολο και $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ μία απεικόνιση, που για κάθε $x, y, z \in X$, ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

- i) $\rho(x, y) \geq 0$ και $\rho(x, y) = 0$, αν και μόνο αν $x = y$.
- ii) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$. (συμμετρική ιδιότητα)
- iii) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$. (τριγωνική ανισότητα)

Η απεικόνιση ρ ονομάζεται *μετρική* και ο αριθμός $\rho(x, y)$ ονομάζεται *απόσταση του x από το y* .

Κάθε νόρμα στον διανυσματικό χώρο \mathbb{C}^n , ορίζει μία μετρική:

$$\rho(x, y) = \|x - y\|, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{C}^n.$$

(Συνεπώς, ορίζεται πάνω στον \mathbb{C}^n μία τοπολογία.)

Ορισμός 1.3.2. Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος. Για κάθε $x_0 \in X$ και $\delta > 0$, ορίζουμε ως:

i) *ανοικτή μπάλα (open ball)* κέντρου x_0 και ακτίνας $\delta > 0$, το σύνολο

$$B(x_0, \delta) = \{x \in X : \rho(x_0, x) < \delta\},$$

ii) *κλειστή μπάλα (closed ball)* κέντρου x_0 και ακτίνας $\delta > 0$, το σύνολο

$$B[x_0, \delta] = \{x \in X : \rho(x_0, x) \leq \delta\} \quad \text{και}$$

iii) *σφαίρα (sphere)* κέντρου x_0 και ακτίνας $\delta > 0$, το σύνολο

$$S(x_0, \delta) = \{x \in X : \rho(x_0, x) = \delta\}.$$

Ορισμός 1.3.3. Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Ορίζουμε ως *εσωτερικό (interior)* του συνόλου A και το συμβολίζουμε με $\text{int}[A]$, το σύνολο

$$\text{int}[A] = \{x \in A : \text{υπάρχει } \varepsilon > 0, \text{ ώστε } B(x, \varepsilon) \subseteq A\}.$$

Ορισμός 1.3.4. Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος και $D \subseteq X$. Το D καλείται *ανοικτό σύνολο (open set)*, αν $x \in D$ υπάρχει $\varepsilon > 0$, έτσι ώστε να ισχύει

$$B(x, \varepsilon) \subseteq D.$$

Σημείωση: Δηλαδή, το D είναι ανοικτό αν κάθε σημείο του είναι εσωτερικό.

Ορισμός 1.3.5. Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος και $G \subseteq X$. Το G καλείται *κλειστό σύνολο (closed set)*, αν το συμπλήρωμά του, G^c , είναι ανοικτό σύνολο, έτσι ώστε $G^c = X \setminus G$.

Ορισμός 1.3.6. Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος, $A \subseteq X$ και $x \in X$. Το $x \in X$ καλείται *συνοριακό σημείο (boundary point)* του συνόλου A , αν για κάθε $\varepsilon > 0$, ισχύουν

$$B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \quad \text{και} \quad B(x, \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset.$$

Ορισμός 1.3.7. Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος, $A \subseteq X$ και $x \in X$. Το $x \in X$ καλείται *σημείο συσσώρευσης (accumulation point)* του συνόλου A , αν για κάθε $\varepsilon > 0$, ισχύει

$$(B(x, \varepsilon) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset.$$

Ορισμός 1.3.8. Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος, $A \subseteq X$ και $x \in X$. Το $x \in X$ καλείται *μεμονωμένο σημείο (isolated point)* του συνόλου A , αν για κάθε $\varepsilon > 0$, ισχύει

$$B(x, \varepsilon) \cap A = \{x\}.$$

Ορισμός 1.3.9. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $A \subset X$. Μία οικογένεια $\{G_i\}_{i \in I}$ υποσυνόλων του X λέγεται *κάλυμμα του συνόλου A (cover of set A)*, αν ισχύει:

$$A \subset \bigcup_{i \in I} G_i.$$

Ορισμός 1.3.10. Έστω $J \subset I$ και $A \subset \bigcup_{i \in J} G_i$, τότε το $\{G_i\}_{i \in J}$ ονομάζεται υποκάλυμμα (*subcover*) του $\{G_i\}_{i \in I}$.

Ορισμός 1.3.11. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $K \subset X$. Το σύνολο K λέγεται συμπαγές (*compact*), αν κάθε ανοικτό κάλυμμα του K έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα. Δηλαδή, αν για κάθε οικογένεια $\{G_i\}_{i \in I}$ ανοικτών υποσυνόλων του X , με

$$K \subset \bigcup_{i \in I} G_i, \text{ υπάρχουν } n \in \mathbb{N} \text{ και } i_1, i_2, \dots, i_n \in I, \text{ ώστε}$$

$$K \subset \bigcup_{k=1}^n G_{i_k}.$$

Σημείωση: Κάθε συμπαγές σύνολο είναι κλειστό και φραγμένο.

Θεώρημα 1.3.12. (*Weierstrass*) Έστω X συμπαγές υποσύνολο του \mathbb{C}^n και $f : X \rightarrow \mathbb{C}^m$ συνεχής απεικόνιση στο X . Τότε το $f(X)$ (δηλαδή, η εικόνα του συνόλου X) είναι συμπαγές υποσύνολο του \mathbb{C}^m .

Σημείωση: Συνεπώς, «η συνεχής εικόνα συμπαγούς συνόλου είναι συμπαγές σύνολο».

Ορισμός 1.3.13. Έστω K ένα υποσύνολο του \mathbb{C}^n . Αν το σύνολο K είναι κυρτό, συμπαγές κι έχει μη κενό εσωτερικό (δηλαδή, $\text{Int}[K] \neq \emptyset$), τότε το K λέγεται *κυρτό σώμα*.

Ορισμός 1.3.14. Έστω X ένα σύνολο. Μια τοπολογία του X είναι μια οικογένεια \mathcal{T} υποσυνόλων του, που ικανοποιεί τα παρακάτω αξιώματα:

- i) Το X και το \emptyset ανήκουν στην \mathcal{T} .
- ii) Η τομή πεπερασμένης οικογένειας στοιχείων της \mathcal{T} είναι στοιχείο της \mathcal{T} (δηλαδή, αν $n \in \mathbb{N}$ και G_1, G_2, \dots, G_n , τότε $\bigcap_{i=1}^n G_i \in \mathcal{T}$).
- iii) Η ένωση αυθαίρετης οικογένειας στοιχείων της \mathcal{T} είναι στοιχείο της \mathcal{T} (δηλαδή, αν το L είναι αυθαίρετο σύνολο δεικτών και για $l \in L$, ισχύει $G_l \in \mathcal{T}$, τότε $\bigcup_{l \in L} G_l \in \mathcal{T}$).

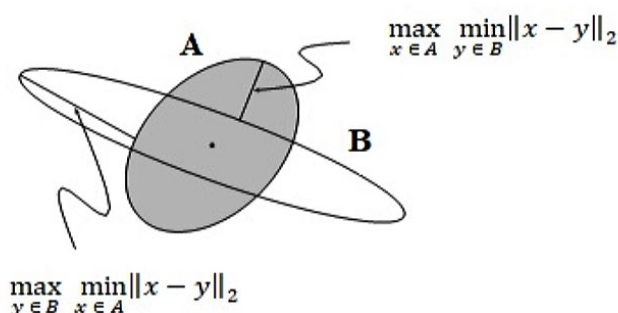
Το ζεύγος (X, \mathcal{T}) καλείται *τοπολογικός χώρος* (*topological space*). Τα στοιχεία του X ονομάζονται σημεία του χώρου και τα στοιχεία του συνόλου \mathcal{T} ονομάζονται ανοικτά σύνολα του χώρου.

Ορισμός 1.3.15. Έστω (X, \mathcal{T}) τοπολογικός χώρος και $x_0 \in X$. Ένα υποσύνολο $N(x_0)$ του X καλείται *γειτονιά (neighborhood)* του x_0 , αν υπάρχει ανοικτό σύνολο U του X , τέτοιο ώστε να ισχύει $x_0 \in U \subseteq N(x_0)$.

Σημείωση: Παρατηρούμε ότι το σύνολο $N(x_0)$ μπορεί να μην είναι ανοικτό.

Ορισμός 1.3.16. Έστω A, B δύο κυρτά σώματα στον \mathbb{C}^n . Ορίζουμε ως *απόσταση Hausdorff (Hausdorff distance)* ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_2$ και συμβολίζουμε με $d(A, B)$, την ποσότητα:

$$d(A, B) = \max \left\{ \max_{x \in A} \min_{y \in B} \|x - y\|_2, \max_{y \in B} \min_{x \in A} \|x - y\|_2 \right\}.$$



Σχήμα 1.2 Η απόσταση Hausdorff μεταξύ των σωμάτων A και B είναι η μεγαλύτερη από τις δύο αποστάσεις που επισημαίνονται στο σχήμα.

1.3.2. Τελεστές σε Χώρους Banach

Ορισμός 1.3.17. Μία ακολουθία $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ του \mathbb{C} ονομάζεται *ακολουθία Cauchy (Cauchy sequence)* (ή *Βασική*), αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει ένας φυσικός αριθμός $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, έτσι ώστε:

$$\|z_n - z_m\| < \varepsilon, \text{ για κάθε } n, m \geq n_0.$$

Ορισμός 1.3.18. Ένας μιγαδικός χώρος $(X, \|\cdot\|)$ καλείται *μιγαδικός χώρος Banach (complex Banach space)*, αν είναι πλήρης (δηλαδή, κάθε Cauchy ακολουθία του συγκλίνει σε ένα στοιχείο του X) ως προς τη μετρική που ορίζει η νόρμα του.

Ορισμός 1.3.19. Έστω $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ δύο χώροι με νόρμα. Καλούμε *γραμμική απεικόνιση (linear mapping)* ή *γραμμικό τελεστή (linear operator)* την απεικόνιση $T : X \rightarrow Y$, αν ικανοποιεί τα ακόλουθα:

i) $T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2)$, για κάθε $x_1, x_2 \in X$.

ii) $T(\lambda x) = \lambda T(x)$, για κάθε $x \in X, \lambda \in \mathbb{C}$.

ή ισοδύναμα

iii) $T(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda T(x_1) + \mu T(x_2)$, για κάθε $x_1, x_2 \in X, \lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Για συντομία συνηθίζουμε να γράφουμε Tx_1 και Tx_2 , αντί για $T(x_1)$ και $T(x_2)$, αντίστοιχα.

Ορισμός 1.3.20. Έστω $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ δύο χώροι με νόρμα και $T : X \rightarrow Y$ μία γραμμική απεικόνιση. Θα λέμε ότι η T είναι *φραγμένη απεικόνιση* (*bounded mapping*) ή *φραγμένος τελεστής* (*bounded operator*), αν $\|T\| < +\infty$. Ισοδύναμα, αν ο περιορισμός της T στη μοναδιαία μπάλα (σφαίρα) του X , είναι φραγμένη συνάρτηση. Ο αριθμός

$$\|T\| = \sup \{ \|Tx\|_Y : x \in X, \|x\|_X \leq 1 \}$$

ονομάζεται νόρμα του τελεστή T .

Ορισμός 1.3.21. Αν $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ δύο χώροι με νόρμα, συμβολίζουμε με $B(X, Y)$, το σύνολο όλων των φραγμένων γραμμικών τελεστών $T : X \rightarrow Y$. Στην ειδική περίπτωση που ισχύει $X = Y$, συμβολίζουμε απλά $B(X)$, αντί για $B(X, X)$. Ειδικότερα, το σύνολο $B(X, \mathbb{C})$, συμβολίζεται X^* και καλείται (*τοπολογικός*) *δυϊκός του X* (*dual space of X*).

Θεώρημα 1.3.22. (*Bolzano-Weierstrass*) Κάθε φραγμένη ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο

Αριθμητικό Πεδίο Τετραγωνικών Πινάκων

2.1 Ορισμοί Αριθμητικού Πεδίου

Ας ξεκινήσουμε τη μελέτη μας υποθέτοντας ότι ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι ένας μιγαδικός χώρος Banach, ο χώρος $(X^*, \|\cdot\|)$ είναι ο δυϊκός του και $B(X)$ είναι το σύνολο όλων των φραγμένων γραμμικών τελεστών που δρουν πάνω στον X . Ορίζουμε το σύνολο των κανονικοποιημένων καταστάσεων:

$$\Omega = \{ \omega \in B(X)^* : \omega(I) = \|\omega\| = 1 \},$$

όπου με I συμβολίζουμε τον ταυτοτικό τελεστή.

Για κάθε τελεστή $A \in B(X)$, το αλγεβρικό αριθμητικό πεδίο του A (*algebraic numerical range of A*), ορίζεται ως εξής:

$$F_\omega(A) = \{ \omega(A) : \omega \in \Omega \} \quad (2.1)$$

Το αριθμητικό πεδίο είναι επίσης γνωστό και ως πεδίο τιμών (*field of values*), ειδικά όταν αφορά στους τελεστές χώρων άπειρης διάστασης. Στο σημείο αυτό, αξίζει να αναφερθούμε σε μία άλλη μορφή του αριθμητικού πεδίου που παρουσιάζει ο M. Martín στο [21], αυτή του χωρικού αριθμητικού πεδίου του τελεστή A (*spatial numerical range of A*), η οποία ορίζεται ως εξής:

$$F_X(A) = \{ x^*(Ax) : x \in S_X, x^* \in S_{X^*}, x^*(x) = 1 \},$$

όπου με S_X συμβολίζουμε τη μοναδιαία σφαίρα του μιγαδικού χώρου Banach. Το αλγεβρικό αριθμητικό πεδίο ταυτίζεται με το χωρικό, στην περίπτωση που ο X είναι χώρος Hilbert. Για αυθαίρετους χώρους Banach, η ισότητα

$$\overline{\text{co}\{F_X(A)\}} = F_\omega(A),$$

όπου με $\text{co}\{F_X(A)\}$ συμβολίζουμε την κυρτή θήκη του $F_X(A)$, ισχύει για όλους τους τελεστές $A \in B(X)$. Η παραπάνω ισότητα επιτρέπει τη μελέτη του αλγεβρικού αριθμητικού πεδίου, χωρίς να λαμβάνονται υπόψη στοιχεία του τοπολογικού δυϊκού χώρου και αντίστροφα, και καθιστά ευκολότερα τα αποτελέσματα των αποδείξεων του χωρικού αριθμητικού πεδίου.

Παρακινούμενοι τώρα από τον ορισμό (2.1), του αλγεβρικού αριθμητικού πεδίου για έναν φραγμένο γραμμικό τελεστή και στρέφοντας το ενδιαφέρον μας στην περίπτωση των χώρων πεπερασμένης διάστασης, για $(X, \|\cdot\|) = (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)$, όπου $\|\cdot\|_2$ είναι η φασματική νόρμα, μπορούμε να δώσουμε τον ορισμό για το αριθμητικό πεδίο ενός τετραγωνικού πίνακα A .

2.1.1 Ορισμός Κλασικού Αριθμητικού Πεδίου $F(A)$

Κλασικό Αριθμητικό Πεδίο $F(A)$ του Πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$:

Το κλασικό αριθμητικό πεδίο (*standard numerical range*), $F(A)$, ενός τετραγωνικού πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, ορίζεται ως το σύνολο:

$$F(A) = \{ x^* A x \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{C}^n, x^* x = 1 \}, \quad (2.2)$$

όπου, με x^* συμβολίζουμε τον ερμιτιανό συζυγή του διανύσματος στήλης $x \in \mathbb{C}^n$.

Ο κλασικός ορισμός του αριθμητικού πεδίου τετραγωνικών πινάκων βασίζεται στο εσωτερικό γινόμενο, αφού για κάθε τετραγωνικό πίνακα $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ και κάθε διάνυσμα $x = [x_i] \in \mathbb{C}^n$, με $\sum_{i=1}^n |x_i|^2 = 1$, γράφουμε

$$x^* A x = \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} \bar{x}_i x_j).$$

Οι πίνακες $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ αποτελούν το σύνολο των ερμιτιανών μορφών $x^* A x$, όπου τα x είναι στοιχεία της μοναδιαίας σφαίρας $\{x \in \mathbb{C}^n : x^* x = 1\}$ στον \mathbb{C}^n . Το αριθμητικό πεδίο $F(A)$ είναι λοιπόν ο κανονικοποιημένος γεωμετρικός τόπος μίας ερμιτιανής μορφής που σχετίζεται με τον πίνακα A .

2.2 Θεμελιώδεις Ιδιότητες του Κλασικού Αριθμητικού Πεδίου

Στο σημείο αυτό, έχει ενδιαφέρον να αναφερθούμε στις σημαντικές ιδιότητες του κλασικού αριθμητικού πεδίου τετραγωνικών πινάκων, οι οποίες θα αποβούν ιδιαίτερα χρήσιμες στην πορεία της παρούσας εργασίας. Οι ιδιότητες που θα επισημάνουμε είναι εκείνες που κρίνονται σημαντικότερες για την κατανόηση των αποτελεσμάτων μας και παράλληλα αποτελούν χρήσιμα εργαλεία της αποδεικτικής διαδικασίας. Δύο εκ των ιδιοτήτων αυτών, μία τοπολογική και μία γεωμετρική, έχουν ιδιαίτερη σημασία για τα σύνολα που θα παρουσιάσουμε τη συνέχεια. Οι ιδιότητες αυτές αφορούν στη συμπάγεια και στην κυρτότητα του συνόλου $F(A)$, αντίστοιχα. Ας ξεκινήσουμε λοιπόν να τις μελετάμε.

Ιδιότητα εγκλεισμού φάσματος $\sigma(A)$:

Πρόταση 2.2.1 Για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, το φάσμα του, $\sigma(A)$, περιέχεται στο αριθμητικό πεδίο $F(A)$, δηλαδή $\sigma(A) \subset F(A)$.

Απόδειξη. Έστω $\lambda \in \sigma(A)$ και $x \in \mathbb{C}^n$ ένα μοναδιαίο (δηλαδή, $x^* x = 1$) ιδιοδιάνυσμα του πίνακα A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ (δηλαδή, $Ax = \lambda x$). Τότε ισχύει $\lambda = \lambda(x^* x) = x^*(\lambda x) = x^* A x \in F(A)$. Συνεπώς, $\sigma(A) \subset F(A)$. ■

Η ιδιότητα αυτή του φάσματος μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το αριθμητικό πεδίο $F(A)$ συμπεριλαμβάνει τις ιδιοτιμές του πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Εύκολα λοιπόν

παρατηρούμε ότι τόσο το φάσμα, όσο και το αριθμητικό πεδίο, αποτελούν δύο σύνολα από τα οποία μπορούμε να αντλήσουμε σημαντικές πληροφορίες για τον πίνακα A . Ωστόσο, το αριθμητικό πεδίο μας παρέχει πληροφορίες τις οποίες το φάσμα δεν μπορεί. Επιπλέον, το φάσμα $\sigma(A)$ είναι ένα διακριτό σύνολο σημείων, ενώ το πεδίο $F(A)$ (όπως θα αποδείξουμε στη συνέχεια) είναι ένα συμπαγές και κυρτό υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου.

Ιδιότητα υποπροσθετικότητας του $F(A)$:

Πρόταση 2.2.2. Για κάθε $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, ισχύει ότι $F(A + B) \subseteq F(A) + F(B)$.

Απόδειξη. Γνωρίζουμε από τον ορισμό του κλασικού αριθμητικού πεδίου τετραγωνικών πινάκων, ότι το αριθμητικό πεδίο $F(A + B)$, θα έχει την ακόλουθη μορφή:

$$F(A + B) = \{ x^*(A + B) x \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{C}^n, x^*x = 1 \}.$$

Για την ερμιτιανή μορφή $x^*(A + B) x$, έχουμε:

$$x^*(A + B) x = x^*A x + x^*B x \subseteq x^*A x + y^*B y, \text{ για } x, y \in \mathbb{C}^n.$$

Συνεπώς, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} F(A + B) &= \{ x^*(A + B) x \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{C}^n, x^*x = 1 \} \\ &= \{ x^*A x + x^*B x \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{C}^n, x^*x = 1 \} \\ &\subseteq \{ x^*A x \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{C}^n, x^*x = 1 \} + \{ y^*B y \in \mathbb{C} : y \in \mathbb{C}^n, y^*y = 1 \} \\ &= F(A) + F(B). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Σημείωση: Συνδυάζοντας τις δύο ιδιότητες του αριθμητικού πεδίου που προκύπτουν από την **Πρόταση 2.2.1** και από την **Πρόταση 2.2.2**, παρατηρούμε ότι καταλήγουμε στο παρακάτω αποτέλεσμα

$$\sigma(A + B) \subset F(A + B) \subseteq F(A) + F(B).$$

Οι δύο αυτοί εγκλεισμοί που προκύπτουν, δημιουργούν μία νέα σχέση μεταξύ του φάσματος δύο πινάκων $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ και των αριθμητικών τους πεδίων. Συμπεραίνουμε λοιπόν, ότι αν μας δοθούν πληροφορίες για τα αριθμητικά πεδία δύο τετραγωνικών πινάκων A και B , μπορούμε εύκολα να αντλήσουμε από αυτά πληροφορίες για το φάσμα του αθροίσματός τους.

Ιδιότητα κανονικότητας του $F(A)$:

Πρόταση 2.2.3. Έστω ένας κανονικός πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ (δηλαδή, πίνακας για τον οποίο ισχύει $A A^* = A^* A$). Το αριθμητικό πεδίο του πίνακα A είναι η κυρτή θήκη των ιδιοτιμών του. Δηλαδή, ισχύει $F(A) = \text{co}\{\sigma(A)\}$.

Απόδειξη. Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ οι ιδιοτιμές του πίνακα A . Αφού ο πίνακας A είναι κανονικός, μπορεί να γραφεί με τη μορφή $A = U^* M U$, όπου ο πίνακας $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ είναι διαγώνιος, με στοιχεία τις ιδιοτιμές του A , δηλαδή $M = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ και ο πίνακας $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ορθομοναδιαίος, δηλαδή ισχύει $U^* U = U U^* = 1$. Από την ιδιότητα της ορθομοναδιαίας αναλλοιωσιμότητας, για τα αριθμητικά πεδία των πινάκων A και M , έχουμε ότι

$$F(A) = F(U^* M U) = F(M). \quad (2.3)$$

Όμως, το αριθμητικό πεδίο του πίνακα M είναι της μορφής:

$$\begin{aligned} F(M) &= \{x^* M x \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{C}^n, x^* x = 1\} \\ &= \{x^* \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} x \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{C}^n, x^* x = 1\} \\ &= \{x^* \lambda_1 x \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{C}^n, x^* x = 1\} + \\ &= \{x^* \lambda_2 x \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{C}^n, x^* x = 1\} + \dots + \\ &\quad \{x^* \lambda_n x \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{C}^n, x^* x = 1\} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^n \bar{x}_i x_i \lambda_i : \sum_{i=1}^n \bar{x}_i x_i = 1 \right\}. \end{aligned}$$

Συνεπώς, το $F(M)$ είναι το σύνολο όλων των κυρτών συνδυασμών των διαγώνιων στοιχείων του πίνακα M . Εφόσον τα διαγώνια στοιχεία αυτά είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A , συμπεραίνουμε ότι ισχύει $F(M) = \text{co}\{\sigma(A)\}$. Άρα λοιπόν, λόγω της σχέσης (2.3), θα ισχύει και ότι $F(A) = \text{co}\{\sigma(A)\}$. ■

2.2.1 Ιδιότητα της Συμπάγειας του $F(A)$

Πρόταση 2.2.4. (Συμπάγεια) Για κάθε τετραγωνικό πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, το $F(A)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του \mathbb{C} .

Απόδειξη. Το αριθμητικό πεδίο $F(A)$ αποτελεί εικόνα της συνεχούς απεικόνισης $x \rightarrow x^* A x$ από την (Ευκλείδεια) μοναδιαία σφαίρα $\{x \in \mathbb{C}^n : x^* x = 1\}$ του \mathbb{C}^n στο μιγαδικό επίπεδο. Η μοναδιαία σφαίρα όμως είναι ένα συμπαγές σύνολο (επομένως, είναι κλειστό και φραγμένο). Συνεπώς, από το Θεώρημα Weierstrass (**Θεώρημα 1.3.12.**) το $F(A)$, ως συνεχής εικόνα συμπαγούς συνόλου, θα είναι κι αυτό ένα συμπαγές υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου. ■

Παρατήρηση: Το $F(A)$ είναι συμπαγές, άρα είναι κλειστό και φραγμένο σύνολο.

Ιδιότητα ορθομοναδιαίας αναλλοιωσιμότητας του $F(A)$:

Πρόταση 2.2.5. Για κάθε $A, U \in \mathbb{C}^{n \times n}$, με U ορθομοναδιαίο πίνακα, ισχύει

$$F(U^* A U) = F(A).$$

Απόδειξη. Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι

$$\begin{aligned} F(U^* A U) &= \{ x^* (U^* A U) x : x \in \mathbb{C}^n : x^* x = 1 \} \\ &= \{ (Ux)^* U (U^* A U) U^* (Ux) : Ux \in \mathbb{C}^n : (Ux)^* (Ux) = 1 \} \\ &= \{ (Ux)^* A (Ux) : Ux \in \mathbb{C}^n, (Ux)^* (Ux) = 1 \}. \end{aligned}$$

Θέτοντας τώρα $y = Ux$, $y \in \mathbb{C}^n$ και $y^* y = (Ux)^* (Ux) = x^* U^* U x = 1$ έχουμε :

$$x^* (U^* A U) x = (Ux)^* A (Ux) = y^* A y \in F(A).$$

Επομένως, $F(U^* A U) \subseteq F(A)$. Επίσης, $F(A) = F(U (U^* A U) U^*) \subseteq F(U^* A U)$.

Συνεπώς, από τους δύο εγκλεισμούς προκύπτει ότι $F(U^* A U) = F(A)$. ■

Παρατηρούμε ότι ο ορθομοναδιαίος μετασχηματισμός, ως ένας μετασχηματισμός ισομετρίας, διατηρεί αναλλοίωτο το αριθμητικό πεδίο του πίνακα A , όπως ακριβώς συμβαίνει κι όταν δρα πάνω στην επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας του \mathbb{C}^n .

Ιδιότητα μεταφοράς του $F(A)$:

Πρόταση 2.2.6. Για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ και $\alpha, b \in \mathbb{C}$ ισχύουν τα ακόλουθα

i) $F(I_n) = \{1\}$,

ii) $F(\alpha A + b I_n) = \alpha F(A) + b$.

iii) $F(\alpha A) = \alpha F(A)$

Απόδειξη. i) Για το αριθμητικό πεδίο του ταυτοτικού πίνακα έχουμε

$$F(I_n) = \{ x^* I_n x \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{C}^n, x^* x = 1 \} = 1.$$

ii)
$$\begin{aligned} F(\alpha A + b I_n) &= \{ x^* (\alpha A + b I_n) x \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{C}^n, x^* x = 1 \} \\ &= \{ \alpha x^* A x + b x^* x \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{C}^n, x^* x = 1 \} \\ &= \alpha \{ x^* A x \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{C}^n, x^* x = 1 \} + b \\ &= \alpha F(A) + b. \end{aligned}$$

iii)
$$\begin{aligned} F(\alpha A) &= \{ \alpha x^* A x \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{C}^n, x^* x = 1 \} \\ &= \alpha \{ x^* A x \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{C}^n, x^* x = 1 \} = \alpha F(A). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Θα απεικονίσουμε τώρα σχηματικά το συμπέρασμα των ιδιοτήτων της **Πρότασης 2.2.6.**, στο παράδειγμα που ακολουθεί.

Παράδειγμα 2.2.7.

Ξεκινάμε θεωρώντας έναν πίνακα $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, ο οποίος έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 4$. Αποτυπώνοντας το αριθμητικό πεδίο $F(A)$ του 2×2 πίνακα A , στο σχήμα της

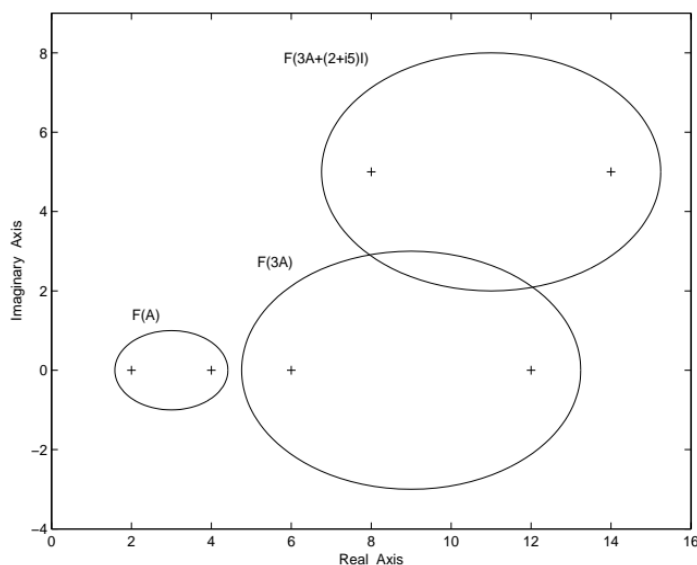
εικόνας που ακολουθεί, παρατηρούμε ότι είναι ένας κλειστός ελλειπτικός δίσκος, με εστίες $E = 1$ και $E' = 4$. Οι εστίες αυτές ταυτίζονται με τις ιδιοτιμές του πίνακα A , λ_1 και λ_2 , αντίστοιχα. Το αποτέλεσμα αυτό επιβεβαιώνεται στη συνέχεια από τον ισχυρισμό του **Θεωρήματος 2.2.10.** Για τους πίνακες

$$3A = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad 3A + (2 + i5)I_2 = \begin{bmatrix} 8 + i5 & 6 \\ 0 & 14 + i5 \end{bmatrix},$$

τα αριθμητικά τους πεδία προκύπτουν με βάση την **Πρόταση 2.2.6.**, ως εξής:

$$F(3A) = 3F(A) \quad \text{και} \quad F(3A + (2 + i5)I_2) = 3F(A) + 2 + i5$$

και αναπαριστώνται μαζί με το αριθμητικό πεδίο $F(A)$, στην εικόνα που ακολουθεί. Με "+" συμβολίζουμε τις ιδιοτιμές των πινάκων A , $3A$ και $3A + (2 + i5)I_2$. Όπως παρατηρούμε από τη σχηματική αναπαράσταση των πεδίων, τριπλασιάζοντας τον πίνακα A , το αριθμητικό πεδίο μεταφέρεται δεξιότερα κατά τον πραγματικό άξονα, ενώ με την πρόσθεση στον πίνακα $3A$ της ποσότητας $2 + i5$, το αριθμητικό πεδίο μετατοπίζεται ως προς τον πραγματικό, αλλά και ως προς τον φανταστικό άξονα.



Σχήμα 2.1 Αριθμητικά πεδία $F(A)$, $F(3A)$ και $F(3A + (2 + i5)I_2)$.

2.2.2 Ιδιότητα της Κυρτότητας του $F(A)$

Η ιδιότητα της κυρτότητας του συνόλου $F(A)$ αποδείχθηκε το 1918 από τους ερευνητές Toeplitz και Hausdorff. Οι ίδιοι διατύπωσαν και απέδειξαν το αντίστοιχο Θεώρημα, το οποίο θα μελετήσουμε στη συνέχεια. Για να καταφέρουμε όμως να περιγράψουμε και να κατανοήσουμε επαρκώς τη διαδικασία της απόδειξής του, είναι σημαντικό να μελετήσουμε πρώτα το Λήμμα που ακολουθεί.

Λήμμα 2.2.8. Έστω ένας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ερμιτιανός πίνακας κι έστω επίσης $\mu \in F(A)$. Τότε δύο οποιαδήποτε (διακεκριμένα) σημεία του συνόλου

$$L_A(\mu) = \{ x \in \mathbb{C}^n : x^* x = 1, x^* A x = \mu \}$$

είναι συνδεδεμένα με μονοπάτι, δηλαδή, μπορούν να συνδεθούν μέσω μίας συνεχούς καμπύλης, η οποία θα περιέχει εξ' ολοκλήρου το σύνολο αυτό.

Απόδειξη. Λόγω της **Πρότασης 2.2.5.** και της **Πρότασης 2.2.6.**, χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\mu = 0$ κι ότι ο πίνακας A είναι διαγώνιος, της μορφής $A = \text{diag}\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Τότε θα ισχύει

$$F(A) = \left\{ \sum_{j=1}^n d_j |x_j|^2 : x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{C}, \sum_{j=1}^n |x_j|^2 = 1 \right\}.$$

Υποθέτουμε τώρα ότι $x = (x_j), y = (y_j) \in L_A(0)$, δηλαδή ότι τα x και y είναι μοναδιαία διανύσματα, τέτοια ώστε να ισχύει

$$\sum_{j=1}^n d_j |x_j|^2 = \sum_{j=1}^n d_j |y_j|^2 = 0.$$

Θα δείξουμε τώρα ότι υπάρχει συνεχές μονοπάτι στο $L_A(0)$, που συνδέει τα x και y μεταξύ τους. Αφού κάθε διάνυσμα της μορφής

$$[r_1 e^{i\theta_1} \ r_2 e^{i\theta_2} \ \dots \ r_n e^{i\theta_n}]^T \in L_A(0),$$

με $r_j \geq 0$ και $\theta_j \in [0, 2\pi)$, για $j = 1, 2, \dots, n$, είναι συνδεδεμένο με το διάνυσμα

$$[r_1 \ r_2 \ \dots \ r_n]^T \in L_A(0), \text{ μέσω της συνεχούς καμπύλης}$$

$$[r_1 e^{i\theta_1(1-t)} \ r_2 e^{i\theta_2(1-t)} \ \dots \ r_n e^{i\theta_n(1-t)}]^T, \text{ με } t \in [0, 1],$$

μέσα στο σύνολο $L_A(0)$ και μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα $x, y \in \mathbb{C}$ κι επιπλέον ότι είναι μη αρνητικά. Τότε η συνεχής καμπύλη

$$u(t) = (u_j(t)) = \left(\sqrt{(1-t)x_j^2 + t y_j^2} \right) \in L_A(0) \cap \mathbb{C}^n, \text{ με } t \in [0, 1]$$

ικανοποιεί τις συνθήκες $u(0) = x$ και $u(1) = y$. Συνεπώς, η καμπύλη u συνδέει τα x και y κι έτσι η απόδειξη ολοκληρώνεται. ■

Θεώρημα 2.2.9. (*Toeplitz-Hausdorff*) Για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, το αριθμητικό πεδίο $F(A)$ είναι κυρτό.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι για δύο οποιαδήποτε διακεκριμένα σημεία $a, b \in F(A)$, το ευθύγραμμο τμήμα $[a, b]$ ανήκει κι αυτό στο $F(A)$. Λόγω της ιδιότητας της μεταφοράς του αριθμητικού πεδίου (**Πρόταση 2.2.6, ii**) και χωρίς βλάβη της

γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a = 0$ και $b = 1$. Έστω τώρα $x, y \in \mathbb{C}^n$ δύο μοναδιαία διανύσματα (δηλαδή, $x^*x = y^*y = 1$), τέτοια ώστε να ισχύουν:

$$x^*Ax = 1 \quad \text{και} \quad y^*Ay = 1.$$

Θεωρούμε τώρα το ερμιτιανό και το αντιερμιτιανό μέρος του πίνακα A , $H(A)$ και $S(A)$, αντίστοιχα, ως εξής:

$$H(A) = \frac{A + A^*}{2} \quad \text{και} \quad S(A) = \frac{A - A^*}{2}.$$

Από το **Λήμμα 2.2.8.**, δύο οποιαδήποτε σημεία του συνόλου

$$L_{S(A)}(0) = \{ x \in \mathbb{C}^n : x^*x = 1, \quad x^*S(A)x = 0 \}$$

μπορούν να συνδεθούν με μία συνεχή καμπύλη, η οποία θα περιέχει εξ' ολοκλήρου το σύνολο $L_{S(A)}(0)$. Αφού λοιπόν $x, y \in L_{S(A)}(0)$, υπάρχει μία διανυσματική συνάρτηση

$$f(t) : [0,1] \rightarrow L_{S(A)}(0), \quad \text{τέτοια ώστε}$$

$$f(0) = x \quad \text{και} \quad f(1) = y.$$

Συνεπώς, η συνάρτηση

$$f(t)^* A f(t) = f(t)^* H(A) f(t) + f(t)^* S(A) f(t) = f(t)^* H(A) f(t)$$

είναι πραγματική (αφού περιέχει μόνο το ερμιτιανό μέρος του πίνακα A) και συνεχής ως προς την παράμετρο t και ικανοποιεί τα ακόλουθα:

$$f(0)^* A f(0) = x^*Ax = 0 \quad \text{και}$$

$$f(1)^* A f(1) = y^*Ay = 1.$$

Συνεπώς, το ευθύγραμμο τμήμα $[0,1]$ περιέχεται στο αριθμητικό πεδίο $F(A)$ (δηλαδή, $[0,1] \subseteq F(A)$) κι επομένως το $F(A)$ είναι κυρτό σύνολο. ■

Σε συνέχεια της μελέτης του πεδίου $F(A)$, θα στρέψουμε τώρα την προσοχή μας στην ειδική περίπτωση του αριθμητικού πεδίου ενός τετραγωνικού πίνακα $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$:

Θεώρημα 2.2.10. (Ελλειπτικό Θεώρημα) Έστω $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ με ιδιοτιμές λ_1, λ_2 . Το αριθμητικό πεδίο του A είναι ένας κλειστός ελλειπτικός δίσκος με εστίες λ_1, λ_2 και μήκος μικρού άξονα ίσο με $\sqrt{\text{trace}(A^*A) - |\lambda_1|^2 - |\lambda_2|^2}$.

Το γεγονός λοιπόν ότι το αριθμητικό πεδίο ενός 2×2 τετραγωνικού πίνακα είναι πάντα κλειστός ελλειπτικός δίσκος, μας οδηγεί στο άμεσο συμπέρασμα ότι το πεδίο αυτό θα αποτελεί πάντοτε κυρτό σύνολο.

Πρόταση 2.2.11. Για κάθε κύριο υποπίνακα \hat{A} ενός τετραγωνικού πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ισχύει $F(\hat{A}) \subseteq F(A)$.

Έχοντας φτάσει στο τέλος αυτής της παραγράφου, είναι σημαντικό να αναφέρουμε πως σε όλες τις παραπάνω ιδιότητες του κλασικού αριθμητικού πεδίου των τετραγωνικών πινάκων θα βασιστούμε στη συνέχεια της εργασίας, προκειμένου να εξάγουμε αποτελέσματα για τα αριθμητικά πεδία και σύνολα που θα μας απασχολήσουν.

2.3 Γωνιακό Σημείο του $F(A)$

Λήμμα 2.3.1. Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ και $x_0 \in \mathbb{C}^n$, με $x_0^* x_0 = 1$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

i) $Re(x_0^* A x_0) = \max\{Re(a) : a \in F(A)\},$

ii) $x_0^* H(A) x_0 = \max\{b : b \in F(H(A))\}$ και

iii) $H(A) x_0 = \lambda_{max}(H(A)) x_0,$

όπου $H(A)$ το ερμιτιανό μέρος του πίνακα A και $\lambda_{max}(H(A))$ η μεγαλύτερη ιδιοτιμή του.

Ορισμός 2.3.2. Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, με αριθμητικό πεδίο $F(A)$ και $\partial F(A)$ το σύνορό του. Ονομάζουμε *γωνιακό σημείο (angular point)* του $F(A)$, ένα σημείο $\alpha \in \partial F(A)$, αν υπάρχουν γωνίες θ_1, θ_2 με:

$$0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 < 2\pi \quad \text{και} \quad \theta_1 - \theta_2 < \pi,$$

για τις οποίες να ισχύει

$$Re(e^{i\theta} a) = \max\{Re(b) : b \in F(e^{i\theta} A)\}, \text{ για κάθε } \theta \in (\theta_1, \theta_2).$$

Θεώρημα 2.3.3. Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Αν ένα $\alpha \in \mathbb{C}$ είναι γωνιακό σημείο του $F(A)$, τότε το $\alpha \in \mathbb{C}$ είναι ιδιοτιμή του πίνακα A .

Απόδειξη. Έστω $\alpha \in \mathbb{C}$ είναι γωνιακό σημείο του $F(A)$. Τότε για $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$, με $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 < 2\pi$ και $\theta_1 - \theta_2 < \pi$, θα έχουμε

$$Re(e^{i\theta} a) = \max\{Re(b) : b \in F(e^{i\theta} A)\}.$$

Τότε λόγω του **Λήμματος 2.3.1.**, υπάρχει μοναδιαίο διάνυσμα $x_0 \in \mathbb{C}^n$, με $x_0^* x_0 = 1$, τέτοιο ώστε να ισχύει

$$x_0^* H(e^{i\theta} A) x_0 = x_0^* \lambda_{max}(H(e^{i\theta} A)) x_0 = \lambda_{max}(H(e^{i\theta} A)).$$

Αφού ο πίνακας $H(e^{i\theta} A)$ είναι ερμιτιανός, θα ισχύει

$$H(e^{i\theta} A) x_0 = \lambda_{max}(H(e^{i\theta} A)) x_0 = \lambda_{\theta} x_0, \text{ για κάθε } \theta \in (\theta_1, \theta_2).$$

Παραγωγίζοντας τώρα ως προς θ τη σχέση: $H(e^{i\theta}A)x_0 = \lambda_\theta x_0$ (2.4), προκύπτει ότι

$$H(ie^{i\theta}A)x_0 = \frac{d\lambda_\theta}{d\theta}x_0, \text{ ή ισοδύναμα}$$

$$S(e^{i\theta}A)x_0 = -i \left(\frac{d\lambda_\theta}{d\theta} \right) x_0.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη την παραπάνω σχέση με τη σχέση (2.4), προκύπτει

$$S(e^{i\theta}A)x_0 + H(e^{i\theta}A)x_0 = \left(\lambda_\theta - i \frac{d\lambda_\theta}{d\theta} \right) x_0.$$

Άρα θα έχουμε

$$e^{i\theta}Ax_0 = \left(\lambda_\theta - i \frac{d\lambda_\theta}{d\theta} \right) x_0 \quad \text{ή} \quad Ax_0 = e^{-i\theta} \left(\lambda_\theta - i \frac{d\lambda_\theta}{d\theta} \right) x_0$$

κι επειδή

$$\alpha = x_0^* Ax_0 = x_0^* e^{-i\theta} \left(\lambda_\theta - i \frac{d\lambda_\theta}{d\theta} \right) x_0 = e^{-i\theta} \left(\lambda_\theta - i \frac{d\lambda_\theta}{d\theta} \right),$$

συμπεραίνουμε ότι το α αποτελεί ιδιοτιμή του πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. ■

2.4 Ορισμός Αριθμητικού Πεδίου $F_{\|\cdot\|}(A)$ ως Υπεραριθμήσιμη Τομή Δίσκων

Στο σημείο αυτό, έχοντας προηγουμένως μιλήσει για το κλασικό αριθμητικό πεδίο $F(A)$ ενός τετραγωνικού πίνακα, θα δούμε πώς το σύνολο αυτό μπορεί να παρασταθεί ως μία υπεραριθμήσιμη τομή κλειστών κυκλικών δίσκων. Για την υλοποίηση του εγχειρήματος αυτού, θα προχωρήσουμε σε έναν νέο τρόπο αναπαράστασης του συνόλου του αριθμητικού πεδίου ενός τετραγωνικού πίνακα, ο οποίος θα βασίζεται στη χρήση της νόρμας, όπως αυτός παρουσιάζεται από τους J.G. Stampfli και J.P. Williams στο [17].

Ορισμός 2.4.1. Έστω ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ και $\|\cdot\|$ μία νόρμα πίνακα. Το αριθμητικό πεδίο του πίνακα A , ορίζεται ως εξής

$$\begin{aligned} F_{\|\cdot\|}(A) &= \{ \mu \in \mathbb{C} : \|A - \lambda I\| \geq |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \} & (2.5) \\ &= \bigcap_{\lambda \in \mathbb{C}} \{ \mu \in \mathbb{C} : |\mu - \lambda| \leq \|A - \lambda I\| \} \\ &= \bigcap_{\lambda \in \mathbb{C}} D(\lambda, \|A - \lambda I\|). \end{aligned}$$

Το σύνολο $F_{\|\cdot\|}(A)$ γράφεται ως υπεραριθμήσιμη τομή κλειστών κυκλικών δίσκων, της μορφής $D(\lambda, \|A - \lambda I\|) = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu - \lambda| \leq \|A - \lambda I\|, \lambda \in \mathbb{C}\}$, κέντρου λ και ακτίνας $\|A - \lambda I\|$.

Για την περίπτωση που έχουμε $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\|\cdot\|_2$ η φασματική νόρμα πίνακα και I_n ο μοναδιαίος $n \times n$ πίνακας, οι F.F. Bonsall και J. Duncan, στο [6] και οι J.G. Stampfli και J.P. Williams, στο [17], παρατήρησαν ότι το αριθμητικό πεδίο μπορεί να γραφεί με τη μορφή:

$$\begin{aligned} F_{\|\cdot\|_2}(A; I_n) &= F_{\|\cdot\|_2}(A) = \{\mu \in \mathbb{C} : \|A - \lambda I_n\|_2 \geq |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C}\} \quad (2.6) \\ &= \bigcap_{\lambda \in \mathbb{C}} \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu - \lambda| \leq \|A - \lambda I_n\|_2\}, \end{aligned}$$

που ταυτίζεται με το σύνολο του αριθμητικού πεδίου $F(A)$. Το σύνολο λοιπόν $F_{\|\cdot\|_2}(A)$ είναι συμπαγές και κυρτό, επιβεβαιώνοντας έτσι τις ιδιότητες της συμπαγείας και της κυρτότητας του πεδίου $F(A)$, που είναι υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου και βρίσκεται μέσα στον κλειστό δίσκο

$$D(0, \|A\|) = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| \leq \|A\|\}.$$

Με τον τρόπο αυτόν, παρατηρούμε πως το αριθμητικό πεδίο ενός τετραγωνικού πίνακα μπορεί να γραφεί με τη μορφή μιας άπειρης τομής κλειστών (κυκλικών) δίσκων. Η παραπάνω συζήτηση μας οδηγεί σε έναν νέο ορισμό του αριθμητικού πεδίου του πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, που δεν είναι άλλος από αυτόν που μας δίνει η σχέση (2.5). Ο ορισμός αυτός βασίζεται αποκλειστικά στη χρήση της νόρμας, χωρίς να χρειάζεται τη βοήθεια του εσωτερικού γινομένου, στο οποίο βασιζόταν ο αρχικός ορισμός του αριθμητικού πεδίου που εισαγάγαμε στη σχέση (2.2). Παρακινούμενοι λοιπόν από τον νέο ορισμό του αριθμητικού πεδίου που στηρίζεται στη νόρμα, θα παρουσιάσουμε αργότερα στη μελέτη μας, τον ορισμό του αριθμητικού πεδίου πινάκων που δεν είναι κατ' ανάγκη τετραγωνικοί.

2.5 q – Αριθμητικό Πεδίο Τετραγωνικών Πινάκων

Συνεχίζοντας, στο σημείο θα στρέψουμε την προσοχή μας σε μία ειδική κατηγορία αριθμητικών πεδίων τετραγωνικών πινάκων, τα q – αριθμητικά πεδία. Τα συγκεκριμένα αριθμητικά πεδία αποτελούν ένα είδος γενίκευσης του κλασικού αριθμητικού πεδίου.

Ορισμός 2.5.1. Για κάποιο $q \in [0,1]$, ορίζουμε ως q – αριθμητικό πεδίο ενός τετραγωνικού πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ (q – numerical range of a square matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$), το σύνολο

$$F(A; q) = \{y^*Ax \in \mathbb{C} : x, y \in \mathbb{C}^n, x^*x = y^*y = 1, y^*x = q\}.$$

Όπως εύκολα μπορεί κανείς να παρατηρήσει στη μορφή του συνόλου $F(A; q)$, για $q = 1$, γενικεύει το κλασικό πεδίο $F(A)$, αφού άμεσα προκύπτει ότι $F(A; 1) \equiv F(A)$.

Από τη μορφή του πεδίου $F(A; q)$, εύκολα καταλήγουμε ότι είναι ένα συμπαγές σύνολο. Το συμπέρασμα όμως σχετικά με την κυρτότητα του συνόλου αυτού δεν είναι τόσο άμεσο. Στο [22], οι Αρετάκη και Μαρουλάς επεκτείνουντας την έννοια του αριθμητικού πεδίου, όπως αυτή είχε δοθεί από τους F.F. Bonsall και J. Duncan, καταφέρνουν να αναπαραστήσουν το q – αριθμητικό πεδίο τετραγωνικών πινάκων, με τη μορφή μιας τομής κυκλικών δίσκων. Για κάθε πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ λοιπόν, το q – αριθμητικό πεδίο μπορεί να γραφεί με τον ακόλουθο τρόπο:

$$F(A; q) = \bigcap_{z_0 \in \mathbb{C}} D(qz_0, \|A - z_0 I_n\|),$$

όπου I_n ο $n \times n$ ταυτοτικός πίνακας και $\|\cdot\|$ μία νόρμα πίνακα.

Αφού το σύνολο $F(A; q)$ ταυτίζεται με την υπεραριθμήσιμη τομή των παραπάνω κλειστών κυκλικών δίσκων, κέντρου qz_0 και ακτίνας ίσης με $\|A - z_0 I_n\|$, συμπεραίνουμε ότι αποτελεί ένα κυρτό σύνολο.

Θεώρημα 2.5.2. Έστω πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ και $0 < q_1 < q_2 \leq 1$. Για τα αριθμητικά πεδία $F(A; q_1)$ και $F(A; q_2)$, ισχύει

$$\frac{1}{q_2} F(A; q_2) \subseteq \frac{1}{q_1} F(A; q_1).$$

Στην Πρόταση που ακολουθεί έπεται θα αναφερθούμε σε δύο βασικές ιδιότητες του συνόλου $F(A; q)$, οι οποίες γενικεύουν τις ιδιότητες της ορθομοναδιαίας αναλλοιωσιμότητας και της μεταφοράς του $F(A)$.

Πρόταση 2.5.3. Έστω πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ και $q \in [0, 1]$.

i) Για κάθε ορθομοναδιαίο πίνακα $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ($U^*U = UU^* = I$), ισχύει ότι $F(A; q) = F(U^*A U; q)$

ii) Για κάθε $\alpha, b \in \mathbb{C}$, ισχύει ότι $F(\alpha A + bI_n; q) = \alpha F(A; q) + bq$.

Απόδειξη. i) Για το αριθμητικό πεδίο $F(X^*A X; q)$, έχουμε

$$\begin{aligned} F(X^*A X; q) &= \{ y^*(U^*A U) x \in \mathbb{C} : x, y \in \mathbb{C}^n, x^*x = y^*y = 1, y^*x = q \} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} (Uy)^*U (U^*A U) U^*(Ux) \in \mathbb{C} : \\ x, y \in \mathbb{C}^n, (Ux)^*(Ux) = (Uy)^*(Uy) = 1, (Uy)^*Ux = q \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} (Uy)^*A (Ux) \in \mathbb{C} : \\ x, y \in \mathbb{C}^n, (Ux)^*(Ux) = (Uy)^*(Uy) = 1, (Uy)^*Ux = q \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Θέτοντας τώρα:

$$z = Ux, z \in \mathbb{C}^n, \text{ με } z^*z = (Ux)^*(Ux) = x^*U^*Ux = 1,$$

$$w = Uy, z \in \mathbb{C}^n, \text{ με } w^*w = (Uy)^*(Uy) = y^*U^*Uy = 1 \text{ και}$$

$$w^*z = (Uy)^*Ux = y^*U^*Ux = q, \text{ προκύπτει ότι}$$

$$y^*(U^*AU)x = (Uy)^*A(Ux) = w^*Az \in F(A; q)$$

κι επομένως ισχύει $F(U^*AU; q) = F(A; q)$.

ii) Για το αριθμητικό πεδίο $F(\alpha A + bI_n; q)$, έχουμε

$$F(\alpha A + bI_n; q) = \{ y^*(\alpha A + bI_n)x \in \mathbb{C} : x, y \in \mathbb{C}^n, x^*x = y^*y = 1, y^*x = q \}$$

$$= \{ \alpha y^*Ax + b y^*x \in \mathbb{C} : x, y \in \mathbb{C}^n, x^*x = y^*y = 1, y^*x = q \}$$

Και αφού ισχύει $y^*x = q$, προκύπτει άμεσα ότι

$$F(\alpha A + bI_n; q) = \alpha F(A; q) + bq. \quad \blacksquare$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο

Σύνολα Birkhoff-James Ορθογωνιότητας και Αριθμητικά Πεδία Όχι Υποχρεωτικά Τετραγωνικών Πινάκων

3.1 Αριθμητικό Πεδίο Όχι Υποχρεωτικά Τετραγωνικών Πινάκων

Στο κεφάλαιο αυτό, θα ορίσουμε το αριθμητικό πεδίο πινάκων $n \times m$, με $n \neq m$, δηλαδή πινάκων που δεν είναι υποχρεωτικά τετραγωνικοί, επεκτείνοντας τον ορισμό του αριθμητικού πεδίου που παρουσιάσαμε στη σχέση (2.5). Για δύο λοιπόν πίνακες $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ και γενικεύοντας τον παραπάνω ορισμό για οποιαδήποτε νόρμα πίνακα (κι όχι αναγκαία τη φασματική), προκύπτει το αριθμητικό πεδίο δύο όχι υποχρεωτικά τετραγωνικών πινάκων, με την ακόλουθη μορφή:

Αριθμητικό πεδίο $F_{\|\cdot\|}(A; B)$ του πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ ως προς τον πίνακα $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$:

Έστω $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ όχι υποχρεωτικά τετραγωνικοί πίνακες και $\|\cdot\|$ μία νόρμα πίνακα. Ορίζουμε ως *αριθμητικό πεδίο του πίνακα A ως προς τον πίνακα B (numerical range of A with respect to B)*, το σύνολο

$$F_{\|\cdot\|}(A; B) = \{ \mu \in \mathbb{C} : \|A - \lambda B\| \geq |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} &= \bigcap_{\lambda \in \mathbb{C}} \{ \mu \in \mathbb{C} : |\mu - \lambda| \leq \|A - \lambda B\| \} \\ &= \bigcap_{\lambda \in \mathbb{C}} D(\lambda, \|A - \lambda B\|). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Από τον ορισμό παρατηρούμε ότι το αριθμητικό πεδίο του πίνακα A ως προς τον B προκύπτει κι αυτό (όπως ήταν αναμενόμενο) ως υπεραριθμήσιμη τομή κλειστών κυκλικών δίσκων. Επομένως, το αριθμητικό πεδίο $F_{\|\cdot\|}(A; B)$ είναι συμπαγές και κυρτό υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου (όπως ακριβώς και το κλασικό πεδίο) και για $\lambda = 0$, βρίσκεται μέσα στον κλειστό δίσκο $D(0, \|A\|) = \{ \mu \in \mathbb{C} : |\mu| \leq \|A\| \}$. Από τη ικανότητα τώρα του $F_{\|\cdot\|}(A; B)$ να γραφεί με τη μορφή άπειρης τομής κλειστών δίσκων (βλ. σχέση (3.2)), συμπεραίνουμε ότι το αριθμητικό πεδίο αυτό μπορεί να εκτιμηθεί μέσω της κατασκευής επαρκώς μεγάλου αριθμού κύκλων της μορφής:

$$\partial D(\lambda, \|A - \lambda B\|) = \{ \mu \in \mathbb{C} : |\mu - \lambda| = \|A - \lambda B\| \} \quad (3.3)$$

Σημείωση: με $\partial D(\lambda, \|A - \lambda B\|)$ συμβολίζουμε το *σύνολο* των κυκλικών δίσκων της μορφής $D(\lambda, \|A - \lambda B\|) = \{ \mu \in \mathbb{C} : |\mu - \lambda| \leq \|A - \lambda B\|, \lambda \in \mathbb{C} \}$.

Συνεχίζοντας θα παραθέσουμε ένα παράδειγμα προς επιβεβαίωση του ισχυρισμού μας:

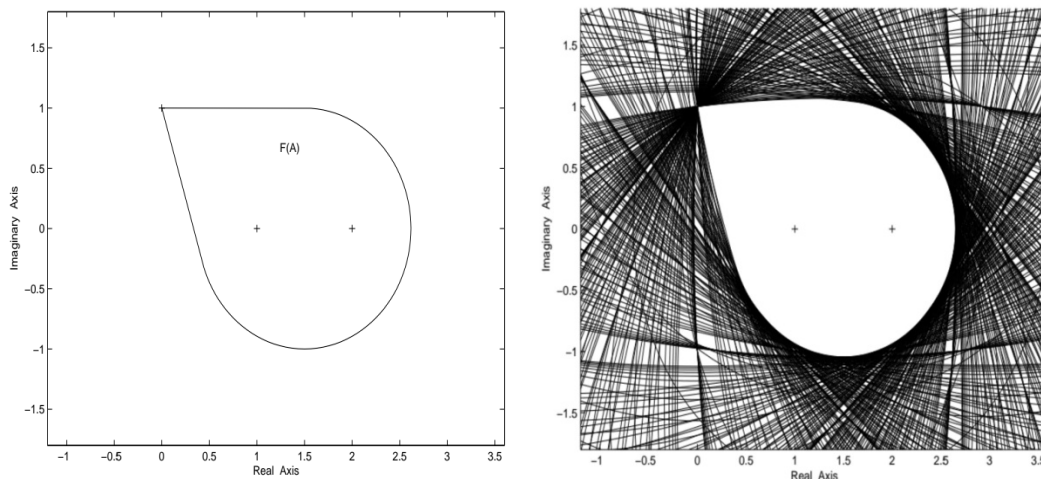
Παράδειγμα 3.1.1.

Έστω ο πίνακας τετραγωνικός πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}$. Αρχικά, σχεδιάζουμε το σύνολο του αριθμητικού πεδίου $F(A)$.

Γνωρίζουμε ότι το αριθμητικό πεδίο $F_{\|\cdot\|_2}(A; I_3)$ μπορεί να παρασταθεί ως υπεραριθμήσιμη τομή κλειστών κυκλικών δίσκων, ως εξής:

$$\begin{aligned} F_{\|\cdot\|_2}(A; I_3) &= \{ \mu \in \mathbb{C} : \|A - \lambda I_3\| \geq |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \} \\ &= \bigcap_{\lambda \in \mathbb{C}} \{ \mu \in \mathbb{C} : |\mu - \lambda| \leq \|A - \lambda I_3\|_2 \} \\ &= \bigcap_{\lambda \in \mathbb{C}} D(\lambda, \|A - \lambda I_3\|_2). \end{aligned}$$

Το σύνολο των παραπάνω κυκλικών δίσκων είναι της μορφής $\partial D(\lambda, \|A - \lambda I_3\|_2) = \{ \mu \in \mathbb{C} : |\mu - \lambda| = \|A - \lambda I_3\|_2, \lambda \in \mathbb{C} \}$. Θα κατασκευάσουμε λοιπόν τετρακόσιους (400) κύκλους τη μορφής αυτής για διαφορετικές τιμές του $\lambda \in \mathbb{C}$. Όπως παρατηρούμε, το $F_{\|\cdot\|_2}(A; I_3)$ περιέχεται στην τομή των κύκλων αυτών. Από την εικόνα βλέπουμε επίσης ότι ισχύει $F(A) \equiv F_{\|\cdot\|_2}(A; I_3)$, που περιέχει το $F(A)$. Έτσι λοιπόν επαληθεύεται η παρατήρηση της σχέσης (3.3).



Σχήμα 3.1. Το αριθμητικό πεδίο $F(A)$ (αριστερή απεικόνιση) ταυτίζεται με το αριθμητικό πεδίο $F_{\|\cdot\|_2}(A; I_3)$ (δεξιά απεικόνιση).

3.1.1 Ορθογωνιότητα Birkhoff - James (\perp_{BJ})

Προχωρώντας, θα εισάγουμε σ' αυτή την υποενότητα τη *σχέση ορθογωνιότητας κατά Birkhoff - James (Birkhoff - James orthogonality)*, με την οποία σχετίζεται το αριθμητικό πεδίο $F_{\|\cdot\|}(A; B)$ και με όρους της οποίας μπορεί να εκφραστεί. Προτού όμως αναφερθούμε στην Birkhoff - James ορθογωνιότητα που αφορά στους πίνακες και στα αριθμητικά τους πεδία, θα ορίσουμε τη σχέση αυτή, για δύο στοιχεία (τελεστές) x, y ενός γραμμικού μιγαδικού χώρου με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$.

Σχέση Birkhoff - James Ορθογωνιότητας (\perp_{BJ}) στοιχείων του χώρου $(X, \|\cdot\|)$:

Ορισμός 3.1.1. Έστω ο γραμμικός μιγαδικός χώρος $(X, \|\cdot\|)$ με νόρμα, $\|\cdot\|$, και δύο στοιχεία $x, y \in X$. Το x καλείται *Birkhoff - James ορθογώνιο* στο y (x is said to be *Birkhoff - James orthogonal to y*) και συμβολίζουμε $x \perp_{BJ} y$, αν και μόνο αν, ισχύει

$$\|x + \lambda y\| \geq \|x\|, \text{ για κάθε } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Όπως είναι άμεσα αντιληπτό από τον ορισμό της, η Birkhoff - James είναι μία σχέση ορθογωνιότητας που δεν απαιτεί χρήση του εσωτερικού γινομένου (όπως συμβαίνει στον κλασικό ορισμό της ορθογωνιότητας δύο στοιχείων ενός Ευκλείδειου χώρου) για να διατυπωθεί, αλλά επάγεται από τη νόρμα $\|\cdot\|$ του χώρου X , στον οποίο ορίζεται. Η ιδιαιτερότητά της αυτή, την καθιστά εξαιρετικά χρήσιμη στη μελέτη των αριθμητικών πεδίων που πραγματευόμαστε. Επιπρόσθετο πλεονέκτημα της Birkhoff-James ορθογωνιότητας αποτελεί το γεγονός ότι είναι στενά συσχετισμένη με τις θεωρίες των γραμμικών συναρτησοειδών και των υπερεπιπέδων.

Η σχέση ορθογωνιότητας αυτή, δεν είναι ούτε *συμμετρική*, ούτε *προσθετική*, όπως περιγράφει ο R.C. James στο [13]. Ωστόσο, είναι *ομογενής*, δηλαδή για δύο στοιχεία $x, y \in X$ έχουμε:

$$x \perp_{BJ} y, \text{ αν και μόνο αν, ισχύει } ax \perp_{BJ} by \text{ για κάθε } a, b \in \mathbb{C}, a, b \neq 0.$$

Στο θεώρημα που ακολουθεί παρουσιάζουμε τη συσχέτιση των αριθμητικών πεδίων των όχι υποχρεωτικά τετραγωνικών πινάκων με την ορθογωνιότητα Birkhoff - James (όπως προκύπτει από τα αποτελέσματα των R.Bhatia και P. Šemrl, στο [2]), η οποία αποτελεί έναν εναλλακτικό τρόπο ορισμού των πεδίων αυτών.

Θεώρημα 3.1.2. Για κάθε $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ όχι υποχρεωτικά τετραγωνικούς πίνακες, με $\|B\| = 1$, ισχύει ότι

$$F_{\|\cdot\|}(A; B) = \{ \mu \in \mathbb{C} : B \perp_{BJ} (A - \mu B) \}.$$

Απόδειξη. Από τον ορισμό της Birkhoff - James ορθογωνιότητας έχουμε ότι $B \perp_{BJ} A$, αν και μόνο αν:

$$\|B - \lambda A\| \geq \|B\| \text{ για κάθε } \lambda \in \mathbb{C}. \text{ Όμως } \|B\| = 1, \text{ άρα } \|B - \lambda A\| \geq 1.$$

Ισοδύναμα, αφού $|\lambda|^{-1} > 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, προκύπτει ότι $B \perp_{BJ} A$, αν και μόνο αν, ισχύει

$$\|A - \lambda^{-1}B\| \geq |\lambda|^{-1}, \text{ για κάθε } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

ή ισοδύναμα, αν και μόνο αν $0 \in F_{\|\cdot\|}(A; B)$ (αφού για $\mu = 0 : \|A - \lambda B\| \geq |\lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C}$, και ισοδύναμα $\|A - \lambda^{-1}B\| \geq |\lambda|^{-1}, \text{ για κάθε } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$).

Επιπλέον παρατηρούμε:

$$\begin{aligned} F_{\|\cdot\|}(A; B) &= \{ \mu \in \mathbb{C} : \|A - \lambda B\| \geq |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \} \\ &= \{ \mu \in \mathbb{C} : \|A - \mu B + \mu B - \lambda B\| \geq |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \} \\ &= \{ \mu \in \mathbb{C} : \|A - \mu B + (\mu - \lambda)B\| \geq |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \} \\ &= \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \frac{1}{|\mu - \lambda|} \|A - \mu B + (\mu - \lambda)B\| \geq 1, \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\mu\} \right\} \\ &= \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \left\| B + \frac{1}{\mu - \lambda} (A - \mu B) \right\| \geq 1, \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\mu\} \right\} \\ &= \{ \mu \in \mathbb{C} : \|B + \lambda (A - \mu B)\| \geq \|B\|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \} \\ &= \{ \mu \in \mathbb{C} : B \perp_{BJ} (A - \mu B) \}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Εύκολα λοιπόν αντιλαμβανόμαστε, ότι το αριθμητικό πεδίο $F_{\|\cdot\|}(A; B)$ αποτελεί ένα σύνολο Birkhoff - James ορθογωνιότητας.

Από το **Θεώρημα 3.1.2.** για $\|B\| = 1$, έχουμε ότι $F_{\|\cdot\|}(A; B) = \{ \mu \in \mathbb{C} : B \perp_{BJ} (A - \mu B) \} \neq \emptyset$, χωρίς όμως να γνωρίζουμε τι συμβαίνει στο αριθμητικό πεδίο $F_{\|\cdot\|}(A; B)$ για τις υπόλοιπες τιμές της ποσότητας $\|B\|$. Για να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό που γεννάται, θα ερευνήσουμε το πώς επηρεάζεται το συγκεκριμένο αριθμητικό πεδίο από τις αλλαγές της τιμής $\|B\|$. Πριν ξεκινήσουμε όμως τη διερεύνησή μας αυτή, είναι σημαντικό να αναφέρουμε το ακόλουθο Λήμμα, το οποίο αποδείχθηκε από τον R.C. James στο [13] και με το οποίο συνδέεται άμεσα ο ισχυρισμός του Θεωρήματος.

Λήμμα 3.1.3. Έστω γραμμικός μιγαδικός χώρος $(X, \|\cdot\|)$ με νόρμα και δύο στοιχεία $x, y \in X$. Τότε υπάρχει μιγαδικός $\mu \in \mathbb{C}$, έτσι ώστε να ισχύει $x \perp_{BJ} (y + \mu x)$.

Το συγκεκριμένο Λήμμα είχε (αρχικά) αποδειχθεί για πραγματικούς γραμμικούς νορμικούς χώρους, προσαρμόζοντας όμως τα επιχειρήματα της απόδειξής του, μπορεί κανείς να συμπεράνει ότι το αποτέλεσμά του ισχύει και στους μιγαδικούς γραμμικούς χώρους με νόρμα.

• *Ας ξεκινήσουμε λοιπόν με την υπόθεση $\|B\| = \beta < 1$ και $\mu \in F_{\|\cdot\|}(A; B)$. Παρατηρούμε ότι στον ορισμό του $F_{\|\cdot\|}(A; B)$ (σχέση (3.1)), θέτοντας $\lambda = 0$, προκύπτει $|\mu| \leq \|A\|$.*

Τότε για $|\mu| \leq \|A\|$ και για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ ισχύει ότι:

$$||\mu| - |\lambda|| \leq |\mu - \lambda| \leq |\mu| + |\lambda| \quad \text{και}$$

$$\|A - \lambda B\| \leq \|A\| + \|\lambda B\| = \|A\| + |\lambda|\|B\| = \|A\| + |\lambda|\beta.$$

Για $|\lambda| > |\mu|$ έχουμε: $-|\mu| + |\lambda| \leq |\mu - \lambda| \leq |\mu| + |\lambda|$

$$\text{ή} \quad |\lambda| - |\mu| \leq |\mu - \lambda| \leq \|A\| + |\lambda|$$

κι επειδή $\beta < 1$, τότε προκύπτει $\beta|\lambda| < |\lambda|$. Άρα,

$$|\lambda| - |\mu| \leq |\mu - \lambda| \leq \|A\| + \beta|\lambda|.$$

Από τον ορισμό του αριθμητικού πεδίου έχουμε: $|\mu - \lambda| \leq \|A - \lambda B\|$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, κι έτσι προκύπτει,

$$|\lambda| - |\mu| \leq |\mu - \lambda| \leq \|A - \lambda B\| \leq \|A\| + \beta|\lambda|.$$

Συνεπώς, $|\lambda| - |\mu| \leq \|A\| + \beta|\lambda|$ ή $|\lambda| - \beta|\lambda| \leq |\mu| + \|A\|$.

Επειδή όμως $|\mu| \leq \|A\|$, έχουμε:

$$(1 - \beta)|\lambda| \leq \|A\| + \|A\| \quad \text{ή} \quad (1 - \beta)|\lambda| \leq 2\|A\| \quad \text{ή} \quad |\lambda| \leq \frac{2\|A\|}{1 - \beta}, \quad \beta < 1.$$

Όμως η παραπάνω ανισότητα δεν ισχύει για $|\lambda| > \frac{2\|A\|}{1 - \beta}$, $\beta < 1$.

Επομένως, καταλήγουμε σε άτοπο. Συμπερασματικά λοιπόν, για κάθε πίνακα $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ με $\|B\| < 1$, δεν υπάρχει κανένα $\mu \in F_{\|\cdot\|}(A; B)$ κι έτσι προκύπτει $F_{\|\cdot\|}(A; B) = \emptyset$.

• Αν τώρα αντικαταστήσουμε τον πίνακα B με bB , για κάποιο μη μηδενικό $b \in \mathbb{C}$, προκύπτει:

$$\begin{aligned} F_{\|\cdot\|}(A; bB) &= \{ \mu \in \mathbb{C} : \|A - \lambda(bB)\| \geq |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \} \\ &= \{ \mu \in \mathbb{C} : \|A - (b\lambda)B\| \geq |b|^{-1}|b\mu - b\lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \} \\ &= \{ \mu \in \mathbb{C} : \|A - \lambda B\| \geq |b|^{-1}|b\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \} \end{aligned}$$

Ακολουθούν τρεις διαφορετικές περιπτώσεις:

▪ Αν $|b| = 1$, τότε:

$$F_{\|\cdot\|}(A; bB) = \{ b^{-1}\mu \in \mathbb{C} : \|A - \lambda B\| \geq |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \} = b^{-1}F_{\|\cdot\|}(A; B).$$

▪ Αν $|b| < 1$, τότε:

$$F_{\|\cdot\|}(A; bB) \subseteq \{ b^{-1}\mu \in \mathbb{C} : \|A - \lambda B\| \geq |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \} = b^{-1}F_{\|\cdot\|}(A; B).$$

▪ Αν $|b| > 1$, τότε:

$$F_{\|\cdot\|}(A; bB) \supseteq \{ b^{-1}\mu \in \mathbb{C} : \|A - \lambda B\| \geq |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \} = b^{-1}F_{\|\cdot\|}(A; B).$$

Από το γεγονός τώρα ότι η Birkhoff-James ορθογωνιότητα είναι ομογενής, σε συνδυασμό με το **Θεώρημα 3.1.2.** και την παρατήρηση της δεύτερης περίπτωσης για $|b| < 1$, έπεται το ακόλουθο Πρόρισμα:

Πόρισμα 3.1.4. Για κάθε $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ με $\|B\| > 1$, ισχύει

$$\{ \mu \in \mathbb{C} : B \perp_{BJ} (A - \mu B) \} = \|B\|^{-1}F_{\|\cdot\|}(A; \|B\|^{-1}B) \subseteq F_{\|\cdot\|}(A; B).$$

Η συζήτησή μας μέχρι το σημείο αυτό, αλλά και τα αποτελέσματα που εξάγουμε από το **Θεώρημα 3.1.2.**, το **Λήμμα 3.1.3.** και το **Πόρισμα 3.1.4.** μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι το αριθμητικό πεδίο μη τετραγωνικών πινάκων, δεν είναι ένα τετριμμένο σύνολο. Η παρατήρηση αυτή επιβεβαιώνεται με το παρακάτω Πρόρισμα:

Πόρισμα 3.1.5. Για κάθε $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$, το αριθμητικό πεδίο $F_{\|\cdot\|}(A; B)$ είναι μη κενό (δηλαδή, $F_{\|\cdot\|}(A; B) \neq \emptyset$), αν και μόνο αν $\|B\| \geq 1$.

Συνοψίζοντας λοιπόν τα αποτελέσματά μας, σημειώνουμε κλείνοντας την ενότητα αυτή, ότι το αριθμητικό πεδίο $F_{\|\cdot\|}(A; B)$ του πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ ως προς τον πίνακα $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$, αποτελεί ένα μη κενό σύνολο, όταν ισχύει ότι $\|B\| \geq 1$, ενώ στην περίπτωση που ισχύει $\|B\| < 1$, το σύνολο του αριθμητικού πεδίου $F_{\|\cdot\|}(A; B)$ δεν περιέχει καθόλου στοιχεία.

3.2 Επεξήγηση της Χρήσης του Πίνακα B

Παρατηρώντας κανείς τον ορισμό που δόθηκε στο αριθμητικό πεδίο των πινάκων που δεν είναι κατ' ανάγκη τετραγωνικοί, στη σχέση (3.1) της προηγούμενης παραγράφου του κεφαλαίου, είναι πιθανό να αναρωτηθεί, γιατί για τον καθορισμό του χρησιμοποιούμε έναν γενικό πίνακα $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$, ενώ παρακινούμενοι από τον ορισμό του αριθμητικού πεδίου τετραγωνικών πινάκων, στη σχέση (2.6), οδηγούμαστε με τρόπο άμεσο στο να χρησιμοποιήσουμε αντί γι' αυτόν, μία επέκταση του πίνακα I_n , για παράδειγμα έναν πίνακα $I_{n,m}$. Στο ερώτημα αυτό θα προσπαθήσουμε να απαντήσουμε στην τρέχουσα παράγραφο, αποσαφηνίζοντας τους λόγους που μας οδηγούν στην επιλογή ενός πίνακα B , έναντι ενός πίνακα της μορφής:

$$I_{n,m} = \begin{cases} I_n, & n = m \\ [I_n \ 0] & , \quad n < m \\ \left[\begin{array}{c} I_m \\ 0 \end{array} \right] & , \quad n > m \end{cases}.$$

Ας ξεκινήσουμε την ανάλυσή μας θεωρώντας έναν όχι υποχρεωτικά τετραγωνικό πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ και υποθέτοντας χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $n > m$. Θεωρούμε επίσης τη block μορφή $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$, όπου $A_1 \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $A_2 \in \mathbb{C}^{(n-m) \times m}$ και τον εκτεταμένο πίνακα $I_{n,m} = \begin{bmatrix} I_m \\ 0 \end{bmatrix}$. Τότε το αριθμητικό πεδίο του πίνακα A ως προς τον $I_{n,m}$ εκφράζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} F_{\|\cdot\|_2}(A; I_{n,m}) &= \{ \mu \in \mathbb{C} : \|A - \lambda I_{n,m}\|_2 \geq |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \} \\ &= \{ \mu \in \mathbb{C} : \left\| \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} I_m \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_2 \geq |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \} \\ &= \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \left\| \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\|_2 \geq |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \right\} \\ &= \bigcap_{\lambda \in \mathbb{C}} \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \left\| \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\|_2 \geq |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \right\}, \end{aligned}$$

με τους πίνακες $\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & 0 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ να είναι τετραγωνικοί. Έτσι λοιπόν παρατηρούμε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$, $M_1 \in \mathbb{C}^{m \times (n-m)}$ και $M_2 \in \mathbb{C}^{(n-m) \times (n-m)}$, ισχύει:

$$\left\| \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\|_2 \leq \left\| \begin{bmatrix} A_1 & M_1 \\ A_2 & M_2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_{n-m} \end{bmatrix} \right\|_2 \quad (3.4)$$

και συνεπώς, αν τώρα θέσουμε $M = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}$, λόγω της (3.4) θα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} F_{\|\cdot\|_2}(A; I_{n,m}) &= \bigcap_{\lambda \in \mathbb{C}} \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \left\| \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\|_2 \geq |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \right\} \\ &\subseteq \bigcap_{M \in \mathbb{C}^{n \times (n-m)}} \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \| [A \ M] - \lambda I_n \|_2 \geq |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \right\} \\ &= \bigcap_{M \in \mathbb{C}^{n \times (n-m)}} F([A \ M]), \end{aligned}$$

με την τομή να λαμβάνεται σε όλους τους $n \times (n - m)$ πίνακες M . Έχοντας υπόψη ότι $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$, η τελευταία τομή ισούται με το αριθμητικό πεδίο του υποπίνακα A_1 , $F(A_1)$, όπως αποδεικνύεται στην ακόλουθη Πρόταση.

Ένα αποτέλεσμα τομής

Πρόταση 3.2.1. Για κάθε $n \times m$ ($n > m$) πίνακα $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$ με $A_1 \in \mathbb{C}^{m \times m}$ και $A_2 \in \mathbb{C}^{(n-m) \times m}$, ισχύει ότι

$$F(A_1) = \bigcap_{M \in \mathbb{C}^{n \times (n-m)}} F([A \ M]).$$

Απόδειξη. Για κάθε $M = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times (n-m)}$, $F(A_1) \subseteq F([A \ M])$ κι άρα

$$F(A_1) \subseteq \bigcap_{M \in \mathbb{C}^{n \times (n-m)}} F([A \ M]).$$

Λόγω της κυρτότητας του (κλασικού) αριθμητικού πεδίου των τετραγωνικών πινάκων (**Θεώρημα 2.2.9.**(*Toeplitz-Hausdorff*)), αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε γωνία $\theta \in [0, 2\pi]$, υπάρχει ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας:

$$[A \ M_\theta] = \begin{bmatrix} A_1 & M_1 \\ A_2 & M_2 \end{bmatrix},$$

τέτοιος ώστε τα αριθμητικά πεδία

$$F(e^{i\theta} A_1) = e^{i\theta} F(A_1) \quad \text{και} \quad F(e^{i\theta} [A \ M_\theta]) = e^{i\theta} F([A \ M_\theta])$$

να έχουν ακριβώς την ίδια προβολή πάνω στον πραγματικό άξονα.

Σημείωση: Υπενθυμίζουμε ότι για έναν τετραγωνικό πίνακα A , η προβολή του αριθμητικού του πεδίου $F(A)$ πάνω στον πραγματικό άξονα, ισούται με το αριθμητικό πεδίο $F(H(A))$, του ερμιτιανού του μέρους $H(A)$.

Για κάθε $\theta \in [0, 2\pi]$, θεωρούμε τον τετραγωνικό πίνακα

$$[A \ M_\theta] = \begin{bmatrix} A_1 & e^{i(\pi-2\theta)} A_2^* \\ A_2 & \mu I_{n-m} \end{bmatrix}, \quad \text{για κάποιο } \mu \in F(A_1).$$

Για το ερμιτιανό μέρος του παραπάνω πίνακα έχουμε:

$$\begin{aligned} H(e^{i\theta} [A \ M_\theta]) &= \frac{1}{2} (e^{i\theta} [A \ M_\theta] + e^{-i\theta} [A \ M_\theta]^*) \\ &= \frac{1}{2} \left(e^{i\theta} \begin{bmatrix} A_1 & e^{i(\pi-2\theta)} A_2^* \\ A_2 & \mu I_{n-m} \end{bmatrix} + e^{-i\theta} \begin{bmatrix} A_1 & e^{i(\pi-2\theta)} A_2^* \\ A_2 & \mu I_{n-m} \end{bmatrix}^* \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} e^{i\theta} A_1 & e^{i\theta} e^{i(\pi-2\theta)} A_2^* \\ e^{i\theta} A_2 & e^{i\theta} \mu I_{n-m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-i\theta} A_1 & e^{-i\theta} e^{i(\pi-2\theta)} A_2^* \\ e^{-i\theta} A_2 & e^{-i\theta} \mu I_{n-m} \end{bmatrix}^* \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} e^{i\theta} A_1 & e^{i(\pi-\theta)} A_2^* \\ e^{i\theta} A_2 & e^{i\theta} \mu I_{n-m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-i\theta} A_1 & e^{-i(\pi-\theta)} A_2^* \\ e^{-i\theta} A_2 & e^{-i\theta} \mu I_{n-m} \end{bmatrix}^* \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} e^{i\theta} A_1 & e^{i(\pi-\theta)} A_2^* \\ e^{i\theta} A_2 & e^{i\theta} \mu I_{n-m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-i\theta} A_1^* & e^{-i(\pi-\theta)} A_2 \\ e^{-i\theta} A_2^* & e^{-i\theta} \bar{\mu} I_{n-m} \end{bmatrix} \right) \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{i\theta} A_1 + e^{-i\theta} A_1^* & e^{i(\pi-\theta)} A_2^* + e^{-i\theta} A_2 \\ e^{i\theta} A_2 + e^{-i(\pi-\theta)} A_2^* & e^{i\theta} \mu I_{n-m} + e^{-i\theta} \bar{\mu} I_{n-m} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{i\theta} A_1 + e^{-i\theta} A_1^* & e^{i(\pi-2\theta)} A_2^* \\ e^{i(2\theta-\pi)} A_2 & e^{i\theta} \mu I_{n-m} + e^{-i\theta} \bar{\mu} I_{n-m} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{e^{i\theta} A_1 + e^{-i\theta} A_1^*}{2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \left(\frac{\mu + \bar{\mu}}{2} \right) I_{n-m} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{e^{i\theta} A_1 + e^{-i\theta} A_1^*}{2} & 0 \\ 0 & \operatorname{Re}\{e^{i\theta} \mu\} I_{n-m} \end{bmatrix}, \quad \text{όπου}
\end{aligned}$$

$$\operatorname{Re}\{e^{i\theta} \mu\} \in \operatorname{Re}\{F(e^{i\theta} A_1)\} = F\left(\frac{e^{i\theta} A_1 + e^{-i\theta} A_1^*}{2}\right) = F(H(e^{i\theta} A_1)),$$

αφού $\mu \in F(A_1)$. Συνεπώς, τα αριθμητικά πεδία:

$$F(e^{i\theta} A_1) \quad \text{και} \quad F(e^{i\theta} [A \ M_\theta]) = F\left(e^{i\theta} \begin{bmatrix} A_1 & e^{i(\pi-2\theta)} A_2^* \\ A_2 & \mu I_{n-m} \end{bmatrix}\right)$$

έχουν ακριβώς την ίδια προβολή στον πραγματικό άξονα, δηλαδή ισχύει $F(H(e^{i\theta} A_1)) = F(H(e^{i\theta} [A \ M_\theta]))$. ■

Η απόδειξη που προηγήθηκε μας οδηγεί στο πόρισμα που έπεται.

Πόρισμα 3.2.2. Έστω $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$ με $A_1 \in \mathbb{C}^{m \times m}$ και $A_2 \in \mathbb{C}^{(n-m) \times m}$. Αν $\mu \in F(A_1)$, τότε

$$F(A_1) = \bigcap_{\theta \in [0, 2\pi]} F\left(\begin{bmatrix} A_1 & e^{i\theta} A_2^* \\ A_2 & \mu I_{n-m} \end{bmatrix}\right).$$

Για να επαληθεύσουμε την ισχύ του Πορίσματος, αλλά και για να απεικονίσουμε αριθμητικά το αποτέλεσμα αυτό της τομής στο οποίο καταλήξαμε, μπορούμε να μελετήσουμε το επόμενο παράδειγμα.

Σημείωση: Το αποτέλεσμα της **Πρόταση 3.2.1.** ενισχύεται από την απόδειξη των D.W. Hadwin, K.J.Harrison και J.A.Ward στο [9], ότι το αριθμητικό πεδίο $F([E \ A])$ δύο φραγμένων γραμμικών τελεστών, έστω A και E , ενός πεπερασμένης διάστασης

χώρου Hilbert H , με τον E να αποτελεί ορθογώνια προβολή και με $E^\perp = I - E$, ισούται με την τομή όλων των αριθμητικών πεδίων της μορφής $F(\lambda E^\perp + A)$. Επεκτείνοντας το συμπέρασμα της απόδειξης αυτής στον χώρο των όχι υποχρεωτικά τετραγωνικών πινάκων, επιβεβαιώνεται ο ισχυρισμός της.

Παράδειγμα 3.2.3.

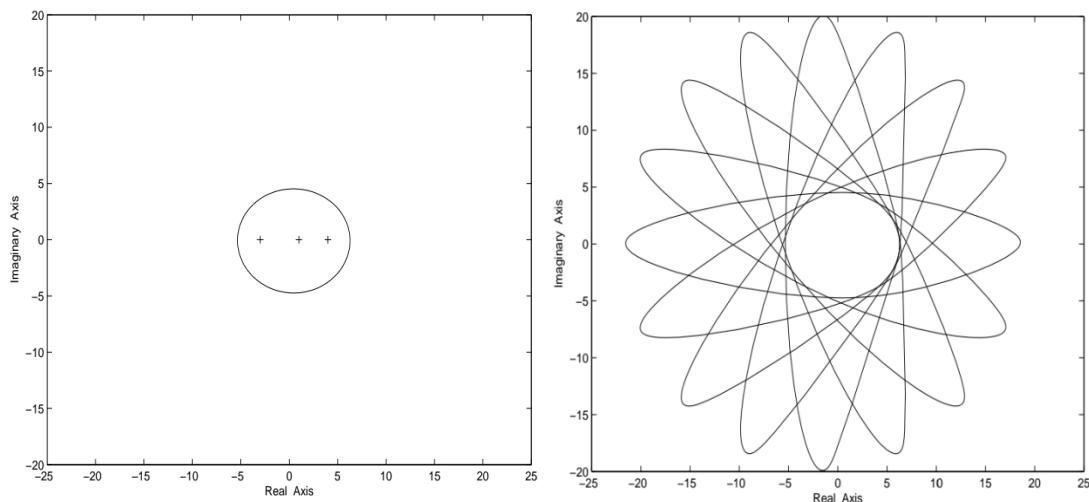
Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ i & 9 & 4 \\ -14 & 13 & -5 \end{bmatrix}$. Το αριθμητικό πεδίο

του πίνακα $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ i & 9 & 4 \end{bmatrix}$, ο οποίος είναι ένας 3×3 υποπίνακας του πίνακα A ,

αποτυπώνεται στο αριστερό μέρος της εικόνας και με "+" σημειώνονται οι ιδιοτιμές του. Στο δεξί μέρος της εικόνας αναπαριστούνται τα σύνορα των αριθμητικών πεδίων των πινάκων C_k , της μορφής:

$$C_k = \begin{bmatrix} A_1 & e^{i\frac{k\pi}{4}} A_2^* \\ A_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{για } k = 0, 1, \dots, 7.$$

Θυμίζοντας λοιπόν ότι ισχύει $0 \in F(A_1)$ κι έτσι επιβεβαιώνεται ο ισχυρισμός του **Πορίσματος 3.2.2.**, αφού από την εικόνα βλέπουμε ότι το αριθμητικό πεδίο $F(A_1)$ συμπίπτει με την τομή όλων αριθμητικών πεδίων των πινάκων C_k για $k = 0, 1, \dots, 7$.



Σχήμα 3.2. Το αριθμητικό πεδίο $F(A_1)$ (αριστερή απεικόνιση) και το αριθμητικό πεδίο $F(C_k)$ (δεξιά απεικόνιση), για $k = 0, 1, \dots, 7$.

Στο σημείο αυτό της μελέτης μας κι επιθυμώντας να απαντήσουμε στο ερώτημα που μας απασχολεί από την αρχή της παραγράφου, θα παρουσιάσουμε τώρα το επόμενο

Θεώρημα, που επεξηγεί τον λόγο για τον οποίο επιλέγουμε να χρησιμοποιούμε στον ορισμό του αριθμητικού πεδίου $F_{\|\cdot\|}(A; B)$ τον πίνακα B , έναντι κάποιου $I_{n,m}$.

Θεώρημα 3.2.4. Για κάθε $n \times m$ ($n > m$) πίνακα $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$ με $A_1 \in \mathbb{C}^{m \times m}$ και $A_2 \in \mathbb{C}^{(n-m) \times m}$, ισχύει ότι $F_{\|\cdot\|_2}(A; I_{n,m}) = F(A_1)$.

Απόδειξη. Όπως ήδη γνωρίζουμε ισχύει ότι

$$F_{\|\cdot\|_2}(A; I_{n,m}) \subseteq \bigcap_{M \in \mathbb{C}^{n \times (n-m)}} F([A \ M]) = F(A_1),$$

άρα αρκεί εμείς να δείξουμε τον αντίστροφο εγκλεισμό.

Έστω $\mu_0 \in F(A_1)$. Αφού, $F_{\|\cdot\|_2}(A - \mu_0 I_{n,m}; I_{n,m}) = F_{\|\cdot\|_2}(A; I_{n,m}) - \mu_0$ και $F(A_1 - \mu_0 I_{n,m}) = F(A_1) - \mu_0$, χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\mu_0 = 0$. Τότε λοιπόν έχουμε:

$$0 \in F(A_1) = F_{\|\cdot\|_2}(A_1; I_{n,m}), \text{ ή ισοδύναμα,}$$

$$\|I_m - \lambda A_1\|_2 \geq 1, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Αφού όμως $\|I_{n,m} - \lambda A\|_2 \geq \|I_m - \lambda A_1\|_2$, έπεται ότι

$$\|I_{n,m} - \lambda A\|_2 \geq 1, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \text{ή}$$

$$\|A - \lambda^{-1} I_{n,m}\|_2 \geq |\lambda|^{-1}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad \text{ή}$$

$$\|A - \lambda I_{n,m}\|_2 \geq |\lambda|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Συνεπώς, $0 \in F_{\|\cdot\|_2}(A_1; I_{n,m})$ κι έτσι η απόδειξη ολοκληρώνεται. ■

Το **Θεώρημα 3.2.4.** αποτελεί την αιτιολόγηση της επιλογής μας σχετικά με τον γενικό $n \times m$ πίνακα B . Μέσω της απόδειξής του, γίνεται σαφές ότι η χρήση ενός πίνακα $I_{n,m}$, για τον καθορισμό του αριθμητικού πεδίου, δεν έχει καμία πρακτική αξία. Το γεγονός αυτό, οφείλεται στο ότι υπολογίζοντας το $F_{\|\cdot\|_2}(A_1; I_{n,m})$ με τη βοήθεια του $I_{n,m}$, το πρώτο ταυτίζεται με το αριθμητικό πεδίο $F(A_1)$, του κύριου υποπίνακα A_1 , του πίνακα A . Επομένως, η περίπτωση αυτή δεν παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, εφόσον το αριθμητικό πεδίο αυτό μας είναι ήδη γνωστό (όπως κάθε αριθμητικό πεδίο τετραγωνικού πίνακα που έχουμε μελετήσει ως τώρα). Συνεπώς, εύκολα κανείς αντιλαμβάνεται ότι η εμφάνιση ενός πίνακα $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$, στην επέκταση του ορισμού του αριθμητικού πεδίου των όχι υποχρεωτικά τετραγωνικών πινάκων, παρέχει περισσότερες πληροφορίες κι έχει μεγαλύτερο όφελος για τον σκοπό της παρούσας εργασίας και τα αποτελέσματα που επιθυμούμε να εξάγουμε.

3.3 Βασικές Ιδιότητες του $F_{\|\cdot\|}(A; B)$

Έχοντας ως τώρα καθορίσει τη μορφή του αριθμητικού πεδίου $F_{\|\cdot\|}(A; B)$ ενός όχι αναγκαία τετραγωνικού πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ ως προς έναν πίνακα $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$, θα παρουσιάσουμε σε συνέχεια όσων έχουμε αναφέρει, τις βασικές ιδιότητες του συγκεκριμένου συνόλου. Οι ιδιότητες τις οποίες θα παραθέσουμε, αποτελούν άμεσες συνέπειες των ιδιοτήτων που έχουν οι νόρμες.

Πρόταση 3.3.1. Έστω $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ και $B \neq 0$. Αν $A = bB$ (με $\|B\| \geq 1$), για κάποιο $b \in \mathbb{C}$, τότε ισχύει

$$F_{\|\cdot\|}(bB; B) = \{b\}.$$

Απόδειξη. Για $A = bB$, με $\|B\| \geq 1$ και $b \in \mathbb{C}$ έχουμε το αριθμητικό πεδίο

$$\begin{aligned} F_{\|\cdot\|}(bB; B) &= \{\mu \in \mathbb{C} : \|bB - \lambda B\| \geq |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C}\} \\ &= \{\mu \in \mathbb{C} : \|B\| |b - \lambda| \geq |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C}\}. \end{aligned}$$

Αφού $\|B\| \geq 1$, τότε $\|B\| |b - \lambda| \geq |b - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C}$ κι ως εκ τούτου $b \in F_{\|\cdot\|}(bB; B)$. Έστω ότι υπάρχει κι ένα $\hat{b} \in F_{\|\cdot\|}(bB; B) \setminus \{b\}$ (δηλαδή, $\hat{b} \neq b$).

Τότε, στο εσωτερικό του ευθύγραμμου τμήματος με άκρα τα b και \hat{b} , υπάρχει ένα $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, τέτοιο ώστε:

$$\|B\| |b - \lambda_0| < |\hat{b} - \lambda_0|, \text{ έτσι ώστε } \hat{b} \notin F_{\|\cdot\|}(bB; B).$$

Αυτό όμως είναι άτοπο (αφού υποθέσαμε ότι $\hat{b} \in F_{\|\cdot\|}(bB; B) \setminus \{b\}$ και συνεπώς $\|B\| |b - \lambda_0| \geq |\hat{b} - \lambda_0|$) Άρα, τελικά δεν υπάρχει $\hat{b} \in F_{\|\cdot\|}(bB; B) \setminus \{b\}$ κι επομένως το $F_{\|\cdot\|}(bB; B)$ είναι μονοσύνολο. Οπότε, προκύπτει $F_{\|\cdot\|}(bB; B) = \{b\}$. ■

Πρόταση 3.3.2. Έστω μία γραμμική απεικόνιση:

$$f : (\mathbb{C}^{n_1 \times m_1}, \|\cdot\|) \rightarrow (\mathbb{C}^{n_2 \times m_2}, \|\|\cdot\|\|), \text{ τέτοια ώστε}$$

$$\|\|f(M)\|\| \leq \|M\|, \text{ για κάθε } M \in \mathbb{C}^{n_1 \times m_1}, \text{ ή αντίστοιχα}$$

$$\|\|f(M)\|\| \geq \|M\|, \text{ για κάθε } M \in \mathbb{C}^{n_1 \times m_1}.$$

Τότε για κάθε $A, B \in \mathbb{C}^{n_1 \times m_1}$, ισχύει ότι

$$F_{\|\|\cdot\|\|}(f(A); f(B)) \subseteq F_{\|\cdot\|}(A; B), \text{ ή αντίστοιχα}$$

$$F_{\|\|\cdot\|\|}(f(A); f(B)) \supseteq F_{\|\cdot\|}(A; B).$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $\|M\| \leq \|\|f(M)\|\|$, για κάθε $M \in \mathbb{C}^{n_1 \times m_1}$ κι έστω $\mu \in F_{\|\cdot\|}(A; B)$. Τότε για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$, έχουμε:

$$|\mu - \lambda| \leq \|A - \lambda B\| \leq \|\|f(A - \lambda B)\|\| = \|\|f(A) - \lambda f(B)\|\|.$$

Επομένως, αφού $|\mu - \lambda| \leq \|f(A) - \lambda f(B)\|$ έχουμε ότι $\mu \in F_{\|\cdot\|}(f(A); f(B))$.

Συνεπώς, $F_{\|\cdot\|}(f(A); f(B)) \supseteq F_{\|\cdot\|}(A; B)$.

Αντίστοιχα, υποθέτουμε ότι $\|M\| \geq \|f(M)\|$, για κάθε $M \in \mathbb{C}^{n_1 \times m_1}$ κι έστω $\mu \in F_{\|\cdot\|}(f(A); f(B))$. Τότε για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$, έχουμε:

$$|\mu - \lambda| \leq \|f(A - \lambda B)\| = \|f(A) - \lambda f(B)\| \leq \|A - \lambda B\|.$$

Επομένως, αφού $|\mu - \lambda| \leq \|A - \lambda B\|$ έχουμε ότι $\mu \in F_{\|\cdot\|}(A; B)$.

Συνεπώς, $F_{\|\cdot\|}(f(A); f(B)) \subseteq F_{\|\cdot\|}(A; B)$. ■

Σημείωση: Προφανώς ισχύει ότι

$$\begin{aligned} F_{\|\cdot\|}(f(A); f(B)) &= \{\mu \in \mathbb{C} : \|f(A - \lambda B)\| \geq |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C}\} \\ &= \{\mu \in \mathbb{C} : \|f(A) - \lambda f(B)\| \geq |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C}\}. \end{aligned}$$

Πόρισμα 3.3.3. Για κάθε $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$, ισχύουν τα ακόλουθα:

(I) Αν η νόρμα $\|\cdot\|$ είναι ορθομοναδιαία αναλλοίωτη, τότε για κάθε ορθομοναδιαίους πίνακες $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ και $V \in \mathbb{C}^{m \times m}$, ισχύει $F_{\|\cdot\|}(UAV; UB) = F_{\|\cdot\|}(A; B)$.

(II) Αν η νόρμα $\|\cdot\|$ είναι ορθομοναδιαία αναλλοίωτη και \hat{A}, \hat{B} είναι οι υποπίνακες των πινάκων A και B , αντίστοιχα, σχηματισμένοι από τις ίδιες γραμμές και τις ίδιες στήλες, τότε ισχύει

$$F_{\|\cdot\|}(\hat{A}; \hat{B}) = F_{\|\cdot\|}(A; B).$$

Σημείωση: Υποπίνακας \hat{A} ενός πίνακα A , καλείται ο πίνακας

$$\hat{A} = A - \frac{\langle A, B \rangle}{\|B\|^2} B,$$

όπου $\langle A, B \rangle$ είναι το εσωτερικό γινόμενο των πινάκων A και B .

(III) Αν η νόρμα $\|\cdot\|$ είναι αναλλοίωτη υπό την ανάστροφη πράξη \cdot^T , τότε ισχύει

$$F_{\|\cdot\|}(A^T; B^T) = F_{\|\cdot\|}(A; B).$$

(IV) Αν η νόρμα $\|\cdot\|$ είναι αναλλοίωτη υπό τη συζυγή πράξη $\bar{\cdot}$, τότε ισχύει

$$F_{\|\cdot\|}(\bar{A}; \bar{B}) = \overline{F_{\|\cdot\|}(A; B)}.$$

(V) Αν η νόρμα $\|\cdot\|$ είναι αναλλοίωτη υπό την αναστροφοσυζυγή πράξη \cdot^* , τότε ισχύει

$$F_{\|\cdot\|}(A^*; B^*) = \overline{F_{\|\cdot\|}(A; B)}.$$

(VI) Αν η νόρμα $\|\cdot\|$ είναι αναλλοίωτη υπό την αναστροφοσυζυγή πράξη \cdot^* (ή αντίστοιχα, υπό τη συζυγή πράξη $\bar{\cdot}$) και οι πίνακες A και B είναι τετραγωνικοί

$(n \times n)$ ερμιτιανοί (ή αντίστοιχα, όχι αναγκαία τετραγωνικοί $(n \times m, \text{ με } n \neq m)$ πραγματικοί), τότε το αριθμητικό πεδίο $F_{\|\cdot\|}(A; B)$ είναι συμμετρικό ως προς τον πραγματικό άξονα.

Πρόταση 3.3.4. Για κάθε $a, b \in \mathbb{C}$, ισχύει ότι $F_{\|\cdot\|}(aA + bB; B) = a F_{\|\cdot\|}(A; B) + b$.

Απόδειξη. Έστω $\alpha \neq 0$. Το αριθμητικό πεδίο $F_{\|\cdot\|}(aA + bB; B)$ έχει τη μορφή:

$$F_{\|\cdot\|}(aA + bB; B) = \{z \in \mathbb{C} : \|(aA + bB) - \lambda B\| \geq |z - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

Άρα, ένας μιγαδικός $\alpha\mu + b$ ανήκει στο $F_{\|\cdot\|}(aA + bB; B)$, αν και μόνο αν ισχύει

$$\|aA + bB - \lambda B\| \geq |\alpha\mu + b - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \text{ή}$$

$$\left\| \alpha \left(A + \frac{b-\lambda}{\alpha} B \right) \right\| \geq \left| \alpha \left(\mu + \frac{b-\lambda}{\alpha} \right) \right|, \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \text{ή}$$

$$|\alpha| \left\| A + \frac{b-\lambda}{\alpha} B \right\| \geq |\alpha| \left| \mu + \frac{b-\lambda}{\alpha} \right|, \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \text{ή}$$

$$\|A - \lambda B\| \geq |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Επομένως, καταλήγουμε στο γεγονός ότι $\alpha\mu + b \in F_{\|\cdot\|}(aA + bB; B)$ αν και μόνο αν $\mu \in F_{\|\cdot\|}(A; B)$.

Θα εξετάσουμε τώρα την περίπτωση στην οποία έχουμε $\alpha = 0$.

Έστω $\alpha = 0$. Για το αριθμητικό πεδίο $F_{\|\cdot\|}(aA + bB; B)$ ισχύει:

$$F_{\|\cdot\|}(0 + bB; B) = F_{\|\cdot\|}(bB; B) = \{b\},$$

που ισχύει από την **Πρόταση 3.3.1.**, για $\|B\| \geq 1$. Συνεπώς, η απόδειξη ολοκληρώθηκε. ■

Προς επαλήθευση του ισχυρισμού της προαναφερθείσας Πρότασης, ας μελετήσουμε ένα σύντομο παράδειγμα:

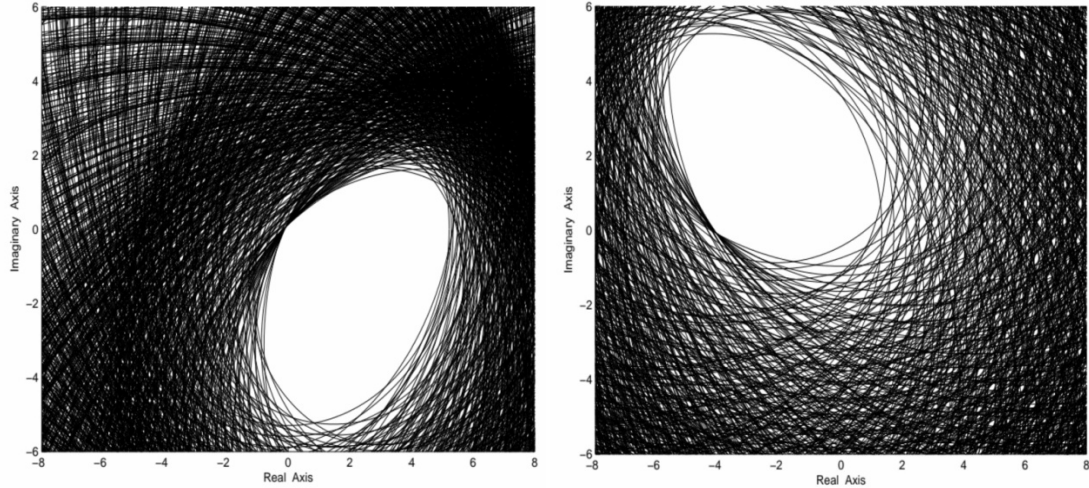
Παράδειγμα 3.3.5.

Θεωρούμε τους πίνακες $A \in \mathbb{C}^{3 \times 4}$ και $B \in \mathbb{C}^{3 \times 4}$ ως εξής:

$$A = \begin{bmatrix} 5+i & 0.2 & 0 & -0.1 \\ 0 & 1-i & -i0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 1.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad \text{Έστω}$$

επίσης $\|\cdot\| = \|\cdot\|_1$.

Τα αριθμητικά πεδία $F_{\|\cdot\|_1}(A; B)$ και $F_{\|\cdot\|_1}(iA - 4B; B)$ απεικονίζονται στο αριστερό και στο δεξί μέρος της εικόνας, αντίστοιχα. Παρατηρούμε λοιπόν ότι επιβεβαιώνεται η **Πρόταση 3.3.4.**



Σχήμα 3.3. Το αριθμητικό πεδίο $F_{||,||_1}(A; B)$ (αριστερή απεικόνιση) και το αριθμητικό πεδίο $F_{||,||_1}(iA - 4B; B)$ (δεξιά απεικόνιση).

Σε συνέχεια λοιπόν της μελέτης μας και για να μπορέσουμε να κατανοήσουμε την επόμενη Πρόταση, σημειώνουμε ότι το εσωτερικό του συνόλου του αριθμητικού πεδίου $F_{||,||}(A; B)$, συμβολίζεται $\text{Int}[F_{||,||}(A; B)]$ και μπορεί να εκφραστεί χρησιμοποιώντας αυστηρή ανισότητα στον ορισμό του $F_{||,||}(A; B)$ (σχέση (3.1)).

Πρόταση 3.3.6. Για κάθε $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$, ισχύει ότι

$$\text{Int}[F_{||,||}(A; B)] \subseteq \{ \mu \in \mathbb{C} : \|A - \lambda B\| > |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \}.$$

Απόδειξη. Έστω $\mu \in \text{Int}[F_{||,||}(A; B)]$, υπενθυμίζοντας ότι $\|B\| \geq 1$. Τότε υπάρχει ένα $\rho > 0$, τέτοιο ώστε $\mu + e^{i\theta} \rho \in F_{||,||}(A; B)$ για κάθε $\theta \in [0, 2\pi]$. Άρα, έχουμε

$$\|A - \lambda B\| \geq |(\mu + e^{i\theta} \rho) - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall \theta \in [0, 2\pi].$$

Όμως, για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$, υπάρχει μία γωνία $\theta(\lambda) \in [0, 2\pi]$, τέτοια ώστε

$$|(\mu + e^{i\theta(\lambda)} \rho) - \lambda| > |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Συνεπώς, ισχύει $\|A - \lambda B\| > |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C}$ κι επομένως η απόδειξή μας ολοκληρώνεται. ■

3.3.1 Σχέση Αριθμητικών Πεδίων $F_{||,||}(A; B)$ και $F_{||,||}(B; A)$

Έχοντας αναφέρει μέχρι στιγμής κάποιες από τις σημαντικότερες ιδιότητες του $F_{||,||}(A; B)$, θα εξετάσουμε τώρα την ισχυρή σχέση που το συνδέει με το αριθμητικό πεδίο $F_{||,||}(B; A)$. Θα ξεκινήσουμε λοιπόν με την Πρόταση που θεμελιώνει τη σχέση

αυτή και στη συνέχεια θα παραθέσουμε ένα παράδειγμα, προκειμένου να την κατανοήσουμε καλύτερα.

Σημείωση: Το αριθμητικό πεδίο του πίνακα $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ ως προς τον πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$, εκφράζεται ως

$$\begin{aligned} F_{\|\cdot\|}(B; A) &= \{ \mu \in \mathbb{C} : \|B - \lambda A\| \geq |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \} \\ &= \bigcap_{\lambda \in \mathbb{C}} D(\lambda, \|B - \lambda A\|). \end{aligned}$$

Πρόταση 3.3.7. Για κάθε $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$, ισχύει ότι

$$\{ \mu^{-1} \in \mathbb{C} : \mu \in F_{\|\cdot\|}(A; B), |\mu| \geq 1 \} \subseteq F_{\|\cdot\|}(B; A).$$

Απόδειξη. Έστω $\mu \in F_{\|\cdot\|}(A; B)$ και $|\mu| \geq 1$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} \|A - \lambda B\| &\geq |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} && \text{ή} \\ |\lambda| \left\| \frac{A}{\lambda} - B \right\| &\geq |\lambda| \left| \frac{\mu}{\lambda} - 1 \right|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} && \text{ή} \\ \|\lambda A - B\| &\geq |\lambda\mu - 1|, \forall \lambda \in \mathbb{C} && \text{ή} \\ \|-(B - \lambda A)\| &\geq |\lambda\mu - 1|, \forall \lambda \in \mathbb{C} && \text{ή} \\ \|B - \lambda A\| &\geq |\lambda\mu - 1|, \forall \lambda \in \mathbb{C} && \text{ή} \\ \|B - \lambda A\| &\geq |\lambda\mu - \mu^{-1}\mu|, \forall \lambda \in \mathbb{C} && \text{ή} \\ \|B - \lambda A\| &\geq |\mu| |\lambda - \mu^{-1}|, \forall \lambda \in \mathbb{C} && \text{ή} \\ \|B - \lambda A\| &\geq |\mu| |\mu^{-1} - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

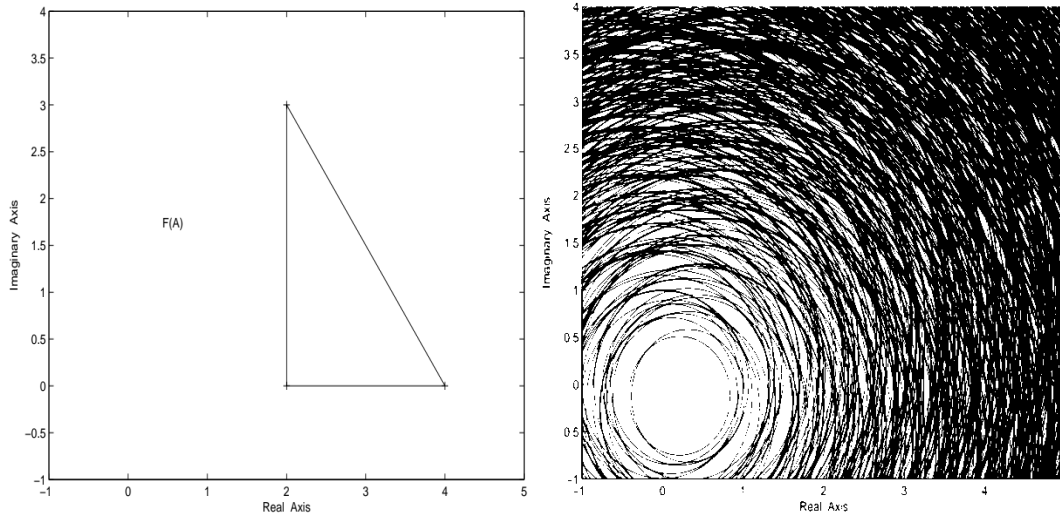
Επομένως, αφού $|\mu| \geq 1$, έπεται ότι $\mu^{-1} \in F_{\|\cdot\|}(B; A)$. ■

Συνεχίζοντας, το ακόλουθο παράδειγμα θα μας βοηθήσει να επαληθεύσουμε την **Πρόταση 3.3.7.**, αλλά και να αναπαραστήσουμε γραφικά τα αριθμητικά πεδία $F_{\|\cdot\|}(A; B)$ και $F_{\|\cdot\|}(B; A)$, για συγκεκριμένους πίνακες A, B .

Παράδειγμα 3.3.8.

Θεωρούμε τον 3×3 διαγώνιο, τετραγωνικό πίνακα $A = \text{diag}\{2 + i3, 2, 4\}$. Το αριθμητικό του πεδίο, βάσει του ορισμού που δώσαμε στη σχέση (2.4), είναι $F(A) = F_{\|\cdot\|_2}(A; I_3)$ και ταυτίζεται με την κυρτή θήκη των διαγώνιων στοιχείων του. Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε κι από το αριστερό μέρος της εικόνας, το $F_{\|\cdot\|_2}(A; I_3)$ βρίσκεται έξω από τον μοναδιαίο δίσκο $D(0,1)$.

Το αριθμητικό πεδίο $F_{\|\cdot\|_2}(I_3; A)$ αποτυπώνεται στη μη γραμμοσκιασμένη περιοχή, του δεξιού μέρους της εικόνας και περιέχει το σύνολο $\{ \mu^{-1} \in \mathbb{C} : \mu \in F(A) \}$.



Σχήμα 3.4. Το αριθμητικό πεδίο $F(A) = F_{\|\cdot\|_2}(A; I_3)$ (αριστερή απεικόνιση) και το αριθμητικό πεδίο $F_{\|\cdot\|_2}(I_3; A)$ (δεξιά απεικόνιση).

Συνεπώς, προκύπτει ότι

$$\{ \mu^{-1} \in \mathbb{C} : \mu \in F_{\|\cdot\|_2}(A; I_3), |\mu| \geq 1 \} \subseteq F_{\|\cdot\|_2}(I_3; A),$$

με αποτέλεσμα να επιβεβαιώνουμε την ορθότητα της προηγούμενης Πρότασης. Επιπλέον, από το δεξί μέρος της εικόνας, αναγνωρίζουμε ότι η αρχή των αξόνων βρίσκεται στο εσωτερικό του αριθμητικού πεδίου $F_{\|\cdot\|_2}(I_3; A)$ κι έτσι εύκολα μπορούμε να εξάγουμε το συμπέρασμα, ότι γενικά για δύο πίνακες $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$, ισχύει $F_{\|\cdot\|}(B; A) \neq \{ \mu^{-1} \in \mathbb{C} : \mu \in F_{\|\cdot\|}(A; B), |\mu| \geq 1 \}$.

Σημείωση: Για κάθε $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ και $b \in \mathbb{C}$, τέτοια ώστε $\|B\| \geq 1$ και $|b| = 1$, ισχύουν

$$F_{\|\cdot\|_2}(bB; B) = \{b\} \quad \text{και} \quad F_{\|\cdot\|_2}(B; bB) = F_{\|\cdot\|_2}(b^{-1}(bB); bB) = \{b^{-1}\}.$$

Από την ανάλυσή μας, διαπιστώνουμε ότι τα σύνολα των αριθμητικών πεδίων $F_{\|\cdot\|}(A; B)$ και $F_{\|\cdot\|}(B; A)$, συνδέονται με μία σχέση εγκλεισμού κι επομένως, γίνεται σαφής η μη ταύτισή τους.

3.3.2 Αριθμητικό Πεδίο $F_{\|\cdot\|}(A; B)$ και Νόρμες Πινάκων Επαγόμενες από

Εσωτερικό Γινόμενο Πινάκων

Στο σημείο αυτό της εργασίας, θα στρέψουμε την προσοχή μας στην ιδιαίτερη περίπτωση που οι νόρμες πινάκων στο αριθμητικό πεδίο $F_{\|\cdot\|}(A; B)$, επάγονται από εσωτερικό γινόμενο πινάκων. Μία τέτοια νόρμα, επαγόμενη από εσωτερικό γινόμενο

πινάκων, είναι η νόρμα Frobenius, η οποία για τους όχι αναγκαστικά τετραγωνικούς πίνακες, ορίζεται ως εξής:

• *Νόρμα Frobenius* ενός πίνακα $A = [\alpha_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times m}$ ονομάζεται η νόρμα

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{\text{trace}(A^*A)},$$

όπου με $\text{trace}(\cdot)$ συμβολίζουμε το ίχνος του πίνακα A^*A , δηλαδή το άθροισμα των διαγώνιων στοιχείων του.

Λήμμα 3.3.9. Έστω ότι η νόρμα πίνακα $\|\cdot\|$ επάγεται από εσωτερικό γινόμενο πινάκων $\langle \cdot, \cdot \rangle$ κι επίσης $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$. Τότε $A \perp_{BJ} B$, αν και μόνο αν ισχύει $\langle A, B \rangle = 0$.

Απόδειξη. Από τον ορισμό της Birkhoff–James ορθογωνιότητας, έχουμε ότι $A \perp_{BJ} B$, αν και μόνο αν ισχύει:

$$\|A + \lambda B\| \geq \|A\|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \text{ή}$$

$$\|A + \lambda B\|^2 \geq \|A\|^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Για το εσωτερικό γινόμενο γνωρίζουμε ότι:

$$\|A + \lambda B\|^2 = \langle A + \lambda B, A + \lambda B \rangle, \text{ άρα προκύπτει}$$

$$\langle A + \lambda B, A + \lambda B \rangle \geq \|A\|^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \text{ κι έτσι}$$

$$\langle A, A \rangle + \langle A, \lambda B \rangle + \langle \lambda B, A \rangle + \langle \lambda B, \lambda B \rangle \geq \|A\|^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \text{ή}$$

$$\|A\|^2 + \langle A, \lambda B \rangle + \overline{\langle A, \lambda B \rangle} + \|\lambda B\|^2 \geq \|A\|^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \text{ή}$$

$$2 \operatorname{Re}[\langle A, \lambda B \rangle] + |\lambda|^2 \|B\|^2 \geq 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \text{ή}$$

$$2 \operatorname{Re}[\bar{\lambda} \langle A, B \rangle] + |\lambda|^2 \|B\|^2 \geq 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \text{ή}$$

$$|\lambda|^2 \|B\|^2 \geq -2 \operatorname{Re}[\bar{\lambda} \langle A, B \rangle], \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

και αφήνοντας το λ να είναι πραγματικός αριθμός, έχουμε

$$|\lambda|^2 \|B\|^2 \geq -2\lambda \operatorname{Re}[\langle A, B \rangle], \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Συνεχίζοντας, έχουμε

$$|\lambda|^2 \|B\|^2 = |i\lambda|^2 \|B\|^2 \geq -2 \operatorname{Re}[i\bar{\lambda} \langle A, B \rangle] = -2\lambda \operatorname{Im}[\langle A, B \rangle], \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Συνεπώς, $\operatorname{Re}[\langle A, B \rangle] = \operatorname{Im}[\langle A, B \rangle] = 0$ κι επομένως $\langle A, B \rangle = 0$. ■

Λήμμα 3.3.10. Έστω ότι η νόρμα η νόρμα πίνακα $\|\cdot\|$ επάγεται από εσωτερικό γινόμενο πινάκων $\langle \cdot, \cdot \rangle$ κι ότι $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$, με $\|B\| \geq 1$. Τότε ισχύει $\frac{\langle A, B \rangle}{\|B\|^2} \in F_{\|\cdot\|}(A; B)$. Επιπλέον, αν $\|B\| = 1$, τότε ισχύει $F_{\|\cdot\|}(A; B) = \{\langle A, B \rangle\}$.

Απόδειξη. Βασιζόμενοι στο **Λήμμα 3.3.9.**, υποθέτουμε ότι ένας μιγαδικός $\mu \in \mathbb{C}$ ικανοποιεί τη σχέση ορθογωνιότητας $B \perp_{BJ} (A - \mu B)$, αν και μόνο αν, ισχύει $\langle B, A - \mu B \rangle = 0$.

$$\text{Ισοδύναμα, αν } \langle B, A \rangle - \langle B, \mu B \rangle = 0, \quad \forall \mu \in \mathbb{C} \quad \text{ή}$$

$$\langle B, A \rangle - \bar{\mu} \langle B, B \rangle = 0, \quad \forall \mu \in \mathbb{C} \quad \text{ή}$$

$$\langle B, A \rangle - \bar{\mu} \|B\|^2 = 0, \quad \forall \mu \in \mathbb{C} \quad \text{ή}$$

$$\overline{\langle B, A \rangle} - \mu \|B\|^2 = 0, \quad \forall \mu \in \mathbb{C} \quad \text{ή}$$

$$\langle A, B \rangle - \mu \|B\|^2 = 0, \quad \forall \mu \in \mathbb{C} \quad \text{ή} \quad \mu = \frac{\langle A, B \rangle}{\|B\|^2}.$$

Από το **Θεώρημα 3.1.1.** προκύπτει $\mu \in F_{\|\cdot\|}(A; B)$. Επίσης, από το **Πόρισμα 3.1.3.** για $\|B\| > 1$ έχουμε

$$\{\mu \in \mathbb{C} : B \perp_{BJ} (A - \mu B)\} = \|B\|^{-1} F_{\|\cdot\|}(A; \|B\|^{-1} B) \subseteq F_{\|\cdot\|}(A; B),$$

συνεπώς για $\|B\| = 1$, προκύπτει $F_{\|\cdot\|}(A; B) = \{\langle A, B \rangle\}$ και η απόδειξη ολοκληρώνεται. ■

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η νόρμα πίνακα $\|\cdot\|$ επάγεται από εσωτερικό γινόμενο πινάκων $\langle \cdot, \cdot \rangle$ κι έστω ότι ο πίνακας $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ δεν είναι αναγκαστικά τετραγωνικός, με $\|B\| = 1$. Τότε για κάθε $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$, το αριθμητικό πεδίο $F_{\|\cdot\|}(A; B)$ θα είναι μονοσύνολο, αν και ο πίνακας A δεν είναι απαραίτητα βαθμωτό πολλαπλάσιο του πίνακα B . Απόρροια της παρατήρησης αυτής, αποτελεί το γεγονός ότι το αριθμητικό πεδίο $F_{\|\cdot\|}(A; B)$ είναι μονοσύνολο, ανεξάρτητα από το αν ο A αποτελεί βαθμωτό πολλαπλάσιο του B και με τον τρόπο αυτόν, αντικρούει την υπόθεση της **Πρόταση 3.3.1.** Εφόσον λοιπόν, κατά την υπόθεση της Πρότασης, ο πίνακας A πρέπει να γράφεται υποχρεωτικά με τη μορφή $A = bB$, για κάποιο $b \in \mathbb{C}$, ώστε να είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του B , οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι ο αντίστροφος ισχυρισμός της Πρόταση 3.3.1., δεν είναι γενικά ορθός.

Στην περίπτωση που ισχύει $\|B\| > 1$ και ο πίνακας A δεν αποτελεί βαθμωτό πολλαπλάσιο του πίνακα B (δηλαδή, $A \neq bB$, για κάποιο $b \in \mathbb{C}$), τότε το αριθμητικό πεδίο $F_{\|\cdot\|}(A; B)$ είναι ένας (μη τετριμμένος) κλειστός δίσκος, με κέντρο το $\frac{\langle A, B \rangle}{\|B\|^2}$ κι ως εκ τούτου, θα έχει μη κενό εσωτερικό. Τη μορφή αυτή του συνόλου $F_{\|\cdot\|}(A; B)$, θα μελετήσουμε στην επόμενη Πρόταση:

Πρόταση 3.3.11. Έστω ότι η νόρμα πίνακα $\|\cdot\|$ επάγεται από εσωτερικό γινόμενο πινάκων $\langle \cdot, \cdot \rangle$ κι ότι $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$, με $\|B\| \geq 1$. Τότε ισχύει

$$F_{\|\cdot\|}(A; B) = D \left(\frac{\langle A, B \rangle}{\|B\|^2}, \left\| A - \frac{\langle A, B \rangle}{\|B\|^2} B \right\| \frac{\sqrt{\|B\|^2 - 1}}{\|B\|} \right).$$

Απόδειξη. Αν $\|B\| = 1$, τότε από το **Λήμμα 3.3.10.** έχουμε ότι

$$F_{\|\cdot\|}(A; B) = \{\langle A, B \rangle\} = D(\langle A, B \rangle, 0),$$

που είναι μονοσύνολο, αφού η ακτίνα του δίσκου είναι μηδέν. (Με αυτόν τον τρόπο επιβεβαιώνουμε τη σκέψη που διατυπώσαμε προηγουμένως).

Αν $\|B\| > 1$, και \hat{A} ο υποπίνακας του πίνακα A (όπως ορίστηκε στη Σημείωση του **Πορίσματος 3.3.3.(II)**), με

$$\hat{A} = A - \frac{\langle A, B \rangle}{\|B\|^2} B, \quad \text{παρατηρούμε ότι}$$

$$F_{\|\cdot\|}(\hat{A}; B) = F_{\|\cdot\|}(A; B) - \frac{\langle A, B \rangle}{\|B\|^2} \quad \text{και}$$

$$\langle \hat{A}, B \rangle = \langle A - \frac{\langle A, B \rangle}{\|B\|^2} B, B \rangle = \langle A, B \rangle - \langle \frac{\langle A, B \rangle}{\|B\|^2} B, B \rangle = \langle A, B \rangle - \frac{\langle A, B \rangle}{\|B\|^2} \|B\|^2 = 0.$$

Τότε για κάθε $r > 0$, έχουμε

$$\|\hat{A} - r e^{i\theta} B\| = \sqrt{\|\hat{A}\|^2 + r^2 \|B\|^2}, \quad \forall \theta \in [0, 2\pi]$$

(**Σημείωση:** Θέτοντας $\theta = \pi$, από την εξίσωση Euler έχουμε $e^{i\pi} = -1$, άρα $e^{2i\pi} = 1$.)

κι επομένως, ισχύει:

$$\bigcap_{\theta \in [0, 2\pi]} D(r e^{i\theta}, \|\hat{A} - r e^{i\theta} B\|) = D\left(0, \sqrt{\|\hat{A}\|^2 + r^2 \|B\|^2} - r\right).$$

Εύκολα λοιπόν παρατηρούμε ότι

$$\min_{r \geq 0} \left\{ \sqrt{\|\hat{A}\|^2 + r^2 \|B\|^2} - r \right\} = \|\hat{A}\| \frac{\sqrt{\|B\|^2 - 1}}{\|B\|},$$

όπου, το ελάχιστο επιτυγχάνεται στο

$$r = \frac{\|\hat{A}\|}{\|B\| \sqrt{\|B\|^2 - 1}}.$$

Επομένως, έχουμε

$$\begin{aligned}
F_{\|\cdot\|}(\hat{A}; B) &= \bigcap_{r \geq 0} D\left(0, \sqrt{\|\hat{A}\|^2 + r^2\|B\|^2} - r\right) \\
&= D\left(0, \|\hat{A}\| \frac{\sqrt{\|B\|^2 - 1}}{\|B\|}\right)
\end{aligned}$$

Επειδή όμως $F_{\|\cdot\|}(A; B) = F_{\|\cdot\|}(\hat{A}; B) + \frac{\langle A, B \rangle}{\|B\|^2}$ και $\|\hat{A}\| = \left\| A - \frac{\langle A, B \rangle}{\|B\|^2} B \right\|$,

προκύπτει ότι

$$F_{\|\cdot\|}(A; B) = D\left(\frac{\langle A, B \rangle}{\|B\|^2}, \left\| A - \frac{\langle A, B \rangle}{\|B\|^2} B \right\| \frac{\sqrt{\|B\|^2 - 1}}{\|B\|}\right)$$

κι έτσι η απόδειξη ολοκληρώθηκε. ■

Υποπροσθετική Ιδιότητα Αριθμητικού Πεδίου $F_{\|\cdot\|}(A + \hat{A}; B)$

Μπορεί κανείς με άμεσο τρόπο, να διαπιστώσει ότι αν η νόρμα πίνακα $\|\cdot\|$ επάγεται από εσωτερικό γινόμενο πινάκων $\langle \cdot, \cdot \rangle$, τότε για το αριθμητικό πεδίο $F_{\|\cdot\|}(A + \hat{A}; B)$, των πινάκων $A, \hat{A}, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ με $\|B\| \geq 1$, ισχύει η υποπροσθετική ιδιότητα, δηλαδή $F_{\|\cdot\|}(A + \hat{A}; B) \subseteq F_{\|\cdot\|}(A; B) + F_{\|\cdot\|}(\hat{A}; B)$. Πιο αναλυτικά παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned}
F_{\|\cdot\|}(A + \hat{A}; B) &= D\left(\frac{\langle A + \hat{A}, B \rangle}{\|B\|^2}, \left\| A + \hat{A} - \frac{\langle A + \hat{A}, B \rangle}{\|B\|^2} B \right\| \frac{\sqrt{\|B\|^2 - 1}}{\|B\|}\right) \\
&\subseteq D\left(\frac{\langle A, B \rangle}{\|B\|^2}, \left\| A - \frac{\langle A, B \rangle}{\|B\|^2} B \right\| \frac{\sqrt{\|B\|^2 - 1}}{\|B\|}\right) \\
&\quad + D\left(\frac{\langle \hat{A}, B \rangle}{\|B\|^2}, \left\| \hat{A} - \frac{\langle \hat{A}, B \rangle}{\|B\|^2} B \right\| \frac{\sqrt{\|B\|^2 - 1}}{\|B\|}\right) \\
&= F_{\|\cdot\|}(A; B) + F_{\|\cdot\|}(\hat{A}; B).
\end{aligned}$$

Μελετώντας λοιπόν την υποπροσθετικότητα του παραπάνω αριθμητικού πεδίου, σε συνδυασμό με τα έως τώρα αποτελέσματά μας, γεννάται το ερώτημα αν η ιδιότητα αυτή του πεδίου ισχύει για όλες τις νόρμες, δηλαδή ακόμα και για εκείνες που δεν είναι επαγόμενες από εσωτερικό γινόμενο. Δυστυχώς, το ερώτημα αυτό παραμένει ανοιχτό, αφού ένα τέτοιο αποτέλεσμα δεν έχει προς το παρόν επαληθευτεί. Στην περίπτωση όμως μίας καταφατικής απάντησης, που βεβαιώνει ότι η υποπροσθετικότητα αποτελεί ιδιότητα του αριθμητικού πεδίου για όλες τις νόρμες, η ιδιότητα αυτή θα μας παρέχει τη συνέχεια της απεικόνισης: $A \rightarrow F_{\|\cdot\|}(A; B)$. Συγκεκριμένα, για κάθε πίνακα $E \in \mathbb{C}^{n \times m}$, θα έχουμε ότι

$$F_{\|\cdot\|}(A + E; B) \subseteq F_{\|\cdot\|}(A; B) + F_{\|\cdot\|}(E; B) \subseteq F_{\|\cdot\|}(A; B) + D(0, \|E\|).$$

Συνεπώς, για κάθε $\mu \in F_{\|\cdot\|}(A; B)$, θα υπήρχε $\hat{\mu} \in F_{\|\cdot\|}(A + E; B)$, τέτοιο ώστε $|\mu - \hat{\mu}| \leq \|E\|$ κι αντιστρόφως,

για κάθε $\hat{\mu} \in F_{\|\cdot\|}(A + E; B)$, θα υπήρχε $\mu \in F_{\|\cdot\|}(A; B)$, τέτοιο ώστε $|\hat{\mu} - \mu| \leq \|E\|$.

Έτσι λοιπόν, όσων αφορά στη μετρική *Hausdorff*, η απόσταση μεταξύ των πεδίων $F_{\|\cdot\|}(A; B)$ και $F_{\|\cdot\|}(A + E; B)$ θα ήταν:

$$\max \left\{ \max_{\mu \in F_{\|\cdot\|}(A; B)} \min_{\hat{\mu} \in F_{\|\cdot\|}(A + E; B)} |\mu - \hat{\mu}|, \max_{\hat{\mu} \in F_{\|\cdot\|}(A + E; B)} \min_{\mu \in F_{\|\cdot\|}(A; B)} |\hat{\mu} - \mu| \right\} \leq \|E\|.$$

3.4 Αριθμητικό Πεδίο Γραμμικής Δέσμης Πινάκων $A - \lambda B$

Ο όρος «δέσμη» και συγκεκριμένα «γραμμική δέσμη» χρησιμοποιείται στη γραμμική άλγεβρα για να περιγράψει την έκφραση $A - \lambda B$, όπου οι A και B είναι συνήθως δύο τετραγωνικοί πίνακες και ο λ ένας μιγαδικός αριθμός. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχουν οι τιμές λ που μειώνουν το βαθμό της γραμμικής δέσμης, ικανοποιώντας την εξίσωση $(A - \lambda B)x_0 = 0$, για κάποιο μη μηδενικό διάνυσμα x_0 . Έτσι λοιπόν ορίζεται το γενικευμένο πρόβλημα ιδιοτιμής, όπου $\lambda \in \mathbb{C}$ είναι οι γενικευμένες ιδιοτιμές και x_0 τα αντίστοιχα γενικευμένα ιδιοδιανύσματά τους. Στην παράγραφο λοιπόν, θα μας απασχολήσει το *αριθμητικό πεδίο* $F(A - \lambda B)$, της *γραμμικής δέσμης* (*linear pencil*¹) πινάκων $A - \lambda B$, με $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, το οποίο εκφράζεται ως:

$$\begin{aligned} F(A - \lambda B) &= \{ \mu \in \mathbb{C} : x^*(A - \mu B)x = 0, x \in \mathbb{C}^n, x^*x = 1 \} \\ &= \{ \mu \in \mathbb{C} : x^*Ax - \mu x^*Bx = 0, x \in \mathbb{C}^n, x^*x = 1 \} \end{aligned}$$

Στην περίπτωση αυτή των τετραγωνικών πινάκων, δηλαδή όταν $n = m$, ένα ερώτημα που μπορεί να προκύψει με φυσικό τρόπο, είναι πώς το αριθμητικό πεδίο $F_{\|\cdot\|_2}(A; B)$, σχετίζεται με το $F(A - \lambda B)$. Το αριθμητικό πεδίο $F(A - \lambda B)$ είναι *κλειστό* υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου, αλλά δεν είναι απαραίτητα *κυρτό*. Επιπλέον, είναι *φραγμένο* αν και μόνο αν, το μηδέν δεν ανήκει στο αριθμητικό πεδίο $F(B)$ του πίνακα B (δηλαδή, αν $0 \notin F(B)$). Αν τώρα οι πίνακες A και B έχουν ένα κοινό *ισότροπο διάνυσμα* (*isotropic vector*), δηλαδή ένα μη μηδενικό διάνυσμα $y \in \mathbb{C}^n$, τέτοιο ώστε να ισχύει

$$y^*Ay = y^*By = 0,$$

τότε συμπεραίνουμε ότι ισχύει $F(A - \lambda B) = \mathbb{C}$.

¹ Η ονομασία του όρου *pencil* προέρχεται από τη λατινική ρίζα *penicillum*, που σημαίνει *πινέλο ζωγράφου*. Χρησιμοποιήθηκε αρχικά στην προβολική γεωμετρία για να περιγράψει μία δέσμη σημείων ή γραμμών.

Σημείωση: Γίνεται λοιπόν σαφές ότι τα αριθμητικά πεδία $F_{\|\cdot\|_2}(A; B)$ και $F(A - \lambda B)$ είναι εν γένει διαφορετικά, όμως για $B = I_n$, ισχύει η ισότητα:

$$F_{\|\cdot\|_2}(A; I_n) = F(A) = F(A - \lambda I_n).$$

Πρόταση 3.4.1. Έστω $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, με $\|B\|_2 \geq 1$ και $\mu_0 \in F(A - \lambda B)$. Αν υπάρχει ένα μοναδιαίο (ως προς τη φασματική νόρμα $\|\cdot\|_2$) διάνυσμα $x_0 \in \mathbb{C}^n$, τέτοιο ώστε:

$$x_0^*(A - \mu_0 B) x_0 = 0 \quad \text{και} \quad |x_0^* B x_0| \geq 1,$$

τότε $\mu_0 \in F_{\|\cdot\|_2}(A; B)$.

Απόδειξη. Έστω ότι $\mu_0 \in F(A - \lambda B)$ και $x_0 \in \mathbb{C}^n$, έτσι ώστε να ισχύουν:

$$x_0^*(A - \mu_0 B) x_0 = 0, \quad x_0^* x_0 = 1 \quad \text{και} \quad |x_0^* B x_0| \geq 1.$$

Τότε για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$, προκύπτει:

$$x_0^*(A - \lambda B) x_0 = -(\lambda - \mu_0) x_0^* B x_0$$

κι ως εκ τούτου,

$$\|A - \lambda B\|_2 \geq |\lambda - \mu_0| |x_0^* B x_0| \geq |\mu_0 - \lambda|.$$

Συνεπώς, από τον ορισμό του $F_{\|\cdot\|_2}(A; B)$, έπεται ότι $\mu_0 \in F_{\|\cdot\|_2}(A; B)$. ■

Πόρισμα 3.4.2. Αν το κλασικό αριθμητικό πεδίο $F(B)$ του πίνακα $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, δεν περιέχει εσωτερικά σημεία του μοναδιαίου δίσκου $D(0,1)$, τότε ισχύει $F(A - \lambda B) \subseteq F_{\|\cdot\|_2}(A; B)$.

Σημείωση: Για αρκετά μικρό $|x_0^* B x_0| \neq 0$ και για $x^* x = 1$, ο λόγος $\frac{x^* A x}{x^* B x}$ ανήκει στο αριθμητικό πεδίο $F(A - \lambda B)$, αλλά όχι στο $F_{\|\cdot\|_2}(A; B)$.

Στο σημείο αυτό, θα παραθέσουμε ένα αντιπαράδειγμα του Πορίσματος που μόλις αναφέραμε.

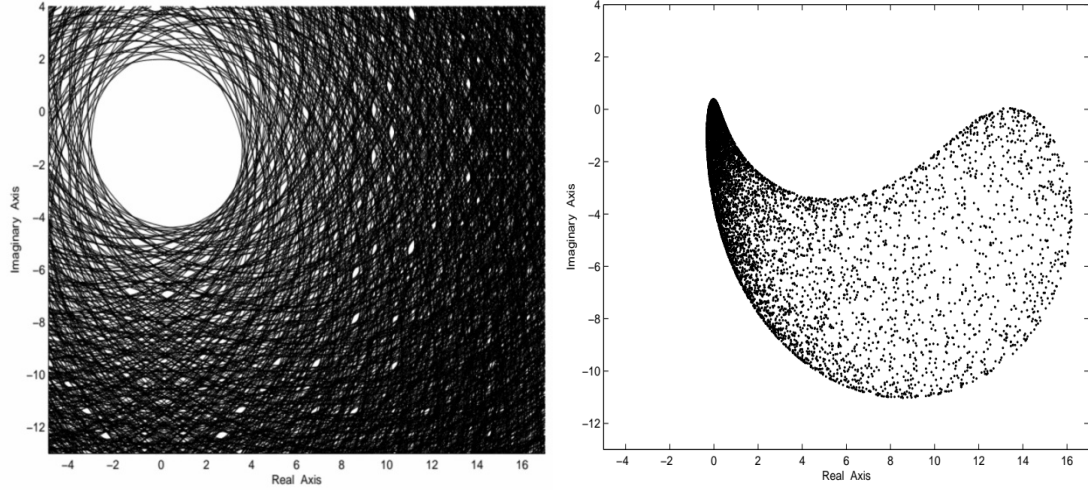
Παράδειγμα 3.4.3.

Ας θεωρήσουμε τους πίνακες $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ και $B = \begin{bmatrix} i 1.5 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$.

Η μη γραμμοσκιασμένη περιοχή του αριστερού μέρους της εικόνας και η σκιασμένη περιοχή του δεξιού μέρους της, αποτελούν τις προσεγγίσεις των αριθμητικών πεδίων $F_{\|\cdot\|_2}(A; B)$ και $F(A - \lambda B)$, αντίστοιχα. Είναι προφανές λοιπόν, ότι ισχύει:

$$F(A - \lambda B) \not\subseteq F_{\|\cdot\|_2}(A; B).$$

Αν $\|B\|_2 = 1$, τότε το αριθμητικό πεδίο $F(B)$ βρίσκεται στον μοναδιαίο δίσκο $D(0,1)$ και συνεπώς το **Πόρισμα 3.4.2.**, δεν μπορεί να εφαρμοστεί.



Σχήμα 3.5. Το αριθμητικό πεδίο $F_{||·||_2}(A; B)$ (αριστερή απεικόνιση) και το αριθμητικό πεδίο $F(A - \lambda B)$ (δεξιά απεικόνιση).

Για να γεφυρώσουμε την αντίφαση αυτή που δημιουργείται, θα συμπεριλάβουμε στη μελέτη μας την παρακάτω Πρόταση:

Πρόταση 3.4.4. Για κάθε πίνακες $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, τέτοιους ώστε ο πίνακας B να είναι αντιστρέψιμος, με φασματική νόρμα $\|B\|_2 = 1$, ισχύει ότι:

$$F_{||·||_2}(A; B) \subseteq F(AB^{-1}) \cap F(B^{-1}A) .$$

Απόδειξη. Αφού ο πίνακας B είναι αντιστρέψιμος και $\|B\|_2 = 1$, έχουμε

$$\begin{aligned} F_{||·||_2}(A; B) &= \{ \mu \in \mathbb{C} : \| (AB^{-1} - \lambda I_n)B \|_2 \geq |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \} \\ &\subseteq \{ \mu \in \mathbb{C} : \| AB^{-1} - \lambda I_n \|_2 \|B\|_2 \geq |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \} \\ &= F(AB^{-1}). \end{aligned}$$

Ομοίως, έχουμε:

$$\begin{aligned} F_{||·||_2}(A; B) &= \{ \mu \in \mathbb{C} : \| (B^{-1}A - \lambda I_n)B \|_2 \geq |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \} \\ &\subseteq \{ \mu \in \mathbb{C} : \| B^{-1}A - \lambda I_n \|_2 \|B\|_2 \geq |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \} \\ &= F(B^{-1}A). \end{aligned}$$

Συνεπώς, προκύπτει $F_{||·||_2}(A; B) \subseteq F(AB^{-1}) \cap F(B^{-1}A)$. ■

3.5 Ιδιοτιμές, Ιδιοδιανύσματα και Αριθμητικό Πεδίο $F_{\|\cdot\|}(A; B)$

3.5.1 Όχι Υποχρεωτικά Τετραγωνικών Πινάκων

Στην υποπαράγραφο αυτή, θα καθορίσουμε τις ιδιοτιμές, τα ιδιοδιανύσματα αλλά και το φάσμα των πινάκων που δεν είναι αναγκαστικά τετραγωνικοί (συγκεκριμένα ενός πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ ως προς έναν άλλο πίνακα $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$) και θα μελετήσουμε τον τρόπο συσχέτισής τους με το σύνολο $F_{\|\cdot\|}(A; B)$. Για να κατορθώσουμε κάτι τέτοιο, θα γενικεύσουμε τους ήδη γνωστούς μας ορισμούς από τους τετραγωνικούς πίνακες, αλλά και αυτούς των γραμμικών δεσμών πινάκων, που αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο. Επιπλέον, θα στηριχτούμε στους ορισμούς που χρησιμοποιήθηκαν στα [3,4,18,20] και αφορούν στους πίνακες που δεν είναι υποχρεωτικά τετραγωνικοί.

Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα του $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ ως προς τον $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$:

Έστω λοιπόν δύο όχι υποχρεωτικά τετραγωνικοί πίνακες $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$, με $n \geq m$. Ένας μιγαδικός $\mu_0 \in \mathbb{C}$ ονομάζεται *ιδιοτιμή του πίνακα A ως προς τον πίνακα B* (*eigenvalue of A with respect to B*), αν υπάρχει ένα μη μηδενικό διάνυσμα $x_0 \in \mathbb{C}^m$, τέτοιο ώστε να ισχύει $(A - \mu_0 B)x_0 = 0$.

Το $x_0 \in \mathbb{C}^m$ καλείται *ιδιοδιάνυσμα (eigenvector) του πίνακα A ως προς τον πίνακα B* που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή μ_0 .

Σημείωση: Ο παραπάνω ορισμός των ιδιοτιμών αποτελεί για $n > m$ επέκταση του γενικευμένου προβλήματος ιδιοτιμής, που αφορά στις γραμμικές δέσμες πινάκων, για πίνακες όχι υποχρεωτικά τετραγωνικούς. Η θεωρία των ιδιοτιμών και των ιδιοδιανυσμάτων των γραμμικών δεσμών πινάκων $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$, με $n > m$ είναι αρκετά περίπλοκη, εξαιτίας του γεγονότος ότι οι περισσότεροι από τους μη τετραγωνικούς πίνακες δεν έχουν καθόλου ιδιοτιμές, αλλά ακόμα και για εκείνους που έχουν, μία αυθαίρετα μικρή διαταραχή θα τις έκανε να εξαφανισθούν, όπως αναφέρει ο G.W. Stewart στο [18]. Από την άλλη, μία αρκετά καλή γενίκευση αυτού του ορισμού είναι αυτή για $n = m$ και $B = I_n$, αφού ισούται με τον κλασικό ορισμό των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων (που αναφέραμε στο πρώτο κεφάλαιο της εργασίας).

Φάσμα του $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ ως προς τον $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$:

Φάσμα του πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ ως προς τον πίνακα $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ (spectrum of A with respect to B), καλούμε το σύνολο όλων των ιδιοτιμών του πίνακα A ως προς τον B και το συμβολίζουμε με $\sigma(A; B)$.

Σημείωση: Στο εξής, για την παράγραφο αυτή θα θεωρούμε ότι η νόρμα πίνακα $\|\cdot\|$ που χρησιμοποιούμε, επάγεται από μία νόρμα διανύσματος, η οποία δρα στους διανυσματικούς χώρους \mathbb{C}^n και \mathbb{C}^m .

Πρόταση 3.5.1. Έστω οι πίνακες $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$, με $n \geq m$. Κάθε ιδιοτιμή μ_0 του πίνακα A ως προς τον B , με ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $x_0 \in \mathbb{C}^m$, τέτοιο ώστε να ισχύει $\|Bx_0\| \geq 1$, ανήκει στο αριθμητικό πεδίο $F_{\|\cdot\|}(A; B)$.

Απόδειξη. Για το μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα $x_0 \in \mathbb{C}^m$, γνωρίζουμε ότι:

$$(A - \mu_0 B)x_0 = 0 \quad \text{και} \quad \|Bx_0\| \geq 1.$$

Τότε για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$, έχουμε $(A - \lambda B)x_0 = (\mu_0 - \lambda)Bx_0$ κι έτσι, αφού το x_0 είναι μοναδιαίο (δηλαδή, $\|x_0\| = 1$), προκύπτει:

$$\|A - \lambda B\| = \|A - \lambda B\| \|x_0\| \geq \|(A - \lambda B)x_0\| = |\mu_0 - \lambda| \|Bx_0\|$$

κι αφού $\|Bx_0\| \geq 1$, έχουμε $|\mu_0 - \lambda| \|Bx_0\| \geq |\mu_0 - \lambda|$.

Άρα, τελικά $\|A - \lambda B\| \geq |\mu_0 - \lambda|$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ και συνεπώς, από τον ορισμό του $F_{\|\cdot\|}(A; B)$ έπεται ότι $\mu_0 \in F_{\|\cdot\|}(A; B)$. ■

Σημείωση: Η συνθήκη $\|Bx_0\| \geq 1$ είναι επαρκής, αλλά όχι αναγκαία, ώστε οι ιδιοτιμές ενός πίνακα A ως προς τον B , να ανήκουν στο αριθμητικό πεδίο $F_{\|\cdot\|}(A; B)$. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι σε πολλά πειράματα, παρόλο που ισχύει $\|Bx_0\| < 1$, για κάθε αντίστοιχο μοναδιαίο διάνυσμα, παρατηρείται ότι οι ιδιοτιμές ανήκουν και πάλι στο $F_{\|\cdot\|}(A; B)$.

Για τις ιδιοτιμές που βρίσκονται στο σύνορο, $\partial F_{\|\cdot\|}(A; B)$, του αριθμητικού πεδίου $F_{\|\cdot\|}(A; B)$, έχουμε το επόμενο αποτέλεσμα:

Πρόταση 3.5.2. Έστω $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$, με $n \geq m$, έτσι ώστε το αριθμητικό πεδίο $F_{\|\cdot\|}(A; B)$ να μην είναι μονοσύνολο κι έστω μ_0 μία ιδιοτιμή του πίνακα A ως προς τον B , πάνω στο σύνορο του $F_{\|\cdot\|}(A; B)$. Τότε για κάθε αντίστοιχο μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα $x_0 \in \mathbb{C}^m$, ισχύει ότι $\|Bx_0\| \leq 1$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η ιδιοτιμή μ_0 ανήκει στο σύνορο $\partial F_{\|\cdot\|}(A; B)$, του $F_{\|\cdot\|}(A; B)$. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει ένα $\lambda(\varepsilon) = \lambda_\varepsilon \in \mathbb{C}$ με $\lambda_\varepsilon \neq \mu_0$, τέτοιο ώστε:

$$\begin{aligned} D(\mu_0, \varepsilon) &\not\subset D(\lambda_\varepsilon, \|A - \lambda_\varepsilon B\|) \quad \text{ή} \\ |\mu_0 - \lambda_\varepsilon| + \varepsilon &> \|A - \lambda_\varepsilon B\| = \|A - \lambda_\varepsilon B\| \|x_0\| \\ &\geq \|(A - \lambda_\varepsilon B)x_0\| = \|Ax_0 - \lambda_\varepsilon Bx_0\|. \end{aligned}$$

Αφού ισχύει ότι $(A - \mu_0 B)x_0 = 0$ κι άρα $Ax_0 = \mu_0 Bx_0$, έπεται ότι:

$$\begin{aligned} |\mu_0 - \lambda_\varepsilon| + \varepsilon &> \|\mu_0 Bx_0 - \lambda_\varepsilon Bx_0\| \quad \text{ή} \\ |\mu_0 - \lambda_\varepsilon| + \varepsilon &> \|(\mu_0 - \lambda_\varepsilon)Bx_0\| = |\mu_0 - \lambda_\varepsilon| \|Bx_0\| \quad \text{ή} \\ |\mu_0 - \lambda_\varepsilon| (\|Bx_0\| - 1) &\leq \varepsilon. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Από το γεγονός ότι $F_{\|\cdot\|}(A; B)$ δεν είναι μονοσύνολο και ανήκει στο δίσκο $D(\lambda_\varepsilon, \|A - \lambda_\varepsilon B\|)$, παρατηρούμε ότι το λ_ε , δεν μπορεί να είναι αυθαίρετα κοντά στο μ_0 . Έτσι, αν υποθέσουμε ότι $\|Bx_0\| > 1$, λόγω της ανισότητας (3.5) καταλήγουμε σε άτοπο. Συνεπώς, ισχύει ότι $\|Bx_0\| \leq 1$. ■

3.5.2 Όχι Υποχρεωτικά Τετραγωνικών Διαγώνιων Πινάκων

Σε συνέχεια της μελέτης μας, θα στρέψουμε τώρα το ενδιαφέρον μας στην ειδική κατηγορία όχι κατ' ανάγκη τετραγωνικών πινάκων, που είναι διαγώνιοι, καθώς και στον τρόπο με τον οποίο συσχετίζονται οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα τους, με το αριθμητικό τους πεδίο. Προτού αναπτύξουμε τη σκέψη μας, θα υπενθυμίσουμε στο σημείο αυτό τον ορισμό ενός διαγώνιου πίνακα.

Διαγώνιος Πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$:

Ένας πίνακας $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ ονομάζεται *διαγώνιος (diagonal)*, αν όλα τα στοιχεία του, τα οποία βρίσκονται επάνω και κάτω από την κύρια διαγώνιο, είναι ίσα με μηδέν. Δηλαδή, αν ισχύει $a_{ij} = 0$, για $i \neq j$, $1 \leq i \leq n$ και $1 \leq j \leq m$. Συνεπώς, τα μοναδικά μη-μηδενικά στοιχεία είναι αυτά της κύριας διαγωνίου. Συμβολίζουμε τον διαγώνιο πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$, ως εξής:

$$A = \text{diag} \{a_1, a_2, \dots, a_m\}.$$

Κατά τον ίδιο τρόπο, ένας διαγώνιος πίνακας $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$, γράφεται ως:

$$B = \text{diag} \{b_1, b_2, \dots, b_m\}.$$

Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα του Διαγώνιου Πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ ως προς τον Διαγώνιο Πίνακα $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$:

Υποθέτοντας ότι όλα τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ είναι μη μηδενικά, οι λόγοι:

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \frac{a_m}{b_m}$$

είναι οι *ιδιοτιμές του πίνακα A ως προς τον B* , με αντίστοιχα μοναδιαία *ιδιοδιανύσματα*, τα διανύσματα της κανονικής βάσης του \mathbb{C}^m .

Η Πρόταση 3.5.1. μας οδηγεί στο ακόλουθο Πρόρισμα:

Πρόρισμα 3.5.3. Έστω $A = \text{diag} \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ και $B = \text{diag} \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ δύο $n \times m$, με $n \geq m$, διαγώνιοι πίνακες και $b_i \neq 0$, για $i = 1, 2, \dots, m$. Τότε κάθε ιδιοτιμή

$$\frac{a_i}{b_i} \in \sigma(A; B), \quad \text{με } |b_i| \geq 1$$

ανήκει στο αριθμητικό πεδίο $F_{\|\cdot\|}(A; B)$.

Σημείωση: Συμβολίζουμε με $\|\cdot\|_d$ μία νόρμα πίνακα, τέτοια ώστε για κάθε $D \in \mathbb{C}^{n \times m}$ ($n \geq m$) διαγώνιο πίνακα, $D = \text{diag} \{d_1, d_2, \dots, d_m\}$, να ισχύει:

$$\|D\|_d = \max \{ |d_j| : j = 1, 2, \dots, m \}.$$

Τέτοιες νόρμες πινάκων που επάγονται από απόλυτες και μονότονες διανυσματικές νόρμες, όπως παρατηρούν στο [11] οι R.A. Horn και C.R. Johnson, είναι οι $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ και $\|\cdot\|_\infty$.

Πρόταση 3.5.4. Έστω $A = \text{diag} \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ και $B = \text{diag} \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ δύο $n \times m$ ($n \geq m$), διαγώνιοι πίνακες. Αν $|b_1| = |b_2| = \dots = |b_m| = 1$, τότε το αριθμητικό πεδίο $F_{\|\cdot\|_d}(A; B)$ είναι ίσο με την κυρτή θήκη των ιδιοτιμών του πίνακα A ως προς τον B ,

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \frac{a_m}{b_m}.$$

Απόδειξη. Από το **Πόρισμα 3.5.3.** και την κυρτότητα του αριθμητικού πεδίου $F_{\|\cdot\|_d}(A; B)$, έπεται ότι

$$co \{ \sigma(A; B) \} \subseteq F_{\|\cdot\|_d}(A; B).$$

Έστω τώρα ένα $\mu \notin co \{ \sigma(A; B) \}$. Τότε υπάρχουν ένας μιγαδικός $\lambda_\mu \in \mathbb{C}$ κι ένας πραγματικός $r_\mu > 0$, τέτοιοι ώστε ο κλειστός δίσκος $D(\lambda_\mu, r_\mu)$, να περιέχει την κυρτή θήκη των ιδιοτιμών $co \{ \sigma(A; B) \}$, αλλά όχι το μ . Συνεπώς,

$$\left| \lambda_\mu - \frac{a_i}{b_i} \right| \leq r_\mu < |\lambda_\mu - \mu|, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad \text{ή}$$

$$|a_i - \lambda_\mu b_i| < |\lambda_\mu - \mu|, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad \text{ή}$$

$$\|A - \lambda_\mu B\|_d < |\lambda_\mu - \mu|.$$

Έτσι λοιπόν, $\mu \notin F_{\|\cdot\|_d}(A; B)$ κι η απόδειξη ολοκληρώνεται. ■

Το παράδειγμα που ακολουθεί, θα μας βοηθήσει να επιβεβαιώσουμε την παραπάνω Πρόταση:

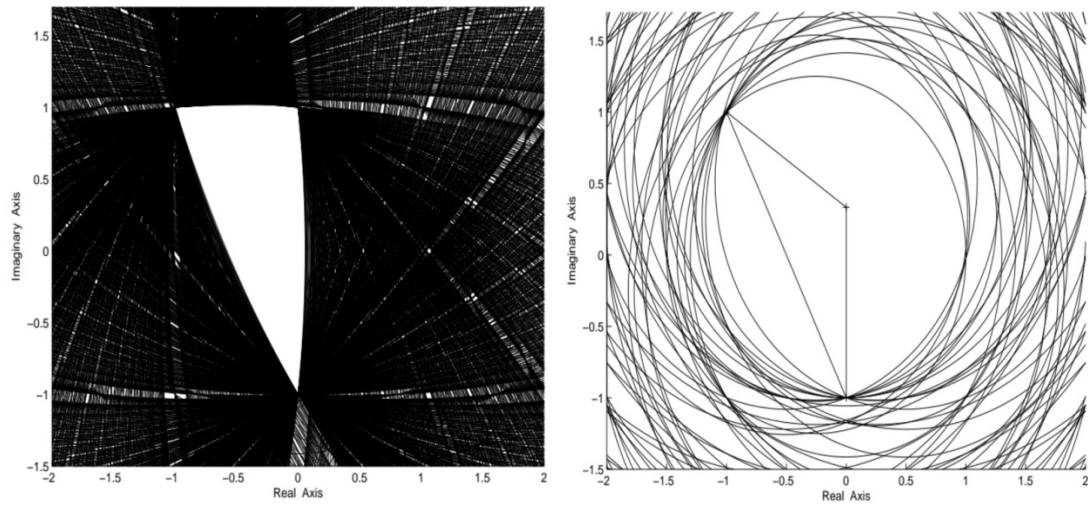
Παράδειγμα 3.5.5.

Θεωρούμε τους 4×3 διαγώνιους πίνακες $A = \text{diag} \{i, 1, i + 1\}$ και $B = \text{diag} \{1, i, -i\}$. Το αριθμητικό πεδίο $F_{\|\cdot\|_2}(A; B)$, του πίνακα A ως προς τον πίνακα B , εκτιμάται στη μη σκιασμένη περιοχή του αριστερού μέρους της εικόνας και ταυτίζεται με την κυρτή θήκη του φάσματος $\sigma(A; B) = \{i, -i, -1 + i\}$ (δηλαδή των ιδιοτιμών), επαληθεύοντας τον ισχυρισμό της **Πρόταση 3.5.4.** Αν τώρα

αντικαταστήσουμε τον πίνακα B , με έναν 4×3 διαγώνιο πίνακα $\hat{B} = \text{diag}\{3, i, -i\}$, τότε η κυρτή θήκη των ιδιοτιμών

$$\frac{i}{3}, -i, -1+i \in \sigma(A; \hat{B}),$$

είναι γνήσιο υποσύνολο του $F_{\|\cdot\|_2}(A; \hat{B})$, όπως παρατηρούμε στο δεξί μέρος της εικόνας. Επιπλέον, αξίζει να σημειώσουμε ότι οι ιδιοτιμές που αντιστοιχούν στα διαγώνια στοιχεία του πίνακα \hat{B} , με μέτρο 1, παραμένουν στο σύνορο του αριθμητικού πεδίου.



Σχήμα 3.6. Το αριθμητικό πεδίο $F_{\|\cdot\|_2}(B; A)$ (αριστερή απεικόνιση) και το αριθμητικό πεδίο $F_{\|\cdot\|_2}(A; \hat{B})$ (δεξιά απεικόνιση).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο

Σύνολα Birkhoff-James ϵ -ορθογωνιότητας Όχι Υποχρεωτικά Τετραγωνικών Πινάκων

4.1 q – Αριθμητικό Πεδίο Όχι Υποχρεωτικά Τετραγωνικών Πινάκων

Στο προηγούμενο κεφάλαιο της εργασίας, ορίσαμε το αριθμητικό πεδίο $F_{\|\cdot\|}(A; B)$, για δύο πίνακες που δεν είναι κατ' ανάγκη τετραγωνικοί και δείξαμε ότι το πεδίο αυτό αποτελεί ένα σύνολο Birkhoff-James Ορθογωνιότητας. Στην παρούσα ενότητα, θα επιχειρήσουμε να επεκτείνουμε τα αριθμητικά πεδία αυτά κάνοντας χρήση μίας θετικής παραμέτρου ϵ . Με τη βοήθεια της παραμέτρου αυτής, θα προκύψουν τα σύνολα Birkhoff-James ϵ -ορθογωνιότητας, ως αποτέλεσμα της γενίκευσης του συνόλου $F_{\|\cdot\|}(A; B)$, αλλά και των ιδιοτήτων του. Ας ξεκινήσουμε όμως τη μελέτη μας με μία αναφορά στο το q –αριθμητικό πεδίο δύο όχι υποχρεωτικά τετραγωνικών πινάκων $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$.

Ορισμός 4.1.1. Έστω $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ όχι υποχρεωτικά τετραγωνικοί πίνακες, με $B \neq 0$ και $\|\cdot\|$ μία νόρμα πίνακα. Για κάθε $q \in [0, 1]$, ορίζουμε ως q –αριθμητικό πεδίο του πίνακα A ως προς τον πίνακα B (q –numerical range of A with respect to B), το σύνολο

$$\begin{aligned} F_{\|\cdot\|}(A; B; q) &= \{ \mu \in \mathbb{C} : \|A - \lambda B\| \geq |\mu - q\lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \} \\ &= \bigcap_{\lambda \in \mathbb{C}} D(q\lambda, \|A - \lambda B\|). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Το $F_{\|\cdot\|}(A; B; q)$ αποτελεί γενίκευση του συνόλου $F(A; q)$, του q –αριθμητικού πεδίου ενός τετραγωνικού πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ κι ως εκ τούτου αποτελεί συμπαγές και κυρτό.

Σημείωση: Για δύο q –αριθμητικά πεδία, $F_{\|\cdot\|}(A; B; q_1)$ και $F_{\|\cdot\|}(A; B; q_2)$, με $0 < q_1 < q_2 \leq 1$, ισχύει ότι

$$\frac{1}{q_2} F_{\|\cdot\|}(A; B; q_2) \subseteq \frac{1}{q_1} F_{\|\cdot\|}(A; B; q_1). \quad (4.2)$$

Επιπλέον, για $0 < q \leq 1$, έχουμε την παρακάτω ισότητα

$$F_{\|\cdot\|}(A; B; q) = F_{\|\cdot\|}(A; q^{-1}B). \quad (4.3)$$

Από τη σχέση (4.3) έπεται ότι το σύνολο $F_{\|\cdot\|}(A; B; q)$ είναι μη κενό, αν και μόνο αν, ισχύει $\|B\| \geq q$, με $0 < q \leq 1$. Στην περίπτωση που ισχύει $q = 0$, άμεσα προκύπτει η παρακάτω ισότητα

$$F_{\|\cdot\|}(A; B; 0) = D\left(0, \inf_{\lambda \in \mathbb{C}} \|A - \lambda B\|\right).$$

Παρατήρηση 4.1.2. (Γενικευμένα αριθμητικά πεδία $F_{\|\cdot\|}(A; B)$ και $F_{\|\cdot\|}(A; B; q)$)
Για την ειδική περίπτωση που έχουμε $n = m$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ και $B = I_n$, παρατηρούμε ότι:

$$F_{\|\cdot\|_2}(A; I_n) = F(A) \quad \text{και} \quad F_{\|\cdot\|_2}(A; I_n; q) = F(A; q), \quad 0 \leq q \leq 1.$$

Συνεπώς, τα αριθμητικά πεδία $F_{\|\cdot\|}(A; B)$ και $F_{\|\cdot\|}(A; B; q)$ αποτελούν άμεσες γενικεύσεις των πεδίων $F(A)$ και $F(A; q)$.

4.2 Προσεγγιστική Ορθογωνιότητα Birkhoff-James (\perp_{BJ}^ϵ)

Έχοντας ήδη μελετήσει την ορθογωνιότητα κατά Birkhoff-James, θα εισάγουμε στο παρών κεφάλαιο την έννοια της *Birkhoff-James προσεγγιστικής ορθογωνιότητας* (ϵ -ορθογωνιότητας).

Σχέση Birkhoff-James Προσεγγιστικής Ορθογωνιότητας (\perp_{BJ}^ϵ) στοιχείων του χώρου $(X, \|\cdot\|)$:

Ορισμός 4.2.1. Έστω $(X, \|\cdot\|)$ ένας χώρος με νόρμα και $x, y \in X$. Για κάποιο $\epsilon \in [0, 1)$, θα λέμε ότι το x είναι *Birkhoff-James ϵ -ορθογώνιο στο y* (x is Birkhoff-James ϵ -orthogonal to y) και θα συμβολίζουμε $x \perp_{BJ}^\epsilon y$, αν και μόνο αν, ισχύει

$$\|x + \lambda y\| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|x\|, \quad \text{για κάθε } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Είναι λοιπόν άμεσο, ότι η Birkhoff-James ϵ -ορθογωνιότητα είναι *ομογενής*, δηλαδή για δύο στοιχεία $x, y \in X$ έχουμε:

$$x \perp_{BJ}^\epsilon y, \quad \text{αν και μόνο αν, ισχύει } ax \perp_{BJ}^\epsilon by \quad \text{για κάθε } a, b \in \mathbb{C}, \quad a, b \neq 0.$$

Επιπλέον, πρέπει να σημειώσουμε ότι σε έναν χώρο εσωτερικού γινομένου $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, ισχύουν η *κλασική σχέση ορθογωνιότητας*, \perp , αλλά και η ϵ -ορθογωνιότητα, \perp^ϵ . Στην πρώτη, ένα στοιχείο $x \in X$ καλείται *ορθογώνιο* ως προς ένα στοιχείο $y \in X$ και συμβολίζουμε $x \perp y$, αν και μόνο αν, ισχύει: $\langle x, y \rangle = 0$, ενώ στη δεύτερη, ένα στοιχείο $x \in X$ καλείται ϵ -ορθογώνιο ως προς ένα στοιχείο $y \in X$ και συμβολίζουμε $x \perp^\epsilon y$, αν και μόνο αν, ισχύει: $|\langle x, y \rangle| \leq \epsilon \|x\| \|y\|$, όπως αποδεικνύει στο [26] ο J. Chmielinski. Ακόμα, οι σχέσεις ορθογωνιότητας που έχουμε αναφέρει μέχρι τώρα, μπορούν να συνδεθούν με τις επόμενες δύο σχέσεις:

- $x \perp y$, αν και μόνο αν $x \perp_{BJ} y$,
- $x \perp^\epsilon y$, αν και μόνο αν $x \perp_{BJ}^\epsilon y$.

Έχοντας λοιπόν εισαγάγει στη μελέτη μας την έννοια της Birkhoff-James ϵ -ορθογωνιότητας, θα επιχειρήσουμε με τη βοήθειά της να ορίσουμε ένα νέο πεδίο, γενικεύοντας το ήδη γνωστό αριθμητικό πεδίο $F_{\|\cdot\|}(A; B)$.

Για κάθε $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$, με $\|B\| \geq 1$, χρησιμοποιώντας τη σχέση Birkhoff-James ϵ -ορθογωνιότητας για $\epsilon = \epsilon_B = \frac{\sqrt{\|B\|^2 - 1}}{\|B\|}$ και με τη βοήθεια του **Θεωρήματος 3.1.2.**, μπορούμε να επαληθεύσουμε την ακόλουθη μορφή του $F_{\|\cdot\|}(A; B)$:

$$\begin{aligned} F_{\|\cdot\|}(A; B) &= \{ \mu \in \mathbb{C} : \|A - \lambda B\| \geq |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \} \\ &= \{ \mu \in \mathbb{C} : \|A - (\mu - \lambda)B\| \geq |\lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \} \\ &= \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \|A - \mu B + \lambda B\| \frac{1}{|\lambda|} \geq 1, \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \right\} \\ &= \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \left\| \frac{1}{\lambda} (A - \mu B + \lambda B) \right\| \geq 1, \forall \lambda \in \mathbb{C} \right\} \\ &= \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \left\| \frac{1}{\lambda} (A - \mu B) + B \right\| \geq 1, \forall \lambda \in \mathbb{C} \right\} \end{aligned}$$

όμως, από τη σχέση $\epsilon_B = \frac{\sqrt{\|B\|^2 - 1}}{\|B\|}$ προκύπτει:

$$\begin{aligned} \epsilon_B \|B\| &= \sqrt{\|B\|^2 - 1} \quad \text{ή} \quad \epsilon_B^2 \|B\|^2 = \|B\|^2 - 1 \quad \text{ή} \quad \|B\|^2 (\epsilon_B^2 - 1) + 1 = 0 \\ \text{ή} \quad \|B\|^2 (1 - \epsilon_B^2) &= 1 \quad \text{ή} \quad \|B\|^2 = \frac{1}{1 - \epsilon_B^2} \quad \text{ή} \quad \|B\| = \frac{1}{\sqrt{1 - \epsilon_B^2}} \geq 1 \quad (4.4). \end{aligned}$$

Συνεπώς, λόγω της σχέσης (4.4), θα έχουμε:

$$\begin{aligned} F_{\|\cdot\|}(A; B) &= \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \| \lambda (A - \mu B) + B \| \geq \sqrt{1 - \epsilon_B^2} \|B\|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \right\} \\ &= \left\{ \mu \in \mathbb{C} : B \perp_{B_J}^{\epsilon_B} (A - \mu B) \right\}. \end{aligned}$$

Ειδικότερα, στην περίπτωση που ισχύει $\|B\| = 1$ κι άρα $\epsilon = \epsilon_B = 0$, έχουμε ότι:

$$F_{\|\cdot\|}(A; B) = \left\{ \mu \in \mathbb{C} : B \perp_{B_J} (A - \mu B) \right\}.$$

Το πεδίο που δημιουργήσαμε ως γενίκευση του $F_{\|\cdot\|}(A; B)$, μας οδηγεί στον παρακάτω ορισμό συνόλων Birkhoff-James προσεγγιστικής ορθογωνιότητας.

Ορισμός 4.2.2. Έστω $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ με $B \neq 0$, μία νόρμα πίνακα $\|\cdot\|$ και $\epsilon \in [0, 1)$. Ορίζουμε ως σύνολο Birkhoff-James ϵ -ορθογωνιότητας του πίνακα A ως προς τον πίνακα B (Birkhoff-James ϵ -orthogonality set of A with respect to B), το χωρίο

$$F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B) = \left\{ \mu \in \mathbb{C} : B \perp_{B_J}^\epsilon (A - \mu B) \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \|A - \lambda B\| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \right\} \\
&= \bigcap_{\lambda \in \mathbb{C}} D \left(\lambda, \frac{\|A - \lambda B\|}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|} \right).
\end{aligned}$$

Προφανώς, από τον παραπάνω ορισμό παρατηρούμε ότι το σύνολο Birkhoff-James ϵ -ορθογωνιότητας, $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$, γράφεται ως άπειρη τομή κλειστών κυκλικών δίσκων της μορφής $D \left(\lambda, \frac{\|A - \lambda B\|}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|} \right)$. Συνεπώς, είναι ένα *συμπαγές και κυρτό* υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου, που βρίσκεται μέσα στον κλειστό δίσκο $D \left(0, \frac{\|A - \lambda B\|}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|} \right)$ και είναι αρκετά πλούσιο σε δομή. Επιπλέον, αξίζει να σημειώσουμε ότι για κάθε $\epsilon_1, \epsilon_2 \in [0, 1)$ με $\epsilon_1 < \epsilon_2$, ο **Ορισμός 4.2.2.** μας δίνει τη σχέση:

$$F_{\|\cdot\|}^{\epsilon_1}(A; B) \subseteq F_{\|\cdot\|}^{\epsilon_2}(A; B),$$

γενικεύοντας με τον τρόπο αυτόν τη σχέση (4.4). κι επίσης, ότι το σύνολο $F_{\|\cdot\|}^0(A; B)$ είναι μη κενό. Ως εκ τούτου, το σύνολο Birkhoff-James ϵ -ορθογωνιότητας, $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$, είναι πάντα μη κενό.

Παρατήρηση 4.2.3. (Γεωμετρική Ερμηνεία) Τα σημεία $\mu \in \mathbb{C}$, του συνόλου Birkhoff-James ϵ -ορθογωνιότητας $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$, έχουν μία αξιοσημείωτη γεωμετρική ιδιότητα. Συγκεκριμένα, ένα σημείο $\mu \in \mathbb{C}$ ανήκει στο σύνολο $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$, αν και μόνο αν, ισχύει

$$B \perp_{BJ}^\epsilon (A - \mu B)$$

ή ισοδύναμα, αν και μόνο αν

$$\|B + \lambda(A - \mu B)\| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|, \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

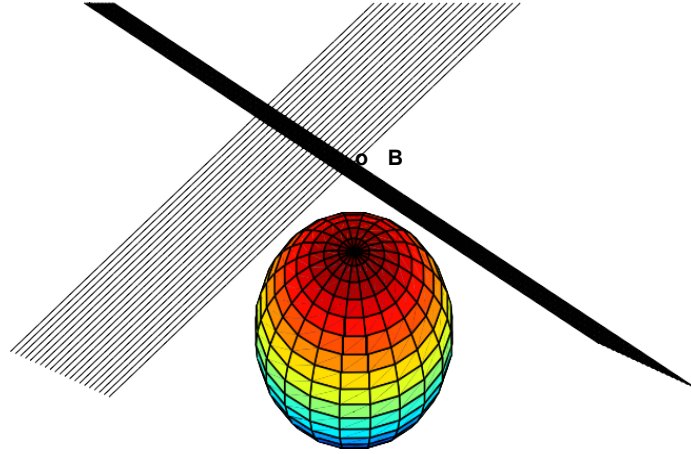
Αυτό σημαίνει ότι ένα σημείο $\mu \in \mathbb{C}$ ανήκει στο σύνολο $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$, αν και μόνο αν ο μονοδιάστατος μιγαδικός αφινικός χώρος (βλ. **Ορισμός 1.3.15.**)

$$\{ B + \lambda(A - \mu B) : \lambda \in \mathbb{C} \},$$

δεν τέμνει την ανοιχτή μπάλα

$$\begin{aligned}
B \left(0, \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| \right) &= \text{Int} \left[B \left(0, \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| \right) \right] \\
&= \{ M \in \mathbb{C}^{n \times m} : \|M\| < \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| \}.
\end{aligned}$$

Ο παραπάνω ισχυρισμός μπορεί να αποτυπωθεί σχηματικά στην εικόνα που ακολουθεί.



Σχήμα 4.1. Δύο αφινικοί χώροι που περιέχουν τον πίνακα B και δεν τέμνουν την ανοιχτή μπάλα $B(0, \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|)$.

Σημείωση: Στο εξής θα θεωρούμε ότι ο μηδενικός πίνακας είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του πίνακα B .

Πρόταση 4.2.4. Έστω $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ με $B \neq 0$ και $0 \leq \epsilon_1 < \epsilon_2 < 1$. Αν ο πίνακας A δεν είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του πίνακα B , τότε ισχύει $F_{\|\cdot\|}^{\epsilon_1}(A; B) \subset F_{\|\cdot\|}^{\epsilon_2}(A; B)$. Επιπλέον, το σύνολο $F_{\|\cdot\|}^{\epsilon_1}(A; B)$ βρίσκεται στο εσωτερικό του συνόλου $F_{\|\cdot\|}^{\epsilon_2}(A; B)$.

Απόδειξη. Για κάθε $\mu \in F_{\|\cdot\|}^{\epsilon_1}(A; B)$, από τον ορισμό του $F_{\|\cdot\|}^{\epsilon_1}(A; B)$, έχουμε ότι

$$\|A - \lambda B\| \geq \sqrt{1 - \epsilon_1^2} \|B\| |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \text{ή}$$

$$\|A + \mu B - \mu B - \lambda B\| \geq \sqrt{1 - \epsilon_1^2} \|B\| |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \text{ή}$$

$$\|A - \mu B + (\mu - \lambda)B\| \geq \sqrt{1 - \epsilon_1^2} \|B\| |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \text{ή}$$

$$\|\lambda B + A - \mu B\| \geq \sqrt{1 - \epsilon_1^2} \|B\| |\lambda| > \sqrt{1 - \epsilon_2^2} \|B\| |\lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Εφόσον όμως ο A δεν είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του B , υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε

$$\delta \leq \min \left\{ \min_{|\lambda| \leq 1} \left\{ \|\lambda B + A - \mu B\| - \sqrt{1 - \epsilon_2^2} \|B\| |\lambda| \right\}, \left(\sqrt{1 - \epsilon_1^2} - \sqrt{1 - \epsilon_2^2} \right) \|B\| \right\}.$$

Συνεπώς,

$$\delta \leq \min_{\lambda \in \mathbb{C}} \left\{ \|\lambda B + A - \mu B\| - \sqrt{1 - \epsilon_2^2} \|B\| |\lambda| \right\}.$$

Για κάθε $\xi \in D\left(0, \frac{\delta}{\|B\|}\right)$, έχουμε

$$\|\lambda B + A - (\mu + \xi)B\| \geq \|\lambda B + A - \mu B\| - \|\xi B\| \geq \sqrt{1 - \epsilon_2^2} \|B\| |\lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Ως εκ τούτου, κάθε σημείο του συμπαγούς συνόλου $F_{\|\cdot\|}^{\epsilon_1}(A; B)$, βρίσκεται στο εσωτερικό του συνόλου $F_{\|\cdot\|}^{\epsilon_2}(A; B)$. ■

Πόρισμα 4.2.5. Έστω $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ με $B \neq 0$ και ο πίνακας A δεν είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του πίνακα B . Τότε για κάθε $\epsilon \in (0, 1)$, το σύνολο ϵ -ορθογωνιότητας $F_{\|\cdot\|}^{\epsilon}(A; B)$ έχει μη κενό εσωτερικό και δεν μπορεί να είναι μονοσύνολο ή ευθύγραμμο τμήμα.

Σημείωση: Αν επιτρέψουμε στην παράμετρο ϵ να λάβει την τιμή 1, τότε από τις δύο πρώτες ισότητες του **Ορισμού 4.2.2.**, έπεται ότι $F_{\|\cdot\|}^1(A; B) = \mathbb{C}$. Επιπλέον, αν ο πίνακας A δεν είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του πίνακα B , το σύνολο $F_{\|\cdot\|}^{\epsilon}(A; B)$ μπορεί να γίνει αυθαίρετα μεγάλο (δηλαδή, οσοδήποτε μεγάλο επιθυμούμε), για ϵ αρκετά κοντά στο 1.

Πρόταση 4.2.6. Έστω $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ με $B \neq 0$ και ο πίνακας A δεν είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του πίνακα B . Τότε για κάθε φραγμένο χωρίο $\Omega \subset \mathbb{C}$, υπάρχει ένα $\epsilon_\Omega \in [0, 1)$, τέτοιο ώστε $\Omega \subseteq F_{\|\cdot\|}^{\epsilon_\Omega}(A; B)$.

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το χωρίο Ω είναι συμπαγές (στην περίπτωση που δεν είναι, μπορούμε να θεωρήσουμε την κλειστή του θήκη, που είναι ένα συμπαγές σύνολο).

Έστω τώρα ένα $\mu \in \Omega$, τέτοιο ώστε $\mu \notin F_{\|\cdot\|}^{\epsilon}(A; B)$, για κάθε $\epsilon \in [0, 1)$. Τότε για κάθε $\epsilon_\Omega = \sqrt{1 - \frac{1}{k^2}}$, με $k = 2, 3, \dots$, υπάρχει ένα $\lambda_k \in \mathbb{C}$, ώστε

$$\begin{aligned} \|A - (\mu - \lambda_k)B\| &< \sqrt{1 - \epsilon_\Omega^2} \|B\| |\lambda_k| \quad \text{ή} \\ \|A - (\mu - \lambda_k)B\| &< \sqrt{1 - \left(\sqrt{1 - \frac{1}{k^2}}\right)^2} \|B\| |\lambda_k| \quad \text{ή} \\ \|\lambda_k B + A - \mu B\| &< \frac{1}{k} \|B\| |\lambda_k| \quad \text{ή} \tag{4.5} \\ \left| \|\lambda_k B\| - \|A - \mu B\| \right| &< \frac{1}{k} \|B\| |\lambda_k| \quad \text{ή} \\ \|\lambda_k B\| - \frac{1}{k} \|B\| |\lambda_k| &< \|A - \mu B\| \quad \text{ή} \\ \|B\| |\lambda_k| - \frac{1}{k} \|B\| |\lambda_k| &< \|A - \mu B\| \quad \text{ή} \end{aligned}$$

$$\|B\| |\lambda_k| \left(1 - \frac{1}{k}\right) < \|A - \mu B\| \leq \|A\| + |\mu| \|B\| \quad \text{ή}$$

$$|\lambda_k| < \frac{\|A\| + |\mu| \|B\|}{\|B\| \left(1 - \frac{1}{k}\right)} \leq 2 \frac{\|A\| + |\mu| \|B\|}{\|B\|},$$

αφού $k = 2, 3, \dots$ και άρα $\frac{1}{k} > 0$.

Έτσι λοιπόν η ακολουθία $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ είναι πάντα φραγμένη κι ως εκ τούτου, (από *Θεώρημα Weierstrass*) θα έχει μία συγκλίνουσα υπακολουθία $\{\lambda_{k_t}\}_{t \in \mathbb{N}}$. Αν υποθέσουμε ότι $\lambda_{k_t} \rightarrow \lambda_0$, τότε από τη σχέση (4.5), προκύπτει

$$\|\lambda_{k_t} B + A - \mu B\| < \frac{1}{k_t} \|B\| |\lambda_{k_t}|, \quad \forall t \in \mathbb{N}, \quad \text{ή}$$

$$\lim_t \|\lambda_{k_t} B + A - \mu B\| = 0 \quad \text{ή}$$

$$\|\lambda_0 B + A - \mu B\| = 0.$$

Όμως η τελευταία σχέση μας οδηγεί σε άτοπο, αφού έχουμε υποθέσει ότι ο A δεν είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του πίνακα B . Συνεπώς, υπάρχει ένα $\epsilon_\mu \in [0,1)$, τέτοιο ώστε $\mu \in F_{\|\cdot\|}^{\epsilon_\mu}(A; B)$. Άρα λοιπόν, χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι κάθε $\mu \in \Omega$ ανήκει στο εσωτερικό του $F_{\|\cdot\|}^{\epsilon_\mu}(A; B)$, $\text{Int} \left[F_{\|\cdot\|}^{\epsilon_\mu}(A; B) \right]$, απλά επιλέγοντας (αν χρειάζεται) ένα μεγαλύτερο ϵ_μ . Επομένως, έχουμε ότι

$$\Omega \subseteq \bigcup_{\mu \in \Omega} \text{Int} \left[F_{\|\cdot\|}^{\epsilon_\mu}(A; B) \right].$$

Επειδή όμως το Ω είναι συμπαγές, υπάρχει ένας πεπερασμένος αριθμός σημείων $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s \in \Omega$, $s \in \mathbb{N}$, έτσι ώστε να ισχύει:

$$\Omega \subseteq \bigcup_{i=1}^s \text{Int} \left[F_{\|\cdot\|}^{\epsilon_{\mu_i}}(A; B) \right].$$

Θέτοντας τώρα $\epsilon_\Omega = \max \left\{ \epsilon_{\mu_i} : i = 1, 2, \dots, s \right\}$ και λόγω της **Πρότασης 4.2.4.**, έχουμε ότι $\Omega \subseteq F_{\|\cdot\|}^{\epsilon_\Omega}(A; B)$. ■

Όπως διαπιστώσαμε νωρίτερα σε αυτή την παράγραφο, για $\|B\| \geq 1$ και $\epsilon = \epsilon_B = \frac{\sqrt{\|B\|^2 - 1}}{\|B\|}$, το σύνολο ϵ -ορθογωνιότητας $F_{\|\cdot\|}^{\epsilon_B}(A; B)$, ταυτίζεται με το σύνολο $F_{\|\cdot\|}(A; B)$. Στηριζόμενοι στον **Ορισμό 4.2.2.**, το σύνολο $F_{\|\cdot\|}^{\epsilon}(A; B)$ μπορεί να γραφεί με την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{aligned}
F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B) &= \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \|A - \lambda B\| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \right\} \\
&= \left\{ \frac{\mu}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|} \in \mathbb{C} : \|A - \lambda B\| \geq \left| \mu - \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| \lambda \right|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|} \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \|A - \lambda B\| \geq \left| \mu - \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| \lambda \right|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \right\}.
\end{aligned}$$

Θεώρημα 4.2.7. Για κάθε $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ με $B \neq 0$ και $\epsilon \in [0, 1)$, ισχύει ότι

$$F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B) = F_{\|\cdot\|}(q_\epsilon^{-1}A; B; q_\epsilon) = F_{\|\cdot\|}(q_\epsilon^{-1}A; q_\epsilon^{-1}B), \text{ όπου } q_\epsilon = \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|.$$

Ισοδύναμα, για κάθε $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ και $q \in (0, 1]$ με $\|B\| \geq q$, ισχύει ότι

$$F_{\|\cdot\|}^{\epsilon q}(A; B) = F_{\|\cdot\|}(q^{-1}A; B; q) = F_{\|\cdot\|}(q^{-1}A; q^{-1}B), \text{ όπου } \epsilon_q = \frac{\sqrt{\|B\|^2 - q^2}}{\|B\|}.$$

Πόρισμα 4.2.8. Για κάθε $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ και $q \in (0, 1]$ με $\|B\| = q$, ισχύει ότι

$$F_{\|\cdot\|}(A; B; q) = F_{\|\cdot\|}^0(A; B) = \left\{ \mu \in \mathbb{C} : B \perp_{BJ} (A - \mu B) \right\}.$$

Σημείωση: Οι ορισμοί των συνόλων ορθογωνιότητας $F_{\|\cdot\|}(A; B)$, $F_{\|\cdot\|}(A; B; q)$ και $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$ στους οποίους έχουμε αναφερθεί, εφαρμόζονται για στοιχεία οποιοδήποτε γραμμικού χώρου με νόρμα.

Παράδειγμα 4.2.9.

Θεωρούμε τους 3×4 πίνακες A και B ως εξής:

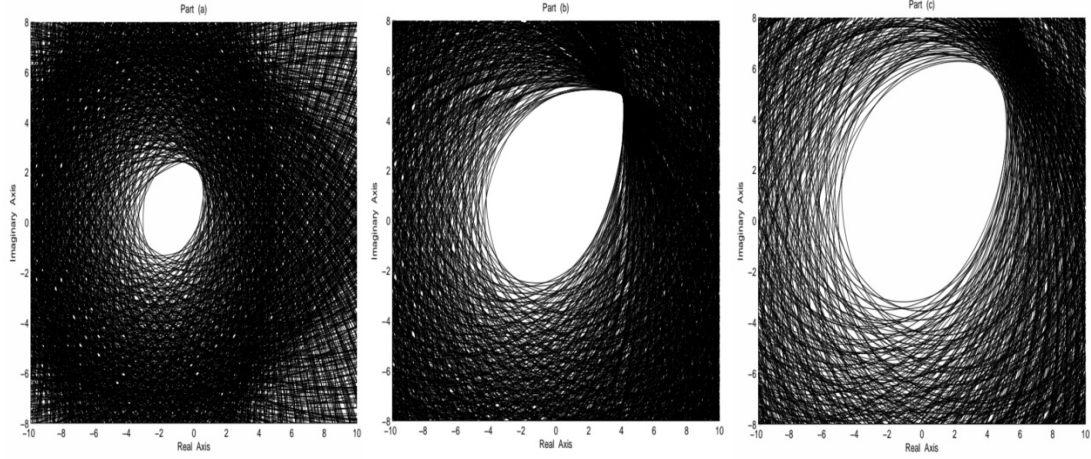
$$A = \begin{bmatrix} 4 + i5 & 0 & i & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{bmatrix} \text{ με } \|B\|_2 = \sqrt{2}.$$

Προς επαλήθευση της **Πρότασης 4.2.4.**, θα σκιαγραφήσουμε τα σύνολα ϵ -ορθογωνιότητας:

$$F_{\|\cdot\|_2}^{0.5}(A; B), \quad F_{\|\cdot\|_2}^{\sqrt{0.5}}(A; B) \text{ και } F_{\|\cdot\|_2}^{\sqrt{0.6}}(A; B) \text{ των πινάκων } A, B \in \mathbb{C}^{3 \times 4}.$$

Προφανώς, για τα σύνολα αυτά έχουμε $\epsilon_1 = 0.5$, $\epsilon_2 = \sqrt{0.5}$ και $\epsilon_3 = \sqrt{0.6}$, αντίστοιχα, με $0 < \epsilon_1 < \epsilon_2 < \epsilon_3 < 1$.

Τα σύνολα ϵ -ορθογωνιότητας αποτυπώνονται με την ίδια σειρά, στις μη σκιασμένες (λευκές) περιοχές του 1^{ου}, 2^{ου} και 3^{ου} μέρους της εικόνας που ακολουθεί.



Σχήμα 4.2. Τα σύνολα ϵ -ορθογωνιότητας $F_{\|\cdot\|_2}^{0.5}(A; B)$, $F_{\|\cdot\|_2}^{\sqrt{0.5}}(A; B)$ και $F_{\|\cdot\|_2}^{\sqrt{0.6}}(A; B)$.

Όπως διαπιστώνουμε, το σύνολο $F_{\|\cdot\|_2}^{0.5}(A; B)$ αποτελεί υποσύνολο του $F_{\|\cdot\|_2}^{\sqrt{0.5}}(A; B)$, καθώς επίσης το σύνολο $F_{\|\cdot\|_2}^{\sqrt{0.5}}(A; B)$ είναι υποσύνολο του $F_{\|\cdot\|_2}^{\sqrt{0.6}}(A; B)$. Με τον τρόπο αυτόν, ο ισχυρισμός της **Πρότασης 4.2.4.** επιβεβαιώνεται. Αξίζει επιπλέον να σημειώσουμε ότι έχουμε

$$\begin{aligned} \epsilon_{q_2} &= \frac{\sqrt{\|B\|_2^2 - q_{\epsilon_2}^2}}{\|B\|_2} = \frac{\sqrt{\|B\|_2^2 - 1}}{\|B\|_2} = \sqrt{0.5}, \text{ όπου} \\ q_{\epsilon_2} &= \sqrt{1 - \epsilon_2^2} \|B\|_2 = \sqrt{1 - \sqrt{0.5}^2} \sqrt{2} = 1 \text{ και} \\ \epsilon_{q_3} &= \frac{\sqrt{\|B\|_2^2 - q_{\epsilon_3}^2}}{\|B\|_2} = \frac{\sqrt{\|B\|_2^2 - \sqrt{0.8}^2}}{\|B\|_2} = \sqrt{0.6}, \text{ όπου} \\ q_{\epsilon_3} &= \sqrt{1 - \epsilon_3^2} \|B\|_2 = \sqrt{1 - \sqrt{0.6}^2} \sqrt{2} = \sqrt{0.8}. \end{aligned}$$

Επομένως, από το **Θεώρημα 4.2.7.** έπονται τα ακόλουθα:

$$\begin{aligned} F_{\|\cdot\|_2}^{\sqrt{0.5}}(A; B) &= F_{\|\cdot\|_2}(q_{\epsilon_2}^{-1} A; B; q_{\epsilon_2}) = F_{\|\cdot\|_2}(q_{\epsilon_2}^{-1} A; q_{\epsilon_2}^{-1} B) \\ &= F_{\|\cdot\|_2}(1^{-1} A; B; 1) = F_{\|\cdot\|_2}(A; B) \\ F_{\|\cdot\|_2}^{\sqrt{0.6}}(A; B) &= F_{\|\cdot\|_2}(q_{\epsilon_3}^{-1} A; B; q_{\epsilon_3}) = F_{\|\cdot\|_2}(q_{\epsilon_3}^{-1} A; q_{\epsilon_3}^{-1} B) \\ &= F_{\|\cdot\|_2}(\sqrt{0.8}^{-1} A; B; \sqrt{0.8}) = F_{\|\cdot\|_2}(\sqrt{0.8}^{-1} A; \sqrt{0.8}^{-1} B). \end{aligned}$$

Σημείωση: Από όσα έχουμε αναφέρει μέχρι το σημείο αυτό, είναι προφανές ότι το σύνολο Birkhoff-James ϵ -ορθογωνιότητας $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$ αποτελεί γενίκευση των αριθμητικών πεδίων $F_{\|\cdot\|}(A; B)$ και $F_{\|\cdot\|}(A; B; q)$. Το γεγονός αυτό οφείλεται στο ότι δεν απαιτείται καμία συνθήκη για τη νόρμα του πίνακα B , με $B \neq 0$ και για ορισμένες τιμές του ϵ ταυτίζεται με τα συγκεκριμένα πεδία.

4.3 Βασικές Ιδιότητες του $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$

Στην παράγραφο που ξεκινά, θα μελετήσουμε μερικές από τις πιο σημαντικές ιδιότητες του συνόλου Birkhoff-James ϵ -ορθογωνιότητας $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$, οι οποίες προκύπτουν ως άμεσες γενικεύσεις των ιδιοτήτων του συνόλου Birkhoff-James ορθογωνιότητας $F_{\|\cdot\|}(A; B)$. Τις ιδιότητες αυτές θα επισημάνουμε μέσω των προτάσεων που ακολουθούν.

Πρόταση 4.3.1. Έστω $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ με $B \neq 0$. Αν $A = bB$ για κάποιο $b \in \mathbb{C}$, τότε ισχύει $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(bB; B) = \{b\}$.

Απόδειξη. Έστω $A = bB$, με $b \in \mathbb{C}$. Με βάση τον ορισμό του συνόλου Birkhoff-James ϵ -ορθογωνιότητας $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$, για το σύνολο $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(bB; B)$, θα έχουμε

$$\begin{aligned} F_{\|\cdot\|}^\epsilon(bB; B) &= \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \|bB - \lambda B\| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \right\} \\ &= \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \|B\| |b - \lambda| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \right\}. \end{aligned}$$

Αφού $\|B\| \geq 1$, τότε και $\frac{\|B\|}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|} \geq 1$, άρα ισχύει:

$$\|B\| |b - \lambda| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |b - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Επομένως, ισχύει ότι $b \in F_{\|\cdot\|}^\epsilon(bB; B)$. Ως προς απαγωγή σε άτοπο, θα υποθέσουμε τώρα ότι υπάρχει κι ένα \hat{b} , το οποίο ανήκει στο σύνολο $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(bB; B)$, με $\hat{b} \neq b$. Τότε στο εσωτερικό του ευθύγραμμου τμήματος με άκρα τα b και \hat{b} , υπάρχει ένα σημείο λ_0 , για το οποίο ισχύει

$$\frac{\|B\|}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|} |b - \lambda_0| < |\hat{b} - \lambda_0|.$$

Όμως τώρα θα έχουμε $\hat{b} \notin F_{\|\cdot\|}^\epsilon(bB; B)$, που είναι άτοπο. Επομένως, δεν υπάρχει άλλο στοιχείο που να περιέχεται στο $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(bB; B)$, εκτός του b και συνεπώς το $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(bB; B)$ είναι μονοσύνολο. ■

Παρατήρηση 4.3.2. Το αντίστροφο της **Πρόταση 4.3.1.** γενικά δεν ισχύει! Για παράδειγμα, αν η νόρμα $\|\cdot\|$ επάγεται από εσωτερικό γινόμενο πινάκων, τότε το

$F_{\|\cdot\|}^0(A; B)$ είναι πάντα μονοσύνολο, για οποιαδήποτε επιλογή των πινάκων A και B , με $B \neq 0$ (βλ. **Πρόταση 4.3.7.**, που ακολουθεί).

Πρόταση 4.3.3. Έστω $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ με $B \neq 0$. Για κάθε αριθμούς $\alpha, b \in \mathbb{C}$, ισχύει ότι $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(\alpha A + bB; B) = \alpha F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B) + b$.

Απόδειξη. Έστω $\alpha \neq 0$. Το αριθμητικό πεδίο $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(\alpha A + bB; B)$ έχει τη μορφή:

$$F_{\|\cdot\|}^\epsilon(\alpha A + bB; B) = \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \|\alpha A + bB - \lambda B\| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \right\}$$

Άρα, ένας μιγαδικός $\alpha\mu + b$ ανήκει στο $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(\alpha A + bB; B)$, αν και μόνο αν ισχύει

$$\|\alpha A + bB - \lambda B\| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\alpha\mu + b - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \eta$$

$$\left\| \alpha \left(A + \frac{b-\lambda}{\alpha} B \right) \right\| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| \left| \alpha \left(\mu + \frac{b-\lambda}{\alpha} \right) \right|, \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \eta$$

$$|\alpha| \left\| A + \frac{b-\lambda}{\alpha} B \right\| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\alpha| \left| \mu + \frac{b-\lambda}{\alpha} \right|, \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \eta$$

$$\|A - \lambda B\| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Επομένως, καταλήγουμε στο γεγονός ότι $\alpha\mu + b \in F_{\|\cdot\|}^\epsilon(\alpha A + bB; B)$ αν και μόνο αν $\mu \in F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$. Θα εξετάσουμε τώρα την περίπτωση στην οποία έχουμε $\alpha = 0$.

Έστω $\alpha = 0$. Για το αριθμητικό πεδίο $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(\alpha A + bB; B)$ ισχύει:

$$F_{\|\cdot\|}^\epsilon(0A + bB; B) = F_{\|\cdot\|}^\epsilon(bB; B) = \{b\},$$

που ισχύει από την **Πρόταση 4.3.1.**, για $\|B\| \geq 1$. Συνεπώς, η απόδειξη ολοκληρώθηκε. ■

Πρόταση 4.3.4. Έστω $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ με $B \neq 0$. Αν υποθέσουμε ότι $A \neq 0$, τότε ισχύει ότι

$$\left\{ \mu^{-1} \in \mathbb{C} : \mu \in F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B), |\mu| \geq \frac{\|A\|}{\|B\|} \right\} \subseteq F_{\|\cdot\|}^\epsilon(B; A).$$

Απόδειξη. Έστω $\mu \in F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$ και $|\mu| \geq \frac{\|A\|}{\|B\|}$. Τότε έχουμε

$$\|A - \lambda B\| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \eta$$

$$|\lambda| \left\| \frac{A}{\lambda} - B \right\| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda| \left| \frac{\mu}{\lambda} - 1 \right|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad \eta$$

$$\|\lambda A - B\| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda\mu - 1|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \eta$$

$$\|-(B - \lambda A)\| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda\mu - 1|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \eta$$

$$\|B - \lambda A\| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda\mu - 1|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \eta$$

$$\|B - \lambda A\| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda \mu - \mu^{-1} \mu|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \eta$$

$$\|B - \lambda A\| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\mu| |\lambda - \mu^{-1}|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \eta$$

$$\|B - \lambda A\| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\mu| |\mu^{-1} - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Επομένως, αφού $|\mu| \geq \frac{\|A\|}{\|B\|}$, έπεται ότι $\mu^{-1} \in F_{\|\cdot\|}(B; A)$. ■

Πρόταση 4.3.5. Έστω $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ με $B \neq 0$. Ισχύει ότι

$$\text{Int}[F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)] \subseteq \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \|A - \lambda B\| > \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \right\}.$$

Απόδειξη. Έστω $\mu \in \text{Int}[F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)]$, υπενθυμίζοντας ότι $\|B\| \geq 1$. Τότε υπάρχει ένα $\rho > 0$, τέτοιο ώστε $\mu + e^{i\theta} \rho \in F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$ για κάθε $\theta \in [0, 2\pi]$. Άρα, έχουμε

$$\|A - \lambda B\| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |(\mu + e^{i\theta} \rho) - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall \theta \in [0, 2\pi].$$

Όμως, για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$, υπάρχει μία γωνία $\theta(\lambda) \in [0, 2\pi]$, τέτοια ώστε

$$|(\mu + e^{i\theta(\lambda)} \rho) - \lambda| > |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Συνεπώς, ισχύει $\|A - \lambda B\| > \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C}$ κι επομένως η απόδειξή μας ολοκληρώνεται, αφού $\text{Int}[F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)] \subseteq F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$. ■

Πρόταση 4.3.6. Έστω $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ με $B \neq 0$. Έστω επίσης η γραμμική απεικόνιση $f : (\mathbb{C}^{n_1 \times m_1}, \|\cdot\|) \rightarrow (\mathbb{C}^{n_2 \times m_2}, \|\|\cdot\|\|)$, τέτοια ώστε να ισχύει

$$\|\|f(M)\|\| \geq \|M\|, \text{ για κάθε } M \in \mathbb{C}^{n_1 \times m_1}, \text{ ή αντίστοιχα}$$

$$\|\|f(M)\|\| \leq \|M\|, \text{ για κάθε } M \in \mathbb{C}^{n_1 \times m_1}.$$

Τότε για κάθε $A, B \in \mathbb{C}^{n_1 \times m_1}$, ισχύει ότι

$$F_{\|\|\cdot\|\|}^\epsilon(f(A); f(B)) \supseteq F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B), \text{ ή αντίστοιχα}$$

$$F_{\|\|\cdot\|\|}^\epsilon(f(A); f(B)) \subseteq F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B).$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $\|M\| \leq \|\|f(M)\|\|$, για κάθε $M \in \mathbb{C}^{n_1 \times m_1}$ κι έστω $\mu \in F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$. Τότε για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$, έχουμε:

$$\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\mu - \lambda| \leq \|A - \lambda B\| \leq \|\|f(A - \lambda B)\|\| = \|\|f(A) - \lambda f(B)\|\|.$$

Επομένως, αφού $\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\mu - \lambda| \leq \|\|f(A) - \lambda f(B)\|\|$ έχουμε ότι $\mu \in F_{\|\|\cdot\|\|}^\epsilon(f(A); f(B))$. Συνεπώς, $F_{\|\|\cdot\|\|}^\epsilon(f(A); f(B)) \supseteq F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$.

Αντίστοιχα, υποθέτουμε ότι $\|M\| \geq \|\|f(M)\|\|$, για κάθε $M \in \mathbb{C}^{n_1 \times m_1}$ κι έστω $\mu \in F_{\|\|\cdot\|\|}^\epsilon(f(A); f(B))$. Τότε για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$, έχουμε:

$$\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\mu - \lambda| \leq \|f(A - \lambda B)\| = \|f(A) - \lambda f(B)\| \leq \|A - \lambda B\|.$$

Επομένως, αφού $\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\mu - \lambda| \leq \|A - \lambda B\|$ έχουμε ότι $\mu \in F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$.
Συνεπώς, $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(f(A); f(B)) \subseteq F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$ ■

Πρόταση 4.3.7. Έστω $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ με $B \neq 0$ κι ότι η νόρμα πίνακα $\|\cdot\|$ επάγεται από εσωτερικό γινόμενο πινάκων $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (για παράδειγμα η νόρμα Frobenius). Τότε ισχύει

$$F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B) = D \left(\frac{\langle A, B \rangle}{\|B\|^2}, \left\| A - \frac{\langle A, B \rangle}{\|B\|^2} B \right\| \frac{\epsilon}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|} \right).$$

4.3.1 Σύνολο $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$ και Νόρμες Πινάκων Επαγόμενες από Διανυσματικές Νόρμες

Πρόταση 4.3.8. Έστω $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ με $B \neq 0$. Υποθέτουμε ότι η νόρμα πίνακα $\|\cdot\|$ επάγεται από μία διανυσματική νόρμα (που δρα στους \mathbb{C}^n και \mathbb{C}^m), με $n \geq m$ κι επίσης ότι $\mu_0 \in \mathbb{C}$ είναι μία ιδιοτιμή του A ως προς τον B , με ένα αντίστοιχο μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα $x_0 \in \mathbb{C}^m$, για το οποίο ισχύει $(A - \mu_0 B)x_0 = 0$. Τότε όπως προκύπτει από το Λήμμα 1 του [17] και το Θεώρημα V.3.2 του [31], για κάθε $\epsilon \in \left[\frac{\sqrt{\|B\|^2 - \|Bx_0\|^2}}{\|B\|}, 1 \right)$, ισχύει ότι $\mu_0 \in F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$.

Παρατήρηση 4.3.9. (Γενικευμένη Ορίζουσα) Στην περίπτωση που η νόρμα πίνακα $\|\cdot\|$ επάγεται από μία διανυσματική νόρμα, λόγω της **Πρότασης 4.3.8.**, έχουμε ότι

$$\|Bx_0\| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|.$$

Συνεπώς, αν οι πίνακες A και B είναι τετραγωνικοί ($A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$, με $n = m$) και ο πίνακας B είναι αντιστρέψιμος, με $\|B^{-1}\|^{-1} \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|$, τότε όλες οι ιδιοτιμές του A ως προς τον B βρίσκονται στο $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$. Για τη συνθήκη αυτή, προκύπτει το ακόλουθο αποτέλεσμα της *Γενικευμένης Ορίζουσας* των πινάκων A και B :

$$(A - zB)^{-1}, \text{ για κάποιο } z \in \mathbb{C}.$$

Πρόταση 4.3.10. Έστω $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$, με $n = m$ και $B \neq 0$. Έστω επίσης ότι η νόρμα πίνακα $\|\cdot\|$ επάγεται από μία διανυσματική νόρμα κι ότι υπάρχει $\epsilon \in [0, 1)$, με τον πίνακα B αντιστρέψιμο, έτσι ώστε να ισχύει

$$\|B^{-1}\|^{-1} \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|.$$

Τότε για κάθε στοιχείο $\xi \notin F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$, η απόσταση $d(\xi, F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B))$ του ξ από το χωρίο $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$, ικανοποιεί τη σχέση:

$$d\left(\xi, F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)\right) \leq \frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2} \|B\| \|(A-\xi B)^{-1}\|}.$$

Απόδειξη. Για κάθε $F_{\|\cdot\|}(AB^{-1}; I_n)$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} |\mu - \lambda| &\leq \|AB^{-1} - \lambda I_n\| = \|AB^{-1} - \lambda BB^{-1}\| = \|A - \lambda B\| \|B^{-1}\| \\ &\leq \frac{\|A - \lambda B\|}{\sqrt{1-\epsilon^2} \|B\|}, \forall \lambda \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

και έτσι, προκύπτει $F_{\|\cdot\|}(AB^{-1}; I_n) \subseteq F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$. Στηριζόμενοι στην έρευνα πάνω σε γενικεύσεις των αριθμητικών πεδίων από τους H.W.J. Lenferink και M.N.Spijker, στο [39], μπορούμε να θεωρήσουμε ότι για κάθε αυθαίρετα κυρτό σύνολο V (υποσύνολο του \mathbb{C}) που περιέχει το $F_{\|\cdot\|}(AB^{-1}; I_n)$ και κάθε $\xi \notin V$, για την απόσταση του ξ από το V , να προσδιορίζεται από τη σχέση:

$$d(\xi, V) \leq \|(AB^{-1} - \xi I_n)^{-1}\|^{-1}.$$

Αν τώρα θέσουμε $V \equiv F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$, έπεται ότι:

$$\begin{aligned} d\left(\xi, F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)\right) &\leq \|(AB^{-1} - \xi I_n)^{-1}\|^{-1} \leq \frac{1}{\|(AB^{-1} - \xi I_n)^{-1}\|} \\ &\leq \frac{(\sqrt{1-\epsilon^2} \|B\|)^{-1}}{\|B^{-1}\| \|(AB^{-1} - \xi I_n)^{-1}\|} = \frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2} \|(AB^{-1} - \xi I_n)^{-1}\|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2} \|(AB^{-1} - \xi BB^{-1})^{-1}\|} = \frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2} \|(A - \xi B)^{-1} B\|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2} \|(A - \xi B)^{-1}\|} \|B\| \end{aligned}$$

και η απόδειξη ολοκληρώνεται. ■

4.4 Το Σύνορο $\partial F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$, του Συνόλου $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$

Από τον **Ορισμό 4.2.2.**, είναι προφανές ότι ένα $\mu_0 \in \mathbb{C}$ ανήκει στο σύνολο Birkhoff-James ϵ -ορθογωνιότητας $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$, αν και μόνο αν, ισχύει

$$\inf_{\lambda \in \mathbb{C}} \left\{ \|A - \lambda B\| - \sqrt{1-\epsilon^2} \|B\| |\mu_0 - \lambda| \right\} \geq 0.$$

Παρακινούμενοι λοιπόν από το τελευταίο μέρος της απόδειξης της **Πρότασης 4.2.4.**, θα εξειδικεύσουμε τον παραπάνω χαρακτηρισμό στο σύνορο $\partial F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$, του συνόλου $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$.

Πρόταση 4.4.1. Έστω $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ με $B \neq 0$, $\epsilon \in [0, 1)$ και $\mu_0 \in F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$.

i) Το σημείο μ_0 ανήκει στο σύνορο $\partial F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$, αν και μόνο αν, ισχύει

$$\inf_{\lambda \in \mathbb{C}} \left\{ \|A - \lambda B\| - \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\mu_0 - \lambda| \right\} = 0.$$

ii) Αν $\epsilon > 0$, τότε το σημείο μ_0 ανήκει στο σύνορο $\partial F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$, αν και μόνο αν, ισχύει

$$\min_{\lambda \in \mathbb{C}} \left\{ \|A - \lambda B\| - \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\mu_0 - \lambda| \right\} = 0,$$

δηλαδή, αν και μόνο αν, υπάρχει $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$\|A - \lambda_0 B\| = \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\mu_0 - \lambda_0|.$$

Απόδειξη. i) Αν το μ_0 είναι συνοριακό (οριακό) σημείο του συνόλου $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$, τότε για κάθε $\delta > 0$, υπάρχει ένα $\lambda_\delta \in \mathbb{C}$, τέτοιο ώστε να ισχύει

$$\|A - \lambda_\delta B\| < \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\mu_0 - \lambda_\delta| + \delta. \quad (4.6)$$

Αφού η διαφορά: $\|A - \lambda B\| - \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\mu_0 - \lambda|$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$, είναι μη αρνητική, προκύπτει ότι

$$\inf_{\lambda \in \mathbb{C}} \left\{ \|A - \lambda B\| - \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\mu_0 - \lambda| \right\} = 0.$$

Για το αντίστροφο, υποθέτουμε ότι:

$$\inf_{\lambda \in \mathbb{C}} \left\{ \|A - \lambda B\| - \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\mu_0 - \lambda| \right\} = 0.$$

Επιπλέον, ως προς απαγωγή σε άτοπο, θα θεωρήσουμε ότι $\mu_0 \in \text{Int}[F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)]$. Τότε θα υπάρχει ένας πραγματικός $r > 0$, τέτοιος ώστε να ισχύει

$$D(\mu_0, r) \subset \text{Int}[F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)], \text{ κι ως εκ τούτου θα έχουμε}$$

$$D(\mu_0, r) \subset \text{Int} \left[D \left(\lambda, \frac{\|A - \lambda B\|}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|} \right) \right], \forall \lambda \in \mathbb{C}, \text{ αφού εξ ορισμού}$$

$$F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B) = \bigcap_{\lambda \in \mathbb{C}} D \left(\lambda, \frac{\|A - \lambda B\|}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|} \right).$$

Ισοδύναμα, έχουμε ότι:

$$\|A - \lambda B\| - \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\mu_0 - \lambda| > \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| r, \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \text{ή}$$

$$\inf_{\lambda \in \mathbb{C}} \left\{ \|A - \lambda B\| - \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\mu_0 - \lambda| \right\} \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| r > 0.$$

Το αποτέλεσμα αυτό όμως είναι άτοπο. Άρα, $\mu_0 \in \partial F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$.

ii) Έστω τώρα $\epsilon > 0$ και $\mu_0 \in \partial F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$. Θέτοντας:

$$\delta = \frac{1}{k} \quad \text{και} \quad \lambda_\delta = \lambda_k, \quad \text{για } k = 1, 2, \dots$$

από τη σχέση (4.6), προκύπτει ότι

$$\|A - \lambda_k B\| < \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\mu_0 - \lambda_k| + \frac{1}{k}, \quad \text{ή}$$

$$\| \|A\| - \|\lambda_k B\| \| < \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\mu_0 - \lambda_k| + \frac{1}{k}.$$

Στη συνέχεια, θα προσαρμόσουμε τα επιχειρήματα που χρησιμοποιήσαμε στην απόδειξη της **Πρότασης 4.2.6.** και στην παρούσα αποδεικτική διαδικασία. Είναι ξεκάθαρο ότι αν $|\lambda_k| \|B\| < \|A\|$, τότε έχουμε ότι $|\lambda_k| < \frac{\|A\|}{\|B\|}$. Αν όμως όχι, τότε θα έχουμε:

$$|\lambda_k| \|B\| - \|A\| < \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| (|\mu_0| + |\lambda_k|) + \frac{1}{k}$$

και αφού έχουμε $\epsilon > 0$, προκύπτει ότι

$$|\lambda_k| < \frac{\|A\| + \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\mu_0| + 1}{\|B\| (1 - \sqrt{1 - \epsilon^2})}.$$

Ως εκ τούτου, η ακολουθία $\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ είναι πάντα φραγμένη και συνεπώς (από το *Θεώρημα Weierstrass*) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία $\{\lambda_{k_t}\}_{t \in \mathbb{N}}$. Αν υποθέσουμε ότι $\lambda_{k_t} \rightarrow \lambda_0$, τότε θα έχουμε:

$$\|A - \lambda_{k_t} B\| < \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\mu_0 - \lambda_{k_t}| + \frac{1}{k_t}, \quad \forall t \in \mathbb{N}, \quad \text{ή}$$

$$\lim_t \left(\|A - \lambda_{k_t} B\| - \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\mu_0 - \lambda_{k_t}| - \frac{1}{k_t} \right) \leq 0, \quad \text{ή}$$

$$\|A - \lambda_0 B\| - \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\mu_0 - \lambda_0| \leq 0,$$

όπου η τελευταία σχέση μπορεί να ισχύει μόνο ως ισότητα. Το αντίστροφο έπεται άμεσα από το **i**). ■

Αν λοιπόν έχουμε $\epsilon > 0$, τότε η **Πρόταση 4.4.1.** δηλώνει ότι για κάθε $\mu_0 \in \partial F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$, υπάρχει ένας γεννήτορας δίσκος $D\left(\lambda_0, \frac{\|A - \lambda_0 B\|}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|}\right)$, τέτοιος ώστε $\mu_0 \in \partial D\left(\lambda_0, \frac{\|A - \lambda_0 B\|}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|}\right)$. Συνεπώς, αφού το σύνολο $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$ είναι κυρτό και ανήκει στον $D\left(\lambda_0, \frac{\|A - \lambda_0 B\|}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|}\right)$, προκύπτει το ακόλουθο πόρισμα. (βλ. επίσης **Πόρισμα 4.2.5.**)

Πόρισμα 4.4.2. Έστω $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ με $B \neq 0$. Αν $0 < \epsilon < 1$, τότε το σύνολο $\partial F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$ του συνόλου $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$, δεν περιέχει ευθύγραμμα τμήματα.

4.4.1 Το σύνολο $\partial F_{\|\cdot\|}(A; B; q)$

Πόρισμα 4.4.3. Έστω $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ με $B \neq 0$. Υποθέτουμε ότι $0 < q < 1$ και $\|B\| \geq q$. Τότε για κάθε $\mu_0 \in \partial F_{\|\cdot\|}(A; B; q)$, υπάρχει ένα $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, τέτοιο ώστε να ισχύει $\|A - \lambda_0 B\| = |\mu_0 - q\lambda_0|$. Πιο συγκεκριμένα, το σύνολο του q -αριθμητικού πεδίου $F_{\|\cdot\|}(A; B; q)$, δεν περιέχει ευθύγραμμα τμήματα.

Σημείωση: Από την άλλη, αν $\|B\| = 1$, τότε ισχύει ότι το σύνολο $F_{\|\cdot\|}^0(A; B) = F_{\|\cdot\|}(A; B)$ θα μπορούσε να έχει ευθύγραμμα τμήματα. Είναι λοιπόν σημαντικό να τονίσουμε ότι στην **Πρόταση 4.4.1.**, η συνθήκη $\epsilon > 0$ δεν μπορεί να παραληφθεί!

4.5 Συνέχεια του συνόλου $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$

4.5.1 Βασικοί Ορισμοί Συνέχειας Μετρικών Χώρων

Έχοντας μελετήσει αρκετές από τις ιδιότητες του συνόλου Birkhoff-James ϵ -ορθογωνιότητας $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$, είναι εύλογο να αναρωτηθεί κανείς τι συμβαίνει με τη συνέχεια του συνόλου αυτού. Γνωρίζουμε ότι το σύνολο $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$ εξαρτάται τόσο από τους πίνακες $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$, όσο και από την πραγματική παράμετρο $\epsilon \in [0, 1)$. Στην παρούσα παράγραφο, θα εξετάσουμε πώς συνδέεται η ιδιότητα της συνέχειας με τις ποσότητες που προαναφέραμε.

Ορισμός 4.5.1. Έστω ο μετρικός χώρος (X, ρ) και δύο συμπαγή υποσύνολά του, Ω_1 και Ω_2 . Ορίζουμε ως απόσταση Hausdorff μεταξύ των Ω_1 και Ω_2 (Hausdorff distance between Ω_1 and Ω_2), την ποσότητα

$$d_H(\Omega_1, \Omega_2) = \max \left\{ \max_{x_1 \in \Omega_1} \min_{x_2 \in \Omega_2} \rho(x_1, x_2), \max_{x_2 \in \Omega_2} \min_{x_1 \in \Omega_1} \rho(x_1, x_2) \right\}.$$

Λήμμα 4.5.2. Έστω $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$, $\epsilon \in [0, 1)$ κι υποθέτουμε ότι ο πίνακας A δεν είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του πίνακα B . Τότε για κάθε $\delta > 0$, υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ τέτοια ώστε να ισχύει

$$d_H \left(\bigcap_{i=1}^k D \left(\lambda_i, \frac{\|A - \lambda_i B\|}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|} \right), F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B) \right) \leq \delta.$$

Ορισμός 4.5.3. Έστω (X, ρ_X) μετρικός χώρος και (Y, ρ_Y) πλήρης μετρικός χώρος. Θεωρούμε την απεικόνιση $F : X \rightarrow Y$ κι ένα σημείο $x_0 \in X$.

(i) Η απεικόνιση F καλείται δ -άνω ημισυνεχής στο x_0 (δ -upper semi-continious at x_0), αν για κάθε $\delta > 0$, υπάρχει μία γειτονιά $N(x_0) \subset X$ του x_0 , τέτοια ώστε να ισχύει

$$F(x) \subseteq F(x_0) + B[0, \delta], \forall x \in N(x_0).$$

(ii) Η απεικόνιση F καλείται δ –κάτω ημισυνεχής στο x_0 (δ –lower semi-continuous at x_0), αν για κάθε $\delta > 0$, υπάρχει μία γειτονιά $N(x_0) \subset X$ του x_0 , τέτοια ώστε να ισχύει

$$F(x_0) \subseteq F(x) + B[0, \delta], \forall x \in N(x_0).$$

(iii) Η απεικόνιση F καλείται δ –συνεχής στο x_0 (δ –continuous at x_0), αν είναι δ –άνω και δ –κάτω ημισυνεχής.

Ορισμός 4.5.4. Έστω (X, ρ_X) μετρικός χώρος και (Y, ρ_Y) πλήρης μετρικός χώρος. Θεωρούμε την απεικόνιση $F : X \rightarrow Y$ κι ένα σημείο $x_0 \in X$.

(i) Η απεικόνιση F καλείται *άνω ημισυνεχής στο x_0* (upper semi-continuous at x_0), αν για κάθε γειτονιά $N(F(x_0)) \subset Y$ του συνόλου $F(x_0)$, υπάρχει μία γειτονιά $N(x_0) \subset X$ του x_0 , τέτοια ώστε να ισχύει

$$F(x) \subseteq N(F(x_0)), \forall x \in N(x_0).$$

(ii) Η απεικόνιση F καλείται *κάτω ημισυνεχής στο x_0* (lower semi-continuous at x_0), αν για κάθε $y_0 \in F(x_0)$ και για κάθε γειτονιά $N(y_0) \subset Y$ του y_0 , υπάρχει μία γειτονιά $N(x_0) \subset X$ του x_0 , τέτοια ώστε να ισχύει

$$F(x) \cap N(y_0) \neq \emptyset, \forall x \in N(x_0).$$

(iii) Η απεικόνιση F καλείται *συνεχής στο x_0* (continuous at x_0), αν είναι *άνω και κάτω ημισυνεχής*.

Λήμμα 4.5.5. Έστω (X, ρ_X) μετρικός χώρος και (Y, ρ_Y) πλήρης μετρικός χώρος. Θεωρούμε την απεικόνιση $F : X \rightarrow Y$ κι ένα σημείο $x_0 \in X$.

(i) Αν η απεικόνιση F είναι *άνω ημισυνεχής στο $x_0 \in X$* , τότε είναι και δ –άνω ημισυνεχής στο x_0 .

(ii) Αν η απεικόνιση F είναι δ –κάτω ημισυνεχής στο $x_0 \in X$, τότε είναι και *κάτω ημισυνεχής στο x_0* .

Σημείωση: Το αντίστροφο των ισχυρισμών (i) και (ii) ισχύει αν το $F(x_0)$ είναι συμπαγές.

4.5.2 Συνέχεια του Συνόλου $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$ ως προς τον Πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$

Σε αυτή την υποενότητα του κεφαλαίου, θα αποδείξουμε τη συνέχεια του συνόλου Birkhoff-James ϵ –ορθογωνιότητας $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$, ως προς τον πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$.

Θεώρημα 4.5.6. Έστω $A_0, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ (με $B \neq 0$), $\epsilon \in [0, 1)$ κι υποθέτουμε ότι ο πίνακας A_0 δεν είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του πίνακα B . Τότε η απεικόνιση

$$A \mapsto F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$$

είναι συνεχής ως προς τον A_0 .

Απόδειξη. Αρχικά θα αποδείξουμε ότι η απεικόνιση είναι άνω ημισυνεχής. Υποθέτουμε ότι ο πίνακας $A_0 \in \mathbb{C}^{n \times m}$ δεν είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του πίνακα B κι έστω $\delta > 0$. Από το **Λήμμα 4.5.2.**, υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ τέτοια ώστε

$$d_H\left(G(A_0), F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A_0; B)\right) \leq \frac{\delta}{2} < \delta, \text{ όπου}$$

$$G(A_0) = \bigcap_{i=1}^k D\left(\lambda_i, \frac{\|A_0 - \lambda_i B\|}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|}\right).$$

Επιπλέον, για κάθε $H \in \mathbb{C}^{n \times m}$, έχουμε

$$\frac{\|A_0 - \lambda_i B\|}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|} = \frac{\|A_0 + H - \lambda_i B - H\|}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|} \leq \frac{\|A_0 + H - \lambda_i B\|}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|} + \frac{\|H\|}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|},$$

για $i = 1, 2, \dots, k$. Συνεπώς, το σύνολο

$$\Omega(A_0, H) = \bigcap_{i=1}^k D\left(\lambda_i, \frac{\|A_0 + H - \lambda_i B\|}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|} + \frac{\|H\|}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|}\right),$$

περιέχει το σύνολο

$$F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A_0 + H; B) = \bigcap_{\lambda \in \mathbb{C}} D\left(\lambda, \frac{\|A_0 + H - \lambda B\|}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|}\right)$$

κι άρα ισχύει ο ακόλουθος εγκλεισμός:

$$F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A_0 + H; B) \subseteq \Omega(A_0, H). \quad (4.7)$$

Υπάρχει λοιπόν ένα $\kappa > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε $H \in \mathbb{C}^{n \times m}$ με $\|H\| \leq \kappa$, να ισχύει

$$d_H(G(A_0), \Omega(A_0, H)) \leq \frac{\delta}{2} < \delta.$$

Επομένως, για κάθε $H \in \mathbb{C}^{n \times m}$ με $\|H\| \leq \kappa$, θα έχουμε ότι

$$d_H\left(F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A_0; B), \Omega(A_0, H)\right) \leq d_H\left(F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A_0; B), G(A_0)\right) + d_H(G(A_0), \Omega(A_0, H)) \leq \delta.$$

Αυτό λοιπόν σημαίνει ότι ισχύει

$$\Omega(A_0, H) \subseteq F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A_0; B) + D(0, \delta)$$

κι έτσι λόγω της σχέσης (4.7) έχουμε ότι

$$F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A_0 + H; B) \subseteq F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A_0; B) + D(0, \delta).$$

Συνεπώς, η απεικόνιση $A \mapsto F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$ είναι δ -άνω ημισυνεχής ως προς πίνακα A_0 και με βάση το **Λήμμα 4.5.5.** είναι και άνω ημισυνεχής ως προς τον πίνακα αυτόν.

Έχοντας τώρα αποδείξει την ιδιότητα της άνω ημισυνέχειας της απεικόνισης ως προς τον πίνακα A_0 , θα συνεχίσουμε αποδεικνύοντας και την κάτω ημισυνεχιά της ως προς τον ίδιο πίνακα, με την παράμετρο ϵ να είναι μη αρνητική.

- Έστω $\epsilon > 0$ κι ότι ο πίνακας $A_0 \in \mathbb{C}^{n \times m}$ δεν είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του πίνακα B .

Από την **Πρόταση 4.2.4.** γνωρίζουμε ότι $\text{Int}[F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A_0; B)] \neq \emptyset$. Επιπλέον, λόγω της κυρτότητας του συνόλου $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$, έχουμε ότι για κάθε $\mu \in F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A_0; B)$ και $\delta > 0$, ο δίσκος $D(\mu, \delta)$ έχει μία μη κενή τομή με το σύνολο $\text{Int}[F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A_0; B)]$ (εφόσον το εσωτερικό του $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A_0; B)$ είναι μη κενό). Ακόμη, για κάθε $\mu_0 \in (D(\mu, \delta) \cap \text{Int} F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A_0; B))$, από την **Πρόταση 4.4.1.,i** ισχύει ότι

$$\inf_{\lambda \in \mathbb{C}} \left\{ \|A_0 - \lambda B\| - |\lambda - \mu_0| \|B\| \sqrt{1 - \epsilon^2} \right\} = \zeta > 0.$$

Έτσι, για κάθε $H \in \mathbb{C}^{n \times m}$ με $\|H\| \leq \zeta$, έχουμε ότι

$$\|A_0 - \lambda B\| - \|H\| > |\lambda - \mu_0| \|B\| \sqrt{1 - \epsilon^2}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \text{ή}$$

$$\|A_0 + H - \lambda B\| > |\lambda - \mu_0| \|B\| \sqrt{1 - \epsilon^2}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Κατά συνέπεια, γνωρίζοντας ότι το σύνολο $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A_0 + H; B)$ ορίζεται ως εξής:

$$F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A_0 + H; B) = \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \|A_0 + H - \lambda B\| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \right\},$$

συμπεραίνουμε ότι $\mu_0 \in F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A_0 + H; B)$, για κάθε $H \in \mathbb{C}^{n \times m}$ με $\|H\| \leq \zeta$ κι έτσι έχουμε ότι

$$D(\mu, \delta) \cap F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A_0 + H; B) \neq \emptyset. \quad (4.8)$$

Ως εκ τούτου, για $\epsilon > 0$ η απεικόνιση $A \mapsto F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$ είναι κάτω ημισυνεχής ως προς τον πίνακα A_0 .

- Έστω τώρα $\epsilon = 0$ κι ότι ο πίνακας $A_0 \in \mathbb{C}^{n \times m}$ δεν είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του πίνακα B .

Υποθέτουμε ως προς απαγωγή σε άτοπο, ότι η απεικόνιση $A \mapsto F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$ δεν είναι κάτω ημισυνεχής ως προς τον πίνακα A_0 . Τότε υπάρχει ένα $\mu_0 \in F_{\|\cdot\|}^0(A; B)$ κι ένα

$\delta > 0$, έτσι ώστε για κάθε $\zeta > 0$, να υπάρχει ένας πίνακας $H \in \mathbb{C}^{n \times m}$ με $\|H\| \leq \zeta$, ο οποίος ικανοποιεί την ακόλουθη σχέση:

$$F_{\|\cdot\|}^0(A_0 + H; B) \cap D(\mu_0, \delta) = \emptyset.$$

Τότε για κάθε $\mu \in D(\mu_0, \delta)$, υπάρχει ένα $\lambda_\mu \in \mathbb{C}$ (με $\lambda_\mu \neq \mu$), έτσι ώστε να ισχύει

$$\|A_0 + H - \lambda_\mu B\| < |\mu - \lambda_\mu| \|B\|.$$

Αφού λοιπόν η παραπάνω ανισότητα είναι αυστηρή, η ποσότητα $|\mu - \lambda_\mu| \|B\|$ είναι θετική. Επομένως, για κάθε $\mu \in D(\mu_0, \delta)$, η παράμετρος

$$\epsilon_\mu = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{\|A_0 + H - \lambda_\mu B\|}{|\mu - \lambda_\mu| \|B\|}} < \sqrt{1 - \frac{\|A_0 + H - \lambda_\mu B\|}{|\mu - \lambda_\mu| \|B\|}}$$

είναι θετική και ταυτόχρονα ικανοποιεί τη σχέση:

$$\|A_0 + H - \lambda_\mu B\| < \sqrt{1 - \epsilon_\mu^2} |\mu - \lambda_\mu| \|B\|.$$

Άρα, αν τώρα ορίσουμε μία νέα παράμετρο $\hat{\epsilon}$, ως

$$\hat{\epsilon} = \min \{ \epsilon_\mu : \mu \in D(\mu_0, \delta) \} > 0, \text{ έπεται ότι}$$

$$\|A_0 + H - \lambda_\mu B\| < \sqrt{1 - \hat{\epsilon}^2} |\mu - \lambda_\mu| \|B\|.$$

Συνεπώς, ισχύει $F_{\|\cdot\|}^{\hat{\epsilon}}(A_0 + H; B) \cap D(\mu_0, \delta) = \emptyset$. Επομένως, η απεικόνιση $A \mapsto F_{\|\cdot\|}^{\hat{\epsilon}}(A; B)$ δεν είναι κάτω ημισυνεχής ως προς τον πίνακα A_0 , που είναι άτοπο λόγω της σχέσης (4.8). Καταλήγουμε λοιπόν ότι για $\epsilon \geq 0$, η απεικόνιση $A \mapsto F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$ είναι κάτω ημισυνεχής ως προς τον πίνακα A_0 . Αφού λοιπόν δείξαμε ότι η απεικόνιση $A \mapsto F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$ είναι άνω και κάτω ημισυνεχής ως προς τον A_0 , από τον **Ορισμό 4.5.4.(iii)**, είναι και συνεχής ως προς τον πίνακα αυτόν. ■

4.5.3 Συνέχεια του Συνόλου $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$ ως προς την Παράμετρο ϵ

Έχοντας προηγουμένως δείξει ότι το σύνολο Birkhoff-James ϵ -ορθογωνιότητας $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$, είναι συνεχές ως προς τον πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$, στην τρέχουσα υποενότητα θα αποδείξουμε ότι είναι συνεχές και ως προς την πραγματική παράμετρο $\epsilon \in [0, 1)$.

Θεώρημα 4.5.7. Έστω $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ (με $B \neq 0$), $\epsilon_0 \in [0, 1)$ κι υποθέτουμε ότι ο πίνακας A δεν είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του πίνακα B . Τότε η απεικόνιση

$$\epsilon \mapsto F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$$

είναι συνεχής στο ϵ_0 .

Απόδειξη. Αρχικά θα αποδείξουμε ότι η απεικόνιση είναι άνω ημισυνεχής. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι για κάθε $\delta > 0$, υπάρχει μία γειτονιά του ϵ_0 , την οποία ονομάζουμε $N(\epsilon_0)$, τέτοια ώστε να ισχύει

$$F_{\|\cdot\|}^{\hat{\epsilon}}(A; B) \subseteq F_{\|\cdot\|}^{\epsilon_0}(A; B) + D(0, \delta), \quad \forall \hat{\epsilon} \in N(\epsilon_0). \quad (4.9)$$

Για την περίπτωση που ισχύει $\hat{\epsilon} < \epsilon_0$, λόγω της **Πρότασης 4.2.4.** έπεται ότι $F_{\|\cdot\|}^{\hat{\epsilon}}(A; B) \subseteq F_{\|\cdot\|}^{\epsilon_0}(A; B)$. Συνεπώς, ο εγκλεισμός της σχέσης (4.9), προφανώς ισχύει.

Ας θεωρήσουμε τώρα την περίπτωση που έχουμε $\hat{\epsilon} > \epsilon_0$. Ομοίως με το **Θεώρημα 4.5.7.** και με βάση το **Λήμμα 4.5.2.**, υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ τέτοια ώστε για την απόσταση Hausdorff μεταξύ των συνόλων $G(\epsilon_0)$ και $F_{\|\cdot\|}^{\epsilon_0}(A; B)$, να ισχύει

$$d_H(G(\epsilon_0), F_{\|\cdot\|}^{\epsilon_0}(A; B)) \leq \frac{\delta}{2} < \delta, \quad \text{όπου}$$

$$G(\epsilon_0) = \bigcap_{i=1}^k D\left(\lambda_i, \frac{\|A_0 - \lambda_i B\|}{\sqrt{1 - \epsilon_0^2} \|B\|}\right).$$

Επιπλέον, υπάρχει ένα $\hat{\epsilon}$ αρκετά κοντά στο ϵ_0 , έτσι ώστε για την απόσταση Hausdorff μεταξύ των συνόλων $G(\epsilon_0)$ και $G(\hat{\epsilon})$, να ισχύει

$$d_H(G(\epsilon_0), G(\hat{\epsilon})) \leq \frac{\delta}{2} < \delta, \quad \text{όπου}$$

$$G(\hat{\epsilon}) = \bigcap_{i=1}^k D\left(\lambda_i, \frac{\|A_0 - \lambda_i B\|}{\sqrt{1 - \hat{\epsilon}^2} \|B\|}\right).$$

Ως εκ τούτου, προκύπτει ότι

$$d_H(G(\hat{\epsilon}), F_{\|\cdot\|}^{\epsilon_0}(A; B)) \leq d_H(G(\hat{\epsilon}), G(\epsilon_0)) + d_H(G(\epsilon_0), F_{\|\cdot\|}^{\epsilon_0}(A; B)) \leq \delta.$$

Συνεπώς, έχουμε ότι $G(\hat{\epsilon}) \subseteq F_{\|\cdot\|}^{\epsilon_0}(A; B) + D(0, \delta)$. Αφού όμως $F_{\|\cdot\|}^{\hat{\epsilon}}(A; B) \subseteq G(\hat{\epsilon})$, ισχύει ότι

$$F_{\|\cdot\|}^{\hat{\epsilon}}(A; B) \subseteq F_{\|\cdot\|}^{\epsilon_0}(A; B) + D(0, \delta).$$

Έτσι λοιπόν, συμπεραίνουμε ότι η απεικόνιση $\epsilon \mapsto F_{\|\cdot\|}^{\epsilon}(A; B)$ είναι δ -άνω ημισυνεχής στο ϵ_0 και με βάση το **Λήμμα 4.5.5.** είναι και άνω ημισυνεχής στο ϵ_0 .

Έχοντας τώρα αποδείξει την ιδιότητα της άνω ημισυνέχειας της απεικόνισης ως προς την πραγματική παράμετρο ϵ_0 , θα συνεχίσουμε αποδεικνύοντας και την κάτω ημισυνέχειά της ως προς την παράμετρο αυτή.

- Έστω $\epsilon_0 = 0$. Τότε λόγω της **Πρότασης 4.2.4.**, το συμπέρασμα προκύπτει άμεσα.
- Έστω $\epsilon_0 > 0$ και $\mu \in F_{\|\cdot\|}^{\epsilon_0}(A; B)$. Θα δείξουμε ότι για κάθε $\delta > 0$, υπάρχει ένα ανοιχτό διάστημα: $N(\epsilon_0) = (\epsilon_0 - \gamma, \epsilon_0 + \gamma)$, $\gamma > 0$, έτσι ώστε να ισχύει

$$F_{\|\cdot\|}^{\hat{\epsilon}}(A; B) \cap D(\mu, \delta) \neq \emptyset, \quad \forall \hat{\epsilon} \in (\epsilon_0 - \gamma, \epsilon_0 + \gamma).$$

Από την **Πρόταση 4.2.4.**, για κάθε $\hat{\epsilon} \in [\epsilon_0, \epsilon_0 + \gamma)$, έχουμε ότι $\mu \in F_{\|\cdot\|}^{\hat{\epsilon}}(A; B)$. Έτσι, αρκεί να εξετάσουμε την περίπτωση $\hat{\epsilon} \in (\epsilon_0 - \gamma, \epsilon_0)$. Επιπλέον, αν υπάρχει ένα $\hat{\epsilon}$, μικρότερο του ϵ_0 , τέτοιο ώστε να ισχύει

$$F_{\|\cdot\|}^{\hat{\epsilon}}(A; B) \cap D(\mu, \delta) \neq \emptyset,$$

τότε πάλι από την **Πρόταση 4.2.4.**, μπορούμε να θέσουμε $\gamma = \epsilon_0 - \hat{\epsilon}$.

Επομένως, χωρίς βλάβη της γενικότητας και προς απαγωγή σε άτοπο, μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα $\delta_\mu > 0$, τέτοιο ώστε

$$F_{\|\cdot\|}^{\hat{\epsilon}}(A; B) \cap D(\mu, \delta_\mu) = \emptyset, \quad \text{για όλα τα μη αρνητικά } \hat{\epsilon} < \epsilon_0.$$

Στη συνέχεια, επιλέγοντας δ_μ αρκετά μικρό, υπάρχει ένα $\theta \in [0, 2\pi]$, έτσι ώστε να ισχύουν

$$\begin{aligned} \mu + \delta_\mu e^{i\theta} &\in \text{Int}[F_{\|\cdot\|}^{\epsilon_0}(A; B)] \quad \text{και} \\ \mu + \delta_\mu e^{i\theta} &\notin F_{\|\cdot\|}^{\hat{\epsilon}}(A; B), \quad \forall \hat{\epsilon} \in [0, \epsilon_0). \end{aligned}$$

Θεωρούμε τώρα την ακολουθία $\{\epsilon_k\}_{k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \subset [0, \epsilon_0)$, η οποία συγκλίνει στο ϵ_0 . Τότε για κάθε $k = 1, 2, \dots$, υπάρχει ένας μιγαδικός $\lambda_k(\mu, \theta)$, τέτοιος ώστε να ισχύει

$$|\mu + \delta_\mu e^{i\theta} - \lambda_k(\mu, \theta)| > \frac{\|A - \lambda_k(\mu, \theta)B\|}{\sqrt{1 - \epsilon_k^2} \|B\|}, \quad (4.10)$$

ή, ισοδύναμα

$$|\mu + \delta_\mu e^{i\theta}| + |\lambda_k(\mu, \theta)| > \frac{1}{\sqrt{1 - \epsilon_k^2} \|B\|} \left| \|A\| - |\lambda_k(\mu, \theta)| \|B\| \right|.$$

Αν υποθέσουμε ότι $|\lambda_k(\mu, \theta)| \|B\| < \|A\|$, τότε προκύπτει ότι $|\lambda_k(\mu, \theta)| < \frac{\|A\|}{\|B\|}$. Διαφορετικά, θα έχουμε

$$|\lambda_k(\mu, \theta)| \|B\| - \|A\| < \sqrt{1 - \epsilon_k^2} \|B\| (|\mu + \delta_\mu e^{i\theta}| + |\lambda_k(\mu, \theta)|)$$

και αφού $\epsilon_k > 0$, ακολούθως προκύπτει ότι

$$|\lambda_k(\mu, \theta)| < \frac{\|A\| + \sqrt{1 - \epsilon_k^2} \|B\| |\mu + \delta_\mu e^{i\theta}|}{\|B\| (1 - \sqrt{1 - \epsilon_k^2})}.$$

Συνεπώς, η ακολουθία $\lambda_k(\mu, \theta)$ με $k = 1, 2, \dots$ είναι φραγμένη. Ως εκ τούτου, θα έχει μία συγκλίνουσα υπακολουθία $\lambda_{k_t}(\mu, \theta)$ με $t = 1, 2, \dots$. Αν τώρα έχουμε:

$$\lambda_0 = \lim_{k_t \rightarrow \infty} \lambda_{k_t}(\mu, \theta),$$

τότε από τη σχέση (4.10), έπεται το ακόλουθο αποτέλεσμα:

$$\lim_{k_t \rightarrow \infty} |\mu + \delta_\mu e^{i\theta} - \lambda_{k_t}(\mu, \theta)| \geq \lim_{k_t \rightarrow \infty} \frac{\|A - \lambda_{k_t}(\mu, \theta)B\|}{\sqrt{1 - \epsilon_{k_t}^2} \|B\|},$$

ή, ισοδύναμα

$$|\mu + \delta_\mu e^{i\theta} - \lambda_0| \geq \frac{\|A - \lambda_0 B\|}{\sqrt{1 - \epsilon_0^2} \|B\|}.$$

Το αποτέλεσμα αυτό όμως είναι άτοπο, επειδή το $\mu + \delta_\mu e^{i\theta}$ είναι ένα εσωτερικό σημείο του συνόλου ορθογωνιότητας $F_{\|\cdot\|}^{\epsilon_0}(A; B)$. Συμπερασματικά λοιπόν, η απεικόνιση $\epsilon \mapsto F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$ είναι κάτω ημισυνεχής στο ϵ_0 . Τέλος, αφού η απεικόνιση είναι άνω και κάτω ημισυνεχής στο ϵ_0 , από τον **Ορισμό 4.5.4.(iii)** είναι και συνεχής στο ϵ_0 . Έτσι η απόδειξη ολοκληρώνεται. ■

Συνέχεια του Συνόλου $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$ ως προς τον Πίνακα $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$

Το ερώτημα που προκύπτει άμεσα έχοντας μελετήσει τη συνέχεια του συνόλου $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$, είναι αν το σύνολο ορθογωνιότητας αυτό είναι συνεχές και ως προς ένα πίνακα $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$. Ας εξετάσουμε το ενδεχόμενο αυτό παρακάτω.

Από την **Πρόταση 4.3.7**, γνωρίζουμε ότι για δύο πίνακες $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$, με $B \neq 0$ και τον A να μην είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του πίνακα B , αλλά και μία παράμετρο $\epsilon \in [0, 1)$, το σύνολο Birkhoff-James ϵ -ορθογωνιότητας του πίνακα A ως προς τον B , είναι ένας κλειστός δίσκος της μορφής:

$$F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B) = D\left(\frac{\langle A, B \rangle}{\|B\|^2}, \left\| A - \frac{\langle A, B \rangle}{\|B\|^2} B \right\| \frac{\epsilon}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|}\right).$$

Η νόρμα του πίνακα B στο παραπάνω σύνολο επάγεται από ένα εσωτερικό γινόμενο πινάκων. Οι συναρτήσεις του εσωτερικού γινομένου πινάκων, αλλά και της νόρμας πίνακα είναι συνεχείς. Η συνέχειά τους αυτή μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το σύνολο $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$ είναι συνεχές ως προς τις παραμέτρους A, B , αλλά και ϵ . Για μία διαφορετική περίπτωση όμως (στην οποία η νόρμα $\|\cdot\|$ δεν επάγεται από ένα εσωτερικό γινόμενο πινάκων), δεν γνωρίζουμε τι συμβαίνει με τη συνέχεια ως προς τον πίνακα B . Το ερώτημα λοιπόν, σχετικά με το αν το σύνολο $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$ είναι συνεχές ως προς έναν $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ παραμένει ανοιχτό. Το γεγονός ότι ο πίνακας B βρίσκεται στον παρονομαστή της παραπάνω σχέσης, δυσχεραίνει ιδιαίτερα την αποδεικτική διαδικασία, αφού υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες κινδυνεύει να μηδενιστεί κι έτσι οδηγούμαστε σε απροσδιοριστία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^ο

Σύνολα Birkhoff-James ϵ -ορθογωνιότητας Πολυωνυμικών Πινάκων

Στο παρόν κεφάλαιο, που αποτελεί και το τελευταίο της εργασίας μας, θα εισάγουμε ένα νέο είδος πινάκων, αυτό των πολυωνυμικών. Θα μελετήσουμε εκτενώς τα αριθμητικά τους πεδία, καθώς επίσης και τα σύνολα Birkhoff-James ορθογωνιότητάς τους.

5.1 Πολυωνυμικοί Πίνακες

Οι πολυωνυμικοί είναι πίνακες των οποίων τα στοιχεία των γραμμών και στηλών τους είναι πολυώνυμα. Ας ξεκινήσουμε λοιπόν, ορίζοντάς τους με μεγαλύτερη λεπτομέρεια και μελετώντας τις ιδιότητές τους.

Ορισμός 5.1.1. Ονομάζουμε *πολυωνυμικό πίνακα (matrix polynomial)* κάθε $n \times m$ πίνακα $P(z)$ της μορφής

$$P(z) = \begin{bmatrix} p_{11}(z) & p_{12}(z) & \dots & p_{1m}(z) \\ p_{21}(z) & p_{22}(z) & \dots & p_{2m}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1}(z) & p_{n2}(z) & \dots & p_{nm}(z) \end{bmatrix},$$

όπου τα στοιχεία $p_{ij}(z)$, με $1 \leq i \leq n$ και $1 \leq j \leq m$, είναι μιγαδικά πολυώνυμα της μεταβλητής $z \in \mathbb{C}$.

Σημείωση: Η παράσταση $I_n z - A$, όπου $I_n \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ο μοναδιαίος πίνακας, που εμφανίζεται στην χαρακτηριστική εξίσωση ενός τετραγωνικού πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, αποτελεί ένα από τα απλούστερα παραδείγματα πολυωνυμικού πίνακα.

Ορισμός 5.1.2. Ονομάζουμε *βαθμό πολυωνυμικού πίνακα* και συμβολίζουμε με $\deg(P(z))$, τον μεγαλύτερο από τους βαθμούς των μιγαδικών πολυωνύμων $p_{ij}(z)$, που εμφανίζονται ως στοιχεία του $P(z)$. Πιο συγκεκριμένα, για $I_n, A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ και $z \in \mathbb{C}$ έχουμε ότι

$$\deg(I_n z - A) = 1 \quad \text{και} \quad \deg(A) = 0.$$

Παρατήρηση 5.1.3. Με τρόπο άμεσο, προκύπτει ότι μπορούμε να αναπαραστήσουμε έναν πολυωνυμικό πίνακα βαθμού l , με την ακόλουθη μορφή:

$$P(z) = \sum_{l=0}^l A_l z^l = A_l z^l + A_{l-1} z^{l-1} + \dots + A_1 z + A_0 \quad (5.1)$$

όπου z είναι μία (μιγαδική) μεταβλητή και $A_j \in \mathbb{C}^{n \times m}$, με $j = 0, 1, \dots, l$ και $A_l \neq 0$.

Ορισμός 5.1.4. Έστω ένας $n \times m$ πολυωνυμικός πίνακας $P(z)$, με $n = m$. Ο $P(z)$ καλείται *αντιστρέψιμος (unimodular)*, αν υπάρχει ένας $n \times n$ πολυωνυμικός πίνακας $Q(z)$, τέτοιος ώστε να ισχύει

$$P(z)Q(z) = Q(z)P(z) = I_n.$$

Ορισμός 5.1.5. Έστω ένας $n \times m$ πολυωνυμικός πίνακας $P(z)$, με $n \geq m$. Ορίζουμε ως *ιδιοτιμή* του $P(z)$, τον μιγαδικό $\mu_0 \in \mathbb{C}$, αν υπάρχει ένα μη μηδενικό διάνυσμα $x_0 \in \mathbb{C}^m$, τέτοιο ώστε να ισχύει $P(\mu_0)x_0 = 0$. Το $x_0 \in \mathbb{C}^m$ καλείται *ιδιοδιάνυσμα* του $P(z)$, που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή μ_0 .

5.1.1. Ορισμός Κλασικού Αριθμητικού Πεδίου Πολυωνυμικού Πίνακα

Το κλασικό αριθμητικό πεδίο πολυωνυμικών πινάκων, καθώς και οι ιδιότητές του, έχουν μελετηθεί από πολλούς ερευνητές. Ο ορισμός που θα χρησιμοποιήσουμε στην έρευνά μας έχει χρησιμοποιηθεί από τους C.K. Li και L.Rodman, στη μελέτη του πεδίου των πολυωνυμικών πινάκων, στο [40].

Κλασικό Αριθμητικό Πεδίο $W(P(z))$ του $n \times n$ πολυωνυμικού πίνακα $P(z)$:

Το *κλασικό αριθμητικό πεδίο (standard numerical range)*, $W(P(z))$, ενός $n \times n$ πολυωνυμικού πίνακα $P(z)$, ορίζεται ως το σύνολο:

$$\begin{aligned} W(P(z)) &= \{ \mu \in \mathbb{C} : x^*P(\mu)x = 0, x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0 \} \\ &= \{ \mu \in \mathbb{C} : 0 \in F(P(\mu)) \}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

5.2 Αριθμητικό Πεδίο Πολυωνυμικών Πινάκων

Παρακινούμενοι λοιπόν από τον ορισμό του κλασικού αριθμητικού πεδίου ενός πολυωνυμικού πίνακα στη σχέση (5.2), αλλά και ανακαλώντας τη σχέση (4.1), από τον ορισμό του αριθμητικού πεδίου όχι υποχρεωτικά τετραγωνικών πινάκων, θα καθορίσουμε εν συνεχεία το σύνολο που περιγράφει το αριθμητικό πεδίο πολυωνυμικών πινάκων.

Αριθμητικό πεδίο $W_{\|\cdot\|}(P(z); B)$ του $n \times m$ πολυωνυμικού πίνακα $P(z)$ ως προς τον πίνακα $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ με $B \neq 0$:

Έστω ένας $n \times m$ πολυωνυμικός πίνακας $P(z)$ κι ένας μη μηδενικός, όχι υποχρεωτικά τετραγωνικός πίνακας $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$. Έστω επίσης $\|\cdot\|$ μία νόρμα πίνακα και $\|B\| \geq 1$. Ορίζουμε ως *αριθμητικό πεδίο του πολυωνυμικού πίνακα $P(z)$ ως προς τον πίνακα B (numerical range of $P(z)$ with respect to B)*, το σύνολο

$$W_{\|\cdot\|}(P(z); B) = \{ \mu \in \mathbb{C} : 0 \in F_{\|\cdot\|}(P(\mu); B) \} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned}
&= \{ \mu \in \mathbb{C} : \|P(\mu) - \lambda B\| \geq |\lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \} \\
&= \left\{ \mu \in \mathbb{C} : B \perp_{BJ}^{\epsilon_B} P(\mu), \epsilon_B = \frac{\sqrt{\|B\|^2 - 1}}{\|B\|} \right\}.
\end{aligned}$$

Έχοντας παρουσιάσει το αριθμητικό πεδίο που αφορά στους πολυωνυμικούς πίνακες, θα μελετήσουμε τώρα το q –αριθμητικό τους πεδίο.

5.2.1 q –Αριθμητικό Πεδίο Πολυωνυμικών Πινάκων

Προχωρώντας λοιπόν σε μία γενίκευση του αριθμητικού πεδίου $W_{\|\cdot\|}(P(z); B)$ και με τη βοήθεια της σχέσης (4.3), του ορισμού του q –αριθμητικού πεδίου όχι υποχρεωτικά τετραγωνικών πινάκων, θα παραθέσουμε στον ορισμό που έπεται, το q –αριθμητικό πεδίο ενός πολυωνυμικού πίνακα $P(z)$, ως προς έναν όχι υποχρεωτικά τετραγωνικό πίνακα $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$.

Ορισμός 5.2.1. Έστω ένας $n \times m$ πολυωνυμικός πίνακας $P(z)$, ένας πίνακας $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ και $\|\cdot\|$ μία νόρμα πίνακα. Για κάθε $q \in [0,1]$, ορίζουμε ως q –αριθμητικό πεδίο του πολυωνυμικού πίνακα $P(z)$ ως προς τον πίνακα B (q –numerical range of $P(z)$ with respect to B), το σύνολο

$$\begin{aligned}
W_{\|\cdot\|}(P(z); B; q) &= \{ \mu \in \mathbb{C} : 0 \in F_{\|\cdot\|}(P(\mu); B; q) \} & (5.4) \\
&= \{ \mu \in \mathbb{C} : \|P(\mu) - \lambda B\| \geq q |\lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \} \\
&= \left\{ \mu \in \mathbb{C} : B \perp_{BJ}^{\epsilon_q} P(\mu), \epsilon_q = \frac{\sqrt{\|B\|^2 - q^2}}{\|B\|} \right\}.
\end{aligned}$$

Έχοντας λοιπόν ορίσει το q –αριθμητικό πεδίο ενός πολυωνυμικού πίνακα $P(z)$, ως προς έναν $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$, παρατηρούμε ότι το σύνολο αυτό αποτελεί άμεση επέκταση του συνόλου του αριθμητικού πεδίου ενός πολυωνυμικού πίνακα, ως προς έναν όχι κατ' ανάγκη τετραγωνικό πίνακα. Στη συνέχεια του κεφαλαίου, θα εισάγουμε στη μελέτη μας το σύνολο Birkhoff-James ϵ –ορθογωνιότητας ενός πολυωνυμικού ως προς έναν όχι κατ' ανάγκη τετραγωνικό πίνακα και θα παρατηρήσουμε ότι το σύνολο αυτό γενικεύει το σύνολο του q –αριθμητικού πεδίου.

5.3 Σύνολα Birkhoff-James ϵ -ορθογωνιότητας Πολυωνυμικών Πινάκων

Έπειτα από όσα έχουμε αναφέρει μέχρι στιγμής για τα αριθμητικά πεδία πολυωνυμικών πινάκων, αλλά και στηριζόμενοι στον **Ορισμό 4.2.2.**, μπορούμε να προσδιορίσουμε το σύνολο Birkhoff-James ϵ -ορθογωνιότητας ενός πολυωνυμικού πίνακα $P(z)$, ως προς έναν όχι υποχρεωτικά τετραγωνικό πίνακα $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$.

Ορισμός 5.3.1. Έστω ένας $n \times m$ πολυωνυμικός πίνακας $P(z)$, ένας πίνακας $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ και $\|\cdot\|$ μία νόρμα πίνακα. Για κάθε $\epsilon \in [0,1)$, ορίζουμε ως *σύνολο Birkhoff-James ϵ -ορθογωνιότητας του πολυωνυμικού πίνακα $P(z)$ ως προς τον πίνακα B* (*Birkhoff-James ϵ -orthogonality set of $P(z)$ with respect to B*), το χωρίο

$$W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B) = \{ \mu \in \mathbb{C} : 0 \in F_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(\mu); B) \} \quad (5.5)$$

$$= \{ \mu \in \mathbb{C} : \|P(\mu) - \lambda B\| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \}$$

$$= \{ \mu \in \mathbb{C} : B \perp_{BJ}^\epsilon P(\mu) \}. \quad (5.6)$$

Τα σύνολα των αριθμητικών πεδίων στα οποία έχουμε αναφερθεί από την αρχή του κεφαλαίου, όσο και τα σύνολα Birkhoff-James ϵ -ορθογωνιότητας πολυωνυμικών πινάκων, ικανοποιούν την ιδιότητα της κλειστότητας. Το γεγονός αυτό οφείλεται στη συνέχεια που παρουσιάζει η συνάρτηση της νόρμας πίνακα, σε καθένα από τα σύνολα αυτά.

Σημείωση: Ειδικότερα, στο σύνολο του q -αριθμητικού πεδίου πολυωνυμικών πινάκων, θέτοντας $q = 0$, προκύπτει:

$$W_{\|\cdot\|}(P(z); B; 0) = \{ \mu \in \mathbb{C} : 0 \in F_{\|\cdot\|}(P(z); B; 0) \} \equiv \mathbb{C}.$$

Σε συνέχεια της μελέτης μας, θα παρουσιάσουμε τις επεκτάσεις του **Θεωρήματος 4.2.7.** και του **Πορίσματος 4.2.8.**, στα σύνολα πολυωνυμικών πινάκων, με τη βοήθεια των σχέσεων (5.3), (5.4) και (5.5).

Θεώρημα 5.3.2. Έστω ένας $n \times m$ πολυωνυμικός πίνακας $P(z)$. Για κάθε μη μηδενικό πίνακα $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ και $\epsilon \in [0,1)$, ισχύει ότι

$$W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B) = W_{\|\cdot\|}(P(z); B; q_\epsilon) = W_{\|\cdot\|}(P(z); q_\epsilon^{-1}B), \text{ όπου } q_\epsilon = \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|.$$

Ισοδύναμα, για κάθε $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ και $q \in (0,1]$ με $\|B\| \geq q$, ισχύει ότι

$$W_{\|\cdot\|}^{\epsilon_q}(P(z); B) = W_{\|\cdot\|}(P(z); B; q) = W_{\|\cdot\|}(P(z); q^{-1}B), \text{ όπου } \epsilon_q = \frac{\sqrt{\|B\|^2 - q^2}}{\|B\|}.$$

Πόρισμα 5.3.3. Για κάθε $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ και $q \in (0,1]$ με $\|B\| = q$, ισχύει ότι

$$W_{\|\cdot\|}(P(z); B; q) = W_{\|\cdot\|}^0(P(z); B) = \{ \mu \in \mathbb{C} : B \perp_{BJ} P(z) \}.$$

5.3.1 Ειδικές Παρατηρήσεις

Παρατήρηση 5.3.4. Λόγω της πρώτης ισότητας του ορισμού του συνόλου Birkhoff – James ϵ –ορθογωνιότητας όχι υποχρεωτικά τετραγωνικών πινάκων (**Ορισμός 4.2.2.**) και τη σχέση (5.6), για μία γραμμική δέσμη της μορφής $P(z) = Bz - A$, με $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, προκύπτει ότι:

$$W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B) = W_{\|\cdot\|}^\epsilon(Bz - A; B) \text{ και άρα έχουμε}$$

$$\begin{aligned} W_{\|\cdot\|}^\epsilon(Bz - A; B) &= \{ \mu \in \mathbb{C} : B \perp_{B_j}^\epsilon P(\mu) \} = \{ \mu \in \mathbb{C} : B \perp_{B_j}^\epsilon (B\mu - A) \} \\ &= \{ \mu \in \mathbb{C} : \|\lambda B - A\| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \} \\ &= \{ \mu \in \mathbb{C} : \|-(A - \lambda B)\| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \} \\ &= \{ \mu \in \mathbb{C} : \|A - \lambda B\| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\mu - \lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \} \\ &\equiv F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B). \end{aligned}$$

Επιπλέον, αν ένας $\mu_0 \in \mathbb{C}$ ικανοποιεί τη σχέση $P(\mu_0) = 0$, τότε έχουμε το άμεσο συμπέρασμα ότι $\mu_0 \in W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$, λόγω της σχέσης (5.5).

Παρατήρηση 5.3.5. Στην περίπτωση που όλοι οι συντελεστές $A_j \in \mathbb{C}^{n \times m}$ (με $j = 0, 1, \dots, l$ και $A_l \neq 0$) του πολυωνυμικού πίνακα $P(z)$ είναι βαθμωτά πολλαπλάσια του πίνακα $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$, τότε ο πίνακας $P(z)$, εκφράζεται με την ακόλουθη μορφή:

$$P(z) = p(z) B, \text{ για κάποιο μιγαδικό πολυώνυμο } p(z).$$

Έτσι λοιπόν, το σύνολο Birkhoff–James ϵ –ορθογωνιότητας για $\epsilon \in [0, 1)$, μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\begin{aligned} W_{\|\cdot\|}^\epsilon(p(z)B; B) &= \{ \mu \in \mathbb{C} : \|p(\mu)B - \lambda B\| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \} \\ &= \{ \mu \in \mathbb{C} : |p(\mu) - \lambda| \|B\| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \}. \end{aligned}$$

Σημείωση: Το σύνολο $W_{\|\cdot\|}^\epsilon(p(z)B; B)$ περιέχει όλες τις ρίζες του πολυωνύμου $p(z)$.

Παρατήρηση 5.3.6. Στην ειδική περίπτωση όπου ισχύει $n = m$, $B = I_n$ και $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$, ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} W_{\|\cdot\|_2}^\epsilon(P(z); I_n) &= \{ \mu \in \mathbb{C} : 0 \in F_{\|\cdot\|_2}^\epsilon(P(\mu); I_n) \} \\ &= \{ \mu \in \mathbb{C} : 0 \in F(P(\mu)) \} = W(P(z)). \end{aligned}$$

Άρα, το σύνολο $W_{\|\cdot\|_2}^\epsilon(P(z); I_n)$ ταυτίζεται με το κλασικό αριθμητικό πεδίο ενός πολυωνυμικού πίνακα.

Συνεπώς, γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι ο ορισμός του συνόλου $W_{\|\cdot\|}(P(z); B)$, αποτελεί άμεση επέκταση του κλασικού αριθμητικού πεδίου πολυωνυμικού πίνακα $W(P(z))$. Όπως προκύπτει από τη μελέτη μας έως το σημείο αυτό, το σύνολο Birkhoff-James ϵ -ορθογωνιότητας $W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$, αποτελεί μία φυσική γενίκευση των συνόλων $W_{\|\cdot\|}(P(z); B)$ και $W_{\|\cdot\|}(P(z); B; q)$. Οι σημαντικές ιδιότητές του αποτελούν ένα αξιοσημείωτο πεδίο μελέτης, στο οποίο θα στρέψουμε την προσοχή μας στο κεφάλαιο που ακολουθεί.

5.4 Βασικές Ιδιότητες του $W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$

Πρόταση 5.4.1. Έστω ένας $n \times m$ πολυωνυμικός πίνακας $P(z)$, ένας μη μηδενικός πίνακας $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ και $\|\cdot\|$ μία νόρμα πίνακα. Για κάθε $\epsilon \in [0, 1)$ και $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, ισχύουν:

- i) $W_{\|\cdot\|}^\epsilon(\alpha P(z); B) = W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$,
- ii) $W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(\alpha z); B) = \alpha^{-1} W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$ και
- iii) $W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z + \alpha); B) = W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B) - \alpha$.

Απόδειξη. Εύκολα μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι

- i) Για το σύνολο $W_{\|\cdot\|}^\epsilon(\alpha P(z); B)$, έχουμε

$$\begin{aligned} W_{\|\cdot\|}^\epsilon(\alpha P(z); B) &= \{ \mu \in \mathbb{C} : 0 \in F_{\|\cdot\|}^\epsilon(\alpha P(\mu); B) \} \\ &= \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \|\alpha P(\mu) - \lambda B\| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \right\} \\ &= \left\{ \mu \in \mathbb{C} : |\alpha| \left\| P(\mu) - \frac{\lambda}{\alpha} B \right\| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \right\} \\ &= \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \left\| P(\mu) - \frac{\lambda}{\alpha} B \right\| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| \left| \frac{\lambda}{\alpha} \right|, \forall \frac{\lambda}{\alpha} \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \right\} \end{aligned}$$

και θέτοντας $\lambda_\alpha = \frac{\lambda}{\alpha}$, για $\alpha \neq 0$, θα έχουμε

$$W_{\|\cdot\|}^\epsilon(\alpha P(z); B) = \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \|P(\mu) - \lambda_\alpha B\| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda_\alpha|, \forall \frac{\lambda}{\alpha} \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \right\}.$$

Συνεπώς, προκύπτει ότι $W_{\|\cdot\|}^\epsilon(\alpha P(z); B) = W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$.

- ii) Για το σύνολο $W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(\alpha z); B)$, έχουμε

$$W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(\alpha z); B) = \{ \mu \in \mathbb{C} : 0 \in F_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(\alpha \mu); B) \}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \|P(\alpha\mu) - \lambda B\| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \right\} \\
&= \left\{ \frac{\mu}{\alpha} \in \mathbb{C} : \|P(\mu) - \lambda B\| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \right\} \\
&= \left\{ \alpha^{-1} \mu \in \mathbb{C} : \|P(\mu) - \lambda B\| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \right\} \\
&= \alpha^{-1} W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)
\end{aligned}$$

και

iii) Για το σύνολο $W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z + \alpha); B)$, έχουμε

$$\begin{aligned}
W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z + \alpha); B) &= \{ \mu \in \mathbb{C} : 0 \in F_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(\mu + \alpha); B) \} \\
&= \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \|P(\mu + \alpha) - \lambda B\| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \right\} \\
&= \left\{ (\mu - \alpha) \in \mathbb{C} : \|P(\mu) - \lambda B\| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \right\} \\
&= W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B) - \alpha
\end{aligned}$$

κι έτσι η απόδειξη ολοκληρώνεται. ■

Πρόταση 5.4.2. Έστω ένας $n \times m$ πολυωνυμικός πίνακας $P(z)$, ένας μη μηδενικός πίνακας $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ και $\|\cdot\|$ μία νόρμα πίνακα. Για κάθε $\epsilon \in [0, 1)$, αν ο πίνακας

$$R(z) = A_0 z^l + \dots + A_{l-1} z + A_l = z^l P(z^{-1})$$

είναι ο αλγεβρικά αντίστροφος του πολυωνυμικού πίνακα $P(z)$, τότε ισχύει

$$W_{\|\cdot\|}^\epsilon(R(z); B) \setminus \{0\} = \{ \mu \in \mathbb{C} : \mu^{-1} \in W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B) \setminus \{0\} \}.$$

Απόδειξη. Ένα μη μηδενικό $\mu \in \mathbb{C}$ ανήκει στο σύνολο $W_{\|\cdot\|}^\epsilon(R(z); B)$, αν και μόνο αν, ισχύει ότι

$$\|R(z) - \lambda B\| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \text{ή ισοδύναμα,}$$

$$\|\mu^l P(\mu^{-1}) - \lambda B\| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

ή ισοδύναμα, αν και μόνο αν, ισχύει

$$\left\| P(\mu^{-1}) - \frac{\lambda}{\mu^l} B \right\| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| \left| \frac{\lambda}{\mu^l} \right|, \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

κι έτσι το ζητούμενο αποδεικνύεται. ■

Πρόταση 5.4.3. Έστω ένας $n \times m$ πολυωνυμικός πίνακας $P(z)$, ένας μη μηδενικός πίνακας $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ και $\|\cdot\|$ μία νόρμα πίνακα. Για κάθε $\epsilon \in [0, 1)$, αν η νόρμα $\|\cdot\|$

διατηρείται αναλλοίωτη υπό τον συζυγή μετασχηματισμό $\bar{\cdot}$ και οι συντελεστές του $P(z)$, καθώς και ο πίνακας B , είναι όλοι πραγματικοί πίνακες, τότε το $W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$ είναι συμμετρικό ως προς τον πραγματικό άξονα.

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι

$$W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B) = \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \|P(\mu) - \lambda B\| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \right\}.$$

Εφόσον οι συντελεστές του πίνακα $P(z)$ είναι πραγματικοί, αλλά και $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, θα έχουμε

$$\|P(\mu) - \lambda B\| = \left\| \overline{P(\mu) - \lambda B} \right\| = \|P(\bar{\mu}) - \bar{\lambda} B\|, \forall \mu, \lambda \in \mathbb{C}, \text{ και}$$

$$\text{και } |\bar{\lambda}| = |\lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Συνεπώς, το $W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$ είναι συμμετρικό ως προς τον πραγματικό άξονα. ■

Πρόταση 5.4.4. Έστω ένας $n \times m$ πολωνυμικός πίνακας $P(z)$, ένας μη μηδενικός πίνακας $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ και $\|\cdot\|$ μία νόρμα πίνακα. Για κάθε $\epsilon \in [0, 1)$, υποθέτουμε ότι η νόρμα $\|\cdot\|$ επάγεται από διανυσματική νόρμα. Αν υπάρχουν δύο μοναδιαία διανύσματα $x_0 \in \mathbb{C}^n$ και $y_0 \in \mathbb{C}^m$, τέτοια ώστε να ισχύουν

$$|x_0^* B y_0| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| \quad \text{και} \quad x_0^* A_j y_0 = 0, \text{ για κάθε } j = 0, 1, \dots, l,$$

τότε $W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B) = \mathbb{C}$.

Απόδειξη. Αφού τα $x_0 \in \mathbb{C}^n$ και $y_0 \in \mathbb{C}^m$ είναι μοναδιαία διανύσματα, για κάθε $\mu \in \mathbb{C}$ ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \|P(\mu) - \lambda B\| &= \|x_0^* \|P(\mu) - \lambda B\| \|y_0\| \geq \|x_0^* (P(\mu) - \lambda B) y_0\| \\ &= \|x_0^* P(\mu) y_0 - \lambda (x_0^* B y_0)\| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Γνωρίζουμε ότι

$$W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B) = \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \|P(\mu) - \lambda B\| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \right\}.$$

Δηλαδή, το σύνολο $W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$ αποτελείται από τα $\mu \in \mathbb{C}$ που ικανοποιούν την ανισότητα $\|P(\mu) - \lambda B\| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda|$. Στην περίπτωση μας όμως, η συγκεκριμένη ανισότητα ικανοποιείται για όλα τα μ μέσα στο \mathbb{C} και συνεπώς το σύνολο $W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$ ισούται με όλο το \mathbb{C} . ■

Πρόταση 5.4.5. Έστω ένας $n \times m$ πολωνυμικός πίνακας $P(z)$, ένας μη μηδενικός πίνακας $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ και $\|\cdot\|$ μία νόρμα πίνακα. Για κάθε $\epsilon \in [0, 1)$, υποθέτουμε ότι η νόρμα $\|\cdot\|$ επάγεται από διανυσματική νόρμα κι ότι $n \geq m$. Έστω επίσης μ_0 να είναι μία ιδιοτιμή του $P(z)$, με $x_0 \in \mathbb{C}^n$ το αντίστοιχο μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμά της.

Τότε για κάθε $\epsilon \in [\sqrt{\|B\|^2 - \|Bx_0\|^2} / \|B\|, 1)$, η ιδιοτιμή μ_0 ανήκει στο σύνολο $W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$.

Απόδειξη. Αφού $\|Bx_0\| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|$, έπεται ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ θα έχουμε:

$$\|P(\mu_0) - \lambda B\| \|x_0\| \geq \|P(\mu_0)x_0 - \lambda B x_0\| = \|\lambda B x_0\| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda|.$$

Επομένως, η απόδειξη ολοκληρώθηκε. ■

Για κάθε τετραγωνικό πολυωνυμικό πίνακα της μορφής:

$$P(z) = \sum_{j=0}^l A_j z^j,$$

οι C.K. Li και L.Rodman απέδειξαν στο [40], ότι το (κλασικό) αριθμητικό του πεδίο $W(P(z))$ είναι φραγμένο, αν και μόνο αν ισχύει ότι $0 \in F(A_l)$.

Θεώρημα 5.4.6. Έστω ένας $n \times m$ πολυωνυμικός πίνακας $P(z)$, ένας μη μηδενικός πίνακας $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ και $\epsilon \in [0, 1)$.

- i) Αν το σύνολο $W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$ είναι μη φραγμένο, τότε ισχύει ότι $0 \in F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A_l; B)$.
- ii) Έστω ότι $0 \in F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A_l; B)$ κι ότι το 0 δεν είναι μεμονωμένο σημείο του $W_{\|\cdot\|}^\epsilon(R(z); B)$, όπου για τον πίνακα $R(z)$ ισχύει ότι:

$$R(z) = \sum_{j=0}^l A_{l-j} z^j = z^l P(z^{-1}).$$

Τότε το σύνολο Birkhoff-James ϵ -ορθογωνιότητας $W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$ είναι μη φραγμένο.

Απόδειξη. i) Ας υποθέσουμε ότι το σύνολο $W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$ είναι μη φραγμένο κι έστω ότι $\mu \in W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B) \setminus \{0\}$. Τότε θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \|A_l \mu^l + A_{l-1} \mu^{l-1} + \dots + A_1 \mu + A_0 - \lambda B\| &\geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C}, \text{ ή} \\ |\mu^l| \left\| A_l + A_{l-1} \frac{1}{\mu} + \dots + A_1 \frac{1}{\mu^{l-1}} + A_0 \frac{1}{\mu^l} - \frac{\lambda}{\mu^l} B \right\| &\geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda|, \forall \lambda \in \mathbb{C}, \text{ ή} \\ \left\| A_l + \frac{\lambda}{\mu^l} B \right\| + \left\| A_{l-1} \frac{1}{\mu} + \dots + A_1 \frac{1}{\mu^{l-1}} + A_0 \frac{1}{\mu^l} \right\| &\geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| \left| \frac{\lambda}{\mu^l} \right|, \forall \lambda \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Προς απαγωγή σε άτοπο, υποθέτουμε τώρα ότι $0 \notin F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A_l; B)$. Ισοδύναμα, υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, τέτοιο ώστε να ισχύει

$$\|A_l - \lambda_0 B\| < \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda_0|.$$

Αφού όμως θεωρήσαμε ότι το σύνολο $W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$ είναι μη φραγμένο, για ικανοποιητικά μεγάλο μ (το οποίο ανήκει στο $W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$), η ποσότητα:

$$\left\| A_{l-1} \frac{1}{\mu} + \dots + A_1 \frac{1}{\mu^{l-1}} + A_0 \frac{1}{\mu^l} \right\|$$

γίνεται μικρότερη από τη διαφορά:

$$\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda_0| - \|A_l - \lambda_0 B\|.$$

Στη συνέχεια, θέτοντας $\lambda = \lambda_0 \mu^l$, προκύπτει ότι

$$\left\| A_l + \frac{\lambda}{\mu^l} B \right\| + \left\| A_{l-1} \frac{1}{\mu} + \dots + A_1 \frac{1}{\mu^{l-1}} + A_0 \frac{1}{\mu^l} \right\| < \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| \left| \frac{\lambda}{\mu^l} \right|,$$

που είναι άτοπο. Συνεπώς, έχουμε ότι $0 \in F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A_l; B)$ κι έτσι η απόδειξη ολοκληρώνεται.

ii) Θεωρούμε τον πίνακα $R(z)$, ο οποίος είναι ο αλγεβρικά αντίστροφος του πολυωνυμικού πίνακα $P(z)$, ως εξής:

$$R(z) = \sum_{j=0}^l A_{l-j} z^j = z^l P(z^{-1}).$$

Από την **Πρόταση 5.4.2.**, γνωρίζουμε ότι ισχύει η ακόλουθη ισότητα

$$W_{\|\cdot\|}^\epsilon(R(z); B) \setminus \{0\} = \{ \mu \in \mathbb{C} : \mu^{-1} \in W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B) \setminus \{0\} \}.$$

Εφόσον έχουμε ότι $0 \in F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A_l; B)$, από το πρώτο μέρος της απόδειξής μας, συνεπάγεται ότι $0 \in W_{\|\cdot\|}^\epsilon(R(z); B)$. Επιπλέον, αφού το 0 δεν είναι μεμονωμένο σημείο του χωρίου $W_{\|\cdot\|}^\epsilon(R(z); B)$, θα υπάρχει μία ακολουθία $\{\mu_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, τέτοια ώστε να ισχύει $\{\mu_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset W_{\|\cdot\|}^\epsilon(R(z); B) \setminus \{0\}$ κι η οποία να συγκλίνει στο 0. Αυτό λοιπόν σημαίνει ότι η ακολουθία $\{\mu_k^{-1}\}_{k \in \mathbb{N}}$, για την οποία ισχύει $\{\mu_k^{-1}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$, είναι φραγμένη. Ως εκ τούτου, το σύνολο $W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$ είναι επίσης μη φραγμένο. ■

Σημείωση: Η συνθήκη ότι η αρχή των αξόνων (δηλαδή το μηδέν) δεν είναι ένα μεμονωμένο σημείο του συνόλου $W_{\|\cdot\|}^\epsilon(R(z); B)$, ισχύει πάντοτε στην περίπτωση του κλασικού αριθμητικού πεδίου τετραγωνικών πολυωνυμικών πινάκων $W(P(z))$. (Ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής του πολυωνυμικού πίνακα $P(z)$ είναι μη μηδενικός.) Όπως και στην περίπτωση των όχι υποχρεωτικά τετραγωνικών πινάκων (**Πρόταση 4.2.6.**), έτσι και στους πολυωνυμικούς πίνακες, ισχύει ότι το σύνολο Birkhoff – James

ϵ -ορθογωνιότητας $W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$ μπορεί να γίνει αυθαίρετα μεγάλο (δηλαδή, οσοδήποτε μεγάλο επιθυμούμε), για ϵ αρκετά κοντά στον αριθμό 1.

Πρόταση 5.4.7. Έστω ένας $n \times m$ πολυωνυμικός πίνακας $P(z)$, ένας μη μηδενικός πίνακας $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ και $\epsilon \in [0,1)$. Υποθέτουμε ότι $\Omega \subset \mathbb{C}$ είναι ένα συμπαγές χωρίο, τέτοιο ώστε για κάθε $\mu \in \Omega$, ο πίνακας $P(\mu)$ να μην είναι ένα μη μηδενικό βαθμωτό πολλαπλάσιο του πίνακα B . Τότε υπάρχει ένα $\epsilon_\Omega \in [0,1)$, τέτοιο ώστε να ισχύει

$$\Omega \subseteq W_{\|\cdot\|}^{\epsilon_\Omega}(P(z); B).$$

Για τη συνέχεια, θεωρούμε έναν τετραγωνικό πίνακα $P(z) = \sum_{j=0}^l A_j z^j$ και τη νόρμα $\|\cdot\|_2$.

Πρόταση 5.4.8. Έστω ότι $\mu_0 \in W(P(z))$ και θεωρούμε ένα διάνυσμα $x_0 \in \mathbb{C}^n$, τέτοιο ώστε να ισχύουν $\|x_0\|_2 = 1$ και $x_0^* P(\mu_0) x_0 = 0$. Τότε για κάθε

$$\epsilon \in \left[\frac{\sqrt{\|B\|_2^2 - |x_0^* B x_0|^2}}{\|B\|_2}, 1 \right)$$

το μ_0 ανήκει στο σύνολο $W_{\|\cdot\|_2}^\epsilon(P(z); B)$.

Απόδειξη. Αφού $|x_0^* B x_0| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|_2$, εύκολα επαληθεύουμε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$, ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \|P(\mu_0) - \lambda B\|_2 &\geq \|x_0^* (P(\mu_0) - \lambda B) x_0\|_2 \\ &\geq \|x_0^* P(\mu_0) x_0\|_2 |\lambda| |x_0^* B x_0|, \end{aligned}$$

κι επειδή από την υπόθεση έχουμε $x_0^* P(\mu_0) x_0 = 0$, προκύπτει ότι

$$\|P(\mu_0) - \lambda B\|_2 \geq |\lambda| |x_0^* B x_0| \geq \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|_2 |\lambda|.$$

Επομένως, έπεται ότι $\mu_0 \in W_{\|\cdot\|_2}^\epsilon(P(z); B)$. ■

Πόρισμα 5.4.9. Για κάθε $\epsilon \in [0,1)$, τέτοιο ώστε το εσωτερικό του κλειστού δίσκου $D(0, \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|_2)$, $\text{Int}[D(0, \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|_2)]$, να έχει κενή τομή με το κλασικό αριθμητικό πεδίο $F(B)$, ισχύει ότι

$$W(P(z)) \subseteq W_{\|\cdot\|_2}^\epsilon(P(z); B).$$

5.5 Το Σύνορο $\partial W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$, του Συνόλου $W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$

Οι ιδιότητες ενός σημείου μ του κλασικού αριθμητικού πεδίου $W(P(z))$, είναι ισχυρά συνδεδεμένες με τις ιδιότητες του σημείου 0 (της αρχής των αξόνων), που ανήκει στο σύνολο $F(P(\mu))$.

Σημείωση: Στο εξής θα συμβολίζουμε με $P'(z)$ την παράγωγο του $P(z)$.

Θεώρημα 5.5.1. Έστω ένας $n \times m$ πολυωνυμικός πίνακας $P(z)$, ένας μη μηδενικός πίνακας $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$, $\epsilon \in [0,1)$ και $\mu_0 \in W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$.

- i) Αν $\mu_0 \in \partial W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$, τότε $0 \in \partial F_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(\mu_0); B)$.
- ii) Αν $0 \in \partial F_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(\mu_0); B) \setminus F_{\|\cdot\|}^\epsilon(P'(\mu_0); B)$ και $P(\mu_0) \neq 0$, τότε το σημείο μ_0 ανήκει στο $\partial W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$.

Απόδειξη. i) Αφού έχουμε ότι $\mu_0 \in W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$, τότε εύκολα μπορεί να προκύψει κι ότι $0 \in F_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(\mu_0); B)$. Υποθέτουμε, ως προς απαγωγή σε άτοπο, ότι το 0 ανήκει στο $\text{Int}[F_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(\mu_0); B)]$, δηλαδή στο εσωτερικό του συνόλου $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(\mu_0); B)$. Τότε λόγω της **Πρόταση 4.4.1.i** υπάρχει ένα $\delta > 0$, τέτοιο ώστε να ισχύει

$$\inf_{\lambda \in \mathbb{C}} \left\{ \|P(\mu_0) - \lambda B\| - \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\mu_0 - \lambda| \right\} > \delta$$

και συνεπώς, έχουμε ότι

$$\|P(\mu_0) - \lambda B\| - \delta > \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Αναλύοντας τώρα το πολυώνυμο Taylor του $P(z)$, έχουμε:

$$P(z) = P(\mu_0) + (z - \mu_0) P'(\mu_0) + (z - \mu_0) E(z, \mu_0), \quad (5.7)$$

με $\|E(z, \mu_0)\| = o(1)$, καθώς $|z - \mu_0| \rightarrow 0$ (δηλαδή, οι όροι του $P''(\mu_0)$ μικραίνουν πολύ, καθώς $|z - \mu_0| \rightarrow 0$ και για το λόγο αυτόν έχουμε «σφάλμα» $o(1)$). Συνεπώς, υπάρχει ένας πραγματικός $r > 0$, έτσι ώστε για κάθε $\mu \in D(\mu_0, r)$, να έχουμε

$$|\mu - \mu_0| \|P'(\mu_0) + E(\mu, \mu_0)\| \leq \delta.$$

Έτσι λοιπόν, για κάθε $\mu \in D(\mu_0, r)$, ισχύει ότι

$$\|P(\mu_0) - \lambda B\| - |\mu - \mu_0| \|P'(\mu_0) + E(\mu, \mu_0)\| > \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \text{ή}$$

$$\|P(\mu_0) + (\mu - \mu_0)P'(\mu_0) + (\mu - \mu_0)E(\mu, \mu_0) - \lambda B\| > \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Ισοδύναμα, προκύπτει ότι

$$\|P(\mu) - \lambda B\| > \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Επομένως, συνεπάγεται ότι το μ_0 είναι ένα εσωτερικό σημείο του $W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$. Κάτι τέτοιο όμως είναι άτοπο, αφού υποθέσαμε ότι $\mu_0 \in \partial W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$. Συνεπώς, ισχύει ότι $0 \in \partial F_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(\mu_0); B)$, δηλαδή το 0 είναι συνοριακό σημείο του $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(\mu_0); B)$.

ii) Ως προς απαγωγή σε άτοπο, υποθέτουμε ότι $\mu_0 \in \text{Int}[W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)]$. Επομένως, υπάρχει ένα $\delta > 0$, τέτοιο ώστε

$$D(\mu_0, \delta) \subset \text{Int}[W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)].$$

Λόγω της σχέσης (5.7) και εφόσον $0 \notin \partial F_{\|\cdot\|}^\epsilon(P'(\mu_0); B)$, συμπεραίνουμε ότι θα υπάρχει ένα $\lambda_1 \in \mathbb{C}$, έτσι ώστε να ισχύει

$$\|P'(\mu_0) - \lambda_1 B\| > \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda_1|.$$

Επιλέγοντας τώρα ένα δ κατάλληλα μικρό, μπορούμε να υποθέσουμε ότι για κάθε μ στον (κλειστό) κυκλικό δακτύλιο:

$$D\left(\mu_0, \delta, \frac{\delta}{2}\right) = \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \frac{\delta}{2} \leq |\mu - \mu_0| \leq \delta \right\},$$

ισχύει ότι

$$\|E(\mu, \mu_0)\| + \|P'(\mu_0) - \lambda_1 B\| < \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda_1|,$$

ή

$$\|(\mu - \mu_0)P'(\mu_0) + (\mu - \mu_0)E(\mu, \mu_0) - (\mu - \mu_0)\lambda_1 B\| < \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda_1| |\mu - \mu_0|,$$

ή

$$\|(\mu - \mu_0)(P'(\mu_0) + E(\mu, \mu_0) - \lambda_1 B)\| < \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda_1| |\mu - \mu_0|,$$

ή

$$|\mu - \mu_0| \|P'(\mu_0) + E(\mu, \mu_0) - \lambda_1 B\| < \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda_1| |\mu - \mu_0|,$$

ή

$$\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda_1| |\mu - \mu_0| - \|P'(\mu_0) + E(\mu, \mu_0) - \lambda_1 B\| |\mu - \mu_0| > 0,$$

ή

$$|\mu - \mu_0| (\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda_1| - \|P'(\mu_0) + E(\mu, \mu_0) - \lambda_1 B\|) > 0.$$

Ως εκ τούτου, μπορούμε να ορίσουμε

$$\zeta = \min_{\mu \in D(\mu_0, \delta, \frac{\delta}{2})} \left\{ |\mu - \mu_0| \left(\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda_1| - \|P'(\mu_0) + E(\mu, \mu_0) - \lambda_1 B\| \right) \right\} > 0.$$

Αφού όμως $0 \in \partial F_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(\mu_0); B)$, η **Πρόταση 4.4.1.,i** συνεπάγεται ότι υπάρχει ένα $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, έτσι ώστε

$$\|P(\mu_0) - \lambda_0 B\| < \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda_0| + \zeta.$$

Συνεπώς, για κάθε $\mu \in D\left(\mu_0, \delta, \frac{\delta}{2}\right)$, έχουμε

$$\|P(\mu) - \lambda_0 B\| < \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda_0| + |\mu - \mu_0| (\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda_1| - \|P'(\mu_0) + E(\mu, \mu_0) - \lambda_1 B\|),$$

ή ισοδύναμα,

$$\|P(\mu) - (\lambda_0 + \lambda_1(\mu - \mu_0)) B\| < \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| (|\lambda_0| + |\lambda_1(\mu - \mu_0)|).$$

Παρατηρούμε όμως ότι τα λ_0 και λ_1 δεν εξαρτώνται από το μ . Έτσι λοιπόν, μπορούμε να επιλέξουμε ένα $\hat{\mu} \in D\left(\mu_0, \delta, \frac{\delta}{2}\right)$, έτσι ώστε να ισχύει

$$\arg(\lambda_1(\hat{\mu} - \mu_0)) = \arg(\lambda_0).$$

Έτσι, έπεται ότι

$$\|P(\hat{\mu}) - (\lambda_0 + \lambda_1(\hat{\mu} - \mu_0)) B\| < \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda_0 + \lambda_1(\hat{\mu} - \mu_0)|$$

κι ως εκ τούτου, προκύπτει ότι $\hat{\mu} \notin W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$. Κάτι τέτοιο όμως είναι άτοπο. Συνεπώς, $\mu_0 \notin \text{Int}[W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)]$ κι επομένως, το σημείο μ_0 ανήκει στο $\partial W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$. ■

Από την **Πρόταση 4.2.4.**, τον ορισμό της σχέσης **(5.5)**, αλλά και το **i)** του παραπάνω Θεωρήματος, προκύπτει η Πρόταση που ακολουθεί.

Πρόταση 5.5.2. Έστω ένας $n \times m$ πολυωνυμικός πίνακας $P(z)$, ένας πίνακας $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$, με $B \neq 0$ και $0 \leq \epsilon_1 < \epsilon_2 < 1$. Τότε ισχύει $W_{\|\cdot\|}^{\epsilon_1}(P(z); B) \subset W_{\|\cdot\|}^{\epsilon_2}(P(z); B)$ και για κάθε $\mu \in W_{\|\cdot\|}^{\epsilon_1}(P(z); B)$, έτσι ώστε $P(\mu) \neq 0$, το σημείο μ ανήκει στο εσωτερικό του $W_{\|\cdot\|}^{\epsilon_2}(P(z); B)$.

Απόδειξη. Για κάθε $\mu \in W_{\|\cdot\|}^{\epsilon_1}(P(z); B)$, το 0 ανήκει στο $F_{\|\cdot\|}^{\epsilon_1}(P(\mu); B)$, με $F_{\|\cdot\|}^{\epsilon_1}(P(\mu); B) \subseteq F_{\|\cdot\|}^{\epsilon_2}(P(\mu); B)$ και συνεπώς, για το σημείο μ ισχύει ότι $\mu \in W_{\|\cdot\|}^{\epsilon_2}(P(z); B)$. Επιπλέον, αν $\mu \in W_{\|\cdot\|}^{\epsilon_1}(P(z); B)$ με $P(\mu) \neq 0$, τότε ο πίνακας $P(\mu)$ δεν μπορεί να είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του B . Έτσι λοιπόν, από την **Πρόταση 4.2.4.**, το 0 ανήκει στο εσωτερικό του $F_{\|\cdot\|}^{\epsilon_2}(P(\mu); B)$. Συνεπώς, από το πρώτο μέρος του **Θεωρήματος 5.5.1.**, προκύπτει ότι το μ είναι εσωτερικό σημείο του $W_{\|\cdot\|}^{\epsilon_2}(P(z); B)$. ■

Πόρισμα 5.5.3. Για κάθε μιγαδικό αριθμό $b \in \mathbb{C}$, $\epsilon \in [0, 1)$ και $q \in (0, 1]$, έχουμε

$$W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); bB) = W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B) \quad \text{και}$$

$$W_{\|\cdot\|}(P(z); bB; q) \supseteq W_{\|\cdot\|}(P(z); B; q), \quad \text{αν } |b| > 1,$$

ή αντίστοιχα,

$$W_{\|\cdot\|}(P(z); bB; q) \subseteq W_{\|\cdot\|}(P(z); B; q), \quad \text{αν } |b| < 1.$$

Απόδειξη. Αφού η σχέση Birkhoff-James ϵ -ορθογωνιότητας είναι ομογενής, έπεται ότι

$$\begin{aligned} W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); bB) &= \left\{ \mu \in \mathbb{C} : bB \perp_{BJ}^{\epsilon_{b,q}} P(\mu) \right\} \\ &= \left\{ \mu \in \mathbb{C} : B \perp_{BJ}^\epsilon P(\mu) \right\} = W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); bB). \end{aligned}$$

Επιπλέον, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} W_{\|\cdot\|}(P(z); B; q) &= \left\{ \mu \in \mathbb{C} : B \perp_{BJ}^{\epsilon_q} P(\mu), \quad \epsilon_q = \frac{\sqrt{\|B\|^2 - q^2}}{\|B\|} \right\} \\ W_{\|\cdot\|}(P(z); bB; q) &= \left\{ \mu \in \mathbb{C} : bB \perp_{BJ}^{\epsilon_{b,q}} P(\mu), \quad \epsilon_{b,q} = \frac{\sqrt{|b|^2 \|B\|^2 - q^2}}{|b| \|B\|} \right\} \\ &= \left\{ \mu \in \mathbb{C} : B \perp_{BJ}^{\epsilon_{b,q}} P(\mu), \quad \epsilon_{b,q} = \frac{\sqrt{\|B\|^2 - \frac{q^2}{|b|^2}}}{\|B\|} \right\}. \end{aligned}$$

Για $|b| > 1$, έχουμε $0 \leq \epsilon_q < \epsilon_{b,q} < 1$ και συνεπώς λόγω της **Πρότασης 5.5.2.**, προκύπτει ότι $W_{\|\cdot\|}(P(z); bB; q) \supseteq W_{\|\cdot\|}(P(z); B; q)$.

Αντίστοιχα, για $|b| < 1$, έχουμε $0 \leq \epsilon_{b,q} < \epsilon_q < 1$ και συνεπώς λόγω της **Πρότασης 5.5.2.**, προκύπτει ότι $W_{\|\cdot\|}(P(z); bB; q) \subseteq W_{\|\cdot\|}(P(z); B; q)$. ■

Πόρισμα 5.5.4. Υποθέτουμε ότι η νόρμα πίνακα $\|\cdot\|$ επάγεται από μία διανυσματική νόρμα κι έστω $x_0 \in \mathbb{C}^n$ και $y_0 \in \mathbb{C}^m$, δύο μοναδιαία διανύσματα τέτοια ώστε να ισχύει $|x_0^* B y_0| = \|B\|$. Τότε για κάθε $\epsilon \in [0, 1)$, το σύνολο Birkhoff-James ϵ -ορθογωνιότητας $W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$, περιέχει όλες τις ρίζες του μιγαδικού πολυωνύμου:

$$x_0^* P(z) y_0 = x_0^* A_l y_0 z^l + \dots + x_0^* A_1 y_0 z + x_0^* A_0 y_0.$$

Επιπλέον, για κάθε $\mu \in \mathbb{C}$, τέτοιο ώστε $P(\mu) \neq 0$ και $x_0^* P(z) y_0 = 0$, ισχύει ότι $\mu \in \text{Int}[W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)]$, για κάθε $\epsilon \in (0, 1)$.

Απόδειξη. Έστω $\mu_0 \in \mathbb{C}$ να είναι μία ρίζα του μιγαδικού πολυωνύμου $x_0^* P(z) y_0$. Τότε για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$, έχουμε ότι

$$\|P(\mu_0) - \lambda B\| \geq \|x_0^* (P(\mu_0) - \lambda B) y_0\| \geq \|B\| |\lambda|.$$

Έτσι λοιπόν, το μ_0 ανήκει στο $W_{\|\cdot\|}^0(P(z); B)$ και λόγω της **Πρότασης 5.5.2.**, η απόδειξη ολοκληρώθηκε. ■

Το τελευταίο αποτέλεσμα αυτής της ενότητας είναι εν μέρει συμπληρωματικό της **Πρότασης 5.5.2.** και μας παρέχει μία ικανή συνθήκη για την εμφάνιση μεμονωμένων σημείων του συνόλου $W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$.

Πρόταση 5.5.5. Έστω ένας $n \times m$ πολυωνυμικός πίνακας $P(z)$, ένας πίνακας $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$, με $B \neq 0$ και $0 \leq \epsilon < 1$. Αν υπάρχει ένα $\mu_0 \in \mathbb{C}$, τέτοιο ώστε να ισχύει $P(\mu_0) = 0$ και $0 \notin F_{\|\cdot\|}^\epsilon(P'(\mu_0); B)$, τότε το μ_0 είναι μεμονωμένο σημείο του συνόλου $W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$.

Απόδειξη. Όπως και στην απόδειξη του **Θεωρήματος 5.5.1.**, αναλύοντας στο πολυώνυμο Taylor του $P(z)$, έχουμε ότι

$$P(z) = P(\mu_0) + (z - \mu_0) P'(\mu_0) + (z - \mu_0) E(z, \mu_0),$$

όπου $P(\mu_0) = 0$ και $\|E(z, \mu_0)\| = o(1)$, καθώς $|z - \mu_0| \rightarrow 0$.

Αφού $0 \notin F_{\|\cdot\|}^\epsilon(P'(\mu_0); B)$, υπάρχει ένα λ_0 , τέτοιο ώστε να ισχύει

$$\|P'(\mu_0) - \lambda_0 B\| < \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda_0|$$

Κι επιλέγοντας ένα $\delta > 0$ κατάλληλα μικρό, μπορούμε να υποθέσουμε ότι για κάθε $\mu \in D(\mu_0, \delta) \setminus \{\mu_0\}$, ισχύει

$$\|E(\mu, \mu_0)\| + \|P'(\mu_0) - \lambda_0 B\| < \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda_0|, \quad \text{ή}$$

$$\|(\mu - \mu_0)P'(\mu_0) + (\mu - \mu_0)E(\mu, \mu_0) - (\mu - \mu_0)\lambda_0 B\| < \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda_0| |\mu - \mu_0|.$$

Ισοδύναμα,

$$\|P(\mu) - \lambda_0(\mu - \mu_0) B\| < \sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\| |\lambda_0(\mu - \mu_0)|.$$

Συνεπώς, ισχύει ότι $W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B) \cap D(\mu_0, \delta) = \{\mu_0\}$ και το μ_0 είναι ένα μεμονωμένο σημείο του συνόλου $W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$. ■

5.6 Σύνολο $W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$ και Νόρμες Πινάκων Επαγόμενες από Εσωτερικό Γινόμενο Πινάκων

Έστω δύο πίνακες $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ με $B \neq 0$ και $\epsilon \in [0, 1)$. Υποθέτουμε ότι η νόρμα πίνακα $\|\cdot\|$ επαγεται από ένα εσωτερικό γινόμενο πινάκων $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Τότε από την **Πρόταση 4.3.7.**, το σύνολο Birkhoff-James ϵ -ορθογωνιότητας του πίνακα A ως προς τον B , $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$, είναι κλειστός δίσκος. Πιο συγκεκριμένα:

$$F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B) = D \left(\frac{\langle A, B \rangle}{\|B\|^2}, \left\| A - \frac{\langle A, B \rangle}{\|B\|^2} B \right\| \frac{\epsilon}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \|B\|} \right).$$

Αξίζει να αναφέρουμε στο σημείο αυτό, ότι η παραπάνω σχέση μπορεί να επαληθευτεί, από την παρατήρηση ότι η Birkhoff-James ϵ -ορθογωνιότητα ταυτίζεται με το εσωτερικό γινόμενο ϵ -ορθογωνιότητας.

Αναλυτικότερα, ένας μιγαδικός $\mu \in \mathbb{C}$, ανήκει στο σύνολο $F_{\|\cdot\|}^\epsilon(A; B)$, αν και μόνο αν, ισχύει

$$B \perp_{BJ}^\epsilon (A - \mu B),$$

ή ισοδύναμα, αν και μόνο αν

$$|\langle B, A - \mu B \rangle| \leq \epsilon \|B\| \|A - \mu B\|,$$

ή ισοδύναμα, αν και μόνο αν

$$\langle B, A - \mu B \rangle \langle A - \mu B, B \rangle \leq \epsilon^2 \|B\|^2 \langle A - \mu B, A - \mu B \rangle,$$

ή ισοδύναμα, αν και μόνο αν

$$\frac{|\langle A, B \rangle|^2}{\|B\|^4} - \mu \frac{\langle B, A \rangle}{\|B\|^2} - \bar{\mu} \frac{\langle A, B \rangle}{\|B\|^2} + |\mu|^2 \leq \epsilon^2 \left(\frac{\|A\|^2}{\|B\|^2} - \mu \frac{\langle B, A \rangle}{\|B\|^2} - \bar{\mu} \frac{\langle A, B \rangle}{\|B\|^2} + |\mu|^2 \right),$$

ή ισοδύναμα, αν και μόνο αν

$$\left| \mu - \frac{\langle A, B \rangle}{\|B\|^2} \right|^2 (1 - \epsilon^2) \leq \frac{\epsilon^2}{\|B\|^2} \left| A - \frac{\langle A, B \rangle}{\|B\|^2} B \right|^2.$$

Θεωρούμε τώρα έναν $n \times m$ πολωνυμικό πίνακα $P(z)$. Λόγω της σχέσης (5.6), έχουμε

$$\begin{aligned} W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B) &= \{ \mu \in \mathbb{C} : B \perp_{BJ}^\epsilon P(\mu) \} \\ &= \{ \mu \in \mathbb{C} : B \perp^\epsilon P(\mu) \} \\ &= \{ \mu \in \mathbb{C} : |\langle P(\mu), B \rangle| \leq \epsilon \|B\| \|P(\mu)\| \}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Συνεπώς, βάσει του ορισμού θα έχουμε

$$\begin{aligned}
W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B) &= \{ \mu \in \mathbb{C} : |\langle P(\mu), B \rangle|^2 \leq \epsilon^2 \|B\|^2 \|P(\mu)\|^2 \} \\
&= \{ \mu \in \mathbb{C} : \langle P(\mu), B \rangle \langle B, P(\mu) \rangle \leq \epsilon^2 \|B\|^2 \langle P(\mu), P(\mu) \rangle \} \\
&= \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \left\langle \sum_{j=0}^l A_j \mu^j, B \right\rangle \left\langle B, \sum_{j=0}^l A_j \mu^j \right\rangle \leq \epsilon^2 \|B\|^2 \left\langle \sum_{j=0}^l A_j \mu^j, \sum_{j=0}^l A_j \mu^j \right\rangle \right\} \\
&= \left\{ \mu \in \mathbb{C} : \sum_{i,j=0}^l \langle A_i, B \rangle \langle B, A_j \rangle \mu^i \bar{\mu}^j - \epsilon^2 \|B\|^2 \sum_{i,j=0}^l \langle A_i, A_j \rangle \mu^i \bar{\mu}^j \leq 0 \right\}.
\end{aligned}$$

Θέτοντας τώρα $\mu = u + iv$, με $u, v \in \mathbb{R}$, η συνάρτηση

$$p_\epsilon(u, v) = \sum_{i,j=0}^l \langle A_i, B \rangle \langle B, A_j \rangle (u + iv)^i (u - iv)^j - \epsilon^2 \|B\|^2 \sum_{i,j=0}^l \langle A_i, A_j \rangle (u + iv)^i (u - iv)^j$$

είναι ένα μιγαδικό πολυώνυμο των μεταβλητών $u, v \in \mathbb{R}$, συνολικού βαθμού $2l$, με πραγματικούς συντελεστές. Έτσι το σύνορο $\partial W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$ του συνόλου ορθογωνιότητας $W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$, ανήκει στην αλγεβρική καμπύλη:

$$\{ u + iv \in \mathbb{C} : p_\epsilon(u, v) = 0, u, v \in \mathbb{R} \}.$$

Επιπλέον, για $\epsilon = 0$, έχουμε:

$$W_{\|\cdot\|}^0(P(z); B) = \{ \mu \in \mathbb{C} : \langle A_l, B \rangle \mu^l + \dots + \langle A_1, B \rangle \mu + \langle A_0, B \rangle = 0 \}. \quad (5.9)$$

Συνεπώς, με τη βοήθεια της **Πρότασης 5.5.2.**, προκύπτει το ακόλουθο αποτέλεσμα, που είναι παρόμοιο με το **Πόρισμα 5.5.4.**

Πόρισμα 5.6.1. Για κάθε $\epsilon \in [0, 1)$, όλες οι ρίζες του μιγαδικού πολυωνύμου

$$\langle P(z), B \rangle = \langle A_l, B \rangle z^l + \dots + \langle A_1, B \rangle z + \langle A_0, B \rangle,$$

ανήκουν στο σύνολο Birkhoff-James ϵ -ορθογωνιότητας $W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)$. Επιπλέον, για κάθε $\mu \in \mathbb{C}$, τέτοιο ώστε να ισχύουν $P(\mu) \neq 0$ και $\langle P(z), B \rangle = 0$, προκύπτει ότι $\mu \in \text{Int}[W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B)]$, για κάθε $\epsilon \in [0, 1)$.

Η παραπάνω συζήτησή μας, οδηγεί στο συμπέρασμα ότι μπορεί να επιτραπεί η δημιουργία κενών συνόλων ϵ -ορθογωνιότητας πολυωνυμικών πινάκων. Συγκεκριμένα, αν έχουμε:

$$\langle A_j, B \rangle = 0, \text{ για } j = 0, 1, \dots, l \quad \text{και} \quad \langle A_0, B \rangle \neq 0,$$

τότε το πολυώνυμο $\langle P(z), B \rangle = \langle A_0, B \rangle$ είναι σταθερό και μη μηδενικό κι έτσι από τη σχέση (5.9), εξάγουμε το συμπέρασμα ότι $W_{\|\cdot\|}^0(P(z); B) = \emptyset$. Σε αυτή την ειδική περίπτωση, μπορούμε επίσης να σημειώσουμε ότι $W_{\|\cdot\|}^0(P(z); B) = \{\infty\}$. Αυτό

συμβαίνει επειδή το σύνολο Birkhoff-James ϵ -ορθογωνιότητας $W_{\|\cdot\|}^0(R(z); B)$, του αλγεβρικά αντίστροφου πίνακα $R(z)$ του πίνακα $P(z)$, όπου

$$W_{\|\cdot\|}^0(R(z); B) = \{ \mu \in \mathbb{C} : \langle A_0, B \rangle \mu^l = 0 \}, \text{ με}$$

$$R(z) = \sum_{j=0}^l A_{l-j} z^j,$$

ταυτίζεται με την αρχή των αξόνων, δηλαδή με το 0.

Σημείωση: Ο παραπάνω ισχυρισμός είναι συμβατός με την **Πρόταση 5.4.2.**, το **Θεώρημα 5.4.6.**, αλλά και το γεγονός ότι για κάθε $\epsilon \in (0,1)$, το σύνολο

$$W_{\|\cdot\|}^\epsilon(P(z); B) = \{ \mu \in \mathbb{C} : |\langle A_0, B \rangle| \leq \epsilon \|B\| \|P(\mu)\| \}$$

είναι μη φραγμένο και περιέχει ένα σύνολο της μορφής:

$$\{ z \in \mathbb{C} : |z| \geq r \}, \text{ για κάποιον πραγματικό αριθμό } r > 0.$$

Παράδειγμα 5.6.2.

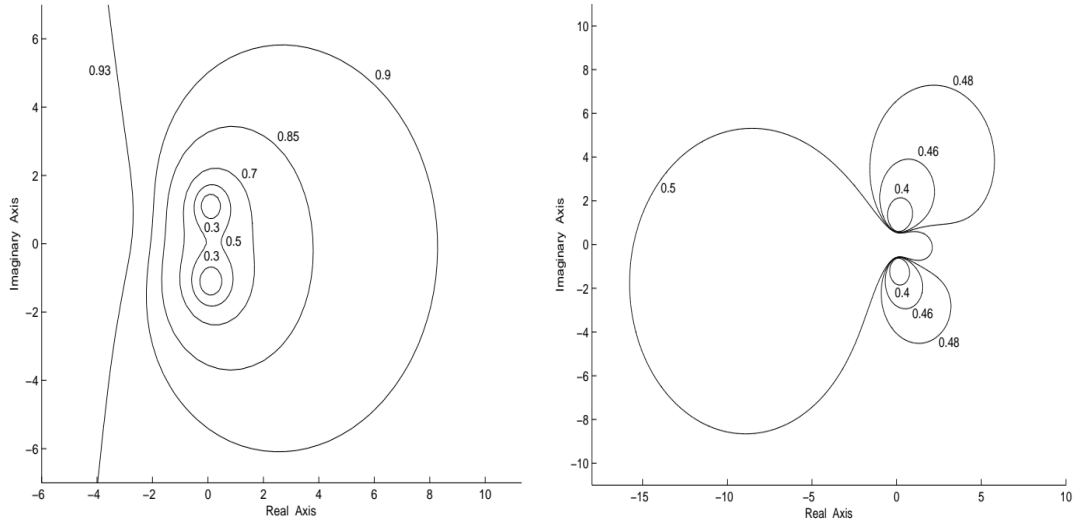
Στο τελευταίο παράδειγμα της εργασίας μας, αρχικά θα θεωρήσουμε έναν 3×2 πολυωνυμικό πίνακα 2^{ου} βαθμού, έστω $P(z)$ κι επιπλέον, τον αλγεβρικά αντίστροφο του, πίνακα $R(z)$, καθώς και έναν πίνακα $B \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$, ως εξής:

$$P(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix} z^2 + \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & -1 \\ 0.5 & 0.1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ -0.1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$R(z) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ -0.1 & 0 \end{bmatrix} z^2 + \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & -1 \\ 0.5 & 0.1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix} \text{ και}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 \\ 0 & 0.9 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}.$$

Για τη νόρμα Frobenius και εφαρμόζοντας τη σχέση **(5.8)**, θα σχεδιάσουμε τα σύνολα Birkhoff-James ϵ -ορθογωνιότητας $W_{\|\cdot\|_F}^\epsilon(P(z); B)$ και $W_{\|\cdot\|_F}^\epsilon(R(z); B)$, για $\epsilon = 0.3, 0.5, 0.7, 0.85, 0.9, 0.93$ και $\epsilon = 0.4, 0.46, 0.48, 0.5$, αντίστοιχα. Το σύνολο $W_{\|\cdot\|_F}^\epsilon(P(z); B)$ απεικονίζεται στο αριστερό μέρος της εικόνας που ακολουθεί, ενώ το σύνολο $W_{\|\cdot\|_F}^\epsilon(R(z); B)$, αποτυπώνεται στο δεξί μέρος της ίδιας εικόνας.



Σχήμα 5.1 Τα σύνολα Birkhoff-James ϵ -ορθογωνιότητας $W_{\|\cdot\|_F}^\epsilon(P(z); B)$ (αριστερή απεικόνιση) και $W_{\|\cdot\|_F}^\epsilon(R(z); B)$ (δεξιά απεικόνιση).

Αξίζει να σημειώσουμε ότι αν εξαιρέσουμε τον λημνίσκο που περιέχει την αρχή των αξόνων, το σύνολο $W_{\|\cdot\|_F}^{0.5}(R(z); B)$ ταυτίζεται με το μιγαδικό επίπεδο. Επίσης, τα σύνολα $W_{\|\cdot\|_F}^\epsilon(P(z); B)$ και $W_{\|\cdot\|_F}^\epsilon(R(z); B)$ γίνονται μη φραγμένα, όταν $\epsilon = 0.9288$ και $\epsilon = 0.4928$, αντίστοιχα. Ακόμα, η αρχή των αξόνων βρίσκεται εντός των συνόλων Birkhoff-James ϵ -ορθογωνιότητας, των αντίστοιχων μεγιστοβάθμιων συντελεστών, επιβεβαιώνοντας έτσι το **Θεώρημα 5.4.6.** Τα αποτελέσματά μας μέχρι τώρα επαληθεύουν και την **Πρόταση 5.4.2.**, την **Πρόταση 5.4.7.**, αλλά και την **Πρόταση 5.5.2.**

Τέλος, θεωρούμε τα πολυώνυμα:

$$\langle P(z), B \rangle = 1.66 z^2 - 0.28 z + 2.1 \quad \text{και}$$

$$\langle R(z), B \rangle = 2.1 z^2 - 0.28 z + 1.66 .$$

Στα πολυώνυμα αυτά αντιστοιχούν οι ρίζες $0.0843 \pm i 1.1216$ (για το $\langle P(z), B \rangle$) καθώς και $0.0667 \pm i 0.8866$ (για το $\langle R(z), B \rangle$). Παρατηρούμε λοιπόν ότι:

$$0.0843 \pm i 1.1216 \in W_{\|\cdot\|_F}^\epsilon(P(z); B) \quad \text{και}$$

$$0.0667 \pm i 0.8866 \in W_{\|\cdot\|_F}^\epsilon(R(z); B),$$

επιβεβαιώνοντας με τον τρόπο αυτόν το **Πόρισμα 5.6.1.**

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] A. Abdollahi, The polynomial numerical hull of a matrix and algorithms for computing the numerical range, *Appl. Math. Comput.*, 180 (2006) 635–640.
- [2] R. Bhatia and P. Šemrl, Orthogonality of matrices and some distance problems, *Linear Algebra Appl.*, 287 (1999) 77–85.
- [3] D. Boley, Estimating the sensitivity of the algebraic structure of pencils with simple eigenvalue estimates, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 11 (1990) 632–643.
- [4] G. Boutry, M. Elad, G.H. Golub and P. Milanfar, The generalized eigenvalue problem for nonsquare pencils using a minimal perturbation approach, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 27 (2005) 582–601.
- [5] F.F. Bonsall and J. Duncan, *Numerical Ranges of Operators on Normed Spaces and of Elements of Normed Algebras*, London Mathematical Society Lecture Note Series, Cambridge University Press, New York, 1971.
- [6] F.F. Bonsall and J. Duncan, *Numerical Ranges II*, London Mathematical Society Lecture Notes Series, Cambridge University Press, New York, 1973.
- [7] A. Greenbaum, Generalizations of the field of values useful in the study of polynomial functions of a matrix, *Linear Algebra Appl.*, 347 (2002) 233–249.
- [8] K.E. Gustafson and D.K.M. Rao, *Numerical Range. The Field of Values of Linear Operators and Matrices*, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [9] D.W. Hadwin, K.J. Harrison and J.A. Ward, Numerical ranges and matrix completions, *Linear Algebra Appl.*, 315 (2000) 145–154.
- [10] P.R. Halmos, *A Hilbert Space Problem Book*, 2nd edition, Springer-Verlag, New York, 1982.
- [11] R.A. Horn and C.R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge 1985.
- [12] R.A. Horn and C.R. Johnson, *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge 1991.
- [13] R.C. James, Orthogonality and linear functionals in normed linear spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 61 (1947) 265–292.
- [14] C.-K. Li, and L. Rodman, Numerical range of matrix polynomials, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 15 (1994) 1256–1265.
- [15] G. Lumer, Semi-inner product spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 100 (1961) 29–43.
- [16] O. Nevanlinna, *Convergence of Iterations for Linear Equations*, Birkhäuser, Basel, 1993.
- [17] J.G. Stampfli and J.P. Williams, Growth condition and the numerical range in a Banach algebra, *Tohoku Math. Journ.*, 20 (1968) 417–424.

- [18] G.W. Stewart, Perturbation theory for rectangular matrix pencils, *Linear Algebra*
- [19] G.W. Stewart and J.-Q. Sun, *Matrix Perturbation Theory*, Academic Press, 1991.
- [20] G.L. Thompson and R.L. Weil, The roots of matrix pencils ($Ay = \lambda By$): Existence, calculations, and relations to game theory, *Linear Algebra Appl.*, 5(1972) 207–226.
- [22] A. Aretaki and I. Maroulas, Investigating the numerical range and q -numerical range of nonsquare matrices, *preprint*, 2010
- [23] G. Birkhoff, Orthogonality in linear metric spaces, *Duke Math. J.*, 1 (1935), 169–172
- [24] M.-T. Chien and H. Nakazato, The boundary of the q -numerical range of a reducible matrix, *Linear and Multilinear Algebra*, 55 (2007), 275–292.
- [25] M.-T. Chien, H. Nakazato and P. Psarrakos, On the q -numerical range of matrices and matrix polynomials, *Linear and Multilinear Algebra*, 53 (2005), 357–374.
- [26] J. Chmielinski, On an ε -Birkhoff orthogonality, *J. Ineq. Pure and Appl. Math.*, 6 (2005), Article 79.
- [27] Ch. Chorianopoulos, S. Karanasios and P. Psarrakos, A definition of numerical range of rectangular matrices, *Linear and Multilinear Algebra*, 57 (2009), 459–475.
- [28] S.S. Dragomir, On approximation of continuous linear functional in normed linear spaces, *An. Univ. Timișoara Ser. Stiint. Mat.*, 29 (1991), 51–58
- [29] I. Gohberg, P. Lancaster and L. Rodman, *Matrix Polynomials*, Academic Press, New York, 1982
- [30] F. Hausdorff, Der Wertvorrat einer Bilinearform, *Math. Z.*, 3 (1919), 314–316.
- [31] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer-Verlag, Berlin, 1976.
- [32] P. Lancaster and P. Psarrakos, Normal and seminormal eigenvalues of analytic matrix functions, *Integral Equations Operator Theory*, Birkhauser, 41 (2001), 331–342.
- [33] P. Lancaster and M. Tismenetsky, *The Theory of Matrices*, 2nd edition, Academic Press, Orlando, 1985
- [34] H.W.J. Lenferink and M.N. Spijker, On generalization of the numerical range of a matrix, *Linear Algebra Appl.*, 140 (1990), 251–266.
- [35] C.-K. Li and H. Nakazato, Some results on the q -numerical range, *Linear and Multilinear Algebra*, 43 (1998), 385–409.

- [36] A.S. Markus, Introduction to the Spectral Theory of Polynomial Operator Pencils, Amer. Math. Society, Providence, Translations of Math. Monographs, Vol. 71, 1988.
- [37] M.V. Balashov, Geometric difference of multivalued maps, Mathematical Notes, 70 (2001), 147–153.
- [38] Ch. Chorianopoulos, S. Karanasios and P. Psarrakos, A definition of numerical range of rectangular matrices, Linear and Multilinear Algebra, 57 (2009), 459-475
- [39] Ch. Chorianopoulos and P. Psarrakos, Birkhoff-James approximate orthogonality sets and numerical ranges, Linear Algebra Appl., 434 (2011), 2089–2108.
- [40] Ch. Chorianopoulos and P. Psarrakos, On the continuity of Birkhoff-James ϵ -orthogonality sets, Linear and Multilinear Algebra, 61 (2013), 1447-1454.
- [41] H.W.J. Lenferink and M.N. Spijker, A generalization of the numerical ranges of a matrix, Linear Algebra Appl., 140 (1990), 251–266.
- [42] C.-K. Li and L. Rodman, Numerical range of matrix polynomials, SIAM J. Matrix Anal. Appl., 15 (1994), 1256–1265.
- [21] M. Martín, On different definitions of numerical range, J. Math. Anal. Appl. 433 (2016) 877-886
- [43] A.S. Markus, Introduction to the Spectral Theory of Polynomial Operator Pencils, Amer. Math. Society, Providence, Translations of Math. Monographs, Vol. 71, 1988.
- [44] J. Maroulas and P. Psarrakos, The boundary of numerical range of matrix polynomials, Linear Algebra Appl., 267 (1997), 101–111.
- [45] J. Maroulas and P. Psarrakos, On the connectedness of numerical range of matrix polynomials, Linear Algebra Appl., 280 (1998), 97–1
- [46] H. Nakazato and P. Psarrakos, On the shape of numerical range of matrix polynomials, Linear Algebra Appl., 338 (2001), 105–123.
- [47] P. Psarrakos and M. Tsatsomeros, On the relation between the numerical range and the joint numerical range of matrix polynomials, Electr. J. Linear Algebra, 6 (2000), 20–30.
- [48] H. Brezis, Συναρτησιακή Ανάλυση, Θεωρία και Εφαρμογές, Αθήνα, 1997
- [49] G. Strang, Γραμμική Άλγεβρα και Εφαρμογές, Ηράκλειο, 2014
- [50] Σ. Καρανάσιος, Θεωρία Τελεστών και Εφαρμογές, Αθήνα, 2017
- [51] Π. Ψαρράκος, Θέματα Ανάλυσης Πινάκων, Αθήνα, 2020