



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
Δ.Π.Μ.Σ. ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

Μη-Γραμμική Δυναμική Οπτομηχανικών
Συστημάτων και Διατάξεων

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΣΤΑΜΑΤΗΣ ΧΡΗΣΤΟΥ

Επιβλέπων: Ιωάννης Κομίνης

Αθήνα, Ιούνιος 2021



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙ-
ΣΤΗΜΩΝ
Δ.Π.Μ.Σ. ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

Μη-Γραμμική Δυναμική Οπτομηχανικών Συστημάτων και Διατάξεων

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΣΤΑΜΑΤΗΣ ΧΡΗΣΤΟΥ

Επιβλέπων: Ιωάννης Κομίνης

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 6η Ιουλίου 2021.

(Υπογραφή)

(Υπογραφή)

(Υπογραφή)

.....
Ι. Κομίνης
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Α. Γιαννακόπουλος
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Π. Τσόπελας
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούνιος 2021



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙ-
ΣΤΗΜΩΝ
Δ.Π.Μ.Σ. ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

Copyright ©–All rights reserved Σταμάτιος Χρήστου, 2021.
Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα.

Το περιεχόμενο αυτής της εργασίας δεν απηχεί απαραίτητα τις απόψεις του Τμήματος, του Επιβλέποντα, ή της επιτροπής που την ενέκρινε.

Υπεύθυνη Δήλωση

Βεβαιώνω ότι είμαι συγγραφέας αυτής της μεταπτυχιακής εργασίας και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της, είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στη διπλωματική εργασία. Επίσης έχω αναφέρει τις όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε αυτές αναφέρονται ακριβώς είτε παραφρασμένες. Επίσης βεβαιώνω ότι αυτή η μεταπτυχιακή εργασία προετοιμάστηκε από εμένα προσωπικά ειδικά για τις απαιτήσεις του Δ.Π.Μ.Σ. ‘Εφαρμοσμένη Μηχανική’ της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

(Υπογραφή)

.....
Σταμάτιος Χρήστου

Περίληψη

Η δυναμική συμπεριφορά των Οπτομηχανικών Συστημάτων είναι ένα πεδίο έρευνας που προσελκύει ενδιαφέρον κυρίως τα τελευταία χρόνια και ήδη αποδίδει σημαντικά αποτελέσματα, ειδικά ως προς τις εφαρμογές των συστημάτων αυτών. Οι Οπτομηχανικοί Ταλαντωτές είναι συστήματα η λειτουργία των οποίων στηρίζεται στην σύζευξη της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας με την μηχανική κίνηση μικρής κλίμακας. Αυτή η αλληλεπίδραση παρουσιάζει πληθώρα φυσικών και δυναμικών ιδιοτήτων, όπως η μεταβολή της συχνότητας μηχανικής ταλάντωσης λόγω της επίδρασης του φωτός, μεταβολή του πλάτους μηχανικής ταλάντωσης που εκδηλώνεται ως “ψύξη” ή “ενίσχυση” του ταλαντωτή, παραμόρφωση του δυναμικού του ταλαντωτή (διστάθεια) κ.α. Εφαρμογές των Οπτομηχανικών Συστημάτων αποτελούν μεταξύ άλλων, υψηλής ευαισθησίας αισθητήρες δύναμης, επιτάχυνσης, μάζας και μετατοπίσης, μετατροπείς μεταξύ διαφόρων μηκών κύματος, αποθήκευση φωτός κ.α.

Στόχος της εργασίας είναι η δυναμική ανάλυση του μαθηματικού μοντέλου του Οπτομηχανικού Ταλαντωτή μέσω της μεταβολής των οπτικών και μηχανικών παραμέτρων του συστήματος. Η εύρεση των ιδιοτιμών του συστήματος μας δίνει την δυνατότητα να αξιολογήσουμε την δυναμική ευστάθεια του συστήματος για μεγάλο εύρος παραμέτρων, προβλέποντας δυναμικά φαινόμενα όπως ευσταθείς σπείρες και γέννηση οριακών κύκλων από διακλαδώσεις Hopf. Η διερεύνηση που ακολουθεί, κατά την οποία επιλύουμε το σύστημα μη-γραμμικών συνήθων διαφορικών εξισώσεων με χρήση μεθόδων αριθμητικής ανάλυσης, μας δίνει την δυνατότητα εξαγωγής των φασικών πορτραίτων του συστήματος για πλήθος τιμών των παραμέτρων τα οποία αποκαλύπτουν φαινόμενα μη ανιχνεύσιμα στην στατική ανάλυση, όπως διακλαδώσεις σάγματος κόμβου οριακών κύκλων και μετάβαση σε χαοτική συμπεριφορά. Επιπλέον, με χρήση των αριθμητικών μεθόδων αποκτούμε εποπτεία της δυναμικής συμπεριφοράς του συστήματος συναρτήσει των αρχικών συνθηκών των μεταβλητών που επιλέγουμε. Η ανάλυση μας επιτρέπει να εξάγουμε τα διαγράμματα περιοχών έλξης των διαφόρων ελκυστών του συστήματος τα οποία βοηθούν στην επιλογή των αρχικών συνθηκών με γνώμονα την δυναμική συμπεριφορά που επιζητούμε από ένα Οπτομηχανικό Σύστημα. Στο τελευταίο κεφάλαιο κάνουμε μία σύντομη εισαγωγή στα Exceptional Points (EPs), ένα φαινόμενο που εμφανίζεται στα μη-Ερμιτιανά συστήματα και για τα οποία υπάρχουν ερευνητικές ενδείξεις ότι δημιουργούν εξωτικά φαινόμενα όπως αυξημένη ευαισθησία σε αισθητήρες. Η απόκριση θορύβου του συστήματος προβλέπει, μεταξύ άλλων, την εμφάνιση πλευρικών φασματικών γραμμών (sidebands) στην περιοχή του EP.

Λέξεις Κλειδιά

Οπτομηχανικός Ταλαντωτής, θεωρία διακλαδώσεων, ανάλυση ευστάθειας, μη-γραμμική δυναμική, περιοχές έλξης

Abstract

The dynamical behavior of Optomechanical Systems is a research field of intense interest, attracting interest mainly in recent years and it already yields important results especially regarding the applications of such systems. Optomechanical resonators are systems whose operation is based upon the interaction between electromagnetic radiation and small-scale mechanical motion. This mechanism generates a wide variety of physical and dynamical properties, such as the optically induced change in the oscillation frequency of the mirror, a change in the amplitude of the mechanical oscillation which is manifested as “cooling” or “heating” of the oscillator, distortion of the oscillator potential (bistability) etc. Applications of Optomechanical Systems include highly sensitive optical detection and manipulation of small forces, displacements, masses, and accelerations, optical wavelength conversion between arbitrary wavelengths, optomechanical light storage etc.

This work aims to the analysis of a mathematical model of the Optomechanical resonator by varying the optical and mechanical parameters of the system. By finding the eigenvalues of the system it allows us to assess the dynamical stability of the system for a wide range of the parameter values, predicting dynamical phenomena such as stable spirals and generation of limit cycles stemming from Hopf bifurcations. The investigation that follows, where we solve the system of nonlinear ordinary differential equations (ODEs) using numerical analysis methods, allows us to extract the phase portraits of the system for a multitude of parameter values which reveal phenomena not detectable under the static analysis such as saddle-node bifurcations of limit cycles and period-doubling route to chaos. Moreover, with the implementation of numerical methods we gain insight into the dynamical behavior of the system with respect to the initial conditions of the variables we choose. The analysis allows us to extract the basins of attractions of the attractors of the system that help us in the selection of initial conditions according to the dynamical behavior we seek from an Optomechanical system. In the last section we make a brief introduction to Exceptional Points (EPs), an effect that appears in non-Hermitian systems, for which there is evidence that they can create exotic phenomena such as increased sensitivity in sensors. The noise response of the system predicts, among others, the emergence of sidebands in the vicinity of the EP.

Keywords

Optomechanical oscillator, bifurcation theory, stability analysis, nonlinear dynamics, basins of attraction

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	1
2	Βασική Φυσική των Οπτομηχανικών Συστημάτων	3
2.1	Πίεση Ακτινοβολίας	3
2.1.1	Φωτόνια και Ορμή	3
2.1.2	Η Πίεση Ακτινοβολίας	4
2.2	Η κοιλότητα Fabry–Pérot	6
2.3	Το βασικό Οπτομηχανικό Σύστημα	9
2.3.1	Εισαγωγή αδιάστατων παραμέτρων και μεταβλητών	10
2.4	Φαινόμενα που απορρέουν από την Οπτομηχανική σύζευξη: I. Στατικά Φαινόμενα	12
2.4.1	Οπτικό Δυναμικό και Οπτική Διστάθεια	12
2.5	Φαινόμενα που απορρέουν από την Οπτομηχανική σύζευξη: II. Δυναμικά Φαινόμενα	16
2.5.1	Φαινόμενο Οπτικού Ελατηρίου	18
2.5.2	Οπτομηχανικός Ρυθμός Απόσβεσης Γ_{opt}	19
2.5.3	Οπτομηχανική Ψύξη και Ενίσχυση	21
2.6	Πειραματικές Υλοποιήσεις και Εφαρμογές	26
2.6.1	Πειραματικές Υλοποιήσεις	26
2.6.2	Εφαρμογές των Οπτομηχανικών Συστημάτων	29
3	Αναλυτική Επίλυση του Συστήματος	31
3.1	Εισαγωγή	31
3.2	Μορφοποίηση του συστήματος	32
3.3	Σημεία Ισορροπίας	34
3.3.1	Αναλυτικές εκφράσεις των λύσεων	35
3.4	Ευστάθεια λύσεων ισορροπίας	40
3.4.1	Εύρεση ιδιοτιμών της Ιακωβιανής	40
3.4.2	Εύρεση ιδιοδιανυσμάτων της Ιακωβιανής	43
3.4.3	Διαγράμματα Ευστάθειας στον Χώρο των Παραμέτρων	45
4	Αριθμητική Διερεύνηση	49
4.1	Εισαγωγή	49
4.2	Φασικά πορτραίτα του συστήματος	50
4.2.1	<i>Επίλυση του συστήματος για $\Delta = 1.7$</i>	50
4.2.2	<i>Επίλυση του συστήματος για $\Delta = 0.66$</i>	56
4.2.3	<i>Επίλυση του συστήματος για $\Delta = -0.99$</i>	63

5	Exceptional Points και Απόκριση Θορύβου	73
5.1	Εισαγωγή	73
5.2	Αναζήτηση EPs στο σύστημα μας	76
5.3	Απόκριση Θορύβου	77
6	Επίλογος	81
6.1	Σύνοψη - Συμπεράσματα	81
6.2	Μελλοντικές Προεκτάσεις	82

Κατάλογος σχημάτων

1	Πάνω: Η Σκέδαση Compton ενός φωτονίου αρχικής ορμής \vec{p} με ένα στάσιμο ηλεκτρόνιο. Κάτω: Διανυσματική απεικόνιση της διατήρησης της Ορμής κατά την Σκέδαση Compton [1].	4
2	Το φως μπορεί να θέσει ένα αντικείμενο μεγέθους μικρομέτρου σε ταλάντωση ασκώντας του πίεση (κάτω), να δημιουργεί πλάγιες πιέσεις (πάνω αριστερά) ή να αναγκάσει κάποιο υλικό να συμπιεστεί [2].	5
3	Δημιουργία στάσιμων κυμάτων μέσα σε μία οπτική κοιλότητα Fabry–Pérot μήκους L [3].	6
4	(α) Στη στάσιμη κατάσταση, ένας ταλαντωτής Fabry–Pérot χωρίς απώλειες ($\mathcal{F} = \infty$) υποστηρίζει μόνο κύματα συχνοτήτων που συμπίπτουν με τις συχνότητες συντονισμού της κοιλότητας ν_q . (b) Ένας ταλαντωτής με απώλειες υποστηρίζει κυρίως κύματα στην περιοχή των συχνοτήτων συντονισμού αλλά μπορεί να υποστηρίξει και κύματα άλλων συχνοτήτων [4].	8
5	Το βασικό Οπτομηχανικό Σύστημα αποτελούμενο από μία οπτική κοιλότητα τύπου Fabry–Pérot της οποίας ο ένας καθρέπτης μπορεί να κινείται [5].	9
6	Η αλλαγή στην σταθερά ελατηρίου του μηχανικού ταλαντωτή λόγω της δύναμης ακτινοβολίας. Η διακεκομμένη καμπύλη αναπαριστά την δύναμη ακτινοβολίας συναρτήσει της Διαφοράς Συχνότητας. Η μπλε καμπύλη δείχνει την παράγωγο της δύναμης ακτινοβολίας η οποία είναι η οπτική σταθερά του ελατηρίου [ο δεύτερος όρος στο δεξί μέρος της εξίσωσης (2.30)] [6].	14
7	Η στατική Οπτομηχανική διστάθεια εμφανίζεται όταν η ένταση του Laser είναι αρκετά υψηλή ώστε να δημιουργήσει δύο ευσταθή ελάχιστα στο ολικό μηχανικό δυναμικό. Αυτό δημιουργεί φαινόμενα διστάθειας και υστέρησης όταν καταγράφουμε τον αριθμό φωτονίων που κυκλοφορούν στην κοιλότητα ή την μετάδοση σαν συνάρτηση του Δ [7].	15
8	Διάγραμμα του μέσου αριθμού φωτονίων εντός της κοιλότητας κανονικοποιημένου ως προς τον μέγιστο αριθμό φωτονίων σε κατάσταση συντονισμού. Υστέρηση σε περιοχή διστάθειας (γκρι περιοχή). Τα διακεκομμένα βέλη δείχνουν τις μεταπτώσεις μεταξύ των ευσταθών κλάδων καθώς αυξάνουμε ή μειώνουμε το Δ . Με κόκκινο χρώμα συμβολίζεται ο ασταθής κλάδος. Οι τιμές των παραμέτρων είναι: $P = 0.1$, $\kappa = 0.3$, $\Gamma = 0.075$	16
9	Οπτομηχανικός ρυθμός ψύξης και διαφορά συχνότητας στην περιοχή παραμέτρων $\kappa \ll \Omega_M$. Βλέπουμε ότι στην συγκεκριμένη περιοχή η $\delta\Omega_M$ (στο σχήμα δίνεται ως $\Omega/2\pi$) μηδενίζεται στις τιμές Δ που έχουμε μέγιστη ψύξη ή ενίσχυση [7].	20

10	Εξάρτηση της δύναμης ακτινοβολίας από την θέση του μηχανικού ταλαντωτή [8].	22
11	Φάσμα θορύβου του μηχανικού ταλαντωτή για διάφορες τιμές της Διαφοράς Συχνότητας Δ . Οι καμπύλες, από την υψηλότερη στην χαμηλότερη θερμοκρασία, αντιστοιχούν σε $\Delta = 0, -0.1, -0.25, -0.4, -0.6$ και για σταθερή τιμή της ισχύος εισόδου $P_{in} = 5mW$ [9].	24
12	Οπτομηχανικός ρυθμός απόσβεσης και Φαινόμενο Οπτικού Ελατηρίου συναρτήσει του Δ για διάφορες τιμές της παραμέτρου κ σύμφωνα με τη θεωρία (μαύρες γραμμές) και τα πειραματικά δεδομένα (κόκκινες τελείες). Αριστερά: Ολικός Οπτομηχανικός ρυθμός απόσβεσης $\Gamma_{eff}/2\pi$ συναρτήσει της Διαφοράς Συχνότητας Δ/κ για μειούμενες τιμές του λόγου κ/Ω_M από πάνω προς τα κάτω ($\kappa/\Omega_M=3.7, 2.2, 1.4, 0.7$). Δεξιά: Φαινόμενο Οπτικού Ελατηρίου $\delta\Omega_M/2\pi$ δηλ. η αλλαγή στην συχνότητα της μηχανικής ταλάντωσης λόγω του φωτός [7].	25
13	Πειραματικά Οπτομηχανικά Συστήματα. Οι μάζες κυμαίνονται από χιλιόγραμμα έως πικο-γραμμάρια ενώ οι συχνότητες κυμαίνονται από δεκάδες MHz έως το επίπεδο του Hz. CPW, συνεπίπεδος κυματοδηγός [5].	27
14	Οπτικές (πάνω) και Μηχανικές ζώνες(κάτω) και ρυθμοί ατελειών ενός φωτονικού κρύσταλλου πυριτίου [10].	28
15	Διάφορες εφαρμογές Οπτομηχανικών αισθητήρων μετατόπισης. (a) Περιστρεφόμενος δίσκος με περιοχές μεταβαλλόμενης πυκνότητας για έλεγχο Νευτώνιας βαρύτητας. (b) Βραχίονας Μικροσκοπίου Ατομικής Δύναμης (AFM) με χρήση μικροδίσκου για ανάγνωση θέσης. (c) Μικροτοροειδής ταλαντωτής τύπου whispering-gallery με κομμάτι από Terfenol-D τοποθετημένο στην κορυφή του για μέτρηση μαγνητικών πεδίων [11].	30
16	Αποθήκευση και ανάκτηση οπτικής πληροφορίας. (a) Σχηματική απεικόνιση ενός Οπτομηχανικού ταλαντωτή. (b) Φασματική θέση των παλμών εγγραφής, ανάγνωσης και σήματος. (c) Η ένταση του παλμού σήματος και του ανακτηθέντα παλμού (κόκκινες καμπύλες), μαζί με την ένταση της αποθηκευμένης μηχανικής ταλάντωσης (μαύρη διακεκομμένη καμπύλη) σαν συνάρτηση του χρόνου, τα οποία απεικονίζουν την οπτομηχανική διαδικασία της αποθήκευσης και ανάκτησης του φωτός [12].	30

- 17 Διαγράμματα στάσιμων λύσεων του συστήματος για δύο σταθερές τιμές της Διαφοράς Συχνότητας Δ . Στάσιμες λύσεις της έντασης του οπτικού πεδίου $|a|^2$ συναρτήσει της έντασης του laser εισόδου P για (Πάνω) $\Delta = 0.5$ και (Κάτω) $\Delta = -0.55$. Οι υπόλοιπες παράμετροι είναι: $\kappa = 0.3, \Gamma = 0.075$. Η διακεκομμένη καμπύλη συμβολίζει τον ασταθή κλάδο λύσεων. Παρατηρούμε ότι ενώ για την θετική τιμή του Δ έχουμε έναν κλάδο λύσεων, για την αρνητική τιμή παρουσιάζονται τρεις κλάδοι λύσεων για συγκεκριμένο εύρος τιμών της έντασης του laser. 37
- 18 Διαγράμματα στάσιμων λύσεων του συστήματος για δύο σταθερές τιμές της έντασης P του laser. Στάσιμες λύσεις της έντασης του οπτικού πεδίου $|a|^2$ συναρτήσει του detuning Δ για (Πάνω) $P = 0.001$ και (Κάτω) $P = 0.1111$. Οι υπόλοιπες παράμετροι είναι: $\kappa = 0.3, \Gamma = 0.075$. Η διακεκομμένη καμπύλη συμβολίζει τον ασταθή κλάδο λύσεων. 38
- 19 Διαγράμματα ύπαρξης και ευστάθειας των στάσιμων λύσεων του συστήματος στον τετραδιάστατο χώρο των παραμέτρων $(P, \Delta, \kappa, \Gamma)$. Η πράσινη διακεκομμένη γραμμή συμβολίζει το σύνορο στο οποίο συμβαίνει διακλάδωση Hopf καθώς αυξάνουμε το P 46
- 20 Διάγραμμα Ευστάθειας του συστήματος στον χώρο των παραμέτρων για τιμές παραμέτρων $\kappa = 0.3, \Gamma = 0.075$. Η πράσινη διακεκομμένη καμπύλη συμβολίζει το όριο στο οποίο συμβαίνουν διακλάδώσεις Hopf. Ο χρωματικός κώδικας είναι ο εξής: Μπλε→Ευσταθείς Σπείρες, Ροζ→Ασταθείς Σπείρες, Μαύρο→Μία ευσταθής σπείρα, μία ασταθής σπείρα και ένα σαγματικό σημείο, Κίτρινο→Δύο ευσταθείς σπείρες και ένα σαγματικό σημείο (Διστάθεια). 49
- 21 Διαγράμματα φάσης του μη-γραμμικού συστήματος για (α) $P = 0.05$ και (β) $P = 0.18$. Οι αρχικές συνθήκες είναι οι εξής: (α) $[x = 0.9246 \rho = 1 \phi = 0.5 u = 1.71]$, (β) $[x = 0.1249 \rho = 3.857 \phi = 1.54 u = 0.1574]$. Στο Σχήμα 21β απεικονίζεται επιπλέον κι ο οριακός κύκλος που προκύπτει με τις ίδιες αρχικές συνθήκες αλλά για $P = 0.25$ (με μαύρο χρώμα). Στο Σχήμα 21γ απεικονίζονται, για λόγους ευκρίνειας, οι οριακοί κύκλοι που προκύπτουν από την επίλυση του συστήματος για τις ίδιες, πάντα, αρχικές συνθήκες και για διαφορετικές τιμές του P οι οποίες δίνονται στο εσωτερικό διάγραμμα. Στο Σχήμα 21δ δίνεται η θέση των διαγραμμάτων (α) και (β) στον χώρο των παραμέτρων (1 και 2 αντίστοιχα). 50
- 22 Διάγραμμα φάσης του συστήματος για δύο διαφορετικές αρχικές συνθήκες (κόκκινη και μπλέ τροχιά) στο οποίο παρατηρείται διστάθεια. Η τιμή της έντασης του laser είναι $P = 0.19$. Οι αρχικές συνθήκες για την κόκκινη τροχιά είναι: $[x = 0.1249 \rho = 3.857 \phi = 2.54 u = 0.1574]$ και για την μπλε τροχιά: $[x = 0.1249 \rho = 4.557 \phi = 2.54 u = 0.5574]$ 51

- 23 Διάγραμμα περιοχών έλξης του συστήματος για $\Delta = 1.7$ και τιμή της έντασης του laser $P = 0.19$, όπου x η αρχική θέση του ταλαντωτή και ρ η αρχική τιμή του πλάτους πεδίου της κοιλότητας. Το μπλε χρώμα αντιστοιχεί σε αρχικές συνθήκες για τις οποίες το σύστημα καταλήγει στην ευσταθή σπείρα και το κίτρινο χρώμα αντιστοιχεί σε αρχικές συνθήκες για τις οποίες το σύστημα καταλήγει στον ευσταθή οριακό κύκλο. . . . 52
- 24 Διαγράμματα περιοχών έλξης για την περίπτωση $\Delta = 1.7, P = 0.19$. Αρχικές συνθήκες, α') $f = 2.6, v = 1$, β') $f = 2.6, v = 2$, γ') $f = 2.6, v = 3$, δ') $f = \pi, v = 0.1$, ε') $f = 5\pi/3, v = 0.1$, στ') $f = 7\pi/3, v = 0.1$. Στα α', β', γ' κρατάμε σταθερή τη φάση και αλλάζουμε το v . Στα δ', ε', στ' κρατάμε σταθερό το v και αλλάζουμε την φάση. . . . 53
- 25 Διαγράμματα διακλάδωσης για την περίπτωση $\Delta = 1.7$. Κάθε διάγραμμα αντιστοιχεί σε διαφορετικές αρχικές συνθήκες. Όπως βλέπουμε, όταν χρησιμοποιούμε διαφορετικές αρχικές συνθήκες δημιουργείται διαφορετική δυναμική συμπεριφορά για τιμές του $P > 0.1806$ ενώ για τιμές $P < 0.1806$ οι λύσεις είναι όμοιες. Με πράσινο και πορτοκαλί χρώμα απεικονίζονται τα δύο διαφορετικά πλάτη από τα οποία αποτελείται η ταλάντωση καθώς πρόκειται για ταλάντωση διπλής περιόδου. Στα εσωτερικά διαγράμματα απεικονίζονται οι λύσεις του συστήματος σε μορφή χρονοσειράς για $P = 0.2$ (Η τιμή της έντασης P είναι η ίδια και για τα δύο εσωτερικά διαγράμματα). Οι αρχικές συνθήκες για το πάνω διάγραμμα είναι: [$x = 0.1249 \rho = 1.857 \phi = 2.54 u = 0.1574$] και για το κάτω διάγραμμα: [$x = 0.1249 \rho = 3.857 \phi = 2.54 u = 0.1574$]. 55
- 26 Διαγράμματα φάσης του μη-γραμμικού συστήματος για (α) $P = 0.05$, (β) $P = 0.086$ και (γ) $P = 0.088$. Οι αρχικές συνθήκες είναι οι εξής: (α) [$x = 0.1249 \rho = 3.857 \phi = 1.54 u = 0.1574$], (β) [$x = 0.1249 \rho = 3.857 \phi = 1.54 u = 0.1574$], (γ) [$x = 1.2 \rho = 2.7252 \phi = 0.01 u = 1.0$]. Στο Σχήμα 26γ απεικονίζονται επιπλέον και οι οριακοί κύκλοι που προκύπτουν με τις ίδιες αρχικές συνθήκες αλλά για διαφορετικά P (Σχήμα 26γ', εσωτερικό διάγραμμα). Στο Σχήμα 26δ δίνεται η θέση των διαγραμμάτων (α), (β) και (γ) στον χώρο των παραμέτρων (1, 2 και 3 αντίστοιχα). 56
- 27 Διάγραμμα φάσης του συστήματος για δύο διαφορετικές αρχικές συνθήκες (κόκκινη και μπλέ τροχιά). Η τιμή της έντασης του laser είναι $P = 0.1$. Οι αρχικές συνθήκες για την κόκκινη τροχιά είναι: [$x = 1.2 \rho = 2.7252 \phi = 0.01 u = 1$] και για την μπλε τροχιά: [$x = 0 \rho = 1.9 \phi = 0.01 u = -0.1$]. 58

- 28 Διάγραμμα περιοχών έλξης του συστήματος για $\Delta = 0.66$ και τιμή της έντασης του laser $P = 0.1$, όπου x η αρχική θέση του ταλαντωτή και ρ η αρχική τιμή του πλάτους πεδίου της κοιλότητας. Το μπλε χρώμα αντιστοιχεί σε αρχικές συνθήκες για τις οποίες το σύστημα καταλήγει στον οριακό κύκλο μικρού πλάτους και το κίτρινο χρώμα αντιστοιχεί σε αρχικές συνθήκες για τις οποίες το σύστημα καταλήγει στον οριακό κύκλο μεγάλου πλάτους. 59
- 29 Διαγράμματα περιοχών έλξης για την περίπτωση $\Delta = 0.66, P = 0.1$. Αρχικές συνθήκες. α') $f = 2.6, v = 1$, β') $f = 2.6, v = 2$, γ') $f = 2.6, v = 3$, δ') $f = \pi, v = 0.1$, ε') $f = 5\pi/3, v = 0.1$, στ') $f = 7\pi/3, v = 0.1$. Στα α', β', γ' κρατάμε σταθερή τη φάση και αλλάζουμε το v . Στα δ', ε', στ' κρατάμε σταθερό το v και αλλάζουμε την φάση. . . 60
- 30 Διαγράμματα διακλάδωσης για την περίπτωση $\Delta = 0.66$. Κάθε διάγραμμα αντιστοιχεί σε διαφορετικές αρχικές συνθήκες. Στο Σχήμα 30γ έχουμε εστιάσει στην περιοχή όπου εμφανίζεται η διστάθεια περιλαμβανοντας και τους δύο ελκυστές. Οι αρχικές συνθήκες για το Σχήμα 30α είναι: $[x = 1.2 \rho = 2.7252 \phi = 0.01 u = 1]$ και για το Σχήμα 30β: $[x = 0.1 \rho = 0.0252 \phi = 0.01 u = 0.01]$ 62
- 31 Διαγράμματα φάσης του μη-γραμμικού συστήματος για $P = 0.11512$ (1), $P = 0.13512$ (2), $P = 0.14912$ (3) και $P = 0.16012$ (4). Οι κίτρινες τελείες συμβολίζουν τις αρχικές συνθήκες. Έχουν επιλεγεί κοντινές αρχικές συνθήκες για να γίνει εμφανές ότι στην περιοχή των αρχικών συνθήκων βρίσκεται ένα σαγματικό σημείο του οποίου οι ασταθείς πολλαπλότητες οδηγούν τις τροχιές εκατέρωθεν του σημείου προς τους δύο ελκυστές. Οι αρχικές συνθήκες είναι οι εξής: (1) $[x = 1.2 \rho = 2.7651 \& 2.7752 \phi = 0.01 u = -0.5]$, (2) $[x = 1.2 \rho = 2.4152 \& 2.4253 \phi = 0.01 u = -0.5]$, (3) $[x = 1.2 \rho = 2.2219 \& 2.2621 \phi = 0.01 u = -0.5]$, (4) $[x = 1.2 \rho = 2.0518 \& 2.1019 \phi = 0.01 u = -0.5]$ 63
- 32 Λύσεις του συστήματος για $\Delta = -0.99$ σε μορφή χρονοσειράς. Για κάθε τιμή της παραμέτρου P έχουμε ένα μπλε διάγραμμα που απεικονίζει την τιμή της έντασης του οπτικού πεδίου στην κοιλότητα $|a|^2$ και ακριβώς από κάτω με κόκκινο χρώμα απεικονίζεται η τιμή της θέσης του μηχανικού ταλαντωτή x συναρτήσει του χρόνου t . Τα διαγράμματα αφορούν στις λύσεις που παρουσιάζουν διακλαδώσεις (δηλ. τις λύσεις που απεικονίζονται με κίτρινο χρώμα στο Σχήμα 31). Τα εσωτερικά διαγράμματα απεικονίζουν την τιμή της παραγώγου κάθε μεταβλητής συναρτήσει της τιμής της μεταβλητής. 65

- 33 Λύσεις του συστήματος για $\Delta = -0.99$ σε μορφή χρονοσειράς. Για κάθε τιμή της παραμέτρου P έχουμε ένα μπλε διάγραμμα που απεικονίζει την τιμή της έντασης του οπτικού πεδίου στην κοιλότητα $|a|^2$ και ακριβώς από κάτω με κόκκινο χρώμα απεικονίζεται η τιμή της θέσης του μηχανικού ταλαντωτή x συναρτήσει του χρόνου t . Τα διαγράμματα αφορούν στις λύσεις που παρουσιάζουν διακλαδώσεις (δηλ. τις λύσεις που απεικονίζονται με κίτρινο χρώμα στο Σχήμα 31). Τα εσωτερικά διαγράμματα απεικονίζουν την τιμή της παραγώγου κάθε μεταβλητής συναρτήσει της τιμής της μεταβλητής. 66
- 34 Διάγραμμα περιοχών έλξης του συστήματος για τιμή της έντασης του laser $P = 0.11512$, όπου x η αρχική θέση του ταλαντωτή και ρ η αρχική τιμή του πλάτους πεδίου της κοιλότητας. Το μπλε χρώμα αντιστοιχεί σε αρχικές συνθήκες για τις οποίες το σύστημα καταλήγει στην ευσταθή σπείρα μπλε χρώματος στο Σχημα 31.1 και το κίτρινο χρώμα αντιστοιχεί σε αρχικές συνθήκες για τις οποίες το σύστημα καταλήγει στην ευσταθή σπείρα κίτρινου χρώματος στο Σχημα 31.1. 67
- 35 Διαγράμματα περιοχών έλξης για την περίπτωση $\Delta = -0.99, P = 0.13512$. Αρχικές συνθήκες. $\alpha') f = 0.01, v = -0.1, \beta') f = 0.01, v = -0.5, \gamma') f = 0.01, v = -0.7, \delta') f = 3.8\pi/3, v = -0.1, \epsilon') f = 3.9\pi/3, v = -0.1, \sigma') f = 4.5\pi/3, v = -0.1$. Στα α', β', γ' κρατάμε σταθερή τη φάση και αλλάζουμε το v . Στα $\delta', \epsilon', \sigma'$ κρατάμε σταθερό το v και αλλάζουμε την φάση. 68
- 36 Διαγράμματα διακλάδωσης για την περίπτωση $\Delta = -0.99$. Κάθε διάγραμμα αντιστοιχεί σε διαφορετικές αρχικές συνθήκες. Το Σχήμα 36α αντιστοιχεί σε αρχικές συνθήκες που καταλήγουν στην μπλε ευσταθή σπείρα, αριστερά του σαγματικού σημείου (Σχήμα 31). Το Σχήμα 36β απεικονίζει την λύση του συστήματος για αρχικές συνθήκες οι οποίες στην περιοχή $0.101 < P < 0.1634$ οδηγούν στην κίτρινη ευσταθή σπείρα. Οι αρχικές συνθήκες για το Σχήμα 36α είναι: $[x = 1.2 \rho = 2.7252 \phi = 0.01 u = 1]$ και για το Σχήμα 36β: $[x = 0.1 \rho = 0.0252 \phi = 0.01 u = 0.01]$ 69
- 37 Μεγέθυνση της περιοχής της παραμέτρου P στην οποία έχουμε μετάβαση στην κίτρινη ευσταθή σπείρα του Σχήματος 31.1. 70
- 38 Διάγραμμα διακλάδωσης για τιμές παραμέτρων $\Delta = -0.4, \kappa = 0.5, \Gamma = 0.05$. Οι αρχικές συνθήκες είναι: $[x = 0.01, u = 0.01, \rho = 0.01, \phi = 0.01]$. 71

- 39 Exceptional Points στον χώρο των παραμέτρων. α) Οι τιμές των παραμέτρων είναι $\kappa = 0.5, \Gamma = 0.00147$ β) $\kappa = 0.5, \Gamma = 0.075$ γ) $\kappa = 0.3, \Gamma = 0.00147$, δ) $\kappa = 0.3, \Gamma = 0.075$. Η ευθεία πάνω στην οποία εμφανίζονται τα EPs είναι η $P + \kappa^2 \Delta = 0$. Η γαλάζια καμπύλη αποτελείται από EPs στην περιοχή μονών λύσεων και η ροζ καμπύλη αποτελείται από EPs στις περιοχές τριπλών λύσεων. 76
- 40 Πραγματικά (α) και φανταστικά (β) μέρη των ιδιοτιμών για τιμές των παραμέτρων $\kappa = 0.5, \Gamma = 0.075$. Τα χρώματα κόκκινο και σκούρο μπλε αντιστοιχούν την περιοχή των μονών λύσεων ενώ τα υπόλοιπα αντιστοιχούν στις τριπλές λύσεις (Εδώ απεικονίζονται οι δύο από τις τρεις λύσεις, δηλ. αυτές που περιέχουν EPs. Τα Exceptional Points εμφανίζονται πάνω στην ευθεία $P + \kappa^2 \Delta = 0$ 77
- 41 Φασματική πυκνότητα ισχύος α) $S_{\rho\rho}$, β) S_{xx} , γ) $S_{\phi\phi}$, δ) S_{uu} για $\Delta = -0.15, \kappa = 0.3, \Gamma = 0.075$ 78
- 42 (α), (β) Exceptional Points τα οποία εμφανίζονται στην τιμή Διαφοράς Συχνότητας $\Delta = -0.15$ και τιμές των λοιπών παραμέτρων $\kappa = 0.3, \Gamma = 0.075$. Το αριστερό EP εμφανίζεται για $P = 0.00712$. Οι τιμές των ιδιοτιμών για το αριστερό EP είναι $\lambda_{1,2} = -0.1489$ και οι τιμές των αντίστοιχων ιδιοδιανυσμάτων τους είναι οι εξής: $v_{1,2} = [-0.0359 \ 0.0053 \ -0.9993 \ -0.0039]$. Οι αντίστοιχες τιμές για το δεξί EP είναι: $P = 0.01312, \lambda_{1,2} = -0.15, v_1 \approx [0 \ 0 \ 0 \ 1.00], v_2 \approx [0 \ 0 \ 0 \ -1.00]$. (γ) Φασματική πυκνότητα ισχύος $S_{\rho\rho}$ του πλάτους του οπτικού πεδίου ρ συναρτήσει της συχνότητας και της έντασης του laser P 79
- 43 Φάσματα θορύβου του συστήματος που αντιστοιχούν στην περίπτωση του Σχήματος 3γ, για τρεις τιμές της έντασης του laser P 80

1 Εισαγωγή

Σκοπός της παρούσας Διπλωματικής Εργασίας είναι η παρουσίαση των *Οπτομηχανικών Συστημάτων και Διατάξεων*, της αρχής λειτουργίας τους και η ανάλυση της Μη-Γραμμικής Δυναμικής τους συμπεριφοράς.

Τα Οπτομηχανικά Συστήματα είναι ένα νέο πεδίο έρευνας στο οποίο υπάρχει ιδιαίτερη ερευνητική δραστηριότητα και παρουσιάζει ιδιαίτερη προοπτική για το μέλλον με καινούριες εφαρμογές να αναπτύσσονται κάθε χρόνο.

Στο **Κεφάλαιο 2** γίνεται μια παρουσίαση της βασικής Φυσικής των Οπτομηχανικών Συστημάτων, των φαινομένων που διέπουν την λειτουργία τους καθώς και κάποιων εφαρμογών τους και πειραματικών υλοποιήσεων.

Στο **Κεφάλαιο 3** περνάμε στην αναλυτική επίλυση των εξισώσεων που περιγράφουν την λειτουργία του συστήματος. Γίνεται μελέτη του συστήματος σε κατάσταση ισορροπίας (Σημεία ισορροπίας) κι έπειτα μελετάμε την ευστάθεια του συστήματος για μεγάλο εύρος των παραμέτρων.

Στο **Κεφάλαιο 4** προχωράμε στην επίλυση του μη-γραμμικού συστήματος εξισώσεων με αριθμητικές μεθόδους όπου πλέον έχουμε εποπτεία της δυναμικής συμπεριφοράς του συστήματος για διάφορες τιμές των παραμέτρων. Το σύστημα παρουσιάζει πλούσια δυναμική συμπεριφορά με φαινόμενα όπως, διστάθεια, οριακοί κύκλοι, διακλαδώσεις οριακών κυκλών κ.α.

Στο **Κεφάλαιο 5** γίνεται μία παρουσίαση ενός ιδιαίτερου φαινομένου που εμφανίζεται στα μη-Ερμιτιανά συστήματα, των Exceptional Points. Αφού γίνει εντοπισμός των EPs στον χώρο των παραμέτρων έπειτα εξετάζουμε την φασματική απόκριση του συστήματος με τροφοδότηση θορύβου.

2 Βασική Φυσική των Οπτομηχανικών Συστημάτων

2.1 Πίεση Ακτινοβολίας

2.1.1 Φωτόνια και Ορμή

Το στοιχείο που κινητοποιεί την λειτουργία ενός Οπτομηχανικού συστήματος είναι η ιδιότητα του φωτός να ασκεί πίεση όταν αλληλεπιδρά με κάποια επιφάνεια. Η ύπαρξη της οφείλεται στο γεγονός ότι τα κβάντα του φωτός, τα φωτόνια, εκτός από ενέργεια μεταφέρουν και ορμή. Αυτό προέκυψε αρχικά μέσω του Κλασικού Ηλεκτρομαγνητισμού όπου συνδέθηκε η ενέργεια και η ορμή ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος με τη σχέση $p_V = S/c^2$ όπου p_V η πυκνότητα ορμής και S το μέτρο του διανύσματος Poynting (Ενέργεια ανα μονάδα επιφανείας και ανα μονάδα χρόνου). Επίσης, ο Maxwell έδειξε ότι η πίεση ακτινοβολίας ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος ισούται με την πυκνότητα ενέργειας του, $\mathcal{P} = \epsilon_0 E^2$.

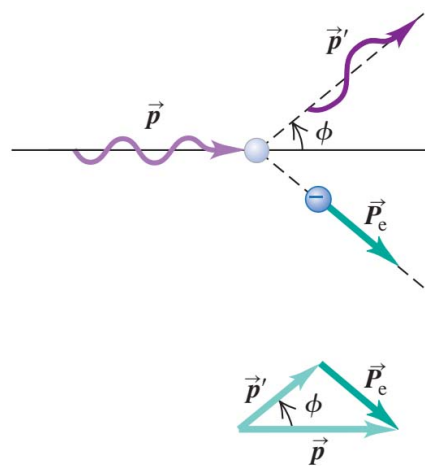
Η έννοια του φωτονίου στην μοντέρνα της μορφή εμφανίστηκε το 1905 στην δουλειά του Einstein για το Φωτοηλεκτρικό Φαινόμενο. Όταν ένα κομμάτι μέταλλο εκτίθεται σε Η/Μ ακτινοβολία τότε εκπέμπει ηλεκτρόνια. Το φαινόμενο αυτό μελετήθηκε πειραματικά για δεκαετίες αλλά δεν μπορούσε να εξηγηθεί μέσω του κλασικού Ηλεκτρομαγνητισμού. Σε αυτή την εργασία λοιπόν καθιερώθηκε ότι το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο είναι κβαντισμένο και αποτελείται από “σωματίδια” που ονομάστηκαν **φωτόνια**.

Η Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας προβλέπει ότι το φωτόνιο παρόλο που δεν έχει μάζα φέρει ορμή η τιμή της οποίας μπορεί να εξαχθεί από την σχέση Ενέργειας-Ορμής:

$$E = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2} \quad (2.1)$$

όπου για την περίπτωση ενός φωτονίου έχουμε $m = 0$ και άρα $p = E/c$.

Το γεγονός ότι κάθε φωτόνιο φέρει ξεχωριστή ορμή επιβεβαιώθηκε πρώτη φορά πειραματικά με το πείραμα σκέδασης του Compton το 1922. Με το πείραμα φάνηκε ότι η αλληλεπίδραση του φωτός με τα ηλεκτρόνια είναι ουσιαστικά μια σύγκρουση σωματιδίων κατά την οποία το φωτόνιο μεταφέρει μέρος της ενέργειας και της ορμής του στο ηλεκτρόνιο [Σχήμα 1]. Ο Compton έδειξε ότι η θεωρία των φωτονίων του Einstein σε συνδυασμό με την Αρχή διατήρησης Ενέργειας και Ορμής επαληθεύουν τα πειραματικά του αποτελέσματα ενώ το καθαρά κυματικό μοντέλο του φωτός δεν συμφωνούσε με τα αποτελεσματα του [1],[3].



Σχήμα 1. Πάνω: Η Σκέδαση Compton ενός φωτονίου αρχικής ορμής \vec{p} με ένα στάσιμο ηλεκτρόνιο. Κάτω: Διανυσματική απεικόνιση της διατήρησης της Ορμής κατά την Σκέδαση Compton [1]

2.1.2 Η Πίεση Ακτινοβολίας

Για να βρούμε την πίεση ακτινοβολίας μίας δέσμης φωτονίων που προσπίπτουν κάθετα σε μια στερεή επιφάνεια έχουμε τα εξής:

Ξέρουμε από την Εξ. (2.1) ότι

$$p = \frac{E}{c} \quad (2.2)$$

όπως επίσης για την ενέργεια ενός φωτονίου συναρτήσει της συχνότητας του ν :

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \quad (2.3)$$

Έτσι έχουμε

$$\xrightarrow{(2.2),(2.3)} p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k \quad (2.4)$$

όπου k είναι ο κυματάνριθμος του φωτονίου και \hbar η ανηγμένη σταθερά του Planck. Ένα φωτόνιο όταν υφίσταται ανάκλαση, όπως συμβαίνει μέσα σε μια κοιλότητα Fabry-Pérot, μεταφέρει ορμή ίση με $|\Delta p| = 2h/\lambda$ (όπου λ το μήκος κύματος του φωτονίου). Έχουμε λοιπόν για την δύναμη της πίεσης ακτινοβολίας:

$$F'_{rad} = \frac{|\Delta p|}{\Delta t} \quad (2.5)$$

Ο χρόνος για μια διαδρομή του φωτονίου μέσα στην κοιλότητα είναι $\Delta t = 2L/c$ όπου L το μήκος της κοιλότητας. Άρα:

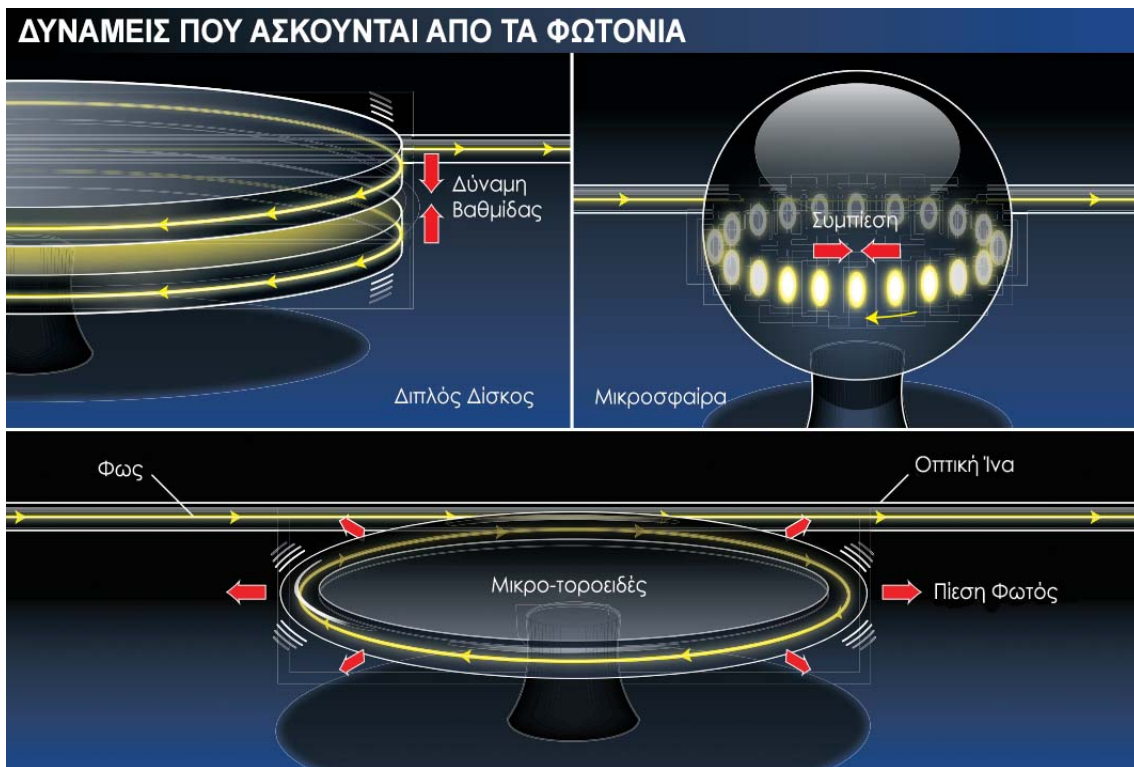
$$F'_{rad} = \frac{2\hbar k}{2L/c} = \frac{\hbar ck}{L} = \frac{\hbar c 2\pi}{L\lambda} = \frac{\hbar \nu 2\pi}{L} \implies \quad (2.6)$$

$$F'_{rad} = \frac{\hbar \omega_c}{L} \quad (2.7)$$

Το αποτέλεσμα της Εξ. (2.7) αναφέρεται στην πίεση ακτινοβολίας που ασκεί ένα φωτόνιο στα τοιχώματα της οπτικής κοιλότητας. Η δύναμη της πίεσης ακτινοβολίας λοιπόν του οπτικού πεδίου δίνεται από:

$$F_{rad} = \frac{\hbar \omega_c}{L} |a|^2 \quad (2.8)$$

όπου a είναι το μιγαδικό πλάτος του οπτικού πεδίου στην κοιλότητα και $|a|^2$ ο αριθμός των φωτονίων που κυκλοφορούν μέσα στην κοιλότητα [7].

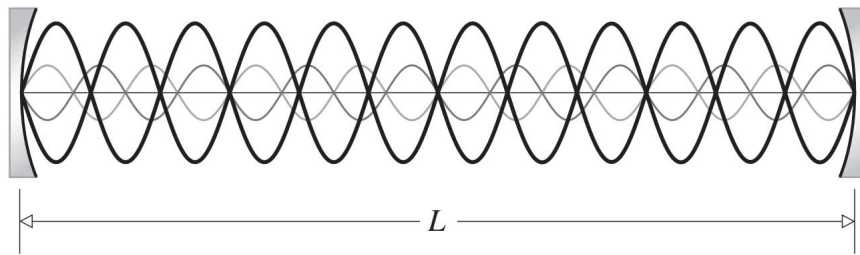


Σχήμα 2. Το φως μπορεί να θέσει ένα αντικείμενο μεγέθους μικρομέτρου σε ταλάντωση ασκώντας του πίεση (κάτω), να δημιουργεί πλάγιες πιέσεις (πάνω αριστερά) ή να αναγκάσει κάποιο υλικό να συμπιεστεί [2].

2.2 Η κοιλότητα Fabry–Pérot

Το κύριο στοιχείο της διάταξης μας είναι είναι μία οπτική κοιλότητα η οποία αποτελείται από δύο επίπεδους, ιδιαίτερα ανακλαστικούς καθρέπτες που βρίσκονται σε απόσταση L μεταξύ τους [3].

Όταν μία ακτίνα φωτός πχ. laser εισέρχεται στην οπτική κοιλότητα παράλληλα στον οπτικό άξονα της, τότε η ακτίνα εγκλωβίζεται μέσα στην κοιλότητα και αρχίζει να ανακλάται διαδοχικά από τους δύο καθρέπτες. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα τη δημιουργία στάσιμων κυμάτων το μήκος κύματος των οποίων εξαρτάται από το μήκος L της κοιλότητας.



Σχήμα 3. Δημιουργία στάσιμων κυμάτων μέσα σε μία οπτική κοιλότητα Fabry–Pérot μήκους L [3].

Η λύση της εξίσωσης Helmholtz:

$$\nabla^2 a(\mathbf{r}) + k^2 a(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.9)$$

μας δίνει το μιγαδικό πλάτος του οπτικού πεδίου της κοιλότητας.

$$a(\mathbf{r}) = \rho \sin(kz) \quad (2.10)$$

Για να αντιπροσωπεύει η λύση αυτή τους ρυθμούς της κοιλότητας πρέπει να ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες των στάσιμων κυμάτων δηλ. το πλάτος a να μηδενίζεται για $z = 0$ και $z = L$. Αυτό συμβαίνει για:

$$k_m = m \frac{\pi}{L}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (2.11)$$

Από τη Εξ. (2.11) βρίσκουμε τις συχνότητες συντονισμού της κοιλότητας:

$$\nu_m = m \frac{c}{2L}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (2.12)$$

Η απόσταση μεταξύ των συχνοτήτων συντονισμού δίνεται από την εξής σχέση[4]:

$$\nu_{FSR} = \frac{c}{2L} \quad (2.13)$$

Finesse Μία ακόμα σημαντική ιδιότητα της κοιλότητας Fabry–Pérot είναι η **Finesse** η οποία ορίζεται ως ο λόγος της απόστασης δύο συχνοτήτων συντονισμού προς το εύρος ημίσειας τιμής $\delta\nu$ (FWHM):

$$\mathcal{F} \equiv \frac{\text{Free Spectral Range}}{\text{FWHM}} \equiv \frac{\nu_{FSR}}{\delta\nu} \equiv \frac{2\pi\nu_{FSR}}{\kappa} \quad (2.14)$$

όπου $\delta\nu = 1/2\pi\tau_p$ και $\kappa = \tau_p^{-1}$.

Το τ_p είναι ο χρόνος ζωής ενός φωτονίου μέσα στην κοιλότητα.

Η finesse αντιπροσωπεύει το μέσο αριθμό διαδρομών ενός φωτονίου πριν εγκαταλείψει την κοιλότητα [7].

Ένταση πεδίου εντός της κοιλότητας Η ένταση του πεδίου μέσα στην κοιλότητα δίνεται από την εξής σχέση:[4]

$$I = \frac{I_{max}}{1 + (2\mathcal{F}/\pi)^2 \sin^2 \phi/2}, \quad I_{max} = \frac{I_0}{(1 - \sqrt{R})^2} \quad (2.15)$$

όπου R είναι ο συντελεστής ανακλάσεως των κατόπτρων και

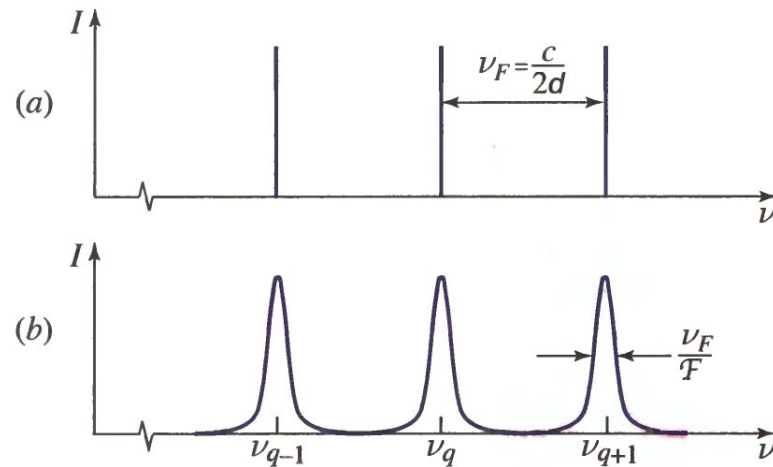
$$\phi = \frac{4\pi\nu}{c} L \cos \theta \quad (2.16)$$

η διαφορά φάσης που υφίσταται η δέσμη σε κάθε διαδρομή στην κοιλότητα και θ η γωνία πρόσπτωσης (εδώ $\theta = 0$)[13].

Με χρήση της Εξ. (2.16) μπορούμε να γράψουμε την Εξ. (2.15) στην εναλλακτική μορφή:[4]

$$I = \frac{I_{max}}{1 + (2\mathcal{F}/\pi)^2 \sin^2(\pi\nu/\nu_F)} \quad (2.17)$$

Το αποτέλεσμα αυτής της εξίσωσης για την ένταση του πεδίου εντός της κοιλότητας δίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 4. (α) Στη στάσιμη κατάσταση, ένας ταλαντωτής Fabry–Pérot χωρίς απώλειες ($\mathcal{F} = \infty$) υποστηρίζει μόνο κύματα συχνοτήτων που συμπίπτουν με τις συχνοότητες συντονισμού της κοιλότητας ν_q . (β) Ένας ταλαντωτής με απώλειες υποστηρίζει κυρίως κύματα στην περιοχή των συχνοτήτων συντονισμού αλλά μπορεί να υποστηρίξει και κύματα άλλων συχνοτήτων [4].

Αν θέλουμε να βρούμε την ένταση της ακτινοβολίας που τελικά εξέρχεται από την κοιλότητα ως προς την ένταση της ακτινοβολίας με την οποία τροφοδοτούμε την κοιλότητα χρησιμοποιούμε τον συντελεστή διέλευσης ο οποίος δίνεται ως εξής: [14]

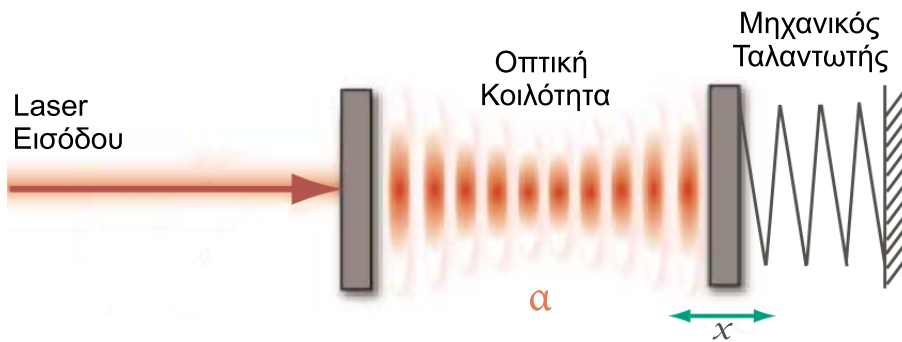
$$T(\theta) = \frac{I_{trans}}{I_{inc}} = \frac{(1 - R)^2}{(1 - R)^2 + 4R \sin^2 \phi/2} \quad (2.18)$$

όπου έχουμε θέσει ίσες ανακλαστικότητες για τους δύο καθρέπτες: $R_1 = R_2 = R$. Ένα ενδιαφέρον στοιχείο σε σχέση με την Εξ. (2.18) είναι ότι για την περίπτωση συντονισμού δηλ. όταν $\phi = m2\pi$ όπου m ακέραιος, τότε ο συντελεστής διέλευσης της κοιλότητας είναι $T(m\pi) = 1$ ανεξάρτητα από την τιμή του συντελεστή ανακλάσεως R των κατόπτρων [14].

2.3 Το βασικό Οπτομηχανικό Σύστημα

Όπως αναφέρθηκε και στην προηγούμενη ενότητα, το βασικό στοιχείο του συστήματός μας είναι μία οπτική κοιλότητα Fabry–Pérot. Πραγματοποιώντας όμως μία τροποποίηση στην υπάρχουσα κοιλότητα μπορούμε να δημιουργήσουμε ένα σύστημα με πλούσια δυναμική συμπεριφορά. Έτσι, το τυπικό Οπτομηχανικό σύστημα αποτελείται από μία οπτική κοιλότητα στην οποία ο ένας από τους δύο καθρέπτες μπορεί να κινείται ενώ ο άλλος είναι σταθερός.

Μία πηγή laser πλάτους a_L και συχνότητας ω_L τροφοδοτεί το σύστημα και το φως παγιδεύεται στην κοιλότητα όπου εξαναγκάζει τον καθρέπτη σε ταλάντωση λόγω της δύναμης ακτινοβολίας.



Σχήμα 5. Το βασικό Οπτομηχανικό Σύστημα αποτελούμενο από μία οπτική κοιλότητα τύπου Fabry–Pérot της οποίας ο ένας καθρέπτης μπορεί να κινείται [5].

Οι εξισώσεις κίνησης Heisenberg που περιγράφουν την χρονική εξέλιξη του πεδίου ακτινοβολίας εντός της κοιλότητας και της θέσης του κινούμενου καθρέπτη μπορούν να εξαχθούν από την βασική Οπτομηχανική Χαμιλτονιανή. Για να μελετήσουμε όμως την κλασική δυναμική του συστήματος, αντικαθιστούμε τον τελεστή $\hat{a}(t)$ με το μιγαδικό πλάτος φωτός $a(t)$ καθώς και τον τελεστή της θέσης του κινούμενου καθρέπτη \hat{x} με την αντίστοιχη κλασική μεταβλητή του [15].

$$\dot{a} = \left[i \left(\Delta + g \frac{x}{x_{zpf}} \right) - \frac{\kappa}{2} \right] a - i a_L \quad (2.19)$$

$$\ddot{x} = -\Omega_M^2 x + \frac{\hbar g}{m x_{zpf}} |a|^2 - \Gamma_M \dot{x} \quad (2.20)$$

όπου κ είναι ο ρυθμός απόσβεσης του οπτικού πεδίου της κοιλότητας, Γ_M είναι ο ρυθμός μηχανικής απόσβεσης, $\Delta = \omega_L - \omega_{cav}$ είναι η Διαφορά Συχνότητας (Detuning) του laser

δηλ. η διαφορά της συχνότητας του laser εισόδου από την συχνότητα συντονισμού της κοιλότητας και \hbar είναι η ανηγμένη σταθερά του Planck.

Το $x_{zpf} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\Omega_M}}$ είναι η Μηχανική Διακύμανση Μηδενικού Σημείου (mechanical zero-point fluctuation) δηλ. η τυπική απόκλιση της μεταβλητής x όταν ο ταλαντωτής βρίσκεται στην θεμελιώδη του κατάσταση [7].

Παράμετρος Οπτομηχανικής Σύζευξης Κενού g Χαρακτηριστικό στοιχείο της οπτομηχανικής διάταξης είναι η μεταβολή που συμβαίνει στην οπτική συχνότητα συντονισμού της κοιλότητας ως αποτέλεσμα της κίνησης του καθρέπτη. Η σύζευξη του οπτικού και του μηχανικού ρυθμού είναι παραμετρική δηλ. η οπτική συχνότητα συντονισμού της κοιλότητας υπόκειται σε διαμόρφωση από το μηχανικό πλάτος ταλάντωσης. Έχουμε:[7]

$$\omega_{cav}(x) \approx \omega_{cav} + x\partial\omega_{cav}/\partial x \dots$$

Όπου $G \equiv \partial\omega_{cav}/\partial x$.

Για μία απλή κοιλότητα μήκους L ισχύει ότι $G = \omega_{cav}/L$ το οποίο ονομάζεται *Παράμετρος Οπτομηχανικής σύζευξης* και είναι η μεταβολή της συχνότητας συντονισμού ανά μέτρο [7].

Χρησιμοποιώντας αυτήν την παράμετρο, μπορούμε να εξάγουμε την *Οπτομηχανική παράμετρο σύζευξης κενού g* , εκφρασμένη ως συχνότητα, η οποία δίνεται ως εξής για μια απλή κοιλότητα μήκους L : [15]

$$g = \frac{\omega_{cav}}{L} x_{zpf}$$

Αυτή η παράμετρος συζευγνύει τις δύο εξισώσεις του συστήματος, και καθορίζει την αλληλεπίδραση του οπτικού πεδίου της κοιλότητας με την κίνηση του καθρέπτη στο μοτέλο μας. Περιγράφει ποσοτικά την αλληλεπίδραση μεταξύ ενός φωνονίου κι ενός φωτονίου [7]. Μπορεί να περιγραφεί ως το ποσό μεταβολής της οπτικής συχνότητας συντονισμού της κοιλότητας για μία μετακίνηση του καθρέπτη ίση με x_{zpf} [16]. Εναλλακτικά, ξέρουμε ότι η δύναμη ακτινοβολίας ενός φωτονίου επιδρά στον καθρέπτη μετατοπίζοντας τον. Ο λόγος g/Ω_M ποσοτικοποιεί αυτήν την μετατόπιση σε μονάδες του x_{zpf} [16].

Αυτή η θεώρηση του συστήματος ισχύει για χαμηλή τιμή της κβαντικής παραμέτρου ($g/k \ll 1$) η οποία καθορίζει την επίδραση των κβαντικών διακυμάνσεων στην δυναμική του συστήματος μας [15].

2.3.1 Εισαγωγή αδιάστατων παραμέτρων και μεταβλητών

Καθορίζουμε τις αδιάστατες παραμέτρους από τις οποίες εξαρτάται η δυναμική του συστήματος μας. Εκφρασμένες συναρτήσει της συχνότητας του μηχανικού ταλαντωτή Ω_M , οι παράμετροι που περιγράφουν το κλασικό σύστημα είναι οι εξής:[15]

$$\begin{aligned}
\text{Ρυθμός μηχανικής απόσβεσης:} & \quad \Gamma_M/\Omega_M \\
\text{Οπτικός Ρυθμός απόσβεσης:} & \quad \kappa/\Omega_M \\
\text{Διαφορά Συχνότητας:} & \quad \Delta/\Omega_M \\
\text{Ένταση του laser οδήγησης:} & \quad P = \frac{8|a_L|^2 g^2}{\Omega_M^4}
\end{aligned}$$

Επίσης, μπορούμε να επαναπροσδιορίσουμε τις μεταβλητές t, x, a ώστε να παραμείνουν στο σύστημα μόνο οι τέσσερις παράμετροι που μας ενδιαφέρουν.

Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\text{Χρόνος:} & \quad \tilde{t} = t\Omega_M \\
\text{Θέση κινούμενου καθρέπτη:} & \quad \tilde{x} = g \frac{x}{\Omega_M x_{zpf}} \\
\text{Πλάτος Πεδίου:} & \quad \tilde{a} = ia \frac{\Omega_M}{2a_L}
\end{aligned}$$

Έτσι, το σύστημα (2.19), (2.20) παίρνει τη μορφή:[15]

$$\frac{d\tilde{a}}{d\tilde{t}} = \left[i \left(\frac{\Delta}{\Omega_M} + \tilde{x} \right) - \frac{1}{2} \frac{\kappa}{\Omega_M} \right] \tilde{a} + \frac{1}{2} \quad (2.21)$$

$$\frac{d^2\tilde{x}}{d\tilde{t}^2} = -\tilde{x} + P|\tilde{a}|^2 - \frac{\Gamma_M}{\Omega_M} \frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} \quad (2.22)$$

2.4 Φαινόμενα που απορρέουν από την Οπτομηχανική σύζευξη: I. Στατικά Φαινόμενα

Αναφέρουμε ως στατικά τα φαινόμενα τα οποία συμβαίνουν κυρίως όταν ο ρυθμός απόσβεσης των φωτονίων κ είναι πολύ μεγαλύτερος από τους υπόλοιπους χαρακτηριστικούς χρόνους του συστήματος, όπως την συχνότητα Ω_M του ταλαντωτή ($\kappa \gg \Omega_M$). Συνεπώς, τα φαινόμενα αυτά δεν στηρίζονται στην “καθυστέρηση” ή απόσβεση της κοιλότητας αλλά στην αδιαβατική αντίδραση του οπτικού πεδίου στην μηχανική κίνηση [17].

2.4.1 Οπτικό Δυναμικό και Οπτική Διστάθεια

Χρησιμοποιώντας την Εξ. (2.19) και θέτοντας την παράγωγο ίση με το μηδέν, εξάγουμε την έκφραση των στάσιμων λύσεων για το μιγαδικό πλάτος οπτικού πεδίου a_{ss} :

$$a_{ss} = \frac{ia_L}{i(\Delta + Gx) - \kappa/2} \quad (2.23)$$

όπου $G = g/x_{zpf}$.

Όπως βλέπουμε από την Εξ. (2.23), μία μετατόπιση του μηχανικού ταλαντωτή, μετατοπίζει επίσης την συχνότητα συντονισμού της κοιλότητας και συνεπώς την ένταση του οπτικού πεδίου στην κοιλότητα [16]. Αυτή η αλληλεπίδραση μεταξύ μηχανικού ταλαντωτή και οπτικού πεδίου δημιουργεί τις συνθήκες ώστε να υπάρξουν περισσότερα από ένα σημεία ισορροπίας, όσον αφορά τον αριθμό των φωτονίων ($|a|^2$) αλλά και της θέσης του μηχανικού ταλαντωτή (x) [16]. Ο κινούμενος καθρέπτης κινείται μέσα σε δυναμικό που “αποτελείται” από το γνωστό δυναμικό του αρμονικού ταλαντωτή συν το δυναμικό από το οποίο προέρχεται η δύναμη ακτινοβολίας [18].

Το ολικό δυναμικό του συστήματος προκύπτει ως εξής:

Χρησιμοποιούμε την έκφραση των στάσιμων λύσεων του πλάτους a_{ss} (Εξ. 2.23). Με λίγες πράξεις φέρνουμε την εξίσωση στην μορφή:

$$a_{ss} = \frac{1}{(\Delta + Gx)/a_L + i\kappa/2a_L} \quad (2.24)$$

Λαμβάνοντας το μέτρο του μιγαδικού πλάτους οπτικού πεδίου στο τετράγωνο, έχουμε:

$$|a|^2 = \frac{1}{[(\Delta + Gx)/a_L]^2 + (\kappa/2a_L)^2} \implies \quad (2.25)$$

$$|a|^2 = \frac{n_{cav}^{max}}{[2(\Delta + Gx)/\kappa]^2 + 1} \quad (2.26)$$

όπου $n_{cav}^{max} = 4a_L^2/\kappa^2$ είναι ο μέγιστος αριθμός φωτονίων που κυκλοφορούν μέσα στην κοιλότητα όταν βρίσκεται σε συντονισμό.

Έχοντας την έκφραση της έντασης του πεδίου της κοιλότητας $|a|^2$ συναρτήσεως του x , μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση κίνησης του ταλαντωτή (Εξ. 2.20). Έτσι, έχουμε από την Εξ. (2.20), απαλείφοντας τις μη-συντηρητικές δυνάμεις (δύναμη απόσβεσης):

$$m\ddot{x} = -m\Omega_M^2 x + \frac{\hbar g}{x_{zpf}} \left(\frac{n_{cav}^{max}}{[2(\Delta + Gx)/\kappa]^2 + 1} \right) \quad (2.27)$$

Μπορούμε πλέον να βρούμε την έκφραση του δυναμικού του ταλαντωτή, όπως προκύπτει από την γνωστή σχέση για τις συντηρητικές δυνάμεις:[7]

$$F(x) = -\frac{\partial V(x)}{\partial x} \quad (2.28)$$

Ολοκληρώνοντας την Εξ. (2.27), σύμφωνα με την Εξ. (2.28), προκύπτει τελικά:[7]

$$V(x) = \frac{1}{2}m\Omega_M^2 x^2 - \frac{\hbar\kappa n_{cav}^{max}}{2} \arctan[2(\Delta + Gx)/\kappa]. \quad (2.29)$$

Ο δεύτερος όρος του δυναμικού είναι υπεύθυνος για την δύναμη ακτινοβολίας. Το πρώτο φαινόμενο που εμφανίζεται στο σύστημα λόγω της δύναμης ακτινοβολίας είναι αλλαγή της θέσης ισορροπίας σε $x_0 \neq 0$ όπου θα ισχύει $V'(x_0) = 0$. Επίσης, η δύναμη ακτινοβολίας προκαλεί αλλαγή στην σταθερά ελατηρίου του ταλαντωτή, κάτι που για ρεαλιστικές τιμές των παραμέτρων μπορεί να αυξήσει την ακαμψία του ταλαντωτή κατά αρκετές τάξεις μεγέθους [7]. Το φαινόμενο αυτό έχει χρησιμοποιηθεί ώστε να αυξηθεί η συχνότητα ταλάντωσης του καθρέπτη κατά ένα παράγοντα μεγαλύτερο του 20, ουσιαστικά “παγιδεύοντας” τον, χρησιμοποιώντας το φως [19].

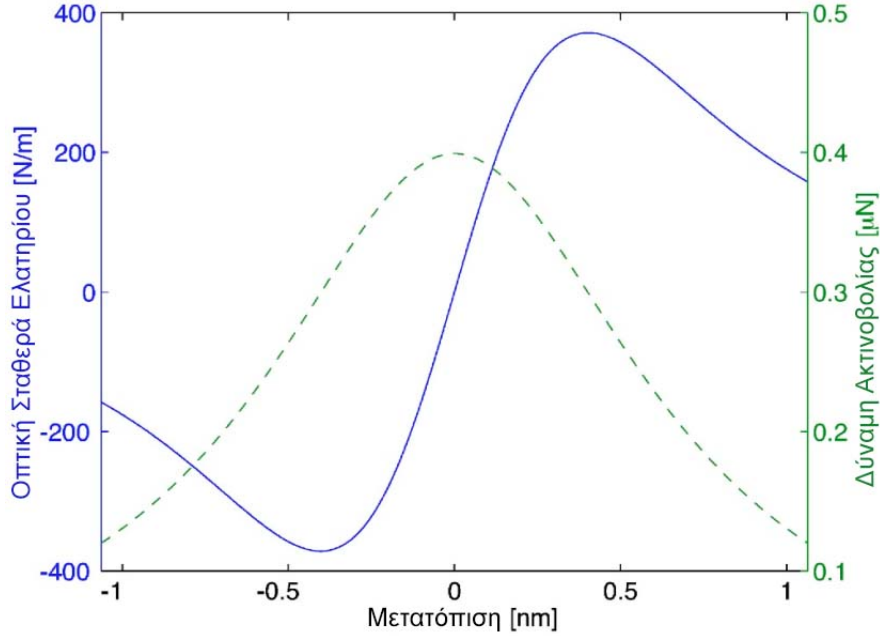
Έτσι, η τιμή της ολικής σταθεράς ελατηρίου του ταλαντωτή μετά την επίδραση της ακτινοβολίας γίνεται:[18]

$$k_{eff} = m\Omega_M^2 + \left. \frac{d^2 V_{rp}(x)}{dx^2} \right|_{x=x_0} \quad (2.30)$$

όπου ο δεύτερος όρος ονομάζεται “οπτικό ελατήριο” (Σχήμα 6) και το x_0 είναι η νέα θέση ισορροπίας του ταλαντωτή.

Αυτό το φαινόμενο είναι ουσιαστικά μία “οπτική παγίδα” και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να μειώσει τις μηχανικές απώλειες και την θέρμανση που υφίσταται ένα μηχανικό

ελατήριο συνδεδεμένο σε κάποιο υπόστρωμα [7].



Σχήμα 6. Η αλλαγή στην σταθερά ελατηρίου του μηχανικού ταλαντωτή λόγω της δύναμης ακτινοβολίας. Η διακεκομμένη καμπύλη αναπαριστά την δύναμη ακτινοβολίας συναρτήσει της Διαφοράς Συχνότητας. Η μπλε καμπύλη δείχνει την παράγωγο της δύναμης ακτινοβολίας η οποία είναι η οπτική σταθερά του ελατηρίου [ο δεύτερος όρος στο δεξί μέρος της εξίσωσης (2.30)] [6].

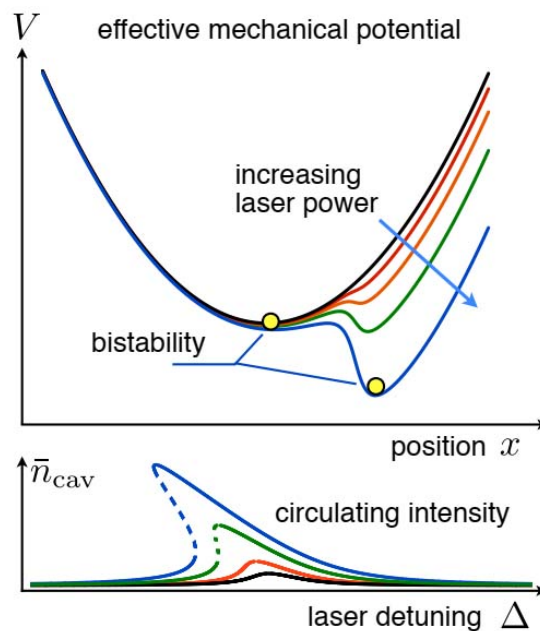
Η τιμή της μεταβολής της συχνότητας του ταλαντωτή που προκαλείται από την δύναμη ακτινοβολίας είναι η εξής:[7]

$$\delta\Omega_M = 8\Delta \left(\frac{g}{\kappa}\right)^2 \frac{n_{cav}^{max}}{[1 + (2\Delta/\kappa)^2]^2} \quad (2.31)$$

Καθώς αυξάνεται η ισχύς εισόδου του laser (ή αντίστοιχα η σταθερά σύζευξης) εμφανίζεται ένα δεύτερο ελάχιστο στο ολικό δυναμικό το οποίο σημαίνει ότι εμφανίζεται δι-στάθεια. (Σχήμα 7). Η διστάθεια εμφανίζεται σε αρνητικά Δ , περίπου για $\delta\Omega_M \approx -\Omega_M$, οπότε και η αρχική θέση ισορροπίας γίνεται ασταθής. Έπειτα, για μεγαλύτερες εντάσεις laser, το εύρος των Δ για τα οποία παρατηρείται διστάθεια, αυξάνεται [7].

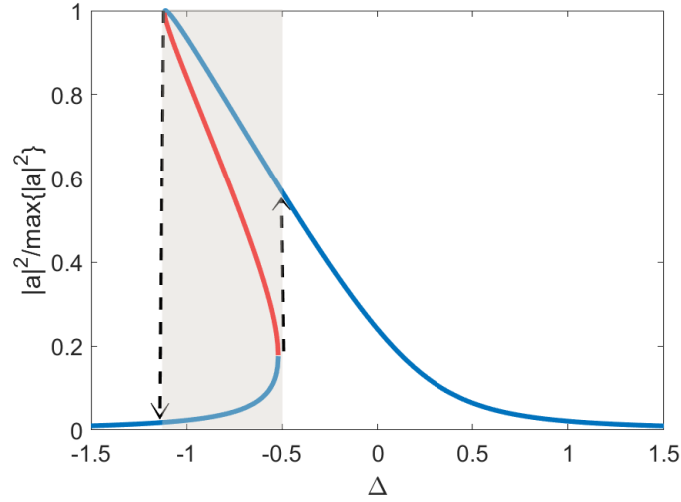
Πειραματικά, η διστάθεια αποκαλύπτεται μέσω της *υστέρησης*, όταν καταγράφουμε την μετάδοση του οπτικού πεδίου διαμέσου της κοιλότητας ή την αλλαγή φάσης καθώς αυ-ξομειώνουμε το Δ [7].

Η υστέρηση είναι ένα φαινόμενο που εμφανίζεται στις περιοχές παραμέτρων όπου υπάρχει διστάθεια. Καθώς αυξάνουμε το Δ η ένταση του οπτικού πεδίου θα μεταπηδήσει απότομα από τον κλάδο ευσταθών λύσεων υψηλής έντασης στον κλάδο ευσταθών λύσεων χαμηλής έντασης, όπως φαίνεται στο (Σχήμα 8). Αντίθετα, καθώς μειώνουμε το Δ από υψηλές τιμές, η ένταση του οπτικού πεδίου μεταπίπτει απότομα από χαμηλή ένταση οπτικού πεδίου σε υψηλή ένταση, πάλι από έναν ευσταθή κλάδο λύσεων σε άλλον ευσταθή κλάδο.



Σχήμα 7. Η στατική Οπτομηχανική διστάθεια εμφανίζεται όταν η ένταση του Laser είναι αρκετά υψηλή ώστε να δημιουργήσει δύο ευσταθή ελάχιστα στο ολικό μηχανικό δυναμικό. Αυτό δημιουργεί φαινόμενα διστάθειας και υστέρησης όταν καταγράφουμε τον αριθμό φωτονίων που κυκλοφορούν στην κοιλότητα ή την μετάδοση σαν συνάρτηση του Δ [7].

Παρακάτω, υπολογίζουμε αναλυτικά τις λύσεις ισορροπίας του συστήματος και βλέπουμε τον τρόπο με τον οποίο μετατοπίζεται η θέση ισορροπίας του ταλαντωτή όταν μεταβάλλουμε το Δ , με αποτέλεσμα να δημιουργούνται συνθήκες διστάθειας αλλά και εμφάνισης φαινομένων υστέρησης.



Σχήμα 8. Διάγραμμα του μέσου αριθμού φωτονίων εντός της κοιλότητας κανονικοποιημένου ως προς τον μέγιστο αριθμό φωτονίων σε κατάσταση συντονισμού. Υστέρηση σε περιοχή διστάθειας (γκρι περιοχή). Τα διακεκομμένα βέλη δείχνουν τις μεταπτώσεις μεταξύ των ευσταθών κλάδων καθώς αυξάνουμε ή μειώνουμε το Δ . Με κόκκινο χρώμα συμβολίζεται ο ασταθής κλάδος. Οι τιμές των παραμέτρων είναι: $P = 0.1$, $\kappa = 0.3$, $\Gamma = 0.075$.

2.5 Φαινόμενα που απορρέουν από την Οπτομηχανική σύζευξη: II. Δυναμικά Φαινόμενα

Όπως αναφέραμε και στην προηγούμενη ενότητα, τα δυναμικά φαινόμενα στο σύστημα ενισχύονται όταν ο χρόνος παραμονής των φωτονίων στην κοιλότητα γίνει συγκρίσιμος ή μεγαλύτερος από την περίοδο της ταλάντωσης δηλ. ($\kappa \ll \Omega_M$). Εμφανίζεται λοιπόν το φαινόμενο της *Δυναμικής Ανάδρασης* (Dynamical Backaction) [20].

Η παρακάτω διαδικασία είναι βασισμένη στο [7] αλλά εφαρμοσμένη στο παρόν σύστημα εξισώσεων. Για να εξάγουμε την δυναμική συμπεριφορά που δημιουργείται από την οπτομηχανική σύζευξη, μπορούμε να λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων κίνησης για το οπτικό πεδίο και τον μηχανικό ταλαντωτή (Εξ. 2.19, 2.20). Για το σκοπό αυτό μπορούμε πρώτα να γραμμικοποιήσουμε το σύστημα κι έπειτα να εφαρμόσουμε μετασχηματισμό Fourier ώστε να εκφράσουμε τις εξισώσεις στο πεδίο των συχνοτήτων. Χρησιμοποιώντας την έκφραση $G = g/x_{zpf}$, φέρνουμε το σύστημα στην εξής μορφή:

$$\dot{a} = \left[i(\Delta + Gx) - \frac{\kappa}{2} \right] a - ia_L \quad (2.32)$$

$$m\ddot{x} = -m\Omega_M^2 x - m\Gamma_M \dot{x} + \hbar G |a|^2 \quad (2.33)$$

Έπειτα, γραμμικοποιούμε το σύστημα Εξ. (2.32, 2.33) γύρω από μία στάσιμη λύση $a = a_s + \delta a$:

$$\delta \dot{a} = \left(i\Delta - \frac{\kappa}{2} \right) \delta a + iGa_s x \quad (2.34)$$

$$m\ddot{x} = -m\Omega_M^2 x - m\Gamma_M \dot{x} + \hbar G(a_s^* \delta a + a_s \delta a^*) \quad (2.35)$$

Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Fourier στις Εξ. (2.34, 2.35) λαμβάνουμε την εξής μορφή:

$$-i\omega \delta a[\omega] = \left(i\Delta - \frac{\kappa}{2} \right) \delta a[\omega] + iGa_s x[\omega] \quad (2.36)$$

$$-m\omega^2 x[\omega] = -m\Omega_M^2 x[\omega] + i\omega m\Gamma_M x[\omega] + \hbar G(a_s^* \delta a[\omega] + a_s (\delta a^*)[\omega]) \quad (2.37)$$

Έχοντας τις εξισώσεις μας σε αυτήν την μορφή στο πεδίο των συχνοτήτων μπορούμε να προχωρήσουμε στην μελέτη του φαινομένου της Δυναμικής Ανάδρασης.

Απουσία οπτομηχανικής σύζευξης, ο μηχανικός ταλαντωτής έχει την εξής Επιδεκτικότητα:

$$\chi_{xx,0}^{-1}(\omega) = m[(\Omega_M^2 - \omega^2) - i\Gamma_M \omega] \quad (2.38)$$

Έπειτα, θα υποθέσουμε ότι μία δύναμη αναφοράς δρα στον μηχανικό ταλαντωτή, παρουσία της οπτομηχανικής σύζευξης. Λύνοντας το συζευγμένο σύστημα των Εξ. (2.36, 2.37) μπορούμε να βρούμε την μηχανική απόκριση του ταλαντωτή σε αυτήν την δύναμη. Αυτό θα ορίσει την τροποποιημένη μηχανική επιδεκτικότητα δηλ. την επιδεκτικότητα απουσία οπτομηχανικής σύζευξης συν μία τροποποίηση. Αυτή εκφράζεται ως εξής:

$$\chi_{xx}^{-1}(\omega) = \chi_{xx,0}^{-1}(\omega) + \Sigma(\omega) \quad (2.39)$$

Το συζευγμένο σύστημα Εξ. (2.36, 2.37) λύνεται εκφράζοντας το $\delta a[\omega]$ στην Εξ. (2.36) ως προς $x[\omega]$ και αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα στην Εξ. (2.37). Έτσι, προκύπτει η τροποποίηση της γραμμικής απόκρισης του ταλαντωτή σε μία εξωτερική δύναμη:

$$\Sigma(\omega) = 2m\Omega_M g^2 |a|^2 \left\{ \frac{1}{(\Delta + \omega) + i\kappa/2} + \frac{1}{(\Delta - \omega) - i\kappa/2} \right\} \quad (2.40)$$

Έπειτα προσδιορίζουμε την μορφή του $\Sigma(\omega)$ ώστε να συμφωνεί με την μορφή της αρχικής επιδεκτικότητας δηλ. στο πραγματικό μέρος της $\chi_{xx,0}^{-1}(\omega)$ θα προστεθεί μία διαφορά $\delta\Omega_M$ στην συχνότητα του ταλαντωτή και στο φανταστικό της μέρος θα προστεθεί η οπτική απόσβεση Γ_{opt} που δημιουργεί το οπτικό πεδίο στον ταλαντωτή. Ορίζουμε:

$$\Sigma(\omega) \equiv m\omega(2\delta\Omega_M(\omega) - i\Gamma_{opt}(\omega)) \quad (2.41)$$

οπότε αντικαθιστώντας στην Εξ. (2.39), έχουμε:

$$\chi_{xx}^{-1}(\omega) = m(\Omega_M^2 + 2\delta\Omega_M(\omega) - \omega^2 - i\omega[\Gamma_M + \Gamma_{opt}(\omega)]) \quad (2.42)$$

Το πραγματικό και το φανταστικό μέρος αυτής της σχέσης αντιπροσωπεύουν την αλλαγή της μηχανικής συχνότητας $\delta\Omega_M$ και την οπτική απόσβεση Γ_{opt} τα οποία δίνονται από τις εξής σχέσεις: $\delta\Omega_M = \text{Re}\Sigma(\omega)/2\omega m$, και $\Gamma_{opt} = -\text{Im}\Sigma(\omega)/\omega m$:

$$\delta\Omega_M = g^2|a|^2 \frac{\Omega_M}{\omega} \left(\frac{\Delta - \omega}{\kappa^2/4 + (\Delta - \omega)^2} + \frac{\Delta + \omega}{\kappa^2/4 + (\Delta + \omega)^2} \right) \quad (2.43)$$

$$\Gamma_{opt} = g^2|a|^2 \frac{\Omega_M}{\omega} \left(\frac{\kappa}{\kappa^2/4 + (\Delta + \omega)^2} - \frac{\kappa}{\kappa^2/4 + (\Delta - \omega)^2} \right) \quad (2.44)$$

Αυτές οι σχέσεις δίνουν μία ακριβή λύση του γραμμικοποιημένου προβλήματος και επίσης ισχύουν και στην περιοχή ισχυρής σύζευξης ($g|a|^2 > \kappa/2$). Ένα σημαντικό στοιχείο είναι ότι τα φαινόμενα που περιγράφουν έχουν γραμμική σχέση με τον αριθμό των φωτονίων που κυκλοφορούν στην κοιλότητα.

Η εξάρτηση από την συχνότητα ω προκαλεί γενικά ένα μη-Λορεντζιανό σχήμα για την επιδεκτικότητα το οποίο μπορεί να αποκτήσει και δύο κορυφές, όταν έχουμε ισχυρή οπτομηχανική σύζευξη. Όμως, για μικρή ένταση του laser ($g|a|^2 \ll \kappa$), είναι επιτρεπτό να υπολογίσουμε τα $\delta\Omega_M(\omega)$ και $\Gamma_{opt}(\omega)$ στην αρχική, αδιατάρακτη συχνότητα ταλάντωσης $\omega = \Omega_M$.

Παρακάτω, παρουσιάζουμε τα δύο κύρια δυναμικά φαινόμενα που προκύπτουν από την οπτομηχανική σύζευξη.

2.5.1 Φαινόμενο Οπτικού Ελατηρίου

Το πρώτο φαινόμενο που συμβαίνει στα Οπτομηχανικά συστήματα λόγω της Δυναμικής Ανάδρασης είναι το Φαινόμενο Οπτικού Ελατηρίου το οποίο εμφανίζεται ως μία μεταβολή της συχνότητας ταλάντωσης Ω_M του καθρέπτη που προκαλείται από τη δύναμη ακτινοβολίας [18].

Αυτή η μεταβολή της συχνότητας, χρησιμοποιώντας την αδιατάρακτη συχνότητα $\omega = \Omega_M$, δίνεται από την σχέση:

$$\delta\Omega_M = g^2|a|^2 \left(\frac{\Delta - \Omega_M}{\kappa^2/4 + (\Delta - \Omega_M)^2} + \frac{\Delta + \Omega_M}{\kappa^2/4 + (\Delta + \Omega_M)^2} \right) \quad (2.45)$$

όπου στο όριο μεγάλων απωλειών της κοιλότητας ($\kappa \gg \Omega_M$), η Εξ. (2.45) γίνεται:

$$\delta\Omega_M(\Delta)|_{\kappa \gg \Omega_M} = g^2|a|^2 \frac{2\Delta}{\kappa^2/4 + \Delta^2} \quad (2.46)$$

Παρατηρούμε ότι αυτή η σχέση υποδηλώνει ότι αν τροφοδοτήσουμε την κοιλότητα με laser με συχνότητα προς το ερυθρό ($\Delta < 0$) θα μικρύνουμε την ολική σταθερά ελατηρίου δηλ. την ακαμψία του ταλαντωτή ενώ με laser με συχνότητα προς το κυανό ($\Delta > 0$) θα αυξήσουμε την ακαμψία [7].

2.5.2 Οπτομηχανικός Ρυθμός Απόσβεσης Γ_{opt}

Ο Οπτομηχανικός Ρυθμός Απόσβεσης Γ_{opt} είναι ο ρυθμός απόσβεσης της ενέργειας (φωονίων) του μηχανικού ταλαντωτή ο οποίος όμως οφείλεται στην δύναμη ακτινοβολίας σε αντίθεση με τον μηχανικό ρυθμό απόσβεσης Γ_M που είναι χαρακτηριστικός του ίδιου του μηχανικού ταλαντωτή.

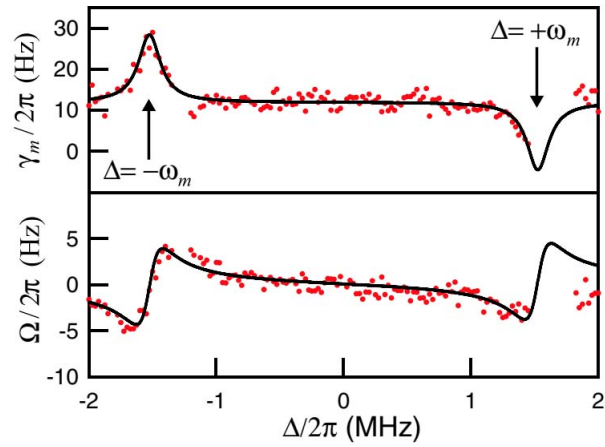
Η γενική έκφραση που μας δίνει την επίδραση του Οπτομηχανικού ρυθμού απόσβεσης είναι η εξής:[7]

$$\Gamma_{opt} = g^2 |a|^2 \left(\frac{\kappa}{\kappa^2/4 + (\Delta + \Omega_M)^2} - \frac{\kappa}{\kappa^2/4 + (\Delta - \Omega_M)^2} \right) \quad (2.47)$$

[7]Άρα ο ολικός ρυθμός μηχανικής απόσβεσης δίνεται από:

$$\Gamma_{eff} = \Gamma_M + \Gamma_{opt} \quad (2.48)$$

Το Γ_{opt} μπορεί να είναι θετικό ή αρνητικό, άρα μπορεί να αυξήσει ή και να μειώσει τον μηχανικό ρυθμό απόσβεσης του ταλαντωτή. Όταν έχουμε αυξημένη απόσβεση έχουμε “ψύξη” του ταλαντωτή (δηλ. μείωση του πλάτους ταλάντωσης-απώλεια φωονίων) ενώ όταν μειώνεται η απόσβεση έχουμε “θέρμανση” (αύξηση του πλάτους ταλάντωσης-κέρδος φωονίων). Αξίζει να σημειωθεί ότι όταν βρεθούμε στην περιοχή παραμέτρων όπου ισχύει ($\kappa \ll \Omega_M$), δηλ. η συχνότητα συντονισμού του ταλαντωτή είναι πολύ μεγαλύτερη από τις απώλειες της κοιλότητας, η διαφορά στην συχνότητα που παρατηρείται παίρνει αισθητά διαφορετική μορφή (Σχήμα 9). Το Φαινόμενο Οπτικού Ελατηρίου εδώ, μηδενίζεται για συγκεκριμένα Δ και η δύναμη ακτινοβολίας συνεισφέρει μόνο στην “ψύξη” ή την “θέρμανση” του ταλαντωτή (Μη-αδιαβατική συνεισφορά) [7].



Σχήμα 9. Οπτομηχανικός ρυθμός ψύξης και διαφορά συχνότητας στην περιοχή παραμέτρων $\kappa \ll \Omega_M$. Βλέπουμε ότι στην συγκεκριμένη περιοχή η $\delta\Omega_M$ (στο σχήμα δίνεται ως $\Omega/2\pi$) μηδενίζεται στις τιμές Δ που έχουμε μέγιστη ψύξη ή ενίσχυση [7].

2.5.3 Οπτομηχανική Ψύξη και Ενίσχυση

Ο Οπτομηχανικός Ρυθμός Απόσβεσης Γ_{opt} μπορεί να χρησιμοποιηθεί με σκοπό την ψύξη ενός μηχανικού ταλαντωτή (μείωση του πλάτους ταλάντωσης) ή αντίστοιχα την ενίσχυση του.

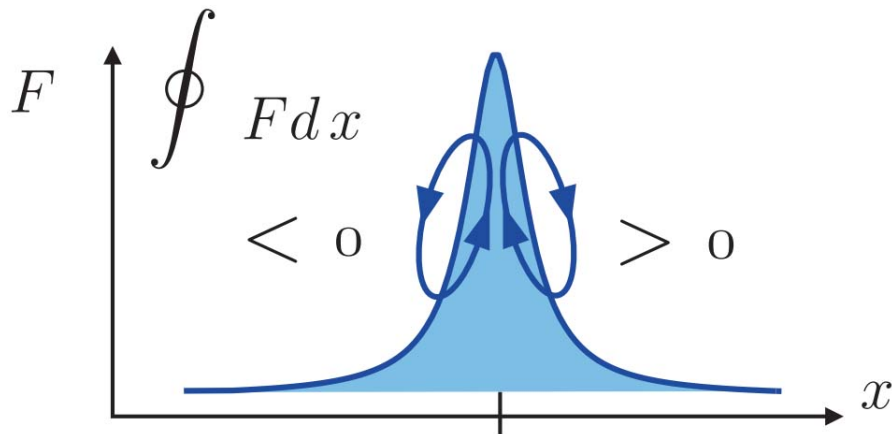
Η αφαίρεση θερμικών φωνονίων από το μηχανικό στοιχείο του συστήματος, είναι μία σημαντική πειραματική πρόκληση. Είναι ενδιαφέρον το γεγονός ότι οι ιδέες και μέθοδοι για τον σκοπό αυτό είχαν αναπτυχθεί θεωρητικά από τη δεκαετία του 1960. Η κύρια ιδέα αφορά στην εκμετάλευση της δύναμης ακτινοβολίας για τον σκοπό αυτό. Συγκεκριμένα, ο Braginsky συνειδητοποίησε ότι η χρονική καθυστέρηση μεταξύ της αλλαγής της θέσης του ταλαντούμενου καθρέπτη και της συνεπακόλουθης μεταβολής της έντασης του οπτικού πεδίου, επιτρέπει στο πεδίο να εκτελεί θετικό ή αρνητικό έργο στον καθρέπτη [21].

Η διαδικασία αυτή είναι δυνατό να περιγραφεί ως εξής: Καθώς ο μηχανικός ταλαντωτής εκτελεί αρμονική ταλάντωση διαγράφει μία τροχιά στο διάγραμμα Δύναμης Ακτινοβολίας - Θέσης ταλαντωτή (Σχήμα 10). Στην περιοχή παραμέτρων όπου έχουμε $\kappa \gg \Omega_M$ το πεδίο της κοιλότητας (και συνεπώς, η πίεση ακτινοβολίας) αντιδρά άμεσα στην ταλαντωτική κίνηση και έτσι διαγράφεται απλά μία καμπύλη στο διάγραμμα. Αν όμως λάβουμε υπ' όψιν την εναπομείνουσα απόσβεση της κοιλότητας τότε εμφανίζεται και μία συνιστώσα της δύναμης ακτινοβολίας η οποία είναι εκτός φάσης με την μηχανική κίνηση. Έτσι, μπορούμε να διαχωρίσουμε την δύναμη ως εξής:[7]

$$F(t) = \bar{F} + \delta F_I(t) + \delta F_Q(t)$$

όπου $\delta F_I(t)$ είναι η συνιστώσα της δύναμης εντός φάσης με την μηχανική κίνηση και $\delta F_Q(t)$ είναι η συνιστώσα εκτός φάσης, ανάλογη της παραγώγου του x (η οποία συνιστώσα είναι υπεύθυνη για την ψύξη ή την ενίσχυση) [7]. Το γεγονός ότι η εκτός φάσης συνιστώσα είναι ανάλογη του $\frac{dx}{dt}$, υποδηλώνει ότι η κίνηση του ταλαντωτή διαγράφει μία επιφάνεια στο διάγραμμα κι όχι απλά μία γραμμή [20]. Η φορά με την οποία διαγράφεται το σύνορο αυτής της επιφάνειας, δίνει την κατεύθυνση της ροής της ενέργειας δηλ. της ψύξης ή της ενίσχυσης [7].

Έτσι το οπτικό πεδίο δρα στην ουσία σαν ένα “υγρό” υψηλού ιξώδους για τον καθρέπτη το οποίο ασκεί μία επιπλέον απόσβεση πέραν της μηχανικής απόσβεσης του ταλαντωτή η οποία εκφράζεται μέσω της παραμέτρου Γ_{opt} , όπως έχουμε αναλύσει σε προηγούμενη ενότητα [18].



Σχήμα 10. Εξάρτηση της δύναμης ακτινοβολίας από την θέση του μηχανικού ταλαντωτή [8].

Ο μηχανισμός του φαινομένου που απεικονίζεται στο Σχήμα 10, λειτουργεί ως εξής: Θεωρούμε ότι ο καθρέπτης βρίσκεται σε μία θέση $x > 0$, δεξιά από την θέση συντονισμού και κινείται προς την θέση συντονισμού, $\dot{x} < 0$. Θεωρούμε μεγάλο ρυθμό απωλειών κ (δηλ. γρήγορη αντίδραση του οπτικού πεδίου στην κίνηση του καθρέπτη) και μικρές μετατοπίσεις του καθρέπτη. Καθώς κινείται προς τα αριστερά ο καθρέπτης δρα ενάντια στην δύναμη ακτινοβολίας, η οποία αυξάνεται καθώς ο καθρέπτης πλησιάζει την θέση συντονισμού και η ένταση του οπτικού πεδίου στην κοιλότητα μεγαλώνει. Αυτή όμως η αύξηση καθυστερεί σε σχέση με την κίνηση του καθρέπτη (επειδή τα φωτόνια καθυστερούν να διαφύγουν από την κοιλότητα). Έτσι, η δύναμη που δρα κάθε στιγμή στον καθρέπτη είναι μικρότερη από την στατική τιμή που θα είχε στην ίδια θέση αν ο χρόνος απόσβεσης των φωτονίων από την κοιλότητα ήταν ακαριαίος. Καθώς κινείται προς την αντίθετη, θετική κατεύθυνση, η καθυστέρηση μείωσης της έντασης του οπτικού πεδίου έχει ως αποτέλεσμα η τιμή της δύναμης ακτινοβολίας να είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη στατική τιμή της, κάτι που οδηγεί σε επιτάχυνση του καθρέπτη. Συνολικά, αυτή η διαδικασία οδηγεί σε αύξηση της ενέργειας της μηχανικής κίνησης κατά τη διάρκεια μιάς ταλάντωσης, η οποία αύξηση αντιστοιχεί στο εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείει η τροχιά, όπως φαίνεται στο Σχήμα 10. Άρα, όταν ο καθρέπτης βρίσκεται σε θέση $x > 0$ και ταλαντώνεται γύρω από αυτήν (όπου το laser είναι μετατοπισμένο προς το κυανό σε σχέση με την συχνότητα συντονισμού της κοιλότητας, λόγω της αύξησης του μήκους L της κοιλότητας) η κίνηση του καθρέπτη ενισχύεται, ενώ για $x < 0$ οι ίδιες φυσικές αρχές προκαλούν μία πρόσθετη απόσβεση στην κίνηση [8].

Η θερμοκρασία του ταλαντωτή μειώνεται σύμφωνα με τη σχέση:[19]

$$T_{eff} = T \frac{\Gamma}{\Gamma + \Gamma_{opt}} \quad (2.49)$$

όπου T είναι η θερμοκρασία του ταλαντωτή απουσία του οπτικού πεδίου και Γ_{opt} ο ρυθμός οπτομηχανικής απόσβεσης ο οποίος προστίθεται στον εγγενή ρυθμό μηχανικής απόσβεσης Γ του ταλαντωτή [19]. Από την Εξ. (2.49) βλέπουμε ότι η κλασική αυτή θεωρηση προβλέπει ότι το όριο ψύξης είναι το μηδέν. Μία πιο λεπτομερής κβαντομηχανική ανάλυση όμως μπορεί να αναδείξει ένα κατώτατο όριο που οφείλεται στον κβαντικό θόρυβο το οποίο όμως, στην πράξη, δεν είναι σημαντικό εμπόδιο στο να επιτευχθεί ψύξη του μηχανικού τρόπου ταλάντωσης στην θεμελιώδη κατάσταση, $\langle n_M \rangle = 0$ [18].

Διαγράμματα θορύβου και Θεώρημα Ισοκατανομής Αν μετρήσουμε την κίνηση ενός αρμονικού ταλαντωτή ο οποίος βρίσκεται σε θερμική ισορροπία με το περιβάλλον, τότε θα παρατηρήσουμε μία τροχία $x(t)$ η οποία ταλαντώνεται στην ιδιοσυχνότητα Ω_M . Στα πειράματα, η κίνηση του μηχανικού ταλαντωτή συνήθως δεν αναλύεται σε πραγματικό χρόνο αλλά ως φάσμα θορύβου στο πεδίο των συχνοτήτων.

Με την βοήθεια του Θεωρήματος Διακύμανσης-Διάχυσης (FDT), όταν ο ταλαντωτής είναι σε θερμική ισορροπία, μπορούμε να συσχετίσουμε τον θόρυβο με το φανταστικό μέρος της γραμμικής απόκρισης, ως εξής:[7]

$$S_{xx}(\omega) = 2 \frac{k_B T}{\omega} \text{Im} \chi_{xx}(\omega) \quad (2.50)$$

όπου το χ_{xx} είναι η μηχανική επιδεκτικότητα.

Ολοκληρώνοντας το $S_{xx}(\omega)$ λαμβάνουμε την διακύμανση $\langle x^2 \rangle$ ως εξής:[7]

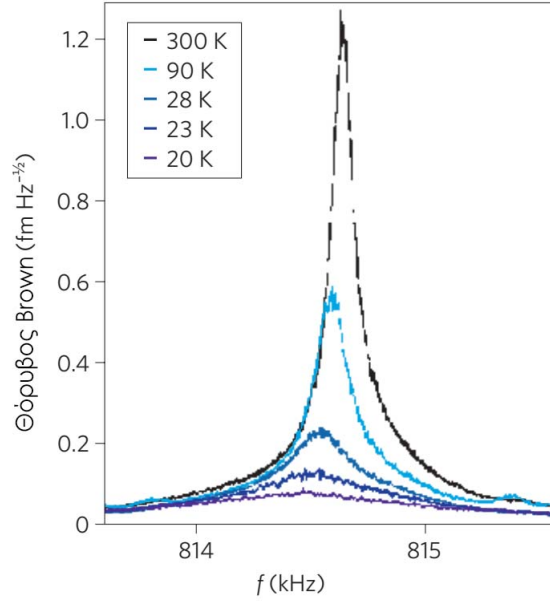
$$\int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(\omega) \frac{d\omega}{2\pi} = \langle x^2 \rangle \quad (2.51)$$

Η διακύμανση $\langle x^2 \rangle$ σύμφωνα με το Θεώρημα Ισοκατανομής δίνεται ως εξής:[7]

$$\langle x^2 \rangle = \frac{k_B T}{m\Omega_M^2} \quad (2.52)$$

Άρα, έχοντας την διακύμανση της θέσης x μπορούμε να έχουμε μία εκτίμηση της θερμοκρασίας T του μηχανικού ταλαντωτή. Επίσης, από τις Εξ. (2.51, 2.52) συμπεραίνουμε ότι το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη του φάσματος είναι ανάλογο της θερμοκρασίας T του μηχανικού ταλαντωτή [7].

Παρακάτω, δίνεται ένα διάγραμμα του φάσματος θορύβου ενός Οπτομηχανικού συστήματος στο πεδίο των συχνοτήτων.



Σχήμα 11. Φάσμα θορύβου του μηχανικού ταλαντωτή για διάφορες τιμές της Διαφοράς Συχνότητας Δ . Οι καμπύλες, από την υψηλότερη στην χαμηλότερη θερμοκρασία, αντιστοιχούν σε $\Delta = 0, -0.1, -0.25, -0.4, -0.6$ και για σταθερή τιμή της ισχύος εισόδου $P_{in} = 5mW$ [9].

Παρατηρούμε στο Σχήμα 11 ότι, καθώς μεταβάλλουμε το Δ του laser, τα φάσματα μεγαλώνουν δραστικά σε πλάτος αλλά και μειώνονται σε ύψος στις συχνότητες συντονισμού τους. Η μείωση του εμβαδού κάτω από τις καμπύλες, το οποίο είναι άμεσα συνδεδεμένο με την θερμοκρασία του ταλαντωτή από το θεώρημα ισοκατανομής, είναι ισχυρή ένδειξη της μείωσης της θερμοκρασίας. Επίσης, παρατηρούμε την μεταβολή στην συχνότητα συντονισμού καθώς μεταβάλλουμε το Δ του laser [22].

Μέσω της Εξ. (2.49) μπορούμε να δούμε πως αλλάζει η επίδραση του Γ_{opt} στις δύο περιοχές παραμέτρων που μας ενδιαφέρουν ($\kappa \gg \Omega_M$ και $\kappa \ll \Omega_M$), όσον αφορά τις τιμές των παραμέτρων για τις οποίες έχουμε την μέγιστη ψύξη. Επίσης, δίδονται και διαγράμματα πειραματικών δεδομένων με την συμπεριφορά του Γ_{opt} και του $\delta\Omega_M$ για ένα ευρύς τιμών των παραμέτρων κ και Δ (Σχήμα 12). Άρα για τον Οπτομηχανικό ρυθμό απόσβεσης Γ_{opt} , έχουμε:

Περιοχή $\kappa \ll \Omega_M$:

Στην περιοχή αυτή μπορούμε να επιτύχουμε την μέγιστη ψύξη του ταλαντωτή θέτοντας $\Delta = -\Omega_M$. Έτσι προκύπτει:

$$\Gamma_{opt}|_{\kappa \ll \Omega_M} = \frac{P}{\hbar\omega_L} \frac{g^2}{\Omega_M^2} \quad (2.53)$$

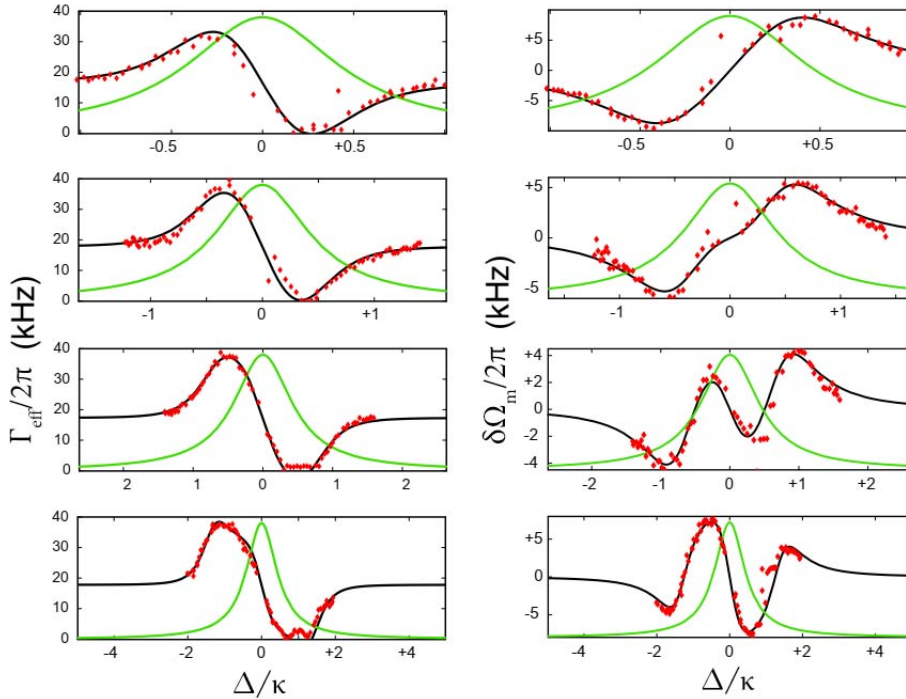
όπου P είναι η ισχύς του laser εισόδου. Βλέπουμε ότι ο ρυθμός ψύξης του ταλαντωτή σε αυτήν την περιοχή παραμέτρων είναι ανεξάρτητος από την ποιότητα της κοιλότητας (Finesse) καθώς είναι ανεξάρτητος της παραμέτρου κ (βλέπε 2.2) [7].

Περιοχή $\kappa \gg \Omega_M$:

Στην περιοχή αυτή μπορούμε να επιτύχουμε τον μέγιστο ρυθμό ψύξης ή ενίσχυσης του ταλαντωτή θέτοντας $\Delta = \kappa/2$. Έτσι προκύπτει:

$$\Gamma_{opt}(\Delta = -\kappa/2) = 8|a|^2 \left(\frac{g}{\kappa}\right)^2 \Omega_M \quad (2.54)$$

Παρατηρούμε ότι σε αυτήν την περιοχή παραμέτρων η ψύξη και η ενίσχυση εξαρτώνται από το $1/\kappa^2$ κάτι που μας δείχνει ότι ο ρυθμός ψύξης έχει πολύ μικρή τιμή στην περιοχή $\kappa \gg \Omega_M$ [7].



Σχήμα 12. Οπτομηχανικός ρυθμός απόσβεσης και Φαινόμενο Οπτικού Ελατηρίου συναρτήσει του Δ για διάφορες τιμές της παραμέτρου κ σύμφωνα με τη θεωρία (μαύρες γραμμές) και τα πειραματικά δεδομένα (κόκκινες τελείες).

Αριστερά: Ολικός Οπτομηχανικός ρυθμός απόσβεσης $\Gamma_{eff}/2\pi$ συναρτήσει της Διαφοράς Συχνότητας Δ/κ για μειούμενες τιμές του λόγου κ/Ω_M από πάνω προς τα κάτω ($\kappa/\Omega_M=3.7, 2.2, 1.4, 0.7$).

Δεξιά: Φαινόμενο Οπτικού Ελατηρίου $\delta\Omega_m/2\pi$ δηλ. η αλλαγή στην συχνότητα της μηχανικής ταλαντώσης λόγω του φωτός [7].

2.6 Πειραματικές Υλοποιήσεις και Εφαρμογές

2.6.1 Πειραματικές Υλοποιήσεις

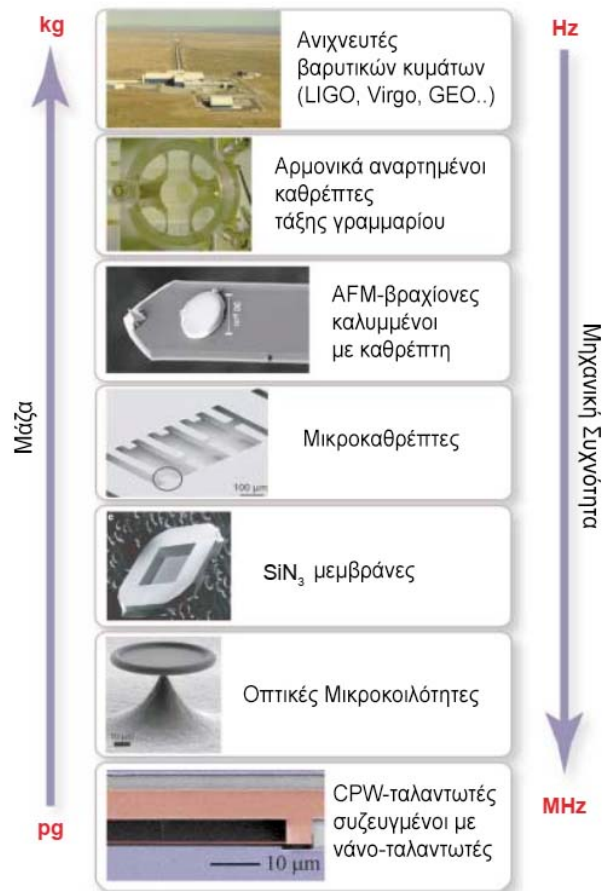
Τα συστήματα τα οποία παρουσιάζουν Δυναμική Ανάδραση λόγω της δύναμης ακτινοβολίας απαιτούν ιδιαίτερη μελέτη κατά τον σχεδιασμό τους όσον αφορά το μέγεθος τους αλλά και τις απώλειες. Η Δυναμική Ανάδραση στηρίζεται στην οπτική καθυστέρηση του συστήματος και είναι πιά έντονη για χρόνο ζωής φωτονίων συγκρίσιμο ή μεγαλύτερο της περιόδου μηχανικής ταλάντωσης. Επίσης, πολύ χαμηλές οπτικές απώλειες σημαίνουν ότι τα φωτόνια ανακυκλώνονται πολλές φορές μέσα στην κοιλότητα, ενισχύοντας συνεπώς την ασθενή δύναμη ακτινοβολίας στον καθρέπτη.

Από την άλλη μεριά, ο μηχανικός ρυθμός απόσβεσης καθορίζει τον ρυθμό θέρμανσης του καθρέπτη από το περιβάλλον, περιορίζοντας την αποτελεσματικότητα της Οπτομηχανικής ψύξης. Επίσης, θέτει το απαιτούμενο επίπεδο ενίσχυσης (δηλ. θέρμανσης) του καθρέπτη ώστε να μπορούν να υπάρξουν αέναες ταλαντώσεις.

Αυτά τα σημεία επιδεικνύουν τη σημασία της υψηλής οπτικής Finesse και του Μηχανικού δείκτη Q ($Q = \Omega_M/\Gamma_M$) στον πειραματικό σχεδιασμό των συστημάτων [5].

Στο Σχήμα 13 φαίνονται μία σειρά από καινοτόμες γεωμετρίες που έκαναν δυνατή την παρατήρηση της Δυναμικής Ανάδρασης λόγω δύναμης ακτινοβολίας. Η πρόοδος αυτή στηρίχθηκε στην ανάπτυξη καλυμμάτων καθρεπτών υψηλής Finesse (όπως χρησιμοποιούνται στους Ανιχνευτές Βαρυτικών Κυμάτων) όπως επίσης στις τεχνικές μικρο- και νανο-κατασκευών (πχ. όπως στα μικρο- και νανο-ηλεκτρομηχανικά συστήματα). Ένα σύνηθες υβριδικό σύστημα που χρησιμοποιείται αποτελείται από έναν απλό καθρέπτη εισόδου κατασκευασμένο με κάλυμμα υψηλής ανακλαστικότητας και έναν τελικό καθρέπτη οι διαστάσεις του οποίου βρίσκονται ανάμεσα στην μικρο- και την μακροκλίμακα και είναι αναρτημένος αρμονικά. Τέτοιου είδους καθρέπτες έχουν υλοποιηθεί με διάφορους τρόπους, όπως από ένα εγχάρακτο υπόστρωμα υψηλής-ανακλαστικότητας καθρέπτη, έναν πολύ μικρό και αρμονικά αναρτημένο καθρέπτη τάξης-γραμμαρίου ή έναν βραχίονα ατομικής δύναμης (AFM) πάνω στον οποίο έχει τοποθετηθεί ένα κάλυμμα καθρέπτη υψηλής-ανακλαστικότητας και μεγέθους μικρομέτρου.

Μία φυσική Οπτομηχανική σύζευξη μπορεί να συμβεί σε Οπτικές Μικροκοιλότητες, όπως οι μικροτοροειδείς κοιλότητες ή μικροσφαίρες οι οποίες περιέχουν συνυπάρχοντες, υψηλού δείκτη- Q , οπτικούς ρυθμούς τύπου whispering-gallery (δηλ. ρυθμών που διαδίδονται στο χείλος ενός κυκλικού ταλαντωτή) και μηχανικούς ρυθμούς ραδιοσυχνότητων [5].



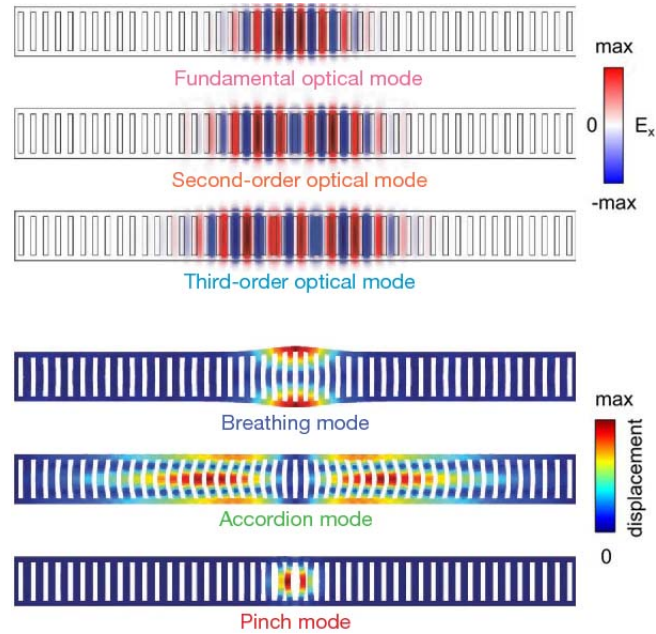
Σχήμα 13. Πειραματικά Οπτομηχανικά Συστήματα. Οι μάζες κυμαίνονται από χιλιόγραμμα έως πικογραμμάρια ενώ οι συχνότητες κυμαίνονται από δεκάδες MHz έως το επίπεδο του Hz. CPW, συνεπίπεδος κυματοδηγός [5].

Στην περίπτωση υβριδικών συστημάτων, μία άλλη γεωμετρία επίσης διαχώρισε τους οπτικούς και μηχανικούς βαθμούς ελευθερίας χρησιμοποιώντας μια πολύ μικρή οπτική κοιλότητα υψηλής-Finesse και μια ξεχωριστή νανομετρική μεμβράνη [5].

Ενώ οι προηγούμενες υλοποιήσεις λειτουργούν στην οπτική περιοχή του φάσματος, έχουν κατασκευαστεί διατάξεις και στην μικροκυματική και ραδιοσυχνοτική περιοχή, όπως ένας νανομηχανικός ταλαντωτής συζευγμένος με έναν υπεραγωγίμο μικροκυματικό ταλαντωτή [5].

Ιδιαίτερες υλοποιήσεις είναι επίσης οι Φωτονικοί Κρύσταλλοι (Σχήμα 14) οι οποίοι δημιουργούνται από μία περιοδική διαμόρφωση του δείκτη διάθλασης ενός υλικού (συνήθως πυρίτιο), το οποίο οδηγεί στον σχηματισμό οπτικών ζωνών. Το φως δεν μπορεί να διαδωθεί στα κενά μεταξύ των ζωνών αυτών. Έτσι όταν εισάγουμε τεχνητές ατέλειες στο περιοδικό μοτίβο, δημιουργούνται τοπικοί ηλεκτρομαγνητικοί ρυθμοί που δεν αποσβένονται στο συνεχές μέσα στην διάταξη [7]. Έκτός από το οπτικό πεδίο, μέσα

στis ατέλειες παγιδεύονται και οι μηχανικές δονήσεις, φτάνοντας μηχανικές συχνότητες μερικών GHz [2].



Σχήμα 14. Οπτικές (πάνω) και Μηχανικές ζώνες (κάτω) και ρυθμοί ατελειών ενός φωτονικού κρύσταλλου πυριτίου [10].

2.6.2 Εφαρμογές των Οπτομηχανικών Συστημάτων

Μία άμεση εφαρμογή των Οπτομηχανικών Συστημάτων είναι η ακριβής παρατήρηση της κίνησης του καθρέπτη μετρώντας την μηχανικά επιβαλλόμενη αλλαγή φάσης του οπτικού πεδίου της κοιλότητας. Η επιτεύξιμη ευαισθησία μέτρησης της μετατόπισης μπορεί να φτάσει στο επίπεδο ατομέτρου και κάτω. Τέτοια ακρίβεια στις μετρήσεις είναι σημαντική, για παράδειγμα στους **Ανιχνευτές Βαρυτικών Κυμάτων** [17]. Οι Οπτομηχανικές υλοποιήσεις ανιχνευτών κίνησης είναι τουλάχιστον δέκα φορές πιο ευαίσθητοι σε σχέση με τους αντίστοιχους ανιχνευτές της αγοράς [23].

Όσον αφορά τα **μικροσκόπια AFM** (μικροσκόπια ατομικής δύναμης), με χρήση των οπτομηχανικών διατάξεων στη γεωμετρία τους μπορούν να επιτύχουν πολύ μεγαλύτερη ακρίβεια απεικόνισης. Σε μία τέτοια υλοποίηση, ένας ημικυκλικός βραχίονας έρχεται σε σύζευξη με έναν μικροταλαντωτή τύπου whispering gallery (Σχήμα 15b). Σε αντίθεση με τις συνήθεις οπτικές τεχνικές μέτρησης, αυτά τα συστήματα μέτρησης δεν περιορίζονται από την περίθλαση κι έτσι οι διαστάσεις του βραχίονα του μικροσκοπίου μπορούν να μειωθούν σε μέγεθος τάξεως νανομέτρου με υψηλές συχνότητες συντονισμού. Σε αυτό το πείραμα επιτεύχθηκε ευαισθησία μετατόπισης $1\text{fm}/\text{Hz}^{1/2}$ και η ακαμψία του βραχίονα είχε εύρος τέσσερις τάξεις μεγέθους ($0.01\text{N}/\text{m}$ έως $290\text{N}/\text{m}$) [24].

Τα Οπτομηχανικά Συστήματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν και ως **μετρητές επιτάχυνσης** υψηλού εύρους συχνοτήτων και υψηλής ευαισθησίας. Πρόσφατες υλοποιήσεις πέτυχαν ευαισθησία $100\text{ng}/\text{Hz}^{1/2}$ με συχνοτικό εύρος μεγαλύτερο των 10kHz [11].

Ένας άλλος τομέας στον οποίο μπορούν να αποδειχθούν οφέλημα τα Οπτομηχανικά συστήματα είναι η **μαγνητομετρία**. Συγκεκριμένα, τα μαγνητόμετρα που χρησιμοποιούν μαγνητοδιαγνωστικά (magnetostrictive) υλικά μπορούν να λειτουργούν σε θερμοκρασία δωματίου (σε αντίθεση με άλλους τύπους μαγνητομέτρων που απαιτούν κρυογενική ψύξη) αλλά συνήθως έχουν χαμηλή ευαισθησία και χωρική ακρίβεια. Συνδυάζοντας, όμως, αυτά τα υλικά με οπτομηχανικούς ταλαντωτές τύπου whispering-gallery (WGM), ερευνητές έχουν καταφέρει να ξεπεράσουν αυτό το εμπόδιο. Τοποθετώντας ένα μαγνητοδιαγνωστικό υλικό επάνω σε έναν τέτοιο οπτομηχανικό ταλαντωτή το υλικό αυτό καθώς αλλάζει το μέγεθός του όταν βρεθεί εντός κάποιου μαγνητικού πεδίου, ταυτόχρονα αλλάζει και το μέγεθος του μικρο-οπτικού ταλαντωτή (Σχήμα 15c). Έτσι, μετρώντας την μεταβολή της συχνότητας συντονισμού του ταλαντωτή μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου. Η ακρίβεια στις μετρήσεις έφτασε τα $150n\text{T}/\text{Hz}^{-1/2}$ [11].

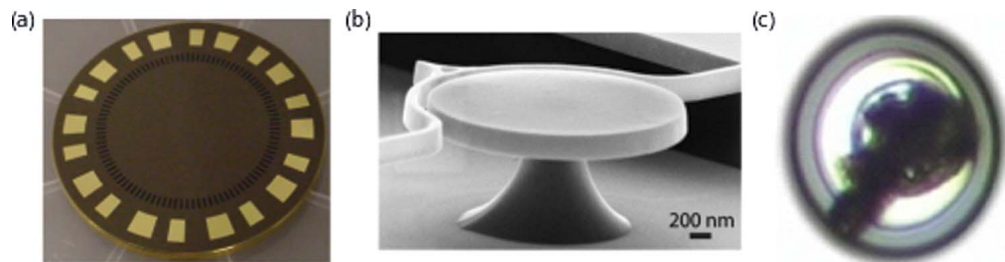
Εφαρμογές σχετικές με την οπτική επεξεργασία δεδομένων περιλαμβάνουν τα εξής: **Αποθήκευση φωτός** για κάποιο χρονικό διάστημα κι επαναχρησιμοποίησή του (Σχήμα 16). Ερευνητές μπόρεσαν να αποθηκεύσουν οπτική πληροφορία σαν μηχανική διέγερση σε έναν οπτομηχανικό ταλαντωτή πυριτίου. Έπειτα η πληροφορία μπορεί να ανακτηθεί από τον μηχανικό ταλαντωτή μέσω ενός παλμού με διαφοροποίηση συχνότητας $\Delta = -\Omega_M$ προς το ερυθρό. Με αυτόν τον τρόπο κατάφεραν να αποθηκεύσουν οπτική πληροφορία για χρόνο $20\mu\text{s}$ ο οποίος καθορίζεται από τον ρυθμό απόσβεσης του μη-

χανικού ταλαντωτή Γ_M . Με κατασκευή ταλαντωτών μικρότερου Γ_M (ή υψηλότερου δείκτη $Q = \Omega_M/\Gamma_M$ μπορούν να επιτευχθούν χρόνοι έως $1ms$ [12].

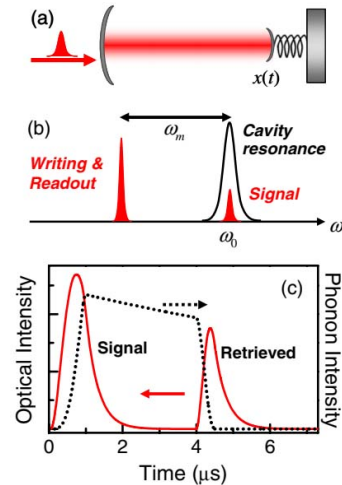
Ρυθμιζόμενα οπτικά φίλτρα τα οποία μπορούν να επιλέγουν συγκεκριμένα μήκη κύματος και είναι χρήσιμα πχ. στην τεχνολογία on-chip οπτικής διασύνδεσης.

Μετατροπή μεταξύ διαφόρων μηκών κύματος. Για παράδειγμα, η μετατροπή φωτονίων προερχόμενα από πηγές μονού φωτονίου (κβαντικές τελείες), από μήκη κύματος υπερίθρου σε οπτικού με υψηλή αποδοτικότητα και χαμηλό θόρυβο [11].

Μετατροπείς συχνότητας (RF-frequency down-converters) από τις ραδιοσυχνότητες στην οπτική περιοχή με εφαρμογές στις Τηλεπικοινωνίες [25].



Σχήμα 15. Διάφορες εφαρμογές Οπτομηχανικών αισθητήρων μετατόπισης. (a) Περιστρεφόμενος δίσκος με περιοχές μεταβαλλόμενης πυκνότητας για ελέγχους Νευτώνιας βαρύτητας. (b) Βραχίονας Μικροσκοπίου Ατομικής Δύναμης (AFM) με χρήση μικροδίσκου για ανάγνωση θέσης. (c) Μικροτοροειδής ταλαντωτής τύπου whispering-gallery με κομμάτι από Terfenol-D τοποθετημένο στην κορυφή του για μέτρηση μαγνητικών πεδίων [11].



Σχήμα 16. Αποθήκευση και ανάκτηση οπτικής πληροφορίας. (a) Σχηματική απεικόνιση ενός Οπτομηχανικού ταλαντωτή. (b) Φασματική θέση των παλμών εγγραφής, ανάγνωσης και σήματος. (c) Η ένταση του παλμού σήματος και του ανακτηθέντα παλμού (κόκκινες καμπύλες), μαζί με την ένταση της αποθηκευμένης μηχανικής ταλάντωσης (μαύρη διακεκομμένη καμπύλη) σαν συνάρτηση του χρόνου, τα οποία απεικονίζουν την οπτομηχανική διαδικασία της αποθήκευσης και ανάκτησης του φωτός [12].

3 Αναλυτική Επίλυση του Συστήματος

3.1 Εισαγωγή

Για να μελετήσουμε την δυναμική συμπεριφορά ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων χρειάζεται να επιλύσουμε το σύστημα, ώστε να αποκτήσουμε μία εποπτεία του τρόπου με τον οποίο μεταβάλλονται οι μεταβλητές του συναρτήσει του χρόνου. Στην περίπτωση όμως που το σύστημα αποτελείται από μη-γραμμικές διαφορικές εξισώσεις, όπως είναι αυτό που περιγράφει την Οπτομηχανική Σύζευξη, τότε είναι δύσκολο να λυθεί αναλυτικά. Ένας τρόπος ώστε να αποκτήσουμε μία εικόνα της συμπεριφοράς του συστήματος είναι να βρούμε τα σημεία ισορροπίας του συστήματος και έπειτα με ποιοτικό τρόπο να εκτιμήσουμε τον τύπο ευστάθειας τους και συνεπώς το φασικό πορτραίτο. Για να έχουμε όμως πιά ακριβή και αξιόπιστα αποτελέσματα είναι απαραίτητο να λύσουμε το σύστημα και να εξάγουμε την ευστάθεια των στάσιμων λύσεων του με αναλυτικό τρόπο. Αυτό γίνεται με την μέθοδο της γραμμικοποίησης του συστήματος η οποία μας βοηθάει να βρούμε με ακρίβεια τον τύπο ευστάθειας κάθε σημείου ισορροπίας, υπολογίζοντας τις ιδιοτιμές της Ιακωβιανής του γραμμικοποιημένου συστήματος. Απαραίτητη προϋπόθεση ώστε να ισχύει αυτός ο τύπος ανάλυσης είναι τα στάσιμα σημεία του συστήματος να είναι “υπερβολικά”, δηλ. πρέπει να ισχύει $Re(\lambda) \neq 0$ για όλες τις ιδιοτιμές τους. Το θεώρημα *Hartman-Grobman* δηλώνει ότι η μορφή του φασικού πορτραίτου κοντά σε ένα υπερβολικό στάσιμο σημείο είναι “τοπολογικά ισοδύναμη” με την μορφή του φασικού πορτραίτου που προκύπτει από την γραμμικοποίηση, δηλ. η γραμμικοποίηση προβλέπει ακριβώς τον τύπο ευστάθειας του στάσιμου σημείου του μη-γραμμικού συστήματος. Σε αυτό το κεφάλαιο χρησιμοποιούμε αυτήν την τεχνική ώστε να εξάγουμε με αναλυτικό τρόπο τα στάσιμα σημεία του συστήματος καθώς και τον τύπο ευστάθειας τους για μεγάλο εύρος τιμών των παραμέτρων. Έτσι μπορούμε να έχουμε μία σημαντική εικόνα της δυναμικής συμπεριφοράς του συστήματος, στον βαθμό που μας επιτρέπει η γραμμική ανάλυση της ευστάθειας [26].

3.2 Μορφοποίηση του συστήματος

Το συζευγμένο σύστημα εξισώσεων που περιγράφει το σύστημά μας είναι το εξής:

$$\frac{d\tilde{a}}{d\tilde{t}} = \left[i \left(\frac{\Delta}{\omega_M} + \tilde{x} \right) - \frac{1}{2} \frac{\kappa}{\omega_M} \right] \tilde{a} + \frac{1}{2} \quad (3.1)$$

$$\frac{d^2\tilde{x}}{d\tilde{t}^2} = -\tilde{x} + P|\tilde{a}|^2 - \frac{\Gamma_M}{\omega_M} \frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} \quad (3.2)$$

Η συγκεκριμένη μορφή του συστήματος είναι αδιάστατη.

Θέλουμε να φέρουμε το σύστημα σε μορφή η οποία να μας δίνει τη δυνατότητα να αναζητήσουμε σημεία ισορροπίας καθώς και να αναλύσουμε περαιτέρω τη δυναμική συμπεριφορά του συστήματος μας.

Θέτουμε $\tilde{a} = \rho e^{i\phi}$ και αντικαθιστούμε στο αρχικό σύστημα (3.1, 3.2)

$$\frac{d(\rho e^{i\phi})}{d\tilde{t}} = \left[i \left(\Delta + \tilde{x} \right) - \frac{1}{2} \kappa \right] \rho e^{i\phi} + \frac{1}{2} \quad (3.3)$$

$$\frac{d^2\tilde{x}}{d\tilde{t}^2} = -\tilde{x} + P\rho^2 - \Gamma \frac{d\tilde{x}}{d\tilde{t}} \quad (3.4)$$

όπου $\Gamma = \frac{\Gamma_M}{\Omega_M}$, $\kappa = \frac{\kappa_M}{\Omega_M}$, $\Delta = \frac{\Delta_M}{\Omega_M}$.

Η Εξ. (3.4) χωρίζεται στις εξής δύο εξισώσεις:

$$\dot{\tilde{x}} = v$$

$$\dot{v} = -\tilde{x} + P\rho^2 - \Gamma v.$$

Η Εξ. (3.3) θα πάρει την εξής μορφή:

$$\frac{d(\rho e^{i\phi})}{d\tilde{t}} = \frac{d\rho}{d\tilde{t}} e^{i\phi} + i\rho \frac{d\phi}{d\tilde{t}} e^{i\phi} = \left[i(\Delta + \tilde{x}) - \frac{1}{2}\kappa \right] \rho e^{i\phi} + \frac{1}{2} \implies$$

$$\frac{d\rho}{d\tilde{t}} + i\rho \frac{d\phi}{d\tilde{t}} = i\rho(\Delta + \tilde{x}) - \frac{1}{2}\kappa\rho + \frac{1}{2}e^{-i\phi}$$

Θέτουμε $e^{-i\phi} = \cos \phi - i \sin \phi$ και χωρίζουμε σε πραγματική και φανταστική εξίσωση:

$$\frac{d\rho}{d\tilde{t}} = -\frac{1}{2}\kappa\rho + \frac{\cos \phi}{2}$$

$$\frac{d\phi}{d\tilde{t}} = \Delta + \tilde{x} - \frac{\sin \phi}{2\rho}$$

Άρα το σύστημα μας είναι το εξής:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= v \\ \dot{v} &= -\tilde{x} + P\rho^2 - \Gamma v \\ \dot{\rho} &= -\frac{1}{2}\kappa\rho + \frac{\cos \phi}{2} \\ \dot{\phi} &= \Delta + \tilde{x} - \frac{\sin \phi}{2\rho} \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

3.3 Σημεία Ισοροπίας

Για να βρούμε σημεία ισοροπίας στην στατική κατάσταση, θέτουμε τις πρώτες παραγώγους των εξισώσεων του συστήματος ίσες με μηδέν και λύνουμε το αλγεβρικό σύστημα που προκύπτει. Έχουμε:

$$\left. \begin{aligned} v &= 0 \\ -\tilde{x} + P\rho^2 - \Gamma v &= 0 \\ -\frac{1}{2}\kappa\rho + \frac{\cos\phi}{2} &= 0 \\ \Delta + \tilde{x} - \frac{\sin\phi}{2\rho} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} -\tilde{x} + P\rho^2 &= 0 \\ -\frac{1}{2}\kappa\rho + \frac{\cos\phi}{2} &= 0 \\ \Delta + \tilde{x} - \frac{\sin\phi}{2\rho} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

Σκοπός μας είναι να λύσουμε το σύστημα (3.6) ώστε να εξάγουμε αναλυτικές εκφρασεις για τα \tilde{x} , ρ , ϕ της μορφής:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \rho \\ \phi \end{pmatrix} = f(P, \kappa, \Delta)$$

3.3.1 Αναλυτικές εκφράσεις των λύσεων

Λύνοντας το σύστημα (3.6) καταλήγουμε σε μία τριτοβάθμια εξίσωση, για την μεταβλητή x :

$$x^3 + 2\Delta x^2 + \left(\Delta^2 + \frac{\kappa^2}{4}\right)x - \frac{P}{4} = 0 \quad (3.7)$$

όπου έχουμε θέσει $\tilde{x} \equiv x$ για απλότητα.

Έπειτα, με την βοήθεια των εξισώσεων του συστήματος (3.6), μπορούμε να προσδιορίσουμε και τις τιμές των υπολοίπων δύο μεταβλητών $\rho = \rho(x)$ και $\phi = \phi(x)$. Μια προσφιλή μέθοδος λύσης είναι η μέθοδος του Cardano [27]. Μετατρέπουμε την εξίσωση στην μειωμένη μορφή της: $y^3 + py + q = 0$ όπου οι συντελεστές της εξίσωσης δίνονται από τις παρακάτω εκφράσεις:

$$p = -\frac{\Delta^2}{3} + \frac{\kappa^2}{4}$$

$$q = -\frac{38\Delta^3}{27} - \frac{\Delta\kappa^2}{2} - \frac{P}{4} \quad (3.8)$$

Για τις λύσεις διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις, ανάλογα με το πρόσημο της ποσότητας Q η οποία δίνεται παρακάτω. Σημειώνουμε ότι στην περιπτωσή μας αναζητούμε μόνο πραγματικές λύσεις.

Έχουμε:

$$Q = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 \quad (3.9)$$

1. $Q > 0$

Έχουμε μία πραγματική λύση η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$y_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}} \quad (3.10)$$

2. $Q = 0$

Έχουμε τρεις πραγματικές λύσεις από τις οποίες οι δύο είναι όμοιες.

$$y_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}} \quad (3.11)$$

$$y_{2,3} = -\frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}} \right)$$

3. $Q < 0$

Στην περίπτωση που το Q είναι αρνητικό έχουμε τρεις πραγματικές λύσεις και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις παρακάτω τριγωνομετρικές σχέσεις:[28]

$$y_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos(\theta)$$

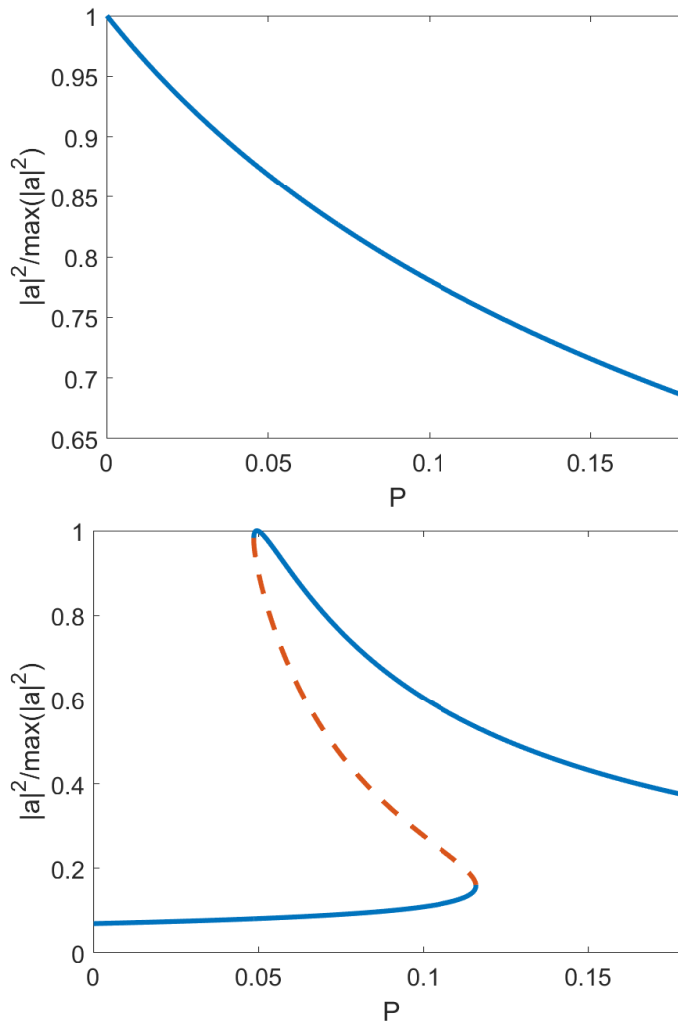
$$y_2 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \quad (3.12)$$

$$y_3 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right)$$

όπου το θ είναι πραγματικός αριθμός που δίνεται από τη σχέση:

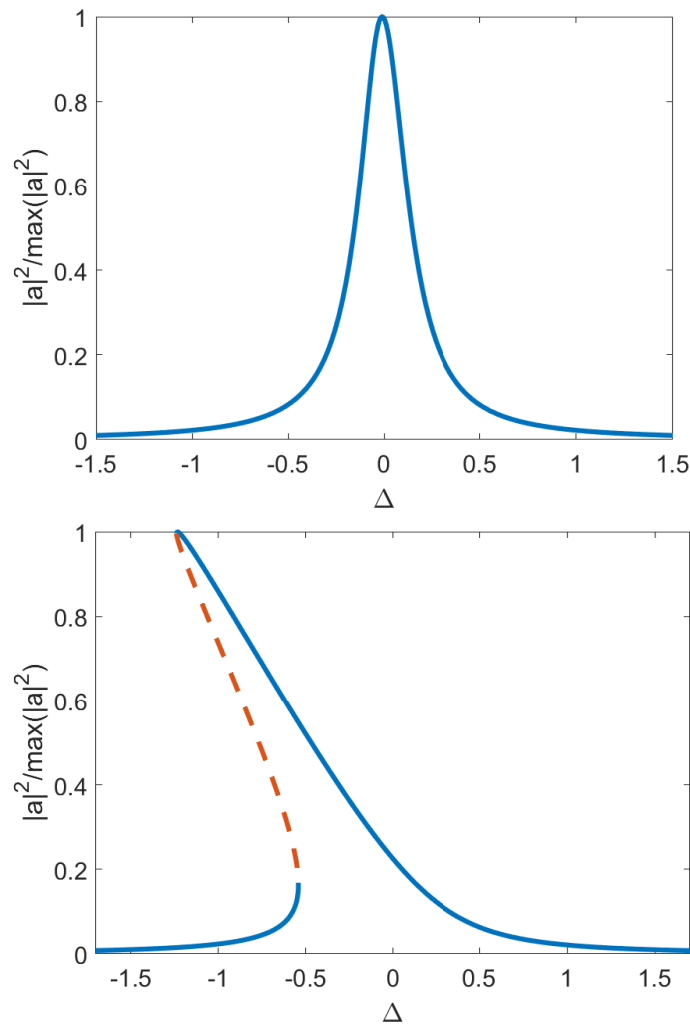
$$\theta = \frac{1}{3} \cos^{-1} \left(\frac{3\sqrt{3}q}{2p\sqrt{-p}} \right) \quad (3.13)$$

Για να λάβουμε τις λύσεις της αρχικής εξίσωσης εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό $\tilde{x} = y - a/3$ (όπου a , ο συντελεστής του τετραγωνικού όρου της τριτοβάθμιας εξίσωσης).



Σχήμα 17. Διαγράμματα στάσιμων λύσεων του συστήματος για δύο σταθερές τιμές της Διαφοράς Συχνότητας Δ . Στάσιμες λύσεις της έντασης του οπτικού πεδίου $|a|^2$ συναρτήσει της έντασης του laser εισόδου P για (Πάνω) $\Delta = 0.5$ και (Κάτω) $\Delta = -0.55$. Οι υπόλοιπες παράμετροι είναι: $\kappa = 0.3$, $\Gamma = 0.075$. Η διακεκομμένη καμπύλη συμβολίζει τον ασταθή κλάδο λύσεων.

Παρατηρούμε ότι ενώ για την θετική τιμή του Δ έχουμε έναν κλάδο λύσεων, για την αρνητική τιμή παρουσιάζονται τρεις κλάδοι λύσεων για συγκεκριμένο εύρος τιμών της έντασης του laser.



Σχήμα 18. Διαγράμματα στάσιμων λύσεων του συστήματος για δύο σταθερές τιμές της έντασης P του laser. Στάσιμες λύσεις της έντασης του οπτικού πεδίου $|a|^2$ συναρτήσει του detuning Δ για (Πάνω) $P = 0.001$ και (Κάτω) $P = 0.1111$. Οι υπόλοιπες παράμετροι είναι: $\kappa = 0.3$, $\Gamma = 0.075$. Η διακεκομμένη καμπύλη συμβολίζει τον ασταθή κλάδο λύσεων.

Η ένταση του πεδίου μέσα στην κοιλότητα δίνεται, όπως έχουμε αναφέρει στο προηγούμενο κεφάλαιο, από τη σχέση:[7]

$$|a|^2 = \frac{n_{cav}^{max}}{1 + [2(\Delta + Gx)/\kappa]^2} \quad (3.14)$$

Βλέπουμε ότι για μικρή τιμή της έντασης του laser ($P = 0.0001$), η καμπύλη είναι μία συμμετρική Λορεντζιανή. Για την δεύτερη περίπτωση όπου τροφοδοτούμε το σύστημα με μεγαλύτερη ένταση του laser, παρατηρούμε ότι έχει μετατοπιστεί η συχνότητα για την οποία έχουμε την μέγιστη τιμή της έντασης του οπτικού πεδίου. Αυξάνοντας την ένταση

του laser P (ή ισοδύναμα τον συντελεστή οπτομηχανικής σύζευξης g) έχουμε μεγαλύτερη μετατόπιση του καθρέπτη από την θέση ισορροπίας του, άρα έχουμε και αύξηση (ή μείωση) του πλάτους της κοιλότητας και συνεπώς αλλαγή στην συχνότητα συντονισμού της. Έτσι, αν η στάσιμη λύση του μηχανικού ταλαντωτή συμβαίνει σε $x > 0$ τότε (σύμφωνα με την Εξ. 3.14) ο συντονισμός της κοιλότητας συμβαίνει σε $\Delta < 0$. Αυτή η συμπεριφορά δημιουργεί τις συνθήκες για την ύπαρξη περισσότερων από μία στάσιμων λύσεων για μία τιμή της έντασης του laser P . Έτσι, για συγκεκριμένο εύρος τιμών των παραμέτρων παρουσιάζονται τρεις λύσεις, όπως φαίνεται και στα Σχήματα 17, 18. Πρακτικά, ο μεσαίος κλάδος (κόκκινο χρώμα) είναι σπάνια προσβάσιμος καθώς είναι ασταθής, γι' αυτό συνήθως τα οπτομηχανικά συστήματα είναι δισταθή και όχι τρισταθή. Επίσης η μορφή αυτή της έντασης του πεδίου δημιουργεί συνθήκες για την ύπαρξη υστέρησης. Αυξάνοντας το Δ από χαμηλές τιμές προς υψηλές, σύστημα εισέρχεται στον κόκκινο κλάδο και έπειτα περνάει με ασυνεχή τρόπο στον μπλε κλάδο. Αντίθετα, μειώνοντας το Δ από υψηλές τιμές προς χαμηλότερες, το σύστημα εισέρχεται στον κίτρινο κλάδο, και άρα σε πολύ υψηλότερες εντάσεις, έως ότου μεταπέσει ασυνεχώς στον μπλε κλάδο (μονές λύσεις) [16].

3.4 Ευστάθεια λύσεων ισορροπίας

Για τη μελέτη του είδους και της ευστάθειας των σημείων ισορροπίας που έχουμε βρει, μας ενδιαφέρει βρούμε τον τρόπο με τον οποίο θα εξελιχθεί μια μικρή διαταραχή που εφαρμόζουμε στο σύστημα το οποίο βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας. Για το σκοπό αυτό ενδείκνυται να κάνουμε γραμμικοποίηση του συστήματος μας, γύρω από ένα σημείο ισορροπίας του [26].

Η μορφή του γραμμικοποιημένου συστήματος που λαμβάνουμε είναι η εξής:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta\tilde{x} \\ \delta v \\ \delta\rho \\ \delta\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -\Gamma & 2P\rho_s & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\kappa & -\frac{1}{2}\sin(\phi_s) \\ 1 & 0 & \frac{\sin(\phi_s)}{2\rho_s^2} & -\frac{\cos(\phi_s)}{2\rho_s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\tilde{x} \\ \delta v \\ \delta\rho \\ \delta\phi \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

όπου ο 4×4 πίνακας είναι η Ιακωβιανή \mathbf{J} του συστήματος υπολογισμένη στα εκάστοτε σημεία ισορροπίας ρ_s, ϕ_s .

3.4.1 Εύρεση ιδιοτιμών της Ιακωβιανής

Για να βρούμε τις ιδιοτιμές της Ιακωβιανής, σχηματίζουμε την γνωστή εξίσωση:

$$\det[\mathbf{J} - \lambda\mathbf{I}] = 0 \quad (3.16)$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση που προκύπτει έχει την μορφή:

$$\lambda^4 + a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d = 0 \quad (3.17)$$

όπου

$$\begin{aligned}
a &= \frac{\cos(\phi_s)}{2\rho_s} + \frac{1}{2}\kappa + \Gamma \\
b &= \frac{\sin(\phi_s)}{4\rho_s^2} + \frac{\cos(\phi_s)}{4\rho_s}\kappa + \frac{\cos(\phi_s)}{2\rho_s}\Gamma + \frac{1}{2}\kappa\Gamma + 1 \\
c &= \frac{\sin(\phi_s)}{4\rho_s^2}\Gamma + \frac{\cos(\phi_s)}{4\rho_s}\kappa\Gamma + \frac{\cos(\phi_s)}{2\rho_s} + \frac{1}{2}\kappa \\
d &= \frac{\sin(\phi_s)}{4\rho_s^2} + \frac{\cos(\phi_s)}{4\rho_s}\kappa + P\rho_s \sin(\phi_s)
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Με την βοήθεια του μετασχηματισμού $y = \lambda - a/4$ μετατρέπουμε την χαρακτηριστική εξίσωση στη μειωμένη της μορφή:

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0 \tag{3.19}$$

όπου

$$\begin{aligned}
p &= b - \frac{3a^2}{8} \\
q &= \frac{a^3}{8} - \frac{ab}{2} + c \\
r &= -\frac{3a^4}{256} + \frac{ba^2}{16} - \frac{ac}{4} + d
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Τη συγκεκριμένη (biquadratic) εξίσωση μπορούμε να τη λύσουμε με την μέθοδο *Descartes-Euler* [27].

Η μέθοδος αυτή εναπόκειται στην λύση της εξίσωσης τρίτου βαθμού:

$$z^3 + \frac{p}{2}z^2 + \frac{p^2 - 4r}{16}z - \frac{q^2}{64} = 0 \quad (3.21)$$

την οποία την μετασχηματίζουμε στην μειωμένη της μορφή: $w^3 + fw + g = 0$.

Επίσης έχουμε την ποσότητα $Q = \left(\frac{f}{3}\right)^3 + \left(\frac{g}{2}\right)^2$.

Οι λύσεις της Εξ. (3.19) δίνονται από τέσσερα αθροίσματα $y_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{z_1} \pm \sqrt{z_2} \pm \sqrt{z_3}$ με τα πρόσημα να επιλέγονται έτσι ώστε να ικανοποιείται η σχέση: $\sqrt{z_1}\sqrt{z_2}\sqrt{z_3} = -q/8$.

Άρα οι λύσεις της Εξ. (3.19) δίνονται αναλυτικά από τις παρακάτω σχέσεις:[27],[28]

1. $Q \geq 0$

$$y_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{z_1} \pm \sqrt{z_2} \pm \sqrt{z_3} \quad (3.22)$$

όπου

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt[3]{-\frac{g}{2} + \sqrt{Q}} + \sqrt[3]{-\frac{g}{2} - \sqrt{Q}} - \frac{p}{6} \\ z_{2,3} &= -\frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{-\frac{g}{2} + \sqrt{Q}} + \sqrt[3]{-\frac{g}{2} - \sqrt{Q}} \right) \\ &\quad \pm i \frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{-\frac{g}{2} + \sqrt{Q}} - \sqrt[3]{-\frac{g}{2} - \sqrt{Q}} \right) \sqrt{3} - \frac{p}{6} \end{aligned} \quad (3.23)$$

2. $Q < 0$

$$y_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{z_1} \pm \sqrt{z_2} \pm \sqrt{z_3} \quad (3.24)$$

όπου

$$\begin{aligned}
z_1 &= 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos(\theta) - \frac{p}{6} \\
z_2 &= 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) - \frac{p}{6} \\
z_3 &= 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) - \frac{p}{6}
\end{aligned} \tag{3.25}$$

όπου το θ είναι πραγματικός αριθμός που δίνεται από την σχέση:

$$\theta = \frac{1}{3} \cos^{-1}\left(\frac{3\sqrt{3}q}{2p\sqrt{-p}}\right) \tag{3.26}$$

Άρα οι ιδιοτιμές της Ιακωβιανής δίνονται τελικά από την αντιστροφή του μετασχηματισμού που εφαρμόσαμε για να μετατρέψουμε την εξίσωση στην μειωμένη της μορφή:

$$\lambda = y - a/4 \tag{3.27}$$

3.4.2 Εύρεση ιδιοδιανυσμάτων της Ιακωβιανής

Για να βρούμε τα ιδιοδιανύσματα της Ιακωβιανής θα χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση ιδιοτιμών η οποία είναι η εξής:

$$\mathbf{J}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \tag{3.28}$$

Με την εισαγωγή του μοναδιαίου πίνακα \mathbf{I} το σύστημα μπορεί να γραφτεί ως:

$$[\mathbf{J} - \lambda\mathbf{I}]\mathbf{x} = 0 \tag{3.29}$$

Πιο αναλυτικά:

$$\begin{bmatrix}
-\lambda & 1 & 0 & 0 \\
-1 & -\Gamma - \lambda & 2P\rho_s & 0 \\
0 & 0 & -\frac{1}{2}\kappa - \lambda & -\frac{1}{2}\sin(\phi_s) \\
1 & 0 & \frac{\sin(\phi_s)}{2\rho_s^2} & -\frac{\cos(\phi_s)}{2\rho_s} - \lambda
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
x_1 \\
x_2 \\
x_3 \\
x_4
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 \\
0 \\
0 \\
0
\end{bmatrix} \tag{3.30}$$

Εφαρμόζοντας απαλλειφή Gauss φέρνουμε το σύστημα στην παρακάτω μορφή:[29]

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\Gamma - \lambda - \frac{1}{\lambda} & 2P\rho_s & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}k - \lambda & -\frac{1}{2}\sin(\phi_s) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Έπειτα εφαρμόζουμε αντίστροφη αντικατάσταση. Πρώτα ορίζουμε αυθαίρετα την τιμή του $x_4 = 1$ καθώς η τελευταία σχέση του συστήματος έχει άπειρες λύσεις ($0x_4 = 0$).

Τελικά οι συνιστώσες των ιδιοδιανυσμάτων προκύπτουν ως εξής:


$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{2P\rho_s \sin(\phi_s)}{\lambda(\Gamma + \lambda + \frac{1}{\lambda})(k + 2\lambda)} \\ x_2 &= -\frac{2P\rho_s \sin(\phi_s)}{(\Gamma + \lambda + \frac{1}{\lambda})(k + 2\lambda)} \\ x_3 &= -\frac{\sin(\phi_s)}{k + 2\lambda} \\ x_4 &= 1 \end{aligned} \quad (3.32)$$

3.4.3 Διαγράμματα Ευστάθειας στον Χώρο των Παραμέτρων

Παρακάτω παρουσιάζονται τα διαγράμματα ευστάθειας, όπως προκύπτουν από τις αναλυτικές λύσεις των στάσιμων λύσεων και των ιδιοτιμών που αναπτύχθηκαν στις παραγράφους 3.3 και 3.4.


Στα διαγράμματα χρησιμοποιούμε έναν “χρωματικό κώδικα” για να υποδείξουμε την κατάσταση ευστάθειας κάθε σημείου στον χώρο των παραμέτρων. Ο χρωματικός κώδικας είναι ο εξής:


1. Μονές στάσιμες λύσεις

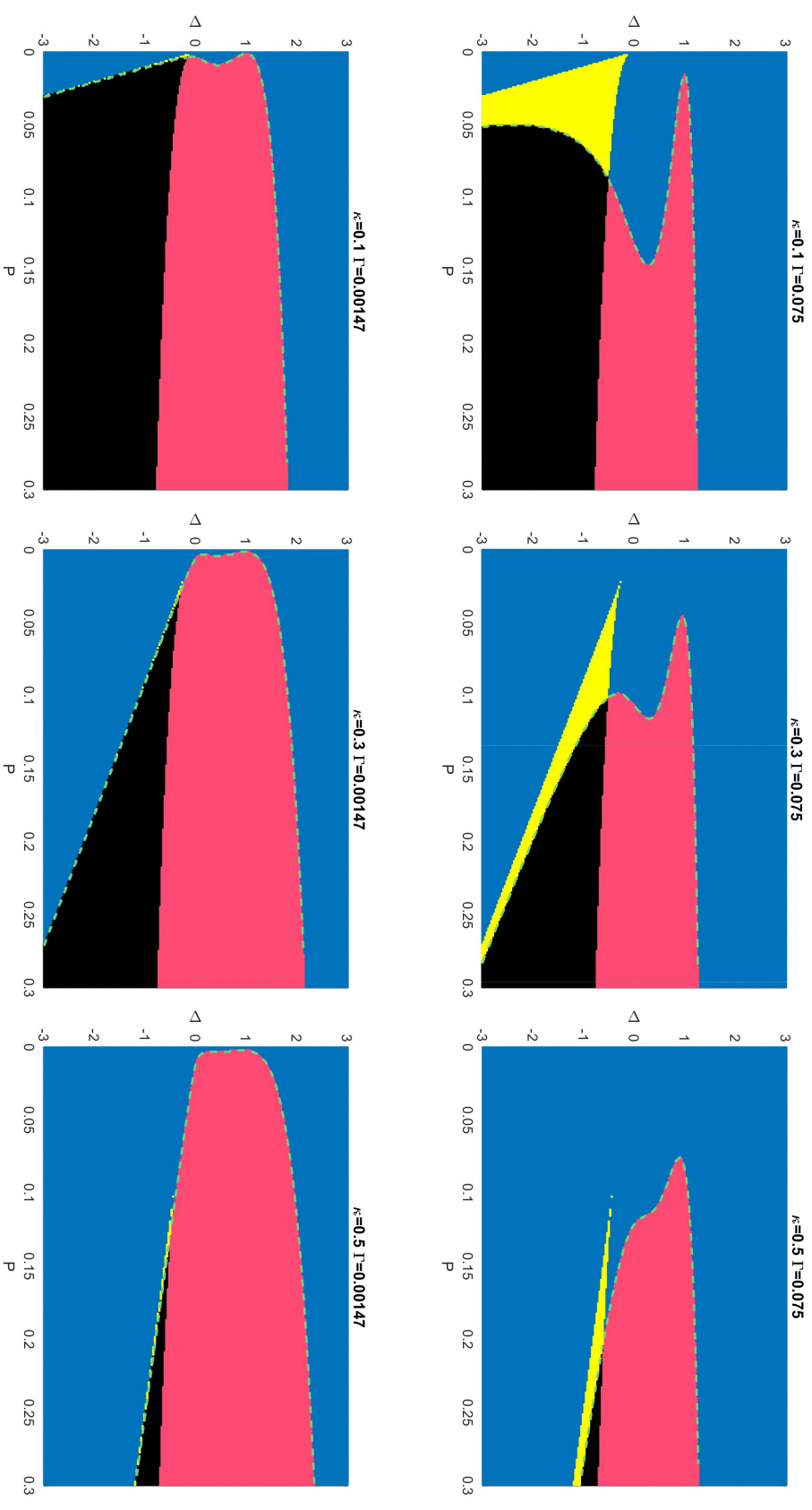
I ΜΠΛΕ  : Ευσταθής σπείρα.

II ΡΟΖ  : Ασταθής σπείρα.

2. Τριπλές στάσιμες λύσεις

I ΜΑΥΡΟ  : Μία ευσταθής σπείρα, μία ασταθής σπείρα & ένα σαγματικό σημείο.

II ΚΙΤΡΙΝΟ (διστάθεια)  : Δύο ευσταθείς σπείρες & ένα σαγματικό σημείο.



Σχήμα 19. Διαγράμματα ύπαρξης και ευστάθειας των στάσιμων λύσεων του συστήματος στον τετραδιάστατο χώρο των παραμέτρων ($P, \Delta, \kappa, \Gamma$). Η πράσινη διακεκομμένη γραμμή συμβολίζει το σύνορο στο οποίο συμβαίνει διακλάδωση Hopf καθώς αυξάνουμε το P .

Τα διαγράμματα του Σχήματος 19 είναι τοποθετημένα με τέτοιο τρόπο ώστε από αριστερά προς τα δεξιά έχουμε αύξηση της οπτικής απόσβεσης της κοιλότητας (μέσω της παραμέτρου κ) και από κάτω προς τα πάνω έχουμε αύξηση της απόσβεσης του μηχανικού ταλαντωτή (μέσω της παραμέτρου Γ). Αξίζει να αναφερθεί ότι η παράμετρος Γ δεν επηρεάζει καθόλου τον αριθμό των στάσιμων λύσεων, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 19 λόγω του ότι δεν εμφανίζεται στην εξίσωση στάσιμων λύσεων (Εξ. 3.7), όμως επηρεάζει την ευστάθεια των λύσεων καθ'ότι εμφανίζεται στην Ιακωβιανή. Επίσης, οι τριπλές λύσεις και συνεπώς και οι περιοχές διστάθειας, εμφανίζονται μόνο σε αρνητικές τιμές της Διαφοράς Συχνότητας Δ που, όπως αναφέραμε στην ενότητα 2.4.1, οφείλεται στην μεταβολή της συχνότητας συντονισμού της κοιλότητας λόγω της δύναμης ακτινοβολίας. Βλέπουμε ότι αυξάνοντας το κ μειώνεται σημαντικά ο αριθμός των τριπλών στάσιμων λύσεων, οι οποίες δίνουν την θέση τους σε ευσταθείς μονές λύσεις (ευσταθείς σπείρες). Παράλληλα, βλέπουμε ότι η αύξηση του κ δεν αλλάζει σχεδόν καθόλου τον αριθμό των ασταθών μονών λύσεων, ειδικά για μικρές τιμές του Γ . Συνολικά, η αύξηση της παραμέτρου Γ μεταθέτει το σύνορο πάνω στο οποίο συμβαίνουν διακλαδώσεις Hopf προς μεγαλύτερες τιμές της έντασης του laser P . Επιπλέον, η αύξηση του Γ δημιουργεί περιοχές όπου παρατηρείται διστάθεια, οι οποίες έχουν μεγαλύτερη επιφάνεια όταν το κ είναι χαμηλό.

Από πρακτικής άποψης, τα διαγράμματα αυτά μας βοηθούν να επιλέξουμε τις τιμές των παραμέτρων που θα χρησιμοποιήσουμε για να επιτύχουμε την δυναμική συμπεριφορά που θέλουμε. Αν χρειαζόμαστε π.χ. διστάθεια, είναι προτιμότερο να κρατήσουμε το κ χαμηλό και το Γ υψηλό καθώς είναι πιο εύκολο να βρεθούμε σε περιοχή διστάθειας. Αν θέλουμε μέγιστη ευστάθεια σε όλο το εύρος των παραμέτρων, είναι προτιμότερο να αυξήσουμε το κ και το Γ . Αξίζει επίσης να υπενθυμίσουμε ότι η παράμετρος P δεν αντιπροσωπεύει μόνο την ένταση του laser εισόδου. Είναι ανάλογη του ρυθμού εισροής φωτονίων στην κοιλότητα $|a_{in}|^2$ αλλά επίσης είναι ανάλογη και της Οπτομηχανικής σταθεράς σύζευξης g και αντιστρόφως ανάλογη της μηχανικής συχνότητας του ταλαντωτή Ω_M . Αρα, θα μπορούσαμε να κρατήσουμε σταθερή την ένταση του laser εισόδου αν π.χ. έχουμε laser μη μεταβλητό, και να μεταβάλλουμε την σταθερά g έχοντας τα ίδια δυναμικά αποτελέσματα.

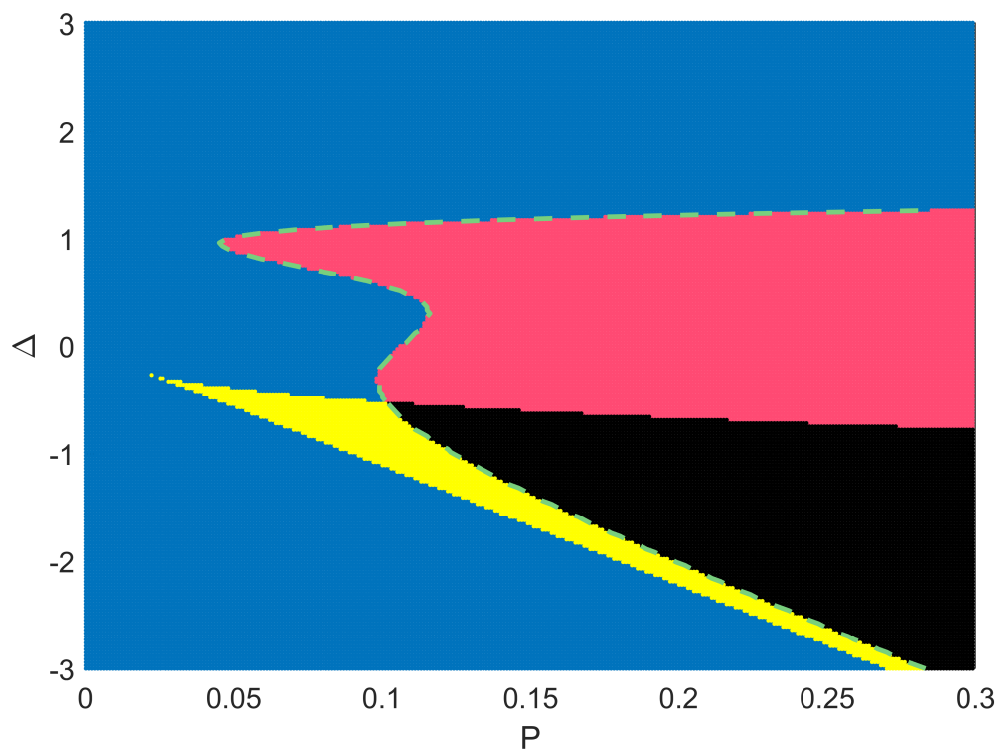
4 Αριθμητική Διερεύνηση

4.1 Εισαγωγή

Στο προηγούμενο κεφάλαιο μελετήσαμε την ευστάθεια του συστήματος μας χρησιμοποιώντας το αντίστοιχο γραμμικοποιημένο σύστημα (Εξ. 3.15) μέσω των στάσιμων λύσεων που υπολογίσαμε με αναλυτικό τρόπο.

Σε αυτό το κεφάλαιο, επιλύουμε το αρχικό μη-γραμμικό σύστημα (3.5) με αριθμητικό τρόπο με σκοπό, πρώτον, να πάρουμε μία ποιοτική και ποσοτική εικόνα της συμπεριφοράς του συστήματος στον χρόνο και, δεύτερον, να επιβεβαιώσουμε την αναλυτική περιγραφή της ευστάθειας που πραγματοποιήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο από μία διαφορετική σκοπιά.

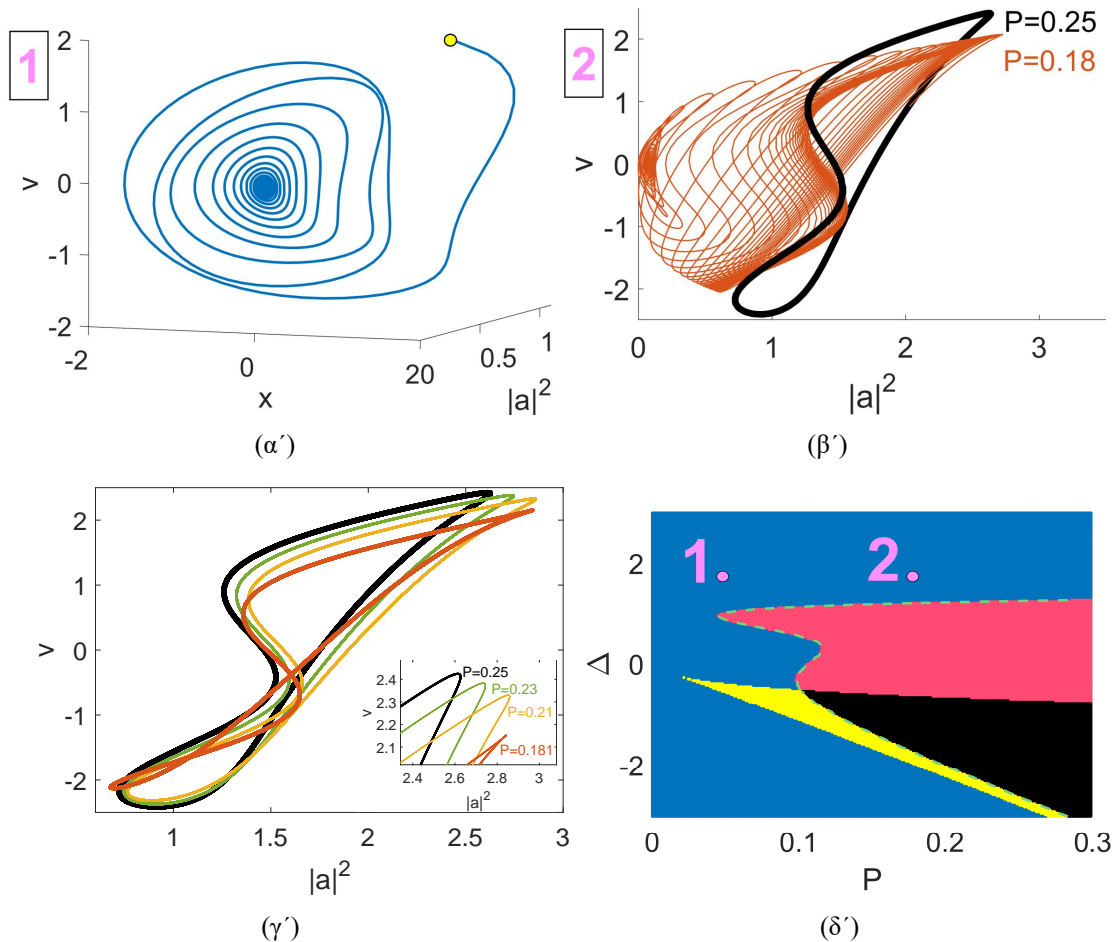
Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο *Runge-Kutta 4ης τάξης* [26]. Ενδεικτικά λύνουμε το σύστημα για την περίπτωση τιμών των παραμέτρων $\kappa = 0.3$, $\Gamma = 0.075$.



Σχήμα 20. Διάγραμμα Ευστάθειας του συστήματος στον χώρο των παραμέτρων για τιμές παραμέτρων $\kappa = 0.3$, $\Gamma = 0.075$. Η πράσινη διακεκομμένη καμπύλη συμβολίζει το όριο στο οποίο συμβαίνουν διακλάδωσεις Hopf. Ο χρωματικός κώδικας είναι ο εξής: Μπλε→Ευσταθείς Σπείρες, Ροζ→Ασταθείς Σπείρες, Μαύρο→Μία ευσταθής σπείρα, μία ασταθής σπείρα και ένα σαγματικό σημείο, Κίτρινο→Δύο ευσταθείς σπείρες και ένα σαγματικό σημείο (Διστάθεια).

4.2 Φασικά πορτραίτα του συστήματος

4.2.1 Επίλυση του συστήματος για $\Delta = 1.7$



Σχήμα 21. Διαγράμματα φάσης του μη-γραμμικού συστήματος για (α) $P = 0.05$ και (β) $P = 0.18$. Οι αρχικές συνθήκες είναι οι εξής: (α) $[x = 0.9246 \rho = 1 \phi = 0.5 u = 1.71]$, (β) $[x = 0.1249 \rho = 3.857 \phi = 1.54 u = 0.1574]$. Στο Σχήμα 21β απεικονίζεται επιπλέον κι ο οριακός κύκλος που προκύπτει με τις ίδιες αρχικές συνθήκες αλλά για $P = 0.25$ (με μαύρο χρώμα). Στο Σχήμα 21γ απεικονίζονται, για λόγους ευκρίνειας, οι οριακοί κύκλοι που προκύπτουν από την επίλυση του συστήματος για τις ίδιες, πάντα, αρχικές συνθήκες και για διαφορετικές τιμές του P οι οποίες δίνονται στο εσωτερικό διάγραμμα. Στο Σχήμα 21δ δίνεται η θέση των διαγραμμάτων (α) και (β) στον χώρο των παραμέτρων (1 και 2 αντίστοιχα).

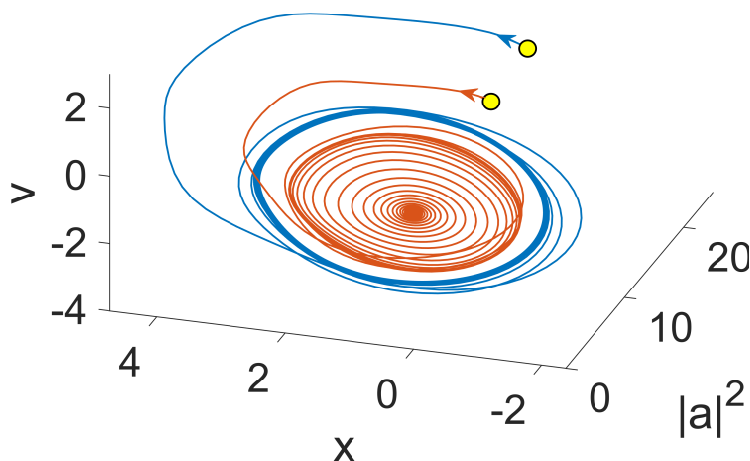
Βλέπουμε από το διάγραμμα (P, Δ) ότι, για τιμή της Διαφοράς Συχνότητας $\Delta = 1.7$, βρισκόμαστε σε ευσταθή περιοχή για όλες τις τιμές του P . Επιλύοντας λοιπόν το σύστημα για $P = 0.05$ και αρχική συνθήκη, έστω b , έχουμε όπως είναι αναμενόμενο μία

ευσταθή σπείρα όπως φαίνεται και στο Σχήμα 21α. Παρ' όλα αυτά για μεγαλύτερες τιμές της έντασης του laser P , αποκαλύπτεται μία πιά πλούσια δυναμική εικόνα. Στο Σχήμα 21β βλέπουμε ότι υπάρχουν και οριακοί κύκλοι στο συστήμα μας (μαύρος κύκλος) για μεγαλύτερες τιμές της παραμέτρου P . Εφ' όσον βρισκόμαστε σε ευσταθή περιοχή, οι ταλαντώσεις αυτές δεν μπορεί να έχουν προκύψει από διακλάδωση Hopf.

Για να ελέγξουμε την προέλευση τους, αρχίζουμε να μειώνουμε σταδιακά την ένταση του laser P , λαμβάνοντας κάθε φορά και διαφορετικό οριακό κύκλο (Σχήμα 21γ). Οι τιμές του P που χρησιμοποιούμε φαίνονται στο εσωτερικό διάγραμμα. Όταν φτάσουμε στην τιμή $P = 0.18$ εμφανίζεται η κόκκινη σπείρα του Σχήματος 21β και δεν υπάρχουν πλέον οριακοί κύκλοι.

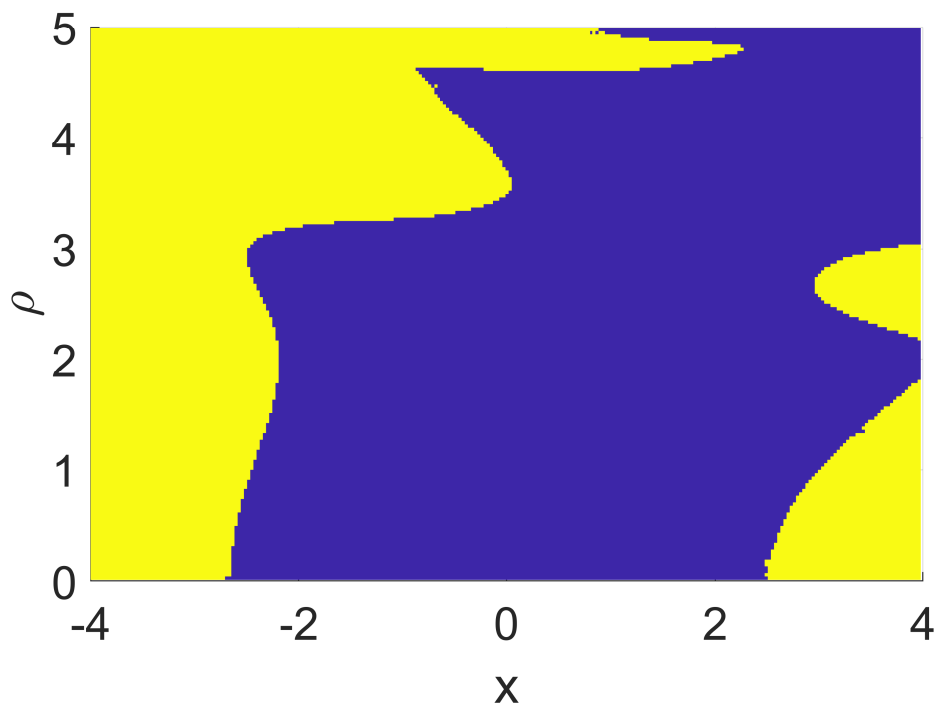
Αυτό που συμβαίνει στην τιμή $P = 0.18$ είναι μία **Διακλάδωση Σάγματος Κόμβου Οριακών Κύκλων** όπου ένας ευσταθής οριακός κύκλος ενώνεται με έναν ασταθή οριακό κύκλο κι εξουδετερώνονται δημιουργώντας μία αποσβενύμενη ταλάντωση προς ένα ευσταθές σημείο (ευσταθής σπείρα) [30].

Διστάθεια Ένα ενδιαφέρον χαρακτηριστικό της περιοχής αυτής των παραμέτρων είναι ότι για συγκεκριμένες τιμές της έντασης του laser P το σύστημα εκδηλώνει διστάθεια (Σχήμα 22). Αυτό σημαίνει ότι για διαφορετικές αρχικές συνθήκες μπορούμε να έχουμε είτε ευσταθή σπείρα, ώστε οι μεταβλητές τιμές του συστήματος να λαμβάνουν μία σταθερή τιμή, είτε οριακό κύκλο, ώστε το σύστημα να ταλαντώνεται με έναν τρόπο που είναι χαρακτηριστικός του συγκεκριμένου μη-γραμμικού συστήματος.



Σχήμα 22. Διάγραμμα φάσης του συστήματος για δύο διαφορετικές αρχικές συνθήκες (κόκκινη και μπλε τροχιά) στο οποίο παρατηρείται διστάθεια. Η τιμή της έντασης του laser είναι $P = 0.19$. Οι αρχικές συνθήκες για την κόκκινη τροχιά είναι: $[x = 0.1249 \ \rho = 3.857 \ \phi = 2.54 \ u = 0.1574]$ και για την μπλε τροχιά: $[x = 0.1249 \ \rho = 4.557 \ \phi = 2.54 \ u = 0.5574]$.

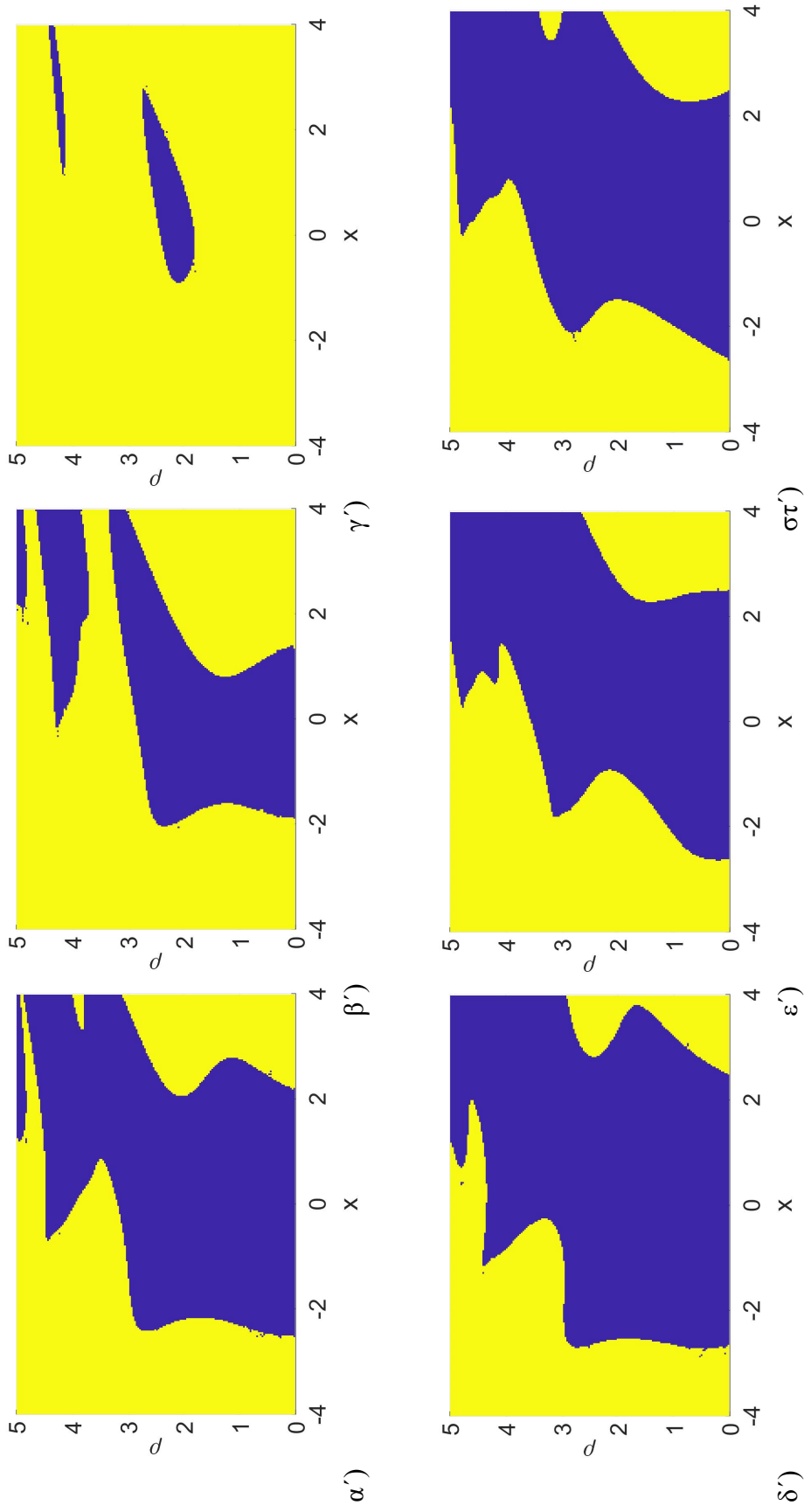
Διάγραμμα Περιοχών Έλξης Στο διάγραμμα του Σχήματος 22 έχουμε επιλέξει δύο αρχικές συνθήκες των οποίων οι τροχιές καταλήγουν είτε στην ευσταθή σπείρα είτε στον ευσταθή οριακό κύκλο, δεν είναι όμως οι μοναδικές αρχικές συνθήκες που μπορούμε να επιλέξουμε. Για να έχουμε μια καλύτερη εποπτεία των αρχικών συνθηκών και της μελλοντικής τους εξέλιξης που προκύπτει από την επίλυση του συστήματος, μπορούμε να εξάγουμε ένα διάγραμμα “περιοχών έλξης”. Έτσι, μπορούμε να γνωρίζουμε εκ των προτέρων σε ποιόν ελκυστή θα καταλήξει κάθε ζευγάρι αρχικών συνθηκών. Παρακάτω δίνεται το διάγραμμα περιοχών έλξης:



Σχήμα 23. Διάγραμμα περιοχών έλξης του συστήματος για $\Delta = 1.7$ και τιμή της έντασης του laser $P = 0.19$, όπου x η αρχική θέση του ταλαντωτή και ρ η αρχική τιμή του πλάτους πεδίου της κοιλότητας. Το μπλε χρώμα αντιστοιχεί σε αρχικές συνθήκες για τις οποίες το σύστημα καταλήγει στην ευσταθή σπείρα και το κίτρινο χρώμα αντιστοιχεί σε αρχικές συνθήκες για τις οποίες το σύστημα καταλήγει στον ευσταθή οριακό κύκλο.

Τέτοιου είδους διαγράμματα είναι εξαιρετικά χρήσιμα, ειδικά σε πρακτικές εφαρμογές, καθ’ ότι μας βοηθούν να επιλέξουμε την αρχική κατάσταση του συστήματος μας με γνώμονα την λειτουργία που θέλουμε να επιτελέσει. Αν π.χ. θέλουμε να θέσουμε το σύστημα σε διαρκή ταλάντωση μπορούμε να επιλέξουμε τις αρχικές συνθήκες που θα οδηγήσουν στον οριακό κύκλο (κίτρινο χρώμα).

Στο Σχήμα 24 δίνουμε τα διαγράμματα περιοχών έλξης για τιμές των παραμέτρων $\Delta = 1.7$ και $P = 0.19$ και για διάφορες τιμές των υπολοίπων δύο μεταβλητών ϕ και u .



Σχήμα 24. Διαγράμματα περιοχών έλξης για την περίπτωση $\Delta = 1.7, P = 0.19, f = 2.6, v = 1, \beta')f = 2.6, v = 2, \gamma')f = 2.6, v = 3, \delta')f = \pi, v = 0.1, \epsilon')f = 5\pi/3, v = 0.1, \sigma')f = 7\pi/3, v = 0.1$. Στα α', β', γ' κρατάμε σταθερή τη φάση και αλλάζουμε το v . Στα $\delta', \epsilon', \sigma'$ κρατάμε σταθερό το v και αλλάζουμε την φάση.

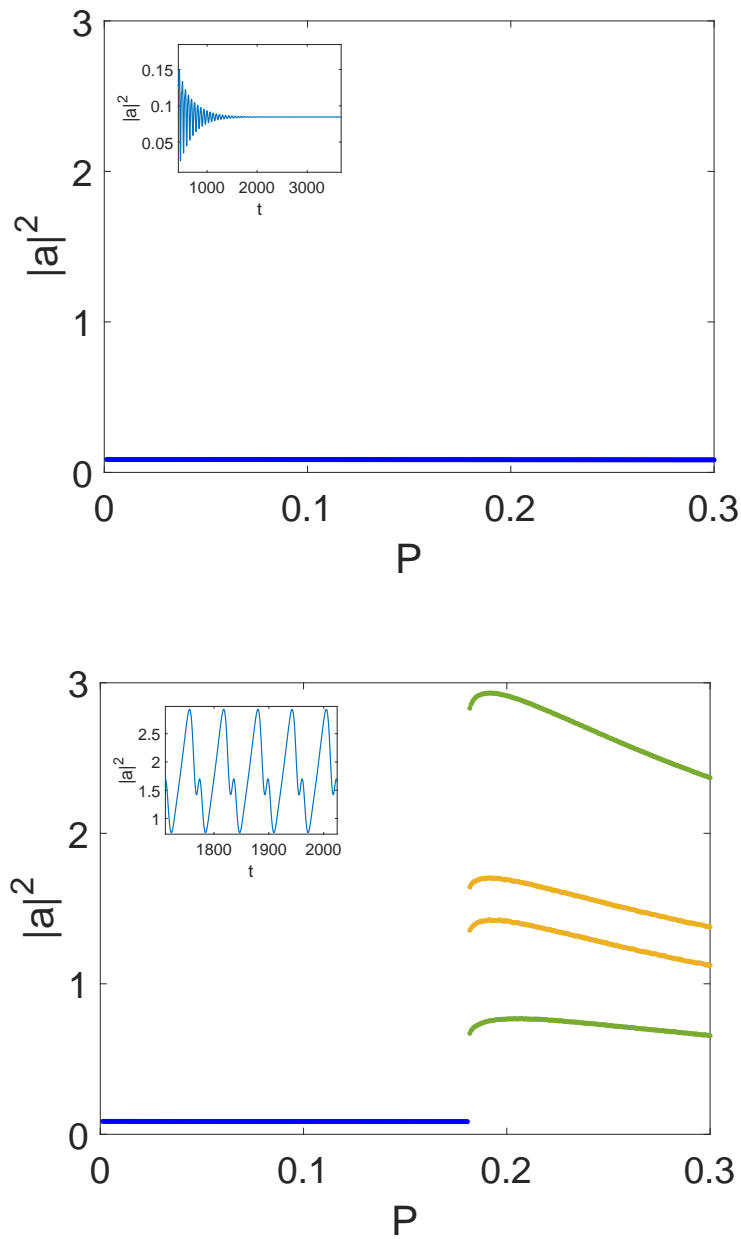
Μέσω των Σχημάτων 23, 24 μπορούμε να αποκτήσουμε μία πληρέστερη εικόνα της εξάρτησης της εξέλιξης του συστήματος από τις αρχικές συνθήκες καθώς και την διαφοροποίηση αυτής της εξάρτησης λόγω μεταβολής των παραμέτρων. Ένα ενδιαφέρον στοιχείο που παρατηρούμε στο σύνολο των διαγραμμάτων είναι ότι για ένα εύρος τιμών της αρχικής θέσης του ταλαντωτή x οι λύσεις καταλήγουν πάντα σε ταλάντωση οριακού κύκλου ανεξαρτήτως της αρχικής τιμής του πλάτους πεδίου ρ . Από το Σχήμα 24 βλέπουμε επίσης ότι η μεταβολή της αρχικής ταχύτητας v , κρατώντας αμετάβλητη την φάση ϕ , έχει μεγάλη επίδραση στην μορφή των περιοχών έλξης, προκαλώντας σημαντική αύξηση στην περιοχή έλξης του οριακού κύκλου ή γενικά του ελκυστή που υπάρχει σε μεγαλύτερες τιμές της έντασης του οπτικού πεδίου της κοιλότητας (Σχήμα 24α, 24β, 24γ). Αντίθετα, μια μεταβολή της αρχικής φάσης ϕ του πλάτους πεδίου, διατηρώντας σταθερό το v , επηρεάζει σε μικρότερο βαθμό την μορφή των περιοχών έλξης (Σχήμα 24δ, 24ε, 24στ).

Διαγράμματα Διακλάδωσης Ένας άλλος τρόπος να αποκτήσουμε εποπτεία της δυναμικής συμπεριφοράς του συστήματος είναι τα διαγράμματα διακλάδωσης (bifurcation diagrams) (Σχήμα 25). Τα διαγράμματα αυτά απεικονίζουν τις μέγιστες κι ελάχιστες τιμές που λαμβάνει η μεταβλητή που εξετάζουμε, έπειτα από εύλογο χρονικό διάστημα, για συγκεκριμένη τιμή μιάς παραμέτρου.

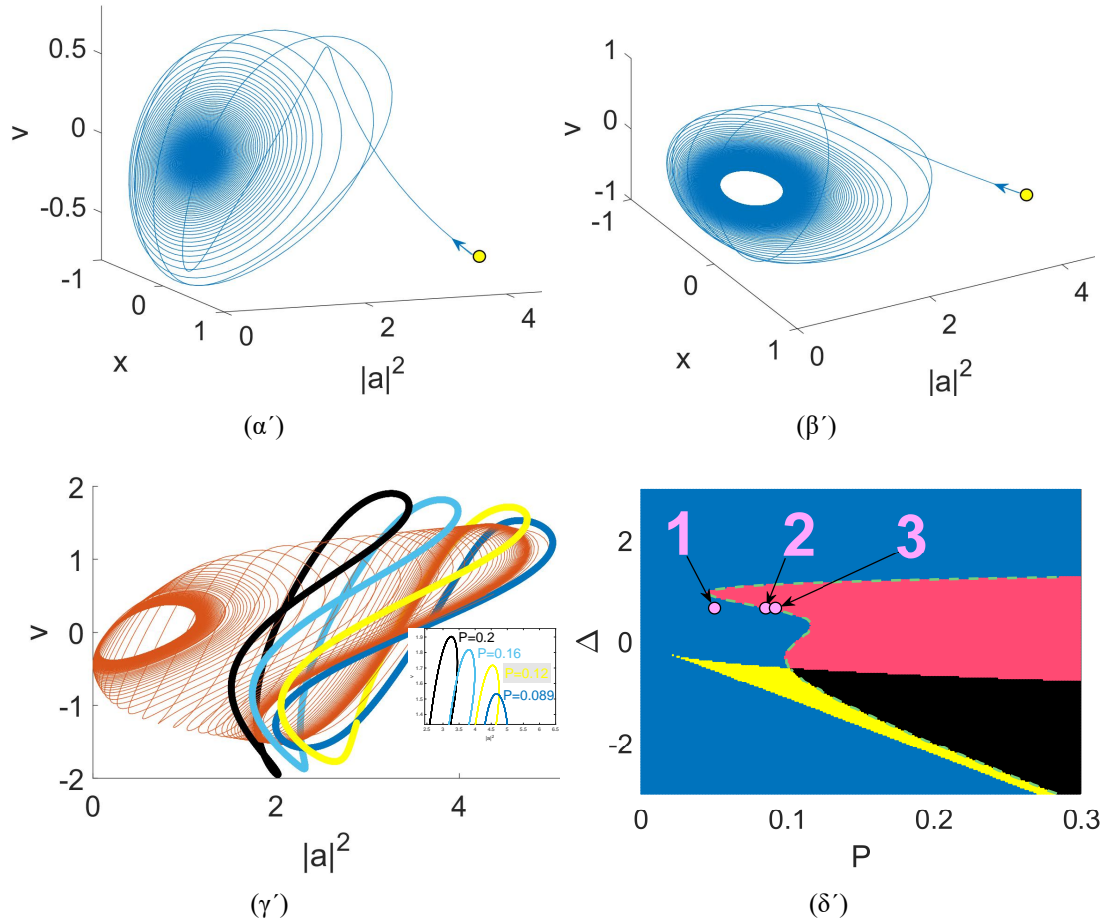
Προφανώς, αν για μία τιμή της παραμέτρου η στάσιμη λύση που έχουμε αντιστοιχεί σε μία ευσταθή σπείρα τότε το διάγραμμα διακλάδωσης θα απεικονίζει ένα σημείο δηλ. μία συγκεκριμένη τιμή της μεταβλητής που ταυτίζεται με την στάσιμη λύση, καθώς η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή ταυτίζονται. Αν όμως η στάσιμη λύση αντιστοιχεί σε μία ασταθή σπείρα που οδηγεί σε οριακό κύκλο, τότε το διάγραμμα διακλάδωσης θα απεικονίζει δύο σημεία όπου το ένα θα αντιστοιχεί στην μέγιστη τιμή της ταλάντωσης του οριακού κύκλου και το άλλο στην ελάχιστη τιμή της ταλάντωσης.

Επιπλέον, όταν συμβαίνει διπλασιασμός περιόδου (period doubling) ενός οριακού κύκλου, απεικονίζονται περισσότερες τιμές της μεταβλητής για συγκεκριμένη τιμή της παραμέτρου P καθ' ότι τώρα θα υπάρχουν περισσότερα μέγιστα κι ελάχιστα εντός της ίδιας ταλάντωσης.

Παρακάτω δίνονται τα διαγράμματα διακλάδωσης για την περίπτωση $\Delta = 1.7$ για δύο διαφορετικές αρχικές συνθήκες.



Σχήμα 25. Διαγράμματα διακλάδωσης για την περίπτωση $\Delta = 1.7$. Κάθε διάγραμμα αντιστοιχεί σε διαφορετικές αρχικές συνθήκες. Όπως βλέπουμε, όταν χρησιμοποιούμε διαφορετικές αρχικές συνθήκες δημιουργείται διαφορετική δυναμική συμπεριφορά για τιμές του $P > 0.1806$ ενώ για τιμές $P < 0.1806$ οι λύσεις είναι όμοιες. Με πράσινο και πορτοκαλί χρώμα απεικονίζονται τα δύο διαφορετικά πλάτη από τα οποία αποτελείται η ταλάντωση καθώς πρόκειται για ταλάντωση διπλής περιόδου. Στα εσωτερικά διαγράμματα απεικονίζονται οι λύσεις του συστήματος σε μορφή χρονοσειράς για $P = 0.2$ (Η τιμή της έντασης P είναι η ίδια και για τα δύο εσωτερικά διαγράμματα). Οι αρχικές συνθήκες για το πάνω διάγραμμα είναι: $[x = 0.1249 \ \rho = 1.857 \ \phi = 2.54 \ u = 0.1574]$ και για το κάτω διάγραμμα: $[x = 0.1249 \ \rho = 3.857 \ \phi = 2.54 \ u = 0.1574]$.

4.2.2 Επίλυση του συστήματος για $\Delta = 0.66$ 

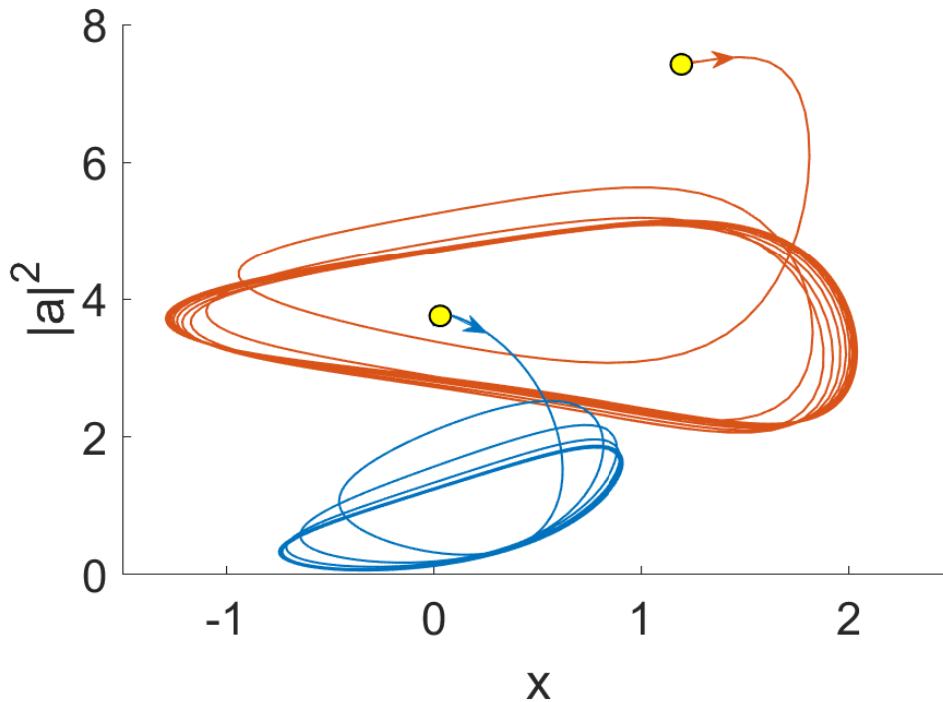
Σχήμα 26. Διαγράμματα φάσης του μη-γραμμικού συστήματος για (α) $P = 0.05$, (β) $P = 0.086$ και (γ) $P = 0.088$. Οι αρχικές συνθήκες είναι οι εξής: (α) $[x = 0.1249 \rho = 3.857 \phi = 1.54 u = 0.1574]$, (β) $[x = 0.1249 \rho = 3.857 \phi = 1.54 u = 0.1574]$, (γ) $[x = 1.2 \rho = 2.7252 \phi = 0.01 u = 1.0]$. Στο Σχήμα 26γ απεικονίζονται επιπλέον και οι οριακοί κύκλοι που προκύπτουν με τις ίδιες αρχικές συνθήκες αλλά για διαφορετικά P (Σχήμα 26γ', εσωτερικό διάγραμμα). Στο Σχήμα 26δ δίνεται η θέση των διαγραμμάτων (α), (β) και (γ) στον χώρο των παραμέτρων (1, 2 και 3 αντίστοιχα).

Στην περίπτωση $\Delta = 0.66$, σε αντίθεση με την περίπτωση $\Delta = 1.7$, δεν έχουμε ευστάθεια σε όλο το εύρος της παραμέτρου P . Αυτό σημαίνει ότι για κάποια τιμή της παραμέτρου P , όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε και από το διάγραμμα (P, Δ) (Σχήμα 26δ'), έχουμε ασταθείς στάσιμες λύσεις και κατά την αλλαγή της ευστάθειας συμβαίνει μια διακλάδωση Hopf.

Συγκεκριμένα, στην τιμή $P = 0.05$ ξεκινάμε με μία ευσταθή σπείρα (Σχήμα 26α), όμως

στην τιμή $P = 0.086$ συμβαίνει διακλάδωση Hopf με αποτέλεσμα να εμφανιστεί οριακός κύκλος του οποίου το πλάτος ταλάντωσης αυξάνεται καθώς αυξάνουμε την ένταση P (Σχήμα 26β). Το επόμενο φαινόμενο που παρατηρείται είναι μία Διακλάδωση σάγματος κόμβου οριακών κύκλων. Ξεκινώντας από μεγαλύτερες τιμές του P και μειώνοντας σταδιακά ($P = 0.2 \rightarrow 0.089$), παρατηρούμε εκ νέου, την εμφάνιση ευσταθών οριακών κύκλων, διαφορετικών από τον οριακό κύκλο που προέκυψε από την διακλάδωση Hopf (Σχήμα 26γ). Στην τιμή του $P = 0.088$ ενώνεται ο ευσταθής οριακός κύκλος με έναν ασταθή οριακό κύκλο και εξουδετερώνονται, με αποτέλεσμα ο μόνος ελκυστής που απομένει στο σύστημα να είναι ο ευσταθής οριακός κύκλος που είχε προκύψει από την διακλάδωση Hopf. Μία ενδιαφέρουσα διαφορά μεταξύ των δύο αυτών διακλαδώσεων (δηλ. της Hopf και της Διακλάδωσης Σάγματος Κόμβου) που αφορούν οριακούς κύκλους είναι το πλάτος των κύκλων κατά την “γέννηση” τους. Στην διακλάδωση σάγματος-κόμβου οι κύκλοι είναι πλάτους $O(1)$ ενώ στην διακλάδωση Hopf έχουν μικρό πλάτος ανάλογο με το όρο $(P - P_c)^{1/2}$ [26].

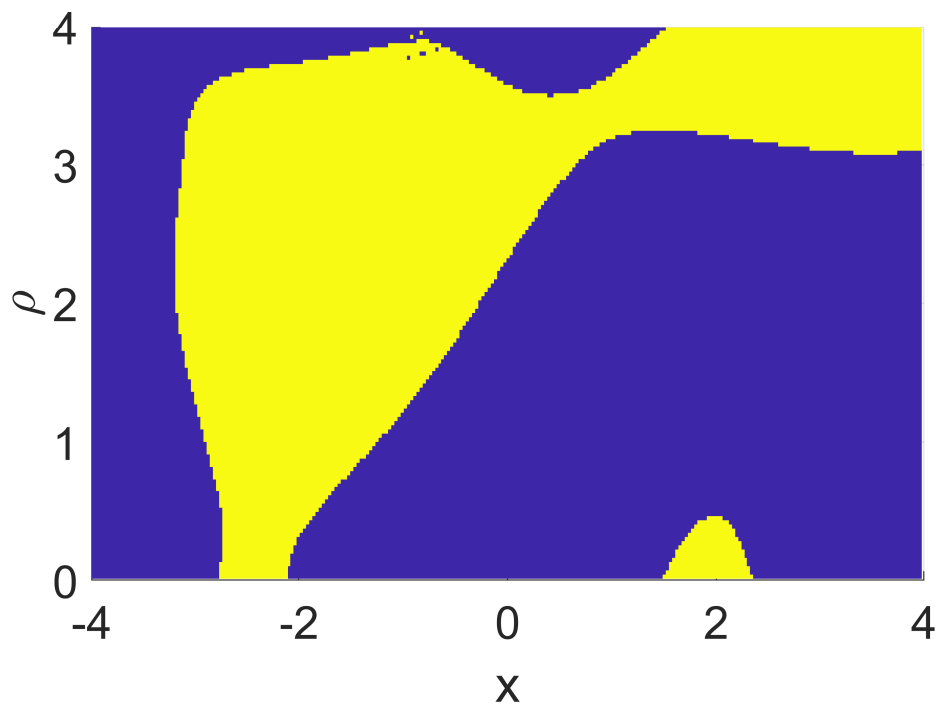
Επίσης, σε αντιστοιχία με την περίπτωση $\Delta = 1.7$, παρατηρούμε κι εδώ την ιδιότητα της **διστάθειας** με τη διαφορά ότι στην παρούσα περίπτωση έχουμε διστάθεια ανάμεσα σε δύο *ευσταθείς οριακούς κύκλους* (Σχήμα 27). Θυμίζουμε ότι στην προηγούμενη περίπτωση οι δύο ελκυστές που υπήρχαν ήταν μία ευσταθής σπείρα κι ένας ευσταθής οριακός κύκλος.



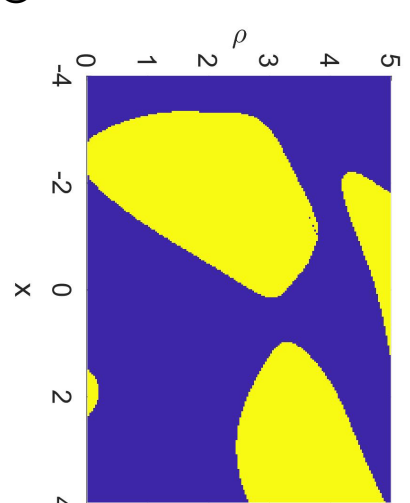
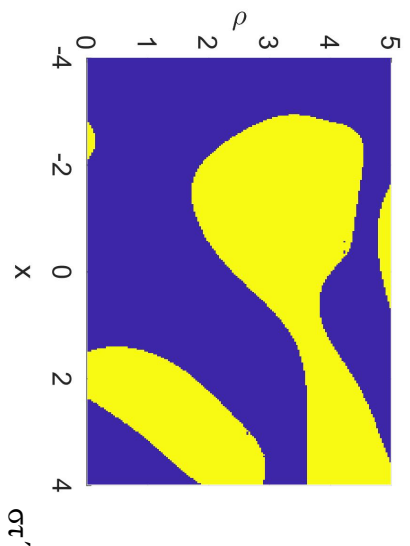
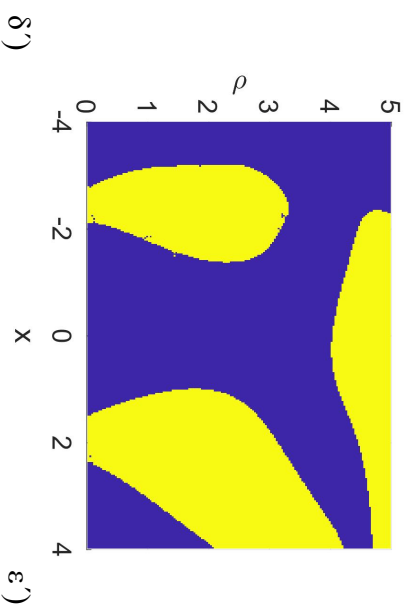
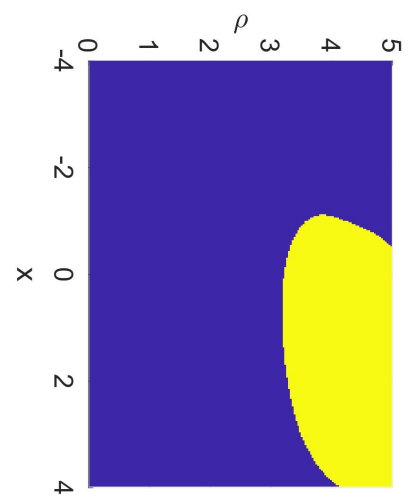
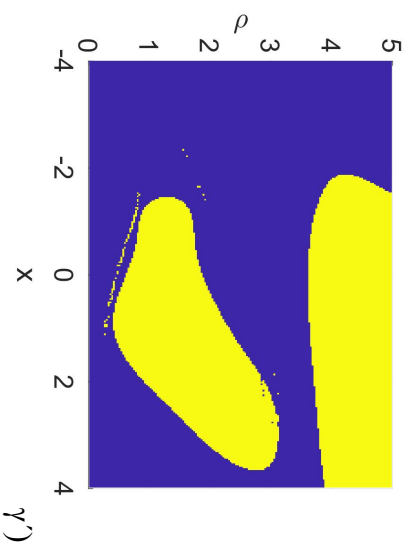
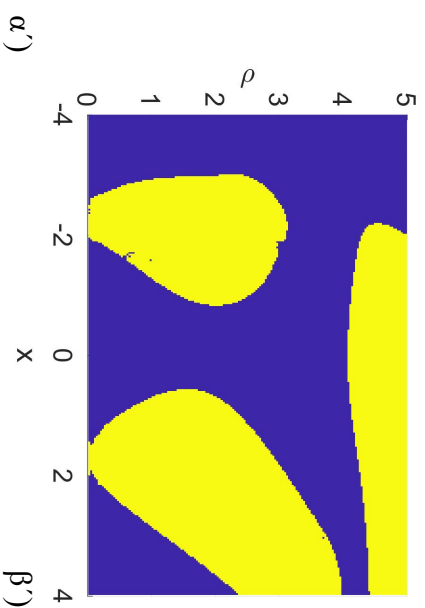
Σχήμα 27. Διάγραμμα φάσης του συστήματος για δύο διαφορετικές αρχικές συνθήκες (κόκκινη και μπλε τροχιά). Η τιμή της έντασης του laser είναι $P = 0.1$. Οι αρχικές συνθήκες για την κόκκινη τροχιά είναι: $[x = 1.2 \ \rho = 2.7252 \ \phi = 0.01 \ u = 1]$ και για την μπλε τροχιά: $[x = 0 \ \rho = 1.9 \ \phi = 0.01 \ u = -0.1]$.

Βλέπουμε ότι στην συγκεκριμένη περίπτωση το σύστημα είναι ικανό να εισέλθει σε δύο εντελώς διαφορετικές ταλαντωτικές καταστάσεις, διαφορετικού πλάτους ταλάντωσης και διαφορετικής ισχύος πεδίου. Συνεπώς, χρειάζεται προσοχή στην επιλογή των αρχικών συνθηκών καθ' ότι υπάρχει περίπτωση το σύστημα μας να μην μπορεί να ανταπεξέλθει, μηχανικά ή οπτικά, σε μια μεγαλύτερου πλάτους ταλάντωση. Με μία μικρή αλλαγή στην τιμή των αρχικών συνθηκών, είναι δυνατόν το σύστημα μας να μεταπηδησει από την μία ταλαντωτική κατάσταση στην άλλη με απότομο τρόπο κι όχι σταδιακά.

Έτσι, είναι σημαντικό να εξάγουμε τις περιοχές έλξης των ελκυστών που υπάρχουν στο σύστημα μας, ώστε να μπορούμε να προβλέψουμε την εξέλιξη της συμπεριφοράς του. Παρακάτω δίνεται το διάγραμμα περιοχών έλξης του συστήματος (Σχήμα 28) που αντιστοιχεί στους δύο ελκυστές του Σχήματος 27 καθώς και διαγράμματα στα οποία μεταβάλλουμε τις αρχικές συνθήκες ϕ και v (Σχήμα 29).



Σχήμα 28. Διάγραμμα περιοχών έλξης του συστήματος για $\Delta = 0.66$ και τιμή της έντασης του laser $P = 0.1$, όπου x η αρχική θέση του ταλαντωτή και ρ η αρχική τιμή του πλάτους πεδίου της κοιλότητας. Το μπλε χρώμα αντιστοιχεί σε αρχικές συνθήκες για τις οποίες το σύστημα καταλήγει στον οριακό κύκλο μικρού πλάτους και το κίτρινο χρώμα αντιστοιχεί σε αρχικές συνθήκες για τις οποίες το σύστημα καταλήγει στον οριακό κύκλο μεγάλου πλάτους.

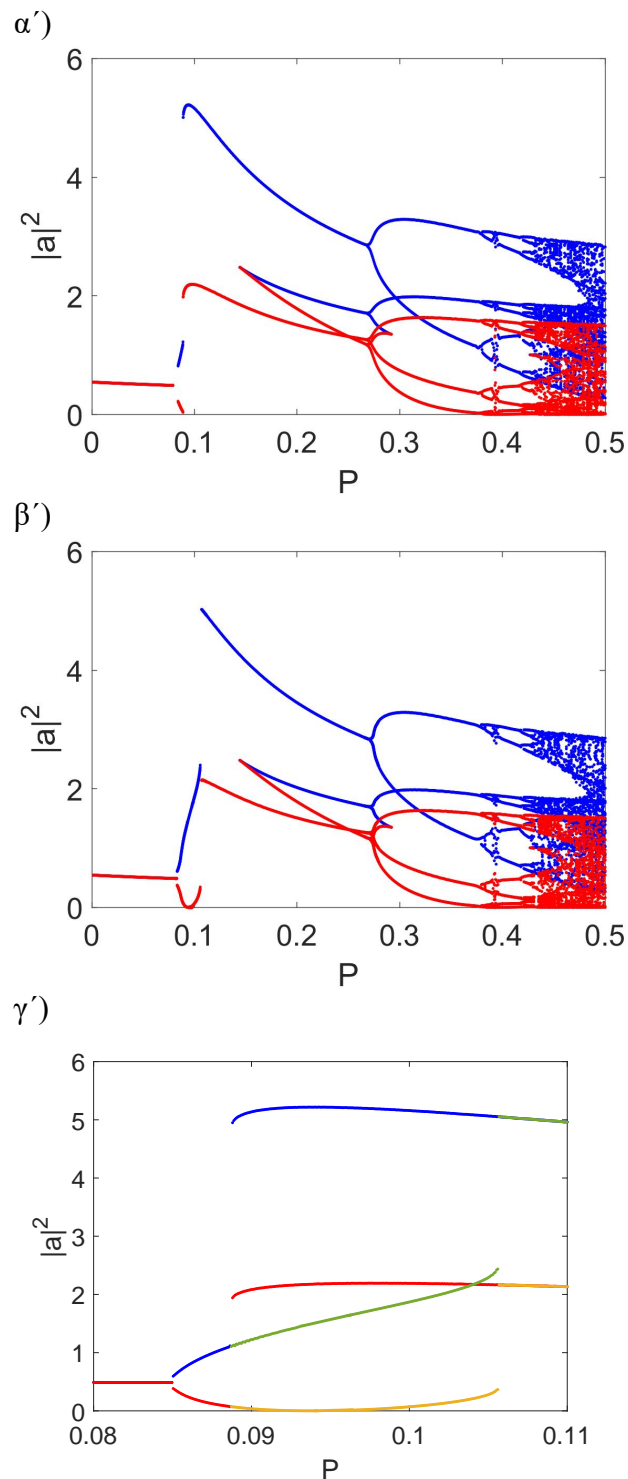


Σχήμα 29. Διαγράμματα περιούχων έλξης για την περιπτώση $\Delta = 0.66, P = 0.1$. Αργυρές συνθήκες. α') $f = 2.6, v = 1, \beta') f = 2.6, v = 2, \gamma') f = 2.6, v = 3, \delta') f = \pi, v = 0.1, \epsilon') f = 5\pi/3, v = 0.1, \sigma') f = 7\pi/3, v = 0.1$. Στα α', β', γ' κρατάμε σταθερή τη φάση και αλλάζουμε το v . Στα δ', ε', στ' κρατάμε σταθερό το v και αλλάζουμε την φάση.

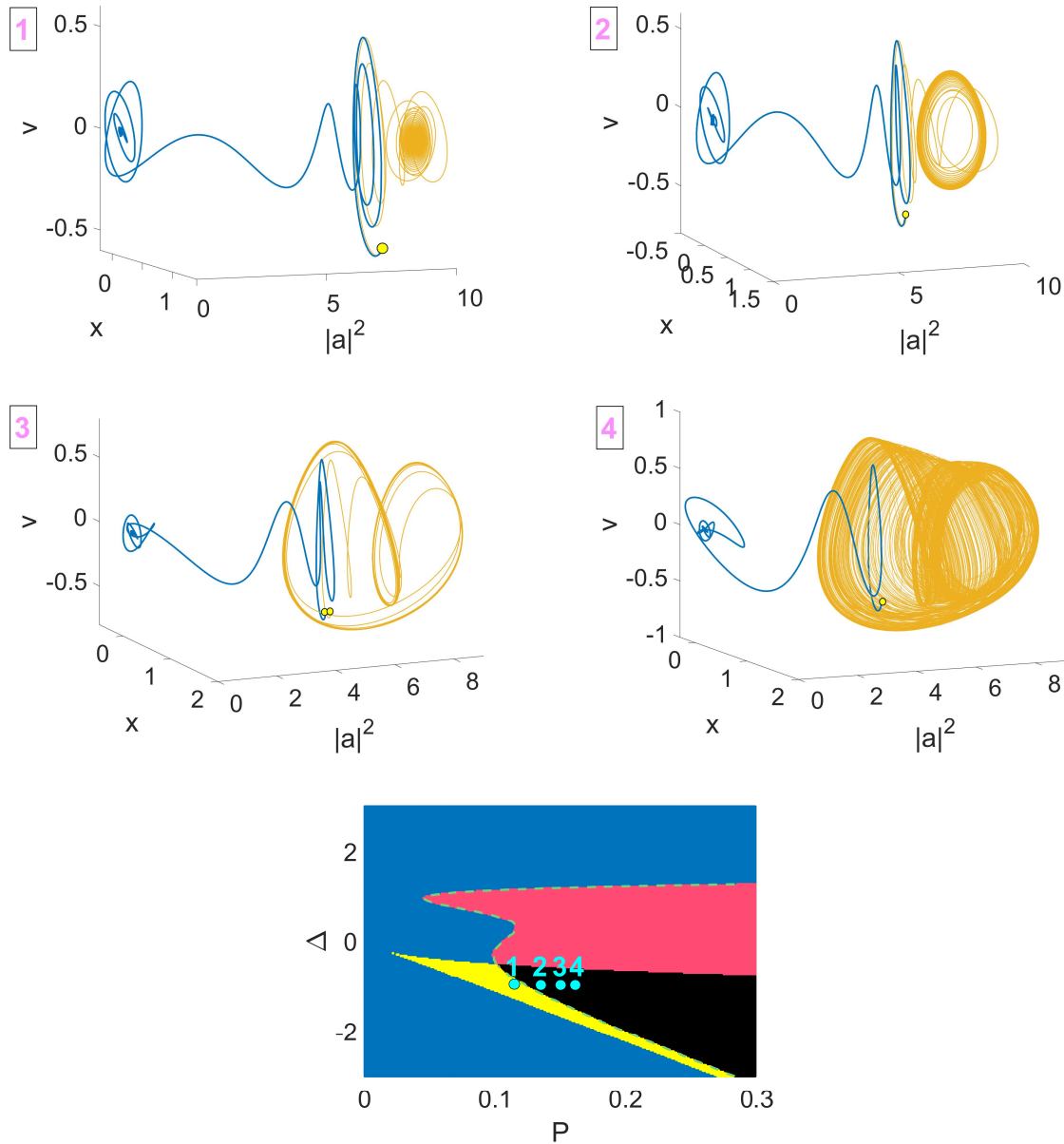
Από τα Σχήματα 29α, 29β, 29γ βλέπουμε ότι η αρχική ταχύτητα v έχει σημαντική επίδραση στην μορφή των περιοχών έλξης, όπως και στην περίπτωση $\Delta = 1.7$. Εδώ, συγκεκριμένα, παρατηρούμε ότι καθώς αυξάνουμε την αρχική ταχύτητα μειώνεται η επιρροή του οριακού κύκλου μεγάλου πλάτους και για να επιτευχθεί μετάβαση στον κύκλο μεγάλου πλάτους απαιτούνται μεγαλύτερες αρχικές τιμές του πλάτους πεδίου ρ . Μεταβάλλοντας μόνο την φάση ϕ (Σχήμα 29δ, 29ε, 29στ), βλέπουμε ότι αλλάζουν δραστικά οι μορφές των περιοχών έλξης χωρίς ωστόσο να αλλάζει ιδιαίτερα ο βαθμός επιρροής του κάθε ελκυστή. Ενδιαφέρον είναι επίσης το γεγονός ότι για κάποιες αρχικές τιμές των ϕ και v μπορούμε να επιλέξουμε σε ποιόν ελκυστή θα μεταβεί το σύστημα ακόμα και με αρχική τιμή του πλάτους πεδίου περίπου ίση με το μηδέν. Για να έχουμε μια γενική εικόνα της δυναμικής συμπεριφοράς του συστήματος για μεγάλο εύρος της τιμής της έντασης του laser P , εξάγουμε τα διαγράμματα διακλάδωσης τα οποία δίνονται παρακάτω.

Τα Σχήματα 30α και 30β είναι όμοια και για τις δύο περιπτώσεις αρχικών συνθηκών με την μόνη διαφοροποίηση να εντοπίζεται στην περιοχή $0.089 < P < 0.105$ όπου και εμφανίζεται η διστάθεια για τις δύο διαφορετικές αρχικές συνθήκες. Στο Σχήμα 30α βλέπουμε ότι στην εν λόγω περιοχή υπάρχει μία μετάβαση σε ταλάντωση μεγάλου πλάτους ενώ στο Σχήμα 30β διατηρείται η ταλάντωση μικρού πλάτους. Στο Σχήμα 30γ έχουμε εστίασει στην περιοχή όπου εμφανίζεται η διστάθεια περιλαμβάνοντας και τους δύο ελκυστές. Παρατηρείται επίσης υστέρηση που εξαρτάται από την φορά με την οποία μεταβάλλουμε το P . Από μικρότερες προς μεγαλύτερες τιμές, δημιουργείται ο οριακός κύκλος μέσω της διακλάδωσης Hopf και το σύστημα παραμένει στον οριακό κύκλο μικρού πλάτους έως την τιμή $P = 0.105$ όπου μεταπηδά στον οριακό κύκλο μεγάλου πλάτους. Από μεγαλύτερες τιμές προς μικρότερες τιμές το σύστημα παραμένει στον μεγάλο οριακό κύκλο μέχρι την τιμή $P = 0.089$ στην οποία συμβαίνει η διακλάδωση σάγματος κόμβου και μεταπηδά στον οριακό κύκλο μικρού πλάτους.

Στα Σχήματα 30α και 30β παρατηρούμε ότι καθώς αυξάνουμε την παράμετρο P εμφανίζονται περισσότερες τιμές της έντασης του οπτικού πεδίου οι οποίες αντιστοιχούν στην ίδια τιμή του P δηλ. η ταλάντωση παρουσιάζει περισσότερα μέγιστα και ελάχιστα με αποτέλεσμα να αυξάνεται η περίοδος της. Αυτές οι διακλάδωσεις ονομάζονται **διπλασιασμοί περιόδου** και έχουν ως αποτέλεσμα η περίοδος της ταλάντωσης να γίνεται διπλάσια. Το σύστημα υφίσταται αρκετούς διπλασιασμούς περιόδου καθώς αυξάνουμε το P μέχρι την τιμή $P \simeq 0.43$ όπου αρχίζει η χαοτική συμπεριφορά που χαρακτηρίζεται από απεριοδικότητα. Αξίζει να σημειωθεί ότι, καθώς αυξάνουμε το P , οι διπλασιασμοί περιόδου συμβαίνουν όλο και πιο σύντομα [26]. Αυτή η συμπεριφορά του συστήματος ονομάζεται *μετάβαση στο χάος μέσω διπλασιασμών περιόδου*.



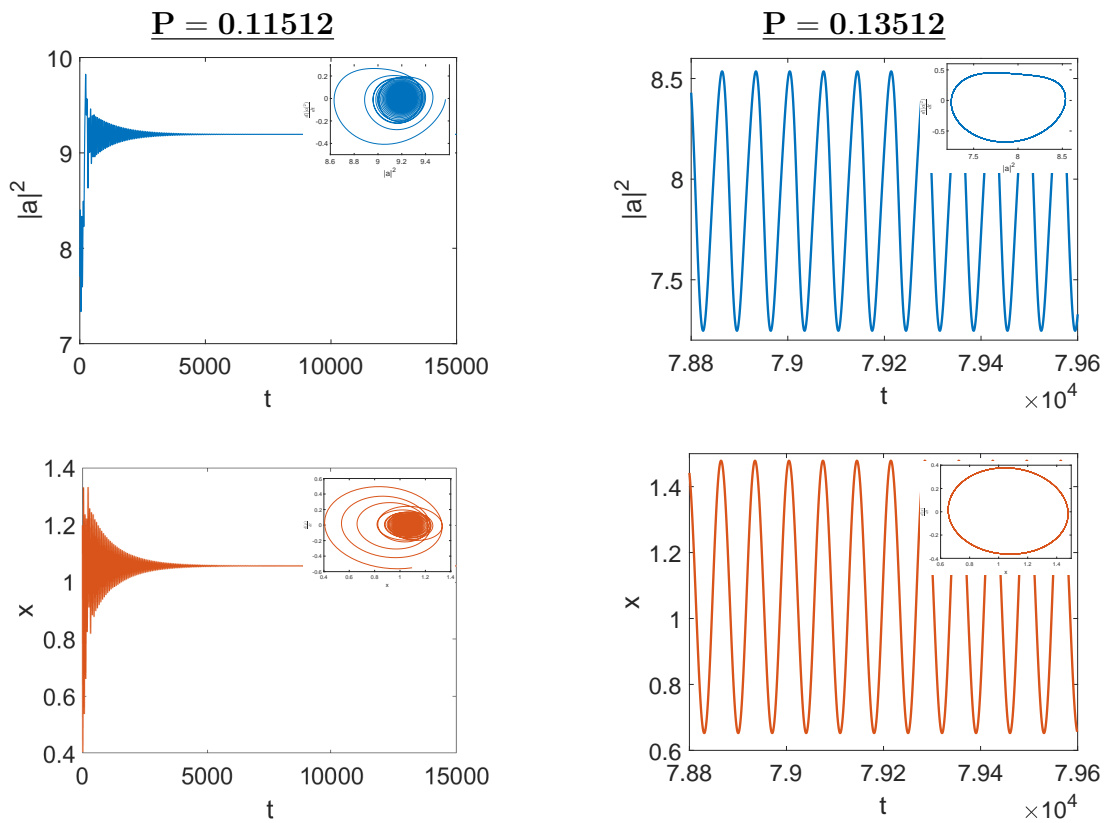
Σχήμα 30. Διαγράμματα διακλάδωσης για την περίπτωση $\Delta = 0.66$. Κάθε διάγραμμα αντιστοιχεί σε διαφορετικές αρχικές συνθήκες. Στο Σχήμα 30γ έχουμε εστιάσει στην περιοχή όπου εμφανίζεται η διστάθεια περιλαμβάνοντας και τους δύο ελκυστές. Οι αρχικές συνθήκες για το Σχήμα 30α είναι: $[x = 1.2 \rho = 2.7252 \phi = 0.01 u = 1]$ και για το Σχήμα 30β: $[x = 0.1 \rho = 0.0252 \phi = 0.01 u = 0.01]$.

4.2.3 Επίλυση του συστήματος για $\Delta = -0.99$ 

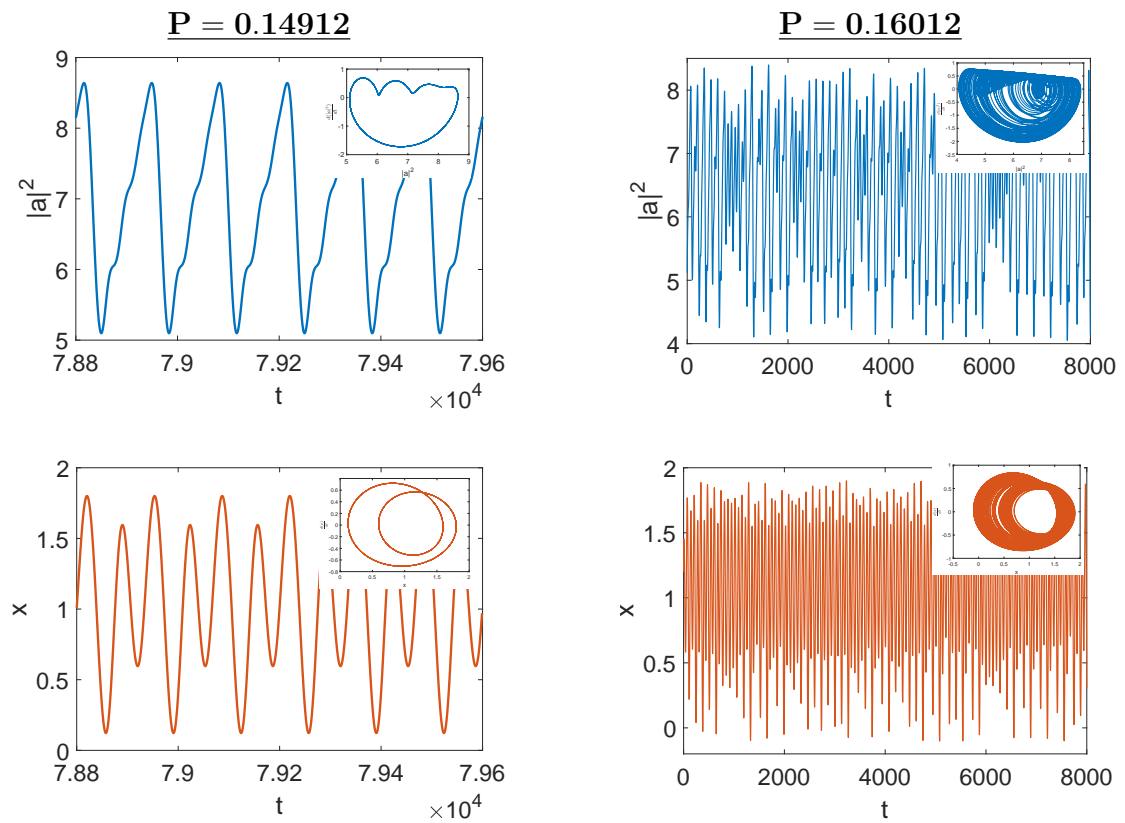
Σχήμα 31. Διαγράμματα φάσης του μη-γραμμικού συστήματος για $P = 0.11512$ (1), $P = 0.13512$ (2), $P = 0.14912$ (3) και $P = 0.16012$ (4). Οι κίτρινες τελείες συμβολίζουν τις αρχικές συνθήκες. Έχουν επιλεγεί κοντινές αρχικές συνθήκες για να γίνει εμφανές ότι στην περιοχή των αρχικών συνθηκών βρίσκεται ένα σαγματικό σημείο του οποίου οι ασταθείς πολλαπλότητες οδηγούν τις τροχιές εκατέρωθεν του σημείου προς τους δύο ελκυστές. Οι αρχικές συνθήκες είναι οι εξής: (1) $[x = 1.2 \ \rho = 2.7651 \ \& \ 2.7752 \ \phi = 0.01 \ u = -0.5]$, (2) $[x = 1.2 \ \rho = 2.4152 \ \& \ 2.4253 \ \phi = 0.01 \ u = -0.5]$, (3) $[x = 1.2 \ \rho = 2.2219 \ \& \ 2.2621 \ \phi = 0.01 \ u = -0.5]$, (4) $[x = 1.2 \ \rho = 2.0518 \ \& \ 2.1019 \ \phi = 0.01 \ u = -0.5]$.

Για την τιμή $\Delta = -0.99$ βλέπουμε ότι βρισκόμαστε σε περιοχή που εμφανίζονται και τριπλές λύσεις ισορροπίας και θα εστιάσουμε σε αυτές. Παραλείποντας την περιοχή των μονών ευσταθών λύσεων που εκτείνεται μέχρι την τιμή $P = 0.088$, πρώτα λαμβάνουμε το φασικό πορτραίτο για την τιμή $P = 0.11512$. Η τιμή αυτή βρίσκεται εντός της περιοχής διστάθειας στην οποία εμφανίζονται δύο ευσταθείς σπείρες και ένα σαγματικό σημείο. Όπως βλέπουμε στο Σχήμα 31.1 για δύο κοντινές αρχικές συνθήκες στην περιοχή του σαγματικού σημείου, οι τροχιές ακολουθούν είτε τη μία διεύθυνση της ασταθούς πολλαπλότητας είτε την άλλη, καταλήγοντας και οι δύο σε ευσταθείς σπείρες (διστάθεια). Στο Σχήμα 31.2 απεικονίζονται οι τροχιές του συστήματος για την τιμή $P = 0.13512$. Στο σημείο αυτό, έχοντας ξεπεράσει την τιμή στην οποία συμβαίνει διακλάδωση Hopf ($P_{Hopf} = 0.12312$), εμφανίζεται ευσταθής οριακός κύκλος στη θέση όπου βρισκόταν η ευσταθής σπείρα. Αυξάνοντας επιπλέον την τιμή της έντασης του laser P βλέπουμε ότι ο οριακός κύκλος πλησιάζει την γειτονιά του σαγματικού σημείου και παραμορφώνεται, οδηγώντας σε διπλασιασμούς περιόδου. Εν τέλει, στο Σχήμα 31.4 βλέπουμε ότι δημιουργείται ένας χαοτικός ελκυστής ξεκινώντας από την τιμή $P \simeq 0.153$.

Παρακάτω δίνονται οι αντίστοιχες λύσεις του Σχήματος 31 σε μορφή χρονοσειράς.

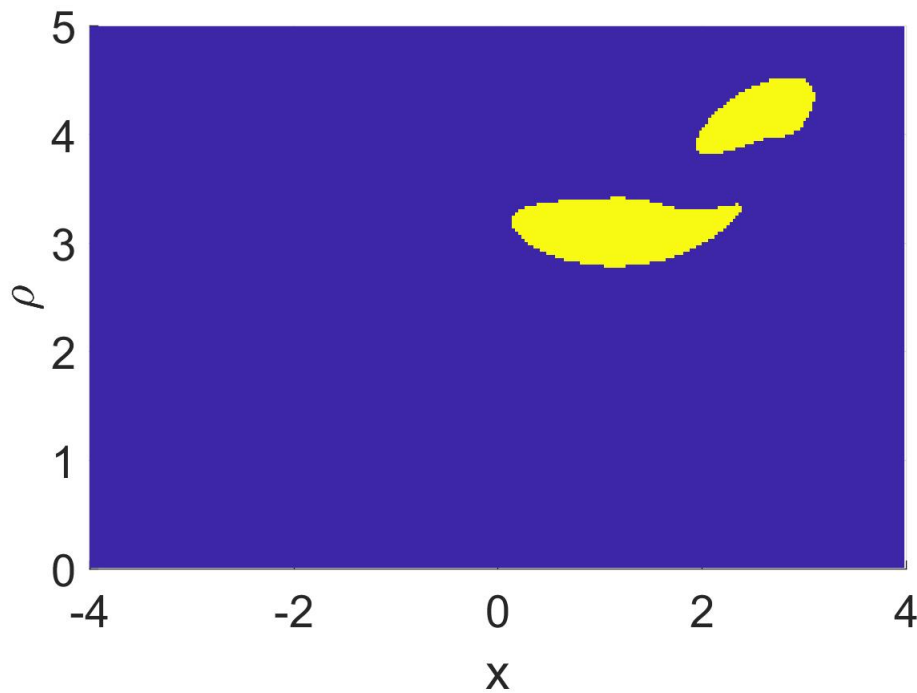


Σχήμα 32. Λύσεις του συστήματος για $\Delta = -0.99$ σε μορφή χρονοσειράς. Για κάθε τιμή της παραμέτρου P έχουμε ένα μπλε διάγραμμα που απεικονίζει την τιμή της έντασης του οπτικού πεδίου στην κοιλότητα $|a|^2$ και ακριβώς από κάτω με κόκκινο χρώμα απεικονίζεται η τιμή της θέσης του μηχανικού ταλαντωτή x συναρτήσει του χρόνου t . Τα διαγράμματα αφορούν στις λύσεις που παρουσιάζουν διακλαδώσεις (δηλ. τις λύσεις που απεικονίζονται με κίτρινο χρώμα στο Σχήμα 31). Τα εσωτερικά διαγράμματα απεικονίζουν την τιμή της παραγώγου κάθε μεταβλητής συναρτήσει της τιμής της μεταβλητής.

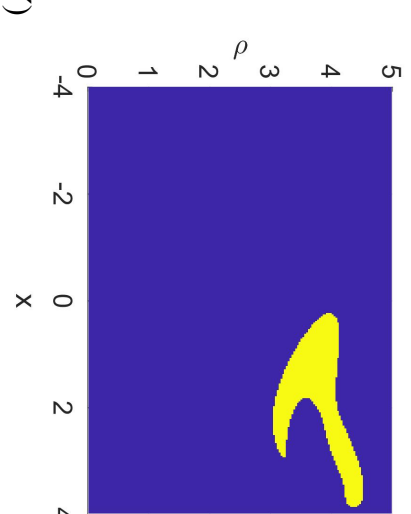
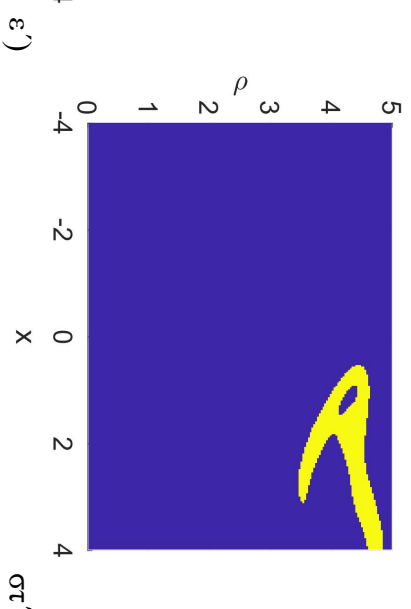
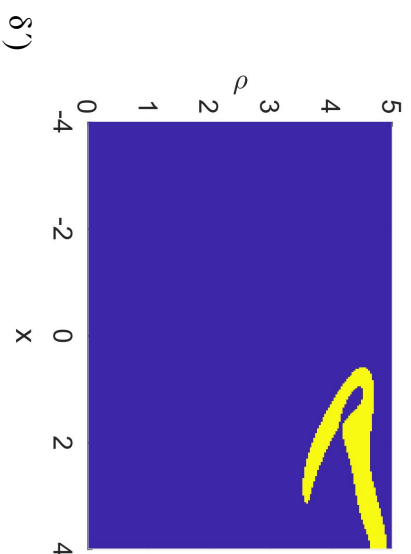
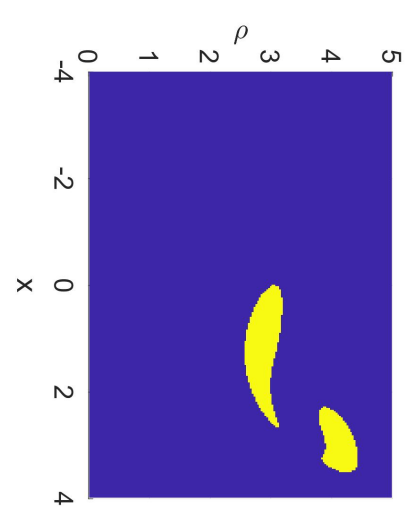
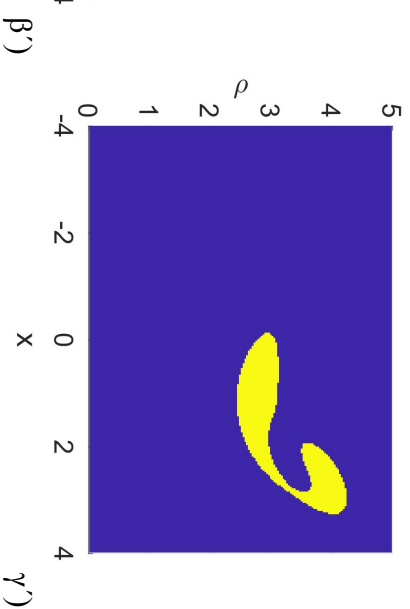
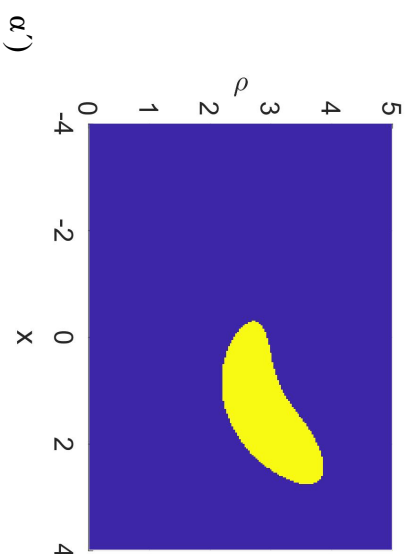


Σχήμα 33. Λύσεις του συστήματος για $\Delta = -0.99$ σε μορφή χρονοσειράς. Για κάθε τιμή της παραμέτρου P έχουμε ένα μπλε διάγραμμα που απεικονίζει την τιμή της έντασης του οπτικού πεδίου στην κοιλότητα $|a|^2$ και ακριβώς από κάτω με κόκκινο χρώμα απεικονίζεται η τιμή της θέσης του μηχανικού ταλαντωτή x συναρτήσει του χρόνου t . Τα διαγράμματα αφορούν στις λύσεις που παρουσιάζουν διακλαδώσεις (δηλ. τις λύσεις που απεικονίζονται με κίτρινο χρώμα στο Σχήμα 31). Τα εσωτερικά διαγράμματα απεικονίζουν την τιμή της παραγώγου κάθε μεταβλητής συναρτήσει της τιμής της μεταβλητής.

Εφ' όσον στο σύστημα μας παρατηρείται **διστάθεια** μπορούμε και σε αυτήν την περίπτωση να εξάγουμε το διάγραμμα περιοχών έλξης των ελκυστών του συστήματος. Για την ενδεικτική τιμή της έντασης laser $P = 0.11512$ βρισκόμαστε σε περιοχή τριπλών λύσεων στην οποία υπάρχουν δύο ευσταθείς σπείρες, άρα υπάρχει διστάθεια. Εφαρμόζοντας ένα πλήθος αρχικών συνθηκών εξάγουμε το παρακάτω διάγραμμα περιοχών έλξης:



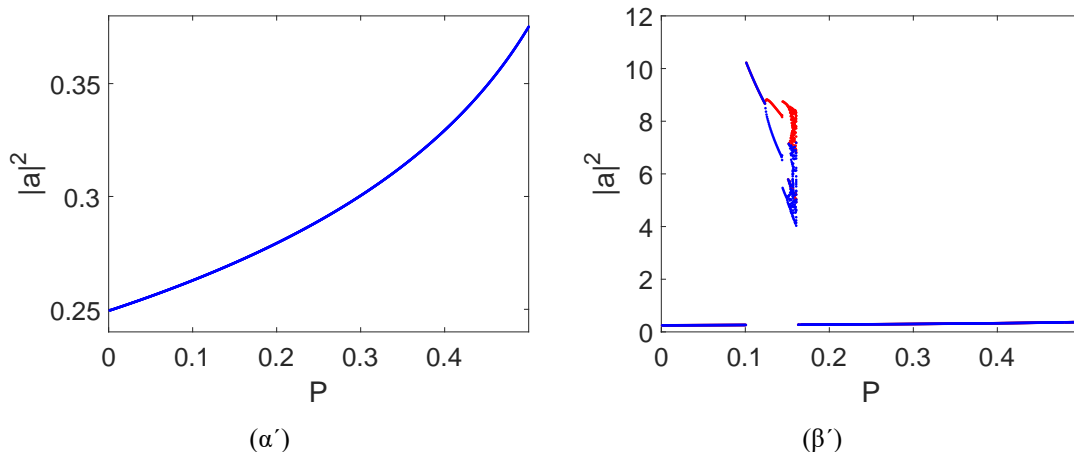
Σχήμα 34. Διάγραμμα περιοχών έλξης του συστήματος για τιμή της έντασης του laser $P = 0.11512$, όπου x η αρχική θέση του ταλαντωτή και ρ η αρχική τιμή του πλάτους πεδίου της κοιλότητας. Το μπλε χρώμα αντιστοιχεί σε αρχικές συνθήκες για τις οποίες το σύστημα καταλήγει στην ευσταθή σπείρα μπλε χρώματος στο Σχημα 31.1 και το κίτρινο χρώμα αντιστοιχεί σε αρχικές συνθήκες για τις οποίες το σύστημα καταλήγει στην ευσταθή σπείρα κίτρινου χρώματος στο Σχημα 31.1.



Σημία 35. Διαγράμματα περιοχών έλξης για την περίπτωση $\Delta = -0.99, P = 0.13512$. Αργυρές συνθήκες: α) $f = 0.01, v = -0.1, \beta) f = 0.01, v = -0.5, \gamma) f = 0.01, v = -0.7, \delta) f = 3.8\pi/3, v = -0.1, \epsilon) f = 3.9\pi/3, v = -0.1, \sigma) f = 4.5\pi/3, v = -0.1$. Στα α', β', γ' κρατάμε σταθερή τη φάση και αλλάζουμε το v . Στα δ', ε', στ' κρατάμε σταθερό το v και αλλάζουμε την φάση.

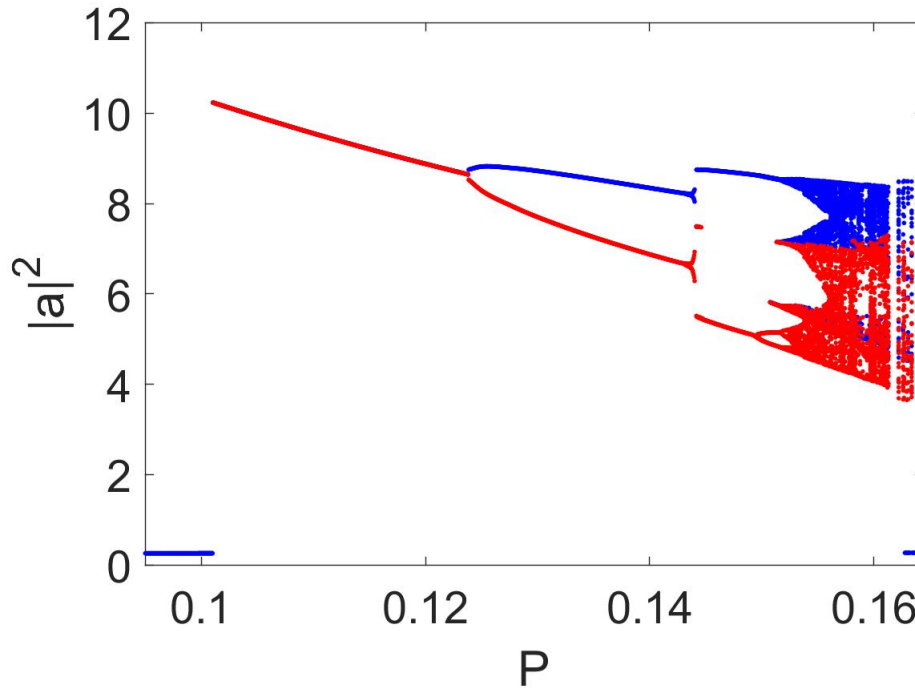
Ένα ενδιαφέρον στοιχείο της συγκεκριμένης περίπτωσης είναι η μεγάλη διαφορά στην επιρροή έλξης που επιδεικνύουν οι δύο σπείρες (Σχήματα 34, 35). Η σπείρα που προυπήρχε και για μικρότερες τιμές της παραμέτρου P “έλκει” τροχιές που προέρχονται από πολύ μεγαλύτερο εύρος αρχικών συνθηκών (μπλε χρώμα στο Σχήμα 31.1). Οι αρχικές συνθήκες που καταλήγουν στην κίτρινη σπείρα του Σχήματος 31.1 περιορίζονται σε δύο μικρές περιοχές έλξεων (Σχήμα 35) σχετικά υψηλών αρχικών τιμών του πλάτους πεδίου ρ . Το γεγονός αυτό καθιστά την συγκεκριμένη λύση δυσκολότερη στην επιτευχή της. Βλέπουμε στο Σχήμα 35 ότι μεταβάλλοντας την αρχική ταχύτητα v έχει ως αποτέλεσμα η ενιαία κίτρινη περιοχή έλξης του Σχήματος 35α να διαχωριστεί σε δύο μικρότερες περιοχές έλξης. Μεταβάλλοντας την φάση ϕ κρατώντας σταθερή την αρχική ταχύτητα δεν επηρεάζεται ιδιαίτερα η μορφή και το εμβαδόν της κίτρινης περιοχής έλξης (Σχήματα 35δ, 35ε, 35στ).

Όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις, έτσι κι εδώ έχει ενδιαφέρον να εξάγουμε τα διαγράμματα διακλάδωσης των λύσεων για μεγάλο εύρος της έντασης του laser P . Όπως είδαμε υπάρχει και σε αυτήν την περίπτωση *διστάθεια*, άρα είναι σκόπιμο να εξάγουμε δύο διαφορετικά διαγράμματα για διαφορετικές αρχικές συνθήκες ώστε να λάβουμε και τις δύο πιθανές περιπτώσεις εξέλιξης των λύσεων μας. Παρακάτω δίνονται τα διαγράμματα διακλάδωσης:



Σχήμα 36. Διαγράμματα διακλάδωσης για την περίπτωση $\Delta = -0.99$. Κάθε διάγραμμα αντιστοιχεί σε διαφορετικές αρχικές συνθήκες. Το Σχήμα 36α αντιστοιχεί σε αρχικές συνθήκες που καταλήγουν στην μπλε ευσταθή σπείρα, αριστερά του σαγματικού σημείου (Σχήμα 31). Το Σχήμα 36β απεικονίζει την λύση του συστήματος για αρχικές συνθήκες οι οποίες στην περιοχή $0.101 < P < 0.1634$ οδηγούν στην κίτρινη ευσταθή σπείρα. Οι αρχικές συνθήκες για το Σχήμα 36α είναι: $[x = 1.2 \rho = 2.7252 \phi = 0.01 u = 1]$ και για το Σχήμα 36β: $[x = 0.1 \rho = 0.0252 \phi = 0.01 u = 0.01]$.

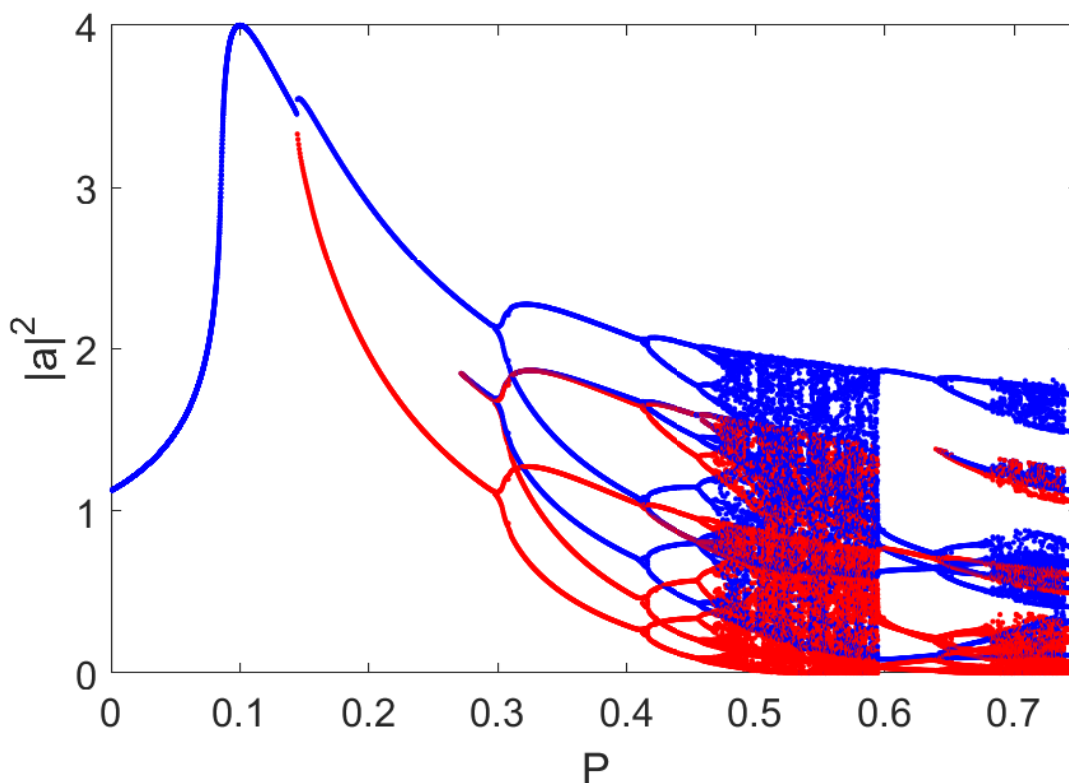
Παρακάτω, δίνεται εστιασμένη η περιοχή της παραμέτρου P στην οποία εκδηλώνεται η διαφορά στις λύσεις του συστήματος όταν εφαρμόζουμε διαφορετικές αρχικές συνθήκες. Όπως βλέπουμε, συμβαίνει μία μεταπήδηση της λύσης από την μπλε ευσταθή σπείρα του Σχήματος 31.1 στην κίτρινη ευσταθή σπείρα του ίδιου σχήματος. Σε αντίθεση όμως με την μπλε σπείρα, η κίτρινη σπείρα χάνει την ευστάθειά της και συμβαίνει μια διακλάδωση Hopf καθώς και διπλασιασμοί περιόδου και μετάβαση σε χάος. Έπειτα, η λύση μεταπίπτει πάλι στην αρχική ευσταθή σπείρα.



Σχήμα 37. Μεγέθυνση της περιοχής της παραμέτρου P στην οποία έχουμε μετάβαση στην κίτρινη ευσταθή σπείρα του Σχήματος 31.1.

Διάγραμμα Διακλάδωσης (Περιοδικό Παράθυρο) Όπως έχουμε προαναφέρει, το διάγραμμα διακλάδωσης είναι ένας ενδιαφέρων τρόπος οπτικοποίησης της δυναμικής συμπεριφοράς του συστήματος σε μεγάλο εύρος μιάς μεταβλητής, εδώ της ισχύος του laser (Σχήμα 38). Βλέπουμε ότι μέχρι περίπου την τιμή $P = 0.144$ δεν έχουμε ταλαντώσεις παρά μόνο μια στάσιμη τιμή. Έπειτα έχουμε ταλάντωση όπου το μπλε χρώμα συμβολίζει το άνω όριο του πλάτους και το κόκκινο χρώμα το κάτω όριο. Καθώς αυξάνεται η τιμή του P συμβαίνουν διπλασιασμοί περιόδου έως ότου περίπου στην τιμή $P = 0.47$ εμφανίζεται χαοτική συμπεριφορά.

Εδώ, παραθέτουμε το διάγραμμα διακλάδωσης για μία διαφορετική τριάδα παραμέτρων $[\Delta, \kappa, \Gamma]$ από τις προηγούμενες περιπτώσεις, με σκοπό να αναδείξουμε άλλη μια ενδιαφέρουσα ιδιότητα της δυναμικής μη-γραμμικών συστημάτων, όπως είναι το σύστημα που μελετάμε. Η ιδιότητα αυτή ονομάζεται “περιοδικό παράθυρο” και συμβαίνει στην τιμή $P = 0.594$, όπου όπως βλέπουμε τα χαοτικά φαινόμενα παύουν απότομα και η ταλάντωση του συστήματος γίνεται εκ νέου περιοδική για κάποιες τιμές της παραμέτρου P .



Σχήμα 38. Διάγραμμα διακλάδωσης για τιμές παραμέτρων $\Delta = -0.4, \kappa = 0.5, \Gamma = 0.05$. Οι αρχικές συνθήκες είναι: $[x = 0.01, u = 0.01, \rho = 0.01, \phi = 0.01]$.

Συμπερασματικά, σε αυτό το κεφάλαιο μελετήσαμε την δυναμική συμπεριφορά του συστήματος μας για ένα μεγάλο εύρος των τιμών των παραμέτρων, εκμεταλευόμενοι αριθμητικές μεθόδους επίλυσης. Έγινε φανερό ότι οι αναλυτικές λύσεις που υπολογίστηκαν μέσω της γραμμικής ανάλυσης του προηγούμενου κεφαλαίου συμφωνούν με τις αριθμητικές λύσεις του παρόντος κεφαλαίου δίνοντας μας ένα σημαντικό εύρος εργαλείων ανάλυσης της δυναμικής του βασικού Οπτομηχανικού συστήματος. Επίσης, χρησιμοποιήσαμε ένα πλήθος απεικονιστικών τεχνικών όπως τρισδιάστατα διαγράμματα φάσης, διαγράμματα χρονοσειρών, διαγράμματα διακλαδώσεων και απεικόνιση των περιοχών έλξης των ελκυστών του συστήματος συναρτήσει των αρχικών συνθηκών. Για μία εκτενέστερη απεικόνιση των φασικών χώρων του συστήματος βλ. [31]. Είναι φανερό από τα αποτελέσματα ότι το βασικό Οπτομηχανικό σύστημα επιδεικνύει πλούσια δυναμική συμπεριφορά και παρατηρούνται φαινόμενα όπως ευσταθείς σπείρες, οριακοί κύκλοι (διακλαδώσεις Hopf), διστάθεια μεταξύ ευσταθών σπειρών και οριακών κύκλων ή μεταξύ οριακών κύκλων, διακλαδώσεις σάγματος κόμβου οριακών κύκλων, διπλασιασμοί περιόδου και μετάβαση στο χάος. Τα δεδομένα αυτά μπορούν να βοηθήσουν στην επιλογή των κατάλληλων τιμών των παραμέτρων του συστήματος $[P, \Delta, \kappa, \Gamma]$ και των αρχικών συνθηκών των μεταβλητών (x, u, ρ, ϕ) , ώστε να επιτύχουμε την λειτουργία που επιθυμούμε και να έχουμε ελεγχόμενα αποτελέσματα.

5 Exceptional Points και Απόκριση Θορύβου

5.1 Εισαγωγή

Τα μη-Ερμιτιανά φωτονικά συστήματα είναι ένα πεδίο έρευνας που επιδεικνύει ιδιαίτερο ενδιαφέρον σε θεωρητικό και τεχνολογικό επίπεδο. Τα μη-Ερμιτιανά συστήματα είναι γνωστό ότι διαθέτουν μοναδικές μαθηματικές ιδιότητες οι οποίες δεν υπάρχουν στα Ερμιτιανά συστήματα, και είναι άμεσα συνδεδεμένες με χαρακτηριστικά κομβικής σημασίας για τις τεχνολογικές εφαρμογές ολοκληρωμένων φωτονικών συστημάτων και ενεργών μετα-επιφανειών. Τα μη-Ερμιτιανά συστήματα γενικά χαρακτηρίζονται από διατάξεις με ανομοιογενή κατανομή κέρδους και απωλειών [32].

Η Ερμιτιανότητα είναι ιδιότητα μεγάλου εύρους φυσικών συστημάτων με την υπόθεση ότι είναι συντηρητικά και υπακούουν στη συμμετρία αντιστροφής χρόνου. Ωστόσο, αυτά τα μοντέλα είναι ιδεατά, όπως η υπόθεση της απόλυτης απομόνωσης ενός συστήματος από το περιβάλλον του. Γενικά, τα μη-συντηρητικά συστήματα εμφανίζονται ευρέως και σε διάφορες μορφές, έτσι η περιγραφή ενός ρεαλιστικού φυσικού συστήματος απαιτεί μια μη-Ερμιτιανή χαμιλτονιανή [33].

Παρόλο που οι μη-Ερμιτιανοί τελεστές χρησιμοποιούνται στην Φυσική για δεκαετίες, το 1998 δημοσιεύθηκε μία καινοτόμος δουλειά από τους Bender και Boettcher οι οποίοι συνειδητοποίησαν ότι συγκεκριμένοι Μη-Ερμιτιανοί τελεστές - εκείνοι που υπακούουν στην PT συμμετρία - μπορούσαν να δώσουν πραγματικές παρατηρούμενες ποσότητες σε κβαντομηχανικά συστήματα, κάτι που μέχρι τότε θεωρούταν αποκλειστικότητα των Ερμιτιανών τελεστών [34]. Στο πλαίσιο της Κβαντομηχανικής, μια Χαμιλτονιανή H είναι PT συμμετρική όταν $[H, \mathcal{PT}] = 0$ όπου τα \mathcal{P} και \mathcal{T} είναι, αντίστοιχα, οι τελεστές Ισοτιμίας και Χρόνου. Στην Φωτονική αυτό αντιστοιχεί στην περίπτωση όπου οι απώλειες σε μία περιοχή ισοσταθμίζονται από κέρδος σε μία άλλη συμμετρική περιοχή [33].

Έγινε επίσης φανερό το γεγονός ότι η μεταθετικότητα με τον τελεστή PT δεν είναι αρκετή για να διασφαλίσει ένα πραγματικό φάσμα στο σύστημα, επειδή οι PT-συμμετρικές Χαμιλτονιανές μπορούν να υποστούν μία αλλαγή φάσης και να εισέλθουν αυθόρμητα σε περιοχή σπασμένης συμμετρίας στην οποία εμφανίζονται μιγαδικές ιδιοτιμές. Η αλλαγή φάσης προκύπτει καθώς μεταβάλλουμε τις παραμέτρους της Χαμιλτονιανής [33].

Τα καινούρια φαινόμενα που άρχισαν έκτοτε να μελετώνται, ιδιαίτερος στην περιοχή της Φωτονικής, απαιτούν την ύπαρξη ενός exceptional point που ουσιαστικά σημαίνει ότι το σύστημα χάνει μία ή περισσότερες διαστάσεις στο συγκεκριμένο σημείο του χώρου παραμέτρων [34]. Τα exceptional points εμφανίζονται σε προβλήματα ιδιοτιμών τα οποία εξαρτώνται από παραμέτρους. Μεταβάλλοντας τις παραμέτρους, μπορούν να βρεθούν σημεία στα οποία οι ιδιοτιμές γίνονται ίσες και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα τους γίνονται γραμμικά εξαρτημένα [32]. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με άλλους συνηθισμένους εκφυλισμούς όπου οι ιδιοτιμές είναι ίσες αλλά τα ιδιοδιανύσματα τους

είναι διαφορετικά (γραμμικά ανεξάρτητα) [35].

Έστω ένα σύζευμένο σύστημα της μορφής:

$$\frac{d}{d\xi} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} \omega_1 - i\gamma_1 & \mu \\ \mu & \omega_2 - i\gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

όπου $\omega_{1,2}$ είναι οι συχνότητες συντονισμού των ρυθμών, μ είναι η σταθερά σύζευξης και $\gamma_{1,2}$ είναι οι ρυθμοί απόσβεσης τους.

Για το σύστημα της σχέσης (5.1), λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι η δράση των τελεστών \mathcal{P} και \mathcal{T} είναι αντίστοιχα $\mathcal{P}(a, b) = (b, a)$ και $\mathcal{T} = (a^*, b^*)$ όπου a, b είναι δύο μεταβλητές, οι συνθήκες για την PT συμμετρία ικανοποιούνται για $\omega_1 = \omega_2 \equiv \omega$ και $\gamma_1 = \gamma_2 \equiv \gamma$. Η απόκριση αυτού του συστήματος καθορίζεται από την αλληλεπίδραση δύο βασικών διεργασιών: η αντίθεση μεταξύ του κέρδους και των απωλειών γ και η σύζευξη μ .

Για την κρίσιμη συνθήκη $\mu = \gamma$ εμφανίζεται ένα exceptional point. Εδώ, το EP σηματοδοτεί την μετάβαση από καθαρά πραγματικές ιδιοτιμές, συνυφασμένες με ταλαντωτικές λύσεις $\exp(\pm i|\sigma_{\pm}|\xi)$, όπου το ξ είναι η μεταβλητή προόδου του συστήματος, σε καθαρά φανταστικές ιδιοτιμές συνυφασμένες με αυξανόμενες ή μειούμενες λύσεις $\exp(\pm|\sigma_{\pm}|\xi)$ [33].

Τα τελευταία χρόνια, υπάρχει έντονο ενδιαφέρον για την Φυσική και τις πιθανές εφαρμογές των exceptional points, που σχετίζονται με τα μονορυθμικά laser, την αντιστροφή εξάρτησης άντλησης της έντασης του laser και τον αυτο-τερματισμό, την βελτιωμένη ευαισθησία laser, τις χειρομορφικές ιδιότητες των μετα-επιφανειών, και τα τοπολογικά φαινόμενα σε συστοιχίες laser. Παρεκκλίσεις από την PT συμμετρία έχουν μελετηθεί και έχει δειχθεί ότι για γραμμικά συστήματα η βασική συνθήκη για την ύπαρξη αυτών των φασματικών χαρακτηριστικών είναι η συνθήκη μηδενικής Διαφοράς Συχνότητας Δ ανάμεσα στα διαφορετικά συζευγμένα μέρη ή ρυθμούς του συστήματος. Ωστόσο, λαμβάνοντας υπ' όψιν κάποια επιπλέον σημαντικά δυναμικά χαρακτηριστικά όπως, για την περίπτωση ενός φωτονικού διμερούς, αποτελούμενου από δύο συζευγμένα lasers ημιαγωγών (βλέπε [32]), την μη-γραμμική σύζευξη μεταξύ της δυναμικής του ηλεκτρικού πεδίου και της πυκνότητας φορέων όπως επίσης της σύζευξης πλάτους-φάσης και χρησιμοποιώντας πιο ρεαλιστικά μοντέλα που συμπεριλαμβάνουν αυτά τα χαρακτηριστικά, έχει δειχθεί ότι οι φασματικές μεταβάσεις και τα exceptional points εμφανίζονται κάτω από πολύ πιο γενικές συνθήκες από αυτές που επιβάλλει η PT συμμετρία, συμπεριλαμβανομένης της μη-μηδενικής Διαφοράς Συχνότητας Δ [32].

Μία εφαρμογή των EPs για την οποία υπάρχει έντονη ερευνητική δραστηριότητα είναι η βελτίωση της ευαισθησίας των αισθητήρων όταν αυτοί λειτουργούν στην περιοχή ενός EP. Το φαινόμενο μπορεί να εξηγηθεί ως εξής:

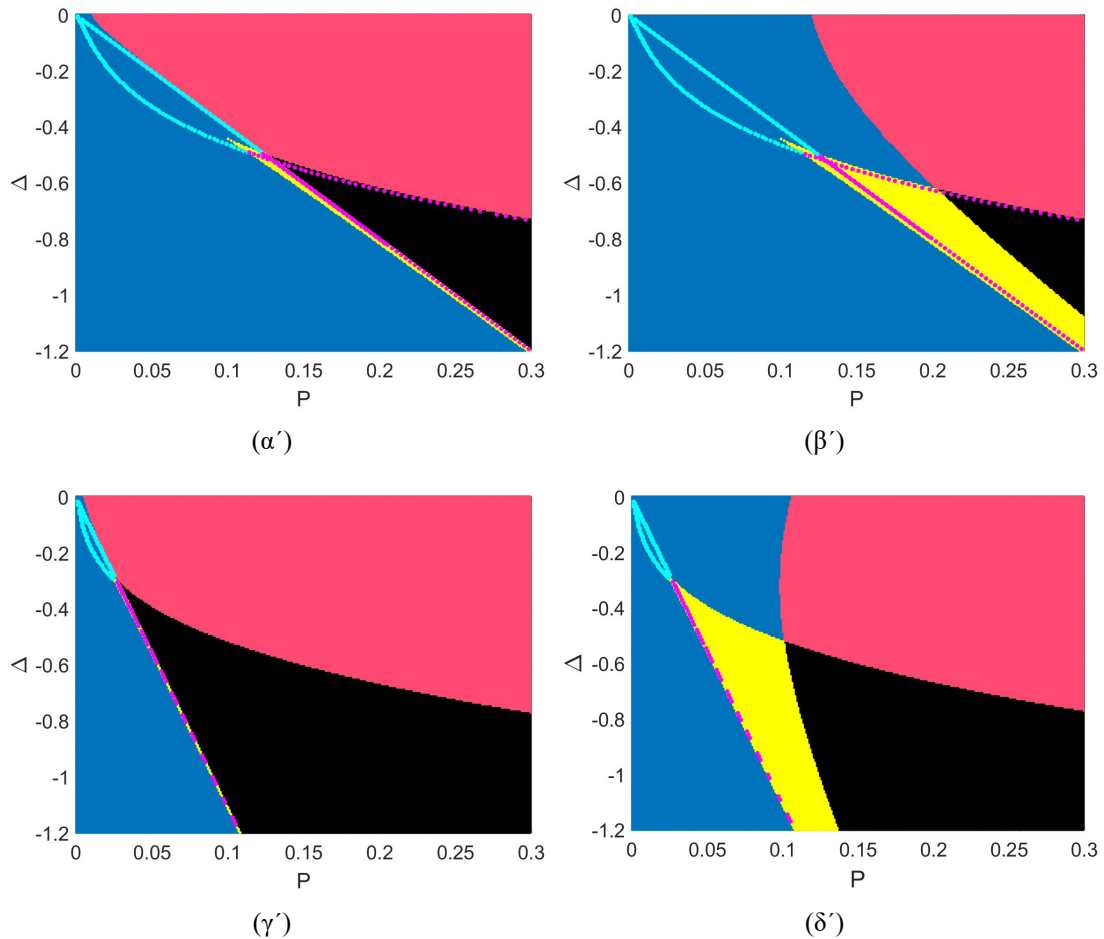
Σε ένα σύνηθες Ερμιτιανό σύστημα, μία μικρή διαταραχή $\delta\alpha$ θα μεταβάλει το παρατηρούμενο μέγεθος στην έξοδο κατά ένα μικρό ποσό το οποίο εξαρτάται γραμμικά από το μέγεθος της διαταραχής, $\delta\alpha$. Όμως, αυτός ο περιορισμός δεν ισχύει στα μη-Ερμιτιανά συστήματα. Συγκεκριμένα, κοντά σε ένα EP, η τιμή της εξόδου είναι ανάλογη με την

νιοστή ρίζα της διαταραχής, $\delta\alpha^{1/N}$, όπου N είναι ο αριθμός των ρυθμών που συγκλίνουν μεταξύ τους στο EP. Σαν αποτέλεσμα, ένα μη-Ερμιτιανό σύστημα θα είναι πιο ευαίσθητο από ένα Ερμιτιανό σύστημα σε μία μικρή μεταβολή π.χ. του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου ή της συχνότητας συντονισμού της φωτονικής κοιλότητας [34].

Ωστόσο, υπάρχουν αμφιβολίες για το αν είναι δυνατόν να βελτιωθεί η ευαισθησία μίας μέτρησης όταν ένα σύστημα λειτουργεί στην περιοχή ενός EP. Υπάρχουν δύο επιχειρήματα για το θέμα αυτό. Το πρώτο είναι ότι οι αισθητήρες δεν μετρούν άμεσα τις εξόδους των ρυθμών αλλά μετράνε μεγέθη του συστήματος, όπως την ανακλαστικότητα μίας κοιλότητας, οι οποίες συνδέονται έμμεσα με τις τιμές των ρυθμών και πιθανόν να μην επιδείξουν αυτήν την αυξημένη ευαισθησία. Το δεύτερο επιχειρήμα είναι ότι ο αυξημένος θόρυβος σε αυτά τα μη-συντηρητικά συστήματα αφαιρεί όλα τα πιθανά πλεονεκτήματα ενός exceptional point. Άρα, το αν θα μπορέσουν να κατασκευαστούν μη-Ερμιτιανά συστήματα που να επιδεικνύουν αυτήν την αύξηση στην ευαισθησία μέτρησης, είναι ακόμα ένα ανοιχτό πεδίο έρευνας [34].

5.2 Αναζήτηση EPs στο σύστημα μας

Στο σύστημα μας πραγματοποιούμε αναζήτηση για EPs στον χώρο παραμέτρων για μεταβλητά P και Δ και για διάφορες σταθερές τιμές του ρυθμού απόσβεσης κ και του μηχανικού ρυθμού απόσβεσης Γ . Παρακάτω παραθέτουμε τα διαγράμματα P - Δ με εντοπισμένες τις περιοχές στις οποίες εμφανίζονται τα exceptional points.

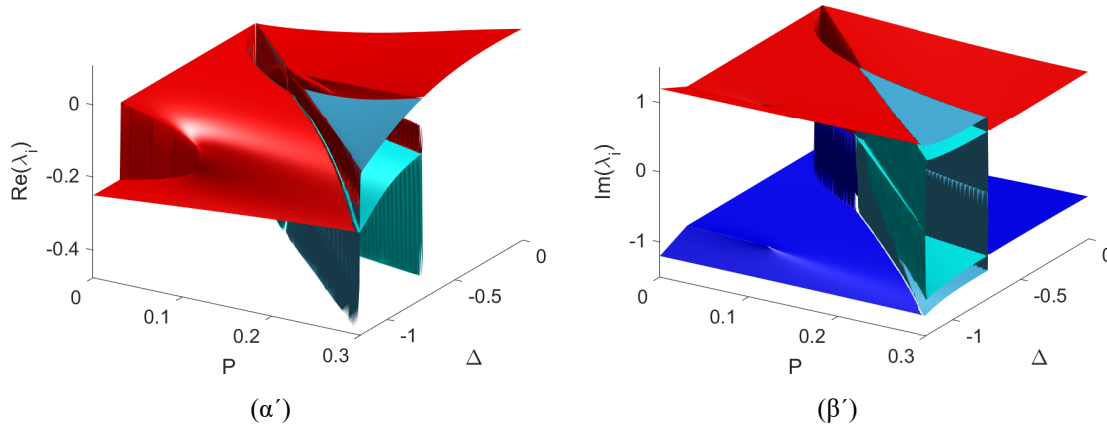


Σχήμα 39. Exceptional Points στον χώρο των παραμέτρων. α) Οι τιμές των παραμέτρων είναι $\kappa = 0.5, \Gamma = 0.00147$ β) $\kappa = 0.5, \Gamma = 0.075$ γ) $\kappa = 0.3, \Gamma = 0.00147$, δ) $\kappa = 0.3, \Gamma = 0.075$. Η ευθεία πάνω στην οποία εμφανίζονται τα EPs είναι η $P + \kappa^2 \Delta = 0$. Η γαλάζια καμπύλη αποτελείται από EPs στην περιοχή μονών λύσεων και η ροζ καμπύλη αποτελείται από EPs στις περιοχές τριπλών λύσεων.

Παρατηρούμε ότι τα EPs βρίσκονται πάνω σε ευθείες ή ομαλές καμπύλες. Επίσης βλέπουμε ότι τα EPs εμφανίζονται στο σύστημα μόνο όταν η Διαφορά Συχνότητας είναι αρνητική ($\Delta < 0$). Από την παρούσα ανάλυση συμπεραίνουμε ότι το πλήθος και η θέση

των Exceptional points στον χώρο των παραμέτρων διαφοροποιούνται καθώς μεταβάλλουμε τον οπτικό ρυθμό απόσβεσης κ ενώ μένουν ανεπηρέαστα όταν μεταβάλλουμε τον μηχανικό ρυθμό απόσβεσης Γ .

Στο Σχήμα 40 απεικονίζονται τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη των ιδιοτιμών συναρτήσει των παραμέτρων P & Δ .



Σχήμα 40. Πραγματικά (α) και φανταστικά (β) μέρη των ιδιοτιμών για τιμές των παραμέτρων $\kappa = 0.5$, $\Gamma = 0.075$. Τα χρώματα κόκκινο και σκούρο μπλε αντιστοιχούν την περιοχή των μονών λύσεων ενώ τα υπόλοιπα αντιστοιχούν στις τριπλές λύσεις (Εδώ απεικονίζονται οι δύο από τις τρεις λύσεις, δηλ. αυτές που περιέχουν EPs. Τα Exceptional Points εμφανίζονται πάνω στην ευθεία $P + \kappa^2 \Delta = 0$.

5.3 Απόκριση Θορύβου

Για να μελετήσουμε την επίδραση των EPs και γενικά των φασματικών μεταβάσεων στην συμπεριφορά του συστήματος, είναι σκόπιμο να εξαγάγουμε την απόκριση του γραμμικοποιημένου συστήματος όταν αυτό τροφοδοτείται με θόρυβο.

Αυτό το σύστημα έχει την μορφή:

$$\dot{\vec{\delta X}} = \mathbf{J} \vec{\delta X} + \vec{n} \quad (5.2)$$

όπου το δX είναι μια μικρή διαταραχή γύρω από τη θέση ισορροπίας $\vec{X} = (x, u, \rho, \phi)$ και \vec{n} είναι διακυμάνσεις των μεταβλητών του συστήματος εκφρασμένες ως στοχαστικά σήματα, δ -συσχετισμένα, μηδενικού μέσου όρου [32].

Παίρνοντας τον μετασχηματισμό Fourier της εξίσωσης (5.2), λαμβάνουμε την συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος ως εξής:

$$\mathbf{H}(\delta\omega) = (i\delta\omega \mathbf{I} - \mathbf{J})^{-1} \quad (5.3)$$

όπου $\delta\omega$ είναι το φασματικό στοιχείο της απόκρισης του συστήματος και \mathbf{I} είναι ο μοναδιαίος πίνακας.

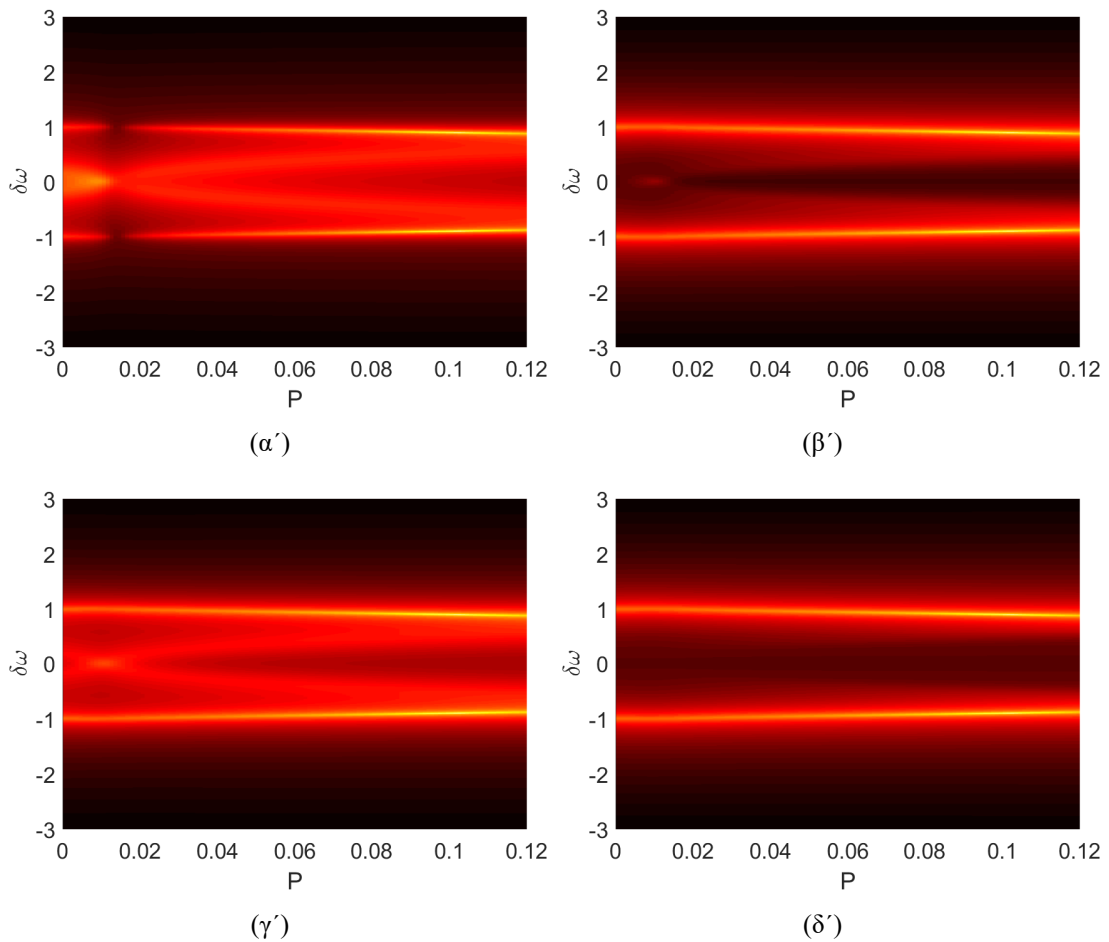
Η φασματική πυκνότητα ισχύος S_{XX} της εξόδου του γραμμικού συστήματος (5.2) δίνεται ως εξής:

$$\mathbf{S}_{XX}(\delta\omega) = \mathbf{H}(\delta\omega)\mathbf{H}^\dagger(\delta\omega) \quad (5.4)$$

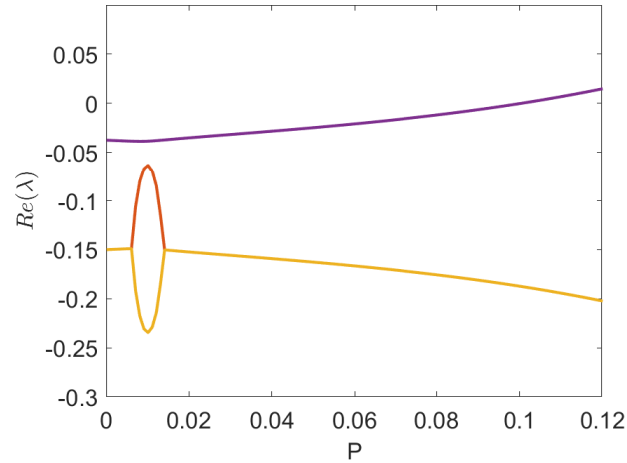
όπου το \dagger συμβολίζει τον ερμιτιανό συζυγή του πίνακα [32].

Παρακάτω δίνονται τα διαγράμματα φασματικής πυκνότητας ισχύος για τις μεταβλητές του συστήματος μας συναρτήσει της παραμέτρου P (Σχήμα 41).

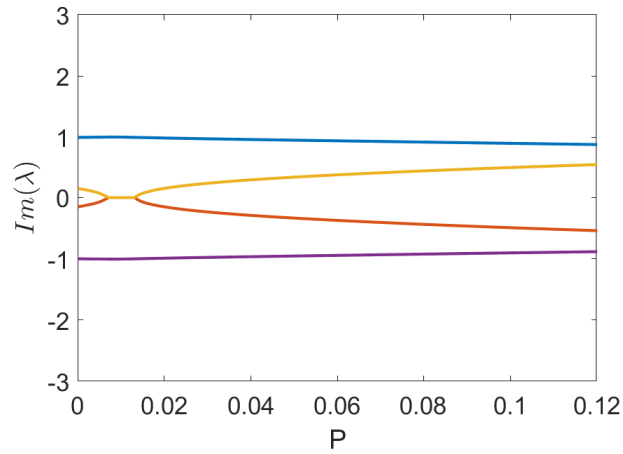
Εστιάζοντας σε ένα συγκεκριμένο EP βλέπουμε σχηματικά την εξέλιξη του πραγματικού και φανταστικού μέρους των ιδιοτιμών, δεξιά και αριστερά από το σημείο καθώς και την φασματική πυκνότητα ισχύος S_{XX} στην περιοχή του σημείου (Σχήμα 42).



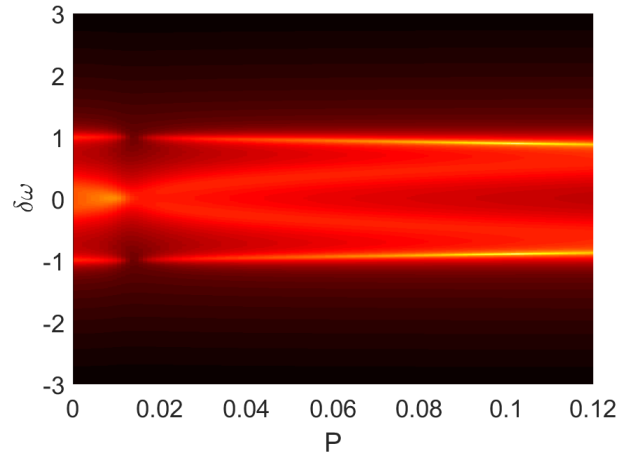
Σχήμα 41. Φασματική πυκνότητα ισχύος α) $S_{\rho\rho}$, β) S_{xx} , γ) $S_{\phi\phi}$, δ) S_{uu} για $\Delta = -0.15$, $\kappa = 0.3$, $\Gamma = 0.075$.



(α')



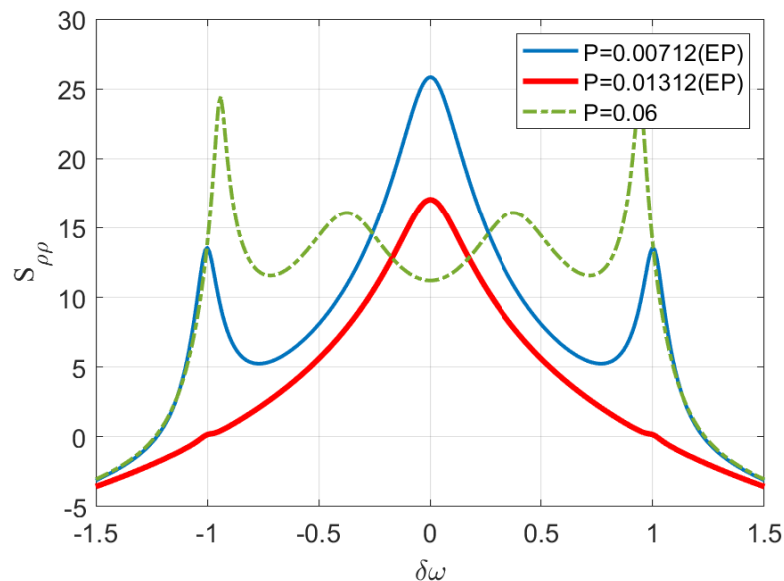
(β')



(γ')

Σχήμα 42. (α), (β) Exceptional Points τα οποία εμφανίζονται στην τιμή Διαφοράς Συχνότητας $\Delta = -0.15$ και τιμές των λοιπών παραμέτρων $\kappa = 0.3$, $\Gamma = 0.075$. Το αριστερό EP εμφανίζεται για $P = 0.00712$. Οι τιμές των ιδιοτιμών για το αριστερό EP είναι $\lambda_{1,2} = -0.1489$ και οι τιμές των αντίστοιχων ιδιοδιανυσμάτων τους είναι οι εξής: $v_{1,2} = [-0.0359 \ 0.0053 \ -0.9993 \ -0.0039]$. Οι αντίστοιχες τιμές για το δεξί EP είναι: $P = 0.01312$, $\lambda_{1,2} = -0.15$, $v_1 \approx [0 \ 0 \ 0 \ 1.00]$, $v_2 \approx [0 \ 0 \ 0 \ -1.00]$. (γ) Φασματική πυκνότητα ισχύος $S_{\rho\rho}$ του πλάτους του οπτικού πεδίου ρ συναρτήσεως της συχνότητας και της έντασης του laser P .

Στο Σχήμα 42α, 42β βλέπουμε ότι για τιμές του $P < 0.00712$ έχουμε δύο μιγαδικές συζυγείς ιδιοτιμές το φανταστικό μέρος των οποίων είναι συμμετρικό ως προς το μηδέν. Τα φανταστικά μέρη των ιδιοτιμών πλησιάζουν μεταξύ τους έως ότου για $P = 0.00712$ εξισώνονται αποκτώντας την τιμή μηδέν. Το σημείο αυτό έχει ίσες ιδιοτιμές (τις δύο από τις τέσσερις συνολικά που διαθέτει το σύστημα) και επίσης έχει ίσα ιδιοδιανύσματα. Για τιμές του $0.00712 < P < 0.01312$ έχουμε πλέον δύο πραγματικές ιδιοτιμές μέχρι το σημείο $P = 0.01312$ όπου οι ιδιοτιμές εξισώνονται και τα ιδιοδιανύσματα γίνονται γραμμικώς εξαρτημένα. Τα δύο αυτά σημεία είναι Exceptional Points και σηματοδοτούν φασματικές μεταβάσεις του συστήματος. Στο Σχήμα 42γ βλέπουμε ότι η απόκριση θορύβου του συστήματος ακολουθεί σχηματικά τα φανταστικά μέρη των ιδιοτιμών, αποτέλεσμα που συμφωνεί με [32], ενώ το μέγεθος της απόκρισης ανάμεσα στα δύο EPs συμβαδίζει με τα πραγματικά μέρη των ιδιοτιμών. Συγκεκριμένα, το EP που εμφανίζεται στο $P = 0.01312$, βλέπουμε ότι επηρεάζει σημαντικά την απόκριση του συστήματος, ακυρώνοντας τα “sidebands” δηλ. την διαμόρφωση που υφίσταται το οπτικό πεδίο της κοιλότητας λόγω της κίνησης του καθρέπτη, ενώ το EP που εμφανίζεται στο $P = 0.00712$ ενισχύει την απόκριση (Σχήμα 43). Τα μέγιστα που παρατηρούνται για $P = 0.1021$ αντιστοιχούν σε διακλάδωση Hopf [32] (Σχήμα 42γ).



Σχήμα 43. Φάσματα θορύβου του συστήματος που αντιστοιχούν στην περίπτωση του Σχήματος 3γ, για τρεις τιμές της έντασης του laser P .

6 Επίλογος

6.1 Σύνοψη - Συμπεράσματα

Το πεδίο των Οπτομηχανικών συστημάτων ξεκίνησε να μελετάται ήδη από τα τέλη της δεκαετίας του '60, όταν εξετάστηκε η κλασική επίδραση της ακτινοβολίας πάνω στην κίνηση μίας μάζας ελέγχου, στο πλαίσιο μετρήσεων ακριβείας από τον Braginsky [36]. Παρ' όλα αυτά, η μελέτη της μη-γραμμικής δυναμικής των συστημάτων αυτών έχει εμφανισθεί κυρίως τα τελευταία χρόνια, εστιάζοντας, ως επί τω πλείστον, στον εξωτικό χαρακτήρα της χαοτικής δυναμικής και για τιμές οπτικών απωλειών συγκρίσιμες ή μεγαλύτερες από την μηχανική συχνότητα του ταλαντωτή [31]. Στην παρούσα εργασία εξετάζουμε την πολύπλοκη δυναμική συμπεριφορά η οποία εκδηλώνεται στο βασικό Οπτομηχανικό σύστημα για τιμές των οπτικών απωλειών οι οποίες είναι αρκετά μικρότερες από την μηχανική συχνότητα του ταλαντωτή. Ξεκινάμε με την αναλυτική επίλυση του συστήματος από την οποία προκύπτουν τα σημεία ισορροπίας καθώς και οι ιδιοτιμές τους. Ένα βασικό χαρακτηριστικό των Οπτομηχανικών Συστημάτων είναι η μεταβολή της συχνότητας συντονισμού της κοιλότητας που συμβαίνει λόγω της κίνησης του καθρέπτη η οποία αλλάζει το μήκος της κοιλότητας. Αυτό δημιουργεί τις συνθήκες για την ύπαρξη περισσοτέρων από μία λύσεων για κάποιες τιμές της έντασης του laser. Με την ανάλυση μας, γίνεται φανερό ότι το σύστημα για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων έχει τρεις λύσεις ισορροπίας κι επίσης παρουσιάζει διστάθεια, ένα φαινόμενο ιδιαίτερης σημασίας για τις εφαρμογές των Οπτομηχανικών συστημάτων. Τα διαγράμματα ευστάθειας που λαμβάνουμε μας δίνουν την δυνατότητα να επιλέγουμε τις τιμές των παραμέτρων του συστήματος με γνώμονα την δυναμική συμπεριφορά που θέλουμε να επιτύχουμε. Ενδεικτικές πληροφορίες που μας δίνουν είναι, ευσταθή σημεία ισορροπίας, ασταθή σημεία ισορροπίας, περιοχές μονών και τριπλών λύσεων, διακλαδώσεις Hopf και περιοχές διστάθειας.

Στο επόμενο κεφάλαιο της εργασίας πραγματοποιούμε την αριθμητική διερεύνηση του βασικού Οπτομηχανικού συστήματος, εντοπίζοντας δυναμικές καταστάσεις όπως πχ. ιδιοσυντηρούμενες ταλαντώσεις οι οποίες παρουσιάζουν ιδιαίτερη χρησιμότητα σε εφαρμογές. Αναλύοντας συστηματικά τον χώρο των παραμέτρων του συστήματος, εντοπίζουμε όλες τις σημαντικές διακλαδώσεις που συμβαίνουν στο σύστημα και τις τιμές των παραμέτρων για τις οποίες συμβαίνουν. Η ύπαρξη και ευστάθεια των οικογενειών των οριακών κύκλων μελετάται λεπτομερώς. Περιοχές του χώρου των παραμέτρων στις οποίες παρουσιάζεται διστάθεια μεταξύ ενός σημείου ισορροπίας και ενός οριακού κύκλου ή μεταξύ δύο διαφορετικών οριακών κύκλων, εντοπίζονται και εξετάζεται ο χώρος φάσης του συστήματος. Επίσης, δείχνουμε την δημιουργία καλώς ορισμένων περιοχών έλξης οι οποίες διαθέτουν ευκρινή όρια, γεγονός που μας δίνει την δυνατότητα να εκμεταλευτούμε πρακτικά το φαινόμενο της διστάθειας. Στο τελευταίο κεφάλαιο γίνεται μία σύντομη παρουσίαση του φαινομένου των Exceptional points, δηλ. σημεία ισορροπίας στα οποία το σύστημα χάνει μία ή περισσότερες διαστάσεις και παρουσιάζουν

ερευνητικό ενδιαφέρον κυρίως ως προς την βελτίωση της ευαισθησίας αισθητήρων που λειτουργούν στην περιοχή ενός ΕΡ.

Η παρούσα συστηματική ανάλυση του χώρου παραμέτρων του βασικού Οπτομηχανικού ταλαντωτή προχωράει ένα βήμα παραπέρα από την μελέτη της εξωτικής και χαοτικής δυναμικής του συστήματος υπό την έννοια ότι επιτρέπει την αναγνώριση συγκεκριμένων τιμών των παραμέτρων για την ύπαρξη ιδιοσυντηρούμενων ταλαντωτικών καταστάσεων και την πρόσβαση σε αυτές μέσω συγκεκριμένων αρχικών συνθηκών. Αυτό επιτρέπει τον παραμετρικό έλεγχο και εκμετάλευση αυτών των καταστάσεων για πρακτικές εφαρμογές οι οποίες απαιτούν μία ισορροπία μεταξύ της πολυπλοκότητας και της προβλεψιμότητας της απόκρισης του συστήματος.

6.2 Μελλοντικές Προεκτάσεις

Μία μελλοντική προέκταση της παρούσας εργασίας θα μπορούσε να είναι η μελέτη της γραμμικής απόκρισης συχνότητας του συστήματος με διαμόρφωση του σήματος εισόδου η οποία μπορεί να μας δώσει μία καλή εικόνα των συντονισμών (αυξημένη συχνοτική απόκριση) όπως και αντι-συντονισμών (ένα ενδιαφέρον φαινόμενο που μπορεί να εμφανιστεί ως απότομη πτώση στην συχνοτική απόκριση). Με κάποιες αλλαγές στον σχεδιασμό του συστήματος, πιθανότατα θα μπορούσαμε να επηρεάσουμε την απόκριση διαμόρφωσης του συστήματος κατά βούληση, μεταβάλλοντας τις συχνότητες συντονισμού και αντι-συντονισμού ή μειώνοντας την απόκριση με παράλληλη αύξηση του συχνοτικού εύρους, ανάλογα με τις ανάγκες συγκεκριμένων εφαρμογών.

Αναφορές

- [1] H. D. Young and R. A. Freedman. *University Physics with Modern Physics*. Pearson, 2014.
- [2] A. Cho. Putting light's light touch to work as optics meets mechanics. *Science*, 328(5980):812–813, 2010.
- [3] E. Hecht. *Optics*. Pearson, 2017.
- [4] B. E. A. Saleh and M. C. Teich. *Fundamentals of Photonics*. John Wiley & Sons, Inc., 2007.
- [5] T. J. Kippenberg and K. J. Vahala. Cavity optomechanics: Back-action at the mesoscale. *Science*, 321(5893):1172–1176, 2008.
- [6] B. S. Sheard, M. B. Gray, C. M. Mow-Lowry, D. E. McClelland, and S. E. Whitcomb. Observation and characterization of an optical spring. *Phys. Rev. A*, 69:051801, 2004.
- [7] M. Aspelmeyer, T. J. Kippenberg, and F. Marquardt. Cavity optomechanics. *Rev. Mod. Phys.*, 86:1391–1452, 2014.
- [8] B. Kubala, M. Ludwig, and F. Marquardt. Optomechanics. In Giulio Casati and Davron Matrasulov, editors, *Complex Phenomena in Nanoscale Systems*, pages 153–164, Dordrecht, 2009. Springer Netherlands.
- [9] I. Favero and K. Karrai. Optomechanics of deformable optical cavities. *Nature photonics (Print)*, 2009.
- [10] M. Eichenfield, J. Chan, R. M. Camacho, K. J. Vahala, and O. Painter. Optomechanical crystals. *Nature*, 462(7269):78–82, 2009.
- [11] M. Metcalfe. Applications of cavity optomechanics. *Applied Physics Reviews*, 1(3):031105, 2014.
- [12] V. Fiore, Y. Yang, M. C. Kuzyk, R. Barbour, L. Tian, and H. Wang. Storing optical information as a mechanical excitation in a silica optomechanical resonator. *Phys. Rev. Lett.*, 107:133601, 2011.
- [13] H. J. Pain. *The Physics of Vibrations and Waves*. John Wiley & Sons, Ltd, 2005.
- [14] J. T. Verdeyen. *Laser Electronics*. Pearson, 1995.
- [15] M. Ludwig, B. Kubala, and F. Marquardt. The optomechanical instability in the quantum regime. *New Journal of Physics*, 10(9):095013, sep 2008.

- [16] W. P. Bowen and G. J. Milburn. *Quantum Optomechanics*. CRC Press, 2016.
- [17] A. A. Clerk and F. Marquardt. Basic theory of cavity optomechanics. In M. Aspelmeyer, T. J. Kippenberg, and F. Marquardt, editors, *Cavity Optomechanics: Nano- and Micromechanical Resonators Interacting with Light*, pages 5–23. Springer Berlin Heidelberg, 2014.
- [18] P. Meystre. A short walk through quantum optomechanics. *Annalen der Physik*, 525(3):215–233, 2013.
- [19] F. Marquardt and S. M. Girvin. Optomechanics (a brief review), 2009.
- [20] T. J. Kippenberg and K.J. Vahala. Cavity opto-mechanics. *Opt. Express*, 15(25):17172–17205, 2007.
- [21] M. Aspelmeyer, P. Meystre, and K. Schwab. Quantum optomechanics. *Physics Today*, 65(7):29–35, 2012.
- [22] O. Arcizet, P.-F. Cohadon, T. Briant, M. Pinard, and A. Heidmann. Radiation-pressure cooling and optomechanical instability of a micromirror. *Nature*, 444(7115):71–74, Nov 2006.
- [23] Latsis prize 2014 awarded to quantum physicist tobias kippenberg. <http://www.snf.ch/en/researchinFocus/newsroom/Pages/news-150114-latsis-prize-awarded.aspx>, 2014. Accessed: 2010-09-30.
- [24] L. Yuxiang, M. Houxun, A. Vladimir, and S. Kartik. Wide cantilever stiffness range cavity optomechanical sensors for atomic force microscopy. *Opt. Express*, 20(16):18268–18280, 2012.
- [25] M. Hossein-Zadeh and K. J. Vahala. Photonic RF down-converter based on optomechanical oscillation. *IEEE Photonics Technology Letters*, 20(4):234–236, Feb 2008.
- [26] S. H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. CRC Press, 2015.
- [27] G. A. Korn and T. M. Korn. *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems, and Formulas for Reference and Review*. Dover Publications, revised edition, 2000.
- [28] D. A. Cox. *Galois Theory*. John Wiley & Sons, Ltd, 2012.

-
- [29] A. Jeffrey. *Matrix Operations for Engineers and Scientists: An Essential Guide in Linear Algebra*. Springer Netherlands, 2010.
- [30] F. C. Hoppensteadt and E. M. Izhikevich. *Weakly Connected Neural Networks*. Springer-Verlag New York, 1997.
- [31] S. Christou, V. Kovanis, A. E. Giannakopoulos, and Y. Kominis. Parametric control of self-sustained and self-modulated optomechanical oscillations. *Phys. Rev. A*, 103:053513, 2021.
- [32] Y. Kominis, V. Kovanis, and T. Bountis. Spectral signatures of exceptional points and bifurcations in the fundamental active photonic dimer. *Phys. Rev. A*, 96:053837, 2017.
- [33] M. A. Miri and A. Alù. Exceptional points in optics and photonics. *Science*, 363(6422), 2019.
- [34] A. Cerjan. A whole surface of exceptional points. *APS Physics*, 2019.
- [35] F. M. Fernández. Exceptional point in a simple textbook example. *European Journal of Physics*, 39(4):045005, 2018.
- [36] T. F. Roque, F. Marquardt, and O. M. Yevtushenko. Nonlinear dynamics of weakly dissipative optomechanical systems. *New Journal of Physics*, 22(1):013049, 2020.