Ευστάθεια σχέσεως εισόδου-προς-κατάσταση για συνοριακές διαταραχές σε Παραβόλικές Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Επιβλέπων Καθηγητής: Καραφύλλης Ιάσων

Παναγιώτης Βλάχος

Ιούλιος 2021

Συντομογραφίες

PDEs	Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις
ODEs	Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις
ISS	Ευστάθεια Σχέσεως Εισόδου-προς-Κατάσταση
R-A-D	Αντίδραση-Μεταφορά-Διάχυση
SL	Sturm-Liouville
ES	Εκθετικά Ευσταθής

Contents

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Τα δυναμικά συστήματα δηλαδή τα συστήματα στα οποία η κατάσταση τους εξελίσεται στο χρόνο ακολουθώντας ένα συγκεκριμένο νόμο-κανόνα, μπορούμε να τα μελετήσουμε σε πολλές περιπτώσεις χρησιμοποιώντας τις PDEs. Οι εξισώσεις αυτές βρίσκουν εφαρμογή στη μελέτη φυσικών φαινομένων όπως στη μεταφορά θερμότητας, στην αλληλεπίδραση σωματιδίων μέσα σε ένα ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, στη κίνηση ενός ρευστού κ.α. Ταυτόχρονα, η συμβολή τους είναι εμφανής τόσο σε τομείς υγείας όσο και σε κοινωνικούς, καθώς βρίσκουν εφαρμογές στη μελέτη διάδοσης ασθενειών αλλά και στην ανάπτυξη πληθυσμών.

Κεντρικό ερώτημα στη μελέτη αποτελεί η ευστάθειά του συστήματος, δηλαδή η αλλαγή της τελικής κατάστασης του συστήματος αν εφαρμόσουμε μικρές μεταβόλες στις μεταβλητές του. Η θεωρία ελέγχου, που αναπτύχθηκε για τη ποιοτική μελέτη τέτοιων συστημάτων ανάδρασης είναι ένα από τα καταλληλότερα εργαλεία που διαθέτουμε.

Η ιδιότητα Ευστάθειας Σχέσεως-προς-Κατάσταση (θα την αναφέρουμε ως ISS-ιδιότητα) σε PDEs διαδραματίζει βασικό ρόλο στη μελέτη της ευστάθειας. Πριν όμως παραθέσουμε τη συγκεκριμένη σχέση και τη δυσκολία παραγωγής της, θα αναφέρουμε αρχικά τη σημειογραφία και την ορολογία που θα χρησιμοποιήσουμε στη παρούσα εργασία.

Ξεκινώντας θα διαχωρίσουμε τα δύο σύνολα $(0,\infty)$ με το $[0,\infty)$ συμβολίζοντας το τελευταίο με $\mathbb{R}_+$. Επίσης το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το σύνολο B και σύνολο τιμών το $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ θα το γράφουμε ως $C^0(B;\Omega)$. Το σύνολο τών k-παραγωγίσιμων συναρτήσεων, όπου $k \geq 1$ το συμβολίζουμε ως $C^k(B;\Omega)$.

Επιπλέον, θα ορίσουμε το σύνολο των τμηματικά συνεχώς παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Θεωρούμε ένα διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$. Μια συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ λέγεται τμηματικά C^1 στο $[0,1]$ και γράφουμε $f \in PC^1([0,1])$, εαν οι ακόλουθες ιδιότητες ικανοποιούνται: 1) για κάθε $x \in [0,1)$ το όριο $\lim_{0\to 0^+}(h^{-1}(f(x+h)-f(x)))$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο, 2)για κάθε $x \in (0,1]$ το όριο $\lim_{0\to 0^-}(h^{-1}(f(x+h)-f(x)))$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο, 3) υπάρχει ένα σύνολο $J \subset (0,1)$ με πεπερασμένη πλυθικότητα, όπου έχουμε την ισότητα: $f'(x) = \lim_{0\to 0^+}(h^{-1}(f(x+h)-f(x))) = \lim_{0\to 0^-}(h^{-1}(f(x+h)-f(x)))$ για κάθε $x \in (0,1) \setminus J$ και 4) η απεικόνιση $(0,1) \setminus J \ni x \to f'(x) \in \mathbb{R}$ είναι συνεχής, παραδείγματος χάριν: η $f'(x)$ είναι συνεχής στο $x \in (0,1) \setminus J$.

Θα δώσουμε σε αυτό το σημείο τον ορισμό μιας Lipschitz συνάρτησης.

Ορισμός 1 *Έστω $f : D \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $k \geq 0$ έτσι ώστε για κάθε (t,x_1),$(t,x_2) \in D$ έχουμε ότι $|f(t,x_1)-f(t,x_2)| \leq k|x_1-x_2|$. Τότε λέμε ότι* *η f ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz ως προς x στο D, και το k αποτελεί μια σταθερά Lipschitz ως προς x για τη συνάρτηση f(t,x) στο σύνολο D.*

Θα συνεχίσουμε παραθέτοντας ορισμένες βασικές ιδιότητες πάνω στους χώρους Hilbert.

Ορισμός 2 *Ένας χώρος Hilbert είναι ένας γραμμικός χώρος H εφοδιασμένος με ένα εσωτερικό γινόμενο* (f,g)*,* $f,g \in H$ *ο οποίος είναι πλήρης για τη νόρμα:* $\|f\|_H = (f,f)^{\frac{1}{2}}$.

Γνωρίζουμε ότι σε χώρους H με εσωτερικό γινόμενο ισχύει η ανισότητα Cauchy-Schwarz ως εξής:

$$\forall x,y \in H \quad : |<x,y>| \leq \|x\|\|y\|$$

Επίσης, μια ακόμα βασική ανισότητα είναι η τριγωνική:

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x,y \in H$$

Έστω r είναι δωσμένη συνάρτηση και ανήκει στο χώρο $C^0\big([0,1];(0,\infty)\big)$. Ο χώρος με τον οποίο θα ασχοληθούμε σε μεγάλο βαθμό είναι ο χώρος των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων με συνάρτηση βάρους r: L_r^2, ο οποίος είναι χώρος Hilbert

$$L_r^2(a,b) := \Big\{f : [a,b] \to \mathbb{R}, f : \text{μετρήσιμη συνάρτηση} | \Big(\int_a^b r(x)|f(x)|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}} < \infty\Big\}$$

Επιπλέον, για τον L_r^2 έχουμε το εσωτερικό γινόμενο: $<f,g>_r = \int_a^b r(x)g(x)f(x)\,dx$ και έτσι ορίζουμε τη νόρμα του χώρου:

$$\|f\|_r := \Big(\int_a^b r(x)f^2(x)\,dx\Big)^{\frac{1}{2}}, \quad f \in L_r^2(a,b)$$

Σημειώνουμε ότι για $r(x) = 1$ και πεδίο ορισμού το σύνολο $(0,1)$θα χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό: $L^2(0,1)$ και την αντίστοιχη νόρμα:

$$\|f\|_2 := \Big(\int_0^1 f^2(x)\,dx\Big)^{\frac{1}{2}}, \quad f \in L^2(0,1).$$

Συνεχίζοντας θα παραθέσουμε ορισμένα θεμελιώδη στοιχεία πάνω στους χώρους Sobolev.

Για $\alpha = (a_1, a_2, ..., a_n)$, όπου a_i είναι μη αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί, η α-μερική παράγωγος της συνάρτησης $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ συμβολίζεται με

$$\partial^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{a_1} x_1 \partial^{a_n} x_n}$$

Θα δώσουμε τον ορισμό της α-L^2-παραγώγου με την έννοια των κατανομών.

Ορισμός 3 *Η συνάρτηση* $g \in L^2(0,1)$ *είναι η a-*L^2*-παράγωγος με την έννοια των κατανομών της συνάρτησης* $f \in L^2(0,1)$ *αν ισχύει:*

$$(g,\varphi) = (-1)^{|\alpha|}(f, \partial^\alpha \varphi)$$

για κάθε $\varphi \in D\big((0,1)\big)$*, γράφουμε* $g = \partial^\alpha f$
όπου D((0,1)) έχουμε συμβολίσει το χώρο των συναρτήσεων $\varphi \in C^\infty\big((0,1)\big)$ *με συμπαγή φορέα.*

Θεωρούμε σύνολο Ω ανοιχτή περιοχή του $\mathbb{R}^n$.

Ορισμός 4 *Ο χώρος Sobolev $H^m(\Omega)$ είναι ο χώρος των συναρτήσεων $u \in L^2(\Omega)$ που έχουν L^2 παραγώγους με την έννοια των κατανομών $\partial^\alpha u \in L^2(\Omega)$, για κάθε $\alpha = (a_1, a_2, ..., a_n)$ με $|\alpha| = \sum_{i=1}^n a_i \leq m$ Στον $H^m(\Omega)$ ορίζεται το εσωτερικό γινόμενο:*

$$(u, v)_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega \partial^\alpha u \partial^\alpha v \, dx$$

και η αντίστοιχη νόρμα:

$$\|u\|_m = (u, u)_m^{\frac{1}{2}}$$

Στη συνέχεια της εργασίας θα ασχοληθούμε κατά κύριο λόγο με τον χώρο $H^2(0, 1)$.

1.1 Η ISS Ιδιότητα σε Πεπερασμένης Διάστασης Χώρους

Θεωρούμε το χρονικά εξαρτημένο σύστημα σε πεπερασμένης διάστασης χώρο

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t) \in X, u(t) \in U \tag{1.1.1}$$

όπου $x(t)$ η κατάσταση και $u(t)$ η είσοδος, ο X (χώρος κατάστασης) είναι χώρος Banach και ο U είναι χώρος με νόρμα (χώρος εισόδου) και A,B είναι γραμμικοί τελεστές. Κάτω από συγκεκριμένες προϋποθέσεις (αποτελούν αντικείμενο το οποίο δεν θα αναλύσουμε στη συγκεκριμένη εργασία) η λύση του συστήματος (1.1.1) μπορεί να εκφραστεί από τη εξής φόρμουλα:

$$x(t) = \exp(At)x(0) + \int_0^t \exp\big(A(t-s)\big)Bu(s) \, ds \tag{1.1.2}$$

Όταν ικανοποιούνται κάποιες συνθήκες ευστάθειας τεχνικής φύσεως, μπορούμε να βρούμε $M, s > 0$:

$$\| \exp(At)x(0)\|_X \leq M \exp(-\sigma t)\|x(0)\|_X, \forall t \geq 0, x(0) \in X$$

Επιπλέον, αν ο τελεστής B είναι φραγμένος θα έχουμε:

$$\|x(t)\|_X \leq M \exp(-\sigma t)\|x(0)\|_X + \frac{M}{\sigma} \sup_{0 \leq s \leq t} \Big(\|u(s)\|_U\Big), \forall t \geq 0 \tag{1.1.3}$$

Η ανισότητα (1.1.3) είναι η έκφραση της ISS-ιδιότητας σε χώρους πεπεπρασμένης διάστασης.

Το τεχνικό ζήτημα που δε μας επιτρέπει να εξάγουμε την ISS-ιδιότητα τόσο εύκολα σε προβλήματα PDEs με άπειρες διαστάσεις είναι το γεγονός ότι η (1.1.3) ισχύει μόνο για B, που είναι φραγμένος τελεστής. Δηλαδή, η περίπτωση όπου ο B δεν είναι φραγμένος και το σύστημα περιέχει τουλάχιστον μια Μερική Διαφορική Εξίσωση με συνοριακές τιμές, δε μπορούμε να καταλήξουμε στο συμπέρασμα της (1.1.3).Επίσης, διάφορες άλλες τεχνικές δυσκολίες παρουσιάζονται στη διεξαγωγή της ISS-ιδιότητας σε χώρους με άπειρες διαστάσεις και την παρουσία τουλάχιστον μιας PDEs.

Προκειμένου να αναφέρουμε τις δυσκολίες που προκύπτουν θα ορίσουμε αρχικά τα εξής σύνολα:

- K := $\{\gamma:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \Big| \gamma$: συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση, $\gamma(0)=0\}$

- L := $\{\gamma:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \Big| \gamma$: συνεχής και φθίνουσα συνάρτηση, $\lim_{t\to\infty}\gamma(t) = 0\}$

- KL :=$\{\beta \in {\mathbb{R}_+}^2 \to \mathbb{R}_+ \Big|\ \beta(\cdot,t) \in K,\ \forall t \geq 0,\ \beta(r,\cdot) \in L,\ \forall r > 0\}$

Θεωρούμε ένα σύστημα πεπερασμένων διαστάσεων με εισόδους:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), d(t)), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, d(t) \in \mathbb{R}^m \tag{1.1.4}$$

όπου $f \in C^0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n)$ είναι τοπικά Lipschitz με $f(0,0) = 0$. Για το συγκεκριμένο πρόβλημα για να εξάγουμε την ISS-ιδιότητα χρειάζεται να υπάρχει $\sigma \in KL$ και $\gamma \in K$ με νόρμα $\|\cdot\|$ στον $\mathbb{R}^n$ και $|\cdot|$ στον $\mathbb{R}^m$ έτσι ώστε για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$, $d \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}^m)$ η επόμενη ιδιότητα να ικανοποιείται για κάθε $x(t) \in \mathbb{R}^n$ για το πρόβλημα αρχικών τιμών (1.1.4) με $x(0) = x_0$:

$$\|x(t)\| \leq \sigma\big(\|x_0\|, t\big) + \sup_{0\leq s\leq t}\big(\gamma(|d(s)|)\big), \forall t \geq 0 \tag{1.1.5}$$

και έτσι η (1.1.5) περιγράφει μια πιο γενική περίπτωση της ISS-ιδιότητας σε σχέση με την (1.1.3).

Το ερώτημα, όπως αναφέραμε και προηγούμενως, είναι αν θα μπορούσαμε να εξάγουμε μια φόρμουλα παραγωγής της ISS-ιδιότητας για τις Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις σε άπειρης διάστασης χώρους; Πιο συγκεκριμένα, αν πάρουμε τα εξής στοιχεία:

- $u[t]$ με $u : \Omega \to \mathbb{R}$, Ω: φραγμένο χωρίο

- $d : \mathbb{R}_+ \to D$ με D: γραμμικός χώρος με νόρμα ορισμένη ως $\|\cdot\|_D$

Μπορούμε να αναζητήσουμε την ύπαρξη:

- ενός γραμμικού χώρου με νόρμα S που περιέχει συναρτήσεις στον Ω με νόρμα $\|\cdot\|_S$

- ένα σύνολο M_D : τοπικά φραγμένων συναρτήσεων d:$\mathbb{R}_+ \to D$

- συναρτήσεις σ$\in KL$ και γ$\in K$

ώστε για κάθε $u_0 \in S, \forall d \in M_D$ η παρακάτω ανισότητα να ισχύει για την λύση της Μερικής Διαφορικής Εξίσωσης $u[t] \in S$ με $u[0] = u_0$:

$$\|x[t]\|_S \leq \sigma\big(\|x_0\|_S, t\big) + \sup_{0\leq s\leq t}\big(\gamma(\|d[s]\|_D)\big), \forall t \geq 0 \tag{1.1.6}$$

Η απάντηση στο παραπάνω ερώτημα είναι αρνητική λόγω τεχνικών δυσκολίων τις οποίες θα προσπαθήσουμε στη συγκεκριμένη εργασία να τις καλύψουμε.

1.2 Τελεστής Sturm-Liouvile(SL)

Στη συγκεκριμένη διπλωματική εργασία διαπραγματευόμαστε την δυνατότητα διεξαγωγής της σχέσης Ευστάθειας σχέσεως-προς-κατάσταση (ISS-property) σε Παραβολικές PDEs.

Θεωρούμε τον Sturm-Liouville (SL) τελεστή $A : D \to L^2_r(0,1)$ που ορίζεται από:

$$(Af)(z) = -\frac{1}{r(z)}\frac{d}{dz}\left(p(z)\frac{df}{dz}(z)\right) + \frac{q(z)}{r(z)}f(z) \quad ,\forall f \in D\,\kappa\alpha\iota\, z \in (0,1) \qquad (1.2.1)$$

με $p \in C^1([0,1];(0,\infty))$, r $\in C^0([0,1];(0,\infty))$, q $\in C^0([0,1];\mathbb{R})$ και το σύνολο $D \subseteq H^2(0,1)$ ορίζεται ως εξής:

$$D := \{f \in H^2(0,1) : b_1 f(0) + b_2 f'(0) = a_1 f(1) + a_2 f'(1) = 0\} \qquad (1.2.2)$$

όπου a_1, a_2, b_1, b_2 είναι θετικές σταθερές που ικανοποιούν τις σχέσεις $|a_1| + |a_2| > 0$ και $|b_1| + |b_2| > 0$. Από γνωστό θεώρημα έχουμε ότι όλες οι ιδιοτιμές του SL τελεστή $A : D \to L^2_r(0,1)$ είναι πραγματικές. Οι ιδιοτιμές παράγουν μια άπειρη, αύξουσα ακολουθία με $\lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_n < ...$ με $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$ και επίσης για κάθε $\lambda_n \in \mathbb{R}(\forall n = 1,2,...)$ αντιστοιχεί μια ιδιοσυνάρτηση $\varphi_n \in C^2([0,1];\mathbb{R})$ η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις $A\varphi_n = \lambda_n\varphi_n$ και $b_1\varphi_n(0) + b_2\varphi_n'(0) = a_1\varphi_n(1) + a_2\varphi_n'(1) = 0$, $\forall n = 1,2,...$ (δηλαδή μπορούμε να γράψουμε και $\varphi_n \in D \cap C^2([0,1];\mathbb{R})$). Οι ιδιοσυναρτήσεις, πιο συγκεκριμένα, σχηματίζουν μια ορθοκανονική βάση στον $L^2_r(0,1)$.

Στη συνέχεια θα παραθέσουμε μια υπόθεση για τον SL-τελεστή $A : D \to L^2_r(0,1)$ που ορίσαμε προηγουμένως και θα αποτελέσει βασικό στοιχείο για τα θεωρήματα που θα ακολουθήσουν.

(H): Ο SL-τελεστής $A : D \to L^2_r(0,1)$ που ορίζεται από τις σχέσεις (1.1),(1.2) με $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ με $|a_1| + |a_2| > 0$ και $|b_1| + |b_2| > 0$ ικανοποιεί τη παρακάτω σχέση:

$$\sum_{n=N}^{\infty} \lambda_n^{-1} max_{0\leq z\leq 1}(|\varphi_n(z)|) < \infty \qquad (1.2.3)$$

για συγκεκριμένο $N > 0$ και $\lambda_n > 0$.

Κεφάλαιο 2

Βασικά Θεωρήματα Ύπαρξης και Μοναδικότητας

2.1 Πρώτο Θεώρημα

Ξεκινώντας την ανάλυση μας θα χρειαστούμε επιπλέον ορισμένα θεωρήματα-αποτελέσματα ύπαρξης και μοναδικότητας στις Παραβολικές PDEs. Το πρώτο αποτέλεσμα διαπραγματεύται την περίπτωση όπου $u_0 \in L_r^2(0,1)$.

Θεώρημα 1 *Θεωρούμε τον SL-τελεστή* $A : D \to L_r^2(0,1)$ *που ορίζεται από την (1.2.1), (1.2.2) όπου τα* $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ *και* $|a_1| + |a_2| > 0$ *και* $|b_1| + |b_2| > 0$*, που ικανοποιείται η υπόθεση* ***(H)****.Θεωρούμε στη συνέχεια* $T > 0$*,* $f_1, f_2 \in C^0([0,T] \times [0,1])$ *δωσμένες εξισώσεις για τις οποίες ισχύουν:*

- *(0,T]*$\times[0,1] \ni (t,z) \to \frac{\partial f_1}{\partial t}(t,z)$ *είναι συνεχής, με* $f_1[t] \in PC^1([0,1])$
- $f_2[t] \in D, \forall (0,T]$ *και*
- $sup_{t\in(0,T]}(\|Af_2[t]\|_r) + \|f_2[t]\|_r + \|f_1[t]\|_r < \infty$.

Τότε για κάθε $u_0 \in L_r^2(0,1)$ *υπάρχει μια μοναδική απεικόνιση* $u \in C^0((0,T]; L_r^2(0,1))$*, με* $u \in C^1((0,T] \times [0,1])$ *ικανοποιεί* $u[t] \in C^2([0,1])$ *για όλα τα* $t \in (0,T], u[0] = u_0$ *και*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,z) - \frac{1}{r(z)}\frac{\partial}{\partial z}\left(p(z)\frac{\partial u}{\partial z}(t,z)\right) + \frac{q(z)}{r(z)}u(t,z) = f_1(t,z) + f_2(t,z), \forall (t,z) \in (0,T]\times(0,1). \tag{2.1.1}$$

$$b_1 u(t,0) + b_2 \frac{\partial u}{\partial z}(t,0) = a_1 u(t,1) + a_2 \frac{\partial u}{\partial z}(t,1) = 0, \forall t \in (0,T]. \tag{2.1.2}$$

Απόδειξη:(Απόδειξη Θεωρήματος 1) Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\lambda_1 > 0$. Από την υπόθεση **(H)** έχουμε ότι:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} max(|\varphi_n(z)|) < \infty \tag{2.1.3}$$

Ορίζουμε για $n = 1, 2, ...$:

$$c_n := \int_0^1 r(z)\varphi_n(z)u_0(z)dz \tag{2.1.4}$$

$$\theta_{n,i}(t) := \int_0^1 r(z)\varphi_n(z)f_i(t,z)dz, i = 1,2 \quad \kappa\alpha\iota \ \forall t \in (0,T] \tag{2.1.5}$$

Από τη υπόθεση του Θεωρήματος έχουμε ότι $[0,1] \ni z \to f_i(t,z)$ ανήκει στη κλάση $PC^1([0,1])$ και για οποιοδήποτε $t \in (0,T]$ έχουμε ότι ισχύει η εξίσωση:

$$f_i(t,z) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{n,i}(t)\varphi_n(z), i = 1,2 \quad \kappa\alpha\iota \quad \forall (t,z) \in (0,T] \times [0,1] \tag{2.1.6}$$

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι η Cauchy-Schwarz ανισότητα σε συνδυασμό με το γεγονός ότι $\|\varphi_n\|_r = 1(n = 1,2,...)$ του ορισμού της 2.1.5 και ότι $((0,T] \times [0,1]) \ni (t,z) \to \frac{\partial f}{\partial t}(t,z)$ είναι συνεχής και $f_2[t] \in D, \forall t > 0$,προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις:

- $|\theta_{n,1}(t)| = |\int_0^1 r(z)\varphi_n(z)f_1(t,z)dz| \leq \int_0^1 |r(z)\varphi_n(z)f_1(t,z)|dz = \|\varphi_n(z)f_1(t,z)\|_r$

  $\leq \|\varphi_n(z)\|_r \|f_1(t,z)\|_r \Rightarrow |\theta_{n,1}(t)| \leq \|f_1(t,z)\|_r$ (2.1.7)

- $\dot{\theta}_{n,1}(t) = \int_0^1 r(z)\varphi_n(z)\frac{\partial f_1}{\partial t}(t,z)dz$ (2.1.8)

- $|\dot{\theta}_{n,1}(t)| \leq \left(\int_0^1 r(z)|\frac{\partial f_1}{\partial t}(t,z)|^2 dz\right)^{\frac{1}{2}}, t \in (0,T].$ (2.1.9)

- $|\theta_{n,2}(t)| = |\int_0^1 r(z)\varphi_n(z)f_2(t,z)dz| = |\int_0^1 r(z)\frac{A\varphi_n(z))}{\lambda_n}f_2(t,z)|$

  $\Rightarrow |\theta_{n,2}(t)| \leq \lambda_n^{-1}\|Af_2[t]\|_r, t \in (0,T]$ (2.1.10)

Συνεχίζοντας, από το γεγονός ότι:$(0,T] \times [0,1] \ni (t,z) \to \frac{\partial f_1}{\partial t}(t,z)$ είναι συνεχής, διαπιστώνουμε ότι η απεικόνιση $t \to \theta_{n,1}(t)$ είναι C^1 στο $(0,T]$, αλλά και επειδή $f_2 \in C^0\left((0,T] \times [0,1]\right)$ συνεπάγεται εύκολα ότι $t \to \theta_{n,2}(t)$ είναι C^0 πάνω στο (0,T].

Από την υπόθεση $sup_{t\in(0,T]}(\|Af_2[t]\|_r) + \|f_1[t]\|_r < \infty$ συμπεραίνουμε ότι $\exists M > 0 : \|f_1[t]\|_r \leq M \kappa\alpha\iota \|Af_2[t]\|_r) \leq M, \forall t \in (0,T]$ και με βάση αυτό το αποτέλεσμα αλλά και από τη σχέση (2.1):

$$|\theta_{n,1}| \leq M, \forall t \in (0,T], n = 1,2,... \tag{2.1.11}$$

$$|\varphi_n \int_0^t \exp\left(-\lambda_n(t-s)\right)\theta_{n,1}(s)ds| \leq |\theta_{n,1}|\frac{1-\exp\left(-\lambda_n t\right)}{\lambda_n}| \max_{0\leq z\leq 1}(|\varphi_n(z)|)$$

$\Rightarrow |\varphi_n \int_0^t \exp\left(-\lambda_n(t-s)\right)\theta_{n,1}(s)ds| \leq$
$\mathrm{M}\lambda_n^{-1}\max_{0\leq z\leq 1}\varphi_n(z), \quad \forall (t,z] \times [0,1], n = 1,2,...$ (2.1.12)

Από την (2.1) έχουμε ότι:

$$|\theta_{n,2}(t)| \leq \lambda_n^{-1}M, \ \forall (0,T] \ \kappa\alpha\iota \ n = 1,2,... \tag{2.1.13}$$

$$|\varphi_n \int_0^t \exp(-\lambda_n(t-s))\theta_{n,2}(s)ds| \leq M\lambda_n^{-1} \max_{0\leq z\leq 1}(|\varphi_n(z)|),\ \ \forall (0,T]\times[0,1]\ \ \kappa\alpha\iota\ \ n=1,2,... \tag{2.1.14}$$

Από την C-S ανισότητα και την (2.1.4) καταλήγουμε στην:$|c_n| \leq \|u_0\|_r,\ ,n = 1,2,...$ και επειδή $\lambda_n \exp(-\lambda_n t) = t^{-1}\lambda_n t \exp(\lambda_n t) \leq t_0^{-1}\exp(-1)$.Επιπλέον, $\forall t \in [t_0, T]\ \ \mu\varepsilon\ \ t_0 \in (0,T]$:

$$|\varphi_n(z)\exp(-\lambda_n t)c_n| \leq t_0 \exp(-1)\lambda_n^{-1} \max_{0\leq z\leq 1} \varphi_n(z)\|u_0\|_r, \gamma\iota\alpha\ \ [t_0,T]\times[0,1]\ ,n=1,2,.... \tag{2.1.15}$$

Επειδή η συνάρτηση Green του SL τελεστή $A : D \to L_r^2(0,1)$ όπως τον έχουμε ορίσει είναι η $g \in C^0([0,1]^2;\mathbb{R})$ η οποία C^2 συνάρτηση στα τρίγωνα $0 \leq s \leq z \leq 1$ και $0 \leq z \leq s \leq 1$ έχει βηματική ασυνέχεια στο $\frac{\partial g}{\partial z}$ πάνω στη γραμμή $0 \leq s = z \leq 1$ και επιπλέον:$\varphi_n(z) = \lambda_n \int g(z,s)r(s)\varphi_n(s)ds$, $\forall z \in [0,1]$, καταλήγουμε στο ότι $\exists k > 0$ σταθέρα τέτοια ώστε:

$$\max_{0\leq z\leq 1}(|\varphi_n'(z)|) \leq K\lambda_n \max_{0\leq z\leq 1}(|\varphi_n(z)|)\,, n=1,2,... \tag{2.1.16}$$

Παρατηρούμε ότι ισχύει η εξίσωση (με τη βοήθεια της $A\varphi_n = \lambda_n\varphi_n$) $p(z)\varphi_n''(z) = q(z)\varphi_n(z) - \lambda_n r(z)\varphi_n(z) - p'(z)\varphi_n'(z), \forall z \in [0,1]$ και γνωρίζοντας ότι ισχύει $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < .. < \lambda_n < ...$ και με την (2.1.16) συμπεραίνουμε ότι $\exists G > 0$ σταθερά τέτοια ώστε:

$$\max_{0\leq z\leq 1}(|\varphi_n''(z)|) \leq G\lambda_n \max_{0\leq z\leq 1}(|\varphi_n(z)|)\,, \forall n=1,2,... \tag{2.1.17}$$

Επιπρόσθετα, η εξίσωση (2.1.6) με τη συμβολή της $\varphi_n(z) = \int_0^1 g(z,s)r(s)\varphi_n(s)ds$ εξασφαλίζουμε ότι:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \theta_{n,1}\lambda_n^{-1}(t)\varphi_n(z) = \int_0^1 r(s)g(z,s)f_1(t,s)ds \tag{2.1.18}$$

Οι ανισώτητες (2.1.3), (2.1.11), (2.1),(2.1.14) και (2.1.15) μας οδηγούν στο συμπέρασμα οτι η σειρά:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z)\left(\exp(-\lambda_n t)c_n + \int_0^t \exp(-\lambda_n(t-s))(\theta_{n,1}(s) + \theta_{n,2}(s)ds) - \lambda_n^{-1}\theta_{n,1}(t)\right)$$

είναια ομοιόμορφα και απόλυτα συγκλίνουσα στο $[t_0,T]\times[0,1]$, σύμφωνα με γνωστό Θεώρημα σύγκλισης.

Έχοντας τη παραπάνω διαπίστωση μας δίνεται η δυνατότητα να ορίσουμε $u \in C^0((0,T)\times[0,1])$ με την έννοια της παρακάτω διαδικασίας:

$$\begin{aligned} &u(t,z) = \int_0^t g(z,s)r(s)f_1(t,s)ds \\ &+\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z)\left(\exp(-\lambda_n t)c_n + \int_0^t \exp(-\lambda_n(t-s))(\theta_{n,1}(s) + \theta_{n,2}(s)ds) - \lambda_n^{-1}\theta_{n,1}(t)\right) \\ &\forall (t,z) \in (0,T]\times[0,1]. \end{aligned} \tag{2.1.19}$$

καθώς επίσης ορίζουμε:

$$u(0,z) := u_0(z), \forall z \in [0,1] \tag{2.1.20}$$

Παράλληλα, το γεγονός ότι η $u_0 \in L^2_r(0,1)$ (που μας οδηγεί στο συμπέρασμα $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty$) σε συνδιασμό με τις ήδη γνωστές σχέσεις (2.1.4),(2.1.11),(2.1.13),(2.1.18),(2.1.20) το γεγονός ότι: $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n^{-2} + \lambda_n^{-4}) < \infty$ (που προκύπτει από την (2.1.3) αλλά και το: $1 = \int_0^1 r(z)\varphi_n^2(z))dz \leq (\max_{0\leq z\leq 1} |\varphi_n(z)|^2) \int_0^1 r(z)dz$, για $n = 1,2,...$) μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι $\forall [0,T]$, για $N \in \mathbb{N}$ με $N \geqslant 1$ ισχύει:

$$\begin{aligned}\|u[t] - u_0\|_r^2 \leq 2\sum_{n=1}^{\infty}(\exp(-\lambda_n t) - 1)^2 c_n^2 + 4M^2 \sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n^{-2} + \lambda_n^{-4})\,(\exp(-\lambda_n t) - 1))^2 \\ \leq 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n^2 + 4M^2 \sum_{n=N+1}^{\infty} (\lambda_n^{-2} + \lambda_n^{-4}) + \\ 2\,(\exp(-\lambda_N t) - 1)\left(\sum_{n=1}^{N} c_n^2 + 2M^2 \sum_{n=1}^{N}(\lambda_n^{-2} + \lambda_n^{-4})\right)\end{aligned}$$

Από την παραπάνω ανισώτητα παίρνουμε ότι η απεικόνιση $[0,T] \ni t \to u[t] \in L^2_r(0,1)$ είναι συνεχής.

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι :$u[t] \in C^2([0,1]), \forall t \exists (0,T]$ και ικανοποιεί των παρακάτω εξισώσεις $\forall (t,z) \in (0,t] \times [0,1]$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial z}(t,z) = \frac{\partial}{\partial z}\int_0^1 g(z,s)r(s)f_1(t,s)ds \\ +\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n'(z)\left(\exp(-\lambda_n t))c_n + \int_0^t \exp(-\lambda_n(t-s))(\theta_{n,1}(s) + \theta_{n,2}(s))ds - \lambda_n^{-1}\theta_{n,1}(t)\right)\end{aligned} \tag{2.1.21}$$

και

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(t,z) = \frac{\partial^2}{\partial z^2}\int_0^1 g(z,s)r(s)f_1(t,s)ds \\ +\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n''(z)\left(\exp(-\lambda_n t))c_n + \int_0^1 \exp(-\lambda_n(t-s))(\theta_{n,1}(s) + \theta_{n,2}(s))ds - \lambda_n^{-1}\theta_{n,1}(t)\right)\end{aligned} \tag{2.1.22}$$

Αυτό θα επιτευχθεί δείχνοντας ότι $\forall t_0 \in [0, T/2]$ οι σειρές που παρουσιάζεται στο δεξιό μέλος των δύο παραπάνω εξισώσεων είναι ομοιόμορφα και απόλυτα συνεχείς στο $[2t_0, T \times [0,1]$.Από την υπόθεση του Θεωρήματος έχουμε $(0,T] \times [0,1] \ni (t,z) \to \frac{\partial f_1}{\partial t}(t,z)$ είναι συνεχής συνεπάγεται ότι:$\forall t_0 \in (0,T/2) \exists \Gamma > 0$:

$$\int_0^1 r(z)|\frac{\partial f_1}{\partial t}(t,z)|^2 dz \leq \Gamma^2, \forall t \in [t_0, T]$$

και από την (2.1) έχουμε:

$$|\dot{\theta}_{n,1}(t)| \leq \Gamma, \forall [t_0, T] \tag{2.1.23}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τις ανισότητες $\xi^2 \exp(-\xi) \leq 4\exp(-2), \xi \exp(-\xi) \leq exp{-1}$ που ισχύουν για όλα τα $\xi \geqslant 0$,(2.1.11),(2.1.13),(2.1.23) και το γεγονός ότι:$|c_n| \leq \|u_0\|_r$ για $n = 1, 2, ...$ Παίρνουμε $\forall t \in [2t_0, T]$ $n = 1, 2, ...$:

$$\begin{aligned}
&\left|\exp(-\lambda_n t))c_n + \int_0^t \exp(-\lambda_n(t-s))(\theta_{n,1}(s) + \theta_{n,2}(s))ds - \lambda_n^{-1}\theta_{n,1}(t)\right| \\
&\leq \exp(-\lambda_n t))|c_n| + \left|\int_0^t \exp(-\lambda_n(t-s))\theta_{n,2}(s)ds\right| + \left|\int_0^{t_0} \exp(-\lambda_n(t-s))\theta_{n,1}(s)ds\right| \\
&\quad + \left|-\lambda_n^{-1}\theta_{n,1}(t_0)\exp(-\lambda_n(t-t_0)) - \lambda_n^{-1}\int_{t_0}^t \exp(-\lambda_n(t-s))\dot{\theta}_{n,1}(s)ds\right| \\
&\leq \exp(-\lambda_n t))|c_n| + \int_0^t \exp(-\lambda_n(t-s))\left|\theta_{n,2}(s)\right| ds + \int_0^{t_0} \exp(-\lambda_n(t-s))\left|\theta_{n,1}(s)\right| ds \\
&\quad + \lambda_n^{-1}\exp(-\lambda_n(t-t_0))\left|\theta_{n,1}(t_0)\right| + \lambda_n^{-1}\int_{t_0}^t \exp(-\lambda_n(t-s))\left|\dot{\theta}_{n,1}(s)\right| ds \\
&\leq 4\lambda_n^{-2}t^{-2}\exp(-2)\|u_0\|_r + Mt_0^{-1}\exp(-\lambda_n(t-t_0)) + M\lambda_n^{-2}(t-t_0)^{-1}\exp(-1) + \lambda_n^{-2}(\Gamma+M) \\
&\quad \leq \lambda_n^{-2}\left(t_0^{-2}\exp(-2)\|u_0\|_r + 4Mt_0^{-1}\exp(-2) + \exp(-1)Mt_0^{-1} + \Gamma + M\right)
\end{aligned}$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα σε συνδιασμό με τις (2.1.3),(2.1.16),(2.1.17) μας εγγυάται ότι:$\forall t_0 \in (0, T/2)$,οι σειρές που εμφανίζονται στο δεξί μέλος των (2.1.21) και (2.1.22) είναι ομοιόμορφα και απολύτως συγκλίνουσες στο $[2t_0, T] \times [0, 1]$
Παρόμοια με τη προηγούμενη διαδικασία, θα δείξουμε ότι το $\frac{\partial u}{\partial t}(t, z)$ είναι συνεχής συνάρτηση στο $(0, T] \times [0, 1]$ και ικανοποιεί την:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(t,z) &= \int_0^1 g(z,s)r(s)\frac{\partial f_1}{\partial t}(t,s)ds \\
&\quad - \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(z)\left(\lambda_n \exp(-\lambda_n t)c_n - \theta_{n,1}(t) - \theta_{n,2}(t) + \lambda_n^{-1}\dot{\theta}_{n,1}(t)\right) \\
&\quad - \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(z)\lambda_n \int_0^t \exp(-\lambda_n(t-s))\left(\theta_{n,1}(s) + \theta_{n,2}(s)\right)ds \\
&\qquad \forall (t,s) \in (0,T] \times [0,1]
\end{aligned} \tag{2.1.24}$$

Πάλι αυτό θα επιτευχθεί δείχνοντας ότι:$_0 \in (0, T/2)$ οι σειρές που εμφανίζονται στο δεξί μέρος της (2.1.24) είναι ομοιόμορφα και απόλυτα συγκλίνουσα στο$[2t_0, T] \times [0, 1]$.Χρησιμοποιώντας τώρα τις ανισότητες $\xi^2 \exp(-\xi) \leq 4\exp(-2), \xi \exp(-\xi) \leq exp{-1}$ που ισχύουν για όλα τα $\xi \geqslant 0$,(2.1.11),(2.1.13),(2.1.23) και το γεγονός ότι:$|c_n| \leq \|u_0\|_r$ για $n = 1, 2, ...$ Παίρνουμε $\forall t \in [2t_0, T]$ $n = 1, 2, ...$:

$$
\begin{aligned}
&|\lambda_n \exp(-\lambda_n t)c_n| + |\theta_{n,2}(t)| + \left|\lambda_n \int_0^t \exp(-\lambda_n(t-s))\theta_{n,2}(s)ds\right| \\
&\quad + \left|\lambda_n \int_0^t \exp(-\lambda_n(t-s))\theta_{n,1}(s)ds - \theta_{n,1}(t) + \lambda_n^{-1}\dot{\theta}_{n,1}(t)\right| \\
&\leq \lambda_n \exp(-\lambda_n t)\,|c_n| + \lambda_n^{-1}(2M+\Gamma) + \int_{t_0}^t \exp(-\lambda_n(t-s))\dot{\theta}_{n,1}(s)ds \\
&\quad + \left|\lambda_n \int_0^{t_0} \exp(-\lambda_n(t-s))\theta_{n,1}(s)ds\right| + |\theta_{n,1}(t_0)\exp(-\lambda_n(t-t_0))| \\
&\leq \lambda_n \exp(-\lambda_n t)\,|c_n| + \lambda_n \int_0^{t_0} \exp(-\lambda_n(t-s))\,|\theta_{n,1}(s)|\,ds \\
&\quad + \exp(-\lambda_n(t-t_0))M + \lambda_n^{-1}(2M+\Gamma) + \int_{t_0}^t \exp(-\lambda_n(t-s))\left|\dot{\theta}_{n,1}(s)\right| ds \\
&\leq 4\lambda_n^{-1}t^{-2}\exp(-2)\|u_0\|_r + Mt_0\lambda_n \exp(-\lambda_n(t-t_0)) + \lambda_n^{-1}(t-t_0)^{-1}\exp(-1)M + 2\lambda_n^{-1}(M+\Gamma) \\
&\leq \lambda_n^{-1}\left(t_0^{-2}\exp(-2)\|u_0\|_r + 4Mt_0^{-1}\exp(-2) + \exp(-1)Mt_0^{-1} + 2(M+\Gamma)\right)
\end{aligned}
$$

Το τελευταίο αποτέλεσμα σε συνδιασμό με την (2.1.3) μας εξασφαλίζει ότι για όλα τα $t_0 \in (0, T/2)$ οι σειρές που εμφανίζονται στην (2.1.24) είναι ομοιόμορφα και απόλυτα συγκλίνουσες στο διάστημα $[2t_0, T] \times [0,1]$.

Επιπρόσθετα οι (2.1.6),(2.1) μας οδηγούν στο συμπέρασμα :

$$
\forall (t,z) \in (0,T] \times [0,1] : \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z)\lambda_n^{-1}\dot{\theta}_{n,1}(t) = \int_0^1 r(s)g(z,s)\frac{\partial f_1}{\partial t}(t,s)ds \qquad (2.1.25)
$$

Η σειρά που εμφανίζεται στο αριστερό μέρος της (2.1.25) είναι ομοιόμορφα και απόλυτα συγκλίνιυσα στο $[t_0, T] \times [0,1]$.

Οι (2.1.1),(2.1.2) είναι αποτέσμα των (2.1.6),(2.1.19),(2.1.24),(2.1.25), το γεγονός ότι $A\varphi_n = \lambda_n \varphi_n$ και $(y[t])(z) = \int_0^1 r(s)g(z,s)f_1(t,s)ds$ είναι η λύση του προβλήματος $(Ay[t])(z) = f_1(t,z)$ με :$b_1(y[t])(0) + b_2\frac{dy[t]}{dt}(0) = 0,\ a_1(y[t])(1) + a_2\frac{dy[t]}{dt}(1) = 0, \forall t \in (0,T]$.

Τέλος, εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι μοναδική.

$\square$

2.2 Δεύτερο Θεώρημα

Θεώρημα 2 *Θεωρούμε τον SL-τελεστή $A : D \to L_r^2(0,1)$ που ορίζεται από την (1.2.1),(1.2.2) όπου τα $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ και $|a_1| + |a_2| > 0$ και $|b_1| + |b_2| > 0$, που ικανοποιείται η υπόθεση **(H)**.Θεωρούμε στη συνέχεια $T > 0$, $f_1 \in C^0([0,T] \times [0,1])$ και $f_2 \in C^2((0,T] \times [0,1])$ δωσμένες εξισώσεις για τις οποίες ισχύουν:*

•*(0,T]*$\times[0,1] \ni (t,z) \to \frac{\partial f_1}{\partial t}(t,z)$ *είναι συνεχής, με* $f_1[t] \in PC^1([0,1]), \forall [0,T]$

• $f_2[t] \in D, \forall (0,T]$ *και*

•$sup_{t\in(0,T]}(\|Af_2[t]\|_r) + \|f_2[t]\|_r < \infty$.

Τότε για κάθε $u_0 \in D$ υπάρχει μια μοναδική απεικόνιση $u \in C^0([0,T] \times [0,1]) \cap C^1((0,T] \times [0,1])$, που ικανοποιεί $u[t] \in C^2([0,1])$ για όλα τα $t \in (0,T], u[0] = u_0$ και

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,z)-\frac{1}{r(z)}\frac{\partial}{\partial z}\left(p(z)\frac{\partial u}{\partial z}(t,z)\right)+\frac{q(z)}{r(z)}u(t,z)=f_1(t,z)+f_2(t,z),\forall(t,z)\in(0,T]\times(0,1). \tag{2.2.1}$$

$$b_1u(t,0)+b_2\frac{\partial u}{\partial z}(t,0)=a_1u(t,1)+a_2\frac{\partial u}{\partial z}(t,1)=0,\forall t\in(0,T]. \tag{2.2.2}$$

Απόδειξη:(Απόδειξη Θεωρήματος 2): Η απόδειξη είναι παρόμοια με αυτή του προηγούμενου Θεωρήματος. Θα παρουσιάσουμε ορισμένα βήματα που διαφέρουν λόγω των αναγκών του παρόντος Θεωρήματος και μας οδηγούν στο επιθυμητό αποτέλεσμα.

Σημειωτέον ότι $f_1\in C^0\left([0,T]\times[0,1]\right)$ καταλήγουμε ότι η απεικόνιση $t\to\theta_{n,1}(t)$ είναι C^0 στο$[0,T]$ και ικανοποιέι τη σχέση (2.1.11) για $t\in[0,T]$ και για συγκεκριμένο σταθερό$M>0$.Επιπλέον η Cauchy-Schwatz ανισότητα σε συνδιασμό με τα $\|\varphi_n\|_r=1$, τον ορισμό(2.1.4) αλλά και επείδη $u_0\in D$ μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι:

$$|c_n|\leq\lambda_n^{-1}\|Au_0\|_r,n=1,2,... \tag{2.2.3}$$

Με δεδομένες τις ανισότητες (2.1.11),(2.1),(2.1.14),(2.2.3) και η (2.1.3) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η σειρά:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(z)\left(\exp\left(-\lambda_n t\right)c_n+\int_0^t\exp\left(-\lambda_n(t-s)\right)(\theta_{n,1}(s)+\theta_{n,2}(s)ds)-\lambda_n^{-1}\theta_{n,1}(t)\right)$$

είναι ομοιόμορφα και απόλυτα συγκλίνουσα στο $[0,T]\times[0,1]$.Ορίζουμε τη $u\in C^0[0,T]\times[0,1]$ έτσι ώστε να ισχύει η:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial z}(t,z)=\frac{\partial}{\partial z}\int_0^1 g(z,s)r(s)f_1(t,s)ds\\&+\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(z)\left(\exp\left(-\lambda_n t\right))c_n+\int_0^t\exp\left(-\lambda_n(t-s)\right)(\theta_{n,1}(s)+\theta_{n,2}(s))ds-\lambda_n^{-1}\theta_{n,1}(t)\right)\end{aligned} \tag{2.2.4}$$

Παρατηρούμε ότι η (2.1.18) ικανοποιείται για $(t,z)\in([0,T]\times[0,1])$.Επειδή το $u_0\in D$, συμπεραίνουμε ότι $u_0(z)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\varphi_n(z),z\in[0,1]$ και έτσι από τις (2.1.18) και (2.2.4) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $u[0]=u_0$.Η απόδειξη είναι πλήρης. $\square$

Πρόταση 1 *:Θεωρούμε τον SL-τελεστή $A:D\to L_r^2(0,1)$ που ορίζεται από την (1.2.1),(1.2.2) όπου τα $a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbb{R}$ και $|a_1|+|a_2|>0$ και $|b_1|+|b_2|>0$, που ικανοποιείται η υπόθεση **(H)**.Θεωρούμε στη συνέχεια $T>0$, $f_1\in C^0([0,T]\times[0,1])$ και $f_2\in C^2((0,T]\times[0,1])$ δωσμένες εξισώσεις για τις οποίες ισχύουν:*

- *(0,T]*$\times[0,1]\ni(t,z)\to\frac{\partial f_1}{\partial t}(t,z)$ *είναι συνεχής, με* $f_1[t]\in PC^1([0,1]),\forall[0,T]$
- $f_2[t]\in D,\forall(0,T]$ *και*
- $sup_{t\in(0,T]}(\|Af_2[t]\|_r)+\|f_2[t]\|_r<\infty$.

Τότε για κάθε $u_0 \in D$ υπάρχει μοναδική απεικόνιση $u : [0,T] \times [0,1] \to \mathbb{R}$, που ορίζεται από:

$$u(t,z) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z) \exp\left(-\lambda_n t\right) \int_0^1 r(s)\varphi_n(s)u_0(s)ds$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z) \int_0^t \exp\left(-\lambda_n(t-\tau)\right) \left(\int_0^1 r(s)\varphi_n(s)(f_1(\tau,s)+f_2(\tau,s))ds\right) d\tau \quad (2.2.5)$$

ανήκει στη κλάση$C^0\left([0,T]\times[0,1]\right)\right) \cap C^1\left((0,T]\times[0,1]\right)$ και ικανοποιεί $u[t] \in C^2([0,1]), \forall (0,T], u[0] = u_0$ και τις σχέσεις (2.1.1),(2.1.2).

2.3 Θεώρημα Ύπαρξης και Μοναδικότητα της λύσης μιας Παραβολικής PDEs με φραγμένη είσοδο

Θα θεωρήσουμε για ακόμα μια φορά τον τελεστή-SL όπως ακριβώς τον ορίσαμε στις σχέσεις (1.2.1) και (1.2.2). Επιπροσθέτως, θεωρούμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,z) - \frac{1}{r(z)}\frac{\partial}{\partial z}\left(p(z)\frac{\partial u}{\partial z}(t,z)\right) + \frac{q(z)}{r(z)}u(t,z) = f(t,z) \quad (2.3.1)$$

με

$$b_1 u(t,0) + b_2\frac{\partial u}{\partial z}(t,0) - d_0(t) = a_1 u(t,1) + a_2\frac{\partial u}{\partial z}(t,1) - d_1(t) = 0 \quad (2.3.2)$$

Στη συνέχεια θα ορίσουμε ορισμένες χρήσιμες κλάσεις τις οποίες θα χρειαστούμε στα ακόλουθα θεωρήματα.

Ορισμός 5 *(Επιτρεπτές κλάσεις)Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}_+ \times [0,1] \to \mathbb{R}$ ανήκει στη κλάση GD εαν υπάρχει μια αύξουσα σειρά απο χρόνους $\{t_i \geq 0, i = 0,1,...\}$ με $t_0 = 0$ και $\lim_{i\to\infty} \tau_i = \infty$ με την παρακάτω ιδιότητα:*
για κάθε $i \geq 1$ υπάρχει συνάρτηση $f_{1,i}, f_{2,i} \in C^0((t_{i-1},t_i)\times[0,1])$, $a_i \in PC^1([0,1])$, $b_i \in C^0([0,1])$, $c_i \in D$ με $f_{i,1}[t] \in PC^1$,$f_{2,i} \in D$,$f[t] = f_{1,i}[t] + f_{2,i}[t]$,$\forall\tau \in [\tau_{i-1},\tau_i]$, $\sup_{t\in[\tau_{i-1},\tau_i]}(\|f_{1,i}[t]\|_r + \|f_{2,i}[t]\|_r + \|Af_{2,i}[t]\|_r) \leq \infty$, $[\tau_{i-1},\tau_i]\times[0,1] \ni (t,z) \to \frac{\partial f_{1,i}}{\partial t}(t,z)$ είναι συνεχής, $\lim_{t\to t_i^-}(f_{1,i}(t,z)) = a_i(z)$, $\lim_{t\to\tau_i^-}\left(\frac{\partial f_{1,i}}{\partial t}(t,z)\right) = b_i(z)$, $\lim_{t\to t_i^-}(f_{2,i}(t,z)) = c_i(z)$, $z \in [0,1]$.

Ορισμός 6 *Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}_+\times[0,1] \to \mathbb{R}$ ανήκει στη κλάση SGD εάν υπάρχει $f_i : \mathbb{R}_+ \times [0,1] \to \mathbb{R}$, $(i = 1,2)$ όπου $f_1 \in C^0(\mathbb{R}_+ \times [0,1])$, $f_2 \in C^0\left((0,\infty)\times[0,1]\right)$ όπου $((0,\infty)\times[0,1]) \ni (t,z) \to \frac{\partial f_1}{\partial z}(t,z)$ είναι συνεχής, $f_1[t] \in PC^1([0,1])$, $\forall t \geq 0$, $f_2[t] \in D$ και $\sup_{s\in(0,t]}\|Af_2[s]\|_r + \|f_2[s]\|_r) < \infty$, $\forall t \geq 0 : f[t] = f_1[t] + f_2[t]$,$\forall t \geq 0$.*

Ορισμός 7 *Μια δεξιά συνεχής συνάρτηση $d : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ανήκει στη κλάση GB εάν υπάρχει αύξουσα ακολουθία $\tau_i \geq 0, i = 1,2,...$ με $\tau_0 = 0$και $\lim_i \to \infty$:*

- $d \in C^2(I), I = \mathbb{R}\setminus\{t_i : 0,1,2,...\}$

- *Για κάθε $\tau_i > 0$ το δεξί όριο του $d(t)$, $\dot{d}(t)$,$\ddot{d}(t)$ $(t \to \infty)$ είναι πεπερασμένο*
- $\sup_{t\in[\tau_i,\tau_{i+1}]}\Big(|\dot{d}(t)|\Big) < \infty$ *για $i = 0, 1, 2, ...$είναι πεπερασμένο.*

Θεώρημα 3 *(Ύπαρξης και Μοναδικότητας της λύσης μιας Παραβολικής Μερικής Διαφορικής Εξίσωσης με φραγμένη είσοδο) Θεωρούμε τον SL-τελεστή $A : D \to L^2_r(0,1)$ που ορίζεται από τις (1.2.1) και (1.2.2) όπου $a_1, a_2, b_1, b_2\mathbb{R}$ με $|a_1|+|a_2| > 0$, $|b_1|+|b_2| > 0$ και λαμβάνοντας την υπόθεση (H). Θεωρούμε $f \in GD$ και $d_0, d_1 \in GB$ δοσμένες συναρτήσεις και επίσης $\tau_i \geq 0 : i = 0, 1, 2, ..$ όπως ορίστηκε στον Ορισμό 5. Τότε για κάθε $u_0 \in L^2_r(0,1)$ υπάρχει μοναδική απεικόνιση $u \in C^0(\mathbb{R}_+; L^2_r(0,1))$ με $u \in C^1(I \times [0,1])$ η οποία ικανοποιεί τις $u[t] \in C^2([0,1])$,$\forall t \geq 0$, $\lim_{t\to\tau_i^-}(u(t,z)) = u(\tau_i, z)$, $\lim_{t\to\tau_i^-}(\frac{\partial u}{\partial t}(t,z)) = -(Au[\tau_i])(z) + \lim_{t\to\tau_i^-}(f(t,z))$, $\lim_{t\to\tau_i^-}(\frac{\partial u}{\partial z}(t,z)) = \frac{\partial u}{\partial z}(\tau_i, z)$, $\forall t \geq 1$ και $z \in [0,1]$, $u[0] = u_0$ αλλά και τις σχέσεις:*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,z) - \frac{1}{r(z)}\frac{\partial}{\partial z}\left(p(z)\frac{\partial u}{\partial z}(t,z)\right) + \frac{q(z)}{r(z)}u(t,z) = f(t,z), \forall (t,z) \in I \times (0,1) \quad (2.3.3)$$

$$b_1u(t,0) + b_2\frac{\partial u}{\partial z}(t,0) - d_0(t) = a_1u(t,1) + a_2\frac{\partial u}{\partial z}(t,1) - d_1(t) = 0, \forall t \in I$$

όπου I=$R^+ \backslash \{\tau_i \geq 0, i = 0, 1, 2, ...\}$(2.3.4)

Παρατήρηση 1 *Εάν $f \in SGD$, $d_0, d_1 \in C^2(\mathbb{R}_+)$ και $u_0 \in H^2(0,1)$ με $b_1u_0(0) + b_2u_0'(0) - d_0(0) = a_1u_0(1) + a_2u_0'(1) - d_1(0) = 0$, τότε ισχύει η (2.3.3) για όλα τα $(t,z) \in (0,\infty) \times (0,1)$ και η (3) για όλα τα $t \geq 0$, $u \in C^0(\mathbb{R}_+ \times [0,1])$.*

Θεώρημα 4 *Θεωρούμε τον SL-τελεστή $A : D \to L^2_r(0,1)$ που ορίζεται από τις (1.2.1) και (1.2.2) όπου $a_1, a_2, b_1, b_2\mathbb{R}$ με $|a_1|+|a_2| > 0$, $|b_1|+|b_2| > 0$ και λαμβάνοντας την υπόθεση (H). Έστω $T > 0$ είναι μια σταθερά και έστω $f_1 \in C^0((0,T) \times [0,1])$, $a \in PC^1([0,1])$,$b \in C^0([0,1])$ είναι δωσμένες εξισώσεις με $\sup_{t\in(0,T)} \|f_1[t]\|_r < \infty$ όπου η απεικόνιση $(0,T) \times [0,1] \ni (t,z) \to \frac{\partial f_1}{\partial t}(t,z)$ είναι συνεχής και $f_1[t] \in PC^1([0,1])$,$\forall t \in (0,T)$ και $\lim_{t\to T^-}(f_1(t,z)) = a(z)$, $\lim_{t\to T^-}(\frac{\partial f_1}{\partial t}(t,z)) = b(z)$, για $z \in [0,1]$. Θεωρούμε $f_2 \in C^0((0,T) \times [0,1])$, $c \in D$ είναι δωσμένη συνάρτηση για την οποία ισχύει: $f_2[t] \in D$, $\forall t \in (0,t)$ και $\sup_{t\in(0,T)}(\|Af_2[t]\|_r + \|f_2[t]\|_r) < \infty$ και $\lim_{t\to T^-} f_2(t,z) = c(z)$. Θεωρούμε επιπλέον τις $d_0, d_1 : [0,T] \to \mathbb{R}$ να είναι δεξιά, C^2 συναρτήσεις στο $(0,T)$ με $\sup_{t\in(0,T)}(\dot{d}_0(t) + \dot{d}_1(t)) < \infty$ αλλά και ολά τα αριστερά όρια των $d_0(t), \dot{d}_0(t), \ddot{d}_0(t), d_1(t), \dot{d}_1(t), \ddot{d}_1(t)$ όταν $t \to T$ παίρνουν πεπερασμένες τιμές. Ορίζουμε την $f(t,z) := f_1(t,z)+f_2(t,z)$, $\forall (t,z) \in (0,T)\times[0,1]$. Τότε για κάθε $u_0 \in L^2_r(0,1)$ υπάρχει μοναδική απεικόνιση $u \in C^0([0,T]; L^2_r(0,1))$ με $u \in C^1((0,T)\times[0,1])$ και ικανοποιεί την $u[t] \in C^2([0,1])$, για κάθε $t \in (0,T]$,$\lim_{t\to T^-}(u(t,z)) = u(T,z)$, $\lim_{t\to T^-}(\frac{\partial u}{\partial t}(t,z)) = -(Au[T])(z)+a(z)+c(z)$, $\lim_{t\to T^-}(\frac{\partial u}{\partial z}(t,z)) = \frac{\partial u}{\partial z}(T,z)$, $\forall z \in [0,1]$, $u[0] = u_0$ και:*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,z) - \frac{1}{r(z)}\frac{\partial}{\partial z}\left(p(z)\frac{\partial u}{\partial z}(t,z)\right) + \frac{q(z)}{r(z)}u(t,z) = f(t,z), \forall (t,z) \in (0,T) \times (0,1) \quad (2.3.5)$$

$$b_1u(t,0) + b_2\frac{\partial u}{\partial z}(t,0) - d_0(t) = a_1u(t,1) + a_2\frac{\partial u}{\partial z}(t,1) - d_1(t) = 0, \forall t \in (0,T). \quad (2.3.6)$$

Οι Αποδείξεις των δυο παραπάνω Θεωρημάτων παραλλείπονται καθώς είναι παρόμοιες με αυτή του Θεωρήματος 1.

2.4 Μη γραμμικοί-Μη τοπικοί όροι και σχέση με ODEs

Αρχικά προκειμένου να ορίσουμε σωστά το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών και να ξεπεράσουμε ορισμένες τεχνικές δυσκολίες, για συστήματα που περιέχουν τόσο μη-γραμμικούς όσο και μη-τοπικους όρους θα χρειαστεί να παραθέσουμε ορισμένα βασικά στοιχεία. Στη συνέχεια, θα παρουσιάσουμε ορισμένα αποτελέσματα για την κατασκευή μοναδικής κλασσικής λύσης στο πρόβλημα του κεφαλαίου.

Ορισμός 8 *Θεωρούμε τον SL-τελεστή* $A : D \to L^2_r(0,1)$ *που ορίζεται από τις (1.2.1) και (1.2.2) όπου* $a_1, a_2, b_1, b_2\mathbb{R}$ *με* $|a_1| + |a_2| > 0$, $|b_1| + |b_2| > 0$ *και λαμβάνοντας την υπόθεση (H).Λέμε ότι ο* $P : C^0([0,1]) \to \mathbb{R}^k$ *είναι συμβατός με τον A εάν υπάρχει ένας συνεχής γραμμικός τελεστής* $S : C^0([0,1]) \to \mathbb{R}^k$*:*

$$PAu = -Su, \forall u \in C^2([0,1]) \cap D$$

Παρατήρηση 2 *Ο παραπάνω ορισμός είναι ισοδύναμος με την εξής πρόταση: Εάν ο συνεχής γραμμικός τελεστής* $P : C^0([0,1]) \to \mathbb{R}^k$ *είναι συμβατός με τον A, τότε υπάρχει ένας συνεχής γραμμικός τελεστής* $S : C^0([0,1])$ *τέτοιος ώστε για κάθε* $T > 0$ *η λύση* $u \in C^0([0,T] \times [0,1]) \cap C^1((0,T] \times [0,1])$ *με* $u[t] \in C^2([0,1]) \cap D$, $\forall t \in (0,T]$ *ισχύει ότι:*

$$\frac{d}{dt}\Big(Pu[t]\Big) = Su[t] + P\Big(\frac{\partial u}{\partial t}[t] + Au[t]\Big), \forall t \in (0,T] \tag{2.4.1}$$

Για παράδειγμα, ο γραμμικός τελεστής $P = \int_0^1 g(z)u(z)dz$ είναι συμβατός με τον τελεστή A της θερμότητας όπου $A = -\frac{d^2}{dz^2}$ αν ισχύουν οι συνθήκες:

- $a_2 = 0 \to g(1) = 0$
- $b_2 = 0 \to g(0) = 0$

Συνεχίζοντας, παρουσιάζουμε το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών που θα μας απασχολήσει:

$$\dot{x}(t) = F(x(t), u(t), v(t)), \forall t \in [0,T] \tag{2.4.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,z) - \frac{1}{r(z)}\frac{\partial}{\partial z}\left(p(z)\frac{\partial u}{\partial z}(t,z)\right) + \frac{q(z)}{r(z)}u(t,z) = K\big(u[t]\big)(z) + g\Big(z, x(t), Pu[t]\Big) + f_1(t,z) + f_2(t,z), \forall (t,z) \in (0,T] \times (0,1). \tag{2.4.3}$$

$$b_1 u(t,0) + b_2\frac{\partial u}{\partial z}(t,0) = a_1 u(t,1) + a_2\frac{\partial u}{\partial z}(t,1) = 0, \forall t \in (0,T]. \tag{2.4.4}$$

$$u[0] = u_0, \quad x(0) = x_0 \tag{2.4.5}$$

Όπου $T > 0$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t,x) \in \mathbb{R}$, $v(t,z) \in \mathbb{R}^{>}$(εξωτερική είσοδος), $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $u_0 \in H^2$, $F : \mathbb{R}^n \times C^0([0,1]) \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $g : [0,1] \times \mathbb{R}^n \times C^0([0,1]) \to \mathbb{R}$ είναι ολικά Lipschitz, A είναι SL-τελεστής και τα a_1, a_2, b_1, b_2 σταθερές.

Θεώρημα 5 *(Ύπαρξης και μοναδικότητας για την κλασική λύση ενός προβλήματος ενδοσύνδεσης ΜΔΕ-ΣΔΕ, με μη-τοπικούς όρους)*
Θεωρούμε τον SL-τελεστή $A : D \to L^2_r(0,1)$ *που ορίζεται από τις (1.2.1) και (1.2.2) όπου* $a_1, a_2, b_1, b_2\mathbb{R}$ *με* $|a_1| + |a_2| > 0$, $|b_1| + |b_2| > 0$ *και λαμβάνοντας την υπόθεση (H). Θεωρούμε στη συνέχεια* $T > 0$, $f_1, f_2 \in C^0([0,T] \times [0,1])$ *δωσμένες εξισώσεις για τις οποίες ισχύουν:*

•$(0,T] \times [0,1] \ni (t,z) \to \frac{\partial f_1}{\partial t}(t,z)$ *είναι συνεχής, με* $f_1[t] \in PC^1([0,1])$

•$f_2[t] \in D, \forall (0,T]$ *και*

•$sup_{t\in(0,T]}(\|Af_2[t]\|_r) < \infty$.

Έστω $F[t] : \mathbb{R}^n \times C^0([0,1]) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $g \in C^1([0,1])\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k; \mathbb{R}$, $K : C^0([0,1]) \to C^0([0,1])$ *είναι συνεχείς απεικονίσεις με* $K(u) \in D$, $\forall u \in C^0([0,1])$, *όπου υπάρχει μια σταθερά* $L > 0$: $\|AK(u)\|_r < L\|u\|_\infty$, $\max_{0\le z\le 1}\big(|g(z,x,\beta) - g(z,y,\gamma)|\big) < L|x-y| + L|\beta-\gamma|$, $|F(x,u,v) - F(y,w,v)| \le L\|u-w\|_\infty$ *ισχύουν για όλα τα* $u, w \in C^0([0,1])$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}^k$, $v \in \mathbb{R}^m$. *Έστω ότι ο* $P : C^0([0,1]) \to \mathbb{R}^k$ *είναι συμβατός τελεστής του A. Τότε για κάθε* $u_0 \in D$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $v \in C^0((0,T];\mathbb{R}^m)$ *υπάρχει μια μοναδική απεικόνιση* $u \in C^0([0,T] \times [0,1]) \cap C^1((0,T] \times [0,1])$ *και* $x \in C^1([0,T];\mathbb{R}^n)$ *που ικανοποιεί* $u[t] \in C^2([0,1])$,$\forall t \in (0,T]$ *και τις σχέσεις: (2.4.2), (2.4.3), (2.4.4), (2.4.5).*

Στο τελευταίο Θεώρημα παραλείπουμε τη παρουσίαση της Απόδειξης καθώς είναι παρόμοια με αυτή του Θεωρήματος 1.

Η παρακάτω Πρόταση είναι αρκετά χρήσιμη για τις εφαρμογές που θα ακολουθήσουν.

Πρόταση 2 *(Ύπαρξη και Μοναδικότητα κλασικής λύσης Μερικής Διαφορικής Εξίσωσης με μη-τοπικό όρο)Θεωρούμε τον SL-τελεστή* $A : D \to L^2_r(0,1)$ *που ορίζεται από τις (1.2.1) και (1.2.2) όπου* $a_1, a_2, b_1, b_2\mathbb{R}$ *με* $|a_1| + |a_2| > 0$, $|b_1| + |b_2| > 0$ *και λαμβάνοντας την υπόθεση (H). Θεωρούμε στη συνέχεια* $T > 0$, $f_1, f_2 \in C^0([0,T] \times [0,1])$ *δωσμένες εξισώσεις για τις οποίες ισχύουν:*

•$(0,T] \times [0,1] \ni (t,z) \to \frac{\partial f_1}{\partial t}(t,z)$ *είναι συνεχής, με* $f_1[t] \in PC^1([0,1])$

•$f_2[t] \in D, \forall (0,T]$ *και*

•$sup_{t\in(0,T]}(\|Af_2[t]\|_r) < \infty$

Έστω $g \in C^1([0,1])\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k; \mathbb{R}$, $K : C^0([0,1]) \to C^0([0,1])$ *είναι συνεχείς απεικονίσεις με* $K(u) \in D$, $\forall u \in C^0([0,1])$, *όπου υπάρχει μια σταθερά* $L > 0$: $\|AK(u)\|_r < L\|u\|_\infty$ *ισχύουν για όλα τα* $u, w \in C^0([0,1])$, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}^k$.*Έστω ότι ο* $P : C^0([0,1]) \to \mathbb{R}^k$ *είναι συμβατός τελεστής του A. Τότε για κάθε* $u_0 \in D$, *υπάρχει μια μοναδική απεικόνιση* $u \in C^0([0,T] \times [0,1]) \cap C^1((0,T] \times [0,1])$, *που ικανοποιεί* $u[t] \in C^2([0,1])$,$\forall t \in (0,T]$ *και τις παρακάτω σχέσεις:*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,z) - \frac{1}{r(z)}\frac{\partial}{\partial z}\left(p(z)\frac{\partial u}{\partial z}(t,z)\right) + \frac{q(z)}{r(z)}u(t,z) = K\big(u[t]\big)(z) + g\Big(z, Pu[t]\Big) + f_1(t,z) + f_2(t,z), \forall (t,z) \in (0,T] \times (0,1). \quad (2.4.6)$$

$$b_1 u(t,0) + b_2\frac{\partial u}{\partial z}(t,0) = a_1 u(t,1) + a_2\frac{\partial u}{\partial z}(t,1) = 0, \forall t \in (0,T]. \quad (2.4.7)$$

$$u[0] = u_0 \quad (2.4.8)$$

Κεφάλαιο 3

Ο χώρος $\mathbf{L}^2$

3.1 Το σύνολο της διαταραγμένης εισόδου και εκθετική ευστάθεια του A

Έχοντας δεδομένους τους ορισμούς που δόθηκαν στη προηγούμενη ενότητα (1.2.1) και (1.2.2) ορίζουμε επιπλέον την Παραβολική Μερική Διαφορική Εξίσωση:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,z) - \frac{1}{r(z)}\frac{\partial}{\partial z}\left(p(z)\frac{\partial u}{\partial z}(t,z)\right) + \frac{q(z)}{r(z)}u(t,z) = f(t,z), z \in (0,1) \tag{3.1.1}$$

$$b_1 u(t,0) + b_2\frac{\partial u}{\partial z}(t,0) - d_0(t) = a_1 u(t,1) + a_2\frac{\partial u}{\partial z}(t,1) - d_1(t) = 0 \tag{3.1.2}$$

Ορισμός 9 *Για κάθε δοσμένη* $u_0 \in L^2$ *, το σύνολο* $\Phi(A;u_0)$ *δηλώνει το μη κένο σύνολο των εισόδων για το οποίο ισχύει:*

•Εαν $(f, d_0, d_1) \in \Phi(A;u_0)$*, τότε οι* $d_0, d_1 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *είναι τοπικά φραγμένες συναρτήσεις,* $f[t] \in C^0([0,1])$*,* $\sup_{0<s<t}(\|f(s)\|_r < \infty)$*,* $\forall t > 0$*, υπάρχει το όριο* $\lim_{s\to t^-}(f(s,z))$ *και είναι πεπερασμένο για κάθε* $t > 0$*. Επιπροσθέτως, υπάρχει μια αυξουσα ακολουθία από χρόνους :*$\{\tau_i \geq 0, i = 0,1,2,...\}$ *με* $\tau_0 = 0$ *και* $\lim_{i\to\infty}\tau_\iota = \infty$ *έτσι ώστε το σύστημα (3.1.1), (3.1.2) με* $u_0 \in L_r^2(0,1)$ *να έχει μοναδική λύση* $u \in C^0(\mathbb{R}_+; L_r^2(0,1))$ *με* $u \in C^1(I \times [0,1])$ *ικανοποιούν τις εξής σχέσεις:* $u[t] \in C^2([0,1])$*, για κάθε* $t > 0$*,* $\lim_{t\to\tau_i^-} u(t,z) = u(\tau_i, z)$*,* $\lim_{t\to\tau_i^-}\frac{\partial u}{\partial t}(t,z) = -\left(Au[\tau_i]\right)(z) + \lim_{t\to\tau_i^-}(f(t,z))$*,* $\lim_{t\to\tau_i}\frac{\partial u}{\partial z}(t,z) = \frac{\partial u}{\partial z}(\tau_i,z)$*, για* $i \geq 1$ *και* $z \in [0,1]$*,* $u[0] = u_0$ *και ικανοποιείται το σύστημα:*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,z) - \frac{1}{r(z)}\frac{\partial}{\partial z}\left(p(z)\frac{\partial u}{\partial z}(t,z)\right) + \frac{q(z)}{r(z)}u(t,z) = f(t,z) \tag{3.1.3}$$

$$b_1 u(t,0) + b_2\frac{\partial u}{\partial z}(t,0) - d_0(t) = a_1 u(t,1) + a_2\frac{\partial u}{\partial z}(t,1) - d_1(t) = 0, \forall t \in I \tag{3.1.4}$$

όπου I*=*$R\backslash\{\tau_i \geq 0, i = 0,1,2,...\}$

Ορισμός 10 *Θεώρούμε τον τελεστή SL* $A : D \to L_r^2(0,1)$ *που ορίζεται απο την (1.2.1) και (1.2.2) όπου τα* $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ *και* $|a_1| + |a_2| > 0$ *και* $|b_1| + |b_2| > 0$*, που ικανοποιείται η υπόθεση **(H)**. Ο τελεστής A ονομάζεται **εκθετικά ευσταθής(ES)** εάν* $\lambda_1 > 0$.

3.2 Η ανισότητα ISS στον χώρο $\mathbf{L}^2$

Θεώρημα 6 *Θεωρουμε τον SL-τελεστή A που ορίζεται από τις σχέσεις (1.2.1),(1.2.2) και είναι εκθετικά ευσταθής. Τότε* $\forall u_0 \in L_r^2(0,1)$, $(f, d_0, d_1) \in \Phi(A; u_0)$) *η μοναδική λύση* $u \in C^0(\mathbf{R}_+; L_r^2(0,1))$ *του συστήματος που εκφράζουν οι σχέσεις (3.1.1), (3.1.2) με αρχικές συνθήκες* $u_0 \in L_r^2(0,1)$ *ικανοποιεί την ακόλουθη προσέγγιση για όλα τα* $\sigma \in [0, \lambda_1)$ *και* $t > 0$.

$$\begin{aligned}\|u[t]\|_r \leq \exp(-\lambda_1 t)\|u_0\|_r &+ \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \sigma} C_0 \sup_{0<s<t} (|d_0(s)| \exp(-\sigma(t-s))) \\ &+ \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \sigma} C_1 \sup_{0<s<t} (|d_1(s)| \exp(-\sigma(t-s))) \\ &+ \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \sigma} \sup_{0<s<t} (\|f[s]\|_r \exp(-\sigma(t-s)))\end{aligned} \tag{3.2.1}$$

όπου

- $$C_0 := \frac{\rho(0)}{b_1^2 + b_2^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} |b_1 \varphi_n'(0) - b_2 \varphi_n(0)|^2} = \frac{1}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2}} \|\tilde{u}\|_r \tag{3.2.2}$$

- $$C_1 := \frac{\rho(1)}{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} |a_2 \varphi_n(1) - a_1 \varphi_n'(1)|^2} = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \|\overline{u}\|_r \tag{3.2.3}$$

με $\tilde{u}$ *ορίζεται ως η μοναδική λύση του προβλήματος οριακής τιμής:*

$$\begin{gathered}(p(z)\tilde{u}'(z))' - q(z)\tilde{u}(z) = 0, z \in [0,1] \\ b_1 \tilde{u}(0) + b_2 \tilde{u}'(0) = \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \\ a_1 \tilde{u}(1) + a_2 \tilde{u}'(1) = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\end{gathered}$$

και με $\overline{u}$ *ορίζεται ως η μοναδική λύση του προβλήματος οριακής τιμής:*

$$\begin{gathered}(p(z)\overline{u}'(z))' - q(z)\overline{u}(z) = 0, z \in [0,1] \\ b_1 \overline{u}(0) + b_2 \overline{u}'(0) = \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \\ a_1 \overline{u}(1) + a_2 \overline{u}'(1) = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\end{gathered}$$

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 6 θα χρειαστούμε το παρακάτω Λήμμα:

Λήμμα 1 *Θεωρουμε τον SL-τελεστή A που ορίζεται από τις σχέσεις (1.2.1),(1.2.2) και είναι εκθετικά ευσταθής. Τότε το πρόβλημα οριακών τιμών.*

$$(p(z)\tilde{u}'(z))' - q(z)\tilde{u}(z) = 0, z \in [0,1] \tag{3.2.4}$$

$$b_1 \tilde{u}(0) + b_2 \tilde{u}'(0) = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

$$a_1\tilde{u}(1) + a_2\tilde{u}'(1) = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \tag{3.2.5}$$

έχει μοναδική λύση $\tilde{u} \in C^2([0,1])$ *η οποία ικανοποιεί την σχέση:*

$$p^2(0)\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-2}|b_1\varphi_n'(0) - b_2\varphi_n(0)|^2 = (b_1^2 + b_2^2)\int_0^1 r(z)\tilde{u}^2(z)\,dz \tag{3.2.6}$$

Απόδειξη:(Απόδειξη του Λήμματος 1): Αρχικά υποθέτουμε ότι $b_1^2 + b_2^2 = 1$. Επειδή για τον SL τελεστή $A : D \to L_r^2(0,1)$ που ορίζεται απο τις σχέσεις (1.2.1) και (1.2.2) ικανοποιεί τη σχέση $\lambda_1 > 0$ συμπεραίνουμε ότι για κάθε $f \in C^0([0,1])$ η λύση του προβλήματος οριακών τιμών $Ay = f$ με $y \in D$ υπάρχει, είναι μοναδική και επιπλέον ισχύει $y \in C^2([0,1])$.Θεωρούμε σταθερές $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει

$$a_1(b_1 + b_2 + c_1 + c_2) + a_2(b_2 + 2c_1 + 3c_2) = 0$$

Θεωρούμε ακόμα ότι $\tilde{u} \in C^2([0,1])$ με τύπο:

$$\tilde{u}(z) = y(z) + g(z)$$

για $z \in [0,1]$, όπου:

$$g(z) = b_1 + b_2 z + c_1 z^2 + c_3 z^3$$
$$y \in C^2([0,1])$$

είναι μοναδική λύση του προβλήματος οριακών τιμών $Ay = -Ag$, $y \in D$.

Από τις εξισώσεις $b_1^2 + b_2^2 = 1$ και $a_1(b_1 + b_2 + c_1 + c_2) + a_2(b_2 + 2c_1 + 3c_2) = 0$ συμπεραίνουμε ότι η $\tilde{u} \in C^2([0,1])$ είναι λύση του προβλήματος οριακών τιμών που μας δίνουν οι σχέσεις (3.2.4)(3.2.5). Η μοναδικότητα προκύπτει εύκολα από το γεγονός ότι η $y \in D$ είναι η μοναδική λύση του προβλήματος οριακών τιμών$Ay = -Ag$.

Επειδή $\tilde{u} \in C^2([0,1])$ συνεπάγεται ότ $\tilde{u} \in L_r^2$.

Από τον ορισμό του A οι ιδιοσυναρτήσεις του ορίζουν μια ορθοκανονική βάση στο $L_r^2(0,1)$ και έτσι από Θεώρημα του Parseval ισχύει:

$$\|\tilde{u}\|_r^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = \int_0^1 r(z)\tilde{u}^2(z)\,dz \tag{3.2.7}$$

όπου ορίζουμε:

$$c_n := \int_0^1 r(z)\tilde{u}(z)\varphi_n(z)\,dz, n = 1, 2, ... \tag{3.2.8}$$

Από τις (3.2.4),(3.2.5) το γεγονός ότι: $(A\varphi_n)(z) = \lambda_n\varphi_n(z)$ αλλά και από τη επαναλαμβανόμενη ολοκλήρωση κατά παράγοντες οδηγούμαστε στο παρακάτω συμπέρασμα για n=1,2,...:

$$\begin{aligned}\lambda_n c_n = \int_0^1 r(z)\tilde{u}(z)\lambda_n\varphi_n(z)\,dz = \int_0^1 r(z)\tilde{u}(z)(A\varphi_n)(z) = \\ p(0)\left(\tilde{u}(0)\varphi_n'(0) - \tilde{u}'(0)\varphi_n(0)\right) + p(1)\left(\varphi_n(1)\tilde{u}'(1) - \varphi_n'(1)\tilde{u}(1)\right) - \\ \int_0^1 r(z)(A\tilde{u})(z)\varphi_n(z)\,dz\end{aligned} \tag{3.2.9}$$

Συνεχίζουμε δείχνοντας ότι για n=1,2,...

$$\tilde{u}(1)\varphi_n'(1) - \varphi_n(1)\tilde{u}'(1) = 0 \tag{3.2.10}$$

Παρατηρούμε ότι συνδιάζοντας την (3.2.5) με το γεγονός ότι $a_1\varphi_n(1)+a_2\varphi_n'(1) = 0$ καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το γραμμικό ομογενές σύστημα :

$$s_1\tilde{u}(1) + s_2\tilde{u}'(1) = 0 = s_1\varphi_n(1) + s_2\varphi_n'(1)$$

έχει τη μη-μηδενική λύση : $s_1 = a_1$ και $s_2 = a_2$ και συμπεραίνουμε ότι:

$$\begin{vmatrix} \tilde{u}(1) & \tilde{u}'(1) \\ \varphi_n(1) & \varphi_n'(1) \end{vmatrix} = 0$$

και με αυτόν τον τρόπο καταλήγουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα της σχέσης (3.2.10).

Δείχνουμε τώρα την εξής σχέση για n=1,2,...:

$$\tilde{u}(0)\varphi_n'(0) - \varphi_n(0)\tilde{u}'(0) = b_1\varphi_n'(0) - b_2\varphi_n(0) \tag{3.2.11}$$

Χρησιμοποιώντας πάλι την (3.2.5) προκύπτουν οι εξής σχέσεις για n=1,2,...(πολλαπλασιάζουμε με $b_1\varphi_n'(0)$ και με $b_2\varphi_n(0)$):

$$\begin{aligned} b_1^2\tilde{u}(0)\varphi_n'(0) + b_1b_2\tilde{u}'(0)\varphi_n'(0) &= b_1\varphi_n'(0) \\ b_1b_2\tilde{u}(0)\varphi_n(0) + b_2^2\tilde{u}'(0)\varphi_n(0) &= b_2\varphi_n(0) \end{aligned}$$

Από την οποία παίρνουμε:

$$\begin{aligned} b_1\varphi_n'(0) - b_2\varphi_n(0) = \big(b_1^2 + b_2^2\big)\Big(\tilde{u}(0)\varphi_n'(0) - \tilde{u}'(0)\varphi_n(0)\Big) \\ + \big(b_1\tilde{u}'(0) - b_2\tilde{u}(0)\big)\Big(b_2\varphi_n'(0) + b_1\varphi_n(0)\Big) \end{aligned}$$

Όμως $b_1^2 + b_2^2 = 1$ και $b_2\varphi_n'(0) + b_1\varphi_n(0) = 0$ οπότε συνεπάγεται η (3.2.11).

Συνδιάζοντας τώρα τις (3.2.9)(3.2.10) και (3.2.11) έχουμε ότι για $n = 1, 2, ...$:

$$\lambda_n c_n = p(0)\big(b_1\varphi_n'(0) - b_2\varphi_n(0)\big) \tag{3.2.12}$$

Το παρακάτω αποτέλεσμα προκύπτει ως αποτέλεσμα συνδιασμού της(3.2.7) και της (3.2.12):

$$p^2(0)\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-2}|b_1\varphi_n'(0) - b_2\varphi_n(0)|^2 = \int_0^1 r(z)\tilde{u}^2(z)\,dz \tag{3.2.13}$$

Η (3.2.6) εκφράζει το ίδιο αποτέλεσμα με την (3.2.13) με την διαφορά ότι η πρώτη σχέση αφορά μια πιο γενική περίπτωση όπου $b_1^2 + b_2^2 \neq 0$.Πιο συγκεκριμένα, όταν $b_1^2 + b_2^2 \neq 0$, θέτουμε $\tilde{b}_i = \frac{b_i}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$, για i=1,2 και καταλήγουμε στη σχέση $\tilde{b}_1^2 + \tilde{b}_2^2 = 1$. Οπότε με το συγκεκριμένο μετασχηματισμό προκύπτει η ισοδυναμία των δύο σχέσεων. □

Θα περάσουμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 6, αποδεικνύοντας αρχικά τον ακόλουθο ισχυρισμό.

Ισχυρισμός:Για κάθε λύση $u \in \mathbb{R}_+ \times [0,1] \to \mathbb{R}$ της εξελικτικής εξίσωσης(3.1.1) με (3.1.2), αρχική συνθήκη $u_0 \in L^2_r(0,1)$ και για $\Big(f, d_0, d_1\Big) \in \Phi(A; u_0)$ η ακόλουθη εξίσωση ισχύει για όλα τα $t \geq 0$ και για $n = 1, 2, ...$:

$$\begin{aligned} c_n(t) &= \exp\big(-\lambda_n t\big)c_n(0) + \int_0^t \exp\big(-\lambda_n(t-s)\big)\Big(\int_0^1 r(z)f(s,z)\varphi_n(z)\,dz\Big)\,ds \\ &\quad + \frac{p(1)}{a_1^2+a_2^2}\Big(a_2\varphi_n(1) - a_1\varphi_n'(1)\Big)\int_0^t \exp\Big(-\lambda_n(t-s)\Big)d_1(s)\,ds \\ &\quad + \frac{p(0)}{b_1^2+b_2^2}\Big(b_1\varphi_n'(0) - b_2\varphi_n(0)\Big)\int_0^t exp\Big(-\lambda_n(t-s)\Big)d_0(s)\,ds \end{aligned} \tag{3.2.14}$$

όπου για $n = 1, 2, ...$:

$$c_n := \int_0^1 r(z)u(t,z)\varphi_n(z)\,dz \tag{3.2.15}$$

Απόδειξη:(Απόδειξη του Ισχυρισμού): Έστω $\{\tau_i \geq 0 : i = 1, 2, ...\}$ είναι αύξουσα ακολουθία από χρόνους με $\tau_0 = 0$ και $\lim_{i\to\infty} \tau_i = \infty$ που περιγράφεται στον ορισμό (9).Ο ορισμός (3.2.15) μας εγγυάται ότι οι απεικονίσεις $\mathbb{R} \ni t \to c_n(t)$ είναι συνεχείς για $n = 1, 2, ...$. Επιπλέον, ο ορισμός (9) εγγυάται ότι οι απεικονίσεις $I \ni t \to c_n(t)$, όπου $I = \mathbb{R}_+ \setminus \{\tau_i \geq 0, i = 1, 2, ...\}$ είναι C^1 στον I. Συνδυάζοντας τις (3.1.3),(3.2.15) συμπεραίνουμε με επαναλαμβανόμενες ολοκληρώσεις κατά παράγοντες ότι προκύπτουν οι παρακάτω ισότητες που ισχύουν για όλα τα $t \in I$ και $n = 1, 2, ...$

$$\begin{aligned} \dot{c_n}(t) &= p(1)\Big(\frac{\partial u}{\partial z}(t,1)\varphi_n(1) - u(t,1)\varphi_n'(1)\Big) \\ &\quad + p(0)\Big(\varphi_n'(0)u(t,0) - \frac{\partial u}{\partial z}(t,0)\varphi_n(0)\Big) \\ &\quad - \int_0^1 r(z)u(t,z)\big(A\varphi_n\big)(z)\,dz + \int_0^1 r(z)f(t,z)\varphi_n(z)\,dz \end{aligned} \tag{3.2.16}$$

Επιπρόσθετα από τις (3.2.16), $(A\varphi_n(z)) = \lambda_n\varphi_n(z)$ και τον ορισμό της (3.2.15) ισχύει η παρακάτω σχέση για $t \in I$ και $n = 1, 2, ...$:

$$\begin{aligned} \dot{c_n}(t) + \lambda_n c_n(t) &= p(1)\Big(\frac{\partial u}{\partial z}(t,1)\varphi_n(1) - u(t,1)\varphi_n'(1))\Big) \\ &\quad p(0)\Big(\varphi_n'(0)u(t,0) - \frac{\partial u}{\partial z}(t,0)\varphi_n(0)\Big) + \int_0^1 r(z)f(t,z)\varphi_n(z)\,dz \end{aligned} \tag{3.2.17}$$

Συνεχίζουμε δείχνοντας ότι για κάθε $t \geq 0$:

$$\varphi_n'(0)u(t,0) - \frac{\partial u}{\partial z}(t,0)\varphi_n(0) = \frac{d_0(t)}{b_1^2+b_2^2}\Big(b_1\varphi_n'(0) - b_2\varphi_n(0)\Big) \tag{3.2.18}$$

Πολλαπλασιάζουμε δύο ξεχωριστές φορές την (3.1.4) με τους παράγοντες:1)$b_1\varphi_n'(0)$ και 2)$b_2\varphi_n(0)$ και έτσι προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$b_1^2\varphi_n'(0)u(t,0) - b_1b_2\varphi_n'(0)\frac{\partial u}{\partial z}(t,0) = d_0b_1\varphi_n'(0)$$
$$b_1b_2\varphi_n(0)u(t,0) - b_2^2\varphi_n(0)\frac{\partial u}{\partial z}(t,0) = d_0b_2\varphi_n(0)$$

Από όπου εξάγουμε τη σχέση:

$$\begin{aligned} d_0(t)\Big(b_1\varphi_n'(0) - b_2\varphi_n(0)\Big) &= (b_1^2+b_2^2)\Big(u(t,0)\varphi_n'(0) - \varphi_n(0)\frac{\partial u}{\partial z}(t,0))\Big) \\ &+ \Big(b_1\frac{\partial u}{\partial z}(t,0) - b_2u(t,0)\Big)\Big(b_2\varphi_n'(0) + b_1\varphi_n(0)\Big) \quad (3.2.19) \end{aligned}$$

Από το γεγονός ότι: $b_2\varphi_n'(0) + b_1\varphi_n(0)$ η (3.2.18) προκύπτει απευθείας. Επιπλέον η σχέση (3.1.4) με πολλαπλασιασμό κατά μέρη:$a_1\varphi_n'(1)$ και $a_2\varphi_n(1)$ αντίστοιχα ότι:

$$a_1u(t,1)\varphi_n'(1) + a_1a_2\frac{\partial u}{\partial z}(t,1)\varphi_n'(1) = d_1(t)a_1\varphi_n'(1)$$
$$a_2u(t,1)\varphi_n(1) + a_2^2\frac{\partial u}{\partial z}(t,1)\varphi_n(1) = d_1(t)a_2\varphi_n(1)$$

Από την οποία προκύπτει:

$$\begin{aligned} d_1(t)\Big(a_1\varphi_n'(1) - a_2\varphi_n(1)\Big) &= (a_1^2+a_2^2)\Big(u(t,1)\varphi_n'(1) - \varphi_n(1)\frac{\partial u}{\partial z}(t,1))\Big) \\ &+ \Big(a_1\frac{\partial u}{\partial z}(t,1) - a_2u(t,1)\Big)\Big(a_2\varphi_n'(1) + a_1\varphi_n(1)\Big) \end{aligned}$$

Το γεγονός ότι $a_1\varphi_n(1) + a_2\varphi_n'(1) = 0$ σε συνδιασμό με τη προηγούμενη εξίσωση προκύπτει ότι:

$$d_1(t)\Big(a_1\varphi_n'(1) - a_2\varphi_n(1)\Big) = (a_1^2+a_2^2)\Big(u(t,1)\varphi_n'(1) - \varphi_n(1)\frac{\partial u}{\partial z}(t,1))\Big) \quad (3.2.20)$$

Χρησιμοποιώντας τις (3.2.17),(3.2.18) και (3.2.20) συμπεραίνουμε ότι για κάθε $t \in I$ και $n = 1, 2, ..$:

$$\begin{aligned} \dot{c_n}(t) + \lambda_n c_n(t) &= \frac{p(1)d_1(t)}{a_1^2+a_2^2}\Big(a_2\varphi_n(1) - a_1\varphi_n'(1)\Big) \\ &+ \frac{p(0)d_0(t)}{b_1^2+b_2^2}\Big(b_1\varphi_n'(0) - b_2\varphi_n(0)) + \int_0^1 r(z)f(t,z)\varphi_n(z)\,dz \quad (3.2.21) \end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας τη σχέση (3.2.21) οδηγούμαστε στο αποτέλεσμα (3.2.14) $\forall t \geq 0$ και $n = 1, 2, ...$

$\square$

Απόδειξη:(Απόδειξη του Θεωρήματος 6): Από τον παραπάνω ισχυρισμό η λύση $u \in \mathbb{R}_+ \times [0,1] \to \mathbb{R}$ της εξελικτικής εξίσωσης(3.1.1) με (3.1.2), αρχική συνθήκη

$u_0 \in L^2_r(0,1)$ και για $\Big(f, d_0, d_1\Big) \in \Phi(A; u_0)$ η ακόλουθη εξίσωση ισχύει για όλα τα $t \geq 0$ και για $n = 1, 2, ...$:

$$u[t] = u_1[t] + u_2[t] + u_3[t] + u_4[t] \tag{3.2.22}$$

όπου $\forall (t, z) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 1]$:

$$u_1(t, z) := \sum_{n=1}^{\infty} \exp\big(-\lambda_n t\big) c_n(0) \varphi_n(z) \tag{3.2.23}$$

$$u_2(t, z) := \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z) \frac{p(0)}{b_1^2 + b_2^2} \Big(b_1 \varphi_n'(0) - b_2 \varphi_n(0)\Big) \int_0^t exp\Big(-\lambda_n(t - s)\Big) d_0(s)\, ds \tag{3.2.24}$$

$$u_3(t, z) := \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z) \frac{p(1)}{a_1^2 + a_2^2} \Big(a_2 \varphi_n(1) - a_1 \varphi_n'(1)\Big) \int_0^t \exp\Big(-\lambda_n(t - s)\Big) d_1(s)\, ds \tag{3.2.25}$$

$$u_4(t, z) := \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z) \int_0^t \exp\big(-\lambda_n(t - s)\big) \Big(\int_0^1 r(l) f(s, l) \varphi_n(l)\, dl\Big)\, ds \tag{3.2.26}$$

Συνεχίζουμε εκτιμώντας κάθε παράγοντα του u(από τη σχέση (3.2.22)) ξεχωριστά. Εκτίμηση του παράγοντα $u_1 : \mathbb{R} \times [0, 1] \to \mathbb{R}$: Επειδή οι ιδιοσυναρτήσεις $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ του SL-τελεστή $A : D \to L^2_r(0, 1)$ που ορίζεται από τις σχέσεις (1.2.1) και (1.2.2) σχηματίζουν μια ορθοκανονική βάση στον $L^2_r(0, 1)$, συμπεραίνουμε από το Θεώρημα του Parseval ότι:

$$\|u_1[t]\|_r^2 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2(t), \forall t \geq 0 \tag{3.2.27}$$

Όπου $A_n := \int_0^1 r(z) u_1(t, z) \varphi_n(z)\, dz$. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.2.15),(3.2.23) και (3.2.27) και το γεγονός ότι $\lambda_n \geq \lambda_1, \forall n = 1, 2, ...$ προκύπτει το παρακάτω αποτέλεσμα:

$$\|u_1[t]\|_r \leq \exp\left(-\lambda_1 t\right) \|u_0\|_r \tag{3.2.28}$$

Εκτίμηση του παράγοντα $u_2 : \mathbb{R} \times [0, 1] \to \mathbb{R}$:
Με την ίδια επιχειρηματολογία, από το Θεώρημα του Parseval έχουμε ότι:

$$\|u_2[t]\|_r^2 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^2(t), \forall t \geq 0 \tag{3.2.29}$$

Όπου

$$B_n(t) := \frac{p(0)}{b_1^2 + b_2^2} \Big(b_1 \varphi_n'(0) - b_2 \varphi_n(0)\Big) \int_0^t \exp\Big(-\lambda_n(t - s)\Big) d_0(s)\, ds \tag{3.2.30}$$

Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο αποτέλεσμα $\forall \sigma \in [0, \lambda_1)$, $t > 0$ και $n = 1, 2, ...$ αλλά και το γεγονός ότι:

$$\int_0^t \exp\big(-\lambda_n(t-s)\big)d_0(s)\,ds =$$

$$= \int_0^t \exp\big(-\lambda_n(t-s)+(\sigma(t-s))\big)d_0(s)\exp -\sigma(t-s)\,ds$$

Αλλά επειδή για $f \geq 0, g \geq 0$ και $f, g \in L^2(0,t)$ και g φραγμένη ισχύει:

$$\int_0^t f(s)g(s)\,ds \leq \sup_{0\leq s\leq t} g(s) \int_0^t f(s)\,ds$$

και έτσι από την (3.2.30) έχουμε :

$$\begin{aligned}|B_n(t)|^2 &= \Big(\frac{p(0)}{b_1^2+b_2^2}\Big)^2 |b_1\varphi_n'(0) - b_2\varphi_n(0)|^2 \Big|\int_0^t \exp\Big(-\lambda_n(t-s)\Big)d_0(s)\,ds\Big|^2 \\ &\leq \Big(\frac{p(0)}{b_1^2+b_2^2}\Big)^2 |b_1\varphi_n'(0) - b_2\varphi_n(0)|^2 \Big(\int_0^t \exp\Big(-\lambda_n(t-s)\Big)\Big|d_0(s)\Big|\,ds\Big)^2 \\ &\leq \Big(\frac{p(0)}{b_1^2+b_2^2}\Big)^2 |b_1\varphi_n'(0) - b_2\varphi_n(0)|^2 \Big(\int_0^t \exp\Big(-\lambda_n(t-s)+\sigma(t-s)\Big)\,ds\Big)^2 \\ &\qquad \Big(\sup_{0\leq s\leq t} |d_0(s)|\exp -\sigma(t-s)\Big)^2\end{aligned}$$

και έτσι προκύπτει το αποτέλεσμα:

$$|B_n(t)|^2 \leq \frac{1}{(\lambda_n-\sigma)^2}\Big(\frac{p(0)}{b_1^2+b_2^2}\Big)^2 |b_1\varphi_n'(0) - b_2\varphi_n(0)|^2 \sup_{0<s<t}\Big(|d_0(s)|^2 \exp\big(-2\sigma(t-s)\big)\Big) \quad (3.2.31)$$

Έτσι συνδυάζοντας τις (3.2.29)(3.2.31) έχουμε ότι για κάθε $\sigma \in [0, \lambda_1)$ και $t > 0$ ότι:

$$\|u[t]\|_r \leq K_0 \sup_{0<s<t}\Big(|d_0(s)|\exp\big(-\sigma(t-s)\big)\Big) \quad (3.2.32)$$

όπου:

$$K_0 := \frac{p(0)}{b_1^2+b_2^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\lambda_n-\sigma)^2}\Big|\frac{b_1}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}}\varphi_n'(0) - \frac{b_2}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}}\varphi_n(0)\Big|^2} \quad (3.2.33)$$

Η (3.2.2) είναι άμεση συνέπεια του Λήμματος (1). Πιο συγκεκριμένα, από τους ορισμούς (3.2.2)(3.2.33) συνεπάγεται ότι :$K_0 \leq \frac{\lambda_1}{\lambda_1-\sigma}C_0$.Συμπεραίνουμε λοιπόν από τα παραπάνω ότι για όλα τα $\sigma \in [0, \lambda_1)$,$t > 0$ ισχύει:

$$\|u_2[t]\|_r \leq \frac{\lambda_1}{\lambda_1-\sigma}C_0 \sup_{0<s<t}\Big(|d_0(s)|\exp\big(-\sigma(t-s)\big)\Big) \quad (3.2.34)$$

Εκτίμηση του παράγοντα $u_3 : \mathbb{R} \times [0,1] \to \mathbb{R}$:
Ξανά με τον ίδιο τρόπο από το Θεώρημα του Parseval μας δίνεται το αποτέλεσμα:

$$\|u_3[t]\|_r^2 = \sum_{n=1}^{\infty} G_n^2(t), \forall t \geq 0 \tag{3.2.35}$$

όπου:

$$G_n(t) := \frac{p(1)}{a_1^2 + a_2^2}\Big(a_2\varphi_n(1) - a_1\varphi_n'(1)\Big) \int_0^t \exp\Big(- \lambda_n(t-s)\Big) d_1(s)\, ds \tag{3.2.36}$$

Χρησιμοποιώντας την (3.2.36) παίρνουμε για όλα τα $\sigma \in [0, \lambda_1)$,$t > 0$ και $n = 1, 2, ...$:

$$\big|G_n(t)\big|^2 \leq \frac{1}{(\lambda_n - \sigma)^2}\big(\frac{p(1)}{a_1^2 + a_2^2}\big)^2\Big|a_1\varphi_n'(0) - a_2\varphi_n(0)\Big|^2 \sup_{0<s<t}\Big(\big|d_1(s)\big|^2 \exp\big(- 2\sigma(t-s)\big)\Big) \tag{3.2.37}$$

Όποτε συνδιάζοντας τις (3.2.35) και (3.2.37) ικανοποιείται η ακόλουθη εκτίμηση για κάθε $\sigma \in [0, \lambda_1)$,$t > 0$:

$$\|u_3[t]\|_r \leq K_1 \sup_{0<s<t}\Big(|d_1(s)| \exp\big(- \sigma(t-s)\big)\Big) \tag{3.2.38}$$

Όπου:

$$K_1 := \frac{p(1)}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_n - \sigma)^2}\Big|\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}\varphi_n(1) - \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}\varphi_n'(1)\Big|^2} \tag{3.2.39}$$

Η εξίσωση (3.2.3) προκύπτει αντικαθιστώντας όπου z το $1-z$ και χρησιμοποιώντας το Λήμμα (1). Πιο συγκεκριμένα, από τους ορισμούς (3.2.3) και (3.2.39) συνεπάγεται ότι $K_1 \leq \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \sigma}C_1$.Τελικά, για κάθε $\sigma \in [0, \lambda_1)$,$t > 0$ προκύπτει ότι:

$$\|u_3 t]\|_r \leq \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \sigma}C_1 \sup_{0<s<t}\Big(|d_1(s)| \exp\big(- \sigma(t-s)\big)\Big) \tag{3.2.40}$$

Εκτίμηση του παράγοντα $u_4 : \mathbb{R} \times [0,1] \to \mathbb{R}$:
Ξανά με τον ίδιο τρόπο απο το Θεώρημα του Parseval έχουμε το αποτέλεσμα:

$$\|u_4[t]\|_r^2 = \sum_{n=1}^{\infty} D_n^2(t), \forall t \geq 0 \tag{3.2.41}$$

όπου:

$$D_n(t) = \int_0^t \exp\Big(- \lambda_n(t-s)\Big) f_n(s)\, ds \tag{3.2.42}$$

και $f_n(t) := \int_0^1 r(z) f(t,z)\varphi_n(z)\, dz$. Επειδή οι ιδιοσυναρτήσεις του $A : D \to L_r^2$ παράγουν μια ορθοκανονική βάση στον L_r^2 από τη χρήση της ταυτότητας του Parseval έχουμε ότι:

$$\|f[t]\|_r^2 = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2(t), \forall t \geq 0 \tag{3.2.43}$$

Από την (3.2.42) προκύπτει η παρακάτω ανισότητα για κάθε $\sigma \in [0\lambda_1)$ και $t \geq 0$,$n = 1, 2, ...$:

$$|D_n(t)| \leq \int_0^t \exp\Big(-\lambda_n(t-s)\Big)|f_n(s)|\, ds \Rightarrow$$
$$|D_n(t)| \leq \int_0^t \exp\Big(-(\lambda_1-\sigma)(t-s)\Big)|f_n(s)|\exp\Big(-\sigma(t-s)\Big)\, ds \tag{3.2.44}$$

Χρησιμοποιώντας την Cauchy-Schwarz ανισότητα καταλήγουμε στο παρακάτω αποτέλεσμα:

$$|D_n(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_1-\sigma}}\Big(\int_0^t \exp\Big(-(\lambda_1-\sigma)(t-s)\Big)|f_n(s)|^2\exp\Big(-2\sigma(t-s)\Big)\, ds\Big)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$
$$|D_n(t)|^2 \leq \frac{1}{\lambda_1-\sigma}\Big(\int_0^t \exp\Big(-(\lambda_1-\sigma)(t-s)\Big)|f_n(s)|^2\exp\Big(-2\sigma(t-s)\Big)\, ds\Big) \tag{3.2.45}$$

Συνδιάζοντας τις (3.2.42),(3.2.43),(3.2.45) έχουμε ότι για κάθε $\sigma \in [0, \lambda_1)$,$t \geq 0$:

$$\|u_4[t]\|_r^2 \leq \frac{1}{(\lambda_1-\sigma)^2}\Big(\int_0^t \exp\Big(-(\lambda_1-\sigma)(t-s)\Big)\|f_n[s]\|_r^2\exp\Big(-2\sigma(t-s)\Big)\, ds\Big)$$

Το οποίο μας οδηγεί απευθείας στο αποτέλεσμα:

$$\|u_4[t]\|_r^2 \leq \frac{1}{(\lambda_1-\sigma)^2}\sup_{0<s<t}\Big(\|f_n[s]\|_r^2\exp\big(-2\sigma(t-s)\big)\Big) \tag{3.2.46}$$

Και έτσι έχουμε:

$$\|u_4[t]\|_r \leq \frac{1}{\lambda_1-\sigma}\sup_{0<s<t}\Big(\|f_n[s]\|_r\exp\big(-\sigma(t-s)\big)\Big) \tag{3.2.47}$$

Η (3.2.22) συνεπάγεται ότι:

$$u[t] \leq u_1[t] + u_2[t] + u_3[t] + u_4[t], \forall t \geq 0 \tag{3.2.48}$$

Συνδιάζοντας τις (3.2.28),(3.2.34),(3.2.40),(3.2.47) και (3.2.48) παίρνουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα:

$$\begin{aligned}\|u[t]\|_r \leq \exp(-\lambda_1 t)\|u_0\|_r &+ \frac{\lambda_1}{\lambda_1-\sigma}C_0\sup_{0<s<t}(|d_0(s)|\exp(-\sigma(t-s)))\\ &+ \frac{\lambda_1}{\lambda_1-\sigma}C_1\sup_{0<s<t}(|d_1(s)|\exp(-\sigma(\tau-s)))\\ &+ \frac{\lambda_1}{\lambda_1-\sigma}\sup_{0<s<t}(\|f[s]\|_r\exp(-\sigma(\tau-s)))\end{aligned}$$

□

3.3 Εφαρμογές

Θα παρουσιάσουμε σε αυτό το σημείο ορισμένες εφαρμογές του Θεωρήματος (6).

3.3.1 Η θερμοκρασία σε μια συμπαγή ράβδο

Θεωρούμε συμπαγή ράβδο με μήκος $L > 0$ και θερμοκρασία $T(t,\xi)$ σε χρόνο $t \geq 0$ και θέση $\xi \in [0, L]$. Κρατάμε σταθερή τη θερμοκρασία της ράβδου στη θέση $\xi = 0$ και την ορίζουμε να παίρνει την τιμή:

$$T(t,0) = T_0, \quad \forall t \geq 0 \tag{3.3.1}$$

Για $\xi = 1$ η ράβδος έρχεται σε επαφή με τον αέρα όπου ορίζουμε την θερμοκρασία του να είναι $T_{air}(t)$ και η σχέση που ακολουθεί σε συνάρτηση με την ονομαστική θερμοκρασία T_{nom} είναι:

$$T_{air} = T_{nom} + d(t), \quad t > 0 \tag{3.3.2}$$

Εφαρμόζουμε το νόμο του Newton($Q(t,z) = hA(T(t,z) - T_{air}(t))$) και το νόμο του Fourier για μεταφορά θερμότητας παίρνουμε:

$$-k\frac{\partial T}{\partial \xi}(t,L) = h\Big(T(t,L) - T_{air}(t)\Big), t > 0 \tag{3.3.3}$$

όπου $h > 0$ ο συντελεστής μεταφοράς θερμότητας και $k > 0$ η θερμική αγωγιμότητα του υλικού. Εφαρμόζοντας την αντικατάσταση $z = \frac{\xi}{L}$ προκύπτει η εξελικτική εξίσωση:

$$\frac{\partial T}{\partial t}(t,z) = p\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}(t,z), z \in (0,1) \tag{3.3.4}$$

με

$$T(t,0) - T_0 = \frac{\partial T}{\partial z}(t,1) + a_1 T(t,1) - a_1 T_{nom} - a_1 d(t) = 0 \tag{3.3.5}$$

όπου $p, a_1 > 0$ σταθερές. Χρησιμοποιώντας τη μεταβλητή $u(t,z)$ για $T(z) = T_0 + \frac{a_1}{1+a_1}\Big(T_{nom} - T_0\Big)z$, που ορίζεται ως:

$$u(t,z) = \frac{T(t,z)}{T_0} - 1 - \frac{a_1}{1+a_1}\Big(\frac{T_{nom}}{T_0} - 1\Big)z \tag{3.3.6}$$

Παίρνουμε το εξελικτικό σύστημα:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,z) = p\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(t,z), z \in (0,1) \tag{3.3.7}$$

$$u(t,0) = \frac{\partial u}{\partial z}(t,1) + a_1 u(t,1) - d_1(t) = 0 \tag{3.3.8}$$

όπου έχουμε ορίσει $d_1(t) = a_1\frac{d(t)}{T_0}$

Στο σημεί αυτό, στόχος μας είναι να εκτιμήσουμε ποιοτικά την επιδραση του παράγοντα $d_1(t)$ (και στη συνέχεια του d(t)) στη θεροκρασία της ράβδου.

Για να το πετύχουμε αυτό θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα (6) για την αρχική συνθήκη $u_0 \in L^2(0,1)$ και τις διαταραχές $(0, 0, d_1(t)) \in \Phi(u_0; A)$ όπου A SL-τελεστής που οίζεται από τις (1.2.1)(1.2.2) με $p(z) = p$, $r(z) = 1$, $q(z) = 0$, $b_2 = 0$, $a_2 = b_1 = 1$. Έτσι έχουμε το παρακάτω αποτέλεσμα που ισχύει για $t > 0$ και $\sigma \in (0, p\theta^2)$:

$$\|u(t,z)\|_2 \leq \exp\big(-p\theta^2 t\big)\|u_0\|_2 + \frac{p\theta^2}{p\theta^2 - \sigma}\frac{\sqrt{3}}{3(1+a_1)}\sup_{0\leq z\leq t}\big(|d_1(s)|\big)\exp\big(-\sigma(t-s)\big) \tag{3.3.9}$$

όπου $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ είναι η μοναδική λύση του προβλήματος $\tan\theta = a_1^{-1}\theta$.

3.3.2 Κερδος συνοριακής εισόδου στις R-A-D PDEs

Θεωρούμε την R-A-D Μερική Διαφορική Εξίσωση :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,z) = p\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(t,z) - v\frac{\partial u}{\partial z}(t,z) - ku(t,z) \tag{3.3.10}$$

όπου $k \in \mathbb{R}$ σταθερά και $p > 0$, $v \geq 0$. Θα ασχοληθούμε ταυτόχρονα με δυο περιπτώσεις σε ότι αφορά τις συνοριακές συνθήκες:

Περίπτωση 1:Dirichlet συνοριακή συνθήκη

$$u(t,0) - d_0(t) = u(t,1) = 0 \tag{3.3.11}$$

Περίπτωση 2:Robin συνοριακή συνθήκη

$$u(t,0) - d_0(t) = \frac{\partial u}{\partial z}(t,1) - \Big(\frac{v}{2p} - a\Big)v(t,1) = 0 \tag{3.3.12}$$

με $a \geq 0$.

Παρατηρούμε ότι οι (3.3.10),(3.3.11),(3.3.12) αντιστοιχούν στο πρόβλημα (3.1.1),(3.1.2) με $f(t,z) = 0$, $d_1(t) = 0$ και

$$r(z) = \exp\big(-\frac{vz}{p}\big)$$

$$q(z) = kr(z) \tag{3.3.13}$$

$$p(z) = pr(z)$$

Για ευκολία στην διεξαγωγή συμπεράσματος εφαρμόζουμε τον εξής μετασχηματισμό:

$$u(t,z) = \exp\big(\frac{vz}{2p}\big)w(t,z)$$

και έτσι παίρνουμε την εξελικτική εξίσωση:

$$\frac{\partial w}{\partial t}(t,z) = p\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}(t,z) - \Big(\frac{v^2}{4p} + k\Big)w(t,z) \tag{3.3.14}$$

με τις τροποποιημένες συνοριακές συνθήκες:

Περίπτωση 1:Dirichlet συνοριακή συνθήκη

$$w(t,0) - d_0(t) = w(t,1) = 0 \tag{3.3.15}$$

Περίπτωση 2:Robin συνοριακή συνθήκη

$$w(t,0) - d_0(t) = \frac{\partial w}{\partial z}(t,1) + aw(t,1) = 0 \tag{3.3.16}$$

και η (3.3.14) αντιστοιχεί στη (3.1.1) με:

$$r(z) = 1, \quad p(z) = p, \quad q(z) = k + \frac{v^2}{4p} \tag{3.3.17}$$

Σε κάθε μια από τις δυο περιπτώσεις οι ιδιοτιμές γνωρίζουμε ότι είναι:

$$\lambda_n = k + \frac{v^2}{4p} + p\omega_n^2, n = 1, 2, ... \tag{3.3.18}$$

και οι ιδιοσυναρτήσεις:

$$\varphi_n(z) = \sqrt{\frac{2}{1 - \frac{\sin 2\omega_n}{2\omega_n}}}, n = 1, 2, ... \tag{3.3.19}$$

Όπου $\omega_n = (n - \mu_n(a))\pi$ και $\mu_n(a) \in [0, \frac{1}{2}]$ και πιο συγκεκριμένα:

- $\mu_n(\infty) = 0$, για την Περίπτωση 1.
- $\mu_n(a) \in (0, \frac{1}{2})$, για την Περίπτωση 2 με το $a > 0$ να είναι η μοναδική λύση του προβλήματος $\tan \mu_n\pi + a^{-1}\mu_n = a^{-1}n\pi$
- $\mu_n(0) = \frac{1}{2}$, για την Περίπτωση 2 με $a = 0$

Η εικασία για $\lambda_1 > 0$ συνεπάγεται από τη παραπάνω σχέση:

$$k > -\frac{v^2}{4p} - p\pi^2\big(1 - \mu_1(\alpha)\big) \tag{3.3.20}$$

Επειδή $2\omega_n > \pi$ για οποιαδήποτε περίπτωση προκύπτει από την (3.3.19) ότι:

$$\max_{0 \le z \le 1}\Big(|\varphi_n(z)|\Big) \le \sqrt{\frac{2\pi}{\pi - 1}}$$

Επειδή επιπλέον ισχύει $\omega_n \ge (n - \frac{1}{2}\pi)$ έχουμε ότι $\lambda_n \ge k + \frac{v^2}{4p} + p\pi^2\big(n - \frac{1}{2}\big)^2$.Έτσι για $N > \frac{1}{2} + \frac{1}{2p\pi}\sqrt{\max\big(0, -v^2 - 4kp\big)}$ θα έχουμε ότι:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} \max_{0 \le z \le 1}\Big(|\varphi_n(z)|\Big) \le \sqrt{\frac{2\pi}{\pi - 1}} N\lambda_1^{-1} + \sqrt{\frac{2\pi}{\pi - 1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4p}{4kp + v^2 + 4p^2\pi^2(n - \frac{1}{2})^2} < \infty$$

Οπότε η υπόθεση (**H**) ισχύει.
Υποθέτουμε επιπλέον ότι :

$$k > -\frac{v^2}{4p} \tag{3.3.21}$$

Από το θεώρημα (6) επειδή έχουμε ότι $d_1(t) = 0$, $f(t,z) = 0$ συμπεραίνουμε ότι η μόνη τιμη που μενει να εκτιμήσουμε είναι η ποσότητα :C_0. Από την σχέση (3.2.2) αρκεί να λύσουμε το πρόβλημα:

$$p\tilde{w}''(z) - \Big(k + \frac{v^2}{4p}\Big)\tilde{w}(z) = 0$$

με συνοριακές συνθήκες (Πρώτη Περίπτωση-τύπου Dirichlet):

- $\tilde{w}(0) = 0$ και
- $\tilde{w}(1) = 0$

και η λύση $\tilde{w} \in C^2([0,1])$ δίνεται από την εξίσωση:

$$\tilde{w}(z) = c_1 \exp(\zeta z) + c_2 \exp(-\zeta z), \quad z \in [0,1] \tag{3.3.22}$$

Όπου έχουμε ορίσει:

$$\zeta := \frac{1}{4p}\sqrt{v^2 + 4kp}$$
$$c_1 := \frac{-1}{\exp(2\zeta) - 1}$$
$$c_2 := \frac{\exp(2\zeta)}{\exp(2\zeta) - 1}$$

Για την περίπτωση 1 ορίζουμε το κέρδος στη διαταραγμένη είσοδο για την w ως:

$$G(z,\infty) := \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sqrt{\sum_n = 1^\infty \frac{n^2}{\left(\pi^{-2}\zeta^2 + N^2\right)^2}} =$$
$$\frac{1}{\exp(2\zeta) - 1}\sqrt{\frac{\exp(4\zeta) - 1 - 4\zeta\exp(2\zeta)}{2\zeta}} \tag{3.3.23}$$

Επιπλέον για την δεύτερη περίπτωση όπου έχουμε συνοριακές συνθήκες τύπου Robin για τον ίδιο λόγω με πριν θα λύσουμε το σύστημα:

$$p\tilde{w}''(z) - \Big(k + \frac{v^2}{4p}\Big)\tilde{w}(z) = 0$$

με συνοριακές συνθήκες (Δεύτερη Περίπτωση-τύπου Robin):

- $\tilde{w}(0) = 1$ και
- $\tilde{w}'(1) = -a\,w(1)$

Τότε η λύση δίνεται από την (3.3.22) με:

$$\zeta := \frac{1}{4p}\sqrt{v^2 + 4kp}$$
$$c_1 := \frac{\zeta - a}{(\zeta + a)\exp(2\zeta) + \zeta - a}$$
$$c_2 := \frac{(\zeta + a)\exp(2\zeta)}{(\zeta + a)\exp(2\zeta) + \zeta - a}$$

Για την περίπτωση 2 ορίζουμε το κέρδος στη διαταραγμένη είσοδο για την w ως:

$$G(\zeta, a) = \sqrt{c_1^2 \frac{\exp(2\zeta - 1)}{2\zeta} + c_2^2 \frac{1 - \exp(-2\zeta)}{2\zeta} + 2c_1 c_2} \tag{3.3.24}$$

Λαμβάνοντας υπόψιν το μετασχηματισμό : $u(t, z) = \exp \frac{vz}{2p} w(t, z)$ και εφαρμόζοντας το Θεώρημα (6) λαμβάνουμε το εξής Πόρισμα σε μορφή Πρότασης.

Πρόταση 3 *Θεωρούμε την Μερική Διαφορική Εξίσωση (3.3.10) με τη συνοριακή συνθήκη (3.3.11)($a = \infty$) ή τη συνοριακή συνθήκη (3.3.12) ($a \geq 0$) και υποθέτομε ότι ισχύει η (3.3.21). Τότε για κάθε $u_0 \in L_r^2(0,1)$, $(0, d, 0) \in \Phi(A; u_0)$ με τις συνθήκες (3.3.13), για τη περίπτωση 1: $a_2 = b_2 = 0$, $a_1 = b_1 = 1$ και για την περίπτωση 2: $b_2 = 0$, $a_2 = b_1 = 1$, $a_1 = a$ ικανοποιείται η ακόλουθη εκτίμηση:*

$$\begin{aligned} \|u(t, z)\|_2 \leq \exp\Big(\frac{v}{2p}\Big) G(\zeta, a) \max_{0<s<t} \big(|d_0(t)|\big) \\ + \exp\Big(\frac{v}{2p} - p\big(\zeta^2 + \pi^2(1 - \mu_1(a))^2\big)t\Big)\|u_0\|_2 \end{aligned} \tag{3.3.25}$$

με $\zeta := \frac{1}{4p}\sqrt{v^2 + 4kp}$

3.4 Ικανές συνθήκες για εκθετική ευστάθεια

Πρόταση 4 *Θεωρουμε τον SL-τελεστή A που ορίζεται από τις σχέσεις (1.2.1),(1.2.2) όπου τα $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ και $|a_1| + |a_2| > 0$ και $|b_1| + |b_2| > 0$, με $p(z) = p$, $r(z) = 1$ και ικανοποιείται η υπόθεση **(H)**. Θεωρούμε επιπλέον ότι υπάρχουν σταθερές : $\varepsilon_0, \varepsilon_1 > 0$, $\lambda \in [0, 1]$ και συνάρτηση $g \in C^2([0, 1] \times (0, \infty))$ τέτοιο ώστε*

$$\begin{gathered} g'(1) - 2q_1 g(1) - 2R^{-1}(1 - \lambda)(1 + \varepsilon_1) \geq 0 \\ 2q_0 g(0) - g'(0) - 2R^{-1}\lambda(1 + \varepsilon_0) \geq 0 \end{gathered} \tag{3.4.1}$$

και

$$2R^{-1} + 2p^{-1} g(z) q(z) > g''(z), \forall z \in [0, 1] \tag{3.4.2}$$

όπου

$$R := \int_0^1 \left(\lambda(1 + \varepsilon_0^{-1}) \int_0^z \frac{ds}{g(s)} + (1 - \lambda)(1 + \varepsilon_1^{-1}) \int_z^1 \frac{ds}{g(s)} \right) dz \tag{3.4.3}$$

$$q_0 = \infty, \ \text{αν} \ b_2 = 0, \quad q_0 = -\frac{b_1}{b_2} \ \text{αν} \ b_2 \neq 0 \tag{3.4.4}$$

$$q_1 = -\infty \ \text{αν} \ a_2 = 0, \ \ q_1 = -\frac{a_1}{a_2}, \ \text{αν} \ a_2 \neq 0 \tag{3.4.5}$$

Τότε ο τελεστής $A : D \to L^2(0, 1)$ είναι εκθετικά ευσταθές(ES) και πιο συγκεκριμένα ισχύει ότι:

$$\lambda_1 = \frac{\min\{2g(z)q(z) + 2pR^{-1} - pg^{-1}(z) : z \in [0, 1]\}}{2\max\{g(z) : z \in [0, 1]\}} > 0$$

Τέλος, θα αποδείξουμε την Πρόταση (4).

Απόδειξη:(Απόδειξη της Πρότασης 4): Αρκεί να δείξουμε ότι $\exists \mu > 0$ σταθερά :

$$\int_0^1 g(z)f(z)(Af)(z)\,dz \geq \mu \int_0^1 f^2(z)\,dz, \forall f \in D \tag{3.4.6}$$

Επειδή από την υπόθεση έχουμε ότι $p(z) = p$, $r(z) = 1$, συμπεραίνουμε από τον ορισμό του A ότι για κάθε $f \in D$ έχουμε:

$$\begin{aligned}\int_0^1 g(z)f(z)(Af)(z)\,dz = pg(1)\Big(\frac{g'(1)}{2g(1)}f(1) - f'(1)\Big)f(1) \\ + pg(0)\Big(f'(0) - \frac{g'(0)}{2g(0)}f(0)\Big)f(0) \\ + p\int_0^1 g(z)\big(f'(z)\big)^2\,dz + \int_0^1 \Big(g(z)q(z) - \frac{p}{2}g''(z)\Big)f^2(z)\,dz\end{aligned} \tag{3.4.7}$$

Επειδή $f(z) = f(0) + \int_0^z f'(s)\,ds$, $\forall z \in [0,1]$ και επειδή έχουμε επιλέξει $\varepsilon_0 > 0$ παίρνουμε $\forall z \in [0,1]$:

$$f^2(z) \leq (1+\varepsilon_0)f^2(0) + (1+\varepsilon_0^{-1})\Big(\int_0^z f'(s)\,ds\Big)^2 \tag{3.4.8}$$

Χρησιμοποιούμε την Cauchy-Schwarz ανισότητα, η οποία μας δίνει:

$$\begin{aligned}\Big(\int_0^z f'(s)\,ds\Big)^2 \leq \Big(\int_0^z \frac{ds}{g(s)}\Big)\Big(\int_0^z g(s)\big(f'(s)\big)^2\,ds\Big) \\ \leq \Big(\int_0^z \frac{ds}{g(s)}\Big)\Big(\int_0^1 g(s)\big(f'(s)\big)^2\,ds\Big), \forall z \in [0,1]\end{aligned}$$

Και από την ανισότητα (3.4.8) έχουμε ότι για κάθε $z \in [0,1]$:

$$f^2(z) \leq (1+\varepsilon_0)f^2(0) + (1+\varepsilon_0^{-1})\Big(\int_0^z \frac{ds}{g(s)}\Big)\Big(\int_0^1 g(s)\big(f'(s)\big)^2\,ds\Big) \tag{3.4.9}$$

Και έτσι οδηγούμαστε εύκολα στο συμπέρασμα:

$$\int_0^1 f^2(z)\,dz \leq (1+\varepsilon_0)f^2(0) + (1+\varepsilon_0^{-1})\Big(\int_0^1\int_0^z \frac{ds}{g(s)}\,dz\Big)\Big(\int_0^1 g(s)\big(f'(s)\big)^2\,ds\Big) \tag{3.4.10}$$

Επιπλέον γνωρίζουμε ότι $f(z) = f(1) - \int_z^1 f'(s)\,ds$, $\forall z \in [0,1]$ και επειδή $\varepsilon_1 > 0$, έχουμε ότι για κάθε $z \in [0,1]$:

$$f^2(z) \leq (1+\varepsilon_1)f^2(1) + (1+\varepsilon_1^{-1})\Big(\int_z^1 f'(s)\,ds\Big)^2 \tag{3.4.11}$$

Χρησιμοποιώντας την Cauchy-Schwarz ανισότητα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}\Big(\int_z^1 f'(s)\,ds\Big)^2 \leq \Big(\int_z^1 \frac{ds}{g(s)}\Big)\Big(\int_z^1 g(s)\big(f'(s)\big)^2\,ds\Big) \\ \leq \Big(\int_z^1 \frac{ds}{g(s)}\Big)\Big(\int_0^1 g(s)\big(f'(s)\big)^2\,ds\Big), \forall z \in [0,1]\end{aligned}$$

Από την (3.4.11) έχουμε για κάθε $z \in [0,1]$:

$$f^2(z) \leq (1+\varepsilon_1)f^2(1) + (1+\varepsilon_1^{-1})\Big(\int_z^1 \frac{ds}{g(s)}\Big)\Big(\int_0^1 g(s)\big(f'(s)\big)^2\,ds\Big) \qquad (3.4.12)$$

Από την προηγούμενη ανισότητα συνεπάγεται εύκολα ότι:

$$\int_0^1 f^2(z)\,dz \leq (1+\varepsilon_1)f^2(1) + (1+\varepsilon_1^{-1})\Big(\int_0^1\int_z^1 \frac{ds}{g(s)}\,dz\Big)\Big(\int_0^1 g(s)\big(f'(s)\big)^2\,ds\Big) \qquad (3.4.13)$$

Πολλαπλασιάζουμε την (3.4.10) με λ και την (3.4.13) με $1-\lambda$ και προσθέτοντας μεταξύ τους, λαμβάνοντας υπόψιν και την (7), προκύπτει το εξής αποτέλεσμα:

$$\int_0^1 f^2(z)\,dz \leq \lambda(1+\varepsilon_0)f^2(0) + (1-\lambda)(1+\varepsilon_1)f^2(1) + R\Big(\int_0^1 g(s)\big(f'(s)\big)^2\,ds\Big) \quad (3.4.14)$$

Συνδιάζοντας το τις (3.4.7) και (3.4.14) παίρνουμε για κάθε $f \in D$:

$$\begin{aligned}\int_0^1 g(z)f(z)(Af)(z)\,dz \geq{}& pg(1)\Big(\frac{g'(1)}{2g(1)}f(1) - f'(1) - \frac{(1-\lambda)(1+\varepsilon_1)}{Rg(1)}\Big)f(1)\\ &+ pg(0)\Big(f'(0) - \frac{g'(0)}{2g(0)}f(0) - \frac{\lambda(1+\varepsilon_0)}{Rg(0)}f(0)\Big)f(0)\\ &+ \int_0^1 \Big(g(z)q(z) - \frac{p}{2}g'(z) + pR^{-1}\Big)f^2(z)\,dz \quad (3.4.15)\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τις (1.2.2),(3.4.1),(3.4.4),(3.4.5) έχουμε ότι για κάθε $f \in D$ οι ακόλουθες ανισότητες ισχύουν:

$$\Big(\frac{g'(1)}{2g(1)}f(1) - f'(1) - \frac{(1-\lambda)(1+\varepsilon_1)}{Rg(1)}\Big)f(1) \geq 0 \qquad (3.4.16)$$

$$\Big(f'(0) - \frac{g'(0)}{2g(0)}f(0) - \frac{\lambda(1+\varepsilon_0)}{Rg(0)}f(0)\Big)f(0) \geq 0 \qquad (3.4.17)$$

Οι τέλευταίες ανισότητες σε συνδιασμό με την (3.4.15) συνεπάγεται ότι η (3.4.6) ισχύει για κάθε $f \in D$ με :

$$\mu = \min_{0\leq z\leq 1}\big(g(z)q(z) - \frac{p}{2}g''(z) + pR^{-1}\big)$$

Από την ανισότητα (3.4.2) συμπεραίνουμε ότι $\mu > 0$.Οπότε η ανισότητα (3.4.6) με $f = \varphi_1$ μας οδηγεί στο συμπέρασμα:

$$\lambda_1 = \frac{\min\{2g(z)q(z) + 2pR^{-1} - pg^{-1}(z) : z \in [0,1]\}}{2\max\{g(z) : z \in [0,1]\}} > 0$$

Κεφάλαιο 4

ISS-Lyapunov Συναρτησιακό

4.1 Παρουσίαση του προβλήματος

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο ενδιαφερόμαστε για την ISS-ιδιότητα σε ένα L_r^2 χώρο με την έννοια του του ISS-Lyapunov συναρτησιακού. Θα ασχοληθούμε με διάφορες περιπτώσεις προβλημάτων των οποίων η ειδοποιός διαφορά είναι οι οριακές συνθήκες.

Προτού αναφέρουμε τις διάφορες περιπτώσεις, θα παρουσιάσουμε ορισμένες παραδοχές που κάνουμε για τα προβλήματα που θα μας απασχολήσουν:

Αρχικά υποθέτουμε πάλι $p(z) \equiv p > 0$ (σταθερό), και $r(z) \equiv 1$.Σημειώνουμε ότι το σύστημα με τις σχέσεις (3.1.1),(3.1.2), όπου υποθέτουμε ότι: $p, r \in C^2([0,1];(0,\infty))$ μπορεί εύκολα να μετατραπεί σε ένα ισοδύναμο με σταθερή διάχυση αλλά και μηδενικούς όρους μεταφοράς χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό Gauge.

Θα ασχοληθούμε με την παρακάτω μορφή της Μερικής Παραβολικής Εξίσωσης:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,z) - p\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(t,z) + q(z)u(t,z) = K(u[t])(z) + f(t,z) \tag{4.1.1}$$

Όπου $u[t]$ είναι η κατάσταση, $f[t]$ η κατανεμήμενη εξωτερική διαταραχή,$K : C^0([0,1]) \to C^0([0,1])$ είναι μια συνεχής απεικόνιση με $K(0) = 0$ η οποία μπορεί να περιέχει τοπικούς και μη-τοπικούς όρους(πιθανον και μη γραμμικούς):

$$b_1 u(t,0) + b_2\frac{\partial u}{\partial z}(t,0) - d_0(t) = a_1 u(t,1) + a_2\frac{\partial u}{\partial z}(t,1) - d_1(t) = 0, \forall t \in I$$

Η λύση του προβλήματος (4.1.1) και (3.1.4) με αρχική συνθήκη $u[0] = u_0 \in L_r^2(0,1)$ είναι μια απεικόνιση $u \in C^0(\mathbb{R}_+; L_r^2(0,1))$ για την οποία υπάρχει αύξουσα ακολουθία από χρόνους $\{\tau_i \geq 0 : i = 1,2,...\}$ με $\tau_0 = 0$, $\lim_{i\to\infty} \tau_i = \infty$ τέτοια ώστε να ισχύουν τα εξής:

1. $u \in C^1(I \times [0,1])$, για $I = \mathbb{R}_+ \setminus \{\tau_i \geq 0, i = 0,1,...\}$
2. $u[t] \in C^2([0,1]), \forall t \in I$
3. Η (4.1.1) ισχύει για κάθε $(t,z) \in I \times (0,1)$
4. Η (3.1.4) ισχύει για κάθε $t \in I$
5. $u[0] = u_0$

Για όλα τα αποτελέσματα που θα εξάγουμε στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε το ISS-Lyapunov συναρτησιακό:

$$V(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 g(z)u^2(z)\,dz$$

όπου $g \in C^2([0,1];(0,\infty))$ είναι κατάλληλη συνάρτηση-βάρους.

4.2 Οριακές Συνθήκες τύπου Robin

Αρχικά θα ασχοληθούμε με τη περίπτωση οπού οι οριακές συνθήκες του προβλήματος είναι τύπου Robin και επίσης είναι επιρρεασμένες από εξωτερικές διαταραχές.

Θεώρημα 7 *Θεωρούμε τον SL-τελεστή $A : D \to L_r^2(0,1)$ που ορίζεται από τις σχέσεις (1.2.1)(1.2.2) οπού επιλέγουμε τα $a_2 = b_2 = 1$, $p(z) = p$, $r(z) = 1$ λαμβάνοντας υπόψιν την υπόθεση (**H**). Θεωρούμε την $K : C^0([0,1]) \to C^0([0,1])$ η οποία είναι συνεχής απεικόνιση με $K(0) = 0$. Θεωρούμε ακόμα ότι υπάρχει $\varepsilon_0, \varepsilon_1 > 0$,$\lambda \in [0,1]$ και $g \in C^2([0,1];(0,\infty))$, $c_i \in C^0([0,1])$,$i = 1,2$:*

$$u(z)\big(Ku\big)(z) \le c_1(z)u^2(z) + c_2(z)\int_0^1 g(s)u^2(s)\,ds, \quad \forall z \in [0,1], u \in C^0([0,1]) \tag{4.2.1}$$

$$k_0 := -2b_1 - \frac{g'(0)}{g(0)} - 2\frac{\lambda(1+\varepsilon_0)}{Rg(0)} > 0 k_1 := 2a_1 + \frac{g'(1)}{g(1)} - 2\frac{(1-\lambda)(1+\varepsilon_1)}{Rg(1)} > 0 \tag{4.2.2}$$

και

$$\sigma := \min_{0\le z\le 1}\Big(p\frac{2-Rg''(z)}{2Rg(z)} + q(z) - c_1(z) - \int_0^1 g(s)c_2(s)\,ds\Big) > 0 \tag{4.2.3}$$

όπου $R > 0$ δίνεται από την (7):

$$R := \int_0^1 \left(\lambda(1+\varepsilon_0^{-1})\int_0^z \frac{ds}{g(s)} + (1-\lambda)(1+\varepsilon_1^{-1})\int_z^1 \frac{ds}{g(s)}\right) dz$$

Τότε για κάθε $u_0 \in L_r^2(0,1)$, $f : \mathbb{R}_+ \times [0,1] \to \mathbb{R}$ τοπικά φραγμένη , $d_i : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, i = 0,1$ τοπικά φραγμένη για τις οποίες υπάρχει αύξουσα ακολουθία χρόνων $\{\tau_i \ge 0 : i = 0,1,...\}$ με $\tau_0 = 0$, $\lim_{i\to\infty}\tau_i = \infty$ και $u \in C^0(\mathbb{R}_+; L_r^2(0,1))$ με $u \in C^1(I \times [0,1])$, για $I = \mathbb{R}_+ \setminus \{\tau_i \ge 0, i = 0,1,...\}$,η οποία ικανοποιεί τα εξής: $u[t] \in C^2([0,1]), \forall t \in I$, $u[0] = u_0$ και τις ήδη υπάρχουσες σχέσεις:(4.1.1) που ισχύει για κάθε $(t,z) \in I \times (0,1)$ και (3.1.4) που ισχύει για κάθε $t \in I$.Η ακόλουθη προσέγγιση ισχύει για κάθε $\mu \in (0,\sigma)$ και $t \ge 0$:

$$\|u[t]\|_g \le \exp(-\mu r)\|u_0\|_g + \sqrt{\frac{1}{\mu(\sigma-\mu)}}\sup_{0\le s\le t}\Big(\|f[s]\|_g\Big) + g(1)\sqrt{\frac{p}{2k_1\mu}}\sup_{0\le s\le t}\Big(|d_1(s)|\Big) + g(0)\sqrt{\frac{p}{2k_0\mu}}\sup_{0\le s\le t}\Big(|d_0(s)|\Big) \tag{4.2.4}$$

όπου ορίζουμε τη νόρμα:

$$\|v\|_g := \Big(\int_0^1 g(z)v^2(z)\,dz\Big)^{\frac{1}{2}}, \forall v \in L^2(0,1)$$

(4.2.5)

Παρατήρηση 3 *Η ανισότητα (4.2.1) είναι μια πρόσθετη συνθήκη για τον πιθανό μη-τοπικό, μη-γραμμικό όρο $K(u)$. Η ανισότητα (4.2.3) μας δίνει ένα κατάλληλο φράγμα για τον όρο της αντίδρασης.*

Απόδειξη:(Απόδειξη του Θεωρήματος 7): Θεωρούμε $u_0 \in L_r^2(0,1)$, $f : \mathbb{R}_+ \times [0,1] \to \mathbb{R}$ τοπικά φραγμένη , $d_i : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, i = 0,1$ τοπικά φραγμένη για τις οποίες υπάρχει αύξουσα ακολουθία χρόνων $\{\tau_i \geq 0 : i = 0,1,...\}$ με $\tau_0 = 0$, $\lim_{i\to\infty} \tau_i = \infty$ και $u \in C^0(\mathbb{R}_+; L_r^2(0,1))$ με $u \in C^1(I \times [0,1])$, για $I = \mathbb{R}_+ \setminus \{\tau_i \geq 0, i = 0,1,...\}$,η οποία ικανοποιεί τα εξής: $u[t] \in C^2([0,1]), \forall t \in I$, $u[0] = u_0$ και τις ήδη υπάρχουσες σχέσεις:(4.1.1) που ισχύει για κάθε $(t,z) \in I \times (0,1)$ και (3.1.4) που ισχύει για κάθε $t \in I$.

Ορίζουμε τη συνεχή απεικόνιση $t \to V(t)$ με τύπο:

$$V(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 g(z)u^2(z)\,dz, \forall t \geq 0 \tag{4.2.6}$$

Η απεικόνιση $t \to V(t)$ είναι C^1 στο πεδίο. Λαμβάνοντας υπόψιν την (4.1.1) έχουμε ότι για κάθε $t \in I$:

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) = \int_0^1 g(z)u(t,z)\frac{\partial u}{\partial t}(t,z)\,dz = \\ p\int_0^1 g(z)u(t,z)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(t,z) - \int_0^1 g(z)q(z)u^2(t,z)\,dz \\ + \int_0^1 g(z)K\big(u[t]\big)(z)u(t,z)\,dz + \int_0^1 g(z)u(t,z)f(t,z)\,dz \end{aligned} \tag{4.2.7}$$

Εφαρμόζοντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες στην (4.2.7) και σε συνδιασμό με την (4.2.1) έχουμε την ανισότητα:

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) \leq pg(1)u(t,1)\frac{\partial u}{\partial z}(t,1) - pg(0)u(t,0)\frac{\partial u}{\partial z}(t,0) \\ - p\int_0^1 g'(z)u(t,z)\frac{\partial u}{\partial z}(t,z)\,dz - \int_0^1 g(s)\Big(\frac{\partial u}{\partial z}\Big)^2(t,z)\,dz \\ + \int_0^1 \Big(c_1(z) - q(z)\Big)g(z)u^2(t,z)\,dz + \int_0^1 g(z)u(t,z)f(t,z)\,dz \\ + \int_0^1 g(z)c_2(z)\,dz\int_0^1 g(s)u^2(t,z)\,dz \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

Χρησιμοποιώντας την Cauchy-Schwarz ανισότητα:$\int_0^1 g(z)u(t,z)f(t,z) \leq \|u(t,z)\|_g\|f(t,z)\|_g$ αλλά και τη γνωστή μας ανισότητα:

$$\|u[t]\|_g\|f[t]\|_g \leq \frac{1}{2\varepsilon_f}\int_0^1 g(z)f^2(t,z)\,dz + \frac{\varepsilon_f}{2}\int_0^1 g(z)u^2(t,z)\,dz$$

η οποία ισχύει για κάθε $\varepsilon_f > 0$, συμπεραίνουμε από τις (3.1.4),(4.2.8) και ολοκληρώντας τα δύο μέρη της ανίσωσης:

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) \leq -p\Big(a_1 g(1) + \frac{1}{2}g'(1)\Big)u^2(t,1) + p\Big(b_1 g(0) + \frac{1}{2}g'(0)\Big)u^2(t,0)\\ + pg(1)u(t,1)d_1(t) - pg(0)u(t,0)d_0(t)\\ + \int_0^1 \Big(\frac{pg''(z)}{g(z)} - q(z) + c_1(z) + \frac{\varepsilon_f}{2} + \int_0^1 g(s)c_2(s)\,ds\Big)g(z)u^2(t,z)\,dz\\ - p\int_0^1 g(z)\big(\frac{\partial u}{\partial z}(t,z)\big)^2\,dz + \frac{1}{2\varepsilon_f}\int_0^1 g(z)f^2(t,z)\,dz \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

Επειδή $u(t,z) = u(t,0) + \int_0^z \frac{\partial u}{\partial z}(t,s)\,ds$, $\forall z \in [0,1]$,$t > 0$ και επειδή έχουμε επιλέξει $\varepsilon_0 > 0$ παίρνουμε $\forall z \in [0,1]$:

$$u^2(t,z) \leq (1+\varepsilon_0)u^2(t,0) + (1+\varepsilon_0^{-1})\Big(\int_0^z \frac{\partial u}{\partial z}(t,s))\,ds\Big)^2$$

Χρησιμοποιούμε την Cauchy-Schwarz ανισότητα, η οποία μας δίνει:

$$\begin{aligned}\Big(\int_0^z \frac{\partial u}{\partial z}(t,s)\,ds\Big)^2 &\leq \Big(\int_0^z \frac{ds}{g(s)}\Big)\Big(\int_0^z g(s)\big(\frac{\partial u}{\partial z}(t,s)\big)^2\,ds\Big)\\ &\leq \Big(\int_0^z \frac{ds}{g(s)}\Big)\Big(\int_0^1 g(s)\big(\frac{\partial u}{\partial z}(t,s)\big)^2\,ds\Big), \forall z \in [0,1]\end{aligned}$$

Και έχουμε ότι για κάθε $z \in [0,1]$:

$$u^2(t,z) \leq (1+\varepsilon_0)u^2(t,0) + (1+\varepsilon_0^{-1})\Big(\int_0^z \frac{ds}{g(s)}\Big)\Big(\int_0^1 g(s)\big(\frac{\partial u}{\partial z}(t,z)\big)^2\,ds\Big) \quad (4.2.10)$$

Και ολοκληρώνοντας τα δύο μέρη της παραπάνω σχέσης προκύπτει εύκολα το εξής:

$$\int_0^1 u^2(t,z)\,dz \leq (1+\varepsilon_0)u^2(t,0) + (1+\varepsilon_0^{-1})\Big(\int_0^1\int_0^z \frac{ds}{g(s)}\,dz\Big)\Big(\int_0^1 g(s)\big(\frac{\partial u}{\partial s}(t,s)\big)^2\,ds\Big) \quad (4.2.11)$$

Επιπλέον γνωρίζουμε ότι $u(t,z) = u(t,1) - \int_z^1 \frac{\partial u}{\partial s}(t,s)\,ds$, $\forall z \in [0,1]$ και επειδή $\varepsilon_1 > 0$, έχουμε ότι για κάθε $z \in [0,1]$:

$$u^2(t,z) \leq (1+\varepsilon_1)u^2(t,1) + (1+\varepsilon_1^{-1})\Big(\int_z^1 \frac{\partial u}{\partial s}(t,s)\,ds\Big)^2 \quad (4.2.12)$$

Χρησιμοποιώντας την Cauchy-Schwarz ανισότητα έχουμε ότι:

$$\Big(\int_z^1 \frac{\partial u}{\partial s}(t,s)\,ds\Big)^2 \le \Big(\int_z^1 \frac{ds}{g(s)}\Big)\Big(\int_z^1 g(s)\big(\frac{\partial u}{\partial s}(t,s)2\,ds\Big)$$
$$\le \Big(\int_z^1 \frac{ds}{g(s)}\Big)\Big(\int_0^1 g(s)\big(\frac{\partial u}{\partial s}(t,s)\big)^2\,ds\Big), \forall z \in [0,1]$$

Με βάση το προηγούμενο αποτέλεσμα έχουμε για κάθε $z \in [0,1]$:

$$u^2(t,z) \le (1+\varepsilon_1)u^2(t,1) + (1+\varepsilon_1^{-1})\Big(\int_z^1 \frac{ds}{g(s)}\Big)\Big(\int_0^1 g(s)\big(\frac{\partial u}{\partial s}(t,s)\big)^2\,ds\Big) \quad (4.2.13)$$

Από την προηγούμενη ανισότητα εφαρμόζοντας ολοκλήρωση και στα δύο μέλη συνεπάγεται έυκολα ότι:

$$\int_0^1 u^2(t,z)\,dz \le (1+\varepsilon_1)u^2(t,1)+(1+\varepsilon_1^{-1})\Big(\int_0^1\int_z^1 \frac{ds}{g(s)}\,dz\Big)\Big(\int_0^1 g(s)\big(\frac{\partial u}{\partial s}(t,s)\big)^2\,ds\Big) \quad (4.2.14)$$

Πολλαπλασιάζουμε την (4.2.11) με λ και την (4.2.14) με $1-\lambda$ και προσθέτοντας μεταξύ τους, λαμβάνοντας υπόψιν και την (7), προκύπτει το εξής αποτέλεσμα:

$$\int_0^1 u^2(t,z)\,dz \le \lambda(1+\varepsilon_0)u^2(t,0)+(1-\lambda)(1+\varepsilon_1)u^2(t,1)+R\Big(\int_0^1 g(s)\big(\frac{\partial u}{\partial s}(t,s)\big)^2\,ds\Big) \quad (4.2.15)$$

Συνδυάζοντας την (4.2.9) και την (4.2.15) και λαμβάνοντας υπόψιν τους ορισμούς των σχέσεων (4.2.2),(4.2.3) και (7) προκύπτει ότι:

$$\dot V(t) \le -p\frac{k_1}{2}u^2(t,1) - p\frac{k_0}{2}u^2(t,0) - \Big(\sigma - \frac{\varepsilon_f}{2}\Big)\int_0^1 g(z)u^2(t,z)\,dz$$
$$+ pg(1)u(t,1)d_1(t) - pg(0)u(t,0)d_0(t) + \frac{1}{2\varepsilon_f}\|f[t]\|_g^2 \quad (4.2.16)$$

Παρατηρούμε ότι ισχύουν οι σχέσεις:

- $pg(1)u(t,1)d_1(t) \le p\frac{k_1}{2}u^2(t,1) + p\frac{g^2(1)}{2k_1}d_1^2(t)$
- $|pg(0)u(t,0)d_0(t)| \le p\frac{k_0}{2}u^2(t,0) + p\frac{g^2(0)}{2k_0}d_0^2(t)$

Οι παραπάνω σχέσεις σε συνδυασμό με τις σχέσεις (4.2.6),(4.2.16) και θέτοντας όπου $\varepsilon_f = 2(\sigma-\mu)$ όπου $\mu \in (0,\sigma)$ παίρνουμε για κάθε $t \in I$:

$$\dot V(t) \le p\frac{g^2(0)}{2k_0}d_0^2(t) + p\frac{g^2(1)}{2k_1}d_1^2(t) - 2\mu V(t) + \frac{1}{4(\sigma-\mu)}\|f[t]\|_g^2 \quad (4.2.17)$$

Ολοκληρώνοντας τώρα την παραπάνω ανισότητα κατά μέρη προκύπτει ότι για κάθε $t \ge 0$ και $\mu \in (0,\sigma)$:

$$
\begin{aligned}
V(t) \leq \exp\big(-2\mu t\big)V(0) + \frac{1}{2\mu(\sigma-\mu)} \sup_{0\leq s\leq t} \Big(\|f[s]\|_g^2\Big) \\
+ p\frac{g^2(1)}{4k_1\mu} \sup_{0\leq s\leq t} \Big(|d_1(s)|^2\Big) + p\frac{g^2(0)}{4k_0\mu} \sup_{0\leq s\leq t} \Big(|d_0(s)|^2\Big)
\end{aligned} \tag{4.2.18}
$$

Και επειδή:

$$
\frac{1}{2}\int_0^1 g(z)u^2(t,z)\,dz = \frac{1}{2}\|u(t,z)\|_g^2, V(0) = \|u_0\|_g^2 \tag{4.2.19}
$$

συμπεραίνουμε ότι:

$$
\begin{aligned}
\|u[t]\|_g \leq \exp\left(-\mu r\right)\|u_0\|_g + \sqrt{\frac{1}{\mu(\sigma-\mu)} \sup_{0\leq s\leq t} \Big(\|f[s]\|_g\Big)} \\
+ g(1)\sqrt{\frac{p}{2k_1\mu}} \sup_{0\leq s\leq t} \Big(|d_1(s)|\Big) + g(0)\sqrt{\frac{p}{2k_0\mu}} \sup_{0\leq s\leq t} \Big(|d_0(s)|\Big)
\end{aligned}
$$

4.2.1 Μια εφαρμογή του κύριου αποτελέσματος

Θεωρούμε το Παραβολικό Σύστημα με μη-τοπικούς όρους:

$$
\frac{\partial u}{\partial t}(t,z) = p\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(t,z) + \int_0^1 u(t,s)\,ds \tag{4.2.20}
$$

$$
b_1 u(t,0) + \frac{\partial u}{\partial z}(t,0) - d_0(t) = \frac{\partial u}{\partial z}(t,1) - d_1(t) = 0 \tag{4.2.21}
$$

όπου $b_1 \in \mathbb{R}$ σταθερό και $p > 0$. Για να μελετήσουμε το συγκεκριμένο σύστημα σε επίπεδο ύπαρξης και μοναδικότητας, θα χρειαστούμε τα Θεωρήματα που έχουμε παραθέσει σε προηγούμενο κεφάλαιο και για να γίνει αυτό θα κάνουμε τον εξής μετασχηματισμό:

$$
w(t,z) = u(t,z) - d_0(t)z - \frac{d_1(t) - d_0(t)}{2}z^2
$$

για $(t,z) \in \mathbb{R}_+ \times [0,1]$ και έτσι παίρνουμε το παρακάτω αποτέλεσμα:

$$
\frac{\partial w}{\partial t}(t,z) = p\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}(t,z) + \int_0^1 w(t,s)\,ds + f(t,z), z \in (0,1) \tag{4.2.22}
$$

$$
b_1 w(t,0) + \frac{\partial w}{\partial z}(t,0) = \frac{\partial w}{\partial z}(t,1) = 0 \tag{4.2.23}
$$

Όπου έχουμε ορίσει:

$$
f(t,z) = \frac{7}{6}d_(t) - \frac{2}{3}d_0(t) - \dot{d}_0(t)\big(z - \frac{z^2}{2}\big) - \dot{d}_1(t)\frac{z^2}{2}
$$

για $(t,z) \in \mathbb{R}_+ \times [0,1]$. Παρατηρούμε ότι το σύστημα (4.2.22),(4.2.23) ικανοποιεί όλες τις προϋποθέσεις του Πορίσματος (2) με:

$$p(z) = p, r(z) = 1, q(z) = 0, a_2 = b_2 = 1, a_1 = 0, K(u[t]) = 0,$$
$$k := 0, g(z, y) := y, L = 1, Pu = \int_0^1 u(z)\, dz$$

Οπότε το Πόρισμα (2) μας εξασφαλίζει ότι για κάθε επιλογή $w_0 \in \{w \in H^2 : w'(0) + b_1 w(0) = w'(1) = 0\}$ και $f \in C^1(\mathbb{R}_+ \times [0,1])$ μπορούμε να βρούμε μοναδική απεικόνιση $w \in C^0(\mathbb{R}_+ \times [0,1]) \cap C^1((0,\infty) \times [0,1])$ που ικανοποιεί τις $1) w[t] \in C^2([0,1]), \forall t > 0, 2)(4.2.22) \forall (t,z) \in ((0,\infty) \times [0,1]), 3)(4.2.23), \forall t \geq 0, 4)$την αρχική συνθήκη $w[0] = w_0$.

Έχοντας αυτό το αποτέλεσμα αντιστρέφουμε τον μετασχηματισμό και γυρνάμε στις αρχικές μεταβλητές καταλήγοντας στο συμπέρασμα ότι για κάθε $d \in C^2(\mathbb{R}_+)$,$u_0 \in H^2(0,1)$ με $b_1 u(0) + u'(0) - d_0(0) = u'(1) - d_1(0) = 0$ υπάρχει μοναδική απεικόνιση $u \in C^0(\mathbb{R}_+ \times [0,1]) \cap C^1((0,\infty) \times [0,1])$ η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις: $1) u[t] \in C^2([0,1])$, $\forall t > 0$, 2) (4.2.20) $\forall (t,z) \in ((0,\infty) \times [0,1])$, 3)(4.2.21), $\forall t \geq 0$, 4)την αρχική συνθήκη $u[0] = u_0$. Συμπεραίνουμε ότι για κάθε $d \in C^2(\mathbb{R}_+)$, $u_0 \in H^2(0,1)$ με $b_1 u(0) + u'(0) - d_0(0) = u'(1) - d_1(0) = 0$ η λύση $u(t,z)$ του Προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών (4.2.20) και (4.2.21) με $u[0] = u_0$ ικανοποιεί την ακόλουθη εκτίμηση για κάθε $\mu \in (0,\sigma)$ και $t \geq 0$:

$$\|u[t]\|_2 \leq \exp\big(-\mu t\big)\sqrt{e}\|u_0\|_2 + e\sqrt{\frac{p}{2k_1\mu}} \sup_{0\leq s\leq t}\big(|d_1(s)|\big) + \sqrt{\frac{p}{2k_0\mu}} \sup_{0\leq s\leq t}\big(|d_0(s)|\big) \tag{4.2.24}$$

όπου παίρνουμε για

$$\sigma = \frac{2p(e-1)^3 - e(3e-1)}{4e(e-1)}$$
$$k_1 = \frac{e-1}{e}$$
$$k_0 = -2b_1 - (2e-1)(e-1)$$

με τη προϋπόθεση ότι:

$$p > \frac{e(3e-1)}{2(e-1)^3} \tag{4.2.25}$$
$$b_1 < -\frac{1}{2}(2e-1)(e-1) \tag{4.2.26}$$

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα (7) στο σύστημα (4.2.20),(4.2.21) με:

$$g(z) = 1 + (e-1)z, \lambda = \varepsilon_0 = \varepsilon_1 = 1, K(u) = \int_0^1 u(s)\, ds$$
$$c_1(z) = \frac{1}{2}, c_2(z) = \frac{1}{2(e-1)} \kappa\alpha\iota f(t,z) = 0$$

Από τα παραπάνω η ανισότητα (4.2.1) ικανοποιείται και εφαρμόζοντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz προκύπτει ότι:

$$u(z)K(U) = u(z)\int_0^1 u(s)\,ds \le \frac{1}{2}u^2(z) + \frac{1}{2}\Big(\int_0^1 u(s)\,ds\Big)^2 \le$$
$$\le \frac{1}{2}u^2(z) + \frac{1}{2}\int_0^1 (1-(e-1)s)u^2(s)\,ds \int_0^1 \frac{ds}{1-(e-1)s}$$

Οπότε η (4.2.24) είναι άμεση συνέπεια της (4.2.4) λαμβάνοντας υπόψιν το γεγονός ότι: $\|u\|_2 \le \|u\|_g \le \sqrt{e}\|u\|_2 \le \sqrt{e}\|u\|_g$, $\forall u \in C^0([0,1])$,Δηλαδή:

$$\|u[t]\|_2 \le \|u[t]\|_g \le \sqrt{e}\|u[t]\|_g \le$$
$$\le \exp\big(-\mu t\big)\sqrt{e}\|u_0\|_g$$
$$+ e\sqrt{\frac{p}{2k_1\mu}} \sup_{0\le s\le t}\big(|d_1(s)|\big) + \sqrt{\frac{p}{2k_0\mu}} \sup_{0\le s\le t}\big(|d_0(s)|\big)$$

4.3 Συνοριακές Συνθήκες τύπου Dirichlet- Σύνθετη Περίπτωση

Θεώρημα 8 *Θεωρούμε τον SL-τελεστή $A : D \to L_r^2(0,1)$ που ορίζεται από τις σχέσεις (1.2.1)(1.2.2) οπού επιλέγουμε τα $a_2 = b_1 = 1$, $b_2 = 0$ $p(z) = p$, $r(z) = 1$ λαμβάνοντας υπόψιν την υπόθεση (**H**). Θεωρούμε την $K : C^0([0,1]) \to C^0([0,1])$ η οποία είναι συνεχής απεικόνιση με $K(0) = 0$. Θεωρούμε ακόμα ότι υπάρχει $\varepsilon_0, \varepsilon_1 > 0$,$\lambda \in [0,1]$ και $inC^2([0,1]); (0,\infty)$, $c_i \in C^0([0,1])$,$i = 1,2$ και επίσης θεωρούμε τις σχέσεις (4.2.1),(4.2.2),(4.2.3).Τότε για κάθε $u_0 \in L_r^2(0,1)$, $f : \mathbb{R}_+ \times [0,1] \to \mathbb{R}$ τοπικά φραγμένη, $d_1 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ τοπικά φραγμένη για τις οποίες υπάρχει αύξουσα ακολουθία χρόνων $\{\tau_i \ge 0 : i = 0,1,...\}$ με $\lim_{i\to\infty} \tau_i = \infty$ και $u \in C^0(\mathbb{R}_+; L_r^2(0,1))$ με $u \in C^1(I \times [0,1])$, για $I = \mathbb{R}_+ \setminus \{\tau_i \ge 0, i = 0,1,...\}$, η οποία ικανοποιεί τα εξής: $u[t] \in C^2([0,1]), \forall t \in I$, $u[0] = u_0$ και τις ήδη υπάρχουσες σχέσεις:(4.1.1) που ισχύει για κάθε $(t,z) \in I \times (0,1)$ και (3.1.4) με $d_0(t) = 0$.Η ακόλουθη προσέγγιση ισχύει για κάθε $\mu \in (0,\sigma)$ και $t \ge 0$:*

$$\|u[t]\|_g \le \exp(-\mu r)\|u_0\|_g + \sqrt{\frac{1}{\mu(\sigma-\mu)}} \sup_{0\le s\le t}\Big(\|f[s]\|_g\Big)$$
$$+ g(1)\sqrt{\frac{p}{2k_1\mu}} \sup_{0\le s\le t}\Big(|d_1(s)|\Big)\Big) \quad (4.3.1)$$

4.4 Οριακές Συνθήκες τύπου Dirichlet - Απλή Περίπτωση

Θεώρημα 9 *Θεωρούμε τον SL-τελεστή $A : D \to L_r^2(0,1)$ που ορίζεται από τις σχέσεις (1.2.1)(1.2.2) οπού επιλέγουμε τα $a_1 = b_1 = 1$, $a_2 = b_2 = 0$ $p(z) = p$, $r(z) = 1$ λαμβάνοντας υπόψιν την υπόθεση (**H**). Θεωρούμε την $K : C^0([0,1]) \to C^0([0,1])$ η οποία είναι συνεχής απεικόνιση με $K(0) = 0$. Θεωρούμε ακόμα ότι υπάρχει $\varepsilon_0, \varepsilon_1 > 0$,$\lambda \in [0,1]$ και $inC^2([0,1]); (0,\infty)$, $c_i \in C^0([0,1])$,$i = 1,2$ και επίσης θεωρούμε τις σχέσεις (4.2.1),(4.2.2),(4.2.3).Τότε για κάθε $u_0 \in L_r^2(0,1)$, $f : \mathbb{R}_+ \times [0,1] \to \mathbb{R}$*

τοπικά φραγμένη, $d_1 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *τοπικά φραγμένη για τις οποίες υπάρχει αύξουσα ακολουθία χρόνων* $\{\tau_i \geq 0 : i = 0, 1, ...\}$ *με* $\lim_{i\to\infty} \tau_i = \infty$ *και* $u \in C^0(\mathbb{R}_+; L_r^2(0,1))$ *με* $u \in C^1(I \times [0,1])$*, για* $I = \mathbb{R}_+ \setminus \{\tau_i \geq 0, i = 0, 1, ...\}$*, η οποία ικανοποιεί τα εξής:* $u[t] \in C^2([0,1]), \forall t \in I$*,* $u[0] = u_0$ *και τις ήδη υπάρχουσες σχέσεις:(4.1.1) που ισχύει για κάθε* $(t, z) \in I \times (0, 1)$ *και (3.1.4) με* $d_0(t) = d_1(t) \equiv 0$*.Η ακόλουθη προσέγγιση ισχύει για κάθε* $\mu \in (0, \sigma)$ *και* $t \geq 0$*:*

$$\|u[t]\|_g \leq \exp(-\mu r)\|u_0\|_g + \sqrt{\frac{1}{\mu(\sigma-\mu)} \sup_{0\leq s\leq t} \Big(\|f[s]\|_g\Big)} \tag{4.4.1}$$

Bibliography

1. I. Karafyllis and M. Krstic,"Input- to-State Stability for PDEs", Springer, 2019.
2. I. Karafyllis and M. Krstic, "ISS with Respect to Boundary Disturbances for 1-D Parabolic PDEs".
3. I. Karafyllis, Jiang Z-P (2011) Stability and stabilization of nonlinear systems. Series: Communications and control engineering. Springer, London.
4. Boyce WE, Diprima RC (1997) Elementary differential equations and boundary value problems, 6th edn. Wiley, New York.
5. Sontag ED (1989) Smooth stabilization implies coprime factorization. Control 34:435–443.
6. Sontag ED (2008) Input-to-state stability: basic concepts and results. In: Nistri P, Stefani G (eds) Nonlinear and optimal control theory. Lectures given at the C.I.M.E. Summer School Held in Cetraro, Italy, June 19–29 2004, vol 1932. Lecture notes in mathematics, pp 163–220. Springer, Berlin.
7. Νικόλαος Μ. Σταυρακάκης "Διαφορικές Εξισώσεις Συνήθεις Μερικές", Εκδόσεις Τσότρας, Αθήνα, 2017.
8. Μπακόπουλος Α., Χρυσοβέργης Ι., "Αριθμητικές Μέθοδοι Μερικών Διαφορικών εξισώσεων", Αθήνα, 2013.
9. Brezis H. "Analyse fonctionnelle- Théorie et applications: Théorie et applications", 2005