

---

Συναρτήσεις Φραγμένης Κύμανσης  
και  
Αντίστροφα Προβλήματα

---

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Βασιλική Μαρκάκη

Διπλωματούχος Εφαρμοσμένων Μαθηματικών &  
Φυσικών Επιστημών Ε.Μ.Π.

Τομέας Μαθηματικών  
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών & Φυσικών Επιστημών  
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Αθήνα, Νοέμβριος 2021



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Συναρτήσεις Φραγμένης Κύμανσης  
και  
Αντίστροφα Προβλήματα

Διδακτορική Διατριβή

Βασιλικής Μαρκάκη

Διπλωματούχου Εφαρμοσμένων Μαθηματικών &  
Φυσικών Επιστημών Ε.Μ.Π.

Τριμελής Συμβουλευτική Επιτροπή

Α. Χαραλαμπόπουλος, Καθ. Ε.Μ.Π. (Επιβλέπων)

Δ. Γκιντίδης, Καθ. Ε.Μ.Π.

Ν. Γιαννακάκης, Αν. Καθ. Ε.Μ.Π.

Επταμελής Εξεταστική Επιτροπή

Α. Χαραλαμπόπουλος, Καθ. Ε.Μ.Π. (Επιβλέπων)

Δ. Γκιντίδης, Καθ. Ε.Μ.Π.

Ν. Γιαννακάκης, Αν. Καθ. Ε.Μ.Π.

Ε. Γεωργούλης, Καθ. Ε.Μ.Π.

Κ. Χρυσάφινος, Καθ. Ε.Μ.Π.

Ι. Καραφύλλης, Αν. Καθ. Ε.Μ.Π.

Γ. Σμυρλής, Αν. Καθ. Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Νοέμβριος 2021



## Πρόλογος

Η παρούσα διδακτορική διατριβή εκπονήθηκε στον Τομέα Μαθηματικών της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών & Φυσικών Επιστημών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου υπό την επίβλεψη του Καθηγητή Αντώνιου Χαραλαμπίδου και διάρκεσε από τον Ιούλιο 2017 έως τον Οκτώβριο 2021.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Αντώνιο Χαραλαμπίδου για την αδιάκοπη επιστημονική του αρωγή, την ελευθερία που μου παρείχε, την εμπιστοσύνη που μου επιδείκνυε, την έμπνευση και την υπομονή του σε όλη τη διάρκεια της διδακτορικής διατριβής, καθώς και γιατί μου γνώρισε τον κ. Δρόσο Κουρούνη.

Ένα μεγάλο ευχαριστώ οφείλω λοιπόν στον μακρινό μας συνεργάτη κ. Δρόσο Κουρούνη για τη σημαντική επιστημονική του συμβολή στη διδακτορική διατριβή μου όσον αφορά το αριθμητικό-υπολογιστικό κομμάτι, καθώς και για τη φιλική μας συνεργασία στην οποία αφιέρωσε ανιδιοτελώς και φιλότιμα κόπο και χρόνο.

Ευχαριστώ θερμά τον κ. Χαραλαμπίδου και τον κ. Κουρούνη που με καθοδήγησαν όλα αυτά τα χρόνια, ο καθένας από το δικό του δρόμο, ώστε να επιτύχω τους ερευνητικούς μου στόχους.



*“There are only two ways to live your life. One is as though nothing is a miracle. The other is as though everything is.”*

Albert Einstein



Συναρτήσεις Φραγμένης Κύμανσης  
και  
Αντίστροφα Προβλήματα

Περίληψη

Στην πλειονότητά τους οι τεχνικές αντιστροφής που αφορούν στον προσδιορισμό των κατανεμημένων παραμέτρων ενός φυσικού συστήματος ή στην ανίχνευση ατελειών (ρωγμές, κοιλότητες, εγκλεισμοί) που εμφανίζονται εντός των φυσικών δομών διαχωρίζουν τη φυσική και γεωμετρική ανακατασκευή. Η υλοποίησή τους απαιτεί την κατανόηση και ανάλυση του φυσικού φαινομένου, τη δυνατότητα διεξαγωγής κατάλληλων μετρήσεων, τη διαμόρφωση του μαθηματικού μοντέλου που περιγράφει το σύστημα και το σχεδιασμό της αντίστοιχης αριθμητικής μεθόδου ανακατασκευής. Όλα τα παραπάνω αποτελούν τα πλέον σημαντικά βήματα για την επίλυση του αντίστροφου προβλήματος· δηλαδή, τον εντοπισμό της θέσης και του σχήματος της ανομοιογένειας και τον προσδιορισμό των φυσικών ιδιοτήτων της. Ωστόσο, η αναπτυχθείσα μεθοδολογία και η αποτελεσματικότητα αυτής καθορίζονται από την *a priori* επιλογή του συναρτησιακού χώρου που αναμένεται να ανήκουν οι άγνωστοι συντελεστές του συστήματος. Το παρόν έργο υιοθετεί μια νέα προσέγγιση με σκοπό να άρει τον παραδοσιακό διαχωρισμό φυσικής και γεωμετρίας. Ειδικά, προτείνει τον χώρο των συναρτήσεων φραγμένης κύμανσης (*space of functions of bounded variation (BV)*) ως το καταλληλότερο συναρτησιακό πλαίσιο για να φιλοξενεί τις λύσεις του αντίστροφου προβλήματος, αξιοποιώντας το κύριο εγγενές χαρακτηριστικό των *BV*– συναρτήσεων να φέρουν στο πεδίο ορισμού τους την ιδιότητα της πεπερασμένης ασυνέχειας. Με βάση αυτή τη συνθήκη, ο προσδιορισμός τους σημαίνει την εύρεση των φυσικών αλλά και γεωμετρικών ιδιοτήτων του συστήματος, ορίζοντας ένα ενιαίο πλαίσιο αντιστροφής που ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα των εφαρμογών και μας επιτρέπει να εμβαθύνουμε στη φυσική ερμηνεία των φαινομένων.

Η παρούσα πρόταση εστιάζει στην επίλυση του αντίστροφου προβλήματος ανακατασκευής ανομοιογενειών που εμφανίζονται ως διακριτά ομογενή σώματα εντός πεπερασμένου χωρίου, βάσει της παραδοχής ότι οι άγνωστες παράμετροι του μοντέλου, που περιγράφει το πρόβλημα, ανήκουν στον χώρο *BV*. Η υλοποίηση του θέματος ξεκινά με την επίλυση του αντίστροφου προβλήματος προσδιορισμού της αγωγιμότητας,  $\alpha(x)$ , ενός αγωγίμου μέσου, από επιφανειακές μετρήσεις στη μορφή του *Calderón* τελεστή, υπό τη θεώρηση ότι  $\alpha \in BV$  (Κεφ. 2). Η ακολουθούμενη μεθοδολογία συνίσταται στην κατασκευή ενός σχήματος ελαχιστοποίησης που εμπλέκει τα χαρακτηριστικά του ευθέος και αντίστροφου προβλήματος με τη *BV*– δομή της άγνωστης συνάρτησης  $\alpha$ , συνθέτοντας ένα αποδοτικό σχήμα ανακατασκευής. Η επικαιροποίηση του συναρτησιακού ελαχιστοποίησης συντελείται με μια επαναληψιμότητα υβριδικού τύπου, όπου τα υπεισερχόμενα φυσικά πεδία αναζητούνται στον χώρο *Sobolev*  $H^1$ , αλλά ο συντελεστής  $\alpha$  έχει χαρακτηριστικά συνάρτησης φραγμένης κύμανσης. Κάτι τέτοιο πραγματοποιείται με την εισαγωγή μιας βοηθητικής μεταβλητής,  $\omega(x)$ , που συνοδεύει τις παραγώγους της  $\alpha(x)$  και δρα ως ομαλοποιητής των ασυνεχειών της. Υιοθετούμε τη δυϊκή προσέγγιση “*Half-Quadratic Minimization Approach*”, που βιβλιογραφικά κατατάσσεται στις τεχνικές αποκατάστασης εικόνας, ενσωματώνοντας τη μεταβλητή  $\omega$  στον όρο ομαλοποίησης του προβλήματος. Αυτή η διαδικασία ορίζει ένα χρηστικό τύπο κανονικοποίησης για την αριθμητική υλοποίηση του προβλήματος. Στα πλαίσια εφαρμογής της δυϊκής τεχνικής, η βοηθητική μεταβλητή  $\omega$  χειρίζεται μία υποψήφια συνάρτηση  $\alpha$  τη φορά και βάσει αυτού του κανόνα, το σχήμα ελαχιστοποίησης βελτιστοποιείται σε κάθε επανάληψη ώστε να συγκλίνει σταδιακά στην αναζητούμενη διεπιφάνεια. Γενικά, σε αυτά τα προβλήματα οι κλασικές μέθοδοι βελτιστοποίησης εμφανίζουν πολλά τοπικά ελάχιστα. Για

την αντιμετώπιση τέτοιων δυσκολιών, αξιοποιούμε περαιτέρω τη δυϊκή μεταβλητή  $\omega$  για να εισάγουμε στο πρόβλημα ελαχιστοποίησης  $\alpha$  *priori* πληροφορία σχετικά με την πιθανή θέση των χτυπημένων διεπιφανειών. Το κατασκευασμένο συναρτησιακό ελαχιστοποίησης μαζί με την προαναφερθείσα επιπρόσθετη ιδιότητα της μεταβλητής  $\omega$  συνιστούν την προτεινόμενη μέθοδο αντιστροφής. Τεκμηριώνουμε τη μέθοδο θεωρητικά και παρουσιάζουμε αριθμητικά αποτελέσματα ανακατασκευής ενδεικτικών διδιάστατων αγωγίμων προφίλ πιστοποιώντας την καταλληλότητά της.

Η προηγούμενη έρευνα οδήγησε στην επινόηση ενός καινοτόμου σχήματος ανακατασκευής, που αξιοποιεί τα χαρακτηριστικά της *half-quadratic* προσέγγισης και ταυτόχρονα διατηρεί την  $BV$ - ταυτότητα των συντελεστών  $\alpha$  καθ' όλη τη διάρκεια της ελαχιστοποίησης. Το Κεφάλαιο 3 περιγράφει την επίλυση του αντίστροφου προβλήματος της αγωγιμότητας με αυτό το εναλλακτικό σχήμα ανακατασκευής. Η επονομαζόμενη “*Dual Self-Monitored TV – inversion*” τεχνική χειρίζεται ισοδύναμα τα πεδία  $\alpha$  και  $\omega$ , αναπτύσσοντας ένα διπλό μηχανισμό ελέγχου: στη δυϊκή μεταβλητή  $\omega$  και μέσω αυτής στο φορέα των ασυνεχειών της  $\alpha$ . Η αντίστοιχη αριθμητική μέθοδος επιτρέπει την αντιμετώπιση μεγαλύτερου εύρους ανομοιογενών προφίλ, ενώ απαιτεί λιγότερη υπολογιστική ισχύ καθώς συγκλίνει μετά από μία κλήση του αλγορίθμου σε ένα τοπικό ελάχιστο  $(\alpha, \omega)$ . Η υπολογιστική απόδοση της μεθόδου εξετάζεται στις πειραματικές πλατφόρμες αντιστροφής του Κεφαλαίου 2, αλλά και σε μια ιδιόμορφη γεωμετρικά περίπτωση ανομοιογένειας, με τις εξαγόμενες λύσεις να μαρτυρούν μια εντυπωσιακά ακριβή ανακατασκευή, ακόμη και παρουσία ενθόρυβων δεδομένων.

Στη συνέχεια, το έργο ασχολείται με δύο τύπους αντίστροφων προβλημάτων που διατυπώνονται στα πλαίσια της ελαστικότητας (Κεφ. 4). Αρχίζουμε με τη μελέτη του αντίστροφου προβλήματος προσδιορισμού των ελαστικών σταθερών του Lamé σε ένα διδιάστατο γραμμικό και ισότροπο ελαστικό μέσο. Υποθέτουμε ότι οι αναζητούμενοι συντελεστές Lamé  $\lambda, \mu$  είναι μέλη του χώρου  $BV$ ,  $\alpha = (\lambda, \mu) \in (BV)^2$ , και αποσκοπούμε στον ταυτόχρονο προσδιορισμό τους. Η υλοποίηση αυτού του στόχου αντανάκλα στην ιδέα του διπλού μηχανισμού ελέγχου που εφαρμόζεται στο Κεφάλαιο 3 για τον προσδιορισμό μιας  $BV$ - αγωγιμότητας. Η σχεδιασμένη τεχνική αντιστροφής επεκτείνεται στη διανυσματική περίπτωση της  $2d$ - ελαστικότητας αποτελώντας τη γενικευμένη εκδοχή του σχήματος ανακατασκευής της διανυσματικής μεταβλητής  $(\alpha, \omega)$ . Εφαρμόζουμε τη μέθοδο για τον προσδιορισμό ενός σύνθετου υλικού επιλύοντας το αντίστροφο πρόβλημα σε αντιπροσωπευτικές ελαστικές δομές που περιγράφονται από τις Lamé σταθερές τους. Το καταληκτικό σχήμα ελαχιστοποίησης επιτυγχάνει εξίσου ακριβή αποτελέσματα ανακατασκευής με τη βαθμωτή περίπτωση της αγωγιμότητας.

Τέλος, επιθυμούμε να δημιουργήσουμε ένα ανάλογο μοτίβο ελαχιστοποίησης για το αντίστροφο πρόβλημα ανίχνευσης μιας επίπεδης ρωγμής σε συνεχές ισότροπο και ομογενές ελαστικό μέσο, στηριζόμενοι στην υπόθεση ότι και το ίδιο το ελαστικό πεδίο θα μπορούσε να έχει τη δομή μιας  $BV$ - συνάρτησης. Αποδίδουμε στη βοηθητική συνάρτηση  $r(x)$  το ρόλο της δυϊκής μεταβλητής  $\omega(x)$  και αναπτύσσουμε ένα σχήμα κανονικοποίησης βάσει της αποδοτικής αλληλεπίδρασης της  $r$  με την  $L^1$ - νόρμα των ελαστικών μετατοπίσεων, με στόχο τον εντοπισμό μίας ρωγμής σε άπειρο ελαστικό επίπεδο. Επιχειρούμε την αντιστροφή για διαφορετικές υλοποιήσεις του μήκους και της θέσης της ρωγμής με ένα ζεύγος επιφανειακών δεδομένων σε κάθε περίπτωση. Γίνεται σαφές πως μια τέτοια προσέγγιση αποτελεί ένα πρώτο στάδιο υλοποίησης, καθώς το γενικότερο πρόβλημα είναι πολυπαραμετρικό. Στην πράξη, πολλές εκδοχές αυτού του αντίστροφου προβλήματος προκύπτουν σε διαφορετικά φυσικά πλαίσια και αντίστοιχα λαμβάνουν υπόψιν διάφορους περιορισμούς ανάλογα με το πρακτικό πεδίο εφαρμογής και το ζητούμενο της μελέτης. Παρ' όλα αυτά, τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων παροτρύνουν τη χρήση του προτεινόμενου σχήματος αντιστροφής στην εν λόγω περίπτωση.

Bounded Variation Functions  
and  
Inverse Problems

**Abstract**

The majority of inverse techniques aiming at the identification of distributed physical parameters or the detection of buried objects of a geometrical nature (cracks, cavities, inclusions) embedded in the physical structures distinguish the physical from the geometric reconstruction. Their implementation entails the understanding and analysis of the physical phenomenon, the possibility of measurements extraction, the formulation of the mathematical model describing the system and the development of the corresponding numerical reconstruction method. The requirements outlined above consist the most important steps in solving an inverse problem, i.e., determining the position and the shape of the inhomogeneity as well as identifying its physical characteristics. However, the investigation method and its effectiveness depend strongly on the a priori choice of the functional space in which the unknown system's coefficients belong to. The present work adopts a new approach in an effort to bridge the traditional gap between physics and geometry. Namely, it designates the space of functions of bounded variation ( $BV$ ) as the most appropriate functional setting hosting the solutions of inverse problems, exploiting the main intrinsic characteristic of  $BV$ – functions to embed their discontinuity surfaces in the formation of their domain of definition. Accordingly, their investigation implies the identification of system's physical and geometrical features, providing an undivided inversion tool which complies with the real-world applications and allows us to look further into the physical interpretation of the phenomena.

In the current work, emphasis is given to the problem of reconstructing inhomogeneities represented by discrete homogeneous bodies lying into finite domains, under the assumption that the unknown parameters of the model describing the inverse problem belong to the  $BV$ – space. Thesis' context starts with solving the inverse problem of determining the conductivity function,  $\alpha(x)$ , of a conductive medium, from boundary measurements in the form of the *Calderón* operator, considering that  $\alpha \in BV$  (Ch. 2). The designed herein methodology deals with a constructed minimization scheme implicating both the characteristics of the direct and inverse conductivity problem with the unknown  $BV$ – conductivity function, constituting a competent reconstruction scheme. Functional updating is implemented via a dual iterative scheme, where the related potential fields are located in the *Sobolev* space  $H^1$ , but the coefficient conductivity carries the  $BV$ – structure. This is accomplished by introducing an auxiliary function,  $\omega(x)$ , for accompanying  $\alpha$ 's gradients acting as a mollifier of conductivity's discontinuity surfaces. We adopt the dual approach “*Half-Quadratic Minimization Approach*”, encountered in bibliography as an image restoration technique, incorporating the variable  $\omega$  into the regularization of the problem. This process defines a useful regularization type for the subsequent numerical implementation. In the realm of the *half-quadratic* technique, the variable  $\omega$  is handling one at a time candidate function  $\alpha$  and on the basis of this routine the minimization scheme is being optimized at every iteration so as to converge progressively to the sought interfaces. In general, the classical optimization techniques for defect identification exhibit local minima. To circumvent such pitfalls, we have taken further advantage of the dual variable  $\omega$  by introducing into the minimization problem prior information about the possible location of the hidden discontinuity surfaces. The constructed minimization functional in conjunction with the aforementioned additional role of  $\omega$  establish the presented inversion method. We validate and illustrate our

---

theoretical results with numerical tests of some indicative two-dimensional conductivity profiles showing the efficiency of the method.

The previous investigation led to the invention of a novel reconstruction scheme, which involves the duality of the *half-quadratic* approach and concurrently maintains the  $BV$ -structure of the coefficients  $\alpha$  throughout the optimization process. Chapter 3 solves the inverse conductivity problem via this innovative reconstruction scheme. The denominated “*Dual Self-Monitored TV-inversion*” technique treats equivalently the fields  $\alpha$  and  $\omega$  activating a monitoring mechanism controlling the dual variable  $\omega$ , which simultaneously monitors the *jump set* of  $\alpha$ . The developed numerical method permits the identification of a wider range of inhomogeneity profiles and at the same time with lower computational cost, as it converges in one algorithmic step to a local minimum  $(\alpha, \omega)$ . The method’s performance is demonstrated on the simulation phantoms of Chapter 2 and additionally a more involved inclusion case has been investigated, with the numerical results revealing an impressively accurate reconstruction, even in the presence of noisy data.

Next, the work is devoted to two types of inverse problems arising in the context of elasticity (Ch. 4). First, we study the inverse problem of identifying the Lamé moduli in a two-dimensional linear and isotropic elastic medium. We focus on the simultaneous recovery of both the Lamé coefficients  $\lambda, \mu$ , considering them as bounded variation functions,  $\alpha = (\lambda, \mu) \in (BV)^2$ . The realization of this purpose invokes the concept of the dual monitoring mechanism implemented in Chapter 3 for the identification of a  $BV$ -conductivity. The suggested therein parameter identification approach has been extended to the vectorial case of the  $2d$ -linearized elasticity, defining a generalization of the reconstruction scheme on the vector variable  $(\alpha, \omega)$ . We employ the framework of the reconstruction of representative elastic structures described by their Lamé parameters for the identification of a bimaterial. The resulting minimization scheme yields exact reconstruction solutions in accordance with the scalar conductivity case.

Finally, we would like to create an analogous minimization pattern for the inverse problem of identifying a planar crack in a continuous isotropic and homogeneous elastic medium, derived from the hypothesis that the elastic field itself could support a  $BV$ -structure. We recast the dual variable  $\omega(x)$  with the auxiliary variable  $r(x)$  and schedule a regularization term based on connecting efficiently the variable  $r$  along with the  $L^1$ -norm of the displacement fields, for the purpose of crack identification in an infinite elastic plane. We recur the inversion for different implementations varying with the length and the position of the crack generating a single boundary data pair each time. It turns out obviously that such an approach constitutes only a first stage in the implementation regime of this inverse problem, since the general problem is multiparametric. In practice, many variations of this problem type can be found in different physical contexts and are accordingly subject to several limitations depending on the practice area and the research objectives. Nevertheless, the simulation results promote the applicability of the proposed inversion technique to this testing case.



# Περιεχόμενα

Περίληψη . . . . .	i
Abstract . . . . .	iii
<b>1 Εισαγωγή</b>	<b>1</b>
1.1 Τα αντίστροφα προβλήματα . . . . .	2
1.2 Ο χώρος $BV$ . . . . .	6
<b>2 Το αντίστροφο πρόβλημα της αγωγιμότητας υπό το πρίσμα των <math>BV</math>- συναρτήσεων</b>	<b>13</b>
2.1 Εισαγωγή . . . . .	13
2.2 Βασικές έννοιες και χρήσιμοι ορισμοί . . . . .	16
2.2.1 Κυρτότητα και κάτω ημισυνέχεια . . . . .	16
2.2.2 Η διαδικασία χαλάρωσης ( <i>Relaxation</i> ) . . . . .	19
2.2.3 Η μέθοδος της ομογενοποίησης . . . . .	22
2.2.4 $\Gamma$ - Σύγκλιση . . . . .	25
2.3 Το αντίστροφο πρόβλημα της αγωγιμότητας . . . . .	27
2.3.1 Διερεύνηση των οριακών διαδικασιών του αντίστροφου προβλήματος της αγωγιμότητας μέσω της $H$ - και $G$ - σύγκλισης . . . . .	28
2.4 Το πρόβλημα ελαχιστοποίησης . . . . .	33
2.5 Αριθμητική υλοποίηση . . . . .	40
2.5.1 Διαμόρφωση του κατάλληλου αριθμητικού σχήματος για την επίλυση του αντίστροφου προβλήματος της αγωγιμότητας . . . . .	40
2.5.2 $BV$ Regularized Inversion algorithm . . . . .	43
2.6 Εφαρμογές . . . . .	44
2.6.1 Ομόκεντρο πρόβλημα . . . . .	47
2.6.2 Έκκεντρο πρόβλημα . . . . .	47
2.6.2.1 Ισχυρά έκκεντρο πρόβλημα . . . . .	47
2.6.2.2 Ήπια έκκεντρο πρόβλημα . . . . .	48
2.6.3 $BV$ Φυσική ανακατασκευή . . . . .	49
2.6.4 Ομόκεντρο πρόβλημα: Ανακατασκευή με $N$ - ζεύγη δεδομένων . . . . .	49
2.6.4.1 Αναλυτικά δεδομένα . . . . .	49
2.6.4.2 Ενθόρυβα δεδομένα . . . . .	50
2.6.5 Το πρόβλημα του διπλού εγκλεισμού: Ανακατασκευή με $N$ - ζεύγη δεδομένων . . . . .	51
2.6.6 Εικόνες . . . . .	53
2.6.7 Πίνακες αποτελεσμάτων . . . . .	67
<b>3 Ένα εναλλακτικό σχήμα ανακατασκευής για το αντίστροφο πρόβλημα της αγωγιμότητας</b>	<b>73</b>
3.1 Το δυϊκό σχήμα κανονικοποίησης . . . . .	74
3.2 Το πρόβλημα ελαχιστοποίησης . . . . .	75
3.3 Η δυϊκή μέθοδος αντιστροφής $SGTV$ . . . . .	79

3.4	Εφαρμογές . . . . .	80
3.4.1	Το πρόβλημα του μονού εγκλεισμού . . . . .	81
3.4.1.1	Ισχυρά έκκεντρο πρόβλημα . . . . .	82
3.4.1.2	Ήπια έκκεντρο πρόβλημα . . . . .	82
3.4.1.3	Ομόκεντρο πρόβλημα . . . . .	82
3.4.2	Το πρόβλημα του διπλού εγκλεισμού . . . . .	82
3.4.3	Το πρόβλημα “ <i>Dolphin</i> ” . . . . .	83
3.4.4	Εικόνες . . . . .	84
3.4.5	Πίνακες αποτελεσμάτων . . . . .	92
<b>4</b>	<b>Αντίστροφα προβλήματα στη διδιάστατη ελαστικότητα - Εφαρμογές</b>	<b>94</b>
4.1	Προσδιορισμός των παραμέτρων Lamé μέσω του γενικευμένου σχήματος ανακατασκευής της <i>SGTV</i> . . . . .	95
4.1.1	Διατύπωση του προβλήματος . . . . .	96
4.1.2	Το δυϊκό σχήμα κανονικοποίησης . . . . .	98
4.1.3	Το πρόβλημα ελαχιστοποίησης . . . . .	99
4.1.4	Εφαρμογές . . . . .	102
4.1.4.1	Το πρόβλημα του μονού εγκλεισμού. . . . .	104
4.1.4.2	Το πρόβλημα “ <i>Dolphin</i> ” . . . . .	104
4.1.5	Εικόνες . . . . .	105
4.1.6	Πίνακες αποτελεσμάτων . . . . .	111
4.2	Εντοπισμός μιας επίπεδης ρωγμής - Προσομοίωση και Ανακατασκευή . . . . .	112
4.2.1	Το σχήμα ελαχιστοποίησης . . . . .	113
4.2.2	Αριθμητική υλοποίηση . . . . .	114
4.2.2.1	Το ευθύ πρόβλημα . . . . .	116
4.2.2.2	Το αντίστροφο πρόβλημα . . . . .	120
	Αναφορές . . . . .	128

# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

Το 1862 ο *Δαρβίνος* προέβλεψε την ύπαρξη ενός άγνωστου είδους σκόρου, στη Μαδαγασκάρη, με έντεκα ίντσες προβοσκίδα [1]. Η πρόβλεψή του αυτή βασίστηκε στην παρατήρηση της orchideάς *Angraecum sesquipedale*, η οποία διαθέτει νεκταροφόρο πλήκτρο μήκους έως 30 εκ., και μόνο ένα έντομο με αντίστοιχα μακριά γλώσσα θα μπορούσε να φτάσει στο νέκταρ των άνθων της. Πράγματι, σαράντα χρόνια μετά περιγράφηκε η νυχτοπεταλούδα *Xanthopan morgani praedicta* με γλώσσα που φτάνει τα 30 εκ.

Γενικά, στις εντομολογικές έρευνες της δυναμικής πληθυσμών, όπως για παράδειγμα στη μελέτη της ποικιλίας των σκόρων, ένας από τους πρώτους συλλογισμούς στον οποίο κανείς «ευθέως» οδηγείται είναι η πηγή τροφής αυτού του πληθυσμού, και σίγουρα όχι αυτός του *Δαρβίνου*. Η ανατρεπτική πορεία σκέψης του αποτελεί αντιπροσωπευτικό παράδειγμα του «αντίστροφου συλλογισμού», που χαρακτηρίζει τα αντίστροφα προβλήματα και ορίζεται ως ακριβώς το αντίστροφο της «ευθείας» πορείας σκέψης.

Στο επιστημονικό μαθηματικό πλαίσιο, τα αντίστροφα προβλήματα συνίστανται εν γένει στο να γνωρίζει κανείς την απόκριση ενός συστήματος, στο οποίο δεν έχει άμεση πρόσβαση, σε συγκεκριμένο τύπο διεγέρσεων (αποτέλεσμα) και μέσω αυτού του συνδυασμού δεδομένων να αντλεί πληροφορίες για τη σύστασή του (αίτιο). Ο όρος σύσταση αναφέρεται σε εγγενή χαρακτηριστικά του συστήματος που περιγράφουν συνήθως τη γεωμετρία ή τη φυσική του δομή. Οι φυσικές και γεωμετρικές προσδιοριστέες παράμετροι του συστήματος έχουν a priori γνωστές ιδιότητες βάσει των οποίων κατατάσσονται σε κατάλληλους μαθηματικούς χώρους.

Τα αντίστροφα προβλήματα είναι πρακτικά μη-καλώς τοποθετημένα, αφού εκ κατασκευής μοντελοποιούν φυσικές καταστάσεις όπου οι παράμετροι του μοντέλου είναι άγνωστες. Από τις τρεις ιδιότητες *Hadamard* που διέπουν ένα καλώς ορισμένο πρόβλημα, η ευστάθεια είναι συνήθως που παραβιάζεται. Ακόμα και η διερεύνηση της ύπαρξης μίας λύσης τους όμως αποτελεί ένα ιδιαίτερος απαιτητικό, από θεωρητικής σκοπιάς, εγχείρημα. Πέρα από την ασταθή διαδικασία της αντιστροφής σε σύγκριση με την ευθεία πορεία επίλυσης, μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζει η άρρηκτη σύνδεση της επιλυσιμότητας με τον χώρο που φιλοξενεί την επιδιωκόμενη λύση [2]. Ανάλογα με τον προεπιλεγμένο συναρτησιακό χώρο αναπτύσσονται διαφορετικές τεχνικές ανακατασκευής των ιδιοτήτων του συστήματος.

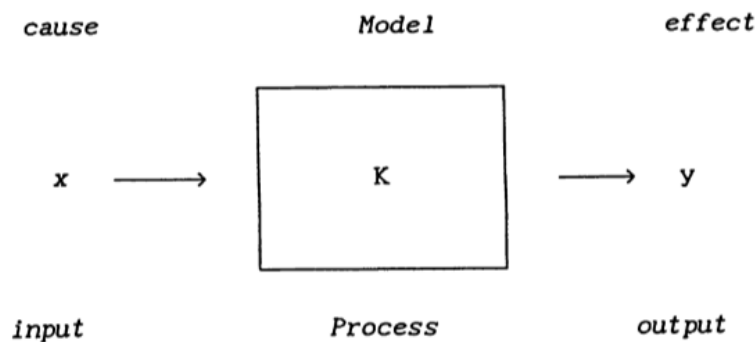
Η ακολουθούμενη μέχρι τώρα πρακτική στην έρευνα των αντίστροφων προβλημάτων διαχωρίζει την αναζήτηση των γεωμετρικών και φυσικών χαρακτηριστικών του υπό μελέτη συστήματος. Στο πλαίσιο των δυνατοτήτων που προσφέρει η μοντελοποίηση των συναρτήσεων φραγμένης κύμανσης (*functions of bounded variation (BV)*) υιοθετείται μια νέα προσέγγιση με στόχο τον συγκερασμό των δύο αυτών χαρακτηριστικών. Κάθε *BV*-συνάρτηση έχει ενσωματωμένο στη δομή της το πεδίο ορισμού της με έναν ενιαίο τρόπο (βλ. Ενότητα 1.2). Συνεπώς, ο προσδιορισμός της σημαίνει ταυτόχρονα τον καθορισμό της φυσικής δομής αλλά και των γεωμετρικών ιδιοτήτων του πεδίου ορισμού της, με πρωταρχικής σημασίας εντοπισμό τις διεπιφάνειες εντός του συστήματος. Ειδικότερα, ο χώρος

των συναρτήσεων φραγμένης κύμανσης επιτρέπει τις ασυνέχειες πρώτου είδους, αλλά με τέτοιο τρόπο ώστε, αν κανείς εισάγει τη διαδικασία παραγωγής, η παράγωγος μπορεί και ξεφεύγει από την κλασική έννοια των ολοκληρωτέων κατά *Sobolev* συναρτήσεων και καθίσταται μέτρο *Dirac*. Αυτό το μέτρο έχει ως φορέα του τις διεπιφάνειες, στις οποίες και συντελούνται οι φυσικές αλλαγές του συστήματος και οι οποίες γενικότερα αποτελούν τα πιο κρίσιμα σημειοσύνολα ανακατασκευής των εφαρμογών. Έτσι, η κλασική θεωρία των χώρων *Sobolev* συμπληρώνεται με αυτή του χώρου *BV*.

## 1.1 Τα αντίστροφα προβλήματα

«Τα αντίστροφα προβλήματα είναι πολύ καινούργια και πολύ παλιά» [1]. Τα σύγχρονα υψηλής τεχνολογίας μηχανήματα στην ιατρική επεξεργασία εικόνας αποτελούν ουσιαστικούς λύτες αντίστροφων προβλημάτων: ανακατασκευάζουν δύο ή τριών διαστάσεων αντικείμενα από προβολές. Περισσότερο από δύο χιλιάδες χρόνια πριν, ο *Πλάτωνας*, στο έβδομο βιβλίο της *Πολιτείας*, θέτει το ίδιο πρόβλημα στην αλληγορία του σπηλαίου, όπου αναλογίζεται τις φιλοσοφικές επιπτώσεις μιας ανακατασκευασμένης πραγματικότητας. Πιο συγκεκριμένα, περιγράφει ένα σύνολο ανθρώπων που ζουν όλη τους τη ζωή αλυσοδεμένοι σε μια σπηλιά, με το κεφάλι τους στερεωμένο και ακίνητο, ώστε να κοιτάζουν μόνο μπροστά, στον τοίχο της σπηλιάς. Οι δεσμώτες βλέπουν τις σκιές που σχηματίζονται στον τοίχο από αντικείμενα που περνούν μπροστά από μια φωτιά στο πίσω μέρος της σπηλιάς και τις ονοματίζουν. Είναι οι σκιές των ομοιωμάτων που κρατούν οι άνθρωποι πίσω τους, καθώς περπατούν μπροστά από τη φωτιά. Οι σκιές συνιστούν την πραγματικότητα των φυλακισμένων - μια πραγματικότητα δέσμια των εντυπώσεών τους και όχι «αληθινή» - μέχρι που κάποια μέρα καταφέρνουν να ελευθερωθούν και ανακαλύπτουν ότι η πραγματικότητά τους δεν είναι αυτή που νόμιζαν.

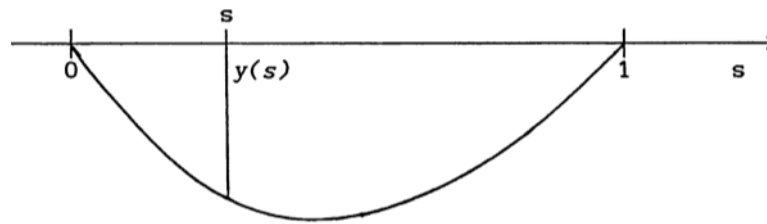
Το αντίστροφο πρόβλημα προκύπτει από τη διατύπωση του ευθέως προβλήματος «προς τα πίσω», δηλαδή με τον αντίστροφο τρόπο, προϋποθέτοντας φυσικά την ύπαρξη του τελευταίου. Το σύνηθες ευθύ πρόβλημα περιγράφει το αποτέλεσμα  $y$  για ένα δεδομένο αίτιο  $x$  μέσω μιας ντετερμινιστικής διαδικασίας  $K: y = Kx$ . Σε αυτά τα προβλήματα υποθέτουμε ότι ο τελεστής  $K$  είναι καλώς ορισμένος και συνεχής, έτσι ώστε για κάθε αίτιο  $x$  υπάρχει μοναδικό αποτέλεσμα  $y$  και μικρές αλλαγές στο  $x$  συνεπάγονται μικρές αλλαγές στο  $y$ . Βάσει ενός τέτοιου τύπου προβλήματος, δύο είδη αντίστροφων προβλημάτων προκύπτουν αμέσως: αυτό της αιτιότητας (δεδομένων των  $K, y$ , υπολόγισε το  $x$ ) και αυτό του προσδιορισμού του μοντέλου (δεδομένων των  $x, y$ , υπολόγισε το  $K$ ).



Εικόνα 1.1

Τί προκαλεί όμως ένα δεδομένο αποτέλεσμα; Συχνά, αυτή η ερώτηση δεν έχει συγκεκριμένη απάντηση. Ίσως, μερικές φορές μπορούμε να προτείνουμε έναν αριθμό από διαφορετικά πιθανά αίτια και άλλες να μη μπορούμε να βρούμε ούτε ένα που να δικαιο-

λογεί αυτό το αποτέλεσμα ή ακόμα, μπορεί να έρθουμε αντιμέτωποι με την κατάσταση όπου τελείως ανόμοια αίτια καταλήγουν σε πανομοιότυπα αποτελέσματα. Τα προς μελέτη μοντέλα τέτοιων αντιστροφών προβλημάτων θεωρούνται στη πλειοψηφία τους γραμμικά, ερμηνεύοντας έτσι μια απλοποιημένη ή εξιδανικευμένη κατάσταση της φυσικής πραγματικότητας. Ένα πολύ απλό αντίστροφο πρόβλημα που περιγράφει αυτήν τη σχέση αιτιότητας (βλ. Εικόνα 1.1) προέρχεται από τη στατική: Έστω ένα καλώδιο μεταβλητής πυκνότητας με τα άκρα του προσαρτημένα σε δύο οριζόντιες στηρίξεις (βλ. Εικόνα 1.2). Υποθέτουμε ότι η τάση του καλωδίου είναι σταθερή και ότι η κάθετη παραμόρφωση  $y$  σε κάθε σημείο του είναι μικρή σχετικά με το μήκος του. Το αντίστροφο πρόβλημα διατυπώνεται ως εξής: Ποια η κατανομή μάζας του καλωδίου που προκαλεί την παρατηρούμενη παραμόρφωση  $y$ ; Αν  $x(s)$  η πυκνότητα βάρους του καλωδίου, κατασκευάζουμε ένα μοντέλο  $K$  για τη σχέση βάρους-παραμόρφωσης:  $y = Kx$  [1].



Εικόνα 1.2

Αντίστοιχα, ένα απλό αντίστροφο πρόβλημα προσδιορισμού του μοντέλου (βλ. Εικόνα 1.3) προέρχεται από το κλασικό μοντέλο δυναμικής των πληθυσμών σε ένα κλειστό σύστημα ή αλλιώς μοντέλο του *Malthus* [3], σύμφωνα με το οποίο η ταχύτητα μεταβολής ενός πληθυσμού είναι ανάλογη του πλήθους των ατόμων που είναι παρόντα στο σύστημα σε μια δεδομένη στιγμή:

$$\frac{du}{dt} = ru, \quad (1)$$

όπου  $u = u(t)$  ο πληθυσμός κατά τη χρονική στιγμή  $t$  και  $r$  ο σταθερός ρυθμός αύξησής του. Εύκολα προκύπτει ότι το ευθύ πρόβλημα έχει λύση  $u(t) = u_0 e^{rt}$ , όπου  $u_0 = u(0)$ , και η παράμετρος  $r$  μπορεί να προσδιοριστεί μέσω του υπολογισμού μιας μετέπειτα τιμής του  $u$ , έστω  $u(1)$ :

$$r = \ln(u(1)/u_0).$$

Τί συμβαίνει όμως όταν η παράμετρος  $r$  είναι συνάρτηση του  $t$  (π.χ. ρυθμός αναπαραγωγικής ικανότητας); Το αντίστροφο πρόβλημα προσδιορισμού της  $r(t)$  μπορεί να επιλυθεί απευθείας από τη διαφορική εξίσωση, δηλαδή

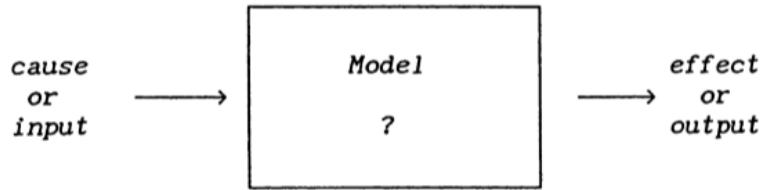
$$r(t) = \frac{du}{dt}/u = \frac{d}{dt}(\ln u). \quad (2)$$

Επομένως, για τον προσδιορισμό της κατανεμημένης παραμέτρου  $r(t)$ , αρκεί να παρατηρήσουμε την ποσότητα  $u$  (θεωρείται θετική) και να εφαρμόσουμε την (2). Η ποσότητα  $u(t)$  όμως αποτελεί το υπολογιστικό δεδομένο και άρα υπόκειται σε υπολογιστικά σφάλματα. Κάτι τέτοιο μπορεί να έχει δυσάρεστες συνέπειες στην πορεία επίλυσης, όπως εξαιρετικά ασταθή διαδικασία παραγωγίσις. Για παράδειγμα, έστω ότι εισάγουμε μια διαταραχή  $u_\varepsilon(t)$  της  $u(t)$ . Τότε, η  $\ln u(t)$  μεταπίπτει στην  $\ln u_\varepsilon(t)$  και αν υποθέσουμε ότι

$$\ln u_\varepsilon(t) = \ln u(t) + \varepsilon \sin(t/\varepsilon^2),$$

όπου  $\varepsilon$  μικρός θετικός αριθμός, τότε η διαταραχή στην  $\ln u(t)$  είναι αρκετά μικρή, ενώ στην  $\frac{d}{dt} \ln u(t)$  πολύ μεγάλη [1]:

$$\frac{1}{\varepsilon} \cos(t/\varepsilon^2).$$



Εικόνα 1.3

Γενικότερα, σε αυτή τη κατηγορία αντίστροφων προβλημάτων η «είσοδος» θεωρείται δεδομένο ακρίβειας, ενώ η «έξοδος» υπολογίζεται. Τα δεδομένα εισόδου μπορεί να είναι αρχικές ή συνοριακές συνθήκες, εξωτερικές δυνάμεις ή ακόμα και μια γεωμετρική διάταξη. Η διαδικασία προσδιορισμού ορισμένων παραμέτρων που χαρακτηρίζουν το μοντέλο, με βάση αυτόν το συνδυασμό δεδομένων εισόδου-εξόδου, είναι ιδιαίτερος απαιτητική, καθώς αμέσως προκύπτουν τα ακόλουθα ζητήματα: Υπάρχει κάποιο μοντέλο που αντιστοιχεί στα υπάρχοντα δεδομένα (ύπαρξη); Είναι μόνο ένα ή περισσότερα (μοναδικότητα); Πόσο ευαίσθητο είναι το μοντέλο στα υπολογιστικά σφάλματα των δεδομένων (ευστάθεια); Πώς κανείς επιτυγχάνει σταθερές αξιόπιστες τιμές για τις παραμέτρους που προσδιορίζουν το μοντέλο (προσέγγιση);

Οι φυσικές θεωρίες μας επιτρέπουν να κάνουμε προβλέψεις: βάσει μιας πλήρους περιγραφής ενός φυσικού συστήματος μπορούμε να προβλέψουμε το αποτέλεσμα ορισμένων μετρήσεων. Η επιστημονική διαδικασία που ακολουθείται στη μελέτη ενός φυσικού συστήματος διατυπώνεται στα επόμενα τρία βήματα [4]:

- (i) Παραμετροποίηση του συστήματος (*Parametrization*): εύρεση του ελάχιστου συνόλου παραμέτρων των οποίων οι τιμές χαρακτηρίζουν απόλυτα το σύστημα (σε μια συγκεκριμένη κατάσταση).
- (ii) Ευθεία μοντελοποίηση (*Forward modeling*): εύρεση των φυσικών νόμων που επιτρέπουν, για δεδομένες τιμές των παραμέτρων του μοντέλου, την πρόβλεψη των αποτελεσμάτων των μετρήσεων για κάποιες από τις παρατηρήσιμες παραμέτρους.
- (iii) Αντίστροφη μοντελοποίηση (*Inverse modeling*): χρήση των πειραματικών αποτελεσμάτων των παρατηρήσιμων παραμέτρων για τον προσδιορισμό των πραγματικών τιμών των παραμέτρων του μοντέλου.

Τα πρώτα δύο βήματα είναι κυρίως επαγωγικά, ενώ το τρίτο συμπερασματικό. Η διαδικασία πρόβλεψης των αποτελεσμάτων των μετρήσεων με δεδομένα τις τιμές των παραμέτρων, που περιγράφουν το μοντέλο, αποτελεί το ευθύ πρόβλημα (*forward problem*), ενώ η ακριβώς αντίστροφη διαδικασία, κατά την οποία από τα αποτελέσματα ενός συνόλου μετρήσεων των παρατηρήσιμων μεταβλητών υπολογίζονται οι τιμές των παραμέτρων του συστήματος, ορίζει το αντίστροφο πρόβλημα (*inverse problem*). Στο ευθύ πρόβλημα, η ύπαρξη, η μοναδικότητα και η ευστάθεια των λύσεων θεωρούνται ως ένα βαθμό δεδομένες, ενώ στο αντίστροφο καμία από αυτές τις ποιότητες δεν είναι προφανής.

Τα αντίστροφα προβλήματα δεν είναι κατ' ανάγκη μοναδικά επιλύσιμα. Για παράδειγμα, έστω ότι γνωρίζουμε τις τιμές του βαρυτικού πεδίου γύρω από έναν πλανήτη: Δεδομένης της κατανομής της μάζας μέσα στον πλανήτη, μπορούμε μοναδικά να προβλέψουμε τις τιμές του βαρυτικού πεδίου γύρω από αυτόν (*forward problem*), αλλά υπάρχουν διαφορετικές κατανομές μάζας που δίνουν ακριβώς το ίδιο βαρυτικό πεδίο στον χώρο έξω από τον πλανήτη. Επομένως, το αντίστροφο πρόβλημα - προσδιορισμού της κατανομής της μάζας από μετρήσεις του βαρυτικού πεδίου - έχει πολλές λύσεις (στην πραγματικότητα, άπειρες) [4].

Όπως προαναφέρθηκε, κύριο χαρακτηριστικό των αντίστροφων προβλημάτων είναι η αστάθεια. Η αριθμητική διαχείριση της επίλυσής τους απαιτεί κάποιου είδους διακριτοποίηση με σκοπό την κατασκευή ενός προσεγγιστικού προβλήματος με πεπερασμένο πλήθος αγνώστων. Προβλήματα πεπερασμένης, μικρής διάστασης είναι γενικά ευσταθή, όμως όταν η διακριτοποίηση βελτιστοποιείται, ώστε να προσομοιώνει όσο το δυνατόν καλύτερα το αρχικό πρόβλημα, ο αριθμός των μεταβλητών αυξάνεται και η αστάθεια εμφανίζεται στο διακριτό μοντέλο.

Ο *Hadamard*, γύρω στο 1900, εδραίωσε την έννοια της «καλής τοποθέτησης» των προβλημάτων (*well-posed* ή *properly posed problems*), με χαρακτηριστικά της την ύπαρξη, τη μοναδικότητα και την ευστάθεια των λύσεων, ενώ είχε την άποψη πως οι φυσικές καταστάσεις πάντα οδηγούν σε καλώς ορισμένα προβλήματα. Άποψη ευρέως αποδεκτή, όπως διαβάζουμε στους *Courant* και *Hilbert* [1] “... a mathematical problem cannot be considered as realistically corresponding to physical phenomena unless a variation of the given data in a sufficiently small range leads to an arbitrarily small change in the solution.” Ενδιαφέρον παρουσιάζει ότι μόλις τρεις σελίδες παρακάτω βρίσκουμε “‘properly posed’ problems are by far not the only ones which appropriately reflect real phenomena.” Σήμερα, γνωρίζουμε ότι πολλά από τα αντίστροφα προβλήματα που απασχολούν την επιστήμη και την τεχνολογία συνθέτουν μαθηματικά προβλήματα που δεν είναι καλώς τοποθετημένα κατά *Hadamard* και αυτός είναι ο λόγος που αποτελούν πρόκληση για τη σύγχρονη μαθηματική θεωρία. Μεγαλύτερη όμως πρόκληση από τις επιστημονικές εφαρμογές αποτελεί η προσπάθεια ερμηνείας και υιοθέτησης του «αντίστροφου συλλογισμού» ως αυτούσιας διαδικασίας, ανεξάρτητα από κάθε πεδίο έρευνας ή γνώσης. Η μύηση ενός τέτοιου συλλογισμού μπορεί να οδηγήσει σε νέες προοπτικές και παράτολμες ιδέες.

## 1.2 Ο χώρος BV

Σε αυτή την ενότητα εισάγουμε το βασικό συναρτησιακό πλαίσιο του χώρου των συναρτήσεων φραγμένης κύμανσης. Αρχίζουμε με μερικές στοιχειώδεις γενικές ιδιότητες της θεωρίας μέτρου.

Έστω  $\Omega$  ένας διαχωρίσιμος τοπικά συμπαγής τοπολογικός χώρος (για παράδειγμα, ο  $\mathbb{R}^N$  ή ένα ανοιχτό υποσύνολο του  $\mathbb{R}^N$ ) και  $\mathcal{B}(\Omega)$  το Borel πεδίο του (η  $\sigma$ -άλγεβρα των συνόλων Borel του  $\Omega$ ). Συμβολίζουμε με  $\mathbf{M}(\Omega, \mathbb{R}^m)$  το σύνολο όλων των  $\mathbb{R}^m$ -μέτρων Borel. Υπενθυμίζουμε ότι ο  $\mathbf{M}(\Omega, \mathbb{R}^m)$  είναι ο διανυσματικός χώρος όλων των συνολοσυναρτήσεων  $\mu : \mathcal{B}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^m$  που ικανοποιούν τις ιδιότητες  $\mu(\emptyset) = 0$  και την  $\sigma$ -προσθετικότητα:

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(B_n), \text{ αν } \{B_n\} \text{ είναι ακολουθία ξένων ανά δύο στοιχείων της } \mathcal{B}(\Omega).$$

Στην περίπτωση όπου  $m = 1$ , χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό  $\mathbf{M}(\Omega)$  και τα στοιχεία του  $\mathbf{M}(\Omega)$  ονομάζονται προσημασμένα (ή πραγματικά) μέτρα Borel. Συμβολίζουμε με  $\mathbf{M}^+(\Omega)$  το υποσύνολο των μη αρνητικών του στοιχείων.

Αν  $A$  Borel υποσύνολο του  $\Omega$ , ο περιορισμός του  $\mu \in \mathbf{M}(\Omega, \mathbb{R}^m)$  στο  $A$  είναι το μέτρο Borel  $\mu|_A \in \mathbf{M}(\Omega, \mathbb{R}^m)$  που ορίζεται για κάθε  $E \in \mathcal{B}(\Omega)$  ως  $\mu|_A(E) = \mu(E \cap A)$ .

Ο φορέας ενός μέτρου  $\mu \in \mathbf{M}(\Omega, \mathbb{R}^m)$  είναι το μικρότερο κλειστό σύνολο  $E$  του  $\Omega$ , και σημειώνεται με  $spt(\mu)$ , έτσι ώστε  $|\mu|(\Omega \setminus E) = 0$ . Τότε, άμεσα προκύπτει ότι

$$spt(\mu) = \{x \in \Omega : \forall \rho > 0, |\mu|(B_\rho(x)) > 0\},$$

όπου  $B_\rho(x)$  η ανοιχτή μπάλα στο  $\Omega$  με κέντρο  $x \in \Omega$  και ακτίνα  $\rho$ .

**Πρόταση 1.2.1** ([5]). Τα μέτρα Borel  $\mu$  στον  $\mathbf{M}^+(\Omega)$  είναι κανονικά, δηλαδή, για κάθε Borel σύνολο  $B$  του  $\Omega$ , έχουμε

$$\begin{aligned} \mu(B) &= \sup\{\mu(K) : K \subset B, K \text{ συμπαγές στο } \Omega\}, \\ &= \inf\{\mu(U) : B \subset U, U \text{ ανοιχτό στο } \Omega\}. \end{aligned}$$

Η ολική κύμανση (*total variation*) ενός μέτρου  $\mu \in \mathbf{M}(\Omega, \mathbb{R}^m)$  είναι η πραγματική συνολοσυνάρτηση  $|\mu|$ , που ορίζεται για κάθε Borel σύνολο  $B$  του  $\Omega$  ως

$$|\mu|(B) = \sup \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} |\mu(B_i)| : \bigcup_{i=0}^{\infty} B_i = B \right\}, \quad (3)$$

όπου το *supremum* λαμβάνεται πάνω σε όλες τις διαμερίσεις του  $B$  στην  $\mathcal{B}(\Omega)$  [5]. Επισημαίνουμε σε αυτό το σημείο πως για κάθε  $\mu \in \mathbf{M}(\Omega, \mathbb{R}^m)$  αυτομάτως έχουμε ότι  $|\mu|(\Omega) < +\infty$  (το  $\mu$  είναι πεπερασμένο μέτρο) και  $|\mu|$   $\sigma$ -προσθετικό, έτσι ώστε  $|\mu| \in \mathbf{M}^+(\Omega)$ . Πράγματι, εύκολα επαληθεύεται ότι το  $|\mu|$  είναι το μικρότερο μη αρνητικό βαθμωτό μέτρο Borel  $\nu$  έτσι ώστε  $|\mu(B)| \leq \nu(B)$  για κάθε Borel σύνολο  $B$ , και επιπλέον η απεικόνιση  $\mu \mapsto |\mu|(\Omega)$  είναι νόρμα για την οποία ο  $\mathbf{M}(\Omega, \mathbb{R}^m)$  είναι χώρος Banach.

Στη βαθμωτή περίπτωση,  $\forall \mu \in \mathbf{M}(\Omega)$ , ορίζουμε στον  $\mathbf{M}^+(\Omega)$  το θετικό,  $\mu^+$ , και το αρνητικό,  $\mu^-$ , μέρος του  $\mu$ :

$$\mu^+ = \frac{|\mu| + \mu}{2}, \quad \mu^- = \frac{|\mu| - \mu}{2}, \quad (4)$$

έτσι ώστε  $\mu = \mu^+ - \mu^-$  και  $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$ .

**Ορισμός 1.2.1** ([5]). Μια συνολοσυνάρτηση  $\mu : \mathcal{B}(\Omega) \rightarrow [0, +\infty]$  τέτοια ώστε για κάθε  $\Omega' \subset \subset \Omega$  (δηλ.  $\overline{\Omega'} \subset \Omega$  και  $\overline{\Omega'}$  συμπαγές) οι περιορισμοί της στην  $\mathcal{B}(\Omega')$  είναι μέτρο Borel στο  $\Omega'$ , καλείται μη αρνητικό μέτρο Radon.



**Σχόλιο 1.1.** Τα μη αρνητικά μέτρα Radon είναι κανονικά.

Έστω  $\lambda \in \mathbf{M}^+(\Omega)$  και  $\mu \in \mathbf{M}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ . Συμβολίζουμε με  $L_\lambda^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$  (ή  $L_\lambda^1(\Omega)$  όταν  $m = 1$ ) το σύνολο όλων των συναρτήσεων Borel  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  έτσι ώστε

$$\int_\Omega |f| d\lambda < +\infty.$$

Λέμε ότι το  $\mu$  είναι απόλυτα συνεχές ως προς  $\lambda$ , και γράφουμε  $\mu \ll \lambda$ , αν για κάθε  $B \in \mathcal{B}(\Omega)$  με  $\lambda(B) = 0$  ισχύει  $\mu(B) = 0$ .

Λέμε ότι τα μέτρα  $\mu$  και  $\lambda$  είναι κάθετα (μεταξύ τους), και γράφουμε  $\mu \perp \lambda$ , αν υπάρχει  $B \in \mathcal{B}(\Omega)$  ώστε το  $\mu$  είναι συγκεντρωμένο στο  $B$  και το  $\lambda$  είναι συγκεντρωμένο στο  $\Omega \setminus B$ , δηλ.  $\mu(C) = 0$  για κάθε σύνολο Borel  $C$  τέτοιο ώστε  $B \cap C = \emptyset$ .

Επιπλέον,

$$\mu \ll \lambda \iff \exists f \in L_\lambda^1(\Omega, \mathbb{R}^m) \text{ έτσι ώστε } \mu = f\lambda.$$

Το ακόλουθο θεώρημα επεκτείνει το παραπάνω αποτέλεσμα.

**Θεώρημα 1.1** (Radon-Nikodym, [5]). Έστω  $\mu$  και  $\lambda$  δύο μέτρα Borel στους  $\mathbf{M}(\Omega, \mathbb{R}^m)$  και  $\mathbf{M}^+(\Omega)$  αντίστοιχα. Τότε, υπάρχει συνάρτηση  $f$  στον  $L_\lambda^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$  και μέτρο  $\mu^s$  στον  $\mathbf{M}(\Omega, \mathbb{R}^m)$  τέτοια ώστε

$$\mu = f\lambda + \mu^s, \quad \mu^s \perp \lambda.$$

Επιπλέον,

$$f(x) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\mu(B_\rho(x))}{\lambda(B_\rho(x))} \quad \mu - \text{σχεδόν για κάθε } x \in \Omega.$$

Συμβολίζουμε με  $C_0(\Omega, \mathbb{R}^m)$  τον χώρο όλων των συνεχών συναρτήσεων  $\varphi$  που μηδενίζονται στο άπειρο, δηλ.,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \text{ συμπαγές σύνολο } K_\varepsilon \subset \Omega \text{ έτσι ώστε } \sup_{x \in \Omega \setminus K_\varepsilon} |\varphi(x)| \leq \varepsilon.$$

Ο  $C_0(\Omega, \mathbb{R}^m)$  εφοδιασμένος με τη νόρμα  $\|\varphi\|_\infty = \left( \sum_{i=1}^m \sup_{x \in \Omega} |\varphi_i(x)|^2 \right)^{1/2}$  είναι χώρος Banach. Συμβολίζουμε τον υπόχωρό του αποτελούμενο από όλες τις συνεχείς συναρτήσεις με συμπαγή φορέα στο  $\Omega$  με  $C_c(\Omega, \mathbb{R}^m)$ , δηλ.,

$$C_c(\Omega, \mathbb{R}^m) := \{\varphi \in C(\Omega, \mathbb{R}^m) : \varphi(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega \setminus K, \text{ όπου } K \subset \Omega \text{ συμπαγές}\}.$$

Για  $m = 1$ , γράφουμε  $C_0(\Omega)$  και  $C_c(\Omega)$  αντίστοιχα.

**Θεώρημα 1.2** (Riesz-Alexandroff representation theorem, [5]). Ο τοπολογικός δυϊκός του  $C_0(\Omega)$  ταυτίζεται ισομετρικά με τον χώρο των πεπερασμένων μέτρων Borel. Αναλυτικότερα, για κάθε γραμμικό και φραγμένο συναρτησιακό  $\Phi$  πάνω στον  $C_0(\Omega)$  υπάρχει μοναδικό μέτρο Borel  $\mu$  στο  $\Omega$  έτσι ώστε,  $\forall f \in C_0(\Omega)$ ,

$$\Phi(f) = \int_\Omega f(x) d\mu(x).$$

Επιπλέον,  $\|\Phi\| = |\mu|(\Omega)$ .

Σύμφωνα με τη διανυσματική εκδοχή του Θεωρήματος 1.2, ο δυϊκός του  $C_0(\Omega, \mathbb{R}^m)$  (και κατ' επέκταση του  $C_c(\Omega, \mathbb{R}^m)$ ) ταυτίζεται ισομετρικά με τον  $\mathbf{M}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ . Σημειωτέον ότι

ο  $\mathbf{M}(\Omega, \mathbb{R}^m)$  είναι ισόμορφος με τον χώρο γινόμενο  $\mathbf{M}(\Omega)^m$  και βάσει αυτού του ισομορφισμού

$$\mu \in \mathbf{M}(\Omega, \mathbb{R}^m) \iff \mu = (\mu_1, \dots, \mu_m) \text{ και } \mu_i \in C_0(\Omega)^*, \quad i = 1, \dots, m.$$

Στα επόμενα, θεωρούμε το  $\Omega$  ανοιχτό υποσύνολο του  $\mathbb{R}^N$ .

**Ορισμός 1.2.2** ([5]). Λέμε ότι μια συνάρτηση  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  είναι φραγμένης κύμανσης αν και μόνο αν ανήκει στον  $L^1(\Omega)$  και η κλίση της  $Du$ , με την έννοια των κατανομών, ανήκει στον  $\mathbf{M}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ . Συμβολίζουμε το σύνολο όλων των συναρτήσεων φραγμένης κύμανσης με  $BV(\Omega)$ . Τότε, οι τέσσερις επόμενοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:

(i)  $u \in BV(\Omega)$ ,

(ii)  $u \in L^1(\Omega)$  και  $\forall i = 1, \dots, N, \frac{\partial u}{\partial x_i} \in \mathbf{M}(\Omega)$ ,

(iii)  $u \in L^1(\Omega)$  και  $\|Du\| := \sup\{\langle Du, \varphi \rangle : \varphi \in C_c(\Omega, \mathbb{R}^N), \|\varphi\|_\infty \leq 1\} < +\infty$ ,

(iv)  $u \in L^1(\Omega)$  και  $\|Du\| = \sup\{\int_\Omega u \operatorname{div} \varphi \, dx : \varphi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^N), \|\varphi\|_\infty \leq 1\} < +\infty$ ,

όπου η αγκύλη  $\langle, \rangle$  στο (iii) ορίζεται ως

$$\langle Du, \varphi \rangle := \sum_{i=1}^N \int_\Omega \varphi_i \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Η ισοδυναμία μεταξύ των (ii) και (iii) είναι άμεση συνέπεια της πυκνότητας του  $C_c(\Omega, \mathbb{R}^N)$  στον  $C_0(\Omega, \mathbb{R}^N)$  εφοδιασμένο με την ομοιόμορφη νόρμα, ενώ αυτή μεταξύ των (iii) και (iv) επάγεται από την πυκνότητα του  $C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$  στους  $C_c(\Omega, \mathbb{R}^N)$  και  $C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ .

**Σχόλιο 1.2.** Σύμφωνα με το Θεώρημα αναπαράστασης *Riesz-Alexandroff*, η δυϊκή νόρμα  $\|Du\|$  είναι επίσης η ολική μάζα  $|Du|(\Omega) = \int_\Omega |Du|$  της ολικής κύμανσης  $|Du|$  του μέτρου  $Du$ . Επιπλέον, από τη θεωρία της κλασικής ολοκλήρωσης, το ολοκλήρωμα  $\int_\Omega f Du$  ορίζεται για όλες τις  $Du$ -ολοκληρώσιμες συναρτήσεις  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ , όπως για παράδειγμα τις συναρτήσεις στον  $C_b(\Omega, \mathbb{R}^N)$  (όπου  $C_b(\Omega, \mathbb{R}^N)$  ο χώρος όλων των συνεχών και φραγμένων συναρτήσεων  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ ). Για τους ίδιους λόγους, το ολοκλήρωμα  $\int_\Omega f |Du|$  είναι καλώς ορισμένο για όλες τις  $|Du|$ -ολοκληρώσιμες πραγματικές συναρτήσεις  $f$ , όπως για παράδειγμα τις συναρτήσεις στον  $C_b(\Omega)$ .

Στη συνέχεια, δείχνουμε ότι το μέτρο  $Du$  μπορεί να αναλυθεί ως άθροισμα ενός κανονικού και ενός κάθετου μέτρου. Πρώτα όμως χρειαζόμαστε τον ακόλουθο ορισμό

**Ορισμός 1.2.3** (*Hausdorff measure*, [6]). Έστω  $k \in [0, +\infty]$  και  $A \subset \mathbb{R}^N$ . Το  $k$ -μέτρο *Hausdorff* του  $A$  δίνεται από τον τύπο

$$\mathcal{H}^k(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^k(A),$$

όπου για  $0 < \delta \leq \infty$ , το  $\mathcal{H}_\delta^k(A)$  ορίζεται ως

$$\mathcal{H}_\delta^k(A) = \frac{w_k}{2^k} \inf \left\{ \sum_{i \in I} |\operatorname{diam}(A_i)|^k, \operatorname{diam}(A_i) \leq \delta, A \subset \bigcup_{i \in I} A_i \right\}$$

για πεπερασμένα ή αριθμήσιμα καλύμματα  $(A_i)_{i \in I}$ , όπου  $\operatorname{diam}(A_i)$  η διάμετρος του συνόλου  $A_i$  και  $w_k = \pi^{k/2} \Gamma(1+k/2)$  ένας παράγοντας κανονικοποίησης με  $\Gamma(t) = \int_0^\infty s^{t-1} e^{-s} \, ds$  τη συνάρτηση γάμμα (για  $k \geq 1$  ακέραιο, ο  $w_k$  ταυτίζεται με το μέτρο *Lebesgue* της μοναδιαίας

μπάλας του  $\mathbb{R}^k$ ).

Ορίζουμε την διάσταση *Hausdorff* του  $A$

$$\dim_{\mathcal{H}}(A) = \inf\{k \geq 0 : \mathcal{H}^k(A) = 0\}. \quad (5)$$

Τότε, το  $\mathcal{H}^k$  είναι μέτρο στον  $\mathbb{R}^N$ , το  $\mathcal{H}^N$  συμπίπτει με το μέτρο *Lebesgue*  $dx$ , και για  $1 \leq k \leq N$ ,  $k$  ακέραιο, το  $\mathcal{H}^k(A)$  είναι το κλασικό  $k$ -διάστασης εμβαδόν του  $A$  αν  $A \in C^1$   $k$ -πολλαπλότητα ενσφηνωμένη στον  $\mathbb{R}^N$ . Επιπλέον, αν  $k > k' \geq 0$ , τότε  $\mathcal{H}^k(A) > 0 \Rightarrow \mathcal{H}^{k'}(A) = +\infty$ .

Ας επιστρέψουμε στον  $BV(\Omega)$ . Έστω  $u \in BV(\Omega)$ . Σύμφωνα με το Θεώρημα 1.1, για  $\lambda = dx$ , το  $N$ -*Lebesgue* μέτρο  $\mathcal{L}^N \llcorner \Omega$  περιορισμένο στο  $\Omega$ , και  $\mu = Du$ , υπάρχει συνάρτηση  $\nabla u \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$  και μέτρο  $D^s u$ , τέτοια ώστε

$$Du = \nabla u \mathcal{L}^N \llcorner \Omega + D^s u, \quad (6)$$

όπου  $\nabla u(x) = \frac{d(Du)}{dx}(x)$  και  $D^s u \perp dx$ . Η  $\nabla u(x)$  επίσης καλείται προσεγγιστική παράγωγος (“*approximate derivative*”) της  $u$  [8]. Από την (6) γίνεται φανερό πως ο  $W^{1,1}(\Omega)$  είναι υπόχωρος του  $BV(\Omega)$  και  $u \in W^{1,1}(\Omega)$  αν και μόνο αν  $Du = \nabla u \mathcal{L}^N \llcorner \Omega$ . Για τις συναρτήσεις στον  $W^{1,1}(\Omega)$ , πολλές φορές γράφουμε  $\nabla u$  αντί για  $Du$ .

Θέτουμε  $D^a u = \nabla u \mathcal{L}^N \llcorner \Omega$ . Τότε, από την ανάλυση *Lebesgue* [6] του μέτρου  $Du$  ως προς το μέτρο  $\mathcal{L}^N \llcorner \Omega$  έχουμε ότι  $Du = D^a u + D^s u$ , όπου  $D^a u$  το απόλυτα συνεχές και  $D^s u$  το κάθετο τμήμα του  $Du$ . Στο [8], ο *Ambrosio* έδειξε πως το κάθετο τμήμα  $D^s u$  αναλύεται περαιτέρω στο τμήμα ασυνέχειας  $J_u$ , “*jump part*”, και στο *Cantor* τμήμα  $C_u$ , “*Cantor part*”. Προτού προσδιορίσουμε το  $J_u$ , διατυπώνουμε την έννοια του «προσεγγιστικού ορίου».

**Ορισμός 1.2.4** (*approximate limit*, [6]). Έστω  $B(x, \rho)$  η ανοιχτή μπάλα με κέντρο  $x$  και ακτίνα  $\rho$  και  $u \in BV(\Omega)$ . Ορίζουμε το άνω προσεγγιστικό όριο, “*approximate upper limit*”,  $u^+(x)$ , και το κάτω προσεγγιστικό όριο, “*approximate lower limit*”,  $u^-(x)$ ,

$$u^+(x) = \inf \left\{ t \in [-\infty, +\infty] : \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{dx(\{u > t\} \cap B(x, \rho))}{\rho^N} = 0 \right\},$$

$$u^-(x) = \sup \left\{ t \in [-\infty, +\infty] : \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{dx(\{u < t\} \cap B(x, \rho))}{\rho^N} = 0 \right\}.$$

Αν  $u \in L^1(\Omega)$ , τότε

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{|B(x, \rho)|} \int_{B(x, \rho)} |u(x) - u(y)| dy = 0 \quad \text{σχεδόν για κάθε } x \in \Omega. \quad (7)$$

Ένα σημείο  $x$  για το οποίο ισχύει η (7) καλείται *Lebesgue* σημείο της  $u$ , με

$$u(x) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{|B(x, \rho)|} \int_{B(x, \rho)} u(y) dy \quad (8)$$

και  $u(x) = u^+(x) = u^-(x)$ . Συμβολίζουμε με  $S_u$  το συμπλήρωμα, εκτός από ένα σύνολο  $\mathcal{H}^{N-1}$ -μηδενικού μέτρου, του συνόλου των *Lebesgue* σημείων

$$S_u = \{x \in \Omega : u^-(x) < u^+(x)\}. \quad (9)$$

Το  $S_u$  αποτελεί το “*jump set*” της  $u$  και για  $\mathcal{H}^{N-1}$ -σχεδόν κάθε  $x \in S_u$ , το  $n_u(x)$  είναι το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στο  $x$ .

**Θεώρημα 1.3** ([5]). Θέτουμε  $J_u = D^s u \lfloor S_u$  και  $C_u = D^s u \lfloor \Omega \setminus S_u$ , αντίστοιχα για το “jump part” και το “Cantor part” του  $Du$ . Τότε, το μέτρο  $J_u$  είναι απόλυτα συνεχές ως προς τον περιορισμό του  $(N-1)$ - Hausdorff μέτρου στο  $S_u$ . Ειδικότερα,

$$J_u = (u^+ - u^-) n_u \mathcal{H}^{N-1} \lfloor S_u. \quad (10)$$

Επιπλέον, τα  $J_u$  και  $C_u$  είναι κάθετα μεταξύ τους: για κάθε Borel σύνολο  $E$  του  $\Omega$

$$\mathcal{H}^{N-1}(E) < +\infty \Rightarrow |C_u|(E) = 0.$$

Συνεπώς, η διάσταση Hausdorff του φορέα  $spt(C_u)$  του μέτρου  $C_u$  ικανοποιεί

$$N-1 \leq \dim_{\mathcal{H}}(spt(C_u)) < N.$$

Ακολουθώντας, από το [8], συνεπάγεται ότι

$$Du = \nabla u \, dx + (u^+ - u^-) n_u \mathcal{H}^{N-1} \lfloor S_u + C_u, \quad (11)$$

απ' όπου και συμπεραίνουμε ότι η ολική κύμανση του  $Du$  (ολική μάζα) είναι

$$\begin{aligned} |Du|(\Omega) &= \int_{\Omega} |Du| \\ &= \int_{\Omega} |\nabla u|(x) dx + \int_{S_u} |u^+ - u^-| d\mathcal{H}^{N-1} + \int_{\Omega \setminus S_u} |C_u|. \end{aligned} \quad (12)$$

Ο χώρος  $BV(\Omega)$  είναι εφοδιασμένος με τη νόρμα

$$\|u\|_{BV(\Omega)} := \|u\|_{L^1(\Omega)} + \|Du\|, \quad (13)$$

που επεκτείνει την κλασική νόρμα του  $W^{1,1}(\Omega)$ . Ωστόσο, δεν χρησιμοποιούμε αυτήν την τοπολογία, καθώς δεν παρέχει τις επιθυμητές ιδιότητες συμπάγεια. Ορίζουμε δύο ασθενείς τοπολογίες στον  $BV(\Omega)$ :

- (i) την  $w^*$  (ή  $w$ ) και
- (ii) την *intermediate*.

Η πρώτη είναι πολύ ασθενής για να εγγυηθεί τη συνέχεια του τελεστή ίχνους (βλ. Θεώρημα 1.8 παρακάτω), αλλά ικανή να εξασφαλίσει τη συμπάγεια των φραγμένων ακολουθιών. Η δεύτερη αποτελεί μια ενδιάμεση σύγκλιση μεταξύ της ασθενούς (i) και της ισχυρής (13).

**Ορισμός 1.2.5** ([5]). Λέμε ότι μια ακολουθία  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  στον  $BV(\Omega)$  συγκλίνει ασθενώς\* (ή ασθενώς) σε κάποιο  $u$  στον  $BV(\Omega)$  και γράφουμε  $u_n \xrightarrow{*} u$  (ή  $u_n \rightharpoonup u$ ) αν και μόνο αν

$$\begin{cases} u_n \rightarrow u & \text{ισχυρώς στον } L^1(\Omega), \\ Du_n \rightharpoonup Du & \text{ασθενώς στον } \mathbf{M}(\Omega, \mathbb{R}^N). \end{cases}$$

**Πρόταση 1.2.2** ([5]). Έστω  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ακολουθία στον  $BV(\Omega)$  που συγκλίνει ισχυρώς σε κάποιο  $u$  στον  $L^1(\Omega)$  και ικανοποιεί  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} |Du_n| < +\infty$ . Τότε

$$(i) \quad u \in BV(\Omega) \text{ και } \int_{\Omega} |Du| \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |Du_n|,$$

$$(ii) \quad u_n \xrightarrow{*} u \text{ στον } BV(\Omega).$$

Ως συνέπεια της ιδιότητας (i) (*lower semicontinuity property*), ο  $BV(\Omega)$  είναι πλήρης μετρικός χώρος.

**Θεώρημα 1.4** ([5]). Ο  $BV(\Omega)$ , εφοδιασμένος με τη νόρμα του (13), είναι χώρος *Banach*.

**Ορισμός 1.2.6** ([5]). Έστω  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ακολουθία στον  $BV(\Omega)$  και  $u \in BV(\Omega)$ . Λέμε ότι η  $u_n$  συγχλίνει στο  $u$  με την έννοια της *intermediate* σύγκλισης αν και μόνο αν

$$\begin{cases} u_n \rightarrow u & \text{ισχυρώς στον } L^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} |Du_n| \rightarrow \int_{\Omega} |Du|. \end{cases}$$

Ο όρος “*intermediate convergence*” ή αλλιώς “*strict convergence*” αποδίδεται στον *Temam* [7] και αποτυπώνει την ισχύ αυτής της σύγκλισης. Σύμφωνα με την Πρόταση 1.2.2(i), όταν  $u_n \rightarrow u$  ισχυρώς στον  $L^1(\Omega)$  υπάρχει γενικά απώλεια της συνολικής μάζας στο όριο. Η επόμενη πρόταση πιστοποιεί ότι η *intermediate* σύγκλιση είναι ισχυρότερη της ασθενούς, γεγονός που δικαιολογεί την ονομασία της.

**Πρόταση 1.2.3** ([5]). Οι δύο επόμενοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:

(i)  $u_n \rightarrow u$  με την έννοια της *intermediate* σύγκλισης,

$$(ii) \begin{cases} u_n \xrightarrow{*} u, \\ \int_{\Omega} |Du_n| \rightarrow \int_{\Omega} |Du|. \end{cases}$$

Ο χώρος  $C^\infty(\bar{\Omega})$  δεν είναι πυκνός στον  $BV(\Omega)$  εφοδιασμένο με την ισχυρή τοπολογία. Ειδικά,  $\overline{C^\infty(\bar{\Omega})}^{\|\cdot\|_{BV}} = W^{1,1}(\Omega)$ . Ωστόσο, μπορούμε να προσεγγίσουμε κάθε στοιχείο του  $BV(\Omega)$  με μια συνάρτηση του  $C^\infty(\bar{\Omega})$  μέσω της *intermediate* σύγκλισης.

**Θεώρημα 1.5** ([5]). Ο χώρος  $C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$  είναι πυκνός στον  $BV(\Omega)$  εφοδιασμένο με την *intermediate* σύγκλιση. Συνεπώς, ο  $C^\infty(\bar{\Omega})$  είναι επίσης πυκνός στον  $BV(\Omega)$  για την *intermediate* σύγκλιση.

**Θεώρημα 1.6** ([5]). Έστω  $\Omega$  1-κανονικό, ανοιχτό και φραγμένο υποσύνολο του  $\mathbb{R}^N$ . Τότε  $\forall p, 1 \leq p \leq \frac{N}{N-1}$ , η ενσφήνωση

$$BV(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

είναι συνεχής. Πιο συγκεκριμένα, υπάρχει σταθερά  $C$ , που εξαρτάται μόνο από τα  $\Omega, p$  και  $N$ , τέτοια ώστε  $\forall u \in BV(\Omega)$ ,

$$\left( \int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq C |u|_{BV(\Omega)}.$$

**Θεώρημα 1.7** ([5]). Έστω  $\Omega$  1-κανονικό, ανοιχτό και φραγμένο υποσύνολο του  $\mathbb{R}^N$ . Τότε  $\forall p, 1 \leq p < \frac{N}{N-1}$ , η ενσφήνωση

$$BV(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

είναι συμπαγής. Επιπλέον, υπάρχει υπακολουθία  $u_{n_k}$  και  $u$  στον  $BV(\Omega)$  τέτοια ώστε  $u_{n_k} \xrightarrow{*} u$  στον  $BV(\Omega)$ .

**Θεώρημα 1.8** ([5]). Έστω  $\Omega$  *Lipschitz* χωρίο με σύνορο  $\Gamma$ . Υπάρχει μια γραμμική και συνεχής απεικόνιση  $\gamma$  από τον  $BV(\Omega)$  στον  $L^1_{\mathcal{H}^{N-1}}(\Gamma)$  που ικανοποιεί

$$(i) \quad \forall u \text{ στον } C(\bar{\Omega}) \cap BV(\Omega), \gamma(u) = u|_{\Gamma},$$

(ii) ο γενικευμένος τύπος *Green* ισχύει:  $\forall \varphi \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ ,

$$\int_{\Omega} \varphi Du = - \int_{\Omega} u \operatorname{div} \varphi \, dx + \int_{\Gamma} \gamma(u) \varphi \cdot n \, d\mathcal{H}^{N-1},$$

όπου  $n(x)$  το κάθετο εξωτερικό μοναδιαίο διάνυσμα για  $\mathcal{H}^{N-1}$ - σχεδόν κάθε  $x$  στο  $\Gamma$ .

**Θεώρημα 1.9** ([5]). Έστω  $\Omega$  *Lipschitz* χωρίο του  $\mathbb{R}^N$ . Ο τελεστής ίχνους  $\gamma$  είναι συνεχής από τον  $BV(\Omega)$  εφοδιασμένο με την *intermediate* σύγκλιση στον  $L^1(\Gamma)$  εφοδιασμένο με την ισχυρή σύγκλιση.

Ολοκληρώνουμε τη μελέτη με ένα πολύ ενδιαφέρον αποτέλεσμα, που αποτελεί χρήσιμο εργαλείο στις εφαρμογές.

Σε πολλά προβλήματα (κατάτμηση εικόνας, εντοπισμός ανομοιογενειών, μελέτη ρωγμών), το κάθετο τμήμα των πρώτων παραγώγων (με την έννοια των κατανομών) των εμπλεκόμενων συναρτήσεων δεν εμπεριέχει το τμήμα *Cantor*. Οι λύσεις αυτών των προβλημάτων εντοπίζονται σε έναν ειδικό υπόχωρο των συναρτήσεων φραγμένης κύμανσης.

**Ορισμός 1.2.7** ([5]). Η ειδική κλάση των συναρτήσεων φραγμένης κύμανσης είναι το υποσύνολο  $SBV(\Omega)$  (*special functions of bounded variation*) του  $BV(\Omega)$  που αποτελείται από όλες τις  $BV(\Omega)$ - συναρτήσεις των οποίων οι παράγωγοι-μέτρα είναι απαλλαγμένες από το τμήμα *Cantor* στην *Lebesgue* ανάλυσή τους, δηλαδή

$$u \in SBV(\Omega) \iff u \in L^1(\Omega) \text{ και } Du = \nabla u \mathcal{L}^N \llcorner \Omega + (u^+ - u^-)n_u \mathcal{H}^{N-1} \llcorner S_u. \quad (14)$$

**Σχόλιο 1.3** ([5]). Έστω  $\Omega$  ανοιχτό και φραγμένο υποσύνολο του  $\mathbb{R}^N$ ,  $K$  κλειστό υποσύνολο του  $\Omega$  τέτοιο ώστε  $\mathcal{H}^{N-1}(K) < +\infty$  και  $u \in W^{1,1}(\Omega \setminus K) \cap L^\infty(\Omega)$ . Τότε  $u \in SBV(\Omega)$  και  $S_u \subset K$ .

## Κεφάλαιο 2

# Το αντίστροφο πρόβλημα της αγωγιμότητας υπό το πρίσμα των $BV$ – συναρτήσεων

### 2.1 Εισαγωγή

Το αντίστροφο πρόβλημα της αγωγιμότητας - γνωστό στη βιβλιογραφία και την ιατρική πρακτική ως Τομογραφία Ηλεκτρικής Εμπέδησης (*Electrical Impedance Tomography (EIT)*) - συνίσταται στον προσδιορισμό της αγωγιμότητας,  $\alpha$ , μιας ηλεκτρικά αγώγιμης περιοχής,  $\Omega$ , από επιπρόσθετες πληροφορίες, στη μορφή μετρήσεων, στην επιφάνειά της. Τα δεδομένα εισόδου αποτελούν το ηλεκτρικό δυναμικό,  $f$ , - που συνήθως ενσωματώνεται στις φυσικές θεωρήσεις του προβλήματος - σε συνδυασμό με την πυκνότητα του ρεύματος,  $g$ , (υπολογιστικό δεδομένο) στην ίδια επιφάνεια (ο ρόλος των δύο αυτών επιφανειακών πεδίων μπορεί να εναλλάσσεται). Η σχέση των  $f, g$  είναι γραμμική και ορίζει τον γνωστό *Dirichlet-to-Neumann* τελεστή,  $\Lambda_{\mathcal{D},t,\mathcal{N}}$  (αντίστοιχα *Neumann-to-Dirichlet*,  $\Lambda_{\mathcal{N},t,\mathcal{D}}$ ) ή αλλιώς την *voltage to current* απεικόνιση (αντίστοιχα *current to voltage*), που συναντάται στα ελλειπτικά προβλήματα συνοριακών τιμών δεύτερης τάξης.

Η μαθηματική σχεδίαση του αντίστροφου προβλήματος της αγωγιμότητας οφείλεται στον *Alberto Calderón* και στη βιβλιογραφία αναφέρεται ως *Calderón Problem*. Το πρόβλημα *Calderón* πηγάζει κατά φυσικό τρόπο από τη γεωφυσική έρευνα, και συγκεκριμένα την πετρελαική ανίχνευση. Ο *Calderón* αντιμετώπισε το παραπάνω πρόβλημα στα μέσα του 1950, ενώ εργαζόταν ως μηχανικός στην Αργεντινή. Έδειξε ότι το γραμμικοποιημένο πρόβλημα για σταθερές αγωγιμότητες έχει μοναδική λύση. Δεκαετίες αργότερα ο *Alberto Grünbaum* πείθει τον *Calderón* να εκδώσει το αποτέλεσμά του, *Alberto P. Calderón, On an inverse boundary value problem* (Brazilian Mathematical Society, Rio de Janeiro, 1980).

Το θεμελιώδες ερώτημα που τίθεται στο πρόβλημα *Calderón* είναι εάν ο συντελεστής  $\alpha$  στον τελεστή  $\nabla \cdot (\alpha \nabla)$  μπορεί να προσδιοριστεί από την  $\Lambda_{\mathcal{D},t,\mathcal{N}}$  απεικόνιση. Στην περίπτωση του ισότροπου προφίλ  $\alpha$ , προτάθηκε από τον *Calderón* το 1980, και αναπτύχθηκε αργότερα στις αντιπροσωπευτικές εργασίες [10, 11], ότι κάθε φραγμένη αγωγιμότητα μπορεί να προσδιοριστεί μοναδικά από τις συνοριακές εκτιμήσεις, δηλαδή τον *Dirichlet-to-Neumann* τελεστή [9]. Στο [12] ο ισχυρισμός αυτός επιβεβαιώνεται για τη διδιάστατη περίπτωση και τη βέλτιστη  $L^\infty$  – ομαλότητα, ενώ το ίδιο συμπέρασμα επαληθεύεται στις  $d \geq 2$  διαστάσεις όταν η ισότροπη αγωγιμότητα είναι ομαλότερη από μια  $L^1$  – συνάρτηση. Το πλεονέκτημα της αναγωγής των υποθέσεων ομαλότητας σε  $L^\infty$  δεν έγκειται μόνο στο γεγονός ότι πολλές αγωγιμότητες παρουσιάζουν ασυνέχειες τύπου άλματος, αλλά επίσης στο ότι επιτρέπει τη μελέτη πολυπλοκότερων δομών, όπως για παράδειγμα πορώδη μέσα.

Το πρώτο ολικό αποτέλεσμα μοναδικότητας κατοχυρώθηκε για  $C^\infty$ -αγωγιμότητες στις  $d \geq 3$  διαστάσεις από τους *Sylvester* και *Uhlman* το 1987 [13]. Για τη διδιάστατη περίπτωση, ο *Nachman* δημοσίευσε το 1996 ένα αποτέλεσμα μοναδικότητας για δυο φορές παραγωγίσιμες αγωγιμότητες ( $W^{2,p}$ ,  $p > 1$ ) [14]. Ο αντίστοιχος αλγόριθμος υλοποιήθηκε επιτυχώς και αποδείχθηκε ότι δουλεύει σωστά ακόμα και με πειραματικά δεδομένα [15, 16]. Στις δύο διαστάσεις επίσης, η μοναδικότητα για αγωγιμότητες που είναι  $W^{1,p}$  με  $p > 2$  αποδεικνύεται στο [17]. Στις  $d \geq 3$  διαστάσεις, οι *Päivärinta* κ.ά. [18] και *Brown* και *Torres* [19] κατοχύρωσαν τη μοναδικότητα για  $W^{3/2,p}$ -αγωγιμότητες με  $p = \infty$  και  $p > 2d$ , αντίστοιχα. Επιπλέον έρευνες για τη μοναδικότητα του αντίστροφου προβλήματος της αγωγιμότητας στις  $d \geq 3$  διαστάσεις συναντώνται στους *Haberman* και *Tataru* [20], *Krupchyk* και *Uhlmann* [21], *Caro* και *Rogers* [22] σε συνδυασμό με την εργασία του *Haberman* [23] για  $W^{1,d}$  – ( $d = 3, 4$ ) αγωγιμότητες.

Η ευστάθεια της αντιστροφής, επίσης, αποτελεί ερευνητικό πεδίο έντονου ενδιαφέροντος με τη βασική επιχειρηματολογία να διατυπώνεται στις αντιπροσωπευτικότερες αναφορές [24–27]. Η πλειοψηφία των θεωριών προσέγγισης προς την εδραίωση της ευστάθειας προϋποθέτει κάποιο ομοιόμορφο έλεγχο στις ταλαντώσεις της συνάρτησης αγωγιμότητας και έτσι έχει να κάνει με κάποιο είδος ευστάθειας υπό συνθήκη (γεγονός αναμενόμενο, καθώς οι ισχυρές ταλαντώσεις της ακολουθίας των αγωγιμοτήτων προκαλούν την αστάθεια του προβλήματος *Calderón*). Αυτού του είδους η ασυμπτωτική συμπεριφορά περιγράφεται πολύ καλά μέσω της θεωρίας ομογενοποίησης [28, 29] και την εμπλοκή της  $H$ - ή  $G$ -σύγκλισης [30–32].

Οι υποθέσεις ομαλότητας για το αναζητούμενο αγωγίμο προφίλ καθορίζουν τη μέθοδο επίλυσης που επιλέγεται. Γενικά, η λύση του ευθέος προβλήματος *Calderón* είναι μια κλασική *Sobolev* συνάρτηση, αλλά το προφίλ της αγωγιμότητας όχι. Προφανώς, κρίνεται απαραίτητο να ληφθεί υπόψη ο ενδεχομένως ασυνεχής χαρακτήρας της συνάρτησης  $\alpha(x)$ . Αυτή η προτεραιότητα εισάγει τον χώρο των συναρτήσεων φραγμένης κύμανσης  $BV$  ως το καταλληλότερο συναρτησιακό πλαίσιο για να φιλοξενεί την αγωγιμότητα. Πράγματι, για την ανακατασκευή ασυνεχών παραμέτρων, είναι προτιμότερο κανείς να δουλεύει στον χώρο των  $BV$ -συναρτήσεων, εκμεταλλευόμενος το κύριο εγγενές χαρακτηριστικό τους να ενσωματώνουν τις ασυνεχείς επιφάνειές τους στο πεδίο ορισμού τους και έτσι να υποστηρίζουν ένα πιθανώς πολλαπλά συνεκτικό *jump set*. Ειδικότερα, ο υπόχωρος των συναρτήσεων φραγμένης κύμανσης  $SBV$  θεωρείται ακόμα πιο ιδανικός για τους σκοπούς της παρούσας ανάλυσης, καθώς σύμφωνα με το ενδιαφέρον Σχόλιο 1.3, η απαίτηση  $\alpha(x) \in SBV(\Omega)$  αναγκάζει τις κλίσεις της  $\alpha$  να συγκεντρώνονται στο *jump set*, οριοθετώντας έτσι τους φορείς των διεπιφανειών στο χωρίο  $\Omega$ .

Υπάρχουν περιπτώσεις όπου οι συντελεστές αγωγιμότητας είναι απλά  $L^\infty$ -συναρτήσεις και η  $BV$ -δομή εισάγεται μέσω ενός κατάλληλου όρου κανονικοποίησης (*regularization term*), του οποίου η επίδραση καθορίζεται από την αντίστοιχη παράμετρο κανονικοποίησης (*regularization parameter*). Η εμπλοκή των συναρτήσεων φραγμένης κύμανσης στην ομαλοποίηση των μη-καλώς τοποθετημένων προβλημάτων έχει ήδη επιχειρηθεί και δύο από τις πρωτεύουσες προσεγγίσεις είναι οι [33, 34]. Μεταγενέστερες έρευνες στην *EIT* με κανονικοποίηση ολικής κύμανσης (*total variation regularization*) συναντώνται στις [35–42].

Στο παρόν κεφάλαιο περιγράφεται η πρώτη απόπειρα επίλυσης του αντίστροφου προβλήματος της αγωγιμότητας υπό τη θεώρηση ότι  $\alpha(x) \in BV(\Omega)$ , μέσω ενός ειδικού σχήματος ελαχιστοποίησης που αξιοποιεί τα πλεονεκτήματα του  $BV$ -λογισμού. Κατασκευάζεται ένα σύνθετο συναρτησιακό ελαχιστοποίησης, που ενσωματώνει τα χαρακτηριστικά του ευθέος και του αντίστροφου προβλήματος της αγωγιμότητας, με σκοπό την εναλλακτική παράκαμψη της επίλυσης του ευθέος προβλήματος σε κάθε βήμα της ελαχιστοποιητικής διαδικασίας και επομένως, την ταυτόχρονη ελαχιστοποίηση ως προς την αγωγιμότητα και τα  $H^1(\Omega)$ -πεδία που συμμετέχουν στα ευθέα *Dirichlet* και *Neumann* προβλήματα. Η κεντρική ιδέα βασίζεται στις εργασίες [43, 44] και στην απλή θεώρηση πως οι *Dirichlet*



και *Neumann* λύσεις, που αντιστοιχούν στα επιφανειακά δεδομένα, είναι ως ένα βαθμό συμβατές (θεωρητικά, για ακριβή και χωρίς θόρυβο δεδομένα ταυτίζονται). Ωστόσο, η παραπάνω μεθοδολογία δεν είναι περιοριστική, υπό την έννοια ότι είναι δυνατή η επίλυση των ενδιάμεσων, διαδοχικών ευθέων προβλημάτων και κατά συνέπεια η μετατροπή του αρχικού συναρτησιακού σε ένα νέο· με μοναδικό άγνωστο το συντελεστή  $\alpha$ . Σε αυτήν την περίπτωση, το συναρτησιακό ταυτίζεται (δεδομένου ότι υπάρχει μια εσωτερική παράμετρος βάρους που αυξάνεται επαρκώς) με το κλασικό συναρτησιακό βελτιστοποίησης των εφαρμογών, που αναγκάζει τα *Dirichlet* και *Neumann* δεδομένα να «συμβαδίζουν» κατά μήκος του συνόρου  $\partial\Omega$ .

Στην Ενότητα 2.3 ορίζεται το αντίστροφο πρόβλημα της αγωγιμότητας. Γίνεται σαφές πως η παρούσα έρευνα εστιάζει στο αντίστροφο πρόβλημα ανακατασκευής ανομοιογενών προφίλ στο εσωτερικό του χωρίου  $\Omega$  (*inclusion problem*), μέσω του προσδιορισμού του συντελεστή  $\alpha$ , αν και η προτεινόμενη μεθοδολογία έχει χαρακτηριστικά που είναι πιθανώς εφαρμόσιμα σε γενικότερες περιπτώσεις, όπου η  $BV$ - συμπεριφορά λαμβάνει μέρος αποκλειστικά στα πλαίσια της κανονικοποίησης. Η Ενότητα 2.4 περιγράφει την κατασκευή και τις ιδιότητες του συναρτησιακού ελαχιστοποίησης. Στην Ενότητα 2.5 εδραιώνεται το κατάλληλο αριθμητικό υπόβαθρο για την επικείμενη εφαρμογή του σχήματος ελαχιστοποίησης. Η Ενότητα 2.6 υλοποιεί τη μέθοδο ανακατασκευής σε διδιάστατα χαρακτηριστικά προφίλ αγωγιμότητας, όπου στο απαιτητικότερο πρόβλημα του διπλού εγκλεισμού επιχειρείται η σύγκριση της τρέχουσας μεθοδολογίας με παλαιότερες, παραδοσιακές μεθόδους βελτιστοποίησης. Τέλος, η Ενότητα 2.2 αποτελεί μια συνοπτική εισαγωγή στις βασικές έννοιες που εμπλέκονται στη θεωρητική δραστηριότητα της διενεργούμενης έρευνας και προς διευκόλυνση του αναγνώστη τοποθετείται στην αρχή του κεφαλαίου.

## 2.2 Βασικές έννοιες και χρήσιμοι ορισμοί

### 2.2.1 Κυρτότητα και κάτω ημισυνέχεια

Το πεδίο ορισμού (*effective domain*) μιας συνάρτησης  $F : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  είναι το σύνολο

$$\text{dom } F = \{x \in X : F(x) < +\infty\}. \quad (15)$$

Η συνάρτηση  $F$  καλείται γνήσια (*proper*) αν  $\text{dom } F \neq \emptyset$ .

**Ορισμός 2.2.1** ([5]). Έστω  $X$  γραμμικός χώρος με νόρμα. Μια συνάρτηση  $F : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  καλείται πιεστική αν  $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$ .

**Ορισμός 2.2.2** (*lower semicontinuity*, [6]). Έστω  $(X, \tau)$  τοπολογικός χώρος και  $F : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ . Λέμε ότι η  $F$  είναι κάτω ημισυνεχής για την  $\tau$ -τοπολογία ( $\tau$ -*lsc*) αν  $\forall x_n \xrightarrow{\tau} x$ ,

$$F(x) \leq \liminf_{x_n \xrightarrow{\tau} x} F(x_n), \quad (16)$$

όπου  $\tau$  η ασθενής ή η ισχυρή τοπολογία στον  $X$ . (Δηλαδή η  $F$  είναι ασθενώς κάτω ημισυνεχής ( $w$ -*lsc*) αν  $\forall x_n \rightharpoonup x$ ,

$$F(x) \leq \liminf_{x_n \rightharpoonup x} F(x_n)$$

και ισχυρώς κάτω ημισυνεχής ( $s$ -*lsc*) αν  $\forall x_n \rightarrow x$ ,

$$F(x) \leq \liminf_{x_n \rightarrow x} F(x_n).)$$

Η απόδειξη της ασθενούς κάτω ημισυνέχειας αποτελεί γενικά ένα δύσκολο εγχείρημα. Μια ικανή συνθήκη είναι η κυρτότητα

**Ορισμός 2.2.3** (*convexity*, [5]). Έστω  $X$  γραμμικός χώρος και  $F : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ . Λέμε ότι η  $F$  είναι κυρτή αν  $\forall x, y \in X$  και  $\lambda \in [0, 1]$  έχουμε

$$F(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda F(x) + (1 - \lambda)F(y).$$

**Θεώρημα 2.1** (*lsc strong and weak*, [6]). Έστω  $F : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  κυρτή. Τότε η  $F$  είναι  $w$ -*lsc* αν και μόνο αν η  $F$  είναι  $s$ -*lsc*.

Στην περίπτωση όπου η  $F$  είναι ένα ολοκληρωτικό συναρτησιακό μπορούμε να πούμε περισσότερο για τη συσχέτιση της κάτω ημισυνέχειας με την κυρτότητα. Στη συνέχεια, μελετάμε την (ακολουθιακή) κάτω ημισυνέχεια για ορισμένους τύπους συναρτησιακών που συναντώνται σε πολλά μεταβολικά προβλήματα.

### Κάτω ημισυνέχεια στη βαθμωτή περίπτωση.

Για  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ , θεωρούμε το συναρτησιακό

$$F(u) = \int_{\Omega} f(x, u, Du) dx. \quad (17)$$

Περιοριζόμαστε στην περίπτωση όπου  $u : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ .

Προκειμένου να εξετάσουμε τις ικανές συνθήκες για την κάτω ημισυνέχεια των συναρτησιακών (17), είναι βολικότερο να μελετήσουμε πρώτα τα συναρτησιακά της μορφής

$$F(u, v) = \int_{\Omega} f(x, u(x), v(x)) d\mu(x), \quad (18)$$

όπου  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  χώρος μέτρου με  $\mu \in \mathbf{M}^+(\Omega)$ ,  $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^N \rightarrow [0, +\infty]$  μια  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}_m \otimes \mathcal{B}_N$ -μετρήσιμη συνάρτηση ( $\mathcal{B}_m$  και  $\mathcal{B}_N$ , αντίστοιχα, οι  $\sigma$ -άλγεβρες των υποσυνόλων *Borel* των  $\mathbb{R}^m$  και  $\mathbb{R}^N$ ) και  $u, v$ , αντίστοιχα, μεταβάλλονται στους χώρους  $L^1_\mu(\Omega, \mathbb{R}^m)$ ,  $L^1_\mu(\Omega, \mathbb{R}^N)$  των  $\mu$ -ολοκληρώσιμων  $\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^N$ -συναρτήσεων.

**Θεώρημα 2.2** ([5]). Έστω ότι η συνάρτηση  $f$  ικανοποιεί τις συνθήκες:

- (i) για  $\mu$ -σχεδόν κάθε  $x \in \Omega$  η συνάρτηση  $f(x, \cdot, \cdot)$  είναι κάτω ημισυνεχής στον  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^N$ ,
- (ii) για  $\mu$ -σχεδόν κάθε  $x \in \Omega$  και  $\forall s \in \mathbb{R}^m$  η συνάρτηση  $f(x, s, \cdot)$  είναι κυρτή στον  $\mathbb{R}^N$ .

Τότε το συναρτησιακό  $F$  στην (18) είναι (ακολουθιακά) κάτω ημισυνεχές στον χώρο  $L^1_\mu(\Omega, \mathbb{R}^m) \times L^1_\mu(\Omega, \mathbb{R}^N)$ , για την ισχυρή τοπολογία στον  $L^1_\mu(\Omega, \mathbb{R}^m)$  και την ασθενή τοπολογία στον  $L^1_\mu(\Omega, \mathbb{R}^N)$ .

Το Θεώρημα 2.2 εξασφαλίζει τις ικανές συνθήκες για την κάτω ημισυνέχεια των συναρτησιακών (17) στον χώρο *Sobolev*  $W^{1,1}(\Omega)$ . Ειδικά, ισχύει

**Θεώρημα 2.3** ([5]). Έστω  $\Omega$  *Lipschitz* χωρίο του  $\mathbb{R}^N$  και  $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{mN} \rightarrow [0, +\infty]$  συνάρτηση που ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος 2.2. Τότε το συναρτησιακό  $F$  στην (17) είναι (ακολουθιακά) ασθενώς κάτω ημισυνεχές στον  $W^{1,1}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ .

Στη βαθμωτή περίπτωση ( $m = 1$  ή  $N = 1$ ), η κυρτότητα της ολοκληρωτέας  $f$  ως προς την κλίση αποτελεί, επίσης, ικανή συνθήκη για την κάτω ημισυνέχεια. Στη διανυσματική περίπτωση ( $m > 1$  και  $N > 1$ ) κάτι τέτοιο δεν ισχύει. Σε αυτές τις περιπτώσεις χρησιμοποιείται ένας ασθενέστερος ορισμός της κυρτότητας (*quasiconvexity*) που αποδίδει παρόμοια αποτελέσματα [5].

**Θεώρημα 2.4** (*lsc and convexity*, [6]). Το  $F(u)$  είναι (ακολουθιακά) ασθενώς κάτω ημισυνεχές στον  $W^{1,p}(\Omega)$ ,  $1 \leq p < \infty$  (ασθενώς\* κάτω ημισυνεχές αν  $p = \infty$ ), αν και μόνο αν η  $f$  είναι κυρτή ως προς  $v$ .

Θεωρούμε τα συναρτησιακά (17) στην απλούστερη μορφή

$$F(u) = \int_{\Omega} f(Du) dx. \quad (19)$$

**Θεώρημα 2.5** ([5]). Έστω  $m = 1$  ή  $N = 1$ . Υποθέτουμε ότι το συναρτησιακό  $F$  στην (19) είναι ακολουθιακά ασθενώς\* κάτω ημισυνεχές στον  $W^{1,\infty}(\Omega)$ , με την έννοια ότι

$$F(u) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} F(u_n) \quad (20)$$

για κάθε ακολουθία  $u_n$  που συγκλίνει ομοιόμορφα στο  $u$  στο  $\Omega$  και με  $Du_n$  ομοιόμορφα φραγμένη στο  $\Omega$ . Τότε η συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή και κάτω ημισυνεχής.

### Κάτω ημισυνέχεια σε χώρους μέτρου.

Έστω  $(V, \sigma)$  ένας πραγματικός τοπικά κυρτός *Hausdorff* τοπολογικός διανυσματικός χώρος και  $F : V \rightarrow (-\infty, +\infty]$  μια γνήσια κυρτή και (ακολουθιακά)  $\sigma$ -κάτω ημισυνεχής συνάρτηση.

**Ορισμός 2.2.4** (*recession functional*, [5]). Η συνάρτηση  $F^\infty$  (*recession function*) της  $F$  ορίζεται,  $\forall v \in V$ , ως

$$F^\infty(v) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{F(v_0 + tv)}{t}, \quad (21)$$

όπου  $v_0$  ένα οποιοδήποτε στοιχείο του  $\text{dom } F = \{v \in V : F(v) < +\infty\}$ .

**Πρόταση 2.2.1** (*properties of the recession function, [5]*). *Ισχύουν τα επόμενα:*

(i) Το όριο στην (21) υπάρχει και είναι ανεξάρτητο του  $v_0$ .

(ii) Το συναρτησιακό  $F^\infty$  επιδέχεται την ισοδύναμη μορφή

$$\begin{aligned} F^\infty(v) &= \sup\{F(u+v) - F(u) : u \in \text{dom } F\} \\ &= \sup\left\{\frac{F(v_0+tv) - F(v_0)}{t} : t > 0\right\} \end{aligned}$$

$$\forall v_0 \in \text{dom } F.$$

(iii) Η  $F^\infty$  είναι γνήσια, κυρτή, (ακολουθιακά)  $\sigma$ -κάτω ημισυνεχής και θετικά 1-ομογενής, δηλαδή

$$F^\infty(tv) = tF^\infty(v) \quad \forall t \geq 0, \quad \forall v \in V.$$

(iv)  $\forall F_1, \dots, F_n$  γνήσιες, κυρτές, (ακολουθιακά)  $\sigma$ -κάτω ημισυνεχείς απεικονίσεις, με  $(\text{dom } F_1) \cap \dots \cap (\text{dom } F_n) \neq \emptyset$ , ισχύει

$$\left(\sum_{i=1}^n F_i\right)^\infty = \sum_{i=1}^n F_i^\infty.$$

(v)  $F^\infty(v) + F^\infty(-v) \geq 0, \quad \forall v \in V.$

(Στα επόμενα,  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ .)

**Θεώρημα 2.6** ([5]). Έστω  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow [0, +\infty]$  μια κάτω ημισυνεχής και κυρτή συνάρτηση και  $\mu$  ένα μέτρο Borel στον  $\mathbf{M}^+(\Omega)$ . Τότε το ολοκληρωτικό συναρτησιακό  $F$  που ορίζεται στον  $\mathbf{M}(\Omega, \mathbb{R}^m)$  ως

$$F(\lambda) = \int_{\Omega} f\left(\frac{d\lambda}{d\mu}\right) d\mu + \int_{\Omega} f^\infty\left(\frac{d\lambda^s}{d|\lambda^s|}\right) d|\lambda^s|, \quad (22)$$

με  $\lambda = d\lambda/d\mu \cdot \mu + d\lambda^s$  τη Radon-Nikodym ανάλυση του  $\lambda$  ως προς το  $\mu$ , είναι ασθενώς κάτω ημισυνεχές στον  $\mathbf{M}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ .

**Θεώρημα 2.7** ([45]). Έστω  $F : \mathbf{M}(\Omega, \mathbb{R}^m) \rightarrow [0, +\infty]$  ένα κυρτό και ασθενώς κάτω ημισυνεχές συναρτησιακό στον  $\mathbf{M}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ , που ικανοποιεί την ιδιότητα (*local property*):

$$\lambda_1 \perp \lambda_2 \Rightarrow F(\lambda_1 + \lambda_2) = F(\lambda_1) + F(\lambda_2).$$

Τότε το συναρτησιακό  $F$  είναι της μορφής

$$F(\lambda) = \int_{\Omega} f\left(x, \frac{d\lambda}{d\mu}\right) d\mu + \int_{\Omega} f^\infty\left(x, \frac{d\lambda^s}{d|\lambda^s|}\right) d|\lambda^s|, \quad (23)$$

όπου  $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  συνάρτηση Borel τέτοια ώστε η  $f(x, \cdot)$  είναι κυρτή στον  $\mathbb{R}^m$   $\mu$ -σχεδόν για κάθε  $x \in \Omega$ .

## 2.2.2 Η διαδικασία χαλάρωσης (*Relaxation*)

Σε αυτήν την παράγραφο εξετάζουμε την περίπτωση όπου το συναρτησιακό  $F$  δεν είναι  $w$ - $lsc$ . Κάτι τέτοιο καθιστά αδύνατη την ύπαρξη ελαχίστου. Μπορούμε ωστόσο να συσχετίσουμε το  $F$  με ένα άλλο συναρτησιακό, του οποίου τα ελάχιστα αποτελούν ασθενή σημεία συσσωρεύσεως των ακολουθιών ελαχιστοποίησης του  $F$ . Η ιδέα αυτή αντικατοπτρίζει τη λεγόμενη μέθοδο χαλάρωσης, που αποδίδεται στη βιβλιογραφία με τον όρο “*relaxation*” [5] και ακριβώς υλοποιεί την παραπάνω διαδικασία, δηλαδή, ξεκινώντας από ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης χωρίς λύση μπορεί κανείς να ορίσει το αντίστοιχο «πρόβλημα χαλάρωσης» και να καταλήξει σε μια γενικευμένη λύση του αρχικού.

Έστω  $(X, \tau)$  τοπολογικός χώρος και  $F : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ . Με  $\tau$  συμβολίζουμε την ισχυρή ή ασθενή τοπολογία στον  $X$ .

**Ορισμός 2.2.5** (*relaxed functional*, [6]). Η  $\tau$ - κάτω ημισυνεχής περιβάλλουσα (*relaxed functional*)  $R_\tau F$  του  $F$  ορίζεται  $\forall x \in X$  ως η μεγαλύτερη  $\tau$ - κάτω ημισυνεχής συνάρτηση που είναι μικρότερη του  $F$ , δηλαδή

$$R_\tau F = \sup\{G : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} : G \tau\text{-}lsc, G \leq F\}. \quad (24)$$

**Θεώρημα 2.8** ([6]). Το συναρτησιακό  $R_\tau F$  χαρακτηρίζεται για κάθε  $x \in X$  από τις επόμενες δύο ιδιότητες:

- (i)  $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  τέτοια ώστε  $x_n \xrightarrow{\tau} x$ ,  $R_\tau F(x) \leq \varliminf_{n \rightarrow +\infty} F(x_n)$ ,
- (ii) υπάρχει ακολουθία  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  στον  $X$  τέτοια ώστε  $y_n \xrightarrow{\tau} x$  και  $R_\tau F(x) \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} F(y_n)$ .

**Σχόλιο 2.1** ([5]). Το σύστημα των ισχυρισμών (i) και (ii) τετριμμένα ισοδυναμεί με αυτό των (i) και (ii)′:

- (i)  $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  τέτοια ώστε  $x_n \xrightarrow{\tau} x$ ,  $R_\tau F(x) \leq \varliminf_{n \rightarrow +\infty} F(x_n)$ ,
- (ii)′ υπάρχει ακολουθία  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  στον  $X$  τέτοια ώστε  $y_n \xrightarrow{\tau} x$  και  $R_\tau F(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F(y_n)$

και κάθε συνάρτηση  $R_\tau F$  που ικανοποιεί τις (i) και (ii)′ αυτομάτως ικανοποιεί

$$R_\tau F(x) := \inf\{\varliminf_{n \rightarrow +\infty} F(x_n) : (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, x = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n\}.$$

Η σχέση μεταξύ του αρχικού προβλήματος ελαχιστοποίησης  $\inf\{F(x), x \in X\}$  και του προβλήματος χαλάρωσης  $\inf\{R_\tau F(x), x \in X\}$ , περιγράφεται στο ακόλουθο θεώρημα

**Θεώρημα 2.9** (*Relaxation theorem*, [5]). Έστω  $F : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  γνήσια επεκτεταμένη πραγματική συνάρτηση σε έναν μετρικοποιημένο χώρο  $(X, \rho)$  ή γενικότερα σε έναν πρώτο αριθμήσιμο τοπολογικό χώρο. Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια ακολουθία ελαχιστοποίησης  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  (δηλ.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} F(x_n) = \inf_X F$ ) τέτοια ώστε το σύνολο  $S = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  είναι σχετικά συμπαγές στον  $X$ . Τότε

- (i)  $\inf_X F = \min_X R_\tau F$ ,
- (ii) κάθε σημείο συσσωρεύσεως  $\bar{x}$  του  $S$  είναι σημείο ελαχίστου για το  $R_\tau F$ , δηλαδή  $R_\tau F(\bar{x}) = \min_X R_\tau F$ .

Στην ορολογία της θεωρίας χαλάρωσης, το πρόβλημα

$$(\overline{P}) : \quad \min_X R_\tau F \quad (25)$$

καλείται «πρόβλημα χαλάρωσης» (“*relaxed problem*”) του προβλήματος βελτιστοποίησης

$$(\mathcal{P}) : \quad \inf_X F. \quad (26)$$

Μια λύση του  $(\bar{\mathcal{P}})$  συχνά καλείται «γενικευμένη λύση» του αρχικού προβλήματος  $(\mathcal{P})$ . Η διαδικασία χαλάρωσης συνίσταται στην αναλυτική κατασκευή της κάτω ημισυνεχής περιβάλλουσας του  $F$  για μια κατάλληλη τοπολογία στον χώρο  $X$ , ώστε να έχουμε ένα καλώς ορισμένο πρόβλημα  $(\bar{\mathcal{P}})$  με την έννοια που υποδηλώνει το Θεώρημα 2.9 (δηλ., την ύπαρξη μιας βέλτιστης λύσης για το  $(\bar{\mathcal{P}})$ ).

Για τα ολοκληρωτικά συναρτησιακά, ένας τρόπος υπολογισμού του συναρτησιακού χαλάρωσης είναι μέσω της χρήσης πολικών και διπολικών συναρτήσεων. Έστω  $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ . Ορίζουμε την πολική συνάρτηση της  $f$  (*Legendre-Fenchel transform*, [6]),  $f^* : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ , ως

$$f^*(\eta) = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} \{\eta \cdot \xi - f(\xi)\}, \quad (27)$$

και τη διπολική της  $f$  ως

$$f^{**}(\xi) = \sup_{\eta \in \mathbb{R}^N} \{\eta \cdot \xi - f^*(\eta)\}. \quad (28)$$

Εφόσον οι  $f^*$ ,  $f^{**}$  ορίζονται ως τα *supremum* αφινικών συναρτήσεων, συνεπάγεται ότι οι  $f^*$  και  $f^{**}$  είναι κυρτές. Πιο συγκεκριμένα, η  $f^{**}$  είναι η κυρτή περιβάλλουσα της  $f$  (δηλ., η μεγαλύτερη κυρτή συνάρτηση που είναι μικρότερη της  $f$ ). Επιπλέον, ο ορισμός (27) συνεπάγεται ότι

$$f(\xi) \geq \eta \cdot \xi - f^*(\eta) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \quad (29)$$

δηλαδή η αφινική συνάρτηση  $h(\xi) = \eta \cdot \xi - f^*(\eta)$  βρίσκεται παντού κάτω από το γράφημα της  $f$  και η  $-f^*(\eta)$  δίνει την τομή της με τον άξονα των τεταγμένων.

### Relaxation στον $BV$ .

Σύμφωνα με την προηγούμενη παράγραφο, όταν ένα ολοκληρωτικό συναρτησιακό  $F$  στον  $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$  δεν είναι κάτω ημισυνεχές, η κλασική διαδικασία που ακολουθείται είναι η αντικατάστασή του με το *relaxed*,  $RF$ , ως προς την ασθενή τοπολογία του χώρου  $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ . Μελετάμε την περίπτωση  $p = 1$ , όπου το πεδίο ορισμού  $W^{1,1}(\Omega, \mathbb{R}^m)$  του  $F$  περιέχεται γνήσια στο πεδίο ορισμού του  $RF$ . Κάτι τέτοιο οφείλεται στη μη ανακλαστικότητα του χώρου  $W^{1,1}(\Omega, \mathbb{R}^m)$  [5]. Ειδικά,  $\text{dom } RF \equiv BV(\Omega, \mathbb{R}^m)$ , ενώ για  $p > 1$ ,  $\text{dom } RF \equiv W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ . Στη συνέχεια, δείχνουμε πώς ο χώρος  $BV(\Omega, \mathbb{R}^m)$  και η έννοια του ίχνους  $\gamma$  (βλ. Θεώρημα 1.8) συμμετέχουν στη θεωρία χαλάρωσης. Περιοριζόμαστε στην περίπτωση  $m = 1$  και  $f = |\cdot|$ .

Έστω  $\Omega$  Lipschitz ανοιχτό και φραγμένο υποσύνολο του  $\mathbb{R}^N$ . Ορίζουμε τα συναρτησιακά  $F, G$ , στον  $L^1(\Omega)$  εφοδιασμένο με την ισχυρή τοπολογία,

$$F(u) = \begin{cases} \int_{\Omega} |\nabla u| \, dx & \text{αν } u \in W^{1,1}(\Omega), \\ +\infty & \text{διαφορετικά,} \end{cases} \quad G(u) = \begin{cases} \int_{\Omega} |\nabla u| \, dx & \text{αν } u \in W_0^{1,1}(\Omega), \\ +\infty & \text{διαφορετικά.} \end{cases} \quad (30)$$

**Πρόταση 2.2.2** ([5]). Το πεδίο ορισμού των συναρτησιακών  $RF$  και  $RG$  περιέχεται στον  $BV(\Omega)$ .

**Πρόταση 2.2.3** ([5]). Έστω  $\Omega$  Lipschitz ανοιχτό και φραγμένο υποσύνολο του  $\mathbb{R}^N$  με  $\Gamma$  σύνορο. Τα *relaxed* συναρτησιακά  $RF$ ,  $RG$  των  $F, G$ , (30), για την ισχυρή τοπολογία

του  $L^1(\Omega)$ , είναι της μορφής

$$RF(u) = \begin{cases} \int_{\Omega} |Du| & \text{αν } u \in BV(\Omega), \\ +\infty & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

$$RG(u) = \begin{cases} \int_{\Omega} |Du| + \int_{\Gamma} |\gamma(u)| d\mathcal{H}^{N-1} & \text{αν } u \in BV(\Omega), \\ +\infty & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

όπου  $\gamma : BV(\Omega) \rightarrow L^1(\Gamma)$  ο τελεστής ίχνους.

Έστω  $F, G$  ολοκληρωτικά συναρτησιακά της μορφής

$$F(u) = \begin{cases} \int_{\Omega} f(\nabla u) dx & \text{αν } u \in W^{1,1}(\Omega), \\ +\infty & \text{διαφορετικά,} \end{cases} \quad G(u) = \begin{cases} \int_{\Omega} f(\nabla u) dx & \text{αν } u \in W_0^{1,1}(\Omega), \\ +\infty & \text{διαφορετικά,} \end{cases} \quad (31)$$

όπου  $f$  κυρτή συνάρτηση που ικανοποιεί κατάλληλες γραμμικές αυξητικές συνθήκες. Πρώτα, διατυπώνουμε την ακόλουθη πρόταση, η οποία δεν προϋποθέτει καμία αυξητική συνθήκη για την  $f$ .

**Πρόταση 2.2.4** (Πόρισμα του Θεωρήματος 2.6, [5]). Έστω  $Du = \nabla u \mathcal{L}^N \llcorner \Omega + D^s u$  η Lebesgue-Nykodym ανάλυση του μέτρου  $Du$  και  $f : \mathbb{R}^N \rightarrow [0, +\infty]$  κάτω ημισυνεχής και κυρτή συνάρτηση. Τότε, το ολοκληρωτικό συναρτησιακό  $F$  που ορίζεται στον  $BV(\Omega)$  ως

$$F(u) = \int_{\Omega} f(\nabla u) dx + \int_{\Omega} f^{\infty} \left( \frac{D^s u}{|D^s u|} \right) |D^s u|, \quad (32)$$

είναι κάτω ημισυνεχές για την  $BV - w^*$  τοπολογία.

Στα επόμενα, συμβολίζουμε το ολοκλήρωμα  $\int_{\Omega} f^{\infty} \left( \frac{D^s u}{|D^s u|} \right) |D^s u|$  με  $\int_{\Omega} f^{\infty}(D^s u)$  και θέτουμε

$$F(u) := \int_{\Omega} f(Du).$$

Θεωρούμε την κυρτή συνάρτηση  $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^+$  που ικανοποιεί  $\forall \alpha \in \mathbb{R}^N$  την αυξητική συνθήκη

$$0 \leq f(\alpha) \leq \beta(1 + |\alpha|) \quad (33)$$

για κάποια θετική σταθερά  $\beta$ . Ο Fenchel μετασχηματισμός της  $f$  (βλ., π.χ., (27)) είναι η συνάρτηση  $f^* : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  που ορίζεται  $\forall b \in \mathbb{R}^N$

$$f^*(b) = \sup_{\alpha \in \mathbb{R}^N} \{b \cdot \alpha - f(\alpha)\}.$$

Η  $f^*$  είναι μια  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ -κυρτή, γνήσια και κάτω ημισυνεχής συνάρτηση. Από τη συνθήκη (33) συνεπάγεται ότι το πεδίο ορισμού της,  $K$ , περιέχεται στην κλειστή μπάλα  $B(0, \beta)$  του  $\mathbb{R}^N$  και ότι  $f^*(b) \geq -\beta$ ,  $\forall b \in K$ . Επιπλέον, υποθέτουμε ότι η  $f^*$  είναι άνω φραγμένη:

$$\exists C > 0 \text{ έτσι ώστε } \forall b \in K, f^*(b) \leq C. \quad (34)$$

**Θεώρημα 2.10** ([5]). Έστω  $f$  μη αρνητική κυρτή συνάρτηση που ικανοποιεί τις (33) και (34). Τότε ο χώρος  $C^{\infty}(\Omega) \cap BV(\Omega)$  είναι πυκνός στον  $BV(\Omega)$  με την *intermediate* σύγκλιση σε σχέση με την  $f$ . Ειδικότερα, για κάθε  $u \in BV(\Omega)$ , υπάρχει  $u_n \in C^{\infty}(\Omega) \cap BV(\Omega)$  τέτοια ώστε

$$u_n \rightarrow u \text{ ισχυρώς στον } L^1(\Omega),$$

$$\int_{\Omega} |Du_n| dx \rightarrow \int_{\Omega} |Du| dx,$$

$$\int_{\Omega} f(Du_n) dx \rightarrow \int_{\Omega} f(Du) dx.$$

Για μια πλήρη περιγραφή των *relaxed* συναρτησιακών των  $F, G$ , (31), θεωρούμε επιπλέον ότι η  $f$  ικανοποιεί τη συνθήκη πιεστικότητας

$$\exists a > 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}^N, a(|\alpha| - 1) \leq f(\alpha). \quad (35)$$

**Θεώρημα 2.11** ([5]). Έστω  $\Omega$  Lipschitz ανοιχτό και φραγμένο υποσύνολο του  $\mathbb{R}^N$  με σύνορο  $\Gamma$  και  $f$  μη αρνητική και κυρτή συνάρτηση που ικανοποιεί τις (33), (34) και (35). Τότε, τα *relaxed* συναρτησιακά των  $F$  και  $G$ , στον  $L^1(\Omega)$  εφοδιασμένο με την ισχυρή τοπολογία, ορίζονται ως

$$RF(u) = \begin{cases} \int_{\Omega} f(\nabla u) dx + \int_{\Omega} f^{\infty}(D^s u) & \text{αν } u \in BV(\Omega), \\ +\infty & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

$$RG(u) = \begin{cases} \int_{\Omega} f(\nabla u) dx + \int_{\Omega} f^{\infty}(D^s u) + \int_{\Gamma} f^{\infty}(\gamma(u)n) d\mathcal{H}^{N-1} & \text{αν } u \in BV(\Omega), \\ +\infty & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

### 2.2.3 Η μέθοδος της ομογενοποίησης

Η μέθοδος της ομογενοποίησης (*homogenization method*) [28] αναπτύχθηκε με σκοπό να παρακάμψει την αναγκαστική ομαλότητα και τους τοπολογικούς περιορισμούς που ενυπάρχουν στην κλασική θεωρία της βελτιστοποίησης σχήματος. Το ευρύτερο μαθηματικό πλαίσιο της θεωρίας ομογενοποίησης περιγράφεται μέσω της θεωρίας της  $H$ - σύγκλισης, που εισήχθη από τον Spagnolo [46, 47] φέροντας την ονομασία “ $G$ - convergence” και αργότερα γενικεύτηκε από τους Tartar [48] και Murat (και Tartar) [49] ως “ $H$ - convergence”.

Οι έννοιες της  $H$ - και  $G$ - σύγκλισης κρίνονται αναγκαίες, όταν προκύπτουν οριακές διαδικασίες στις οποίες ερευνάται η σύγκλιση προβλημάτων συνοριακών τιμών, καθώς ορισμένες φυσικές παράμετροι μεταβάλλονται. Αναλυτικότερα, έστω η ακόλουθη οικογένεια προβλημάτων

$$-\operatorname{div} A^{\epsilon}(x) \nabla u_{\epsilon}(x) = f(x) \quad \text{στο } \Omega, \quad (36)$$

$$u_{\epsilon}(x) = 0 \quad \text{στο } \partial\Omega, \quad (37)$$

όπου  $\Omega$  ανοιχτό και φραγμένο υποσύνολο του  $\mathbb{R}^N$ ,  $\epsilon > 0$  μια ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών που τείνει στο μηδέν ( $\epsilon \rightarrow 0$ ) και  $L^{\infty}(\Omega, \mathcal{M}_{b,c})$  ο χώρος των αποδεκτών συντελεστών  $A^{\epsilon}(x)$  στο  $\Omega$ . Για κάθε δύο θετικές σταθερές  $b > 0$  και  $c > 0$ , ορίζουμε τον υπόχωρο  $\mathcal{M}_{b,c}$  του γραμμικού χώρου  $\mathcal{M}_N$  των τετραγωνικών πραγματικών πινάκων τάξης  $N$ , που μαζί με τους αντίστροφους τους είναι πιεστικοί [28]:

$$\mathcal{M}_{b,c} = \left\{ M \in \mathcal{M}_N \text{ έτσι ώστε } \begin{cases} M\xi \cdot \xi \geq b|\xi|^2 \\ M^{-1}\xi \cdot \xi \geq c|\xi|^2 \end{cases} \forall \xi \in \mathbb{R}^N \right\}. \quad (38)$$

**Σχόλιο 2.2** ([28]). Μια αναγκαία συνθήκη έτσι ώστε  $M \in \mathcal{M}_{b,c}$  είναι  $b|\xi|^2 \leq M\xi \cdot \xi \leq c^{-1}|\xi|^2$  για κάθε διάνυσμα  $\xi$ . Επομένως, το σύνολο  $\mathcal{M}_{b,c} \neq \emptyset$  αν και μόνο αν οι θετικές σταθερές  $b$  και  $c$  ικανοποιούν  $bc \leq 1$ . Στη συνέχεια, υποθέτουμε πως μια τέτοια συνθήκη ικανοποιείται.

**Ορισμός 2.2.6** ( $H$ - convergence, [28]). Λέμε ότι μια ακολουθία πινάκων  $A^{\epsilon}(x)$  στον  $L^{\infty}(\Omega, \mathcal{M}_{b,c})$  συγχλίνει με την έννοια της ομογενοποίησης, ή απλά  $H$ - συγχλίνει, σε ένα ομογενοποιημένο όριο-πίνακα ή  $H$ - όριο,  $A^*(x) \in L^{\infty}(\Omega, \mathcal{M}_{b,c})$ , και γράφουμε  $A^{\epsilon}(x) \xrightarrow{H} A^*(x)$ , αν για κάθε δεξιό μέλος  $f \in H^{-1}(\Omega)$ , η ακολουθία  $u_{\epsilon}$  των λύσεων της εξίσωσης

$$-\operatorname{div} A^{\epsilon}(x) \nabla u_{\epsilon}(x) = f(x) \quad \text{στο } \Omega, \quad (39)$$

$$u_{\epsilon}(x) = 0 \quad \text{στο } \partial\Omega, \quad (40)$$



ικανοποιεί

$$u_\epsilon \rightharpoonup u \quad \text{ασθενώς στον } H_0^1(\Omega), \quad (41)$$

$$A^\epsilon(x)\nabla u_\epsilon(x) \rightharpoonup A^*(x)\nabla u(x) \quad \text{ασθενώς στον } (L^2(\Omega))^N, \quad (42)$$

όπου  $u$  η λύση της ομογενοποιημένης εξίσωσης

$$-\operatorname{div} A^*(x)\nabla u(x) = f(x) \quad \text{στο } \Omega, \quad (43)$$

$$u(x) = 0 \quad \text{στο } \partial\Omega. \quad (44)$$

Ο παραπάνω ορισμός έχει νόημα χάρη στο ακόλουθο θεώρημα

**Θεώρημα 2.12** ([28]). Για κάθε ακολουθία πινάκων  $A^\epsilon(x)$  στον  $L^\infty(\Omega, \mathcal{M}_{b,c})$ , υπάρχει υποακολουθία  $A^\epsilon$ , που συμβολίζουμε το ίδιο, και πίνακας  $A^*(x) \in L^\infty(\Omega, \mathcal{M}_{b,c})$  τέτοια ώστε  $A^\epsilon \xrightarrow[H]{} A^*$ .

**Σχόλιο 2.3.** Η  $H$ - σύγκλιση ορίζεται έμμεσα από τη σύγκλιση των λύσεων των προβλημάτων και των ροών τους. Επομένως, δεν συνδέεται *a priori* με κάποια από τις συνήθεις έννοιες σύγκλισης (ασθενής ή ισχυρή) των συντελεστών. Παρ' όλα αυτά, μια τέτοια συσχέτιση υπάρχει, όπως διατυπώνεται στο Λήμμα 2.2.1 παρακάτω.

Η  $H$ - σύγκλιση είναι «τοπική»:

**Πρόταση 2.2.5** ([28]). Έστω δύο ακολουθίες πινάκων  $A^\epsilon(x), B^\epsilon(x)$  στον  $L^\infty(\Omega, \mathcal{M}_{b,c})$  που  $H$ - συγκλίνουν στα  $A^*(x)$  και  $B^*(x)$  αντίστοιχα. Έστω  $\omega$  ανοιχτό υποσύνολο του  $\Omega$  με  $\bar{\omega} \subset\subset \Omega$  (δηλ., το  $\omega$  περιέχεται ισχυρώς στο  $\Omega$ ). Αν  $A^\epsilon(x) = B^\epsilon(x)$  στο  $\omega$ , τότε  $A^*(x) = B^*(x)$  στο  $\omega$ .

Η Πρόταση 2.2.5 έχει δύο σημαντικές συνέπειες. Πρώτον, το  $H$ - όριο μιας ακολουθίας είναι μοναδικό, δηλαδή μια ακολουθία δεν μπορεί να συγκλίνει σε δύο διαφορετικά όρια. Δεύτερον, η τιμή του ομογενοποιημένου πίνακα  $A^*$  σε μια περιοχή  $\omega$  δεν εξαρτάται από τις τιμές της ακολουθίας  $A^\epsilon$  έξω από αυτήν την περιοχή· γεγονός που αποδίδει την έννοια της τοπικότητας.

Η  $H$ - σύγκλιση είναι «αδιάφορη» ως προς την επιλογή των συνοριακών συνθηκών:

**Πρόταση 2.2.6** ([28]). Έστω  $A^\epsilon(x)$  μια ακολουθία πινάκων στον  $L^\infty(\Omega, \mathcal{M}_{b,c})$  που  $H$ - συγκλίνει στον  $A^*(x)$ . Για κάθε ακολουθία  $z_\epsilon$  τέτοια ώστε

$$\begin{cases} -\operatorname{div} A^\epsilon \nabla z_\epsilon = f_\epsilon \rightarrow f \text{ ισχυρώς στον } H_{loc}^{-1}(\Omega) \\ z_\epsilon \rightharpoonup z \text{ ασθενώς στον } H_{loc}^1(\Omega), \end{cases} \quad (45)$$

η  $A^\epsilon(x)$  ικανοποιεί

$$A^\epsilon \nabla z_\epsilon \rightharpoonup A^* \nabla z \text{ ασθενώς στον } (L_{loc}^2(\Omega))^N.$$

Η Πρόταση 2.2.6 συνεπάγεται την ισχύ των συγκλίσεων (41)-(42) για ακολουθίες όπως η  $z_\epsilon$ . Η διαφορά μεταξύ των  $u_\epsilon$  και  $z_\epsilon$  είναι πως η τελευταία δεν ικανοποιεί κάποια προκαθορισμένη συνοριακή συνθήκη στο  $\partial\Omega$  και επιπλέον αποτελεί λύση μιας εξίσωσης με μεταβλητό δεξιό μέλος  $f_\epsilon$ . Συνεπώς, η  $H$ - σύγκλιση μπορεί να εφαρμοστεί ανεξαρτήτως συνοριακών συνθηκών (και όχι απαραίτητα μόνο για *Dirichlet* συνοριακές συνθήκες, όπως στον Ορισμό 2.2.6).

Στην περίπτωση των συμμετρικών τελεστών (δηλ., όταν ο πίνακας  $A^\epsilon$  είναι συμμετρικός) χρησιμοποιείται μια άλλη έννοια τελεστικής σύγκλισης, η λεγόμενη  $G$ - σύγκλιση

[46]. Συχνά στη βιβλιογραφία, οι έννοιες των  $H$ - και  $G$ - συγκλίσεων συγχεόνται, αν και στο αυστηρό θεωρητικό πλαίσιο η  $H$ - σύγκλιση θεωρείται μια γενίκευση της  $G$ - για την περίπτωση των μη συμμετρικών τελεστών.

Έστω  $\mathcal{M}_N^s$  ο γραμμικός χώρος των συμμετρικών πραγματικών πινάκων τάξης  $N$ . Όμοια με την (38), ορίζουμε για κάθε δύο θετικές σταθερές  $b > 0$  και  $c > 0$  τον υπόχωρο  $\mathcal{M}_{b,c}^s$  του  $\mathcal{M}_N^s$ ,

$$\mathcal{M}_{b,c}^s = \left\{ M \in \mathcal{M}_N^s \text{ έτσι ώστε } \begin{array}{l} M\xi \cdot \xi \geq b|\xi|^2 \\ M^{-1}\xi \cdot \xi \geq c|\xi|^2 \end{array} \forall \xi \in \mathbb{R}^N \right\}. \quad (46)$$

**Ορισμός 2.2.7** ( $G$ - convergence, [28]). Λέμε ότι μια ακολουθία συμμετρικών πινάκων  $A^\epsilon(x)$  στον  $L^\infty(\Omega, \mathcal{M}_{b,c}^s)$   $G$ - συγκλίνει σε ένα ομογενοποιημένο όριο-πίνακα ή  $G$ - όριο,  $A^*(x) \in L^\infty(\Omega, \mathcal{M}_{b,c}^s)$ , και γράφουμε  $A^\epsilon(x) \xrightarrow{G} A^*(x)$ , αν για κάθε δεξιό μέλος  $f \in H^{-1}(\Omega)$ , η ακολουθία  $u_\epsilon$  των λύσεων της εξίσωσης

$$-\operatorname{div} A^\epsilon(x) \nabla u_\epsilon(x) = f(x) \quad \text{στο } \Omega, \quad (47)$$

$$u_\epsilon(x) = 0 \quad \text{στο } \partial\Omega, \quad (48)$$

συγκλίνει ασθενώς στον  $H_0^1(\Omega)$  στη λύση  $u$  της ομογενοποιημένης εξίσωσης

$$-\operatorname{div} A^*(x) \nabla u(x) = f(x) \quad \text{στο } \Omega, \quad (49)$$

$$u(x) = 0 \quad \text{στο } \partial\Omega. \quad (50)$$

**Θεώρημα 2.13** ([28]). Για κάθε ακολουθία  $A^\epsilon(x) \in L^\infty(\Omega, \mathcal{M}_{b,c})$  συμμετρικών πινάκων, υπάρχει υπακολουθία  $A^\epsilon$ , που συμβολίζουμε το ίδιο, και συμμετρικός πίνακας  $A^*(x) \in L^\infty(\Omega, \mathcal{M}_{b,c}^s)$  τέτοια ώστε  $A^\epsilon \xrightarrow{G} A^*$ .

Η βασική διαφορά μεταξύ της  $H$ - και  $G$ - σύγκλισης είναι ότι η δεύτερη δεν απαιτεί τη σύγκλιση των ροών  $A^\epsilon \nabla u_\epsilon$ . Επομένως, η  $G$ - σύγκλιση είναι ασθενέστερη της  $H$ - σύγκλισης, υπό την έννοια ότι αν μια ακολουθία συμμετρικών πινάκων  $A^\epsilon$   $H$ - συγκλίνει σε έναν συμμετρικό πίνακα  $A^*$ , τότε αυτομάτως  $G$ - συγκλίνει στο ίδιο όριο. Το αντίστροφο δεν είναι προφανές, αλλά αποδεικνύεται ότι ισχύει [28].

**Πρόταση 2.2.7** ([28]). Μια ακολουθία  $A^\epsilon$  συμμετρικών πινάκων στον  $L^\infty(\Omega, \mathcal{M}_{b,c}^s)$   $G$ - συγκλίνει σε ένα όριο  $A^* \in L^\infty(\Omega, \mathcal{M}_{b,c}^s)$  αν και μόνο αν  $H$ - συγκλίνει στο  $A^*$ .

Τέλος, αναφέρουμε δύο αποτελέσματα με καθοριστικό ρόλο στις εφαρμογές (βλ., π.χ., Παράγραφο 2.3.1).

**Λήμμα 2.2.1** ([28]). Έστω  $A^\epsilon(x)$  μια ακολουθία πινάκων στον  $L^\infty(\Omega, \mathcal{M}_{b,c})$  που είτε συγκλίνει ισχυρώς στο όριο-πίνακα  $A^*(x)$  στον  $L^1(\Omega, \mathcal{M}_N)$  είτε συγκλίνει στο  $A^*(x)$  σχεδόν παντού στο  $\Omega$ . Τότε, επιπλέον  $A^\epsilon(x) \xrightarrow{H} A^*(x)$ .

**Λήμμα 2.2.2** (*Div-curl lemma*, [50, 51]). Έστω  $u_\epsilon, v_\epsilon$  δύο ακολουθίες στον  $(L^2(\Omega))^N$  τέτοιες ώστε

$$\begin{cases} u_\epsilon \rightharpoonup u & \text{ασθενώς στον } (L^2(\Omega))^N \\ v_\epsilon \rightharpoonup v & \text{ασθενώς στον } (L^2(\Omega))^N. \end{cases}$$

Ορίζουμε τον τελεστή στροβιλισμού  $\operatorname{curl} v = \left( \frac{\partial v^i}{\partial x_j} - \frac{\partial v^j}{\partial x_i} \right)_{1 \leq i, j \leq N}$ . Επιπλέον, υποθέτουμε ότι

$$\begin{cases} \operatorname{div} u_\epsilon \rightarrow \operatorname{div} u & \text{ισχυρώς στον } H^{-1}(\Omega) \\ \operatorname{curl} v_\epsilon \rightarrow \operatorname{curl} v & \text{ισχυρώς στον } H^{-1}(\Omega, \mathcal{M}_N). \end{cases}$$

Τότε

$$u_\epsilon \cdot v_\epsilon \rightharpoonup u \cdot v \quad \text{με την έννοια των κατανομών.} \quad (51)$$

## 2.2.4 $\Gamma$ - Σύγκλιση

Δεδομένου ενός μετριοποιήσιμου χώρου ή γενικότερα ενός πρώτου αριθμήσιμου τοπολογικού χώρου, επιθυμούμε να ορίσουμε μια έννοια σύγκλισης στον χώρο των επεκτεταμένων πραγματικών συναρτήσεων  $F : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  έτσι ώστε οι απεικονίσεις

$$F \mapsto \inf_X F, \quad F \mapsto \arg \min_X F$$

να είναι ακολουθιακά συνεχείς. Πιο συγκεκριμένα, για  $F_n, F : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ , υπό κάποιες υποθέσεις συμπίεσης, θέλουμε να ισχύουν οι ακόλουθες συνεπαγωγές (καθώς  $n \rightarrow +\infty$ ):

$$F_n \rightarrow F \Rightarrow \inf_X F_n \rightarrow \inf_X F,$$

$$F_n \rightarrow F, u_n \in \arg \min_X F_n \Rightarrow u_n \rightarrow u \in \arg \min_X F \text{ τουλάχιστον για μια υπακολουθία.}$$

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι μια τέτοια θεωρία σύγκλισης περιέχει κατά μία έννοια στοιχεία της θεωρίας χαλάρωσης. Πράγματι, σύμφωνα με το Θεώρημα 2.9, έχουμε ότι

$$F_n \equiv F \rightarrow RF \Rightarrow \inf_X F = \min_X RF \quad (52)$$

και κάθε σχετικά συμπαγής ακολουθία ελαχιστοποίησης έχει μια υπακολουθία που συγκλίνει στο  $u \in \arg \min_X F$ .

Τέτοια ζητήματα προκύπτουν συχνά στο λογισμό των μεταβολών. Πράγματι, πολλά προβλήματα στη φυσική, τη μηχανική και την προσεγγιστική θεωρία της αριθμητικής ανάλυσης μοντελοποιούνται μέσω της ελαχιστοποίησης συναρτησιακών που εξαρτώνται από κάποια παράμετρο, έστω  $n$ . Για παράδειγμα, γράφουμε  $F_n$  αντί για  $F_\varepsilon$ , όπου  $\varepsilon$  μια μικρή παράμετρος που συνδέεται με την πυκνότητα, τη δυσκαμψία (στη μηχανική) ή γενικότερα με ένα μέγεθος μικρής μεταβολής. Τότε, αν το μοντέλο που αντιστοιχίζεται στο  $F_n$  επιδέχεται μεταβολική μορφή, το πρόβλημα εύρεσης ενός συναρτησιακού  $F$  που είναι ασυμπτωτικά ισοδύναμο με το  $F_n$ , και σημειώνεται με  $F \sim F_n$ , διατυπώνεται σε όρους του λογισμού των μεταβολών ως εξής:

$F \sim F_n$  σημαίνει ότι καθώς  $n \rightarrow \infty$  (ή  $\varepsilon \rightarrow 0$ ),

$$\begin{aligned} \inf_X F &\sim \inf_X F_n, \\ \bar{x} \in \arg \min_X F &\sim x_n \in \varepsilon_n - \arg \min_X F_n, \quad \varepsilon_n \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (53)$$

για κάποια κατάλληλη τοπολογία στον  $X$ .

Η έννοια της  $\Gamma$ - σύγκλισης ανταποκρίνεται σε αυτόν το σκοπό [52].

**Ορισμός 2.2.8** ([5]). Έστω  $(X, \rho)$  μετριοποιήσιμος χώρος ή γενικότερα ένας πρώτος αριθμήσιμος τοπολογικός χώρος,  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ακολουθία επεκτεταμένων πραγματικών συναρτήσεων  $F_n : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  και  $F : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ . Λέμε ότι η ακολουθία  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  (ακολουθιακά)  $\Gamma$ - συγκλίνει στο  $F$  στο  $x \in X$  αν και μόνο αν αληθεύουν οι ακόλουθοι δύο ισχυρισμοί:

(i) για κάθε ακολουθία  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  που συγκλίνει στο  $x \in X$ ,

$$F(x) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} F_n(x_n),$$

(ii) υπάρχει ακολουθία  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  που συγκλίνει στο  $x \in X$  τέτοια ώστε

$$F(x) \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} F_n(y_n).$$

Όταν οι (i)-(ii) ισχύουν  $\forall x \in X$ , λέμε ότι η  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$   $\Gamma$ -συγκλίνει στο  $F$  στον  $(X, \rho)$  και γράφουμε  $F = \Gamma - \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n$ .

**Σχόλιο 2.4** ([5]). Το σύστημα των ισχυρισμών (i) και (ii) τετριμμένα ισοδυναμεί με αυτό των (i) και (ii)':

(i) για κάθε ακολουθία  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  που συγκλίνει στο  $x \in X$ ,

$$F(x) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} F_n(x_n), \quad (54)$$

(ii)' υπάρχει ακολουθία  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  που συγκλίνει στο  $x \in X$  τέτοια ώστε

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(y_n). \quad (55)$$

**Ορισμός 2.2.9** (*equicoercivity*, [6]). Λέμε ότι η ακολουθία των συναρτησιακών  $F_n$  είναι ισοπιεστική αν για κάθε  $t \geq 0$  υπάρχει  $K_t$  συμπαγές υποσύνολο του  $X$  έτσι ώστε  $\{x \in X : F_n(x) \leq t\} \subset K_t$  για κάθε  $n$ .

Το βασικό εννοιολογικό ενδιαφέρον της  $\Gamma$ -σύγκλισης έγκειται στη μεταβολική της φύση, όπως γίνεται φανερό στον ισχυρισμό (i) παρακάτω

**Θεώρημα 2.14** ([5]). Έστω  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ακολουθία συναρτήσεων  $F_n : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  που  $\Gamma$ -συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση  $F : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ . Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) Έστω  $x_n \in X$  τέτοια ώστε  $F_n(x_n) \leq \inf\{F_n(x) : x \in X\} + \varepsilon_n$ , όπου  $\varepsilon_n > 0$ ,  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  όταν  $n \rightarrow +\infty$ . Υποθέτουμε ότι το  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  είναι σχετικά συμπαγές. Τότε κάθε σημείο συσσωρεύσεως  $\bar{x}$  του  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  είναι σημείο ελαχίστου για την  $F$  και

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \inf\{F_n(x) : x \in X\} = F(\bar{x}). \quad (56)$$

(ii) Αν  $G : X \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχής, τότε  $F + G = \Gamma - \lim_{n \rightarrow +\infty} (F_n + G)$ .

Έστω  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ακολουθία συναρτήσεων  $F_n : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ . Αν υπάρχει συνάρτηση  $F : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  τέτοια ώστε κάθε υπακολουθία της  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  έχει μια υπακολουθία που  $\Gamma$ -συγκλίνει στην  $F$ , τότε ολόκληρη η ακολουθία  $\Gamma$ -συγκλίνει στην  $F$ .

Γενικά, δεν υπάρχει κάποια σύνδεση μεταξύ της  $\Gamma$ - και της σημειακής σύγκλισης, εκτός από την ακόλουθη συσχέτιση

**Θεώρημα 2.15** ( $\Gamma$ -convergence and pointwise convergence, [6]).

(i) Αν η  $F_n$  συγκλίνει ομοιόμορφα στην  $F$ , τότε  $F = \Gamma - \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n$ .

(ii) Αν η  $F_n$  είναι φθίνουσα ακολουθία που συγκλίνει σημειακά στην  $F$ , τότε  $RF = \Gamma - \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n$ .

### 2.3 Το αντίστροφο πρόβλημα της αγωγιμότητας

Έστω  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d = 2, 3$ , *Lipschitz* χωρίο που αναπαριστά ένα αγώγιμο μέσο με αγωγιμότητα  $\alpha(x)$ ,  $x \in \Omega$ . Συνήθως, υπάρχει μια (ενδεχομένως) μη συνεκτική περιοχή  $D$ , ανοιχτό υποσύνολο του  $\Omega$ , που αποτελεί το αντικείμενο προς εντοπισμό και διαφοροποιείται από το υπόλοιπο αγώγιμο υλικό μέσω της πιθανώς ασυνεχούς μεταβολής της αγωγιμότητας στη διεπιφάνεια  $\partial D$ .

Το δυναμικό  $u$  στο εσωτερικό της δομής  $\Omega$  ικανοποιεί το ευθύ πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\nabla \cdot (\alpha(x)\nabla u(x)) = 0 \quad x \in \Omega, \quad (57)$$

$$\alpha(x)\nabla u(x) \cdot \vec{n} = g(x) \quad x \in \partial\Omega, \quad (58)$$

με  $\vec{n}$  το κάθετο εξωτερικό μοναδιαίο διάνυσμα στο  $\partial\Omega$  και συντελεστή αγωγιμότητας στη μορφή

$$\alpha(x) = \tilde{b}(x)\chi_{\Omega \setminus D}(x) + \tilde{c}(x)\chi_D(x), \quad (59)$$

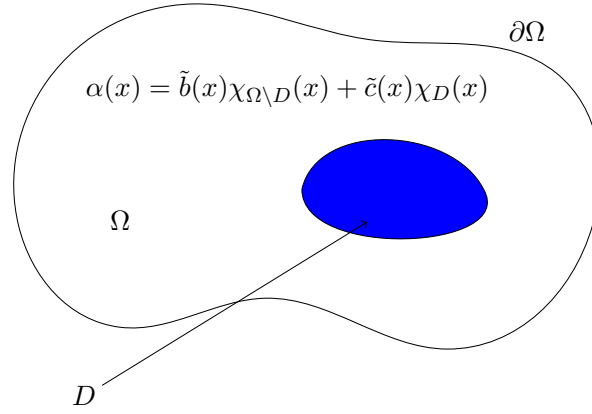
όπου συναντάται η χαρακτηριστική συνάρτηση  $\chi_A$  ενός συνόλου  $A$ . Οι συναρτήσεις  $\tilde{b}(x), \tilde{c}(x)$  χαρακτηρίζουν τον background πίνακα και τον εγκλεισμό  $D$ , αντίστοιχα. Στις περισσότερες εφαρμογές, αυτές οι συναρτήσεις είναι σταθερές και αποτελούν αναπαραστάσεις διαφασικών υλικών. Εδώ, τις θεωρούμε συναρτήσεις μεταβλητών με ασυνεχή συμπεριφορά στις διεπιφάνειες των εγκλεισμών, με το μοναδικό ποσοτικό περιορισμό οι τιμές τους να μεταβάλλονται στο διάστημα  $[b, c]$ , όπου  $b, c$  πραγματικές σταθερές με  $0 < b < c < \infty$ . Επομένως, έχουμε ότι  $\alpha(x) \in L^\infty(\Omega, [b, c])$ . Επιπλέον, θεωρούμε ότι  $\alpha(x) \in BV(\Omega)$ . Έτσι, στην πιλοτική περίπτωση ενός δίτιμου αγώγιμου προφίλ, το αντίστροφο πρόβλημα της αγωγιμότητας συνίσταται στον προσδιορισμό της μετρήσιμης συνάρτησης  $\alpha(x) \in BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega, \{b, c\})$ . Η συνοριακή συνθήκη του προβλήματος επιβάλλει συγκεκριμένο ρεύμα  $g \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$  κατά μήκος ολόκληρου του συνόρου  $\partial\Omega$ . Είναι γνωστό ότι ένα τέτοιο πρόβλημα συνοριακών τιμών έχει λύση μόνο όταν τα επιφανειακά δεδομένα ικανοποιούν τη συνθήκη συμβιβαστότητας  $\langle g, 1 \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \times H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} = 0$ , και τότε ορίζεται μια κλάση ισοδυναμίας των λύσεων  $u \in H^1(\Omega)$ , της οποίας τα μέλη διαφέρουν μεταξύ τους κατά μία πραγματική σταθερά. Προκειμένου να συγκεντρώσουμε αυτά τα μέλη, εισάγουμε τον χώρο ηλίχο  $H^1(\Omega)/\mathbb{R}$  - αποτελούμενο από όλα τα σύμπλοκα  $u + \mathbb{R} = \{u + \lambda, \lambda \in \mathbb{R}\}$  καθώς η  $u$  διατρέχει τον  $H^1(\Omega)$  - με την κατάλληλη νόρμα  $\|u\|_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}} = \inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \|u + \lambda\|_{H^1(\Omega)}$ . Σημειωτέον ότι κάθε λύση  $u$ , μαζί με την ηλεκτρική ροή  $\alpha \frac{\partial u}{\partial n}$ , είναι συνεχής κατά μήκος της διεπιφάνειας  $\partial D$ .

Η ανάκτηση της αγωγιμότητας  $\alpha(x)$  από επιφανειακές μετρήσεις (π.χ. το δυναμικό  $u|_{\partial\Omega}$  στο σύνορο του σώματος) ισοδυναμεί με τη γνώση του *Neumann-to-Dirichlet* τελεστή,  $\Lambda_{\mathcal{N}.t.D} : H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ , ή ισοδύναμα του αντιστρόφου του, *Dirichlet-to-Neumann*,  $\Lambda_{\mathcal{D}.t.N} : H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ , γεγονός που αντιστοιχεί στην κατάσταση όπου γνωρίζουμε τις *Dirichlet* τιμές του πεδίου  $u$  και αποκτάμε a posteriori επιπλέον πληροφορία για το *Neumann* πεδίο στην επιφάνεια  $\partial\Omega$ . Στα επόμενα, χρησιμοποιούμε το συμβολισμό  $\Lambda_\alpha = \Lambda_{\mathcal{D}.t.N}$  για να τονίσουμε την εξάρτηση αυτού του επιφανειακού τελεστή από τη συνάρτηση της αγωγιμότητας  $\alpha(x)$ , και τότε αυτομάτως έχουμε ότι  $\Lambda_\alpha^{-1} = \Lambda_{\mathcal{N}.t.D}$ . Συνοψίζοντας, ορίζουμε το αντίστροφο πρόβλημα της αγωγιμότητας

$$\nabla \cdot (\alpha(x)\nabla u(x)) = 0 \quad x \in \Omega, \quad (60)$$

$$u(x) = f(x) \quad x \in \partial\Omega, \quad (61)$$

$$\alpha(x)\nabla u(x) \cdot \vec{n} = g(x) \quad x \in \partial\Omega, \quad (62)$$



Εικόνα 2.1: Το αντίστροφο πρόβλημα της αγωγιμότητας συνίσταται στον προσδιορισμό του συντελεστή  $\alpha(x)$ .

με γνωστά επιφανειακά δεδομένα  $f \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$  και  $g = \Lambda_\alpha(f) \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ .

Μια επιμελέστερη ανάλυση του προβλήματος - ενσωματώνοντας και την αναγκαία συνθήκη συμβιβαστότητας των *Neumann* δεδομένων - οδηγεί στην υιοθέτηση του καταλληλότερου συναρτησιακού πλαισίου  $\Lambda_\alpha : \mathcal{B} \left( := H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)/\mathbb{R} \right)^{(i)} \rightarrow \mathcal{B}^*$ , ισοδύναμα  $\Lambda_\alpha^{-1} : \mathcal{B}^* \rightarrow \mathcal{B}$ , όπου ένας ισομετρικός ισομορφισμός του δυϊκού χώρου  $\mathcal{B}^* = \left( H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)/\mathbb{R} \right)^*$  αποτελεί ο χώρος των κατανομών  $\mathcal{A} := \left\{ g \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) : \langle g, 1 \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \times H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} = 0 \right\}$ , στον οποίο τα δεδομένα  $g$  «οφείλουν» να ανήκουν.

### 2.3.1 Διερεύνηση των οριακών διαδικασιών του αντίστροφου προβλήματος της αγωγιμότητας μέσω της $H$ - και $G$ - σύγκλισης

Στη συνέχεια, διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε τα αποτελέσματα βασικών οριακών διαδικασιών που εμπλέκονται στην επίλυση του αντίστροφου προβλήματος της αγωγιμότητας εφαρμόζοντας τη γενική  $2d$ - θεωρία ομογενοποίησης (βλ. Παράγραφο 2.2.3).

Έστω μια αριθμήσιμη οικογένεια προβλημάτων συνοριακών τιμών, σε κάθε ένα από τα οποία αντιστοιχίζουμε το φυσικό αριθμό  $n \in \mathbb{N}$ . Έτσι, στη φυσική παράμετρο  $\epsilon$  (βλ., για παράδειγμα, (36)) αποδίδουμε τη διακριτοποίηση  $\epsilon_n = \frac{1}{n}$  και θεωρούμε τη σύγκλιση για  $\epsilon_n \rightarrow 0$  ή ανεξάρτητα για  $n \rightarrow \infty$ . Σε κάθε πρόβλημα αυτής της ακολουθίας, οι συντελεστές  $A^\epsilon(x)$  αντιστοιχούν στο βαθμωτό αγωγήμο προφίλ  $A^{\epsilon_n}(x) = \alpha_n(x)\mathbb{I}_{2 \times 2}$ . Θεωρούμε ότι οι συντελεστές της αγωγιμότητας ικανοποιούν τις συγχλίσεις:  $\alpha_n \rightharpoonup \alpha$  ασθενώς\* στον  $L^\infty(\Omega)$  και  $\alpha_n \rightarrow \alpha$  ισχυρώς στον  $L^1(\Omega)$  (που αναδεικνύονται στην Ενότητα 2.4) σε συνδυασμό με την επιπρόσθετη  $H$ - σύγκλιση  $\alpha_n(x)\mathbb{I}_{2 \times 2} \xrightarrow{H} \alpha(x)\mathbb{I}_{2 \times 2}$  (ή ισοδύναμα την  $G$ - σύγκλιση δεδομένου του ισότροπου προφίλ  $A^{\epsilon_n}(x)$ ). Επομένως,  $\forall h \in H^{-1}(\Omega)$ , η ακολουθία  $\hat{u}_n^{\alpha_n}(x)$  των λύσεων της εξίσωσης

$$-\nabla \cdot (\alpha_n(x)\nabla \hat{u}_n^{\alpha_n}(x)) = h(x) \quad \text{στο } \Omega, \quad (63)$$

$$\hat{u}_n^{\alpha_n}(x) = 0 \quad \text{στο } \partial\Omega, \quad (64)$$

ικανοποιεί

$$\hat{u}_n^{\alpha_n} \rightharpoonup u^\alpha \quad \text{ασθενώς στον } H_0^1(\Omega), \quad (65)$$

$$\alpha_n(x)\nabla \hat{u}_n^{\alpha_n}(x) \rightarrow \alpha(x)\nabla u^\alpha(x) \quad \text{ασθενώς στον } (L^2(\Omega))^2 \quad (66)$$

<sup>(i)</sup> Ο χώρος  $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)/\mathbb{R}$  ορίζεται όπως ακριβώς ο χώρος πηλίκου  $H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ .

καθώς  $n \rightarrow \infty$ , όπου  $u^\alpha$  η μοναδική λύση του προβλήματος

$$-\nabla \cdot (\alpha(x)\nabla u^\alpha(x)) = h(x) \quad \text{στο } \Omega, \quad (67)$$

$$u^\alpha(x) = 0 \quad \text{στο } \partial\Omega. \quad (68)$$

Τα δύο ακόλουθα προβλήματα συμμετέχουν στη διαδικασία προσδιορισμού της αγωγιμότητας (βλ. Ενότητα 2.4)

Πρόβλημα I:

$$-\nabla \cdot (\alpha_n(x)\nabla u_n^{\alpha_n}(x)) = h_n(x) \quad \text{στο } \Omega, \quad (69)$$

$$u_n^{\alpha_n}(x) = 0 \quad \text{στο } \partial\Omega. \quad (70)$$

Πρόβλημα II:

$$-\nabla \cdot (\alpha_n(x)\nabla v_n^{\alpha_n}(x)) = 0 \quad \text{στο } \Omega, \quad (71)$$

$$\alpha_n(x)\nabla v_n^{\alpha_n}(x) \cdot \vec{n} = g(x) \quad \text{στο } \partial\Omega, \quad (72)$$

όπου  $h_n \in H^{-1}(\Omega)$  και  $g \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ .

Η ανάλυση σύγκλισης θα ήταν αρκετά απλή αν η πηγή διέγερσης στην (69) ήταν μια σταθερή συνάρτηση ανεξάρτητη του δείκτη  $n$ . Δεδομένου αυτού του μεταβλητού δεξιού σκέλους, βασιζόμαστε στην επιχειρηματολογία της απόδειξης της Πρότασης 2.2.6 [28] προκειμένου να κατοχυρώσουμε την εγκυρότητα των ακόλουθων δύο λημμάτων

**Λήμμα 2.3.1.** Στην περίπτωση όπου η λύση του Προβλήματος I ικανοποιεί τη σύγκλιση  $u_n^{\alpha_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \nu$  (ασθενώς στον  $H_0^1(\Omega)$ ) και η ακολουθία  $h_n$  συγγλίνει ισχυρώς στον  $H^{-1}(\Omega)$ , τότε  $\alpha_n(x)\nabla u_n^{\alpha_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha\nabla\nu$  (ασθενώς στον  $(L^2(\Omega))^2$ ).

*Απόδειξη.* Δεδομένου ότι  $u_n^{\alpha_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \nu$  στον  $H_0^1(\Omega)$ , υπάρχει διανυσματική συνάρτηση  $\sigma$  τέτοια ώστε για μια υπακολουθία της  $u_n^{\alpha_n}$ , που συμβολίζουμε το ίδιο,  $\alpha_n(x)\nabla u_n^{\alpha_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sigma$  (ασθενώς στον  $(L^2(\Omega))^2$ ). Για  $\lambda \in \mathbb{R}^2$ , θέτουμε  $w(x) = \lambda \cdot x\phi(x)$ , όπου  $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$  και  $z(x) = -\nabla \cdot (\alpha\nabla w(x))$ . Τότε η  $w_n$  ορίζεται να είναι η μοναδική λύση του προβλήματος

$$-\nabla \cdot (\alpha_n(x)\nabla w_n(x)) = z(x) \quad \text{στο } \Omega, \quad (73)$$

$$w_n(x) = 0 \quad \text{στο } \partial\Omega. \quad (74)$$

Επειδή  $\alpha_n(x)\mathbb{I}_{2 \times 2} \xrightarrow{H} \alpha(x)\mathbb{I}_{2 \times 2}$ , ισχύει ότι  $w_n \xrightarrow{H_0^1(\Omega)} w$  και  $\alpha_n\nabla w_n \xrightarrow{(L_2(\Omega))^2} \alpha\nabla w$  (η  $w$  ικανοποιεί το οριακό πρόβλημα  $-\nabla \cdot (\alpha\nabla w) = z$ ,  $\gamma w = 0$  με τετριμμένο τρόπο). Από την πιεστικότητα των συντελεστών  $\alpha_n$  έχουμε ότι  $(\alpha_n(x)\nabla u_n^{\alpha_n}(x) - \alpha_n(x)\nabla w_n(x)) \cdot (\nabla u_n^{\alpha_n}(x) - \nabla w_n(x)) \geq 0$  σ.π. (σχεδόν παντού) στο  $\Omega$ . Επιλέγουμε ένα τυχαίο ανοιχτό σύνολο  $\tilde{\omega}$ , γνήσιο υποσύνολο του  $\Omega$  και περιοριζόμαστε στην περίπτωση όπου  $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ , με  $\phi|_{\tilde{\omega}} = 1$ . Τότε  $\nabla w(x) = \lambda$ ,  $x \in \tilde{\omega}$ . Εκ κατασκευής των εμπλεκόμενων πεδίων, οι υποθέσεις του Λήμματος 2.2.2 ικανοποιούνται και έτσι περνάμε στο όριο της τελευταίας ανισότητας  $(\sigma - \alpha\lambda) \cdot (\nabla\nu - \lambda) \geq 0$  σ.π. στο  $\tilde{\omega}$ . Επιλέγουμε ένα σημείο  $x_0 \in \tilde{\omega}$  στο οποίο ισχύει η γνήσια ανισότητα και θέτουμε  $\lambda = \nabla\nu(x_0) + t\mu$ , όπου  $t > 0$  και  $\mu \in \mathbb{R}^2$ . Διαιρώντας με  $t$ , παίρνοντας το όριο  $t \rightarrow 0$  και εκμεταλλευόμενοι το αυθαίρετο της μεταβλητής  $\mu$  καταλήγουμε στην ισότητα  $\sigma(x_0) = \alpha(x_0)\nabla\nu(x_0)$  σ.π. στο  $\tilde{\omega}$  (Το  $\tilde{\omega}$  θεωρείται τυχαίο υποσύνολο του  $\Omega$  έτσι ώστε να αποφεύγεται τυχόν εγγύτητα με το σύνορο  $\partial\Omega$ ). Εφόσον το όριο  $\sigma$  ορίζεται μοναδικά και ανεξάρτητα της επιλογής της αρχικής υπακολουθίας, συμπεραίνουμε ότι ολόκληρη η ακολουθία  $\alpha_n(x)\nabla u_n^{\alpha_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sigma$  στον  $(L^2(\tilde{\omega}))^2$ . Επειδή το  $\tilde{\omega}$  είναι τυχαίο υποσύνολο του  $\Omega$ , συνεπάγεται ότι  $\alpha_n(x)\nabla u_n^{\alpha_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha\nabla\nu$  (ασθενώς στον  $(L_{loc}^2(\Omega))^2$ ).  $\square$

**Λήμμα 2.3.2.** Στην περίπτωση όπου για την ακολουθία διεγέρσεων  $h_n$  του Προβλήματος I ισχύει  $h_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} h$  (ισχυρώς στον  $H^{-1}(\Omega)$ ), τότε η ακολουθία  $u_n^{\alpha_n}$  ικανοποιεί την ενεργειακή σύγκλιση

$$\int_{\Omega} \alpha_n |\nabla u_n^{\alpha_n}|^2 \rightarrow \int_{\Omega} \alpha |\nabla u^\alpha|^2. \quad (75)$$

*Απόδειξη.* Από τις μεταβολικές μορφές των προβλημάτων I και (63)-(64) οδηγούμαστε στη σχέση

$$\int_{\Omega} \alpha_n \nabla(u_n^{\alpha_n} - \hat{u}_n^{\alpha_n}) \cdot \nabla z = \langle h_n - h, z \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)}, \quad \forall z \in H_0^1(\Omega). \quad (76)$$

Θέτουμε  $z = u_n^{\alpha_n} - \hat{u}_n^{\alpha_n}$ . Από την πιεστικότητα του συντελεστή  $\alpha_n$  παίρνουμε

$$b \|u_n^{\alpha_n} - \hat{u}_n^{\alpha_n}\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|h_n - h\|_{H^{-1}(\Omega)}. \quad (77)$$

Λόγω της  $H$ -σύγκλισης, η ακολουθία  $\hat{u}_n^{\alpha_n}$  έχει ασθενές όριο (στον  $H_0^1(\Omega)$ ) τη συνάρτηση  $u^\alpha$ . Επιπλέον, επειδή  $h_n \rightarrow h$ , συμπεραίνουμε ότι οι ακολουθίες  $u_n^{\alpha_n}$  και  $\hat{u}_n^{\alpha_n}$  στην (77) συγκλίνουν στο ίδιο ασθενές όριο στον  $H_0^1(\Omega)$ . Πάλι από την ισχυρή σύγκλιση  $h_n \rightarrow h$  (στον  $H^{-1}(\Omega)$ ) καταλήγουμε στη σχέση [53]

$$\langle h_n, u_n^{\alpha_n} \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle h, u^\alpha \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)}. \quad (78)$$

Εκμεταλλευόμενοι τη μεταβολική μορφή των εμπλεκόμενων προβλημάτων, η (78) δεν είναι παρά μια άλλη έκφραση της σχέσης

$$\int_{\Omega} \alpha_n |\nabla u_n^{\alpha_n}|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \alpha |\nabla u^\alpha|^2. \quad (79)$$

□

Σε αυτό το σημείο εισάγουμε τον τελεστή ίχνους  $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$  <sup>(ii)</sup> και τον δεξιό του αντίστροφο, τον τελεστή επεκτάσεως  $\eta : H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$ , για να ορίσουμε την ιδιαίτερη κλάση διεγέρσεων  $h_n$ ,

$$h_n(x) = \nabla \cdot (\alpha_n(x) \nabla(\eta f))(x) \in H^{-1}(\Omega) \quad (80)$$

με  $f \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ .

Στη συνέχεια, θεωρούμε το Πρόβλημα I με δεξιό σκέλος τον μη ομογενή όρο (80). Σε αυτό το πλαίσιο, διατυπώνουμε τις επόμενες δύο προτάσεις

**Πρόταση 2.3.1.** Η ακολουθία  $u_n^{\alpha_n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  συγκλίνει στο  $u^\alpha$  ασθενώς στον  $H_0^1(\Omega)$  καθώς  $n \rightarrow \infty$  και επιπλέον  $\alpha_n(x) \nabla u_n^{\alpha_n}(x) \rightharpoonup \alpha(x) \nabla u^\alpha(x)$  ασθενώς στον  $(L^2(\Omega))^2$ , όπου  $u^\alpha$  η μοναδική λύση του προβλήματος (67)-(68). Επιπλέον, ισχύει ότι

$$\int_{\Omega} \alpha_n |\nabla(u_n^{\alpha_n} + \eta f)|^2 \rightarrow \int_{\Omega} \alpha |\nabla(u^\alpha + \eta f)|^2. \quad (81)$$

*Απόδειξη.* Όπως ήδη αναφέρθηκε, όταν  $f \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ , και βάσει των ομοίμορφων φραγμάτων των συντελεστών  $\alpha_n$ , εύκολα αποδεικνύεται ότι  $h_n = \nabla \cdot (\alpha_n(x) \nabla(\eta f))(x) \in H^{-1}(\Omega)$ . Επιπλέον, σχεδόν άμεσα επαληθεύεται ότι  $h_n \rightarrow h = \nabla \cdot (\alpha(x) \nabla(\eta f)(x))$  ισχυρώς στον

<sup>(ii)</sup> Όταν γράφουμε  $u_n^{\alpha_n}(x) = 0$  στο  $\partial\Omega$  εννοούμε  $\gamma u_n^{\alpha_n} = 0$ .



$H^{-1}(\Omega)$ , λόγω κυρίως της  $L^1(\Omega)$ - σύγκλισης των  $\alpha_n$ .  
Γράφουμε την (69) στη μεταβολική μορφή

$$\int_{\Omega} \alpha_n \nabla u_n^{\alpha_n} \cdot \nabla z = \langle h_n, z \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)}, \quad \forall z \in H_0^1(\Omega). \quad (82)$$

Θέτουμε  $z = u_n^{\alpha_n}$ . Χρησιμοποιώντας το κάτω φράγμα των  $\alpha_n$  και το ομοιόμορφο φράγμα της  $\|h_n\|_{H^{-1}}$ , δείχνουμε ότι  $\|u_n^{\alpha_n}\|_{H_0^1} \leq C$ . Τότε, μπορούμε να εξάγουμε μια υπακολουθία της  $u_n^{\alpha_n}$ , που συμβολίζουμε το ίδιο, τέτοια ώστε  $u_n^{\alpha_n} \rightharpoonup \nu$ , ασθενώς στον  $H_0^1(\Omega)$ , για κάποιο στοιχείο  $\nu \in H_0^1(\Omega)$ . Σύμφωνα με το Λήμμα 2.3.1, ισχύει επίσης ότι  $\alpha_n(x) \nabla u_n^{\alpha_n}(x) \rightharpoonup \alpha(x) \nabla \nu(x)$  ασθενώς στον  $(L^2(\Omega))^2$ . Παίρνοντας το όριο ( $n \rightarrow \infty$ ) στην (82) καταλήγουμε στη σχέση

$$\int_{\Omega} \alpha \nabla \nu \cdot \nabla z = \langle h, z \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)}, \quad \forall z \in H_0^1(\Omega). \quad (83)$$

Από τη μεταβολική μορφή του οριακού προβλήματος (67)-(68) παίρνουμε

$$\int_{\Omega} \alpha \nabla u^\alpha \cdot \nabla z = \langle h, z \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)}, \quad \forall z \in H_0^1(\Omega). \quad (84)$$

Αφαιρώντας τις (83) και (84), θέτοντας  $z = \nu - u^\alpha$  και δεδομένου ότι  $\alpha > 0$ , προκύπτει το επιθυμητό αποτέλεσμα  $\nu = u^\alpha$ . Κάθε ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία της οικογένειας  $u_n^{\alpha_n}$  συγκλίνει αναγκαστικά στο  $u^\alpha$ , και άρα ολόκληρη η ακολουθία συγκλίνει στο ίδιο όριο. Μέχρι στιγμής έχουμε ήδη δείξει ότι

$$u_n^{\alpha_n}(x) \rightharpoonup u^\alpha(x) \quad \text{ασθενώς στον } H_0^1(\Omega), \quad (85)$$

$$\alpha_n(x) \nabla u_n^{\alpha_n}(x) \rightharpoonup \alpha(x) \nabla u^\alpha(x) \quad \text{ασθενώς στον } (L^2(\Omega))^2. \quad (86)$$

Από το Λήμμα 2.3.2 έχουμε την εγκυρότητα της (79)

$$\int_{\Omega} \alpha_n |\nabla u_n^{\alpha_n}|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \alpha |\nabla u^\alpha|^2.$$

Για τα επιφανειακά δεδομένα  $f \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ , έχουμε ότι  $\eta f \in H^1(\Omega)$  και άρα  $\nabla(\eta f) \in (L^2(\Omega))^2$ . Επομένως, από την (86) συνεπάγεται ότι

$$\int_{\Omega} \alpha_n \nabla u_n^{\alpha_n} \cdot \nabla(\eta f) \rightarrow \int_{\Omega} \alpha \nabla u^\alpha \cdot \nabla(\eta f). \quad (87)$$

Επιπλέον, από τη σύγκλιση  $\alpha_n \xrightarrow{L^\infty-w^*} \alpha$  και τη σχέση  $|\nabla(\eta f)|^2 \in L^1(\Omega)$  έχουμε ότι

$$\int_{\Omega} \alpha_n |\nabla(\eta f)|^2 \rightarrow \int_{\Omega} \alpha |\nabla(\eta f)|^2. \quad (88)$$

Τέλος, βάσει των (79), (87) και (88), βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \alpha_n |\nabla(u_n^{\alpha_n} + \eta f)|^2 &= \int_{\Omega} \alpha_n |\nabla u_n^{\alpha_n}|^2 + \int_{\Omega} \alpha_n |\nabla(\eta f)|^2 + 2 \int_{\Omega} \alpha_n \nabla u_n^{\alpha_n} \cdot \nabla(\eta f) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \alpha |\nabla u^\alpha|^2 + \int_{\Omega} \alpha |\nabla(\eta f)|^2 + 2 \int_{\Omega} \alpha \nabla u^\alpha \cdot \nabla(\eta f) \\ &= \int_{\Omega} \alpha |\nabla(u^\alpha + \eta f)|^2. \end{aligned} \quad (89)$$

□

**Πρόταση 2.3.2.** Η ακολουθία των λύσεων του Προβλήματος II συγκλίνει στο  $v^\alpha$  ασθενώς στον  $H_0^1(\Omega)$  καθώς  $n \rightarrow \infty$ , όπου  $v^\alpha$  η λύση του προβλήματος

$$-\nabla \cdot (\alpha(x)\nabla v^\alpha(x)) = 0 \quad \text{στο } \Omega, \quad (90)$$

$$\alpha(x)\nabla v^\alpha(x) \cdot \vec{n} = g(x) \quad \text{στο } \partial\Omega. \quad (91)$$

Επιπλέον

$$\int_{\Omega} \alpha_n |\nabla v_n^{\alpha_n}|^2 \rightarrow \int_{\Omega} \alpha |\nabla v^\alpha|^2. \quad (92)$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την ανάλυση

$$v_n^{\alpha_n} = \nu_n^{\alpha_n} + \eta\Lambda_{\alpha_n}^{-1}g. \quad (93)$$

Οι *Neumann-to-Dirichlet* τελεστές  $\Lambda_{\alpha_n}^{-1}$  είναι καλώς ορισμένοι και ομοιόμορφα φραγμένοι, καθώς τα μέλη της ακολουθίας  $\alpha_n$  είναι ομοιόμορφα κάτω φραγμένα, δεδομένου ότι  $\alpha_n, \alpha \in L^\infty(\Omega, [b, c])$ . Άμεσα κανείς μπορεί να δείξει ότι το πεδίο  $\nu_n^{\alpha_n}$  ικανοποιεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$-\nabla \cdot (\alpha_n(x)\nabla \nu_n^{\alpha_n}(x)) = \tilde{h}_n(x) \quad \text{στο } \Omega, \quad (94)$$

$$\nu_n^{\alpha_n}(x) = 0 \quad \text{στο } \partial\Omega, \quad (95)$$

όπου  $\tilde{h}_n = \nabla \cdot (\alpha_n \nabla (\eta\Lambda_{\alpha_n}^{-1}g)) \in H^{-1}(\Omega)$ .

Σε αυτό το σημείο αξιοποιούμε το θεμελιώδες αποτέλεσμα του [31], σύμφωνα με το οποίο όταν αποδίδεται ένας πολύ ασθενής ισχυρισμός στους συντελεστές της αγωγιμότητας  $\alpha_n$ , τότε η ισχυρή τελεστική σύγκλιση  $\|\Lambda_{\alpha_n} - \Lambda_\alpha\|_{\mathcal{B}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  ισχύει. (Αναλυτικότερα, ο προαναφερθείς ασθενής ισχυρισμός προϋποθέτει μια ειδική σύγκλιση των προφίλ  $\alpha_n$  στο  $\alpha$  σε μια πολύ μικρή περιοχή στη γειτονιά του συνόρου  $\partial\Omega$ . Στην παρούσα μελέτη, αυτή η προϋπόθεση ικανοποιείται κατά μείζονα λόγο τετριμμένα, βάσει της συνθήκης  $\alpha_n, \alpha \in L^\infty_\delta(\Omega, [b, c])$  (βλ. Ενότητα 2.4) που αναγκάζει όλα τα προφίλ  $\alpha_n$  να συμφωνούν σε μια πολύ λεπτή ζώνη  $\Omega_\delta = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) < \delta\}$ , με  $\delta \ll 1$ .) Επιπλέον, από τη σχέση  $\Lambda_{\alpha_n}^{-1} - \Lambda_\alpha^{-1} = \Lambda_{\alpha_n}^{-1}(\Lambda_\alpha - \Lambda_{\alpha_n})\Lambda_\alpha^{-1}$  εύκολα συνεπάγεται - λόγω του ομοιόμορφου φράγματος των  $\Lambda_{\alpha_n}^{-1}, \Lambda_\alpha^{-1}$  - ότι η ισχυρή σύγκλιση  $\|\Lambda_{\alpha_n}^{-1} - \Lambda_\alpha^{-1}\|_{\mathcal{B}^*} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  επίσης ισχύει.

Το τελευταίο αποτέλεσμα μας επιτρέπει να περάσουμε στο όριο της  $\tilde{h}_n$  και να δείξουμε ότι  $\tilde{h}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \tilde{h} := \nabla \cdot (\alpha \nabla (\eta\Lambda_\alpha^{-1}g)) \in H^{-1}(\Omega)$  ισχυρώς στον  $H^{-1}(\Omega)$ .

Πράγματι, εφόσον  $\Lambda_{\alpha_n}^{-1}g \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Lambda_\alpha^{-1}g$  (ισχυρώς στον  $\mathcal{B}^*$ ), συμπεραίνουμε ότι  $\nabla(\eta\Lambda_{\alpha_n}^{-1}g) \cdot \nabla z \xrightarrow{L^1(\Omega)} \nabla(\eta\Lambda_\alpha^{-1}g) \cdot \nabla z$ , για κάθε  $z \in H_0^1(\Omega)$ .

Ήδη γνωρίζουμε ότι  $\alpha_n \xrightarrow{L^\infty-w^*} \alpha$  και άρα

$$\langle \tilde{h}_n, z \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \alpha_n \nabla(\eta\Lambda_{\alpha_n}^{-1}g) \cdot \nabla z \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \alpha \nabla(\eta\Lambda_\alpha^{-1}g) \cdot \nabla z = \langle \tilde{h}, z \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)}. \quad (96)$$

Σύμφωνα με το Λήμμα 2.3.2 και την Πρόταση 2.3.1, έχουμε ότι

$$\nu_n^{\alpha_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \nu^\alpha \quad \text{ασθενώς στον } H_0^1(\Omega), \quad (97)$$

$$\alpha_n \nabla \nu_n^{\alpha_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha \nabla \nu^\alpha \quad \text{ασθενώς στον } (L_2(\Omega))^2, \quad (98)$$

$$\int_{\Omega} \alpha_n |\nabla \nu_n^{\alpha_n}|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \alpha |\nabla \nu^\alpha|^2, \quad (99)$$

όπου  $\nu^\alpha$  η λύση του οριακού προβλήματος

$$-\nabla \cdot (\alpha(x)\nabla \nu^\alpha(x)) = \tilde{h}(x) \quad \text{στο } \Omega, \quad (100)$$

$$\nu^\alpha(x) = 0 \quad \text{στο } \partial\Omega. \quad (101)$$

Επιπλέον

$$\int_{\Omega} \alpha_n |\nabla(\eta\Lambda_{\alpha_n}^{-1}g)|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \alpha |\nabla(\eta\Lambda_{\alpha}^{-1}g)|^2, \quad (102)$$

λόγω πάλι των συγκλίσεων  $\alpha_n \xrightarrow{L^\infty - w^*} \alpha$  και  $|\nabla(\eta\Lambda_{\alpha_n}^{-1}g)|^2 \xrightarrow{L^1(\Omega)} |\nabla(\eta\Lambda_{\alpha}^{-1}g)|^2$ .

Τέλος,

$$\int_{\Omega} \alpha_n \nabla \nu_n^{\alpha_n} \cdot \nabla(\eta\Lambda_{\alpha_n}^{-1}g) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \alpha \nabla \nu^\alpha \cdot \nabla(\eta\Lambda_{\alpha}^{-1}g), \quad (103)$$

αφού  $\alpha_n \nabla \nu_n^{\alpha_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha \nabla \nu^\alpha$  ασθενώς στον  $(L^2(\Omega))^2$  και  $\nabla(\eta\Lambda_{\alpha_n}^{-1}g) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \nabla(\eta\Lambda_{\alpha}^{-1}g)$  ισχυρώς στον  $(L_2(\Omega))^2$ .

Συνεπώς, η ακολουθία  $\nu_n^{\alpha_n}$  συγκλίνει (ασθενώς στον  $H_0^1(\Omega)$ ) στο  $v^\alpha = \nu^\alpha + \eta\Lambda_{\alpha}^{-1}g$ , που λύνει το πρόβλημα (90)-(91) και επιπλέον, βάσει των οριακών διαδικασιών (99), (102) και (103), προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \alpha_n |\nabla \nu_n^{\alpha_n}|^2 &= \int_{\Omega} \alpha_n |\nabla(\eta\Lambda_{\alpha_n}^{-1}g)|^2 + 2 \int_{\Omega} \alpha_n \nabla \nu_n^{\alpha_n} \cdot \nabla(\eta\Lambda_{\alpha_n}^{-1}g) + \int_{\Omega} \alpha_n |\nabla \nu_n^{\alpha_n}|^2 \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \alpha |\nabla(\eta\Lambda_{\alpha}^{-1}g)|^2 + 2 \int_{\Omega} \alpha \nabla \nu^\alpha \cdot \nabla(\eta\Lambda_{\alpha}^{-1}g) + \int_{\Omega} \alpha |\nabla \nu^\alpha|^2 = \int_{\Omega} \alpha |\nabla v^\alpha|^2. \end{aligned} \quad (104)$$

□

## 2.4 Το πρόβλημα ελαχιστοποίησης

Η κατασκευή του κατάλληλου συναρτησιακού ελαχιστοποίησης βασίζεται στην αποδοτική σύνδεση της συνάρτησης  $\alpha(x)$  με τις λύσεις των *Dirichlet* και *Neumann* προβλημάτων. Πιο συγκεκριμένα, ως πρώτο όρο του συναρτησιακού θέτουμε

$$J_1(\alpha, v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \alpha(x) |\nabla v(x)|^2 dx - \langle g, \gamma v \rangle_{A \times B} \quad (105)$$

όπου  $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\partial\Omega)$  ο τελεστής ίχνους. Η ελαχιστοποίηση αυτού του όρου - ακόμα και υπό τη θεώρηση μιας συγκεκριμένης αγωγιμότητας  $\alpha$  - ως προς όλα τα πιθανά πεδία  $v \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ , θα οδηγούσε στη λύση  $v^\alpha$  του *Neumann* προβλήματος, για την περίπτωση όπου ο συντελεστής αγωγιμότητας ταυτίζεται με τον  $\alpha$ . Κάτι τέτοιο όμως από μόνο του δεν αρκεί, αφού η συνάρτηση  $\alpha(x)$  είναι η άγνωστη παράμετρος του προβλήματος, και άρα είναι αναγκαία η ενσωμάτωση επιπλέον δεδομένων. Προσθέτουμε τον όρο

$$J_2(\alpha, u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \alpha(x) |\nabla(u(x) + (\eta f)(x))|^2 dx, \quad (106)$$

όπου  $\eta$  ο συνεχής αντίστροφος από δεξιά του τελεστή ίχνους  $\gamma$  [54]. Ο όρος (106) θα ελαχιστοποιούνταν ανεξάρτητα - ως προς όλες τις συναρτήσεις  $u \in H_0^1(\Omega)$  - από τη μοναδική λύση  $u^\alpha(x) + (\eta f)(x)$  του *Dirichlet* προβλήματος, στην περίπτωση όπου η συνάρτηση της αγωγιμότητας θεωρούνταν συγκεκριμένη.

Ο τρίτος όρος του συναρτησιακού,  $J_3$ , διαμορφώνεται βάσει της υπόθεσης ότι τα δεδομένα

σέβονται απόλυτα τη σχέση  $g = \Lambda_\alpha f$  - χωρίς υπολογιστικά σφάλματα - και η συνάρτηση  $\alpha$  είναι η «πραγματική» αγωγιμότητα, επιβάλλοντας έτσι τη θεωρητική εξάλειψη της διαφοράς των λύσεων  $u^\alpha + \eta f$  και  $v^\alpha$  στο χωρίο  $\Omega$ . Ο όρος αυτός λοιπόν περιλαμβάνει το ολοκλήρωμα  $\frac{1}{2} \int_\Omega \alpha |\nabla(u + \eta f - v)|^2 dx$  που αναγκάζει τις κλίσεις των πεδίων να συμφωνούν [44]. Αποφεύγουμε να προσθέσουμε έναν όρο που θα επέφερε την εξάλειψη της  $L^2$ - νόρμας (με συνάρτηση βάρους την  $\alpha(x)$ ) της διαφοράς  $u + \eta f - v$ , καθώς η  $L^2$ -μετρική δεν αξιοποιεί τις «καλές» ιδιότητες της  $H$ - σύγκλισης που ανακύπτουν στη διαδικασία ελαχιστοποίησης. Επιπλέον, προκειμένου να κατευθύνουμε την καθοδική πορεία ώστε να συγκλίνει στα ζητούμενα προφίλ και πεδία, ενσωματώνουμε τον όρο  $\int_\Omega \alpha \nabla(u + \eta f - v) \cdot \nabla v dx + \langle g, \gamma v - f \rangle_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}}$ . Ο τρόπος με τον οποίο αυτός ο όρος καθοδηγεί την ελαχιστοποιητική διαδικασία διευκρινίζεται στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.16 παρακάτω. Επιλέγοντας μια παράμετρο κανονικοποίησης  $\kappa$ , συνθέτουμε τον όρο  $J_3$  ως εξής

$$J_3(\alpha, u, v) = \frac{\kappa}{2} \int_\Omega \alpha |\nabla(u + \eta f - v)|^2 dx + \kappa \int_\Omega \alpha \nabla(u + \eta f - v) \cdot \nabla v dx + \kappa \langle g, \gamma v - f \rangle_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}}. \quad (107)$$

Είναι προφανές ότι όλοι οι όροι στην (107) είναι ταυτοτικά μηδέν στην περίπτωση όπου η αγωγιμότητα και τα συνοριακά δεδομένα είναι ακριβή.

Ο τέταρτος όρος του συναρτησιακού αποτελεί τον όρο ομαλοποίησης του προβλήματος και αφορά στην επιλογή εκείνων των προφίλ αγωγιμότητας που ικανοποιούν ορισμένους περιορισμούς ως προς τις ολικές κυμάνσεις τους και κάποια τιμή αναφοράς. Ο τελευταίος αυτός όρος περιλαμβάνει τις δύο παραμέτρους κανονικοποίησης  $\lambda, \mu$  και έχει τη μορφή

$$J_4 = \frac{\lambda}{2} \|R\alpha - \alpha_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \mu \int_\Omega \phi(|D\alpha|), \quad (108)$$

όπου  $R : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  φραγμένος τελεστής και  $\alpha_0$  μια τιμή αναφοράς για τον συντελεστή αγωγιμότητας. Η συνάρτηση  $\phi$  είναι μια γνησίως κυρτή και μη φθίνουσα συνάρτηση  $\phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ , με  $\phi(0) = 0$  και  $\lim_{s \rightarrow \infty} \phi(s) = \infty$  (Η ειδική δομή της συνάρτησης  $\phi$ , που εγγυάται όλες τις απαραίτητες ιδιότητες των επαγόμενων μέτρων, εξετάζεται στην Ενότητα 2.5). Προσθέτοντας τους όρους (105)-(108), κατασκευάζουμε το πλήρες συναρτησιακό ελαχιστοποίησης

$$E(u, v, \alpha) = \tilde{E}(u, v, \alpha) + \frac{\lambda}{2} \|R\alpha - \alpha_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \mu \int_\Omega \phi(|D\alpha|), \quad (109)$$

όπου

$$\tilde{E}(u, v, \alpha) = \frac{\kappa + 1}{2} \int_\Omega \alpha |\nabla(u + \eta f)|^2 dx + (1 - \kappa) \left[ \frac{1}{2} \int_\Omega \alpha |\nabla v|^2 dx - \langle g, \gamma v \rangle_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}} \right] - \kappa \langle g, f \rangle_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}}. \quad (110)$$

Η τελευταία έκφραση μπορεί να θεωρηθεί ως μια παραμετροποιημένη οικογένεια τελεστών σε σχέση με την παράμετρο  $\kappa$ , το εύρος τιμών της οποίας περιορίζεται στο διάστημα  $(-1, 1)$  έτσι ώστε να διατηρείται η πιστικότητα των δύο πρώτων όρων της (110), ενώ η επιλογή της φανερά καθορίζει την αναλογία εμπλοκής των *Dirichlet* και *Neumann* δεδομένων στο συναρτησιακό.

Στη συνέχεια, ορίζουμε το αποδεκτό σύνολο των αναζητούμενων λύσεων  $\alpha$  και κατόπιν διευκρινίζεται ο ρόλος του τελεστή  $R$ .

Όπως προαναφέρθηκε, οι αιφνίδιες μεταβολές στις φυσικές ιδιότητες του χωρίου  $\Omega$  αναπαρίστανται πολύ καλά μέσω των  $BV$ - συναρτήσεων. Μια επιπρόσθετη, αναγκαία ιδιότητα του συντελεστή  $\alpha$  πηγάζει από την απαίτηση της ύπαρξης μιας πολύ λεπτής ζώνης στη γειτονιά του συνόρου  $\partial\Omega$ , στην οποία η αγωγιμότητα έχει σταθερή τιμή. Ορίζουμε την

περιοχή  $\Omega_\delta := \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) < \delta\}$  και απαιτούμε  $\alpha \in BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega, \{b, c\})$  με  $L^\infty(\Omega, \{b, c\}) = \{q \in L^\infty(\Omega, \{b, c\}) : \|q - b\|_{L^\infty(\Omega_\delta)} = 0\}$ . Ομοίως, στην περίπτωση του μεταβλητού προφίλ θεωρούμε ότι  $\alpha \in BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega, [b, c])$ , όπου τώρα οι τιμές της αγωγιμότητας μεταβάλλονται στο διάστημα  $[b, c]$ . Η αναγκαιότητα ύπαρξης της παραμέτρου  $\delta$  και της ζώνης  $\Omega_\delta$  οφείλεται στη δυνατότητα ισχύος της ισχυρής τελεστικής σύγκλισης για τον  $\Lambda_\alpha$ , όταν ο  $\alpha$  ακολουθεί συγκεκριμένες οριακές διαδικασίες [31].

Όσον αφορά τον τελεστή αναφοράς  $R$ , μπορούμε να επιλέξουμε την υλοποίηση όπου  $R\alpha \equiv \alpha|_{\Omega_\delta}$ , και κατά συνέπεια η ποσότητα  $\|R\alpha - \alpha_0\|_{L^2(\Omega)}$  ορίζεται ως η νόρμα  $\|\alpha - b\|_{L^2(\Omega_\delta)}$  της  $L^2(\Omega_\delta)$ - διαφοράς του συντελεστή αγωγιμότητας από την background τιμή  $b$ . Αυτός είναι ένας ποσοτικός τρόπος να αναγκάζουμε την αγωγιμότητα να είναι κοντά στην τιμή  $b$  στη γειτονιά του συνόρου, σε όλα τα στάδια της διαδικασίας ελαχιστοποίησης. Εναλλακτικά, ο περιορισμός  $\alpha|_{\Omega_\delta} = b$  μπορεί να επιβληθεί εξ αρχής σε όλα τα μέλη του σχήματος ελαχιστοποίησης. Σε κάθε περίπτωση υπάρχουν διάφορες υλοποιήσεις της ποσότητας  $\|R\alpha - \alpha_0\|_{L^2(\Omega)}$ , αξιοποιώντας την  $\alpha_0$  ως τη συνάρτηση εκκίνησης για την άγνωστη αγωγιμότητα σε ολόκληρο ή μερικό τμήμα του  $\Omega$ .

Το επόμενο θεώρημα αποτελεί το θεμελιώδες αποτέλεσμα αυτής της ενότητας

**Θεώρημα 2.16.** Το πρόβλημα ελαχιστοποίησης  $\inf_{(u,v,\alpha')} E(u, v, \alpha')$  ως προς τα στοιχεία  $(u, v, \alpha')$  στον  $H_0^1(\Omega) \times H^1(\Omega)/\mathbb{R} \times (BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega, \{b, c\}))$  επιδέχεται μία λύση που ανήκει στον χώρο  $H_0^1(\Omega) \times H^1(\Omega)/\mathbb{R} \times (BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega, [b, c]))$ .

*Απόδειξη.* (Η απόδειξη διεξάγεται σε επιμέρους βήματα.) Έστω μια ακολουθία ελαχιστοποίησης  $(u_n, v_n, \alpha_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , δηλ.  $\lim_{n \rightarrow \infty} E(u_n, v_n, \alpha_n) = \inf_{(u,v,\alpha')} E(u, v, \alpha')$ , τέτοια ώστε το όριο  $\inf_{(u,v,\alpha')} E(u, v, \alpha')$  είναι ένας πραγματικός αριθμός. Προφανώς, υπάρχει μια θετική σταθερά  $C$  τέτοια ώστε

$$E(u_n, v_n, \alpha_n) \leq C \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}. \quad (111)$$

Δεδομένου ότι  $\alpha_n \in L^\infty(\Omega, \{b, c\})$ , συνεπάγεται ότι  $\|\alpha_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c$  και άρα υπάρχει υποακολουθία  $\alpha_n$ , που συμβολίζουμε το ίδιο, και στοιχείο  $\alpha \in L^\infty(\Omega)$  τέτοια ώστε

$$\alpha_n \rightharpoonup \alpha \text{ ασθενώς}^* \text{ στον } L^\infty(\Omega) \text{ (καθώς } n \rightarrow \infty). \quad (112)$$

Χάρη σε ένα ενδιαφέρον αποτέλεσμα του [51], η ασθενής\* κλειστότητα του  $L^\infty(\Omega, K)$ , όπου  $K$  υπόχωρος του  $\mathbb{R}^d$ , είναι ο χώρος  $L^\infty(\Omega, \mathcal{K})$ , όπου  $\mathcal{K}$  η κλειστή κυρτή θήκη του  $K$ . Στην περίπτωσή μας ισχύει ότι  $\alpha \in L^\infty(\Omega, [b, c])$ . Επιπλέον, είναι προφανές ότι  $\int_{\Omega_\delta} \alpha_n \varphi \rightarrow \int_{\Omega_\delta} \alpha \varphi$  για κάθε  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_\delta) \subset L^1(\Omega)$  και επομένως  $\int_{\Omega_\delta} (b - \alpha(x))\varphi(x) dx = 0$ ,  $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega_\delta)$ . Συνεπώς,  $\alpha(x) = b$  σ.π. στην  $\Omega_\delta$  [53] και τελικά  $\alpha \in L^\infty(\Omega, [b, c])$ .

Επιστρέφοντας στην (111), ισχυριζόμαστε ότι υπάρχει ένα ομοιόμορφο φράγμα  $M$  (ανεξάρτητο του  $n$ ) έτσι ώστε

$$C_n := \langle g, \gamma v_n \rangle_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}} - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \alpha_n |\nabla v_n|^2 dx \leq M. \quad (113)$$

Πράγματι, επειδή η συνάρτηση  $g$  και ο τελεστής  $\gamma$  είναι φραγμένοι, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \langle g, \gamma v_n \rangle_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}} - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \alpha_n |\nabla v_n|^2 dx &\leq C' \|g\| \|v_n\|_{H^1(\Omega)/\mathbb{R}} - \frac{b}{2} \|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= C' \|g\| \inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \|v_n + \lambda\|_{H^1(\Omega)} - \frac{b}{2} \|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq C' \|g\| \|v_n - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} v_n(x) dx\|_{H^1(\Omega)} - \frac{b}{2} \|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq C'' \|g\| \|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega)} - \frac{b}{2} \|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned} \quad (114)$$

όπου εφαρμόζουμε την ανισότητα *Poincaré-Wirtinger* για το πεδίο  $v_n - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} v_n(x) dx$ , με μηδενική μέση τιμή στην πεπερασμένη περιοχή  $\Omega$ . Ο τελευταίος δεξιός όρος της ανισότητας (114) είναι αναγκαστικά φραγμένος ως ο αρνητικός μιας πιστευτικής συνάρτησης. Επομένως, η (113) ισχύει και μαζί με την ειδική μορφή του  $E(u_n, v_n, \alpha_n)$  οδηγεί στο ομοιόμορφο φράγμα των ολοκληρωμάτων  $\int_{\Omega} \alpha_n |\nabla(u_n + \eta f)|^2 dx$ . Από την προαναφερθείσα πιστευτικότητα των όρων  $(-C_n)$ , τα ολοκληρώματα  $\int_{\Omega} \alpha_n |\nabla v_n|^2 dx$  είναι αναγκαστικά ομοιόμορφα φραγμένα. Από αυτά τα αποτελέσματα και το γεγονός ότι η  $\alpha_n$  είναι κάτω φραγμένη από την τιμή  $b$ , συμπεραίνουμε ότι οι νόρμες  $\|\nabla(u_n + \eta f)\|_{L^2(\Omega)}$  και  $\|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega)}$  είναι με τη σειρά τους ομοιόμορφα φραγμένες, και κατά συνέπεια και οι  $\|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)}$ . Χρησιμοποιώντας την ανισότητα *Poincaré* για τις συναρτήσεις  $u_n \in H_0^1(\Omega)$ , προκύπτει ότι

$$\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (115)$$

Ξανά από την ανισότητα *Poincaré-Wirtinger*, βρίσκουμε ότι

$$\inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \|v_n + \lambda\|_{H^1(\Omega)} \leq \|v_n - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} v_n(x) dx\|_{H^1(\Omega)} \leq \|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega)} \leq C, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (116)$$

Τα δύο τελευταία φράγματα συνεπάγονται την ύπαρξη  $u \in H_0^1(\Omega)$  και  $v \in H^1(\Omega)/\mathbb{R}$  έτσι ώστε

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u \in H_0^1(\Omega), \quad (117)$$

$$\nabla v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \nabla v \in (L^2(\Omega))^2. \quad (118)$$

Μέχρι τώρα, το μόνο έγκυρο αποτέλεσμα σύγκλισης για την ακολουθία ελαχιστοποίησης  $\alpha_n \in L_{\delta}^{\infty}(\Omega, \{b, c\})$  δίνεται από την (112). Αυτό όμως από μόνο του δεν είναι αρκετό για να εγγυηθεί τη σύγκλιση των ροών που συμμετέχουν στο συναρτησιακό. Στο πλαίσιο της θεωρίας ομογενοποίησης και βάσει της ιδιότητας  $\alpha_n \in L_{\delta}^{\infty}(\Omega, \{b, c\})$ , υπάρχει η δυνατότητα επιλογής μιας νέας υπακολουθίας  $\alpha_n \mathbb{I}_{d \times d}$  που  $G$ -συγκλίνει στο συμμετρικό πίνακα  $A^*(x) \in L^{\infty}(\Omega, \mathcal{M}_{b,c}^s)$  (Ορισμός 2.2.7), γεγονός που δημιουργεί τις προϋποθέσεις για ενεργειακή σύγκλιση. Ωστόσο, ο όρος ομαλοποίησης  $J_4$  είναι εκείνος που προσδιορίζει τον τελικό χαρακτήρα αυτής της σύγκλισης παρέχοντας επιπλέον ομαλότητα στα μέλη της ακολουθίας  $\alpha_n$ . Αναλυτικότερα, από την ανισότητα (113) και την ειδική μορφή του  $E(u_n, v_n, \alpha_n)$  συμπεραίνουμε ότι οι υπόλοιποι όροι του συναρτησιακού είναι επίσης φραγμένοι

$$\int_{\Omega} \phi(|D\alpha_n|) \text{ και } \|R\alpha_n - \alpha_0\|_{L^2(\Omega)} < \infty.$$

Χρησιμοποιώντας την κυρτότητα της  $\phi$  αποδεικνύεται περαιτέρω ότι  $|D\alpha_n|(\Omega) \leq C$ . Επιπλέον,  $\alpha_n \in L_{\delta}^{\infty}(\Omega, \{b, c\})$  και άρα  $\alpha_n \in L^1(\Omega)$  με  $\|\alpha_n\|_{L^1(\Omega)} \leq c|\Omega|$ . Επομένως, η ακολουθία  $\alpha_n$  είναι ομοιόμορφα φραγμένη στον  $BV(\Omega)$  και βάσει του Θεωρήματος συμπάγειας 1.7, μπορούμε να εξάγουμε μια υπακολουθία, με τον ίδιο συμβολισμό, και ένα στοιχείο  $\tilde{\alpha} \in BV(\Omega)$  τέτοια ώστε

$$\alpha_n \xrightarrow{BV-w^*} \tilde{\alpha} \quad (\text{δηλ. } \alpha_n \xrightarrow{L^1(\Omega)} \tilde{\alpha} \text{ και } \int_{\Omega} \varphi D\alpha_n \rightarrow \int_{\Omega} \varphi D\tilde{\alpha} \quad \forall \varphi \in (C_0^1(\Omega))^d). \quad (119)$$

Κατά συνέπεια, ισχύει ότι  $\int_{\Omega} \alpha_n \varphi \rightarrow \int_{\Omega} \tilde{\alpha} \varphi$ ,  $\forall \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$ . Από την άλλη, η (112) συνεπάγεται ότι  $\int_{\Omega} \alpha_n \varphi \rightarrow \int_{\Omega} \alpha \varphi$ ,  $\forall \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega) \subset L^1(\Omega)$ . Από τις δύο αυτές συγκλίσεις καταλήγουμε ότι  $\int_{\Omega} (\tilde{\alpha} - \alpha) \varphi = 0$ ,  $\forall \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$  και τελικά  $\tilde{\alpha} = \alpha$  σ.π. στο  $\Omega$  [53]. Συνοψίζοντας, η ακολουθία  $\alpha_n$  ικανοποιεί τις συγκλίσεις

$$\alpha_n \xrightarrow{L^1(\Omega)} \alpha \in BV(\Omega) \cap L_{\delta}^{\infty}(\Omega, [b, c]), \quad (120)$$

και  $\alpha_n \xrightarrow{G} \alpha$ . Ακόμη, δεδομένου ότι η  $\alpha_n \in L^\infty(\Omega, \{b, c\})$  ικανοποιεί  $\|\alpha_n\|_{L^2(\Omega)} \leq c^2|\Omega|$ , η ακολουθία  $\alpha_n$  - μια υπακολουθία αυτής που συμβολίζουμε το ίδιο - συγκλίνει ασθενώς στον  $L^2(\Omega)$  και άρα

$$R\alpha_n \xrightarrow{L^2(\Omega)} R\alpha. \quad (121)$$

Απώτερο στόχο του Θεώρηματος 2.16 αποτελεί η απόδειξη κάποιου είδους κάτω ημισυνέχειας για το συναρτησιακό, έτσι ώστε να καταλήξουμε στην ανισότητα (111) αλλά για την οριακή τριάδα  $(u, v, \alpha)$ . Πρώτα, επισημαίνουμε ότι λόγω της κυρτότητας της  $\phi$  και της κάτω ημισυνέχειας της  $BV - w^*$  σύγκλισης (Πρόταση 1.2.2), ισχύει ότι

$$\mu \int_{\Omega} \phi(|D\alpha|) \leq \mu \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \phi(|D\alpha_n|). \quad (122)$$

Επιπλέον, από την κάτω ημισυνέχεια της  $L^2$ - νόρμας στην ασθενή τοπολογία έχουμε ότι

$$\frac{\lambda}{2} \|R\alpha - \alpha_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{\lambda}{2} \liminf_{n \rightarrow \infty} \|R\alpha_n - \alpha_0\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (123)$$

Στη συνέχεια, θεωρούμε τους τετραγωνικούς και γραμμικούς όρους του  $\tilde{E}(u_n, v_n, \alpha_n)$  και τους επαναδιατυπώνουμε συναρτήσει των πεδίων  $u_n^{\alpha_n}$  και  $v_n^{\alpha_n}$ , που λύνουν αντίστοιχα τα ευθέα *Dirichlet* και *Neumann* προβλήματα με συντελεστή αγωγιμότητας τον  $\alpha_n(x)$  (Πρόβλημα I-II, Παράγραφος 2.3.1). Για τον σκοπό αυτό, θεωρούμε την ανάλυση

$$\begin{aligned} \frac{\kappa+1}{2} \int_{\Omega} \alpha_n |\nabla(u_n + \eta f)|^2 &= \frac{\kappa+1}{2} \int_{\Omega} \alpha_n |\nabla(u_n^{\alpha_n} + \eta f)|^2 + \frac{\kappa+1}{2} \int_{\Omega} \alpha_n |\nabla(u_n - u_n^{\alpha_n})|^2 \\ &\quad + (\kappa+1) \int_{\Omega} \alpha_n \nabla(u_n^{\alpha_n} + \eta f) \cdot \nabla(u_n - u_n^{\alpha_n}) \\ &= \frac{\kappa+1}{2} \int_{\Omega} \alpha_n |\nabla(u_n^{\alpha_n} + \eta f)|^2 + \frac{\kappa+1}{2} \int_{\Omega} \alpha_n |\nabla(u_n - u_n^{\alpha_n})|^2, \end{aligned} \quad (124)$$

όπου χρησιμοποιούμε ότι  $u_n - u_n^{\alpha_n} \in H_0^1(\Omega)$  και τον γενικευμένο τύπο *Green* για να αποδείξουμε ότι

$$(\kappa+1) \int_{\Omega} \alpha_n \nabla(u_n^{\alpha_n} + \eta f) \cdot \nabla(u_n - u_n^{\alpha_n}) = 0.$$

Επιπλέον

$$\begin{aligned} \frac{1-\kappa}{2} \int_{\Omega} \alpha_n |\nabla v_n|^2 &= \frac{1-\kappa}{2} \int_{\Omega} \alpha_n |\nabla v_n^{\alpha_n}|^2 + \frac{1-\kappa}{2} \int_{\Omega} \alpha_n |\nabla(v_n - v_n^{\alpha_n})|^2 \\ &\quad + (1-\kappa) \int_{\Omega} \alpha_n \nabla v_n^{\alpha_n} \cdot \nabla(v_n - v_n^{\alpha_n}) \\ &= \frac{1-\kappa}{2} \int_{\Omega} \alpha_n |\nabla v_n^{\alpha_n}|^2 + \frac{1-\kappa}{2} \int_{\Omega} \alpha_n |\nabla(v_n - v_n^{\alpha_n})|^2 \\ &\quad + (1-\kappa) \langle g, \gamma v_n - \Lambda_{\alpha_n}^{-1} g \rangle_{A \times B}, \end{aligned} \quad (125)$$

όπου κάνουμε ξανά χρήση της φόρμουλας *Green* και του *Calderón* τελεστή για την ισοδύναμη έκφραση του επιφανειακού όρου. Τέλος, ο γραμμικός όρος του  $\tilde{E}$  γίνεται

$$-(1-\kappa) \langle g, \gamma v_n \rangle_{A \times B} = -(1-\kappa) \langle g, \gamma v_n^{\alpha_n} \rangle_{A \times B} - (1-\kappa) \langle g, \gamma v_n - \Lambda_{\alpha_n}^{-1} g \rangle_{A \times B}. \quad (126)$$

Η ανάλυση (124)-(126) μας επιτρέπει να γράψουμε

$$\begin{aligned} \tilde{E}(u_n, v_n, \alpha_n) &= \tilde{E}(u_n^{\alpha_n}, v_n^{\alpha_n}, \alpha_n) + \frac{\kappa+1}{2} \int_{\Omega} \alpha_n |\nabla(u_n - u_n^{\alpha_n})|^2 \\ &\quad + \frac{1-\kappa}{2} \int_{\Omega} \alpha_n |\nabla(v_n - v_n^{\alpha_n})|^2. \end{aligned} \quad (127)$$

Η έκφραση (127) είναι εξαιρετικά βοηθητική στην εποπτεία της ελαχιστοποιητικής πορείας. Ο όρος  $J_3$  είναι υπεύθυνος για τις ενδιάμεσες εξαλείψεις των γραμμικών όρων και γι' αυτό το λόγο κατασκευάζεται στην ειδική μορφή (107). Το αποτέλεσμα αυτών των αλληλοαναιρέσεων συνίσταται στην έκφραση της ποσότητας  $\tilde{E}(u_n, v_n, \alpha_n) - \tilde{E}(u_n^{\alpha_n}, v_n^{\alpha_n}, \alpha_n)$  σε μια θετικής ροής διαφορά, ανάμεσα στα μέλη ολόκληρης της ακολουθίας ελαχιστοποίησης και σε αυτά της ακολουθίας των λύσεων των ενδιάμεσων ευθέων προβλημάτων.

Λαμβάνοντας υπόψιν τα αποτελέσματα σύγκλισης των Προτάσεων 2.3.1 και 2.3.2 (βλ. Παράγραφο 2.3.1) καταλήγουμε στη σχέση

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{E}(u_n^{\alpha_n}, v_n^{\alpha_n}, \alpha_n) = \tilde{E}(u^\alpha, v^\alpha, \alpha). \quad (128)$$

Παίρνοντας το όριο  $n \rightarrow \infty$  στην (127) και αξιοποιώντας τις (122), (123) και (128), βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} \inf_{(u,v,\alpha')} E(u, v, \alpha') &= \lim_{n \rightarrow \infty} E(u_n, v_n, \alpha_n) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{E}(u_n^{\alpha_n}, v_n^{\alpha_n}, \alpha_n) + \frac{\lambda}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \|R\alpha_n - \alpha_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \mu \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \phi(|D\alpha_n|) + \frac{\kappa+1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \alpha_n |\nabla(u_n - u_n^{\alpha_n})|^2 \\ &\quad + \frac{1-\kappa}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \alpha_n |\nabla(v_n - v_n^{\alpha_n})|^2 \\ &\geq \tilde{E}(u^\alpha, v^\alpha, \alpha) + \frac{\lambda}{2} \|R\alpha - \alpha_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \mu \int_{\Omega} \phi(|D\alpha|) + \frac{\kappa+1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \alpha_n |\nabla(u_n - u_n^{\alpha_n})|^2 \\ &\quad + \frac{1-\kappa}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \alpha_n |\nabla(v_n - v_n^{\alpha_n})|^2 \\ &\Rightarrow \inf_{(u,v,\alpha')} E(u, v, \alpha') \geq E(u^\alpha, v^\alpha, \alpha) + \frac{\kappa+1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \alpha_n |\nabla(u_n - u_n^{\alpha_n})|^2 \\ &\quad + \frac{1-\kappa}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \alpha_n |\nabla(v_n - v_n^{\alpha_n})|^2. \end{aligned} \quad (129)$$

Οι συγκλίσεις (117)-(118), οι οριακές διαδικασίες των Προτάσεων 2.3.1, 2.3.2 και η κάτω ημισυνέχεια της  $L^2(\Omega)$ - νόρμας στην ασθενή τοπολογία συνεπάγονται ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \alpha_n |\nabla(u_n - u_n^{\alpha_n})|^2 \geq b \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla(u_n - u_n^{\alpha_n})|^2 \geq b \int_{\Omega} |\nabla(u - u^\alpha)|^2, \quad (130)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \alpha_n |\nabla(v_n - v_n^{\alpha_n})|^2 \geq b \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla(v_n - v_n^{\alpha_n})|^2 \geq b \int_{\Omega} |\nabla(v - v^\alpha)|^2. \quad (131)$$

Ακολούθως, η σχέση (129) γίνεται

$$\inf_{(u,v,\alpha')} E(u, v, \alpha') \geq E(u^\alpha, v^\alpha, \alpha) + b \frac{\kappa+1}{2} \int_{\Omega} |\nabla(u - u^\alpha)|^2 + b \frac{1-\kappa}{2} \int_{\Omega} |\nabla(v - v^\alpha)|^2. \quad (132)$$

Η τελευταία ανισότητα ικανοποιείται μόνο αν  $\nabla u = \nabla u^\alpha$ ,  $\nabla v = \nabla v^\alpha$ , σ.π. στο  $\Omega$  ή ισοδύναμα

$$u = u^\alpha \quad \text{στον } H_0^1(\Omega), \quad (133)$$

$$v = v^\alpha \quad \text{στον } H^1(\Omega)/\mathbb{R}. \quad (134)$$

Αναγκαστικά, η ανισότητα (132) μεταπίπτει στην εξίσωση  $\inf_{(u,v,\alpha')} E(u, v, \alpha') = E(u, v, \alpha)$ , με την ακόλουθη ενδιαφέρουσα ερμηνεία

$$\inf_{(u,v,\alpha')} E(u, v, \alpha') = \lim_{n \rightarrow \infty} E(u_n, v_n, \alpha_n) = E(\lim_{n \rightarrow \infty} u_n, \lim_{n \rightarrow \infty} v_n, \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n) = E(u^\alpha, v^\alpha, \alpha). \quad (135)$$

Συνεπώς, το πρόβλημα ελαχιστοποίησης έχει σίγουρα μία λύση, που είναι το όριο της ακολουθίας ελαχιστοποίησης.  $\square$



**Σχόλιο 2.5.** Μία από τις βασικότερες συνέπειες του Θεωρήματος 2.16 είναι το ότι μας αποδεσμεύει από την επίλυση του ευθέως προβλήματος σε κάθε βήμα της διαδικασίας ελαχιστοποίησης (για ένα συγκεκριμένο προφίλ αγωγιμότητας). Κάτι τέτοιο προφανώς θα επιτάχυνε τη σύγκλιση του σχήματος, αλλά η ελαχιστοποίηση μπορεί να υλοποιηθεί ανεξάρτητα για κάθε μία από τις τρεις μεταβλητές  $u, v, \alpha$  του προβλήματος.

**Σχόλιο 2.6.** Χωρίς βλάβη της γενικότητας, τα αποτελέσματα του Θεωρήματος 2.16 ισχύουν ακόμα και όταν τα ίδια τα μέλη της ελαχιστοποιητικής ακολουθίας ανήκουν στον χώρο  $BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega, [b, c])$  (Αυτός ο χώρος είναι κλειστός ως προς το είδος της σύγκλισης που ικανοποιούν τα στοιχεία της ακολουθίας). Το θεώρημα διατυπώνεται στη συγκεκριμένη μορφή εφόσον είθισται να χρησιμοποιούνται τμηματικά σταθερές συναρτήσεις ως προσεγγιστικά προφίλ, αναδεικνύοντας έτσι ότι ακόμα και με σταθερά προφίλ ως εναρκτήρια η διαδικασία ελαχιστοποίησης διεκπεραιώνεται επιτυχώς (γεγονός που προσθέτει βαθμούς ελευθερίας στην αριθμητική διαχείριση τέτοιων προβλημάτων).

Το Θεώρημα 2.16 παραθέτει τα ελάχιστα του συναρτησιακού σε τριπλέτες  $(u^\alpha, v^\alpha, \alpha)$ , όπου οι συναρτήσεις  $u^\alpha, v^\alpha$  λύνουν τα *Dirichlet* και *Neumann* προβλήματα συνοριακών τιμών που αντιστοιχούν στο προφίλ αγωγιμότητας  $\alpha$  και στα δεδομένα  $(f, g)$ . Στην πραγματικότητα, κάτι τέτοιο θα προέκυπτε φυσιολογικά αν λύναμε επαναλαμβανόμενα το ευθύ πρόβλημα για κάθε μέλος  $\alpha_n$  της συγκλίνουσας ακολουθίας αγωγιμοτήτων, όπως διατυπώνεται στο Σχόλιο 2.5. Αν ήταν αυτός ο σκοπός, τότε το συναρτησιακό μέλος  $\tilde{E}(u_n, v_n, \alpha_n)$  θα μετατρέποταν στον όρο  $\tilde{E}(u_n^\alpha, v_n^\alpha, \alpha_n)$  και το προς εξέταση συναρτησιακό (109) θα εξαρτώταν μόνο από τη συνάρτηση της αγωγιμότητας  $\alpha$ , δηλαδή

$$\begin{aligned} E_1(\alpha) &= \tilde{E}(u^\alpha, v^\alpha, \alpha) + \frac{\lambda}{2} \|R\alpha - \alpha_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \mu \int_{\Omega} \phi(|D\alpha|) \\ &= \frac{\kappa + 1}{2} \langle \Lambda_\alpha f, f \rangle_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}} - \frac{(1 - \kappa)}{2} \langle g, \Lambda_\alpha^{-1} g \rangle_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}} - \kappa \langle g, f \rangle_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}} \\ &\quad + \frac{\lambda}{2} \|R\alpha - \alpha_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \mu \int_{\Omega} \phi(|D\alpha|) \\ &= \langle g, f - \Lambda_\alpha^{-1} g \rangle_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}} + \frac{\kappa + 1}{2} \langle g - \Lambda_\alpha f, \Lambda_\alpha^{-1} g - f \rangle_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}} + \frac{\lambda}{2} \|R\alpha - \alpha_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \mu \int_{\Omega} \phi(|D\alpha|). \end{aligned} \tag{136}$$

Στο Θεώρημα 2.16, η παράμετρος  $\kappa$  επιλέγεται να μεταβάλλεται αυστηρώς στο διάστημα  $(-1, 1)$ , έτσι ώστε η ταυτόχρονη ελαχιστοποίηση ως προς τα πεδία και τα προφίλ να διατηρεί την πιεστικότητα. Παρ' όλα αυτά, στο σχήμα (136), όπου ο μοναδικός άγνωστος είναι η συνάρτηση της αγωγιμότητας, η παράμετρος  $\kappa$  μπορεί και ξεφεύγει από αυτόν τον περιορισμό ξεπερνώντας την κρίσιμη τιμή 1. Είναι φανερό ότι η επιλογή μιας επαρκώς μεγάλης τιμής για την  $\kappa$  καθιστά τον όρο  $\langle g - \Lambda_\alpha f, \Lambda_\alpha^{-1} g - f \rangle_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}} = \langle g - \Lambda_\alpha f, \Lambda_\alpha^{-1}(g - \Lambda_\alpha f) \rangle_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}}$  πρωταγωνιστικό. Αξίζει εδώ να επισημανθεί ότι, αν επιπλέον γνωρίζαμε ότι  $g, \Lambda_\alpha f \in L^2(\partial\Omega)$  (κάποια επιπρόσθετη ήπια υπόθεση ομαλότητας), τότε ο δεύτερος όρος του  $E_1$  θα ευθυνόταν για την εξάλειψη της διαφοράς  $\|g - \Lambda_\alpha f\|_{L^2(\partial\Omega)}^2$  των δεδομένων κατά μήκος της μετρήσιμης επιφάνειας  $\partial\Omega$ . Αυτό είναι το κλασικό συναρτησιακό ελαχιστοποίησης των εφαρμογών, που αναγκάζει τα επιφανειακά δεδομένα να «συμβαδίζουν». Αλλά ακόμα και χωρίς αυτήν την υπόθεση ομαλότητας, ο όρος  $\langle g - \Lambda_\alpha f, \Lambda_\alpha^{-1} g - f \rangle_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}}$  δεν είναι παρά το χωρικό ολοκλήρωμα  $\int_{\Omega} \alpha |\nabla (v_\alpha - (u_\alpha + \eta f))|^2$ , που ταυτίζεται με το συναρτησιακό ελαχιστοποίησης των *Kohn* και *Vogelius* [55] και αναλύεται στο [56] για την περίπτωση της ανακατασκευής με ένα ζεύγος επιφανειακών δεδομένων.

Το Θεώρημα 2.16 κατοχυρώνει την ύπαρξη ελαχίστου, αλλά όχι τη μοναδικότητα. Στην πραγματικότητα, όταν κανείς εργάζεται με ένα μόνο ζεύγος επιφανειακών δεδομένων  $(f, g)$  δεν μπορεί να προσδοκά μοναδική λύση. Αναφορικά με την κυρτότητα, μια ενδελεχέστερη

εξέταση των όρων του  $E_1(\alpha)$  οδηγεί στο συμπέρασμα της ύπαρξης «ανταγωνιστικών» όρων. Πιο συγκεκριμένα, οι δύο τελευταίοι όροι του (136), που ελέγχουν τη συναρτησιακή δομή των προφίλ αγωγιμότητας, είναι κυρτοί [6]. Οι δύο πρώτοι όροι, που προκύπτουν από την εμπλοκή των ευθέων προβλημάτων, περιέχουν σίγουρα έναν κοίλο όρο. Δουλεύοντας με την έκφραση

$$\tilde{E}(u^\alpha, v^\alpha, \alpha) = \frac{\kappa + 1}{2} \langle \Lambda_\alpha f, f \rangle_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}} - \frac{(1 - \kappa)}{2} \langle g, \Lambda_\alpha^{-1} g \rangle_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}} - \kappa \langle g, f \rangle_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}}, \quad (137)$$

παρατηρούμε ότι ο πρώτος όρος είναι κοίλος. Αυτό μπορεί ναδειχθεί θεωρώντας δύο διακριτά αγωγήμα προφίλ  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2$ , συνοδευόμενα από τα πεδία  $u_i, v_i$ ,  $i = 1, 2$ , που λύνουν τα αντίστοιχα ευθέα προβλήματα όπως περιγράφεται στο Θεώρημα 2.16. Έστω ότι διαλέγουμε έναν αυθαίρετο κυρτό συνδυασμό  $\alpha_s = s\alpha_1 + (1-s)\alpha_2$  ( $0 < s < 1$ ) των προφίλ  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2$  (με αντίστοιχα πεδία  $u_s, v_s$ ). Προφανώς, αυτή η συνάρτηση είναι μια αποδεκτή συνάρτηση αγωγιμότητας. Τότε

$$\begin{aligned} \langle \Lambda_{\alpha_s} f, f \rangle_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}} &= \int_{\Omega} \alpha_s |\nabla(u_s + \eta f)|^2 \geq s \int_{\Omega} \alpha_1 |\nabla(u_1 + \eta f)|^2 + (1-s) \int_{\Omega} \alpha_2 |\nabla(u_2 + \eta f)|^2 \\ &= s \langle \Lambda_{\alpha_1} f, f \rangle_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}} + (1-s) \langle \Lambda_{\alpha_2} f, f \rangle_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}}, \end{aligned} \quad (138)$$

απ' όπου και διαπιστώνουμε ότι (όταν προφανώς  $\kappa + 1 > 0$ ) ο όρος  $\frac{\kappa+1}{2} \langle \Lambda_\alpha f, f \rangle_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}}$  είναι κοίλος. Επιπλέον,

$$\begin{aligned} - \langle g, \Lambda_{\alpha_s}^{-1} g \rangle_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}} &= \int_{\Omega} \alpha_s |\nabla v_s|^2 - 2 \langle g, \gamma v_s \rangle_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}} \\ &= s \int_{\Omega} \alpha_1 |\nabla v_s|^2 + (1-s) \int_{\Omega} \alpha_2 |\nabla v_s|^2 - 2 \langle g, \gamma v_s \rangle_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}} \\ &\geq s \left[ \int_{\Omega} \alpha_1 |\nabla v_1|^2 - 2 \langle g, \gamma v_1 \rangle_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}} \right] + (1-s) \left[ \int_{\Omega} \alpha_2 |\nabla v_2|^2 - 2 \langle g, \gamma v_2 \rangle_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}} \right] \\ &= s \left[ - \langle g, \Lambda_{\alpha_1}^{-1} g \rangle_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}} \right] + (1-s) \left[ - \langle g, \Lambda_{\alpha_2}^{-1} g \rangle_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}} \right]. \end{aligned} \quad (139)$$

Επομένως, για  $\kappa < 1$ , ο δεύτερος όρος  $-\frac{(1-\kappa)}{2} \langle g, \Lambda_\alpha^{-1} g \rangle_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}}$  του  $\tilde{E}(u^\alpha, v^\alpha, \alpha)$  είναι κοίλος. Στην περίπτωση όπου  $\kappa > 1$ , ο όρος αυτός γίνεται κυρτός και δρα σε συμφωνία με τον όρο ομαλοποίησης  $\frac{\lambda}{2} \|R\alpha - \alpha_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \mu \int_{\Omega} \phi(|D\alpha|)$ . Πράγματι, όταν εφαρμόζουμε τριπλή ελαχιστοποίηση (ως προς τα  $u, v, \alpha$ ), και άρα τηρούμε τη συνθήκη πιστικότητας  $\kappa < 1$ , έχουμε περισσότερα τοπικά ελάχιστα απ' ότι στην περίπτωση της απλής ελαχιστοποίησης (μόνο ως προς  $\alpha$ ), όπου επιλέγεται η χαλαρότερη συνθήκη  $\kappa > 1$ . Παρ' όλα αυτά, ακόμα και το σύννηδες χρησιμοποιούμενο συναρτησιακό των εφαρμογών  $\langle g - \Lambda_\alpha f, \Lambda_\alpha^{-1} g - f \rangle_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}}$  γραμμένο στη μορφή  $\langle g, \Lambda_\alpha^{-1} g \rangle_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}} + \langle \Lambda_\alpha f, f \rangle_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}} - 2 \langle g, f \rangle_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}}$  παραθέτει έναν κυρτό και έναν κοίλο όρο.

## 2.5 Αριθμητική υλοποίηση

### 2.5.1 Διαμόρφωση του κατάλληλου αριθμητικού σχήματος για την επίλυση του αντίστροφου προβλήματος της αγωγιμότητας

Το επόμενο θεώρημα αποτελεί το πρώτο βήμα προς την εδραίωση του κατάλληλου αριθμητικού σχήματος για το πρόβλημα ελαχιστοποίησης (135).

**Θεώρημα 2.17.** Το συναρτησιακό  $E(u, v, \alpha)$ , (109), είναι κάτω ημισυνεχές για την  $L^1(\Omega)$ -ισχυρή τοπολογία στο  $\alpha$  και την  $L^1(\Omega) \times L^1(\Omega)$ -ασθενή τοπολογία στο  $(\nabla u, \nabla v)$  (Αυτή η συνδυαστική σύγκλιση ορίζει μια τοπολογία, που στα επόμενα θα αναφέρεται ως  $\tau$ -τοπολογία).

Απόδειξη. Επικαλούμαστε τα Θεωρήματα 13.1.1 (βλ. Θεώρημα 2.2) και 16.4.1 του [5] για να δείξουμε τη ζητούμενη  $\tau$ - κάτω ημισυνέχεια. Ειδικά, ορίζουμε τη συνάρτηση  $h(\alpha, \nu)$ , όπου  $\nu = (\nu_1, \nu_2) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ ,

$$h(\alpha, \nu) = \frac{\kappa + 1}{2} \alpha |\nu_1 + \nabla(\eta f)|^2 + \frac{(\kappa - 1)}{2} \alpha |\nu_2|^2. \quad (140)$$

Εφόσον η συνάρτηση  $h(\alpha, \nu)$  είναι κυρτή ως προς  $\nu$  και κάτω ημισυνεχής ως προς  $\alpha$ , συμπεραίνουμε, βάσει των προαναφερθέντων θεωρημάτων, ότι το συναρτησιακό

$$H(\alpha, \nu) = \int_{\Omega} h(\alpha(x), \nu(x)) dx \quad (141)$$

είναι κάτω ημισυνεχές για την  $L^1$ - ισχυρή τοπολογία στο  $\alpha$  και την  $L^1$ - ασθενή τοπολογία στο  $\nu$ . Θέτουμε  $\nu = (\nu_1, \nu_2) = (\nabla u, \nabla v)$  και θεωρούμε τις ακολουθίες  $(u_n, v_n)$  με τις ιδιότητες που επάγονται από το Θεώρημα 2.16, σύμφωνα με τις οποίες  $\nabla u_n \xrightarrow{L^2(\Omega)} \nabla u$  και

$\nabla v_n \xrightarrow{L^2(\Omega)} \nabla v$ . Τότε, το ζεύγος  $(\nabla u_n, \nabla v_n)$  συγκλίνει  $L^1$ - ασθενώς στο  $(\nabla u, \nabla v)$ , ενώ  $\alpha_n \rightarrow \alpha$  ισχυρώς. Ενσωματώνοντας τον όρο  $-\kappa \langle g, f \rangle_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}}$ , κατασκευάζουμε το συναρτησιακό  $\tilde{E}(u, v, \alpha)$ , (110), για το οποίο ισχύει

$$\tilde{E}(u, v, \alpha) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \tilde{E}(u_n, v_n, \alpha_n). \quad (142)$$

Λαμβάνοντας υπόψιν τις (122) και (123), τελικά αποδεικνύεται ότι το πλήρες συναρτησιακό ικανοποιεί

$$E(u, v, \alpha) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} E(u_n, v_n, \alpha_n). \quad (143)$$

□

Σύμφωνα με την ανάλυση *Lebesgue* του μέτρου  $D\alpha$  (βλ. Ενότητα 1.2), το συναρτησιακό (109) γράφεται στην ισοδύναμη εκτενή μορφή

$$\begin{aligned} E(u, v, \alpha) &= \tilde{E}(u, v, \alpha) + \frac{\lambda}{2} \|R\alpha - \alpha_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \mu \int_{\Omega} \phi(|\nabla \alpha|) dx + \mu t \int_{S_{\alpha}} |\alpha^+ - \alpha^-| d\mathcal{H}^{d-1} + \mu t \int_{\Omega \setminus S_{\alpha}} |C_{\alpha}|, \end{aligned} \quad (144)$$

όπου αναγνωρίζουμε το απόλυτα συνεχές τμήμα (ως προς το μέτρο *Lebesgue*), το *jump part* και το *Cantor part* του μέτρου  $D\alpha$ . Η παράμετρος  $t$  αναπαριστά το όριο  $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\phi(s)}{s}$ . Κάτι τέτοιο έχει νόημα, καθώς η γνησίως κυρτή συνάρτηση  $\phi$ , όπως σημειώνεται κάτω από την (108), επιλέγεται να είναι μη φθίνουσα από το  $\mathbb{R}^+$  στο  $\mathbb{R}^+$ , με  $\phi(0) = 0$ , ενώ επιπλέον θεωρούμε ότι η γραμμική αυξητική συνθήκη  $ts - t \leq \phi(s) \leq ts + t$ , με συγκεκριμένες σταθερές  $t > 0$  και  $t \geq 0$ , ικανοποιείται  $\forall s \geq 0$ .

Το συναρτησιακό (109) αποτελεί ακριβώς τον στόχο της ελαχιστοποίησης. Ωστόσο, είναι ξεκάθαρο πως ο όρος που φέρει την ολική κύμανση  $|D\alpha|$ , σε συνδυασμό με την (144), χρήζει ειδικής μεταχείρισης προκειμένου να υλοποιηθεί αριθμητικά. Για τον σκοπό αυτό, ακολουθούμε ένα (σχεδόν) τετραγωνικό σχήμα προσέγγισης με την ονομασία “*Half-Quadratic Minimization Approach*”, εμπνευσμένο από τις μεθόδους βελτιστοποίησης στην επεξεργασία εικόνας [6]. Σύμφωνα με την *half-quadratic technique* του *Aubert* (σ. 79-86, [6]), προτείνεται η κατασκευή μιας ακολουθίας ενεργειών  $E_{\epsilon}$ ,  $\epsilon > 0$ , που αποτελούν τετραγωνικές προσεγγίσεις του (144). Τότε,  $\forall \epsilon > 0$ , το πρόβλημα ελαχιστοποίησης που αντιστοιχεί σε κάθε συναρτησιακό  $E_{\epsilon}$  επιδέχεται μία λύση  $(u_{\epsilon}, v_{\epsilon}, \alpha_{\epsilon})$ , που ανήκει στον

χώρο  $H_0^1(\Omega) \times H^1(\Omega)/\mathbb{R} \times (H^1(\Omega) \cap L_\delta^\infty(\Omega, [b, c]))$ .

Αρχίζουμε με την κατασκευή της ακολουθίας  $\phi_\epsilon$  των βοηθητικών συναρτήσεων

$$\phi_\epsilon(s) = \begin{cases} \frac{\phi'(\epsilon)}{2\epsilon}s^2 + \phi(\epsilon) - \frac{\epsilon\phi'(\epsilon)}{2} & \text{αν } 0 \leq s \leq \epsilon, \\ \phi(s) & \text{αν } \epsilon \leq s \leq \frac{1}{\epsilon}, \\ \frac{\epsilon\phi'(\frac{1}{\epsilon})}{2}s^2 + \phi(\frac{1}{\epsilon}) - \frac{\phi'(\frac{1}{\epsilon})}{2\epsilon} & \text{αν } s \geq \frac{1}{\epsilon}, \end{cases} \quad (145)$$

που προσεγγίζει κατάλληλα την κυρτή συνάρτηση  $\phi$ . Πράγματι, για κάθε  $\epsilon$ , ισχύει ότι  $\phi_\epsilon(s) \geq 0$ ,  $\forall s$  και  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \phi_\epsilon(s) = \phi(s)$ . Θέτουμε  $\mathcal{E} = H_0^1(\Omega) \times H^1(\Omega)/\mathbb{R}$  και ορίζουμε το συναρτησιακό  $E_\epsilon$  ως

$$E_\epsilon(u, v, \alpha) = \begin{cases} \tilde{E}(u, v, \alpha) + \frac{\lambda}{2} \|R\alpha - \alpha_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \mu \int_\Omega \phi_\epsilon(|\nabla \alpha|) dx & \text{αν } (u, v) \in \mathcal{E} \text{ και} \\ & \alpha \in H^1(\Omega) \cap L_\delta^\infty(\Omega, [b, c]), \\ \infty & \text{αν } (u, v) \in \mathcal{E} \text{ και } \alpha \in (BV(\Omega) \setminus H^1(\Omega)) \cap L_\delta^\infty(\Omega, [b, c]). \end{cases} \quad (146)$$

Χρησιμοποιώντας κλασικά επιχειρήματα, παρόμοια με αυτά της απόδειξης του Θεωρήματος 2.16, διατυπώνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα

**Πρόταση 2.5.1.** Για κάθε  $\epsilon > 0$ , το συναρτησιακό  $E_\epsilon$  επιδέχεται μία λύση  $(u_\epsilon, v_\epsilon, \alpha_\epsilon)$  που ανήκει στον χώρο  $\mathcal{E} \times (H^1(\Omega) \cap L_\delta^\infty(\Omega, [b, c]))$ .

Στη συνέχεια δείχνουμε πως αυτή η ακολουθία ελαχίστων συγκλίνει κατάλληλα - μέσω της εμπλοκή της  $\Gamma$ - σύγκλισης - στο ελάχιστο του αρχικού συναρτησιακού. Ειδικότερα, ορίζουμε

$$\bar{E}(u, v, \alpha) = \begin{cases} E(u, v, \alpha) & \text{αν } (u, v) \in \mathcal{E} \text{ και } \alpha \in H^1(\Omega) \cap L_\delta^\infty(\Omega, [b, c]), \\ \infty & \text{αν } (u, v) \in \mathcal{E} \text{ και } \alpha \in (BV(\Omega) \setminus H^1(\Omega)) \cap L_\delta^\infty(\Omega, [b, c]). \end{cases} \quad (147)$$

**Πρόταση 2.5.2.** Η κάτω ημισυνεχής περιβάλλουσα  $R_\tau \bar{E}$  του  $\bar{E}$ , για την  $L^1(\Omega)$ - ισχυρή τοπολογία στο  $\alpha$  και την  $L^1(\Omega) \times L^1(\Omega)$ - ασθενή τοπολογία στο  $(\nabla u, \nabla v)$ , ταυτίζεται με το  $E$ .

*Απόδειξη.* Από το Θεώρημα 2.17 έχουμε ότι το συναρτησιακό  $E$  είναι  $\tau$ - κάτω ημισυνεχές. Δεδομένου αυτού, ισχύει ότι  $\bar{E} \geq E$ . Για να αποδείξουμε ότι  $R_\tau \bar{E} = E$ , αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει μια ακολουθία  $(u_h, v_h, \alpha_h)$  στον  $\mathcal{E} \times (H^1(\Omega) \cap L_\delta^\infty(\Omega, [b, c]))$  που  $\tau$ - συγκλίνει στο  $(u, v, \alpha)$  και  $E(u, v, \alpha) = \lim_{h \rightarrow 0} \bar{E}(u_h, v_h, \alpha_h)$ . Μια τέτοια ακολουθία μπορεί να κατασκευαστεί μέσω κλασικών θεωρημάτων προσέγγισης [57, 58].  $\square$

**Πρόταση 2.5.3.** Κάθε σημείο συσσωρεύσεως  $(u, v, \alpha)$  - για την  $L^1(\Omega)$ - ισχυρή τοπολογία στο  $\alpha$  και την  $L^1(\Omega) \times L^1(\Omega)$ - ασθενή τοπολογία στο  $(\nabla u, \nabla v)$  - της ακολουθίας  $\{(u_\epsilon, v_\epsilon, \alpha_\epsilon) : \epsilon > 0\}$  αποτελεί ελάχιστο για το  $E$  και η ακολουθία  $E_\epsilon(u_\epsilon, v_\epsilon, \alpha_\epsilon)$  συγκλίνει στο  $E(u, v, \alpha)$ .

*Απόδειξη.* Εκ κατασκευής, η  $E_\epsilon(u, v, \alpha)$  είναι μια φθίνουσα ακολουθία που συγκλίνει σημειακά στο  $\bar{E}(u, v, \alpha)$ . Από το Θεώρημα 2.15 συνεπάγεται ότι η  $E_\epsilon$   $\Gamma$ - συγκλίνει στην κάτω ημισυνεχή περιβάλλουσα  $R_\tau \bar{E}$  του  $\bar{E}$ , που σύμφωνα με την Πρόταση 2.5.2 ταυτίζεται με το  $E$ . Επιπλέον, λόγω των ομοιόμορφων φραγμάτων  $b, c$  των συντελεστών αγωγιμότητας, τα συναρτησιακά  $E_\epsilon$  είναι ισοπυεστικά (Ορισμός 2.2.9) και άρα το σύνολο  $\{(u_\epsilon, v_\epsilon, \alpha_\epsilon) : \epsilon > 0\}$  είναι  $\tau$ - σχετικά συμπαγές. Τότε, σύμφωνα με το Θεώρημα 2.14, κάθε σημείο συσσωρεύσεως  $(u, v, \alpha)$  του  $\{(u_\epsilon, v_\epsilon, \alpha_\epsilon) : \epsilon > 0\}$  αποτελεί ελάχιστο για το  $E$  και η ακολουθία  $E_\epsilon(u_\epsilon, v_\epsilon, \alpha_\epsilon)$  συγκλίνει στο  $E(u, v, \alpha)$  καθώς  $\epsilon \rightarrow 0$ .  $\square$

Δουλεύοντας με τις τετραγωνικές προσεγγίσεις  $E_\epsilon$ , αντί του αρχικού συναρτησιακού  $E$ , διατηρούμε την ελαχιστοποιητική διαδικασία, όσον αφορά τα προφίλ της αγωγιμότητας, εντός του  $H^1(\Omega)$ . Ως εκ τούτου, στο όριο  $\epsilon \rightarrow 0$ , οι απότομες κλίσεις του συντελεστή  $\alpha$  προσομοιώνονται με ομαλοποιητικό τρόπο. Για να έχουμε έναν αποδοτικό αλγόριθμο, που δεν θα καταστέλλει αλλά θα αναδεικνύει το σύνολο των ασυνεχειών της αγωγιμότητας, εισάγουμε στην ανάλυσή μας μια βοηθητική συνάρτηση,  $\omega(x)$ , που δρα ως εξομαλυτής του  $jump\ set$  και ολοκληρώνει την ιδέα της *half-quadratic* μεθοδολογίας [6]. Στη συνέχεια, προσαρμόζουμε αυτήν την τεχνική στο τρέχον αριθμητικό πλαίσιο, επεκτείνοντάς την για την ανακατασκευή του εγκλεισμού  $D$  στο εσωτερικό του χωρίου  $\Omega$ .

### 2.5.2 $BV$ Regularized Inversion algorithm

Ακολουθώντας τα επιχειρήματα της Ενότητας 3.2.4 του [6], κατασκευάζουμε έναν σχεδόν τετραγωνικό αλγόριθμο που υλοποιεί αριθμητικά το σχήμα ελαχιστοποίησης της προηγούμενης παραγράφου. Περιοριζόμαστε στην περίπτωση όπου η συνάρτηση  $\phi$  επιλέγεται έτσι ώστε να ικανοποιεί τις ιδιότητες που περιγράφηκαν ως τώρα, συν τη βασική συνθήκη της Πρότασης 3.2.4 του [6] κατά την οποία η συνάρτηση  $\phi(\sqrt{s})$  είναι κοίλη στο  $(0, \infty)$ . Συνεπώς, οι μη αρνητικές παράμετροι  $L = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\phi'(s)}{2s}$  και  $M = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\phi'(s)}{2s}$  είναι καλώς ορισμένες και τηρούν τη διάταξη  $L < M$ . Τότε, σύμφωνα με την Πρόταση 3.2.4, υπάρχει κυρτή και φθίνουσα συνάρτηση  $\psi : (L, M] \rightarrow [\beta_1, \beta_2]$  τέτοια ώστε

$$\phi(s) = \inf_{L \leq \omega \leq M} (\omega s^2 + \psi(\omega)), \quad (148)$$

όπου  $\beta_1 = \lim_{s \rightarrow 0^+} \phi(s)$  και  $\beta_2 = \lim_{s \rightarrow \infty} (\phi(s) - \frac{s\phi'(s)}{2})$ . Επιπλέον, για κάθε  $s \geq 0$ , η τιμή  $\omega$  στην οποία επιτυγχάνεται το ελάχιστο είναι ακριβώς  $\omega = \frac{\phi'(s)}{2s}$ . Αυτή η προσέγγιση έχει τα χαρακτηριστικά μιας δυϊκής προσέγγισης και γι' αυτό η μεταβλητή  $\omega$  καλείται «δυϊκή μεταβλητή» (*dual variable*) [6].

Εφαρμόζοντας αυτήν τη δυϊκή προσέγγιση στη βοηθητική συνάρτηση  $\phi_\epsilon$  (145), έχουμε τη δυνατότητα να εκφράσουμε το  $\inf_{(u,v,\alpha)} E_\epsilon(u, v, \alpha)$  στη μορφή

$$\inf_{(u,v,\alpha)} E_\epsilon(u, v, \alpha) = \inf_{\omega} \inf_{(u,v,\alpha)} J_\epsilon(u, v, \alpha, \omega), \quad (149)$$

όπου

$$J_\epsilon(u, v, \alpha, \omega) = \tilde{E}(u, v, \alpha) + \frac{\lambda}{2} \|R\alpha - \alpha_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \mu \int_{\Omega} (\omega |\nabla \alpha|^2 + \psi_\epsilon(\omega)) dx \quad (150)$$

με  $(u, v) \in \mathcal{E}$  και  $\alpha \in H^1(\Omega) \cap L^\infty_\delta(\Omega, [b, c])$ . Η σημαντικότητα του νέου τύπου ελαχιστοποίησης (149) έγκειται στο γεγονός πως ο όρος ομαλοποίησης του  $J_\epsilon$  (δηλ., το τμήμα  $\frac{\lambda}{2} \|R\alpha - \alpha_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \mu \int_{\Omega} (\omega |\nabla \alpha|^2 + \psi_\epsilon(\omega)) dx$ ) είναι κυρτός ως προς  $\alpha$ , και για σταθερό  $\alpha \in H^1(\Omega) \cap L^\infty_\delta(\Omega, [b, c])$  είναι κυρτός ως προς  $\omega$  [6]. Κάτι τέτοιο ενισχύει τη διαδικασία ελαχιστοποίησης, ενώ επιπλέον καθιστά τη βοηθητική μεταβλητή  $\omega$  καθοριστική για τον προσδιορισμό του  $jump\ set$  των εγκλεισμών, όπως αναδεικνύεται στη συνέχεια.

Βασικό χαρακτηριστικό του σχεδιασμένου αλγορίθμου αποτελεί η σταδιακή ανίχνευση των ασυνεχειών της  $\alpha(x)$ . Η υπολογιστική διαδικασία ξεκινάει με μια αρχική εκτίμηση των  $(u, v, \alpha, \omega)$ . Τότε, ο αλγόριθμος ανακατασκευής “*BV Regularized Inversion*” περιγράφεται στα ακόλουθα βήματα: επιλέγοντας το χαρακτηριστικό βήμα  $h \in (0, 1)$ , την αρχική προσέγγιση  $(u^0, v^0, \alpha^0, \omega^0)$ , την παράμετρο ομαλοποίησης  $\epsilon$ , το μέγιστο αριθμό επαναλήψεων ( $\max\_iters = 10$ ) και θέτοντας την παράμετρο κανονικοποίησης  $\lambda = 0$ :

**Algorithm** *BV Regularized Inversion***Require:**  $(u^0, v^0, \alpha^0)$   $\triangleright$  initial guess for  $(u^0, v^0, \alpha^0, \omega^0)$ **Ensure:**  $u_{\min}, v_{\min}, \alpha_{\min}, \omega_{\min}$ 

```

1 function BVRconstruction( $u^0, v^0, \alpha^0, \omega^0$ )
2   for  $n \leftarrow 0 : \text{max\_iters}$  do
3      $(u_\epsilon^{n+1}, v_\epsilon^{n+1}, \alpha_\epsilon^{n+1}) \leftarrow \underset{(u,v,\alpha)}{\operatorname{argmin}} J_\epsilon(u, v, \alpha, \omega^n)$ 
4      $\omega^{n+1} \leftarrow \frac{\phi'_\epsilon(|\nabla \alpha_\epsilon^{n+1}|)}{2|\nabla \alpha_\epsilon^{n+1}|}$ 
5   end for
6   return  $u_{\min}, v_{\min}, \alpha_{\min}, \omega_{\min}$ 
7 end function

```

Όπως προαναφέρθηκε, οι συναρτήσεις  $\omega^n$  δρουν ως ομαλοποιημένες χαρακτηριστικές συναρτήσεις των ασυνεχών επιφανειών. Στην πραγματικότητα, όταν τα όρια  $L = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\phi'_\epsilon(s)}{2s}$  και  $M = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{\phi'_\epsilon(s)}{2s}$  επιλέγονται κοντά στο 0 και 1 αντίστοιχα, τότε ικανοποιούνται οι παρακάτω ιδιότητες [6]

**Σχόλιο 2.7.** Η ακολουθία των συναρτήσεων  $\omega^n(x)$  αποτελεί «δείκτρια» του συνόλου των ασυνεχειών.

1. Αν  $\omega^n(x) \approx 0$ , τότε το  $x$  ανήκει σε μια ασυνεχή επιφάνεια.
2. Αν  $\omega^n(x) \approx 1$ , τότε το  $x$  ανήκει σε μια ομογενή περιοχή (δηλ., το  $x$  αποτελεί εσωτερικό σημείο του εγκλεισμού).

Σύμφωνα με το παραπάνω σχόλιο, στη γειτονιά των αναζητούμενων διεπιφανειών των εγκλεισμών, η συνάρτηση  $\omega$ , που συμμετέχει στον τελευταίο όρο ομαλοποίησης του (150), παίρνει πολύ μικρές τιμές επιτρέποντας έτσι μεγάλες τιμές για τις κλίσεις των συντελεστών  $\alpha$ . Αντίθετα, στο εσωτερικό των εγκλεισμών, η συνάρτηση  $\omega$  είναι σχεδόν ίση με τη μονάδα επιβάλλοντας (τοπικά) την  $H^1$ -δομή των φυσικών συντελεστών. Επιπλέον, εκμεταλλευόμαστε περαιτέρω αυτή την ιδιότητα της δυϊκής μεταβλητής αποδίδοντάς της και ένα δεύτερο ρόλο. Πιο συγκεκριμένα, χρησιμοποιούμε την αρχική δομή  $\omega^0$  για να μεταφέρουμε a priori πληροφορία σχετικά με την πιθανή θέση των διεπιφανειών. Ο τρόπος εισαγωγής αυτής της πληροφορίας στο πρόβλημα ελαχιστοποίησης (149) περιγράφεται στην Ενότητα 2.6.

Στη νιοστή ( $n$ ) επανάληψη του αλγορίθμου, οι μεταβλητές  $u, v, \alpha$  υπολογίζονται για συγκεκριμένο  $\omega$  ως το  $\underset{(u,v,\alpha)}{\operatorname{argmin}} J_\epsilon(u, v, \alpha, \omega^n)$  (Βήμα 3). Εφαρμόζουμε τη μέθοδο εσωτερικού

σημείου υλοποιούμενη από το πακέτο λογισμικού μη γραμμικής βελτιστοποίησης IPOPT [59, 60], ενσωματώνοντας τα κριτήρια φράγματος όλων των παραμέτρων ελέγχου. Λογισμικά βελτιστοποίησης με βάση την κλίση (*gradient-based optimizers*), όπως το IPOPT, τυπικά τερματίζονται μόλις ικανοποιηθούν οι συνθήκες βελτιστότητας (συνθήκες *Kuhn–Tucker*) [61]. Τότε, το  $\omega^{n+1}$  υπολογίζεται ως  $\omega^{n+1} = \underset{\omega}{\operatorname{argmin}} \frac{\phi'_\epsilon(|\nabla \alpha_\epsilon^{n+1}|)}{2|\nabla \alpha_\epsilon^{n+1}|} = \underset{\omega}{\operatorname{argmin}} J_\epsilon(u_\epsilon^{n+1}, v_\epsilon^{n+1}, \alpha_\epsilon^{n+1}, \omega)$  (Βήμα 4).

## 2.6 Εφαρμογές

Επαληθεύουμε τα θεωρητικά αποτελέσματα των προηγούμενων ενοτήτων με αριθμητικά πειράματα, θεωρώντας ως επί το πλείστον απλές, διδιάστατες γεωμετρικές δομές. Γι' αυτό

το σκοπό, ορίζουμε το αντίστροφο πρόβλημα της αγωγιμότητας

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\alpha(x)\nabla u(x)) &= 0 & x \in \Omega, \\ u(x) &= f(x) & x \in \partial\Omega, \\ \alpha(x)\nabla u(x) \cdot \vec{n} &= g(x) & x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

με γνωστά επιφανειακά δεδομένα  $(f, g)$  κατά μήκος ολόκληρης της επιφάνειας  $\partial\Omega$ . Αρχίζουμε με την απλούστερη περίπτωση, όπου η αγωγίμη περιοχή  $\Omega$  ορίζεται να είναι ο δίσκος

$$\Omega_1 := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} < \rho_{\Omega_1} \right\}. \quad (151)$$

Εξετάζουμε την αποδοτικότητα της προτεινόμενης μεθόδου, αποκλειστικά με ένα ζεύγος δεδομένων, για την ανακατασκευή ενός ομόκεντρου (“*concentric problem*”, Πρόβλημα 2.6.1) και δύο έκκεντρων (“*strong eccentricity problem*”, Πρόβλημα 2.6.2.1, “*mild eccentricity problem*”, Πρόβλημα 2.6.2.2) εγκλεισμών  $D$ , κάθε ένας από τους οποίους αναπαρίσταται από το δίσκο

$$D_1 := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - x_{D_1})^2 + (y - y_{D_1})^2} < \rho_{D_1} \right\}, \quad (152)$$

όπου  $(x_{D_1}, y_{D_1})$  οι συντεταγμένες κέντρου του και  $\rho_{D_1} = 1$ . Υποθέτουμε ότι το αναζητούμενο - a priori γνωστό - αγωγίμο προφίλ είναι της μορφής

$$\hat{\alpha} := \alpha(x, y) = \begin{cases} 2, & (x, y) \in D_1, \\ 1, & (x, y) \in \Omega_1 \setminus D_1. \end{cases} \quad (153)$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, η τιμή κατωφλίου  $b$  επιλέγεται ίση με τη μονάδα, ώστε να συμφωνεί εύκολα με τις απαιτήσεις στην προστατευτική ζώνη  $\Omega_{1\delta}$ .

Διακριτοποιούμε το υπολογιστικό πλέγμα, που ορίζεται από τον εξωτερικό κύκλο ( $\rho_{\Omega_1} = 2$ ), σε πολικές συντεταγμένες  $(\rho, \varphi)$  χρησιμοποιώντας το *Triangle* [62, 63] με χαρακτηριστικό βήμα ( $h$ ), όπως αναγράφεται στον Πίνακα 2.1 παρακάτω μαζί με τον αριθμό των στοιχείων (*elements*) και των κόμβων (*nodes*) κάθε γεωμετρίας. Για τη διακριτοποίηση των τελεστών  $J_\epsilon(u, v, \alpha, \omega)$  εφαρμόζουμε τη μέθοδο των συνεχών πεπερασμένων στοιχείων ( $\mathcal{P}_1$ ).

Επισημαίνουμε σε αυτό το σημείο την ευαισθησία των λύσεων ως προς τις δύο θεμελιώδεις παραμέτρους του αλγορίθμου,  $\omega$  και  $\mu$ . Αναφορικά με την πρώτη, στο ίδιο πνεύμα με την ιδιότητα της  $\Omega_\delta$  ζώνης, εισάγουμε μια φόρμουλα διαμόρφωσης της αρχικής δομής  $\omega$  που καθορίζει την περιοχή αναζήτησης του *jump set* βάσει μιας μεταβλητής  $\ell (> 0)$ . Ειδικά, το αρχικό προφίλ για την  $\omega$  επιλέγεται βάσει του τύπου

$$\omega^0 = \begin{cases} 0, & \text{αν } |r_i - \rho_D| \leq \frac{\ell}{2}, \\ 1, & \text{διαφορετικά,} \end{cases} \quad (154)$$

όπου  $|r_i - \rho_D|$  η Ευκλείδεια απόσταση του  $i$ - κόμβου από το  $\partial D$  και  $\ell$  το μέσο πάχος της ζώνης που σχηματίζει η προσεγγιστική δομή  $\omega^0$ . Στο πλαίσιο αυτής της προσθήκης, ο σκοπός της παρούσας έρευνας συνίσταται στην εξέταση της λειτουργικότητας της μεθοδολογίας ως προς την επιλογή του  $\omega^0$ . Κατασκευάζουμε τρεις διαφορετικούς  $\omega^0$ -σχηματισμούς θέτοντας  $\ell = \{0.2, 0.3, 0.4\}$ . Μεγαλύτερες τιμές της μεταβλητής  $\ell$  αποδίδουν μεγαλύτερη αβεβαιότητα ως προς τη θέση του  $\partial D$ . Η ζώνη χρώματος μπλε ορίζει την περιοχή στην οποία  $\omega^0(x) = 0$ , αναπαριστώντας έτσι μια ασυνεχή επιφάνεια (Σχόλιο 2.7) (βλ., για παράδειγμα, την πρώτη στήλη των Εικόνων 2.3, 2.4, 2.5). Επιπλέον, μελετάμε την περίπτωση όπου το αρχικό  $\omega$  είναι σταθερή συνάρτηση, δηλαδή  $\omega^0 \equiv 1$ .

Πίνακας 2.1: Delaunay Triangulations.

Mesh case	$h$	Elements	Nodes
<i>concentric</i>	0.270	1850	956
<i>strong eccentric</i>	0.244	1834	948
<i>mild eccentric</i>	0.260	1854	958
<i>concentric</i>	0.150	3926	2024
<i>strong eccentric</i>	0.145	3950	2036
<i>mild eccentric</i>	0.151	3950	2036

Η παράμετρος κανονικοποίησης  $\mu$  αντανακλά την επίδραση της  $BV$ -δομής στο πρόβλημα (αν και ελαφρώς ομαλοποιημένης από την παράμετρο  $\epsilon$ ). Από το σχήμα ελαχιστοποίησης γίνεται φανερό πως όταν η παράμετρος  $\mu$  αυξάνεται, η  $BV$ -νόρμα,  $\mu \int_{\Omega} \omega |\nabla \alpha|^2 dx$ , κυριαρχεί, αναδεικνύοντας έτσι τις ασυνέχειες της συνάρτησης  $\alpha(x)$ . Ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση  $\omega^0 \equiv 1$ , με τον αντίστοιχο όρο του συναρτησιακού να μετατρέπεται στη γνωστή *Tikhonov* κανονικοποίηση (*Tikhonov regularization*),  $\mu \int_{\Omega} |\nabla \alpha|^2 dx$ , που αναγκάζει τα προφίλ της αγωγιμότητας να είναι  $H^1$ -συναρτήσεις, εμποδίζοντας τον εντοπισμό του *jump set*. Η εξομάλυνση των διεπιφανειών, όπως για παράδειγμα παρατηρείται στην τελευταία γραμμή (p) της Εικόνας 2.3, είναι ενδεικτική της αστοχίας της *Tikhonov* κανονικοποίησης, αφού οδηγεί τη σύγκλιση σε λάθος τοπικά ελάχιστα.

Συνεχίζουμε με την εφαρμογή του αλγορίθμου, θέτοντας  $\epsilon = 0.1$  και  $\kappa = 10$ . Ως αρχικό προφίλ για τη συνάρτηση της αγωγιμότητας επιλέγουμε τη σταθερή συνάρτηση  $\alpha^0 = 2.5$ . Συγκεκριμένα, στα προβλήματα του ομόκεντρου (Παράγραφος 2.6.1) και ήπια έκκεντρου εγκλεισμού (Παράγραφος 2.6.2.2) θέτουμε

$$\alpha^0 = \begin{cases} 1, & r_i > \rho_{D_1} + \frac{\ell}{2}, \\ 2.5, & \text{διαφορετικά,} \end{cases} \quad (155)$$

(βλ. δεύτερη στήλη των Εικόνων 2.3 και 2.5), ενώ στο πρόβλημα του ισχυρά έκκεντρου εγκλεισμού (Παράγραφος 2.6.2.1) θεωρούμε  $\alpha^0 = 2.5$  σε ολόκληρο το χωρίο  $\Omega_1 \setminus \Omega_{1\delta}$  (βλ. δεύτερη στήλη της Εικόνας 2.4). Η αντιστροφή επιχειρείται για τις τιμές  $\ell = \{0.2, 0.3, 0.4\}$  και την περίπτωση  $\omega^0 \equiv 1$  για  $n = 10$  επαναλήψεις (`max_iters`). Οι υπολογιστικές λύσεις  $\alpha^n$  απεικονίζονται για τη βέλτιστη - κάθε περίπτωσης - τιμή της παραμέτρου  $\mu$  από το διακριτό σύνολο τιμών  $\mu = \{0.1, 0.5, 1, 5\}$ . Διευκρινίζουμε εδώ πως η βέλτιστη επιλογή της  $BV$ -κανονικοποίησης συνίσταται σε εκείνη την τιμή  $\mu$  που οδηγεί στην καλύτερη διττή<sup>(iii)</sup> εκδοχή της λύσης  $\alpha^n$ .

Σε κάθε πρόβλημα απεικονίζουμε την υπολογιστική λύση  $(\alpha, \omega)$  στην τελευταία επανάληψη ( $n = 10$ ), ενώ επιλέγουμε μία μόνο τιμή  $\ell$  για να παρουσιάσουμε την ακολουθία  $(\alpha^n, \omega^n)$  των λύσεων στη νιοστή επανάληψη ( $n$ ) του αλγορίθμου (βλ. Εικόνα 2.6, Εικόνα 2.7, Εικόνα 2.8). Στην τελευταία αυτή απεικόνιση εκθέτουμε επιπλέον το διάγραμμα ισοϋψών καμπύλων της  $\alpha^n$  (μαύρες γραμμές), προκειμένου να αναδείξουμε την ομοιομορφία της φυσικής ανακατασκευής. Σε κάθε εικόνα, η χρωματική μπάρα αναφέρεται στο εύρος τιμών της αγωγιμότητας ( $\alpha \in [1, 2]$ ). Τέλος, επισημαίνουμε πως η *Tikhonov* κανονικοποίηση αντιστοιχεί στην περίπτωση  $\omega^0 \equiv 1$  (και κατ' επέκταση  $\omega \equiv 1$ ). Από τώρα και στο εξής, με  $\omega \equiv 1$  θα συμβολίζουμε το  $\omega^0$ -σταθερό προφίλ της *Tikhonov* ανακατασκευής.

<sup>(iii)</sup>φυσική και γεωμετρική



### 2.6.1 Ομόκεντρο πρόβλημα

Μελετάμε την πιλοτική περίπτωση, όπου ο εγκλεισμός  $D_1$  βρίσκεται στο κέντρο του δίσκου  $\Omega_1$ ,  $(x_{D_1}, y_{D_1}) = (0, 0)$ . Θεωρούμε τα αναλυτικά δεδομένα

$$\begin{aligned}\hat{f} &= 1 + \frac{11}{4} \cos(\varphi), & \varphi \in [0, 2\pi), \\ \hat{g} &= \frac{13}{8} \cos(\varphi), & \varphi \in [0, 2\pi),\end{aligned}\quad (156)$$

που παράγονται από την αναλυτική λύση

$$u(\rho, \varphi) = \begin{cases} 1 + \rho \cos(\varphi), & 0 \leq \rho \leq 1, \\ 1 + (\frac{3}{2}\rho - \frac{1}{2\rho}) \cos(\varphi), & 1 < \rho \leq 2. \end{cases}\quad (157)$$

Στην Εικόνα 2.3, από αριστερά προς τα δεξιά, απεικονίζονται το αρχικό ζεύγος  $(\omega^0, \alpha^0)$  και η αντίστοιχη βέλτιστη λύση  $(\omega, \alpha)$  για τα  $\omega^0$ - προφίλ:  $\ell = \{0.2, 0.3, 0.4\}$  και  $\omega \equiv 1$  (τελευταία γραμμή). Η αντιστροφή πραγματοποιείται για τις τιμές κανονικοποίησης  $\mu = \{1, 0.1, 0.1, 1\}$ , αντίστοιχα για κάθε  $\omega^0$ - προφίλ, και  $h = 0.270$ . Στην Εικόνα 2.6 παρουσιάζουμε την ακολουθία  $\alpha^n$  των λύσεων (1η γραμμή) και των αντίστοιχων  $\omega^n$ - προφίλ (2η γραμμή) για το επίπεδο διαμόρφωσης  $\ell = 0.2$ . Τα αριθμητικά αποτελέσματα για όλες τις επαναλήψεις συγκεντρώνονται στον Πίνακα 2.3.

Σε όλους τους πίνακες αποτελεσμάτων (βλ. Παράγραφο 2.6.7) αναγράφονται το  $\omega^0$ -επίπεδο αβεβαιότητας ( $\ell$ ) μαζί με τη βέλτιστη τιμή κανονικοποίησης ( $\mu$ ) και οι τιμές της αγωγιμότητας στον εγκλεισμό  $D_1$ ,  $(\alpha_{in})$ , και στο εξωτερικό χωρίο  $\Omega_1 \setminus D_1$ ,  $(\alpha_{out})$ , σε κάθε επανάληψη  $n$ . Οι μεταβλητές  $\alpha_{\{in, out\}}$  αναπαριστούν τις ομοιόμορφες τιμές της λύσης  $\alpha$ .

### 2.6.2 Έκκεντρο πρόβλημα

#### 2.6.2.1 Ισχυρά έκκεντρο πρόβλημα

Το κέντρο ενός ενδεικτικά ισχυρά έκκεντρου εγκλεισμού επιλέγεται να είναι  $(x_{D_1}, y_{D_1}) = (\frac{\sqrt{5}-\sqrt{17}}{2}, 0)$ . Θεωρούμε αναλυτικά δεδομένα στη μορφή

$$\begin{aligned}\hat{f} &= s_f(\alpha_2, \tau_1, \tau_2) \frac{\sin \varphi}{\sqrt{17} + 4 \cos \varphi}, & \varphi \in [0, 2\pi), \\ \hat{g} &= s_g(\alpha_2, \tau_1, \tau_2) \frac{1}{2} \frac{\sin \varphi}{(\sqrt{17} + 4 \cos \varphi)^2}, & \varphi \in [0, 2\pi),\end{aligned}\quad (158)$$

όπου

$$\begin{aligned}s_f(\alpha_2, \tau_1, \tau_2) &= \frac{1}{2}(1 + \alpha_2)e^{-\tau_1} + \frac{1}{2}(1 - \alpha_2)e^{-2\tau_2}e^{\tau_1}, \\ s_g(\alpha_2, \tau_1, \tau_2) &= \frac{1}{2}(1 + \alpha_2)e^{-\tau_1} - \frac{1}{2}(1 - \alpha_2)e^{-2\tau_2}e^{\tau_1},\end{aligned}\quad (159)$$

που αντιστοιχούν στη λύση (κατασκευασμένη αναλυτικά σε διπολικό σύστημα συντεταγμένων)

$$u_{\text{exact}} = \begin{cases} (\rho^4 + c_1(\varphi)\rho^3 + \rho^2 c_2(\varphi) + c_3(\varphi)\rho + 16)^{-\frac{1}{2}} e^{-\tau} \rho \sin \varphi & \text{αν } \tau > \tau_2, \\ (\rho^4 + c_1(\varphi)\rho^3 + c_2(\varphi)\rho^2 + c_3(\varphi)\rho + 16)^{-\frac{1}{2}} \tilde{c} \rho \sin \varphi & \text{αν } \tau_1 < \tau < \tau_2, \end{cases}\quad (160)$$

με

$$\begin{aligned}
a &= \frac{1}{2}, \quad \alpha_2 = 2, \quad \tau_1 = \ln[(\sqrt{17} + 1)\frac{1}{4}], \quad \tau_2 = \ln[(\sqrt{5} + 1)\frac{1}{2}], \\
c_1(\varphi) &= 2\sqrt{17} \cos \varphi, \quad c_2(\varphi) = 17 + 8 \cos(2\varphi), \quad c_3(\varphi) = 8\sqrt{17} \cos \varphi, \\
\tilde{c} &= \frac{1}{2}(1 + \alpha_2)e^{-\tau} + \frac{1}{2}(1 - \alpha_2)e^{-2\tau_2}e^{\tau}, \\
\tau &= \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{\rho^2 + \frac{4a^2}{(1-e^{-2\tau_1})^2} + \frac{4a\rho \cos \varphi}{1-e^{-2\tau_1}}}{\rho^2 + \frac{4a^2e^{-4\tau_1}}{(1-e^{-2\tau_1})^2} + \frac{4a\rho \cos \varphi e^{-2\tau_1}}{1-e^{-2\tau_1}}} \right].
\end{aligned} \tag{161}$$

Στις αριθμητικές δοκιμές διαπιστώθηκε πως οι τιμές  $\mu = \{0.1, 0.5, 0.5, 0.1\}$ , αντίστοιχα για κάθε  $\omega^0$ - προφίλ:  $\ell = \{0.2, 0.3, 0.4\}$ ,  $\omega \equiv 1$ , αναδεικνύουν βέλτιστα τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της λύσης. Παρουσιάζουμε τα αριθμητικά αποτελέσματα γι' αυτές τις τιμές κανονικοποίησης και  $h = 0.244$ .

Η Εικόνα 2.4, από αριστερά προς τα δεξιά, απεικονίζει το αρχικό προφίλ ( $\omega^0, \alpha^0$ ) μαζί με τη λύση ( $\omega, \alpha$ ) στην τελευταία επανάληψη. Κατόπιν, η Εικόνα 2.7 περιγράφει την ακολουθία ( $\alpha^n, \omega^n$ ) των λύσεων για το  $\omega^0$ - επίπεδο αβεβαιότητας  $\ell = 0.4$ . Οι παράμετροι της ανακατασκευής δίνονται στον Πίνακα 2.4.

### 2.6.2.2 Ήπια έκκεντρο πρόβλημα

Θέτουμε  $(x_{D_1}, y_{D_1}) = (-\frac{1}{3}, 0)$ . Θεωρούμε το ζεύγος αναλυτικών δεδομένων

$$\begin{aligned}
\hat{f} &= m_f(\alpha_2, \tau_1, \tau_2) \frac{\frac{8}{3}\sqrt{10} \sin \varphi}{\frac{28}{3} + 4 \cos \varphi}, \quad \varphi \in [0, 2\pi), \\
\hat{g} &= m_g(\alpha_2, \tau_1, \tau_2) \frac{320 \sin \varphi}{9 (\frac{28}{3} + 4 \cos \varphi)^2}, \quad \varphi \in [0, 2\pi),
\end{aligned} \tag{162}$$

όπου

$$\begin{aligned}
m_f(\alpha_2, \tau_1, \tau_2) &= \frac{1}{2}(1 + \alpha_2)e^{-\tau_1} + \frac{1}{2}(1 - \alpha_2)e^{-2\tau_2}e^{\tau_1}, \\
m_g(\alpha_2, \tau_1, \tau_2) &= \frac{1}{2}(1 + \alpha_2)e^{-\tau_1} - \frac{1}{2}(1 - \alpha_2)e^{-2\tau_2}e^{\tau_1},
\end{aligned} \tag{163}$$

που προκύπτει από τη λύση

$$u_{\text{exact}} = \begin{cases} e^{-\tau} \frac{\sin \varphi \sinh \tau}{\cosh \tau + \cos \varphi} & \text{αν } \tau > \tau_2, \\ \left[ \frac{1}{2}(1 + \alpha_2)e^{-\tau} + \frac{1}{2}(1 - \alpha_2)e^{-2\tau_2}e^{\tau} \right] \frac{\sin \varphi \sinh \tau}{\cosh \tau + \cos \varphi} & \text{αν } \tau_1 < \tau < \tau_2, \end{cases} \tag{164}$$

με

$$\begin{aligned}
a &= \frac{4}{3}\sqrt{10}, \quad \alpha_2 = 2, \quad \tau_1 = \ln\left[\frac{(2\sqrt{10} + 7)}{3}\right], \quad \tau_2 = \ln\left[\frac{(4\sqrt{10} + 13)}{3}\right], \\
\tau &= \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{\rho^2 + \frac{4a^2}{(1-e^{-2\tau_1})^2} + \frac{4a\rho \cos \varphi}{1-e^{-2\tau_1}}}{\rho^2 + \frac{4a^2e^{-4\tau_1}}{(1-e^{-2\tau_1})^2} + \frac{4a\rho \cos \varphi e^{-2\tau_1}}{1-e^{-2\tau_1}}} \right].
\end{aligned} \tag{165}$$

Στην Εικόνα 2.5, από αριστερά προς τα δεξιά, παρουσιάζουμε το αρχικό ζεύγος ( $\omega^0, \alpha^0$ ) και τη λύση ( $\omega, \alpha$ ) στην 10η επανάληψη για τα  $\omega^0$ - προφίλ:  $\ell = \{0.2, 0.3, 0.4\}$ ,  $\omega \equiv 1$  και τις βέλτιστες τιμές κανονικοποίησης - όπως παρατηρήθηκε στους υπολογισμούς -  $\mu = \{0.1, 1, 0.1, 0.1\}$  αντίστοιχα, ως προς  $h = 0.260$ . Η Εικόνα 2.8 περιγράφει την ακολουθία ( $\alpha^n, \omega^n$ ) των ανακατασκευών για το ενδιάμεσο επίπεδο αβεβαιότητας  $\ell = 0.3$  και το πυκνότερο πλάτος  $h = 0.151$ . Συνοψίζουμε τα αριθμητικά αποτελέσματα στον Πίνακα 2.5.

### 2.6.3 $BV$ Φυσική ανακατασκευή

Στην παρούσα παράγραφο ερευνούμε την περίπτωση όπου γνωρίζουμε εκ των προτέρων τη σωστή γεωμετρία και στόχο της ανακατασκευής αποτελεί μόνο η φυσική, δηλαδή οι τιμές της συνάρτησης της αγωγιμότητας στα διάφορα στοιχεία της δομής  $\Omega$ . Οι λόγοι παρουσίας αυτής της μελέτης είναι δύο: Γενικά, μια τέτοια προσέγγιση συνιστά το πρώτο στάδιο αξιολόγησης μιας μεθόδου για την επίλυση του αντίστροφου προβλήματος, δηλαδή την εκτίμηση των καταναμημένων παραμέτρων σε εντοπισμένα ανομοιογενή προφίλ. Δεύτερον, είναι αξιοσημείωτο ότι η σύγκλιση του αριθμητικού σχήματος επιτυγχάνεται με μεγάλη ακρίβεια μετά από μία μόνο κλήση του αλγορίθμου. Η *a priori* πληροφορία της σωστής γεωμετρίας του εγκλεισμού εισάγεται στην τεχνική ανακατασκευής μέσω της ειδικής μορφής του πεδίου  $\omega$  και αυτή η εμπλοκή αλληλεπιδρά σημαντικά με την αποδοτικότητα της προτεινόμενης μεθόδου, βάσει της κρυμμένης  $BV$ - δομής που φέρει η δυϊκή μεταβλητή.

Στα ακόλουθα, υποθέτουμε ότι το  $\omega$  έχει την προσδοκώμενη συμπεριφορά στη γειτονιά του  $\partial D_1$ , όπως απεικονίζεται στη δεύτερη στήλη της Εικόνας 2.9. Ειδικά, η θέση και το μέγεθος του εγκλεισμού ταυτοποιούνται για την επιλογή  $\ell = 0.02$  στη φόρμουλα (154). Θέτουμε  $\epsilon = 0.1$ ,  $\kappa = 10$  και  $\mu = 1$ , ενώ ως αρχική προσέγγιση για την αγωγιμότητα θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\alpha^0 = \begin{cases} 5, & (x, y) \in D_1, \\ 0.5, & (x, y) \in \Omega_1 \setminus (\Omega_{1\delta} \cup D_1), \\ 1, & (x, y) \in \Omega_{1\delta}, \end{cases} \quad (166)$$

(βλ. Εικόνα 2.9, 1η στήλη). Εδώ, επιλέγουμε μια πολύ μικρή,  $b = 0.5$ , και μια πολύ μεγάλη,  $c = 5$ , τιμή κατωφλίου, προκειμένου να αναδείξουμε την επιτυχία της ανακατασκευής ακόμα και με ένα τέτοιο εύρος αρχικών τιμών.

Υλοποιούμε μία επανάληψη ( $n = 1$ ) του αλγορίθμου για τα χαρακτηριστικά πλάτη ( $h$ ) του Πίνακα 2.2. Ομοίως με τα προηγούμενα πειράματα, μελετάμε και την περίπτωση της *Tikhonov* ανακατασκευής ( $\omega \equiv 1$ ).

Η Εικόνα 2.9, από αριστερά προς τα δεξιά, περιγράφει το αρχικό προφίλ της αγωγιμότητας ( $\alpha^0$ ), το «σωστό»  $\omega$  και τη βέλτιστη λύση ( $\alpha$ ) για κάθε γεωμετρία. Δίπλα ακριβώς (διακεκομμένη γραμμή), απεικονίζεται η αντίστοιχη λύση ( $\alpha$ ) της *Tikhonov* ανακατασκευής. Παραθέτουμε τα αριθμητικά αποτελέσματα στον Πίνακα 2.6.

Πίνακας 2.2: Delaunay Triangulations.

Mesh case	$h$	Elements	Nodes
<i>concentric</i>	0.215	2698	1450
<i>strong eccentric</i>	0.216	2738	1470
<i>mild eccentric</i>	0.206	2746	1474

### 2.6.4 Ομόκεντρο πρόβλημα: Ανακατασκευή με $N$ - ζεύγη δεδομένων

#### 2.6.4.1 Αναλυτικά δεδομένα

Σε αυτήν την παράγραφο μελετάμε την πιλοτική περίπτωση ανακατασκευής 2.6.1 με  $N \geq 1$  επιφανειακές μετρήσεις. Αναλυτικότερα, θεωρούμε έναν επαρκή αριθμό  $m$  ( $m \in \mathbb{N}$ ) από

ζεύγη δεδομένων της μορφής

$$(\hat{f}_m, \hat{g}_m) = \left(1 + \frac{13}{8} \frac{(3 \cdot 2^{2m+1} - 2)}{m(3 \cdot 2^{2m} + 1)} \cos(m\varphi), \frac{13}{8} \cos(m\varphi)\right), \quad \varphi \in [0, 2\pi), \quad m = 1, 2, \dots, N, \quad (167)$$

κάθε ένα από τα οποία επαληθεύει την αναλυτική λύση

$$u^{(m)}(\rho, \varphi) = 1 + \frac{13}{8} \begin{cases} \frac{2^{m+2}}{m(3 \cdot 2^{2m} + 1)} \rho^m \cos(m\varphi), & 0 \leq \rho \leq 1, \\ \frac{2^{m+1}}{m(3 \cdot 2^{2m} + 1)} (3\rho^m - \rho^{-m}) \cos(m\varphi), & 1 < \rho \leq 2. \end{cases} \quad (168)$$

Εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο της Ενότητας 2.5 (θέτοντας  $\lambda = 0$ ) για το πρόβλημα (149), όπου τώρα το συναρτησιακό (150) επαναδιατυπώνεται στη μορφή

$$J_\epsilon(u, v, \alpha, \omega, N) = \sum_{m=1}^N |\tilde{E}_m(u, v, \alpha)| + \frac{\lambda}{2} \|R\alpha - \alpha_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \mu \int_{\Omega} (\omega |\nabla \alpha|^2 + \psi_\epsilon(\omega)) dx, \quad (169)$$

με

$$\begin{aligned} \tilde{E}_m(u, v, \alpha) = & \frac{\kappa + 1}{2} \int_{\Omega} \alpha |\nabla(u + \eta \hat{f}_m)|^2 dx + (1 - \kappa) \left[ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \alpha |\nabla v|^2 dx - \langle \hat{g}_m, \gamma v \rangle_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}} \right] \\ & - \kappa \langle \hat{g}_m, \hat{f}_m \rangle_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}}. \end{aligned} \quad (170)$$

Οι παράμετροι  $\epsilon$ ,  $\kappa$  και το χαρακτηριστικό βήμα  $h$  επιλέγονται όπως στο Πρόβλημα 2.6.1, ενώ θέτουμε  $\alpha^0 = 2.5$  κατά μήκος ολόκληρου του χωρίου  $\Omega_1 \setminus \Omega_{1\delta}$ . Επαναλαμβάνουμε την αντιστροφή με  $N = \{2, 5\}$  ζεύγη δεδομένων της μορφής (167) για τα  $\omega^0$ -προφίλ:  $\ell = \{0.2, 0.4, 0.6\}$ ,  $\omega \equiv 1$  και τις τιμές κανονικοποίησης  $\mu = \{1, 0.1, 1, 1\}$  αντίστοιχα. Συγκρίνουμε τα αποτελέσματα με την περίπτωση της ( $N = 1$ )-ανακατασκευής. Σημειώτεον ότι για  $N = 1$  τα επιφανειακά δεδομένα στην (167) ταυτίζονται με αυτά στην (156).

Οι Εικόνες 2.10a-2.10b, από αριστερά προς τα δεξιά, απεικονίζουν το αρχικό ζεύγος ( $\alpha^0, \omega^0$ ) και την τελική ανακατασκευή ( $\alpha, \omega$ ) με  $N = \{1, 2, 5\}$  ζεύγη δεδομένων, για κάθε μία από τις προαναφερθείσες τιμές  $\ell$ . Τα αριθμητικά αποτελέσματα παρουσιάζονται στον Πίνακα 2.7.

Από τα τρέχοντα πειράματα συμπεραίνουμε ότι η χρήση  $N > 1$  επιφανειακών δεδομένων επιταχύνει την υπολογιστική διαδικασία ώστε να συγκλίνει σε μια ικανοποιητική, φυσική και γεωμετρική, λύση. Επιπλέον, έχει ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ότι για τη συγκεκριμένη γεωμετρία, η ανακατασκευή με μόλις  $N = 2$  ζεύγη δεδομένων είναι ακριβής και ισοδυναμεί με αυτή των  $N > 2$  δεδομένων.

#### 2.6.4.2 Ενθόρυβα δεδομένα

Σε αυτό το παράδειγμα επιχειρούμε την ανακατασκευή του ομόκεντρου προβλήματος 2.6.1 με  $N$ -ζεύγη ενθόρυβων δεδομένων. Ειδικότερα, θεωρούμε πως ο τελεστής  $\Lambda_{\mathcal{N}.t.D}$  υπόκειται σε προσθήκες θορύβου της ακόλουθης μορφής

$$(\tilde{f}_m, \tilde{g}_m) = (\hat{f}_m + |\hat{f}_m| \cdot \mathcal{R}_{\hat{f}_m} \cdot \theta, \hat{g}_m), \quad (171)$$

όπου  $(\hat{f}_m, \hat{g}_m)$  όπως στην (167),  $\mathcal{R}_{\hat{f}_m}$  είναι  $\partial\Omega^h \times 1$ -πίνακες τυχαίων αριθμών στο διάστημα  $(-1, 1)$  που παράγονται από την MATLAB συνάρτηση “rand” με  $\partial\Omega^h$  τον αριθμό των συνοριακών κόμβων της *Delaunay* τριγωνοποίησης, και  $\theta$  το ποσοστό θορύβου.

Η ελαχιστοποίηση του (169) ξεκινά θέτοντας  $\lambda = 0$ ,  $\epsilon = 0.1$ ,  $\kappa = 10$  και  $\alpha^0 = 2.5$  (στο  $\Omega_1 \setminus \Omega_{1\delta}$ ). Υλοποιούμε  $n = 10$  επαναλήψεις του αλγορίθμου για τα  $\omega^0$ -προφίλ:

$\ell = \{0.2, 0.4, 0.6\}$  ως προς  $h = 0.270$ . Σε κάθε  $\omega^0$ - επίπεδο αβεβαιότητας ( $\ell$ ) επαναλαμβάνουμε την αντιστροφή για κάθε ποσοστό θορύβου  $\theta = \{0.5\%, 1\%, 5\%\}$  και κάθε επιλογή του αριθμού των επιφανειακών δεδομένων  $N = \{1, 2, 5\}$ .

Οι Εικόνες 2.11a-2.11c, από αριστερά προς τα δεξιά, απεικονίζουν την υπολογιστική λύση  $(\alpha, \omega)$  στην τελική επανάληψη για κάθε αριθμό επιφανειακών δεδομένων ( $N$ ), καθώς το ποσοστό θορύβου  $\theta$  αυξάνεται. Σε κάθε  $\ell$ - περίπτωση, η αρχική προσέγγιση  $(\alpha^0, \omega^0)$  απεικονίζεται δεξιά της χρωματικής μπάρας. Ξεκινάμε από το λιγότερα διαταραγμένο  $\omega^0$ - επίπεδο αβεβαιότητας  $\ell = 0.2$ . Τα αριθμητικά αποτελέσματα συγκεντρώνονται στους Πίνακες 2.8a -2.8c.

Στο πλαίσιο των ενθόρυβων δεδομένων, η προσέγγιση *Tikhonov* αποτυγχάνει πλήρως και κατά συνέπεια παραλείπεται.

Τέλος, γίνεται αδιαμφισβήτητα φανερό το μέγεθος της συμβολής των  $N > 1$  δεδομένων στη γεωμετρική και φυσική απόδοση της ανακατασκευής, ακόμα και υπό την παρουσία σχετικά υψηλών επιπέδων θορύβου και παράλληλα μεγαλύτερης αβεβαιότητας ως προς την πιθανή θέση της διεπιφάνειας.

## 2.6.5 Το πρόβλημα του διπλού εγκλεισμού: Ανακατασκευή με $N$ -ζεύγη δεδομένων

Ακολουθώντας την υπολογιστική διαδικασία της Ενότητας 2.5, επιχειρούμε την αντιστροφή στην απαιτητικότερη περίπτωση των δύο μη συνεκτικών εγκλεισμών. Αναλυτικότερα, θεωρούμε την αγωγήμη ορθογώνια περιοχή  $\Omega_2 := [-3, 3]^2$  (μήκος πλευράς  $L = 6$ ) και δύο διαφορετικούς ομοαξονικούς εγκλεισμούς, που αναπαρίστανται από τους δίσκους

$$D_2 := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - x_{D_2})^2 + (y - y_{D_2})^2} < \rho_{D_2} \right\} \quad (172)$$

με συντεταγμένες κέντρου  $(x_{D_2}, y_{D_2}) = (-1.34, 0)$  και ακτίνα  $\rho_{D_2} = 0.9$ ,

$$D_3 := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - x_{D_3})^2 + (y - y_{D_3})^2} < \rho_{D_3} \right\} \quad (173)$$

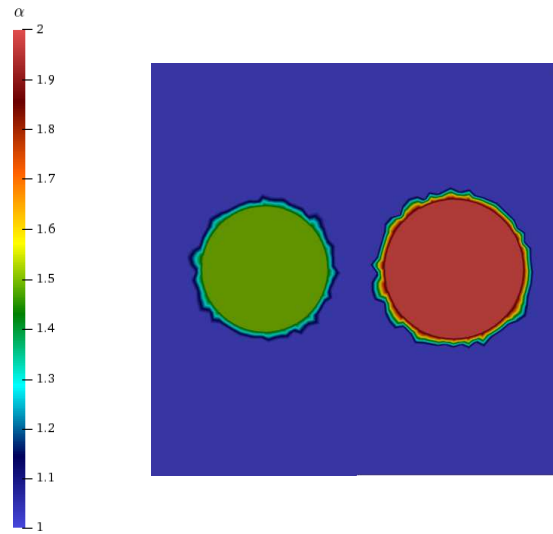
με  $(x_{D_3}, y_{D_3}) = (1.41, 0)$  και  $\rho_{D_3} = 1$ .

Η γεωμετρία των εγκλεισμών  $D_{\{2,3\}}$  επιλέγεται σύμφωνα με τις επιφανειακές συντεταγμένες ενός ειδικού δισφαιρικού συστήματος συντεταγμένων [64, 65]. Υποθέτουμε ότι το αναζητούμενο προφίλ αγωγιμότητας είναι της μορφής (βλ. Εικόνα 2.2)

$$\hat{\alpha} := \alpha(x, y) = \begin{cases} 1.5, & (x, y) \in D_2, \\ 2, & (x, y) \in D_3, \\ 1, & (x, y) \in \Omega_2 \setminus (D_2 \cup D_3). \end{cases} \quad (174)$$

Το υπολογιστικό πλέγμα, που ορίζεται από το εξωτερικό ορθογώνιο με συντεταγμένες κορυφών  $\{(-3, 3), (3, 3), (3, -3), (-3, -3)\}$ , διακριτοποιείται μέσω του *Triangle* [62, 63] και αποτελείται από 3266 στοιχεία και 1694 κόμβους ως προς το χαρακτηριστικό βήμα  $h = 0.280$ . Για τη διακριτοποίηση των τελεστών (169) χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των  $\mathcal{P}_1$  πεπερασμένων στοιχείων για  $N = \{1, 2\}$  ζεύγη δεδομένων. Τα συγκεκριμένα ζεύγη έχουν διττή προέλευση. Τα προαναφερθέντα αναλυτικά εργαλεία [64, 65] σε συνδυασμό με τις τεχνικές των πεπερασμένων στοιχείων (FEM) παράγουν ένα μείγμα δεδομένων με διαφορετικά χαρακτηριστικά. Κατασκευάζουμε αναλυτικά, αλλά και συνθετικά δεδομένα σε ένα πυκνότερο πλέγμα χρησιμοποιώντας  $\mathcal{P}_1$  διακριτοποίηση. Τα αναλυτικά δεδομένα αποτελούν άπειρες σειρές ιδιοσυναρτήσεων εκφρασμένων σε δισφαιρικές συντεταγμένες, που εγγενώς συνοδεύονται από σφάλματα αποκοπής τα οποία είναι συγκρίσιμα με εκείνα που απορρέουν από την εναλλακτική κατασκευή των δεδομένων μέσω των FEM τεχνικών. Η

παρουσίαση των αναλυτικών τύπων, που περιγράφουν τη λύση σε κλειστή μορφή, καθώς και η επαγόμενη ανάλυση σύγκλισης και σφάλματος είναι αρκετά εκτενείς και χάριν συντομίας παραλείπονται.



Εικόνα 2.2: Στόχος ανακατασκευής  $\hat{\alpha}$ .

Θέτουμε  $\lambda = 0$ ,  $\epsilon = 0.1$ ,  $\kappa = 0.5$  και  $\alpha^0 = 2.5$  κατά μήκος ολόκληρου του χωρίου  $\Omega_2 \setminus \Omega_{2\delta}$ . Επιπλέον, επεκτείνουμε την  $\Omega_{2\delta}$  ζώνη ελαφρώς προς το κέντρο κατά  $\delta = 0.5$  και  $\delta = 1$ , αντίστοιχα κατά μήκος των κάθετων και οριζόντιων πλευρών του πλέγματος. Εξετάζουμε την ανακατασκευή για τα  $\omega^0$ - προφίλ:  $\ell = \{0.3, 0.4, 0.5\}$ .

Η επιπλέον πολυπλοκότητα της δισφαιρικής γεωμετρίας εξυπηρετεί την ανάδειξη του ρόλου της παραμέτρου  $\kappa$  στη διαδικασία ελαχιστοποίησης. Πράγματι, αποδεικνύεται ότι το πρόβλημα του μη συνεκτικού εγκλεισμού είναι πιο «ευαίσθητο» στις μεταβολές της  $\kappa$  απ' ό,τι οι συνεκτικές περιπτώσεις που παρουσιάστηκαν ως τώρα. Γι' αυτό το σκοπό, παραθέτουμε μια λεπτομερή μελέτη της ευαισθησίας της ανακατασκευής ως προς τις τιμές της παραμέτρου  $\kappa = \{0.5, 2, 5, 11\}$ .

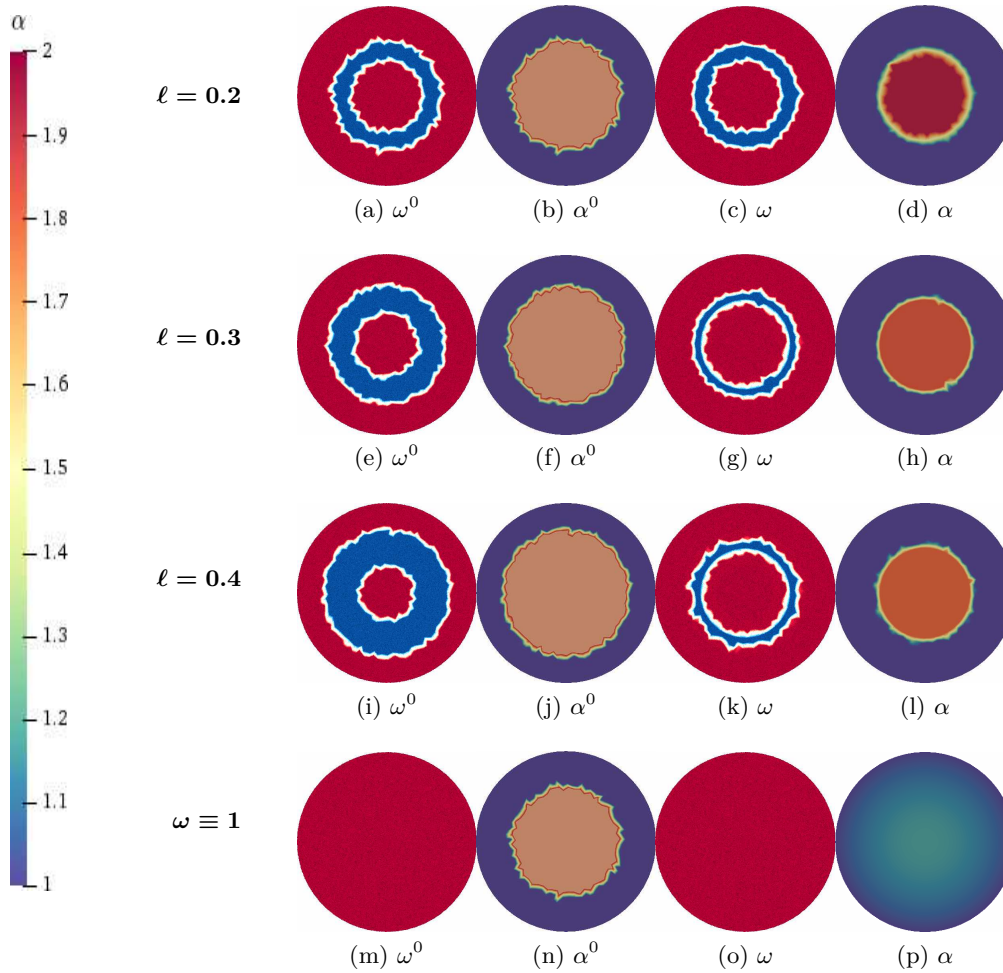
Αναλυτικότερα, επιλέγουμε τις ακραίες τιμές της μεταβλητής  $\ell$  για να περιγράψουμε την ακολουθία  $(\alpha^n, \omega^n)$  των ανακατασκευών με  $N = \{1, 2\}$  ζεύγη δεδομένων, ενώ στο ενδιάμεσο  $\omega^0$ - επίπεδο αβεβαιότητας  $\ell = 0.4$  επιχειρούμε την  $\kappa$ - σύγκριση των μεθόδων (απλή και τριπλή ελαχιστοποίηση) με ένα ζεύγος δεδομένων.

Στις Εικόνες 2.12 και 2.13, από αριστερά προς τα δεξιά, απεικονίζονται, για  $\ell = 0.3$  και  $\ell = 0.5$  αντίστοιχα, τα αρχικά προφίλ  $(\alpha^0, \omega^0)$  (δεξιά της χρωματικής μπάρας) μαζί με τις λύσεις  $(\alpha^n, \omega^n)$  στην πρώτη και τελευταία επανάληψη. Συγκεντρώνουμε τα αριθμητικά αποτελέσματα στον Πίνακα 2.9a.

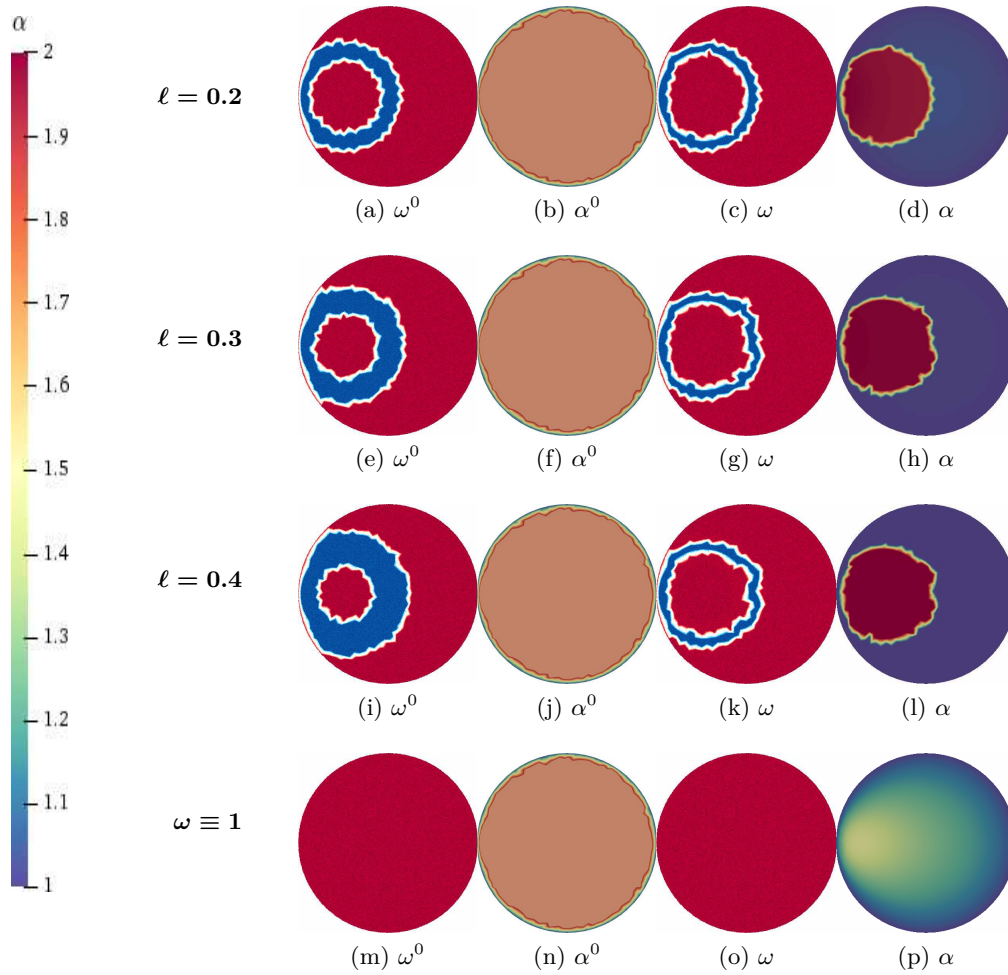
Οι Εικόνες 2.14a-2.14b περιγράφουν την  $\kappa$ - σύγκριση των μεθόδων ανακατασκευής για  $\ell = 0.4$  και  $N = 1$ . Από αριστερά προς τα δεξιά, παρουσιάζουμε το αρχικό προφίλ  $(\alpha^0, \omega^0)$  και τη βέλτιστη λύση  $(\alpha^n, \omega^n)$  στην πρώτη και τελευταία επανάληψη, καθώς η τιμή της παραμέτρου  $\kappa$  αυξάνεται. Τα αριθμητικά αποτελέσματα συνοψίζονται στον Πίνακα 2.9b.

Βάσει της  $\kappa$ - ανάλυσης του σχήματος ελαχιστοποίησης, συμπεραίνουμε πως στην περίπτωση της τριπλής ελαχιστοποίησης,  $\kappa \in (-1, 1)$ , οι τιμές των συντελεστών της αγωγιμότητας ανακατασκευάζονται - σχεδόν όμοια με τις πραγματικές τιμές - σε δύο μόλις υπολογιστικά βήματα, ενώ η γεωμετρική ανακατασκευή είναι ακριβής παρά τη συνεκτική  $\omega^0$ - δομή. Αντίθετα, η επιλογή  $\kappa = 11$ , που προσομοιώνει όπως περιγράφεται στην Ενότητα 2.4 το κλασικό συναρτησιακό ελαχιστοποίησης των εφαρμογών, απαιτεί περισσότερες επαναλήψεις για να συγκλίνει σε ικανοποιητικές, αλλά όχι τόσο ακριβείς, φυσικές τιμές.

### 2.6.6 Εικόνες

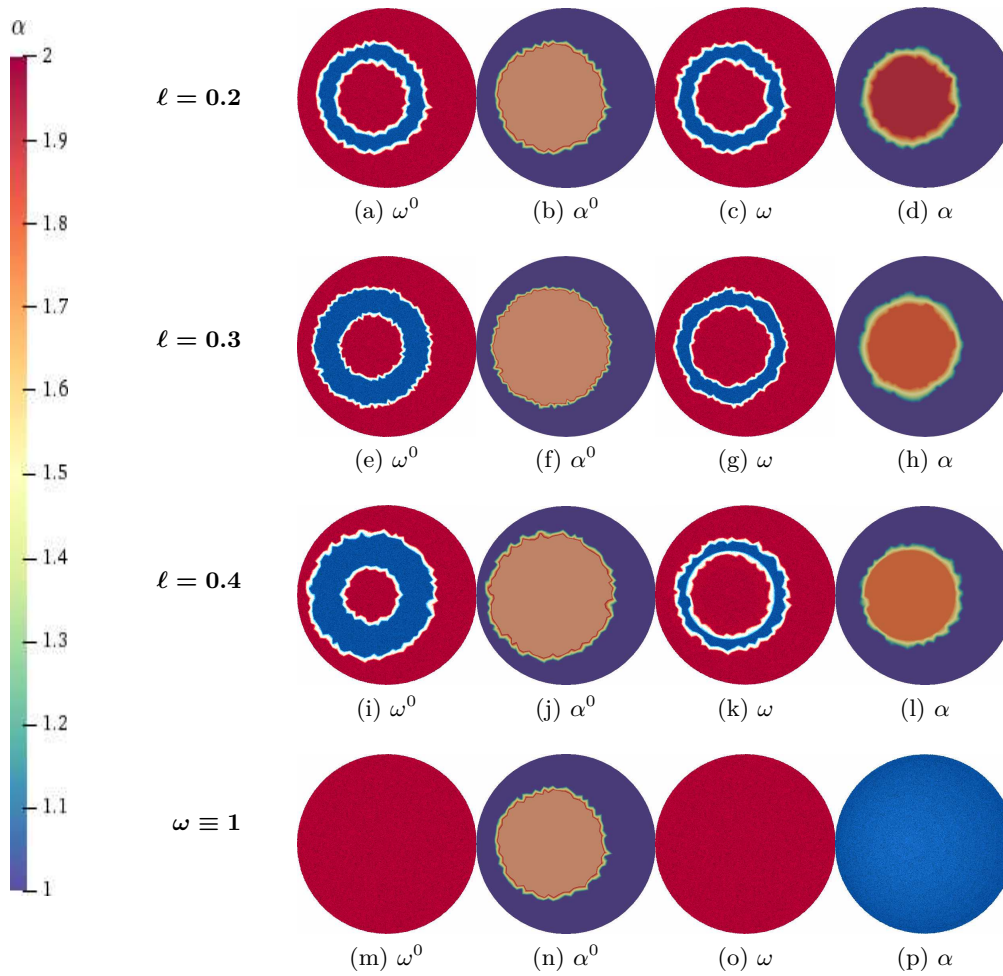


Εικόνα 2.3:  $BV$  Regularized Inversion ( $\omega, \alpha$ )— λύση στην τελική επανάληψη για τα  $\omega^0$ -προφίλ:  $\ell = \{0.2, 0.3, 0.4\}$ ,  $\omega \equiv 1$  του ομόκεντρου προβλήματος και  $\mu = \{1, 0.1, 0.1, 1\}$  αντίστοιχα.

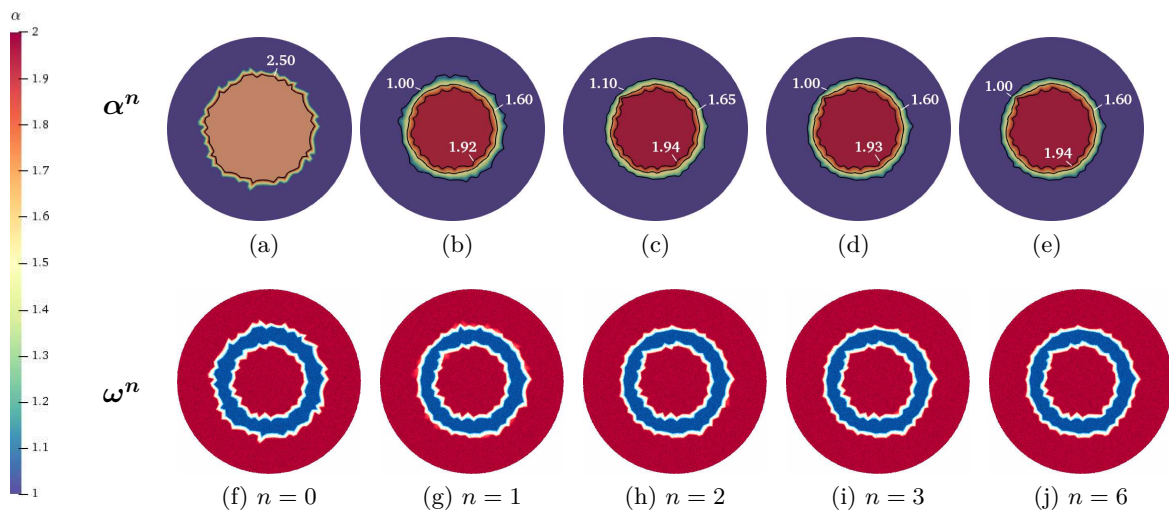


Εικόνα 2.4: *BV Regularized Inversion* ( $\omega, \alpha$ )– λύση στην τελική επανάληψη για τα  $\omega^0$ – προφίλ:  $l = \{0.2, 0.3, 0.4\}$ ,  $\omega \equiv 1$  του ισχυρά έκκεντρου προβλήματος και  $\mu = \{0.1, 0.5, 0.5, 0.1\}$  αντίστοιχα.

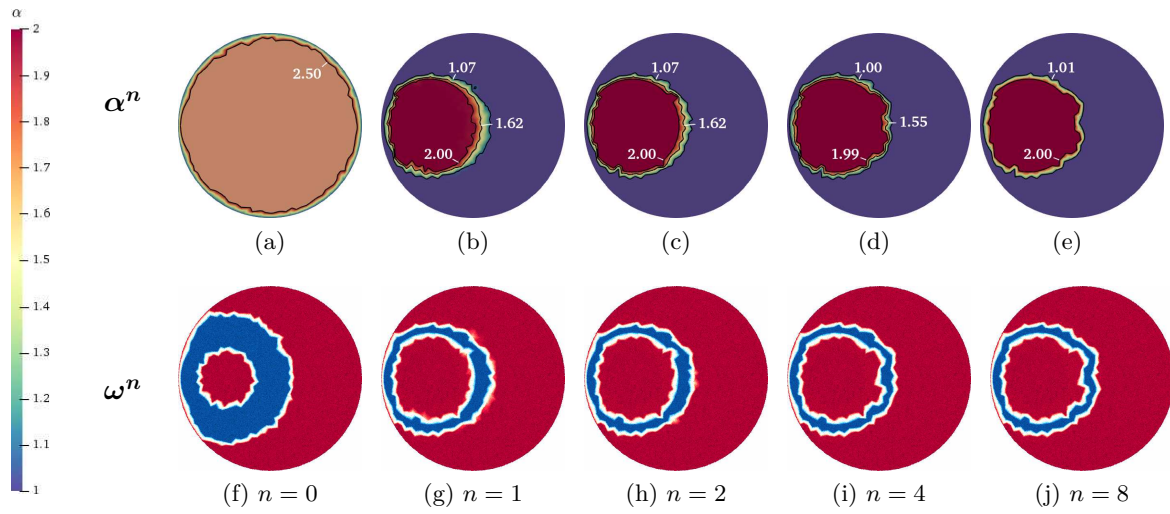




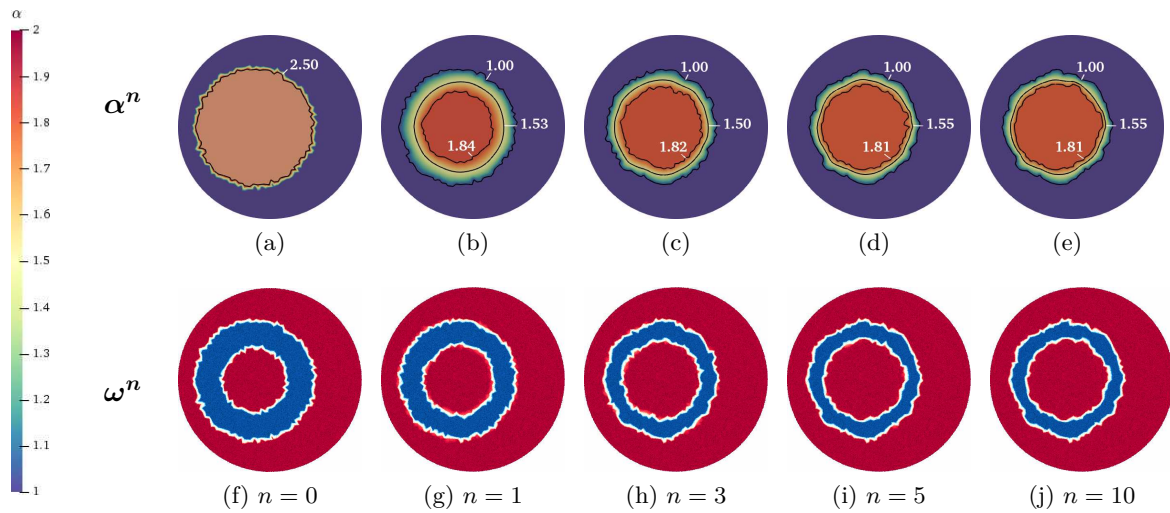
Εικόνα 2.5:  $BV$  Regularized Inversion  $(\omega, \alpha)$ - λύση στην τελική επανάληψη για τα  $\omega^0$ - προφίλ:  $\ell = \{0.2, 0.3, 0.4\}$ ,  $\omega \equiv 1$  του ήπια έκκεντρου προβλήματος και  $\mu = \{0.1, 1, 0.1, 0.1\}$  αντίστοιχα.



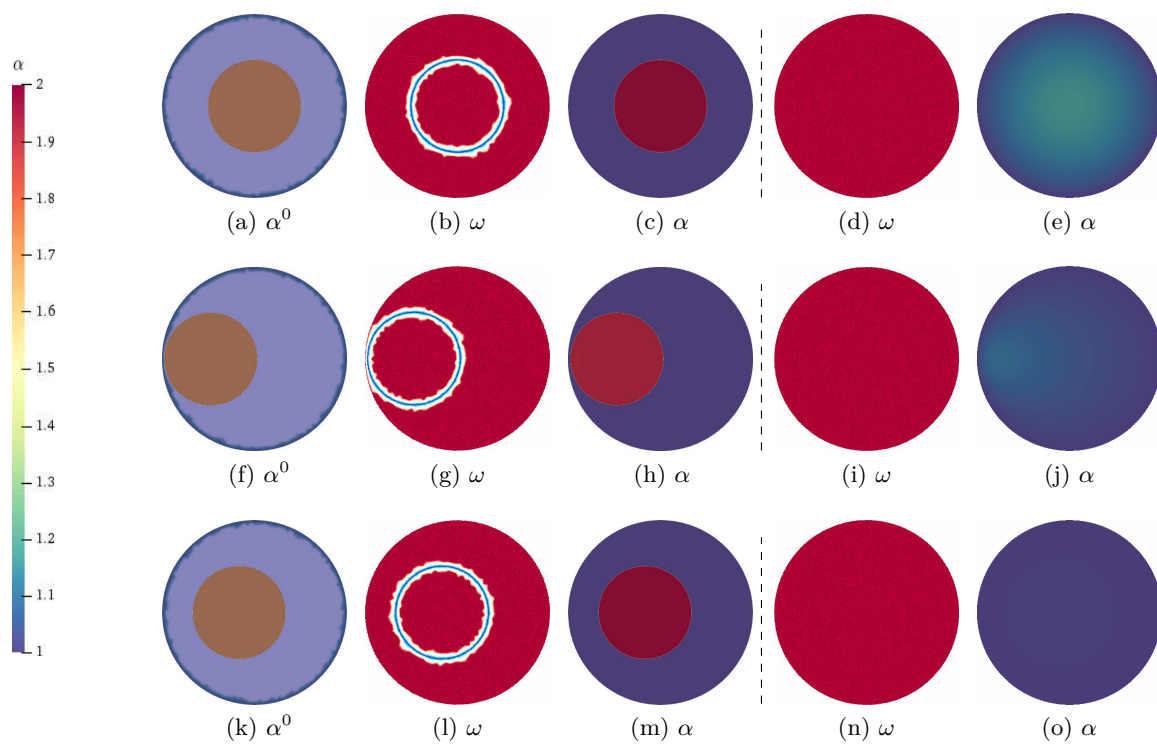
Εικόνα 2.6:  $BV$  Regularized Inversion  $\alpha^n$ - λύσεις και  $\omega^n$ - προφίλ για την τιμή  $\ell = 0.2$  του ομόκεντρου προβλήματος.



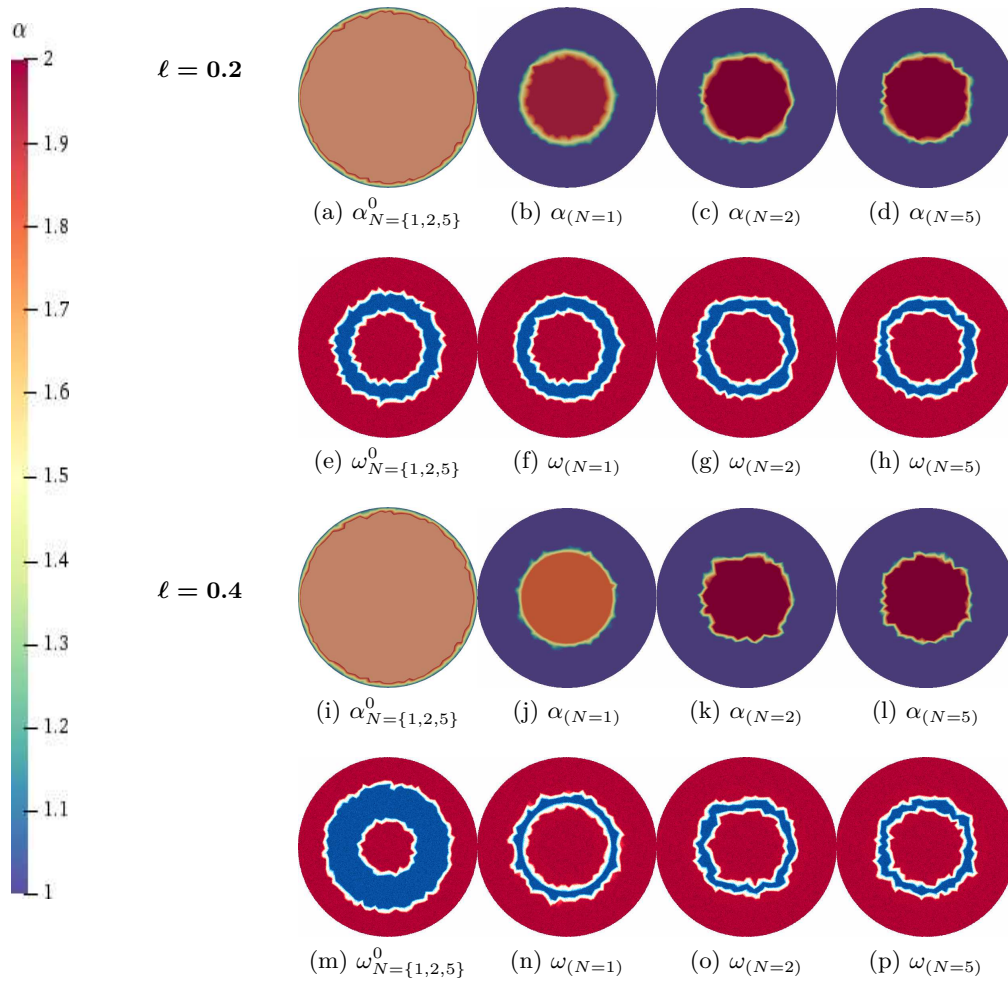
Εικόνα 2.7: *BV Regularized Inversion*  $\alpha^n$ - λύσεις και  $\omega^n$ - προφίλ για την τιμή  $\ell = 0.4$  του ισχυρά έκκεντρου προβλήματος.



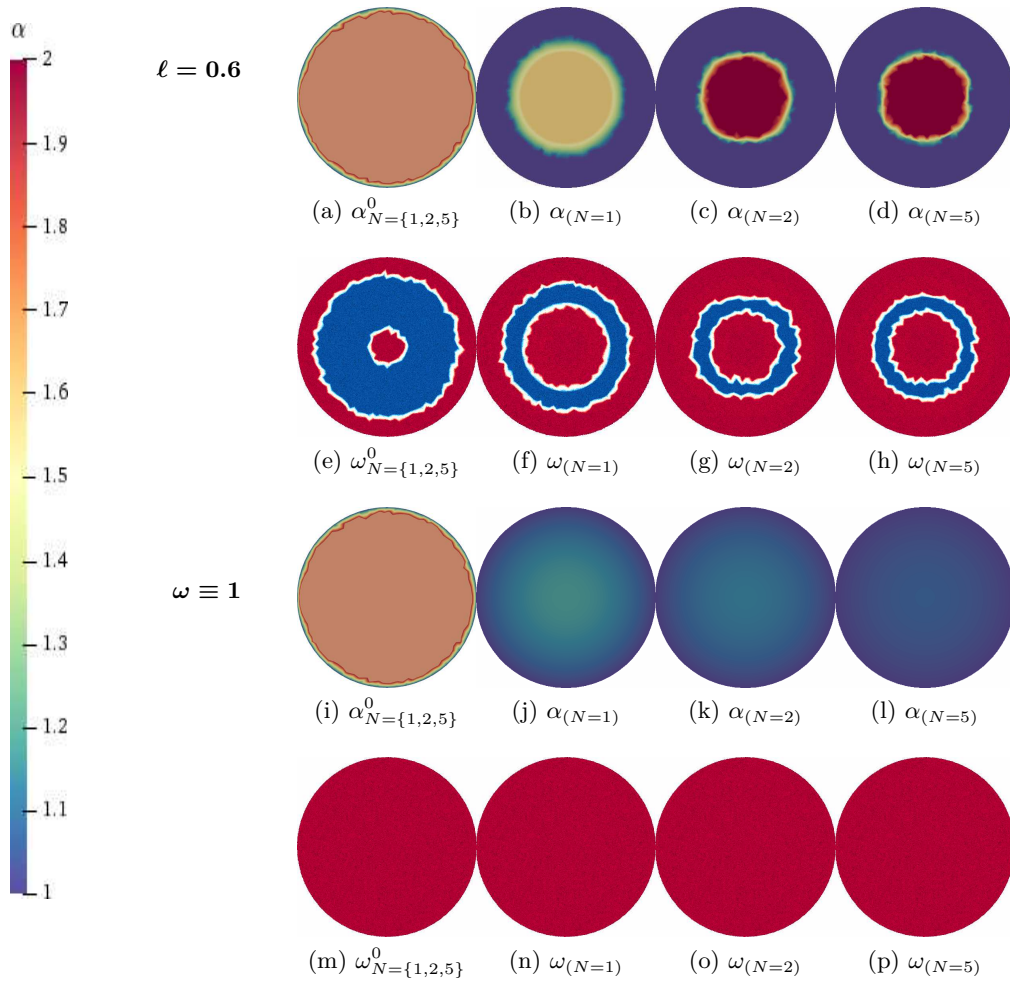
Εικόνα 2.8: *BV Regularized Inversion*  $\alpha^n$ - λύσεις και  $\omega^n$ - προφίλ για την τιμή  $\ell = 0.3$  του ήπια έκκεντρου προβλήματος.



Εικόνα 2.9:  $BV$  Regularized Inversion  $\alpha$ - λύση για τα  $\omega^0$ - προφίλ:  $\ell = 0.02$ ,  $\omega \equiv 1$  κάθε προβλήματος και  $\mu = 1$ .

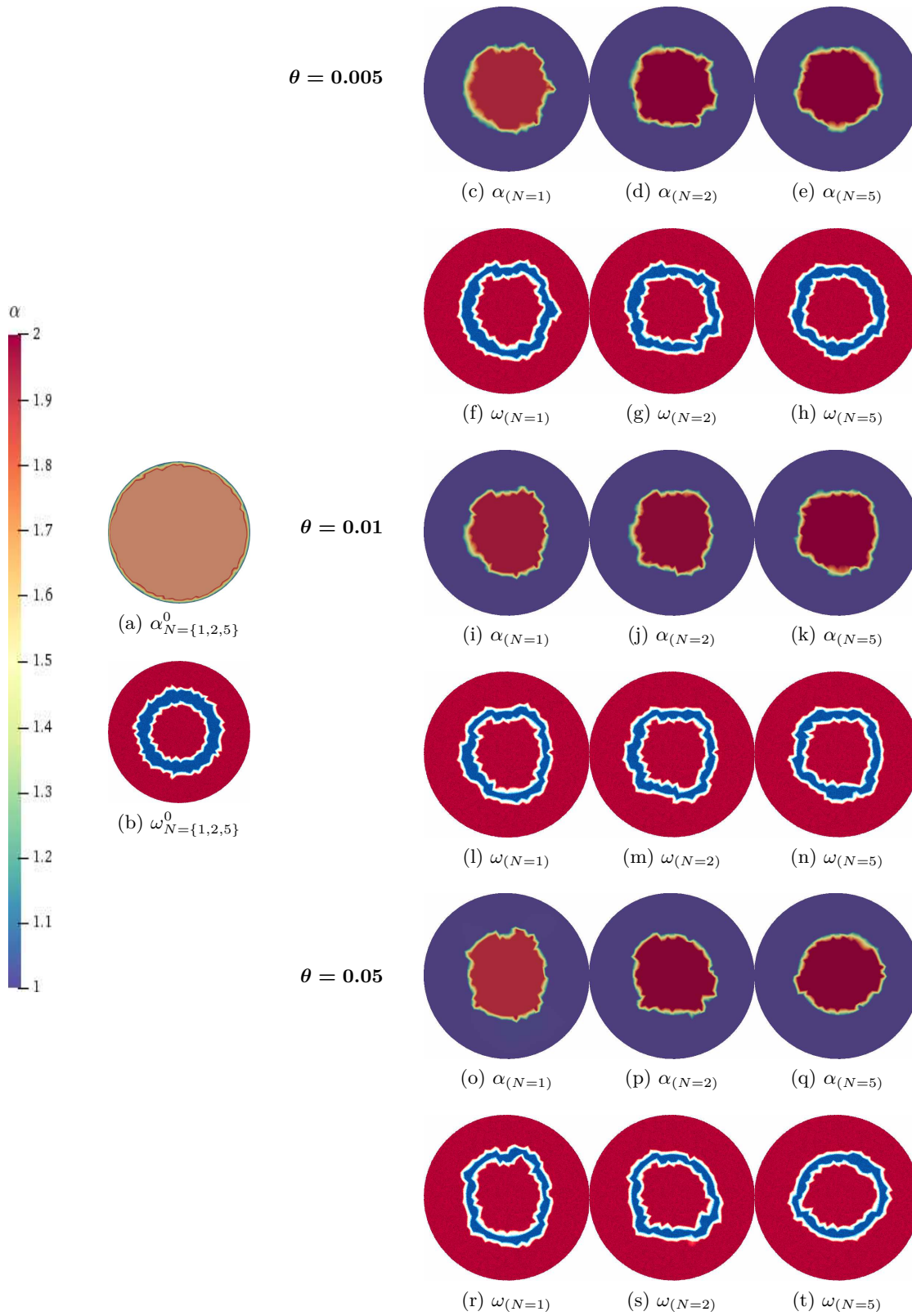


Εικόνα 2.10a : *BV Regularized Inversion*  $(\alpha, \omega)_N$ - λύσεις στην τελική επανάληψη για τις τιμές  $\ell = \{0.2, 0.4\}$  του ομόκεντρου προβλήματος και  $\mu = \{1, 0.1\}$  αντίστοιχα.

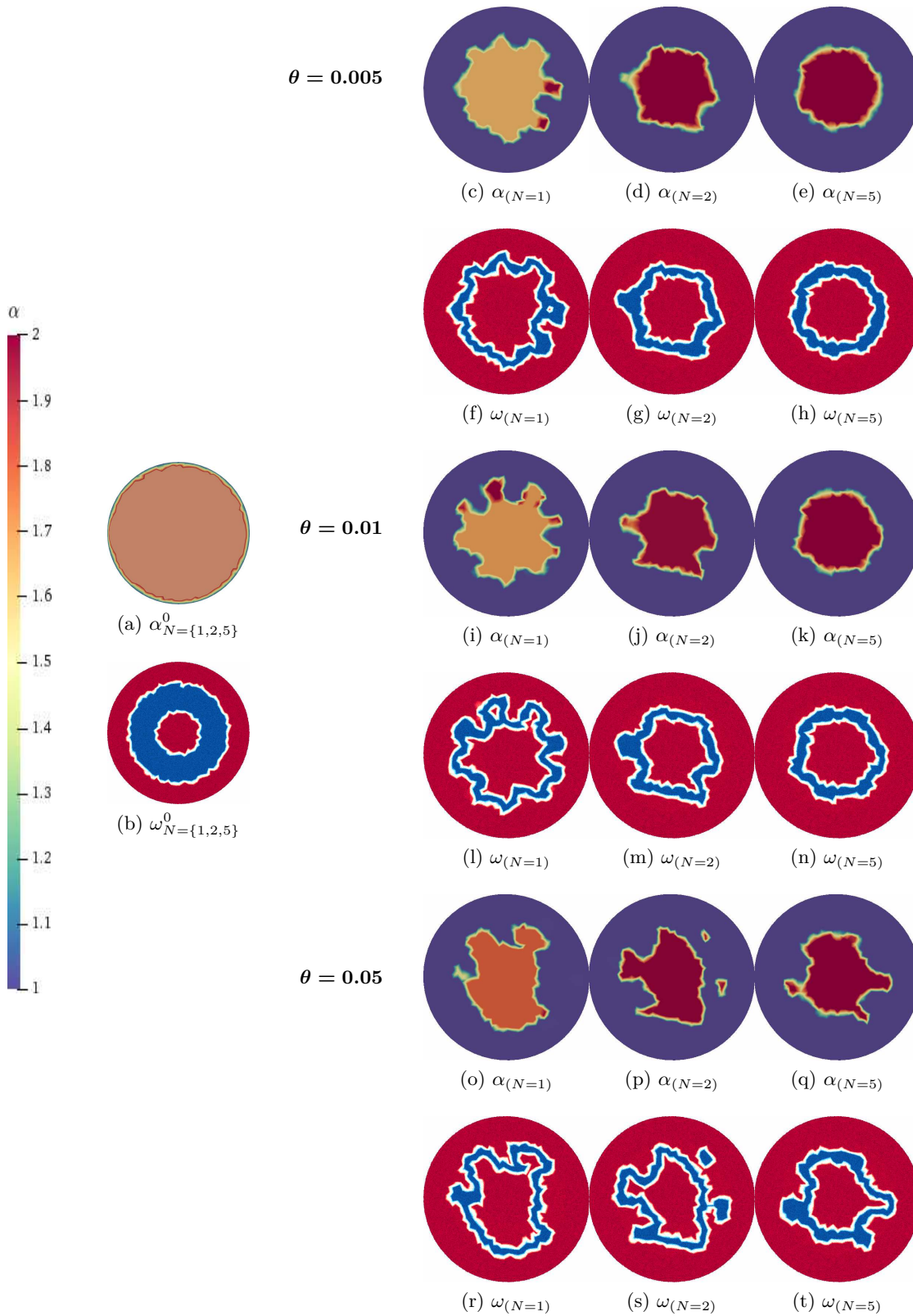


Εικόνα 2.10b :  $BV$  Regularized Inversion  $(\alpha, \omega)_N$ - λύσεις στην τελική επανάληψη για τις τιμές  $\ell = 0.6$ ,  $\omega \equiv 1$  του ομόκεντρου προβλήματος και  $\mu = \{1, 1\}$  αντίστοιχα.

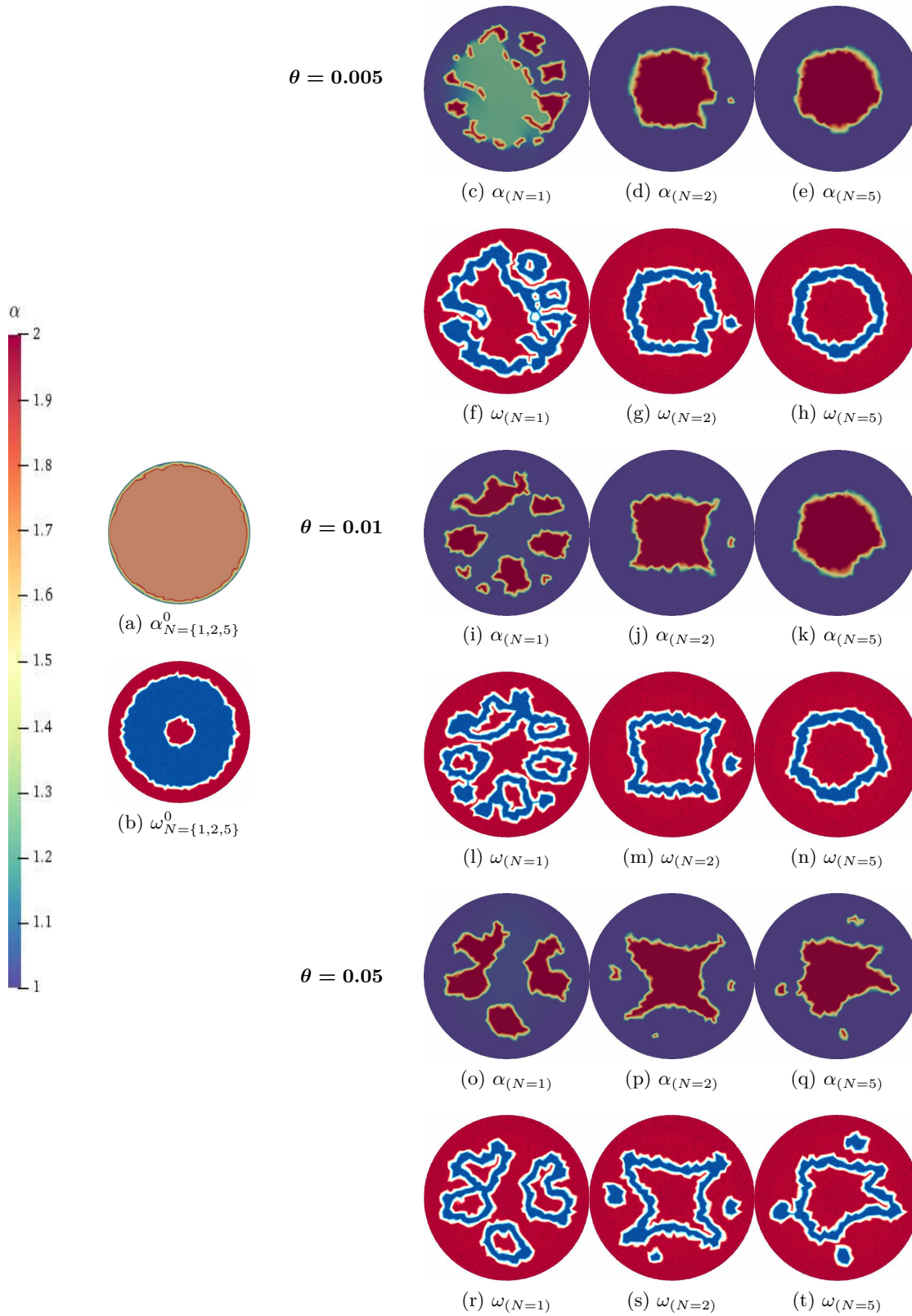




Εικόνα 2.11a : *BV Regularized Inversion*  $(\alpha, \omega)_N$  – λύσεις στην τελική επανάληψη για την τιμή  $\ell = 0.2$  του ομόκεντρου προβλήματος με  $\theta = \{0.5\%, 1\%, 5\%\}$  και  $\mu = 1$ .

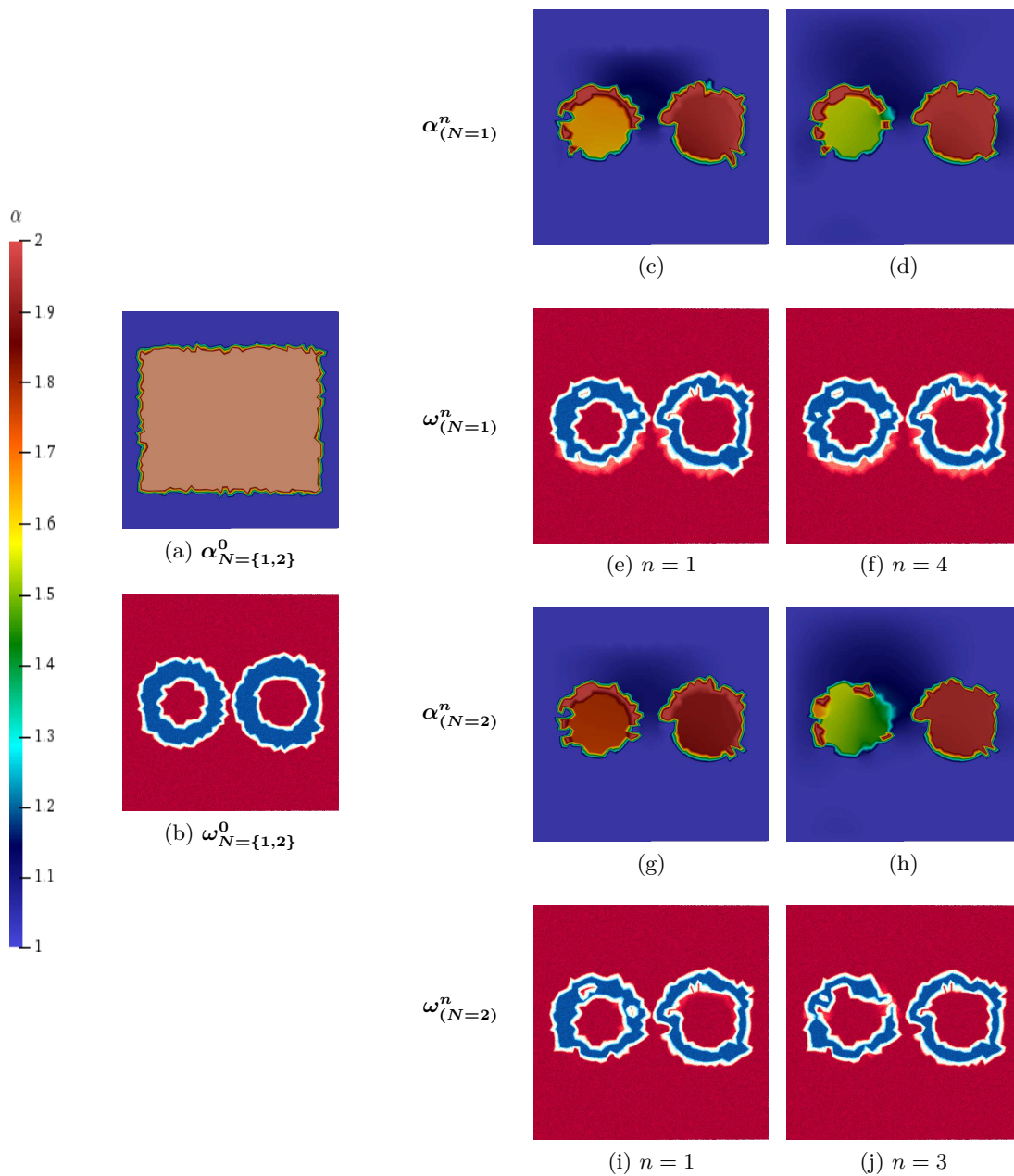


Εικόνα 2.11b :  $BV$  Regularized Inversion  $(\alpha, \omega)_N$ - λύσεις στην τελική επανάληψη για την τιμή  $\ell = 0.4$  του ομόκεντρου προβλήματος με  $\theta = \{0.5\%, 1\%, 5\%\}$  και  $\mu = 1$ .

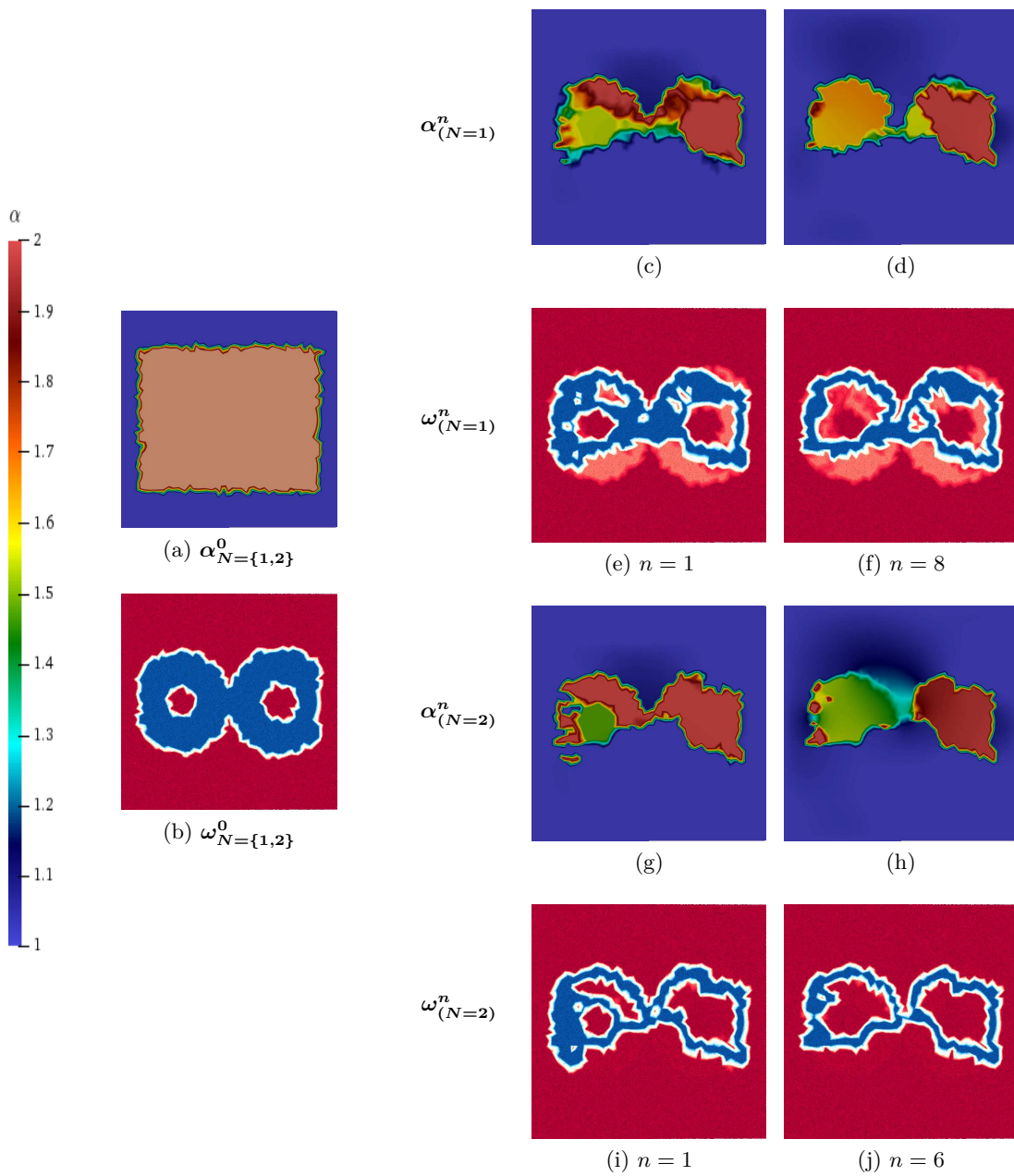


Εικόνα 2.11c : *BV Regularized Inversion*  $(\alpha, \omega)_N$  – λύσεις στην τελική επανάληψη για την τιμή  $\ell = 0.6$  του ομόκεντρου προβλήματος με  $\theta = \{0.5\%, 1\%, 5\%\}$  και  $\mu = 1$ .

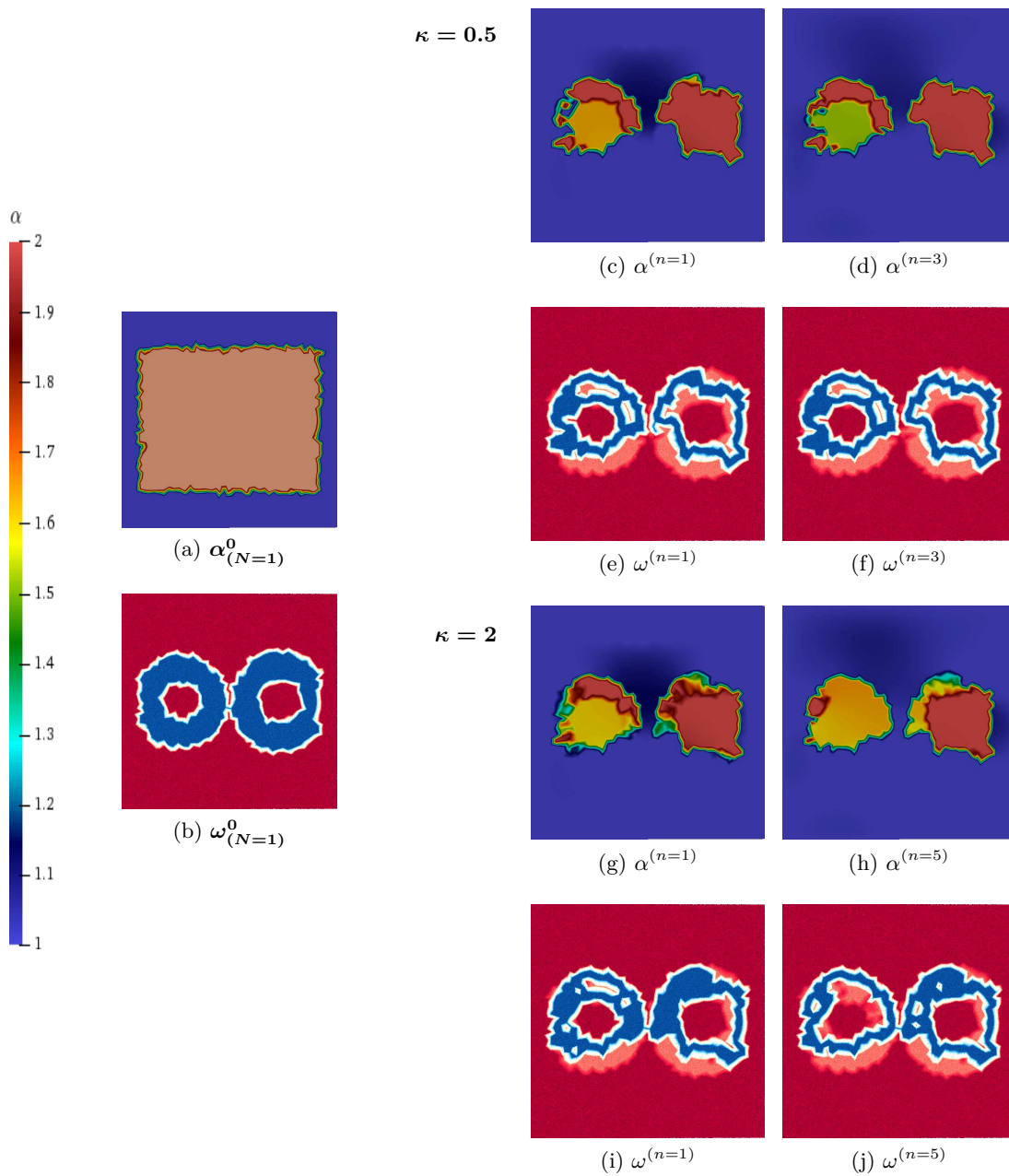




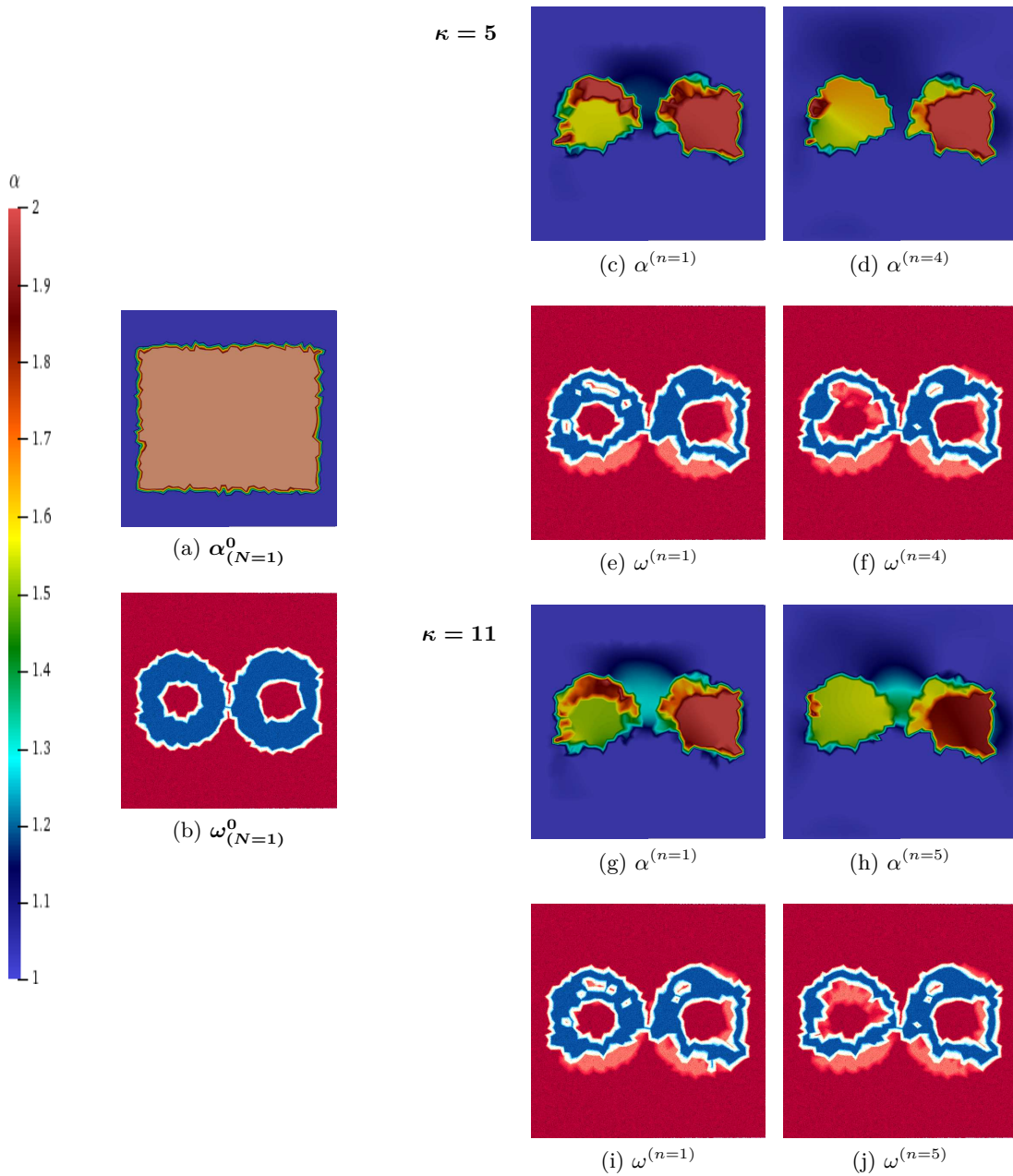
Εικόνα 2.12 :  $BV$  Regularized Inversion  $\alpha_N^n$ - λύσεις και  $\omega_N^n$ - προφίλ στην πρώτη και τελευταία επαναληψη για την τιμή  $\ell = 0.3$  της δισφαιρικής γεωμετρίας και  $\mu = 0.06$ .



Εικόνα 2.13 : *BV Regularized Inversion*  $\alpha_N^n$ - λύσεις και  $\omega_N^n$ - προφίλ στην πρώτη και τελευταία επανάληψη για την τιμή  $\ell = 0.5$  της δισφαιρικής γεωμετρίας και  $\mu = 0.06$ .



Εικόνα 2.14a :  $BV$  Regularized Inversion  $\alpha^n$ - λύσεις και  $\omega^n$ - προφίλ στην πρώτη και τελευταία επανάληψη για την τιμή  $\ell = 0.4$  της δισφαιρικής γεωμετρίας με  $\kappa = \{0.5, 2\}$  και  $\mu = 0.06$ .



Εικόνα 2.14b : *BV Regularized Inversion*  $\alpha^n$ - λύσεις και  $\omega^n$ - προφίλ στην πρώτη και τελευταία επανάληψη για την τιμή  $\ell = 0.4$  της δισφαιρικής γεωμετρίας με  $\kappa = \{5, 11\}$  και  $\mu = 0.06$ .

### 2.6.7 Πίνακες αποτελεσμάτων

Πίνακας 2.3: Ομοιόμορφες τιμές  $(\alpha_{in}, \alpha_{out})$  της  $\hat{\alpha}$ - ανακατασκευής για το ομόκεντρο πρόβλημα.

		max_iters= 10						
$\ell = 0.2$ $\mu = 1$	$n$	1	2	3	$\geq 4$			
	$\alpha_{in}$	1.92	1.94	1.93	1.94			
	$\alpha_{out}$	1	1	1	1			
$\ell = 0.3$ $\mu = 0.1$	$n$	1	2 – 3	4 – 5	6	$\geq 7$		
	$\alpha_{in}$	1.84	1.86	1.87	1.86	1.83		
	$\alpha_{out}$	1	1	1	1	1		
$\ell = 0.4$ $\mu = 0.1$	$n$	1	2	3 – 4	5	6 – 7	8 – 9	10
	$\alpha_{in}$	1.75	1.76	1.74	1.76	1.78	1.79	1.8
	$\alpha_{out}$	1	1	1	1	1	1	1
$\omega \equiv 1$ $\mu = 1$	$n$	1	$\geq 2$					
	$\alpha_{in}$	1.12	1.17					
	$\alpha_{out}$	1	1					

Πίνακας 2.4: Ομοιόμορφες τιμές  $(\alpha_{in}, \alpha_{out})$  της  $\hat{\alpha}$ - ανακατασκευής για το ισχυρά έκκεντρο πρόβλημα.

		max_iters= 10						
$\ell = 0.2$ $\mu = 0.1$	$n$	$\geq 1$						
	$\alpha_{in}$	1.99						
	$\alpha_{out}$	1						
$\ell = 0.3$ $\mu = 0.5$	$n$	1	2 – 5	6	7	8 – 9	10	
	$\alpha_{in}$	2	1.99	2	1.99	2	1.99	
	$\alpha_{out}$	1	1	1	1	1	1	
$\ell = 0.4$ $\mu = 0.5$	$n$	1 – 3	4	5 – 6	7 – 8	$\geq 9$		
	$\alpha_{in}$	2	1.99	2	1.99	2		
	$\alpha_{out}$	1	1	1	1	1		
$\omega \equiv 1$ $\mu = 0.1$	$n$	1	2	$\geq 3$				
	$\alpha_{in}$	1.46	1.45	1.46				
	$\alpha_{out}$	1	1	1				

Πίνακας 2.5: Ομοιόμορφες τιμές  $(\alpha_{in}, \alpha_{out})$  της  $\hat{\alpha}$ - ανακατασκευής για το ήπια έκκεντρο πρόβλημα.

		max_iters= 10						
$\ell = 0.2$ $\mu = 0.1$	$n$	1	$\geq 2$					
	$\alpha_{in}$	1.92	1.91					
	$\alpha_{out}$	1	1					
$\ell = 0.3$ $\mu = 1$	$n$	1	2	3 – 4	5	6 – 9	10	
	$\alpha_{in}$	1.84	1.83	1.82	1.81	1.8	1.81	
	$\alpha_{out}$	1	1	1	1	1	1	
$\ell = 0.4$ $\mu = 0.1$	$n$	1	2 – 3	4	5	$\geq 6$		
	$\alpha_{in}$	1.79	1.78	1.77	1.76	1.77		
	$\alpha_{out}$	1	1	1	1	1		
$\omega \equiv 1$ $\mu = 0.1$	$n$	1	$\geq 2$					
	$\alpha_{in}$	1.02	1.04					
	$\alpha_{out}$	1	1					

Πίνακας 2.6: Ομοιόμορφες τιμές  $(\alpha_{in}, \alpha_{out})$  της  $\hat{\alpha}$ - φυσικής ανακατασκευής για το πρόβλημα του μονού εγκλεισμού.

max_iters= 1			
<i>concentric</i>		$\ell = 0.02$	$\omega \equiv 1$
$\mu = 1$	$\alpha_{in}$	1.98	1.17
	$\alpha_{out}$	1	1
<i>strong eccentric</i>		$\ell = 0.02$	$\omega \equiv 1$
$\mu = 1$	$\alpha_{in}$	1.93	1.1
	$\alpha_{out}$	1	1
<i>mild eccentric</i>		$\ell = 0.02$	$\omega \equiv 1$
$\mu = 1$	$\alpha_{in}$	1.98	1
	$\alpha_{out}$	1	1

Πίνακας 2.7: Ομοιόμορφες τιμές  $(\alpha_{in}, \alpha_{out})$  της  $\hat{\alpha}$ - ανακατασκευής για το ομόκεντρο πρόβλημα με  $N$ - ζεύγη δεδομένων.

max_iters= 10						
$\ell = 0.2$ $\mu = 1$	$\alpha_{in}$	$n$	1	2	3	$\geq 4$
		$N = 1$	1.92	1.94	1.93	1.94
		$N = 2$	2	2	2	2
		$N = 5$	2	2	1.99	1.99
	$\alpha_{out}$	$N = 1, 2, 5$	1	1	1	1
$\ell = 0.4$ $\mu = 0.1$	$\alpha_{in}$	$n$	1	2 - 4	$\geq 5$	
		$N = 1$	1.75	1.76	1.79	
		$N = 2$	1.99	2	2	
		$N = 5$	1.99	1.99	2	
	$\alpha_{out}$	$N = 1, 2, 5$	1	1	1	
$\ell = 0.6$ $\mu = 1$	$\alpha_{in}$	$n$	1 - 2	3 - 5	$\geq 6$	
		$N = 1$	1.6	1.62	1.6	
		$N = 2$	2	2	2	
		$N = 5$	2	2	1.99	
	$\alpha_{out}$	$N = 1, 2, 5$	1	1	1	
$\omega \equiv 1$ $\mu = 1$	$\alpha_{in}$	$n$	1	$\geq 2$		
		$N = 1$	1.12	1.17		
		$N = 2$	1.09	1.12		
		$N = 5$	1.04	1.06		
	$\alpha_{out}$	$N = 1, 2, 5$	1	1		

Πίνακας 2.8a : Ομοιόμορφες τιμές  $(\alpha_{in}, \alpha_{out})$  της  $\hat{\alpha}$ - ανακατασκευής για την τιμή  $\ell = 0.2$  του ομόκεντρου προβλήματος με  $N$ - ζεύγη ενθόρυβων δεδομένων.

$\ell = 0.2$		max_iters= 10			
$\theta = 0.005$ $\mu = 1$	$\alpha_{in}$	$n$	1	2	$\geq 3$
		$N = 1$	1.91	1.92	1.92
		$N = 2$	1.98	1.99	2
		$N = 5$	1.98	2	2
	$\alpha_{out}$	$N = 1, 2, 5$	1	1	1
$\theta = 0.01$ $\mu = 1$	$\alpha_{in}$	$n$	1	2	$\geq 3$
		$N = 1$	1.88	1.9	1.94
		$N = 2$	1.94	1.96	1.99
		$N = 5$	1.96	1.99	2
	$\alpha_{out}$	$N = 1, 2, 5$	1	1	1
$\theta = 0.05$ $\mu = 1$	$\alpha_{in}$	$n$	1 – 2	3	$\geq 4$
		$N = 1$	1.87	1.88	1.9
		$N = 2$	2	1.98	1.99
		$N = 5$	2	1.99	2
	$\alpha_{out}$	$N = 1, 2, 5$	1	1	1

Πίνακας 2.8b : Ομοιόμορφες τιμές  $(\alpha_{in}, \alpha_{out})$  της  $\hat{\alpha}$ - ανακατασκευής για την τιμή  $\ell = 0.4$  του ομόκεντρου προβλήματος με  $N$ - ζεύγη ενθόρυβων δεδομένων.

$\ell = 0.4$		max_iters= 10				
$\theta = 0.005$ $\mu = 1$	$\alpha_{in}$	$n$	1 – 2	3	$\geq 4$	
		$N = 1$	1.6	1.62	1.67	
		$N = 2$	1.99	1.99	1.99	
		$N = 5$	1.99	1.99	2	
	$\alpha_{out}$	$N = 1, 2, 5$	1	1	1	
$\theta = 0.01$ $\mu = 1$	$\alpha_{in}$	$n$	1	2 – 3	$\geq 4$	
		$N = 1$	1.6	1.65	1.7	
		$N = 2$	1.99	1.98	1.98	
		$N = 5$	1.99	2	1.99	
	$\alpha_{out}$	$N = 1, 2, 5$	1	1	1	
$\theta = 0.05$ $\mu = 1$	$\alpha_{in}$	$n$	1	2	3	$\geq 4$
		$N = 1$	1.56	1.71	1.76	1.78
		$N = 2$	1.98	1.99	2	1.99
		$N = 5$	1.99	2	1.99	2
	$\alpha_{out}$	$N = 1, 2, 5$	1	1	1	1



Πίνακας 2.8c : Ομοιόμορφες τιμές ( $\alpha_{in}, \alpha_{out}$ ) της  $\hat{\alpha}$ - ανακατασκευής για την τιμή  $\ell = 0.6$  του ομόκεντρου προβλήματος με  $N$ - ζεύγη ενθόρυβων δεδομένων.

$\ell = 0.6$		max_iters= 10				
$\theta = 0.005$ $\mu = 1$	$\alpha_{in}$	$n$	1 – 6	7 – 8	9 – 10	
		$N = 1$	1.67	1.9	1.99	
		$N = 2$	1.97	1.99	2	
		$N = 5$	1.99	2	1.99	
	$\alpha_{out}$	$N = 1, 2, 5$	1	1	1	
$\theta = 0.01$ $\mu = 1$	$\alpha_{in}$	$n$	1 – 3	4 – 5	6 – 7	8 – 10
		$N = 1$	1.67	1.94	1.96	2
		$N = 2$	1.99	1.98	1.99	1.98
		$N = 5$	1.99	2	2	2
	$\alpha_{out}$	$N = 1, 2, 5$	1	1	1	1
$\theta = 0.05$ $\mu = 1$	$\alpha_{in}$	$n$	1	2 – 3	$\geq 4$	
		$N = 1$	1.71	1.9	1.96	
		$N = 2$	1.97	1.98	1.99	
		$N = 5$	1.98	2	1.99	
	$\alpha_{out}$	$N = 1, 2, 5$	1	1	1	

Πίνακας 2.9a : Ομοιόμορφες τιμές ( $\alpha_{D_2}, \alpha_{D_3}, \alpha_{out}$ ) της  $\hat{\alpha}$ - ανακατασκευής για τις τιμές  $\ell = \{0.3, 0.5\}$  της δισφαιρικής γεωμετρίας με  $N$ - ζεύγη δεδομένων.

		max_iters= 10					
$\ell = 0.3$ $\mu = 0.06$	$N = 1$	$n$	1	2	3	$\geq 4$	
		$\alpha_{D_2}$	1.64	1.53	1.51	1.5	
		$\alpha_{D_3}$	1.94	1.95	1.96	1.97	
	$N = 2$	$n$	1	2	$\geq 3$		
		$\alpha_{D_2}$	1.75	1.58	1.5		
		$\alpha_{D_3}$	1.91	1.95	1.98		
	$N = 1, 2$	$\alpha_{out}$	1	1	1		
	$\ell = 0.5$ $\mu = 0.06$	$N = 1$	$n$	1	2	3 – 7	8
			$\alpha_{D_2}$	1.53	1.58	1.6	1.61
$\alpha_{D_3}$			1.95	1.95	1.95	1.96	
$N = 2$		$n$	1	2	3 – 4	5	6
		$\alpha_{D_2}$	1.45	1.72	1.76	1.58	1.5
		$\alpha_{D_3}$	1.96	1.93	1.95	1.95	1.97
$N = 1, 2$		$\alpha_{out}$	1	1	1	1	1

Πίνακας 2.9b : Ομοιόμορφες τιμές ( $\alpha_{D_2}, \alpha_{D_3}, \alpha_{out}$ ) της  $\hat{\alpha}$ - ανακατασκευής για την τιμή  $\ell = 0.4$  της δισφαιρικής γεωμετρίας και διαφορετικές τιμές της παραμέτρου  $\kappa$ .

$\ell = 0.4$		max_iters= 10				
$\kappa = 0.5$ $\mu = 0.06$	$N = 1$	$n$	1	2	$\geq 3$	
		$\alpha_{D_2}$	1.63	1.5	1.5	
		$\alpha_{D_3}$	1.95	1.96	1.96	
		$\alpha_{out}$	1	1	1	
$\kappa = 2$ $\mu = 0.06$	$N = 1$	$n$	1	2 – 3	4	$\geq 5$
		$\alpha_{D_2}$	1.58	1.63	1.62	1.6
		$\alpha_{D_3}$	1.95	1.96	1.96	1.97
		$\alpha_{out}$	1	1	1	1
$\kappa = 5$ $\mu = 0.06$	$N = 1$	$n$	1	2	3	$\geq 4$
		$\alpha_{D_2}$	1.53	1.58	1.6	1.61
		$\alpha_{D_3}$	1.95	1.96	1.95	1.95
		$\alpha_{out}$	1	1	1	1
$\kappa = 11$ $\mu = 0.06$	$N = 1$	$n$	1	2	3 – 4	$\geq 5$
		$\alpha_{D_2}$	1.5	1.53	1.51	1.53
		$\alpha_{D_3}$	1.97	1.9	1.89	1.88
		$\alpha_{out}$	1	1	1	1

## Κεφάλαιο 3

# Ένα εναλλακτικό σχήμα ανακατασκευής για το αντίστροφο πρόβλημα της αγωγιμότητας

Η ερευνητική δραστηριότητα του προηγούμενου κεφαλαίου στάθηκε αφορμή για τη σύλληψη ενός καινοτόμου σχήματος ανακατασκευής, που υιοθετεί τη δυϊκότητα της *half-quadratic* προσέγγισης [6] και ταυτόχρονα διατηρεί την  $BV$ - ταυτότητα των συντελεστών  $\alpha$  καθ' όλη τη διάρκεια της ελαχιστοποίησης.

Η κεντρική ιδέα της “*Half-Quadratic Minimization Approach*”, που προτείνεται στο [6] ως τεχνική αποκατάστασης εικόνας (*image restoration*) και υλοποιείται στο Κεφάλαιο 2 για τον προσδιορισμό μιας  $BV$ - αγωγιμότητας [66], συνίσταται στην εισαγωγή μιας βοηθητικής συνάρτησης,  $\omega(x)$ , ώστε να «εποπτεύει» τις μεταβολές της αγωγιμότητας  $\alpha(x)$ . Αν και το προφίλ  $\alpha(x)$  θεωρείται συνάρτηση φραγμένης κύμανσης, το αριθμητικό σχήμα ελαχιστοποίησης βασίζεται σε μια ακολουθία τετραγωνικών προσεγγίσεων του αρχικού συναρτησιακού που συγκλίνει στη  $BV$ - δομή. Αυτό το σχήμα είναι αποτελεσματικό, ειδικά στα πλαίσια της *half-quadratic* τεχνικής, λόγω κυρίως του γεγονότος ότι η μεταβλητή  $\omega(x)$  ενημερώνεται σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου (βλ. Παράγραφο 2.5.2), προσεγγίζοντας σταδιακά το αναζητούμενο *jump set*. Ωστόσο, η προαναφερθείσα ομαλοποιητική προσέγγιση και ο διαχωρισμός της διαδικασίας ελαχιστοποίησης ως προς την αγωγιμότητα και τη βοηθητική μεταβλητή  $\omega(x)$  αποτελούν αδιαμφισβήτητα δύο εγγενείς περιορισμούς της μεθόδου.

Στην παρούσα έρευνα, τα στοιχεία του ζεύγους  $(\alpha, \omega)$  αποκτούν - σε αντιδιαστολή με το [66] - ισοδύναμο ρόλο. Πιο συγκεκριμένα, η επικαιροποίηση των δύο αυτών πεδίων δεν υλοποιείται μέσω διαφορετικών τεχνικών, αλλά συμβαίνει ταυτόχρονα, στο ίδιο υπολογιστικό βήμα. Η πρώτη βασική διαφορά είναι ότι το προφίλ της αγωγιμότητας παραμένει σε όλη τη θεωρητική και αριθμητική δραστηριότητα υπό το πλαίσιο των  $BV$ - συναρτήσεων. Με άλλα λόγια, ο κρίσιμος όρος του συναρτησιακού που φέρει την ολική μάζα του  $|D\alpha|$  διατηρεί τη φραγμένης κύμανσης ( $TV$ ) δομή του. Η δεύτερη διαφορά είναι ότι ο «επόπτης»  $\omega(x)$  δεν ενημερώνεται εξωτερικά, μέσω της *half-quadratic* τεχνικής για συγκεκριμένο  $\alpha$ , αλλά αντιθέτως συμμετέχει ισοδύναμα με την  $\alpha(x)$  στην ελαχιστοποιητική διαδικασία. Κάτι τέτοιο επιτυγχάνεται μέσω ενός επιπρόσθετου όρου, που επιβάλλει την επιθυμητή ομαλότητα και μεταβολική συμπεριφορά στο  $\omega(x)$  μετατρέποντάς το σε έναν δυναμικό οδηγό του φορέα των  $BV$ - *jumps*. Πράγματι, αυτός ο επιπλέον (τύπου *Tikhonov*) όρος του συναρτησιακού θέτει τον κατάλληλο έλεγχο στον επόπτη  $\omega(x)$  με τέτοιο τρόπο ώστε η μάζα του να συγκεντρώνεται στο  $S_\alpha$ .

Η παραπάνω ιδέα, που εν συντομία μπορεί να παρομοιαστεί με ένα σχήμα διπλού μηχανισμού ελέγχου, στον επόπτη  $\omega(x)$  και συγχρόνως μέσω αυτού στο *jump set* της αγωγιμότητας, ορίζει ένα νέο τύπο κανονικοποίησης που αναφέρεται ως “*Dual Self-Monitored TV – inversion*” [75].

Το παρόν κεφάλαιο περιγράφει την επίλυση του αντίστροφου προβλήματος (60)-(62) με αυτό το εναλλακτικό σχήμα ανακατασκευής. Υιοθετούμε το συναρτησιακό πλαίσιο της Ενότητας 2.3 ενσωματώνοντας τις απαιτήσεις ως προς την προστατευτική ζώνη  $\Omega_\delta$  (βλ. Ενότητα 2.4) και ορίζουμε τον χώρο των αποδεκτών λύσεων  $\alpha$  στο χωρίο  $\Omega$

$$\mathcal{X}_{\alpha,\delta} := BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega, [b, c]) \quad (175)$$

όπου

$$L^\infty(\Omega, [b, c]) = \left\{ q \in L^\infty(\Omega, [b, c]) : \|q - b\|_{L^\infty(\Omega_\delta)} = 0 \right\}.$$

(Η πιλοτική περίπτωση των δίτιμων αγωγίμων προφίλ  $\alpha(x) \in L^\infty(\Omega, \{b, c\})$  εμπεριέχεται στο παραπάνω πλαίσιο.) Τότε, το υπό μελέτη αντίστροφο πρόβλημα διατυπώνεται ως ακολούθως.

*Δεδομένου ενός Dirichlet-Neumann ζεύγους μετρήσεων  $(f, g)$ , με  $\Lambda_\alpha(f) = g$ , βρες  $\alpha(x) \in \mathcal{X}_{\alpha,\delta}$ .*

Στην Ενότητα 3.1 εισάγεται ο νέος τύπος κανονικοποίησης. Η Ενότητα 3.2 περιλαμβάνει το θεμελιώδες αποτέλεσμα αυτού του κεφαλαίου, εδραιώνοντας το κατάλληλο θεωρητικό υπόβαθρο για την επικείμενη αριθμητική εφαρμογή του σχήματος ανακατασκευής. Στην Ενότητα 3.3 περιγράφεται η αριθμητική μέθοδος αντιστροφής και στην Ενότητα 3.4 υλοποιείται για τα αγωγή προφίλ του Κεφαλαίου 2. Επιπλέον, εξετάζεται η ανακατασκευή μιας πολυπλοκότερης γεωμετρίας. Επισημαίνουμε πως χάριν απλότητας, καθώς και για να αναδείξουμε την αποδοτικότητα της προτεινόμενης τεχνικής, στο μεγαλύτερο μέρος των εφαρμογών περιοριζόμαστε στην περίπτωση του ενός *Dirichlet-Neumann* ζεύγους δεδομένων ( $N = 1$ ), ενώ η προσέγγιση ισχύει για  $N \geq 1$ .

### 3.1 Το δυϊκό σχήμα κανονικοποίησης

Το ενδιαφέρον της τρέχουσας έρευνας εστιάζεται στη χρήση κανονικοποίησης φραγμένης κύμανσης με σκοπό την ανάδειξη των μεταβολών της αγωγιμότητας  $\alpha(x)$ . Ωστόσο, το αφνίδιο του χαρακτήρα αυτών των μεταβολών επιτρέπει την ανάπτυξη υπολογιστικών σφαλμάτων και ανακριβειών, που υπαγορεύουν την εφαρμογή ειδικών τεχνικών κανονικοποίησης. Προκειμένου να περιορίσουμε αυτήν την ευαισθησία, εισάγουμε μια βοηθητική μεταβλητή, υπεύθυνη για τον έλεγχο της *BV*- συμπεριφοράς, που εξομαλύνει, χωρίς όμως να εξαφανίζει, τις έντονες μεταβολές (μεγάλες κλίσεις) της συνάρτησης  $\alpha(x)$ .

Ειδικά, χρησιμοποιούμε τη γνωστή ως «δυϊκή μεταβλητή»  $\omega(x)$  της *half-quadratic* τεχνικής [6] και αναπτύσσουμε έναν ισοδύναμο μηχανισμό ελέγχου στην ολική κύμανση του μέτρου  $D\alpha$  και στην ίδια τη βοηθητική μεταβλητή  $\omega(x)$ . Υπενθυμίζουμε πως σύμφωνα με την αριθμητική προσέγγιση του προηγούμενου κεφαλαίου, η συνάρτηση  $\omega(x)$  ενημερώνεται σε κάθε αλγοριθμικό βήμα  $n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) δρώντας σαν (ομαλοποιημένη) χαρακτηριστική συνάρτηση του *jump set* της  $\alpha(x)$  (Σχόλιο 2.7).

Όπως προαναφέρθηκε, εδώ, οι συναρτήσεις  $\alpha(x)$  και  $\omega(x)$  αποκτούν παράλληλη δράση. Αναδιατυπώνουμε το συναρτησιακό πλαίσιο της  $\omega(x)$ , θεωρώντας  $\omega(x) \in L^\infty(\Omega, [\beta, 1])$ ,  $0 < \beta \ll 1$ , όπου

$$L^\infty(\Omega, [\beta, 1]) = \{ \omega' \in L^\infty(\Omega, [\beta, 1]) : \|\omega' - 1\|_{L^\infty(\Omega_\delta)} = 0 \}. \quad (176)$$

Ο καινοτόμος όρος κανονικοποίησης, που διατηρεί την  $BV$ -δομή της  $\alpha(x)$  και αποδίδει στην  $\omega(x)$  την ιδιότητα ανίχνευσης των ασυνεχειών της  $\alpha(x)$ , έχει τη μορφή

$$TV_{(d)} := \mu \int_{\Omega} \omega |D\alpha|, \quad (177)$$

όπου με  $d(x)$  συμβολίζουμε τη διανυσματική δυϊκή μεταβλητή  $(\alpha(x), \omega(x))$ . Η μικρή παράμετρος  $\beta$  εξυπηρετεί την αποφυγή απώλειας μέρους της ολικής μάζας του  $D\alpha$ . Δουλεύοντας απλώς με  $L^\infty$ -συναρτήσεις ως επόπτες  $\omega(x)$  δεν αρκεί ώστε να διασφαλιστεί η ελεγχόμενη συμπεριφορά του όρου (177) κατά την ελαχιστοποιητική διαδικασία. Απαιτείται επιπλέον ομαλότητα, χωρίς όμως να ακυρώνει το ρόλο της  $BV$ -δομής της  $\alpha(x)$ . Έτσι, προσθέτουμε τον όρο

$$\mathcal{R}_{(\omega)} := \mu_\omega \int_{\Omega} |\nabla \omega|^{2+2\varepsilon} dx \quad (178)$$

με  $0 < \varepsilon \ll 1$ . Χωρίς την παράμετρο  $\varepsilon$ , ο παραπάνω όρος θα αντιστοιχούσε στην κλασική *Tikhonov* κανονικοποίηση, όμως η θετικότητά της είναι εκείνη που προσδίδει την απαραίτητη ομαλότητα στο  $\omega$ , έτσι ώστε ο όρος (177) να συμπεριφέρεται ομαλά στα πλαίσια της  $TV$ -κανονικοποίησης. Αυτή είναι μια εξ ολοκλήρου θεωρητική απαίτηση, καθώς αριθμητικά, η διαδικασία βελτιστοποίησης δεν είναι ιδιαίτερα ευαίσθητη σε ό,τι αφορά την ομαλοποιητική σταθερά  $\varepsilon$ .

Τέλος, υπογραμμίζουμε την ισχυρή συνδυαστική δράση των παραμέτρων κανονικοποίησης  $\mu, \mu_\omega (> 0)$  στο σχήμα ανακατασκευής (177)-(178), καθώς μια κατάλληλη *a priori* επιλογή τους οδηγεί - μαζί με το συναρτησιακό ελαχιστοποίησης - στην επιθυμητή σύγκλιση. Αναλυτικότερα, δεδομένου ότι ο συναρτησιακός όρος (178) είναι ομαλότερος απ' ό,τι επέχει η  $H^1$ -τοπολογία, η παράμετρος ομαλοποίησης  $\mu_\omega$  επιλέγεται από το γνωστό κριτήριο ασυμφωνίας *Tikhonov-Morozov* (*Tikhonov-Morozov discrepancy criterion*) [67]. Ο προσδιορισμός της παραμέτρου  $\mu$  αποτελεί το απαιτητικότερο μέρος της παραμετρικής ανάλυσης. Η ακολουθούμενη προσέγγιση διαμορφώνεται ιεραρχικά: Η μεθοδολογία του [68] είναι, κατά τη γνώμη μας, η πιο αποδοτική δεδομένου ότι ενσωματώνει την παράγωγο *Fréchet* του πλήρους συναρτησιακού οδηγώντας συναπτά σε αξιόπιστες ενημερώσεις των παραμέτρων, αλλά η επαναληπτική ανανέωση της παραγώγου *Fréchet* κατά τη διάρκεια της ελαχιστοποίησης αποδεικνύεται χρονοβόρα και δύσκολη. Πράγματι, η εκτίμηση αυτού του τελεστή στα αντίστροφα προβλήματα [69] είναι ιδιαίτερος απαιτητική, και κυρίως στα προβλήματα της αγωγιμότητας [70] το καλώς τοποθετημένο αυτού του τελεστή απαιτεί επιπλέον ομαλότητα από τα μέλη της ελαχιστοποιητικής ακολουθίας αγωγιμοτήτων. Αυτό το πρόβλημα μπορεί να ξεπεραστεί μέσω μιας απλούστευσης της μεθόδου του [68], όπως παρουσιάζεται στο [71], κατά την οποία η παράγωγος *Fréchet* υπολογίζεται μόνο στο πρώτο βήμα της βελτιστοποίησης, γεγονός που εξασφαλίζει τις θεωρητικές απαιτήσεις και ταυτόχρονα μειώνει το υπολογιστικό κόστος. Παρ' όλα αυτά, το καταληκτικό σχήμα κανονικοποίησης δεν επιτυγχάνει καλύτερα αποτελέσματα ανακατασκευής από αυτά που εξάγονται με την εφαρμογή της απλούστερης ανάλυσης των [72, 73], όπου αναπτύσσεται μια γενίκευση του *Tikhonov-Morozov* κριτηρίου.

## 3.2 Το πρόβλημα ελαχιστοποίησης

Για τον προσδιορισμό της αγωγιμότητας  $\alpha$  από τις επιφανειακές μετρήσεις  $(f, g)$ , θεωρούμε ταυτόχρονα το *Dirichlet* και το *Neumann* πρόβλημα, αντίστοιχα,

$$\nabla \cdot (\alpha \nabla u^\alpha) = 0 \text{ στο } \Omega \text{ και } u^\alpha = f \text{ στο } \partial\Omega, \quad (179)$$

$$\nabla \cdot (\alpha \nabla v^\alpha) = 0 \text{ στο } \Omega \text{ και } \alpha \nabla v^\alpha \cdot \vec{n} = g \text{ στο } \partial\Omega, \quad (180)$$

με  $f \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$  και  $g \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ . Υιοθετούμε τη μεταβολική προσέγγιση των *Kohn* και *Vogelius* [55, 56] και ορίζουμε το συναρτησιακό

$$J(\alpha) = \frac{1}{2} \langle \Lambda_\alpha f - g, f - \Lambda_\alpha^{-1} g \rangle_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \alpha |\nabla(u^\alpha - v^\alpha)|^2 dx, \quad (181)$$

όπου για την τελευταία ισότητα κάνουμε χρήση της ταυτότητας *Green*. Τα πεδία  $(u^\alpha, v^\alpha) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)/\mathbb{R}$  είναι οι ασθενείς λύσεις των ευθέων προβλημάτων (179)-(180) στην περίπτωση όπου ο συντελεστής της αγωγιμότητας ταυτίζεται με τον  $\alpha(x)$ . Προσθέτοντας τους όρους κανονικοποίησης (177)-(178), συνθέτουμε το πλήρες συναρτησιακό ελαχιστοποίησης

$$\mathcal{J}(\alpha, \omega) = J(\alpha) + \frac{1}{2} \mu \int_{\Omega} \omega |D\alpha| + \frac{1}{2} \mu_\omega \int_{\Omega} |\nabla\omega|^{2+2\varepsilon} dx. \quad (182)$$

Στη συνέχεια διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε το θεμελιώδες αποτέλεσμα αυτού του κεφαλαίου

**Θεώρημα 3.1.** Το πρόβλημα ελαχιστοποίησης  $\inf_{(\alpha', \omega')} \mathcal{J}(\alpha', \omega')$  ως προς τα στοιχεία  $(\alpha', \omega')$  στον  $\mathcal{X}_{\alpha, \delta} \times L^\infty_\delta(\Omega, [\beta, 1])$  επιδέχεται μία λύση που ανήκει στον χώρο  $\mathcal{X}_{\alpha, \delta} \times L^\infty_\delta(\Omega, [\beta, 1])$ .

*Απόδειξη.* Έστω μια ακολουθία ελαχιστοποίησης  $(\alpha_n, \omega_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , δηλ.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{J}(\alpha_n, \omega_n) = \inf_{(\alpha', \omega')} \mathcal{J}(\alpha', \omega')$ , τέτοια ώστε το όριο  $\inf_{(\alpha', \omega')} \mathcal{J}(\alpha', \omega')$  είναι ένας πραγματικός αριθμός. Προφανώς, υπάρχει μια θετική σταθερά  $C$  τέτοια ώστε

$$\mathcal{J}(\alpha_n, \omega_n) \leq C \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}. \quad (183)$$

Δεδομένου ότι  $\alpha_n \in L^\infty_\delta(\Omega, [b, c])$ , συμπεραίνουμε ότι  $\|\alpha_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c$  και επομένως, υπάρχει υπακολουθία  $\alpha_n$ , που συμβολίζουμε το ίδιο, και στοιχείο  $\alpha \in L^\infty(\Omega)$  τέτοια ώστε

$$\alpha_n \rightharpoonup \alpha \text{ ασθενώς}^* \text{ στον } L^\infty(\Omega) \text{ (καθώς } n \rightarrow \infty). \quad (184)$$

Επειδή  $\overline{L^\infty(\Omega, K)}^{\|\cdot\|_{w^*}} = L^\infty(\Omega, \mathcal{K})$ , με  $K \subset \mathbb{R}^d$  και  $\mathcal{K}$  τη κλειστή κυρτή θήκη του  $K$  [51], ισχύει ότι  $\alpha \in L^\infty(\Omega, [b, c])$ . Επιπλέον,  $\int_{\Omega_\delta} \alpha_n \varphi \rightarrow \int_{\Omega_\delta} \alpha \varphi$  για κάθε  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_\delta) \subset L^1(\Omega)$  και τότε  $\int_{\Omega_\delta} (b - \alpha(x)) \varphi(x) dx = 0$ ,  $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega_\delta)$ . Συνεπώς,  $\alpha(x) = b$  σ.π. στην  $\Omega_\delta$  [53] και τελικά  $\alpha \in L^\infty_\delta(\Omega, [b, c])$ .

Στη συνέχεια, γράφουμε το συναρτησιακό (181) στην ισοδύναμη μορφή (χρησιμοποιώντας ξανά την ταυτότητα *Green*)

$$\begin{aligned} J(\alpha_n) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \alpha_n |\nabla(u^{\alpha_n} - v^{\alpha_n})|^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \alpha_n |\nabla u^{\alpha_n}|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \alpha_n |\nabla v^{\alpha_n}|^2 dx - \langle g, f \rangle_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}}. \end{aligned} \quad (185)$$

Βάσει της (183) και του κάτω φράγματος  $b$  των συντελεστών  $\alpha_n$ , ισχύει ότι

$$\frac{b}{2} \int_{\Omega} |\nabla u^{\alpha_n}|^2 dx \leq C + \langle g, f \rangle_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}} \quad (186)$$

και ομοίως

$$\frac{b}{2} \int_{\Omega} |\nabla v^{\alpha_n}|^2 dx \leq C + \langle g, f \rangle_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}}, \quad (187)$$

απ' όπου και συμπεραίνουμε ότι οι νόρμες  $\|\nabla u^{\alpha_n}\|_{L^2(\Omega)}$  και  $\|\nabla v^{\alpha_n}\|_{L^2(\Omega)}$  είναι ομοιόμορφα φραγμένες. Όπως ακριβώς στο Θεώρημα 2.16, εύκολα αποδεικνύεται ότι η  $u^{\alpha_n}$  συγκλίνει

ασθενώς στον  $H^1(\Omega)$ , ενώ η  $\nabla v^{\alpha_n}$  συγχλίνει ασθενώς στον  $(L^2(\Omega))^d$ . Αργότερα, μέσω της εμπλοκής της θεωρίας ομογενοποίησης, επαληθεύεται (όπως αναμένεται) ότι αυτά τα ασθενή όρια σχετίζονται με τα  $u^\alpha$  και  $\nabla v^\alpha$ , αντίστοιχα.

Αναφορικά με τον  $TV$ - όρο κανονικοποίησης, έχουμε ότι

$$\frac{1}{2} TV_{(d_n)} = \frac{1}{2} \mu \int_{\Omega} \omega_n |D\alpha_n| \leq C \Rightarrow \frac{\beta}{2} \mu \int_{\Omega} |D\alpha_n| \leq C \Rightarrow |D\alpha_n|(\Omega) \leq \tilde{C}. \quad (188)$$

Επιπλέον,  $\alpha_n \in L^\infty(\Omega, [b, c])$  και άρα  $\alpha_n \in L^1(\Omega)$  με  $\|\alpha_n\|_{L^1(\Omega)} \leq c|\Omega|$ . Συνεπώς,  $\|\alpha_n\|_{BV(\Omega)} \leq \tilde{C}$ . Χάρη στο Θεώρημα συμπάγειας 1.7 για μια ομοιόμορφα φραγμένη ακολουθία στον  $BV(\Omega)$ , υπάρχει υπακολουθία, με τον ίδιο συμβολισμό, και στοιχείο  $\tilde{\alpha} \in BV(\Omega)$  τέτοια ώστε

$$\alpha_n \xrightarrow{BV-w^*} \tilde{\alpha}. \quad (189)$$

Από τις (184) και (189) βρίσκουμε ότι  $\int_{\Omega} (\alpha - \tilde{\alpha})\phi = 0$ ,  $\forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)$  και άρα  $\alpha = \tilde{\alpha}$  σ.π. στο  $\Omega$  [53]. Επομένως, η ακολουθία  $\alpha_n$  ικανοποιεί τη σύγκλιση

$$\alpha_n \xrightarrow{L^1(\Omega)} \alpha \in \mathcal{X}_{\alpha, \delta}. \quad (190)$$

Στο πλαίσιο της  $2d$ - θεωρίας ομογενοποίησης και βάσει της συνθήκης  $\alpha_n \in L^\infty(\Omega, [b, c])$ , η συμπληρωματική αυτή σύγκλιση συνεπάγεται τη  $G$ - σύγκλιση (Λήμμα 2.2.1), δηλ.  $\alpha_n(x)\mathbb{I}_{2 \times 2} \xrightarrow{G} \alpha(x)\mathbb{I}_{2 \times 2} \in L^\infty(\Omega, \mathcal{M}_{b,c}^s)$ . Έτσι, καταλήγουμε στην ισχύ της σύγκλισης (190) συν της φυσικά επαγόμενης  $\alpha_n \xrightarrow{G} \alpha$ .

Για τον όρο ομαλοποίησης (178) ισχύει ότι

$$\frac{1}{2} \mathcal{R}_{(\omega_n)} = \frac{1}{2} \mu_\omega \int_{\Omega} |\nabla \omega_n|^{2+2\varepsilon} dx \leq C. \quad (191)$$

Εφόσον  $\int_{\Omega} |\omega_n|^{2+2\varepsilon} dx \leq |\Omega|$ , και άρα  $\omega_n \in L^{2+2\varepsilon}(\Omega)$ , συμπεραίνουμε ότι  $\omega_n \in W^{1,2+2\varepsilon}(\Omega)$  με  $\|\omega_n\|_{W^{1,2+2\varepsilon}} \leq \tilde{C}$ .

Λόγω του τελευταίου φράγματος και του γεγονότος ότι το χωρίο  $\Omega$  είναι φραγμένο, μπορούμε να εξάγουμε μια υπακολουθία  $\omega_n$ , που συμβολίζουμε το ίδιο, και ένα στοιχείο  $\omega \in W^{1,2+2\varepsilon}(\Omega)$  τέτοια ώστε

$$\omega_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \omega \text{ στον } W^{1,2+2\varepsilon}(\Omega), \text{ και κατά συνέπεια} \quad (192)$$

$$\omega_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \omega \text{ στον } L^{2+2\varepsilon}(\Omega). \quad (193)$$

Βάσει της ισχυρής σύγκλισης (193), ισχύει ότι (σ. 17, [28]) υπάρχει υπακολουθία, με τον ίδιο συμβολισμό, και συνάρτηση  $h(x) \in L^{2+2\varepsilon}(\Omega)$  τέτοια ώστε γι' αυτήν την υπακολουθία

$$\omega_n(x) \rightarrow \omega(x) \text{ σ.π. στο } \Omega \quad (194)$$

$$|\omega_n(x)| \leq h(x) \text{ σ.π. στο } \Omega. \quad (195)$$

Από την άλλη, επειδή  $\omega_n \in L^\infty(\Omega, [\beta, 1]) \Rightarrow \|\omega_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1$  και άρα

$$\omega_n \rightharpoonup \omega \text{ ασθενώς}^* \text{ στον } L^\infty(\Omega) \text{ (καθώς } n \rightarrow \infty), \quad (196)$$

όπου πάλι από το [51] βρίσκουμε ότι  $\omega \in L^\infty(\Omega, [\beta, 1])$ .

Παράλληλα, δεδομένου ότι  $p = 2 + 2\varepsilon > d$ , έχουμε μια συνεχή ενσφήνωση  $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\gamma}(\Omega)$  με  $\gamma = 1 - \frac{d}{p}$  (βλ. Ενότητα 5.7, [5]), απ' όπου και προκύπτει ότι  $\omega_n, \omega \in C^{0,\gamma}(\Omega)$  με  $\gamma = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$ .

Το επόμενο βήμα προς την εδραίωση της ύπαρξης ελαχίστου αποτελεί η απόδειξη κάποιου

είδους κάτω ημισυνέχειας για το  $\mathcal{J}$ . Αρχίζουμε μελετώντας ξεχωριστά κάθε ένα από τα μέλη του  $J(\alpha_n), TV_{(d_n)}$  και  $\mathcal{R}_{(\omega_n)}$ .

Γράφουμε τον όρο  $J(\alpha_n)$  στη μορφή

$$\begin{aligned} J(\alpha_n) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \alpha_n |\nabla(u^{\alpha_n} - v^{\alpha_n})|^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \alpha_n |\nabla u^{\alpha_n}|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \alpha_n |\nabla v^{\alpha_n}|^2 dx - \int_{\Omega} \alpha_n \nabla u^{\alpha_n} \cdot \nabla v^{\alpha_n} dx. \end{aligned} \quad (197)$$

Όπως προαναφέρθηκε, η  $L^1$ - σύγκλιση του συντελεστή  $\alpha_n$  ενεργοποιεί την εγκυρότητα των βασικών οριακών διαδικασιών της θεωρίας ομογενοποίησης. Για μια πληρέστερη παρουσίαση της ανάλυσης σύγκλισης βλ. Παράγραφο 2.3.1, αλλά προφανώς οι ακόλουθες ενεργειακές συγκλίσεις ισχύουν

$$\int_{\Omega} \alpha_n |\nabla u^{\alpha_n}|^2 dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \alpha |\nabla u^\alpha|^2 dx \quad (198)$$

$$\int_{\Omega} \alpha_n |\nabla v^{\alpha_n}|^2 dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \alpha |\nabla v^\alpha|^2 dx. \quad (199)$$

Παίρνοντας το όριο στην (197) και αξιοποιώντας τις (198), (199), βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} J(\alpha_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \alpha_n |\nabla u^{\alpha_n}|^2 dx + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \alpha_n |\nabla v^{\alpha_n}|^2 dx - \langle g, f \rangle_{\mathcal{A} \times \mathcal{B}} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \alpha |\nabla u^\alpha|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \alpha |\nabla v^\alpha|^2 dx - \int_{\Omega} \alpha \nabla u^\alpha \cdot \nabla v^\alpha dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \alpha |\nabla(u^\alpha - v^\alpha)|^2 dx = J(\alpha), \end{aligned} \quad (200)$$

όπου κάνουμε ξανά χρήση της ταυτότητας *Green* για την ισοδύναμη έκφραση του επιφανειακού όρου.

Στη συνέχεια, θεωρούμε την ανάλυση

$$\int_{\Omega} \omega_n |D\alpha_n| = \int_{\Omega} (\omega_n - \omega) |D\alpha_n| + \int_{\Omega} \omega |D\alpha_n|. \quad (201)$$

Θέτουμε  $\mathcal{Q} := \Omega \setminus \Omega_\delta$ . Τότε, η σύγκλιση (194) συνεπάγεται τη σημειακή σύγκλιση της  $\omega_n$  (στο  $\omega$ ) στο  $\mathcal{Q}$ . Οι συναρτήσεις  $\omega_n, \omega$  είναι ομοιόμορφα συνεχείς στο συμπαγές σύνολο  $\mathcal{Q}$ . Εκτός αυτού, δεδομένου ότι οι νόρμες  $\int_{\Omega} |\nabla \omega_n|^{2+2\varepsilon} dx$  είναι ομοιόμορφα φραγμένες, (191), από το Θεώρημα *Morrey* [5] συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία  $\omega_n$  αποτελεί οικογένεια ισοσυνεχών συναρτήσεων. Αυτές οι ιδιότητες εύκολα επαληθεύουν ότι  $\omega_n \xrightarrow{\text{ομοιόμορφα}} \omega$  στο  $\mathcal{Q}$ .

Από την ομοιόμορφη σύγκλιση της  $\omega_n$  παίρνουμε

$$\left| \int_{\Omega} (\omega_n - \omega) |D\alpha_n| \right| \leq \int_{\mathcal{Q}} |\omega_n - \omega| |D\alpha_n| \underset{n \geq N(\varepsilon)}{\leq} \varepsilon \int_{\mathcal{Q}} |D\alpha_n| \leq \varepsilon \tilde{C} \quad (\forall \varepsilon > 0 \text{ και } N(\varepsilon) \in \mathbb{N}). \quad (202)$$

Επιπλέον, η σύγκλιση  $D\alpha_n \rightharpoonup D\alpha$  είναι τουλάχιστον έγκυρη για την  $BV - w^*$  τοπολογία, η οποία και διασφαλίζει την κάτω ημισυνέχεια της ολικής μάζας  $\int_{\Omega} |D\alpha| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |D\alpha_n|$ .

Βάσει των  $\omega(x) \in C^{0,\gamma}(\Omega) \subset C_b(\Omega)$  [5] και  $0 < \beta \leq \omega(x) \leq 1$ , συμπεραίνουμε ότι

$$\int_{\Omega} \omega |D\alpha| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \omega |D\alpha_n|. \quad (203)$$

Σημειώτεον ότι στην ευνοϊκότερη περίπτωση όπου το  $D\alpha_n$  συγκλίνει στο  $D\alpha$  με την έννοια της *intermediate* σύγκλισης [5], ισχύει η ισότητα  $\int_{\Omega} \omega |D\alpha| = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \omega |D\alpha_n|$ .



Τέλος, από την κάτω ημισυνέχεια της  $L^{2+2\varepsilon}(\Omega)$ - νόρμας στην ασθενή τοπολογία έχουμε ότι

$$\frac{\mu_\omega}{2} \int_{\Omega} |\nabla \omega|^{2+2\varepsilon} dx \leq \frac{\mu_\omega}{2} \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla \omega_n|^{2+2\varepsilon} dx. \quad (204)$$

Λαμβάνοντας υπόψιν τα αποτελέσματα σύγκλισης (200), (202) και κάτω ημισυνέχειας (203), (204) καταλήγουμε στην έκφραση

$$\inf_{(\alpha', \omega')} \mathcal{J}(\alpha', \omega') = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{J}(\alpha_n, \omega_n) \quad (205)$$

$$\begin{aligned} &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} J(\alpha_n) + \frac{\mu}{2} \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \omega_n |D\alpha_n| + \frac{\mu_\omega}{2} \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla \omega_n|^{2+2\varepsilon} dx \\ &\geq J(\alpha) + \frac{\mu}{2} \liminf_{n \rightarrow \infty} \left( \int_{\Omega} (\omega_n - \omega) |D\alpha_n| + \int_{\Omega} \omega |D\alpha_n| \right) + \frac{\mu_\omega}{2} \int_{\Omega} |\nabla \omega|^{2+2\varepsilon} dx \\ &\geq J(\alpha) + \frac{\mu}{2} \int_{\Omega} \omega |D\alpha| + \frac{\mu_\omega}{2} \int_{\Omega} |\nabla \omega|^{2+2\varepsilon} dx = \mathcal{J}(\alpha, \omega). \end{aligned} \quad (206)$$

Επομένως, το πρόβλημα ελαχιστοποίησης  $\inf_{(\alpha', \omega')} \mathcal{J}(\alpha', \omega')$  επιδέχεται ως λύση το όριο της ακολουθίας ελαχιστοποίησης

$$\inf_{(\alpha', \omega')} \mathcal{J}(\alpha', \omega') = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{J}(\alpha_n, \omega_n) = \mathcal{J}(\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n, \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n) = \mathcal{J}(\alpha, \omega). \quad (207)$$

□

Επισημαίνουμε εδώ πως η ίδια κατάσταση συναντάται στην περίπτωση των τμηματικά σταθερών αγωγιμων προφίλ. Αναλυτικότερα, χωρίς βλάβη της γενικότητας, τα αποτελέσματα του Θεωρήματος 3.1 ισχύουν ακόμα και όταν τα μέλη της ελαχιστοποιητικής ακολουθίας  $\alpha_n$  ανήκουν στον χώρο  $BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega, \{b, c\})$ .

### 3.3 Η δυϊκή μέθοδος αντιστροφής *SGTV*

Είναι γνωστό [8] ότι όταν  $\alpha \in BV(\Omega)$ , το μέτρο  $D\alpha$  μπορεί να εκφραστεί σε άθροισμα ενός κανονικού και ενός κάθετου μέτρου, δηλ.,

$$D\alpha = \nabla \alpha dx + D^s \alpha, \quad (208)$$

όπου  $dx$  το  $d$ - Lebesgue μέτρο,  $\nabla \alpha dx$  το απόλυτα συνεχές ( $\nabla \alpha(x) = \frac{d(D\alpha)}{dx}(x) \in L^1(\Omega)$ ) και  $D^s \alpha$  το κάθετο τμήμα του με  $D^s \alpha \perp dx$  (βλ. Ενότητα 1.2).

Κεντρικό άξονα στην αριθμητική διαχείριση της προτεινόμενης διαδικασίας αντιστροφής αποτελεί η επιβολή της (σχεδόν) εξάλειψης της βοηθητικής συνάρτησης  $\omega(x)$  στο φορέα των ασυνεχειών  $S_\alpha$  (Σχόλιο 2.7). Τότε, ο *TV*- όρος (177) επιδέχεται την αριθμητική εκδοχή

$$TV_{(d)}^h = \mu \int_{\Omega} \omega \sqrt{|\nabla \alpha|^2 + \varepsilon^h} dx \quad (209)$$

με  $\varepsilon^h$  θετική συνάρτηση του χαρακτηριστικού πλάτους  $h$  που ικανοποιεί  $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon^h = 0$ , δρώντας ως ομαλοποιητής για τη φραγμένη κύμανση [42]. Έτσι, ορίζουμε το διακριτοποιημένο ανάλογο του προβλήματος ελαχιστοποίησης (207)

$$\inf_{(\alpha, \omega)} \mathcal{J}_h(\alpha, \omega) = \inf_{(\alpha, \omega)} \left[ J(\alpha) + \frac{1}{2} \mu \int_{\Omega} \omega \sqrt{|\nabla \alpha|^2 + \varepsilon^h} dx + \frac{1}{2} \mu_\omega \int_{\Omega} |\nabla \omega|^{2+2\varepsilon} dx \right] \quad (210)$$

με  $(\alpha, \omega) \in \mathcal{X}_{\alpha, \delta} \times (W^{1,2+2\varepsilon}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega, [\beta, 1]))$ . Το συναρτησιακό στην (210) αποτελεί τον στόχο της ελαχιστοποίησης. Παρά τον πρωταρχικό κύριο σκοπό μας να χρησιμοποιήσουμε κανονικοποίηση φραγμένης κύμανσης, θεωρούμε επιπλέον, για λόγους σύγκρισης, την κλασική επιλογή της  $H^1(\Omega)$ - ημινόρμας στη θέση του  $TV$ - όρου (177), δηλ., την *Tikhonov* κανονικοποίηση

$$\mathcal{R}_{(d)} := \mu \int_{\Omega} \omega |\nabla \alpha|^2 dx, \quad (211)$$

που αντιστοιχεί στο συναρτησιακό ελαχιστοποίησης (τύπου) *Tikhonov*

$$\mathcal{J}_h(\alpha, \omega) = J(\alpha) + \frac{1}{2} \mu \int_{\Omega} \omega |\nabla \alpha|^2 dx + \frac{1}{2} \mu_\omega \int_{\Omega} |\nabla \omega|^{2+2\varepsilon} dx \quad (212)$$

με  $(\alpha, \omega) \in (H^1(\Omega) \cap (L^\infty(\Omega, [b, c]))) \times (W^{1,2+2\varepsilon}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega, [\beta, 1]))$ .

Στην πραγματικότητα, ενδιαφερόμαστε να διεξάγουμε μια παράλληλη μελέτη της ποιότητας των ανακατασκευών και με τις δύο παραπάνω επιλογές, με στόχο την ανάδειξη του πλεονεκτήματος της χρήσης  $TV$ - κανονικοποίησης κυρίως όσον αφορά τα αναζητούμενα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των λύσεων. Γι' αυτό το σκοπό, η αντιστροφή επιχειρείται και για τα δύο συναρτησιακά, στην (210) και (212), αλλά επιλέγουμε να παρουσιάσουμε απλώς τα αποτελέσματα ανακατασκευής που αποδίδουν εντονότερα την απόκλιση μεταξύ των δύο αυτών σχημάτων (βλ. Παράγραφο 3.4.1). Στα επόμενα, χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς  $\mathcal{R}_{(d)}$  και  $TV_{(d)}^h$ , αντίστοιχα, για τη μέθοδο της *Tikhonov*, (211), και της  $TV$ , (209), ομαλοποίησης που λαμβάνει μέρος στην αντιστροφή.

Συνεχίζουμε με την εφαρμογή του δυϊκού σχήματος κανονικοποίησης για την επίλυση του αντίστροφου προβλήματος της αγωγιμότητας σε πειράματα διαφορετικής πολυπλοκότητας. Αναπτύσσουμε την αντίστοιχη αριθμητική μέθοδο αντιστροφής “*Self-Guided TV – inversion*”, και αναφέρεται ως *SGTV* [75], η οποία ενεργοποιεί επακριβώς το διπλό μηχανισμό ελέγχου - που εκφράζεται από τους όρους (178) και (209) - στο ζεύγος  $(\alpha, \omega)$ .

Η υπολογιστική διαδικασία ξεκινά με μια αρχική εκτίμηση  $(u^0, v^0, \alpha^0, \omega^0)$ . Σημειωτέον ότι, στο τρέχον αριθμητικό πλαίσιο, η *SGTV* αποδεικνύεται σχεδόν αδιάφορη και εξίσου αποδοτική όσον αφορά την αρχική επιλογή  $(u^0, v^0)$ . Έτσι, ως αρχική προσέγγιση για τα πεδία  $(u, v)$  μπορούμε να επιλέξουμε είτε την τετριμμένη περίπτωση  $(u^0, v^0) = (0, 0)$  είτε την περίπτωση όπου οι  $(u^0, v^0)$  είναι οι λύσεις των διαφορικών εξισώσεων (179)-(180) για  $\alpha = \alpha^0$ . Για συγκεκριμένο βήμα  $h \in (0, 1)$ , ομαλοποιητικές παραμέτρους  $\varepsilon^h, \varepsilon$  και κατάλληλες παραμέτρους κανονικοποίησης  $\mu, \mu_\omega$ , η *SGTV* υλοποιεί τη μέθοδο εσωτερικού σημείου *primal-dual barrier* από το πακέτο λογισμικού βελτιστοποίησης IPOPT [59, 60], για να διασφαλίσει τα άνω και κάτω φράγματα της δυϊκής διανυσματικής μεταβλητής  $d(x) = (\alpha(x), \omega(x))$ , ενώ χρησιμοποιεί ακριβείς Εσσιανές προκειμένου να επιτύχει ταχύτερη σύγκλιση, σε μία μόλις επανάληψη.

### 3.4 Εφαρμογές

Ερευνούμε την αποδοτικότητα της προτεινόμενης μεθόδου αντιστροφής με ένα ζεύγος επιφανειακών δεδομένων (κατά μήκος ολόκληρου του συνόρου) στα προβλήματα του μονού και διπλού εγκλεισμού της Ενότητας 2.6. Στη συνέχεια, εξετάζουμε μια πολυπλοκότερη περίπτωση ανακατασκευής υπό το πλαίσιο των  $N \geq 1$  δεδομένων.

Θεωρούμε τις πειραματικές πλατφόρμες αντιστροφής  $\{\Omega_1, D_1\}$ ,  $\{\Omega_2, D_{\{2,3\}}\}$ , όπως ακριβώς ορίζονται στις (151)-(152) και (172)-(173), με τα αντίστοιχα  $\hat{\alpha}$ - προφίλ (153), (174).

Για τη διακριτοποίηση των υπολογιστικών πλεγμάτων  $\Omega_1, \Omega_2$  χρησιμοποιούμε το *Triangle*

[62, 63] και για τη διακριτοποίηση των τελεστών  $\mathcal{J}_h$  υλοποιούμε τη μέθοδο των  $\mathcal{P}_1$  πεπερασμένων στοιχείων. Στον Πίνακα 3.1 παρακάτω παραθέτονται το χαρακτηριστικό πλάτος ( $h$ ) της διακριτοποίησης μαζί με τον αριθμό των στοιχείων (*elements*) και των κόμβων (*nodes*) κάθε γεωμετρίας (“Single inclusion problem”, Παράγραφος 3.4.1, “Double inclusion problem”, Παράγραφος 3.4.2).

Ακολουθώντας την προσέγγιση που παρουσιάστηκε στην Ενότητα 2.6, δίνουμε εδώ τη φόρμουλα επιλογής του  $\omega^0$  – προφίλ:

$$\omega^0 = \begin{cases} \beta, & \text{αν } |r_i - \rho_D| \leq \frac{\ell}{2}, \\ 1, & \text{διαφορετικά.} \end{cases} \quad (213)$$

Υπενθυμίζουμε ότι η αρχική δομή  $\omega^0$  αποτελεί τον ρυθμιστή της ζώνης αβεβαιότητας, δηλαδή της περιοχής όπου πιθανώς εντοπίζεται το *jump set* της  $\alpha(x)$  [66]. Κατ’ αντιστοιχία με την (154), η περιοχή όπου  $\omega^0(x) = 1$  αναπαριστά μια ομογενή επιφάνεια, ενώ η περιοχή  $\omega^0(x) = \beta$  ορίζει τη ζώνη στην οποία πιθανώς βρίσκεται η κρυμμένη διεπιφάνεια.

Πίνακας 3.1 : Delaunay Triangulations.

Mesh case	Single Inclusion			Double Inclusion		
	<i>strong eccentric</i>	<i>mild eccentric</i>	<i>concentric</i>			
$h$	0.220	0.215	0.210	0.541	0.266	0.132
Elements	1818	1798	1756	956	3712	14346
Nodes	950	940	919	509	1917	7294

Θέτουμε τις σταθερές ομαλοποίησης στην (178) και (209)  $\varepsilon = \varepsilon^h = 10^{-4}$ . Για τον  $\omega^0$  – δείκτη ασυνέχειας επιλέγουμε την τιμή  $\beta = 10^{-6}$ , ενώ ως αρχική προσέγγιση για την αγωγιμότητα ορίζουμε τη σταθερή συνάρτηση  $\alpha^0 = 2.5$  σε ολόκληρο το χωρίο  $\Omega_{\{1,2\}} \setminus \Omega_{\{1,2\}\delta}$ . Σε κάθε αριθμητικό παράδειγμα, η αντιστροφή επιχειρείται για ενδεικτικώς μεγάλες τιμές της μεταβλητής  $\ell$ .

Επισημαίνουμε σε αυτό το σημείο πως στην τρέχουσα έρευνα παραλείπουμε την εκτενή παρουσίαση της μελέτης ευαισθησίας των λύσεων ως προς το επίπεδο διαμόρφωσης  $\ell$ , καθώς στις αριθμητικές δοκιμές παρατηρήθηκε ότι για σχετικά μικρή αβεβαιότητα ( $\ell < 0.4$ ) τα αποτελέσματα ανακατασκευής είναι εξαιρετικά ακριβή και σε πλήρη ταύτιση με την πραγματική λύση ( $\hat{\alpha}$ ). Επομένως, στις αριθμητικές εφαρμογές 3.4.1-3.4.2, η *SGTV*- ανακατασκευή περιγράφεται μόνο για τα υψηλότερα - κάθε γεωμετρίας - επίπεδα αβεβαιότητας ( $\ell \geq 0.4$ ).

### 3.4.1 Το πρόβλημα του μονού εγκλεισμού

Σε αυτήν την κατηγορία πειραμάτων επιχειρούμε την *SGTV*- ανακατασκευή του εγκλεισμού  $D_1$  για τρεις διαφορετικές υλοποιήσεις των συντεταγμένων κέντρου του  $(x_{D_1}, y_{D_1})$  (“*strong eccentricity problem*”, Πρόβλημα 3.4.1.1, “*mild eccentricity problem*”, Πρόβλημα 3.4.1.2, “*concentric problem*”, Πρόβλημα 3.4.1.3). Διακριτοποιούμε το υπολογιστικό χωρίο  $\Omega_1$  ( $\rho_{\Omega_1} = 2, \rho_{D_1} = 1$ ) σε πολικές συντεταγμένες  $(\rho, \varphi)$  χρησιμοποιώντας  $\mathcal{P}_1$  πεπερασμένα στοιχεία. Οι παράμετροι της ανακατασκευής δίνονται στον Πίνακα 3.2.

Όλοι οι πίνακες αποτελεσμάτων (βλ. Παράγραφο 3.4.5) αναγράφουν το  $\omega^0$  – επίπεδο αβεβαιότητας ( $\ell$ ) μαζί με τις βέλτιστες παραμέτρους κανονικοποίησης ( $\mu$ ) και ( $\mu_\omega$ ), τις τιμές της λύσης ( $\alpha^*, \omega^*$ ) με κανονικοποίηση φραγμένης κύμανσης ( $TV_{(d)}^h$ ) και - όπου εφαρμόζεται η σύγκριση - με *Tikhonov* κανονικοποίηση ( $\mathcal{R}_{(d)}$ ). Οι μεταβλητές ( $\alpha_{D_1}^*, \alpha_{\text{out}}^*$ ) αναπαριστούν τις ομοιόμορφες τιμές της λύσης  $\alpha^*$  στον εγκλεισμό  $D_1$  και στο εξωτερικό χωρίο  $\Omega_1 \setminus D_1$  αντίστοιχα, ενώ με ( $\omega_{\min}^*, \omega_{\max}^*$ ) δηλώνονται οι ακραίες τιμές της δυϊκής μεταβλητής  $\omega^*$  (ως προς το εύρος τιμών  $\omega \in [\beta, 1]$ ).

Σημειώνουμε, τέλος, ότι οι αναγραφόμενες τιμές κανονικοποίησης συνίστανται σε εκείνες τις τιμές  $\mu, \mu_\omega$  που αποδίδουν τη βέλτιστη λύση ανακατασκευής. Η επιλογή αυτών των τιμών καθορίζεται βάσει της τροποποιημένης αρχής ασυμφωνίας του *Morozov* (*modified Morozov principle*) [72, 73], «ζυγίζοντας» τη συνεισφορά των όρων (209) και (178). Υιοθετούμε την παραπάνω προσέγγιση για να αποκτήσουμε κατάλληλους εκτιμητές ομαλοποίησης και έπειτα η τελική επιλογή βελτιστοποιείται από ένα δοκιμαστικό εύρος τιμών πολύ κοντά στις σταθερές *Morozov*.

### 3.4.1.1 Ισχυρά έκκεντρο πρόβλημα

Επιλέγουμε  $(x_{D_1}, y_{D_1}) = (\frac{\sqrt{5}-\sqrt{17}}{2}, 0)$  και το ζεύγος αναλυτικών δεδομένων (158).

Η Εικόνα 3.2a απεικονίζει το αρχικό ζεύγος  $(\alpha^0, \omega^0)$  και τις αντίστοιχες βέλτιστες λύσεις  $(\alpha^*, \omega^*)_{TV_{(d)}^h}$  και  $(\alpha^*, \omega^*)_{\mathcal{R}_{(d)}}$  για την υψηλότερη τιμή αβεβαιότητας  $\ell = 0.6$  ως προς  $h = 0.220$ .

### 3.4.1.2 Ήπια έκκεντρο πρόβλημα

Θέτουμε  $(x_{D_1}, y_{D_1}) = (-\frac{1}{3}, 0)$  και  $(\hat{f}, \hat{g})$  όπως στην (162).

Η Εικόνα 3.2b περιγράφει τις υπολογιστικές λύσεις  $(\alpha^*, \omega^*)_{TV_{(d)}^h}$  και  $(\alpha^*, \omega^*)_{\mathcal{R}_{(d)}}$  για το  $\omega^0$ - προφίλ:  $\ell = 0.6$  και το χαρακτηριστικό πλάτος  $h = 0.215$ .

### 3.4.1.3 Ομόκεντρο πρόβλημα

Εξετάζουμε την πιλοτική περίπτωση  $(x_{D_1}, y_{D_1}) = (0, 0)$  με τα επιφανειακά δεδομένα (156).

Η Εικόνα 3.2c παρουσιάζει τη βέλτιστη λύση  $(\alpha^*, \omega^*)_{TV_{(d)}^h}$  για το  $\omega^0$ - προφίλ:  $\ell = 0.6$  ως προς  $h = 0.210$ .

## 3.4.2 Το πρόβλημα του διπλού εγκλεισμού

Συνεχίζουμε με την *SGTV*- ανακατασκευή των δύο μη συνεκτικών εγκλεισμών  $D_2, D_3$   $((x_{D_2}, y_{D_2}) = (-1.34, 0), \rho_{D_2} = 0.9$  και  $(x_{D_3}, y_{D_3}) = (1.41, 0), \rho_{D_3} = 1)$  στο ορθογώνιο χωρίο  $\Omega_2 = [-3, 3]^2$ . Κατασκευάζουμε ένα ζεύγος δεδομένων  $(\hat{f}, \hat{g})$ , όπως ακριβώς περιγράφεται στην Παράγραφο 2.6.5.

Διευρύνουμε ελαφρώς προς το κέντρο την  $\Omega_{2_\delta}$  ζώνη, κατά  $\delta = 0.4$  και  $\delta = 0.8$  αντίστοιχα κατά μήκος των κάθετων και οριζόντιων πλευρών του  $\Omega_2$ . Επιλέγουμε μια «μέτρια» τιμή πολυπλοκότητας,  $\ell = 0.41$ , και μια «μεγάλη»,  $\ell = 0.48$ , που σχηματίζουν αντίστοιχα μια συνεκτική ζώνη αβεβαιότητας.

Για το σχηματισμό  $\ell = 0.41$  παρουσιάζουμε τη βέλτιστη λύση σε τρία πλέγματα διαδοχικής πυκνότητας. Τα χαρακτηριστικά πλάτη  $h$  και ο αριθμός των στοιχείων και κόμβων κάθε διαμερισμού αναγράφονται στον Πίνακα 3.1.

Για το μέγιστο διαταραγμένο  $\omega^0$ - προφίλ:  $\ell = 0.48$ , θεωρούμε, επιπλέον, ενθόρυβα δεδομένα της μορφής

$$(\tilde{f}, \tilde{g}) = (\hat{f} + |\hat{f}| \cdot \mathcal{R}_{\hat{f}} \cdot \theta, \hat{g}),$$

όπου  $\mathcal{R}_{\hat{f}}$  όπως στην (171) και  $\theta$  το ποσοστό θορύβου. Επαναλαμβάνουμε την αντιστροφή για τα ποσοστά  $\theta = \{0\%, 5\%, 8\%\}$ .

Στην Εικόνα 3.3a παρουσιάζουμε την υπολογιστική λύση  $(\alpha^*, \omega^*)_{TV_{(d)}^h}$  σε κάθε διακριτοποίηση  $\{h, h/2, h/4\}$  για το μέτριο επίπεδο αβεβαιότητας  $\ell = 0.41$ . Κατόπιν, η Εικόνα

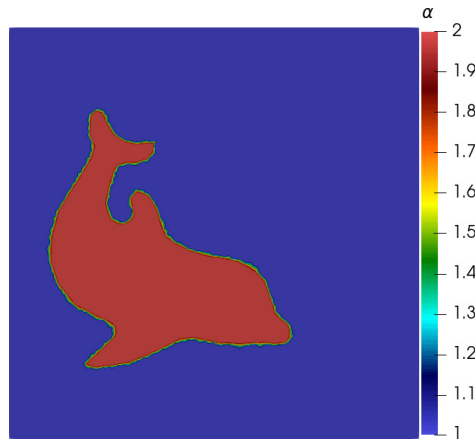
3.3b περιγράφει τη λύση ανακατασκευής  $(\alpha^*, \omega^*)_{TV_{(d)}^h}$  καθώς το επίπεδο θορύβου  $\theta$  αυξάνεται, για την υψηλότερη τιμή  $\ell = 0.48$  και  $h = 0.266$ . Συνοψίζουμε τα αριθμητικά αποτελέσματα στον Πίνακα 3.3.

### 3.4.3 Το πρόβλημα “Dolphin”

Προχωρούμε στην ιδίομορφη περίπτωση όπου ο εγκλεισμός απεικονίζει ένα δελφίνι. Η υπολογιστική σχεδίαση της γεωμετρίας «δελφίνι», που αναπαρίσταται από τον εγκλεισμό  $D_4$ , πραγματοποιείται μέσω της πλατφόρμας λογισμικού ανοιχτού κώδικα FEniCS [74]. Θεωρούμε την αγωγή ορθογώνια περιοχή  $\Omega_3$  με μήκος πλευράς  $L = 0.8$  και κέντρο  $(0.6, 0.53)$  και τοποθετούμε το κέντρο του εγκλεισμού  $D_4$  στο σημείο  $(x_{D_4}, y_{D_4}) = (0.48, 0.49)$ . Υποθέτουμε ότι το αναζητούμενο προφίλ αγωγιμότητας έχει τη μορφή (βλ. Εικόνα 3.1)

$$\hat{\alpha} := \alpha(x, y) = \begin{cases} 2, & (x, y) \in D_4, \\ 1, & (x, y) \in \Omega_3 \setminus D_4. \end{cases} \quad (214)$$

Το υπολογιστικό πλέγμα, που ορίζεται από το εξωτερικό ορθογώνιο με συντεταγμένες κορυφών  $\{(0.2, 0.93), (1, 0.93), (1, 0.13), (0.2, 0.13)\}$ , διακριτοποιείται μέσω του *Triangle* [62, 63] και αποτελείται από 7684 στοιχεία και 4083 κόμβους με χαρακτηριστικό πλάτος  $h = 0.027$ . Για τη διακριτοποίηση των τελεστών  $\mathcal{J}_h$ , υλοποιούμε τη μέθοδο των  $\mathcal{P}_1$  πεπερασμένων στοιχείων κατασκευάζοντας  $N = \{1, 2\}$  ζεύγη συνθετικών δεδομένων  $(\hat{f}, \hat{g})$  σε ένα πυκνότερο πλέγμα.

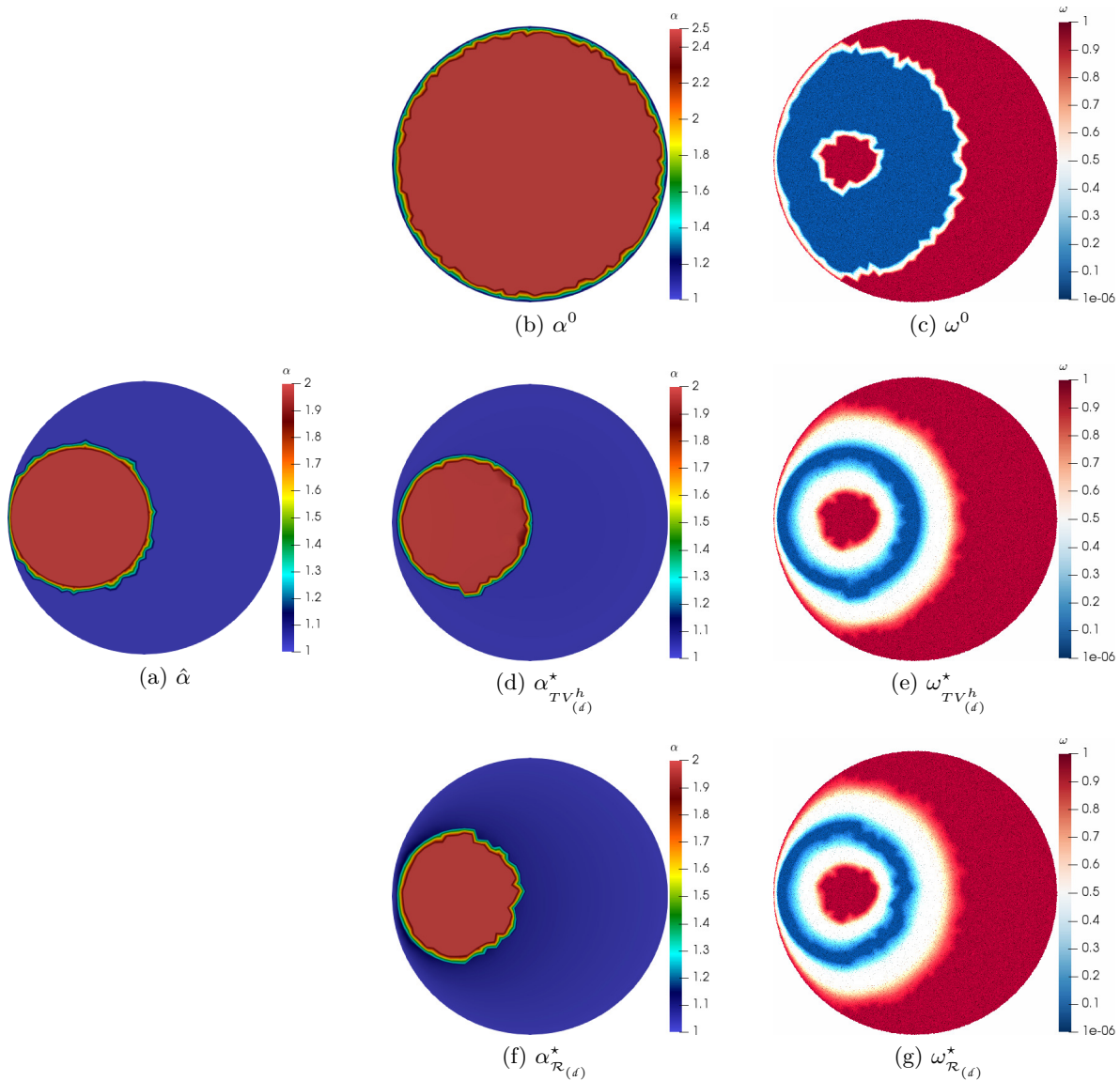


Εικόνα 3.1 : Στόχος ανακατασκευής  $\hat{\alpha}$ .

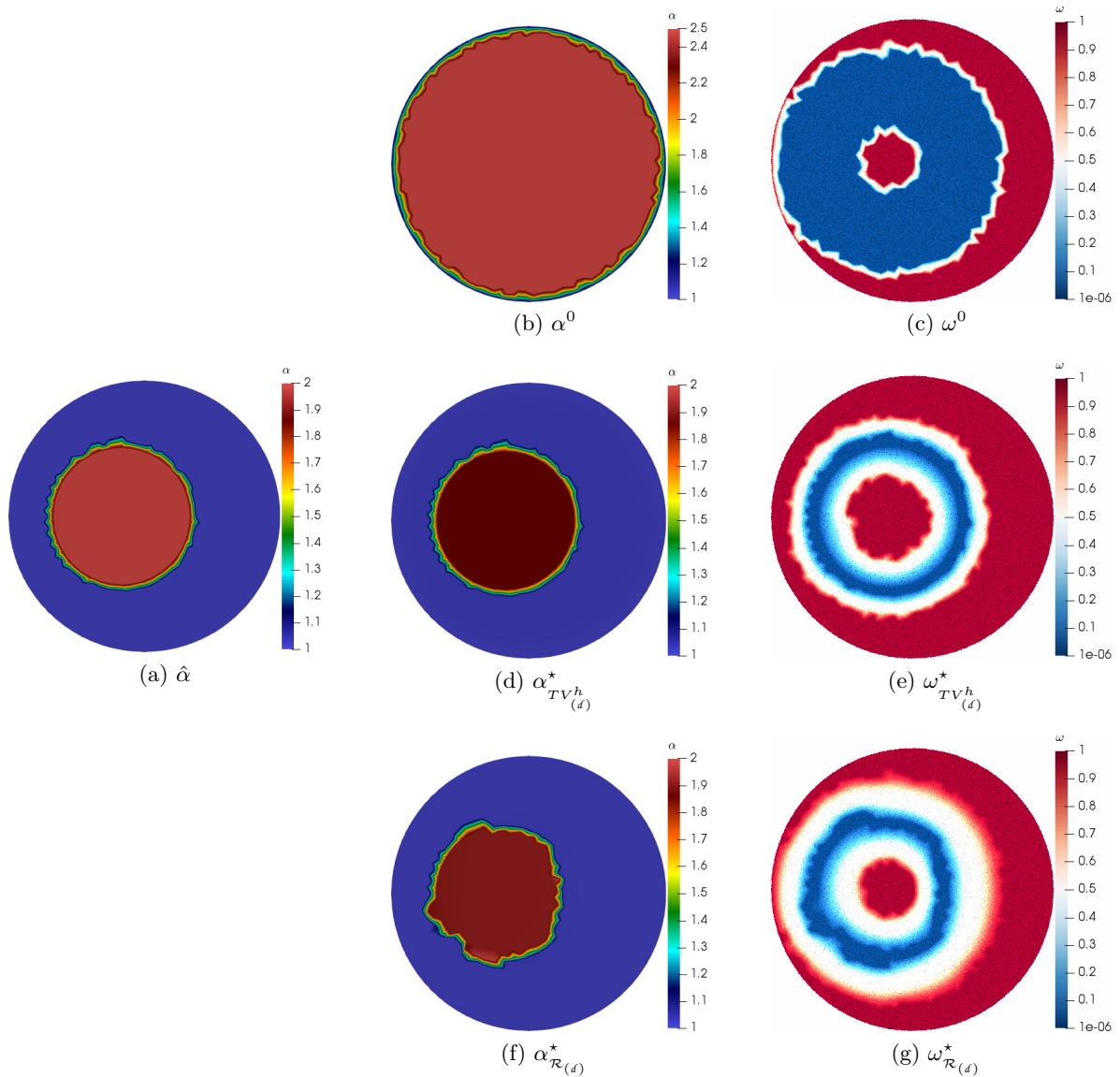
Διευρύνουμε προς το κέντρο την  $\Omega_{3_\delta}$  ζώνη θέτοντας  $\delta = \{0.05, 0.11, 0.15, 0.07\}$  κατά μήκος της αριστερής, πάνω, δεξιάς και κάτω αντίστοιχα πλευράς του  $\Omega_3$ . Ως αρχική προσέγγιση για την αγωγιμότητα ορίζουμε τη σταθερή συνάρτηση  $\alpha^0 = 2.5$  σε ολόκληρο το χωρίο  $\Omega_3 \setminus \Omega_{3_\delta}$ , ενώ επιλέγουμε  $\varepsilon = \varepsilon^h = 10^{-4}$  και  $\beta = 10^{-6}$ . Είναι σαφές ότι η πολυπλοκότητα της εν λόγω διάταξης - που προκύπτει εξαιτίας του σχήματος του εγκλεισμού - διαφοροποιεί το πρόβλημα ανακατασκευής από τις προηγούμενες περιπτώσεις που μελετήθηκαν. Συνεπώς, η αντιστροφή επιχειρείται σταδιακά, από το λιγότερα ως το μέγιστα διαταραγμένο  $\omega^0$ - επίπεδο αβεβαιότητας ( $\ell$ ).

Οι Εικόνες 3.4a-3.4c περιγράφουν τη λύση ανακατασκευής  $(\alpha^*, \omega^*)_{TV_{(d)}^h}$  με  $N = \{1, 2\}$  ζεύγη δεδομένων σε κάθε επίπεδο  $\ell = \{0.02, 0.05, 0.1\}$  ως προς  $h = 0.027$ . Σημειωτέον ότι στην περίπτωση της ελάχιστης δυνατής γεωμετρικής αβεβαιότητας (φυσική ανακατασκευή, βλ. Εικόνα 3.4a) απαιτείται ένα ζεύγος δεδομένων ( $N = 1$ ). Τα αριθμητικά αποτελέσματα συγκεντρώνονται στον Πίνακα 3.4.

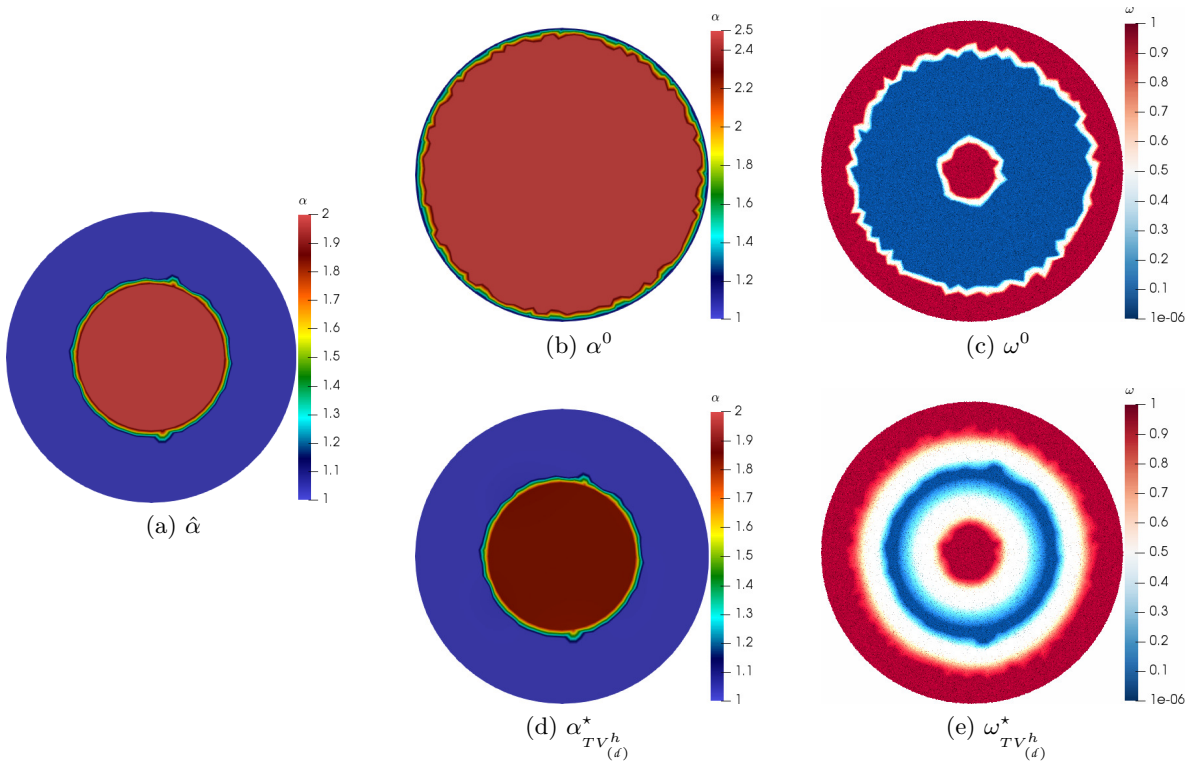
## 3.4.4 Εικόνες



Εικόνα 3.2a : Πρόβλημα 3.4.1.1. Ανακατασκευή ενός ισχυρά έκκεντρου εγκλεισμού. (a) Στόχος ανακατασκευής. (b) Αρχική προσέγγιση για την  $\alpha$ . (c) Επίπεδο αβεβαιότητας  $\omega^0$  για  $\ell = 0.6$ . (d)-(e) Βέλτιστη λύση ( $\alpha^*$ ,  $\omega^*$ ) με κανονικοποίηση φραγμένης κύμανσης. (f)-(g) Βέλτιστη λύση ( $\alpha^*$ ,  $\omega^*$ ) με *Tikhonov* κανονικοποίηση.

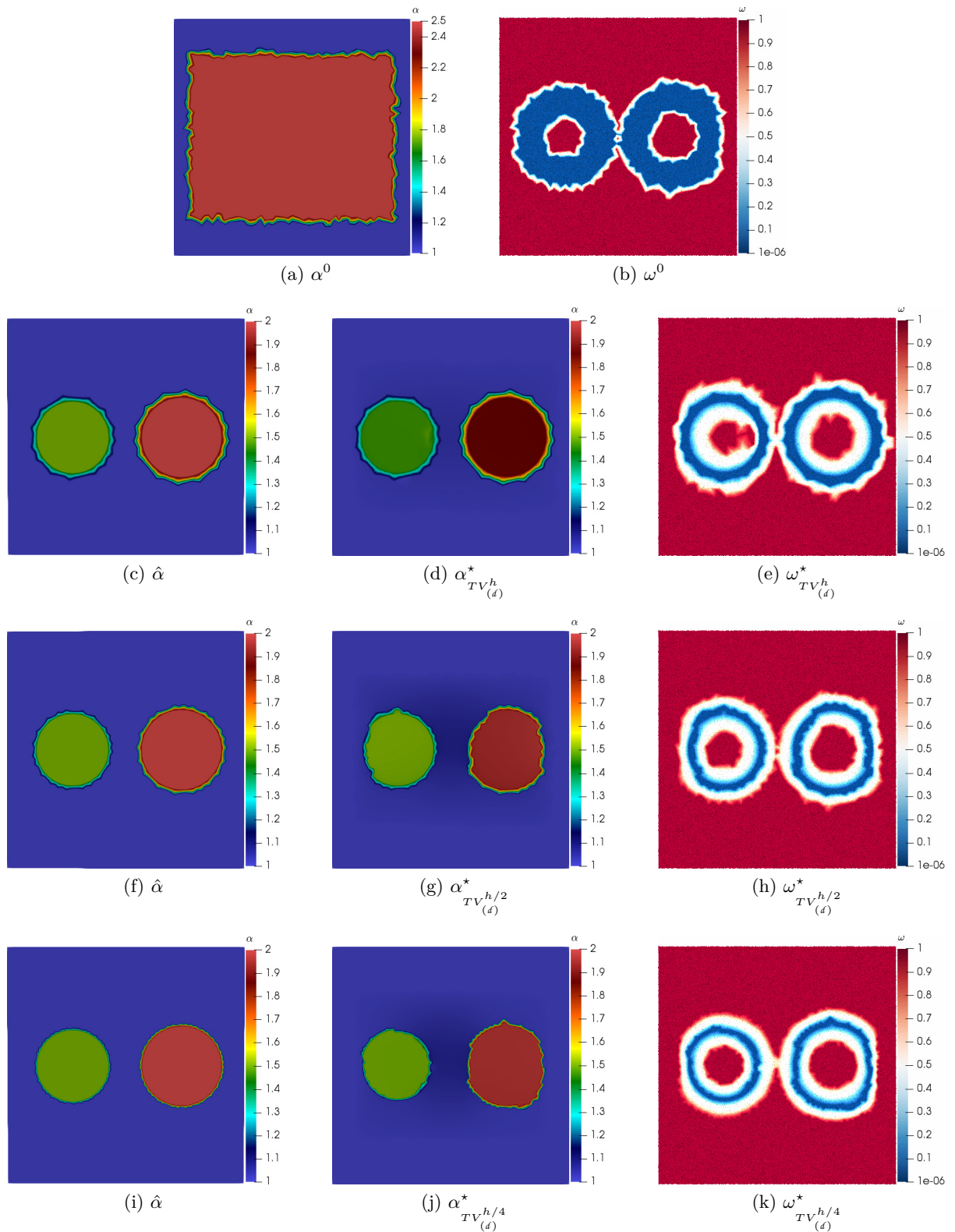


Εικόνα 3.2b : Πρόβλημα 3.4.1.2. Ανακατασκευή ενός ήπια έγκεντρου εγκλεισμού. (a) Στόχος ανακατασκευής. (b) Αρχική προσέγγιση για την  $\alpha$ . (c) Επίπεδο αβεβαιότητας  $\omega^0$  για  $\ell = 0.6$ . (d)-(e) Βέλτιστη λύση  $(\alpha^*, \omega^*)$  με κανονικοποίηση φραγμένης κύμανσης. (f)-(g) Βέλτιστη λύση  $(\alpha^*, \omega^*)$  με *Tikhonov* κανονικοποίηση.

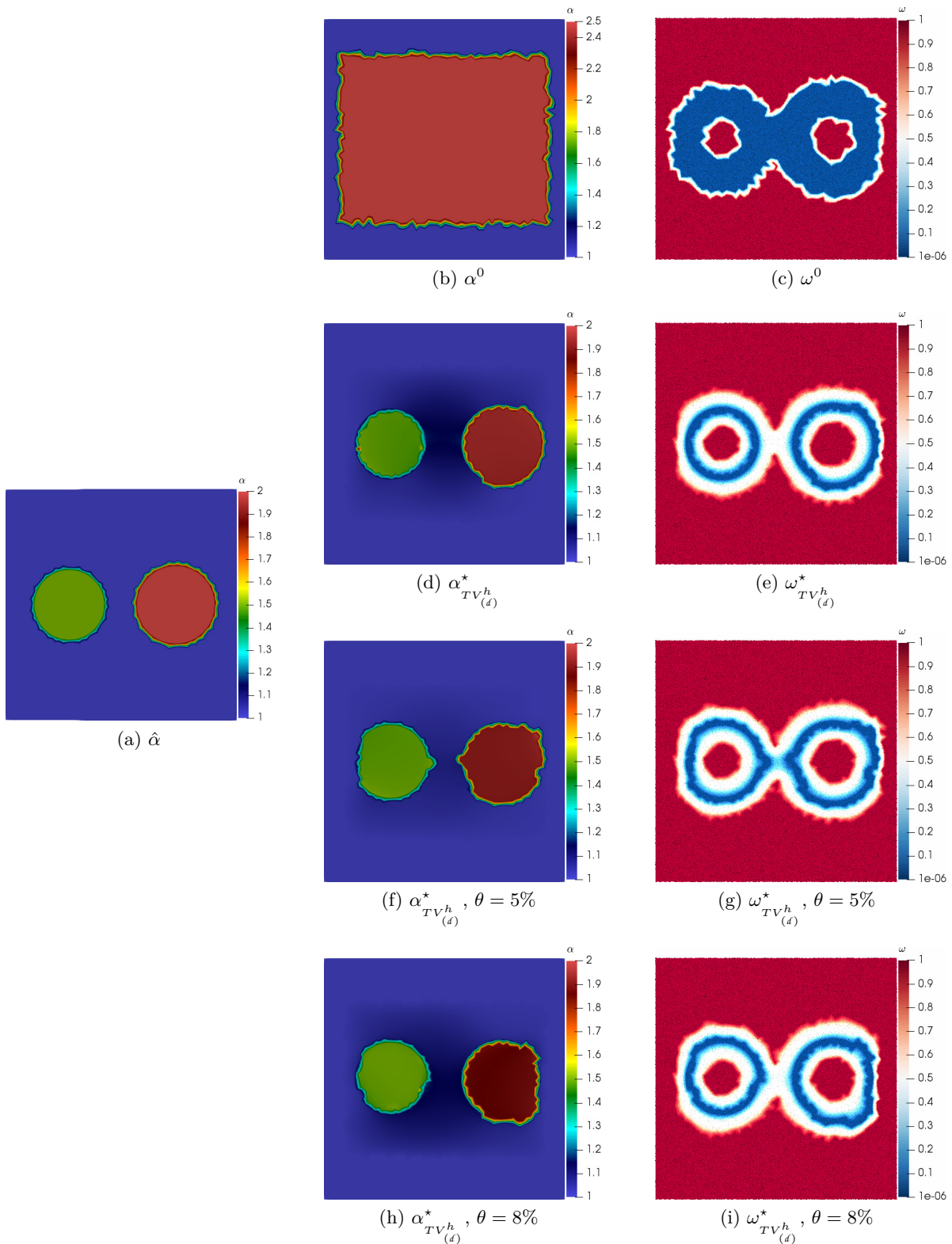


Εικόνα 3.2c : Πρόβλημα 3.4.1.3. Ανακατασκευή ενός ομόκεντρου εγκλεισμού. (a) Στόχος ανακατασκευής. (b) Αρχική προσέγγιση για την  $\alpha$ . (c) Επίπεδο αβεβαιότητας  $\omega^0$  για  $\ell = 0.6$ . (d)-(e) Βέλτιστη λύση ( $\alpha^*$ ,  $\omega^*$ ) με κανονικοποίηση φραγμένης κύμανσης.

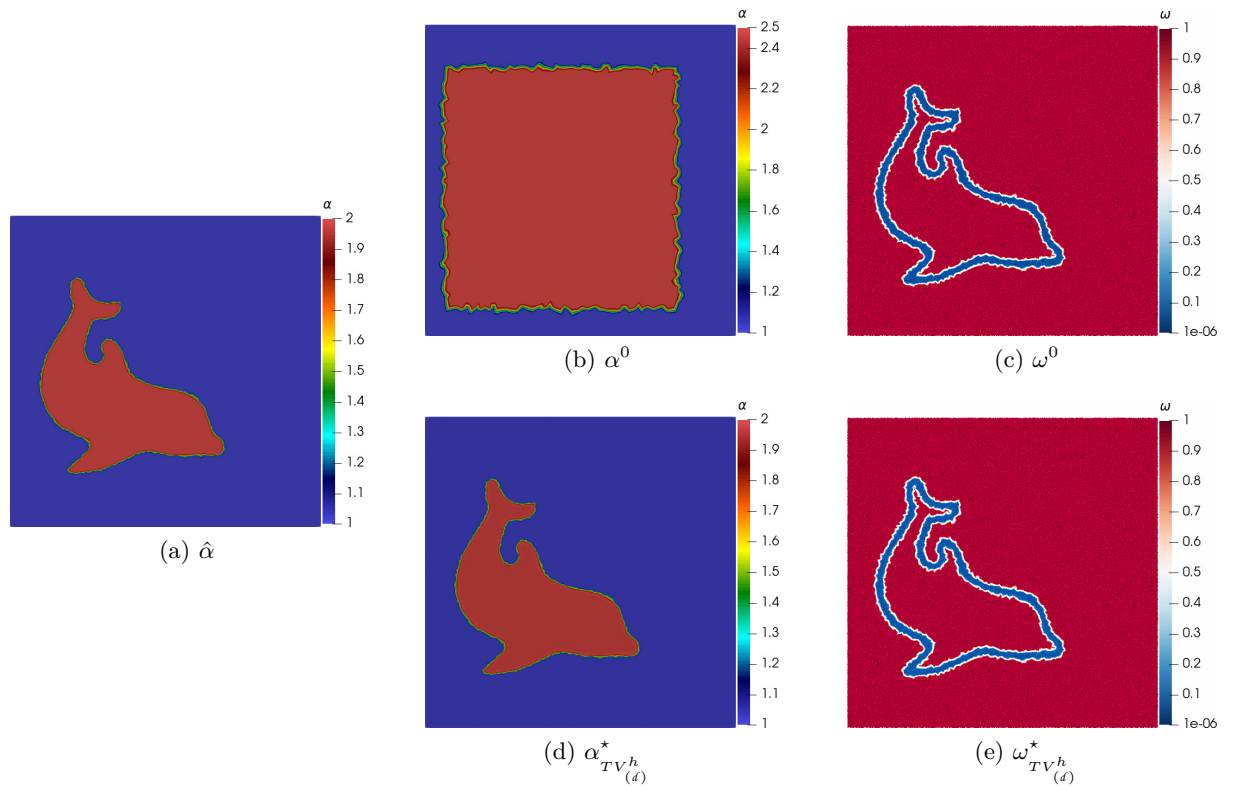




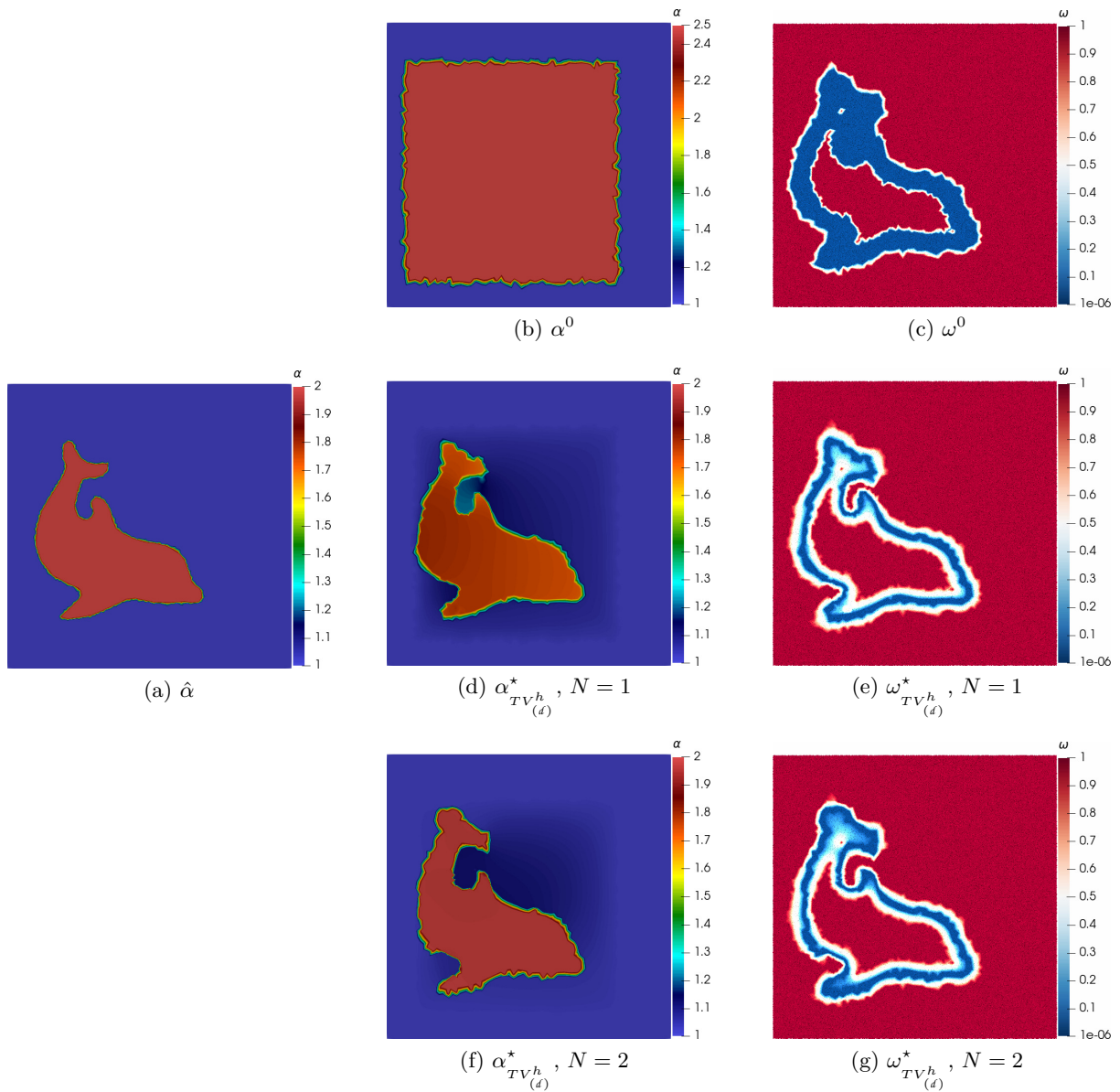
Εικόνα 3.3a : Πρόβλημα 3.4.2 για μέτρια αβεβαιότητα. Ανακατασκευή δύο εγκλεισμών σε επαναληπτική πύκνωση πλέγματος. (a) Αρχική προσέγγιση για την  $\alpha$ . (b) Επίπεδο αβεβαιότητας  $\omega^0$  για  $\ell = 0.41$ . Στόχος ανακατασκευής ( $\hat{\alpha}$ ) και βέλτιστη λύση ( $\alpha^*$ ,  $\omega^*$ ) ως προς (c)-(e)  $h$ , (f)-(h)  $h/2$ , (i)-(k)  $h/4$ .



Εικόνα 3.3b : Πρόβλημα 3.4.2 για μεγάλη αβεβαιότητα. Ανακατασκευή δύο εγκλεισμών με ένα ζεύγος ενθόρυβων δεδομένων. (a) Στόχος ανακατασκευής. (b) Αρχική προσέγγιση για την  $\alpha$ . (c) Επίπεδο αβεβαιότητας  $\omega^0$  για  $\ell = 0.48$ . Βέλτιστη λύση ( $\alpha^*$ ,  $\omega^*$ ) για (d)-(e)  $\theta = 0\%$ , (f)-(g)  $\theta = 5\%$ , (h)-(i)  $\theta = 8\%$ .

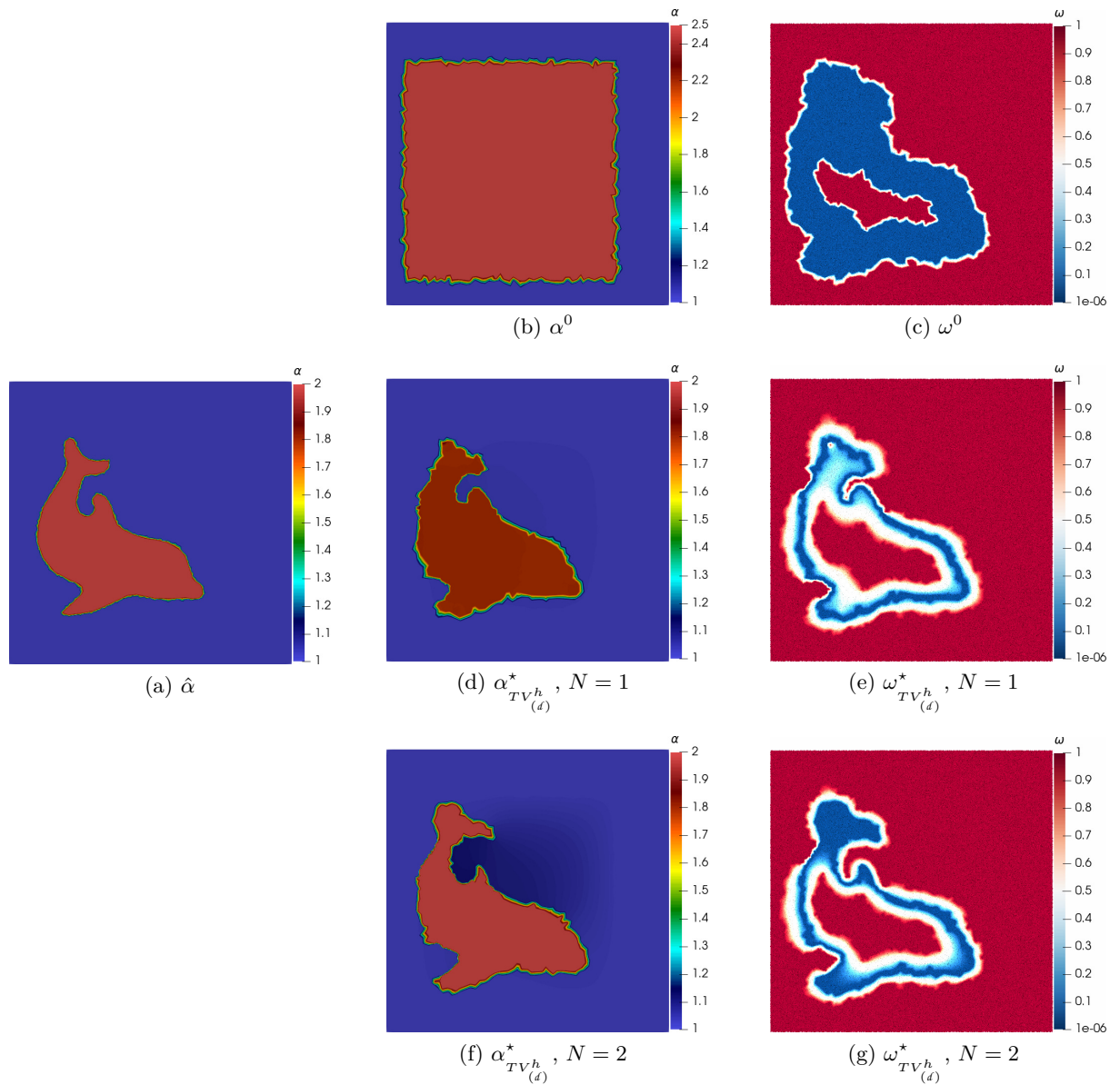


Εικόνα 3.4a : Πρόβλημα 3.4.3 για την ελάχιστη δυνατή γεωμετρική αβεβαιότητα. (a) Στόχος ανακατασκευής. (b) Αρχική προσέγγιση για την  $\alpha$ . (c) Επίπεδο αβεβαιότητας  $\omega^0$  για  $\ell = 0.02$ . (d)-(e) Βέλτιστη λύση  $(\alpha^*, \omega^*)$ .



Εικόνα 3.4b : Πρόβλημα 3.4.3 για μέτρια αβεβαιότητα. (a) Στόχος ανακατασκευής. (b) Αρχική προσέγγιση για την  $\alpha$ . (c) Επίπεδο αβεβαιότητας  $\omega^0$  για  $\ell = 0.05$ . Βέλτιστη λύση  $(\alpha^*, \omega^*)$  με (d)-(e)  $N = 1$ , (f)-(g)  $N = 2$  ζεύγη δεδομένων.





Εικόνα 3.4c : Πρόβλημα 3.4.3 για μεγάλη αβεβαιότητα. (a) Στόχος ανακατασκευής. (b) Αρχική προσέγγιση για την  $\alpha$ . (c) Επίπεδο αβεβαιότητας  $\omega^0$  για  $\ell = 0.1$ . Βέλτιστη λύση  $(\alpha^*, \omega^*)$  με (d)-(e)  $N = 1$ , (f)-(g)  $N = 2$  ζεύγη δεδομένων.

## 3.4.5 Πίνακες αποτελεσμάτων

Πίνακας 3.2 :  $d^*$  τιμές της  $\hat{\alpha}$ - ανακατασκευής για το πρόβλημα του μονού εγκλεισμού.

SGTV convergence parameters								
Single Inclusion example		$\ell$	$\mu_\omega$	$\mu$	$\alpha^*$		$\omega^*$	
					$\alpha_{D_1}^*$	$\alpha_{out}^*$	$\omega_{min}^*$	$\omega_{max}^*$
<i>strong eccentric</i>	$TV_{(d)}^h$	0.6	$10^{-3}$	0.1	2	1	$9.15 \times 10^{-6}$	1
	$\mathcal{R}_{(d)}$	0.6	$10^{-3}$	0.02	1.99	1	$3.31 \times 10^{-6}$	1
<i>mild eccentric</i>	$TV_{(d)}^h$	0.6	$10^{-3}$	0.05	1.86	1	$7.95 \times 10^{-6}$	1
	$\mathcal{R}_{(d)}$	0.6	$10^{-4}$	0.03	1.88	1	$1.23 \times 10^{-5}$	1
<i>concentric</i>	$TV_{(d)}^h$	0.6	$10^{-4}$	0.01	1.83	1	$2.47 \times 10^{-6}$	1

Πίνακας 3.3 :  $d^*$  τιμές της  $\hat{\alpha}$ - ανακατασκευής για το πρόβλημα του διπλού εγκλεισμού.

SGTV convergence parameters										
Double Inclusion example		$\ell$	$\mu_\omega$	$\mu$	$h$	$\alpha^*$			$\omega^*$	
						$\alpha_{D_2}^*$	$\alpha_{D_3}^*$	$\alpha_{out}^*$	$\omega_{min}^*$	$\omega_{max}^*$
$TV_{(d)}^h$		0.41	0.01	1.6	0.541	1.46	1.88	1	$7.82 \times 10^{-5}$	1
					0.266	1.5	1.95	1	$6.62 \times 10^{-5}$	1
					0.132	1.5	1.97	1	$6.52 \times 10^{-6}$	1
$TV_{(d)}^h$	$\theta = 0\%$	0.48	0.01	1.5	0.266	1.47	1.96	1	$1.33 \times 10^{-6}$	1
	$\theta = 5\%$	0.48	0.01	2	0.266	1.48	1.91	1	$1.57 \times 10^{-5}$	1
	$\theta = 8\%$	0.48	0.01	1.6	0.266	1.48	1.85	1	$2.19 \times 10^{-4}$	1

Πίνακας 3.4 :  $d^*$  τιμές της  $\hat{\alpha}$ - ανακατασκευής για το πρόβλημα “Dolphin”.

SGTV convergence parameters								
Dolphin Inclusion example	$\ell$	$N$	$\mu_\omega$	$\mu$	$\alpha^*$		$\omega^*$	
					$\alpha_{D_4}^*$	$\alpha_{\text{out}}^*$	$\omega_{\text{min}}^*$	$\omega_{\text{max}}^*$
$TV_{(d)}^h$	0.02	1	$10^{-6}$	0.06	2	1	$5.43 \times 10^{-3}$	1
	0.05	1	$10^{-4}$	0.04	1.75	1	$3.74 \times 10^{-4}$	1
		2	$10^{-4}$	0.05	1.98	1	$8.32 \times 10^{-6}$	1
	0.1	1	$10^{-5}$	0.04	1.78	1	$1.12 \times 10^{-6}$	1
		2	$10^{-4}$	0.04	1.99	1	$8.25 \times 10^{-6}$	1

## Κεφάλαιο 4

# Αντίστροφα προβλήματα στη διδιάστατη ελαστικότητα - Εφαρμογές

Η θεωρία της ελαστικότητας περιγράφει την αντιστρεπτή παραμόρφωση των στερεών σωμάτων που υπόκεινται σε διαφόρων τύπων διεγέρσεις: μηχανική, θερμική, ηλεκτρομαγνητική κτλ. Τέτοιες φορτίσεις, κατανομημένες σε όλο τον όγκο του σώματος (βαρύτητα, δυνάμεις *Lorentz*, θερμική διαστολή) ή στην επιφάνεια αυτού (πίεση, επιφανειακές δυνάμεις), αναπτύσσουν εσωτερικές δυνάμεις (τοπικές παραμορφώσεις και τάσεις) μέσα στο υλικό. Οι παραμορφώσεις ορίζονται από την ανηγμένη παραμόρφωση (τροπή). Η ελαστικότητα αποτελεί βασική μηχανική ιδιότητα των υλικών κατά την οποία (i) η σχέση μεταξύ των ανηγμένων παραμορφώσεων και τάσεων σε οποιοδήποτε σημείο της παραμορφώσιμης διάταξης θεωρείται αμφοιμονοσήμαντη και (ii) το υλικό επανέρχεται στην αρχική του κατάσταση μετά τη λήξη της δράσης του αιτίου παραμόρφωσής του [76].

Σχεδόν κάθε φυσικό ή κατασκευασμένο στερεό υλικό έχει ένα εύρος παραμόρφωσης εντός του οποίου η μηχανική του συμπεριφορά μοντελοποιείται μέσω της θεωρίας της ελαστικότητας. Για απειροστές παραμορφώσεις, η ελαστική συμπεριφορά θεωρείται γραμμική, δηλ., οι τάσεις και οι τροπές είναι ανάλογες μεταξύ τους. Η πλειοψηφία των μηχανικών εφαρμογών υποδεικνύει τη θεωρία της γραμμικής ελαστικότητας ως ένα απαραίτητο εργαλείο ανάλυσης και σχεδίασης, καθώς επιτρέπει την ακριβή μοντελοποίηση πολλών φυσικών ή βιομηχανικών αντικειμένων (γήινος μανδύας, έργα πολιτικών μηχανικών, οχήματα μεταφοράς, μηχανές). Εκτός από την κλασική τριδιάστατη θεωρία των στερεών μέσων, εξειδικευμένες προσεγγίσεις έχουν αναπτυχθεί για περιπτώσεις που παρουσιάζουν δύο ή περισσότερες ανόμοιες κλίμακες μεγεθών: σύνθετα μέσα, λεπτές δομές (δοκοί, κελύφη, δίσκοι).

Οι βασικοί τύποι των αντίστροφων προβλημάτων στη γραμμική ελαστικότητα, και γενικότερα στη μηχανική του παραμορφώσιμου στερεού, είναι παρόμοιοι με εκείνους που συναντώνται σε άλλες φυσικές περιοχές, στα πλαίσια της μελέτης των συνεχών μέσων και των κατανομημένων φυσικών ποσοτήτων, όπως την ακουστική, την ηλεκτροστατική, τον ηλεκτρομαγνητισμό. Κοινό τους άξονα συνήθως αποτελεί η ανάγκη απόκτησης (επιπλέον) πληροφορίας σχετικά με τις ιδιότητες του υπό μελέτη συστήματος (παραμορφώσιμο στερεό ή δομή). Μαθηματικές και αριθμητικές τεχνικές για την ανακατασκευή θαμμένων αντικειμένων και την ανίχνευση ατελειών (ρωγμές, κοιλότητες, εγκλεισμοί) συνθέτουν το κύριο πεδίο δράσης πολλών ερευνών [77–81, 83, 84, 155]. Ο προσδιορισμός των κατανομημένων παραμέτρων [85–89] (ελαστικές σταθερές, πυκνότητα μάζας, ταχύτητα κύματος) προκύπτει στην ιατρική απεικόνιση των ιστών [90] ή τη σεισμική έρευνα [91–93]. Η ανακατασκευή των παραμενουσών τάσεων [94–96] είναι μια σχετική θεματολογία με σημαντικές μηχανικές εφαρμογές. Τα μοντέλα των σύνθετων κατασκευών μηχανικού συχνά εμφανί-



ζουν τοπικές παραμέτρους που δεν είναι γνωστές με ικανοποιητική ακρίβεια και επομένως χρειάζεται να επαναπροσδιοριστούν βάσει των πειραματικών πληροφοριών στη μηχανική απόκριση των κατασκευαστικών μελών. Η επικαιροποίηση της μοντελοποίησης, επιπλέον, αντιμετωπίζεται ως ένα αντίστροφο πρόβλημα [97–99], κυρίως γιατί επηρεάζει τις κατανεμημένες παραμέτρους σε περιορισμένα, *a priori* άγνωστα, χωρικά τμήματα, ανακλώντας σοβαρά μειονεκτήματα στην καθολική συμπεριφορά της κατασκευής. Ο προσδιορισμός απρόσιτων συνοριακών τιμών (προβλήματα *Cauchy* στην ελαστικότητα) ή πηγών διέγερσης, επίσης, συναντάται στις εργασίες [100–102]. Τέλος, η ανίχνευση στοιχειωδών ομοιογενών ιδιοτήτων σε κατασκευαστικά υλικά και στελέχη ολοένα και συχνότερα υλοποιείται βάσει των μετρήσεων στα δείγματα, για τα οποία όμως απλοποιημένες θεωρήσεις του τύπου σταθερή κατάσταση της τροπής ή τάσης είναι ανεπαρκείς, και γι' αυτό το σκοπό καταστρώνονται ειδικευμένες τεχνικές αντιστροφής [103–105].

Το παρόν κεφάλαιο περιγράφει δύο από τα προαναφερθέντα αντίστροφα προβλήματα στη διδιάστατη περίπτωση: το αντίστροφο πρόβλημα προσδιορισμού των ελαστικών σταθερών (Ενότητα 4.1) και το αντίστροφο πρόβλημα ανίχνευσης μίας ρωγμής που εντοπίζεται στο εσωτερικό ενός ισότροπου και ομογενούς ελαστικού μέσου (Ενότητα 4.2). Σκοπός της διενεργούμενης έρευνας είναι η επέκταση και εφαρμογή της μεθόδου ομαλοποίησης του Κεφαλαίου 3 στην απαιτητικότερη περίπτωση της γραμμικής ελαστικότητας για την ανακατασκευή ισότροπων ελαστικών δομών και μετέπειτα η επίλυση του προβλήματος της ρωγμής ως μια πρώτη προσπάθεια εύρεσης μιας νέας τεχνικής ανακατασκευής.

#### 4.1 Προσδιορισμός των παραμέτρων Lamé μέσω του γενικευμένου σχήματος ανακατασκευής της *SGTV*

Ένα παρόμοιο πρόβλημα με το πρόβλημα *Calderón* [9] διατυπώνεται στα πλαίσια της ελαστικότητας και συγκεκριμένα στη μελέτη των ελαστικών ιδιοτήτων των υλικών. Αυτή η επιστημονική περιοχή αποτελεί ερευνητικό πεδίο μεγάλης σημαντικότητας και ευρειών εφαρμογών. Για παράδειγμα, διάφορες μηχανές ελέγχου αντοχής υλικών έχουν αναπτυχθεί, όπως οι μηχανές σκληρομέτρησης *Brinell* και *Vickers* [106], προκειμένου να μετρούν τη σκληρότητα του υλικού ή με άλλα λόγια την ενεργειακή τάση που απαιτείται ώστε να παραμορφώσει το δεδομένο υλικό στο προβλεπόμενο σχήμα.

Το μαθηματικό μοντέλο που προκύπτει από τις δοκιμές σκληρότητας ορίζει το αντίστροφο πρόβλημα όπου το άγνωστο ζεύγος  $\alpha = (\lambda, \mu)$  των παραμέτρων Lamé, σε ένα ελαστικό μέσο  $\Omega$ , προσδιορίζεται από την ενεργειακή τάση, δηλαδή από την απεικόνιση «παραμόρφωσης-τάσης»  $\Lambda_\alpha$  (*deformation to stress map* ή *displacement to traction map*) στο σύνορο  $\partial\Omega$ .

Η ενασχόληση με το αντίστροφο πρόβλημα των ελαστικών σταθερών ξεκινά από το 1990 και αποδεικνύεται αρκετά πολυπλοκότερη του προβλήματος *Calderón*: το ζήτημα της μοναδικότητας με πλήρη δεδομένα ακόμα παραμένει ανοιχτό. Μια γραμμικοποιημένη εκδοχή του προβλήματος μελετήθηκε στην καινοτόμα εργασία του *Ikehata* [106], ο οποίος έδειξε ότι η παράγωγος *Fréchet*  $d\Phi$ , για  $\lambda, \mu$  σταθερές, της απεικόνισης  $\Phi : (\lambda, \mu) \rightarrow \Lambda_{(\lambda, \mu)}$  είναι ένα-προς-ένα στις  $d \geq 2$  διαστάσεις. Για τη διδιάστατη περίπτωση, ο *Akamatsu* [107] διατύπωσε μια φόρμουλα αντιστροφής για  $C^\infty$ -συντελεστές Lamé και τις κάθετες παραγώγους τους αυθαίρετης τάξης στο σύνορο. Οι *Nakamura* και *Uhlmann* [108] επέκτειναν το παραπάνω συνοριακό αποτέλεσμα προσδιορισμού στις  $d \geq 3$  διαστάσεις. Στο [109] κατοχυρώθηκε ένα αποτέλεσμα μοναδικότητας για Lamé συντελεστές που είναι επαρκώς κοντά σε θετικές σταθερές. Πιο πρόσφατα, οι *Imanuvilov* και *Yamamoto* [110] απέδειξαν ότι στην περίπτωση των μερικών δεδομένων *Cauchy*, ο προσδιορισμός του συντελεστή Lamé  $\lambda$  μπορεί να επιτευχθεί υπό την προϋπόθεση ότι η παράμετρος  $\mu$  είναι θετική σταθερά. Στη συνέχεια, στο [111] δημοσίευσαν ένα ολικό αποτέλεσμα μοναδικότητας, δηλαδή μονα-

δικότητα χωρίς καμία υπόθεση μικρότητας των άγνωστων συντελεστών, για το ισότροπο σύστημα στις δύο διαστάσεις.

Αποτελέσματα μοναδικότητας για την τριδιάστατη περίπτωση διατυπώνονται στις εργασίες [112–114] υπό τη θεώρηση ότι η παράμετρος  $\mu$  είναι κοντά σε μια θετική σταθερά και αποδεικνύονται μέσω της κατασκευής μιγαδικών γεωμετρικών λύσεων οπτικής [115, 116]. Αργότερα, στο [117] η μοναδικότητα κατοχυρώνεται για τμηματικά σταθερές παραμέτρους Lamé σε ένα τριδιάστατο ελαστικό σώμα. Επιπλέον έρευνες για τη μοναδικότητα στις τρεις διαστάσεις, στην περίπτωση των μερικών δεδομένων *Cauchy*, συναντώνται στις [118] και [119].

Όσον αφορά την ευστάθεια της αντιστροφής λίγα αποτελέσματα είναι γνωστά. Ο *Mandache* στο [120] απέδειξε τη βελτιστότητα της λογαριθμικής εκτίμησης ευστάθειας του [121] για το αντίστροφο πρόβλημα της ελαστικότητας με ομαλές παραμέτρους Lamé. Η πλειοψηφία των επερχόμενων προσεγγίσεων ευστάθειας αναπτύσσουν διαφορετικές *a priori* υποθέσεις για τους άγνωστους συντελεστές λαμβάνοντας υπόψιν το φυσικό πρακτικό πλαίσιο προέλευσης του προβλήματος [122–126]. Προσπάθειες προς αυτή την κατεύθυνση, συμπεριλαμβανομένων ποσοτικών εκτιμήσεων συνέχειας που παράγουν καλύτερα αποτελέσματα ευστάθειας, περιγράφονται στις αναφορές [117, 127, 128], όπου αποδεικνύεται η *Lipschitz* ευστάθεια των ελαστικών συντελεστών.

Από την αριθμητική σκοπιά, τα βασικά κίνητρα μελέτης του αντίστροφου προβλήματος της ελαστικότητας αποτελούν ο εντοπισμός των ανομοιογενειών εντός των υλικών στον μη-καταστροφικό έλεγχο για ελαστικά σώματα [129], καθώς και η ανακατασκευή των ελαστικών ιδιοτήτων σε βιολογικούς ιστούς μέσω της ελαστογραφίας [130, 131]. Ενδιαφέρουσες εφαρμογές, όπως η ελαστική απεικόνιση, αναπτύσσουν τεχνικές ελαχιστοποίησης συζευγνύοντας επαναληπτικά σχήματα ανακατασκευής με αλγόριθμους κατάβασης κλίσης [132–134]. Οι προσεγγίσεις των [135, 136] ενσωματώνουν τις συναρτήσεις φραγμένης κύμανσης στην ομαλοποίηση του αντίστροφου προβλήματος, προωθώντας την ανίχνευση των ατελειών και καταστέλλοντας τα φαινόμενα εξομάλυνσης.

Η παρούσα έρευνα εστιάζει στον ταυτόχρονο προσδιορισμό των παραμέτρων Lamé θεωρώντας τις συναρτήσεις φραγμένης κύμανσης,  $(\lambda, \mu) \in (BV(\Omega))^2$ , και συγχρόνως χρησιμοποιώντας κανονικοποίηση φραγμένης κύμανσης. Στην πραγματικότητα, ισχύει ότι  $(\lambda, \mu) \in (SBV(\Omega))^2$ , αλλά χάρη στο ενδιαφέρον αποτέλεσμα του [5], Σχόλιο 1.3, στην περίπτωση μας, αυτή η απαίτηση ισοδυναμεί με τη *BV*–δομή των Lamé συντελεστών. Η μέθοδος αντιστροφής βασίζεται στο δυϊκό σχήμα ανακατασκευής *Dual Self-Monitored TV – inversion* [75] που προτείνεται στο Κεφάλαιο 3 για την επίλυση του αντίστροφου προβλήματος της αγωγιμότητας. Η ακολουθούμενη προσέγγιση προσαρμόζεται στο τρέχον φυσικό πλαίσιο συνθέτοντας ένα αποδοτικό σχήμα ελαχιστοποίησης για τον προσδιορισμό των ελαστικών σταθερών.

Στην Παράγραφο 4.1.1 ορίζεται το αντίστροφο πρόβλημα της ελαστικότητας. Η Παράγραφος 4.1.2 επεκτείνει την τεχνική κανονικοποίησης του [75] στη διανυσματική περίπτωση της *2d*–γραμμικής ελαστικότητας και η Παράγραφος 4.1.3 τεκμηριώνει το σχήμα ελαχιστοποίησης θεωρητικά. Η Παράγραφος 4.1.4 υλοποιεί τη γενικευμένη μέθοδο αντιστροφής *Self-Guided TV – inversion (SGTV)* σε αντιπροσωπευτικά ελαστικά προφίλ. Τα αριθμητικά πειράματα ολοκληρώνονται με την επίλυση του προβλήματος “*Dolphin*”, πιστοποιώντας την καταλληλότητα της προτεινόμενης προσέγγισης. Τέλος, επισημαίνουμε πως σε όλες τις αριθμητικές εφαρμογές περιοριζόμαστε στην περίπτωση του ενός ζεύγους επιφανειακών δεδομένων ( $N = 1$ ).

#### 4.1.1 Διατύπωση του προβλήματος

Έστω  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d = 2$ , *Lipschitz* χωρίο που αναπαριστά ένα γραμμικό ισότροπο ελαστικό μέσο και χαρακτηρίζεται από τις θετικές πραγματικές Lamé σταθερές  $\lambda, \mu$ . Υποθέτουμε

ότι υπάρχει μια περιοχή  $D$ , ανοιχτό υποσύνολο του  $\Omega$ , που διαφοροποιείται από το υπόλοιπο ελαστικό υλικό μέσω της ασυνεχούς συμπεριφοράς των παραμέτρων Lamé. Οι μικρές ελαστικές παραμορφώσεις του ισότροπου μέσου  $\Omega$  εξαιτίας των μετατοπίσεων ή τάσεων, που ασκούνται σε ένα τμήμα του συνόρου του ή σε ολόκληρο το σύνορο, περιγράφονται από το υπερκαθορισμένο σύστημα

$$-\nabla \cdot \sigma = 0 \quad \text{στο } \Omega, \quad (215)$$

$$\sigma = \lambda \operatorname{tr}(e(u))\mathbb{I} + 2\mu e(u), \quad (216)$$

$$u = f \quad \text{στο } \partial\Omega, \quad (217)$$

$$\sigma \cdot n = t \quad \text{στο } \partial\Omega, \quad (218)$$

με  $u = (u_x, u_y)$  το διανυσματικό πεδίο μετατοπίσεων και  $n$  το εξερχόμενο από το  $\Omega$  κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα. Συσχετιζόμενοι με το πεδίο  $u$  είναι ο τανυστής ανηγμένης παραμόρφωσης (συμμετρική κλίση)

$$e(u) := \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T) \quad (219)$$

και ο τανυστής τάσης  $\sigma$ , που συνδέονται μέσω της θεμελιώδους εξίσωσης (216) όπου  $\mathbb{I}$  ο ταυτοτικός τανυστής δεύτερης τάξης. Οι συντελεστές  $\lambda, \mu$  αποτελούν τις ελαστικές σταθερές του Lamé και εξαρτώνται από το υλικό του σώματος και τις θερμοδυναμικές συνθήκες. Γενικά, οι δύο αυτές σταθερές αρκούν για την περιγραφή της ελαστικής παραμόρφωσης ελαστικού και ισότροπου μέσου.

Η κατάσταση ισορροπίας του ελαστικού σώματος  $\Omega$  για δοσμένο πεδίο μετατοπίσεων  $f$  στο σύνορο εκφράζεται από το πρόβλημα *Dirichlet* (215)-(217). Με βάση αυτή τη συνθήκη, για κάθε  $f \in (H^{1/2}(\partial\Omega))^2$ , υπάρχει μοναδική λύση  $u \in (H^1(\Omega))^2$  τέτοια ώστε  $u = f$  στο  $\partial\Omega$ . Τότε, μπορούμε να ορίσουμε την *Dirichlet-to-Neumann* απεικόνιση

$$\Lambda_\alpha(f) = \sigma(u) \cdot n |_{\partial\Omega}, \quad (220)$$

όπου  $u$  η λύση του προβλήματος (215)-(217). Η απεικόνιση (220) είναι το ανάλογο του *Dirichlet-to-Neumann* τελεστή στο αντίστροφο πρόβλημα της αγωγιμότητας (βλ. Ενότητα 2.3). Όπως προβλέπεται στην ελαστικότητα [137], η μεταβολική διαδικασία του προβλήματος προϋποθέτει την απομόνωση των μη ελαστικών μετατοπίσεων (δηλαδή των μετατοπίσεων του μη παραμορφώσιμου στερεού σώματος). Έτσι, θεωρούμε ότι το ελαστικό πεδίο  $u$  περιορίζεται στον χώρο  $(H^1(\Omega))^2 \cap W$ , όπου  $W = \{A + B \times x\}^\perp$  το ορθογώνιο συμπλήρωμα των μη ελαστικών μετατοπίσεων και  $A, B$  τυχαία διανύσματα του  $\mathbb{R}^2$ .

Το διγραμμικό συναρτησιακό της ενέργειας, που αντιστοιχίζει τη λύση  $u$  του (215)-(217) στη διανυσματική συνάρτηση δοκιμής  $z \in (H^1(\Omega))^2 \cap W$  με  $\psi = z |_{\partial\Omega}$ , δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_\alpha(u, z) &= \int_\Omega \{\lambda \operatorname{tr}(e(u))\mathbb{I} + 2\mu e(u)\} : e(z) \, dx \\ &= \int_\Omega \{\lambda(\nabla \cdot u)(\nabla \cdot z) + 2\mu e(u) : e(z)\} \, dx. \end{aligned} \quad (221)$$

Επικαλούμενοι το θεώρημα *Betti* [138], ως απόρροια του θεωρήματος *Green*, έχουμε ότι

$$\mathcal{Q}_\alpha(u, z) = \int_{\partial\Omega} (\sigma(u) \cdot n) \cdot z \, ds = \int_{\partial\Omega} \Lambda_\alpha(f) \cdot \psi \, ds, \quad \forall z \in (H^1(\Omega))^2 \cap W. \quad (222)$$

Το αντίστροφο πρόβλημα της ελαστικότητας συνίσταται στον προσδιορισμό του άγνωστου ζεύγους σταθερών  $\alpha = (\lambda, \mu)$  από τη γνώση του τελεστή  $\Lambda_\alpha$ . Υιοθετούμε το συναρτησιακό πλαίσιο  $\Lambda_\alpha : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}^*$ , ή ισοδύναμα το αντίστροφό του, την *Neumann-to-Dirichlet*

απεικόνιση,  $\Lambda_\alpha^{-1} : \mathcal{B}^* \rightarrow \mathcal{B}$  όπου  $\mathcal{B} := (H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))^2 \cap W$  και  $\mathcal{B}^* \subset (H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))^2$  ο αντίστοιχος δυϊκός χώρος. Σημειωτέον ότι τα στοιχεία του  $\mathcal{B}^*$  είναι όλα τα στοιχεία του  $(H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))^2$  που εκμηδενίζουν τις μη ελαστικές μετατοπίσεις.

Υποθέτουμε ότι οι αναζητούμενοι συντελεστές  $\lambda, \mu$  είναι ασυνεχείς  $L^\infty(\Omega)$ - συναρτήσεις με πεδίο τιμών το διάστημα  $[b_i, c_i], i = 1, 2$ , έκαστος, δηλ.  $\lambda \in L^\infty(\Omega, [b_1, c_1])$  και  $\mu \in L^\infty(\Omega, [b_2, c_2])$ . Επιπλέον, ενσωματώνουμε την αναγκαία ιδιότητα των παραμέτρων Lamé [66] να μη μεταβάλλουν τις τιμές τους σε μια πολύ μικρή περιοχή στη γειτονιά του συνόρου. Ειδικά, εισάγουμε τον χώρο  $\Omega_\delta := \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) < \delta\}$  και θεωρούμε

$$(\lambda, \mu) \in L_\delta^\infty(\Omega, [b_1, c_1]) \times L_\delta^\infty(\Omega, [b_2, c_2]), \quad (223)$$

όπου

$$L_\delta^\infty(\Omega, [b_1, c_1]) = \left\{ \lambda' \in L^\infty(\Omega, [b_1, c_1]) : \|\lambda' - b_1\|_{L^\infty(\Omega_\delta)} = 0 \right\} \quad (224)$$

(όμοια για τον χώρο  $L_\delta^\infty(\Omega, [b_2, c_2])$ ).

Για να αποφύγουμε εκτενείς συμβολισμούς, ορίζουμε σε συμπτυγμένη μορφή

$$\mathcal{A}_\delta := \left\{ (\lambda, \mu) \in (L_\delta^\infty(\Omega))^2 : 0 < b_1 \leq \lambda(x) \leq c_1 < \infty, 0 < b_2 \leq \mu(x) \leq c_2 < \infty, \forall x \in \Omega \right\} \quad (225)$$

και απαιτούμε

$$\alpha(x) = (\lambda(x), \mu(x)) \in \mathcal{X}_{\alpha, \delta} := \mathcal{A}_\delta \cap (BV(\Omega))^2. \quad (226)$$

Τότε, το υπό μελέτη αντίστροφο πρόβλημα διατυπώνεται ως ακολούθως.

*Δεδομένου ενός Dirichlet-Neumann ζεύγους μετρήσεων  $(f, t)$ , με  $\Lambda_\alpha(f) = t$ , βρες  $\alpha(x) \in \mathcal{X}_{\alpha, \delta}$ .*

Από εδώ και στο εξής, υιοθετούμε το βαθμωτό συμβολισμό για όλα τα διανυσματικά στοιχεία, όπως επίσης και τους διανυσματικούς χώρους, δηλ., θα γράφουμε  $f \in H^{1/2}(\partial\Omega)$  αντί για  $f = (f_x, f_y) \in (H^{1/2}(\partial\Omega))^2$ .

#### 4.1.2 Το δυϊκό σχήμα κανονικοποίησης

Με αναφορά στο δυϊκό σχήμα κανονικοποίησης (177)-(178), αναπτύσσουμε τη γενικευμένη εκδοχή της *Dual Self-Monitored TV-inversion* [75] για τον ταυτόχρονο προσδιορισμό του ζεύγους  $\alpha = (\lambda, \mu)$ . Προς αυτόν το σκοπό, υλοποιούμε τον TV- όρο κανονικοποίησης (177) ξεχωριστά για κάθε συντελεστή Lamé. Ειδικά, ορίζουμε

$$TV_{(\lambda)} := a_\lambda \int_\Omega \omega |D\lambda| \quad (227)$$

και

$$TV_{(\mu)} := a_\mu \int_\Omega \omega |D\mu| \quad (228)$$

με  $a_\lambda, a_\mu > 0$  τις σταθερές κανονικοποίησης. Προκειμένου να συμβαδίζουμε με την ιδιότητα ανίχνευσης των ασυνεχειών της συνάρτησης  $\omega$  (Σχόλιο 2.7), επιλέγουμε  $\omega(x) \in L_\delta^\infty(\Omega, [\beta, 1])$ ,  $0 < \beta \ll 1$ , όπου

$$L_\delta^\infty(\Omega, [\beta, 1]) = \{\omega' \in L^\infty(\Omega, [\beta, 1]) : \|\omega' - 1\|_{L^\infty(\Omega_\delta)} = 0\}. \quad (229)$$

Προσθέτοντας τους όρους (227)-(228), συνθέτουμε τον  $TV$ - όρο κανονικοποίησης του προβλήματος

$$TV_{(d)} := TV_{(\lambda)} + TV_{(\mu)}, \quad (230)$$

όπου  $d(x)$  η διανυσματική διυική μεταβλητή  $(\alpha(x), \omega(x))$  (με  $\alpha(x) = (\lambda(x), \mu(x))$ ). Όσον αφορά τον όρο (178), υπεύθυνο για τη διατήρηση της κανονικότητας της  $TV$ - δομής (230) καθ' όλη τη διάρκεια της ελαχιστοποίησης εξασφαλίζοντας την απαραίτητα ομαλότητα στον οδηγό  $\omega(x)$ , θέτουμε

$$\mathcal{R}_{(\omega)} := a_{\omega} \int_{\Omega} |\nabla \omega|^{2+2\varepsilon} dx \quad (231)$$

με  $0 < \varepsilon \ll 1$  και  $a_{\omega} > 0$  την αντίστοιχη παράμετρο κανονικοποίησης.

Σε αυτό το σημείο αξίζει να σημειωθεί πως η υλοποίηση του όρου φραγμένης κύμανσης (230) θα μπορούσε να έχει πραγματοποιηθεί ορίζοντας μία μόνο παράμετρο κανονικοποίησης και για τους δύο συντελεστές Lamé (δηλ.  $a_{(\lambda, \mu)} \int_{\Omega} \omega (|D\lambda| + |D\mu|)$ ). Αντί αυτού, επιλέγεται η διπλή μορφοποίηση ώστε κατά τη διαδικασία αντιστροφής να μπορεί να εξεταστεί η επίδραση του κάθε  $TV$ - όρου χωριστά. Επιπλέον, γίνεται φανερό ότι ο συγκεκριμένος τύπος δίνει τη δυνατότητα επιλογής διαφορετικών τιμών  $a_{\lambda}$  και  $a_{\mu}$ , που μαζί με μια κατάλληλη επιλογή της  $a_{\omega}$  καθορίζουν την πορεία της ελαχιστοποίησης. Η βέλτιστη επιλογή των παραμέτρων κανονικοποίησης  $(a_{\lambda}, a_{\mu}, a_{\omega})$  βασίζεται στην προσέγγιση των [72, 73] (βλ. Ενότητα 3.1).

### 4.1.3 Το πρόβλημα ελαχιστοποίησης

Για τον προσδιορισμό των ελαστικών σταθερών Lamé  $\alpha = (\lambda, \mu)$  από τις επιφανειακές μετρήσεις  $(f, t)$ , θεωρούμε ταυτόχρονα τα προβλήματα *Dirichlet* και *Neumann* που αντιστοιχούν στις εξισώσεις (215)-(216):

$$-\nabla \cdot \sigma = 0 \text{ στο } \Omega \quad \text{και} \quad u^{\alpha} = f \text{ στο } \partial\Omega, \quad (232)$$

$$-\nabla \cdot \sigma = 0 \text{ στο } \Omega \quad \text{και} \quad \sigma(v^{\alpha}) \cdot n = t \text{ στο } \partial\Omega, \quad (233)$$

με  $(f, t) \in H^{1/2}(\partial\Omega) \times H^{-1/2}(\partial\Omega)$ . Συμβολίζουμε με  $u^{\alpha} (\in H^1(\Omega) \cap W)$  και  $v^{\alpha} (\in H^1(\Omega) \cap W)$  τις διανυσματικές λύσεις των ευθέων προβλημάτων (232)-(233) στην περίπτωση όπου οι συντελεστές Lamé συμφωνούν με την  $\alpha(x)$ .

Βάσει της μεταβολικής μορφής (221)-(222), ορίζουμε το συναρτησιακό  $J : \mathcal{X}_{\alpha, \delta} \rightarrow \mathbb{R}$  ως

$$\begin{aligned} J(\alpha) &= \frac{1}{2} \langle \Lambda_{\alpha} f - t, f - \Lambda_{\alpha}^{-1} t \rangle_{\mathcal{B}^* \times \mathcal{B}} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{ \lambda |\nabla \cdot (u^{\alpha} - v^{\alpha})|^2 + 2\mu e(u^{\alpha} - v^{\alpha}) : e(u^{\alpha} - v^{\alpha}) \} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\{ \lambda \left| \sum_i \frac{\partial(u_i^{\alpha} - v_i^{\alpha})}{\partial x_i} \right|^2 + \frac{\mu}{2} \sum_{i,j} \left| \frac{\partial(u_i^{\alpha} - v_i^{\alpha})}{\partial x_j} + \frac{\partial(u_j^{\alpha} - v_j^{\alpha})}{\partial x_i} \right|^2 \right\} dx. \end{aligned} \quad (234)$$

Η συναρτησιακή μορφή (234) αποτελεί μέτρο της ασυμφωνίας μεταξύ των δεδομένων και των πεδίων που προκύπτουν από τις προκαθορισμένες συνοριακές συνθήκες του προβλήματος. Σε απουσία υπολογιστικών σφαλμάτων και για ακριβείς παραμέτρους  $\alpha$  αυτός ο όρος μηδενίζεται.

Συγκεντρώνοντας τους όρους κανονικοποίησης (230)-(231), συνθέτουμε το πλήρες συναρτησιακό ελαχιστοποίησης

$$\mathcal{J}(\alpha, \omega) = J(\alpha) + \frac{1}{2} a_{\lambda} \int_{\Omega} \omega |D\lambda| + \frac{1}{2} a_{\mu} \int_{\Omega} \omega |D\mu| + \frac{1}{2} a_{\omega} \int_{\Omega} |\nabla \omega|^{2+2\varepsilon} dx. \quad (235)$$

Στη συνέχεια διατυπώνουμε το θεμελιώδες αποτέλεσμα αυτής της ενότητας

**Θεώρημα 4.1.** Το πρόβλημα ελαχιστοποίησης  $\inf_{(\alpha', \omega')} \mathcal{J}(\alpha', \omega')$  ως προς τα στοιχεία  $(\alpha', \omega')$  στον  $\mathcal{X}_{\alpha, \delta} \times L^\infty(\Omega, [\beta, 1])$  επιδέχεται μία λύση που ανήκει στον χώρο  $\mathcal{X}_{\alpha, \delta} \times L^\infty(\Omega, [\beta, 1])$ .

*Απόδειξη.* (Έμφαση στην απόδειξη δίνεται αποκλειστικά στα σημεία διαφοροποίησης με το αντίστροφο πρόβλημα της αγωγιμότητας (βλ. Θεώρημα 3.1, Ενότητα 3.2).)

Έστω μια ακολουθία ελαχιστοποίησης  $(\alpha_n, \omega_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , τέτοια ώστε η ακολουθία  $\mathcal{J}(\alpha_n, \omega_n)$  συγκλίνει στον πραγματικό αριθμό  $\inf_{(\alpha', \omega')} \mathcal{J}(\alpha', \omega')$ . Προφανώς, υπάρχει μια θετική σταθερά  $C$  τέτοια ώστε

$$\mathcal{J}(\alpha_n, \omega_n) \leq C \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}. \quad (236)$$

Δεδομένου ότι  $\alpha_n \in \mathcal{A}_\delta$ , έχουμε ότι  $\|\lambda_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c_1$  και  $\|\mu_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c_2$ , και κατά συνέπεια

$$\alpha_n = (\lambda_n, \mu_n) \rightharpoonup \alpha = (\lambda, \mu) \text{ ασθενώς}^* \text{ στον } (L^\infty(\Omega))^2 \text{ (καθώς } n \rightarrow \infty). \quad (237)$$

Επιπλέον, είναι φανερό ότι  $\int_{\Omega_\delta} \alpha_n \varphi \rightarrow \int_{\Omega_\delta} \alpha \varphi$  για κάθε  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_\delta) \subset L^1(\Omega) \Rightarrow \langle (b_1 - \lambda), \phi \rangle = 0$  και  $\langle (b_2 - \mu), \phi \rangle = 0$  στην  $\Omega_\delta$ ,  $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega_\delta)$  και τελικά  $\alpha \in \mathcal{A}_\delta$ .

Αφετέρου,  $\alpha_n \in \mathcal{A}_\delta$  και άρα  $\alpha_n \in L^1(\Omega)$  με  $\|\lambda_n\|_{L^1(\Omega)} \leq c_1|\Omega|$  και  $\|\mu_n\|_{L^1(\Omega)} \leq c_2|\Omega|$ . Περαιτέρω, για τον *TV*- όρο κανονικοποίησης (230) ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} TV_{(d_n)} &= \frac{a_\lambda}{2} \int_{\Omega} \omega_n |D\lambda_n| + \frac{a_\mu}{2} \int_{\Omega} \omega_n |D\mu_n| \leq C \\ &\Rightarrow \frac{\beta}{2} \left( a_\lambda \int_{\Omega} |D\lambda_n| + a_\mu \int_{\Omega} |D\mu_n| \right) \leq C \\ &\Rightarrow |D\lambda_n|(\Omega) + |D\mu_n|(\Omega) \leq \tilde{C}. \end{aligned} \quad (238)$$

Συνεπώς, οι ακολουθίες  $\lambda_n, \mu_n$  είναι ομοιόμορφα φραγμένες στον  $BV(\Omega)$ ,  $\|\lambda_n\|_{BV(\Omega)} \leq \tilde{C}$  και  $\|\mu_n\|_{BV(\Omega)} \leq \tilde{C}$ , και άρα υπάρχουν υποακολουθίες  $\lambda_n, \mu_n$ , που συμβολίζουμε το ίδιο, και στοιχεία  $\tilde{\lambda}, \tilde{\mu} \in BV(\Omega)$  τέτοια ώστε

$$\lambda_n \xrightarrow{BV-w^*} \tilde{\lambda} \quad \text{και} \quad \mu_n \xrightarrow{BV-w^*} \tilde{\mu}. \quad (239)$$

Οι συγκλίσεις (239) επαληθεύουν ότι  $\alpha_n \xrightarrow{BV-w^*} \tilde{\alpha}$ . Από τον ορισμό της  $BV - w^*$  σύγκλισης [5] και την (237) καταλήγουμε στη σχέση  $\alpha = \tilde{\alpha}$  σ.π. στο  $\Omega$ , που συνεπάγεται τη σύγκλιση

$$\alpha_n \xrightarrow{L^1(\Omega)} \alpha \in \mathcal{X}_{\alpha, \delta}. \quad (240)$$

Στη συνέχεια, γράφουμε τον όρο (234) στη μορφή

$$\begin{aligned} J(\alpha_n) &= \frac{1}{2} \langle \Lambda_{\alpha_n} f - t, f - \Lambda_{\alpha_n}^{-1} t \rangle_{\mathcal{B}^* \times \mathcal{B}} \\ &= \frac{1}{2} \langle \Lambda_{\alpha_n} f, f \rangle_{\mathcal{B}^* \times \mathcal{B}} + \frac{1}{2} \langle t, \Lambda_{\alpha_n}^{-1} t \rangle_{\mathcal{B}^* \times \mathcal{B}} - \frac{1}{2} \langle \Lambda_{\alpha_n} f, \Lambda_{\alpha_n}^{-1} t \rangle_{\mathcal{B}^* \times \mathcal{B}} - \frac{1}{2} \langle t, f \rangle_{\mathcal{B}^* \times \mathcal{B}} \\ &= \frac{1}{2} \langle \Lambda_{\alpha_n} f, f \rangle_{\mathcal{B}^* \times \mathcal{B}} + \frac{1}{2} \langle t, \Lambda_{\alpha_n}^{-1} t \rangle_{\mathcal{B}^* \times \mathcal{B}} - \langle t, f \rangle_{\mathcal{B}^* \times \mathcal{B}}, \end{aligned} \quad (241)$$

όπου κάνοντας χρήση της ταυτότητας *Betti* ισοδύναμα παίρνουμε

$$\begin{aligned} J(\alpha_n) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\{ \lambda_n \left| \sum_i \frac{\partial u_i^{\alpha_n}}{\partial x_i} \right|^2 + \frac{\mu_n}{2} \sum_{i,j} \left| \frac{\partial u_i^{\alpha_n}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{\alpha_n}}{\partial x_i} \right|^2 \right\} dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\{ \lambda_n \left| \sum_i \frac{\partial v_i^{\alpha_n}}{\partial x_i} \right|^2 + \frac{\mu_n}{2} \sum_{i,j} \left| \frac{\partial v_i^{\alpha_n}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^{\alpha_n}}{\partial x_i} \right|^2 \right\} dx - \langle t, f \rangle_{\mathcal{B}^* \times \mathcal{B}}. \end{aligned} \quad (242)$$

Βάσει της (236) και των κάτω φραγμάτων  $b_1, b_2$  των συντελεστών Lamé, έχουμε ότι

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\{ b_1 \left| \sum_i \frac{\partial u_i^{\alpha_n}}{\partial x_i} \right|^2 + \frac{b_2}{2} \sum_{i,j} \left| \frac{\partial u_i^{\alpha_n}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{\alpha_n}}{\partial x_i} \right|^2 \right\} dx \leq C + \langle t, f \rangle_{\mathcal{B}^* \times \mathcal{B}} \quad (243)$$

και ομοίως

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\{ b_1 \left| \sum_i \frac{\partial v_i^{\alpha_n}}{\partial x_i} \right|^2 + \frac{b_2}{2} \sum_{i,j} \left| \frac{\partial v_i^{\alpha_n}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^{\alpha_n}}{\partial x_i} \right|^2 \right\} dx \leq C + \langle t, f \rangle_{\mathcal{B}^* \times \mathcal{B}}. \quad (244)$$

Τα τελευταία φράγματα συνεπάγονται ότι η ακολουθία των ταυιστών τάσης  $\sigma_n$  είναι φραγμένη στον  $L^2(\Omega, \mathcal{M}_d^s)$ , όπου  $\mathcal{M}_d^s$  ο χώρος των συμμετρικών ταυιστών δεύτερης τάξης [28]. Από τη σχετική συμπάγεια των φραγμένων συνόλων στην ασθενή τοπολογία του  $L^2(\Omega, \mathcal{M}_d^s)$  υπάρχει υποακολουθία  $\sigma_n$ , που συμβολίζουμε το ίδιο, και οριακή τάση  $\sigma$ , έτσι ώστε η  $\sigma_n$  συγκλίνει ασθενώς στο  $\sigma$  στον  $L^2(\Omega, \mathcal{M}_d^s)$ . Επιπλέον, η σύγκλιση (240) ενεργοποιεί την ισχύ της  $H$ -σύγκλισης, η οποία στο πλαίσιο της ελαστικότητας ισοδυναμεί με την  $G$ -σύγκλιση. Η επιπρόσθετη αυτή σύγκλιση  $\alpha_n \xrightarrow{G} \alpha$  πιστοποιεί τις ακόλουθες ενεργειακές συγκλίσεις (σ. 81, [28])

$$\int_{\Omega} \sigma(u^{\alpha_n}) : e(u^{\alpha_n}) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \sigma(u^{\alpha}) : e(u^{\alpha}) dx, \quad (245)$$

$$\int_{\Omega} \sigma(v^{\alpha_n}) : e(v^{\alpha_n}) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \sigma(v^{\alpha}) : e(v^{\alpha}) dx, \quad (246)$$

όπου  $(u^{\alpha}, v^{\alpha})$  τα ομογενοποιημένα όρια που συμπίπτουν με τις ασθενείς λύσεις των προβλημάτων (232)-(233).

Παίρνοντας το όριο στην (242), αξιοποιώντας τις (245)-(246) και χρησιμοποιώντας ξανά τη φόρμουλα *Betti*, βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} J(\alpha_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\{ \lambda_n \left| \sum_i \frac{\partial u_i^{\alpha_n}}{\partial x_i} \right|^2 + \frac{\mu_n}{2} \sum_{i,j} \left| \frac{\partial u_i^{\alpha_n}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{\alpha_n}}{\partial x_i} \right|^2 \right\} dx \\ &\quad + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\{ \lambda_n \left| \sum_i \frac{\partial v_i^{\alpha_n}}{\partial x_i} \right|^2 + \frac{\mu_n}{2} \sum_{i,j} \left| \frac{\partial v_i^{\alpha_n}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^{\alpha_n}}{\partial x_i} \right|^2 \right\} dx - \langle t, f \rangle_{\mathcal{B}^* \times \mathcal{B}} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\{ \lambda \left| \sum_i \frac{\partial u_i^{\alpha}}{\partial x_i} \right|^2 + \frac{\mu}{2} \sum_{i,j} \left| \frac{\partial u_i^{\alpha}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{\alpha}}{\partial x_i} \right|^2 \right\} dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\{ \lambda \left| \sum_i \frac{\partial v_i^{\alpha}}{\partial x_i} \right|^2 + \frac{\mu}{2} \sum_{i,j} \left| \frac{\partial v_i^{\alpha}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^{\alpha}}{\partial x_i} \right|^2 \right\} dx - \langle t, f \rangle_{\mathcal{B}^* \times \mathcal{B}} \\ &= \frac{1}{2} \langle \Lambda_{\alpha} f, f \rangle_{\mathcal{B}^* \times \mathcal{B}} + \frac{1}{2} \langle t, \Lambda_{\alpha}^{-1} t \rangle_{\mathcal{B}^* \times \mathcal{B}} - \langle t, f \rangle_{\mathcal{B}^* \times \mathcal{B}} = J(\alpha). \end{aligned} \quad (247)$$

Αναφορικά με τον όρο κανονικοποίησης (231), ισχύει ότι

$$\frac{1}{2} \mathcal{R}_{(\omega_n)} = \frac{1}{2} a_{\omega} \int_{\Omega} |\nabla \omega_n|^{2+2\varepsilon} dx \leq C, \quad (248)$$

απ' όπου και συνεπάγεται ότι  $\omega_n \in W^{1,2+2\varepsilon}(\Omega)$  με  $\|\omega_n\|_{W^{1,2+2\varepsilon}} \leq \bar{C}$ . Για τη λεπτομερή έκθεση της ανάλυσης σύγκλισης βλ. Απόδειξη Θεωρήματος 3.1, αλλά σε ό,τι ακολουθεί οι παρακάτω οριακές διαδικασίες θεωρούνται ισχύουσες

$$\omega_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \omega \text{ στον } L^{2+2\varepsilon}(\Omega), \quad (249)$$

$$\omega_n, \omega \in C^{0,\gamma}(\Omega) \subset C_b(\Omega) \text{ με } \gamma = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}, \quad (250)$$

$$\omega_n \xrightarrow{\text{ομοιόμορφα}} \omega \text{ στο } \Omega \setminus \Omega_{\delta}. \quad (251)$$

Κατόπιν, θεωρούμε τις αναλύσεις

$$\int_{\Omega} \omega_n |D\lambda_n| = \int_{\Omega} (\omega_n - \omega) |D\lambda_n| + \int_{\Omega} \omega |D\lambda_n|, \quad (252)$$

$$\int_{\Omega} \omega_n |D\mu_n| = \int_{\Omega} (\omega_n - \omega) |D\mu_n| + \int_{\Omega} \omega |D\mu_n|. \quad (253)$$

Λαμβάνοντας υπόψιν τις (251), (250) και το γεγονός ότι  $0 < \beta \leq \omega(x) \leq 1$ , καθώς επίσης και την κάτω ημισυνέχεια της ολικής μάζας στην  $BV - w^*$  τοπολογία, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \liminf_{n \rightarrow \infty} TV_{(d_n)} &\geq \frac{a_\lambda}{2} \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \omega_n |D\lambda_n| + \frac{a_\mu}{2} \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \omega_n |D\mu_n| \\ &= \frac{a_\lambda}{2} \liminf_{n \rightarrow \infty} \left( \int_{\Omega} (\omega_n - \omega) |D\lambda_n| + \int_{\Omega} \omega |D\lambda_n| \right) \\ &\quad + \frac{a_\mu}{2} \liminf_{n \rightarrow \infty} \left( \int_{\Omega} (\omega_n - \omega) |D\mu_n| + \int_{\Omega} \omega |D\mu_n| \right) \\ &\geq \frac{a_\lambda}{2} \int_{\Omega} \omega |D\lambda| + \frac{a_\mu}{2} \int_{\Omega} \omega |D\mu| = \frac{1}{2} TV_{(d)}. \end{aligned} \quad (254)$$

Η σύγκλιση (249) και η κάτω ημισυνέχεια της  $L^{2+2\varepsilon}(\Omega)$ - νόρμας στην ασθενή τοπολογία συνεπάγονται ότι

$$\frac{1}{2} \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{R}_{(\omega_n)} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_\omega}{2} \int_{\Omega} |\nabla \omega_n|^{2+2\varepsilon} dx \geq \frac{a_\omega}{2} \int_{\Omega} |\nabla \omega|^{2+2\varepsilon} dx = \frac{1}{2} \mathcal{R}_{(\omega)}. \quad (255)$$

Τέλος, από τις (247), (254) και (255) καταλήγουμε στη σχέση

$$\begin{aligned} \inf_{(\alpha', \omega')} \mathcal{J}(\alpha', \omega') &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{J}(\alpha_n, \omega_n) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} J(\alpha_n) + \frac{1}{2} \liminf_{n \rightarrow \infty} TV_{(d_n)} + \frac{1}{2} \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{R}_{(\omega_n)} \\ &\geq J(\alpha) + \frac{1}{2} TV_{(d)} + \frac{1}{2} \mathcal{R}_{(\omega)} = \mathcal{J}(\alpha, \omega) \end{aligned} \quad (256)$$

όπου και ολοκληρώνει την απόδειξη. Επομένως, το πρόβλημα ελαχιστοποίησης επιδέχεται ως λύση το όριο της ακολουθίας ελαχιστοποίησης  $d_n$ .  $\square$

#### 4.1.4 Εφαρμογές

Προχωρούμε στην υλοποίηση της αριθμητικής μεθόδου *SGTV*, που προσομοιώνει το σχήμα κανονικοποίησης (230)-(231), για τον προσδιορισμό ενός σύνθετου υλικού. Γι' αυτό το σκοπό, θεωρούμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών (215)-(218) με γνωστά επιφανειακά δεδομένα  $(f, t)$  κατά μήκος ολόκληρου του συνόρου.

Πρώτα, ορίζουμε το διακριτοποιημένο ανάλογο του προβλήματος ελαχιστοποίησης (256)

$$\begin{aligned} \inf_{(\alpha, \omega)} \mathcal{J}_h(\alpha, \omega) &= \inf_{(\alpha, \omega)} \left[ J(\alpha) + \frac{1}{2} a_\lambda \int_{\Omega} \omega \sqrt{|\nabla \lambda|^2 + \varepsilon^h} dx \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} a_\mu \int_{\Omega} \omega \sqrt{|\nabla \mu|^2 + \varepsilon^h} dx + \frac{1}{2} a_\omega \int_{\Omega} |\nabla \omega|^{2+2\varepsilon} dx \right] \end{aligned} \quad (257)$$

όπου  $(\alpha, \omega) \in \mathcal{X}_{\alpha, \delta} \times (W^{1,2+2\varepsilon}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega, [\beta, 1]))$  και  $\varepsilon^h$  θετική συνάρτηση του χαρακτηριστικού πλάτους  $h$  με  $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon^h = 0$ . Στα επόμενα, υιοθετούμε τον συμβολισμό  $\mathcal{RTV}_{(d)}^h$  για τη μέθοδο ομαλοποίησης της *SGTV*- ανακατασκευής.

Σχεδιάζουμε το ακόλουθο δι-υλικό ως το αναζητούμενο ανομοιογενές ελαστικό προφίλ

$$\hat{\alpha} = (\hat{\lambda}, \hat{\mu}) := \begin{cases} (0.0245, 5 \times 10^{-4}), & (x, y) \in D, \\ (4.1428, 1.0357), & (x, y) \in \Omega \setminus D. \end{cases} \quad (258)$$



Το υπό θεώρηση σύνθετο υλικό αποτελείται από δύο επιμέρους υλικά, που έχουν διαφορετικές ελαστικές ιδιότητες και συνδέονται μεταξύ τους με την επίπεδη διεπιφάνεια  $\partial D$ . Συγκεκριμένα, επιλέγουμε τα υλικά πλεξιγκλάς και καουτσούκ για το εξωτερικό χωρίο  $\Omega \setminus D$  και τον εγκλεισμό  $D$ , αντίστοιχα. Ο υπολογισμός των σταθερών  $\hat{\lambda}, \hat{\mu}$  εξάγεται από τις σχέσεις

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

για τις τιμές του μέτρου του *Young*,  $E$  (GPa), και του λόγου του *Poisson*,  $\nu$ , όπως παραθέτονται στο [139]:  $E = 14.9 \times 10^{-4}$ ,  $\nu = 0.49$  για το καουτσούκ,  $E = 2.9$ ,  $\nu = 0.4$  για το πλεξιγκλάς.

Ενδεικτικά, αναπαράγουμε τα αριθμητικά πειράματα 3.4.1 (Το πρόβλημα του μονού εγκλεισμού) και 3.4.3 (Το πρόβλημα “*Dolphin*”) του προηγούμενου κεφαλαίου (βλ. Ενότητα 3.4).

Στο πρόβλημα του μονού εγκλεισμού 4.1.4.1, ο πίνακας και ο εγκλεισμός, αντίστοιχα, περιγράφονται από τους δίσκους

$$\Omega_1 := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} < \rho_{\Omega_1} \right\},$$

$$D_1 := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - x_{D_1})^2 + (y - y_{D_1})^2} < \rho_{D_1} \right\},$$

ακτίνας  $\rho_{\Omega_1} = 2$  και  $\rho_{D_1} = 1$ . Στη συνέχεια, στο πρόβλημα “*Dolphin*” 4.1.4.2 θεωρούμε το ελαστικό ορθογώνιο  $\Omega_3$  με μήκος πλευράς  $L = 0.8$  και κέντρο  $(0.6, 0.53)$ , με τον εγκλεισμό  $D_4$  να αναπαριστά τη γεωμετρία «δελφίνι»  $((x_{D_4}, y_{D_4}) = (0.48, 0.49))$ .

Για τη σχεδίαση των υπολογιστικών χωρίων  $\Omega_{\{1,3\}}$  χρησιμοποιούμε το *Triangle* [62, 63] με χαρακτηριστικό βήμα ( $h$ ), όπως αναγράφεται στον Πίνακα 4.1 παρακάτω μαζί με τον αριθμό των στοιχείων (*elements*) και των κόμβων (*nodes*) κάθε γεωμετρίας. Για τη διακριτοποίηση των τελεστών  $\mathcal{J}_h$ , (257), εφαρμόζουμε τη μέθοδο των  $\mathcal{P}_1$  πεπερασμένων στοιχείων [140], κατασκευάζοντας ένα ζεύγος συνθετικών δεδομένων  $(\hat{f}, \hat{t})$  (σε κάθε περίπτωση) σε ένα πυκνότερο πλέγμα μέσω των FEM τεχνικών.

Πίνακας 4.1: Delaunay Triangulations.

	Mesh case	$h$	Elements	Nodes
<b>Single Inclusion</b>	<i>strong eccentric</i>	0.121	6380	3351
	<i>mild eccentric</i>	0.122	6388	3355
	<i>concentric</i>	0.121	6392	3357
<b>Dolphin Inclusion</b>		0.027	7684	4083

Η υπολογιστική διαδικασία ξεκινά θέτοντας τις ομαλοποιητικές σταθερές  $\varepsilon = \varepsilon^h = 10^{-4}$  και επιλέγοντας μια αρχική εκτίμηση των πεδίων  $(u, v, \alpha, \omega)$ . Ως αρχική προσέγγιση για το άγνωστο ζεύγος  $\alpha = (\lambda, \mu)$  ορίζουμε τη σταθερή συνάρτηση

$$\alpha^0 = (\lambda^0, \mu^0) = \begin{cases} (4 \times 10^{-3}, 10^{-5}), & (x, y) \in \Omega \setminus \Omega_\delta, \\ (4.1428, 1.0357), & (x, y) \in \Omega_\delta, \end{cases} \quad (259)$$

όπου χωρίς βλάβη της γενικότητας, στην  $\Omega_\delta$  ζώνη, οι τιμές κατωφλίου  $c_1, c_2$ , που εμφανίζονται στο πεδίο ορισμού των παραμέτρων Lamé (225), συμπίπτουν με τις τιμές  $\hat{\alpha} |_{\Omega \setminus D}$ , δηλ.  $\lambda \in L^\infty(\Omega, [b_1, c_1]) = \left\{ \lambda' \in L^\infty(\Omega, [b_1, c_1]) : \|\lambda' - c_1\|_{L^\infty(\Omega_\delta)} = 0 \right\}$  και

$$\mu \in L^\infty_\delta(\Omega, [b_2, c_2]) = \left\{ \mu' \in L^\infty(\Omega, [b_2, c_2]) : \|\mu' - c_2\|_{L^\infty(\Omega_\delta)} = 0 \right\}.$$

Για τις αρχικές τιμές  $(u^0, v^0)$  των διανυσματικών πεδίων  $u, v$  επιλέγουμε τις λύσεις των διαφορικών εξισώσεων (232)-(233) για  $\alpha = \alpha^0$ . Τέλος, για τη δομή εκκίνησης της δυϊκής μεταβλητής  $\omega$  ακολουθείται η ανάλυση του [75] σύμφωνα με την οποία το  $\omega^0$ - προφίλ διαμορφώνεται βάσει του τύπου (213) για  $\beta = 10^{-6}$ .

Η τρέχουσα απαιτητικότερη - συγκριτικά με τη βαθμωτή περίπτωση της αγωγιμότητας - περίπτωση της διδιάστατης ελαστικότητας επιβάλλει τη σταδιακή εξέταση της λειτουργικότητας της μεθόδου ως προς την επιλογή του  $\omega^0$ . Συνεπώς, στις εφαρμογές 4.1.4.1-4.1.4.2, η αντιστροφή επιχειρείται από το ελάχιστο ως το μέγιστο διαταραγμένο - κάθε γεωμετρίας - επίπεδο αβεβαιότητας ( $\ell$ ). Οι παράμετροι της ανακατασκευής συγκεντρώνονται στους Πίνακες 4.2-4.3, όπου παραθέτονται το  $\omega^0$ - επίπεδο αβεβαιότητας ( $\ell$ ), οι βέλτιστες παράμετροι κανονικοποίησης  $(a_\omega)$ ,  $(a_\lambda)$  και  $(a_\mu)$  και οι τιμές της διανυσματικής λύσης  $\alpha^*$  στους εγκλεισμούς  $D_{\{1,4\}}$ ,  $(\lambda_{D_{\{1,4\}}}^*, \mu_{D_{\{1,4\}}}^*)$ , και στα εξωτερικά χωρία  $\Omega_{\{1,3\}} \setminus D_{\{1,4\}}$ ,  $(\lambda_{\text{out}}^*, \mu_{\text{out}}^*)$ , μαζί με τις αντίστοιχες τιμές  $(\omega_{\text{min}}^*, \omega_{\text{max}}^*)$  της δυϊκής μεταβλητής  $\omega^*$ .

#### 4.1.4.1 Το πρόβλημα του μονού εγκλεισμού.

Σε αυτό το πείραμα επαναλαμβάνουμε την SGTV- ανακατασκευή για τρεις διαφορετικές υλοποιήσεις των συντεταγμένων κέντρου του  $D_1$ . Ειδικά, θέτουμε  $(x_{D_1}, y_{D_1}) = (-0.85, 0)$ ,  $(x_{D_1}, y_{D_1}) = (-\frac{1}{3}, 0)$  και  $(x_{D_1}, y_{D_1}) = (0, 0)$  ορίζοντας αντίστοιχα το ισχυρά έκκεντρο πρόβλημα (*“strong eccentricity problem”*), το ήπια έκκεντρο πρόβλημα (*“mild eccentricity problem”*) και το ομόκεντρο πρόβλημα (*“concentric problem”*).

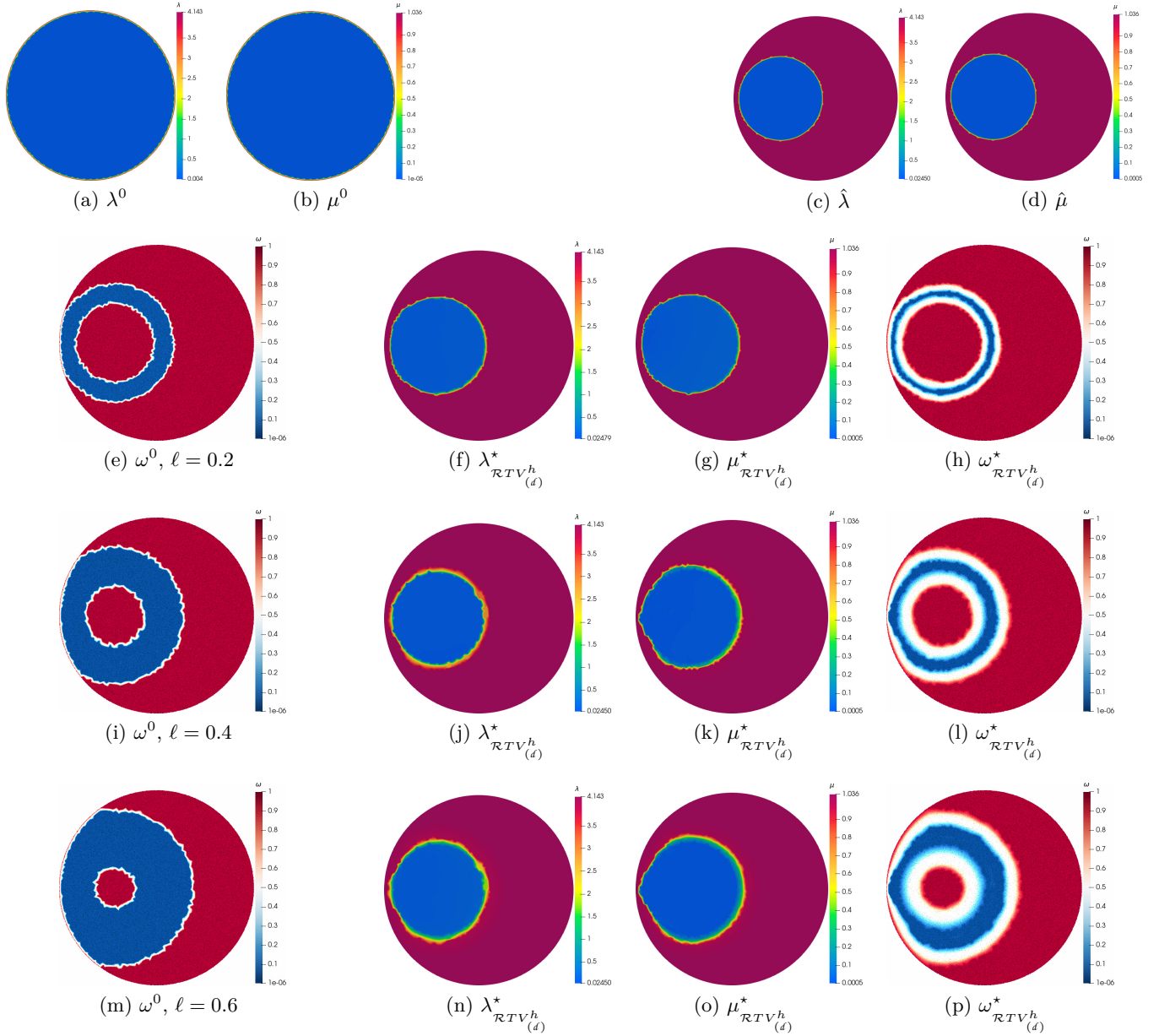
Οι Εικόνες 4.1a-4.1c, από αριστερά προς τα δεξιά, παρουσιάζουν τα αρχικά προφίλ  $(\alpha^0, \omega^0)$  και την αντίστοιχη υπολογιστική λύση  $(\alpha^*, \omega^*)_{\mathcal{RTV}_{(d)}^h}$  από το χαμηλότερο,  $\ell = 0.2$ , ως το υψηλότερο,  $\ell = 0.6$ , επίπεδο διαμόρφωσης  $\ell$  για το χαρακτηριστικό βήμα  $h$ , όπως αναγράφεται στον Πίνακα 4.1. Συνοψίζουμε τα αριθμητικά αποτελέσματα στον Πίνακα 4.2.

#### 4.1.4.2 Το πρόβλημα “Dolphin”

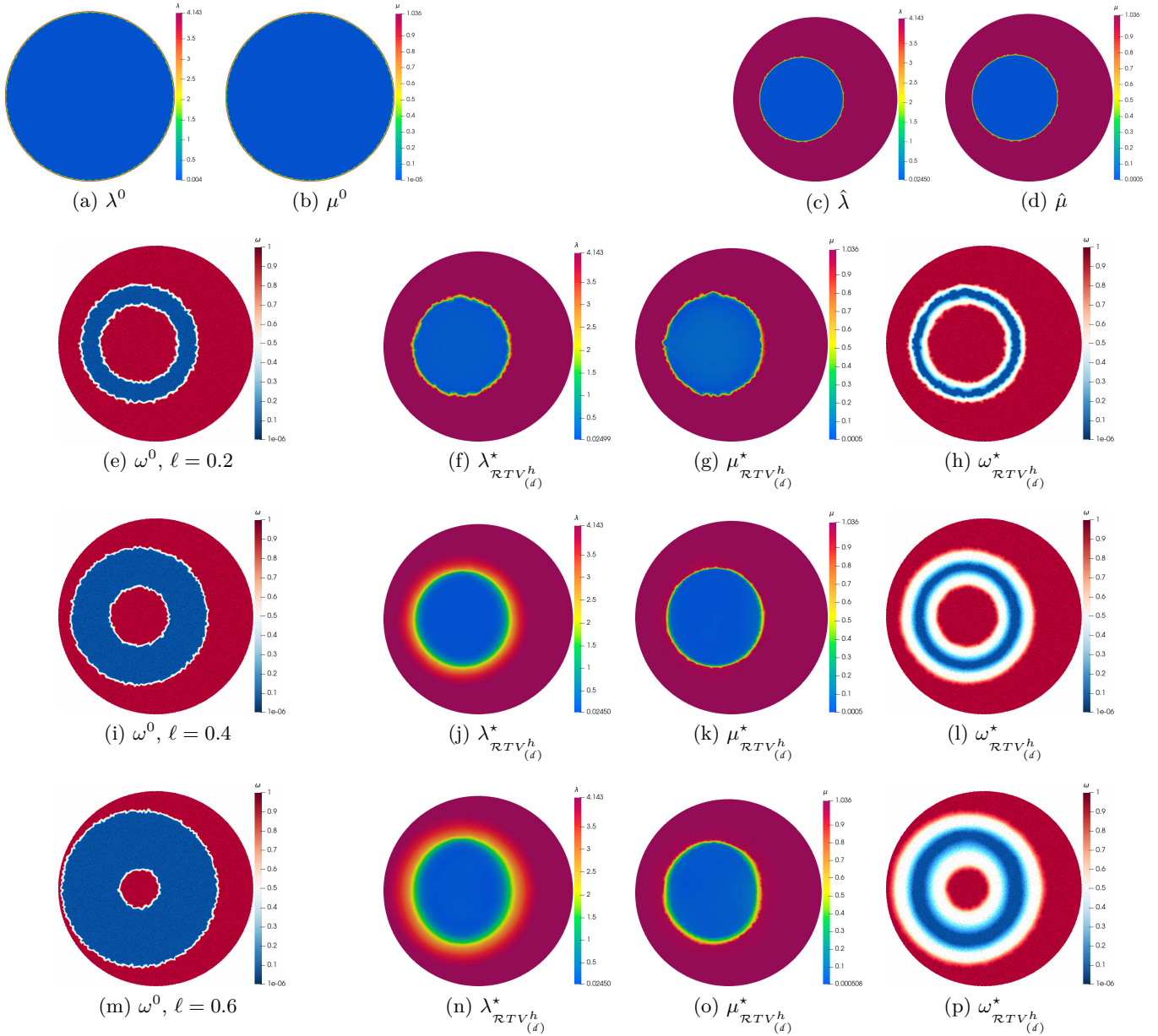
Γι' αυτήν την περίπτωση ανακατασκευής, διευρύνουμε την  $\Omega_\delta$  ζώνη ελαφρώς προς το κέντρο θέτοντας  $\delta = \{0.05, 0.11, 0.15, 0.07\}$  κατά μήκος της αριστερής, πάνω, δεξιάς και κάτω αντίστοιχα πλευράς του  $\Omega_3$ .

Στις Εικόνες 4.2a-4.2c, από αριστερά προς τα δεξιά, απεικονίζονται ο στόχος της ανακατασκευής  $\hat{\alpha}$ , τα αρχικά προφίλ  $(\alpha^0, \omega^0)$  (1η στήλη) και οι αντίστοιχες βέλτιστες λύσεις  $(\alpha^*, \omega^*)_{\mathcal{RTV}_{(d)}^h}$  (2η στήλη) για τα  $\omega^0$ - προφίλ:  $\ell = \{0.02, 0.05, 0.1\}$  ως προς  $h = 0.027$ . Οι παράμετροι της ανακατασκευής δίνονται στον Πίνακα 4.3.

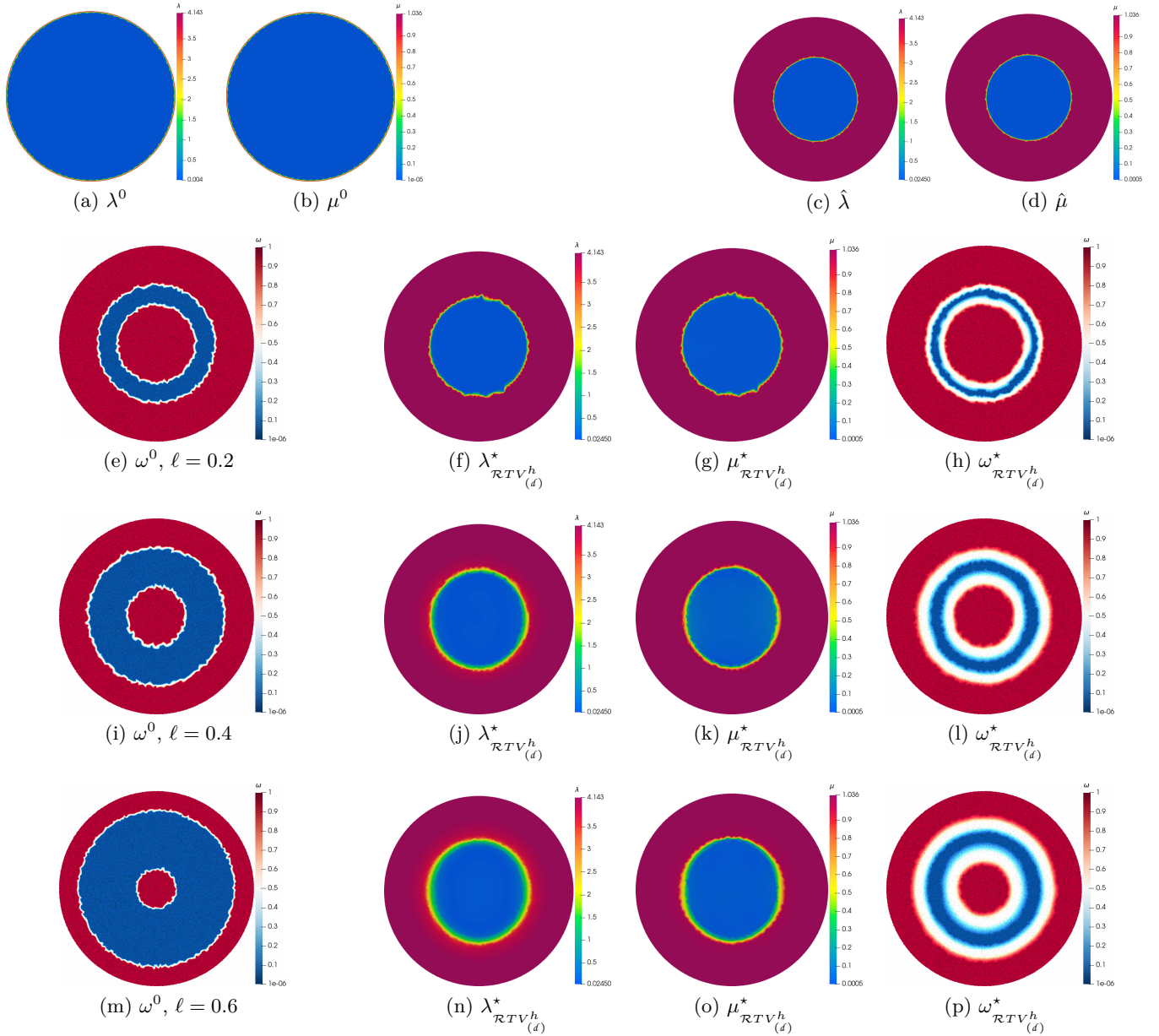
### 4.1.5 Εικόνες



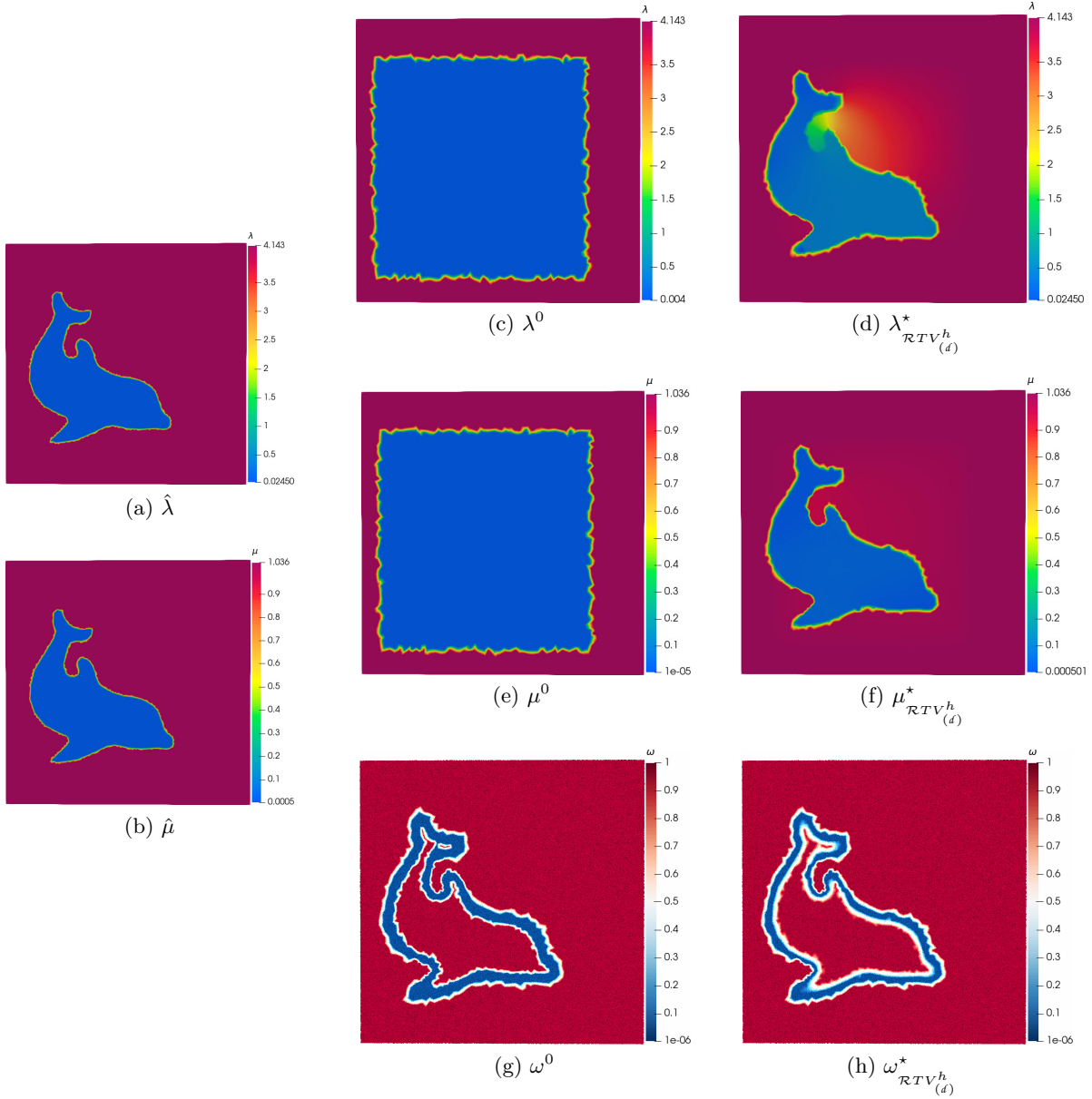
Εικόνα 4.1a : Πρόβλημα 4.1.4.1. Ανακατασκευή ενός ισχυρά έκκεντρου εγκλεισμού με  $\alpha_{D_1} = (0.0245, 5 \times 10^{-4})$  και  $\alpha_{\Omega_1 \setminus D_1} = (4.143, 1.036)$ . (a)-(b) Αρχική προσέγγιση για την  $\alpha$ . (c)-(d) Στόχος ανακατασκευής. Επίπεδο αβεβαιότητας  $\omega^0$  και βέλτιστη λύση ( $\alpha^*, \omega^*$ ) για (e)-(h)  $\ell = 0.2$ , (i)-(l)  $\ell = 0.4$ , (m)-(p)  $\ell = 0.6$ .



Εικόνα 4.1b : Πρόβλημα 4.1.4.1. Ανακατασκευή ενός ήπια έγκεντρου εγγλεισμού με  $\alpha_{D_1} = (0.0245, 5 \times 10^{-4})$  και  $\alpha_{\Omega_1 \setminus D_1} = (4.143, 1.036)$ . (a)-(b) Αρχική προσέγγιση για την  $\alpha$ . (c)-(d) Στόχος ανακατασκευής. Επίπεδο αβεβαιότητας  $\omega^0$  και βέλτιστη λύση ( $\alpha^*, \omega^*$ ) για (e)-(h)  $\ell = 0.2$ , (i)-(l)  $\ell = 0.4$ , (m)-(p)  $\ell = 0.6$ .

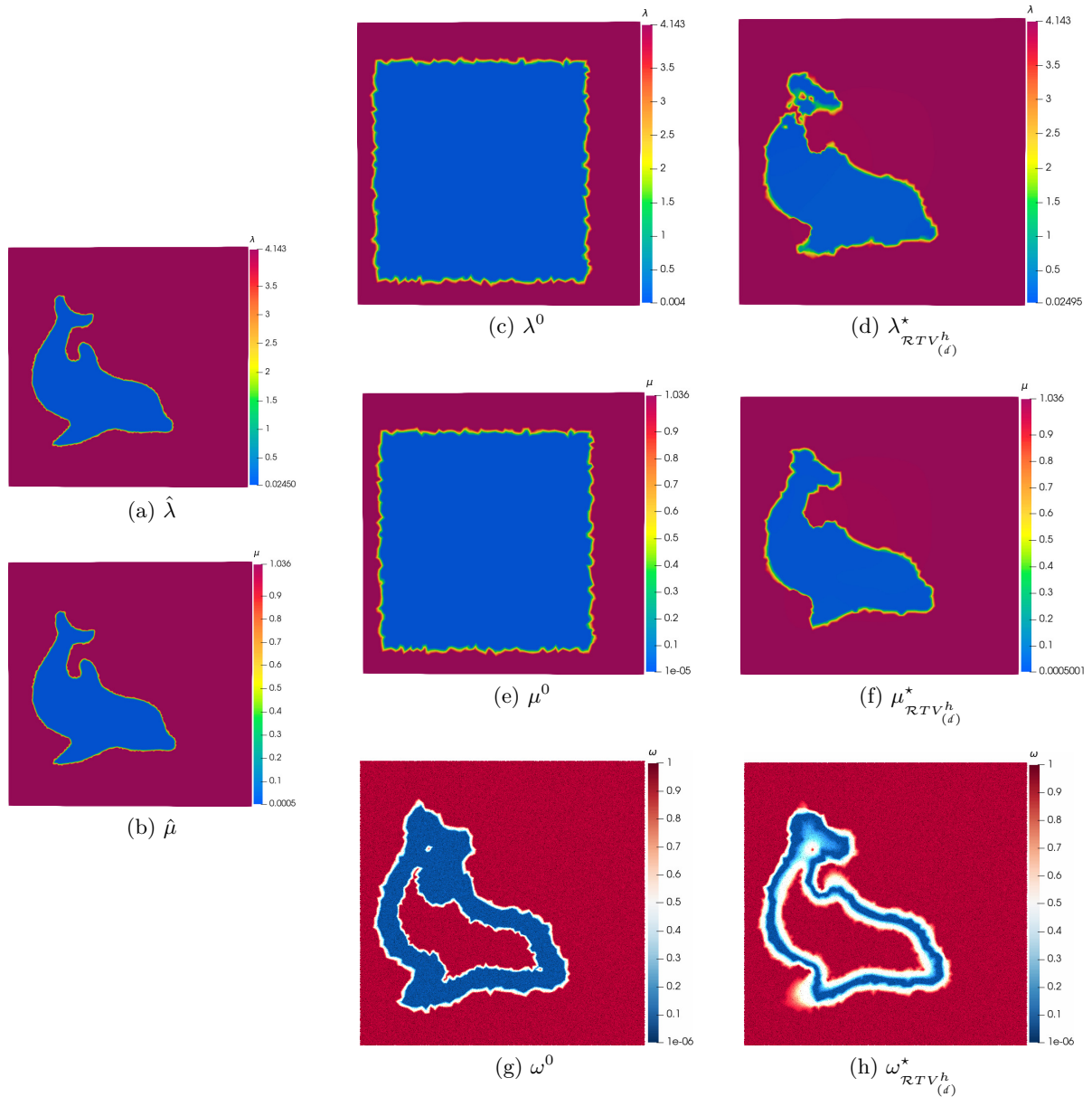


Εικόνα 4.1c : Πρόβλημα 4.1.4.1. Ανακατασκευή ενός ομόκεντρου εγκλεισμού με  $\alpha_{D_1} = (0.0245, 5 \times 10^{-4})$  και  $\alpha_{\Omega_1 \setminus D_1} = (4.143, 1.036)$ . (a)-(b) Αρχική προσέγγιση για την  $\alpha$ . (c)-(d) Στόχος ανακατασκευής. Επίπεδο αβεβαιότητας  $\omega^0$  και βέλτιστη λύση  $(\alpha^*, \omega^*)$  για (e)-(h)  $\ell = 0.2$ , (i)-(l)  $\ell = 0.4$ , (m)-(p)  $\ell = 0.6$ .

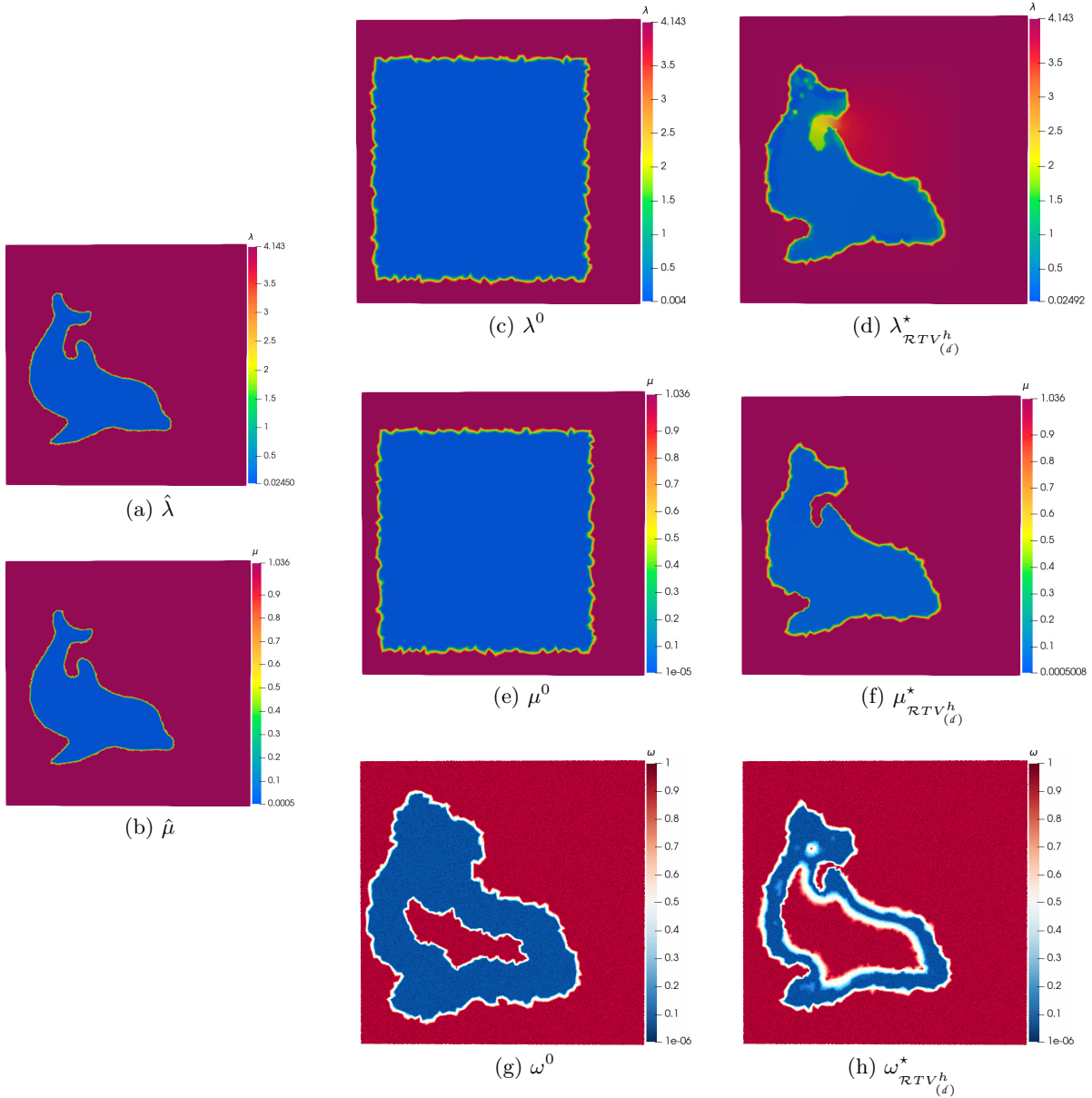


Εικόνα 4.2a : Πρόβλημα 4.1.4.2 για την ελάχιστη δυνατή γεωμετρική αβεβαιότητα. Ανακατασκευή της γεωμετρίας «δεελφίνι» με  $\alpha_{D_4} = (0.0245, 5 \times 10^{-4})$  και  $\alpha_{\Omega_3 \setminus D_4} = (4.143, 1.036)$ . (a)-(b) Στόχος ανακατασκευής. (c)-(e) Αρχική προσέγγιση για την  $\alpha$ . (g) Επίπεδο αβεβαιότητας  $\omega^0$  για  $\ell = 0.02$ . (d)-(f)-(h) Βέλτιστη λύση ( $\alpha^*, \omega^*$ ).





Εικόνα 4.2b : Πρόβλημα 4.1.4.2 για μέτρια αβεβαιότητα. Ανακατασκευή της γεωμετρίας «δεελφίνι» με  $\alpha_{D_4} = (0.0245, 5 \times 10^{-4})$  και  $\alpha_{\Omega_3 \setminus D_4} = (4.143, 1.036)$ . (a)-(b) Στόχος ανακατασκευής. (c)-(e) Αρχική προσέγγιση για την  $\alpha$ . (g) Επίπεδο αβεβαιότητας  $\omega^0$  για  $\ell = 0.05$ . (d)-(f)-(h) Βέλτιστη λύση  $(\alpha^*, \omega^*)$ .



Εικόνα 4.2c : Πρόβλημα 4.1.4.2 για μεγάλη αβεβαιότητα. Ανακατασκευή της γεωμετρίας «δελφίνι» με  $\alpha_{D_4} = (0.0245, 5 \times 10^{-4})$  και  $\alpha_{\Omega_3 \setminus D_4} = (4.143, 1.036)$ . (a)-(b) Στόχος ανακατασκευής. (c)-(e) Αρχική προσέγγιση για την  $\alpha$ . (g) Επίπεδο αβεβαιότητας  $\omega^0$  για  $\ell = 0.1$ . (d)-(f)-(h) Βέλτιστη λύση ( $\alpha^*, \omega^*$ ).



### 4.1.6 Πίνακες αποτελεσμάτων

Πίνακας 4.2:  $d^*$  τιμές της  $\hat{\alpha}$ - ανακατασκευής για το πρόβλημα του μονού εγκλεισμού.

SGTV convergence parameters										
Single Inclusion example	$\ell$	$a_\omega$	$a_\lambda$	$a_\mu$	$\alpha^*$				$\omega^*$	
					$\lambda_{D_1}^*$	$\mu_{D_1}^* (\times 10^{-4})$	$\lambda_{out}^*$	$\mu_{out}^*$	$\omega_{min}^*$	$\omega_{max}^*$
<i>strong eccentric</i>	0.2	0.3	9	9	0.02479	5	4.143	1.036	$2.47 \times 10^{-6}$	1
	0.4	0.5	8	9	0.02450	5	4.143	1.036	$1.19 \times 10^{-5}$	1
	0.6	0.5	8.7	8	0.02450	5	4.143	1.036	$5.49 \times 10^{-6}$	1
<i>mild eccentric</i>	0.2	0.3	5	5	0.02499	5	4.143	1.036	$1.16 \times 10^{-6}$	1
	0.4	0.5	2	4	0.02450	5	4.143	1.036	$4.84 \times 10^{-5}$	1
	0.6	0.5	2	3	0.02450	5	4.143	1.036	$1.37 \times 10^{-6}$	1
<i>concentric</i>	0.2	0.1	0.8	2	0.02450	5	4.143	1.036	$4.19 \times 10^{-6}$	1
	0.4	0.4	2	2.7	0.02450	5	4.143	1.036	$3.09 \times 10^{-6}$	1
	0.6	0.4	1.85	1.85	0.02450	5	4.143	1.036	$2.05 \times 10^{-6}$	1

Πίνακας 4.3:  $d^*$  τιμές της  $\hat{\alpha}$ - ανακατασκευής για το πρόβλημα “Dolphin”.

SGTV convergence parameters										
Dolphin Inclusion example	$\ell$	$a_\omega$	$a_\lambda$	$a_\mu$	$\alpha^*$				$\omega^*$	
					$\lambda_{D_4}^*$	$\mu_{D_4}^* (\times 10^{-4})$	$\lambda_{out}^*$	$\mu_{out}^*$	$\omega_{min}^*$	$\omega_{max}^*$
$\mathcal{RTV}_{(d)}^h$	0.02	$2 \times 10^{-3}$	0.7	0.8	0.02450	5	4.143	1.036	$1.08 \times 10^{-6}$	1
	0.05	$1.37 \times 10^{-3}$	0.05	0.05	0.02495	5	4.143	1.036	$1.82 \times 10^{-6}$	1
	0.1	$5 \times 10^{-3}$	4.8	5	0.02492	5	4.143	1.036	$1.3 \times 10^{-5}$	1

## 4.2 Εντοπισμός μιας επίπεδης ρωγμής - Προσομοίωση και Ανακατασκευή

Τα προβλήματα ανίχνευσης ρωγμών συνίστανται στον εντοπισμό μίας ρωγμής (ή περισσότερων) από ένα υπερκαθορισμένο σύνολο επιφανειακών δεδομένων στη μορφή δύναμη-μετατόπιση. Τέτοιου είδους προβλήματα μπορεί να προκύψουν σε διαφορετικά φυσικά πλαίσια, όπως την ελαστοστατική, τον ηλεκτρομαγνητισμό, την ακουστική ή την ελαστοδυναμική, και είναι εξαιρετικής σπουδαιότητας σε επιστημονικά πεδία, όπως *fracture mechanics*, μηχανοκαταστροφικό έλεγχο υλικών, συντήρηση και ενίσχυση κατασκευών, γεωφυσική έρευνα, εδαφομηχανική κτλ., καθώς είναι πολύ σημαντικό κανείς να αποκτά πληροφορία για τη θέση, το σχήμα και το μέγεθος μιας ρωγμής χωρίς να τροποποιείται η υπάρχουσα κατάσταση του υπό εξέταση αντικειμένου.

Οι κλασικές έρευνες που συναντώνται στη βιβλιογραφία και αφορούν στην ύπαρξη ρωγμών σε συνεχή μέσα (βλ., π.χ., [77]) λαμβάνουν υπόψιν ποικίλους περιορισμούς: μη φραγμένα χωρία, χωρία με γνωστή συνάρτηση *Green*, πηγή στο εσωτερικό του σώματος, πηγή μακριά από τη ρωγμή κτλ. Τα περισσότερα θεωρητικά αποτελέσματα σχετίζονται με την εξίσωση *Laplace* (θερμική εξίσωση σταθερής κατάστασης ή ηλεκτρική αγωγή), ενώ πιο πρόσφατα αναπτύχθηκαν μια σειρά από στρατηγικές επίλυσης του δυναμικού προβλήματος ή παρόμοιων χρονοεξαρτώμενων προβλημάτων που χρησιμοποιούν τεχνικές του βέλτιστου ελέγχου [141] ή κατασκευάζουν κατάλληλο συζυγές πεδίο και εφαρμόζουν την αρχή της αντιστροφής χάσματος (*reciprocity gap*) [81]. Το πρώτο αποτέλεσμα μοναδικότητας και μερικής ευστάθειας για μια εσωτερική ρωγμή στη διδιάστατη ηλεκτροστατική κατοχυρώθηκε από τους *Friedman* και *Vogelius* στο [142], όπου απέδειξαν ότι δύο ηλεκτρικές ροές, μαζί με τα αντίστοιχα δυναμικά, αρκούν για να προσδιορίσουν μοναδικά τη ρωγμή, ενώ για το ίδιο πρόβλημα οι *Allesandrini*, *Beretta* και *Vessella* [143] διατύπωσαν ένα αποτέλεσμα ευστάθειας *Lipschitz*.

Οι *Bryan* και *Vogelius* [144], και αργότερα οι *Allesandrini* και *Diaz Valenzuela* [145], εξέτασαν το πρόβλημα των πολλαπλών ρωγμών στη διδιάστατη περίπτωση. Στο [146] οι *Andrieux*, *Ben Abda* και *Jaoua* απέδειξαν ότι το αντίστροφο επιφανειακό πρόβλημα (για μία ρωγμή) είναι καλώς ορισμένο κατά *Hadamard* (μοναδικότητα και ευστάθεια *Lipschitz*). Επιπλέον έρευνες στη μοναδικότητα και την ευστάθεια με πεπερασμένα συνοριακά δεδομένα συναντώνται στους *Elcrat*, *Isakov*, *Neculoiu* [147] και *Eller* [148], όπου και αποδεικνύεται ο μοναδικός προσδιορισμός μίας ρωγμής με γενικό σχήμα από τη γνώση του *Dirichlet-to-Neumann* τελεστή. Λίγο αργότερα, οι *Allesandrini* και *Di Benedetto* [149] μελέτησαν τη γενική τριδιάστατη περίπτωση του προβλήματος.

Όσον αφορά την ελαστικότητα, όταν είναι *a priori* γνωστό ότι η ρωγμή είναι επίπεδη και δεδομένης μιας πλήρους γνώσης των επιφανειακών δεδομένων, οι *Andrieux*, *Ben Abda* και *Bui* [78, 79] κατοχύρωσαν ένα ολικό αποτέλεσμα προσδιορισμού βασισμένο στην αρχή της αντιστροφής χάσματος.

Για το ζήτημα της ανακατασκευής του αντίστροφου προβλήματος διατυπώνονται αναλυτικά αποτελέσματα. Στο [150] δίνεται μια φόρμουλα ανακατασκευής για μια άγνωστη επίπεδη ρωγμή από ένα ζεύγος επιφανειακών δεδομένων υπό την προϋπόθεση ότι το ολοκλήρωμα άλματος του δυναμικού κατά μήκος της δεν εξαφανίζεται. Στο [151] εξάγεται ο τύπος της κυρτής θήκης μιας άγνωστης ρωγμής σε ένα διδιάστατο μέσο, ως εφαρμογή της μεθόδου εγκλεισμού (*enclosure method*) [152], δεδομένου ότι μια κατάλληλη τοπική πυκνότητα ρεύματος στην επιφάνεια του μέσου είναι γνωστή. Παρόμοια μελέτη ανακατασκευής με ένα ζεύγος δεδομένων συναντάται στο [153]. Περαιτέρω στρατηγικές ανακατασκευής που βασίζονται στη μέθοδο αντιστροφής χάσματος περιγράφονται στις εργασίες [80, 154, 155].

Στη παρούσα μελέτη προτείνεται ένα σχήμα ανακατασκευής για την ανίχνευση μίας ρωγμής σε ένα γραμμικό ισότροπο και ομογενές ελαστικό μέσο. Στην Παράγραφο 4.2.1 εισάγεται ο τύπος κανονικοποίησης. Η Παράγραφος 4.2.2.1 επιλύει αριθμητικά το ευθύ

πρόβλημα για μια συγκεκριμένη γεωμετρική διάταξη και η Παράγραφος 4.2.2.2 υλοποιεί τη σχεδιασμένη τεχνική αντιστροφής με ένα ζεύγος δεδομένων προσομοίωσης.

#### 4.2.1 Το σχήμα ελαχιστοποίησης

(Χάριν απλότητας, ακολουθούμε το συμβολισμό της Ενότητας 4.1.)

Έστω  $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d = 2$ , ένα γραμμικό ισότροπο ελαστικό μέσο που περιέχει μία ρωγμή  $\Gamma$  στο εσωτερικό του. Θεωρούμε το σύστημα (215)-(218) με γνωστές Lamé παραμέτρους  $\alpha = (\lambda, \mu)$ . Ορίζουμε τη συνάρτηση-οδηγό  $r(x) \in L^\infty(\Omega, [\beta, 1])$ ,  $0 < \beta \ll 1$ , κατ' αντιστοιχία με τη δυϊκή μεταβλητή  $\omega$  (βλ. Παράγραφο 4.1.2), υπεύθυνη για τον εντοπισμό του *jump set* των μετατοπίσεων  $u$ . Η προσδοκώμενη συμπεριφορά της μεταβλητής  $r(x)$  είναι να παίρνει πολύ μικρές τιμές ( $\beta$ ) στην περιοχή της ρωγμής και να παραμένει σταθερή, ίση με τη μονάδα, παντού αλλού. Θεωρούμε το συναρτησιακό

$$\begin{aligned} J(u^\alpha, v^\alpha, r) &= \frac{1}{2} r \langle \Lambda_\alpha f - t, f - \Lambda_\alpha^{-1} t \rangle_{\mathcal{B}^* \times \mathcal{B}} \\ &= \frac{1}{2} \int_\Omega r \left\{ \lambda \left| \sum_i \frac{\partial(u_i^\alpha - v_i^\alpha)}{\partial x_i} \right|^2 + \mu \sum_{i,j} \left| \frac{\partial(u_i^\alpha - v_i^\alpha)}{\partial x_j} + \frac{\partial(u_j^\alpha - v_j^\alpha)}{\partial x_i} \right|^2 \right\} dx \end{aligned} \quad (260)$$

με  $(u^\alpha, v^\alpha) \in H^1(\Omega) \times (H^1(\Omega) \cap W)$  τις διανυσματικές λύσεις των ευθέων *Dirichlet* και *Neumann* προβλημάτων (βλ., για παράδειγμα, (232)-(233)) που αντιστοιχούν στις παραμέτρους  $\alpha$ . Η συγκεκριμένη ενσωμάτωση του οδηγού  $r$  στην ενέργεια (260) ανταποκρίνεται στον προαναφερθέντα ρόλο του. Πράγματι, όταν η μεταβλητή  $r$  είναι πολύ μικρή, η πυκνότητα της ελαστικής ενέργειας δικαιούται να παίρνει πολύ μεγάλες τιμές (αναμενόμενη συμπεριφορά στη γειτονιά της ρωγμής), ενώ όταν  $r = 1$  εξάγεται η κλασική μεταβολική μορφή της ισότροπης ελαστικότητας.

Παράλληλα, ορίζουμε τους όρους

$$\mathcal{R}_{(f)} := c_f \int_\Omega (1 - r)(|u^\alpha| + |v^\alpha|) dx \quad (261)$$

και

$$\mathcal{R}_{(r)} := c_r \int_\Omega r^2 dx, \quad (262)$$

όπου με  $f$  συμβολίζουμε τη διανυσματική μεταβλητή  $f(x) := (u(x), v(x), r(x))$ . Οι όροι (261)-(262) αποτελούν την ομαλοποίηση του προβλήματος με  $c_f, c_r (> 0)$  τις αντίστοιχες παραμέτρους ομαλοποίησης. Το προτεινόμενο σχήμα βασίζεται στην αποδοτική αλληλεπίδραση της δυϊκής μεταβλητής  $r$  με τα πεδία  $u, v$ , που συμμετέχουν στα *Dirichlet* και *Neumann* προβλήματα. Η μορφή του  $\mathcal{R}_{(f)}$  δεν επιβάλλει κάποιο ουσιαστικό περιορισμό στη μήτρα του ελαστικού υλικού, αλλά εξασφαλίζει την ελεγχόμενη  $L^1$ - συμπεριφορά του ελαστικού πεδίου στην περιοχή της ρωγμής.

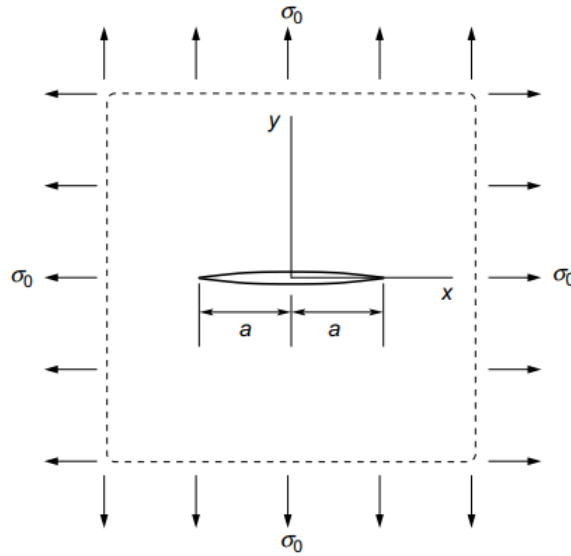
Στα επόμενα, γράφουμε  $u$  και  $v$  αντί για  $u^\alpha$  και  $v^\alpha$  προκειμένου να δηλώσουμε τη μη εξάρτηση της ελαχιστοποιητικής διαδικασίας από τις παραμέτρους  $\alpha$ .

Προσθέτοντας τους όρους (260)-(262) συνθέτουμε το πλήρες συναρτησιακό ελαχιστοποίησης

$$\mathcal{J}(u, v, r) = J(u, v, r) + \frac{1}{2} c_f \int_\Omega (1 - r)(|u| + |v|) dx + \frac{1}{2} c_r \int_\Omega r^2 dx. \quad (263)$$

### 4.2.2 Αριθμητική υλοποίηση

Ένα από τα τυπικότερα προβλήματα ρωγμών στη μηχανική θραύσης αποτελεί το άπειρο επίπεδο που εμπεριέχει μία ρωγμή (ευθύγραμμο τμήμα) μήκους  $2a$  και υπόκειται σε ομοιόμορφη διαξονική τάση  $\sigma_0$  στο άπειρο, όπως απεικονίζεται στην Εικόνα 4.3. Στην πρακτική εφαρμογή, αν το μήκος της ρωγμής είναι πολύ μικρότερο συγκριτικά με κάθε άλλο μέγεθος της επιπέδου του εξεταζόμενου ελαστικού σώματος, η περιοχή μαθηματικά μπορεί να θεωρηθεί ως ένα άπειρο επίπεδο με μία πεπερασμένη ρωγμή. Το παραπάνω πρόβλημα αντιστοιχίζεται με το πρώτο από τα τρία βασικά μοντέλα χαρακτηρισμού της θραύσης ενός σώματος (*Opening, Sliding and Tearing Mode*, [157]), σύμφωνα με το οποίο οι δύο επιφάνειες της ρωγμής «ανοίγουν» μόνο κατά τη συνιστώσα  $u_y$ , δηλαδή απομακρύνονται συμμετρικά ως προς το απαραμόρφωτο  $xz$ - επίπεδο.



Εικόνα 4.3 : Ρωγμή σε άπειρο ελαστικό επίπεδο που υπόκειται σε διαξονική τάση [156].

Ο υπολογισμός των αντίστοιχων τάσεων και μετατοπίσεων σε κάθε κατηγορία βασίζεται στη μέθοδο *Westergaard* [158, 159]. Στην περίπτωση που τα εξωτερικά φορτία είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα της ρωγμής, τότε  $\sigma_{xy} = 0$  κατά μήκος της  $y = 0$  και ισχύουν οι εξισώσεις [156]

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= \operatorname{Re}\{Z_I\} - y \operatorname{Im}\{Z_I'\} + 2A \\
 \sigma_{yy} &= \operatorname{Re}\{Z_I\} + y \operatorname{Im}\{Z_I'\} \\
 \sigma_{xy} &= -y \operatorname{Re}\{Z_I'\} \\
 2\mu u_x &= \frac{(\kappa - 1)}{2} \operatorname{Re}\{\hat{Z}_I\} - y \operatorname{Im}\{Z_I\} + \frac{1}{2}(\kappa + 1)Ax \\
 2\mu u_y &= \frac{(\kappa + 1)}{2} \operatorname{Im}\{\hat{Z}_I\} - y \operatorname{Re}\{Z_I\} + \frac{1}{2}(\kappa - 3)Ay,
 \end{aligned} \tag{264}$$

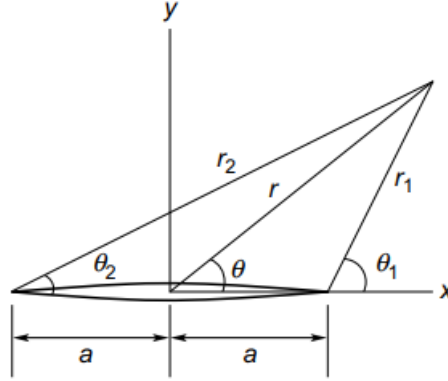
όπου  $Z_I$  η επονομαζόμενη *Westergaard* συνάρτηση (για τα προβλήματα τύπου “*Opening Mode*”) με  $\hat{Z}_I \equiv Z_I$ ,  $\kappa = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}$  και  $A \in \mathbb{R}$ .

Θεωρούμε τις ακόλουθες συνοριακές συνθήκες

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xy} = \sigma_{yy} = 0 \quad \text{στο } |x| \leq a \quad \text{και } y = 0 \quad (\text{επιφάνειες ρωγμής}) \\
 \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_0, \quad \sigma_{xy} = 0 \quad \text{στο } x^2 + y^2 \rightarrow \infty.
 \end{aligned} \tag{265}$$

Η λύση για το πρόβλημα συνοριακών τιμών (265) δόθηκε από τον *Westergaard* [158] με

$$Z_I(z) = \frac{\sigma_0 z}{\sqrt{z^2 - a^2}}, \quad A = 0. \quad (266)$$



Εικόνα 4.4 : Πολικό σύστημα συντεταγμένων [156].

Για την εξαγωγή των αναλυτικών εκφράσεων των (264), είναι βολικότερο να χρησιμοποιήσουμε τις πολικές συντεταγμένες, όπως εκθέτονται στην Εικόνα 4.4:

$$\begin{aligned} z &= r e^{i\theta} \\ z - a &= r_1 e^{i\theta_1} \\ z + a &= r_2 e^{i\theta_2}. \end{aligned} \quad (267)$$

Τότε η συνάρτηση  $Z_I$  γίνεται

$$Z_I = \frac{\sigma_0 z}{\sqrt{z+a}\sqrt{z-a}} = \frac{\sigma_0 r}{\sqrt{r_1 r_2}} \exp i\left(\theta - \frac{1}{2}\theta_1 - \frac{1}{2}\theta_2\right), \quad (268)$$

με παράγωγο

$$\begin{aligned} Z_I' &= \frac{\sigma_0}{\sqrt{z^2 - a^2}} - \frac{\sigma_0 z^2}{(z^2 - a^2)^{3/2}} = -\frac{\sigma_0 a^2}{(z^2 - a^2)^{3/2}} \\ &= -\frac{\sigma_0 a^2}{(r_1 r_2)^{3/2}} \exp\left(-i\frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2)\right). \end{aligned} \quad (269)$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω εκφράσεις στις (264), παίρνουμε [156]

$$\sigma_{xx} = \frac{\sigma_0 r}{\sqrt{r_1 r_2}} \left[ \cos\left(\theta - \frac{1}{2}\theta_1 - \frac{1}{2}\theta_2\right) - \frac{a^2}{r_1 r_2} \sin\theta \sin\left(\frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2)\right) \right] \quad (270)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\sigma_0 r}{\sqrt{r_1 r_2}} \left[ \cos\left(\theta - \frac{1}{2}\theta_1 - \frac{1}{2}\theta_2\right) + \frac{a^2}{r_1 r_2} \sin\theta \sin\left(\frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2)\right) \right] \quad (271)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{\sigma_0 r}{\sqrt{r_1 r_2}} \left[ \frac{a^2}{r_1 r_2} \sin\theta \cos\left(\frac{3}{2}(\theta_1 + \theta_2)\right) \right] \quad (272)$$

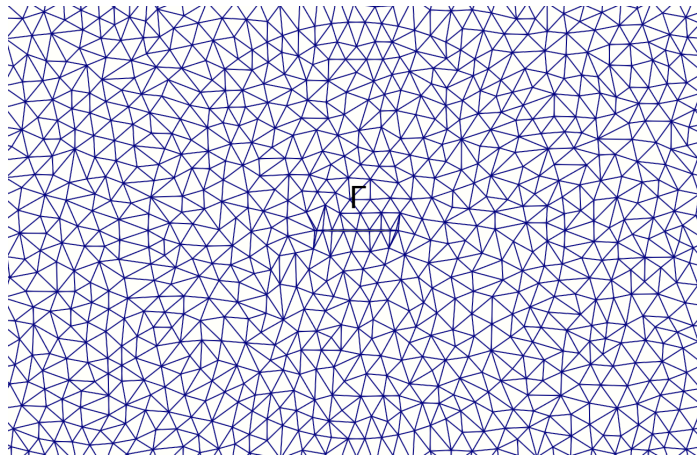
$$u_x = \frac{1}{4\mu} (\kappa - 1) \sigma_0 \sqrt{r_1 r_2} \cos\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) - \frac{1}{2\mu} r \sigma_0 \sin\theta \frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} \sin\left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \quad (273)$$

$$u_y = \frac{1}{4\mu} (\kappa + 1) \sigma_0 \sqrt{r_1 r_2} \sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) - \frac{1}{2\mu} r \sigma_0 \sin\theta \frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} \cos\left(\theta - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right). \quad (274)$$

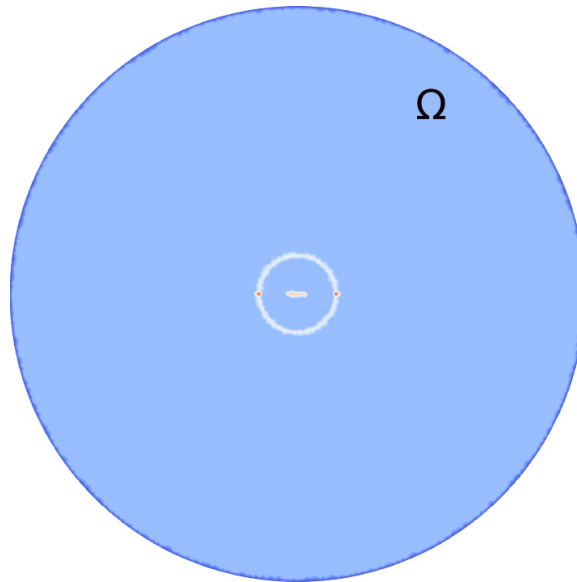
Οι εξισώσεις (270)-(274) περιγράφουν την πλήρη λύση των πεδίων τάσης ( $\sigma$ ) και μετατοπίσεων ( $u$ ) σε ολόκληρο το ελαστικό επίπεδο. Αξιοποιούμε αυτή την αναλυτική πλατφόρμα επίλυσης για την ανακατασκευή της ρωγμής  $\Gamma$  στο άπειρο ελαστικό επίπεδο  $\Omega$ , που συνιστά το υπό θεώρηση αντίστροφο πρόβλημα. Πρώτα, επιλύουμε το ευθύ πρόβλημα.

#### 4.2.2.1 Το ευθύ πρόβλημα

Το υπολογιστικό χωρίο  $\Omega$  αποτελείται από δύο ομόκεντρους δίσκους με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα  $R_{\text{ext}} = 7.5 \times R$  και  $R$  αντίστοιχα. Ο εξωτερικός δίσκος προσομοιώνει το άπειρο ελαστικό επίπεδο, ενώ ο εσωτερικός δίσκος υλοποιεί το σχήμα των πολικών συντεταγμένων (267) για  $r = R$  (βλ. Εικόνα 4.4).



(a) Delaunay τριγωνοποίηση (περιοχή ρωγμής).



(b) Προσομοίωση άπειρου ελαστικού επιπέδου  $\Omega$ .

Εικόνα 4.5 : Υπολογιστικό χωρίο  $\Omega$  για  $(x_\Gamma, y_\Gamma) = (0, 0)$ ,  $a = 0.6$ ,  $R = 3$  και  $h = 0.559$ .

Το πλέγμα στη γειτονιά της ρωγμής οριοθετείται από την κενή έλλειψη  $\Gamma$ ,

$$\Gamma := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{(x - x_\Gamma)^2}{a^2} + \frac{(y - y_\Gamma)^2}{b^2} = 1 \right\}$$

με  $a = a$ ,  $b = 0.01$  και  $(x_\Gamma, y_\Gamma)$  τις συντεταγμένες κέντρου της. Για τη διακριτοποίηση του

υπολογιστικού πλέγματος  $\Omega$  χρησιμοποιούμε το *Triangle* [62, 63] εφαρμόζοντας τη μέθοδο των  $\mathcal{P}_1$  πεπερασμένων στοιχείων (βλ., για παράδειγμα, Εικόνα 4.5(a)).

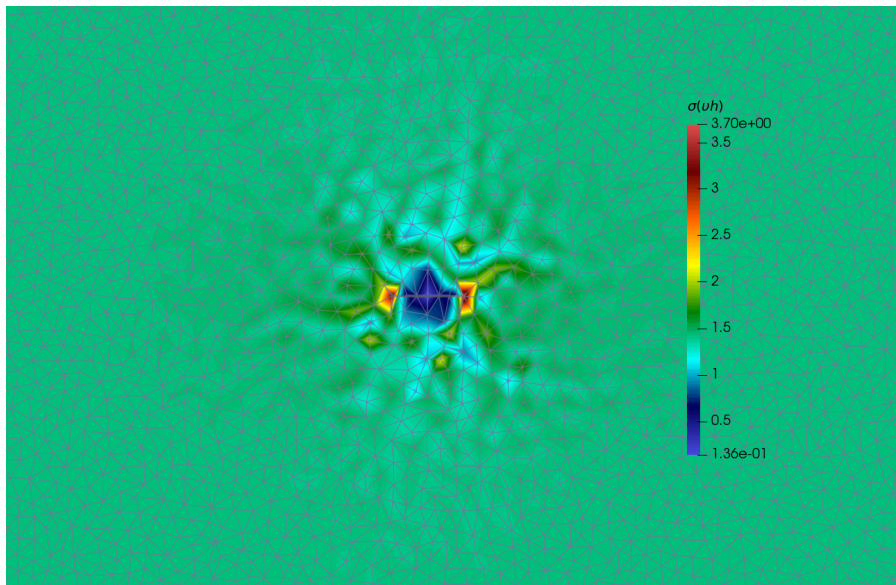
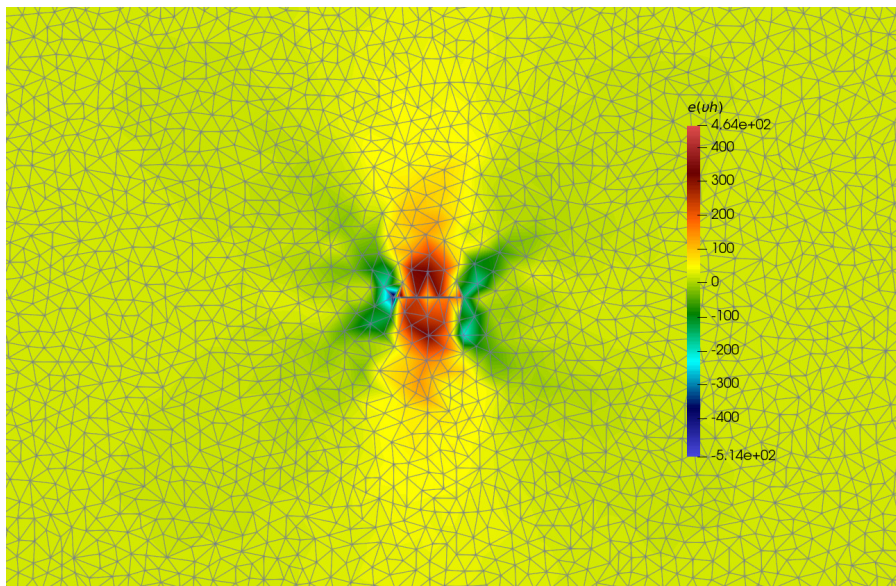
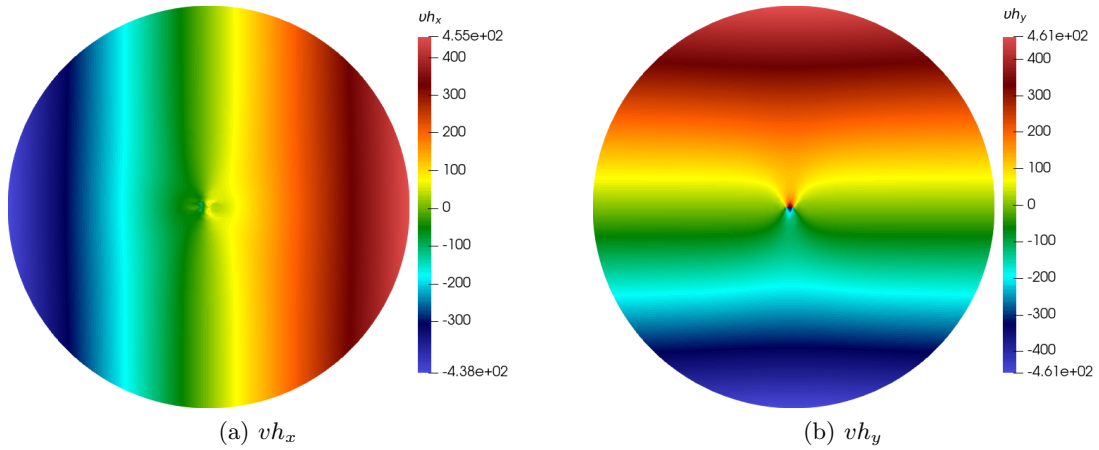
Προκειμένου να ελεγχθεί το κατασκευασμένο μητρώο πινάκων της αριθμητικής υλοποίησης, καθώς επίσης να εξεταστεί η ορθότητα των αναλυτικών δεδομένων (270)-(274) για την επερχόμενη αντιστροφή, επιλύουμε το πρόβλημα (215)-(216) θεωρώντας τις συνοριακές συνθήκες (265) για  $\sigma_0 = 1(\text{MPa})$ . Πιο συγκεκριμένα, επιβάλλουμε την τάση  $\hat{t} = \sigma \cdot n|_{\partial\Omega}$ ,  $[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 \end{bmatrix}$ , στο «άπειρο» και ενημερώνουμε δύο μόνο κόμβους του εσωτερικού κυκλικού συνόρου (συμβολίζουμε με  $\partial R$ ) με τη συνθήκη *Dirichlet* (273)-(274),  $\hat{f} = (u_x, u_y)$  (βλ. Εικόνα 4.5(b) κόκκινους κόμβους). Για τις σταθερές Lamé επιλέγουμε  $\alpha = (\lambda, \mu) = (0.0245, 5 \times 10^{-4})$  κατά μήκος ολόκληρου του χωρίου  $\Omega$ . Επιλύουμε το ευθύ πρόβλημα με τη χρήση των υπολογιστικών πακέτων MATLAB και FEniCS [74] και συγκρίνουμε τη λύση των πεπερασμένων στοιχείων ( $vh$ ) με την αναλυτική λύση ( $\hat{f}$ ) στο εσωτερικό σύνορο  $\partial R$ .

Στην Εικόνα 4.6 απεικονίζονται η υπολογιστική διανυσματική λύση  $vh = (vh_x, vh_y)$  και τα αντίστοιχα εξαγόμενα πεδία ανηγμένης παραμόρφωσης  $e(vh)$  και τάσης  $\sigma(vh)$  για την περίπτωση μιας έκκεντρης ρωγμής με  $(x_\Gamma, y_\Gamma) = (-0.4, 0)$ ,  $a = 0.5$  και  $R = 3$  ως προς το χαρακτηριστικό βήμα  $h = 0.471$ . Στη συνέχεια, η Εικόνα 4.7 περιγράφει την υπολογιστική λύση  $vh$  στους κόμβους  $I_{\text{int}}$  του εσωτερικού συνόρου, καθώς το βήμα  $h$  του διαμερισμού τείνει στο μηδέν. Στον Πίνακα 4.4 δίνονται για κάθε διακριτοποίηση τα χαρακτηριστικά πλάτη ( $h$ ) και τα αντίστοιχα  $L^\infty$ - σχετικά σφάλματα

$$L_\infty^x := \frac{\|f_x - \gamma(vh_x)\|_\infty}{\|f_x\|_\infty}, \quad L_\infty^y := \frac{\|f_y - \gamma(vh_y)\|_\infty}{\|f_y\|_\infty}, \quad (275)$$

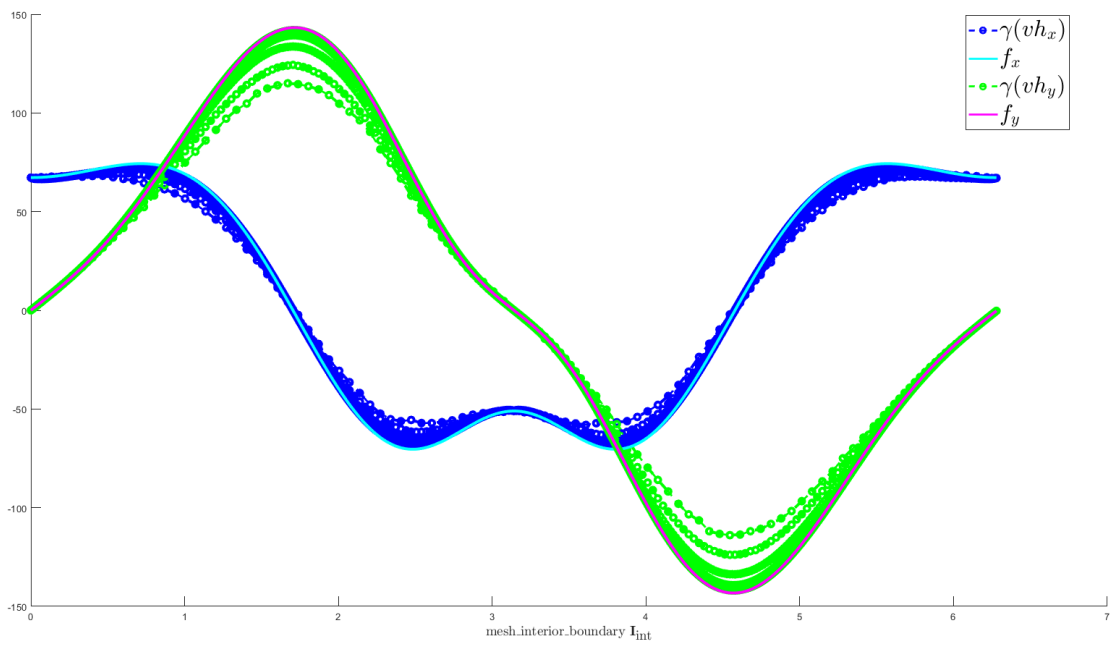
όπου  $f_x = u_x$  (273),  $f_y = u_y$  (274) και  $\gamma$  ο τελεστής ίχνους (το *maximum* υπολογίζεται πάνω σε όλους τους κόμβους  $I_{\text{int}}$ ).





Εικόνα 4.6 : Επίλυση του ευθέως προβλήματος της έκκεντρης ρωγμής. (a)-(b) Διανυσματική λύση  $v h$ . (c) Πεδίο ανηγμένων παραμορφώσεων  $e(v h)$ . (d) Πεδίο τάσεων  $\sigma(v h)$ .

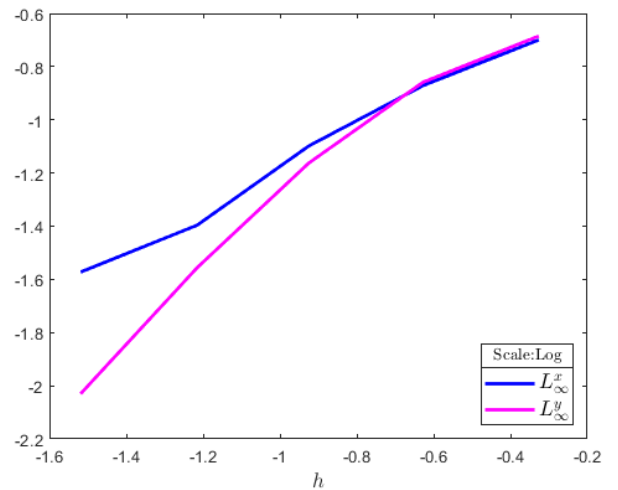




Εικόνα 4.7 : Συγκριτικό διάγραμμα υπολογιστικής ( $vh$ ) και αναλυτικής λύσης ( $\hat{f}$ ) στο εσωτερικό σύνορο, καθώς  $h \rightarrow 0$ .

Πίνακας 4.4: Εξέλιξη του σφάλματος  $\frac{\|\hat{f}-\gamma(vh)\|_\infty}{\|\hat{f}\|_\infty}$  συναρτήσει του βήματος  $h$ .

$h$	$L_\infty^x$	$L_\infty^y$
0.4715	0.1997	0.2065
0.2353	0.1343	0.1383
0.1187	$7.9693e-02$	$6.8726e-02$
$6.0866e-02$	$4.0163e-02$	$2.7793e-02$
$3.0284e-02$	$2.6768e-02$	$9.3338e-03$



### 4.2.2.2 Το αντίστροφο πρόβλημα

Συνεχίζουμε με την αριθμητική εφαρμογή του σχήματος ελαχιστοποίησης (263) για τον εντοπισμό της ρωγμής  $\Gamma$  στο άπειρο ελαστικό χωρίο  $\Omega$ . Γι' αυτό το σκοπό, θεωρούμε το υπολογιστικό χωρίο  $\Omega$  αποτελούμενο μόνο από τους δύο ομόκεντρους δίσκους (βλ., για παράδειγμα, Εικόνα 4.8(a)) και ορίζουμε το αντίστροφο πρόβλημα

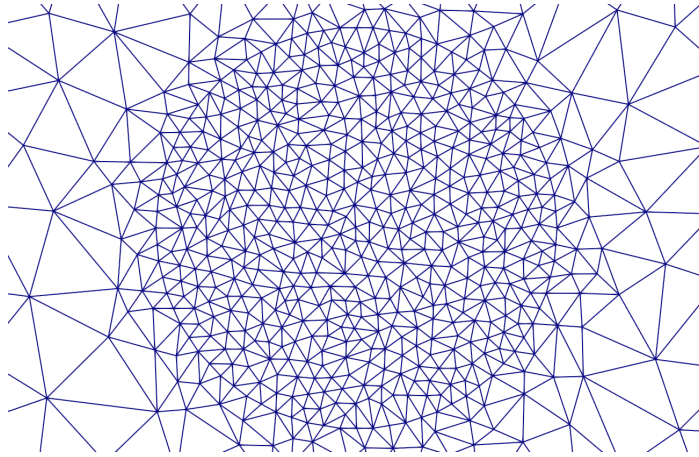
$$-\nabla \cdot \sigma = 0 \quad \text{στο } \Omega, \quad (276)$$

$$\sigma = \lambda \operatorname{tr}(\epsilon(u))\mathbb{I} + 2\mu\epsilon(u), \quad (277)$$

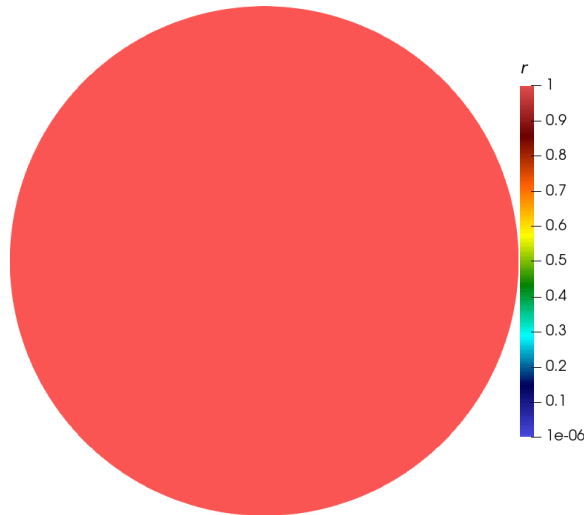
$$u = \hat{f} \quad \text{στο } \partial R, \quad (278)$$

$$\sigma \cdot n = \hat{t} \quad \text{στο } \partial\Omega, \quad (279)$$

όπου  $\hat{f} = (u_x, u_y)$  τα επιφανειακά δεδομένα (273)-(274) και  $\sigma$  όπως στην (265) με  $\sigma_0 = 1(\text{MPa})$ . Σημειωτέον ότι το αντίστροφο πρόβλημα (276)-(279) στο άπειρο χωρίο  $\Omega$  είναι



(a) Delaunay τριγωνοποίηση (περιοχή ρωγμής).



(b)  $r^0$

Εικόνα 4.8 : Υπολογιστικό χωρίο αντιστροφής  $\Omega$  και αρχικό προφίλ  $r^0$ .

ισοδύναμο με το αντίστροφο πρόβλημα

$$-\nabla \cdot \sigma = 0 \quad \text{στο } \Omega, \quad (280)$$

$$\sigma = \lambda \operatorname{tr}(e(u))\mathbb{I} + 2\mu e(u), \quad (281)$$

$$u = \hat{f} \quad \text{στο } \partial\Omega, \quad (282)$$

$$\sigma \cdot n = \hat{t} \quad \text{στο } \partial\Omega, \quad (283)$$

όπου  $\Omega$  ο δίσκος ακτίνας  $R$  και  $(\hat{f}, \hat{t})$  τα αναλυτικά δεδομένα (270)-(274).

Η αντιστροφή επιχειρείται για πέντε διαφορετικές υλοποιήσεις των συντεταγμένων κέντρου της ρωγμής  $(x_\Gamma, y_\Gamma)$ . Ως αρχική προσέγγιση για τα διανυσματικά πεδία  $(u, v)$  επιλέγουμε τις λύσεις των διαφορικών εξισώσεων

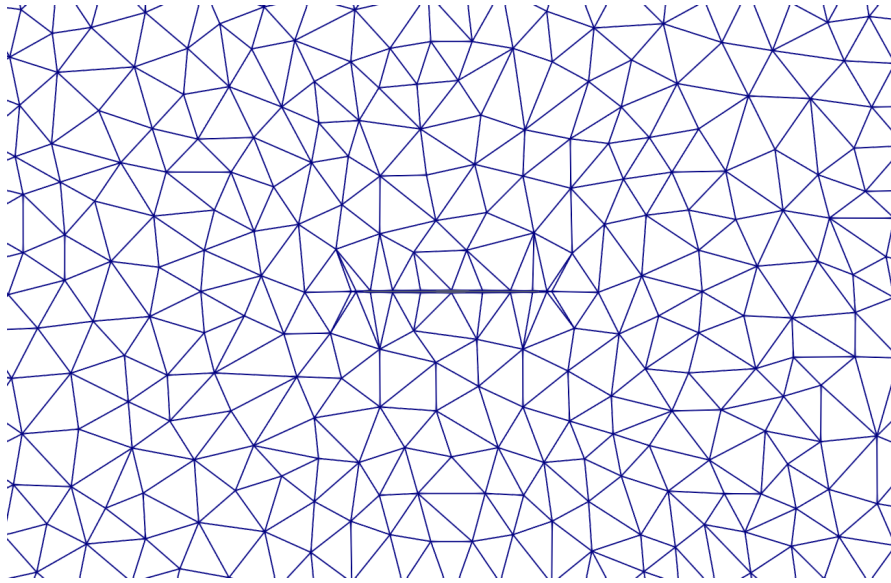
$$-\nabla \cdot \sigma = 0 \quad \text{στο } \Omega \quad \text{και} \quad u = \hat{f} \quad \text{στο } \partial R, \quad (284)$$

$$-\nabla \cdot \sigma = 0 \quad \text{στο } \Omega \quad \text{και} \quad \sigma(v) \cdot n = \hat{t} \quad \text{στο } \partial\Omega, \quad (285)$$

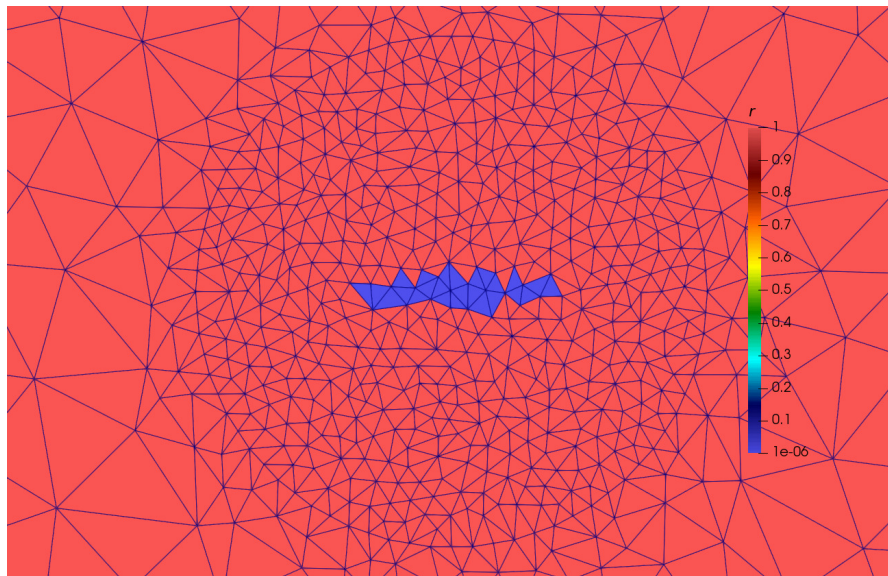
για  $\alpha = (\lambda, \mu) = (0.0245, 5 \times 10^{-4})$ , ενώ ως αρχική προσέγγιση για τον οδηγό  $r$  θεωρούμε τη σταθερή συνάρτηση  $r^0 = 1$  κατά μήκος ολόκληρου του χωρίου  $\Omega$  με  $\beta = 10^{-6}$  (βλ. Εικόνα 4.8(b)).

Η επιλογή των βέλτιστων τιμών για τις σταθερές κανονικοποίησης  $c_f, c_r$  βασίζεται στο γενικευμένο κριτήριο *Tikhonov-Morozov* [72, 73]. Επιπρόσθετα, για την παράμετρο  $c_r$  δοκιμάζουμε εμπειρικά τιμές μεγαλύτερες του ενδεδειγμένου εύρους, καθώς στα πειράματα προσομοίωσης παρατηρήθηκε πως για μεγαλύτερες τιμές της  $c_r$  αποφεύγονται περισσότερα τοπικά ελάχιστα, και επομένως η σύγκλιση στην επιθυμητή λύση επιταχύνεται.

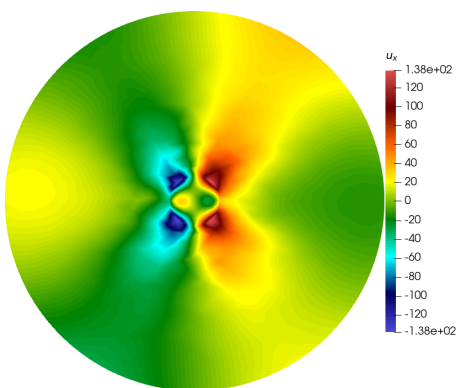
Οι Εικόνες 4.9-4.13 απεικονίζουν τον στόχο της ανακατασκευής και την υπολογιστική λύση  $(u^*, r^*)$  μαζί με τις αντίστοιχες τιμές της ενέργειας  $J^*$ , (260), σε λογαριθμική κλίμακα. Η διακριτοποίηση της συνάρτησης  $r$  και των τελεστών  $J$  υλοποιείται βάσει των στοιχείων του πλέγματος, ενώ εκείνη των *Dirichlet* και *Neumann* διανυσματικών πεδίων  $u, v$  βάσει των κόμβων. Τέλος, σημειώνουμε ότι η γραφική απεικόνιση των *Neumann* λύσεων  $(v^*)$  είναι παρόμοια με εκείνη της λύσης  $vh$  του ευθέως προβλήματος (βλ. Εικόνα 4.6(a)-(b)) και χάριν συντομίας παραλείπεται. Τα αριθμητικά αποτελέσματα για κάθε περίπτωση ανακατασκευής παραθέτονται στον Πίνακα 4.5 μαζί με το χαρακτηριστικό πλάτος  $(h)$  (*max edge length*) και τον αριθμό των στοιχείων (*elements*) και των κόμβων (*nodes*) της αντίστοιχης γεωμετρίας.



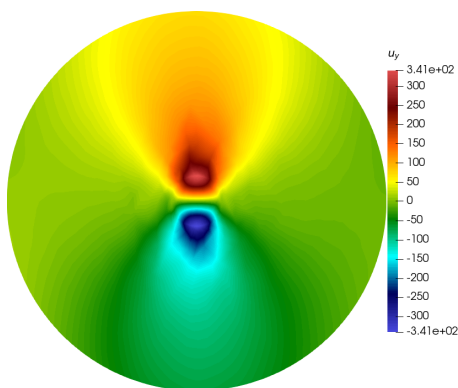
(a) target mesh



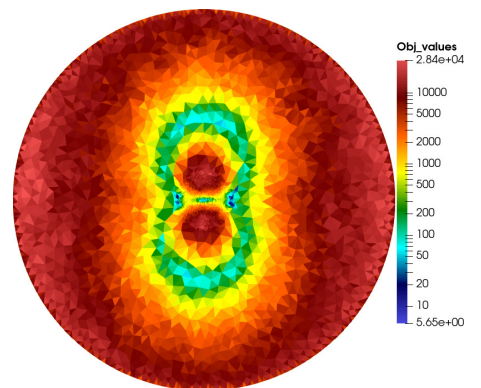
(b)  $r^*$



(c)  $u_x^*$



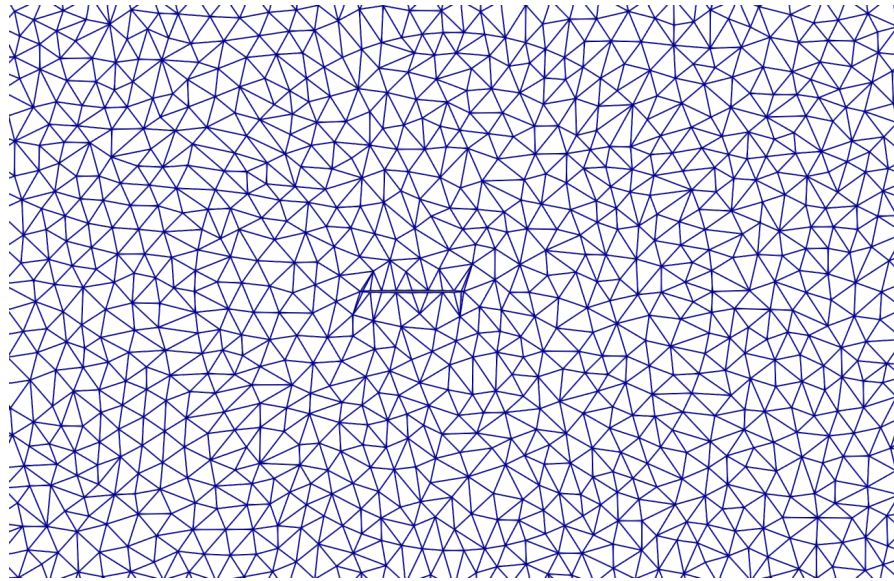
(d)  $u_y^*$



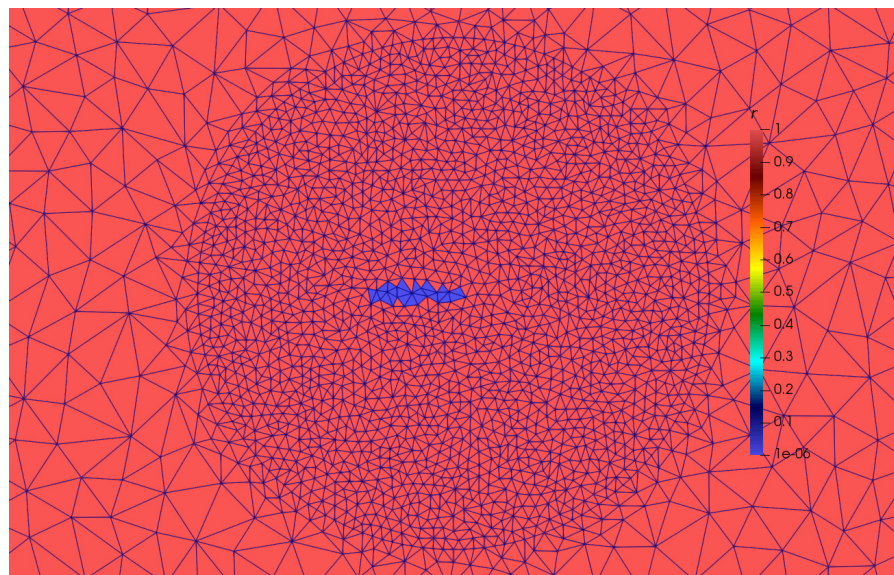
(e)  $J(u^*, v^*, r^*)$

Εικόνα 4.9 : Ανακατασκευή μίας ρωγμής με  $(x_\Gamma, y_\Gamma) = (0, 0)$ ,  $a = 0.8$  και  $R = 2$ . (a) Στόχος ανακατασκευής. (b) Βέλτιστη λύση  $r^*$ . (c)-(d) *Dirichlet* διανυσματικό πεδίο  $u^*$  και (e)  $J^*$ .

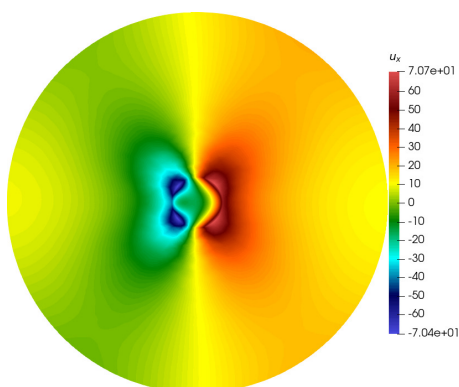




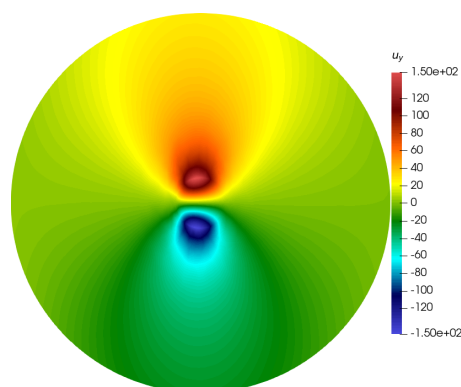
(a) target mesh



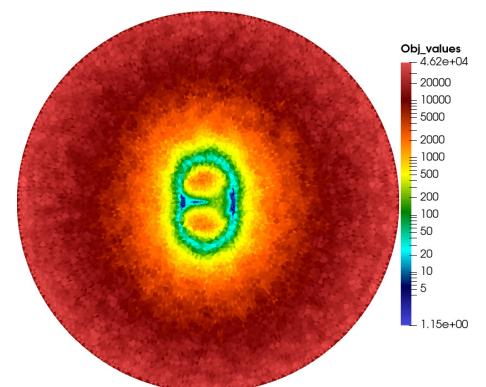
(b)  $r^*$



(c)  $u_x^*$



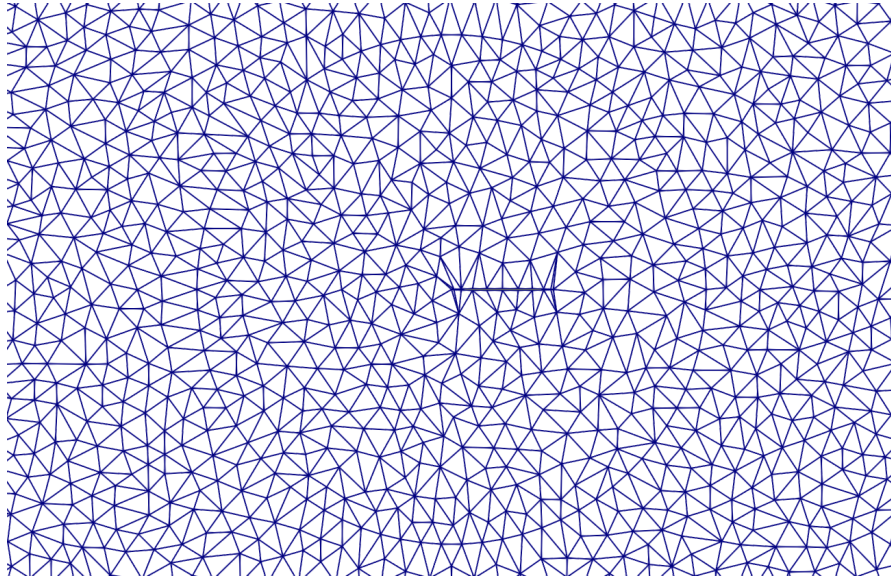
(d)  $u_y^*$



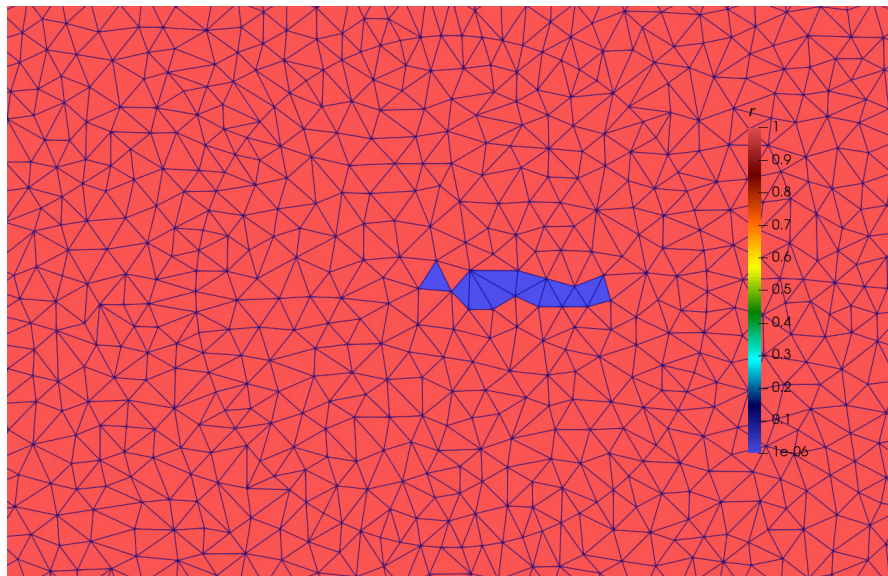
(e)  $J(u^*, v^*, r^*)$

Εικόνα 4.10 : Ανακατασκευή μίας ρωγμής με  $(x_\Gamma, y_\Gamma) = (-0.4, 0)$ ,  $a = 0.5$  και  $R = 2.5$ . (a) Στόχος ανακατασκευής. (b) Βέλτιστη λύση  $r^*$ . (c)-(d) *Dirichlet* διανυσματικό πεδίο  $u^*$  και (e)  $J^*$ .

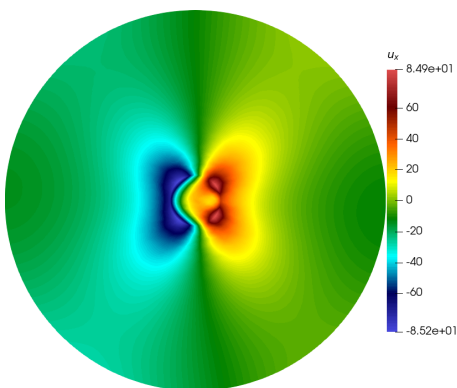




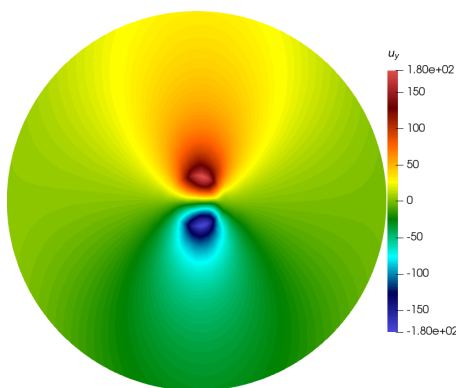
(a) target mesh



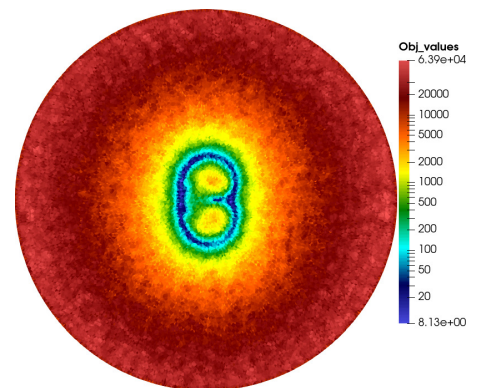
(b)  $r^*$



(c)  $u_x^*$



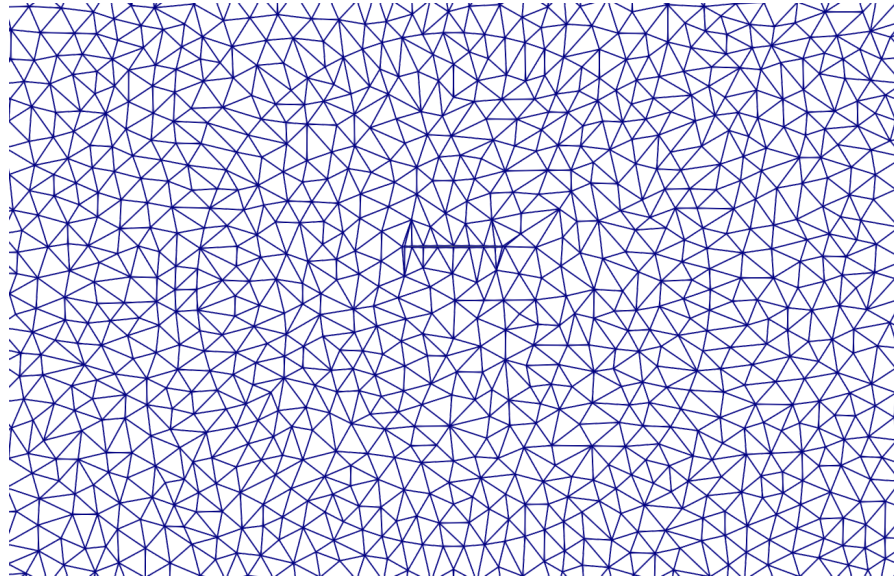
(d)  $u_y^*$



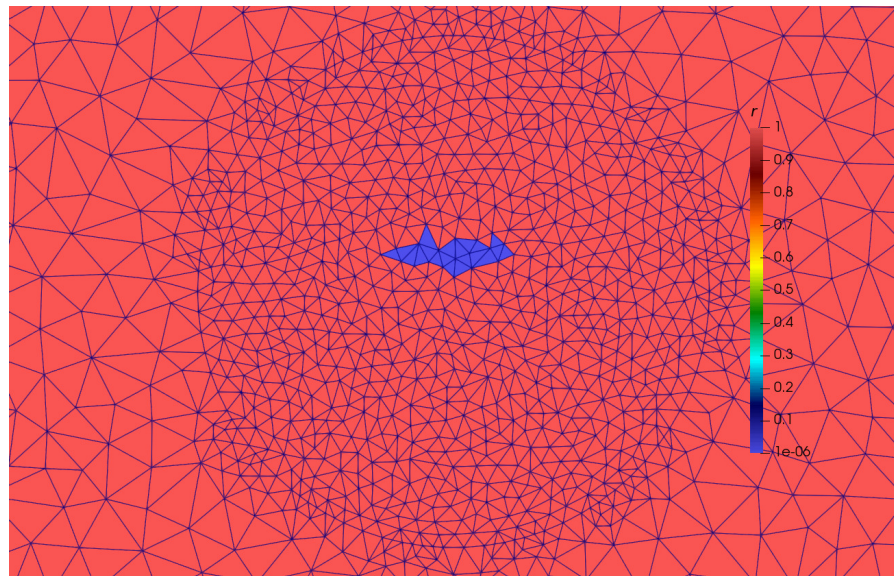
(e)  $J(u^*, v^*, r^*)$

Εικόνα 4.11 : Ανακατασκευή μίας ρωγμής με  $(x_\Gamma, y_\Gamma) = (0.6, 0)$ ,  $a = 0.6$  και  $R = 3$ . (a) Στόχος ανακατασκευής. (b) Βέλτιστη λύση  $r^*$ . (c)-(d) *Dirichlet* διανυσματικό πεδίο  $u^*$  και (e)  $J^*$ .

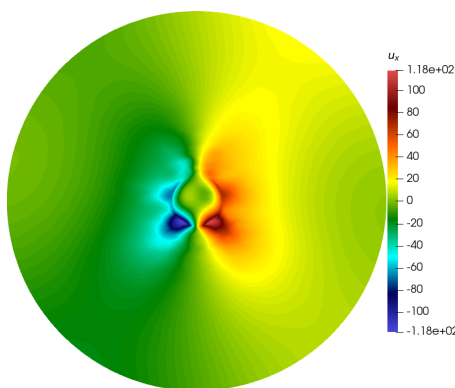




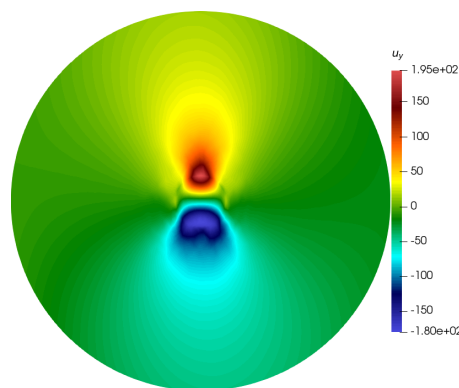
(a) target mesh



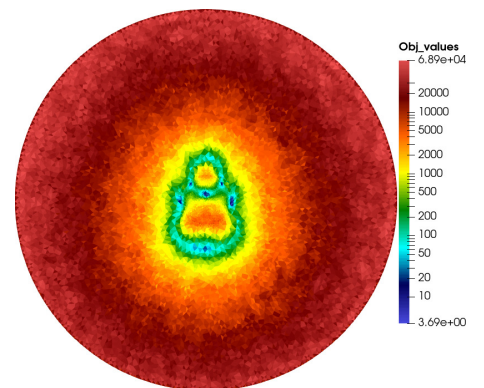
(b)  $r^*$



(c)  $u_x^*$



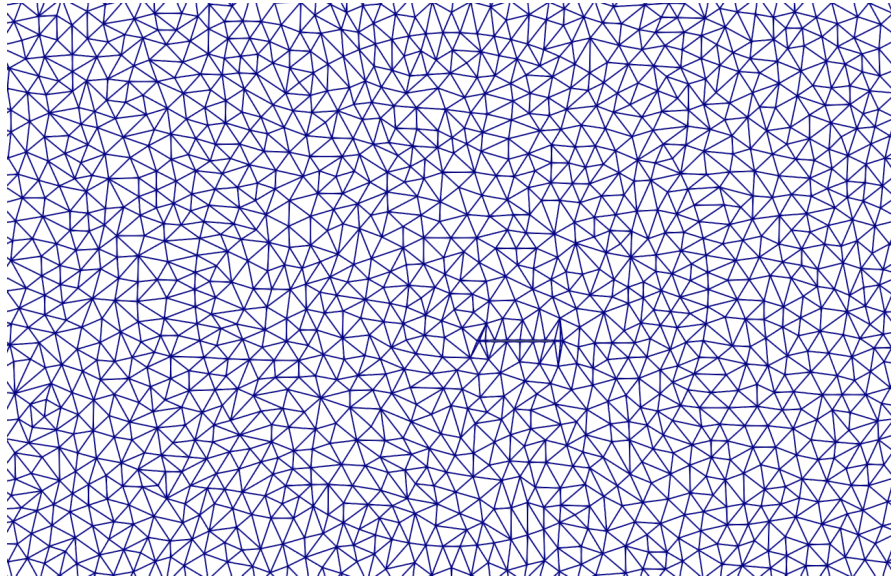
(d)  $u_y^*$



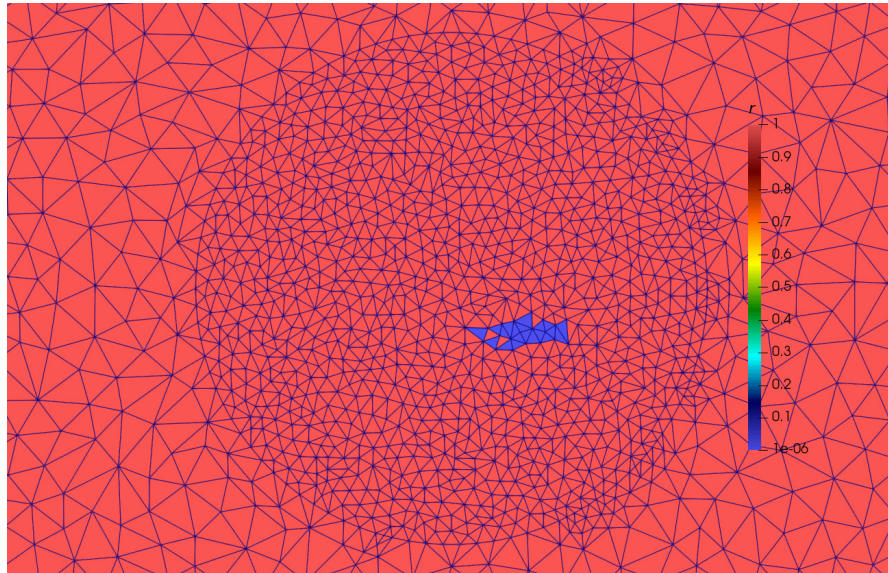
(e)  $J(u^*, v^*, r^*)$

Εικόνα 4.12 : Ανακατασκευή μίας ρωγμής με  $(x_\Gamma, y_\Gamma) = (0, 0.5)$ ,  $a = 0.6$  και  $R = 3$ . (a) Στόχος ανακατασκευής. (b) Βέλτιστη λύση  $r^*$ . (c)-(d) *Dirichlet* διανυσματικό πεδίο  $u^*$  και (e)  $J^*$ .

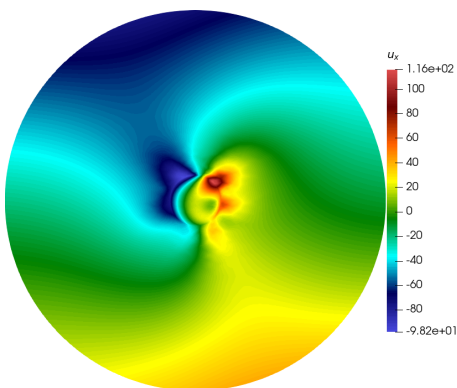




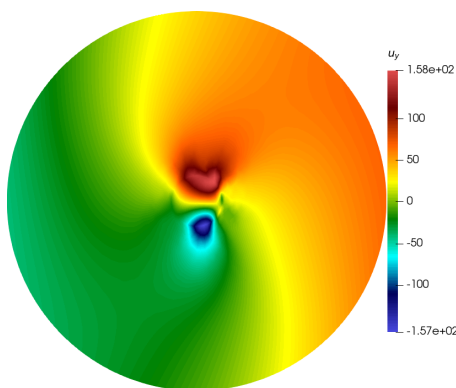
(a) target mesh



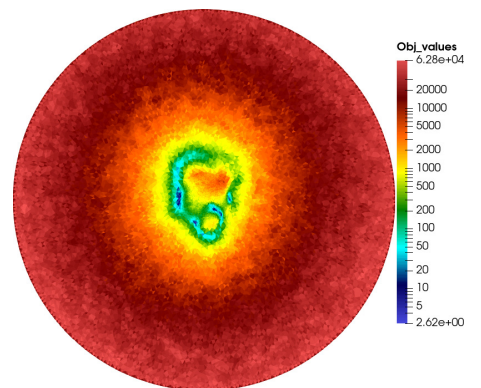
(b)  $r^*$



(c)  $u_x^*$



(d)  $u_y^*$



(e)  $J(u^*, v^*, r^*)$

Εικόνα 4.13 : Ανακατασκευή μίας ρωγμής με  $(x_\Gamma, y_\Gamma) = (0.8, -0.6)$ ,  $a = 0.5$  και  $R = 3$ . (a) Στόχος ανακατασκευής. (b) Βέλτιστη λύση  $r^*$ . (c)-(d) *Dirichlet* διανυσματικό πεδίο  $u^*$  και (e)  $J^*$ .



Πίνακας 4.5: Παράμετροι ανακατασκευής για το αντίστροφο πρόβλημα της ρωγμής.

Convergence parameters									
crack center	a	R	h	Elements	Nodes	$c_f$	$c_r$	$r^*$	
								$r_{\min}^* (\times 10^{-6})$	$r_{\max}^*$
(0, 0)	0.8	2	1.300	4306	2301	0.65	1	6.71	1
(-0.4, 0)	0.5	2.5	0.556	30060	15325	0.21	60	9.25	1
(0.6, 0)	0.6	3	0.670	26824	13707	0.09	70	1.59	1
(0, 0.5)	0.6	3	0.979	15846	8218	0.09	40	7.18	1
(0.8, -0.6)	0.5	3	0.849	19400	10054	0.017	1	5.47	1

# Αναφορές

- [1] Groetsch, C. W. (1993) *Inverse Problems in the Mathematical Sciences*. Wiesbaden, Vieweg & Teubner Verlag.
- [2] Markaki, V. (2017) *Investigation Of Inverse Problems On The Basis Of Bounded Variation Functions*. Master thesis; National Technical University of Athens.
- [3] Logan, J. D. (2013) *Applied Mathematics*. University of Nebraska - Lincoln, John Wiley & Sons.
- [4] Tarantola, A. (2005) *Inverse problem theory and methods for model parameter estimation*. Society for Industrial and Applied Mathematics; 342.
- [5] Attouch, H., Buttazzo, G. & Michaille, G. (2006) *Variational Analysis in Sobolev and BV Spaces. Applications to PDEs and Optimization*. Society for Industrial and Applied Mathematics and the Mathematical Programming Society.
- [6] Aubert, G. & Kornprobst, P. (2002) *Mathematical Problems in Image Processing. Partial Differential Equations and the Calculus of Variations*. New York, NY: Springer Verlag.
- [7] Temam, R. (1983) *Problèmes Mathématiques en Plasticité*. Gauthier-Villars, Paris.
- [8] Ambrosio, L. (1989) A compactness theorem for a new class of functions of bounded variation. *Bollettino dell'U.M.I.*, **VII**(4), 857-881.
- [9] Calderón, A. P. (1980) On an inverse boundary value problem. Sem. on Numerical Analysis and its Applications to Continuum Physics, *Soc. Braz. Math.* (Rio de Janeiro), 65-73.
- [10] Salo, M. (2008) Calderón problem. Lecture notes, Department Of Mathematics and Statistics, University of Helsinki.
- [11] Uhlmann, G. (2012-2013) 30 Years of Calderón's Problem. Séminaire Laurent Schwartz — EDP Appl., 1-25.
- [12] Astala, K. & Päivärinta, L. (2006) Calderón's Inverse Conductivity problem in plane. *Ann. of Math.*, **163**(1), 265-299.
- [13] Sylvester, J. & Uhlmann, G. (1987) A global uniqueness theorem for an inverse boundary value problem. *Ann. of Math.*, **125**(1), 153-169.
- [14] Nachman, A. (1996) Global uniqueness for a two-dimensional inverse boundary value problem. *Ann. of Math.*, **143**(2), 71-96.
- [15] Siltanen, S., Mueller, J. & Isaacson, D. (2000) An implementation of the reconstruction algorithm of A. Nachman for the 2-D inverse conductivity problem. *Inverse Probl.*, **16**, 681-699.
- [16] Mueller, J., Siltanen, S. & Isaacson, D. (2002) A direct reconstruction algorithm for electrical impedance tomography. *IEEE Trans. Med. Imaging*, **21**(6), 555-559.
- [17] Brown, R. M. & Uhlmann, G. A. (1997) Uniqueness in the inverse conductivity problem for nonsmooth conductivities in two dimensions. *Commun. Partial Differ. Equations*, **22**(5-6), 1009-1027.

- [18] Päivärinta, L., Panchenko, A. & Uhlmann, G. (2003) Complex geometric optics solutions for Lipschitz conductivities. *Rev. Mat. Iberoam.*, **19**(1), 57-72.
- [19] Brown, R. M. & Torres, R. H. (2003) Uniqueness in the Inverse Conductivity Problem for Conductivities with  $3/2$  Derivatives in  $L^p, p > 2n$ . *J. Fourier Anal. Appl.*, **9**(6), 563-574.
- [20] Haberman, B. & Tataru, D. (2013) Uniqueness in Calderón's problem with Lipschitz conductivities. *Duke Math. J.*, **162**(3), 497-516.
- [21] Krupchyk, K. & Uhlmann, G. (2016) The Calderón Problem with Partial Data for Conductivities with  $3/2$  Derivatives. *Commun. Math. Phys.*, **348**(1), 185-219.
- [22] Caro, P. & Rogers, K. M. (2016) Global uniqueness for the Calderón problem with Lipschitz conductivities. *Forum Math. Pi.*, **4**. DOI: 10.1017/fmp.2015.9
- [23] Haberman, B. (2015) Uniqueness in Calderón's Problem for Conductivities with Unbounded Gradient. *Commun. Math. Phys.*, **340**(2), 639-659.
- [24] Alessandrini, G. (1988) Stable determination of conductivity by boundary measurements. *Appl. Anal.*, **27**(1-3), 153-172.
- [25] Caro, P., García, A. & Reyes, J. M. (2013) Stability of the Calderón problem for less regular conductivities. *Journal of Differential Equations*, **254**, 469-492.
- [26] Barceló, J. A., Barceló, T. & Ruiz, A. (2001) Stability of the inverse conductivity problem in the plane for less regular conductivities. *J. Differential Equations*, **173**(2), 231-270.
- [27] Clop, A., Faraco, D. & Ruiz, A. (2010) Stability of Calderón inverse conductivity problem in the plane for discontinuous conductivities. *Inverse Probl. Imaging*, **4**, 49-91.
- [28] Allaire, G. (2002) *Shape Optimization by the Homogenization method*. Springer Applied Mathematical Sciences.
- [29] Jikov, V. V., Kozlov, S. M. & Oleinik, O. A. (1994) *Homogenization of Differential Equations and Integral Functionals*. Berlin: Springer-Verlag.
- [30] Alessandrini, G. & Cabib, E. (2008) EIT and the average conductivity. *J. Inverse Ill-posed Probl.*, **16**(8).
- [31] Faraco, D., Kurylev, Y. & Ruiz, A. (2013) G-Convergence, Dirichlet to Neumann maps and Invisibility. *Journal of Functional Analysis*, **267**(7).
- [32] Rondi, L. (2015) Continuity properties of Neumann-to-Dirichlet maps with respect to the  $H$ -convergence of the coefficient matrices. *Inverse Probl.*, **31**(4). DOI: 10.1088/0266-5611/31/4/045002
- [33] Acar, R. & Vogel, C. R. (1994) Analysis of bounded variation penalty methods for ill-posed problems. *Inverse Probl.*, **10**, 1217-1229.
- [34] Dobson, D. C. & Santosa, F. (1994) An image-enhancement technique for electrical impedance tomography. *Inverse Probl.*, **10**(2), 317-334. DOI: 10.1088/0266-5611/10/2/008
- [35] Dobson, D. C. (1997) *Recovery of Blocky Images in Electrical Impedance Tomography*. Springer Vienna, 43-64.
- [36] Rondi, L. & Santosa, F. (2001) Enhanced Electrical Impedance Tomography via the Mumford-Shah Functional. *ESAIM Control. Optim. Calc. Var.*, EDP Sciences, **6**, 517-538. DOI: 10.1051/cocv:2001121
- [37] Chan, T. F. & Tai, X. C. (2004) Level set and total variation regularization for elliptic inverse problems with discontinuous coefficients. *J. Comput. Phys.*, Academic Press Professional, Inc., **193**(1), 40-66.

- [38] Chung, E. T., Chan, T. F. & Tai, X. C. (2005) Electrical impedance tomography using level set representation and total variational regularization. *J. Comput. Phys.*, Academic Press, **205**(1), 357-372.
- [39] Rondi, L. (2008) On the regularization of the inverse conductivity problem with discontinuous conductivities. *Inverse Probl. Imaging*, **2**(3), 397-409. DOI: 10.3934/ipi.2008.2.397
- [40] Rondi, L. (2016) Discrete approximation and regularisation for the inverse conductivity problem. *Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste*, **48**, 315–352. DOI: 10.13137/2464-8728/13162
- [41] Niinimäki, K., Lassas, M., Hämmäläinen, K., Kallonen, A., Kolehmainen, V., Niemi, E. & Siltanen, S. (2016) Multiresolution parameter choice method for total variation regularized tomography. *SIAM J. Imaging Sci.*, **9**, 938-974.
- [42] Hinze, M., Kaltenbacher, B. & Quyen, T. N. T. (2018) Identifying conductivity in electrical impedance tomography with total variation regularization. *Numer. Math.*, Springer New York LLC, **3**, 723-765.
- [43] Milton, G. W., Seppecher, P. & Bouchitté, G. (2009) Minimization variational principles for acoustics, elastodynamics, and electromagnetism in lossy inhomogeneous bodies at fixed frequency. *Proc. R. Soc. A465*, 367-396.
- [44] Richins, B. R. (2010) *Some applications of minimizing variational principles for the complex Helmholtz equation*. Phd Thesis; Utah University, oai:utah:etd2/id/1465.
- [45] Ambrosio, L. & Buttazzo, G. (1988) Weak lower semicontinuous envelope of functionals defined on a space of measures. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, **150**(1), 311-340.
- [46] Spagnolo, S. (1968) Sulla convergenza di soluzioni di equazioni paraboliche ed ellittiche. *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa - Cl. di Sci.*, **22**(4), 571-597.
- [47] Spagnolo, S. (1976) *Convergence in energy for elliptic operators. Numerical solutions of partial differential equations-III*, Hubbard, B. (ed.), Academic Press New York.
- [48] Tartar, L. (1975) Problemes de Controle des Coefficients Dans des Equations aux Derivees Partielles. Bensoussan, A., Lions, J. L. (eds.), Control Theory, Numerical Methods and Computer Systems Modelling. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer Verlag, **107**, 420-426.
- [49] Murat, F. & Tartar, L. (1997) *H-Convergence*. Top. Math. Model. Compos. Mater., Birkhäuser Boston; 21-43.
- [50] Murat, F. (1978) Compacité par compensation. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze*, **5**(3), 489-507.
- [51] Tartar, L. (1979) *Compensated compactness and Partial Differential Equations in Nonlinear Analysis and Mechanics*. Heriot-Watt Symp., Pitman **IV**, 136-212.
- [52] De Giorgi, E. & Franzoni, T. (1975) Su un tipo di convergenza variazionale. *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.*, **58**(8), 842-850.
- [53] Brezis, H. (2011) *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer.
- [54] McLean, W. C. H. (2000) *Strongly elliptic systems and boundary integral equations*. Cambridge University Press; 357.
- [55] Kohn, R. V. & Vogelius, M. (1987) Relaxation of a variational method for impedance computed tomography. *Commun. Pure Appl. Math.*, John Wiley & Sons, Ltd, **40**(6), 745-777. DOI: 10.1002/cpa.3160400605
- [56] Kohn, R. V. & McKenney, A. (1990) Numerical implementation of a variational method for electrical impedance tomography. *Inverse Probl.*, **6**(3), 389-414. DOI:10.1088/0266-5611/6/3/009

- [57] Evans, L. C. & Cariepy, R. F. (1992) *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, CRC Press.
- [58] Demengel, F. & Temam, R. (1984) Convex Functions of a Measure and Applications. *Indiana University Mathematical Journal*, **33**, 673-709.
- [59] Wächter, A. & Biegler, L.T. (2005) Line search filter methods for nonlinear programming: motivation and global convergence. *SIAM J. Optim. (electronic)*, **16**(1), 1-31.
- [60] Wächter, A. & Biegler, L. T. (2006) On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming. *Math. Program. Ser. A.*, **106**(1), 25-57.
- [61] Fletcher R. (1987) *Practical Methods of Optimization*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.
- [62] Shewchuk, J. R. (1996b) Triangle: Engineering a 2D Quality Mesh Generator and Delaunay Triangulator. Lin, Ming C., Manocha, D. (eds.), *Applied Computational Geometry: Towards Geometric Engineering*. Lecture Notes in Computer Science, **1148**, 203-222, Springer, Berlin, Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/BFb0014497>
- [63] Shewchuk, J. S. (2002) Delaunay refinement algorithms for triangular mesh generation. *Computational Geometry Theory and Applications*, **22**(1-3), 21-74.
- [64] Charalambopoulos, A., Dassios, G. & Hadjinikolaou, M. (1998) An analytic solution for low-frequency scattering by two soft spheres. *SIAM J. Appl. Math.*, **58**(2), 370-386.
- [65] Charalambopoulos, A., Fotiadis, D. I. & Massalas, C. V. (1998) Frequency Spectrum of the Bispherical Hollow System: The case of the Nonuniform Thickness Human Skull. *Acta Mech.*, **130**(3-4), 249-278.
- [66] Charalambopoulos, A., Markaki, V. & Kourounis, D. (2020) The inverse conductivity problem via the calculus of functions of bounded variation. *Math. Meth. Appl. Sci.*, **43**, 5032-5072. <https://doi.org/10.1002/mma.6251>
- [67] Groetsch, C. W. (2007) *Stable Approximate Evaluation of Unbounded Operators*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [68] Jin, Q. & Zhong, M. (2013) On the iteratively regularized Gauss-Newton method in Banach spaces with applications to parameter identification problems. *Numer. Math.*, **124**, 647-683. DOI: 10.1007/s00211-013-0529-5
- [69] Charalambopoulos, A. (1995) On the Fréchet differentiability of boundary integral operators in the inverse elastic scattering problem. *Inverse Probl.*, **11**(6), 1137-1161.
- [70] Hanke, M. (1997) A regularizing Levenberg–Marquardt scheme, with applications to inverse groundwater filtration problems. *Inverse Probl.*, **13**(1), 79-95.
- [71] Mahale, P. & Nair, M. (2009) A simplified generalized Gauss-Newton method for nonlinear ill-posed problems. *Math. Comp.*, **78**(265), 171-184. <https://doi.org/10.1090/S0025-5718-08-02149-2>
- [72] Wang, Z. (2012) Multi-parameter Tikhonov regularization and model function approach to the damped Morozov principle for choosing regularization parameters. *J. Comput. Appl. Math.*, **236**(7), 1815-1832.
- [73] Toma, A., Sixou, B. & Peyrin, F. (2015) Iterative choice of the optimal regularization parameter in TV image restoration. *Inverse Probl. Imag.*, **9**(4), 1171-1191.
- [74] Logg, A., Mardal, K. A. & Wells, G. N. (2012) *Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method*. Springer. DOI:10.1007/978-3-642-23099-8
- [75] Markaki, V., Kourounis, D. & Charalambopoulos, A. (2021) A dual self-monitored reconstruction scheme on the TV–regularized inverse conductivity problem. *IMA J. Appl. Math.*, **86**(3), 604-630. DOI:10.1093/imamat/hxab011

- [76] Bonnet, M. & Constantinescu, A. (2005) Inverse problems in elasticity. *Inverse Probl.*, **21**, R1-R50. [ff10.1088/0266-5611/21/2/R01ff](https://doi.org/10.1088/0266-5611/21/2/R01ff). [ffhal-00111264](https://doi.org/10.1088/0266-5611/21/2/R01ff)
- [77] Alves, C. J. S. & Ha-Duong, T. (1999) Inverse scattering for elastic plane cracks. *Inverse Probl.*, **15**(1), 91-97.
- [78] Andrieux, S., Abda, B. A. & Bui, H. D. (1997) Sur l'identification de fissures planes via le concept d'écart à la réciprocité en élasticité. *C. R. Acad. Sci., Paris*, **324**, 1431-1438.
- [79] Andrieux, S., Abda, B. A. & Bui, H. D. (1999) Reciprocity principle and crack identification. *Inverse Probl.*, **15**(1), 59-65.
- [80] Abda, A. B., Ameer, H. B. & Jaoua, M. (1999) Identification of 2D Cracks by Elastic Boundary Measurements. *Inverse Probl.*, **15**(1), 67-77.
- [81] Bui, H. D., Constantinescu, A. & Maigre, H. (1999) Diffraction acoustique inverse de fissure plane: solution explicite pour un solide borné. *C. R. Acad. Sci., Paris*, **327**, 971-976.
- [82] Bui, H. D., Constantinescu, A. & Maigre, H. (2004) Numerical identification of linear cracks in 2D elastodynamics using the instantaneous reciprocity gap. *Inverse Probl.*, **20**(4), 993-1001.
- [83] Kress, R. (1996) Inverse elastic scattering from a crack. *Inverse Probl.*, **12**(5), 667-684.
- [84] Nishimura, N. & Kobayashi, S. (1995) Determination of cracks having arbitrary shapes with the boundary integral equation method. *Engng. Anal. with Bound. Elem.*, **15**(2), 189-197.
- [85] Ammari H., Kang, H., Nakamura, G. & Tanuma, K. (2002) Complete asymptotic expansions of solutions of the system of elastostatics in the presence of an inclusion of small diameter and detection of an inclusion. *J. Elast.*, **67**(2), 97-129.
- [86] Barcilon, V. (1982) Inverse problem for the vibrating beam in the free-clamped configuration. *Phil. Trans. Roy. Soc., London*, **A 304**, 211-251.
- [87] Bui, H. D. (1995) Sur quelques problèmes inverses élastiques en mécanique de l'endommagement. In *Deuxième Colloque National de Calcul des Structures*, 26-35, Hermès, France.
- [88] Chavent, G., Kunisch, K. & Roberts, J. (1999) Primal-Dual Formulations for Parameter Estimation Problems. Raupp, M. A., Douglas, Jr. J., Koiller, J., Menzala, G.P. (eds.), *Comput. Appl. Math.*, **18**, 173-229.
- [89] Geymonat, G. & Pagano, S. (2003) Identification of Mechanical Properties by Displacement Field Measurement: A Variational Approach. *Meccanica*, **38**(5), 535-545.
- [90] Barbone, E. & Gokhale, N. H. (2004) Elastic modulus imaging: on the uniqueness and nonuniqueness of the elastography inverse problem in two dimensions. *Inverse Probl.*, **20**(1), 203-296.
- [91] Tarantola, A. (2003) *Inverse problem theory*. Elsevier.
- [92] Santos, J. E. (2002) On the solution of an inverse scattering problem in seismic while drilling technology. *Comp. Meth. in Appl. Mech. Engng.*, **191**, 2403-2425.
- [93] Weglein, A. B. Et Al. (2003) Inverse scattering series and seismic exploration. *Inverse Probl.*, **19**, R27-R83.
- [94] Gao, Z. & Mura, T. (1989) On the inversion of residual stresses from surface measurements. *ASME J. Appl. Mech.*, **56**, 508-513.
- [95] Ballard, P. & Constantinescu, A. (1994) On the inversion of subsurface residual stresses from surface stress measurements. *J. Mech. Phys. Solids*, **42**, 1767-1787.

- [96] Lin, C.-L. & Wang, J.-N. (2003) Uniqueness in inverse problems for an elasticity system with residual stress by a single measurement. *Inverse Probl.*, **19**(4), 807-820.
- [97] Chouaki, A., Ladevèze, P. & Proslie, L. (1996) An updating of structural dynamic model with damping. Delaunay, D., Raynaud, M., Woodbury, K. (eds.), *Inverse Probl. Eng.: theory and practice*, 335-342.
- [98] Ladevèze, P. & Chouaki, A. (1999) Application of a posteriori error estimation for structural model updating. *Inverse Probl.*, **15**(1), 49-58.
- [99] Deraemaeker, A., Ladevèze, P. & Leconte, Ph. (2002) Reduced bases for model updating in structural dynamics based on constitutive relation error. *Comp. Meth. in Appl. Mech. Eng.*, **191**(21-22), 2427-2444.
- [100] Maniatty, A. M. & Zabar, N. J. (1994) Investigation of regularization parameters and error estimating in inverse elasticity problems. *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, **37**(6), 1039-1052.
- [101] Cimetière, A., Delvare, F., Jaoua, M. & Pons, F. (2001) Solution of the Cauchy problem using iterated Tikhonov regularization. *Inverse Probl.*, **17**(3), 553-570.
- [102] Delattre, B., Ivaldi, D. & Stolz, C. (2002) Application du contrôle optimal à l'identification d'un chargement thermique. *Rev. Eur. Elements Finis*, **11**, 393-404.
- [103] Mahnken, R. & Stein, E. (1996) Parameter identification for viscoplastic models based on analytical derivatives of a least-squares functional and stability investigations. *Int. J. Plasticity*, **12**(4), 451-479.
- [104] Constantinescu, A. & Tardieu, N. (2001) On the identification of elastoviscoplastic constitutive laws from indentation tests. *Inverse Probl. Eng.*, **9**(1), 19-44.
- [105] Forestier, R., Chastel, Y. & Massoni, E. (2003) 3D inverse analysis model using semi-analytical differentiation for mechanical parameter estimation. *Inverse Probl. Eng.*, **11**(3), 255-271.
- [106] Ikehata, M. (1990) Inversion formulas for the linearized problem for an inverse boundary value problem in elastic prospection. *SIAM J. Appl. Math.*, **50**(6), 1635-1644. DOI:10.1137/7/0150097
- [107] Akamatsu, M., Nakamura, G. & Steinberg, S. (1991) Identification of Lamé coefficients from boundary observations. *Inverse Probl.*, **7**(3), 335-354. DOI:10.1088/0266-5611/7/3/003
- [108] Nakamura, G. & Uhlmann, G. (1995) Inverse Problems at the Boundary for an Elastic Medium. *SIAM J. Math. Anal.*, **26**(2), 263-279. DOI:10.1137/s0036141093247494
- [109] Nakamura, G. & Uhlmann, G. (1993) Identification of Lamé Parameters by Boundary Measurements. *Am. J. Math.*, **115**(5), 1161-1187. DOI:10.2307/2375069
- [110] Imanuvilov, O. Yu. & Yamamoto, M. (2011) On reconstruction of Lamé coefficients from partial Cauchy data. *J. Inverse Ill Posed Probl.*, **19**(6), 881-891. DOI:10.1515/JIIP.2011.060
- [111] Imanuvilov, O. Yu. & Yamamoto, M. (2015) Global uniqueness in inverse boundary value problems for Navier-Stokes equations and Lamé system in two dimensions. *Inverse Probl.*, **31**(3), 121-142.
- [112] Nakamura, G. & Uhlmann, G. (1994) Global uniqueness for an inverse boundary problem arising in elasticity. *Invent. Math.*, **118**(1), 457-474. DOI:10.1007/BF01231541
- [113] Eskin, G. & Ralston, J. (2002) On the inverse boundary value problem for linear isotropic elasticity. *Inverse Probl.*, **18**(3), 907-921. DOI:10.1088/0266-5611/18/3/324

- [114] Nakamura, G. & Uhlmann, G. (2003) Erratum: Global uniqueness for an inverse boundary value problem arising in elasticity. *Invent. Math.*, **152**(1), 205-207. DOI:10.1007/s00222-002-0276-1
- [115] Eskin, G. (2001) Global uniqueness in the inverse scattering problem for the Schrödinger operator with external Yang-Mills potentials. *Commun. Math. Phys.*, **222**(3), 503-531.
- [116] Nakamura, G. & Uhlmann, G. (2002) Complex geometrical optics solutions and pseudoanalytic matrices. *Ill Posed Inver. Probl.* Kabanikhin, S. I., Romanov, V. G. (eds.) (Utrecht: VSP), 305-338.
- [117] Beretta, E., Francini, E. & Vessella, S. (2014) Uniqueness and Lipschitz stability for the identification of Lamé parameters from boundary measurements. *Inverse Probl. Imaging*, **8**(3), 611-644.
- [118] Imanuvilov, O. Yu, Uhlmann, G. & Yamamoto, M. (2012) On uniqueness of Lamé coefficients from partial Cauchy data in three dimensions. *Inverse Probl.*, **28**(12), 125002, 5.
- [119] Doll, M., Froehly, A. & Schulz, R. (2019) A Partial Data Problem in Linear Elasticity. *Inverse Probl.*, **36**(5).
- [120] Mandache, N. (2001) Exponential instability in an inverse problem for the Schrodinger equation. *Inverse Probl.*, **17**, 1435-1444.
- [121] Alessandrini, G. (1988) Stable determination of conductivity by boundary measurements. *Appl. Anal.*, **27**(1-3), 153-172.
- [122] Vessella, S. (1992) Locations and strengths of point sources: stability estimates. *Inverse Probl.*, **8**(6), 911-917.
- [123] Bellassoued, M., Imanuvilov, O. & Yamamoto, M. (2008) Inverse problem of determining the density and two Lamé coefficients by boundary data. *SIAM J. Math. Anal.*, **40**(1), 238-265.
- [124] Beretta, E. & Francini, E. (2010) Lipschitz stability for the electrical impedance tomography problem: the complex case. *Comm. PDE*, **36**, 1723-1749.
- [125] Beretta, E., de Hoop, M. V. & Qiu, L. (2013) Lipschitz stability of an inverse boundary value problem for a Schrödinger type equation. *SIAM J. Math. Anal.*, **45**, 679-699.
- [126] Alessandrini, G., Di Cristo, M., Morassi, A. & Rosset, E. (2014) Stable determination of an inclusion in an elastic body by boundary measurements. *SIAM J. Math. Anal.*, **46**(4), 2692-2729
- [127] Bellassoued, M. & Yamamoto, M. (2007) Lipschitz stability in determining density and two Lamé coefficients. *J. Math. Anal. Appl.*, **329**(2), 1240-1259.
- [128] Eberle, S., Harrach, B., Meftahi, H. & Rezgui, T. (2021) Lipschitz stability estimate and reconstruction of Lamé parameters in linear elasticity. *Inverse Probl. Sci. Eng.*, **29**(3), 396-417.
- [129] Tardieu, N. & Constantinescu, A. (2000) On the determination of elastic coefficients from indentation experiments. *Inverse Probl.*, **16**(3), 577.
- [130] Doubova, A. & Fernández-Cara, E. (2018) Some Geometric Inverse Problems for the Lamé System with Applications in Elastography. *Appl. Math. Optim.*, **82**(1), 1-21.
- [131] Hubmer, S., Sherina, E., Neubauer, A. & Scherzer, O. (2018) Lamé Parameter Estimation from Static Displacement Field Measurements in the Framework of Nonlinear Inverse Problems. *SIAM J. Imaging Sci.*, **11**(2), 1268-1293.



- [132] Ji, L. & McLaughlin, J. (2004) Recovery of the Lamé parameter  $\mu$  in biological tissues. *Inverse Probl.*, **20**(1), 1-24.
- [133] McLaughlin, J. & Yoon, J. R. (2004) Unique identifiability of elastic parameters from time-dependent interior displacement measurement. *Inverse Probl.*, **20**(1), 25-45.
- [134] Oberai, A. A., Gokhale, N. H. & Feijóo, G. R. (2003) Solution of inverse problems in elasticity imaging using the adjoint method. *Inverse Probl.*, **19**(2), 297-313.
- [135] Jadamba, B., Khan, A. A. & Raciti, F. (2008) On the inverse problem of identifying Lamé coefficients in linear elasticity. *Comput. Math. Appl.*, **56**(2), 431-443.
- [136] Lechleiter, A. & Schlasche, J. W. (2017) Identifying Lamé parameters from time-dependent elastic wave measurements. *Inverse Probl. Sci. Eng.*, **25**(1), 2-26.
- [137] Charalambopoulos, A., Gintides, D. & Kiriaki, K. (2002) The linear sampling method for the transmission problem in three-dimensional linear elasticity. *Inverse Probl.*, **18**(3), 547-558.
- [138] Kupradze, V. D. (1979) *Three-Dimensional Problems of the Mathematical Theory of Elasticity and Thermoelasticity*. (Amsterdam: North-Holland).
- [139] Kelly, PA. *Mechanics Lecture Notes: An introduction to Solid Mechanics*. Available from <http://homepages.engineering.auckland.ac.nz/~pkel015/SolidMechanicsBooks/index.html>
- [140] Reddy, J. N. (2005) *An Introduction to the Finite Element Method (3rd edition)*. McGraw-Hill Mechanical Engineering.
- [141] Grasselli, M. & Yamamoto, M. (2006) Identifying a Spatial Body Force in Linear Elastodynamics via Traction Measurements. *SIAM J. Control Optim.*, **36**, 1190-1206.
- [142] Friedman, A. & Vogelius, M. (1989). Determining Cracks by Boundary Measurements. *Indiana Univ. Math. J.*, **38**(3), 527-556.
- [143] Alessandrini, G., Beretta, E. & Vessella, S. (1996) Determining linear cracks by boundary measurements: Lipschitz stability. *SIAM J. Math. Anal.*, **27**(2), 361-375.
- [144] Bryan, K. & Vogelius, M. (1992) A Uniqueness Result Concerning the Identification of a Collection of Cracks from Finitely Many Electrostatic Boundary Measurements. *SIAM J. Math. Anal.*, **23**(4), 950-958.
- [145] Alessandrini, G. & Valenzuela, D. A. (2012) Unique Determination of Multiple Cracks by Two Measurements. *SIAM J. Control Optim.*, **34**(3), 913-921.
- [146] Andrieux, S., Abda, B. A. & Jaoua, M. (1998) On the inverse emergent plane crack problem. *Math. Meth. Appl. Sci.*, **21**, 895-906.
- [147] Elcrat, A. R., Isakov, V. & Neculoiu, O. (1995) On finding a surface crack from boundary measurements. *Inverse Probl.*, **11**(2), 343-351.
- [148] Eller, M. (1996) Identification of cracks in three-dimensional bodies by many boundary measurements. *Inverse Probl.*, **12**(4), 395-408.
- [149] Alessandrini, G. & Di Benedetto, E. (1997). Determining 2-Dimensional Cracks in 3-Dimensional Bodies: Uniqueness and Stability. *Indiana Univ. Math. J.*, **46**(1), 1-82.
- [150] Andrieux, S. & Abda, B. A. (1996) Identification of planar cracks by complete overdetermined data: inversion formulae. *Inverse Probl.*, **12**(5), 553-563.
- [151] Ikehata, M. (2003) Complex geometrical optics solutions and inverse crack problems. *Inverse Probl.*, **19**(6), 1385-1405.
- [152] Ikehata, M. (1999) Enclosing a polygonal cavity in a two-dimensional bounded domain from Cauchy data. *Inverse Probl.*, **15**(5), 1231-1241.

- 
- [153] Ikehata, M. & Itou, H. (2007) Reconstruction of a linear crack in an isotropic elastic body from a single set of measured data. *Inverse Probl.*, **23**(2), 589-607.
- [154] Bannour, T., Abda, B. A. & Jaoua, M. (1997) A semi-explicit algorithm for the reconstruction of 3D planar cracks. *Inverse Probl.*, **13**(4), 899-917.
- [155] Bui, H. D., Constantinescu, A. & Maigre, H. (2004) Numerical identification of linear cracks in 2D elastodynamics using the instantaneous reciprocity gap. *Inverse Probl.*, **20**(4), 993-1001.
- [156] Sun, C. T. & Jin, Z.-H. (2012) *Fracture Mechanics, Chapter 3 - The Elastic Stress Field around a Crack Tip*. Elsevier Inc.
- [157] Irwin, G. R. (1957) Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate. *J. Appl. Mech.*, **24**(3), 361-364.
- [158] Westergaard, H. M. (1939) Bearing pressures and cracks. *J. Appl. Mech.*, **6**, 49-53.
- [159] Sih, G. C. (1966) On the Westergaard method of crack analysis. *Int. J. Fract. Mech.*, **2**, 628-631.