

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΝΑΥΠΗΓΩΝ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ:
«ΝΑΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΘΑΛΑΣΣΙΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ ΕΠΙΣΤΗΜΗ»



Μεταπτυχιακή Εργασία

Κατανομές κυματικών παραμέτρων θαλασσιών κυματισμών

Τσάλης Χρήστος

Επιβλέπων: Γεράσιμος Α. Αθανασούλης (Καθ. ΕΜΠ)
Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή: Γεράσιμος Α. Αθανασούλης (Καθ. ΕΜΠ)
Κωνσταντίνος Σπύρου (Καθ. ΕΜΠ)
Τακβόρ Σουκισιάν (Κύριος Ερευνητής ΕΛΚΕΘΕ)

Αθήνα 2009

Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή

Γεράσιμος Α. Αθανασούλης	Καθηγητής της Σχολής Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχανικών-Τομέας Ναυτικής και Θαλάσσιας Υδροδυναμικής-ΕΜΠ
Κωνσταντίνος Σπύρου	Καθηγητής της Σχολής Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχανικών- Τομέας Μελέτης Πλοίου και Θαλασσίων Μεταφορών-ΕΜΠ
Τακβόρ Σουκισιάν	Κύριος Ερευνητής στο Ινστιτούτο Ωκεανογραφίας του Ελληνικού Κέντρου Θαλασσίων Ερευνών (ΕΛΚΕΘΕ)

Ευχαριστίες

Η παρούσα εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια του Διαπανεπιστημιακού Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου (Ε.Μ.Π.) “Ναυτική και Θαλάσσια Τεχνολογία και Επιστήμη” και είναι αποτέλεσμα της συνεργασίας του εργαστηρίου Ναυτικής και Θαλάσσιας Υδροδυναμικής της Σχολής Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχανικών του Ε.Μ.Π., στον τομέα του Θαλάσσιου Περιβάλλοντος με υπεύθυνο τον Καθ. Γ. Αθανασούλη και του τομέα Επιχειρησιακής Ωκεανογραφίας του Ινστιτούτου Ωκεανογραφίας του Ελληνικού Κέντρου Θαλασσίων Ερευνών (ΕΛΚΕΘΕ), με επιβλέποντα τον Δρ. Τ. Σουκισιάν.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Γεράσιμο Αθανασούλη για τη βοήθειά του στο σχεδιασμό, την οριοθέτηση των στόχων και την επίβλεψη της εργασίας όλους αυτούς τους μήνες. Είμαι επίσης ευγνώμων για τις πολύτιμες συμβουλές που δέχτηκα από τον κ. Κωνσταντίνο Σπύρου για την καλύτερη παρουσίαση της εργασίας και στον κ.Τακβόρ Σουκισιάν για την καθοδήγησή του βήμα προς βήμα στον πολύ ενδιαφέροντα τομέα της ωκεανογραφίας.

Ενα μεγάλο ευχαριστώ το οφείλω και σε όσους ερευνητές του Ινστιτούτου Ωκεανογραφίας του ΕΛΚΕΘΕ και του εργαστηρίου Ναυτικής και Θαλάσσιας Υδροδυναμικής της Σχολής Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχανικών του Ε.Μ.Π που με το ήθος, την αφοσίωση και την αγάπη τους για το αντικείμενο με βοήθησαν για το τελικό αποτέλεσμα της παρούσας εργασίας.

Τέλος, ένα μεγάλο ευχαριστώ το οφείλω στην οικογένειά μου για την ηθική υποστήριξή τους σε όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

Δήλωση κατάθεσης και διάθεσης μεταπτυχιακής εργασίας

Βεβαιώνω ότι είμαι συγγραφέας της εργασίας με τίτλο “Κατανομές κυματικών παραμέτρων θαλασσίων κυματισμών” υπο την καθοδήγηση των καθηγητών Γ.Αθανασούλη, Κ.Σπύρου και του Δρ. Τ. Σουκισιάν και ότι κάθε βοήθεια την οποία είχα για την προετοιμασία της είναι πλήρως αναγνωρισμένη και αναφέρεται στην εργασία. Επίσης έχω αναφέρει τις όποιες πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών ή λέξεων, είτε αυτές αναφέρονται ακριβώς είτε παραφρασμένες. Επίσης βεβαιώνω ότι αυτή η εργασία προετοιμάστηκε από εμένα προσωπικά ειδικά για τη συγκεκριμένη εργασία.

Στο πλαίσιο της πολιτικής ανοικτής πρόσβασης ο συγγραφέας/δημιουργός εκχωρεί στην βιβλιοθήκη του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, μη αποκλειστική άδεια χρήσης του δικαιώματος αναπαραγωγής, προσαρμογής, δημόσιου δανεισμού, παρουσίασης στο κοινό και ψηφιακής διάχυσής τους διεθνώς, σε ηλεκτρονική μορφή και σε οποιοδήποτε μέσο, για διδακτικούς και ερευνητικούς σκοπούς, άνευ ανταλλάγματος και για όλο το χρόνο διάρκειας των δικαιωμάτων πνευματικής ιδιοκτησίας.

Ο συγγραφέας/δημιουργός διατηρεί το σύνολο των ηθικών και περιουσιακών του δικαιωμάτων.

Στους αγαπημένους μου γονείς, Παρασκευή και Βασίλη και σ' όλους τους μαθητές μου.

Περίληψη (Ελληνικά)

Η στοχαστική μοντελοποίηση κυματικών παραμέτρων όπως είναι το πλάτος ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας της θάλασσας, το ύψος κύματος, η περίοδος του κύματος κ.λ.π, είναι πολύ σημαντική για ναυπηγικές εφαρμογές εστιάζοντας στην πληρέστερη μελέτη του κυματικού κλίματος, την πρόβλεψη της κυματικής ενέργειας και ειδικότερα σε μελέτες απόκρισης θαλασσίων συστημάτων. Ειδικότερα, η μελέτη και εκτίμηση από κοινού των κυματικών παραμέτρων του πλάτους και της περιόδου των ανεμογενών κυματισμών, αποτελεί βασική παράμετρο ελέγχου στο σχεδιασμό για την ασφαλή λειτουργία των παράκτιων κατασκευών.

Στην παρούσα εργασία περιγράφεται αναλυτικά η συλλογιστική των εκφράσεων για τις περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας και αθροιστικής κατανομής (marginal probability density function and marginal distribution function) των τυχαίων μεταβλητών πλάτους και περιόδου των θαλασσίων κυματισμών αλλά και οι από κοινού συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών αυτών στην βραχυχρόνια κλίμακα του χρόνου όπως συναντώνται στην σχετική βιβλιογραφία, και ειδικότερα οι υπολογισμοί από την μοντελοποίηση των Kimura (1980), Cavanie et al. (1976), και Longuet-Higgins (1983).

Η παρούσα μελέτη αποσκοπεί στην αναλυτική ανάπτυξη της συλλογιστικής των επικρατέστερων μοντέλων εκτίμησης της από κοινού εμφάνισης των τυχαίων μεταβλητών του πλάτους και της περιόδου των θαλασσίων κυματισμών στην βραχυχρόνια κλίμακα του χρόνου όπως συναντώνται στην σχετική βιβλιογραφία. Στο πλαίσιο αυτό, οι βασικοί στόχοι της παρούσας εργασίας είναι οι εξής:

- Η σημασία των στοχαστικών διαδικασιών στενής λωρίδας στην μοντελοποίηση μέσω των επικρατέστερων μοντέλων για τις τελικές εκφράσεις των κατανομών πιθανότητας πλάτους και περιόδου του κύματος.
- Η αναλυτική προσέγγιση της μοντελοποίησης θαλάσσιων κυματισμών που θα στηρίζεται στον βαθμό συσχέτισης μεταξύ των κυματισμών αυτών.
- Η αναλυτική αναπαράσταση των κατανομών πιθανότητας πλάτους και περιόδου του κύματος και η ανάδειξη των δυσκολιών στους υπολογισμούς σε κυματικά δεδομένα όταν απαιτείται ο υπολογισμός ανώτερης τάξης φασματικής ροπής από το ενεργειακό κυματικό φάσμα.

Ειδικότερα, με την αναπαράσταση της ελεύθερης επιφάνειας της θάλασσας ως μια γραμμική υπέρθεση από συνημιτονοειδείς συναρτήσεις με τις φάσεις να εξαρτώνται με μεταβλητή επιλογής και να είναι ισόνομες και ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, εισάγεται η έννοια της σύνθεσης των τυχαίων κυματισμών που ταξιδεύουν σαν ομάδα κυμάτων (envelope wave). Η μοντελοποίηση θαλάσσιων κυματισμών που στηρίζεται στην έννοια της περιβάλλουσας από την σύνθεση των τυχαίων κυματισμών που ταξιδεύουν σαν ομάδα κυμάτων, θα αναφέρεται ως το μοντέλο Longuet-Higgins (1957). Το πλάτος των ομαδικών κυμάτων (πλάτος περιβάλλουσας) θα μεταβάλλεται, αλλά με μικρή συχνότητα μεταβολής, προσεγγίζοντας βολικά τις κατανομές του ολικού μέγιστου (δηλ., μέγιστου πλάτους κορυφών) όταν τα ντετερμινιστικά πλάτη των χρονικών σειρών μεταβάλλονται αργά σε σύγκριση με τις περιόδους των χρονικών σειρών αυτών. Η έννοια της περιβάλλουσας κύματος σε κυματικά δεδομένα στην παρούσα μελέτη, προσέγγισε ικανοποιητικά την κατανομή του μέγιστου των κορυφών του πλάτους σε συνδυασμό με την στατιστική ανάλυση των κυματοειδών κορυφών.

Μια δεύτερη προσέγγιση της μοντελοποίησης θαλάσσιων κυματισμών στην παρούσα μελέτη που θα στηρίζεται στον βαθμό συσχέτισης μεταξύ των κυματισμών, θα αναφέρεται ως το

μοντέλο Kimura (1980). Ειδικότερα, μελετήθηκε διεξοδικά ο πιθανοθεωρητικός χαρακτηρισμός των πλατών κύματος που θα βασίζεται στην συλλογιστική των Markov chain processes, δίνοντας αναλυτικά τους υπολογισμούς για την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των πλατών του κύματος, όπου με δοσμένη χρονική διαφορά μεταξύ των πλατών η από κοινού κατανομή μετατρέπεται σε Rayleigh κατανομή δυο μεταβλητών, με τα πλάτη των διαδοχικών κυματισμών να είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους.

Στο βασικό στόχο της παρούσας εργασίας που είναι η ανάδειξη των δυσκολιών στην μοντελοποίηση θαλάσσιων κυματισμών για τις τελικές εκφράσεις των κατανομών πιθανότητας πλάτους και περιόδου του κύματος μέσω των επικρατέστερων προσεγγίσεων, χρησιμοποιήθηκαν τα μοντέλα των Cavanie et al. (1976), και Longuet-Higgins (1983). Ειδικότερα, δίνεται με αναλυτικούς υπολογισμούς η έκφραση για την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας θετικών μεγίστων και επιτάχυνσης αυτών, και έπειτα μέσω κατάλληλων μετασχηματισμών καταλήγουμε στην από κοινού κατανομή των θετικών μεγίστων και περιόδου μεταξύ αυτών, όπως αρχικά μοντελοποιήθηκε απ' τους Cavanie et al. (1976) και Arhan et al., (1976). Βασιζόμενοι στην μοντελοποίηση απ' τους Cavanie et al. (1976), για τους υπολογισμούς σε κυματικά δεδομένα απαιτείται ο υπολογισμός ανώτερης τάξης φασματικής ροπής και ειδικότερα της ροπής τέταρτης τάξης από το ενεργειακό κυματικό φάσμα, αναδεικνύοντας την βασική δυσκολία από την συγκεκριμένη προσέγγιση.

Στο μοντέλο Longuet-Higgins (1983), οι αναλυτικές εκφράσεις που δίνονται βασίζονται στις χαρακτηριστικές ιδιότητες των χρονοσειρών στο στοχαστικό κυματικό μοντέλο τυχαίας φάσης. Ειδικότερα, από την από κοινού πιθανοθεωρητική συμπεριφορά των τυχαίων μεταβλητών και παραγώγων αυτών και με κατάλληλους μετασχηματισμούς, καταλήγουμε έπειτα από ολοκληρώσεις στην συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των αδιάστατων μεταβλητών πλάτους και περιόδου του κύματος με την συλλογιστική των μηδενικών υπερβάσεων προς τα άνω (zero up crossing concept). Το βασικό πλεονέκτημα στις αναλυτικές εκφράσεις που δίνονται βασιζόμενοι στο μοντέλο Longuet-Higgins (1983), είναι ότι μια απλούστερη έκφραση στην εκτίμηση της παραμέτρου καθορισμού του μέτρου της διασποράς των τιμών της φασματικής πυκνότητας γύρω από την μέση συχνότητα που να εξαρτάται από φασματικές ροπές μικρότερης τάξης (δηλ., ροπές μέχρι δευτέρας τάξης από το ενεργειακό κυματικό φάσμα) καθιστά πιο αποτελεσματική τους υπολογισμούς της από κοινού έκφρασης πλάτους κύματος και περιόδου στα κυματικά δεδομένα.

Για την αναπαράσταση των συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών πλάτους και περιόδου του κύματος όπως αναλυτικά παρουσιάζονται στην παρούσα εργασία, θα χρησιμοποιηθούν δεδομένα κατάστασης ανοιχτής θάλασσας από καταγραφικό στην περιοχή της Βορείου Θάλασσας και υπολογισμοί από κατάλληλες συναρτήσεις-εντολές αναπαράστασης μέσω του λειτουργικού πακέτου WAFO (Wave Analysis for Fatigue and Oceanography) της Matlab.

Ο κυριότερος στόχος της παρούσας εργασίας ήταν να αναδείξει αναλυτικά τους υπολογισμούς και την μοντελοποίηση της από κοινού συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών πλάτους και περιόδου του κύματος μέσω των πιο διαδεδομένων συλλογιστικών όπως συναντώνται στην σχετική βιβλιογραφία.

Τα κυριότερα ευρήματα της παρούσας εργασίας συνοψίζονται παρακάτω:

- (i) Για στοχαστικές διαδικασίες στενής λωρίδας (narrow band processes) η αναπαράσταση της περιβάλλουσας (envelope process) στο χώρο του χρόνου ως προς την μέση συχνότητα $\bar{\omega}$ του φέροντος κύματος (carrier wave) επιβεβαιώνει την προσέγγιση κορυφών της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας της θάλασσας για την μικρή συχνότητα μεταβολής του εύρους των κορυφών του κύματος.

- (ii) Για διαδοχικούς κυματισμούς που θεωρούνται ασυσχέτιστοι μεταξύ τους, επιβεβαιώνεται ότι η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των θαλασσιών πλατών με χρονικό διάστημα μεγαλύτερο από $\Delta t > 2\pi / \bar{\omega}$ μεταξύ των πλατών αυτών, ακολουθεί την Rayleigh κατανομή όπως αναλυτικά προκύπτει στην παρούσα μελέτη κατά την μοντελοποίηση που βασίζεται στην συλλογιστική του Kimura (1980).
- (iii) Σε υπολογισμούς συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας κατά την μοντελοποίηση του πλάτους και της περιόδου που βασίζεται στο μοντέλο Longuet-Higgins (1983), επιβεβαιώνεται ότι η απλούστερη έκφραση στην εκτίμηση της παραμέτρου καθορισμού του μέτρου της διασποράς των τιμών της φασματικής πυκνότητας γύρω από την μέση συχνότητα (δηλ., spectral width parameter (ν), από Longuet-Higgins, 1975), καθιστά πιο αποτελεσματική την μοντελοποίηση όταν οι υπολογισμοί εξαρτώνται από φασματικές ροπές μόνο μέχρι δευτέρας τάξης. Η ασταθής συμπεριφορά σε υπολογισμούς ροπών ανώτερης τάξης και ειδικότερα της φασματικής ροπής τέταρτης τάξης σε κυματικά δεδομένα στην αντίστοιχη παράμετρο καθορισμού (ε), (spectral width parameter) στην μοντελοποίηση από Cavanie et al. (1976), αναδεικνύει το βασικό πλεονέκτημα στους υπολογισμούς των συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας από το μοντέλο Longuet-Higgins (1983).

Λέξεις κλειδιά: Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας; Στοχαστική μοντελοποίηση κυματικών χαρακτηριστικών; Από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας; Διαδικασίες στενής λωρίδας; Περιβάλλουσα; Πλάτος κύματος; Περίοδος κύματος

Περίληψη (Αγγλικά)

Stochastic modeling of free surface wave parameters such as the amplitude, the wave height, the wave period, etc., is very important for marine applications focusing on the most complete study of the wave climate, the prediction of the wave energy and in particular in marine systems response studies. In particular, the joint study and estimation of the random variables of wave amplitude and period, is a key control study in the design for the safe operation of coastal structures.

This study focuses in detail to the analytical formulation of the marginal probability density function and marginal distribution function of the random variables amplitude and period of sea waves but also aims to the jointly probability formulation of these random variables in the short-term time scale as encountered in the relevant literature, and in particular the calculations based on the modeling from Kimura (1980), Cavanie et al. (1976), and Longuet-Higgins (1983).

The present study aims at the analytical formulation of the most commonly used probabilistic models for estimating the jointly occurrence of wave amplitude and period of sea waves in the short-term time scale as found in the relevant literature. In this context, the main objectives of this study are:

- The importance of narrow band stochastic processes to the probability distributions of wave amplitude and period based on the commonly used wave modeling approaches.
- The analytical formulation of the joint distribution of two wave amplitudes based on the degree of correlation between these waves.
- The difficulties in the calculations of the joint probability distribution of wave amplitude and period in wave data when the higher order moment of the energy wave spectrum is required and to point out alternative formulation of the joint distribution which depends only on the lower order moments.

In particular, by representing the free surface of the sea as a linear superposition of cosine terms with phases dependent on a selection variable and being equal and independent random variables, the concept of the synthesis of random sea waves traveling as a wave group is introduced (concept of wave envelope). The modeling of sea waves based on the concept of the composition of random waves traveling as a group of waves, will be referred to as the Longuet-Higgins model (1957). The amplitude of the group waves (amplitude of the envelope process) will change, but with a small frequency of change, approaching conveniently the distributions of the total maximum (i.e., maximum of crest amplitude) when the deterministic amplitudes change slowly compared to the periods of the time series. In the present study, the concept of the envelope process in wave data, characterized satisfactorily the distribution of crest amplitude in combination with the statistical analysis of the successive wave peaks.

A second approach to the modeling of sea waves in the present study based on the degree of correlation between waves, will be referred to as the Kimura (1980) model. In particular, the probabilistic characterization of the wave amplitudes based on the reasoning of Markov chain processes is studied in detail, giving the analytical calculations for the joint probability density function of the wave amplitudes. It is pointed out that with a given time difference between successive wave amplitudes, the joint distribution is converted into Rayleigh distribution of two variables, with the successive amplitudes being independent one from each other.

The present study focuses on pointing out the difficulties in modeling sea waves based on the standard modeling approaches of Cavanie et al. (1976) and Longuet-Higgins (1983) for the

probability distributions of wave amplitude and period. In particular, first the formulation of the joint probability density of positive peaks and their acceleration is analytically presented followed by detailed transformations to the joint distribution of the positive peaks and associated periods as originally modeled by Cavanie et al. (1976) and Arhan et al., (1976). Based on calculations in wave data using the modeling approach by Cavanie et al. (1976) in this study, the intractable calculation of the upper order spectral moments and in particular of the fourth order moment from the energy wave spectrum pointed out the main difficulty from using this approach.

The analytical formulation presented in this study from the Longuet-Higgins (1983) model is based on the characteristic properties of time series in the stochastic random phase wave model. In particular, following the zero up crossings concept, from the jointly probabilistic characterization of random variables and their derivatives, the probability density function of the dimensionless wave amplitude and period is analytically formulated using appropriate transformations and integration. The main advantage of modelling sea wave characteristics based on the Longuet-Higgins (1983) model in this study, is that a simpler formulation and estimation of the scattering measure of the spectral density values around the mean frequency controls the calculations of the joint probability distribution of wave amplitude and period more efficiently. The density estimation based on this approach is derived from the effective calculations of lower spectral moments in wave data (i.e, up to the second order moments from the energy wave spectrum).

To assess the joint probability occurrence of the random variables wave amplitude and period from the standard modeling approaches of sea wave characteristics in the present study, offshore wave data are used measured at an oil field in the North Sea, (characterized as deep water wave data). The calculations for the modeling of wave characteristics are evaluated from the WAFO-Matlab package (Wave Analysis for Fatigue and Oceanography).

The main objective of the present study is to assess in detail the modeling formulation of the random variables wave amplitude and period for the joint probability density function based on the standard modeling approaches as found in the relevant literature. This study aimed to point out the difficulties in the density calculations of basic sea wave characteristics.

The main findings of this study are summarized below:

- (i) For narrow band processes, the concept of envelope process related to the average frequency $\bar{\omega}$ of the carrier wave confirms the good representation of peaks of the free surface elevation of sea as a good measure of change of wave amplitude in the time domain.
- (ii) For successive waves that are considered uncorrelated to each other, it is confirmed that the joint probability density function of wave amplitudes with a time interval larger than $\Delta t > 2\pi / \bar{\omega}$ between them, follows the Rayleigh distribution as shown in detail based on the modeling by Kimura (1980).
- (iii) In probability density estimations of the random variables wave amplitude and period based on Longuet-Higgins (1983), it is confirmed that the simplest formulation for determining the measure of dispersion of spectral density values around the mean frequency (i.e., spectral width parameter (ν), by Longuet-Higgins, 1975), inference efficient modeling when calculations depend on spectral moments only up to the second order. The intractable calculations of upper order moments and in particular of the fourth order spectral moment in wave data of the associated parameter (ε), (spectral width parameter based on the modeling by Cavanie et al., 1976) points out the key advantage in probability density estimations based on the Longuet-Higgins model (1983).

Keywords: Probability density function; Stochastic modeling of wave characteristics; Joint probability density function; Narrow band processes; Wave amplitude; Wave period; Envelope process

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες.....	i
Δήλωση κατάθεσης και διάθεσης μεταπτυχιακής εργασίας.....	ii
Περίληψη (Ελληνικά).....	iv
Περίληψη (Αγγλικά).....	vii
Περιεχόμενα	x
Πίνακας αρκτικόλεξων και μεταβλητές βασικών κυματικών παραμέτρων	xii
Κεφάλαιο 1. Εισαγωγή.....	1
1.1 Βασικές έννοιες της στοχαστική μοντελοποίησης κυματικών παραμέτρων	1
1.2 Κύριοι στόχοι της παρούσας εργασίας.....	3
1.3 Δομή.....	3
Κεφάλαιο 2. Διαδικασίες στενής λωρίδας και περιβάλλουσα.....	5
2.1 Συχνότητα κορυφής και τιμή κορυφής φάσματος.....	7
2.2 Συντελεστές εύρους φάσματος.....	8
2.3 Μοντελοποίηση του πλάτους και της φάσης της περιβάλλουσας διαδικασίας.....	9
2.3.1 Πλάτος περιβάλλουσας διαδικασίας	9
2.3.2 Φάση περιβάλλουσας διαδικασίας	11
Κεφάλαιο 3. Μοντελοποίηση από Kimura (1980)	14
3.1 Υπολογισμός του πίνακα μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας των τυχαίων μεταβλητών $x_C(t; \theta)$, $x_S(t; \theta)$, $x_C(t + \Delta t; \theta)$, $x_S(t + \Delta t; \theta)$	15
3.2 Από κοινού κανονική σππ $f(x_C(t; \theta), x_S(t; \theta), x_C(t + \Delta t; \theta), x_S(t + \Delta t; \theta))$	22
3.3 Από κοινού σππ δυο διαδοχικών πλατών κύματος $f(A(t), A(t + \Delta t))$	26
Κεφάλαιο 4. Μοντελοποίηση από Cavanie et al. (1976)	30
4.1 Από κοινού σππ των τυχαίων μεταβλητών ανύψωσης, ταχύτητας και επιτάχυνσης του κύματος και υπολογισμός των τοπικών μεγίστων	32
4.2 Από κοινού σππ των θετικών μεγίστων του κύματος και της επιτάχυνσης	34
4.3 Από κοινού σππ των αδιάστατων τυχαίων μεταβλητών πλάτους και περιόδου κορυφής του κύματος, μοντέλο Cavanie et al. (1976)	36
Κεφάλαιο 5. Μοντελοποίηση από Longuet-Higgins (1983)	40
5.1 Από κοινού κανονική σππ $f(x_C(t; \theta), x'_C(t; \theta), x_S(t; \theta), x'_S(t; \theta))$ και υπολογισμός του πίνακα μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας των τυχαίων μεταβλητών αυτών	42
5.2 Από κοινού σππ των τυχαίων μεταβλητών πλάτους κύματος, φάσης, παραγώγου πλάτους, και παραγώγου φάσης	50
5.3 Από κοινού σππ των αδιάστατων τυχαίων μεταβλητών πλάτους και περιόδου του κύματος, μοντέλο Longuet-Higgins (1983).....	52

5.4 Περιθώρια αθροιστική συνάρτηση κατανομής και περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των αδιάστατων τυχαίων μεταβλητών πλάτους κύματος και περιόδου από μοντέλο Longuet-Higgins (1983).....	55
Κεφάλαιο 6. Υπολογισμός βασικών κυματικών χαρακτηριστικών με χρήση προγράμματος Matlab-WAFO σε κυματικά δεδομένα.....	63
6.1 Αναπαράσταση των διαδικασιών στενής λωρίδας και της περιβάλλουσας του πλάτους κύματος από κυματικά δεδομένα	64
6.2 Αναπαράσταση των βασικών πιθανοθεωρητικών κυματικών χαρακτηριστικών.....	69
Κεφάλαιο 7. Συμπεράσματα και προτάσεις για μελλοντική έρευνα.....	80
7.1 Κύρια συνεισφορά και πιο σημαντικά ευρήματα.....	80
7.2 Προτάσεις για μελλοντική έρευνα.....	81
Παράρτημα.....	83
A. Βασικές εντολές WAFO –Matlab.....	83
B. Περιοδικές συναρτήσεις	88
C. Φάσμα Bretschneider.....	90
D. Bessel functions.....	91
E. Hilbert Transform	92
F. Gaussian Κατανομή	93
G. Συντελεστές εύρους φάσματος για διαδικασίες στενής λωρίδας	94
G1. Cartwright and Longuet-Higgins (1956)	94
G2. Longuet-Higgins 1984.....	94
H. Σππ πλάτους κύματος και φάσης για διαδικασίες στενής λωρίδας (Pierson, 1952; Longuet-Higgins, 1952)	97
I. Αλλαγή μεταβλητών και μετασχηματισμός χωρίου μεταβλητών	99
J. Μετασχηματισμός στον \mathbb{R}_X^4	101
K. Σταθερά κανονικοποίησης $L(v)$	102
L. Περιθώρια σππ παραγώγου φάσης.....	105
M. Μετασχηματισμός δεδομένων εσωτερικά στη συνάρτηση-εντολή kde του WAFO... ..	106
Βιβλιογραφία-Αναφορές	107

Πίνακας αρκτικόλεξων και μεταβλητές βασικών κυματικών παραμέτρων

	ασκ σππ	Αθροιστική συνάρτηση κατανομής Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας
$R(t; \theta) = \frac{A(t; \theta)}{\sqrt{2\mu_0}}$		Αδιάστατο πλάτος
$A(t; \theta)$		Πλάτος της envelope process
$\bar{\omega} = \frac{m_1}{m_0}$		Μέση συχνότητα
$\mu_j = \int_0^\infty (\omega - \bar{\omega})^j S(\omega) d\omega$		Ροπή j τάξης ως προς την μέση συχνότητα
$\bar{T} = \frac{2\pi}{\bar{\omega}}$		Μέση περίοδος κυματισμού
$T = \frac{2\pi}{\bar{\omega} + \phi'(\theta)}$		Περίοδος μηδενικής υπέρβασης
$\tau(\theta) = \frac{T}{\bar{T}}$		Αδιάστατη περίοδος
$\phi'(\theta) = \frac{2\pi}{T} - \bar{\omega} = \frac{\bar{\omega}}{\tau(\theta)} - \bar{\omega}$		Παράγωγο φάσης
$\text{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-u^2) du$		Error function (Abramowitz and Stegun, 1975)
$\eta(t; \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t + \varepsilon_n(\theta))$		Αναπαράσταση της ελεύθερης επιφάνειας της θάλασσας
$\varepsilon_n(\theta)$		Φάσεις, ισόνομες και ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με σππ $f_n(\theta) = f(\theta) = 1/2\pi, \theta \in [0, 2\pi)$
a_n		Ντετερμινιστικό πλάτος, $\sum_{\omega_n=\omega}^{\omega+d\omega} \frac{1}{2} a_n^2 = S(\omega_n) d\omega$
$S(\omega)$		Φάσμα (συνάρτηση φασματικής πυκνότητας της $\eta(t; \theta)$)
$\sum_{\omega_n=0}^{\infty} \frac{1}{2} a_n^2 = \sum_{\omega_n=0}^{\infty} S(\omega) \Delta\omega \rightarrow \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega = m_0$		Ολική ενέργεια του κύματος ανά μονάδα μήκους
$m_n = \int_0^{\infty} S(\omega) \omega^n d\omega$		Φασματικές ροπές n οστής τάξης
$\varepsilon = \sqrt{(m_0 m_4 - m_2^2) / m_0 m_4}$		Συντελεστής εύρους φάσματος (Cartwright and Longuet-Higgins, 1956)
$\nu = \sqrt{\frac{m_2 m_0}{m_1^2} - 1}$		Συντελεστής εύρους φάσματος (Longuet-Higgins, 1975)

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Βασικές έννοιες της στοχαστική μοντελοποίησης κυματικών παραμέτρων

Κύριος παράγοντας φόρτισης και καταπόνησης των παράκτιων τεχνικών κατασκευών είναι οι επιφανειακοί κυματισμοί (ανεμογενείς κυματισμοί) εξαιτίας των τυρβωδών και διατμητικών τάσεων των μορίων στην ελεύθερη επιφάνεια της θάλασσας που δημιουργούνται από τη δράση του ανέμου στην διεπιφάνεια νερού-αέρα. Συνεπώς, η μελέτη της επίδρασης των ανεμογενών κυματισμών και ειδικότερα η συμπεριφορά των κυματικών παραμέτρων του πλάτους και της περιόδου, αποτελεί βασική παράμετρο ελέγχου στο σχεδιασμό για την καλή λειτουργία των παράκτιων κατασκευών.

Οι κυματισμοί που δημιουργεί η επίδραση του ανέμου στην επιφάνεια της θάλασσας δεν είναι μονοχρωματικοί (μοναδικής συχνότητας), αλλά χαρακτηρίζονται ως κυματισμοί που διέπονται από ένα φάσμα συχνοτήτων (ευρύ ή στενό) και πολλαπλών διευθύνσεων διάδοσης, (Pierson et al., 1958, 1964). Η ανύψωση λοιπόν της στάθμης της ελεύθερης επιφάνειας της θάλασσας προσομοιώνεται με την υπέρθεση πολλών κυμάτων με διάφορες τιμές πλάτους και περιόδου που διαδίδονται σε διάφορες κατευθύνσεις, (γνωστό και ως μοντέλο τυχαίας φάσης από Rayleigh (1880) και Longuet-Higgins (1952)). Συνεπώς, εξαιτίας της πολυπλοκότητας της σύνθεσης των ανεμογενών κυματισμών, τα χαρακτηριστικά των παραμέτρων των κυματισμών αυτών θα είναι κατά βάση στοχαστικά και θα ακολουθούν συγκεκριμένους πιθανοθεωρητικούς κανόνες κατανομής.

Μια από τις σημαντικότερες εφαρμογές της πιθανοθεωρητικής συλλογιστικής στο θαλάσσιο περιβάλλον είναι η εκτίμηση πιθανότητας εμφάνισης συντονισμού, που αποτελεί σημαντική πληροφορία για την ασφαλή διατήρηση των δυναμικών παραμέτρων της θαλάσσιας κατασκευής. Συντονισμό έχουμε, όταν η περίοδος των κυματισμών φέρει τιμές πολύ κοντά στην ιδιοπερίοδο της κατασκευής. Αν η περίοδος των κυματισμών είναι αρκετά μεγάλη ή αρκετά μικρή σε σύγκριση με την ιδιοπερίοδο του συστήματος, το σύστημα μπορεί να μην διατρέξει μεγάλο κίνδυνο ακόμη και αν το ύψος κύματος⁽¹⁾ να είναι μεγάλο. Συνεπώς για τον ασφαλή σχεδιασμό και για την βιωσιμότητα της κατασκευής, η πιθανοθεωρητική συμπεριφορά μέσω των συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας των από κοινού μεταβλητών του πλάτους και της περιόδου του κύματος έχει τεράστια σημασία.

Η βασική υπόθεση στην πιθανοθεωρητική θεώρηση για την ανάπτυξη των συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών του πλάτους και της περιόδου του κύματος, είναι ότι η αναπαράσταση της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας της θάλασσας προσομοιώνεται ως μια στάσιμη στοχαστική διαδικασία, και ότι οι τυχαίες μεταβλητές πληρούν τις προϋποθέσεις του κεντρικού οριακού θεωρήματος σε τρεις διαστάσεις, συνεπώς η από κοινού σππ των τυχαίων μεταβλητών αυτών θα ακολουθεί την Gaussian κατανομή, (Αθανασούλης, 2003, 2007). Σύμφωνα με αυτήν την υπόθεση, τα κύματα που παρατηρούνται στην ελεύθερη επιφάνεια της θάλασσας προκύπτουν σαν μια γραμμική υπέρθεση πολλών στατιστικά ανεξάρτητων ημιτονοειδών κυματισμών με διαφορετικές συχνότητες (ισόνομα κατανεμημένες), που ταξιθεύουν σε διαφορετικές κατευθύνσεις.

⁽¹⁾ Το ύψος κύματος ορίζεται ως η κατακόρυφη απόσταση μεταξύ πλάτος κορυφής και ελαχίστου (crest-to-trough wave height). Το πλάτος ορίζεται ως το μισό του ύψους κύματος (defined as half the crest-to-trough wave height)

Κύριο χαρακτηριστικό των γραμμικών κυματισμών είναι ότι παρουσιάζουν δομή ομάδων όπου η υπέρθεση των κυματισμών αυτών διαφοροποιεί το πλάτος του κύματος που προκύπτει, δημιουργώντας τη δομή κυματομάδας (wavegroup). Η βασική προσέγγιση που μοντελοποιεί καταλλήλως τα χαρακτηριστικά της κυματομάδας είναι η μέθοδος της περιβάλλουσας (envelope process) αν υποθέσουμε ότι τα κύματα είναι γραμμικά και το φάσμα τους στενής λωρίδας (narrow banded spectrum), (Longuet-Higgins, 1952). Παρά το γεγονός ότι η μέθοδος της περιβάλλουσας δίνει αξιόπιστα αποτελέσματα για καταστάσεις θάλασσας με φάσμα στενής λωρίδας και για βαθύ νερό, μελέτες έχουν δείξει ότι η περιβάλλουσα μοντελοποιεί καταλλήλως κυματισμούς και σε περιπτώσεις που δεν ικανοποιούνται αυτές οι προϋποθέσεις (Ochi, 1998). Πιο συγκεκριμένα, οι Thornton και Guza (1983) βρήκαν ότι ακόμη και σε αρκετά ρηγά νερά (surf zone) το ύψος κύματος ακολουθεί καλά την κατανομή Rayleigh. Η παρούσα μελέτη βέβαια περιορίζεται στον χαρακτηρισμό των κυματικών παραμέτρων μόνον για καταστάσεις θάλασσας με φάσμα στενής λωρίδας και για βαθύ νερό.

Στον πιθανοθεωρητικό χαρακτηρισμό των κυματικών παραμέτρων του πλάτους και της περιόδου του κύματος κατά το βραχυχρόνιο βήμα (short-term analysis), σημαντικό ρόλο στην περιγραφή του βραχυχρόνιου κυματικού κλίματος έχουν συνεισφέρει διάφορες μελέτες και ερευνητικές εργασίες αναφέροντας μεταξύ άλλων από τους (Longuet-Higgins, 1975, 1983; Cavanie et al., 1976; Kimura, 1980; Lindgren and Rychlik, 1982; Yuan, 1982; Shum and Melville, 1984; Stansell et al., 2004). Κύριος στόχος των μελετών αυτών ήταν ο υπολογισμός της από κοινού συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας του πλάτους και της περιόδου του κύματος σε μία θαλάσσια κατάσταση που χαρακτηρίζεται ως θάλασσα σε βαθιά ύδατα, στηριζόμενοι στο ενεργειακό φάσμα της ελεύθερης επιφάνειας της θάλασσας στενού εύρους.

Ειδικότερα, στην σχετική βιβλιογραφία ξεχωρίζει η πρωτοποριακή μελέτη χαρακτηριστικά του Longuet-Higgins (1975, 1983) που ανέπτυξε την από κοινού κατανομή του πλάτους κύματος (half the crest-to-trough wave height) και την αντίστοιχη περίοδο (zero-up crossing period), ενώ στο Centre National pour l'Exploitation (CNEXO) την περίοδο 1976 οι Cavanie και Arhan ανέπτυξαν μια από κοινού κατανομή που βασίζεται στα τοπικά μέγιστα (positive maxima) και στο χρόνο μεταξύ αυτών (time interval).

Πολλοί ερευνητές μεταξύ άλλων, οι Memos and Tzani (1994) προσδιόρισαν την από κοινού συνάρτηση πυκνότητα πιθανότητας του ύψους κύματος και της περιόδου στα βαθιά ύδατα για οποιοδήποτε εύρος φάσματος, με τον υπολογισμό της από κοινού κατανομής των μεγεθών αυτών και στα αβαθή ύδατα. Στην μετέπειτα μελέτη τους, οι Memos and Tzani (2000) βελτίωσαν το μοντέλο αυτό με την εισαγωγή ενός κριτηρίου θραύσης στα βαθιά ύδατα και το διαχωρισμό των κυμάτων swell από τα ανεμογενή κύματα.

Στην παρούσα εργασία γίνεται αναλυτική ανάπτυξη της συλλογιστικής για τις συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας των μεταβλητών πλάτους και περιόδου του κύματος κατά το βραχυχρόνιο βήμα, που μοντελοποιούν τους θαλάσσιους κυματισμούς όπως αναφέρεται στην σχετική βιβλιογραφία. Ειδικότερα, δίνονται οι αναλυτικές σχέσεις της μοντελοποίησης θαλάσσιων κυματισμών που θα στηρίζεται στον βαθμό συσχέτισης μεταξύ των κυματισμών αυτών για τον υπολογισμό της από κοινού συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας δυο διαδοχικών πλατών του κύματος, όπου θα αναφέρεται και ως το μοντέλο Kimura (1980). Επιπρόσθετα, δίνονται οι αναλυτικές εκφράσεις των σχέσεων που μοντελοποιούν τα θετικά μέγιστα και την περίοδο μεταξύ αυτών για θαλάσσιους κυματισμούς που προκύπτουν από το μοντέλο της τυχαίας φάσης όπως αρχικά μοντελοποιήθηκε από τους Cavanie et al. (1976) και Arhan et al., (1976), με τα αποτελέσματά τους για διαδικασίες ευρείας-στενής λωρίδας. Τέλος, γίνεται αναλυτική παρουσίαση της πιθανοθεωρητικής συμπεριφοράς των μεταβλητών πλάτους και περιόδου του κύματος μέσω της από κοινού σππ των μεταβλητών αυτών, αναδεικνύοντας το βασικό πλεονέκτημα στην μοντελοποίηση από Longuet-Higgins (1983) σε σχέση με την μοντελοποίηση από τους Cavanie et al. (1976), με εφαρμογές σε κυματικά δεδομένα

κατάστασης ανοιχτής θάλασσας και με συγκριτικά αποτελέσματα από υπολογισμούς που βασίζονται στα μοντέλα αυτά.

1.2 Κύριοι στόχοι της παρούσας εργασίας

Ο κυριότερος στόχος της παρούσας εργασίας ήταν να αναδείξει αναλυτικά τους υπολογισμούς κατά την μοντελοποίηση θαλάσσιων κυματισμών στην βραχυχρόνια κλίμακα του χρόνου μέσω των πιο διαδεδομένων συλλογιστικών όπως συναντώνται στην σχετική βιβλιογραφία. Είναι σημαντικό για την επιχειρησιακή ωκεανογραφία και τη ναυπηγική να γίνεται μελέτη εκτίμησης των τιμών εμφάνισης του πλάτους και της περιόδου θαλάσσιων κυματισμών καθώς και την συχνότητα εμφάνισης των τιμών αυτών. Για το λόγο αυτό η μελέτη της από κοινού πιθανοθεωρητικής συμπεριφοράς των μεταβλητών πλάτους και περιόδου μέσω της από κοινού συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας, αποτελεί βασική παράμετρος στο σχεδιασμό για την ασφαλή λειτουργία των παράκτιων και πλωτών κατασκευών.

Οι κεντρικοί στόχοι της παρούσας μεταπτυχιακής εργασίας συνοψίζονται παρακάτω:

- I. Να γίνουν αναλυτικά οι υπολογισμοί για την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δυο διαδοχικών πλατών του κύματος που θα στηρίζεται στον βαθμό συσχέτισης μεταξύ των κυματισμών αυτών από την προσέγγιση Kimura (1980).
- II. Να αναδειχτούν οι δυσκολίες στους υπολογισμούς της από κοινού κατανομής του πλάτους και περιόδου κύματος σε κυματικά δεδομένα από την προσέγγιση των Cavanie et al. (1976).
- III. Να αναδειχτεί το βασικό πλεονέκτημα του μοντέλου Longuet-Higgins (1983) σε υπολογισμούς κατά την μοντελοποίηση του πλάτους και της περιόδου των θαλασσιών κυματισμών.

1.3 Δομή

Η Μεταπτυχιακή εργασία διαρθρώνεται συνολικά σε επτά Κεφάλαια και το Παράρτημα.

Ειδικότερα, το Κεφάλαιο 1 περιλαμβάνει την παρούσα εισαγωγή, όπου γίνεται μία συνοπτική περιγραφή του βασικού αντικειμένου της εργασίας καθώς και των κυριότερων στόχων της.

Στο Κεφάλαιο 2, γίνεται εμβάθυνση στο θεωρητικό υπόβαθρο της αναπαράστασης του κυματικού πεδίου καθώς και για τις διαδικασίες στενής λωρίδας και της περιβάλλουσας.

Στο Κεφάλαιο 3, δίνονται οι αναλυτικές εκφράσεις της μοντελοποίησης θαλάσσιων κυματισμών που στηρίζεται στην συλλογιστική των Markov chain processes (μέσω της εκτίμησης του συντελεστή συσχέτισης των πλατών κύματος), όπου αναφέρεται στην σχετική βιβλιογραφία και ως η μοντελοποίηση από Kimura (1980).

Στο Κεφάλαιο 4, πραγματοποιούνται οι αναλυτικοί υπολογισμοί για την έκφραση της από κοινού σππ των τυχαίων μεταβλητών πλάτους και περιόδου κορυφής του κύματος (θετικών μεγίστων και περιόδου μεταξύ αυτών), όπως αρχικά μοντελοποιήθηκε απ'τους Cavanie et al. (1976) και Athan et al., (1976) για διαδικασίες στενής λωρίδας.

Στο Κεφάλαιο 5, παρουσιάζεται η αναλυτική συλλογιστική για την έκφραση της από κοινού σππ μεταξύ του πλάτους κορυφής μηδενικής υπέρβασης (zero-up crossing crest) και της αντίστοιχης περιόδου μηδενικών υπερβάσεων προς τα άνω (zero-up crossing period),

αναδεικνύοντας το βασικό πλεονέκτημα στην μοντελοποίηση από Longuet-Higgins (1983) για διαδικασίες στενής λωρίδας.

Στο Κεφάλαιο 6, υπολογίζονται τα βασικά κυματικά χαρακτηριστικά με χρήση του προγράμματος Matlab-WAFO για διαδικασίες στενής λωρίδας, κάνοντας χρήση δεδομένων κατάστασης ανοιχτής θάλασσας. Επιπρόσθετα, γίνεται αναπαράσταση των από κοινού σππ του πλάτους και της περιόδου του κύματος και παρουσιάζονται τα συγκριτικά αποτελέσματα των υπολογισμών αυτών από τα μοντέλα των Cavanie et al. (1976) και Longuet-Higgins (1983).

Στο Κεφάλαιο 7, παρουσιάζονται τα βασικά συμπεράσματα της εργασίας και δίνονται κάποιες προτάσεις για μελλοντική έρευνα.

Τέλος, στο Παράρτημα, συμπεριλαμβάνονται τα βασικά θεωρήματα που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα μελέτη για τους υπολογισμούς των πιθανοθεωρητικών χαρακτηριστικών των θαλάσσιων κυματισμών όπως προκύπτουν από τα μοντέλα Kimura (1980), των Cavanie et al. (1976) και Longuet-Higgins (1983), καθώς επίσης όλοι οι υπολογιστικοί κώδικες-συναρτήσεις σε γλώσσα προγραμματισμού Matlab.

Κεφάλαιο 2

Διαδικασίες στενής λωρίδας και περιβάλλουσα

Στο παρόν Κεφάλαιο γίνεται εμβάθυνση στο θεωρητικό υπόβαθρο της αναπαράστασης του κυματικού πεδίου από το μοντέλο της τυχαίας φάσης καθώς και για τις διαδικασίες στενής λωρίδας και της περιβάλλουσας (βλέπε μεθόδους υπολογισμού περιβάλλουσας από Yang, 1971; Veltcheva, 2002). Ειδικότερα, θεωρούμε την αναπαράσταση της ελεύθερης επιφάνειας της θάλασσας ως μια γραμμική υπέρθεση από συνημιτονοειδείς συναρτήσεις ως εξής:

$$\begin{aligned} x(t; \theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t + \varepsilon_n(\theta)) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\{(\omega_n - \bar{\omega})t + \bar{\omega}t + \varepsilon_n(\theta)\} \end{aligned} \quad (2.1)$$

όπου $\bar{\omega}$ είναι μια χαρακτηριστική συχνότητα που θα ορισθεί παρακάτω. Υπενθυμίζεται ότι (i) οι φάσεις $\varepsilon_n(\theta)$ με μεταβλητή επιλογής (θ) , είναι ισόνομες και ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με σππ $f_n(\theta) = f(\theta) = 1/2\pi$, $\theta \in [0, 2\pi]$, (ii) τα πλάτη a_n είναι ντετερμινιστικές ποσότητες, και τέτοια ώστε για μικρά διαστήματα συχνότητας να ισχύει:

$$\sum_{\omega_n = \omega}^{\omega + d\omega} \frac{1}{2} a_n^2 \approx S(\omega_n) d\omega, \quad (2.2)$$

όπου $S(\omega)$ είναι το φάσμα (ακριβέστερα, η συνάρτηση φασματικής πυκνότητας) της $x(t; \theta)$. Υπενθυμίζεται ακόμη ότι η ολική ενέργεια του κύματος ανά μονάδα μήκους είναι ανάλογη της ποσότητας:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} a_n^2 \approx \sum_{n=1}^{\infty} S(\omega_n) \Delta\omega_n \rightarrow \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega = m_0, \quad (2.3)$$

όπου για λόγους μαθηματικής απλότητας στα όρια $(0, \infty)$, η ολοκληρωτέα συνάρτηση $S(\omega)$ να είναι μηδενική για $\omega \notin (0, \infty)$, ή να τείνει γρήγορα στο μηδέν καθώς $\omega \rightarrow 0$ και $\omega \rightarrow \infty$, και ότι οι φασματικές ροπές n -οστής τάξης ορίζονται από τη σχέση:

$$m_n = \int_0^{\infty} S(\omega) \omega^n d\omega. \quad (2.4)$$

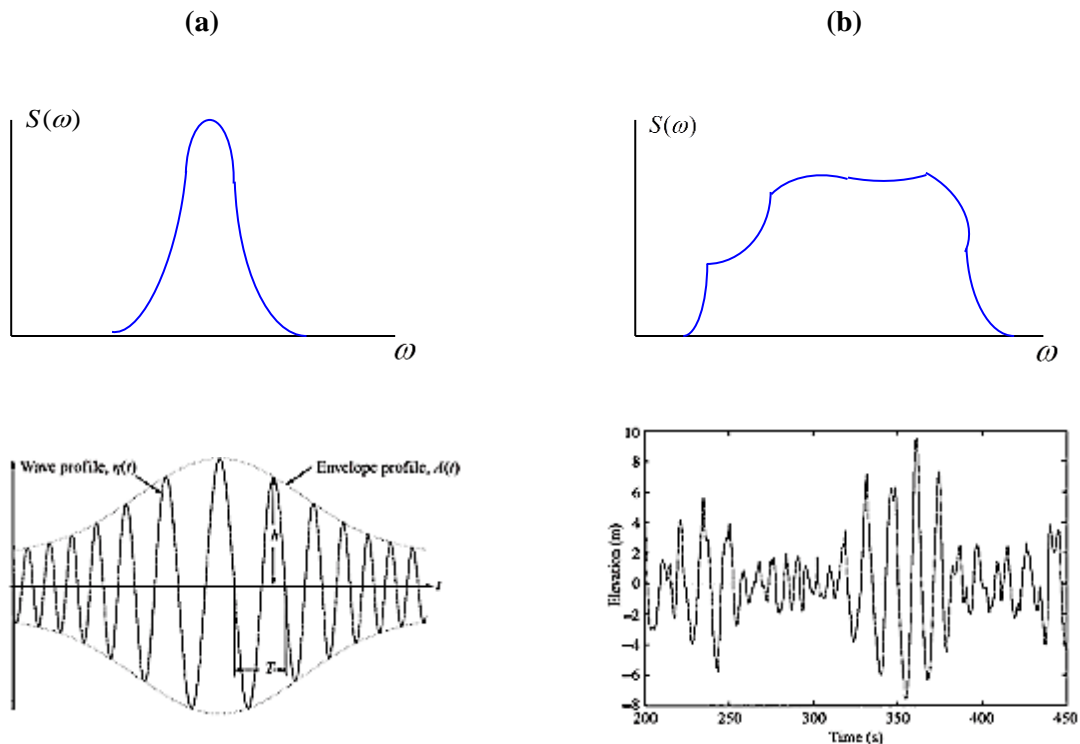
Με τη βοήθεια των φασματικών ροπών m_0, m_1 , ορίζουμε ως μέση συχνότητα (mean angular frequency) της συνάρτησης φασματικής πυκνότητας $S(\omega)$, την ποσότητα:

$$\bar{\omega} = \frac{m_1}{m_0}.$$

Αναλόγος προς την συμπεριφορά της συνάρτησης $S(\omega)$, η τυχαία συνάρτηση $x(t; \theta)$ χαρακτηρίζεται, αντιστοίχως, ως τυχαία συνάρτηση απείρως στενής λωρίδας, στενής λωρίδας, και εύρειας λωρίδας ή ευρείας ζώνης. Ο χαρακτηρισμός μιας τυχαίας συνάρτησης ως στενής ή ευρείας λωρίδας έχει μεγάλη πρακτική σημασία. Η διάκριση αυτή αισθητοποιείται στο Σχήμα 1 πιο κάτω. Στο Σχήμα 2.1(a) παριστάνεται ένα φάσμα στενής λωρίδας (όπου η φασματική "μάζα" είναι συγκεντρωμένη σε μια "στενή" λωρίδα συχνοτήτων, γύρω από μια κεντρική συχνότητα), καθώς και η τυπική μορφή μιας δειγματικής συνάρτησης $x(t; \theta)$ της αντίστοιχης τυχαίας συνάρτησης. Στην περίπτωση αυτή, η $x(t; \theta)$ προσομοιάζει εμφανώς μια κυματομορφή (αν και ακανόνιστη), στην οποία μπορούμε να αντιστοιχίσουμε μια έννοια μέσης περιόδου με σαφές φυσικό νόημα. Αυτή η μέση περίοδος εκφράζεται κατά προσέγγιση από την περίοδο κορυφής του φάσματος ή την μέση περίοδο.

Στο Σχήμα 2.1(b) δείχνεται ένα φάσμα ευρείας λωρίδας (όπου η φασματική μάζα είναι κατανομημένη σε μια ευρεία περιοχή συχνοτήτων), καθώς και η τυπική μορφή μιας δειγματικής συνάρτησης $x(t; \theta)$ της αντίστοιχης τυχαίας συνάρτησης. Όπως βλέπουμε, η $x(t; \theta)$ τώρα είναι μια πολύ ακανόνιστη συνάρτηση, η οποία δεν παρουσιάζει εμφανείς χαρακτήρες κυματικής διαταραχής.

Σχηματικά μπορούμε να πούμε ότι, στην περίπτωση τυχαίας συνάρτησης στενής λωρίδας, ο κυματικός χαρακτήρας και η τυχειότητα συνυπάρχουν ισόρροπα, ενώ στην περίπτωση τυχαίας συνάρτησης ευρείας λωρίδας, η γρήγορη μεταβολή και η τυχειότητα αποτελούν τα μόνα εμφανή χαρακτηριστικά των δειγματικών συναρτήσεων αυτής.



Σχήμα 2.1: Φάσμα στενής λωρίδας (a) και ευρείας λωρίδας στο (b), καθώς και η τυπική μορφή μιας δειγματικής συνάρτησης $x(t; \theta)$ αντίστοιχα.

2.1 Συχνότητα κορυφής και τιμή κορυφής φάσματος

Η συνάρτηση φασματικής πυκνότητας μπορεί να έχει μια ή περισσότερες κορυφές (βλέπε εφαρμογές από Newland, 1984; Ochi, 1990(a,b)). Τότε χαρακτηρίζεται ως **μονοκόρυφη** (unimodal), **δικόρυφη** (bimodal), κ.ο.κ. Σημαντικές παράμετροι μορφής της συνάρτησης $S_{XX}(\omega)$ είναι η (κυκλική) **συχνότητα κορυφής** ω_p και η **τιμή** (ή οι τιμές) **κορυφής** $S_p = S_{XX}(\omega_p)$, (modal frequency and modal value of the spectrum), βλέπε Σχήμα 2.2. Εάν η συνάρτηση $S_{XX}(\omega)$ είναι παραγωγίσιμη, τότε οι συχνότητες κορυφής βρίσκονται επιλύοντας την εξίσωση,

$$\frac{dS_{XX}(\omega)}{d\omega} = 0$$

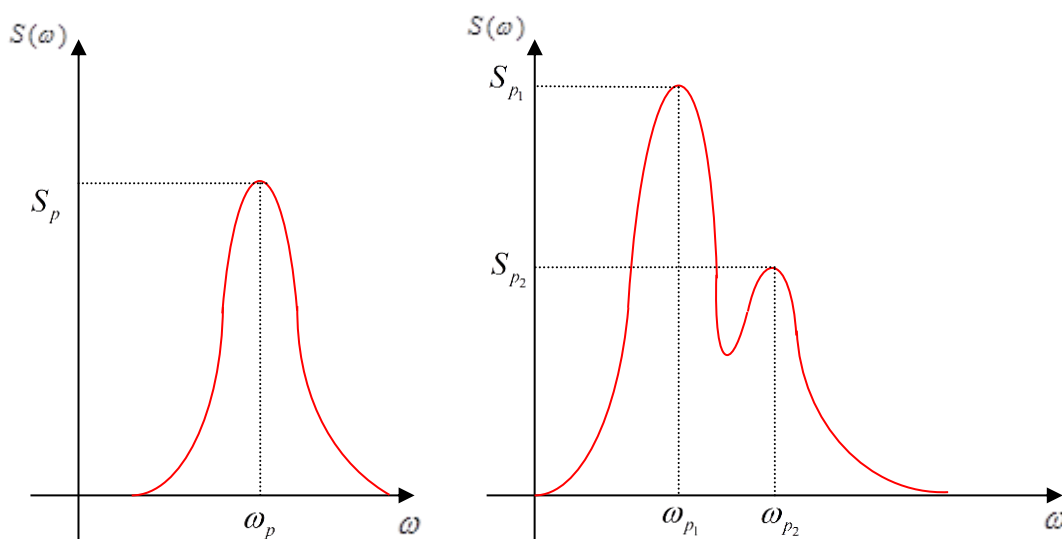
και κρατώντας μόνο τις ρίζες που αντιστοιχούν σε τοπικά μέγιστα. Στην συχνότητα κορυφής αντιστοιχεί η **περίοδο κορυφής**,

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_p}.$$

Στην περίπτωση μονοκόρυφου φάσματος, με την βοήθεια ζεύγους των παραμέτρων $\omega_p, S_p = S_{XX}(\omega_p)$, μπορούμε να αδιαστατικοποιήσουμε την συνάρτηση $S_{XX}(\omega)$, γράφοντάς την στη μορφή,

$$\frac{S_{XX}(\omega)}{S_p} = G\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right),$$

όπου G είναι κατάλληλη συνάρτηση.



Σχήμα 2.2. Μονοκόρυφη και δικόρυφη συνάρτηση φασματικής πυκνότητας

2.2 Συντελεστές εύρους φάσματος

Οι παράμετροι :

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{m_0 m_4 - m_2^2}{m_0 m_4}} \quad (\text{Cartwright and Longuet-Higgins, 1956}) \quad (2.5)$$

$$\nu = \sqrt{\frac{m_2 m_0}{m_1^2} - 1} \quad (\text{Longuet-Higgins, 1975}) \quad (2.6)$$

αποτελούν μέτρο της διασποράς των τιμών της φασματικής πυκνότητας $S(\omega)$ γύρω απ' την μέση συχνότητα $\bar{\omega}$. Η παράμετροι ε, ν λαμβάνουν τιμές στο διάστημα $(0,1)$. Δηλαδή $0 < \varepsilon < 1$, και $0 < \nu < 1$. Να σημειώσουμε ότι αν $\varepsilon \rightarrow 0$ η κατανομή του πλάτους κύματος ακολουθεί καλά την κατανομή Rayleigh, ενώ όταν $\varepsilon \rightarrow 1$ η κατανομή του πλάτους ακολουθεί την Gaussian, (Cartwright and Longuet-Higgins, 1956).

Οι συναρτήσεις φασματικής κατανομής $S(\omega)$ θα κατατάσσονται ανάλογα με τις τιμές της παραμέτρου ε όπως αρχικά υπολόγισαν οι Cartwright and Longuet-Higgins (1956).

Ειδικότερα, για διαδικασίες στενής λωρίδας (δηλ. $\frac{m_2^2}{m_0 m_4} \rightarrow 1 - \bar{\omega}$) η Σχέση (2.5) γράφεται:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{m_0 m_4 - m_2^2}{m_0 m_4}} = \sqrt{1 - \frac{m_2^2}{m_0 m_4}} \rightarrow \sqrt{\bar{\omega}}, \text{ δηλ., } \bar{\omega} \rightarrow \varepsilon^2.$$

Συμπεπώς: $\left\{ \begin{array}{l} \text{(infinitely narrow band spectra), όταν } \varepsilon \rightarrow 0 \\ \text{(narrow band spectra) } \varepsilon \rightarrow \text{πεπερασμένο αλλά μικρό} \\ \text{(wide band spectra) } \varepsilon \rightarrow 1 \end{array} \right.$

Για να συσχετιστεί ο συντελεστής εύρους φάσματος της (2.6) με την μέση συχνότητα $\bar{\omega}$, ορίζουμε τις ροπές νιοστής τάξης στο ενεργειακό φάσμα ως προς μια μέση συχνότητα ως εξής:

$$\mu_\nu = \int_0^\infty (\omega - \bar{\omega})^\nu S(\omega) d\omega. \quad (2.7)$$

$$\text{Τότε βλέπουμε ότι: } \left\{ \begin{array}{l} \mu_0 = m_0 \\ \mu_1 = 0 \\ \mu_2 = m_2 - \frac{m_1^2}{m_0}. \end{array} \right. \quad (2.8)$$

Με κατάλληλη αντικατάσταση της (2.8) στην (2.6) για διαδικασίες στενής λωρίδας όπως αρχικά όρισε ο (Longuet-Higgins, 1983), έχουμε:

$$\nu = \sqrt{\frac{m_2 m_0}{m_1^2} - 1} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_0}} \frac{1}{\bar{\omega}} \text{ δηλ.,}$$

$$\bar{\omega} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_0}} \frac{1}{\nu}.$$

Για narrow band διαδικασία $\nu \ll 1$, βλέπουμε ότι πρέπει να ισχύει $\sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_0}} \ll \bar{\omega}$.

2.3 Μοντελοποίηση του πλάτους και της φάσης της περιβάλλουσας διαδικασίας

Στο πρωτοποριακό του έργο, ο Longuet-Higgins (1957) εισήγαγε την έννοια της σύνθεσης των τυχαίων κυματισμών που ταξιδεύουν σαν ομάδα κυμάτων (envelope wave). Ειδικότερα, το πλάτος των ομαδικών κυμάτων (πλάτος περιβάλλουσας) θα μεταβάλλεται, αλλά με μικρή συχνότητα μεταβολής. Η έννοια της περιβάλλουσας κύματος χρησιμοποιείται συχνά για να προσεγγίσει βολικά τις κατανομές του ολικού μέγιστου, ενώ για θαλάσσιες εφαρμογές, χρησιμοποιείται σε συνδυασμό με την στατιστική ανάλυση κυματοειδών κορυφών. Συνοπτικά, η έννοια της περιβάλλουσας κύματος των απλών προοδευτικών κυματισμών έχει ένα σαφές διαισθητικό νόημα όταν τα πλάτη μεταβάλλονται αργά σε σύγκριση με τις περιόδους των χρονικών σειρών. Σ'αυτο το υποεδάφιο θα περιγράψουμε συνοπτικά την μοντελοποίηση της περιβάλλουσας διαδικασίας.

2.3.1 Πλάτος περιβάλλουσας διαδικασίας

Θεωρούμε την αναπαράσταση της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας της θάλασσας,

$$x(t; \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t + \varepsilon_n(\theta)) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\{(\omega_n - \bar{\omega})t + \bar{\omega}t + \varepsilon_n(\theta)\},$$

όπου χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική ταυτότητα,

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

γράφεται στη μορφή,

$$x(t; \theta) = x_c(t; \theta) \cos(\bar{\omega}t) - x_s(t; \theta) \sin(\bar{\omega}t), \text{ όπου,} \quad (2.9)$$

$$x_c(t; \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\{(\omega_n - \bar{\omega})t + \varepsilon_n(\theta)\}, \text{ και} \quad (2.10.α)$$

$$x_s(t; \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\{(\omega_n - \bar{\omega})t + \varepsilon_n(\theta)\}. \quad (2.10.β)$$

Θεωρούμε τώρα τον μετασχηματισμό Hilbert (Hilbert Transform, βλέπε Παράρτημα Ε) της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας της θάλασσας $x(t; \theta)$, ο οποίος ορίζεται ως εξής:

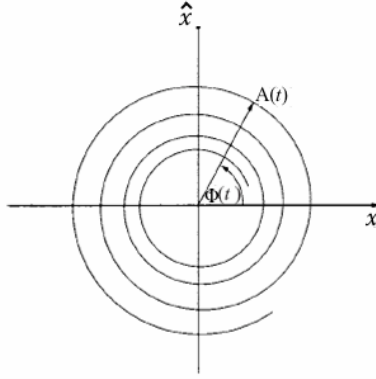
$$\hat{x}(t; \theta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau; \theta)}{t - \tau} d\tau. \quad (2.11)$$

Εισάγοντας την αναπαράσταση της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας της θάλασσας (Σχέση 2.1) στο δεξί μέλος της (2.11) και υπολογίζοντας το παραπάνω ολοκλήρωμα όρο προς όρο, καταλήγουμε στην σχέση:

$$\hat{x}(t; \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \{ \omega_n t + \varepsilon_n(\theta) \}. \quad (2.12)$$

Συνεπώς, έχουμε την αναπαράσταση στο μιγαδικό επίπεδο (βλέπε Σχήμα 2.3) της σύνθετης στοχαστικής διαδικασίας:

$$z(t; \theta) = x(t; \theta) + i \cdot \hat{x}(t; \theta), \quad (2.13)$$



Σχήμα 2.3. Αναπαράσταση narrow band κύματος στο χώρο των φάσεων. (Stansell et al., 2002)

όπου για μια δεδομένη χρονική στιγμή t , το πλάτος $A(t)$ και η ολική φάση $\Phi(t)$ θα θεωρούνται αντίστοιχα τυχαίες μεταβλητές από την τιμή της στοχαστικής διαδικασίας $z(t; \theta)$ την δεδομένη χρονική στιγμή στο μιγαδικό επίπεδο, ως εξής:

$$A(t) = \sqrt{x^2(t; \theta) + \hat{x}^2(t; \theta)}, \quad (2.14)$$

με ολική φάση,

$$\Phi(t) = \arctan \left(\frac{\hat{x}(t; \theta)}{x(t; \theta)} \right). \quad (2.15)$$

Να σημειώσουμε ότι οι τετραγωνικοί όροι⁽²⁾ της αναπαράσταση (2.1) στο μοντέλο της τυχαίας φάσης και του μετασχηματισμού Hilbert (2.12) για $m \neq n$, υπολογίζονται ως ακολούθως:

$$x^2(t; \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_m a_n \frac{1}{2} \left[\cos((\omega_n - \omega_m)t + \varepsilon_n(\theta) - \varepsilon_m(\theta)) + \right.$$

⁽²⁾ Για τους τετραγωνικούς όρους των $x(t; \theta)$ και $\hat{x}(t; \theta)$ έχουν χρησιμοποιηθεί οι τριγωνομετρικές ταυτότητες υπολογισμού: $\cos A \cos B = 1/2(\cos(A - B) + \cos(A + B))$, και $\sin A \sin B = 1/2(\cos(A - B) - \cos(A + B))$

$$+ \cos\left((\omega_n + \omega_m)t + \varepsilon_n(\theta) + \varepsilon_m(\theta)\right)], \quad (2.16.a)$$

και

$$\hat{x}^2(t; \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_n a_m \frac{1}{2} \left[\cos\left((\omega_n - \omega_m)t + \varepsilon_n(\theta) - \varepsilon_m(\theta)\right) - \cos\left((\omega_n + \omega_m)t + \varepsilon_n(\theta) + \varepsilon_m(\theta)\right) \right], \quad (2.16.b)$$

όπου αν $m = n$, τότε οι Σχέσεις (2.16.a και 2.16.b) καταλήγουν στην πιο κάτω μορφή:

$$x^2(t; \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n a_n \frac{1}{2} \left[\cos\left((\omega_n - \omega_n)t + \varepsilon_n(\theta) - \varepsilon_n(\theta)\right) + \cos\left((\omega_n + \omega_n)t + \varepsilon_n(\theta) + \varepsilon_n(\theta)\right) \right], \quad (2.16.c)$$

και

$$\hat{x}^2(t; \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n a_n \frac{1}{2} \left[\cos\left((\omega_n - \omega_n)t + \varepsilon_n(\theta) - \varepsilon_n(\theta)\right) - \cos\left((\omega_n + \omega_n)t + \varepsilon_n(\theta) + \varepsilon_n(\theta)\right) \right]. \quad (2.16.d)$$

Συνεπώς, το πλάτος του μιγαδικού $z(t; \theta)$ από την Σχέση (2.14) την χρονική στιγμή t , μπορεί να δοθεί για μικρά διαστήματα συχνότητας μέσω κατάλληλων αντικαταστάσεων των Σχέσεων (2.16) στην Σχέση (2.14) ως εξής:

$$A(t) = \begin{cases} \sqrt{\sum_{m=1}^{\infty} a_m \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[\cos\left((\omega_n - \omega_m)t + \varepsilon_n(\theta) - \varepsilon_m(\theta)\right) \right]}, & m \neq n \\ \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2} \approx \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} 2S(\omega_n) \Delta\omega_n} \rightarrow \sqrt{\int_0^{\infty} 2S(\omega) d\omega} = \sqrt{2m_0}, & m = n \end{cases} \quad (2.17)$$

2.3.2 Φάση περιβάλλουσας διαδικασίας

Η φάση $\Phi(t)$ όπως υπολογίστηκε μέσω της Σχέσης (2.15) μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$\Phi(t) = \arctan \left(\frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(\omega_n t + \varepsilon_n(\theta))}{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t + \varepsilon_n(\theta))} \right). \quad (2.18)$$

Ξαναγράφουμε την τυχαία μεταβλητή $z(t; \theta)$ στο μιγαδικό επίπεδο ως εξής:

$$\begin{aligned}
 z(t; \theta) &= x(t; \theta) + i \cdot \hat{x}(t; \theta) \\
 &= A(t) e^{i\Phi(t)} \\
 &= A(t) \{ \cos \Phi(t) + i \cdot \sin \Phi(t) \}.
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Για narrow banded διαδικασία, οι αναπαραστάσεις $x(t; \theta)$ και $\hat{x}(t; \theta)$ ακολουθούν αργές μεταβολές με την πάροδο του χρόνου, συνεπώς το πλάτος $A(t)$ ως τυχαία μεταβλητή της στοχαστικής διαδικασίας $z(t; \theta)$ την χρονική στιγμή t στο μιγαδικό επίπεδο, μπορεί να θεωρηθεί περίπου ίσο με το πλάτος της envelope process. Επιπρόσθετα, θα υπάρχει ένα τοπικό μέγιστο και ένα ελάχιστο κατά προσέγγιση σε μια περίοδο μηδενικής υπέρβασης (per zero crossing).

Να σημειώσουμε ότι η αναπαράσταση στο χώρο φάσεων όπως φαίνεται στο Σχήμα 3, δείχνει ότι η φάση $\Phi(t)$ συνεχώς αυξάνει με την πάροδο του χρόνου, συνεπώς ο ρυθμός μεταβολής της φάσης ως προς τον χρόνο θα θεωρείται θετικός. Δηλαδή $d\Phi(t)/dt > 0$. Το περιστρεφόμενο διάνυσμα $z(t; \theta)$ στο μιγαδικό επίπεδο διαγράφει μια ελικοειδή τροχιά με μικρές, αυξανόμενες, μεταβολές του πλάτους της έλικας και με γωνιακή ταχύτητα $\bar{\omega}$ περί του άξονά του.

Προσεγγιστικά, για διαδικασίες στενής λωρίδας η ολική φάση $\Phi(t)$ όπως ορίστηκε μέσω της (2.15), υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
 x(t; \theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t + \varepsilon_n(\theta)) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\{(\omega_n - \bar{\omega})t + \bar{\omega}t + \varepsilon_n(\theta)\} \\
 &= \text{Re}\{A(t) e^{i\phi(t)} e^{i\bar{\omega}t}\} = \text{Re}\{A(t) e^{i\Phi(t)}\},
 \end{aligned}$$

όπου $A(t) e^{i\phi(t)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\{i((\omega_n - \bar{\omega})t + \varepsilon_n(\theta))\}$, μια αργή μεταβολή του πλάτους ως συνάρτηση του χρόνου με φάση,

$$\phi(t) = \arctan\left(\frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin((\omega_n - \bar{\omega})t + \varepsilon_n(\theta))}{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos((\omega_n - \bar{\omega})t + \varepsilon_n(\theta))}\right), \tag{2.20.a}$$

και με ολική φάση της στοχαστικής διαδικασίας $z(t; \theta)$ στο μιγαδικό επίπεδο,

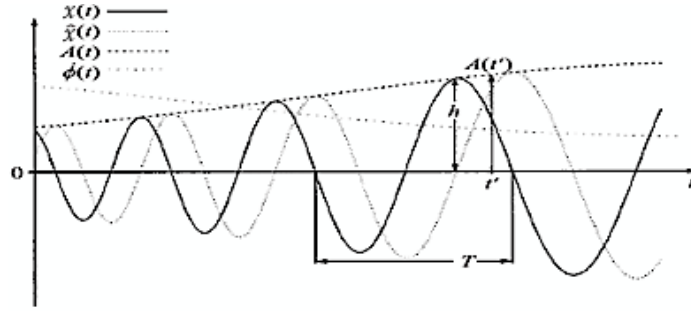
$$\Phi(t) = \bar{\omega}t + \phi(t), \tag{2.20.b}$$

όπου για διαδικασίες στενής λωρίδας $\phi'(t) \ll \bar{\omega}$ με $\phi(t) \in [0, 2\pi)$.

Αν πάρουμε το πραγματικό μέρος του $z(t; \theta)$ από την (2.19) θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \text{Re}\{z(t; \theta)\} &= A(t) \cos \Phi(t) \\
 &= A(t) \cos(\bar{\omega}t + \phi(t)).
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Για narrow band process, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 2.4, μπορούμε προσεγγιστικά να υποθέσουμε ότι την ίδια χρονική στιγμή, το πλάτος της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας της θάλασσας, θα ταυτίζεται περίπου με το πλάτος της envelope process.



Σχήμα 2.4. Αναπαράσταση narrow band κύματος στο χώρο του χρόνου. (Stansell et al., 2002)

Συνεπώς, από την μαθηματική αναπαράσταση της περιβάλλουσας, έχουμε:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{z(t; \theta)\} &= x(t; \theta), \\ A(t) \cos(\bar{\omega}t + \phi(t)) &= x_c(t; \theta) \cos(\bar{\omega}t) - x_s(t; \theta) \sin(\bar{\omega}t), \\ A(t) \{\cos(\bar{\omega}t) \cos \phi(t) - \sin(\bar{\omega}t) \sin \phi(t)\} &= x_c(t; \theta) \cos(\bar{\omega}t) - x_s(t; \theta) \sin(\bar{\omega}t). \end{aligned}$$

Αρα βλέπουμε ότι:

$$A(t) \cos \phi(t) = x_c(t; \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\{(\omega_n - \bar{\omega})t + \varepsilon_n(\theta)\}, \text{ και} \quad (2.22.a)$$

$$A(t) \sin \phi(t) = x_s(t; \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\{(\omega_n - \bar{\omega})t + \varepsilon_n(\theta)\}. \quad (2.22.b)$$

Τέλος, μπορούμε να εξάγουμε μια έκφραση για την περίοδο $T(t)$ της περιβάλλουσας θεωρώντας ότι $d\Phi(t)/dt > 0$ μέσω της (2.20.b) ως εξής:

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = \frac{2\pi}{T(t)} \Rightarrow \bar{\omega} + \phi'(t) = \frac{2\pi}{T(t)} \Rightarrow T(t) = \frac{2\pi}{\bar{\omega} + \phi'(t)}. \quad (2.23)$$

Κεφάλαιο 3

Μοντελοποίηση από Kimura (1980)

Η στατιστική ανάλυση των ομαδικών θαλάσσιων κυματισμών έχει μελετηθεί από δυο διαφορετικές συλλογιστικές. Η μοντελοποίηση θαλάσσιων κυματισμών που στηρίζεται στην έννοια της περιβάλλουσας από την σύνθεση των τυχαίων κυματισμών που ταξιδεύουν σαν ομάδα κυμάτων (envelope wave), θα αναφέρεται ως το μοντέλο Longuet-Higgins (1957) (αναλυτικά για την περιβάλλουσα στο υποεδάφιο 2.3). Μια δεύτερη προσέγγιση της μοντελοποίησης θαλάσσιων κυματισμών που θα στηρίζεται στον βαθμό συσχέτισης μεταξύ των κυματισμών αυτών, θα αναφέρεται ως το μοντέλο Kimura (1980). Ειδικότερα, ο πιθανοθεωρητικός χαρακτηρισμός των πλατών κύματος που θα βασίζεται στην συλλογιστική των Markov chain processes (μέσω της εκτίμησης του συντελεστή συσχέτισης των πλατών κύματος), αναφέρεται στην σχετική βιβλιογραφία ως η μοντελοποίηση από Kimura (1980). Η βασική παραπομπή όπου μελετώνται μαζί οι δυο προσεγγίσεις είναι από Longuet-Higgins (1984). Βλέπε επίσης Ochi (1998) για μια πρόσφατη ανασκόπηση των δυο συλλογιστικών υπολογισμού της από κοινού συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας των πλατών κύματος.

Στις επόμενα υποεδάφια του Κεφαλαίου 3, θα προσπαθήσουμε να αναπτύξουμε αναλυτικά τους υπολογισμούς για την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δυο τυχαίων μεταβλητών $A(t), A(t + \Delta t)$ των πλατών του κύματος με χρονική διαφορά Δt μεταξύ τους.

Ανακαλώντας συνοπτικά την διαδικασία που περιγράψαμε στο υποεδάφιο 2.3 στην μοντελοποίηση της περιβάλλουσας, θεωρούμε για την αναπαράσταση της ελεύθερης επιφάνειας της θάλασσας $x(t; \theta)$ τα εξής:

$$x(t; \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\{(\omega_n - \bar{\omega})t + \bar{\omega}t + \varepsilon_n(\theta)\} = x_c(t; \theta) \cos(\bar{\omega}t) - x_s(t; \theta) \sin(\bar{\omega}t),$$

όπου $\varepsilon_n(\theta)$ κάθε μονοδιάστατη τυχαία μεταβλητή με $\theta \in [0, 2\pi]$ και όπου $\bar{\omega}$ ότι είναι η μέση συχνότητα με $\bar{\omega} = m_1 / m_0$, και m_0, m_1 οι ροπές μηδενικής και πρώτης τάξης αντίστοιχα στο ενεργειακό κυματικό φάσμα. Οι χρονοσειρές $x_c(t; \theta), x_s(t; \theta)$ θα δίνονται όπως και πριν (Σχέσεις 2.10.a,b) στο στοχαστικό κυματικό μοντέλο τυχαίας φάσης (υποεδάφιο 2.3),

$$x_c(t; \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\{(\omega_n - \bar{\omega})t + \varepsilon_n(\theta)\},$$

$$x_s(t; \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\{(\omega_n - \bar{\omega})t + \varepsilon_n(\theta)\},$$

όπου προσεγγιστικά τα πλάτη a_n είναι τέτοια ώστε για μικρά διαστήματα συχνότητας, (narrow band spectrum), να ισχύει:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} a_n^2 \approx \sum_{n=1}^{\infty} S(\omega_n) \Delta\omega_n \rightarrow \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega = m_0,$$

με την συνάρτηση $S(\omega)$ να αναπαριστά το ενεργειακό φάσμα της $x(t; \theta)$ στο πεδίο των συχνοτήτων.

Βασιζόμενοι στις χαρακτηριστικές ιδιότητες των χρονοσειρών στο στοχαστικό κυματικό μοντέλο τυχαίας φάσης για δεδομένη χρονική στιγμή t , θεωρούμε τις τέσσερις τυχαίες μεταβλητές, $x_c(t; \theta), x_s(t; \theta), x_c(t + \Delta t; \theta), x_s(t + \Delta t; \theta)$. Η μεταβλητή Δt θα χαρακτηρίζει την χρονική διαφορά (time lag) εντός της οποίας οι τυχαίες μεταβλητές $x_c(t; \theta), x_c(t + \Delta t; \theta)$ και οι $x_s(t; \theta), x_s(t + \Delta t; \theta)$, είναι ισχυρά συσχετισμένες.

3.1 Υπολογισμός του πίνακα μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας των τυχαίων μεταβλητών $x_c(t; \theta), x_s(t; \theta), x_c(t + \Delta t; \theta), x_s(t + \Delta t; \theta)$

Σ' αυτό το υποεδάφιο θα υπολογιστούν οι αναλυτικές εκφράσεις του πίνακα μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας των τυχαίων μεταβλητών $x_c(t; \theta), x_s(t; \theta), x_c(t + \Delta t; \theta), x_s(t + \Delta t; \theta)$, δηλαδή οι υπολογισμοί αυτοσυνδιακύμανσης και συνδιακύμανσης των μεταβλητών αυτών.

Η μέση τιμή ολότητας της $x_c(t; \theta)$ υπολογίζεται ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} E^\theta [x_c(t; \theta)] &= E^\theta \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\{(\omega_n - \bar{\omega})t + \varepsilon_n(\theta)\} \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n E^\theta [\cos\{(\omega_n - \bar{\omega})t + \varepsilon_n(\theta)\}] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\{(\omega_n - \bar{\omega})t + \varepsilon\} f(\varepsilon) d\varepsilon, \text{ όπου } f(\varepsilon) = 1/2\pi \text{ η ομοιόμορφη κατανομή φάσης} \\ &\text{ στο διάστημα } [0, 2\pi], \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos\{(\omega_n - \bar{\omega})t + \varepsilon\} d\varepsilon = 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Ομοίως υπολογίζουμε και για τις υπόλοιπες μεταβλητές:

$$E^\theta [x_c(t; \theta)] = E^\theta [x_s(t; \theta)] = E^\theta [x_c(t + \Delta t; \theta)] = E^\theta [x_s(t + \Delta t; \theta)] = 0. \quad (3.2)$$

Υπολογίζουμε την συνδιακύμανση των $x_c(t; \theta), x_s(s; \theta)$:

$$\begin{aligned} E^\theta \left[\left(x_c(t; \theta) - \cancel{E^\theta [x_c(t; \theta)]} \right) \left(x_s(s; \theta) - \cancel{E^\theta [x_s(s; \theta)]} \right) \right] &= \\ = E^\theta \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\{(\omega_n - \bar{\omega})t + \varepsilon_n(\theta)\} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\{(\omega_n - \bar{\omega})s + \varepsilon_n(\theta)\} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 E^\theta [\cos\{(\omega_n - \bar{\omega})t + \varepsilon_n(\theta)\} \cdot \sin\{(\omega_n - \bar{\omega})s + \varepsilon_n(\theta)\}] \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \frac{1}{2} E^\theta [\sin\{(\omega_n - \bar{\omega})(s-t)\} + \cos\{(\omega_n - \bar{\omega})(t+s) + 2\varepsilon_n(\theta)\}],
 \end{aligned}$$

δηλαδή,

$$E^\theta [x_c(t; \theta)x_s(s; \theta)] = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \frac{1}{2} \sin\{(\omega_n - \bar{\omega})(s-t)\} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \frac{1}{2} E^\theta [\cos\{(\omega_n - \bar{\omega})(t+s) + 2\varepsilon_n(\theta)\}],$$

όπου για $t = s$,

$$E^\theta [x_c(t; \theta)x_s(s; \theta)] = 0, \text{ δηλαδή } C_{x_c x_s}(t, t) = 0. \quad (3.3)$$

$$\text{Ομοίως, } C_{x_s x_c}(t, t) = C_{x_c x_s}(t, t) = 0. \quad (3.4)$$

Υπολογίζουμε την συνδιακύμανση των $x_c(t + \Delta t; \theta), x_s(s + \Delta t; \theta)$:

$$\begin{aligned}
 &E^\theta \left[\left(x_c(t + \Delta t; \theta) - \cancel{E^\theta [x_c(t + \Delta t; \theta)]} \right) \cdot \left(x_s(s + \Delta t; \theta) - \cancel{E^\theta [x_s(s + \Delta t; \theta)]} \right) \right] = \\
 &= E^\theta \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\{(\omega_n - \bar{\omega})(t + \Delta t) + \varepsilon_n(\theta)\} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\{(\omega_n - \bar{\omega})(s + \Delta t) + \varepsilon_n(\theta)\} \right] \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 E^\theta [\cos\{(\omega_n - \bar{\omega})(t + \Delta t) + \varepsilon_n(\theta)\} \cdot \sin\{(\omega_n - \bar{\omega})(s + \Delta t) + \varepsilon_n(\theta)\}] \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 E^\theta \frac{1}{2} [\sin\{(\omega_n - \bar{\omega})(s-t)\} + \cos\{(\omega_n - \bar{\omega})(t+s+2\Delta t) + 2\varepsilon_n(\theta)\}] \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \frac{1}{2} \sin\{(\omega_n - \bar{\omega})(s-t)\} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \frac{1}{2} E^\theta [\cos\{(\omega_n - \bar{\omega})(t+s+2\Delta t) + 2\varepsilon_n(\theta)\}],
 \end{aligned}$$

όπου για $t = s$,

$$E^\theta [x_c(t + \Delta t; \theta)x_s(s + \Delta t; \theta)] = 0, \text{ δηλαδή } C_{x_c x_s}(t + \Delta t, t + \Delta t) = 0. \quad (3.5)$$

$$\text{Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία, } C_{x_s x_c}(t + \Delta t, t + \Delta t) = 0. \quad (3.6)$$

Υπολογίζουμε την αυτοσυνδιακύμανση των $x_c(t; \theta), x_c(s; \theta)$:

$$E^\theta \left[\left(x_c(t; \theta) - \cancel{E^\theta [x_c(t; \theta)]} \right) \left(x_c(s; \theta) - \cancel{E^\theta [x_c(s; \theta)]} \right) \right] =$$

$$\begin{aligned}
 &= E^\theta \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\{(\omega_n - \bar{\omega})t + \varepsilon_n(\theta)\} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\{(\omega_n - \bar{\omega})s + \varepsilon_n(\theta)\} \right] \\
 &= E^\theta \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \frac{1}{2} \left[\cos\{(\omega_n - \bar{\omega})(t-s)\} + \cos\{(\omega_n - \bar{\omega})(t+s) + 2\varepsilon_n(\theta)\} \right] \right] \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \frac{1}{2} E^\theta \left[\cos\{(\omega_n - \bar{\omega})(t-s)\} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \frac{1}{2} E^\theta \left[\cos\{(\omega_n - \bar{\omega})(t+s) + 2\varepsilon_n(\theta)\} \right] \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \frac{1}{2} \left[\cos\{(\omega_n - \bar{\omega})(t-s)\} \right],
 \end{aligned}$$

όπου για $t = s$,

$$E^\theta [x_c(t; \theta)x_c(s; \theta)] = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \frac{1}{2} = \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega = C_{x_c x_c}(t, t) = \sigma_{x_c}^2(t) = m_0,$$

$$\text{δηλαδή } C_{x_c x_c}(t, t) = m_0. \quad (3.7)$$

Υπολογίζουμε την αυτοσυνδιακύμανση των $x_s(t; \theta), x_s(s; \theta)$:

$$\begin{aligned}
 &E^\theta \left[\left(x_s(t; \theta) - E^\theta [x_s(t; \theta)] \right) \left(x_s(s; \theta) - E^\theta [x_s(s; \theta)] \right) \right] = \\
 &= E^\theta \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\{(\omega_n - \bar{\omega})t + \varepsilon_n(\theta)\} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\{(\omega_n - \bar{\omega})s + \varepsilon_n(\theta)\} \right] \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 E^\theta \left[\sin\{(\omega_n - \bar{\omega})t + \varepsilon_n(\theta)\} \cdot \sin\{(\omega_n - \bar{\omega})s + \varepsilon_n(\theta)\} \right] \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 E^\theta \frac{1}{2} \left[\cos\{(\omega_n - \bar{\omega})(t-s)\} - \cos\{(\omega_n - \bar{\omega})(t+s) + 2\varepsilon_n(\theta)\} \right] \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 E^\theta \frac{1}{2} \left[\cos\{(\omega_n - \bar{\omega})(t-s)\} \right] - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 E^\theta \frac{1}{2} \left[\cos\{(\omega_n - \bar{\omega})(t+s) + 2\varepsilon_n(\theta)\} \right],
 \end{aligned}$$

όπου για $t = s$,

$$E^\theta [x_s(t; \theta)x_s(s; \theta)] = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} S(\omega_n) \Delta\omega_n = \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega = C_{x_s x_s}(t, t) = \sigma_{x_s}^2(t) = m_0,$$

$$\text{δηλαδή } C_{x_s x_s}(t, t) = m_0. \quad (3.8)$$

Υπολογίζουμε την αυτοσυνδιακύμανση των $x_c(t + \Delta t; \theta), x_c(s + \Delta t; \theta)$:

$$\begin{aligned}
 & E^\theta \left[\left(x_c(t + \Delta t; \theta) - \cancel{E^\theta [x_c(t + \Delta t; \theta)]} \right) \left(x_c(s + \Delta t; \theta) - \cancel{E^\theta [x_c(s + \Delta t; \theta)]} \right) \right] = \\
 & = E^\theta \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\{(\omega_n - \bar{\omega})(t + \Delta t) + \varepsilon_n(\theta)\} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\{(\omega_n - \bar{\omega})(s + \Delta t) + \varepsilon_n(\theta)\} \right] \\
 & = E^\theta \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \frac{1}{2} \left[\cos\{(\omega_n - \bar{\omega})(t - s)\} + \cos\{(\omega_n - \bar{\omega})(t + s + 2\Delta t) + 2\varepsilon_n(\theta)\} \right] \right] \\
 & = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 E^\theta \frac{1}{2} \left[\cos\{(\omega_n - \bar{\omega})(t - s)\} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 E^\theta \frac{1}{2} \left[\cos\{(\omega_n - \bar{\omega})(t + s + 2\Delta t) + 2\varepsilon_n(\theta)\} \right],
 \end{aligned}$$

όπου για $t = s$,

$$\begin{aligned}
 E^\theta [x_c(t + \Delta t; \theta)x_c(s + \Delta t; \theta)] & = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} S(\omega_n) \Delta \omega_n \\
 & = \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega = C_{x_c x_c}(t + \Delta t, t + \Delta t) = \sigma_{x_c}^2(t + \Delta t) = m_0,
 \end{aligned}$$

$$\text{δηλαδή, } C_{x_c x_c}(t + \Delta t, t + \Delta t) = m_0. \quad (3.9)$$

Υπολογίζουμε την αυτοσυνδιακύμανση των $x_s(t + \Delta t; \theta), x_s(s + \Delta t; \theta)$:

$$\begin{aligned}
 & E^\theta \left[\left(x_s(t + \Delta t; \theta) - \cancel{E^\theta [x_s(t + \Delta t; \theta)]} \right) \left(x_s(s + \Delta t; \theta) - \cancel{E^\theta [x_s(s + \Delta t; \theta)]} \right) \right] = \\
 & = E^\theta \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\{(\omega_n - \bar{\omega})(t + \Delta t) + \varepsilon_n(\theta)\} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\{(\omega_n - \bar{\omega})(s + \Delta t) + \varepsilon_n(\theta)\} \right] \\
 & = E^\theta \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \frac{1}{2} \left[\cos\{(\omega_n - \bar{\omega})(t - s)\} - \cos\{(\omega_n - \bar{\omega})(t + s + 2\Delta t) + 2\varepsilon_n(\theta)\} \right] \right] \\
 & = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 E^\theta \frac{1}{2} \left[\cos\{(\omega_n - \bar{\omega})(t - s)\} \right] - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 E^\theta \frac{1}{2} \left[\cos\{(\omega_n - \bar{\omega})(t + s + 2\Delta t) + 2\varepsilon_n(\theta)\} \right],
 \end{aligned}$$

όπου για $t = s$,

$$\begin{aligned}
 E^\theta [x_s(t + \Delta t; \theta)x_s(s + \Delta t; \theta)] & = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} S(\omega_n) \Delta \omega_n \\
 & = \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega = C_{x_s x_s}(t + \Delta t, t + \Delta t) = \sigma_{x_s}^2(t + \Delta t) = m_0,
 \end{aligned}$$

$$\text{δηλαδή, } C_{x_s x_s}(t + \Delta t, t + \Delta t) = m_0. \quad (3.10)$$

Υπολογίζουμε την αυτοσυνδιακύμανση των $x_c(t; \theta), x_c(t + \Delta t; \theta)$:

$$\begin{aligned}
 & E^\theta \left[\left(x_c(t; \theta) - \cancel{E^\theta [x_c(t; \theta)]} \right) \left(x_c(t + \Delta t; \theta) - \cancel{E^\theta [x_c(t + \Delta t; \theta)]} \right) \right] = \\
 & = E^\theta \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \{ (\omega_n - \bar{\omega})t + \varepsilon_n(\theta) \} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \{ (\omega_n - \bar{\omega})(t + \Delta t) + \varepsilon_n(\theta) \} \right] \\
 & = E^\theta \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \frac{1}{2} \left[\cos \{ (\omega_n - \bar{\omega})\Delta t \} + \cos \{ (\omega_n - \bar{\omega})(2t + \Delta t) + 2\varepsilon_n(\theta) \} \right] \right] \\
 & = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 E^\theta \frac{1}{2} \left[\cos \{ (\omega_n - \bar{\omega})\Delta t \} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 E^\theta \frac{1}{2} \left[\cos \{ (\omega_n - \bar{\omega})(2t + \Delta t) + 2\varepsilon_n(\theta) \} \right] \\
 & = \sum_{n=1}^{\infty} S(\omega_n) \Delta \omega_n \left[\cos \{ (\omega_n - \bar{\omega})\Delta t \} \right] \\
 & = \int_0^\infty S(\omega) \cos \{ (\omega - \bar{\omega})\Delta t \} d\omega \\
 & = C_{x_c x_c}(t, t + \Delta t).
 \end{aligned}$$

Με την αλλαγή σειρά μεταβλητών από $(t, t + \Delta t)$ σε $(t + \Delta t, t)$, καταλήγουμε,

$$C_{x_c x_c}(t + \Delta t, t) = C_{x_c x_c}(t, t + \Delta t). \quad (3.11)$$

Υπολογίζουμε την αυτοσυνδιακύμανση των $x_s(t; \theta), x_s(t + \Delta t; \theta)$:

$$\begin{aligned}
 & E^\theta \left[\left(x_s(t; \theta) - \cancel{E^\theta [x_s(t; \theta)]} \right) \left(x_s(t + \Delta t; \theta) - \cancel{E^\theta [x_s(t + \Delta t; \theta)]} \right) \right] = \\
 & = E^\theta \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \{ (\omega_n - \bar{\omega})t + \varepsilon_n(\theta) \} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \{ (\omega_n - \bar{\omega})(t + \Delta t) + \varepsilon_n(\theta) \} \right] \\
 & = E^\theta \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \frac{1}{2} \left[\cos \{ (\omega_n - \bar{\omega})(-\Delta t) \} - \cos \{ (\omega_n - \bar{\omega})(2t + \Delta t) + 2\varepsilon_n(\theta) \} \right] \right] \\
 & = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \frac{1}{2} \left[\cos \{ (\omega_n - \bar{\omega})\Delta t \} \right] - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 E^\theta \frac{1}{2} \left[\cos \{ (\omega_n - \bar{\omega})(2t + \Delta t) + 2\varepsilon_n(\theta) \} \right] \\
 & = \sum_{n=1}^{\infty} S(\omega_n) \Delta \omega_n \left[\cos \{ (\omega_n - \bar{\omega})\Delta t \} \right] \\
 & = \int_0^\infty S(\omega) \cos \{ (\omega - \bar{\omega})\Delta t \} d\omega = C_{x_s x_s}(t, t + \Delta t) = C_{x_c x_c}(t, t + \Delta t). \quad (3.12)
 \end{aligned}$$

Με την αλλαγή σειρά μεταβλητών από $(t, t + \Delta t)$ σε $(t + \Delta t, t)$ όπως και προηγουμένως, καταλήγουμε,

$$C_{x_s x_s}(t + \Delta t, t) = C_{x_s x_s}(t, t + \Delta t) = C_{x_c x_c}(t, t + \Delta t). \quad (3.13)$$

Υπολογίζουμε την συνδιακύμανση των $x_c(t; \theta), x_s(t + \Delta t; \theta)$:

$$\begin{aligned} & E^\theta \left[\left(x_c(t; \theta) - E^\theta [x_c(t; \theta)] \right) \left(x_s(t + \Delta t; \theta) - E^\theta [x_s(t + \Delta t; \theta)] \right) \right] = \\ & = E^\theta \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\{(\omega_n - \bar{\omega})t + \varepsilon_n(\theta)\} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\{(\omega_n - \bar{\omega})(t + \Delta t) + \varepsilon_n(\theta)\} \right] \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 E^\theta [\cos\{(\omega_n - \bar{\omega})t + \varepsilon_n(\theta)\} \cdot \sin\{(\omega_n - \bar{\omega})(t + \Delta t) + \varepsilon_n(\theta)\}] \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 E^\theta \frac{1}{2} [\sin\{(\omega_n - \bar{\omega})\Delta t\} + \cos\{(\omega_n - \bar{\omega})(2t + \Delta t) + 2\varepsilon_n(\theta)\}] \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \frac{1}{2} \sin\{(\omega_n - \bar{\omega})\Delta t\} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \frac{1}{2} E^\theta [\cos\{(\omega_n - \bar{\omega})(2t + \Delta t) + 2\varepsilon_n(\theta)\}] \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} S(\omega_n) \Delta \omega_n [\sin\{(\omega_n - \bar{\omega})\Delta t\}] \\ & = \int_0^\infty S(\omega) \sin\{(\omega - \bar{\omega})\Delta t\} d\omega \\ & = C_{x_c x_s}(t, t + \Delta t). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Με την αλλαγή σειρά μεταβλητών από $(t, t + \Delta t)$ σε $(t + \Delta t, t)$, καταλήγουμε,

$$C_{x_c x_s}(t + \Delta t, t) = -C_{x_c x_s}(t, t + \Delta t). \quad (3.15)$$

Υπολογίζουμε την συνδιακύμανση των $x_s(t; \theta), x_c(t + \Delta t; \theta)$:

$$\begin{aligned} & E^\theta \left[\left(x_s(t; \theta) - E^\theta [x_s(t; \theta)] \right) \left(x_c(t + \Delta t; \theta) - E^\theta [x_c(t + \Delta t; \theta)] \right) \right] = \\ & = E^\theta \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\{(\omega_n - \bar{\omega})t + \varepsilon_n(\theta)\} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\{(\omega_n - \bar{\omega})(t + \Delta t) + \varepsilon_n(\theta)\} \right] \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 E^\theta [\sin\{(\omega_n - \bar{\omega})t + \varepsilon_n(\theta)\} \cdot \cos\{(\omega_n - \bar{\omega})(t + \Delta t) + \varepsilon_n(\theta)\}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 E^\theta \frac{1}{2} [\sin\{(\omega_n - \bar{\omega})(-\Delta t)\} + \cos\{(\omega_n - \bar{\omega})(2t + \Delta t) + 2\varepsilon_n(\theta)\}] \\
 &= -\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \frac{1}{2} \sin\{(\omega_n - \bar{\omega})\Delta t\} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \frac{1}{2} E^\theta [\cos\{(\omega_n - \bar{\omega})(2t + \Delta t) + 2\varepsilon_n(\theta)\}] \\
 &= -\sum_{n=1}^{\infty} S(\omega_n) \Delta \omega_n [\sin\{(\omega_n - \bar{\omega})\Delta t\}] \\
 &= -\int_0^{\infty} S(\omega) \cdot \sin\{(\omega - \bar{\omega})\Delta t\} d\omega = C_{x_c x_c}(t, t + \Delta t) = -C_{x_c x_s}(t, t + \Delta t). \tag{3.16}
 \end{aligned}$$

Με την αλλαγή σειρά μεταβλητών από $(t, t + \Delta t)$ σε $(t + \Delta t, t)$, καταλήγουμε,

$$C_{x_c x_c}(t + \Delta t, t) = C_{x_c x_s}(t, t + \Delta t). \tag{3.17}$$

Με βάση τις πιο πάνω σχέσεις υπολογίζεται ο πίνακας μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας Δ των τυχαίων μεταβλητών $x_c(t; \theta), x_s(t; \theta), x_c(t + \Delta t; \theta), x_s(t + \Delta t; \theta)$, με τα στοιχεία της διακύμανσης των μεταβλητών αυτών να βρίσκονται στην διαγώνιο του πίνακα.

$$\begin{aligned}
 \Delta &= \begin{bmatrix} C_{x_c x_c}(t, t) & C_{x_c x_s}(t, t) & C_{x_c x_c}(t, t + \Delta t) & C_{x_c x_s}(t, t + \Delta t) \\ C_{x_s x_c}(t, t) & C_{x_s x_s}(t, t) & C_{x_s x_c}(t, t + \Delta t) & C_{x_s x_s}(t, t + \Delta t) \\ C_{x_c x_c}(t + \Delta t, t) & C_{x_c x_s}(t + \Delta t, t) & C_{x_c x_c}(t + \Delta t, t + \Delta t) & C_{x_c x_s}(t + \Delta t, t + \Delta t) \\ C_{x_s x_c}(t + \Delta t, t) & C_{x_s x_s}(t + \Delta t, t) & C_{x_s x_c}(t + \Delta t, t + \Delta t) & C_{x_s x_s}(t + \Delta t, t + \Delta t) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \sigma_{x_c}^2(t) & 0 & C_{x_c x_c}(t, t + \Delta t) & C_{x_c x_s}(t, t + \Delta t) \\ 0 & \sigma_{x_s}^2(t) & -C_{x_c x_s}(t, t + \Delta t) & C_{x_c x_c}(t, t + \Delta t) \\ C_{x_c x_c}(t, t + \Delta t) & -C_{x_c x_s}(t, t + \Delta t) & \sigma_{x_c}^2(t + \Delta t) & 0 \\ C_{x_c x_s}(t, t + \Delta t) & C_{x_c x_c}(t, t + \Delta t) & 0 & \sigma_{x_s}^2(t + \Delta t) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} m_0 & 0 & C_{x_c x_c}(t, t + \Delta t) & C_{x_c x_s}(t, t + \Delta t) \\ 0 & m_0 & -C_{x_c x_s}(t, t + \Delta t) & C_{x_c x_c}(t, t + \Delta t) \\ C_{x_c x_c}(t, t + \Delta t) & -C_{x_c x_s}(t, t + \Delta t) & m_0 & 0 \\ C_{x_c x_s}(t, t + \Delta t) & C_{x_c x_c}(t, t + \Delta t) & 0 & m_0 \end{bmatrix}. \tag{3.18}
 \end{aligned}$$

Η ορίζουσα του πίνακα μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας υπολογίζεται:

$$\det(\Delta) = \left(m_0^2 - C_{x_c x_c}^2(t, t + \Delta t) - C_{x_c x_s}^2(t, t + \Delta t) \right)^2, \tag{3.19}$$

όπου ο προσαρτημένος πίνακας $\text{adj}(\Delta)$ θα έχει σαν στοιχεία τα $(-1)^{i+j} \det(\Delta_{i,j})$ ⁽³⁾.

⁽³⁾ Ο πίνακας $\Delta_{i,j}$ προκύπτει διαγράφοντας την i γραμμή και την j στήλη του πίνακα Δ αντίστοιχα.

3.2 Από κοινού κανονική σππ

$$f(x_c(t; \theta), x_s(t; \theta), x_c(t + \Delta t; \theta), x_s(t + \Delta t; \theta))$$

Οι τυχαίες μεταβλητές $x_c(t; \theta), x_s(t; \theta), x_c(t + \Delta t; \theta), x_s(t + \Delta t; \theta)$ ικανοποιούν τις προϋποθέσεις του κεντρικού οριακού θεωρήματος δηλ., μηδενικές μέσες τιμές και πεπερασμένες διασπορές, (Gnedenko, 1975; Bhat, 1985; Cramér, 1971 και Αθανασούλης, 2003), συνεπώς μπορούν να εκφραστούν μέσω της από κοινού κανονικής συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας ως εξής:

$$f(\mathbf{X}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{4}{2}} \cdot |\Delta|^{\frac{1}{2}}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \mathbf{X}^T \cdot \Delta^{-1} \cdot \mathbf{X}} \quad (3.20)$$

όπου,

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_c(t; \theta) \\ x_s(t; \theta) \\ x_c(t + \Delta t; \theta) \\ x_s(t + \Delta t; \theta) \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

και ο ανάστροφος του πίνακα \mathbf{X} ,

$$\mathbf{X}^T = (x_c(t; \theta) \quad x_s(t; \theta) \quad x_c(t + \Delta t; \theta) \quad x_s(t + \Delta t; \theta)). \quad (3.22)$$

Ο αντίστροφος του πίνακα μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας Δ σε σχέση με την ορίζουσα του πίνακα $\det(\Delta)$, και τον προσαρτημένο του πίνακα $\text{adj}(\Delta)$, υπολογίζεται ως εξής:

$$\Delta^{-1} = \frac{1}{\det(\Delta)} \text{adj}(\Delta) = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{|\Delta|} \begin{bmatrix} m_0 & 0 & -C_{x_c x_c}(t, t + \Delta t) & -C_{x_c x_s}(t, t + \Delta t) \\ 0 & m_0 & C_{x_c x_s}(t, t + \Delta t) & -C_{x_s x_c}(t, t + \Delta t) \\ -C_{x_c x_c}(t, t + \Delta t) & C_{x_c x_s}(t, t + \Delta t) & m_0 & 0 \\ -C_{x_c x_s}(t, t + \Delta t) & -C_{x_s x_c}(t, t + \Delta t) & 0 & m_0 \end{bmatrix}, \quad (3.23)$$

$$\text{όπου, } \sqrt{|\Delta|} = (m_0^2 - C_{x_c x_c}^2(t, t + \Delta t) - C_{x_c x_s}^2(t, t + \Delta t)). \quad (3.24)$$

Αντικαθιστώντας τις ανωτέρω Σχέσεις (3.21, 3.22, 3.23, και 3.24) στην (3.20) για την από κοινού κανονική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών $x_c(t; \theta), x_s(t; \theta), x_c(t + \Delta t; \theta), x_s(t + \Delta t; \theta)$, θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
 f(x_c(t; \theta), x_s(t; \theta), x_c(t + \Delta t; \theta), x_s(t + \Delta t; \theta)) = \\
 \frac{1}{(2\pi)^2 \sqrt{|\Delta|}} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2\sqrt{|\Delta|}} \left[m_0 (x_c^2(t; \theta) + x_s^2(t; \theta) + x_c^2(t + \Delta t; \theta) + x_s^2(t + \Delta t; \theta)) - \right. \right. \\
 \left. \left. -2 \cdot C_{x_c x_c}(t, t + \Delta t) \cdot (x_c(t; \theta)x_c(t + \Delta t; \theta) + x_s(t; \theta)x_s(t + \Delta t; \theta)) - \right. \right. \\
 \left. \left. -2 \cdot C_{x_c x_s}(t, t + \Delta t) \cdot (x_c(t; \theta)x_s(t + \Delta t; \theta) - x_s(t; \theta)x_c(t + \Delta t; \theta)) \right] \right\}.
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Οι τυχαίες μεταβλητές $x_c(t; \theta), x_s(t; \theta), x_c(t + \Delta t; \theta), x_s(t + \Delta t; \theta)$ αντικαθίστανται κατάλληλα έτσι ώστε να εισάγουμε τις τυχαίες μεταβλητές πλάτους $A(t)$ της περιβάλλουσας διαδικασίας και φάσης $\phi(t)$ όπως έχουν οριστεί στο υποεδάφιο 2.3. Με κατάλληλη αντικατάσταση των μεταβλητών $(t, t + \Delta t)$ στις χρονοσειρές $x_c(t; \theta), x_s(t; \theta)$ όπως και πριν στο στοχαστικό κυματικό μοντέλο τυχαίας φάση, καταλήγουμε στις:

$$\begin{cases}
 x_c(t; \theta) = A(t) \cos \{ \phi(t) \}, \\
 x_s(t; \theta) = A(t) \sin \{ \phi(t) \}, \\
 x_c(t + \Delta t; \theta) = A(t + \Delta t) \cos \{ \phi(t + \Delta t) \}, \\
 x_s(t + \Delta t; \theta) = A(t + \Delta t) \sin \{ \phi(t + \Delta t) \}.
 \end{cases} \tag{3.26}$$

Ο μετασχηματισμός στον \mathbb{R}_X^4 (αναλυτικά στο Παράρτημα J) πραγματοποιείται κατάλληλα μέσω της:

$$f_Y(y) = f_X(H(y)) \cdot \left| \frac{D(H_1, H_2, H_3, H_4)}{D(y_1, y_2, y_3, y_4)} \right|, \tag{3.27}$$

όπου η Ιακωβιανή ορίζουσα $\mathbf{J} = \frac{D(H_1, H_2, H_3, H_4)}{D(y_1, y_2, y_3, y_4)}$ θα δίνεται απ' την σχέση:

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix}
 \frac{\partial H_1}{\partial y_1} & \frac{\partial H_1}{\partial y_2} & \frac{\partial H_1}{\partial y_3} & \frac{\partial H_1}{\partial y_4} \\
 \frac{\partial H_2}{\partial y_1} & \frac{\partial H_2}{\partial y_2} & \frac{\partial H_2}{\partial y_3} & \frac{\partial H_2}{\partial y_4} \\
 \frac{\partial H_3}{\partial y_1} & \frac{\partial H_3}{\partial y_2} & \frac{\partial H_3}{\partial y_3} & \frac{\partial H_3}{\partial y_4} \\
 \frac{\partial H_4}{\partial y_1} & \frac{\partial H_4}{\partial y_2} & \frac{\partial H_4}{\partial y_3} & \frac{\partial H_4}{\partial y_4}
 \end{vmatrix}. \tag{3.28}$$

Συνεπώς, για τις μεταβλητές $x_c(t; \theta), x_s(t; \theta), x_c(t + \Delta t; \theta), x_s(t + \Delta t; \theta)$,

χρησιμοποιούμε τους μετασχηματισμούς:

$$(H_1, H_2, H_3, H_4) \equiv (x_c(t; \theta), x_s(t; \theta), x_c(t + \Delta t; \theta), x_s(t + \Delta t; \theta)),$$

για τις νέες μεταβλητές :

$$(y_1, y_2, y_3, y_4) \equiv (A(t), A(t + \Delta t), \phi(t), \phi(t + \Delta t)).$$

Η Ιακωβιανή ορίζουσα $\mathbf{J} = \frac{D(H_1, H_2, H_3, H_4)}{D(y_1, y_2, y_3, y_4)}$ θα παίρνει την πιο κάτω μορφή:

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_c(t; \theta)}{\partial A(t)} & \frac{\partial x_c(t; \theta)}{\partial A(t + \Delta t)} & \frac{\partial x_c(t; \theta)}{\partial \phi(t)} & \frac{\partial x_c(t; \theta)}{\partial \phi(t + \Delta t)} \\ \frac{\partial x_s(t; \theta)}{\partial A(t)} & \frac{\partial x_s(t; \theta)}{\partial A(t + \Delta t)} & \frac{\partial x_s(t; \theta)}{\partial \phi(t)} & \frac{\partial x_s(t; \theta)}{\partial \phi(t + \Delta t)} \\ \frac{\partial x_c(t + \Delta t; \theta)}{\partial A(t)} & \frac{\partial x_c(t + \Delta t; \theta)}{\partial A(t + \Delta t)} & \frac{\partial x_c(t + \Delta t; \theta)}{\partial \phi(t)} & \frac{\partial x_c(t + \Delta t; \theta)}{\partial \phi(t + \Delta t)} \\ \frac{\partial x_s(t + \Delta t; \theta)}{\partial A(t)} & \frac{\partial x_s(t + \Delta t; \theta)}{\partial A(t + \Delta t)} & \frac{\partial x_s(t + \Delta t; \theta)}{\partial \phi(t)} & \frac{\partial x_s(t + \Delta t; \theta)}{\partial \phi(t + \Delta t)} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\{\phi(t)\} & 0 & -A(t)\sin\{\phi(t)\} & 0 \\ \sin\{\phi(t)\} & \cos\{\phi(t + \Delta t)\} & A(t)\cos\{\phi(t)\} & -A(t + \Delta t)\sin\{\phi(t + \Delta t)\} \\ 0 & \sin\{\phi(t + \Delta t)\} & 0 & A(t + \Delta t)\cos\{\phi(t + \Delta t)\} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -A(t)A(t + \Delta t). \quad (3.29)$$

Η απόλυτη τιμή της Ιακωβιανής ορίζουσας δίνεται ακολούθως:

$$|\mathbf{J}| = A(t)A(t + \Delta t). \quad (3.30)$$

Συνεπώς, μέσω της (3.27), η μετασχηματισμένη πλέον από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών και με την βοήθεια των τριγωνομετρικών σχέσεων:

$$\begin{cases} \cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B = \cos(A - B), \\ \cos B \cdot \sin A - \sin B \cdot \cos A = \sin(A - B), \end{cases}$$

θα έχει την πιο κάτω μορφή:

$$\begin{aligned}
 f(A(t), A(t+\Delta t), \phi(t), \phi(t+\Delta t)) &= \\
 &= \frac{A(t)A(t+\Delta t)}{4\pi^2\sqrt{|\Delta|}} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2\sqrt{|\Delta|}} \left[m_0(A^2(t)+A^2(t+\Delta t)) - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. -2 \cdot A(t) \cdot A(t+\Delta t) \left\{ C_{x_c x_c}(t, t+\Delta t) \cdot \cos(\phi(t+\Delta t) - \phi(t)) + \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. + C_{x_c x_s}(t, t+\Delta t) \cdot \sin(\phi(t+\Delta t) - \phi(t)) \right\} \right] \right\}, \quad (3.31)
 \end{aligned}$$

όπου:

$$\begin{aligned}
 0 \leq A(t) < \infty, & \quad 0 \leq A(t+\Delta t) < \infty, \\
 0 \leq \phi(t) \leq 2\pi, & \quad 0 \leq \phi(t+\Delta t) \leq 2\pi.
 \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας την τριγωνομετρική ταυτότητα

$$a \cos \varphi + b \sin \varphi = \sqrt{a^2 + b^2} \cos \left(\varphi - \tan^{-1} \left(\frac{b}{a} \right) \right),$$

κατάλληλα στην (3.31), παίρνουμε την ακόλουθη έκφραση για την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των μετασχηματισμένων τυχαίων μεταβλητών:

$$\begin{aligned}
 f(A(t), A(t+\Delta t), \phi(t), \phi(t+\Delta t)) &= \\
 &= \frac{A(t)A(t+\Delta t)}{4\pi^2\sqrt{|\Delta|}} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2\sqrt{|\Delta|}} \left[m_0(A^2(t)+A^2(t+\Delta t)) - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. -2A(t)A(t+\Delta t) \left\{ \sqrt{C_{x_c x_c}^2(t, t+\Delta t) + C_{x_c x_s}^2(t, t+\Delta t)} \cdot \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. \cdot \cos \left(\phi(t+\Delta t) - \phi(t) - \arctan \left(\frac{C_{x_c x_s}(t, t+\Delta t)}{C_{x_c x_c}(t, t+\Delta t)} \right) \right) \right\} \right] \right\}. \quad (3.32)
 \end{aligned}$$

3.3 Από κοινού σππ δυο διαδοχικών πλατών κύματος $f(A(t), A(t + \Delta t))$

Η ολοκλήρωση της Σχέσης (3.32) ως προς $\phi(t)$ και ως προς $\phi(t + \Delta t)$ θα δώσει τελικά για χρονικό διάστημα μεταξύ διαδοχικών θαλασσιών κυματισμών Δt , την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δυο πλατών του κύματος $A(t), A(t + \Delta t)$. Δηλαδή,

$$\begin{aligned}
 f(A(t), A(t + \Delta t)) &= \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(A(t), A(t + \Delta t), \phi(t), \phi(t + \Delta t)) d\phi(t) d\phi(t + \Delta t) \\
 &= \frac{A(t) \cdot A(t + \Delta t)}{4\pi^2 \sqrt{|\Delta|}} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2\sqrt{|\Delta|}} \cdot m_0 \cdot (A^2(t) + A^2(t + \Delta t)) \right\} \cdot \\
 &\cdot \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp \left\{ \frac{A(t) \cdot A(t + \Delta t)}{\sqrt{|\Delta|}} \cdot \sqrt{C_{x_c x_c}^2(t, t + \Delta t) + C_{x_c x_s}^2(t, t + \Delta t)} \cdot \right. \\
 &\cdot \left. \cos \left(\phi(t + \Delta t) - \phi(t) - \arctan \left(\frac{C_{x_c x_s}(t, t + \Delta t)}{C_{x_c x_c}(t, t + \Delta t)} \right) \right) \right\} d\phi(t) d\phi(t + \Delta t). \tag{3.33}
 \end{aligned}$$

Για τον υπολογισμό του διπλού ολοκληρώματος της Σχέσης (3.33) εργαζόμαστε ως εξής :

$$\Theta \acute{\epsilon} \tau \omicron \mu \epsilon : K = \frac{A(t) \cdot A(t + \Delta t)}{\sqrt{|\Delta|}} \cdot \sqrt{C_{x_c x_c}^2(t, t + \Delta t) + C_{x_c x_s}^2(t, t + \Delta t)}, \tag{3.34}$$

$$M = \arctan \left(\frac{C_{x_c x_s}(t, t + \Delta t)}{C_{x_c x_c}(t, t + \Delta t)} \right), \tag{3.35}$$

$\phi(t + \Delta t) \rightarrow \varepsilon_1$, και

$\phi(t) \rightarrow \varepsilon_2$.

Οπότε οι υπολογισμοί για το διπλό ολοκλήρωμα της Σχέσης (3.33) καταλήγουν:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp \left\{ \frac{A(t) \cdot A(t + \Delta t)}{\sqrt{|\Delta|}} \cdot \sqrt{C_{x_c x_c}^2(t, t + \Delta t) + C_{x_c x_s}^2(t, t + \Delta t)} \cdot \right. \\
 & \left. \cdot \cos \left(\phi(t + \Delta t) - \phi(t) - \arctan \left(\frac{C_{x_c x_s}(t, t + \Delta t)}{C_{x_c x_c}(t, t + \Delta t)} \right) \right) \right\} d\phi(t) d\phi(t + \Delta t) = \\
 & = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp \{ K \cos(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - M) \} d\varepsilon_1 d\varepsilon_2. \tag{3.36}
 \end{aligned}$$

Ο υπολογισμός του διπλού ολοκληρώματος της Σχέσης (3.36) θα βασιστεί στην συλλογιστική της αλλαγής μεταβλητών και στον αντίστοιχο μετασχηματισμό χωρίου των μεταβλητών, (βλέπε αναλυτικά στο Παράρτημα Ι).

Οπότε ο υπολογισμός του διπλού ολοκληρώματος της Σχέσης (3.36) καταλήγει:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp \{ K \cos(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - M) \} d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 = 2\pi \int_0^{2\pi} \exp \{ K \cos(x) \} dx. \tag{3.37}$$

Συνεπώς, για τον υπολογισμό τελικά της από κοινού σππ των δυο πλατών της Σχέσης (3.33) καταλήγουμε:

$$\begin{aligned}
 & f(A(t), A(t + \Delta t)) = \\
 & = \frac{A(t)A(t + \Delta t)}{4\pi^2 \sqrt{|\Delta|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sqrt{|\Delta|}} m_0(A^2(t) + A^2(t + \Delta t)) \right\} 2\pi \int_0^{2\pi} \exp \{ K \cos(x) \} dx \\
 & = \frac{A(t)A(t + \Delta t)}{\sqrt{|\Delta|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sqrt{|\Delta|}} m_0(A^2(t) + A^2(t + \Delta t)) \right\} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp \{ K \cos(x) \} dx \\
 & = \frac{A(t)A(t + \Delta t)}{\sqrt{|\Delta|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sqrt{|\Delta|}} m_0(A^2(t) + A^2(t + \Delta t)) \right\} I_0(K)^{(4)}, \tag{3.38}
 \end{aligned}$$

όπου τελικά η έκφραση της (3.38) καταλήγει,

⁽⁴⁾ Από Λήμμα 2 (Παράρτημα Β), έχουμε: $1/2\pi \int_0^{2\pi} \exp \{ K \cos(x) \} dx = 1/\pi \int_0^\pi \exp \{ K \cos(x) \} dx = I_0(K)$, όπου $I_0(K)$ (Παράρτημα Δ) συνάρτηση Bessel μηδενικού βαθμού μεταβλητής $K \neq 0$, (βλέπε Abramowitz and Stegun, 1975).

$$f(A(t), A(t+\Delta t)) = \frac{A(t)A(t+\Delta t)}{\sqrt{|\Delta|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sqrt{|\Delta|}} m_0 (A^2(t) + A^2(t+\Delta t)) \right\} \cdot \cdot \mathbf{I}_0 \left(\frac{A(t) \cdot A(t+\Delta t)}{\sqrt{|\Delta|}} \cdot \sqrt{C_{x_c x_c}^2(t, t+\Delta t) + C_{x_c x_s}^2(t, t+\Delta t)} \right). \quad (3.39)$$

Στην πιο πάνω Σχέση (3.39), συνηθίζεται να θέτουμε την παράμετρο k από (Uhlenbeck, 1943), δηλ.,

$$k = \frac{\sqrt{C_{x_c x_c}^2(t, t+\Delta t) + C_{x_c x_s}^2(t, t+\Delta t)}}{m_0}, \quad (3.40)$$

οπότε γνωρίζοντας από πιο πριν (Σχέση 3.24) ότι:

$$\sqrt{|\Delta|} = \left(m_0^2 - C_{x_c x_c}^2(t, t+\Delta t) - C_{x_c x_s}^2(t, t+\Delta t) \right)^{(\delta)},$$

καταλήγουμε στην έκφραση που συνδέει την ορίζουσα του πίνακα μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας και παράμετρο k :

$$\sqrt{|\Delta|} = m_0^2 (1 - k^2).$$

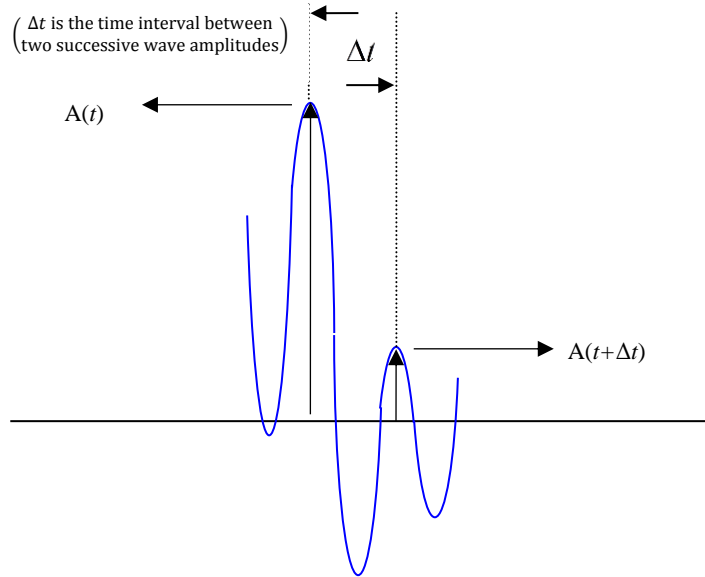
Αρα η τελική έκφραση της από κοινού σππ των δυο πλατών θα έχει την πιο κάτω μορφή:

$$f(A(t), A(t+\Delta t)) = \frac{1}{1-k^2} \frac{A(t) \cdot A(t+\Delta t)}{m_0^2} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-k^2)} \frac{(A^2(t) + A^2(t+\Delta t))}{m_0} \right\} \cdot \mathbf{I}_0 \left(\frac{k}{1-k^2} \frac{A(t)A(t+\Delta t)}{m_0} \right). \quad (3.41)$$

Να τονίσουμε σ' αυτό το σημείο ότι για χρονικό διάστημα $\Delta t = 2\pi / \bar{\omega}$ μεταξύ των διαδοχικών πλατών, οι τυχαίες μεταβλητές $A(t), A(t+\Delta t)$ θα αναπαριστούν τα πλάτη από δυο διαδοχικούς θαλάσσιους κυματισμούς όπως φαίνεται στο Σχήμα (3.1).

(δ) Υπενθυμίζουμε, όπου $C_{x_c x_c}(t, t+\Delta t) = \int_0^\infty S(\omega) \cos\{(\omega - \bar{\omega})\Delta t\} d\omega$, και

$C_{x_c x_s}(t, t+\Delta t) = \int_0^\infty S(\omega) \sin\{(\omega - \bar{\omega})\Delta t\} d\omega$



Σχήμα 3.1. Αναπαράσταση διαδοχικών πλατών $(A(t), A(t + \Delta t))$ από διαδικασίες στενής λωρίδας (narrow band Gaussian random processes) με χρονικό διάστημα $\Delta t = 2\pi / \bar{\omega}$ μεταξύ αυτών των πλατών στο μοντέλο από Kimura (1980), για τον υπολογισμό της από κοινού συνάρτησης πυκνότητας $f(A(t), A(t + \Delta t))$.

Τέλος, για $k = 0$ ⁽⁶⁾ η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των πλατών ανύψωσης από διαδοχικά θαλάσσια κύματα με χρονικό διάστημα $\Delta t > 2\pi / \bar{\omega}$ μεταξύ των κυματισμών αυτών, μετατρέπεται σε Rayleigh κατανομή δυο μεταβλητών, σημειώνοντας ότι τα πλάτη-τυχαίες μεταβλητές $A(t), A(t + \Delta t)$ τότε θα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους. Δηλαδή, για $k = 0$ στην Σχέση (3.41) καταλήγουμε στην έκφραση:

$$f(A(t), A(t + \Delta t)) = \frac{A(t)A(t + \Delta t)}{m_0^2} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{(A^2(t) + A^2(t + \Delta t))}{m_0}\right\}. \quad (3.42)$$

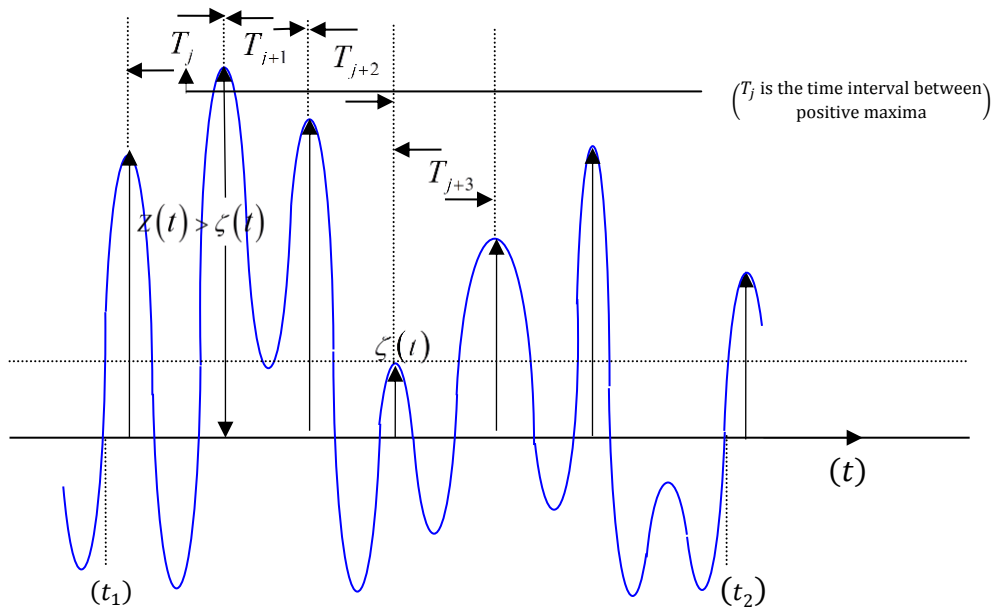
⁽⁶⁾ Σημειώνεται ότι η συνάρτηση Bessel μηδενικού βαθμού μεταβλητής $K = 0$, θα έχει μοναδιαία τιμή, δηλ.,

$$I_0(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi dx = 1$$

Κεφάλαιο 4

Μοντελοποίηση από Cavanie et al. (1976)

Στο Κεφάλαιο 4 θα προσπαθήσουμε να εξάγουμε με αναλυτικούς υπολογισμούς την έκφραση για την από κοινού σππ θετικών μεγίστων και επιτάχυνσης αυτών, και έπειτα μέσω κατάλληλων μετασχηματισμών να καταλήξουμε στην σππ θετικών μεγίστων και περιόδου μεταξύ αυτών, όπως αρχικά μοντελοποιήθηκε απ'τους Cavanie et al. (1976) και Arhan et al., (1976), με τα αποτελέσματά τους για διαδικασίες ευρείας-στενής λωρίδας να βασίζονται στην μοντελοποίηση των θετικών μεγίστων από προηγούμενους υπολογισμούς των Rice (1944, 1945), Cartwright and Longuet-Higgins (1956), και Middleton (1960).



Σχήμα 4.1. Αναπαράσταση θετικών μεγίστων και περιόδου μεταξύ αυτών στο μοντέλο των Cavanie et al. (1976), όπου T_j το χρονικό διάστημα μεταξύ διαδοχικών θετικών μεγίστων.

Η πιθανότητα ένα θετικό μέγιστο $Z(t)$ (βλέπε Σχήμα 4.1) μια δεδομένη χρονική στιγμή t να υπερβαίνει μια μέση στάθμη $\zeta(t)$ με δοσμένη επιτάχυνση $x''(t)$, μπορεί να εκφραστεί μέσω της πιο κάτω σχέσης προσεγγιστικά, (Arhan et al., 1976):

$$\begin{aligned} \Pr\{Z(t) > \zeta(t) \text{ με επιτάχυνση } x''(t)\} &= \\ &= 1 - F_{x|x''}(\zeta(t)|x''(t)) \approx \frac{E^\theta[M_{\max}(t_1, t_2, x''; \theta)]}{E^\theta[M_{\max}^+(t_1, t_2; \theta)]}, \end{aligned}$$

δηλαδή,

$$F_{x|x''}(\zeta(t)|x''(t)) = 1 - \frac{E^\theta[M_{\max}(t_1, t_2, x''; \theta)]}{E^\theta[M_{\max}^+(t_1, t_2; \theta)]}, \quad (4.1)$$

όπου (i) $F_{x|x''}(\zeta(t)|x''(t))$, η δεσμευμένη ασκ θετικών μεγίστων $\zeta(t)$ με δοσμένη επιτάχυνση $x''(t)$, (ii) $E^\theta[M_{max}^+(t_1, t_2; \theta)]$, η μέση τιμή του ολικού αριθμού των θετικών μεγίστων στο χρονικό διάστημα $(t_2 - t_1)$, και (iii) $E^\theta[M_{max}(t_1, t_2, x''; \theta)]$, η μέση τιμή του αριθμού των θετικών μεγίστων στο χρονικό διάστημα $(t_2 - t_1)$ που υπερβαίνουν μια μέση στάθμη $\zeta(t)$ με επιτάχυνση $x''(t)$.

Βασιζόμενοι στην μέθοδο των (γενικευμένων) καταμετρητικών συναρτησιακών για τον υπολογισμό τοπικών μεγίστων τυχαίων συναρτήσεων από Cartwright and Longuet-Higgins (1956), (βλέπε συμπληρωματικές σημειώσεις Αθανασούλης, 2003 και Ochi, 1998), θα έχουμε:

$$E^\theta[M_{max}^+(t_1, t_2; \theta)] = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^\infty \int_{-\infty}^0 |x''(t; \theta)| f(x(t; \theta), 0, x''(t; \theta)) dx''(t; \theta) dx(t; \theta) dt, \quad (4.2)$$

και

$$E^\theta[M_{max}(t_1, t_2, |x''|; \theta)] = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\zeta(t)}^\infty |x''(t; \theta)| f(x(t; \theta), 0, x''(t; \theta)) dx(t; \theta) dt. \quad (4.3)$$

Από το μοντέλο τυχαίας φάσης (Σχέση 2.1), και με κατάλληλη διαφορίση ως προς t , συμπεραίνουμε τις πιο κάτω εκφράσεις ταχύτητας και επιτάχυνσης, δηλ.,

$$\begin{aligned} x(t; \theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t + \varepsilon_n(\theta)), \\ x'(t; \theta) &= -\sum_{n=1}^{\infty} a_n \omega_n \sin(\omega_n t + \varepsilon_n(\theta)), \\ x''(t; \theta) &= -\sum_{n=1}^{\infty} a_n \omega_n^2 \cos(\omega_n t + \varepsilon_n(\theta)). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Οι τυχαίες μεταβλητές $x(t; \theta), x'(t; \theta), x''(t; \theta)$ ικανοποιούν τις ιδιότητες του κεντρικού οριακού θεωρήματος, συνεπώς μπορούν να εκφραστούν μέσω της από κοινού κανονικής συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας, (βλέπε Παράρτημα F), ως εξής:

$$f(\mathbf{X}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \cdot |\Delta|^{\frac{1}{2}}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \mathbf{X}^T \cdot \Delta^{-1} \cdot \mathbf{X}}, \quad (4.5)$$

όπου,

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x(t; \theta) \\ x'(t; \theta) \\ x''(t; \theta) \end{pmatrix}, \text{ ο πίνακας των τριών μεταβλητών,}$$

με τον ανάστροφο του πίνακα \mathbf{X} ,

$$\mathbf{X}^T = (x(t; \theta) \quad x'(t; \theta) \quad x''(t; \theta)), \text{ και}$$

Δ θα είναι ο πίνακας μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας των τυχαίων μεταβλητών $x(t; \theta), x'(t; \theta), x''(t; \theta)$, και Δ^{-1} ο αντίστροφος του πίνακα Δ αντίστοιχα.

4.1 Από κοινού σππ των τυχαίων μεταβλητών ανύψωσης, ταχύτητας και επιτάχυνσης του κύματος και υπολογισμός των τοπικών μεγίστων

Αρχικά υπολογίζεται ο πίνακας μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας των τυχαίων μεταβλητών $x(t; \theta), x'(t; \theta), x''(t; \theta)$,

$$\Delta = \begin{bmatrix} C_{xx}(t, t) & C_{xx'}(t, t) & C_{xx''}(t, t) \\ C_{x'x}(t, t) & C_{x'x'}(t, t) & C_{x'x''}(t, t) \\ C_{x''x}(t, t) & C_{x''x'}(t, t) & C_{x''x''}(t, t) \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

όπου τα στοιχεία του πίνακα υπολογίζονται πιο κάτω όπως και στους υπολογισμούς του υποεδαφίου 3.1. Δηλαδή,

$$\begin{aligned} C_{xx}(t, t) &= m_0 & C_{xx'}(t, t) &= 0 & C_{xx''}(t, t) &= -m_2 \\ C_{x'x}(t, t) &= 0 & C_{x'x'}(t, t) &= m_2 & C_{x'x''}(t, t) &= 0 \\ C_{x''x}(t, t) &= -m_2 & C_{x''x'}(t, t) &= 0 & C_{x''x''}(t, t) &= m_4, \end{aligned}$$

όπου m_0, m_2, m_4 οι φασματικές ροπές μηδενικής, δεύτερης και τέταρτης τάξης υπολογιζόμενες από το ενεργειακό φάσμα $S(\omega)$ της $x(t; \theta)$.

Τελικά, ο πίνακας μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας Δ γράφεται:

$$\Delta = \begin{bmatrix} m_0 & 0 & -m_2 \\ 0 & m_2 & 0 \\ -m_2 & 0 & m_4 \end{bmatrix}, \quad (4.7)$$

όπου, η ορίζουσα του πίνακα Δ , $\det(\Delta) = m_2(m_0m_4 - m_2^2)$,

και η τετραγωνική ρίζα της ορίζουσας του πίνακα Δ ,

$$\sqrt{|\Delta|} = \sqrt{m_2(m_0m_4 - m_2^2)}, \quad (4.8)$$

με τον αντίστροφο του πίνακα Δ και την σχέση του με την ορίζουσα του πίνακα $\det(\Delta)$ και τον προσαρτημένο του πίνακα $\text{adj}(\Delta)$, να υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned}\Delta^{-1} &= \frac{1}{\det(\Delta)} \text{adj}(\Delta) \\ &= \frac{1}{m_2(m_0m_4 - m_2^2)} \begin{bmatrix} m_2m_4 & 0 & m_2^2 \\ 0 & m_0m_4 - m_2^2 & 0 \\ m_2^2 & 0 & m_0m_2 \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (4.9)$$

Με κατάλληλη αντικατάσταση των σχέσεων (4.7, 4.8, και 4.9) στην (4.5), καταλήγουμε στην έκφραση της από κοινού σππ των τυχαίων μεταβλητών $x(t; \theta)$, $x'(t; \theta)$, $x''(t; \theta)$,

$$\begin{aligned}f(x(t; \theta), x'(t; \theta), x''(t; \theta)) &= \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2} |\Delta|^{1/2}} \exp\left[\frac{-1}{2|\Delta|} (m_2m_4x^2(t; \theta) + 2m_2^2x(t; \theta)x''(t; \theta) + \right. \\ &\quad \left. + x'^2(t; \theta)(m_0m_4 - m_2^2) + m_0m_2x''^2(t; \theta))\right],\end{aligned}\quad (4.10)$$

όπου επειδή για τοπικά θετικά μέγιστα πρέπει πάντοτε $x'(t; \theta) = 0$, η από κοινού σππ των τυχαίων μεταβλητών της σχέσης (4.10) καταλήγει,

$$\begin{aligned}f(x(t; \theta), 0, x''(t; \theta)) &= \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2} |\Delta|^{1/2}} \exp\left[\frac{-1}{2|\Delta|} (m_2m_4x^2(t; \theta) + 2m_2^2x(t; \theta)x''(t; \theta) + m_0m_2x''^2(t; \theta))\right].\end{aligned}\quad (4.11)$$

Στην συνέχεια υπολογίζουμε την έκφραση της μέσης τιμής του ολικού αριθμού των θετικών μεγίστων με κατάλληλη αντικατάσταση της Σχέσης (4.11) στην (4.2),

$$\begin{aligned}E^\theta[M_{max}^+(t_1, t_2; \theta)] &= \int_{t_1}^{t_2} \int_0^\infty \int_{-\infty}^0 |x''(t; \theta)| f(x(t; \theta), 0, x''(t; \theta)) dx''(t; \theta) dx(t; \theta) dt, \\ E^\theta[M_{max}^+(t_1, t_2; \theta)] &= \int_{t_1}^{t_2} \int_0^\infty \int_{-\infty}^0 |x''(t; \theta)| \frac{1}{(2\pi)^{3/2} |\Delta|^{1/2}} \cdot \\ &\cdot \exp\left[\frac{-1}{2|\Delta|} (m_2m_4x^2(t; \theta) + 2m_2^2x(t; \theta)x''(t; \theta) + m_0m_2x''^2(t; \theta))\right] dx''(t; \theta) dx(t; \theta) dt \\ &= (t_2 - t_1) \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right) \sqrt{\frac{m_2}{m_0}}.\end{aligned}\quad (4.12)$$

Υπενθυμίζουμε όπου $\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{m_2^2}{m_0 m_4}}$ παράμετρο καθορισμού του μέτρου της διασποράς των τιμών της φασματικής πυκνότητας $S(\omega)$ γύρω απ' την μέση συχνότητα $\bar{\omega}$, όπως έχουμε αναφέρει στο υποεδάφιο 2.2 για διαδικασίες στενής λωρίδας.

Καταλήγοντας, υπολογίζουμε την μέση τιμή του αριθμού των θετικών μεγίστων στο χρονικό διάστημα $(t_2 - t_1)$ που υπερβαίνουν μια μέση στάθμη $\zeta(t)$ με επιτάχυνση $x''(t)$, με κατάλληλη αντικατάσταση της Σχέσης (4.11) στην Σχέση (4.3),

$$\begin{aligned}
 E^\theta [M_{max}(t_1, t_2, |x''|; \theta)] &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{\zeta(t)}^{\infty} |x''(t; \theta)| f(x(t; \theta), 0, x''(t; \theta)) dx(t; \theta) dt \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} |x''(t)| F(\infty, 0, x''(t)) dt - \int_{t_1}^{t_2} |x''(t)| F(\zeta(t), 0, x''(t)) dt \\
 &= - \int_{t_1}^{t_2} |x''(t)| F(\zeta(t), 0, x''(t)) dt \\
 &= -(t_2 - t_1) |x''(t)| F(\zeta(t), 0, x''(t)). \tag{4.13}
 \end{aligned}$$

4.2 Από κοινού σππ των θετικών μεγίστων του κύματος και της επιτάχυνσης

Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(\zeta(t), x''(t))$ του θετικού μεγίστου $\zeta(t)$ και της επιτάχυνσης $x''(t)$ υπολογίζεται αρκεί να διαφορίσουμε την Σχέση (4.1) ως προς $\zeta(t)$ ⁽⁷⁾, θεωρώντας ότι σε κάθε θετικό μέγιστο η επιτάχυνση είναι πάντα αρνητική και μέγιστη με πιθανότητα $\Pr(X'' \leq x''(t)) = 1$, δηλαδή:

$$\frac{\partial}{\partial \zeta(t)} F_{X|X''}(\zeta(t)|x''(t)) = \frac{\partial}{\partial \zeta(t)} \left(\frac{\Pr(X \leq \zeta(t), X'' \leq x''(t))}{\Pr(X'' \leq x''(t))} \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta(t)} \left(1 - \frac{E^\theta [M_{max}(t_1, t_2, |x''|; \theta)]}{E^\theta [M_{max}^+(t_1, t_2; \theta)]} \right) = f(\zeta(t), x''(t)),$$

δηλαδή,

(7) Έστω (X, Y) μία διδιάστατη συνεχής διανυσματική τυχαία μεταβλητή και $F_{XY}(x, y), f_{XY}(x, y)$ οι από κοινού ασκ και σππ των μεταβλητών αυτών. Για μία συγκεκριμένη τιμή y τέτοια ώστε $f_Y(y) \neq 0$, η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας (δσπ) (conditional density function) της X δοθέντος ότι $Y = y$ ορίζεται ως εξής: $\frac{\partial}{\partial x} \Pr(X \leq x | Y = y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\Pr(X \leq x, Y \leq y)}{\Pr(Y \leq y)} \right) \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} F_{X|Y}(x|y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{F_{XY}(x, y)}{F_Y(y)} \right) \rightarrow f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)}$

$$\begin{aligned}
 f(\zeta(t), x''(t)) &= \frac{\partial}{\partial \zeta(t)} \left(1 - \frac{\int_{t_1}^{t_2} \int_{\zeta(t)}^{\infty} |x''(t; \theta)| f(x(t; \theta), 0, x''(t; \theta)) dx(t; \theta) dt}{\int_{t_1}^{t_2} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^0 x''(t; \theta) f(x(t; \theta), 0, x''(t; \theta)) dx''(t; \theta) dx(t; \theta) dt} \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial \zeta(t)} \left(1 - \frac{-(t_2 - t_1) |x''(t)| F(\zeta(t), 0, x''(t))}{(t_2 - t_1) \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right) \sqrt{\frac{m_2}{m_0}}} \right) \\
 &= \frac{|x''(t)| f(\zeta(t), 0, x''(t))}{\frac{1}{4\pi} \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right) \sqrt{\frac{m_2}{m_0}}} \\
 &= \frac{|x''(t)| \frac{1}{(2\pi)^{3/2} |\Delta|^{1/2}} \exp \left[\frac{-1}{2|\Delta|} (m_2 m_4 \zeta^2(t) + 2m_2^2 \zeta(t) x''(t) + m_0 m_2 x''^2(t)) \right]}{\frac{1}{4\pi} \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right) \sqrt{\frac{m_2}{m_0}}} \\
 &= \frac{2|x''(t)| \sqrt{m_2}}{\sqrt{2\pi} \sqrt{|\Delta| m_4} (1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2})} \exp \left[\frac{-1}{2|\Delta|} (m_2 m_4 \zeta^2(t) + 2m_2^2 \zeta(t) x''(t) + m_0 m_2 x''^2(t)) \right],
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

όπου, $0 \leq \zeta(t) < \infty$ και $-\infty < x''(t) \ll 0$ για μια δεδομένη χρονική στιγμή t .

Οι τυχαίες μεταβλητές $(\zeta(t), x''(t))$ της Σχέσης (4.14), συνηθίζονται να εκφράζονται με την αδιάστατη μορφή τους. Για τους υπολογισμούς των αδιάστατων μεταβλητών, ορίζονται οι εκφράσεις αδιάστατου πλάτους $\xi(t)$ και αδιάστατης περιόδου $\tau(t)$ ως εξής:

$$\xi(t) = \frac{\zeta(t)}{\sqrt{m_0}} \quad \Rightarrow \quad \zeta(t) = \xi(t) \sqrt{m_0}, \text{ και} \tag{4.15}$$

$$\tau(t) = \frac{T(t)}{\bar{T}_{\max}} \quad \Rightarrow \quad T(t) = \tau(t) \bar{T}_{\max}, \tag{4.16}$$

όπου \bar{T}_{\max} ο μέσος χρόνος μεταξύ δυο διαδοχικών θετικών μεγίστων, (βλέπε και Σχέση 4.12):

$$\bar{T}_{\max} = \frac{t_2 - t_1}{E^\theta [M_{\max}^+(t_1, t_2; \theta)]} = 4\pi \left(\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}} \right) \sqrt{\frac{m_0}{m_2}}. \quad (4.17)$$

Με κατάλληλη αντικατάσταση των Σχέσεων (4.16) και (4.17) έχουμε :

$$T(t) = \tau(t) 4\pi \left(\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}} \right) \sqrt{\frac{m_0}{m_2}} \Rightarrow T^2(t) = \tau^2(t) (4\pi)^2 \frac{(1-\varepsilon^2)}{(1+\sqrt{1-\varepsilon^2})^2} \frac{m_0}{m_2}. \quad (4.18)$$

Για ένα τοπικό θετικό μέγιστο του κύματος την χρονική στιγμή t , η σχέση μεταξύ θετικού μεγίστου και αρνητικής μέγιστης επιτάχυνσης για γωνιακή συχνότητα ω_j , θα δίνεται ως εξής,

$$x_j''(t) = -\omega_j^2 \zeta_j(t), \text{ όπου } \omega_j = \left(\frac{2\pi}{T_j(t)} \right), \text{ με } 1 \leq j < \infty.$$

Συνεπώς, την δεδομένη χρονική στιγμή t για γωνιακή συχνότητα $\omega_j = \omega$,

$$x''(t) = -\left(\frac{2\pi}{T(t)} \right)^2 \zeta(t), \text{ όπου μέσω των Σχέσεων (4.15, 4.18) έχουμε,}$$

$$x''(t) = -\frac{(2\pi)^2}{\tau^2(t) (4\pi)^2} \frac{(1+\sqrt{1-\varepsilon^2})^2}{(1-\varepsilon^2)} \frac{m_2}{m_0} \xi(t) \sqrt{m_0},$$

όπου θέτοντας: $a = (1+\sqrt{1-\varepsilon^2})/2$, καταλήγουμε,

$$x''(t) = -\frac{1}{\tau^2(t)} \frac{a^2}{(2a-1)^2} \frac{m_2}{m_0} \xi(t) \sqrt{m_0}. \quad (4.19)$$

4.3 Από κοινού σπ των αδιάστατων τυχαίων μεταβλητών πλάτους και περιόδου κορυφής του κύματος, μοντέλο Cavanie et al. (1976)

Σ' αυτό το υποεδάφιο θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο μετασχηματισμού τυχαίων μεταβλητών θετικού μεγίστου $\zeta(t)$ και της επιτάχυνσης $x''(t)$ ώστε να πάρουμε μια κατάλληλη έκφραση για την από κοινού σπ αδιάστατου πλάτους και αδιάστατης περιόδου του κύματος. Χρησιμοποιώντας την μέθοδο αλλαγής μεταβλητών κατάλληλα στον \mathbb{R}_X^2 μέσω της:

$$f_Y(y) = f_X(H(y)) \cdot \left| \frac{D(H_1, H_2)}{D(y_1, y_2)} \right|, \text{ όπου η Ιακωβιανή ορίζουσα } \mathbf{J} = \frac{D(H_1, H_2)}{D(y_1, y_2)} \text{ θα δίνεται}$$

απ' την σχέση,

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial y_1} & \frac{\partial H_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial H_2}{\partial y_1} & \frac{\partial H_2}{\partial y_2} \end{vmatrix},$$

μετασηματίζουμε τις μεταβλητές $\zeta(t), x''(t)$:

$$(H_1, H_2) \equiv (\zeta(t), x''(t)),$$

για τις νέες μεταβλητές :

$$(y_1, y_2) \equiv (\xi(t), \tau(t)),$$

όπου η Ιακωβιανή ορίζουσα \mathbf{J} μέσω των Σχέσεων (4.15 και 4.19) θα παίρνει την πιο κάτω μορφή:

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \zeta(t)}{\partial \xi(t)} & \frac{\partial \zeta(t)}{\partial \tau(t)} \\ \frac{\partial x''(t)}{\partial \xi(t)} & \frac{\partial x''(t)}{\partial \tau(t)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{m_0} & 0 \\ -\frac{1}{\tau^2(t)} \frac{a^2}{(2a-1)^2} \frac{m_2}{m_0} \sqrt{m_0} & \frac{2}{\tau^3(t)} \frac{a^2}{(2a-1)^2} \frac{m_2}{m_0} \xi(t) \sqrt{m_0} \end{vmatrix}. \quad (4.20)$$

Η απόλυτη τιμή της Ιακωβιανής ορίζουσας καταλήγει στην:

$$|\mathbf{J}| = \frac{2}{\tau^3(t)} \frac{a^2}{(2a-1)^2} m_2 \xi(t). \quad (4.21)$$

Συνεπώς μέσω των κατάλληλων μετασηματισμών και υπολογισμού της απόλυτης τιμής της ορίζουσας \mathbf{J} μέσω της Σχέσης (4.21), παίρνουμε την ακόλουθη έκφραση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας $f(\xi(t), \tau(t))$:

$$f(\xi(t), \tau(t)) = \frac{2\sqrt{m_2}}{\sqrt{2\pi} \sqrt{|\Delta|} \sqrt{m_4} 2a} \frac{a^2 m_2 \xi(t) \sqrt{m_0}}{m_0 (2a-1)^2 \tau^2(t)} \frac{2}{\tau^3(t)} \frac{a^2}{(2a-1)^2} m_2 \xi(t).$$

$$\cdot \exp \left\{ -\frac{m_2 m_4 \xi^2(t) m_0 - 2m_2^2 \xi(t) \sqrt{m_0} \frac{1}{\tau^2(t)} \frac{a^2}{(2a-1)^2} \frac{m_2}{m_0} \xi(t) \sqrt{m_0} + m_0 m_2 \frac{1}{\tau^4(t)} \frac{a^4}{(2a-1)^4} \frac{m_2^2}{m_0} \xi^2(t)}{2|\Delta|} \right\},$$

όπου μετά από αλγεβρικές πράξεις καταλήγουμε,

$$\begin{aligned}
 f(\xi(t), \tau(t)) &= \\
 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a^3 \xi^2(t)}{\tau^5(t)} \frac{m_2}{\sqrt{m_0 m_4}} \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon(2a-1)^4} \exp \left\{ -\frac{m_2 \xi^2(t) \left[m_0 m_4 - \frac{2m_2^2 a^2}{\tau^2(t)(2a-1)^2} + \frac{m_2^2 a^4}{(2a-1)^4 \tau^4(t)} \right]}{2m_2(m_0 m_4 - m_2^2)} \right\} \\
 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a^3 \xi^2(t)}{\tau^5(t) \varepsilon(1-\varepsilon^2)} \exp \left\{ -\frac{\xi^2(t) \left[\frac{m_2^2}{1-\varepsilon^2} - \frac{2m_2^2 a^2}{\tau^2(t)(1-\varepsilon^2)} + \frac{m_2^2 a^4}{(1-\varepsilon^2)^2 \tau^4(t)} \right]}{2m_2^2 \frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}} \right\} \\
 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a^3 \xi^2(t)}{\tau^5(t) \varepsilon(1-\varepsilon^2)} \exp \left\{ -\frac{\xi^2(t) \left[1 - \frac{2a^2}{\tau^2(t)} + \frac{a^4}{(1-\varepsilon^2)\tau^4(t)} \right]}{2\varepsilon^2} \right\} \\
 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a^3 \xi^2(t)}{\tau^5(t) \varepsilon(1-\varepsilon^2)} \exp \left\{ -\frac{\xi^2(t)}{2\varepsilon^2 \tau^4(t)} \left[\tau^4(t) - 2a^2 \tau^2(t) + \frac{a^4}{(1-\varepsilon^2)} + a^4 - a^4 \right] \right\} \\
 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a^3 \xi^2(t)}{\tau^5(t) \varepsilon(1-\varepsilon^2)} \exp \left\{ -\frac{\xi^2(t)}{2\varepsilon^2 \tau^4(t)} \left[(\tau^2(t) - a^2)^2 + a^4 \left(\frac{1}{(1-\varepsilon^2)} - 1 \right) \right] \right\} \\
 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a^3 \xi^2(t)}{\tau^5(t) \varepsilon(1-\varepsilon^2)} \exp \left\{ -\frac{\xi^2(t)}{2\varepsilon^2 \tau^4(t)} \left[(\tau^2(t) - a^2)^2 + a^4 \frac{\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)} \right] \right\}. \tag{4.22}
 \end{aligned}$$

Θέτοντας $b = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$, και υπενθυμίζοντας ότι $a = (1 + \sqrt{1-\varepsilon^2})/2$, η Σχέση (4.22) γίνεται:

$$f(\xi(t), \tau(t)) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a^3 \xi^2(t)}{\tau^5(t) \varepsilon(1-\varepsilon^2)} \exp \left\{ -\frac{\xi^2(t)}{2\varepsilon^2 \tau^4(t)} \left[(\tau^2(t) - a^2)^2 + a^4 b^2 \right] \right\}. \tag{4.23}$$

Το βασικό συμπέρασμα από την αναλυτική αναπαράσταση της από κοινού σππ των αδιάστατων τυχαίων μεταβλητών πλάτους κορυφής και περιόδου κορυφής του κύματος όπως δίνεται από την συνάρτηση της Σχέσης (4.23) είναι ότι για τους υπολογισμούς σε κυματικά

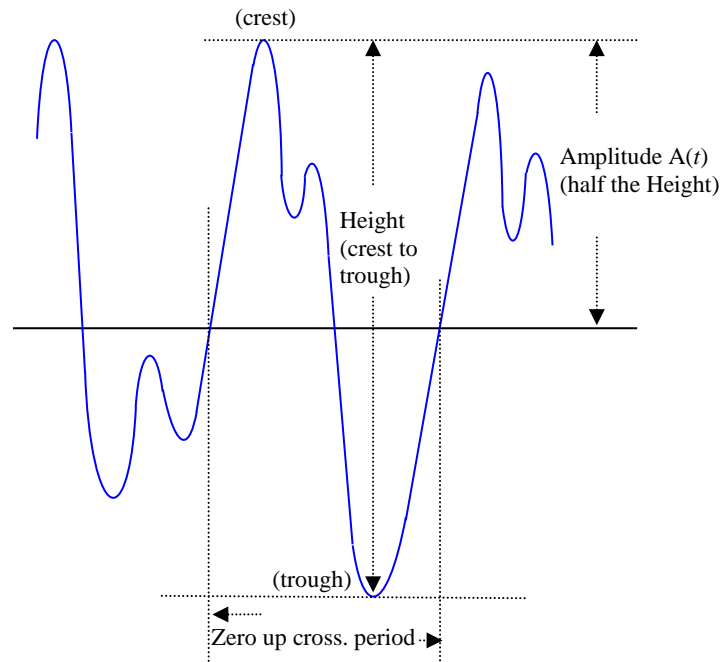
δεδομένα απαιτείται ο υπολογισμός ανώτερης τάξης φασματικής ροπής και ειδικότερα της ροπής τέταρτης τάξης από το ενεργειακό κυματικό φάσμα. Τονίζουμε την δυσκολία στην εκτίμηση της παραμέτρου καθορισμού του μέτρου της διασποράς των τιμών της φασματικής πυκνότητας γύρω από την μέση συχνότητα, δηλ., ($\varepsilon = \sqrt{1 - m_2^2 / m_0 m_4}$), όπου ο υπολογισμός της παραμέτρου αυτής όπως αρχικά δόθηκε από τους Cartwright and Longuet-Higgins (1956), δυσχεραίνει τους υπολογισμούς της από κοινού σππ μέσω της Σχέσης (4.23) μιας και αυτή θα εξαρτάται από την τέταρτη φασματική ροπή. Όπως χαρακτηριστικά αναφέρεται από τους Rye and Svee (1976) στην εργασία (σχόλια) από τους Cavanie et al., (1976), η παράμετρος προσδιορισμού φασματικών ροπών ε γίνεται ασταθής στους υπολογισμούς για ροπές ανώτερης τάξης («... these parameters have been shown to be unstable; i.e. they are dependent on the high-frequency cut-off choice when the moments of the spectrum are computed. This is unfortunate because the energy content located in the high-frequency tail in the spectrum is generally of little or no significance for ocean engineers»).

Μια απλούστερη έκφραση στην εκτίμηση της παραμέτρου καθορισμού του μέτρου της διασποράς των τιμών της φασματικής πυκνότητας γύρω από την μέση συχνότητα που να εξαρτάται από φασματικές ροπές μικρότερης τάξης θα είναι πιο αποτελεσματική στους υπολογισμούς της από κοινού έκφρασης πλάτους κύματος και περιόδου σε κυματικά δεδομένα, όπου είναι και το βασικό πλεονέκτημα στις αναλυτικές εκφράσεις που δίνονται στο Κεφάλαιο 5 (μοντέλο Longuet-Higgins (1983) όπως αναφέρεται στην σχετική βιβλιογραφία).

Κεφάλαιο 5

Μοντελοποίηση από Longuet-Higgins (1983)

Στο Κεφάλαιο 5 θα αναπτύξουμε την από κοινού σππ μεταξύ του πλάτους και της περιόδου του κύματος και την αναλυτική πιθανοθεωρητική συμπεριφορά των μεταβλητών αυτών, αναδεικνύοντας το βασικό πλεονέκτημα στην μοντελοποίηση από Longuet-Higgins (1983). Να τονίσουμε ότι οι υπολογισμοί βασίζονται σε στοχαστικές διαδικασίες στενής λωρίδας, με τις μεταβλητές πλάτους και περιόδου να ορίζονται στην παρούσα μοντελοποίηση ως το πλάτος κορυφής μηδενικής υπέρβασης (zero-up crossing crest) και την αντίστοιχη περίοδο μηδενικών υπερβάσεων προς τα άνω (zero-up crossing period) όπως φαίνεται στο Σχήμα (5.1)⁽⁸⁾. Προσεγγιστικά, για διαδικασίες στενής λωρίδας, το πλάτος μπορεί να χαρακτηριστεί και ως το μισό του ύψους κύματος⁽⁹⁾ (defined as half the crest-to-trough wave height) όπως αναφέρεται στις εργασίες από Longuet-Higgins (1975, 1983).



Σχήμα 5.1. Αναπαράσταση των τυχαίων μεταβλητών πλάτους θαλάσσιου κύματος και περιόδου μηδενικής υπέρβασης προς τα άνω (zero up crossing period) στο μοντέλο από Longuet-Higgins (1983), για τον υπολογισμό της από κοινού συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας των μεταβλητών αυτών.

Ειδικότερα, για τους υπολογισμούς στα παρακάτω υποεδάφια, θα βασιστούμε στα χαρακτηριστικά του μοντέλου της τυχαίας φάσης (βλέπε Κεφάλαιο 2) για την ανύψωση της

⁽⁸⁾ Τα πραγματικά ανεμογενή κύματα συχνά εμφανίζουν υψηλότερες κορυφές (crest) απ' ό τι κοιλάδες (trough) και κλίση προς τα εμπρός. Η κατακόρυφη ασυμμετρία προκύπτει από τη μη γραμμική θεωρία κατά Stokes, κυματισμών υψηλότερης τάξης, ενώ η οριζόντια ασυμμετρία, οφείλεται στη διαφορά πίεσης ανάμεσα στο εμπρόσθιο και οπίσθιο προφίλ του κυματισμού Longuet-Higgins (1982).

⁽⁹⁾ Το ύψος κύματος ορίζεται ως η κατακόρυφη απόσταση μεταξύ πλάτος κορυφής και ελαχίστου (crest-to-trough wave height), βλέπε Σχήμα (5.1).

ελεύθερης επιφάνειας θάλασσας. Όπως και στο μοντέλο τυχαίας φάσης, γράφουμε την μαθηματική αναπαράσταση του κύματος ως εξής:

$$x(t; \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos((\omega_n - \bar{\omega})t + \bar{\omega}t + \varepsilon_n(\theta)) = x_c(t; \theta) \cdot \cos(\bar{\omega}t) - x_s(t; \theta) \cdot \sin(\bar{\omega}t),$$

όπου $\bar{\omega}$ είναι η μέση συχνότητα με $\bar{\omega} = m_1 / m_0$, και m_0, m_1 οι ροπές μηδενικής και πρώτης τάξης αντίστοιχα στο ενεργειακό κυματικό φάσμα, και κάθε $\varepsilon_n(\theta)$ μονοδιάστατη τυχαία μεταβλητή είναι ομοιόμορφα κατανομημένη στο διάστημα $[0, 2\pi]$. Οι χρονοσειρές $x_c(t; \theta), x_s(t; \theta)$ (όπως και προηγούμενα στο στοχαστικό κυματικό μοντέλο τυχαίας φάσης υποεδάφιο 2.3), και οι παράγωγοί τους $x'_c(t; \theta), x'_s(t; \theta)$, ορίζονται αντίστοιχα ως ακολούθως:

$$x_c(t; \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos((\omega_n - \bar{\omega})t + \varepsilon_n(\theta)) \quad (5.1.a)$$

$$x_s(t; \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin((\omega_n - \bar{\omega})t + \varepsilon_n(\theta)) \quad (5.1.b)$$

$$x'_c(t; \theta) = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n (\omega_n - \bar{\omega}) \sin((\omega_n - \bar{\omega})t + \varepsilon_n(\theta)) \quad (5.1.c)$$

$$x'_s(t; \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\omega_n - \bar{\omega}) \cos((\omega_n - \bar{\omega})t + \varepsilon_n(\theta)) \quad (5.1.d)$$

Βασίζομενοι στις χαρακτηριστικές ιδιότητες των χρονοσειρών στο στοχαστικό κυματικό μοντέλο τυχαίας φάσης, από την από κοινού πιθανοθεωρητική συμπεριφορά των τεσσάρων τυχαίων μεταβλητών $x_c(t; \theta), x'_c(t; \theta), x_s(t; \theta), x'_s(t; \theta)$ και με κατάλληλους μετασχηματισμούς στον \mathbb{R}_x^4 , καταλήγουμε έπειτα από ολοκληρώσεις στην συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των αδιάστατων μεταβλητών πλάτους και περιόδου του κύματος με την συλλογιστική των μηδενικών υπερβάσεων προς τα άνω (zero up crossing concept).

Οι υπολογισμοί βασίζονται στα χαρακτηριστικά των διαδικασιών στενής λωρίδας και περιβάλλουσας, συνεπώς θεωρούμε ότι $A(t) = \sqrt{x^2(t; \theta) + \hat{x}^2(t; \theta)}$, με $A(t)$ το πλάτος της περιβάλλουσας (envelope process) όπως έχει δειχθεί και προηγούμενα (υποεδάφιο 2.3), όπου

$$\hat{x}(t; \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(\omega_n t + \varepsilon_n(\theta)) \text{ ο Hilbert Transform της μεταβλητής } x(t; \theta). \text{ Βασίζομενοι}$$

επίσης στα χαρακτηριστικά της φάσης της περιβάλλουσας διαδικασίας (υποεδάφιο 2.3.2), θα θεωρήσουμε την περίοδο μηδενικής υπέρβασης προς τα άνω για μια δεδομένη χρονική στιγμή t ως εξής:

$$T(t) = \frac{2\pi}{\bar{\omega} + \phi'(t)}, \quad (5.2)$$

όπου $\phi(t) = \Phi(t) - \bar{\omega}t$ και $\Phi(t) = \arctan(\hat{x}(t; \theta) / x(t; \theta))$.

5.1 Από κοινού κανονική σππ

$f(x_c(t; \theta), x'_c(t; \theta), x_s(t; \theta), x'_s(t; \theta))$ και υπολογισμός του πίνακα μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας των τυχαίων μεταβλητών αυτών

Οι τυχαίες μεταβλητές $x_c(t; \theta), x'_c(t; \theta), x_s(t; \theta), x'_s(t; \theta)$ ικανοποιούν τις προϋποθέσεις του κεντρικού οριακού θεωρήματος (δηλ., μηδενικές μέσες τιμές και πεπερασμένες διασπορές, βλέπε και τους υπολογισμούς στα υποεδάφια 3.1 και 3.2), συνεπώς μπορούν να εκφραστούν μέσω της από κοινού κανονικής συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας ως εξής:

$$f(\mathbf{X}) = \frac{1}{(2\pi)^2 |\mathbf{\Delta}|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{X}^T \mathbf{\Delta}^{-1} \mathbf{X}}, \quad (5.3)$$

όπου,

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_c(t; \theta) \\ x'_c(t; \theta) \\ x_s(t; \theta) \\ x'_s(t; \theta) \end{pmatrix}, \text{ και ο ανάστροφος του πίνακα } \mathbf{X},$$

$$\mathbf{X}^T = (x_c(t; \theta) \quad x'_c(t; \theta) \quad x_s(t; \theta) \quad x'_s(t; \theta)),$$

και $\mathbf{\Delta}^{-1}$ ο αντίστροφος του πίνακα μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας που υπολογίζεται όπως και προηγουμένως (βλέπε υποεδάφια 3.2 και 4.1) μέσω της σχέσης του αντιστρόφου πίνακα με την ορίζουσα του πίνακα $\mathbf{\Delta}$, $\det(\mathbf{\Delta})$, και τον προσαρτημένο του πίνακα $\mathbf{\Delta}$,

$$\text{adj}(\mathbf{\Delta}), \text{ δηλ., } \mathbf{\Delta}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{\Delta})} \text{adj}(\mathbf{\Delta}).$$

Θεωρούμε τις τυχαίες μεταβλητές $x_c(t; \theta), x'_c(t; \theta), x_s(t; \theta), x'_s(t; \theta)$. Η μέση τιμή ολότητας της $x_c(t; \theta)$ υπολογίζεται ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} E^\theta [x_c(t; \theta)] &= E^\theta \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\{(\omega_n - \bar{\omega})t + \varepsilon_n(\theta)\} \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n E^\theta [\cos\{(\omega_n - \bar{\omega})t + \varepsilon_n(\theta)\}] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\{(\omega_n - \bar{\omega})t + \varepsilon\} f(\varepsilon) d\varepsilon \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos\{(\omega_n - \bar{\omega})t + \varepsilon\} d\varepsilon = 0, \end{aligned}$$

$$\text{δηλαδή, } E^\theta [x_c(t; \theta)] = 0. \quad (5.4.1)$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία για την χρονοσειρά $x_s(t; \theta)$, καταλήγουμε στην

$$E^\theta [x_s(t; \theta)] = 0. \quad (5.4.2)$$

Η μέση τιμή ολότητας της $x'_c(t; \theta)$ υπολογίζεται ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} E^\theta [x'_c(t; \theta)] &= E^\theta \left[-\sum_{n=1}^{\infty} a_n (\omega_n - \bar{\omega}) \sin((\omega_n - \bar{\omega})t + \varepsilon_n(\theta)) \right] \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} a_n (\omega_n - \bar{\omega}) E^\theta [\sin((\omega_n - \bar{\omega})t + \varepsilon_n(\theta))] \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} a_n (\omega_n - \bar{\omega}) \int_0^{2\pi} \sin((\omega_n - \bar{\omega})t + \varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n (\omega_n - \bar{\omega})}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin((\omega_n - \bar{\omega})t + \varepsilon) d\varepsilon = 0, \\ \text{δηλαδή, } E^\theta [x'_c(t; \theta)] &= 0. \end{aligned} \quad (5.4.3)$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία για την χρονοσειρά $x'_s(t; \theta)$, καταλήγουμε στην

$$E^\theta [x'_s(t; \theta)] = 0 \quad (5.4.4)$$

Στην συνέχεια υπολογίζουμε την αυτοσυνδιακύμανση των μεταβλητών $x_c(t; \theta), x_c(s; \theta)$:

$$\begin{aligned} E^\theta [x_c(t; \theta) x_c(s; \theta)] &= E^\theta \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\{(\omega_n - \bar{\omega})t + \varepsilon_n(\theta)\} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\{(\omega_n - \bar{\omega})s + \varepsilon_n(\theta)\} \right] \\ &= E^\theta \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \frac{1}{2} [\cos\{(\omega_n - \bar{\omega})(t-s)\} + \cos\{(\omega_n - \bar{\omega})(t+s) + 2\varepsilon_n(\theta)\}] \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \frac{1}{2} E^\theta [\cos\{(\omega_n - \bar{\omega})(t-s)\}] + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \frac{1}{2} E^\theta [\cos\{(\omega_n - \bar{\omega})(t+s) + 2\varepsilon_n(\theta)\}] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \frac{1}{2} [\cos\{(\omega_n - \bar{\omega})(t-s)\}], \text{ όπου για } t = s, \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \frac{1}{2} \simeq \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega = C_{x_c x_c}(t, t) = \sigma_{x_c}^2(t) = m_0, \end{aligned}$$

$$\text{δηλαδή, } C_{x_c x_c}(t, t) = m_0 = \mu_0. \quad (5.4.5)$$

Υπολογίζουμε την αυτοσυνδιακύμανση των $x_s(t; \theta), x_s(s; \theta)$:

$$\begin{aligned}
 E^\theta [x_s(t; \theta)x_s(s; \theta)] &= E^\theta \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\{(\omega_n - \bar{\omega})t + \varepsilon_n(\theta)\} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\{(\omega_n - \bar{\omega})s + \varepsilon_n(\theta)\} \right] \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 E^\theta [\sin\{(\omega_n - \bar{\omega})t + \varepsilon_n(\theta)\} \sin\{(\omega_n - \bar{\omega})s + \varepsilon_n(\theta)\}] \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 E^\theta \frac{1}{2} [\cos\{(\omega_n - \bar{\omega})(t-s)\} - \cos\{(\omega_n - \bar{\omega})(t+s) + 2\varepsilon_n(\theta)\}] \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 E^\theta \frac{1}{2} [\cos\{(\omega_n - \bar{\omega})(t-s)\}] - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 E^\theta \frac{1}{2} [\cos\{(\omega_n - \bar{\omega})(t+s) + 2\varepsilon_n(\theta)\}],
 \end{aligned}$$

όπου για $t = s$,

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} a_n^2 = \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega = C_{x_s, x_s}(t, t) = \sigma_{x_s}^2(t) = m_0,$$

$$\text{δηλαδή, } C_{x_s, x_s}(t, t) = m_0 = \mu_0. \quad (5.4.6)$$

Υπολογίζουμε την συνδιακύμανση των $x_c(t; \theta), x_s(s; \theta)$:

$$\begin{aligned}
 E^\theta [x_c(t; \theta)x_s(s; \theta)] &= E^\theta \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\{(\omega_n - \bar{\omega})t + \varepsilon_n(\theta)\} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\{(\omega_n - \bar{\omega})s + \varepsilon_n(\theta)\} \right] \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 E^\theta [\cos\{(\omega_n - \bar{\omega})t + \varepsilon_n(\theta)\} \sin\{(\omega_n - \bar{\omega})s + \varepsilon_n(\theta)\}] \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 E^\theta \frac{1}{2} [\sin\{(\omega_n - \bar{\omega})(s-t)\} + \cos\{(\omega_n - \bar{\omega})(t+s) + 2\varepsilon_n(\theta)\}] \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \frac{1}{2} \sin\{(\omega_n - \bar{\omega})(s-t)\} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} a_n^2 E^\theta [\cos\{(\omega_n - \bar{\omega})(t+s) + 2\varepsilon_n(\theta)\}],
 \end{aligned}$$

όπου για $t = s$,

$$E^\theta [x_c(t; \theta)x_s(s; \theta)] = 0, \text{ δηλαδή } C_{x_c, x_s}(t, t) = 0. \quad (5.4.7)$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία για $t = s$, υπολογίζουμε την συνδιακύμανση την μεταβλητών $x_s(s; \theta)x_c(t; \theta)$, δηλαδή:

$$C_{x_s, x_c}(t, t) = C_{x_c, x_s}(t, t) = 0. \quad (5.4.8)$$

Στην συνέχεια υπολογίζουμε την συνδιακύμανση των μεταβλητών $x_c(t; \theta), x'_c(s; \theta)$:

$$\begin{aligned}
 E^\theta [x_c(t; \theta)x'_c(s; \theta)] &= \\
 &= E^\theta \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos((\omega_n - \bar{\omega})t + \varepsilon_n(\theta)) \left(-\sum_{n=1}^{\infty} a_n (\omega_n - \bar{\omega}) \sin((\omega_n - \bar{\omega})s + \varepsilon_n(\theta)) \right) \right] \\
 &= -\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 (\omega_n - \bar{\omega}) E^\theta \left[\cos((\omega_n - \bar{\omega})t + \varepsilon_n(\theta)) \sin((\omega_n - \bar{\omega})s + \varepsilon_n(\theta)) \right] \\
 &= -\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 (\omega_n - \bar{\omega}) \frac{1}{2} E^\theta \left[\sin\{(\omega_n - \bar{\omega})(s-t)\} + \cos\{(\omega_n - \bar{\omega})(t+s) + 2\varepsilon_n(\theta)\} \right] \\
 &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 (\omega_n - \bar{\omega})}{2} \sin\{(\omega_n - \bar{\omega})(s-t)\} - \\
 &\quad -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 (\omega_n - \bar{\omega})}{2} E^\theta \left[\cos\{(\omega_n - \bar{\omega})(t+s) + 2\varepsilon_n(\theta)\} \right],
 \end{aligned}$$

όπου για $t = s$,

$$E^\theta [x_c(t; \theta)x'_c(s; \theta)] = 0, \text{ δηλαδή } C_{x_c x'_c}(t, t) = 0. \quad (5.4.9)$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία για $t = s$, υπολογίζουμε την συνδιακύμανση των μεταβλητών $x'_c(s; \theta)x_c(t; \theta)$, δηλαδή:

$$C_{x'_c x_c}(t, t) = C_{x_c x'_c}(t, t) = 0. \quad (5.4.10)$$

Στην συνέχεια υπολογίζουμε την συνδιακύμανση των $x_c(t; \theta), x'_c(s; \theta)$:

$$\begin{aligned}
 E^\theta [x_c(t; \theta)x'_c(s; \theta)] &= \\
 &= E^\theta \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos((\omega_n - \bar{\omega})t + \varepsilon_n(\theta)) \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\omega_n - \bar{\omega}) \cos((\omega_n - \bar{\omega})s + \varepsilon_n(\theta)) \right] \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 (\omega_n - \bar{\omega}) E^\theta \left[\cos((\omega_n - \bar{\omega})t + \varepsilon_n(\theta)) \cos((\omega_n - \bar{\omega})s + \varepsilon_n(\theta)) \right] \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 (\omega_n - \bar{\omega}) \frac{1}{2} E^\theta \left[\cos\{(\omega_n - \bar{\omega})(t-s)\} + \cos\{(\omega_n - \bar{\omega})(t+s) + 2\varepsilon_n(\theta)\} \right] \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 (\omega_n - \bar{\omega})}{2} \cos\{(\omega_n - \bar{\omega})(t-s)\} \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 (\omega_n - \bar{\omega})}{2} E^\theta \left[\cos\{(\omega_n - \bar{\omega})(t+s) + 2\varepsilon_n(\theta)\} \right],
 \end{aligned}$$

όπου για $t = s$,

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2(\omega_n - \bar{\omega})}{2} = \int_0^{\infty} (\omega - \bar{\omega})S(\omega)d\omega = \int_0^{\infty} \left(\omega - \frac{m_1}{m_0}\right)S(\omega)d\omega \\ &= \int_0^{\infty} \omega S(\omega)d\omega - \frac{m_1}{m_0} \int_0^{\infty} S(\omega)d\omega = m_1 - \frac{m_1}{m_0} m_0 = 0, \end{aligned}$$

$$\text{δηλαδή } C_{x_c x'_s}(t, t) = 0. \quad (5.4.11)$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία για $t = s$, υπολογίζουμε την συνδιακύμανση των μεταβλητών $x'_s(s; \theta)x_c(t; \theta)$, καταλήγοντας,

$$C_{x'_s x_c}(t, t) = C_{x_c x'_s}(t, t) = 0. \quad (5.4.12)$$

Ομοίως με προηγουμένως, υπολογίζουμε την συνδιακύμανση των $x'_c(t; \theta), x_s(s; \theta)$:

$$\begin{aligned} &E^\theta [x'_c(t; \theta)x_s(s; \theta)] = \\ &= E^\theta \left[-\sum_{n=1}^{\infty} a_n(\omega_n - \bar{\omega}) \sin((\omega_n - \bar{\omega})t + \varepsilon_n(\theta)) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin((\omega_n - \bar{\omega})s + \varepsilon_n(\theta)) \right] \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2(\omega_n - \bar{\omega}) E^\theta \left[\sin((\omega_n - \bar{\omega})t + \varepsilon_n(\theta)) \sin((\omega_n - \bar{\omega})s + \varepsilon_n(\theta)) \right] \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2(\omega_n - \bar{\omega}) \frac{1}{2} E^\theta \left[\cos\{(\omega_n - \bar{\omega})(t - s)\} - \cos\{(\omega_n - \bar{\omega})(t + s) + 2\varepsilon_n(\theta)\} \right] \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2(\omega_n - \bar{\omega})}{2} \cos\{(\omega_n - \bar{\omega})(t - s)\} + \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2(\omega_n - \bar{\omega})}{2} E^\theta \left[\cos\{(\omega_n - \bar{\omega})(t + s) + 2\varepsilon_n(\theta)\} \right], \end{aligned}$$

όπου για $t = s$,

$$\begin{aligned} &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2(\omega_n - \bar{\omega})}{2} = -\int_0^{\infty} (\omega - \bar{\omega})S(\omega)d\omega = -\int_0^{\infty} \left(\omega - \frac{m_1}{m_0}\right)S(\omega)d\omega \\ &= -\int_0^{\infty} \omega S(\omega)d\omega + \frac{m_1}{m_0} \int_0^{\infty} S(\omega)d\omega = -m_1 + \frac{m_1}{m_0} m_0 = 0, \end{aligned}$$

$$\text{δηλαδή, } C_{x'_c x_s}(t, t) = 0. \quad (5.4.13)$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία για $t=s$, υπολογίζουμε την συνδιακύμανση των μεταβλητών $x_s(s; \theta)x'_c(t; \theta)$,

$$C_{x_s x'_c}(t, t) = C_{x'_c x_s}(t, t) = 0. \quad (5.4.14)$$

Με αντίστοιχους υπολογισμούς όπως και προηγουμένως, υπολογίζουμε την συνδιακύμανση των μεταβλητών $x'_c(t; \theta), x'_s(s; \theta)$:

$$\begin{aligned} E^\theta [x'_c(t; \theta)x'_s(s; \theta)] &= \\ &= E^\theta \left[-\sum_{n=1}^{\infty} a_n (\omega_n - \bar{\omega}) \sin((\omega_n - \bar{\omega})t + \varepsilon_n(\theta)) \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\omega_n - \bar{\omega}) \cos((\omega_n - \bar{\omega})s + \varepsilon_n(\theta)) \right] \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 (\omega_n - \bar{\omega})^2 E^\theta \left[\sin((\omega_n - \bar{\omega})t + \varepsilon_n(\theta)) \cos((\omega_n - \bar{\omega})s + \varepsilon_n(\theta)) \right] \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 (\omega_n - \bar{\omega})^2}{2} E^\theta \left[\sin\{(\omega_n - \bar{\omega})(t-s)\} + \cos\{(\omega_n - \bar{\omega})(t+s) + 2\varepsilon_n(\theta)\} \right] \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 (\omega_n - \bar{\omega})^2}{2} \sin\{(\omega_n - \bar{\omega})(t-s)\} - \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 (\omega_n - \bar{\omega})^2}{2} E^\theta \left[\cos\{(\omega_n - \bar{\omega})(t+s) + 2\varepsilon_n(\theta)\} \right], \end{aligned}$$

όπου για $t=s$,

$$E^\theta [x'_c(t; \theta)x'_s(s; \theta)] = 0, \text{ δηλαδή } C_{x'_c x'_s}(t, t) = 0. \quad (5.4.15)$$

Ομοίως για $t=s$, υπολογίζουμε την συνδιακύμανση των μεταβλητών $x'_s(s; \theta)x'_c(t; \theta)$,

$$C_{x'_s x'_c}(t, t) = C_{x'_c x'_s}(t, t) = 0. \quad (5.4.16)$$

Για την συνδιακύμανση των μεταβλητών $x_s(t; \theta), x'_s(s; \theta)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} E^\theta [x_s(t; \theta)x'_s(s; \theta)] &= \\ &= E^\theta \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin((\omega_n - \bar{\omega})t + \varepsilon_n(\theta)) \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\omega_n - \bar{\omega}) \cos((\omega_n - \bar{\omega})s + \varepsilon_n(\theta)) \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 (\omega_n - \bar{\omega}) E^\theta \left[\sin((\omega_n - \bar{\omega})t + \varepsilon_n(\theta)) \cos((\omega_n - \bar{\omega})s + \varepsilon_n(\theta)) \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 (\omega_n - \bar{\omega})}{2} E^\theta \left[\sin\{(\omega_n - \bar{\omega})(t-s)\} + \cos\{(\omega_n - \bar{\omega})(t+s) + 2\varepsilon_n(\theta)\} \right] \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2(\omega_n - \bar{\omega})}{2} \sin\{(\omega_n - \bar{\omega})(t-s)\} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2(\omega_n - \bar{\omega})}{2} E^\theta [\cos\{(\omega_n - \bar{\omega})(t+s) + 2\varepsilon_n(\theta)\}],$$

όπου για $t = s$,

$$E^\theta [x_s'(t; \theta)x_s'(s; \theta)] = 0, \text{ δηλαδή } C_{x_s x_s'}(t, t) = 0. \quad (5.4.17)$$

Ομοίως υπολογίζεται και η συνδιακύμανση των μεταβλητών $x_s'(s; \theta)x_s(t; \theta)$,

$$C_{x_s' x_s}(t, t) = C_{x_s x_s'}(t, t) = 0. \quad (5.4.18)$$

Για την αυτοσυνδιακύμανση των μεταβλητών $x_c'(t; \theta), x_c'(s; \theta)$, καταλήγουμε στα εξής:

$$E^\theta [x_c'(t; \theta)x_c'(s; \theta)] = \\ = E^\theta \left[-\sum_{n=1}^{\infty} a_n(\omega_n - \bar{\omega}) \sin((\omega_n - \bar{\omega})t + \varepsilon_n(\theta)) \left(-\sum_{n=1}^{\infty} a_n(\omega_n - \bar{\omega}) \sin((\omega_n - \bar{\omega})s + \varepsilon_n(\theta)) \right) \right] \\ = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2(\omega_n - \bar{\omega})^2 E^\theta [\sin((\omega_n - \bar{\omega})t + \varepsilon_n(\theta)) \sin((\omega_n - \bar{\omega})s + \varepsilon_n(\theta))] \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2(\omega_n - \bar{\omega})^2}{2} E^\theta [\cos\{(\omega_n - \bar{\omega})(t-s)\} - \cos\{(\omega_n - \bar{\omega})(t+s) + 2\varepsilon_n(\theta)\}] \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2(\omega_n - \bar{\omega})^2}{2} \cos\{(\omega_n - \bar{\omega})(t-s)\} - \\ - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2(\omega_n - \bar{\omega})^2}{2} E^\theta [\cos\{(\omega_n - \bar{\omega})(t+s) + 2\varepsilon_n(\theta)\}],$$

όπου για $t = s$,

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2(\omega_n - \bar{\omega})^2}{2} = \int_0^{\infty} (\omega - \bar{\omega})^2 S(\omega) d\omega = \int_0^{\infty} (\omega - \frac{m_1}{m_0})^2 S(\omega) d\omega \\ = \int_0^{\infty} \frac{1}{m_0^2} (\omega^2 m_0^2 + m_1^2 - 2\omega m_0 m_1) S(\omega) d\omega \\ = \frac{1}{m_0^2} \int_0^{\infty} \omega^2 m_0^2 S(\omega) d\omega + \frac{1}{m_0^2} \int_0^{\infty} m_1^2 S(\omega) d\omega - \frac{2}{m_0^2} \int_0^{\infty} \omega m_0 m_1 S(\omega) d\omega \\ = m_2 + \frac{m_1^2}{m_0} - \frac{2m_1^2}{m_0} = \frac{(m_0 m_2 - m_1^2)}{m_0}, \text{ δηλαδή,}$$

$$C_{x'_c x'_c}(t, t) = \frac{(m_0 m_2 - m_1^2)}{m_0} = \mu_2. \quad (5.4.19)$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία για την αυτοσυνδιακύμανση των μεταβλητών $x'_s(s; \theta) x'_s(t; \theta)$ την $t = s$,

$$C_{x'_s x'_s}(t, t) = \frac{(m_0 m_2 - m_1^2)}{m_0} = \mu_2. \quad (5.4.20)$$

Με βάση τις πιο πάνω Σχέσεις (5.4), υπολογίζουμε τον πίνακα μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας των τυχαίων μεταβλητών $x_c(t; \theta), x'_c(t; \theta), x_s(t; \theta), x'_s(t; \theta)$,

$$\Delta = \begin{bmatrix} C_{x_c x_c}(t, t) & C_{x_c x'_c}(t, t) & C_{x_c x_s}(t, t) & C_{x_c x'_s}(t, t) \\ C_{x'_c x_c}(t, t) & C_{x'_c x'_c}(t, t) & C_{x'_c x_s}(t, t) & C_{x'_c x'_s}(t, t) \\ C_{x_s x_c}(t, t) & C_{x_s x'_c}(t, t) & C_{x_s x_s}(t, t) & C_{x_s x'_s}(t, t) \\ C_{x'_s x_c}(t, t) & C_{x'_s x'_c}(t, t) & C_{x'_s x_s}(t, t) & C_{x'_s x'_s}(t, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_2 \end{bmatrix}. \quad (5.5)$$

Η ορίζουσα του πίνακα μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας υπολογίζεται:

$$\det(\Delta) = (\mu_0 \mu_2)^2. \quad (5.6)$$

Οι τυχαίες μεταβλητές $\mathbf{X}(x_c(t; \theta), x'_c(t; \theta), x_s(t; \theta), x'_s(t; \theta))$ την χρονική στιγμή t μπορούν να εκφραστούν μέσω της από κοινού κανονικής συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας των μεταβλητών αυτών. Ο αντίστροφος του πίνακα μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας μέσω της σχέσης του με την ορίζουσα του πίνακα Δ , $\det(\Delta)$, και τον προσαρτημένο του πίνακα Δ , $\text{adj}(\Delta)$, δίνεται τελικά ως εξής:

$$\Delta^{-1} = \frac{1}{\det(\Delta)} \text{adj}(\Delta) = \frac{1}{(\mu_0 \mu_2)^2} \mu_0 \mu_2 \begin{bmatrix} \mu_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{|\Delta|}} \begin{bmatrix} \mu_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_0 \end{bmatrix}, \quad (5.7)$$

όπου: $\sqrt{|\Delta|} = \mu_0 \mu_2$.

Αντικαθιστώντας τις Σχέσεις (5.6, 5.7) στην Σχέση (5.3) καταλήγουμε στην από κοινού κανονική σππ των τυχαίων μεταβλητών $\mathbf{X}(x_c(t; \theta), x'_c(t; \theta), x_s(t; \theta), x'_s(t; \theta))$:

$$\begin{aligned} f(x_c(t; \theta), x'_c(t; \theta), x_s(t; \theta), x'_s(t; \theta)) &= \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2 \mu_0 \mu_2} \exp\left\{-\frac{x_c^2(t; \theta) + x_s^2(t; \theta)}{2\mu_0}\right\} \exp\left\{-\frac{x'_c{}^2(t; \theta) + x'_s{}^2(t; \theta)}{2\mu_2}\right\}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

5.2 Από κοινού σππ των τυχαίων μεταβλητών πλάτους κύματος, φάσης, παραγώγου πλάτους, και παραγώγου φάσης

Οι τυχαίες μεταβλητές $x_c(t; \theta), x'_c(t; \theta), x_s(t; \theta), x'_s(t; \theta)$ της Σχέσης (5.8) αντικαθίστανται κατάλληλα έτσι ώστε να εισάγουμε το πλάτος $A(t)$ της envelope process και τις φάσεις $\phi(t)$ όπως έχουν οριστεί προηγούμενα (βλέπε υποεδάφιο 2.3). Ανακαλώντας την μοντελοποίηση του πλάτους και της φάσης της περιβάλλουσας διαδικασίας για στενή λωρίδα, έχουμε τα εξής:

$$\begin{cases} x_c(t; \theta) = A(t) \cos \phi(t) \\ x_s(t; \theta) = A(t) \sin \phi(t) \end{cases} \quad (5.9)$$

Αναλυτικά, για τις παραγώγους των μεταβλητών $x'_c(t; \theta), x'_s(t; \theta)$ της Σχέσης (5.9) ως προς τον χρόνο (δηλ., $\frac{\partial}{\partial t}(x_c(t; \theta))$ και $\frac{\partial}{\partial t}(x_s(t; \theta))$ αντίστοιχα), έχουμε :

$$x_c(t; \theta) = A(t) \cos \phi(t) \quad (5.10.1)$$

$$x'_c(t; \theta) = A'(t) \cos \phi(t) - A(t) \sin \phi(t) \phi'(t) \quad (5.10.2)$$

$$x_s(t; \theta) = A(t) \sin \phi(t) \quad (5.10.3)$$

$$x'_s(t; \theta) = A'(t) \sin \phi(t) + A(t) \cos \phi(t) \phi'(t) \quad (5.10.4)$$

και η χρονική παράγωγος του ορίσματος της φάσης από την Σχέση (5.2), $\phi'(t) = \frac{2\pi}{T(t)} - \bar{\omega}$,

όπου $\bar{\omega}$ είναι η μέση συχνότητα με $\bar{\omega} = m_1 / m_0$, και m_0, m_1 οι ροπές μηδενικής και πρώτης τάξης αντίστοιχα στο ενεργειακό κυματικό φάσμα της $x(t; \theta)$ στο πεδίο των συχνοτήτων.

Ο μετασχηματισμός των τυχαίων μεταβλητών $x_c(t; \theta), x'_c(t; \theta), x_s(t; \theta), x'_s(t; \theta)$ της Σχέσης (5.8) για μια δεδομένη χρονική στιγμή t δηλ.,

$$(H_1, H_2, H_3, H_4) \equiv (x_c(t; \theta), x'_c(t; \theta), x_s(t; \theta), x'_s(t; \theta)),$$

για τις νέες μεταβλητές πλάτους, φάσης, παραγώγου πλάτους και παραγώγου φάσης την χρονική στιγμή t :

$(y_1, y_2, y_3, y_4) \equiv (A(t; \theta), \phi(t; \theta), A'(t; \theta), \phi'(t; \theta))$ στον \mathbb{R}_X^4 (βλέπε υποεδάφιο 3.2 και Παράρτημα J), πραγματοποιείται κατάλληλα μέσω της:

$$f_Y(y) = f_X(H(y)) \cdot \left| \frac{D(H_1, H_2, H_3, H_4)}{D(y_1, y_2, y_3, y_4)} \right|, \quad (5.11)$$

όπου $|\mathbf{J}|$ η απόλυτη τιμή της Ιακωβιανή ορίζουσας $\mathbf{J} = \frac{D(H_1, H_2, H_3, H_4)}{D(y_1, y_2, y_3, y_4)}$ των μετασχηματισμένων τυχαίων μεταβλητών, να παίρνει την πιο κάτω μορφή:

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_c(t; \theta)}{\partial A(t)} & \frac{\partial x_c(t; \theta)}{\partial \phi(t)} & \frac{\partial x_c(t; \theta)}{\partial A'(\theta)} & \frac{\partial x_c(t; \theta)}{\partial \phi'(\theta)} \\ \frac{\partial x'_c(t; \theta)}{\partial A(t)} & \frac{\partial x'_c(t; \theta)}{\partial \phi(t)} & \frac{\partial x'_c(t; \theta)}{\partial A'(\theta)} & \frac{\partial x'_c(t; \theta)}{\partial \phi'(\theta)} \\ \frac{\partial x_s(t; \theta)}{\partial A(t)} & \frac{\partial x_s(t; \theta)}{\partial \phi(t)} & \frac{\partial x_s(t; \theta)}{\partial A'(\theta)} & \frac{\partial x_s(t; \theta)}{\partial \phi'(\theta)} \\ \frac{\partial x'_s(t; \theta)}{\partial A(t)} & \frac{\partial x'_s(t; \theta)}{\partial \phi(t)} & \frac{\partial x'_s(t; \theta)}{\partial A'(\theta)} & \frac{\partial x'_s(t; \theta)}{\partial \phi'(\theta)} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos \phi(t) & -A(t) \sin \phi(t) & 0 & 0 \\ -\sin \phi(t) \phi'(t) & -A'(t) \sin \phi(t) - A(t) \cos \phi(t) \phi'(t) & \cos \phi(t) & -A(t) \sin \phi(t) \\ \sin \phi(t) & A(t) \cos \phi(t) & 0 & 0 \\ \cos \phi(t) \phi'(t) & A'(t) \cos \phi(t) - A(t) \sin \phi(t) \phi'(t) & \sin \phi(t) & A(t) \cdot \cos \phi(t) \end{vmatrix},$$

δηλαδή,

$$\mathbf{J} = -A^2(t), \quad (5.12)$$

με την απόλυτη τιμή της Ιακωβιανής ορίζουσας,

$$|\mathbf{J}| = A^2(t; \theta). \quad (5.13)$$

Συνεπώς μέσω των κατάλληλων μετασχηματισμών των τυχαίων μεταβλητών $x_c(t; \theta), x'_c(t; \theta), x_s(t; \theta), x'_s(t; \theta)$ της Σχέσης (5.8) και αντικαταστάσεων της Σχέσης (5.13) στην Σχέση (5.11), παίρνουμε την ακόλουθη έκφραση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών πλάτους κύματος, φάσης, παραγώγου πλάτους, και παραγώγου φάσης:

$$f(A(t), \phi(t), A'(t), \phi'(t)) = \frac{A^2(t)}{(2\pi)^2 \mu_0 \mu_2} \exp\left\{-\frac{A^2(t)}{2\mu_0}\right\} \exp\left\{-\frac{A'^2(t) + A^2(t)\phi'^2(t)}{2\mu_2}\right\}, \quad (5.14)$$

όπου οι τυχαίες μεταβλητές την χρονική στιγμή t , θα κυμαίνονται ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} 0 \leq A(t) \leq \infty, & & 0 \leq \phi(t) \leq 2\pi, \\ -\infty \leq A'(t) \leq \infty, & & -\infty \leq \phi'(t) \leq \infty. \end{aligned}$$

Αν ολοκληρώσουμε την (5.14) ως προς την παράγωγο πλάτους $A'(t)$ και ως προς την φάση $\phi(t)$, θα έχουμε την έκφραση της από κοινού συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας των μεταβλητών πλάτους κύματος $A(t)$ και παραγώγου φάσης $\phi'(t)$ ως εξής:

$$\begin{aligned} f(A(t), \phi'(t)) &= \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \frac{A^2(t)}{(2\pi)^2 \mu_0 \mu_2} \exp\left\{-\frac{A^2(t)}{2\mu_0}\right\} \exp\left\{-\frac{A'^2(t) + A^2(t)\phi'^2(t)}{2\mu_2}\right\} d\phi(t) dA'(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A^2(t)}{(2\pi)^2 \mu_0 \mu_2} \exp\left\{-\frac{A^2(t)}{2\mu_0}\right\} \exp\left\{-\frac{A'^2(t) + A^2(t)\phi'^2(t)}{2\mu_2}\right\} 2\pi dA'(t) \\
 &= \frac{A^2(t)}{(2\pi)\mu_0\mu_2} \exp\left\{-\frac{A^2(t)}{2\mu_0}\right\} \exp\left\{-\frac{A^2(t)\phi'^2(t)}{2\mu_2}\right\} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{A'^2(t)}{2\mu_2}\right\} dA'(t) \\
 &= \frac{A^2(t)}{(2\pi)\mu_0\mu_2} \exp\left\{-\frac{A^2(t)}{2\mu_0}\right\} \exp\left\{-\frac{A^2(t)\phi'^2(t)}{2\mu_2}\right\} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\left(\frac{A'(t)}{\sqrt{2\mu_2}}\right)^2\right\} dA'(t),
 \end{aligned}$$

όπου αν θέσουμε $A'(t)/\sqrt{2\mu_2} = u(t)$ με $dA'(t) = \sqrt{2\mu_2} du(t)$ στην παραπάνω σχέση και γνωρίζοντας ότι $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-u^2(t)) du(t) = \sqrt{\pi}$, καταλήγουμε τελικά,

$$f(A(t), \phi'(t)) = \frac{A^2(t)}{\sqrt{2\pi}\mu_0\sqrt{\mu_2}} \exp\left\{-\frac{A^2(t)}{2\mu_0}\right\} \exp\left\{-\frac{A^2(t)\phi'^2(t)}{2\mu_2}\right\}. \quad (5.15)$$

5.3 Από κοινού σππ των αδιάστατων τυχαίων μεταβλητών πλάτους και περιόδου του κύματος, μοντέλο Longuet-Higgins (1983)

Σε αυτό το υποεδάφιο θα δωθούν οι αναλυτικές εκφράσεις των από κοινού σππ αδιάστατων τυχαίων μεταβλητών πλάτους και περιόδου του κύματος μέσω κατάλληλων μετασχηματισμών των τυχαίων μεταβλητών $A(t), \phi'(t)$ της Σχέσης (5.15) για μια δεδομένη χρονική στιγμή t , δηλ., οι τυχαίες μεταβλητές:

$$(H_1, H_2) \equiv (A(t), \phi'(t)),$$

για τις νέες αδιάστατες τυχαίες μεταβλητές πλάτους και περιόδου του κύματος την χρονική στιγμή t :

$(y_1, y_2) \equiv (R(t), \tau(t))$ στον \mathbb{R}_X^2 (βλέπε Παράρτημα J ομοίως για δισδιάστατη τυχαία μεταβλητή). Ο μετασχηματισμός της δισδιάστατης τυχαίας μεταβλητής $X = (A(t), \phi'(t))$ πραγματοποιείται κατάλληλα μέσω της:

$$f_Y(y) = f_X(H(y)) \left| \frac{D(H_1, H_2)}{D(y_1, y_2)} \right|,$$

και με τον υπολογισμό της απόλυτης τιμής της Ιακωβιανή ορίζουσας $|\mathbf{J}| = |D(H_1, H_2) / D(y_1, y_2)|$ των μετασχηματισμένων τυχαίων μεταβλητών.

Η αδιάστατη έκφραση του πλάτους δίνεται:

$$R(t) = \frac{A(t)}{\sqrt{2\mu_0}} \Leftrightarrow A(t) = \sqrt{2\mu_0} R(t), \quad (5.16)$$

και μ_0 η ροπή μηδενικής τάξης ως προς την μέση συχνότητα, (δηλ., $\mu_0 = \int_0^\infty (\omega - \bar{\omega})^0 S(\omega) d\omega = \int_0^\infty S(\omega) d\omega = m_0$), στο ενεργειακό κυματικό φάσμα με την συνάρτηση $S(\omega)$ να αναπαριστά το ενεργειακό φάσμα της $x(t; \theta)$ στο πεδίο των συχνοτήτων.

Η αδιάστατη έκφραση της περιόδου του κύματος⁽¹⁰⁾ των μηδενικών υπερβάσεων προς τα άνω στο μοντέλο από Longuet-Higgins (1983) θα δίνεται από την Σχέση (5.17), ικανοποιώντας τα χαρακτηριστικά της περιβάλλουσας για διαδικασίες στενής λωρίδας (Σχέση 2.23 ή 5.2), ως εξής:

$$\tau(t) = \frac{T(t)}{\bar{T}} = \frac{2\pi / (\phi'(t) + \bar{\omega})}{2\pi / \bar{\omega}} = \frac{\bar{\omega}}{\phi'(t) + \bar{\omega}} \Leftrightarrow \phi'(t) = \frac{\bar{\omega}}{\tau(t)} - \bar{\omega}, \quad (5.17)$$

όπου \bar{T} η μέση περίοδος μηδενικών υπερβάσεων προς τα άνω και $\bar{\omega}$ είναι η μέση συχνότητα με $\bar{\omega} = m_1 / m_0$.

Για τους υπολογισμούς της από κοινού σππ αδιάστατων τυχαίων μεταβλητών πλάτους και περιόδου του κύματος και η σύνδεση της συνάρτησης αυτής με τα χαρακτηριστικά περιβάλλουσας για διαδικασίες στενής λωρίδας, ορίστηκε η παράμετρος καθορισμού στενής λωρίδας (spectral width parameter), δηλ., (ν), από Longuet-Higgins (1983) ως εξής⁽¹¹⁾:

$$\nu = \sqrt{\left(\frac{m_0 m_2}{m_1^2} - 1\right)} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_0} \frac{1}{\bar{\omega}}} \Leftrightarrow \bar{\omega} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_0} \frac{1}{\nu}}. \quad (5.18)$$

Να σημειώσουμε ότι για $\nu^2 \ll 1$ εξασφαλίζουμε ότι το ομαδικό κύμα μεταβάλλεται αργά σε σχέση με το φέρων κύμα $e^{i\bar{\omega}t}$ έτσι ώστε τα μέγιστα πλάτη του κύματος να βρίσκονται πάνω στο περίγραμμα του ομαδικού κύματος $A(t)e^{i\Phi(t)}$, (βλέπε χαρακτηριστικά περιβάλλουσας για διαδικασίες στενής λωρίδας στο υποεδάφιο 2.3). Συνδυάζοντας τα αποτελέσματα των Σχέσεων (5.17 και 5.18), καταλήγουμε στην έκφραση της παραγώγου φάσης συμπεριλαμβάνοντας την αδιάστατη τυχαία μεταβλητή της περιόδου του κύματος και την παράμετρο καθορισμού στενής λωρίδας,

$$\phi'(t) = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_0} \frac{1}{\nu}} \left(\frac{1}{\tau(t)} - 1 \right). \quad (5.19)$$

Συνεπώς, στοχεύοντας στην μετασχηματισμένη από κοινού σππ των τυχαίων μεταβλητών $(A(t; \theta), \phi'(t))$ της Σχέσης (5.15) για μια δεδομένη χρονική στιγμή t με τις νέες αδιάστατες τυχαίες μεταβλητές πλάτους και περιόδου του κύματος $(R(t), \tau(t))$ την χρονική στιγμή t , ο

⁽¹⁰⁾ Βλέπε Σχέση (4.16) υποεδάφιο 4.2 στο μοντέλο από Cavanie et al. (1976) για την αντίστοιχη έκφραση της αδιάστατης περιόδου του κύματος.

⁽¹¹⁾ Για την αναλυτική έκφραση του spectral width parameter (ν) χρησιμοποιήθηκαν οι Σχέσεις (2.7, 2.8) από το υποεδάφιο 2.2 με τα εξής: $\mu_0 = m_0$, $\mu_1 = 0$, και $\mu_2 = m_2 - (m_1^2/m_0)$

μετασχηματισμός των τυχαίων μεταβλητών θα πραγματοποιηθεί με τους υπολογισμούς της Ιακωβιανής ορίζουσας $\mathbf{J} = D(H_1, H_2) / D(y_1, y_2)$, δηλ.,

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial A(t)}{\partial R(t)} & \frac{\partial A(t)}{\partial \tau(t)} \\ \frac{\partial \phi'(t)}{\partial R(t)} & \frac{\partial \phi'(t)}{\partial \tau(t)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{2\mu_0} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_0}} \frac{1}{\nu} \frac{1}{\tau^2(\theta)} \end{vmatrix} = -\sqrt{2\mu_2} \frac{1}{\nu} \frac{1}{\tau^2(\theta)}, \quad (5.20)$$

με την απόλυτη τιμή της Ιακωβιανής ορίζουσας,

$$|\mathbf{J}| = \sqrt{2\mu_2} \frac{1}{\nu} \frac{1}{\tau^2(t)}. \quad (5.21)$$

Οπότε η μετασχηματισμένη από κοινού σππ των αδιάστατων τυχαίων μεταβλητών πλάτους και περιόδου του κύματος $(R(t), \tau(t))$ την χρονική στιγμή t , θα έχει την πιο κάτω μορφή:

$$\begin{aligned} f(R(t), \tau(t)) &= \\ &= \frac{2\mu_0 R^2(t)}{\sqrt{2\pi\mu_0}\sqrt{\mu_2}} \exp\left\{-\frac{2\mu_0 R^2(t)}{2\mu_0}\right\} \exp\left\{-\frac{2\mu_0 R^2(t) \frac{\mu_2}{\mu_0} \frac{1}{\nu^2} \left(\frac{1}{\tau(t)} - 1\right)^2}{2\mu_2}\right\} \sqrt{2\mu_2} \frac{1}{\nu} \frac{1}{\tau^2(t)} L(\nu) \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{R^2(t)}{\tau^2(t)}\right) \frac{1}{\nu} \exp\{-R^2(t)\} \exp\left\{-R^2(t) \frac{1}{\nu^2} \left(\frac{1}{\tau(t)} - 1\right)^2\right\} L(\nu), \end{aligned} \quad (5.22)$$

όπου $0 \leq R(t) < \infty$, $0 \leq \tau(t) < \infty$, και η $L(\nu)$ θα ορίζεται ως σταθερά κανονικοποίησης (βλέπε Παράρτημα Κ για την αναλυτική έκφραση της $L(\nu)$). Θέτοντας όπου $L(\nu) \approx 1 + \frac{1}{4}\nu^2$ για μικρές τιμές του ν (Longuet-Higgins, 1983) στην Σχέση (5.22), η μετασχηματισμένη από κοινού σππ των αδιάστατων τυχαίων μεταβλητών πλάτους και περιόδου του κύματος καταλήγει στην ακόλουθη συνάρτηση,

$$f(R(t), \tau(t)) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{R^2(t)}{\tau^2(t)}\right) \frac{1}{\nu} \exp\{-R^2(t)\} \exp\left\{-R^2(t) \frac{1}{\nu^2} \left(1 - \frac{1}{\tau(t)}\right)^2\right\} \left(1 + \frac{1}{4}\nu^2\right), \quad (5.23)$$

όπου $0 \leq R(t) < \infty$, $0 \leq \tau(t) < \infty$, και $\nu \ll 1$.

Επιπρόσθετα, οι εκφράσεις των αδιάστατων τυχαίων μεταβλητών πλάτους και περιόδου του κύματος που θα μεγιστοποιούν μια δεδομένη χρονική στιγμή t την από κοινού σππ της Σχέσης (5.23), θα υπολογίζονται αντίστοιχα μέσω κατάλληλης παραγωγίσιμης ως προς τις αδιάστατες τυχαίες μεταβλητές, δηλ.,

$$\begin{cases} \frac{\partial f(R(t), \tau(t))}{\partial R(t)} = 0 \rightarrow R_{\max}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+\nu^2}}, \\ \frac{\partial f(R(t), \tau(t))}{\partial \tau(t)} = 0 \rightarrow \tau_{\max}(t) = \frac{1}{1+\nu^2}. \end{cases} \quad (5.24)$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των τυχαίων μεταβλητών από την Σχέση (5.24) για διάφορες τιμές, μικρές, του (ν) στην Σχέση (5.23), υπολογίζεται η από κοινού σππ για τις μέγιστες τιμές των αδιάστατων τυχαίων μεταβλητών πλάτους και περιόδου του κύματος, δηλ.,

$$\begin{aligned} f(R_{\max}(t), \tau_{\max}(t)) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\frac{1}{\sqrt{1+\nu^2}}}{\frac{1}{1+\nu^2}} \right)^2 \frac{1}{\nu} \exp \left\{ -\frac{1}{1+\nu^2} \left[1 + \frac{1}{\nu^2} (1-1-\nu^2)^2 \right] \right\} \left(1 + \frac{1}{4} \nu^2 \right) \\ &= \frac{2}{e\sqrt{\pi}} \left(\frac{1+\nu^2}{\nu} \right) \left(1 + \frac{1}{4} \nu^2 \right). \end{aligned} \quad (5.25)$$

5.4 Περιθώρια αθροιστική συνάρτηση κατανομής και περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των αδιάστατων τυχαίων μεταβλητών πλάτους κύματος και περιόδου από μοντέλο Longuet-Higgins (1983)

Σ' αυτό το υποεδάφιο θα δωθούν οι αναλυτικές εκφράσεις για τις περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας και αθροιστικής κατανομής (marginal probability density function and marginal distribution function) των αδιάστατων τυχαίων μεταβλητών πλάτους κύματος $R(t)$ και περιόδου $\tau(t)$ από μοντέλο Longuet-Higgins (1983). Ειδικότερα, για την αναλυτική έκφραση της περιθώριας συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της περιόδου $\tau(t)$, θα ολοκληρώσουμε ως προς $R(t)$ για μια δεδομένη χρονική στιγμή t την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(R(t), \tau(t))$ της Σχέσης (5.23). Δηλ., για μικρές τιμές του $\nu \ll 1$,

$$\begin{aligned} f(\tau(t)) &= \int_0^{\infty} f(R(t), \tau(t)) dR(t) \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi\nu}} \left(1 + \frac{1}{4} \nu^2 \right) \frac{1}{\tau^2(t)} \int_0^{\infty} R^2(t) \exp \left\{ -R^2(t) \left(1 + \frac{1}{\nu^2} \left(1 - \frac{1}{\tau(t)} \right)^2 \right) \right\} dR(t) \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi\nu}} \left(1 + \frac{1}{4}\nu^2\right) \frac{1}{\tau^2(t)} \left(-\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\nu^2} \left(1 - \frac{1}{\tau(t)}\right)^2\right)^{-1} \right) \cdot \int_0^\infty R(t) \frac{\partial}{\partial R(t)} \exp \left\{ -R^2(t) \left(1 + \frac{1}{\nu^2} \left(1 - \frac{1}{\tau(t)}\right)^2\right) \right\} dR(t),$$

δηλ.,

$$f(\tau(t)) = \frac{2}{\sqrt{\pi\nu}} \left(1 + \frac{1}{4}\nu^2\right) \frac{1}{\tau^2(t)} \left(-\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\nu^2} \left(1 - \frac{1}{\tau(t)}\right)^2\right)^{-1} \right) \cdot \left[\int_0^\infty R(t) \exp \left\{ -R^2(t) \left(1 + \frac{1}{\nu^2} \left(1 - \frac{1}{\tau(t)}\right)^2\right) \right\} dR(t) \right],^{(12)}$$

όπου από κανόνες παραγωγικής ολοκλήρωσης έχουμε:

$$\begin{aligned} f(\tau(t)) &= \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi\nu}} \left(1 + \frac{1}{4}\nu^2\right) \frac{1}{\tau^2(t)} \left(\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\nu^2} \left(1 - \frac{1}{\tau(t)}\right)^2\right)^{-1} \right) \cdot \int_0^\infty \exp \left\{ -R^2(t) \left(1 + \frac{1}{\nu^2} \left(1 - \frac{1}{\tau(t)}\right)^2\right) \right\} dR(t) \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi\nu}} \left(1 + \frac{1}{4}\nu^2\right) \frac{1}{\tau^2(t)} \left(\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\nu^2} \left(1 - \frac{1}{\tau(t)}\right)^2\right)^{-1} \right) \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(1 + \frac{1}{\nu^2} \left(1 - \frac{1}{\tau(t)}\right)^2\right)^{-1/2} \\ &= \left(1 + \frac{1}{4}\nu^2\right) \frac{1}{2\nu\tau^2(t)} \left(1 + \frac{1}{\nu^2} \left(1 - \frac{1}{\tau(t)}\right)^2\right)^{-3/2}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία για την αναλυτική έκφραση της περιθώριας συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας του πλάτους $R(t)$, θα ολοκληρώσουμε ως προς $\tau(t)$ για μια δεδομένη χρονική στιγμή t την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(R(t), \tau(t))$ της Σχέσης (5.23) για μικρές τιμές του $\nu \ll 1$, δηλ.,

⁽¹²⁾ Από κανόνες παραγωγικής ολοκλήρωσης για το ορισμένο ολοκλήρωμα, $\int_a^b f(x) \frac{\partial(g(x))}{\partial x} dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b \frac{\partial(f(x))}{\partial x} g(x) dx$

$$\begin{aligned}
 f(R(t)) &= \int_0^\infty f(R(t), \tau(t)) d\tau(t) \\
 &= \frac{2}{\sqrt{\pi} \nu} \left(1 + \frac{\nu^2}{4}\right) R^2(t) e^{-R^2(t)} \int_0^\infty \frac{1}{\tau^2(t)} \exp\left(-\frac{R^2(t)}{\nu^2} \left(1 - \frac{1}{\tau(t)}\right)^2\right) d\tau(t), \text{ όπου με αλλαγή} \\
 &\text{ μεταβλητών}^{(13)} \quad 1 - \frac{1}{\tau(t)} = \tau_{\text{LH}}(t) \text{ και αλλαγή στα όρια του ολοκληρώματος, έχουμε:}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(R(t)) &= \frac{2}{\sqrt{\pi} \nu} \left(1 + \frac{\nu^2}{4}\right) R^2(t) e^{-R^2(t)} \int_{-\infty}^1 \exp\left(-\frac{R^2(t)}{\nu^2} \tau_{\text{LH}}^2(t)\right) d\tau_{\text{LH}}(t) \\
 &= \frac{2}{\sqrt{\pi} \nu} \left(1 + \frac{\nu^2}{4}\right) R^2(t) e^{-R^2(t)}.
 \end{aligned} \tag{5.27}$$

$$\left[\int_{-\infty}^0 \exp\left(-\frac{R^2(t)}{\nu^2} \tau_{\text{LH}}^2(t)\right) d\tau_{\text{LH}}(t) + \int_0^1 \exp\left(-\frac{R^2(t)}{\nu^2} \tau_{\text{LH}}^2(t)\right) d\tau_{\text{LH}}(t) \right].$$

Ακολουθώντας την διαδικασία της αλλαγής μεταβλητών⁽¹⁴⁾ $\frac{R(t)}{\nu} \tau_{\text{LH}}(t) = u_{\text{LH}}(t)$ και αλλαγής στα όρια του ολοκληρώματος, έχουμε για τον πρώτο όρο στην αγκύλη (1^{ος} όρος) της Σχέσης (5.27):

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^0 \exp\left(-\frac{R^2(t)}{\nu^2} \tau_{\text{LH}}^2(t)\right) d\tau_{\text{LH}}(t) &= \frac{\nu}{R(t)} \int_{-\infty}^0 \exp(-u_{\text{LH}}^2(t)) du_{\text{LH}}(t) = \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\nu}{R(t)} \int_{-\infty}^{\sqrt{\pi}} \exp(-u_{\text{LH}}^2(t)) du_{\text{LH}}(t) = \frac{1}{2} \frac{\nu}{R(t)} \sqrt{\pi},
 \end{aligned} \tag{5.28}$$

και για τον δεύτερο όρο στην αγκύλη (2^{ος} όρος) της Σχέσης (5.27),

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \exp\left(-\frac{R^2(t)}{\nu^2} \tau_{\text{LH}}^2(t)\right) d\tau_{\text{LH}}(t) &= \int_0^{\frac{R(t)}{\nu}} \exp(-u_{\text{LH}}^2(t)) \frac{\nu}{R(t)} du_{\text{LH}}(t) = \\
 &= \frac{\nu}{R(t)} \int_0^{\frac{R(t)}{\nu}} \exp(-u_{\text{LH}}^2(t)) du_{\text{LH}}(t) = \frac{\nu}{R(t)} \operatorname{erf}\left(\frac{R(t)}{\nu}\right) \frac{\sqrt{\pi}}{2},
 \end{aligned} \tag{5.29}$$

⁽¹³⁾ Για την αλλαγή μεταβλητών $1 - \frac{1}{\tau(t)} = \tau_{\text{LH}}(t)$, έχουμε: $\tau(t) = 0 \rightarrow \tau_{\text{LH}}(t) = -\infty$, και για $\tau(t) = \infty \rightarrow \tau_{\text{LH}}(t) = 1$, όπου $d\tau_{\text{LH}}(t) = (1/\tau^2(t)) d\tau(t)$

⁽¹⁴⁾ Για την αλλαγή μεταβλητών $\frac{R(t)}{\nu} \tau_{\text{LH}}(t) = u_{\text{LH}}(t)$, έχουμε: $\tau_{\text{LH}}(t) = 0 \rightarrow u_{\text{LH}}(t) = 0$, για $\tau_{\text{LH}}(t) = 1 \rightarrow u_{\text{LH}}(t) = \frac{R(t)}{\nu}$, και για $\tau_{\text{LH}}(t) = -\infty \rightarrow u_{\text{LH}}(t) = -\infty$, όπου $d\tau_{\text{LH}}(t) = \left(\frac{\nu}{R(t)}\right) du_{\text{LH}}(t)$

όπου,

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{R(t)}{\nu}} \exp(-u_{\text{LH}}^2(t)) du_{\text{LH}}(t) = \operatorname{erf}\left(\frac{R(t)}{\nu}\right), \quad (\text{βλέπε βασικές ιδιότητες της error function } \operatorname{erf}() \text{ από Abramowitz and Stegun, 1975}).$$

Αντικαθιστώντας κατάλληλα τους υπολογισμούς των όρων (1^{ος}, 2^{ος}) από τις Σχέσεις (5.28 και 5.29) αντίστοιχα στην Σχέση (5.27), καταλήγουμε στην αναλυτική έκφραση της περιθώριας συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας του αδιάστατου πλάτους του κύματος $f(R(t))$ για μια δεδομένη χρονική στιγμή t και για μικρές τιμές του $\nu \ll 1$, δηλ.,

$$\begin{aligned} f(R(t)) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}\nu} \left(1 + \frac{\nu^2}{4}\right) R^2(t) e^{-R^2(t)} \left[\frac{1}{2} \frac{\nu}{R(t)} \sqrt{\pi} + \frac{\nu}{R(t)} \operatorname{erf}\left(\frac{R(t)}{\nu}\right) \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right] \\ &= \left(1 + \frac{\nu^2}{4}\right) R(t) e^{-R^2(t)} \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{R(t)}{\nu}\right) \right]. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Βασίζόμενοι στις χαρακτηριστικές ιδιότητες της περιθώριας συνάρτησης αθροιστικής κατανομής πιθανότητας (marginal distribution function), (δηλ., $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$), για την αναλυτική έκφραση της περιθώριας συνάρτησης αθροιστικής κατανομής της αδιάστατης τυχαίας μεταβλητής της περιόδου του κύματος $F(\tau(t))$, θα ολοκληρώσουμε την σππ της Σχέσης (5.26) για μια δεδομένη χρονική στιγμή t ως προς $\tau(t)$ με την αλλαγή στα όρια του ολοκληρώματος να ικανοποιεί την φυσική σημασία της αδιάστατης περιόδου του κύματος $\tau(t) > 0$, δηλ.,:

$$\begin{aligned} F(\tau(t)) &= \int_{-\infty}^{\tau(t)} f(\tau_x(t)) d\tau_x(t) = \int_{-\infty}^0 f(\tau_x(t)) d\tau_x(t) + \int_0^{\tau(t)} f(\tau_x(t)) d\tau_x(t) \\ &= \int_0^{\tau(t)} \left(1 + \frac{1}{4}\nu^2\right) \frac{1}{2\nu\tau_x^2(t)} \left(1 + \frac{1}{\nu^2} \left(1 - \frac{1}{\tau_x(t)}\right)^2\right)^{-3/2} d\tau_x(t), \end{aligned}$$

όπου ακολουθώντας την διαδικασία της αλλαγής μεταβλητών⁽¹⁵⁾ $1 - \frac{1}{\tau_x(t)} = \tau_{\text{LH}}(t)$, όπως και προηγουμένως για την Σχέση (5.27), έχουμε:

$$F(\tau(t)) = \left(1 + \frac{\nu^2}{4}\right) \frac{1}{2\nu} \int_{-\infty}^{1 - \frac{1}{\tau(t)}} \left[1 + \left(\frac{\tau_{\text{LH}}(t)}{\nu}\right)^2 \right]^{-3/2} d\tau_{\text{LH}}(t). \quad (5.31)$$

⁽¹⁵⁾ Για την αλλαγή μεταβλητών $1 - \frac{1}{\tau_x(t)} = \tau_{\text{LH}}(t)$, έχουμε: $\tau_x(t) = 0 \rightarrow \tau_{\text{LH}}(t) = -\infty$, και για $\tau_x(t) = \tau(t) \rightarrow \tau_{\text{LH}}(t) = 1 - 1/\tau(t)$, όπου $d\tau_{\text{LH}}(t) = (1/\tau_x^2(t)) d\tau_x(t)$

Ακολουθώντας ξανά την διαδικασία της αλλαγής μεταβλητών ⁽¹⁶⁾, δηλ.,
 $\tau_{\text{LH}}(t)/v = \tan(\Lambda(t))$ με την αντίστοιχη αλλαγή στα όρια του ολοκληρώματος στην Σχέση
 (5.31), καταλήγουμε στην αναλυτική έκφραση της περιθώριας συνάρτησης αθροιστικής
 κατανομής της αδιάστατης τυχαίας μεταβλητής της περιόδου του κύματος, δηλ.,

$$\begin{aligned}
 F(\tau(t)) &= \left(1 + \frac{v^2}{4}\right) \frac{1}{2v} \int_{-\pi/2}^{\arctan\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{\tau(t)v}\right)} \left(1 + \tan^2(\Lambda(t))\right)^{-3/2} \frac{v}{\cos^2(\Lambda(t))} d\Lambda(t) \\
 &= \left(1 + \frac{v^2}{4}\right) \frac{1}{2v} \int_{-\pi/2}^{\arctan\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{\tau(t)v}\right)} \left(1/\cos^2(\Lambda(t))\right)^{-3/2} \frac{v}{\cos^2(\Lambda(t))} d\Lambda(t) \\
 &= \left(1 + \frac{v^2}{4}\right) \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\arctan\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{\tau(t)v}\right)} \cos^3(\Lambda(t)) \Lambda(t) \frac{d\Lambda(t)}{\cos^2(\Lambda(t))} \\
 &= \left(1 + \frac{v^2}{4}\right) \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\arctan\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{\tau(t)v}\right)} \cos(\Lambda(t)) d\Lambda(t) \\
 &= \left(1 + \frac{v^2}{4}\right) \frac{1}{2} \left[\sin(\Lambda(t)) \right]_{-\pi/2}^{\arctan\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{\tau(t)v}\right)} \\
 &= \left(1 + \frac{v^2}{4}\right) \frac{1}{2} \left[\sin\left(\arctan\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{\tau(t)v}\right)\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right]^{(17)} \\
 &= \left(1 + \frac{v^2}{4}\right) \frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{\tau(t)v}\right)^2 + 1}}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{\tau(t)v}\right)^2}} + 1 \right]
 \end{aligned}$$

⁽¹⁶⁾ Για την αλλαγή μεταβλητών $\frac{\tau_{\text{LH}}(t)}{v} = \tan(\Lambda(t))$ με $\Lambda(t) = \arctan\left(\frac{\tau_{\text{LH}}(t)}{v}\right)$, έχουμε: $\tau_{\text{LH}}(t) = -\infty \rightarrow \Lambda(t) = -\pi/2$, και για $\tau_{\text{LH}}(t) = 1 - \frac{1}{\tau(t)} \rightarrow \Lambda(t) = \arctan\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{\tau(t)v}\right)$, όπου $d\tau_{\text{LH}}(t) = \left(v/\cos^2(\Lambda(t))\right) d\Lambda(t)$

⁽¹⁷⁾ $\arctan(x) = y \rightarrow x = \tan(y) \rightarrow x = \sin(y)/\cos(y) \rightarrow x^2 = \sin^2(y)/\cos^2(y) \rightarrow x^2 = \sin^2(y)/(1 - \sin^2(y)) \rightarrow \sin^2(y) = x^2 - x^2 \sin^2(y) \rightarrow \sin^2(y) = x^2/(1 + x^2) \rightarrow \sin(y) = \pm \sqrt{x^2/(1 + x^2)}$

$$\begin{aligned}
 &= \left(1 + \frac{\nu^2}{4}\right) \frac{1}{2} \left[\frac{\frac{1}{\tau(t)\nu}(\tau(t)-1)}{\sqrt{1 + \frac{1}{\nu^2} - \frac{2}{\nu^2\tau(t)} + \frac{1}{\nu^2\tau^2(t)}}} + 1 \right] \\
 &= \left(1 + \frac{\nu^2}{4}\right) \frac{1}{2} \left[\frac{\tau(t)-1}{\sqrt{(\nu^2+1)\tau^2(t)-2\tau(t)+1}} + 1 \right]. \tag{5.32}
 \end{aligned}$$

Βασιζόμενοι όπως και προηγουμένως στις χαρακτηριστικές ιδιότητες της περιθώριας συνάρτησης κατανομής πιθανότητας για την αναλυτική έκφραση της περιθώριας συνάρτησης αθροιστικής κατανομής της αδιάστατης τυχαίας μεταβλητής του πλάτους του κύματος $F(R(t))$, θα ολοκληρώσουμε την σππ της Σχέσης (5.30) για μια δεδομένη χρονική στιγμή t ως προς $R(t)$ με την αντίστοιχη αλλαγή στα όρια του ολοκληρώματος να ικανοποιεί την φυσική σημασία του αδιάστατου πλάτους του κύματος $R(t) > 0$, δηλ.,

$$\begin{aligned}
 F(R(t)) &= \int_{-\infty}^{R(t)} f(R_x(t)) dR_x(t) = \int_{-\infty}^0 f(R_x(t)) dR_x(t) + \int_0^{R(t)} f(R_x(t)) dR_x(t) \\
 &= \int_0^{R(t)} \left(1 + \frac{\nu^2}{4}\right) R_x(t) e^{-R_x^2(t)} \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{R_x(t)}{\nu}\right)\right] dR_x(t) \\
 &= \left(1 + \frac{\nu^2}{4}\right) \left[\int_0^{R(t)} R_x(t) e^{-R_x^2(t)} dR_x(t) + \int_0^{R(t)} R_x(t) e^{-R_x^2(t)} \operatorname{erf}\left(\frac{R_x(t)}{\nu}\right) dR_x(t) \right] \\
 &= \left(1 + \frac{\nu^2}{4}\right) \left[\left[-e^{-R_x^2(t)/2}\right]_0^{R(t)} + \int_0^{R(t)} \frac{\partial(-e^{-R_x^2(t)/2})}{\partial R_x(t)} \operatorname{erf}\left(\frac{R_x(t)}{\nu}\right) dR_x(t) \right] \\
 &= \left(1 + \frac{\nu^2}{4}\right) \left[\left[-e^{-R_x^2(t)/2}\right]_0^{R(t)} + \left[\frac{-e^{-R_x^2(t)}}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{R_x(t)}{\nu}\right)\right]_0^{R(t)} - \int_0^{R(t)} \frac{-e^{-R_x^2(t)}}{2} \frac{\partial\left(\operatorname{erf}\left(\frac{R_x(t)}{\nu}\right)\right)}{\partial R_x(t)} dR_x(t) \right] \tag{18}
 \end{aligned}$$

(18) Από βασικό κανόνα παραγοντικής ολοκλήρωσης για το ορισμένο ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned}
 &= \left(1 + \frac{v^2}{4}\right) \left[\frac{1}{2} \left(1 - e^{-R^2(t)}\right) + \frac{-e^{-R^2(t)}}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{R(t)}{v}\right) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{R(t)} \frac{e^{-R_x^2(t)}}{2} e^{-(R_x(t)/v)^2} \frac{1}{v} dR_x(t) \right] \quad (19) \\
 &= \left(1 + \frac{v^2}{4}\right) \left[\frac{1}{2} \left(1 - e^{-R^2(t)}\right) - \frac{e^{-R^2(t)}}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{R(t)}{v}\right) + \frac{1}{\sqrt{\pi}v} \int_0^{R(t)} \overbrace{e^{-R_x^2(t)\left(1 + \frac{1}{v^2}\right)}}^{(1)} dR_x(t) \right]. \quad (5.33)
 \end{aligned}$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος (1) της Σχέσης (5.33) στην αγκύλη θα ακολουθήσουμε την διαδικασία της αλλαγής μεταβλητών⁽²⁰⁾ $R_{\text{LH}}(t) = R_x(t) \sqrt{1 + \frac{1}{v^2}}$, με την αντίστοιχη αλλαγή στα όρια του ολοκληρώματος, δηλ.,

$$\begin{aligned}
 \int_0^{R(t)} e^{-R_x^2(t)\left(1 + \frac{1}{v^2}\right)} dR_x(t) &= \int_0^{R(t)\sqrt{1 + \frac{1}{v^2}}} e^{-R_{\text{LH}}^2(t)} \left(1 / \sqrt{1 + \frac{1}{v^2}}\right) dR_{\text{LH}}(t) = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{v^2}}} \int_0^{R(t)\sqrt{1 + \frac{1}{v^2}}} e^{-R_{\text{LH}}^2(t)} dR_{\text{LH}}(t) = \frac{\operatorname{erf}\left(R(t)\sqrt{1 + \frac{1}{v^2}}\right) \sqrt{\pi}}{\sqrt{1 + \frac{1}{v^2}} 2}, \quad (5.34)
 \end{aligned}$$

οπότε με κατάλληλη αντικατάσταση των Σχέσεων (5.34 στην 5.33) καταλήγουμε στην αναλυτική έκφραση της περιθώριας συνάρτησης αθροιστικής κατανομής της αδιάστατης τυχαίας μεταβλητής του πλάτους του κύματος, δηλ.,

$$\begin{aligned}
 F(R(t)) &= \\
 &= \left(1 + \frac{v^2}{4}\right) \left[\frac{1}{2} \left(1 - e^{-R^2(t)}\right) - \frac{e^{-R^2(t)}}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{R(t)}{v}\right) + \frac{1}{2v} \frac{\operatorname{erf}\left(R(t)\sqrt{1 + \frac{1}{v^2}}\right)}{\sqrt{1 + \frac{1}{v^2}}} \right] \\
 &= \left(1 + \frac{v^2}{4}\right) \frac{1}{2} \left[1 - e^{-R^2(t)} - e^{-R^2(t)} \operatorname{erf}\left(\frac{R(t)}{v}\right) + \frac{1}{\cancel{\sqrt{1 + v^2}}} \operatorname{erf}\left(R(t)\sqrt{1 + \frac{1}{v^2}}\right) \right]
 \end{aligned}$$

⁽¹⁹⁾ Από βασικές ιδιότητες της error function $\operatorname{erf}(\cdot)$, δηλ., $\frac{\partial}{\partial x} \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-x^2)$, και $\operatorname{erf}(0) = 0$

⁽²⁰⁾ Για την αλλαγή μεταβλητών $R_{\text{LH}}(t) = R_x(t) \sqrt{1 + (1/v^2)}$, έχουμε: $R_x(t) = 0 \rightarrow R_{\text{LH}}(t) = 0$, και για $R_x(t) = R(t) \rightarrow R_{\text{LH}}(t) = R(t) \sqrt{1 + (1/v^2)}$, όπου $dR_{\text{LH}}(t) = (\sqrt{1 + (1/v^2)}) dR_x(t)$

$$= \left(1 + \frac{\nu^2}{4}\right) \frac{1}{2} \left[\operatorname{erf} \left(R(t) \sqrt{1 + \frac{1}{\nu^2}} \right) \frac{1}{\sqrt{1 + \nu^2}} - e^{-R^2(t)} \left(1 + \operatorname{erf} \left(\frac{R(t)}{\nu} \right) \right) + 1 \right]. \quad (5.35)$$

Η απλούστερη έκφραση στην εκτίμηση της παραμέτρου καθορισμού του μέτρου της διασποράς των τιμών της φασματικής πυκνότητας γύρω από την μέση συχνότητα (δηλ., spectral width parameter $\nu = \sqrt{(m_2 m_0 / m_1^2)} - 1$, από Longuet-Higgins, 1975), παράμετρος που εξαρτάται από φασματικές ροπές μόνο μέχρι δευτέρας τάξης, καθιστά πιο αποτελεσματική τους υπολογισμούς των ασκ, σππ και των περιθωρίων συναρτήσεων κατανομής πιθανότητας των αδιάστατων τυχαίων μεταβλητών του πλάτους κύματος και περιόδου μια οποιαδήποτε χρονική στιγμή t σε κυματικά δεδομένα όπως δίνονται μέσω των Σχέσεων (5.26, 5.30, 5.32, και 5.35). Η ασταθής συμπεριφορά των φασματικών ροπών τέταρτης τάξης στην αντίστοιχη παράμετρο καθορισμού (δηλ., spectral width parameter $\varepsilon = \sqrt{(m_0 m_4 - m_2^2)} / m_0 m_4$ από Cavanie et al. 1976), αναδεικνύει το βασικό πλεονέκτημα του μοντέλου Longuet-Higgins (1983) σε υπολογισμούς κατά την μοντελοποίηση του πλάτους και της περιόδου των θαλασσιών κυματισμών.

Κεφάλαιο 6

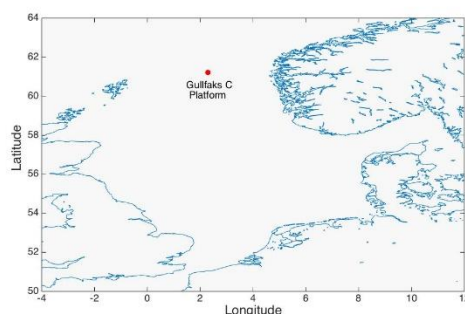
Υπολογισμός βασικών κυματικών χαρακτηριστικών με χρήση προγράμματος Matlab-WAFO σε κυματικά δεδομένα

Στο Κεφάλαιο 6 θα υπολογίσουμε τα βασικά κυματικά χαρακτηριστικά για διαδικασίες στενής λωρίδας, κάνοντας χρήση δεδομένων κατάστασης ανοιχτής θάλασσας σε κυματικά δεδομένα ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας θάλασσας την 24/12/1989 από 17:00pm μέχρι 21:20pm από σημείο της Βορείου Θάλασσας (61.20N 2.30E, Gullfaks C Platform, Σχήμα 6.1(a)) όπως αυτά περιγράφονται από το αρχείο δεδομένων (gfaksr89.dat, Πίνακας 6.1) και μέσω καταλλήλων εντολών του υπολογιστικού λειτουργικού πακέτου WAFO (2000) της Matlab, (βλέπε Brodtkorb et al., 2000 και κώδικες και βασικές εντολές στο Παράρτημα Α).

Πίνακας 6.1: Βασικά χαρακτηριστικά του αρχείου (Data GFAKSR89) των κυματικών δεδομένων από καταγραφικό στην πλατφόρμα Gullfaks C της Βορείου Θάλασσας

Call: load('gfaksr89.dat')
 Size: 39000 X 2
 Sampling
 Rate: 2.5 Hz
 Device: EMI laser
 Source: STATOIL
 Format: ascii, c1: time c2: surface elevation

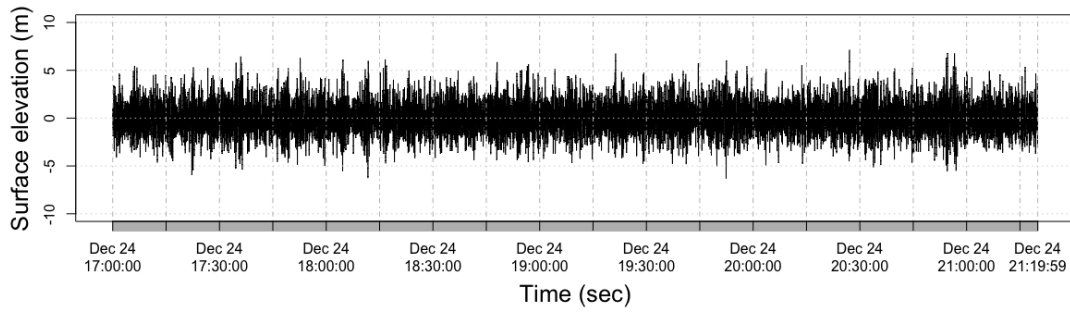
Description: Reconstructed wave data of surface elevation on 24th Dec. 1989 at the Gullfaks C platform in the northern part of the Norwegian North Sea from 17.00 pm to 21.20 pm



Σχήμα 6.1(a): Κυματικά δεδομένα ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας θάλασσας από σημείο της Βορείου Θάλασσας (61.20N 2.30E, Gullfaks C Platform)

Τα κυματικά δεδομένα ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας θάλασσας από την συγκεκριμένη πλατφόρμα δεν επηρεάζονται από φαινόμενα παρεμβολής κοντά στην ακτή και ούτε από φαινόμενα περίθλασης από την γεωμετρία της πλωτής κατασκευής. Το μέγιστο βάθος είναι στα 218 (m), συνεπώς τα συγκεκριμένα δεδομένα χαρακτηρίζονται ως κυματικά δεδομένα από κατάσταση ανοιχτής θάλασσας. Επιπρόσθετα, για την χρονική περίοδο της καταγραφής η κατεύθυνση ανέμου είναι από Νότια κατεύθυνση, το σημαντικό ύψος κύματος $H_s = 6.8(m)$ (η μέση τιμή του 1/3 των υψηλότερων κυμάτων της καταγραφής), η μέση περίοδος μηδενικής υπέρβασης $T_{02} = 8(sec)$, και η περίοδος κορυφής του φάσματος (spectral peak period) είναι $T_p = 10.5(sec)$. Η αναπαράσταση της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας θάλασσας με τα κυματικά δεδομένα του αρχείου (Data GFAKSR89) φαίνεται στο Σχήμα 6.1(b), με τον υπερσύνδεσμο για το αρχείο των δεδομένων:

(<http://www.maths.lth.se/matstat/wafo/documentation/wafodoc/wafo/data/gfaksr89.html>)



Σχήμα 6.1(b): Κυματικά δεδομένα ανύψωσης (αρχείο gfkafs89.dat) της ελεύθερης επιφάνειας θάλασσας την 24/12/1989 από 17:00pm μέχρι 21:20pm από καταγραφικό στην πλατφόρμα Gullfaks C στην Βόρεια Θάλασσα.

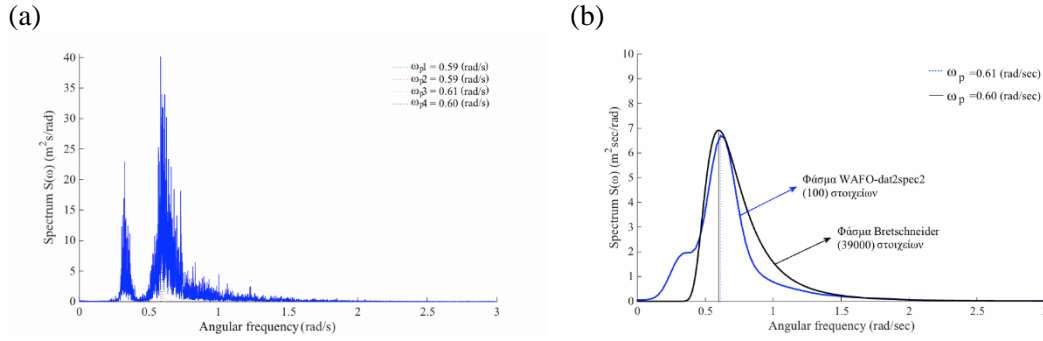
Ειδικότερα, θα αναπαραστήσουμε το πλάτος του κύματος στο χώρο των φάσεων και στο χώρο του χρόνου για την στοχαστική διαδικασία ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας της θάλασσας όπως ορίστηκε στο Κεφάλαιο 2, και η σύνδεση της περιβάλλουσας για διαδικασίες στενής λωρίδας. Στη συνέχεια, με υπολογισμούς στις εκτιμώμενες τιμές των τυχαίων μεταβλητών πλάτους και περιόδου κορυφής του κύματος και στην εκτίμηση της από κοινού σπ των μεταβλητών αυτών θα δωθούν τα συγκριτικά αποτελέσματα από τα μοντέλα εκτίμησης των Cavanie et al. (1976) και Longuet-Higgins (1983) σε κυματικά δεδομένα από την αναλυτική μοντελοποίηση των μεταβλητών αυτών που μελετήθηκε στα Κεφάλαια 4 και 5.

6.1 Αναπαράσταση των διαδικασιών στενής λωρίδας και της περιβάλλουσας του πλάτους κύματος από κυματικά δεδομένα

Για τον υπολογισμό των πλατών a_n , όπως αυτά εκφράζονται μέσω της

$$\sum_{\omega_n = \omega}^{\omega + d\omega} \frac{1}{2} a_n^2 = S(\omega_n) d\omega,$$

χρησιμοποιήσαμε το γενικευμένο φάσμα Bretschneider (βλέπε Παράρτημα C) ως μια ικανοποιητική προσέγγιση της αποτύπωσης του κυματικού φάσματος ενέργειας όπως φαίνεται και στο Σχήμα 6.2, με ω_p κυκλική συχνότητα κορυφής (peak frequency) για το φάσμα ίση με $\omega_p = 0.5984$ (rad/sec), και σημαντικό ύψος κύματος H_s (η μέση τιμή του 1/3 των υψηλότερων κυμάτων της καταγραφής) με $H_s = 6.8$ (m). Ειδικότερα, στο Σχήμα 6.2(a) γίνεται υπολογισμός του φάσματος απευθείας από τα δεδομένα (βλέπε Baxevani et al., 2003) για υπολογισμό φασματικών ροπών από τα δεδομένα με την τεχνική Simpson-integration) και αποτύπωση του φάσματος με την εντολή της WAFO-dat2spec2 και wspecplot. Χρησιμοποιώντας ένα μέρος της καταγραφής (100 στοιχεία), επιτυγχάνουμε εξομάλυνση του φάσματος απευθείας από τα δεδομένα που ικανοποιητικά προσεγγίζεται από το φάσμα Bretschneider στο Σχήμα 6.2(b).



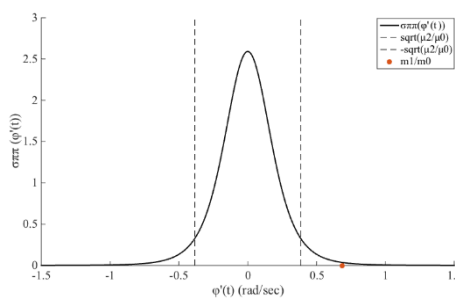
Σχήμα 6.2: Υπολογισμός του φάσματος απευθείας από τα δεδομένα (39000 στοιχεία) με την εντολή της WAFO-dat2spec2 στο (a) και προσέγγιση του φάσματος με εξομάλυνση από ένα μέρος της καταγραφής (100 στοιχεία) από το φάσμα Bretschneider (39000 στοιχεία). Να σημειώσουμε ότι στο (a) η ροπή μηδενικής τάξης υπολογίζεται από το εμβαδόν κάτω της καμπύλης του φάσματος, δηλ., $m_0 = \int_0^\infty S(\omega)d\omega = 2.8900 \text{ (m}^2\text{)}$

Οι τιμές των φασματικών ροπών μηδενικού και πρώτου βαθμού από τα κυματικά δεδομένα του αρχείου (Data GFAKSR89) δίνονται αντίστοιχα $m_0 = 2.8900 \text{ (m}^2\text{)}$ και $m_1 = 1.9770 \text{ (m}^2\text{/sec)}$, με το εύρος κυκλικών συχνοτήτων να κυμαίνεται από 0.3 έως 4 rad/sec, και με μια μέση συχνότητα κυματισμών, $\bar{\omega} = m_1/m_0 = 0.6841 \text{ (rad/sec)}$.

Από την έκφραση της από κοινού συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας των μεταβλητών πλάτους κύματος $A(t)$ και παραγώγου φάσης $\phi'(t)$ (βλέπε υποεδάφιο 5.2, Σχέση (5.15)), ολοκληρώνοντας ως προς $A(t)$ για μια δεδομένη χρονική στιγμή t την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(A(t), \phi'(t))$ της Σχέσης (5.15) καταλήγουμε στην περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της παραγώγου φάσης, δηλ., (βλέπε Παράρτημα L)

$$f(\phi'(t)) = \int_0^\infty f(A(t), \phi'(t)) dA(t) = \frac{\sqrt{\mu_0 / \mu_2}}{2(1 + (\mu_0 / \mu_2) \phi'(t)^2)^{3/2}}, \quad -\infty \leq \phi'(t) \leq \infty,$$

με την αναπαράσταση να φαίνεται στο Σχήμα 6.3.



Σχήμα 6.3: Περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της παραγώγου φάσης από τα κυματικά δεδομένα του αρχείου (Data GFAKSR89)

Απ' την αναπαράσταση της σππ παραγώγου φάσης στο Σχήμα (6.3), βλέπουμε ότι είναι μονοκόρυφη και ότι συγκεντρώνει την μεγαλύτερη πυκνότητα πιθανότητας για στοχαστικές διαδικασίες στενής λωρίδας στην περιοχή από -0.3859 (rad/sec) έως 0.3859 (rad/sec) με $\mu_0 = 2.8900 \text{ (m}^2\text{)}$ και $\mu_2 = 0.4303 \text{ (m}^2\text{/s}^2\text{)}$, δηλ.,

$$-\sqrt{\mu_2 / \mu_0} \leq \phi'(t) \leq \sqrt{\mu_2 / \mu_0}. \quad (6.1)$$

Συνδυάζοντας την προσέγγιση της Σχέσης (6.1) με το spectral width parameter (ν) της Σχέσης (2.6), θα επιβεβαιώσουμε τους υπολογισμούς σε κυματικά δεδομένα του αρχείου (Data GFAKSR89) για διαδικασίες στενής λωρίδας όπως πραγματοποιήσει ο Longuet-Higgins (1983). Δηλ. για $\nu = 0.5640 \ll 1$ και $\bar{\omega} = 0.6841$ (rad/sec), έχουμε:

$$\nu = \sqrt{\frac{m_2 m_0}{m_1^2} - 1} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_0} \frac{1}{\bar{\omega}}} \xrightarrow{\nu \ll 1} \sqrt{\mu_2 / \mu_0} \ll \bar{\omega}. \quad (6.2)$$

Από τους παραπάνω υπολογισμούς και συνδυάζοντας τις Σχέσεις (6.1, 6.2) καταλήγουμε

$$\phi'(t) \ll \bar{\omega},$$

όπου για διαδικασίες στενής λωρίδας η φάση $\Phi(t)$ όπως ορίστηκε μέσω της Σχέσης (2.18) να επιβεβαιώνει προσεγγιστικά την Σχέση (2.20.b), δηλ.,

$$\Phi(t) = \bar{\omega}t + \phi(t), \text{ με } \phi(t) \in [0, 2\pi].$$

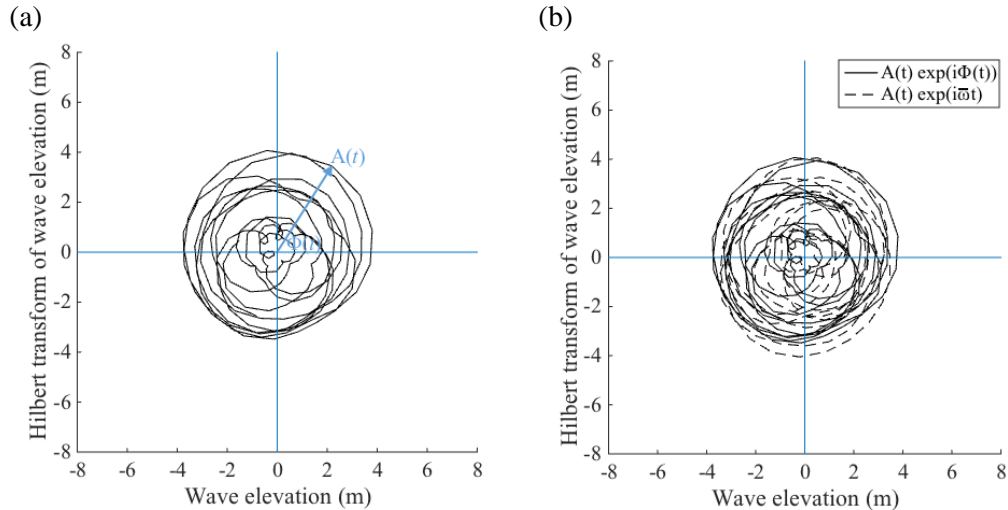
Συνεχίζοντας με την μοντελοποίηση του πλάτους και της φάσης της περιβάλλουσας διαδικασίας για τα κυματικά δεδομένα του αρχείου (Data GFAKSR89), (βλέπε αναλυτικά τους ορισμούς στο υποεδάφιο 2.3), δηλ.,

$$\begin{aligned} x(t; \theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t + \varepsilon_n(\theta)) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\{(\omega_n - \bar{\omega})t + \bar{\omega}t + \varepsilon_n(\theta)\} \\ &= \text{Re}\{A(t)e^{i\phi(t)}e^{i\bar{\omega}t}\} = \text{Re}\{A(t)e^{i\Phi(t)}\}, \end{aligned}$$

όπου $A(t)e^{i\phi(t)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\{i((\omega_n - \bar{\omega})t + \varepsilon_n(\theta))\}$, $A(t) = \sqrt{x^2(t; \theta) + \hat{x}^2(t; \theta)}$, και

$$\Phi(t) = \arctan(\hat{x}(t; \theta) / x(t; \theta)),$$

η αναπαράσταση της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας της θάλασσας $x(t; \theta)$ στο μιγαδικό επίπεδο λαμβάνοντας υπόψη τον μετασχηματισμό Hilbert $\hat{x}(t; \theta)$ στο χώρο των φάσεων φαίνεται στο Σχήμα 6.4(a), με την αντίστοιχη αναπαράσταση της περιβάλλουσας γύρω από την μέση συχνότητα $\bar{\omega}$ στο Σχήμα 6.4(b). Δηλ.,



Σχήμα 6.4: Αναπαράσταση της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας της θάλασσας λαμβάνοντας υπόψη τον μετασχηματισμό Hilbert στο χώρο των φάσεων για δεδομένες χρονικές στιγμές στο διάστημα $t \in [0,100]$ με χρονικό βήμα 0.4 (sec) στο (a), και με την αντίστοιχη αναπαράσταση της περιβάλλουσας γύρω από την μέση συχνότητα $\bar{\omega}=0.6841$ (rad/sec) στο (b) για το ίδιο χρονικό βήμα και στο ίδιο χρονικό διάστημα.

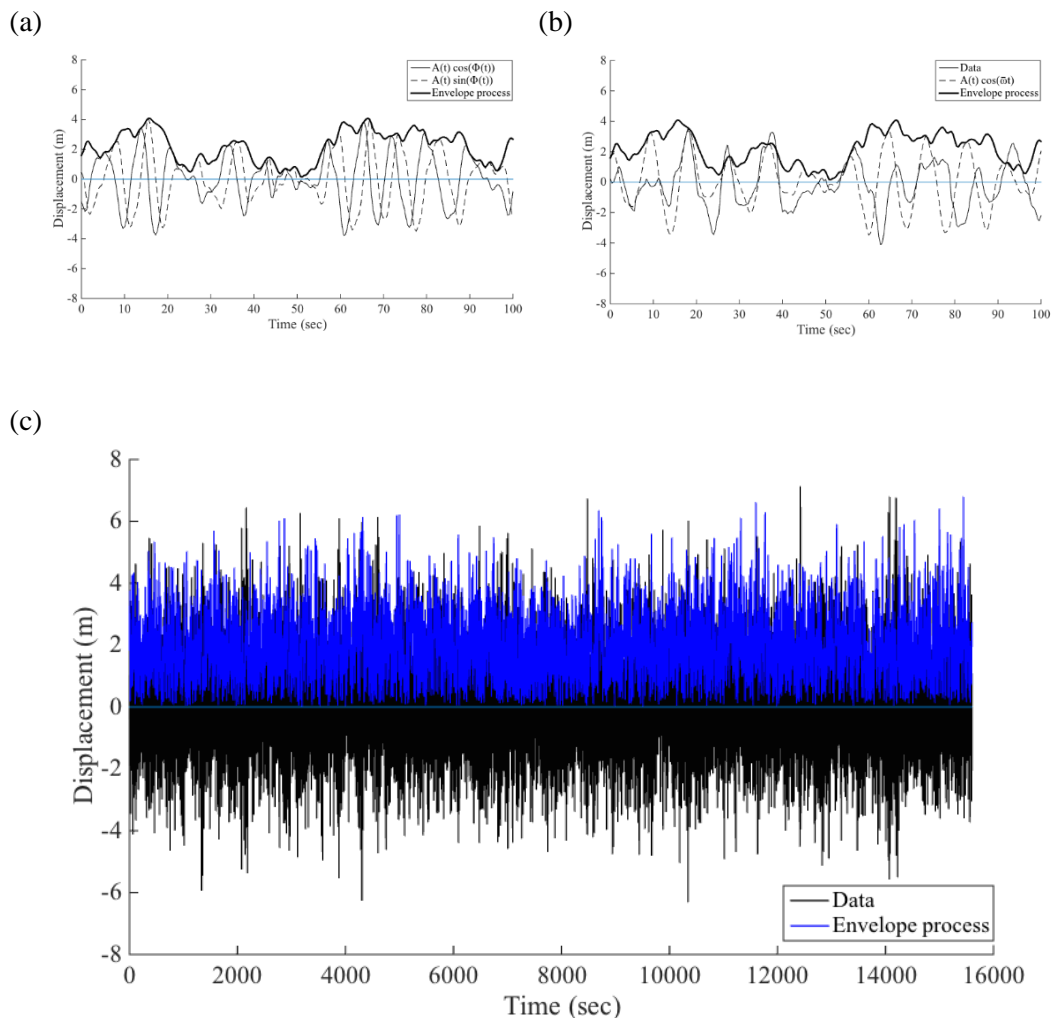
Από το Σχήμα 6.4(a) επιβεβαιώνεται ότι για διαδικασίες που χαρακτηρίζονται ως στενής λωρίδας (narrow band processes), οι αναπαραστάσεις $x(t; \theta)$ και $\hat{x}(t; \theta)$ ακολουθούν αργές μεταβολές με την πάροδο του χρόνου, συνεπώς το πλάτος $A(t)$ ως τυχαία μεταβλητή της στοχαστικής διαδικασίας $z(t; \theta)$ την χρονική στιγμή t στο μιγαδικό επίπεδο, μπορεί να θεωρηθεί περίπου ίσο με το πλάτος της περιβάλλουσας. Να σημειώσουμε ότι η αναπαράσταση στο χώρο φάσεων όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.4(b), δείχνει ότι η φάση $\Phi(t)$ συνεχώς αυξάνει με την πάροδο του χρόνου, συνεπώς το πλάτος του περιστρεφόμενου διανύσματος $z(t; \theta)$ στο μιγαδικό επίπεδο επιβεβαιώνει (βλέπε υποεδάφιο 2.3) ότι διαγράφει μια ελικοειδή τροχιά με μικρές, αυξανόμενες, μεταβολές του πλάτους της έλικας και με γωνιακή ταχύτητα $\bar{\omega} = 0.6841$ (rad/sec) περί του άξονά του.

Λαμβάνοντας υπόψη τα χαρακτηριστικά της στοχαστικής διαδικασίας για στενή λωρίδα, η αναπαράσταση της περιβάλλουσας του μοντελοποιημένου πλάτους της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας της θάλασσας στο χώρο του χρόνου δίνεται στο Σχήμα 6.5 χρησιμοποιώντας τα κυματικά δεδομένα του αρχείου (Data GFAKSR89). Ειδικότερα, στο Σχήμα 6.5(a) αναπαριστώνται οι μικρές μεταβολές στο χώρο του χρόνου για το φάσμα στενής λωρίδας των συνημιτονοειδών όρων στο μοντέλο τυχαίας φάσης και των ημιτονοειδών όρων στον μετασχηματισμό Hilbert, επιβεβαιώνοντας τις μικρές μεταβολές της περιβάλλουσας με την σύνδεση των διαδοχικών κορυφών στο χώρο του χρόνου. Στο Σχήμα 6.5(b) αναπαριστάται η περιβάλλουσα στο χώρο του χρόνου γύρω από την μέση συχνότητα του φέροντος κύματος επιβεβαιώνοντας την προσέγγιση κορυφών μέσω της περιβάλλουσας για την μικρή συχνότητα μεταβολής του εύρους των κορυφών του κύματος και στο Σχήμα 6.5(c) αναπαριστάται η περιβάλλουσα στο σύνολο της καταγραφής προσεγγίζοντας ικανοποιητικά τις κορυφές των κυματικών δεδομένων.

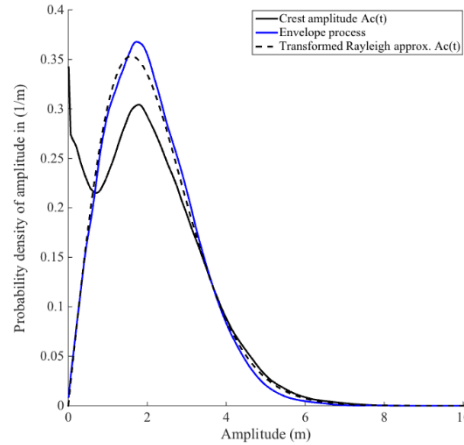
Τέλος, στο Σχήμα 6.5(d) δίνεται η κατανομή της περιβάλλουσας με την κατανομή του πλάτους κορυφής από τα δεδομένα, επιβεβαιώνοντας την προσέγγιση Rayleigh για το πλάτος κορυφής. Να σημειώσουμε ότι για την εκτίμηση των κατανομών του Σχήματος 6.5(d), χρησιμοποιήσαμε τις εκτιμήτριες συναρτήσεις Kernel με τη μέθοδο Epanechnikov (συνάρτηση-εντολή **kde** του WAFO), όπου η κορυφή της σππ από την εκτιμήτρια για το πλάτος κορυφής από τα δεδομένα

υπολογίζεται στην τιμή 1.77 (m) και για την αντίστοιχη κορυφή της περιβάλλουσας στην τιμή 1.72 (m).

Για την παράμετρο L2 που χρησιμοποιείται εσωτερικά στη συνάρτηση-εντολή **kde** (βλέπε Παράρτημα M) για να εξασφαλιστεί ότι η σππ δεν θα πάρει αρνητικές τιμές, ο έλεγχος καταλληλότητας της τιμής της παραμέτρου L2 ορίζεται στην τιμή εκείνη όπου οι μετασχηματισμένες τιμές του πλάτους κορυφής και της περιβάλλουσας να ακολουθούν την κανονική κατανομή. Να σημειώσουμε ότι εφόσον η κατανομή Rayleigh προσεγγίζει καλά το πλάτος κορυφής για καταστάσεις θάλασσας που ακολουθούν την κανονική κατανομή (βλέπε Rychlik et al., 1997; Podgorski et al., 2000), η μετασχηματισμένη κατανομή Rayleigh των τιμών του πλάτους κορυφής (δηλ., οι μετασχηματισμένες τιμές σε τιμές κανονικής κατανομής), θα προσεγγίζει καλά καταστάσεις θάλασσας που αποκλίνουν από την κανονική κατανομή. Ειδικότερα, για τον υπολογισμό της μετασχηματισμένης κατανομής Rayleigh για το πλάτος κορυφής από τα κυματικά δεδομένα, χρησιμοποιούμε την συνάρτηση-εντολή **trraylpdf** (help trraylpdf), επιλέγοντας τον μετασχηματισμό σε τιμές κανονικής κατανομής για το πλάτος κορυφής που προτείνει ο Winterstein με πολυώνυμα Hermite (Winterstein, 1988), μέσω της συνάρτησης-εντολής **hermitetr** (help hermitetr). Η κορυφή της σππ από την προσέγγιση Rayleigh για τις μετασχηματισμένες σε τιμές κανονικής κατανομής του πλάτους κορυφής στο Σχήμα 6.5(d) υπολογίζεται στην τιμή 1.60 (m) προσεγγίζοντας ικανοποιητικά την κατανομή της περιβάλλουσας.



(d)



Σχήμα 6.5: Αναπαράσταση της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας της θάλασσας λαμβάνοντας υπόψη τον μετασχηματισμό Hilbert στο χώρο του χρόνου για δεδομένες χρονικές στιγμές στο διάστημα $t \in [0,100]$ με χρονικό βήμα 0.4 (sec) στο (a), αναπαράσταση της περιβάλλουσας ως προς την μέση συχνότητα $\bar{\omega}$ στο χώρο του χρόνου για το ίδιο χρονικό βήμα και για το ίδιο χρονικό διάστημα στο (b), και η αναπαράσταση της περιβάλλουσας στο (c) για το ίδιο χρονικό βήμα σε ολόκληρο το χρονικό διάστημα της καταγραφής $t \in [0, 15599.6]$ (sec). Στο (d) δίνεται η κατανομή των τιμών του πλάτους της περιβάλλουσας με την κατανομή του πλάτους κορυφής $A_c(t)$ μέσω των εκτιμητριών συναρτήσεων Kernel (Epanechnikov) για τα κυματικά δεδομένα του αρχείου (Data GFAKSR89), αλλά και η προσέγγιση Rayleigh για τις μετασχηματισμένες σε τιμές κανονικής κατανομής του πλάτους κορυφής.

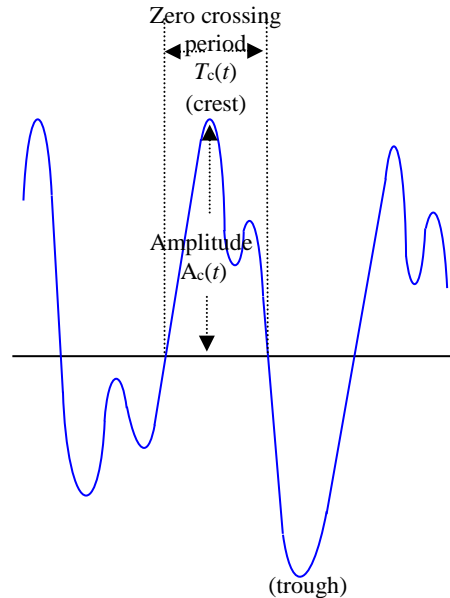
Συνοψίζοντας τα βασικά ευρήματα από την αναπαράσταση βασικών κυματικών χαρακτηριστικών από κυματικά δεδομένα, έχουμε:

- Από το Σχήμα 6.4(a) επιβεβαιώνεται ότι για διαδικασίες που χαρακτηρίζονται ως στενής λωρίδας, το μοντέλο της τυχαίας φάσης για την αναπαράσταση της ελεύθερης επιφάνειας της θάλασσας λαμβάνοντας υπόψη και τον μετασχηματισμός Hilbert στο χώρο των φάσεων ακολουθούν αργές μεταβολές με την πάροδο του χρόνου, συνεπώς το πλάτος ως τυχαία μεταβλητή στο μιγαδικό επίπεδο την χρονική στιγμή t , μπορεί να θεωρηθεί περίπου ίσο με το πλάτος της περιβάλλουσας.
- Η αναπαράσταση της περιβάλλουσας στο Σχήμα 6.5(b) στο χώρο του χρόνου ως προς την μέση συχνότητα $\bar{\omega}$ του φέροντος κύματος (carrier wave) για στοχαστικές διαδικασίες στενής λωρίδας (narrow band processes), ακολουθεί με αρκετή ακρίβεια την αναπαράσταση της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας της θάλασσας.
- Από το Σχήμα 6.5(c,d), η έννοια της περιβάλλουσας κύματος σε κυματικά δεδομένα, προσέγγισε ικανοποιητικά την κατανομή του πλάτους κορυφής.
- Από το Σχήμα 6.5(d), η Rayleigh κατανομή για τις μετασχηματισμένες σε τιμές κανονικής κατανομής του πλάτους κορυφής προσέγγισε ικανοποιητικά την κατανομή της περιβάλλουσας.

6.2 Αναπαράσταση των βασικών πιθανοθεωρητικών κυματικών χαρακτηριστικών

Για την αναπαράσταση των από κοινού συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας του πλάτους και της περιόδου του κύματος και συγκριτικά αποτελέσματα από τα μοντέλα των Cavanie et al. (1976) και Longuet-Higgins (1983), θα χρησιμοποιήσουμε τις μη αδιάστατες μορφές των τυχαίων μεταβλητών πλάτους κορυφής $A_c(t)$ και περιόδου κορυφής $T_c(t)$ του κύματος για μια οποιαδήποτε χρονική στιγμή t όπως φαίνονται στο Σχήμα 6.6. Να σημειώσουμε ότι οι πλήρως ημιτονοειδείς κυματισμοί είναι συμμετρικοί τόσο ως προς τον οριζόντιο, όσο και ως

προς τον κατακόρυφο άξονα, με αποτέλεσμα οι υπολογισμοί των πλατών και των περιόδων τους να μην επηρεάζονται από τον ορισμό που επιλέγεται κάθε φορά (ορισμός άνω- ή κάτω-τομών)⁽²¹⁾. Στην ανάλυσή μας, οι υπολογισμοί έχουν γίνει βασιζόμενοι με τον ορισμό των κάτω τομών (zero-downcrossing waves), με την τιμή της παραμέτρου `method=-3` στην συνάρτηση-εντολή **dat2steep** για τα κυματικά χαρακτηριστικά του πλάτους κορυφής και περιόδου κορυφής του κύματος.

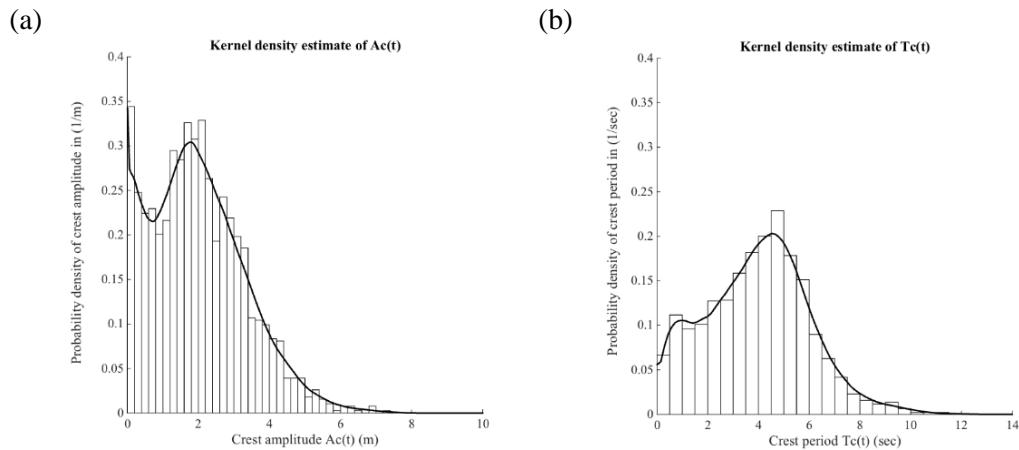


Σχήμα 6.6. Αναπαράσταση των κυματικών παραμέτρων πλάτους κορυφής θαλάσσιου κύματος (crest amplitude) και περιόδου κορυφής των τομών μηδενικής υπέρβασης (zero crossing crest period, i.e., period between up crossing and the next down crossing)

Θα χρησιμοποιήσουμε τις εκτιμήτριες συναρτήσεις Kernel για τον υπολογισμό της από κοινού σππ των τυχαίων μεταβλητών $A_c(t)$ και $T_c(t)$ του κύματος για τα συγκριτικά αποτελέσματα από τα μοντέλα των Cavanie et al. (1976) και Longuet-Higgins (1983) των από κοινού σππ των τυχαίων μεταβλητών πλάτους κορυφής και περιόδου κορυφής του κύματος.

Ειδικότερα, αρχικά υπολογίζουμε την κατανομή για τις περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας (marginal probability density function) των μεταβλητών πλάτους και περιόδου κορυφής μέσω εκτιμήτριας συνάρτησης Kernel με τη μέθοδο Epanechnikov (συνάρτηση-εντολή **kde** του WAFO), καθώς και την τιμή του ολοκληρώματος της σππ των αντίστοιχων μεταβλητών με τη μέθοδο ολοκλήρωσης Simpson (συνάρτηση-εντολή **simpson** του WAFO), βλέπε Ακρίβης και Δούγαλης, (1998). Οι αντίστοιχοι υπολογισμοί για τις περιθώριες συναρτήσεις μέσω της εκτιμήτριας Kernel δίνονται στο Σχήμα 6.7, όπου η κορυφή της κατανομής του δείγματος από την εκτιμήτρια για το πλάτος και την περίοδο κορυφής του κύματος θα είναι η επικρατούσα τιμή (mode), δηλαδή θα είναι η τιμή του δείγματος με την μεγαλύτερη συχνότητα εμφάνισης. Η κορυφή της σππ (δηλ., επικρατούσα τιμή) από την εκτιμήτρια για το πλάτος κορυφής υπολογίζεται στην τιμή 1.77 (m) με $\Pr(A_c \leq 1.77) = 0.46$ (βλέπε Σχήμα 6.7(a)) και η αντίστοιχη κορυφή της σππ για την περίοδο κορυφής υπολογισμένη στην τιμή 4.53 (sec), με $\Pr(T_c \leq 4.53) = 0.59$, (βλέπε Σχήμα 6.7(b)).

⁽²¹⁾ Βλέπε `help perioddef - WAFO` για τους ορισμούς των διαφόρων τύπων κυματικών περιόδων



Σχήμα 6.7: Εκτίμηση (μέσω εκτιμήτριας Kernel-Epanechnikov) της περιθώριας συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας του πλάτους κορυφής $A_c(t)$ στο (a) και της περιόδου κορυφής $T_c(t)$ στο (b), συγκρινόμενη με το ιστόγραμμα της καταγραφής από τα κυματικά δεδομένα του αρχείου (Data GFAKSR89).

Να σημειώσουμε ότι οι υπολογισμοί της τιμής του ολοκληρώματος μέσω της μεθόδου υπολογισμού Simpson για την σππ του πλάτους κορυφής είναι 0.9817 (απόκλιση 0.0183 από την μονάδα) και για την αντίστοιχη περίοδο κορυφής στην τιμή 0.9972 (απόκλιση 0.0028 από την μονάδα). Είναι πιθανό αυτή η απόκλιση στον υπολογισμό της σππ από την μονάδα χρησιμοποιώντας την μέθοδο υπολογισμού Simpson να οφείλεται στο γεγονός ότι η εκτιμώμενη πυκνότητα εμφανίζει σφάλματα για τις μικρές τιμές του πλάτους και της περιόδου κορυφής, (βλέπε Κωνσταντινίδου, 2007).

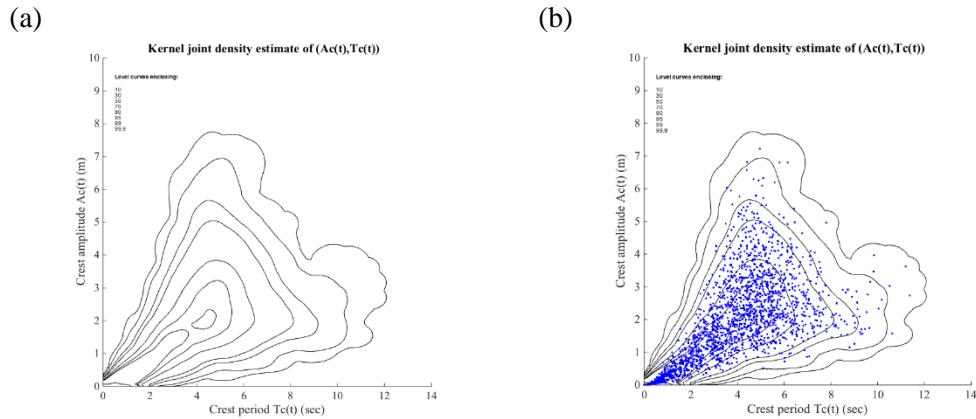
Στην συνέχεια, στο παράδειγμα του Σχήματος 6.8 που ακολουθεί, υπολογίζουμε την από κοινού σππ με την εντολή **kde** της WAFO και σχεδιάζουμε το αποτέλεσμα με την **pdfplot**. Να σημειώσουμε ότι για πιθανότητα εμφάνισης των από κοινού τιμών πλάτους κορυφής και περιόδου κορυφής με ποσοστό 95%, κυμαίνεται σε τιμές για πλάτος κορυφής από 0.25 σε 5.75 (m), και για περίοδο κορυφής από 2 σε 9.25 (sec).

Οι ισούψεις καμπύλες του Σχήματος 6.8 ⁽²²⁾ σχεδιάζονται από το πρόγραμμα έτσι ώστε να περικλείουν πάνω και εσωτερικά των ισούψων από το 99.9% ποσοστό των δεδομένων στην εξωτερική καμπύλη έως το 10% ποσοστό των δεδομένων στην εσωτερική καμπύλη, την αντίστοιχη πιθανότητα εμφάνισης για τις από κοινού τιμές του πλάτους και της περιόδου κορυφής. Δηλαδή, σχεδιάζονται ισούψεις καμπύλες με την ίδια πιθανότητα εμφάνισης από κοινού των τιμών των μεταβλητών αυτών για το 99.9% ποσοστό των δεδομένων στον γεωμετρικό τόπο πάνω και εσωτερικά της εξωτερικής ισούψους καμπύλης και με την ίδια πιθανότητα εμφάνισης από κοινού των τιμών των μεταβλητών αυτών στον γεωμετρικό τόπο πάνω και εσωτερικά της εσωτερικής ισούψους καμπύλης για το 10% ποσοστό των δεδομένων. Η πιθανότητα εμφάνισης από κοινού των τιμών του πλάτους και της περιόδου κορυφής εξωτερικά των ισούψων είναι μεγαλύτερη στον γεωμετρικό τόπο εξωτερικά της εσωτερικής καμπύλης (90% πιθανότητα εμφάνισης εξωτερικά της εσωτερικής ισούψους καμπύλης) και μικρότερη πιθανότητα εμφάνισης από κοινού των τιμών των μεταβλητών αυτών στον γεωμετρικό τόπο εξωτερικά της εξωτερικής καμπύλης (0.1% πιθανότητα εμφάνισης εξωτερικά της εξωτερικής ισούψους καμπύλης).

Να σημειώσουμε ότι η εκτιμήτρια Kernel του Σχήματος 6.8 επιβεβαιώνει την αδυναμία εκτίμησης για την ουρά της κατανομής, δηλ., δυσκολία αποτύπωσης της πυκνότητας εμφάνισης των τιμών του πλάτους και της περιόδου κορυφής εξωτερικά της 99.9% ισούψους καμπύλης λόγω του περιορισμένου αριθμού δείγματος κυματικών δεδομένων (Wand and

⁽²²⁾ "The contour lines are drawn in such a way that they contain predefined proportions of the total probability mass inside the contours", (βλέπε Rychlik and Lindgren, 1997).

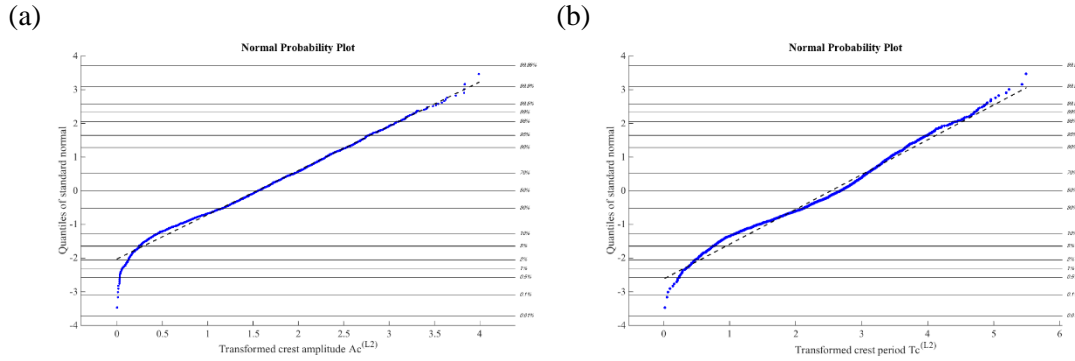
Jones, 1995). Στην περιοχή της κατανομής των τιμών με την μεγαλύτερη συχνότητα εμφάνισης, δηλ., ο γεωμετρικός τόπος των σημείων πάνω και εσωτερικά της 70% ισοϋψούς καμπύλης, έχουμε καλύτερη αποτύπωση της πυκνότητας εμφάνισης των από κοινού τιμών του πλάτους και της περιόδου κορυφής του κύματος. Στον γεωμετρικό τόπο των σημείων εσωτερικά της 70% ισοϋψούς καμπύλης, βρίσκονται και οι επικρατούσες τιμές των μεταβλητών αυτών, (βλέπε επικρατούσες τιμές του Σχήματος 6.7).



Σχήμα 6.8: Εκτίμηση (μέσω εκτιμήτριας Kernel-Epanechnikov) της από κοινού συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας του πλάτους κορυφής $A_c(t)$ και της περιόδου κορυφής $T_c(t)$ στο (a) για προκαθορισμένη πιθανότητα εμφάνισης από κοινού των τιμών των μεταβλητών αυτών σε ποσοστό από 10% έως 99.9% στον γεωμετρικό τόπο πάνω και εσωτερικά των ισοϋψών καμπυλών (μαύρες γραμμές) και η εκτιμώμενη από κοινού σππ στο (b) συγκρινόμενη με τις τιμές των κυματικών δεδομένων (μπλέ τελείες) του αρχείου (Data GFAKSR89).

Στα κυματικά δεδομένα του αρχείου (Data GFAKSR89), η παράμετρος (L2) που χρησιμοποιείται εσωτερικά στη συνάρτηση-εντολή **kde** για να εξασφαλιστεί ότι η σππ δεν θα πάρει αρνητικές τιμές (βλέπε Παράρτημα M), ορίστηκε στην τιμή $L2=0.7$. Η τιμή αυτή μετασχηματίζει κατάλληλα τα δεδομένα του πλάτους κορυφής $A_c(t)$ σε $(A_c(t))^{(L2)}$ και τα δεδομένα της περιόδου κορυφής $T_c(t)$ σε $(T_c(t))^{(L2)}$ ώστε οι κατανομές των μετασχηματισμένων τιμών του πλάτους και περιόδου κορυφής να προσομοιάζουν σε κατανομή Gauss. Να σημειώσουμε ότι εσωτερικά στη συνάρτηση-εντολή **kde**, τα τελικά αποτελέσματα της εκτιμήτριας για την σππ των μεταβλητών αναφέρονται στην αρχική τους μορφή (προ μετασχηματισμό μεταβλητών), με μια αλλαγή μεταβλητών που γίνεται στο τελικό στάδιο εμφάνισης των υπολογισμών.

Στο Σχήμα 6.9 με τη βοήθεια της εντολής **wnormplot**, το γράφημα κανονικής κατανομής είναι σχεδόν γραμμικό, επιβεβαιώνοντας την κατάλληλη τιμή για την παράμετρο εισόδου L2 της εντολής **kde** για το πλάτος A_c και την περίοδο κορυφής T_c . Να σημειώσουμε ότι οι Wand and Jones (1995), έδειξαν ότι η κατανομή Gauss είναι μια από τις πιο απλές κατανομές για τον προσδιορισμό μιας καλής εκτιμήτριας Kernel για την σππ μιας τυχαίας μεταβλητής.



Σχήμα 6.9. Γράφημα κανονικής κατανομής για τα μετασηματισμένα δεδομένα του πλάτους κορυφής $A_c^{(L_2)}$ στο (a) και τα μετασηματισμένα δεδομένα της αντίστοιχης περιόδου κορυφής $T_c^{(L_2)}$ στο (b) με παράμετρο εισόδου $L_2=0.7$ της εντολής **kde** στα κυματικά δεδομένα του αρχείου (Data GFAKSR89).

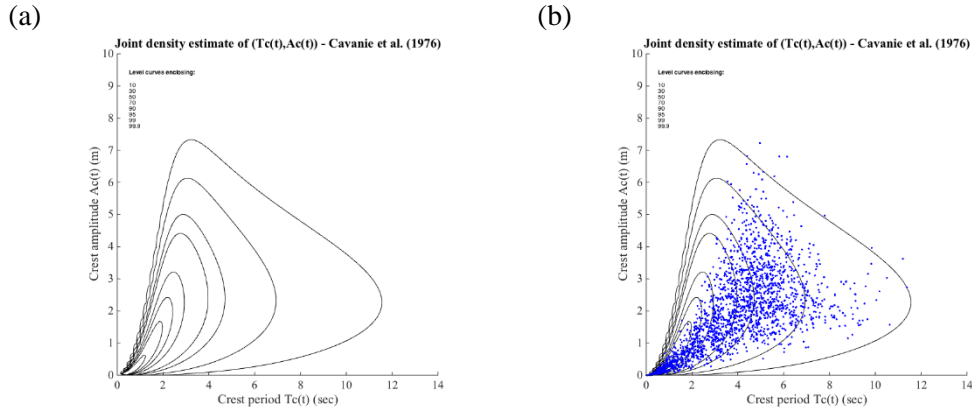
Στην συνέχεια, γίνεται υπολογισμός της από κοινού συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της περιόδου κορυφής και του πλάτους κορυφής (μη αδιάστατες μορφές των τυχαίων μεταβλητών) βασιζόμενοι στο μοντέλο από τους Cavanie et al. (1976) (βλέπε αναλυτικά τους υπολογισμούς στο Κεφάλαιο 4), χρησιμοποιώντας κυματικά δεδομένα του αρχείου (Data GFAKSR89). Το συγκεκριμένο μοντέλο χρησιμοποιεί το συντελεστή εύρους φάσματος ν και το συντελεστή εύρους φάσματος ε για τον υπολογισμό της σππ με την ανάπτυξη συνάρτησης ως εξής:

$$f(A_c(t), T_c(t)) = C_{Cav} \frac{A_c^2(t)}{T_c^5(t)} \exp \left\{ -\frac{A_c^2(t)}{8\varepsilon^2 T_c^4(t)} \left[\left(T_c^2(t) - \left(\frac{1-\varepsilon^2}{1+\nu^2} \right) \right)^2 + \beta^2 \left(\frac{1-\varepsilon^2}{1+\nu^2} \right) \right] \right\},$$

όπου,

$$C_{Cav} = \frac{1}{4} (1-\varepsilon^2) \frac{1}{\varepsilon \sqrt{2\pi}} \alpha_2^{-1} (1+\nu^2)^{-2}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2} \left[1 + (1-\varepsilon^2)^{1/2} \right], \quad \beta = \varepsilon^2 / (1-\varepsilon^2).$$

Για τους υπολογισμούς της σππ μέσω του WAFO από το μοντέλο των Cavanie et al. (1976), υπολογίζουμε πρώτα τους συντελεστές εύρους φάσματος ν και ε με την εντολή **spec2bw**, στη συνέχεια εξάγουμε την σππ με την εντολή **cav76pdf** και τελικά σχεδιάζουμε την κατανομή με χρήση της εντολής **pdfplot** όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.10. Να σημειώσουμε ότι για 95% πιθανότητα εμφάνισης των από κοινού τιμών πλάτους και περιόδου κορυφής του κύματος, το πλάτος κορυφής κυμαίνεται σε τιμές από 0.2 σε 5 (m) και η περίοδος κορυφής κυμαίνεται από 0.75 σε 4.75 (sec). Οι τιμές αυτές από τις ισοϋψείς καμπύλες με ποσοστό 95%, εμφανίζουν απόκλιση κατά απόλυτη τιμή 0.05 (m) και 0.75 (m) από τις min και max τιμές του πλάτους κορυφής υπολογιζόμενες μέσω της εκτιμήτριας Kernel-Epanechnikov και απόκλιση κατά απόλυτη τιμή 1.25 (sec) από την min και 4.5 (sec) από την max αντίστοιχα για τις τιμές της περιόδου κορυφής, (βλέπε Σχήμα 6.8 για τα συγκριτικά αποτελέσματα στους υπολογισμούς).



Σχήμα 6.10: Υπολογισμός της από κοινού συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας του πλάτους κορυφής $A_c(t)$ και της περιόδου κορυφής $T_c(t)$ όπως προκύπτει από το μοντέλο των Cavanie et al. (1976) στο (a) για προκαθορισμένη πιθανότητα εμφάνισης από κοινού των τιμών των μεταβλητών αυτών σε ποσοστό από 10% έως 99.9% στον γεωμετρικό τόπο πάνω και εσωτερικά των ισοϋψών καμπυλών (μαύρες γραμμές) και η υπολογιζόμενη από κοινού σππ στο (b) συγκρινόμενη με τις τιμές των κυματικών δεδομένων (μπλέ τελείες) του αρχείου (Data GFAKSR89). Οι ισοϋψείς καμπύλες περικλείουν πάνω και εσωτερικά την ίδια πιθανότητα εμφάνισης για τις από κοινού τιμές του πλάτους και της περιόδου κορυφής με την ίδια πιθανότητα εμφάνισης των τιμών των μεταβλητών αυτών για το 99.9% ποσοστό των δεδομένων στον γεωμετρικό τόπο πάνω και εσωτερικά της εξωτερικής ισοϋψούς καμπύλης και με την ίδια πιθανότητα εμφάνισης των τιμών των μεταβλητών αυτών στον γεωμετρικό τόπο πάνω και εσωτερικά της εσωτερικής ισοϋψούς καμπύλης για το 10% ποσοστό των δεδομένων.

Να σημειώσουμε ότι ο υπολογισμός ανώτερης τάξης φασματικής ροπής και ειδικότερα της ροπής τέταρτης τάξης (δηλ., $m_4 = 8.0228 \text{ m}^2/\text{sec}^2$) από το ενεργειακό κυματικό φάσμα στην εκτίμηση της παραμέτρου καθορισμού του μέτρου της διασποράς των τιμών της φασματικής πυκνότητας γύρω από την μέση συχνότητα, (δηλ., $\varepsilon = \sqrt{1 - m_2^2 / m_0 m_4} = 0.9289$), χαρακτηρίζει περισσότερο την διαδικασία σαν ευρείας λωρίδας (broad band) παρά σαν διαδικασία στενής λωρίδας. Ειδικότερα, όπως αρχικά υπολόγισαν οι Cartwright and Longuet-Higgins (1956), για διαδικασίες στενής λωρίδας πρέπει $\bar{\omega} \rightarrow \varepsilon^2$ (βλέπε αναλυτικά τους υπολογισμούς στο υποεδάφιο 2.2), ενώ από τους υπολογισμούς που έγιναν βασιζόμενοι στα κυματικά δεδομένα $\bar{\omega} = 0.6841 \text{ (rad/sec)}$ και $\varepsilon^2 = 0.8629 \text{ (rad/sec)}$. Η δυσκολία στην εκτίμηση της παραμέτρου ε και κατά επέκταση και στον υπολογισμό της από κοινού σππ του πλάτους κορυφής και περιόδου κορυφής, αποτυπώνεται και στο Σχήμα 6.10(b) με την πυκνότητα των δεδομένων να εμφανίζουν απόκλιση από τις ισοϋψείς καμπύλες και ιδιαίτερα πάνω και εσωτερικά των ισοϋψών καμπυλών μεγάλης πιθανότητας (π.χ., 95%).

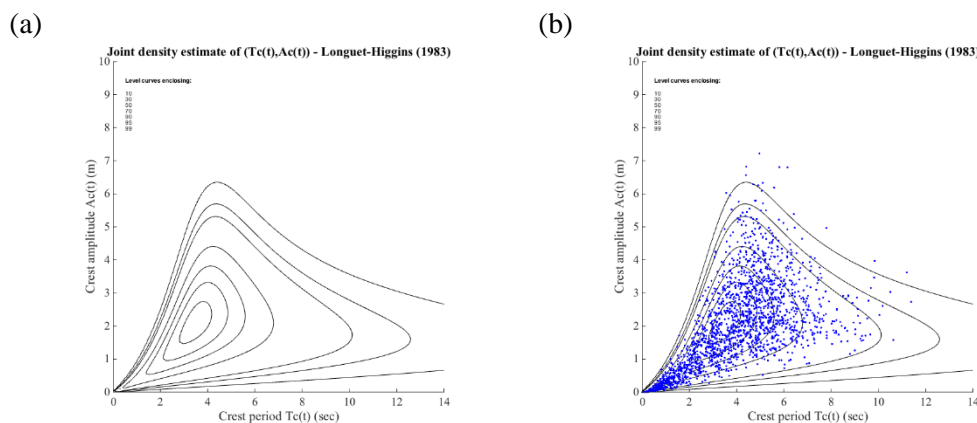
Για τους αντίστοιχους υπολογισμούς της σππ των τυχαίων μεταβλητών $A_c(t), T_c(t)$ για τις μη αδιάστατες εκφράσεις των μεταβλητών αυτών από το μοντέλο Longuet-Higgins (1983) χρησιμοποιούμε την εντολή **lh83pdf** όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.11, με την αναλυτική έκφραση της σππ να εξαρτάται από τον συντελεστή εύρους φάσματος ν (δηλ., φασματικές ροπές μόνο μέχρι δευτέρας τάξης), ως εξής:

$$f(A_c(t), T_c(t)) = C_{LH} \left(\frac{A_c(t)}{T_c(t)} \right)^2 \exp \left\{ -\frac{A_c^2(t)}{8} \left[1 + \frac{(1 - T_c^{-1}(t))^2}{\nu^2} \right] \right\}, \text{ όπου}$$

$$C_{LH} = \frac{1}{8} \frac{1}{\nu \sqrt{2\pi}} \left(1 + (1 + \nu^2)^{-1/2} \right)^{-1},$$

καθιστώντας πιο αποτελεσματική τους υπολογισμούς της σππ. Ειδικότερα, όπως αρχικά υπολόγισε ο Longuet-Higgins (1975, 1983), για διαδικασίες στενής λωρίδας πρέπει $\sqrt{\mu_2 / \mu_0} \ll \bar{\omega}$ (βλέπε αναλυτικά τους υπολογισμούς στο υποεδάφιο 2.2), επιβεβαιώνοντας τους υπολογισμούς που έγιναν βασιζόμενοι στα κυματικά δεδομένα, δηλ., για $\sqrt{\mu_2 / \mu_0} = 0.3858 \ll \bar{\omega} = 0.6841$ (rad/sec), έχουμε $\nu = 0.5640 \ll 1$.

Να σημειώσουμε ότι για τους υπολογισμούς της σππ μέσω του WAFO από το μοντέλο Longuet-Higgins (1983) με ποσοστό 95% πιθανότητα εμφάνισης των από κοινού τιμών πλάτους και περιόδου κορυφής του κύματος, οι τιμές για το πλάτος κορυφής κυμαίνονται από 0.125 σε 5.8 (m) και για την περίοδο κορυφής από 0.25 σε 12.55 (sec). Οι τιμές αυτές από τις ισοϋψείς καμπύλες με ποσοστό 95%, εμφανίζουν απόκλιση κατά απόλυτη τιμή 0.125 (m) και 0.05 (m) από τις min και max τιμές του πλάτους κορυφής υπολογιζόμενες μέσω της εκτιμήτριας Kernel-Epanechnikov και απόκλιση κατά απόλυτη τιμή 1.75 (sec) από την min και 3.3 (sec) από την max τιμή αντίστοιχα για τις τιμές της περιόδου κορυφής, (βλέπε επίσης Σχήμα 6.8 για τα συγκριτικά αποτελέσματα στους υπολογισμούς).



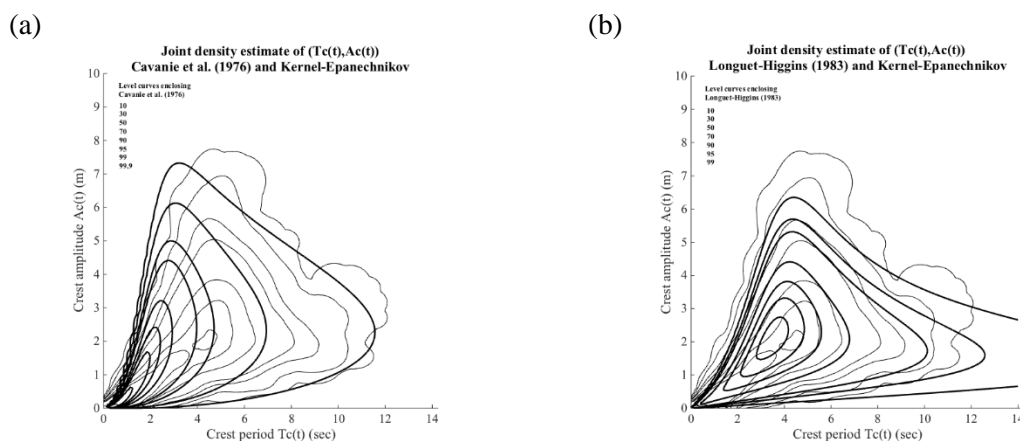
Σχήμα 6.11: Από κοινού σππ $f(A_c(t), T_c(t))$ πλάτους κορυφής και περιόδου κορυφής για $\nu = 0.5640$ από το μοντέλο Longuet-Higgins (1983) στο (α) για προκαθορισμένη πιθανότητα εμφάνισης από κοινού των τιμών των μεταβλητών αυτών σε ποσοστό από 10% έως 99% πάνω και εσωτερικά των ισοϋψών καμπυλών (μαύρες γραμμές), με την αντίστοιχη σππ για τις ίδιες τυχαίες μεταβλητές $(A_c(t), T_c(t))$ στο (β) συγκρινόμενη με τις τιμές των κυματικών δεδομένων (μπλέ τελείες) του αρχείου (Data GFAKSR89). Οι ισοϋψείς καμπύλες περικλείουν πάνω και εσωτερικά την ίδια πιθανότητα εμφάνισης για τις από κοινού τιμές του πλάτους και της περιόδου κορυφής με την ίδια πιθανότητα εμφάνισης των τιμών των μεταβλητών αυτών για το 99% ποσοστό των δεδομένων στον γεωμετρικό τόπο πάνω και εσωτερικά της εξωτερικής ισοϋψούς καμπύλης και με την ίδια πιθανότητα εμφάνισης των τιμών των μεταβλητών αυτών στον γεωμετρικό τόπο πάνω και εσωτερικά της εσωτερικής ισοϋψούς καμπύλης για το 10% ποσοστό των δεδομένων.

Για τα συγκριτικά αποτελέσματα από τα μοντέλα εκτίμησης των Cavanie et al. (1976) και Longuet-Higgins (1983) στις από κοινού τιμές εμφάνισης των τυχαίων μεταβλητών πλάτους κορυφής και περιόδου κορυφής του κύματος και οι αντίστοιχοι υπολογισμοί των μεταβλητών αυτών μέσω της εκτιμήτριας Kernel-Epanechnikov, δίνεται το Σχήμα 6.12 και ο Πίνακας 6.2 με τις υπολογιζόμενες από κοινού τιμές εμφάνισης των μεταβλητών αυτών με πιθανότητα εμφάνισης 90 και 95%.

Να σημειώσουμε την δυσκολία και για τα δυο μοντέλα εκτίμησης στην μη ομαλή αποτύπωση της πυκνότητας της από κοινού εμφάνισης των τιμών των μεταβλητών αυτών για τιμές που εμφανίζονται στην ουρά της κατανομής. Η αποτύπωση της πυκνότητας εμφάνισης των τιμών του πλάτους και της περιόδου κορυφής από το μοντέλο των Cavanie et al. (1976) στον γεωμετρικό τόπο των σημείων πάνω και εξωτερικά της 99.9% ισοϋψούς καμπύλης είναι πιο ομαλή σε σχέση με την αντίστοιχη αποτύπωση της πυκνότητας εμφάνισης των μεταβλητών αυτών με την εξωτερική 99% ισοϋψής από το μοντέλο του Longuet-Higgins (1983). Ειδικότερα, η 99.9% ισοϋψής καμπύλη από το μοντέλο εκτίμησης των Cavanie et al. (1976)

του Σχήματος 6.12(a) εμφανίζει πιο ομαλή σύγκλιση με την αντίστοιχη ισοϋψής μέσω εκτιμήτριας Kernel-Epanechnikov, και λιγότερο ομαλή σύγκλιση των αντίστοιχων 99% ισοϋψών από το μοντέλο του Longuet-Higgins (1983) του Σχήματος 6.12(b).

Στην περιοχή όμως της κατανομής των τιμών με την μεγαλύτερη συχνότητα εμφάνισης, δηλ., ο γεωμετρικός τόπος των σημείων πάνω και εσωτερικά της 70% ισοϋψούς καμπύλης, έχουμε καλύτερη αποτύπωση από το μοντέλο εκτίμησης Longuet-Higgins (1983) της πυκνότητας εμφάνισης των από κοινού τιμών του πλάτους και της περιόδου κορυφής του κύματος σε σχέση με τις αντίστοιχες εκτιμήσεις των μεταβλητών αυτών από το μοντέλο των Cavanie et al. (1976). Ειδικότερα, οι ισοϋψείς καμπύλες μικρότερες ή ίσες του 70% από το μοντέλο εκτίμησης Longuet-Higgins (1983) του Σχήματος 6.12(b) εμφανίζουν πιο ομαλή σύγκλιση με τις αντίστοιχες ισοϋψείς μέσω εκτιμήτριας Kernel-Epanechnikov, και λιγότερο ομαλή σύγκλιση των αντίστοιχων ισοϋψών από το μοντέλο των Cavanie et al. (1976) του Σχήματος 6.12(a).



Σχήμα 6.12: Στο (a) δίνεται ο υπολογισμός της από κοινού συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας του πλάτους κορυφής $A_c(t)$ και της περιόδου κορυφής $T_c(t)$ όπως προκύπτει από το μοντέλο των Cavanie et al. (1976) για προκαθορισμένη πιθανότητα εμφάνισης από κοινού των τιμών των μεταβλητών αυτών σε ποσοστό από 10% έως 99.9% στον γεωμετρικό τόπο πάνω και εσωτερικά των ισοϋψών καμπυλών (μαύρες bold-γραμμές) και η υπολογιζόμενη από κοινού σππ των μεταβλητών αυτών μέσω εκτιμήτριας Kernel-Epanechnikov (μαύρες γραμμές). Στο (b) δίνεται η από κοινού σππ του πλάτους κορυφής και περιόδου κορυφής από το μοντέλο Longuet-Higgins (1983) για προκαθορισμένη πιθανότητα εμφάνισης από κοινού των τιμών των μεταβλητών αυτών σε ποσοστό από 10% έως 99% πάνω και εσωτερικά των ισοϋψών καμπυλών (μαύρες bold-γραμμές), με την εκτιμώμενη σππ για τις ίδιες τυχαίες μεταβλητές μέσω εκτιμήτριας Kernel-Epanechnikov (μαύρες γραμμές).

Οι υπολογισμοί που βασίζονται στο μοντέλο Longuet-Higgins (1983) εμφανίζουν την μικρότερη κατά απόλυτη τιμή απόκλιση στις max τιμές των μεταβλητών σε σχέση με τους υπολογισμούς που βασίζονται στο μοντέλο των Cavanie et al. (1976), από την σύγκριση των τιμών αυτών αντίστοιχα μέσω της εκτιμήτριας Kernel-Epanechnikov. Επιπρόσθετα, η απόκλιση στις εκτιμώμενες max τιμές των μεταβλητών από την σύγκριση των τιμών αυτών αντίστοιχα μέσω της εκτιμήτριας Kernel-Epanechnikov μειώνεται πιο ομαλά (περισσότερο ομαλά το πλάτος κορυφής και λιγότερο ομαλά η περίοδος κορυφής) από το μοντέλο Longuet-Higgins (1983) με την αύξηση της πιθανότητας εμφάνισης από 90 σε 95% για τις από κοινού τιμές εμφάνισης του πλάτους και της περιόδου κορυφής πάνω και εσωτερικά των αντίστοιχων ισοϋψών. Με τους αντίστοιχους υπολογισμούς από το μοντέλο των Cavanie et al. (1976), έχουμε λιγότερο ομαλή συμπεριφορά και για το πλάτος και για την περίοδο κορυφής.

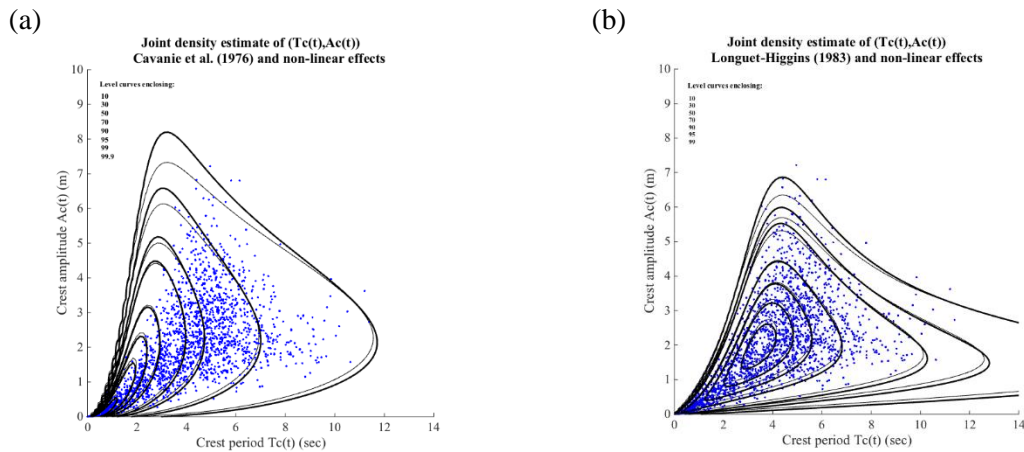
Πίνακας 6.2: Συγκριτικά αποτελέσματα των μεταβλητών πλάτους και περιόδου κορυφής κύματος από τα μοντέλα εκτίμησης των Cavanie et al. (1976) και Longuet-Higgins (1983) στις min και max τιμές αντίστοιχα από τις τιμές των ισοϋψών καμπύλων με πιθανότητα εμφάνισης πάνω και εσωτερικά των ισοϋψών 90 και 95% σε σχέση με τους υπολογισμούς μέσω της εκτιμήτριας Kernel-Epanechnikov για τις min και max τιμές των μεταβλητών αυτών αντίστοιχα.

Ισοϋψείς καμπύλες	90%						95%							
	Μεταβλητές			A _c (t) (m)			T _c (t) (sec)			A _c (t) (m)			T _c (t) (sec)	
Τιμές από τις ισοϋψείς καμπύλες	min	max	Δmax	min	max	Δmax	min	max	Δmax	min	max	Δmax		
Kernel-Epanechnikov	0.250	5.125		2.000	8.125		0.250	5.750		2.000	9.250			
Cavanie et al. (1976)	0.200	4.450	0.675	0.750	3.850	4.275	0.200	5.000	0.750	0.750	4.750	4.500		
Longuet-Higgins (1983)	0.125	5.350	0.225	0.250	10.200	2.075	0.125	5.800	0.050	0.250	12.550	3.300		

Να σημειώσουμε ότι η απλούστερη έκφραση στην εκτίμηση της παραμέτρου καθορισμού του μέτρου της διασποράς των τιμών της φασματικής πυκνότητας γύρω από την μέση συχνότητα (δηλ., $\nu = \sqrt{(m_2 m_0 / m_1^2)} - 1 = 0.5640$) από Longuet-Higgins, (1975), παράμετρος που εξαρτάται από φασματικές ροπές μόνο μέχρι δευτέρας τάξης, καθιστά πιο αποτελεσματική τους υπολογισμούς της σπ του πλάτους και της περιόδου κορυφής του κύματος μια οποιαδήποτε χρονική στιγμή t σε κυματικά δεδομένα όπως φαίνεται από το Σχήμα 6.11(b). Η ασταθής συμπεριφορά των φασματικών ροπών τέταρτης τάξης στην παράμετρο ε από Cavanie et al. 1976), αναδεικνύει το βασικό πλεονέκτημα του μοντέλου Longuet-Higgins (1983) σε υπολογισμούς κατά την μοντελοποίηση του πλάτους και της περιόδου των θαλασσίων κυματισμών.

Τέλος, στο Σχήμα 6.13 δίνονται τα συγκριτικά αποτελέσματα στα μοντέλα εκτίμησης από Cavanie et al. (1976) και Longuet-Higgins (1983) των από κοινού μεταβλητών του πλάτους και περιόδου κορυφής του κύματος κατά το βραχυχρόνιο βήμα λαμβάνοντας υπόψη την ύπαρξη και επίδραση των μη-γραμμικών διαδικασιών στην εξέλιξη των καταστάσεων θάλασσας (π.χ., μεγαλύτερες κορυφές από ότι κοιλάδες). Να σημειώσουμε ότι εφόσον η κατανομή Rayleigh προσεγγίζει καλά τις μεταβλητές για καταστάσεις θάλασσας που ακολουθούν την κανονική κατανομή (βλέπε υποεδάφιο 6.1, Σχήμα 6.5(d)), η μετασχηματισμένη κατανομή Rayleigh των τιμών των μεταβλητών αυτών (δηλ., οι μετασχηματισμένες τιμές σε τιμές κανονικής κατανομής), θα προσεγγίζει καλά καταστάσεις θάλασσας που αποκλίνουν από την κανονική κατανομή.

Ειδικότερα, για τον υπολογισμό της μετασχηματισμένης κατανομής Rayleigh για το πλάτος και περίοδο κορυφής από τα κυματικά δεδομένα στα μοντέλα εκτίμησης από Cavanie et al. (1976) και Longuet-Higgins (1983) των από κοινού μεταβλητών αυτών, χρησιμοποιούμε τον μετασχηματισμό σε τιμές κανονικής κατανομής για το πλάτος κορυφής που προτείνει ο Winterstein με πολυώνυμα Hermite (Winterstein, 1988), μέσω της συνάρτησης-εντολής **hermitetr** (help hermitetr). Ο μετασχηματισμός των μεταβλητών για το πλάτος και περίοδο κορυφής από τα κυματικά δεδομένα στα μοντέλα εκτίμησης, βελτιώνει λίγο τα αποτελέσματα των μοντέλων καθώς αν συμπεριλάβουμε στους υπολογισμούς και μη-γραμμικές επιδράσεις προκύπτουν ελαφρώς μεγαλύτερες κορυφές κυμάτων στους αντίστοιχους υπολογισμούς της σπ των από κοινού μεταβλητών. Χαρακτηριστικά όπως φαίνεται από τις μεγαλύτερες κορυφές των ισοϋψών στο Σχήμα 6.13, οι μέγιστες τιμές των μεταβλητών πάνω στις 99.9%, 99%, και 95% ισοϋψείς καμπύλες (μαύρες bold-γραμμές), είναι ελαφρώς μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες μέγιστες των ισοϋψών (μαύρες γραμμές) χωρίς να ληφθούν υπόψη στους υπολογισμούς οι μη-γραμμικές επιδράσεις.



Σχήμα 6.10: Στο (a) δίνεται ο υπολογισμός της από κοινού συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας του πλάτους κορυφής $A_c(t)$ και της περιόδου κορυφής $T_c(t)$ όπως προκύπτει από το μοντέλο των Cavanie et al. (1976) για προκαθορισμένη πιθανότητα εμφάνισης από κοινού των τιμών των μεταβλητών αυτών σε ποσοστό από 10% έως 99.9% στον γεωμετρικό τόπο πάνω και εσωτερικά των ισοϋψών καμπυλών (μαύρες γραμμές χωρίς να λαμβάνονται υπόψη μη-γραμμικές επιδράσεις) με τους αντίστοιχους υπολογισμούς των τιμών των μεταβλητών αυτών στις αντίστοιχες ισοϋψείς λαμβάνοντας υπόψη μη-γραμμικές επιδράσεις (μαύρες bold-γραμμές), συγκρινόμενη με τις τιμές των κυματικών δεδομένων (μπλέ τελείες) του αρχείου (Data GFAKSR89). Στο (b) δίνονται οι αντίστοιχοι υπολογισμοί της από κοινού σππ από το μοντέλο Longuet-Higgins (1983) λαμβάνοντας υπόψη τις μη-γραμμικές επιδράσεις (μαύρες bold-γραμμές) συγκρινόμενη με τις τιμές των κυματικών δεδομένων (μπλέ τελείες) για προκαθορισμένη πιθανότητα εμφάνισης από κοινού των τιμών των μεταβλητών αυτών σε ποσοστό από 10% έως 99% στον γεωμετρικό τόπο πάνω και εσωτερικά των ισοϋψών καμπυλών (μαύρες γραμμές χωρίς να λαμβάνονται υπόψη μη-γραμμικές επιδράσεις)

Συνοψίζοντας τα βασικά ευρήματα από τους υπολογισμούς σε κυματικά δεδομένα των από κοινού μεταβλητών εκτίμησης του πλάτους και της περιόδου του κύματος από τις από κοινού συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας των μεταβλητών αυτών, έχουμε:

- Από το μοντέλο των Cavanie et al., (1976) (βλέπε Σχήμα 6.10), για 95% πιθανότητα εμφάνισης των από κοινού τιμών πλάτους και περιόδου κορυφής του κύματος, το πλάτος κορυφής κυμαίνεται σε τιμές από 0.2 σε 5 (m) και η περίοδος κορυφής κυμαίνεται από 0.75 σε 4.75 (sec)
- Η δυσκολία στην εκτίμηση της παραμέτρου ε καθορισμού του μέτρου της διασποράς των τιμών της φασματικής πυκνότητας γύρω από την μέση συχνότητα, αποτυπώνεται στο Σχήμα 6.10(b) με την πυκνότητα των δεδομένων να εμφανίζουν απόκλιση από τις ισοϋψείς καμπύλες και ιδιαίτερα πάνω και εσωτερικά των ισοϋψών καμπυλών μεγάλης πιθανότητας (π.χ., 95%).
- Από το μοντέλο Longuet-Higgins (1983) (βλέπε Σχήμα 6.11) με ποσοστό 95% πιθανότητα εμφάνισης των από κοινού τιμών πλάτους και περιόδου κορυφής του κύματος, οι τιμές για το πλάτος κορυφής κυμαίνονται από 0.125 σε 5.8 (m) και για την περίοδο κορυφής από 0.25 σε 12.55 (sec).
- Η σταθερότερη συμπεριφορά των φασματικών ροπών μικρής τάξης (μέχρι δευτέρας τάξης) σε υπολογισμούς κατά την μοντελοποίηση του πλάτους και της περιόδου των θαλασσιών κυματισμών από το μοντέλο Longuet-Higgins (1983), καθιστά αποτελεσματική τους υπολογισμούς της σππ όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.11(b), δηλ., μικρή απόκλιση της πυκνότητας των δεδομένων από τις ισοϋψείς καμπύλες και ιδιαίτερα πάνω και εσωτερικά των ισοϋψών καμπυλών μεγάλης πιθανότητας (π.χ., 95%).
- Οι υπολογισμοί βασισμένοι στο μοντέλο Longuet-Higgins (1983) εμφανίζουν την μικρότερη κατα απόλυτη τιμή απόκλιση στις max τιμές των μεταβλητών σε σχέση με τους υπολογισμούς βασισμένοι στο μοντέλο των Cavanie et al. (1976), από την σύγκριση των τιμών αυτών αντίστοιχα μέσω της εκτιμήτριας Kernel-Epanechnikov.

(βλέπε τα συγκριτικά αποτελέσματα των μοντέλων για το πλάτος και την περίοδο κορυφής στον Πίνακα 6.2)

- Δυσκολία και για τα δυο μοντέλα εκτίμησης στην μη ομαλή αποτύπωση της πυκνότητας της από κοινού εμφάνισης των τιμών των μεταβλητών αυτών για τιμές που εμφανίζονται στην ουρά της κατανομής. Η αποτύπωση της πυκνότητας εμφάνισης των τιμών του πλάτους και της περιόδου κορυφής από το μοντέλο των Cavanie et al. (1976) στον γεωμετρικό τόπο των σημείων πάνω και εξωτερικά της 99.9% ισοψούς καμπύλης είναι πιο ομαλή σε σχέση με την αντίστοιχη αποτύπωση της πυκνότητας εμφάνισης των μεταβλητών αυτών με την εξωτερική 99% ισοψής από το μοντέλο του Longuet-Higgins (1983), (βλέπε τα συγκριτικά αποτελέσματα των μοντέλων για το πλάτος και την περίοδο κορυφής στο Σχήμα 6.12).
- Στην περιοχή της κατανομής των τιμών με την μεγαλύτερη συχνότητα εμφάνισης, δηλ., ο γεωμετρικός τόπος των σημείων πάνω και εσωτερικά της 70% ισοψούς καμπύλης, έχουμε καλύτερη αποτύπωση από το μοντέλο εκτίμησης Longuet-Higgins (1983) της πυκνότητας εμφάνισης των από κοινού τιμών του πλάτους και της περιόδου κορυφής του κύματος σε σχέση με τις αντίστοιχες εκτιμήσεις των μεταβλητών αυτών από το μοντέλο των Cavanie et al. (1976), (βλέπε τα συγκριτικά αποτελέσματα στο Σχήμα 6.12).
- Ο μετασχηματισμός των μεταβλητών σε τιμές κανονικής κατανομής για το πλάτος και περίοδο κορυφής από τα κυματικά δεδομένα που προτείνει ο Winterstein με πολώνυμα Hermite (Winterstein, 1988) στα μοντέλα εκτίμησης, βελτιώνει λίγο τα αποτελέσματα των μοντέλων καθώς αν συμπεριλάβουμε στους υπολογισμούς και μη-γραμμικές επιδράσεις προκύπτουν ελαφρώς μεγαλύτερες κορυφές κυμάτων στους αντίστοιχους υπολογισμούς της σππ των από κοινού μεταβλητών, (βλέπε τα συγκριτικά αποτελέσματα στο Σχήμα 6.13).

Κεφάλαιο 7

Συμπεράσματα και προτάσεις για μελλοντική έρευνα

7.1 Κύρια συνεισφορά και πιο σημαντικά ευρήματα

Στην παρούσα εργασία γίνεται αναλυτική ανάπτυξη της συλλογιστικής για τις συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας των μεταβλητών πλάτους και περιόδου του κύματος κατά το βραχυχρόνιο βήμα, που μοντελοποιούν τους θαλάσσιους κυματισμούς όπως αναφέρεται στην σχετική βιβλιογραφία. Η βασική υπόθεση στην μοντελοποίηση των τυχαίων μεταβλητών του πλάτους και της περιόδου του κύματος, είναι ότι η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας της θάλασσας προσομοιώνεται ως μια στάσιμη στοχαστική διαδικασία από το μοντέλο της τυχαίας φάσης. Οι τυχαίες μεταβλητές του πλάτους και της περιόδου θα πληρούν τις προϋποθέσεις του κεντρικού οριακού θεωρήματος σε τρεις διαστάσεις, συνεπώς η από κοινού σπ των τυχαίων μεταβλητών αυτών θα ακολουθεί την κανονική (Gaussian) κατανομή. Ειδικότερα, η κύρια συνεισφορά της παρούσας μελέτης συνοψίζεται στα εξής σημεία:

- Από την αναλυτική ανάπτυξη του πιθανοθεωρητικού χαρακτηρισμού των πλατών κύματος που θα βασίζεται στην συλλογιστική των Markov chain processes όπου θα αναφέρεται και ως το μοντέλο Kimura (1980), μέσω της εκτίμησης του συντελεστή συσχέτισης των πλατών κύματος επιβεβαιώνεται η Rayleigh κατανομή διαδοχικών πλατών για ασυσχέτιστους κυματισμούς.
- Από την αναλυτική έκφραση της από κοινού σπ των θετικών μεγίστων και της περιόδου μεταξύ αυτών που βασίζεται στην μοντελοποίηση από τους Cavanie et al. (1976), επιβεβαιώνεται η ασταθής συμπεριφορά των φασματικών ροπών ανώτερης τάξης στους υπολογισμούς της από κοινού σπ με τα αποτελέσματα της από κοινού κατανομής σε κυματικά δεδομένα φάσματος στενής λωρίδας.
- Αναδεικνύεται το βασικό πλεονέκτημα στους υπολογισμούς των συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας των μεταβλητών πλάτους και περιόδου του κύματος από το μοντέλο Longuet-Higgins (1983) σε σχέση με την μοντελοποίηση των μεταβλητών αυτών από την προσέγγιση των Cavanie et al. (1976).

Συνοψίζοντας τα βασικά ευρήματα της παρούσας εργασίας από την μοντελοποίηση των τυχαίων μεταβλητών του πλάτους και της περιόδου του κύματος κατά το βραχυχρόνιο βήμα και από υπολογισμούς σε κυματικά δεδομένα ανοικτής θάλασσας μέσω των επικρατέστερων μοντέλων εκτίμησης της από κοινού εμφάνισης των τιμών των μεταβλητών αυτών, έχουμε:

- Για διαδικασίες που χαρακτηρίζονται ως στενής λωρίδας η περιβάλλουσα στο χώρο του χρόνου γύρω από την μέση συχνότητα του φέροντος κύματος επιβεβαιώνει την προσέγγιση κορυφών μέσω της περιβάλλουσας για την μικρή συχνότητα μεταβολής του εύρους των κορυφών του κύματος.
- Η Rayleigh κατανομή για τις μετασχηματισμένες σε τιμές κανονικής κατανομής του πλάτους κορυφής προσέγγισε ικανοποιητικά την κατανομή της περιβάλλουσας.
- Για 95% πιθανότητα εμφάνισης των από κοινού τιμών πλάτους και περιόδου κορυφής του κύματος από το μοντέλο των Cavanie et al. (1976) το πλάτος κορυφής κυμαίνεται σε τιμές από 0.2 σε 5 (m) και η περίοδος κορυφής κυμαίνεται από 0.75 σε 4.75 (sec).
- Η δυσκολία στην εκτίμηση της παραμέτρου καθορισμού (ε) του μέτρου της διασποράς των τιμών της φασματικής πυκνότητας γύρω από την μέση συχνότητα στο μοντέλο των Cavanie et al. (1976), δίνει υποεκτίμηση των μεγίστων τιμών του πλάτους

και της περιόδου του γεωμετρικού τόπου των σημείων πάνω και εσωτερικά των ισοϋψών καμπυλών και ιδιαίτερα για τις ισοϋψείς καμπύλες μεγάλης πιθανότητας (π.χ., 95%) με τις αντίστοιχες μέγιστες τιμές των μεταβλητών αυτών υπολογιζόμενες μέσω της εκτιμήτριας Kernel-Epanechnikov.

- Με ποσοστό 95% πιθανότητα εμφάνισης των από κοινού τιμών πλάτους και περιόδου κορυφής του κύματος στο μοντέλο Longuet-Higgins (1983), οι τιμές για το πλάτος κορυφής κυμαίνονται από 0.125 σε 5.8 (m) και για την περίοδο κορυφής από 0.25 σε 12.55 (sec).
- Οι υπολογισμοί βασισμένοι στο μοντέλο Longuet-Higgins (1983) εμφανίζουν την μικρότερη κατά απόλυτη τιμή απόκλιση στις max τιμές του πλάτους και περιόδου κορυφών σε σχέση με τους υπολογισμούς βασισμένοι στο μοντέλο των Cavanie et al. (1976), από την σύγκριση των τιμών αυτών αντίστοιχα μέσω της εκτιμήτριας Kernel-Epanechnikov.
- Η απόκλιση στις εκτιμώμενες max τιμές των μεταβλητών από την σύγκριση των τιμών αυτών αντίστοιχα μέσω της εκτιμήτριας Kernel-Epanechnikov μειώνεται πιο ομαλά (περισσότερο ομαλά το πλάτος κορυφής και λιγότερο ομαλά η περίοδος κορυφής) από το μοντέλο Longuet-Higgins (1983) με την αύξηση της πιθανότητας εμφάνισης από 90 σε 95% για τις από κοινού τιμές εμφάνισης του πλάτους και της περιόδου κορυφής πάνω και εσωτερικά των αντίστοιχων ισοϋψών. Σε σχέση με τους αντίστοιχους υπολογισμούς από το μοντέλο των Cavanie et al. (1976), έχουμε λιγότερο ομαλή συμπεριφορά στην εκτίμηση και για το πλάτος και για την περίοδο κορυφής του κύματος.
- Η δυσκολία και για τα δυο μοντέλα εκτίμησης στην μη ομαλή αποτύπωση της πυκνότητας της από κοινού εμφάνισης των μεταβλητών για τιμές που εμφανίζονται στην ουρά της κατανομής. Η αποτύπωση της πυκνότητας εμφάνισης των τιμών του πλάτους και της περιόδου κορυφής από το μοντέλο των Cavanie et al. (1976) στον γεωμετρικό τόπο των σημείων πάνω και εξωτερικά της 99.9% ισοϋψούς καμπύλης είναι πιο ομαλή σε σχέση με την αντίστοιχη αποτύπωση της πυκνότητας εμφάνισης των μεταβλητών αυτών με την εξωτερική 99% ισοϋψής από το μοντέλο του Longuet-Higgins (1983).
- Η απλούστερη έκφραση στην εκτίμηση της παραμέτρου καθορισμού (ν) του μέτρου της διασποράς των τιμών της φασματικής πυκνότητας γύρω από την μέση συχνότητα στο μοντέλο από Longuet-Higgins (1975), καθιστά πιο αποτελεσματική την σππ του πλάτους και περιόδου κορυφής του κύματος στους υπολογισμούς που βασίζονται σε φασματικές ροπές μόνο μέχρι δευτέρας τάξης.
- Ο μετασχηματισμός των μεταβλητών για το πλάτος και περίοδο κορυφής από τα κυματικά δεδομένα στα μοντέλα εκτίμησης, βελτιώνει λίγο τα αποτελέσματα των μοντέλων συνυπολογίζοντας στους υπολογισμούς και μη-γραμμικές επιδράσεις.

7.2 Προτάσεις για μελλοντική έρευνα

- Στα πλαίσια της θεώρησης μιας στάσιμης κατάστασης θάλασσας, είναι σημαντικό να επιλέγεται με ιδιαίτερη προσοχή η κατάλληλη κλίμακα του χρόνου για τη μοντελοποίηση των τυχαίων μεταβλητών. Ενδεχομένως η εξέταση του βαθμού αυτοσυνδιακύμανσης και συνδιακύμανσης των μεταβλητών πλάτους και περιόδου στους υπολογισμούς των από κοινού εμφάνισης των τιμών των μεταβλητών αυτών μέσω των επικρατέστερων μοντέλων εκτίμησης, να προσφέρει πιο σαφή

αποτελέσματα με πιο φυσικό τρόπο σε εφαρμογές και είναι ένα θέμα μελλοντικής έρευνας.

- Η μελέτη των ακραίων θαλασσίων κυματισμών και η αντίστοιχη μοντελοποίησή τους αποτελεί επίσης βασική παράμετρο ελέγχου στο σχεδιασμό για την ασφαλή λειτουργία των παράκτιων κατασκευών. Να σημειώσουμε ότι στην παρούσα εργασία επιβεβαιώνεται η αδυναμία από τα μοντέλα για εκτιμήσεις στην ουρά της κατανομής των μεταβλητών. Μια συλλογιστική που θα στηρίζεται στην Θεωρία Ακραίων Τιμών για την από κοινού εκτίμηση των ακραίων τιμών του πλάτους και της περιόδου του κύματος που οι μεταβλητές αυτές θα είναι ακραίες σε τουλάχιστον μία συνιστώσα όπως προτάθηκε από τους Heffernan & Tawn (2004) και αργότερα από τους Heffernan & Resnick (2007), θα αποτύπωνε την ακραία πιθανοθεωρητική συμπεριφορά των μεταβλητών αυτών με πιο φυσικό τρόπο σε εφαρμογές στο θαλάσσιο περιβάλλον.

Παράρτημα

A. Βασικές εντολές WAFO –Matlab

Παρά το ευρύτατο φάσμα εφαρμογών του WAFO, στην παρούσα εργασία περιοριστήκαμε στην ανάλυση των εντολών για την επεξεργασία των δεδομένων σε μία χωρική διάσταση, εννοώντας σε μια κατεύθυνση διάδοσης. Οι εντολές που χρησιμοποιήθηκαν αναφέρονται ονομαστικά:

1. Για τη σχεδίαση των αποτελεσμάτων χρησιμοποιήθηκαν οι ακόλουθες εντολές:
 - waveplot
 - pdfplot
 - subplot
 - wnormplot
 - wspectplot
2. Για τον προσδιορισμό του φάσματος χρησιμοποιήθηκαν οι ακόλουθες εντολές:
 - dat2spec
 - dat2spec2
3. Για τον υπολογισμό των φασματικών ροπών και διάφορων φασματικών χαρακτηριστικών χρησιμοποιήθηκαν οι ακόλουθες εντολές:
 - spec2mom
 - spec2char
 - spec2bw
4. Για τους υπολογισμούς της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας του πλάτους και περιόδου κορυφής του κύματος, χρησιμοποιήθηκαν οι ακόλουθες εντολές:
 - kde
 - kdebin
 - lh83pdf
 - cav76pdf
 - simpson
 - trraylpdf
 - hermitetr
5. Για υπολογισμούς διάφορων κυματικών χαρακτηριστικών μεγεθών χρησιμοποιήθηκαν οι ακόλουθες εντολές:
 - dat2steep
 - perioddef

Οι σχετικοί κώδικες σε περιβάλλον Matlab που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα εργασία δίνονται παρακάτω:

1. Περιβάλλουσα διαδικασία (envelope process)

```
xx=load('gfaksr89.dat'); % (Data GFAKSR89)
data=xx(:,2);
wp=0.5984; %spectral peak frequency (wp=2*pi/Tp), Tp=10.5 sec; %0.5984 rad/sec
Hm=6.8; %significant wave height
m0=2.8900; %ropi miden taksis
m1=1.9770; %ropi protis taksis
wmegameso=m1/m0;
wn=(0.00001:0.00001:4);

Sn=5/16 .*((wp ./wn).^5) .*((Hm^2)/wp) .*exp(-5/4*((wp ./wn).^4)); %fasma Bretschneider
```

```

r=unifrnd(0,2*pi, [length(wn),1]);
delta=0.00001;
an=sqrt(2*Sn*delta);

anipsosi_s=[];
anipsosi_c=[];
anipsosi_s_wmeso=[];
anipsosi_c_wmeso=[];
wmegameso_t=[];

for ii=0:0.4:100
anipsosi_s=[anipsosi_s; sum(an .* sin(wn *ii+r))]; %Hilbert trans
anipsosi_c=[anipsosi_c; sum(an .* cos(wn *ii+r))];
anipsosi_s_wmeso=[anipsosi_s_wmeso; sum(an .* sin((wn-wmegameso) *ii+r))];
anipsosi_c_wmeso=[anipsosi_c_wmeso; sum(an .* cos((wn-wmegameso) *ii+r))];
wmegameso_t=[wmegameso_t; wmegameso *ii];
end

goniafikefaleo=mod(atan2(anipsosi_s,anipsosi_c),2*pi);
goniafimikro =mod(atan2(anipsosi_s_wmeso,anipsosi_c_wmeso),2*pi);
platos= sqrt(anipsosi_s.^2 + anipsosi_c.^2);
envelopeWaveC=platos.*cos(goniafikefaleo);
envelopeWaveS=platos.*sin(goniafikefaleo);
envelope_s= platos.*sin(wmegameso_t);
envelope_c= platos.*cos(wmegameso_t);

% Fig 6.4(a)
hold on
axis equal
plot(envelopeWaveC,envelopeWaveS,'black')
xaxis=-10:1:10;
yaxis=0.*xaxis;
line(xaxis, yaxis);
line(yaxis, xaxis);

% Fig 6.4(b)
hold on
axis equal
plot(envelopeWaveC,envelopeWaveS,'black')
hold on
plot(envelope_c,envelope_s,'red')
xaxis=-10:1:10;
yaxis=0.*xaxis;
line(xaxis, yaxis);
line(yaxis, xaxis);
legend('A(t) exp(iΦ(t))','A(t) exp(iωt)')

%Fig 6.5(a)
t=[0:0.4:100];
plot(t,envelopeWaveC,'red')
hold on
plot(t,envelopeWaveS,'green')
hold on
plot(t,platos,'blue')
xaxis=0:0.4:100;
yaxis=0.*xaxis;
line(xaxis, yaxis);
legend('A(t) cos(Φ(t))','A(t) sin(Φ(t))','Envelope process')

% Fig 6.5(b)
t=[0:0.4:100];
hold on
plot(t,data(1:251),'black')
hold on
plot(t,envelope_c,'red')
hold on
plot(t,platos,'blue')

```

```

xaxis=0:0.4:100;
yaxis=0.*xaxis;
line(xaxis, yaxis);
legend('Data','A(t) cos( $\bar{\omega}t$ )','Envelope process')

%Fig 6.5(c)
t=[0:0.4:15599.6];
data=xx(:,2);
hold on
plot(t,data,'black')
hold on
plot(t,platos,'blue')
xaxis=0:0.4:15599.6;
yaxis=0.*xaxis;
line(xaxis, yaxis);
legend('Data','Envelope process')

%Fig 6.5(d)
rate=8; % Interpolation rate
method=-3;%Characteristics for zero-upcrossing waves.
[S,H,Ac,At,Tcf,Tcb,z_ind,yn] = dat2steep(xx,rate,method);
t=linspace(0.01,10,200);
ft_Ac=kde(Ac,{'L2',0.7},t);
pdfplot(ft_Ac)
hold on
ft_Envelope=kde(platos,{'L2',0.55},t);
pdfplot(ft_Envelope)
hold on
sk=wskewness(data); % Υπολογισμός συντελεστή λοξότητας της κατανομής από δεδομένα
ku=wkurtosis(data); % Υπολογισμός συντελεστή κύρτωσης της κατανομής από δεδομένα
sa=sqrt(var(data)); % Υπολογισμός συντελεστή τυπικής απόκλισης από δεδομένα
me=mean(data); % Υπολογισμός συντελεστή μέσης τιμής από δεδομένα
gh=hermitetr([],sa sk ku me); %Υπολογισμός Hermite-μετασχηματισμού κατά Winterstein
% στις τιμές default linspace(-5*sigma,5*sigma,501)+mean
Hs=4*sa; % Προσδιορισμός σημαντικού ύψους κύματος
r=(0:0.05:1.7*Hs)'; %Προσδιορισμός τιμών στις οποίες θα υπολογιστεί η κατανομή fac_h
fac_h=traylpdf(r,'Ac',gh);%Υπολογισμός της μετασχηματισμένης κατανομής Rayleigh για το πλάτος κορυφής Ac
pdfplot(fac_h,'green-');

axis([0 10 0 0.4])
hold off
legend ('Crest amplitude Ac(t)','Envelope process','Transformed Rayleigh approx. Ac(t)')

% Fig. M.1
L2=0.55; %Παράμετρος εισόδου L2 της εντολής kde για την περιβάλλουσα
wnormplot(platos.^L2)

```

2. Υπολογισμός φάσματος από τα δεδομένα

```

xx=load('gfaksr89.dat');
wp=0.5984; %spectral peak frequency (wp=2*pi/Tp), Tp=10.5 sec; %0.5984 rad/sec
Hm=6.8; %significant wave height
wn=(0.00001:0.00001:4)';
Sn=(5/16) .*((wp ./wn) .^5) .*((Hm^2)/wp) .*exp(-5/4*((wp ./wn) .^4)); %fasma Bretschneider

% Fig C1
plot(wn,Sn,'black')

%Fig 6.2(a)
S=dat2spec2(xx,39000);
specplot(S)

```

```
%Fig 6.2(b)
S1=dat2spec2(xx,100);
specplot(S1)
hold on
plot(wn,Sn,'black')
```

3. Περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της παραγώγου φάσης

```
m0=2.8900;%Ροπή μηδενικής τάξης (Data GFAKSR89)
m1=1.9770;%Ροπή πρώτης τάξης (Data GFAKSR89)
m2=1.7827;%Ροπή δευτέρας τάξης (Data GFAKSR89)
```

```
mm2=(m0*m2-m1^2)/m0;
fi=(-1.5:0.0005:1.5)';
a=sqrt(m0/mm2);
b=2*(1+(m0/mm2) .*fi .^2) .^3/2;
wmegameso=m1/m0
sppfi=a ./b;
x1=sqrt(mm2/m0)
x2=-sqrt(mm2/m0)
```

```
% Fig 6.3
plot(fi,sppfi);
yaxis=0:0.5:3;
repmat(x1,length(yaxis),1);
line(repmat(x1,length(yaxis),1), yaxis);
line(repmat(x2,length(yaxis),1), yaxis);
hold on
plot(wmegameso,0,'')
```

4. Εκτιμήτριας Kernel-Epanechnikov της περιθώριας και της από κοινού συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας του πλάτους και της περιόδου κορυφής

```
xx=load('gfaksr89.dat');
rate=8; % Interpolation rate
method=-3;%Characteristics for zero-upcrossing waves.
```

```
[S,H,Ac,At,Tcf,Tcb,z_ind,yn] = dat2steep(xx,rate,method);
Tc=Tcf+Tcb;
```

```
%Fig 6.7(a)
t=linspace(0.01,14,100);
ft_Tc=kde(Tc,{'L2',0.7},t);
simpson(ft_Tc.x{1},ft_Tc.f)
pdfplot(ft_Tc)
hold on
whisto(Tc,[],[],1)
axis([0 14 0 0.4])
hold off
```

```
%Fig 6.7(b)
t=linspace(0.01,10,200);
ft_Ac=kde(Ac,{'L2',0.7},t);
simpson(ft_Ac.x{1},ft_Ac.f)
pdfplot(ft_Ac)
hold on
whisto(Ac,[],[],1)
axis([0 10 0 0.4])
hold off
```

```
%Fig 6.8(a)
fTcAc=kde([Tc Ac],{'L2',0.7});
fTcAc.labx={'Tc [s]' 'Ac [m]'}
pdfplot(fTcAc)
hold on
```

```
%Fig 6.8(b)
plot(Tc,Ac,'k.')
hold off
```

5. Υπολογισμός της κανονικής κατανομής των μετασχηματισμένων τιμών πλάτους Ac και περιόδου κορυφής Tc

```
xx=load('gfaksr89.dat');
rate=8; % Interpolation rate
method=-3;%Characteristics for zero-upcrossing waves.
```

```
[S,H,Ac,At,Tcf,Tcb,z_ind,yn] = dat2steep(xx,rate,method);
Tc=Tcf+Tcb;
L2=0.7; %Παράμετρο εισόδου L2 της εντολής kde
```

```
%Fig 6.9
wnormplot(Ac.^L2)
wnormplot(Tc.^L2)
```

6. Υπολογισμός της από κοινού συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας του πλάτους και της περιόδου κορυφής από το μοντέλο των Cavanie et al., (1976) και Longuet-Higgins (1983)

```
xx=load('gfaksr89.dat');
Hs = 6.8; %significant wave height
T02=8; % Mean zero-crossing period
m0=(Hs^2)/16% Ροπή μηδενικής τάξης (Data GFAKSR89), m0=2.8900
m2= (4*(pi^2)*m0)/(T02^2) % Ροπή δευτέρας τάξης (Data GFAKSR89), m2=1.7827
```

```
S=dat2spec2(xx,39000);
v=spec2bw(S,[2]);% longuet-higgins 1975 (v),
E=spec2bw(S,[3]);% Cartwright and Longuet-Higgin, 1956 (ε)
m1=sqrt((m2*m0)/((v^2)+1)) % Ροπή πρώτης τάξης (Data GFAKSR89), m1= 1.9770
m4=m2^2/(m0*(1-E^2)) % Ροπή τετάρτης τάξης (Data GFAKSR89), m4= 8.0228
wMeso=m1/m0; % wMeso= 0.6841
```

```
rate=8;
method=-3;
[S,H,Ac,At,Tcf,Tcb,z_ind,yn] = dat2steep(xx,rate,method);
Tc=Tcf+Tcb;
t=linspace(0,14,100);
h=linspace(0,10,200);
```

```
%Cavanie et al. (1976)
%Fig 6.10(a)
fcav=cav76pdf(t,h,[m0,m2,m4]);
hold on
%Fig 6.10(b)
plot(Tc,Ac,'k.')
hold off
```

```
%Longuet-Higgins (1983)
%Fig 6.11(a)
flh=lh83pdf(t,h,[m0,m1,m2]);
hold on
%Fig 6.11(b)
plot(Tc,Ac,'k.')
hold off
```

```
%Kernel+Cavanie et al. (1976)
%Fig 6.12(a)
pdfplot(fTcAc)
hold on
t=linspace(0,14,100);%
h=linspace(0,10,200);%
fcav=cav76pdf(t,h,[m0,m2,m4]);
```

```

hold off

%Kernel+ Longuet-Higgins (1983)
%Fig 6.12(b)
pdfplot(fTcAc)
hold on
t=linspace(0,14,100);%
h=linspace(0,10,200);%
flh=lh83pdf(t,h,[m0,m1,m2]);
hold off

%Cavanie et al. (1976) (no linear effects)
%Fig 6.13(a)
data=xx(:,2);
sk=wskewness(data);
ku=wkurtosis(data);
sa=sqrt(var(data));
me=mean(data);
gh=hermitetr([],[sa sk ku me]);

fcav=cav76pdf(t,h,[m0,m2,m4]);
hold on
plot(Tc,Ac,'k.')
hold on
fcavlin=cav76pdf(t,h,[m0,m2,m4],gh);
hold off

%Longuet-Higgins (1983) (no linear effects)
%Fig 6.13(b)
flh=lh83pdf(t,h,[m0,m1,m2]);
hold on
plot(Tc,Ac,'k.')
hold on
flhlin=lh83pdf(t,h,[m0,m1,m2],gh);
hold off

```

B. Περιοδικές συναρτήσεις

ΛΗΜΜΑ 1.

Εστω $I = \int_0^{2\pi} f(x + \varphi) dx$, όπου $n \in \mathbb{Z}$ και f περιοδική συνάρτηση, (B.1)

συνεπώς,

$$\begin{aligned}
 2n\pi &\leq \varphi \leq 2(n+1)\pi, \\
 0 &\leq \varphi - 2n\pi \leq 2\pi, \\
 0 &\leq \tilde{\varphi} \leq 2\pi, \text{ όπου } \tilde{\varphi} = \varphi - 2n\pi.
 \end{aligned}$$

Λόγω περιοδικότητας έχουμε:

$$f(x + \varphi) = f(x + \varphi - 2n\pi) = f(x - \tilde{\varphi}),$$

συνεπώς η Σχέση (B1), γράφεται μετά από πράξεις:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{2\pi} f(x+\varphi) dx = \int_0^{2\pi} f(x-\tilde{\varphi}) dx \\
 &= \int_0^{\tilde{\varphi}} f(x-\tilde{\varphi}) dx + \int_{\tilde{\varphi}}^{2\pi} f(x-\tilde{\varphi}) dx \\
 &= \int_{2\pi-\tilde{\varphi}}^{2\pi} f(\tilde{x}-2\pi) d\tilde{x} + \int_0^{2\pi-\tilde{\varphi}} f(\tilde{x}) d\tilde{x}.
 \end{aligned}$$

Θέτοντας $\tilde{x} = 2\pi + x - \tilde{\varphi}$ ή $\tilde{x} = x - \tilde{\varphi}$ (λόγω περιοδικότητας), η συνάρτηση I γράφεται:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{2\pi} f(x+\varphi) dx = \int_{2\pi-\tilde{\varphi}}^{2\pi} f(\tilde{x}) d\tilde{x} + \int_0^{2\pi-\tilde{\varphi}} f(\tilde{x}) d\tilde{x} \\
 &= \int_0^{2\pi} f(x) dx.
 \end{aligned}$$

ΛΗΜΜΑ 2.

Αν για την $f(t)$ ισχύει $f(\pi-t) = f(\pi+t)^*$ για κάθε $t \in [0, \pi]$, τότε θα αποδείξουμε,

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt. \quad (\text{B.2})$$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} f(\zeta) d\zeta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(\tilde{\zeta} + \pi) d\tilde{\zeta}, \quad \zeta = \tilde{\zeta} + \pi \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(\pi - \tilde{\zeta})^* d\tilde{\zeta} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(t) dt - \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^0 f(t) dt, \quad t = \pi - \tilde{\zeta} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(t) dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) dt.
 \end{aligned}$$

C. Φάσμα Bretschneider

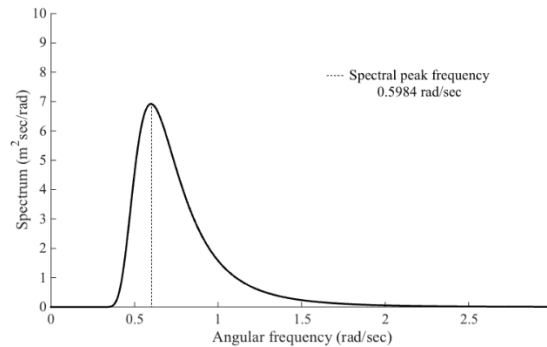
Το φάσμα Bretschneider ορίζεται με την βοήθεια δυο παραμέτρων, της (κυκλικής) συχνότητας κορυφής ω_p και του σημαντικού ύψους κύματος H_s και δίνεται από την σχέση:

$$S(\omega) = \frac{5}{16} \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^5 \frac{H_s^2}{\omega_p} \exp \left(-\frac{5}{4} \left(\frac{\omega_p}{\omega} \right)^4 \right), \quad (C.1)$$

όπου οι παράμετροι ω_p και H_s που εμφανίζονται στην σχέση (C.1) είναι η κυκλική συχνότητα κορυφής ω_p (spectral peak frequency), ενώ το (φασματικό) σημαντικό ύψος κύματος H_s που ορίζεται ως η μέση τιμή του 1/3 των υψηλότερων κυμάτων μιας καταγραφής, συνδέεται με τη φασματική ροπή μηδενικής τάξης μέσω της σχέσης:

$$H_s = 4\sqrt{m_0},$$

όπου m_0 είναι η μηδενικής τάξεως φασματική ροπή. Στο παρακάτω Σχήμα (C.1) βλέπουμε την μορφή του φάσματος Bretschneider για σημαντικό ύψος κύματος $H_s = 6.8$ (m) και συχνότητα κορυφής του φάσματος $\omega_p = 0.5984$ (rad/sec) όπως δίνονται από τα κυματικά δεδομένα του αρχείου (Data GFAKSR89) στην πλατφόρμα Gullfaks C από σημείο της Βορείου Θάλασσας.



Σχήμα C.1: Διαμετρικό φάσμα (H_s, ω_p) Bretschneider

Μια άμεση γενίκευση του φάσματος Bretschneider δίνεται απ' την σχέση

$$S(\omega) = a \omega^n \exp(-\beta \omega^{-m}), \quad \text{όπου } a, \beta, n, m > 0, \quad (C.2)$$

η οποία αναφέρεται και ως γενικευμένο φάσμα Bretschneider.

Η συναρτησιακή μορφή (C.2) έχει χρησιμοποιηθεί ως αναλυτικό μοντέλο για την περιγραφή του φάσματος των ανεμογενών κυματισμών από πολλούς ερευνητές, μεταξύ των οποίων αναφέρουμε τους Bretschneider (1961), Kottler(1970), Gospodnetic and Miles (1974), Hoffman (1974), Ochi and Hubble (1977), Ferdinande (1977), Huang et.al. (1981), Liu (1983), και Chakrabarti (2005). Σε ορισμένες απ' τις παραπάνω εργασίες υπάρχουν και εκτεταμένα ωκεανογραφικά δεδομένα για την εκτίμηση των παραμέτρων a, β, n, m .

D. Bessel functions

Συναρτήσεις Bessel functions από Abramowitz and Stegun (1975), Handbook of Mathematical Functions.

376

BESSEL FUNCTIONS OF INTEGER ORDER

Integral Representations

9.6.16

$$I_0(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{\pm z \cos \theta} d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cosh(z \cos \theta) d\theta$$

9.6.17

$$K_0(z) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{\pm z \cos \theta} \{\gamma + \ln(2z \sin^2 \theta)\} d\theta$$

9.6.18

$$I_\nu(z) = \frac{(\frac{1}{2}z)^\nu}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_0^\pi e^{\pm z \cos \theta} \sin^{2\nu} \theta d\theta$$

$$= \frac{(\frac{1}{2}z)^\nu}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\nu-1} e^{\pm zt} dt \quad (\Re \nu > -\frac{1}{2})$$

9.6.19

$$I_\nu(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{\pm z \cos \theta} \cos(\nu\theta) d\theta$$

9.6.20

$$I_\nu(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{\pm z \cos \theta} \cos(\nu\theta) d\theta$$

$$= \frac{\sin(\nu\pi)}{\pi} \int_0^\infty e^{-z \cosh t - \nu t} dt \quad (\arg z < \frac{1}{2}\pi)$$

9.6.21

$$K_0(x) = \int_0^\infty \cos(x \sinh t) dt = \int_0^\infty \frac{\cos(xt)}{\sqrt{t^2+1}} dt \quad (x > 0)$$

9.6.22

$$K_\nu(x) = \sec(\frac{1}{2}\nu\pi) \int_0^\infty \cos(x \sinh t) \cosh(\nu t) dt$$

$$= \csc(\frac{1}{2}\nu\pi) \int_0^\infty \sin(x \sinh t) \sinh(\nu t) dt \quad (|\Re \nu| < 1, x > 0)$$

9.6.23

$$K_\nu(z) = \frac{z^{-\nu} \Gamma(\frac{1}{2})^\nu}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_0^\infty e^{-z \cosh t} \sinh^{2\nu} t dt$$

$$= \frac{z^{-\nu} \Gamma(\frac{1}{2})^\nu}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_1^\infty e^{-z(t^2-1)^{\frac{1}{2}}} t^{-2\nu} dt \quad (\Re \nu > -\frac{1}{2}, |\arg z| < \frac{1}{2}\pi)$$

9.6.24

$$K_\nu(z) = \int_0^\infty e^{-z \cosh t} \cosh(\nu t) dt \quad (|\arg z| < \frac{1}{2}\pi)$$

9.6.25

$$K_\nu(xz) = \frac{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})(2z)^\nu}{x^{\frac{1}{2}}\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_0^\infty \frac{\cos(xt) dt}{(t^2+z^2)^{\nu+\frac{1}{2}}}$$

$$(\Re \nu > -\frac{1}{2}, x > 0, |\arg z| < \frac{1}{2}\pi)^*$$

9.6.26

Recurrence Relations

$$\mathcal{Z}_{\nu-1}(z) - \mathcal{Z}_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} \mathcal{Z}_\nu(z)$$

$$\mathcal{Z}'_\nu(z) = \mathcal{Z}_{\nu-1}(z) - \frac{\nu}{z} \mathcal{Z}_\nu(z)$$

$$\mathcal{Z}'_{\nu-1}(z) + \mathcal{Z}'_{\nu+1}(z) = 2\mathcal{Z}'_\nu(z)$$

$$\mathcal{Z}''_\nu(z) = \mathcal{Z}''_{\nu+1}(z) + \frac{\nu}{z} \mathcal{Z}'_\nu(z)$$

*See page 11.

\mathcal{Z}_ν denotes I_ν , $e^{\pm z} K_\nu$, or any linear combination of these functions, the coefficients in which are independent of z and ν .

9.6.27 $I'_0(z) = I_1(z), \quad K'_0(z) = -K_1(z)$

Formulas for Derivatives

9.6.28

$$\left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^k [z^\nu \mathcal{Z}_\nu(z)] = z^{-\nu-k} \mathcal{Z}_{\nu-k}(z)$$

$$\left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^k [z^{-\nu} \mathcal{Z}_\nu(z)] = z^{-\nu+k} \mathcal{Z}_{\nu+k}(z) \quad (k=0,1,2,\dots)$$

9.6.29

$$\mathcal{Z}'_{\nu(k)}(z) = \frac{1}{2^k} \left\{ \mathcal{Z}'_{\nu-k}(z) + \binom{k}{1} \mathcal{Z}'_{\nu-k+2}(z) \right.$$

$$\left. + \binom{k}{2} \mathcal{Z}'_{\nu-k+4}(z) + \dots + \mathcal{Z}'_{\nu+k}(z) \right\}$$

$$(k=0,1,2,\dots)$$

Analytic Continuation

9.6.30 $I_\nu(ze^{m\pi i}) = e^{-m\nu\pi i} I_\nu(z) \quad (m \text{ an integer})$

9.6.31

$$K_\nu(ze^{m\pi i}) = e^{-m\nu\pi i} K_\nu(z) - \pi i \sin(m\nu\pi) \csc(\nu\pi) I_\nu(z)$$

$$(m \text{ an integer})$$

9.6.32 $I_\nu(\bar{z}) = \overline{I_\nu(z)}, \quad K_\nu(\bar{z}) = \overline{K_\nu(z)} \quad (\nu \text{ real})$

Generating Function and Associated Series

9.6.33 $e^{t(t+1)\nu} = \sum_{k=0}^\infty t^k I_k(z) \quad (t \neq 0)$

9.6.34 $e^{\pm z \cos \theta} = I_0(z) + 2 \sum_{k=1}^\infty I_k(z) \cos(k\theta)$

9.6.35

$$e^{\pm z \sin \theta} = I_0(z) + 2 \sum_{k=1}^\infty (-1)^k I_{2k+1}(z) \sin\{(2k+1)\theta\}$$

$$+ 2 \sum_{k=1}^\infty (-1)^k I_{2k}(z) \cos(2k\theta)$$

9.6.36 $1 = I_0(z) - 2I_2(z) + 2I_4(z) - 2I_6(z) + \dots$

9.6.37 $e^z = I_0(z) + 2I_1(z) + 2I_2(z) + 2I_3(z) + \dots$

9.6.38 $e^{-z} = I_0(z) - 2I_1(z) + 2I_2(z) - 2I_3(z) + \dots$

9.6.39

$$\cosh z = I_0(z) + 2I_1(z) + 2I_2(z) + 2I_3(z) + \dots$$

9.6.40 $\sinh z = 2I_1(z) + 2I_3(z) + 2I_5(z) + \dots$

E. Hilbert Transform

Θεωρώντας $\chi(t)$ ως μια στάσιμη στοχαστική διαδικασία, με $-\infty < \chi(t) < \infty$, τότε ορίζουμε τον Hilbert μετασχηματισμό της $\chi(t)$ ως εξής:

$$\hat{\chi}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi(\tau)}{t - \tau} d\tau, \quad (\text{E.1})$$

όπου $\hat{\chi}(t)$ συμβολίζουμε την μετασχηματισμένη Hilbert τιμή της μεταβλητής $\chi(t)$.

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός, Inverse Hilbert transform,

$$\chi(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\chi}(u)}{t - u} du. \quad (\text{E.2})$$

Ιδιότητες:

1. Linearity,

$$(\text{Hilbert Trans.}) \left\{ \sum_j a_j \chi_j(t) \right\} = \sum_j a_j \hat{\chi}_j(t). \quad (\text{E.3})$$

2. Successive Hilbert transform,

$$(\text{Hilbert Trans.}) \{ \hat{\chi}(t) \} = -\chi(t). \quad (\text{E.4})$$

3. Orthogonality,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi(t) \hat{\chi}(t) dt = 0. \quad (\text{E.5})$$

4. Convolution, $\chi_1(t) \bullet \chi_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_1(u) \chi_2(t-u) du,$

$$(\text{Hilbert Trans.}) \chi_1(t) \bullet \chi_2(t) = \hat{\chi}_1(t) \bullet \chi_2(t) = \chi_1(t) \bullet \hat{\chi}_2(t) \quad (\text{E.6})$$

5. Fourier transform of $\hat{\chi}(t) \leftrightarrow X(\omega),$

$$(\text{Fourier Trans.}) \{ \hat{\chi}(t) \} = \begin{cases} -iX(\omega) & \text{for } \omega < 0, \\ 0 & \text{for } \omega = 0, \\ +iX(\omega) & \text{for } \omega > 0, \end{cases} \quad (\text{E.7})$$

όπου ω κυκλική συχνότητα.

F. Gaussian Κατανομή

Οι n τυχαίες μεταβλητές X_1, X_2, \dots, X_n θα καλούνται ότι έχουν Gaussian κατανομή αν η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας έχει την ακόλουθη αναπαράσταση:

$$f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\Delta|^{1/2}} \exp\left[\frac{-1}{2|\Delta|} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |\Delta|_{jk} (x_j - E[X_j])(x_k - E[X_k])\right]$$

όπου $|\Delta| \neq 0$ είναι η ορίζουσα του πίνακα μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας Δ των τυχαίων μεταβλητών. Ο πίνακας Δ γράφεται ως ακολούθως:

$$\Delta = \begin{bmatrix} \sigma_{X_1}^2 & C_{X_1, X_2} & \dots & C_{X_1, X_n} \\ C_{X_2, X_1} & \sigma_{X_2}^2 & \dots & C_{X_2, X_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{X_n, X_1} & C_{X_n, X_2} & \dots & \sigma_{X_n}^2 \end{bmatrix},$$

όπου η συνδιακύμανση των μεταβλητών υπολογίζεται:

$$C_{X_i X_j} = E[(X_i - E[X_i])(X_j - E[X_j])] = C_{X_j X_i}, \quad i \neq j.$$

Αν θεωρήσουμε $n = 3$ και τυχαίες μεταβλητές X, Y, Z με μέση τιμή μηδέν, τότε η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών θα δίνεται ως εξής:

$$f_{XYZ}(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} |\Delta|^{1/2}} \exp\left[\frac{-1}{2|\Delta|} (\Delta_{xx} x^2 + \Delta_{yy} y^2 + \Delta_{zz} z^2 + 2\Delta_{xy} xy + 2\Delta_{xz} xz + 2\Delta_{yz} yz)\right], \quad (\text{F.1})$$

με τον πίνακα μεταβλητότητας-συμμεταβλητότητας να παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$\Delta = \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & C_{XY} & C_{XZ} \\ C_{YX} & \sigma_Y^2 & C_{YZ} \\ C_{ZX} & C_{ZY} & \sigma_Z^2 \end{bmatrix}, \quad \text{όπου } |\Delta| \neq 0, \quad (|\Delta| = \det \Delta),$$

και τα στοιχεία στον εκθετικό όρο της Σχέσης (F.1) υπολογίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned} \Delta_{xx} &= \sigma_Y^2 \sigma_Z^2 - C_{YZ} C_{ZY} & \Delta_{xy} &= C_{XZ} C_{YZ} - C_{XY} \sigma_Z^2 \\ \Delta_{yy} &= \sigma_X^2 \sigma_Z^2 - C_{XZ} C_{ZX} & \Delta_{xz} &= C_{XY} C_{YZ} - C_{XZ} \sigma_Y^2 \\ \Delta_{zz} &= \sigma_X^2 \sigma_Y^2 - C_{XY} C_{YX} & \Delta_{yz} &= C_{XY} C_{XZ} - C_{YZ} \sigma_X^2 \end{aligned}$$

G. Συντελεστές εύρους φάσματος για διαδικασίες στενής λωρίδας

G1. Cartwright and Longuet-Higgins (1956)

Η σχέση που συνδέει τον πίνακα διακύμανσης με τις φασματικές ροπές ν -οστής τάξης από Cartwright and Longuet-Higgins (1956) δίνεται ως εξής:

$$|\Delta| = m_2(m_0m_4 - m_2^2) \Rightarrow$$

$$|\Delta| = \int_0^\infty \omega_1^2 S(\omega_1) d\omega_1 \left\{ \int_0^\infty \int_0^\infty S(\omega_1) S(\omega_2) (\omega_2^4 - \omega_1^2 \omega_2^2) d\omega_1 d\omega_2 \right\} \Rightarrow$$

$$2|\Delta| = \int_0^\infty S(\omega_1) \omega_1^2 d\omega_1 \left\{ \int_0^\infty \int_0^\infty S(\omega_1) S(\omega_2) (\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 d\omega_1 d\omega_2 \right\}.$$

Επειδή εξ ορισμού τα ενεργειακά φάσματα $S(\omega_1), S(\omega_2) \geq 0$, πρέπει $|\Delta| \geq 0$ δηλαδή,

$$m_0m_4 - m_2^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{m_2^2}{m_0m_4} \leq 1.$$

$$\text{Συνεπώς, } \varepsilon^2 = \frac{m_0m_4 - m_2^2}{m_0m_4} \Rightarrow \varepsilon = \sqrt{1 - \frac{m_2^2}{m_0m_4}} \Rightarrow 0 < \varepsilon < 1$$

Για την περίπτωση στενής λωρίδας, (narrow spectrum), η ενέργεια θα είναι συγκεντρωμένη γύρω από μια μέση συχνότητα $\bar{\omega}$, οι συχνότητες ω_1, ω_2 θα διαφέρουν ελάχιστα μεταξύ τους καθώς επίσης και οι $S(\omega_1), S(\omega_2)$. Δηλαδή $|\Delta| \ll 1$. Άρα και η τιμή της παραμέτρου ε θα παίρνει τιμές $\varepsilon \ll 1$.

G2. Longuet-Higgins 1984

Ο βαθμός συσχέτισης μεταξύ των δυο διαδοχικών πλατών όπως αρχικά όρισαν οι Uhlenbeck (1943) and Middleton (1960) δίνεται παρακάτω:

Από τις σχέσεις Uhlenbeck (1943) and Rice (1944),

$$\begin{cases} X = \int_0^\infty S(\omega) \cos\{(\omega - \bar{\omega})\Delta t\} d\omega \\ Y = \int_0^\infty S(\omega) \sin\{(\omega - \bar{\omega})\Delta t\} d\omega, \end{cases} \quad (\text{G.2.1})$$

και από το Κεφάλαιο 3 ότι,

$$\begin{cases} X = C_{x_c x_c}(t, t + \Delta t) \\ Y = C_{x_c x_s}(t, t + \Delta t), \end{cases} \quad (\text{G.2.2})$$

όπου $C_{x_c x_c}(t, t + \Delta t), C_{x_c x_s}(t, t + \Delta t)$ οι συναρτήσεις συνδιακύμανσης δυο διαδοχικών πλατών του κύματος με χρονική διαφορά Δt μεταξύ τους, ορίζεται η παράμετρος k , (Uhlenbeck, 1943) ως εξής:

$$k = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{\mu_0} \quad (\text{G.2.3})$$

Οι Uhlenbeck (1943) and Middleton (1960) ορίζουν το συντελεστή συσχέτισης μεταξύ των δυο διαδοχικών πλατών ως εξής :

$$\gamma = \frac{M_{11}}{\sqrt{M_{20} M_{02}}}, \quad (\text{G.2.4})$$

όπου

$$M_{pq} = \int_0^\infty \int_0^\infty (A_1 - \bar{A})^p (A_2 - \bar{A})^q f(A_1, A_2) dA_1 dA_2 \quad (\text{G.2.5})$$

με $f(A_1, A_2)$ η από κοινού σππ των δυο διαδοχικών πλατών.

Ο Kimura (1980) υπολόγισε το συντελεστή συσχέτισης:

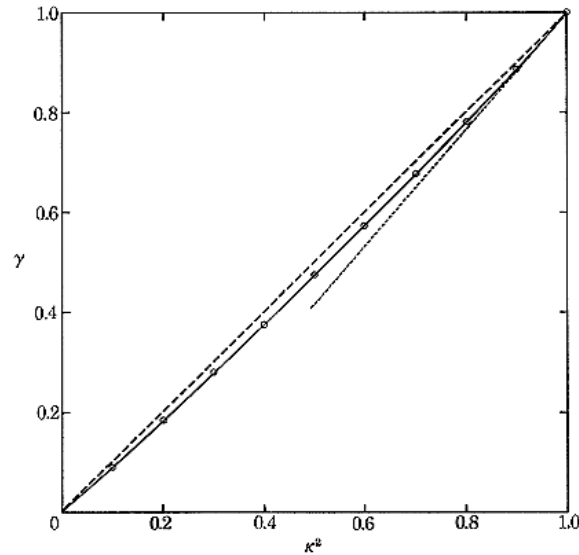
$$\gamma = \frac{\left[E(k) - \frac{1}{2}(1-k^2)K(k) - \frac{1}{4}\pi \right]}{1 - \frac{\pi}{4}}, \quad (\text{G.2.6})$$

με

$$\begin{cases} E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{(1-k^2 \sin^2(\vartheta))} d\vartheta \\ K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{(1-k^2 \sin^2(\vartheta))}} d\vartheta \end{cases}, \text{ (ελλειπτικά ολοκληρώματα)}. \quad (\text{G.2.7})$$

Στη συνέχεια παρατήρησε ότι για τιμές του $k \approx 1$, ο συντελεστής γίνεται:

$$\gamma \sim 1 - \frac{1-k^2}{4-\pi} \quad (\text{G.2.8})$$



Σχήμα G.2.1. Συντελεστής συσχέτισης γ δυο διαδοχικών πλατών κύματος ως συνάρτηση της παραμέτρου \mathbf{K} , (από Kimura, 1980)

Θα δούμε στην συνέχεια για narrow spectrum, την σχέση μεταξύ της παραμέτρου \mathbf{K} , και του συντελεστή ν όπως ορίστηκε αρχικά.

Για συχνότητες $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$ θα παρατηρήσουμε ότι :

$$\mu_0^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty S(\omega_1) S(\omega_2) d\omega_1 d\omega_2. \quad (\text{G.2.9})$$

Με αντικατάσταση των σχέσεων (G.2.1), οι X, Y κάνοντας χρήση των τριγωνομετρικών ταυτοτήτων,

$$\begin{cases} \cos(ab) = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)] \\ \sin(ab) = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)], \end{cases}$$

βλέπουμε ότι:

$$X^2 + Y^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty S(\omega_1) S(\omega_2) \cos\{(\omega_1 - \omega_2)\Delta t\} d\omega_1 d\omega_2,$$

και με κατάλληλη αντικατάσταση της (G.2.9),

$$\mu_0^2 (1 - k^2) = 2 \int_0^\infty \int_0^\infty S(\omega_1) S(\omega_2) \sin^2 \left\{ \frac{1}{2} (\omega_1 - \omega_2) \Delta t \right\} d\omega_1 d\omega_2.$$

Για narrow spectrum αναπτύσσουμε την τριγωνομετρική σειρά ως προς τον πρώτο όρο. Δηλαδή,

$$\sin^2 \left\{ \frac{1}{2} (\omega_1 - \omega_2) \Delta t \right\} \approx \frac{1}{4} (\omega_1 - \omega_2)^2 \Delta t^2 = \frac{1}{4} [(\omega_1 - \bar{\omega})^2 - (\omega_2 - \bar{\omega})^2] \Delta t^2. \quad (\text{G.2.10})$$

Απ' τις παραπάνω σχέσεις βλέπουμε ότι:

$$\mu_0^2 (1-k^2) \approx \frac{1}{2} (\mu_2 \mu_0 - 2\mu_1^2 + \mu_0 \mu_2) \Delta t^2 = \mu_0 \mu_2 \Delta t^2, \text{ αφού } \mu_1 = 0. \quad (\text{G.2.11})$$

Με αντικατάσταση της μέσης περιόδου του κύματος,

$$\bar{T} = \frac{2\pi}{\bar{\omega}} \quad (\text{mean period}),$$

η ανωτέρω σχέση (G.2.11) με κατάλληλη αντικατάσταση των σχέσεων (2.6 και 2.8) από Κεφάλαιο 2, καταλήγει τελικά:

$$1-k^2 = \left(\frac{\mu_2}{\mu_0} \right) \Delta t^2 = 4\pi^2 v^2,$$

$$k^2 = 1 - 4\pi^2 v^2.$$

Η. Σππ πλάτους κύματος και φάσης για διαδικασίες στενής λωρίδας (Pierson, 1952; Longuet-Higgins, 1952)

Με βάση το στοχαστικό κυματικό μοντέλο τυχαίας φάσης των Pierson (1952) και Longuet-Higgins (1952), η ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας της θάλασσας περιγράφεται ικανοποιητικά ως μια στάσιμη, κανονική και εργοδική στοχαστική διαδικασία. Στη γραμμική περίπτωση η ανύψωση ακολουθεί την κανονική κατανομή (κατανομή Gauss), ενώ στη μη γραμμική περίπτωση ακολουθεί κάποια μετασχηματισμένη κανονική κατανομή ή / και κάποια άλλη. Σε οποιαδήποτε περίπτωση οι κατανομές διάφορων χαρακτηριστικών (φαινομένων) κυματικών μεγεθών (π.χ., το πλάτος κύματος, φάση κ.λ.π.) μπορούν να υπολογιστούν ικανοποιητικά σχεδόν για όλους τους αναλυτικούς τύπους φασμάτων με βάση το στοχαστικό κυματικό μοντέλο τυχαίας φάσης.

Απ' το κεντρικό οριακό θεώρημα, οι εκφράσεις των $x_c(t; \theta)$, $x_s(t; \theta)$ όπως ορίστηκαν στις σχέσεις (2.10.a και 2.10.b) στο υποεδάφιο 2.3.1 ακολουθούν την Gaussian κατανομή, έχουν μηδενική μέση τιμή και διασπορά σ_x^2 πεπερασμένη ως εξής:

$$E^\theta [x_c^2(t; \theta)] = E^\theta [x_s^2(t; \theta)] = E^\theta [x^2(t; \theta)] = \sigma_x^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = m_0. \quad (\text{H.1})$$

Επειδή σ' αυτή την περίπτωση οι εκφράσεις των $x_c(t; \theta)$, $x_s(t; \theta)$ θα θεωρούνται ασυσχέτιστες, (δηλ., $E^\theta [x_c(t; \theta)x_s(t; \theta)] = 0$), και η από κοινού σππ των $x_c(t; \theta)$, $x_s(t; \theta)$ μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\begin{aligned}
 f(x_c(t; \theta), x_s(t; \theta)) &= f(x_c(t; \theta)) f(x_s(t; \theta)) \\
 &= \frac{1}{2\pi m_0} e^{\left(-\frac{x_c^2(t; \theta) + x_s^2(t; \theta)}{2m_0} \right)}. \tag{H.2}
 \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την μέθοδο αλλαγής μεταβλητών κατάλληλα στον \mathbb{R}_X^2 μέσω της:

$$f_Y(y) = f_X(\mathbf{H}(y)) \cdot \left| \frac{D(H_1, H_2)}{D(y_1, y_2)} \right|, \text{ όπου η Ιακωβιανή ορίζουσα } \mathbf{J} = \frac{D(H_1, H_2)}{D(y_1, y_2)} \text{ θα δίνεται}$$

απ' την σχέση,

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial y_1} & \frac{\partial H_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial H_2}{\partial y_1} & \frac{\partial H_2}{\partial y_2} \end{vmatrix},$$

μετασηματίζουμε τις μεταβλητές:

$$(H_1, H_2) \equiv (x_c(t; \theta), x_s(t; \theta)),$$

για τις νέες μεταβλητές:

$$(y_1, y_2) \equiv (A(t), \phi(t)).$$

Η Ιακωβιανή ορίζουσα \mathbf{J} θα παίρνει την πιο κάτω μορφή:

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_c(t; \theta)}{\partial A(t)} & \frac{\partial x_c(t; \theta)}{\partial \phi(t)} \\ \frac{\partial x_s(t; \theta)}{\partial A(t)} & \frac{\partial x_s(t; \theta)}{\partial \phi(t)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \phi(t) & -A(t) \sin \phi(t) \\ \sin \phi(t) & A(t) \cos \phi(t) \end{vmatrix} = A(t)$$

οπότε η μετασηματισμένη σππ πλάτους κύματος και φάσης θα έχει την πιο κάτω μορφή:

$$\begin{aligned}
 f(A(t), \phi(t)) &= \\
 &= \frac{1}{2\pi m_0} \exp \left[-\frac{A^2(t) \cos^2 \phi(t) + A^2(t) \sin^2 \phi(t)}{2m_0} \right] A(t) = \frac{A(t)}{2\pi m_0} \exp \left[-\frac{A^2(t)}{2m_0} \right]. \tag{H.3}
 \end{aligned}$$

Εκτελώντας κατάλληλη ολοκλήρωση της από κοινού σππ των τυχαίων μεταβλητών $A(t), \phi(t)$ στην (H.3), μπορούμε να εξάγουμε την σππ πλάτους και φάσης χωριστά (περιθωρίων συναρτήσεων κατανομών ή marginal probability density) ως εξής:

$$\begin{aligned}
 f(A(t)) &= \int_{-\pi}^{+\pi} f(A(t), \phi(t)) d\phi(t) \\
 &= \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{A(t)}{2\pi m_0} \exp\left[-\frac{A^2(t)}{2m_0}\right] d\phi(t) = \frac{A(t)}{m_0} \exp\left[-\frac{A^2(t)}{2m_0}\right],
 \end{aligned} \tag{H.4.1}$$

και

$$\begin{aligned}
 f(\phi(t)) &= \int_0^\infty f(A(t), \phi(t)) dA(t) \\
 &= \int_0^\infty \frac{A(t)}{2\pi m_0} \exp\left[-\frac{A^2(t)}{2m_0}\right] dA(t) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\partial \exp\left[-\frac{A^2(t)}{2m_0}\right]}{\partial A(t)} dA(t) \\
 &= -\frac{1}{2\pi} (-1) = \frac{1}{2\pi}.
 \end{aligned} \tag{H.4.2}$$

Παρατηρούμε ότι η σππ πλάτους κύματος (σχέση Η.4.1) ακολουθεί την Rayleigh κατανομή ενώ η σππ φάσης (σχέση Η.4.2) κατανέμεται ομοιόμορφα στο διάστημα $(-\pi, \pi)$.

I. Αλλαγή μεταβλητών και μετασχηματισμός χωρίου μεταβλητών

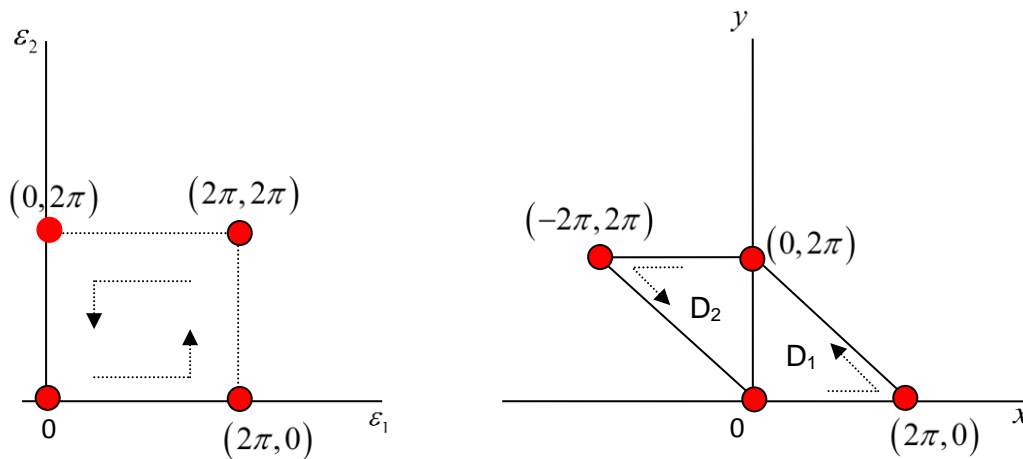
Η αλλαγή μεταβλητών στην έκφραση υπολογισμού του διπλού ολοκληρώματος της Σχέσης (3.36), πραγματοποιείται θέτοντας:

$$f(z) = \exp\{K \cos(z - M)\}, \text{ όπου } f(z + 2n\pi) = f(z), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Για την αλλαγή μεταβλητών, έχουμε:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = x \\ \varepsilon_2 = y \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \varepsilon_1 = x + y \\ \varepsilon_2 = y \end{aligned} \right. .$$

Ο μετασχηματισμός του χωρίου φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα I.1. Μετασχηματισμός χωρίου, (βλέπε σημειώσεις Αθανασούλης, 2003)

Αρα έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 &= \int_{D_1 \cup D_2} f(x) dx dy = \int_{D_1} f(x) dx dy + \int_{D_2} f(x) dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi-y} f(x) dx dy + \int_0^{2\pi} \int_{-y}^0 f(x) dx dy, \end{aligned}$$

όπου η $f(x)$ πληρεί την ιδιότητα περιοδικής συνάρτησης, δηλαδή ισχύει $f(x) = f(2\pi + x)$, συνεπώς,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi-y} f(x) dx dy + \int_0^{2\pi} \int_{-y}^0 f(2\pi + x) dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi-y} f(x) dx dy + \int_0^{2\pi} \int_{2\pi-y}^{2\pi} f(\tilde{x}) d\tilde{x} dy^{(23)} \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi-y} f(x) dx + \int_{2\pi-y}^{2\pi} f(x) dx \right) dy \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} f(x) dx \right) dy \\ &= 2\pi \int_0^{2\pi} f(x) dx. \end{aligned}$$

⁽²³⁾ Από αλλαγή μεταβλητών έχουμε, $2\pi + x = \tilde{x} \rightarrow dx = d\tilde{x}$

Δηλαδή δείξαμε ότι:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 &= 2\pi \int_0^{2\pi} f(x) dx \\ &= 2\pi \int_0^{2\pi} \exp\{K \cos(x - M)\} dx, \quad (\text{Λήμμα 1; βλέπε Παράρτημα Β}) \\ &= 2\pi \int_0^{2\pi} \exp\{K \cos(x)\} dx, \end{aligned}$$

οπότε:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\{K \cos(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - M)\} d\varepsilon_1 d\varepsilon_2 = 2\pi \int_0^{2\pi} \exp\{K \cos(x)\} dx.$$

J. Μετασχηματισμός στον \mathbb{R}_X^4

Ο μετασχηματισμός στον \mathbb{R}_X^4 πραγματοποιείται ως εξής:

Εστω \mathbf{X} μια δεδομένη τετραδιάστατη τ.μ., με γνωστή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ να είναι ολοκληρώσιμη. Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής πιθανότητας $F_Y(y_1, y_2, y_3, y_4)$, μιας τετραδιάστατης τ.μ. \mathbf{Y} , η οποία ορίζεται μέσω του σημειακού μετασχηματισμού $\mathbf{Y} = \mathbf{G}(\mathbf{X})$, $\mathbf{X} \in D_X \subseteq \mathbb{R}_X^4$ θα δίνεται απ' την σχέση :

$$\begin{aligned} F_Y(y_1, y_2, y_3, y_4) &= \\ &= \mathbf{P}_Y [Y_1 \leq y_1, Y_2 \leq y_2, Y_3 \leq y_3, Y_4 \leq y_4] \\ &= \mathbf{P}_X [(X_1, X_2, X_3, X_4) \in D_X(y_1, y_2, y_3, y_4)] \\ &= \iint_{D_X(y_1, y_2, y_3, y_4)} f_X(x_1, x_2, x_3, x_4) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \\ &= \iint_{D_Y} f_X(H_1(y_1, y_2, y_3, y_4), H_2(y_1, y_2, y_3, y_4), H_3(y_1, y_2, y_3, y_4), H_4(y_1, y_2, y_3, y_4))) \cdot \\ &\quad \cdot \left| \frac{D(H_1, H_2, H_3, H_4)}{D(y_1, y_2, y_3, y_4)} \right| dy_1 dy_2 dy_3 dy_4, \quad \text{όπου } (x_1, x_2, x_3, x_4) \in D_X, \end{aligned} \quad (\text{J.1})$$

και ο μετασχηματισμός,

$x_1 = H_1(y_1, y_2, y_3, y_4)$, $x_2 = H_2(y_1, y_2, y_3, y_4)$, $x_3 = H_3(y_1, y_2, y_3, y_4)$
 $x_4 = H_4(y_1, y_2, y_3, y_4)$ είναι αμφιμονοσήμαντος, συνεχής, και κατά τμήματα συνεχώς διαφορίσιμος, και μετασχηματίζει το χωρίο D_X στο χωρίο D_Y .

Η Ιακωβιανή ορίζουσα $\mathbf{J} = \frac{D(H_1, H_2, H_3, H_4)}{D(y_1, y_2, y_3, y_4)}$ θα δίνεται απ' την σχέση:

$$\mathbf{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial y_1} & \frac{\partial H_1}{\partial y_2} & \frac{\partial H_1}{\partial y_3} & \frac{\partial H_1}{\partial y_4} \\ \frac{\partial H_2}{\partial y_1} & \frac{\partial H_2}{\partial y_2} & \frac{\partial H_2}{\partial y_3} & \frac{\partial H_2}{\partial y_4} \\ \frac{\partial H_3}{\partial y_1} & \frac{\partial H_3}{\partial y_2} & \frac{\partial H_3}{\partial y_3} & \frac{\partial H_3}{\partial y_4} \\ \frac{\partial H_4}{\partial y_1} & \frac{\partial H_4}{\partial y_2} & \frac{\partial H_4}{\partial y_3} & \frac{\partial H_4}{\partial y_4} \end{vmatrix}. \quad (\text{J.2})$$

Αρα αν θελήσουμε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_Y[D_Y] &= \mathbf{P}_X[D_X], \forall D_Y \in G(D_X) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow D_X = \mathbf{G}^{-1}(D_Y) \\ &\Leftrightarrow \iint_{D_Y} f_Y(y_1, y_2, y_3, y_4) dy_1 dy_2 dy_3 dy_4 = \iint_{D_X} f_X(x_1, x_2, x_3, x_4) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \\ &\Leftrightarrow \iint_{D_Y} f_Y(y_1, y_2, y_3, y_4) dy_1 dy_2 dy_3 dy_4 = \\ &= \iint_{D_Y} f_X(H_1(y_1, y_2, y_3, y_4), H_2(y_1, y_2, y_3, y_4), H_3(y_1, y_2, y_3, y_4), H_4(y_1, y_2, y_3, y_4)) \cdot \\ &\quad \cdot \left| \frac{D(H_1, H_2, H_3, H_4)}{D(y_1, y_2, y_3, y_4)} \right| dy_1 dy_2 dy_3 dy_4, \end{aligned}$$

δηλαδή,

$$f_Y(y) = f_X(\mathbf{H}(y)) \cdot \left| \frac{D(H_1, H_2, H_3, H_4)}{D(y_1, y_2, y_3, y_4)} \right|. \quad (\text{J.3})$$

Κ. Σταθερά κανονικοποίησης $L(\nu)$

Η αναλυτική έκφραση της σταθεράς κανονικοποίησης $L(\nu)$ ως προς την παράμετρο καθορισμού του εύρους φάσματος (ν), δηλ.,

$$\nu = \sqrt{\frac{m_2 m_0}{m_1^2} - 1}, \quad (\text{βλέπε υποεδάφιο 2.2}),$$

που υπεισέρχεται στην μετασηματισμένη από κοινού σππ των αδιάστατων τυχαίων μεταβλητών πλάτους και περιόδου του κύματος στο μοντέλο Longuet-Higgins (1983) της Σχέσης (5.22), θα δίνεται αναπτύσσοντας την $L(\nu)$ σε σειρά Taylor στο μηδέν. Ειδικότερα, για την ανάπτυξη σε σειρά Taylor στο μηδέν της σταθεράς κανονικοποίησης αρχικά θέτουμε,

$$\left(1 - \frac{1}{\tau(t)}\right) / \nu = a(t), \quad (\text{K.1})$$

όπου $d\tau(t) = \nu \tau^2(t) da(t)$ για μια δεδομένη χρονική στιγμή t . Η αδιάστατη περίοδος κυματισμού $\tau(t)$ είναι πάντοτε θετική ώστε να πληρούνται τα φυσικά χαρακτηριστικά της, δηλ.,

$$\tau(t) > 0 \xrightarrow{(K.1)} \frac{1}{1-a(t)\nu} > 0 \rightarrow a(t)\nu < 1 \rightarrow a(t) < \frac{1}{\nu}, \text{ δηλ., } -\infty < a(t) < \frac{1}{\nu}. \quad (K.2)$$

Η από κοινού σππ $f(R(t), \tau(t))$ της Σχέσης (5.22) μια δεδομένη χρονική στιγμή t , για να ορίζεται ως συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (βλέπε Cramér and Leadbetter, 1967) θα πρέπει:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^\infty f(R(t), \tau(t)) dR(t) d\tau(t) &= 1, \text{ όπου } -\infty < a(t) < \frac{1}{\nu}, \text{ δηλ.,} \\ \int_{-\infty}^{\frac{1}{\nu}} \int_0^\infty \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{R^2(t)}{\tau^2(t)} \frac{1}{\nu} \exp\{-R^2(t)\} \exp\{-R^2(t)a^2(t)\} L(\nu)\nu\tau^2(t) dR(t) da(t) &= 1, \\ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{1}{\nu}} \int_0^\infty R^2(t) \exp\{-R^2(t)(1+a^2(t))\} dR(t) da(t) &= \frac{1}{L(\nu)}. \end{aligned} \quad (K.3)$$

Το εσωτερικό ολοκλήρωμα της Σχέσης (K.3) θα υπολογίζεται ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty R^2(t) \exp\{-R^2(t)(1+a^2(t))\} dR(t) = \\ &= -\frac{1}{2(1+a^2(t))} \int_0^\infty R(t) \frac{\partial}{\partial R(t)} \left(\exp\{-R^2(t)(1+a^2(t))\} \right) dR(t) \\ &= -\frac{1}{2(1+a^2(t))} \left[R(t) \exp\{-R^2(t)(1+a^2(t))\} \right]_0^\infty + \\ &\quad + \frac{1}{2(1+a^2(t))} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial R(t)} (R(t)) \cdot \exp\{-R^2(t)(1+a^2(t))\} dR(t) \\ &= \frac{1}{2(1+a^2(t))} \int_0^\infty \exp\{-R^2(t)(1+a^2(t))\} dR(t) \\ &= \frac{1}{2(1+a^2(t))} \int_0^\infty \exp\left\{-\left(R(t)\sqrt{1+a^2(t)}\right)^2\right\} dR(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2(1+a^2(t))} \int_0^\infty \exp\{-u^2(t)\} \frac{1}{\sqrt{(1+a^2(t))}} du(t) \quad (24) \\
 &= \frac{1}{2(1+a^2(t))^{3/2}} \cdot \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \exp\{-u^2(t)\} du(t) \xrightarrow{\sqrt{\pi}} \text{, δηλ.,} \\
 \int_0^\infty R^2(t) \exp\{-R^2(t)(1+a^2(t))\} dR(t) &= \frac{1}{4(1+a^2(t))^{3/2}} \sqrt{\pi} . \quad (\text{K.4})
 \end{aligned}$$

Με αντικατάσταση της Σχέσης (K.4) στην (K.3), έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{1}{\nu}} \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{1}{(1+a^2(t))^{3/2}} &= \frac{1}{L(\nu)} , \\
 \frac{1}{2} \left[\frac{a(t)}{(1+a^2(t))^{1/2}} \right]_{-\infty}^{\frac{1}{\nu}} &= \frac{1}{L(\nu)} , \\
 \frac{1}{2} \left[1+(1+\nu^2)^{-1/2} \right] &= \frac{1}{L(\nu)} , \\
 L(\nu) &= \frac{2}{1+(1+\nu^2)^{-1/2}} . \quad (\text{K.5})
 \end{aligned}$$

Αναπτύσσοντας την $L(\nu)$ της Σχέσης (K.5) σε σειρά Taylor στο μηδέν, έχουμε:

$$L(\nu) = L(0) + \nu L'(0) + \frac{\nu^2}{2!} L''(0) + \dots , \text{ όπου προσεγγιστικά για μικρές τιμές του } \nu ,$$

(Longuet-Higgins, 1983),

$$L(\nu) \approx 1 + \frac{1}{4} \nu^2 . \quad (\text{K.6})$$

(24) Όπου $u(t) = R(t)\sqrt{(1+a^2(t))}$ και $du(t) = dR(t)\sqrt{(1+a^2(t))}$

L. Περιθώρια σππ παραγώγου φάσης

Από την έκφραση της από κοινού συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας των μεταβλητών πλάτους κύματος $A(t)$ και παραγώγου φάσης $\phi'(t)$,

$$f(A(t), \phi'(t)) = \frac{A^2(t)}{\sqrt{2\pi\mu_0}\sqrt{\mu_2}} \exp\left\{-\frac{A^2(t)}{2\mu_0}\right\} \exp\left\{-\frac{A^2(t)\phi'^2(t)}{2\mu_2}\right\},$$

ολοκληρώνοντας ως προς $A(t)$ για μια δεδομένη χρονική στιγμή t την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(A(t), \phi'(t))$, καταλήγουμε στην περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της παραγώγου φάσης, δηλ.,

$$\begin{aligned} f(\phi'(t)) &= \int_0^\infty f(A(t), \phi'(t)) dA(t) \\ &= \int_0^\infty \frac{A^2(t)}{\sqrt{2\pi\mu_0}\sqrt{\mu_2}} \exp\left\{-\frac{A^2(t)}{2\mu_0}\right\} \exp\left\{-\frac{A^2(t)\phi'^2(t)}{2\mu_2}\right\} dA(t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu_0}\sqrt{\mu_2}} \int_0^\infty A^2(t) \exp\left\{-A^2(t)\left(\frac{1}{2\mu_0} + \frac{\phi'^2(t)}{2\mu_2}\right)\right\} dA(t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu_0}\sqrt{\mu_2}} \frac{1}{\left(\frac{1}{2\mu_0} + \frac{\phi'^2(t)}{2\mu_2}\right)^{1/2}} \frac{1}{\left(\frac{1}{2\mu_0} + \frac{\phi'^2(t)}{2\mu_2}\right)} \int_0^\infty u^2(t) \exp(-u^2(t)) du(t), \end{aligned}$$

έχοντας επιχειρήσει την αλλαγή μεταβλητών και από βασικές ιδιότητες της error function erf(),

$$u(t) = A(t) \sqrt{\left(\frac{1}{2\mu_0} + \frac{\phi'^2(t)}{2\mu_2}\right)}, \text{ με } \left(1 / \sqrt{\left(\frac{1}{2\mu_0} + \frac{\phi'^2(t)}{2\mu_2}\right)}\right) du(t) = dA(t),$$

καταλήγουμε,

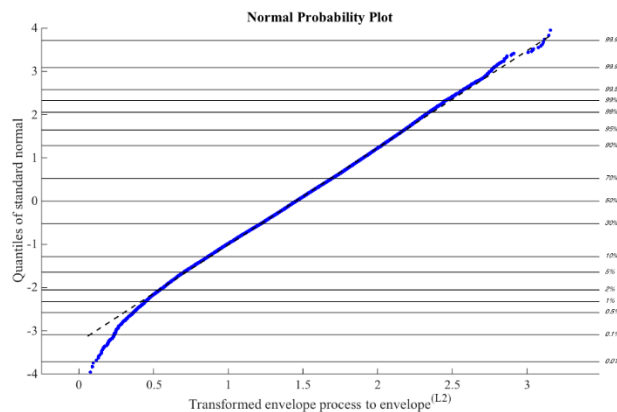
$$\begin{aligned} f(\phi'(t)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu_0}\sqrt{\mu_2}} \frac{1}{\left(\frac{1}{2\mu_0} + \frac{\phi'^2(t)}{2\mu_2}\right)^{3/2}} \frac{\sqrt{\pi}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{\mu_0}}{\sqrt{\mu_2}} \frac{1}{2\left(1 + \left(\frac{\mu_0}{\mu_2}\right)\phi'^2(t)\right)^{3/2}}, \quad -\infty \leq \phi'(t) \leq \infty. \end{aligned} \tag{L.1}$$

M. Μετασχηματισμός δεδομένων εσωτερικά στη συνάρτηση-εντολή **kde** του WAFO

Η παράμετρος $L2$ που χρησιμοποιείται εσωτερικά στη συνάρτηση-εντολή **kde** εξασφαλίζει ότι η εκτιμώμενη περιθώρια σππ μέσω εκτιμήτριας συνάρτησης Kernel με τη μέθοδο Epanechnikov των τυχαίων μεταβλητών της περιβάλλουσας, του πλάτους κορυφής $A_c(t)$ και της περιόδου κορυφής $T_c(t)$ αλλά και των από κοινού σππ των τυχαίων μεταβλητών πλάτους και περιόδου κορυφής του κύματος για μια οποιαδήποτε χρονική στιγμή t δεν θα πάρει αρνητικές τιμές χρησιμοποιώντας τα κυματικά δεδομένα του αρχείου (Data GFAKSR89). Ο εσωτερικός μετασχηματισμός των τυχαίων μεταβλητών στη συνάρτηση-εντολή **kde** για τον υπολογισμό της σππ πραγματοποιείται επιλέγοντας μία από τις ακόλουθες τιμές για την $L2$:

- 1) $L2 = 0$, γίνεται λογαριθμικός μετασχηματισμός στα δεδομένα $(x;L2) = \log(x)$,
- 2) $L2 \cong 0$, γίνεται ο μετασχηματισμός $(x;L2) = x^{(L2)} \text{sign}(L2)$, και
- 3) $L2 = 1$, δεν γίνεται μετασχηματισμός (προεπιλογή του προγράμματος).

Ο έλεγχος για την καταλληλότητα της τιμής της παραμέτρου $L2$ γίνεται κατά πόσο οι μετασχηματισμένες τιμές του πλάτους και της περιόδου κορυφής αλλά και της περιβάλλουσας ακολουθούν την κανονική κατανομή. Στο παράδειγμα του Σχήματος 6.8, η τιμή της παραμέτρου $L2=0.7$ μετασχηματίζει κατάλληλα τα δεδομένα του πλάτους κορυφής $A_c(t)$ σε $(A_c(t))^{(L2)}$ και τα δεδομένα της περιόδου κορυφής $T_c(t)$ σε $(T_c(t))^{(L2)}$ ώστε οι κατανομές των μετασχηματισμένων τιμών του πλάτους και περιόδου κορυφής να ακολουθούν την κανονική κατανομή. Στο παράδειγμα του Σχήματος M.1, η τιμή της παραμέτρου $L2=0.55$ μετασχηματίζει κατάλληλα τις τιμές της περιβάλλουσας στις μετασχηματισμένες τιμές $\text{envelope}^{(L2)}$ ώστε η κατανομή των μετασχηματισμένων τιμών να ακολουθεί ικανοποιητικά την κανονική κατανομή.



Σχήμα M.1. Γράφημα κανονικής κατανομής για τα μετασχηματισμένα δεδομένα της περιβάλλουσας με παράμετρο εισόδου $L2=0.55$ εσωτερικά της εντολής **kde** στα κυματικά δεδομένα του αρχείου (Data GFAKSR89).

Με τη βοήθεια της εντολής **wnormplot** το γράφημα κανονικής κατανομής είναι σχεδόν γραμμικό, (βλέπε επίσης `help kdeoptset` του WAFO). Να σημειώσουμε ότι εσωτερικά στη συνάρτηση-εντολή **kde**, τα τελικά αποτελέσματα της εκτιμήτριας για τις σππ των μεταβλητών αναφέρονται στην αρχική τους μορφή (προ μετασχηματισμό μεταβλητών), με μια αλλαγή μεταβλητών που γίνεται στο τελικό στάδιο εμφάνισης των υπολογισμών.

Βιβλιογραφία-Αναφορές

- Αθανασούλης Γ.Α, (2003). Πραξεις και Μετασηματισμοί Τυχαίων Μεταβλητών, Ανεμογενείς Θαλάσσιοι Κυματισμοί, Συμπληρωματικές σημειώσεις για το μάθημα: Θεωρία Πιθανοτήτων & Στατιστική. Εφαρμογές στο Θαλάσσιο Περιβάλλον, στα πλαίσια του Διαπανεπιστημιακού Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου (Ε.Μ.Π.) “Ναυτική και Θαλάσσια Τεχνολογία και Επιστήμη”
- Αθανασούλης Γ.Α. (2007). Προβλήματα τομών και μέγιστων τιμών στοχαστικών διαδικασιών συνεχούς χρόνου, σημειώσεις για το μάθημα: “Στοχαστική μοντελοποίηση και πρόβλεψη θαλάσσιων συστημάτων” του Δ.Π.Μ.Σ. “Ναυτική & Θαλάσσια Τεχνολογία και Επιστήμη”, Ε.Μ.Π.
- Ακρίβης, Γ.Δ., Δούγαλης, Β.Α., (1998). Εισαγωγή στην αριθμητική ανάλυση, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο.
- Abramowitz, M., & Stegun, I.A., (1975). Handbook of mathematical functions. New York: Dover Publications 1045 pp.
- Arhan, M. K., Cavanie, A. & Ezraty, R., (1976). Etude th´eorique et exp´erimentale de la relation hauteur-p´eriodes des vagues de tempete. ifp 24191. Technical Report. Centre National pour l’Exploitation des Oceans.
- Baxevani, A., Podgorski, K., Rychlic, I. (2003). Velocities for moving random surfaces. Probabilistic Engineering Mechanics, Vol.18, 251–271.
- Bhat, N., (1985). Elements of Applied Stochastic Processes, 2nd ed., Wiley, New York.
- Bretschneider, C.L. (1961). A one-dimensional gravity wave spectrum, Ocean Wave Spectra, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.:41–65.
- Brodtkorb, Per & Johannesson, Pär & Lindgren, Georg & Rychlik, Igor & Ryden, Jesper & Sjo, Eva. (2000).
- Cartwright, D. E. & Longuet-Higgins, M. S., (1956). The statistical distribution of the maxima of a random function. Proc. R. Soc. Lond. A **237**, 212–232.
- Cavanie, A., Arhan, M. & Ezraty, R., (1976). A statistical relationship between individual heights and periods of storm waves. In Behaviour of Offshore Structures (BOSS), pp. 354–363.
- Chakrabarti, S.K., (2005). Handbook of offshore engineering, vol. 1. Elsevier
- Cramér, H. (1971). Structural and statistical problems for a class of stochastic processes. S. S. Wilks lecture, Princeton Univ. Press.
- Cramér, H., Leadbetter, M.R., (1967). Stationary and Related Stochastic Processes, John Wiley and Sons Inc., New York.
- Ferdinande, V., (1977). On the Representation of Normalized Wave Spectra. ISP Vol. 24, No. 279
- Gnedenko, B.V., (1975). The theory of probability, MIR Publishers, Moscow.
- Gospodnetic, D., and Miles, M., (1974). Some Aspects of the Average Shape of Wave Spectra at Station ‘India’ (50°N, 19W). International Symposium on the Dynamics of Marine Vehicles and Structures in Waves, London.
- Heffernan, J. E. & Tawn, J. A., (2004). A conditional approach for multivariate extreme values (with discussions and reply by the authors), J. Roy. Statist. Soc., B 66(3), 1–34.
- Heffernan, J. E. and Resnick, S. I., (2007). Limit laws for random vectors with an extreme component. Ann. Appl. Prob., 17, 537–571.
- Hoffman, D., (1974). Analysis of measured and calculated data. Proceedings of International Symposium on the Dynamics of Marine Vehicles and Structures in Waves, University College, London.
- Huang, N.E., Long, S.R., Tung, C.C., Yuen, Y., Bliven, L.F., (1981). A unified two-parameter wave spectral model for a general sea state. J. Fluid Mech. 112, 203–224. <https://doi.org/10.1017/S0022112081000360>

- Kimura, A., (1980). Statistical properties of random wave groups. Proceedings of the 17th International Conference on Coastal Engineering, ASCE, Vol III, pp. 2955-2973, Sydney-Australia
- Κωνσταντινίδου Άννα, 2007. Μεταπτυχιακή εργασία “ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΕΜΦΑΝΙΣΗΣ ΓΙΓΑΝΤΙΑΙΩΝ ΚΥΜΑΤΙΣΜΩΝ” του Διαπανεπιστημιακού Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών «Ναυτική και Θαλάσσια Τεχνολογία και Έρευνα» της σχολής Ναυπηγών Μηχανολόγων Μηχανικών
- Kottler, Carl F., (1970). A Wind Wave Co-Cumulative Spectral Model. *J. Ship Res.* 14: 277–295.
<https://doi.org/10.5957/jsr.1970.14.4.277>
- Lindgren, G., and Rychlik, I., (1982). Wave characteristic distributions for Gaussian waves-wave-length, amplitude and steepness, *Ocean Eng.*, 9(5), 411-432.
- Liu, P.C. (1983). A representation for the frequency spectrum of the wind-generated waves. *Ocean Engineering*, vol. 10, n. 6, pp. 429-441.
- Longuet-Higgins M.S. (1982). On the skewness of the sea surface slopes. *Journal of Physical Oceanography*, Vol.12, pp. 1283-1291.
- Longuet-Higgins, M. S., (1975). On the joint distribution of the periods and amplitudes of sea waves. *J. Geophys. Res.* **80** (18), 2688–2694.
- Longuet-Higgins, M. S., (1983). On the joint distribution of wave periods and amplitudes in a random wave field. *Proc. R. Soc. Lond. A* **389**, 241–258.
- Longuet-Higgins, M. S., (1983). On the joint distribution of wave periods and amplitudes in a random wave field. *Proc. R. Soc. Lond. A* **389**, 241–258.
- Longuet-Higgins, M.S. (1984). Statistical Properties of Wave Groups in a Random Sea State. *Phil. Trans. Royal Soc. London*, A312, pp. 219-250.
- Longuet-Higgins, M.S., (1952). On the statistical distribution of the heights of sea waves. *Journal of Marine Research*, XI (3):245-266.
- Longuet-Higgins, M.S., (1957). The statistical analysis of a random moving surface. *Philos. Trans. Roy. Soc. London*, Ser. A, 249, 321-387
- Memos, C.D., and Tzani, K., (1994). Numerical results of the joint probability of heights and periods of sea waves. *J. Coast.Eng.*, 22, 217-235.
- Memos, C.D., Tzani, K., (2000). Joint distribution of wave heights and periods in waters of any depth. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, vol. 126, no. 3, pp. 162-172.
- Middleton, D., (1960). An introduction to statistical communication theory. McGraw-Hill, New York.
- Newland, D. E. (1984). An Introduction to Random Vibrations and Spectral Analysis (2nd edn). Longman Group Ltd.
- Ochi, M. K. (1990, a). Applied Probability and Stochastic Processes in Engineering and Physical Sciences. John Wiley & Sons, New York.
- Ochi, M. K. (1990, b). Stochastic description of offshore environment, In *Water Waves Kinematics*, Kluwer Academic, pp. 31-56
- Ochi, M. K., (1998) *Ocean Waves: The Stochastic Approach*. Cambridge University Press.
- Ochi, M.K., Hubble, E.N., (1977). Six-Parameter Wave Spectra, in: *Coastal Engineering 1976*. American Society of Civil Engineers, New York, NY, pp. 301–328. <https://doi.org/10.1061/9780872620834.018>
- Pierson, W. J., Moskowitz, L. A., (1964). A proposed spectral form for fully developed wind seas based on the similarity theory of S.A. Kitaigorodskii, *J. Geophys. Res.*, 69(24), 5181-5190.
- Pierson, W. J. (1952). A unified mathematical theory for the analysis, propagation, and refraction of storm generated ocean surface waves-Parts I and II. Res. Division, New York University, College of Engineering, Dept. of Meteorology.

- Pierson, W. J., G. Neumann, and R.W., James, (1958). Practical methods for observing and forecasting ocean waves by means of wave spectra and statistics, Hydrogr. Off. Publ. 603, U.S. Navy Hydrographic Office, Washington DC.
- Podgorski, K., Rychlik, I. & Machado, U. E. B., (2000). Exact distributions for apparent wave in irregular seas. *Ocean Engng* **27**, 979–1016.
- Rayleigh, Lord (1880). On the stability, or instability, of certain fluid motions. *Proc. Lond. Math. Soc* **XI**, 57–70.
- Rice, S. O., (1944). Mathematical analysis of random noise. *Bell System Tech. J.* **23**, 282–332.
- Rice, S. O., (1945). Mathematical analysis of random noise. *Bell System Tech. J.* **24**, 46–108.
- Rychlik I., Johannesson P., Leadbetter M.R., (1997). Modelling and statistical analysis of ocean-wave data using transformed Gaussian processes. *Marine Structures*, Vol.10, pp. 13-47.
- Rychlik, Igor & Lindgren, Georg. (1997). *WAVE Analysis Toolbox -- a tutorial*.
- Rye H., Svee R., (1976) "On the parametric representation of a wind-wave field". Paper presented at the 15th Coastal Eng. Conference, Hawaii, 1976
- Shum, K.T., and Melville, W.K., (1984). Estimate of the joint statistics of amplitudes and periods of ocean waves using an integral transform technique. *J. Geophys. Res.*, Vol. 89, 6467-6476.
- Stansell, P., Wolfram, J. & Linfoot, B., (2002). Statistics of wave groups measured in the northern North Sea; comparisons between time series and spectral predictions. *Applied Ocean Research*, **24**, 91–106.
- Stansell, P., Wolfram, J. & Linfoot, B., (2004). Improved joint probability distribution for ocean wave heights and periods. *Journal of Fluid Mechanics*, **503**, 273-297. doi:10.1017/S002211200400802X
- Thornton E. B., Guza R. T. (1983). Transformation of wave height distribution. *Journal of Geophysical Research*, Vol.88, No. C10, pp. 5925-5938.
- Uhlenbeck, G.E., (1943). *Theory of Random Processes*, MIT Radiation Lab. Rept. 454
- Veltcheva A., P. Cavaco, C. Guedes Soares (2002). Comparison of methods for calculation of the wave envelope. *Ocean Engineering* **30** (2003) 937–948
- WAFO - A Matlab toolbox for analysis of random waves and loads. *Proceedings of the International Offshore and Polar Engineering Conference*. **3**. 343-350.
- WAFO 2000 Version 2.0.3. URL <http://www.maths.lth.se/matstat/wafo/>.
- Wand, M.P. and Jones, M.C., (1995). *Kernel Smoothing*. Chapman & Hall, London.
<http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4899-4493-1>
- Winterstein, S.R., (1988). Nonlinear vibration models for extremes and fatigue. *J.Engng.Mech. ASCE*, Vol.114, No 10, pp. 1772-1790.
- Yang J.N., (1971). Simulation of random envelope processes. *Journal of Sound and Vibration* (1972) **21** (1), 73-85
- Yuan, Y.L., (1982). On the statistical properties of sea waves. Ph.D. Thesis, North Carolina State Univ., Raleigh, N.C.