ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
Δ.Π.Μ.Σ «ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ»

«Οι τύποι Area, Coarea και εφαρμογές»

Μεταπτυχιακή διπλωματική εργασία

Αναστασία Γομάτου

Τριμελής επιτροπή

Νικόλαος Γιαννακάκης (Επιβλέπων Καθηγητής)

Αλέξανδρος Αρβανιτάκης

Αντώνιος Χαραλαμπόπουλος

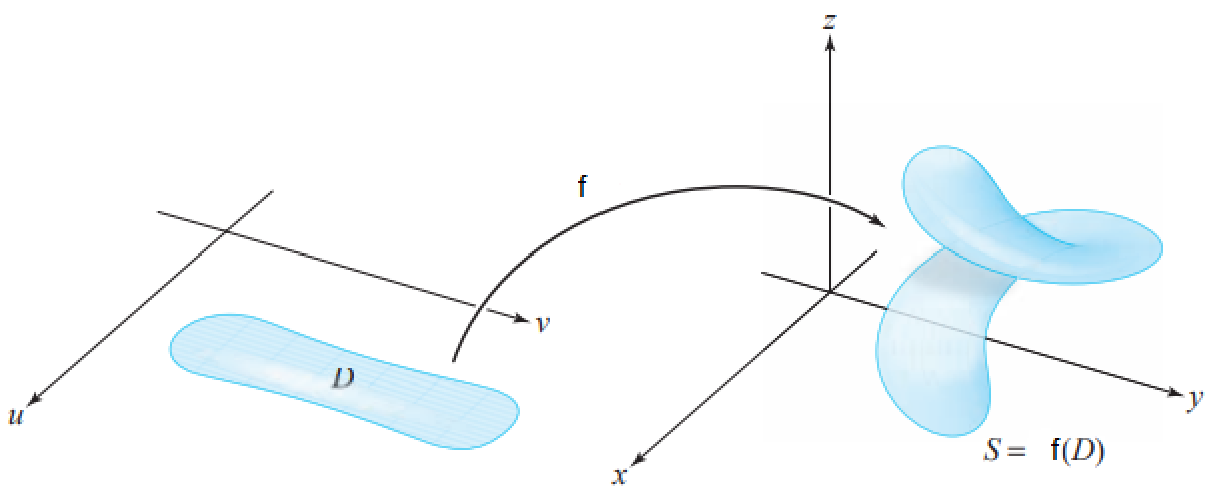
ΑΘΗΝΑ
ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 2021

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Νικόλαο Γιαννακάκη για την καθοδήγησή του και τον πολύτιμο χρόνο που αφιέρωσε για την εργασία αυτή. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου για τη συνεχή στήριξή τους όλα αυτά τα χρόνια.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Θεωρούμε μία επιφάνεια S στον $\mathbb{R}^3$. Το ζήτημα που μας απασχολεί είναι να υπολογίσουμε το εμβαδόν της. Αν η επιφάνεια είναι αρκετά ομαλή μπορούμε να την παραμετρικοποιήσουμε μέσω μιας 1-1 και C^1 συνάρτησης, $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ την οποία συμβολίζουμε ως $f(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ για κάθε $(u,v) \in D$. Τότε η εικόνα $f(D)$ μας δίνει την επιφάνεια S.



Στη συνέχεια συμβολίζουμε τα εφαπτόμενα διανύσματα της f σε ένα σημείο (u,v) ως

$$\mathbf{T}_u = \frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u,v)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{T}_v = \frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u,v)\mathbf{k}$$

και αφού η S είναι λεία, έχουμε $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v \neq 0$, δηλαδή

$$\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{k} \neq 0$$

Στην περίπτωση αυτή το εμβαδόν της παραμετρικοποιημένης επιφάνειας δίνεται από το γνωστό τύπο

$$A(S) = \int_D \|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\| \, dudv = \int_D \sqrt{\left[\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right]^2} \, dudv$$

Απ΄ την άλλη πλευρά, αν φτιάξουμε τον πίνακα των μερικών παραγώγων της f

$$D = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$$

και ονομάσουμε τις ορίζουσες των 2×2 υποπινάκων του D «Ιακωβιανές» τις οποίες συμβολίζουμε ως

$$J_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\ J_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)},\ J_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

τότε ο τύπος του εμβαδού που είδαμε παραπάνω μας λέει ότι μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν της S χρησιμοποιώντας τις «Ιακωβιανές» υποορίζουσες της παραμετρικοποίησης f, δηλαδή

$$A(S) = \int_D \sqrt{\left[\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right]^2}\, dudv = \int_D \left(\sum_{i=1}^{3} |J_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} dudv$$

Στη γενική περίπτωση θα δούμε ότι το εμβαδόν της παραμετρικοποιημένης επιφάνειας μέσω μιας 1-1 και Lipschitz συνεχούς συνάρτησης $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ με $n \leq m$ υπολογίζεται από τον τύπο

$$\text{«Εμβαδόν» της επιφάνειας } f(E) = \int_E \left(\sum_{i=1}^{C_m^n} |J_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} d\mathcal{L}^n$$

όπου το E είναι ένα Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και με $\mathcal{L}^n$ συμβολίζουμε το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^n$. Επιπλέον, θα αποδείξουμε ότι το «εμβαδόν» της επιφάνειας $f(E)$ που υπολογίζεται μέσω του παραπάνω ολοκληρώματος, ισούται με το n-διάστατο μέτρο Hausdorff. Συνεπώς, μέσω του μέτρου Hausdorff θα βρούμε και έναν εναλλακτικό τρόπο υπολογισμού του εμβαδού.

Στη συνέχεια, γενικεύοντας περαιτέρω για Lipschitz συνεχείς συναρτήσεις $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ με $n \leq m$, οι οποίες δεν είναι απαραίτητα 1-1 και C^1 καταλήγουμε στη λεγόμενη Area formula.

Στην περίπτωση που έχουμε Lipschitz συνεχείς συναρτήσεις $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ αλλά με $n \geq m$, θα δείξουμε ότι ισχύει η λεγόμενη Coarea formula. Ως αποτέλεσμα της Coarea formula θα δούμε ότι για να ολοκληρώσουμε μία συνάρτηση $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ στον $\mathbb{R}^n$ μπορούμε να την ολοκληρώσουμε πρώτα πάνω στα σύνολα στάθμης μιας Lipschitz συνεχούς συνάρτησης $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ με $n \geq m$ και έπειτα πάνω στον $\mathbb{R}^m$. Μία εφαρμογή του αποτελέσματος αυτού είναι η γενίκευση του τύπου αλλαγής μεταβλητής σε πολικές συντεταγμένες. Έχουμε ότι για $g : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ο τύπος αλλαγής μεταβλητής είναι

$$\iint_D g(x,y)\ dxdy = \iint_{D^*} g(r\cos\theta, r\sin\theta)r\ dr$$

Γενικεύοντας, αν $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι μία $\mathcal{L}^n$-ολοκληρώσιμη συνάρτηση, θα δείξουμε ότι για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα της g πάνω στον $\mathbb{R}^n$ μπορούμε να την ολοκληρώσουμε πρώτα πάνω στο σύνορο της n - διάστατης μπάλας και έπειτα πάνω στο $\mathbb{R}$. Δηλαδή θα έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} g\ dx = \int_0^\infty \left(\int_{\partial B(r)} g\ d\mathcal{H}^{n-1} \right) dr$$

όπου με $\mathcal{H}^{n-1}$ συμβολίζουμε το $n-1$ - διάστατο μέτρο Hausdorff. Στην περίπτωση αυτή, το σύνορο της n - διάστατης μπάλας είναι στην ουσία το σύνολο στάθμης της $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \|x\|$, η οποία θα παίξει το ρόλο της Lipschitz συνεχούς συνάρτησης που χρησιμοποιεί η Coarea formula.

Όπως είδαμε και στα παραπάνω παραδείγματα, χρησιμοποιούμε το μέτρο Hausdorff κατά την ολοκλήρωση και στην Area και στην Coarea formula. Για το λόγο αυτό θα κάνουμε μία εισαγωγή και στο μέτρο Hausdorff.

Πιο συγκεκριμένα, στο Κεφάλαιο 1 θα παραθέσουμε στοιχεία της θεωρίας μέτρου και της γραμμικής άλγεβρας που θα μας χρειαστούν στο σύνολο της εργασίας. Έπειτα στο Κεφάλαιο 2 θα ορίσουμε το μέτρο Hausdorff, θα δούμε βασικές ιδιότητές του και θα κάνουμε μία σύντομη αναφορά στην έννοια της διάστασης Hausdorff. Στο Κεφάλαιο 3 θα αποδείξουμε την Area formula και βασικές εφαρμογές της, ενώ αντίστοιχα, στο Κεφάλαιο 4 θα αποδείξουμε την Coarea formula και βασικές εφαρμογές της.

Στο σύνολο της εργασίας ακολουθούμε τα βιβλία [Evans and Gariepy, 1992] και [Attouch et al., 2014] ενώ ειδικά σε ζητήματα που αφορούν θεωρία μέτρου ακολουθούμε και το [Folland, 1999].

Κεφάλαιο 1

Βασικές έννοιες

Στο κεφάλαιο αυτό θα παραθέσουμε βασικές έννοιες και θεωρήματα της θεωρίας μέτρου καθώς και βασικά αποτελέσματα γραμμικής άλγεβρας που αφορούν γραμμικές απεικονίσεις, τα οποία θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια.

1.1 Θεωρία μέτρου

Ορισμός 1.1.

i. *Ορίζουμε ως δυναμοσύνολο του $\mathbb{R}^n$ την οικογένεια όλων των υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ και το συμβολίζουμε με $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.*

ii. *Ορίζουμε ως Borel σ-άλγεβρα του $\mathbb{R}^n$ τη μικρότερη σ-άλγεβρα του $\mathbb{R}^n$ που περιέχει τα ανοικτά σύνολα του $\mathbb{R}^n$.*

iii. *Ένα μέτρο μ στον $\mathbb{R}^n$ λέγεται Borel αν κάθε Borel σύνολο είναι μ-μετρήσιμο.*

Ορισμός 1.2.

i. *Έστω X σύνολο. Ένα μέτρο μ στο X λέγεται κανονικό, αν για κάθε $A \subset X$ υπάρχει ένα μ-μετρήσιμο σύνολο B τέτοιο ώστε $A \subset B$ και $\mu(A) = \mu(B)$.*

ii. *Ένα μέτρο μ στον $\mathbb{R}^n$ λέγεται Borel κανονικό αν το μ είναι Borel και για κάθε $A \subset \mathbb{R}^n$ υπάρχει Borel σύνολο B τέτοιο ώστε $A \subset B$ και $\mu(A) = \mu(B)$.*

iii. *Ένα μέτρο μ στον $\mathbb{R}^n$ λέγεται Radon μέτρο αν το μ είναι Borel κανονικό και $\mu(K) < \infty$ για κάθε συμπαγές σύνολο $K \subset \mathbb{R}^n$.*

Θεώρημα 1.3. ***(Προσέγγιση από ανοικτά και συμπαγή σύνολα)***

Έστω μ ένα Radon μέτρο στον $\mathbb{R}^n$. Τότε *i Για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}^n$*

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) \mid A \subseteq U, U \text{ ανοικτό}\}$$

ii Για κάθε μ-μετρήσιμο $A \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \subseteq A, K \text{ συμπαγές}\}$$

Ορισμός 1.4. *Έστω ν, μ μέτρα στον $\mathbb{R}^n$. Λέμε ότι το ν είναι απόλυτα συνεχές ως προς το μ και συμβολίζουμε με $\nu << \mu$, αν $\nu(A) = 0$ για κάθε $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ για το οποίο ισχύει $\mu(A) = 0$.*

Ορισμός 1.5. *Έστω ν, μ Radon μέτρα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ορίζουμε*

$$\overline{D}_\mu\nu(x) := \begin{cases} \limsup\limits_{r\to 0} \dfrac{\nu(B(x,r))}{\mu(B(x,r))} & \text{αν } \mu(B(x,r)) > 0 \text{ για κάθε } r > 0 \\ +\infty & \text{αν } \mu(B(x,r)) = 0 \text{ για } r > 0 \end{cases}$$

και

$$\underline{D}_\mu\nu(x) := \begin{cases} \liminf\limits_{r\to 0} \dfrac{\nu(B(x,r))}{\mu(B(x,r))} & \text{αν } \mu(B(x,r)) > 0 \text{ για κάθε } r > 0 \\ +\infty & \text{αν } \mu(B(x,r)) = 0 \text{ για } r > 0 \end{cases}$$

Αν $\overline{D}_\mu\nu(x) = \underline{D}_\mu\nu(x) < +\infty$ λέμε ότι το ν είναι διαφορίσιμο ως προς το μ στο x και γράφουμε:

$$D_\mu\nu(x) := \overline{D}_\mu\nu(x) = \underline{D}_\mu\nu(x)$$

Η $D_\mu\nu$ είναι η παράγωγος του ν ως προς το μ. Η $D_\mu\nu$ λέγεται και πυκνότητα του ν ως προς το μ.

Θεώρημα 1.6. ***(Radon-Nikodym)*** *Έστω ν, μ δύο Radon μέτρα στον $\mathbb{R}^n$ με $\nu << \mu$, τότε*

$$\nu(A) = \int_A D_\mu\nu \, d\mu$$

Θεώρημα 1.7. *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f : X \to [0,\infty]$ μ-μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε υπάρχουν μ-μετρήσιμα σύνολα $\{A_k\}_{k=1}^\infty$ στον X τέτοια ώστε*

$$f = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k}\mathcal{X}_{A_k}$$

Θεώρημα 1.8. ***(Μονότονης σύγκλισης)*** *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ μία ακολουθία μ-μετρήσιμων συναρτήσεων $f_k : X \to [0, \infty]$ με $f_1 \leq \dots \leq f_k \leq f_{k+1} \leq \dots$ Τότε*

$$\lim_{k\to\infty} \int f_k \, d\mu = \int \lim_{k\to\infty} f_k \, d\mu$$

Πόρισμα 1.9. ***(Θεώρημα Beppo Levi)*** *[Κουμμουλής Γ., 2005] Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ μία ακολουθία μ-μετρήσιμων συναρτήσεων $f_k : X \to [0, \infty]$. Τότε*

$$\int \sum_{k=1}^{\infty} f_k \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int f_k \, d\mu$$

Θεώρημα 1.10. *Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και έστω $\delta > 0$. Τότε υπάρχει αριθμήσιμη οικογένεια $\mathcal{G}$ από κλειστές ξένες μπάλες στο U τέτοια ώστε $\mathrm{diam}(B) < \delta$ για κάθε $B \in \mathcal{G}$ και*

$$\mathcal{L}^n\Big(U - \bigcup_{B\in\mathcal{G}} B\Big) = 0$$

Θεώρημα 1.11. ***(Luzin)*** *Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και $A \subset \mathbb{R}^n$ μ-μετρήσιμο σύνολο με $\mu(A) < +\infty$ και έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ μ-μετρήσιμη συνάρτηση, όπου το μ είναι Borel κανονικό μέτρο στον $\mathbb{R}^n$.*

Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει κλειστό $F_\varepsilon \subset A$ ώστε $\mu(A \backslash F_\varepsilon) < \varepsilon$ και η $f|_{F_\varepsilon}$ να είναι συνεχής συνάρτηση.

Θεώρημα 1.12. ***(Fubini)*** *Έστω X, Y σύνολα, μ ένα μέτρο στον X και ν ένα μέτρο στον Y.*

i. *Τότε το $\mu \times \nu$ είναι κανονικό μέτρο στον $X \times Y$ ακόμη και αν τα μ και ν δεν είναι κανονικά.*

ii. *Αν $A \subseteq X$ είναι μ-μετρήσιμο και $B \subseteq Y$ είναι ν-μετρήσιμο, τότε το $A \times B$ είναι $(\mu \times \nu)$-μετρήσιμο και*

$$(\mu \times \nu)(A \times B)$$

iii. *Αν $S \subseteq X \times Y$ είναι σ-πεπερασμένο ως προς το $\mu \times \nu$ τότε το*

$$S_y := \{x \mid (x, y) \in S\}$$

είναι μ-μετρήσιμο για ν-σχεδόν κάθε y, το

$$S_x := \{y \mid (x, y) \in S\}$$

είναι ν-μετρήσιμο για μ-σχεδόν κάθε x, το $\mu(S_y)$ είναι ν-ολοκληρώσιμο και το $\nu(S_x)$ είναι μ-ολοκληρώσιμο. Επίσης ισχύει

$$(\mu \times \nu)(S) = \int_Y \mu(S_y)\ d\nu(y) = \int_X \nu(S_x)\ d\mu(x)$$

iv. *Αν η f είναι $(\mu \times \nu)$-ολοκληρώσιμη και σ-πεπερασμένη ως προς το $\mu \times \nu$ τότε η απεικόνιση*

$$y \mapsto \int_X f(x,y)\ d\mu(x)$$

είναι ν-ολοκληρώσιμη, η απεικόνιση

$$x \mapsto \int_Y f(x,y)\ d\nu(y)$$

είναι μ-ολοκληρώσιμη και

$$\int_{X\times Y} f d(\mu \times \nu) = \int_Y \left[\int_X f(x,y) d\mu(x)\right] d\nu(y) = \int_X \left[\int_Y f(x,y) d\nu(y)\right] d\mu(x)$$

1.2 Γραμμική άλγεβρα

Ορισμός 1.13.

i. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}^m$ καλείται Lipschitz συνεχής αν υπάρχει σταθερά C ώστε να ισχύει*

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y| \tag{1.1}$$

για κάθε $x, y \in A$.

ii. *Η μικρότερη σταθερά C για την οποία ισχύει η 1.1 για κάθε $x, y \in A$ συμβολίζεται με*

$$\mathrm{Lip}(f) := \sup\left\{\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}\ ,\ x, y \in A, x \neq y\right\}$$

iii. *Μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}^m$ καλείται τοπικά Lipschitz συνεχής αν για κάθε συμπαγές $K \subseteq A$, υπάρχει σταθερά C_k τέτοια ώστε να ισχύει*

$$|f(x) - f(y)| \leq C_k|x - y|$$

Ορισμός 1.14. *Μία συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ καλείται διαφορίσιμη στο $x \in \mathbb{R}^n$ αν υπάρχει γραμμική απεικόνιση*

$$L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

τέτοια ώστε

$$\lim_{y \to x} \frac{|f(y) - f(x) - L(y - x)|}{|x - y|} = 0$$

Αν υπάρχει τέτοια L είναι μοναδική, τη συμβολίζουμε με $Df(x)$ και καλείται το διαφορικό της f στο x.

Θεώρημα 1.15. ***(Rademacher)***

Έστω μία $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ τοπικά Lipschitz συνάρτηση. Τότε η f είναι διαφορίσιμη $\mathcal{L}^n$- σχεδόν παντού.

Θεώρημα 1.16.

i. *Έστω* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *μία τοπικά Lipschitz συνεχής συνάρτηση και*

$$Z := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\}$$

Τότε $Df(x) = 0$ *για* $\mathcal{L}^n$*-σχεδόν κάθε* $x \in Z$.

ii. *Έστω* $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *τοπικά Lipschitz συνεχείς συναρτήσεις και*

$$Y := \{x \in \mathbb{R}^n : g(f(x)) = x\}$$

Τότε $Dg(f(x))Df(x) = I$ *για* $\mathcal{L}^n$*-σχεδόν κάθε* $x \in Y$.

Ορισμός 1.17.

i. *Μία γραμμική απεικόνιση* $O : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *λέγεται ορθογώνια αν για κάθε* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *ισχύει*

$$(Ox) \cdot (Oy) = x \cdot y$$

ii. *Μία γραμμική απεικόνιση* $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *λέγεται συμμετρική αν για κάθε* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *ισχύει*

$$x \cdot (Sy) = (Sx) \cdot y$$

iii. *Μία γραμμική απεικόνιση* $D : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *λέγεται διαγώνια αν υπάρχουν* $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{R}$ *τέτοια ώστε για κάθε* $x \in \mathbb{R}^n$ *να ισχύει*

$$Dx = (d_1 x_1, \dots, d_n x_n)$$

iv. *Έστω* $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *γραμμικός τελεστής. Ο συζυγής του* A *είναι η γραμμική απεικόνιση* $A^* : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *που ορίζεται ως*

$$x \cdot (A^* y) = (Ax) \cdot y$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ *και* $y \in \mathbb{R}^m$.

Θεώρημα 1.18. *Ισχύουν τα εξής*

i. $A^{**} = A$

ii. $(AB)^* = B^* A^*$

iii. *Αν η* $O : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *είναι ορθογώνια, τότε* $O^* = O^{-1}$.

iv. *Αν η* $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *είναι συμμετρική, τότε* $S^* = S$.

v. *Αν η* $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *είναι συμμετρική, υπάρχουν μία ορθογώνια απεικόνιση* $O : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *και μία διαγώνια απεικόνιση* $D : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *τέτοιες ώστε*

$$S = ODO^{-1}$$

vi. *Αν η* $O : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *είναι ορθογώνια, τότε* $n \leq m$ *και:*

$$O^*O = I \text{ στον } \mathbb{R}^n,$$

$$OO^* = I \text{ στον } \mathbb{R}^m$$

Όπου με I *συμβολίζουμε την ταυτοτική απεικόνιση.*

Θεώρημα 1.19. *Έστω* $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *γραμμική απεικόνιση. Τότε*

i. *Αν* $n \leq m$, *υπάρχει συμμετρική απεικόνιση* $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *και ορθογώνια απεικόνιση* $O : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *έτσι ώστε η* L *να αναλύεται ως*

$$L = OS \tag{1.2}$$

ii. *Αν* $n \geq m$, *υπάρχει συμμετρική απεικόνιση* $S : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ *και ορθογώνια απεικόνιση* $O : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *έτσι ώστε η* L *να αναλύεται ως*

$$L = SO^* \tag{1.3}$$

Στη συνέχεια θα ορίσουμε την έννοια της Ιακωβιανής μιας γραμμικής απεικόνισης $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ χρησιμοποιώντας την ανάλυση του Θεωρήματος 1.19, ωστόσο όπως θα δούμε ο ορισμός είναι ανεξάρτητος της ανάλυσης αυτής.

Ορισμός 1.20. ***(Ιακωβιανή γραμμικής απεικόνισης)*** *Έστω* $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *γραμμική απεικόνιση.*

i. *Αν* $n \leq m$, *γράφουμε* $L = OS$ *όπως παραπάνω και ορίζουμε την Ιακωβιανή του* L *να είναι*

$$J(L) = |\det S|$$

ii. *Αν* $n \geq m$, *γράφουμε* $L = SO^*$ *όπως παραπάνω και ορίζουμε την Ιακωβιανή του* L *να είναι*

$$J(L) = |\det S|$$

Θεώρημα 1.21. *Έστω $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ γραμμική απεικόνιση.*

i. Αν $n \leq m$ τότε

$$J(L)^2 = \det(L^* L)$$

Ισοδύναμα,

$$J(L) = \sqrt{\det(L^* L)}$$

ii. Αν $n \geq m$ τότε

$$J(L)^2 = \det(L L^*)$$

Ισοδύναμα,

$$J(L) = \sqrt{\det(L L^*)}$$

Από το Θεώρημα 1.21 συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ο ορισμός της Ιακωβιανής $J(L)$ είναι ανεξάρτητος από την επιλογή των O και S. Επιπλέον, μας παρέχει μία χρήσιμη μέθοδο υπολογισμού της Ιακωβιανής την οποία θα αναπτύξουμε παρακάτω χρησιμοποιώντας τον τύπο Binet-Cauchy.

Ορισμός 1.22.

i. Έστω $n \leq m$. Ορίζουμε

$$\Lambda(m, n) = \{\lambda : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\} \mid \text{η } \lambda \text{ είναι άυξουσα}\}$$

ii. Για κάθε $\lambda \in \Lambda(m, n)$ ορίζουμε την $P_\lambda : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ως

$$P_\lambda(x_1, \ldots, x_m) := (x_{\lambda(1)}, \ldots, x_{\lambda(n)}) \tag{1.4}$$

iii. Για κάθε $\lambda \in \Lambda(m, n)$ ορίζουμε τον n-διάστατο υπόχωρο

$$S_\lambda := \operatorname{span}\{e_{\lambda(1)}, \ldots, e_{\lambda(n)}\} \subseteq \mathbb{R}^m \tag{1.5}$$

Τότε η P_λ είναι η προβολή του $\mathbb{R}^m$ στον S_λ.

Θεώρημα 1.23. ***(Τύπος Binet-Cauchy)***

Έστω $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ γραμμική απεικόνιση. Τότε ισχύει

$$J(L)^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda(m,n)} (\det(P_\lambda L))^2$$

Από το παραπάνω Θεώρημα συμπεραίνουμε ότι για να υπολογίσουμε το $J(L)^2$ αρκεί να υπολογίσουμε το άθροισμα των τετραγώνων των οριζουσών των $(n \times n)$ υποπινάκων του $(m \times n)$ πίνακα απεικόνισης της L ως προς τις συνήθεις βάσεις των $\mathbb{R}^n$ και $\mathbb{R}^m$.

Έστω τώρα $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ Lipschitz συνεχής. Από το Θεώρημα Rademacher (1.15), η f είναι $\mathcal{L}^n$ σχεδόν παντού διαφορίσιμη επομένως το $Df(x)$ υπάρχει και μπορούμε να το θεωρήσουμε γραμμική απεικόνιση από τον $\mathbb{R}^n$ στον $\mathbb{R}^m$ για $\mathcal{L}^n$ σχεδόν κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

Συμβολισμός

Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ Lipschitz συνεχή συνάρτηση την οποία συμβολίζουμε ως $f = (f_1, \ldots, f_m)$, τότε συμβολίζουμε τον πίνακα απεικόνισης διαφορικού της f ως εξής

$$Df(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

Στα σημεία $x \in \mathbb{R}^n$ όπου υπάρχει το $Df(x)$.

Ορισμός 1.24. *Για $\mathcal{L}^n$- σχεδόν κάθε σημείο x, ορίζουμε την Ιακωβιανή της f να είναι*

$$Jf := \sqrt{\det(Df^* Df)}, \text{ αν } n \leq m$$

$$Jf := \sqrt{\det(Df Df^*)}, \text{ αν } n \geq m$$

Κεφάλαιο 2

Μέτρο Hausdorff

2.1 Ορισμός του μέτρου Hausdorff

Πολλές φορές σε γεωμετρικά προβλήματα χρειάζεται να μετρήσουμε υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ μικρότερης διάστασης. Το πρόβλημα αυτό μπορεί να αντιμετωπιστεί με μεθόδους διαφορικής γεωμετρίας (Folland [1999], Παράγραφος 11.4) αλλά και μετροθεωρητικά, χρησιμοποιώντας το μέτρο Hausdorff. Το εργαλείο αυτό μας δίνει τη δυνατότητα να αποδώσουμε θετικό μέτρο σε σύνολα μέτρου Lebesgue μηδέν όπως για παράδειγμα καμπύλες, επιφάνειες στον $\mathbb{R}^3$ και το σύνολο Cantor. Επίσης, χρησιμοποιώντας το μέτρο Hausdorff μπορούμε να μετρήσουμε πιο περίπλοκα από τα συνηθισμένα γεωμετρικά σχήματα όπως τα φράκταλ. Στο κεφάλαιο αυτό θα ορίσουμε το μέτρο Hausdorff και θα παρουσιάσουμε κάποιες σημαντικές ιδιότητές του.

Ορισμός 2.1. *Έστω $E \subset \mathbb{R}^n$ μη κενό.*

i. *Ορίζουμε τη διάμετρο του E ως*

$$\operatorname{diam}(E) = \sup\{d(x,y) : x, y \in E\}$$

όπου η d είναι η ευκλείδια μετρική στον $\mathbb{R}^n$.

ii. *Έστω $\delta > 0$. Ορίζουμε ως δ-κάλυψη του E μία πεπερασμένη ή αριθμήσιμη οικογένεια $(A_i)_{i\in N}$ που ικανοποιεί*

- $0 < \operatorname{diam}(A_i) \leq \delta$
- $E \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$

Συμβολισμοί

i. Έστω $s \in \mathbb{Z}, s > 0$, τότε συμβολίζουμε τον όγκο της μοναδιαίας μπάλας του $\mathbb{R}^s$ ως ω_s και ισούται με

$$\omega_s = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(1+\frac{s}{2})} \tag{2.1}$$

Όπου $\Gamma(s) = \displaystyle\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx$

ii. Θέτουμε $c_s = 2^{-s}\omega_s$

Ορισμός 2.2. *Έστω $E \subset \mathbb{R}^n$. Για κάθε $s \geq 0, \delta > 0$, θέτουμε*

$$\mathcal{H}^s_\delta(E) = \inf\left\{c_s \sum_{i\in\mathbb{N}} \operatorname{diam}\left(A_i\right)^s : \left(A_i\right)_{i\in N} \ \delta\text{-κάλυψη του } E\right\}$$

Ορίζουμε το s-διάστατο εξωτερικό μέτρο Hausdorff να είναι συνολοσυνάρτηση $\mathcal{H}^s$ η οποία παίρνει τιμές στο $[0,\infty]$ και ορίζεται ως

$$\mathcal{H}^s(E) = \sup_{\delta>0} \mathcal{H}^s_\delta(E) = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^s_\delta(E)$$

Πρόταση 2.3. *Η συνολοσυνάρτηση $\mathcal{H}^s : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$ είναι εξωτερικό μέτρο.*

Απόδειξη.

i. Για κάθε $A \subset \mathbb{R}^n$ με $\operatorname{diam}(A) \leq \delta$ έχουμε $\mathcal{H}^s_\delta(\emptyset) \leq \operatorname{diam}(A)^s \leq \delta^s$. Επομένως παίρνοντας $\delta \to 0$ έχουμε $\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$.

ii. Θα δείξουμε ότι ισχύει η αριθμήσιμη υποπροσθετικότητα του μέτρου. Δηλαδή αν $\left(E_i\right)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ μία τυχαία ακολουθία τετοια ώστε $E \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i$, θα δείξουμε ότι ισχύει

$$\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i\right) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^s(E_i)$$

Έστω $\varepsilon > 0$ και $A(i,j)_{j\in\mathbb{N}}$ δ-κάλυψη του E_i. Τότε, από το χαρακτηρισμό του infimum υπάρχει s τέτοιο ώστε

$$c_s \sum_{j\in\mathbb{N}} \operatorname{diam}(A_{i,j})^s \leq \frac{\varepsilon}{2^i} + H^s_\delta(E_i) \tag{2.2}$$

Προφανώς, η $(A_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ είναι δ-κάλυψη της $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i$, άρα εξ' ορισμού και λόγω της (2.2) ισχύει

$$\mathcal{H}^s_\delta\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i\Big) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{j\in\mathbb{N}} c_s \operatorname{diam}(A_{i,j})^s \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^i} + \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^s_\delta(E_i) = 2\varepsilon + \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^s_\delta(E_i)$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει για τυχόν $\varepsilon > 0$, άρα παίρνοντας $\varepsilon \to 0$

$$\mathcal{H}^s_\delta\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i\Big) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^s_\delta(E_i)$$

και παίρνοντας $\delta \to 0$ έχουμε το ζητούμενο

$$\mathcal{H}^s\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i\Big) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^s(E_i)$$

iii. Μένει να δείξουμε τη μονοτονία του μέτρου. Έστω $A \subseteq B$ και $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}, (B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ δ-καλύψεις των Α και Β αντίστοιχα. Τότε

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) = \inf\left\{c_s \sum_{i\in N} \operatorname{diam}(A_i)^s\right\} \leq \inf\left\{c_s \sum_{i\in N} \operatorname{diam}(B_i)^s\right\} = \mathcal{H}^s_\delta(B)$$

Τελικά, παίρνοντας $\delta \to 0$ έχουμε

$$\mathcal{H}^s(A) \leq \mathcal{H}^s(B)$$

■

Ορισμός 2.4. *Ορίζουμε την $\mathcal{M}_s$ ως την οικογένεια των $\mathcal{H}^s$ - μετρήσιμων συνόλων. Δηλαδή*

$$A \in \mathcal{M}_s \Leftrightarrow \forall X \subset \mathbb{R}^n,\ \mathcal{H}^s(X) = \mathcal{H}^s(X \cap A) + \mathcal{H}^s(X \cap A^c)$$

Πρόταση 2.5. *Η $\mathcal{M}_s$ είναι σ-άλγεβρα και το $\mathcal{H}^s$ είναι σ-προσθετικό στην $\mathcal{M}_s$.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι η $\mathcal{M}_s$ ικανοποιεί τις τρεις συνθήκες του ορισμού της σ-άλγεβρας.

i. Αρχικά, για κάθε $X \subset \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\mathcal{H}^s(X \cap \mathbb{R}^n) + \mathcal{H}^s(X \cap (\mathbb{R}^n)^c) = \mathcal{H}^s(X) + \mathcal{H}^s(\emptyset) = \mathcal{H}^s(X)$$

Άρα $\mathbb{R}^n \in \mathcal{M}_s$ και με ακριβώς παρόμοιο τρόπο ισχύει ότι $\emptyset \in \mathcal{M}_s$.

ii. Έστω $A \in \mathcal{M}_s$ τότε

$$\mathcal{H}^s(X) = \mathcal{H}^s(X \cap A) + \mathcal{H}^s(X \cap A^c) = \mathcal{H}^s(X \cap (A^c)^c) + \mathcal{H}^s(X \cap A^c)$$

Επομένως $A^c \in \mathcal{M}_s$, άρα η $\mathcal{M}_s$ είναι κλειστή στα συμπληρώματα.

iii. Θα δείξουμε ότι η $\mathcal{M}_s$ είναι κλειστή στις αριθμήσιμες ενώσεις σε τρία βήματα.

1. Η $\mathcal{M}_s$ είναι κλειστή στις πεπερασμένες ενώσεις.

Έστω $A_1, A_2 \in \mathcal{M}_s$ και $X \subset \mathbb{R}^n$. Τότε, αφού $A_1 \in \mathcal{M}_s$ εξ' ορισμού ισχύει

$$\mathcal{H}^s(X) = \mathcal{H}^s(X \cap A_1) + \mathcal{H}^s(X \cap {A_1}^c) \tag{2.3}$$

Επίσης χρησιμοποιώντας ότι $A_2 \in \mathcal{M}_s$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^s(X) &= \mathcal{H}^s(X \cap A_1) + \mathcal{H}^s((X \cap {A_1}^c) \cap A_2) + \mathcal{H}^s((X \cap {A_1}^c) \cap {A_2}^c) \\
&= \mathcal{H}^s(X \cap A_1) + \mathcal{H}^s(X \cap A_2 \cap {A_1}^c) + \mathcal{H}^s((X \cap (A_1 \cup A_2)^c) \\
&= \mathcal{H}^s(X \cap (A_1 \cup A_2) \cap A_1) + \mathcal{H}^s(X \cap (A_1 \cup A_2) \cap {A_1}^c) + \mathcal{H}^s((X \cap (A_1 \cup A_2)^c)
\end{aligned}$$

Και αφού $A_1 \in \mathcal{M}_s$, αν θέσουμε το τυχαίο σύνολο X στον ορισμό της $\mathcal{M}_s$ να είναι το $X \cap (A_1 \cup A_2)$, έχουμε

$$\mathcal{H}^s(X \cap (A_1 \cup A_2) \cap A_1) + \mathcal{H}^s(X \cap (A_1 \cup A_2) \cap {A_1}^c) = \mathcal{H}^s(X \cap (A_1 \cup A_2))$$

Επομένως από τις δύο παραπάνω σχέσεις παίρνουμε

$$\mathcal{H}^s(X) = \mathcal{H}^s(X \cap (A_1 \cup A_2)) + \mathcal{H}^s((X \cap (A_1 \cup A_2)^c)$$

Τελικά, η ένωση $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{M}_s$ άρα η $\mathcal{M}_s$ είναι κλειστή σε πεπερασμένες ενώσεις και λόγω της κλειστότητας ως προς τα συμπληρώματα και του νόμου De-Morgan είναι κλειστή και σε πεπερασμένες τομές.

2. Η $\mathcal{M}_s$ είναι κλειστή στις ξένες αριθμήσιμες ενώσεις και το $\mathcal{H}^s$ είναι σ-προσθετικό.

Παρατηρούμε ότι αν θέσουμε όπου $X = X \cap (A_1 \cup A_2)$ με $A_1, A_2 \in \mathcal{M}_s$ ξένα στην (2.3) παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^s(X \cap (A_1 \cup A_2)) &= \mathcal{H}^s(X \cap (A_1 \cup A_2) \cap A_1) + \mathcal{H}^s(X \cap (A_1 \cup A_2) \cap {A_1}^c) \\
&= \mathcal{H}^s(X \cap A_1) + \mathcal{H}^s(X \cap A_2)
\end{aligned}$$

Έστω τώρα $(A_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_s$ ανά δύο ξένα και $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$.

Για κάθε $X \subset \mathbb{R}^n$ μπορούμε να γράψουμε $X = (X \cap A) \cup (X \cap A^c)$ άρα

$$\mathcal{H}^s(X) = \mathcal{H}^s((X \cap A) \cup (X \cap A^c))$$

και από την υποπροσθετικότητα του $\mathcal{H}^s$ για κάθε $A \subset \mathbb{R}^n$ ισχύει

$$\mathcal{H}^s(X) \leq \mathcal{H}^s(X \cap A) + \mathcal{H}^s(X \cap A^c)$$

Επομένως έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^s(X) &\leq \mathcal{H}^s(X \cap A^c) + \mathcal{H}^s(X \cap A) \\
&= \mathcal{H}^s(X \cap A^c) + \mathcal{H}^s(X \cap \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) \\
&\leq \mathcal{H}^s(X \cap A^c) + \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{H}^s(X \cap A_i) \\
&= \mathcal{H}^s(X \cap A^c) + \lim_{n \to \infty} \mathcal{H}^s(\bigcup_{i=0}^{n} X \cap A_i) \\
&\leq \liminf_{n \to \infty} \left(\mathcal{H}^s(X \cap \bigcap_{i=0}^{n} {A_i}^c) + \mathcal{H}^s(\bigcup_{i=0}^{n} X \cap A_i) \right) = \mathcal{H}^s(X)
\end{aligned}$$

Όπου χρησιμοποιήσαμε τη σ-υποπροσθετικότητα του $\mathcal{H}^s$ και την κλειστότητα στις πεπερασμένες ενώσεις της $\mathcal{M}_s$. Άρα $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{M}_s$ επομένως η $\mathcal{M}_s$ είναι κλειστή στις ξένες αριθμήσιμες ενώσεις. Αν επιπλέον θέσουμε όπου $X = A$ στην παραπάνω σχέση, προκύπτει η σ-προσθετικότητα του $\mathcal{H}^s$.

3. Η $\mathcal{M}_s$ είναι κλειστή στις αριθμήσιμες ενώσεις.

   Έστω $(A_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_s$. Θέτουμε $B_0 = A_0$ και $B_n = A_n \setminus \bigcup_{i=0}^{n-1} A_i$. Τότε

   - Η $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ είναι ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων στην $\mathcal{M}_s$ αφού η $\mathcal{M}_s$ είναι κλειστή σε πεπερασμένες ενώσεις και τομές.
   - Ισχύει
   $$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$$
   - Επίσης, από το 2 η $\mathcal{M}_s$ είναι κλειστή σε ξένες αριθμήσιμες ενώσεις, άρα $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i \in \mathcal{M}_s$

   Τελικά, $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathcal{M}_s$

■

Ορισμός 2.6. *Ο περιορισμός $\mathcal{H}^s|_{\mathcal{M}_s}$ καλείται το s-διάστατο μέτρο Hausdorff.*

Ορισμός 2.7. *Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Αν $A, B \subseteq X$, ορίζουμε την απόσταση του A από το B ως*

$$\mathrm{dist}(A, B) = \inf\{\rho(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Το επόμενο Λήμμα μας δίνει ένα κριτήριο με βάση το οποίο μπορούμε να κρίνουμε αν τα σύνολα Borel ενός μετρικού χώρου είναι μετρήσιμα ως προς κάποιο εξωτερικό μέτρο. Στη συνέχεια θα το χρησιμοποιήσουμε για να δείξουμε ότι τα Borel του $\mathbb{R}^n$ είναι $\mathcal{H}^s$ μετρήσιμα σύνολα. Επίσης από εδώ και στο εξής θα συμβολίζουμε την απόσταση $\mathrm{dist}(A, B)$ με $d(A, B)$.

Λήμμα 2.8. ***(Κριτήριο Καραθεοδωρή)*** *Έστω μ εξωτερικό μέτρο σε ένα μετρικό χώρο E με την Borel σ-άλγεβρα $\mathcal{B}(E)$ και $\mathcal{M}_\mu$ η σ-άλγεβρα των μετρήσιμων συνόλων κατά Καραθεοδωρή. Τότε $\mathcal{B}(E) \subset \mathcal{M}_\mu$ αν και μόνο αν το μ είναι προσθετικό σε κάθε ζεύγος $\{A, B\}$ συνόλων του E, για τα οποία $d(A, B) > 0$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε αρχικά οτι $\mathcal{B}(E) \subset \mathcal{M}_\mu$ και θεωρούμε $A, B \subset E$ τέτοια ώστε $d(A, B) > 0$.

Τότε έχουμε

$$A = (A \cup B) \cap \bar{A}$$

και

$$B = (A \cup B) \backslash \bar{A}$$

Επομένως

$$\mu(A) + \mu(B) = \mu((A \cup B) \cap \bar{A}) + \mu((A \cup B) \backslash \bar{A})$$

Και αφού $\bar{A} \in \mathcal{M}_\mu$ τότε

$$\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B)$$

Άρα το μ είναι προσθετικό στα A,B.

Αντίστροφα, έστω $A \subset E$ ανοικτό και $X \subset E$ τέτοιο ώστε $\mu(X) < +\infty$.

Από την υποπροσθετικότητα του μέτρου ισχύει πάντα

$$\mu(X) < \mu(X \cap A) + \mu(X \backslash A)$$

άρα αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\mu(X) \geq \mu(X \cap A) + \mu(X \backslash A)$$

Για $k \in \mathbb{N}^*$ ορίζουμε τα εξής σύνολα

$$A_k = \{x \in A : d(x, E \backslash A) > \frac{1}{k}\}$$

$$B_k = A_{k+1} \backslash A_k$$

Επομένως για $k - l \geq 2$, $d(B_k, B_l) \geq \frac{1}{l+1} - \frac{1}{k} > 0$ έχουμε

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(X \cap B_{2i}) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} X \cap B_{2i}\right) \leq \mu(X)$$

όμοια

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(X \cap B_{2i+1}) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} X \cap B_{2i}\right) \leq \mu(X)$$

Άρα

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(X \cap Bi) \leq 2\mu(X) < +\infty$$

Συνεπώς έχουμε $\lim_{k \to \infty} \sum_{i \geq k} \mu(X \cap B_i) = 0$ ως ουρά συγκλίνουσας σειράς. Επομένως

$$\lim_{k \to \infty} \mu(X \cap (A \backslash A_k)) = \lim_{k \to \infty} \mu(X \cap (\bigcup_{i \geq k} B_i)) \leq \lim_{k \to \infty} \sum_{i \geq k} \mu(X \cap B_i) = 0$$

Και από την υποπροσθετικότητα του μέτρου μ

$$\mu(X \cap A) \leq \mu(X \cap A_k) + \mu(X \cap (A \backslash A_k)) \leq \liminf_{k \to \infty} \mu(X \cap A_k)$$

Και αφού

$$\limsup_{k \to \infty} \mu(X \cap A_k) \leq \mu(X \cap A)$$

τότε

$$\mu(X \cap A) = \lim_{k \to \infty} \mu(X \cap A_k)$$

Επίσης αφού $d(A_k, X \backslash A) > \frac{1}{k} > 0$

$$\mu(X) \geq \mu((X \cap A_k) \cup (X \backslash A)) = \mu(X \cap A_k) + \mu(X \backslash A)$$

Τελικά, παίρνοντας $k \to \infty$ στην παραπάνω ανισότητα, έχουμε το ζητούμενο.

■

Πρόταση 2.9. *Κάθε Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ είναι $\mathcal{H}^s$ μετρήσιμο. Δηλαδή $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{M}_s$.*

Απόδειξη. Έστω $A, B \subset \mathbb{R}^n$ με $d(A,B) > 0$. Σύμφωνα με το Λήμμα 2.8 αρκεί να δείξουμε ότι

$$\mathcal{H}^s(A \cup B) = \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B)$$

Ισοδύναμα, επειδή ισχύει πάντα η μία ανισότητα λόγω της υποπροσθετικότητας, αρκεί να δείξουμε

$$\mathcal{H}^s(A \cup B) \geq \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B)$$

Έστω $\delta > 0$ και $\mathcal{C} = (C_i)_{i\in\mathbb{N}}$ δ-κάλυψη του $A \cup B$ με

$$\operatorname{diam}(C_i) \leq \delta < d(A,B)$$

Γράφουμε αυτήν την κάλυψη ως δύο διακεκριμένες δ-καλύψεις

$$\mathcal{A} = \{C \in \mathcal{C} : C \cap A \neq \emptyset\}$$

$$\mathcal{B} = \{C \in \mathcal{C} : C \cap B \neq \emptyset\}$$

Επομένως

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_s \operatorname{diam}(C_i)^s = \sum_{C\in\mathcal{A}} c_s \operatorname{diam}(C_i)^s + \sum_{C\in\mathcal{B}} c_s \operatorname{diam}(Ci)^s$$

Άρα εξ' ορισμού

$$\mathcal{H}^s_\delta(A \cup B) \geq \mathcal{H}^s_\delta(A) + \mathcal{H}^s_\delta(B)$$

Παίρνοντας $\delta \to 0$ στην παραπάνω ανισότητα έχουμε το ζητούμενο. ∎

Θεώρημα 2.10. *Ισχύουν τα εξής*

i. Το $\mathcal{H}^0$ είναι μέτρο απαρίθμησης.

ii. $\mathcal{H}^s \equiv 0$ στον $\mathbb{R}^n$ για κάθε $s > n$

Απόδειξη.

i. Έχουμε ότι $c_0 = 2^0 \dfrac{1}{\Gamma(1)} = 1$. Τότε $\mathcal{H}^0(\{a\}) = 1$ για κάθε $a \in \mathbb{R}^n$

ii. Σταθεροποιούμε έναν ακέραιο $m \geq 1$. Ο μοναδιαίος κύβος $Q \in \mathbb{R}^n$ μπορεί να διασπαστεί σε m^n κύβους με πλευρά $\frac{1}{m}$ και διάμετρο $\frac{\sqrt{n}}{m}$. Τότε

$$H^s_{\frac{\sqrt{n}}{m}}(Q) \leq \sum_{i=1}^{m^n} \frac{c_s}{2}\left(\frac{\sqrt{n}}{m}\right)^s = \frac{c_s}{2} n^{\frac{s}{2}} m^{n-s}$$

Αν $s > n$, παίρνοντας $m \to \infty$, ο τελευταίος όρος τείνει στο 0. Επομένως

$$H^s(Q) = 0$$

για $s > n$.

■

Θεώρημα 2.11. ***(Ισοδιαμετρική ανισότητα)*** *Για κάθε $A \subset \mathbb{R}^n$ ισχύει*

$$\mathcal{L}^n(A) \leq c_n(\mathrm{diam}(A))^n$$

Η ισοδιαμετρική ανισότητα μας λέει ότι το μέτρο Lebesgue ενός συνόλου A είναι μικρότερο από το μέτρο Lebesgue κάθε μπάλας που έχει την ίδια διάμετρο.

Θεώρημα 2.12. *Για όλα τα Lebesgue μετρήσιμα σύνολα $E \subseteq \mathbb{R}^n$ έχουμε*

$$\mathcal{H}^n(E) = \mathcal{L}^n(E)$$

Απόδειξη. Η απόδειξη γίνεται σε τέσσερα βήματα.

1. Σταθεροποιουμε $\delta > 0$. Έστω $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ δ-κάλυψη του E, δηλαδή $E \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ και $\mathrm{diam}(A_i) < \delta$. Τότε χρησιμοποιώντας την ισοδιαμετρική ανισότητα (Θεώρημα 2.11) έχουμε

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} c_n(\mathrm{diam}(A_i))^n \geq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{L}^n(A_i) \geq \mathcal{L}^n(E)$$

Άρα $\mathcal{H}^n_\delta(E) \geq \mathcal{L}^n(E)$ και αφήνοντας $\delta \to 0$ παίρνουμε

$$\mathcal{H}^n(E) \geq \mathcal{L}^n(E)$$

2. Τώρα, από τον ορισμό του $\mathcal{L}^n$ ως $\mathcal{L}^1 \times \cdots \times \mathcal{L}^1$, έχουμε ότι για κάθε $A \subset \mathbb{R}^n$ και $\delta > 0$

$$\mathcal{L}^n(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(Q_i) \mid Q_i \text{ κύβοι },\ A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i\ ,\ \mathrm{diam}\, Q_i \leq \delta\right\}$$

Από εδώ και στο εξής θα θεωρούμε μόνο κύβους παράλληλους στους άξονες συντεταγμένων στον $\mathbb{R}^n$.

3. **Ισχυρισμός.** Το $\mathcal{H}^n$ είναι απόλυτα συνεχές ως προς το $\mathcal{L}^n$.

Απόδειξη. Θέτουμε

$$C_n := c_n(\sqrt{n})^n$$

Τότε για κάθε κύβο $Q \subset \mathbb{R}^n$

$$c_n(\operatorname{diam} Q)^n = C_n \mathcal{L}^n(Q)$$

Άρα

$$\mathcal{H}^n_\delta(E) \leq \inf\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} c_n(\operatorname{diam} Q_i)^n |\ Q_i \text{ κύβοι },\ E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i\ ,\ \operatorname{diam} Q_i \leq \delta \right\} = C_n \mathcal{L}^n(E)$$

Αφήνοντας $\delta \to 0$ παίρνουμε

$$\mathcal{H}^n(E) \leq C_n \mathcal{L}^n(E)$$

Από την παραπάνω σχέση συνεπάγεται ότι αν $\mathcal{L}^n(E) = 0$ τότε $\mathcal{H}^n(E) = 0$.

Επομένως αποδείξαμε τον ισχυρισμό.

4. Έστω τώρα $\delta > 0, \varepsilon > 0$. Από το χαρακτηρισμό του infimum μπορούμε να επιλέξουμε κύβους $\{Q_i\}_{i=1}^{\infty}$ τέτοιους ώστε $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$, $\operatorname{diam} Q_i < \delta$ και

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(Q_i) \leq \mathcal{L}^n(E) + \varepsilon$$

Από το Θεώρημα 1.10 για κάθε i υπάρχουν κλειστές ξένες μπάλες $\{B_k^i\}_{k=1}^{\infty}$ που περιέχονται στο Q_i^o τέτοιες ώστε $\operatorname{diam} B_k^i \leq \delta$ και

$$\mathcal{L}^n\left(Q_i - \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k^i\right) = \mathcal{L}^n\left(Q_i^o - \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k^i\right) = 0 \tag{2.4}$$

Άρα από τον ισχυρισμό συνεπάγεται ότι

$$\mathcal{H}^n\left(Q_i - \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k^i\right) = 0$$

Από τη μονοτονία του μέτρου και την παραπάνω σχέση παίρνουμε

$$\mathcal{H}_\delta^n(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^n(Q_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^n\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k^i\right)$$

και από την υποπροσθετικότητα του μέτρου

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^n\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k^i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^n(B_k^i) \leq \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} c_n(\operatorname{diam} B_k^i)^n = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(B_k^i)$$

Όπου χρησιμοποιήσαμε ότι αν B είναι μπάλα του $\mathbb{R}^n$ τότε $\mathcal{L}^n(B) = c_n(\operatorname{diam} B)^n$. Επομένως από τη σχέση 2.4 και το γεγονός ότι οι B_k^i είναι ξένες μεταξύ τους έχουμε

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(B_k^i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k^i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(Q_i) \leq \mathcal{L}^n(E) + \varepsilon$$

Έχουμε δηλαδή ότι

$$\mathcal{H}_\delta^n(E) \leq \mathcal{L}^n(E) + \varepsilon$$

Αφήνοντας $\delta \to 0$ και $\varepsilon \to 0$ στην παραπάνω σχέση παίρνουμε

$$\mathcal{H}^n(E) \leq \mathcal{L}^n(E)$$

Τελικά αφού δείξαμε και τις δύο ανισότητες, έχουμε

$$\mathcal{H}^n(E) = \mathcal{L}^n(E)$$

■

2.2 Μέτρο Hausdorff και μετασχηματισμοί

Στην παράγραφο αυτή θα εξετάσουμε πως συμπεριφέρεται το μέτρο Hausdorff σε γραμμικούς μετασχηματισμούς και Lipschitz συναρτήσεις. Επιπλέον, θα αποδείξουμε μία ειδική περίπτωση της Area formula, η οποία γενικεύει για τον τύπο εμβαδού επιφάνειας που είδαμε στην εισαγωγή για Lipschitz συνεχείς, 1-1 και C^1 συναρτήσεις.

Πρόταση 2.13. *Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ και $f : A \to \mathbb{R}^m$ η οποία ικανοποιεί την εξής συνθήκη*

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|^a$$

για κάθε $x, y \in A$ όπου $L > 0, a > 0$ σταθερές. Τότε

$$\mathcal{H}^{\frac{s}{a}}(f(A)) \leq \frac{c_{s/a}}{c_s} L^{\frac{s}{a}} \mathcal{H}^s(A)$$

Συνεπώς, αν η f είναι L-Lipschitz τότε

$$\mathcal{H}^s(f(A)) \leq L^s \mathcal{H}^s(A)$$

και αν η f είναι ισομετρία τότε

$$\mathcal{H}^s(f(A)) = \mathcal{H}^s(A)$$

Υπενθυμίζουμε το εξής Θεώρημα που αφορά τη συμπεριφορά του μέτρου Lebesgue πάνω σε γραμμικούς μετασχηματισμούς.

Θεώρημα 2.14. *Έστω $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ γραμμικός μετασχηματισμός και $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathcal{L}^n$-μετρήσιμο σύνολο. Τότε*

$$\mathcal{L}^n(T(A)) = |\det T| \mathcal{L}^n(A)$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ένα γενικότερο αποτέλεσμα για το μέτρο Hausdorff, όπου ο πίνακας του μετασχηματισμού T δεν είναι τετραγωνικός. Σε αυτήν την περίπτωση δεν μπορούμε να ορίσουμε την ορίζουσά του, επομένως χρησιμοποιούμε την Ιακωβιανή του T όπως την ορίσαμε στην παράγραφο 1.2.

Θεώρημα 2.15. *Έστω $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ με $n \leq m$ ένας γραμμικός μετασχηματισμός και $A \subset \mathbb{R}^n$. Τότε*

$$\mathcal{H}^n(T(A)) = J(T) \mathcal{H}^n(A)$$

Απόδειξη. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

i. Αν $n = m$, παίρνουμε $\det(T^*T) = (\det T)^2$ άρα $J(T) = |\det T|$. Επομένως μέσω του Θεωρήματος 2.12 όπου δείξαμε ότι το n - διάστατο μέτρο Hausdorff ισούται με το n - διάστατο μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^n$ και από το Θεώρημα 2.14 έχουμε

$$\mathcal{H}^n(T(A)) = J(T)\mathcal{H}^n(A)$$

ii. Αν $n < m$, θεωρούμε R μία περιστροφή του $\mathbb{R}^m$ που απεικονίζει την εικόνα του T στον υπόχωρο

$$\mathbb{R}^n \times \{0\} = \{y \in \mathbb{R}^m \mid y_j = 0 \text{ για } j > n\}$$

Θέτοντας $S = RT$ έχουμε

$$S^*S = T^*R^*RT = T^*T$$

επομένως $J(S) = J(T)$ και $\mathcal{H}^n(S(A)) = \mathcal{H}^n(T(A))$ αφού όπως είδαμε στην Πρόταση 2.13 το μέτρο Hausdorff είναι αναλλοίωτο στις ισομετρίες. Τότε αν ταυτίσουμε τον $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ με τον $\mathbb{R}^n$, η S γίνεται απεικόνιση από τον $\mathbb{R}^n$ στον εαυτό του, άρα αναγόμαστε στην πρώτη περίπτωση όπου ισχύει

$$\mathcal{H}^n(S(A)) = J(S)\mathcal{H}^n(A)$$

Άρα τελικά

$$\mathcal{H}^n(T(A)) = J(T)\mathcal{H}^n(A)$$

■

Πρόταση 2.16. *Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ και $\lambda > 0$. Τότε*

$$\mathcal{H}^s(\lambda A) = \lambda^s \mathcal{H}^s(A)$$

Όπου $\lambda A = \{\lambda x \mid x \in A\}$

Θεώρημα 2.17. ***(Μέτρο Hausdorff σε Lipschitz απεικονίσεις)***

i. Αν $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ Lipschitz συνεχής, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και $0 \leq s < \infty$, τότε

$$\mathcal{H}^s(f(A)) \leq (\mathrm{Lip}(f))^s \mathcal{H}^s(A)$$

ii. Έστω $n > k$ και $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ η προβολή. Υποθέτουμε ότι $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και $0 \leq s < \infty$. Τότε

$$\mathcal{H}^s(P(A)) \leq \mathcal{H}^s(A)$$

Υπενθυμίζουμε το εξής αποτέλεσμα του απειροστικού λογισμού

Πρόταση 2.18. *Αν $f \in C^1([\alpha,\beta],\mathbb{R}^m)$ τότε*

$$\int_{[\alpha,\beta]} |f^{'}(t)|dt = \lim_{\eta\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}|f(t_{i+1})-f(t_i)| \geq |f(\alpha)-f(\beta)|$$

όπου $t_0=\alpha<t_1<\ldots t_i<\ldots t_n=\beta$ πεπερασμένη διαμέριση του $[\alpha,\beta]$ και $\eta=\max_{i=0,\ldots,n-1}(t_{i+1}-t_i)$

Πρόταση 2.19. ***(Ειδική περίπτωση της Area formula)***
Έστω $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ 1-1 και Lipschitz συνεχής απεικόνιση, όπου $m\in\mathbb{N}$ με $n\leq m$ και έστω $E\subset\mathbb{R}^n$ Borel. Τότε

$$\mathcal{H}^n(f(E))=\int_E\left(\sum_{i=1}^{C_m^n}|J_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}d\mathcal{L}^n$$

Όπου J_i είναι οι ορίζουσες των $n\times n$ υποπινάκων της Ιακωβιανής της f.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε μόνο την περίπτωση όπου $n=1$. Τότε, για την $f:[0,1]\to\mathbb{R}^m$ η οποία συμβολίζεται ως εξής

$$t\mapsto(x_i(t))_{i=1,\ldots,m}$$

Θα δείξουμε ότι ισχύει

$$\mathcal{H}^1(f([0,1]))=\int_{[0,1]}\left(\sum_{i=1}^{m}|x_i^{'}(t)|^2\right)^{\frac{1}{2}}dt=\int_{[0,1]}\|f^{'}(t)\|dt \tag{2.5}$$

Από τον παραπάνω τύπο παρατηρούμε ότι το μονοδιάστατο μέτρο Hausdorff μας δίνει το μήκος του παραμετρικοποιημένου τόξου $\Gamma=f([0,1])$.

Η απόδειξη γίνεται σε τρία βήματα.

1. Έστω $f\in C^1([0,1],\mathbb{R}^m)$. Αρχικά θα δείξουμε ότι

$$\int_{[0,1]}|f^{'}(t)|dt\geq\mathcal{H}^1(\Gamma) \tag{2.6}$$

Έστω $\delta>0$. Θεωρούμε $\eta>0$ τέτοιο ώστε

$$|t-t^{'}|<\eta\Rightarrow|f(t)-f(t^{'})|<\delta$$

για κάθε $t,t^{'}\in[0,1]$.

Επιπλέον θεωρούμε πεπερασμένη διαμέριση του $[0,1]$ $t_0 = 0 < t_1 < \ldots t_i < \ldots t_n = 1$ τέτοια ώστε $\eta > \max_{i=0,\ldots,n-1}(t_{i+1} - t_i)$ και θέτουμε $\Gamma_i = f([t_i, t_{i+1}))$ για $i = 0, \ldots, n-1$

Παίρνουμε τώρα $a_i, b_i \in [t_i, t_{i+1}]$ τέτοια ώστε $\operatorname{diam}(\Gamma_i) = |f(a_i) - f(b_i)|$, οπότε ισχύει $\operatorname{diam}(\Gamma_i) < \delta$.

Επίσης ισχύει

$$\Gamma \backslash \{f(1)\} = \bigcup_{i=0}^{n-1} \Gamma_i$$

Άρα χρησιμοποιώντας την Πρόταση 2.18 έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{[0,1]} |f^{'}(t)| dt &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{[t_i, t_{i+1}]} |f^{'}(t)| dt \\
&\geq \int_{[a_i, b_i]} |f^{'}(t)| dt \\
&\geq \sum_{i=0}^{n-1} |f(a_i) - f(b_i)| \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \operatorname{diam}(\Gamma_i) \geq \mathcal{H}^1_\delta(\Gamma)
\end{aligned}$$

Αφήνοντας $\delta \to 0$ στην παραπάνω σχέση, προκύπτει η 2.6.

2. Έστω πάλι $f \in C^1([0,1], \mathbb{R}^m)$. Θα αποδείξουμε τώρα την αντίστροφη ανισότητα

$$\int_{[0,1]} |f^{'}(t)| dt \leq \mathcal{H}^1(\Gamma) \tag{2.7}$$

Για $n \in \mathbb{N}$ και $h = \frac{1}{n}$ θεωρούμε τη διαμέριση $t_i = hi, \ i = 0, \ldots, n-1$ και θεωρούμε το κάλυμμα του Γ

$$\Gamma = \bigcup_{i=0}^{n-1} f([t_i, t_{i+1})) \cup \{f(1)\}$$

όπου τα $f([t_i, t_{i+1}))$ είναι ανά δύο ξένα Borel υποσύνολα του Γ. Πράγματι, είναι ξένα αφού η f είναι 1-1 και Borel αφού η f είναι συνεχής και 1-1. (Αυτό είναι άσκηση)

Άρα λόγω της αριθμήσιμης προσθετικότητας του μέτρου για ξένα σύνολα, έχουμε

$$\mathcal{H}^1(\Gamma) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{H}^1(f([t_i, t_{i+1}])) \tag{2.8}$$

Για κάθε $i = 1, \ldots, n-1$ θεωρούμε την ορθογώνια προβολή π του $f([t_i, t_{i+1}))$ στο $(f(t_i), f(t_{i+1}))$ και αφού η π είναι ισομετρία, από την Πρόταση 2.13 έχουμε

$$\mathcal{H}^1(f([t_i, t_{i+1}))) \geq \mathcal{H}^1(\pi(f([t_i, t_{i+1}))))$$

Επίσης, λόγω της κυρτότητας

$$[f(t_i), f(t_{i+1})) \subseteq \pi(f([t_i, t_{i+1})))$$

Άρα

$$\mathcal{H}^1([f(t_i), f(t_{i+1}))) \leq \mathcal{H}^1(\pi(f([t_i, t_{i+1}))))$$

Επιπλέον, μέσω του Θεωρήματος 2.12 ισχύει

$$\mathcal{H}^1([f(t_i), f(t_{i+1})]) = |f(t_i) - f(t_{i+1})| \tag{2.9}$$

Άρα μέσω της (2.8) και της (2.9) έχουμε

$$\mathcal{H}^1(\Gamma) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{H}^1(f([t_i, t_{i+1}))) \geq \sum_{i=0}^{n-1} |f(t_i) - f(t_{i+1})|$$

3. Έστω τώρα ότι η f είναι Lipschitz συνεχής. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 1.11 μπορούμε να συμπεράνουμε ότι κάθε Lipschitz συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}^m$ προσεγγίζεται από C^1 συναρτήσεις.

   Συγκριμένα, αφού κάθε κλειστό σύνολο μπορεί να γραφτεί ως αριθμήσιμη ένωση συμπαγών, μπορούμε να βρούμε αύξουσα οικογένεια $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ από συμπαγή υποσύνολα του E, τέτοια ώστε

$$\mathcal{H}^n\left(E \setminus \bigcup_{i=0}^{\infty} K_i\right) = 0$$

   και η $f|_{K_i}$ να είναι ο περιορισμός μίας C^1 συνάρτησης.

   Επομένως, αφού στα προηγούμενα δύο βήματα δείξαμε ότι η (2.5) ισχύει αν η $f \in C^1([0,1], \mathbb{R}^m)$, τότε ισχύει και στην περίπτωση που είναι Lipschitz συνεχής.

■

Παρατήρηση 2.20.

i. *Αν θέσουμε* $n = 2$ *και* $m = 3$ *στην Πρόταση 2.19 καταλήγουμε στο γνωστό τύπο εμβαδού επιφάνειας που είδαμε στην εισαγωγή. Πράγματι, σε αυτήν την περίπτωση οι ορίζουσες* J_i *των* 2×2 *υποπινάκων της Ιακωβιανής της* f *είναι*

$$J_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\ J_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)},\ J_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

Επομένως με βάση την Πρόταση έχουμε

$$\mathcal{H}^2(f(E)) = \int_E \left(\sum_{i=1}^{3} |J_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} d\mathcal{L}^n = \sqrt{\left[\frac{\partial(y,z)}{\partial(t,s)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(z,x)}{\partial(t,s)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,s)}\right]^2}\, dudv$$

Όταν έχουμε λοιπόν μία n *- διάστατη επιφάνεια η οποία παραμετρικοποιείται μέσω μιας Lipschitz συνεχούς και 1-1 συνάρτησης, μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν της επιφάνειας μέσω του* n *- διάστατου μέτρου Hausdorff.*

ii. *Στη γενική περίπτωση, το μέτρο*

$$\left(\sum_{i=1}^{C_m^n} |J_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \mathcal{L}^n$$

καλείται το στοιχείο περιοχής της n*-διάστατης επιφάνειας* $f(E)$ *και για κάθε Borel* $B \subset f(E)$ *το αντίστοιχο μέτρο επιφάνειας είναι το*

$$B \mapsto \mathcal{H}^n(B) = \int_{f^{-1}(B)} \left(\sum_{i=1}^{C_m^n} |J_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} d\mathcal{L}^n$$

iii. *Όταν η* f *δεν είναι 1-1, η γενίκευση της Πρότασης 2.19 είναι η λεγόμενη Area formula που θα δούμε στο Κεφάλαιο 3*

$$\int_{f(E)} \mathcal{H}^0(E \cap f^{-1}(x))\mathcal{H}^n(dx) = \int_E \left(\sum_{i=1}^{m-n+1} |J_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} d\mathcal{L}^n = \int_E Jf\ dx$$

2.3 Διάσταση Hausdorff

Στην παράγραφο αυτή θα ορίσουμε τη διάσταση Hausdorff και θα παρουσιάσουμε βασικές ιδιότητες και εφαρμογές της. Μία σημαντική εφαρμογή είναι ο υπολογισμός της διάστασης Hausdorff του συνόλου Cantor, ενός από τα πιο γνωστά φράκταλ. Το σύνολο Cantor είναι από τα πιο συνηθισμένα σύνολα πραγματικών αριθμών με διάσταση Hausdorff που υπολογίζεται χωρίς τη χρήση ολοκληρώματος. [Falconer, 1986]

Λήμμα 2.21. *Για κάθε $A \subset \mathbb{R}^n$ η απεικόνιση $s \mapsto H^s(A)$ είναι φθίνουσα. Συγκεκριμένα, για κάθε $\delta > 0$ και για $t > s$ έχουμε*

$$\mathcal{H}^t_\delta(A) \leq \delta^{t-s}\frac{c_t}{c_s}\mathcal{H}^s_\delta(A)$$

Απόδειξη. Έστω $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ μία δ-κάλυψη του A. Αφού $\mathrm{diam}(A_i) \leq \delta$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$, θα έχουμε

$$\mathrm{diam}(A_i)^t \leq \delta^t$$
$$\mathrm{diam}(A_i)^s \leq \delta^s$$

Επομένως

$$\mathcal{H}^t_\delta(A) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} c_t \,\mathrm{diam}(A_i)^t \leq \frac{c_t}{c_s}\sum_{i\in\mathbb{N}} c_s \,\mathrm{diam}(A_i)^s \delta^{t-s} = \delta^{t-s}\frac{c_t}{c_s}\sum_{i\in\mathbb{N}} c_s \,\mathrm{diam}(A_i)^s$$

Παίρνοντας infimum πάνω σε όλες τις δ-καλύψεις του A μέσω της παραπάνω ανισότητας έχουμε

$$\mathcal{H}^t_\delta(A) \leq \delta^{t-s}\frac{c_t}{c_s}\mathcal{H}^s_\delta(A)$$

■

Ορισμός 2.22. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Θέτουμε*

$$\begin{aligned} s_0 &= \inf\{t \geq 0 : \mathcal{H}^t(A) = 0\} \\ &= \sup\{t \geq 0 : \mathcal{H}^t(A) > 0\} \end{aligned} \tag{2.10}$$

Ο $s_0 \in \mathbb{R}$ καλείται διάσταση Hausdorff του A και συμβολίζεται με $\dim_{\mathcal{H}}(A)$.

Στην τιμή s_0 το $\mathcal{H}^{s_0}(A)$ μπορεί να είναι 0 ή άπειρο ή να ικανοποιεί $0 < \mathcal{H}^{s_0}(A) < +\infty$. Στην τελευταία περίπτωση το A καλείται s_0-σύνολο.

Η παρακάτω Πρόταση αποτελεί και έναν ισοδύναμο ορισμό της διάστασης Hausdorff.

Πρόταση 2.23. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και s_0 η διάσταση Hausdorff του A. Τότε το s_0 ικανοποιεί*

$$\mathcal{H}^s(A) = \begin{cases} +\infty & \text{αν } s < s_0 \\ 0 & \text{αν } s > s_0 \end{cases}$$

Απόδειξη. Θα αναλύσουμε την απόδειξη σε τρία βήματα.

1. Αφήνοντας $\delta \to 0$ στην (2.21) παίρνουμε ότι αν

   $$\mathcal{H}^s(A) < +\infty$$

   Τότε για κάθε $t > s$ ισχύει

   $$\mathcal{H}^t(A) = 0$$

2. Έστω τώρα $s < s_0$. Υποθέτουμε ότι $\mathcal{H}^s(A) < +\infty$

   Για $s < t < s_0$ από το προηγούμενο βήμα έχουμε ότι $\mathcal{H}^t(A) = 0$, το οποίο όμως είναι άτοπο από τον ορισμό του s_0.

   Επομένως, για $s < s_0$

   $$\mathcal{H}^s(A) = +\infty$$

3. Έστω $s > s_0$. Από το Λήμμα έχουμε ότι η $s \mapsto \mathcal{H}^s(A)$ είναι φθίνουσα, επομένως για $s > t > s_0$ θα ισχύει

   $$\mathcal{H}^s(A) < \mathcal{H}^t(A)$$

   Άρα

   $$\mathcal{H}^s(A) = 0$$

■

Πρόταση 2.24. *Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$.*

i. Τότε ισχύουν οι εξής συνεπαγωγές

$$\mathcal{H}^s(A) < +\infty \Rightarrow \dim_{\mathcal{H}}(A) \leq s$$

$$\mathcal{H}^s(A) > 0 \Rightarrow \dim_{\mathcal{H}}(A) \geq s$$

ii. Έστω $f : A \to \mathbb{R}^m$ η οποία ικανοποιεί την εξής συνθήκη για κάθε $x, y \in A$

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|^a$$

όπου $L > 0, a > 0$. Τότε ισχύει

$$\dim_{\mathcal{H}}(f(A)) \leq \frac{1}{a} \dim_{\mathcal{H}}(A)$$

Απόδειξη.

i. Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια του ορισμού.

ii. Έστω $s > \dim_{\mathcal{H}}(A)$. Τότε από την Πρόταση

$$\mathcal{H}^s(A) = 0$$

Από τη σχέση (2.13) έχουμε

$$\mathcal{H}^{\frac{s}{a}}(f(A)) \leq \frac{c_{s/a}}{c_s} L^{\frac{s}{a}} \mathcal{H}^s(A)$$

Και η παραπάνω ανισότητα συνεπάγεται ότι

$$\mathcal{H}^{\frac{s}{a}}(f(A)) = 0$$

Επομένως από τον ορισμό της διάστασης Hausdorff θα ισχυει

$$\frac{s}{a} \geq \dim_{\mathcal{H}}(f(A))$$

Και αφήνοντας $s \to dim_{\mathcal{H}}(A)$ παίρνουμε

$$\dim_{\mathcal{H}}(f(A)) \leq \frac{1}{a} \dim_{\mathcal{H}}(A)$$

■

Παραδείγματα

1. Έχουμε $\dim_{\mathcal{H}}(\mathbb{R}) = 1$ και $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}) = +\infty$.
2. Έστω $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό, τότε $\dim_{\mathcal{H}}(U) = n$.
3. Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ αριθμήσιμο, τότε $\dim_{\mathcal{H}}(A) = 0$.
4. Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 1-1 απεικόνιση με $n \leq m$, $f \in C^1$ και $E \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές. Τότε
$$\dim_{\mathcal{H}}(f(E)) = n$$
5. Για το σύνολο Cantor έχουμε
$$\dim_{\mathcal{H}}(C) = \frac{\ln 2}{\ln 3} = s \;\; \text{και} \;\; \mathcal{H}^s(C) = 1$$

Για να επαληθεύσουμε το αποτέλεσμα αυτό για τη διάσταση, θεωρούμε αρχικά ότι υπάρχει η διάσταση Hausdorff του συνόλου Cantor, την οποία ονομάζουμε $s = \dim_{\mathcal{H}}(C)$ και $0 < \mathcal{H}^s(C) < \infty$.

Έπειτα παρατηρούμε ότι μπορούμε να χωρίσουμε το σύνολο Cantor σε δύο μέρη, ξένα μεταξύ τους. Θέτουμε $C_L = C \cap [0, \frac{1}{3}]$ το αριστερό μέρος και $C_R = C \cap [\frac{2}{3}, 1]$ το δεξί μέρος. Τα σύνολα C_L και C_R είναι γεωμετρικά όμοια με το C, η ένωσή τους είναι όλο το C και ισχύει
$$C_L = \frac{1}{3}C$$
$$C_R = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}C$$
Επομένως, για κάθε $s \in \mathbb{N}$ έχουμε
$$\mathcal{H}^s(C) = \mathcal{H}^s(C_L) + \mathcal{H}^s(C_R) = \left(\frac{1}{3}\right)^s \mathcal{H}^s(C) + \left(\frac{1}{3}\right)^s \mathcal{H}^s(C) \tag{2.11}$$
Όπου η δεύτερη ισότητα προέκυψε από την Πρόταση 2.16. Αφού έχουμε υποθέσει ότι $0 < \mathcal{H}^s(C) < \infty$, διαιρώντας τη 2.11 με $\mathcal{H}^s(C)$ παίρνουμε
$$1 = 2\left(\frac{1}{3}\right)^s$$
Άρα τελικά
$$s = \frac{\ln 2}{\ln 3}$$
Για μία λεπτομερή απόδειξη του παραπάνω αποτελέσματος ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης θα μπορούσε να ανατρέξει στην παράγραφο 1.5 του βιβλίου [Falconer, 1986].

Κεφάλαιο 3

Area Formula

3.1 Area Formula

Στην παράγραφο 2.1 αποδείξαμε μία ειδική περίπτωση της Area Formula (Πρόταση 2.19) και είδαμε πως σχετίζεται με το γνωστό τύπο για το εμβαδόν επιφάνειας στον $\mathbb{R}^3$. Στο κεφάλαιο αυτό θα αποδείξουμε τη γενική μορφή της Area Formula που αφορά Lipschitz συνεχείς συναρτήσεις από τον $\mathbb{R}^n$ στον $\mathbb{R}^m$ όπου $n \leq m$. Ξεκινάμε με τρία Λήμματα τα οποία θα μας είναι ιδιαίτερα χρήσιμα στην απόδειξη της Area Formula.

Λήμμα 3.1. *Έστω $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ γραμμική απεικόνιση με $n \leq m$. Τότε*

$$\mathcal{H}^n(L(A)) = J(L)\mathcal{L}^n(A)$$

για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}^n$

Απόδειξη. Αρχικά, σύμφωνα με το Θεώρημα 1.19 μπορούμε να αναλύσουμε την L ως

$$L = OS$$

όπου $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ συμμετρική απεικόνιση και $O : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ορθογώνια απεικόνιση.

Έτσι έχουμε $J(L) = |\det S|$

i. Αν $J(L) = 0$, τότε $|\det S| = 0$.

   Αυτό συνεπάγεται ότι $\dim_{\mathcal{H}} S(\mathbb{R}^n) \leq n - 1$ και αφού οι ορθογώνιες απεικονίσεις διατηρούν τις διαστάσεις, ισχύει και $\dim_{\mathcal{H}} L(\mathbb{R}^n) \leq n - 1$

   Συνεπώς, αφού $n > n - 1$ ισχύει $\mathcal{H}^n(L(\mathbb{R}^n)) = 0$ και άρα έχουμε

$$\mathcal{H}^n(L(A)) = J(L)\mathcal{L}^n(A)$$

ii. Αν $J(L) > 0$, τότε

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{H}^n(L(B(x,r)))}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} &= \frac{\mathcal{L}^n(O^*L(B(x,r)))}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} \\ &= \frac{\mathcal{L}^n(O^*OS(B(x,r)))}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} \\ &= \frac{\mathcal{L}^n(S(B(x,r)))}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} \\ &= \frac{\mathcal{L}^n(S(B(1)))}{a(n)} \\ &= |\det S| = J(L)\end{aligned}$$

Άρα έχουμε

$$\mathcal{H}^n(L(B(x,r))) = J(L)\mathcal{L}^n(B(x,r)) \tag{3.1}$$

iii. Τώρα, γενικά για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}^n$, ορίζουμε

$$\nu(A) := \mathcal{H}^n(L(A))$$

Τότε το ν είναι ένα Radon μέτρο, αφού και το $\mathcal{H}^n : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ είναι Radon μέτρο για $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

Πράγματι,

- Το ν είναι Borel. Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ Borel σύνολο. Το $\mathcal{H}^n$ είναι Borel άρα το A είναι $\mathcal{H}^n$-μετρήσιμο. Επομένως από το Θεώρημα 2.15 και η εικόνα $L(A)$ είναι $\mathcal{H}^n$-μετρήσιμο, άρα το A είναι ν-μετρήσιμο.

- Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$. Τότε

$$\nu(A) = \mathcal{H}^n(L(A)) = J(L)\mathcal{H}^n(A) = |\det S|\mathcal{H}^n(A)$$

  Και αφού το $\mathcal{H}^n$ είναι Borel κανονικό, θα υπάρχει $B \supset A$ τέτοιο ώστε $\mathcal{H}^n(A) = \mathcal{H}^n(B)$. Επομένως, για το $B \supset A$ θα ισχύει και $\nu(A) = \nu(B)$, άρα το ν είναι Borel κανονικό.

- Έστω $K \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές. Τότε έχουμε

$$\nu(K) = \mathcal{H}^n(L(K)) = |\det S|\mathcal{H}^n(K) < +\infty$$

Αφού $|\det S| < +\infty$ και $\mathcal{H}^n(K) < +\infty$ για κάθε $K \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές.

Επίσης έχουμε ότι αν $\mathcal{L}^n(A) = 0$ τότε $\nu(A) = 0$ επομένως το ν είναι απόλυτα συνεχές ως προς το $\mathcal{L}^n$, δηλαδή $\nu << \mathcal{L}^n$.

Επιπλέον, η παράγωγος Radon-Nikodym του ν ως προς $\mathcal{L}^n$ είναι

$$D_{\mathcal{L}^n}\nu(x) = \lim_{r\to 0} \frac{\nu(B(x,r))}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} = J(L)$$

Όπου χρησιμοποιήσαμε και τη σχέση (3.1). Επομένως, το θεώρημα Radon-Nikodym δίνει

$$\nu(B) = \int_B D_{\mathcal{L}^n}\nu \; d\mathcal{L}^n$$

για κάθε Borel $B \subseteq \mathbb{R}^n$. Άρα

$$\mathcal{H}^n(L(B)) = J(L)\mathcal{L}^n(B)$$

Και αφού τα ν, $\mathcal{L}^n$ είναι Radon μέτρα, ισχύει

$$\mathcal{H}^n(L(A)) = J(L)\mathcal{L}^n(A)$$

για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

$\blacksquare$

Λήμμα 3.2. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ $\mathcal{L}^n$- μετρήσιμο και $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ Lipschitz συνεχής με $n \leq m$. Τότε:*

i. *Το $f(A)$ είναι $\mathcal{H}^n$- μετρήσιμο.*

ii. *Η απεικόνιση $y \mapsto \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\})$ είναι $\mathcal{H}^n$ μετρήσιμη στον $\mathbb{R}^m$.*

iii. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{H}^n \leq (\mathrm{Lip}(f))^n \mathcal{L}^n(A)$

Απόδειξη.

i. Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι το A είναι φραγμένο. Τότε από το Θεώρημα 1.3 υπάρχουν συμπαγή σύνολα $K_i \subseteq A$ τέτοια ώστε

$$\mathcal{L}^n(K_i) \geq \mathcal{L}^n(A) - \frac{1}{i},\ i = 1, 2, \dots$$

Αφού το A είναι $\mathcal{L}^n$-μετρήσιμο και $\mathcal{L}^n(A) < \infty$, η παραπάνω σχέση δίνει

$$\mathcal{L}^n(A - K_i) < \frac{1}{i}$$

Επίσης αφού η f είναι συνεχής, το $f(K_i)$ είναι συμπαγές, άρα $\mathcal{H}^n$-μετρήσιμο [Tao, 2011]. Άρα και το

$$f\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f(K_i)$$

είναι $\mathcal{H}^n$-μετρήσιμο. Επιπλέον λόγω της υποπροσθετικότητας του $\mathcal{H}^n$

$$\mathcal{H}^n\left(f(A) - f\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i\right)\right) \leq \mathcal{H}^n(f(A - \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i))$$

Και από το Θεώρημα 2.17 παίρνουμε

$$\mathcal{H}^n(f(A - \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i)) \leq (\mathrm{Lip}(f))^n \mathcal{L}^n(A - \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i) = 0$$

Άρα, το $f(A)$ είναι $\mathcal{H}^n$-μετρήσιμο.

ii. Έστω $k \in \mathbb{N}$. Θέτουμε

$$B_k = \left\{Q \mid Q = (a_1, b_1] \times \cdots \times (a_n, b_n], a_i = \frac{c_i}{k}, b_i = \frac{c_i + 1}{k}, c_i \in \mathbb{Z}\right\}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{Q \in B_k} Q$$

Τώρα θέτουμε

$$g_k := \sum_{Q \in B_k} \mathcal{X}_{f(A \cap Q)}$$

Η g_k είναι $\mathcal{H}^n$-μετρήσιμη από το i, και για $y \in \mathbb{R}^m$, το $g_k(y)$ είναι το πλήθος των κύβων $Q \in B_k$ έτσι ώστε

$$f^{-1}(y) \cap (A \cap Q) \neq \emptyset$$

Τότε παίρνοντας $k \to \infty$ έχουμε

$$g_k(y) \to \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\})$$

Για κάθε $y \in \mathbb{R}^m$ άρα η $y \mapsto \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\})$ είναι $\mathcal{H}^n$-μετρήσιμη.

iii. Έχουμε ότι η $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία θετικών και μετρήσιμων συναρτήσεων. Επίσης, ισχύει $g_{k+1}(y) \geq g_k(y)$, για κάθε $y \in \mathbb{R}^m$, άρα η $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα. Επομένως,από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης 1.8 έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\})\, d\mathcal{H}^n &= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^m} g_k\, d\mathcal{H}^n \\
&= \lim_{k\to\infty} \sum_{Q\in B_k} \mathcal{H}^n(f(A\cap Q)) \\
&\leq \limsup_{k\to\infty} \sum_{Q\in B_k} (\mathrm{Lip}(f))^n \mathcal{L}^n(A\cap Q) \\
&= (\mathrm{Lip}(f))^n \mathcal{L}^n(A)
\end{aligned}$$

■

Λήμμα 3.3. *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ Lipschitz συνεχής με $n \leq m$, $t > 1$ και*

$$B := \{x \mid Df(x) \text{ υπάρχει και } Jf(x) > 0\}$$

Τότε υπάρχει αριθμήσιμη οικογένεια Borel συνόλων $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ τέτοια ώστε

i. $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$

ii. Η $f|_{E_k}$ είναι 1-1 ($k = 1, 2 \dots$)

iii. Για κάθε $k = 1, 2 \dots$ υπάρχει ένας συμμετρικός αυτομορφισμός $T_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ τέτοιος ώστε

$$\mathrm{Lip}((f|_{E_k})T_k^{-1}) \leq t$$
$$\mathrm{Lip}(T_k(f|_{E_k})^{-1}) \leq t$$
$$t^{-n}|\det T_k| \leq Jf|_{E_k} \leq t^n|\det T_k|$$

Απόδειξη.

i. Αρχικά, σταθεροποιούμε $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $t^{-1} + \varepsilon < 1 < t - \varepsilon$. Έστω τώρα C ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του B και S ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο των συμμετρικών αυτομορφισμών του $\mathbb{R}^n$.

Για κάθε $c \in C$, $T \in S$ και $i = 1, 2, \ldots$ θέτουμε $E(c, T, i)$ να είναι το σύνολο όλων των $b \in B \cap B(c, \frac{1}{i})$ τα οποία ικανοποιούν

$$(t^{-1} + \varepsilon)|Tv| \leq |Df(b)v| \leq (t - \varepsilon)|Tv| \tag{3.2}$$

για κάθε $v \in \mathbb{R}^n$ και

$$|f(a) - f(b) - Df(b)(a - b)| \leq \varepsilon|T(a - b)| \tag{3.3}$$

για κάθε $a \in B(b, \frac{2}{i})$

Παρατηρούμε ότι το $E(c, T, i)$ είναι Borel αφού η Df είναι Borel μετρήσιμη συνάρτηση.

Τώρα για $b \in E(c, T, i), a \in B(b, \frac{2}{i})$ η σχέση (3.2) δίνει

$$(\varepsilon - t)|T(a - b)| \leq Df(b)(a - b) \leq (t - \varepsilon)|T(a - b)| \tag{3.4}$$

Επίσης, η σχέση (3.3) είναι ισοδύναμη με

$$-\varepsilon|T(a - b)| \leq f(a) - f(b) - Df(b)(a - b) \leq \varepsilon|T(a - b)|$$

$$Df(b)(a - b) - \varepsilon|T(a - b)| \leq f(a) - f(b) \leq \varepsilon|T(a - b)| + Df(b)(a - b)$$

Άρα συνδυάζοντας την παραπάνω ανισότητα με την (3.4) έχουμε

$$(\varepsilon - t)|T(a - b)| - \varepsilon|T(a - b)| \leq f(a) - f(b) \leq \varepsilon|T(a - b)| + (t - \varepsilon)|T(a - b)|$$

Ισοδύναμα

$$-t|T(a - b)| \leq f(a) - f(b) \leq t|T(a - b)|$$

Άρα

$$|f(a) - f(b)| \leq t|T(a - b)|$$

Όμοια, χρησιμοποιώντας την άλλη πλευρά της ανισότητας (3.2), $(t^{-1}+\varepsilon)|Tv| \leq |Df(b)v|$ και μέσω της (3.4) , δείχνουμε ότι ισχύει

$$t^{-1}|T(a-b)| \leq |f(a)-f(b)|$$

Άρα για $b \in E(c,T,i)$ και $a \in B(b,\frac{2}{i})$ έχουμε την εκτίμηση

$$t^{-1}|T(a-b)| \leq |f(a)-f(b)| \leq t|T(a-b)| \tag{3.5}$$

Ισχυρισμός. Έστω $b \in E(c,T,i)$. Τότε

$$(t^{-1}+\varepsilon)^n|\det T| \leq Jf(b) \leq (t-\varepsilon)^n|\det T| \tag{3.6}$$

Απόδειξη.

Από το Θεώρημα 1.19 αναλύουμε το διαφορικό της f ως $Df(b)=OS$ και έχουμε

$$Jf(b) = J(Df(b)) = |\det S|$$

Επιπλέον, από την (3.2) παίρνουμε

$$(t^{-1}+\varepsilon)|Tv| \leq |(OS)v| = |Sv| \leq (t-\varepsilon)|Tv|$$

για $v \in \mathbb{R}^n$. Άρα

$$(t^{-1}+\varepsilon)|v| \leq |(ST^{-1})v| \leq (t-\varepsilon)|v|$$

Οπότε

$$(ST^{-1})(B(1)) \subseteq B(t-\varepsilon)$$

Άρα, λόγω της μονοτονίας του μέτρου Lebesgue

$$\mathcal{L}^n((ST^{-1})(B(1))) \leq \mathcal{L}^n(B(t-\varepsilon))$$

και χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2.14

$$|\det(ST^{-1})|\omega_n \leq \omega_n(t-\varepsilon)^n$$

επομένως

$$|\det S| \leq (t-\varepsilon)^n|\det T|$$

Άρα αποδείξαμε ότι

$$Jf(b) \leq (t-\varepsilon)^n |\det T|$$

Όμοια προκύπτει και η άλλη ανισότητα του ισχυρισμού, δηλαδή ότι

$$(t^{-1}+\varepsilon)^n |\det T| \leq Jf(b)$$

Τώρα μετονομάζουμε την αριθμήσιμη οικογένεια $\{E(c,T,i) \mid c \in C, T \in S, i = 1,2,\dots\}$ ως $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Διαλέγουμε τυχαίο $b \in B$ και γράφουμε $Df(b) = OS$ όπως παραπάνω. Επίσης διαλέγουμε $T \in S$ τέτοιον ώστε

$$\mathrm{Lip}(TS^{-1}) \leq (t^{-1}+\varepsilon)^{-1},\ \mathrm{Lip}(ST^{-1}) \leq t-\varepsilon$$

Ακόμη, διαλέγουμε $i \in \{1,2,\dots\}$ και $c \in C$ ώστε $|b-c| < \frac{1}{i}$ και

$$|f(a)-f(b)-Df(b)(a-b)| \leq \frac{\varepsilon}{\mathrm{Lip}(T^{-1})}|a-b| \leq \varepsilon |T(a-b)|$$

για κάθε $a \in B(b, \frac{2}{i})$. Τότε $b \in E(c,T,i)$ και αφού το $b \in B$ ήταν τυχαίο, ισχύει το i.

ii. Διαλέγουμε οποιοδήποτε E_k το οποίο είναι της μορφής $E(c,T,i)$ για κάποιο $c \in C, T \in S, i = 1,2,\dots$

Θέτουμε $T_k = T$ και από την (3.5) έχουμε

$$t^{-1}|T_k(a-b)| \leq |f(a)-f(b)| \leq t|T_k(a-b)|$$

για κάθε $b \in E_k, a \in B(b, \frac{2}{i})$ και αφού $E_k \subseteq B(c, \frac{1}{i}) \subseteq B(b, \frac{2}{i})$ τότε

$$t^{-1}|T_k(a-b)| \leq |f(a)-f(b)| \leq t|T_k(a-b)| \tag{3.7}$$

για κάθε $a, b \in E_k$. Επομένως, η $f|_{E_k}$ είναι 1-1.

iii. Επιπλέον παρατηρούμε ότι η (3.7) συνεπάγεται

$$\mathrm{Lip}(f|_{E_k} T_k^{-1}) \leq t$$
$$\mathrm{Lip}(T_k (f|_{E_k})^{-1}) \leq t$$

Και ο ισχυρισμός δίνει

$$t^{-n}|\det T_k| \leq Jf|_{E_k} \leq t^n|\det T_k|$$

■

Θεώρημα 3.4. ***(Area Formula)***

Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ μία Lipschitz συνεχής συνάρτηση με $n \leq m$.

Τότε για κάθε $\mathcal{L}^n$-μετρήσιμο σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$ ισχύει

$$\int_A Jf dx = \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{H}^n(y) \tag{3.8}$$

Απόδειξη. Αρχικά υποθέτουμε ότι τα $Df(x), Jf(x)$ υπάρχουν $\forall x \in A$. Επίσης υποθέτουμε ότι $\mathcal{L}^n(A) < \infty$. Η απόδειξη θα γίνει σε εφτά βήματα.

1. **Περίπτωση 1.** $A \subseteq \{Jf > 0\}$

   Σταθεροποιούμε ένα $t > 1$ και διαλέγουμε μία οικογένεια Borel συνόλων $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ όπως στο Λήμμα 3.3. Υποθέτουμε επίσης ότι τα σύνολα είναι ξένα.

   Όπως στην απόδειξη του λήμματος 3.2, ορίζουμε

   $$B_k = \left\{ Q \mid Q = (a_1, b_1] \times \cdots \times (a_n, b_n], a_i = \frac{c_i}{k}, b_i = \frac{c_i + 1}{k}, c_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

   Τώρα, για $Q_i \in B_k$ και $j = 1, 2, \ldots$ θέτουμε τα εξής σύνολα

   $$F_j^i := E_j \cap Q_i \cap A$$

   Για τα F_j^i έχουμε

   - τα F_j^i είναι ξένα και
   - $\displaystyle\bigcup_{i,j=1}^{\infty} F_j^i = \bigcup_{i,j=1}^{\infty} E_j \cap Q_i \cap A = A$

2. **Ισχυρισμός 1.**

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i,j=1}^{\infty}\mathcal{H}^n(f(F_j^i)) = \int_{\mathbb{R}^m}\mathcal{H}^0(A\cap f^{-1}(y))d\mathcal{H}^n \tag{3.9}$$

Απόδειξη Ισχυρισμού 1.

Θέτουμε

$$g_k := \sum_{i,j=1}^{\infty}\mathcal{X}_{f(F_i^j)}$$

Ώστε το $g_k(y)$ να είναι το πλήθος των συνόλων F_j^i για τα οποία ισχύει $F_j^i \cap f^{-1}(y) \neq \emptyset$. Επομένως, αφήνοντας $k \to \infty$ παίρνουμε

$$g_k(y) \to \mathcal{H}^0(A\cap f^{-1}(y))$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης (1.8) έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^m} g_k(y)d\mathcal{H}^n \to \int_{\mathbb{R}^m}\mathcal{H}^0(A\cap f^{-1}(y))d\mathcal{H}^n$$

Δηλαδή

$$\int_{\mathbb{R}^m}\sum_{i,j=1}^{\infty}\mathcal{X}_{f(F_i^j)}d\mathcal{H}^n \to \int_{\mathbb{R}^m}\mathcal{H}^0(A\cap f^{-1}(y))d\mathcal{H}^n$$

Και αφού η $\mathcal{X}_{f(F_i^j)}$ είναι θετική μετρήσιμη συνάρτηση, από το Θεώρημα Beppo-Levi (1.9)

$$\sum_{i,j=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^m}\mathcal{X}_{f(F_i^j)}d\mathcal{H}^n \to \int_{\mathbb{R}^m}\mathcal{H}^0(A\cap f^{-1}(y))d\mathcal{H}^n$$

Επομένως αποδείξαμε τον ισχυρισμό, δηλαδή ότι ισχύει

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i,j=1}^{\infty}\mathcal{H}^n(f(F_j^i)) = \int_{\mathbb{R}^m}\mathcal{H}^0(A\cap f^{-1}(y))d\mathcal{H}^n$$

3. Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι

$$\mathcal{H}^n(f(F_j^i)) = \mathcal{H}^n(f|_{E_j}T_j^{-1}T_j(F_j^i)) \leq t^n\mathcal{L}^n(T_j(F_j^i))$$

και

$$\mathcal{L}^n(T_j(F_j^i)) = \mathcal{H}^n(T_j(f|_{E_j})^{-1}f(F_j^i)) \leq t^n\mathcal{H}^n(f(F_j^i))$$

όπου $T_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ συμμετρικός αυτομορφισμός από το Λήμμα 3.3. Από τις δύο παραπάνω σχέσεις έχουμε

$$t^{-2n}\mathcal{H}^n(f(F_j^i)) \leq \mathcal{H}^n(f(F_j^i)) \leq t^{-n}\mathcal{L}^n(T_j(F_j^i)) = t^{-n}|\det T_j|\mathcal{L}^n(F_j^i)$$

Όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το Θεώρημα 2.14. Όμως από το iii. του Λήμματος 3.3 έχουμε $t^{-n}|\det T_k| \leq Jf|_{E_k} \leq t^n|\det T_k|$ άρα

$$t^{-n}|\det T_j|\mathcal{L}^n(F_j^i) \leq \int_{F_j^i} Jf dx \leq t^n|\det T_j|\mathcal{L}^n(F_j^i) = t^n\mathcal{L}^n(T_j(F_j^i)) \leq t^{2n}\mathcal{H}^n(f(F_j^i))$$

Αθροίζοντας στα i, j παίρνουμε

$$t^{-2n}\sum_{i,j=1}^{\infty}\mathcal{H}^n(f(F_j^i)) \leq \sum_{i,j=1}^{\infty}\int_{F_i^j} Jf dx \leq t^{2n}\sum_{i,j=1}^{\infty}\mathcal{H}^n(f(F_j^i))$$

Και αφού $\bigcup_{i,j=1}^{\infty} F_j^i = A$,

$$t^{-2n}\sum_{i,j=1}^{\infty}\mathcal{H}^n(f(F_j^i)) \leq \int_A Jf dx \leq t^{2n}\sum_{i,j=1}^{\infty}\mathcal{H}^n(f(F_j^i))$$

Αφήνοντας $k \to \infty$ και από τον Ισχυρισμό 1, έχουμε

$$t^{-2n}\int_{\mathbb{R}^m}\mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}(y))d\mathcal{H}^n \leq \int_A Jf dx \leq t^{2n}\int_{\mathbb{R}^m}\mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}(y))d\mathcal{H}^n$$

Και στέλνοντας το $t \to 1^+$ παίρνουμε

$$\int_A Jf dx = \int_{\mathbb{R}^m}\mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}(y))d\mathcal{H}^n$$

4. **Περίπτωση 2.** $A \subseteq \{Jf = 0\}$

   Σταθεροποιούμε ένα $0 < \varepsilon \leq 1$ και αναλύουμε την f ως εξής

$$f = pg$$

   όπου $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ είναι η απεικόνιση

$$g(x) := (f(x), \varepsilon x)$$

   και $p : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι η προβολή

$$p(y, z) = y$$

5. **Ισχυρισμός 2.** Υπάρχει σταθερά C τέτοια ώστε

$$0 < Jg(x) \leq C\varepsilon$$

   για $x \in A$.

   Απόδειξη Ισχυρισμού 2.

   Γράφουμε την g ως

$$g = (f^1, \ldots, f^m, \varepsilon x_1, \ldots, \varepsilon x_n)$$

   Οπότε έχουμε

$$Dg(x) = \begin{pmatrix} Df(x) \\ \varepsilon I \end{pmatrix}_{(n+m)\times n}$$

   Όπως είδαμε στην παράγραφο 1.2, το $Jg(x)^2$ ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των οριζουσών των $(n \times n)$ υποπινάκων του πίνακα του $Dg(x)$ και σύμφωνα με τον τύπο Binet-Cauchy (Θεώρημα 1.23) έχουμε ότι $Jg(x)^2 \geq \varepsilon^{2n} > 0$. Επιπλέον, αφού $|Df| \leq \mathrm{Lip}(f) < \infty$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο Binet-Cauchy για να υπολογίσουμε

$$Jg(x)^2 = Jf(x)^2 + \begin{pmatrix} \text{Άθροισμα των τετραγώνων των όρων} \\ \text{που περιέχουν τουλάχιστον ένα ε} \end{pmatrix} \leq C\varepsilon^2$$

   για κάθε $x \in A$.

6. Αφού η $p : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι προβολή μπορούμε να υπολογίσουμε χρησιμοποιώντας την πρώτη περίπτωση

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^n(f(A)) &\leq \mathcal{H}^n(g(A)) \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^{n+m}} \mathcal{H}^0(A \cap g^{-1}\{y,z\}) d\mathcal{H}^n(y,z) \\
&= \int_A Jg(x)dx \\
&\leq \varepsilon C \mathcal{L}^n(A)
\end{aligned}$$

Αφήνοντας $\varepsilon \to 0$ στην παραπάνω σχέση παίρνουμε $H^n(f(A)) \leq 0$ άρα $H^n(f(A)) = 0$, οπότε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{H}^n = 0$$

Αφού spt!!! $\mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\}) \subseteq f(A)$. Όμως τότε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{H}^n = 0 = \int_A Jf dx$$

7. Για να αποδείξουμε το θεώρημα για τυχαίο $A \subseteq \mathbb{R}^n$, γράφουμε $A = A_1 \cup A_2$ όπου $A_1 \subseteq \{Jf > 0\}$, $A_2 \subseteq \{Jf = 0\}$ και εφαρμόζουμε τις περιπτώσεις 1 και 2.

■

3.2 Εφαρμογές της Area Formula

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε κάποιες εφαρμογές της Area Formula. Σημαντική εφαρμογή αποτελεί ο τύπος αλλαγής μεταβλητής για $\mathcal{L}^n$-ολοκληρώσιμες συναρτήσεις από τον $\mathbb{R}^n$ στον $\mathbb{R}$, καθώς και η γενίκευση του εμβαδού επιφάνειας στον $\mathbb{R}^n$.

1. **Τύπος αλλαγής μεταβλητής.**

Θεώρημα 3.5. *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ Lipschitz συνεχής, $n \leq m$. Τότε για κάθε $\mathcal{L}^n$-ολοκληρώσιμη συνάρτηση $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x)Jf(x)dx = \int_{\mathbb{R}^m} \left[\sum_{x \in f^{-1}\{y\}} g(x) \right] d\mathcal{H}^n(y)$$

Απόδειξη.

- **Περίπτωση 1.** Έστω $g \geq 0$. Από το Θεώρημα 1.7 μπορούμε να βρούμε $\mathcal{L}^n$-μετρήσιμα σύνολα $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ ώστε η g να γράφεται στην εξής μορφή

$$g = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \mathcal{X}_{A_i}$$

Επομένως υπολογίζουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} gJf\ dx = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \mathcal{X}_{A_i} Jf\ dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{i} \mathcal{X}_{A_i} Jf\ dx = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \int_{A_i} Jf\ dx$$

Όπου στη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε το Θεώρημα Beppo Levi (1.9). Και από την Area Formula (3.8) έχουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \int_{A_i} Jf\ dx &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^0(A_i \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{H}^n(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \sum_{x \in f^{-1}\{y\}} \mathcal{X}_{A_i}(x) d\mathcal{H}^n(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} \sum_{x \in f^{-1}\{y\}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \mathcal{X}_{A_i}(x) d\mathcal{H}^n(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} \left[\sum_{x \in f^{-1}\{y\}} g(x) \right] d\mathcal{H}^n(y)
\end{aligned}$$

- **Περίπτωση 2.** Έστω ότι η g είναι οποιαδήποτε $\mathcal{L}^n$-ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε γράφουμε

$$g = g^+ - g^-$$

όπου

$$g^+ = g\mathcal{X}_{\{g \geq 0\}} = \max(g, 0)$$
$$g^- = -g\mathcal{X}_{\{g<0\}} = \max(-g, 0)$$

Προφανώς οι g^+, g^- είναι μη αρνητικές συναρτήσεις, επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε την πρώτη περίπτωση για την τυχαία g.

■

2. **Μήκος καμπύλης.**

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ Lipschitz συνεχής και 1-1. Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε $n = 1$ και $m \geq 1$. Συμβολίζουμε την f ως $f = (f_1, \ldots, f_m)$ και την παράγωγό της ως $f^{'} = (f_1^{'}, \ldots, f_m^{'})$. Επομένως

$$Jf = \|f^{'}\|$$

Επίσης, για $-\infty < a < b < \infty$, ορίζουμε την καμπύλη

$$C := f([a, b]) \subseteq \mathbb{R}^m$$

Τότε μέσω της Area formula (3.8) παίρνουμε

$$\int_{[a,b]} \|f^{'}\| \; dx = \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^0([a, b] \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{H}^1(y) = \int_{f([a,b])} 1 \; d\mathcal{H}^1(y) = \mathcal{H}^1(f([a, b]))$$

Τελικά

$$\mathcal{H}^1(C) = \text{Μήκος της } C = \int_a^b \|f^{'}\| \; dt$$

Οπότε καταλήξαμε στο γνωστό τύπο για τον υπολογισμό μήκους καμπύλης. Άρα μέσω της Area formula μπορούμε να υπολογίσουμε το μήκος μίας καμπύλης C υπολογίζοντας το μέτρο Hausdorff διάστασης 1 της C.

3. **Εμβαδόν επιφάνειας που είναι γράφημα.**

Έστω $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lipschitz συνεχής. Για κάθε ανοικτό σύνολο $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ορίζουμε το γράφημα της g πάνω στο U ως

$$G = G(g,U) := \{(x, g(x)) \mid x \in U\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

Επίσης ορίζουμε $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ με

$$f(x) := (x, g(x))$$

Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε $n \geq 1$ και $m = n+1$. Τότε ο πίνακας διαφορικού της f είναι

$$Df = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \\ g_{x_1} & \dots & g_{x_n} \end{pmatrix}_{(n+1)\times n}$$

Επομένως ως αποτέλεσμα του τύπου Binet-Cauchy (Θεώρημα 1.23) υπολογίζουμε

$$(Jf)^2 = \text{Το άθροισμα των τετραγώνων των } n \times n \text{ υποοριζουσών} = 1 + \|Dg\|^2$$

Άρα μέσω της Area formula (3.8) έχουμε

$$\int_U (1 + \|Dg\|^2)^{\frac{1}{2}} dx = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \mathcal{H}^0(U \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{H}^n(y) = \mathcal{H}^n(f(U)) = \mathcal{H}^n(G) \tag{3.10}$$

Άρα

$$\mathcal{H}^n(G) = \text{Εμβαδόν επιφάνειας του G} = \int_U (1 + \|Dg\|^2)^{\frac{1}{2}} dx$$

4. **Εμβαδόν παραμετρικής επιφάνειας.**

Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ Lipschitz συνεχής και 1-1. Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε $n \geq 1$ και $m = n+1$. Συμβολίζουμε την f ως $f = (f_1, \dots, f_{n+1})$ επομένως ο πίνακας διαφορικού της f είναι

$$Df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{(n+1)\times n}$$

Επίσης, για κάθε ανοικτό $U \subseteq \mathbb{R}^n$ γράφουμε

$$S := f(U) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

Πάλι ως αποτέλεσμα του τύπου Binet-Cauchy (Θεώρημα 1.23) υπολογίζουμε

$$(Jf)^2 = \text{άθροισμα των τετραγώνων των } n \times n \ \text{ υποοριζουσών} = \left(\sum_{i=1}^{n+1} |J_i| \right)^{\frac{1}{2}}$$

Άρα μέσω της Area formula (3.8) έχουμε

$$\int_U \left(\sum_{i=1}^{n+1} |J_i| \right)^{\frac{1}{2}} dx = \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^0(U \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{H}^n(y) = \mathcal{H}^n(f(U))$$

Άρα

$$\mathcal{H}^n(S) = \text{το n-διάστατο εμβαδόν του S} = \int_U \left(\sum_{i=1}^{n+1} |J_i| \right)^{\frac{1}{2}} dx$$

Τελικά μέσω της Area formula καταλήξαμε στο ίδιο αποτέλεσμα της Πρότασης 2.19, γενικεύσαμε το γνωστό τύπο του εμβαδού επιφάνειας στον $\mathbb{R}^3$ και είδαμε ότι μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν μίας επιφάνειας στον $\mathbb{R}^{n+1}$ υπολογίζοντας το n- διάστατο μέτρο Hausdorff της επιφάνειας.

Κεφάλαιο 4

Coarea formula

4.1 Coarea formula

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε την Coarea formula που αποτελεί έναν αντίστοιχο τύπο με αυτόν της Area formula, αλλά για την περίπτωση που έχουμε Lipschitz συναρτήσεις $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ όπου $n \geq m$.

Στη συνέχεια παραθέτουμε τρία λήμματα τα οποία είναι χρήσιμα για την απόδειξη της Coarea formula. Στο υπόλοιπο του κεφαλαίου αυτού θα υποθέτουμε ότι $n \geq m$.

Λήμμα 4.1. *Έστω $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ γραμμική με $n \geq m$ και $A \subseteq \mathbb{R}^n$ $\mathcal{L}^n$-μετρήσιμο. Τότε*

i. Η απεικόνιση $y \mapsto \mathcal{H}^{n-m}(A \cap L^{-1}\{y\})$ είναι $\mathcal{L}^m$-μετρήσιμη

ii. Ισχύει η ισότητα

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap L^{-1}\{y\})\, dy = J(L)\mathcal{L}^n(A)$$

Λήμμα 4.2. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ $\mathcal{L}^n$-μετρήσιμο. Τότε*

i. Το $A \cap f^{-1}\{y\}$ είναι $\mathcal{H}^{n-m}$- μετρήσιμο για $\mathcal{L}^m$ σχεδόν κάθε y

ii. Η απεικόνιση $y \mapsto \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\})$ είναι $\mathcal{L}^m$-μετρήσιμη

iii. Ισχύει

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\})\, dy \leq \frac{c_{n-m}c_m}{2c_n}(\operatorname{Lip} f)^m \mathcal{L}^n(A)$$

Λήμμα 4.3. *Έστω $t > 1$, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz συνεχής και θέτουμε*

$$B = \{x \mid Dh(x) \text{ υπάρχει },\ Jh(x) > 0\}$$

Τότε υπάρχει αριθμήσιμη οικογένεια Borel συνόλων $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ του $\mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε

i. $\mathcal{L}^n(B - \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k) = 0$

ii. *Η $h|_{D_k}$ είναι 1-1 για $k = 1, 2 \ldots$*

iii. *Για κάθε $k = 1, 2 \ldots$ υπάρχει ένας συμμετρικός αυτομορφισμός $S_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ τέτοιος ώστε*

$$\begin{gathered} \operatorname{Lip}((h|_{D_k})S_k^{-1}) \leq t \\ \operatorname{Lip}(S_k(h|_{D_k})^{-1}) \leq t \\ t^{-n}|\det S_k| \leq Jh|_{D_k} \leq t^n|\det S_k| \end{gathered}$$

Θεώρημα 4.4. ***(Coarea Formula)***

Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ Lipschitz συνεχής με $n \geq m$. Τότε για κάθε $\mathcal{L}^n$-μετρήσιμο σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\int_A Jf\ dx = \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\})\ dy$$

Απόδειξη. Αρχικά υποθέτουμε ότι τα $Df(x), Jf(x)$ υπάρχουν για κάθε $x \in A$. Επίσης υποθέτουμε ότι $\mathcal{L}^n(A) < \infty$. Θα αναλύσουμε την απόδειξη σε εννέα βήματα

1. **Περίπτωση 1.** $A \subseteq \{Jf > 0\}$

   Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό του ορισμού 1.22, γράφουμε την f ως εξής

   $$f = qh_\lambda$$

   για κάθε $\lambda \in \Lambda(n, n-m)$, όπου

   $$\begin{gathered} h_\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \\ h_\lambda(x) = (f(x), P_\lambda(x)) \end{gathered}$$

   και

   $$q : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^m$$

$$q(y,z) = y$$

και η $P_\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-m},\ P_\lambda(x_1,\dots,x_n) = (x_{\lambda(1)},\dots,x_{\lambda(n-m)})$ είναι η προβολή (1.4).

Τώρα θέτουμε

$$\begin{aligned} A_\lambda &= \{x \in A \mid \det Dh_\lambda \neq 0\} \\ &= \{x \in A \mid P_\lambda|_{[Df(x)]^{-1}(0)} \text{ είναι 1-1}\} \end{aligned}$$

Επομένως ισχύει

$$A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda(n,n-m)} A_\lambda$$

- Πράγματι, έστω $x \in A$. Τότε $Jf(x) > 0$, δηλαδή $J(qh_\lambda)(x) > 0$.
  Από τον κανόνα αλυσίδας [Marsden and Tromba, 2012] δεδομένου ότι η h_λ είναι διαφορίσιμη στο x και η q είναι διαφορίσιμη στο $h_\lambda(x)$

  $$J(qh_\lambda)(x) = J(q(h_\lambda)(x))J(h_\lambda)(x) > 0$$

  Από την παραπάνω σχέση συμπεραίνουμε ότι $J(h_\lambda)(x) \neq 0$ και ισοδύναμα $\det Dh_\lambda \neq 0$.
  Άρα $x \in A_\lambda$ για κάθε $\lambda \in \Lambda(n,n-m)$ επομένως $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda(n,n-m)} A_\lambda$.

- Αντίστροφα, αν $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda(n,n-m)} A_\lambda$ τότε $x \in A_\lambda$ για κάποιο $\lambda \in \Lambda(n,n-m)$ άρα $x \in A$ από τον τρόπο που ορίσαμε τα A_λ.

2. Σταθεροποιούμε $t > 1$ και εφαρμόζοντας το Λήμμα 4.3 για την $h = h_\lambda$ βρίσκουμε αριθμήσιμη οικογένεια $\{D_k\}_{k=1}^\infty$ από σύνολα Borel και αριθμήσιμη οικογένεια $\{S_k\}_{k=1}^\infty$ από συμμετρικούς αυτομορφισμούς που ικανοποιούν τα αποτελέσματα του Λήμματος 4.3. Επιπλέον θέτουμε

   $$G_k = A \cap D_k$$

3. **Ισχυρισμός 1.**

   $$t^{-n} J(qS_k) \leq Jf|_{G_k} \leq t^n J(qS_k)$$

   Απόδειξη.

Αφού $f = qh$ έχουμε

$$\begin{aligned} Df &= qDh \\ &= qS_k S_k^{-1} Dh \\ &= qS_k D(S_k^{-1} h) \\ &= qS_k C \end{aligned} \tag{4.1}$$

Όπου θέσαμε $C = D(S_k^{-1}h)$.

Από το Λήμμα 4.3 έχουμε

$$t^{-1} \leq \mathrm{Lip}(S_k^{-1}h) = \mathrm{Lip}(C) \leq t \tag{4.2}$$

στο G_k.

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 1.19 γράφουμε $Df = SO^*$ και $qS_k = TP^*$ όπου $S, T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ είναι συμμετρικές απεικονίσεις και $O, P : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ είναι ορθογώνιες απεικονίσεις.

Τότε μέσω της 4.1 έχουμε

$$SO^* = TP^*C$$

Επομένως

$$S = TP^*CO$$

Επίσης, αφού $G_k \subseteq A \subseteq \{Jf > 0\}$ έχουμε $\det S \neq 0$ και $\det T \neq 0$.

Άρα για $v \in \mathbb{R}^m$

$$\begin{aligned} |(T^{-1}S)(v)| &= |(P^*CO)(v)| \\ &\leq |(CO)(v)| \\ &\leq t|O(v)| \\ &= t|v| \end{aligned}$$

Όπου στη δεύτερη ανισότητα χρησιμοποιήσαμε τη σχέση 4.2. Επομένως

$$(T^{-1}S)(B(1)) \subseteq B(t)$$

και άρα

$$Jf = |\det S| \leq t^n |\det T| = t^n J(qS_k) \ \text{ στο } G_k \tag{4.3}$$

Με παρόμοιο τρόπο, για $v \in \mathbb{R}^m$ έχουμε

$$\begin{aligned} |(S^{-1}T)(v)| &= |(O^* C^{-1} P)(v)| \\ &\leq |(C^{-1}P)(v)| \\ &\leq t|P(v)| \\ &= t|v| \end{aligned}$$

άρα

$$J(qS_k) = |\det T| \leq t^n |detS| = t^n Jf \ \text{ στο } G_k \tag{4.4}$$

Άρα από τις σχέσεις (4.3) και (4.4) έχουμε

$$t^{-n} J(qS_k) \leq Jf \leq t^n J(qS_k) \ \text{ στο } G_k$$

Επομένως αποδείξαμε τον Ισχυρισμό.

4. Τώρα υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} & t^{-3n+m} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(G_k \cap f^{-1}\{y\}) \, dy \\ &= t^{-3n+m} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(h^{-1}(h(G_k) \cap q^{-1}\{y\})) \, dy \\ &\leq t^{-2n} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(S_k^{-1}(h(G_k) \cap q^{-1}\{y\})) \, dy \\ &= t^{-2n} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}((S_k^{-1}h)(G_k) \cap (qS_k)^{-1}\{y\})) \, dy \end{aligned}$$

Και από το Λήμμα 4.1 έχουμε

$$\begin{aligned} & t^{-2n} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}((S_k^{-1}h)(G_k) \cap (qS_k)^{-1}\{y\})) \, dy \\ &= t^{-2n} J(qS_k) \mathcal{L}^n((S_k^{-1}h)(G_k)) \\ &\leq t^{-n} J(qS_k) \mathcal{L}^n(G_k) \\ &\leq \int_{G_k} Jf \, dx \end{aligned}$$

Όπου στην παραπάνω ανισότητα χρησιμοποιήσαμε την πρώτη ανισότητα του Ισχυρισμού 1. Έπειτα χρησιμοποιούμε τη δεύτερη ανισότητα για να δουλέψουμε αντίστροφα, οπότε συνεχίζοντας τον υπολογισμό

$$
\begin{aligned}
&\leq t^n J(qS_k)\mathcal{L}^n(G_k) \\
&\leq t^{2n} J(qS_k)\mathcal{L}^n((S_k^{-1}h)(G_k)) \\
&= t^{2n} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}((S_k^{-1}h)(G_k) \cap (qS_k)^{-1}\{y\})\ dy \\
&\leq t^{3n-m} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(h^{-1}(h(G_k) \cap q^{-1}\{y\}))\ dy \\
&= t^{3n-m} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(G_k \cap f^{-1}\{y\})\ dy
\end{aligned}
$$

Επομένως αφήνοντας $t \to 1^+$ παίρνουμε

$$\int_{G_k} Jf\ dx = \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(G_k \cap f^{-1}\{y\})\ dy$$

Όμως από το Λήμμα 4.3 έχουμε

$$\mathcal{L}^n(A - \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k) = 0$$

Άρα αθροίζοντας στο k παίρνουμε

$$\int_A Jf\ dx = \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\})\ dy$$

5. **Περίπτωση 2.** $A \subseteq \{Jf = 0\}$

Αρχικά σταθεροποιούμε $0 < \varepsilon \leq 1$ και για $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$ ορίζουμε τις απεικονίσεις

$$
\begin{aligned}
g(x,y) &:= f(x) + \varepsilon y \\
p(x,y) &:= y
\end{aligned}
$$

Τότε

$$Dg = (Df, \varepsilon I)_{m \times (n+m)}$$

και

$$\varepsilon^m \leq Jg = J(Dg) = J(Dg^*) \leq C\varepsilon$$

6. Παρατηρούμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\})\ dy = \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y - \varepsilon w\})\ dy \text{ για κάθε } w \in \mathbb{R}^m$$
$$= \frac{1}{\omega_m} \int_{B(1)} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y - \varepsilon w\})\ dydw$$

Όπου $\omega_m = \dfrac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2}+1)}$ ο όγκος της μοναδιαίας μπάλας του $\mathbb{R}^m$ όπως τον συμβολίσαμε στο κεφάλαιο 2 (2.1).

7. **Ισχυρισμός 2.** Σταθεροποιούμε $y, w \in \mathbb{R}^m$ και θέτουμε $B := A \times B(1) \subset \mathbb{R}^{n+m}$. Τότε

$$B \cap g^{-1}\{y\} \cap p^{-1}\{w\} = \begin{cases} \emptyset & \text{αν } w \notin B(1) \\ (A \cap f^{-1}\{y - \varepsilon w\}) \times \{w\} & \text{αν } w \in B(1) \end{cases}$$

Απόδειξη. Έχουμε $(x, z) \in B \cap g^{-1}\{y\} \cap p^{-1}\{w\}$ αν και μόνο αν

$$x \in A,\ z \in B(1),\ f(x) + \varepsilon z = y,\ z = w$$

δηλαδή

$$x \in A,\ z = w \in B(1),\ f(x) = y - \varepsilon w$$

ισοδύναμα

$$w \in B(1),\ (x, z) \in (A \cap f^{-1}\{y - \varepsilon w\}) \times \{w\}$$

Επομένως αποδείξαμε τον Ισχυρισμό 2.

8. Με τη βοήθεια του Ισχυρισμού 2 συνεχίζουμε τον υπολογισμό από το βήμα 6

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\})\ dy = \frac{1}{\omega_m} \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^m} H^{n-m}(B \cap g^{-1}\{y\} \cap p^{-1}\{w\})\ dwdy$$
$$\leq \frac{\omega_{n-m}}{\omega_n} \int_{\mathbb{R}^m} H^{n-m}(B \cap g^{-1}\{y\})\ dy$$
$$= \frac{\omega_{n-m}}{\omega_n} \int_B Jg\ dxdz$$
$$\leq \frac{\omega_{n-m}\omega_m}{\omega_n} \mathcal{L}^n(A) \sup_B Jg$$
$$\leq C\varepsilon$$

Αφήνοντας $\varepsilon \to 0$ στην παραπάνω ανισότητα παίρνουμε

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}\{y\})\, dy = 0 = \int_A Jf\, dx$$

9. Για να αποδείξουμε το θεώρημα για τυχαίο $A \subseteq \mathbb{R}^n$, γράφουμε $A = A_1 \cup A_2$ όπου $A_1 \subseteq \{Jf > 0\}$, $A_2 \subseteq \{Jf = 0\}$ και εφαρμόζουμε τις περιπτώσεις 1 και 2.

■

4.2 Εφαρμογές της Coarea Formula

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιάσουμε κάποιες εφαρμογές της Coarea formula. Όπως στην περίπτωση της Area formula θα αποδείξουμε τον τύπο αλλαγής μεταβλητής για $\mathcal{L}^n$-μετρήσιμες συναρτήσεις από τον $\mathbb{R}^n$ στον $\mathbb{R}$ ολοκληρώνοντας όμως πρώτα στα σύνολα στάθμης Lipschitz συναρτήσεων από τον $\mathbb{R}^n$ στον $\mathbb{R}^m$ με $n \geq m$. Επιπλέον, θα γενικεύσουμε τον τύπο αλλαγής μεταβλητής σε πολικές συντεταγμένες που γνωρίζουμε για συναρτήσεις από τον $\mathbb{R}^2$ στο $\mathbb{R}$.

1. **Τύπος αλλαγής μεταβλητής.**

Θεώρημα 4.5. ***Ολοκλήρωση σε σύνολα στάθμης***

Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ Lipschitz συνεχής, με $n \geq m$. Τότε για κάθε $\mathcal{L}^n$-ολοκληρώσιμη συνάρτηση $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}^n} gJf\ dx = \int_{\mathbb{R}^m} \left[\int_{f^{-1}\{y\}} g\ d\mathcal{H}^{n-m} \right] dy$$

Απόδειξη.

- **Περίπτωση 1.** Έστω $g \geq 0$. Από το Θεώρημα 1.7 μπορούμε να βρούμε $\mathcal{L}^n$-μετρήσιμα σύνολα $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ ώστε η g να γράφεται στην εξής μορφή

$$g = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \mathcal{X}_{A_i}$$

Τότε από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης (1.8) έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} gJf\ dx = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \mathcal{X}_{A_i} Jf\ dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{i} \mathcal{X}_{A_i} Jf\ dx = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \int_{A_i} Jf\ dx$$

Όπου στη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε το Θεώρημα Beppo Levi (1.9). Και από την Coarea formula (4.4) έχουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \int_{A_i} Jf\ dx &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A_i \cap f^{-1}\{y\})\ dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \mathcal{H}^{n-m}(A_i \cap f^{-1}\{y\})\ dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{f^{-1}\{y\}} g\ d\mathcal{H}^{n-m} \right] dy
\end{aligned}$$

- **Περίπτωση 2.** Έστω ότι η g είναι οποιαδήποτε $\mathcal{L}^n$- αθροίσιμη συνάρτηση. Τότε γράφουμε
$$g = g^+ - g^-$$
και εφαρμόζουμε την Περίπτωση 1.

■

2. **Τύπος αλλαγής μεταβλητής σε πολικές συντεταγμένες.**

Έστω $g : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Τότε ο τύπος αλλαγής μεταβλητής σε πολικές συντεταγμένες είναι
$$\iint_D g(x,y)\ dxdy = \iint_{D^*} g(r\cos\theta, r\sin\theta) r\ dr$$
Με το παρακάτω Θεώρημα θα γενικεύσουμε τον τύπο αυτό.

Θεώρημα 4.6. *Έστω $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\mathcal{L}^n$-ολοκληρώσιμη. Τότε*
$$\int_{\mathbb{R}^n} g\ dx = \int_0^\infty \left(\int_{\partial B(r)} g\ d\mathcal{H}^{n-1} \right) dr$$

Απόδειξη. Αρχικά θέτουμε $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \|x\|$, $x \neq 0$. Οπότε έχουμε
$$Df(x) = \frac{x}{\|x\|}$$
και
$$Jf(x) = 1$$
Άρα από το Θεώρημα 4.5 και αφού το σύνολο στάθμης της $f(x) = \|x\|$ είναι η $n-1$- διάστατη σφαίρα η οποία είναι το σύνορο της n- διάστατης μπάλας
$$\int_{\mathbb{R}^n} g\ dx = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{f^{-1}\{y\}} g\ d\mathcal{H}^{n-1} \right]\ dy = \int_0^\infty \left[\int_{\partial B(r)} g\ d\mathcal{H}^{n-1} \right]\ dr$$

■

3. **Ολοκλήρωση σε σύνολα στάθμης.**

Θεώρημα 4.7. *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lipshitz συνεχής. Τότε*
$$\int_{\mathbb{R}^n} |Df|\ dx = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}^{n-1}(\{f = t\})\ dt$$

Θεώρημα 4.8. ***(Σύνολα στάθμης συναρτήσεων απόστασης)***

Έστω $K \subset \mathbb{R}^n$ *συμπαγές μη κενό σύνολο και* $d(x) := \operatorname{dist}(x, K),\ x \in \mathbb{R}^n$*. Τότε για κάθε* $0 < a < b$ *έχουμε*

$$\int_a^b \mathcal{H}^{n-1}(\{d = t\})\, dt = \mathcal{L}^n(\{a \le d \le b\})$$

Απόδειξη. Έστω $x \in \mathbb{R}^n$. Για το συγκεκριμένο x διαλέγουμε $c \in K$ τέτοιο ώστε να ισχύει $d(x) = |x - c|$. Τότε για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$d(y) - d(x) \le |y - c| - |x - c| \le |x - y|$$

Εναλλάσοντας τα x, y παίρνουμε $|d(y) - d(x)| \le |x - y|$ και επομένως $\operatorname{Lip}(d) \le 1$.

Άρα από το Θεώρημα Rademacher (1.15) συνεπάγεται ότι η συνάρτηση d είναι διαφορίσιμη $\mathcal{L}^n$ σχεδόν παντού.

Τώρα διαλέγουμε τυχαίο $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$ όπου υπάρχει το $Dd(x)$. Αφού $\operatorname{Lip}(d) \le 1$ τότε $|Dd(x)| \le 1$. Όπως πριν, διαλέγουμε $c \in K$ τέτοιο ώστε $d(x) = |x - c|$. Άρα

$$d(tx + (1-t)c) = t|x - c|$$

για κάθε $0 \le t \le 1$ επομένως

$$|x - c| = Dd(x) \cdot (x - c) \le |Dd(x)||x - c|$$

Άρα $|Dd(x)| \ge 1$

Τελικά, $|Dd(x)| = 1$ $\mathcal{L}^n$-σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}^n \setminus K$, άρα παίρνουμε το ζητούμενο από το Θεώρημα 4.7.

∎

Βιβλιογραφία

H. Attouch, G. Buttazzo, and G. Michaille. *Variational analysis in Sobolev and BV spaces: applications to PDEs and optimization*. SIAM, 2014.

L. C. Evans and R. F. Gariepy. *Measure theory and fine properties of functions*, volume 5. CRC press Boca Raton, 1992.

K. J. Falconer. *The geometry of fractal sets*. Number 85. Cambridge University Press, 1986.

G. B. Folland. *Real analysis: modern techniques and their applications*, volume 40. John Wiley & Sons, 1999.

J. Marsden and A. Tromba. *Vector Calculus*. Macmillan Learning, 2012. ISBN 9781429224048. URL `https://books.google.gr/books?id=pVbIygAACAAJ`.

T. Tao. *An introduction to measure theory*, volume 126. American Mathematical Society Providence, RI, 2011.

Γ. Κουμουλλής, Σ. Νεγρεπόντης. *Θεωρία Μέτρου*, Εκδ. Συμμετρία, 2005.