Εθνικο Μετσοβιο Πολυτεχνειο
Σχολη Ηλεκτρολογων Μηχανικων και Μηχανικων Υπολογιστων
Τομεας Τεχνολογιας Πληροφορικης και Υπολογιστων

Αλγόριθμοι για το πρόβλημα του Ελαχίστου Συνδετικού Δέντρου σε Χρονικά Μεταβαλλόμενα Στιγμιότυπα

Διπλωματικη Εργασια

του

ΓΕΩΡΓΙΟΥ ΑΝ. ΒΙΔΑΛΑΚΗ

Επιβλέπων: Δημήτριος Φωτάκης
Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Οκτώβριος 2021

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών

Αλγόριθμοι για το πρόβλημα του Ελαχίστου Συνδετικού Δέντρου σε Χρονικά Μεταβαλλόμενα Στιγμιότυπα

Διπλωματική Εργασία

του

ΓΕΩΡΓΙΟΥ ΑΝ. ΒΙΔΑΛΑΚΗ

Επιβλέπων: Δημήτριος Φωτάκης
Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 09/11/2021

(Υπογραφή)	*(Υπογραφή)*	*(Υπογραφή)*
....	....	....
Δημήτριος Φωτάκης	Αριστείδης Παγουρτζής	Νικόλαος Παπασπύρου
Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Οκτώβριος 2021

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών

(Υπογραφή)

....

Γεωργιος Αν. Βιδαλακης
Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Στην οικογένειά μου...

Abstract

Τα τελευταία χρόνια το ερευνητικό ενδιαφέρον έχει προσελκυθεί από την αναζήτηση αλγορίθμων ελαχιστοποίησης κόστους σε ένα είδος χρονικά μεταβαλλομένων προβλημάτων. Σε ένα πρόβλημα αυτού του είδους πρέπει να υπολογίζονται οι χρονομεταβλητές παράμετροι ενός συστήματος για ένα πεπερασμένο σύνολο χρονικών στιγμών, ώστε σε κάθε χρονική στιγμή να ικανοποιείται ένας περιορισμός. Το κόστος προς ελαχιστοποίηση προκύπτει ως άθροισμα από ανεξάρτητα κόστη για τις επιμέρους χρονικές στιγμές και από κόστη μεταβολής του συστήματος, με το κόστος μεταβολής να αυξάνεται όσο πιο έντονες είναι οι αλλαγές του συστήματος μεταξύ διαδοχικών χρονικών στιγμών.

Για τα προβλήματα αυτά εκτός από την offline υπάρχει και η online εκδοχή όπου η ανεξάρτητη συνάρτηση κόστους κάθε χρονικής στιγμής δεν είναι γνωστή πριν από τη στιγμή αυτή.

Ένα πρόβλημα αυτού του είδους είναι το Multistage Matroid Maintenance, όπου κάθε χρονική στιγμή πρέπει να επιλέγεται ένα σύνολο στοιχείων, ώστε να διατηρείται μία βάση του μητροειδούς και με το κόστος να προκύπτει από τα στιγμιαία κόστη των στοιχείων και από το πλήθος των αλλαγών επιλογής ανά στοιχείο. Οι Gupta et al. [7] έδωσαν διαφόρους λογαριθμικούς προσεγγιστικούς αλγορίθμους για το πρόβλημα αυτό, ενώ εξέτασαν ειδικές περιπτώσεις μητροειδών και την online εκδοχή του προβλήματος.

Στη διπλωματική αυτή εργασία μελετάται το Multistage Matroid Maintenance στην ειδική περίπτωση που το μητροειδές είναι γραφικό και το κόστος επιλογής νέου στοιχείου (ακμής) είναι κοινό για κάθε στοιχείο και χρονική στιγμή, με στόχο τη βελτίωση των λόγων προσέγγισης. Δείχνεται ότι το άμεσο ανάλογο της dual fitting απόδειξης των Gupta et al. [7] δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την απόδειξη καλύτερου λόγου προσέγγισης από τον υπάρχοντα λογαριθμικό. Παρουσιάζεται ένας άπληστος αλγόριθμος και αποδεικνύεται ότι υπολογίζει βέλτιστη λύση σε διάφορες οικογένειες στιγμιοτύπων, συγκεκριμένα σε στιγμιότυπα με γράφημα όπου κάθε ακμή ανήκει σε έναν το πολύ κύκλο και σε στιγμιότυπα με εώς και τρεις χρονικές στιγμές. Ακόμη, αποδεικνύεται ένα σύνολο λημμάτων τα οποία ενδέχεται να είναι χρήσιμα για την περαιτέρω ενασχόληση με το πρόβλημα αυτό. Τέλος, παρουσιάζεται ένα σύνολο παραμετρικών αλγορίθμων για τον υπολογισμό της βέλτιστης λύσης καθώς και των ορίων κόστους των λύσεων του απλήστου αλγορίθμου για δεδομένα στιγμιότυπα, οι οποίοι μάλιστα έχουν υλοποιηθεί.

Λέξεις κλειδιά:
Συνδετικά Δέντρα, Μητροειδή, Προσεγγιστικοί Αλγόριθμοι, Χρονομεταβλητά Στιγμιότυπα, Γραμμικός Προγραμματισμός, Άπληστοι Αλγόριθμοι, Υλοποιήσεις

Abstract

In recent years, research interest has been attracted by the search for cost minimization algorithms in a kind of time varying problems. In a problem of this kind, the time-varying parameters of a system must be computed for a finite set of time points, so that at each time point a constraint is satisfied. The cost to be minimized is the sum of the independent costs for the individual time points and the cost of modifying the system, with the modification cost increasing in accordance with the volume of changes between successive time points.

For these problems, except of the offline version, an online version exists too, where the independent cost function of each individual time point is unknown until the particular time point.

A problem of this kind is the Multistage Matroid Maintenance problem, where for every time point a set of elements should be selected, such that a matroid's base is maintained and the cost is determined by the momentary costs of the elements and by the number of selection switches per element. Gupta et al. [7] provided a variety of logarithmic approximation algorithms for this problem and they also examined special cases of matroids and the online version of the problem.

In this thesis, a special case of Multistage Matroid Maintenance is studied, where the matroid is a graphic one and the cost of selecting a new element (edge) is the same for every element and time point, with the goal of improving the existing approximation ratios. It is shown that the obvious equivalent of the dual fitting proof of Gupta et al. can't be used for the proof of an improved approximation ratio compared to the logarithmic one. A greedy algorithm is presented and it is proved that it computes optimal solutions for a family of instances, i.e. when the instance's graph contains only edges which belong to at most a single circle and when the instance consists of at most three time points. Additionally, a set of lemmas is proved, which may be useful for the further study of this problem. Finally, a set of parametric algorithms is presented, which can be used for the computation of the optimal solution or for the computation of the cost limits of the greedy algorithm for any given instance. These algorithms have also been implemented.

Keywords:
Spanning Trees, Matroids, Approximation Algorithms, Time-Evolving Instances, Linear Programming, Greedy Algorithms, Implementations

Ευχαριστίες

Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της διπλωματικής μου, τον καθηγητή Δημήτρη Φωτάκη, για το ενδιαφέρον πρόβλημα που μου πρότεινε και το οποίο παρουσιάζεται σε αυτήν την εργασία, καθώς και για τις σχετικές ιδέες που μοιράστηκε μαζί μου, με κάποιες να έχουν καθοριστική σημασία για την απόδειξη νέων θεωρημάτων. Τον ευχαριστώ επίσης για τον χρόνο που μου αφιέρωσε και την εμπιστοσύνη που έδειξε στο πρόσωπό μου.

Ένα μεγάλο ευχαριστώ οφείλω ακόμα στην οικογένειά μου, που με τη στήριξή της και τη στοργή της όλα αυτά τα χρόνια με βοηθάει να προχωράω μπροστά.

Τέλος θέλω να ευχαριστήσω τους φίλους μου, τη Γιώτα Καρατζά και τον Βασίλη Πολλάτο, για όλες τις ωραίες στιγμές που μοιραστήκαμε μέχρι τώρα και για τη συμπαράστασή τους.

Περιεχόμενα

Κατάλογος Σχημάτων

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Πλαίσιο του προβλήματος

1.1.1 Στιγμιαία Προβλήματα

Πολλά προβλήματα μπορούν να περιγραφούν ως προβλήματα υπολογισμού των παραμέτρων ενός συστήματος ώστε να ικανοποιείται κάποιος περιορισμός (ο οποίος μπορεί να προκύπτει από τη σύνθεση απλούστερων περιορισμών) και με στόχο την ελαχιστοποίηση κάποιου κόστους. Τυπικά σε ένα τέτοιο πρόβλημα υπάρχει ένα σύστημα με παραμέτρους $X_i \in A_i$, όπου A_i είναι το πεδίο ορισμού της i-οστής παραμέτρου και για τον ορισμό ενός στιγμιοτύπου πρέπει να παρέχεται η εξής πληροφορία:

- Το πλήθος των παραμέτρων του συστήματος, M
- Τα πεδία ορισμού των παραμέτρων, $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_M = A$
- Ένας περιορισμός, $h : A \to \{false, true\}$
- Μία συνάρτηση κόστους κατάστασης, $c : A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

Ζητούμενο για το στιγμιότυπο είναι να υπολογιστούν οι τιμές των παραμέτρων του συστήματος, $(X_1, X_2, \ldots, X_M) = X$ ώστε να ελαχιστοποιείται το κόστος κατάστασης $c(X)$ ενώ ικανοποιείται ο περιορισμός $h(X)$, δηλαδή τυπικά πρέπει να υπολογιστεί το

$$X^* = \arg\min_{\substack{X \in A \\ h(X)}} c(X)$$

Αυτή η μορφή μοντελοποίησης προβλημάτων ορίζει την κατηγορία των Στιγμιαίων Προβλημάτων, καθώς μπορεί να θεωρηθεί ότι το παραμετρικό σύστημα ορίζεται μία χρονική στιγμή, σε αντίθεση με άλλες κατηγορίες προβλημάτων που θα περιγραφούν λίγο πιο μετά.

Ένα παράδειγμα τέτοιου προβλήματος είναι αυτό του υπολογισμού Ελαχίστου Συνδετικού Δέντρου (ΕΣΔ). Σε ένα στιγμιότυπο αυτού του προβλήματος δίνεται ένα μη-κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα $G = (V, E)$ και μία συνάρτηση κόστους για τις ακμές του, $w : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ και πρέπει να υπολογιστεί ένα υπογράφημα αυτού, έστω $G' = (V, E')$ που είναι συνδετικό δέντρο και έχει το ελάχιστο δυνατό αθροιστικό κόστος ακμών. Η μοντελοποίηση του στιγμιοτύπου αυτού στη μορφή που περιγράφηκε παραπάνω γίνεται ως εξής:

- Το πλήθος των παραμέτρων του συστήματος, M
  Ορίζεται μία παράμετρος για κάθε ακμή του δοθέντος γραφήματος G, δηλαδή $M = |E|$

- Τα πεδία ορισμού των παραμέτρων, $(A_1, A_2, \ldots, A_M)$
  Η παράμετρος X_i της i-οστής ακμής είναι 1 αν η ακμή αυτή έχει επιλεγεί ($e_i \in E'$), αλλιώς είναι 0, δηλαδή $A = \{0, 1\}^M$

- Ένας περιορισμός, $h : A \to \{false, true\}$
  Ο περιορισμός είναι ότι το υπογράφημα που ορίζεται από τις επιλεγμένες ακμές πρέπει να είναι συνδετικό δέντρο για το G, δηλαδή $h(X) = (G'(X) : \Sigma\Delta)$

- Μία συνάρτηση κόστους κατάστασης, $c : A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$
  Το κόστος κατάστασης προκύπτει από το άθροισμα των κοστών των επιλεγμένων ακμών, δηλαδή $c(X) = \sum_{i=1}^{M} w(e_i) \cdot X_i$

Το ζητούμενο είναι ο υπολογισμός του

$$X^* = \underset{\substack{X \in A \\ h(X)}}{\arg\min}\, c(X) = \underset{\substack{X \in A \\ G'(X):\Sigma\Delta}}{\arg\min} \sum_{i=1}^{M} w(e_i) \cdot X_i$$

Μετά τον υπολογισμό του X^* μπορεί με βάση αυτό να κατασκευαστεί λύση για το πρόβλημα ΕΣΔ θεωρώντας $e_i \in E' \Leftrightarrow X_i^* = 1$.

Ένα άλλο πρόβλημα που μπορεί να ενταχθεί σε αυτήν την κατηγορία είναι αυτό του facility location. Σε ένα στιγμιότυπο του προβλήματος αυτού δίνεται ένα σύνολο από εγκαταστάσεις (facilities), $F = \{1, 2, \ldots, |F|\}$, ένα σύνολο από πελάτες (clients), $C = \{1, 2, \ldots, |C|\}$, και οι αποστάσεις μεταξύ κάθε ζεύγους εγκατάστασης-πελάτη $d : F \times C \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Επίσης δίνεται το κόστος λειτουργίας κάθε εγκατάστασης $f : F \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Ζητούμενο είναι να υπολογιστεί ένα σύνολο εγκαταστάσεων F' που θα λειτουργήσουν και μία αντιστοίχιση των πελατών στις εν λειτουργία εγκαταστάσεις $\phi : C \to F'$ ώστε να ελαχιστοποιείται το αθροιστικό κόστος λειτουργίας εγκαταστάσεων και σύνδεσης πελατών με τις εγκαταστάσεις.

Η μοντελοποίηση ενός στιγμιοτύπου facility location ως στιγμιαίο πρόβλημα μπορεί να γίνει ως εξής:

- Το πλήθος των παραμέτρων του συστήματος, M
  Οι παράμετροι είναι όσες το άθροισμα των πληθών εγκαταστάσεων και πελατών, δηλαδή $M = |F| + |C|$

- Τα πεδία ορισμού των παραμέτρων, $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_M = A$
  Η παράμετρος X_i της i-οστής εγκατάσταση είναι 1 αν η εγκατάστασης αυτή λειτουργήσει, αλλιώς 0. Η παράμετρος $X_{|F|+j}$ του j-οστού πελάτη είναι ίση με τον αριθμό της εγκατάστασης στην οποία θα συνδεθεί. Δηλαδή $A_i = \{0, 1\}$ για $1 \leq i \leq |F|$ και $A_j = \{1, 2, \ldots, |F|\}$ για $|F| < j \leq |F| + |C|$.

- Ένας περιορισμός, $h : A \rightarrow \{false, true\}$
  Ο περιορισμός είναι ότι κάθε πελάτης πρέπει να συνδεθεί σε εγκατάσταση που λειτουργεί, δηλαδή $h(X) = (\forall j \in C : X_{\phi(X_{|F|+j})} = 1)$.

- Μία συνάρτηση κόστους κατάστασης, $c : A \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$
  Το κόστος προκύπτει από το άθροισμα των κοστών λειτουργίας και των κοστών σύνδεσης, δηλαδή $c(X) = \sum_{i \in F} f(i) + \sum_{j \in C} d(\phi(j), j)$.

Το ζητούμενο είναι να υπολογιστεί το

$$X^* = \underset{\substack{X \in A \\ h(X)}}{\arg\min}\, c(X) = \underset{\substack{X \in A \\ h(X)}}{\arg\min} \sum_{i \in F} f(i) + \sum_{j \in C} d(\phi(j), j)$$

Αφού υπολογιστεί το X^* μπορεί να κατασκευαστεί λύση για το facility location θεωρώντας ότι η i-οστή εγκατάσταση λειτουργεί αν και μόνο αν $X_i^* = 1$ και ότι ο j-οστός πελάτης συνδέεται με την εγκατάσταση $X^*_{|F|+j}$.

1.1.2 Προβλήματα Πολλαπλών Ανεξαρτήτων Στιγμών

Κάποια από τα συστήματα των Στιγμιαίων Προβλημάτων έχουν νόημα ως συστήματα που μπορούν να μεταβάλλονται με το χρόνο, δηλαδή να έχουν χρονομεταβλητές παραμέτρους. Θα γίνει μελέτη των περιπτώσεων που το σύστημα ορίζεται σε ένα σύνολο T διακριτών χρονικών στιγμών και οι παράμετροι του συστήματος πρέπει να προσδιοριστούν για κάθε $t \in \{1, 2, \ldots, T\}$.

Σε ένα στιγμιότυπο ενός Προβλήματος Πολλαπλών Ανεξαρτήτων Στιγμών υπάρχει ένα σύστημα με χρονομεταβλητές παραμέτρους $X_{t,i} \in A_i$ και ορίζεται τυπικά από τα εξής στοιχεία:

- Το πλήθος των χρονομεταβλητών παραμέτρων του συστήματος, M

- Τα πεδία ορισμού των παραμέτρων, $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_M = A$

- Ένας χρονοανεξάρτητος περιορισμός, $h : A \rightarrow \{false, true\}$

- T συναρτήσεις κοστών καταστάσεων, $c_t : A \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$

Οι παράμετροι της χρονικής στιγμής t ορίζονται ως $X_t = (X_{t,1}, X_{t,2}, \ldots, X_{t,|M|})$ και συνολικά οι παράμετροι του συστήματος ως $X = (X_1, X_2, \ldots, X_T)$. Ζητούμενο είναι να υπολογιστεί το

$$X^* = \underset{\substack{X_t \in A \forall t \\ h(X_t) \forall t}}{\arg\min} \sum_{t=1}^{T} c_t(X_t)$$

Ένα Πρόβλημα Πολλαπλών Ανεξαρτήτων Στιγμών μπορεί να αντιμετωπιστεί ως T Στιγμιαία Προβλήματα τα οποία μπορούν να επιλυθούν ανεξάρτητα. Ωστόσο ενδιαφέρον παρουσιάζει μία γενικότερη κατηγορία προβλημάτων, αυτή των Προβλημάτων Πολλαπλών Εξαρτημένων Στιγμών.

1.1.3 Προβλήματα Πολλαπλών Εξαρτημένων Στιγμών

Ο ορισμός των προβλημάτων αυτής της κατηγορίας είναι ίδιος με αυτόν των Προβλημάτων Πολλαπλών Ανεξαρτήτων Στιγμών με μοναδική διαφορά ότι υπάρχει ένα επιπλέον κόστος μεταβολής για κάθε χρονομεταβλητή παράμετρο και ότι ορίζεται μία αρχική κατάσταση του συστήματος X_0. Το κόστος αυτό έχει φυσικό νόημα, καθώς συχνά η μεταβολή των παραμέτρων ενός συστήματος έχει κόστος. Τυπικά ένα στιγμιότυπο προβλήματος αυτής της κατηγορίας ορίζεται από τα εξής στοιχεία:

- Το πλήθος των χρονομεταβλητών παραμέτρων του συστήματος, M
- Τα πεδία ορισμού των παραμέτρων, $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_M = A$
- Ένας χρονοανεξάρτητος περιορισμός, $h : A \to \{false, true\}$
- T συναρτήσεις κοστών καταστάσεων, $c_t : A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$
- Η αρχική κατάσταση του συστήματος, $X_0 \in A$
- M συναρτήσεις κοστών μεταβολής, $\alpha_i : A_i^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

Το ζητούμενο είναι να ελαχιστοποιηθεί το συνδυαστικό κόστος από τα κόστη καταστάσεων και μεταβολών μέσω του υπολογισμού του

$$X^* = \underset{\substack{X_t \in A \forall t \\ h(X_t) \forall t}}{\arg\min} \sum_{t=1}^{T} \Big(c_t(X_t) + \sum_{i=1}^{M} \alpha_i(X_{t,i}, X_{t-1,i}) \Big)$$

Τώρα θα παρουσιαστεί η εκδοχή του προβλήματος ΕΣΔ ως Πρόβλημα Πολλαπλών Εξαρτημένων Στιγμών, η οποία ονομάζεται πρόβλημα Διατήρησης ΕΣΔ. Το δοθέν γράφημα $G = (V, E)$ είναι σταθερό για όλες τις χρονικές στιγμές, ωστόσο τα κόστη των ακμών του είναι χρονομεταβλητά, με το κόστος της i-οστής ακμής τη χρονική στιγμή t να είναι $w_t(e_i)$. Αρχική κατάσταση θεωρείται ένα γράφημα χωρίς ακμές. Κάθε ακμή έχει ένα κόστος μεταβολής που είναι α'_i όταν επιλέγεται μία χρονική στιγμή ενώ δεν είχε επιλεγεί την προηγούμενη. Τυπικά ένα στιγμιότυπο αυτού του προβλήματος ορίζεται από τα εξής στοιχεία:

- Το πλήθος των χρονομεταβλητών παραμέτρων του συστήματος, M
  Οι παράμετροι είναι τόσες όσες και οι ακμές, δηλαδή $M = |E|$.
- Τα πεδία ορισμού των παραμέτρων, $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_M = A$
  Το $X_{t,i}$ είναι 1 αν η i-οστή ακμή είναι επιλεγμένη τη χρονική στιγμή t, αλλιώς 0, δηλαδή $A = \{0, 1\}^M$.
- Ένας χρονοανεξάρτητος περιορισμός, $h : A \to \{false, true\}$
  Ο περιορισμός είναι ότι το υπογράφημα που ορίζεται από τις επιλεγμένες ακμές πρέπει να είναι συνδετικό δέντρο για το G, δηλαδή $h(X_t) = (G'(X_t) : \Sigma\Delta)$

- T συναρτήσεις κοστών καταστάσεων, $c_t : A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$
  Το κόστος κατάστασης μίας χρονικής στιγμής προκύπτει από το άθροισμα των κοστών των επιλεγμένων ακμών για τη χρονική στιγμή αυτή, δηλαδή $c_t(X_t) = \sum_{i=1}^{M} w_t(e_i) \cdot X_{t,i}$

- Η αρχική κατάσταση του συστήματος, $X_0 \in A$
  Ως αρχική κατάσταση θεωρείται το γράφημα χωρίς ακμές, δηλαδή $X_0 = \{0\}^M$.

- M συναρτήσεις κοστών μεταβολής, $\alpha_i : A_i^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$
  Το κόστος μεταβολής της i-οστής ακμής είναι $\alpha_i(X_{t,i}, X_{t-1,i}) = \alpha_i' \cdot \mathbb{1}(X_{t-1,i} = 0 \wedge X_{t,i} = 1)$

Ζητούμενο είναι να υπολογιστεί το

$$X^* = \underset{\substack{X_t \in A \forall t \\ h(X_t) \forall t}}{\arg\min} \sum_{t=1}^{T} \Big(c_t(X_t) + \sum_{i=1}^{M} \alpha_i(X_{t,i}, X_{t-1,i}) \Big) =$$

$$= \underset{\substack{X_t \in A \forall t \\ h(X_t) \forall t}}{\arg\min} \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{M} \Big(w_t(e_i) \cdot X_{t,i} + \alpha_i' \cdot \mathbb{1}(X_{t-1,i} = 0 \wedge X_{t,i} = 1) \Big)$$

Το facility location πρόβλημα έχει επίσης εκδοχή μορφής Προβλήματος Πολλαπλών Ανεξαρτήτων Στιγμών, όπου το κόστος μεταβολής ορίζεται για τους πελάτες και έχει μοναδιαία συνεισφορά όποτε κάποιος client αλλάζει εγκατάσταση με την οποία είναι συνδεδεμένος, ενώ τα κόστη σύνδεσης μεταβάλλονται με το χρόνο. Αυτή η εκδοχή του προβλήματος ονομάζεται dynamic facility location.

Τα Προβλήματα Πολλαπλών Εξαρτημένων Στιγμών έχουν και online εκδοχή στην οποία η συνάρτηση κόστους κατάστασης της στιγμή t, c_t, δε γίνεται γνωστή πριν προσδιοριστεί το X_{t-1}.

1.2 Σχετική Βιβλιογραφία

Το αντίστοιχο του προβλήματος Διατήρησης ΕΣΔ για τη γενικότερη περίπτωση των μητροειδών, όπου αντί για ακμές που σχηματίζουν συνδετικά δέντρα επιλέγονται στοιχεία από ένα σύνολο γείωσης που σχηματίζουν βάσεις, μελετήθηκε από τους Gupta et al. [7]. Το πρόβλημα αυτό ονομάζεται Multistage Matroid Maintenance (MMM). Ένα σημαντικό βήμα που ακολουθήθηκε είναι ότι το MMM ανάχθηκε σε Multistage Spanning set Maintenance (MSM). Ενώ το MMM είνα πρόβλημα packaging-covering, το MSM είναι covering, συνεπώς τα εργαλία αντιμετώπισής του είναι σημαντικά περισσότερα. Η αναγωγή έγινε με την αντιστοίχηση λύσεων των δύο προβλημάτων διατηρώντας το κόστος. Στη συνέχεια διατυπώθηκε ένας αλγόριθμος τυχαιοποιημένης στρογγυλοποίησης γραμμικού προγράμματος και ένας άπληστος αλγόριθμος πετυχαίνοντας λόγους προσέγγισης $O(\log \frac{r\alpha_{max}}{\alpha_{min}})$ και $O(\log T)$ αντίστοιχα, όπου ως α_{max} ορίζεται η μέγιστη πολλαπλασιαστική σταθερά κόστους μεταβολής στοιχείου και ομοίως ορίζεται το α_{min}. Αποδεικνύεται φράγμα στην προσέγγιση που είναι ίσο με $\Omega(\min(\log r, \log T))$. Επίσης γίνεται ενασχόληση με την online εκδοχή του προβλήματος και διατυπώνεται αλγόριθμος με λόγο προσέγγισης $O(\log \frac{r\alpha_{max}}{\alpha_{min}})$. Τέλος αποδεικνύεται η δυσκολία προσέγγισης προβλημάτων παρόμοιας μορφής με ταιριάσματα, κάτι που οφείλεται στη δομή του αντιστοίχου πολυτόπου. Οι Plevrakis et al. [13] παρουσιάζουν αλγόριθμο που βελτιώνει την προσέγγιση από άποψη κόστους κατάστασης όπου πετυχαίνει σταθερή προσέγγιση.

Οι Eisenstat et al. [5] ασχολήθηκαν με το dynamic facility location και μία εκδοχή του όπου μία εγκατάσταση είτε λειτουργεί για κάθε χρονική στιγμή είτε ποτέ. Και για τις δύο περιπτώσεις παρουσίασαν αλγόριθμο με λόγο προσέγγισης $O(\log(nT))$, όπου $n = |C|$ και για τη δεύτερη εκδοχή έδειξαν ότι δεν υπάρχει αλγόριθμος με λόγο προσέγγισης καλύτερο από $O(\log T)$. Οι An et al. [1] έδωσαν έναν αλγόριθμο σταθερής προσέγγισης για την πρώτη εκδοχή χρησιμοποιώντας μία τεχνική που δε βασίζεται στη συσταδοποίηση και ονομάζεται exponential clocks.

Οι Fotakis et al. [6] μελέτησαν ένα πρόβλημα παρεμφερές με το dynamic facility location, το multiple facility reallocation on the line, όπου οι πελάτες βρίσκονται και μετακινούνται πάνω σε μία γραμμή και το κόστος προκύπτει από τα κόστη σύνδεσης και τα κόστη μετακίνησης των εγκαταστάσεων. Συγκεκριμένα υπάρχει δεδομένο πλήθος εγκαταστάσεων, κάθε μία από τις οποίες μπορεί να χρησιμοποιηθεί και να μετακινηθεί ώστε να εξυπηρετεί καλύτερα τους πελάτες. Για το πρόβλημα αυτό σχεδίασαν βέλτιστο πολυωνυμικό αλγόριθμο.

1.3 Ορισμός του Προβλήματος

Το πρόβλημα που θα μελετηθεί στην εργασία αυτή είναι το πρόβλημα Διατήρησης Ελαχίστου Συνδετικού Δέντρου, όπως αυτό ορίστηκε παραπάνω, για την περίπτωση που τα κόστη μεταβολής για τις ακμές έχουν μοναδιαίους πολλαπλασιαστικούς συντελεστές, δηλαδή $\alpha_i' = 1, \forall i \in \{1, 2, \ldots, M\}$.

Στην περίπτωση αυτή από τα αποτελέσματα των Gupta et al. [7] προκύπτει, όπως αναφέρουν και αυτοί, ότι ο αλγόριθμος LP rounding έχει λόγο προσέγγισης $O(\log r)$ και ο άπληστος $O(\log T)$. Ωστόσο η απόδειξη δυσκολίας προσέγγισης δεν μπορεί να εφαρμοστεί, οπότε είναι δυνατό τα αποτελέσματά τους να μπορούν να βελτιωθούν. Ο σκοπός της εργασίας αυτής είναι να γίνουν βήματα προς αυτήν την κατεύθυνση.

Ένα στιγμιότυπο του προβλήματος Διατήρησης Ελαχίστου Συνδετικού Δέντρου ανάγεται σε ένα ενός προβλήματος που ονομάζεται SSSM. Στο στιγμιότυπο αυτό το γράφημα είναι το ίδιο με αυτό του αρχικού και το πλήθος των χρονικών στιγμών είναι πάλι T, ωστόσο η κάθε ακμή αντιστοιχεί σε ένα σύνολο χρονικών διαστημάτων και το ζητούμενο είναι να επιλεγεί ελάχιστο πλήθος από τέτοια διαστήματα ώστε σε κάθε χρονική στιγμή οι ακμές που έχουν διάστημα που περιέχει τη στιγμή αυτή να σχηματίζουν συνδετικό υπογράφημα. Η αναγωγή αυτή οδηγεί στην απώλεια ενός σταθερού παράγοντα προσέγγισης.

1.4 Δομή της Εργασίας

Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζονται κάποιες θεμελιώδεις έννοιες της θεωρίας γραφημάτων με στόχο να γίνουν κατανοητά κυρίως χαρακτηριστικά των συνδετικών δέντρων και του αλγορίθμου Kruskal που σχετίζεται με αυτά, αλλά και να παρουσιαστούν κάποιοι τρόποι αναπαράστασης γραφημάτων που χρησιμοποιούνται από άλλα κεφάλαια.

Στο Κεφάλαιο 3 παρατίθονται εναλλακτικοί αξιωματικοί ορισμοί των μητροειδών και σχετικά παραδείγματα, μεταξύ των οποίων και τα γραφικά μητροειδή. Στόχος είναι η ανάπτυξη της σχετικής διαίσθησης. Επίσης αναλύεται η έννοια της δυϊκότητας μητροειδών η οποία αποτελεί ιδιαίτερα χρήσιμο εργαλείο και χρησιμοποιείται από τους Gupta et al. [7] για την αντιμετώπιση της online εκδοχής του MSM.

Στο Κεφάλαιο 4 γίνεται μία σύντομη εισαγωγή στους προσεγγιστικούς αλγορίθμους και περιγράφεται η αναγκαιότητά τους, η έννοια του λόγου προσέγγισης και η μέθοδος μοντελοποίησης προβλημάτων συνδυαστικής βελτιστοποίησης ως Ακέραια Προγράμματα και η χαλάρωση αυτών, μέθοδος υψηλής χρησιμότητας.

Στο Κεφάλαιο 5 παρουσιάζεται η δουλειά των Gupta et al. [7] τροποποιημένη ώστε να αναφέρεται κυρίως σε γραφικά μητροειδή, αντί για γενικά μητροειδή, καθώς αυτή η περίπτωση είναι εγγύτερη στο πρόβλημα που πραγματεύεται η εργασία αυτή.

Στο Κεφάλαιο 6 ορίζεται το πρόβλημα που μελετάται στην εργασία και δύο άπληστοι αλγόριθμοι για την επίλυσή του. Περιγράφεται στιγμιότυπο με $T = 4$ και $D = 2$ στο οποίο ο άπληστος αλγόριθμος μπορεί να βρει υποβέλτιστη λύση και στιγμιότυπο με $T = 5$ και $D = 3$ στο οποίο ο άπληστος αλγόριθμος βρίσκει πάντα υποβέλτιστη λύση. Αποδεικνύεται ότι ο άπληστος αλγόριθμος υπολογίζει πάντα βέλτιστη λύση σε στιγμιότυπα με κυκλικό γράφημα και σε στιγμιότυπα με $T \leq 3$. Εκτός από τις παραπάνω σημαντικές αποδείξεις αποδεικνύονται και αρκετές άλλες προτάσεις.

Τέλος, στο Κεφάλαιο 7 περιγράφονται αλγόριθμοι δειγματοληψίας στιγμιοτύπων και υπολογισμού βέλτιστης λύσης και των ορίων κόστους λύσεων από τον άπληστο αλγόριθμο. Γίνεται σύγκριση με απλούστερους αλγορίθμους και αναλύονται ως προς τη χρονική πολυπλοκότητα και δείχνεται έτσι ότι είναι καλύτεροι παραμετρικά. Οι αλγόριθμοι αυτοί έχουν υλοποιηθεί και χρησιμοποιηθεί για την εκτέλεση πειραμάτων.

Κεφάλαιο 2

Εισαγωγή στη θεωρία γραφημάτων

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιαστεί ένα σύνολο ορισμών από τη θεωρία γραφημάτων, καθώς και ένα σύνολο λημμάτων, τα οποία θα χρησιμοποιηθούν σε επόμενα κεφάλαια για να αποδειχθούν πιο σύνθετα Θεωρήματα. Το σχετικό βιβλίο του Wilson [11] χρησιμοποιήθηκε βοηθητικά για τη συγγραφή του Κεφαλαίου αυτού.

2.1 Γραφήματα και υπογραφήματα

Ένα **γράφημα** (graph) G είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος (V, E), όπου $V = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ είναι το μη-κενό πεπερασμένο σύνολο κορυφών (vertex set) και $E = (e_1, e_2, \ldots, e_m)$ το πεπερασμένο πολυσύνολο ακμών (edge multiset) του γραφήματος.

Οι ακμές διακρίνονται σε μη-κατευθυνόμενες και κατευθυνόμενες ως εξής:

- Μία **μη-κατευθυνόμενη ακμή** (undirected edge) είναι ένα μη-διατεταγμένο ζεύγος κορυφών. Έστω μία μη-κατευθυνόμενη ακμή $e = \{u_1, u_2\}$. Οι κορυφές u_1 και u_2 ονομάζονται **άκρα της ακμής** e. Η e συνδέει τις κορυφές u_1 και u_2.

- Μία **κατευθυνόμενη ακμή** (directed edge) είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος κορυφών. Έστω μία κατευθυνόμενη ακμή $e = (u_1, u_2)$. Η κορυφή u_1 ονομάζεται **αρχή της ακμής** e και η κορυφή u_2 ονομάζεται **τέλος της ακμής** e. Οι κορυφές u_1 και u_2 ονομάζονται **άκρα της ακμής** e. Η e συνδέει την κορυφή u_1 με την κορυφή u_2.

Τα γραφήματα διακρίνονται σε μη-κατευθυνόμενα και κατευθυνόμενα, ανάλογα με το είδος των ακμών τους, ως εξής:

- Ένα **μη-κατευθυνόμενο γράφημα** (undirected graph) είναι ένα γράφημα κάθε ακμή του οποίου είναι μη-κατευθυνόμενη.

- Ένα **κατευθυνόμενο γράφημα** (directed graph) είναι ένα γράφημα κάθε ακμή του οποίου είναι κατευθυνόμενη.

Σε ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα, μία κορυφή u ονομάζεται **γείτονας** (neighbour) μίας κορυφής v όταν το γράφημα έχει την ακμή $\{u, v\}$.

Παράλληλες ακμές (parallel edges) ονομάζονται οι ακμές που είναι ίσες μεταξύ τους. Επισημαίνεται ότι για να είναι ίσες δύο κατευθυνόμενες ακμές, έστω $e_1 = (u_{1,1}, u_{1,2})$ και $e_2 = (u_{2,1}, u_{2,2})$, πρέπει να ισχύει ότι $u_{1,1} = u_{2,1}$ και ότι $u_{1,2} = u_{2,2}$.

Ανακύκλωση (loop) ονομάζεται μία ακμή της οποίας τα άκρα ταυτίζονται.

Απλό γράφημα (simple graph) είναι ένα γράφημα που δεν έχει ούτε παράλληλες ακμές ούτε ανακυκλώσεις.

Στο εξής όπου λέγεται γράφημα εννοείται απλό γράφημα, εκτός από όταν δηλώνεται ρητά το αντίθετο.

Ένα γράφημα $G_1 = (V_1, E_1)$ ονομάζεται **υπογράφημα** (subgraph) ενός γραφήματος $G_2 = (V_2, E_2)$ όταν $V_1 \subseteq V_2$ και $E_1 \subseteq E_2$.

Ένα γράφημα $G_1 = (V_1, E_1)$ ονομάζεται **επαγόμενο** (induced) ενός γραφήματος $G_2 = (V_2, E_2)$ (και είναι και υπογράφημα αυτού) όταν $V_1 \subseteq V_2$ και

- $E_1 = \{\{u, v\} \in E_2 | u, v \in V_1\}$ αν το G_2 είναι μη-κατευθυνόμενο.
- $E_1 = \{(u, v) \in E_2 | u, v \in V_1\}$ αν το G_2 είναι κατευθυνόμενο.

Λήμμα 2.1. *Αν $\{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$ είναι μία διαμέριση του συνόλου κορυφών V ενός γραφήματος $G = (V, E)$ και $\{G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2), \ldots, G_k = (V_k, E_k)\}$ είναι το σύνολο των αντιστοίχων επαγόμενων υπογραφημάτων, τότε τα σύνολα $E_1, E_2, \ldots, E_k$ είναι ανά δύο ξένα.*

Απόδειξη. Θα γίνει απόδειξη με εις άτοπον απαγωγή. Έστω E_i και E_j δύο από τα παραπάνω σύνολα ακμών που δεν είναι ξένα μεταξύ τους και έστω e μία από τις ακμές που ανήκει και στα δύο. Έστω u και v τα άκρα της ακμής e. Αφού το $G_i = (V_i, E_i)$ είναι γράφημα και $e \in E_i$ ισχύει ότι $u, v \in V_i$. Ομοίως προκύπτει ότι $u, v \in V_j$. Άρα $\{u, v\} \subseteq V_i \cap V_j \Rightarrow V_i \cap V_j \neq \emptyset$, οπότε τα V_i και V_j δε γίνεται να έχουν προκύψει από διαμέριση του V και συνεπώς προέκυψε άτοπο. □

2.2 Μονοπάτια, κύκλοι και συνεκτικότητα

Σε ένα γράφημα **διαδρομή** (walk) ονομάζεται μία πεπερασμένη ακολουθία ακμών, έστω $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$, όταν υπάρχει ακολουθία κορυφών, έστω $(u_1, u_2, \ldots, u_{k+1})$, ώστε για κάθε $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ να ισχύει ότι:

- $e_i = \{u_i, u_{i+1}\}$, αν το γράφημα είναι μη-κατευθυνόμενο.

- $e_i = (u_i, u_{i+1})$, αν το γράφημα είναι κατευθυνόμενο.

Η ακολουθία $(u_1, u_2, \ldots, u_{k+1})$ ονομάζεται ακολουθία κορυφών από τις οποίες διέρχεται η διαδρομή. Η κορυφή u_1 λέγεται **αρχική κορυφή της διαδρομής** και η u_{k+1} λέγεται **τελική κορυφή της διαδρομής**. **Μήκος της διαδρομής** ονομάζεται το μέγεθος της ακολουθίας των ακμών της (στην προκειμένη περίπτωση είναι k).

Λήμμα 2.2. *Αν ένα υπογράφημα ενός γραφήματος περιέχει μία διαδρομή, τότε η διαδρομή αυτή περιέχεται και στο γράφημα.*

Απόδειξη. Έστω, χωρίς βλάβη της γενικότητας, $G_1 = (V_1, E_1)$ ένα υπογράφημα ενός γραφήματος $G_2 = (V_2, E_2)$ και $W = (e_1, e_2, \ldots, e_k)$ μία διαδρομή στο G_1. Από τον ορισμό της διαδρομής υπάρχει ακολουθία κορυφών $(u_1, u_2, \ldots, u_{k+1})$ στο G_1, ώστε για κάθε $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ να ισχύει ότι:

- $e_i = \{u_i, u_{i+1}\}$, αν το G_1 είναι μη-κατευθυνόμενο.

- $e_i = (u_i, u_{i+1})$, αν το G_1 είναι κατευθυνόμενο.

Αφού το G_1 είναι υπογράφημα του G_2 ισχύει εξ ορισμού ότι $E_1 \subseteq E_2$ και άρα ότι κάθε ακμή $e \in W$ ανήκει και στο E_2, άρα η ακολουθία W είναι μία ακολουθία ακμών του G_2. Επίσης ισχύει εξ ορισμού ότι $V_1 \subseteq V_2$ και άρα η ακολουθία κορυφών $(u_1, u_2, \ldots, u_{k+1})$ είναι ακολουθία κορυφών του G_2 για τις οποίες ισχύει μία από τις ιδιότητες της παραπάνω λίστας. Άρα η W είναι διαδρομή και στο G_2. □

Μονοπάτι (path) είναι μία διαδρομή όταν η ακολουθία των ακμών της δεν περιλαμβάνει καμία ακμή πάνω από μία φορά.

Απλό μονοπάτι (simple path) είναι μία διαδρομή όταν η ακολουθία των κορυφών από τις οποίες διέρχεται δεν περιλαμβάνει καμία κορυφή πάνω από μία φορά.

Λήμμα 2.3. *Έστω u και v δύο κορυφές ενός γραφήματος. Υπάρχει απλό μονοπάτι από τη u στη v αν και μόνο αν υπάρχει διαδρομή από τη u στη v.*

Απόδειξη. Αν υπάρχει απλό μονοπάτι από τη u στη v, τότε υπάρχει και διαδρομή από τη u στη v, αφού κάθε απλό μονοπάτι είναι εξ ορισμού διαδρομή.

Έστω ότι υπάρχει διαδρομή, έστω $W = (e_1, e_2, \ldots, e_k)$, από τη u στη v, με την ακολουθία κορυφών από τις οποίες διέρχεται να είναι η $(u_1, u_2, \ldots, u_{k+1})$, όπου $u_1 = u$ και $u_k = v$. Αν σε αυτήν την ακολουθία κορυφών δεν υπάρχει καμία επανάληψη κορυφής, τότε η διαδρομή είναι απλό μονοπάτι. Σε περίπτωση που υπάρχει επανάληψη κορυφής, η ακόλουθη επαναληπτική διαδικασία κατασκευάζει από τη W ένα απλό μονοπάτι. Έστω η διαδρομή P, που αρχικά είναι $P = W$. Σε κάθε επανάληψη η διαδικασία επιλέγει μία συνεχή υπακολουθία της P και τη διαγράφει, ώστε τελικά η P να γίνει απλό μονοπάτι. Συγκεκριμένα σε μία επανάληψη επιλέγει μία κορυφή, έστω w, που επαναλαμβάνεται στην P και διαγράφει από την P τη συνεχή υπακολουθία από την κορυφή αμέσως μετά την πρώτη εμφάνιση της w μέχρι και την τελευταία εμφάνιση της w. Μετά τη διαγραφή αυτή η w εμφανίζεται ακριβώς μία φορά στην P.

Θα δειχθεί με μαθηματική επαγωγή ότι η P παραμένει πάντα διαδρομή. Πριν τη διαδικασία ήταν ίση με την W, άρα ήταν διαδρομή (επαγωγική βάση). Αν πριν από μία επανάληψη της διαδικασίας η P ήταν διαδρομή (επαγωγική υπόθεση), τότε είναι και μετά από την επανάληψη αυτήν, καθώς κάθε διατεταγμένο ζεύγος διαδοχικών κορυφών στην P μετά τη διαγραφή της συνεχούς υπακολουθίας από την επανάληψη εμφανιζόταν στην P και προηγουμένως (επαγωγικό βήμα).

Επίσης η διαδικασία μπορεί να κάνει το πολύ $|V|$ επαναλήψης, αφού μία κορυφή δε γίνεται να επιλεγεί πάνω από μία φορά. Άρα η διαδικασία θα τερματίσει με την P να είναι διαδρομή χωρίς επαναλήψεις κορυφών, δηλαδή απλό μονοπάτι. □

Κλειστή διαδρομή (closed walk) είναι μία διαδρομή όταν η αρχική και η τελική της κορυφή ταυτίζονται.

Κύκλος (cycle) είναι μία κλειστή διαδρομή όταν η ακολουθία των ακμών της δεν περιλαμβάνει καμία ακμή πάνω από μία φορά.

Απλός κύκλος (simple cycle) είναι μία κλειστή διαδρομή όταν η ακολουθία των κορυφών από τις οποίες διέρχεται δεν περιλαμβάνει καμία κορυφή πάνω από μία φορά, με εξαίρεση την αρχική και την τελική, οι οποίες ταυτίζονται.

Λήμμα 2.4. *Έστω u και v δύο κορυφές ενός μη-κατευθυνόμενου γραφήματος. Αν υπάρχουν δύο διαφορετικά απλά μονοπάτια από τη u στη v, τότε στο γράφημα υπάρχει απλός κύκλος.*

Απόδειξη. Θα δωθεί μία κατασκευαστική απόδειξη. Έστω $P_1 = (e_{1,1}, e_{1,2}, \ldots, e_{1,k_1})$ και $P_2 = (e_{2,1}, e_{2,2}, \ldots, e_{2,k_2})$ τα δύο διαφορετικά απλά μονοπάτια και έστω $(w_{1,1}, w_{1,2}, \ldots, w_{1,k_1+1})$ και $(w_{2,1}, w_{2,2}, \ldots, w_{2,k_2+1})$ οι ακολουθίες κορυφών από τις οποίες αυτά διέρχονται αντίστοιχα. Ισχύει ότι $w_{1,1} = w_{2,1} = u$ και $w_{1,k_1+1} = w_{2,k_2+1} = v$. Ας υποτεθεί χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $k_1 \leq k_2$. Υπάρχει $l \in \{2, 3, \ldots, k_1+1\}$ ώστε $w_{1,l} \neq w_{2,l}$ διαφορετικά είτε $k_1 = k_2$ και τα P_1 και P_2 ταυτίζονται, είτε $k_1 < k_2$ οπότε $w_{2,k_1+1} = w_{1,k_1+1} = v = w_{2,k_2+1}$ δηλαδή το P_2 δεν είναι απλό μονοπάτι. Έστω l' το ελάχιστο τέτοιο l, άρα $w_{1,l'-1} = w_{2,l'-1}$. Έστω l^* ο ελάχιστος αριθμός στο $\{l'+1, l'+2, \ldots, k_1+1\}$ ώστε $w_{1,l^*} \in \{w_{2,l'+1}, w_{2,l'+2}, \ldots, w_{2,k_2+1}\}$. Σίγουρα θα υπάρχει τέτοιο l^* αφού $w_{1,k_1+1} = w_{2,k_2+1}$. Έστω $w_{2,\hat{l}} = w_{1,l^*}$. Επομένως οι ακολουθίες ακμών $P_3 = (e_{1,l'-1}, e_{1,l'}, \ldots, e_{1,l^*-1})$ και $P_4 = (e_{2,l'-1}, e_{2,l'}, \ldots, e_{2,\hat{l}-1})$ είναι απλά μονοπάτια ως συνεχείς υπακολουθίες των P_1 και P_2 αντίστοιχα. Από τους ορισμούς των l', l^* και $\hat{l}$ προκύπτει ότι οι μόνες κοινές κορυφές από τις οποίες διέρχονται τα P_3 και P_4 είναι τα άκρα τους, καθώς οι αρχικές τους κορυφές ταυτίζονται και οι τελικές τους κορυφές ταυτίζονται, οπότε η σύντμηση του P_3 με το αντίστροφο του P_4 αποτελεί απλό κύκλο. □

Λήμμα 2.5. *Για κάθε διατεταγμένο ζεύγος διαφορετικών κορυφών* (u, v) *ενός απλού κύκλου σε ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα υπάρχει διαμέριση του συνόλου των ακμών του απλού κύκλου δύο μη-κενά σύνολα, ώστε οι ακμές καθενός από τα σύνολα αυτά να μπορούν να σχηματίσουν απλό μονοπάτι από τη* u *στη* v.

Απόδειξη. Η απόδειξη που θα δωθεί είναι κατασκευαστική. Έστω $C = (e_1, e_2, \dots, e_k)$ ένας απλός κύκλος ενός μη-κατευθυνόμενου γραφήματος, με τη $(u_1, u_2, \dots, u_k, u_1)$ να είναι η ακολουθία κορυφών από τις οποίες διέρχεται. Έστω u_{i_1} και u_{i_2} δύο από τις κορυφές της ακολουθίας αυτής. Ας υποτεθεί χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $i_1 < i_2$. Από την ακολουθία κορυφών $(u_{i_1}, u_{i_1+1}, \dots, u_{i_2})$ διέρχεται το απλό μονοπάτι $P_1 = (e_{i_1}, e_{i_1+1}, \dots, e_{i_2-1})$. Από την ακολουθία κορυφών $(u_{i_1}, u_{i_1-1}, \dots, u_1, u_k, u_{k-1}, \dots, u_{i_2})$ διέρχεται το απλό μονοπάτι $P_2 = (e_{i_1-1}, e_{i_1-2}, \dots, e_1, e_k, e_{k-1}, \dots, e_{i_2})$. Τα σύνολα ακμών των P_1 και P_2 διαμερίζουν το σύνολο ακμών του C. Επίσης τα P_1 και P_2 αποτελούν απλά μονοπάτια από τη u_{i_1} στη u_{i_2}. □

Λήμμα 2.6. *Αν σε ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα που περιέχει απλό κύκλο υπάρχει διαδρομή από μία κορυφή, έστω* u*, σε μία άλλη, έστω* v*, τότε αν επιλεγεί ένας απλός κύκλος του γραφήματος και αφαιρεθεί οποιαδήποτε ακμή αυτού, τότε συνεχίζει να υπάρχει διαδρομή από τη* u *στη* v.

Απόδειξη. Έστω ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα, έστω G, που περιέχει απλό κύκλο, $C = (e_1, e_2, \dots, e_k)$ ένας απλός κύκλος αυτού με $(u_1, u_2, \dots, u_l, u_1)$ την ακολουθία κορυφών από τις οποίες διέρχεται και u και v δύο κορυφές του G ώστε να υπάρχει διαδρομή, έστω W, από τη u στη v. Χωρίς βλάβη της γενικότητας επιλέγεται και αφαιρείται μία ακμή $e_i \in C$ από το G, όπου $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, η οποία έχει άκρα τις κορυφές u_i και $u_{(i+1)\%(l+1)}$. Αρκεί να δειχθεί ότι στο γράφημα που προέκυψε υπάρχει διαδρομή, έστω W', από τη u στη v. Αν $e_i \notin W$, τότε η $W' = W$ είναι μία ικανοποιητική διαδρομή. Διαφορετικά $e_i \in W$, άρα η e_i εμφανίζεται στην ακολουθία ακμών W τουλάχιστον μία φορά.

Θα περιγραφεί μία κατασκευαστική διαδικασία μετάβασης από τη W σε μία ικανοποιητική W'. Επιλέγεται μία μεγιστική συνεχόμενη υπακολουθία της W που αποτελείται αποκλειστικά από ακμές του C και στην οποία ανήκει η e_i. Η υπακολουθία αυτή αντιστοιχεί σε μία διαδρομή μεταξύ δύο κορυφών του C, έστω u_{i_1} και u_{i_2}. Αν $u_{i_1} = u_{i_2}$, τότε μπορεί να αφαιρεθεί η επιλεγμένη υπακολουθία από τη W και αυτή θα συνεχίσει να αποτελεί διαδρομή από τη u στη v. Διαφορετικά $u_{i_1} \neq u_{i_2}$ και σύμφωνα με το Λήμμα 2.2 οι ακμές του C μπορούν να διαμεριστούν σε δύο σύνολα και από τα σύνολα αυτά να κατασκευαστούν δύο απλά μονοπάτια από τη u_{i_1} στη u_{i_2}. Ακριβώς ένα από τα μονοπάτια αυτά περιέχει την e_i. Συνεπώς το άλλο μονοπάτι μπορεί να αντικαταστήσει την επιλεγμένη υπακολουθία από τη W και αυτή θα συνεχίσει να αποτελεί διαδρομή από τη u στη v.

Μετά από μία αφαίρεση ή αντικατάσταση ενός τμήματος της W όπως περιγράφεται, προκύπτει τουλάχιστον μία λιγότερη εμφάνιση της e_i στη W. Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία αυτή επαναληπτικά τελικά δεν υπάρχει καμία εμφάνιση της e_i και έχει προκύψει μία ικανοποιητική διαδρομή W' από τη u στη v. □

Λήμμα 2.7. *Αν σε ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα που περιέχει απλό κύκλο υπάρχει απλό μονοπάτι από μία κορυφή, έστω u, σε μία άλλη, έστω v, τότε αν επιλεγεί μία ακμή που ανήκει σε απλό κύκλο του γραφήματος και αφαιρεθεί, συνεχίζει να υπάρχει απλό μονοπάτι από τη u στη v.*

Απόδειξη. Αφού αρχικά υπάρχει απλό μονοπάτι από τη u στη v, υπάρχει και διαδρομή από τη u στη v (το ίδιο το μονοπάτι). Άρα σύμφωνα με το Λήμμα 2.6 συνεχίζει να υπάρχει διαδρομή από τη u στη v και μετά την αφαίρεση της ακμής απλού κύκλου. Οπότε σύμφωνα με το Λήμμα 2.3 συνεχίζει να υπάρχει και απλό μονοπάτι από τη u στη v. □

Ένα γράφημα είναι **ακυκλικό** (acyclic) όταν δεν περιέχει κανέναν απλό κύκλο.

Ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα ονομάζεται **συνεκτικό** (connected) όταν για κάθε διατεταγμένο ζεύγος κορυφών του, έστω (u, v), υπάρχει απλό μονοπάτι από τη u στη v.

2.3 Συνεκτικές συνιστώσες σε μη-κατευθυνόμενα γραφήματα

Έστω $G = (V, E)$ ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα. Ορίζεται η διμελής σχέση $\Sigma_G \subseteq V \times V$ ώστε $(u, v) \in \Sigma_G$ αν και μόνο αν υπάρχει απλό μονοπάτι από την κορυφή u στην κορυφή v.

Λήμμα 2.8. *Η Σ_G είναι σχέση ισοδυναμίας.*

Απόδειξη. Η Σ_G είναι σχέση ισοδυναμίας επειδή έχει τις τρεις απαιτούμενες ιδιότητες για να ισχύει αυτό:

- Ανακλαστικότητα ($\forall u \in V, (u, u) \in \Sigma_G$): Υπάρχει απλό μονοπάτι από κάθε κορυφή προς τον εαυτό της, το κενό απλό μονοπάτι με αρχική και τελική την κορυφή αυτή.
- Συμμετρία ($\forall u, v \in V, (u, v) \in \Sigma_G \Rightarrow (v, u) \in \Sigma_G$): Αν υπάρχει απλό μονοπάτι από μία κορυφή, έστω u, σε μία άλλη κορυφή, έστω v, τότε το απλό μονοπάτι που προκύπτει αντιστρέφοντας την ακολουθία των ακμών αυτού του απλού μονοπατιού (οι ακμές είναι μη-κατευθυνόμενες) είναι απλό μονοπάτι από τη v στη u.
- Μεταβατικότητα ($\forall u, v, w \in V, (u, v) \in \Sigma_G \wedge (v, w) \in \Sigma_G \Rightarrow (u, w) \in \Sigma_G$): Αν υπάρχει απλό μονοπάτι από μία κορυφή u σε μία κορυφή v και από τη v σε μία κορυφή w, τότε η σύντμηση αυτών των απλών μονοπατιών είναι διαδρομή από τη u στη w, άρα σύμφωνα με το Λήμμα 2.3 υπάρχει απλό μονοπάτι από τη u στη w.

□

Ως σχέση ισοδυναμίας η Σ_G διαμερίζει το V, δηλαδή το σύνολο κορυφών του G, σε σύνολα - κλάσεις ισοδυναμίας, έστω $\{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$. Έστω $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2), \ldots, G_k = (V_k, E_k)$ τα αντίστοιχα επαγόμενα υπογραφήματα. Κάθε ένα από τα υπογραφήματα αυτά του G αποτελεί μία **συνεκτική συνιστώσα** (connected component) του G.

Λήμμα 2.9. *Σε ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα G υπάρχει απλό μονοπάτι από μία κορυφή σε μία άλλη αν και μόνο αν αυτές οι κορυφές ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα.*

Απόδειξη. Έστω u και v οι δύο κορυφές. Αν η u και η v ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα, τότε $(u, v) \in \Sigma_G$, άρα υπάρχει απλό μονοπάτι από τη u στη v. Αν η u και η v δεν ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα, τότε $(u, v) \notin \Sigma_G$, άρα υπάρχει δεν απλό μονοπάτι από τη u στη v. □

Λήμμα 2.10. *Έστω $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2), \ldots, G_k = (V_k, E_k)$ οι συνεκτικές συνιστώσες ενός μη-κατευθυνόμενου γραφήματος $G = (V, E)$. Τα $E_1, E_2, \ldots, E_k$ αποτελούν διαμέριση του E.*

Απόδειξη. Τα $V_1, V_2, \ldots, V_k$ ως σύνολα κορυφών που ορίζονται από τις κλάσεις ισοδυναμίας αποτελούν διαμέριση του V. Οπότε από το Λήμμα 2.1 προκύπτει ότι οι συνεκτικές συνιστώσες, ως επαγώμενα γραφήματα με τα σύνολα αυτά ως σύνολα κορυφών, έχουν σύνολα ακμών ξένα μεταξύ τους, δηλαδή $\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, k\} \wedge i \neq j, E_i \cap E_j = \emptyset$. Μένει να δειχθεί ότι $E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_k = E$. Έστω ότι η προηγούμενη πρόταση δεν ισχύει και έστω $e = \{u, v\}$ μία ακμή που δεν ανήκει στο σύνολο ακμών καμίας συνεκτικής συνιστώσας. Επειδή η e είναι ακμή του G και κάθε συνεκτική συνιστώσα είναι επαγόμενο υπογράφημα του G, αν οι κορυφές u και v ήταν κορυφές της ίδιας συνεκτικής συνιστώσας, τότε η e θα ήταν ακμή της ίδιας συνεκτικής συνιστώσας. Άρα πρέπει οι u και v να είναι κορυφές διαφορετικών συνεκτικών συνιστωσών. Υπάρχει συνεπώς απλό μονοπάτι $(P = (e))$ από κορυφή μίας συνεκτικής συνιστώσας σε κορυφή μίας άλλης συνεκτικής συνιστώσας. Επομένως, με βάση το Λήμμα 2.9 προέκυψε άτοπο. □

Λήμμα 2.11. *Με την αφαίρεση από ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα μίας ακμής που ανήκει σε απλό κύκλο δεν αλλάζει η διαμέριση των κορυφών του γραφήματος σε σύνολα με βάση τις συνεκτικές συνιστώσες.*

Απόδειξη. Έστω $G = (V, E)$ το αρχικό μη-κατευθυνόμενο γράφημα από το οποίο αφαιρέθηκε η ακμή, έστω e, που ανήκει σε απλό κύκλο και $G' = (V, E \setminus \{e\})$ το γράφημα που προέκυψε από την αφαίρεση της e. Η διαμέριση του V σε σύνολα με βάση τις συνεκτικές συνιστώσες καθορίζεται από τις κλάσεις ισοδυναμίας που προκύπτουν από τις διμελείς σχέσεις Σ_G και $\Sigma_{G'}$. Αρκεί να δειχθεί ότι οι κλάσεις ισοδυναμίας για τις δύο σχέσεις ταυτίζονται, το οποίο θα ισχύει αν $\forall u, v \in V, (u, v) \in \Sigma_G \Leftrightarrow (u, v) \in \Sigma_{G'}$.

Αν για δύο κορυφές $u, v \in V$ ισχύει ότι $(u, v) \in \Sigma_{G'}$ δηλαδή υπάρχει διαδρομή από τη u στη v στο G', τότε επειδή το G' είναι υπογράφημα του G, από το Λήμμα 2.2 προκύπτει ότι η ίδια διαδρομή περιέχεται και στο G, άρα $(u, v) \in \Sigma_G$.

Αν για δύο κορυφές $u, v \in V$ ισχύει ότι $(u, v) \in \Sigma_G$ δηλαδή υπάρχει απλό μονοπάτι από τη u στη v στο G, τότε επειδή το G' προέκυψε από το G με αφαίρεση ακμής που ανήκει σε απλό κύκλο, από το Λήμμα 2.7 προκύπτει ότι υπάρχει απλό μονοπάτι από τη u στη v και στο G', άρα $(u, v) \in \Sigma_{G'}$. □

Λήμμα 2.12. *Ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα είναι συνεκτικό αν και μόνο αν έχει ακριβώς μία συνεκτική συνιστώσα.*

Απόδειξη. Αν ένα γράφημα έχει ακριβώς μία συνεκτική συνιστώσα, τότε όλες οι κορυφές του ανήκουν σε αυτήν, οπότε σύμφωνα με το Λήμμα 2.9 για κάθε ζεύγος κορυφών (u, v) υπάρχει απλό μονοπάτι από τη u στη v και άρα το γράφημα είναι συνεκτικό.

Αν το γράφημα είναι συνεκτικό, έστω ότι έχει πάνω από μία συνεκτικές συνιστώσες. Έστω u και v δύο κορυφές που ανήκουν σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες. Επειδή το γράφημα είναι συνεκτικό υπάρχει διαδρομή από τη u στη v, επομένως σύμφωνα με το Λήμμα 2.9 οι u και v πρέπει να ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα, γεγονός που οδηγεί σε άτοπο. □

Σε ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα, μία ακμή ονομάζεται **γέφυρα** (bridge) όταν η αφαίρεσή της οδηγεί στην αύξηση του πλήθους των συνεκτικών συνιστωσών του γραφήματος.

Ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα ονομάζεται **ελαχιστικά συνεκτικό** (minimally connected) όταν είναι συνεκτικό και δεν έχει καμία ακμή που μπορεί να αφαιρεθεί χωρίς να πάψει το γράφημα να είναι συνεκτικό, δηλαδή σύμφωνα με το Λήμμα 2.12 κάθε ακμή του είναι γέφυρα.

Λήμμα 2.13. *Αν από ένα ελαχιστικά συνεκτικό μη-κατευθυνόμενο γράφημα, έστω $G = (V, E)$, αφαιρεθεί μία ακμή, έστω $e = \{u, v\}$, τότε το γράφημα που προκύπτει, έστω $G' = (V, E \setminus \{e\})$, έχει δύο συνεκτικές συνιστώσες που είναι ελαχιστικά συνεκτικές.*

Απόδειξη. Το G είναι ελαχιστικά συνεκτικό, άρα σύμφωνα με το Λήμμα 2.12 έχει μία συνεκτική συνιστώσα. Επίσης εξ ορισμού κάθε ακμή του είναι γέφυρα, άρα και η e που αφαιρέθηκε, οπότε το G' έχει περισσότερες συνεκτικές συνιστώσες από το G, δηλαδή έχει τουλάχιστον δύο συνεκτικές συνιστώσες.

Αρκεί λοιπόν να δειχθεί ότι το G' έχει το πολύ δύο συνεκτικές συνιστώσες. Αν το G' έχει μόνο από δύο κορυφές, δηλαδή αναγκαστικά τις u και v, τότε δεν μπορεί να έχει πάνω από δύο συνεκτικές συνιστώσες. Διαφορετικά θεωρείται χωρίς βλάβη της γενικότητας κάποια κορυφή $w \notin \{u, v\}$. Αφού το G είναι συνεκτικό υπάρχει απλό μονοπάτι, έστω P, από τη w στη u. Αν η e δεν ανήκει στο P, τότε το P υπάρχει και στο G', οπότε σύμφωνα με το Λήμμα 2.9 η w ανήκει στην ίδια συνεκτική συνιστώσα με τη u στο G'. Αλλιώς, δηλαδή αν η e ανήκει στο P, τότε αφού η u εμφανίζεται στο τέλος του P η v είναι η προτελευταία κορυφή του P. Δεν υπάρχει δεύτερη εμφάνιση της u στο P, αφού το P είναι απλό μονοπάτι. Άρα εξαιρώντας τη u από το P προκύπτει απλό μονοπάτι P' στο G από τη w στη v που δεν περιέχει τη u. Επειδή το P' δεν περιέχει τη u δεν περιέχει ούτε την e, συνεπώς υπάρχει και στο G' και άρα από το Λήμμα 2.9 η w ανήκει στην ίδια συνεκτική συνιστώσα με τη v στο G'. Αφού λοιπόν κάθε κορυφή στο G' ανήκει στην ίδια συνεκτική συνιστώσα με τη u ή τη v, το G' έχει το πολύ δύο συνεκτικές συνιστώσες. □

Λήμμα 2.14. *Αν σε ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα G προστεθεί μία νέα ακμή, έστω $e = \{u, v\}$, τότε δημιουργείται νέος απλός κύκλος αν και μόνο αν η u και η v ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του G.*

Απόδειξη. Αν η u και η v ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του G, τότε σύμφωνα με το Λήμμα 2.9 υπάρχει απλό μονοπάτι, έστω P, από τη u στη v στο G. Προσθέτοντας λοιπόν την e στο τέλος του P προκύπτει απλός κύκλος ο οποίος υπάρχει στο νέο γράφημα αλλά όχι στο G, αφού η e δεν ήταν ακμή του G, πρόκειται δηλαδή για νέο απλό κύκλο.

Αν η u και η v ανήκουν σε διαφορετικές συνιστώσες του G, θα δειχθεί ότι η προσθήκη της e δε δημιουργεί νέο απλό κύκλο. Έστω ότι δημιούργησε νέο απλό κύκλο, έστω C. Αν $e \notin C$, τότε ο C είναι υπογράφημα του G, οπότε πρόκειται για παλιό απλό κύκλο. Πρέπει λοιπόν η e να ανήκει στον C. Αφαιρώντας την e από τον C προκύπτει απλό μονοπάτι από τη u στη v, έστω P, που δεν περιλαμβάνει την e και άρα είναι υπογράφημα του G. Συνεπώς πριν από την προσθήκη της e πρέπει να υπήρχε απλό μονοπάτι από τη u στη v, άρα σύμφωνα με το Λήμμα 2.9 η u και η v πρέπει να άνηκαν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα, οπότε προέκυψε άτοπο. □

2.4 Δέντρα

Δάσος (forest) είναι ένα ακυκλικό μη-κατευθυνόμενο γράφημα.

Δέντρο (tree) είναι ένα συνεκτικό δάσος.

Λήμμα 2.15. *Έστω $G = (V, E)$ ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα. Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες για το G:*

1. *Το G είναι δέντρο.*
2. *Κάθε ζεύγος κορυφών του G συνδέεται με ακριβώς ένα απλό μονοπάτι.*
3. *Το G είναι ελαχιστικά συνεκτικό.*
4. *Το G είναι συνεκτικό και $|E| = |V| - 1$.*
5. *Το G είναι ακυκλικό και $|E| = |V| - 1$.*

6. *Το G είναι μεγιστικά ακυκλικό.*

Απόδειξη. Θα αποδειχθεί η ισοδυναμία των παραπάνω προτάσεων δείχνοντας ότι κάθε μία συνεπάγεται την επόμενή της εκτός από την τελευταία που συνεπάγεται την πρώτη.

- (1) $\Rightarrow$ (2). Χωρίς βλάβη της γενικότητας επιλέγεται το ζεύγος κορυφών (u, v). Το G είναι δέντρο, άρα εξ ορισμού συνεκτικό, άρα εξ ορισμού υπάρχει απλό μονοπάτι από τη u στη v. Το απλό αυτό μονοπάτι είναι το μοναδικό από τη u στη v, καθώς αν υπήρχε και άλλο, τότε σύμφωνα με το Λήμμα 2.4 στο G θα υπήρχε απλός κύκλος και άρα δε θα ήταν δέντρο.

- (2) $\Rightarrow$ (3). Αφού κάθε ζεύγος κορυφών του G συνδέεται με ακριβώς ένα απλό μονοπάτι, το γράφημα είναι συνεκτικό. Αν αφαιρεθεί μία ακμή, το μοναδικό απλό μονοπάτι μεταξύ των άκρων της (η ακμή που αφαιρέθηκε) θα πάψει να υπάρχει και άρα δε θα υπάρχει πλέον απλό μονοπάτι μεταξύ των κορυφών αυτών, άρα σύμφωνα με το Λήμμα 2.9 αυτές θα ανήκουν σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες, δηλαδή το γράφημα θα έχει πάνω από μία συνεκτική συνιστώσα και άρα σύμφωνα με το Λήμμα 2.12 το γράφημα δε θα είναι πλέον συνεκτικό. Άρα το G είναι ελαχιστικά συνεκτικό.

- (3) $\Rightarrow$ (4). Το G ως ελαχιστικά συνεκτικό είναι συνεκτικό. Θα αποδειχθεί ότι ένα ελαχιστικά συνεκτικό μη-κατευθυνόμενο γράφημα έχει $|E| = |V| - 1$ ακμές χρησιμοποιώντας ισχυρή μαθηματική επαγωγή στο πλήθος των κορυφών. Αν ένα γράφημα έχει μόνο μία κορυφή, τότε δεν έχει καμία ακμή και είναι ελαχιστικά συνεκτικό (επαγωγική βάση). Ας υποτεθεί ότι κάθε ελαχιστικά συνεκτικό γράφημα με $k < n$ κορυφές έχει $k - 1$ ακμές (επαγωγική υπόθεση). Έστω ένα ελαχιστικά συνεκτικό γράφημα με $n > 1$ κορυφές. Το γράφημα αυτό έχει τουλάχιστον μία ακμή, γιατί αν δεν είχε καμία ακμή, τότε δε θα υπήρχε κανένα απλό μονοπάτι μεταξύ διαφορετικών κορυφών και σύμφωνα με το Λήμμα 2.9 θα είχε $n > 1$ συνεκτικές συνιστώσες και άρα σύμφωνα με το Λήμμα 2.12 δε θα ήταν συνεκτικό. Αφαιρώντας λοιπόν μία ακμή, από το Λήμμα 2.13 προκύπτει ότι το γράφημα που θα προκύψει θα έχει δύο συνεκτικές συνιστώσες, ελαχιστικά συνεκτικές, έστω G_1 και G_2 με n_1 και n_2 κορυφές αντίστοιχα, όπου $1 \leq n_1, n_2 < n$ και $n_1 + n_2 = n$. Τα G_1 και G_2 ως ελαχιστικά συνεκτικά γραφήματα λόγω της επαγωγικής υπόθεσης έχουν $n_1 - 1$ και $n_2 - 1$ ακμές αντίστοιχα, δηλαδή συνολικά $n_1 - 1 + n_2 - 1 = n - 2$ ακμές. Άρα πριν την αφαίρεση της ακμής το γράφημα με της n κορυφές είχε $n - 2 + 1 = n - 1$ ακμές (επαγωγικό βήμα).

- (4) $\Rightarrow$ (5). Το ότι $|E| = |V| - 1$ ισχύει από την υπόθεση. Έστω ότι το G δεν είναι ακυκλικό, δηλαδή έχει απλό κύκλο. Όσο το G έχει απλό κύκλο επιλέγεται μία ακμή του που ανήκει σε απλό κύκλο και την αφαιρούμε. Σύμφωνα με το Λήμμα 2.11 η αφαίρεση αυτή δεν επηρεάζει τη συνεκτικότητα του γραφήματος, οπότε το γράφημα που προκύπτει τελικά είναι συνεκτικό και ακυκλικό, δηλαδή δέντρο. Έχει δειχθεί ((1) $\Rightarrow$ (4)) ότι ένα δέντρο έχει $|V| - 1$ ακμές, μετά τις αφαιρέσεις ακμών έχουν μείνει λιγότερες. Συνεπώς προέκυψε άτοπο και άρα το G είναι ακυκλικό.

- (5) $\Rightarrow$ (6). Έστω $G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2), \ldots, G_k = (V_k, E_k)$ οι συνεκτικές συνιστώσες του G. Θεωρείται χωρίς βλάβη της γενικότητας μία από τις συνεκτικές συνιστώσες, έστω $G_i = (V_i, E_i)$. Το G_i είναι ακυκλικό, διότι διαφορετικά θα περιείχε απλό κύκλο και σύμφωνα με το Λήμμα 2.3 ο ίδιος απλός κύκλος θα υπήρχε και στο G, που από την υπόθεση όμως είναι ακυκλικό. Άρα το G_i είναι ακυκλικό και συνεκτικό, ως συνεκτική συνιστώσα, δηλαδή δέντρο. Οπότε αφού το G_i είναι δέντρο έχει δειχθεί ((1) $\Rightarrow$ (4)) ότι θα έχει $|E_i| = |V_i| - 1$ ακμές. Σύμφωνα με το Λήμμα 2.10 ισχύει ότι $|E| = \sum_{i=1}^{k} |E_i| = \sum_{i=1}^{k} (|V_i| - 1) = (\sum_{i=1}^{k} |V_i|) - k = |V| - k$. Συνδυάζοντας την παραπάνω σχέση με την υπόθεση προκύπτει ότι $|V| - 1 = |E| = |V| - k \Leftrightarrow k = 1$, δηλαδή το G έχει ακριβώς μία συνεκτική συνιστώσα. Αφού το G έχει μία συνεκτική συνιστώσα, όποια ακμή και αν προστεθεί σε αυτό θα έχει τα άκρα της στην ίδια συνεκτική συνιστώσα, οπότε σύμφωνα με το Λήμμα 2.14 θα δημιουργεί απλό κύκλο, οπότε, αφού από την υπόθεση το G είναι ακυκλικό, έχει δειχθεί ότι είναι μεγιστικά ακυκλικό.

- (6) $\Rightarrow$ (1). Από την υπόθεση ισχύει ότι το G είναι ακυκλικό, οπότε για να δειχθεί ότι είναι δέντρο αρκεί να δειχθεί ότι είναι συνεκτικό. Αφού από την υπόθεση το G είναι μεγιστικά ακυκλικό, δηλαδή όποια ακμή και αν προστεθεί σε αυτό θα δημιουργεί απλό κύκλο, και αφού μία ακμή ως άκρα μπορεί να έχει κάθε ζεύγος διαφορετικών κορυφών που δε συνδέονται ήδη με ακμή, από το Λήμμα 2.14 προκύπτει ότι οι κορυφές του G ανήκουν ανά δύο στην ίδια συνεκτική συνιστώσα. Οπότε το G έχει μία συνεκτική συνιστώσα και σύμφωνα με το Λήμμα 2.12 είναι συνεκτικό.

□

Ένα υπογράφημα $T = (V', E')$ ενός γραφήματος $G = (V, E)$ ονομάζεται **συνδετικό δέντρο** (spanning tree) όταν περιλαμβάνει όλες τις κορυφές του γραφήματος ($V' = V$) και είναι δέντρο.

Λήμμα 2.16. *Ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα είναι συνεκτικό αν και μόνο αν έχει υπογράφημα συνδετικό δέντρο.*

Απόδειξη. Πρώτα θα αποδειχθεί ότι αν ένα γράφημα έχει υπογράφημα συνδετικό δέντρο, τότε είναι συνεκτικό. Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα με συνδετικό δέντρο και $T = (V', E')$ ένα συνδετικό του δέντρο. Για να είναι το G συνεκτικό πρέπει εξ ορισμού για κάθε ζεύγος κορυφών του να υπάρχει διαδρομή με αρχική κορυφή τη μία από αυτές και τελική κορυφή την άλλη. Επιλέγουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, δύο από τις κορυφές του γραφήματος, έστω u και v. Αρκεί να δειχθεί ότι υπάρχει διαδρομή στον G με αρχική κορυφή τη u και τελική κορυφή τη v. Αφού το T είναι συνδετικό δέντρο του G ισχύει εξ ορισμού ότι $V' = V$ και άρα $u, v \in V'$, δηλαδή οι επιλεγμένες κορυφές ανήκουν στο T. Το T ως δέντρο είναι εξ ορισμού συνεκτικό, άρα υπάρχει διαδρομή, έστω W, στο T με αρχική κορυφή την u και τελική κορυφή την v. Επειδή το T είναι υπογράφημα του G σύμφωνα με το Λήμμα 2.1 η W είναι και διαδρομή του G. Συνεπώς υπάρχει διαδρομή στον G από την κορυφή u στην κορυφή v, οπότε αποδείχθηκε το ζητούμενο.

Τώρα θα αποδειχθεί ότι αν ένα γράφημα, έστω $G = (V, E)$, είναι συνεκτικό τότε έχει υπογράφημα συνδετικό δέντρο. Έστω T ένα υπογράφημα του G, αρχικοποιημένο σε $T = G$. Θα περιγραφεί μία κατασκευαστική διαδικασία που με διαδοχικές αφαιρέσεις ακμών από το T το μετατρέπει τελικά σε συνδετικό δέντρο του G αποδεικνύοντας το ζητούμενο. Η διαδικασία αυτή είναι η εξής: Όσο το T περιέχει απλό κύκλο επιλέγεται μία ακμή που ανήκει σε απλό κύκλο του T και αφαιρείται από το T.

Θα αποδειχθεί με μαθηματική επαγωγή ότι το T είναι πάντα συνεκτικό. Αρχικά το T είναι ίσο με το G που είναι συνεκτικό, άρα σύμφωνα με το Λήμμα 2.12 το T έχει αρχικά ακριβώς μία συνεκτική συνιστώσα (επαγωγική βάση). Αν το T έχει ακριβώς μία συνεκτική συνιστώσα πριν από την αφαίρεση ακμής που ανήκει σε απλό κύκλο (επαγωγική υπόθεση), τότε σύμφωνα με το Λήμμα 2.11 θα έχει μία συνεκτική συνιστώσα και μετά (επαγωγικό βήμα). Άρα το T έχει πάντα μία συνεκτική συνιστώσα και άρα με βάση το Λήμμα 2.12 το T είναι πάντα συνεκτικό.

Η διαδικασία μπορεί να κάνει το πολύ $|E|$ αφαιρέσεις ακμών. Επίσης ένα γράφημα χωρίς ακμές δεν έχει απλούς κύκλους. Άρα από τη διαδικασία κάποια στιγμή θα προκύψει T χωρίς απλούς κύκλους και η διαδικασία θα τερματίσει με το T να είναι συνεκτικό (όπως δείξαμε) και ακυκλικό, δηλαδή δέντρο, ενώ επίσης περιέχει όλες τις κορυφές του G, άρα είναι συνδετικό δέντρο. □

2.5 Ελάχιστα Συνδετικά Δέντρα

Έστω ένα μη-κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα $G = (V, E)$ και μία συνάρτηση $W : E \to \mathbb{R}_{>0}$ που αντιστοιχεί κάθε ακμή του G σε ένα θετικό βάρος. Αν $G' = (V, E')$ είναι ένα υπογράφημα του G, τότε ορίζεται το βάρος του G' ως $W(G') = \sum_{e \in E'} W(e)$.

Αφού το G είναι συνεκτικό, σύμφωνα με το Λήμμα 2.16 έχει υπογράφημα συνδετικό δέντρο. Ένα συνδετικό δέντρο του G ονομάζεται **ελάχιστο συνδετικό δέντρο** (minimum spanning tree) όταν δεν υπάρχει συνδετικό δέντρο του G με μικρότερο βάρος.

Τομή (cut) ονομάζεται μία διαμέριση του V σε δύο μη-κενά σύνολα.

Σύνολο τομής (cut set) μίας τομής $\{V_1, V_2\}$ ονομάζεται το σύνολο $\delta(\{V_1, V_2\}) = \{e = \{u, v\} \in E | u \in V_1 \land v \in V_2\}$, δηλαδή το σύνολο των ακμών που τα άκρα τους ανήκουν σε διαφορετικό σύνολο της τομής.

Μία ακμή, έστω e, λέγεται ότι **διασχίζει** (traverses) μία τομή, έστω $\{V_1, V_2\}$, όταν ανήκει στο σύνολο τομής της τομής, δηλαδή όταν $e \in \delta(\{V_1, V_2\})$.

Ένα σύνολο ακμών, έστω E', λέγεται ότι διασχίζει μία τομή, έστω $\{V_1, V_2\}$, όταν τουλάχιστον μία από τις ακμές του συνόλου αυτού διασχίζει την τομή, δηλαδή όταν $E' \cap \delta(\{V_1, V_2\}) \neq \emptyset$.

Έστω $\Delta = (V, E_\Delta)$ ένα υπογράφημα του G που είναι δάσος. Μία ακμή, έστω e, του G λέγεται ότι είναι **ακμή επαύξησης** (augmentation edge) όταν υπάρχει τομή, έστω $\{V_1, V_2\}$ που διασχίζεται από την e και όχι από το E_Δ και η e έχει το ελάχιστο βάρος μεταξύ των ακμών που τη διασχίζουν.

Λήμμα 2.17. *Έστω $G' = (V, E')$ ένα υπογράφημα του G και μία τομή $\{V_1, V_2\}$ του G. Το E' διασχίζει την τομή αυτή αν και μόνο αν υπάρχουν κορυφές $u \in V_1$ και $v \in V_2$ που να ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του G'.*

Απόδειξη. Αν το E' διασχίζει την τομή $\{V_1, V_2\}$, δηλαδή υπάρχει ακμή $e = \{u, v\} \in E'$ με $u \in V_1$ και $v \in V_2$. Αφού η u και η v συνδέονται με την ακμή e, υπάρχει απλό μονοπάτι $(P = (e))$ στο G' από τη u στη v, άρα σύμφωνα με το Λήμμα 2.9 η u και η v ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα.

Αν δύο κορυφές $u \in V_1$ και $u \in V_2$ ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του G', τότε σύμφωνα με το Λήμμα 2.9 υπάρχει απλό μονοπάτι, έστω $P = (e_1, e_2, \ldots, e_k)$, από τη u στη v στο G'. Θα δειχθεί ότι κάποια ακμή του P πρέπει να διασχίζει την τομή. Έστω ότι καμία ακμή του P δε διασχίζει την τομή. Θα δειχθεί ότι όλες οι κορυφές από τις οποίες διέρχεται το P ανήκουν στο V_1 χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή. Έστω $(u_1, u_2, \ldots, u_{k+1})$ η ακολουθία κορυφών από τις οποίες διέρχεται το P, όπου $u_1 = u$ και $u_{k+1} = v$. Η $u_1 = u$ ανήκει στο V_1 (επαγωγική βάση). Ας υποτεθεί ότι η u_i ανήκει στο V_1 με $i \leq k$ (επαγωγική υπόθεση). Η ακμή $e_i = \{u_i, u_{i+1}\}$ λόγω της υπόθεσης δεν πρέπει να διασχίζει την τομή, οπότε αφού $u_i \in V_1$ πρέπει και $u_{i+1} \in V_1$ (επαγωγικό βήμα). Υποθέτοντας λοιπόν ότι καμία ακμή του P δε διασχίζει την τομή, αποδείχθηκε ότι κάθε κορυφή από την οποία διέρχεται ανήκει στο V_1. Όμως η τελευταία κορυφή από την οποία διέρχεται είναι η v και ισχύει ότι $v \in V_2$, οπότε προέκυψε άτοπο. Άρα κάποια ακμή του P, άρα και του G', διασχίζει την τομή. □

Λήμμα 2.18. *Έστω $G' = (V, E')$ ένα υπογράφημα του G. Μία ακμή, έστω $e = \{u, v\}$, διασχίζει κάποια τομή που δε διασχίζει το E' αν και μόνο αν τα άκρα της ανήκουν σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του G'.*

Απόδειξη. Έστω ότι τα άκρα της e ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του G'. Έστω μία τομή $\{V_1, V_2\}$. Εξ ορισμού η e διασχίζει την τομή αν $u \in V_1$ και $v \in V_2$ ή το αντίστροφο. Επειδή η u και η v ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του G', αν ισχύει η προηγούμενη πρόταση, τότε σύμφωνα με το Λήμμα 2.17 και το E' διασχίζει την τομή.

Έστω ότι τα άκρα της e ανήκουν σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του G'. Έστω V_1 το σύνολο κορυφών της συνεκτικής συνιστώσας του G' που ανήκει η u και $V_2 = V \setminus V_1$ το σύνολο των υπόλοιπων κορυφών. Από την υπόθεση προκύπτει ότι $u \in V_1$ και $v \in V_2$. Το $\{V_1, V_2\}$ αποτελεί τομή. Σύμφωνα με το Λήμμα 2.17 η e διασχίζει την τομή αυτή, ενώ το E' όχι. □

Λήμμα 2.19. *Έστω ένα δάσος $\Delta = (V, E_\Delta)$ που είναι υπογράφημα ενός ελάχιστου συνδετικού δέντρου του G, έστω $T = (V, E_T)$, και μία ακμή επαύξησης του Δ, έστω $e = \{u, v\}$. Αν η e προστεθεί στο Δ και προκύψει το $\Delta' = (V, E_{\Delta'})$, τότε το Δ' είναι δάσος και υπογράφημα ενός ελάχιστου συνδετικού δέντρου του G.*

Απόδειξη. Η $e = \{u, v\}$ από την υπόθεση είναι ακμή επαύξησης του Δ, άρα εξ ορισμού υπάρχει τομή $\{V_1, V_2\}$ ώστε η e να τη διασχίζει, δηλαδή $u \in V_1$ και $v \in V_2$, αλλά το E_Δ να μην τη διασχίζει. Από το Λήμμα 2.17 προκύπτει ότι η u και η v ανήκουν σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του Δ, συνεπώς η προσθήκη της e στο Δ σύμφωνα με το Λήμμα 2.14 δε δημιουργεί νέο απλό κύκλο. Επομένως αφού το Δ είναι ακυκλικό και το Δ' θα είναι ακυκλικό, δηλαδή εξ ορισμού δάσος.

Ας υποτεθεί ότι το Δ' δεν είναι υπογράφημα ενός ελάχιστου συνδετικού δέντρου του G. Η e δεν μπορεί να ανήκει στο T, διότι αν άνηκε το Δ' θα ήταν υπογράφημα του T. Το T είναι δέντρο, άρα συνεκτικό, άρα υπάρχει απλό μονοπάτι, έστω P, στο T από τη u στη v. Η u και η v συνδέονται με απλό μονοπάτι στο $G_P = (V, E_P)$, όπου $E_P = \{e \in P\}$, άρα σύμφωνα με το Λήμμα 2.9 ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του G_P. Οπότε σύμφωνα με το Λήμμα 2.17 το E_P διασχίζει την τομή $\{V_1, V_2\}$, άρα και κάποια ακμή του P, έστω e'. Η e' δεν ανήκει στο Δ επειδή το E_Δ δε διασχίζει την τομή. Άρα αφού η e είναι ακμή επαύξησης για το Δ έχοντας το ελάχιστο βάρος συγκριτικά με όλες τις ακμές που δεν ανήκουν στο Δ και διασχίζουν την τομή, προκύπτει ότι $W(e) \leq W(e')$.

Προσθέτοντας την e στο T σχηματίζεται απλός κύκλος στον οποίο ανήκει η e' σύμφωνα με τις παραπάνω υποθέσεις, ενώ το γράφημα που προέκυψε παραμένει συνεκτικό, δηλαδή σύμφωνα με το Λήμμα 2.12 έχει ακριβώς μία συνεκτική συνιστώσα. Αφαιρώντας την e' από το γράφημα αυτό, αφού η e' άνηκε σε απλό κύκλο του γραφήματος σύμφωνα με το Λήμμα 2.11 το γράφημα συνεχίζει να έχει ακριβώς μία συνεκτική συνιστώσα, άρα σύμφωνα με το Λήμμα 2.12 είναι συνεκτικό. Έστω $T' = (V, E_{T'})$, όπου $E_{T'} = (E_T \cup \{e\}) \setminus \{e'\}$, το νέο γράφημα που προέκυψε. Αφού το T είναι δέντρο σύμφωνα με το Λήμμα 2.15 έχει $|V| - 1$ ακμές. Αφού το T' είναι συνεκτικό και έχει και αυτό τόσες ακμές, σύμφωνα με το Λήμμα 2.15 είναι δέντρο. Μάλιστα το βάρος του είναι $W(T') = W(T) + W(e) - W(e')$. Όμως $W(e) \leq W(e')$, άρα το T' έχει το πολύ όσο βάρος και το T, που είναι ελάχιστο συνδετικό δέντρο, άρα είναι και αυτό ελάχιστ συνδετικό δέντρο. Όμως το G' είναι υπογράφημα του T', οπότε η υπόθεση ότι η προσθήκη της ακμής επαύξησης στο Δ οδήγησε σε γράφημα που δεν είναι υπογράφημα ελάχιστου συνδετικού δέντρου και συνεπώς κατέληξε σε άτοπο. □

Λήμμα 2.20. *Έστω ένα δάσος $\Delta = (V, E_\Delta)$ που δεν είναι συνεκτικό. Υπάρχει ακμή επαύξησης για το Δ.*

Απόδειξη. Ας υποτεθεί ότι δεν υπάρχει ακμή επαύξησης για το Δ. Το Δ δεν είναι συνεκτικό, οπότε σύμφωνα με το Λήμμα 2.12 έχει τουλάχιστον δύο συνεκτικές συνιστώσες. Επιλέγεται μία συνεκτική συνιστώσα του Δ και ορίζεται το V_1 ως το σύνολο κορυφών της. Ορίζεται το V_2 ως $V \setminus V_1$. Η $\{V_1, V_2\}$ είναι τομή. Από τον ορισμό των V_1 και V_2 και το Λήμμα 2.17 προκύπτει ότι το E_Δ δε διασχίζει την τομή. Για να μην υπάρχει ακμή επαύξησης για το Δ πρέπει καμία ακμή να μη διασχίζει την τομή. Όμως το G είναι συνεκτικό, άρα σύμφωνα με το Λήμμα 2.16 έχει υπογράφημα συνδετικό δέντρο, έστω $T = (V, E_T)$. Το T είναι δέντρο, άρα συνεκτικό, οπότε σύμφωνα με το Λήμμα 2.12 έχει ακριβώς μία συνεκτική συνιστώσα. Θεωρώντας λοιπόν οποιεσδήποτε κορυφές $u \in V_1$ και $v \in V_2$, αυτές ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του T, οπότε σύμφωνα με το Λήμμα 2.17 το E_T διασχίζει την τομή, άρα και κάποια ακμή διασχίζει την τομή. Υποθέτοντας λοιπόν ότι δεν υπάρχει ακμή επαύξησης για το Δ προέκυψε άτοπο. □

2.6 Αλγόριθμος Kruskal - Υπολογισμός ελάχιστου συνδετικού δέντρου

Έστω ένα μη-κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα $G = (V, E)$ και μία συνάρτηση $W : E \to \mathbb{R}_{>0}$ που αντιστοιχεί κάθε ακμή του G σε ένα θετικό βάρος.

Ο αλγόριθμος Kruskal υπολογίζει ένα ελάχιστο συνδετικό δέντρο, έστω $T = (V, E_T)$, του G ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα:

1. Θεώρησε δάσος $\Delta = (V, E_\Delta)$ με $E_\Delta = \emptyset$ αρχικά.
2. Ταξινόμησε τις ακμές του E σε αύξουσα σειρά βάρους κατασκευάζοντας την ακολουθία $S = (e_1, e_2, \ldots, e_m)$.
3. Επανάλαβε $|V| - 1$ φορές: Βρες την πρώτη ακμή του S που έχει άκρα σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του Δ, έστω e, πρόσθεσε την e στο E_Δ και αφαίρεσε την e και τις προηγούμενες ακμές από το S.
4. Επέστρεψε το $T = \Delta$ ως ελάχιστο συνδετικό δέντρο.

Λήμμα 2.21. *Καθόλη τη διάρκεια του αλγορίθμου Kruskal το Δ είναι δάσος και αποτελεί υπογράφημα κάποιου ελάχιστου συνδετικού δέντρου του G.*

Απόδειξη. Για την απόδειξη θα χρησιμοποιηθεί μαθηματική επαγωγή.

Επαγωγική βάση: Αρχικά το Δ δεν έχει καμία ακμή, οπότε είναι ακυκλικό, άρα και δάσος. Επίσης το G είναι συνεκτικό, άρα σύμφωνα με το Λήμμα 2.16 έχει συνδετικό δέντρο, άρα και ελάχιστο συνδετικό δέντρο. Αφού το Δ δεν έχει καμία ακμή είναι υπογράφημα κάθε ελάχιστου συνδετικού δέντρου του G.

Επαγωγική υπόθεση: Ας υποτεθεί ότι μετά από $k \in \{0, 1, \ldots, |V| - 2\}$ βήματα του αλγορίθμου Kruskal το Δ είναι δάσος και υπογράφημα κάποιου ελάχιστου συνδετικού δέντρου του G.

Επαγωγικό βήμα: Το Δ πριν από το βήμα $k \in \{1, 2, \ldots, |V| - 1\}$ έχει $k - 1 < |V| - 1$ ακμές, άρα σύμφωνα με το Λήμμα 2.15 δεν είναι συνεκτικό, οπότε σύμφωνα με το Λήμμα 2.20 υπάρχει ακμή επαύξησης του Δ. Από το S έχουν αφαιρεθεί ακμές που ανήκουν στο Δ ή τα άκρα τους ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του Δ. Σύμφωνα με το Λήμμα 2.18 καμία από τις ακμές που έχουν αφαιρεθεί και από αυτές πριν από την επιλεγμένη ακμή, έστω e, για το βήμα k δε διασχίζουν τομή που δε διασχίζει το E_Δ, διότι τα άκρα τους ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του Δ. Πάλι σύμφωνα με το Λήμμα 2.18 η e είναι η πρώτη που διασχίζει κάποια τομή που δε διασχίζει το E_Δ επειδή τα άκρα της ανήκουν σε διαφορετικές συνιστώσες του Δ. Επίσης η e έχει ελάχιστο βάρος μεταξύ των ακμών με αυτήν την ιδιότητα, λόγω του ορισμού του S και του τρόπου επιλογής της, άρα είναι ακμή επαύξησης του Δ. Σίγουρα υπάρχει ακμή προς επιλογή, αφού όπως δείχθηκε υπάρχει ακμή επαύξησης του Δ. Συνεπώς με την επιλογή της e και την προσθήκη της στο E_Δ, σύμφων με το Λήμμα 2.19 το νέο Δ παραμένει δάσος και υπογράφημα ενός ελάχιστου συνδετικού δέντρου του G. □

Λήμμα 2.22. *Το γράφημα T στο οποίο καταλήγει ο αλγόριθμος Kruskal είναι ελάχιστο συνδετικό δέντρου του G.*

Απόδειξη. Το T έχει $|V| - 1$ ακμές και σύμφωνα με το Λήμμα 2.21 είναι υπογράφημα ενός ελάχιστου συνδετικού δέντρου του G. Το συνδετικό αυτό δέντρο σύμφωνα με το Λήμμα 2.15 έχει $|V| - 1$ ακμές, δηλαδή όσες και το T, άρα πρέπει να ταυτίζονται και συνεπώς το T είναι ελάχιστο συνδετικό δέντρο. □

Ο αλγόριθμος Kruskal αρχικά ταξινομεί $|E|$ ακμές σε χρόνο $O(|E| \log |E|)$. Κάνει το πολύ $|E|$ ελέγχους για το αν τα άκρα κάποιας ακμής ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του G, καθένας από τους οποίους ελέγχους μπορεί να γίνεται σε $O(\alpha(|E|))$ χρησιμοποιώντας τη δομή δεδομένων union-find. Κάνει τέλος $|V| - 1$ προσθήκες ακμών συγχωνεύοντας τις συνεκτικές συνιστώσες των άκρων τους, κάθε μία από τις οποίες συγχωνεύσεις μπορεί να γίνει σε $O(\alpha(|E|))$ με την προηγούμενη δομή δεδομένων. Άρα ο αλγόριθμος Kruskal έχει χρονική πολυπλοκότητα $O(|E| \log |E|)$.

2.7 Αναπαράσταση μη-κατευθυνόμενων γραφημάτων

Έστω ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$, όπου $V = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ και $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$.

Κατά την αναπαράσταση του G με **λίστα γειτνίασης** (adjacency list) οι κορυφές του G αριθμούνται και σε κάθε μία από αυτές αντιστοιχίζεται μία λίστα που περιέχει τις κορυφές που συνδέονται με αυτήν με ακμή. Αυτός ο τρόπος αναπαράστασης επιτρέπει να διατρέχονται οι γείτονες μίας κορυφής σε χρόνο ανάλογο του πλήθους τους.

Ο **πίνακας πρόσπτωσης** (incidence matrix) είναι ένας $n \times m$ πίνακας A, όπου $A[i, j] = \mathbb{1}(u_i \in e_j)$.

Κεφάλαιο 3

Εισαγωγή στη θεωρία μητροειδών

Στο κεφάλαιο αυτή πρώτα παρουσιάζονται κάποιοι ισοδύναμοι αξιωματικοί ορισμοί των μητροειδών καθώς και ορισμένες σχετικές βασικές έννοιες. Στη συνέχεια παρατίθεται ένα σύνολο παραδειγμάτων μητροειδών στα οποία θα γίνει αναφορά σε επόμενα κεφάλαια. Τέλος ορίζονται επιπλέον σημαντικές έννοιες που αφορούν τα μητροειδή, η δυϊκότητα και η τομή μητροειδών, και αποδεικνύονται Λήμματα σχετικά με αυτές. Η έννοια των μητροειδών εισήχθει από τον Whitney [9] με στόχο την περιγραφή κοινών ιδιοτήτων που σχετίζονται με την ανεξαρτησία σε γράφους και μήτρες. Για τη ροή της παρουσίασης του κεφαλαίου και την επιλογή στοιχείων προς παρουσίαση χρησιμοποιήθηκε το βιβλίο του Oxley [8].

3.1 Βασικές έννοιες και ορισμοί

Ένα χαρακτηριστικό των μητροειδών είναι ότι υπάρχουν αρκετοί ισοδύναμοι αξιωματικοί ορισμοί τους.

3.1.1 Ανεξάρτητα σύνολα

Ένα **μητροειδές** (matroid) M είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος $(E, \mathcal{I})$, όπου το E είναι ένα πεπερασμένο σύνολο στοιχείων και το $\mathcal{I}$ είναι ένα σύνολο υποσυνόλων του E ($\mathcal{I} \subseteq 2^E$) που ικανοποιεί τις ακόλουθες τρεις ιδιότητες:

- (I1) $\emptyset \in \mathcal{I}$
- (I2) $I \in \mathcal{I} \wedge I' \subseteq I \Rightarrow I' \in \mathcal{I}$
- (I3) $I_1, I_2 \in \mathcal{I} \wedge |I_1| < |I_2| \Rightarrow \exists e \in I_2 \setminus I_1 : I_1 \cup \{e\} \in \mathcal{I}$

Το E μπορεί να συμβολιστεί ως $E(M)$ και ονομάζεται **σύνολο γείωσης** (ground set) του M. Το $\mathcal{I}$ μπορεί να συμβολιστεί ως $\mathcal{I}(M)$ και κάθε στοιχείο του ονομάζεται **ανεξάρτητο σύνολο** (independent set). **Εξαρτημένο σύνολο** (dependent set) ονομάζεται ένα υποσύνολο του E που δεν ανήκει στο $\mathcal{I}$.

3.1.2 Κυκλώματα

Ένα ελαχιστικά εξαρτημένο σύνολο (δεν περιέχει κάποιο μικρότερο εξαρτημένο σύνολο) ονομάζεται **κύκλωμα** (circuit). Το σύνολο των κυκλωμάτων του μητροειδούς M συμβολίζεται ως $\mathcal{C}$ ή $\mathcal{C}(M)$.

Λήμμα 3.1. *Έστω ένα μητροειδές $M = (E, \mathcal{I})$. Ένα σύνολο $I \subseteq E$ είναι ανεξάρτητο σύνολο ($I \in \mathcal{I}(M)$) αν και μόνο αν δεν περιέχει κανένα κύκλωμα ($\nexists C \in \mathcal{C}(M) : C \subseteq I$).*

Απόδειξη. Έστω ότι το I είναι ανεξάρτητο σύνολο. Ας υποτεθεί ότι το I περιέχει κάποιο κύκλωμα C. Αφού το $I \in \mathcal{I}$ περιέχει το C, δηλαδή $C \subseteq I$, από το (I2) προκύπτει ότι $C \in \mathcal{I}$, οπότε το C είναι ανεξάρτητο σύνολο, γεγονός άτοπο λόγω του ότι το C ως κύκλωμα είναι εξ ορισμού εξαρτημένο σύνολο. Συνεπώς κάθε ανεξάρτητο σύνολο δεν περιέχει κανένα κύκλωμα.

Έστω ότι το I είναι εξαρτημένο σύνολο. Έστω D το σύνολο των υποσυνόλων του I που είναι εξαρτημένα σύνολα, δηλαδή $D = \{X \subseteq I | X \notin \mathcal{I}\}$. Το D δεν είναι κενό αφού $I \in D$ καθώς $I \subseteq I$ και $I \notin \mathcal{I}$ από την υπόθεση. Έστω Y ένα σύνολο που είναι στοιχείο του D και έχει το ελάχιστο δυνατό μέγεθος. Αφού $Y \in D$ ισχύει από τον ορισμό του D ότι $Y \subseteq I$ και $Y \notin \mathcal{I}$ (το Y είναι εξαρτημένο σύνολο). Έστω $Y' \subsetneq Y$. Ισχύει ότι $Y' \subseteq I$. Το Y' δεν μπορεί να ανήκει στο D, αφού έχει μικρότερο μέγεθος από το Y και το Y έχει εξ ορισμού ελάχιστο μέγεθος μεταξύ των στοιχείων του D. Άρα $Y' \in \mathcal{I}$, οπότε κάθε μικρότερο σύνολο που περιέχεται στο Y είναι ανεξάρτητο σύνολο, άρα το $Y \notin \mathcal{I}$ είναι εξ ορισμού κύκλωμα. Συνεπώς κάθε εξαρτημένο σύνολο περιέχει τουλάχιστον ένα κύκλωμα. □

Από τον ορισμό του $\mathcal{C}$ που δόθηκε προηγουμένως φάνηκε ότι αυτό μπορεί να προσδιοριστεί από το E και το $\mathcal{I}$. Από το παραπάνω Λήμμα φάνηκε ότι ομοίως το $\mathcal{I}$ μπορεί να προσδιοριστεί από το E και το $\mathcal{C}$.

Τώρα θα αποδειχθούν ορισμένες ιδιότητες που χαρακτηρίζουν το σύνολο των κυκλωμάτων $\mathcal{C}$ ενός μητροειδούς.

Λήμμα 3.2. *Έστω ένα μητροειδές $M = (E, \mathcal{I})$. Το κενό σύνολο δεν είναι κύκλωμα, δηλαδή $\emptyset \notin \mathcal{C}$.*

Απόδειξη. Αν το κενό σύνολο ήταν κύκλωμα, τότε εξ ορισμού δε θα ήταν ανεξάρτητο σύνολο, δηλαδή $\emptyset \notin \mathcal{I}$, κάτι που λόγω της ιδιότητας ($I1$) των μητροειδών είναι άτοπο. □

Λήμμα 3.3. *Έστω ένα μητροειδές $M = (E, \mathcal{I})$. Ισχύει ότι $C_1, C_2 \in \mathcal{C} \wedge C_1 \subseteq C_2 \Rightarrow C_1 = C_2$.*

Απόδειξη. Ας υποτεθεί ότι $C_1 \neq C_2$. Αφού $C_1 \subseteq C_2$ θα ισχύει ότι $C_1 \subsetneq C_2 \Rightarrow C_2 \setminus C_1 \neq \emptyset$. Έστω ένα στοιχείο e που ανήκει στο C_2 και όχι στο C_1, οπότε $C_1 \subseteq C_2 \setminus \{e\}$. Όμως το C_2 είναι κύκλωμα και ως κύκλωμα είναι εξ ορισμού ελαχιστικά εξαρτημένο σύνολο, επομένως το $C_2 \setminus \{e\}$ είναι ανεξάρτητο σύνολο. Οπότε αφού $C_1 \subseteq C_2 \setminus \{e\} \in \mathcal{I}$, λόγω του (I2) το C_1

είναι ανεξάρτητο σύνολο. Αυτό όμως είναι άτοπο αφού το C_1 είναι κύκλωμα. Άρα η υπόθεση είναι λανθασμένη και ισχύει ότι $C_1 = C_2$. □

Λήμμα 3.4. *Έστω ένα μητροειδές* $M = (E, \mathcal{I})$. *Ισχύει ότι* $C_1, C_2 \in \mathcal{C} \wedge C_1 \neq C_2 \Rightarrow \forall e \in C_1 \cap C_2 : \exists C_3 \in \mathcal{C} : C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{e\}$.

Απόδειξη. Ας υποτεθεί ότι η πρόταση δεν ισχύει, δηλαδή $\exists e \in C_1 \cap C_2 : \nexists C_3 \in \mathcal{C} :\subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{e\}$. Αφού $C_1 \neq C_2$ σύμφωνα με το Λήμμα 3.3 ισχύει ότι $C_1 \nsubseteq C_2 \Rightarrow C_2 \setminus C_1 \neq \emptyset$. Έστω f ένα στοιχείο του $C_2 \setminus C_1$. Αφού το C_2 είναι κύκλωμα και ως εκ τούτου ελαχιστικά εξαρτημένο σύνολο, το $C_2 \setminus \{f\}$ είναι ανεξάρτητο σύνολο. Έστω $I \subseteq C_1 \cup C_2$ ένα ανεξάρτητο σύνολο με μέγιστο μέγεθος ώστε $C_2 \setminus \{f\} \subseteq I$ (σίγουρα υπάρχει τέτοιο σύνολο αφού το $C_2 \setminus \{f\}$ είναι ανεξάρτητο σύνολο). Το I είναι ανεξάρτητο σύνολο, οπότε σύμφωνα με το Λήμμα 3.1 δεν μπορεί να περιέχει το κύκλωμα C_2, άρα δεν περιέχει το f. Για τον ίδιο λόγο δεν μπορεί να περιέχει το κύκλωμα C_1, άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του C_1 που δεν ανήκει στο I. Έστω g ένα τέτοιο στοιχείο. Αφού $g \in C_1$ και $f \in C_2 \setminus C_1 \Rightarrow f \notin C_1$ ισχύει ότι $f \neq g$. Επομένως:

$$I \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{f, g\} \Rightarrow$$

$$|I| \leq |(C_1 \cup C_2) \setminus \{f, g\}| = |C_1 \cup C_2| - 2 < |(C_1 \cup C_2) \setminus \{e\}|$$

Αφού έχει υποτεθεί ότι το $(C_1 \cup C_2) \setminus \{e\}$ δεν περιέχει κανένα κύκλωμα και άρα σύμφωνα με το Λήμμα 3.1 είναι ανεξάρτητο σύνολο, και αφού το I είναι εξ ορισμού ανεξάρτητο σύνολο με μικρότερο μέγεθος από το $(C_1 \cup C_2) \setminus \{e\}$, σύμφωνα με το (I2) υπάρχει στοιχείο του $(C_1 \cup C_2) \setminus \{e\} \subseteq C_1 \cup C_2$ που δεν ανήκει στο I αλλά μπορεί να προστεθεί σε αυτό χωρίς να το κάνει εξαρτημένο σύνολο. Αυτό όμως είναι άτοπο λόγω του ότι το I έχει εξ ορισμού μέγιστο μέγεθος. □

Σύμφωνα με τα Λήμματα 3.2, 3.3 και 3.4 το σύνολο $\mathcal{C}$ των κυκλωμάτων ενός μητροειδούς ικανοποιεί τις ακόλουθες τρεις ιδιότητες:

- (C1) $\emptyset \notin \mathcal{C}$
- (C2) $C_1, C_2 \in \mathcal{C} \wedge C_1 \subseteq C_2 \Rightarrow C_1 = C_2$
- (C3) $C_1, C_2 \in \mathcal{C} \wedge C_1 \neq C_2 \Rightarrow \forall e \in C_1 \cap C_2 : \exists C_3 \in \mathcal{C} : C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{e\}$

Αποδεικνύεται ότι αν το E είναι ένα σύνολο στοιχείων και το σύνολο $\mathcal{C} \in 2^E$ ικανοποιεί τις ιδιότητες (C1)-(C3), τότε το $M = (E, \mathcal{I})$, όπου $\mathcal{I} = \{I \in 2^E | \nexists C \in \mathcal{C} : C \subseteq I\}$, είναι μητροειδές.

Λήμμα 3.5. *Αν το* I *είναι ανεξάρτητο σύνολο ενός μητροειδούς* $M = (E, \mathcal{I})$ *και για κάποιο στοιχείο* $e \in E$ *το* $I \cup \{e\}$ *είναι εξαρτημένο σύνολο, τότε το* $I \cup \{e\}$ *περιέχει μοναδικό κύκλωμα το οποίο περιέχει το* e.

Απόδειξη. Αφού το $I \cup \{e\}$ είναι εξαρτημένο σύνολο, σύμφωνα με το Λήμμα 3.1 περιέχει τουλάχιστον ένα κύκλωμα. Επίσης κάθε κύκλωμα που περιέχει περιλαμβάνει το e, γιατί αν υπήρχε κύκλωμα στο $I \cup \{e\}$ που δεν περιείχε το e, τότε το κύκλωμα αυτό θα υπήρχε και στο I, οπότε το I θα ήταν εξαρτημένο σύνολο, κάτι που αντιβαίνει στην υπόθεση. Οπότε μένει να δειχθεί ότι το $I \cup \{e\}$ περιέχει το πολύ ένα κύκλωμα. Ας υποτεθεί ότι περιέχει δύο κυκλώματα, έστω C_1 και C_2. Από την ιδιότητα (C3) προκύπτει ότι το $I \cup \{e\}$ θα περιείχε και ένα τρίτο κύκλωμα $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) \setminus \{e\}$. Αυτό το κύκλωμα όμως δεν περιέχει το e ενώ είναι υποσύνολο του $I \cup \{e\}$, που όπως έχει δειχθεί είναι αδύνατο. □

3.1.3 Βάσεις

Ένα μεγιστικά ανεξάρτητο σύνολο ενός μητροειδούς M ονομάζεται **βάση** (base) του μητροειδούς. Το σύνολο των βάσεων του M μπορεί να συμβολιστεί ως $\mathcal{B}$ ή ως $\mathcal{B}(M)$.

Τώρα θα αποδειχθούν ορισμένες ιδιότητες που ισχύουν για το σύνολο των βάσεων $\mathcal{B}$ ενός μητροειδούς M.

Λήμμα 3.6. *Έστω ένα μητροειδές $M = (E, \mathcal{I})$. Ισχύει ότι $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \Rightarrow |B_1| = |B_2|$.*

Απόδειξη. Ας υποτεθεί χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $|B_1| < |B_2|$. Οι B_1 και B_2 ως βάσεις είναι εξ ορισμού ανεξάρτητα σύνολα, οπότε αφού $|B_1| < |B_2|$ σύμφωνα με το (I3) υπάρχει $e \in B_2 \setminus B_1$ ώστε $B_1 \cup \{e\} \in \mathcal{I}$. Αυτό όμως σημαίνει ότι η B_1 δεν είναι μεγιστικά ανεξάρτητο σύνολο, που είναι άτοπο αφού είναι βάση. Άρα πρέπει να ισχύει ότι $|B_1| = |B_2|$. □

Λήμμα 3.7. *Έστω ένα μητροειδές $M = (E, \mathcal{I})$. Ισχύει ότι $B_1 \in \mathcal{B} \wedge B_2 \in \mathcal{I} \wedge |B_1| = |B_2| \Rightarrow B_2 \in \mathcal{B}$.*

Απόδειξη. Ας υποτεθεί ότι το B_2 δεν είναι βάση. Αφού το B_2 είναι ανεξάρτητο σύνολο αλλά όχι βάση, από τον ορισμό της βάσης το B_2 δεν είναι μεγιστικά ανεξάρτητο σύνολο, δηλαδή υπάρχει στοιχείο $e \in E \setminus B_2$ ώστε $B_2 \cup \{e\} \in \mathcal{I}$. Αφού $|B_2 \cup \{e\}| = |B_2| + 1 = |B_1| + 1$ και το B_1 είναι ανεξάρτητο σύνολο ως βάση, λόγω του (I3) υπάρχει $e' \in (B_2 \cup \{e\}) \setminus B_1$ ώστε το $B_1 \cup \{e'\}$ να είναι ανεξάρτητο σύνολο. Αυτό σημαίνει ότι το B_1 δεν είναι μεγιστικά ανεξάρτητο σύνολο, άρα προέκυψε άτοπο. Συνεπώς το B_2 πρέπει να είναι βάση. □

Λήμμα 3.8. *Έστω ένα μητροειδές $M = (E, \mathcal{I})$. Ισχύει ότι $\mathcal{B} \neq \emptyset$.*

Απόδειξη. Ας υποτεθεί ότι $\mathcal{B} = \emptyset$. Αν το $\mathcal{I}$ δεν είναι κενό, τότε ένα στοιχείο του με μέγιστο πλήθος αντικειμένων είναι μεγιστικά ανεξάρτητο σύνολο, δηλαδή εξ ορισμού βάση, οπότε το $\mathcal{B}$ θα το περιείχε. Άρα πρέπει το $\mathcal{I}$ να είναι κενό. Όμως με βάση το (I1) ισχύει ότι $\emptyset \in \mathcal{I}$. Οπότε προέκυψε αντίφαση και συνεπώς $\mathcal{B} \neq \emptyset$. □

Λήμμα 3.9. *Έστω ένα μητροειδές $M = (E, \mathcal{I})$. Ισχύει ότι $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \wedge x \in B_1 \setminus B_2 \Rightarrow \exists y \in B_2 \setminus B_1 : (B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B}$.*

Απόδειξη. Οι B_1 και B_2 ως βάσεις είναι εξ ορισμού ανεξάρτητα σύνολα. Το $B_1 \setminus \{x\}$ λόγω του (I2) είναι επίσης ανεξάρτητο σύνολο. Αφού $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, σύμφωνα με το Λήμμα 3.5

ισχύει ότι $|B_1| = |B_2| \Rightarrow |B_1 \setminus \{x\}| < |B_2|$. Σύμφωνα με το (I3) υπάρχει $y \in B_2 \setminus (B_1 \setminus \{x\})$ ώστε το $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\}$ να είναι ανεξάρτητο σύνολο. Αφού $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{I}$ και το σύνολο αυτό έχει το ίδιο μέγεθος με τη βάση B_1, σύμφωνα με το Λήμμα 3.6 ισχύει ότι $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B}$. Ακόμη $y \in B_2 \setminus B_1$ γιατί ο μόνος τρόπος να μην ίσχυε αυτό θα ήταν να ίσχυε ότι $y = x$, όμως $x \in B_1 \setminus B_2 \Rightarrow x \notin B_2$ ενώ $y \in B_2$. □

Σύμφωνα με τα Λήμματα 3.8 και 3.9 το σύνολο $\mathcal{B}$ των βάσεων ενός μητροειδούς ικανοποιεί τις ακόλουθες δύο ιδιότητες:

- (B1) $\mathcal{B} \neq \emptyset$
- (B2) $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \wedge x \in B_1 \setminus B_2 \Rightarrow \exists y \in B_2 \setminus B_1 : (B_1 \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B}$

Αποδεικνύεται ότι αν το E είναι ένα σύνολο στοιχείων και το σύνολο $\mathcal{B} \in 2^E$ ικανοποιεί τις ιδιότητες (B1) και (B2), τότε το $M = (E, \mathcal{I})$, όπου $\mathcal{I} = \{I \in 2^E | \exists B \in \mathcal{B} : I \subseteq B\}$, είναι μητροειδές.

Λήμμα 3.10. *Έστω ένα μητροειδές* $M = (E, \mathcal{I})$. *Ισχύει ότι* $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \wedge x \in B_2 \setminus B_1 \Rightarrow \exists y \in B_1 \setminus B_2 : (B_1 \setminus \{y\}) \cup \{x\} \in \mathcal{B}$.

Απόδειξη. Αφού το B_1 ως βάση είναι μεγιστικά ανεξάρτητο σύνολο και $x \in B_2 \setminus B_1 \Rightarrow x \notin B_1$, το $B_1 \cup \{x\}$ είναι γνήσιο υπερσύνολο ενός μεγιστικά ανεξαρτήτου συνόλου, άρα $B_1 \cup \{x\} \notin \mathcal{I}$. Οπότε, αφού $B_1 \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{I}$ και $B_1 \cup \{x\} \notin \mathcal{I}$, σύμφωνα με το Λήμμα 3.5 το $B_1 \cup \{x\}$ περιέχει μοναδικό κύκλωμα που περιέχει το x, έστω $C(x, B_1)$. Επειδή το B_2 είναι ανεξάρτητο σύνολο, σύμφωνα με το Λήμμα 3.1 δεν περιέχει κανένα κύκλωμα, άρα ούτε και το $C(x, B_1)$, επομένως το $C(x, B_1)$ έχει τουλάχιστον ένα στοιχείο, έστω y, που δεν ανήκει στο B_2. Ισχύει ότι $y \neq x$, αφού εξ ορισμού $y \notin B_2$ και από την υπόθεση $x \in B_2 \setminus B_1 \Rightarrow x \in B_2$, άρα $y \in C(x, B_1) \wedge y \neq x \Rightarrow y \in B_1$ και επομένως $y \in B_1 \setminus B_2$. Όπως δείχθηκε παραπάνω το $C(x, B_1)$ είναι το μοναδικό κύκλωμα του $B_1 \cup \{x\}$, οπότε αφού $y \in C(x, B_1)$, το $(B_1 \setminus \{y\}) \cup \{x\}$ δεν περιέχει κανένα κύκλωμα και άρα είναι ανεξάρτητο σύνολο, σύμφωνα με το Λήμμα 3.1. Επιπλέον, αφού $y \in B_1$ και $x \notin B_1 \wedge x \neq y$, ισχύει ότι $|(B_1 \setminus \{y\}) \cup \{x\}| = |B_1|$. Τέλος, επειδή $(B_1 \setminus \{y\}) \cup \{x\} \in \mathcal{I}$ και $|(B_1 \setminus \{y\}) \cup \{x\}| = |B_1|$, σύμφωνα με το Λήμμα 3.7 ισχύει ότι $(B_1 \setminus \{y\}) \cup \{x\} \in \mathcal{B}$. □

Αξίζει να παρατηρηθεί ότι, παρά τη φαινομενική ομοιότητά τους, τα Λήμματα 3.9 και 3.10 δεν είναι ισοδύναμα.

3.1.4 Βαθμός

Τώρα θα αποδειχθεί ένα Λήμμα που είναι ιδιαίτερα σημαντικό για τον ορισμό μίας άλλης θεμελιώδους έννοιας, αυτής του βαθμού.

Λήμμα 3.11. *Αν το* $M = (E, \mathcal{I})$ *είναι ένα μητροειδές και για ένα σύνολο* X *ισχύει ότι* $X \subseteq E$, *τότε το* $M' = (X, \mathcal{I}|X)$, *όπου* $\mathcal{I}|X = \{I \in \mathcal{I} | I \subseteq X\}$, *είναι επίσης μητροειδές.*

Απόδειξη. Αρκεί να δειχθεί ότι το M' ικανοποιεί τις ιδιότητες (I1)-(I3).

Το M είναι μητροειδές, οπότε ικανοποιεί την ιδιότητα (I1), δηλαδή $\emptyset \in \mathcal{I}$. Επίσης $\emptyset \subseteq X$. Άρα εξ ορισμού ισχύει ότι $\emptyset \in \mathcal{I}|X$, συνεπώς το M' ικανοποιεί την ιδιότητα (I1).

Έστω ένα σύνολο I τέτοιο ώστε $I \in \mathcal{I}|X$ και ένα σύνολο $I' \subseteq I$. Αφού $I \in \mathcal{I}|X$ από τον ορισμό του $\mathcal{I}|X$ προκύπτει ότι $I \in \mathcal{I}$ και $I \subseteq X$. Το M ως μητροειδές ικανοποιεί την ιδιότητα (I2), άρα $I' \subseteq I \in \mathcal{I} \Rightarrow I' \in \mathcal{I}$. Επίσης $I' \subseteq I \subseteq X \Rightarrow I' \subseteq X$. Οπότε αφού $I' \in \mathcal{I}$ και $I' \subseteq X$, ισχύει ότι $I \in \mathcal{I}|X$, συνεπώς το M' ικανοποιεί την ιδιότητα (I2).

Έστω δύο σύνολα $I_1, I_2 \in \mathcal{I}|X$ με $|I_1| < |I_2|$. Τα σύνολα αυτά λόγω του ορισμού του $\mathcal{I}|X$, στο οποίο ανήκουν, ανήκουν και στο $\mathcal{I}$, οπότε αφού το M είναι μητροειδές ισχύει ότι υπάρχει $e \in I_2 \setminus I_1 : I_1 \cup \{e\} \in \mathcal{I}$. Επειδή $e \in I_2 \setminus I_1 \Rightarrow e \in I_2 \Rightarrow e \in X$ και $I_1 \subseteq X$ ισχύει ότι $I_1 \cup \{e\} \subseteq X$. Οπότε εξ ορισμού ισχύει ότι $I_1 \cup \{e\} \in \mathcal{I}|X$, δηλαδή το M' ικανοποιεί την ιδιότητα (I3). □

Το μητροειδές $M' = (X, \mathcal{I}|X)$ ονομάζεται **περιορισμός** (restriction) του M στο X και συμβολίζεται με $M|X$.

Αφού σύμφωνα με το Λήμμα 3.9 το $M' = (X, \mathcal{I}|X)$ είναι μητροειδές, από το Λήμμα 3.5 προκύπτει ότι όλες οι βάσεις του έχουν το ίδιο μέγεθος. Το κοινό αυτό μέγεθος ονομάζεται **βαθμός** (rank) του X και συμβολίζεται με $r_M(X)$ ή απλά $r(X)$ όταν το μητροειδές είναι προφανές από τα συμφραζόμενα. Συνεπώς το r είναι μία συνάρτηση που αντιστοιχεί κάθε σύνολο στοιχείων $X \in 2^E$ σε ένα μη-αρνητικό ακέραιο ($r : 2^E \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$). Επίσης το $r(M)$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί αντί του $r(E(M))$.

Τώρα θα αποδειχθούν ορισμένες ιδιότητες που ισχύουν για τη συνάρτηση r ενός μητροειδούς M.

Λήμμα 3.12. *Έστω ένα μητροειδές $M = (E, \mathcal{I})$. Ισχύει ότι $X \subseteq E \Rightarrow 0 \leq r(X) \leq |X|$.*

Απόδειξη. Έστω B μία βάση του $M' = (X, \mathcal{I}|X)$. Από τον ορισμό της r ισχύει ότι $r(X) = |B|$. Προφανώς $|B| \geq 0 \Rightarrow r(X) \geq 0$. Επίσης $B \subseteq X \Rightarrow |B| \leq |X| \Rightarrow r(X) \leq X$. Επομένως ισχύει ότι $0 \leq r(X) \leq |X|$. □

Λήμμα 3.13. *Έστω ένα μητροειδές $M = (E, \mathcal{I})$. Ισχύει ότι $X \subseteq Y \subseteq E \Rightarrow r(X) \leq r(Y)$.*

Απόδειξη. Έστω B μία βάση του $M_1 = (X, \mathcal{I}|X)$. Η B ως βάση είναι εξ ορισμού ανεξάρτητο σύνολο του M_1, δηλαδή $B \in \mathcal{I}|X \Rightarrow B \in \mathcal{I} \wedge B \subseteq X$. Εφόσον όμως $X \subseteq Y$ ισχύει ότι $B \subseteq Y$. Άρα $B \in \mathcal{I}|Y$, δηλαδή το B είναι ανεξάρτητο σύνολο του $M_2 = (Y, \mathcal{I}|Y)$. Άρα μία βάση του M_2 δηλαδή ένα μεγιστικά ανεξάρτητο σύνολο θα έχει τουλάχιστον όσο μέγεθος έχει το B, συνεπώς $r(Y) \geq |B| = r(X) \Rightarrow r(X) \leq r(Y)$. □

Λήμμα 3.14. *Έστω ένα μητροειδές $M = (E, \mathcal{I})$. Ισχύει ότι $r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y)$.*

Απόδειξη. Έστω $B_{X \cap Y}$ μία βάση του $M|X \cap Y$. Εξ ορισμού η B είναι ανεξάρτητο σύνολο του $M|X \cap Y$ και άρα και του $M|X \cup Y$. Άρα υπάρχει βάση του $M|X \cup Y$, έστω $B_{X \cup Y}$ που περιέχει το $B_{X \cap Y}$, δηλαδή $B_{X \cap Y} \subseteq B_{X \cup Y}$. Τα σύνολα $B_{X \cup Y} \cap X$ και $B_{X \cup Y} \cap Y$ είναι ανεξάρτητα σύνολα των $M|X$ και $M|Y$ αντίστοιχα, οπότε περιέχονται σε βάσεις των αντιστοίχων συνόλων και επομένως ισχύει ότι $|B_{X \cup Y} \cap X| \leq r(X)$ και ότι $|B_{X \cup Y} \cap Y| \leq r(Y)$. Προκύπτει επομένως ότι:

$$r(X) + r(Y) \geq |B_{X \cup Y} \cap X| + |B_{X \cup Y} \cap Y| =$$

$$= |(B_{X \cup Y} \cap X) \cup (B_{X \cup Y} \cap Y)| + |(B_{X \cup Y} \cap X) \cap (B_{X \cup Y} \cap Y)| =$$

$$= |B_{X \cup Y} \cap (X \cup Y)| + |B_{X \cup Y} \cap (X \cap Y)|$$

Όμως $B_{X \cup Y} \cap (X \cup Y) = B_{X \cup Y}$, αφού $B_{X \cup Y} \subseteq X \cup Y$. Επίσης $B_{X \cup Y} \cap (X \cap Y) = B_{X \cap Y}$, αφού το $B_{X \cup Y} \cap (X \cap Y)$ είναι ανεξάρτητο σύνολο στο $X \cap Y$ και το $B_{X \cap Y}$ ως βάση είναι μεγιστικά ανεξάρτητο σύνολο στο $X \cap Y$. Συνεπώς ισχύει ότι $r(X) + r(Y) \geq |B_{X \cup Y}| + |B_{X \cap Y}| = r(X \cup Y) + r(X \cap Y)$. □

Σύμφωνα με τα Λήμματα 3.11, 3.12 και 3.13 η συνάρτηση r ενός μητροειδούς ικανοποιεί τις ακόλουθες τρεις ιδιότητες:

- (R1) $X \subseteq E \Rightarrow 0 \leq r(X) \leq |X|$
- (R2) $X \subseteq Y \subseteq E \Rightarrow r(X) \leq r(Y)$
- (R3) $r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(X) + r(Y)$

Αποδεικνύεται ότι αν το E είναι ένα σύνολο στοιχείων και μία συνάρτηση $r : 2^E \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ικανοποιεί τις ιδιότητες (R1)-(R3), τότε το $M = (E, \mathcal{I})$, όπου $\mathcal{I} = \{I \in 2^E | r(I) = |I|\}$, είναι μητροειδές.

Ένα σύνολο $X \subseteq E$ ονομάζεται **συνδετικό** (spanning) όταν περιέχει κάποια βάση του M ή ισοδύναμα όταν $r(X) = r(M)$.

3.2 Παραδείγματα μητροειδών

Τώρα θα παρατεθούν ορισμένα κλασικά παραδείγματα μητροειδών. Σε κάθε περίπτωση θα αποδεικνύεται ότι το εν λόγω παράδειγμα αποτελεί πράγματι μητροειδές.

3.2.1 Ομοιόμορφα μητροειδή

Λήμμα 3.15. *Έστω E ένα πεπερασμένο σύνολο στοιχείων με $|E| = n$ και ένας ακέραιος αριθμός k με $0 \leq k \leq n$. Το $M = (E, \mathcal{I})$, όπου $\mathcal{I} = \{I \subseteq E || I| \leq k\}$, είναι μητροειδές.*

Απόδειξη. Αρκεί να δειχθεί ότι το M ικανοποιεί τις ιδιότητες (I1)-(I3).

Ισχύει ότι $\emptyset \subseteq E$ και ότι $0 \leq k \Rightarrow |\emptyset| \leq k$, άρα $\emptyset \in \mathcal{I}$, συνεπώς το M ικανοποιεί την ιδιότητα (I1).

Έστω ένα σύνολο $I \in \mathcal{I}$ και ένα σύνολο $I' \subseteq I$. Ισχύει ότι $I \in \mathcal{I} \Rightarrow I \subseteq E$ και ότι $I' \subseteq I$, άρα $I' \subseteq E$. Επίσης $I \in \mathcal{I} \Rightarrow |I| \leq k$ και $I' \subseteq I$, άρα $|I'| \leq |I| \leq k \Rightarrow |I'| \leq k$. Συνεπώς ισχύει ότι $I' \in \mathcal{I}$ και το M ικανοποιεί την ιδιότητα (I2).

Έστω δύο σύνολα $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ τέτοια ώστε $|I_1| < |I_2|$. Αφού $I_2 \in \mathcal{I} \Rightarrow |I_2| \leq k$ και $|I_1| < |I_2|$, ισχύει ότι $|I_1| < k$, οπότε αν προστεθεί ένα στοιχείο e στο I_1 θα ισχύει ότι $|I_1 \cup \{e\}| \leq k \Rightarrow I_1 \cup \{e\} \in \mathcal{I}$. Αφού $|I_1| < |I_2|$ το I_2 περιέχει τουλάχιστον ένα στοιχείο που δεν περιέχει το I_1, άρα το e μπορεί να επιλεγεί από το $I_2 \setminus I_1$ και συνεπώς το M ικανοποιεί την ιδιότητα (I3). □

Το μητροειδές που ορίστηκε παραπάνω ονομάζεται **ομοιόμορφο μητροειδές** (uniform matroid) και συμβολίζεται ως $U_{k,n}$.

3.2.2 Μητροειδή διαμέρισης

Λήμμα 3.16. *Έστω E ένα πεπερασμένο σύνολο στοιχείων και $\{E_1, E_2, \ldots, E_l\}$ μία διαμέρισή του με $|E_i| = n_i, \forall i \in \{1, 2, \ldots, l\}$ και l ακέραιοι αριθμοί $k_1, k_2, \ldots, k_l$ με $0 \leq k_i \leq n_i, \forall i \in \{1, 2, \ldots, l\}$. Το $M = (E, \mathcal{I})$, όπου $\mathcal{I} = \{I \subseteq E \,|\, |I \cap E_i| \leq k_i, \forall i \in \{1, 2, \ldots, l\}\}$, είναι μητροειδές.*

Απόδειξη. Αρκεί να δειχθεί ότι το M ικανοποιεί τις ιδιότητες (I1)-(I3).

Ισχύει ότι $\emptyset \subseteq E$ και ότι $\emptyset \cap E_i = \emptyset \Rightarrow |\emptyset \cap E_i| = 0, \forall i \in \{1, 2, \ldots, l\}$, άρα $\emptyset \in \mathcal{I}$, συνεπώς το M ικανοποιεί την ιδιότητα (I1).

Έστω ένα σύνολο $I \in \mathcal{I}$ και ένα σύνολο $I' \subseteq I$. Ισχύει ότι $I \in \mathcal{I} \Rightarrow I \subseteq E$ και ότι $I' \subseteq I$, άρα $I' \subseteq E$. Επίσης $I \in \mathcal{I} \Rightarrow |I \cap E_i| \leq k_i, \forall i \in \{1, 2, \ldots, l\}$ και $I' \subseteq I$, άρα $I' \cap E_i \subseteq I \cap E_i \Rightarrow |I' \cap E_i| \leq |I \cap E_i| \leq k_i, \forall i \in \{1, 2, \ldots, l\}$. Συνεπώς ισχύει ότι $I' \in \mathcal{I}$ και το M ικανοποιεί την ιδιότητα (I2).

Έστω δύο σύνολα $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ τέτοια ώστε $|I_1| < |I_2|$. Το $\{E_1, E_2, \ldots, E_l\}$ είναι διαμέριση του E, οπότε $\sum_{i=1}^{l} |I_1 \cap E_i| = |I_1|$ και $\sum_{i=1}^{l} |I_2 \cap E_i| = |I_2|$. Όμως $|I_1| < |I_2|$, συνεπώς υπάρχει $j \in \{1, 2, \ldots, l\}$ ώστε $|I_1 \cap E_j| < |I_2 \cap E_j|$. Για οποιοδήποτε $e \in (I_2 \cap E_j) \setminus I_1 \subseteq I_2 \setminus I_1$ ισχύει ότι $|(I_1 \cup \{e\}) \cap E_j| \leq |I_2 \cap E_j| \leq k$. Οι τομές του επαυξημένου I_1 με τα υπόλοιπα στοιχεία της διαμέρισης δε θα επηρεαστούν, οπότε αφού αρχικά αυτές είχαν μέγεθος μικρότερο από το αντίστοιχο k_i αυτό θα συνεχίσει να ισχύει. Επομένως $I_1 \cup \{e\} \in \mathcal{I}$ και το M ικανοποιεί την ιδιότητα (I3). □

Το μητροειδές που ορίστηκε παραπάνω ονομάζεται **μητροειδές διαμέρισης** (partition matroid).

3.2.3 Γραφικά μητροειδή

Λήμμα 3.17. *Έστω $G = (V, E)$ ένα μη-κατευθυνόμενο γράφημα. Το $M = (E, \mathcal{I})$, όπου $\mathcal{I}$ είναι το σύνολο που περιέχει κάθε $I \subseteq E$ για το οποίο το υπογράφημα $G' = (V, I)$ του G δεν περιέχει απλό κύκλο, είναι μητροειδές.*

Απόδειξη. Αρκεί να δειχθεί ότι το M ικανοποιεί τις ιδιότητες (I1)-(I3).

Το $G' = (V, \emptyset)$ δεν έχει καμία ακμή, οπότε δεν μπορεί να περιέχει κύκλο, συνεπώς $\emptyset \in \mathcal{I}$ και το M ικανοποιεί την ιδιότητα (I1).

Έστω ένα σύνολο $I \in \mathcal{I}$ και ένα σύνολο $I' \subseteq I$. Ας υποτεθεί ότι $I' \notin \mathcal{I}$, δηλαδή εξ ορισμού το $G' = (V, I')$ περιέχει απλό κύκλο. Όμως το γράφημα αυτό είναι υπογράφημα του $G'' = (V, I)$, αφού $I' \subseteq I$. Οπότε σύμφωνα με το Λήμμα 2.2 το G'' περιέχει επίσης αυτόν τον κύκλο, άρα $I \notin \mathcal{I}$ που είναι άτοπο. Συνεπώς $I' \in \mathcal{I}$ και το M ικανοποιεί την ιδιότητα (I2).

Έστω δύο σύνολα $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ τέτοια ώστε $|I_1| < |I_2|$. Αφού τα σύνολα αυτά ανήκουν στο $\mathcal{I}$ εξ ορισμού δεν περιέχουν κύκλο, οπότε τα υπογραφήματα $G_1 = (V, I_1)$ και $G_2 = (V, I_2)$ είναι δάση με $|I_1|$ και $|I_2|$ ακμές και άρα $k_1 = |V| - 1 - |I_1|$ και $k_2 = |V| - 1 - |I_2|$ συνεκτικές συνιστώσες αντίστοιχα. Αρκεί να δειχθεί ότι υπάρχει ακμή $e \in I_2$ που μπορεί να προστεθεί στο I_1 ώστε $I_1 \cup \{e\} \in \mathcal{I}$, δηλαδή το γράφημα $G_1' = (V, I_1 \cup \{e\})$ να είναι δάσος. Για να ισχύει αυτό αρκεί να υπάρχει ακμή $e \in I_2$ της οποίας τα άκρα ανήκουν σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του G_1. Ας υποτεθεί ότι δεν υπάρχει τέτοια ακμή. Αυτό σημαίνει ότι αν θεωρηθούν μία μία οι συνεκτικές συνιστώσες του G_1, οι οποίες είναι δέντρα, τα αντίστοιχα επαγόμενα υπογραφήματα του G_2 που είναι ακυκλικά μπορούν να περιέχουν το πολύ όσες ακμές έχουν οι συνεκτικές συνιστώσες. Επομένως για τα συνολικά πλήθη ακμών προκύπτει ότι $|I_2| \leq |I_1|$ που είναι άτοπο. Συνεπώς υπάρχει $e \in I_2 \setminus I_1$ ώστε $I_1 \cup \{e\} \in \mathcal{I}$ και το M ικανοποιεί την ιδιότητα (I3). □

Το μητροειδές που ορίστηκε παραπάνω ονομάζεται **γραφικό μητροειδές** (graphic matroid) και συμβολίζεται ως $M(G)$.

Αξίζει να παρατηρηθεί ότι οι βάσεις του $M(G)$ όταν το G είναι συνεκτικό γράφημα αντιστοιχούν σε μεγιστικά ακυκλικά υπογραφήματα, δηλαδή σε συνδετικά δέντρα του G.

3.3 Δυϊκότητα

Η **δυϊκότητα** (duality) στα μητροειδή αποτελεί μία ιδιαίτερα χρήσιμη έννοια, διότι διευκολύνει την απόδειξη ποικίλων Θεωρημάτων.

Πριν τον ορισμό του δυϊκού ενός μητροειδούς είναι χρήσιμο να διατυπωθεί το ακόλουθο Λήμμα.

Λήμμα 3.18. *Έστω ένα μητροειδές $M = (E, \mathcal{I})$. Ισχύει ότι το $\mathcal{B}^*(M) = \{E(M) \setminus B | B \in \mathcal{B}(M)\}$ αποτελεί το σύνολο βάσεων κάποιου μητροειδούς με σύνολο γείωσης το $E(M)$.*

Απόδειξη. Αρκεί να δειχθεί ότι το $\mathcal{B}^*(M)$ ικανοποιεί τις ιδιότητες (B1) και (B2).

Αφού το M είναι μητροειδές, το $\mathcal{B}(M)$ ικανοποιεί την ιδιότητα (B1), δηλαδή δεν είναι κενό, άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $B \in \mathcal{B}(M)$. Από τον ορισμό του $\mathcal{B}^*(M)$ προκύπτει ότι $E(M) \setminus B \in \mathcal{B}^*(M)$, άρα το $\mathcal{B}^*(M)$ δεν είναι κενό και συνεπώς ικανοποιεί την ιδιότητα (B1).

Έστω B_1^* και B_2^* δύο στοιχεία του $\mathcal{B}^*(M)$, τέτοια ώστε να υπάρχει $x \in B_1^* \setminus B_2^*$. Το $B_1 = E(M) \setminus B_1^*$ αποτελεί βάση του M, λόγω του ορισμού του συνόλου $\mathcal{B}^*(M)$ στο οποίο ανήκει το B_1^*. Το ίδιο ισχύει και για το $B_2 = E(M) \setminus B_2^*$. Ισχύει ότι $B_1^* \setminus B_2^* = (E(M) \setminus B_1) \setminus (E(M) \setminus B_2) = B_2 \setminus B_1$, οπότε $x \in B_2 \setminus B_1$. Επομένως, σύμφωνα με το Λήμμα 3.10, ισχύει ότι υπάρχει $y \in B_1 \setminus B_2 = B_2^* \setminus B_1^*$ τέτοιο ώστε $(B_1 \setminus \{y\}) \cup \{x\} \in \mathcal{B}(M)$. Από τον ορισμό λοιπόν του $\mathcal{B}^*(M)$ προκύπτει ότι $E(M) \setminus (B_1 \setminus \{y\}) \cup \{x\} \in \mathcal{B}^*(M) \Rightarrow ((E(M) \setminus B_1) \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B}^*(M) \Rightarrow (B_1^* \setminus \{x\}) \cup \{y\} \in \mathcal{B}^*(M)$, συνεπώς το $\mathcal{B}^*(M)$ ικανοποιεί την ιδιότητα (B2). □

Το μητροειδές με σύνολο γείωσης το $E(M)$ και σύνολο βάσεων το $\mathcal{B}^*(M)$ ονομάζεται **δυϊκό** (dual) του M και συμβολίζεται με M^*. Γενικά ο αστερίσκος δίπλα σε σύμβολα δηλώνει ότι αυτά αφορούν το δυϊκό μητροειδές.

Λήμμα 3.19. *Έστω ένα μητροειδές $M = (E, \mathcal{I})$. Ισχύει ότι $(M^*)^* = M$.*

Απόδειξη. Αρκεί να δειχθεί ότι $\mathcal{B}((M^*)^*) = \mathcal{B}(M)$. Από τον ορισμό του δυϊκού ενός μητροειδούς προκύπτει ότι $\mathcal{B}(M^*) = \{E(M) \setminus B | B \in \mathcal{B}(M)\}$ και ομοίως $\mathcal{B}((M^*)^*) = \{E(M) \setminus B | B \in \mathcal{B}(M^*)\} = \{E(M) \setminus (E(M) \setminus B) | B \in \mathcal{B}(M)\} = \{B | B \in \mathcal{B}(M)\} = \mathcal{B}(M)$. □

Κάποιες από τις έννοιες που σχετίζονται το δυϊκό μητροειδές έχουν ειδική ονομασία που δηλώνει τη συσχέτιση αυτή. Μερικά παραδείγματα είναι τα ακόλουθα:

- Τα ανεξάρτητα σύνολα του M^* ονομάζονται **συνανεξάρτητα σύνολα** (coindependent sets) του M.
- Τα κυκλώματα του M^* ονομάζονται **συγκυκλώματα** (cocircuits) του M.
- Οι βάσεις του M^* ονομάζονται **συμβάσεις** (cobases) του M.
- Τα συνδετικά σύνολα του M^* ονομάζονται **συσσυνδετικά σύνολα** (cospanning sets) του M.

Από τον ορισμό του δυϊκού ενός μητροειδούς γίνεται να εξαχθούν κάποια συμπεράσματα για τον βαθμό του.

Λήμμα 3.20. *Έστω $M = (E, \mathcal{I})$ ένα μητροειδές και M^* το δυϊκό αυτού. Ισχύει ότι $r(M^*) = |E(M)| - r(M)$.*

Απόδειξη. Έστω $B \in \mathcal{B}(M)$ μία βάση του M. Από τον ορισμό του δυϊκού προκύπτει ότι η $B^* = E(M) \setminus B$ είναι βάση του M^*, οπότε $r(M^*) = |B^*| = |E(M) \setminus B| = |E(M)| - |B|$. □

Από το παραπάνω Λήμμα προκύπτει άμεσα ότι $r(M) + r(M^*) = |E(M)|$. Συχνά είναι χρήσιμος ο προσδιορισμός του βαθμού ενός συνόλου, έστω X, στο M^*, ο οποίος συμβολίζεται με $r^*(X)$. Για την απόδειξη του σχετικού τύπου, ο οποίος συνδέει τις συναρτήσεις r και r^*, θα χρησιμοποιηθεί τα ακόλουθα δύο βοηθητικά Λήμματα.

Λήμμα 3.21. *Έστω ένα μητροειδές $M = (E, \mathcal{I})$. Αν το I^* είναι συνανεξάρτητο σύνολο, τότε το $E \setminus I^*$ είναι συνδετικό σύνολο.*

Απόδειξη. Αφού το I^* είναι συνανεξάρτητο περιέχεται σε τουλάχιστον μία συμβάση. Έστω $B^* \in \mathcal{B}^*(M)$ μία τέτοια συμβάση, δηλαδή $I^* \subseteq B^*$. Από τον ορισμό του δυϊκού προκύπτει ότι η $B = E(M) \setminus B^*$ είναι βάση του M. Αφού $I^* \subseteq B^*$ ισχύει ότι $E(M) \setminus I^* \supseteq E(M) \setminus B^* = B$, οπότε $B \subseteq E(M) \setminus I^*$, επομένως το $E(M) \setminus I^*$ περιέχει τουλάχιστον μία βάση, άρα είναι συνδετικό σύνολο. □

Λήμμα 3.22. *Έστω ένα μητροειδές $M = (E, \mathcal{I})$. Ισχύει ότι αν το I είναι ένα ανεξάρτητο σύνολο και το I^* ένα συνανεξάρτητο σύνολο και είναι ξένα μεταξύ τους, τότε υπάρχει βάση που περιέχει το I και συμβάση που περιέχει το I^* ώστε αυτές να διαμερίζουν το E.*

Απόδειξη. Το I είναι ανεξάρτητο σύνολο και $I \subseteq E \wedge I \cap I^* = \emptyset \Rightarrow I \subseteq E \setminus I^*$, οπότε το I είναι ανεξάρτητο στο $M' = M|E \setminus I^*$, άρα υπάρχει τουλάχιστον μία βάση του $M|E \setminus I^*$ που περιέχει το I. Έστω B μία τέτοια βάση, δηλαδή $I \subseteq B \subseteq E \setminus I^*$. Αφού το I^* είναι συνανεξάρτητο σύνολο, σύμφωνα με το Λήμμα 3.21 το $E \setminus I^*$ είναι συνδετικό σύνολο, άρα η B είναι βάση του M. Από τον ορισμό του δυϊκού προκύπτει ότι η $B^* = E \setminus B$ είναι βάση του M^*. Επίσης αφού $B \subseteq E \setminus I^*$, ισχύει ότι $B^* = E \setminus B \supseteq E \setminus (E \setminus I^*) = I^*$, άρα η B^* είναι συμβάση που περιέχει το I^* και από τον ορισμό της ισχύει ότι αυτή και η B διαμερίζουν το E. Συνεπώς οι B και B^* ικανοποιούν το ζητούμενο. □

Πλέον μπορεί να διατυπωθεί και να αποδειχθεί ο τύπος που συνδέει τις συναρτήσεις r^* και r.

Λήμμα 3.23. *Έστω ένα μητροειδές $M = (E, \mathcal{I})$. Για κάθε $X \subseteq E$ ισχύει ότι $r*(X) = |X| - r(M) + r(E \setminus X)$.*

Απόδειξη. Έστω B_X^* μία βάση του $M^*|X$ και $B_{E\setminus X}$ μία βάση του $M|E \setminus X$. Από τον ορισμό του βαθμού ισχύει ότι $r^*(X) = |B_X^*|$ και $r(E \setminus X) = |B_{E\setminus X}|$. Η B_X^* είναι βάση, άρα και ανεξάρτητο σύνολο, του $M^*|X$, οπότε είναι και ανεξάρτητο σύνολο του M^*. Ομοίως η $B_{E\setminus X}$ είναι ανεξάρητο σύνολο του M. Επομένως, σύμφωνα με το Λήμμα 3.22, υπάρχει βάση B και συμβάση B^*, τέτοιες ώστε $B_{E\setminus X} \subseteq B$, $B_X^* \subseteq B^*$ και οι οποίες διαμερίζουν το E. Επειδή η $B_{E\setminus X}$ είναι βάση και άρα μεγιστικά ανεξάρτητο σύνολο του $M|E \setminus X$, ισχύει ότι

$B \cap (E \setminus X) = B_{E \setminus X}$. Ομοίως $B^* \cap X = B^*_X$. Ακόμη, αφού $B \subseteq E$ και τα X και $E \setminus X$ διαμερίζουν το E, ισχύει ότι $B = (B \cap X) \sqcup (B \cap (E \setminus X)) = (B \cap X) \sqcup B_{E \setminus X} \Rightarrow |B| = |B \cap X| + |B_{E \setminus X}| \Rightarrow |B \cap X| = |B| - |B_{E \setminus X}|$. Επίσης, αφού η B και η B^* διαμερίζουν το E, ισχύει ότι $X = (X \cap B) \sqcup (X \cap B^*) \Rightarrow |X| = |X \cap B| + |X \cap B^*| = |B| - |B_{E \setminus X}| + |B^*_X| = r(M) - r(E \setminus X) + r^*(X) \Rightarrow r^*(X) = |X| - r(M) + r(E \setminus X)$. $\square$

Κεφάλαιο 4

Εισαγωγή στους προσεγγιστικούς αλγορίθμους

Στο σχεδιασμό του κεφαλαίου αυτού βοήθησε το βιβλίο [10].

4.1 Βασικές έννοιες και ορισμοί

Πολλά προβλήματα συνδυαστικής βελτιστοποίησης με θεωρητικό ή/και πρακτικό ενδιαφέρον είναι NP-hard, δηλαδή αν $P \neq NP$, τότε δεν υπάρχουν αλγόριθμοι που να τα λύνουν σε πολυωνυμικό χρόνο ως προς το μέγεθος της εισόδου. Γενικά αν $P \neq NP$, τότε για ένα NP-hard πρόβλημα βελτιστοποίησης, ένας αλγόριθμος δε χαρακτηρίζεται από τουλάχιστον μία από τις τρεις παρακάτω ιδιότητες:

- εκτελείται σε πολυωνυμικό χρόνο
- μπορεί να εκτελεστεί για κάθε στιγμιότυπο
- δίνει βέλτιστη λύση

Ανάλογα με το ποια από αυτές τις ιδιότητες είναι αποδεκτό να παραβιαστεί, ένα πρόβλημα μπορεί να προσεγγιστεί με διαφορετικό τρόπο:

- Αν δεν υπάρχει απαίτηση ο αλγόριθμος που λύνει το πρόβλημα να τρέχει σε πολυωνυμικό χρόνο, τότε μπορεί να γίνει χρήση αλγορίθμων εκθετικού χρόνου, κάτι που έχει ως συνέπεια να ενδέχεται να υπάρξει μεγάλη καθυστέρηση για τον υπολογισμό μίας βέλτιστης λύσης για στιγμιότυπα του προβλήματος.
- Αν δεν υπάρχει απαίτηση ο αλγόριθμος να μπορεί να λύσει κάθε στιγμιότυπο του προβλήματος, αλλά υπάρχει ενδιαφέρον για τη λύση μίας οικογένειας στιγμιοτύπων, τότε είναι πιθανό να υπάρχει πολυωνυμικός αλγόριθμος επίλυσης για αυτήν την οικογένεια στιγμιοτύπων.
- Αν δεν υπάρχει απαίτηση να βρεθεί βέλτιστη λύση, αλλά αρκεί να υπολογιστεί μία αρκετά καλή, αποδεκτή λύση, τότε μπορεί να γίνει χρήση ευριστικών αλγορίθμων (π.χ.

γενετικοί αλγόριθμοι, προσομοιωμένη ανόπτηση) ή προσεγγιστικών αλγορίθμων, μία εισαγωγή στους οποίους έχει σκοπό να παρέχει η παρούσα ενότητα.

Το χαρακτηριστικό των προσεγγιστικών αλγορίθμων είναι ότι παρόλο που οι λύσεις που υπολογίζουν δεν είναι πάντα βέλτιστες, υπάρχει κάποια εγγύηση για το πόσο χειρότερες μπορεί να είναι σε σχέση με μία βέλτιστη λύση.

Ένα στιγμιότυπο ενός προβλήματος συνδυαστικής βελτιστοποίησης χαρακτηρίζεται από:

- Ένα σύνολο **μεταβλητών απόφασης** (decision variables) των οποίων τις τιμές καλείται να καθορίσει ένας αλγόριθμος επίλυσης. Μία ανάθεση τιμών στις μεταβλητές απόφασης ενός στιγμιοτύπου λέγεται **λύση** (solution) του στιγμιοτύπου.

- Ένα σύνολο **περιορισμών** (constraints) που αφορούν τις μεταβλητές απόφασης. Μία λύση ενός στιγμιοτύπου ονομάζεται **εφικτή λύση** (feasible solution) όταν οι τιμές που δίνει στις μεταβλητές απόφασης ικανοποιούν όλους τους περιορισμούς. Διαφορετικά ονομάζεται **μη-εφικτή λύση** (infeasible solution).

- Μία αντικειμενική συνάρτηση **objective function** που είναι μία συνάρτηση που δεδομένων των τιμών των μεταβλητών απόφασης, δηλαδή δεδομένης μίας λύσης, δίνει ένα μη-αρνητικό πραγματικό αριθμό που ονομάζεται **τιμή** (value) της λύσης.

Ανάλογα με το είδος του προβλήματος μπορεί να είναι επιθυμητή η εύρεση λύσης με τη μέγιστη (προβλήματα μεγιστοποίησης) ή την ελάχιστη (προβλήματα ελαχιστοποίησης) δυνατή τιμή.

Βέλτιστη τιμή (optimal value) για ένα στιγμιότυπο ονομάζεται η μέγιστη, αν πρόκειται για πρόβλημα μεγιστοποίησης, ή η ελάχιστη, αν πρόκειται για πρόβλημα ελαχιστοποίησης, τιμή εφικτής λύσης για το στιγμιότυπο αυτό.

Βέλτιστη λύση (optimal solution) για ένα στιγμιότυπο ονομάζεται μία εφικτή λύση για το στιγμιότυπο αυτό που έχει βέλτιστη τιμή.

Ένας αλγόριθμος για ένα πρόβλημα συνδυαστικής βελτιστοποίησης ονομάζεται **α-προσεγγιστικός αλγόριθμος** (α-approximation algorithm) όταν τρέχει σε πολυωνυμικό χρόνο και για κάθε στιγμιότυπο του προβλήματος υπολογίζει μία εφικτή λύση που ο λόγος της τιμής της προς τη βέλτιστη τιμή του εκάστοτε στιγμιοτύπου είναι μικρότερος ή ίσος του α για προβλήματα μεγιστοποίησης και μεγαλύτερος ή ίσος του α για προβλήματα ελαχιστοποίησης.

Από τον ορισμό της βέλτιστης τιμής προκύπτει ότι για προβλήματα μεγιστοποίησης $\alpha < 1$, ενώ για προβλήματα ελαχιστοποίησης $\alpha > 1$.

Να σημειωθεί ότι το α δεν είναι απαραίτητα σταθερά, αλλά αποτελεί συνάρτηση παραμέτρων που περιγράφουν το μέγεθος της εισόδου του αλγορίθμου.

4.2 Το πρόβλημα κάλυψης συνόλων

Σε αυτήν την ενότητα θα περιγραφεί ένα NP-hard πρόβλημα, το πρόβλημα κάλυψης συνόλων, πάνω στο οποίο στις επόμενες ενότητες θα εφαρμοστούν διάφορες τεχνικές σχεδιασμού προσεγγιστικών αλγορίθμων με σκοπό αυτές να κατανοηθούν, καθώς θα χρησιμοποιηθούν σε μετέπειτα κεφάλαια.

Στο πρόβλημα **κάλυψης συνόλων** (set cover) δίνεται ένα σύνολο από στοιχεία $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ που περιέχει n στοιχεία και μία συλλογή $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$ που περιέχει m υποσύνολα του E, δηλαδή $S_j \subseteq E \forall S_j \in \mathcal{S}$. Κάθε σύνολο $S_j \in \mathcal{S}$ χαρακτηρίζεται από ένα μη-αρνητικό βάρος w_j.

Πρέπει να βρεθεί ένα σύνολο $I \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$ ώστε να ελαχιστοποιείται η τιμή $\sum_{j \in I} w_j$ με τον περιορισμό ότι $e_i \in \bigcup_{j \in I} S_j, \forall e_i \in E$.

Οι μεταβλητές απόφασης είναι m με μία να αντιστοιχεί σε κάθε σύνολο $S_j \in \mathcal{S}$ και να δηλώνει αν το σύνολο αυτό δείχνεται από το I $(j \in I)$, δηλαδή αν έχει επιλεγεί.

Συνεπώς το σύνολο των περιορισμών για ένα στιγμιότυπο του προβλήματος αυτού αποτελείται από n περιορισμούς, έναν για κάθε στοιχείο:

$$\bigcup_{j \in I} S_j, \forall e_i \in E$$

Ο περιορισμός που αντιστοιχεί στο στοιχείο e_i εκφράζει την απαίτηση το στοιχείο αυτό να καλύπτεται από τουλάχιστον ένα επιλεγμένο σύνολο. Οπότε μία λύση για να είναι εφικτή πρέπει να καλύπτει κάθε στοιχείο του E με τουλάχιστον ένα επιλεγμένο σύνολο, δηλαδή πρέπει $\bigcup_{j \in I} S_j = E$.

Η αντικειμενική συνάρτηση είναι η

$$\sum_{j \in I} w_j$$

δηλαδή η τιμή μίας λύσης είναι ίση με το άθροισμα των βαρών όλων των επιλεγμένων συνόλων.

Αν τα βάρη όλων των συνόλων είναι ίσα με 1, τότε το πρόβλημα κάλυψης κορυφών λέγεται αβαρές (unweighted) και η αντικειμενική συνάρτηση είναι ίση με το πλήθος των επιλεγμένων συνόλων.

Στις επόμενες υποενότητες θα γίνει ενασχόληση με τη γενική, έμβαρη εκδοχή του προβλήματος κάλυψης συνόλων.

4.3 Ένα Ακέραιο Πρόγραμμα και η χαλάρωσή του για το πρόβλημα κάλυψης συνόλων

Για την αναπαράσταση ενός στιγμιοτύπου του προβλήματος κάλυψης συνόλων με ένα Ακέραιο Πρόγραμμα (Integer Program, IP) μπορεί να γίνει χρήση m μεταβλητών απόφασης, μίας για κάθε σύνολο $S_i \in \mathcal{S}$. Συγκεκριμένα η μεταβλητή απόφασης $x_j \in \{0,1\}$ αντιστοιχεί στο σύνολο S_j και είναι ίση με 1 αν το σύνολο αυτό είναι επιλεγμένο, διαφορετικά είναι ίση με 0, δηλαδή

$$x_j = \mathbb{1}(j \in I), \forall j \in \{1,2,\ldots,m\}$$

Με βάση αυτές τις μεταβλητές απόφασης μπορεί για το στιγμιότυπο να διατυπωθεί ένα ακέραιο πρόγραμμα, εκφράζοντας την αντικειμενική συνάρτηση και τους περιορισμούς ως γραμμικές συναρτήσεις των μεταβλητών απόφασης.

Η αντικειμενική συνάρτηση είναι η $\sum_{j\in I} w_j$. Με βάση τον ορισμό των μεταβλητών απόφασης που δόθηκε παραπάνω, αυτή μπορεί να γραφεί ισοδύναμα ως

$$\sum_{j\in I} w_j = \sum_{j\in I} w_j \cdot 1 + \sum_{j\notin I} w_j \cdot 0 = \sum_{j\in I} w_j \cdot x_j + \sum_{j\notin I} w_j \cdot x_j = \sum_{j=1}^{m} w_j \cdot x_j$$

δηλαδή η τιμή μίας λύσης είναι και πάλι ίση με το άθροισμα των βαρών των συνόλων $S_j \in \mathcal{S}$ που έχουν επιλεγεί.

Σε ό,τι αφορά τους περιορισμούς, αυτοί που παρουσιάστηκαν στην προηγούμενη ενότητα είναι n και είναι της ακόλουθης μορφής:

$$e_i \in \bigcup_{j\in I} S_j, \forall i$$

Δηλαδή για ένα δεδομένο i πρέπει να έχει επιλεγεί τουλάχιστον ένα σύνολο $S_j \in \mathcal{S}$ που να περιέχει το e_i. Αυτός ο περιορισμός μπορεί να εκφραστεί ισοδύναμα ως

$$\sum_{j:e_i\in S_j} x_j \geq 1, \forall i \in \{1,2,\ldots,n\}$$

Η ισοδυναμία αυτών των εκφράσεων των περιορισμών προκύπτει ως εξής:

- Αν ένα στοιχείο e_i καλύπτεται από ένα σύνολο S_k, τότε $x_k = 1$. Αφού όλα τα x_j είναι μη-αρνητικά ($x_j \in \{0,1\}$) το άθροισμα $\sum_{j:e_i\in S_j} x_j$ είναι μεγαλύτερο ή ίσο του 1.
- Αν ένα στοιχείο e_i δεν καλύπτεται από κανένα σύνολο, τότε πρέπει κανένα σύνολο που περιέχει το e_i να μην έχει επιλεγεί, οπότε $x_j = 0, \forall j : e_i \in S_j$. Επομένως $\sum_{j:e_i\in S_j} x_j = 0 < 1$.

Ωστόσο πρέπει να εισαχθούν και νέοι περιορισμοί που περιορίζουν το σύνολο δυνατών τιμών κάθε μεταβλητής απόφασης στο $\{0,1\}$.

Με βάση τα παραπάνω, το ακέραιο πρόγραμμα που προέκυψε είναι το εξής:

Ελαχιστοποίησε το

$$\sum_{j=1}^{m} w_j \cdot x_j$$

με τους περιορισμούς ότι

$$\sum_{j:e_i \in S_j} x_j \geq 1, \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

$$x_j \in \{0, 1\}, \forall j \in \{1, 2, \ldots, m\}$$

Λύνοντας αυτό το ακέραιο πρόγραμμα, μπορεί με βάση τις τιμές των μεταβλητών απόφασης x_j να κατασκευαστεί μία λύση για το αντίστοιχο στιγμιότυπο του προβλήματος κάλυψης συνόλων θέτοντας $I = \{j \in \{1, 2, \ldots, m\} : x_j = 1\}$. Έστω Z_{IP}^* η βέλτιστη τιμή αυτού του Ακεραίου Προγράμματος. Εφόσον κάθε εφικτή λύση του ακεραίου προγράμματος αντιστοιχεί σε μία εφικτή λύση του προβλήματος κάλυψης συνόλων και αντιστρόφως και εφόσον αντίστοιχες λύσεις έχουν την ίδια τιμή, ισχύει ότι $Z_{IP}^* = OPT$, όπου OPT η βέλτιστη τιμή του στιγμιοτύπου.

Ωστόσο αυτό το ακέραιο πρόγραμμα (όπως και ένα γενικό ακέραιο πρόγραμμα) δεν μπορεί να επιλυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο αν $P \neq NP$, γεγονός λογικό, αφού το πρόβλημα κάλυψης συνόλων είναι NP-hard. Κάθε γραμμικό πρόγραμμα ωστόσο μπορεί να επιλυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο. Αφαιρώντας τον περιορισμό του παραπάνω ακεραίου προγράμματος που απαιτεί οι μεταβλητές απόφασης να είναι ακέραιοι προκύπτει ένα γραμμικό πρόγραμμα που είναι χαλάρωση του ακεραίου προγράμματος.

Ένα γραμμικό πρόγραμμα λέγεται **χαλάρωση** (relaxation) ενός ακεραίου προγράμματος όταν

- έχουν το ίδιο σύνολο μεταβλητών απόφασης,
- κάθε εφικτή λύση του ακεραίου προγράμματος είναι και εφικτή λύση του γραμμικού προγράμματος και
- η τιμή μίας εφικτής λύσης του ακεραίου προγράμματος είναι ίση με την τιμή της ίδιας λύσης του γραμμικού προγράμματος.

Με βάση τα παραπάνω, το γραμμικό πρόγραμμα που προκύπτει είναι το εξής:

Ελαχιστοποίησε το

$$\sum_{j=1}^{m} w_j \cdot x_j$$

με τους περιορισμούς ότι

$$\sum_{j:e_i \in S_j} x_j \geq 1, \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

$$x_j \geq 0, \forall j \in \{1, 2, \ldots, m\}$$

Θα μπορούσαν να προστεθούν και περιορισμοί της μορφής $x_j \leq 1$, ωστόσο αυτοί είναι περιττοί καθώς μία βέλτιστη λύση του γραμμικού προγράμματος για την οποία υπάρχει κάποιο $x_j > 1$ μπορεί να τροποποιηθεί ώστε να ισχύει ότι $x_j = 1$ και αυτό αφενός δεν επηρεάζει την εφικτότητα της λύσης και αφετέρου δεν αυξάνει την τιμή της.

Έστω Z^*_{LP} η βέλτιστη τιμή του γραμμικού αυτού προγράμματος. Επειδή κάθε εφικτή λύση του ακεραίου προγράμματος, άρα και η βέλτιστη, είναι εφικτή και για το γραμμικό πρόβλημα έχοντας την ίδια τιμή, ισχύει ότι $Z^*_{LP} \leq Z^*_{IP} = OPT$.

Παρόλο που το γραμμικό πρόγραμμα λύνεται σε πολυωνυμικό χρόνο, μία βέλτιστη λύση αυτού δεν έχει προφανή αντιστοίχηση σε κάποια λύση του στιγμιοτύπου κάλυψης συνόλων. Ωστόσο υπάρχει ποικιλία τεχνικών που είτε επιτρέπουν τέτοιες αντιστοιχήσεις και δίνουν προσεγγιστικούς αλγορίθμους ή δίνουν προσεγγιστικούς αλγορίθμους των οποίων ο λόγος προσέγγισης μπορεί να αποδειχθεί χρησιμοποιώντας ιδιότητες του γραμμικού προγράμματος.

Κεφάλαιο 5

Multistage Optimization

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται η δουλειά των Gupta et al. [7].

5.1 Από τη Συντήρηση Συνδετικών Δέντρων στη Συντήρηση Συνδετικών Υπογραφημάτων

Δεδομένων πραγματικών αριθμών $c(e)$ για στοιχεία $e \in E$, θα συμβολίζουμε με $c(S)$ το άθροισμα $\sum_{e \in S} c(e)$, όπου $S \subseteq E$. Το σύνολο των χρονικών στιγμών $\{1, 2, \ldots, T\}$ θα το συμβολίζουμε ως $[T]$.

Ορισμός των Προβλημάτων

Συντήρηση Συνδετικού Δέντρου

Ένα στιγμιότυπο του προβλήματος Συντήρησης Συνδετικού Δέντρου (ΣΣΔ) αποτελείται από ένα γράφημα $\mathcal{G}(V, E)$, ένα κόστος απόκτησης $\alpha(e) \geq 0$ για κάθε ακμή $e \in E$, καθώς και ένα κόστος διατήρησης $c_t(e)$ για κάθε χρονική στιγμή $t \in [T]$ και ακμή $e \in E$. Ο στόχος είναι η εύρεση συνδετικών δέντρων $\{T_t\}_{t \in [T]}$, ένα για κάθε χρονική στιγμή, ώστε να ελαχιστοποιείται το συνολικό κόστος

$$\sum_t \left(c_t(T_t) + \alpha(T_t \setminus T_{t-1})\right)$$

όπου ορίζουμε το $T_0 := \emptyset$.

Συντήρηση Συνδετικού Υπογραφήματος

Ένα σχετικό πρόβλημα είναι αυτό της Συντήρησης Συνδετικού Υπογραφήματος (ΣΣΥ), στο οποίο θέλουμε να συντηρήσουμε ένα συνδετικό υπογράφημα $S_t \subseteq E$ σε κάθε χρονική στιγμή και το κόστος της λύσης $\{S_t\}_{t \in T}$ είναι

$$\sum_t (c_t(S_t) + \alpha(S_t \setminus S_{t-1}))$$

θεωρώντας ομοίως με πριν ότι $S_0 := \emptyset$.

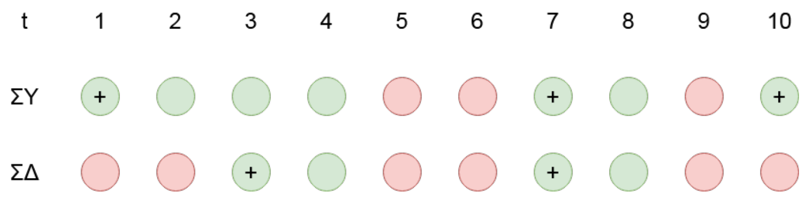
Συντήρηση Συνδετικών Δέντρων vs Συντήρηση Συνδετικών Υπογραφημάτων

Το ακόλουθο Λήμμα δείχνει την ισοδυναμία της συντήρησης συνδετικών δέντρων και υπογραφημάτων, απλουστεύοντας σημαντικά το προς επίλυση πρόβλημα.

Λήμμα 5.1. *Για γραφήματα οι βέλτιστες λύσεις για ΣΣΔ και ΣΣΥ έχουν ίσα κόστη.*

Απόδειξη. Προφανώς κάθε λύση για τη ΣΣΔ αποτελεί λύση και για τη ΣΣΥ, αφού κάθε συνδετικό δέντρο ενός γραφήματος είναι ταυτόχρονα και συνδετικό υπογράφημα. Αντίστροφα, θεωρούμε μία λύση $\{S_t\}$ για ένα στιγμιότυπο της ΣΣΥ. Θέτουμε ως T_1 ένα οποιοδήποτε συνδετικό δέντρο του οποίου οι ακμές είναι υποσύνολο αυτών του S_1 ($T_1 \subseteq S_1$). Δοθέντος του $T_{t-1} \subseteq S_{t-1}$, μπορούμε να αρχίσουμε από το $T_{t-1} \cap S_t$, το οποίο αποτελεί δάσος και είναι υποσύνολο του συνδετικού υπογραφήματος S_t, και να το επεκτείνουμε προσθέτοντάς του ακμές του S_t καταλήγοντας σε ένα συνδετικό δέντρο $T_t \subseteq S_t$ (το ακυκλικό γράφημα $T_{t-1} \cap S_t$ μπορεί να επεκταθεί σε δέντρο). Με την παραπάνω διαδικασία από τη λύση $\{S_t\}$ για τη ΣΣΥ προκύπτει μία λύση $\{T_t\}$ για τη ΣΣΔ. Φαίνεται ότι για τον υπολογισμό του T_t απαιτείται η γνώση μόνο του T_{t-1} και του S_t, συνεπώς η μετατροπή της λύσης μπορεί να γίνει με online τρόπο.

Θα δειχθεί ότι το συνολικό κόστος της προκύπτουσας λύσης $\{T_t\}$ για τη ΣΣΔ δεν υπερβαίνει αυτό της λύσης $\{S_t\}$ για τη ΣΣΥ. Πράγματι το κόστος διστήρησης των ακμών της λύσης για τη ΣΣΔ είναι το πολύ όσο αυτό της διατήρησης ακμών για τη ΣΣΥ για κάθε χρονική στιγμή, δηλαδή $c_t(T_t) \leq c_t(S_t)$, αφού $T_t \subseteq S_t$. Ακόμη ορίζοντας για κάθε χρονική στιγμή το $D := B_t \setminus B_{t-1}$, το κόστος απόκτησης για τις νεοπροστεθείσες ακμές είναι $\sum_{e \in D} \alpha(e)$. Η χρέωση του ποσού αυτού μπορεί να γίνει για κάθε ακμή $e \in D$ ανεξάρτητα. Συγκεκριμένα θεωρώντας οποιαδήποτε ακμή $e \in D$, ορίζεται ως $t^* \leq t$ η χρονική στιγμή που η ακμή αυτή προστέθηκε πιο πρόσφατα στη λύση της ΣΣΥ, δηλαδή $e \in S_{t'}$ για κάθε $t' \in [t^*, t]$, αλλά $e \notin S_{t^*-1}$. Η λύση για τη ΣΣΥ πλήρωσε το κόστος απόκτησης της ακμής e τη χρονική στιγμή t^* και η χρέωση του ποσού απόκτησης της ακμής αυτής από το T_t μπορεί να γίνει σε αυτό το ζεύγος (e, t^*). Αρκεί να παρατηρηθεί ότι δε θα ξαναγίνει χρέωση του ζεύγους αυτού, επειδή η διαδικασία παραγωγής της λύσης $\{T_t\}$ που περιγράφηκε προηγουμένως δε θα αφαιρέσει την ακμή από το συνδετικό δέντρο της λύσης καμία χρονική στιγμή, μέχρις ότου να αφαιρεθεί από το συνδετικό υπογράφημα της λύσης της ΣΣΥ. Ή διαίσθηση μέρους της απόδειξης οπτικοποιείται στο σχήμα 5.1. □



Σχήμα 5.1: Οπτικοποίηση αντιστοίχησης κοστών μεταξύ ΣΣΔ και ΣΣΥ

Συνεπώς για τον υπολογισμό μίας βέλτιστης λύσης για ένα στιγμιότυπο της ΣΣΔ, αρκεί να υπολογιστεί μία βέλτιστη λύση για το αντίστοιχο στιγμιότυπο της ΣΣΥ και στη συνέχεια να χρησιμοποιηθεί η παραπάνω διαδικασία μετατροπής, καθώς αν υπήρχε καλύτερη λύση για το στιγμιότυπο ΣΣΔ αυτή θα ήταν και λύση για αυτό της ΣΣΥ, καλύτερη από τη βέλτιστη και θα είχαμε αντίφαση. Η παραπάνω απόδειξη χρησιμοποιεί την ιδιότητα των matroids (το δάσος μπορεί να επεκταθεί σε δέντρο) και δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για matchings. Επίσης απαιτεί το γράφημα να είναι ίδιο κάθε χρονική στιγμή. Ακόμη, όπως επισημάνθηκε και παραπάνω, η διαδικασία μετατροπής λύσης είναι online. Το στιγμιότυπο είναι κοινό και μία λύση της ΣΣΥ μπορεί να μετατραπεί online σε μία λύση της ΣΣΔ.

Ακμές και Διαστήματα

Θα φανεί βολική η αντιμετώπιση ενός στιγμιοτύπου της ΣΣΥ σαν να ήταν ένα γράφημα $\mathcal{G}$, όπου κάθε ακμή θα είχε μόνο κόστος απόκτησης $\alpha(e) \geq 0$ και διάρκεια ζωής ένα χρονικό διάστημα $I_e = [l_e, r_e]$. Δεν υπάρχουν κόστη διατήρησης των ακμών, όμως η ακμή e μπορεί να χρησιμοποιείται από συνδετικά υπογραφήματα μόνο κατά τις χρονικές στιγμές $t \in I_e$. Ισοδύναμα μπορεί να θεωρηθεί ότι το κόστος διατήρησης της ακμής αυτής είναι 0 για $t \in I_e$ και $+\infty$ για τις υπόλοιπες χρονικές στιγμές.

Μία ακριβής offline αναγωγή. Η μετατροπή είναι η φυσική: δεδομένου ενός στιγμιοτύπου $\mathcal{G}(V, E)$ της ΣΣΥ, δημιουργούνται ακμές e_{lr} για κάθε $e \in E$ και $1 \leq l \leq r \leq T$, με κόστος απόκτησης $\alpha(e_{lr}) := \alpha(e) + \sum_{t=l}^{r} c_t(e)$, καθώς και διάστημα ζωής $I_{e_{lr}} := [l, r]$. (Η επέκταση του γραφήματος γίνεται με φυσικό τρόπο, όλες οι ακμές e_{lr} που σχετίζονται με την e είναι παράλληλες μεταξύ τους.) Η ισοδυναμία του αρχικού ορισμού του προβλήματος ΣΣΥ και αυτής της παραλλαγής με τα διαστήματα είναι εύκολο να επιβεβαιωθεί.

Μία προσεγγιστική online αναγωγή. Η παραπάνω αναγωγή δημιούργησε $\frac{T(T+1)}{2}$ αντίγραφα για κάθε ακμή, απαιτώντας τη γνώση από όλα τα κόστη. Εάν είναι ανεκτή η απώλεια ενός σταθερού παράγοντα προσέγγισης, τότε μπορεί να γίνει αναγωγή στο μοντέλο με τα διαστήματα με online τρόπο, όπως περιγράφεται παρακάτω. Για κάθε ακμή $e \in E$ ορίζεται ότι $t_0 = 0$ και δημιουργούνται παράλληλα αντίγραφα $\{e_i\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ της ακμής (με το γράφημα να τροποποιείται κατάλληλα). Τώρα το i-οστό διάστημα της ακμής e είναι το $I_{e_i} := [t_{i-1} + 1, t_i]$, όπου το t_i τίθεται ίσο με $t_{i-1} + 1$ σε περίπτωση που $c_{t_{i-1}} \geq \alpha(e)$, διαφορετικά τίθεται ίσο με τη μέγιστη χρονική στιγμή ώστε το συνολικό κόστος διατήρησης $\sum_{t=t_{i-1}+1}^{t_i} c_t(e)$ για το διάστημα $[t_{i-1}+1, t_i]$ να είναι το πολύ $\alpha(e)$. Το διάστημα I_{e_i} σχετίζεται με την ακμή e_i, η οποία είναι διαθέσιμη μόνο για το διάστημα αυτό, με κόστος $\alpha(e_i) = \alpha(e) + c_{t_{i-1}+1}(e)$.

Ορισμένα εμφανή σημεία σχετικά με την τελευταία αναγωγή: τα διαστήματα για μία αρχική ακμή e τώρα διαμερίζουν ολόκληρο το χρονικό ορίζοντα $[T]$. Το πλήθος των ακμών στο τροποποιημένο γράφημα που τα διαστήματά του περιέχουν κάποια χρονική στιγμή t τώρα είναι μόνο $|E| = m$, όσο και στο αρχικό γράφημα, με κάθε ακμή στο τροποποιημένο γράφημα να είναι διαθέσιμη για ένα μόνο διάστημα. Επιπλέον, η αναγωγή μπορεί να γίνει online: δεδομένης της γνώσης του παρελθόντος και του κόστους διατήρησης για μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή t, προκύπτει αν η στιγμή t θα αποτελεί έναρξη κάποιου νέου διαστήματος (στην περίπτωση αυτή το προηγούμενο διάστημα έληξε τη στιγμή $t-1$) και σε αυτήν την περίπτωση το κόστος απόκτησης ενός νέου αντιγράφου της e για το νέο διάστημα είναι $\alpha(e) + c_t(e)$. Μπορεί να επαληθευτεί ότι το βέλτιστο κόστος για αυτό το μοντέλο διαστημάτων είναι εντός ενός σταθερού παράγοντα ως προς το βέλτιστο κόστος για το αρχικό μοντέλο (συγκεκριμένα το βέλτιστο κόστος του τροποποιημένου μοντέλου είναι τουλάχιστον το μισό του βέλτιστου κόστους του αρχικού μοντέλου).

5.2 Offline Αλγόριθμοι

Δεδομένων των αναγωγών της προηγούμενης ενότητας μπορεί να γίνει εστίαση στο πρόβλημα ΣΣΥ. Όντας ένα πρόβλημα κάλυψης, το πρόβλημα ΣΣΥ είναι ουσιαστικά ευκολότερο να λυθεί: π.χ. είναι εφικτή η χρήση αλγορίθμων για το submodular set cover με τη submodular συνάρτηση να είναι ίση με $rank(S_t) = |V| - \#cc_t$ (όπου $\#cc_t$ είναι το πλήθος των συνεκτικών συνιστωσών) σε κάθε χρονική στιγμή, ώστε να κατασκευαστεί μία $O(\log T)$ προσέγγιση.

Στην ενότητα 5.4 παρατίθεται μία απόδειξη dual-fitting για την απόδοση του άπληστου αλγορίθμου. Εδώ παρατίθεται ένας αλγόριθμος LP-rounding που προσφέρει μία $O(\log(rT))$ προσέγγιση η οποία μπορεί να βελτιωθεί σε $O(\log r)$ στη συχνή περίπτωση όπου όλα τα κόστη απόκτησης ακμών είναι μοναδιαία (ή γενικότερα ίσα με κάποια θετική σταθερά). (Ενώ η εγγύηση προσέγγισης δεν είναι καλύτερη από αυτή του submodular set cover, αυτός ο αλγόριθμος LP-rounding είναι χρήσιμος για την online περίπτωση της ενότητας 5.3). Τέλος, τα αποτελέσματα δυσκολίας της υποενότητας 5.2.2 δείχνουν ότι δε γίνεται να υπάρξει προσέγγιση καλύτερη από τη λογαριθμική (για τη γενική περίπτωση που δεν υπάρχει περιορισμός ισότητας για τα κόστη απόκτησης των ακμών).

5.2.1 Ο Αλγόριθμος LP Rounding

Παρακάτω θα αναλυθεί ένας αλγόριθμος LP-rounding για το πρόβλημα ΣΣΔ, ο οποίος μπορεί να γενικευτεί για την online περίπτωση, ενώ δεν είναι γνωστό το αν και πώς η γενίκευση αυτή μπορεί να γίνει και για τον άπληστο αλγόριθμο. Για το LP rounding, γίνεται χρήση του καθιερωμένου ορισμού του προβλήματος ΣΣΔ ώστε να γραφεί η ακόλουθη LP χαλάρωση (LP2).

$$min \sum_{t,e} \alpha(e) \cdot y_t(e) + \sum_{t,e} c_t(e) \cdot z_t(e)$$

$$\text{s.t.}$$

$$z_t \in \mathcal{P}_B(\mathcal{M}), \forall t$$

$$y_t(e) \geq z_t(e) - z_{t-1}(e), \forall t, e$$

$$y_t(e), z_t(e) \geq 0$$

Απομένει να γίνει rounding της λύσης για να ληφθεί μία εφικτή λύση της ΣΣΥ (δηλαδή ένα συνδετικό υπογράφημα S_t για κάθε χρονική στιγμή) με αναμενόμενο κόστος το πολύ $O(\log(rT))$ φορές την τιμή του LP, αφού με χρήση του Λήμματος 5.1 μπορεί η λύση αυτή να μετατραπεί σε λύση της ΣΣΔ χωρίς επιπλέον κόστος. Το ακόλουθο Λήμμα είναι γνωστό και η απόδειξη δίνεται για λόγους πληρότητας.

Λήμμα 5.2. *Για μία κλασματική βάση/δέντρο $z \in \mathcal{P}_B(\mathcal{G})$, έστω ότι $R(z)$ είναι ο υπογράφος που προκύπτει επιλέγοντας την κάθε ακμή $e \in E$ ανεξάρτητα με πιθανότητα z_e. Τότε $E[rank(R(z))] \geq r(1-1/e)$.*

Απόδειξη. Γίνεται χρήση των αποτελεσμάτων των Chekuri et al. [4] (που επεκτείνουν αυτά των Chawla et al. [3]) στα αποκαλούμενα σχήματα επίλυσης συγκρούσεων (contention resolution schemes, CR schemes). Συγκεκριμένα, για ένα γράφημα $\mathcal{G}$ δίνουν μία τυχαιοποιημένη διαδικασία π_z που λαμβάνει το τυχαίο σύνολο ακμών $R(z)$ και επιστρέφει ένα δάσος $\pi_z(R(z))$ στο γράφημα $\mathcal{G}$, τέτοιο ώστε $\pi_z(R(z)) \subseteq R(z)$, και για κάθε ακμή e της υποστήριξης του z (δηλαδή του συνόλου των ακμών που αντιστοιχούν σε θετικά στοιχεία του διανύσματος z) να ισχύει ότι $Pr[e \in \pi_z(R(z)) | e \in R(z)] \geq (1-1/e)$. (Αυτό ονομάζεται $(1, 1-1/e)$-ισορροπημένο CR σχήμα). Έχουμε λοιπόν ότι

$$\mathbf{E}[rank(R(z))] \geq \mathbf{E}[rank(\pi_z(R(z)))] = \sum_{e \in supp(z)} Pr[e \in \pi_z(R(z))]$$

$$= \sum_{e \in supp(z)} Pr[e \in \pi_z(R(z)) | e \in R(z)] \cdot Pr[e \in R(z)]$$

$$\geq \sum_{e \in supp(z)} (1-1/e) \cdot z_e = r(1-1/e)$$

Η πρώτη ανισότητα χρησιμοποιεί το γεγονός ότι το $\pi_z(R(z))$ είναι υποσύνολο του $R(z)$ (άρα δεν έχει μεγαλύτερο rank από αυτό), η επόμενη ισότητα χρησιμοποιεί το ότι το σύνολο $\pi_z(R(z))$ είναι δάσος με πιθανότητα 1, η δεύτερη ανισότητα χρησιμοποιεί την ιδιότητα των CR σχημάτων και η τελευταία ισότητα χρησιμοποιεί το γεγονός ότι το διάνυσμα z είναι μία κλασματική βάση/δέντρο. □

Θεώρημα 5.3. *Κάθε κλασματική λύση μπορεί να στρογγυλοποιηθεί τυχαιοποιημένα ώστε να δώσει λύση στη ΣΣΥ με κόστος $O(\log(rT))$ φορές την κλασματική τιμή, όπου r είναι το rank του γραφήματος ($|V| - cc$) και T το πλήθος των χρονικών στιγμών.*

Απόδειξη. Έστω $L = 32\log(rT)$. Για κάθε ακμή $e \in E$, επιλέγουμε ένα τυχαίο κατώφλι τ_e ανεξάρτητα και ομοιόμορφα από το διάστημα $[0, 1/L]$. Για κάθε χρονική στιγμή $t \in [T]$, ορίζουμε το σύνολο ακμών $\hat{S}_t := \{e \in E | z_t(e) \geq \tau_e\}$. Αν το $\hat{S}_t$ δεν αποτελεί συνδετικό υπογράφημα το επαυξάνουμε χρησιμοποιώντας τις φτηνότερες ακμές σύμφωνα με το $(c_t(e) + \alpha(e))$ για να αποκτήσουμε ένα συνδετικό υπογράφημα S_t. Η απόδειξη αποτελείται από δύο σκέλη: Στο πρώτο δείχνουμε ότι τα υπογραφήματα που προκύπτουν με βάση το κατώφλι έχουν το πολύ L φορές αυτό του γραμμικού προγράμματος, ενώ στο δεύτερο δείχνουμε ότι η επαύξηση που μπορεί να απαιτηθεί για μία χρονική στιγμή έχει κόστος το πολύ όσο αυτό του γραμμικού προγράμματος, γεγονός που σε συνδυασμό με τη μικρή πιθανότητα που υπάρχει να χρειαστεί αυτό καθιστά την αναμενόμενη αύξηση του κόστους το πολύ σταθερό πολλαπλάσιο του κόστους του γραμμικού προγράμματος. Συνδυάζοντας τα δύο σκέλη φαίνεται ότι ο λόγος προσέγγισης είναι ο επιθυμητός. Ακολουθούν οι σχετικές αποδείξεις.

Αφού $Pr[e \in \hat{S}_t] = min\{L \cdot z_t(e), 1\}$, ισχύει ότι $c_t(\hat{S}_t) \leq L \times (c_t \cdot z_t)$. Ακόμη, ισχύει ότι $e \in \hat{S}_t \setminus \hat{S}_{t-1}$ ακριβώς όποτε το κατώφλι τ_e ικανοποιεί την ανισότητα $z_{t-1}(e) < \tau_e < z_t(e)$, το οποίο συμβαίνει με πιθανότητα

$$\frac{\max(z_t(e) - z_{t-1}(e), 0)}{1/L} \leq L \cdot y_t(e)$$

Συνεπώς το αναμενόμενο κόστος απόκτησης όλων των ακμών που μόλις προστέθηκαν στο $\hat{S}_t$ είναι το πολύ $L \times \sum_e (\alpha(e) \cdot y_t(e))$. Τέλος πρέπει να προσμετρηθεί κάθε ακμή που χρησιμοποιείται για να επαυξηθεί το υπογράφημα $\hat{S}_t$ στο συνδετικό S_t. □

Λήμμα 5.4. *Για κάθε σταθερή χρονική στιγμή $t \in [T]$, ο υπογράφος $\hat{S}_t$ περιέχει ένα συνδετικό δέντρο με πιθανότητα τουλάχιστον $1 - 1/(rT)^8$.*

Απόδειξη. Ο υπογράφος $\hat{S}_t$ προκύπτει με στρογγυλοποίηση κατωφλιού της κλασματικής βάσης/δέντρου $z_t \in \mathcal{P}_B(\mathcal{G})$ σύμφωνα με τα παραπάνω. Αντί αυτού, ας θεωρηθεί ότι λαμβάνονται L διαφορετικά δείγματα $T^{(1)}, T^{(2)}, \ldots, T^{(L)}$, καθένα από τα οποία είναι ένας υπογράφος που προκύπτει συμπεριλαμβάνοντας κάθε ακμή $e \in E$ ανεξάρτητα με πιθανότητα $z_t(e)$, ενώ ορίζεται το $T := \bigcup_{i=1}^{L} T^{(i)}$. Μπορεί εύκολα να δειχθεί ότι $Pr[rank(T) = r] \leq Pr[rank(\hat{S}_t) = r]$ (για κάθε ακμή η πιθανότητα να ανήκει στο $\hat{S}_t$ είναι τουλάχιστον όση αυτή του να ανήκει στο T), οπότε αρκεί να προσδιοριστεί ένα κάτω όριο για τον πρώτο όρο της προηγούμενης ανισότητας. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιείται το Λήμμα 5.2: το δείγμα $T^{(1)}$ έχει αναμενόμενο rank ίσο με $r(1-1/e)$ και χρησιμοποιώντας την αντίστροφη ανισότητα Markov προκύπτει ότι έχει rank $r/2$ με πιθανότητα τουλάχιστον $1 - 2/e \geq 1/4$. Έστω $\mathcal{G}'$ το γράφημα που προκύπτει συγχωνεύοντας τις κορυφές που ενώνονται με ακμή του $T^{(1)}$ (που έστω ότι έχει rank ίσο με r'), οπότε με το ίδιο επιχείρημα προκύπτει ότι το $T^{(2)}$ έχει rank $r'/2$ με πιθανότητα τουλάχιστον $1/4$ κ.λπ.. Με άλλα λόγια κάθε δείγμα οδηγεί σε υποδιπλασιασμό του εναπομείναντος rank με πιθανότητα τουλάχιστον $1/4$. Έτσι η πιθανότητα το T να έχει rank μικρότερο του r είναι το πολύ όση η πιθανότητα να έρθουν $\log_2 r$ κορώνες σε $L = 32\log(rT)$ ρίψεις νομισμάτων με πιθανότητα κορώνας ίση με $1/4$. Κάνοντας χρήση Chernoff bound, η πιθανότητα αυτή είναι το πολύ $exp\{-(7/8)^2 \cdot (L/4)/3\} = 1/(rT)^8$.

Αν ο υπογράφος $\hat{S}_t$ δεν είναι συνδετικός, τότε οι ακμές που προστίθενται κοστίζουν, με βάση τον τρόπο επιλογής τους, το πολύ όσο το φθηνότερο συνδετικό δέντρο με βάση τη συνάρτηση κόστους $(\alpha(e) + c_t(e))$, η οποία έχει το πολύ το κόστος της βέλτιστης λύσης του γραμμικού προγράμματος. Αυτό συμβαίνει με πιθανότητα το πολύ $1/(rT)^8$, επομένως το αναμενόμενο συνολικό κόστος επάυξησης των $\hat{S}_t$ για όλες τις χρονικές στιγμές είναι το πολύ $O(1)$ φορές το κόστος του γραμμικού προγράμματος. Με βάση λοιπόν τα αναμενόμενα κόστη των υπογράφων $\hat{S}_t$ και αυτά της επαύξησής τους ώστε να γίνουν συνδετικοί που υπολογίστηκαν, αποδείχθηκε η ισχύς του Θεωρήματος 5.3. □

Ο αλγόριθμος για τη ΣΣΥ δουλεύει και όταν το γράφημα διαφέρει σε κάθε χρονική στιγμή, καθώς και για τις τομές γράφων (πρέπει να επιλέγουμε ακμές ώστε να λαμβάνουμε συνδετικό υπογράφημα για κάθε γράφημα της τομής). Αυτό φαίνεται από το γεγονός ότι οι μόνες απαιτήσεις του αλγορίθμου είναι να υπάρχει ένα separation oracle για το πολύτοπο και να λητουργεί το σχήμα επίλυσης συγκρούσεων. Στην περίπτωση της τομής k γράφων με την πληρωμή ενός επιπλέον κόστους $O(\log k)$ στο λόγο προσέγγισης προκύπτει ότι το αποτέλεσμα της στρογγυλοποίησης μίας λύσης του γραμμικού προγράμματος δεν είναι συνδετική με πιθανότητα $< 1/k$, οπότε μπορεί να γίνει χρήση union bound πάνω στα διαφορετικά γραφήματα της τομής.

Μία βελτίωση: Αποφεύγοντας την εξάρτηση από το T. Όταν ο λόγος του μέγιστου προς το ελάχιστο κόστος απόκτησης ακμής είναι μικρός, ο παραπάνω λόγος προσέγγισης μπορεί να βελτιωθεί. Συγκεκριμένα αποδεικνύεται ότι ο ίδιος αλγόριθμος τυχαιοποιημένης στρογγυλοποίησης (με διαφορετική επιλογή του L) γίνει λόγο προσέγγισης $\log \frac{r\alpha_{max}}{\alpha_{min}}$. Η σχετική απόδειξη αναβάλεται για την υποενότητα 5.3.2, καθώς απαιτεί μερικούς επιπλέον ορισμούς και αποτελέσματα που παρουσιάζονται στην ενότητα για την online μορφή του προβλήματος.

5.2.2 Απόδειξη δυσκολίας για το offline πρόβλημα ΣΣΥ

Θεώρημα 5.5. *Τα προβλήματα ΣΣΥ και ΣΣΔ είναι NP-hard δύσκολο να προσεγγιστούν καλύτερα από* $\Omega(\min\{\log r, \log T\})$.

Απόδειξη. Θα παρουσιαστεί μία αναγωγή από το πρόβλημα Set Cover στη ΣΣΥ. Δοθέντος ενός στιγμιοτύπου $(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ για set cover, με $m = |\mathcal{F}|$ σύνολα και $n = |\mathcal{U}|$ στοιχεία, κατασκευάζουμε ένα γράφημα όπως περιγράφεται παρακάτω. Υπάρχει μία ειδική κορυφή r και m κορυφές συνόλων (με την κορυφή s_i να αντιστοιχεί στο σύνολο $S_i \in F$). Υπάρχουν m ακμές $e_i := (r, s_i)$ που όλες τους έχουν κόστος απόκτησης $\alpha(e_i) = 1$ και κόστος διατήρησης $c_t(e_i) = 0$ για κάθε χρονική στιγμή t. Όλες οι υπόλοιπες ακμές θα έχουν μηδενικό κόστος απόκτησης και διατήρησης αλλά θα είναι ζωντανές μόνο για μία χρονική στιγμή η καθεμία (για όλες τις υπόλοιπες χρονικές στιγμές έχουν άπειρο κόστος διατήρησης), όπως περιγράφεται στη συνέχεια. Συγκεκριμένα υπάρχουν $T = n$ χρονικές στιγμές, μία για κάθε στοιχείο του set cover. Τη χρονική στιγμή $j \in [n]$, ορίζεται το υποσύνολο $F_j := \{s_i | S_i \ni u_j\}$ των κορυφών που αντιστοιχούν σε σύνολα που περιέχουν το στοιχείο u_j. Το γράφημα έχει επίσης ένα σύνολο ακμών $(e_i, e_{i'})$ για κάθε $i, i' \in F_j$, καθώς και ακμές (x, y) για όλα τα $x, y \in \{r\} \cup \overline{F_j}$. Όλες αυτές οι ακμές έχουν μηδενικό κόστος απόκτησης $\alpha(e)$ και είναι διαθέσιμες μόνο τη χρονική στιγμή j. (Αυτό δημιουργεί ένα γράφημα με παράλληλες ακμές, κάτι που μπορεί να διορθωθεί υποδιαιρώντας τις.)

Σε κάθε λύση αυτού του προβλήματος, για να συνδεθούν οι κορυφές του F_j με την r, πρέπει να περιέχεται κάποια ακμή (r, s_i) για κάποιο $s_i \in F_j$. Αυτό αληθεύει για όλα τα j, επομένως οι ακμές ρίζας-κορυφών συνόλων αποτελούν ένα set cover. Επίσης επαληθεύεται εύκολα ότι αν αποκτηθούν ακμές (r, s_i) τέτοιες ώστε τα σύνολα $\{S_i : (r, s_i) acquired\}$ να σχηματίζουν ένα set cover, τότε με χρήση ακμών μηδενικού κόστους μπορεί να επαυξηθούν οι επιλεχθείσες ακμές ώστε να προκύψει συνδετικό δέντρο. Αφού οι μόνες ακμές που συμμετέχουν στο κόστος είναι οι (r, s_i), η αγορά ακμών πρέπει να γίνει με ώστε η λύση να αντιστοιχεί σε set cover ελάχιστης πληθικότητας, πρόβλημα που είναι δύσκολο να προσεγγιστεί καλύτερα από $\Omega(\log n)$. Αφού λοιπόν το πλήθος των χρονικών στιγμών είναι $T = n$ και το rank του γραφήματος είναι $m = poly(n)$ για αυτά τα δύσκολα στιγμιότυπα, προκύπτει η δυσκολία που αναφέρεται στο Θεώρημα 5.3.3. $\square$

5.3 Online ΣΣΥ

Τώρα θα εξεταστεί το πρόβλημα ΣΣΔ στην online περίπτωση. Σε αυτήν την περίπτωση τα κόστη απόκτησης των ακμών $\alpha(e)$ είναι γνωστά εξ αρχής, ωστόσο τα κόστη διατήρησης $c_t(e)$ για τη μέρα t δεν είναι γνωστά πριν από τη μέρα αυτή. Από το γεγονός ότι η ισοδυναμία μεταξύ των προβλημάτων ΣΣΔ και ΣΣΥ που αποδείχθηκε στο Λήμμα 5.1 ισχύει και για την online περίπτωση, προκύπτει ότι αρκεί να επιλυθεί η ΣΣΥ. Θα δειχθεί ότι η online ΣΣΥ επιδέχεται έναν $O(\log |E| \log(rT))$-competitive τυχαιοποιημένο αλγόριθμο. Για το σκοπό αυτό θα δειχθεί ότι μπορεί να βρεθεί μία $O(\log |E|)$-competitive κλασματική λύση της χαλάρωσης γραμμικού προγράμματος της ενότητας 5.2 και στη συνέχεια αυτή η χαλάρωση LP μπορεί να στρογγυλοποιηθεί online, χάνοντας ακόμη έναν λογαριθμικό παράγοντα προσέγγισης.

5.3.1 Επιλύοντας τις LP χαλαρώσεις online

Και πάλι η εργασία γίνεται πάνω στο μοντέλο διαστημάτων που περιγράφηκε στην ενότητα 5.1. Στο μοντέλο αυτό για κάθε ακμή e υπάρχει ένα διάστημα $I_e \subseteq [T]$ κατά το οποίο αυτή είναι ζωντανή. Η ακμή e έχει ένα κόστος απόκτησης e, αλλά κανένα κόστος διατήρησης. Από τη στιγμή που μία ακμή αποκτιέται (κάτι που μπορεί να γίνει οποιαδήποτε στιγμή κατά το διάστημα ζωής της), μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε όλες τις στιγμές του διαστήματος αυτού, αλλά όχι μετά το πέρας του. Στην online περίπτωση κάθε στιγμή t γίνεται γνωστό ποια διαστήματα έληξαν (και ποια όχι), καθώς και ποιες ακμές e μόλις έγιναν διαθέσιμες, μαζί με τα κόστη απόκτησής τους $\alpha(e)$. Φυσικά δεν είναι γνωστό πότε το κάθε διάστημα I_e θα λήξει, μέχρις ότου αυτό να συμβεί.

Θα χρησιμοποιηθεί το ίδιο γραμμικό πρόγραμμα με την υποενότητα 5.2.1, όμως τώρα πρέπει να λύνεται online. Η μεταβλητή x_e δηλώνει αν αποκτιέται η ακμή e. (LP3):

$$P := \min \sum_e \alpha(e) \cdot x_e$$

$$s.t. z_{et} \in \mathcal{P}_B(\mathcal{G}), \forall t$$

$$z_{et} \leq x_e, \forall e, t \in I_e$$

$$x_e, z_{et} \in [0, 1]$$

Αυτό δεν είναι ένα γραμμικό πρόγραμμα packing η covering, γεγονός που καθιστά δυσκολότερη την επίλυσή του. Για το λόγο αυτό παρουσιάζεται μία ελαφρώς τροποποιημένη ισοδύναμη διατύπωσή του. Έστω $\mathcal{P}_{ss}(\mathcal{G})$ το πολύτοπο συνδετικών υπογράφων που ορίζεται ως το κυρτό περίβλημα των συνδετικών υπογράφων $\{\chi_S | S \subseteq E, rank(S) = r\}$. Αφού κάθε συνδετικός υπογράφος περιέχει ένα συνδετικό δέντρο, οι περιορισμοί του παραπάνω γραμμικού προγράμματος μπορούν να συνοψιστούν ως εξής:

$$\mathbf{x}_{E_t} \in \mathcal{P}_{ss}(\mathcal{G}), \forall t$$

όπου $E_t = \{e : t \in I_e\}$.

Στον παραπάνω περιορισμό, αν S είναι ένα σύνολο ακμών, τότε ως $\mathbf{x}_S$ ορίζεται το διάνυσμα που προκύπτει από το διάνυσμα $\mathbf{x}$ μηδενίζοντας τις τιμές x_e για τις ακμές $e \notin S$. Είναι γνωστό ότι το πολύτοπο $\mathcal{P}_{ss}(\mathcal{G})$ μπορεί να γραφτεί ως ένα αρκετά μεγάλο σύνολο από covering περιορισμούς. Πράγματι $\mathbf{x} \in \mathcal{P}_{ss}(\mathcal{G}) \iff (\mathbf{1} - \mathbf{x}) \in \mathcal{P}_I(\mathcal{G}^*)$, όπου $\mathcal{G}^*$ είναι το δυϊκό matroid του γραφήματος $\mathcal{G}$. Αφού η συνάρτηση rank του $\mathcal{G}^*$ δίνεται από τον τύπο $r^*(S) = r(E \setminus S) + |S| - r(E)$, προκύπτει ότι ο παραπάνω περιορισμός μπορεί να γραφεί ως (LP4)

$$\sum_{e \in S} x_e \geq r(E) - r(E \setminus S), \forall t, \forall S \subseteq E_t$$

$$x_e \geq 0, \forall e \in E$$

$$x_e \leq 1, \forall e \in E$$

Επομένως προέκυψε ένα γραμμικό πρόγραμμα covering με box περιορισμούς (περιορισμός εύρους τιμών μεταβλητών) πάνω στο E. Οι περιορισμοί μπορούν να παρουσιάζονται ένας-ένας: τη χρονική στιγμή t παρουσιάζονται όλοι οι περιορισμοί covering που αντιστοιχούν στο E_t. Τα γενικά αποτελέσματα των Buchbinder και Naor [2] (και οι επεκτάσεις τους στα covering προβλήματα που είναι αραιά ως προς τις γραμμές) έχουν ως αποτέλεσμα έναν ντετερμινιστικό αλγόριθμο για την online κλασματική επίλυση αυτού του γραμμικού προγράμματος, με competitive λόγο $O(\log |E|) = O(\log m)$. Ωστόσο, ο αλγόριθμος αυτός δεν είναι πολυωνυμικού χρόνου, καθώς το πλήθος των περιορισμών για κάθε χρονική στιγμή είναι εκθετικό (ως προς το πλήθος των ακμών). Στη συνέχεια παρουσιάζεται ένας προσαρμοζόμενος αλγόριθμος που παράγει ένα μικρό (πολυωνυμικού μεγέθους) σύνολο περιορισμών που είναι επαρκείς (αν ικανοποιούνται η δοθείσα λύση είναι εφικτή).

Επιλύοντας το LP online σε γραμμικό χρόνο. Δοθέντος ενός διανύσματος $\mathbf{x} \in [0,1]^E$, το διάνυσμα $\widetilde{\mathbf{x}}$ ορίζεται ως εξής:

$$\widetilde{x}_e = \min(2x_e, 1), \forall e \in E$$

Προφανώς $\widetilde{\mathbf{x}} \leq 2\mathbf{x}$ και $\widetilde{\mathbf{x}} \in [0,1]^E$. Στη συνέχεια περιγράφεται ένας αλγόριθμος που παράγει περιορισμούς covering τη χρονική στιγμή t. Οι Buchbinder και Naor [2] έδωσαν έναν online αλγόριθμο $\mathcal{A}_{onLP}$ για την επίλυση ενός κλασματικού covering LP με box περιορισμούς, ο οποίος στη συνέχεια θα χρησιμοποιηθεί σαν μαύρο κουτί. (Ο αλγόριθμος αυτός μόνο αυξάνει τις τιμές των μεταβλητών, γεγονός που θα χρησιμοποιηθεί.) Τη χρονική στιγμή t επιλέγεται με προσαρμοστικό τρόπο ένα μικρό υποσύνολο περιορισμών covering του (LP4) και παρουσιάζεται στον $\mathcal{A}_{onLP}$. Επίσης, δοθείσας μίας κλασματικής λύσης που επιστράφηκε από τον $\mathcal{A}_{onLP}$, απαιτείται μικρή τροποποίησή της ώστε να προκύψει μία λύση που ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς του (LP4) για τη χρονική στιγμή t.

Έστω ότι το $\mathbf{x}$ είναι η κλασματική λύση του (LP4) στο τέλος της χρονικής στιγμής $t-1$. Τώρα δοθείσας της πληροφορίας που αφορά τη στιγμή t και συγκεκριμένα τις ακμές στο E_t και τα κόστη απόκτησής τους, γίνεται το παρακάτω. Δοθέντος του $\mathbf{x}$ κατασκευάζεται το $\widetilde{\mathbf{x}}$ και ελέγχεται, όπως είναι δυνατό, αν $\widetilde{\mathbf{x}}_{E_t} \in \mathcal{P}_{ss}(\mathcal{G})$. Αν $\widetilde{\mathbf{x}}_{E_t} \in \mathcal{P}_{ss}(\mathcal{G})$, τότε το $\widetilde{\mathbf{x}}_{E_t}$ αποτελεί εφικτή λύση και επιστρέφεται, χωρίς να χρειάζεται να παρουσιαστεί κανένας περιορισμός στον $\mathcal{A}_{onLP}$. Διαφορετικά, το oracle διαχωρισμού παρουσιάζει ένα σύνολο ακμών S ώστε ο περιορισμός $\sum_{e \in S} \widetilde{x}_e \geq r(E) - r(E \setminus S)$ να παραβιάζεται. Ο περιορισμός που αντιστοιχεί στο S παρουσιάζεται στον $\mathcal{A}_{onLP}$ ώστε να ενημερωθεί η τιμή του $\mathbf{x}$ και η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρις ότου το $\widetilde{\mathbf{x}}$ να είναι εφικτό για τη στιγμή t. (Επειδή ο $\mathcal{A}_{onLP}$ μόνο αυξάνει τις τιμές των μεταβλητών και έχουμε covering LP η λύση διατηρεί την εφικτότητά της για τις προηγούμενες χρονικές στιγμές.) Στη συνέχεια δείχνεται ότι η διαδικασία αυτή δε χρειάζεται να επαναληφθεί περισσότερες από $2m$ φορές.

Λήμμα 5.6. *Αν για κάποιο* $\mathbf{x}$ *και το αντίστοιχο* $\widetilde{\mathbf{x}}$ *η συνθήκη* $\sum_{e \in S} \widetilde{x}_e \geq r(E) - r(E \setminus S)$ *παραβιάζεται, τότε*

$$\sum_{e \in S} x_e \leq r(E) - r(E \setminus S) - \frac{1}{2}$$

Απόδειξη. Έστω ότι $S_1 = \{e \in S : \widetilde{x}_e = 1\}$ και $S_2 = S \setminus S_1$. Με γ θα συμβολίζεται το $\sum_{e \in S_2} \widetilde{x}_e$. Επομένως

$$|S_1| = \sum_{e \in S} \widetilde{x}_e - \sum_{e \in S_2} \widetilde{x}_e < r(E) - r(E \setminus S) - \gamma$$

Αφού τόσο το $|S_1|$ όσο και το $r(E) - r(E \setminus S)$ είναι ακέραιοι, θα ισχύει ότι $|S_1| \leq r(E) - r(E \setminus S) - \lceil \gamma \rceil$. Ακόμη, για κάθε ακμή $e \in S_2$ ισχύει ότι $x_e = \frac{1}{2} \cdot \widetilde{x}_e$ και επομένως $\sum_{e \in S_2} x_e = \frac{\gamma}{2}$. Συνεπώς

$$\begin{aligned}\sum_{e \in S} x_e = \sum_{e \in S_1} x_e + \sum_{e \in S_2} x_e &\leq |S_1| + \frac{\gamma}{2} \\ &\leq r(E) - R(E \setminus S) - \lceil \gamma \rceil + \frac{\gamma}{2}\end{aligned}$$

Τελικά, αφού για κάθε $\gamma > 0$ ισχύει ότι $\lceil \gamma \rceil - \frac{\gamma}{2} \geq \frac{1}{2}$, αποδείχθηκε ότι το Λήμμα 5.6 ισχύει. □

Ο αλγόριθμος $\mathcal{A}_{onLP}$ ενημερώνει το $\mathbf{x}$ για να ικανοποιηθεί ο περιορισμός που του δόθηκε και το Λήμμα 5.6 συνεπάγεται ότι ο κάθε περιορισμός που του δίνεται πρέπει να αυξάνει το $\sum_{e \in E_t} x_e$ τουλάχιστον κατά $\frac{1}{2}$. Η μετατροπή που έχει γίνει ώστε το πρόβλημα να έχει διατυπωθεί στο μονέλο με τα διαστήματα διασφαλίζει ότι το πλήθος των ακμών των οποίων το διάστημα περιλαμβάνει τη χρονική στιγμή t είναι το πολύ $|E_t| \leq |E| = m$ και επομένως ο συνολικός αριθμός περιορισμών που παρουσιάζονται στον αλγόριθμο για μία στιγμή t είναι το πολύ ίσος με $2m$. Τα παραπάνω έχουν ως συμπέρασμα το ακόλουθο Θεώρημα.

Θεώρημα 5.7. *Υπάρχει αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου που υπολογίζει μία $O(\log |E|)$-προσεγγιστική λύση για το (LP3).*

Απόδειξη. Φαίνεται ότι η λύση αυτού του γραμμικού προγράμματος μπορεί με προφανή τρόπο να μετασχηματιστεί σε λύση του γραμμικού προγράμματος της υποενότητας 5.2.1. Τέλος, ο αλγόριθμος τυχαιοποιημένης στρογγυλοποίησης της υποενότητας 5.2.1 μπορεί να υλοποιηθεί online επιλέγοντας ένα κατώφλι $\tau_e \in [0, 1/L]$ για κάθε ακμή στην αρχή του αλγορίθμου, όπου $L = \Theta(\log(rT))$ και επιλέγοντας την ακμή e όποτε το $\widetilde{x}_e$ δεν υπολείπεται του τ_e: εδώ χρησιμοποιείται το γεγονός ότι ο online αλγόριθμος μόνο αυξάνει τις τιμές των x_e και το ότι ο αλγόριθμος στρογγυλοποίησης είναι μονότονος. Η επανατυχαιοποίηση σε περίπτωση αποτυχίας δίνει αναμενόμενο κόστος $O(\log(rT))$ φορές αυτό της λύσης του LP και συνεπώς προκύπτει ένας $O(\log m \log(rT))$-competitive αλγόριθμος. □

5.3.2 Μία $O(\log r \frac{\alpha_{max}}{\alpha_{min}})$-προσεγγιστική στρογγυλοποίηση

Η εξάρτηση από το χρονικό ορίζοντα T είναι μη ικανοποιητική σε κάποιες περιπτώσεις, αλλά μπορεί να αποφευχθεί με χρήση του Λήμματος 5.6. Ο πολλαπλασιαστικός παράγοντας $\log(rT)$ στο κόστος της στρογγυλοποίησης προερχόταν από το αφελές union bound πάνω στα T βήματα. Τώρα θα δειχθεί ότι όταν ο λόγος $\frac{\alpha_{max}}{\alpha_{min}}$ είναι μικρός, είναι ανεκτό η στρογγυλοποίηση να αποτυγχάνει μερικές φορές και να χρεώνεται το κόστος απόκτησης που προκύπτει από το γραμμικό πρόγραμμα.

Η χρονική περίοδος $[1 \ldots T]$ διαιρείται σε ξένες μεταξύ τους εποχές, όπου μία εποχή (εκτός από την τελευταία) είναι ένα διάστημα $[p, q)$ για $p \leq q$ τέτοιο ώστε το συνολικό κλασματικό κόστος απόκτησης ακμών να ικανοποιεί τη σχέση $\sum_{t=p}^{q-1} \alpha(e) \cdot y_t(e) \geq r \cdot \alpha_{max} > \sum_{t=p}^{q-2} \alpha(e) \cdot y_t(e)$. Επομένως μία εποχή είναι ένα ελάχιστο χρονικό διάστημα στο οποίο το γραμμικό πρόγραμμα πληρώνει κόστος απόκτησης ακμών $\in [r \cdot \alpha_{max}, 2r \cdot \alpha_{max})$, ώστε να είναι ανεκτό να κατασκευάζεται ένα εντελώς νέο δέντρο μία φορά κάθε εποχή και να χρεώνεται στο κλασματικό κόστος απόκτησης ακμών του γραμμικού προγράμματος για την εποχή αυτή. Η αφελής εφαρμογή του Θεωρήματος 5.3 σε κάθε εποχή ανεξάρτητα δίνει εγγύηση προσέγγισης $O(\log(rT'))$, όπου T' είναι το μέγιστο μήκος εποχής.

Μία εποχή όμως μπορεί να είναι αρκετά εκτενής αν η λύση του γραμμικού προγράμματος μεταβάλλεται πολύ αργά. Η κάθε εποχή διαχωρίζεται σε φάσεις, όπου η κάθε φάση είναι μία μέγιστη υπακολουθία κατά την οποία το LP πληρώνει κόστος απόκτησης ακμών το πολύ $\frac{\alpha_{min}}{4}$, οπότε η κάθε εποχή μπορεί να διαιρεθεί το πολύ σε $R := \frac{8r\alpha_{max}}{\alpha_{min}}$ ξένες μεταξύ τους φάσεις. Για μία φάση $[t_1, t_2]$ το $Z_{[t_1,t_2]}$ είναι ένα διάνυσμα που για κάθε ακμή έχει τιμή που δίνεται από τη συνάρτηση $Z_{[t_1,t_2]}(e) = \min_{t \in [t_1,t_2]} z_t(e)$. Ο ορισμός της φάσης συνεπάγεται ότι για κάθε στιγμή $t \in [t_1, t_2]$, για την L_1 απόσταση ισχύει ότι $||Z_{[t_1,t_2]} - z_t||_1 \leq \frac{1}{4}$. Τώρα το Λήμμα 5.6 συνεπάγεται ότι το $\widetilde{Z}_{[t_1,t_2]}$ ανήκει στο $\mathcal{P}_{ss}(\mathcal{G})$, όπου το $\widetilde{Z}$ ορίζεται ανάλογα με το $\widetilde{\mathbf{x}}$.

Έστω ότι κατά τον αλγόριθμο τυχαιοποιημένης στρογγυλοποίησης επιλέγουμε για κάθε ακμή ένα κατώφλι $\tau_e \in [0, 1/L']$, όπου $L' = 64 \log R$. Έστω $\mathcal{E}_{[t_1,t_2]}$ το γεγονός ότι ο τυχαιοποιημένος αλγόριθμος που εφαρμόστηκε στο $Z_{[t_1,t_2]}$ δίνει συνδετικό υπογράφο. Αφού το $\widetilde{Z}_{[t_1,t_2]} \leq 2Z_{[t_1,t_2]}$ ανήκει στο $\mathcal{P}_D(\mathcal{G})$ για τη φάση $[t_1, t_2]$, το Λήμμα 5.4 συνεπάγεται ότι το γεγονός $\mathcal{E}_{[t_1,t_2]}$ συμβαίνει με πιθανότητα $1 - 1/R^8$. Επίσης, αν το $\mathcal{E}_{[t_1,t_2]}$ συμβεί, είναι φανερό ότι η λύση της τυχαιοποιημένης στρογγυλοποίησης είναι εφικτή για όλα τα $t \in [t_1, t_2]$. Αφού η κάθε εποχή περιέχει το πολύ R φάσεις, το αναμενόμενο πλήθος αποτυχιών της τυχαιοποιημένης στρογγυλοποίησης εντός μίας εποχής είναι το πολύ $R \cdot 1/R^8 = R^{-7}$.

Έστω ότι όποτε η τυχαιοποιημένη στρογγυλοποίηση αποτυγχάνει γίνεται τυχαιοποιημένος επαναπροσδιορισμός όλων των κατωφλιών. Κάθε επαναπροσδιορισμός κατωφλιών κοστίζει το πολύ $r\alpha_{max}$ σε αναμενόμενο κόστος απόκτησης ακμών. Αφού το αναμενόμενο πλήθος φορών που θα συμβεί αυτό είναι μικρότερο από μία ανά εποχή, το πρόσθετο κόστος μπορεί να χρεωθεί στο τουλάχιστον $r\alpha_{max}$ κόστος απόκτησης ακμών που προκύπτει από το LP κατά τη διάρκεια της εποχής. Έτσι προκύπτει μία $O(\log R) = O(\log \frac{r\alpha_{max}}{\alpha_{min}})$-προσέγγιση. Αυτό το επιχείρημα δουλεύει και για την online περίπτωση, καθώς επίσης στην περίπτωση που όλα τα κόστη απόκτησης ακμών είναι ίσα το κόστος λόγω της τυχαιοποιημένης στρογγυλοποίησης είναι $O(\log r)$.

5.3.3 Η δυσκολία της online ΣΣΔ και της online ΣΣΥ

Στο online πρόβλημα set cover, δίνεται ένα στιγμιότυπο $(U, \mathcal{F})$ για set cover και τη χρονική στιγμή t παρουσιάζεται στον αλγόριθμο ένα στοιχείο $u_t \in U$ και αυτός πρέπει να το καλύψει μέσω κάποιου συνόλου. Ο competitive λόγος ενός αλγορίθμου σε μία ακολουθία $\{u_t\}_{t\in[n']}$ είναι ο λόγος του πλήθους των συνόλων που επιλέχθηκαν από τον αλγόριθμο προς το μέγεθος του βέλτιστου set cover για το στιγμιότυπο $(\{u_t : t \in [n']\}, \mathcal{F})$. Ο Korman απέδειξε το ακόλουθο για τη δυσκολία του online set cover:

Θεώρημα 5.8. *Υπάρχει μία σταθερά $d > 0$ τέτοια ώστε αν υπάρχει ένας (πιθανώς τυχαιοποιημένος) αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου για το online set cover με competitive λόγο $d \log m \log n$, τότε $NP \subseteq BPP$.*

Απόδειξη. Στην αναγωγή της απόδειξης του Θεωρήματος , το σύνολο των ακμών που ήταν ζωντανές για όλους τους χρόνους εξαρτιώταν μόνο από το $\mathcal{F}$. Μόνο οι στιγμιαίες ακμές εξαρτώνταν από τα στοιχεία προς κάλυψη. Άρα η ίδια προσέγγιση προσφέρει μία αναγωγή από το online set cover στην online ΣΣΥ. Επομένως η online ΣΣΥ δεν επιδέχεται αλγόριθμο με competitive λόγο καλύτερο από $d \log m \log T$ εκτός αν $NP \subseteq BPP$. Αυτή η δυσκολία ισχύει ακόμη και στην περίπτωση που ο χρόνος λήξης του διαστήματος κάθε ακμής γίνεται γνωστό μόλις αυτή εμφανίζεται και τα μόνα κόστη απόκτησης ακμών είναι τα $\alpha(e) \in \{0, 1\}$. □

5.4 Ο άπληστος αλγόριθμος

Ο άπληστος αλγόριθμος για τη ΣΣΥ είναι ο προφανής. Λειτουργεί πάνω στο μοντέλο διαστημάτων (όπως παρουσιάστηκε στην ενότητα 5.1), όπου η κάθε ακμή έχει ένα κόστος απόκτησης $\alpha(e)$ και μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο εντός ενός χρονικού διαστήματος I_e. Η λύση είναι ένα σύνολο ακμών X, το οποίο αρχικοποιείται στο κενό σύνολο και μεγαλώνει εισάγοντας σε αυτό μία μία ακμές με βάση κάποιο άπληστο κριτήριο. Δοθέντος του τρέχοντος υποσυνόλου ακμών $X \subseteq E$, ορίζονται τα $X_t := \{e' \in X | I_{e'} \ni t\}$. Το όφελος της προσθήκης μίας ακμής e στο x είναι

$$ben_X(e) = \sum_{t\in I_e} (rank(X_t \cup \{e\}) - rank(X_t))$$

και ο άπληστος αλγόριθμος επιλέγει κάθε φορά την ακμή e που μεγιστοποιεί το $ben_X(e)/\alpha(e)$ και προσθέτει την e στο X. Αυτό συμβαίνει μέχρις ότου να ισχύει ότι $rank(X_t) = r$ για όλα τα $t \in [T]$.

Ο διατυπωμένος με αυτόν τον τρόπο αλγόριθμος έχει ως αποτέλεσμα λόγο προσέγγισης $O(\log T)$ με βάση τα αποτελέσματα του Wolsey [12]. Στη συνέχεια δίνεται μία εναλλακτική απόδειξη με dual fitting. Δεν είναι γνωστό κάποιο στιγμιότυπο με ίσα κόστη απόκτησης ακμών που ο άπληστος αλγόριθμος δεν πετυχαίνει σταθερό λόγο προσέγγισης. Η προσέγγιση με το dual fitting μπορεί να είναι χρήσιμη για την απόδειξη ενός καλύτερου ορίου προσέγγισης για αυτήν την ειδική περίπτωση.

Το προφανές γραμμικό πρόγραμμα είναι το εξής (LP1):

$$P := \min \sum_{e} \alpha(e) \cdot x_e$$
$$s.t. \{z_{et}\}_e \in \mathcal{P}_B(\mathcal{G}), \forall t$$
$$z_{et} \leq x_e, \forall e, \forall t \in I_e$$
$$x_e \geq 0, \forall e$$
$$z_{et} \geq 0, \forall e, \forall t \in I_e$$

όπου το $\mathcal{P}_B(\mathcal{G})$ είναι το πολύτοπο συνδετικών δέντρων για το γράφημα $\mathcal{G}$.

Χρησιμοποιώντας Lagrangian μεταβλητές $\beta_{et} \geq 0$ για κάθε e και $t \in I_e$, για την αντικατάσταση του δεύτερου περιορισμού, ένα κάτω όριο για το P μπορεί να γραφτεί ως εξής

$$D(\beta) := \min \sum_{e} \alpha(e) \cdot x_e + \sum_{e, t \in I_e} \beta_{et}(z_{et} - x_e)$$
$$s.t. z_{et} \in \mathcal{P}_B(\mathcal{G}), \forall t$$
$$x_e, z_{et} \geq 0$$

που λόγω της ακεραιότητας του πολυτόπου μπορεί να γραφτεί και ως εξής:

$$\min_{x \geq 0} \sum_{e} x_e(\alpha(e) - \sum_{e, t \in I_e} \beta_{et}) + \sum_{t} mst(\beta_{et})$$

Εδώ το $mst(\beta_{et})$ συμβολίζει το κόστος του ελάχιστου συνδετικού δέντρου τη στιγμή t σύμφωνα με τα Lagrangian βάρη των ακμών $\{\beta_{et}\}_{e \in E}$, όπου οι διαθέσιμες ακμές τη χρονική στιγμή t είναι αυτές του συνόλου $E_t = \{x \in E | t \in I_e\}$. Το καλύτερο (μεγαλύτερο) κάτω όριο είναι το:

$$D := \max \sum_{t} mst(\beta_{et})$$
$$s.t. \sum_{t \in I_e} \beta_{et} \leq \alpha(e)$$
$$\beta_{et} \geq 0$$

που αποτελεί και το δυϊκό του (LP1). Ακολουθεί η ανάλυση του άπληστου αλγορίθμου χρησιμοποιώντας τη μεθοδολογία dual fitting.

Θεώρημα 5.9. *Ο άπληστος αλγόριθμος υπολογίζει μία $O(\log |I_{max}|)$-προσέγγιση για τη ΣΣΥ, όπου $|I_{max}|$ είναι το μήκος του μεγαλύτερου διαστήματος κατά το οποίο κάποια ακμή είναι ζωντανή. Οπότε ο άπληστος αλγόριθμος δίνει μία $O(\log T)$-προσέγγιση.*

Απόδειξη. Για την απόδειξη θεωρείται κάποιο σημείο της εκτέλεσης του άπληστου αλγορίθμου κατά το οποίο το σύνολο των επιλεγμένων ακμών είναι το X. Στη συνέχεια περιγράφεται ένας τρόπος ανάθεσης τιμών στις Lagrangian μεταβλητές β_{et} του dual ώστε

(a) Σε κάθε βήμα του αλγορίθμου η τιμή του dual ισούται με το κόστος του primal, δηλαδή είναι ίση με $\sum_{e\in X}\alpha(e)$, και

(b) Οι περιορισμοί σχεδόν ικανοποιούνται, συγκεκριμένα $\sum_{t\in I_e}\beta_{et} \leq \alpha(e)\log|I_e|, \forall e \in E$.

Είναι χρήσιμο για κάθε χρονική στιγμή t να διατηρείται ένα ελάχιστο συνδετικό δάσος B_t του υποσυνόλου $span(X_t)$ σύμφωνα με τα βάρη $\{\beta_{et}\}$. Επομένως η τρέχουσα τιμή του dual είναι ίση με $\sum_t \sum_{e\in B_t}\beta_{et}$. Ο αλγόριθμος εκκινεί με $\beta_{et} = 0$ και $X_t = B_t = \emptyset$ για όλα τα t, ικανοποιώντας τις παραπάνω δύο ιδιότητες.

Έστω ότι ο αλγόριθμος επιλέγει μία ακμή e που μεγιστοποιεί το $ben_X(e)/\alpha(e)$ και το νέο σύνολο είναι το $X' := X \cup \{e\}$. Όμοια με το X_t ορίζεται το $X'_t := \{e' \in X'|I_{e'} \ni t\}$. Μία χρονική στιγμή t ονομάζεται ενδιαφέρουσα αν $rank(X'_t) = rank(X_t) + 1$, οπότε υπάρχουν $ben_X(e)$ ενδιαφέρουσες χρονικές στιγμές. Οι dual μεταβλητές β_{et} ενημερώνονται ως εξής: Για κάθε ακμή $e' \in span(X'_t) \setminus span(X_t)$, γίνεται η ανάθεση $\beta_{e't} \leftarrow \alpha(e)/ben_X(e)$. Η ακμή e ανήκει στο $span(X'_t) \setminus span(X_t)$ ακριβώς για τις ενδιαφέρουσες στιγμές, οπότε $\sum_{t\ interesting}\beta_{et} = (\alpha(e)/ben_X(e)) \cdot ben_X(e) = \alpha(e)$. Για κάθε ενδιαφέρουσα στιγμή $t \in I_e$, ορίζεται το δάσος $B'_t \leftarrow B_t \cup \{e\}$, ενώ για όλες τις υπόλοιπες στιγμές $B'_t \leftarrow B_t$. Μπορεί εύκολα να επιβεβαιωθεί ότι το B'_t αποτελεί συνδετικό δάσος στο $span(X'_t)$. Τώρα θα δειχθεί ότι έχει και το ελάχιστο δυνατό βάρος. Κάνοντας την επαγωγική υπόθεση ότι το B_t ήταν ελάχιστο συνδετικό δάσος για το $span(X_t)$, αν η στιγμή t δεν είναι ενδιαφέρουσα δε χρειάζεται να αποδειχθεί κάτι, οπότε θεωρείται μία ενδιαφέρουσα χρονική στιγμή t. Σε όλες τις ακμές στο $span(X'_t) \setminus span(X_t)$ μόλις ανατέθηκε το βάρος $\beta_{e't} = \alpha(e)/ben_X(e)$, το οποίο λόγο της μονοτονίας του άπληστου αλγορίθμου είναι τουλάχιστον τόσο μεγάλο όσο και κάθε άλλο βάρος στο $span(X_t)$. Αφού η e ανήκει στο $span(X'_t) \setminus span(X_t)$ και της ανατίθεται η τιμή $\beta_{et} = \alpha(e)/ben_X(e)$, δεν μπορεί να ανταλλαχθεί με καμία άλλη ακμή του $span(X'_t)$ για να μειωθεί το βάρος του δάσους, οπότε το $B'_t = B_t \cup \{e\}$ είναι ένα δάσος ελάχιστου βάρους στο $span(X'_t)$.

Μένει να δειχθεί ότι οι δυϊκοί περιορισμοί σχεδόν ικανοποιούνται. Θερώντας μία ακμή f, ορίζεται το $\lambda = |I_f|$. Η πρώτη φορά για την οποία ενημερώνεται ένα β_{ft} για κάποιο $t \in I_f$ είναι όταν η f ανήκει σε κάποιο $span(X_t)$ για κάποια στιγμή t. Θα δειχθεί ότι $\beta_{ft} \leq \alpha(f)/\lambda$. Πράγματι, τη χρονική στιγμή αυτή η f είναι μία υποψήφια ακμή για να προστεθεί στη λύση και να αυξήσει το rank για λ χρονικές στιγμές. Ο άπληστος αλγόριθμος εξασφαλίζει ότι η ακμή που όντως επιλέχθηκε είχε τουλάχιστον τόσο υψηλό λόγο κάλυψης προς βάρος. Ομοίως, την επόμενη στιγμή t για την οποία το β_{ft} θα ενημερωθεί, η τιμή που θα του ανατεθεί θα είναι το πολύ $\alpha(f)/(\lambda - 1)$, κ.λπ.. Επομένως προκύπτει το άθροισμα

$$\sum_t \beta_{ft} \leq \alpha(f)\left(\frac{1}{|I_f|} + \frac{1}{|I_f|-1} + \cdots + 1\right) \leq \alpha(f) \times O(\log |I_f|)$$

Αφού μία ακμή μπορεί να είναι ζωντανή για το πολύ T χρονικές στιγμές, αποδεικνύεται η $O(\log T)$-προσέγγιση. $\square$

Σημειώνεται ότι ο άπληστος αλγόριθμος μπορεί να λύσει τη ΣΣΥ ακόμα και αν το γράφημα διέφερε από στιγμή σε στιγμή. Ωστόσο, η ισοδυναμία μεταξύ ΣΣΔ και ΣΣΥ δε θα ίσχυει πλέον στην περίπτωση αυτή.

Κεφάλαιο 6

Μεθοδολογία και Αποτελέσματα

6.1 Προβλήματα και αλγόριθμοι

6.1.1 Ορισμοί προβλημάτων

Αρχικά θα οριστεί το Spanning Subgraph Maintenance (SSM) πρόβλημα. Δεδομένου ενός συνεκτικού γραφήματος $G = (V, E)$ και ενός ακεραίου $T > 0$, που είναι το πλήθος των χρονικών στιγμών ($t \in \{1, \ldots, T\}$), για κάθε ακμή $e \in E$ υπάρχει ένα κόστος απόκτησης $\alpha(e)$, καθώς και T κόστη διατήρησης $c_t(e)$, ένα για κάθε χρονική στιγμή. Για την επίλυση του προβλήματος SSM πρέπει για κάθε χρονική στιγμή t να επιλεγεί ένα σύνολο ακμών E_t ώστε αυτές να ορίζουν spanning subgraph και να ελαχιστοποιείται το κόστος

$$\sum_t (c_t(E_t) + \alpha(E_t \setminus E_{t-1}))$$

όπου ορίζεται το $E_0 := \emptyset$.

Μία ειδική περίπτωση του παραπάνω προβλήματος είναι αυτή όπου τα κόστη απόκτησης όλων των ακμών είναι ίσα και η τιμή τους θα συμβολίζεται με α. Αυτή η ειδική περίπτωση θα ονομάζεται Spanning Subgraph Maintenance with Uniform Acquisition Costs (SSMUAC). Ο περιορισμός για την επιλογή των ακμών της λύσης είναι ο ίδιος με πριν, δηλαδή για κάθε χρονική στιγμή οι επιλεγμένες ακμές πρέπει να σχηματίζουν spanning subgraph, αλλά η συνάρτηση κόστους προς ελαχιστοποίηση μπορεί να γραφεί στην απλοποιημένη μορφή

$$\sum_t (c_t(E_t) + \alpha \cdot |E_t \setminus E_{t-1}|)$$

Το πρόβλημα SSMUAC μπορεί με απώλεια ενός σταθερού παράγοντα προσέγγισης να αναχθεί σε ένα άλλο πρόβλημα: Οι κορυφές και οι ακμές του γραφήματος G διατηρούνται ίδιοι αλλά για κάθε ακμή υπάρχει πλέον ένα σύνολο μη επικαλυπτόμενων διαστημάτων για τα οποία αυτή είναι διαθέσιμη. Το κόστος απόκτησης κάθε διαστήματος ακμής είναι ίσο με α (ή απλούστερα 1) και δεν υπάρχει κάποιο κόστος διατήρησης. Το ζητούμενο είναι να επιλεχθεί ένα υποσύνολο διαστημάτων για κάθε ακμή ώστε σε κάθε χρονική στιγμή οι ακμές που έχουν επιλεγμένο διάστημα που περιέχει αυτήν τη χρονική στιγμή να σχηματίζουν spanning subgraph, ελαχιστοποιώντας το άθροισμα των κοστών απόκτησής των επιλεγμένων διαστημάτων ακμών ή ισοδύναμα το πλήθος τους. Το πρόβλημα αυτό το θα ονομάζεται Simple Spanning Subgraph Maintenance (SSSM) καθώς η επίλυσή του φαίνεται ευκολότερη. Η ανάλυση που θα γίνει στη συνέχεια αφορά κατά κύριο λόγο αυτό το πρόβλημα.

Θα εξετασθούν δύο εκδοχές του SSSM: Μία στην οποία ακμές μεταξύ του ίδιου ζεύγους κορυφών μπορούν να έχουν διαστήματα με επικαλύψεις (SSSM με επικαλύψεις) και μία ειδικότερη περίπτωση που δεν έχουν (SSSM χωρίς επικαλύψεις). Οι επικαλύψεις προκύπτουν όταν στο αρχικό γράφημα υπάρχουν παράλληλες ακμές.

Να σημειωθεί ότι ενώ απαιτήθηκε στον ορισμό των προβλημάτων το γράφημα να είναι συνεκτικό, είναι δυνατό να επιτραπούν πάνω από μία συνεκτικές συνιστώσες κάνοντας τον περιορισμό για τις εφικτές λύσεις να είναι ότι για κάθε χρονική στιγμή οι ακμές με επιλεγμένο διάστημα που περιέχει αυτήν τη χρονική στιγμή πρέπει να σχηματίζουν spanning subgraph για κάθε συνεκτική συνιστώσα ανεξάρτητα. Βέλτιστοι και προσεγγιστικοί αλγόριθμοι για τα προβλήματα που ορίστηκαν μπορούν να εφαρμοστούν σε κάθε συνεκτική συνιστώσα ανεξάρτητα και οι νέοι λόγοι προσέγγισης είναι εύκολο να υπολογιστούν (π.χ. βέλτιστος παραμένει βέλτιστος, σταθερής προσέγγισης τη διατηρεί, λογαριθμικής προσέγγισης ως προς το rank τη βελτιώνει αφού πλέον είναι ως προς το μέγιστο rank συνεκτικής συνιστώσας).

6.1.2 Επιπλέον αξιοποίηση μίας καλής προσέγγισης για το SSSM

Κάθε βέλτιστος ή προσεγγιστικός αλγόριθμος που βρίσκεται για το SSSM, για όλα τα instances ή για κάποια (π.χ. για κυκλικά γραφήματα) μπορεί να αξιοποιηθεί και για instances του SSM που δεν έχουν ίσα κόστη απόκτησης ακμών. Συγκεκριμένα ένα SSM instance με

$$\alpha_{min} = \min_e(\alpha(e)) > 0$$

και

$$\alpha_{max} = \max_e(\alpha(e))$$

ανάγεται (ομοίως με την περίπτωση των ίσων κοστών απόκτησης) σε πρόβλημα παρόμοιο του SSSM αλλά με κόστος απόκτησης διαστήματος μίας ακμής e ίσο με $\alpha(e)$. Λύνοντας το γνωστό SSSM για το instance αυτό αλλά με μοναδιαία κόστη απόκτησης, χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο που έχει βρεθεί και κρατώντας τη λύση, επιτυγχάνεται προσεγγιστική επίλυση με επιβάρυνση κατά παράγοντα $\alpha_{max}/\alpha_{min}$.

Το παραπάνω δεν μπορεί να εφαρμοστεί αν $\alpha_{min} = 0$, με την οποία περίπτωση σχετίζεται η απόδειξη δυσκολίας στη σελίδα 7 του [7].

6.1.3 Offline άπληστοι αλγόριθμοι για το SSSM

Θα περιγραφούν δύο offline άπληστοι αλγόριθμοι για το πρόβλημα SSSM. Και οι δύο αρχίζουν από ένα κενό σύνολο διαστημάτων ακμών X και στη συνέχεια επιλέγουν ένα-ένα διαστήματα ακμών τα οποία εισάγουν στο X μέχρις ότου αυτό να αποτελέσει εφικτή λύση. Η διαφορά τους έγκειται στον τρόπο με τον οποίο επιλέγεται άπληστα το διάστημα ακμής που κάθε φορά εισάγεται στο X.

Για διευκόλυνση της περιγραφής των αλγορίθμων ορίζεται για κάθε χρονική στιγμή ένα σύνολο $X_t := \{I_e \in X | I_e \ni t\}$, όπου I_e είναι ένα διάστημα ακμής. Με άλλα λόγια το X_t είναι το σύνολο των επιλεγμένων διαστημάτων ακμών που περιέχουν τη χρονική στιγμή t. Η πρώτη χρονική στιγμή που περιέχεται στο I_e θα συμβολίζεται με $I_e.start$, η τελευταία με $I_e.end$ και η ακμή στην οποία ανήκει με $I_e.edge$. Να σημειωθεί ότι τα διάφορα X_t μπορεί να αλλάζουν καθώς εισάγονται διαστήματα ακμών στο X.

Στη συνέχεια περιγράφονται οι δύο άπληστοι αλγόριθμοι.

1ος άπληστος αλγόριθμος

Ο 1ος άπληστος αλγόριθμος προκύπτει άμεσα από τον άπληστο αλγόριθμο που ορίζεται στη σελίδα 16 του [7]. Πρόκειται για μία απλοποίησή του, λόγω του ότι όλα τα κόστη απόκτησης διαστημάτων ακμών είναι μοναδιαία.

Το όφελος εισαγωγής ενός διαστήματος ακμής I_e στο X ορίζεται ως

$$ben_X(I_e) = \sum_{t \in I_e} (rank_t(X_t \cup \{I_e\}) - rank_t(X_t))$$

όπου $rank_t(A) = rank(\{I_e.edge | t \in I_e \in A\})$. Δηλαδή το όφελος είναι ίσο με το πλήθος των χρονικών στιγμών στις οποίες θα συμβεί αύξηση του rank με βάση τα επιλεγμένα διαστήματα ακμών.

Ο 1ος άπληστος αλγόριθμος επιλέγει κάθε φορά ένα διάστημα ακμής I_e που μεγιστοποιεί το όφελος εισαγωγής στο X. Ακολουθεί ο σχετικός ψευδοκώδικας.

Algorithm 1 1ος άπληστος αλγόριθμος

$X = \emptyset$
while X infeasible solution **do**
    $I_e = \arg\max_{I_e \notin X : I_e.edge \in E} ben_X(I_e)$
    $X = X \cup \{I_e\}$
end while

2ος άπληστος αλγόριθμος

Ο 2ος άπληστος αλγόριθμος επιλέγει διαστήματα ακμών ως εξής: Όσο το X δεν αποτελεί εφικτή λύση βρίσκει την ελάχιστη χρονική στιγμή t' κατά την οποία οι ακμές των διαστημάτων ακμών του $X_{t'}$ δε σχηματίζουν spanning subgraph και επιλέγει για εισαγωγή στο X

ένα διάστημα ακμής I_e που περιέχει τη στιγμή t', ικανοποιεί τη σχέση $rank_t(X_t \cup \{I_e\}) > rank_t(X_t)$ και μεγιστοποιεί τη χρονική στιγμή λήξης του $I_e.end$. Ακολουθεί ο σχετικός ψευδοκώδικας.

Algorithm 2 2ος άπληστος αλγόριθμος

1: $X = \emptyset$
2: $t' = 1$
3: **while** $t' \leq T$ **do**
4:     **while** $rank(X_{t'}) < r$ **do**
5:         $I_e = \arg\max_{I'_e : I'_e.edge \in E \wedge rank_t(X_t \cup \{I'_e\}) > rank_t(X_t)} (I'_e.end)$
6:         $X = X \cup \{I_e\}$
7:     **end while**
8:     $t' = t' + 1$
9: **end while**

Παραπάνω με r συμβολίζεται το rank του γραφήματος. Για συνεκτικά γραφήματα ισχύει ότι $r = rank(E) = n - 1$.

Μία επανάληψη του while της γραμμής 3 θα ονομάζεται **γύρος** (round), ενώ μία επανάληψη του while της γραμμής 4 θα ονομάζεται **βήμα** (step) του αντιστοίχου γύρου. Η χρονική στιγμή t' που αντιστοιχεί σε ένα γύρο θα ονομάζεται **κρίσιμη χρονική στιγμή** (critical time) αυτού του γύρου.

Στο εξής όπου αναφέρεται άπληστος αλγόριθμος θα εννοείται ο 2ος άπληστος αλγόριθμος εκτός αν ρητά η αναφορά γίνεται στον 1ο.

6.2 Δύσκολα στιγμιότυπα

Εδώ είναι σημαντικό να καταστεί σαφές ότι με τον όρο *δύσκολα στιγμιότυπα* εννοούνται στιγμιότυπα στα οποία το σύνολο των λύσεων που μπορεί να βρει κάποιος από τους απλήστους αλγορίθμους έχει κάποια ιδιότητα που είναι ανεπιθύμητη για την καλή επίλυση του προβλήματος.

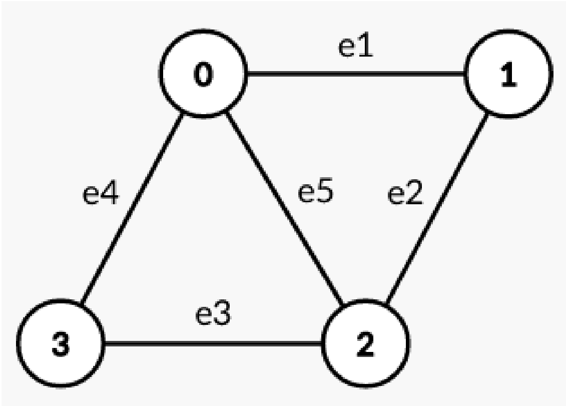
Σε αυτήν την ενότητα, όπως και στις επόμενες, με D συμβολίζεται η μέγιστη διάρκεια διαστήματος ακμής για ένα δεδομένο στιγμιότυπο.

Λήμμα 6.1. *Υπάρχουν στιγμιότυπα με $T \geq 4$ και $D \geq 2$ στα οποία ο 2ος άπληστος αλγόριθμος μπορεί να υπολογίσει υποβέλτιστη λύση.*

Απόδειξη. Η απόδειξη γίνεται κατασκευαστικά με στιγμιότυπο που βασίζεται στο γράφημα του Figure 6.1 για $T = 4$ και $D = 2$.

Θεωρούνται τα παρακάτω διαστήματα ακμών για το γράφημα:

$$I_{e_1,1} = [1, 1], I_{e_1,2} = [3, 4]$$



Σχήμα 6.1: Το γράφημα του στιγμιοτύπου

$$I_{e_2,1} = [1,2], I_{e_2,2} = [3,4]$$

$$I_{e_3,1} = [1,2], I_{e_3,2} = [4,4]$$

$$I_{e_4,1} = [2,3]$$

$$I_{e_5,1} = [2,3]$$

Να σημειωθεί ότι αν ήταν επιθυμητό η κάθε ακμή να είχε για κάθε χρονική στιγμή κάποιο διάστημα που την περιείχε, τότε το στιγμιότυπο θα μπορούσε να τροποποιηθεί με την προσθήκη διαστημάτων μοναδιαίας διάρκειας σε κάθε ακμή για τις χρονικές στιγμές που δεν καλύπτονται με κάποιο διάστημα αυτής. Τα νέα αυτά διαστήματα ακμών θα είχαν ελάχιστη προτεραιότητα επιλογής καθώς θα ήταν υποψήφια για επιλογή από τον 2ο άπληστο αλγόριθμο όταν η κρίσιμη χρονική στιγμή ήταν η χρονική στιγμή έναρξης και λήξης τους και τότε η χρονική στιγμή λήξης τους θα ήταν μικρότερη η ίση από αυτήν κάθε άλλου υποψηφίου προς επιλογή διαστήματος ακμής. Συνεπώς ο άπληστος αλγόριθμος θα μπορούσε να τα αγνοήσει αφού υπάρχει εφικτή λύση και χωρίς αυτά. Επίσης μία βέλτιστη λύση στο στιγμιότυπο χωρίς αυτά είναι βέλτιστη και στο στιγμιότυπο με αυτά.

Μία εκτέλεση του 2ου απλήστου αλγορίθμου θα μπορούσε να επιλέξει διαστήματα ακμών με την ακόλουθη σειρά:

1. Ο πρώτος γύρος έχει κρίσιμη χρονική στιγμή την $t' = 1$: Επιλέγονται τα διαστήματα $I_{e_2,1}$, $I_{e_3,1}$ και $I_{e_1,1}$.
2. Ο δεύτερος γύρος έχει κρίσιμη χρονική στιγμή την $t' = 2$: Επιλέγεται το διάστημα $I_{e_5,1}$.
3. Ο τρίτος γύρος έχει κρίσιμη χρονική στιγμή την $t' = 3$: Επιλέγονται τα διαστήματα $I_{e_1,2}$ και $I_{e_4,1}$.
4. Ο τέταρτος γύρος έχει κρίσιμη χρονική στιγμή την $t' = 4$: Επιλέγονται τα διαστήματα $I_{e_2,2}$ και $I_{e_3,2}$.

Συνολικά επιλέχθησαν δηλαδή όλα τα διαστήματα ακμών. Μία εφικτή λύση (που είναι και βέλτιστη) θα μπορούσε να περιέχει όλα τα διαστήματα ακμών εκτός από το $I_{e_5,1}$. Οπότε αποδείχθηκε ότι ο 2ος άπληστος αλγόριθμος μπορεί να υπολογίσει μη βέλτιστη λύση ακόμα και στο SSSM χωρίς επικαλύψεις. □

Αξίζει να σημειωθεί ότι το γράφημα του στιγμιοτύπου της παραπάνω απόδειξης είναι επίπεδο καθώς και series-parallel αν θεωρηθεί η κορυφή 0 αφετηρία και η 2 τέρμα.

Λήμμα 6.2. *Για $T \geq 5$ και $D \geq 3$ υπάρχουν στιγμιότυπα όπου ο άπληστος αλγόριθμος δίνει πάντα υποβέλτιστη λύση.*

Απόδειξη. Η απόδειξη γίνεται κατασκευαστικά σε στιγμιότυπο στο γράφημα του Figure 1 (internalre) για $T = 5$ και $D = 3$.

Θεωρούνται τα παρακάτω διαστήματα ακμών για το γράφημα:

$$I_{e_1,1} = [3, 5]$$

$$I_{e_2,1} = [1, 2], I_{e_2,2} = [3, 5]$$

$$I_{e_3,1} = [2, 3], I_{e_3,2} = [4, 5]$$

$$I_{e_4,1} = [1, 2]$$

$$I_{e_5,1} = [1, 1], I_{e_5,2} = [2, 4]$$

Όλα τα διαστήματα εκτός ενδεχομένως από το $I_{e_5,2}$ περιλαμβάνονται σε κάθε εφικτή λύση, διότι:

- Αν δεν επιλεχθεί ένα από τα $I_{e_2,1}$, $I_{e_4,1}$ ή $I_{e_5,1}$ δεν μπορεί να υπάρχει συνεκτικότητα για $t = 1$.
- Αν δεν επιλεχθεί ένα από τα $I_{e_1,1}$, $I_{e_2,2}$ ή $I_{e_3,2}$ δεν μπορεί να υπάρχει συνεκτικότητα για $t = 5$.
- Αν δεν επιλεχθεί το $I_{e_3,1}$ δεν μπορεί να υπάρχει συνεκτικότητα για $t = 3$.
- Αν όμως δεν επιλεχθεί το $I_{e_5,2}$ η εφικτότητα διατηρείται.

Βέλτιστη λύση: Όλα τα διαστήματα εκτός από το $I_{e_5,2}$. Αυτό προκύπτει από τα παραπάνω.

Κάθε άπληστη λύση επιλέγει όλα τα διαστήματα. Αυτό προκύπτει επειδή επιλέγει σίγουρα το $I_{e_5,2}$. Συγκεκριμένα κάνει τις ακόλουθες επιλογές:

1. Επιλέγει τα $I_{e_2,1}$ και $I_{e_4,1}$.
2. Επιλέγει το $I_{e_5,1}$.
3. Επιλέγει το $I_{e_5,2}$.

4. ...

Άρα σε αυτό το στιγμιότυπο ο άπληστος αλγόριθμος δίνει πάντα υποβέλτιστη λύση και το ζητούμενο αποδείχθηκε. □

Λήμμα 6.3. *Για $T \geq 3$ και $D \geq 2$ δεν μπορεί να προκύψει κάθε βέλτιστη λύση από τον άπληστο αλγόριθμο.*

Απόδειξη. Η απόδειξη γίνεται κατασκευαστικά σε στιγμιότυπο με γράφημα αυτό του Figure 6.2 για $T = 3$ και $D = 2$.

Θεωρούνται τα παρακάτω διαστήματα ακμών του γραφήματος:

$$I_{e_1,1} = [1, 2], I_{e_1,2} = [3, 3]$$

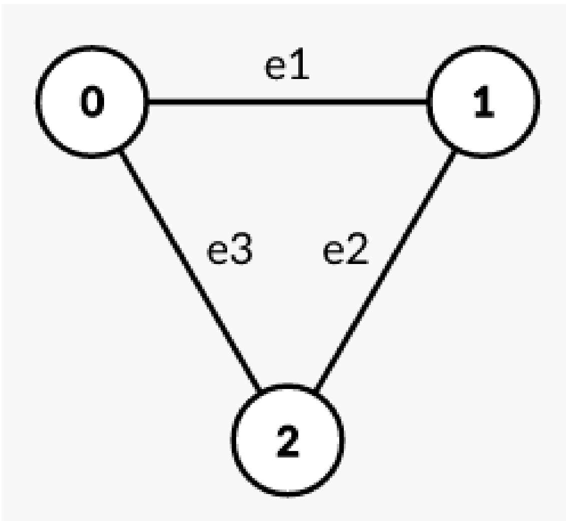
$$I_{e_2,1} = [1, 2], I_{e_2,2} = [3, 3]$$

$$I_{e_3,1} = [1, 1], I_{e_3,2} = [2, 3]$$

Η λύση $\{I_{e_1,1}, I_{e_1,2}, I_{e_3,1}, I_{e_3,2}\}$ είναι βέλτιστη, όμως δεν μπορεί να προκύψει από τον άπληστο αλγόριθμο, καθώς αυτός θα επιλέξει σίγουρα το διάστημα $I_{e_2,1}$ κατά τον πρώτο γύρο. □

Λήμμα 6.4. *Υπάρχουν στιγμιότυπα κυκλικών γραφημάτων στα οποία ο 2ος άπληστος αλγόριθμος υπολογίζει πάντα υποβέλτιστη λύση όταν υπάρχουν επικαλύψεις (SSSM με επικαλύψεις).*

Απόδειξη. Η απόδειξη γίνεται κατασκευαστικά με στιγμιότυπο που βασίζεται στο γράφημα του Figure 6.2 για $T = 5$.



Σχήμα 6.2: Το γράφημα του στιγμιοτύπου

Θεωρούνται τα παρακάτω διαστήματα ακμών για το γράφημα:

$$I_{e_1,1} = [2, 4], I_{e_1,2} = [3, 5]$$

$$I_{e_2,1} = [1,1], I_{e_2,2} = [2,3], I_{e_2,3} = [4,5]$$

$$I_{e_3,1} = [1,2]$$

Η επικάλυψη συμβαίνει μεταξύ των διαστημάτων $I_{e_1,1}$ και $I_{e_1,2}$.

Ο 2ος άπληστος αλγόριθμος επιλέγει διαστήματα ακμών με την ακόλουθη σειρά:

1. Ο πρώτος γύρος έχει κρίσιμη χρονική στιγμή την $t' = 1$: Επιλέγονται τα διαστήματα $I_{e_3,1}$ και $I_{e_2,1}$.

2. Ο δεύτερος γύρος έχει κρίσιμη χρονική στιγμή την $t' = 2$: Επιλέγεται το διάστημα $I_{e_1,1}$.

3. Ο τρίτος γύρος έχει κρίσιμη χρονική στιγμή την $t' = 3$: Επιλέγεται το διάστημα $I_{e_2,2}$.

4. Ο τέταρτος γύρος έχει κρίσιμη χρονική στιγμή την $t' = 4$: Επιλέγεται το διάστημα $I_{e_2,3}$.

5. Ο πέμπτος γύρος έχει κρίσιμη χρονική στιγμή την $t' = 5$: Επιλέγεται το διάστημα $I_{e_1,2}$.

Συνολικά επιλέχθησαν δηλαδή όλα τα διαστήματα ακμών. Μία εφικτή λύση (που είναι και βέλτιστη) περιέχει όλα τα διαστήματα ακμών εκτός από το $I_{e_1,1}$. Οπότε αποδείχθηκε ότι υπάρχει στιγμιότυπο με κυκλικό γράφημα με μόλις τρεις κορυφές και μόλις μία επικάλυψη για το οποίο ο 2ος άπληστος αλγόριθμος υπολογίζει πάντα υποβέλτιστη λύση. □

6.3 Εύκολα στιγμιότυπα

Ορίζονται τρεις ακολουθίες, οι W, SE και SG, ως εξής:

- Έστω W η ακολουθία βημάτων του αλγορίθμου, μήκους T, όπου W_t είναι το t-οστό βήμα του αλγορίθμου και αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή t.

- Έστω μία ακολουθία συνόλων ακμών SE, μήκους T, η οποία μεταβάλλεται κατά τη διάρκεια εκτέλεσης του αλγορίθμου, όπου SE_t είναι το σύνολο ακμών που περιλαμβάνουν διαστήματα που έχουν επιλεγεί από τον αλγόριθμο και περιέχουν τη χρονική στιγμή t.

- Έστω μία ακολουθία γράφων SG, μήκους T, όπου SG_t το γράφημα που αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή t. Ο SG_t αποτελείται από N κορυφές που αντιστοιχούν σε αυτές του στιγμιοτύπου και από τις ακμές του SE_t.

Θεώρημα 6.5. *Ο 2ος άπληστος αλγόριθμος δίνει πάντα βέλτιστη λύση σε στιγμιότυπα χωρίς ακμή που ανήκει σε πάνω από έναν απλό κύκλο.*

Απόδειξη. Πριν από την απόδειξη θα γίνουν μερικές βοηθητικές παρατηρήσεις.

Έστω μία λύση που έδωσε ο αλγόριθμος (2) για κυκλικό γράφημα χωρίς επικαλύψεις. Έστω μία κρίσιμη στιγμή t' για κάποιον γύρο του αλγορίθμου. Θα ισχύει ότι $|SE_{t'}| \geq n-1$ διότι διαφορετικά δε θα είχε καλυφθεί η στιγμή t', οπότε αφού δεν υπάρχουν επικαλύψεις και το γράφημα είναι κυκλικό ισχύει ότι $|SE_{t'}| = n-1$ ή $|SE_{t'}| = n$. Αν ισχύει η δεύτερη από τις περιπτώσεις αυτές τότε είναι γνωστό ότι το διάστημα I_e, που περιέχει τη στιγμή t' και αντιστοιχεί στην ακμή e του $SG_{t'}$ που προστέθηκε τελευταία στον $SG_{t'}$, επιλέχθηκε σε επόμενο γύρο, επειδή το $rank(SG_{t'})$ είχε γίνει ίσο με $n-1=r$ πριν από την επιλογή του. Επίσης είναι γνωστό ότι ο γύρος εκείνος είχε κρίσιμη στιγμή t'' το πολύ ίση με τη στιγμή λήξης του I_e.

Θα δειχθεί με ισχυρή μαθηματική επαγωγή ότι αν για κάποια κρίσιμη στιγμή t' κάποιου γύρου ισχύει ότι $|SE_{t'}| = n$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $t \in (t', I_e.end]$ για το οποίο $|SE_t| < n$, όπου e η τελευταία ακμή που προστέθηκε στο $SG_{t'}$ και I_e το σχετικό διάστημά της. Έστω k το πλήθος των γύρων με κρίσιμη χρονική στιγμή $t \in (t', I_e.end]$. Δείχθηκε ότι δε γίνεται να ισχύει ότι $k=0$, αλλιώς η e δε θα επιλεγόταν. Αν $k=1$, τότε υπάρχει ένας ακριβώς γύρος με κρίσιμη χρονική στιγμή t'' στο διάστημα που προσδιορίστηκε και αναγκαστικά το I_e επιλέχθηκε στη διάρκειά του. Έστω ότι $|SG_{t''}| = n$. Αυτό όπως εξηγήθηκε παραπάνω σημαίνει ότι η τελευταία ακμή e' που προστέθηκε στο $SG_{t''}$ είχε διάστημα $I_{e'}$ που περιέχει τη στιγμή t'' και που επιλέχθηκε από μετέπειτα γύρο, που αφού $k=1$ θα έχει κρίσιμη στιγμή $t''' > I_e.end$ και άρα $I_{e'}.end \geq t''' > I_e.end$. Όμως αφού το I_e επιλέχθηκε σε αυτόν το γύρο θα ισχύει ότι $I_{e'}.end \leq I_e.end$, άρα προέκυψε άτοπο. Συνεπώς $|SE_{t'}| = n-1$ και επομένως ισχύει η επαγωγική βάση. Γίνεται η επαγωγική υπόθεση ότι το ζητούμενο ισχύει αν $k \leq z$. Θα δειχθεί ότι ισχύει αν $k = z+1$. Έστω t'' η κρίσιμη χρονική στιγμή του αμέσως επόμενου γύρου από αυτόν με κρίσιμη στιγμή t'. Αν $|SE_{t''}| < n$ ισχύει το ζητούμενο. Αλλιώς, αν η e ήταν η τελευταία ακμή που προστέθηκε στο $SG_{t''}$, τότε σύμφωνα με την επαγωγική υπόθεση ισχύει το ζητούμενο. Διαφορετικά η τελευταία ακμή που προστέθηκε στο $SG_{t''}$ είναι η $e' \neq e$ και έστω ότι το $I_{e'}$ είναι το διάστημά της που περιέχει τη χρονική στιγμή t''. Από τον ορισμό του αλγορίθμου (2) είναι γνωστό ότι $I_{e'}.end \leq I_e.end$, άρα το πλήθος των κρίσιμων στιγμών γύρων στο $(t'', I_{e'}.end]$ θα είναι $k' < k = z+1$ και επομένως από την επαγωγική υπόθεση ισχύει το ζητούμενο. Οπότε ολοκληρώθηκε η επαγωγική απόδειξη.

Θα αποδειχθεί ότι ο αλγόριθμος (2) δίνει βέλτιστη λύση σε κυκλικό γράφημα όταν δεν υπάρχουν επικαλύψεις. Θα γίνει χρήση επιχειρήματος ανταλλαγής. Θεωρείται μία βέλτιστη λύση OPT καθώς και μία ακολουθία SE που προέκυψε από τον αλγόριθμο (2). Ορίζονται τα OPT_t ομοίως με τα SE_t. Έστω t' η πρώτη κρίσιμη χρονική στιγμή γύρου με $OPT_{t'} \neq SE_{t'}$. Προφανώς δε γίνεται να ισχύει ότι $|OPT_{t'}| = n = |SE_{t'}|$ (γιατί δε θα υπήρχε διαφορά). Αν $|OPT_{t'}| = n-1 = |SE_{t'}|$ τότε το τρέχον διάστημα της ακμής που ανήκει στο $OPT_{t'}$ αλλά όχι στο $SE_{t'}$ έχει χρονική στιγμή λήξης το πολύ ίση με αυτήν του τρέχοντος διαστήματος της ακμής που ανήκει στο $SE_{t'}$ αλλά όχι στο $OPT_{t'}$, λόγω της άπληστης επιλογής του αλγορίθμου (2), οπότε γίνεται να ανταλλαχθούν διατηρώντας κόστος και εφικτότητα σταθερά.

Αν $|OPT_{t'}| = n - 1$, αλλά $|SE_{t'}| = n$ και e η επιπλέον ακμή που έχει το $SE_{t'}$ (με τρέχον διάστημα το I_e), τότε η OPT έχει πάρει όλα τα διαστήματα ακμών εκτός από αυτό το I_e που το διάστημα ζωής τους τέμνεται με το διάστημα $[t', I_e.end]$ και δεν έχει κανένα κενό. Έχει δειχθεί (με την επαγωγή) ότι η λύση SE θα έχει τουλάχιστον κενό στο διάστημα αυτό. Οπότε γίνεται να αλλάξει η OPT επιλέγοντας το I_e και διαγράφοντας τις ακμές που αντιστοιχούν στα παραπάνω κενά χωρίς να μειωθεί το κόστος. Τέλος, αν $|OPT_{t'}| = n$ και $|SE_{t'}| = n - 1$ και e η ακμή που έχει επιπλέον η $OPT_{t'}$ (με τρέχον διάστημα το I_e), τότε από το άπληστο κριτήριο του αλγορίθμου (2) είναι γνωστό ότι όλα τα διαστήματα που αρχίζουν στο $[t', I_e.end]$ έχουν στιγμή λήξης τουλάχιστον $I_e.end$, επομένως για να ισχύει ότι $rank(OPT_{I_e.end}) = n - 1 = r$ η OPT μπορεί να έχει μόνο μία ακμή με μη επιλεγμένο σχετικό διάστημα στο $[t', I_e.end]$ που ζει τουλάχιστον μέχρι τη στιγμή $I_e.end$. Οπότε γίνεται να διαγραφεί από το OPT η e και να συμπληρωθεί αυτό το πιθανό κενό, χωρίς αύξηση του κόστους. Αν οι δύο λύσεις έχουν τα ίδια διαστήματα επιλεγμένα για όλες τις κρίσιμες στιγμές γύρων, τότε το SE δεν μπορεί να περιέχει επιπλέον ακμές από το OPT, επειδή όλες η ακμές του αγγίζουν μία από τις στιγμές αυτές. Αποδείχθηκε λοιπόν ότι ο αλγόριθμος (2) δίνει βέλτιστη λύση σε κυκλικά γραφήματα χωρίς επικαλύψεις.

Μπορεί να γίνει γενίκευση για την περίπτωση των γράφων χωρίς ακμή που ανήκει σε πάνω από έναν κύκλο. Οι ακμές που δεν ανήκουν σε κανένα κύκλο επιλέγονται υποχρεωτικά από τον αλγόριθμο (βέλτιστο), αφού δεν υπάρχουν επικαλύψεις. Ο κάθε κύκλος που υπάρχει αντιμετωπίζεται από τον αλγόριθμο ανεξάρτητα και όπως δείχθηκε βέλτιστα. □

Λήμμα 6.6. *Και οι δύο άπληστοι αλγόριθμοι δίνουν πάντα βέλτιστη λύση σε γενικό γράφημα (ακόμα και με επικαλύψεις) όταν* $T \leq 2$.

Απόδειξη. **Απόδειξη για την περίπτωση που** $T = 1$:

Όταν ισχύει ότι $T = 1$ ο αλγόριθμος (1) επιλέγει κάθε φορά διάστημα ακμής που προκαλεί μέγιστη αθροιστική αύξηση του rank του SG_1, δηλαδή αύξηση ίση με 1, καθώς αν η μέγιστη αύξηση ήταν μικρότερη (μηδενική) θα είχε βρει ήδη εφικτή λύση επειδή το rank δε θα μπορούσε να αυξηθεί άλλο. Αφού κάθε διάστημα ακμής που επιλέγεται αυξάνει το rank κατά 1 δε σχηματίζονται κύκλοι, οπότε η τελική εφικτή λύση είναι spanning δέντρο και άρα βέλτιστη.

Όταν ισχύει ότι $T = 1$ ο αλγόριθμος (2) επιλέγει σε κάθε βήμα διάστημα ακμής η ακμή του οποίου δεν ανήκει στο span του τρέχοντος συνόλου επιλεγμένων ακμών, οπότε και δε σχηματίζει κύκλο. Αφού λοιπόν δε σχηματίζονται κύκλοι μέχρι την ολοκλήρωση του αλγορίθμου η τελική εφικτή λύση είναι spanning δέντρο και άρα βέλτιστη.

Απόδειξη για την περίπτωση που $T = 2$:

Υπάρχουν τριών ειδών διαθέσιμα διαστήματα ακμών ως προς τα χρονικά όριά τους: Αυτά που περιέχουν μόνο τη χρονική στιγμή $t = 1$, αυτά που περιέχουν μόνο τη χρονική στιγμή $t = 2$ και αυτά που περιέχουν και τις δύο χρονικές στιγμές. Επειδή επιτρέπονται επικαλύψεις μπορεί να υπάρχουν παράλληλες ακμές με επικαλυπτόμενα διαστήματα. Όταν συμβαίνει αυτό τουλάχιστον μία από τις παράλληλες ακμές έχει διάστημα που περιέχει όλες τις χρονικές στιγμές.

Σε μία βέλτιστη λύση οι ακμές των επιλεγμένων διαστημάτων σχηματίζουν δάσος, επειδή αν σχημάτιζαν κάποιον κύκλο θα μπορούσε να αφαιρεθεί το επιλεγμένο διάστημα μίας ακμής του κύκλου ώστε η λύση να παραμείνει εφικτή και το κόστος της να μειωθεί, κάτι που οδηγεί σε αντίφαση με τη βελτιστότητα. Έστω ότι το πλήθος τους είναι ίσο με a. Η βέλτιστη λύση θα περιέχει $r - a$ διαστήματα ακμών που ζουν μόνο τη χρονική στιγμή $t = 1$, καθώς αν περιείχε λιγότερα η λύση δε θα μπορούσε να είναι εφικτή, ενώ αν περιείχε περισσότερα δε θα ήταν βέλτιστη. Ομοίως και για τη στιγμή $t = 2$. Άρα συνολικά η λύση περιέχει $2 \cdot r - a$ διαστήματα ακμών, οπότε όσο μεγαλύτερο το a, τόσο μικρότερο το κόστος της λύσης.

Ο αλγόριθμος (1) επιλέγει πρώτα μόνο διαστήματα ακμών που περιέχουν και τις δύο χρονικές στιγμές, χωρίς να σχηματίζει κύκλους, καθώς έχουν όφελος 2. Κάποια στιγμή δε θα μπορεί να επιλέξει άλλο τέτοιο διάστημα ακμής που να έχει όφελος. Οι ακμές των μέχρι τότε επιλεγμένων διαστημάτων θα έχουν σχηματίσει ένα maximum δάσος με b ακμές. Στη συνέχεια θα επιλέγει στιγμιαία διαστήματα χωρίς να σχηματίζει κύκλους μέχρι να καταλήξει σε εφικτή λύση με $2 \cdot r - b$ διαστήματα ακμών. Επειδή το δάσος όπως ειπώθηκε ήταν maximum, το b είναι επίσης maximum, οπότε το κόστος της λύσης είναι το ελάχιστο δυνατό και αυτή είναι βέλτιστη.

Ο αλγόριθμος (2) ομοίως θα επιλέξει πρώτα b διαστήματα που περιέχουν και τις δύο χρονικές στιγμές σχηματίζοντας ένα maximum δάσος και στη συνέχεια θα επιλέξει $r - b$ διαστήματα που περιέχουν μόνο τη χρονική στιγμή $t = 1$, ολοκληρώνοντας τον πρώτο γύρο. Στο δεύτερο γύρο (αν υπάρχει) θα επιλέξει $r - b$ διαστήματα που περιέχουν μόνο τη χρονική στιγμή $t = 2$. Όπως και προηγουμένως αφού το b είναι maximum η λύση που υπολογίστηκε είναι βέλτιστη. □

Λήμμα 6.7. *Για $T \leq 2$ κάθε βέλτιστη λύση μπορεί να προκύψει από τον άπληστο αλγόριθμο*

Απόδειξη. **Απόδειξη για την περίπτωση που** $T = 1$:

Οι ακμές των επιλεγμένων διαστημάτων μίας βέλτιστης λύσης σχηματίζουν δέντρο, διότι αν ήταν λιγότερες δε θα υπήρχε συνεκτικότητα (άρα όχι εφικτή λύση) και αν ήταν περισσότερες θα σχηματιζόταν κάποιος κύκλος (άρα θα μπορούσε να αφαιρεθεί ακμή χωρίς μεταβολή του rank). Συνεπώς η βέλτιστη λύση έχει επιλεγμένα $N - 1$ διαστήματα.

Ο άπληστος αλγόριθμος μπορεί να επιλέξει τα διαστήματα αυτά, διότι αρχίζουν την πρώτη χρονική στιγμή και λήγουν το αργότερο δυνατό, και να τερματίσει, αφού θα έχει επιτευχθεί συνεκτικότητα.

Απόδειξη για την περίπτωση που $T = 2$:

Έχει αποδειχθεί ότι κάθε βέλτιστη λύση έχει επιλεγμένα $2N - 2 - a$ διαστήματα, όπου a το μέγιστο πλήθος διαστημάτων διάρκειας 2 που μπορεί να επιλεγεί χωρίς να σχηματιστεί κύκλος, καθώς και ότι τα a από αυτά τα διαστήματα έχουν διάρκεια 2 και τα υπόλοιπα έχουν διάρκεια 1 με $N - 1 - a$ από αυτά να περιέχουν μόνο την πρώτη χρονική στιγμή και άλλα τόσα μόνο τη δεύτερη. Ο άπληστος αλγόριθμος μπορεί να επιλέξει πρώτα τα a αυτά διαστήματα διάρκειας 2, καθώς αρχίζουν την πρώτη χρονική στιγμή, λήγουν το αργότερο δυνατό και δε σχηματίζουν κύκλο. Έπειτα θα τερματίσει την επιλογή διαστημάτων διάρκειας 2 καθώς κάθε άλλο τέτοιο διάστημα δημιουργεί κύκλο στην πρώτη χρονική στιγμή. Μετά μπορεί να επιλέξει τα $N-1-a$ διαστήματα της βέλτιστης λύσης που περιέχουν μόνο την πρώτη χρονική στιγμή καθώς αρχίζουν την πρώτη χρονική στιγμή, λήγουν το αργότερο δυνατό και δε σχηματίζουν κύκλο. Η πρώτη χρονική στιγμή έχει καλυφθεί και αρχίζει η επιλογή διαστημάτων με σκοπό να υπάρχει συνεκτικότητα κατά τη δεύτερη. Αυτό μπορεί να γίνει με την επιλογή των διαστημάτων της βέλτιστης λύσης που περιέχουν μόνο τη δεύτερη χρονική στιγμή και με τερματισμό του άπληστου αλγορίθμου.

Αποδείχθηκε λοιπόν ότι για $T \leq 2$ κάθε βέλτιστη λύση μπορεί να προκύψει από τον άπληστο αλγόριθμο. Έχει αποδειχθεί ότι για $T \leq 2$ κάθε λύση που δίνει ο άπληστος αλγόριθμος είναι βέλτιστη. Συνεπώς για $T \leq 2$ μία λύση είναι βέλτιστη αν και μόνο αν μπορεί να προκύψει από τον άπληστο αλγόριθμο. □

Λήμμα 6.8. *Για $D = 1$ ο άπληστος αλγόριθμος υπολογίζει βέλτιστη λύση.*

Απόδειξη. Σε ένα στιγμιότυπο με εφικτή λύση του SSSM όπου $D = 1$, δηλαδή κάθε υπάρχον διάστημα έχει διάρκεια το πολύ 1, άρα ακριβώς 1, ο άπληστος αλγόριθμος υπολογίζει πάντα βέλτιστη λύση, όπως θα αποδείξουμε.

Μία βέλτιστη λύση για ένα τέτοιο στιγμιότυπο, προκειμένου να αποτελεί εφικτή λύση, πρέπει να έχει επιλέξει διαστήματα ώστε κάθε χρονική στιγμή το γράφημα με τις N κορυφές και τις ακμές που έχουν επιλεγμένο διάστημα για τη χρονική αυτή να είναι συνεκτικό. Για να ισχύει αυτό πρέπει για μία δεδομένη χρονική στιγμή το γράφημα αυτό να έχει τουλάχιστον $N-1$ ακμές. Επειδή κάθε διάστημα έχει διάρκεια μία χρονική στιγμή κάθε στιγμή θα είναι επιλεγμένα τουλάχιστον $N-1$ διαστήματα, διαφορετικά από αυτά που είναι επιλεγμένα για τις άλλες χρονικές στιγμές. Άρα το συνολικό βέλτιστο κόστος είναι τουλάχιστον $T(N-1)$ (για την ακρίβεια είναι ακριβώς τόσο).

Ο άπληστος αλγόριθμος, εξ ορισμού, κάθε χρονική στιγμή επιλέγει διαστήματα ώστε το γράφημα από τις αντίστοιχες ακμές και τις N κορυφές να είναι συνεκτικό, χωρίς να προκύψουν κύκλοι. Άρα κάθε χρονική στιγμή επιλέγει το πολύ $N-1$ διαστήματα και συνολικά θα επιλέξει το πολύ $T(N-1)$. Να σημειωθεί ότι αυτό ισχύει ανεξαρτήτως του D, για $D = 1$ μάλιστα ισχύει ότι θα επιλέξει ακριβώς $T(N-1)$ διαστήματα.

Άρα αφού το βέλτιστο (ελάχιστο) κόστος είναι τουλάχιστον $T(N-1)$ και το κόστος της λύσης του άπληστου αλγορίθμου είναι το πολύ τόσο, ισχύει ότι και τα δύο κόστη αυτά θα είναι ακριβώς ίσα με τόσο και ότι ο άπληστος αλγόριθμος υπολογίζει βέλτιστη λύση όταν $D = 1$. □

Λήμμα 6.9. *Ο άπληστος αλγόριθμος υπολογίζει βέλτιστη λύση για ελάχιστη διάρκεια διαστήματος ίση με T.*

Απόδειξη. Σε ένα στιγμιότυπο με εφικτή λύση του SSSM όπου κάθε υπάρχον διάστημα έχει διάρκεια τουλάχιστον T, άρα ακριβώς T, ο άπληστος αλγόριθμος υπολογίζει πάντα βέλτιστη λύση, όπως θα αποδείξουμε.

Μία βέλτιστη λύση, προκειμένου να αποτελεί εφικτή λύση, πρέπει να έχει επιλέξει διαστήματα ώστε το γράφημα με τις N κορυφές και τις ακμές που έχουν επιλεγμένο διάστημα για την πρώτη χρονική ($t = 1$) να είναι συνεκτικό. Οπότε οι ακμές του γραφήματος αυτού πρέπει να είναι τουλάχιστον $N - 1$, άρα και να έχουν επιλεγεί τουλάχιστον $N - 1$ διαστήματα. Άρα το βέλτιστο κόστος είναι τουλάχιστον $N - 1$. Το κάτω αυτό όριο ισχύει πάντα, καθώς η απόδειξη δε χρησιμοποίησε κάποιον περιορισμό για το στιγμιότυπο πέρα από το ότι έχει εφικτή λύση.

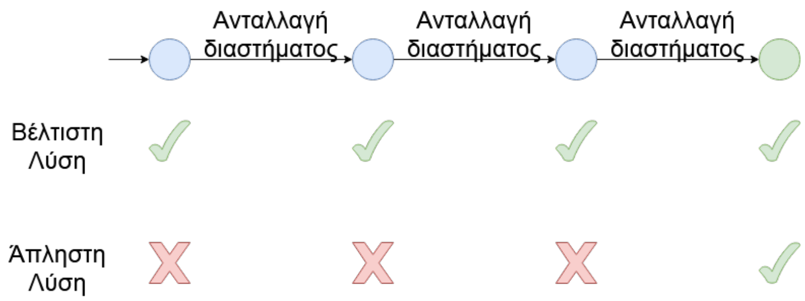
Ο άπληστος αλγόριθμος την πρώτη χρονική στιγμή θα επιλέξει διαστήματα που καθιστούν το γράφημα που σχηματίζεται από τις αντίστοιχες ακμές και τις N κορυφές συνεκτικό, χωρίς να προκύψει κάποιος κύκλος, οπότε θα επιλέξει ακριβώς $N - 1$ διαστήματα. Τα διαστήματα αυτά έχουν διάρκεια με T οπότε θα είναι διαθέσιμα και για τις επόμενες χρονικές στιγμές και τα αντίστοιχα γραφήματα θα είναι συνεκτικά χωρίς να χρειαστεί να επιλεγούν άλλα διαστήματα. Επομένως το κόστος της λύσης που υπολογίζει ο άπληστος αλγόριθμος είναι ίσο με $N - 1$.

Άρα αφού το βέλτιστο (ελάχιστο) κόστος είναι τουλάχιστον $N - 1$ και το κόστος της λύσης του άπληστου αλγορίθμου είναι το ακριβώς τόσο, ισχύει ότι και τα δύο κόστη αυτά θα είναι ακριβώς ίσα με τόσο και ότι ο άπληστος αλγόριθμος υπολογίζει βέλτιστη λύση όταν η ελάχιστη διάρκεια διαστήματος είναι T. □

Θεώρημα 6.10. *Για $D = 2$ ο άπληστος αλγόριθμος μπορεί πάντα να βρει βέλτιστη λύση.*

Απόδειξη. 1ος τρόπος απόδειξης

Θα αποδειχθεί αυτή η πρόταση κατασκευαστικά. Έστω ένα εφικτό στιγμιότυπο του SSSM και μία βέλτιστη λύση αυτού. Θα παρουσιαστεί ένας αλγόριθμος που τροποποιεί τη λύση με ανταλλαγές διαστημάτων διατηρώντας την εφικτότητα μέχρις ότου η τροποποιημένη λύση να μπορεί να έχει προκύψει από τον άπληστο αλγόριθμο. Ως ανταλλαγή διαστήματος ορίζεται η αφαίρεση ενός διαστήματος από το σύνολο επιλεγμένων διαστημάτων μίας λύσης και η προσθήκη ενός άλλου διαστήματος στο σύνολο αυτό (που πριν δεν άνηκε στο σύνολο). Μία ανταλλαγή διαστήματος δε μεταβάλλει το κόστος της λύσης, αφού το πλήθος των επιλεγμένων διαστημάτων παραμένει σταθερό. Άρα αν η εκκίνηση γίνει από μία βέλτιστη λύση και κάθε τροποποίηση διατηρεί την εφικτότητα της λύσης, θα προκύψει μία ακολουθία βελτίστων λύσεων. Συνεπώς αν η τελευταία λύση της ακολουθίας αυτής μπορεί να έχει προκύψει από τον βέλτιστο αλγόριθμο, τότε για το δοθέν στιγμιότυπο (που είναι οποιοδήποτε εφικτό) ο άπληστος αλγόριθμος μπορεί να βρει βέλτιστη λύση. Να σημειωθεί ότι ο αλγόριθμος που θα περιγραφεί δεν επιλέγει διάστημα που ήταν επιλεγμένο στο παρελθόν, άρα το πλήθος των πιθανών ανταλλαγών διαστημάτων είναι φραγμένο από το συνολικό πλήθος διαστημάτων, οπότε ο αλγόριθμος τερματίζει. Η διαδικασία αυτή οπτικοποιείται στο σχήμα 6.3.



Σχήμα 6.3: Οπτικοποίηση διαδικασίας διάσχισης χώρου λύσεων

Ο αλγόριθμος τροποποίησης λύσης εκτελείται σε βήματα, με κάθε βήμα να αντιστοιχεί σε μία χρονική στιγμή, αρχίζοντας από την πρώτη ($t = 1$) και συνεχίζοντας μέχρι και την τελευταία ($t = T$). Ακολουθεί η περιγραφή του αλγορίθμου.

Ένα διάστημα θα λέγεται ότι έχει παγιωθεί, όταν ανήκει στη βέλτιστη λύση και είναι βέβαιο ότι δε θα αφαιρεθεί από αυτήν (με ανταλλαγή διαστήματος).

Ένα διάστημα θα λέγεται ότι είναι το τρέχον διάστημα μίας ακμής όταν περιέχει τη χρονική στιγμή που αντιστοιχεί στο τρέχον βήμα του αλγορίθμου τροποποίησης.

Κατά το πρώτο βήμα ($t = 1$) ο αλγόριθμος αρχίζει με τη μη τροποποιημένη βέλτιστη λύση. Έστω ένα γράφημα με N κορυφές που αντιστοιχούν σε αυτές του στιγμιοτύπου το οποίο αρχικά δεν έχει ακμές.

1. Προστίθενται στο γράφημα οι ακμές των διαστημάτων της βέλτιστης λύσης που λήγουν την τρέχουσα χρονική στιγμή. Τα διαστήματα αυτά της βέλτιστης λύσης είναι μη παγιωμένα που περιέχουν μόνο τη χρονική στιγμή $t = 1$. Το γράφημα που προέκυψε είναι δάσος, διότι αν δεν ήταν θα υπήρχε κύκλος με τουλάχιστον μία ακμή της οποίας το τρέχον διάστημα θα μπορούσε να αφαιρεθεί από τη λύση χωρίς να χαλάσει η εφικτότητά της, κάτι που είναι άτοπο, λόγω βελτιστότητας της λύσης.

2. Προστίθενται στο γράφημα οι ακμές των διαστημάτων της βέλτιστης λύσης που περιέχουν τις χρονικές στιγμές $t = 1$ και $t = 2$ (αν $T = 1$ δεν υπάρχουν τέτοιες ακμές) και παγιώνονται τα σχετικά διαστήματα. Το γράφημα που προέκυψε είναι δάσος, διότι αν δεν ήταν θα υπήρχε κύκλος με τουλάχιστον μία ακμή της οποίας το τρέχον διάστημα θα μπορούσε να αφαιρεθεί από τη λύση χωρίς να χαλάσει η εφικτότητά της, κάτι που είναι άτοπο, λόγω βελτιστότητας της λύσης. Επίσης το γράφημα που προέκυψε είναι συνεκτικό, επειδή διαφορετικά η βέλτιστη λύση δε θα ήταν εφικτή. Άρα το γράφημα που προέκυψε είναι δέντρο.

3. Τώρα εξετάζονται μία μία, σε τυχαία σειρά, όλες οι ακμές που δεν άνηκαν ποτέ σε βέλτιστη λύση και έχουν διάστημα που περιέχει τις χρονικές στιγμές $t = 1$ και $t = 2$. Αν η εξεταζόμενη ακμή αν προστεθεί στο γράφημα σχηματίζει κύκλο με το τρέχον διάστημά όλων των άλλων ακμών του κύκλου να είναι παγιωμένο, τότε την αγνοούμε. Διαφορετικά προστίθεται στο γράφημα και παγιώνεται το τρέχον διάστημά της. Στο πρώην δέντρο σχηματίζεται κύκλος που περιλαμβάνει τουλάχιστον μία ακμή με μη παγιωμένο σχετικό διάστημα (λήγει την τρέχουσα χρονική στιγμή). Επιλέγεται μία τέτοια ακμή του κύκλου και την αφαιρείται καθώς και το τρέχον διάστημα αυτής από τη λύση (εδώ έγινε ανταλλαγή διαστήματος, μπήκε στη λύση ένα διάστημα που λήγει την επόμενη χρονική στιγμή και βγήκε ένα που λήγει την τρέχουσα). Η διαδικασία συνεχίζει για όλες τις ακμές προς εξέταση, κάνοντας όσες ανταλλαγές διαστημάτων χρειαστεί.

4. Παγιώνονται τα μη παγιωμένα διαστήματα των ακμών του τελικού γραφήματος (λήγουν την τρέχουσα χρονική στιγμή).

Το γράφημα που προέκυψε περιλαμβάνει ακμές των οποίων τα τρέχοντα διαστήματα ανήκουν στην τροποποιημένη λύση. Τα διαστήματα αυτά θα μπορούσαν να είχαν επιλεγεί από τον άπληστο αλγόριθμο καθώς αυτός προσπαθούσε να εξασφαλίσει συνεκτικότητα για $t = 1$. Πρώτα θα επέλεγε τα διαστήματα που λήγουν την επόμενη χρονική στιγμή ($t = 2$) και μετά αυτά που λήγουν την τρέχουσα χρονική στιγμή ($t = 1$) (φθήνουσα προτεραιότητα ως προς τον χρόνο λήξης). Αυτό θα μπορούσε να συμβεί καθώς καμία από τις επιλογές δεν προκαλεί σχηματισμό κύκλου για την τρέχουσα χρονική στιγμή ($t = 1$) και επειδή δε θα μπορούσε να επιλεγεί κάποιο επιπλέον διάστημα που λήγει την επόμενη χρονική στιγμή ($t = 2$), διότι αγνοήθηκε από τον αλγόριθμο τροποποίησης αφού η ακμή του σχημάτιζε κύκλο με άλλες διαστημάτων που λήγουν την ίδια χρονική στιγμή ($t = 2$).

Για κάθε βήμα του αλγορίθμου τροποποίησης θα ισχύει ότι τα διαστήματα ακμών που άνηκαν στο τελικό γράφημα (μετά τις ανταλλαγές ακμών) κάποιου βήματος μέχρι και αυτό, δεν πρόκειται να αφαιρεθούν από τη λύση (θα λέγεται ότι έχουν παγιωθεί) και θα μπορούσαν να προκύψουν από τον άπληστο αλγόριθμο κατά την προσπάθειά του να εξασφαλίσει συνεκτικότητα μέχρι και την αντίστοιχη χρονική στιγμή. Η πρώτη από αυτές τις ιδιότητες φαίνεται από την περιγραφή του αλγορίθμου τροποποίησης για $t > 1$ και η δεύτερη φαίνεται και από αυτήν, αλλά και από την περιγραφή για $t = 1$, όπως επισημάνθηκε.

Ακόμη οι ακμές των παγιωμένων διαστημάτων μετά από ένα βήμα δε σχηματίζουν κύκλο σε μεταγενέστερο χρόνο, καθώς τότε θα σχημάτιζαν και στο γράφημα του βήματος αυτού και άρα δε θα μπορούσε να ισχύει η πρώτη ιδιότητα της προηγούμενης παραγράφου.

Κατά το k-οστό βήμα ($t = k$, $1 < k \leq t$) ο αλγόριθμος αρχίζει με την τροποποιημένη βέλτιστη λύση στην οποία έχει καταλήξει το βήμα $k - 1$. Έστω ένα γράφημα με N κορυφές που αντιστοιχούν σε αυτές του στιγμιοτύπου το οποίο αρχικά δεν έχει ακμές.

1. Προστίθενται στο γράφημα οι ακμές των διαστημάτων της βέλτιστης λύσης που λήγουν την τρέχουσα χρονική στιγμή. Τα διαστήματα αυτά της βέλτιστης λύσης, είτε είναι μη παγιωμένα που περιέχουν μόνο τη χρονική στιγμή $t = k$, είτε είναι παγιωμένα ή μη που

περιέχουν τις χρονικές στιγμές $t = k - 1$ και $t = k$ (θα φανεί σε λίγο πώς ένα διάστημα της βέλτιστης λύσης διάρκειας 2 μπορεί να μην έχει παγιωθεί στο τέλος του βήματος που αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή έναρξής του). Το γράφημα που προέκυψε είναι δάσος, διότι αν δεν ήταν θα υπήρχε κύκλος με τουλάχιστον μία ακμή με μη παγιωμένο τρέχον διάστημα (δεν υπάρχουν κύκλοι αποτελούμενοι αποκλειστικά από ακμές με παγιωμένα από το προηγούμενο βήμα τρέχοντα διαστήματα, ιδιότητα που αναφέρθηκε παραπάνω) το οποίο θα μπορούσε να αφαιρεθεί από τη λύση χωρίς να χαλάσει η εφικτότητά της, κάτι που είναι άτοπο, λόγω βελτιστότητας της λύσης.

2. Εξετάζονται μία μία, σε τυχαία σειρά, όλες οι ακμές που έχουν διάστημα στη βέλτιστη λύση που περιέχει τις χρονικές στιγμές $t = k$ και $t = k + 1$ (για $t = T$ δεν υπάρχουν τέτοιες ακμές). Αν η εξεταζόμενη ακμή αν προστεθεί στο γράφημα σχηματίζει κύκλο, τότε αγνοείται, όμως παραμένει στη βέλτιστη λύση (έτσι ένα διάστημα της βέλτιστης λύσης διάρκειας 2 μπορεί να μην έχει παγιωθεί στο τέλος του βήματος που αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή έναρξής του). Διαφορετικά προστίθεται στο γράφημα και παγιώνεται το σχετικό διάστημα. Η διαδικασία συνεχίζει για όλες τις ακμές προς εξέταση. Θα σχηματιστεί δέντρο, επειδή διαφορετικά η βέλτιστη λύση δε θα ήταν εφικτή (η ανταλλαγή διαστημάτων κατά το προηγούμενο βήμα μόνο ευνοεί τη συνεκτικότητα του τρέχοντος γραφήματος).

3. Τώρα εξετάζονται μία μία, σε τυχαία σειρά, όλες οι ακμές που δεν άνηκαν ποτέ σε βέλτιστη λύση και έχουν διάστημα που περιέχει τις χρονικές στιγμές $t = k$ και $t = k + 1$. Αν η εξεταζόμενη ακμή αν προστεθεί στο γράφημα σχηματίζει κύκλο με το τρέχον διάστημά όλων των άλλων ακμών του κύκλου να είναι παγιωμένο, τότε την αγνοούμε. Διαφορετικά προστίθεται στο γράφημα και παγιώνεται το τρέχον διάστημά της. Στο πρώην δέντρο σχηματίζεται κύκλος που περιλαμβάνει τουλάχιστον μία ακμή με μη παγιωμένο σχετικό διάστημα (λήγει την τρέχουσα χρονική στιγμή). Επιλέγεται μία τέτοια ακμή του κύκλου και αφαιρείται καθώς και το τρέχον διάστημα αυτής από τη λύση (εδώ έγινε ανταλλαγή διαστήματος, μπήκε στη λύση ένα διάστημα που λήγει την επόμενη χρονική στιγμή και βγήκε ένα που λήγει την τρέχουσα). Η διαδικασία συνεχίζει για όλες τις ακμές προς εξέταση, κάνοντας όσες ανταλλαγές διαστημάτων χρειαστεί.

4. Παγιώνονται τα μη παγιωμένα διαστήματα των ακμών του τελικού γραφήματος (λήγουν την τρέχουσα χρονική στιγμή).

Το γράφημα που προέκυψε περιλαμβάνει ακμές των οποίων τα τρέχοντα διαστήματα ανήκουν στην τροποποιημένη λύση. Από τα διαστήματα αυτά, αυτά που παγιώθηκαν κατά το βήμα αυτό, θα μπορούσαν να είχαν επιλεγεί από τον άπληστο αλγόριθμο καθώς αυτός προσπαθούσε να εξασφαλίσει συνεκτικότητα για $t = k$. Πρώτα θα επέλεγε τα διαστήματα που λήγουν την επόμενη χρονική στιγμή ($t = k + 1$) και μετά αυτά που λήγουν την τρέχουσα χρονική στιγμή ($t = k$) (φθίνουσα προτεραιότητα ως προς τον χρόνο λήξης). Αυτό θα μπορούσε να συμβεί καθώς καμία από τις επιλογές δεν προκαλεί σχηματισμό κύκλου για την τρέχουσα χρονική στιγμή ($t = k$) και επειδή δε θα μπορούσε να επιλεγεί κάποιο επιπλέον διάστημα που λήγει την επόμενη χρονική στιγμή ($t = k + 1$), διότι αγνοήθηκε από τον αλγόριθμο τροποποίησης αφού η ακμή του σχημάτιζε κύκλο με άλλες διαστημάτων που λήγουν την ίδια χρονική στιγμή ($t = k + 1$).

Τελικά, μετά τον τερματισμό της εκτέλεσης του παραπάνω αλγορίθμου τροποποίησης, έχει διαμορφωθεί μία βέλτιστη λύση που μπορεί να προκύψει από τον άπληστο αλγόριθμο. □

Θεώρημα 6.11. *Για $D = 2$ ο άπληστος αλγόριθμος μπορεί πάντα να βρει βέλτιστη λύση.*

Απόδειξη. 2ος τρόπος απόδειξης

Πρώτα θα δωθούν κάποιοι ορισμοί και θα αποδειχθούν κάποιες βοηθητικές ιδιότητες.

Έστω ένας αλγόριθμος που δοθέντος ενός εφικτού στιγμιοτύπου του SSSM επιλέγει διαδοχικά διαστήματα και καταλήγει σε μία εφικτή λύση. Έστω ότι η εκτέλεση του αλγορίθμου (η επιλογή διαστημάτων) μπορεί να χωριστεί σε T βήματα (ενδεχομένως σε κάποια βήματα να μην επιλέγεται κανένα διάστημα).

Ορίζονται τρεις ακολουθίες, οι W, SE και SG, ως εξής:

- Έστω W η ακολουθία βημάτων του αλγορίθμου, μήκους T, όπου W_t είναι το t-οστό βήμα του αλγορίθμου και αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή t.
- Έστω μία ακολουθία συνόλων ακμών SE, μήκους T, η οποία μεταβάλλεται κατά τη διάρκεια εκτέλεσης του αλγορίθμου, όπου SE_t είναι το σύνολο ακμών που περιλαμβάνουν διαστήματα που έχουν επιλεγεί από τον αλγόριθμο και περιέχουν τη χρονική στιγμή t.
- Έστω μία ακολουθία γράφων SG, μήκους T, όπου SG_t το γράφημα που αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή t. Ο SG_t αποτελείται από N κορυφές που αντιστοιχούν σε αυτές του στιγμιοτύπου και από τις ακμές του SE_t.

Θα λέγεται ότι ο αλγόριθμος είναι τύπου $\mathcal{A}_{t^*}$ αν ικανοποιεί τις ακόλουθες πρωτεύουσες ιδιότητες μέχρι και το τέλος του βήματος W_{t^*}:

1. Κατά το βήμα W_t επιλέγονται μόνο διαστήματα που περιέχουν τη χρονική στιγμή t.
2. Κατά το βήμα W_t δε σχηματίζεται νέος κύκλος στον SG_t.
3. Στο τέλος του W_t ο SG_t είναι συνεκτικός.

Αν ένας αλγόριθμος είναι τύπου $\mathcal{A}_T$ θα λέγεται ότι είναι τύπου $\mathcal{A}$. Επίσης κάθε αλγόριθμος θεωρείται τύπου $\mathcal{A}_0$.

Να σημειωθεί ότι ο άπληστος αλγόριθμος είναι τύπου $\mathcal{A}$. Τα βήματα είναι αυτά που προκύπτουν από τον ορισμό του, ο μη σχηματισμός νέων κύκλων για το τρέχον γράφημα του SG προκύπτει από το γεγονός ότι κατά το W_t επιλέγονται ακμές που αυξάνουν το rank του S_G και η συνεκτικότητα στο τέλος του βήματος από το ότι αυτή αποτελεί τη συνθήκη τερματισμού ενός βήματος κατά τον ορισμό του αλγορίθμου (δεδομένου ότι το στιγμιότυπο είναι εφικτό).

Τώρα θα αποδειχθούν κάποιες χρήσιμες δευτερεύουσες ιδιότητες για έναν αλγόριθμο τύπου $\mathcal{A}_{t^*}$:

1. Θα αποδειχθεί ότι μέχρι και το τέλος του W_t ($t \leq t*$) η ακολουθία $SE_{[t,T]}$ είναι φθίνουσα, δηλαδή ότι για $t \leq t_1 \leq t_2 \leq T$ ισχύει ότι $SE_{t_1} \supseteq SE_{t_2}$. Έστω ότι η πρόταση προς απόδειξη δεν ισχύει, δηλαδή υπάρχουν t_1 και t_2 με $t \leq t_1 \leq t_2 \leq T$ τέτοια ώστε $SE_{t_1} \not\supseteq SE_{t_2} \Rightarrow \exists e \in SE_{t_2} : e \notin SE_{t_1}$. Άρα η ακμή e έχει κάποιο επιλεγμένο διάστημα που περιέχει τη χρονική στιγμή t_2 και όχι τη χρονική στιγμή t_1. Αφού $t_1 \leq t_2$ το διάστημα αυτό αρχίζει μετά τη χρονική στιγμή t_1. Όμως αφού $t \leq t_1$ το διάστημα αυτό αρχίζει και μετά τη χρονική στιγμή t. Άρα κατά το $W_{t'}$ με $t' \leq t$ επιλέχθηκε διάστημα που αρχίζει μετά τη χρονική στιγμή t, που είναι άτοπο, λόγω της πρώτης ιδιότητας των αλγορίθμων τύπου $\mathcal{A}_{t^*}$. Συνεπώς αποδείχθηκε η ιδιότητα.

2. Θα αποδειχθεί ότι μέχρι και το τέλος του W_t ($t \leq t*$) τα γραφήματα της ακολουθίας $SG_{[t,T]}$ είναι δάση. Έστω ότι η πρόταση προς απόδειξη δεν ισχύει, δηλαδή υπάρχει χρονική στιγμή t' με $t \leq t' \leq T$ της οποίας το γράφημα δεν είναι δάσος, δηλαδή περιέχει τουλάχιστον έναν κύκλο. Θεωρείται το ελάχιστο t για το οποίο συνέβη αυτό. Από την προηγούμενη ιδιότητα προκύπτει ότι και ο SG_t θα έχει τουλάχιστον έναν κύκλο και κάθε κύκλος του σχηματίστηκε κατά το W_t, διότι επιλέχθηκε το ελάχιστο t. Άρα ο αλγόριθμος επέλεξε διάστημα σχηματίζοντας νέο κύκλο στη χρονική στιγμή που αντιστοιχεί στο τρέχον βήμα του, που είναι άτοπο, λόγω της δεύτερης ιδιότητας των αλγορίθμων τύπου $\mathcal{A}_{t^*}$. Συνεπώς αποδείχθηκε η ιδιότητα.

Τώρα θα αποδειχθεί το ζητούμενο κατασκευαστικά. Έστω ένα εφικτό στιγμιότυπο του SSSM και μία βέλτιστη λύση αυτού. Θα παρουσιαστεί ένας αλγόριθμος που τροποποιεί την αρχική βέλτιστη λύση σε βήματα, σχηματίζοντας μία ακολουθία βελτίστων λύσεων (η αρχική και μία στο τέλος κάθε βήματος). Ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί τέσσερα σύνολα που διαμερίζουν το σύνολο όλων των διαστημάτων του στιγμιοτύπου:

- Το σύνολο των εγκεκριμμένων διαστημάτων. Περιέχει τα διαστήματα που σίγουρα θα ανήκουν στην τελική λύση (βέλτιστη λύση που μπορεί να προκύψει από τον άπληστο αλγόριθμο), συνεπώς όταν ένα διάστημα μπει σε αυτό το σύνολο (εγκριθεί) δεν μπορεί να ξαναβγεί. Αρχικά αυτό το σύνολο είναι κενό. Τελικά θα περιέχει όλα τα διαστήματα που ανήκουν στην τελική λύση.

- Το σύνολο των απορριφθέντων διαστημάτων. Περιέχει τα διαστήματα που σίγουρα δε θα ανήκουν στην τελική λύση, συνεπώς όταν ένα διάστημα μπει σε αυτό το σύνολο (απορριφθεί) δεν μπορεί να ξαναβγεί. Αρχικά αυτό το σύνολο περιέχει όλα τα διαστήματα διάρκειας 1 που δεν ανήκουν στην αρχική βέλτιστη λύση. Τελικά θα περιέχει όλα τα διαστήματα που δεν ανήκουν στην τελική λύση.

- Το σύνολο των κρισίμων-εντός διαστημάτων. Περιέχει τα διαστήματα που δεν είναι γνωστό αν θα ανήκουν στην τελική λύση, αλλά ανήκουν στην τρέχουσα λύση. Διαστήματα του συνόλου αυτού μπορούν μόνο να εγκρίνονται ή να απορρίπτονται. Αρχικά το σύνολο αυτό περιέχει τα διαστήματα της αρχικής βέλτιστης λύσης. Τελικά δε θα περιέχει κανένα διάστημα.

- Το σύνολο των κρισίμων-εκτός διαστημάτων. Περιέχει τα διαστήματα που δεν είναι γνωστό αν θα ανήκουν στην τελική λύση και ανήκουν στην τρέχουσα λύση. Διαστήματα του συνόλου αυτού μπορούν μόνο να εγκρίνονται ή να απορρίπτονται. Αρχικά το σύνολο αυτό περιέχει τα διαστήματα διάρκειας 2 που δεν ανήκουν στην αρχική βέλτιστη λύση. Τελικά δε θα περιέχει κανένα διάστημα.

Από τις περιγραφές για τα παραπάνω σύνολα διαστημάτων προκύπτει ότι:

- Κανένα διάστημα δεν είναι εξαρχής βέβαιο ότι θα ανήκει στην τελική λύση.

- Τα διαστήματα διάρκειας 1 που δεν ανήκουν στην αρχική βέλτιστη λύση μπορούν να αγνοηθούν.

- Τα διαστήματα της λύσης στο τέλος κάθε βήματος είναι η ένωση των συνόλων των εγκεκριμένων και των κρισίμων-εντός διαστημάτων.

- Η μόνη μεταφορά διαστημάτων που επιτρέπεται μεταξύ των τεσσάρων συνόλων είναι η έκριση και η απόρριψη κρισίμων διαστημάτων.

Ο αλγόριθμος που από την αρχική βέλτιστη λύση παράγει μία τελική βέλτιστη λύση που μπορεί να προκύψει από τον άπληστο αλγόριθμο εκτελείται σε T βήματα, σε αντιστοιχία με τις χρονικές στιγμές του στιγμιοτύπου, από τη μικρότερη στη μεγαλύτερη. Μπορούν να οριστούν ως W_t τα βήματα του αλγορίθμου τροποποίησης αυτού και τις ακολουθίες SE και SG ομοίως με πριν με τα διαστήματα που θεωρούνται επιλεγμένα να είναι τα εγκεκριμένα.

Ο αλγόριθμος τροποποίησης, όπως και όλοι οι αλγόριθμοι, είναι τύπου $\mathcal{A}_/$. Ας υποτεθεί ότι είναι τύπου $\mathcal{A}_{t-1}$. Αργότερα θα δειχθεί επαγωγικά ότι είναι τύπου $\mathcal{A}_t$ και άρα τύπου $\mathcal{A}$. Αρχικά ο SG_t είναι δάσος (λόγω της δεύτερης δευτερεύουσας ιδιότητας των αλγορίθμων τύπου $\mathcal{A}_{t-1}$) αποτελούμενο από ακμές διαστημάτων που περιέχουν τη χρονική στιγμή t και εγκρίθηκαν σε προηγούμενο βήμα.

Οι ενέργειες του αλγορίθμου τροποποίησης κατά το W_t είναι οι εξής:

1. Τα κρίσιμα-εντός διαστήματα που περιέχουν τις χρονικές στιγμές t και $t+1$ εξετάζονται ένα-ένα σε τυχαία σειρά. Αν η έγκριση του εξεταζόμενου διαστήματος δε θα σχημάτιζε κύκλο στον SG_t, τότε αυτό εγκρίνεται, αλλιώς παραμένει στα κρίσιμα-εντός διαστήματα.

2. Τα κρίσιμα-εκτός διαστήματα που περιέχουν τις χρονικές στιγμές t και $t+1$ εξετάζονται ένα-ένα σε τυχαία σειρά. Αν η έγκριση του εξεταζόμενου διαστήματος δε θα σχημάτιζε κύκλο στον SG_t, τότε αυτό εγκρίνεται, αλλιώς απορρίπτεται.

3. Τα κρίσιμα-εντός διαστήματα που λήγουν τη χρονική στιγμή t εξετάζονται ένα-ένα σε τυχαία σειρά. Αν η έγκριση του εξεταζόμενου διαστήματος δε θα σχημάτιζε κύκλο στον SG_t, τότε αυτό εγκρίνεται, αλλιώς απορρίπτεται.

Να σημειωθεί ότι δεν υπάρχουν κρίσιμα-εκτός διαστήματα που λήγουν τη χρονική στιγμή t. Αν είχαν διάρκεια 1 θα είχαν απορριφθεί εξαρχής, ενώ αν είχαν διάρκεια 2 θα είχαν εγκριθεί ή απορριφθεί κατά τη δεύτερη φάση του W_{t-1}.

Όπως είπαμε, θα δειχθεί ότι αν ο αλγόριθμος τροποποίησης είναι τύπου $\mathcal{A}_{t-1}$, τότε είναι και τύπου $\mathcal{A}_t$. Για το σκοπό αυτό θα αποδειχθεί ότι ισχύει κάθε μία από τις πρωτεύουσες ιδιότητες:

1. **Κατά το βήμα W_t επιλέγονται μόνο διαστήματα που περιέχουν τη χρονική στιγμή** t. Αυτό φαίνεται από τον ορισμό του αλγορίθμου τροποποίησης. Συγκεκριμένα κατά την πρώτη φάση του W_t επιλέγονται μόνο διαστήματα που περιέχουν τις χρονικές στιγμές t και $t+1$, κατά τη δεύτερη φάση του W_t επιλέγονται μόνο διαστήματα που περιέχουν τις χρονικές στιγμές t και $t+1$, κατά την τρίτη φάση του W_t επιλέγονται μόνο διαστήματα που περιέχουν τη χρονική στιγμή t και ίσως και την $t-1$, άρα η χρονική στιγμή t περιέχεται σε όλα τα επιλεγμένα διαστήματα.

2. **Κατά το βήμα W_t δε σχηματίζεται νέος κύκλος στον** SG_t. Προκύπτει από τον ορισμό του αλγορίθμου τροποποίησης, καθώς σε όλες τις φάσεις, πριν εγκριθεί ένα διάστημα, ελέγχεται αν θα σχηματιστεί νέος κύκλος στον SG_t και αν πρόκειται να σχηματιστεί τότε δε γίνεται η έγκριση.

3. **Στο τέλος του W_t ο SG_t είναι συνεκτικός**. Έστω ότι η πρόταση αυτή δεν ισχύει. Ο SG_t θα αποτελείται από τουλάχιστον δύο συνεκτικές συνιστώσες. Επιλέγεται μία τυχαία συνεκτική συνιστώσα. Το γράφημα που αποτελείται από N κορυφές που αντιστοιχούν σε αυτές της βέλτιστης λύσης και έχει τις ακμές των διαστημάτων που περιέχουν τη χρονική στιγμή t θα είναι συνεκτικό και άρα θα υπάρχει τουλάχιστον μία ακμή, έστω e, που ενώνει κάποια κορυφή της επιλεχθείσας συνεκτικής συνιστώσας με κάποια κορυφή ξένη ως προς αυτήν τη συνεκτική συνιστώσα. Το τρέχον διάστημα της e άρχισε ως κρίσιμο-εντός και δεν εγκρίθηκε, αλλιώς η e θα υπήρχε στον SG_t. Άρα το διάστημα απορρίφθηκε, κάτι που για τα κρίσιμα-εντός διαστήματα μπορεί να γίνει μόνο κατά το W_t. Άρα πρέπει όταν εξετάσθηκε το διάστημα αυτό η προσθήκη της e στον τότε SG_t να σχημάτιζε κύκλο, άρα και στον τελικό SG_t του βήματος. Αυτό όμως δεν είναι δυνατό, διότι τα άκρα της στον τελικό SG_t ανήκουν σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες. Οπότε προέκυψε άτοπο, άρα ισχύει η ιδιότητα προς απόδειξη.

Αποδείχθηκε λοιπόν επαγωγικά ότι ο αλγόριθμος τροποποίησης είναι τύπου $\mathcal{A}$.

Τώρα θα αποδειχθεί ότι η λύση που προκύπτει τελικά από τον αλγόριθμο τροποποίησης μπορεί να προκύψει από τον άπληστο αλγόριθμο. Για να ισχύει αυτό αρκεί να δειχθούν τα εξής:

- **Ο αλγόριθμος τροποποίησης είναι τύπου $\mathcal{A}$.** Έχει αποδειχθεί ήδη.
- **Κατά το W_t οι χρόνοι λήξης των διαστημάτων που επιλέγονται σχηματίζουν φθίνουσα ακολουθία.** Ισχύει, καθώς κατά τις δύο πρώτες φάσεις του W_t επιλέγονται διαστήματα που λήγουν τη χρονική στιγμή $t+1$, ενώ κατά την τρίτη φάση επιλέγονται διαστήματα που λήγουν τη χρονική στιγμή t.
- **Κατά το W_t δεν επιλέγεται διάστημα που λήγει τη χρονική στιγμή t_1, όσο υπάρχει διάστημα που λήγει τη χρονική στιγμή $t_2 > t_1$ που μπορεί να επιλεγεί.** Για $D = 2$ αυτό σημαίνει ότι κατά το W_t δεν επιλέγεται διάστημα που λήγει τη χρονική στιγμή t αν θα μπορούσε να επιλεγεί άλλο που λήγει τη χρονική στιγμή $t+1$. Και αυτή η ιδιότητα ισχύει, καθώς ο αλγόριθμος τροποποίησης πριν επιλέξει κατά το W_t οποιοδήποτε διάστημα της πρώτης κατηγορίας (τρίτη φάση) έχει επιλέξει όλα τα δυνατά διαστήματα της δεύτερης κατηγορίας (πρώτη και δεύτερη φάση).

Συνεπώς η τελική λύση μπορεί να προκύψει από τον άπληστο αλγόριθμο. Μένει τέλος να δειχθεί ότι η τελική λύση είναι βέλτιστη. Θα δειχθεί κάτι πιο γενικό, ότι η λύση στο τέλος κάθε βήματος είναι βέλτιστη. Έστω O_t η λύση μετά το W_t και O_0 η αρχική βέλτιστη λύση. Αρκεί να δειχθεί επαγωγικά ότι αν η O_{t-1} είναι βέλτιστη τότε είναι και η O_t. Έστω λοιπόν ότι η O_{t-1} είναι βέλτιστη. Θα δειχθεί ότι τα διαστήματα που αφαιρέθηκαν είναι ισοπλήθη με αυτά που προστέθηκαν για να σχηματιστεί η O_t. Μετά την πρώτη φάση του W_t ο SG_t είναι δάσος, που έστω ότι περιλαμβάνει M_1 ακμές. Αν στο δάσος αυτό εισαχθούν οι ακμές των διαστημάτων που εξετάζονται κατά την τρίτη φάση θα σχηματιστεί δέντρο, καθώς αν δεν υπήρχε συνεκτικότητα η O_{t-1} δε θα ήταν εφικτή και αν σχηματιζόταν κύκλος τότε το πρώτο διάστημα (κρίσιμο-εντός) που η προσθήκη του σχημάτισε κύκλο θα ήταν αχρείαστο για την εφικτότητα της O_{t-1} (που είναι βέλτιστη) καθώς δε χρειάστηκε ούτε για τη χρονική στιγή $t-1$ ούτε για τη χρονική στιγμή t. Άρα κατά την τρίτη φάση εξετάζονται $N-1-M_1$ διαστήματα. Από αυτά κάποια ενδεχομένως απορρίπτονται, ενώ εγκρίνονται ενδεχομένως κάποια από αυτά που εξετάζονται κατά τη δεύτερη φάση (κρίσιμα-εκτός). Αφού στο τέλος του W_t ο SG_t είναι δέντρο (δεύτερη και τρίτη πρωτεύουσες ιδιότητες αλγορίθμων τύπου $\mathcal{A}$), όσα διαστήματα βγήκαν από τη λύση άλλα τόσο μπήκαν σε αυτήν. Άρα το κόστος της λύσης έμεινε σταθερό και βέλτιστο. Οπότε δείχθηκε επαγωγικά ότι κάθε O_t είναι βέλτιστη λύση, άρα και η τελική λύση (O_T).

Αποδείχθηκε λοιπόν ότι ο αλγόριθμος τροποποίησης για κάθε εφικτό στιγμιότυπο του SSSM με $D = 2$ μπορεί να πάρει μία βέλτιστη λύση και να δώσει μία βέλτιστη λύση που μπορεί να προκύψει από τον άπληστο αλγόριθμο. Προφανώς αυτό συνεπάγεται ότι όλα αυτά τα στιγμιότυπα έχουν βέλτιστη λύση που μπορεί να προκύψει από τον άπληστο αλγόριθμο. □

Λήμμα 6.12. *Κάθε βέλτιστη λύση σχηματίζει μέγιστο δάσος από ακμές που περιλαμβάνουν διάστημα διάρκειας T.*

Απόδειξη. Έστω ένα εφικτό στιγμιότυπο του SSSM και μία βέλτιστη λύση αυτού. Θα δειχθεί ότι οι ακμές των διαστημάτων της βέλτιστης λύσης με διάρκεια T σχηματίζουν μέγιστο δάσος, δηλαδή δεν μπορεί να επιλεγεί άλλη ακμή με τέτοιο διάστημα χωρίς να σχηματιστεί κύκλος με τις ακμές αυτές.

Για $T = 1$ η ισχύς της πρότασης είναι προφανής, αφού κάθε λύση είναι και βέλτιστη και έχει κόστος ακριβώς $N - 1$ σχηματίζοντας δέντρο (μέγιστο δάσος).

Θα γίνει ενασχόληση με την περίπτωση που $T > 1$. Έστω μία βέλτιστη λύση στην οποία αυτό δε συμβαίνει, δηλαδή υπάρχει μη επιλεγμένο διάστημα διάρκειας T που θα μπορούσε να επιλεγεί χωρίς να σχηματιστεί κύκλος από ακμές με επιλεγμένο διάστημα διάρκειας T. Αν συμπεριληφθεί το διάστημα αυτό στη λύση, τότε θα προκύψει για κάθε χρονική στιγμή τουλάχιστον ένας νέος κύκλος στον SG_t, αφού πριν το γράφημα αυτό για κάθε χρονική στιγμή ήταν συνεκτικό. Διαλέγεται ένας από τους νέους κύκλους που σχηματίστηκαν στον SG_1. Έστω t' η ελάχιστη χρονική στιγμή λήξης διαστήματος που περιέχει τη χρονική στιγμή 1 και περιλαμβάνεται σε μία από τις ακμές του κύκλου αυτού. Ισχύει ότι $t' < T$ διότι αλλιώς το διάστημα που προστέθηκε στη λύση δε θα είχε την ιδιότητα που υποθέσαμε. Επιλέγεται λοιπόν ένα από τα διαστήματα αυτά των ακμών του κύκλου αυτού που διαρκεία από $t = 1$ μέχρι και $t = t' < T$. Μπορεί να αφαιρεθεί το διάστημα αυτό από τη λύση και αυτή να παραμείνει εφικτή, αφού οι υπόλοιπες ακμές του κύκλου ανήκουν σε όλους τους SG_t μέχρι και τον $SG_{t'}$ λόγω του ότι επιλέχθηκε ελάχιστο t'. Με την ίδια λογική μπορεί να αφαιρεθεί από τη λύση άλλο ένα διάστημα, διάρκειας από $t = t''$ μέχρι και $t = T$, επιλέγοντας ως t'' τη μέγιστη χρονική στιγμή έναρξης διαστήματος ακμής ενός νέου κύκλου που σχηματίστικε στον SG_T. Ομοίως με πριν προκύπτει ότι $t'' > 1$. Να παρατηρηθεί ότι τα δύο διαστήματα που αφαιρέθηκαν δεν αλληλοεπηρεάζουνται. Οπότε το κόστος της λύσης μειώθηκε κατά 1, ενώ αυτή παρέμεινε εφικτή, άρα προέκυψε άτοπο. Αποδείχθηκε λοιπόν το ζητούμενο, ότι κάθε βέλτιστη λύση σχηματίζει μέγιστο δάσος από ακμές που περιλαμβάνουν διάστημα διάρκειας T.

Να σημειωθεί ότι σε μία βέλτιστη λύση με ένα μέγιστο δάσος από ακμές που περιλαμβάνουν διάστημα διάρκειας T μπορεί να αντικατασταθεί το δάσος αυτό από οποιοδήποτε άλλο τέτοιο δάσος, καθώς οι συνεκτικές συνιστώσες των δασών (δέντρα του δάσους) αυτών έχουν ένα προς ένα αντιστοιχία με τις αντίστοιχες να αποτελούνται από τις ίδιες κορυφές και να περιλαμβάνουν το ίδιο πλήθος ακμών. □

Λήμμα 6.13. *Για $T = 3$ και $D = 2$ όλες οι λύσεις του απλήστου αλγορίθμου έχουν το ίδιο κόστος.*

Απόδειξη. Έστω ένα στιγμιότυπο του SSSM με $T = 3$, $D = 2$, N κορυφές και M ακμές.

Κατά το W_1 ο άπληστος αλγόριθμος θα επιλέξει πρώτα διαστήματα διάρκειας 2 (περιέχουν τις χρονικές στιγμές 1 και 2) σχηματίζοντας ένα μέγιστο δάσος. Έστω ότι το δάσος αυτό έχει συνεκτικές συνιστώσες (δέντρα) με K_1 ακμές. Είναι πιθανό να υπάρχουν πολλά εναλλακτικά μέγιστα δάση, δηλαδή διαφορετικά σύνολα ακμών, όμως όλα τα πιθανά μέγιστα δάση έχουν το ίδιο πλήθος από συνεκτικές συνιστώσες με προφανή ένα προς ένα αντιστοιχία με αυτές των υπολοίπων, καθώς οι αντίστοιχες συνεκτικές συνιστώσες αποτελούνται από τις ίδιες κορυφές και το ίδιο πλήθος ακμών (όσες οι κορυφές της συνεκτικής συνιστώσας πλην 1). Το μέγιστο αυτό δάσος περιλαμβάνει σε κάθε περίπτωση K_1 ακμές και $N - K_1$ συνεκτικές συνιστώσες.

Στη συνέχεια του W_1 επιλέγονται διαστήματα διάρκειας 1 (περιέχουν τη χρονική στιγμή 1). Επιλέγονται ένα ένα μέχρι ο SG_1 να γίνει συνεκτικός, δηλαδή δέντρο, άρα θα επιλεγούν συνολικά $N - 1 - K_1$.

Κατά το W_2 στον SG_2 υπάρχουν ήδη οι K_1 ακμές του μέγιστου δάσους που σχηματίστηκε κατά την πρώτη φάση του W_1. Αρχικά επιλέγονται διαστήματα διάρκειας 2 (περιέχουν τις χρονικές στιγμές 2 και 3), έστω K_2 συνολικά, μέγιστα στο πλήθος χωρίς να σχηματίζουν κύκλους, οπότε πλέον ο SG_2 περιλαμβάνει $K_1 + K_2$ ακμές και αποτελεί μέγιστο δάσος. Να σημειωθεί ότι μπορεί να υπάρχουν πολλά πιθανά μέγιστα δάση, αλλά ομοίως με πριν υπάρχουν προφανείς αντιστοιχίσεις και για όλα επιλέγονται K_2 νέα διαστήματα.

Στη συνέχεια του W_2 επιλέγονται διαστήματα διάρκειας 1 (περιέχουν τη χρονική στιγμή 2). Επιλέγονται ένα ένα μέχρι ο SG_2 να γίνει συνεκτικός, δηλαδή δέντρο, άρα θα επιλεγούν συνολικά $N - 1 - K_1 - K_2$.

Κατά το W_3 στον SG_3 υπάρχουν ήδη οι K_2 νέες ακμές του μέγιστου δάσους που σχηματίστηκε κατά την πρώτη φάση του W_2. Επιλέγονται διαστήματα διάρκειας 1 ή 2 (περιέχουν τη χρονική στιγμή 3 και ίσως και τη 2). Επιλέγονται ένα ένα μέχρι ο SG_3 να γίνει συνεκτικός, δηλαδή δέντρο, άρα θα επιλεγούν συνολικά $N - 1 - K_2$.

Συνολικά επιλέχθησαν $(N - 1) + (N - 1 - K_1) + (N - 1 - K_2) = 3(N - 1) - K_1 - K_2$ διαστήματα. Όπως δείχθηκε τα K_1 και K_2 είναι σταθερά και εξαρτώνται μόνο από το στιγμιότυπο και όχι από τον τρόπο επίλυσης ισοπαλιών από τον άπληστο αλγόριθμο. Άρα όλες οι λύσεις του απλήστου αλγορίθμου για τα στιγμιότυπα με $T = 3$ και $D = 2$ έχουν το ίδιο κόστος. □

Θεώρημα 6.14. *Για $T = 3$ ο άπληστος αλγόριθμος υπολογίζει βέλτιστη λύση.*

Απόδειξη. Έστω ένα εφικτό στιγμιότυπο του SSSM με $T = 3$. Για την απόδειξη της παραπάνω πρότασης θα χρησιμοποιηθούν ως βάση προτάσεις που αποδείχθηκαν προηγουμένως.

Έχει αποδειχθεί ότι σε κάθε βέλτιστη λύση αυτού του στιγμιοτύπου οι ακμές των διαστημάτων διάρκειας 3 σχηματίζουν μέγιστο δάσος. Ο άπληστος αλγόριθμος επίσης επιλέγει πρώτα διαστήματα διάρκειας 3 σχηματίζοντας μέγιστο δάσος με αυτά. Μπορεί λοιπόν να θεωρηθεί κάθε συνεκτική συνιστώσα (δέντρο) αυτού του δάσους ως μία κορυφή καθώς ούτε κάποια βέλτιστη λύση ή λύση από τον άπληστο αλγόριθμο επιλέγει επιπλέον διαστήματα ακμών εντός των συνεκτικών συνιστωσών αυτών.

Μετά τη συγχώνευση των συνεκτικών συνιστωσών το στιγμιότυπο έχει $T = 3$ και $D = 2$. Ο άπληστος αλγόριθμος λύνει αυτό το στιγμιότυπο, με κάθε πιθανή λύση του να έχει το ίδιο κόστος, όπως έχει αποδειχθεί για στιγμιότυπα με $T = 3$ και $D = 2$.

Έχει αποδειχθεί ότι για στιγμιότυπα με $D = 2$ υπάρχει τουλάχιστον μία λύση του απλήστου αλγορίθμου που είναι βέλτιστη, δηλαδή έχει βέλτιστο κόστος. Συνεπώς για το αρχικό στιγμιότυπο όλες οι λύσεις του απλήστου αλγορίθμου θα έχουν βέλτιστο κόστος και άρα αποδείχθηκε το ζητούμενο. $\square$

Κεφάλαιο 7

Υλοποιημένοι Αλγόριθμοι

Οι υλοποιήσεις των παρακάτω αλγορίθμων μπορούν να βρεθούν στο `https://github.com/georgevidalakis/spanning_tree_maintenance` ωστόσο ενδέχεται να τροποποιηθούν.

7.1 Δειγματοληψία στιγμιοτύπων του SSSM

Εδώ θα περιγράψουμε τον αλγόριθμο που χρησιμοποιήσαμε για την κατασκευή τυχαίων στιγμιοτύπων του SSSM.

Ο αλγόριθμος δέχεται ως είσοδο το πλήθος τον κόμβων (N) και των ακμών (M) του γράφου καθώς και το πλήθος των χρονικών στιγμών (T). Επίσης για κάθε μία από τις M ακμές του δίνεται το ζεύγος των κόμβων που αποτελούν άκρα της. Τέλος, προκειμένου να μπορεί να γίνει επιπλέον παραμετροποίηση των στιγμιοτύπων, δίνεται και η μέγιστη διάρκεια χρονικού διαστήματος που μπορεί να προκύψει (D). Αν αυτή η παράμετρος θέλουμε να αγνοηθεί, τότε μπορεί να τεθεί ίση με T.

Ο αλγόριθμος πρέπει για κάθε ακμή να εξάγει ένα σύνολο από μη επικαλυπτόμενα χρονικά διαστήματα (πιθανώς κενό). Ενδέχεται κάποιες χρονικές στιγμές να μην καλύπτονται από κανένα διάστημα για κάποια ακμή.

Θεωρήθηκε επιθυμητό όλα τα πιθανά στιγμιότυπα για μία δεδομένη παραμετροποίηση να έχουν την ίδια πιθανότητα να προκύψουν από τον αλγόριθμο. Για να επιτευχθεί αυτό κάθε ακμή αντιμετωπίζεται ανεξάρτητα από τις υπόλοιπες. Ο αλγόριθμος λοιπόν χρησιμοποιεί μία μέθοδο που δέχεται ως είσοδο το T και το D και επιλέγει με ομοιόμορφη πιθανότητα ένα σύνολο διαστημάτων.

Τώρα θα παρουσιάσουμε τη λογική που χρησιμοποιείται από τη μέθοδο που αναφέρθηκε. Μία ακμή μπορεί να μην έχει διάστημα που περιέχει την πρώτη χρονική στιγμή ($t = 1$) ή μπορεί να έχει κάποιο διάστημα που την καλύπτει και έχει πιθανή διάρκεια από 1 μέχρι και $\min(D, T)$. Τα διαφορετικά σύνολα διαστημάτων που δεν καλύπτουν την χρονική στιγμή $t = 1$ είναι ίσα σε πλήθος με τα διαφορετικά σύνολα διαστημάτων που μπορεί να καλύπτουν από τη χρονική στιγμή $t = 2$ και μετά (δηλαδή έχουν $T - 1$ χρονικές στιγμές που μπορούν να καλύψουν). Επίσης, τα διαφορετικά σύνολα διαστημάτων που καλύπτουν τη χρονική στιγμή $t = 1$ με διάστημα μήκους L ($1 \leq L \leq \min(D, T)$) είναι ίσα σε πλήθος με τα διαφορετικά σύνολα διαστημάτων που μπορεί να καλύπτουν από τη χρονική στιγμή $t = 1 + L$ και μετά (δηλαδή έχουν $T - L$ χρονικές στιγμές που μπορούν να καλύψουν). Για να υπάρχει η επιζητούμενη ομοιομορφία πιθανοτήτων πρέπει η πιθανότητα να μην καλυφθεί η χρονική στιγμή $t = 1$ ή να καλυφθεί με διάστημα μήκους L να είναι ανάλογη του πλήθους διαφορετικών συνόλων που μπορούν να καλύψουν τις εναπομείναντες $T - 1$ ή $T - L$ χρονικές στιγμές αντίστοιχα. Αν θεωρήσουμε ότι η μέθοδος γνωρίζει τα πλήθη αυτά είναι προφανές το πώς μπορεί να επιλέξει κατάλληλα τον τρόπο κάλυψης ή μη της πρώτης χρονικής στιγμής. Με τον ίδιο τρόπο η διαδικασία συνεχίζει και με τις εναπομείνασες κάθε φορά χρονικές στιγμές, επαναληπτικά, μέχρι να μη μείνει καμία.

Αν ορίσουμε ως DP_i το πλήθος των διαφορετικών συνόλων διαστημάτων που μπορούν να καλύψουν i χρονικές στιγμές, όπου $1 \leq i \leq T$, τότε με βάση το παραπάνω σκεπτικό προκύπτει ότι:

$$DP_i = DP_{i-1} + \sum_{j=i-1}^{i-\min(D,i)} DP_j$$

όπου $DP_0 = 1$. Μπορούμε λοιπόν πρώτα να υπολογίσουμε και να αποθηκεύσουμε τις τιμές DP_i για i από 0 μέχρι και T (είτε σε χρόνο $O(T^2)$ είτε σε χρόνο $O(T)$ με χρήση μερικών αθροισμάτων) και στη συνέχεια να τις χρησιμοποιήσουμε για την εκτέλεση της παραπάνω μεθόδου.

Περιγράψαμε λοιπόν πώς μπορούμε να παράγουμε τυχαία και ομοιόμορφα στιγμιότυπα για ένα σύνολο δοθέντων παραμέτρων.

7.2 Έλεγχος εφικτότητας

Αφού παραχθεί ένα στιγμιότυπο του SSSM και πριν προσπαθήσουμε να βρούμε μία λύση για αυτό, είτε μέσω του άπληστου αλγορίθμου, είτε μία βέλτιστη λύση, ελέγχουμε αν υπάρχει εφικτή λύση για το στιγμιότυπο αυτό. Ο έλεγχος αυτός όπως θα δούμε έχει μικρή πολυπλοκότητα σε σχέση με τους αλγορίθμους υπολογισμού λύσεων και όταν προηγείται αυτών, δηλαδή όταν μπορούμε να υποθέσουμε ότι δεν ψάχνουμε λύσεις σε στιγμιότυπα χωρίς εφικτή λύση, τότε οι αλγόριθμοι αυτοί απλοποιούνται ελαφρά. Στο εξής θα ισχύει η υπόθεση αυτή. Τώρα λοιπόν θα περιγράψουμε τον αλγόριθμο που ελέγχει αν υπάρχει εφικτή λύση για κάποιο δοθέν στιγμιότυπο του SSSM.

Ένα στιγμιότυπο προσδιορίζεται από ένα γράφο (ένα σύνολο N κόμβων και M ακμών), ένα σύνολο χρονικών διαστημάτων για την κάθε ακμή (τα οποία προσδιορίζουν πότε αυτή είναι διαθέσιμη), καθώς και από το πλήθος των χρονικών στιγμών, T. Μία εφικτή λύση είναι ένα υποσύνολο των διαστημάτων των ακμών, τέτοιο ώστε αν θεωρήσουμε ένα γράφο για κάθε χρονική στιγμή ο οποίος αποτελείται από τους N κόμβους και από όσες από τις M ακμές έχουν επιλεγμένο διάστημα που περιλαμβάνει την εκάστοτε χρονική στιγμή, τότε κάθε ένας από τους T αυτούς γράφους να είναι συνεκτικός.

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι αν ένα υποσύνολο διαστημάτων αποτελεί εφικτή λύση, τότε κάθε υπερσύνολο αυτού αποτελεί επίσης εφικτή λύση. Συνεπώς, αν το σύνολο όλων των διαστημάτων δεν αποτελεί εφικτή λύση, τότε δεν υπάρχει εφικτή λύση, ενώ αν αποτελεί, τότε υπάρχει τουλάχιστον μία εφικτή λύση (το σύνολο όλων των διαστημάτων). Για να διαπιστώσουμε λοιπόν αν ένα στιγμιότυπο έχει εφικτή λύση, αρκεί να ελέγξουμε αν προκύπτει εφικτή λύση επιλέγοντας όλα τα διαστήματα.

Για τον έλεγχο αυτό ο αλγόριθμος μπορεί να λειτουργήσει ως εξής: Κατασκευάζει T γράφους, έναν για κάθε χρονική στιγμή, που αποτελούνται από τους N κόμβους και αρχικά δεν περιέχουν ακμές. Στη συνέχεια θεωρεί όλα τα διαστήματα ($O(MT)$ συνολικά) επιλεγμένα και τα διατρέχει, προσθέτοντας για καθένα από αυτά την αντίστοιχη ακμή στους γράφους των χρονικών στιγμών που περιέχει. Συνολικά μπορούν να προστεθούν το πολύ MT ακμές, καθώς δεν υπάρχουν επικαλύψεις των διαστημάτων της κάθε ακμής. Έπειτα αρκεί να ελεγθεί αν όλοι οι γράφοι που προέκυψαν είναι συνεκτικοί. Αυτό μπορεί να γίνει με DFS σε χρόνο $O(N+M)$ για κάθε χρονική στιγμή. Ανν αυτό ισχύει, τότε υπάρχει εφικτή λύση για το δοθέν στιγμιότυπο. Επομένως, η χρονική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου ελέγχου εφικτότητας είναι $O(MT + NT)$.

7.3 Υπολογισμός βέλτιστης λύσης - Brute force αλγόριθμος

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε έναν αλγόριθμο που υπολογίζει το βέλτιστο (ελάχιστο) κόστος ενός στιγμιοτύπου SSSM καθώς και μία λύση (ένα υποσύνολο των διαστημάτων για την κάθε ακμή) με το κόστος αυτό.

Ο αλγόριθμος αυτός είναι ένας αφελής brute force. Θεωρώντας κάθε πιθανό υποσύνολο διαστημάτων ως επιλεχθέν (υπάρχουν $O(MT)$ διαστήματα και άρα θα εξεταστούν $O(2^{MT})$ υποσύνολα), ελέγχει αν το εκάστοτε υποσύνολο διαστημάτων αποτελεί εφικτή λύση. Για τον έλεγχο αυτό, για κάθε μία από τις T χρονικές στιγμές, διατρέχει τα $O(MT)$ επιλεχθέντα διαστήματα και ενώνει τους N κόμβους χρησιμοποιώντας τις ακμές αυτές που έχουν επιλεγμένο διάστημα στο οποίο ανήκει η τρέχουσα χρονική στιγμή. Ανν ο γράφος που προέκυψε για κάθε χρονική στιγμή είναι συνεκτικός, τότε το επιλεχθέν υποσύνολο διαστημάτων αποτελεί εφικτή λύση. Η βέλτιστη λύση είναι το υποσύνολο αυτό με το ελάχιστο μέγεθος (πληθάριθμο επιλεγμένων διαστημάτων) και βέλτιστο κόστος είναι το μέγεθός του.

Σε ό,τι αφορά τη χρονική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου, όπως αναφέρθηκε, δοκιμάζονται $O(2^{MT})$ υποσύνολα διαστημάτων, για κάθε ένα από τα οποία διατρέχονται τα $O(MT)$

επιλεχθέντα διαστήματα και εξετάζεται η συνεκτικότητα ενός γράφου σε $O(N + M)$, για T χρονικές στιγμές. Συνεπώς η χρονική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου αυτού είναι $O(2^{MT}MT^2)$.

Να σημειώσουμε ότι θα μπορούσαμε να βελτιώσουμε τη χρονική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου αν για κάθε εξεταζόμενο υποσύνολο σχηματίζαμε τους T γράφους με ένα πέρασμα των διαστημάτων σε χρόνο $O(MT)$ (κάθε στιγμή την αφορούν $O(M)$ διαστήματα). Έτσι η χρονική πολυπλοκότητα θα ήταν $O(2^{MT}MT)$.

7.4 Υπολογισμός λύσης απλήστου αλγορίθμου

Θα περιγράψουμε μία υλοποίηση του άπληστου αλγορίθμου και θα αναλύσουμε τη χρονική πολυπλοκότητά της.

Ο άπληστος αλγόριθμος αρχίζει με ένα κενό σύνολο επιλεγμένων διαστημάτων. Για κάθε ακμή είναι διαθέσιμη μία λίστα από τα διαστήματα για τα οποία αυτή είναι διαθέσιμη, ταξινομημένα σε αύξουσα χρονική σειρά.

Για λόγους απόδοσης διατηρούμε για κάθε ακμή έναν δείκτη στο πρώτο διάστημα της λίστας της που δεν τελειώνει πριν την τρέχουσα χρονική στιγμή. Αν δεν υπάρχει τέτοιο διάστημα ο δείκτης διαμορφώνεται ώστε να περιέχει την πληροφορία αυτή. Αρχικά λοιπόν οι δείκτες δείχνουν στο πρώτο διάστημα κάθε ακμής, αν αυτό υπάρχει. Η αρχικοποίηση των δεικτών γίνεται σε χρόνο $O(M)$. Έστω P_e ο δείκτης της ακμής e.

Ακόμη διατηρούμε ένα σύνολο από ακμές οι οποίες έχουν κάποιο επιλεγμένο διάστημα για την τρέχουσα χρονική στιγμή. Αρχικά αυτό το σύνολο είναι κενό. Έστω S το σύνολο αυτό.

Στη συνέχεια για κάθε μία από τις T χρονικές στιγμές (από τη μικρότερη στη μεγαλύτερη) εκτελούνται τα εξής:

1. Διατρέχεται το S και διαγράφεται από αυτό όποια ακμή e είχε διάστημα το οποίο δείχνει ο δείκτης P_e το οποίο τελείωσε την προηγούμενη χρονική στιγμή. Αυτός ο καθαρισμός γίνεται σε χρόνο $O(M)$.
2. Ενημερώνεται το P. Ενημερώνεται ο δείκτης P_e για κάθε ακμή που το διάστημα στο οποίο δείχνει ο P_e έχει λήξει. Το βήμα αυτό γίνεται σε χρόνο $O(M)$.
3. Αρχικοποιείται μία union-find δομή αποτελούμενη από N κόμβους (σε $O(N)$) και στη συνέχεια διατρέχεται το S και για κάθε ακμή του ($O(M)$ ακμές) συγχωνεύονται οι συνεκτικές συνιστώσες των κόμβων που αποτελούν άκρα της σε χρόνο $O(\alpha(N))$. Αυτό το βήμα έχει λοιπόν χρονική πολυπλοκότητα $O(M\alpha(N))$.
4. Δημιουργείται μία λίστα C με όλες τις ακμές που έχουν κάποιο διάστημα που περιέχει την τρέχουσα χρονική στιγμή με βάση το P, ταξινομημένες σε φθίνουσα σειρά ως προς

το χρόνο λήξης του διαστήματος αυτού. Το βήμα αυτό γίνεται σε χρόνο $O(M \log M)$.

5. Οι $O(M)$ ακμές της λίστας C εξετάζονται σειριακά. Όταν τα άκρα μίας ακμής ανήκουν σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες της union-find δομής που αναφέραμε παραπάνω (έλεγχος σε χρόνο $O(\alpha(N))$), τότε οι συνεκτικές συνιστώσες αυτές συγχωνεύονται (σε χρόνο $O(\alpha(N))$) και το τρέχον διάστημα της ακμής αυτής προστίθεται στο σύνολο των επιλεγμένων διαστημάτων και στο σύνολο S. Αν το στιγμιότυπο έχει εφικτή λύση, μετά από το βήμα αυτό η union-find δομή περιέχει μία συνεκτική συνιστώσα. Το βήμα αυτό γίνεται σε χρόνο $O(M\alpha(N))$.

Η λύση που προέκυψε είναι το τελικό σύνολο των επιλεγμένων διαστημάτων και το κόστος της είναι ο πληθάριθμος αυτού. Για κάθε χρονική στιγμή χρειάζεται χρόνος $O(M \log M)$ και συνολικά η χρονική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου είναι $O(MT \log M)$.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η προκύπτουσα λύση, καθώς και το κόστος αυτής, μπορεί να είναι διαφορετική, ανάλογα με τον τρόπο που επιλύονται οι ισοπαλίες κατά την ταξινόμηση της λίστας C, δηλαδή των περιπτώσεων που διαστήματα λήγουν την ίδια χρονική στιγμή.

7.5 Υπολογισμός ορίων κόστους απλήστου αλγορίθμου

Όπως σημειώθηκε παραπάνω, η επίλυση των ισοπαλιών κατά την ταξινόμηση των διαστημάτων για κάθε χρονική στιγμή μπορεί κάποιες φορές να γίνει με τρόπους που οδηγούν σε διαφορετικές λύσεις και κόστη. Για παράδειγμα μπορεί μία λύση που μπορεί να προκύψει να είναι βέλτιστη και μία άλλη υποβέλτιστη. Για τη χρήση πειραματικών αποτελεσμάτων για την εξαγωγή θεωρητικών εικασιών είναι ωστόσο χρήσιμο να μπορούμε να δούμε όλο το εύρος από πιθανά κόστη για ένα δεδομένο στιγμιότυπο. Εδώ θα περιγράψουμε έναν αλγόριθμο υπολογισμού του καλύτερου και του χειρότερου δυνατού κόστους που μπορεί να προκύψει από τον άπληστο αλγόριθμο για ένα δοθέν στιγμιότυπο του SSSM, ο οποίος χρησιμοποιεί δυναμικό προγραμματισμό.

Πρώτα θα περιγράψουμε τον αλγόριθμο υπολογισμού μίας βέλτιστης λύσης του άπληστου αλγορίθμου και στη συνέχεια θα αναφέρουμε τη μικρή αλλαγή που απαιτείται για να προκύψει ο αλγόριθμος υπολογισμού χειρότερης λύσης.

Για κάθε ακμή έχουμε μία λίστα με τα διαστήματά της, ταξινομημένα σε αύξουσα χρονική σειρά. Επίσης για κάθε ακμή e έχουμε ένα δείκτη σε διάστημα P_e, ορισμένο όπως και προηγουμένως.

Για κάθε χρονική στιγμή έχουμε τρεις λίστες (αρχικά κενές) οι οποίες χρησιμοποιούνται για τον δυναμικό προγραμματισμό. Και οι τρεις θα έχουν το ίδιο μέγεθος για μία δεδομένη χρονική στιγμή και τα στοιχεία τους που βρίσκονται στην ίδια θέση θα αντιστοιχούν μεταξύ τους.

- Η λίστα CC_t. Περιέχει υποσύνολα από τις διαθέσιμες ακμές για τη χρονική στιγμή t.
- Η λίστα DP_t. Το $DP_{t,i}$ είναι το ελάχιστο κόστος της λύσης του στιγμιοτύπου μέχρι και τη χρονική στιγμή t που για τη χρονική στιγμή t έχει ως σύνολο επιλεγμένων ακμών το $CC_{t,i}$.
- Η λίστα $ARGDP_t$. Το $ARGDP_{t,i}$ είναι ίσο με j ώστε να υπάρχει μία ακολουθία συνόλων ακμών μέχρι και τη χρονική στιγμή t (ένα σύνολο για κάθε χρονική στιγμή), με το $CC_{t-1,j}$ και το $CC_{t,i}$ να είναι τα σύνολα για τις χρονικές στιγμές $t-1$ και t αντίστοιχα, η οποία να μπορεί να προκύψει από τον άπληστο αλγόριθμο και να έχει κόστος $DP_{t,i}$.

Για κάθε μία από τις T χρονικές στιγμές (από τη μικρότερη στη μεγαλύτερη) εκτελούνται τα εξής:

1. Υπολογίζεται με τη βοήθεια των δεικτών P το σύνολο των ακμών που έχουν διάστημα που περιέχει τη χρονική στιγμή t, έστω A, σε χρόνο $O(M)$.
2. Για κάθε σύνολο ακμών της λίστας CC_{t-1} υπολογίζεται ένα υποσύνολό του που περιλαμβάνει τις ακμές του CC_{t-1} που έχουν διάστημα που περιέχει τη χρονική στιγμή $t-1$ και τη t. Έστω R_i το υποσύνολο που προκύπτει από το $CC_{t-1,i}$. Το R_i είναι χρήσιμο καθώς δείχνει ποιες ακμές είναι επιλεγμένες κατά τη χρονική στιγμή t αν κατά τη χρονική στιγμή $t-1$ ήταν επιλεγμένες αυτές του $CC_{t-1,i}$. Κάθε ένα από τα $O(2^M)$ στοιχεία της λίστας R υπολογίζεται ελέγχοντας την ύπαρξη του κοινού διαστήματος που αναφέραμε για κάθε μία από τις $O(M)$ ακμές που ανήκουν στο αντίστοιχο σύνολο της CC_{t-1} σε χρόνο $O(1)$ με τη βοήθεια των δεικτών P. Άρα αυτό το βήμα γίνεται σε χρόνο $O(2^M M)$.
3. Για κάθε ένα από τα $O(2^M)$ υποσύνολα ακμών του A, έστω C_i το i-οστό υποσύνολο, με στόχο να υπολογιστεί το ελάχιστο κόστος επίλυσης του στιγμιοτύπου μέχρι και την τρέχουσα χρονική στιγμή αν για την τρέχουσα χρονική στιγμή το σύνολο των επιλεγμένων ακμών είναι το C_i, εκτελούνται τα εξής βήματα:
   (a) Για να μπορεί το C_i να αποτελεί το σύνολο των επιλεγμένων ακμών για την τρέχουσα χρονική στιγμή κάποιας εφικτής λύσης πρέπει ο γράφος με τους N κόμβους και τις ακμές του C_i να είναι συνεκτικός. Για να το ελέγξουμε αυτό κατασκευάζουμε το γράφο αυτόν (σε χρόνο $O(N+M)$) και ελέγχουμε το αν είναι συνεκτικός εκτελώντας DFS (σε χρόνο $O(N+M)$). Αν ο γράφος δεν είναι συνεκτικός τότε το C_i παραλείπεται, αλλιώς προχωράμε στα επόμενα βήματα για αυτό.
   (b) Προκειμένου να υπολογίσουμε το ελάχιστο κόστος μίας λύσης μέχρι και την τρέχουσα χρονική στιγμή με επιλεγμένες ακμές για τη στιγμή αυτήν αυτές του C_i μπορούμε απλά να εξετάσουμε κάθε πιθανό σύνολο ακμών για την προηγούμενη χρονική στιγμή. Τα σύνολα αυτά υπάρχουν στη λίστα CC_{t-1}, τα κόστη τους

στη λίστα DP_{t-1} και οι ακμές τους που διατηρούνται και στην τρέχουσα χρονική στιγμή στο σύνολο R. Επομένως θεωρούμε κάθε σύνολο $CC_{t-1,j}$ υποψήφιο προηγούμενο της ακολουθίας συνόλων ακμών που συνθέτουν τη λύση και ελέγχουμε αν είναι δυνατόν ο άπληστος αλγόριθμος να πήγε από το $CC_{t-1,j}$ στο C_i (συγκεκριμένα είναι σημαντικό το αν τη χρονική στιγμή t ήταν επιλεγένες από πριν οι ακμές του R_j αν ο άπληστος αλγόριθμος γίνεται να επιλέξει επιπλέον ακμές και να καταλήξει στο C_i). Το πώς γίνεται αυτός ο έλεγχος θα το περιγράψουμε παρακάτω. Αν η μετάβαση αυτή είναι δυνατή, το ελάχιστο κόστος της λύσης μέχρι και την τρέχουσα χρονική στιγμή με το $CC_{t-1,j}$ ως προηγούμενο σύνολο ακμών προκύπτει από το άθροισμα του $DP_{t-1,j}$ με το $|C_i| - |R_j|$. Τελικά κρατάμε το μικρότερο από τα κόστη αυτά και ενημερώνουμε κατάλληλα τις λίστες CC_t, DP_t και $ARGDP_t$. Αν δεν υπήρξε κανένα j που πέρασε τον έλεγχο για το C_i τότε αγνοούμε αυτό το C_i (δεν μπορεί να αποτελέσει μέρος της ακολουθίας λύσεων για αυτή τη χρονική στιγμή). Συνολικά γίνονται τόσοι έλεγχοι όσα και τα στοιχεία του CC_{t-1}, συνεπώς αυτό το βήμα γίνεται σε χρόνο $O(2^M F)$, όπου F ο χρόνος ελέγχου εγκυρότητας βήματος που θα υπολογιστεί στη αργότερα.

4. Τελικά το ελάχιστο κόστος είναι το $\min(DP_T)$ το οποίο υπολογίζουμε σε χρόνο $O(2^M)$ και μπορούμε να ανακατασκευάσουμε μία βέλτιστη λύση χρησιμοποιώντας τις λίστες CC και $ARGDP$ σε χρόνο $O(MT)$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η χρονική πολυπλοκότητα του παραπάνω αλγορίθμου είναι $O(2^M MT + 4^M FT))$. Ο υπολογισμός του F και της τελικής μορφής της χρονικής πολυπλοκότητας αυτής θα γίνει αργότερα.

Ο παραπάνω αλγόριθμος, όπως είπαμε, υπολογίζει το ελάχιστο κόστος που μπορεί να προκύψει από τον άπληστο αλγόριθμο για ένα δεδομένο στιγμιότυπο. Ο αλγόριθμος που υπολογίζει το μέγιστο πιθανό κόστος και μία λύση με το κόστος αυτό είναι ίδιος, με μόνες διαφορές ότι για κάθε C_i επιλέγεται ως προηγούμενο σύνολο ακμών το $CC_{t-1,j}$ που μεγιστοποιεί το κόστος μέχρι και τη χρονική στιγμή t (νέος ορισμός για το DP) και ότι τελικά το μέγιστο κόστος είναι το $\max(DP_T)$ και η χειρότερη λύση ανακατασκευάζεται με βάση αυτό, αλλά ομοίως με πριν. Η χρονική πολυπλοκότητα παραμένει ίδια.

7.6 Έλεγχος εγκυρότητας βήματος για τον άπληστο αλγόριθμο

Ο έλεγχος εγκυρότητας βήματος για τον άπληστο αλγόριθμο καλείται να απαντήσει στο εξής ερώτημα: Είναι δυνατό κατά τη χρονική στιγμή t οι επιλεγμένες από τον άπληστο αλγόριθμο ακμές να είναι αυτές ενός συνόλου E_t δεδομένου ότι κατά τη χρονική στιγμή $t-1$ ήταν αυτές του συνόλου E_{t-1}. Θεωρούμε δεδομένο ότι και το E_{t-1} και το E_t καλύπτουν το γράφο (καθώς αυτό έχει ελεγχθεί ήδη). Ορίζουμε το R ομοίως με πριν, ως τις ακμές του E_{t-1} για τις οποίες οι χρονικές στιγμές $t-1$ και t καλύπτονται από κοινό διάστημα. Το R

έχει ήδη υπολογιστεί.

Ο έλεγχος αποτελείται από δύο μέρη:

1. Κάθε ακμή του R πρέπει να ανήκει και στο E_t. Αυτό το βήμα γίνεται σε χρόνο $O(M \log M)$.

2. Θεωρώντας μία δομή union-find με N κόμβους (αρχικοποίηση σε $O(N)$) και συνεκτικές συνιστώσες που προκύπτουν από τις ακμές που ανήκουν στο R (συγχωνεύσεις σε $O(M\alpha(N))$) προσθέτοντας τις υπόλοιπες ακμές του E_t σε φθήνουσα σειρά χρόνου λήξης του τρέχοντος διαστήματος (και κάνοντας τις αντίστοιχες συγχωνεύσεις) πρέπει η ακμή που προστίθεται κάθε φορά να μη σχηματίζει κύκλο (έλεγχος σε $O(\alpha(N))$) και να μην τελειώνει νωρίτερα από κάποια άλλη ακμή που δε σχηματίζει κύκλο (η μεγαλύτερη στιγμή που λήγει το τρέχον διάστημα μίας ακμής που δε σχηματίζει κύκλο μπορεί να υπολογίζεται γρήγορα οι ακμές εκτός του R ταξινομηθούν σε φθήνουσα σειρά βάση του χρόνου αυτού σε $O(M \log M)$ μία φορά και μετά ένας αύξον δείκτης δείχνει την τρέχουσα ακμή με έλεγχο για πιθανό σχηματισμό κύκλου σε $O(\alpha(N))$. Αυτό το βήμα γίνεται σε χρόνο $O(M \log M)$.

Συνεπώς ο έλεγχος εγκυρότητας βήματος για τον άπληστο αλγόριθμο έχει χρονική πολυπλοκότητα $O(M \log M)$. Επομένως η χρονική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου υπολογισμού του ελαχίστου/μεγίστου πιθανού κόστους μίας λύσης από τον άπληστο αλγόριθμο για ένα δεδομένο στιγμιότυπο και η ανακατασκευή μίας αντίστοιχης λύσης είναι $O(4^M MT \log M)$.

7.7 Υπολογισμός βέλτιστης λύσης - Αλγόριθμος δυναμικού προγραμματισμού

Προηγουμένως περιγράψαμε δύο brute force αλγορίθμους υπολογισμού βέλτιστης λύσης για το SSSM με καλύτερη χρονική πολυπλοκότητα την $O(2^{MT} MT)$. Εδώ θα δούμε πώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε δυναμικό προγραματισμό για να πετύχουμε σημαντικά καλύτερη πολυπλοκότητα.

Μία λύση του προβλήματος είναι μία ακολουθία από T σύνολα ακμών, ένα για κάθε χρονική στιγμή, τέτοια ώστε οι ακμές τους να είναι διαθέσιμες τις στιγμές που είναι επιλεγμένες. Ο αλγόριθμος δυναμικού προγραμματισμού για υπολογισμό του ελάχιστου πιθανού κόστους λύσης που προκύπτει από τον άπληστο αλγόριθμο αξιοποίησε το γεγονός ότι ο υπολογισμός αυτός μπορεί να γίνει αν λύνουμε υποπροβλήματα, συγκεκριμένα να λύνουμε το SSSM πρώτα για την πρώτη χρονική στιγμή, μετά για την πρώτη και τη δεύτερη και τα λοιπά, κρατώντας όμως κάθε φορά τα κόστη για όλα τα πιθανά τελικά σύνολα ακμών. Γενικά για να λύσουμε το πρόβλημα για μέχρι και τη χρονική στιγμή t αρκούσε να ξέρουμε τα κόστη των λύσεων μέχρι και τη χρονική στιγμή $t-1$ που τελειώνουν σε κάθε δυνατό σύνολο ακμών (για τη στιγμή $t-1$). Έπειτα για κάθε πιθανό σύνολο ακμών για τη στιγμή t ελέγχαμε ποια από τα σύνολα της προηγούμενης στιγμής θα μπορούσαν να προηγούνται και επιλέγαμε αυτό που έδινε το ελάχιστο νέο κόστος.

Για τον υπολογισμό της βέλτιστης λύσης μπορεί να χρησιμοποιηθεί η ίδια λογική, μάλιστα το μόνο που αλλάζει είναι ο έλεγχος εγκυρότητας βήματος. Ο έλεγχος αυτός για την περίπτωση του απλήστου αλγορίθμου είχε δύο σκέλη. Για τη γενική βέλτιστη λύση διατηρείται μόνο το πρώτο από αυτά, δηλαδή απλά πρέπει αν μία ακμή ήταν επιλεγμένη για κάποια χρονική στιγμή να συνεχίσει να είναι επιλεγμένη τουλάχιστον μέχρι να λήξει το τρέχον διάστημα της.

Αλλάζοντας λοιπόν μόνο τον έλεγχο εγκυρότητας βήματος προκύπτει ο αλγόριθμος που υπολογίζει το ελάχιστο δυνατό κόστος για ένα δεδομένο στιγμιότυπο του SSSM και ανακατασκευάζει μία αντίστοιχη λύση.

Η χρονική του πολυπλοκότητα είναι ίδια με αυτή του απλήστου αλγορίθμου, δηλαδή $O(4^M MT \log M)$. Αυτή είναι καλύτερη από την $O(2^{MT} MT)$ του brute force αλγορίθμου όταν το T γίνεται υπερβαίνει ένα χαμηλό όριο που εξαρτάται από το M.

Bibliography

[1] Hyung-Chan An, Ashkan Norouzi-Fard, and Ola Svensson. Dynamic facility location via exponential clocks, Nov 2014.

[2] Niv Buchbinder and Joseph Naor. Online primal-dual algorithms for covering and packing, 2009.

[3] Shuchi Chawla, Jason Hartline, David Malec, and Balasubramanian Sivan. Sequential posted pricing and multi-parameter mechanism design, Jan 2010.

[4] Chandra Chekuri, Jan Vondrák, and Rico Zenklusen. Submodular function maximization via the multilinear relaxation and contention resolution schemes, Aug 2014.

[5] David Eisenstat, Claire Mathieu, and Nicolas Schabanel. Facility location in evolving metrics, Mar 2014.

[6] Dimitris Fotakis, Loukas Kavouras, Panagiotis Kostopanagiotis, Philip Lazos, Stratis Skoulakis, and Nikolas Zarifis. Reallocating multiple facilities on the line, May 2019.

[7] Anupam Gupta, Kunal Talwar, and Udi Wieder. Changing bases: Multistage optimization for matroids and matchings, Apr 2014.

[8] James G. Oxley. Matroid theory (oxford graduate texts in mathematics), 2006.

[9] Hassler Whitney. On the abstract properties of linear dependence, 1935.

[10] David Williamson and David Shmoys. The design of approximation algorithms, 2011.

[11] Robin J Wilson. Introduction to graph theory, 1986.

[12] L. A. Wolsey. An analysis of the greedy algorithm for the submodular set covering problem.

[13] Ορέστης Πλευράκης and Δημήτριος Φωτάκης. Χρονομεταβαλλόμενη Βελτιστοποίηση σε Μητροειδή, July 2017.