



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ  
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΣΤΗΝ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

---

**ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΡΟΒΛΕΨΗΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ**

**FORECASTING - THEORY AND APPLICATIONS**

---

ΣΤΟΥΜΠΟΥ ΧΑΡΑΛΑΜΠΙΑ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ:

ΚΟΛΕΤΣΟΣ ΙΩΑΝΝΗΣ, ΑΝΑΠΛΗΡΩΤΗΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Ε.Μ.Π.

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ:

ΚΟΚΚΙΝΗΣ ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ, ΕΠΙΚΟΥΡΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Ε.Μ.Π.

ΚΟΛΕΤΣΟΣ ΙΩΑΝΝΗΣ, ΑΝΑΠΛΗΡΩΤΗΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Ε.Μ.Π.

ΣΤΕΦΑΝΕΑΣ ΠΕΤΡΟΣ, ΕΠΙΚΟΥΡΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Ε.Μ.Π.

ΑΘΗΝΑ, ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 2021



*Στην οικογένεια μου*



## Περίληψη

Ο σύγχρονος κόσμος των επιχειρήσεων χαρακτηρίζεται από διαρκείς μεταβολές και αβεβαιότητα. Οι επιχειρήσεις που δρουν μέσα σε αυτόν καλούνται καθημερινά να αντιμετωπίσουν πληθώρα προβλημάτων και προκλήσεων. Προκειμένου να ανταποκριθούν στις απαιτήσεις της αγοράς και να ακολουθούν τις οικονομικές εξελίξεις, η ανάγκη για υιοθέτηση μίας ευέλικτης και αποτελεσματικής επιχειρηματικής στρατηγικής είναι επιτακτική. Αρωγός για την άμεση λήψη των βέλτιστων αποφάσεων από τη Διοίκηση των επιχειρήσεων αποτελεί ο σύγχρονος κλάδος της Επιχειρησιακής Έρευνας. Προσφέροντας ένα ευρύ φάσμα ποιοτικών και ποσοτικών μεθόδων και τεχνικών, το αντίκτυπο της Επιχειρησιακής Έρευνας στη βελτίωση της αποτελεσματικότητας των οργανισμών τις τελευταίες δεκαετίες είναι εντυπωσιακό.

Τα πεδία με τα οποία ασχολείται η επιστήμη της Επιχειρησιακής Έρευνας ποικίλουν. Αδιαμφισβήτητα, ένα από τα πιο επίκαιρα και κερδοφόρα πεδία είναι η Πρόβλεψη. Η διεξαγωγή προβλέψεων αποτελεί αναπόσπαστη επιχειρηματική λειτουργία. Στην πραγματικότητα, επικρατεί η άποψη ότι η επιτυχία κάθε επιχείρησης εξαρτάται από την ικανότητα της διοίκησης, να προβλέπει τις τάσεις της αγοράς και έπειτα να εφαρμόζει τις κατάλληλες στρατηγικές. Ερευνητές με εμπειρία στην πρόβλεψη μπορούν, βασιζόμενοι είτε σε ποιοτικά είτε σε ποσοτικά κριτήρια, να εξαλείψουν τον ανταγωνισμό και να οδηγήσουν την επιχείρηση προς την επιτυχία.

Στόχος της παρούσας εργασίας είναι η περιγραφή των σημαντικότερων μεθόδων πρόβλεψης, αναλύοντας το θεωρητικό τους υπόβαθρο και παρουσιάζοντας ρεαλιστικά παραδείγματα εφαρμογής των μεθόδων, σε δεδομένα που ανταποκρίνονται στην πραγματικότητα. Από τις εφαρμογές αυτές και την ανάγνωση των αποτελεσμάτων φαίνεται τελικά η σημαντικότητα της Πρόβλεψης στην Επιχειρησιακή Έρευνα.



## *Abstract*

The modern business world is characterized by continuous changes and uncertainty. Organizations trading within, are daily being confronted with a variety of problems and challenges. In order to meet the market demands and follow the economic trends, there is an urgent need to adopt an adaptable and effective business model. Operational Research has a leading role in optimal decision making. Offering a wide range of qualitative and quantitative methods and techniques, Operational Research has a remarkable impact on Business Process Improvement over the last few decades.

The science of Operational Research deals with various subjects. Beyond doubt, Forecasting is the most relevant and profitable one. In fact, Forecasting is an integral business activity, while it is believed that the success of any business depends on the administration's ability to forecast the market trends and implement the appropriate business plan. Researchers with experience in Forecasting, are able to eliminate the competition and secure the organization's success.

The goal of the present dissertation is to describe the most important and applicable forecasting methods, by analyzing their knowledge base and presenting examples of the application of various methods, using data that reflect reality. Through these applications and their effects, the significance of Forecasting in Operation Research is evident.





## Contents

<b>Περίληψη</b> .....	5
<b>Abstract</b> .....	7
<b>1. Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα</b> .....	12
1.1. Ιστορική Αναδρομή.....	12
1.2. Ορισμός .....	14
1.3. Μεθοδολογία της Επιχειρησιακής Έρευνας .....	16
1.4. Η Επίδραση της Επιχειρησιακής Έρευνας.....	19
<b>2. Εισαγωγή στην Πρόβλεψη</b> .....	20
2.1. Ορισμός .....	20
2.2. Εφαρμογές της Πρόβλεψης.....	22
2.3. Χαρακτηριστικά Καλών Προβλέψεων .....	25
2.4. Μεθοδολογία της Διαδικασίας Διεξαγωγής Προβλέψεων.....	26
<b>3. Ποιοτικές Μέθοδοι Πρόβλεψης (Qualitative Forecasting Methods)</b> .....	27
3.1. Επιτροπή Ειδικών (Executive Opinions).....	28
3.2. Η μέθοδος “Delphi”.....	28
3.3. Η μέθοδος “Grass Roots” .....	29
3.4. Έρευνες καταναλωτών (Consumer Surveys).....	29
3.5. Ιστορική Αναλογία (Historical Analogy).....	30
<b>4. Ποσοτικές Μέθοδοι Πρόβλεψης (Quantitative Forecasting Methods)</b> .....	31
<b>4.1. Μέθοδοι Πρόβλεψης Χρονοσειρών (Time Series Forecasting Methods)</b> .....	31
4.1.1. The Naive Methods .....	34
4.1.2. Μέθοδος του Μέσου Όρου (Averaging Forecasting Method) .....	35
4.1.3. Απλός Κινητός Μέσος Όρος (Simple Moving Average Method) .....	36
4.1.4. Σταθμισμένος Κινητός Μέσος Όρος (Weighted Moving Average Method) .....	42
4.1.5. Μέθοδος Απλής Εκθετικής Εξομάλυνσης (Exponential Smoothing Method) .....	44
4.1.6. Εκθετική Εξομάλυνση με Προσαρμογή στην Τάση - Μέθοδος Holt.....	49
4.1.7. Εκθετική Εξομάλυνση με προσαρμογή στην τάση και στην εποχικότητα – Μέθοδος Winters .....	55
<b>4.2. Αιτιακές Μέθοδοι Πρόβλεψης (Casual Forecasting Methods)</b> .....	63
4.2.1. Απλή Γραμμική Παλινδρόμηση (Simple Linear Regression) .....	63
4.2.2. Πολλαπλή Γραμμική Παλινδρόμηση .....	71
.....	77

5.	Σφάλματα κατά την Πρόβλεψη.....	78
6.	Μελέτη Περίπτωσης.....	80
	Ξένη Βιβλιογραφία .....	97
	Ελληνική Βιβλιογραφία .....	98



# 1. Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα

## 1.1. Ιστορική Αναδρομή

Κατά τη διάρκεια του Δευτέρου Παγκοσμίου Πολέμου, η ανάγκη για αποτελεσματική κατανομή των λιγοστών πόρων στις διάφορες στρατιωτικές επιχειρήσεις καθώς και στις δραστηριότητες μέσα σε κάθε επιχείρηση ήταν επιτακτική. Για την τελική έκβαση του πολέμου αξιοποιήθηκαν όλες οι διαθέσιμες δυνάμεις της κοινωνίας, συμπεριλαμβανομένων και επιστημόνων, όπως μαθηματικών, φυσικών, μηχανικών, στατιστικών, ψυχιάτρων, βιολόγων κ.α., από τους οποίους ζητήθηκε να αναπτύξουν αποτελεσματικές μεθόδους για την επίλυση προβλημάτων στρατιωτικής φύσης, όπως τη χρήση των ραντάρ που είχαν ανακαλυφθεί εκείνη την εποχή, τη βέλτιστη διαχείριση των νηοπομπών και των υποβρυχίων και την διαχείριση επιθέσεων με βόμβες. Έτσι λοιπόν, οι εφαρμογές των μαθηματικών και των επιστημονικών μεθόδων στις στρατιωτικές επιχειρήσεις ονομάστηκαν Επιχειρησιακή Έρευνα (Operations Research, OR).

Σημαντικοί επιστήμονες στο Ηνωμένο Βασίλειο και στις Ηνωμένες Πολιτείες επιχείρησαν να βελτιστοποιήσουν τις στρατιωτικές επιχειρήσεις λαμβάνοντας καλύτερες αποφάσεις σε περιοχές όπως τα προγράμματα διοικητικής μέριμνας και τα προγράμματα εκπαίδευσης. Ειδικότερα, στη Μεγάλη Βρετανία, διοικητές των ενόπλων δυνάμεων χρειάστηκαν τη συμβολή των επιστημόνων αυτών στη μελέτη της νέας τεχνολογίας των ραντάρ και στην εξεύρεση βέλτιστων τρόπων εντοπισμού εχθρικών αεροσκαφών, οδηγώντας έτσι το Υπουργείο British Air στην ίδρυση του ερευνητικού κέντρου Bawdsey Manor Research Station στο Suffolk. Στις τρεις πρώτες ασκήσεις που πραγματοποιήθηκαν με χρήση ραντάρ, ενώ παρατηρήθηκε έγκαιρη προειδοποίηση, οι πληροφορίες εντοπισμού των αεροσκαφών δεν ήταν ικανοποιητικές. Στην προσπάθεια ενίσχυσης της ικανότητας εντοπισμού, προστέθηκαν τέσσερις σταθμοί ραντάρ, οι οποίοι όμως προκάλεσαν πρόβλημα συντονισμού και συνδυασμού συχνά αντικρουόμενων πληροφοριών από τους διαφορετικούς σταθμούς. Δηλαδή, ενώ τεχνικά τα συστήματα ραντάρ λειτουργούσαν αποτελεσματικά, προέκυπτε πρόβλημα στο λειτουργικό (*operational*) κομμάτι, οπότε και δρομολογήθηκε έρευνα (*research*) προς την κατεύθυνση αυτή. Έτσι, εν όψει πολέμου, ιδρύθηκε το 1939 το Stanmore Research Section (SRS) και το 1941 το Operation Research Section της RAF (Royal Air Force), οι δράσεις των οποίων αποδείχθηκαν καθοριστικές στην επιτυχημένη αναχαίτιση των Γερμανών στη μάχη της Βρετανίας.

Έπειτα, το 1942, ο P.M.S. Blackett συνέταξε ένα σχέδιο για τη δημιουργία του U.S. Navy Antisubmarine Warfare Operations Research Group (ASWORG), μία ομάδας γνωστής ως Blackett Circus, που πέτυχε σημαντικά αποτελέσματα, καθοριστικά για την νίκη στη μάχη του Ατλαντικού. Επίσης, τον Οκτώβριο του 1942, η πρώτη ομάδα Επιχειρησιακών Ερευνητών από τις ΗΠΑ επιχείρησε να συνεργαστεί με την όγδοη μονάδα Βομβαρδιστικών στη Βρετανία με σκοπό την βελτιστοποίηση της ακρίβειας πλήξης στόχων. Η ομάδα, ύστερα από την απαραίτητη μελέτη και παρατήρηση, πρότεινε ένα σύνολο ενεργειών, η εφαρμογή των οποίων οδήγησε σε 1000% βελτίωση της αποτελεσματικότητας πλήξης στόχων και τελικά στην νίκη της μάχης της Βρετανίας. Οι δύο αυτές νίκες αποτέλεσαν σημαντικές εφαρμογές Επιχειρησιακής Έρευνας κατά τη διάρκεια του Β' Παγκοσμίου Πολέμου.

Μετά το πέρας του πολέμου, η ανάγκη για την βέλτιστη κατανομή των ελάχιστων διαθέσιμων πόρων ήταν εμφανής. Παράλληλα, παρατηρήθηκε μία αξιοσημείωτη ανάπτυξη στο μέγεθος και την πολυπλοκότητα των επιχειρήσεων, στα πλαίσια της οποίας αυξήθηκε εντυπωσιακά ο καταμερισμός των ευθυνών και της εργασίας. Πέρα από τα θετικά, αυτή η αύξηση προκάλεσε πολλά προβλήματα, που απασχολούν τις επιχειρήσεις μέχρι σήμερα, όπως τα αντικρουόμενα συμφέροντα μεταξύ των διαφόρων ειδικοτήτων μέσα στην επιχείρηση. Όπως θεωρήθηκε από πολλούς επιστήμονες αλλά και συμβούλους επιχειρήσεων που είχαν εργαστεί σε ομάδες επιχειρησιακής έρευνας κατά τη διάρκεια του πολέμου, τα παραπάνω προβλήματα ήταν ουσιαστικά τα ίδια, αλλά με διαφορετικό γενικό πλαίσιο, με εκείνα που είχαν αντιμετωπίσει στο στρατό. Έτσι, η βιομηχανία παρακινούμενη από την έκδηλη επιτυχία της Επιχειρησιακής Έρευνας στο στρατό, άρχισε βαθμιαία να ενδιαφέρεται για τον καινούργιο αυτόν τομέα, ο οποίος τελικά, από τις αρχές του 1950, εδραιώθηκε ως νέο επιστημονικό πεδίο και αναπτύχθηκε ραγδαία.

Μπορούμε να προσδιορίσουμε δύο τουλάχιστον άλλους παράγοντες, που έπαιξαν καθοριστικό ρόλο στη γρήγορη ανάπτυξη της Επιχειρησιακής Έρευνας κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου. Ο πρώτος συνδέεται με τη βελτίωση των τεχνικών της Επιχειρησιακής Έρευνας. Ενδεικτικά, το 1947 αναπτύχθηκε η μέθοδος Simplex για την επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού από τον George Dantzig, ενώ το 1950 αναπτύχθηκαν πολλά εργαλεία της επιστήμης, τα οποία μάλιστα χρησιμοποιούνται ακόμα, όπως ο γραμμικός προγραμματισμός, η θεωρία ουρών, ο έλεγχος αποθεμάτων.

Δεύτερος και εξίσου σημαντικός παράγοντας υπήρξε η ανάπτυξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών, καθώς συνήθως απαιτείται μεγάλος όγκος υπολογισμών για την επίλυση των προβλημάτων της Επιχειρησιακής Έρευνας. Η ταχύτητα που προσφέρουν οι υπολογιστές στην εκτέλεση

πράξεων, έκανε δυνατή την έγκαιρη παροχή πληροφοριών στα στελέχη της επιχείρησης για την άμεση αξιοποίηση τους. Αργότερα, η συνεχώς αυξανόμενη πρόοδος στην κατασκευή προσωπικών υπολογιστών, εφοδιασμένων με πακέτα λογισμικού Επιχειρησιακής Έρευνας, έκανε την επιστήμη περισσότερο προσιτή σε εκατομμύρια ανθρώπων.

Καθώς οι βάσεις για την εξάπλωση του νέου επιστημονικού κλάδου της Επιχειρησιακής Έρευνας τέθηκαν κατά τον Β΄ Παγκόσμιο Πόλεμο, ως έτος γέννησης του έχει οριστεί το 1940. Ωστόσο, αξίζει να σημειωθεί ότι το πρώτο βήμα στον κλάδο είχε γίνει αρκετά νωρίτερα, από τον Charles Babbage (1791-1871), ο οποίος χαρακτηρίστηκε ως ο «πατέρας της επιχειρησιακής έρευνας» λόγω της μελέτης του σε προβλήματα κόστους μεταφοράς και της ίδρυσης του γενικού αγγλικού “Ταχυδρομείου της πέννας” το 1840.

Η εμφάνιση της νέας Επιστήμης στην Ελλάδα έγινε πολύ σύντομα, όταν το 1963 μία ομάδα πρωτοπόρων επιστημόνων ίδρυσε την “Ελληνική Εταιρεία Επιχειρησιακών Ερευνών” (Ε.Ε.Ε.), μία μη κερδοσκοπική εταιρεία με κύριο σκοπό να διαδώσει την Επιχειρησιακή Έρευνα στην Ελλάδα και να υπογραμμίσει τη σημαντικότητά της.

## 1.2. Ορισμός

Όπως φανερώνει το όνομά της, η Επιχειρησιακή Έρευνα σημαίνει “έρευνα στις επιχειρήσεις”. Αυτό μας λέει κάτι, τόσο για την προσέγγιση όσο και για το πεδίο εφαρμογής της. Είναι ένα βασικό εργαλείο για την άσκηση διοίκησης, και τη λήψη αποφάσεων με τη βοήθεια των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Η μεθοδολογία της εφαρμόζεται σε προβλήματα που αφορούν τη διεξαγωγή και τον συντονισμό κατάλληλων δραστηριοτήτων εντός οργανισμών. Εντυπωσιακό είναι το γεγονός ότι η φύση του εκάστοτε προβλήματος έχει μικρή σημασία, αφού η Επιχειρησιακή Έρευνα έχει εφαρμοστεί εκτενώς σε ποικίλους κλάδους όπως για παράδειγμα στη μεταποίηση, στον κλάδο των μεταφορών, στις τηλεπικοινωνίες, στον χρηματοοικονομικό σχεδιασμό, στις δημόσιες υπηρεσίες, στην υγεία και στις στρατιωτικές επιχειρήσεις.

Το όνομά της προέρχεται από τον αγγλικό όρο “Operational Research”, ή “Operations Research” όπως συνηθίζεται στην Αμερική, ο οποίος σημαίνει “έρευνα στις επιχειρήσεις”. Φαίνεται ότι η απόδοση του όρου “Λειτουργική Έρευνα” θα ήταν πιο εύστοχη, καθώς υποδεικνύει την έρευνα πάνω στις διάφορες λειτουργίες ή στη λειτουργία πολύπλοκων συστημάτων αποτελούμενων από ανθρώπινο

δυναμικό και κατάλληλο εξοπλισμό. Υπάρχουν όμως δύο λόγοι για τους οποίους δεν καθιερώθηκε αυτή η ονομασία. Αρχικά, ενώ εμείς έχουμε εξισώσει τον όρο της “Επιχείρησης” με αυτόν της “Εταιρείας”, στον στρατό, τον χώρο άνθησης της Επιχειρησιακής Έρευνας, οι κυριότερες λειτουργίες ονομάζονται επιχειρήσεις. Επίσης, όπως είναι προφανές, ο όρος “Επιχείρηση” είναι πιο κατανοητός και προσιτός στους ανθρώπους που δραστηριοποιούνται στον επιχειρησιακό τομέα.

Σχετικά με τον δεύτερο όρο του ονόματος “Επιχειρησιακή Έρευνα”, ήτοι τον όρο Έρευνα, σημαίνει πως, προκειμένου να διερευνηθεί το πρόβλημα για το οποίο χρειαζόμαστε λύση, χρησιμοποιούνται επιστημονικές μέθοδοι. Η διαδικασία ξεκινάει δίνοντας ιδιαίτερη προσοχή στην παρατήρηση, στον σχεδιασμό του προβλήματος και τη συλλογή των απαραίτητων δεδομένων. Το επόμενο βήμα είναι να σχηματίσουμε ένα μαθηματικό συνήθως υπόδειγμα το οποίο σκοπό έχει να περιορίσει την πολυπλοκότητα του πραγματικού κόσμου προκειμένου να λύσουμε το πρόβλημα που κατασκευάσαμε. Στην συνέχεια, υποθέτοντας ότι το πρόβλημα είναι μια σχετικά ακριβής αναπαράσταση των βασικών χαρακτηριστικών της κατάστασης, εξάγουμε από αυτό το υπόδειγμα λύσεις, οι οποίες θα ανταποκρίνονται και για το πρόβλημα του πραγματικού κόσμου. Έπειτα, διεξάγονται κατάλληλα πειράματα προκειμένου να ελέγξουμε αυτή την υπόθεση (περί αντιπροσωπευτικής αναπαράστασης του πραγματικού προβλήματος), να την προσαρμόσουμε όπου χρειάζεται και τελικά να επιβεβαιώσουμε κάποιες από τις υποθέσεις του υποδείγματος. Αξίζει να σημειωθεί ότι τα τελευταία χρόνια χρησιμοποιούνται διεθνώς εναλλακτικές ονομασίες όπως Διοικητική Επιστήμη (Management Science), Επιστήμη Αποφάσεων (Decision Science), Ανάλυση Συστημάτων (Systems Analysis), ενώ στην προσπάθεια να γίνει κατανοητή η άρρηκτη σχέση των δύο επόμενων όρων χρησιμοποιείται η συνδυαστική ονομασία Operations Research & Management Science (OR/MS).

Κύριο χαρακτηριστικό της Επιχειρησιακής Έρευνας είναι ότι προσπαθεί να βρει την καλύτερη (βέλτιστη) λύση για το εκάστοτε πρόβλημα. Συχνά μπορεί να υπάρχουν πολλαπλές «καλύτερες» λύσεις, οπότε σε μια τέτοια περίπτωση επιλέγουμε μία εξ αυτών. Ο σκοπός της Επιχειρησιακής Έρευνας είναι κάτι παραπάνω από το να βελτιώσει την παρούσα κατάσταση και εντοπίζεται στο να αναγνωρίσει το καλύτερο δυνατό πλάνο δράσης. Η αναζήτηση του βέλτιστου κατέχει εξέχουσα θέση στα πλαίσια της Επιχειρησιακής Έρευνας.

Ένα επιπλέον χαρακτηριστικό της Επιχειρησιακής Έρευνας είναι αυτό που ονομάζεται «ομαδική προσέγγιση». Είναι προφανές πως δεν είναι δυνατό να υπάρξει μόνο ένα εξειδικευμένο άτομο το οποίο να είναι σε θέση να ανταπεξέλθει σε όλες τις πτυχές των εργασιών ή των προβλημάτων που πρόκειται να επιλυθούν μέσω των μεθόδων της Επιχειρησιακής Έρευνας. Κάτι τέτοιο απαιτεί μια ομάδα ανθρώπων

που να έχουν διαφορετικές επιστημονικές καταβολές και δεξιότητες. Μια τέτοια λοιπόν ομάδα Επιχειρησιακής Έρευνας χρειάζεται να απαρτίζεται από ανθρώπους οι οποίοι συλλογικά να έχουν υψηλό επίπεδο εκπαίδευσης και κατάρτισης στα μαθηματικά, στη στατιστική και στη θεωρία πιθανοτήτων, στα οικονομικά, στη διοίκηση επιχειρήσεων, στην επιστήμη των υπολογιστών, στη μηχανική, στις συμπεριφοριστικές επιστήμες καθώς και σε εξειδικευμένες τεχνικές της Επιχειρησιακής Έρευνας.

Τέλος ,δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι η Επιχειρησιακή Έρευνα ασχολείται και με την πρακτική εφαρμογή της διοίκησης του οργανισμού. Έτσι, για να επιτύχει τον σκοπό της θα πρέπει να παρέχει θετικά και κατανοητά συμπεράσματα στον λήπτη αποφάσεων όποτε αυτά χρειάζονται.

Τι σημαίνει λοιπόν ο όρος Επιχειρησιακή Έρευνα; Στο πέρασμα των χρόνων έχουν διατυπωθεί πολλοί διαφορετικοί ορισμοί, με παρόμοια όμως σημασία. Ενδεικτικά, από την εταιρεία Επιχειρησιακής Έρευνας της Μεγάλης Βρετανίας έχει προταθεί ο εξής εύστοχος και ολοκληρωμένος ορισμός:

*“Επιχειρησιακή Έρευνα είναι η εφαρμογή της σύγχρονης επιστήμης πάνω σε πολύπλοκα προβλήματα τα οποία ανακύπτουν στη διεύθυνση και τη διοίκηση μεγάλων συστημάτων, αποτελούμενων από ανθρώπους, μηχανές, υλικά και κεφάλαια, στη Βιομηχανία, τις Επιχειρήσεις, τις Κυβερνητικές Υπηρεσίες και την Άμυνα.*

*Η χαρακτηριστική της μεθοδολογία συνίσταται στην ανάπτυξη επιστημονικού μοντέλου του υπό μελέτη συστήματος που περιλαμβάνει μετρήσεις τυχαίων παραγόντων και με το οποίο προβλέπει και συγκρίνει τα αποτελέσματα εναλλακτικών αποφάσεων, στρατηγικών και ελέγχων.*

*Ο σκοπός της είναι να βοηθήσει τη διοίκηση να καθορίσει την πολιτική και τις ενέργειές της επιστημονικά (κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο).”*

### 1.3. Μεθοδολογία της Επιχειρησιακής Έρευνας

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, η φύση των προβλημάτων στα οποία καλείται να επιλύσει το εκάστοτε τμήμα Επιχειρησιακής Έρευνας δεν έχει ουσιαστική σημασία, αφού στην πραγματικότητα αυτή η επιστήμη έχει πλατιά εφαρμοστεί σε επιχειρήσεις, βιομηχανίες, στο στρατό, στη δημόσια διοίκηση, στα νοσοκομεία, κ.ά. Έτσι έχει διαμορφωθεί μία επιστημονική μεθοδολογία που εφαρμόζεται σχεδόν πάντα, ανεξάρτητα από το πεδίο εφαρμογής ή το μοντέλο που πρόκειται να χρησιμοποιηθεί. Ένα τρόπος να συνοψίσουμε τα βασικά στάδια της έρευνας είναι ο ακόλουθος:



### *I. Προσδιορισμός του προβλήματος και συλλογή των απαραίτητων δεδομένων*

Η μεθοδολογία της έρευνας, ξεκινά με την κατανόηση του συστήματος που πρόκειται να μελετηθεί. Αφού προσδιοριστεί η δομή και ο τρόπος που λειτουργεί, το σύστημα αναλύεται σε πιθανά υποσυστήματα, εντοπίζονται τα σημεία στα οποία μπορεί να επηρεαστεί η λειτουργία του και καθορίζονται οι τρόποι προκειμένου να επηρεαστεί το σύστημα αυτό. Έτσι ο ερευνητής έχει σαφή αντίληψη των παραμέτρων του προβλήματος καθώς και των περιορισμών που προκύπτουν.

Ακόμα ο ερευνητής χρειάζεται να αφιερώσει χρόνο στην συλλογή των δεδομένων που είναι απαραίτητα, τόσο για να μελετήσει τη λειτουργία του συστήματος, όσο και να για μπορεί να τα εισάγει αργότερα στο μοντέλο που θα κατασκευάσει. Συχνά, στην αρχή της ανάλυσης δεν υπάρχουν διαθέσιμα δεδομένα, είτε επειδή δεν έχουν καταγραφεί ποτέ στο παρελθόν, είτε διότι τα δεδομένα που καταγράφηκαν είναι λανθασμένα ή παλιά. Για το λόγο αυτό είναι πλέον απαραίτητη η εγκατάσταση προγραμμάτων διαχείρισης πληροφοριών έτσι ώστε να καταγράφονται στη σωστή μορφή όλα τα απαραίτητα δεδομένα ενός συστήματος.

### *II. Διατύπωση Στόχων*

Είναι απαραίτητο οι ερευνητές να θέτουν τους στόχους που καλούνται να επιτύχουν πριν ξεκινήσει η διαδικασία επίλυσης του προβλήματος. Από τη διατύπωση σωστών στόχων εξαρτάται και η επιτυχία των λύσεων που θα προκύψουν. Συνήθως στην Επιχειρησιακή Έρευνα μας απασχολούν προβλήματα *μεγιστοποίησης κέρδους*, προβλήματα *ελαχιστοποίησης κόστους*, προβλήματα *βελτίωσης της παραγωγικότητας* κ.α. Ο καθορισμός των στόχων μπορεί να γίνει αρκετά σύνθετος όταν μέσα σε ένα σύστημα εμφανίζονται πολλαπλοί στόχοι, οι οποίοι δεν ικανοποιούνται με την ίδια στρατηγική.

### *III. Προσδιορισμός του Μοντέλου*

Μία καλή προσέγγιση στο στάδιο αυτό είναι η εκκίνηση από μία αρκετά απλή αναπαράσταση του προβλήματος, εύκολα επεξεργάσιμη από τους ερευνητές. Φυσικά, οι υποθέσεις στις οποίες βασίζεται η απλούστευση του προβλήματος θα πρέπει να είναι ρεαλιστικές. Έπειτα, η κατασκευή του επιστημονικού μοντέλου, συνήθως μαθηματικού, συνίσταται στην αναπαράσταση των σχέσεων μεταξύ των παραμέτρων, των στόχων και των μεταβλητών του συστήματος με μαθηματικές σχέσεις ή εντολές στον υπολογιστή. Φυσικά, λόγω των υποθέσεων που γίνονται, το μοντέλο χρειάζεται επαλήθευση. Πρόκειται για ένα σημαντικότερο στάδιο καθώς ελλοχεύει ο κίνδυνος προσπάθειας επίλυσης ενός λανθασμένου προβλήματος, ο οποίος φυσικά θα οδηγήσει στην παρουσίαση λανθασμένων αποφάσεων.

Τέλος, ένα σωστό μοντέλο έχει την ελάχιστη δυνατή διάσταση, δηλαδή περιλαμβάνει μόνο εκείνες τις μεταβλητές που επηρεάζουν ουσιαστικά το πρόβλημα έτσι ώστε να συνεπάγεται το μικρότερο δυνατό κόστος επεξεργασίας.

#### *IV. Επίλυση του Μοντέλου*

Το μοντέλο που κατασκευάζεται μπορεί να οδηγήσει σε πολλαπλές λύσεις, δηλαδή σε διαφορετικές στρατηγικές που μπορούν να υιοθετηθούν για την αντιμετώπιση του προβλήματος. Για την εύρεση της βέλτιστης λύσης, δηλαδή της στρατηγικής που ενδείκνυται να ακολουθηθεί, έχουν αναπτυχθεί ποικίλες τεχνικές επιχειρησιακής έρευνας.

Οι κυριότερες τεχνικές της επιχειρησιακής έρευνας είναι ο γραμμικός προγραμματισμός, ο ακέραιος προγραμματισμός, ο δυναμικός προγραμματισμός, ο μη-γραμμικός προγραμματισμός, τα δένδρα αποφάσεων, ο προγραμματισμός δικτύων, η θεωρία ουρών αναμονής, η διαχείριση αποθεμάτων και η θεωρία παιγνίων. Φυσικά, οι παραπάνω τεχνικές συνιστούν μόνο ένα μικρό μέρος των εργαλείων της επιχειρησιακής έρευνας.

Η εφαρμογή της κατάλληλης τεχνικής ή μεθόδου εξαρτάται από τον τύπο και τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του εκάστοτε μοντέλου. Για όλους τους τύπους προβλημάτων έχουν αναπτυχθεί συγκεκριμένοι αλγόριθμοι ανάλυσης και επίλυσης.

#### *V. Ανάλυση Ευαισθησίας*

Καθώς η λύση που δίνει το προηγούμενο στάδιο ισχύει για συγκεκριμένες αρχικές τιμές των παραμέτρων του περιβάλλοντος κατά τον προσδιορισμό του μοντέλου, είναι σημαντικό για τον ερευνητή να γνωρίζει πως επηρεάζεται η λύση από μία αλλαγή στο περιβάλλον. Η παραπάνω ανάλυση ονομάζεται ανάλυση ευαισθησίας, καθώς ποσοτικοποιεί την ευαισθησία της λύσης όταν το μοντέλο υπόκειται σε μεταβολές των παραμέτρων του.

#### *VI. Υλοποίηση της Λύσης*

Ενώ αναμένεται ότι το δυσκολότερο μέρος της έρευνας είναι ο προσδιορισμός της βέλτιστης στρατηγικής, στην πραγματικότητα, το δυσκολότερο και πιο κομβικό μέρος είναι η υλοποίηση αυτής. Το τμήμα επιχειρησιακής έρευνας οφείλει να μετατρέψει τα αποτελέσματα της έρευνας σε κατανοητές οδηγίες, για τα άτομα που πρόκειται εργαστούν στο προτεινόμενο σύστημα, ώστε σταδιακά να υλοποιηθεί η λύση αλλά και να διορθώσει προβλήματα που ενδέχεται να προκύψουν κατά την εφαρμογή των οδηγιών και δεν είχαν προβλέψει προηγουμένως.

## 1.4. Η Επίδραση της Επιχειρησιακής Έρευνας

Σήμερα τόσο οι μεγάλες εταιρείες όσο και πολλές μικρές βιομηχανίες διαθέτουν στο μόνιμο προσωπικό τους ομάδες Επιχειρησιακής Έρευνας. Επίσης, κυβερνητικές υπηρεσίες, χρηματοπιστωτικοί οργανισμοί και νοσοκομεία τη χρησιμοποιούν όλο και περισσότερο.

Στη συνέχεια αναφέρονται μερικά από τα προβλήματα που έχουν λυθεί με τη βοήθεια τεχνικών της επιχειρησιακής έρευνας. Ο γραμμικός προγραμματισμός έχει χρησιμοποιηθεί με επιτυχία σε προβλήματα κατανομής προσωπικού, μίξης υλικών, μεταφοράς-διανομής και χαρτοφυλάκια επενδύσεων. Ο δυναμικός προγραμματισμός έχει και αυτός εφαρμοστεί με επιτυχία σε προβλήματα προγραμματισμού δαπανών διαφήμισης, κατανομής καναλιών διανομής και σχεδίασης παραγωγής. Η θεωρία ουρών έχει εφαρμοστεί σε προβλήματα κυκλοφορίας, συντήρησης μηχανών, προσδιορισμού δυναμικότητας, σχεδίασης αερομεταφορών, εκπόνησης σχεδίων υδατοφρακτών, σχεδίαση λειτουργίας νοσοκομείων. Άλλες τεχνικές της επιχειρησιακής έρευνας, όπως η θεωρία αποθεμάτων, η θεωρία παιχνιδιών, και η προσομοίωση έχουν χρησιμοποιηθεί σε πολλά άλλα προβλήματα.

Η Επιχειρησιακή Έρευνα έχει εντυπωσιακό αντίκτυπο στην βελτίωση της αποτελεσματικότητας πολλών οργανισμών, τόσο δημοσίων όσο και ιδιωτικών σε παγκόσμιο επίπεδο και έχει συμβάλει σημαντικά στην αύξηση της παραγωγικότητας των οικονομιών πολλών χωρών. Σήμερα, υπάρχουν πολλές χώρες που συμμετέχουν στην Διεθνή Ομοσπονδία Κοινοτήτων Επιχειρησιακής Έρευνας (International Federation of Operational Research Societies, IFORS) με κάθε χώρα να έχει ιδρύσει και μια εθνική κοινότητα για την Επιχειρησιακή Έρευνα. Στην Ελλάδα, όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, ιδρύθηκε το 1963 η “Ελληνική Εταιρεία Επιχειρησιακών Ερευνών”.

## 2. Εισαγωγή στην Πρόβλεψη

Σε τι βαθμό θα αναπτυχθεί η οικονομία τον επόμενο χρόνο; Πώς θα διαμορφωθούν οι προτιμήσεις των καταναλωτών και η αγοραστική δύναμη; Ποια θα είναι τα πιο δημοφιλή νέα προϊόντα; Θα αυξηθούν οι πωλήσεις σε ήδη υπάρχοντα προϊόντα; Όλα τα παραπάνω συνιστούν το επόμενο καίριο ερώτημα. Μπορούμε να γνωρίζουμε το μέλλον; Επίσης, όταν η απάντηση είναι θετική, πόσο σημαντική είναι αυτή η γνώση;

Το καλό νέο είναι ότι η Επιχειρησιακή Έρευνα, με τα ποικίλα εργαλεία και μεθόδους που διαθέτει, μπορεί να απαντήσει σε ερωτήσεις που αφορούν μεταβλητές όπως οι μελλοντικές τάσεις της αγοράς, η μελλοντική ζήτηση, οι μελλοντικές πωλήσεις κ.α. Το κακό νέο είναι ότι πιθανότατα οι απαντήσεις αυτές θα είναι λανθασμένες. Έτσι, το γενικότερο ερώτημα δεν έχει ακόμα απαντηθεί. Σίγουρα, δεν μπορούμε πάντα να προβλέψουμε το μέλλον με ακρίβεια.

Ωστόσο, φαίνεται ότι η γνώση αυτή είναι πολύ σημαντική καθώς, ακόμη και αν αμφισβητείται η ακρίβειά της, καταβάλλεται συνεχόμενη προσπάθεια για να κατακτηθεί. Αυτό συμβαίνει καθώς, η επιτυχία κάθε επιχείρησης εξαρτάται από την ικανότητα της διοίκησης, να προβλέπει τις τάσεις και έπειτα να εφαρμόζει τις κατάλληλες στρατηγικές. Η διεξαγωγή προβλέψεων αποτελεί αναπόσπαστη επιχειρηματική λειτουργία καθώς, εφόσον τα αποτελέσματά της ερμηνευθούν σωστά, παρέχει πληροφόρηση αναφορικά με μία πληθώρα παραμέτρων που επηρεάζουν την επαγγελματική της πορεία. Με τεκμηριωμένες επιστημονικά μεθόδους, εξάγει αποτελέσματα, τα οποία μπορούν να χρησιμοποιηθούν, με σχετική ασφάλεια, στα διάφορα τμήματα της επιχείρησης και να καθοδηγήσουν την επιχειρηματική δραστηριότητα. Για το λόγο αυτό, οι επιχειρήσεις και οι οργανισμοί επενδύουν σε επιχειρησιακούς ερευνητές με εμπειρία στη διεξαγωγή προβλέψεων, ικανούς να δείξουν τον δρόμο προς την επιτυχία.

### 2.1. Ορισμός

Πρόβλεψη ονομάζεται η εκτίμηση μιας μελλοντικής εκδήλωσης, που γίνεται συνδυάζοντας συστηματικά και επεξεργάζοντας με προκαθορισμένο τρόπο ιστορικά δεδομένα. Δηλαδή, με τη διαδικασία της πρόβλεψης εκτιμάται η τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής, η πραγματική τιμή της οποίας θα

εμφανιστεί στο μέλλον. Δεν πρόκειται για μία αυθαίρετη εικασία, αλλά για εντατική μελέτη με προκαθορισμένη μεθοδολογία έτσι ώστε, σε μία ιδανική συνθήκη, η πρόβλεψη να συμπίπτει με την πραγματική τιμή. Επιπλέον, τυχόν αποκλίσεις στο μέλλον αντιπροσωπεύουν τάσεις, οι οποίες υπονοούν μία προβληματική κατάσταση και αφυπνίζουν τις επιχειρήσεις ώστε να δράσουν με αμεσότητα και να πάρουν σωστές αποφάσεις.

Είναι βέβαιο ότι η τέλεια πρόβλεψη δεν υπάρχει. Εφόσον η πρόβλεψη χαρακτηρίζεται από την αβεβαιότητα, θα περιέχει κάποιο σφάλμα. Οι επιχειρησιακοί ερευνητές αντιλήφθηκαν γρήγορα ότι αντί να χάνουν χρόνο ψάχνοντας την ιδανική πρόβλεψη, έπρεπε κάθε φορά να προσπαθούν να βρουν και να εφαρμόσουν την καταλληλότερη μέθοδο πρόβλεψης, ή αλλιώς τη μέθοδο με το μικρότερο σφάλμα. Το σφάλμα πρέπει να ποσοτικοποιείται και να λαμβάνεται υπόψιν. Η συμπερίληψη του μέτρου του σφάλματος στην πρόβλεψη, έχει ως αποτέλεσμα τη βελτίωση της αποδοτικότητας και την προσέγγιση της πραγματικής τιμής.

Η ακρίβεια της πρόβλεψης είναι αντιστρόφως ανάλογη του χρονικού ορίζοντα που αφορά. Προβλέψεις που αναφέρονται στο άμεσο μέλλον παρουσιάζουν μεγαλύτερη ακρίβεια, συγκριτικά με προβλέψεις που στοχεύουν στο μακρινό μέλλον. Αυτό συμβαίνει καθώς οι αυξομειώσεις στις τιμές των δεδομένων παρουσιάζουν μικρότερο εύρος σε περιορισμένο χρονικό διάστημα. Επίσης, υψηλότερη επιθυμητή ακρίβεια μεταφράζεται σε μεγαλύτερο κόστος για την κατασκευή των μοντέλων πρόβλεψης. Έτσι καταλήγουμε σε ένα καίριο ερώτημα. Πόσα χρήματα και πόση ανθρώπινη προσπάθεια πρέπει να αφιερώνεται στη διεξαγωγή προβλέψεων; Η απάντηση δεν είναι προκαθορισμένη. Η καλύτερη δυνατή πρόβλεψη δεν είναι απαραίτητα η πιο ακριβής ή η λιγότερο δαπανηρή. Παράγοντες όπως η διαθεσιμότητα ιστορικών δεδομένων και ο αντικειμενικός σκοπός της πρόβλεψης, διαμορφώνουν την επιθυμητή ακρίβεια της πρόβλεψης.

Για τη διεξαγωγή αποτελεσματικών προβλέψεων έχουν αναπτυχθεί ποικίλοι μέθοδοι πρόβλεψης. Ανάλογα με το αν έχουμε στη διάθεσή μας ιστορικά δεδομένα, για παράδειγμα δεδομένα παλαιότερων πωλήσεων, οι μέθοδοι πρόβλεψης διακρίνονται σε ποιοτικές και ποσοτικές μεθόδους. Στην κατηγορία των ποιοτικών μεθόδων, περιλαμβάνονται μέθοδοι που αξιοποιούν αποκλειστικά την γνώση, την εμπειρία, το ένστικτο και την κριτική ικανότητα ενός ή περισσότερων ειδικών (*Judgmental Forecasting Methods*). Έτσι, οι προβλέψεις μπορεί να είναι μεροληπτικές. Τέτοιες μέθοδοι χρησιμοποιούνται όταν δεν υπάρχουν ιστορικά δεδομένα ή όταν οι μεταβολές στην αγορά είναι τόσο μεγάλες που τα δεδομένα καθίστανται αναξιόπιστα. Αντιθέτως, οι ποσοτικές μέθοδοι συνιστούν αμερόληπτες μεθόδους που αξιοποιούν μία σειρά από αριθμητικά δεδομένα για να προβλέψουν το μέλλον (*Statistical Forecasting*

*Methods*). Οι μέθοδοι πρόβλεψης αποτελούν το κύριο μέρος της παρούσας εργασίας, επομένως θα περιγραφούν αναλυτικά στη συνέχεια.

Ανάλογα με τη χρονική εμβέλεια στην οποία στοχεύουν, διακρίνουμε τρία είδη προβλέψεων:

- **Μακροπρόθεσμες**

Στοχεύουν σε χρονικό ορίζοντα άνω των τριών ετών και αφορούν σπουδαίες αποφάσεις, καινοτομίες και αλλαγές στον στρατηγικό σχεδιασμό της επιχείρησης, όπως η εισαγωγή ενός νέου προϊόντος στη γραμμή παραγωγής, η επέκταση των εγκαταστάσεων της κ.α.

- **Μεσοπρόθεσμες**

Αφορούν χρονικό διάστημα από ένα έως τρία χρόνια και εκτιμούν τα μελλοντικά επίπεδα ζήτησης, πωλήσεων, προϋπολογισμών κ.α.

- **Βραχυπρόθεσμες**

Καλύπτουν χρονικό διάστημα κάποιων εβδομάδων έως ένα έτος και αφορούν τρέχουσες λειτουργίες. Συχνότερες είναι οι προβλέψεις ανά τρίμηνο. Εδώ αξιοποιούνται συνήθως μαθηματικές τεχνικές και είναι πιο ακριβείς από τις προηγούμενες.

Ο συνεχής έλεγχος και η επικαιροποίηση, λαμβάνοντας υπόψη τα νέα δεδομένα, είναι καθοριστικοί παράγοντες για τη διεξαγωγή αποτελεσματικών προβλέψεων.

## 2.2. Εφαρμογές της Πρόβλεψης

Οι προβλέψεις επιτελούνται και ενσωματώνονται σε μία πληθώρα εφαρμογών επιχειρησιακού χαρακτήρα. Παρακάτω αναφέρονται κάποιες από τις σημαντικότερες εφαρμογές.

### **Προβλέψεις Πωλήσεων (Forecasting Sales)**

Κάθε εταιρεία που ασχολείται με πώληση προϊόντων χρειάζεται μία εκτίμηση για τη ζήτηση κάθε αγαθού. Αρχικά οι κατασκευαστές πρέπει να ξέρουν πόση ποσότητα από τα αγαθά να παράξουν. Έπειτα, οι έμποροι και τα καταστήματα λιανικής πώλησης πρέπει να ξέρουν την ποσότητα που χρειάζεται να προμηθευτούν.

Υποεκτιμήσεις της μελλοντικής ζήτησης, συχνά οδηγούν σε χαμένες πωλήσεις, σύγχυση και δυσαρεστημένους πελάτες που είναι πιθανό να απευθυνθούν σε ανταγωνιστικές επιχειρήσεις για να ικανοποιήσουν προσωρινά τις ανάγκες τους ή ακόμα και να χάσουν εντελώς την αξιοπιστία τους στην συγκεκριμένη εταιρεία. Αντίθετα, η εκτίμηση μιας σημαντικά μεγαλύτερης ζήτησης από την πραγματική μελλοντική ζήτηση προκαλεί μεγάλη ζημία στις επιχειρήσεις, λόγω του κόστους αποθήκευσης και συντήρησης των προϊόντων, της άσκοπης επένδυσης σε πρώτες ύλες και παραγωγή και οδηγεί σε αναγκαστική μείωση τιμών.

Παρόλο που η αποτελεσματική εκτίμηση των πωλήσεων είναι το κλειδί για κάθε εταιρεία, κάποιες χρειάζεται να επενδύσουν και σε άλλους τύπους προβλέψεων. Η πρόβλεψη των πωλήσεων τροφοδοτεί την πρόβλεψη για την προμήθεια των πρώτων υλών, την πρόβλεψη για την ποσότητα μιας παραγγελίας κ.α.

### **Πρόβλεψη της ανάγκης Ανταλλακτικών (Forecasting the Need for Spare Parts)**

Είναι σημαντικό κάποιες εταιρείες να διατηρούν επαρκές απόθεμα σε ανταλλακτικά έτσι ώστε να είναι σε θέση να επισκευάζουν άμεσα τον εξοπλισμό τους ή τα προϊόντα που παρέχουν στους πελάτες τους. Για ορισμένες εταιρείες, οι επιπτώσεις της μη ύπαρξης αποθέματος σε κάποιο συγκεκριμένο ανταλλακτικό μπορεί να είναι τόσο μεγάλες, που το κόστος αποθήκευσης θεωρείται αμελητέο. Για παράδειγμα, στην περίπτωση μιας αεροπορικής εταιρείας που δεν έχει διαθέσιμο κάποιο ανταλλακτικό, όπου και όταν αυτό χρειάζεται, η μικρότερη δυνατή επίπτωση είναι μία χαμένη πτήση προκειμένου να μη θέσει σε κίνδυνο τη ζωή των επιβατών.

### **Πρόβλεψη της Αποτελεσματικότητας της Παραγωγής (Forecasting Production Yields)**

Με τον όρο αποτελεσματικότητα της παραγωγής εννοούμε το ποσοστό των παραχθέντων προϊόντων που πληρούν τις προϋποθέσεις και δεν απορρίπτονται. Εάν η εκτίμηση αυτής της απόδοσης είναι σημαντικά μικρότερη από εκατό τοις εκατό, το μέγεθος της παραγωγής θα πρέπει να είναι λίγο μεγαλύτερο από την ποσότητα της παραγγελίας ώστε να μπορέσει να καλυφθεί η διαφορά και η παραγγελία να απαρτίζεται ολόκληρη από μη ελαττωματικά προϊόντα. Η διαφορά μεταξύ των μεγεθών της παραγωγής και της παραγγελίας ονομάζεται περιθώριο απόρριψης (reject allowance). Εάν υπάρχει πίεση χρόνου ή η οργάνωση της παραγωγής έχει μεγάλο κόστος, τότε αυτό το όριο θα πρέπει να είναι μεγαλύτερο από ότι συνήθως, σε λογικά βέβαια πλαίσια.

### **Πρόβλεψη των Οικονομικών Τάσεων (Forecasting Economic Trends)**

Πέρα από την πρόβλεψη των πωλήσεων, οι επιχειρησιακοί αναλυτές καταβάλουν μεγάλη προσπάθεια και αφιερώνουν πολύ χρόνο στην εκτίμηση των οικονομικών τάσεων σε τοπικό, εθνικό αλλά και διεθνές επίπεδο. Για τις εκτιμήσεις αυτές έχουν αναπτυχθεί στατιστικά ή αλλιώς οικονομετρικά μοντέλα από κυβερνητικούς οργανισμούς, πανεπιστημιακά κέντρα ερευνών, και εταιρείες παροχής συμβουλευτικών υπηρεσιών.

### **Πρόβλεψη της Απασχόλησης (Forecasting Staffing Needs)**

Στις αναπτυγμένες οικονομίες παρατηρείται μία τάση μετατόπισης από την παραγωγή στις υπηρεσίες. Σήμερα, είναι πολύ συχνό φαινόμενο, βιομηχανικά κατασκευασμένα προϊόντα να παράγονται εκτός συνόρων, όπου η εργασία κοστίζει λιγότερο, και έπειτα να εισάγονται. Παράλληλα, όλο και περισσότερες εταιρείες εξειδικεύονται στην παροχή υπηρεσιών που σχετίζονται με την διασκέδαση, τον τουρισμό, την υγεία, την εκπαίδευση κ.α.

Για μία τέτοια εταιρεία, η πρόβλεψη των πωλήσεων ισοδυναμεί με την πρόβλεψη της ζήτησης για υπηρεσίες, η οποία είναι ουσιαστικά η πρόβλεψη για το ανθρώπινο δυναμικό που είναι χρήσιμο για την παροχή των υπηρεσιών.

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα μιας βιομηχανίας παροχής υπηρεσιών είναι τα τηλεφωνικά κέντρα. Η πρόσληψη λιγότερων εκπροσώπων σε ένα τηλεφωνικό κέντρο μπορεί να οδηγήσει σε μεγάλη αναμονή, δυσαρεστημένους πελάτες και χαμένες κλήσεις. Από την άλλη πλευρά, η απασχόληση πολλών επιπλέον εκπροσώπων, ισοδυναμεί με κόστος για την εταιρεία.

### **Πρόβλεψη της Τεχνολογική Ανάπτυξης (Forecasting Technological Development)**

Πρόκειται για την εκτίμηση του δείκτη της τεχνολογικής προόδου. Η εκτίμηση αυτή μπορεί να βοηθήσει ιδιωτικούς αλλά και δημόσιους οργανισμούς στην λήψη “έξυπνων” αποφάσεων. Οι ειδικοί χρειάζεται να γνωρίζουν κατά πόσο μπορούν να χρησιμοποιήσουν τις νέες τεχνολογίες για την παραγωγή νέων προϊόντων αλλά και για την ανάπτυξη λογισμικών που βοηθούν τους επικεφαλής στη διοίκηση των οργανισμών.



## 2.3. Χαρακτηριστικά Καλών Προβλέψεων

Παρακάτω αναφέρονται τα συστατικά στοιχεία μιας πρόβλεψης ώστε αυτή να θεωρείται καλή.

- Ακρίβεια

Είναι επιθυμητό τα αποτελέσματα της πρόβλεψης να πλησιάζουν όσο το δυνατόν περισσότερο την πραγματική τιμή που θα προκύψει. Σε κάθε άλλη περίπτωση χάνεται ο λόγος της διεξαγωγής της.

- Έγκαιρη Διεξαγωγή

Για να φανεί πρακτικά χρήσιμη η πρόβλεψη πρέπει να πραγματοποιηθεί σε εύλογο χρονικό διάστημα, πρώτον, για να μην χαθεί η ισχύς των ιστορικών δεδομένων και δεύτερον, για να υπάρχει ο απαραίτητος χρόνος για την αξιοποίησή της.

- Αξιοπιστία

Η μέθοδος πρόβλεψης που χρησιμοποιείται πρέπει να αποδίδει σταθερά και αξιόπιστα αποτελέσματα, ώστε να ληφθούν υπόψη στις αποφάσεις της διοίκησης.

- Αξιοποιήσιμα Αποτελέσματα

Για να μπορέσουν να αξιοποιηθούν τα αποτελέσματα πρέπει να δίνουν εκτιμήσεις για τις παραμέτρους που απασχολούν την εκάστοτε επιχειρησιακή λειτουργία.

- Κατανοητή και Εύχρηστη

Η χρήση πολύπλοκων μεθόδων πρόβλεψης μπορεί να αποδειχθεί δαπανηρή και μη αξιοποιήσιμη από επιχειρήσεις που μπορούν να αναπτύξουν εξίσου αποτελεσματικές και ταυτόχρονα ευκολότερες ως προς την εφαρμογή τους μεθόδους. Συχνά, απλές τεχνικές πρόβλεψης οδηγούν σε άκρως αξιόπιστα, απλά και κατανοητά αποτελέσματα.

- Αντιστάθμιση του κόστους από την ωφέλεια

Όπως αναφέραμε παραπάνω, ένα καίριο ερώτημα που απασχολεί τους υπεύθυνους είναι πόσα χρήματα είναι σκόπιμο να επενδύσουν στη διεξαγωγή προβλέψεων. Η πραγματοποίηση της πρόβλεψης πρέπει να θέτει την επιχείρηση σε μία καλύτερη οικονομική κατάσταση, δηλαδή τα κέρδη που επιφέρουν οι αποτελεσματικές προβλέψεις να μην αποσβένονται από το κόστος διεξαγωγής τους.

## 2.4. Μεθοδολογία της Διαδικασίας Διεξαγωγής Προβλέψεων

Τα γενικά βήματα που συνήθως ακολουθούνται είναι:

### *I. Κατανόηση του προβλήματος-Προσδιορισμός του σκοπού*

Ο προσδιορισμός του σκοπού της πρόβλεψης και η επιλογή της ποσότητας για την οποία θα πραγματοποιηθεί, ορίζει γραμμή πλεύσης για τη διοίκηση και δείχνει το δρόμο για τα δεδομένα που θα πρέπει να ληφθούν υπόψιν.

### *II. Επιλογή του χρονικού ορίζοντα της πρόβλεψης*

Το διάστημα αυτό πρέπει να είναι αντίστοιχο του χρονικού εύρους από το οποίο αντλούνται τα δεδομένα.

### *III. Επιλογή του κατάλληλου μοντέλου πρόβλεψης*

Η γνώση των διάφορων μοντέλων πρόβλεψης, σε ποιες καταστάσεις αυτά είναι εφαρμόσιμα, πόσο αξιόπιστα είναι καθώς και τι είδους δεδομένα χρειάζεται το καθένα, είναι καθοριστικές για να γίνει σωστή επιλογή. Ένα ή περισσότερα μοντέλα μπορούν να επιλεγθούν κάθε φορά.

### *IV. Συλλογή Δεδομένων*

Τα δεδομένα που διαθέτουμε πρέπει φυσικά να είναι συμβατά με το μοντέλο που έχει επιλεγθεί στο προηγούμενο βήμα.

### *V. Προετοιμασία της πρόβλεψης*

Εφαρμογή του μοντέλου στα δεδομένα και εκτίμηση της τιμής της πρόβλεψης.

### *VI. Αξιολόγηση*

Η τιμή της πρόβλεψης δεν χρησιμοποιείται ακριβώς όπως υπολογίζεται. Πρέπει πρώτα να αξιολογηθεί με τη βοήθεια διαστημάτων εμπιστοσύνης, της λογικής ή ακόμα και μέσω σύγκρισης με κάποια άλλη σχετική μεταβλητή. Έτσι, κάποιες φορές είναι σκόπιμο να τροποποιούνται οι τιμές που δίνουν οι διάφορες στατιστικές μέθοδοι.

### 3. Ποιοτικές Μέθοδοι Πρόβλεψης (Qualitative Forecasting Methods)

Η ποικιλία των μεθόδων που μπορεί να επιλέξει μία εταιρεία ώστε να εξάγει την εκάστοτε τιμή της πρόβλεψης είναι μεγάλη. Υπάρχουν δύο βασικές προσεγγίσεις στη διαδικασία εξαγωγής μίας πρόβλεψης: η ποιοτική και η ποσοτική. Στο κεφάλαιο αυτό θα αναλύσουμε την πρώτη, δηλαδή την ποιοτική προσέγγιση.

Γενικότερα, τα ποσοτικά μοντέλα ανταποκρίνονται εξαιρετικά καλά αν και μόνο αν οι αλλαγές στο περιβάλλον είναι μικρές ή τουλάχιστον δεν παρουσιάζουν συμμετρία. Όταν όμως οι σχέσεις που περιγράφουν τη συμπεριφορά των μεταβλητών αλλάζουν, τα ποσοτικά μοντέλα που χρησιμοποιούνταν στο παρελθόν δεν έχουν ισχύ. Σε αυτό το σημείο, η χρήση ποιοτικών μεθόδων πρόβλεψης που βασίζονται στην ανθρώπινη κριτική ικανότητα είναι επιτακτική. Στην περίπτωση που παρατηρηθούν αλλαγές στο περιβάλλον, οι ποιοτικές μέθοδοι μπορούν να εντοπίσουν μία συστηματική αλλαγή πιο γρήγορα και να ερμηνεύσουν το αντίκτυπο μια τέτοιας αλλαγής στο μέλλον.

Πρόκειται για μεθόδους που είναι από τη φύση τους υποκειμενικές και μπορεί να εμφανίζουν μεροληψία. Αυτό συμβαίνει διότι βασίζονται στην προσωπική άποψη, κρίση, εμπειρία και το ένστικτο των ειδικών πάνω στο εκάστοτε αντικείμενο πρόβλεψης. Συνήθως χρησιμοποιούνται όταν δεν υπάρχουν παλαιότερα δεδομένα ώστε να εφαρμοστεί κάποια ποσοτική τεχνική ή όταν τα δεδομένα που έχει στη διάθεση της η επιχείρηση κρίνονται ανεπαρκή ή ακατάλληλα. Ωστόσο, υπάρχουν περιπτώσεις που ενώ τα δεδομένα πληρούν όλες τις απαραίτητες προϋποθέσεις, οι ιθύνοντες επιλέγουν να χρησιμοποιήσουν κάποια ποιοτική μέθοδο. Επιπλέον, η ποιοτική προσέγγιση αποδεικνύεται ιδιαίτερα χρήσιμη για βραχυπρόθεσμες προγνώσεις και μπορεί να πλαισιώσει προβλέψεις που προκύπτουν από μία ποσοτική προσέγγιση. Στη συνέχεια, περιγράφονται οι πέντε πιο γνωστές και ευρέως χρησιμοποιούμενες μέθοδοι.

### 3.1. Επιτροπή Ειδικών (Executive Opinions)

Μία μικρή συνήθως ομάδα από υψηλόβαθμα στελέχη επιστρατεύουν τη γνώση, την εμπειρία και κυρίως την προσωπική κρίση τους για να επιτύχουν την καλύτερη δυνατή πρόβλεψη. Το τμήμα της διοίκησης, τροποποιεί το αποτέλεσμα της πρόβλεψης με βάση τις προσδοκίες του.

Το πλεονέκτημα της μεθόδου είναι ότι η πρόβλεψη γίνεται άμεσα και σχετικά εύκολα, χωρίς να χρειάζεται η επεξεργασία πολύπλοκων δεδομένων. Επίσης, είναι ίσως η μόνη μέθοδος που λειτουργεί όταν δεν έχουμε στη διάθεση μας επαρκή ιστορικά δεδομένα. Το μειονέκτημα όμως της μεθόδου είναι το φαινόμενο της «ομαδικής σκέψης». Συχνά τα μέλη μιας ομάδας παρουσιάζουν τόσο έντονη επιθυμία συναίνεσης ώστε εγκαταλείπουν την κοινή λογική που υπαγορεύει την κριτική θεώρηση μιας άποψης, την εκτίμηση εναλλακτικών τρόπων δράσης και την διατύπωση λιγότερων αρεστών πεποιθήσεων. Αποδεδειγμένα, η απερισκεπτη συμμόρφωση στην ομάδα οδηγεί σε λήψη λανθασμένων αποφάσεων.

### 3.2. Η μέθοδος “Delphi”

Πρόκειται για μία διαδικασία, κατά την οποία μία ομάδα ειδικών καλούνται να συμπληρώσουν ατομικά μία σειρά ερωτηματολογίων. Προκειμένου να μειωθεί ο κίνδυνος η άποψη ομάδας και ιδιαιτέρως των ισχυρών μελών της να επηρεάσει την υποκειμενική άποψη των υπολοίπων, οι ειδικοί δεν γνωρίζονται ως ομάδα και δεν πραγματοποιείται διάλογος. Έτσι, το βασικό πλεονέκτημα της μεθόδου είναι ότι τα μέλη της επιτροπής δεν επηρεάζονται από την κοινωνική πίεση έτσι ώστε να σκέφτονται και να προβλέπουν με συγκεκριμένο τρόπο, εφόσον η διαδικασία δεν έχει σκοπό την λήψη μιας απόφασης μέσω ομοφωνίας και συναίνεσης. Αντίθετα, οι απόψεις, οι προβλέψεις τους αλλά και οι διαφωνίες που απορρέουν, καταγράφονται από ένα ανεξάρτητο τμήμα και παρουσιάζονται έπειτα στους ειδικούς συνοδευόμενες από ένα επόμενο ερωτηματολόγιο. Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται έως ότου τα περισσότερα μέλη της ομάδας καταλήξουν σε ένα παρόμοιο συμπέρασμα. Η μέθοδος “Delphi” είναι χρήσιμη και ιδιαίτερα αποτελεσματική για μακροπρόθεσμες προβλέψεις. Σημαντικό μειονέκτημα της μεθόδου είναι ότι δεν λαμβάνει υπόψη τις απόψεις των μελών που διαφέρουν από αυτή της πλειοψηφίας.

### 3.3. Η μέθοδος “Grass Roots”

Η μέθοδος χρησιμοποιείται συχνά στην πρόβλεψη των πωλήσεων μιας εταιρείας που απασχολεί εξειδικευμένο προσωπικό με σκοπό να αυξήσουν τις πωλήσεις της. Πρόκειται για μία από κάτω προς τα πάνω μέθοδο πρόβλεψης, που χρησιμοποιεί ως πηγή άτομα που βρίσκονται σε συνεχή επαφή με τους πελάτες. Η ιδέα είναι ότι το προσωπικό που βρίσκεται πιο κοντά στον τελικό καταναλωτή είναι πιθανό να έχει μία καλύτερη εικόνα της αγοράς στο άμεσο μέλλον, οπότε ζητείται από κάθε πωλητή να εκτιμήσει τις πωλήσεις στη δική του περιοχή δράσης. Οι εκτιμήσεις αυτές προωθούνται μέσω της εταιρικής ιεραρχίας στα απαραίτητα τμήματα και χρησιμοποιούνται για την εκτίμηση των συνολικών πωλήσεων του οργανισμού.

Σημαντικά πλεονεκτήματα της μεθόδου είναι αδιαμφισβήτητα η ευκολία στην κατανόηση και στη χρήση της μεθόδου αλλά και η ουσιαστική αξιοποίηση της εξειδικευμένης γνώσης συγκεκριμένου προσωπικού των πωλήσεων. Επίσης, οι πληροφορίες που συλλέγονται από τις έρευνες των πωλητών, μπορούν εύκολα να ταξινομηθούν, ανά τομέα, προϊόν, κατηγορία καταναλωτή ή πωλητή ώστε να επεξεργαστούν κατάλληλα. Δυστυχώς, συχνά η υπερβολική αισιοδοξία ή απαισιοδοξία των πωλητών οδηγεί σε λανθασμένες εκτιμήσεις, ενώ ανακρίβειες προκύπτουν επίσης καθώς οι πωλητές αγνοούν σημαντικές οικονομικές εξελίξεις που δεν βρίσκονται στον δικό τους έλεγχο.

### 3.4. Έρευνες καταναλωτών (Consumer Surveys)

Η μέθοδος αυτή εμβαθύνει ακόμη περισσότερο από την προηγούμενη στην υιοθέτηση μιας θεμελιώδους προσέγγισης της πρόβλεψης των πωλήσεων. Περιλαμβάνει δημοσκοπήσεις σε πελάτες και εν δυνάμει πελάτες σχετικά με τα μελλοντικά αγοραστικά τους σχέδια και την ανταπόκριση τους σε διάφορα νέα χαρακτηριστικά του προϊόντος. Οι δημοσκοπήσεις αυτές πραγματοποιούνται μέσω τηλεφωνικής επικοινωνίας, προσωπικών συνεντεύξεων ή κατάλληλα διαμορφωμένων ερωτηματολογίων. Τα στοιχεία που προκύπτουν από τα παραπάνω είναι εξαιρετικά χρήσιμα για τον σχεδιασμό νέων προϊόντων, τη διατύπωση μιας πρώτης εκτίμησης για τις πωλήσεις που θα σημειώσουν, καθώς και για το στήσιμο μιας διαφημιστικής καμπάνιας.

### 3.5. Ιστορική Αναλογία (Historical Analogy)

Χρησιμοποιείται για την πρόβλεψη της ζήτησης ενός προϊόντος ή μιας υπηρεσίας όταν δεν υπάρχουν παλαιότερα δεδομένα για τη ζήτηση, για παράδειγμα όταν πρόκειται για ένα προϊόν που έχει μόλις λανσαριστεί. Όμως, η επιχείρηση είναι πιθανό να έχει κυκλοφορήσει στο παρελθόν ένα παρόμοιο προϊόν. Σε αυτήν την περίπτωση, το τμήμα μάρκετινγκ της επιχείρησης χρησιμοποιεί την ιστορική αναλογία μεταξύ των δύο προϊόντων και εξάγει τη ζήτηση του νέου αξιοποιώντας τα δεδομένα του παλαιότερου προϊόντος. Προφανώς, το βασικό πλεονέκτημα της μεθόδου είναι το γεγονός ότι παρά την έλλειψη δεδομένων, μπορεί να μας δώσει μία πρώτη εκτίμηση της ζήτησης πριν το προϊόν φτάσει στον καταναλωτή. Αντίθετα, οι περιορισμοί της μεθόδου φαίνεται να είναι περισσότεροι και περιλαμβάνουν την αμφισβητήσιμη υπόθεση της ομοιότητας των συμπεριφορών της ζήτησης, τις διαφορετικές συνθήκες της αγοράς, και την επίδραση του συντελεστή υποκατάστασης της ζήτησης.

## 4. Ποσοτικές Μέθοδοι Πρόβλεψης (Quantitative Forecasting Methods)

Η δεύτερη βασική προσέγγιση κατά τη διαδικασία εξαγωγής μίας πρόβλεψης είναι η ποσοτική. Για την εφαρμογή των ποσοτικών μεθόδων πρόβλεψης είναι απαραίτητη η χρήση αριθμητικών δεδομένων. Συνήθως, όταν οι υπεύθυνοι ενός οργανισμού έχουν στη διάθεση τους παλαιότερα ποσοτικά δεδομένα, που ικανοποιούν συγκεκριμένους περιορισμούς, ως προς το μέγεθος, την αξιοπιστία κ.α., προτιμούν αυτές έναντι των ποιοτικών μεθόδων που μόλις αναφέραμε. Οι ποσοτικές τεχνικές χαρακτηρίζονται από αμεροληψία και προκαθορισμένη μεθοδολογία. Στην βιβλιογραφία, διακρίνονται σε Μεθόδους Χρονοσειρών και Αιτιακές Μεθόδους. Στην ενότητα 4.1 θα αναλύσουμε τις μεθόδους πρόβλεψης χρονοσειρών (Time Series Forecasting Methods), ενώ στην ενότητα 4.2 θα αναλύσουμε τις αιτιακές μεθόδους πρόβλεψης (Casual Forecasting Methods)

### 4.1. Μέθοδοι Πρόβλεψης Χρονοσειρών (Time Series Forecasting Methods)

Χρονοσειρά ονομάζεται μία ακολουθία από παλιότερες τιμές της υπό εξέταση μεταβλητής σε συγκεκριμένα χρονικά μεσοδιαστήματα. Αυτά τα μεσοδιαστήματα μπορεί να είναι ώρες, ημέρες, εβδομάδες, μήνες, τρίμηνα κ.α.

Οι μέθοδοι χρονοσειρών, διενεργούν στατιστική ανάλυση στα εκάστοτε δεδομένα προκειμένου να εξαγουν προβλέψεις για το μέλλον. Η βασική ιδέα εδώ είναι ότι οι παλαιότερες σχέσεις θα συνεχίσουν να υφίστανται στο μέλλον. Οι εναλλακτικές τεχνικές, διαφέρουν κυρίως στον τρόπο με τον οποίο οι προηγούμενες τιμές συνδέονται με τις προβλεπόμενες. Στην ανάλυση μιας χρονοσειράς τα δεδομένα διασπώνται σε συστατικά στοιχεία τα οποία προβάλλονται στο μέλλον. Τέσσερα κύρια δομικά στοιχεία είναι οι τάσεις, η εποχικότητα, η κυκλικότητα και η ακανόνιστη διακύμανση, τα οποία αναλύονται παρακάτω:

- *Τάσεις (Trends)*

Η τάση ορίζεται ως μία μακροπρόθεσμη ανοδική ή καθοδική κίνηση του μέσου όρου της χρονοσειράς. Για να κατανοηθούν ή να περιγραφούν αυτές οι μεταβολές είναι πιθανό να απαιτούνται δεδομένα πολλών ετών. Οι τάσεις περιγράφονται είτε από μία ευθεία γραμμή είτε από μία καμπύλη. Η

τεχνολογική πρόοδος, οι αλλαγές στην παραγωγικότητα, ο πληθωρισμός και η αύξηση του πληθυσμού είναι ορισμένοι παράγοντες που προκαλούν τις τάσεις.

- *Εποχικότητα (Seasonality)*

Η εποχικότητα εμφανίζεται ως μία επαναλαμβανόμενη διακύμανση στις τιμές της χρονοσειράς, είτε μεγαλύτερη είτε μικρότερη σε μέτρο από το μέτρο της τάσης, με σταθερή συχνότητα (περιοδικότητα), μικρότερη ή ίση του ενός έτους. Το πιο συνηθισμένο παράδειγμα εποχικότητας εμφανίζεται στις πωλήσεις κατά την περίοδο των Χριστουγέννων. Επίσης, η ζήτηση για προϊόντα όπως αναψυκτικά, κλιματιστικά ή αντηλιακές κρέμες υποδεικνύουν την ύπαρξη εποχικότητας καθώς αυξάνεται σημαντικά κατά τους καλοκαιρινούς μήνες.

- *Κυκλικότητα (Cyclical Variation)*

Κυκλικότητα ονομάζεται η επαναλαμβανόμενη διακύμανση στις τιμές της χρονοσειράς που εμφανίζεται με συχνότητα μεγαλύτερη του ενός έτους και οφείλεται στους οικονομικούς κύκλους. Ένας οικονομικός κύκλος αποτελείται από επεκτάσεις που συμβαίνουν την ίδια χρονική στιγμή σε πολλές οικονομικές δραστηριότητες, και ακολουθούνται από την αντίστοιχη ύφεση. Η διακύμανση είναι περιοδική αλλά δεν χρειάζεται να είναι σταθερή. Η κυκλικότητα εμφανίζεται συνήθως σε οικονομικές χρονοσειρές όπως το Ακαθάριστο Εγχώριο Προϊόν (ΑΕΠ).

- *Ακανόνιστες Διακυμάνσεις (Irregular Variations)*

Πρόκειται για διακυμάνσεις στα δεδομένα που δεν μπορούν να αποδοθούν σε παράγοντες τάσης, κυκλικότητας ή εποχικότητας και που δεν ακολουθούν κάποιο συγκεκριμένο μοτίβο. Οι διακυμάνσεις αυτές μπορούν να προκύψουν από πολλούς διαφορετικούς παράγοντες, όπως ακραία καιρικά φαινόμενα, απεργίες, εκλογές κ.α. Λόγω της τυχαιότητας των φαινομένων αυτών, η μελλοντική εμφάνιση και το αντίκτυπο τέτοιων μεταβολών είναι πολύ δύσκολο να προβλεφθούν.



Οι χρονοσειρές που εξάγονται από το αρχείο μιας εταιρείας, περιέχουν όλα τα τέσσερα προηγούμενα στοιχεία. Είναι πολύ σημαντικό ο ερευνητής να μπορέσει να απομονώσει κάθε ένα συστατικό στοιχείο. Η διαδικασία της διάσπασης της χρονοσειράς ονομάζεται αποσύνθεση. Για την αποσύνθεση, βασικός σκοπός είναι να εντοπίσουμε τις τάσεις, εξαλείφοντας τα υπόλοιπα στοιχεία. Έπειτα, η καμπύλη της τάσης μπορεί να χρησιμοποιηθεί για προβλέψεις. Η επίδραση των τριών άλλων στοιχείων στη πρόβλεψη προκύπτει προσθέτοντας τις αντίστοιχες κυκλικές, εποχικές και τυχαίες διακυμάνσεις.

Συνήθως, στις διαδικασίες βραχυπρόθεσμων προβλέψεων, δεν επιχειρείται η εξάλειψη της κυκλικότητας. Επίσης, θεωρείται ότι οι ακανόνιστες μεταβολές είναι μικρές και τείνουν να εξουδετερώνουν η μία την άλλη. Επομένως, ο κυριότερος στόχος στις περισσότερες περιπτώσεις είναι η αφαίρεση της εποχικότητας από την χρονοσειρά. Η διαδικασία αυτή καλείται απάλειψη της επίδρασης της εποχικότητας στη χρονοσειρά και είναι γνωστή με τον αγγλικό όρο “*deseasonalization*”.

Όπως είπαμε, υπάρχουν αρκετές μέθοδοι προβλέψεων που βασίζονται σε χρονοσειρές. Όμως, δεν περιέχουν όλες τη διαδικασία της αποσύνθεσης. Αν ανατρέξουμε στη βιβλιογραφία, θα συναντήσουμε από μαθηματικά πολύ απλές έως αρκετά πολύπλοκες μεθόδους. Προκειμένου να διαχωρίσουμε τα μοντέλα χρονοσειρών θα μπορούσαμε να βασιστούμε στις καμπύλες των τάσεων.

Τα σταθερά μοντέλα (constant-level models) υποθέτουν ότι δεν υπάρχουν τάσεις στα δεδομένα. Θεωρείται ότι η χρονοσειρά έχει σταθερή μέση τιμή και η πρόβλεψη για κάθε χρονική περίοδο στο μέλλον είναι μία οριζόντια γραμμή.

Τα μοντέλα γραμμικής τάσης προβλέπουν μία γραμμική τάση για κάθε χρονική περίοδο στο μέλλον.

Οι εκθετικές τάσεις υποδηλώνουν ότι θα υπάρξει μία συνεχόμενη ανάπτυξη. Μακροπρόθεσμα όμως, οι τάσεις αυτές χάνουν την αξιοπιστία τους. Έτσι, για μακροπρόθεσμες προβλέψεις, έχουν αναπτυχθεί μοντέλα που παρουσιάζουν αποβαίνουσα τάση. Σε τέτοια μοντέλα, η επίδραση της τάσης στη πρόβλεψη των μελλοντικών τιμών μειώνεται σε κάθε περίοδο. Τελικά η τάση εξασθενεί και οι προβλέψεις γίνονται ευθείες γραμμές.

### 4.1.1. The Naive Methods

Η κατηγορία αυτή αποτελείται από μαθηματικά πολύ απλές μεθόδους. Η πιο συνήθης μέθοδος της κατηγορίας, χρησιμοποιεί την τελευταία παρατήρηση στη χρονοσειρά ως πρόβλεψη για την επόμενη περίοδο και είναι γνωστή ως “*Last Value Forecasting Method*”.

Δηλαδή, συμβολίζοντας με  $t$  την χρονική περίοδο, με  $X_t$  την τιμή της υπό μελέτης μεταβλητής  $X$  τη χρονική στιγμή  $t$  και με  $F_t$  την προβλεπόμενη τιμή της μεταβλητής  $X$  τη χρονική στιγμή  $t$ , η μέθοδος δίνει ότι:

$$F_t = X_{t-1}$$

Για παράδειγμα αν οι πωλήσεις ενός συγκεκριμένου προϊόντος μίας εταιρεία για το εξάμηνο που μόλις τελείωσε είναι  $X^*$ , τότε οι αναμενόμενες πωλήσεις για το επόμενο εξάμηνο είναι επίσης  $X^*$ .

Προφανώς, η μέθοδος δεν θεωρείται ακριβής, εξαιτίας της μεγάλης διασποράς που παρουσιάζει καθώς βασίζεται σε δείγμα μεγέθους μόλις μίας μονάδας. Έτσι, είναι χρήσιμη μόνο σε περιπτώσεις όπου παλαιότερα δεδομένα θεωρούνται αναξιόπιστα. Συγκεκριμένα, σε περιπτώσεις όπου οι συνθήκες στο περιβάλλον μεταβάλλονται πολύ γρήγορα, είναι πιθανό οι ερευνητές να κρίνουν ότι η τελευταία παρατήρηση είναι η μοναδική που ανταποκρίνεται στις τρέχουσες συνθήκες. Δηλαδή, επιλέγουν να μην συμπεριλάβουν στην πρόβλεψη όλες τις προηγούμενες προβλέψεις που είναι διαθέσιμες. Σε τέτοιες περιπτώσεις και μόνο, η μέθοδος της τελευταίας παρατήρησης χρησιμοποιείται συχνά από τους ερευνητές.

Μία επίσης απλοϊκή μέθοδος είναι η “*Free Hand Projection Method*”. Σε αυτήν την περίπτωση, τα δεδομένα απεικονίζονται με τη σειρά σε ένα χαρτί γραφήματος και έπειτα, όπως υποδεικνύει το όνομα της μεθόδου, οι υπεύθυνοι για την πρόβλεψη, σχεδιάζουν με το χέρι την καμπύλη που έχει κατά τη γνώμη τους την καλύτερη δυνατή προσαρμογή στα δεδομένα. Τέλος, προβάλλοντας αυτή την καμπύλη στο μέλλον εξάγουν την εκάστοτε πρόβλεψη.

Στην κατηγορία αυτή εμπίπτει ακόμη μία μέθοδος που είναι γνωστή ως “*Semi Average Projection Method*”. Εδώ, η χρονοσειρά διαχωρίζεται σε δύο ίσα μέρη, υπολογίζεται ο μέσος όρος για το καθένα και σχεδιάζεται η γραμμή που ενώνει τους δύο μέσους. Στη συνέχεια η γραμμή προβάλλεται στο μέλλον και έτσι εξάγονται οι προβλέψεις.

Οι προηγούμενες τεχνικές, μπορούν να εφαρμοστούν με ελάχιστη ή καθόλου χρήση ηλεκτρονικών μέσων προκειμένου να δώσουν τις επιθυμητές εκτιμήσεις για τις πωλήσεις, το μέγεθος παραγωγής κ.α. Είναι ωφέλιμο, οι εκτιμήσεις αυτές να συγκρίνονται με τις αντίστοιχες άλλων, πιο σύνθετων μεθόδων, όπως των μεθόδων παλινδρόμησης, που θα αναλύσουμε παρακάτω, με σκοπό την επίτευξη της μέγιστης ακρίβειας.

#### 4.1.2. Μέθοδος του Μέσου Όρου (Averaging Forecasting Method)

Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιεί όλες τις παρατηρήσεις της χρονοσειράς και εξάγει την πρόβλεψη για την ερχόμενη χρονική περίοδο υπολογίζοντας απλά τον μέσο όρο τους. Έτσι η πρόβλεψη για την ερχόμενη περίοδο είναι:

$$F_t = \frac{1}{n} \sum_{i=t-n}^{t-1} X_i,$$

όπου  $t$  η χρονική περίοδος,  $F_t$  η αναμενόμενη τιμή για την περίοδο  $t$ ,  $n$  ο συνολικός αριθμός περιόδων που συμμετέχουν στη πρόβλεψη (δηλαδή το πλήθος όλων των παρατηρήσεων της χρονοσειράς) και  $X_i$  η πραγματικής τιμής της υπό εξέταση μεταβλητής.

Η μέθοδος αποδεικνύεται αποτελεσματική όταν δεν παρατηρούνται σημαντικές μεταβολές στο περιβάλλον οπότε όλες οι παρατηρήσεις προκύπτουν κάτω από παρόμοιες συνθήκες και άρα έχουν την ίδια βαρύτητα. Βέβαια, καθώς οι καταστάσεις αλλάζουν συνεχώς, αμφισβητείται η σταθερότητα των συνθηκών και η ισοτιμία των παρατηρήσεων. Συχνά η μέθοδος απορρίπτεται λόγω αδυναμίας ή απροθυμίας χρήσης όλων των διαθέσιμων δεδομένων.

### 4.1.3. Απλός Κινητός Μέσος Όρος (Simple Moving Average Method)

Σε αντίθεση με την προηγούμενη μέθοδο η οποία χρησιμοποιεί πολύ παλιά δεδομένα με τον κίνδυνο να μην είναι πια αξιόπιστα, η συγκεκριμένη μέθοδος, δίνει την πρόβλεψη για την επόμενη περίοδο, υπολογίζοντας τον μέσο όρο των παρατηρήσεων μόνο για τις  $n$  τελευταίες περιόδους. Η πρόβλεψη επικαιροποιείται πολύ εύκολα από περίοδο σε περίοδο. Το μόνο που χρειάζεται είναι να «κόβουμε» κάθε φορά την πρώτη παρατήρηση και να εισάγουμε την τελευταία (νεότερη).

Η μέθοδος χρησιμοποιείται όταν η ζήτηση για ένα προϊόν ούτε αυξάνεται ούτε μειώνεται ραγδαία, και εάν δεν εμφανίζει εποχιακές διακυμάνσεις, καθώς τότε μπορεί βοηθήσει στην αφαίρεση των τυχαίων διακυμάνσεων. Αν και συχνά ο κινητός μέσος όρος παρουσιάζεται κεντραρισμένος, θεωρείται βολικότερο να χρησιμοποιούμε τα παλαιότερα στοιχεία για να εξάγουμε την πρόβλεψη κατευθείαν. Για παράδειγμα, ο κεντραρισμένος πεντάμηνος μέσος για τους μήνες Ιανουάριο, Φεβρουάριο, Μάρτιο, Απρίλιο και Μάιο δίνει έναν μέσο κεντραρισμένο στον Μάρτιο. Όμως, πρέπει να υπάρχουν τα δεδομένα για όλους τους πέντε μήνες. Εάν θέλουμε να εξάγουμε την πρόβλεψη για τον Ιούνιο θα πρέπει να προβάσουμε τον κινητό μέσο με κάποιον τρόπο από τον Μάρτιο στον Ιούνιο. Στην περίπτωση που ο μέσος δεν είναι κεντραρισμένος, η πρόβλεψη γίνεται ευκολότερα αλλά με πιθανή απώλεια ακρίβειας. Αν θέλουμε να προβλέψουμε για τον Ιούνιο χρησιμοποιώντας έναν κινητό μέσο όρο πέντε μηνών, μπορούμε να υπολογίσουμε απλά τον μέσο όρο για τους μήνες Ιανουάριο, Φεβρουάριο, Μάρτιο, Απρίλιο και Μάιο. Μετά το πέρας του Ιουνίου, για τον Ιούλιο, η πρόβλεψη θα είναι ο μέσος όρος της μεταβλητής για τους μήνες Φεβρουάριο, Μάρτιο, Απρίλιο, Μάιο και Ιούνιο.

Πολύ σημαντικό σημείο της μεθόδου είναι η επιλογή της βέλτιστης περιόδου, δηλαδή του πλήθους των παρατηρήσεων της χρονοσειράς που θα χρησιμοποιηθούν στον υπολογισμό του μέσου. Όπως θα δούμε αμέσως, υπάρχουν αντικρουόμενα αποτελέσματα για διαφορετικά μήκη. Όσο μεγαλύτερο είναι το διάστημα του κινητού μέσου, τόσο περισσότερο εξομαλύνονται οι ακανόνιστες διακυμάνσεις, το οποίο είναι συνήθως επιθυμητό. Όμως, όταν τα δεδομένα μας παρουσιάζουν κάποια τάση, ο κινητός μέσος έχει το μειονέκτημα να μένει πίσω σε σχέση με την τάση. Συνεπώς, ενώ μία μικρότερη χρονική περίοδος προκαλεί μεγαλύτερη ταλάντωση, μας επιτρέπει να ακολουθούμε στενά τις τάσεις. Αντίθετα, μία μεγαλύτερη περίοδος κινητού μέσου όρου δίνει μία περισσότερο ομαλό αποτέλεσμα αλλά υστερεί στην παρακολούθηση της τάσης. Ο απλός κινητός μέσος όρος δίνεται από τη σχέση:

$$F_i^n = \frac{X_{i-1} + X_{i-2} + \dots + X_{i-n}}{n},$$

όπου  $X_i$  είναι η πραγματική τιμή της υπό εξέταση μεταβλητής για την περίοδο  $i$ ,  $n$  ο αριθμός των περιόδων που συμμετέχουν στη πρόβλεψη και  $F_i^n$  η πρόβλεψη, δηλαδή ο κινητός μέσος όρος  $n$  μηνών για την περίοδο  $i$ .

Η μέθοδος του απλού κινητού μέσου όρου είναι απλή στην χρήση και ευκολονόητη. Επίσης, συνδυάζει τα πλεονεκτήματα των προηγούμενων μεθόδων καθώς χρησιμοποιεί πολλές αλλά και πρόσφατες παρατηρήσεις. Όπως κάθε μέθοδος όμως, έτσι και αυτή, συνδέεται με μειονεκτήματα και περιορισμούς. Το σημαντικότερο μειονέκτημά της είναι ότι αποδίδει την ίδια βαρύτητα σε κάθε παρατήρηση στον υπολογισμό του μέσου, ενώ περιμένουμε τα πιο πρόσφατα δεδομένα να είναι περισσότερο σχετικά με τις τρέχουσες συνθήκες και επομένως πιο χρήσιμα. Εξίσου σημαντικός περιορισμός είναι το γεγονός ότι ένας κινητός μέσος όρος  $n$  περιόδων προϋποθέτει την αποθήκευση  $n - 1$  τιμών κάθε φορά και τη διατήρησή τους από περίοδο σε περίοδο. Αυτό ίσως να μην φαίνεται τόσο περιοριστικό εξ αρχής, αλλά παίζει σημαντικό ρόλο όταν, για παράδειγμα, αναφερόμαστε σε μία εταιρεία που παράγει μεγάλο αριθμό προϊόντων και πρέπει για κάθε ένα από αυτά να υπολογιστεί ο κινητός μέσος όρος, έστω έξι μηνών καταγεγραμμένων δεδομένων. Ακόμα, η μέθοδος αυτή δεν συμπεριλαμβάνει στους υπολογισμούς δεδομένα εκτός της περιόδου υπολογισμού του μέσου.

Εμπειρικά έχουν διαμορφωθεί οι παρακάτω προτάσεις για την μέθοδο του κινητού μέσου:

- Διαφορετικοί κινητοί μέσοι παράγουν διαφορετικές προβλέψεις.
- Όσο περισσότεροι περίοδοι συμπεριλαμβάνονται στον υπολογισμό, τόσο μεγαλύτερη είναι η εξομάλυνση στα δεδομένα.
- Αν υποθέσουμε ότι τα παλαιότερα δεδομένα παρουσιάζουν μία σταθερή τάση με σημαντική τυχαιότητα, τότε θα πρέπει να επιλέξουμε μεγαλύτερο  $n$ .
- Αντιθέτως, αν παρατηρήσουμε αλλαγές στα δεδομένα, χρειάζεται μεγαλύτερη ταχύτητα ανταπόκρισης και άρα πρέπει να συμπεριληφθούν στον κινητό μέσο λιγότερες περίοδοι.

---

### Παράδειγμα 4.1

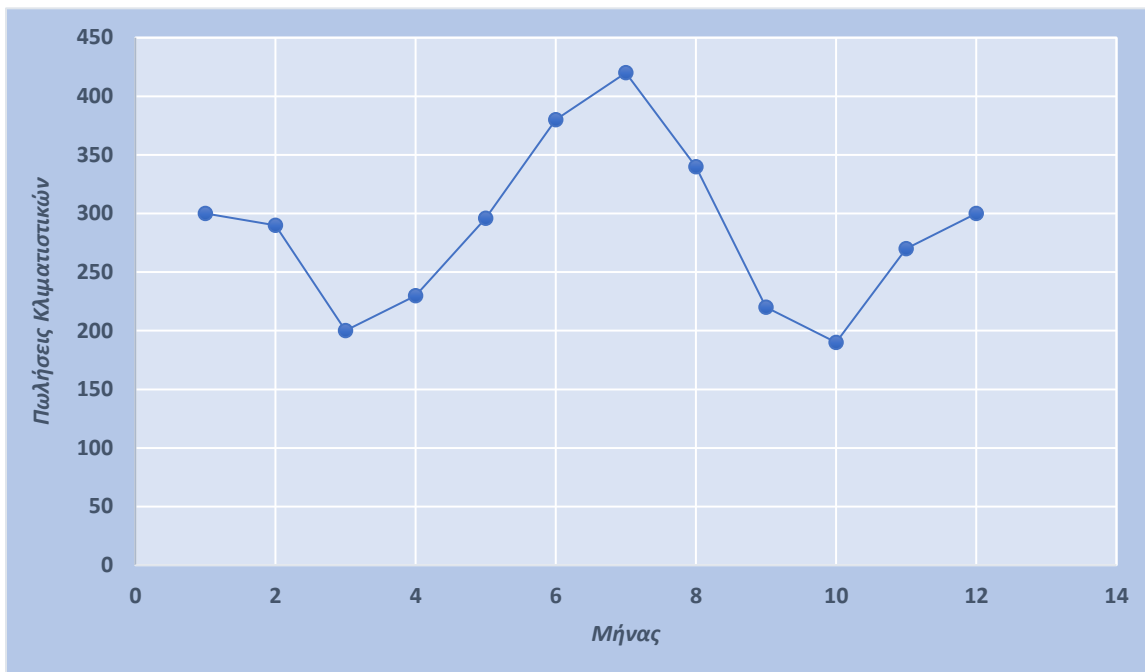
---

Θεωρούμε τις μηνιαίες πωλήσεις που κατέγραψε ένα κατάστημα λιανικής πώλησης ηλεκτρονικών ειδών σε κλιματιστικά. Οι πωλήσεις σε τεμάχια, παρουσιάζονται για διάστημα του προηγούμενου έτους στον Πίνακα 4.1 και στο Διάγραμμα 4.1. Το κατάστημα επιθυμεί να εκτιμήσει της πωλήσεις για τους ερχόμενους μήνες ώστε να εξασφαλίσει την απαιτούμενη διαθεσιμότητα τηλεοράσεων.

Μήνας ( $i = 1, 2, \dots, 12$ )	Πωλήσεις $X_i$
Ιανουάριος	300
Φεβρουάριος	290
Μάρτιος	200
Απρίλιος	230
Μάιος	296
Ιούνιος	380
Ιούλιος	420
Αύγουστος	340
Σεπτέμβριος	220
Οκτώβριος	190
Νοέμβριος	270
Δεκέμβριος	300

Πίνακας 4.1: Μηνιαίες πωλήσεις κλιματιστικών για το προηγούμενο έτος

Εφαρμόζουμε την μέθοδο του κινητού μέσου όρου αρχικά για διάρκεια δύο μηνών και έπειτα για διάρκεια τριών μηνών. Για λόγους ευκολίας θα συμβολίσουμε τον κινητό μέσο όρο δύο μηνών για τον μήνα  $i$  ως  $KMO_i^2$  και τον κινητό μέσο όρο τριών μηνών για τον μήνα  $i$  ως  $KMO_i^3$ .



Διάγραμμα 4.1: Διάγραμμα διασποράς μηνιαίων πωλήσεων κλιματιστικών για το προηγούμενο έτος

Ο Μάρτιος είναι ο πρώτος μήνας για τον οποίο μπορούμε να υπολογίσουμε τον κινητό μέσο όρο δύο μηνών. Έτσι

$$KMO_3^2 = \frac{X_1 + X_2}{2} = \frac{300 + 290}{2} = 295 .$$

Ομοίως, υπολογίζονται οι τιμές του  $KMO_i^2$  για τους μήνες Απρίλιο έως Δεκέμβριο.

Ο Απρίλιος είναι ο πρώτος μήνας για τον οποίο μπορούμε να υπολογίσουμε τον κινητό μέσο όρο τριών μηνών. Έτσι

$$KMO_4^3 = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3} = \frac{300 + 290 + 200}{3} = 263.33 .$$

Ομοίως, υπολογίζονται οι τιμές του  $KMO_i^3$  για τους μήνες Μάιο έως Δεκέμβριο.

Εφόσον γνωρίζουμε τις πωλήσεις για όλο το προηγούμενο έτος, μπορούμε να εκτιμήσουμε τις πωλήσεις του Ιανουαρίου. Έτσι σύμφωνα με τον κινητό μέσο όρο δύο μηνών και τριών μηνών, η πρόβλεψη για τον Ιανουάριο είναι αντίστοιχα:

$$F_{13}^2 = \frac{270 + 300}{2} = 285,$$

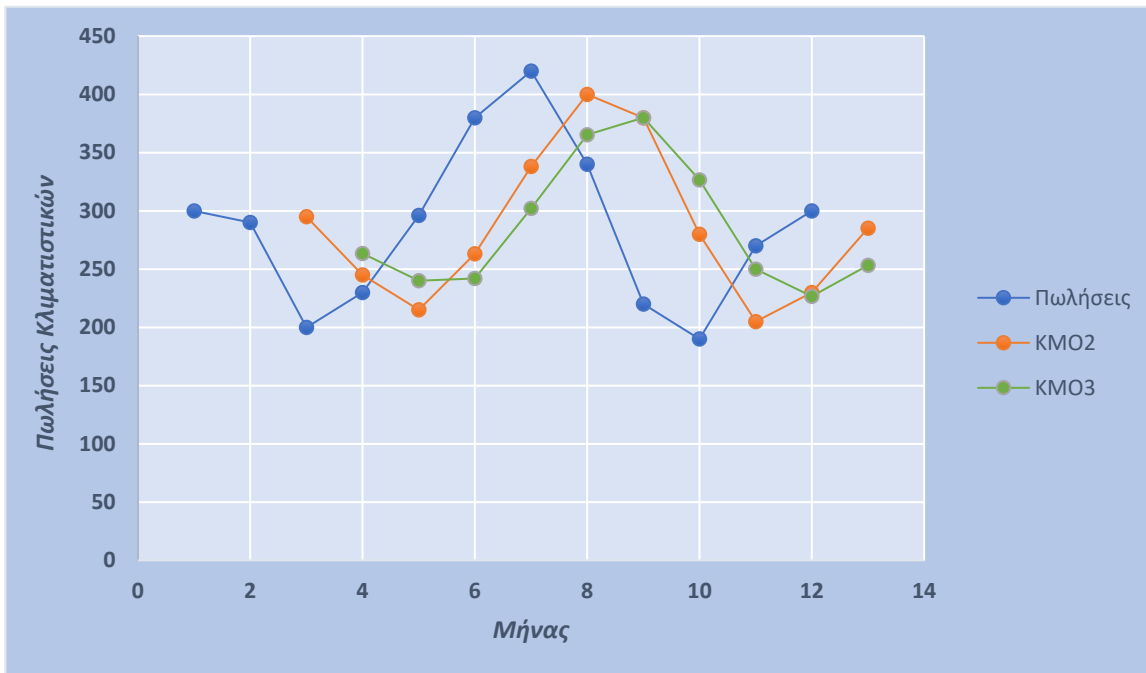
$$F_{13}^3 = \frac{190 + 270 + 300}{3} = 253.33.$$

Όλα τα αποτελέσματα της μεθόδου φαίνονται στον Πίνακα 4.2 και στο Διάγραμμα 4.2.

Μήνας	Πωλήσεις	Πρόβλεψη $KMO_i^2$	Πρόβλεψη $KMO_i^3$
Ιανουάριος	300	-	-
Φεβρουάριος	290	-	-
Μάρτιος	200	295	-
Απρίλιος	230	245	263.33
Μάιος	296	215	240
Ιούνιος	380	263	242
Ιούλιος	420	338	302
Αύγουστος	340	400	365.33
Σεπτέμβριος	220	380	380
Οκτώβριος	190	280	326.67
Νοέμβριος	270	205	250
Δεκέμβριος	300	230	226.67
<b>Ιανουάριος</b>	-	285	253.33

Πίνακας 4.2: Κινητοί Μέσοι όροι δύο και τριών μηνών για τις πωλήσεις κλιματιστικών





Διάγραμμα 4.2: Πραγματικές πωλήσεις και κινητοί μέσοι όροι πωλήσεων

Τόσο από τον πίνακα όσο και από το διάγραμμα διασποράς παρατηρούμε ότι ο κινητός μέσος όρος δύο μηνών δίνει συνολικά καλύτερες εκτιμήσεις από τον κινητό μέσο όρο με διάστημα τριών μηνών. Ειδικότερα, για μήνες όπως ο Ιούλιος και ο Οκτώβριος που παρουσιάζουν ακρότατα στις πραγματικές πωλήσεις κλιματιστικών (ο Μάρτιος δεν αναφέρεται καθώς για τον συγκεκριμένο μήνα δεν έχουμε εκτίμηση του ΚΜΟ<sup>3</sup>), αποδεικνύεται ότι ο κινητός μέσος όρος δύο μηνών, δηλαδή ο μέσος με τη μικρότερη χρονική διάρκεια, αντιδρά γρηγορότερα στις μεταβολές της ζήτησης.

- Οι περισσότερες πωλήσεις κλιματιστικών καταγράφηκαν τον μήνα Ιούλιο. Ο κινητός μέσος όρος δύο μηνών εκτίμησε ότι οι πωλήσεις θα είναι κατά 19% λιγότερες από τις πραγματικές πωλήσεις, ενώ ο κινητός μέσος όρος τριών μηνών παρουσίασε τιμή μειωμένη κατά 28% από την πραγματική.
- Αντίθετα, οι πωλήσεις παρουσίασαν ελάχιστο τον μήνα Οκτώβριο. Η εκτίμηση του κινητού μέσου όρου δύο μηνών παρουσιάζεται αυξημένη κατά 47% σε σχέση με την πραγματική τιμή των πωλήσεων εκείνου του μήνα, ενώ η εκτίμηση του κινητού μέσου όρου τριών μηνών παρουσιάζεται αυξημένη κατά 71%.

- Τέλος, παρά το γεγονός ότι ο  $KMO^2$  δίνει καλύτερες εκτιμήσεις, βλέπουμε πως η μέθοδος του κινητού μέσου για τα συγκεκριμένα δεδομένα καθυστερεί σημαντικά να ενσωματώσει τις τάσεις της αγοράς. Αυτό είναι αναμενόμενο, καθώς όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, η μέθοδος αποδίδει ίδιο βάρος σε όλους τους μήνες που συμπεριλαμβάνονται στην εκτίμηση. Έτσι, η προτίμηση μίας μεθόδου που δίνει μεγαλύτερη βαρύτητα στα πιο πρόσφατα δεδομένα που υποδεικνύουν μία αρχική αλλαγή στις τάσεις της αγοράς, πιθανώς θα οδηγούσε σε καλύτερα αποτελέσματα. Μία τέτοια μέθοδος είναι η επόμενη.

#### 4.1.4. Σταθμισμένος Κινητός Μέσος Όρος (Weighted Moving Average Method)

Ο σταθμισμένος κινητός μέσος όρος είναι ένας κινητός μέσος όρος, που λειτουργεί όπως μόλις αναλύσαμε. Όμως, σε αντίθεση με τον απλό κινητό μέσο όρο που δίνει το ίδιο βάρος σε όλες τις παρατηρήσεις, επιτρέπει τη στάθμιση κάθε στοιχείου με διαφορετικό βάρος, με την προϋπόθεση ότι το άθροισμα τους ισούται με την μονάδα. Ο τύπος για τον υπολογισμό του σταθμισμένου μέσου όρου είναι:

$$F_i = w_1 X_{i-1} + w_2 X_{i-2} + w_3 X_{i-3} + \dots + w_n X_{i-n}$$

όπου  $F_i$  είναι η πρόβλεψη για την περίοδο  $i$ ,  $X_i$  είναι η πραγματική τιμή για την περίοδο  $i$ ,  $n$  ο συνολικός αριθμός περιόδων που συμπεριλαμβάνονται στην πρόβλεψη και  $w_k$  το βάρος που αντιστοιχεί στην πραγματική τιμή που προέκυψε τη στιγμή  $i - k$ , όπου  $k = 1, \dots, n$ .

Παρότι κάποιες παρατηρήσεις μπορεί να αγνοηθούν (σε αυτή την περίπτωση τα βάρη τους είναι μηδενικά) και ο σχηματισμός για τα βάρη μπορεί να έχει οποιαδήποτε μορφή, για παράδειγμα μπορεί να δίνει μεγαλύτερη βαρύτητα σε παλαιότερα δεδομένα), το άθροισμα όλων των βαρών αθροίζει στη μονάδα. Δηλαδή, πρέπει πάντα να ισχύει ότι:

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1$$

Φυσικά, βασικό σημείο της μεθόδου αποτελεί ο προσδιορισμός τους βάρους για κάθε παρατήρηση. Οι απλούστεροι τρόποι για την βέλτιστη επιλογή βασίζονται στην εμπειρία, το ένστικτο, τις δοκιμές και τα σφάλματα. Όπως έχουμε τονίσει, ισχύει ένας γενικότερος κανόνας: το πρόσφατο παρελθόν είναι η σημαντικότερη ένδειξη για το άμεσο μέλλον. Επομένως, θα πρέπει να έχει μεγαλύτερη βαρύτητα. Για παράδειγμα, τα έσοδα για τον τελευταίο μήνα (στην περίπτωση που η περίοδος έχει επιλεχθεί να ισούται με έναν μήνα), βοηθούν περισσότερο στην πρόβλεψη για τον επόμενο μήνα, από ότι τα έσοδα που καταγράφηκαν πριν ένα τρίμηνο.

Όμως, ξεφεύγοντας από την γενικότερη περίπτωση, όταν τα δεδομένα παρουσιάζουν εποχιακές μεταβολές, ανάλογα βάρη θα πρέπει να αποδοθούν. Για παράδειγμα, όταν ο υπεύθυνος ενδιαφέρεται να προβλέψει τις πωλήσεις στα κλιματιστικά, είναι σημαντικό να δώσει μεγαλύτερη βαρύτητα στις πωλήσεις του Μαΐου για το προηγούμενο έτος σε σχέση με τις αντίστοιχες πωλήσεις για τον μήνα Δεκέμβριο.

Το πλεονέκτημα της μεθόδου του σταθμισμένου κινητού μέσου όρου έναντι της μεθόδου του απλού κινητού μέσου όρου είναι προφανές. Δυστυχώς όμως, και αυτή η μέθοδος απαιτεί την διατήρηση μεγάλου όγκου δεδομένων. Επίσης, ο προσδιορισμός των βαρών αποδεικνύεται συχνά πολύπλοκος και δαπανηρός.

---

#### *Παράδειγμα 4.2*

---

Μία εταιρεία κατασκευής ηλεκτρονικών υπολογιστών καταγράφει τις πωλήσεις σε στατικούς και φορητούς υπολογιστές ανά μήνα. Το τμήμα πωλήσεων της εταιρείας έχει διαπιστώσει ότι χρησιμοποιώντας δεδομένα τεσσάρων μηνών, η βέλτιστη πρόβλεψη για τις πωλήσεις του επόμενου μήνα προκύπτει λαμβάνοντας υπόψη ποσοστό 40% των πραγματικών πωλήσεων που καταγράφηκαν τον τελευταίο μήνα, 30% αυτών που σημειώθηκαν 2 μήνες πριν, 20% αυτών που σημειώθηκαν 3 μήνες πριν και 10% αυτών που σημειώθηκαν 4 μήνες πριν. Η εταιρεία κατέγραψε για το πρώτο εξάμηνο του τρέχοντος έτους τις εξής πωλήσεις σε φορητούς υπολογιστές:

Μήνας	Πωλήσεις Φορητών Η/Υ
Ιανουάριος	110
Φεβρουάριος	95
Μάρτιος	104
Απρίλιος	100
Μάιος	95
Ιούνιος	115

Πίνακας 4.3: Πωλήσεις φορητών ηλεκτρονικών υπολογιστών

Σύμφωνα με τις παραπάνω τιμές, η μέθοδος του κινητού μέσου όρου δίνει ότι οι πωλήσεις φορητών Η/Υ για τον μήνα Ιούλιο θα είναι:

$$F_7 = w_1X_6 + w_2X_5 + w_3X_4 + w_4X_3 = 0.4 \cdot 115 + 0.3 \cdot 95 + 0.2 \cdot 100 + 0.1 \cdot 104 = 104.9$$

Έστω ότι οι πραγματικές πωλήσεις του Ιουλίου ήταν 110. Τότε ακολουθώντας την ίδια διαδικασία, η εκτίμηση για τις πωλήσεις φορητών υπολογιστών για τον μήνα Αύγουστο θα είναι:

$$F_8 = w_1X_7 + w_2X_6 + w_3X_5 + w_4X_4 = 0.4 \cdot 110 + 0.3 \cdot 115 + 0.2 \cdot 95 + 0.1 \cdot 100 = 107.5$$

#### 4.1.5. Μέθοδος Απλής Εκθετικής Εξομάλυνσης (Exponential Smoothing Method)

Στις δύο προηγούμενες μεθόδους, σημαντικό μειονέκτημα αποτελεί η ανάγκη συλλογής και αποθήκευσης πολλών ιστορικών παρατηρήσεων. Κάθε φορά που προστίθεται μία νέα παρατήρηση, η παλιότερη πληροφορία απομονώνεται και υπολογίζεται η νέα πρόβλεψη, καθώς στις περισσότερες εφαρμογές θεωρείται ότι οι πιο πρόσφατες εκδηλώσεις σχετικά με την μεταβλητή ενδιαφέροντος είναι περισσότερες ενδεικτικές για το μέλλον από ότι αυτές στο μακρινό παρελθόν. Εάν ισχύει αυτή η υπόθεση, τότε η μέθοδος της εκθετικής εξομάλυνσης αποδεικνύεται να είναι η πιο εύχρηστη και κατάλληλη στη χρήση.

Φυσικά, το σημαντικότερο πλεονέκτημα της μεθόδου αποτελεί η στάθμιση των παρατηρήσεων που συμμετέχουν στις προβλέψεις. Η μέθοδος περιλαμβάνει αυτόματη στάθμιση των ιστορικών

δεδομένων, όπου τα βάρη μειώνονται εκθετικά με το πέρασμα του χρόνου. Δηλαδή, αντιστοιχίζεται μία φθίνουσα βαρύτητα στις πρόσφατες παρατηρήσεις.

Ο όρος «εκθετική εξομάλυνση» προκύπτει από το γεγονός ότι κάθε προσαύξηση στο παρελθόν μειώνεται κατά  $(1 - \alpha)$ . Η σταθερά  $\alpha$  παίρνει τιμές από 0 έως 1. Συγκεκριμένα, αν η σταθερά  $\alpha$  ισούται με 0.05, τότε το βάρος της τελευταίας παρατήρησης θα είναι ίσο με  $\alpha(1 - \alpha)^0$ , το βάρος της προτελευταίας θα είναι ίσο με  $\alpha(1 - \alpha)^1$ , το βάρος της αμέσως προηγούμενης παρατήρησης θα είναι  $\alpha(1 - \alpha)^2$  κ.ο.κ. Φυσικά, όλα τα βάρη αθροίζουν στη μονάδα ενώ το βάρος μειώνεται εκθετικά από την τιμή  $\alpha$  σε μικρότερες τιμές.

Ουσιαστικά, πρόκειται για έναν σταθμισμένο κινητό μέσο που υπακούει στη θεμελιώδη αρχή ότι η νέα πρόβλεψη ισούται με το άθροισμα της προηγούμενης και ενός ποσοστού του σφάλματος πρόβλεψης. Πιο συγκεκριμένα, ισχύει η σχέση:

$$F_t = \alpha X_{t-1} + (1 - \alpha)F_{t-1}$$

όπου με  $F_t$  συμβολίζεται η εκθετικά εξομαλυμένη πρόβλεψη για την περίοδο  $t$  όπου  $t = 1, \dots, n$ ,  $X_t$  είναι η πραγματική τιμή της μεταβλητής που σημειώθηκε κατά την περίοδο  $t$  και  $\alpha$  είναι μία σταθερά εξομάλυνσης.

### Σταθερά Εξομάλυνσης

Η σταθερά εξομάλυνσης παίρνει τιμές μεταξύ 0 και 1. Όσο πιο κοντά στη μονάδα βρίσκεται, τόσο μεγαλύτερη είναι η εξάρτηση της πρόβλεψης από τις τρέχουσες συνθήκες. Αντιθέτως, όσο μικρότερη είναι η τιμή της σταθεράς, τόσο πιο αμετάβλητη είναι η πρόβλεψη. Από την τιμή της εξαρτάται το επίπεδο της εξομάλυνσης και η ταχύτητα αντίδρασης σε πιθανές αποκλίσεις μεταξύ των προβλέψεων και των πραγματικών γεγονότων. Η τιμή της σταθεράς καθορίζεται τόσο από τη φύση του προϊόντος όσο και από την εκτίμηση του ερευνητή σχετικά με επιθυμητό ρυθμό απόκρισης στις αποκλίσεις.

Για παράδειγμα, όταν μία εταιρεία παράγει ένα συγκεκριμένο προϊόν με σχετικά σταθερή ζήτηση, ο ρυθμός αντίδρασης σε μία πιθανή απόκλιση της πρόβλεψης από την πραγματική τιμή θα ήταν

μικρός. Όμως, αν η εταιρεία βρισκόταν στο στάδιο της ανάπτυξης, θα ήταν σκόπιμο να έχουμε έναν υψηλότερο βαθμό αντίδρασης, έτσι ώστε να δίνεται μεγαλύτερη βαρύτητα στα πρόσφατα στοιχεία ανάπτυξης. Όσο πιο ραγδαία μεταβάλλονται οι συνθήκες, τόσο μεγαλύτερος πρέπει να είναι ο ρυθμός ανταπόκρισης.

Στην Επιχειρησιακή Έρευνα, η μέθοδος της εκθετικής εξομάλυνσης προτιμάται έναντι των υπολοίπων, αποτελεί αναπόσπαστο κομμάτι των αυτοματοποιημένων προγραμμάτων για την εξαγωγή προβλέψεων και στην πράξη χρησιμοποιείται στις παραγγελίες αποθεμάτων. Συνοπτικά, τα βασικά χαρακτηριστικά που διακρίνουν την μέθοδο είναι τα εξής:

- Η μεγαλύτερη βαρύτητα δίνεται στα πιο πρόσφατα δεδομένα.
- Όλα τα ιστορικά δεδομένα συμπεριλαμβάνονται στις προβλέψεις και δεν υπάρχει σημείο αποκοπής όπως στις μεθόδους των κινητών μέσων.
- Απαιτείται ελάχιστος αποθηκευτικός χώρος. Χρησιμοποιεί μόνο τρεις πληροφορίες για τη εφαρμογή μίας πρόβλεψης: την τελευταία πρόβλεψη, την πρόσφατη πραγματική τιμή της μεταβλητής και την σταθερά εξομάλυνσης.
- Η μέθοδος προσαρμόζεται συνεχώς στα νέα δεδομένα και ακριβώς γι' αυτόν το λόγο αποτελεί πλέον αναπόσπαστο κομμάτι στον έλεγχο αποθεμάτων και στον προγραμματισμό της παραγωγής, όπου νέα δεδομένα προκύπτουν συνεχώς.
- Για να διαχειριστούμε προβλήματα όπως τάσεις και εποχικότητα, πρέπει να τροποποιήσουμε το βασικό μοντέλο.
- Οποιαδήποτε μορφή εκθετικής εξομάλυνσης επιλεγεί, το μοντέλο τροποποιείται απλά αλλάζοντας την τιμή της σταθεράς της εκθετικής εξομάλυνσης.
- Η επιλογή της σταθεράς της εκθετικής εξομάλυνσης γίνεται έπειτα από διαδικασίες δοκιμών και παρατήρησης των σφαλμάτων από τον αναλυτή. Ο αναλυτής επιλέγει την επιτρεπτή ( $0 < \alpha < 1$ ) τιμή που δίνει το μικρότερο σφάλμα. Έχει αποδειχθεί ότι οι τιμές στο διάστημα από 0.1 έως 0.3 δίνουν συνήθως καλύτερα αποτελέσματα.

Αυτό είναι το βασικό μοντέλο εκθετικής εξομάλυνσης. Σε περίπτωση που τα δεδομένα μας υποδεικνύουν την ύπαρξη εποχικότητας ή τάσης, έχουν αναπτυχθεί επεκτάσεις του βασικού μοντέλου, όπως η μέθοδος διπλής εκθετικής εξομάλυνσης, η μέθοδος τριπλής εκθετικής εξομάλυνσης, το βασικό μοντέλο ενισχυμένο με τάσεις κ.α.

---

### Παράδειγμα 4.3

---

Θεωρούμε ξανά τις πωλήσεις κλιματιστικών του καταστήματος λιανικής πώλησης που αναγράφονται στον πίνακα 4.1. Εφαρμόζοντας τη μέθοδο της εκθετικής εξομάλυνσης θα εκτιμήσουμε τις πωλήσεις από τον μήνα Φεβρουάριο έως τον Δεκέμβριο.

Αρχικά χρειάζεται να προσδιορίσουμε τη σταθερά εξομάλυνσης. Όπως αναφέρεται παραπάνω έχει αποδειχθεί ότι για  $\alpha \in [0.1, 0.3]$  η μέθοδος δίνει καλύτερες προβλέψεις. Θα δοκιμάσουμε δύο διαφορετικές τιμές,  $\alpha = 0.25$  και  $\alpha = 0.40$ .

Ας ξεκινήσουμε για  $\alpha = 0.25$ . Για τον Φεβρουάριο, θεωρούμε ως τελευταία παρατήρηση αλλά και ως τελευταία πρόβλεψη τις πραγματικές πωλήσεις του Ιανουαρίου, εφόσον είναι το μοναδικό δεδομένο που διαθέτουμε. Επομένως,

$$F_2 = 0.25 \cdot X_1 + (1 - 0.25) \cdot F_1 = 0.25 \cdot 300 + (1 - 0.25) \cdot 300 = 300.$$

Για τον Μάρτιο η πρόβλεψη της μεθόδου της εκθετικής εξομάλυνσης είναι:

$$F_3 = 0.25 \cdot X_2 + (1 - 0.25) \cdot F_2 = 0.25 \cdot 290 + (1 - 0.25) \cdot 300 = 297.5.$$

Ομοίως, εκτελούμε τους υπολογισμούς για τους υπόλοιπους μήνες. Έπειτα για  $\alpha = 0.40$ . Για τον Φεβρουάριο, θεωρώντας πάλι ως τελευταία παρατήρηση αλλά και ως τελευταία πρόβλεψη τις πραγματικές πωλήσεις του Ιανουαρίου, υπολογίζουμε:

$$F_2 = 0.40 \cdot X_1 + (1 - 0.40) \cdot F_1 = 0.40 \cdot 300 + (1 - 0.40) \cdot 300 = 300.$$

Για τον Μάρτιο, εφόσον γνωρίζουμε τις πραγματικές πωλήσεις αλλά και την τιμή της πρόβλεψης του Φεβρουαρίου έχουμε ότι:

$$F_3 = 0.40 \cdot X_2 + (1 - 0.40) \cdot F_2 = 0.40 \cdot 290 + (1 - 0.40) \cdot 300 = 296.$$

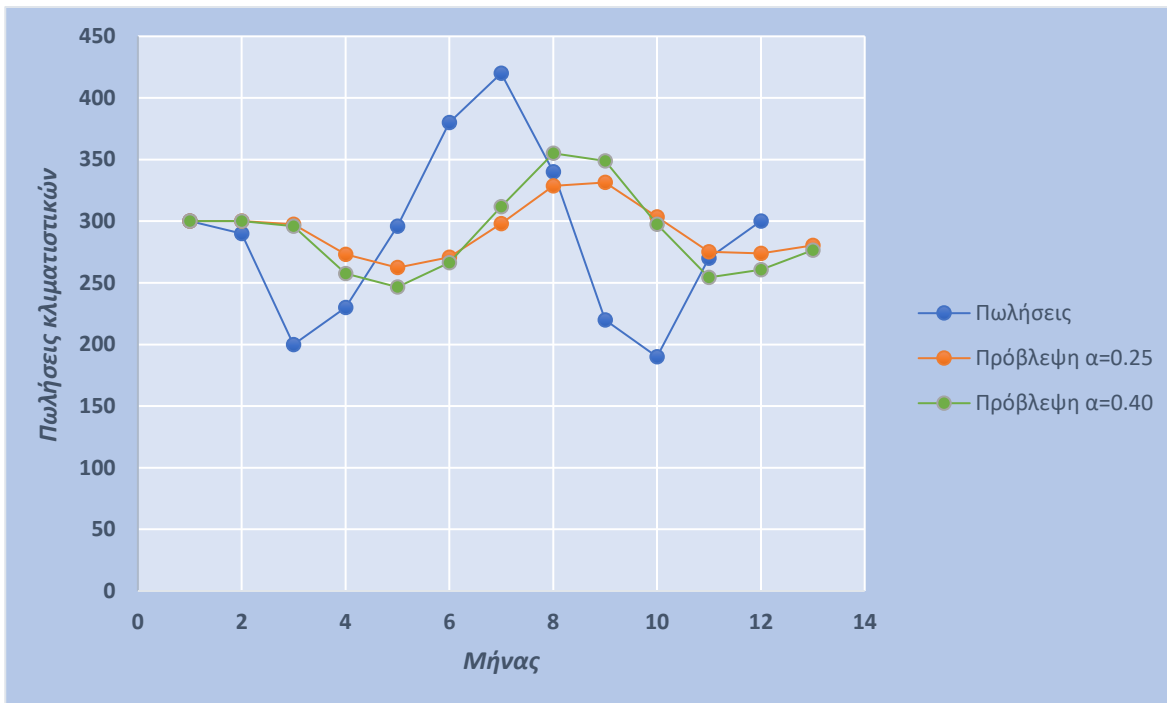
Ομοίως, εκτελούμε τους υπολογισμούς για τους υπόλοιπους μήνες αλλά και για τον μήνα Ιανουάριο του επόμενου έτους. Τα αποτελέσματα και για τις δύο τιμές της μεταβλητής εξομάλυνσης φαίνονται στον πίνακα 4.4:

Μήνας	Πωλήσεις	Πρόβλεψη ( $\alpha=0.25$ )	Πρόβλεψη ( $\alpha=0.40$ )
Ιανουάριος	300	300	300
Φεβρουάριος	290	300	300
Μάρτιος	200	297.5	296
Απρίλιος	230	273.125	257.6
Μάιος	296	262.344	246.56
Ιούνιος	380	270.758	266.336
Ιούλιος	420	298.068	311.802
Αύγουστος	340	328.551	355.081
Σεπτέμβριος	220	331.413	349.048
Οκτώβριος	190	303.560	297.429
Νοέμβριος	270	275.170	254.458
Δεκέμβριος	300	273.878	260.674
Ιανουάριος	-	280.408	276.405

Πίνακας 4.4: Προβλέψεις πωλήσεων με τη μέθοδο της Εκθετικής Εξομάλυνσης

Κατασκευάζουμε επίσης το διάγραμμα διασποράς των πραγματικών πωλήσεων και των προβλέψεων της εκθετικής εξομάλυνσης σε σχέση με τον μήνα.





Διάγραμμα 4.3: Πωλήσεις και προβλέψεις πωλήσεων με τη μέθοδο της απλής εκθετικής εξομάλυνσης

Παρατηρούμε ότι και για τις δύο τιμές της σταθεράς  $a$ , η μέθοδος καθυστερεί να ενσωματώσει στις προβλέψεις τις τάσεις της αγοράς. Ενώ γενικά περιμέναμε μία γρηγορότερη αντίδραση των προβλέψεων στις μεταβολές των πωλήσεων, όσο αφορά τις τελικές τιμές των προβλέψεων, φαίνεται ότι για  $a = 0.25$  η μέθοδος δίνει καλύτερες εκτιμήσεις. Αποδεικνύεται δηλαδή ότι η επιλογή της σταθεράς εξομάλυνσης στο διάστημα  $[0.1, 0.3]$  δίνει καλύτερα αποτελέσματα.

#### 4.1.6. Εκθετική Εξομάλυνση με Προσαρμογή στην Τάση - Μέθοδος Holt

Η εκθετική εξομάλυνση με προσαρμογή στην τάση (Exponential Smoothing Adjusted for Trend), είναι γνωστή και ως μέθοδος Holt (Holt's Method). Πρόκειται για μία επέκταση της απλής εκθετικής εξομάλυνσης και χρησιμοποιείται όταν οι παρατηρήσεις της χρονοσειράς υποδεικνύουν την ύπαρξη γραμμικής τάσης. Η μέθοδος έχει δύο παραμέτρους εξομάλυνσης, την παράμετρο  $a$  για την εξομάλυνση των τιμών της χρονοσειράς και την παράμετρο  $\beta$  για την εξομάλυνση της τάσης, οπότε αντίστοιχα χρησιμοποιούνται δύο εξισώσεις εξομάλυνσης. Φυσικά χρησιμοποιείται και μία εξίσωση για την τελική πρόβλεψη.

Η εφαρμογή της μεθόδου βασίζεται στην ακόλουθη διαδικασία:

i. Γίνεται εξομάλυνση των παρατηρήσεων της χρονοσειράς με τη βοήθεια της σχέσης:

$$L_t = \alpha \cdot X_t + (1 - \alpha) \cdot (L_{t-1} + T_{t-1}), \quad t = 2, 3, \dots, n + 1 \quad (4.1),$$

όπου  $\alpha$  είναι η σταθερά για την εξομάλυνση των τιμών της χρονοσειράς,  $X_t$  είναι οι πραγματικές τιμές της χρονοσειράς για την περίοδο  $t$ ,  $T_t$  είναι η εκτίμηση της γραμμικής τάσης για την περίοδο  $t$  και τέλος με  $L_t$  συμβολίζεται η εξομαλυνθείσα τιμή της χρονοσειράς, δηλαδή η πρόβλεψη για την περίοδο  $t$  απαλλαγμένη από την προς τα εμπρός προβολή της γραμμικής τάσης για την επόμενη περίοδο.

Όπως φαίνεται, η εξίσωση ενσωματώνει με συντελεστή εξομάλυνσης  $\alpha$  την επίδραση της πραγματικής παρατήρησης για την περίοδο  $t$  και με συντελεστή  $(1 - \alpha)$  την επίδραση της απαλλαγμένης από την τάση πρόβλεψης για την προηγούμενη περίοδο και της γραμμικής τάσης επίσης για την προηγούμενη περίοδο.

ii. Έπειτα εφαρμόζεται πάλι εκθετική εξομάλυνση ώστε να εξομαλυνθεί η τάση με τη βοήθεια της σχέσης:

$$T_t = \beta \cdot (L_t - L_{t-1}) + (1 - \beta) \cdot T_{t-1}, \quad t = 2, 3, \dots, n + 1 \quad (4.2),$$

όπου  $\beta$  είναι η σταθερά για την εξομάλυνση της γραμμικής τάσης, ενώ οι υπόλοιπες μεταβλητές ορίστηκαν στο προηγούμενο βήμα. Η εξίσωση υπολογίζει την γραμμική τάση για την περίοδο  $t$  ενσωματώνοντας με συντελεστή  $\beta$  τη διαφορά των δύο τελευταίων εξομαλυνμένων (απαλλαγμένων από την τάση) προβλέψεων, η οποία αποτελεί την πλέον πρόσφατη εκτίμηση της τάσης και με συντελεστή  $(1 - \beta)$  τη γραμμική τάση της προηγούμενης περιόδου.

iii. Τέλος εξάγονται οι προβλέψεις συνυπολογίζοντας την επίδραση της γραμμικής τάσης από τη σχέση:

$$F_t = L_{t-1} + T_{t-1}, \quad t = 2, 3, \dots, n + 1 \quad (4.3),$$

όπου στη βασική πρόβλεψη της εκθετικής εξομάλυνσης προστίθεται η γραμμική τάση για την ίδια περίοδο.

Οι συντελεστές εξομάλυνσης λαμβάνουν τιμές στο διάστημα  $(0,1)$  και φυσικά μπορούν να ισούται μεταξύ τους. Όμως, στην πλειοψηφία των εφαρμογών, η τιμή της  $\alpha$  επιλέγεται από το διάστημα  $[0.1, 0.3]$ , ενώ η τιμή της  $\beta$  επιλέγεται εμπειρικά ανάλογα με το πόσο έντονη είναι η γραμμική τάση που εμφανίζεται στο διάγραμμα διασποράς των παρατηρήσεων  $X_t$  της χρονοσειράς.

Σημαντικό σημείο της μεθόδου είναι η αρχικοποίηση των απαραίτητων μεταβλητών. Συνήθως ορίζουμε την αρχική τιμή της εξομαλυνθείσας πρόβλεψης (στην περίπτωση μας  $L_1$ ) να είναι ίση με την πραγματικής τιμή που εμφανίζεται στη χρονοσειρά για την αμέσως προηγούμενη περίοδο από την περίοδο που επιθυμούμε να εξετάσουμε. Η αρχικοποίηση της γραμμικής τάσης είναι περισσότερο περίπλοκη. Ως αρχική τιμή της γραμμικής τάσης χρησιμοποιείται η συνολική μεταβολή των τιμών της χρονοσειράς διαιρεμένη με το πλήθος των μεταβολών που σημειώθηκαν. Δηλαδή θεωρούμε σαν αρχική γραμμική τάση τον μέσο όρο μεταβολής, κάνοντας την παραδοχή ότι η γραμμική τάση παραμένει σταθερή για όλες τις μεταβολές μεταξύ των περιόδων στη χρονοσειρά.

---

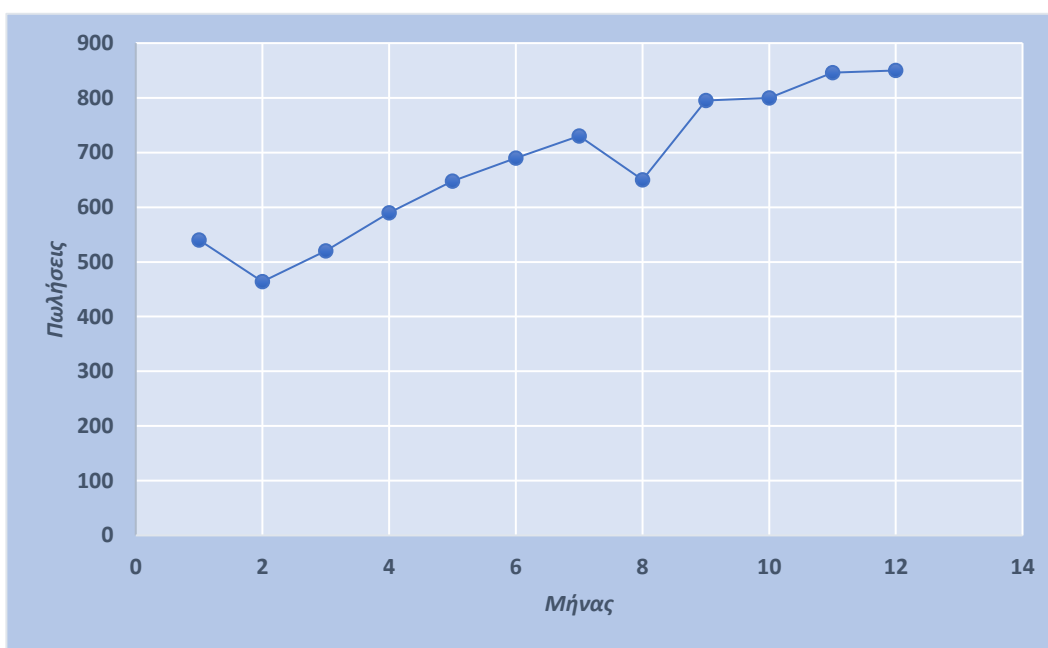
#### *Παράδειγμα 4.4*

---

Θεωρούμε τις πωλήσεις της οικολογικής σειράς απορρυπαντικών μίας ελληνικής εταιρείας προϊόντων καθαρισμού για το προηγούμενο έτος. Οι πωλήσεις παρουσιάζονται αθροιστικά για κάθε μήνα στον επόμενο πίνακα σε χιλιάδες €. Επίσης παρουσιάζεται το διάγραμμα διασποράς των πωλήσεων συναρτήσει του μήνα.

Μήνας	Πωλήσεις σε 000€
Ιανουάριος	540
Φεβρουάριος	464
Μάρτιος	520
Απρίλιος	590
Μάιος	648
Ιούνιος	690
Ιούλιος	730
Αύγουστος	650
Σεπτέμβριος	795
Οκτώβριος	800
Νοέμβριος	846
Δεκέμβριος	850

Πίνακας 4.5: Πωλήσεις προϊόντων καθαρισμού σε χιλιάδες ευρώ



Διάγραμμα 4.4: Πωλήσεις οικολογικών απορρυπαντικών για το προηγούμενο έτος

Από το διάγραμμα διασποράς αντιλαμβανόμαστε την ύπαρξη μίας αύξουσας γραμμικής τάσης στις παρατηρήσεις, δηλαδή όλο και περισσότεροι πελάτες της εταιρείας τείνουν προς την αγορά των οικολογικών προϊόντων της.

Θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο Holt, ορίζοντας τους συντελεστές εξομάλυνσης  $\alpha = 0.3$  και  $\beta = 0.2$ . Για να εκκινήσει η διαδικασία, χρειάζεται να ορίσουμε τις αρχικές τιμές. Όπως αναφέρεται παραπάνω, η εξομαλυνθείσα πρόβλεψη για τον μήνα Ιανουάριο εξισώνεται με τις πραγματικές πωλήσεις του Ιανουαρίου ( $L_1 = 540$ ). Επίσης, η τιμή της γραμμικής τάσης για τον μήνα Ιανουάριο υπολογίζεται από τη σχέση:

$$T_1 = \frac{(464 - 550) + (520 - 464) + (590 - 520) + \dots + (850 - 846)}{11} = \frac{850 - 540}{11} = 28.182$$

Πλέον, μπορούμε να υπολογίσουμε τις τιμές των μεταβλητών  $L, T$  για τον μήνα Φεβρουάριο ως εξής:

$$L_2 = \alpha \cdot X_2 + (1 - \alpha) \cdot (L_1 + T_1) = 0.3 \cdot 464 + (1 - 0.3) \cdot (540 + 28.182) = 536.927$$

$$T_2 = \beta \cdot (L_2 - L_1) + (1 - \beta) \cdot T_1 = 0.2 \cdot (536.927 - 540) + (1 - 0.2) \cdot 28.182 = 21.931$$

Η εκτίμηση της μεθόδου Holt για τις πωλήσεις του Φεβρουαρίου είναι:

$$F_2 = L_1 + T_1 = 540 + 28.182 = 568.182 \text{ χιλιάδες } \text{€}$$

Αντίστοιχα για τον Μάρτιο έχουμε:

$$L_3 = \alpha \cdot X_3 + (1 - \alpha) \cdot (L_2 + T_2) = 0.3 \cdot 520 + (1 - 0.3) \cdot (536.927 + 21.931) = 547.201$$

$$T_3 = \beta \cdot (L_3 - L_2) + (1 - \beta) \cdot T_2 = 0.2 \cdot (547.201 - 536.927) + (1 - 0.2) \cdot 21.931 = 19.599$$

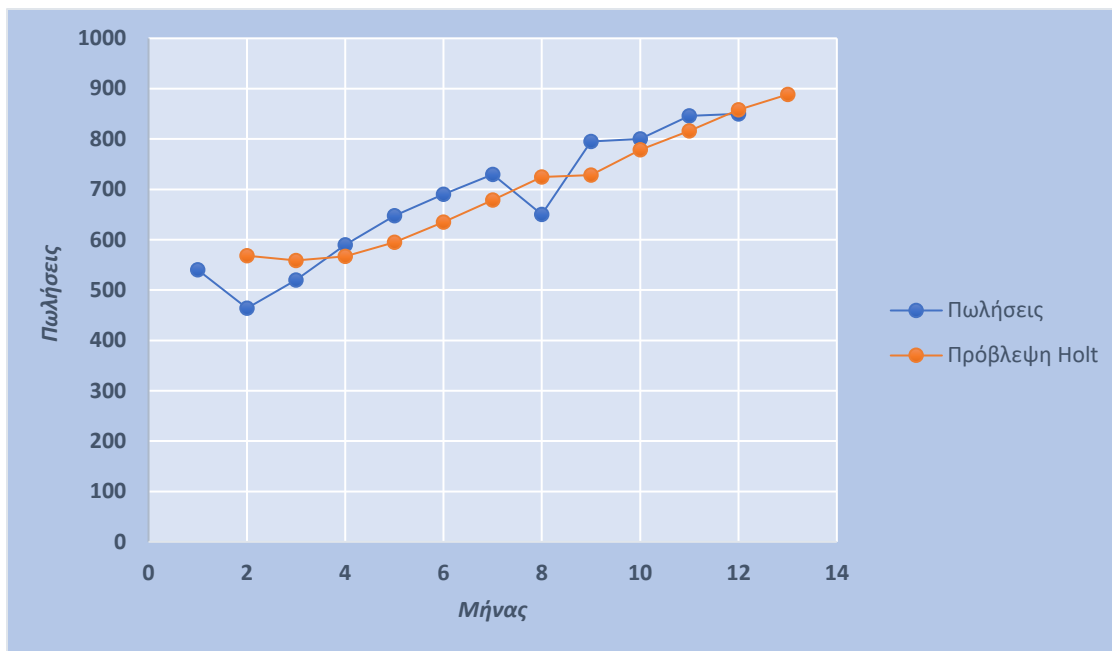
$$F_3 = L_2 + T_2 = 536.927 + 21.931 = 558.858 \text{ χιλιάδες ευρώ}$$

Ομοίως, εκτελούνται οι υπολογισμοί για τους υπόλοιπους μήνες αλλά και για τον Ιανουάριο και συμπληρώνεται ο πίνακας:

Μήνας	Πωλήσεις $X_t$ (σε 000 €)	$L_t$ (σε 000 €)	$T_t$ (σε 000 €)	Πρόβλεψη Holt $F_t$ (σε 000 €)
Ιανουάριος	540	540	28.182	-
Φεβρουάριος	464	536.927	21.931	568.182
Μάρτιος	520	547.201	19.599	558.858
Απρίλιος	590	573.760	20.991	566.800
Μάιος	648	610.726	24.186	594.752
Ιούνιος	690	651.439	27.492	634.912
Ιούλιος	730	694.251	30.556	678.930
Αύγουστος	650	702.365	26.067	724.807
Σεπτέμβριος	795	748.403	30.061	728.432
Οκτώβριος	800	784.925	31.354	778.464
Νοέμβριος	846	825.195	33.137	816.278
Δεκέμβριος	850	855.832	32.637	858.332
Ιανουάριος	-	-	-	888.469

Πίνακας 4.6: Πρόβλεψη βάσει της μεθόδου Holt

Στον πίνακα βλέπουμε επίσης την εκτίμηση που δίνει η μέθοδος της εκθετικής εξομάλυνσης με προσαρμογή στην τάση της χρονοσειράς για τις πωλήσεις των οικολογικών προϊόντων του καταστήματος που εξετάζουμε. Η τιμή των προβλεπόμενων πωλήσεων είναι μεγαλύτερη από αυτή του τελευταίου μήνα (δηλαδή του Δεκεμβρίου) γεγονός που αναμέναμε λόγω της αύξουσας γραμμικής τάσης που παρουσίασαν οι πωλήσεις κατά τη διάρκεια του προηγούμενου έτους. Τέλος, παρουσιάζεται το κοινό διάγραμμα των πραγματικών και των προβλεπόμενων πωλήσεων. Τόσο από τις τιμές του Πίνακα 4.6 όσο και από το Διάγραμμα 4.6 συμπεραίνουμε ότι η μέθοδος της εκθετικής εξομάλυνσης με προσαρμογή στην τάση δίνει αρκετά καλές εκτιμήσεις για τα δεδομένα μας.



Διάγραμμα 4.5: Πωλήσεις και προβλέψεις πωλήσεων κατά Holt

#### 4.1.7. Εκθετική Εξομάλυνση με προσαρμογή στην τάση και στην εποχικότητα – Μέθοδος Winters

Η ύπαρξη εποχικότητας στις παρατηρήσεις χρονοσειρών είναι συχνό φαινόμενο κατά τη διερεύνηση οικονομικών φαινομένων και για να εξεταστεί, θα πρέπει πρώτα να εξομαλυνθεί με την βοήθεια κάποιας κατάλληλης μεθόδου που μπορεί να την ενσωματώσει άμεσα. Η πλέον κατάλληλη μέθοδος για τον σκοπό αυτό είναι η εκθετική εξομάλυνση με προσαρμογή στην τάση και στην εποχικότητα (Exponential Smoothing Adjusted for Trend and Seasonality), γνωστή και ως μέθοδος Winters (Winters Method). Πρόκειται για μία επέκταση της μεθόδου Holt (η οποία με τη σειρά της αποτελεί, όπως είπαμε, επέκταση της απλής εκθετικής εξομάλυνσης) και χρησιμοποιείται όταν οι παρατηρήσεις της χρονοσειράς εκτός από γραμμική τάση υποδεικνύουν και την ύπαρξη εποχικότητας.

Η μέθοδος χρησιμοποιεί τρεις παραμέτρους εξομάλυνσης, τις  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $\gamma$ , οι οποίες βοηθούν στην εξομάλυνση των τιμών της χρονοσειράς, της τάσης και της εποχικότητας αντίστοιχα. Δηλαδή, έχουμε τις παραμέτρους της μεθόδου Holt, αλλά τώρα εισάγουμε μία επιπλέον παράμετρο. Αυτό σημαίνει ότι σημαίνει ότι χρησιμοποιεί επίσης μία επιπλέον σχέση από τη μέθοδο Holt, αυτή για την εξομάλυνση της εποχικότητας.

Η εφαρμογή της μεθόδου βασίζεται στην ακόλουθη διαδικασία:

- i. Γίνεται εξομάλυνση των τιμών της χρονοσειράς με τη βοήθεια της σχέσης:

$$L_t = \alpha \cdot \frac{X_t}{E_{t-N}} + (1 - \alpha) \cdot (L_{t-1} + T_{t-1}), \quad t = 1, 2, \dots, n \quad (4.4),$$

όπου  $\alpha$  είναι η σταθερά για την εξομάλυνση των τιμών της χρονοσειράς,  $X_t$  είναι η πραγματική τιμή της χρονοσειράς για την περίοδο  $t$ ,  $E_t$  είναι ο δείκτης εποχικότητας για την περίοδο  $t$ ,  $T_t$  είναι η εκτίμηση της γραμμικής τάσης για την περίοδο  $t$  και τέλος με  $L_t$  συμβολίζεται η εξομαλυνθείσα τιμή της χρονοσειράς.

Παρατηρούμε ότι στην σχέση χρησιμοποιείται ο όρος  $E_{t-N}$  αντί του  $E_t$  (όπου  $N$  είναι ο αριθμός των περιόδων σε έναν ολόκληρο κύκλο εποχικότητας). Αυτό συμβαίνει καθώς η πιο πρόσφατη πληροφορία για τη συγκεκριμένη περίοδο, όταν στα δεδομένα υπάρχει εποχικότητα, είναι η πληροφορία για την αντίστοιχη περίοδο του του προηγούμενου κύκλου, δηλαδή η τιμή  $E_{t-N}$ .

- ii. Γίνεται εξομάλυνση της τάσης ακριβώς όπως στη μέθοδο Holt, δηλαδή με χρήση της σχέσης:

$$T_t = \beta \cdot (L_t - L_{t-1}) + (1 - \beta) \cdot T_{t-1}, \quad t = 1, 2, \dots, n \quad (4.5),$$

όπου  $\beta$  είναι όπως είπαμε η σταθερά για την εξομάλυνση της τάσης.

- iii. Η εξομάλυνση της εποχικότητας γίνεται ως ακολούθως:

$$E_t = \gamma \cdot \frac{X_t}{T_t} + (1 - \gamma) \cdot E_{t-N}, \quad t = 1, 2, \dots, n \quad (4.6),$$

όπου  $\gamma$  η σταθερά για την εξομάλυνση της εποχικότητας.

- iv. Η πρόβλεψη γίνεται με τη βοήθεια της σχέσης:

$$F_t = (L_{t-1} + T_{t-1}) \cdot E_{t+1-N}, \quad t = 2, 3, \dots, n \quad (4.7)$$

Οι συντελεστές εξομάλυνσης  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $\gamma$  λαμβάνουν τιμές στο διάστημα  $(0,1)$ . Συνήθως όμως, ο συντελεστής  $\gamma$  λαμβάνει μεγαλύτερη τιμή αυτή των  $\alpha$  και  $\beta$  καθώς οι δείκτες εποχικότητας επικαιροποιούνται μόνο μία φορά ανά κύκλο, σε αντίθεση με τις προβλέψεις εκθετικής εξομάλυνσης και γραμμικής τάσης που ανανεώνονται σε κάθε περίοδο. Όπως αναφέραμε στα πλαίσια της προηγούμενης



μεθόδου, η τιμή της  $\alpha$  επιλέγεται στο διάστημα  $[0.1, 0.3]$  ενώ η τιμή της  $\beta$  επιλέγεται ανάλογα με το πόσο έντονη είναι η γραμμική τάση στα δεδομένα της χρονοσειράς. Όσο αναφορά την τιμή της σταθεράς  $\gamma$ , αυτή συνήθως επιλέγεται στο διάστημα  $[0.2, 0.6]$ .

Για να εκκινήσει η διαδικασία της πρόβλεψης, χρειάζεται να προσδιοριστούν οι αρχικές τιμές  $L_0, T_0$ . Γενικά δεν υπάρχει μοναδικός τρόπος αρχικοποίησης των μεταβλητών αυτών. Ο ερευνητής συνήθως προσδιορίζει τις τιμές αυτές εμπειρικά, ανάλογα με τη μορφή των δεδομένων που διαθέτει (για παράδειγμα πλήθος κύκλων εποχικότητας). Ένας συνήθης τρόπος προσδιορισμού των απαραίτητων αρχικών τιμής παρουσιάζεται στο επόμενο παράδειγμα.

---

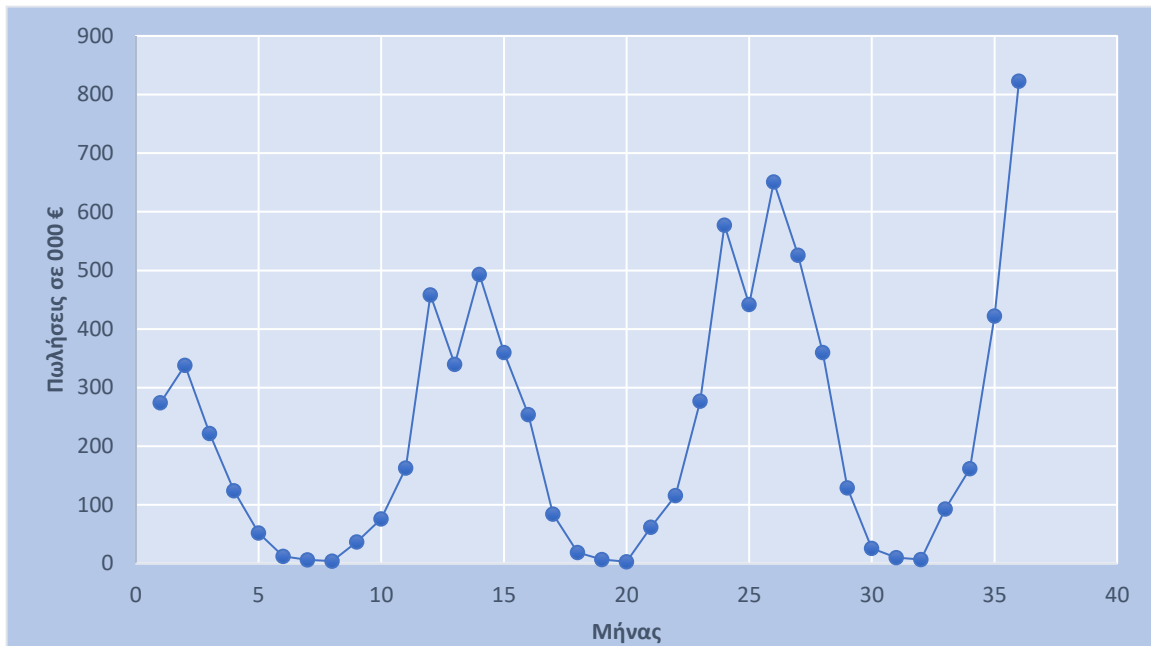
#### Παράδειγμα 4.5

---

Θεωρούμε τον Πίνακα με τις λιανικές πωλήσεις από αδιάβροχα μπουφάν μεγάλης εταιρείας ένδυσης για την προηγούμενη τριετία, σε χιλιάδες €.

Μήνας	2018	2019	2020
Ιανουάριος	274	340	442
Φεβρουάριος	338	493	651
Μάρτιος	222	360	526
Απρίλιος	124	254	360
Μάιος	52	84	129
Ιούνιος	12	19	26
Ιούλιος	6	7	10
Αύγουστος	4	3	7
Σεπτέμβριος	37	62	93
Οκτώβριος	76	116	162
Νοέμβριος	163	277	422
Δεκέμβριος	458	577	823

Πίνακας 4.7: Μηνιαίες Πωλήσεις σε 000 € για την προηγούμενη τριετία



Διάγραμμα 4.6: Μηνιαίες Πωλήσεις σε 000 € για την προηγούμενη τριετία

Από το Διάγραμμα 4.6 παρατηρούμε με ευκολία την ύπαρξη τάσης αλλά και εποχικότητας στις πωλήσεις αδιάβροχων μπουφάν.

Αρχικά θα προσδιοριστούν οι δείκτες εποχικότητας για κάθε περίοδο, δηλαδή για κάθε μήνα. Για τον σκοπό αυτό υπολογίζουμε τον μέσο όρο όλων των μηνιαίων πωλήσεων για τα τρία έτη και τον μέσο όρο των πωλήσεων ανά μήνα. Έχουμε:

$$\bar{X} = \frac{274 + 338 + 222 + \dots + 422 + 823}{36} = 222.472 \text{ χιλιάδες €}$$

$$\bar{X}_{\text{Ιανουαρίου}} = \bar{X}_1 = \frac{274 + 340 + 442}{3} = 352 \text{ χιλιάδες €}$$

Ο δείκτης εποχικότητας για τον Ιανουάριο υπολογίζεται ως  $E_1 = \frac{\bar{X}_1}{\bar{X}} = \frac{352}{222.472} = 1.582$

Ομοίως υπολογίζονται οι μέσοι όροι και οι δείκτες εποχικότητας για τους υπόλοιπους μήνες. Τα αποτελέσματα φαίνονται συγκεντρωτικά στον επόμενο Πίνακα:

Μήνας	Πωλήσεις για το έτος 2018	Πωλήσεις για το έτος 2019	Πωλήσεις για το έτος 2020	Μέσος όρος πωλήσεων	Δείκτης Εποχικότητας
Ιανουάριος	274	340	442	352	1.582
Φεβρουάριος	338	493	651	494	2.221
Μάρτιος	222	360	526	369.333	1.660
Απρίλιος	124	254	360	246	1.106
Μάιος	52	84	129	88.333	0.397
Ιούνιος	12	19	26	19	0.085
Ιούλιος	6	7	10	7.667	0.034
Αύγουστος	4	3	7	4.667	0.021
Σεπτέμβριος	37	62	93	64	0.288
Οκτώβριος	76	116	162	118	0.530
Νοέμβριος	163	277	422	287.333	1.292
Δεκέμβριος	458	577	823	619.333	2.784
<b>Συνολικός μέσος όρος τριετίας</b>					<b>222.472</b>

Πίνακας 4.8: Πωλήσεις με τους αντίστοιχους Δείκτες Εποχικότητας

Επιλέγουμε να χρησιμοποιήσουμε ως αρχική τιμή για την γραμμική τάση την διαφορά των πωλήσεων του Ιανουαρίου του τελευταίου έτους από τις πωλήσεις του Ιανουαρίου του πρώτου έτους, διαιρεμένη με τις μεταβολές που μεσολάβησαν στις πωλήσεις. Δηλαδή ορίζουμε:

$$T_0 = \frac{442 - 274}{24} = 7$$

Για την αρχικοποίηση της βασικής πρόβλεψης υπολογίζεται αρχικά ο μέσος όρος των πωλήσεων για το έτος 2018:

$$\bar{X}_{2018} = \frac{274 + 338 + \dots + 458}{12} = 147.167 \text{ χιλιάδες €}$$

Η γραμμική τάση για μισό κύκλο, δηλαδή για 6 μήνες αντιστοιχεί σε  $6 \cdot 7 = 42$  μονάδες. Αφαιρώντας την τιμή αυτή από τον μέσο όρο των πωλήσεων του έτους 2018 προκύπτει η αρχική τιμή της μεταβλητής  $L_t$ . Έτσι έχουμε:

$$L_0 = \bar{X}_{2018} - 6 \cdot T_0 = 147.167 - 6 \cdot 7 = 105.167 \quad (000 \text{ €}).$$

Επιλέγουμε επίσης  $\alpha = 0.3$ ,  $\beta = 0.3$  και  $\gamma = 0.4$ .

Από τη σχέση 4.4 υπολογίζουμε:

$$L_1 = \alpha \cdot \frac{X_1}{E_{1-N}} + (1 - \alpha) \cdot (L_0 + T_0) = 0.3 \cdot \frac{274}{1.582220002} + (1 - 0.3) \cdot (105.17 + 7) = 130.47$$

Από τη σχέση 4.5:

$$T_1 = \beta \cdot (L_1 - L_0) + (1 - \beta) \cdot T_0 = 0.3 \cdot (130.47 - 105.17) + (1 - 0.3) \cdot 7 = 12.49$$

Από τη σχέση 4.6:

$$E_1 = \gamma \cdot \frac{X_1}{T_1} + (1 - \gamma) \cdot E_{1-N} = 0.4 \cdot \frac{274}{12.49} + (1 - 0.4) \cdot 1.582220002 = 9.72$$

Τέλος, από τη σχέση 4.7 υπολογίζουμε την πρόβλεψη που δίνει η μέθοδος της εκθετικής εξομάλυνσης, προσαρμοσμένη στην τάση και στην εποχικότητα:

$$F_2 = (L_1 + T_1) \cdot E_{2-N} = (130.47 + 12.49) \cdot 2.220501935 = 317.443 \text{ χιλιάδες €}$$

#### Παρατήρηση

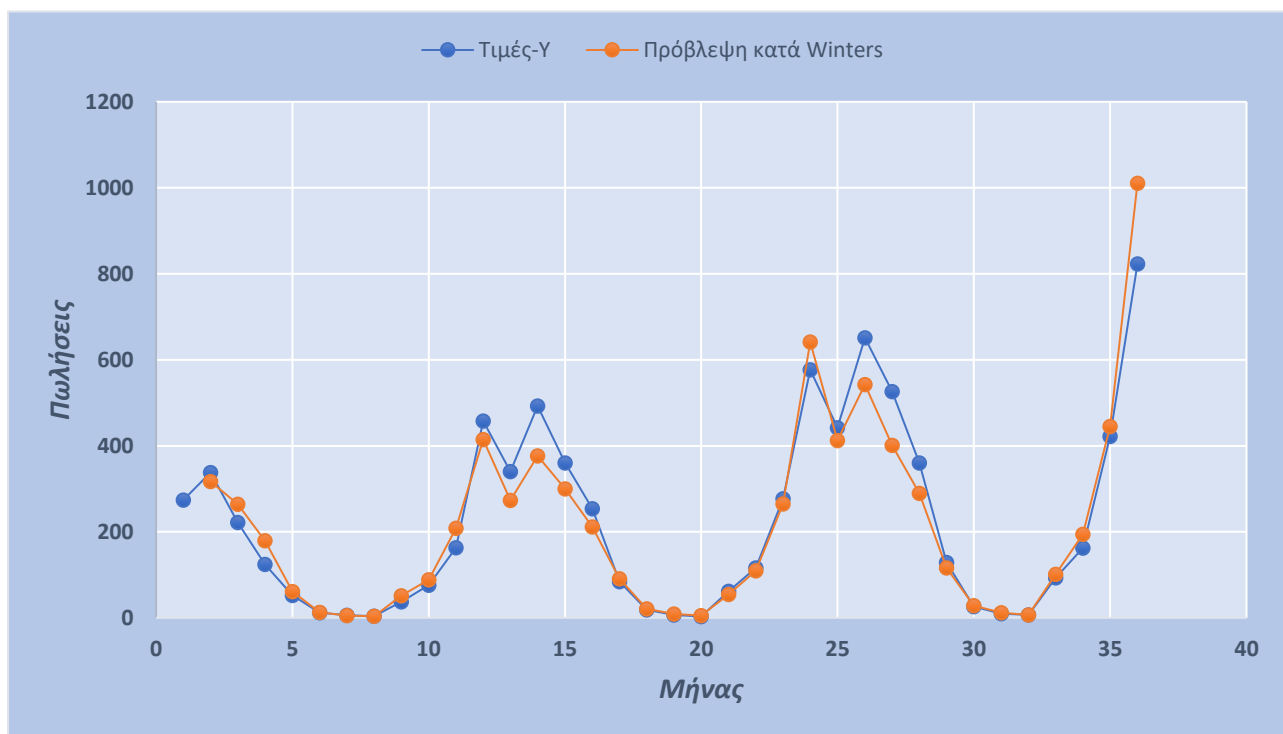
Με τη βοήθεια της σχέσης (4.6), υπολογίζουμε τις τιμές  $E_t$ ,  $t = 1, 2, \dots, 36$ . Για τους πρώτους 12 μήνες και επειδή δεν διαθέτουμε τους αντίστοιχους δείκτες εποχικότητας του προηγούμενου έτους,  $E_{1-N}$ , χρησιμοποιήσαμε τις τιμές των δεικτών  $E_t$ ,  $t = 1, 2, \dots, 12$ . Δηλαδή, για τον υπολογισμό του  $E_{1-N}$  θα χρησιμοποιηθεί ο εποχικός δείκτης  $E_1 = 9.72$  που υπολογίστηκε παραπάνω.

Ομοίως, εκτελούμε τους υπολογισμούς και συμπληρώνεται ο Πίνακας 4.9.

A/A	Μήνας	Πωλήσεις (σε 000 €)	L <sub>t</sub>	T <sub>t</sub>	E <sub>t</sub>	f <sub>t</sub>	Σφάλμα
1	Ιανουάριος	274	130.469	12.490	1.789	-	-
2	Φεβρουάριος	338	145.737	13.323	2.256	317.447	-20.553
3	Μάρτιος	222	151.460	11.043	1.582	264.064	42.064
4	Απρίλιος	124	147.395	6.510	0.999	179.690	55.689
5	Μάιος	52	147.023	4.446	0.380	61.109	9.109
6	Ιούνιος	12	148.181	3.459	0.084	12.936	0.936
7	Ιούλιος	6	158.381	5.482	0.036	5.226	-0.774
8	Αύγουστος	4	171.911	7.896	0.022	3.437	-0.563
9	Σεπτέμβριος	37	164.450	3.289	0.263	51.726	14.726
10	Οκτώβριος	76	160.403	1.088	0.508	88.969	12.969
11	Νοέμβριος	163	150.906	-2.087	1.207	208.574	45.574
12	Δεκέμβριος	458	153.529	-0.674	2.864	414.290	-43.710
13	Ιανουάριος	340	164.001	2.670	1.903	273.512	-66.488
14	Φεβρουάριος	493	182.113	7.302	2.439	376.675	-116.325
15	Μάρτιος	360	200.843	10.731	1666	299.725	-60.276
16	Απρίλιος	254	224.304	14.550	1.053	211.566	-42.434
17	Μάιος	84	233.565	12.963	0.372	90.694	6.694
18	Ιούνιος	19	240.722	11.222	0.082	20.618	1.618
19	Ιούλιος	7	234.971	6.129	0.033	9.027	2.027
20	Αύγουστος	3	209.879	-3.237	0.019	5.278	2.278
21	Σεπτέμβριος	62	215.479	-0.586	0.273	54.265	-7.735
22	Οκτώβριος	116	218.961	0.635	0.517	109.115	-6.885
23	Νοέμβριος	277	222.566	1.526	1.222	265.049	-11.951
24	Δεκέμβριος	577	217.313	-0.508	2.780	641.706	64.706
25	Ιανουάριος	442	221.447	0.885	1.940	412.554	-29.446
26	Φεβρουάριος	651	235.712	4.899	2.568	542.233	-108.767

27	Μάρτιος	526	263.122	11.652	1.799	400.953	-125.047
28	Απρίλιος	360	294.912	17.694	1.120	289.320	-70.680
29	Μάιος	129	322.946	20.796	0.383	116.190	-12.810
30	Ιούνιος	26	336.028	18.482	0.080	28.102	2.102
31	Ιούλιος	10	337.939	13.510	0.032	11.846	1.846
32	Αύγουστος	7	357.400	15.296	0.019	6.626	-0.374
33	Σεπτέμβριος	93	363.214	12.451	0.266	101.617	8.617
34	Οκτώβριος	162	357.048	6.866	0.491	194.057	32.057
35	Νοέμβριος	422	358.339	5.193	1.204	444.711	22.711
36	Δεκέμβριος	823	343.279	-0.883	2.627	1010.697	187.697

Πίνακας 4.9: Προβλέψεις με την εφαρμογή της μεθόδου Winters



Διάγραμμα 4.7: Πωλήσεις και προβλέψεις με τη χρήση της μεθόδου Winters

Τόσο από το διάγραμμα 3.7 όσο και από τις τιμές των σφαλμάτων αποδεικνύεται ότι η εκθετική εξομάλυνση με προσαρμογή στην τάση και στην εποχικότητα δίνει πολύ καλές προβλέψεις για τα δεδομένα που διαθέτουμε.

## 4.2. Αιτιακές Μέθοδοι Πρόβλεψης (Casual Forecasting Methods)

Πολλές φορές, η μεταβλητή ενδιαφέροντος έχει άμεση σχέση με μία ή περισσότερες άλλες μεταβλητές. Σε αυτή την περίπτωση η πρόβλεψη γίνεται με τη βοήθεια της ανάλυσης παλινδρόμησης. Η μεταβλητή που επιθυμούμε να προβλέψουμε ονομάζεται εξαρτημένη μεταβλητή καθώς η τιμή της εξαρτάται από τις τιμές άλλων μεταβλητών, τις οποίες χρειάζεται να γνωρίζουμε προκειμένου να εξαγάγουμε την πρόβλεψη. Οι μεταβλητές αυτές ονομάζονται αντίστοιχα ανεξάρτητες. Αυτού του είδους η προσέγγιση ονομάζεται αιτιακή πρόβλεψη.

Η ανάλυση παλινδρόμησης είναι μία στατιστική διαδικασία για τον προσδιορισμό της μαθηματικής σχέσης που συνδέει την ανεξάρτητη με τις εξαρτημένες μεταβλητές. Η απλή παλινδρόμηση περιλαμβάνει μία μόνο ανεξάρτητη μεταβλητή, για παράδειγμα την τιμή ή το μέγεθος της διαφήμισης σε μία συνάρτηση ζήτησης ενώ η πολλαπλή παλινδρόμηση περιλαμβάνει δύο ή περισσότερες μεταβλητές, στο προηγούμενο παράδειγμα τόσο την τιμή και όσο και το μέγεθος της διαφήμισης.

Στη συνέχεια, θα επικεντρωθούμε σε αιτιακές προβλέψεις όπου η μαθηματική σχέση που συνδέει την εξαρτημένη με τις ανεξάρτητες μεταβλητές θεωρείται γραμμική. Η ανάλυση που εφαρμόζεται σε αυτή την περίπτωση ονομάζεται γραμμική παλινδρόμηση.

### 4.2.1. Απλή Γραμμική Παλινδρόμηση (Simple Linear Regression)

Το μοντέλο αυτό προκύπτει όταν το υπό μελέτη σύστημα περιλαμβάνει μία ανεξάρτητη μεταβλητή ενώ η μαθηματική σχέση που τη συνδέει με την εξαρτημένη μεταβλητή θεωρείται γραμμική. Σκοπός μας είναι η προσαρμογή μιας ευθείας γραμμής, η οποία επεξηγεί όσο το δυνατόν καλύτερα τη συμπεριφορά των δεδομένων μας. Αν ορίσουμε ως  $X$  την ανεξάρτητη μεταβλητή και  $Y$  την εξαρτημένη μεταβλητή (μεταβλητή ενδιαφέροντος), τότε η ευθεία θα έχει τη μορφή:

$$E(Y|X) = a + bX,$$

όπου οι σταθερές  $a$  και  $b$  αποτελούν τις παραμέτρους του μοντέλου ή αλλιώς τους συντελεστές παλινδρόμησης. Η παραπάνω σχέση είναι μία στατιστική σχέση που περιγράφει την αναμενόμενη τιμή της  $Y$  όταν γνωρίζουμε την τιμή της  $X$ .

Η προσαρμογή της καλύτερης ευθείας, δηλαδή η καλύτερη δυνατή εκτίμηση των παραμέτρων γίνεται λαμβάνοντας υπόψη τις  $n$  ανεξάρτητες παρατηρήσεις  $(X_i, Y_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  που έχουμε στη διάθεσή μας προς επεξεργασία για τις οποίες υποθέτουμε ότι δεν υπόκεινται σε σφάλματα μέτρησης. Φυσικά, τα σημεία  $(X_i, Y_i)$  είναι πιθανό να διαφέρουν από τα σημεία  $(X_i, \hat{Y}_i)$ , όπου  $\hat{Y}_i = \hat{a} + \hat{b}X_i$  είναι η εκτίμηση της τιμής της τυχαίας μεταβλητής  $Y$  με βάση το απλό γραμμικό μοντέλο που προσαρμόσαμε στα δεδομένα μας και  $\hat{a}, \hat{b}$  οι εκτιμήσεις των παραμέτρων του μοντέλου. Οι παρατηρήσεις  $Y_i$  δίνονται από τη παρακάτω σχέση:

$$Y_i = E(Y_i|X_i) + \varepsilon_i = a + b X_i + \varepsilon_i,$$

όπου το  $\varepsilon_i$  ονομάζεται τυχαίο σφάλμα και παριστάνει για δοθείσα τιμή  $X_i$  την κατακόρυφη απόσταση της τιμής  $Y_i$  από την ευθεία της συνάρτησης παλινδρόμησης που είναι ακόμα άγνωστη. Σημειώνεται ότι το τυχαίο σφάλμα δεν πρέπει να συγγέεται με τη διαφορά  $e_i = Y_i - \hat{Y}_i = Y_i - \hat{a} - \hat{b}X_i$ , η οποία ονομάζεται υπόλοιπο και αποτελεί την κατακόρυφη απόκλιση του  $Y_i$  από την ευθεία της εκτιμημένης συνάρτησης παλινδρόμησης. Τα  $e_i$  μπορούν να θεωρηθούν ως οι εκτιμήσεις των άγνωστων τυχαίων σφαλμάτων  $\varepsilon_i$ . Ο υπολογισμός των παραμέτρων του μοντέλου μπορεί να γίνει με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων που παρουσιάζεται στη συνέχεια.

### *Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων*

Πρόκειται για μία ευρέως χρησιμοποιούμενη μέθοδο στην ανάλυση παλινδρόμησης. Σκοπός είναι να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους του μοντέλου της παλινδρόμησης, δηλαδή τους συντελεστές  $a$  και  $b$ , κατά τέτοιο τρόπο, ώστε η ευθεία γραμμή που θα προκύψει να περιγράφει κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο τη σχέση μεταξύ των μεταβλητών  $X$  και  $Y$ . Η γραμμή της παλινδρόμησης πρέπει να περνάει κοντά από τα σημεία που αντιστοιχούν στα ζεύγη των παρατηρήσεων  $(X_i, Y_i)$ , έτσι ώστε να ελαχιστοποιούνται τα σφάλματα της πρόβλεψης.

Για να περιγράψουμε τη μέθοδο χρειάζεται πρώτα να ορίσουμε το σφάλμα ως τη διαφορά μεταξύ της πραγματικής και της εκτιμώμενης τιμής. Αν συμβολίσουμε το σφάλμα με  $\varepsilon$ , τότε έχουμε:



$Y$  = πραγματική τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής (παρατήρηση)

$\hat{Y}$  = αναμενόμενη τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής που προέκυψε από τη σχέση  $\hat{Y} = \hat{a} + \hat{b}X$

$e = Y - \hat{Y}$ , σφάλμα πρόβλεψης

Η μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων έγκειται στην ελαχιστοποίηση της παράστασης

$$U = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{a} - \hat{b}X_i)^2 ,$$

δηλαδή στην ελαχιστοποίηση του αθροίσματος των τετραγώνων των σφαλμάτων πρόβλεψης. Ουσιαστικά, με αφετηρία το διάγραμμα διασποράς ενός δείγματος τιμών  $(X_i, Y_i)$ , η μέθοδος προσαρμόζει σε αυτό μία ευθεία γραμμή έτσι ώστε το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων αποκλίσεων των  $Y_i$  από αυτή να ελαχιστοποιείται. Έπειτα, ακολουθώντας τη συνηθισμένη διαδικασία για τον υπολογισμό ελαχίστων τιμών, δηλαδή παραγωγίζοντας το  $U$  ως προς  $\hat{a}$  και ως προς  $\hat{b}$ , και θέτοντας στη συνέχεια αυτές τις παραγώγους ίσες με μηδέν καταλήγουμε εύκολα σε ένα ζεύγος εξισώσεων, τις κανονικές εξισώσεις:

$$\begin{aligned} n\hat{a} + \hat{b} \sum_{i=1}^n X_i &= \sum_{i=1}^n Y_i \\ \hat{a} \sum_{i=1}^n X_i + \hat{b} \sum_{i=1}^n X_i^2 &= \sum_{i=1}^n X_i Y_i \end{aligned}$$

από τις οποίες λαμβάνουμε τις εκτιμήσεις για τα  $\hat{a}$ ,  $\hat{b}$  από τις σχέσεις:

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y}}{\sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

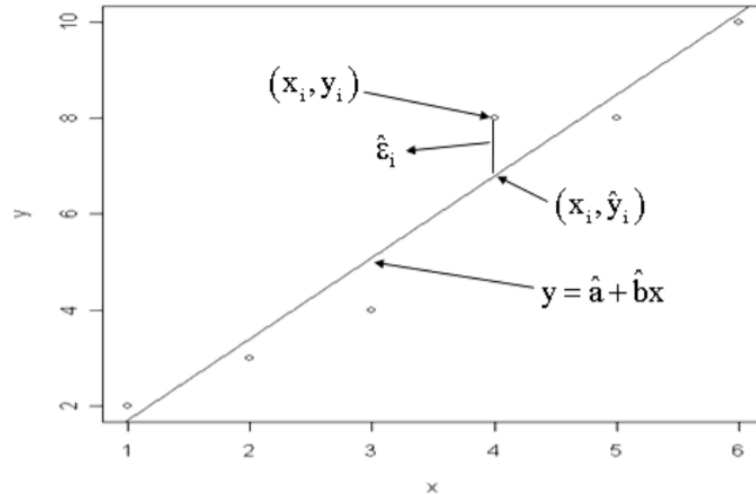
και

$$\hat{a} = \bar{Y} - \hat{b}\bar{X}$$

όπου

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \text{ και } \bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n}$$

Είμαστε πλέον σε θέση να εκτιμήσουμε την τιμή της μεταβλητής ενδιαφέροντος από τη σχέση  $\hat{Y} = \hat{a} + \hat{b}X^*$ , για μία δεδομένη τιμή  $X^*$ . Βέβαια, ο υπολογισμός των παραπάνω τιμών γίνεται συνήθως με τη βοήθεια κάποιου υπολογιστικού πακέτου, όπως θα δούμε στη συνέχεια.



Εικόνα 4.1: Ευθεία Ελαχίστων Τετραγώνων

Η μέθοδος βασίζεται σε ορισμένες υποθέσεις για τα τυχαία σφάλματα, που αν αποδειχθεί ότι παραβιάζονται, τότε το μοντέλο που έχουμε υποθέσει δεν είναι το κατάλληλο. Οι υποθέσεις είναι οι εξής:

- $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$
- $COV(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ , για  $i \neq j$  δηλαδή τα  $\varepsilon_i$  είναι ασυσχέτιστα

Σημειώνεται ότι, προτού εφαρμόσουμε την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων, είναι μέγιστης σημασίας η σχεδίαση του διαγράμματος διασποράς των παρατηρήσεων έτσι ώστε να διαπιστώσουμε ότι υπάρχει μία γραμμική σχέση ανάμεσα στις  $X, Y$ . Αν για οποιοδήποτε λόγο, το δείγμα υποδεικνύει κάποια μη γραμμική σχέση, τότε η προσέγγιση που πρόκειται να εφαρμόσουμε και η γραμμική σχέση που υποθέτουμε ( $Y = a + bX$ ) δεν θα μας οδηγήσουν σε μία καλή προσαρμογή.

#### Διάστημα Εμπιστοσύνης της Αναμενόμενης Τιμής

Όπως είναι αντιληπτό, η γραμμή που μας δίνει η παραπάνω μέθοδος πρόκειται να χρησιμοποιηθεί μελλοντικά στη λήψη αποφάσεων. Συγκεκριμένα, από τη γραμμή παλινδρόμησης μας μπορούμε να εκτιμήσουμε την ποσότητα  $E(X)$  με μία σημειακή εκτίμηση (την πρόβλεψη) και με ένα διάστημα εμπιστοσύνης. Το δεύτερο αποτελεί επίσης ένα μέτρο της αβεβαιότητας της πρόβλεψης.

Η μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων δίνει μία σημειακή εκτίμηση των παραμέτρων του μοντέλου αλλά και της μεταβλητής ενδιαφέροντος για κάποια τιμή της  $X$ , οι οποίες είναι σχεδόν σίγουρο ότι διαφέρουν από τις πραγματικές τιμές τους.

Έτσι, η εκτίμηση της τιμής της εξαρτημένης μεταβλητής  $Y$  για μία δοσμένη τιμή  $X^*$ , με βάση το απλό γραμμικό μοντέλο που προσαρμόσαμε είναι:  $\hat{Y} = \hat{a} + \hat{b}X^*$

Λόγω της υπόθεσης της κανονικότητας των σφαλμάτων  $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ , συνεπάγεται ότι οι τιμές της μεταβλητής  $Y$  ακολουθούν επίσης την Κανονική κατανομή  $Y_i \sim N(\mu_i, \sigma^2)$ . Η τυπική απόκλιση  $\sigma$  είναι άγνωστη και μία αμερόληπτη εκτιμήτρια αυτής είναι η ποσότητα:

$$S^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2$$

Ένα  $100(1 - \alpha)\%$  διάστημα εμπιστοσύνης για την αναμενόμενη τιμή της τυχαίας μεταβλητής  $Y$ , όταν η  $X$  πάρει την τιμή  $X^*$  είναι:

$$\left[ \hat{a} + \hat{b}X^* - t_{\frac{\alpha}{2}, n-2} S \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(X^* - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}}, \hat{a} + \hat{b}X^* + t_{\frac{\alpha}{2}, n-2} S \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(X^* - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}} \right]$$

Το τυπικό σφάλμα της εκτίμησης του συντελεστή παλινδρόμησης που αντιστοιχεί στην ανεξάρτητη μεταβλητή  $X$  είναι:

$$se(\hat{b}) = \frac{S}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}},$$

όπου  $S$  η εκτιμήτρια της τυπικής απόκλισης των τυχαίων σφαλμάτων ειπou αναφέρεται παραπάνω. Η ποσότητα αυτή μας δίνει μία εκτίμηση για το που κυμαίνεται η πραγματική τιμή του συντελεστή παλινδρόμησης  $b$ .

### Έλεγχος καλής προσαρμογής του μοντέλου

Ένας βασικός τρόπος για να κρίνουμε την αξία του γραμμικού μοντέλου, που προσαρμόζουμε στα δεδομένα μας είναι ο λόγος:

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2},$$

ο οποίος ονομάζεται συντελεστής ή δείκτης προσδιορισμού και εκφράζει το ποσοστό της μεταβλητότητας της τυχαίας μεταβλητής  $Y$  που εξηγείται από την  $X$ . Ο δείκτης μπορεί να πάρει τιμές ανάμεσα σε 0 και 1 (ή 0 έως 100, όταν εκφράζεται ως ποσοστό επί τοις 100). Όσο πιο κοντά στη μονάδα είναι ο συντελεστής τόσο ισχυρότερη είναι η γραμμική σχέση εξάρτησης των μεταβλητών  $X$  και  $Y$ , υπό την προϋπόθεση ότι το γραμμικό μοντέλο είναι το κατάλληλο.

Κατά την προσαρμογή ενός μοντέλου παλινδρόμησης είναι πολύ σημαντικό να ελέγχουμε αν η ανεξάρτητη μεταβλητή  $X$  επηρεάζει πράγματι τη συμπεριφορά της μεταβλητής ενδιαφέροντος. Ουσιαστικά ελέγχουμε την υπόθεση  $b = 0$  έναντι της εναλλακτικής υπόθεσης  $b \neq 0$ . Ο έλεγχος αυτός ονομάζεται στατιστικός έλεγχος  $t$ . Η εκτιμώμενη τιμή της μεταβλητής παλινδρόμησης  $b$  που έχουμε βρει ( $\hat{b}$ ), διαιρείται με το τυπικό της σφάλμα και η τιμή που προκύπτει συγκρίνεται με την αντίστοιχη, στον πίνακα της  $t$ -κατανομής ανάλογα με το μέγεθος του δείγματος και την ακρίβεια που επιθυμούμε. Γενικά, κάθε τιμή της ελεγχουσυνάρτησης που είναι μεγαλύτερη από 2 ή μικρότερη του  $-2$  είναι αποδεκτή. Όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του στατιστικού ελέγχου  $t$  τόσο περισσότερο πιστεύουμε ότι η  $b$  είναι ένας καλός δείκτης πρόβλεψης. Αντίστοιχα, μπορούμε να υπολογίσουμε το στατιστικό έλεγχου  $t$  για την παράμετρο  $a$  και να ελέγξουμε την υπόθεση  $a = 0$ , έναντι της εναλλακτικής υπόθεσης  $a \neq 0$ . Ελέγχοντας τις  $p$  – τιμές των δύο στατιστικών ελέγχου  $t$ , μπορούμε να επιβεβαιώσουμε τις τιμές των παραμέτρων  $\hat{a}, \hat{b}$  που δίνει η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων και επομένως, να διαπιστώσουμε αν το μοντέλο έχει καλή προσαρμογή. Η παραπάνω διαδικασία αναλύεται στα επόμενα παραδείγματα.

Τέλος, ένας άλλος έλεγχος που συνήθως εξετάζουμε στο μοντέλο παλινδρόμησης είναι γνωστός με την ονομασία  $F$ -test. Ο έλεγχος αυτός εξετάζει κατά πόσο το προτεινόμενο μοντέλο  $Y = \hat{a} + \hat{b}X$  διαφέρει από το σταθερό μοντέλο  $Y = a$ . Στη περίπτωση της απλής γραμμικής παλινδρόμησης ο εν λόγω έλεγχος είναι ισοδύναμος με τον έλεγχο  $t$  για την παράμετρο  $b$ .

Είναι λοιπόν σημαντικό, κατά την εφαρμογή ενός μοντέλου παλινδρόμησης, να γίνονται οι παραπάνω έλεγχοι ώστε να εκτιμάται η σημαντικότητα της παλινδρόμησης. Οι τιμές των στατιστικών ελέγχων υπολογίζονται πολύ εύκολα με την βοήθεια εργαλείων ανάλυσης διασποράς που διαθέτει το Microsoft Excel ή το στατιστικά πακέτο MINITAB ή το περιβάλλον της γλώσσας προγραμματισμού R.

---

### Παράδειγμα 4.6

---

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι πωλήσεις<sup>1</sup> της RETAIL WORLD A.E. (καταστήματα Public) για τα έτη 2012 έως 2019. Οι πωλήσεις για κάθε έτος καταγράφονται από την 1<sup>η</sup> Ιανουαρίου έως την 31<sup>η</sup> Δεκεμβρίου.

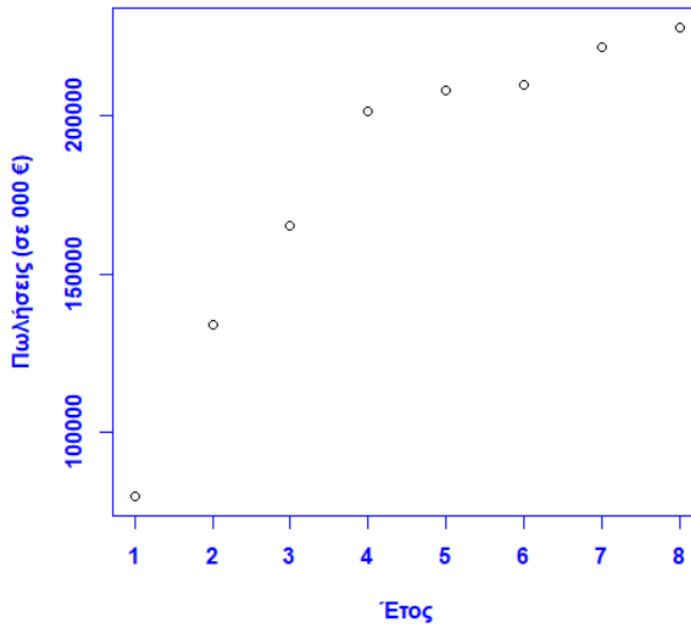
Έτος	Πωλήσεις (σε χιλιάδες ευρώ)
1	79,590.92
2	134,170.89
3	165,261.86
4	201,592.47
5	208,260.79
6	209,806.97
7	221,610.52
8	228,146.62

Πίνακας 4.10: Πραγματικές πωλήσεις της RETAIL WORLD A.E. για τα έτη 2012 έως 2019

Παρακάτω, θα συμβολίζουμε το έτος με  $X_i$  και τις πωλήσεις με  $Y_i$  όπου  $i = 1, 2, \dots, 8$ . Παρουσιάζουμε το διάγραμμα διασποράς των παρατηρήσεων του πίνακα:

---

<sup>1</sup> Πραγματικές τιμές που αντλήσαμε από τις δημοσιευμένες Οικονομικές Καταστάσεις της RETAIL WORLD A.E. για τα καταστήματα Public



Διάγραμμα 4.8

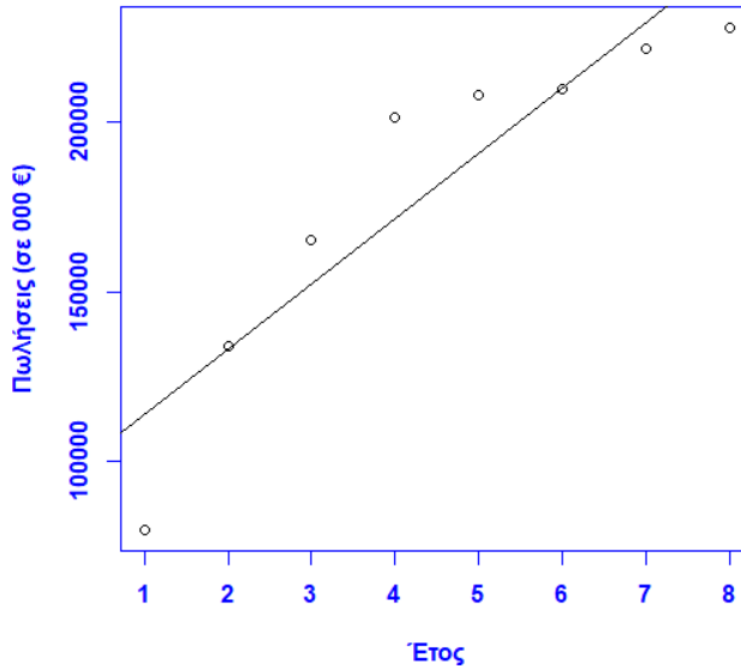
Η υπόθεση της ύπαρξης γραμμικής σχέσης μεταξύ της εξαρτημένης  $Y$  και της ανεξάρτητης  $X$  φαίνεται να ικανοποιείται. Εισάγουμε τις παρατηρήσεις στο περιβάλλον της R ώστε να προσαρμόσουμε ένα απλό γραμμικό μοντέλο παλινδρόμησης στα δεδομένα μας. Οι εκτιμήτριες ελαχίστων τετραγώνων που προκύπτουν είναι οι:

$$\hat{a} = 94,409 \quad \text{και} \quad \hat{b} = 19,255$$

Πλέον, ο ερευνητής μπορεί να εκτιμήσει τις πωλήσεις για τα επόμενα έτη χρησιμοποιώντας το απλό γραμμικό μοντέλο  $\hat{Y} = 94,409 + 19,255 \cdot X$ . Έτσι, η πρόβλεψη των πωλήσεων για το έτος 2020, όπως προκύπτει από την απλή γραμμική παλινδρόμηση είναι:  $Y_9 = 94,409 + 19,255 \cdot 9 = 267,704$  χιλιάδες €.

Αντίστοιχα, χρησιμοποιώντας τα δεδομένα των πρώτων έξι ετών θα μπορούσαμε να εκτιμήσουμε τις πωλήσεις για το έτος 2018 και να τις συγκρίναμε με τις πραγματικές πωλήσεις που σημειώθηκαν εκείνο το έτος. Ακόμη μεγαλύτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι προβλέψεις για μελλοντικές πωλήσεις. Ακριβώς όπως προβλέψαμε τις πωλήσεις για το έτος 2020, θα μπορούσαμε να προβλέψουμε τις πωλήσεις του έτους 2021, δηλαδή χρησιμοποιώντας την ίδια ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης που ενσωματώνει τα δεδομένα των πωλήσεων για τα έτη 2012 έως 2019. Όμως, είναι προφανές ότι όσο προβάλλουμε την ευθεία αυτή στο μέλλον, δηλαδή όσο απομακρυνόμαστε από τα πραγματικά δεδομένα, τόσο μικρότερη ακρίβεια έχει η πρόβλεψη μας.

Στο επόμενο διάγραμμα φαίνεται η ευθεία των ελαχίστων τετραγώνων για τα δεδομένα του πίνακα 4.10. Η ευθεία του μοντέλου φαίνεται καλή ενώ πράγματι, ο συντελεστής προσδιορισμού που αντιστοιχεί στο μοντέλο ισούται 0.8375, δηλαδή η μεταβλητότητα των πωλήσεων εξηγείται κατά 83.75% από την μεταβλητή Χ.



Διάγραμμα 4.9

#### 4.2.2. Πολλαπλή Γραμμική Παλινδρόμηση

Σε πολλές περιπτώσεις, η μεταβλητή ενδιαφέροντος επηρεάζεται από δύο ή περισσότερες ανεξάρτητες μεταβλητές. Προκειμένου να εξάγουμε μία καλή πρόβλεψη για την τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής, χρειάζεται να λάβουμε υπόψη όλες τις μεταβλητές που επηρεάζουν σημαντικά τη συμπεριφορά της. Έτσι, η τεχνική της απλής γραμμικής παλινδρόμησης που μόλις αναλύσαμε επεκτείνεται στην πολλαπλή γραμμική παλινδρόμηση.

Στην πραγματικότητα, στα περισσότερα προβλήματα Επιχειρησιακής Έρευνας εμφανίζονται πολλές ανεξάρτητες μεταβλητές. Για παράδειγμα, οι πωλήσεις ενός προϊόντος επηρεάζονται από πλήθος παραγόντων, όπως την τιμή του προϊόντος, τις δαπάνες για τη διαφήμιση και την προώθηση του, την

καταναλωτική δύναμη του κοινού στο οποίο απευθύνεται, τον ανταγωνισμό, τις συνθήκες της αγοράς κ.α. Ομοίως, η αποτελεσματικότητα της διαφήμισης εξαρτάται από το μέσο προβολής, τον προϋπολογισμό που χρησιμοποιήθηκε, τη συχνότητα προβολής κ.α. Έτσι, οι ερευνητές βρίσκονται καθημερινά αντιμέτωποι με προβλήματα όπου χρειάζεται να εφαρμόσουν την τεχνική της πολλαπλής παλινδρόμησης.

Ας θεωρήσουμε ότι έχουμε  $k$  ανεξάρτητες μεταβλητές που συνδέονται γραμμικά με την εξαρτημένη μεταβλητή. Τότε το μοντέλο της πολλαπλής γραμμικής παλινδρόμησης έχει την ακόλουθη μορφή:

$$Y = a + b_1X_1 + b_2X_2 + \dots + b_kX_k + \varepsilon \quad \text{ή} \quad E(Y|X_1, X_2, \dots, X_k) = a + b_1X_1 + b_2X_2 + \dots + b_kX_k,$$

όπου  $Y$  είναι η εξαρτημένη μεταβλητή,  $X_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$  οι ανεξάρτητες μεταβλητές,  $a, b_1, b_2, \dots, b_k$  είναι οι παράμετροι του μοντέλου ή αλλιώς οι συντελεστές παλινδρόμησης και  $\varepsilon$  το τυχαίο σφάλμα.

Για ένα σύνολο παρατηρήσεων της ακόλουθης μορφής  $(Y_1, X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1k}), (Y_2, X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2k}), \dots, (Y_n, X_{n1}, X_{n2}, \dots, X_{nk})$ , το μοντέλο γράφεται ισοδύναμα ως:

$$Y_i = a + b_1X_{i1} + b_2X_{i2} + \dots + b_kX_{ik} + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Στην πολλαπλή γραμμική παλινδρόμηση, η παράμετρος  $a$  εκφράζει τη μέση τιμή της  $Y$  όταν όλες οι μεταβλητές,  $X_j, j = 1, 2, \dots, k$  είναι μηδέν. Αντίστοιχα, η παράμετρος  $b_j$  εκφράζει την αναμενόμενη μεταβολή της ανεξάρτητης μεταβλητής  $Y$  όταν η  $X_j$  αυξηθεί κατά μία μονάδα και οι υπόλοιπες  $X_k$  για  $k \neq j$ , παραμείνουν σταθερές.

Σκοπός μας είναι να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους παλινδρόμησης έτσι ώστε να μπορούμε, για δεδομένες τιμές των ανεξάρτητων μεταβλητών, να προβλέψουμε την τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής, δηλαδή τη μεταβλητή ενδιαφέροντος. Έχοντας στη διάθεση μας ένα σύνολο δεδομένων όπως το προηγούμενο, δηλαδή  $n$  διανύσματα ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) που περιέχουν τις τιμές των ανεξάρτητων μεταβλητών μαζί με την αντίστοιχη τιμή της εξαρτημένης, μπορούμε να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους παλινδρόμησης. Ο πιο συνηθισμένος τρόπος είναι η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων.

Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων, κατά αντιστοιχία με τη διαδικασία που περιγράψαμε στην ενότητα 4.2.1, έγκειται στην ελαχιστοποίηση του αθροίσματος των τετραγώνων των σφαλμάτων πρόβλεψης, δηλαδή των  $e_i = Y_i - \hat{Y}_i$ , όπου  $\hat{Y}_i = \hat{a} + \hat{b}_1X_{i1} + \hat{b}_2X_{i2} + \dots + \hat{b}_kX_{ik}$ . Από αυτήν την ελαχιστοποίηση προκύπτουν οι τιμές  $\hat{a}, \hat{b}_1, \hat{b}_2, \dots, \hat{b}_k$ , δηλαδή οι εκτιμήσεις των παραμέτρων της παλινδρόμησης. Λόγω μεγάλου μεγέθους δείγματος και πολυπλοκότητας των πράξεων, η διαδικασία



αυτή γίνεται με τη βοήθεια είτε του Excel είτε κάποιου στατιστικού πακέτου όπως η R ή το Minitab. Έχοντας στη διάθεση μας τις εκτιμήσεις των παραμέτρων, μπορούμε για κάθε δεδομένη τιμή των ανεξάρτητων μεταβλητών να προβλέψουμε την τιμή της μεταβλητής ενδιαφέροντος από τη σχέση:

$$\hat{Y}_i = \hat{a} + \hat{b}_1 X_{i1} + \hat{b}_2 X_{i2} + \dots + \hat{b}_k X_{ik} .$$

Σημειώνεται ότι βασική προϋπόθεση για την εφαρμογή της μεθόδου είναι ότι τα τυχαία σφάλματα  $\varepsilon_i$  είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους και ακολουθούν κανονική κατανομή με μέση τιμή ίση με μηδέν ( $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ ).

### *Προβλήματα που προκύπτουν στο πολλαπλό μοντέλο παλινδρόμησης*

Όταν ενδιαφερόμαστε να εκτιμήσουμε την τιμή μίας μεταβλητής είναι σημαντικό να γνωρίζουμε όλους τους παράγοντες από τους οποίους αυτή επηρεάζεται και έπειτα να συλλέξουμε όσες περισσότερες πληροφορίες είναι εφικτό για τους παράγοντες αυτούς. Η πολλαπλή παλινδρόμηση μας επιτρέπει να αξιοποιήσουμε αυτή τη γνώση προκειμένου να εξάγουμε μία εγκυρότερη πρόβλεψη. Έτσι, η χρησιμότητα των πολλαπλών μοντέλων παλινδρόμησης είναι αδιαμφισβήτητη.

Ωστόσο, το γεγονός ότι έχουμε στη διάθεση μας στοιχεία από πολλές μεταβλητές που επηρεάζουν ή εξηγούν τη συμπεριφορά της μεταβλητής ενδιαφέροντος, δεν σημαίνει απαραίτητα ότι στο τελικό μοντέλο θα πρέπει να εισαχθούν όλες. Συχνά παρατηρούνται περιπτώσεις όπου ενώ μία ανεξάρτητη μεταβλητή είναι στατιστικά σημαντική στο απλό γραμμικό μοντέλο, χάνει τη σημαντικότητα της στο πολλαπλό γραμμικό μοντέλο.. Ο βασικός λόγος για τον οποίο φαίνεται να συμβαίνει αυτό είναι η πρόσθεση κάποιου συγχυτικού παράγοντα στο πολλαπλό γραμμικό μοντέλο. Συγχυτικός παράγοντας ονομάζεται μία μεταβλητή (έστω Z) η οποία έχει υψηλή συσχέτιση τόσο με την εξαρτημένη όσο και με κάποια άλλη ανεξάρτητη μεταβλητή, με αποτέλεσμα όταν η Z προστίθεται στο πολλαπλό μοντέλο να εξαλείφει τη σημαντικότητα της άλλης ανεξάρτητης μεταβλητής και να είναι αυτή που περιγράφει τη μεταβλητότητα της ανεξάρτητης μεταβλητής. Υπάρχουν πολλά κριτήρια επιλογής μεταβλητών στα πολλαπλά μοντέλα παλινδρόμησης. Βέβαια, στην Επιχειρησιακή Έρευνα οι ερευνητές πολλές φορές επιλέγουν τις μεταβλητές βασιζόμενοι στη γνώση και την εμπειρία τους.

Ακόμα ένα πρόβλημα που προκύπτει καθώς προστίθενται μεταβλητές στο μοντέλο είναι το γεγονός ότι για να εξάγουμε μία πρόβλεψη για το μέλλον θα πρέπει να γνωρίζουμε τις τιμές όλων των εξηγηματικών μεταβλητών που περιλαμβάνονται στο μοντέλο. Πολλές φορές, το κόστος για την απόκτηση της γνώσης των τιμών όλων των μεταβλητών είναι πολύ μεγάλο σε σχέση με την παραπάνω ακρίβεια που προσφέρει το πολλαπλό γραμμικό μοντέλο έναντι του απλού.

Τέλος, όπως αναφέραμε και για το απλό γραμμικό μοντέλο παλινδρόμησης, είναι προφανές ότι για να είναι έγκυρη η πρόβλεψη χρειάζεται να μην απομακρυνόμαστε από τα πραγματικά δεδομένα. Όταν προσπαθούμε να προβλέψουμε την τιμή της εξαρτημένης τιμής ενώ οι ανεξάρτητες μεταβλητές απέχουν σημαντικά από το εύρος τιμών των δεδομένων, η πρόβλεψη θα είναι επισφαλής.

#### Έλεγχος καλής Προσαρμογής του μοντέλου πολλαπλής παλινδρόμησης

Όπως και στο απλό γραμμικό μοντέλο, ένας τρόπος για να εξετάσουμε την καλή προσαρμογή του πολλαπλού γραμμικού μοντέλου είναι ο υπολογισμός του συντελεστή προσδιορισμού., δηλαδή της ποσότητας:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}$$

Ο συντελεστής αυτός παίρνει τιμές στο διάστημα  $[0,1]$  και εκφράζει το ποσοστό της διασποράς της μεταβλητής  $Y$  που εξηγείται με βάση το μοντέλο παλινδρόμησης. Όσο πιο κοντά στην μονάδα υπολογίζεται, τόσο καλύτερη προσαρμογή έχει το μοντέλο παλινδρόμησης. Κάθε φορά που προσθέτουμε μία ανεξάρτητη μεταβλητή στο μοντέλο, ο πολλαπλός συντελεστής προσδιορισμού αυξάνεται. Επειδή δεν θέλουμε να υπάρχει αυτή η εξάρτηση είναι προτιμότερο στην περίπτωση της πολλαπλής παλινδρόμησης να υπολογίζουμε τον διορθωμένο συντελεστή προσδιορισμού:

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2 / (n - k - 1)}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 / (n - 1)} = 1 - \frac{n - 1}{n - k - 1} R^2$$

Οι επόμενοι δύο στατιστικοί έλεγχοι αφορούν τους συντελεστές  $b_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$  των μεταβλητών ενός μοντέλου γραμμικής παλινδρόμησης που προσαρμόζουμε στα δεδομένα ενός προβλήματος και χρησιμοποιούνται για την επιλογή των στατιστικά σημαντικών μεταβλητών. Οι έλεγχοι βασίζονται στη διαπίστωση ότι, αν μία μεταβλητή δε συμβάλλει στη συνάρτηση παλινδρόμησης, τότε ο συντελεστής της συγκεκριμένης μεταβλητής στο μοντέλο είναι μηδέν.

Ο πρώτος έλεγχος είναι ο έλεγχος  $t$ . Εφόσον ισχύει η προϋπόθεση της Κανονικής κατανομής μπορούμε να εξετάσουμε την υπόθεση  $b_j = 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$  έναντι της υπόθεσης  $b_j \neq 0$ . Για κάθε παράμετρο κατασκευάζεται η ελεγχοσυνάρτηση  $t$  ως:

$$t_j = \frac{b_j}{S_{b_j}}, \quad j = 1, 2, \dots, k$$

η οποία ακολουθεί την κατανομή  $t_{n-k-1}$ , με  $n$  το πλήθος των παρατηρήσεων και  $k$  το πλήθος των ανεξάρτητων μεταβλητών. Η υπόθεση ότι μία παράμετρος μηδενίζεται απορρίπτεται όταν η  $p$ -τιμή του ελέγχου, δηλαδή η πιθανότητα  $P(|t_{n-k-1}| > t)$ , είναι μικρή, το οποίο σημαίνει ότι η αντίστοιχη μεταβλητή πρέπει να περιληφθεί στο μοντέλο καθώς παίζει σημαντικό ρόλο στην εκτίμηση της εξαρτημένης. Οι ανεξάρτητες μεταβλητές των οποίων το στατιστικό ελέγχου  $t$  λαμβάνει μικρή τιμή, άρα η  $p$ -τιμή πρόκειται να είναι μεγάλη, μπορούν να αφαιρεθούν από το μοντέλο παλινδρόμησης, χωρίς να μειωθεί αισθητά ο συντελεστής προσδιορισμού ή να αυξηθεί σημαντικά το τυπικό σφάλμα της παλινδρόμησης. Πρέπει όμως να σημειώσουμε ότι οι έλεγχοι  $t$  εξετάζουν κάθε ένα συντελεστή ξεχωριστά, υπό τη συνθήκη ότι οι υπόλοιπες  $k - 1$  μεταβλητές συμπεριλαμβάνονται στο μοντέλο.

Τέλος, ο έλεγχος  $F$  ελέγχει την ειδική περίπτωση που όλες οι παράμετροι είναι μηδέν έναντι της υπόθεσης ότι τουλάχιστον μία από αυτές είναι διάφορη του μηδενός. Προφανώς, η σπουδαιότητα του ελέγχου  $F$  είναι ότι εύκολα μπορεί να γενικευτεί με στόχο τον ταυτόχρονο έλεγχο σε ότι αφορά τη στατιστική σημασία  $k$  μεταβλητών. Αν η αρχική υπόθεση απορριφθεί, δηλαδή τουλάχιστον μία από τις παραμέτρους δεν είναι μηδενική, τίθεται το θέμα ποιες μεταβλητές έχουν  $b_j \neq 0$  ώστε να περιληφθούν στο μοντέλο παλινδρόμησης.

---

#### Παράδειγμα 4.7

---

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι πωλήσεις και τα έξοδα διαφήμισης και προώθησης προϊόντων της ΜΕΒΓΑΛ Α.Ε. για τα έτη 2011 έως 2020. Οι πωλήσεις<sup>2</sup> για κάθε έτος καταγράφονται από την 1<sup>η</sup> Ιανουαρίου έως την 31<sup>η</sup> Δεκεμβρίου.

---

<sup>2</sup>Πραγματικές τιμές Πωλήσεων και Εξόδων Διαφημιστικών Δαπανών που αντλήσαμε από τις δημοσιευμένες Οικονομικές Καταστάσεις της ΜΕΒΓΑΛ Α.Ε.

Έτος	Διαφημιστικές Δαπάνες (σε χιλιάδες ευρώ)	Πωλήσεις (σε χιλιάδες ευρώ)
1	15,093	185,768
2	17,964	172,988
3	7,590	143,334
4	5,278	125,704
5	2,436	110,285
6	2,907	109,599
7	1,938	107,368
8	2,403	111,794
9	2,691	113,667
10	2,708	116,847

Πίνακας 4.11

Προσαρμόζουμε στα δεδομένα το μοντέλο πολλαπλής γραμμικής παλινδρόμησης με δύο ανεξάρτητες μεταβλητές, το έτος και τις διαφημιστικές δαπάνες της εταιρείας, και εξαρτημένη μεταβλητή τις πωλήσεις. Για το σκοπό αυτό θα συμβολίζουμε ως  $X_1$  το έτος, ως  $X_2$  τις διαφημιστικές δαπάνες και ως  $Y$  τις πωλήσεις.

Οι τιμές των παραμέτρων που λαμβάνουμε μετά την προσαρμογή της ευθείας των ελαχίστων τετραγώνων, με τις απαραίτητες εντολές στην R, είναι:  $\hat{a} = 106,929.089$ ,  $\hat{b}_1 = -761.534$ ,  $\hat{b}_2 = 4.425$ .

Επομένως, το μοντέλο παλινδρόμησης είναι το εξής:

$$\hat{Y} = 106,929.089 - 761.534 \cdot X_1 + 4.425 \cdot X_2$$

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να εξαγάγουμε μία πρόβλεψη για τις πωλήσεις του τρέχοντος έτους δεδομένου ότι ο προϋπολογισμός για τη διαφήμιση των προϊόντων της εταιρείας αυξήθηκε κατά 200,000€. Η εκτίμηση των πωλήσεων, με βάση το παραπάνω μοντέλο πρόβλεψης είναι 111,420,115.0 €, αφού:

$$\hat{Y}_{11} = 106,929.089 - 761.534 \cdot 11 + 4.425 \cdot 2,908 = 111,420.115 \text{ (σε 000 €)}$$

## ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Από την ανάλυση διασποράς κατά την προσαρμογή του μοντέλου, προκύπτει ότι η  $p$ -τιμή του ελέγχου  $t$  για την  $b_1$  δεν είναι αρκετά μικρή ( $p$  – value = 0.611996) ώστε να απορρίψουμε την υπόθεση ότι ο συντελεστής  $b_1$  είναι στατιστικά διάφορος του μηδενός. Έτσι, στην κλασική ανάλυση παλινδρόμησης θα προσαρμόζαμε ξανά το μοντέλο χωρίς την μεταβλητή  $X_1$  και θα ελέγχαμε την μεταβολή της σημαντικότητας της παλινδρόμησης (έλεγχος  $F$ ) και του συντελεστή προσδιορισμού, για να συγκρίνουμε την προσαρμογή των δύο μοντέλων. Ωστόσο, καθώς στις περισσότερες εφαρμογές της πρόβλεψης στην Επιχειρησιακή Έρευνα, ενδιαφερόμαστε να εκτιμήσουμε τιμές για τον επόμενο μήνα, τρίμηνο, έτος κ.α., δεν θα μπορούσαμε να παραλείψουμε από το μοντέλο της παλινδρόμησης τη μεταβλητή που αντιστοιχεί στην χρονική περίοδο, στην περίπτωση μας τη μεταβλητή  $X_1$ . Επιπλέον, τόσο ο συντελεστής προσδιορισμού τόσο και η  $p$ -τιμή του ελέγχου  $F$ , δείχνουν ότι το μοντέλο έχει πολύ καλή προσαρμογή στα δεδομένα, όπως φαίνεται παρακάτω στο output της R.

```
> summary(lm(y~x1+x2))

Call:
lm(formula = y ~ x1 + x2)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-11904.9  -3412.8   -604.3    4250.2   12817.1

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  1.069e+05  1.213e+04   8.813 4.89e-05 ***
x1          -7.615e+02  1.435e+03  -0.531 0.611996
x2           4.425e+00  7.496e-01   5.903 0.000598 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 7753 on 7 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9419,    Adjusted R-squared:  0.9253
F-statistic: 56.74 on 2 and 7 DF,  p-value: 4.727e-05
```

Εικόνα 4.2: Προσαρμογή του πολλαπλού γραμμικού μοντέλου στο περιβάλλον της R

## 5. Σφάλματα κατά την Πρόβλεψη

Όπως έχουμε πει, δεν υπάρχει τέλεια πρόβλεψη. Κάθε προβλεπόμενη τιμή εμπεριέχει ένα σφάλμα. Τα σφάλματα όμως συνεπάγονται κόστος, ειδικότερα όταν οι τιμές τους είναι μεγάλες. Για τον λόγο αυτό ο ερευνητής, πρέπει διαρκώς να προσπαθεί να βελτιώσει την ακρίβεια των προβλέψεων του.

Η αποτελεσματικότητα μίας πρόβλεψης εκτιμάται με δύο τρόπους. Ο πρώτος τρόπος έγκειται στην εξαγωγή της πρόβλεψης χρησιμοποιώντας πολλές διαφορετικές μεθόδους και συγκρίνοντας τα αποτελέσματα μεταξύ τους. Ο δεύτερος τρόπος συνίσταται στην πρόβλεψη των τιμών μίας μεταβλητής για παλαιότερες περιόδους, για τις οποίες γνωρίζουμε τις πραγματικές τιμές που προέκυψαν, και στην μετέπειτα σύγκριση της εκτίμησης που δίνει η μέθοδος για την περίοδο εκείνη με την πραγματική τιμή. Δηλαδή, αν έχουμε τα δεδομένα των πωλήσεων ενός έτους για μία επιχείρηση, μπορούμε να προσαρμόσουμε ένα μοντέλο πρόβλεψης με βάση το δείγμα των έξι πρώτων μηνών και έπειτα να υπολογίσουμε τις εκτιμήσεις του μοντέλου για τους υπόλοιπους έξι μήνες. Έπειτα θα συγκρίνουμε τις τιμές του πρώτου και του δεύτερου εξαμήνου και παρατηρούμε οι εκτιμήσεις είναι καλές.

Οι συγκρίσεις που αναφέρονται παραπάνω πραγματοποιούνται με τη βοήθεια των μέτρων που θα ορίσουμε σε αυτό το κεφάλαιο. Τα πιο συνηθισμένα μέτρα αποτελεσματικότητας της πρόβλεψης είναι η μέση απόλυτη απόκλιση η οποία συμβολίζεται ως MAD (Mean Absolute Deviation), το μέσο τετραγωνικό σφάλμα που συμβολίζεται ως MSE (Mean Square Error) και το μέσο ποσοστιαίο σφάλμα, γνωστό ως MAPE (Mean Average Percentage Error). Έστω ότι διαθέτουμε δείγμα με τις πραγματικές τιμές μίας μεταβλητής για  $n$  περιόδους. Τότε, οι τιμές των μέτρων υπολογίζονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$MAD = \frac{\sum_{t=1}^n |e_t|}{n} \quad (5.1),$$

$$MSE = \frac{\sum_{t=1}^n e_t^2}{n} \quad (5.2),$$

$$MAPE = \frac{1}{n} \cdot \sum_{t=1}^n \frac{e_t}{a_t} \quad (5.3),$$

όπου:

$n$  = πλήθος περιόδων

$X_t$  = η πραγματική τιμή που προέκυψε κατά την περίοδο  $t, t = 1, 2, \dots, n$

$F_t$  = η πρόβλεψη για την περίοδο  $t$  και

$e_t = F_t - X_t$  = το σφάλμα της πρόβλεψης για την περίοδο  $t$

Η τιμή του MAPE υπολογίζεται σε ποσοστό ενώ οι τιμές των MAD και MSE επηρεάζονται από τα τις μονάδες μέτρησης. Φυσικά, επιδιώκουμε τα παραπάνω μέτρα να λαμβάνουν μικρές τιμές, εφόσον αναφερόμαστε σε σφάλματα.

Στην πράξη τα μέτρα MAD και MSE χρησιμοποιούνται συχνά για την επιλογή της βέλτιστης σταθεράς εξομάλυνσης. Δηλαδή, εφαρμόζουμε μία από τις μεθόδους εκθετικής εξομάλυνσης για διάφορες τιμές των σταθερών εξομάλυνσης. Έπειτα υπολογίζουμε την τιμή του MAD ή του MSE για κάθε μία εφαρμογή της μεθόδου και διαλέγουμε εκείνη που αντιστοιχεί στην μικρότερη τιμή (του MAD ή του MSE) που προέκυψε.

## 6. Μελέτη Περίπτωσης

Εξετάζουμε την περίπτωση ενός Εκδοτικού Οίκου Πανεπιστημιακών Συγγραμμάτων που εκτυπώνει πάνω από 25 τίτλους διαφορετικών βιβλίων σε διάφορους τομείς της επιστήμης. Σε χρονικό ορίζοντα 5ετίας γνωρίζουμε το πλήθος των πανεπιστημιακών συγγραμμάτων που δίνονται στους φοιτητές τα εαρινά και τα χειμερινά εξάμηνα. Έχουμε διαπιστώσει ότι στατιστικά, τα βιβλία που πωλούνται το χειμερινό εξάμηνο αντιπροσωπεύουν περίπου τα 2/3 των βιβλίων κάθε ακαδημαϊκού έτους. Τα δεδομένα πάνω στα οποία θα εργαστούμε είναι τα εξής:

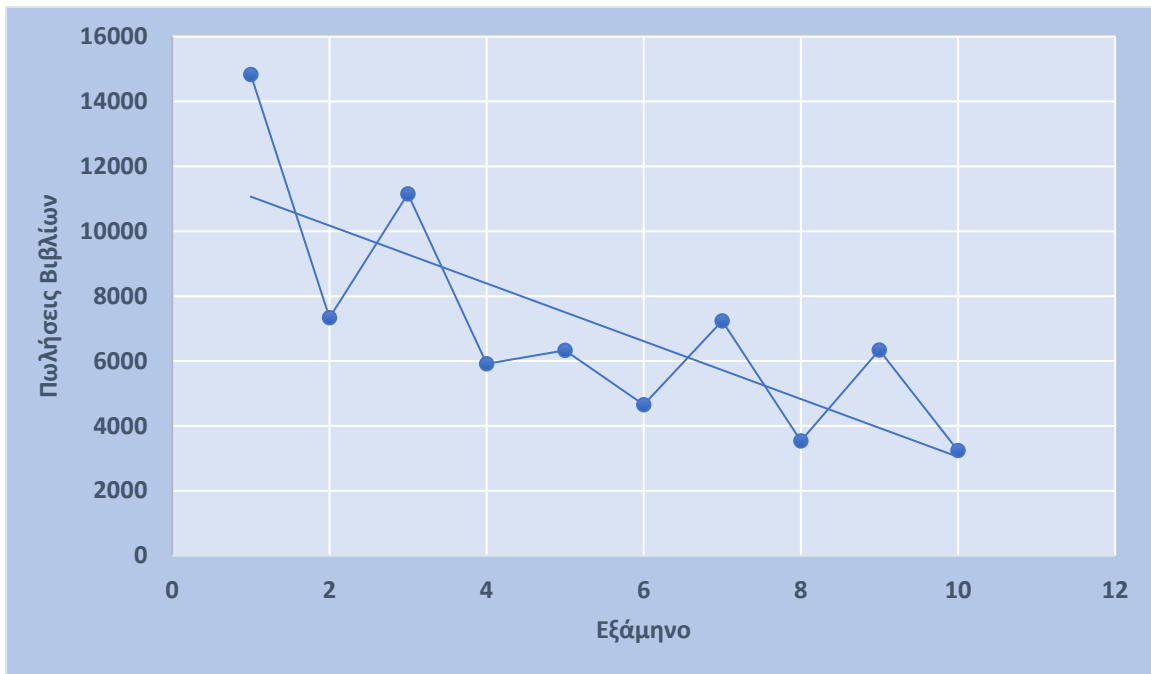
Ακαδημαϊκό Έτος	Εξάμηνο	Πωλήσεις (μονάδες βιβλίων)
2020-2021	Χειμερινό	14,830
	Εαρινό	7,335
2021-2022	Χειμερινό	11,150
	Εαρινό	5,910
2022-2023	Χειμερινό	9,330
	Εαρινό	4,650
2023-2024	Χειμερινό	7,240
	Εαρινό	3,540
2024-2025	Χειμερινό	6,340
	Εαρινό	3,236

Πίνακας 6.1: Πωλήσεις πανεπιστημιακών συγγραμμάτων ανά εξάμηνο ακαδημαϊκού έτους

Επιθυμούμε, αξιοποιώντας τα δεδομένα που διαθέτουμε, να εξάγουμε μία πρόβλεψη για τις πωλήσεις του χειμερινού εξαμήνου του ακαδημαϊκού έτους 2025-2026. Προκειμένου να εξάγουμε μία αξιόπιστη πρόβλεψη θα επιχειρήσουμε να εφαρμόσουμε τόσο μεθόδους πρόβλεψης εκθετικής εξομάλυνσης όσο και αιτιακές μεθόδους πρόβλεψης.

Αρχικά κατασκευάζουμε το διάγραμμα διασποράς των πωλήσεων σε σχέση με τα εξάμηνα των 5 ακαδημαϊκών ετών, προκειμένου να διακρίνουμε ευκολότερα τη μορφή ή την πιθανή ύπαρξη κάποιας ιδιαίτερης συμπεριφοράς των παρατηρήσεων.





Διάγραμμα 6.1: Πωλήσεις βιβλίων συναρτήσει των εξαμήνων της πενταετίας με εμφάνιση της γραμμής τάσης

Πράγματι, από το διάγραμμα διασποράς μπορούμε να διακρίνουμε την ύπαρξη μίας φθίνουσας γραμμικής τάσης (η οποία μάλιστα έχει σχεδιαστεί στο Διάγραμμα 6.1) αλλά και την ύπαρξη εποχικότητας. Έτσι, θέλοντας να εφαρμόσουμε κάποια μέθοδο εκθετικής εξομάλυνσης, από αυτές που αναπτύσσονται στην Ενότητα 4.1, επιλέγουμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο εκθετικής εξομάλυνσης με προσαρμογή στην τάση και την εποχικότητα, ή αλλιώς τη μέθοδο Winters.

Για την εφαρμογή της μεθόδου χρειάζεται αρχικά να ορίσουμε την αρχική τιμή της εξομαλυνθείσας πρόβλεψης ( $L_0$ ) και την αρχική εκτίμηση της γραμμικής τάσης ( $T_0$ ). Επίσης χρειάζεται να επιλέξουμε την τιμή των συντελεστών εξομάλυνσης ( $\alpha, \beta, \gamma$ ), καθώς και να παραθέσουμε τις αρχικές τιμών των δεικτών εποχικότητας για το χειμερινό ( $E_{1,0}$ ) και το εαρινό εξάμηνο ( $E_{2,0}$ ). Σημειώνεται ότι όλοι οι συμβολισμοί είναι σύμφωνοι με τους συμβολισμούς που δίνονται στην ενότητα 4.1.7.

Για τα αριθμητικά δεδομένα που διαθέτουμε αποφασίσαμε να ορίσουμε τις τιμές:

$$L_0 = 11,000$$

$$T_0 = 1,000$$

$$\alpha = \beta = \gamma = 0.2$$

$$E_{1,0} = 2.4$$

$$E_{2,0} = 1.2$$

Έχοντας ορίσει τις παραπάνω τιμές, μπορούμε πλέον να εφαρμόσουμε τη μέθοδο εκθετικής εξομάλυνσης με προσαρμογή στην τάση και την εποχικότητα, με σκοπό να προβλέψουμε τις πωλήσεις βιβλίων το χειμερινό εξάμηνο του ακαδημαϊκού έτους 2025-2026.

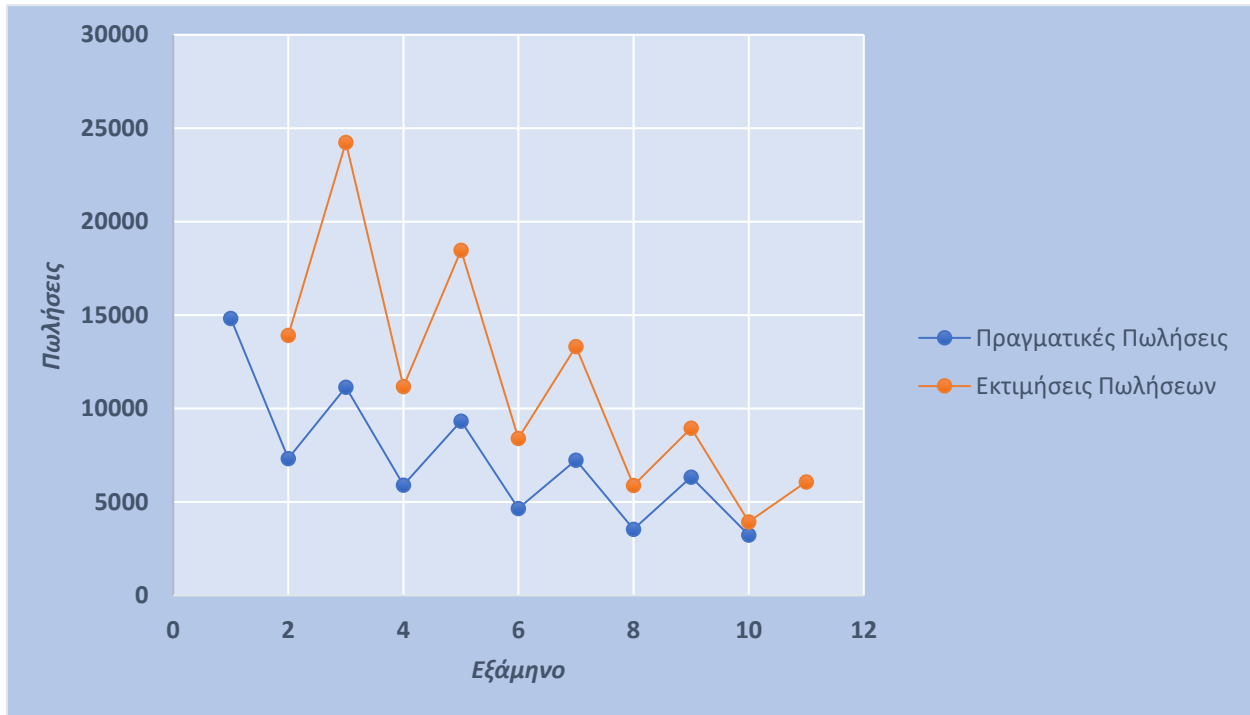
Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.5), (4.6), (4.7) και εισάγοντας τις τιμές σε ένα υπολογιστικό φύλλο του Excel, συμπληρώνουμε τον Πίνακα 6.2, στην τελευταία στήλη του οποίου βρίσκονται οι προβλέψεις της μεθόδου για κάθε εξάμηνο.

<i>Εξάμηνο</i>	<i>Πωλήσεις</i>	<i>L<sub>t</sub></i>	<i>T<sub>t</sub></i>	<i>E<sub>t</sub></i>	<i>F<sub>t</sub></i>
<b>Χειμερινό 2020-2021</b>	14,830	10,835.833	767.167	2.194	-
<b>Εαρινό 2020-2021</b>	7,335	10,504.9	547.547	1.099	13,923.6
<b>Χειμερινό 2021-2022</b>	11,150	9,858.495	308.756	1.981	24,245.989
<b>Εαρινό 2021-2022</b>	5,910	9,208.689	117.044	1.008	11,180.409
<b>Χειμερινό 2022-2023</b>	9,330	8,402.4508	-67.613	1.807	18,475.937
<b>Εαρινό 2022-2023</b>	4,650	7,590.419	-216.496	0.929	8,402.153
<b>Χειμερινό 2023-2024</b>	7,240	6,700.458	-351.189	1.662	13,324.830
<b>Εαρινό 2023-2024</b>	3,540	5,841.537	-452.736	0.864	5,898.368
<b>Χειμερινό 2024-2025</b>	6,340	5,074.106	-515.675	1.579	8,954.686
<b>Εαρινό 2024-2025</b>	3,236	4,395.483	-548.264	0.839	3,940.254
<b>Χειμερινό 2025-2026</b>	-	-	-	-	6,075.808

Πίνακας 6.2: Αποτελέσματα της Μεθόδου Winters

Στην τελευταία γραμμή του Πίνακα έχει υπολογιστεί η εκτίμηση της μεθόδου Winters. Δηλαδή, λαμβάνοντας υπόψη την τάση και την εποχικότητα των παρατηρήσεων του Πίνακα 6.1, προβλέπεται ότι

κατά το χειμερινό εξάμηνο του ακαδημαϊκού έτους 2025-2026 θα πωληθούν 6,075.808 ακαδημαϊκά συγγράμματα.

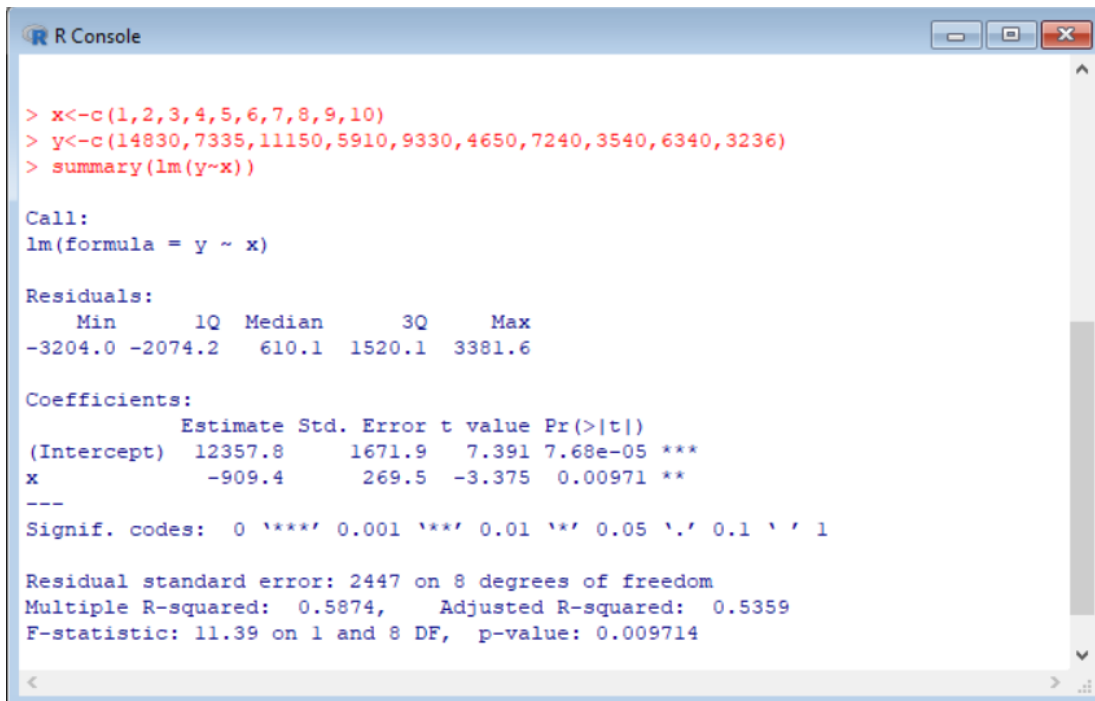


Διάγραμμα 6.2: Πωλήσεις και πρόβλεψη με χρήση εκθετικής εξομάλυνσης με ενσωμάτωση της γραμμικής τάσης και με τη χρήση εποχικών δεικτών

Παρατηρώντας το Διάγραμμα 6.2 είναι φανερό ότι οι προβλέψεις της μεθόδου αρχικά αποκλίνουν αρκετά από τις πραγματικές πωλήσεις, ιδίως κατά τα χειμερινά εξάμηνα. Όμως, με το πέρασ των εξαμήνων, οι εκτιμώμενες πωλήσεις τείνουν να πλησιάσουν τις πραγματικές πωλήσεις. Συγκεκριμένα, για τα εαρινά εξάμηνα των ακαδημαϊκών ετών 2023-2024 και 2024-2025 οι προβλέψεις είναι εξαιρετικά καλές. Το γεγονός όμως ότι η επιθυμητή πρόβλεψη αφορά χειμερινό εξάμηνο, ενώ η μέθοδος δείχνει να μην δίνει αρκετά καλές εκτιμήσεις για τα χειμερινά εξάμηνα, καθιστά την πρόβλεψη επισφαλής.

Επιχειρούμε να εξάγουμε την πρόβλεψη για το ίδιο εξάμηνο, χρησιμοποιώντας όμως τη μέθοδο της απλής γραμμικής παλινδρόμησης. Όπως είναι προφανές, χρησιμοποιούμε ως ανεξάρτητη μεταβλητή (X) το εξάμηνο αναφοράς και ως εξαρτημένη μεταβλητή (Y) τις πωλήσεις σε μονάδες βιβλίων. Για τον σκοπό αυτό, εισάγουμε τα δεδομένα του Πίνακα 6.1 στην R και εφόσον γνωρίζουμε ήδη από το Διάγραμμα 6.1. ότι η υπόθεση της γραμμικότητας ισχύει, προσαρμόζουμε σε αυτά ένα μοντέλο απλής γραμμικής παλινδρόμησης.

Οι εντολές που χρησιμοποιήθηκαν για την προσαρμογή του μοντέλου και το output της R φαίνεται στην επόμενη εικόνα:



```
> x<-c(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10)
> y<-c(14830,7335,11150,5910,9330,4650,7240,3540,6340,3236)
> summary(lm(y~x))

Call:
lm(formula = y ~ x)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-3204.0 -2074.2   610.1  1520.1  3381.6

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 12357.8     1671.9   7.391 7.68e-05 ***
x           -909.4       269.5  -3.375 0.00971 **
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 2447 on 8 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.5874,    Adjusted R-squared:  0.5359
F-statistic: 11.39 on 1 and 8 DF,  p-value: 0.009714
```

Εικόνα 6.1: Προσαρμογή απλού γραμμικού μοντέλου στην R για τις εξαμηνιαίες πωλήσεις συγγραμμάτων

Όπως φαίνεται στην Εικόνα 6.1, οι εκτιμήτριες των ελαχίστων τετραγώνων για τα δεδομένα του δείγματος είναι:

$$\hat{a} = 12,357.8 \text{ και } \hat{b} = -909.4$$

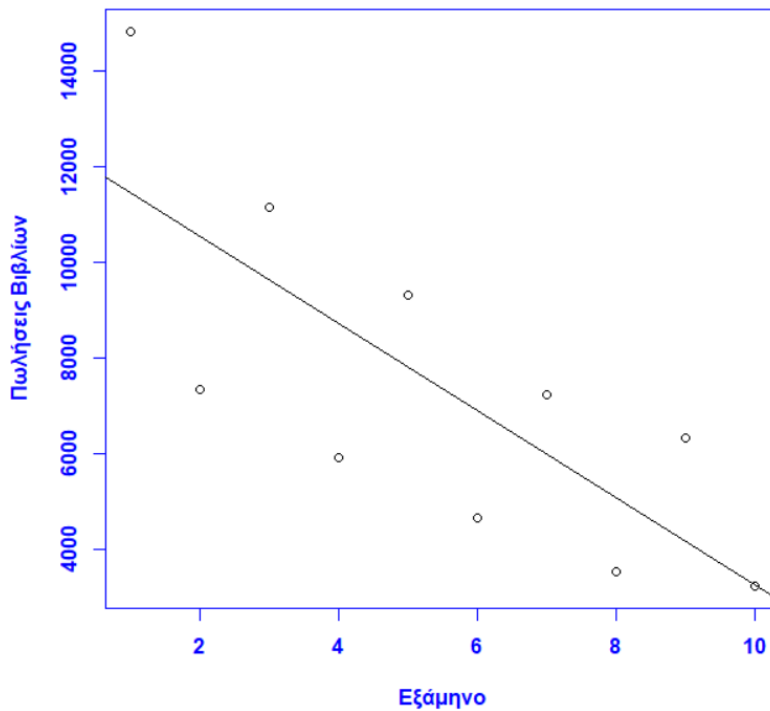
Επομένως η ευθεία της απλής γραμμικής παλινδρόμησης είναι η ακόλουθη:

$$Y = 12,357.8 - 909.4 \cdot X \quad (6.1)$$

Καλώντας στην R διαδοχικά τις εντολές plot() και abline() βλέπουμε την προσαρμογή της ευθείας της παλινδρόμησης στα δεδομένα μας (Διάγραμμα 6.3).

Επομένως, οι αναμενόμενες πωλήσεις πανεπιστημιακών συγγραμμάτων που προκύπτουν από τη μέθοδο της απλής γραμμικής παλινδρόμησης για το χειμερινό εξάμηνο του ακαδημαϊκού έτους 2025-2026 είναι:

$$\hat{Y}_{11} = 12,357.8 - 909.4 \cdot 11 = 2,354.4 \text{ μονάδες βιβλίων.}$$



Διάγραμμα 6.3: Ευθεία απλής γραμμικής παλινδρόμησης για το μοντέλο που προσαρμόζεται στο σύνολο των δεδομένων

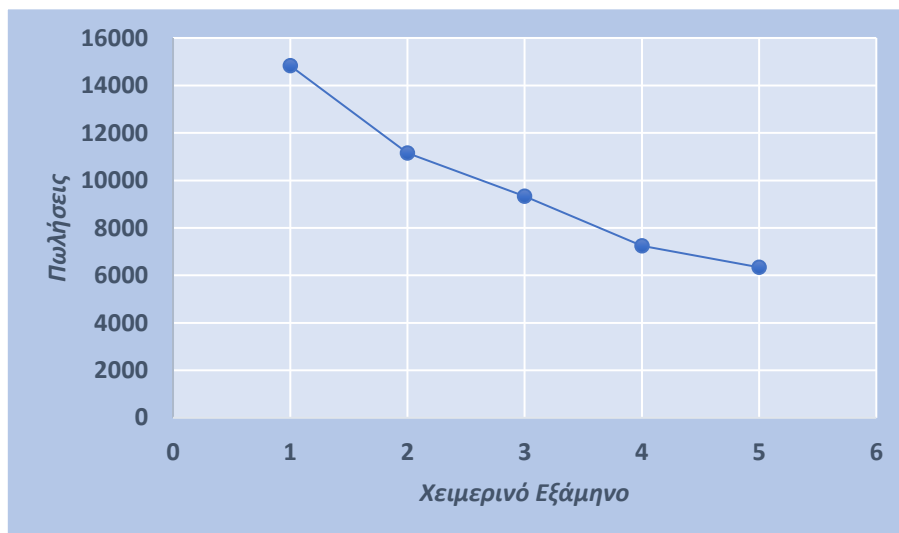
Λόγω της κατανομής των πραγματικών πωλήσεων κατά τη διάρκεια ενός ακαδημαϊκού έτους, δηλαδή λόγω του γεγονότος ότι οι χειμερινές πωλήσεις αντιπροσωπεύουν περίπου τα 2/3 των πωλήσεων με αποτέλεσμα να υπάρχει σαφής διαφοροποίηση μεταξύ των τιμών που αντιστοιχούν στα χειμερινά και των τιμών που αντιστοιχούν στα εαρινά εξάμηνα, αποφασίζουμε να χωρίσουμε τα δεδομένα μας σε δύο υποσύνολα. Κατασκευάζουμε λοιπόν έναν πίνακα για τα δεδομένα των χειμερινών πωλήσεων και ένα ξεχωριστό πίνακα για τα δεδομένα που αφορούν τα εαρινά εξάμηνα, όπως φαίνεται στη συνέχεια:

Χειμερινό Ακαδημαϊκό Έτος	Πωλήσεις (μονάδες βιβλίων)
2020-2021	14,830
2021-2022	11,150
2022-2023	9,330
2023-2024	7,240
2024-2025	6,340

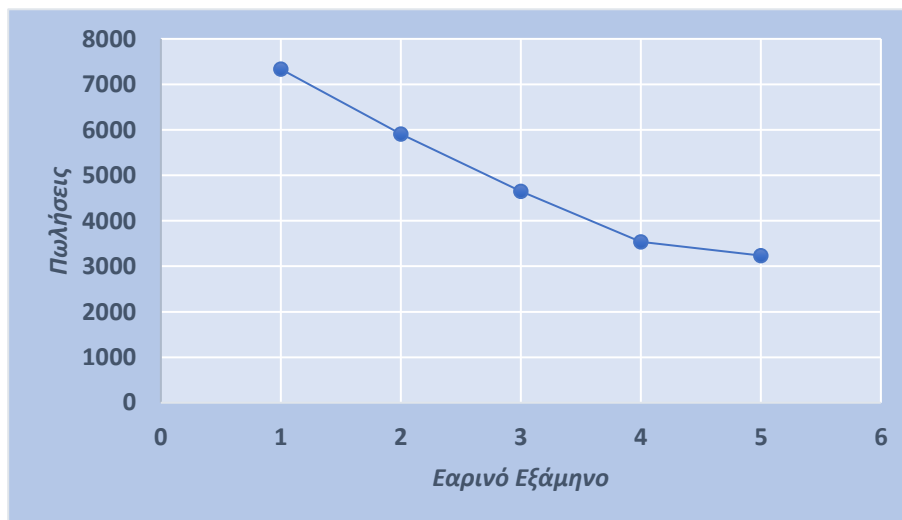
Πίνακας 6.3: Πωλήσεις βιβλίων κατά τα χειμερινά εξάμηνα

Εαρινό Ακαδημαϊκό Έτος	Πωλήσεις (μονάδες βιβλίων)
2020-2021	7,335
2021-2022	5,910
2022-2023	4,650
2023-2024	3,540
2024-2025	3,236

Πίνακας 6.4: Πωλήσεις βιβλίων κατά τα εαρινά εξάμηνα



Διάγραμμα 6.2: Πωλήσεις βιβλίων κατά τα χειμερινά εξάμηνα



Διάγραμμα 6.3: Πωλήσεις βιβλίων κατά τα εαρινά εξάμηνα

Δεδομένου ότι επιθυμούμε να εξάγουμε μία πρόβλεψη χειμερινού εξαμήνου, θα επιχειρήσουμε να προσαρμόσουμε ένα απλό γραμμικό μοντέλο παλινδρόμησης (αφού όπως φαίνεται και από το Διάγραμμα 6.4 η υπόθεση της γραμμικότητας συνεχίζει να ικανοποιείται), χρησιμοποιώντας αυτή τη φορά μόνο τις παρατηρήσεις που εμφανίζονται στον Πίνακα 6.3. Ορίζουμε εκ νέου ως  $Y$  τις πωλήσεις των χειμερινών εξαμήνων, ως  $X$  τα χειμερινά εξάμηνα, εισάγουμε τις αντίστοιχες παρατηρήσεις στην R και με τις εντολές που φαίνονται στην Εικόνα 6.2 προσαρμόζουμε σε αυτά ένα απλό γραμμικό μοντέλο. Στην Εικόνα 6.2 φαίνεται επίσης το output για τις εντολές αυτές.

```

R Console
> x<-c(1,2,3,4,5)
> y<-c(14830,11150,9330,7240,6340)
> summary(lm(y~x))

Call:
lm(formula = y ~ x)

Residuals:
    1     2     3     4     5 
 874 -717 -448 -449  740 

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  16045.0     903.8   17.752  0.00039 ***
x            -2089.0     272.5   -7.666  0.00461 **
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 861.8 on 3 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9514,    Adjusted R-squared:  0.9352 
F-statistic: 58.76 on 1 and 3 DF,  p-value: 0.004611

```

Εικόνα 6.2: Προσαρμογή απλού γραμμικού μοντέλου στην R για τις εξαμηνιαίες χειμερινές πωλήσεις συγγραμμάτων

Όπως φαίνεται, λαμβάνοντας υπόψη μόνο τις πωλήσεις για τα χειμερινά εξάμηνα, οι εκτιμήτριες ελαχίστων τετραγώνων για τους συντελεστές της παλινδρόμησης είναι  $\hat{a} = 16045.0$  και  $\hat{b} = -2089.0$ , ενώ το μοντέλο της απλής γραμμικής παλινδρόμησης γίνεται:

$$Y = 16,045.0 - 2,089.0 \cdot X \quad (6.2)$$

Η εκτίμηση των πωλήσεων για το χειμερινό εξάμηνο του ακαδημαϊκού έτους 2025-2026, δηλαδή για  $X = 6$ , είναι:

$$Y_6 = 16,045.0 - 2,089.0 \cdot 6 = 3,511.0 \text{ μονάδες βιβλίων}$$

---

## Συμπεράσματα

---

Αποδεικνύεται ότι η εκτίμηση που προκύπτει από το μοντέλο 6.2, δηλαδή από το μοντέλο που προσαρμόστηκε για τις χειμερινές πωλήσεις, διαφέρει από εκείνη που προέκυψε από το μοντέλο 6.1, δηλαδή από το μοντέλο παλινδρόμησης που προσαρμόστηκε με βάση όλες τις πωλήσεις, ανεξαρτήτως εξαμήνου. Δημιουργείται λοιπόν το ερώτημα ποια από τις δύο προβλέψεις είναι καλύτερη.

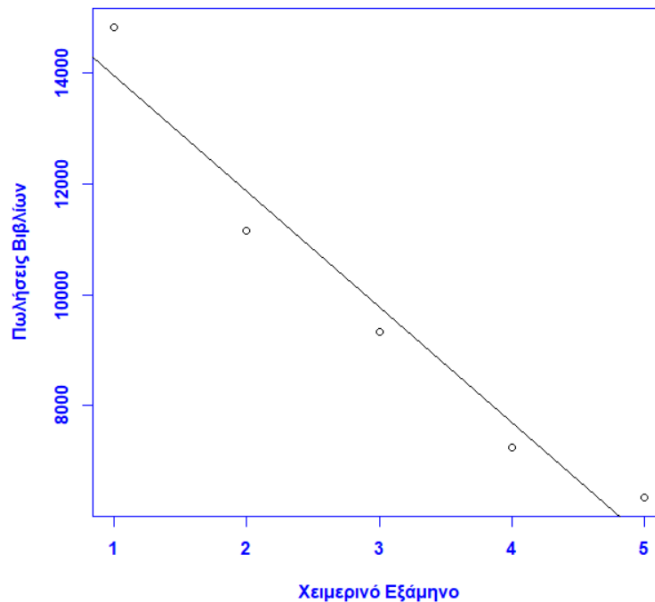
Όπως είπαμε, παρά την γενική μεταβολή των τιμών των πωλήσεων, η αναλογία χειμερινών και εαρινών πωλήσεων παραμένει σταθερή, αφού κάθε ακαδημαϊκό έτος παρατηρείται ότι οι πωλήσεις κατά τα χειμερινά εξάμηνα αποτελούν περίπου τα 2/3 των συνολικών πωλήσεων. Έτσι, αναμένουμε η αναλογία αυτή να διατηρηθεί και κατά το ακαδημαϊκό έτος 2025-2026 οπότε το εύρος των τιμών για τις χειμερινές και τις εαρινές πωλήσεις αντίστοιχα να παραμείνει σταθερό. Δηλαδή, αναμένεται οι πωλήσεις για το χειμερινό εξάμηνο του έτους 2025-2026 να πλησιάζουν περισσότερο τις τιμές των προηγούμενων χειμερινών εξαμήνων. Έτσι, υποθέτουμε ότι το μοντέλο που περιέχει πληροφορίες μόνο για τις χειμερινές πωλήσεις θα δώσει μία ακριβέστερη εκτίμηση. Αντίθετα, συμπεριλαμβάνοντας στο μοντέλο όλες τις τιμές των πωλήσεων, το εύρος τιμών αυξάνεται, και η τιμή της πρόβλεψης εξαρτάται από επιπλέον παρατηρήσεις που γνωρίζουμε ότι παρουσιάζουν διαφορετική συμπεριφορά από την παρατήρηση (πωλήσεις χειμερινού εξαμήνου 2025-2026) που επιθυμούμε να προβλέψουμε.

Ακόμη μία ένδειξη που ενισχύει την πεποίθησή μας ότι το δεύτερο μοντέλο που προσαρμόσαμε (μοντέλο 6.2) δίνει καλύτερες προβλέψεις, είναι η τιμή του συντελεστή προσδιορισμού και το στατιστικό ελέγχου F που φαίνονται στις Εικόνες 6.1. και 6.2. Όπως βλέπουμε στην Εικόνα 6.1, ο συντελεστής προσδιορισμού του μοντέλου 6.1 είναι  $R^2 = 0.5874$ , δηλαδή μόλις το 58,74% της διασποράς της μεταβλητής X (πωλήσεις) εξηγείται από την μεταβλητή X (εξάμηνο). Η αξιοποίηση μόνο των δεδομένων που αφορούν τα χειμερινά εξάμηνα αύξησε τον συντελεστή προσδιορισμού κατά 36.41%, αφού στην Εικόνα 6.2, φαίνεται ότι ο συντελεστής προσδιορισμού για το δεύτερο μοντέλο παλινδρόμησης είναι  $R^2 = 0.9515$ . Η δεύτερη τιμή του συντελεστή προσδιορισμού είναι σαφώς καλύτερη καθώς πλησιάζει αρκετά τη μονάδα, οπότε η συμπεριφορά της μεταβλητής Y εξηγείται σε μεγάλο βαθμό, (κατά 95.15%) από την ανεξάρτητη μεταβλητή X. Ακόμη το στατιστικό ελέγχου F (F-statistic) για το πρώτο μοντέλο ισούται με 11.39 (Εικόνα 6.1), ενώ το στατιστικό ελέγχου F για το δεύτερο μοντέλο παλινδρόμησης αυξήθηκε σε 58.76. Επομένως, οι τιμές του συντελεστή προσδιορισμού και της ελεγχουσυνάρτησης F των μοντέλων, δείχνουν ότι το δεύτερο μοντέλο, δηλαδή το μοντέλο που ενσωματώνει μόνο τις πωλήσεις χειμερινών εξαμήνων, έχει καλύτερη προσαρμογή.



Για τους δύο λόγους που μόλις εξηγήσαμε, υποθέτουμε ότι ανάμεσα στα μοντέλα 6.1 και 6.2 το δεύτερο μοντέλο μας δίνει την καλύτερη πρόβλεψη.

Παρακάτω, φαίνεται η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων για το μοντέλο αυτό. Το Διάγραμμα 6.6 προέκυψε καλώντας στην R τις εντολές `plot()` και `abline()`, όπως και προηγουμένως. Πράγματι, η ευθεία αυτή έχει σαφώς καλύτερη προσαρμογή στις παρατηρήσεις, σε σύγκριση με την ευθεία ελαχίστων τετραγώνων για το μοντέλο 6.1, όπως αυτή φαίνεται στο Διάγραμμα 6.3.



Διάγραμμα 4.6: Ευθεία απλής γραμμικής παλινδρόμησης για το μοντέλο που προσαρμόζεται στα δεδομένα που αφορούν τα χειμερινά εξάμηνα

---

### Συνέχεια της μελέτης

---

Θέλοντας να βελτιώσουμε την ακρίβεια των προβλέψεών μας, αντλούμε από τη βάση δεδομένων του υπουργείου παιδείας τον αριθμό των σπουδαστών για τις σχολές που αφορούν τα συγγράμματα. Τα νέα δεδομένα παρουσιάζονται στον Πίνακα 6.5. Αξιοποιώντας τα νέα δεδομένα επιθυμούμε να προβλέψουμε ξανά τις πωλήσεις ακαδημαϊκών συγγραμμάτων για το χειμερινό εξάμηνο του 2025-2026, υποθέτοντας ότι τότε θα υπάρχουν 60 χιλιάδες φοιτητές.

Ακαδημαϊκό Έτος	Εξάμηνο	Πωλήσεις	Αριθμός σπουδαστών (χιλιάδες)
2020-2021	Χειμερινό	14,830	64
	Εαρινό	7,335	63
2021-2022	Χειμερινό	11,150	68
	Εαρινό	5,910	67
2022-2023	Χειμερινό	9,330	66
	Εαρινό	4,650	65
2023-2024	Χειμερινό	7,240	62
	Εαρινό	3,540	61
2024-2025	Χειμερινό	6,340	58
	Εαρινό	3,236	57

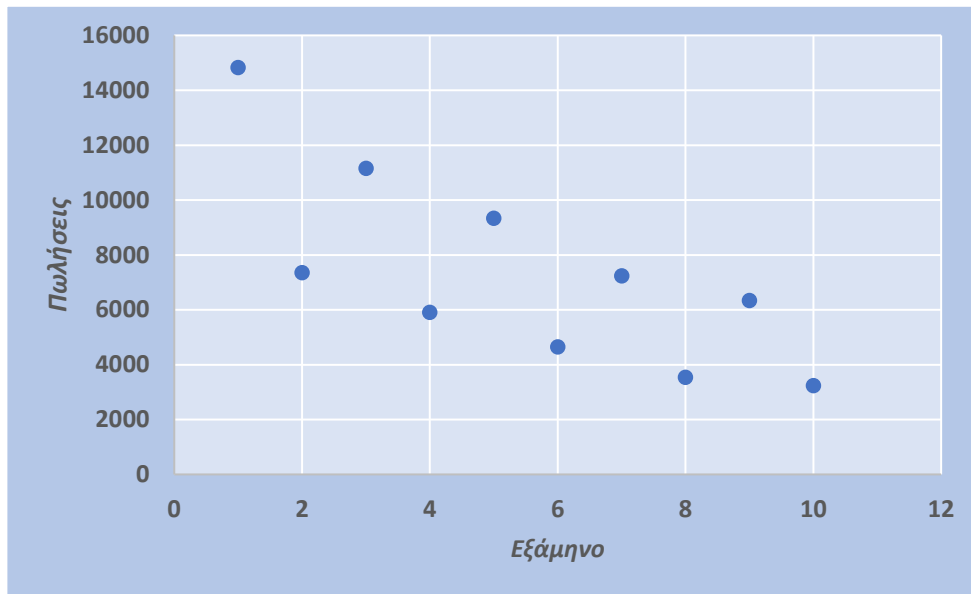
Πίνακας 6.5: Εξαμηνιαίες πωλήσεις ακαδημαϊκών συγγραμμάτων και αριθμός σπουδαστών

Έχοντας αυτή την επιπλέον πληροφορία, θα επιχειρήσουμε να προσαρμόσουμε ένα πολλαπλό μοντέλο παλινδρόμησης που να περιγράφει τις εξαμηνιαίες πωλήσεις, σε σχέση με το εξάμηνο και τον αριθμό των σπουδαστών. Ορίζουμε λοιπόν τις μεταβλητές:

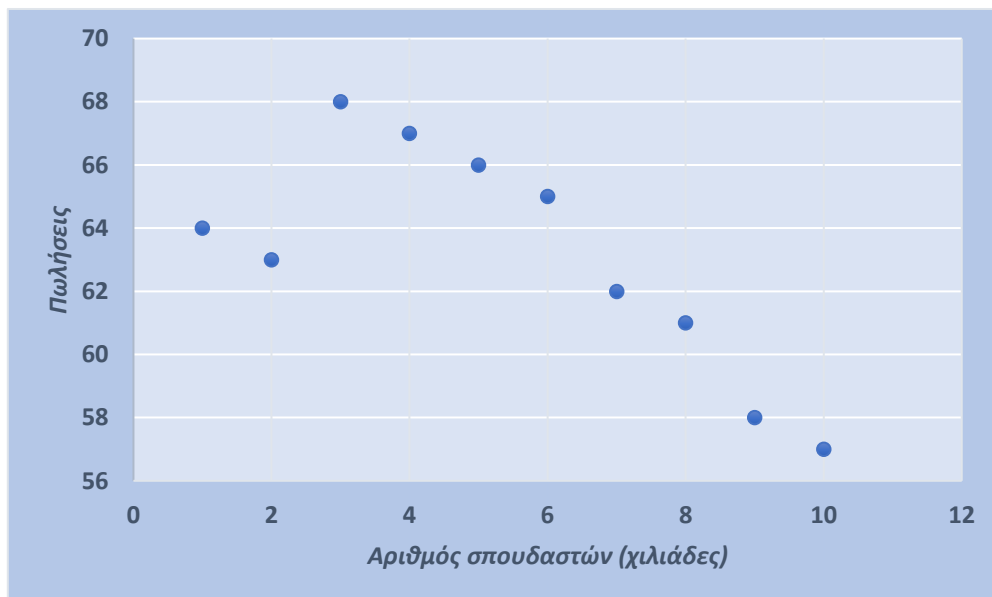
$X_1$  = εξάμηνο

$X_2$  = αριθμός σπουδαστών

$Y$  = πωλήσεις σε μονάδες βιβλίων



Διάγραμμα 6.5: Διάγραμμα διασποράς των πωλήσεων σε σχέση με το εξάμηνο



Διάγραμμα 6.6: Διάγραμμα διασποράς των πωλήσεων σε σχέση με τον αριθμό των σπουδαστών

Η υπόθεση της γραμμικότητας για κάθε μία ανεξάρτητη μεταβλητή ξεχωριστά σε σχέση με τις πωλήσεις ικανοποιείται, δηλαδή η κάθε μία μεταβλητή ξεχωριστά επηρεάζει τη συμπεριφορά της ανεξάρτητης με γραμμικό τρόπο. Θα εξετάσουμε πως επηρεάζουν και οι δύο μεταβλητές ταυτόχρονα τη συμπεριφορά των πωλήσεων. Εισάγουμε τα παραπάνω διανύσματα τιμών στο περιβάλλον της R και καλούμε τις σχετικές εντολές για την προσαρμογή του πολλαπλού γραμμικού μοντέλου, όπως φαίνεται στην επόμενη εικόνα:

```

R Console
> x1<-c(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10)
> x2<-c(64000,63000,68000,67000,66000,65000,62000,61000,58000,57000)
> y<-c(14830,7335,11150,5910,9330,4650,7240,3540,6340,3236)
> summary(lm(y~x1+x2))

Call:
lm(formula = y ~ x1 + x2)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-3753  -1770    460   1909   2849

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 23822.8638  23995.1800   0.993  0.3539
x1          -1061.5053   425.6043  -2.494  0.0413 *
x2           -0.1684    0.3516  -0.479  0.6465
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 2575 on 7 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.6005,    Adjusted R-squared:  0.4864
F-statistic: 5.262 on 2 and 7 DF,  p-value: 0.04029

```

Εικόνα 6.3: Προσαρμογή πολλαπλού γραμμικού μοντέλου με τη βοήθεια της R για όλες τις εξαμηνιαίες πωλήσεις

Το πολλαπλό μοντέλο παλινδρόμησης που προσαρμόσε η R στα δεδομένα μας είναι το εξής:

$$Y = 23,822.8638 - 1,061.5053 \cdot X_1 - 0.1684 \cdot X_2 \quad (6.3)$$

Σύμφωνα με την προηγούμενη σχέση, οι εκτιμώμενες πωλήσεις για το χειμερινό εξάμηνο του έτους 2025-2026, δεδομένου ότι τότε θα υπάρχουν 60,000 φοιτητές είναι:

$$Y_{11} = 23,822.8638 - 1,061.5053 \cdot 11 - 0.1684 \cdot 60,000 = 2,042.305 \quad (\text{μονάδες βιβλίων})$$

Σε αντιστοιχία με την τακτική που εφαρμόσαμε νωρίτερα, αποφασίζουμε να διασπάσουμε τα δεδομένα σε δύο υποσύνολα και να προσαρμόσουμε πάλι ένα πολλαπλό γραμμικό μοντέλο, αυτή τη φορά, μόνο για τις παρατηρήσεις των χειμερινών εξαμήνων. Τα δεδομένα διασπώνται στους εξής δύο πίνακες:

Χειμερινό Ακαδημαϊκό Έτος	Πωλήσεις (μονάδες βιβλίων)	Αριθμός Σπουδαστών (χιλιάδες)
<b>2020-2021</b>	14,830	64
<b>2021-2022</b>	11,150	68
<b>2022-2023</b>	9,330	66
<b>2023-2024</b>	7,240	62
<b>2024-2025</b>	6,340	58

Πίνακας 36.6: Πωλήσεις και αριθμός σπουδαστών χειμερινών εξαμήνων

Εαρινό Ακαδημαϊκό Έτος	Πωλήσεις (μονάδες βιβλίων)	Αριθμός Σπουδαστών (χιλιάδες)
<b>2020-2021</b>	7,335	63
<b>2021-2022</b>	5,910	67
<b>2022-2023</b>	4,650	65
<b>2023-2024</b>	3,540	61
<b>2024-2025</b>	3,236	57

Πίνακας 46.7: Πωλήσεις και αριθμός σπουδαστών χειμερινών εξαμήνων

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε μόνο με τις παρατηρήσεις του πρώτου πίνακα. Εισάγουμε στην R τις παρατηρήσεις του πίνακα 6.6 σε μορφή διανυσμάτων και προσαρμόζουμε το πολλαπλό γραμμικό μοντέλο ως ακολούθως:

```

R Console
> x1<-c(1,2,3,4,5)
> x2<-c(64000,68000,66000,62000,58000)
> y<-c(14830,11150,9330,7240,6340)
> summary(lm(y~x1+x2))

Call:
lm(formula = y ~ x1 + x2)

Residuals:
    1     2     3     4     5 
1.642 -8.209 206.269 -394.478 194.776

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  3.486e+04  4.594e+03   7.587  0.0169 *
x1          -2.580e+03  1.615e+02  -15.973  0.0039 **
x2           -2.726e-01  6.638e-02  -4.107  0.0545 .
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 343.6 on 2 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9949,    Adjusted R-squared:  0.9897 
F-statistic: 193.2 on 2 and 2 DF,  p-value: 0.005149

```

Εικόνα 6.4: Προσαρμογή πολλαπλού γραμμικού μοντέλου για τις παρατηρήσεις μόνο των χειμερινών εξαμήνων

Το πολλαπλό μοντέλο που προσαρμόζει η R στα δεδομένα μας περιγράφεται από τη σχέση:

$$Y = 34,860 - 2580 \cdot X_1 - 0.2726 \cdot X_2 \quad (6.4)$$

Προφανώς, η πρόβλεψη για τις πωλήσεις συγγραμμάτων κατά το χειμερινό εξάμηνο του ακαδημαϊκού έτους 2025-2026 με αυτή τη μέθοδο προκύπτει ως:

$$X_6 = 34,860 - 2580 \cdot 6 - 0.2726 \cdot 60,000 = 3,024 \text{ (μονάδες βιβλίων)}$$

---

## Συμπεράσματα

---

Παρατηρούμε ότι η νέα μεταβλητή, δηλαδή ο αριθμός των σπουδαστών, δεν παρουσιάζει καμία ιδιαίτερη συμπεριφορά. Επειδή όμως, όπως αναφέραμε παραπάνω, οι πωλήσεις παρουσιάζουν ένα συγκεκριμένο μοτίβο ως προς τα εξάμηνα στα οποία αναφέρονται (συγκεκριμένα οι χειμερινές πωλήσεις αποτελούν περίπου τα 2/3 των συνολικών πωλήσεων σε κάθε έτος), το γεγονός ότι ενδιαφερόμαστε για μία εκτίμηση που αφορά κάποιο χειμερινό εξάμηνο, υποδεικνύει ότι το μοντέλο 6.4 που έχει προσαρμοστεί μόνο για χειμερινά εξάμηνα θα μας δώσει μία πιο έγκυρη πρόβλεψη.

Ένας εναλλακτικός τρόπος να αποφανθούμε ποιο από τα δύο πολλαπλά γραμμικά μοντέλα μας δίνει την βέλτιστη εκτίμηση είναι να παρατηρήσουμε την τιμή του συντελεστή προσδιορισμού και την τιμή του στατιστικού ελέγχου F που αντιστοιχούν σε κάθε μία προσαρμογή. Ο συντελεστής προσδιορισμού για την προσαρμογή του μοντέλου 6.3 υπολογίζεται ότι ισούται με 0.6005, ενώ ο συντελεστής προσδιορισμού για την προσαρμογή του μοντέλου 6.4 ισούται με 0.9949, δηλαδή βρίσκεται πολύ κοντά στην μονάδα. Ακόμα η τιμή του στατιστικού ελέγχου F (F-statistic) του μοντέλου 6.3 ισούται με 5.262 και είναι σαφώς μικρότερη από την αντίστοιχη τιμή για το μοντέλο 6.4, η οποία υπολογίστηκε ίση με 193.2, γεγονός που σημαίνει ότι η υπόθεση ότι η παλινδρόμηση είναι στατιστικά σημαντική είναι ισχυρότερη για το μοντέλο 6.4.

Επομένως, πάλι οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι το μοντέλο που προσαρμόζεται μόνο για τις παρατηρήσεις των χειμερινών εξαμήνων (μοντέλο 6.4) δίνει καλύτερες εκτιμήσεις.

Ανακεφαλαιώνοντας, έως τώρα έχουμε προσαρμόσει δύο απλά γραμμικά μοντελα (6.1 και 6.2) και δύο πολλαπλά γραμμικά μοντέλα παλινδρόμησης(6.3 και 6.4). Και στις δύο περιπτώσεις, αποφασίζουμε ότι τα μοντέλα που αφορούν μόνο τα δεδομένα των χειμερινών περιόδων έχουν καλύτερη προσαρμογή και άρα δίνουν καλύτερες εκτιμήσεις. Στο σημείο αυτό, δεν μπορούμε παρά να αναρωτηθούμε αν μπορούμε να επιλέξουμε το βέλτιστο μοντέλο πρόβλεψης ανάμεσα στα δύο επιλεχθέντα μοντέλα, δηλαδή τα μοντέλα (6.2 και 6.4).

Παρατηρώντας τα αποτελέσματα της προσαρμογής του πολλαπλού γραμμικού μοντέλου 6.4, διαπιστώνουμε ότι η  $p$ -τιμή του στατιστικού ελέγχου  $t$  για την μεταβλητή  $X_2$ , η οποία συμβολίζει τον αριθμό των σπουδαστών, οριακά, δεν είναι αρκετά μικρή ώστε να μπορούμε με βεβαιότητα να απορρίψουμε την αρχική υπόθεση του ελέγχου  $t$ , δηλαδή ότι ο συντελεστής της μεταβλητής αυτής μηδενίζεται και άρα η μεταβλητή  $X_2$  δεν επηρεάζει σημαντικά τις πωλήσεις στο μοντέλο 6.4. Δεδομένου

ότι η συγκεκριμένη  $p$ -τιμή υποδεικνύει την αφαίρεση της μεταβλητής  $X_2$  από το μοντέλο 6.4, καταλήγουμε αναπόφευκτα στο μοντέλο 6.2.

Παρατηρώντας ξανά τα στατιστικά του μοντέλου 6.2, βλέπουμε ότι ο συντελεστής προσδιορισμού είναι μικρότερος σε σχέση με αυτή για το μοντέλο 6.4. Ωστόσο η διαφορά είναι αρκετά μικρή και αμελητέα σε σχέση με τη μείωση του κόστους που προκύπτει από την αφαίρεση μίας μεταβλητής από το μοντέλο. Συνοψίζοντας, ενώ περιμέναμε ότι η προσθήκη της μεταβλητής  $X_2$  στο μοντέλο παλινδρόμησης θα βελτιώνε την ακρίβεια της πρόβλεψης, αποδεικνύεται ότι δεν βελτιώνει αισθητά την προσαρμογή του μοντέλου ενώ τελικά το μοντέλο 6.2 επιλέγεται ως βέλτιστο.



## Ξένη Βιβλιογραφία

Hillier, F. S. and Lieberman, G. J. (2005). Introduction to Operations Research (9<sup>th</sup> Edition), Holden-Day, San Francisco, CA.

Winston, W. L. (2003). Operations Research Applications and Algorithms, Duxbury Press.

Hillier, F. S., Hillier, M. S. and Lieberman G. J. (2000). Introduction to Management Science: A Modeling and Case Studies Approach with Spreadsheets, McGraw-Hill/Irwin.

Shim, J. K. (2009). STRATEGIC BUSSINESS FORECASTING Including Business Forecasting Tools and Applications, GLOBAL professional publishing

Diebold, F. X. (2007). Elements of Forecasting (4<sup>th</sup> Edition), Thomson, South-Western.

Hyndman, R.J., Koehler, A. B., Ord, J. K. and Snyder, R. D. (2008). Forecasting with Exponential Smoothing, The State Space Approach, Springer

Hamilton, J.D. (1994). Time Series Analysis, Princeton University Press

Armstrong, J. S., Brodie, R. J. and McIntyre, S. H. (1987). Forecasting Methods for Marketing: Review of Empirical Research, Published in International Journal of Forecasting

Evans, M.K. (2003). PRACTICAL BUSINESS FORECASTING, Blackwell, UK

## Ελληνική Βιβλιογραφία

Κολέτσος, Ι., Στόγιαννης, Δ. (2021). Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα (4<sup>η</sup> έκδοση), εκδόσεις ΣΥΜΕΩΝ, Αθήνα.

Καρώνη, Χ., Οικονόμου, Π. (2017). Στατιστικά Μοντέλα Παλινδρόμησης Με χρήση MINITAB και R (2<sup>η</sup> Έκδοση), Εκδόσεις ΣΥΜΕΩΝ, Αθήνα.

Κοκολάκης, Γ., Φουσκάκης, Δ. (2009). ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ Θεωρία & Εφαρμογές, Εκδόσεις ΣΥΜΕΩΝ.

Φουσκάκης, Δ. (2013). Ανάλυση Δεδομένων με χρήση της R, Εκδόσεις Τσότρας, Αθήνα.

Εταιρεία ΜΕΒΓΑΛ Α.Ε., Οικονομικά Αποτελέσματα, URL:

<https://www.mevgal.gr/frontend/articles.php?cid=192>

Εταιρεία RETAIL WORLD Α.Ε., Οικονομικά Στοιχεία των καταστημάτων Public, URL:

<https://www.public.gr/cat/corporate/anakoinoseis/>

Πανεπιστήμιο Πειραιά (2012), Πακέτο Σημειώσεων: Βασικές Σημειώσεις, Εκθετική Εξομάλυνση με τη χρήση του Microsoft Excel, URL:

[https://eclass.unipi.gr/modules/document/file.php/OEP141/%CE%92%CE%B1%CF%83%CE%B9%CE%BA%CE%AD%CF%82%20%CE%A3%CE%B7%CE%BC%CE%B5%CE%B9%CF%8E%CF%83%CE%B5%CE%B9%CF%82/exponential%20smoothing%20in%20excel.pdf?fbclid=IwAR3zpfKUrSTjupoG9iJAYhwK9EvmLigEgJFgE-dgw3xiE\\_JxNb7hGvOKS-I](https://eclass.unipi.gr/modules/document/file.php/OEP141/%CE%92%CE%B1%CF%83%CE%B9%CE%BA%CE%AD%CF%82%20%CE%A3%CE%B7%CE%BC%CE%B5%CE%B9%CF%8E%CF%83%CE%B5%CE%B9%CF%82/exponential%20smoothing%20in%20excel.pdf?fbclid=IwAR3zpfKUrSTjupoG9iJAYhwK9EvmLigEgJFgE-dgw3xiE_JxNb7hGvOKS-I)