



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΜΗΧΑΝΩΝ

**Ανάπτυξη μεθοδολογιών βασισμένων στην Μέθοδο των Πεπερασμένων στοιχείων για την μοντελοποίηση της επαφής μεταξύ οδοντωτών τροχών, συμπεριλαμβανομένων τροποποιήσεων οδόντων και σφαλμάτων ευθυγράμμισης σε περιβάλλον MATLAB και ANSYS Workbench.**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ  
ΑΠΟ ΤΟΝ  
ΜΙΧΑΗΛ ΣΚΙΑΔΟΠΟΥΛΟΣ

**ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ:** Χριστόφορος Προβατίδης  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούλιος 2021

## Περίληψη

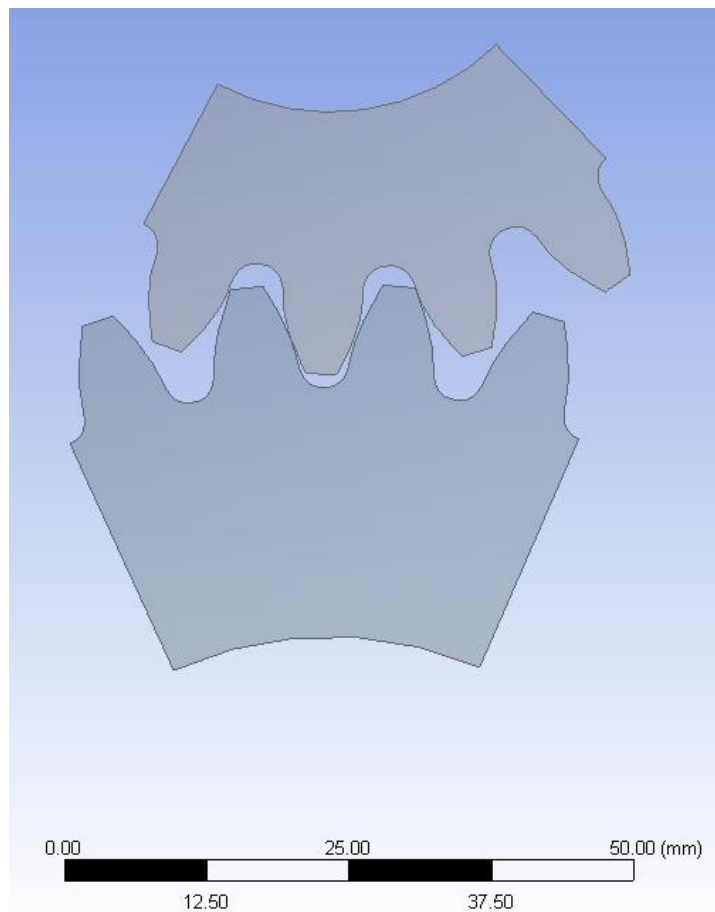
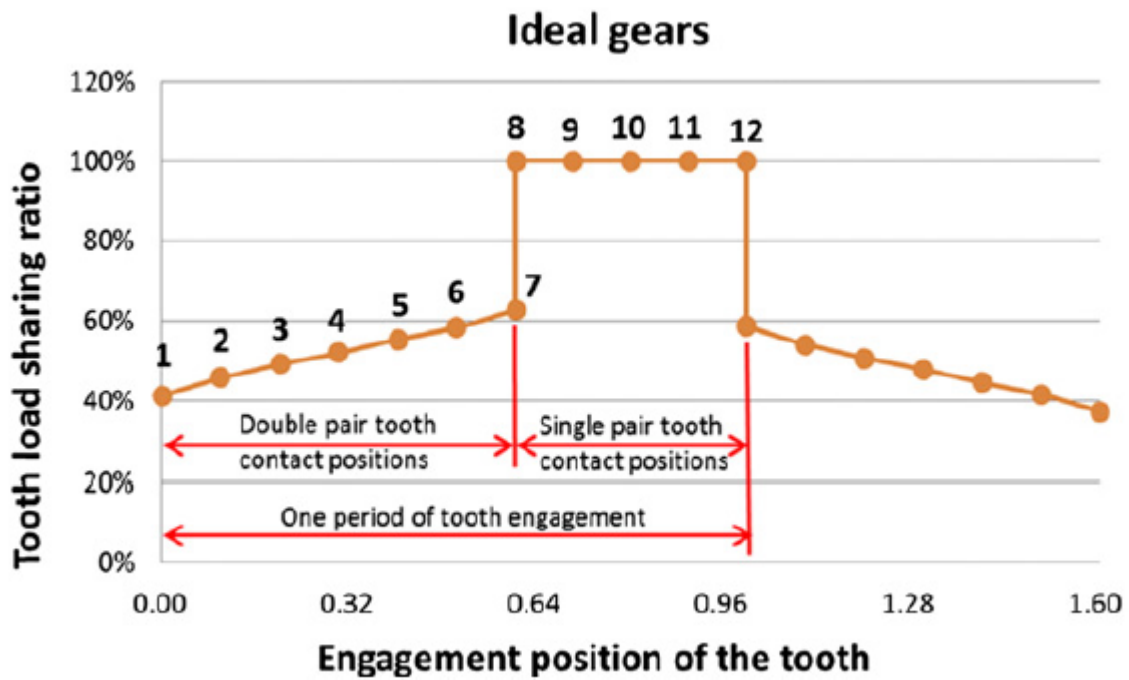
Ο σκοπός αυτής της διπλωματικής είναι η πρόταση μεθόδων για την αριθμητική μοντελοποίηση της φόρτισης ευθείων οδοντωτών τροχών εξειλιγμένης καμπύλης με την Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων. Αυτό επιτυγχάνεται με την χρήση του εμπορικού λογισμικού ANSYS Workbench αλλά και με την ανάπτυξη πρωτότυπου κώδικα στο υπολογιστικό περιβάλλον MATLAB/Simulink. Η διαδικασία για την εξαγωγή των μεθόδων μοντελοποίησης ξεκινά με την ανάλυση της θεωρίας επαφής του Hertz μεταξύ κυλινδρικών σωμάτων η οποία συνδέει τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των οδοντωτών τροχών με την πίεση επιφανείας που προκύπτει κατά την λειτουργία τους. Η θεωρία Hertz αποτελεί την βάση και το σημείο αναφοράς για την δημιουργία του δισδιάστατου μοντέλου της στατικής φόρτισης των ιδεατών οδοντωτών τροχών στο ANSYS Workbench. Στο περιβάλλον ANSYS Workbench αναπτύσσονται μοντέλα για τις εξής περιπτώσεις:

- Δισδιάστατη ανάλυση ιδεατών οδοντωτών τροχών εξειλιγμένης.
- Τρισδιάστατη ανάλυση ιδεατών οδοντωτών τροχών εξειλιγμένης.
- Σφάλμα ευθυγράμμισης
- Crowning

Σε κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις περιγράφονται αναλυτικά τα βήματα για την δημιουργία του εκάστοτε μοντέλου τα οποία συνοδεύονται από αντίστοιχα σχόλια. Επιπλέον, τα αποτελέσματα που προκύπτουν συγκρίνονται είτε με τα θεωρητικά είτε με τα αποτελέσματα του [2] ώστε να αποδειχθεί η εγκυρότητά τους. Σε όλες τις αναλύσεις χρησιμοποιούνται οι τροχοί με τα παρακάτω χαρακτηριστικά όπως συμβαίνει και στο [2]:

Ευθείς οδόντες εξειλιγμένης καμπύλης	Πινιόν	Συνεργαζόμενος τροχός
Γωνία πίεσης (deg)	20°	20°
Module (mm)	4	4
Αριθμός δοντιών	20	30
Πάχος (mm)	40	40
Διάμετρος κεφαλής (mm)	88	128
Διάμετρος ποδός (mm)	70	110
Διάκενο (mm)	-	0.05-0.1
Υλικό	SCM415	SCM415
Ροπή (Nm)	-	98

και οι τροχοί εμπλέκονται στην θέση 6 όπως φαίνεται στις παρακάτω εικόνες. Στην θέση αυτή έρχονται σε επαφή 2 ζεύγη τροχών. Επομένως, ονομάζουμε 6' την δεύτερη θέση επαφής.



Όσον αφορά στα αποτελέσματα της δισδιάστατης ανάλυσης αυτά παρατίθενται παρακάτω και αφορούν στην δύναμη και στην πίεση επιφανείας που αναπτύσσεται σε κάθε ζεύγος καθώς και στην καμπτική τάση στους οδόντες του συνεργαζόμενου τροχού.

	<b>Θέση 6</b>	<b>Θέση 6'</b>
<b>Δύναμη ANSYS (N)</b>	963.28	774.84
<b>Θεωρητική Δύναμη (N)</b>	1,001.05	739.91
<b>Σφάλμα (%)</b>	3.77	4.72

	<b>Θέση 6</b>		<b>Θέση 6'</b>	
	<b>Αριστερά</b>	<b>Δεξιά</b>	<b>Αριστερά</b>	<b>Δεξιά</b>
<b>Καμπτική τάση ANSYS (MPa)</b>	9.99	9.05	16.61	14.74
<b>Θεωρητική Καμπτική τάση (MPa)</b>	15.29		11.30	
<b>Σφάλμα (%)</b>	37.74		38.7	

	<b>Θέση 6</b>	<b>Θέση 6'</b>
<b>Πίεση επιφανείας ANSYS (MPa)</b>	299.99	367.82
<b>Θεωρητική Πίεση επιφανείας (MPa)</b>	319.98	377.32
<b>Σφάλμα (%)</b>	6.25	2.52

Όσον αφορά στα αποτελέσματα της τρισδιάστατης ανάλυσης αυτά παρατίθενται παρακάτω:

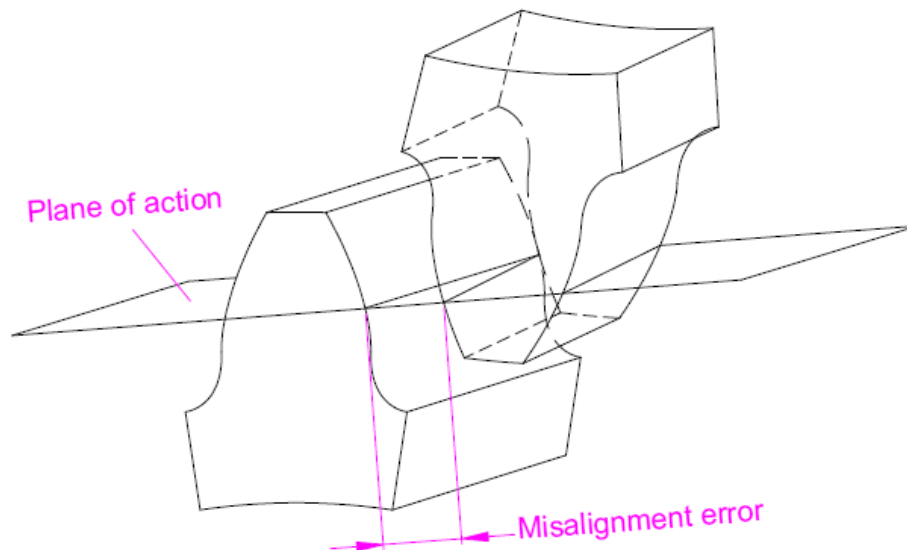
	<b>Θέση 6</b>	<b>Θέση 6'</b>
<b>Δύναμη ANSYS (N)</b>	482.07	387
<b>Μισή Θεωρητική Δύναμη (N)</b>	500.52	369.96
<b>Σφάλμα (%)</b>	3.68	3.53

	<b>Θέση 6</b>		<b>Θέση 6'</b>	
	<b>Left</b>	<b>Right</b>	<b>Left</b>	<b>Right</b>
<b>Καμπτική τάση ANSYS (MPa)</b>	10.24	9.42	16.65	15.16
<b>Θεωρητική Καμπτική τάση (MPa)</b>	15.29		11.30	
<b>Σφάλμα (%)</b>	35.71		40.75	

	<b>Θέση 6</b>	<b>Θέση 6'</b>
<b>Πίεση επιφανείας ANSYS (MPa)</b>	307.15	369.61
<b>Θεωρητική Πίεση επιφανείας (MPa)</b>	319.98	377.32
<b>Σφάλμα (%)</b>	4.01	2.04

Η ανάλυση για την κακή ευθυγράμμιση δημιουργήθηκε καθώς αυτό είναι ένα σύνηθες πρόβλημα που αντιμετωπίζεται κατά την συναρμολόγηση των οδοντωτών τροχών και επιδρά στην ταλάντωση και στον θόρυβο που προκαλείται καθώς και στην αντοχή του ζεύγους των τροχών. Στην συγκεκριμένη περίπτωση το σφάλμα ορίζεται σαν μία γωνία μεταξύ των τροχών στο επίπεδο δράσης τους όπως φαίνεται στην εικόνα. Στην προσομείωση η γωνία αυτή τίθεται ίση με 0.04°



Τα αποτελέσματα που προέκυψαν είναι τα ακόλουθα:

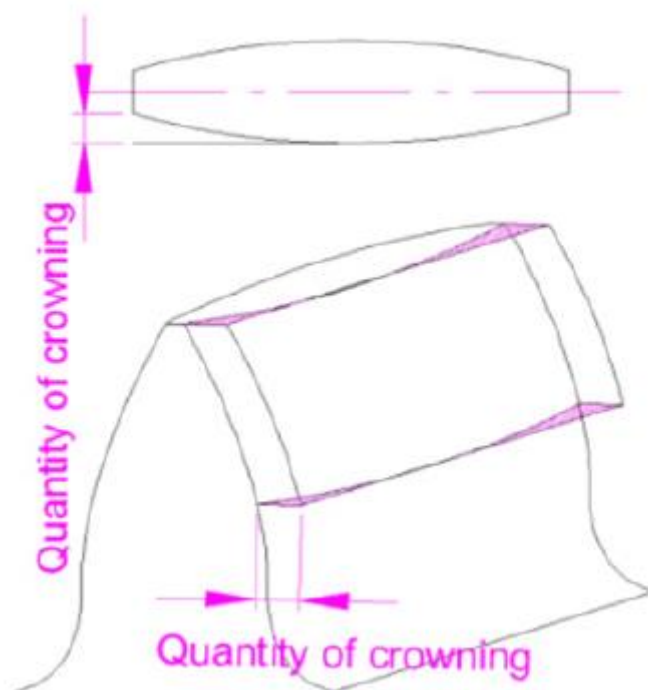
	<b>Θέση 6</b>	<b>Θέση 6'</b>
<b>Δύναμη ANSYS (N)</b>	974.06	764.02

	<b>Θέση 6</b>		<b>Θέση 6'</b>	
	<b>Αριστερά</b>	<b>Δεξιά</b>	<b>Αριστερά</b>	<b>Δεξιά</b>
<b>Καμπτική τάση ANSYS (MPa)</b>	17.36	18.54	26.87	20.34

	<b>Θέση 6</b>	<b>Θέση 6'</b>
<b>Πίεση επιφανείας ANSYS (MPa)</b>	394.22	481.84
<b>Θεωρητική Πίεση επιφανείας στο [2] (MPa)</b>	350	600

Σε αυτό και στο επόμενο μοντέλο χρησιμοποιείται το [2] για την επιβεβαίωση των αποτελεσμάτων και όχι οι θεωρητικοί υπολογισμοί καθώς οι γεωμετρίες είναι πολύ σύνθετες.

Η τελευταία προσομείωση στο ANSYS Workbench ασχολείται με την κατασκευαστική μέθοδο crowning. Η μέθοδος αυτή είναι μία συχνή λύση όταν πρέπει να αντιμετωπιστούν προβλήματα θορύβου ή ευθυγράμμισης σε ένα ζεύγος τροχών. Κατά την διαδικασία αυτή αφαιρείται ουσιαστικά υλικό από τον τροχό κατά την πορεία την καμπύλης της κατατομής όπως φαίνεται στην εικόνα. Το κοπτικό εργαλείο μπορεί να έχει διάφορες γεωμετρίες αλλά εδώ έχει επιλεγεί σαν γεωμετρία το κυκλικό τόξο. Επιπλέον, η ποσότητα του crowning έχει οριστεί 5  $\mu\text{m}$ .



Τα αποτελέσματα παρατίθενται παρακάτω:

	<b>Θέση 6</b>	<b>Θέση 6'</b>
<b>Δύναμη ANSYS (N)</b>	366.45	502.36

	<b>Θέση 6</b>		<b>Θέση 6'</b>	
	<b>Αριστερά</b>	<b>Δεξιά</b>	<b>Αριστερά</b>	<b>Δεξιά</b>
<b>Καμπτική τάση ANSYS (MPa)</b>	13.88	12.52	33.91	29.63

	<b>Θέση 6</b>	<b>Θέση 6'</b>
<b>Πίεση επιφανείας ANSYS (MPa)</b>	377.51	579.36
<b>Πίεση επιφανείας στο [2] (MPa)</b>	350	600
<b>Σφάλμα (%)</b>	7.86	3.4

Σε όλες τις αναλύσεις τα αποτελέσματα είναι ικανοποιητικά καθώς τα σφάλματα τους από τις θεωρητικές τιμές ή τις τιμές του [2] είναι εντός των αποδεκτών ορίων. Επομένως, η ανάπτυξη των μοντέλων στο ANSYS Workbench θεωρείται επιτυχής.

Στην συνέχεια δημιουργήθηκε ένας MATLAB Σκοπός του κώδικα αυτού είναι η δισδιάστατη ανάλυση της επαφής των οδοντωτών τροχών με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων αλλά με ένα πιο απλό και γρήγορο τρόπο από το μοντέλο του ANSYS. Για τον λόγο αυτό η μοντελοποίηση γίνεται μόνο σε έναν οδόντα. Επιπλέον, για την πλεγματοποίηση δίνονται οι

επιλογές του τρικομβικού(CST) και του εξακομβικού(LST) τριγωνικού στοιχείου και γίνεται μια σύγκριση μεταξύ τους. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται παρακάτω:

	Θέση 6		Θέση 6'	
	Αριστερά	Δεξιά	Αριστερά	Δεξιά
Καμπτική τάση ANSYS (MPa)	9.99	9.05	16.61	14.74
Καμπτική τάση MATLAB CST (MPa)	10.44	9.24	16.31	13.32
Καμπτική τάση MATLAB LST (MPa)	9.16	9.33	15.64	12.92
Θεωρητική Καμπτική τάση (MPa)	15.29		11.30	
Σφάλμα ANSYS (%)	37.74		38.7	
Σφάλμα MATLAB CST (%)	35.64		31.11	
Σφάλμα MATLAB LST (%)	39.54		26.37	

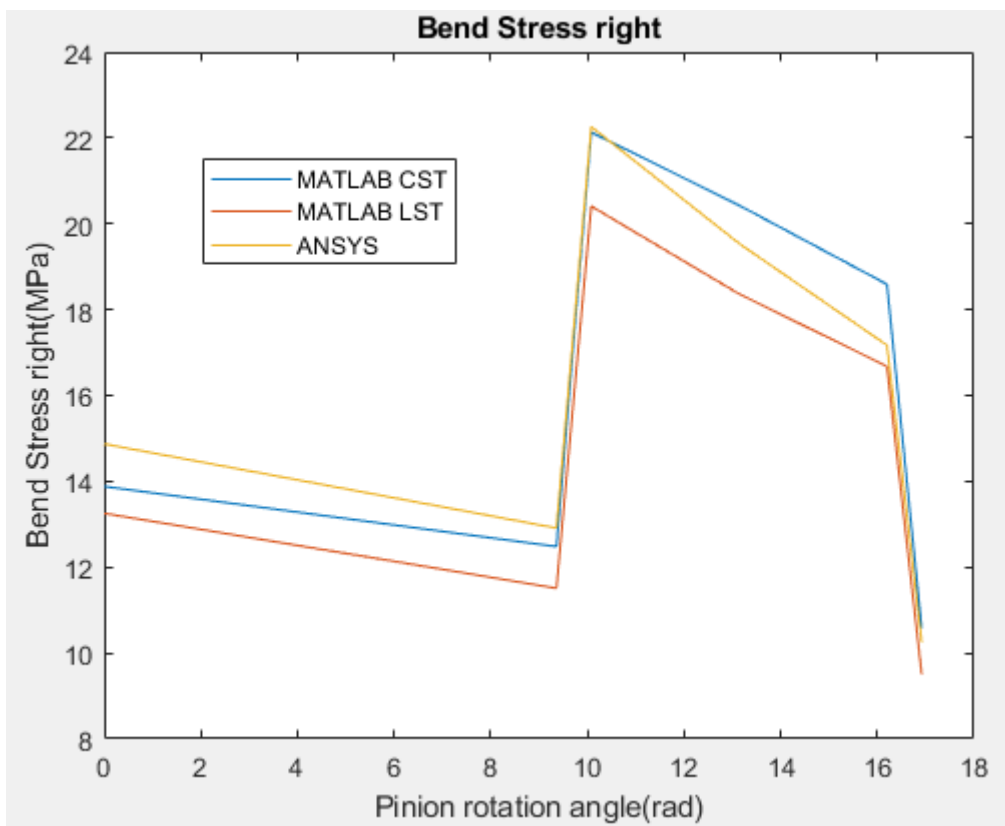
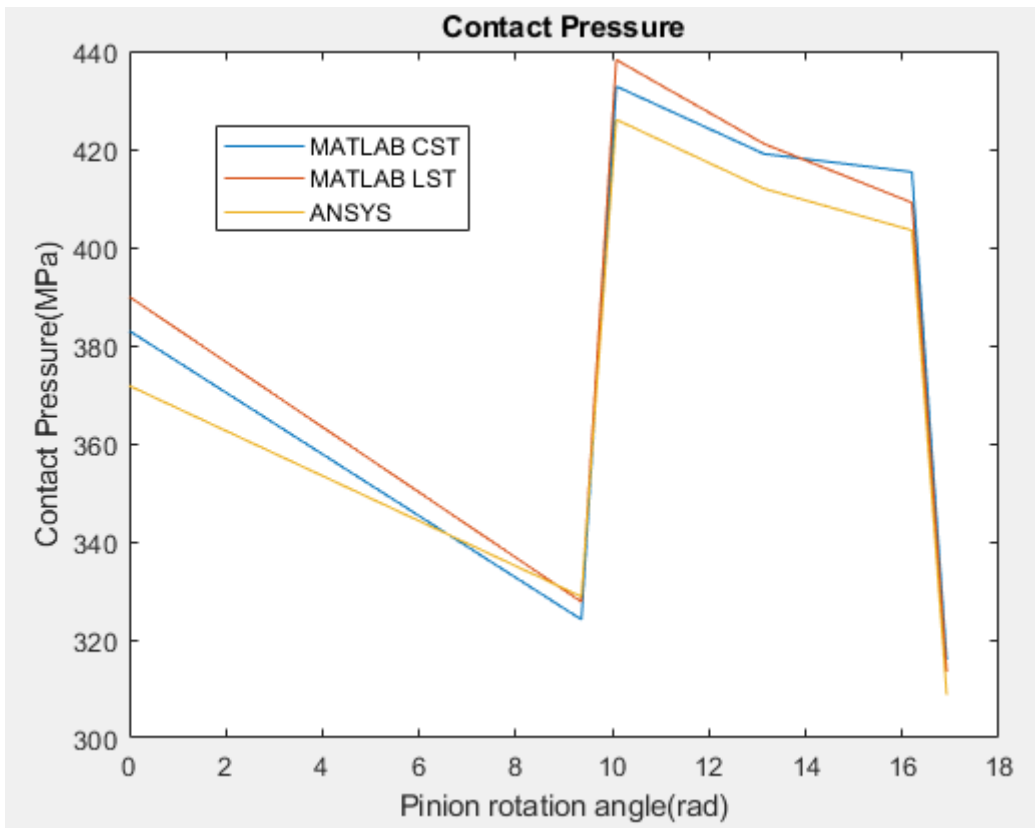
	Θέση 6	Θέση 6'
Πίεση επιφανείας ANSYS (MPa)	299.99	367.82
Πίεση επιφανείας MATLAB CST (MPa)	309.30	372.41
Πίεση επιφανείας MATLAB LST (MPa)	314.74	369.82
Θεωρητική Πίεση επιφανείας (MPa)	319.98	377.32
Σφάλμα ANSYS (%)	6.25	2.52
Σφάλμα MATLAB CST (%)	3.34	1.30
Σφάλμα MATLAB LST (%)	1.64	1.98

	ANSYS	MATLAB CST	MATLAB LST
Χρόνος δημιουργίας και επίλυσης (min)	20	5	3

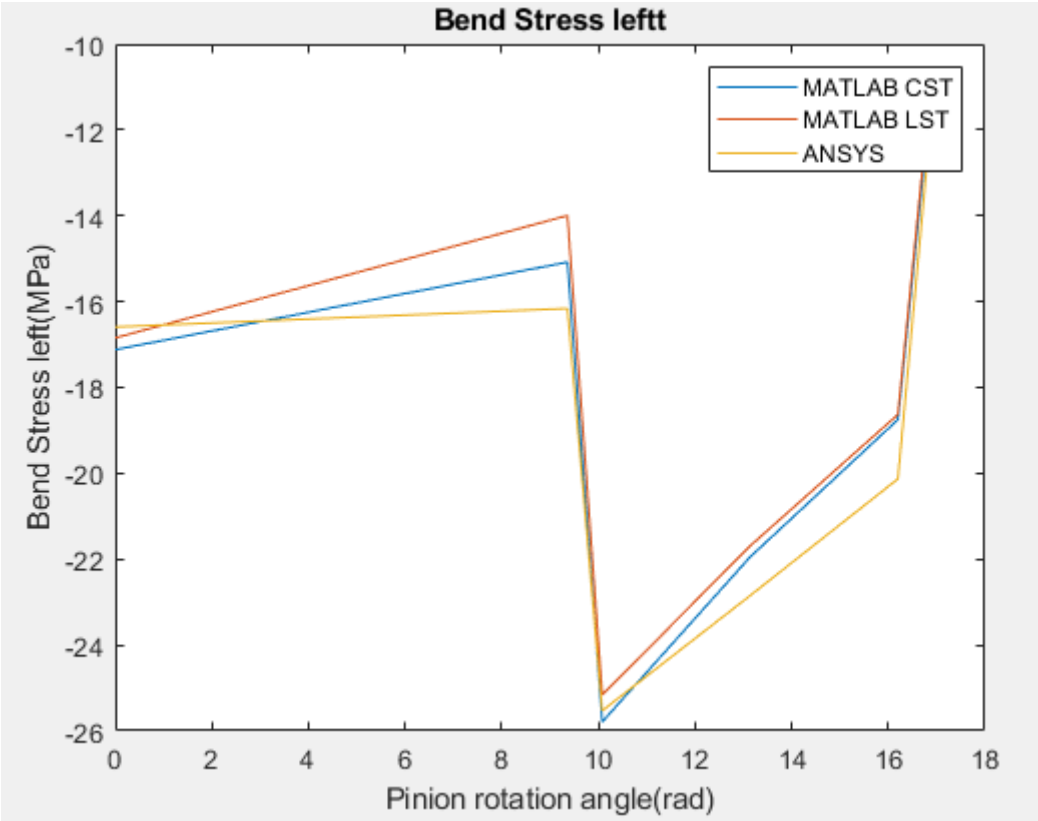
Από τα παραπάνω είναι εμφανές ότι τα προγράμματα σε MATLAB δίνουν ικανοποιητικά αποτελέσματα τα οποία μάλιστα είναι πιο ακριβή από του ANSYS. Επιπλέον, οι αναλύσεις τρέχουν σε αισθητά μικρότερο χρόνο επομένως και εδώ ο στόχος επιτεύχθηκε. Ακόμη, οι κώδικες έτρεξαν και τις εξής θέσεις:

Γωνία στροφής Πινιόν (deg)	0	9.36	10.08	13.14	16.20	16.92
Ακτίνα συνεργαζόμενου τροχού (mm)	63.46	60.97	60.80	60.11	59.42	59.28

τα αποτελέσματα των οποίων φαίνονται παρακάτω:







## Βιβλιογραφία

- [1] Daniel S.H. Lo, *Finite Element Mesh Generation*, CRC Press, 2015, pp. 121-134
- [2] Shuting Li, *Effects of misalignment error, tooth modifications and transmitted torque on tooth engagements of a pair of spur gears*, Mechanisms and Machine Theory, October 2014, pp. 1-12
- [3] Φίλιππος Φ. Κωστάκης, *Βέλτιστος σχεδιασμός κατατομών μετωπικών οδοντωτών τροχών κλειστής τροχιάς επαφών για ισοκατανομή του κινδύνου εμφάνισης εκκοιλάνσεων*, Διπλωματική Εργασία, Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών, Ε.Μ.Π., 2013, σελ. 17-23
- [4] Προβατίδης Χ. Γ., *Βελτιστοποίηση & Λογισμικό Κατασκευών: Πεπερασμένα Στοιχεία, Ισογεωμετρικά Στοιχεία, Συνοριακά Στοιχεία*, Εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ, 2017, σελ. 189-198, σελ. 297-306, σελ. 766-768
- [5] Κωστόπουλος Θ., *Οδοντώσεις και μειωτήρες στροφών*, Β' Έκδοση, Εκδόσεις Συμμεών, Αθήνα, 2010, σελ. 53
- [6] Wikipedia, *Contact Mechanics*
- [7] H.L. Whittemore and S.N. Petrenko, Natl. Bur. Std. Tech. Paper 201, 1921 in : S.P. Timoshenko and J.N. Goodier, (Eds.) *Theory of Elasticity*, Third Edition, McGRAW-HILL INTERNATIONAL EDITIONS, New York, 1970