ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών & Φυσικών Εφαρμογών

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΙΝΑΚΩΝ ΚΑΙ ΓΙΝΟΜΕΝΟ KRONECKER

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Μωραΐτης Κωνσταντίνος

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

Ψαρράκος Παναγιώτης, Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2021

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών & Φυσικών Εφαρμογών

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΙΝΑΚΩΝ ΚΑΙ ΓΙΝΟΜΕΝΟ KRONECKER

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Μωραΐτης Κωνσταντίνος

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Κανελλόπουλος Βασίλειος, Καθηγητής Ε.Μ.Π

Στεφανέας Πέτρος, Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π

Ψαρράκος Παναγιώτης, Καθηγητής Ε.Μ.Π (Επιβλέπων)

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2021

Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση της διπλωματικής μου θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα Καθηγητή μου κ. Ψαρράκο Παναγιώτη, Καθηγητή Ε.Μ.Π., τόσο για την υπόδειξη του θέματος όσο και για την συνεχή παρακολούθηση, καθοδήγηση, ενθάρρυνση και υπομονή κατά τη διάρκεια της σύνταξής της. Είμαι επίσης ευγνώμων και θέλω να εκφράσω τις ευχαριστίες μου προς τους κ. Κανελλόπουλο Βασίλειο, Καθηγητή Ε.Μ.Π και κ. Στεφανέα Πέτρο, Αναπληρωτή Καθηγητή Ε.Μ.Π. για την ενεργή συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τους φίλους μου Αθανάσιο Τόπτσιο, Γεώργιο Γκεζέρη και Στέφανο Τσαμπανάκη για όλα όσα μοιραστήκαμε κατά την διάρκεια των σπουδών μας καθώς επίσης και ένα ιδιαίτερο ευχαριστώ στην Ελένη Τζαμουράνη για την στήριξη και την πολύτιμη βοήθεια της κατά την συγγραφή αυτής της εργασίας. Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου που στάθηκε στο πλευρό μου με κόπο και υπομονή καθ’ όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

Abstract

This paper presents a detailed discussion of the Kronecker product of matrices. It begins with the definition and some basic properties of the Kronecker product. Statements will be proven that reveal information concerning the eigenvalues, singular values, rank and trace, of the Kronecker product of two matrices. The Kronecker product will then be employed to solve linear matrix equations. Additional the Kronecker product is also providing to be an effective way to look at fast linear transforms. An investigation of the commutativity of the Kronecker product will be carried out using permutation matrices. The Jordan-Canonical form of a Kronecker product will be examined. Variations such as the Kronecker sum will be introduced. The paper concludes with a reference of the additive and multiplicative commutators and linear preserves.

Περίληψη

Σε αυτήν την εργασία πραγματοποιείται μια αναλυτική παρουσίαση στο γινόμενο Kronecker πινάκων. Ξεκινά με τον ορισμό καθώς και μερικές βασικές ιδιότητες του γινόμενου Kronecker. Προτάσεις θα αποδειχθούν και θα παρουσιάσουν πληροφορίες όσο αναφορά τις ιδιοτιμές, τις ιδιάζουσες τιμές, τον βαθμό, και το ίχνος του γινομένου Kronecker δύο πινάκων. Στη συνέχεια το γινόμενο Kronecker θα αξιοποιηθεί για την λύση γραμμικών εξισώσεων πινάκων. Αποδεικνύεται επίσης ότι το γινόμενο Kronecker είναι ένας γρήγορος τρόπος για να εξετάσουμε γραμμικούς μετασχηματισμούς. Επιπλέον θα ερευνηθεί η αντιμεταθετικότητα του γινόμενου Kronecker με την χρήση πινάκων μετάθεσης. Θα εξεταστεί επιπρόσθετα η κανονική μορφή Jordan του γινόμενου Kronecker ενώ θα παρουσιαστεί και η εκδοχή του αθροίσματος Kronecker. Τέλος θα γίνει μια αναφορά στον προσθετικό και πολλαπλασιαστικό αντιμεταθέτη και στα γραμμικά αναλλοίωτά.

Πρόλογος

Η συγγραφή της παρούσας διπλωματικής με τίτλο ***Εξισώσεις Πινάκων και Γινόμενο Kronecker*** πραγματοποιήθηκε στο πλαίσιο του προγράμματος Σπουδών της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Η επιλογή του θέματος έγινε με κριτήριο το προσωπικό ενδιαφέρον για την μελέτη του γινομένου Kronecker και ειδικότερα την εφαρμογή του στην ανάλυση πινάκων και την επίλυση γραμμικών εξισώσεων πινάκων. Σε αντίθεση με τον κοινό πολλαπλασιασμό πινάκων οπού ο αριθμός των στηλών του πρώτου πίνακα πρέπει να είναι ίσος με τον αριθμό των γραμμών του δεύτερου, στον πολλαπλασιασμό με το γινόμενο Kronecker αυτό δεν είναι απαραίτητο καθώς οι πίνακες που πολλαπλασιάζονται είναι αυθαιρέτων μεγεθών.

Το γινόμενο Kronecker ή αλλιώς τανυστικό γινόμενο είναι επίσης χρήσιμο σε διάφορους τομείς μελέτης. Πιο συγκεκριμένα εφαρμόζεται σε τομείς επεξεργασίας σήματος (signal processing), επεξεργασίας εικόνας (image processing), ημιορισμένου προγραμματισμού (semidefinite programming) καθώς επίσης και στον κβαντικό υπολογισμό (quantum computing). Το γινόμενο Kronecker πήρε το όνομά του από τον Γερμανό μαθηματικό Leopold Kronecker (1823-1891), παρόλο που υπάρχουν λίγα στοιχεία ότι ήταν ο πρώτος που το όρισε και το χρησιμοποίησε.

Το κεφάλαιο μηδέν έχει εισαγωγικό χαρακτήρα και έχει ως στόχο την υπενθύμιση βασικών ορισμών, εννοιών και συμπερασμάτων από τα πεδία της γραμμικής άλγεβρας και της ανάλυσης πινάκων που είναι απαραίτητα για την κατανόηση της εργασίας.

Στο πρώτο κεφάλαιο δίνεται ο ορισμός του γινομένου Kronecker, οι ιδιότητες του καθώς επίσης και κάποια θεωρήματα, πορίσματα και λήμματα που είναι απαραίτητα για την κατανόηση της έννοιας. Επιπλέον γίνεται μια αναφορά στο θεώρημα παραγοντοποίησης ιδιάζουσων τιμών (SVD) και στο λήμμα Schur.

Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται χρήση του γινομένου Kronecker στην επίλυση γραμμικών εξισώσεων πινάκων και γραμμικών μετασχηματισμών. Επιπλέον γίνεται μια αναφορά στην αντιμεταθετικότητας του γινομένου Kronecker χρησιμοποιώντας πίνακες μεταθέσεων ενώ παράλληλα δίνεται η κανονική μορφή Jordan ενός πίνακα γινομένου Kronecker καθώς και η εξάρτηση του γινομένου Kronecker από τα ευθέα αθροίσματα Jordan μπλοκ.

Στο τρίτο κεφάλαιο εξετάζεται η εφαρμογή του γινομένου Kronecker στις εξισώσεις πινάκων και πιο συγκεκριμένα πάνω στην εξίσωση $\mathrm{AX}+\mathrm{XB}=C$. Επίσης δίνεται ο ορισμός του αθροίσματος Kronecker δύο πινάκων A και B ενώ δίνονται και κάποιες ιδιότητες για τις ιδιοτιμές του σε σχέση με τις ιδιοτιμές των πινάκων A και B. Τέλος γίνεται αναφορά σε δυο θεωρήματα τα οποία δίνουν λύση στις εξισώσεις $\mathrm{AX}-\mathrm{XB}=C$ και $\mathrm{AX}-\mathrm{YB}=C$ αντίστοιχα.

Στο τέταρτο και τελευταίο κεφάλαιο δίνεται ο ορισμός του προσθετικού και πολλαπλασιαστικού αντιμεταθέτη ενώ γίνεται και μια αναφορά στα γραμμικά αναλλοίωτα μέσω κάποιων αποτελεσμάτων του Frobenius με τη συμμέτοχή του γινομένου Kronecker.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 0: Εισαγωγικές έννοιες......14

Κεφάλαιο 1: Το γινόμενο Kronecker......36

Κεφάλαιο 2: Γραμμικές εξισώσεις πινάκων και γινόμενο Kronecker......46

Κεφάλαιο 3: Το Άθροισμα Kronecker και η εξίσωση AX+XB=C......58

Κεφάλαιο 4: Προσθετικοί και πολλαπλασιαστικοί αντιμεταθέτες και γραμμικά αναλλοίωτα. 81

Βιβλιογραφία......90

Κεφάλαιο 0: Εισαγωγικές έννοιες

Το κεφάλαιο αυτό, έχει ως στόχο την υπενθύμιση ορισμένων βασικών εννοιών και ορισμών καθώς και συμπερασμάτων, τα οποία αφορούν τα πεδία της Γραμμικής Άλγεβρας, και της Ανάλυσης Πινάκων και είναι απαραίτητα για την κατανόηση της εργασίας. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι έννοιες αυτές θεωρούνται γνωστές, επομένως οι αποδείξεις τους παραλείπονται.

Ορισμός 0.1 Έστω πίνακας Α τετραγωνικός, τύπου $n \times n$ και υπάρχει πίνακας Χ τέτοιος ώστε $\mathrm{AX} = \mathrm{XA} = \mathrm{I}_n$, τότε λέμε ότι πίνακας Α είναι **αντιστρέψιμος** (nonsingular, μη ιδιάζων) και ο πίνακας Χ είναι ο **αντίστροφος** (inverse) πίνακας του Α. Τότε γράφουμε $\mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1}$.

Σημείωση: Αν Α,Β είναι δυο $n \times n$ αντιστρέψιμοι πίνακες, τότε ο πίνακας ΑΒ είναι αντιστρέψιμος και ισχύει ότι $(\mathrm{AB})^{-1} = \mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{-1}$.

Πρόταση 0.1 Ένας τετραγωνικός πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν η ορίζουσά του είναι διάφορη του 0, ή ισοδύναμα, αν και μόνο αν οι γραμμές του (ή οι στήλες του) είναι ανεξάρτητες.

Ορισμός 0.2 Έστω ένας πίνακας $\mathrm{A} = [\alpha_{ij}] \in M_{m,n}$. Τότε ο πίνακας που προκύπτει από τον Α με εναλλαγή μεταξύ γραμμών και στηλών του λέγεται **ανάστροφος** πίνακας του Α και συμβολίζεται με A^{T}, έχουμε δηλαδή

$$\mathrm{A}^{\mathrm{T}} = [\alpha_{ji}] \in M_{n,m}.$$

Σημείωση: Αν Α,Β είναι δυο $n \times n$ πίνακες, τότε ισχύει ότι $(\mathrm{AB})^{\mathrm{T}} = \mathrm{B}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}$.

Ορισμός 0.3 Έστω ένας $n \times n$ πίνακας $\mathrm{A} = [\alpha_{ij}]$. Ονομάζουμε **ίχνος** του πίνακα Α και συμβολίζουμε με $tr(\mathrm{A})$,, το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου, δηλαδή τον αριθμό

$$tr(\mathrm{A}) = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \ldots + \alpha_{nn} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii}.$$

<u>Ορισμός 0.4</u> Έστω V ένα μη κενό σύνολο και K ένα σώμα. Το σύνολο V λέγεται **διανυσματικός χώρος** ή **γραμμικός χώρος** πάνω στο σώμα K αν έχουν ορισθεί οι εξής πράξεις

(i) Μια εσωτερική πράξη $V \times V \xrightarrow{(+)} V : (x, y) \to x + y,$ που θα λέγεται πρόσθεση έτσι ώστε το σύνολο $(V, +)$ να είναι μια «αντιμεταθετική ομάδα», δηλαδή για κάθε $x, y, z \in V$ να ισχύουν οι ιδιότητες

1. $x + y = y + x$ (αντιμεταθετική ιδιότητα).

2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ (προσεταιριστική ιδιότητα).

3. Υπάρχει ουδέτερο στοιχείο $0 \in V : x + 0 = x \ \ \forall x \in V$.

4. Κάθε $x \in V$, έχει αντίθετο στοιχείο $-x \in V :\ x + (-x) = 0$.

(ii) Μια εξωτερική πράξη $\mathrm{K} \times V \xrightarrow{(\cdot)} V : (\lambda, \mathrm{x}) \to \lambda \cdot x$, που θα λέγεται βαθμωτός πολλαπλασιασμός και για κάθε $x, y \in V$ και $\lambda, \mu \in \mathrm{K}$ θα ικανοποιεί τις ιδιότητες:

5. $(\lambda + \mu)\mathrm{x} = \lambda x + \mu x$.

6. $\lambda(x + y) = \lambda\,\mathrm{x} + \lambda\,\mathrm{y}$.

7. $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu\,\mathrm{x})$.

8. $1x = x$. Το 1 είναι το μοναδιαίο στοιχείο στο σώμα K.

<u>Ορισμός 0.5</u> Έστω V ένας διανυσματικός χώρος πάνω στο σώμα K. Ένα μη κενό υποσύνολο Ε του V λέγεται **διανυσματικός υπόχωρος** ή απλά **υπόχωρος** του V αν το υποσύνολο Ε εφοδιασμένο με τις ίδιες πράξεις του συνόλου V είναι ένας διανυσματικός χώρος πάνω στο σώμα K, ή ισοδύναμα, αν για κάθε $x, y \in \mathrm{E}$ και $\lambda \in \mathrm{K}$ ισχύουν τα έξης

$$x+y \in \mathrm{E} \quad \text{και} \quad \lambda x \in \mathrm{E},$$

δηλαδή το σύνολο Ε είναι κλειστό ως προς τις πράξεις του V.

<u>Ορισμός 0.6</u> Έστω S ένα μη κενό υποσύνολο του διανυσματικού χώρου V. Το σύνολο όλων των στοιχείων του V που είναι γραμμικοί συνδυασμοί στοιχείων του S λέγεται **γραμμικό περίβλημα** ή **γραμμική θήκη** του S και συμβολίζεται με $[S]$.

<u>Πρόταση 0.2</u> Το σύνολο $[S]$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του V και μάλιστα ο μικρότερος υπόχωρος του V που περιέχει το S.

<u>Πρόταση 0.3</u> Αν V_1 και V_2 είναι διανυσματικοί υπόχωροι του διανυσματικού χώρου V τότε το άθροισμα V_1+V_2 είναι επίσης υπόχωρος του διανυσματικού χώρου V.

<u>Ορισμός 0.7</u> Έστω V ένας διανυσματικός χώρος και $V_1, V_2, \ldots, V_k$ υπόχωροι του. Θα λέμε ότι ο V είναι το **ευθύ άθροισμα** των υποχώρων $V_1, V_2, \ldots, V_k$ και θα συμβολίζουμε με $V=V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k$ αν

1) $V=V_1+V_2+\cdots+V_k$,

2) $V_j \cap \sum_{i \neq j} V_i=\{0\} \quad \forall j=1,2, \ldots, k$.

<u>Ορισμός 0.8</u> Έστω V ένας διανυσματικός χώρος πάνω στο σώμα K. Τα διανύσματα $x_1, x_2, \ldots, x_k$ του V θα λέγονται **γραμμικώς εξαρτημένα** αν και μόνο αν υπάρχον συντελεστές $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathrm{K}$ όχι όλοι μηδέν τέτοιοι ώστε

$$\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\ldots+\lambda_k x_k=0. \qquad \textbf{(0.1)}$$

Τα διανύσματα $x_1, x_2, \ldots, x_k$ του διανυσματικού χώρου V θα λέγονται **γραμμικώς ανεξάρτητα** αν και μόνο αν κάθε σχέση της μορφής (0.1) ισχύει μόνο όταν $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0$.

<u>Ορισμός 0.9</u> Έστω V ένας διανυσματικός χώρος και S $(\neq \emptyset)$ ένα υποσύνολο του. Θα λέμε ότι το υποσύνολο S είναι **γραμμικώς εξαρτημένο** αν και μόνο αν υπάρχει ένα πεπερασμένο υποσύνολο του S με γραμμικώς εξαρτημένα διανύσματα. Αν το υποσύνολο S δεν είναι γραμμικώς εξαρτημένο θα λέγεται **γραμμικώς ανεξάρτητο**.

<u>Ορισμός 0.10</u> **Βαθμός** ενός πίνακα ονομάζεται το πλήθος των γραμμικά ανεξαρτήτων γραμμών (ή στηλών) του πίνακα και συμβολίζεται με β(A), rank(A) ή r(A).

<u>Ορισμός 0.11</u> Ένα υποσύνολο S του διανυσματικού χώρου V θα λέμε ότι είναι **βάση** του V αν

1) Το S είναι ένα γραμμικώς ανεξάρτητο σύνολο,
2) $[S] = V$.

<u>Ορισμός 0.12</u> Έστω $V \neq \{0\}$ ένας διανυσματικός χώρος και S μια πεπερασμένη βάση του. Ο αριθμός των στοιχείων της βάσης S λέγεται **διάσταση** του V και συμβολίζεται με $\dim V$. Αν $V = \{0\}$ τότε έχουμε ότι $\dim V = 0$.

Κάθε διανυσματικός χώρος V που έχει $\dim V = \nu \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ λέγεται **πεπερασμένης διάστασης** διανυσματικός χώρος. Διαφορετικά θα λέγεται **απειροδιάστατος χώρος** ή **άπειρης διάστασης** διανυσματικός χώρος.

<u>Πόρισμα 0.1</u> Αν $\dim V = \nu$ και V_1 είναι ένας διανυσματικός υποχώρος του V τότε ισχύει $\dim V_1 \leq \nu$. Ειδικότερα, αν $\dim V_1 = \nu$ τότε $V_1 = V$.

Θεώρημα 0.1 Έστω V ένας διανυσματικός χώρος και V_1, V_2 δύο υπόχωροι του. Τότε ισχύει

$$\dim(V_1+V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim\left(V_1 \cap V_2\right).$$

Ορισμός 0.13 Έστω V_1, V_2 δύο υπόχωροι ένας διανυσματικού χώρου V. Όταν ισχύει ότι

$$V = V_1 \oplus V_2$$

τότε καθένας από τους υπόχωρους V_1, V_2 λέγεται συμπλήρωμα του άλλου ως προς το χώρο V.

Πρόταση 0.4 Κάθε υπόχωρος (πεπερασμένης διάστασης) ενός διανυσματικού χώρου V έχει συμπλήρωμα.

Ορισμός 0.14 Έστω U, V δύο διανυσματικοί χώροι ορισμένοι στο ίδιο σώμα Κ. Μια απεικόνιση $\mathrm{T}: U \to V$ λέγεται **γραμμική** αν για κάθε $x, y \in U$ και για κάθε $\lambda \in \mathrm{K}$ ισχύουν τα ακόλουθα

(i) $\mathrm{T}(\mathrm{x}+\mathrm{y}) = \mathrm{T}(\mathrm{x}) + \mathrm{T}(\mathrm{y})$.

(ii) $\mathrm{T}(\lambda x) = \lambda \mathrm{T}(x)$.

Πρόταση 0.5 Μια απεικόνιση $\mathrm{T}: U \to V$ είναι γραμμική αν και μόνο αν για κάθε $x, y \in U$ και $\lambda, \mu \in \mathrm{K}$ ισχύει

$$\mathrm{T}(\lambda\,\mathrm{x} + \mu\,\mathrm{y}) = \lambda \mathrm{T}(\mathrm{x}) + \mu \mathrm{T}(\mathrm{y}).$$

Έστω U, V δύο διανυσματικοί χώροι πάνω στο ίδιο σώμα Κ. Το σύνολο όλων των γραμμικών απεικονίσεων $\mathrm{T}: U \to V$ θα το συμβολίζουμε με $L(U, V)$. Το σύνολο αυτό, ως σύνολο απεικονίσεων, μπορεί να εφοδιαστεί με τη γνωστή ισότητα και τις πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού. Ειδικότερα αν $\mathrm{T}, S \in L(U, V)$ τότε ορίζουμε $\mathrm{T} = S$ αν και μόνο αν $\mathrm{T}u = Su$ για κάθε $u \in U$. Επίσης για κάθε $u, v \in U$, $\lambda \in \mathrm{K}$, ορίζουμε

$$(\mathrm{T}+\mathrm{S})u = \mathrm{T}u + Su, \quad (\lambda\mathrm{T})u = \lambda \mathrm{T}u.$$

Το σύνολο $L(U,V)$ είναι διανυσματικός χώρος στο σώμα K. Στην περίπτωση που $U=V$ θα γράφουμε $L(U)$. Αν $V=\mathbf{R}$ θα γράφουμε $U^*=L(U,\mathbf{R})$ και τον διανυσματικό χώρο θα τον λέμε συζυγή του U.

Για μια γραμμική απεικόνιση $\mathrm{T}\in L(U,V)$ μπορεί κανείς να πάρει αρκετές πληροφορίες μελετώντας την επίδρασή της στους διάφορους υποχώρους του U, αλλά και τη σχέση που έχει η γραμμική απεικόνιση T με τους διάφορους υποχώρους του διανυσματικού χώρου V. Είναι εύκολο να δείξουμε ότι κάθε υπόχωρος του U απεικονίζεται, μέσω της γραμμικής απεικόνισης T, σ' ένα υπόχωρο του V. Έτσι ο διανυσματικός χώρος U απεικονίζεται από την T σ' ένα διανυσματικό υπόχωρο $\mathrm{R(T)}$ του V που λέγεται **σύνολο** ή **πεδίο τιμών** (range) της T. Ισχύει ότι

$$\mathrm{R(T)}=\{\mathrm{v}\in V : \text{υπάρχει } u\in U \text{ με } \mathrm{T}u=\mathrm{v}\}\equiv \mathrm{T}(U).$$

Επίσης αν $\mathrm{M}\subseteq\mathrm{R(T)}$ είναι ένας υπόχωρος του $\mathrm{R(T)}$, τότε το σύνολο $\{u\in\mathrm{U}:\mathrm{T}u\in\mathrm{M}\}$ είναι ένας υπόχωρος του U. Ειδικότερα ο μηδενικός υπόχωρος ή αλλιώς μηδενοχώρος (nullspace) {0} του $\mathrm{R(T)}$, είναι η εικόνα ενός διανυσματικού υπόχωρου $\mathrm{N(T)}$ του U που λέγεται **πυρήνας** (kernel) της γραμμικής απεικόνισης T και συμβολίζεται με $\ker\mathrm{T}$. Ισχύει ότι

$$\mathrm{N(T)}=\{u\in U : \mathrm{T}u=0\}.$$

Ισχύει πάντοτε ότι $\mathrm{N(T)}\neq\varnothing$, αφού $\mathrm{T}0=0$.

<u>Πόρισμα 0.2</u> (Θεώρημα διάστασης) Έστω η γραμμική απεικόνιση $\mathrm{T}\in L(U,V)$, τότε ισχύει

$$\dim\mathrm{N(T)}+\dim\mathrm{R(T)}=\dim U.$$

<u>Πρόταση 0.6</u> Έστω οι γραμμικές απεικονίσεις $\mathrm{T},S,R\in L(U)$ και $\lambda,\mu\in\mathrm{K}$.

Τότε ισχύουν τα ακόλουθα

1. $(\mathrm{T}S)R = \mathrm{T}(SR)$.
2. $\mathrm{T}(\lambda S + \mu R) = \lambda \mathrm{T}S + \mu \mathrm{T}R$.
3. $(\lambda \mathrm{S} + \mu R)\mathrm{T} = \lambda S\mathrm{T} + \mu R\mathrm{T}$.

<u>**Πρόταση 0.7**</u> Έστω οι γραμμικές απεικονίσεις $\mathrm{T}, S \in L(U)$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα

a. Η γραμμική απεικόνιση $S\mathrm{T}$ είναι αντιστρέψιμη αν και μόνο αν οι γραμμικές απεικονίσεις Τ και S είναι αντιστρέψιμες.
b. Αν η γραμμική απεικόνιση $S\mathrm{T}$ είναι αντιστρέψιμη τότε ισχύει ότι

$$(S\mathrm{T})^{-1} = \mathrm{T}^{-1}S^{-1}.$$

<u>**Πρόταση 0.8**</u> Έστω οι γραμμικές απεικονίσεις $\mathrm{T}, S \in L(U)$ και η γραμμική απεικόνιση Τ να είναι αντιστρέψιμη. Τότε ισχύει ότι

$$\dim R(\mathrm{T}S) = \dim R(S\mathrm{T}) = \dim R(\mathrm{S}) \ .$$

<u>**Θεώρημα 0.2**</u> Θεωρούμε τις βάσεις u, v στους διανυσματικούς χώρους U,V αντίστοιχα. Τότε ισχύει ότι

1. Σε κάθε γραμμική απεικόνιση $\mathrm{T} \in L(U,V)$ αντιστοιχεί μονοσήμαντα ένας πίνακας $\mathrm{A} = (\alpha_{ij})$ τύπου $n \times m$ από στοιχεία του σώματος Κ έτσι ώστε αν $y = \mathrm{T}x,$ τότε $\mathrm{Y} = \mathrm{AX}$.
2. Αντιστρόφως, σε κάθε πίνακα $\mathrm{A} = (\alpha_{ij})$ τύπου $n \times m$ από στοιχεία του σώματος Κ, αντιστοιχεί μονοσήμαντα μια γραμμική απεικόνιση $\mathrm{T} \in L(U,V)$ τέτοια ώστε αν $\mathrm{Y} = \mathrm{AX}$, τότε $y = \mathrm{T}x.$.

<u>**Πόρισμα 0.3**</u> Για κάθε γραμμική απεικόνιση $\mathrm{T}: \mathrm{K}^m \to \mathrm{K}^n$ υπάρχει πίνακας Α τύπου $\boldsymbol{n \times m}$ με στοιχεία από το σώμα Κ τέτοιος ώστε

$$\mathrm{TX} = \mathrm{AX} \ , \ \mathrm{X} \in \mathrm{K}^m.$$

<u>**Πόρισμα 0.4**</u> Κάθε γραμμική απεικόνιση $\mathrm{T}: \mathrm{K}^m \to \mathrm{K}^n$ έχει τη μορφή

$$\mathrm{T}(x_1, x_2, \ldots, x_m) = (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1m}x_m, \cdots, a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nm}x_m) \qquad \textbf{(0.2)}$$

και ο πίνακας της ως προς τις κανονικές βάσεις είναι ο

$$[\mathrm{T}] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nm} \end{bmatrix}.$$

Την έκφραση (0.2) θα την ονομάζουμε **τύπο** την γραμμικής απεικόνισης Τ.

<u>Ορισμός 0.15</u> Δύο πίνακες Α,Β του ίδιου τύπου $n \times m$ λέγονται ισοδύναμοι αν υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες R, S τέτοιοι ώστε

$$\mathrm{B} = R\mathrm{A}S.$$

<u>Ορισμός 0.16</u> Έστω Α,Β δυο τετραγωνικοί τύπου $n \times n$ πίνακες. Οι Α,Β λέγονται **όμοιοι** αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας Ρ τέτοιος ώστε

$$\mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}.$$

<u>Θεώρημα 0.3</u> Δυο τετραγωνικοί πίνακες τύπου $n \times n$ είναι όμοιοι αν και μόνο αν αντιστοιχούν στην ίδια γραμμική απεικόνιση $\mathrm{T} \in L(U)$ ως προς μια κατάλληλη βάση του U ο καθένας.

<u>Ορισμός 0.17</u> Έστω μία γραμμική απεικόνιση $\mathrm{T} \in L(V)$. Ένας αριθμός $\lambda \in \mathrm{K}$ ονομάζεται **ιδιοτιμή** (eigenvalue) ή **χαρακτηριστική τιμή** της γραμμικής απεικόνισης Τ αν υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα $x \in V$ με $x \neq 0$ τέτοιο ώστε

$$\mathrm{T}x = \lambda x.. \qquad \textbf{(0.3)}$$

Κάθε τέτοιο διάνυσμα x που ικανοποιεί την σχέση (0.3) λέγεται **ιδιοδιάνυσμα** ή **χαρακτηριστικό διάνυσμα** της γραμμικής απεικόνισης Τ αντίστοιχο της ιδιοτιμής λ. Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα μίας γραμμικής απεικόνισης λέγονται **χαρακτηριστικά ποσά** της γραμμικής απεικόνισης Τ.

<u>Ορισμός 0.18</u> Θεωρούμε μία γραμμική απεικόνιση $\mathrm{T} \in L(V)$ και $\lambda \in \mathrm{K}$ μια ιδιοτιμή του. Θα ονομάζουμε **ιδιοχώρο** της ιδιοτιμής λ το σύνολο

$$E_\lambda = \{x \in V : \mathrm{T}x = \lambda x\}. \qquad \textbf{(0.4)}$$

<u>Θεώρημα 0.4</u> Έστω $\mathrm{T} \in L(V)$ μία γραμμική απεικόνιση του διανυσματικού χώρου V. Αν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ είναι ιδιοτιμές της γραμμικής απεικόνισης Τ, ανά δυο διαφορετικές μεταξύ τους με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $x_1, x_2, \ldots, x_m$ τότε τα x_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

<u>Ορισμός 0.19</u> Μία γραμμική απεικόνιση $\mathrm{T} \in L(V)$ λέγεται **διαγωνοποιήσιμη** αν υπάρχει μια βάση V ως προς την οποία ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης Τ είναι διαγώνιος.

Έστω $M_n(\mathrm{K})$ το σύνολο των $n \times n$ τετραγωνικών πινάκων με στοιχεία από το σώμα Κ. Ένας πίνακας $\mathrm{A} \in M_n(\mathrm{K})$ ορίζει μία γραμμική απεικόνιση $\mathrm{T} : \mathrm{K}^n \to \mathrm{K}^n$ τέτοια ώστε

$$x \to \mathrm{T}x = y \quad \text{με} \quad \mathrm{Y{=}AX},\ x \in \mathrm{K}^n,\ \mathrm{X} \in \mathrm{M}_{n\times 1}.$$

Ονομάζουμε **ιδιοτιμές** του πίνακα Α τις ιδιοτιμές μιας γραμμικής απεικόνισης Τ και **ιδιοδιανύσματα** του πίνακα Α τα διανύσματα στήλες που αντιστοιχούν στα ιδιοδιανύσματα της γραμμική απεικόνισης Τ. Άρα ο αριθμό $\lambda \in \mathrm{K}$ είναι μια ιδιοτιμή του πίνακα Α αν υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα $\mathrm{X} \in \mathrm{M}_{n\times 1}$ με

$$\mathrm{AX} = \lambda \mathrm{X} \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad (\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I})\mathrm{X} = 0,$$

όπου Ι είναι ο μοναδιαίος πίνακας.

Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα Α λέγονται **χαρακτηριστικά ποσά** του πίνακα Α.

<u>Ορισμός 0.20</u> Το πολυώνυμο $q_A(\lambda) = \det(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n) = 0$ ονομάζεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** του πίνακα A ενώ η εξίσωση

$$\det(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \lambda & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

καλείται **χαρακτηριστική εξίσωση** του πίνακα.

<u>Θεώρημα 0.5</u> Ένας $n \times n$ πίνακας A έχει ακριβώς n ιδιοτιμές (λαμβάνοντας υπόψη την πολλαπλότητα τους).

<u>Παρατήρηση 0.1</u> Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ οι ιδιοτιμές ενός $n \times n$ πίνακα A. Αν υπάρχουν $k \le n$ ιδιοτιμές ίσες με λ_1 τότε λέμε ότι η ιδιοτιμή λ_1 έχει **αλγεβρική πολλαπλότητα** (algebraic multiplicity) ίση με k, συμβολικά

$$\pi(\lambda_1) = \mathrm{k}.$$

Έτσι αν η λ_1 είναι απλή ιδιοτιμή θα ισχύει $\pi(\lambda_1) = 1$, ενώ αν η λ_1 είναι τριπλή ιδιοτιμή τότε θα ισχύει ότι $\pi(\lambda_1) = 3$.

<u>Ορισμός 0.21</u> Έστω ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας A. Ορίζουμε **φάσμα** του πίνακα A, το σύνολο των ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης, οι οποίες και αποτελούν τις ιδιοτιμές του πίνακα A και το συμβολίζουμε με $\sigma(\mathrm{A})$ τέτοιο ώστε

$$\sigma(\mathrm{A}) = \{\lambda_i \in \mathbf{C} : \ det(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n) = 0\}.$$

<u>Ορισμός 0.22</u> Έστω ο $n \times n$ πίνακας A και έστω λ_0 μια ιδιοτιμή του. Ο πυρήνας $\mathrm{N}(\mathrm{A} - \lambda_0 \mathrm{I})$ του χαρακτηριστικού πίνακα $(\mathrm{A} - \lambda_0 \mathrm{I})$ καλείται **ιδιοχώρος** (eigenspace) της ιδιοτιμής λ_0 ο οποίος συμβολίζεται με E_{λ_0} τέτοιος ώστε

$$E_{\lambda_0} = \mathrm{N}(\mathrm{A} - \lambda_0 \mathrm{I}) = \{ \ \mathrm{X} \in \mathbf{R}^n : (\mathrm{A} - \lambda_0 \mathrm{I})\mathrm{X} = 0 \ \} \ .$$

Η διάσταση του ιδιοχώρου E_{λ_0} ονομάζεται **γεωμετρική πολλαπλότητα** της ιδιοτιμής λ_0 και την συμβολίζουμε με $\gamma(\lambda)$ τέτοια ώστε

$$\gamma(\lambda) = \dim E_{\lambda_0} = \dim \mathrm{N}(\mathrm{A} - \lambda_0 \mathrm{I}) \ .$$

<u>Θεώρημα 0.6</u> (Caley-Hamilton) Έστω ο πίνακας $\mathrm{A} \in M_n(\mathrm{K})$ και έστω $q_{\mathrm{A}}(\lambda)$ το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο. Τότε ισχύει

$$q_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}) = 0.$$

<u>Ορισμός 0.23</u> Έστω ο πίνακας $\mathrm{A} \in M_n(\mathrm{K})$. Το μοναδικό πολυώνυμο $m_{\mathrm{A}}(\lambda)$ για το οποίο ισχύει

1. $m_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}) = \mathrm{O}$,
2. Το $m_{\mathrm{A}}(\lambda)$ έχει συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου τη μονάδα,
3. Το $m_{\mathrm{A}}(\lambda)$ έχει το μικρότερο βαθμό από όλα τα πολυώνυμα με τις δυο προηγούμενες ιδιότητες.

Ονομάζατε ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα Α.

<u>Πρόταση 0.9</u> Το ελάχιστο πολυώνυμο έχει τις ίδιες ρίζες με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, αλλά με πολλαπλότητες μικρότερες ή ίσες με εκείνες των ριζών του χαρακτηριστικού πολυωνύμου.

<u>Πρόταση 0.10</u> Οι όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο ελάχιστο πολυώνυμο.

<u>Πρόταση 0.11</u> Δύο όμοιοι πίνακες Α και $\mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ έχουν την ιδία χαρακτηριστική εξίσωση και άρα τις ίδιες ιδιοτιμές. Αν X και Y είναι ιδιοδιανύσματα των πινάκων Α και Β αντίστοιχα, που προκύπτουν από την ίδια ιδιοτιμή, τότε

$$\mathrm{X} = \mathrm{PY}.$$

<u>Ορισμός 0.24</u> Θα λέμε ότι ένας πίνακας $\mathrm{A} \in M_n(\mathrm{K})$ είναι **διαγωνοποιήσιμος** αν είναι όμοιος με έναν διαγώνιο πίνακα. Ισοδύναμα, αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $\mathrm{P} \in M_n(\mathrm{K})$ και διαγώνιος πίνακας Δ τέτοιοι ώστε να είναι

$$(i)\ \mathrm{A} = \mathrm{P}\Delta\mathrm{P}^{-1} \text{ ισοδύναμα } (ii)\ \Delta = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}.$$

Η σχέσεις αυτές λέμε ότι είναι μια **διαγωνοποίηση** του πίνακα Α.

<u>Θεώρημα 0.7</u> Αν ο πίνακας $\mathrm{A} \in M_n(\mathbf{R})$ είναι συμμετρικός $(\mathrm{A}_{ij} = \mathrm{A}_{ji})$ τότε διαγωνοποίειται από ορθογώνιο πίνακα Q $\left(Q^{-1} = Q^{\mathrm{T}}\right)$. Δηλαδή

$$\mathrm{A} = Q^{\mathrm{T}}\Delta Q.$$

<u>Παράδειγμα 0.1</u> Έστω $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ ο οποίος είναι συμμετρικός και επομένως διαγωνοποίειται. Οι ιδιοτιμές του είναι $\lambda_1 = 6,\ \lambda_2 = \lambda_3 = -3$. Για $\lambda = 6$ προκύπτει ένα ιδιοδιάνυσμα το $\mathrm{X}_1 = [2\ \ 1\ \ -2]^{\mathrm{T}}$. Για $\lambda = -3$ προκύπτουν δυο γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα τα $\mathrm{X}_2 = [1\ \ 2\ \ 2]^{\mathrm{T}}$ και $\mathrm{X}_3 = [3\ \ 0\ \ 3]^{\mathrm{T}}$. Επειδή τα ιδιοδιανύσματα που προέρχονται από διαφορετικές ιδιοτιμές είναι μεταξύ τους κάθετα αρκεί να κατασκευάσουμε μια ορθοκανονική βάση στον κάθε ιδιοχώρο. Έτσι για τον E_6 έχουμε το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathrm{Y}_1 = [2/3\ \ 1/3\ \ -2/3]^{\mathrm{T}}$ ενώ για τον E_{-3} με την μέθοδο Gram-Schmidt βρίσκουμε την ορθοκανονική βάση $\mathrm{Y}_2 = [1/3\ \ 2/3\ \ 2/3]^{\mathrm{T}}$, $\mathrm{Y}_3 = [2/3\ \ -2/3\ \ 1/3]^{\mathrm{T}}$. Άρα

$$Q=\begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix} \qquad \text{και} \qquad \mathrm{A}=Q\Delta Q^{\mathrm{T}},$$

όπου, $\Delta = diag(6,-3,-3)$.

<u>Ορισμός 0.25</u> Ο πίνακας $\mathrm{A}\in M_n$ λέγεται **ερμιτιανός** αν ισχύει

$$\mathrm{A}^* = \mathrm{A}.$$

όπου, $\mathrm{A}^* = \overline{\mathrm{A}}^{\mathrm{T}}$ είναι ο **αναστροφοσυζυγής**.

Αν ο πίνακας $\mathrm{A}\in \mathbf{R}^{n\times n}$, τότε λέγεται **συμμετρικός** αν ισχύει

$$\mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \mathrm{A}.$$

Σε κάθε περίπτωση ο πίνακας A καλείται αυτοσυζυγής.

<u>Σημείωση:</u> Αν A,B δυο $n\times n$ πίνακες, τότε ισχύει ότι $(\mathrm{AB})^* = \mathrm{B}^*\mathrm{A}^*$.

<u>Ορισμός 0.26</u> Ο πίνακας $\mathrm{A}\in M_n$ λέγεται **αντιερμιτιανός** αν ισχύει

$$\mathrm{A}^* = -\mathrm{A} \ .$$

Αν ο πίνακας $\mathrm{A}\in \mathbf{R}^{n\times n}$, τότε λέγεται **αντισυμμετρικός** αν ισχύει

$$\mathrm{A}^{\mathrm{T}} = -\mathrm{A} \ .$$

<u>Παρατήρηση 0.2</u> Κάθε ερμιτιανός πίνακας A έχει τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου πραγματικούς αριθμούς και κάθε ζεύγος συμμετρικών ως προς την κύρια διαγώνιο, συζυγείς. Δηλαδή, $\alpha_{ij}\in\mathbf{R}$ και $\alpha_{ji}=\overline{\alpha}_{ij}$ για $i, j=1,2,\ldots,n$.

Αν ο πίνακας A είναι συμμετρικός τότε έχει τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου πραγματικούς αριθμούς και κάθε ζεύγος συμμετρικών ως προς την κύρια διαγώνιο, ίσα. Δηλαδή, $\alpha_{ij}\in\mathbf{R}$ και $\alpha_{ji}=\alpha_{ij}$ για $i, j=1,2,\ldots,n$.

Αντίστοιχα αν ο πίνακας A είναι αντιερμιτιανός, τότε έχει τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου του φανταστικούς αριθμούς και κάθε ζεύγος συμμετρικών ως προς την κύρια διαγώνιο, αντίθετους και συζυγείς.

Δηλαδή, $\alpha_{ij} \in \mathbf{I}$ και $\alpha_{ji} = -\overline{\alpha_{ij}}$ για i, j=1,2,…,n. Αν ο πίνακας A είναι αντισυμμετρικός τότε ο έχει τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου φανταστικούς αριθμούς και κάθε ζεύγος συμμετρικών ως προς την κύρια διαγώνιο, αντίθετα. Δηλαδή, $\alpha_{ij} \in \mathbf{I}$ και $\alpha_{ji} = -\alpha_{ij}$ για i, j=1,2,…,n .

<u>Πρόταση 0.12</u> (Ιδιότητες Ερμιτιανου Πίνακα)

1. $(\mathrm{A}^*)^* = \mathrm{A}$.
2. $(\alpha\mathrm{A})^* = \overline{\alpha}\mathrm{A}^*$.
3. $(\mathrm{A}+\mathrm{B})^* = \mathrm{A}^* + \mathrm{B}^*$.
4. $(\mathrm{AB})^* = \mathrm{B}^*\mathrm{A}^*$.
5. Αν $\mathrm{A} \in M_n$, τοτε οι πινακες $\mathrm{A}^*\mathrm{A},\ \mathrm{AA}^*,\ \mathrm{A}+\mathrm{A}^*,\ i(\mathrm{A}-\mathrm{A}^*)$ ειναι ερμιτιανοι.

<u>Θεώρημα 0.8</u> Οι ιδιοτιμές ενός ερμιτιανού πίνακα είναι πραγματικές, ενώ οι ιδιοτιμές ενός αντιερμιτιανού πίνακα είναι μιγαδικές.

<u>Θεώρημα 0.9</u> Τα ιδιοδιανύσματα ενός ερμιτιανού πίνακα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές, είναι κάθετα μεταξύ τους.

<u>Ορισμός 0.27</u> Ο πίνακας $\mathrm{A} \in M_n$ λέγεται **ορθομοναδιαίος** ή **μοναδιαίος** αν ισχύει

$$\mathrm{A}^*\mathrm{A} = \mathrm{AA}^* \Leftrightarrow \mathrm{A}^* = \mathrm{A}^{-1}.$$

Αν ο πίνακας $\mathrm{A} \in \mathbf{R}^{n\times n}$, τότε ο πίνακας A λέγεται ορθογώνιος αν ισχύει

$$\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A} = \mathrm{AA}^{\mathrm{T}} \Leftrightarrow \mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \mathrm{A}^{-1}.$$

<u>Θεώρημα 0.10</u> Οι ιδιοτιμές ενός ορθομοναδιαίου πίνακα έχουν μέτρο 1.

<u>Θεώρημα 0.11</u> Τα ιδιοδιανύσματα ενός ορθομοναδιαίου πίνακα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές, είναι κάθετα μεταξύ τους.

<u>Ορισμός 0.28</u> Ένας τετραγωνικός πίνακας $\mathrm{A} \in M_n$ λέγεται **κανονικός** (normal) αν ισχύει η σχέση

$$\mathrm{A}^*\mathrm{A} = \mathrm{AA}^*.$$

δηλαδή, κανονικός ονομάζεται ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας Α που αντιμετατίθεται με τον αναστροφοσυζυγή του.

Αν ο πίνακας $\mathrm{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$, τότε λέγεται κανονικός αν και μόνο αν ισχύει

$$\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A} = \mathrm{A}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}.$$

Παρατήρηση 0.3 Οι ερμιτιανοί, οι αντιερμιτιανοί και οι ορθομοναδιαίοι πίνακες είναι κανονικοί.

Ορισμός 0.29 Έστω Α ερμιτιανός, συμμετρικός $n \times n$ πίνακας. Σε αυτήν την περίπτωση καλείται **θετικά ορισμένος** πίνακας εάν

$$x^{*}\mathrm{A}x > 0 \text{ για κάθε } x \neq 0.$$

Σημείωση: Ένας συμμετρικός πίνακας Α θα είναι θετικά ορισμένος εάν όλες του οι ιδιοτιμές είναι θετικές.

Ορισμός 0.30 Έστω Α ένας $n \times n$ (τετραγωνικός) πίνακας. Ένα μη-μηδενικό διάνυσμα ονομάζεται **δεξί ιδιοδιάνυσμα** του Α που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή του λ,δηλαδή ένα διάνυσμα στήλη που πρέπει να τοποθετείται δεξιά από τον πίνακα Α στην χαρακτηριστική εξίσωση

$$\mathrm{A}x = \lambda x.$$

Ένα μη-μηδενικο διάνυσμά y που ικανοποίει την εξίσωσή

$$y^{*}\mathrm{A} = \lambda y^{*}.$$

Καλείται **αριστερό ιδιοδιάνυσμα** του πίνακα Α που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή του.

Ορισμός 0.31 (Ιδιάζουσες Τιμές Πίνακα) Έστω ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας. Ονομάζουμε **ιδιάζουσα τιμή** $\sigma_i = \sigma_i(\mathrm{A})$ με $i=1,2,\ldots,n,$ του πίνακα Α την τιμή

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i} \quad \text{με } i=1,2,\ldots,n,$$

όπου λ_i είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A^*A. Οι ιδιάζουσες τιμές συνήθως διατάσσονται σε φθίνουσα σειρά, δηλαδή $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n \geq 0$.

Σε αυτό το σημείο αξίζει να αναφερθούμε σε μια από τις σημαντικότερες ως προς τις εφαρμογές, παραγοντοποίηση πινάκων, την παραγοντοποίηση ιδιαζουσών τιμίων (singular value decomposition), την οποία και θα καλούμε παραγοντοποίηση **SVD**.

Θεώρημα 0.12 Αν A είναι ένας $n \times m$ μιγαδικός πίνακας , τότε υπάρχουν ορθομοναδιαίοι πίνακες $U = [u_1 | u_2 | \ldots | u_n] \in M_n$ και $V=[v_1 | v_2 | \ldots | v_m] \in M_m$ τέτοιοι ώστε

$$A = U diag\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{\min\{n,m\}}\} V^* = U \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \sigma_2 & \cdots 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 \cdots & \sigma_r & 0 & \cdots \\ 0 & 0 \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} V^* = U \Sigma V^*$$

όπου, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_{\min\{n,m\}} \geq 0$, οι ιδιάζουσες τιμές του πίνακα A με $\sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i(A)}$ και $rank(A) = r$.

Πόρισμα 0.5 Έστω οι πίνακες, $A, B \in M_n$ και $\sigma_1(A), \sigma_2(A), \ldots, \sigma_n(A)$, $\sigma_1(B), \sigma_2(B), \ldots, \sigma_n(B)$ οι ιδιάζουσες τιμές τους με

$$\sigma_1(A) \geq \sigma_2(A) \geq \cdots \geq \sigma_n(A) \geq 0,$$

$$\sigma_1(B) \geq \sigma_2(B) \geq \cdots \geq \sigma_n(B) \geq 0.$$

Τότε θα ισχύει

$$\sigma_i(A+B) \leq \sigma_i(A) + \sigma_i(B),$$

$$\sigma_i(AB) \leq \sigma_i(A)\sigma_i(B).$$

Αν τώρα ο μιγαδικός πίνακας A του Θεωρήματος (0.12) είναι τετραγωνικός $n \times n$, τότε θα ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις

$$\mathrm{AA}^* = U diag\{\sigma^2{}_1, \sigma^2{}_2, \ldots, \sigma^2{}_{\min\{n,m\}}\} U^*,$$

και

$$\mathrm{A}^*\mathrm{A} = V diag\{\sigma^2{}_1, \sigma^2{}_2, \ldots, \sigma^2{}_{\min\{n,m\}}\} V^*.$$

Συμπεραίνουμε ότι

1. Οι μη μηδενικές ιδιάζουσες τιμές του A είναι οι τετραγωνικές ρίζες των μη μηδενικών ιδιοτιμών των (θετικά ημιορισμένων) ερμιτιανων πινάκων AA^* και $\mathrm{A}^*\mathrm{A}$.
2. Τα αριστερά ιδιάζοντα διανύσματα του A είναι τα ιδιοδιανύσματα του AA^*.
3. Τα δεξιά ιδιάζοντα διανύσματα του A είναι τα ιδιοδιανύσματα του $\mathrm{A}^*\mathrm{A}$.

<u>Ορισμός 0.32</u> Έστω ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας A. Ονομάζουμε **αριθμητικό πεδίο** (numerical range ή field of values) του πίνακα A, το οποίο συμβολίζουμε $F(\mathrm{A})$ το σύνολο

$$F(\mathrm{A}) = \{x^*\mathrm{A}x \in \mathbf{C} : x \in \mathbf{C}^n, x^*x = 1\}.$$

<u>Πρόταση 0.13</u> Έστω τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας A και $\alpha \in \mathbf{C}$, τότε ισχύει

$$F(\mathrm{A} + \alpha \mathrm{I}) = F(\mathrm{A}) + \alpha \text{ και } \mathrm{F}(\alpha\mathrm{A}) = \alpha\mathrm{F}(\mathrm{A}).$$

<u>Πρόταση 0.14</u> Έστω τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας A, τότε το φάσμα του σ(A) περιέχεται στο αριθμητικό του πεδίο

$$\sigma(\mathrm{A}) \subseteq F(\mathrm{A}).$$

<u>Πρόταση 0.15</u> (Υποπροσθετικότητα) Έστω τετραγωνικοί $n \times n$ πίνακες A,B. Τότε ισχύει

$$F(\mathrm{A}+\mathrm{B}) \subseteq F(\mathrm{A})+F(\mathrm{B}).$$

__Πρόταση 0.16__ Έστω τετραγωνικοί $n \times n$ πίνακες A και U, με U ορθομοναδιαίο. Τότε ισχύει

$$F(U^{*}\mathrm{A}U) = F(\mathrm{A}).$$

__Πρόταση 0.17__ **(Κανονικότητα)** Έστω $\mathrm{A} \in M_n$ κανονικός πίνακας, τότε το αριθμητικό του πεδίο είναι ίσο με την κυρτή θήκη των ιδιοτιμών του τέτοιο ώστε

$$F(\mathrm{A}) = Co(\sigma(\mathrm{A})).$$

__Πρόταση 0.18__ **(Θεώρημα Toeplitz-Hausdorff):** Έστω τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας A, τότε το αριθμητικό του πεδίο είναι κυρτό.

__Ορισμός 0.33__ Μια απεικόνιση $\Phi: V \times V \to \mathbf{R}$ θα λέγεται **διγραμμική απεικόνιση** ή **διγραμμική μορφή** αν είναι γραμμική και ως προς τις δύο μεταβλητές της, δηλαδή για κάθε $x, y, \mathrm{z} \in V, \lambda, \mu \in \mathbf{R}$ ισχύουν οι

(i) $\Phi(\lambda x + \mu y, \mathrm{z}) = \lambda \Phi(x, \mathrm{z}) + \mu \Phi(y, z)$.

(ii) $\Phi(x, \lambda y + \mu z) = \lambda \Phi(x, y) + \mu \Phi(x, \mathrm{z})$.

__Πρόταση 0.19__ Μια διγραμμική μορφή λέγεται **συμμετρική** αν

$$\Phi(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \Phi(\mathrm{y}, \mathrm{x}) .$$

__Ορισμός 0.34__ Θεωρούμε μια συμμετρική διγραμμική μορφή $\Phi: V \times V \to \mathbf{R}$ και ορίζουμε τη συνάρτηση $F: V \to \mathbf{R}$ με $F(x) = \Phi(x, x) = \mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{AX}$. Η F λέγεται **τετραγωνική μορφή** που ορίζεται από την διγραμμική μορφή Φ.

__Παράδειγμα 0.2__ Η τετραγωνική μορφή με έκφραση ως προς την κανονική βάση $\mathbf{R}^3$

$$F(x) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3,$$

έχει πίνακα

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix},$$

και άρα γράφεται στη μορφή

$$F(x) = \mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{AX}.$$

Θεωρούμε μια τετραγωνική μορφή $F: V \to \mathbf{R}$, η οποία ως προς μια βάση $\varepsilon = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\}$ έχει την έκφραση

$$F(x) = \mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{AX} \ . \tag{0.5}$$

Ο πίνακας A της τετραγωνικής μορφής ως προς οποιαδήποτε βάση είναι συμμετρικός και άρα διαγωνοποίειται από έναν ορθογώνιο πίνακα. Έστω

$$\mathrm{A} = Q\Delta Q^{\mathrm{T}} \ ,$$

μια διαγωνοποίηση του A με $\Delta = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ και ορθογώνιο πίνακα Q (Θεώρημα 0.7). Θέτουμε

$$\mathrm{X} = Q\mathrm{Y} \ ,$$

με $\mathrm{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_n]^{\mathrm{T}}$, οπότε

$$\begin{aligned} F(x) &= (Q\mathrm{Y})^{\mathrm{T}}\mathrm{A}(Q\mathrm{Y}) = \mathrm{Y}^{\mathrm{T}}(Q^{\mathrm{T}}\mathrm{A}Q)\mathrm{Y} = \mathrm{Y}^{\mathrm{T}}\Delta\mathrm{Y} \\ &= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2. \end{aligned} \tag{0.6}$$

Επομένως η F έχει μια έκφραση απλούστερη από την σχέση (0.5) αφού απουσιάζουν οι όροι με τα γινόμενα των μεταβλητών.

Θεώρημα 0.13 Για κάθε τετραγωνική μορφή $F: V \to \mathbf{R}$, υπάρχει μια ορθοκανονική βάση $u = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ του διανυσματικού χώρου V και οι αριθμοί $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbf{R}$ έτσι ώστε

$$F(x) = \mathrm{Y}^{\mathrm{T}}\Delta\mathrm{Y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \ ,$$

όπου, τα y_i είναι συνιστώσες του x στη βάση u, δηλαδή $x = y_1u_1 + y_2u_2 + \cdots + y_nu_n$. Η έκφραση αυτή (σχέση 0.6) λέγεται **κανονική μορφή** της *F*.

<u>**Παράδειγμα 0.3**</u> Έστω η τετραγωνική μορφή $F:\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ του παραδείγματος (0.2) για την οποία δείξαμε ότι γράφεται στη μορφή $F(x) = \mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}\mathrm{X}$, $\mathrm{X}^{\mathrm{T}} = \left[x_1, x_2, x_3\right]$ με τον πίνακα της τετραγωνικής μορφής να είναι ο πίνακας

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 4$, οπότε προκύπτει η κανονική μορφή της F

$$F(x) = \mathrm{Y}^{\mathrm{T}}\Delta\mathrm{Y} = y_1^2 + 3y_2^2 + 4y_3^2 \ .$$

Ο ορθογώνιος πίνακας των αντίστοιχων ιδιοδιανυσμάτων του είναι ο

$$Q = \begin{bmatrix} \sqrt{6}/6 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{6}/3 & 0 & -\sqrt{3}/3 \\ \sqrt{6}/6 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{3}/3 \end{bmatrix}.$$

Ο μετασχηματισμός που κάνει την αναγωγή είναι $\mathrm{X} = Q\mathrm{Y}$. Η νέα βάση $u = \{u_1, u_2, u_3\}$ ως προς την οποία η F έχει τη κανονική μορφή έχει διάνυσμα u_i την i-στήλη του πίνακα Q.

Έστω τώρα ο παρακάτω πίνακας

$$[T]_\beta = J = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ορισμός 0.35 Ο πίνακας αυτός λέγεται **κανονική μορφή Jordan.** Ο πίνακας αυτός έχει τις ιδιοτιμές του στην διαγώνιο, στην δευτερεύουσα διαγώνιο τα στοιχεία θα είναι 0 ή 1, και τα υπόλοιπα στοιχεία 0. Τα διαγώνια μπλοκ (block) που εμφανίζονται (ένα για κάθε ιδιοτιμή) λέγονται **Jordan μπλοκ** (Jordan blocks). Το κάθε μπλοκ έχει εσωτερικά μπλοκ, όσα και η γεωμετρική πολλαπλότητα της κάθε ιδιοτιμής.

Πρόταση 0.20 Ο πίνακας Α θα είναι όμοιος με μια κανονική μορφή Jordan αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P τέτοιος ώστε

$$J = P^{-1} \mathrm{A} P .$$

Θεώρημα 0.14 Έστω Α ένας $n \times n$ πίνακας με χαρακτηριστικό και ελάχιστο πολυώνυμο

$$q_{\mathrm{A}}(x) = (x-\lambda_1)^{n_1}(x-\lambda_2)^{n_2}\ldots(x-\lambda_r)^{n_r}, \quad m_{\mathrm{A}}(x) = (x-\lambda_1)^{m_1}(x-\lambda_2)^{m_2}\ldots(x-\lambda_r)^{m_r},$$

αντίστοιχα, όπου λ_i οι ιδιοτιμές, m_i η αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_i και n_i η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_i. (υποθέτουμε πως έχει πραγματικές ιδιοτιμές). Τότε για την κανονική μορφή Jordan έχουμε ότι

Από το χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

I. Ο πίνακας Jordan αποτελείται από r το πλήθος Jordan μπλοκ.

II. Κάθε Jordan μπλοκ είναι τύπου $n_i \times n_i$.

<u>Από το ελάχιστο πολυώνυμο:</u>

I. Υπάρχει τουλάχιστον ένας υποπίνακας J_{ij} τάξης m_i. Οι άλλοι έχουν τάξη $\leq m_i$.

II. Ο αριθμός των υποπινάκων J_{ij} ισούται με την γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής.

Κεφάλαιο 1: Το γινόμενο Kronecker

Μια έννοια που είναι χρήσιμη στη μελέτη των εξισώσεων πινάκων και άλλων εφαρμογών η οποία όμως διαφέρει με τον δικό της τρόπο, είναι το γινόμενο Kronecker, το ευθύ γινόμενο ή το τανυστικό γινόμενο. Το γινόμενο αυτό ορίζεται από δύο πίνακες αυθαίρετων μεγεθών πάνω σε οποιονδήποτε δακτύλιο, ωστόσο θα επικεντρωθούμε σε πίνακες του πεδίου K με $\mathrm{K} = \mathbf{C}$ ή $\mathbf{R}$.

<u>Ορισμός 1.1</u> Το **γινόμενο Kronecker** των πινάκων $\mathrm{A} = \left[\alpha_{ij}\right] \in M_{m,n}$ και $\mathrm{B} = \left[b_{ij}\right] \in M_{p,q}$ δηλώνεται με $\mathrm{A} \otimes \mathrm{B}$ και ορίζεται να είναι ο πίνακας

$$\mathrm{A} \otimes \mathrm{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathrm{B} \cdots a_{1n}\mathrm{B} \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ a_{m1}\mathrm{B} \cdots a_{mn}\mathrm{B} \end{bmatrix} \in M_{mp,nq}.$$

Σημειώνουμε ότι, γενικότερα $\mathrm{A} \otimes \mathrm{B} \neq \mathrm{B} \otimes \mathrm{A}$.

<u>Ορισμός 1.2</u> Έστω ο πίνακας $\mathrm{A} \in M_{m,n}$. Η **k-οστη δύναμη Kronecker** $\mathrm{A}^{\otimes k}$ ορίζεται επαγωγικά για όλους τους θετικούς ακέραιους k με $\mathrm{A}^{\otimes 1} \equiv \mathrm{A}$ και

$$\mathrm{A}^{\otimes k} \equiv \mathrm{A} \otimes \mathrm{A}^{\otimes (k-1)}, \quad \text{για } k=2,3.$$

Κάποιες πολύ βασικές ιδιότητες για το γινόμενο Kronecker είναι οι εξής

I. $(\alpha \mathrm{A}) \otimes \mathrm{B} = \mathrm{A} \otimes (\alpha \mathrm{B})$ για όλα τα $\alpha \in \mathrm{K}$ με $\mathrm{A} \in M_{m,n}$ και $\mathrm{B} \in M_{p,q}$.

II. $\left(\mathrm{A} \otimes \mathrm{B}\right)^{\mathrm{T}} = \mathrm{A}^{\mathrm{T}} \otimes \mathrm{B}^{\mathrm{T}}$ με $\mathrm{A} \in M_{m,n}$ και $\mathrm{B} \in M_{p,q}$.

III. $(\mathrm{A} \otimes \mathrm{B})^{*} = \mathrm{A}^{*} \otimes \mathrm{B}^{*}$ με $\mathrm{A} \in M_{m,n}$ και $\mathrm{B} \in M_{p,q}$.

IV. $\left(\mathrm{A} \otimes \mathrm{B}\right) \otimes C = \mathrm{A} \otimes \left(\mathrm{B} \otimes C\right)$ με $\mathrm{A} \in M_{m,n}$, $\mathrm{B} \in M_{p,q}$ και $\mathrm{C} \in M_{r,s}$.

V. $\left(\mathrm{A}+\mathrm{B}\right)\otimes C=\mathrm{A}\otimes C+\mathrm{B}\otimes C$ με $\mathrm{A},\mathrm{B}\in M_{m,n}$ και $\mathrm{C}\in M_{p,q}$.

VI. $\mathrm{A}\otimes(\mathrm{B}+C)=\mathrm{A}\otimes\mathrm{B}+\mathrm{A}\otimes C$ με $\mathrm{A}\in M_{m,n}$ και $\mathrm{B},C\in M_{p,q}$.

<u>Ορισμός 1.3</u> Με κάθε πίνακα $\mathrm{A}=\left[\alpha_{ij}\right]\in M_{m,n}$ σχετίζουμε το διάνυσμα $\mathrm{vecA}\in \mathrm{K}^{mn}$ ορισμένο από το

$$\mathrm{vecA}=\left[a_{11},\dots,a_{m1},a_{12},\dots,a_{m2},a_{1n},\dots,a_{mn}\right]^{\mathrm{T}}.$$

Μια απλή αλλά θεμελιώδης ιδιότητα του γινομένου Kronecker είναι η ακόλουθη ιδιότητα του μικτού γινομένου που συμπεριλαμβάνει και το συνηθισμένο πίνακα γινομένου και το γινόμενο Kronecker.

<u>Λήμμα 1.1</u> Έστω οι πίνακες $\mathrm{A}\in M_{m,n}$, $\mathrm{B}\in M_{p,q}$, $\mathrm{C}\in M_{\mathrm{n,k}}$ και $D\in M_{q,r}$. Τότε

$$\left(\mathrm{A}\otimes\mathrm{B}\right)\left(C\otimes D\right)=\mathrm{A}C\otimes\mathrm{B}D.$$

<u>Απόδειξη</u>

Η απόδειξη είναι μια άσκηση πάνω στον διαμερισμένο πολλαπλασιασμό. Έστω, $\mathrm{A}=\left[\alpha_{ih}\right]$ και $C=\left[c_{hj}\right]$. Χωρίζοντας σύμφωνα με το μέγεθος των πινάκων B και D, θεωρούμε τον πίνακα $\mathrm{A}\otimes\mathrm{B}=\left[\alpha_{ih}\mathrm{B}\right]$ και $C\otimes D=c_{hj}D$. Τα i,j μπλοκ του $\left(\mathrm{A}\otimes\mathrm{B}\right)\left(C\otimes D\right)$ είναι

$$\sum_{h=1}^{n}\alpha_{ih}\mathrm{B}c_{hj}D=\left[\sum_{h=1}^{n}\alpha_{ih}c_{hj}\right]\mathrm{B}D.$$

Ωστόσο αυτό το μπλοκ είναι το i,j στοιχείο του πίνακα $\mathrm{A}C$ επι το μπλοκ $\mathrm{B}D$, το οποίο ταυτίζεται με το i,j μπλοκ $\mathrm{A}C\otimes\mathrm{B}D$. □

<u>Πόρισμα 1.1</u> Έστω οι πίνακες $\mathrm{A}\in M_m$ και $\mathrm{B}\in M_n$ οι οποίοι είναι αντιστρέψιμοι, τότε το ίδιο θα ισχύει και για τον πίνακα $\left(\mathrm{A}\otimes\mathrm{B}\right)$ με $\left(\mathrm{A}\otimes\mathrm{B}\right)^{-1}=\mathrm{A}^{-1}\otimes\mathrm{B}^{-1}$.

Απόδειξη

Λαμβάνοντας υπόψιν τους υπολογισμούς

$$\left(\mathrm{A}\otimes\mathrm{B}\right)(\mathrm{A}^{-1}\otimes\mathrm{B}^{-1})=\mathrm{AA}^{-1}\otimes\mathrm{BB}^{-1}=\mathrm{I}\otimes\mathrm{I}=\mathrm{I}\,,$$

όπου οι διάφοροι μοναδιαίοι πίνακες έχουν τις κατάλληλες διαστάσεις. □

Τώρα μπορούμε να καθορίσουμε τις ιδιοτιμές του γινομένου Kronecker δυο τετραγωνικών μιγαδικών πινάκων. Στο σημείο αυτό και για την απόδειξη του παρακάτω θεωρήματος μας είναι απαραίτητο το γνωστό λήμμα του Schur.

Λήμμα 1.2 **(Λήμμα Schur)** Έστω ένας τυχαίος πίνακας $\mathrm{A}\in M_n$. Τότε υπάρχουν ένας ορθομοναδιαιος πίνακάς $U\in M_n$ και ένας άνω τριγωνικός $\Delta\in M_n$ με διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές του A (λαμβάνοντας υπόψιν και τις πολλαπλότητες) τέτοιοι ώστε

$$U^{*}\mathrm{A}U=\Delta\,,\ \text{ή ισοδύναμα},\ \ \mathrm{A}=U\Delta U^{*}\ .$$

Πόρισμα 1.2 **(Διαγωνοποίηση Ερμιτιανών Πινάκων)** Για κάθε A ερμιτιανό $n\times n$ πίνακα με ιδιοτιμές, $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ υπάρχει ορθομοναδιαίος πίνακας U έτσι ώστε

$$U^{*}\mathrm{A}U=\Delta,$$

όπου, $\Delta=diag\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\}$.

Θεώρημα 1.1 Έστω οι πίνακες $\mathrm{A}\in M_n$ και $\mathrm{B}\in M_m$. Αν $\lambda\in\sigma\left(\mathrm{A}\right)$ και $x\in\mathbf{C}^n$ να είναι ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα του πίνακα A και αν $\mu\in\sigma\left(\mathrm{B}\right)$ με $y\in\mathbf{C}^m$ να είναι ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα του πίνακα B, τότε $\lambda\mu\in\sigma\left(\mathrm{A}\otimes\mathrm{B}\right)$ και το $x\otimes y\in\mathbf{C}^{nm}$ είναι ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα του πίνακα $\mathrm{A}\otimes\mathrm{B}$. Κάθε ιδιοτιμή του πίνακα $\mathrm{A}\otimes\mathrm{B}$ εφαρμόζεται σαν ένα γινόμενο των ιδιοτιμών των πινάκων Α και Β. Εάν $\sigma(\mathrm{A})=\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}$ και $\sigma(\mathrm{B})=\{\mu_1,\ldots,\mu_m\}$, τότε

$$\sigma(\mathrm{A}\otimes\mathrm{B})=\left\{\lambda_i\mu_j:\ i=1,\ldots,n,\ j=1,\ldots,m\right\}.$$

(συμπεριλαμβανομένων των αλγεβρικών πολλαπλοτήτων και στις τρείς περιπτώσεις) .Ειδικότερα, $\sigma(\mathrm{A}\otimes\mathrm{B})=\sigma(\mathrm{B}\otimes\mathrm{A})$.

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι $\mathrm{A}x=\lambda x$ και $\mathrm{B}y=\mu y$ με $x,y\neq 0$. Βασιζόμενοι στο Πόρισμα (1.1) εξάγεται ότι

$$(\mathrm{A}\otimes\mathrm{B})(x\otimes y)=\mathrm{A}x\otimes\mathrm{B}y=\lambda x\otimes\mu y=\lambda\mu(x\otimes y).$$

Από το λήμμα Schur καθίσταται σίγουρο ότι υπάρχουν ορθομοναδιαίοι πίνακες $U\in M_n$ και $V\in M_m$ τέτοιοι ώστε οι πίνακες $U^*\mathrm{A}U=\Delta_\mathrm{A}$ και $V^*\mathrm{B}V=\Delta_\mathrm{B}$ να είναι άνω τριγωνικοί.

Τότε ο πίνακας

$$(U\otimes V)^*(\mathrm{A}\otimes\mathrm{B})(U\otimes V)=(U^*\mathrm{A}U)\otimes(V^*\mathrm{B}V)=\Delta_\mathrm{A}\otimes\Delta_\mathrm{B},$$

είναι άνω τριγωνικός και όμοιος με τον πίνακα $\mathrm{A}\otimes\mathrm{B}$. Οι ιδιοτιμές των πινάκων Α, Β και $\mathrm{A}\otimes\mathrm{B}$ είναι ακριβώς τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου των πινάκων $\Delta_\mathrm{A},\Delta_\mathrm{B}$ και $\Delta_\mathrm{A}\otimes\Delta_\mathrm{B}$ αντίστοιχα. Η κύρια διαγώνιος του πίνακα $\Delta_\mathrm{A}\otimes\Delta_\mathrm{B}$ αποτελείται από n^2 κατά ζεύγη γινόμενα στοιχείων των πινάκων Δ_A και Δ_B . □

Πόρισμα 1.3 Εάν $\mathrm{A}\in\mathrm{M}_n$ και $\mathrm{B}\in\mathrm{M}_m$ είναι θετικοί ημιορισμένοι ερμιτιανοί πίνακες, τότε ο πίνακας $\mathrm{A}\otimes\mathrm{B}$ είναι επίσης θετικά ημιορισμένος ερμιτιανός πίνακάς.

Απόδειξη

Το γινόμενο Kronecker $A \otimes B$ είναι ερμιτιανός πίνακας αν οι πίνακες A και B είναι ερμιτιανοί, βάση της σχέσης II (σελίδα 36) και οι ιδιοτιμές τους είναι όλες θετικές από το θεώρημα (1.1), εάν οι ιδιοτιμές των πινάκων A και B είναι θετικές. Ένας ερμιτιανός πίνακας με θετικές ιδιοτιμές είναι θετικά ορισμένος. Το αντίστοιχο ισχύει αν οι ιδιοτιμές των A και B είναι μη αρνητικές. □

<u>Υπενθύμιση :</u> Οι ιδιάζουσες τιμές του πίνακα $A \in M_{m,n}$ είναι οι τετραγωνικές ρίζες των $\min\{m,n\}$ μεγαλύτερων ιδιοτιμών (λαμβάνοντας υπόψιν τις πολλαπλότητες) του πίνακα A^*A και συνήθως δηλώνεται ως

$$\sigma_1(A) \geq \sigma_2(A) \geq, \cdots, \geq \sigma_q(A) \geq 0, \quad q = \min\{m,n\}. \qquad \textbf{(1.1)}$$

Η παραγοντοποίηση ιδιάζουσων τιμών του πίνακα A (Παραγοντοποίηση SVD) είναι $A = V\Sigma W^*$, όπου $V \in M_m$ και $W \in M_n$ είναι ορθομοναδιαίοι πίνακες, και ο πίνακας $\Sigma = \left[\sigma_{ij}\right] \in M_{m,n}$ έχει στοιχεία της μορφής $\sigma_{ii} = \sigma_i(A), \ i = 1, \ldots, \min\{m,n\}$ ενώ όλα τα άλλα στοιχεία του πίνακα είναι μηδενικά. Ο βαθμός του πίνακα A είναι αποδεδειγμένα ο αριθμός των μη μηδενικών ιδιάζουσων τιμών. Το ακόλουθο αποτέλεσμα σχετικά με τις ιδιάζουσες τιμές του γινόμενου Kronecker προκύπτει άμεσα από την ιδιότητα του μικτού γινομένου (λήμμα (1.1)).

<u>**Θεώρημα 1.2**</u> Έστω οι πίνακες $A \in M_{m,n}$ και $B \in M_{p,q}$. Έχουμε παραγοντοποίηση ιδιάζουσων τιμών (SVD) για τους πίνακες $A = V_1\Sigma_1W_1^*$ και $B = V_2\Sigma_2W_2^*$ και έστω $rank A = r_1$ και $rank B = r_2$. Τότε

$$A \otimes B = (V_1\Sigma_1W_1^*) \otimes (V_2\Sigma_2W_2^*) = (V_1 \otimes V_2)(\Sigma_1 \otimes \Sigma_2)(W_1 \otimes W_2)^*.$$

Οι μη μηδενικές ιδιάζουσες τιμές του πίνακα $A \otimes B$ είναι οι θετικοί αριθμοί r_1r_2 με $\{\sigma_i(A)\sigma_j(B) : 1 \leq i \leq r_1, \ 1 \leq j \leq r_2\}$ (συμπεριλαμβανομένων των πολλαπλοτήτων). Ο πίνακας $A \otimes B$ έχει μια μηδενική ιδιάζουσα τιμή με πολλαπλότητα $\min\{mp, nq\} - r_1 r_2$. Ειδικότερα, οι ιδιάζουσες τιμές του πίνακα $A \otimes B$ είναι ίδιες με αυτές του πίνακα $B \otimes A$ και ισχύει $\mathrm{rank}(A \otimes B) = rank(B \otimes A) = r_1 r_2$.

Στη συζήτηση μας για το γινόμενο Kronecker μέχρι εδώ έχουμε συναντήσει σημεία στα οποία κάποιες ιδιότητες του πίνακα $A \otimes B$ είναι ίδιες με αυτές του πίνακα $B \otimes A$, για παράδειγμα, οι ιδιοτιμές τους όταν και ο πίνακας A και ο πίνακας B είναι τετραγωνικοί ή ο βαθμός και γενικότερα οι ιδιάζουσες τιμές. Επιπλέον, όταν ο πίνακας $A \otimes B$ είναι τετραγωνικός παρατηρείται το ίδιο φαινόμενο. Εάν οι πίνακες A και B είναι τετραγωνικοί παρατηρούμε ότι $tr(A \otimes B) = tr(B \otimes A)$ και επίσης ο πίνακας $A \otimes B$ είναι κανονικός αν και μόνο αν ο πίνακας $B \otimes A$ είναι κανονικός. Υπάρχει ένα απλό αλλά σημαντικό γεγονός που υπογραμμίζει αυτή την παρατήρηση. Ανεξάρτητα των μεγεθών των πινάκων A και B, ο πίνακας $A \otimes B$ είναι πάντα μια μετάθεση ισοδύναμη του πίνακα $B \otimes A$, το οποίο σημαίνει ότι

$$B \otimes A = P(A \otimes B)Q$$

για κάποιες περιπτώσεις πινάκων P και Q. Επιπλέον, όταν οι πίνακες A και B είναι και οι δυο τετραγωνικοί μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ότι $P = Q^T$, έτσι η μετάθεση ισοδυναμίας ανάμεσα στους πίνακες $A \otimes B$ και $B \otimes A$ είναι στην πραγματικότητα μια μετάθεση ομοιότητας.

Ολοκληρώνοντας αυτό το κεφάλαιό δίνονται κάποια αποτελέσματα τα οποία συσχετίζουν το γινόμενο Kronecker και το πεδίο των τιμών $F(\bullet)$. Υπενθυμίζεται ότι το γινόμενο δυο συνόλων $S_1, S_2 \subseteq \mathbf{C}$ ορίζεται ως

$$S_1 S_2 \equiv \{s_1 s_2 : s_1 \in S_1,\ s_2 \in S_2\}.$$

<u>Θεώρημα 1.3</u> Έστω πίνακες $A \in M_m$ και $B \in M_n$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα

a) $F(A \otimes B) \supseteq Co\big(F(A)F(B)\big) \supseteq F(A)F(B)$.

b) Αν ο πίνακας Α είναι κανονικός, τότε $F\left(\mathrm{A}\otimes\mathrm{B}\right)=Co(F(\mathrm{A})F(\mathrm{B}))$.

c) Αν ο πίνακας $e^{i\theta}\mathbf{A}$ είναι θετικά ημιορισμένος για κάποιο $\theta\in[0,2\pi)$ τότε $F(\mathrm{A}\otimes\mathrm{B})=F(\mathrm{A})F(\mathrm{B})$.

<u>Απόδειξη</u>

a) Πρώτα παρατηρούμε ότι $F(\mathrm{A})F(\mathrm{B})\subseteq F(\mathrm{A}\otimes\mathrm{B})$ η οποία σχέση δεν εξαρτάται από καμία υπόθεση για τους πίνακες Α και Β. Υποθέτουμε ότι $x\in\mathbf{C}^m$, $\mathrm{y}\in\mathbf{C}^n$ και $x^*x=1=y^*y$, και έστω $(x^*\mathrm{A}x)(y^*\mathrm{B}y)$ να είναι ένα δοσμένο σημείο στο σύνολο $F(\mathrm{A})F(\mathrm{B})$. Τότε

$$(x\otimes y)^*(x\otimes y)=(x^*x)(y^*y)=1\ ,$$

και

$$(x^*\mathrm{A}x)(y^*\mathrm{B}y)=(x\otimes y)^*(\mathrm{A}\otimes\mathrm{B})(x\otimes y)\in F(\mathrm{A}\otimes\mathrm{B})\ .$$

Έτσι,

$$F(\mathrm{A})F(\mathrm{B})\subseteq F(\mathrm{A}\otimes\mathrm{B}),$$

και ως εκ τούτου

$$Co(F\left(\mathrm{A}\right)F\left(\mathrm{B}\right))\subseteq Co(F(\mathrm{A}\otimes\mathrm{B}))=F(\mathrm{A}\otimes\mathrm{B}),$$

αφού το αριθμητικό πεδίο κάθε πίνακα είναι κυρτό υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου.

b) Τώρα υποθέτουμε ότι ο πίνακας Α κανονικός. Εμείς χρειάζεται να δείξουμε ότι

$$F(\mathrm{A}\otimes\mathrm{B})\subseteq Co(F(\mathrm{A})F(\mathrm{B})).$$

Έστω $U\in M_m$ να είναι ορθομοναδιαίος και τέτοιος ώστε ο πίνακας $U^*\mathrm{A}U=D=diag(a_1.....,a_m)$ να είναι διαγώνιος. Τότε

$$F(\mathrm{A})=Co(\{a_1,.....,a_m)\}.$$

Εφόσον

$$(U\otimes \mathrm{I})^*(\mathrm{A}\otimes \mathrm{B})(U\otimes \mathrm{I}) = D\otimes \mathrm{B}\ ,$$

και $U\otimes \mathrm{I}$ ορθομοναδιαίος πίνακας έχουμε ότι $F(\mathrm{A}\otimes\mathrm{B}) = F(D\otimes\mathrm{B})$ από την Πρόταση (0.16). Για τον ίδιο λόγο, ισχύει και $F(\mathrm{A}) = F(D)$. Έστω $x\in \mathbf{C}^{nm}$ δοσμένο μοναδιαίο διάνυσμα. Έτσι πρέπει να δείξουμε ότι

$$x^*(D\otimes\mathrm{B})x \in CoF(D)F(\mathrm{B})\ .$$

Διαχωρίζοντας το x ως $x = \left[x_1^{\mathrm{T}},....,x_m^{\mathrm{T}}\right],\ x_i\in\mathbf{C}^n,\ i=1,....,n$.

Τότε

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^* x_i = x^* x = 1\,.$$

Γίνεται η υπόθεση ότι $x_i \neq 0$ οπότε έχουμε ότι

$$x^*(D\otimes\mathrm{B})x = \sum_{i=1}^{m} a_i (x_i^*\mathrm{B}x_i) = \sum_{i=1}^{m} x_i^* x_i \left[a_i \left[\frac{x_i^*\mathrm{B}x_i}{x_i^* x_i} \right]\right],$$

το οποίο είναι ένας κυρτός συνδυασμός των όρων $\alpha_i\left[\dfrac{x_i^* B x_i}{x_i^* x_i}\right],\ i=1,...,m$, το καθένα από τα οποία είναι σημεία του συνόλου $F(\mathrm{A})F(\mathrm{B})$, εφόσον $\dfrac{x_i^* B x_i}{x_i^* x_i}\in F(\mathrm{B})$.

Αυτό σημαίνει ότι

$$x^*(D\otimes\mathrm{B})x \in Co(F(\mathrm{A})F(\mathrm{B}))\,.$$

c) Παρατηρούμε ότι

$$F(e^{i\theta}\mathrm{A}\otimes\mathrm{B}) = e^{i\theta}F(\mathrm{A}\otimes\mathrm{B}) \text{ και}$$

$$F(e^{i\theta}\mathrm{A})F(\mathrm{B}) = e^{i\theta}F(\mathrm{A})F(\mathrm{B}),$$

έτσι η απόδειξη του (c) θα προκύψει από το (b) εάν δείξουμε ότι το σύνολο $F(\mathrm{A})F(\mathrm{B})$ είναι κυρτό όταν ο πίνακας Α είναι θετικά ημιορισμένος. Εάν ο πίνακας Α είναι θετικά ορισμένος και οι ιδιοτιμές του $\{\alpha_i\}$ είναι στοιχισμένες σε αύξουσα σειρά $0 \le \alpha_i \le, \cdots, \le \alpha_n$, τότε το σύνολο $F(\mathrm{A})$ θα είναι μεταξύ $[\alpha_1, \alpha_n]$. Εάν $x_1, x_2 \in F(\mathrm{A})F(\mathrm{B})$, τότε $x_i = a_i b_i$ για $\alpha_i \in [a_1, a_n]$ και $b_i \in F(B)$ για $i = 1, 2$. Εάν $\theta_1, \theta_2 \ge 0$ και $\theta_1 + \theta_2 = 1$, τότε εφόσον το σύνολο $F(\mathrm{B})$ είναι κυρτό έχουμε ότι

$$\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 = \theta_1 a_1 b_1 + \theta_2 a_2 b_2 = t(t_1 b_1 + t_2 b_2) \in tF\mathrm{B} \subseteq F(\mathrm{A})F(\mathrm{B}),$$

όπου, $0 \le \alpha_1 \le t \equiv \theta_1 a_1 + \theta_2 a_2 \le a_n$ και $\mathrm{t}_i = \theta_i a_i / t$ για i=1,2. Αυτό μας δείχνει ότι το σύνολο $F(\mathrm{A})F(\mathrm{B})$ είναι κυρτό όταν ο πίνακας Α είναι θετικά ορισμένος. Η κυρτότητα του γινομένου αυτού, όταν ο πίνακας Α είναι θετικά ημιορισμένος και μη αντιστρέψιμος προκύπτει από το οριακό επιχείρημα εφόσον τα σύνολα $F(\mathrm{A})$ και $F(\mathrm{B})$ είναι κλειστά. □

<u>**Πρόταση 1.2**</u> **Σχέση του περιέχεσθε για κύριο υποπίνακα (submatrix inclusion)** Για κάθε πίνακα $\mathrm{A} \in M_n$ και περιεχόμενα υποσύνολα $J \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ ισχύει

$$F(\mathrm{A}(J)) \subset F(\mathrm{A}).$$

<u>Απόδειξη</u>

Παραλείπεται. □

Το ακόλουθο πόρισμα σχετικά με το γινόμενο Hadamard είναι μια άμεση συνέπεια του Θεωρήματος (1.3).

<u>**Πόρισμα 1.4**</u> Έστω οι πίνακες $\mathrm{A}, \mathrm{N} \in M_n$ και έστω ο πίνακας Ν να είναι κανονικός τότε ισχύει

$$F(\mathrm{N} \circ \mathrm{A}) \subset Co(F(\mathrm{N})F(\mathrm{A})) \ .$$

<u>Απόδειξη</u>

Εφόσον ο πίνακας N είναι κανονικός και $\mathrm{N} \circ \mathrm{A}$ είναι ένας κύριος υποπίνακας του, έχουμε ότι

$$Co(F(\mathrm{N})F(\mathrm{A})) = F(\mathrm{N} \otimes \mathrm{A}) \supset F(\mathrm{N} \circ \mathrm{A})$$

από θεώρημα (1.3 (b))και Πρόταση (1.2).

Κεφάλαιο 2: Γραμμικές εξισώσεις πινάκων και γινόμενο Kronecker.

Το γινόμενο Kronecker μπορεί να χρησιμοποιηθεί και να μας διευκολύνει σε πολλούς γραμμικούς μετασχηματισμούς πινάκων και γραμμικές εξισώσεις πινάκων. Μια σημαντική παρουσίαση είναι η ακόλουθη.

<u>Λήμμα 2.1</u> Έστω οι πίνακες $\mathrm{A} \in M_{m,n}$, $\mathrm{B} \in M_{p,q}$ και $\mathrm{C} \in M_{m,q}$ και έστω $\mathrm{X} \in M_{n,p}$ ένας άγνωστος πίνακας. Η εξίσωση πινάκων

a) $\quad \mathrm{AXB} = C,$

είναι ισοδύναμη με το σύστημα (qm εξισώσεων με np άγνωστους)

b) $\quad (\mathrm{B}^{\mathrm{T}} \otimes \mathrm{A}) vec\mathrm{X} = vecC,$

το οποίο σημαίνει ότι $vec(\mathrm{AXB}) = (\mathrm{B}^{\mathrm{T}} \otimes \mathrm{A}) vec\mathrm{X}$.

<u>Απόδειξη</u>

Έστω ένας δοσμένος πίνακας Q, και έστω Q_k όπου το κ δηλώνει την κ-οστη στήλη του πίνακα Q. Έστω ακόμα ένας πίνακας $\mathrm{B} = \left[b_{ij} \right]$. Τότε

$$(\mathrm{AXB})_{\kappa} = \mathrm{A}(\mathrm{XB})_{\kappa} = \mathrm{AXB}_{\kappa}$$

$$= \mathrm{A}\left[\sum_{i=1}^{p} b_{ik} \mathrm{X}_i \right] = \left[b_{1k}\mathrm{A} \quad b_{2k}\mathrm{A} \quad \dots \quad b_{pk}\mathrm{A} \right] vec\mathrm{X} = (\mathrm{B}^{\mathrm{T}} \otimes \mathrm{A}) vec\mathrm{X} .$$

Έτσι

$$vec(\mathrm{AXB}) = \begin{bmatrix} \mathrm{B}_1{}^{\mathrm{T}} \otimes \mathrm{A} \\ \vdots \\ \mathrm{B}_q{}^{\mathrm{T}} \otimes \mathrm{A} \end{bmatrix} vec\mathrm{X} .$$

Αλλά αυτό το γινόμενο είναι απλά ο πίνακας $\mathrm{B}^{\mathrm{T}} \otimes \mathrm{A}$ δεδομένου ότι η μεταφορά μιας στήλης του πίνακα B είναι μια γραμμή του πίνακα B^{T}. Έτσι,

$$vecC = vec(\mathrm{AXB}) = (\mathrm{B}^{\mathrm{T}} \otimes \mathrm{A})vec\mathrm{X},$$

με την οποία σχέση και ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

Γενικά για κάθε δοσμένο πίνακα $\mathrm{A} \in M_n$ που μας δίνεται θα θέλαμε να γνωρίζουμε όλους αυτούς τους πίνακες $\mathrm{X} \in M_n$ με τους οποίους αντιμετατίθεται, δηλαδή όλους τους πίνακες X για τους οποίους ισχύουν οι παρακάτω γραμμικές εξισώσεις:

a) $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$.

b) $\mathrm{AX} + \mathrm{XB} = C$.

c) $\mathrm{AXB} = C$.

d) $\mathrm{A}_1\mathrm{XB}_1 + \cdots + \mathrm{A}_\kappa\mathrm{XB}_\kappa = C$.

e) $\mathrm{AX} + \mathrm{YB} = C$.

Στη φάση που είμαστε τώρα όμως είναι χρήσιμο να ξαναγράψουμε αυτές τις εξισώσεις χρησιμοποιώντας το γινόμενο Kronecker και το $vec(\bullet)$, με τη βοήθεια των οποίων προκύπτουν οι εξής σχέσεις

a) $(\mathrm{I} \otimes \mathrm{A})vec\mathrm{X} = vec\mathrm{B}$.

b) $\left[(\mathrm{I} \otimes \mathrm{A}) + (\mathrm{B}^{\mathrm{T}} \otimes \mathrm{I})\right]vec\mathrm{X} = vecC$.

c) $(\mathrm{B}^{\mathrm{T}} \otimes \mathrm{A})vec\mathrm{X} = vecC$ (Καλύφθηκε από το λήμμα 2.1).

d) $(\mathrm{B}_1{}^{\mathrm{T}} \otimes \mathrm{A}_1 + \cdots + \mathrm{B}_k{}^{\mathrm{T}} \otimes \mathrm{A}_k)vec\mathrm{X} = vecC$.

e) $(\mathrm{I} \otimes \mathrm{A})vec\mathrm{X} + (\mathrm{B}^{\mathrm{T}} \otimes \mathrm{I})vec\mathrm{Y} = vecC$.

Όπως έχει προαναφερθεί οι εξισώσεις πινάκων μπορεί μερικές φορές να είναι πολύ χρήσιμες. Είναι δύσκολο όμως να δειχθεί, τις περισσότερες φορές, πως μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι διάφοροι μετασχηματισμοί. Παρολαυτα μια γενική αρχή λέει ότι συνήθως επιθυμητό είναι να διατηρηθεί η μορφή της εξίσωσης.

Ένα παράδειγμα είναι ο μετασχηματισμός των πινάκων A και B στην περίπτωση (b) από ανεξάρτητες ομοιότητες. Ξεκινώντας από τη γραμμική εξίσωση

$$\mathrm{AX} + \mathrm{XB} = C,$$

και πολλαπλασιάζοντας αριστερά με έναν αντιστρέψιμο πίνακα S και από τα δεξιά με έναν αντιστρέψιμο πίνακα T προκύπτει ότι

$$S\mathrm{AXT} + S\mathrm{XBT} = SC\mathrm{T}.$$

Εισάγοντας τον ταυτοτικό, και αναλύοντας κατάλληλα έχουμε ότι

$$(S\mathrm{A}S^{-1})S\mathrm{XT} + S\mathrm{XT}(\mathrm{T}^{-1}\mathrm{BT}) = SC\mathrm{T}.$$

το οποίο μπορεί να ξαναγραφεί ως

$$\mathrm{A'X'} + \mathrm{X'B'} = C'.$$

Αυτή είναι μια ισοδύναμη εξίσωση της ίδιας μορφής με την πρωταρχική, αλλά τώρα οι πίνακες A και B έχουν αντικατασταθεί από ανεξάρτητους μετασχηματισμούς ομοιότητας των εαυτών τους. Ένας μετασχηματισμός αυτού του τύπου μπορεί να κάνει την ανάλυση μιας τέτοιας εξίσωσης απλούστερη, ενώ οι λύσεις της πρωταρχικής μορφής της εξίσωσης μπορούν να ανακτηθούν εύκολα από τον μετασχηματισμό.

Υπάρχει φυσικά και η εκδοχή του γινομένου Kronecker με δυο πίνακες μέσο της γνωστής εξίσωσης Lyapunov και άλλων τέτοιου είδους εξισώσεων που συναντάμε συχνά στη Θεωρία Συστημάτων.

Συγκεκριμένα, η εξίσωση Lyapunov γράφεται ως εξής

$$\mathrm{XA} + \mathrm{A}^{*}\mathrm{X} = \mathrm{H},$$

η οποία μπορεί να ξαναγραφεί ως

$$\left[\left(A^{T}\otimes I\right)+\left(I\otimes A^{*}\right)\right]vec X = vec H,$$

και η εξίσωση αντιμεταθετικότητας

$$AX - XA = 0,$$

η οποία μπορεί να ξαναγραφεί ως

$$\left[\left(I\otimes A\right)-\left(A^{T}\otimes I\right)\right]vec X = 0.$$

Από την αριστερή μεριά των προηγούμενων γραμμικών εξισώσεων πινάκων στις σχέσεις (a)-(e), δίνεται μια αρχή γραμμικού μετασχηματισμού από πίνακα σε πίνακα. Υπάρχουν, φυσικά, πολλοί άλλοι ενδιαφέροντες γραμμικοί μετασχηματισμοί πινάκων με γινόμενο Kronecker και $vec(\bullet)$ που συχνά προσφέρεται στο να τους μελετήσουμε εύκολα.

Επειδή η απεικόνιση $vec: M_{m,n} \to \mathbf{C}^{mn}$ δίνεται από τη σχέση $X \to vec X$ είναι ένας ισομορφισμός και επειδή κάθε γραμμικός μετασχηματισμός $T: \mathbf{C}^{r} \to \mathbf{C}^{s}$ αντιστοιχεί σε έναν ξεχωριστό πίνακα $K \in M_{r,s}$ ($T(x) = Kx$ για ολα τα $x \in \mathbf{C}^{r}$), έχουμε την ακόλουθη απλή, αλλά πολύ χρήσιμη αρχή.

<u>Λήμμα 2.2</u> Έστω $T: M_{m,n} \to M_{p,q}$ μια δοσμένη γραμμική απεικόνιση. Τότε υπάρχει μια μοναδική γραμμική απεικόνιση $K(T) \in M_{p,q,m,n}$ τέτοια ώστε

$$vec\left[T(x)\right] = K(T) vec X \text{ για ολα τα } X \in M_{m,n}.$$

Μερικές φορές δίνεται μια γραμμική απεικόνιση $T: M_{m,n} \in M_{p,q}$ με ιδιαίτερες ιδιότητες και το ζητούμενο είναι να δειχθεί ότι οι αντίστοιχοι πίνακες συντελεστές $K(T)$ έχουν μια ειδική μορφή, συχνά κάποιο είδος μορφής του γινομένου Kronecker. Το κλασσικό πρόβλημα του χαρακτηρισμού των γραμμικών απεικονίσεων από τον διανυσματικό χώρο M_n στον διανυσματικό χώρο M_n που διατηρούν την ορίζουσα ή το φάσμα είναι παραδείγματα προβλημάτων αυτού του τύπου με τα οποία όμως δεν θα ασχοληθούμε. Ένα άλλο παράδειγμα είναι το πρόβλημα του χαρακτηρισμού της γραμμικής παραγώγου (linear derivation) στον διανυσματικό χώρο M_n.

<u>Ορισμός 2.1</u> Μια γραμμική απεικόνιση $\mathrm{T}: M_n \to M_n$ είναι μια **γραμμική παράγωγος** εάν

$$\mathrm{T(XY)} = \mathrm{T(X)Y} + \mathrm{XT(Y)} \text{ για κάθε } \mathrm{X}, \mathrm{Y} \in M_n.$$

<u>Θεώρημα 2.1</u> Έστω $\mathrm{T}: M_n \to M_n$ μια δοσμένη γραμμική απεικόνιση. Τότε η γραμμική απεικόνιση T είναι μια γραμμική παράγωγος αν και μόνο αν υπάρχει κάποιος πίνακας $C \in M_n$ τέτοιος ώστε

$$\mathrm{T(X)} = C\mathrm{X} - \mathrm{X}C \text{ για κάθε } \mathrm{X} \in M_n.$$

<u>Απόδειξη</u>

Λαμβάνοντας υπόψιν τον ορισμό της γραμμικής παραγώγου έχουμε ότι

$$\mathrm{T(XY)} = \mathrm{T(X)Y} + \mathrm{XT(Y)} \text{ για κάθε πίνακα } \mathrm{X}, \mathrm{Y} \in M_n,$$

η οποία είναι ισοδύναμη με

$$vec\left[\mathrm{T(XY)}\right] = vec\left[\mathrm{T(X)Y}\right] + vec\left[\mathrm{XT(Y)}\right].$$

Έστω $\mathrm{K(T)} \in M_{n^2}$ ένας μοναδικός πίνακας που αντιστοιχεί στη γραμμική απεικόνιση T τότε σύμφωνα με το του λήμμα (2.2) και σημειώνοντας ότι

$$vec(\mathrm{AB}) = (\mathrm{I} \otimes \mathrm{A})vec\mathrm{B} \quad \forall \mathrm{A}, \mathrm{B} \in M_n.$$

Τότε

$$vec\left[\mathrm{T}\left(\mathrm{XY}\right)\right] = \mathrm{K}(\mathrm{T})vec(\mathrm{XY}) = \mathrm{K}(\mathrm{T})(\mathrm{I}\otimes\mathrm{X})vec\mathrm{Y},$$
$$vec\left[\mathrm{T}\left(\mathrm{XY}\right)\right] = [\mathrm{I}\otimes\mathrm{T}(\mathrm{X})]vec\mathrm{Y},$$
$$vec\left[\mathrm{XT}(\mathrm{Y})\right] = \left[\mathrm{I}\otimes\mathrm{X}\right]vec[\mathrm{T}(\mathrm{Y})] = [\mathrm{I}\otimes\mathrm{X}]\mathrm{K}(\mathrm{T})vec\mathrm{Y}.$$

Έτσι

$$\mathrm{K}(\mathrm{T})\left[\mathrm{I}\otimes\mathrm{X}\right]vec\mathrm{Y} = [\mathrm{I}\otimes\mathrm{T}(\mathrm{X})]vec\mathrm{Y} + \left[\mathrm{I}\otimes\mathrm{X}\right]\mathrm{K}(\mathrm{T})vec\mathrm{Y},$$

για κάθε πίνακα $\mathrm{X},\mathrm{Y}\in M_n$ από το οποίο συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned} &\mathrm{K}(\mathrm{T})\left[\mathrm{I}\otimes\mathrm{X}\right] = \mathrm{I}\otimes\mathrm{T}(\mathrm{X}) + \left[\mathrm{I}\otimes\mathrm{X}\right]\mathrm{K}(\mathrm{T}),\\ &\acute{\eta}\\ &\mathrm{K}(\mathrm{T})\left[\mathrm{I}\otimes\mathrm{X}\right] - \left[\mathrm{I}\otimes\mathrm{X}\right]\mathrm{K}(\mathrm{T}) = \mathrm{I}\otimes\mathrm{T}(\mathrm{X}) \quad \forall \mathrm{X}\in M_n. \end{aligned} \qquad \mathbf{(2.1)}$$

Γράφοντας τον μοναδιαίο πίνακα συντελεστή K(T) στη μορφή $\mathrm{K}(\mathrm{T}) = \left[\mathrm{K}_{ij}\right]$, όπου κάθε $\mathrm{K}_{ij}\in M_m$, η σχέση (2.1) γράφεται

$$\begin{aligned} &\mathrm{T}(\mathrm{X}) = \mathrm{K}_{ii}\mathrm{X} - \mathrm{X}\mathrm{K}_{ii}, \quad i = 1,\ldots,n,\\ &\qquad\qquad \acute{\eta}\\ &\mathrm{K}_{ij}\mathrm{X} - \mathrm{X}\mathrm{K}_{ij} = 0, \qquad i,j = 1,\ldots,n,\ i\neq j. \end{aligned} \qquad \mathbf{(2.2)}$$

Ειδικότερα, επιλέγοντας για $i=1$ στην πρώτη περίπτωση της σχέσης (2.2) έχουμε ότι

$$\mathrm{T}(\mathrm{X}) = \mathrm{K}_{11}\mathrm{X} - \mathrm{X}\mathrm{K}_{11} \text{ για κάθε } \mathrm{X}\in M_n, \qquad \mathbf{(2.3)}$$

η οποία είναι μια αναπαράσταση για την γραμμική απεικόνιση T σε μια επιθυμητή μορφή. □

Η απεικόνιση $\mathrm{T}: M_{m,n}\to M_{n,m}$, που δίνεται από τη σχέση $\mathrm{T}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^{\mathrm{T}}$ είναι μια απλή αλλά σημαντική γραμμική απεικόνιση της οποίας ο αντίστοιχος πίνακας συντελεστής K(T) δίνεται από το λήμμα (2.2), χαρακτηρίζεται εύκολα και έχει αρκετές χρήσιμες ιδιότητες. Εφόσον οι πίνακες διανύσματα $vec\mathrm{X}$ και $\mathrm{vec}\mathrm{X}^{\mathrm{T}}$ περιέχουν τα ίδια στοιχεία σε διαφορετικές θέσεις είναι ξεκάθαρο ότι η γραμμική απεικόνιση $vec\mathrm{X} \to \mathrm{vec}\mathrm{X}^{\mathrm{T}}$ πρέπει να δοθεί από μια μετάθεση.

<u>**Θεώρημα 2.2**</u> Έστω m, n να είναι θετικοί ακέραιοι. Υπάρχει ένας ξεχωριστός πίνακας $\mathrm{P}(m,n) \in M_{m,n}$ τέτοιος ώστε

$$vec\mathrm{X}^{\mathrm{T}} = \mathrm{P}(m,n) vec\mathrm{X} \;\; \forall x \in M_{m,n} . \qquad \textbf{(2.4a)}$$

Ο πίνακας $P(m,n)$ εξαρτάται μόνο από την διάσταση των m, n και δίνεται από τη σχέση

$$\mathrm{P}(m,n) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} E_{ij} \otimes E_{ij}{}^{\mathrm{T}} = \left[E_{ij}{}^{\mathrm{T}} \right]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} . \qquad \textbf{(2.4b)}$$

Όπου κάθε πίνακας $E_{ij} \in M_{m,n}$ έχει το 1 στις θέσεις i, j και σε όλες τις άλλες θέσεις έχει το μηδέν. Επιπλέον ο πίνακας $\mathrm{P}(m,n)$ είναι μια περίπτωση πίνακα όπου ισχύει

$$\mathrm{P}(m,n) = \mathrm{P}(n,m)^{\mathrm{T}} = \mathrm{P}(n,m)^{-1}.$$

<u>Απόδειξη</u>

Έστω $\mathrm{X} = [x_{ij}] \in M_{m,n}$ και $E_{ij} \in M_{m,n}$ να είναι μοναδιαίοι πίνακες όπως περιγράφονται στο παραπάνω θεώρημα. Σημειώνοντας ότι

$$E_{ij}{}^{\mathrm{T}}\mathrm{X}E_{ij}{}^{\mathrm{T}} = x_{ij}E_{ij}{}^{\mathrm{T}} \text{ για } i = 1,\dots,m \;\text{ και }\; j = 1,\dots,n.$$

Τότε

$$\mathrm{X}^{\mathrm{T}} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}E_{ij}{}^{\mathrm{T}} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} E_{ij}{}^{\mathrm{T}}\mathrm{X}E_{ij}{}^{\mathrm{T}}.$$

Τώρα χρησιμοποιώντας την ταυτότητα για το vec ενός τρίπτυχου πίνακα γινομένου που δίνεται στο λήμμα (2.1) έχουμε ότι

$$vec\mathrm{X}^{\mathrm{T}} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} vec(E_{ij}{}^{\mathrm{T}}\mathrm{X}E_{ij}{}^{T}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (E_{ij} \otimes E_{ij}{}^{\mathrm{T}}) vec\mathrm{X},$$

όπου επαληθεύεται η σχέση (2.4).

Εφόσον $(\mathrm{X}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \mathrm{X}$ και $\mathrm{X}^{\mathrm{T}} \in M_{n,m}$ προκύπτει ότι

$$vec\mathrm{X} = \mathrm{P}(n,m)vec\mathrm{X}^{\mathrm{T}} = \mathrm{P}(n,m)\mathrm{P}(m,n)vec\mathrm{X}.$$

Έτσι,

$$\mathrm{P}(n,m) = \mathrm{P}(m,n)^{-1}.$$

Τέλος, έστω ότι το ε_{ij} δηλώνει τους μοναδιαίους πίνακες στο $M_{n,m}$, και σημειώνοντας ότι $\varepsilon_{ij} = \mathrm{E}_{ji}{}^{\mathrm{T}}$, έχουμε ότι

$$\mathrm{P}(n,m) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\varepsilon_{ij} \otimes \varepsilon_{ij}{}^{\mathrm{T}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} E_{ji}{}^{\mathrm{T}} \otimes E_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(E_{ij} \otimes E_{ji}{}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \mathrm{P}(m,n)^{\mathrm{T}}.$$

Εφόσον ο $\mathrm{P}(m,n)$ είναι ένας πίνακας από μηδενικά και άσσους για τον οποίο ισχύει $\mathrm{P}(m,n)^{-1} = \mathrm{P}(m,n)^{\mathrm{T}}$, τότε είναι ένας πίνακας μετάθεσης. □

<u>Πόρισμα 2.1</u> Έστω m,n,p,q θετικοί ακέραιοι, οι οποίοι δίνονται και έστω οι πίνακες $\mathrm{P}(p,m) \in M_{pm}$ και $\mathrm{P}(n,q) \in M_{nq}$ να δηλώνονται ως πίνακες μετάθεσης όπως ορίζονται στις σχέσεις (2.4 a,b). Τότε

$$\mathrm{B} \otimes \mathrm{A} = \mathrm{P}(m,p)^{\mathrm{T}}(\mathrm{A} \otimes \mathrm{B})\mathrm{P}(n,q), \qquad \textbf{(2.5)}$$

για όλους τους πίνακες $\mathrm{A} \in M_{m,n}$ και $\mathrm{B} \in M_{p,q}$. Έτσι ο πίνακας $\mathrm{B} \otimes \mathrm{A}$ είναι πάντα ισοδύναμος μέσω μετάθεσης με τον πίνακα $\mathrm{A} \otimes \mathrm{B}$. Όταν $m = n$ και $p = q$ έχουμε ότι

$$\mathrm{B} \otimes \mathrm{A} = \mathrm{P}(n,p)^{\mathrm{T}}(\mathrm{A} \otimes \mathrm{B})\mathrm{P}(n,p), \qquad \textbf{(2.6)}$$

για όλους τους πίνακες $\mathrm{A} \in M_n$ και $\mathrm{B} \in M_p$. Έτσι ο πίνακας $\mathrm{B} \otimes \mathrm{A}$ είναι όμοιος μέσω μετάθεσης με τον πίνακα $\mathrm{A} \otimes \mathrm{B}$ όταν και ο πίνακας A και ο πίνακας B είναι τετραγωνικοί, και η ομοιότητα μέσω μετάθεσης εξαρτάται μόνο από τις διαστάσεις των m και n. Γενικότερα, έστω οι πίνακες $\mathrm{A}_1,\ldots,\mathrm{A}_\kappa \in \mathrm{M}_{m,n}$ και $\mathrm{B}_1,\ldots,\mathrm{B}_\kappa \in \mathrm{M}_{p,q}$, οι οποίοι δίνονται. Τότε

$$\begin{aligned}&\mathrm{B}_1 \otimes \mathrm{A}_1 + \ldots.. + \mathrm{B}_\kappa \otimes \mathrm{A}_\kappa \\ &\qquad = \mathrm{P}(m,p)^{\mathrm{T}}[\mathrm{A}_1 \otimes \mathrm{B}_1 + \cdots + \mathrm{A}_k \otimes \mathrm{B}_k]\mathrm{P}(n,q)\end{aligned} \qquad \textbf{(2.7)}$$

<u>Απόδειξη</u>

Εξετάζοντας τη γραμμική απεικόνιση $\mathrm{T}: M_{n,q} \to M_{m,p}$ και δεδομένου ότι $\mathrm{T}(\mathrm{X}) \equiv \mathrm{AXB}^{\mathrm{T}} = \mathrm{Y}$, προκύπτει ότι

$$\mathrm{Y}^{\mathrm{T}} = \mathrm{BX}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}^{\mathrm{T}},$$

Από το λήμμα (2.1) έχουμε ό,τι

$$\begin{gathered} vec\mathrm{Y} = vec(\mathrm{AXB}^{\mathrm{T}}) = (\mathrm{B} \otimes \mathrm{A})vec\mathrm{X}, \\ \textit{και} \\ vec\mathrm{Y}^{\mathrm{T}} = vec(\mathrm{BX}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}^{\mathrm{T}}) = (\mathrm{A} \otimes \mathrm{B})vec\mathrm{X}^{\mathrm{T}}, \end{gathered} \qquad \textbf{(2.8)}$$

για όλους τους πίνακες $\mathrm{X} \in M_{n,q}$. Χρησιμοποιώντας τώρα το θεώρημα (2.2) έχουμε ότι

$$\begin{gathered} vec\mathrm{Y}^{\mathrm{T}} = \mathrm{P}(m,p)vec\mathrm{Y} \\ \textit{και} \\ vec\mathrm{X}^{\mathrm{T}} = \mathrm{P}(n,q)vec\mathrm{X}. \end{gathered}$$

Τότε

$$\mathrm{P}(m,p)vec\mathrm{Y} = (\mathrm{A} \otimes \mathrm{B})\mathrm{P}(n,q)vec\mathrm{X}^{\mathrm{T}},$$

η οποία σχέση είναι ισοδύναμη με

$$vec\mathrm{Y} = \mathrm{P}(m,p)^{\mathrm{T}}(\mathrm{A} \otimes \mathrm{B})\mathrm{P}(n,q)vec\mathrm{X}. \qquad \textbf{(2.9)}$$

Συγκρίνοντας την σχέση (2.9) με την σχέση (2.8) προκύπτει η σχέση (2.5) □

Τώρα που είναι γνωστό ότι οι πίνακες $A\otimes B$ και $B\otimes A$ σχετίζονται, ο λόγος που προκύπτουν κάποιες από τις ειδικές σχέσεις που αναπτύχτηκαν μεταξύ τους στο Κεφάλαιο 1, είναι πια ξεκάθαρος. Όταν οι πίνακες A και B είναι τετραγωνικοί, τότε ο πίνακας $A\otimes B$ είναι όμοιος με τον πίνακα $B\otimes A$ και αυτό σημαίνει ότι και οι δυο πρέπει να έχουν την ίδια κανονική μορφή Jordan. Εάν $A = SJS^{-1}$ και $B=TKT^{-1}$, όπου J και K είναι οι αντίστοιχες κανονικές μορφές Jordan των πινάκων A και B. Τότε

$$A\otimes B = (SJS^{-1})\otimes(TKT^{-1}) = (S\otimes T)(J\otimes K)(S\otimes T)^{-1},$$

έτσι η κανονική μορφή Jordan του πίνακα $A\otimes B$ είναι ίδια με αυτή του πίνακα $J\otimes K$. Εάν οι πίνακες J και K είναι ευθέα αθροίσματα Jordan μπλοκ, χρειάζεται να εξεταστεί πώς το γινόμενο Kronecker εξαρτάται από αυτά τα ευθέα αθροίσματα.

<u>Πόρισμα 2.2</u> Έστω $A_1,\ldots,A_r$ και $B_1,\ldots,B_s$ τετραγωνικοί μιγαδικοί πίνακες. Τότε, ο πίνακας $(A_1\oplus\cdots\oplus A_r)\otimes(B_1\oplus\cdots\oplus B_s)$ είναι όμοιος μέσω μετάθεσης με το ευθύ άθροισμα των πινάκων $A_i\otimes B_j,\ i=1,\ldots,r,\ j=1,\ldots,s$.

<u>Απόδειξη</u>

Χωρίς βλάβη της γενικότητας εξετάζουμε την περίπτωση για $r=s=2$. Τότε

$$(A_1\oplus A_2)\otimes(B_1\oplus B_2) = \left[A_1\otimes(B_1\oplus B_2)\right]\oplus\left[A_2\otimes(B_1\oplus B_2)\right],$$

σχέση η οποία είναι όμοια με

$$\left[(B_1\oplus B_2)\otimes A_1\right]\oplus\left[(B_1\oplus B_2)\otimes A_2\right]$$

$$=(B_1\otimes A_1)\oplus\left(B_2\otimes A_1\right)\oplus\left(B_1\otimes A_2\right)\oplus\left(B_2\otimes A_2\right),$$

η οποία τελικά είναι όμοια με

$$(A_1\otimes B_1)\oplus\left(A_1\otimes B_2\right)\oplus\left(A_2\otimes B_1\right)\oplus\left(A_2\otimes B_2\right). \qquad \square$$

Εάν τα Jordan μπλοκ στην κανονική μορφή Jordan του πίνακα $\mathrm{A} \in M_n$ είναι $J_1, \ldots, J_p$ και εκείνα του πίνακα $\mathrm{B} \in M_m$ είναι $\mathrm{K}_1, \ldots, \mathrm{K}_q$, προκύπτει ότι η κανονική μορφή Jordan του πίνακα $\mathrm{A} \otimes \mathrm{B}$ είναι το ευθύ άθροισμα των Jordan μπλοκ στην κανονική μορφή Jordan του πίνακα $J_i \otimes \mathrm{K}_j$, $i = 1, \ldots, p$, $j = 1, \ldots, q$. Κάθε ζεύγος Jordan μπλοκ, το ένα συσχετισμένο με μια ιδιοτιμή του πίνακα A και το άλλο με μια ιδιοτιμή του πίνακα B, συμβάλλουν ανεξάρτητα στην δομή Jordan του πίνακα $\mathrm{A} \otimes \mathrm{B}$. Έτσι, για να καθοριστεί η δομή Jordan του πίνακα $\mathrm{A} \otimes \mathrm{B}$ αρκεί να προσδιοριστεί η δομή Jordan μπλοκ που σχετίζεται με μια ιδιοτιμή του γινομένου Kronecker από δυο δοσμένα Jordan μπλοκ. Η λύση εξαρτάται από τις τέσσερις (μηδενικές ή μη μηδενικές) δυνατές τιμές που μπορεί να πάρουν οι ιδιοτιμές των δυο μπλοκ. Οι τρεις δυνατές τιμές συνεπάγονται ότι τουλάχιστον μια μηδενική ιδιοτιμή προκύπτει εύκολα από την ιδιότητα του μικτού γινομένου, αλλά καμία σύντομη απόδειξη για την αντιστρέψιμη περίπτωση δεν είναι γνωστή. Τα αποτέλεσμα δίνονται χωρίς να συμπεριλαμβάνετε η μακροσκελής απόδειξη, η οποία φαίνεται να απαιτείται, παρολαυτα κάποιες περιπτώσεις που δίνονται μπορούν να διαπιστωθούν με άμεσο τρόπο.

Θεώρημα 2.3 Υποθέτουμε ότι στην κανονική μορφή Jordan του πίνακα $\mathrm{A} \in M_n$ υπάρχει ένα Jordan μπλοκ μεγέθους p που σχετίζεται με μια ιδιοτιμή $\lambda \in \sigma(\mathrm{A})$ και στη κανονική μορφή Jordan του πίνακα $\mathrm{B} \in M_m$ υπάρχει ένα Jordan μπλοκ μεγέθους q που σχετίζεται με μια ιδιοτιμή $\mu \in \sigma(\mathrm{B})$. Τότε, ανεξάρτητα από τις οποιεσδήποτε άλλες ιδιοτιμές ή δομές Jordan των πινάκων A και B, η συμβολή αυτού του ζεύγους των μπλοκ στην κανονική μορφή Jordan του πίνακα $\mathrm{A} \otimes \mathrm{B}$ είναι η εξής

a) Εάν $\lambda \neq 0$ και $\mu \neq 0$ τότε συσχετίζεται με την ιδιοτιμή $\lambda\mu$ και υπάρχει ένα Jordan μπλοκ μεγέθους $p+q-(2k-1)$ για κάθε $\kappa = 1, 2, ..., \min\{p,q\}$.

b) Εάν $\lambda \neq 0$ και $\mu = 0$ τότε συσχετίζεται με την ιδιοτιμή μηδέν (0) και υπάρχουν p Jordan μπλοκ μεγέθους q.

c) Εάν $\lambda = 0$ και $\mu \neq 0$ τότε συσχετίζεται με την ιδιοτιμή μηδέν (0) και υπάρχουν q Jordan μπλοκ μεγέθους p .

d) Εάν $\lambda = 0$ και $\mu = 0$ τότε συσχετίζεται με την ιδιοτιμή μηδέν (0) και υπάρχουν δυο Jordan μπλοκ που το καθένα έχει μέγεθος $\kappa = 1, 2, \ldots, \min\{p,q\}-1$ (αυτά τα μπλοκ δεν υπάρχουν αν $\min\{p,q\}=1$) και τα $|p-q|+1$ μπλοκ μεγέθους $\min\{p,q\}$.

Κεφάλαιο 3: Το Άθροισμα Kronecker και η εξίσωση AX+XB=C

Θα εξετάσουμε την εφαρμογή του γινομένου Kronecker στις εξισώσεις πινάκων με μια ανάλυση της εξίσωσης

$$\mathrm{AX} + \mathrm{XB} = C, \tag{3.1}$$

στην οποία για τους πίνακες ισχύει ότι $\mathrm{A} \in M_n$, $\mathrm{B} \in M_m$ και $\mathrm{X}, C \in M_{n,m}$. Αυτή η εξίσωση συμπεριλαμβάνει πολλές σημαντικές ειδικές περιπτώσεις, όπως η εξίσωση Lyapunov και η εξίσωση αντιμετάθεσης. Στην μορφή Kronecker η σχέση (3.1) μπορεί να γραφεί ως εξής

$$\left[(\mathrm{I}_m \otimes \mathrm{A}) + (\mathrm{B}^{\mathrm{T}} \otimes \mathrm{I}_n)\right] vec\mathrm{X} = vecC. \tag{3.2}$$

Η μορφή Kronecker (3.2) που προκύπτει από τη σχέση (3.1), καθώς και οι μορφές Kronecker άλλων εξισώσεων πίνακα που συζητήθηκαν στην προηγούμενη ενότητα, υποδεικνύουν ότι οι πίνακες της ειδικής μορφής

$$(\mathrm{I} \otimes \mathrm{A}) + (\mathrm{B}^{\mathrm{T}} \otimes \mathrm{I}), \tag{3.3}$$

προκύπτουν φυσικά στη μελέτη των εξισώσεων πινάκων και συνεπώς χρήζουν ειδικής μελέτης.

<u>Ορισμός 3.1</u> Έστω οι πίνακες $\mathrm{A} \in M_n$ και $\mathrm{B} \in M_m$. Ο $mn \times mn$ πίνακας

$$(\mathrm{I}_m \otimes \mathrm{A}) + (\mathrm{B}^{\mathrm{T}} \otimes \mathrm{I}_n),$$

ονομάζεται **άθροισμα Kronecker** των πινάκων A και B. Ο πρώτος μοναδιαίος πίνακας ανήκει στον διανυσματικό χώρο M_m και ο δεύτερος στον διανυσματικό χώρο M_n. Έτσι, οι πίνακες, $\mathrm{I}_m \otimes \mathrm{A}$, $\mathrm{B}^{\mathrm{T}} \otimes \mathrm{I}_n$ και το άθροισμα τους ανήκει στον διανυσματικό χώρο M_{nm}. Κάθε φορά που η διάσταση ενός ταυτοτικού πίνακα είναι ξεκάθαρη, συχνά παραλείπουμε την ρητή αναφορά τους.

Όπως και το γινόμενο Kronecker των πινάκων A και B έχει ως ιδιοτιμές του όλα τα πιθανά ζεύγη γινομένου των ιδιοτιμών των πινάκων A και B, έτσι και το άθροισμα Kronecker των πινάκων A και B έχει ως ιδιοτιμές του όλα τα πιθανά ζεύγη αθροισμάτων των ιδιοτιμών των πινάκων A και B.

<u>Θεώρημα 3.1</u> Έστω οι πίνακες $\mathrm{A} \in M_n$ και $\mathrm{B} \in M_m$. Εάν $\lambda \in \sigma(\mathrm{A})$ και $x \in \mathbf{C}^n$ είναι ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα του A και αν $\mu \in \sigma(\mathrm{B})$ και $y \in \mathbf{C}^m$ είναι ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα του B, τότε η $\lambda + \mu$ είναι μια ιδιοτιμή του αθροίσματος Kronecker του πίνακα $(\mathrm{I}_m \otimes \mathrm{A}) + (\mathrm{B} \otimes \mathrm{I}_n)$ και $y \otimes x \in \mathbf{C}^{nm}$ είναι ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα του. Κάθε ιδιοτιμή του αθροίσματος Kronecker προκύπτει ως τέτοιο άθροισμα των ιδιοτιμών των πινάκων A, B και $\mathrm{I}_m \otimes \mathrm{A}$ αντιμετατίθοντας τον με τον πίνακα $\mathrm{B} \otimes \mathrm{I}_n$. Εάν $\sigma(\mathrm{A}) = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ και $\sigma(\mathrm{B}) = \{\mu_1, ..., \mu_m\}$ τότε

$$\sigma((\mathrm{I}_m \otimes \mathrm{A}) + (\mathrm{B} \otimes \mathrm{I}_n)) = \{\lambda_i + \mu_j : \ i = 1, ..., n, \ \ j = 1, ..., m\},$$

(συμπεριλαμβανομένου των αλγεβρικών πολλαπλοτήτων και στις τρεις περιπτώσεις). Πιο συγκεκριμένα,

$$\sigma((\mathrm{I}_m \otimes \mathrm{A}) + (\mathrm{B} \otimes \mathrm{I}_n)) = \sigma((\mathrm{I}_n \otimes \mathrm{B}) + (\mathrm{A} \otimes \mathrm{I}_m)).$$

<u>Απόδειξη</u>

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα του μικτού γινομένου από το λήμμα (1.1) προκύπτει ό,τι

$$(\mathrm{I}_m \otimes \mathrm{A})(\mathrm{B} \otimes \mathrm{I}_n) = \mathrm{B} \otimes \mathrm{A} = (\mathrm{B} \otimes \mathrm{I}_n)(\mathrm{I}_m \otimes \mathrm{A}) \ .$$

Τότε οι πίνακες $\mathrm{I}_m \otimes \mathrm{A}$ και $\mathrm{B} \otimes \mathrm{I}_n$ αντιμετατίθενται. Έστω τώρα $U \in M_n$ και $V \in M_m$ να είναι μοναδιαίοι πίνακες (όπως δίνονται από το θεώρημα τριγωνοποίησης Schur στο [HJ90]). Επίσης, έχουμε οι πίνακες $U^* \mathrm{A} U = \Delta_{\mathrm{A}}$ και $V^* \mathrm{B} V = \Delta_{\mathrm{B}}$ είναι άνω τριγωνικοί. Τότε ο πίνακας $W = V \otimes U \in M_{nm}$ είναι μοναδιαίος και με κάποιους απλούς υπολογισμούς προκύπτει ότι οι πίνακες

$$W^*(\mathrm{I}_m \otimes \mathrm{A})W = \mathrm{I}_m \otimes \Delta_{\mathrm{A}} = \begin{bmatrix} \Delta_{\mathrm{A}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Delta_{\mathrm{A}} \end{bmatrix},$$

(υπάρχουν m φορές οι πίνακες $\Delta_{\mathrm{A}} \in \mathrm{M}_n$) και

$$W^*(\mathrm{B} \otimes \mathrm{I}_m)W = \Delta_B \otimes \mathrm{I}_n = \begin{bmatrix} \mu_1 \mathrm{I}_n & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_m \mathrm{I}_n \end{bmatrix},$$

είναι άνω τριγωνικοί. Τότε ο πίνακας

$$W^*[(\mathrm{I}_m \otimes \mathrm{A}) + (\mathrm{B} \otimes \mathrm{I}_n)]W = (\mathrm{I}_m \otimes \Delta_{\mathrm{A}}) + (\Delta_{\mathrm{B}} \otimes \mathrm{I}_n),$$

είναι άνω τριγωνικός, με τις ιδιοτιμές του αθροίσματος Kronecker να είναι στην διαγώνιο του. Εξετάζοντας την διαγώνιο του πίνακα $(\mathrm{I}_m \otimes \Delta_{\mathrm{A}}) + (\Delta_{\mathrm{B}} \otimes \mathrm{I}_n)$ βλέπουμε ότι κάθε διαγώνιο στοιχείο του πίνακα Δ_{B} γίνεται ζευγάρι με όλα τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα Δ_{A}, έτσι επαληθεύεται ο ισχυρισμός σχετικά με τις ιδιοτιμές του αθροίσματος Kronecker (συμπεριλαμβανομένων και των πολλαπλοτήτων). □

Θεώρημα 3.2 Έστω οι πίνακες $\mathrm{A} \in M_n$ και $\mathrm{B} \in M_m$. Η εξίσωση $\mathrm{AX} + \mathrm{XB} = C$ έχει μια ξεχωριστή λύση $\mathrm{X} \in M_{n,m}$ για κάθε πίνακα $C \in M_{n,m}$ αν και μόνο αν

$$\sigma(\mathrm{A}) \cap \sigma(-\mathrm{B}) = \varnothing.$$

Απόδειξη

Εφόσον οι ιδιοτιμές του πίνακα B^T είναι ίδιες με αυτές του πίνακα B, ο πίνακας συντελεστής της εξίσωσης (3.2) έχει, όπως είδαμε στο θεώρημα (3.1), μια μοναδική ιδιοτιμή αν και μόνο αν $\sigma(A)\cap\sigma(-B)\neq\varnothing$. Έτσι, η εξίσωση (3.1) είναι αντιστρέψιμη για κάποιον πίνακα X αν και μόνο αν $\sigma(A)\cap\sigma(-B)=\varnothing$ □

Πόρισμα 3.1 Έστω οι πίνακες $A\in M_n$ και $B\in M_m$. Η εξίσωση $XA+A^*X=C$ έχει μια μοναδική λύση τον πίνακα $X\in M_n$ για κάθε πίνακα $C\in M_n$ αν και μόνο αν $\sigma(A)\cap\overline{\sigma(-A)}=\varnothing$, δηλαδή αν και μόνο αν $\lambda\in\sigma(A)\Rightarrow-\overline{\lambda}\notin\sigma(A)$.

Απόδειξη

Από το θεώρημα (3.2) αντικαθιστώντας τον πίνακα A με τον πίνακα A^* και τον πίνακα B με τον πίνακα A για να προκύψει η αναγκαία και επαρκής συνθήκη $\sigma(A^*)\cap\sigma(-A)=\varnothing$ και εφόσον $\sigma(A^*)=\overline{\sigma(A)}$ και $\sigma(-A)=-\sigma(A)$, η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. □

Πόρισμα3.2 Υποθέτουμε ότι ο $A\in M_n$ είναι θετικά ευσταθής πίνακας, τότε η εξίσωση $XA+A^*X=C$ έχει μια μοναδική λύση $X\in M_n$ για κάθε πίνακα $C\in M_n$. Επιπλέον, αν ο πίνακας C είναι ερμιτιανός τότε το ίδιο ισχύει και για τον πίνακα X.

Απόδειξη

Παρατηρώντας την εξίσωση

$$X^*A+A^*X=C^*,$$

προκύπτει ότι για είναι ο πίνακας C ερμιτιανός πρέπει να ισχύει ό,τι $X^*=X$ (από μοναδικότητα). □

Ως εδώ έχουμε επικεντρωθεί στην φάση στην οποία οι πίνακές A και B είναι τέτοιοι που η εξίσωση $\mathrm{AX}+\mathrm{XB}=C$ είναι μοναδικά επιλύσιμα για κάθε πίνακα C. Παρόλαυτα υπάρχουν πολλές ενδιαφέρουσες περιπτώσεις στις οποίες αυτό δεν συμβαίνει. Στην ισότητα αντιμετάθεσης $\mathrm{AX}-\mathrm{XA}=0$, για παράδειγμα, για $m=n$ και $\mathrm{B}=-\mathrm{A}$ και με την προϋπόθεση να ισχύει $\sigma(\mathrm{A})\cap\sigma(-\mathrm{B})=\varnothing$ αυτό δεν συμβαίνει. Προκύπτει λοιπόν ότι υπάρχουν κάποιοι πίνακες C για τους οποίους η εξίσωση $\mathrm{AX}-\mathrm{XA}=C$ δεν έχει λύση κάποιον πίνακα X (είτε για ένα δοσμένο πίνακα A είτε για οποιοδήποτε πίνακα A) και κάποιοι πίνακες C για τους οποίους υπάρχουν άπειρες λύσεις. Ένας εύκολος τρόπος με τον οποίο μπορούμε να γνωρίζουμε εάν ένας δοσμένος πίνακας C μπορεί να γραφεί στην μορφή $C=\mathrm{AX}-\mathrm{XA}$ για κάποιον πίνακα A και κάποιον πίνακα X δίνεται στο επόμενο κεφάλαιο.

Λήμμα 3.1 Έστω $J_r(0)\in M_r$ και $J_s(0)\in M_s$ να είναι μη αντιστρέψιμα Jordan μπλοκ. Τότε ο πίνακας $\mathrm{X}\in M_{r,s}$ είναι μια λύση της εξίσωσης $J_r(0)\mathrm{X}-\mathrm{X}J_s(0)=0$ αν και μόνο αν

$$
\begin{gathered}
\mathrm{X}=[0\ \ \mathrm{Y}],\quad \mathrm{Y}\in M_r,\ \ 0\in \mathrm{M}_{r,s-r}\ \ \text{εαν } \mathrm{r}\le \mathrm{s},\\
\acute{\eta}\\
\mathrm{X}=\begin{bmatrix}\mathrm{Y}\\0\end{bmatrix},\quad \mathrm{Y}\in M_s,\quad 0\in \mathrm{M}_{r-s,s}\ \ \text{εαν } \mathrm{r}\ge \mathrm{s},
\end{gathered}
\tag{3.4}
$$

όπου,

$$
\mathrm{Y}=\begin{bmatrix}
\alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots\cdots & & \\
 & \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots\cdots & & \\
 & & \alpha_0 & \alpha_1 & & \\
 & & & \ddots & \ddots & \\
 & & & & \alpha_0 & \alpha_1\\
0 & & & & & \alpha_0
\end{bmatrix}=[y_{ij}],
$$

είναι σε κάθε περίπτωση ένας αυθαίρετος άνω τριγωνικός Toeplitz πίνακας με $y_{ij} = \alpha_{i-j}$. Η διάσταση του μηδενοχώρου της γραμμικής απεικόνισης

$$\mathrm{X} \to J_r(0)\mathrm{X} - \mathrm{X}J_s(0),$$

είναι $\min\{r, s\}$.

Απόδειξη

Έστω ο πίνακας $\mathrm{X} = [x_{ij}]$ έτσι ώστε

$$\left.\begin{array}{l}[J_r(0)\mathrm{X}]_{ij} = x_{i+1,j} \\ [\mathrm{X}J_s(0)]_{ij} = x_{i,j-1}\end{array}\right. \quad \text{για } i=1,2,\ldots,r \text{ και } j=1,2,\ldots,s,$$

οπού ορίζουμε $x_{r+1,j} \equiv 0 \equiv x_{i,0}$. Τότε

$$[J_r(0)\mathrm{X} - \mathrm{X}J_s(0)]_{i,j} = 0,$$

για όλα τα i=1,2,...,r και j=1,2,...,s αν και μόνο αν

$$x_{i+1,j+1} = x_{i,j} \text{ για } i=1,\ldots,r \text{ και } j=0,1,2,\ldots,s-1,$$

όπου, $x_{i,0} \equiv 0 \equiv x_{r+1,j}$. Ο πίνακας X έχει τη μορφή της σχέσης (3.4) και εξαρτάται γραμμικά από $\min\{r, s\}$ ελεύθερους παραμέτρους. □

Έστω τώρα ότι $\sigma(\mathrm{A}) = \{\lambda_i\}$ και $\sigma(B) = \{\mu_i\}$. Εφόσον η εξίσωση $\mathrm{AX} + \mathrm{XB} = C$ είναι ισοδύναμη με

$$SCR = S\mathrm{AX}R + S\mathrm{XB}R = (S\mathrm{A}S^{-1})(S\mathrm{X}R) - (S\mathrm{X}R)(R^{-1}(-\mathrm{B})R),$$

για κάθε αντιστρέψιμο πίνακα $S \in M_n$ και $R \in M_m$, μπορούμε να επιλέξουμε τους πίνακες S και R τέτοιους ώστε

$$SAS^{-1} = \begin{bmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & \mathrm{J}_{n_p}(\lambda_p) \end{bmatrix} = J_{\mathrm{A}}$$

και

$$R(-\mathrm{B})R^{-1} = \begin{bmatrix} J_{m_1}(-\mu_1) & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & \mathrm{J}_{m_q}(-\mu_q) \end{bmatrix} = J_{(-\mathrm{B})},$$

όπου και οι δύο είναι κανονικές μορφές Jordan. Αρκεί λοιπόν να προσδιοριστεί η διάσταση του μηδενοχώρου της γραμμικής απεικόνισης $\mathrm{X} \to J_A\mathrm{X} - \mathrm{X}J_{(-B)}$. Γράφοντας τώρα τον άγνωστο πίνακα X στη μορφή

$$\mathrm{X} = \begin{bmatrix} \mathrm{X}_{11} & \cdots\cdots & \mathrm{X}_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{X}_{p1} & \cdots\cdots & \mathrm{X}_{pq} \end{bmatrix}, \quad \mathrm{X}_{ij} \in M_{n_i, m_j}, \qquad i=1,2,\ldots,p,\ j=1,2,\ldots,q.$$

Η εξίσωση $J_{\mathrm{A}}\mathrm{X} - \mathrm{X}J_{(-\mathrm{B})} = 0$ είναι ισοδύναμη με το σύνολο των pq εξισώσεων

$$J_{n_i}(\lambda_i)\mathrm{X}_{ij} - \mathrm{X}_{ij}J_{m_j}(-\mu_j) = 0 \ \text{ για } i=1,2,\ldots,p,\ j=1,2,\ldots,q, \qquad \textbf{(3.5)}$$

κάθε μια από τις οποίες, από το θεώρημα (3.2) έχει μόνο την τετριμμένη λύση $\mathrm{X}_{ij} = 0$ εάν $\lambda_i + \mu_j \neq 0$. Εάν παρόλαυτα $\lambda_i + \mu_j = 0$, χρησιμοποιώντας τη σχέση $J_\kappa(\lambda) = \lambda\mathrm{I} + J_\kappa(0)$, η εξίσωση (3.5) μπορεί να γραφεί ως

$$J_{n_i}(0)\mathrm{X}_{ij} - \mathrm{X}_{ij}J_{m_j}(0) = 0,$$

η οποία από το λήμμα (3.1) έχει μια λύση στο χώρο της διάστασης $\min\{n_i, m_j\}$. Από αυτό το επιχείρημα προκύπτει το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 3.3 Έστω οι πίνακες $A \in M_n$ και $B \in M_m$ με

$$A = S\begin{bmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ & & \ddots \\ 0 & & J_{n_p}(\lambda_p) \end{bmatrix} S^{-1}, \qquad n_1 + n_2 + \cdots + n_p = n$$

και

$$B = R\begin{bmatrix} J_{m_1}(\mu_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ & & \ddots \\ 0 & & J_{m_q}(\mu_q) \end{bmatrix} R^{-1}, \quad m_1 + m_2 + \cdots + m_q = m,$$

να είναι η αντίστοιχες κανονικές μορφές Jordan των πινάκων A και B. H διάσταση του μηδενοχώρου της γραμμικής απεικόνισης $L: M_{n,m} \to M_{n,m}$ δίνεται από την γραμμική απεικόνιση $L: X \to AX + XB$ και είναι

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} \nu_{ij},$$

όπου, $\nu_{ij} = 0$ εαν $\lambda_i \neq -\mu_j$ και $\nu_{ij} = \min\{n_i, m_j\}$ εαν $\lambda_i = -\mu_j$.

Έχει ήδη διαπιστωθεί ότι στην περίπτωση που $m = n$ και $B = -A$ υπάρχει ένα ιδιαίτερο ενδιαφέρον στη μελέτη της, εφόσον η εξίσωση (3.1) είναι πάντα μη αντιστρέψιμη σε αυτή την περίπτωση.

Πόρισμα 3.3 Έστω ο πίνακας $A \in M_n$. Το σύνολο των πινάκων στον διανυσματικό χώρο M_n που αντιμετατίθενται με τον πίνακα A είναι ένας υποχώρος του διανυσματικού χώρου M_n με διάσταση τουλάχιστον *n*. Η διάσταση είναι ίση με *n* αν και μόνο αν ο πίνακας A έχει ελάχιστο πολυώνυμο ίδιου βαθμού με το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο.

Απόδειξη

Χρησιμοποιώντας τη εξίσωση $AX + XB = C$, και έστω ότι $B = -A$, τότε έχουμε ότι $p = q$, $n_i = m_i$ και $\mu_i = -\lambda_i$ για $i = 1,2,\ldots,p$. Η διάσταση του μηδενοχώρου της γραμμικής απεικόνισης $L: X \to AX - XA$ είναι

$$\sum_{i,j=1}^{p} \nu_{ij} \geq \sum_{i=1}^{p} \nu_{ii} = \sum_{i=1}^{p} n_i = n,$$

με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν $\lambda_i \neq \lambda_j$ για όλα τα $i \neq j$, το οποίο συμβαίνει αν και μόνο αν κάθε ιδιοτιμή του πίνακα Α συσχετίζεται ακριβώς με ένα Jordan μπλοκ. Αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν κάθε ιδιοτιμή του πίνακα Α έχει γεωμετρική πολλαπλότητα ίση με ένα (1) κάτι το οποίο είναι ισοδύναμο με το ότι ο πίνακας Α πρέπει να έχει ελάχιστο πολυώνυμο ίδιου βαθμού με το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο, δηλαδή ελάχιστο και χαρακτηριστικό πολυώνυμο ίδια. $\square$

Για έναν δοσμένο πίνακα $A \in M_n$ είναι ξεκάθαρο ότι κάθε πίνακας της μορφής $p(A)$ αντιμετατίθεται με τον Α, όπου $p(t)$ είναι ένα οποιοδήποτε πολυώνυμο. Από την άλλη μεριά, εξετάζοντας τη σχέση για $A = I$ καθίσταται σαφές ότι για ορισμένους πίνακες Α, υπάρχουν πίνακες που αντιμετατίθενται με τον Α αλλά δεν είναι πολυώνυμα του πίνακα Α.

Ορισμός 3.2 Έστω ο πίνακας $A \in M_n$. Ο **συγκεντρωτιστής** (centralizer) του πίνακα Α δηλαδή το σύνολο όλων των πινάκων που αντιμετατίθενται με τον Α είναι το σύνολο

$$C(A) \equiv \{B \in M_n : AB = BA\}.$$

Το σύνολο όλων των πολυωνύμων στον πίνακα Α είναι το σύνολο

$$P(A) \equiv \{p(A) : p(t) \text{ είναι ένα πολυώνυμο}\}.$$

Υπάρχουν κάποια άμεσα αποτελέσματα που προκύπτουν σχετικά με το παραπάνω και μια σχέση ανάμεσα στα σύνολα των $C(\mathrm{A})$ και $\mathrm{P}(\mathrm{A})$.

<u>Θεώρημα 3.4</u> Έστω ο πίνακας $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n$ και έστω $q_{\mathrm{A}}(t)$ να είναι το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα Α. Τότε

a) Τα σύνολα $\mathrm{P}(\mathrm{A})$ και $C(\mathrm{A})$ είναι υπόχωροι του διανυσματικού χώρου M_n,

b) $\mathrm{P}(\mathrm{A}) \subseteq C(\mathrm{A})$,

c) βαθμός (degree) $q_{\mathrm{A}}(t) = \dim \mathrm{P}(\mathrm{A}) \leq n$, και

d) $\dim C(\mathrm{A}) \geq n$, με την ισότητα να ισχύει μόνο εάν και μόνο αν ο πίνακας Α έχει χαρακτηριστικό και ελάχιστο πολυώνυμο ίδια.

<u>Απόδειξη</u>

Ο ισχυρισμός του a) αποδεικνύεται άμεσα ενώ του b) προκύπτει ευκολά εφόσον κάθε πολυώνυμο του πίνακα Α αντιμετατίθεται με τον πίνακα Α. Η διάσταση του συνόλου $\mathrm{P}(\mathrm{A})$ είναι το απόλυτο ενός μέγιστου του ανεξάρτητου συνόλου $\{\mathrm{I}, \mathrm{A}, \mathrm{A}^2, \ldots\}$, το οποίο είναι ακριβώς ίδιο με το βαθμό του μονικού πολυωνύμου (πολυώνυμο με μεγιστοβάθμιο συντελεστή ίσο με ένα) τουλάχιστον τέτοιου βαθμού που να εκμηδενίζει τον πίνακα Α. Οπότε ο βαθμός του ελαχίστου πολυωνύμου του πίνακα, ο οποίος δεν είναι μικρότερος του n, από θ.Caley-Hamilton, είναι η διάσταση του του συνόλου $\mathrm{P}(\mathrm{A})$. Ο ισχυρισμός του d) έχει προκύψει από το Πόρισμα (3.3). □

Γενικά πάντα ισχύει ότι $\mathrm{P}(\mathrm{A}) \subseteq C(\mathrm{A})$ αλλά εάν $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = C(\mathrm{A})$ τότε οι υπόχωροι των δύο συνόλων θα πρέπει να έχουν τις ίδιες διαστάσεις, όπου από το θεώρημα (3.4) c),d) αυτό συμβαίνει εάν και μόνο αν $\dim \mathrm{P}(\mathrm{A}) = n = \dim C(\mathrm{A})$. Αλλά $\dim \mathrm{P}(\mathrm{A}) = n$ εάν και μόνο αν ο βαθμός του ελαχίστου πολυωνύμου $q_{\mathrm{A}}(t)$ είναι ίσος με n. Σε αυτήν τη περίπτωση αυτό συμβαίνει εάν και μόνο αν το ελάχιστο και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A έχουν τον ίδιο βαθμό.

<u>Πόρισμα 3.4</u> Ένας πίνακας $\mathrm{A} \in M_n$ έχει ελάχιστο πολυώνυμο ίδιου βαθμού με το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο εάν και μόνο αν κάθε πίνακας που αντιμετατίθεται με τον πίνακα A είναι ένα πολυώνυμου του πίνακα A.

<u>Παρατήρηση 3.1</u> Εάν ο $\mathrm{A} \in M_n$ είναι πίνακας που έχει ελάχιστο πολυώνυμο μικρότερου βαθμού από το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο πως μπορούμε να ανιχνεύσουμε εάν ο δοσμένος πίνακας B είναι ένα πολυώνυμο του A; Η αντιμεταθετικότητα με τον πίνακα A και ως εκ τούτου η αντιμεταθετικότητα με το πολυώνυμο $p(\mathrm{A})$ είναι απαραίτητη, αλλά όχι αρκετή. Η αντιμεταθετικότητα όμως με ένα μεγαλύτερο σύνολο όπως $C(\mathrm{A})$ είναι αρκετή.

<u>Θεώρημα 3.5</u> Έστω ο πίνακας $\mathrm{A} \in M_n$. Ένας πίνακας B είναι ένα πολυώνυμο του πίνακα A εάν και μόνο αν ο πίνακας B αντιμετατίθεται με κάθε πίνακα που αντιμετατίθεται με τον πίνακα A.

<u>Απόδειξη</u>

Ο προκείμενος υπαινιγμός είναι άμεσος οπότε θα επικεντρωθούμε στην απόδειξη του αντιστρόφου. Το σύνολο των πινάκων που αντιμετατίθενται με κάθε πίνακα στο σύνολο $C(\mathrm{A})$ είναι ένας υποχώρος του συνόλου $C(\mathrm{A})$ στο οποίο περιέχεται το σύνολο $\mathrm{P}(\mathrm{A})$, οπότε με στόχο να δείξουμε ότι αυτός ο υποχώρος είναι ακριβώς ίδιος με το σύνολο $\mathrm{P}(\mathrm{A})$ αρκεί απλά να δείξουμε ότι οι διαστάσεις του είναι ίδιες με τον βαθμό του ελαχίστου πολυώνυμου του πίνακα A. Όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος (3.3) είναι αρκετό να υποθέσουμε ότι ο δοσμένος πίνακας Α είναι στην κανονική μορφή Jordan

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{n_p}(\lambda_p) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathrm{A}_1 & & & 0 \\ & \mathrm{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mathrm{A}_\kappa \end{bmatrix},$$

όπου, $\kappa \le p$, τα Jordan μπλοκ με τα ίδια ιδιοδιάνυσμα να είναι τοποθετημένα γειτονικά, και κάθε πίνακας $\mathrm{A}_i \in M_{r_i}$ να αποτελείται από το ευθύ άθροισμα όλων των Jordan μπλοκ του πίνακα Α που έχουν την ίδια ιδιοτιμή.

Εάν ο πίνακας $\mathrm{X} \in C(\mathrm{A})$, τότε

$$\mathrm{X}=\begin{bmatrix} \mathrm{X}_{11} & \cdots & \mathrm{X}_{1\kappa} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{X}_{\kappa 1} & \cdots & \mathrm{X}_{\kappa\kappa} \end{bmatrix}, \quad \mathrm{X}_{ij} \in M_{r_i, r_j}, \tag{3.6}$$

και παρατηρούμε ότι $\mathrm{AX}=\mathrm{XA}$ το οποίο συνεπάγεται ότι $\mathrm{A}_i\mathrm{X}_{ij}=\mathrm{X}_{ij}\mathrm{A}_j$ για ολα τα i, j=1,2,...,k, και από θεώρημα (3.2) έχει τετριμμένη λύση μόνο εάν $i \ne j$. Ως εκ τούτου, κάθε πίνακας στο σύνολο $C(\mathrm{A})$ έχει την μπλοκ διαγώνια μορφή

$$\mathrm{X}=\begin{bmatrix} \mathrm{X}_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathrm{X}_{\kappa\kappa} \end{bmatrix}, \quad \mathrm{X}_{ii} \in M_{r_i}. \tag{3.7}$$

Δυο πίνακες αυτής της μορφής αντιμετατίθενται εάν και μόνο αν τα αντίστοιχα διαγώνια τους μπλοκ αντιμετατίθενται. Έτσι για να αποδείξουμε το θεώρημα αρκεί να υποθέσουμε ότι $k=1,\ r_1=n$ και

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix} J_{n_1}(\lambda) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{n_p}(\lambda) \end{bmatrix},$$

με $n_1 + n_2 + \cdots + n_p = n$ και $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_p \geq 1$ και να αποδείξουμε ότι ο υποχώρος του συνόλου $C(\mathrm{A})$ αποτελείται από εκείνους τους πίνακες που αντιμετατίθενται με κάθε πίνακα του συνόλου $C(\mathrm{A})$, έχοντας διάσταση $n_1 = \max\{n_1, n_2, \ldots, n_p\}$, εφόσον αυτός είναι ο βαθμός του ελαχίστου πολυώνυμου του πίνακα Α.

Σημειώνοντας ότι

$$\begin{aligned} J_k(\lambda)J_k(\mu) &= [\lambda \mathrm{I} + J_k(0)][\mu \mathrm{I} + J_k(0)] \\ &= \lambda\mu\mathrm{I} + \lambda J_k(0) + \mu J_k(0) + [J_k(0)]^2 \\ &= J_k(\mu)J_k(\lambda) \quad \text{για κάθε } \lambda,\mu \in \mathbf{C}. \end{aligned}$$

Τότε ο πίνακας

$$\mathrm{Z} = \begin{bmatrix} J_{n_1}(\lambda+1) & & & 0 \\ & J_{n_2}(\lambda+2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{n_p}(\lambda+p) \end{bmatrix} \in M_n,$$

του οποίου τα μπλοκ έχουν διακριτές ιδιοτιμές, αντιμετατίθεται με τον πίνακα Α. Τώρα έστω

$$\mathrm{Y} = \begin{bmatrix} \mathrm{Y}_{11} & \cdots & \mathrm{Y}_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{Y}_{p1} & \cdots & \mathrm{Y}_{pp} \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_n, \quad \mathrm{Y}_{ij} \in M_{n_i,n_j},$$

να είναι ένας πίνακας που αντιμετατίθεται με κάθε πίνακα που αντιμετατίθεται με τον πίνακα Α. Εφόσον ο πίνακας Y πρέπει να αντιμετατίθεται με τον πίνακα Z και σύμφωνα με τον παραπάνω όρο που μας επέτρεψε να περιορίσουμε την σχέση (3.6) στην σχέση (3.7), προκύπτει ότι ο πίνακας Y θα πρέπει να έχει τη μπλοκ διαγώνια μορφή

$$\mathrm{Y} = \begin{bmatrix} \mathrm{Y}_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathrm{Y}_{pp} \end{bmatrix}, \quad \mathrm{Y}_{ii} \in M_{n_i}.$$

Επιπλέον, η σχέση $\Upsilon_{ii}J_{n_i}(\lambda+i)=J_{n_i}(\lambda+i)\Upsilon_{ii}$ είναι ισοδύναμη με τη σχέση $\Upsilon_{ii}J_{n_i}(0)=J_{n_i}(0)\Upsilon_{ii}$, έτσι από λήμμα (3.1) έχουμε ότι κάθε πίνακας Υ_{ii} είναι ένας άνω τριγωνικός Toeplitz πίνακας που εξαρτάται γραμμικά από n_i παραμέτρους. Οι p πίνακές $\Upsilon_{11},\ldots,\Upsilon_{pp}$ παρόλαυτα δεν είναι ανεξάρτητοί. Ορίζουμε τον $p\times p$ πίνακα μπλοκ

$$W_1=\begin{bmatrix} 0 & W_{12} & & 0 \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}\in M_n,$$

όπου, η διαμέριση είναι σύμφωνη με εκείνη του πίνακα A και όλα τα μπλοκ είναι μηδέν εκτός των μπλοκ 1,2 με $W_{12}\in M_{n_1,n_2}$, τα οποία έχουν τη μορφή

$$W_{12}=\begin{bmatrix} \mathrm{I} \\ 0 \end{bmatrix},\ \ \mathrm{I}\in M_{n_2},\ \ 0\in M_{n_1-n_2,n_2}.$$

Αυτό είναι δυνατό επειδή εμείς έχουμε καθορίσει ότι $n_1\geq n_2\geq\cdots\geq n_p\geq 1.$ Επειδή τώρα $W_{12}J_{n_2}(\lambda)=J_{n_1}(\lambda)W_{12}$, ο πίνακας W_1 αντιμετατίθεται με τον πίνακα A και ως εκ τούτου πρέπει επίσης ο πίνακας W_1 να αντιμετατίθεται και με τον πίνακα Υ. Η σχέση $W_1\Upsilon=\Upsilon W_1$ είναι ισοδύναμή με την σχέση $W_{12}\Upsilon_{22}=\Upsilon_{11}W_{12}$, η οποία μας δείχνει ότι ο πίνακας Υ_{22} προσδιορίζεται από το πίνακα Υ_{11}. Η ακριβής μορφή της εξάρτησης του πίνακα Υ_{22} από τον πίνακα Υ_{11} προβάλλεται από το μοναδιαίο μπλοκ

$$W_{12}\Upsilon_{22}=\begin{bmatrix} \mathrm{I} \\ 0 \end{bmatrix}\Upsilon_{22}=\begin{bmatrix} \Upsilon_{22} \\ 0 \end{bmatrix}=\Upsilon_{11}W_{12}=\begin{bmatrix} \Upsilon'_{11} & \mathrm{F} \\ 0 & \mathrm{G} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{I} \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \Upsilon'_{11} \\ 0 \end{bmatrix},$$

όπου έχουμε διαμερίσει τον πίνακα Υ_{11} έτσι ώστε ο πίνακας $\Upsilon'_{11}\in M_{n_2}$ να είναι ο άνω αριστερός $n_2\times n_2$ κύριος υποπίνακας του Υ_{11}. Έτσι έχουμε ότι $\Upsilon_{22}=\Upsilon'_{11}$, οπότε ο πίνακας Υ_{22} προσδιορίζεται πλήρως από τον πίνακα Υ_{11}.

Μπορεί κανείς να συνεχίσει με αυτόν τον τρόπο για $i = 2,3,\ldots,p-1$ προσδιορίζοντας τους διάφορους πίνακες $W_i \in M_n$ να είναι $p \times p$ μπλοκ πίνακα με ένα μη μηδενικό μπλοκ μόνο στην θέση $i, i+1$ και αυτό το μπλοκ θα έχει την μορφή

$$\begin{bmatrix} \mathrm{I} \\ 0 \end{bmatrix} \in M_{n_i, n_{i+1}}, \ \ \mathrm{I} \in M_{n_{i+1}}, \ \ 0 \in M_{n_i - n_{i+1}, n_{i+1}}.$$

Ο ίδιος όρος μας δείχνει ότι κάθε πίνακας W_i αντιμετατίθεται με τον πίνακα A και κάθε $\mathrm{Y}_{i+1,i+1,} = \mathrm{Y}'_{ii}$ είναι ένας άνω αριστερός $n_{i+1} \times n_{i+1}$ κύριος υποπίνακας του πίνακα μπλοκ Y_{ii}.

Έτσι όλα τα Y_{ii} μπλοκ προσδιορίζονται από το μπλοκ Y_{11} (στην πραγματικότητα, κάθε Y_{ii} είναι ένας άνω αριστερός $n_i \times n_i$ κύριος υποπίνακας του Y'_{ii}) και ο πίνακας Y_{11} εξαρτάται γραμμικά από n_i παραμέτρους. Η διάσταση του υποχώρου των πινάκων Y που αντιμετατίθενται με κάθε πίνακα στο σύνολο $C(\mathrm{A})$ είναι επομένως n_1. □

Έστω τώρα οι πίνακες $\mathrm{A} \in M_m$ και $\mathrm{B} \in M_n$ οι οποίοι δεν έχουν διακεκριμένα φάσματα (ξένα, χωρίς τομή μεταξύ τους), τότε η εξίσωση $\mathrm{AX} - \mathrm{XB} = C$ είναι μη αντιστρέψιμη και έχει μια λύση, τον πίνακα $\mathrm{X} \in M_{m,n}$ μόνο για ορισμένους πίνακες C.

Για κάθε πίνακα $\mathrm{X} \in M_{m,n}$ εξετάζοντας τη σχέση

$$\begin{bmatrix} \mathrm{I} & \mathrm{X} \\ 0 & \mathrm{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{C} \\ 0 & \mathrm{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{I} & \text{-X} \\ 0 & \mathrm{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{A} & \text{-AX+XB+C} \\ 0 & \mathrm{B} \end{bmatrix},$$

εφόσον ισχύει ότι

$$\begin{bmatrix} \mathrm{I} & \mathrm{X} \\ 0 & \mathrm{I} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathrm{I} & \text{-X} \\ 0 & \mathrm{I} \end{bmatrix},$$

προκύπτει ότι ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} \text{ είναι όμοιος με τον πίνακα } \begin{bmatrix} A & -AX+XB+C \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

Έτσι εάν υπάρχει μια λύση με τον πίνακα X στην εξίσωση $AX - XB = C$ τότε ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} \text{ είναι όμοιος με τον πίνακα } \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

Το αντίστροφο ισχύει επίσης.

<u>Θεώρημα 3.6</u> Έστω οι πίνακες $A \in M_m$, $B \in M_n$ και $C \in M_{m,n}$. Υπάρχει κάποιος πίνακας $X \in M_{m,n}$ τέτοιος ώστε $AX - XB = C$ εάν και μόνο αν ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} \text{ είναι όμοιος με τον πίνακα } \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

<u>Απόδειξη</u>

Η αναγκαιότητα της συνθήκης ομοιότητας έχει ήδη αποδειχθεί, οπότε ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένας αντιστρέψιμος πίνακας $S \in M_{m+n}$ έτσι ώστε

$$S \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} S^{-1} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

Ορίζουμε δύο γραμμικές απεικονίσεις $T_i : M_{m+n} \to M_{m+n}$, $i = 1, 2$, τέτοιες ώστε

$$T_1(X) = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} X - X \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}, \tag{3.8}$$

και

$$T_2(X) = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} X - X \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}. \tag{3.9}$$

Από την υπόθεσή ομοιότητας έχουμε ότι $T_2(X) = ST_1(S^{-1}X)$ για όλους τους πίνακας $X \in M_{m+n}$, οπότε $\mathrm{T}_2(X)=0$ εάν και μόνο αν $\mathrm{T}_1(S^{-1}X)=0$. Πιο συγκεκριμένα, οι μηδενοχώροι των γραμμικών απεικονίσεων T_1 και T_2 πρέπει να έχουν την ίδια διάσταση.

Τώρα γράφουμε

$$X=\begin{bmatrix} \mathrm{X}_{11} & \mathrm{X}_{12} \\ \mathrm{X}_{21} & \mathrm{X}_{22} \end{bmatrix},$$

με $\mathrm{X}_{11} \in M_m$, $\mathrm{X}_{12} \in M_{m,n}$, $\mathrm{X}_{21} \in M_{n,m}$, $\mathrm{X}_{22} \in M_n$, οπότε οι σχέσεις (3.8) και (3.9) γράφονται

$$\mathrm{T}_1(X)=\begin{bmatrix} \mathrm{AX}_{11}-\mathrm{X}_{11}\mathrm{A} & \mathrm{AX}_{12}-\mathrm{X}_{12}\mathrm{B} \\ \mathrm{BX}_{21}-\mathrm{X}_{21}\mathrm{A} & \mathrm{BX}_{22}-\mathrm{X}_{22}\mathrm{B} \end{bmatrix},$$

και

$$\mathrm{T}_2(X)=\begin{bmatrix} \mathrm{AX}_{11}-\mathrm{X}_{11}\mathrm{A}+C\mathrm{X}_{21} & \mathrm{AX}_{12}-\mathrm{X}_{12}\mathrm{B}+C\mathrm{X}_{22} \\ \mathrm{BX}_{21}-\mathrm{X}_{21}\mathrm{A} & \mathrm{BX}_{22}-\mathrm{X}_{22}\mathrm{B} \end{bmatrix}.$$

Εάν ο μηδενοχώρος της γραμμικής απεικόνισης T_2 περιέχει έναν πίνακα της μορφής $\begin{bmatrix} X_{11} & \mathrm{X}_{12} \\ 0 & \text{-I} \end{bmatrix}$ τότε έχουμε τελειώσει, αφού για $\mathrm{X}=\mathrm{X}_{12}$ θα ικανοποιούταν η σχέση $\mathrm{AX}-\mathrm{BX}=C$ όπως είναι το επιθυμητό. Για να δείξουμε ότι υπάρχει πίνακας με αυτή την ειδική μορφή στο μηδενοχώρο της γραμμικής απεικόνισης T_2 εξετάζουμε τις δυο γραμμικές απεικονίσεις. Έστω ότι

$$T_i: \text{μηδενοχώρος}\,(nullspace)\ \text{της}\,\mathrm{T}_i \to M_{n,m+n}\ ,\ i=1,2,$$

δίνεται από τις προβολές

$$T_i:\begin{bmatrix} \mathrm{X}_{11} & \mathrm{X}_{12} \\ \mathrm{X}_{21} & \mathrm{X}_{22} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathrm{X}_{21} & \mathrm{X}_{22} \end{bmatrix},\ \ i=1,2\,.$$

Σημειώνουμε ότι ο πίνακας $X \in nullspaceT_1$ εάν και μόνο αν $X_{21} = 0$, $X_{22} = 0$, $AX_{11} - X_{11}A = 0$ και $AX_{12} - X_{12}B = 0$ και ότι ακριβώς οι ίδιες τέσσερις συνθήκες χαρακτηρίζουν τον μηδενοχώρο της γραμμικής απεικόνισης T_2 έτσι οι μηδενοχώροι των γραμμικών απεικονίσεων T_1 και T_2 είναι ταυτόσημοι.

Επιπλέον δηλώνουμε ότι

$$rangeT_1 = \left\{ \begin{bmatrix} X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} : BX_{21} - X_{21}A = 0 \text{ και } BX_{22} - X_{22}B = 0 \right\}$$

και

$$\begin{aligned} rangeT_2 = \Big\{ \begin{bmatrix} X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} : & \; BX_{21} - X_{21}A = 0, BX_{22} - X_{22}B = 0 \\ & \text{και υπαρχούν } X_{11}, X_{12} \text{ τέτοιοι ώστε} \\ & CX_{21} = X_{11}A - AX_{11} \text{ και } CX_{22} = X_{12}B - AX_{12} \Big\}, \end{aligned}$$

έτσι προκύπτει ότι $rangeT_2 \subseteq rangeT_1$. Η βασική σχέση που σχετίζει το μηδενοχώρο $(nullspace)$, το πεδίο τιμών $(range)$ και το πεδίο ορισμού $(domain)$ μιας γραμμικής απεικόνισης είναι η εξής

$$\dim(nullspaceT_i) + \dim(rangeT_i) = \dim(nullspace\mathrm{T}_i), \;\; i = 1, 2.$$

Εφόσον έχει δειχθεί ότι

$$nullspaceT_1 = nullspaceT_2$$

και

$$\dim(nullspace(\mathrm{T}_1)) = \dim(nullspace(\mathrm{T}_2)) \;\;,$$

προκύπτει ότι

$$\dim(range(T_1)) = \dim(range(T_2)) \;\;,$$

και ως εκ τούτου, το ότι ο υπόχωρος του $rangeT_2$ ανήκει στον υπόχωρο του $range\mathrm{T}_1$ είναι στην πραγματικότητα μια ισότητα, δηλαδή $rangeT_2 = rangeT_1$.
Εντέλει σημειώνουμε ότι ο πίνακας $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{I} \end{bmatrix} \in nullspace\mathrm{T}_1$, έτσι ο πίνακας $\begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{I} \end{bmatrix} \in rangeT_1 = rangeT_2$, από το οποίο προκύπτει ότι υπάρχει κάποιος πίνακας $X \in nullspace\mathrm{T}_2$ της μορφής

$$\begin{bmatrix} \mathrm{X}_{11} & \mathrm{X}_{12} \\ 0 & \text{-I} \end{bmatrix},$$

το οποίο ήταν αυτό που χρειαζόταν να δείξουμε. □

Η απόδειξη που έχει δοθεί στο θεώρημα (3.6) είναι τελείως στοιχειώδης, μοιάζει με όλες τις άλλες γνωστές αποδείξεις τέτοιων αποτελεσμάτων και είναι μη εποικοδομητική. Δεμένου ότι οι πίνακες $\begin{bmatrix} \mathrm{A} & 0 \\ 0 & \mathrm{B} \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{C} \\ 0 & \mathrm{B} \end{bmatrix}$ είναι όμοιοι μέσω ενός δοσμένου αντιστρέψιμου πίνακα $S \in M_{m+n}$, για πολλούς λογούς θα ήταν επιθυμητό να έχουμε έναν αλγόριθμο για την κατασκευή ενός πίνακα X (γνωρίζουμε ότι υπάρχει) έτσι ώστε ο πίνακας $\begin{bmatrix} \mathrm{I} & \mathrm{X} \\ 0 & \mathrm{I} \end{bmatrix}$ να πετυχαίνει αυτή την ομοιότητα.

Ένα παρόμοιο επιχείρημα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποδείξουμε ένα δεύτερο θεώρημα, το οποίο θα σχετίζεται με την πιο γενική γραμμική εξίσωση πινάκων $\mathrm{AX} - \mathrm{YB} = C$. Αφού αυτή η εξίσωση έχει δυο ανεξάρτητούς άγνωστους πίνακες X, Y, αναμένουμε ότι θα έχει μια λύση υπό ασθενέστερες συνθήκες για δοσμένους πίνακες A, B και C από την εξίσωση $\mathrm{AX} - \mathrm{XB} = C$. Αυτή η προσδοκία επαληθεύεται, αντικαθιστώντας την ομοιότητα από το θεώρημα (3.6) με την ασθενέστερη έννοια της ισοδυναμίας και επιτυγχάνοντας έναν γενικό χαρακτηρισμό για την σχέση των πινάκων A, B και C η οποία επιτρέπει στην εξίσωση $\mathrm{AX} - \mathrm{YB} = C$ να έχει λύση. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι πίνακες $\mathrm{A},\mathrm{B} \in M_{m,n}$ είναι ισοδύναμοι εάν υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες $\mathrm{P} \in M_m$ και $Q \in M_n$ τέτοιοι ώστε $\mathrm{B}=\mathrm{PA}Q$.

<u>Υπενθύμιση:</u> Δυο πίνακες με το ίδιο μέγεθος είναι ισοδύναμοι εάν και μόνο αν έχουν τον ίδιο βαθμό (rank).

<u>**Θεώρημα 3.7**</u> Έστω οι πίνακες $\mathrm{A} \in M_{m,n}$, $\mathrm{B} \in M_{p,q}$ και $C \in M_{m,q}$. Υπάρχουν πίνακες $\mathrm{X} \in M_{m,q}$ και $\mathrm{Y} \in M_{n,\mathrm{p}}$ τέτοιοι ώστε $\mathrm{AX}-\mathrm{YB}=C$ εάν και μόνο αν

$$rank\begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{C} \\ 0 & \mathrm{B} \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} \mathrm{A} & 0 \\ 0 & \mathrm{B} \end{bmatrix}.$$

<u>Απόδειξη</u>

Για κάποιο πίνακα $\mathrm{X} \in M_{\mathrm{n},q}$ και κάποιο πίνακα $\mathrm{Y} \in M_{\mathrm{m,p}}$ έχουμε ότι

$$\begin{bmatrix} \mathrm{I} & \text{-Y} \\ 0 & \mathrm{I} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{A} & 0 \\ 0 & \mathrm{B} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{I} & \mathrm{X} \\ 0 & \mathrm{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{A} & \text{AX-YB} \\ 0 & \mathrm{B} \end{bmatrix}.$$

Έτσι, εάν η εξίσωση $\mathrm{AX}-\mathrm{YB}=C$ έχει μια λύση X, Y, προκύπτει η ισοδυναμία. Αντιστρόφως, ορίζω δυο γραμμικές απεικονίσεις $S_i : \mathrm{M}_{n+q} \times \mathrm{M}_{m+p} \to \mathrm{M}_{m+p,n+q}$, $i=1,2$ τέτοιες ώστε

$$S_1(X,Y) = \begin{bmatrix} \mathrm{A} & 0 \\ 0 & \mathrm{B} \end{bmatrix} X - Y\begin{bmatrix} \mathrm{A} & 0 \\ 0 & \mathrm{B} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(3.10)}$$

και

$$S_2(X,Y) = \begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{C} \\ 0 & \mathrm{B} \end{bmatrix} X - Y\begin{bmatrix} \mathrm{A} & 0 \\ 0 & \mathrm{B} \end{bmatrix}. \qquad \textbf{(3.11)}$$

Όπου $X \in M_{n+q}$ και $Y \in M_{m+q}$. Εάν υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες $P \in M_{m+p}$ και $\Omega \in M_{n+q}$, τέτοιοι ώστε

$$P\begin{bmatrix} \mathrm{A} & 0 \\ 0 & \mathrm{B} \end{bmatrix}\Omega = \begin{bmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{C} \\ 0 & \mathrm{B} \end{bmatrix}.$$

Τότε $S_2\left(X,Y\right) = PS_1(\Omega X, P^{-1}Y)$ για όλους τους πίνακες X,Y και ως εκ τούτου $S_2\left(X,Y\right) = 0$ εάν και μόνο αν $S_1(\Omega X, P^{-1}Y) = 0$. Ειδικότερα ο μηδενοχώρος των γραμμικών απεικονίσεών S_1 και S_2 πρέπει να έχει την ίδια διάσταση.

Τώρα γράφουμε ότι

$$X = \begin{bmatrix} \mathrm{X}_{11} & \mathrm{X}_{12} \\ \mathrm{X}_{21} & \mathrm{X}_{22} \end{bmatrix} \in M_{n+q} \text{ και } Y = \begin{bmatrix} \mathrm{Y}_{11} & \mathrm{Y}_{12} \\ \mathrm{Y}_{21} & \mathrm{Y}_{22} \end{bmatrix} \in M_{m+p},$$

με $\mathrm{X}_{11} \in M_n,\ \mathrm{X}_{22} \in M_q,\ \mathrm{Y}_{11} \in M_m,\ \mathrm{Y}_{22} \in M_p,$ και υπολογίζουμε

$$S_1\left(X,Y\right) = \begin{bmatrix} \mathrm{AX}_{11} - \mathrm{Y}_{11}\mathrm{A} & \mathrm{AX}_{12} - \mathrm{Y}_{12}\mathrm{B} \\ \mathrm{BX}_{21} - \mathrm{Y}_{21}\mathrm{A} & \mathrm{BX}_{22} - \mathrm{Y}_{22}\mathrm{B} \end{bmatrix}$$

και

$$S_2\left(X,Y\right) = \begin{bmatrix} \mathrm{AX}_{11} - \mathrm{Y}_{11}\mathrm{A} + C\mathrm{X}_{21} & \mathrm{AX}_{12} - \mathrm{Y}_{12}\mathrm{B} + C\mathrm{X}_{22} \\ \mathrm{BX}_{21} - \mathrm{Y}_{21}\mathrm{A} & \mathrm{BX}_{22} - \mathrm{Y}_{22}\mathrm{B} \end{bmatrix}.$$

Εάν ο μηδενοχώρος του S_2 περιέχει ένα σημείο $\left(X,Y\right)$ με

$$X = \begin{bmatrix} \mathrm{X}_{11} & \mathrm{X}_{12} \\ \mathrm{X}_{21} & \text{-I} \end{bmatrix} \text{ και } Y = \begin{bmatrix} \mathrm{Y}_{11} & \mathrm{Y}_{12} \\ \mathrm{Y}_{21} & \text{-I} \end{bmatrix},$$

τότε έχουμε τελειώσει, γιατί τότε $\mathrm{X} = \mathrm{X}_{12}$ και $\mathrm{Y}=\mathrm{Y}_{12}$ οι οποίοι θα ικανοποιούν την εξίσωση $\mathrm{AX} - \mathrm{YB} = C$ όπως επιθυμούμε. Εξετάζουμε τώρα τις δυο γραμμικές απεικονίσεις

$$\mathbf{S}_i : \text{nullspace } \mathrm{S}_i \to \mathrm{M}_{q,n} \times \mathrm{M}_q \times \mathrm{M}_{p,m} \times \mathrm{M}_p, \quad i = 1,2,$$

οι οποίες δίνονται από τις προβολές

$$\mathbf{S}_i\left(\begin{bmatrix} \mathrm{X}_{11} & \mathrm{X}_{12} \\ \mathrm{X}_{21} & \mathrm{X}_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathrm{Y}_{11} & \mathrm{Y}_{12} \\ \mathrm{Y}_{21} & \mathrm{Y}_{22} \end{bmatrix}\right) \to \left(\mathrm{X}_{21}, \mathrm{X}_{22}, \mathrm{Y}_{21}, \mathrm{Y}_{22}\right), \; i = 1,2.$$

Οι μηδενοχώροι των γραμμικών απεικονίσεων $\mathbf{S}_1$ και $\mathbf{S}_2$ είναι ακριβώς ίδιοι εφόσον $S_1\left(X,Y\right) = S_2\left(X,Y\right)$ για όλους τους πίνακες X,Y για τους οποίους ισχύει $\mathrm{X}_{21} = 0$ και $\mathrm{X}_{22} = 0$. Επιπλέον, $range\mathbf{S}_2 \subseteq range\mathbf{S}_1$ εφόσον τα σημεία στα πεδία τιμών των γραμμικών απεικονίσεων $\mathbf{S}_1$ και $\mathbf{S}_2$ πρέπει να ικανοποιούν τις σχέσεις $\mathrm{BX}_{21} - \mathrm{Y}_{21}\mathrm{A} = 0$ και $\mathrm{BX}_{22} - \mathrm{Y}_{22}\mathrm{B} = 0,$ ενώ τα σημεία του πεδίου τιμών της γραμμικής απεικόνισης $\mathbf{S}_2$ πρέπει να ικανοποίει επιπρόσθετα τις σχέσεις $C\mathrm{X}_{21} = \mathrm{Y}_{11}\mathrm{A} - \mathrm{AX}_{11}$ και $C\mathrm{X}_{22} = \mathrm{Y}_{12}\mathrm{B} - \mathrm{AX}_{12}$. Από τις γενικές σχέσεις για βαθμό (rank) και διάσταση πυρήνα (nullity) έχουμε ότι

$$\dim(nullspace\mathbf{S}_i) + \dim(range\mathbf{S}_i) = \dim(nullspace S_i), \; i = 1,2.$$

Καταλήγουμε ότι $\dim(range\mathbf{S}_1) = \dim(range\mathbf{S}_2)$ και ως εκ τούτου $range\mathbf{S}_1 = range\mathbf{S}_2$. Εφόσον το σημείο $\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \text{-I} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \text{-I} \end{bmatrix}\right)$ ανήκει στον μηδενοχώρο της γραμμικής απεικόνισης S_1, το σημείο $\left(0, -\mathrm{I}, 0, -\mathrm{I}\right)$ ανήκει στο κοινό πεδίο τιμών των γραμμικών απεικονίσεων $\mathbf{S}_1$ και $\mathbf{S}_2$, οπότε υπάρχει κάποιο σημείο $\left(X,Y\right)$ στο μηδενοχώρο της γραμμικής απεικόνισης S_2 με πίνακες X και Y της μορφής

$$X = \begin{bmatrix} \mathrm{X}_{11} & \mathrm{X}_{12} \\ \mathrm{X}_{21} & \text{-I} \end{bmatrix} \text{ και } Y = \begin{bmatrix} \mathrm{Y}_{11} & \mathrm{Y}_{12} \\ \mathrm{Y}_{21} & \text{-I} \end{bmatrix},$$

το οποίο ήταν αυτό που χρειαζόταν να δείξουμε. □

<u>Παρατήρηση 3.3</u> Το προηγούμενο αποτέλεσμα μπορεί να θεωρηθεί και ως γενίκευση ενός γνωστού γεγονότος ότι δηλαδή το τετραγωνικό σύστημα των γραμμικών εξισώσεων $\mathrm{A}x = c$ έχει μια λύση $x \in \mathbf{C}^n$ για ένα δοσμένο $c \in \mathbf{C}^n$ εάν και μόνο αν οι πίνακες $\mathrm{A} \in M_n$ και $\left[\mathrm{A}, c\right] \in M_{n,\mathrm{n}+1}$ έχουν τον ίδιο βαθμό $(rank)$.

Κεφάλαιο 4: Προσθετικοί και πολλαπλασιαστικοί αντιμεταθέτες και γραμμικά αναλλοίωτα.

<u>**Ορισμός 4.1**</u> Έστω οι πίνακες $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in M_n$. Ένας πίνακας της μορφής $\mathrm{AB} - \mathrm{BA}$ ονομάζεται προσθετικός αντιμεταθέτης. Εάν οι πίνακες A και B είναι αντιστρέψιμοι, τότε ένας πίνακας της μορφής $\mathrm{ABA}^{-1}\mathrm{B}^{-1}$ ονομάζεται πολλαπλασιαστικός αντιμεταθέτης.

<u>**Θεώρημα 4.1**</u> Ένας πίνακας $C \in M_n$ μπορεί να γραφεί ως $C = \mathrm{XY} - \mathrm{YX}$ για κάποιους πίνακες $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in M_n$ εάν και μόνο αν

$$trC = 0.$$

<u>Απόδειξη</u>

Εφόσον $tr\mathrm{XY} = tr\mathrm{YX}$ χρειάζεται μόνο να δειχθεί ότι εάν $trC = 0$, τότε η (μη γραμμική) εξίσωση πινάκων $\mathrm{XY} - \mathrm{YX} = C$ μπορεί να έχει λύση για κάποιους πίνακες $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in M_n$. Για να δειχθεί αυτό αντικαθιστούμε τον πίνακα C με κάποιον άλλον πίνακα όμοιο του C διότι η ιδιότητα του αντιμεταθέτη είναι αναλλοίωτη υπό μετασχηματισμούς ομοιότητας. Γνωρίζοντας ότι κάθε πίνακας $\mathrm{A} \in M_n$ είναι αναλλοίωτος σε ορθομοναδιαίο μετασχηματισμό ομοιότητας (unitarily similar) με έναν πίνακα του οποίου όλα τα διαγώνια στοιχεία είναι ίσα (και ως εκ τούτου ίσα με $\frac{1}{n} tr\mathrm{A}$). Έτσι, χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$C = [c_{ij}] \text{ με } c_{11} = c_{22} = \cdots = c_{nn} = 0.$$

Επιλέγοντας τον πίνακα $\mathrm{X} = diag(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ έτσι ώστε τα στοιχεία του $x_1, x_2, \ldots, x_n$ να είναι ανά ζεύγη διαφορετικοί, αλλά αυθαίρετοι, μιγαδικοί αριθμοί. Έχοντας έναν κατάλληλα επιλεγμένο πίνακα X και έναν δοσμένο πίνακα C η εξίσωση $\mathrm{XY}-\mathrm{YX}=C,$ γίνεται μια γραμμική εξίσωση πίνακα που έχει μια απλή λύση για κάποιον πίνακα Y. Εάν $\mathrm{Y}=[y_{ij}]$, τότε $\mathrm{XY}-\mathrm{YX}=[(x_i-x_j)y_{ij}]$.

Οπότε για

$$y_{ij}=\begin{cases}\dfrac{c_{ij}}{x_i-x_j} & \text{εαν } i\neq j\\ \alpha\upsilon\theta\alpha\acute{\iota}\rho\varepsilon\tau o & \text{εαν } i=j\end{cases},$$

δίνεται μια λύση εφόσον $x_i\neq x_j$, όταν $i\neq j$ και $c_{ii}=0$ για $i=1,\ldots,n.$ □

Τώρα θα εξετασθεί το πρόβλημα χαρακτηρισμού του πολλαπλασιαστικού αντιμεταθέτη. Όπως και στην περίπτωση των προσθετικών αντιμεταθετών, θα διαπιστώσουμε ότι κάθε πίνακας στον διανυσματικό χώρο M_n που ικανοποιεί την προφανή απαραίτητη συνθήκη είναι ένας πολλαπλασιαστικός αντιμεταθέτης, αλλά πρώτα κάνουμε κάποιες χρήσιμες παρατηρήσεις ευρύτερης φύσης.

Λήμμα 4.1 Υποθέτοντας ότι ο πίνακας $\mathrm{A}\in M_n$ δεν είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο (δηλαδή γινόμενο με αριθμό) μοναδιαίου πίνακα (scalar matrix) και έστω $\alpha\in\mathbf{C}$ το οποίο και δίνεται. Τότε υπάρχει ένας πίνακας όμοιος του A που έχει το στοιχείο α στη θέση 1,1 και τουλάχιστον ένα μη μηδενικό στοιχείο κάτω από τη διαγώνια πρώτη του στήλη.

Θεώρημα 4.2 Έστω πίνακας $\mathrm{A}\in M_n$ και υποθέτουμε ότι $rank\mathrm{A}=k\leq n$. Εάν $k=n,$ θεωρούμε ότι ο πίνακας A δεν είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο μοναδιαίου πίνακα. Έστω $b_1,b_2,\ldots,b_n$ και $c_1,c_2,\ldots,c_n$ να είναι μιγαδικοί αριθμοί, ακριβώς $n-k$ από τους οποίους να είναι μηδέν. Εάν $k=n$, θεωρούμε ότι $b_1b_2\cdots b_nc_1c_2\cdots c_n=\det\mathrm{A}$. Τότε υπάρχει ένας πίνακας $\mathrm{B}\in M_n$ με ιδιοτιμές $b_1,b_2,\ldots,b_n$ και ένας πίνακας $C\in M_n$ με ιδιοτιμές $c_1,c_2,\ldots,c_n$ τέτοιοι ώστε να ισχύει

$$\mathrm{A} = \mathrm{B}C.$$

Απόδειξη

Έστω $k=0,$ τότε ο πίνακας $\mathrm{A}=0$ και $c_1, c_2, \ldots, c_n$ μπορεί να είναι διατεταγμένα έτσι ώστε $b_i c_{j_i} = 0,\ i = 1, \ldots, n$. Η επιλογή των πινάκων $\mathrm{B} = diag(b_1, \ldots, b_n)$ και $C = diag(c_{j_1}, \ldots, c_{j_n})$ επαληθεύει τον ισχυρισμό σε αυτήν την περίπτωση.

Υποθέτουμε τώρα ότι $k \geq 1$ και επίσης $b_1 c_1 \neq 0$ χωρίς βλάβη της γενικότητας προκειμένου να συμπληρωθεί η απόδειξη μέσω επαγωγής στο *n*. Η περίπτωση όπου $n=1$ είναι ξεκάθαρη ενώ η περίπτωση για $n=2$ προκύπτει με έναν απλό υπολογισμό. Καθώς και η υπόθεση και το συμπέρασμα του θεωρήματος είναι αναλλοίωτα σε ταυτόχρονους μετασχηματισμούς ομοιότητας μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο πίνακας Α έχει οποιαδήποτε μορφή που μπορεί να επιτευχθεί με μετασχηματισμό ομοιότητας. Επειδή ο πίνακας $\mathrm{A} = [\alpha_{ij}]$ δεν είναι ένα βαθμωτό πολλαπλάσιο μοναδιαίου πίνακα, χρησιμοποιώντας το λήμμα (2.1) μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\alpha_{11} = b_{11} c_{11}$ και ότι $[\alpha_{21}, \ldots, \alpha_{n1}]^{\mathrm{T}} \neq 0.$

Υποθέτουμε τώρα ότι $n \geq 3$ και ότι οι πίνακες Β και C είναι στην επιθυμητή παραγοντοποίηση $\mathrm{A} = \mathrm{B}C$ έχουν τη μορφή

$$\mathrm{B} = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ \mathrm{B}_{21} & \mathrm{B}_{22} \end{bmatrix} \quad \textit{και} \quad C = \begin{bmatrix} c_1 & C_{12} \\ 0 & C_{22} \end{bmatrix},$$

και διαμερίζουμε τον Α ανάλογα ως

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} b_1 c_1 & \mathrm{A}_{12} \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{22} \end{bmatrix}.$$

Εδώ ισχύει ότι $\mathrm{A}_{12}^{\mathrm{T}}, \mathrm{A}_{21}, \mathrm{B}_{21},\ C_{12}^{\mathrm{T}} \in \mathbf{C}^{n-1}$ και $\mathrm{A}_{22}, \mathrm{B}_{22}, C_{22} \in M_{n-1}$. Προκειμένου να υπάρχει λύση αυτής της μορφής πρέπει να έχουμε ότι

$C_{12} = \mathrm{A}_{12} / b_1$, $\mathrm{B}_{21} = \mathrm{A}_{21} / c_1$ και $\mathrm{A}_{22} = \mathrm{B}_{22} C_{22} + \mathrm{B}_{21} C_{12}$. Οι πίνακες B_{22} και C_{22} πρέπει να ικανοποιούν τη σχέση

$$\mathrm{B}_{22} C_{22} = \mathrm{A}_{22} - \mathrm{A}_{21} \mathrm{A}_{12} / b_1 c_1.$$

Εάν $\mathrm{A}_{22} - \mathrm{A}_{21} \mathrm{A}_{12} / b_1 c_1 \in M_{n-1}$ δεν είναι ένα μη μηδενικό βαθμωτό πολλαπλάσιο μοναδιαίου πίνακα, η επαγωγική υπόθεση μπορεί να εφαρμοστεί επειδή

$$\det(\mathrm{A}_{22} - \mathrm{A}_{21} \mathrm{A}_{12} / b_1 c_1) = (\det \mathrm{A}) / b_1 c_1$$

και

$$rank(\mathrm{A}_{22} - \mathrm{A}_{21} \mathrm{A}_{12} / b_1 c_1) = k - 1.$$

Αυτό θα εξασφάλιζε ότι οι πίνακες B_{22} και C_{22} με αντίστοιχα φάσματα $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ και $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$, η οποία φράση θα ολοκληρώσει την απόδειξη.

Αυτό αρκεί για να δειχθεί μέσω ομοιότητας ότι, για $n \geq 3$, μπορεί να υποθέσουμε ότι ο $\mathrm{A}_{22} - \mathrm{A}_{21} \mathrm{A}_{12} / b_1 c_1$ δεν είναι να μη μηδενικό βαθμωτό πολλαπλάσιο μοναδιαίου πίνακα. Στην περίπτωση υποβιβασμού βαθμού του πίνακα $k < n$, αυτό διασφαλίζεται από το γεγονός ότι $rank(\mathrm{A}_{22} - \mathrm{A}_{21} \mathrm{A}_{12} / b_1 c_1) = k - 1$. Έτσι υποθέτουμε ότι ο πίνακας Α είναι αντιστρέψιμος με $n \geq 3$ και $\mathrm{A}_{22} - \mathrm{A}_{21} \mathrm{A}_{12} / b_1 c_1 = \alpha \mathrm{I}$ για $0 \neq \alpha \in \mathbf{C}$. Εφόσον $rank \mathrm{A} > 2$, το αριθμητικό πεδίο (range) του πίνακα A_{22} περιέχει διανύσματα που δεν είναι πολλαπλάσια του πίνακα A_{21}. Έτσι μπορούμε να επιλέξουμε ένα διάνυσμα $w \in \mathbf{C}^{n-1}$ τέτοιο ώστε $w^{\mathrm{T}} \mathrm{A}_{21} = 0$ και $w^{\mathrm{T}} \mathrm{A}_{22} \neq 0$, και έστω

$$S \equiv \begin{bmatrix} 1 & w^{\mathrm{T}} \\ 0 & \mathrm{I} \end{bmatrix} \in M_n.$$

Τότε

$$S^{-1}\mathrm{A}S = \begin{bmatrix} b_1c_1 & \mathrm{A}_{12} + b_1c_1w^{\mathrm{T}} - w^{\mathrm{T}}\mathrm{A}_{22} \\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{22} + \mathrm{A}_{21}w^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}.$$

Τώρα υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}&(\mathrm{A}_{22} + \mathrm{A}_{21}w^{\mathrm{T}}) - \mathrm{A}_{21}(\mathrm{A}_{12} + b_1c_1w^{\mathrm{T}} - w^{\mathrm{T}}\mathrm{A}_{22}) / b_1c_1 \\ &\quad = \mathrm{A}_{22} - \mathrm{A}_{21}\mathrm{A}_{12} / b_1c_1 + \mathrm{A}_{21}w^{\mathrm{T}}\mathrm{A}_{22} / b_1c_1 \\ &\quad = \alpha\mathrm{I} + \mathrm{A}_{21}w^{\mathrm{T}}\mathrm{A}_{22} / b_1c_1.\end{aligned}$$

Εφόσον $\mathrm{A}_{21} \neq 0$ και $w^{\mathrm{T}}\mathrm{A}_{22} \neq 0,$ αυτός ο πίνακας είναι μια διαταραχή βαθμού 1 ενός βαθμωτού πολλαπλάσιου μοναδιαίου πίνακα και επομένως δεν είναι ένα βαθμωτό πολλαπλάσιο μοναδιαίου πίνακα. □

<u>Θεώρημα 4.3</u> Ένας πίνακας $\mathrm{A} \in M_n$ μπορεί να γραφεί ως $\mathrm{A} = \mathrm{XYX}^{-1}\mathrm{Y}^{-1}$ για κάποιους αντιστρέψιμους πίνακες $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in M_n$ εάν και μόνο αν

$$\det \mathrm{A} = 1.$$

<u>Απόδειξη</u>

Το ευθύ μέρος του θεωρήματος είναι προφανές. Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι $\det \mathrm{A} = 1.$ Εάν ο πίνακας Α δεν είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο μοναδιαίου πίνακα και έστω $b_1, b_2, \ldots, b_n$ να είναι μη μηδενικοί αριθμοί και έστω $c_i = b_i^{-1}$ για $i = 1, \ldots, n.$ Χρησιμοποιούμε το θεώρημα (4.2) για να γράψουμε τον πίνακα $\mathrm{A} = \mathrm{XZ},$ με $\sigma(\mathrm{X}) = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ και $\sigma(\mathrm{Z}) = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}.$ Ο πίνακας Ζ είναι όμοιος με τον πίνακα $\mathrm{X}^{-1},$ τέτοιος ώστε $\mathrm{Z} = \mathrm{YX}^{-1}\mathrm{Y}^{-1}$ για κάποιον αντιστρέψιμο πίνακα $\mathrm{Y} \in M_n.$ Οπότε προκύπτει ότι

$$\mathrm{A} = \mathrm{XZ} = \mathrm{XYX}^{-1}\mathrm{Y}^{-1},$$

το οποίο ήταν και αυτό που θέλαμε να δείξουμε. Εάν τώρα $\mathrm{A} = \alpha\mathrm{I}$ για κάποιο $\alpha \in \mathbf{C},$ τότε $\alpha^n = 1$ και παίρνουμε ότι $\mathrm{X} = diag(\alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^n)$ και

$Z = diag(1, \alpha, \alpha^2, ..., \alpha^{n-1})$. Επίσης ο πίνακας Z είναι όμοιος με τον πίνακα X^{-1} και η απόδειξη ολοκληρώνεται όπως πριν. □

Με την πάροδο των χρόνων έχουν γίνει πολλές εργασίες για τον χαρακτηρισμό των γραμμικών απεικονίσεων (στον διανυσματικό χώρο των πινάκων) που διατηρούν ένα δεδομένο χαρακτηριστικό ενός πίνακα όπως για παράδειγμα, την ορίζουσα, τις ιδιοτιμές, τον βαθμό, ή την κλάση ομοιότητας κ.α. Δύο κλασσικά παραδείγματα τέτοιων αποτελεσμάτων είναι ο χαρακτηρισμός της ορίζουσας και των αναλλοίωτων φασμάτων όπως αναφέρθηκε πρώτα το 1897 από τον Frobenius, που έδειξε ότι η γραμμική απεικόνιση $T: M_n \to M_n$ τέτοια ώστε $\det T(X) = c \det X$ για κάποια σταθερά $c \neq 0$ και για κάθε πίνακα $X \in M_n$, πρέπει να έχει τη μορφή $T(X) = AXB$ ή την μορφή $T(X) = AX^T B$ για όλους τους πίνακες $X \in M_n$, όπου $A, B \in M_n$ είναι καταλληλά φτιαγμένοι πίνακες τέτοιοι ώστε $\det AB = c.$ Από την άλλη μεριά εάν η γραμμική απεικόνιση $T(X)$ έχει πάντα ίδια φάσματα με τον πίνακα X, ο Frobenius έδειξε ότι, είτε $T(X) = SXS^{-1}$, ή $T(X) = SX^T S^{-1}$ για όλους τους πίνακες X, και κάποιον κατάλληλα φτιαγμένο αντιστρέψιμο πίνακα S.

Η σχέση που συνδέει τα αποτελέσματα του Frobenius και το γινόμενο Kronecker είναι εμφανής από το λήμμα (2.1). Σύμφωνα με το λήμμα (2.2) κάθε γραμμική απεικόνιση $T: M_n \to M_n$ μπορεί να απεικονίζεται από έναν πίνακα στο διανυσματικό χώρο M_{n^2}, αυτό σημαίνει ότι, υπάρχει ένας κατάλληλα φτιαγμένος πίνακας $K(T) = [K_{ij}] \in M_{n^2}$, όπου κάθε $K_{ij} \in M_n$, τέτοιος ώστε $vec T(X) = K(T) vec X$, για κάθε πίνακα $X \in M_n$. Από το λήμμα (2.1), η απεικόνιση $T(\bullet)$ έχει τη μορφή $T(X) = AXB$ εάν και μόνο αν ο πίνακας $K(T)$ έχει τη μορφή $K(T) = B^T \otimes A$, το οποίο σημαίνει ότι, όλα τα μπλοκ K_{ij} έχουν τη μορφή $K_{ij} = b_{ji} A$, όπου $B = [b_{ij}]$. Επομένως για να αποδείξουμε τα αποτελέσματα του Frobenius, ή παρόμοια αποτελέσματα για άλλους τύπους γραμμικών αναλλοίωτων, πρέπει να δείξουμε ότι συγκεκριμένες υποθέσεις για την γραμμική απεικόνιση T εξασφαλίζουν ότι ο πίνακας K(T) έχει ειδική δομή με βάση το γινόμενο Kronecker .Ένα δείγμα από αυτά τα αποτελέσματα για γραμμικά αναλλοίωτα δίνονται στα δύο τελευταία θεωρήματα της εργασίας (χωρίς αποδείξεις).

<u>Θεώρημα 4.4</u> Έστω η γραμμική απεικόνιση $\mathrm{T}: M_n \to M_n$. Τα υπόλοιπα είναι ισοδύναμα

a) Υπάρχει μια μη μηδενική σταθερά $c \in \mathbf{C}$ τέτοια ώστε $\det \mathrm{T}(\mathrm{X}) = c \det \mathrm{X}$ για όλους τους πίνακες $\mathrm{X} \in M_n$.
b) Υπάρχει μια μη μηδενική σταθερά $c \in \mathbf{C}$ τέτοια ώστε $\det \mathrm{T}(\mathrm{H}) = c \det \mathrm{H}$.
   για κάθε ερμιτιανό πίνακα $\mathrm{H} \in M_n$.
c) $rank \mathrm{T}(\mathrm{X}) = rank \mathrm{X}$ για όλους τους πίνακες $\mathrm{X} \in M_n$.
d) $rank \mathrm{T}(\mathrm{X}) = 1$ για όλους τους πίνακες $\mathrm{X} \in M_n$ με $rank \mathrm{X} = 1$.
e) $rank \mathrm{T}(\mathrm{X}) = n$ για όλους τους πίνακες $\mathrm{X} \in M_n$ με $rank \mathrm{X} = n$, που σημαίνει ότι η γραμμική απεικόνιση T(X) είναι αντιστρέψιμη οποτεδήποτε ο πίνακας X είναι αντιστρέψιμος.
f) Υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in M_n$ τέτοιοι ώστε είτε $\mathrm{T}(\mathrm{X}) = \mathrm{AXB}$ για όλους τους πίνακες $\mathrm{X} \in M_n$, ή $\mathrm{T}(\mathrm{X}) = \mathrm{AX}^{\mathrm{T}}\mathrm{B}$ για όλους τους πίνακες $\mathrm{X} \in M_n$.

<u>Θεώρημα 4.5</u> Έστω η γραμμική απεικόνιση $\mathrm{T}: M_n \to M_n$. Τα υπόλοιπα είναι ισοδύναμα

a) $\sigma(\mathrm{T}(\mathrm{X})) = \sigma(\mathrm{X})$ για κάθε πίνακα $\mathrm{X} \in M_n$, που σημαίνει ότι οι πίνακες X και η γραμμική απεικόνιση T(X) έχουν τα ίδια χαρακτηριστικά πολυώνυμα.

b) $\sigma(\mathrm{T(H)}) = \sigma(\mathrm{H})$ για κάθε ερμιτιανό πίνακα $\mathrm{H} \in M_n$, που σημαίνει ότι οι πίνακες Η και η γραμμική απεικόνιση Τ(Η) έχουν τα ίδια χαρακτηριστικά πολυώνυμα.

c) $\det \mathrm{T(X)} = \det \mathrm{X}$ και $tr\mathrm{T(X)} = tr\mathrm{X}$ για όλους τους πίνακες $\mathrm{X} \in M_n$.

d) Υπάρχει ένας αντιστρέψιμος πίνακας $S \in M_n$ τέτοιος ώστε είτε $\mathrm{T(X)} = S\mathrm{X}S^{-1}$ για όλους τους πίνακες $\mathrm{X} \in M_n$, ή $\mathrm{T(X)} = S\mathrm{X}^{\mathrm{T}}S^{-1}$ για όλους τους πίνακες $\mathrm{X} \in M_n$.

Βιβλιογραφία

1. B.J. Broxson, *The Kronecker Product*, Thesis, University of North Florida, 2006.
2. R.A. Horn and C.R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
3. R.A. Horn and C.R. Johnson, *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
4. R.A. Horn and C.R. Johnson, *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
5. A. Housholder, *The theory of Matrices in Numerical Analysis*, Blaisdel, New York, 1964.
6. C.R. Johnson, *Normality and the Numerical Range, Linear algebra and its Applications*, 15 (1976) 89-94.
7. G. Strang, *Linear algebra and its Applications by Harcourt Brace Jovanovich*, 1988.
8. Ν. Καδιανάκης και Σ. Καρανάσιος, *Γραμμική Άλγεβρα-Αναλυτική Γεωμετρία και Εφαρμογές*, Αθήνα, 2001.
9. Α. Καλαρίδη, *Συμμετρικές εξισώσεις της μορφής* $X + A^{*}\Phi(X)A = M$, Διπλωματική Εργασία, Τομέας Μαθηματικών Σ.Ε.Μ.Φ.Ε., Ε.Μ.Πολυτεχνείο, 2017.
10. Ι. Μαρουλάς, *Γραμμική Άλγεβρα*, Αθήνα, 2000.
11. Ι. Μαρουλάς, *Σημειώσεις Ανάλυσης Πινάκων*, Αθήνα, 2005.
12. Μ. Ροκίδης, *Κανονικότητα Πινάκων και Συγγενείς Αποστάσεις*, Μεταπτυχιακή Εργασία, Τομέας Μαθηματικών Σ.Ε.Μ.Φ.Ε., Ε.Μ.Πολυτεχνείο, 2011.
13. Α. Φελούρης, *Γραμμική Άλγεβρα και Αναλυτική Γεωμετρία*, Αθήνα, 2009.
14. Π. Ψαρράκος, *Θέματα Ανάλυσης Πινάκων*, Αθήνα, 2015.