ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΟΠΤΟΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ, LASER ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ ΤΟΥΣ

«Στατιστική ανάλυση ανακτηθέντων φασμάτων φθορισμού καταστρεπτικών βιολογικών επικαθίσεων σε επιφάνειες μνημείων με χρήση Επαγόμενου Φθορισμού με LASER (LIF)»

Διπλωματική Εργασία

της

Χριστίνας Γιαννακουδάκη
Α.Μ. ge15053

Επιβλέπων: Δρ. Αλέξανδρος Παπαγιάννης, Καθηγητής

Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή:

Α. Παπαγιάννης	Χ. Καρώνη	Β.Παπανικολάου
Καθηγητής ΣΕΜΦΕ	Καθηγήτρια ΣΕΜΦΕ	Καθηγητής ΣΕΜΦΕ

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2021

ĦŞÁZŁ ÒÁŒÒÖŁ ĵÁZ ôĻàŒŒŸ ŋŐĻ ŘŁĘŒŸ*
ŋŐĻ ŤŞÁŒ ŐòÖ¢ÞØ ĵÁZ ôĻĵØÒŸ*

.....

Χριστίνα Γιανναkουδάκη

© (2021) Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο. All rights Reserved. Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς το συγγραφέα. Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σ'αυτό το έγγραφο εκφράζουν το συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευτεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Ευχαριστίες

Η εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας, η οποία υλοποιήθηκε κατά το ακαδημαϊκό έτος 2020-2021 στη Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, ήταν εφικτή εξαιτίας της συμβολής πολλών και σημαντικών ανθρώπων. Για τον λόγο αυτό θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες σε καθέναν από αυτούς.

Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Ιωάννη Θυρή από την εταιρεία Raymetrics, ο οποίος τόσο με τις θεωρητικές όσο και με τις πρακτικές γνώσεις του με βοήθησε σε κάθε τομέα αυτής της εργασίας. Τόσο το κείμενο όσο και η ανάκτηση και η ανάλυση των δεδομένων στηρίζονται στις συμβουλές και στις διορθώσεις του, καθώς επίσης και στις πολλές συζητήσεις σχετικά με την προσέγγιση του αντικειμένου κατά την διάρκεια της εκπόνησης.

Στη συνέχεια, θα ήθελα να ευχαριστήσω την Δρ Ιωάννα Πυρρή από το Τμήμα Βιολογίας του Ε.Κ.Π.Α, η οποία πραγματοποίησε την μελέτη των δειγμάτων από την βιολογική σκοπιά. Η συμβολή της με τις γνώσεις και τις συμβουλές της σε κάθε στάδιο αυτής τη διπλωματικής ήταν καθοριστική για την εξέλιξη της έρευνας. Επιπλέον, οι ευχαριστίες μου επεκτείνονται και για κάθε άλλη βιολογική μελέτη την οποία πραγματοποίησε για εμένα μέχρι να καταλήξω τελικά στο συγκεκριμένο θέμα που μελέτησα.

Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω την Καθηγήτρια Δρ. Χρυσηίς Καρώνη, η οποία με καθοδήγησε συστηματικά στον άγνωστο για εμένα επιστημονικό τομέα της Ανάλυσης Δεδομένων. Τα αποτελέσματα αυτής της εργασίας στηρίζονται σε βασική βιβλιογραφία καθώς και σε συμβουλές με τα οποία με τροφοδοτούσε κατά την διάρκεια της εκπόνησης.

Έπειτα, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Στέφανο Ρίτσαρντσον, διδακτορικό φοιτητή του Πανεπιστημίου του Southampton, για τις επιστημονικές συμβουλές του κατά την διάρκεια της μελέτης, όπως επίσης και για την γνωριμία που μου παρείχε με τον τομέα των LIDAR. Επιπλέον, θέλω να ευχαριστήσω την Παναγιώτα-Ισμήνη Χάρκεν-Αλεξίου, απόφοιτη της ΣΕΜΦΕ, η οποία εκτός από φίλη μου, αποτέλεσε μια πολύτιμη βοήθεια στην στατιστική επεξεργασία των δεδομένων.

Δεν θα μπορούσα να παραλείψω του ανθρώπους που με στήριξαν ψυχολογικά κατά την διάρκεια αυτού του ταξιδιού. Αρχικά, ευχαριστώ τον Αντώνη Τζωρτζόπουλο για την στήριξη και την βοήθεια σε ολόκληρο το χρονικό διάστημα αυτής της εργασίας. Ευχαριστώ την οικογένεια μου, τους φίλους μου Μαριάνα, Χριστιάνα, Παναγιώτη, Παναγιώτα, Έλενα, Κατερίνα και Δέσποινα που χωρίς την βοήθεια τους, δεν θα ήταν τίποτα εφικτό. Επίσης ευχαριστώ πολύ την κυρία Αντωνίου και την ομάδα για την στήριξή τους στις δύσκολες στιγμές.

Για το τέλος κράτησα τις πιο θερμές και εγκάρδιες ευχαριστίες για τον επιβλέποντα Καθηγητή μου, Δρ. Αλέξανδρο Παπαγιάννη. Η εμπιστοσύνη που μου έδειξε στα τρία χρόνια της γνωριμίας μας, η δυνατότητα να υλοποιήσω την κάθε επιστημονική ιδέα που είχα, η αμέριστη στήριξή του σε κάθε εμπόδιο που ανέκυπτε και οι συμβουλές του σε πολλαπλά θέματα που με απασχολούσαν, με διαμόρφωσε στον άνθρωπο που είμαι σήμερα. Επιπλέον, τον ευχαριστώ για τις ευκαιρίες που μου έδωσε ώστε να εξερευνήσω τον υπέροχο κόσμο των LASER και των εφαρμογών τους.

–ª¶®ªsÁ±ª²¦

–ª¶¤•¬½¬ JY

"CTUSBDU Y

•ª»¡•¦®´ ‹®¸¦£•£®¯¡ ˜¹´®sª¤¦
/-#$, ÿ# + - ,
ç '.)&!ê '#$, ü+ê , ü ! * + -!, ü$.#')ç) , & ù !
ü+ê 'SBODL $POEPO +!.#$6 *6ç é+) ü*)++60!-!,
+ $.!+#-.#$ é! ü*)++60!-!,
- . +#$ . .+)*
é)+#-&6,
ÿ# -/-.!&#$ ÿ# /-! $ # -0)+#-&6,
ÿ# ç+ -! õ+ ') #.#-.#$, !+)')&# ,
7*)# $ # #6.!. , *)-.+8& .),
+#ç)'.#$) +)'. , ÿ# ç+ -!,
ý#)) #$) +)'. , ÿ# ç+ -!, + '#-&)
ý#)) #$) +)'. , ÿ# ç+ -!, #$+))+ '#-&)

•ª»¡•¦®´ '¦r¬±¦¹®¯Á šµÁp¦r¶´
. .#-.#$ & é)), ' /-!, 1SJODJQBM $PNQPOFOU "OBMZTJT 1$"
ü' /-! * ' $ - # #)/- , .#& , 4JOHVMBS 7BMVF %FDPNQPTJU
ü' /-! & é6)/ 1SJODJQBM $PNQPOFOU "OBMZTJT 1$"
+ +ê#$ &)*) !-! $. /-. ,
þ+ &&#$ ÿ# $+#.#$-%" /-!
8+!& . (#'6&!-!, .)/ #BZFT
-%" & ê+ -! &# , & . ç !. , *+6ç 2!,
-%" - *) /& . ç !.)& '
þ & .+#$ +&!' -%"
ü*)).#$6.!.)'.)/

•ª»¡•¦®´ 'ª•¢¹¬ ˆ®´©®¦p¶•±¢²•² ‹µ®»¦²ª®Ã² ±ª ¹¬² ™ªs²®¯£ -*'
ý#ç #) + 0#$ ü' -$6*!-!
+# + 0 #+ & .), $ # #+ & .#$ ÿ# . (!
ý#)) #$ $ # -& .#$ ü' /-! ÿ # & . ' .!,
$"--04 $&3
$"--04 ."3 ü ü ü
$"--04 ."3 ü ü ü ü

•ª»¡•¦®´ ˜¹¦¹®¸¹®¯£ ‹µª³ª¶£¦¸¤¦ ›¦¸±¦¹®¯Ã² Šª©´±¢²•²
$"--04 $&3
$"--04 ."3 ü ü ü
$"--04 ."3 ü ü ü ü
ý#)) #$. ')& - '
-& .#$. ')& - '
/&* + -& .

‹µ¤•´£´·

ˆ®p•®´£¶¦»¤¦

" –¦¶¡¶¹¬±¦ ˜¹´®s ª¤¦ ˜¹¦¹®¸¹®¯£· –´•º±ª¹¦p•¬¹Ã² Š ª©´±¢²•²

‘¤¸ ¹¦ ‹®¯Á²•²

Óúòþðòöî÷ë ÷î îúüùë ùüþöî÷ ú þü öî÷ ú üþùîøñòíñôÿ<
Øøî ö÷ë B ÷îö ÷ïîú üùô îúö÷ë C ýòþöðþî ë ü ñ úîùö÷ü ü ùüþìü
ùò éïî ô òú ÿ ôøò÷ þüúìü ù úî ùò ôú îþ ë 'SBODL $POEPO áü ùë
ñò ùRe î ûéúò îö ÷î é ôú ñöêðòþ ô ÷îõ ÿ î ôøò÷ þ úöî ñöòðòìþüú îö ò
þü öî÷é<
á ýö÷ é ùî îýüþþ ô ôÿ ü üýüìü îú ö÷î üý þìóòö öÿ òúòþðòöî÷êÿ îýü
ñüúô ö÷ ú òýöýêñ ú ùöî ùüþöî÷ëÿ ôøò÷>þüúöî÷ëÿ ÷î é î ôÿ<
Õøò÷ þüúöî÷ë ý ÷ú ô î ÷î é ùë÷üÿ ü ùòðéøü éûüúî ú ùüþì ú ø þü
C îú ì üö î î ÷îö ü ñöéú ùî þüýëÿ ùò éïî ôÿ ÷éõò î üú ñî÷ øöü ýü
ú ñ ü ùüþì ú>C <
ãé ùî î îýüþþ ô ôÿ ôÿ ø þü øøôÿ î îþö òþé ÷îö ôÿ ø þü øøôÿ C
ù úî ùò ýþü üùüì ô 5%%'5 5JNF %FQFOEFOU %FOTJUZ 'VODUJP
÷òú ùî þô ðþîùùë ùò ýî øòÿ ÷îö ò ñöéø ùî îöõî>ú øôÿ ÷ ÷÷öúô ðþîùùë
Òöéðþîùùî +BC>MPOTLJ<
Þòöþîùî ö÷ ãé ùî Ïýüþþ ô ôÿ ÷îö ãõüþö ùü >ôÿ äø þü øøôÿ î<
Ïøøôøòýö÷éø ô î ùé ú îýüþþ ô ôÿ ÷îö õüþö ùü òõòþùü÷þî ìî ýòþö
+)07$!
/ ')ç $. +#
ü+#é&6, # 8'ê +)0/$8' +#-. + $ # $/ ')ç $.!+ ' (# *)/ '#ê' 7é
- &'!& *) #.#-.#$, $!+)')&# , -.!' /+7. +! * +#)ê .!, -))/ - (#
0)+ .#$ /*)-.+8& . <
) ýþüêøò ô ÷îö ô ÷î éøôûô ú þ ý ú ò>ýì ú ùúôùòì ú
Ñò ùò þö÷ë ÷îö ùîõôùî ö÷ë ýòþöðþî ë ôÿ ýüýüìô ôÿ ñòñüùêú ú Úò é
ôÿ ýüýüìô ôÿ î ñòñüùêúî ê ü ú ùê ô öùë ü ÷îö ýö÷ë îý ÷øö ô ì ô
Ñò ùò þö÷ë Ïúîýîþé î ô îû ú ú QSJODJQBM DPNQPOFOUT IUUQT X
VDBUJPO DZCFSMFDUVSF E E QEG
à ôùî ö÷ë îúîýîþé î ô òûîð ðëÿ üö òì ú ôÿ 1$" ùê ôÿ îúéø ôÿ ü ý
ýüýüöôùêú ú ñòñüùêú ú ùò 47%
Ïýòö÷ úö ô úîþ ë ò ú úñò ôÿ üö üýüìòÿ ýþü ñöüþìóü ú ü ÿ þòöÿ ïî
ò þò ôÿ ôÿ îý î ôÿ ùò îû ú ýü ú ø ú òøé ö ô îý î ô ùò îû ú
ôùòì ú ú éñ ú îþö òþé ùêðö ô îý î ô ùò îû ú éñ ú ñöé
÷êú þü ùê ô öùë îý î ôÿ ùò îû ø ú ú ôùòì ú> ú éñ ú ñòûöé
Ñþî ö÷ë îýòö÷ úô ô ôÿ öòþîþ ö÷ëÿ üùîñüýüìô ôÿ ÷î é éñòÿ îúéøüðî
úñò ôÿ ú ýü ú ø ú ò ÷éõò ïëùî ôÿ îûöú ùô ôÿ<
Þþüïüøêÿ ñòñüùêú ú ùò ùê ü N ýü îúë÷ü ú ò1 ò2 ÷îëø é òöÿ ùò ùê ü ÿ
÷îö ýþüïüøêÿ ùê 2ú÷îö3 îú ì üö î ôú ïêø ö ô ÷î>ò õ ú ô <
Ýý ö÷ë ýòþöðþî ë ëùî üÿ)ZQFSTQFDUSBM 'MVPSFTDFODF -*%"3 <
àôùòöî÷ë Þòöþîùî ö÷ë Òöé îûô -*'
ê!& .#$6 ê +.) + 0!-!, # & . ' # 2 #, . ' 0 -& . ' *+ & .)*)# é!$ '
-.#, $)+/0 , . ')+é) ' ' & $. !) ç & ÿY $. & $), $ # ÿZ $ éL72),
- $ é &
à ôùî ö÷ á ýö÷ëÿ Òöé îûôÿ 'MVPSFTDFODF -J%"3 îõòþü ü <
Ðþ ü ðêúü ÿ 5PSUVMB
ð× úô ýüþì ú ù ÷ë ú ÷îö ýþé öúî ìðùî î ýü ýüñòö÷ú ü ú ôú ýîþûô
$"--04 $&3
Þòþöü êÿ îúî üþéÿ î ùé ú õüþö ùü ñòìðùî üÿ $"--04 $&3

Õ üùéñî ùôñêú ú î ùé ú îúî üþéÿ ü ñòìðùî üÿ $"--04 $&3 îú ö üö
êú üúô ïöüøüðö÷ë òýöïéþ ú ô îý ü î þü ü ÿ ùö÷þüüþðîúö ùü ÿ
Õ üùéñî êúî ú î ùé ú îúî üþéÿ ü ñòìðùî üÿ $"--04 $&3 îú ö üö òì
êú üúô ïöüøüðö÷ë òýöïéþ ú ô îý ü î þü ü ÿ ùö÷þüüþðîúö ùü ÿ ý
îý ùö÷þüüþðîúö ùü ÿ ùò ò þ é ùî ôú ýòþöü ë ON ý ÿ ý þöî ù
Õ üùéñî ñ ü ú î ùé ú îúî üþéÿ ü ñòìðùî üÿ $"--04 $&3 îú ö üö òì
î õòúë ïöüøüðö÷ë òýöïéþ ú ô îý ü î þü ü ÿ ùö÷þüüþðîúö ùü ÿ
Ðöüøüðö÷ë ñòöðùî üøô ìî ôú òýö éúòöî ü ñòìðùî üÿ $"--04 ."3 áî
÷ì þöúî ìðùî î òìúîö ý þöî ù ÷ë ú üö ýþé öúòÿ ÷îö ÷ì þöúòÿ ýòþöü ê
ýîþûô ø þü ÷ ú ÷îö ýöõîú ÿ ÷ îúüïî÷ ôþì ú ÷îö üö ùî þòÿ îýüö÷ìòÿ ýü
îúéý ûô ùî þ ú ùòþö òùî ö÷ ú ù ÷ë ú
Þòþöü êÿ îúî üþéÿ î ùé ú õüþö ùü ñòìðùî üÿ $"--04 ."3 ØÏÖÓáÕ
ÓÞ×ãÏÛÓ×Ï
Õ üùéñî ùôñêú ú î ùé ú îúî üþéÿ ü ñòìðùî üÿ $"--04 ."3 ØÏÖÓáÕ
ÓÞ×ãÏÛÓ×Ï
Õ üùéñî êúî ú î ùé ú îúî üþéÿ ü ñòìðùî üÿ $"--04 ."3 ØÏÖÓáÕ
ÓÞ×ãÏÛÓ×Ï
Õ üùéñî ñ ü ú î ùé ú îúî üþéÿ ü ñòìðùî üÿ $"--04 ."3 ØÏÖÓáÕ
ÓÞ×ãÏÛÓ×Ï
Õ üùéñî þìî ú î ùé ú îúî üþéÿ ü ñòìðùî üÿ $"--04 ."3 ØÏÖÓáÕ
ÓÞ×ãÏÛÓ×Ï
Õ üùéñî ê òþî ú î ùé ú îúî üþéÿ ü ñòìðùî üÿ $"--04 ."3 ØÏÖÓáÕ
ÓÞ×ãÏÛÓ×Ï
Þòþöü êÿ îúî üþéÿ î ùé ú õüþö ùü ñòìðùî üÿ $"--04 ."3 ÞÙÏá×Ï
ÓÞ×ãÏÛÓ×Ï
Õ üùéñî ùôñêú ú î ùé ú îúî üþéÿ ü ñòìðùî üÿ $"--04 ."3 ÞÙÏá×Ï
ÓÞ×ãÏÛÓ×Ï
Õ üùéñî êúî ú î ùé ú îúî üþéÿ ü ñòìðùî üÿ $"--04 ."3 ÞÙÏá×Ï
ÓÞ×ãÏÛÓ×Ï
Õ üùéñî ñ ü ú î ùé ú îúî üþéÿ ü ñòìðùî üÿ $"--04 ."3 ÞÙÏá×Ï
ÓÞ×ãÏÛÓ×Ï
Õ üùéñî þìî ú î ùé ú îúî üþéÿ ü ñòìðùî üÿ $"--04 ."3 ÞÙÏá×Ï
ÓÞ×ãÏÛÓ×Ï
)& , . ' 0 -& . ' ' 0)+ , .)/ & .), $"--04 ."3 ü ü
ü ü -7&0 ' & .!' 0 -& .#$)&)#6.!.
Òöîðþîùùî ßüëÿ à î ö ö÷ëÿ Óýòûòþðî ìîÿ Òòñüùêú ú
+/&') + 0 & . ./*)*)#!& ' ' $ # &! ./*)*)#!& ' ')& ' '
áî üþ ìî ú ÷ þö ú úö ú î üýüìî ýþü÷ ý ü ú îý üú ýìúî÷î ñòñüùêú
ñòìðùî üÿ $"--04 $&3
4DPSF QMPUT . ' * + .!+ - ' *)/ '.#-.)#ê)7' -.) & $"--04 $&3
ê+ & .#$ $ & $ '.#-.)#ê -.!' * +# $.#$6.!. ê +)07 !, .)/ -!&)/
& .+!-!, ü*6 .) ')#ê.6ê+ &) *+ -#') *+), .) -$)/+6ê+ &) ! .#& .)/
))$!+8& .), .!, -/' +.!-!, .!, '. -!, 0é)+#-&)7 -.) 7+), ON
/(' . #
Òòúñþüñöéðþîùùî ýòþöü ú îúî üþéÿ ñòìðùî üÿ $"--04 $&3 Ýö ýòþöü
îú ö üö ü ú ü ÿ îþöõùü ÿ
à ð÷þö ô Øøé ò ú ãî ùé ú Ïúî üþéÿ ùò öÿ Þþüïøòý ùòúòÿ Øøé òöÿ ãî
äîþ üðþé ô ôÿ Òòìðùî üÿ $"--04 $&3

$POGVTJPO .BUSJY ùò îû ýþüïøòý ùòúôÿ ÷îö ô ò ñüýîþî ôþü ùòúôÿ
î ùé ú ôÿ îþ üðþé ô ôÿ ü $"--04 $&3
4DPSF 1MPUT)& ' ' & .), $"--04 $&3 -.)*) ! ê+ & .#$ $ &
'.#-.)#ê -.#, $ - #, *)/ *+)ç 0é!$ ' *6 .)' 6+#é&) .!, -%" .#,
')/, * +)/-# . # ! -/' +.!-! */$'6.!. , .!, $ é $ -!, -7&0 ' & .#,
.#& , .)/ DPNQPOFOU .!, '. -.)#ê!, -. !,
Øþ ùúüðþé ôùî ýüýüöôùêú ú ñòñüùêú ú ü ñòìðùî üÿ $"--04 ."3 ØÏÖ
ÓÞ×ãÏÛÓ×Ï
áî üþ ìî ú ÷ þö ú úö ú î üýüìî ýþü÷ ý ü ú îý üú ýìúî÷î ñòñüùêú
ñòìðùî üÿ $"--04 ."3 ØÏÖÓáÕ ÓÞ×ãÏÛÓ×Ï
à ð÷þö ô Øøé ò ú ãî ùé ú Ïúî üþéÿ ùò öÿ Þþüïøòý ùòúòÿ Øøé òöÿ ãî
äîþ üðþé ô ôÿ Òòìðùî üÿ $"--04 ."3 ØÏÖÓáÕ ÓÞ×ãÏÛÓ×Ï
$POGVTJPO .BUSJY ùò îû ýþüïøòý ùòúôÿ ÷îö ýþîðùî ö÷ëÿ ÷øé ôÿ ú
îúî üþéÿ ü $"--04 ."3 ØÏÖÓáÕ ÓÞ×ãÏÛÓ×Ï ùò þë ô ôÿ ùòõ ñü
-FBWF 0OF 0VU $SPTT 7BMJEBUJPO -00
4DPSF 1MPUT)& ' ' & .), $"--04 ."3 ü ü ü -.
)*) ! ê+ & .#$ $ & $ '.#-.)#ê -.#, $ - #, *)/ *+)ç 0é!$ ' *6 .)'
6+#é&) .!, -%" .#, # ')/, * +)/-# . # ! -/' +.!-! */$'6.!. , .!,
$ é $ -!, -7&0 ' & .#, .#& , .)/ DPNQPOFOU .!, '. -.)#ê!, -. !,
Øþ ùú ðþî ôùî ýüýüöôùêú ú ñòñüùêú ú ü ñòìðùî üÿ $"--04 ."3 ÞÙ
ÓÞ×ãÏÛÓ×Ï
áî üþ ìî ú ÷ þö ú úö ú î üýüìî ýþü÷ ý ü ú îý üú ýìúî÷î ñòñüùêú
ñòìðùî üÿ $"--04 ."3 ÞÙÏá×Ï ÓÞ×ãÏÛÓ×Ï
7 $+#-! - ' -& . ' ü' 0)+ , & .#, +)ç *6& ' , - #, -& . '
+.) + 0!-!, ÿ & .), $"--04 ."3 ü ü ü ü
$POGVTJPO .BUSJY ùò îû ýþüïøòý ùòúôÿ ÷îö ýþîðùî ö÷ëÿ ÷øé ôÿ ú
îúî üþéÿ ü $"--04 ."3 ÞÙÏá×Ï ÓÞ×ãÏÛÓ×Ï ùò þë ô ôÿ ùòõ ñü
-FBWF 0OF 0VU $SPTT 7BMJEBUJPO -00
4DPSF 1MPUT)& ' ' & .), $"--04 ."3 ü ü ü ü -.
)*) ! ê+ & .#$ $ & $ '.#-.)#ê -.#, $ - #, *)/ *+)ç 0é!$ ' *6 .)'
6+#é&) .!, -%" .#, # ')/, * +)/-# . # ! -/' +.!-! */$'6.!. , .!,
$ é $ -!, -7&0 ' & .#, .#& , .)/ DPNQPOFOU .!, '. -.)#ê!, -. !,
à ð÷þö ô Øøé ò ú ãî ùé ú Ïúî üþéÿ ùò öÿ Þþüïøòý ùòúòÿ Øøé òöÿ ãî
äîþ üðþé ô ôÿ Òòìðùî üÿ $"--04 ."3 ÞÙÏá×Ï ÓÞ×ãÏÛÓ×Ï ãî ùî ö÷ë
Øî îúüùë Øøé ò ú

‘ ¤ ¸ ¹ ¦ ¡ — ® ² ¡ ¯ • ²

!& '.#$) .&)-0 #+#$) +7*)#)# 0/-#$, $ #)# . ê'!. , *! , .)/, $ é8,
* + -! .)/, -. &'!& *) #.#-.#$, $!+)')&# ,<
+#)ê , ü' 0)+ , .+ - ' $"--04 $&3 $ # '. -.)#ê!)*.#$ * +# + 0
+#)ê , ü' 0)+ , .+ - ' $"--04 ."3 ü ü ü $ #
'. -.)#ê!)*.#$ * +# + 0
+#)ê , ü' 0)+ , .+ - ' $"--04 ."3 ü ü ü ü $ #
'. -.)#ê!)*.#$ * +# + 0
* (!)7& '! # -*)+ # $ é DPNQPOFOU # ./*)*)#!& ' $ # &! ./*)*)#
)& '
' $, .#&8' TDPSFT . ' QSJODJQBM DPNQPOFOUT -.#, * +#)ê , '
& .), $"--04 $&3
+#)ê , ü' 0)+ , & .), $"--04 $&3 +#é&6, $ -!, -.!')*) ' $ #
! $ é * +#)ê $ é8, $ # * +# + 0 . ' # #). . ' .!, $ -!,
+#)ê , ' 0)+ ,)# '. -.)#ê)# 6)# & #-.!, '. -!, 0é)+#-&)7 -. 7+!
ON ON $ # ON ON $ # ! # 0)+ .)/, $ é8, $ # ! $ -!
-.!')*) ' $)/'
ü$+ ç # / #-é!- $ # ü' $!-! *+)ç 2 ' # $ é $ -! & ç -! . '&)'.)
*+6ç 2!, .!, -%" # .) & $"--04 $&3
+#)ê , ü' 0)+ , & .), $"--04 ."3 ü ü ü +#é&6,
$ -!, -.!')*) ' $ # ! $ é * +#)ê $ é8, $ # * +# + 0 . ' # #). . ' .!,
$ -!,
ü$+ ç # / #-é!- $ # ü' $!-! *+)ç 2 ' # $ é $ -! & ç -! .P &)'.)
*+6ç 2!, .!, -%" # .) & $"--04 ."3 ü ü ü
+#)ê , ü' 0)+ , & .), $"--04 ."3 ü ü ü ü +#é&6,
$ -!, -.!')*) ' $ # ! $ é * +#)ê $ é8, $ # * +# + 0 . ' # #). . ' .!,
$ -!,
ü$+ ç # / #-é!- $ # ü' $!-! *+)ç 2 ' # $ é $ -! & ç -! . '&)'.)
*+6ç 2!, .!, -%" # .) & $"--04 ."3 ü ü ü ü
+#)ê , ü' 0)+ , & .), $"--04 ."3 ü ü ü ü & ç -!
.!' 0 -& .#$.)/,)&)#6.!. +#é&6, $ -!, -.!')*) ' $ # ! $ é * +#)ê
$ é8, $ # * +# + 0 . ' # #). . ' .!, $ -!,
ü$+ ç # / #-é!- $ # ü' $!-! *+)ç 2 ' # $ é $ -! & ç -! . '&)'.)
*+6ç 2!, .!, -%" # .) & $"--04 ."3 ü ü ü ü

* +)7- #* & .#$ + - ê # , ç -#$6 '.#$ & ') & .!, .!' 0 +&) -. .
& é6 ' * (+ - ,)& ' ' * ' -.!' 0 -& .)-$)* é)+#-&)7 & -BTFS 7+#)
.!, -/ $ $+#& '!, & .!, *). - ! ' $.!-! 0 -& . ' 0é)+#-&)7 & ê+ -! .!, 5 é
* 8& ')/ é)+#-&)7 & -BTFS -*' $ #-.!-/' ê # ! * (+ - .)/,& $. !)/,
&)/, *6 .)' $) .!, *#-. &!, . 'ÿ)& ' '

*+) ' 0 +6& ' 0 -& . *+) +ê)'. # *6 ç#)) #$ *#ç +/& ' , *#0 ' # ,&'!&
$!+)')&# , -. .#-.#$.)/, * (+ - - -/' / -&6 & $. ! ! ç#)) #$ * !+)
-.)ê 7 #-.)' # ê +#-&6 .!, ç#)) #$, .)/, *#ç +/'-!,- (ê +#-. ,)& , ç -!
)*.#$ $.!)+#)*) !-! .!, *#ç +/'-!, ! + - .)/-/'.!+!. +ê #). . ' *) -& 7
.!' ' $!*) * , # & .) !2 , *6 .) -7')) .)/ &'!&)/) ê+ -! .)/'MVPSFTDF
%"3 ! .!, * $. -!, .!, -*'-.!'.! *#-$6*!-! ' #.!' /' .6.!. -.)/,-/'.!+!. ,'
ê +.) + 0 -)/' .) &'!&) $ #')&)*)# -)/' .#, *#ç +7'- #, .)/ 8-. ' .#, '.#&
*#) *). -& .#$

.) $ 0 #) ' 7 . #.) 0/-#$6 /*6ç é+) .!, ! * + -!, .!, $.#')ç) , & .!' 7
+ & .))# . #! $. ! ! &ç é/'-! -.) 0 #'6& ') .)/ é)+#-&)7 *#*)' * (!
ç -#$) * +)'. , # ç+ -!, . ' *#0 ' #8'. ' &'!& ' $ é8, * -!, $ #. *). -&
*#0 +)/'

.) $ 0 #) * +)/-# . # ' /.#$.) & é!& .#$6 /*6ç é+) . ' -. .#-.#$8' & é
ê+!-#&)*)# é!$ ' # #$6. + ' 7)'. #)# 6+#é&)#.!, 1SJODJQBM $PNQP
.!,)JFSBSDIJDBM "HHMPNFSBUJWF $MVTUFSJOH)"$ $ # .!, -JOFBS %.
#)' * +# + 0 . # $ # &# & é)), (#) 6 !-!, &)'. '*+6ç 2!, $ -!, ! & é
0OF 0VU $SPTT 7BMJEBUJPO -00

.) $ 0 #) $. + 0 . #! ç -#$ ç#ç #) + 0#$ ' -$6*!-! * ' -.) -/ $ $+#& ')
$ #* +)/-# . #! * #+ & .#$ # . (! !)*) ê+!-#&)*)# é!$ * -!, * +)/-#
. ' 0 -& . ' 0é)+#-&)7 & ç -! .!' ç#)) #$ * !+)0)+ .)/ -!&)/ & .+!-!, *
+ & .))# . #!)&)*) !-!)+#-& ' 'ê + $.!+#-.#$8'0 -& . '- $. ! ,)&
ü/. , é *). -)/'.!' ç -! # .!' !&#)/+ '6, &)'.)/*+6ç 2!, .)/.7*)/ *#ç +
- $ é -!&) & .+!-!,

.) $ 0 #) * +# + 0 . # ç & *+), ç & ! -. .#-.#$ ' /-! . ' 0 -& . ' 0é)-
$ # ! $.!)+#)*) !-! .)/, - $. ! , $ - #, ç#)) #$, *#ç +/'-!, $.!)+#
+)$7. # & ç -! .!' !&#)/+ '6, &)'.)/*+6ç 2!, .))*)) -.! -/' ê # (#)
), * +)/-#)'. #. -/&* + -& . *)/ ' $7*.)/' *6 .!'-/ $ $+#& '! & .! $ é8,
$ #)# /' .6.!. , # &)'.#$ + /'

"CTUSBDU

5IF NBJO PCKFDU PG UIJT UIFTJT JT UIF BQQMJDBUJPO PG TUBUJTUJD
'MVPSFTDFODF 4QFDUSPTDPQZ 5IF BJN PG UIJT TUVEZ XBT UIF SFDPW
UIF -BTFS *OEVDFE 'MVPSFTDFODF 5FDIOJRVF -*' BOE UIFO UIF TQFDU
BMHPSJUINT GSPN UIF ¸FME PG %BUB 4DJFODF

5IF TQFDUSB NFOUJPOFE BCPWF DPNF GSPN CJPMPHJDBMMZ MPBEFE
NFOUT 5IFJS TUBUJTUJDBM QSPDFTTJOH JO DPNCJOBUJPO XJUI BQQS
TFQBSBUF UIFJS CJPMPHJDBM CVSEFO JOUP EJTUJODUJWF HSPVQT #B
UIF DPOTFSWBUPSLT XPSL EJTFOHBHFT GSPN UIF OFFE GPS NVMUJQMF
5IF VTF PG 'MVPSFTDFODF -*%"3 OBNFMZ UIF FYUFOTJPO PG -*' UP SFN
TFSWBUPST UP NBQ UIF NPOVNFOU BOE HSPVQ JUT CJPMPHJDBM CVSEF

5IF TU $IBQUFS JT BO JOUSPEVDUJPO UP UIF QIZTJDBM CBDLHSPVOE
XJUI NBUUFS XJUI BO FNQIBTJT PO UIF ¹VPSFTDFODF QIFOPNFOPO *O
NPOVNFOULT TVSGBDF FSPTJPO BT XFMM BT JUT F·FDUT BSF JOUSPEVD

5IF OE $IBQUFS QSFTFOUT JO EFUBJM UIF NBUIFNBUJDBM CBDLHSPVO
BSF VTFE JO UIJT UIFTJT *O QBSUJDVMBS UIF BMHPSJUINT PG 1SJO
)JFSBSDIJDBM "HHMPNFSBUJWF $MVTUFSJOH)"$ BOE -JOFBS %JTDSJ
MZ[FE *O BEEJUJPO UIF DIBQUFS JODMVEFT UIF EFTDSJQUJPO PG B N
NPEFMT UIF -FBWF 0OF 0VU $SPTT 7BMJEBUJPO -00 NFUIPE

5IF SE $IBQUFS CFHJOT XJUI B CBTJD MJUFSBUVSF SFWJFX PO UIF BQ
BOE DPOUJOVFT XJUI UIF FYQFSJNFOUBM TFUVQ XIJDI XBT VTFE .PSFF
TQFDUSB CBTFE PO UIF CJPMPHJDBM JOGPSNBUJPO PG UIF NFBTVSJOH
BDUFSJTUJD TQFDUSB BSF HSPVQFE JOUP BQQSPQSJBUF DMBTTFT 5IF
PG B QSFEJDUJWF NPEFM BCPVU UIF CJPMPHJDBM CVSEFO UZQF BU FB

5IF UI $IBQUFS EFTDSJCFT TUFQ CZ TUFQ UIF TUBUJTUJDBM BOBMZT
DBUFHPSJ[BUJPO JOUP BQQSPQSJBUF CJPMPHJDBM CVSEFO DMBTTFT
BUJPO PG UIF BGPSFNFOUJPOFE NPEFM XIJDI JT UIFO FWBMVBUFE XJ
DPODMVTJPOT UIBU FNFSHF GSPN UIJT TUVEZ BSF QSFTFOUFE BT XFMM

•ª»¡•¦®´ ‹®¸¦£•£®¯¡ ˜¹´®Sª¤¦

& .! . ' &'!& ' *) #.#-.#$, $!+)')&# , *6 .!' -$)*# .!, 0 -& .)-$)* , 0é
* #. .!' é & -! .)/ $. !)/ é +!.#$)7 /*)ç é+)/ -ê .#$ & .!' ! * +
$.#')ç) , & .!'7 ! ý -#$ 0 #'6& ' 6* ,! *)++60!-! ! - . +#$ & . .+)*) 0
! # -/-.!&#$ # /-!$ #)0 -0)+#-&6,-/'.)7'. #$ . .!' # +$ # /. ,.!, !
/' *8, ! *+8.! '6.!. .)/ * +6'.), $ 0)/ 0# +8' . # -.!' é +!.#$ * +# +
0/-#$8' # + -#8' *)/ # *)/' .!' 0 -& .)-$)* 0é)+#-&)7

7. +! '6.!. .)/ $ 0)/ -.)ê 7 # -.!' ' /-! . ' * + 6'. ' # ç+ -!,)#)*)
*)/' .!' # ç+ -! . ' *#0 ' #8'-. &'!& *) #.#-.#$,$!+)')&# , # #$6. +
'.#$,$ #$ #& .)) #$,-/'é $,-.#,)*) ,/0 -. . #.)&'!&) *).)7'*+ . 7)/-
* +)'. $ é8,)# '.)' &) /-& ' , -.#$,* +#)ê ,-/'.+ ê)/'-.!'. ê7. .!$. -.+)
*#0 ' #8' *#*)' ! ç#)) #$ *#ç +/'-! .!, *#0 ' # , !)*) *). $ # .)
& .!,.!,* +)7- , #* & .#$, + - , *#0 + . # *6 *)#$)/,)+ '#-&)7,$ #
-&)7,)#)*))# ' # . +)& . 0 +6& ')# . /* +ê)/' -.) 0), * +#& .+#$
6-)!$. + 0 /.8'. '* + 6'. '6-)$ #!$. -.+ *.#$.)/, + -! *). .) '.#$
.!, 7. +!, '6.!. ,

›º¸®¯¢· Š®ª¶£¦¸¤ª·

•p¦²¹´±¬s¦²®¯¢· ‡¶s¢· ‡••¬•ªµ¤©¶¦¸¬· ‡¯¹®²´p´•¤¦· ±ª „•¬

7 ! - .)&#$6 $ # &)+# $6 * *) # * . # *6 .)/, '6&)/, .!, ç '.)&!ê '#$,
*)++)/' /-.!+ *6 .!' * /-! .!, (- -!, .)/ 4DIS¶EJOHFS # $ é *#& +)/, -7
& . . # !)*) ' #

$$\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = \hat{H}|\psi\rangle$$

& .!' '. -.)#ê! (- -! # #).#&8' ' + # ,

$$\hat{H}|\psi(r_1;r_2;r_3;\ldots;n_1;n_2;n_3;\ldots)\rangle = E|\psi(r_1;r_2;r_3;\ldots;n_1;n_2;n_3;\ldots)\rangle$$

6*)/ ! ' + # .!, ' + # $, $. -. -!, !)*) * +# + 0 . # *6 .!'i$/& .)-/' +.!-
) '8-! .!j i (-0 # &# * +! * +# + 0 .!, $. -. -!, .)/ -/-. & r_i),)+ -& .
$ n_i '.#-.)#ê)7' -.#, é - #, . ' ! $.+)' ' $ # . ' */+ ' ' .)/ -/-. & .),) '. -.)
.)&#$6 .+)ê# $6 *+)$7*. # *6 .!' * /-!#.!,.!'(ê- &#, .)$\hat{H}$# & .7*)

$$\hat{H} = \frac{\hbar^2}{2m_e}\sum_i \nabla_i^2 - \sum_i\sum_l \frac{Z_l e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_{li}} + \frac{1}{2}\sum_{ij}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}$$

6*)/-7&0 ' & .!'*+)- #-!#PSO 0QQ FOIF.JN&FS<. '! $.+)' '-/ $+#.#$
& .!'& .)/*/+ ' *+)$ &# -.# &# '. + -!. '! $.+)' '-.!')*)# *). &
. '*/+ ' ' /' *8,! * /-!.!, (-é-!,+ ,* +)ê .!'-. é + é -!. '*/+ ' '
$ # *)& ' , .) /' &#$6 $PVMPNC é + . # -. .#$6 þ# .)') 6+ þ.)„6 -.! -ê -!
6+), '.#-.)#ê -.!' $#'!.#$ ' + # . '! $.+)' ') 7. +), -.!' (! $PVMPNC
*/+ ' , $ #) .+ .), -.!' * -! $PVMPNC & . (7 . '! $.+)' '

é8, .) 0 #'6& ') .!, ! * + -!, .!, ! $.+)& '!.#$, $.#')ç) , & .!' 7 ! *!-
.!' $#'!.#$6.!. . '! $.+)' ' & . (7 . ' .)&#$8' ' + # $8' *#* ' & ' + #
' # * + .!.) ' ' # ' -. ,)# $/& .)-/' +. - #, . ' '. -.)#ê ' .+)ê# $8' *#*-
! $/& .)-/' +.j-i! .!, $. -. -!, .)/ -/-. & .), *+ * #' ' # ' -. $ é8, *+)- #)+
.!' */$'6.!. *#é '6.!. , 7+ -!, ! $.+)' '- &# -/ $ $+#& '! é -! .)/ ê8+)/

$$_e = h\,j\,i$$

+ - $$ '!-!, .!, ! * + -!, .!, $.#')ç) , & .!' 7 ! '.#-.)#ê -.!' *)++
. '0 .)' ' *6 . &6+# . .!' # #$ - .!, *)++60!-!, ' 0 .6'#)$. ! !, ' +
+ # ' ! $.+6'#) '6, &)+# $)7 .+)ê# $)7 .))*)) -.! -/' ê # (#)*)# .!'
' + # $ # *+ & .)*)# & . ç -! - ' /2! 6. +) ' + # $ &)+# $6 .+)ê# $6
&)+# $.+)ê# $.)*) $. ê)/' .)' $ é)+#-.#$6 +6) .6-) -.!' *+) ' 0 +6& '!
6-) $ # -.!' '. -.)#ê! # #$ - $*)&* , ' #.) 2! 6. +) . # !&& '))+# $6
.0)JHIFTU 0DDVQJFE.PMFDVMBS 0SCJUBM $ #.) &! 6. +) ! . # !&&
$6 -6.0 -PXFTU 6OPDDVQJFE.PMFDVMBS 0SCJUBM .)*) !&#)/+)7'.
-&)7 & . (7 . ' .6& '*)/ *).)7'.) &6+#) # -&) /.) 7'. #' ' # .
. .7*)/*)#)*))# é * +# + 0)7' -.! -/' ê # /' *8, * #. . #! # () #$ '
. '.7* '. ' &)+# $8' .+)ê# $8' 6-) $ # . ' $ '6' ' *)/ # *)/' .!' & . $ '!-!! $.+
& . (7 . ' ' + # $8' *#* '

7&0 ' & .!' é + &)+# $8' .+)ê# $8' . ! $.+6'# - ' &6+#) ' # * '.)*
.)' */+ ' *)/ '.#-.)#ê)7' $ # -/' *8, ! ! $.+)'# $ */$'6.!# $-ê'-&!& '!
-) 6$!+! .!' $. -! .)/ &)+)/ # $/& .)-/' +. - #, . ' &)+# $8' .+)ê# $8')#
*+)- #)+)/' $ # .!' *#é '6.!. 7+ -!, '6, ! $.+)')/ - &# -/ $ $+#& '! é -!
& .!' *+)- #-! -$"0 -JOFBS $PNCJOBUJPO P>G "*U)PNJ7D 0S'CJUB&M#6<
-/' / -&6 . ' *#& +)/, .)&#$8' .+)ê# $8' . ' .6& ' *)/ -/'é .)/' .) &6+#)
.+)ê# $ *+)$7*.)/' *6 .!' * /-! .!, (- -!, 4DIS¶EJOHFS # $ é ' .)&)
&)+# $.+)ê# $ # $+ ')'. # - - $ # * .+)ê# $ ') & .)' ()' ! *#$
.)&#$8' .+)ê# $8' *)/ . * +.)/' # #$6. + ' - .+)ê# $6 7' . # ' -ê!& .
.+#8' # 0)+ .#$8' -/' / -&8' ! . *6 7) T .)&#$.+)ê# $. *6 '
.+)ê# $6 $ # ' Q .)&#$6 .+)ê# $6 . *6 7) Q .+)ê# $ & + &&#$6 (
'. -.)#ê), -&6,)')& . # - -&6, $ # # 0 + # , *+), .)' * -&6 ' 0)+#$
/2! 6. +! ' + # *)/ .)' ê + $.!+ # * -&6,))*)), *+)- #)+ . # *6 .) '.
&)+# $6 .+)ê# $6 -ê!& . . # *6 .!' * /+#$! *#$ /2! . ' Q .+)ê# $8' .
é * +# + 0)7')# *+) ' 0 +6& ')# -&) # ' # .)&#$6 &6+#) # 6)/, *
$. '6!-!,

'´²¹¢•´ ©®¦¹´±®¯´Â ±´¶¤´º

Šª¸±Á·¸

. .!' !&#)/+)*)#)/ *). -&)7 !&#)/+)7'. # 7) -7') .+)ê# $8' . -&
. '.# -&#$! $. !2! &! . ')*) ' *+)- #)+ # $ # .!' -. é +6.!. .)/ &)+
-/ $ $+#& ' - ' '- -&6 !&#)/+-&#$#6.)+)ê# $¸6 $'##.)-&#$6 .+)ê# $6
. ')*) '! ' + # $ # 0)+ *+)- #)+ # .) $ +), ' + # , *6 .!' !&#)/+ .)
ø. ' ' -&#$6 .+)ê# $6 ' # -/&* !+ & ') .6. .) -7-.!& * +ê . # - ê &! 6. +
+) .!, !&#)/+ , .)/ -&)7 '8 ' -/& !+ é $ # .) '.# -&#$6 .+)ê# $6 ! $
.) -&#$6 ' é)/' -.) '.# -&#$6 .6. .) -7-.!& ç+ -$. # - /2! 6. +! ' + #
& .!' *)/- .)/ -&)7 $ # + *+)$7*. # &# # 6. +) -. é + $. -. -!

.)¸&)+# $6 .+)ê# $6 .) & #-.) .!, ! $.+)'# $, */$'6.!. , ç+ -$. # & . (7 . '
)/ -/'é .)/' .) &6+#) $. & $), .)/ -&#$)7 .)/, ()' # . (! !)) ê#-.)*)
' + # .)/ -/-. & .), $ é8, . ! $.+6'# *+) -*)/' .)/, *#& +)/, */+ ' , $ # &
.!' * -! & . (7 .)/, *)& ' , -.) -/ $ $+#& ') -!&))# $/& .)-/' +. - #, . ' .)
.+)ê# $8' -/&ç)/' '#-ê/.#$ ü'. é . -.) - &)+# $6 .+)ê# $6)# '. -.)#ê , $
- #, -/&ç)/' ' #+ .#$ & . (7 . ' 7) */+ ' ' $ # *)& ' ' !&#)/+ . # ' -!&)
*#é '6.!. , 7+ -!, . ' ! $.+)' ' /' *8, ! ' + # .)/ -/-. & .), /(' . # $
'#-ê7 . # ! * -! & . (7 . ' */+ ' ' $ # * $6)/é ! -. é # .) &) + ')/# 0
* '.).) *+8.), -&6, *)/ -ê!& . . # - ' &6+#)

Šª¸±Á·µ

-&6¸µ *+)$7*. # 6. ' - ' &6+#) &0 ' . # *#*+6-é .! ! *#$ /2! -
.+)ê# $ $ # -/' *8, &0 ' . # . #* 6, . .+#* 6, -&6, ÿ!&#)/+ . #
*#$ /2! Q .)&#$8' .+)ê# $8' $ # $ .L '.#-.)#ê & .)' - -&6 * +. . # *
-&#$8' $ # '.# -&#$8' .+)ê# $8' .) * -&#$6 .+)ê# $6 ! ! $.+)'# $ */$'6.
$. + é ' .)/ -&#$)7 ()' $ #)# '. -.)#ê , $/& .)-/' +. - #, -/&ç)/' '#-ê
-.)/, 7) !&#ê8+)/, é8, . Q .)&#$.+)ê# $ ' &0 ')/' ! $.+)'# $ */

* .)/ */+ ' .6. '. -.)#ê $ # .) * -&#$6 .+)ê# $6 * +)/-# # $6&ç) *#é
-&#$6 ()' é8, 6& , . ! $.+6'# * +#ç)/' .)/, */+ ' , - &)+0)ç8'
'#-ê/.#$ -/&ç) . '$/& .)-/' +. - '.)*)é . ' ' 0), ! $.+)' '-.)' é .#$6 !&
& *). -& ' !&#)/+)7'. # $.#$, /' & #, & .)/, */+ ' ,$ # .) -7-.!& ' & #
.!' ' + # .)/

ü'. é . -µ) '.# -&#$6 .+)ê# $6)# $/& .)-/' +. - #, . ' *#& +)/, .)&#$8' .+
' # $.6, 0 -!, $ # -/' *8, -/&ç)/' ' #+ .#$ $ # -.)/, 7) !&#ê8+)/, ü/.6
*). -& .!' !&#)/+ '6, /. + 7)'.), $6&ç)/ *#é '6.!. , 7* +(!, ! $.+)' '
. ' .6& '$ # -/' *8, .!' ' -ê/-!. ' *8- '& . (7 . '*/+ ' ' /. '.!'! $.+)'# $
&6+0 -! ! ' + # .)/-/-. & .), /(' . #$ # -/' *8, !-. é +6.!. .)/&)+)/ .
$. ')& . '! $.+)' '-. &)+# $.+)ê# $ ¸ . . µ/. !&'#)#/+)7'. -6.0
$ #)0.0 &)+# $.+)ê# $ 6* , /. * +)/-#)'. # #.) ê-& '6, ! $.+)')/
*6 '¸ .+)ê# $6 * #. -!& '.#$ /2! 6. +! ' + # 0 .)' '- -ê -! & .!' # +-
! $.+)')/ µ¹6+)ê# $>6 <

••ª¯¹¶´²®¦¯¢· 'ª¹¦p¡¸ª®· ¸ª –´•º¦¹´±®¯¡ 'Á¶®¦

' *) / .)&#$6 &6+#) $.¸6¸$ #µ6.÷)ê# $ 7' . # ' /* +ê)/' $ # &! -&#$
! $.+6'# *6 .)& 6* , .))(/ 6') $ # .) .) '. -.)#ê &)+# $.+)ê
)')&)'. G#$ # *)')# /' . , & . ç - #, ! $.+)' '& 7()/- - #+ ' + # $, *
<> é ' #
n! < ! <n! < ! < !

.) # + && .)/ ê & *.)+)/-#)'. # . &)+# $.+)ê# $.)/ &)+)/ .!, 0)+&
.6-) -.!' ç -#$.)/, $. -. -! 6-) $ # -.!' *+8.! # +& '! - $ é * + *. -! & . ç
+ .!+ . # * ,! ' + # $ # 0)+ & . (7 .)/ +ê#$)7 $ # .)/. #$)7 &)+# $)7 .-
.!' # +-! '6, ! $.+)')/ /* $)7 # -.! -$ é! # 0)+ .#$6 &6+#) . -6.0 $ #
)0.0 &*)+ ' ' # # 0)+ .#$.+)êµ# $ #O*-6!.')0)+& ! ') & .!'
$. ')& . '! $.+)' '

ê & Óúòþðòöî÷ë ÷î îúüùë ùüþöî÷ ú þü öÞ÷ ú üþùîøñòíñôÿ<

õ' , *#*+6-é .), * +)'. ,))*)), ê # -!& '.#$ *#++) -.#, ! $.+)'# $, & .
! *) * 6.!. .)/ $ç '.#$)7 +#é&)7 .)/ TQJO 4 *)/ 7' . #' ê # .)! $.+6'#) '
.+)ê# $6 -.))*)) ç+ -$. # # #$6. + -7&0 ' & .)/, $ '6' , *#) ,)#)*))
*6 .!' # #$ - * /-!, .!, (- -!, 4DIS¶EJOHFS é *+ * # ! *) * 6.!. .
! $.+)'# $)7 TQJO & . (7 7) *#* ' & . ç -!, ' * +>& #6#.#&-..! çê!.-!! <
' &0 ' . #) . -. , .)/ TQJO *)& ' ,)+)'. #)# $. -. - #, TJOHMFU
) #$6, +#é&6, TQJO ' # 4 # '.#* + ! TQJOT ! *) * 6.!.

-/&ç))'. #0 ,#4 .!' ç -#$ $. -.1 -!# 4.!' *+8.! # +& '! $ * # $. -. - #,
/. ,)+)/' $ # .#, TJOHMFU TJOHMFU & . ç - #, .!' * + *. -! . ' * + ! '
)# USJQMFU $. -. - #, & -/') #$6 +#é&6 TQJO 4 $ # + *) *
& . ç - #, *)/ '.#-.)#ê)7' - /. . * *)')&)'. # USJQMFU USJQMFU &
. +!-! *)& ' , .!, *) * 6.!. ,)# TJOHMFU USJQMFU & . ç - #, é +)7'.
#)' -7&0 ' & .)' '6' .)/)VOE &# TJOHMFU $. -. -! ê # &#$+6. +! '
'. -.)#ê! USJQMFU

‡¶s£ 'SBODL $POEPO Žª•¶¬¹®¯Á šµÁp¦r¶´ ‡µ´¶¶Á»¬¸¬·

$. ')& . '! $.+)' '-. &)+# $.+)ê# $ *+)- # ' + # ! $.+)& '!.#$,
-.) -7-.!& !)*) & . 0+ . # , $.#$ * -.#$ ' + # $PVMPNC ø& ,
/é + ,$#' - ,.)/ &)+)/ $ #. '* +# &ç ')& ' '! $.+)' ' '.#-.)#ê)7'- *#
&)+0 ,$#'!.#$, ' + # ,)#)*) , '.#-.)#ê)7'- /*) * * . '*+) ' 0 +6& ' '
' * (! !& .#$! # -* -! . ' ' + # $8' *#* '.)*) '.#-.)#ê)7' -.)'
$ç '.#$6 +#é&6 $ # -.)' $ç '.#$6 +#é&6 .!, -.+)0)+& , *+)$7*. # (#. ,

.!, * +#-.+)0#$, ' + # , . '! $.+)' ' 6 .+)ê# $, '# $, -.+)0)+& ,

.!,)'!.#$, ' + # , . ' .6& ' '.6, .)/ &)+)/ (#. , .!, * +#) #$, & . .6*
.!' é -! #-)++)* ,

.)/ *+)- ' .) #-&)7 .)/ TQJO $ . .!' ! * + -! & ! $.+)&> '!.#$6 *) <

ø. '*+ & .)*)# . # &# ! $.+)'#$ & . ç -! - ' /2! 6. +) ' + # $6 * *) .)/
/+ ' , '.# &ç ')'. # &# -.!' ! $.+)& '!.#$ 7' &! .!')) ê)'. # (#.
' $. ')& , .)/ 0)+.)/ -.)' ê8+) *)& ' , $ . .!' # +$ # .!, & . ç -!, # 0)+)*)
/' &#$ ' + # .)/ -/-. & .), $ #)# */+ ' , . ')/'' (2)/' .!' 7(!-! *)/ *#ç
& - '.)'!, 7(!-!, .!, . '. .#$, .)/, $ '!-!, 7+ *6 .!' é -! #-)++)* , .)/, /' *
.) 0 -& *)++60!-!, '6, &)+)/ * +)/-# # &#)& ê + $.!+#-.#$. ')'!.#$8
.!, $ é $. -. -!, *)/ &*)+ ' ç+ é .) -7-.!&

&)+0 . ' $/& .)-/' +.!- '. ')'!.#$8' $. -. - '/* $)7 # -.!' +ê 'SBODL $P
-7&0 ' & .!')*) &# ! $.+)'# $ & . ç -! *+ & .)*)# . # - ' $ '!.) */+!'#$
' 0)+ , (#. , .!, & !. , & , . ' ! $.+)' ' -/ $+#.#$ & .!' & . '*/+ '
-/ $ $+#& '! *+)- #-! 7' . # ' ç # .6-) $ --#$ 6-) $ # $ç '.)&!ê '#$ *
7&0 ' & .) ê & *6 $ --#$, -$)*# , ! & . ç -! &*)+ ' *+ & .)*)#!é 6. '
*)-. - #, . ' */+ ' ' #-) /' &)7' & .) & $), #-) +Re) *) /,&) +&))/7-.!' ç -#$
.)/ $. -. -! ø-) *+ & .)*)# . # ! & . ç -! *6 .) *+8.))'!.#$6 * *) .!, ç
$. -. -!, ! é -! .)/ */+ ' '& . ç . # $ # ' *#. ê7' . # $ é8, ! # +$ # .!, &
' # .!, . (!, 10)/15 T <> '8 ! */+!'#$. '. -! ê # * +)) .!, 10. 10 (!, .)/
10 12 T <>) & . ç -!))$!+8' . # 6. ' ! ' + # .)/ ! $.+)')/ # .!' # é -!
*/+ ' . /.#-. & .!' /' &#$ ' + # .!, *+8.!, # +& '!, $. -. -!, . .) * +
& . ç -!, .) ! $.+6'#) . '.8' . # & ' + # *)/ '.#-.)#ê -.!' .)& .!, $ é .!,
& .!' $ &*7 ! .)/ /' &#$)7 .!, # +& '!, $. -B -!, ê &

6 .!' $ç '.)&!ê '#$ -$)*# ! -/') #$ $/& .)-/' +.!-! .)/ -/-. & .), &)+ ' * +#
*6 .) #'6& ') .!, ! $.+)'# $, $/& .) -i/$ +#. !!!,)'!.#$, -/'#-.8é ,+8'. ,
- & '.! .!' * +#-.+)0#$ -/'#-.8- $ é8, ! * +#-.+)0#$ ' + # ' # & !. -/
.#, /) *+) ' 0 +6& > , <*#é '6.!. .!, & . ç -!, & . (7 .!, +ê#$ 1, $. -. -!,
$ # .!, . #$, $. -.2 -!, ' # ') ! .j)/ 1 j . j 2 j 2 6*)/.) . -. , .!,

ê & Øøî ö÷ë B ÷îö ÷ïîú üùô îúö÷ë C ýòþöðþî ë ü ñ úîùö÷ü ü ù
÷î é ôú ùò éïî ô òú ÿ ôøò÷ þüúìü ù úî ùò ôú îþ ë 'SBODL $POEPO
ü ñò ÞRÿ î ûéúò îö ÷î é ôú ñöêðòþ ô ÷îõ ÿ î ôøò÷ þ úöî ñöòðòìþüú î
îú öñò ùö÷é þ>ü öî÷é <

#*) #$, +)* , .)/ &)+)/ &0 '#-! .!, #*) #$, +)* , - /.6 .) -!&) '.#-.)#
! * + -! .!, ! $.+)'# $, */$'6.!. , .)/ &)+)/ & .)! $.+)& '!.#$6 *) .)/ 0
.)/)*))/ ! *)++60!-! *+)$.!' & . ç -! *#* .)' ($+ é 8 ,#.)&6') *6 .#,
-/'. . & ' , . '! $.+)' ' #-ê7 # 6.#

$$jh_1 \; j \cdot j_2 \; ij^2 = jh_1 j \cdot j_2 ij^2 jh_B j \; ij^2$$

6*)/) 7. +), * +)'. ,)')& . # * +)'. , 'SBODL $POEPO & . ç -! *+ &
6. ')* +)'. , /.6, & #-.)*)# . # ! 6. '! $/& .)-/' +.!-! .!, # +& '!, $.
' # -ê 6' * ')&)#6./*! & .!' $/& .)-/' +.!-! .!, ç -#$, $. -. -!, /.6' .) .+6
$/& .)-/' +.!-! /0 -. . # .!' ê#-.! !)*) '.#-.)#ê -.!' # . +!-! .!, /' &
$. -. -!, .)/ */+ ' 6* , *+) # + 0 # ! +ê 'SBODL $POEPO & . ç -! *+ & 6<.!' -ê -!
+)$7. # 6.# ! *#é '6.!. & . ç -!, $ # - ,)'!.#$, $. -. - #, ' # &! &! '#
0 -& *)++60!-!, ' *+)$7*. # &6') &# $)/-# ' -/' +.!-! '. -!, - ' & $), $7
ü'.#é . , &0 ')'. # * +#--6. + , & &#$+6. +! '. -! ') & .!' .#& .)/ *
'SBODL $POEPO /' *8, . 0 -& . *)++60!-!, . ' &)+ ' ê)/' .!' &)+0 .)/

+6 /. 6& , ! # $+#.6.!. -.#,)'!.#$, + && , .)/ 0 -& .), *)++60!-!, ' #
*) # & '! -.!' *+ (! ' # 7-$) '#ê' 7-#&! ü/.6 -/&ç ' # #6.#)#
' + # $, -. é& , * ê)/' ê#-. ! & *6 .!' ! $ # -/' *8, ! # $+#.#$ #$ '6.!
0 -& .)& .+ ' ' ' # #$ ' ' .#, # ê + - # <

œ¦¶¦¯¹¬¶®¸¹®¯¡ 'ª£¢r¬ ‡µ´¶¶Á»¬¸¬·

) 0 #'6& ') .!, *)++60!-!, * +# + 0 . # & & ! $+ ç # *6 .)' '6&) #FFS
)*)), -/-ê . # .!' *)+A(6)0 &-!.!' '. -!0 .!, *+)-* *.)/- , -&!, 0 .6, & $)/,
$7& .), - ' & $ # .!!' !.!,-!'. -.)#ê!, (+ê6& '!, -&!, $ # $0+ . # & -
.!, -ê -!,

$$A(\;) = M \frac{\int^{0}}{\int} H = "(\;)lc$$

ê & á ýö÷ é ùî îýüþþ ô ôÿ ü üýüìü îú ö÷î üý þìóòö öÿ òúòþðòöî
îýü é òöÿ ú ñüúô ö÷ ú òýöýêñ ú ùöî ùüþöî÷ëÿ ôøò÷ þüúöî÷ëÿ ÷î é

6*)'/( ) ' #) &)+# $6,-/'. -. , *)++60!-!, 0 -/ $ $+#& '),-/'. -. ,
$0+ #.!' /' .6.!. '6,&)+)/ *)/ç+ -$. # '.6,-/ $ $+#& ')/ # 7& .), '
$.#')ç) & $)/, $7& .), * -!, D ' # ! -/ $ '.+ -! .)/ & .), *)/ *)++)
molL 1 $ # M .) * ê), .)/ +6 /. 6& , ' , ç) #$6. +), .+6*), $0+ -!, -ê .
.!' *)++60!-! *+)$7*. # *6 .!' $0+ -! .)/ '6&)/ #FFS -BNCFSU - $é .#$ &)
* +#)/ -/'. -. *)++60!-!,

$$( ) = \frac{1}{l} M \frac{l^0}{l} = \frac{1}{l} M \frac{l^0}{l} \ln 10$$

$ # -/' *8,) '6&), #FFS -BNCFSU & . -ê!& . . # -.! -ê -!

$$l = l^0 F^{( )l}$$

#+6-é .! -!& '.#$ *)-6.!. # .!' * #+ & .#$ & .! .)/ 0 #')& ')/ .!, *)++60
! &)+# $ ' + 6, # .)& *)++60!-!,! ' + 6, *#0 ' # * +#0 + # $.)/ &)+)/
-.!')*) 6. '*+)-* *. # ' 0 .6'#) $. ! !, ' + # , 7' . #' *)++)0!é *6 .
) -/'. -. , /.6, -/' . # & .)' ' * +#) -/'. -. *)++60!-!, $ # .)' +#é&6 . ' &
/ & - .!, -ê -!,

$$( ) = \frac{( )}{N}$$

*)).#$6.!. *)++60!-!, (+. . # *6 .!' /' .6.!. . '. -!, .)/ ' 0)/, ! $.+)'
.)/ &)+)/ -7&0 ' & .!' -/ê'6.!. $ # .!' *6 -! .)/ *+)-* *.)'.), ! $.+)& '!.#$)7 *
/' .6.!. /. $0+ . # & - .!, ! $.+#$, #*) #$, +)* , .)/ ' 0)/, ! $.+)'
&)+)/ !)*) $ --#$ * +# + 0Ò ú#îù*ôó á îbîú $ë#G$ç '.)&!ê '#$ *6 .!'
ßüýë Úò éïî ôÿ

7&0 ' & .!' $ --#$ é + ! *)++60!-! 0 .6, *6 ' &6+#) * +# + 0 . # *).
' é +!é 6.#. ! $.+6'# .)/ !&#)/+)7' ' . '.)7& ') *)) .))*)) * +# +
.!' ñ úîùô îøîú &ë-G.!, -ê -!,

$$f = 2303\frac{mc_0^2}{N_B e^2 n} \int \varepsilon(\nu)\, d\nu = \frac{4.32 \times 10^{-9}}{n} \int \varepsilon(\nu)\, d\nu$$

6*)/ N $ # F ! & $ # .) 0)+.) .)/ ! $.+)' ν_0/ ! '.. ê 7).#.ê .)/ 0 .6, O)
$.!, # é -!$\nu$, $ $#& . +#é&6 cm^{-1} <> 0/-#$ -!& - .)/ -/ $ $+#& ')/ & é)/,
' #$'7 . # , ! *#é '6.!. *)++60!-!, 0 .)' '-.) 7+), $/& . +#é&8' .)/))$!
.!, -ê -!,

ßüýë Úò éïî!ô)ý*) * +# + 0 # .) #) 0 #'6& ') *6 $ç '.)&!ê '#$, -$)*# , '.
-.) -.# &#) *)) *)/ !&#)/+ . # *6 .!' & . .6*#-! . ' 0)+. ' $ . .!' # +
& . ç -!, *6 .!' +ê#$ -.!'. #$ $. -. -! *)& ' , ' ' # /-.!+ &# #*) #$
-!& '.#$6.!. /.)7 .)/ & é)/, *+)$7*. # # #$ 6. ' & .8'. # 0 #'6& ' *)++
ê+ -! *) & ')/ 0 .6>, < .#& .)/ *+)$7*. # & - .!, -ê -!,

$$\mathrm{BC} = \langle b|(q\,\$)|a\rangle = q \int \psi_b(\$)\, S\, \psi_a(\$)\, d^3 S$$

6*)/ ψ_ai ! $/& .)-/' +.!-! .!, +ê#$, $. -. -!, $ jψ_bi '.!, .)##ê$, R .)-/') #$6
0)+.) $S)#. -. , é -!, . ' ! $.+)' '

–¦¶¡©ª®£±¦ œ••¶´»Â••¬·

õ' * + # & .!, -!& '.#$6.!. , .!, #*) #$, +)* , & . ç -!, -. 0 -& . *)++60!-!
* + *. -! .)/ &)+)/ .!, ê +)07 !, þ '#$6. +)# ê +)07 , ç+ -$)'. #-. 0 .)-/
. ' ê +)* -.8' . ' 0/.#$8' $/.. + ' $ # *)++)0)7' 0 .6'# $. ! !, ' + # ,
' + # /. '.!'& . 0 +)/' /-# . - * +#0 + # $ &6+# ê +)07 !, & .!'&)+0
& - .)/ &!ê '#-&)7 & . 0)+ , ' + #>, '¶STUFS <

é &6+#) ê +)07 !, *). . # *6 ' ' $.7 #) *)+0/+ '!, $ # &# / +)0)ç#
)*) $ 7*. . # *6 .) é/ $) # , .) ê & -/ $ $+#& '), $.7 #),))*)), * +
' $ '.+#$6 .)&) & .'!H-$)/# . -- + .)& B.)/+#& .+#$ <' # /* 7é/'),
.!' *)++60!-! $ # .!' & . 0)+ ' + # , $ é8, 6* , * +)/-# . # $ # -.) -
*/$'6.!. ! $.+)' ' $. & $), .)/ & 7. +)/ ()' ' # -!& '.#$ #-ê/+6. +! -.)
.)/ $./)/ ü/.6 ê # , *). -& .!' * .!, +)* , & . ç -!, $. $6+/0 -.)' ()
.)/ $./)/>< 6* , 0 ' . # -.) ê!&)*) '#-ê7 # .!' *)++60!-! $ # .!' & . 0)+
' + # , (#. , .)/ *+)- ' .) #-&)7 . '&)+ 'ê +)07 !, '.6, . 'é/ $) # 8' & &
-. 0 .)-/-. & . ><

#)' -.) ê &* +)/-#)'. # . 0 -& . *)++60!-!, .!, ê +)07 !, B $ # C &
ê!&#$)7, .7 H_{55})/$_{72}$ H_{4} 0_5 $ #$_{55}$)$_{70}$. H_{4} 0_6 '. -.)#ê /2! '. -! - -/ $ $+#& '
& $! $7& .), ' (+. . # &6') *6 .!' ' + # $ # 0)+ . ' *#* ')0.0 $ # -6.0
$ # *6 .!' #! $.+#$ -. é + .)/ * +#ç)'.), .)/ &)+)/ !)*) !&#)/+
*+)- ' .) #-&6 . ' +)*8' & . ç -!, . '>&)+ #$.#$ ' 0 + . # 6.#! ! $ #! ! TJOHN
& . ç - S_1, $ S_7 -/' #-0 +)/' -.#, $)+/0 , *)/ * +)/-#)'. # -.!' &* $ # $6$$#'! *
.)/ 0 -& .), # #$6. + S_1 #& .!ç -! . .+)ê# $)0.0 $ # -6.0 -/' #-0 +)/' $.
84 '8 # .!S_7 . HOMO 1 $ LUMO +1 -/' #-0 +)/' $72. < >

ê & Õøò÷ þüúöî÷ë ý ÷ú ô î ÷î é ùë÷üÿ ü ùòðéøü éûüúî ú ùüþì
ø þü øøôÿ B ÷îö C îú ì üö î î ÷îö ü ñöéú ùî þüýëÿ ùò éïî ôÿ ÷éõò
ñî÷ øöü ýüþ þìúôÿ ú ñ ü>ùüþì ú C <

ê & ãé ùî î îýüþþ ô ôÿ ôÿ ø þü øøôÿ î îþö òþé ÷îö ôÿ ø þü øø
ñòûöé ù úî ùò ýþü üùüì ô 5%%'5 5JNF %FQFOEFOU %FOTJUZ '
5IFPSZ ò ÷òú ùî þô ðþîùùë ùò ýî øòÿ ÷îö ò ñöéø ùî îöõîú øôÿ ÷
ðþîùùë> <

‹¸•¹ª¶®¯£ ’ª¹¦¹¶´µ£

ü$))7é , .!, *)++60!-!, ! ' + # !)*) *)++)0 é!$ *6 . ! $.+6'# .)/
$))/é *)#$ &)')* .# *#-.+)0 , -.) * +#ç)' $ # * . /(!, $ ')/ .!, #-
.)/ -/-. & .), &)')* .# /. $0+)'. # -ê!& .#$ -.) # + && +BCMPOTLJ
* +)/-# . # -.) ê &) *+8.) ç & . ' -/ $ $+#& ' ' # +)&8' '. *)$+ ' . # -.!'
# #$ - ò.!, òþö÷ëÿ ùò î!þüýëÿ ' # &! $.#')ç) !.#$ $ # -/&ç ' # & . (7 *#*
& # *) * 6.!. TQJO

ê & Òöéðþîùùî +BC>MPOTLJ<

ø. ' ' &6+#) # + . # - ' ' + # $6 * *) /2! 6. + *6 .) ê &! 6. +)
* *) .S_1 .6. .) ! $.+6'#) ê ' # ' + # & - . ' -/ $+)7- ' .)/ &)+)/ &
&6+# .)/ # 7& .), -.))*)) ç+ -$. # *)).#$6.!. .!, & . 0)+ , ' + # ,
6. ' . ' + # $ # $ ' .)/ &)+)/ -ê 6' . /.)'. # & . '. -.)#ê # $ ' . '
.)/ # 7& .), é8, . -/-. & . *#$)#' ')7' -/')+# $)# $. -. - #, .)/, ' & #
<> 5P *). -& .!, # #$ - , /. , ' # ' *) # +é .) ! $.+6'#) , .) ê &
' + # $)'!.#$6 * *S_1) .),0 #'6& ') /.6 # +$ 10* 12+ T*)$/ # *)& ' , !
+)- #-! -/' ê # ' / $)7 # -.!' ü+ê 'SB>ODL#$POEPO < +#$ & . .+)*
& . (S_1 $ S_0 ' # 0#$. # 6. +! *#é ' ü/.6 -/&ç ' # #6.# .) ' + # $6
' # +$. & 7. +) *6 .!' #$S_2$0$ +S_1.$' # *)& ' , & 8' # ! *#é '6.!. #
$.#')ç) !.#$ *) # +-! 0é)+#-&6, # -/-.!&#$, # /-!, JOUFSTZTUFN
$. -. -! $ # * #. $.#')ç) !.#$ *) # +-! >0 -0)+)-0&é6, +#-&6, 6-) $ # P
0 -0)+#-&6, *+ & .)*)#)7'. # 0)7 .) -7-.!& ê # * é # - é +&#$ #-)++)*

›r´¶®¸±Á·

ø. '.) &6+#) /*)-. .!' * +! é +&#$ (#--)++6*!-!& .) * +#ç)'.)/ ! . #
! $.+6'# & - .!,)'!.#$, ê + -!, $. ()/' -.) ê &! 6. +))S_1.#$6 * *) .!
ê)/'.!' /' .6.!. ' *) # +é)S_7' -.!'&! $.#')ç) !.#$ & - - . +#$, & . .+)* ,
. $.#')ç) !.#$ & - .)/ 0 #')& ')/.)'/0 é)+#-&6, 7).+6*)# *) # +-!,
' # *#.+ *.) $ é8, # .!+ . # !*) * 6.!. .)/ TQJO +6 /. 6& , # #$ -
S_1! S_0) 0é)+#-&6, ' # '#-ê/& '), -/ $+#.#$ & .!' - . +#$ & . .+)* #6.# .
* * . '&)+ '.)/ # 7& .), *)/ ç+ -$. #.) 0é)+)'&6+#) &0 ')/'-!& '.#$
0)+ , & . '. -.)#ê .)/ 0é)+)'>), &)+)/6< /.6 /-$) 7 # .!' & . 0)+
' + # , & - -/ $+)7- ' # . '/* +ê)/' # é -#& * E_{S_1} E_{S_0}.!8-# 0)+
! ' + # ' & . 0 +é $ç '. & '!

#)')# ' + # $, # 0)+ , & . (7 . ')'!.#$8' *#* ' ' # # , # $ é !
' + # $6 * *) *)& ' , . 0 -& . 0é)+#-&)7 ' # $.)*.+#$, #$6' , . '
*)++60!-!, NJSSPSJN>BHUF.S V0 F, #<ê7 # &6') # .)'!.#$ * * *)/-/&& . é
-.!' & . ç S_1! S_0 $ é8, ! *)++60!-! &*)+ ' $. (# - /2! 6. + , ' + # $ TJ
$. -. - #, '8) 0é)+#-&6, *+ & .)*) . S_1&-6.!' S_0*6 .!'-!,) * +)'. ,
'SBODL $POEPO -.! '-ê# -!#), $ # # .!' & . ç $-!# *)& ' , 6-) *#é ' ' #
&# & . ç -! $ . .!' *)++60!-! (-)/ *#é ' ' # $ # # +6' $7)&6&<, !
'. -! .)' 0 -& . ' $*)&* , * +)/-# . # & # & '! - -ê -! & . 0 -& . *)++60!-!,
)#$ ' 0 #')& ' '.)) -/&*/$'8')'. # -.) 0 #'6& ') .)/ P-ç!- & .),P 0é)+#-&)
DFODF RVFODIJOH $ # é * +# + 0)7' -.! -/' ê #

'ª¹¦¹Áµ®¸¬ 4UPLFT WT •¦¹¦²´±£ #PMU[NBOO

é8,) 0é)+#-&6, -/'. . # /-.!S_1 -*6'S_0'.6. .) 0 -& $*)&* , .)/ '
(+. . # *6 .) & $), $7& .), # +-!, 0 #'6& ') .))*)) -.!' ç#ç #) + 0 -/'
'6&), .)/ ,BT>B<*#*+)-é . , . & $! $7& .), $*)&* , .)/ 0é)+#-&)7 *+ * # * '.
/2! 6. + *6 . & $! $7& .), *)++60!-!, $ é8, /0 -. '. # *8 # , ' + # , 6
ê + -!, # #$6. + ! # 0)+ & . (7 .)/ & -.)/ .!, '. -!, # .) 0 -& *)++
-.!' & . ç S_0! S_1 *+8.! 8'! *)++60!-!-!, $ # .)/ & -.)/ .)/ 0 -& .), 0é)+#-&)
)')& . # & . .6*#-! 4UPLFT $ # -/' é , $0+ . # - &>)' , $/& . +#é&8'<

-.6-) 6. ' *+ & .)*)#)7'. # * #+ & .#$, $. + 0 , 0 -& . ' *)++60!-!, $ #
* + .!+ . # * ,. 7) /. 0 -& . &0 ')/' ' *)-)-.6 ! *#$ /2!, 6* ,* +)/-#
* + & .), ê +#'-. '. -.)#ê 0 -& . .!, ê +)07 !, .)/ ê)'6,.)/.6
0 #')& '#$ * + ç# # .!' +ê # . +!-!, .!, ' + # , $ é8, $* &*)'. # 0 .6'# é
& $)/, $7& .), *6)+#-& ' *#é ' & $! $7& .), *)++60!-!, +6 /. ! +&!
' # 'é -& '! #6.# ' 0é!$ /*62! * , .) &6+#) ' ç+ -$. # -.)/, ,
)*)# *). ! é +&)$+ - # #$6. + ! $. ')& . ' &)+ '-. ! $.+)'# $ '
* * $))/é .!' $. ')& #PMU[NBOO

$$\frac{N_1}{N_0} = FYQ\frac{(E_1 \quad E_0)}{kT}$$

6*)/N_1 $ N_0)# * !é/-&) 7) ' + # $8' *$E_1$ *E_0 ')$ #. -.)#ê , ' + # , L !
-. é + #PMU[NBOO $ # 5 ! *6 /.! é +&)$+ - .)/ * +#ç)'.), ø. '! ' + #
& . (7 . ' 7) *#* ' ' # (#+ .#$ &#$+ 6* , -/&ç ' # & . (7)'!.#$8'
# ' .6.) 6N_1/N_0 +ê # ' ' . # -!& '.#$6, /' *8, ! *)++60!-! 7' .
' *+ & .)*)#!é *6 $ *)#) # +& '))'!.S_1 $6 *!* $ *)).&* 0é)+#-&)7 '
$. (# - ' ê &! 6. +) ' + # $ S_0* 6*), .0, ' . # -.) ê & * +# + 0
(! *). -& .#$.)' 0 #'6& ').!, ! *#$ /2!, $ # *+). é!$ *+8.! 0)+ *6
TUFJO<

ê & Þòöþîùî ö÷ ãé ùî Ïýüþþ ô ôÿ ÷îö ãõüþö ùü >ôÿ äø þü øøôÿ î<

ê & Ïøøôøòýö÷éø ô î ùé ú îýüþþ ô ôÿ ÷îö õüþö ùü ò õòþùü÷þî
ýòþöïéøøôÿú üÿ<

œ¶Á²´· «•£· ©®ª£ª¶±¢²¬· ¯¦¹¡¸¹¦¸¬· •p¦²¹®¯£ ‡µÁ©´¸¬ ›r´¶®¸±´Â

' # # . + -!& '.#$6 ê + $.!+#-.#$6 .)/ 0 #')& ')/ .)/ 0é)+#-&)7 ' #) ê+6
+& '!, $. -S_1-!$_4$))*)), 7' . #' /*)) #-. 6. '.)0é)+)' & $.#')ç) !é
& ' 'ç+ ê7 * &6 0 .6, -!& '.#$6.!. .)/ $ #. # -.))'6, 6.# *+)- #)+ #
* + é/+)*)/-/'.)7'. #6 . /' &#$ 0 #'6& ' &[$\frac{4}{100}$'10#$_4$]$<#$6#7#$6. +
' $.#')ç) !é ' # /& .))*)) * +# ê [A]-/*$ '.'+ -! $ $+#& ')),
0é)+)'. ' &)+ ' .6.)+#-& ' *6 . &6+# é # +é)7' $ # -7&0 ' & .#, *+)
#$ - , é $. ()/'-.!*+8.! # +&S_1! $.&6.+#! /. é *#-.+ 2)/'-.!'
S_0 . $.#')ç) !.#$ & +/é&$k_S^4$6 & . &!!, $.#')ç) !.#$ & +/é&$k_{OS}^4$6 &)&-'!,,
!-/ $ '.+ -!. ' &)+ ' *)/ç+ -$)'. # -.!' *+8.! # +&"'! $.*-+#-!+ 0 . #
*6 .!' # 0)+#$ (- -! $ # .!' '. -.)#ê! 7-!.!,

$$\frac{E^{1\,''}}{E} = k_S^4 + k_{OS}^4 \quad {}^{1\,''} \quad) \quad {}^{1\,''} = {}^{1\,''}{}_0 \, FYQ \frac{t}{{}_4}$$

*)& ' , * + .!+ . # * ,) * !é/-&6, . ' &)+ ' -.!' *+8.! # +& '! $. -. -! & #
$é .#$ & -. é + ê+6')#8,þ úü ó ëÿS_1 êÿ

$$_4 = \frac{1}{k_S^4 + k_{OS}^4}$$

$ # .) '. -.)#ê) *)-)-.6 . ' &)+ ' *)/ *) # + . # $.#')çØ ïîú#$ö÷ë #8, !
Ïý ñü ô ãõüþö ùü 2VBO<U>VéN :J'F#ME

$$Q = \frac{k_S^4}{k_S^4 + k_{OS}^4}$$

'. -! 0é)+#-&)7 *)/ * . # *6 ' 'ç+ ê7 * &6 é ' . # *6 .!'-ê -!

$$i(t) = k_S^4 \quad {}^{1\,''} = k_S^4 \quad {}^{1\,''}{}_0 \, FYQ \frac{t}{{}_4}$$

›r´¶®¸±Á·¸¹¦r ª¶£·¯¦¹¡¸¹¦¸¬·

ü'. -.)#ê! ' /-! *+ & .)*)# . # $ # 6. ' ! $.#')ç6 !-!.)/ & .), ' # -. é +
ê+6')× #) -/ $ $+#& ') * !é/-&6, .!, # +& '!, $. -. -!, * + & ' # -. é +6
ê+6') *)& ' ,) +/é&6, & -!, .!, -/ $ '.+ -!, é ' # &! '#$6, +

$$\frac{E^{1\,''}}{E} = 0 = k_B N_0 \quad k_S^4 + k_{OS}^4 \quad {}^{1\,''} \quad) \quad {}^{1\,''} = \frac{I_0}{k_S^4 + k_{OS}^4}$$

6*)/) 6+$k_B N_0$ '.#-.)#ê -.) *)-)-.6 . ' *)++)0)7& ' ' 0 .)' ' ' &)' 6 $)/ '
&)' ê+6')/ $ #$_0$ é ' # ! '. -!, .!, *+)-* *.)/- mol/L&!, *6& ' , !
'. -! 0é)+#-&)7 -. é + , $. -. -!, -7' . # & .!' $ç '.#$ *6)-! & - .!, -ê -!

$$i = k_S^4 \quad {}^{1\,''} = I_0 \frac{k_S^4}{k_S^4 + k_{OS}^4} = I_0 Q$$

'MVPSFTDFODF 2VFODIJOH

é8, . 0é)+)'. &6+# 'ç+ -$)'. # *)&)' & ' *6.)* +#ç)' -/' é ,-/'/*
.6-)& &6+# # /.8'6-)$ # & &6+# 0é)+)'. '$ # &!0é)+)'. ')/-#8' é *+
/*62!! ! * + -!.)/, !)*) & #8' #.!' '. -!.)/0é)+#-&)7 *)/ 7'. #' $.
ç -#$) * +)'. , & -!, .!, '. -!, .)/0é)+#-&)7 0 #'6& ').))*)) -.!' ç#ç
* +)/-# . #MVPSFTDFODF 2VFODIJOH)#ê , * (! - #, .)/, ' #

0é)+)'. &6+# 06.)/ ê)/'* S1 ## é # &.!'! $. -. -! '. ' *) # +é)7'
$.#')ç) !.#$ & - .)/0é)+#-&)7 & . &* 7)/'.!' ' + # .)/,- &6+# .)/
.)/, RVFODIFST & - -/ $+)7- ' DPMMMJTJPOBM RVFODIJOH '. -!.)
') & .!'-/ $ '.+ -!. ' RVFODIFST -/&0 ' & .!'-ê -! <

$$\frac{F_0}{F} = 1 + k_{q\,0}[Q]$$

6*) F_0 ! +ê#$ $* &*6& '! '. -! 0é)+ ## $)7'. -! 0é)+ k_q -!&)7 &)+# $
-. é + RVFODIJOH) & -), ê+6'), & . (7 7[Q]- / $/+)$7 -.+' $ # '
RVFODIFST /' é , . &6+# *)/ *)/'.) 0 #'6& ') /.6 ' # #-ê/+ ! $.
$ é8,) &!ê '#-&6, *)/ '.)7'.!' ' + # *6. 0é)+)'. &6+# ' #!& . 0
# +& ' '! $.+)' '-. #$.)/, >+)ê# $ <

'#-ê7 . #.) 0 #'6& ').)/ 0 -0)+#-&)7 6* , /.6 * +# + 0 . # -.!' *6& '!
6. ' 0é)+)' &6+#) * +# &ç ' # ' .)&) & /2! 6 .)&#$6 +#é&6 JOUFS
F·FDU <

/'. . #.) 0 #'6& ').)/ /' &#$)7 ' *+)- ' .) #-&)7 . ' #*6 ' *)/ /* +ê)/'
.)/ # 7& .), *)/ ç+ -$. #.) 0é)+)' &6+#) ü/.6 *+)$7*. # (#. , .!,
7* +(!, .!, +)* , & . ç -!, $ . .!' # +$ # .!, *)++60!-!, !)*) * #.)' ' *
' .) #-&6 . ' #*6 ' $ # -/' *8, .!' .)*#$.!, -/ $ '.+ -!, . ' RVFODI
-ê -!

)0 #'6& ').)/0é)+#-&)7 -/'. . # *6 0é)+)'. ,)/- , -!& # $ * .)/&)
.) &6+#) /.6 ç+ -$. #- # /& & -/ $ $+#& '!)*.#$ */$'6.!. !)*) '.#
*)++60!-! - -/ $ $+#& ') & $), $7& .), .6. .6-)! $.#')ç) # +-!, 6
$.#')ç) $*)&* , é /0 -. '. # (-é '!-! JOOFS ¸MUFS F·FDU *)& ' ,
/*62!. 0 -& . *)++60!-!, . ' &)+ ' .)/ # 7& .), $ é8, * -!, $ # .)' '6&)
-BNCFSU -ê *!+)$7*. # *8, ! & .+)7& '! - # '#$ -/'é $é,)+#-&)7
é ' #

$$F_{DPSS} = F_{SFD}\, 10^{[0\%(F)+\,0\%(F)]/2}$$

6*) F_{SFD} +ê#$ '. -! $OD_{(em)}$ $OD_{(ex)}$!)*.#$ */$'6.!. .)/ # 7& .), -.) & $),
$7& .), $*)&* , $ # # +-!, '> -.)#ê <

Š®¦¸º¸¹¬±®¯£ Š®¢•ªº¸¬ ¯¦® ›•¸»´¶®¸±Á·

$.6, *6.)' 0é)+#-&6))*)), ' * + ç# # .!' +ê # . +!-!, .!, *) * 6.!. , .
* + .!+ . # *6.) # + && +BCMPOTLJ 6.#.)-7-.!& 7'. #' * +# é #- &
-.!' *) * 6.!. .)/ TQJO # #$ - /. ' # 0 #')& '#$ *)+ /& '! 'é +
!.+)ê# $ -.+)0)+& .)/! $.+)')/ '-/ 7 '/. # & .!' -.+)0)+& 6 TQJO øé
*). /é #+ - &# , $ #! ' + # $ -7 /(! TQJO .+)ê# $, -.+)0)+& , -4 DP
$ # '). ' # +$. #-ê/+ 6* , -.!' * + *. -! *)/.) &6+#) * +# ê # ' Pç +7P

IFBWZ BUPN F·FDU 6*)/ ! ' + # $ -7 /(! /(' . # -7&0 ' & .!' . . +.!
.)&#$)7 +#é&)7 # #$ - /.)')&Ò öî. # ôùö÷ë Òöêøò ô JOUFSTZTUFN DS
$ # *+)$7*. # $ é8, -.!' &)+# $ ê &# .)'# ' .!, -ê -!, *+)-. é . #) 6+),

$$H_{TP} = \sum_i {}_i l_i \; s_i$$

6*)/M) . -. , .!, .+)ê# $, -.+)T)) + & ; . , .)/ TQJO $ # .) é+)#-& ' . # * ' -
6 . ! $.+6'# .)/ &)+)/ *+6-é -! /.)7 .)/ 6+)/ # .!' +ê#$ ê &# .)'# '
!)*) * ç .!' # . +!-! .!, *) * 6.!. , .)/ TQJO $ # *)')# & . ç - #, TJOH
&0 ')/' &! &! '#$ *#é '6.!. ø-) & 7. +! ! -7 /(! .6-) * +#--6. + , $. -.
-/-.!& . ' TJOHMFU $ # USJQMFU ' &/ '7)'. # $ # ! *+) ' 0 +6& '! *#é '6.!.
-!& '.#$6 * .), </' *8, * # /*6 .!' +ê 'SBODL $POEPO .) ! $.+6'#) é *) #
$ ') .))'!.#$6 * *T1)) !) *))/ ! $/& .)-/' +.!-! é ' # * +6&)# & .!' '. -.)#ê
.!,S1 $ # -.! -/' ê # é /*)-. $ # * # - . +#$ & . .+)* -.) ê &! 6. +))'!.#$6
.!,T1 ü*6 .!T1 -.!'S0 ! & . ç -! ' ' # *# *)+ /& '! 6 .!, *+) ' 0 +6& '!,
-7 /(!, $ # .-# *+)$7*. # ! $.#')ç) !.#$ ã*) ü#þ ö +&ü ê)+)'#$ # +$ # .!,
. (!, .) 10 6 1 T < !)*) ' # -!& '.#$ & 7. +! $ # . +)ê+)'#-& '! .)/ 0é)+
+ $.!+#-.#$6 & é), $ # - /. , .#, 7) # + - , ' # ! $çQ'.#$.)/, *6)-!
.!' # -/-.!&#$ # Q-1 ! $# #.)' 0 -0)+#-&6

$$Q_{JTD} = \frac{k_{JTD}}{k_S^4 + k_{OS}^4} = k_{JTD}$$

$$Q_1 = \frac{k_S^5}{k_S^5 + k_{OS}^5}\,{}_{JTD}$$

6*)/ k_{JTD} k_S^5)# -. é + , ê+6')/ # .!' # -/-.!&#$ # /-! $ # .!' *) # +-! 0é)+
*6 .!' USJQMFU $. -. -!

Š®¡p¶•¸¬ €¶£•² –´•®¹®¸¹®¯£· ••¬¶´²´±®¦·

™Âµ´® ¯¦® •©®Á¹¬¹ª· šµ´¸¹¶Ã±¦¹´·

ç+ -! . ' *#0 ' #8' ' # &# # #$ - !)*) (+. . # & - *6 .) / #$6 $
+ $ # . &'!& *) #.#-.#$, $!+)')&# , ' # $. -$ / -& ' .6-) *6 0/-#$
6* , .) & +& +) NBSCMF) -ç -.6 #é), MJNFTUPOF) 2 && .!, TBOET
HSBOJUF $ é8, * -!, $ # *6 . ê'!. * .+8& . 6* , . $)'# & . NPSUBST)
. $)'# & . DPODSFUFT $ # . $ +> & ##$ # $ D6F.S+B NJ D&T'!& .!, ü$+6*) !, . '
üé!'8' .)*) (.)'. # -.!' * +)7- + - *).)7'. # $/+ , *6 '. #$6 +&
, ç -#$6)&#$6 -.)#ê) $ # . é & # .)/, +)'.># - -ç -.6 #é)<

é#' , *#0 ' # , . (#')&)7'. # - $.!)+ , ') & .)'.7*).!, * .+ , - -ç -.
$ # */+#.#$, # -ç -.) #é#$, * .+ , * +# &ç ')/'.)' -ç -.6 #é) $ # .) & +&
.)/, -/-. .#$6 ' # .) 'é+ $#$6 -ç -.#) .))*)) . $ é#-. # # . + / -é!. -
6(#') $ #$6* +#ç)' þ# .)' 6) /.6 7' . #' # /é)7'ê + ,'> 0 -)/'/*)
# */+#.#$, * .+ , *)/ * +# &ç ')/'.)' 2 && ..! $ # .)' + ' .! *).)7'. # $
#)(#) .)/ */+#.)/ $ # ê +6.#)# */+#.#$, * .+ , ' # * +#--6. +) 'é
-ç -.) #é#$, -.6-)) -ç -.6 #é), $ # .) & +& +) ê+!-#&)*)#)7'. # - & !
+ *) #.#-.#$, $!+)')&# ,

6-) . 0/-#$ 6-) $ # . . ê'!. * .+8& . # 0 +)/' & . (7 .)/, -.!' ê!&#$ -7-. -!
*#0 ' # $ /0 -.!' -$!+6.!. -.) Q) $ # -.) *6-) 1*P $ 8 P T ÄÜ Z6' ê # ,
*). -& .!' # 0)+ .#$ *# $.#$6.!. .)/, -.!' ' *./(! ç#)) #$8' *#$ é - '
* ý#) # ç+ -!,) & .+) .!, .!, #$ '6.!. , '6, * .+8& .), ' êé $ #' #
.!' ' *./(! ç#)) #$8' *#$ é - '-.!' *#0 ' # - $)# 6. Ö ö,ü.ñ) ò) ')ö& ô ?#
#JPSFDF$Q U#J*W)J.UZ!$ *6 .)'(VJMMJ*UF .)# #6.<. /. # $+ ' . # -

+ .) ' , ý#) $.#$6.!. !)*) *+)- #)+ # .) /' &#$6 '6, $ é +)7 $ # *
# ç+ & ')/ / #$)7 ' *)#$#-. *6 ç#)) #$)7, * +)'. ,

ÿ / .+) ' , ý#) $.#$6.!. !)*) *#-.)*)# .) *). -& .!,) -!, *6 ç
$ # &ç#)/, * +)'. ,

+#.) ' , ý#) $.#$6.!. !)*) * . # *6 . é+ *.#$ -/-. .#$ *)/ 7' . #'
* .!, *#0 ' # , 6* , ' $+ ç#)& - & . # -$6'!, #$ $6*+ ' * é!.#$
$ # ç#)$.6'

* +)'. , *)/ *!+)/'.!' ý#) $.#$6.!. -.#)'. # -.!' *)+8 ! $. -! -.!' *#0
.+ ê7.!. $ # -.!' ê!&#$ -7-. -! .)/ /*)-.+8& .), þ '#$6. + . / #$.)*) '
*)+8 ! ' # *#) *# $ D#$ü î-ý.ü î ÷ ô ô #JPDPM!PO J[B'U J)P 6!-! &# *#0 ' # ,
*6)+ '#-&)7, (#. , .!, /' .6.!. , .)/, ' *)++)0)7' * +#--6. +)' +6 *6 .) *
$ # ' .) # .!+)7' # & 7. + ê+)'#$ # -. & . # #$ 6. ')# *6+)# ' #
*#0 ' # .)/ / #$)7 !&#)/+ . # ' $./) # +)&8' # .!' & . $ '!-!.)/' +)7 $.
-/'6)/ .!, $. -$ / >< *#*)' . /*)-.+8& . *)/ ' # +$ . .+ ê# &0 ')/'-.
#0 ' # .)/, &#$+ , $) ,)#)*) , *+)-0 +)/' &# *+)-. . /& '! * +#)ê # .
&#$+))+ '#-&8') * + # & . ' $ + &#$8' .))*)) - ' & é & .!é $.
* +)7- + - *). $/+ +ê) * + # & -.!' * *. -! .!, /2! , *)+)-#&6.!. ,
*#0 ' # $, .+ ê7.!. , -.!' ç#) $.#$6.!. # #$6. +)# 0 .) /.6.+)0)# &#$+
)*))# ê)/' &#$+ 'é $.#$6.!. - -/'é $, (!+ - , *)#$)/' #-ê/+ . $ + &#$
#$ '6.!. , .)/, ' # .!+)7' / ⇒ -ø-⇒' 0)+ .!' ê!&#$ -7-. -! .)/ /*)-.+8& .), .)

ê & +)07$!

ê & / ')ç $. +#

ê & ü+#é&6, # 8'ê +)0/$8' +#-. + $ # $/ ')ç $.!+ ' (# *)/
'#ê' 7é!$ '- &'!& *) #.#-.#$, $!+)')&# , -.!' /+7. +! * +#)ê .!,
-))/- (# # 0)+ .#$ /*)-?+8& . <

Q)$ é)+ #- -!& '.#$6 ç é&6.)), . '&#$+))+ '#-&8'*)/ 'H+.7-- . #$ é8,
$ ⊕H #.)/+)7'$. -.+ *.#$ ') & .)), . ' ($/.. +#$8'*) /& +#$8')/
&14 *)/ *)/ $$+ ')'. # *6 .)/, &#$+))+ '#-&)7, - >'. ()+, -/'é&$.)„<
ê +#')+#-& ')# &7$!. , *+).#&)7' 0+8, 6(#' * +#ç)'. 6* , .)' + ' .! $
2 && . , '8)+#-& ' $/ ')ç $. +# ' *.7--)'. #- *#) $ #$ * +#ç)'. 6* ,)
$ # .) & +& +)≍ ü'. é . . ê +)07$! 7' . # ' *)#$ -)/')*)#) *). /*6-.+ &
6-)' 0)+ .!' ê!&#$.)/-7-. -! ! ' *./(.)/, /') . # *6 .!' *)+)-#&6.!. $ #
#0 ' # $.+ ê7.!. (#. , .!, /2! >, / #+-+ ,◁+ - #, /. , &0 ')'. # $ # -.)
ê &

–ª¶®p¦••´²¹®¯´¤ –¦¶¡£´²¹ª· Š®¡p¶•¸¬·

+ *) #.#-.#$, $!+)')&# ,)#8')'. # (#. , .!, ý#) *)#$) 6&!-!, !)*)
& .!' *) $!-!)+ '#-&8' * . ' *#0 ' #8' .)/, 6* , * -!, $ # (#. , * +#ç
* + 6'. '*)/-/')'. # $/+ , & .!' +7* '-! .!, .&6-0 #+ , .!-/' ê # * +)/-#)
-!& '.#$6. +)# * +#ç)'.#$) * +#ç)'.#$) * +)'. , # ç+ -!, . ' *#0 ' #8'

*) #.#-.#$, $!+)')&# , $ é8, * -!, $ # ! '. -.)#ê! * *. -! *)/ *+)$)7' # c
* +)'. , *#ç +/'-!, * +# + 0)'. # -.#, /*)$ '#6.!. , -.#$, $ # ç#)&!ê '#$,
* +#)ê , ê!&#$, '8- #, $ # $ $CO2 ; SO2 ; SO3 ; NOx O3 $ Cl2 <> /* +ê)/'- /2!
* +# $.#$6.!. - &)+0 +) 6 .)*) 7' . #' *#$ é -)/'- (!+ &)+0 ê + ,'
$ *)#)' ç#) # ç+ .#$6 &!ê '#-&6 ø& , $ . .!' # +$ # ç+)ê6*. -!, . é ##$
. 'é+ $#$)(# # 7)'. # -.) ' +6 $ # & #8')/' $. $6+/0 .) Q) .)/ *)& '
ç+)ê6*. -! 6. ' +ê . # - * 0 & .)/, 'é+ $#$)7, é)/, 6* ,) -ç -.6 #é), $ # .
'.# + $ # *+)$ 6(#'! # ç+.)-!<' $ * +)/-#)'. #)# -!& '.#$6. +)# +7*)#
.!, .&6-0 #+ , ! 0/-#$ $ # . ê'!. *! , .)/, $ é8, $ # ! * *. -! *)/ ê)/' -.!'
*#0 ' # , *#*)' -.) ê* &)/-# . # ! *+) /-! $ # ! $. !(! . ' +7* ' * . '
&'!& '

7*), /-#$! ê'!. ! * *. -!
& . # 0 #-. # $ 0+ /+$ # , ÿ -8' ý#)&!ê '#$, (.& - #, /
CO_2 0 -. # ý -.!-! 7-! +))' 'é+ $ ' ø(#'! ý+)ê
SO_2 0 -. # +!&#$ $6'! 7-! +))' 'é+ $ ' ø(#'! ý+)ê
SO_3 ø(-! .SO_2 ø(#'! ý+)ê
O_x 0 -. # ç -.!-! ç $. +# 7-! +))' 'é+ $ ' ø(#'! ý+)ê
O_3 #$+)*)-6.!. , -.!' .+ .6-0 #+ O_2(6 -! '+7* ' ø(#'! ý+)ê . #$ ÿ#
Cl 0 -. # +!&#$ $6'! 7-! ø(#'! ý+)ê

' $, !& '.#$) .&)-0 #+#$) +7*)#)# 0/-#$, $ #)#. ê'!. , *! , .)
$ é8, $ # ! * + -! .)/, -. &'!& *) #.#-.#$> , $!+)')&# ,<

* *. -! 6& , .!, .&)-0 #+#$, +7* '-!, (+. . # $ # *6.) 7+), $é -!, .)/ &'!&
+/*) 6')/, * +)'. , # #$6. + '$ *)#)-!&) ' ' # & - $. é #& ')-.!' 6(
.6. ! / + - -/-- + 7 . # $ $ # $ é8, (.& . # & .!' * +)) .)/ ê+6')/ !&#
Úî þô Øþü î)#$, & . , *)/ ê)/' *+ & .)*)#!é #(' * , ! $+)7-. *+) +
-/ $ $+#& ' *6 .!' +7* '-! . ' 'é+ $#$8' - & .# ' *6 .!' $ 7-! / +))' 'é+ $ '
-/&ç ' # $ é8, * +# ê)/' & . #$)(# .)*) $. SO_2 $!'#)(+) é!)7)/
.!' !&#)/+ $+)7-. , # ç+ -! *)/ *+)$. # *6 .!' & 7+! $+)7-. ' # #*
$ é8, $. *6 .!' & 7+! *#$ é#-! * .)/ -ç -.) #é#$)7 * .+8& .), !&#)/+ .
-.+8& $ é +)7 7>2)/<

ê &)ýþüêøò ô ÷îö ô ÷î éøôûô úþ ý ú ò>ýì úùúôùòì ú

-.6-) .) * +#ç)' .!, & 7+!, $+)7-. , (#. , .!, /2! ,)+ '#$, *#ç +/'-!,
' /(- # .) & .+) .!, /. +) ')7, ý#) $.#$6.!. , $ # -/' *8, ' 0#)(' - # *#*
$ #)+#-& ')/, &#$+)))+ '#-&)7, #) -/ $+#& ' & +#$,)& , $/ ')ç '.!+
$ # $ *)# '#.+)*)#)7'. ç $. +# /)$#&)7' -.#, & 7+ , $+)7-. , $ é8, -. # $
*#$ é & ' é #4$ > . <

ˆ®´•´£®¯´¤ –¦¶¡£´²¹ª· Š®¡p¶•¸¬· •¶£¦²®¸±´¤

&'!& *) #.#-.#$, $!+)')&# , $ é8, ' # $. é #& ' -.) 0/-#$6 * +#ç)'
' *!+ -.)7' -!& '.#$ *6 .)/,)+ '#-&)7, *)/)/' - /.6 # . + -/ê'6 '
0 #'6& ') .!, 7* +(!, & '0/.8'$ # '.+ '6*)/ & .#, + , .)/, *+)$)7'/2! &
$. *6'!-! -.) &'!&) $ # &*)+)7'' *+)$ -)/' & ê+# $ # .!') #$ $. -.+)0 .)/
6& , -.! -/ $ $+#& '! + - (.)'. #)# * +)'. , ç#) # ç+ -!, - &#$+6. +! $
*+ * # ' ' 0 +é)7'. ý+/60/. ý+7 .)*) &0 ')'. # - * !é8+ -.#, *#
&'!& ' 6*)/ ! / + - ' # (#+ .#$ /2! $ # ! # ! *#0 ' # ê # .! /' .6.!
-/ $+ . - # 6* , ' # ! . $ + &#$

6+), ý+/60/. ' # &# '#$6. +!)')& - # 0/. ê + , 6 #-.6 . ')*) ') 7
ê + $.!+ . # *6 .!' !)/ê *) # 8' $ # #*) # 8' 0 - ' & ' $ '.+#$6 &
-*)+60/.) '. -.)#ê <) & .60/.) $ . .!' *) # 0 -! * + # .)/, & . , .)/
ç+/60/.)/)#)*))# é -/'.!êé)7' .-# 8-. ' !&#)/+ !é -.! -/' ê # .) / .6
#*) # 0 -! .!, , .)/ ç+/60/.)/ .) -*)+60/.) * + # & .!' # #$ - .!, &
*) # -*6+# .)*) # -* +)'. # & .)' ' &)

-*6+# 6. 'ç+ é)7'- $. !)/*6-.+ & 0/.+8')/'$ # -ê!& .)/' ' *) / # $
$./) /08' .) *+ .6'!& ø. ' .) /*6-.+ & ê # /2! * * / + - , 6* ,) *)+6
.6. .) *+ .6' & ' *.7- . # $ # -ê!& .)'. # . & .60/. ç#) # ç+ -! *6 . ç
*#) && -! $ # 0)+ $/+ , .!' &!ê '#$ $. *6'!-! *)/ ê . # .) /*6-.+ & $ # .!'
.!, / + - , * +#0 + #$.)/ /*)-.+8& .),

ˆ®´•´£®¯´¤ –¦¶¡£´²¹ª· Š®¡p¶•¸¬· '®¯¶´´¶£¦²®¸±´¤

&#$+))+ '#-&) 7' . #' ' *.7()/' *)#$, -ê - #, & .) /*6-.+ & *)/ *)#$)
ê)/' .!' /' .6.!. ' /)$#& -)/' *# #é#$ ' *./--6& ')# -.!' *#0 ' # .)/ /*)-.+
6* , * -!, $ # ') #é#$ # #- 7)'. , -.) - . +#$6 .!, * .+ , # &#$+))+ '#-&)
-)'. # -.!' *#0 ' #)')&)'. # *# #é#$) '8)# &#$+))+ '#-&) *)/ ê)/' .!' #
#- 7)/' -.) /*6-.+ & $ # ' ' *.7--)'. # -.) - . +#$6)'. # ') #é#$)
&#$+))+ '# -&) # ê +)'. # - ê -&) ') #é#$)7,)#)*))# *)#$)7' *+)5*
$ # $)# 6.!. , - $+/*.) ') #é#$)7,)#)*))# *)#$)7')&#$, $)# 6.!. , - *)+
$ # - / ') #é#$)7,)#)*))# # 7)/' .!' * .+ $ # # #- +7#)-/& -' /.! <
' # *)$ #-.#$ ') #é#$ '8 *+)- +&6)'. # - $ é), &)+0)) ,
)&#$ ê + $.!+#-.#$. '/*)-.+ & . '6* ,! *#0 ' # $.+ ê7.!. ! *)+8 !, *#0
$. -. -! -/'. +!-!, 6* , * -!, $ #)# $ #& .)) #$, -/'é $, # &)+08')/' .!' *)#$
$ # .!' ' *./(! # 06+ ' .7* ' &#$+))+ '#-&8' 6* , é * +# + 0)7' -.! -/' ê #
#é6./*), & /2! ç#) $.#$6.!. CJ P S F-D F Q U&0 V&0 U$Z .< ! , * +#ç)'.#$,
-/'é $, 7' . # ' * # '.)') ç#)) #$6 *)#$#-&6 '.6, & +#$8' ê+6' ' #
ç#) # ç+ .#$8' &#$+))+ '#-&8' ') & .!' .)' .+6*) $ /2!, . ' ' + # $8' .)/,
.)/, # $+ ' # -.#, $.!)ã ü.î. ' þü -ú)/,)*))/, ' $)/' äø þü ÷ô
Ø îúüïî÷ ë$ôî)Ù#ò ö ëú-ò ÿ/,Ó òþ þü -ü)ÿ,)*))/, ' $)/' Ú)#÷ô ò$ÿ # -.)/,

ä ô ù ò ö ü ø ö õ ü þ ü) /ö ÷)ü)ÿ) /, ' $)/')+#-& ' ç $. +# *)/ (#)*)#)7'. '6+ ' / #
.)/ /*)-.+8& .),

›•¹´¦º¹Á¹¶´»´® '®¯¶´´¶£¦²®¸±´¤

B œ••¶´»Â¯¬
ü+ê#$ &# -!& '.#$ $.!)+ &#$+))+ '#-&8' *)/ *)#$)7' -.!' *#0
&'!& ' ' #. ê +)07$! .)*) ' $)/' ç - #) . ' + . -. ' #. (#, .
/*)'. # .6-) -.)/, /$ +/ .#$)7, *) /0/ .#$)7,)+ '#-&)7, & 0 .)-/'é
#.)/+ &&0 ')'. # . ,&)')$7.. +)#-ê!& .)'. , *)#$,> . ,*)
-.6-) # $+ ')'. # *6 .!' $.!)+ . ' 0/.8' $ é8, ' ' *.7--)/' (. +#
ê + $.!+#-.#$ 6* , + , 07)7, #-.)7, *#*)' &0 ')'. #
7+), # -. - ' , $ #. > N <

* #)'6.!. . 'ê +)0/$8'.)*) * '.)7'- -/-. & . ç#) # ç+ -!, &'!& #
*#0 ' #8' ' $)/'-.)/, *+)$ +/ .#$)7,)+ '#-&)7, -.!')& >. ' / ')07. '
+# ê)/' ê+ &)06+ ,)/- , 6* , ! ê +)07 ! 0/$)ç# #*+ . û' , 6*
0/$) +#é+7'! $ # D 0/$)$/ ' '! $ # $ +). ')4 6* , ø) ç')$# +/)'.é'$)<
.)/ * +#ç)'.), ')/' '. () , .6. . ê +)07$! * +)/'. P &&)' $7.. +
)*) * +)/-#)/' ê &!)7, & . ç) #$)7, +/é&)7, $ # * ê# .)#ê8& . *+)$
*#ç#8-)/>< ' *./(.)/, -/' é , *+ & .)*)# . # *# #é#$ 8-. ' (#)*)
.!'! # $ $.#')ç) -.!' # #$ - .!, 0 .)-7!& -!,#<$6 .& & /$ +# .#$8'
ê +)0/$8' *)/ *). * +)'. ç#) # ç+ -!, ' #> $ #+ 0#$6 . +
! $ -! $IMPSPQIZDFBF 0 .+6*), ' * + , .)/, ' # 6&)#), & . /
0 +)/' -. 0é)+)'. &6+# $ é8, * +# ê)/' ê +)07 ! $ # ç
6& , 0/$)ç# #*+ .>4'8'<

C #¦¯¹£¶®¦ •º¦²´p¦¯¹£¶®¦

+ . +ê#$6 * +)'. ç#) # ç+ -!, *).)7'. ç $. +# .)*) ' $)/' -
*+)$ +/ .#$)7, &#$+))+ '#-&)7, $ # ê)/'.!' /' .6.!. *#ç -!, $ # ' *
-. *#) '. () * +#ç)'. 7+#) ê + $.!+#-.#$6 .)/, & ç -!.))*)) # ê
$ # - 7) $.!)+ , (SBN 1PTJUJWF $ #> (SBN /FHBUJWF #<$6
.)/, .) ê & .))*)) -/'. é . # $/+ , *6 * *.#) /$ '! *)/ .)/, * + ê #)
-. +#(! $ # *+)-. - !)/ê - $ê + ' $ # &#')(' .!, * *.#) /$
*+)- # *#*)'-. ç $. +# .!' /' .6.!. ' *#ç#8-)/'- * +#ç)'. $
Q) .6.!. , $ # é +&)$+ - , * + ! & .!' #$ '6.!. .)/, ' & . .+ *)'.
')-*6+# # #$. /.6.+)0 ç $. +# *).)7' ' ' (#+ .#$ /.6')&) &
'#-&6 $ é8, & . .+ *)/' .!' '6+ '!CO$_2$-! .ê/+ -#& , # /.)+ '#$,
'8- #, 6* , / . 'é+ $, #* # $ #*+ . û' , ç#)ê!&#$ # #$ - *)/
.!' * + /.8' . ')+ '#$8' '8- ' &*)+ ' -.!+ . # -.!' (#)*) !-
' + # , & - $.#')çã) ü î þ ü î Ð î ÷ ë þ ö î -.!')(-! 8.)/
é)/ ' -.)#ê ä ô'ù ò ö ü î þ.ü)î*) 6& , é * +# + 0)7' -.! -/' ê #
ø. ' /. ! # #$ - *)/-# # $ #. ç $. +# &ç ')/' *6 .) * +#ç)'.)
é+ *.#$ -/-. .#$ *)/ ê)/' ' $! .6. ê + $Ó.!ò+þ)þ.ü#î ,

) #î ìøò.öüç $.!+ ' # $+ 'ã. øî-)+#-& ' *6 .)*) $/+# +ê)7'-.)'
.)& .!, ç#) # ç+ -!, #)-/ $ $+#& ' . . +6.+)0 07 .)*) ç#) #
$/+ ,.) & +& +) ' #. "DUJOPCBDUFSJB . 1SPUFCBDUFSJB $ #
-. 0 .) /.6.+)0 ç $. +# .) $7+ +ê) ç#) # ç+ .#$6 07) ' #. / ')ç
.)*) * +)/' é+ *.#$ -/-. .#$ $ #)(/ 6') & - 0 .)-7'é -!, # #$6.
#é)0# #$ $/ ')ç $. +# *)#$)/'.#, * .+#' , *#0 ' # , . *# #é#$
.)/ /*)-.+8& .), - ç é), & +#$8' êî #)-*.)8'/*<)$6.!. $ # ! *)#$#
-. ! . ' $/ ')ç $.!+ ' (+. . # & - *6 .!' # é -#&6.!. .)/ ' +)7
* +#ç)'.)/ /*)-.+8& >.), ?' é ,! ' *./(.)/, -/' . # & .!' !&#)/+
.)/ Pç#). *!. P &# *# #é#$ -/&ç -! *) * 8'.7* ' &#$+))+ '#-&8'
* +# + 0 -.!' *6& '! '6.!. $/ ')ç $. +# *+)- #)+)'. # *6 ' ê +
&* *+ -#')ê+8& (#. , . 'ê+ &)06+ '&)+ '*)/* +# ê)/' ! .!'ê
+ -#') .!' 0/$)ç# #*+ . û'! 0/$)$/ ' '! & $ # . $ +). ') #
*)+.)$ +6 /. 6& ,)+#-& ' ! $/ ')ç $.!+ ' ' # $6$$#' +6
.!, 0/$) +/é+ '!, !)*) * -!, ' # 0/$)ç#> #*+ . û'! <

D ‘ª®s£²ª. ‘ª®s¬²´µ´®¬±¢²´® ±Â¯¬¹ª.

#ê ' , '8 *).)7'-/&ç# .#$ -/-. & . .)*) *).)7'. # *6 &7$
-/' é , "TDPNZDFUFT /$ +/ .#$ ê +)07$! $ # $/ ')ç $. +# ' *
.#, # #6.!. , . '-/&ç#).8' * + , #>0)0 &#$!, <))*)), -/' é ,
' 0 + . # , &/$!.)ç#6.!, 0#)(' . ê +)07$! . $/ ')ç $. +# !
0 .)ç#6.! !&#)/+ 8'. , ' $. !) $ # /-.!+ ê6& '))#$6.)*)))*
*+)-)&)# # ' é +&)$ *#) # #$6. +) &/$!.)ç#6.!,)+ '8' # $ # -/
.)'0 .)ç#). - ' # ê +#-& ')-.+8& '.6, .!, &/$!.# $,)& , +/é&)'
*)#6.!. $ # .!' *)-6.!. .)/0 .6, .)' +6 $ # . é+ *.#$ -/-. .#$ *)/$. 0
-.)'0 .)ç#6.! *#*)' *+) é .!' # '. + ' ê #.)ê!&#$6 * +#
$ # ()/ . +8' # *). -& .#$)+#-& ' ,)& , /'!.#$.)(#$8' +)& . 0
-.)#ê ' .)*) &*)+ ' -/-- + 7- ! #ê ' '. &) 0 .)ç#).
* + ê # .#,)+ '#$, '8- #, & - 0 .)-7'é -!, *)/) &/$!.)ç#6.!, ê # '
' $ 72 # .#, ' + # $, .)/ > $, <

#ê ' , ê)/' .!' /' .6.!. ' *#ç#8-)/' -. *#) $+ * +#ç)'. .!, |
6* , ! +$.#$.)7'.+)# +!&)# $ #)# * .+8 #, $. , (#. , .!, -/'
'é $.#$6.!. , -. '-/&ç# .8') ê + $.!+#-.#$6 /.6-/' . # & .!' # #6.
' *)(!+ ')'. # (#+ .#$ 7$) 6. ')# -/'é $, ')/' '. () , $ . .!' #
. ')*) '-. & . $ # ! # #$ - .!, 0 .)-7'é -ê, +< $.!+#-.#$ /. .#,
' #$'7)/'-!& '.#$6 * +)'. ç#) # ç+ -!, * .+#' ' *#0 ' #8'$ é8, .) *
.6-) . ' *# #é#$8' 6-) $ # .)' ') #é#$8' #ê ' ' # # 7 #-. /*)-.+8& .
ç+8' # *+)$ #& ')/' *+)>$) !é <

‹µ®µ¹Ã¸ª®· ˆ®´¦µ´¤¯¬¸¬· »•¹´¦º¹Á¹¶´»•² ±®¯¶´´¶£¦²®¸±Ã² ˆ®´¹¡µ¬¹ª·

* +#ç)'.#$, -/'é $, # #$ -.!' * + *. -! . ' 0 .) /.6.+)0 ' &#$+))+
/'))7' (#+ .#$.!' *# #é#$ ' *./(! .)/, ü') & .)' .7*) .)/ /*)-.+8&
*) $!-! . *6 $/ ')ç $. +# . *6 ê +)07$! *)#$ # $. -.+)0 *)/ *+
-.) /*6-.+ & *)/ *)#$)/' *+) +ê . # -/' é , *6 .!' -/&Ò ö ü! é ÿ/ò ò.ÿ)/,
-.)*) 6& , -/&& . ê)/' $ # . +6.+)0)# &#$+))+ '#-&) 6* ¾&7$!. , $ # ç
(.)'. , -/ $ $+#& ' 6& , &6'). ê +)07$! ! $. -.+ *.#$.)/, + -! -.#
-.) 6.# *).)7' $. !) /*6-.+ & é+ *.#$8' -/-. .#$8' # .!' !&#)/+ *
. +6.+)0 ' &#$+))+ '#-&8' <

þ '#$6. +)# &#$+))+ '#-&) $ # - $6&! & 7. +) ç é&6 . $/ ')ç $.
-/'é $, & . .+ *)7' - '. ()) , * +)/' ' ' ($/.. +#$6 * + ç !& *6 *) /&
)/- ,&YUSBDFMMMVMBS1PMZNFG*JD*4)V/GTSLÊBÉODF,T #&*1)4) /- $ê + . ,
+ . û' , /$)*+ . û' , #* # /$) # # #*>+)$() $8 #, /0/& <
.)/ *#.+ * #.)' $ ç#-&6 / + - , '8 * + ! *+)-$) . # #-ê¾+ -.) /*6-.+
!&#)/+ .)/ ç#). *!. ç - . # -.!' 7* +(! . ' &14 , -/ $) !.#$)/- .
/. +) '8' *) $ ' !)*) /(' . # -!& '.#$ 6. ' /(' . # $ # ! .+ ê7.!.
*#0 ' # , ü/.6 -/&ç ' # #6.# & #8')'. # -!& '.#$)# # .&!.#$, /' &
+ $ # *)& ' , ! -/ $6 !-! .6-) . ' &14 -.) /*6-.+ & 6-) $ # .)' . +6.+)0
&#$+))+ '#-&8' -. &14 ' . # *). -& .#$6. +! # ç#). *!. , *+)$)7'
-.#, *#0 ' # , *)/ ' *.7--)'. # & - 7) # 0)+ .#$8' $.!)+#8' *6 &!ê '#-&)
0/-#$)7, $ # .)/, ç#) ê!&#$)7,

B ˆ®´£ª•»º¸®¯£ ‡••´¤•¸¬
.)' 6+) ý#) 0/-#$ ü) -! *+)- #)+ . # ! &!ê '#$ $. *6'!-! !)*
* . # (#. , .!, ç#)) #$, ' *./(!, !)*) $. #- *#0 ' # $, *)$
#JPQJUUJOH - # - /-! -.) /*6-.+ & $ # 7(!-! .!, *)+)-#&6.!. ,
ç#). *!. , *)/' &!ê '#$6 -.+ , -.!' *#0 ' # *)/ *+)-$))/'. # (#.
-/-.) , $ # .!, # -.) , .)/, ') & .) ' .) * +#ç)' ' # / +6 (!+
'. -.)#ê ü/.6 &*)+ ' ê # , *). -& .!' ' $. ')& . '*6+ '$ # *)&
.!, ' -ê/-!, .!, + -!, .)/ ' +)7 * .!, *#0 ' # , <

C ˆ®´£ª•s¬±®¯£ ‡••´¤•¸¬
ç#) ê!&#$) -! *+)$7*. # (#. , .!, & -!, * 0 , .)/ /*)-.+8& .)
*+)46'. .)/ & . ç) #-&)7 . ' &#$+))+ '#-&8' /'!é -. +! *! ç#) # ç+
.)+ '#$)(*)/ * +)'. # *6. $7.. + .)*) # /.)*)#)7'.!' -ç -.)
-/' é , *#0 ' # *#*)')# &#$+))+ '#-&) *)ç)/')+ '#$)7, ê! #$)
'. , *)/ -& 7)/' & . #$ $.#6'. *6 * .+ 6* , * -!, & . .+ *)/' '6+
)/- , *6 '.# + - #,)(#) ' , !)*) , -.! -/' ê # -ê!& .)/')(*
ê +)/' * .+ $ # -/&ç)/' -.) -ê!& .#¾&6 . '<

#+6-é . ! ç#) ê!&#$) -! -/' . # & .!' 7* +(! *)ê+ & .#-&8'
.#-&8' $ # * . ' , # #$6. + ! $) 8 !, *#0 ' # . ' ç#). *!. ' '#-ê
#$6 !-! +)& . 0 +6& ' ' - & .# ' 6 , -$6'! 7+! -*6+# - & .
$ 7-! / +))' 'é+ $ ')'6, .))*)) '#-ê7 # .!' !&#)¾+ * $!+,)7-. , <
)# *# #é#$) ç#). *!. ,)#)*) -ê!& .)'. # *6 $/ ')ç $. +# !&#)/+
-.) /*6-.+ & 6 . ' ê+ &)06+ ')/-#8' *)/ * +# ê)/' ! .!, ê +)07 !
. ' 0/$)ç# #*+ . 4'8' $ # . ' $ +). ') # 8' $ é8, $ #)/-#8' *+)-. - ,
67 $.#')ç) ><

.!'* + *. -!. ' #ê ' ' !$7+# *! ç#)) -!, .)//*)-.+8& .), *+)$7*. # (
.)/ &/$!.)ç#6.! *)/ +ê . # - & -! * 0 & .) /*6-.+ &) ç#) 0/-#$6
+)$7. # $ # - /. '* + *. -! *6 .!' #)ê#$ -/-.) $ # # -.) .)/é)7
* -!, $ # *6 .!' / ') #é#$ + -!. '/08'. '&/$. ')& !)*) é * +# + 0
-/' ê #)#)*) , ' # #$ ' , ' # #- 7-)/'-.) /*6-.+ & , $ # NN ')
), .)/ #ê ' *)/ ' $)⋊' <

ç#) ê!&#$ + -!. ' #ê ' ' * # .!' ')&)+0)*) !-!. ' /*)-.+ & . ' 6
.!, ! * + -!, .)/ & .) * + 6& '))(#$6)(7 $ é8, $ # , '8- ' & ê!
#$ '6.!. (+. . # .6-) *6 .)), .)/ /*)-.+8& .), 6-) $ # $ # *6 .))
#ê ' /' é , & . .!' ! * + -! & -ç -.) #é#$ * .+8& . &0 ' . #)
-ç -.#) $ é8, /* +ê # 0é)' '6+ ' ' . ' -ç -.)/))(#$6 -ç -.#) 7
' ' *). é - # 0)+ .#$ -!& .)/ #ê ' ') & .)), $ # * -!, /* +
*#é '6.!. ' #-ê + - # $ # -.) - . +#$6 .)/ ç+ ê)/ , $ # .) ç é), *)/ # #- 7
/0 , ü'. -.)#ê &*)+)7' ' !&#)/+ !é)7')(#$6 & ' -#) ê $6 - !+) $ #
') & .)), .)/ /*)-.+8&>.), <

œ¬±ª®´•®r´¹¶´»®¯´¤ '®¯¶´´¶£¦²®¸±´¤

, ê!& #) #é).+)0#$)7,)+ '#-&)7, -/' é , é +)7'. #)+#-& ' . +6.+)0 ç
& . .+ *)/' .) é) - é ##$6 , .))*)) &*)+ ' ç#) # ç+8- # .) /*6-.+ &
- * 0 & 6(#'! ç+)ê $ # -/' *8, ! + -! .)/, ' # $/+ , ç#) ê!&#$ +6
6& , ! + -! .)/, &*)+ ' # -. /+ é & .!' + -! .!, 6(#'!, ç+)ê , $ é8, .)
)(7 *)/ * + . # &*)+ ' *+) +ê . # * /é , *6 .!' ç+)ê6*. -! *#*)' $
é 4$6 -ç -.#) .))*)) # -* .) * .+ & $ # * -!, 6. ' /. . ç $. +# ç+ -$)
ê8& 7+ *6 .) * +#ç)' .)/ &'!&)/ .6. & #8')/'. é ##$ . .)/ 0)
* +)/'/ +6é #) , *+)46' .)/ & . ç) #-&)7 .)/, .! -/' ê # .) / +6é #) & .
-.!' * .+ $ # /(' # .!' *)+)-#&6.!. .!,

) 7. +!$.!)+ ê!& #) #é).+)0#$8'ç $.!+ ' ' #. ç $. +# '#.+)*) !-!,
- &# 0é +& '! * .+ 6*)/. * * é ##$)7 .), ' # ! ê &!)(# 8')'.
&& ' *6 .)' + $ # -ê!& .)/' '#.+#$)('.# +8'. , & .) 'é+ $#$6
-ç -.) #é#$)7 ç+ ê)/ ü/.6 ê # , *). -& ' -ê!& .#-. # /.6 '#.+#$6
)*)) 6. ' $* /é & ' +6 ç+)ê , 0 ' # * - -$6'! #)(#)/.)/*/+#.)/ *)-/
* + #. + .!' * .+ *#*)' . ç $. +# '#.+)*) !-!,)(# 8')/'.) '6+ ') .)
'#.+#$. # ' + # $)7, 6)/, $ # .) ê+!-#&)*)#)7' # ' * +)/' 6(#'
6* , .) '#.+8 , $ # .) '#.+#$6)(7 *)& ' , ! *)#$ $ # ! + -! .)/, ' # '
&6') ' .) /*6-.+ & ' # *)7-#) - && ' $ # '#.+#$. && ' &*
-. + é -.!' * .+ & .! &)+0 -$6'!, . ' && ')/ $ # .) '#.+#$6 ,)0
-.)/, +7*)/, . ' /.)$#' . ' .)/ 0)/, . ' +)-. - '

‹¹ª¶Á¹¶´»´® '®¯¶´´¶£¦²®¸±´¤ 'Â¯¬¹ª.
&7$!. , , . +6.+)0)# $ # -/ $ $+#& ' ê!&> #/)$+ +/6..#$)0)&#<$+))+ '#
-&) (#)*)#)7' # .!' *#ç -!.)/,)+ '#$, '8- #,!)*) , ê)/'* + êé *
)+ '#-&)7,) 7+),.!,)+ ' - ,.)/,*)#$ # *6&)')$7.. +)/, , (#+ .#$
$)/,*) /$7.. +)/, +#ç)'. # *6 ' 'é $.#$6$/.. +#$6.) ê & .))*)) *
6 ê#.'! DIJUJO /$ ' ,$ #+ . û' , & . ç) #$ / #(/.8'. '&#$+
.)/, *#.+ * #' *)#$)7'*)#$ /*)-.+8& . 6* ,(7) / * .+ $ # ê +.

/' é , &0 ')'. # , # $ #-& ' '!& .# .#, /0 ,)#)*) , *+) +ê)'. #
$ç -.!-!. '-*)+ ' & - .)')*) '*+ & .)*)# . #! ' * + $ # # -*)+
&/$. '-.)* +#ç)'.)/, # -*)+ /. *!+ . # *6. 0/-#$ ê + $.!+#-.#
-*)+ '6*, .) & é), !*/$'6.!. $ #>) -ê#&* <)' . -*6+# ê + $.!+)'. #
*6 ' (#+ .#$ -$!+6 * + ç !& *)/ *#.+ * # -.)/, &7$!. , ' *#ç#8')/'
* +#ç)'.>< #) -/ $ $+#& ')# /0 , &0 ')'. # , $/ #' +#$,)& , &
*6 , &N $ # * +#6+#-.) & $), 6-) /* +ê)/' # é -#& >é+ *.#$ -/-.
ü' *.7--)'. #-.!' $+!.)/,$ # # #+)7'. #-/' ê8,$. & $), !&#)/+ 8'. , ' *
$ #-& ') $./) /08' . &/$ # .#, * +#--6. + , * +#*.8- #, . -*6+# .
!&#)/+)7' /0 , 6. ')# * +#ç)'.#$, -/'é $, .) *#.+ *)/' ø& , +$.
! ' +)*) !-!.)/, * #. $. !) ê!&#$6 * +#ç)')'6, .))*)) '. ' #
ç#) # ç+ -! '. ' .!' '.#& . * - # 6. ')# # #$ - , -/'. +!-!, ' # $* +
- -. < > # ç -#$, $.!)+ , &/$. ' *)/ *)#$)/' .!' * .+ $ # '#$6.
/*)-.+8& . &)&#$ / #$ ü ù' #ô)#ò ÿ)ZQIPSNZ#DÚ#UÞFÜTö Úòþö òùî ö÷üì
Ú ÷ô òÿ #MBDL.FSJTUFNBUJD 'VOHJ ÐÚ'

&7$!. , *)/ ' $)/' -.!')& . ' 0)&7$!. ' * + & . . ')*) ' ' #)
1FOJDJMMMJVN 'VTBSJVN "TQFSHJMMVN $Té 8,) ZBMMUJOFO)ZSQJIPNZDMPUFT
DMBEJVN $MBEPTQPSJVN %FNBUJB#DÚFM+VT,) Z+QI&PNZDD+6U&FT)#
- $ *)# , * +#*.8- #, /* +ê)/' $ # -.) * +#ç)> .)ü' &*'.!7&--))'/.<# 6. '
)# $ #& .#$, -/'é $, ' # *# , & & .+# * * / + - , $ # - * +#)ê ,
)+ '#$6 *6é & * +6 /. 6& , *#ç#8')/' - & , é +&)$+ -# $, & .
' & , -. * * / + - , +# &ç ')/' ! .)*) * +)/' /$, -/' é
'.)' ê+ & .#-& ' , *)#$,$ # ' $)/'-.!'*+8.!$.!)+ '8-.!' 7. +!$.
)# *)#$, * +)/-#)/' $ 0 -$)7+) *+ -#') & 7+) ê+8& ý#) # ç+8')/' .#
* +)'. ,)+ '#$)(.)*) ' # # 7. , . ' 'é+ $#$8' . ' '8 -* '#6
* +)/' & 7+ , ê+ -.#$, 6* , &> ' ' ,<

7. +!$.!)+ &/$. '$ # -/' é ,!*#)ç#> #'ç#+)##$7<)# +#-. & .#$)
7$!. , #.' -.)/,)*))/,. &)+0)) #$ $ # 0/-#))0#$ ê + $.!+#-.#$.)/,
.!' *#ç -!- $+ , -/'é $, é +&)$+ -#8' $.#')ç) , $ # *)é & .), .+)
) .7*), & +#-. & .#$, ' *./(!, ' # -/' é , ' ê + $.!+#-.#$6 . ' &/$. '.
&0 ' . # 6. ')# -/'é $, ')/' '. () , *). ç -#$6 ê + $.!+#-.#$6 . '
/' .6.!. .)/, ' *.7--)'. # $.#' . ' -ê!& .)/'$/$ #$, *)#$,$ #' #) $
#-) # & .+#$ & #8' # .)' ') 6 $)/ *#0 ' # , *)/ 0 *. . # .)/ /*)-.+8&
.-# ê#-.)*)# . #! $é -!- (. +#$)7, -.+ -) 6>)/, *#+)'. , '<#
(#+ .#$) #).+)0#$) .))*)).)/,$ é#-. #$ ')7,' .+ 0)'. #& + # +
é+ *.#$ -/-. .#$.)*) ' # # é -#& - &)+0 -$6'!, # #$6. + *
(#)-!& . , * *.#$,#$ '6.!. , $ é8, &*)+)7'' 0)&)#8-)/'.)/, +7*)/, , +
'8- #, ⇔)'6, .))*)) /(' # .!' *)#$#)&)+0 .)/, - * +#ç)'. & /2

)+ '#$6 +/*) 6') 0)+.) 6* , . >-.#$#*<)-é . ,)# ý ' $. é '. # - /2!
* * - . +#$, -& .#$, * -!, (#. , .!, /2! , .6.!. , $ # #2 , ' +)
* .+8 #, *#0 ' # , -/'é $!.!')*) '.#& . *)/' ')$/.. +#$ * +)'. , $.
'8- #, # .!' (#-)++6*!-! . ' *# - ' # . .)# ' -! ' # ! & ' '! !)*
#+6-é . *+)-0 + # -.)/, #.' *+)-. - *6 .!' # +$ é +&#$ $. *6'!-! .
Q) $ # .!' *) /ê+ & .#$ 67 $.#')ç)8 *<+ ! .)/, *+)- # .) -$)7+)
*+ -#') & 7+) ê+8& *)/ ê + $.!+ # .#, *)#$, .)/,

^®´¦••´®•¹®¯£ Š¶¡¸¬ 'º¯£¹•²

-/ $ $+#& '!)& &#$+))+ '#-&8' * +)/-# # (#+ .#$ *+)- +&)-.#$6.
* +#ç)'. 6* , - /2! & . #$.)(#$6.!. 67 $.#')ç) /2! 6 ê &!)
.6.!. $ # *)(+ '-! $ # ' *.7-- # &# *)#$# .+6* ' ' *./(!, & . ç) #$,
$ # -/&ç -!, &)/, &#$+))+ '#-&)7, # ' *#ç#8- # '!& .) # , ' *./(!
.!' /' .6.!. ' (#)*)# -)/'.#, * +#)ê , .)/ /*)-.+8& .),)#)*) , ' # $. ! (
.!' ' *./(.)/, ø* , $ # -.#, *+)!)7& ' , $.!)+ , ç#))# .#$8' &#$+))
.-# $ # -.!' * + *. -!. ' &/$. ' !) -!.)/ /*)-.+8& .), * .)/)*))/ ' *.7--
ê + . # - ç#) 0/-#$ $ # ç#) ê!&#$ $.)'. , -.!' ç#) # ç+ -!. '
$ # .!' !&#)/+ * .>' ü<. -.)#ê & .)/, #ê ' , .) &!ê '#$6 -.+ , *)/ * .
-.) /*6-.+ & ! ! ç#) 0/-#$ -/'#-.8-) -!, *+)$. # *6 .!' # -
. ' /08' '.6, .)/ /*)-.+8& >), <#) -/ $ $+#& ' 6. ')# * +#ç)'.#$, -/'é $
')/' (#+ .#$ '. () , -.!' * + *. -!. ' #.' .6. ! *)#$ (0 ' . # *6
*#0 ' # $ # # #- 7 # -.) - . +#$6 .)/ é)/ $))/é8'. , .!' &#$+)-$)*#$
)& .)/ # #$ -.!' * + *. -! -ç -.) #é#$8' > .+ *&&. " ,<! !&#)/+
-ê#-&8' $ # + &8' ' # ' *60 /$.!

$. -.+)0 , *)/ *+)$)7'. # (#. , .!, ç#) ê!&#$, + -!, . ' &/$. ')0
0 '8, -)/- , *)/ # é .)/')# &7$!. , # .!' *+)-. - .)/, 6* , ! & ' '! -.)/, #
$ # 0 . +)/ -)/- , *)/ * +)'. # $ . .)' & . ç) #-&6 .)/, $ #)(# 8')/'. '6
/ #$. ' /*)-.+ & . ' 6*)/ ' *.7--)'. # # #$6. +)# &7$!. , * +)/')(6
)(#$6 $ # .) $#.+#$6 .)*) ' # -!& '.#$) ç#) # ç+ . , # #$. ' */+#.#
6* ,) 2 && .!> < *#*)' &# ' # 0 +)/- & . ç) *)/ *+)$)7' ' # ! !&#)/
*#) 6(#')/ * +#ç)'.), $ 6*)/ !&#)/+ . # ! *)#$.)/, ü/.6 -/&ç '
.!, & . 0)+ , *+ .)' ' *6 .!' * -& .#$.)/, & &ç+ '! $ é8, & . .)* . # ! "5
*+)$ #& ')/ ' ' # ! & . 0)+ é+ *.#$8'>/-. .)#,$8' &<ç ')'. , /*62! .#,
/2! , * +# $.#$6.!. , $ +). ')4 8' $ # & ' '!, *)/ &0 ' . # - +$.)7, &
#$ -.)/, ý.' . 0 #'6& ' ê+ & .#-&)7 $ # -ê!& .#-&)7 $+)7-. , * . ' *
*)/ *)#$)/')# &7$!. , ' # +$. -> !é##)& -'/ $< $+#& ' !&#)/+)7'
#-ê+ & .#-&)7, -.) /*6-.+ & 6* , $+# & 7+ , $ #>*)+.)$ * . ' , <

•ª»¡•¦®´ ’¦r¬±¦¹®¯Á šµÁp¦r¶´

* (+ -)& ' '& /2! 6 +#é&6& . ç !.8'$ #* + .!+ - ' * #. .!'ê+ -!$
)+ é& ')#)*))#é ' ##$ ') ' # $+ ')/'&). ç *)//0 -. '. #& . (7 . '& .
)*) (#. ,.)/&)/6 $)/.!,* !+)0)+ , ' # 7' .)' * + .!+!é)7'ê + , .!'
/*)) #-. .!'-/ $ $+#& '! #* & .#$ + - .)& ' *)/& . é!$ '* +#
& . ç !. , ! . & $! $7& .), . ' 0 -& . ' 0é)+#-&)7 *)& ' , ! *). -& .#$
(6+/(! .!, * !+)0)+ , * . 7êé! & ê+ -!)+ é& ' & -!, # -. - ' 6* , ! ü'
7+# ' /'#-. -8' 1SJODJQBM $PNQPOFOU "OBMZTJT 1$")&)*) !-!, 6*
$. /-. ,)JFSBDIJDBM "HHMPNFSBUJWF $MVTUFSJOH)"$ $ # *+6ç
ÿ# $+#.#$ ü' /-! -JOFBS %JTDSJNJOBOU "OBMZTJT -%"

&). ç *)/ *+)$7*.)/' & . (7 . ' & . ç !.8' *)/ *+)- #)+)/' .)& ' *+)-0
.!' /' .6.!. . (#'6&!-!, .)/, - $ - #, ') 6+#é&), ' &ç ' # $ & * !+)
-ê .#$ & .#, & . ç !. , *)/*+)- #)+)/'$ *)# $ -! .6. ! ' .!-!. '&). ç '-.!
- ' ê + $.!+#-.#$. ')& ' ' $ #Ú)ô)&ý öïøòý ùòúô 6OTUVQ6FSWJTFE
*+ $.#$ -!& ' # * , *+ & .)*)# . # $. !), ê), '.)& ')&)*)#)7'.
$ *)# -/ $ $+#& '! * (+ - .!'$.!)+ /.8'.)')+ é& ' ' $ #!1$" $ #!
7&0 ' & .!'1$" 6. ') +#é&6, . '& . ç !.8'.)/ & .), & # é - -!& '.#$ &#
6* , *ê ' . #- 08, /$) 6. +!! + 0#$.)/, * #$6'!-!$ # (+ 7'!-!7* +(!,
$ - ' ' $.#$) 6+#é&), .!,)"$ /*)) # .#, & .+#$, *)-. - #, & .
.#&8' . ' & . ç !.8' # $ é * + . +!-! $ # -.! -/' ê #)&)*)# $ ' , .#, * +
*)/ ç+ -$)'. # *#) P$)'. P & . (7 .)/,

-.6-))# -ê - #, & . (7 . ' & . ç !.8' ' # -/' é , (#+ .#$ *) 7*)$, $ #)#
WJTFE 6+#é&)# ' ' # +$.) # .!'. (#'6&!-!. ')& ' ' -)& , 7-
.) *+6ç !& ' 7 . # *6 .)' $) .!, !ê '#$, é!-!, & - .!, (#)*) !-!, -. .#-.#
&)'. ' & é!-!, $ # *+6ç 2!,)' !)&)*) !-!. ')& ' Ó&ý öïøòý* ùòúô
4VQFSWJTFE $ 8 F, *+#'.!'. (#'6&!-!. '* + .!+ - '- $ - #, ê # !&#)/+ !é ' &
*6 * + .!+ - #, ' 0)+ , # $ - #, /.8'. '* + .!+ - ' ' # $. '*+). + ' ' -
$ #. -. .#-.#$ ê + $.!+#-.#$.)/, *+)- #)+)/'.!'*#é '6.!. &# ' * + . +!-
- & *6 /. , # ê + $.!+#-.#$ & é)), . (#'6&!-!, - /. .!'$.!)+ ' # $
.!'& é)) /. 6. ' ' . #!* !+)0)+ # .#, $ - #, . '* + .!+ - ' ' 0)+ , #
.#, $ - #, /. , & ê+ -! + &&#$8')+ ' MJOFBS CPVOEBSJFT

.) $ 0 #) /.6 é * +)/-# -. ' /.#$.) & é!& .#$6 /*6ç é+) .!, & é6)/ 1$"
.!, & é6)/ ü' /-!, * ' $ - # #)/- , .#& , 4JOHVMBS 7BMVF %FDPNQPTJ
é é & # é)7')# & é))#)"$ $ # -%" *#*)' é * +)/-# -. ' .+6*), (#) 6
*6)-!, .)/ &)'.)/ &# , TVQFSWJTFE . (#'6&!-!, & ê+ -! .!, & é6)/ -FBWF
7BMJEBUJPO $ # $. ! ' + ' ê)/ é # , . '*+)ç 2 '6* ,) $POGV
* -!, -.) + +.!'&* + . é '. # . ç -#$ -.)#ê -. .#-.#$, .)*) ' # * +
# .!'$. '6!-!. '& é6 '

˜¹¦¹®¸¹®¯£ ±¢r´©´· ¦²¡•º¸¬· 1SJODJQBM $PNQPOFOU "OI
1$"

‡²¡•º¸¬ µ¤²¦¯¦¸ª ®©®¡«´º¸ª· ¹®±¢· 4JOHVMBS 7BMVF %FDPNQPTJUJ

õ' ,* ' $, . .+ '#$6, &! ê #.! /' .6.!. ' ' /é - .+ #, *#& +)/,* ' $,
.!' & é)) ' /-!, # #)/-8' .#&8' õ-. ' ,* ' $, & p# -.'- #-!
+ & .))# . # & - .!,* +)'.)*) !-!,

$$9 = U\ V^T$$

6*)/) * ' $, 6 ê # #n-.n-!) * ' $, ê # # n. p! $ #) * ' $, 7 ê #
-. p! p # * ' $, 6 $ # 7 ' # *+ & .#$) &)' #)# ! #-ê7 # 6.#

$$U^TU = UU^T = I$$
$$V^TV = VV^T = I$$

* ' $, ê #.! &)+0

$$= \begin{pmatrix} \Sigma_{+} & 0_{r\ (p-r)} \\ 0_{(n-r)\ r} & 0_{(n-r)\ (p-r)} \end{pmatrix}, \quad \Sigma_{+} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_r \end{pmatrix}$$

6*)/ S) ç é&6, .)/ * ' $1 $r #)# # #)/- , .#& , .)/

þ# .!' 7+ -! . ' *#' $ ' 6 $ # 7 é /*)) #-.)7')# # #).#& , $ # . # #) # '7
*#' $ X^TX $ XX^T -ê7 # 6.#

$$X^TX = V\Sigma^TU^T\ U\Sigma V^T = V\Sigma^T\Sigma V^T$$
$$XX^T = U\Sigma V^T\ V\Sigma^TU^T = U\Sigma\Sigma^TU^T$$

6*)/

$$\Sigma^T = \begin{pmatrix} \Sigma_{+}^2 & 0_{r\ (p-r)} \\ 0_{(p-r)\ r} & 0_{(p-r)\ (p-r)} \end{pmatrix}$$

&

$$\Sigma_{+}^2 = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_r^2 \end{pmatrix}$$

6*)/)# -. , .)/ 7 * +# ê)/' . # #) #X'7X-&$.#))/# 8'#), * $ *, +# ê #
.#, # #).#& , .)/ ü'. -.)#ê)6 $ #.)XX + .!+ . # * ,) 7 $ #)
* +# ê)/' . # #) # '7-& . $ # .#, # #).#& , *)/- .)/ *) * -# -.#$)/ * +)
* ' $ -/' # $7& '-!,*) /& . ç !.8'./*)*)#!& ' ')& ' '-7&'0 ' &é8!-ê -!
6& ,) ê # &! '#$, Q S &! '#$, -. , $ # Q S &! '#$,$ # && , -.#,
é 0 #+ é)7' /. . &! '#$ -.)#ê *6 .)' $ é8, $ #)# -. , *)/ /. é &!

-.)/, 7 $ # 6 *)& ' , é #-ê7 # 6.#

$$\left(\begin{array}{l} X^T X = V \quad {}^T \quad V^T = V_{(p \quad r)} \; {}^2_{+} V^T \\ X X^T = U \quad {}^T U^T = U_{(n \quad r)} \; {}^2_{+} U^T \end{array} \right) \quad X = U_{(n \quad r)} \; {}_{+} V^T_{(p \quad r)}$$

-. u_i $ v_i 6*)/ '.#-.)#ê)7'-.)' 6 $ # 7 é ')'. # *6 .#, -ê - #,

$$\left(\begin{array}{l} X V_{(p \quad r)} = U_{(n \quad r)} \; {}_{+} \\ X^T U_{(n \quad r)} = V_{(p \quad r)} \; {}_{+} \end{array} \right) , \quad \left(\begin{array}{l} u_i = \frac{1}{{}_i} X v_i \\ v_i = \frac{1}{{}_i} X^T u_i \end{array} \right)$$

#) # '7-& . -.)')+é) 8'#) * ' $ 6)')&)'. # +#-. + # #)'. # '7-& . .) '. -.)#ê -.)')+é) 8'#) * ' $ 7)')&)'. # (# # #)'. # '7-& . .)/ '.# *)/ . *+)- #)+ # ' . # *6 .!-ê -!

$$u_i^T X v_i = v_i^T X^T u_i = \quad {}_i$$

.!' ' /-!- # #)/- , .#& , ê)/' . /.6ê+)' *+)- #)+#-é)+é) 8'# , ç - #, . -- +#, é & #8 #, /*6ê +)/, .)/ * ' $ " # '7-& . .)/ 6 *)/ '.#-.)#ê)7' &! '#$, # #)/- , .#& , *).)7' ç -! # .) ê8+) . ' -.! 8' .)/ " '8 . /*6)#* ç -! # .)' +#-. +6 &! '6ê +) .)/ " # '7-& . .)/ 7 *)/ '.#-.)#ê)7'-.#, &! &! # #)/- , .#& , *).)7' ç -! # .) ê8+) -. ' + &&8' .)/ " '8 . /*6)#* ' # ç .) &! '6ê +) .)/ "><

‡²¡•º¸¬ ±ªrÁ©´º 1SJODJQBM $PNQPOFOU "OBMZTJT 1$"

-. .#-.#$ & é)), 1SJODJQBM $PNQPOFOU "OBMZTJT ç+ -$. # & . (7 . '*
+ /'!& ' '-. .#-.#$8' & é6 ' ' /-!,)& ' '*)/-.)ê 7)/'-.!' & -!. ' & . ç !.
*)/-/&& . ê)/'- ' * + & ç -#$ # .!, & é6)/ ' #' * +# + 2 #.!' # $7
* +)/-#)/')# # 0)+ .#$,* + .!+ - #, '6, -/'6)/*) /& . ç !.8')& ' 'ê+!-#
' ') -7')) & . ç !.8' . 1SJODJQBM $PNQPOFOUT #' , /. , & . ç !. ,
0é ')/- - #+ -!& '.#$6.!. , ! .) *+8.) QSJODJQBM DPNQPOFOU * +# + 0
& 7. +! # $7& '-!-. +ê#$)& ' .!-/' ê # .) 7. +) QSJODJQBM DP
8-. ' * +# + 2 #.!' 6-) .) /' .6' & 7. +! # $7& '-! *6 .!' '. -.)#ê!/*) #*6
.!' *+)5*6é -!*, ' # -/-ê .#-.) & .) *+8.) QSJODJQBM DPNQPOFOU #
$ # # . /*6)#* QSJODJQBM DPNQPOFOUT 5P '.#$ & ') .!, * +)7- , '
' . *+8. ê#-. DPNQPOFOUT &*)+)7' ' * +# + 2)/' -ê 6' .! -/') #$ # $
)& ' ' & ê#-.! *8 # * !+)0)+ , & #8')'. , .#, # -. - #, .)/ +ê#$)7 ê
-. - #, .)/ ê8+)/. ' DPNQPOFOUT ' /-! é *+ & .)*)#!é & ê+ -!.!, &

'ªr´©´•´£¤¦

™ºµ´µ´¤¬¸¬ Šª©´±¢²•² 4UBOEBSEJ[BUJPO
õ-.) * ' $, *) /& . ç !.8')& ' ' & # -p -)#),*)), * +)/-# . #
* + $. -.) ê & # #$ - .!, ./*)*) !-!, * +# &ç ' #.!' 0 + -!.!, & -!
.#& , .!, $ é & . ç !. , -.#, O * + .!+ - #, *6 .#, '. -.)#ê , .#& , $ # -.!
.! # + -!. ' .#&8' /.8' & .!' ./*#$ *6$ #-!.!, '. -.)#ê!, & . ç !. , !
.!' . .+ '#$ + .!, # $7& '-!, - /.8' . '*+ ('* +)'. #. ./*)*)#!&
)& ' !) * 'X$ 6* , 0 ' . # -.) ê & & .+#$ +&!' .!,
#$ - , /. , * +)/-# . # $ # * # $.¥ *ê+)& #)+ . # , & . 0)+ . '
)& ' '-.!' +ê . ' (6' ' $ # *#ç) ./*#$, *6$ #-!, -!, & -/ $ $+#

ê & Ñò ùò þö÷ë ÷îö ùîõôùî ö÷ë ýòþöðþî ë ôÿ ýüýüìô ôÿ ñòñüùêú
ôú ñöîñö÷î ìî ôÿ ýüýüìô ôÿ î ñòñüùêúî ê ü ú ùê ô öùë ü ÷îö ýö÷
ì ô ùò

& . -ê!& .#-&6, ' * + - #.)& ' . & . 0 + # 6 -.!' # $ &
' $!./*)*) !-!, *+)$7*. # $ é8, -.!-/' ê # é ê+!-#&)*)#!é)* ' $, -/' #
))*)), ' # (+.!& '), *6 .#, # -. - #, . ')& ' ')'6, .))*)) *!+

'.)' .!' ' /-! *)/ $))/é & . -ê!& .#-&6, /.6, #-) /' & & .!' & . .+
.)/ * ' $ -/' / $7& '-!, - * ' $ -/-ê .#-!, $ # -/' *8, .)& ' &*)+)7' *)'
' /é)7' -/) #$><

•¶®¸±Á· ¹•² 1SJODJQBM $PNQPOFOUT

U) *+8.) QSJODJQBM DPNQPOFOU . ' * + .!+ - ')+ . # ,) + &&#$
Y_1 . ' +ê#$8' & . ç !.8' .)/)*))/ ! # & .#$ # $7& '-! ' #!& 7.
$ é) + &&#$6 -/' / -&6

$$Y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = B_1^T Y$$

6*)/ $Y = [x_1; x_2; \cdots; x_p]$)# & . ç !. , *)/ '.#-.)#ê)7'-.#, -. , .)/* ' $)& ' '
é8, ! # $7& '-! &*)+ ' /(' . # *L * #+)' * 8, /(')'. , .)/, -/'. -.
$B_1 = [a_{11}; a_{12}; \cdots; a_{1p}]$)#)*))#)')&)'. # ç +! é *+ * # ' *#ç !é $. !
* +#)+#-&6,))*)), #$ ')*)# . # *6 .!' $$Y_1$$)'#!$)*) !-! .)/

$$B_1^T B_1 = 1$$

U) 7. +) QSJODJQBM DPNQPOFOU ' #Y_2)&+.&'&#7$.6+!/& / -&6,+!
& .#$ # $7& '-! $ # .)/)*))/)$B_2^T = [a_{21}; a_{22}; \cdots; a_{2p}]$ é *+ *
' /* $)7' .)/, * + $. * +#)+#-&)7,

$$\left(\begin{array}{l} B_2^T B_2 = 1 \\ B_2^T B_1 = 0 \end{array} \right)$$

7. +), * +#)+#-&6,))*)), ! 8' #.!')+é) '#6.!. . ' # '/-& . 'B $
ç ç #8' # * , . QSJODJQBM DPNQPOFOUT ' #$ é . & . (7.)/,

U # #$ - /. &*)+ ' -/' ê#-. & ê+#' $. -$ / -.)7' Q QSJODJQBM
6- ! $ #)# +ê#$, & . ç !. , .)*) -ê!& .)/' &# ')+é)$ ')'#$
-.)' ê8+) . ' Q & . ç !.8'

Uü0)7 *+)- #)+#-.)7')# ')# ()' , . ' QSJODJQBM DPNQPOFOUT .6.
&ç ' # &# ' -/'. . & '!- $ é ()' !)*))')& . # TDPSF .!, * + .
-.) '. -.)#ê) QSJODJQBM DPNQPOFOU é8, 6& , ! # $7& '-! . '
* * + -& '! -/' é , . *+8. 7) .+ DPNQPOFOUT ' # +$. # ' .! -/
& &#$+ , *8 # , /' *8, ' ' # ' $)' /*)) #-.)7' $ # . Q DPNQ
&)' ê . *+8. 7) .+ ü/.6 * +)/-# . # + 0#$ #.é ê &
*+)- #)+#-. $ # -.! -/' ê # & & é!& .#$ $+ ç #

ê & Ñò ùò þö÷ë Ïúîýîþé î ô îû ú ú QSJODJQBM DPNQPOFOUT
IUUQT XXX DIFSJD PSH óMFT FEVDBUJPO DZCFSMFDUVSF E

šµ´•´£®¸±Á· ¹•² 1SJODJQBM $PNQPOFOUT ±ª s¶£¸¬ ¹¬· ±ªrÁ©´º 47%

U é8,.)*+8.) QSJODJQBM DPNQPOFOU '.#-.)#ê -.)' + &&#$6-/' /
& . ç !.8'))*)),é $0+ #.!'& #-.! # & .#$ # $7& '-! é *+ * #
6.#

$$7B(SY_1) = 7BSB_MY^5 = NBY$$

6& ,#-ê7 # 6.#

$$7B(SY_1) = 7BSB_1Y^5 = B_1Y^5Y_1^TB$$

* # .)Y ' 0 + . #- $ é *#é ' .#& *)/ ç ')# & . ç !. ,-.#,O * +
.6. .) #'6& ') '.#-.)#ê -.)'* ' $ -/' # $7& '-!,. ' +ê#$8')& ' '-7
& .!-ê -"! !

$$BY^5Y^TB = (n \quad 1)B^T \quad B$$

*)& ' ,-7&0 ' & .!-ê $!# .!-ê -! . ç +!.)/ *+8.)/ QSJODJQBM DPN
QPOFOU é *+ * #' '.#-.)#ê)7'-.! & #-.! # $7& '-! !

$$B_1Y^5Y_1^TB = NBW\Psi 9^T 9V^T = NBY^T = NBY_+^2$$

6*)/)$_+^2$ * +# ê # . . .+ ' . ' &! &! '#$8' # #)/-8' .#&8' .)/ * ' $
. ')& ' ' 47% *)& ' ,.) # #) # '/-& *)/ '.#-.)#ê -.!' & #-.!
.#, # #)f#&$_1$::;; $_p$g .)/ * ' $ -/' / $7& '-!,. ')& ' ' é *+)- #)+ #.
ç +!.)/ *+8.)/ QSJODJQBM DPNQPOFOU ü'. -.)#ê *6.! 7. +!&
+)$7.)/' . ç +!.)/ 7. +)/ QSJODJQBM DPNQPOFOU $) $ QS
OFOUT *)/ ' # * + .!. # .!' * +# + 0 .)/ & 7. +)/ *)-)-.)7 #
$7& '-!,*+)- #)+)'. # *6.)' +#é&6 . ' &! &! '#$8' # #)/-8' .#
* ' $ ø- , *6 /. , ' #* + *)/&! ' *)++ *.)'. # * -!,& $. ! $+
< >

U) *)-)-.6 .!, (!)7& '!, # $7& '-!, FYQMBJOFE WBSJBODF SBUJP
QPOFOU ' . # *6 .! -ê -!

$$\frac{P_{i}}{\sum_{s=1}^{p} s}$$

6*)/¡ ! # #).#& .)/ * ' $ -/' # $7& '-!, *)/ '.#-.)#ê -.) J)-.6 DPNQP
*)-)-.6 .!, -/-- + /& '!, # $7& '-!, *)/ $0+)/'. K *+8. QSJODJQBM D
DVNVMBUJWF FYQMBJOFE WBSJBODF SBUJP é ' . # *6 .! -ê -!

$$\frac{\sum_{j=1}^{i} P_{j}}{\sum_{s=1}^{p} P_{s}}$$

U TDPSFT . ' QSJODJQBM DPNQPOFOUT # $ é * + . +!-! é ')'. #

$$T = U$$

6*)/)# -. , .)/ * ' $ 6 * +# ê)/' . +#-. + # #)'. # '7-& . .)/ * '
. ')& ' ' $ #) * ' $, .#, # #)/- , .#& , .)/ ! .#, . .+ '#$, +
. ' # #).#&8' .)/ * ' $ -/' # $7>& '-!), ê & -/')2 . # ! & é)),
1$" & - *6 .!' ' /-! .)/ ./*)*)#!& ')/ * ' $. ')& ' ' & .!' & é))
47%

U 0)+. . ' QSJODJQBM DPNQPOFOUT MPBEJOHT é ')'. # *6 .!

$$r_{ij} = \frac{v_i \sqrt{\ }_i}{\sum_{ii}^{2}}$$

6*)¼ .) # #) # '/-& .)/ J)-.)7 DPNQPOFOU 6* , '¡ .! # #)6. #!& ê -!
.)/ * ' $ -/' # $7& '-!, *)/ '.#-.)#ê -.) J)-.6 DPNQPOFOU DPNQPO
$7& '-! .!, J)-. , & . ç !. , J)-.6 # 8'#) -.)#ê) .)/ * ' $ -/' # $7
-ê -!') 0)+.) '6, DPNQPOFOU $0+ # .! -/-ê .#-! .)/ & .!' $ é
& . ç !. . ' +ê#$8')& ' '

U) $+#. +#) *#) , .)/ +#é&)7 . ' QSJODJQBM DPNQPOFOUT ç - .
* ' $ -/' / $7& '-!, . ')& > ' <# #$). + (#)*)# . # .) $+#. +#) .)
P $8' P -7&0 ' & .))*)) # .!+)7'. # . *+8. DPNQPOFOUT # .)*
.!, -ê -!, -/' ê # ' & . ç . # & +)+) +/é&6)')& - P $8'
+)$7. # $ é8, ' !&#)/+ !é ' + 0!& /'.!+ - ê -!,)/ +#é&)7 . '
DPNQPOFOUT # .!+)7'. # . $ ' . DPNQPOFOUT *+#' .) + 0!& *
P $8' P + 0 & . /.)')&)'. # $+!&') + 0 & . $ # é ê+!-#&)*
$. '8, -.!' * +)7- + -

Uø. '.)& ' *+)ç !é)7' -.)/, ()' , . ' QSJODJQBM DPNQPOFOUT 6*
!&#)/+)7'. # . TDPSF QMPUT $ é8, '.#-.)#ê)7' -.) + 0!& . '
QSJODJQBM DPNQPOFOUT -/' +. - # '6,)/ DPNQPOFOU . +
/' .6 ' * + .!+!é)7')&)*)# - #, . ')& ' ' - -/ $ $+#& ' , $ - #,
)*) , *+)$7*.)/' *6 ' &). ç . ' .#&8' . ' & . ç !.8' !&#)/+ /.
. ' $ - ' ' $ # -.!' ! *#ç *6& '! VOTVQFSWJTFE . (#'6&!-! $ # '
$ *)# *#*+6-é .! * !+)0)+ # .)& ' ' .!-! /.8' . ' $ - ' é
*). - # $/+ +ê) -.6ê) .!, * +)7- , #* & .#$, + - ,

/')2)'. , .!' # #$ - 7+ -!, . ' QSJODJQBM DPNQPOFOUT $ é8, $ # . ' T
* + . +!-! & - .!, 0 +&) , .!, & é6)/ 47% -.)' * ' $. ')& ' ' * + . é .
ê & & é)), 47% ê+!-#&)*)# . # -.!' 1$" # .!' ' /-! *#' $ ')#)*))# * +
-!& '.#$ * +#--6. + , & . ç !. , -/ $+#.#$ & .#, * + .!+ - #, ') * ' $,
* +# ê #-!& '.#$ # 6. + ,& . ç !. , ' 0)+#$ & . & . .6.)# & é))# *)/ ê
' # # 0)+ .#$, 6* , # * + # & ! & é)), *) * -# -.8'-BHSBOHF & 0
-ê -! -/' / -.#$ & .)/, * +#)+#-&)7, .!< >ê -!,

ê & à ôùî ö÷ë îúîýîþé î ô òûîð ðëÿ üö òì ú ôÿ 1$" ùê ôÿ îúéø ô
ü ýìúî÷î ýüýüöôùêú ú ñòñüùêú ú ùò 47%

•ª¶¦¶s®¯£ •±¦©´µ´¤¬¸¬ ¯¦¹¡ ˜º¸¹¡©ª.

6+#é&)# # + +ê#$,)&)*) !-!, $ # # #$6. + !# + +ê#$)&)*) !-! $.
BSDIJDBM "HHMPNFSBUJWF $MVTUFSJOH)"$ ' # ' VOTVQFSWJTFE +
- /+7. + ,)& ,)#)*) , ')/' .!' /' .6.!. (+ 7'!-!, &). ç ' *)/ /* +ê)/'
)& ' - -ê -! & &# *)#$# & . ç !.8' .!' * + *. -! .!, &)*) !-!, $. /-.
!)*) *). &# & é)) . (#'6&!-!, P *6 $. *#+P)UUP*N'&#Q -/)
& &)' & ' ')& ' ' # ê + . # - /*)-7') & $+#. +#) .!' & . (7 .)/, *6-. -
0/-#$6 ê8+) . ' & . ç !.8' .)/,)& ' /.8' . '/*)-/'6 ' * +)/-#)/' .!' & #-
/' .)&)#) ' # '8 .)& ' $.6, . '/*)-/'6 ' é +)7'. # & . (7 .)/, ')&)#)
+ +ê#$)+ ' -! . '/*)-/'6 ' -/-. ' '.#-.)#ê -.!' #)ê#$)&)*) !-! .)/,
8-. - $ é ç & . (#'6&!-!,)# -/-. ,*)/ ' $)/' -.!' #)& ' ' # *#) 6&)#
.)/, *6 /. ,*)/ ' $)/' - ,)& ,

é * *).!, # + +ê , '.#*+)- * 7 # &# -/ $ $+#& '!)&)*) !-!. ')& ' '-
)& , * + .!+ - ' $ # *)& ' ,) 6$!+! ! # + +ê '.#*+)- * 7 # &# # . . &
. .)# ')&)*)# - ' (+. . # *6 .)' ê+ -.! .)/)+ é&)/' *)0 - - # *)#) * *
/* +ê # '.#*+)- * 7 # *+ & .#$ &# ¥0/-#$ ¦)&)*) !-! & .!' '')# 6.#)# *
$ é & *6 .#,)& , .!, ' # +$.)&)#6. + , & . (7 .)/, - -ê -! & .#, * + .!
ê)/' ' . é - # 0)+ .#$,)& , - /.6 .) * *) # -/ $ $+#& ')# 6+#é&)
($#')7' & .!' $ é & &)' & '! * + . +!-! '6, & .), & / * + .!+ - #, ' *).
& &)' & '!)&4JOHMFUPO $MVTUFS6 . ç & . . (#'6&!-!,)# 7))&)#6. + ,
* + .!+ - #, -/' /)'. # - &# ' $MVTUFS)'. , .-# &# # 6. +!)& - $ é
/2! 6. +) * * >)< /' *8, *+ * # ')+#-. ' & .+) # .)' *+)- #)+#-&6 .!,)&)#
& . (7 . ')& ' . ! ! *#) & .+)/ *). ! & .+#$ *6-. -! & . (7 . '-!&
*)/ *).)7'.#,)& , é8, 6& , * +#--6. + *6 ' -.)#ê /* +ê)/' '.6, . ')&
é *+ * # *#*)' ')+#-. ! $. ! ! & .+#$ *6-. -! *)/ é *+)- #)+ #) 6
DMVTUFS $ # 6ê# & &)' & ' -!&

õ-. ' -7')))& ' ' .))*)) * +# ê # .#, +J.!+ - #, + . # ! -.)#ê #8 !,
*6-. -! & . (7 7) -.)#ê ' .) *6-. -! +)$ #& ')/- $ é ç & ' *#)7'. 7))&)#6. + /*)-7'))+ . # !
-7' -!, -JOLBHF %J(TXU;BXO)DF6*)X $ X 7) ./ê /*)-7') *)/ !&#)/+ é!$ '
- ' -. #) .!, . (#'6&!-!, ø. ' 7) /*)-7') *).)7' &')-7 ê7 # 6.#
D(x_i;x_j) # -/' é #, .+6*)# !&#)/+ , *)-. - ' -7' -!, ' # .+ #,)# .7*)# . '
* +)/-#)'. # * + $ $ # ! & .+#$.)/, * #$6'!-! -.) -ê &

U‡µ•£ ˜Â²©ª¸¬ 4JOHMF -JOLBHF

$$(X_i;X_j) = \underset{x_i 2 X_i;x_j 2 X_j}{NJO} D(x_i;x_j)$$

U–•£¶¬· ˜Â²©ª¸¬ ±¢¸• Š®¦±¢¹¶´º $PNQMFUF -JOLBHF %JBNFUFS

$$(X_i;X_j) = \underset{x_i 2 X_i;x_j 2 X_j}{NBY} D(x_i;x_j)$$

U'¢¸¬ ˜Â²©ª¸¬ (SPVQ "WFSBHF -JOLBHF

$$(X_i;X_j) = \frac{1}{jX_i jjX_j j} \underset{x_i 2 X_i}{X} \underset{x_j 2 X_j}{X} D(x_i;x_j)$$

ê & Ïýòö÷ úö ô úîþ ë ò ú úñò ôÿ üö üýüìòÿ ýþü ñöüþìóü ú ü ÿ
ïî ö÷ü ÿ þ ýü ÿ ò þò ôÿ ôÿ îý î ôÿ ùò îû ú ýü ú ø ú òøé ö ô îý
ùò îû ú ôùòì ú ú éñ ú îþö òþé ùêðö ô îý î ô ùò îû ú é
ñöéùò þüÿ ÷êú þü ùê ô öùë îý î ôÿ ùò îû ø ú ú ôùòì ú ú
ñòûöxé <

$)+&6,.)/)+ é&)/.!, &)*) !-!,$. /-. ,-/&*/$'8'.#-. (,ç &.

ü+ê#$)*) !-! #$ $ é .!' '. -.)#ê!)& .)/ TJG H M F-U R & -.

ø-)* + & ')/'.)/ ê#-.)' 7)-.)#ê -.!' -.

U *#) $ $.-# 8-. !-/' +.!(- ;) ' ê#-.)*)# .#&.(7 6 '
.' / 8'

U ')*) !-!. = [$ #*+6-é -)/-.! -. & * + ! ! 0 + -!
.' $ $

ÿ!&#)/+ ' +) + && .), !-ê!& .#$ * #$6'#-!.!, # #$ - ,)&)*) !-!
.). /.)-.)#ê)*)/ *)& ' # = .

+ 0#$ '* + -. -!.!, '. + # #$ - ,)')& .# ' +6 + && -ê -!.)/
& '' - . +#$6 $ & ç))T)*)), * +# ê #.) /* 7')- 72) = j
6*)/.)-7&ç)).!, *6 /.!, .#& , ! 8' #.)' * ê +# é- &') ê)# !&#)/+)7'. #
)+# 6'.# , $& , *6 .)' $ 6 & ç), T.)/, 7) 7. +)/, $6 & ç) $, # T & =
[$ \ = ; ü') & .)'.7*).!, -7' -!,. ' +) + && . &*)+ ' # 0 +)/'
$ é8,)# $6&ç)# !&#)/+)7'. # - # 0)+ .#$ -!& + $.!+#-.#$6 * + #
-ê & -.))*)) * +)/-# . #) # 0)+ .#$6, .+6*), !&#)/+ , . '-/-. ' ')
-7' - .)/,

ê & Ñþî ö÷ë îýòö÷ úô ô ôÿ öòþîþ ö÷ëÿ üùîñüýüìô ôÿ ÷î é éñòÿ îú
üú þ ýü úñò ôÿ ú ýü ú ø ú ò ÷éõò ïëòî ôÿ îûöú ùô ôÿ<

‰ ¶ ¦ ± ± ® ¯ £ Š ® ¦ ¯ ¶ ® ¹ ® ¯ £ ‡ ² ¡ ¾ ‰ " ¸ ¬

Ñ þ î ù ù ö ÷ ë Ò ö î ÷ þ ö ö ÷ ë Ï ú é ø ô - J O F B S % J T D S J N J O R O U * O B M Z T J T! - % "
T V Q F S W J T F E & é)) . (# '6 &! - !, . ') & ' ' - - / $ $ + # & ' , $ - #, # $ - #
* 6 .) & ' $ * U S B J O J O H T F U) ! * ! +) 0) + .!, $ - !, *) / ' $) / ' ' #
$. ' * +). + ' ' -. þ # $ é $ - ! *) / !& #) / + . #) +) '. # . - . . # - . # $ &
* + .! + - '.!, 6 * ,) # & . # $ 6, & -), & $ # ! # $ 7 & '- ! - ç - ! /. . & é ! &
) + # -. $ # $. ! ! - / ' +.! - ! * / $ ' 6.!. , * # é '6.!. , # $ é $ - ! # * + . + ! - ! &
. (# ') & ! é - & * 6 .!, $ - #, .) / - . $ * / - !, & ê + - ! .) / + & .), (# '6 &! -
B Z F T 6. ' /.6 0 + &) -. - . !' * +) ' 0 + 6 & '! - / ' +.! - ! * / $ ' 6.!. , * # é '6.!. , þ
! - % " ' !. .!' $ '! .!' $. 7 é / '- ! * .!,) *) , é * +) ç ! é) 7 '.) & ' $ #
& 0 ') / '.) ' *). - & . # $ 6. +) # ê + # - & 6 & . (7 . ' $ - ' .) /, & é ! & . # $ é
. ' * +) ' 0 + 6 & ' ' '') # 8 ' * +) / - # . # - . ! - / ' ê # / . , . !, '6.!. ,

Ž ª Ã ¶ ¬ ± ¦ ¹ ¦ ³ ® ² Á ± ¬ ¸ ¬ · ¹ ´ º # B Z F T

õ - . & # * + . + ! - ! & # '/ - & &ä . Y ç !!) 8) * + * # ' . (# ') & ! é - & # *6 . #,
, $ - #,) & ' ' *) / / * + ê) / ' # é - # & , õ - . * - !:, !! &) * .) ç) ' .) & . #
& . ç !. *6 $ + 3 F ! T, Q P O T F 7 B S S J B C M F / . *) / é * +) - #) + - # .) ' + # é & 6 . !, $ -
*) / ' $ # ! * + . + ! - ! & # ä 'Y - & * # *) ' . é . k # ! -, / ') # $ * # é '6 1 ! S J P S
1 S P C B C J & M J U / Z é * # & '! * + . + ! - ! *6 'O * + &! + & - #, ' ' $ # - . !'
$ - ! L $. 6, $ # ' ' . # - ' (. + # $ * ! +) 0) + ! * # é '6.!. / . ' . # *6 . !
- ê - !

$$\hat{\pi}_k = \frac{n_k}{n}$$

6 *) / n_k) + # é & 6, . ' * + . ! + - ' .) / & .), *) / ' $) / ' - . !' $ - ! L . ! - / ' ê #
) + . # ! - / ' +.! - ! * / $ ' 6.!. , * # é '6.!. , # .!' $ - ! L

$$f_k(x) \quad 1(X = x \mid Y = k)$$

!) *) * +) - #) + # . !' * # é P ' 6 U F S J P S 1 S P C B C J M J U Z + # . !' . # & Y
' ' # ' - . 6 6. # ' $ # - . !' $ - ! L :! L ' ' ! G ' # $. /2! .6.
/ * + ê # - ! & '. # $ * # é '6.!. & # * + . + ! - ! - . ! X L $ - ! ' ê #
) é 8 + ! & .) / # B Z F T ' < # - . + 0 # . !' * +) !) 7 & '! - ê - ! ! 8 ') '. , * 8, ! * # é '6.!. &
* + . + ! - ! ' ' $ # - . !' $ - ! L ' ' # ä - Y 6 6 ! # . # *6 . ! - ê - !

$$p_k(X) = 1(Y = k \mid X = x) = \frac{\pi_k f_k(x)}{\sum_{l=1}^{K} \pi_l f_l(x)}$$

*) & ' , # ' . (# ') & ! é ! * + ä Y ! é ! & + * # ' * +) - #) + # - . ! - / ' +.! - ! * / $ ' 6.!. ,
* # é '6.!. , # .!' $ é $ - !

- % " ± ª s ¶ £ ¸ ¬ ± ® ¦ · ± ª ¹ ¦ p • ¬ ¹ £ · µ ¶ Á p • ª ½ ¬ ·

õ - . & # * + . + ! - ! !) *) * +) - #) + . # *6 & # & 6 ') & . ç !. Y # .!) *)
* +) ê 6. # $)) / é $) / - # ' $. ') & / ' *8, ! - / ' +.! - ! * / $ ' 6.!. , * # é '6.!.
.!' $ - ! L é ' . # *6 .!' - ê > - ! <

$$f_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_k} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_k^2}(x - \mu_k)^2\right)$$

6 *) / k $ #k2 ' #) * !é / - & # $ 6 , & -) , $ # ! # - *) + .!, L) - . , $ -!, *#*)' é
* , 6 ,) # $ - #, ê) / ' .!' # # - *) 1 = :::!= K2 = 2 0 + & 6)'. , *) & ' ,
.) é 8 + ! & .) / # B Z F T * +) $ 7 * . # 6 . #

$$p_k(x) = \frac{k \, p \frac{1}{2} \; F Y Q \frac{1}{2^{2}} (x \quad k)^2}{P_{l=1}^{K} \; l \, p \frac{1}{2} \; F Y Q \frac{1}{2^{2}} (x \quad l)^2}$$

*) & ' , .) é 8 + ! & . (#' 6 & ! - !, .) / # B Z F T & *) + . (#') & & # * + . + ! - ! & & . ç
ä Y - .!' $ -! # .!') *) pk(x!) & #- .) *) # . # 7 & 0 ' & .)' 6 + # é &) .!, + & & # $
$ + # . # $, ' / - !, .6 -)) & -), .!, $ é $ -!, 6 -) $ # ! # - *) + .!, * +) $ 7 * .
' - . 6 - .) & ' ' .) - . $ * / - !, U S B J D O J H O H ! T F - U # , &) / ' # ! . (#') & ! & ')
- . #, $ - #, $ # ' . # * 6 . #, - ê - #,

$$\hat{\mu}_k = \frac{1}{n_k} \sum_{i : y_i = k} x_i$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n \quad K} \sum_{k=1}^{K} \sum_{i : y_i = k} (x_i \quad \hat{\mu}_k)^2$$

6 *) / hk) + # é & 6 , * + .!+ - ' .!, L) - . , . (!, $ #) + # é & 6 , 6 ' . ' . (' / ' *
) + # é &)'. , .!' - ê -! $ # '. # $ é # - . 8 '. , .!, . # & , * 6 . #, - ê - #, *+) $ 7 * . #
ÿ # $ + # . # $ / ' +- J O F B S % J T D S J N J O < B S O U ' V O D U J P O

$$\hat{\delta}_k(x) = x \; \frac{\hat{\mu}_k}{\hat{\sigma}^2} \quad \frac{\hat{\mu}_k^2}{2\hat{\sigma}^2} + M P(\hat{\pi}_k)$$

*) & ' , ! * + . + ! - ä & Y . (#') & . # - .!' $ -! 6 *) / ! + & & # $ # $ + # . # $ - / ' + .
& #- .) *) # . # 6 +), P þ + & & # $ P * +) $ 7 * . # $ é 8 , ! # $ + # . # $ - / ' + . ! - ! ' #
. !, & . ç !. , Y

- % " ¸ ª µ ´ • º ± ª ¹ ¦ p • ¬ ¹ ¡ © ª © ´ ± ¢ ² ¦

6 + # é &), .!, þ + & & # $, ÿ # $ + # . # $, ü ' / - !, * $. ' . # $ # - *) / & . ç !.
. 6 -) ! * + . + ! - ! * +), . (#' 6 & ! - ! 6 -) $ #) # * + .!+ - #, .) / & .), $ * / - !, * + #
* 6 ' - 7 ')) Q & . ç ! X 8 = (& X1; X2; :::; Xp)) #) *) , $)) / é) 7 ' ! $ é & & # &) ') # - . .
$) / - # ' $. ') & $ # - / ') # $ & # *) / # - . .! $) / - # ' $. ') & ' . - .) # ê ! & é
$ 0 + - ! X # N (;) 6 *) / & ' #) & -), .) / = 9 $ Cov(X)) * ' $, - / ' # $ 7 & ' - !,
/ ' é , 6 & , - / . ' * + *. - !) # & . ç !. , ' ' # 6 , ' (+.!. , & . (7 .) /,
& 0 ')'. # - / - ê . - #, $ # * - !,) # # - *) + , .) /, ' ' # - , ü / . 6 & *) + ' !
# . + ê , - .!' $ & * ') # &) + 0 .!, *) / # - . .!, $) / - # ' , .- # ! . (#' 6 & ! - ! ' &
(# 6 * # - .!) * + 6 ç !& / . 6 & *) + ' * # / é 0 + & 6)'. , . / *) *) ! - ! . ') & '
* + # + 0 ! $ - .!' * +) !) 7 & '! '6 . !. 8 - . ! # - *) + 6 ' . ' & . ç !. 8 ' ' ' # - ! &
&) ' $ # - .! - / ' ê # ' 0 + &) - . 1 $ " 8 - . ' ê + ! - # &) *) # ! é) 7 ' ' , & . ç !.
& .),) #) *) , 6 & , ' # - / - ê . # - . , & . (7 .) /,

þ # ' 0 + &) - . $ # - / . .!' * + *. - ! .) é 8 + ! & . (#' 6 & ! - !, .) / # B Z F T é *
) + # - . ! *) / & . ç !. $. ') & */ $ ' 6 . !. , * # é ' 6 . !. , # .#, & . ç !. , . ' # &
$ é $ -!, × !) *) é ' # $) / - # ' $ # ' . # * 6 . ! - ê - !

$$f_k(x) = \frac{1}{(2 \quad)^{p/2} \, j \quad {}_k j^{1/2}} \; F Y Q \; \frac{1}{2}(x \quad k)^T \quad {}_k^{1}(x \quad k)$$

6*)/ $ # .) # '/-& & -), # .#, * + .!+ - #, .!, L)-. , $ -!, $ #) '. -.)#
* ' $, -/' # $7& '-!, . ' & . ç !.8' ü'. -.)#ê ! *) /& . ç !. # $>+#.#$ -/' +.
é ' . # *6 .! -ê -!

$$_k(x) = x^T \quad ^1_k \quad \frac{1}{2} \; ^T_k \quad ^1_k + M \; P_k H$$

6*)/) * ' $, -/' # $7& '-!, . ' # & . ' *)/ ' # $. ' &!& ' - $ - #, ' . #
.! -ê -!

$$= \frac{1}{n \quad k} \sum_{j=1 \; x 2 C_j}^{k \quad X} x \quad _j \quad x \quad _j^T$$

6+# *60 -!, .)/ é + & .), #BZFT <)# .#& , . ' & . ç !.8' .)/ # '7-& .),
$X = (X_1; X_2; :::; X_p)$)#)*) , # ê +)/' .#, $ - #, & . (7 .)/, *+)$7*.)/' *6 .!' * /-!
* + $. (- -!, # 7) # 0)+ .#$, $ - #, L $ # M

$$_k(x) = \; `(x) =) \; x^T \quad ^1_k \quad \frac{1}{2} \; ^T_k \quad ^1_k = x^T \quad ^1_l \quad \frac{1}{2} \; ^T_l \quad ^1_l$$

7-! .!, * + * ' (- -!, *+)- #)+ # ' /* + * *) -.)' ê 8 +(X1; X2; :::; Xp) !.8'
& # '/-&

$$v = \quad ^1(\; _k \quad _l)$$

‰ª•±¹¶®¯£‹¶±¬²ª¤¦-%"

) - .)& ' ' $* /-!, .))*)) *+)- # .#, * + & .+)/, *)/ ê+ # . # ! *) /& .
$ ')'#$ $. ')& (#)*)# . # # .!' & .+#$ * #$6'!-! . ')& ' ' - $ -
0/-#$6 ê8+) . ' & . ç !.8' .)/, 7&0 ' & .)' ê!.& . # ! ç .#-.! $. 7é/'-!
W-.!')*) ' *+)ç !é)7' .)& ' é * +)/-# . #) $ 7. +), /' .6, # ê +#-&
$ - ' .)/, ü/.6 *#./ ê ' . # - $ '! .!' $W6 *7/é/'-!

! *+)ç) .!, $ é $ -!, ' # 6-) .) /' .6' *#) -/&*./ & '!

)# *+)ç) , . ' $ '.+) # 8' .)/, ' # 6-) .) /' .6' *#) *)& $+/-& ' , ! & *
!

-/' / -&6, /.8' ' 0 + . # -.#, # -*)+ , . ')& ' ' * .!, *# 6& '!, $. 7é/'

ê & Þ þüïüøêÿ ñòñüùêú ú ùò ùê ü N ýü îúë÷ü ú òn_1 þòöÿ ÷øé òöÿ ùò ü
m_2 ÷îön_3 ÷îö ýþüïüøêÿ; ù1ê $_2$ú÷îö$_3$ îú ì üö î ôú ïêø ö ô ÷î ò õ ú ô
< >

+8.!+)5*6é -! $0+ . #& - .!, ê#-.)*) !-!, .!, -/') #$,*+)ç 6& '!, #
6 '. ')& '' '.6, .' $ - '.)/, # -*)+ # .)& ' .!, $ -!, K -.!'
$. 7é/'W é ' #><

$$
\begin{aligned}
s_j^2 &= \sum_{Y \in C_j} (a_i \quad {}_j)^2 = \sum_{Y \in C_j} \bar{W} Y_i \quad \bar{W} N_j \;{}^2 \\
&= \sum_{Y \in C_j} \bar{W}(Y_i \quad N_j)(Y_i \quad N_j)^T W \\
&= \bar{W} \Big[\sum_{Y \in C_j} (Y_i \quad N_j)(Y_i \quad N_j)^T \Big] W \\
&= \bar{W} 4_j W,
\end{aligned}
$$

6*)/a_i)# -/'. . & ' , . ')& '' -.!' $. W é/)#! -/'. . & ' ,)& '' -.)'
0/-#$6 .)/, ê 8 m_j $.)#$ '.+) # , .!, $ é $ -!, * ' $,

$$
4_j = \sum_{Y \in C_j} (Y_i \quad N_j)(Y_i \quad N_j)^T \; 2 \; R_{p \quad p}
$$

)')& . Þ#ìúî÷îÿ Òöî ýüþéÿ Óú ÿ êÿ>Ø øé)&ÿ K, # , $ - #, #-ê7 # 6.#

$$
\sum_{j=1}^{K} s_j^2 = \sum \bar{W} 4_j W = \bar{W} \sum 4_j \; W = \bar{W} 4_w W
$$

6*)/4_w) Þ ìúî÷îÿ à úüøö÷ëÿ Òöî ýüþéÿ Óú ÿ Ëø úç -ú .Ø'øé+ ø-&6 .)/)
-/ $ $+#& '), * ' $, ' # . .+ '#$6, -/&& .+#$6, $ # é .#$!&#)+#-& '),

) 7. +!*+)5*6é -! $0+ . #& - .!, & #-.!, /' . , *6-. -!, . '*+)ç) 8'. '$ '.
.!, $ é $ -!,) . .+ ') .!, *6-. -!, . '*+)ç 6& '' & - ' # 7) $ - #, K $
é ' #

$$
\begin{aligned}
(\quad {}_j \quad {}_k)^2 &= \bar{W} N_j \quad \bar{W} N_k \;{}^2 = \bar{W}(N_j \quad N_k)^2 \\
&= \bar{W}(N_j \quad N_k)\,(N_j \quad N_k)^T W \\
&= \bar{W} 4_b W,
\end{aligned}
$$

6*)/) * ' $,

$$
4_b = (N_1 \quad N_2)(N_1 \quad N_2)^T \; 2 \; R^{d \quad d}
$$

)')& . Þ#ìúî÷îÿ Òöî ýüþéÿ Úò îû <ú ÿØ øé#ò'ú/*)) #-. ! -/') #$ # -*)+
& . (7 6 '. '$ - 'é *+ * #' ê+!-#&)*)#!é) -.ùé&#é-&, !)$ &é -$, -!
ê # # 0)+ .#$6 +#é&6 * + .!+ - ' õ-. 6.#$ m_j !*$ + -.!! K * ## ê6#.#, O .)/
-/') #$)7 & .), $ # + # $ - #, #-ê7 # 6.#

$$
= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{K} n_j \quad {}_j = \bar{W} \Big(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{K} n_j \; N_j \Big) = \bar{W} \Big(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i \Big) = \bar{W} N
$$

6*)/m_j . $ '.+) # . '$ - '$ # N .) -/') #$6 $ '.+) # , .)/ & .),

ó+ ! -/') #$ -. é&#-& '! # -*)+ & . (7 . '$ - 'é ' #

$$\sum_{j=1}^{c} n_j (\ _j \quad)^2 = \sum n_j \ \bar{W}(N_j \quad N)^{\ 2}$$

$$= \sum n_j \ \bar{W}(N_j \quad N)(N_j \quad N)^T \ W$$

$$= \bar{W} \sum n_j (N_j \quad N)(N_j \quad N)^T \ W$$

$$= \bar{W} 4_b W$$

/' *8,)# 7)*+)5*)é - #,*)/ ' 0 +é!$ '* + * ' -/&*/$'8')'. #-.!' *#) .!,$ W-.!')*) & #-.)*)# . #! *6-. -!. '*+)ç 6& ' '$ '.+) # 8' '8* + ! é ! -/') #$ # -*)+ '.6, . '$ - ' *)& ', -/'. . #! & #-.)*) !-! .)/ $ -& < >

$$\frac{\bar{W} 4_b W}{\bar{W} 4_w W} \qquad \frac{\sum n_j (\ _j \quad)^2}{s_j^2}$$

7-! /.)7 .)/ *+)ç & .), '/*)é -)/4& 6.#&! # # ' '. # *6 .!' 7+ -! .)/ # #) # '7-&W&),!'/2! 6. +! # #).#& *6 .)*+6ç !& # #).#&8'

$$4_w^{\ 1} 4_b W_1 = \ _1 W_1$$

+$. ,* +#*.8- #,6& , # #$ 6. ')*X 2 < m p)&#'/2! 8' # -. - ' # .)' 4_w 2 < p p #-ê 7 #rank(X) = rank(4_w) < p ü/.6 -!& ' # *4_w,)' # # # > < þ# ' *# /é /.6 .) .!& /* +ê)/' *)#$, &)+0 , * (+ - , . ')& ' ' -.!' * + - 6& , é 0 +&)-. 1$" -.)' * ' $)& ' '$ #-.! -/' ê # é .+)0)).!é)* & # & ' ' # -. - '-.)' 6+#é&) .>, -%" <

–¦¶¦¹£¶¬¸¬

7&0 ' & .!' & .+#$ +&!' .!, -%") 6+#é&6, .!, #.)/+ * +6&)# 6+#é&) .!, 1$" $ é8, & #8' #.#, # -. - #, . ')& ' ' *+)ç)'. , - &# -/ $ $. 7é/'-! !)*) -.!' * + *. -! 7) $ - ' *)*)# . #-.) # '/-&

$$W = 4_w^{\ 1}(N_1 \quad N_2)$$

7&0 ' & .!' (- -!) 6+#é&), .!, -%" -7&0 ' & .) é 8+!& . (#'6&!-!, .)/ *#ç # , 6+#) # ê +#-&)7 . '$ - '.) /* + * *) & # '/-&

$$v = \ ^1(\ _k \quad _l)$$

+ .!+ . # * , . 7) # '7-& . ' # * ' >&$ #é68 /* <

$$4_w = \sum_{j=1}^{2} \sum_{Y \in C_j} (Y \quad N_j)(Y \quad N_j)^T = (n \quad 2)$$

$$N_1 = \ _j$$

$$N_2 = \ _k$$

/&* + -& .#$!-%" # ê + #.#,$ - #,. ')& ' '& * * -.)*) '*+) .)& ' é # ê +)'. #)# $ - #,& .)' *#) *). -& .#$6 .+6*) þ# &#)*) * + . +!-! ! & #-.)*) !-! .!, + &&#$, # $+#.#$ -/' +.!-!, é /*) ! 8' # .)' / $ -! *)/ ' $ # ! * + . +!-! & .!' & 7. +! /' . *#é '6.!.

‡µ´©´¹®¯Á¹¬¹¦ ´´²¹¢•´º

ê+ -!&)'. '.(#'6&!-!,)& ''- $. ! ,$ - #, 6* ,.)&)'.).!,-%" * #
.!' (#) 6 !-!.!, *6)-!,.)/)+ é&)/*)/*+ & .)*)# .!'*+6ç 2! (#) 6 !-!
+ & .))# . # & ç -! ' - .)& ''.)/)*))/)# $ - #, .'* + .!+ - ' ' #
*+). + ' '-. , /' é , .) - . *)/* !+ /. .!'*+)5*6é -! ' #.) - . $* /-!,
)*))/)# $ - #, ' # '-. , $ # -/' *8, ' # /' . ! -7 $+#-! & . (7 .!, *+ & .
.!, *+)ç *6& '!, $ -!, *#*)' ! ($. ! ' Ï#$ þ8ï ïõõ*î ,"DDVSBDZ
Ó îö õô ìî 4FOST JÜÜÜW-JdZ ô 3F*D-B-MM)/'.)'$. !)*)-).#$6 ê + $. + -.!'
(#) 6 !-!.!, . (#'6&!-!, .!-/' ê # é * +)/-# -. ! & é)), (#) 6 !-!, -FBWF
$SPTT 7BMJEBUJPO -00 $ # é ' /é $ #).+6*), #.)/+ , .)/ $POGVTJ
.)')*))/*)))'. #)# $. , .!, ü$+ ç # , .!, / #-é!- , $ #.!, ü' $!-!,

-FBWF 0OF 0VU $SPTT 7BMJEBUJPO -00

ê), *6)-!, .)/)+ é&)/*+ & .)*)# . # -/' é , # ê +)'. , & ./ê).+
- . $* /-!, .)/)*))/)# $ - #, ' # $. '*+). + ' '-. , - 7)/*)-7') .) U
JOH TFU $ #.) UFTU>TF'U $.#<$ -/&0 ' & .!-R&BWF) 0OF 0VU $SPTT
7BMJEBUJPO)*)00 é (#)*)#!é $ # -.!' * +)7- + - .) USBJOJOH TFU
6) 6$!+) .) - . $ /-!, $.6, *6 &# * + . +!-! !)*) '.#-.)#ê -.) U
< > 5) USBJOJOH TFU ê+!-#&)*)# . # # .!' !&#)/+ .)/&)'.)/ $ # .) UI
, - . *+6ç 2!, # #$ - Pÿ!&#)/+)'.)/ & - USBJOJOH TFU +6ç
TFUP *+ & .)*)# . # -/') #$ 0)+ , 6*)/ .) * é), . '* + .!+ - '.)/ +ê#
$* /-!, .-# 8-. $ é &# * + . +!-! ' ê # ' êé $+#ç8, &# 0)+ , UFT
.#, /*+)ç 2 #, $ é * + . +!-! .)/ - . $* /-!, ê + $.!+ . # *6 .!'*+ & .#
.!, "DUVBM $$M#BT*T6 .!'*+)ç *6L&SFFJDUFE-$.M#êTT .)*) * #$)')'. #
+ 0#$ -.)' $POGVTJPO .BUSJY P)*)), é * +# + 0 -.! -/' ê #

$POGVTJPO .BUSJY

$POGVTJPO .BUSJY ! 8' #.)' +#é&6 . '- -.8' $ # 'é -& ''*+)ç 2 ' #
#$6. + $ é + && '.#-.)#ê -.!'*+)ç *6& '! *6.) &)'.) $ -! $ # $ é
*+ & .#$ $ -! *)& ', $ é -.)#ê).)/*' $! 8' #.)' +#é&6 . '*+)ç 2
$ '.) &)'.) # .!' $ -! .!, -/ $ $+#& '!, + && , '8 ! * . +!-! ' $ # -.!' $
.!, -/ $ $+#& '!, -. !, /.6 .)'.+6*) &*)+ ' /*)) #-.)7' # $ é $ -!. * +
-.)#ê ⨯

ü !é8, .#$, *+)ç 2 #, # $ é $ -! 5SVF 1PTJUJWF 51)#)*) , ç+
8'#).)/ $POGVTJPO .BUSJY

ü !é8, ü+'!.#$, *+)ç 2 #, # $ é $ -! 5SVF/FHBUJWF 5/)#)*) , '
. '*+)ç 2 '*)/ ' $)/' $.6, .!, + && , $ # .#, -. !, .!, -/ $ $+#& '!, $ -

/ 8, .#$, *+)ç 2 #, # $ é $ -! 'BMTF 1PTJUJWF '1)#)*) , '
. '*+)ç 2 '-.!' + && .!, $ -!, $.6, *6.) -.)#ê).!, # ')/

/ 8, ü+'!.#$, *+)ç 2 #, # $ é $ -! 'BMTF/FHBUJWF '/)#)*) , '
. '*+)ç 2 '-.!'-. !.!, $ -!, $.6, *6.) -.)#ê).!, # ')/

ç -! /. . -.)#ê /*)))'. # # $ é $ -! . * + $. -.)#ê .)*) 6-)
/2! ' # .6-) *#) *)).#$6 ' # .) &)'.) *)/>(#)) . # <

ü$+ ç # "DDVSBDZ *+6ç 2!, .!, -/ $ $+#& '!, $ -!, !)*) $0+ # .)
- -.8' *+)ç 2 '.!, $ -!, *6 .) &)'.)

$$\text{"DDVSBDZ} = \frac{5/+\ 51}{5/+\ '/+\ '1+\ 51} = \frac{5/+\ 51}{N}$$

/ #-é!- 4FOTJUJWJUZ *+6ç 2!, .!, -/ $ $+#& '!, $ -!, !)*) $0+
. ' !é8, é .#$8' *+)ç 2 ' , *+), .)' +#é&6 . ' -/') #$8' é .#$8' *+)ç 2
&)'.)/ # .! -/ $ $+#& '! $ -!

$$\text{Sensitivity} = \frac{5\ 1}{5\ 1+\ '1}$$

ü' $!-! 3FDBMM *+6ç 2!, .!, -/ $ $+#& '!, $ -!, !)*) $0+ # .) *)-
!é8, é .#$8' *+)ç 2 ' , *+), .)' *+ & .#$6 +#é&6 . ' * + .!+ - '.!, $

$$\text{Recall} = \frac{5\ 1}{5\ 1+\ '/}$$

)+ .!, # & .#$, + - ,& ê+#$ #.)*+)!)7& ')$ 0 #) *#$ '.+8é!$ -
.)/ ç -#$)7 é +!.#$)7 /*)ç é+)/ .))*)) ' # * + .!.) # ' *)$. - # $ ' , &#
$. '6!-! .)/ '.#$ #& ')/ *)/ (. . # .) 0 #) ' 7é!$.) 0/-#$6 * +# ê6&
0 #')& ')/ .)/ 0é)+#-&)7 -.))*)) -.!+ . # ! & .! $ é8, * -!, $ #)# ç -#$)
ç+ -!, . ' *#0 ' #8' . ' &'!& ' *) #.#-.#$, $!+)')&# , .) 0 #) * +#
)# ç -#$,-. .#-.#$, & é))# ' /-!, . ')& ' '*)/ é ' $.!é)7'- /. .!' + -
* + ! * +)/-# -.!$ $ # ' .+6*), (#) 6 !-!, . '&)'. '*+6ç 2!, *)/ é ê+!-#&
.) * +6' $ 0 #) é * +# + 0 ! 0 -& .)-$)*#$ & é)), & .!, . ' # ç+ & ' ' *
. '&'!& ' $ # é $. + 0 ! ç -#$ ç#ç #) + 0 *)/* #-#8' # '.#$ & ')& .
é * +)/-# -.)7'. ç -#$ 0 -& . 0é)+#-&)7 *)/ 0é!$ ' $ é8, * -!, $ # . ç -#
$ # ç#)) #$ ê + $.!+#-.#$.)/,

#$6. + -.!' *+8.! '6.!. ' 7)'. #)# -!& '.#$6. + , & . , *)/ ê)/' *+ &
, .8+ ' 0)+#$ & .)' 0é)+#-&6 # ç+ & ' ' *#0 ' #8' - -/' / -&6 & .!' -.
' /-! . ')& ' ' 6* , * -!, $ # . -/&* + -& . *)/ ê)/' *+)$72 # 7. +! '6
0# +8' . # -.!' * +# + 0 .!, & é6)/ *)/ é & .!é)7')# # ç+ & ' , *#0 ' # ,
Óýîð ùòúü ãõüþö ù ùò -BTFS -BTFS *OEVDF-E-/'Mo/ #SF*T+D)F-O#DF . #*'
! * #+ & .#$ & é))) $ # ! * #+ & .#$ # . (! *)/ ê+!-#&)*)# é!$ # .!'
ç#)) #$ *#ç +/& ' ' *#0 ' #8' *#*)' * +# + 0 . #! * $. -!.!, -*'-.!' ê+ -
'MVPSFTDFODF -*%"3 -JHIU %FUFDUJPO BOE 3BOHJOH & -.6ê) .!' & .!
* /é , * ' -.) &'!&) 8-. ' *)0 /êé ! & . 0)+ é+ 7-& .), -.) + -. +#)
)é ! /' .6.!. ê +.) + 0!-!, 0é)+#-&)7 .)/ &'!&)/

.+ .! '6.!. 0# +8' . # -.!' ' /.#$ * +# + 0 . ' 0 -& . ' *)/ 0é!$ ' *6 .#,
ç#) # ç+ & ' , *#0 ' # ,*)/ & . é!$ ' # #$6. + & . *6 $. ! ! ç#)) #$
*+)- #)+)'. # $ # * +)/-#)'. # . ç -#$! ç#) # ç+ .#$8' * + 6'. ' *)/
.!' $ é *#0 ' # .! -/' ê # &ç ')'. # 0 -& . 0é)+#-&)7 *6 -/ $ $+#& '
. ' *#0 ' #8')#)*) , & . *6)*.#$ * + . +!-! -/' / -.!$ ' & .)/, -/ $ $+#
ç#)) #$)7, * +)'. , *)/ *+)- #)+ -.!$ ' 0 -& . * +)/-#)'. # $ ')'#$)*)#!&
& #-.! .#& .)/, #$ .6-) & ç -! .!' 0 -& .#$ 6-) $ # & .!' ç#)) #$ * !
. 0 -& . . ' * +#)ê8')&)*)#)7'. # - $ - #, *)/ *+)- #)+)/' ' ' -/ $ $+#&
ç#) # ç+ -!, 6* , *#ç +/'-! *6 0 .) /.6.+)0)/, &#$+))+ '#-&)7, *6 -/&ç -! .
& 0 .) /.6.+)0)/, $ é + , * +#)ê , 0 -& . /.8' . ' * +#)ê8' $ é8, $ # ! * !
.!, $ -!, *)/ ' $)/' é *). -)/' .) - . $* /-!, .)/)+ é&)/ .!, -%" !)*) &
.! - #+ .!, é !&#)/+ - # ' &)'.) *+6ç 2!, .)/ .7*)/ ç# # ç+ -!, - $ é -!&
+ & .))# . # & .+!-! 0é)+#-&)7

ˆ®p•®´£¶¦»®¯£ ‡²¦¸¯Áµ¬¸¬

. ê'#$*' -BTFS *OEVDFE 'MVPSFTDFODF -*%"3 -JHIU %FUFDUJPO 'BMMJOH *)#$,
0 -& .)-$)*#$, 0 +&) , # +$. , $. ,) ' ê , ' /- .)/, * +)/-# .
'6.!. !&#)/+ .)/*+8.)/'MVPSFTDFODF -*%"3 $ #! $*6'!-!-/-.!& .#$8
+ & .))# é!$ *6 .)/, .FBTVSFT FU.BM #+ & < /. & .+ é!$) 0é)+#-&6,
)#$ '/ +8'$ /- & '.)) *#$ é)'. '- *. /& '# * ' - ' +6$ é8, * -!, (
$ #! (#)*) !-!.!, # . (!, # .!' ' ê' /-!ê +)07 !, .)'0 -& .#$6ê + $.!+#-&6
$ #.!'$. + 0 . ' -.#8'&6 /'-!, .)/é --#)/* +#ç)'.),

) -/-.!& .#$ (#)*) !-!.)/'MVPSFTDFODF -*%"3 -.!' ' ê' /-! -!& '.#$8' ç#)&
!ê +)07 !$ #.!'0 -& .#$ & .!.!, ç -.!-!, $ #. '# #). . '.!, *+ & .)*)#
*6 .)/, &EOFS FU BM $ # < $ # 7BMFOUJOJ FU BM #, & <, /. ,
0 +&6-.!$ '.+ #, .+6*)# 2!, - & .), 0é)+#-&)7 -!& # $ & 0)+!. -/-$ /
& .)*)é .!-!.)/-/-. & .), -*%"3 - # #$6 6ê!& *6 .))*)) (+ê . #! -&!.)
*+), .)' /*6 & .!-.6ê) *#*)' & . é!$!-/-ê .#-!.!, '. -!, .)/ 0é)+#-&)
ê +)07 !, & .!'$. -. -!.!, / , . '0/.#$8'$/.. + ' *6 .)*) *+) +ê . #

' +(!.!, & .!, . ' &'!& ' *) #.#-.#$, $!+)')&# , & ê+ -! -*' -/'. . #
* #+ & . . ' $FDDIJ FU BM& .)<) & . . #) /.)0é)+#-&6, . ' * .+ & . '
)/ ê+!-#&))#)7'. # , / #$ 6&!-!, . ' &'!& ' *6& ' ê+6'# é $))/é
#+6-é . * #+ & . 0é)+#-&)7 . ' # 06+ 'ê+!-#&)*)#)7& ' ' #é6./* ' . -
* +#ç)' . * .)/&'!&)/ # #$6. +)# 3BJ NP'OêEJ/FU.B'M0é)+#<&6
.)/ -ç -.6 #é)/ MJNFTUPOF $ #* + . +!- '.!' & -!.!, '. -!, .)/6. '* +# ê
Fe^{2+} RVFODIJOH *#*)'-/-ê .#- '.)' #é6./*) .)/&'!&)/& .!'* +#)ê *6
()+7ê.!$.!-/' ê #)# 1BOUBOJ FU BM-!- ' *)<#$)/, #é6./*)/, 6*,
-ç -.6 #é) &&6 #é) & +& +)$ # -ç -.)$)' & & ç -!. 0 -& . 0é)+#-&)7.)
0)+ & $! $7& .), # +-!, 6-) -.)' # ê +#-&6 . ' #é).7* ' 6-) $ # * + .
& . ç) , .)/, 0 -& .), 0é)+#-&)7 *6 -!&) - -!&) # .)' $ é #é6./*) (#)
$ #! -. .#-.#$ & é)), 1$" * -!,)# 1BMPN CJ EU/BM & - 0<é)+#-&)7
$ # 0 +&) , .!, 1$" .#, * +#)ê , 6*)/ /0 -. . # -$)/+# *6 & . #$, -.!+ (#
)& , .)/&'!&)/ + $.!+#-.#$6 .!, 7* +(!, -$)/+# , *). - ! $)+/0 0é)+#-&
ON *#*)' & .!- '.!' ')&)#6&)+0! $. ')& . '*+)-& ('- ' * .+ & & -
0 +&) , .!, 1$" - 0 -& . 0é)+#-&)7 *6 # 0)+ -!& .!, *#0 ' # , .)/

' $, #)*.#$ & .!.!, *#ç +/'-!, . ' *#0 ' #8' . ' &'!& ' ê + , .!'
-$ -# , # .!' & .! - &) 72), #$ ')*)#)7'. # & - . ' & .+ - ' 0é)+#-
ê+ -! 'MVPSFTDFODF -*%"3 # ê +#-&6, .)/)/, .!, ç#)) #$, *#ç +/'-!,
& ç -!.)' 0é)+#-&6 ê # *+ & .)*)#!é # .!' # $+#-!.!, *#ç +/'-!, . '0 .)
&#$+))+ '#-&8' ! *6 $/ ')ç $. +# *6 ê +)07$! *6 .)/,>$FDDIJ FU B
-PHOJPMJ FU BM 1BOUBOJ FU BM $ # -PHOJPMJ FU BM # . 7<) !
* +)/-#)/'.!'$)+/0 .!, ê +)07 !, * + *)/-. ON ,0 .) /.6.+)0)# !ê +
-.#$ $)+/0 .!, 0/$)$/ ' '!, -. ON $ é8, * -!, $ # $. * +#*.8- #, .!, 0/$)
-. ON < *).)7' ' (#, 7* +(!, $/ ')ç $.!+ ' *#ç +/'-! *6 . +6.+)
&#$+))+ '#-&)7, *) #$'7 . # /-$) 6. +!$ # , .8+ ê # *+ & .)*)#!é &6')
, &/$. ' $ # ç $.!+ ' & ê+ -!.!, 1$" -. 0 -& . 0é)+#-&)7.)/, *6 .)/, 3B
FU BM > $<# <

'.#& .8*#-!.!,ç#)) #$, *#ç +/'-!,*+ & .)*)# . # & ê+ -!$. ! 'ç#)$.6
& .)), .)/ &#$+))+ '#-&)7 *)/ ' *.7-- . # -.!' *#0 ' # *). -& .#$6
é + * #8' &*)+ ' '#ê' /é & ê+ -! .)/ 'MVPSFTDFODF -*%"3 - -/' / -&6
6* ,*+ & .)*) !- ')# -PHOJPMJ>FU1BOUBOJ FU 3BM # -PH<OJPMJ FU BM
< > &ç ')'. ,0 -& . *+ '$ # & . .!, 0 +&) .)/, * -!, &*)+ ' $. + 0 !
(#(!.)/0é)+#-&)7.!, *#0 ' # ,8-. ' * + .!+!é) ê+6'), + -!,$ #! *). -&
. ' ç#)$.6' ' 6* ,*+ & .)*) !- ')# -PHOJPMJ&FU 3BM * -!,<.!, 1$"
#)' ' # /' .6' # ê +#-.)7')# *#0 ' # ,& # 0)+ .#$!ç#)) #$8'é
.)/0 -& .), 0é)+#-&)7.)/, $ #.!' ê+ -!.!, 1$" & .!.!')*) *+ & .)*) !- ')#
FU BM > <

/' .6.!. ,-/' ê)/'' * $. ')'. #-.!' ' ê' /-! ê+ -.#$8'- .)#ê) + 0 , #
)# 3BJNPOEJ FU 3BM-/' 7 -< .!' ê+ -! .)/ 'MVPSFTDFODF -*%"3 & 0 -& .)-$)
. ê'#$,6* ,'5 *3 $ # 0 -& .)-$)* 3BNBO $ # ' ê' /- '.!' ê+ -.#$ $#'' ç +#
$ #.!' $.+#'! 8ê+) $#'' ç +# * +)/-# # $)+/0 -. ON $ # '8! $.+#'! 8
* + *)/ -. ON *#*)')# 3BJNPOEJ FU 3BM- ' .!'<1$" - 0 -& .
0é)+#-&)7.)#ê) + 0#8' & -.6ê).!' 7+ -! * +#)ê8' 6*)/ê+!-#&)*)# é!$ ' # ,

*+) ' 0 +6& ' , 0 +&) , ' #$'7)/'.) 7+), .!, * !+)0)+ ,*)/ 7' . #' * + ê
0 +&6)'. # - &) 7+), .!, *#0 ' # ,.)/ &'!&)/ ü/.6 ' # 0#$.6 6. '.) -7
'MVPSFTDFODF -*%"3 -/' / . # & $. !) -7-.!& TDBOOJOH .!, *#0 ' # ,$
ê +.) + 0!-!, 0é)+#-&)7 /.6 .)' .+6*) ' # 0#$. ! !&#)/+ $. ! 'é
ê +.8' * ' -.!' 2!0# $ 0 .) + 0!& '! $ # ê +.) + 0!& '! *#0 ' # # #$6. + !
#0 ' # # ê + . # - /)* +#)ê ,6*)/ # .!' $ é &# &ç ' . # ' 0 -& 0é
ê +#$ # $+#.#$ #$ '6.!. &*)+ ' 0. - # & ê+# $) # .) ,D!N <# #$ - ,
!)*) * +)/-# . # -.) ê &+)$7*. # &# P #$6' P .!,)*) , .) $ é QJYFM *
ê + $.!+ . # *6 ' 0 -& 0é)+#-&)7

ü*6 /. . 0 -& . $ #.!' 0 +&) -. .#-.#$8' & é6 '6* ,! 1$" $ #! &)*) !-!
/-. , $MVTUFS "OBMZTJT -.!' #* & .#$ + -)')& . # & .! -/'.)&)
+)$7.)/' *)#$,* !+)0)+ ,6* ,!. (#'6&!-!. ' * +#)ê8' .)/ &'!&)/ & ç -!
$ #.)), .!, ç#)) #$, *#ç +/'-!, .)), .)/ /*)-.+8& .), $ #.!' *). -& .#
0 +&) ç#)) #$8' é + * #8' (#(!.)/ -/-. & .),)')& . #)ZQFSTQFDUSE
-*%"3 $ #* +)/-# . # ' /.#$ 6* , * -!, $ #)# 0 +&) ,.)/ *6.)/, 8FJCSJOH
< > 8FJCSJOH FU 3BM)¤MMT<USPN FU>BM)¤MMTU<SPN>FU BM1B<MPNCJ
FU BM > 3BJNPOEJ FU 3BM3BJNP<OEJ FU 3BM$ # 3B<JNPOEJ FU BM
< > *#*)' ! /' .6.!. ,.)/ -/-. & .), * $. ')'. # $ é8, 7' . #' $. + 0 ! ê
(#(!.)/0é)+#-&)7 5JNF 3FTPMWFE 4ZTUFN & ê+)'#$ # $+#.#$ #$ '6.!
7+ -!.)/ê+6')/ ,0é)+#-&)7 # $ é # 0)+ .#$6 0 -& * + ê # -!& '.#$,*
.!' . (#'6&!-!. ' * +#)ê8' .)/ &'!&)/ 6* , # * + # & .!' $. ')& . '*+)-& (
* .+#' , *#0 ' # ,*)/ & .8'. #) -/ $ $+#& ') -7-.!& $ é8, $ #)# '. -.)#ê
(.)'. # ' /.#$ *6 .)/, 1BMPNCJ>FU 3BM3BJNPO<EJ FU>BM <

.!' * +)7- #* & .#$ + - 0é!$ ' 0 -& . 0é)+#-&)7 *6 . /*6 & .!
)*) é + é!$ ' , ' -. 0 -& . ' 0)+ , 0 -& . /. . (#')& é!$ '- $. !

ê & Ýý ö÷ë ýòþöðþî ë ëùî üÿ)ZQFSTQFDUSBM 'MVPSFTDFODF

$ - #, & ç -! .!' ç#)) #$.)/, * !+)0)+ 6* , é * +# + 0.! -/.!'ê'6.!.
+ & .))# é!$ ê +.) + 0!-! .)/ & .), & -.6ê).!'. (#'6&!-!. '0 -& . 'ê +.)
-.#, $ - #, ' 0)+ , . (#'6&!-! /. -/'. -.!$ & ê+ -! $. ! '&)'. '*+6ç
$ - '6* , .) &)'.) .!, -%" '6.!.) & é))) *)/ 0 +&6-.!$ *+) $/2 *6
.!' & .! !&)-# 7- ' *)/ 0)+)7' .!'. (#'6&!-! # 06+ ' .7* ' .- #)7 & ç -! .) (
0é)+#-&)7 .)/, ⋇

–ª¶®£¶¦»£ –ª®¶¡±¦¹´· ¯¦® –ª®¶¦±¦¹®¯£ Š®¡¹¦³¬

0 -& .#$ & .! . ' ç#)) #$ *#ç +/& ' ' *#0 ' #8' é *+ & .)*)#!é & &
& é6)Ó ý îð ùòúü ãõüþö ùü ùò -BTFS -BTFS *OEVDFE *M(VPSFTDFODF -*
-.!' /*) '6.!. ! $.#')ç) 0é)+#-&)7 *). .!' 0 -& .#$ /*) + 0 . 'ê+ &)0
&)+ ' *)/ /0 -. '. # -.) & .))*)) # + . # /' *8, $ é # 0)+ .#$6
$.#')ç) !é & MBTFS $. !)/ & $)/, $7& .), ' & ' . #' $* &2 # ' &)' #
é .) (ê + # - -ê -! & . /*6)#* -.6-) . ê+ &)06+ &6+# *)/ # +)'.
' # -.!' * #)2!0 .)/, $)#' 6. ' ' $)/' -.!' #)& # & . ' /' $6)é
/*) ! 8' . # $ # & '. -.)#ê!)&)#)&)+0 -. 0 -& . 0é)+#-&)7 .!, -/ $ $+#&
)& ' , . 0 -& . .)) * +)/-#)/' & . (7 .)/, .#, & 7. + ,)&)#6.!. , 7'
. (#')&!é)7' -.!' # $.!)+ $ # , $.)7.)/ ' *+)$72 # &#)&)*) !-! . '
ç -#-& '! -.!' $.#')ç) 0é)+#-&)7 & é)), -*' ê+!-#&)*)# . # /+ , # * '
#8' - * !é8+ 0 +&) 8' * ' - .)& , 6* , ! ê!& >)#)0 &+#$, # '8- #,
< > ! &#$+)-$)* 0é)+#-&)7 !< *#-$6*+-! <

&'!& *) #.#-.#$, $!+)')&# , 6* , ' 7é!$ # () #$. -.!+ 0é)!.#
*#0 ' # $ (#. , .!, ç#)) #$, *#ç +/'-!, *)/ ê)'. # *6 *)#$)/, &#$+))+
& .! . ' *#0 ' #8' . ' &'!& ' & ê+ -! .!, & é6)/ -*' &*)+ ' ' (# .#, *
'.)'!, ç#)) #$, *#ç +/'-!, $ é8, * -!, $ # .)), . ' &#$+))+ '#-&8' *)/ *
ç#)) #$ $. -.+)0 .!, *#0 ' # , ç -! .!')&)#)&)+0 . '0 -& . '/* +ê #! /'
)&)*) !-!, . '* +#)ê8' ') & .)'.7*).!, *#ç +/'-!, 6* , * + & .), ê +#'
*6 0 .) /.6.+)0)/, &#$+))+ '#-&)7, *6 -/&ç -! 0 .) /.6.+)0 ' & . +6.+)0
2! . ' 0 -& . ' 7' . # ' *+ & .)*)#!é . + -.!+# $. -.) -!&) .)/ &'
& ê+ -! .!, . ê'#$, 'MVPSFTDFODF -J%"3 -. é +)7 -.6ê)/ .!' * +)7- + -
+ & .))# é!$ ' + -.!+# $ -.#, $. -. -3BZNFUSJDT 4 " $ # * +)/-# ..!#-/'.!ê #$6' ' /é)7'
# . (! é * +)/-# -. ' ê8, -.! -/' ê # * -!, é * +)/-# -. ! ç -#$ # . (!
#.)/+ , .!, . ê'#$, 'MVPSFTDFODF -J%"3 $ é8, *). .)' ç -#$6 .+6*) &
. ' &'!& ' 6* , * +)/-# . # ç#ç #) + 0#$.!' *6& '! '6.!. é * +# + 0)7'
)# ç -#$, & . , *)/ ê)/' *+ & .)*)#!é .6-) & + -.!+# $ 0 +&) .!, -*' 6
.!' . ê'#$ 'MVPSFTDFODF -J%"3

)* #+ & .#$ # . (!!)*) ê+!-#&)*)# é!$ -.!' #* & .#$ + - -ê # -.!$ $
*6 .!' . #+ 3BZNFUSJDT 4 " $ # * +)/-# ..!#-/'.!ê #$6' ' /é)7'
)# ç -#$, +ê , #.)/+ , .!, * #+ & .#$, # . (!, ü+ê#$.) & & .!, -
$ é .! é -! $ # # + . # & - .!, $.#')ç) , .)/ #) #$)7 MBTFS -/' ê)7, #.)
-!&) .!, 0 .) + 0 , .) MBTFS /* +ê #! /' .6.!. $. ! !, +7é&#-!, .!, #-ê
-.) 7+), N8 þ# . * #+ & . *)/ *+ & .)*)# é!$ ' ! #-ê7, (6)/ -. é +)*
-. N8 .)*) 0 '6, ' $. -.+ 0)/' .!' ç#)) #$ *#$ é#-! $ # 0 . +)/ .!' #
*). -& .#$ 8-. ' * + . # #$ ')*)#!.#$6 - & 0é)+#-&)7 -&! .)/ MBTF
' $ -! - $.)*.+) -!&) .!, 0 .) + 0 , *+)-* *. # /456 -.) /*6 + *)/
& .! -!&)

6-) .) - & 0é)+#-&)7 6-) $ # ! -.#$ -$ -! .)/ MBTFS -/)'. # *6 '
0 $)7)*.#$, ' , -!&) .!, 0 .) + 0 , þ# .!' & #-.)*) !-! .)/ - & .), -
& .+!-! /* +ê # /' .6.!. ,.!, *6-. -!, & . (7 .)/-/-. & .), 0 $)7)*.#$, '
& .), +7é&#-! /. ' # * + .!.! # .!' /é/ + &&#-! .)/-/-. & .), - $ é
$ é8, ! *#0 ' # ' # ')&)#6&)+0! $ #)# -$ - #, - *)#$, $. /é7'- #, ' #

#)' -.) -7-.!& -/) , .)*)é . . # $. !) 0 .+) *)$)* , /2! 8' -/ê'). .
MPOHQBTT¸MUFS -. ON 8-. ' *)$)* ! -.#$ -$ -! .)/ MBTFS -.6-
MBTFS .))*)) ê+!-#&)*)# . # * + # $ # *#*+6-é . , $)+/0 , - /2! 6. +
-ê -! & .!' $ '.+#$ + && $*)&* , .)/ *)& ' , .& & .)/ 0 -& .), .)/ MBTFS
.))*.#$6 0 .+) $ # $. + 0 . # *6 .)' 0 -& .) + 0) # #$6. + !)')& -.#$.#
.)/ MBTFS ' # -. ON * #+ & .#$ '#ê' 7 . # ! *+ & .#$.)/ $)+/0 -.
/*6)#* , $)+/0 , . ')*) ' 6& , ! '. -! ' # &#$+6. +! .)/ .!, $ '.+#$,
&0 ')'. # -.) 7+), ON .6*#' .!, .)*)é .!-!, .)/ 0 .+)/ *)$)* , ! &)'
$)+/0 &0 ' . # -. ON !)*) 6& , ' # -/ $+ -#&! - '. -! & .) 0 -& 0é
$ # &0 ' . # - &#$+6. + & $! $7& .), *6 /.6) -7')) . ')*.#$8' -.)#ê
* +# + 0!$ 'ç+ -$. #.)*)é .!& ')- * .06+& & +/é&# 6& ') 72), .))*)) ê #
* + ! !, & . $ '!-!, * ' - +

ê & àôùòöî÷ë Þòöþîùî ö÷ë Òöé îûô -*'

)- & *)/-/ . # & . 0 + . # *6)*.#$ ' -!&) .!, 0 .) + 0 , -.)' 0 -&
ê+ -! $. !)/ 0+ & .), * + é -!,) 0 -& .) + 0), ' 7 # .) &ç '6& ')- &
0 -& .#$, .)/-/'#-.8- ,)#)*) , $. + 0)'. # *6 ' ' '#ê' /. $$% + $.
. ç -#$ ê + $.!+#-.#$. ' & +8' .!, # . (!,

-& .) + 0), & -.# $ *6-. -! NN /" * .), -ê#-& , #-6)/ &
$ # # $+#.#$ #$ '6.!. ON '8).

ÿ#) #$6 MBTFS &)')& -.#$ $ '.+#$ + && $*)&* , -. ON 7+), #
N8 $ # # & .+), -&!, -.!' ()) .)/ MBTFS NN

"ê+ & .#$6, 0 $6, -/) , -.# $, *6-. -!, NN $ # # & .+) NN

*.#$ ÷' 7*4 /*3 & # & .+) */+ ' &N $ # /"

.#$6 0 .+) *)$) , /2! 8' -/ê'). . ' & $ .80 # -. ON $ # *)-)-.
* + .6.!. , -. ON

.)*.+) & ' $ -.#$6.!. -. ON

ç -#$ * #+ & .#$ & é))) *)/ $))/é é!$ * +# &ç ' # .!' !&#)/+ 7
0 -& . ' # $ é *#0 ' # *)/ é & .!é)*+8.)-7'))* +# &ç ' #. 0 -& .
' 0)+ , ! . 0 -& . . ' * +#)ê8' 6*)/)*.#$. /.)'. # & -/ $ $+#& '! ç#
* !+)0)+ 6* , é * +# + 0 -.!' '0.!.7. +) -7'))* +# &ç ' #. 0 -& .
ê +.) + 0!-!, .!, *#0 ' # , .6ê), .!, & .!, *). !. 7.#-!.)/ $ é -!&)/ê +.
& &#)& 0 -& . ' *6 .#, * +#)ê , ' 0)+ , & ê+ -! -. .#-.#$8' & é6 ' ' /-
é * +# + 0 -.) $ 0 #) 2! . ' 0 -& . ' *+ & .)*)# é!$ & .)) #-&#
0 -& .) + 0)/ $ # * +# &ç ' #. (, ç & .

. +#(! .)/ & .), - $ é .! é -! &*+)-. *6 .) -7-.!& ' ê' /-!,

ü$.#')ç6 !-! .!, * +#)ê , & .+!-!, & .! -&! .)/ #) #$)7 MBTFS - #-ê7 N

ø. '*+ & .)*)#!é ! /é/ + &&#-! & -.6ê) .!' & #-.)*) !-! .)/ - & .),)+
.)/) #-&#$)7) ê+6'), $. + 0 , .)/ - & .), -.!' $ é & .+!-! JOUFHSBU
' .) - & ' # -é ' ,) ê+6'), $. + 0 , /(' . # 8-. ' -/ êé)7' * +#--6
0 .6'# 0é)+#-&)7 '8 ' .) - & ' # #-ê/+6) '. -.)#ê), ê+6'), & #8' .
*)0 /êé)7' 0 #'6& ' $)+ -&)7 .)/ '#ê' /.

é 0 -& *)/ &ç ' . # *+)$7*. # ,) & -), 6+), & .+ - ' * -!, # $ é
ê+6') $. + 0 , &ç ' . # & .+!-! /*)ç é+)/ EBSL TQFDUSVN *)/- .)/ M
0 #+ . # /.6& . *6 .!' & .+!-! .)/ 0é)+#-&)7 - $ é 2!

0 -& . ' 0)+ , &ç ')'. # *6 -/ $ $+#& ' , * +#)ê ,)#)*) , '.#*+)- * 7
* #)2!0 . ' .7* ' ç#)) #$, *#ç +/'-!, .)/ $ é & .), # * +#)ê , /.
$ # ! * +# + 0 .)/, * +)/-#)'. # ' /.#$ -.!' 0'6-&.. ê +.) + 0!-!,
$ é & .), &ç ')'. # 06.)/)+#-. ' -!&) $$ '!-!, $ # *+)- #)+#-. .
& .+!-!, $. & $), $ # $ éL 72), .)/ & .), # #$6. + 6* , * +)/-# . #
. 0 -& . ê +.) + 0!-!, 0é!$ ' -.#, $)+/0 , . ')+é) ' ' .)/ $ é * #-
) ç & .!, & .+!-!, # - $ é & $ é8, $ # .) 72), *)/ # ! - #+
& .+ - ' þ# $ é & . ç & . & .+!-!, * +# + 0)'. # * *-!-,!-,.!' #$6'
. ç#)) #$ $ #) #$ ê + $.!+#-.#$.)/ $ é & .), * +)/-#)'. # -.!

‹»¦¶±´££ ¹¬· -*' ¸ª 'MVPSFTDFODF -J%"3

* $. -! .!, -*' - & .+ - #, 0é)+#-&)7 & 7. +!, $ & $, - (. +#$6 * +#ç
' *+ & .)*)#!é & .! ê+ -! .!,'MVPSFTDFODF -J%"3 -JHIU %FUFDUJPO E
JOH # #$6. + ! . ê'#$ /. (#)*)# . # 6. ' ! *6-. -! & . (7 .)/ /*6 & .!
$ # .)/ '#ê' /. ' # & ! $ é8, * -!, $ # 6. ' .) .) # ê/.) 0 , .)/ * +#ç)'.
#-ê/+6 $ # /* +$ 7*. # .) - & 0é)+#-&)7 '< ! ê+ -! .)/ 'MVPSFTDFODF -J%'
' 0 +&6 . # &6') - * #+ & . *)/) -.6ê), ' # -. é +6, 6* , * +# + 0!$, .
* $. ' . # (#)*)#8'. , .!, /' .6.!. .)/ SBOHJOH > $ #&)-0 ##+#$#+< & .

B $"--04 $&3 ÿY NN
ÿZ NN

C $"--04 ."3 ü
ü ü ÿY NN
ÿZ NN

D $"--04 ."3 ü ü
ü ü ÿY NN ÿZ NN

ê & ê!& .#$6 ê +.) + 0!-!, # & . ' # 2 #, . ' 0 -& . '
+ & .))# é!$ ' -.#, $)+/0 , . ')+é) ' ' & $. !) ç & ÿY $. & $),
$ # ÿZ $ éL72), - $ é &

< >))*#-é)-$ 6& ') - & .))*)) * +# ê # .6-) .!' -.#$ -$ -! '6, *
MBTFS 6-) $ # .)' 0é)+#-&6 $. + 0 . # # &# - #+ -!& ' $. & $), .)/
.)/ / .#')/ -.+8& .), *)/ & . . # # *)-. - #, -.#,)*) , &ç ' . # .) - & $ é8
'. -.)#ê 0 -& . # $+ ')'. # & . (7 .)/, ' ' # ' -. ! -/ê'6.!. . ' * &8' .)/
$ #) ê+6'), 2!, .)/ - & .), - -ê -! & .!' $*)&* .)/ * &)7 -.6-) -.! -/' ê
é * +)/-# -. ' /.#$! -/ $ $+#& '! . ê'#$ &6') # * #+ & . -. é +)7 -.6ê)
' # 0 +)' .!, * +)7- , + - , -.# . # -.#, & .+ - #, 0é)+#-&)7 *6 *#0 ' # ,

7&0 ' & .!' #$6'&# ./*#$ # . (! 'MVPSFTFODF -J%"3>-.*ğ. +)7.-#6ê)/ <
*6 $. !) MBTFS -/' é , -.!' * +#)ê .)/ 6!7 <$6*#) ' -7-.!& ' /-!,
.)/ 0 .6, -.#, 0 -& .#$, .)/ -/'#-.8- , $ # ' ' '#ê' /.))*)), -/' . # & ' -7
! $.+)'#$)7 /*)) #-.) -&! .)/ MBTFS *+)-* *. # -.) -!&) & .+!-!, * .!, *#
-.6ê)/ 6*)/ ! $.#')ç) ! *# + & . &6+# . ' *#$ é - ' $ é8, $ # .)/ /*)-.
'! $.#')ç) MBTFS &* *. # -.#, 8' , *)++60!-!, . '*+) ' 0 +6& ' '&)+ ' .
0é)+#-&6,))*)), * +# ê # * !+)0)+ , # . 0/-#$) ê!&#$ ê + $.!+#-.#$.)/

$.#')ç) *)/ $* &* . # *6 .)'-.6ê)* +# &ç ' #.6-).)'0é)+#-&6 6-)$ #.!
)*#-é)-$ -!.)/MBTFS)-/') #$6- & -/ . # *6$. !).! -$6*#) 8-.
! 7' &! $.#')ç) .)/0é)+#-&)7' ' # /'.6' '#ê'/. * + *. -!*)/!
)*#-é)-$ -! ' ' # * + .!.! /* +ê #! /'.6.!. .)*)é .!-!, $. !)/0 .+)/
' *)$)* .!-/' ê # .)- & $é)! . # & ê+ -!)*.#$8'#'8'- ' '0 -& .) +
)*)), .) ' 7 # 0 -& .#$. '.6, .)/0 -& .) + 0)/ . $.6, .)*)é . . # $
-7-.!& ' ê' /-!, 6* , '#ê' /. , $$% -7-.!& 0 .)*) * -# -.8' 1.5 - $. !
7+! &!$8' $7& .), 8-. ' $. + 0 .) ' /& ')- & 0é)+#-&)7 ' $.!-!. '0 -
+ & .))# . # *6$. !)) #-&#$6 & ê+ -!! $.+)'#$)7/*)) #-.

ê & à ôùî ö÷ á ýö÷ëÿ Òöé îûôÿ 'MVPSFTDFODF -Ɜ%"3 îõòþü ü

ˆ®´•´£®¯£ ¯¦® ›¦¸±¦¹®¯£ ‡²¡•º¸¬ Šª®£±¡¹•² 'ª•¢¹¬·

' /-! . ' # & . ' *)/ ê+!-#&)*)# é!$ -.!' * +)7- + - *). . # *6 7) $
-/'#-.8- , ü+ê#$ *+ & .)*)# é!$ ç#)) #$ # & .) !2 - $ é & 8-. '
)# ç -#$) ç#)) #$) * +)'. , *)/ *#0 +)/' .!' ç#) # ç+ -! .!, *#0 ' # , .!
0é!$ '. 0 -& . 0é)+#-&)7 *6 ê + $.!+#-.#$,* +#)ê ,.!, *#0 ' # ,)#)*)
&)*.#$ * + . +!-! .6ê), .!, #* , ' /-!, *). ! *+)- #-.#$ -/-ê .#-
' $.!é '.), 0 -& .), & .!' ç#)) #$. /.6.!. .)/ ç#) # ç+ . é8, 6& , ! ç#)
& .) !2 . '- +$. # 6. + -!& -/ $+#.#$ & .#,* +#)ê , 2!,0 -& . '
+ & .))# é!$. +)ê+)'#-& ' $ # *+)- #-.#$ # * +#)ê ,*)/ &ç ')'. # .
*). -)/' .) -7')))& ' ' *)/ é $* # 7- # .)' 6+#é&) .!, þ+ &&#$, ÿ#
ü' /-!,

ç#)) #$ ' /-! *+ & .)*)# é!$ *6 .!' ÿ+ '' /++ -.)')& #$)) ,
(#')&#$, .)/ .& & .), ý#)) , -.) é'#$6 $ # *) #-.+# $6 ' *#-. &#) üé
& . & . é!$ '-.#, $. -. - #,.!, . #+ ,3BZNFUSJDT 4 " -. * -# .)
*+) + && .), $ " - - 0 4 $POTFSWBUJPO PG "UIFOT BOUJRVJUJFT XJUI
HJFT 0QFO UP 4DJFODF BOE QVCMJD ü')#ê.6 + -. +#) /'. +!-!, . ' '!&
. ê')) , # + $ # -*%"3 $ #$6, +)/ ý /' *8, ! * +# + 0 -.!+
-.!' ' 0)+ *)/ -/'. êé!$ # .)' -/ $ $+#& ') -$)*6

ü+ê#$! 2! . ' &#$+))+ '#-&8' *+ & .)*)# é!$ & ê+ -! $) !.#$, . #'
UBQF $ é8, * -!, $ # & .!' ê+ -! ç 6' , * .!, *#0 ' # , .)/ & .), *)/ &
$ # + # . ' &#$+))+ '#-&8' ' *.7êé!$ - $. !) -. + 6 é+ *.#$6 /*6-.
#) -/ $ $+#& ' - 8BUFS BHBS 8" -.))*)) &ç) # -.!$ '. # & .) !.)7&
. .)' &ç) # -&6 . & . * -.!$ '- é &) -. é + , é +&Ç$-+ - , -.)/,
-/'é $,!& + , '7ê. ,

. & . & .!' $) 8 ! . #' *+)-. é!$ /$ +6 ! -.) + -. +#) $ # & . é!$
&#$+)-$6*#) ;FJTT "YJP*NBHFS " - & é7'- #, $ # . .! &#
* + . +!-! . ' # & . ' *)/ 0é!- ' & $) 8 ! . #' #' - + -! 6 !, .!, * +#)ê ,
* + -$ / -& .), $ # 0 .) + 0!-! '.#*+)- * /.#$8' * +#)ê8' .+/ç 0 .) + 0
& $+)-$)*#$ ç)& ,& . .)' &ç) # -&6 & ' $ # & ' ,& . . .+/ç *)/
$ ' &#$+))+ '#-&) #' ' * + -$ / -& . * + .!+ é!$ ' &#$+)-$)*#$ $ # 0 .) +
&#$+) -$6*#) ;FJTT "YJP*NBHFS " - & é/'-!

$"--04 $&3

ˆ®´•´£®¯£ –ª¶®£¶¦»£ Šª¤£±¦¹´·

) & '.#-.)#ê - .& & $ + &)/ *6 *! 6 $ -. ' +/é+) $ # *+) +ê . # *6
-.) & .+6 + & #$)7) & #-.) - 6& ') * .), ' # DN .) '. -.)#ê)
' # DN $ # .) '. -.)#ê) * Y), ' # DN $/+ +ê), * +)'. , ç#) # ç
-/ $ $+#& ')/ & .), ' #. ç+7 $ # # #$65P+SUVQ(M+B7) ,')!/„*)+8)/,
#0 ' # , .)/ $ + &#$)7 /)-.+8& .), ! * +# $.#$6.!. / + > /,')'.6.,!'. '*6+ '<
' *./(! ç+7 ' .)*) * $. ')'. # - & ! $. -! * .)/ & .), 0 .) + 0
ç+7)/ * +)/-# . # -.) ê &

ê & Ðþ ü ðêúü ÿ 5PSUVMB

#+)-é . , -.!' *#0 ' # .)/ & .), * + .!+ é!$ 'ê +)07$!- $. -. -! *)-7'
& ' + , * +#)ê , 6& , $ . .!'* +)) # & .) !2 , * -!, 6 .!, 7* +(!, +)&
&/$. ' .) & * +# ê -*6+# &/$. ' ê'!. ')*) '* +)/-#)'. # -.) ê &

) #$6' .)/ & .), 6. ' $. + 0!$ ')# & .+ - #, 0é)+#-&)7 * +)/-# . # -.)
.!' +#-. + * /+ .)/ & .), 6*)/! *#0 ' # ' # #-é!. *#) -$)/+6ê+ &! &
. ê +)07$!- *)-7'é -! '8 -.#, $ -. ' , $ # *+ -#' , ' /0 , * +#)ê , $/+# +
ç+7

ê & ð× úô ýüþì ú ù ÷ë ú ÷îö ýþé öúî ìðùî î ýü ýüñòö÷ú ü ú ôú y
ø þü ÷ ú