ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Δ.Π.Μ.Σ «ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ»

Διερεύνηση Απεικονίσεων (Ψευδομονότονων ή Ασθενώς Συνεχών) και Εφαρμογές στις Μη-γραμμικές Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Αθανάσιος Λαμπρόπουλος

Επιβλέπων: Αντώνιος Χαραλαμπόπουλος

Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Οκτώβριος 2021

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου κύριο Αντώνιο Χαραλμπόπουλο για την πολύπλευρη και ουσιαστική καθοδήγηση του καθώς και για τις σημαντικές και ιδιαίτερα χρήσιμες σε μένα παρατηρήσεις του.

Εισαγωγή

Αντικείμενο αυτής της διπλωματικής εργασίας είναι η μελέτη γραμμικών και μη-γραμμικών ελλειπτικών προβλημάτων. Τα γραμμικά ελλειπτικά προβλήματα μελετώνται με τις μεθόδους συμπάγειας και μονοτονίας (compactness and monotonicity methods). Τα μη-γραμμικά από την σκοπιά της θεωρίας των ψευδομονότονων απεικονίσεων καθώς και των ασθενώς συνεχών απεικονίσεων. Ωστόσο πρώτα παρουσιάζονται τα κυριότερα σημεία της θεωρίας που απαιτείται για την επίλυση των προβλημάτων.
Αναλυτικότερα η εργασία αυτή διαρθρώνεται σε 4 κεφάλαια.
Στο Κεφάλαιο 1 παρουσιάζεται όλο το βασικό υλικό το οποίο είναι απαραίτητο για τη μελέτη των προβληματων.
Στο πρώτο μέρος του Κεφαλαίου 2 μελετάμε τα γραμμικά ελλειπτικά προβλήματα και εστιάζουμε σε μία μέθοδο επίλυσης η οποία ονομάζεται μεταβολική προσέγγιση.
Στο δεύτερο μέρος του Κεφαλαίου 2 μελετάμε τα μη-γραμμικά ελλειπτικά προβλήματα. Η τεχνική επίλυσης τέτοιων προβλημάτων είναι σχεδόν μοναδική και πρέπει να χρησιμοποιηθεί το θεώρημα του σταθερού σημείου. Υπάρχουν διάφορες τεχνικές για την επίτευξη αυτού του στόχου ωστόσο στην συγκεκριμένη εργασία παρουσιάζονται οι μέθοδοι της συμπάγειας και της μονοτονίας.
Στο Κεφάλαιο 3, περιγράφουμε την ασθενή διατύπωση ενός προβλήματος συνοριακών συνθηκών για μια μερική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης και τον τρόπο με τον οποίο σχετίζεται η ασθενής λύσης αυτής με την κλασική της λύση. Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε την γενική θεωρία (abstract theory) των ψευδομονότονων τελεστών σε προβλήματα συνοριακών συνθηκών για να αποδείξουμε την ύπαρξη μιας ασθενούς λύσης της σχεδόν γραμμικής μερικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης της μορφής $-\mathrm{div}\big(a(x,u,\nabla u)\big)+c(x,u,\nabla u)=g$ ορισμένη σε ένα φραγμένο συνεκτικό Lipschitz χωρίο $\Omega\subset\mathbb{R}^n$.
Τέλος, στο Κεφάλαιο 4 θεωρούμε την περίπτωση ενός πιεστικού και ασθενώς συνεχή τελεστή αντί για ψευδομονότονο, και αποδεικνύουμε την ύπαρξη μιας λύσης για το πρόβλημα που μελετήθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Βασική Προκαταρκτική Ύλη

Σε αυτό το σημείο θα παρουσιάσουμε όλο το βασικό υλικό (Ορισμούς, Λήμματα, Προτάσεις και Θεωρήματα) το οποίο είναι απαραίτητο για τη μελέτη των προβλημάτων, τα οποία στη συνέχεια θα επιλύσουμε.

Πρόταση 1.1 (Ανισότητα του Young)

Αν $a,b \geq 0$ $p>1$ και $q=\dfrac{p}{p-1}$ ($\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$), τότε

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

Τροποποιημένη ανισότητα Young

$$\forall \varepsilon > 0: ab \leq \varepsilon a^p + C_\varepsilon b^q,\ C_\varepsilon = \frac{\sqrt[p-1]{\varepsilon}\sqrt[q]{p}}{p-1}$$

Πρόταση 1.2 (Ανισότητα του Holder)

Έστω Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ ένας χώρος μέτρου και $1<p<\infty$ και $q=\dfrac{p}{p-1}$ $\left(\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1\right)$. Τότε για όλες τις μετρήσιμες συναρτήσεις f, g στον X,

$$\int_X |fg|dx \leq \left(\int_X |f|^p dx\right)^{1/p}\left(\int_X |g|^q dx\right)^{1/q}.$$

Πρόταση 1.3. (Διάφορα Είδη Σύγκλισης)

(i) Κάθε ακολουθία $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ που συγκλίνει σχεδόν παντού συγκλίνει και κατά μέτρο.

(ii) Κάθε ακολουθία που συγκλίνει κατά μέτρο, έχει μια υπακολουθία που συγκλίνει σχεδόν παντού.

(iii) Κάθε ακολουθία που συγκλίνει στον $L^1(\Omega)$ συγκλίνει και κατά μέτρο.

Θεώρημα 1.1. (Lebesgue Dominated Convergence Theorem)

Έστω $\{f_n\}$ μια ακολουθία συναρτήσεων στον L^p (ή στον L^∞) και $f \in L^p$ τέτοια ώστε $\|f_n - f\|_{L^p} \to 0$. Τότε:

(α) Υπάρχει μια υπακολουθία τέτοια ώστε $f_{n_k}(x) \to f(x)$ σημειακά σχεδόν παντού στο Ω.

(β) Υπάρχει μια συνάρτηση $h \in L^p$ τέτοια ώστε $|f_{n_k}| \le h(x),\ \forall k$ και σχεδόν παντού στο Ω.

Θεώρημα 1.2. (Fatou Lemma)

Έστω $\{f_n\}$ μια ακολουθία μη αρνητικών συναρτήσεων στον $L^1(\Omega)$ και τέτοια ώστε $\liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)\,dx < +\infty$. Τότε η συνάρτηση $x \to \liminf_{n\to\infty} f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη και

$$\liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)\,dx \ge \int_\Omega \left(\liminf_{n\to\infty} f_n(x) \right) dx$$

Θεώρημα 1.3. (Dunford και Pettis)

Έστω $M \subset L^1(\Omega;\mathbb{R}^m)$ φραγμένο. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα μεταξύ τους:

(i) Το M είναι σχετικά ακολουθιακά συμπαγές στον $L^1(\Omega;\mathbb{R}^m)$

(ii) Το M είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο, το οποίο σημαίνει:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ K > 0 : \sup_{u \in M} \int_{\{x \in \Omega : |u(x)| \geq K\}} |u(x)| dx < \varepsilon$$

(iii) Το M είναι ίσο-απολύτως-συνεχές (equi-absolutely-continuous), το οποίο σημαίνει:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 : \sup_{u \in M} \sup_{|A| \leq \delta} \int_A |u(x)| dx < \varepsilon$$

Θεώρημα 1.4. (Vitalli) (Γενίκευση του Θεωρήματος της κυριαρχημένης και σύγκλισης και του Λήμματος του Fatou).
Έστω $\{u_n\}$ μια ακολουθία συναρτήσεων στον $L^1(\Omega)$ η οποία συγκλίνει σχεδόν παντού σε μια συνάρτηση u. Τότε η $|u| \in L^p(\Omega)$ και η $u_n \to u$ στον $L^p(\Omega)$ αν και μόνο η $\left\{|u_n|^p\right\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη.

Θεώρημα 1.5.
Κάθε χώρος Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$, $1 < p < \infty$ είναι ανακλαστικός.

Θεώρημα 1.6. (Θεώρημα Banach)
Κάθε φραγμένη ακολουθία σε έναν ανακλαστικό χώρο Banach περιέχει μια ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία.

Ορισμός 1.1.
Έστω X και Y δύο διανυσματικοί χώροι με νόρμες $\|\cdot\|_X$ και $\|\cdot\|_Y$, αντίστοιχα, τέτοιοι ώστε $X \subseteq Y$. Λέμε ότι η εμφύτευση του X στον Y είναι συνεχής και γράφουμε $X \subset Y$ ή $(X \subseteq Y)$ αν η ταυτοτική απεικόνιση

$$i : X \to Y, \ i(x) = x, \ \forall x \in X$$

Είναι συνεχής, δηλαδή αν υπάρχει μια σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε

$$\|x\|_Y \leq C \|x\|_X, \ \forall x \in X .$$

Ορισμός 1.2.

Έστω X και Y δύο διανυσματικό χώροι με νόρμες $\|\cdot\|_X$ και $\|\cdot\|_Y$, αντίστοιχα, τέτοιοι ώστε $X \subseteq Y$. Η εμφύτευση του X στον Y είναι συμπαγής αν:

(i) Η εμφύτευση του X στον Y είναι συνεχής, δηλαδή υπάρχει μια σταθερά $C > 0$, τέτοια ώστε $\|x\|_Y \leq C\|x\|_X$, για κάθε $x \in X$, και

(ii) Η εμφύτευση του X στον Y είναι συμπαγής τελεστής: Κάθε φραγμένο υποσύνολο του X είναι ολικά φραγμένο στον Y, δηλαδή, κάθε φραγμένη ακολουθία του X έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία στον Y.

Θεώρημα 1.7. (Sobolev Embedding Theorem)

Έστω Ω ένα λείο χωρίο, $1 \leq p < n$ και $p^* = \dfrac{np}{n-p}$. Τότε, $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$, δηλαδή η ταυτοτική απεικόνιση $i : W^{1,p}(\Omega) \to L^q(\Omega)$ είναι συνεχής για κάθε $1 \leq q \leq p^*$.

Θεώρημα 1.8. (Rellich-Kondrachov Embedding Theorem)

Έστω Ω ένα λείο χωρίο, $1 \leq p < n$ και $p^* = \dfrac{np}{n-p}$. Τότε, η εμφύτευση $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$, είναι συμπαγής για κάθε $1 \leq q < p^*$.

Θεώρημα 1.9. (Trace Operator**)**

Υπάρχει ακριβώς ένας γραμμικός συνεχής τελεστής $T : W^{1,p}(\Omega) \to L^1(\Gamma)$ τέτοιος ώστε για κάθε $u \in C^1(\Omega)$ να ισχύει $T(u) = u|_\Gamma$, ο περιορισμός της u στο Γ. Επιπλέον, ο T είναι συνεχής (αντίστοιχα, συμπαγής) ως η απεικόνιση

$$u \mapsto u|_\Gamma : W^{1,p}(\Omega) \to L^{\#}(\Gamma)$$
$$u \mapsto u|_\Gamma : W^{1,p}(\Omega) \to L^{\#-\varepsilon}(\Gamma),\ \varepsilon \in \left(0,\ p^{\#} - 1\right]$$

αντίστοιχα.

Ο τελεστής T λέγεται **τελεστής ίχνους** και στη συνέχεια θα γραφουμε $u\big|_{\Gamma}$ αντί $T(u)$.

Λήμμα 1.1.

Έστω V ένας χώρος με νόρμα. Αν $\{u_n\}$ είναι μια ακολουθία του V τέτοια ώστε κάθε υπακολουθία της $\{u_{n_k}\}$ έχει ακόμα μια υπακολουθία της $\{u_{n_{k_l}}\}$ η οποία έχει το ίδιο όριο $u \in V$ με αυτή, τότε και ολόκληρη η ακολουθία επίσης θα συγκλίνει σε αυτό το όριο, δηλαδή $u_n \to u$.

Απόδειξη.

Έστω ότι η ακολουθία $\{u_n\}$ δεν συγκλίνει στην u. Αν η $\{u_n\}$ δεν είναι φραγμένη, τότε θα έχει μια τουλάχιστον υπακολουθία η οποία επίσης δεν θα είναι φραγμένη. Αυτή η υπακολουθία δεν θα έχει κάποια υπακολουθία η οποία θα έχει όριο τη u, το οποίο είναι άτοπο.

Έστω ότι η ακολουθία συγκλίνει. Τότε θα συγκλίνει στην u γιατί μια συγκλίνουσα ακολουθία έχει το ίδιο όριο με όλες της υπακολουθίες της και κάθε υπακολουθία μιας υπακολουθίας της είναι και υπακολουθία της ίδιας της ακολουθίας.

Θεώρημα 1.10. (Poincare Type Inequalities)

Έστω $1 \le q \le p^*$. Τότε υπάρχει μια σταθερά $C_p < +\infty$ τέτοια ώστε

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \le C_p \left(\|\nabla u\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{L^q(\Omega)} \right)$$

όπου $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Έστω $1 \le q \le p^{\#}$, έστω ότι το Ω ένα συνεκτικό και έστω $\Gamma_D, \Gamma_N \subset \Gamma = \partial\Omega$ τέτοια ώστε $\operatorname{meas}_{n-1}(\Gamma_D) > 0$, $\operatorname{meas}_{n-1}(\Gamma_N) > 0$. Τότε υπάρχει μια σταθερά $c_p < +\infty$ τέτοια ώστε

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \le c_p \left(\|\nabla u\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)} + \left\| u\big|_{\Gamma_N} \right\|_{L^q(\Gamma_N)} \right)$$

και επίσης αν $u\big|_D = 0$ τότε

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \le c_p \|\nabla u\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)}$$

Μια ειδική περίπτωση της $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \le c_p \left(\|\nabla u\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)} + \left\| u\big|_{\Gamma_N} \right\|_{L^q(\Gamma_N)} \right)$ με $\Gamma_D = \Gamma$ και $p = q = 2$ ονομάζεται ανισότητα Friedrichs.

Πρόταση 1.4. (Markov's Inequality)

Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας ένα χώρος μέτρου και f μια μετρήσιμη συνάρτηση ορισμένη στο *X*. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει η ανισότητα

$$\mu\left(\left\{x \in X : \left|f(x)\right| \ge \varepsilon\right\}\right) \le \frac{1}{\varepsilon}\int_X |f| d\mu .$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Α. Γραμμικά Ελλειπτικά Προβλήματα

Για αρχή θα μελετήσουμε τα γραμμικά ελλειπτικά προβλήματα και θα εστιάσουμε σε μία μέθοδο η οποία ονομάζεται μεταβολική προσέγγιση. Υπάρχουν κι άλλοι τρόποι επίλυσης ελλειπτικών προβλημάτων αλλά διαλέγουμε την μεταβολική διότι είναι αρκετά απλή και θα μας βοηθήσει και στην επίλυση των μη-γραμμικών.

Η πιο απλή γραμμική ελλειπτική εξίσωση είναι αυτή του Poisson με ομογενείς Dirichlet συνοριακές συνθήκες.
Δοθέντος ενός ανοικτού χωρίου Lipschitz Ω του $\mathbb{R}^n$ και μιας συνάρτησης $f \in L^2(\Omega)$, θέλουμε να βρούμε μία συνάρτηση $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\begin{cases} -\Delta u = f \ \ \sigma\tau o \ \ \Omega, \\ \quad u = 0 \ \sigma\tau o \ \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

Θα μετατρέψουμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών (1.1) σε ένα τελείως διαφορετικού είδους πρόβλημα, (συγκεκριμένα σε ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης ενός κατάλληλου συναρτησιακού), στο οποίο μπορούμε να εφαρμόσουμε τις θεωρίες ύπαρξης και μοναδικότητας λύσης, όπως επίσης και προσεγγιστικές μεθόδους.

Θα χρειαστούμε πρώτα την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 2.1. Υποθέτουμε ότι το $u \in H^2(\Omega)$ είναι λύση της διαφορικής μας στο πρόβλημα (1.1). Τότε για κάθε $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega fv \, dx. \tag{1.2}$$

Απόδειξη. Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης (1.1) με ένα τυχαίο $v \in H_0^1(\Omega)$, οπότε παίρνουμε

$$-(\Delta u)v = fv,$$

κι έπειτα ολοκληρώνουμε στο Ω. Κάθε όρος είναι ολοκληρώσιμος εφόσον η $u \in H^2(\Omega)$, ως εκ τούτου $\Delta u \in L^2(\Omega)$ και $v \in L^2(\Omega)$ άρα $(\Delta u)v \in L^1(\Omega)$. Επιπλέον $v \in L^2(\Omega)$ και $f \in L^2(\Omega)$ άρα το γινόμενο $fv \in L^1(\Omega)$. Έτσι προκύπτει

$$-\int_\Omega (\Delta u)v \, dx = \int_\Omega fv \, \mathrm{dx}.$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Green

$$\int_\Omega (\Delta u)v \, dx = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\partial\Omega} \gamma_1(u)\gamma_0(v) \, d\Gamma,$$

παίρνουμε

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} \gamma_1(u)\gamma_0(v) \, d\Gamma = \int_\Omega fv \, \mathrm{dx}$$

κι επειδή $v \in H_0^1(\Omega)$, είναι συνάρτηση με συμπαγή φορέα στο Ω θα μηδενίζεται στο $\partial\Omega$ άρα $\gamma_0(v) = 0$, οπότε καταλήγουμε στην

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega fv \, dx. \qquad \square$$

Η σχέση (1.2) ονομάζεται **μεταβολική μορφή** του προβλήματος (1.1). Για να την ολοκληρώσουμε όμως, πρέπει να διαλέξουμε σε ποιον χώρο ψάχνουμε την λύση u. Η λογική επιλογή για το συνοριακό πρόβλημα

Dirichlet είναι να απαιτήσουμε το $u \in H_0^1(\Omega)$. Οι συναρτήσεις v ονομάζονται **συναρτήσεις ελέγχου** (test functions).

Ξαναγράφουμε την μεταβολική μορφή σε μια πιο αφηρημένη μορφή. Θέτουμε $V = H_0^1(\Omega)$, ο οποίος είναι χώρος Hilbert. Έτσι έχουμε μια διγραμμική μορφή στον $V \times V$

$$\alpha(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx$$

και μια γραμμική μορφή στον V

$$\ell(v) = \int_\Omega f v \, dx.$$

Η μεταβολική μορφή του προβλήματος τότε γράφεται

$$\forall v \in V, \quad \alpha(u,v) = \ell(v), \tag{1.3}$$

κι έτσι έχουμε δείξει ότι η λύση του συνοριακού προβλήματος (1.1) με τον επιπλέον περιορισμό $u \in H^2(\Omega)$ είναι και λύση του μεταβολικού προβλήματος (1.3).

Τώρα, όσον αφορά τον αντίστροφο ισχυρισμό. Μια λύση του μεταβολικού προβλήματος, επιλύει και το συνοριακό πρόβλημα; Η απάντηση είναι ναι, δηλαδή, τα δύο προβλήματα είναι ισοδύναμα. Οπότε τώρα θα δείξουμε το αντίστροφο.

Πρόταση 2.2.

Υποθέτουμε ότι η $u \in V$ επιλύει το μεταβολικό πρόβλημα (1.3). Τότε

$$-\Delta u = f \quad \sigma\tau o \ \Omega.$$

Απόδειξη.

Παίρνουμε $v = \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Η φ σαν συνάρτηση ελέγχου με συμπαγή φορέα στο Ω θα μηδενίζεται στο $\partial\Omega$ άρα και τα ολοκληρώματα πάνω στο σύνορο $\partial\Omega$ που θα προκύψουν από την εφαρμογή του τύπου του Green ύστερα από την (1.3) θα μηδενίζονται.

Από την (1.3) θα έχουμε

$$\langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle. \qquad (1.4)$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τον τύπο του Green

$$\langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle = -\langle \Delta u, \varphi \rangle + \langle \gamma_1(u), \gamma_0(\varphi) \rangle$$

προκύπτει

$$-\langle \Delta u, \varphi \rangle + \langle \gamma_1(u), \gamma_0(\varphi) \rangle = \langle f, \varphi \rangle$$

κι επειδή $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, καταλήγουμε στην

$$\langle -\Delta u, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle \Leftrightarrow \langle -\Delta u - f, \varphi \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \qquad (1.5)$$

Ερμηνεύοντας την (1.5) δηλαδή την $\langle -\Delta u - f, \varphi \rangle = 0$, για κάθε $\varphi \in D(\Omega)$ προκύπτει ότι $-\Delta u = f$ στο $D'(\Omega)$. Άρα η $-\Delta u = f$ ανήκει στον $L^2(\Omega)$ κι έτσι η εξίσωση της (1.1) ικανοποιείται σχεδόν παντού στο Ω. Τελικά, επειδή $u \in H_0^1(\Omega)$ τότε και η $u = 0$ σχεδόν παντού στο $\partial\Omega$. □

B. Μη-γραμμικά Ελλειπτικά Προβλήματα

Η τεχνική επίλυσης μη-γραμμικών ελλειπτικών προβλημάτων είναι σχεδόν μοναδική, δηλαδή πρέπει να χρησιμοποιηθεί το θεώρημα σταθερού σημείου.
Για να γίνει αυτό πρέπει να λύσουμε το πρόβλημα σε ένα χώρο πεπερασμένης διάστασης n και μετά να πάρουμε το όριο $n \to \infty$. Υπάρχουν διάφορες τεχνικές για την επίτευξη του και στην συγκεκριμένη εργασία θα παρουσιάσουμε δύο από αυτές: της συμπάγειας και της μονοτονίας.

- **Η μέθοδος της συμπάγειας**

Θεωρούμε το πρόβλημα εύρεσης μιας λύσης u στο

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\alpha(x,u)\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right) = f \quad \sigma\tau o \ \Omega, \\ u \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{2.1}$$

Το Ω είναι ένα φραγμένο ανοικτό σύνολο του $\mathbb{R}^n$ και f κάποιο στοιχείο του $H^{-1}(\Omega)$, δϋικός του $H_0^1(\Omega)$.

Για το a θεωρούμε ότι είναι μια συνάρτηση Carathéodory, το οποίο σημαίνει ότι πληροί τα ακόλουθα:

- $\sigma.\pi.\ x \in \Omega,\ \ u \mapsto \alpha(x,u)$ *είναι συνεχής από το* $\mathbb{R}$ *στο* $\mathbb{R}$, $\quad (2.2)$
- $\forall u \in \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \alpha(x,\mathrm{u})$ *είναι μετρήσιμη.* $\quad (2.3)$

Επιπλέον υποθέτουμε ότι υπάρχουν δύο σταθερές m και M τέτοιες ώστε

$$0 < m \le \alpha(x,u) \le M \ \ \sigma.\pi.\ x \in \Omega,\ \forall u \in \mathbb{R}. \qquad (2.4)$$

Τότε μπορούμε να δείξουμε:

Θεώρημα 2.1

Με βάση τις υποθέσεις (2.2) και (2.3) υπάρχει μια λύση για το πρόβλημα (2.1).

Απόδειξη.

Χρησιμοποιούμε την ιδέα της προσέγγισης του προβλήματος από πεπερασμένης διάστασης αντίστοιχα προβλήματα.

Έτσι έστω,

$$V_h,\ h \in \mathbb{R}$$

να είναι μια οικογένεια υπόχωρων πεπερασμένης διάστασης του $H_0^1(\Omega)$ τέτοια ώστε

$$\forall v \in H_0^1(\Omega),\ \exists v_h \in V_h \ \textit{τέτοιο ώστε, το} \ \lim_{h\to 0} v_h = v \ \textit{στον}\ H_0^1(\Omega). \qquad (2.5)$$

Το πρώτο βήμα τώρα είναι να βρούμε μια προσέγγιση του u. Έτσι ισχυριζόμαστε ότι υπάρχει λύση u_h στο ακόλουθο πρόβλημα

$$\begin{cases} \int_\Omega \alpha(x,u_h)\nabla u_h \cdot \nabla v\, dx = \langle f, v\rangle,\ \forall v \in V_h, \\ u_h \in V_h. \end{cases} \qquad (2.1_h)$$

Έπειτα θεωρούμε $w \in V_h$ και αν εφαρμόσουμε το θεώρημα Lax-Milgram στο V_h με

$$\alpha(u,v) = \int_\Omega \alpha(x,\mathrm{w})\nabla u \cdot \nabla v\, dx,$$

τότε θα υπάρχει μια μοναδική λύση $u = T(w)$ στο

$$\begin{cases} \int_\Omega \alpha(x, \mathrm{w}) \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \langle f, v \rangle, \ \forall v \in V_h, \\ u \in V_h. \end{cases} \tag{2.6}$$

Στον V_h όλες οι νόρμες είναι ισοδύναμες λόγω του ότι είναι χώρος πεπερασμένης διάστασης, οπότε θα υιοθετήσουμε την νόρμα που χρησιμοποιούμε και στον $H_0^1(\Omega)$, δηλαδή την

$$\|\nabla v\|_2^2 = \int_\Omega |\nabla v|^2 dx .$$

Θέτοντας όπου $v = u$ στην (2.6) και χρησιμοποιώντας την (2.4) παίρνουμε

$$m \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \le \langle f, u \rangle .$$

Από την σχέση αυτή, λόγω της ανισότητας του Schwarz, προκύπτει η ανισότητα

$$m \|\nabla u\|_2^2 \le \langle f, u \rangle \le \| f \|_* \|u\|_2 \ ,$$

όπου η $\|\cdot\|_*$ υποδηλώνει την δϋική νόρμα στον $H_0^1(\Omega)$ και τελικά έχουμε την ανισότητα

$$m \|\nabla u\|_2^2 \le \langle f, u \rangle \le \| f \|_* \|\nabla u\|_2 \tag{2.7}$$

Από την (2.7) έχουμε ότι

$$m \|\nabla u\|_2 \le \| f \|_* ,$$

οπότε

$$\|\nabla u\|_2 \le \frac{\| f \|_*}{m} = \left\| \frac{f}{m} \right\|_* \tag{2.8}$$

Έτσι αν επιλέξουμε το w στο $B\left(0, \left\| \frac{f}{m} \right\|_*\right)$, η μπάλα του V_h με κέντρο το 0 και ακτίνα $\left\| \frac{f}{m} \right\|_*$, το $u = T(w)$ επίσης θα περιέχεται στην μπάλα. Από το θεώρημα σταθερού σημείου του Brouwer η απεικόνιση T θα έχει ένα

σταθερό σημείο στον V_h, δεδομένου ότι μπορούμε να δείξουμε την συνέχεια του.

Για την συνέχεια θεωρούμε μια ακολουθία

$$w_n \to w \text{ στον } V_h \text{ , δηλαδή στον } H_0^1(\Omega) \qquad (2.9)$$

Έστω u_n η λύση στο (2.6) που αντιστοιχεί στο w_n. Το φράγμα ισχύει για το u_n και εφόσον είμαστε σε χώρο πεπερασμένης διάστασης μπορούμε να βρούμε υπακολουθία n_k του n (Θεώρημα Bolzano–Weierstrass) τέτοια ώστε

$$u_{n_k} \to u \in V_h \qquad (2.10)$$

Μέχρι μια υπακολουθία μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$w_{n_k} \to w \ \ \sigma.\pi. \ \ \sigma\tau o \ \ \Omega.$$

Με αυτό τον τρόπο θεωρούμε την ισότητα

$$\int_\Omega \alpha\left(x, w_{n_k}\right) \nabla u_{n_k} \cdot \nabla v \, dx = \langle f, v \rangle, \ \forall v \in V_h. \qquad (2.11)$$

Βλέπουμε ότι

$$\nabla u_{n_k} \to \nabla u, \quad \alpha\left(x, w_{n_k}\right) \nabla v \to \alpha\left(x, w\right) \nabla v$$

όπου και οι δύο συγκλίσεις πραγματοποιούνται, για κάθε στοιχείο στον $L^2(\Omega)$. Άρα περνώντας το όριο στην (2.11) έχουμε

$$\int_\Omega \alpha\left(x, \mathrm{w}\right) \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \langle f, v \rangle, \ \ \forall v \in V_h,$$

Όπου το u είναι ίσο με $T(w)$. Εφόσον το $T(w)$ είναι το μόνο πιθανό όριο για τις υπακολουθίες του u_n, η ακολουθία $u_n = T(w_n)$ συγκλίνει στο $T(w)$ και η T είναι συνεχής. Αυτό εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας προσεγγιστικής λύσης στο (2.1) δηλαδή την ύπαρξη λύσης στο (2.1_h). Τώρα θέλουμε να δείξουμε ότι το όριο u_h, είναι η λύση του προβλήματος (2.1).

Για αυτό θεωρούμε $v \in H_0^1(\Omega)$ και $v_h \in V_h$ μια ακολουθία τέτοια ώστε

$$\lim_{h \to 0} v_h = v \, .$$

Είναι ξεκάθαρο ότι η εκτίμηση (2.8) ισχύει για u_h, έτσι ώστε το u_h να είναι φραγμένο στον $H_0^1(\Omega)$.

Χρησιμοποιώντας την εμφύτευση του $H_0^1(\Omega)$ στον $L^2(\Omega)$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει, εξάγοντας την υπακολουθία, $u \in H_0^1(\Omega)$ τέτοιο ώστε:

α) $u_h \rightharpoonup u$ στον $H_0^1(\Omega)$ (Θεώρημα Banach)

β) $u_h \to u$ στον $L^2(\Omega)$ (Θεώρημα Rellich-Kondrachov)

γ) $u_h \to u$ σχεδόν παντού στο Ω (θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης).

Αλλά τότε λόγω της συνέχειας της $\alpha(x,u)$ ως προς u (γιατί η $\alpha(x,u)$ είναι Carathéodory) και επειδή $\lim_{h\to 0} v_h = v$ έχουμε

$$\alpha(x,u_h)\nabla v_h \to \alpha(x,u)\nabla v \ \ \textit{στον} \ \ L^2(\Omega).$$

Έτσι περνώντας το όριο στην

$$\int_\Omega \alpha(x,u_h)\nabla u_h \cdot \nabla v_h \, dx = \langle f, v_h \rangle$$

παίρνουμε

$$\int_\Omega \alpha(x,u)\nabla u \cdot \nabla v \, dx = \langle f, v \rangle \ \ \forall u \in H_0^1(\Omega),$$

με αυτό τον τρόπο αποδείξαμε την ύπαρξη μιας λύσης στο (2.1). □

Παρατήρηση 2.1.

Το ενδιάμεσο αποτέλεσμα του (2.1_h) είναι πολύ σημαντικό διότι θεμελιώνει την ύπαρξη μιας διακριτής λύσης για την ασθενή μορφή του (2.1).

Παρατήρηση 2.2. Με τις ίδιες υποθέσεις για το α και την ίδια τεχνική είναι φανερό ότι μπορούμε να λύσουμε το μη-τοπικό πρόβλημα του τύπου

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\alpha(x,\ell(u))\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right) = f \ \ \textit{στο} \ \ \Omega, \\ u \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{2.12}$$

με ℓ να είναι για παράδειγμα μια συνεχής γραμμική μορφή στον $H_0^1(\Omega)$, έστω, δηλαδή

$$\ell(u) = \int_\Omega u(x)\,dx \qquad (2.13)$$

Παρατήρηση 2.3.
Για να περάσουμε το όριο πιο πάνω χρησιμοποιήσαμε το δεδομένο ότι

$$\nabla u_h \rightharpoonup \nabla u, \qquad \alpha(x,u_h)\nabla v_h \to \alpha(x,u)\nabla v$$

στον $L^2(\Omega)$. Αυτή είναι μια ειδική περίπτωση της ασθενούς-ισχυρής σύγκλισης όπως περιγράφεται στο ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 2.1.
Έστω H χώρος Hilbert και x_n, y_n δύο ακολουθίες τέτοιες ώστε

$$x_n \rightharpoonup x, \qquad y_n \to y\,;$$

τότε έχουμε

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n, y_n) = (x, y).$$

Απόδειξη.
Μπορούμε να γράψουμε

$$\left|(x_n, y_n) - (x, y)\right| = \left|(x_n - x, y) - (x_n, y_n - y)\right| \le \left|(x_n - x, y)\right| + \left|x_n\right|\left|y_n - y\right|.$$

Περνώντας το όριο, το αποτέλεσμα προκύπτει από το γεγονός ότι το x_n είναι φραγμένο στον H. □

- **Η μέθοδος της μονοτονίας**

Θεωρούμε πρώτα την μη-γραμμική γενίκευση, λύνοντας το σύστημα

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j = b_i, \;\; i = 1,\ldots,\mathrm{n}.$$

Εισάγουμε αρχικά τις συνεχείς συναρτήσεις

$$\xi \mapsto A_i(\xi)$$

από το $\mathbb{R}^n$ στο $\mathbb{R}$. Επιπλέον υποθέτουμε ότι για κάποιες σταθερές C και a

$$\left|A_i(\xi)-A_i(\xi')\right|\le C\left|(\xi-\xi')\right| \quad \forall i,\ \forall \xi,\xi'\in\mathbb{R}^n, \tag{2.14}$$

(Lipschitz Συνέχεια)

$$\sum_{i=1}^{n}\left(A_i(\xi)-A_i(\xi')\right)\left(\xi_i-\xi_i'\right)\ge \alpha\left|\xi-\xi'\right|^2 \quad \forall \xi,\xi'\in\mathbb{R}^n, \tag{2.15}$$

(Πιεστικότητα)

Τότε μπορούμε να αποδείξουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2.2.

Με τις παραπάνω υποθέσεις, για κάθε $b\in\mathbb{R}^n$ το σύστημα

$$A_i(\xi)=b_i \quad i=1,\dots,n \tag{2.16}$$

δέχεται μια μοναδική λύση.

Απόδειξη.

Το σύστημα είναι ισοδύναμο με το να βρούμε ένα $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε

$$\xi_i-\varepsilon A_i(\xi)+\varepsilon b_i=\xi_i, \quad \forall i=1,\dots,n,$$

αντίστοιχο του να βρούμε ένα σταθερό σημείο για μια συγκεκριμένη απεικόνιση. Για αυτό θεωρούμε την επανάληψη, η οποία καθορίζεται από

$$\xi^0 \ \tau\upsilon\chi\alpha\acute{\iota}o\ \xi_i^{p+1}=\xi_i^p-\varepsilon A_i\left(\xi^p\right)+\varepsilon b_i \quad \forall i=1,\dots,n,\ \mathrm{p}>0.$$

Έχουμε

$$\xi_i^{p+1}=\xi_i^p-\varepsilon A_i\left(\xi^p\right)+\varepsilon b_i$$
$$\xi_i^{p}=\xi_i^{p-1}-\varepsilon A_i\left(\xi^{p-1}\right)+\varepsilon b_i$$

Αφαιρώντας, τώρα, κατά μέλη προκύπτει

$$\xi_i^{p+1}-\xi_i^p=\xi_i^p-\xi_i^{p-1}-\varepsilon\left(A_i\left(\xi^p\right)-A_i\left(\xi^{p-1}\right)\right) \quad \forall i=1,\dots,n.$$

Από την τελευταία για $i=1,\dots,n$ παίρνουμε

$$\left(\xi_1^{p+1}-\xi_1^{p}\right)^2=\left(\xi_1^{p}-\xi_1^{p-1}\right)^2-2\varepsilon\left[A_1\left(\xi^p\right)-A_1\left(\xi^{p-1}\right)\right]\left(\xi_1^{p}-\xi_1^{p-1}\right)$$
$$+\varepsilon^2\left[A_1\left(\xi^p\right)-A_1\left(\xi^{p-1}\right)\right]^2$$
$$\left(\xi_2^{p+1}-\xi_2^{p}\right)^2=\left(\xi_2^{p}-\xi_2^{p-1}\right)^2-2\varepsilon\left[A_2\left(\xi^p\right)-A_2\left(\xi^{p-1}\right)\right]\left(\xi_2^{p}-\xi_2^{p-1}\right)$$
$$+\varepsilon^2\left[A_2\left(\xi^p\right)-A_2\left(\xi^{p-1}\right)\right]^2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\left(\xi_n^{p+1}-\xi_n^{p}\right)^2=\left(\xi_n^{p}-\xi_n^{p-1}\right)^2-2\varepsilon\left[A_n\left(\xi^p\right)-A_n\left(\xi^{p-1}\right)\right]\left(\xi_n^{p}-\xi_n^{p-1}\right)$$
$$+\varepsilon^2\left[A_n\left(\xi^p\right)-A_n\left(\xi^{p-1}\right)\right]^2$$

Με πρόσθεση κατά μέλη τις τελευταίες n το πλήθος σχέσεις παίρνουμε

$$\left(\xi_1^{p+1}-\xi_1^{p}\right)^2+\cdots+\left(\xi_n^{p+1}-\xi_n^{p}\right)^2=\left(\xi_1^{p}-\xi_1^{p-1}\right)^2+\cdots+\left(\xi_n^{p+1}-\xi_n^{p}\right)^2$$
$$-2\varepsilon\left[A_1\left(\xi^p\right)-A_1\left(\xi^{p-1}\right)\right]\left(\xi_1^{p}-\xi_1^{p-1}\right)\cdots 2\varepsilon\left[A_2\left(\xi^p\right)-A_2\left(\xi^{p-1}\right)\right]\left(\xi_2^{p}-\xi_2^{p-1}\right)$$
$$+\varepsilon^2\left[A_2\left(\xi^p\right)-A_2\left(\xi^{p-1}\right)\right]^2+\cdots+\varepsilon^2\left[A_2\left(\xi^p\right)-A_2\left(\xi^{p-1}\right)\right]^2$$

Από την ισότητα αυτή θεωρώντας τις Ευκλείδειες νόρμες των διανυσμάτων $\xi^{p+1}=\left(\xi_1^{p+1},\xi_2^{p+1},\cdots,\xi_n^{p+1}\right)$ και $\xi^p=\left(\xi_1^{p},\xi_2^{p},\cdots,\xi_n^{p}\right)$προκύπτει η σχέση

$$\left|\xi^{p+1}-\xi^{p}\right|^2=\left|\xi^{p}-\xi^{p-1}\right|^2-2\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\left[A_i\left(\xi^p\right)-A_i\left(\xi^{p-1}\right)\right]\left(\xi_i^{p}-\xi_i^{p-1}\right)$$
$$+\varepsilon^2\sum_{i=1}^{n}\left[A_i\left(\xi^p\right)-A_i\left(\xi^{p-1}\right)\right]^2$$

και χρησιμοποιώντας τις $(2.14),(2.15)$ έχουμε

$$\left|\xi^{p+1}-\xi^{p}\right|^2\le\left|\xi^{p}-\xi^{p-1}\right|^2-2\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\left(A_i\left(\xi^p\right)-A_i\left(\xi^{p-1}\right)\right)\left(\xi_i^{p}-\xi_i^{p-1}\right)+\varepsilon^2C'\left|\xi^{p}-\xi^{p-1}\right|^2$$
$$\le\left(1-2\varepsilon\alpha+\varepsilon^2C'\right)\left|\xi^{p}-\xi^{p-1}\right|^2$$

όπου C' είναι μια σταθερά. Για ε αρκετά μικρό θα έχουμε

$$\beta=1-2\varepsilon\alpha+\varepsilon^2C'<1$$

και η σειρά του όρου $\left|\xi^p - \xi^{p-1}\right|$ θα συγκλίνει όπως και η ακολουθία ξ^p προς την λύση του (2.16). Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη της ύπαρξης.
Για την μοναδικότητα είναι αρκετό να αντιληφθούμε ότι

$$A_i\left(\xi_{(1)}\right) = b_i = A_i\left(\xi_{(2)}\right)$$

από το οποίο μαζί με την (2.15) παίρνουμε

$$\alpha\left|\xi_{(1)} - \xi_{(2)}\right|^2 = 0.$$

Στην ουσία πιο πάνω γράψαμε την απόδειξη της Αρχής Συστολής Banach για την απεικόνιση $\xi \mapsto \left(\xi_i - \varepsilon A_i(\xi) + \varepsilon b_i\right)$. □

Έτσι για $f \in H^{-1}(\Omega)$ αντιμετωπίζουμε το πρόβλημα βρίσκοντας u τέτοιο ώστε

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(A_i(\nabla u)\right) = f \quad \sigma\tau o \ \ \Omega, \\ u \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{2.17}$$

Είναι φανερό ότι αν αντικαταστήσουμε το A_i με $A_i - A_i(0)$ μπορούμε να υποθέσουμε, κι αυτό θα κάνουμε από εδώ και πέρα ότι

$$A_i(0) = 0. \tag{2.18}$$

Τότε ψάχνουμε για μία ασθενή λύση u για το (2.17) δηλαδή για u τέτοιο ώστε

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \sum_{i=1}^n A_i(\nabla u)\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx = \langle f, v\rangle \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ u \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{2.19}$$

Υπό τους περιορισμούς (2.14), (2.18) είναι ξεκάθαρο ότι το ολοκλήρωμα της εξίσωσης (2.19) είναι καλά ορισμένο. Έπειτα έχουμε:

Θεώρημα 2.3.

Υπό τις υποθέσεις του **Θεωρήματος 2.2** υπάρχει μια μοναδική λύση του (2.19).

Απόδειξη.

Ας σκεφτούμε πρώτα την απόδειξη της μοναδικότητας η οποία είναι και εύκολη. Έστω u_1, u_2 δύο ασθενείς λύσεις του (2.19). Με αφαίρεση κατά μέλη παίρνουμε

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \left\{ A_i(\nabla u_1) - A_i(\nabla u_2) \right\} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Άρα θέτοντας $v = u_1 - u_2$ και χρησιμοποιώντας την (2.15) έχουμε

$$\alpha \int_\Omega \left| \nabla(u_1 - u_2) \right| \le \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \left\{ A_i(\nabla u_1) - A_i(\nabla u_2) \right\} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_i} - \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \right) dx = 0,$$

ως εκ τούτου $u_1 = u_2$.

Ας προχωρήσουμε στην επίλυση του προσεγγιστικού προβλήματος. Υποστηρίζουμε ότι υπάρχει μοναδική λύση u_h στο

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} A_i(\nabla u_h) \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V_h, \\ u_h \in V_h. \end{cases} \tag{2.19_h}$$

Η μοναδικότητα αποδεικνύεται όπως πριν. (V_h είναι υπόχωρος του $H_0^1(\Omega)$ ικανοποιώντας έτσι την (2.15)) Για την ύπαρξη θεωρούμε μια βάση $w_1, \ldots, w_N$ του V_h. Τότε το πρόβλημα περιορίζεται στο να βρούμε

$$u_h = \sum_{i=1}^{N} \xi_i w_i$$

τέτοιο ώστε

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} A_i \left(\sum_{i=1}^{N} \xi_i \nabla w_i \right) \frac{\partial w_j}{\partial x_i} dx = \langle f, w_j \rangle \quad \forall j = 1, \ldots, N. \tag{2.20}$$

Τώρα θέτουμε

$$B_j(\xi) = \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} A_i \left(\nabla \left(\sum_{i=1}^{N} \xi_i w_i \right) \right) \frac{\partial w_j}{\partial x_i} dx, \quad b_j = \langle f, w_j \rangle.$$

Με αυτό τον τρόπο περιοριζόμαστε, στο να λύσουμε το εξής σύστημα

$$B_j(\xi) = b_j \quad \forall j = 1,\dots,N.$$

Προφανώς το $B_j(0) = 0$. Επιπλέον, η A_i είναι Lipschitz συνεχής άρα το ίδιο ισχύει και για την B_j. Τελικά

$$\sum_{i=0}^{N}\left(B_j(\xi) - B_j(\xi')\right)\left(\xi_j - \xi_j{}'\right) = \int_\Omega \sum_{i=1}^{n}\left[A_i\left(\nabla\left(\sum_{j=1}^{N}\xi_j w_i\right)\right) - A_i\left(\nabla\left(\sum_{j=1}^{N}\xi_j{}' w_j\right)\right)\right]$$

$$\times\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{N}\xi_j w_j\right) - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{N}\xi_j{}' w_j\right)\right)$$

$$\geq \alpha\int_\omega\left|\nabla\left(\sum_{i=1}^{N}\xi_i w_i\right) - \nabla\left(\sum_{i=1}^{N}\xi_i{}' w_i\right)\right|^2 \geq \beta\left|\xi - \xi'\right|^2$$

εφόσον όλες οι νόρμες είναι ισοδύναμες στον V_h. Η ύπαρξη και η μοναδικότητα της u_h αποδεικνύεται σύμφωνα με το Θεώρημα 1.2.

Τώρα προχωράμε στην ύπαρξη μιας λύσης της (2.20).

Θέτοντας $v = u_h$ στην (2.19_h) και από τις (2.15), (2.18) προκύπτει

$$\alpha\left\|\nabla u_h\right\|_2^2 \leq \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} A_i\left(\nabla u_h\right)\frac{\partial u_h}{\partial x_i}dx = \left\langle f, u_h\right\rangle \leq \left\|f\right\|_* \left\|\nabla u_h\right\|_2.$$

Ως εκ τούτου η u_h είναι φραγμένη στον $H_0^1(\Omega)$ και έως μια υπακολουθία μπορούμε να θεωρήσουμε ότι υπάρχει $u \in H_0^1(\Omega)$ τέτοια ώστε

$$u_h \rightharpoonup u \text{ στον } H_0^1(\Omega). \tag{2.21}$$

Εάν η $u_h \in V_h$ είναι ακολουθία τέτοια ώστε

$$v_h \to v \text{ στον } H_0^1(\Omega). \tag{2.22}$$

έχουμε από την (2.19_h)

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} A_i\left(\nabla u_h\right)\frac{\partial v_h}{\partial x_i}dx = \left\langle f, v_h\right\rangle \tag{2.23}$$

Ωστόσο δεν μπορούμε να περάσουμε το όριο στο αριστερό μέλος αυτής της ανισότητας!

Αντικαθιστώντας την v_h με $v_h - u_h$ στην (2.23) έχουμε

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} A_i(\nabla u_h)\frac{\partial(v_h - u_h)}{\partial x_i}dx = \langle f, v_h - u_h \rangle.$$

Χάρις την μονοτονία της A_i παίρνουμε

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \{A_i(\nabla u_h) - A_i(\nabla v_h)\}\frac{\partial(v_h - u_h)}{\partial x_i}dx + \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} A_i(\nabla v_h)\frac{\partial(v_h - u_h)}{\partial x_i}dx = \langle f, v_h - u_h \rangle$$

και

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} A_i(\nabla v_h)\frac{\partial(v_h - u_h)}{\partial x_i}dx \geq \langle f, v_h - u_h \rangle.$$

Από την (2.22) προκύπτει ότι μπορούμε να βρούμε σημειακά συγκλίνουσα υπακολουθία ως ακολούθως: $\nabla v_h \to \nabla v \ \sigma.\pi.$ Παίρνοντας όριο στην τελευταία ανίσωση προκύπτει ότι

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} A_i(\nabla v)\frac{\partial(v - u)}{\partial x_i}dx \geq \langle f, v - u \rangle \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Έπειτα θέτοντας $v = u + tw,\ w \in H_0^1(\Omega)$ έχουμε

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} A_i(\nabla v + t\nabla w)\frac{\partial w}{\partial x_i}dx \geq \langle f, w \rangle \quad \forall w \in H_0^1(\Omega).$$

Με το $t \to 0$ προκύπτει

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} A_i(\nabla v)\frac{\partial w}{\partial x_i}dx \geq \langle f, w \rangle \quad \forall w \in H_0^1(\Omega).$$

Αντικαθιστώντας το w με $-w$ (διότι έτσι αλλάζει η φορά της ανισότητας και θα ισχύουν και οι 2 ταυτόχρονα οπότε έχουμε ισότητα) προκύπτει ότι η u είναι λύση της (2.19), το οποίο είναι αυτό που θέλαμε να επιτύχουμε.

□

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Ψευδομονότονες Απεικονίσεις

Βασική Θεωρία

Σε αυτό το κεφάλαιο, συμβολιζουμε με V ένα διαχωρίσιμο, ανακλαστικό χώρο Banach, με V^* το δυϊκό του. Κάποιες φορές αν δεν υπάρχει περίπτωση σύγχισης συμβολίζουμε τις νόρμες τους $\|\cdot\|_V$ και $\|\cdot\|_{V^*}$ με $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|_*$, αντίστοιχα.

Ορισμός 3.1. (Είδη μονοτονίας)

Έστω A μια απεικόνιση $V \to V^*$.

(i) Η $A: V \to V^*$ είναι **μονότονη** αν και μόνο αν $\langle A(u) - A(v), u - v \rangle \geq 0$ $\forall u, v \in V$.

(ii) Αν η A είναι μονότονη και $u \neq v$ οπότε $\langle A(u) - A(v), u - v \rangle > 0$, τότε η A είναι **αυστηρώς μονότονη**.

(iii) Έστω μια αύξουσα συνάρτηση $d: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, τότε λέμε ότι η $A: V \to V^*$ είναι *d*-μονότονη με μια ημινόρμα $|\cdot|$

$$\langle A(u) - A(v), u - v \rangle \geq \left(d(|u|) - d(|v|)\right)(|u| - |v|). \tag{3.1}$$

Αν η $|\cdot|$ είναι η νόρμα $\|\cdot\|$ στον V, τότε λέμε ότι η A είναι *d*-μονότονη.

Επιπλέον, η A είναι **ομοιόμορφα μονότονη** αν

$$\langle A(u) - A(v), u - v \rangle \geq \zeta(\|u - v\|)\|u - v\| \tag{3.2}$$

για κάποια αύξουσα συνεχής συνάρτηση $\zeta: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$. Αν $\zeta(r) = \delta r$ για κάποιο $\delta > 0$, η A είναι **ισχυρώς μονότονη**.

(iv) Η απεικόνιση $A:V \to V^*$ είναι **ψευδομονότονη** αν και μόνο αν η A είναι φραγμένη και ισχύει ότι αν

$$u_k \rightharpoonup u \text{ και } \limsup_{k\to\infty}\langle A(u_k), u_k - u\rangle \le 0 \qquad (3.3_a)$$

τότε

$$\langle A(u), u - v\rangle \le \liminf_{k\to\infty}\langle A(u_k), u_k - v\rangle \quad \forall v \in V \ . \qquad (3.3_b)$$

Λήμμα 3.1

Αν η απεικόνιση $A:V \to V^*$ είναι ψευδομονότονη, τότε και η απεικόνιση $u \to A(u+w)$ είναι ψευδομονότονη, για κάθε $w \in A$.

Απόδειξη

Έστω $u_k \rightharpoonup u$ και $\limsup_{k\to\infty}\langle A(u_k), u_k - u\rangle \le 0$. Τότε, προφανώς $u_k + w \to u + w$ και $\limsup_{k\to\infty}\langle A(u_k + w), (u_k + w) - (u + w)\rangle \le 0$.

Αν η A είναι ψευδομονότονη, τότε

$$\begin{aligned}\liminf_{k\to\infty}\langle A(u_k + w), u_k - v\rangle &= \liminf_{k\to\infty}\langle A(u_k + w), (u_k + w) - (v + w)\rangle \\ &\ge \langle A(u + w), (u + w) - (v + w)\rangle \\ &= \langle A(u + w), (u + w) - (v + w)\rangle \\ &= \langle A(u + w), u - v\rangle\end{aligned}$$

και επομένως η $A(\cdot, + w)$ είναι ψευδομονότονη.

Ορισμός 3.2. (Είδη συνέχειας)

(i) Η $A:V \to V^*$ είναι ***hemicontinuous*** αν και μόνο αν $\forall u, v, w \in V$ η συνάρτηση $t \mapsto \langle A(u + tv), w\rangle$ είναι συνεχής, δηλαδή η A είναι **κατευθυντικά ασθενώς συνεχής**.

(ii) Αν ισχύει για $v = w$, δηλαδή $\forall u, v \in V$: $t \mapsto \langle A(u + tv), v\rangle$ είναι συνεχής τότε η A είναι ακτινικά συνεχής.

(iii) Η $A:V\to V^*$ είναι ***demicontinuous*** αν και μόνο αν $\forall w\in V$ το συναρτησιακό $u\mapsto\langle A(u),w\rangle$ είναι συνεχές δηλαδή η A είναι συνεχής σαν απεικόνιση $(V,norm)\to(V^*,weak)$.

(iv) Η $A:V\to V^*$ είναι **ασθενώς συνεχής** αν και μόνο αν $\forall w\in V$ το συναρτησιακό $u\mapsto\langle A(u),w\rangle$ είναι ασθενώς συνεχές δηλαδή σαν απεικόνιση $(V,weak)\to(V^*,weak)$.

(v) Η $A:V\to V^*$ είναι **απολύτως συνεχής** αν είναι συνεχής σαν απεικόνιση $(V,norm)\to(V^*,weak)$.

Λήμμα 3.2. Κάθε ψευδομονότονη απεικόνιση A είναι demicontinuous.
Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $u_k\to u$. Από την (3.3_a), η ακολουθία $\{A(u_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη σε ανακλαστικό χώρο V^*. Τότε, εφόσον ο V έχει υποτεθεί διαχωρίσιμος, από το Θεώρημα Banach 1.6, αφού πάρουμε μια υπακολουθία έχουμε ότι $A(u_k)\rightharpoonup f$ για κάποιο $f\in V^*$. Τότε το $\lim_{k\to\infty}\langle A(u_k),u_k-u\rangle=\langle f,u-u\rangle=0$ και ως εκ τούτου, από την (3.3_b),

$$\langle A(u),u-\upsilon\rangle\le\lim_{k\to\infty}\langle A(u_k),u_k-u\rangle=\langle f,u-\upsilon\rangle$$

για κάθε $\upsilon\in V$. Από αυτή παίρνουμε ότι $A(u)=f$. Συγκεκριμένα, η f καθορίζεται μοναδικά, και έτσι ακόμη και ολόκληρη η ακολουθία (όχι μόνο η επιλεγμένη υπακολουθία) πρέπει να συγκλίνει.

Ορισμός 3.3. (Πιεστικότητα)

Η $A:V\to V^*$ είναι πιεστική αν και μόνο αν $\exists\varphi:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+:\lim_{s\to\infty}\varphi(s)=+\infty$ και $\langle A(u),u\rangle\ge\varphi(\|u\|)\|u\|$. Διαφορετικά πιεστική σημαίνει ότι

$$\lim_{\|u\|\to\infty}\frac{\langle A(u),u\rangle}{\|u\|}=+\infty \tag{3.4}$$

Θεώρημα 3.1. (Brezis)
Κάθε απεικόνιση A η οποία είναι ψευδομονότονη και πιεστική είναι επί. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $f \in V^*$, υπάρχει τουλάχιστον μια λύση στην εξίσωση

$$A(u) = f \tag{3.5}$$

Απόδειξη. Βλέπε Κεφάλαιο 4 σελ. 67.

Θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε τον τύπο του Green μια μορφή προσαρμοσμένη στις απαιτήσεις του προβλήματος συνοριακών συνθηκών που θα μελετήσουμε στη συνέχεια.

Θεώρημα 3.2. (Τύπος του Green)

Για κάθε $v \in W^{1,p}(\Omega)$ και $z \in W^{1,p'}(\Omega;\mathbb{R}^n)$, ισχύει ο ακόλουθος τύπος:

$$\int_\Omega \left(v(\operatorname{div} z) + z \cdot \nabla v\right) dx = \int_{\partial\Omega} v(z \cdot n)\, dS \tag{3.5b}$$

Απόδειξη.

Για τυχόντα $v \in W^{1,p}(\Omega)$ και $z \in W^{1,p'}(\Omega;\mathbb{R}^n)$, έχουμε

$$\nabla\cdot(vz)=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)\cdot(vz_1,\cdots,vz_2)=\frac{\partial}{\partial x_1}(vz_1)+\cdots+\frac{\partial}{\partial x_n}(vz)$$
$$=\frac{\partial v}{\partial x_1}z_1+\cdots+\frac{\partial v}{\partial x_n}z_n+v\left(\frac{\partial}{\partial x_1}z_1+\cdots+\frac{\partial}{\partial x_n}z_n\right)$$
$$=\left(\frac{\partial v}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial v}{\partial x_n}\right)\cdot(z_1,\cdots,z_n)+v\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)\cdot(z_1,\cdots,z_n)$$
$$=\nabla v\cdot z+v(\operatorname{div} z)$$

Εξάλλου από το θεώρημα του Gauss έχουμε

$$\int_\Omega(\nabla\cdot z)\,dx=\int_{\partial\Omega}(z\cdot n)\,dS$$

όπου τα dx και ds συμβολίζουν το στοιχειώδη όγκο και τη στοιχειώδη επιφάνεια στο Ω και $\partial\Omega$, αντίστοιχα.

Αν εφαρμόσουμε το θεώρημα του Gauss για το διανυσματικό πεδίο vz παίρνουμε

$$\int_\Omega(\nabla\cdot(vz))\,dx=\int_{\partial\Omega}(vz\cdot n)\,dS$$

οπότε λόγω της αρχικής ισότητας που αποδείξαμε θα έχουμε

$$\int_\Omega(\nabla v\cdot z+v(\operatorname{div} z))\,dx=\int_{\partial\Omega}v(z\cdot n)\,dS\,,$$

δηλαδή το ζητούμενο.

Quasilinear (Σχεδόν Γραμμικές) Ελλειπτικές εξισώσεις

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα περιγράψουμε πρώτα την ασθενή διατύπωση ενός προβλήματος συνοριακών συνθηκών για μια μερική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης και τον τρόπο με τον οποίο σχετίζεται η ασθενής λύσης αυτής με την κλασική της λύση. Στη συνέχεια, θα χρησιμοποιήσουμε την γενική θεωρία (abstract theory) των ψευδομονότονων τελεστών σε προβλήματα συνοριακών συνθηκών για να

αποδείξουμε την ύπαρξη μιας ασθενούς λύσης. Πιο συγκεκριμένα, θα επικεντρωθούμε στην σχεδόν γραμμική μερική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης της μορφής

$$-\operatorname{div}\big(a(x,u,\nabla u)\big)+c(x,u,\nabla u)=g \qquad (3.6)$$

ορισμένη σε ένα φραγμένο συνεκτικό Lipschitz χωρίο $\Omega\subset\mathbb{R}^n$. Στις συναρτήσεις $a:\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ και $c:\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ θα αναφερθούμε λεπτομερέστερα στη συνέχεια.

Σημείωση 3.1.

Η συνάρτηση $a:\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ έχει (εξ ορισμού) τη μορφή

$$a(x,u,\nabla u)=a\big(x,u(x),\nabla u(x)\big)$$

οπότε

$$a(x,u,\nabla u)=a\big(x,u(x),\nabla u(x)\big)=a\big((x_1,\cdots,x_n),u(x_1,\cdots,x_n),\nabla u(x_1,\cdots,x_n)\big)$$

και επομένως

$$a(x,u,\nabla u)=\big(a_1(x_1,\cdots,x_n),a_2(x_1,\cdots,x_n),\cdots,a_n(x_1,\cdots,x_n)\big)$$

Άρα, η εξίσωση (3.6) μπορεί να γραφεί αναλυτικά και στη μορφή

$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}a_i\big(x,u(x),\nabla u(x)\big)+c\big(x,u(x),\nabla u(x)\big)=g(x) \qquad (3.7)$$

για $x\in\Omega$, αλλά στη συνέχεια συνήθως θα χρησιμοποιούμε την συμπτυγμένη μορφή (3.6).

Σημείωση 3.2.

Στο εξής, για συντομία, θα γράφουμε $a(x,u,\nabla u)=a\big(x,u(x),\nabla u(x)\big)$ και $c(x,u,\nabla u)=c\big(x,u(x),\nabla u(x)\big)$ (όπως ήδη γράψαμε στην (3.6)). Μερικές φορές, αν η εξάρτηση από το x είναι αυτονόητη, θα γράφουμε ακόμα και

$a(u,\nabla u)$. Για παράδειγμα, αντί για $\int_\Omega c(x,u(x),\nabla u(x))v(x)dx$ θα γράφουμε απλά $\int_\Omega c(u,\nabla u)vdx$.

Προβλήματα συνοριακών τιμών για εξισώσεις 2ης τάξης

Η εξίσωση (3.6) μπορεί να δεχθεί πολλές λύσεις, ανάλογα με τις συνοριακές συνθήκες που επιβάλλονται στο σύνορο $\partial\Omega$ του χωρίου Ω. Ωστόσο, εμείς θα λύσουμε ένα συγκεκριμένο πρόβλημα μικτών συνοριακών συνθηκών. (Στη συνέχεια θα συμβολίζουμε το σύνορο $\partial\Omega$ του Ω με Γ).

Μια επιλογή θα ήταν να ορίσουμε απλά το ίχνος $u|_\Gamma$ του u στο σύνορο δηλαδή

$$u|_\Gamma = u_D \quad \text{στο } \Gamma \tag{3.8}$$

με u_D μια καθορισμένη συνάρτηση στο Γ.

Αυτή η συνθήκη, ως γνωστόν, ονομάζεται **Dirichlet συνοριακή συνθήκη**. Ωστόσο, εμείς θα θεωρήσουμε για την (3.6), μια εναλλακτική συνοριακή συνθήκη (πιθανώς φυσική) και συγκεκριμένα θα ορίσουμε μια τοπική εξίσωση για την «συνοριακή ροή» $n\cdot a$, δηλαδή,

$$n\cdot a(x,u,\nabla u)+b(x,u)=h \quad \text{στο } \Gamma \tag{3.9}$$

όπου $n=(n_1,\dots,n_n)$ συμβολίζει το μοναδιαίο κάθετο στο Γ με φορά προς τα έξω και οι $h:\Gamma\to\mathbb{R}$ και $b:\Gamma\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι δοσμένες συναρτήσεις οι οποίες θα οριστούν αργότερα.

Αυτή η συνθήκη αναφέρεται σαν **συνοριακή συνθήκη Robin** ή **μικτή**. Αν το $b=0$, τότε η (3.9) παίρνει τη μορφή

$$n\cdot a(x,u,\nabla u)=h \quad \text{στο } \Gamma \tag{3.9'}$$

και τότε ονομάζεται **συνοριακή συνθήκη Neumann**.

Λεπτομερέστερα, η $(3.9)'$ γράφεται

$$\sum_{i=1}^{n} n_i(x)a_i(x,u(x),\nabla u(x))+b(x,u(x))=h(x) \text{ για } x\in\Gamma.$$

Έτσι, μπορούμε να έχουμε το πρόβλημα Dirichlet (3.6), (3.8), είτε το πρόβλημα Neumann (3.6), $(3.9)'$, είτε το μικτό πρόβλημα ή το πρόβλημα Robin (3.6), (3.9). Μπορούμε, ωστόσο, να σκεφτούμε τον συνδυασμό των (3.8) και (3.9) σε διάφορα μέρη του συνόρου Γ. Εμείς θα θεωρήσουμε την πιο γενική περίπτωση και συγκεκριμένα την περίπτωση όπου το σύνορο Γ αποτελείται από δύο ξένα μεταξύ τους ανοικτά μέρη Γ_D και Γ_N τέτοια ώστε $\left(\Gamma \setminus \left(\Gamma_D \cup \Gamma_N\right)\right) = 0$ και στη συνέχεια να θεωρήσουμε τις μικτές συνοριακές συνθήκες

$$u|_\Gamma = u_D \quad \text{στο} \quad \Gamma_D, \tag{3.10$_a$}$$

$$n \cdot a\left(x,u,\nabla u\right) + b\left(x,u\right) = h \quad \text{στο} \quad \Gamma_N. \tag{3.10$_b$}$$

Οι (3.10) καλύπτουν και τις δύο περιπτώσεις (3.8), (3.9) καθώς κάποιο από τα Γ_D ή Γ_N (ή και τα δύο) μπορεί να είναι κενό.

Έτσι, έχουμε να λύσουμε το μικτό πρόβλημα:

$$-\mathrm{div}\left(a\left(x,u,\nabla u\right)\right) + c\left(x,u,\nabla u\right) = g \quad \text{στο } \Omega, \tag{3.11$_a$}$$

$$u|_\Gamma = u_D \quad \text{στο} \quad \Gamma_D, \tag{3.11$_b$}$$

$$n \cdot a\left(x,u,\nabla u\right) + b\left(x,u\right) = h \quad \text{στο } \Gamma_N. \tag{3.11$_c$}$$

Παρατήρηση 3.1.

Αναφορικά με τη σημασία των συνοριακών συνθηκών έχουμε τα εξής:

Αν επιβάλουμε σε μια εξίσωση συνοριακή συνθήκη Dirichlet, π.χ. $u|_\Gamma = u_D$, αυτό σημαίνει ότι η τιμή της άγνωστης συνάρτησης u στο σύνορο του Ω είναι γνωστή. Αν για παράδειγμα, είναι $u|_\Gamma = 0$, τότε αυτό σημαίνει ότι η u μηδενίζεται σχεδόν παντού στο σύνορο.

Μια συνθήκη Neumann, όσον αφορά τη μοντελοποίηση περιγράφει μια κατάσταση ροής. Για παράδειγμα, σε ένα πρόβλημα θερμότητας, η ποσότητα $\partial u / \partial \mathrm{v}$ αντιπροσωπεύει τη ροή θερμότητας μέσω του συνόρου, σε αντίθεση με την κατάσταση Dirichlet που επιβάλλει μια δεδομένη

θερμοκρασία στο σύνορο. Η περίπτωση $h=0$ αντιστοιχεί σε τέλεια θερμική μόνωση, δηλαδή, στην περίπτωση όπου δεν επιτρέπεται η είσοδος ή έξοδος θερμότητας στο και από το Ω.

Ας υποθέσουμε ότι διαμορφώνουμε μια κατάσταση στην οποία το σύνορο είναι στην πραγματικότητα ένα πολύ λεπτό τοίχωμα που μονώνει το Ω από το εξωτερικό περιβάλλον όπου η θερμοκρασία είναι 0 βαθμοί και ότι η συνοριακή συνθήκη είναι $\partial u / \partial \nu = -bu$, δηλαδή η (3.10_b) με $h=0$ και $a(x,u,\nabla u)=u(x)$ οπότε $n \cdot a(x,u,\nabla u) = n \cdot u = \partial u / \partial n$. Η συνθήκη Neumann ότι $\partial u / \partial \nu = -bu$, δηλώνει ότι η ροή θερμότητας που διέρχεται από τον τοίχο είναι ανάλογη με τη διαφορά θερμοκρασίας μεταξύ του εσωτερικού και του εξωτερικού. Για να είναι φυσιολογική και λογική αυτή η ερμηνεία, είναι σαφώς απαραίτητο το $b>0$, όταν η θερμότητα ρέει προς τα μέσα δηλαδή όταν το εξωτερικό είναι θερμότερο από το εσωτερικό και αντίστροφα. Είναι προφανές λοιπόν ότι το b παίζει ουσιαστικό ρόλο.

Αν επιβάλουμε στην εξίσωση (3.6) τις συνοριακές συνθήκες (3.10) θα έχουμε ένα Robin πρόβλημα συνοριακών συνθηκών.
Θα πρέπει ακόμα να καθορίσουμε λεπτομερέστερα τις συναρτήσεις $a, b.c, g$ και h. Συγκεκριμένα θα υποθέσουμε ότι:

(i) Οι συναρτήσεις $\alpha_i, c : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και $b : \Gamma \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Carathéodory συναρτήσεις για $i \in \{1,2,\cdots,n\}$.

Εξ ορισμού, ως
Carathéodory συναρτήσεις πρέπει να είναι μετρήσιμες ως προς τη μεταβλητή $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ και συνεχείς σχεδόν παντού ως προς την $(t,\xi)=(t,(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

(ii) Οι συναρτήσεις $g : \Omega \to \mathbb{R}$ και $h : \Gamma \to \mathbb{R}$ είναι τέτοιες ώστε $g \in L^{p^{*'}}(\Omega)$, $h \in L^{p^{\#'}}(\Gamma)$, όπου $1 < p < \infty$, $p^* = \dfrac{np}{n-p}$, $p^{\#} = \dfrac{(n-1)p}{n-p}$ και $p^{*'}$, $p^{\#'}$ είναι οι συζυγείς των p^* και $p^{\#}$ αντίστοιχα, (δηλαδή, $p^{*'} = p^* / (p^* - 1)$ και $p^{\#'} = p^{\#} / (p^{\#} - 1)$).

(iii) Υποθέτουμε ότι για τις συναρτήσεις a,b και c ικανοποιούνται οι ακόλουθες αυξητικές συνθήκες (ανάπτυξης) (growth conditions):

$$\left|a(x,t,\xi)\right| \le \gamma_1(x) + C|t|^{(p^*-\varepsilon)/p'} + C|\xi|^{p-1},\ \gamma_1 \in L^{p'}(\Omega) \qquad (3.12_a)$$

$$\left|b(x,t)\right| \le \gamma_2(x) + C|t|^{p^{\#}-\varepsilon-1}, \qquad \gamma_2 \in L^{p^{\#}{}'}(\Gamma) \qquad (3.12_b)$$

$$\left|c(x,t,\xi)\right| \le \gamma_3(x) + C|t|^{p^*-\varepsilon-1} + C|\xi|^{p/p^{*\prime}},\ \gamma_3 \in L^{p^{*\prime}}(\Omega) \qquad (3.12_c)$$

Σημειώνουμε ότι ο εκθέτης p^* είναι ο κρίσιμος εκθέτης της εμφύτευσης (ή ενσφήνωσης) δηλαδή ο εκθέτης για τον οποίο η εμφύτευση $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ είναι συνεχής για κάθε $q \le p^*$ και η εμφύτευση $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*-\varepsilon}(\Omega)$ είναι συμπαγής για κάθε $\varepsilon > 0$.

Επίσης, ο τελεστής του ίχνους $u \to u|_\Gamma$ απεικονίζει τον $W^{1,p}(\Omega)$ στον $L^{p^{\#}}(\Gamma)$ με συνεχή απεικόνιση και τον $W^{1,p}(\Omega)$ στον $L^{p^{\#}-\varepsilon}(\Gamma)$ με συμπαγή απεικόνιση, δηλαδή, ο $p^{\#}$ είναι ο κρίσιμος εκθέτης της εμφύτευσης (ή ενσφήνωσης) αυτής.

(iv) Υποθέτουμε, τέλος, ότι η συνάρτηση $a(x,t,\xi)$ ικανοποιεί σχεδόν παντού στο Ω την ακόλουθη συνθήκη μονοτονίας

$$\left(a(x,t,\xi_1) - a(x,t,\xi_2)\right)\cdot(\xi_1 - \xi_2) \ge 0,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \forall \xi_1, \xi_2 \in \Omega. \qquad (3.12_d)$$

Θα μελετήσουμε λοιπόν το πρόβλημα (3.6), (3.10) όταν οι συναρτήσεις a,b,c,g και h ικανοποιούν τις συνθήκες (i)-(iv).

Μπορούμε να κάνουμε την σκέψη να αναζητήσουμε την λεγόμενη **κλασική λύση** του προβλήματος, δηλαδή, μια συνάρτηση $u \in C^2(\overline{\Omega})$ τέτοια ώστε να ικανοποιεί την εξίσωση παντού στο Ω και τις συνοριακές συνθήκες και παντού στο Γ. Αυτό όμως απαιτεί, λεπτομερέστερο καθορισμό τον ιδιοτήτων των δεδομένων για τις a,b και c αλλά και για το ίδιο το Ω, ωστόσο, ακόμα και σε αυτή την περίπτωση η αναζήτηση κλασικής λύσης

παραμένει ένα δύσκολο πρόβλημα. Για αυτό θα αναζητήσουμε μια φυσική γενίκευση της έννοιας της λύσης την οποία ονομάζουμε **ασθενή λύση**, και έχουν αναπτυχθεί για αυτό το σκοπό μοντέρνες θεωρίες. Σε αυτό το πλαίσιο οι τελικές απαιτήσεις για κάθε λογικό ορισμό μιας τέτοιας λύσης περιγράφονται από τις ακόλουθες δυο συνθήκες:

Συνθήκη 3.1.

Κάθε κλασική λύση για το πρόβλημα συνοριακών τιμών είναι επίσης και γενικευμένη λύση.

Συνθήκη 3.2.

Αν όλα τα δεδομένα είναι ομαλά και αν η γενικευμένη λύση ανήκει στο $C^2\left(\overline{\Omega}\right)$, τότε είναι η κλασική λύση. Επιπλέον, σε συγκεκριμένες περιπτώσεις η γενικευμένη λύση είναι μοναδική.

Ασθενής Διατύπωση του Προβλήματος

Εδώ η γενικευμένη λύση θα προκύπτει από την λεγόμενη ασθενή διατύπωση του προβλήματος συνοριακών τιμών, η οποία είναι η μέθοδος που χρησιμοποιείτε πιο συχνά αλλά και είναι η κατάλληλη και στην προσέγγιση με την χρήση των ψευδομονότονων τελεστών.

Για να προσδιορίσουμε την έννοια της ασθενούς λύσης, πρέπει πρώτα να περιγράψουμε την ασθενή διατύπωση του προβλήματος (3.11).

Η ασθενής διατύπωση της εξίσωσης (3.6) με τις συνοριακές συνθήκες (3.10) θα προκύψει ως ακολούθως.

1. Πολλαπλασιάζουμε την (3.11_a) με μια συνάρτηση ελέγχου υ, δηλαδή, με μια συνάρτηση $\upsilon \in W^{1,p}(\Omega)$ με $\upsilon|_{\Gamma_D} = 0$. (Γενικά μια συνάρτηση ελέγχου ορισμένη στο Ω είναι μια συνάρτηση $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, όμως στη

συγκεκριμένη περίπτωση επιλέγουμε μια $\upsilon \in W^{1,p}(\Omega)$ με $\upsilon|_{\Gamma_D} = 0$, δηλαδή μια συνάρτηση $\upsilon \in W_0^{1,p}(\Omega)$).

2. Ολοκληρώνουμε κατά μέλη την (3.11_a) πάνω στο Ω.
3. Εφαρμόζουμε τον τύπο του Green $(3.5b)$, με $z = a(x,u,\nabla u)$.
4. Τέλος, θα αντικαταστήσουμε συνοριακή συνθήκη Robin, δηλαδή την (3.10_b) στο ολοκλήρωμα στο σύνορο. Στην περίπτωση μας από την $(3.5b)$ έχουμε

$$\int_{\Gamma_N} (n \cdot z)\upsilon dS = \int_{\Gamma_N} \big(n \cdot a(x,u,\nabla u)\big)\upsilon\, dS \quad ,$$

γιατί, αφού $\upsilon|_{\Gamma_D} = 0$, το ολοκλήρωμα στο σύνορο Γ_D μηδενίζεται.

Η διαδικασία που περιγράψαμε, όταν την εφαρμόσουμε στην (3.11_a) (Τύπος του Green και εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών) είναι η εξής:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \big(-\mathrm{div}\big(a(x,u,\nabla u)\big) + c(x,u,\nabla u)\big)\upsilon\, dx &= \int_\Omega a(x,u,\nabla u)\cdot\nabla\upsilon + c(x,u,\nabla u)\upsilon\, dx \\ &\quad - \int_\Gamma \big(v \cdot a(x,u,\nabla u)\big)\upsilon\, dS \\ &= \int_\Omega a(x,u,\nabla u)\cdot\nabla\upsilon + c(x,u,\nabla u)\upsilon\, dx \\ &\quad + \int_\Gamma \big(b(x,u) - h(x)\big)\upsilon\, dS \qquad (3.13)\end{aligned}$$

Αν παρατηρήσουμε ότι λόγω της (3.11_a) το αριστερό μέλος στην (3.13) είναι απλά το $\int_\Omega g\upsilon\, dx$ οδηγούμαστε στην ολοκληρωτική ταυτότητα

$$\int_\Omega a(x,u,\nabla u)\cdot\nabla\upsilon + c(x,u,\nabla u)\upsilon\, dx + \int_{\Gamma_N} b(x,u)\upsilon\, dS = \int_\Omega g\upsilon\, dx + \int_{\Gamma_N} h\upsilon\, dS$$

ή αν απλουστεύσουμε λίγο τον συμβολισμό παίρνουμε την

$$\int_\Omega (a\cdot\nabla\upsilon + c\upsilon)\, dx + \int_{\Gamma_N} b\upsilon\, dS = \int_\Omega g\upsilon\, dx + \int_{\Gamma_N} h\upsilon\, dS \qquad (3.14)$$

την οποία θα χρησιμοποιήσουμε αρκετά στην συνέχεια.

Όπως αναφέραμε παραπάνω, περιοριζόμαστε σε μια p-πολυωνυμική αύξηση, (βλ. σχέση (3.12_a) παραπάνω), οπότε είναι φυσικό να αναζητήσουμε την ασθενή λύση στον χώρο Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$.

Ορισμός 3.4.

Ονομάζουμε την $u \in W^{1,p}(\Omega)$ **ασθενή λύση** του μικτού προβλήματος συνοριακών τιμών $(3.11_a)-(3.11_c)$, αν το $u|_{\Gamma_D} = u_D$ και αν η ολοκληρωτική ταυτότητα (3.14) ισχύει για κάθε $\upsilon \in W^{1,p}(\Omega)$ με $\upsilon|_{\Gamma_D} = 0$.

Η Συνθήκη 3.1 προκύπτει άμεσα ως αποτέλεσμα της διαδικασίας των παραπάνω τεσσάρων βημάτων με τα οποία αποδείξαμε την (3.14). Η Συνθήκη 3.2 σχετίζεται με το χώρο των συναρτήσεων ελέγχου που θα επιλεγεί. Από τη μορφή των συνοριακών συνθηκών του προβλήματος επιβάλλεται ότι ως τέτοιος χώρος πρέπει να επιλεγεί ο

$$V = \left\{ \upsilon \in W^{1,p}(\Omega) : \upsilon|_{\Gamma_D} = 0 \right\}, \tag{3.15}$$

ωστόσο, ο χώρος αυτός είναι αρκετά πλούσιος, οπότε ο περιορισμός της υ στο Γ_D αντισταθμίζεται από την άμεση συμμετοχή της συνοριακής συνθήκης (3.11_b) στον Ορισμό 3.4.

Η πρόταση που ακολουθεί αποδεικνύει την Συνθήκη 3.2.

Πρόταση 3.1. (Απόδειξη της Συνθήκης 3.2)

Έστω $a \in C^1\left(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n\right)$, $c \in C^0\left(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n\right)$, $b \in C^0\left(\overline{\Gamma_{\mathrm{N}}} \times \mathbb{R}\right)$, $g \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ και $h \in C\left(\Gamma_{\mathrm{N}}\right)$. Τότε κάθε ασθενής λύση $u \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ είναι η κλασική λύση.

Απόδειξη.

Θέτουμε στην (3.14) μια συνάρτηση $\upsilon \in V$, και χρησιμοποιούμε τον τύπο του Green $(3.5b)$, οπότε έχουμε διαδοχικά

$$\int_\Omega (a\cdot\nabla\upsilon + c\upsilon)\,dx + \int_{\Gamma_N} b\upsilon\,dS = \int_\Omega g\upsilon\,dx + \int_{\Gamma_N} h\upsilon\,dS,$$
$$\int_\Omega (-\operatorname{div} a + c - g)\upsilon\,dx + \int_{\partial\Omega} \upsilon a\cdot n\,dS = \int_{\Gamma_N} (h-b)\upsilon\,dS$$
$$\int_\Omega (-\operatorname{div} a + c - g)\upsilon\,dx = -\int_{\Gamma_D} \upsilon a\cdot n\,dS - \int_{\Gamma_N} \upsilon a\cdot n\,dS + \int_{\Gamma_N} (h-b)\upsilon\,dS,$$
$$\int_\Omega (-\operatorname{div} a + c - g)\upsilon\,dx = \int_{\Gamma_N} (h-b-a\cdot n)\upsilon\,dS \tag{3.16}$$

Δεδομένου ότι $\upsilon|_\Gamma = 0$ (από τον ορισμό του V), προκύπτει ότι το ολοκλήρωμα στο σύνορο στην (3.16) μηδενίζεται. Επίσης, καθώς το υ λαμβάνεται αυθαίρετα μέσα από το V, προκύπτει ότι η (3.11_a) ισχύει σχεδόν παντού στο Ω και λόγω του ότι έχει υποτεθεί, ότι οι συναρτήσεις a και c είναι αρκετά λείες(*), η συνάρτηση

$$-\operatorname{div}(a(x,u,\nabla u)) + c(x,u,\nabla u) - g$$

είναι συνεχής, οπότε η (3.11_a) ισχύει παντού στο Ω.

Τέλος, θέτοντας μια τυχούσα $\upsilon \in V$ στην (3.16) μας δίνει ότι η συνοριακή συνθήκη (3.10_b) ισχύει(**) ενώ η (3.10_a) είναι εξασφαλισμένη απευθείας από τον Ορισμό 3.4.

(*) Εδώ χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι ο χώρος των συναρτήσεων ελέγχου $W_0^{1,p}(\Omega)$ είναι πυκνός στον $L^1(\Omega)$. (Γενικά, ο $C_0^\infty(\Omega)$ είναι πυκνός στον $L^1(\Omega)$).

(**) Γιατί το σύνολο $\{\upsilon|_{\Gamma_N} : \upsilon \in V\}$ είναι πυκνό στον $L^1(\Omega)$, το οποίο εξασφαλίζεται από την υπόθεση ότι το Γ_N είναι ανοικτό στο Γ.

Παρατήρηση 3.2. Επιστρέφοντας στην (3.14) σημειώνουμε ότι έχουμε θέσει προϋποθέσεις τέτοιες ώστε οι συναρτήσεις a, b, c, g και h είναι <αρκετά καλές> και επομένως όλα τα εμφανιζόμενα ολοκληρώματα έχουν έννοια. Επίσης, πρέπει να μη μας διαφεύγει ότι διατηρούμε τη μόνιμη υπόθεση το Ω να είναι ένα χωρίο Lipschitz (έτσι ώστε, συγκεκριμένα, το n

να ορίζεται σχεδόν παντού στο Γ) και τα Γ_{D} και Γ_{N} είναι ανοιχτά στο Γ (οπότε, συγκεκριμένα, μετρήσιμα).

Σύμφωνα με το Θεώρημα του Sobolev (Θεώρημα 1.7) η εμφύτευση $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$ είναι συνεχής και σύμφωνα με το Θεώρημα της συμπαγούς εμφύτευσης των Rellich-Kondrachov (Θεώρημα 1.8) η εμφύτευση $W^{1,p}(\Omega) \Subset L^{p^*-\varepsilon}(\Omega)$, $\varepsilon > 0$ είναι συμπαγής. Επίσης, σύμφωνα με το Θεώρημα του τελεστή ίχνους (Θεώρημα 1.9), η απεικόνιση $T : W^{1,p}(\Omega) \to L^{p^\#}(\Gamma)$ με $T(u) = u|_\Gamma$, $\forall\, u \in W^{1,p}(\Omega)$ είναι συνεχής και η απεικόνιση $T : W^{1,p}(\Omega) \to L^{p^\#-\varepsilon}(\Gamma)$, $\varepsilon > 0$ είναι συμπαγής.
Θα χρησιμοποιήσουμε αυτά τα αποτελέσματα αφού εφαρμόσουμε το Θεώρημα Nemytskii.

Ορισμός 3.5. (Απεικόνιση Nemytskii)
Θεωρώντας τους ακεραίους $j, m_0, m_1, \ldots, m_j$, λέμε ότι η απεικόνιση $a : \Omega \times \mathbb{R}^{m_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{m_j} \to \mathbb{R}^{m_0}$ είναι μια Carathéodory απεικόνιση αν η απεικόνιση $a(\cdot, r_1, r_2, \ldots, r_j) : \Omega \to \mathbb{R}^{m_0}$ είναι μετρήσιμη για όλα τα $(r_1, r_2, \ldots, r_j) \in \mathbb{R}^{m_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{m_j}$ και η απεικόνιση $a(x, \cdot) : \mathbb{R}^{m_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{m_j} \to \mathbb{R}^{m_0}$ είναι συνεχής σχεδόν παντου για όλα τα $x \in \Omega$. Τότε, η ονομαζόμενη **απεικόνιση του Nemytskii** $\mathcal{N}_a$ απεικονίζει τις απεικονίσεις $u_i : \Omega \to \mathbb{R}^{m_i}$, $i = 1, 2, \ldots, j$ σε μια συναρτηση $\mathcal{N}_a(u_1, u_2, \ldots, u_j) : \Omega \to \mathbb{R}^{m_0}$ που ορίζεται με τη

$$\left[\mathcal{N}_a(u_1, u_2, \ldots, u_j)\right](x) = a(x, u_1(x), \cdots, u_j(x)).$$

Θεώρημα 3.3. (Θεώρημα του Nemytskii σε Χώρους Lebesgue)
Αν $a : \Omega \times \mathbb{R}^{m_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{m_j} \to \mathbb{R}^{m_0}$ είναι μια Carathéodory απεικόνιση και οι συναρτήσεις $u_i : \Omega \to \mathbb{R}^{m_i}$, $i = 1, 2, \ldots, j$ είναι μετρήσιμες, τότε η απεικόνιση $\mathcal{N}_a(u_1, u_2, \ldots, u_j)$ είναι μετρήσιμη. Επιπλέον, αν η *a* ικανοποιεί την αυξητική συνθήκη (ανάπτυξης)

$$\left|a\left(x,r_1,r_2,...,r_j\right)\right| \le \gamma\left(x\right) + C\sum_{i=1}^{j}\left|r_i\right|^{p_i/p_0}$$

για κάποια συνάρτηση , $\gamma \in L^{p_0}\left(\Omega\right)$ με $1 \le p_i < +\infty, 1 \le p_0 < +\infty$ τότε η $\mathcal{N}_a$ είναι μια φραγμένη συνεχής απεικόνιση

$$L^{p_1}\left(\Omega;\mathbb{R}^{m_1}\right)\times\cdots\times L^{p_j}\left(\Omega;\mathbb{R}^{m_j}\right)\to L^{p_0}\left(\Omega;\mathbb{R}^{m_0}\right).$$

Αν κάποιο $p_i = +\infty, i = 1,2,...,j$ ισχύει το ίδιο αν ο αντίστοιχος όρος $\left|\cdot\right|^{p_i/p_0}$ αντικατασταθεί από κάποια συνεχή συνάρτηση.

Οι αυξητικές συνθήκες (ανάπτυξης) (growth conditions) επιτρέπουν την εφαρμογή του Θεωρήματος του Nemytskii (Θεώρημα 3.3). Συζητάμε πρώτα τα αποτελέσματα συνέχειας που προκύπτουν από την εφαρμογή του θεωρήματος Nemytskii στις απεικονίσεις a,b και c κι έπειτα θα αποδείξουμε την συνέχεια αυτών των απεικονίσεων. Συγκεκριμένα, οι αυξητικές συνθήκες (ανάπτυξης) $\left(3.12\right)$ έχουν κατασκευαστεί έτσι σύμφωνα με το Θεώρημα 3.3 να είναι συνεχείς οι ακόλουθες απεικονίσεις

$$\mathcal{N}_a : W^{1,p}\left(\Omega\right)\times L^p\left(\Omega;\mathbb{R}^{\mathrm{N}}\right)\to L^{p'}\left(\Omega;\mathbb{R}^{\mathrm{N}}\right) \text{(}\textit{weak} \times \textit{norm,norm}\text{)-συνεχής} \quad \left(3.17\right)$$

$$\mathcal{N}_b \circ T : W^{1,p}\left(\Omega\right)\to L^{p^{\#'}}\left(\Gamma\right) \qquad \text{(}\textit{weak, norm}\text{)-}\textit{συνεχής} \quad \left(3.18\right)$$

$$\mathcal{N}_c : W^{1,p}\left(\Omega\right)\times L^p\left(\Omega;\mathbb{R}^{\mathrm{N}}\right)\to L^{p^{*'}}\left(\Omega\right) \qquad \textit{(weak} \times \textit{norm,norm)-συνεχής} \quad \left(3.19\right)$$

όπου $p' = p/\left(p-1\right), 1 < p < \infty$, $p^* = \dfrac{np}{n-p}$ $1 \le q \le p^*$ και $p^{\#} = \dfrac{\left(n-1\right)p}{n-p}$.

Συγκεκριμένα για $u,v \in W^{1,p}\left(\Omega\right)$ οι υπο ολοκλήρωση συναρτήσεις $a\left(x,u,\nabla u\right)\cdot\nabla\upsilon$ και $c\left(x,u,\nabla u\right)\cdot\upsilon$ που εμφανίζονται στην $\left(3.14\right)$ ανήκουν στον $L^1\left(\Omega\right)$ ενώ η $b\left(x,u|_\Gamma\right)v|_\Gamma$ ανήκει στον $L^1\left(\Gamma\right)$. Επιπλέον, θα υποθέσουμε ότι για τις συναρτήσεις g και h που εμφανίζονται στο β' μέλος της $\left(3.14\right)$ ισχύει

$$g \in L^{p^{*'}}\left(\Omega\right) \quad \text{και} \quad h \in L^{p^{\#'}}\left(\Omega\right) \qquad \left(3.19'\right)$$

Σημειώνουμε ότι η $(3.19')$ εξασφαλίζει ότι $gv \in L^1(\Omega)$ και $hv \in L^1(\Gamma)$ για $v \in W^{1,p}(\Omega)$ και επομένως η (3.14) έχει νόημα.

Ας δούμε πρώτα το αποτέλεσμα της συνέχειας (3.17) λεπτομερέστερα. Έχουμε υποθέσει ότι η $a_i : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, είναι μία συνάρτηση Carathéodory. Οι απεικονίσεις Nemytskii $\mathcal{N}_a$ στέλνουν τις συναρτήσεις $u : \Omega \to \mathbb{R}$ και $\nabla u : \Omega \to \mathbb{R}^N$ σε μια συνάρτηση $\mathcal{N}_a(u, \nabla u) : \Omega \to \mathbb{R}^N$ ορισμένη από την σχέση

$$\left(\mathcal{N}_a(u, \nabla u)\right)(x) := a(x, u, \nabla u).$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Nemytskii, βρίσκουμε ότι η $\mathcal{N}_a$ είναι μια συνεχής και φραγμένη απεικόνιση. Συγκεκριμένα, θα αποδείξουμε την ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 3.2.
Η απεικόνιση $\mathcal{N}_a : W^{1,p}(\Omega) \times L^p(\Omega; \mathbb{R}^{\mathrm{N}}) \to L^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^{\mathrm{N}})$ είναι (weak $\times$ norm, norm)-συνεχής.

Απόδειξη.

Παίρνουμε τις συγκλίνουσες ακολουθίες $u_n \rightharpoonup u$ στον $W^{1,p}(\Omega)$ και $\varphi_n \to \varphi$ στον $L^p(\Omega; \mathbb{R}^{\mathrm{N}})$. Πρώτα θεωρούμε την $u_n \rightharpoonup u$ στον $W^{1,p}(\Omega)$.

Από το Θεώρημα 1.8 (Rellich–Kondrachov), προκύπτει ότι $u_n \to u$ στον $L^{p^*-\varepsilon}(\Omega), \varepsilon > 0$.

Από το Θεώρημα 1.1 (Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebesgue), έχουμε την ύπαρξη μιας υπακολουθίας (u_{n_k}) της (u_n) η οποία συγκλίνει κατά σημείο στην u, δηλαδή, $u_{n_k}(x) \to u(x)$ σχεδόν παντού για κάθε $x \in \Omega$.

Επιπλέον, (σύμφωνα πάλι με το με το Θεώρημα 1.1) υπάρχει μια συνάρτηση $h \in L^{p^*-\varepsilon}(\Omega)$, όπου $h(x) \geq 0$ τέτοια ώστε $|u_{n_k}(x)| \leq h(x)$ σχεδόν παντού για $x \in \Omega$. (Προφανώς, $|u(x)| \leq h(x)$ σχεδόν παντού για $x \in \Omega$).

Όμοια, θεωρούμε μια υπακολουθία τέτοια ώστε $\varphi_{n_k} \to \varphi$ στον $L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)$. Χρησιμοποιούμε πάλι το Θεώρημα 1.1, οπότε, υπάρχει μια υπακολουθία (φ_{n_k}) της (φ_n) η οποία συγκλίνει κατά σημείο στην φ, δηλαδή, $\varphi_{n_k}(x) \to \varphi(x)$ σχεδόν παντού για $x \in \Omega$ και υπάρχει επίσης μια συνάρτηση $h_0 \in L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)$, όπου $h_0(x) \geq 0$, τέτοια ώστε $|\varphi_{n_{k_l}}(x)| \leq h_0(x)$ σχεδόν παντού για $x \in \Omega$, οπότε και $|\varphi(x)| \leq h_0(x)$ σχεδόν παντού για $x \in \Omega$.

Στηριζόμενοι στην υπακολουθία $\varphi_{n_{k_l}}$ επιλέγουμε αντίστοιχα την $\{u_{n_{k_l}}\}_l$ και για να απλοποιήσουμε τον συμβολισμό, αυτές τις υπακολουθίες θα τις γράφουμε $\{\varphi_{n_k}\}_k$ και $\{u_{n_k}\}_k$.

Χρησιμοποιώντας την συνέχεια μιας συνάρτησης Carathéodory $a(x,s,\xi)$, παίρνουμε ότι

$$a(x,u_{n_k}(x),\varphi_{n_k}(x)) \to a(x,u(x),\varphi(x)) \text{ σχεδόν παντού για } x \in \Omega.$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι:

$$\int_\Omega \left|\mathcal{N}_a(u_{n_k},\varphi_{n_k})(x) - \mathcal{N}_a(u,\varphi)(x)\right|^{p'} dx \to 0. \qquad (3.20)$$

Από το Λήμμα 2.1 ισχύει ότι αν μπορούμε να αποδείξουμε την (3.20) για μια τυχούσα υπακολουθία τότε ισχύει και για την ακολουθία. Χρησιμοποιώντας την αυξητική συνθήκη (ανάπτυξης) (3.12_a) παίρνουμε:

$$\begin{aligned}\left|\mathcal{N}_a\left(u_{n_k},\varphi_{n_k}\right)(x)-\mathcal{N}_a(u,\varphi)(x)\right| &\le \left|\mathcal{N}_a\left(u_{n_k},\varphi_{n_k}\right)(x)\right|+\left|\mathcal{N}_a(u,\varphi)(x)\right| \\ &= \left|a\left(x,u_{n_k}(x),\varphi_{n_k}(x)\right)\right|+\left|a\left(x,u(x),\varphi(x)\right)\right| \\ &\le \left|\gamma_1(x)\right|+c\left|u_{n_k}(x)\right|^{(p^*-\varepsilon)/p'}+c\left|\varphi_{n_k}(x)\right|^{p-1} \\ &+\left|\gamma_1(x)\right|+c\left|u(x)\right|^{(p^*-\varepsilon)/p'}+c\left|\varphi(x)\right|^{p-1} \\ &\le 2\gamma_1(x)+2h(x)^{(p^*-\varepsilon)/p'}+2h_0(x)^p\end{aligned}$$

για κάποια σταθερά $c>0$.
Άρα, και

$$\left|\mathcal{N}_a\left(u_{n_k},\varphi_{n_k}\right)(x)-\mathcal{N}_a(u,\varphi)(x)\right|^{p'} \le C\left(2\gamma_1(x)^{p'}+2h(x)^{p^*-\varepsilon}+2h_0(x)^p\right),$$

για κάποια σταθερά $C>0$. (Στο εξής, το $C>0$, όπου εμφανίζεται, είναι πάντοτε μια σταθερά την οποία επιλέγουμε κατάλληλα κατά την διάρκεια της διαδικασίας). Επομένως, μπορούμε τώρα να εφαρμόσουμε το Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης Lebesgue (1.1), οπότε παίρνουμε την (3.20).
Άρα, η $\mathcal{N}_a : W^{1,p}(\Omega)\times L^p\left(\Omega;\mathbb{R}^N\right)\to L^{p'}\left(\Omega;\mathbb{R}^N\right)$ είναι (weak $\times$ norm, norm) -συνεχής.

Το επόμενο που θέλουμε να δείξουμε είναι η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 3.3.
Η $\mathcal{N}_b\circ T : W^{1,p}(\Omega)\to L^{p^{\#'}}(\Gamma)$ είναι (weak, norm)-συνεχής.
Απόδειξη.
Παίρνουμε μια ακολουθία (u_n) η οποία είναι ασθενώς συγκλίνουσα στον $W^{1,p}(\Omega)$ και έστω $u_n \rightharpoonup u$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $(\mathcal{N}_b\circ T)(u_n)\to(\mathcal{N}_b\circ T)(u)$ στον $L^{p^{\#'}}(\Gamma)$.
Εφόσον ο T είναι συμπαγής τελεστής (Θεώρημα 1.9) ισχύει ότι $T(u_n)\to T(u)$ στον $L^{p^{\#'}-\varepsilon}(\Gamma)$. Από Θεώρημα 1.1 προκύπτει ότι υπάρχει μια υπακολουθία $\left(u_{n_k}\right)$ της ακολουθίας (u_n) τέτοια ώστε

$$T\left(u_{n_k}\right)(x) \to T(u)(x) \text{ σχεδόν παντού για } x \in \Gamma$$

και μια συνάρτηση $w \in L^{p^{\#'}-\varepsilon}(\Gamma)$, τέτοια ώστε

$$w(x) \geq 0 \text{ και } \left|T\left(u_{n_k}\right)(x)\right| \leq w(x) \text{ σχεδόν παντού για } x \in \Gamma.$$

(Προφανώς είναι και $\left|T(u)(x)\right| \leq w(x)$ σχεδόν παντού για $x \in \Gamma$).
Εφόσον b είναι επίσης μια συνάρτηση Carathéodory, έχουμε

$$b\left(x, T\left(u_{n_k}\right)(x)\right) \to b\left(x, T(u)(x)\right) \text{ σχεδόν παντού για } x \in \Gamma.$$

Θέλουμε να δείξουμε τώρα την πρόταση:

$$\int_\Omega \left|\mathcal{N}_b \circ T\left(u_{n_k}\right)(x) - \mathcal{N}_b \circ T(u)(x)\right|^{p^{\#'}} dx \to 0. \qquad (3.21)$$

Σύμφωνα με το Λήμμα 1.1 ισχύει ότι αν μπορούμε να αποδείξουμε την (3.21) για μια τυχούσα υπακολουθία της ακολουθίας (u_n), τότε αυτή ισχύει και για την ίδια την ακολουθία. Χρησιμοποιώντας την αυξητική συνθήκη (3.12_b) και εργαζόμενοι ανάλογα παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\left|\mathcal{N}_b \circ T\left(u_{n_k}\right)(x) - \mathcal{N}_b \circ T(u)(x)\right|^{p^{\#'}} &\leq D\left(\left|\mathcal{N}_b \circ T\left(u_{n_k}\right)(x)\right|^{p^{\#'}} + \left|\mathcal{N}_b \circ T(u)(x)\right|^{p^{\#'}}\right) \\
&= D\left(\left|b\left(x, T\left(u_{n_k}\right)(x)\right)\right|^{p^{\#'}} + \left|b\left(x, T(u)(x)\right)\right|^{p^{\#'}}\right) \\
&\leq D\left(2\gamma_2(x)^{p^{\#'}} + \left|T\left(u_{n_k}\right)(x)\right|^{\left(p^{\#}-\varepsilon-1\right)p^{\#'}} + \left|T(u)(x)\right|^{\left(p^{\#}-\varepsilon-1\right)p^{\#'}}\right) \\
&\leq D\left(2\gamma_2(x)^{p^{\#'}} + 2w(x)^{\left(p^{\#}-\varepsilon-1\right)p^{\#'}}\right)
\end{aligned}$$

για κάποια σταθερά $D > 0$.

Παρατηρούμε ότι εφόσον $\left(p^{\#}-\varepsilon-1\right)\dfrac{p^{\#}}{p^{\#}-1}<p^{\#}-\varepsilon$ μπορεί να δειχθεί ότι η $w(x)^{\left(p^{\#}-\varepsilon-1\right)p^{\#'}}\in L^{1}(\Gamma)$. Τότε η (3.21), θα προκύψει αφού εφαρμόσουμε το Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue (Θεώρημα 1.1). Άρα έχουμε ότι η $\mathcal{N}_b\circ T:W^{1,p}(\Omega)\to L^{p^{\#'}}(\Gamma)$ είναι (weak, norm)-συνεχής. □

Χρησιμοποιώντας παρόμοια επιχειρήματα, μπορούμε να δείξουμε ότι η $\mathcal{N}_c:W^{1,p}(\Omega)\times L^{p}\left(\Omega;\mathbb{R}^{\mathrm{N}}\right)\to L^{p^{*'}}(\Omega)$ είναι (weak $\times$ norm, norm)-συνεχής.

Το ότι οι όροι στο αριστερό μέλος της (3.14) είναι Lebesgue ολοκληρώσιμοι βασίζεται στις ακόλουθες παρατηρήσεις. Από το Θεώρημα του Nemytskii (Θεώρημα 3.3) παίρνουμε ότι οι για $u,\upsilon\in W^{1,p}(\Omega)$ οι συναρτήσεις $a(x,u,\nabla u)\cdot\nabla\upsilon$ και $c(x,u,\nabla u)\upsilon$ ανήκουν στον $L^{1}(\Omega)$ ενώ η $b\left(x,u|_{\Gamma}\right)\upsilon|_{\Gamma}$ ανήκει στον $L^{1}(\Gamma)$ Επιπλέον, έχουμε υποθέσει ό τι $g\in L^{p^{*'}}(\Omega)$ και $h\in L^{p^{\#'}}(\Gamma)$. Επομένως για δοθέν $\upsilon\in W^{1,p}(\Omega)$ χρησιμοποιώντας την συνεχή εμφύτευση $W^{1,p}(\Omega)\subset L^{p^{*}}(\Omega)$ και τον τελεστή ίχνους, ο οποίος απεικονίζει τον $W^{1,p}(\Omega)$ στον $L^{p\#}(\Gamma)$, μαζί με την ανισότητα Hölder παίρνουμε ότι $g\upsilon\in L^{1}(\Omega)$ και $h\upsilon|_{\Gamma}\in L^{1}(\Gamma)$.

Τέλος, για την συνοριακή συνθήκη Dirichlet στο Γ_D, πρέπει να υποθέσουμε ότι

$$\exists w\in W^{1,p}(\Omega)\ \text{τέτοιο ώστε}\ u_D=w|_{\Gamma}. \qquad (3.22)$$

όπου έχουμε θέσει $u_D=u|_{\Gamma}$.

Θεωρούμε τον χώρο που ορίσαμε με την (3.15), δηλαδή τον

$$V:=\left\{\upsilon\in W^{1,p}(\Omega):\upsilon|_{\Gamma_D}=0\right\},$$

εφοδιασμένο με την νόρμα του χώρου Sobolev και ορίζουμε της τελεστές $A:W^{1,p}(\Omega)\to V^*$ και $f\in V^*$, (όπου V^* έιναι ο δυικός του V), έτσι ώστε: $\langle A(u),\upsilon\rangle :=$το αριστερό μέλος της (3.14) και $\langle f,\upsilon\rangle :=$το δεξιό μέλος της (3.14), δηλαδή

$$\langle A(u),\upsilon\rangle := \int_\Omega (a\cdot\nabla\upsilon + c\upsilon)\,dx + \int_{\Gamma_N} b\upsilon\,dS \tag{3.23}$$

και

$$\langle f,\upsilon\rangle := \int_\Omega g\upsilon\,dx + \int_{\Gamma_N} h\upsilon\,dS \tag{3.24}$$

Θα αποδείξουμε ότι $A(u)\in V^*$ και ο $f\in V^*$. Θα αποδείξουμε πρώτα το δεύτερο.

Πρόταση 3.4

Ο τελεστής $f\in V^*$.

Απόδειξη.

Έχουμε

$$\begin{aligned}\|f\|_{V^*} &:= \sup_{\|\upsilon\|_{W^{1,p}(\Omega)}\le 1}\left\{\left|\langle f,\upsilon\rangle\right|\right\}\\ &= \sup_{\|\upsilon\|_{W^{1,p}(\Omega)}\le 1}\left\{\left|\int_\Omega g\upsilon\,dx + \int_{\Gamma_N} h\upsilon\,dS\right|\right\}\\ &\le \sup_{\|\upsilon\|_{W^{1,p}(\Omega)}\le 1}\left\{\left|\int_\Omega |g\upsilon|\,dx + \int_{\Gamma_N} |h\upsilon|\,dS\right|\right\}\end{aligned}$$

οπότε, με τη χρήση της ανισότητας του Hölder παίρνουμε:

$$\begin{aligned}\|f\|_{V^*} &\le \sup_{\|\upsilon\|_{W^{1,p}(\Omega)}\le 1}\left\{\|g\|_{L^{p^{*\prime}}(\Omega)}\|\upsilon\|_{L^{p^*}(\Omega)} + \|h\|_{L^{p^{\#\prime}}(\Gamma_N)}\|\upsilon\|_{L^{p^{\#}}(\Gamma_N)}\right\}\\ &\le \sup_{\|\upsilon\|_{W^{1,p}(\Omega)}\le 1}\|\upsilon\|_{L^{p^*}(\Omega)}\|g\|_{L^{p^{*\prime}}(\Omega)} + \sup_{\|\upsilon\|_{W^{1,p}(\Omega)}\le 1}\|\upsilon\|_{L^{p^{\#}}(\Gamma_N)}\|h\|_{L^{p^{\#\prime}}(\Gamma_N)},\\ &= N_1\|g\|_{L^{p^{*\prime}}(\Omega)} + N_2\|h\|_{L^{p^{\#\prime}}(\Gamma_N)}\end{aligned}$$

όπου, η σταθερά $N_1 = \sup_{\|\upsilon\|_{W^{1,p}(\Omega)} \le 1} \|\upsilon\|_{L^{p^*}(\Omega)}$ είναι η νόρμα του τελεστή εμφύτευσης $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$ και η σταθερά $N_2 = \sup_{\|\upsilon\|_{W^{1,p}(\Omega)} \le 1} \|\upsilon\|_{L^{p^\#}(\Gamma_N)}$ είναι η νόρμα του τελεστή ίχνους $W^{1,p}(\Omega) \to L^{p^\#}(\Gamma_N)$.

Επιπλέον, η f είναι γραμμική.

Άρα δείξαμε ότι ο $f \in V^*$.

Πρόταση 3.5

Ο τελεστής $A(u) \in V^*$.

Απόδειξη.

Ακολουθώντας τα ίδια βήματα όπως και στην προηγούμενη πρόταση παίρνουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned}
\|A(u)\|_{V^*} &:= \sup_{\|\upsilon\|_{W^{1,p}(\Omega)} \le 1} \left\{ \left| \langle A(u), \upsilon \rangle \right| \right\} \\
&\le \sup_{\|\upsilon\|_{W^{1,p}(\Omega)} \le 1} \left\{ \int_\Omega \left| a(x,u,\nabla u) \cdot \nabla \upsilon \right| dx + \int_\Omega \left| c(x,u,\nabla u) \upsilon \right| dx + \int_{\Gamma_N} \left| b(x,u) \upsilon \right| dS \right\} \\
&\le \sup_{\|\upsilon\|_{W^{1,p}(\Omega)} \le 1} \left\{ \|a(x,u,\nabla u)\|_{L^{p'}(\Omega;\mathbb{R}^N)} \|\nabla \upsilon\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)} + \|c(x,u,\nabla u)\|_{L^{p'}(\Omega)} \|\upsilon\|_{L^{p^*}(\Omega)} \right. \\
&\quad \left. + \|b(x,u)\|_{L^{p^{\#\prime}}(\Gamma_N)} \|\upsilon\|_{L^{p^\#}(\Gamma_N)} \right\} \\
&\le \|a(x,u,\nabla u)\|_{L^{p'}(\Omega;\mathbb{R}^N)} + N_1 \|c(x,u,\nabla u)\|_{L^{p'}(\Omega)} + N_2 \|b(x,u)\|_{L^{p^{\#\prime}}(\Gamma_N)}
\end{aligned}$$

όπου οι σταθερές N_1 και N_2 είναι όπως παραπάνω δηλαδή οι νόρμες του τελεστή εμφύτευσης $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$ και του τελεστή ίχνους $W^{1,p}(\Omega) \to L^{p^\#}(\Gamma_N)$, αντίστοιχα.

Άρα, ο $A: W^{1,p}(\Omega) \to V^*$ είναι καλά ορισμένος. Επιπλέον, είναι φανερό ότι ο $A(u)$ είναι ένας γραμμικός τελεστής.

Ορίζουμε τώρα (αναφορικά με την (3.22)) τον τελεστή $A_1 : V \to V^*$ ως εξής:

$$A_1(u) := A(u+w),\ w \in W^{1,p}(\Omega),\ w|_\Gamma = u_D. \qquad (3.25)$$

Παρατήρηση 3.3.

Ο τελεστής έχει την ίδια μορφή με τον A_1 (βλ. (3.14) και (3.23)), ωστόσο, οι συναρτήσεις a,b και c αντικαθίστανται αντίστοιχα από τις συναρτήσεις

$$a_1(x,t,\xi) := a(x,t+w(x),\xi+\nabla w(x)),\ \ b_1(x,t) := b(x,t+w(x))$$

και

$$c_1(x,t,\xi) := c(x,t+w(x),\xi+\nabla w(x)).$$

Οι συναρτήσεις a_1, b_1 και c_1 ικανοποιούν τις (3.12) αλλά με $\varepsilon = 0$ αν η $w \in W^{1,p}(\Omega)$ και αν οι αρχικές συναρτήσεις a,b και c ικανοποιούν τις $(3.12_a)-(3,12_c)$. Επίσης, στην περίπτωση που έχουμε μηδενικές (ή καθόλου) συνοριακές συνθήκες Dirichlet, μπορούμε μα υποθέσουμε ότι $w=0$ στην (3.22) και τότε $A_1 \equiv A|_V$.

Πρόταση 3.6.

Υπάρχει μια λύση $u_1 \in V$ στην (3.5) για A_1 αν και μόνο αν η $u = u_1 + w \in W^{1,p}(\Omega)$ είναι η ασθενής λύση στο 2ης τάξης συνοριακό πρόβλημα τιμών (3.11), όπου η ασθενής λύση ορίζεται στον Ορισμό 3.4.

Απόδειξη.

Ευθύ. Υποθέτουμε ότι $u_1 \in V$ είναι μια λύση στην (3.5) για A_1. Τότε

$$f = A_1(u_1) = A_1(u-w) = A_1(u-w+w) = A(u),$$

οπότε από τις $(3.23),(3.24)$ και τον Ορισμό 3.4, είναι εύκολο να δούμε ότι η u είναι ασθενής λύση.

Αντίστροφο. Υποθέτουμε ότι $u = u_1 + w$ είναι η ασθενής λύση στο συνοριακό πρόβλημα τιμών , τότε $\langle A(u_1+w),\upsilon\rangle = \langle f,\upsilon\rangle$ για κάθε $\upsilon \in V$, άρα $A_1(u_1) = A(u_1+w) = f$.

Ύπαρξη ασθενών λύσεων

Η ύπαρξη μιας ασθενούς λύσης λαμβάνεται ως μια εφαρμογή του Θεωρήματος 3.1 (Brezis) και της Πρότασης 3.2. Για να το επιτύχουμε αυτό, πρέπει να αποδείξουμε ότι ο $A_1 : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\Omega)^*$ ικανοποιεί τις απαραίτητες συνθήκες, δηλαδή ότι είναι ψευδομονότονος και πιεστικός. Ωστόσο, θα αποδείξουμε πρώτα ότι ο τελεστής A είναι ψευδομονότονος και πιεστικός και στη συνέχεια θα δείξουμε ότι ο τελεστής $A_1 : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\Omega)^*$ κληρονομεί τις ιδιότητες αυτές από τον A.

Λήμμα 3.3. (Ο A είναι ένας φραγμένος τελεστής) Δεδομένου ότι ισχύουν οι (3.12), $(3.12_a)-(3.12_c)$, έχουμε ότι $A : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\Omega)^*$ είναι ένας φραγμένος τελεστής.

Απόδειξη.

Θεωρούμε το σύνολο $\left\{u \in W^{1,p}(\Omega) : \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \le r\right\}$, για κάποιο $r > 0$. Θα αποδείξουμε ότι το $A\left(\left\{u \in W^{1,p}(\Omega) : \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \le r\right\}\right)$ είναι φραγμένο στον $W^{1,p}(\Omega)^*$, (δηλαδή, θα αποδείξουμε ότι ο τελεστής A παίρνει φραγμένα σύνολα στον $W^{1,p}(\Omega)$ και τα στέλνει σε φραγμένα σύνολα στον $W^{1,p}(\Omega)^*$).

Έχουμε (από τον ορισμό του A, βλ. (3.23))

$$\sup_{\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \le r} \|A(u)\|_{W^{1,p}(\Omega)^*} = \sup_{\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \le r} \sup_{\|\upsilon\|_{W^{1,p}(\Omega)} \le 1} \left\{ \left| \langle A(u), \upsilon \rangle \right| \right\}$$

$$= \sup_{\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \le r} \sup_{\|\upsilon\|_{W^{1,p}(\Omega)} \le 1} \left\{ \left| \int_\Omega a(x,u,\nabla u) \cdot \nabla \upsilon \, dx + \int_\Omega c(x,u,\nabla u) \upsilon \, dx + \int_{\Gamma_N} b(x,u) \upsilon \, dS \right| \right\}$$

$$\le \sup_{\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \le r} \sup_{\|\upsilon\|_{W^{1,p}(\Omega)} \le 1} \left\{ \int_\Omega \left| a(x,u,\nabla u) \cdot \nabla \upsilon \right| dx + \int_\Omega \left| c(x,u,\nabla u) \upsilon \right| dx + \int_{\Gamma_N} \left| b(x,u) \upsilon \right| dS \right\}$$

$$\le \sup_{\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \le r} \sup_{\|\upsilon\|_{W^{1,p}(\Omega)} \le 1} \left\{ \left\| a(x,u,\nabla u) \right\|_{L^{p'}(\Omega;\mathbb{R}^N)} \left\| \nabla \upsilon \right\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)} + \left\| c(x,u,\nabla u) \right\|_{L^{p^{*'}}(\Omega)} \left\| \upsilon \right\|_{L^{p^*}(\Omega)} \right.$$

$$+\left\|b(x,u)\right\|_{L^{p^{\#'}}(\Gamma_N)}\left\|\upsilon\right\|_{L^{p^{\#}}(\Gamma_N)}\Bigg\}$$

$$\leq \sup_{\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}\leq r}\left\{\left\|a(x,u,\nabla u)\right\|_{L^{p'}(\Omega;\mathbb{R}^N)}+N_1\left\|c(x,u,\nabla u)\right\|_{L^{p^{*'}}(\Omega)}+N_2\left\|b(x,u)\right\|_{L^{p^{\#'}}(\Gamma_N)}\right\}\leq M,$$

όπου οι σταθερές N_1 και N_2 έχουν οριστεί παραπάνω και είναι οι νόρμες του τελεστή εμφύτευσης $W^{1,p}(\Omega)\subset L^{p^*}(\Omega)$ και του τελεστή ίχνους $W^{1,p}(\Omega)\to L^{p^{\#}}(\Gamma_N)$, αντίστοιχα.

Η σταθερά M εξαρτάται από το r, όμως αν λάβουμε υπόψη τις σχέσεις (3.12) ο A είναι φραγμένος ομοιόμορφα για όλες τις u που ορίζονται σε ένα φραγμένο σύνολο του $W^{1,p}(\Omega)$.

Για να αποδείξουμε ότι ο τελεστής A είναι ψευδομονότονος πρέπει να αποδείξουμε ακόμα (βλ. (3.3_b)) ότι αν η $\{u_n\}$ είναι μια ακολουθία τέτοια ώστε

$$u_n \rightharpoonup u \text{ και } \limsup_{k\to\infty}\left\langle A(u_k),u_k-u\right\rangle\leq 0$$

τότε

$$\left\langle A(u),u-v\right\rangle\leq \liminf_{n\to\infty}\left\langle A(u_n),u_n-v\right\rangle \quad \forall v\in V \ .$$

Λήμμα 3.4. (Απόδειξη της (3.3_b))

Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις $\alpha_i, c:\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ και $b:\Gamma\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι Carathéodory συναρτήσεις για $i\in\{1,2,\cdots,n\}$ και ότι ικανοποιούν τις αυξητικές συνθήκες (ανάπτυξης) $(3.12_a)-(3.12_c)$. Υποθέτουμε ακόμα ότι η συνάρτηση α ικανοποιεί σχεδόν παντού στο Ω την ακόλουθη συνθήκη μονοτονίας (βλ. (3.12_d)) , την ονομαζόμενη **μονοτονία στο κύριο μέρος**,

$$\left(a(x,t,\xi_1)-a(x,t,\xi_2)\right)\cdot(\xi_1-\xi_2)\geq 0,\ \forall t\in\mathbb{R},\ \forall \xi_1,\xi_2\in\Omega.$$

Αν επιπλέον υποθέτουμε ότι ισχύουν τα ακόλουθα:

- $\left(a\left(x,t,\xi_1\right)-a\left(x,t,\xi_2\right)\right)\cdot\left(\xi_1-\xi_2\right)=0\Rightarrow\xi_1=\xi_2,$ $\left(3.26_a\right)$
- $\forall\xi_0\in\mathbb{R}^N:\lim\limits_{|\xi|\to\infty}\dfrac{a\left(x,t,\xi\right)\cdot\left(\xi-\xi_0\right)}{\left|\xi\right|}=+\infty$ ομοιόμορφα για t φραγμένο, $\left(3.26_b\right)$
- $\exists\gamma\in L^{p^{*'}+\varepsilon}\left(\Omega\right)\ \exists C\in\mathbb{R}:\left|c\left(x,t,\xi\right)\right|\le\gamma\left(x\right)+C\left|t\right|^{p^*-\varepsilon-1}+C\left|\xi\right|^{\left(p-\varepsilon\right)/p^{*'}}.$ $\left(3.26_c\right)$

Τότε ο $A:W^{1,\mathrm{p}}\left(\Omega\right)\to W^{1,\mathrm{p}}\left(\Omega\right)^*$ ικανοποιεί την $\left(3.3_b\right)$.

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι $u_n\rightharpoonup u$ στον $W^{1,p}\left(\Omega\right)$ και ότι το

$$\limsup_{n\to\infty}\left\langle A\left(u_n\right),u_n-u\right\rangle\le 0. \qquad (3.27)$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\liminf_{n\to\infty}\left\langle A\left(u_n\right),u_n-\upsilon\right\rangle\ge\left\langle A\left(u\right),u-\upsilon\right\rangle \text{ για κάθε } \upsilon\in W^{1,p}\left(\Omega\right).$$

Θα κάνουμε μια προσαρμογή στον συμβολισμό που θα μας βοηθήσει στο να διακρίνουμε τη διαφορά μεταξύ των όρων υψηλότερης και χαμηλότερης τάξης. Ορίζουμε τον τελεστή $B\left(w,u\right)\in W^{1,p}\left(\Omega\right)^*$ ως εξής

$$\left\langle B\left(w,u\right),\upsilon\right\rangle:=\int_\Omega a\left(x,\mathrm{w},\nabla u\right)\cdot\nabla\upsilon\,dx+\int_\Omega c\left(x,w,\nabla w\right)\upsilon\,dx+\int_{\Gamma_N}b\left(x,u\right)\upsilon\,dS$$

για κάθε $u,w\in W^{1,p}\left(\Omega\right)$. Λόγω της $\left(3.23\right)$ έχουμε

$$A\left(u\right)=B\left(u,u\right) \qquad (3.28)$$

Θέτουμε $u_\varepsilon:=\left(1-\varepsilon\right)u+\varepsilon\upsilon,\varepsilon\in\left[0,1\right].$, δηλαδή θεωρούμε το <ευθύγραμμο τμήμα> μεταξύ u και υ. Από τη συνθήκη μονοτονίας $\left(3.12_d\right)$ του κύριου μέρους έπεται ότι

$$\left\langle B(u_n,u_n)-B(u_n,u_\varepsilon),u_n-u_\varepsilon\right\rangle = \int_\Omega \left(a(x,u_n,\nabla u_n)-a(x,u_n,\nabla u_\varepsilon)\right)\cdot\nabla(u_n-u_\varepsilon)dx \geq 0 \tag{3.29}$$

Χρησιμοποιώντας την (3.29), παίρνουμε

$$\left\langle B(u_n,u_n),u_n-((1-\varepsilon)u+\varepsilon\upsilon)\right\rangle \geq \left\langle B(u_n,u_\varepsilon),u_n-((1-\varepsilon)u+\varepsilon\upsilon)\right\rangle,$$

επομένως,

$$\left\langle A(u_n),u_n-u\right\rangle+\varepsilon\left\langle A(u_n),u_n-\upsilon\right\rangle \geq \left\langle B(u_n,u_\varepsilon),u_n-u\right\rangle+\varepsilon\left\langle B(u_n,u_\varepsilon),u_n-\upsilon\right\rangle. \tag{3.30}$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι τα ακόλουθα αποτελέσματα ισχύουν (μια απόδειξη θα δοθεί σε μετέπειτα σημείο):

$$\lim_{n\to\infty}\left\langle B(u_n,\upsilon),u_n-u\right\rangle = 0 \tag{3.31}$$

$$B(u_n,\upsilon) \rightharpoonup B(u,\upsilon) \text{ στον } W^{1,p}(\Omega)^* \tag{3.32}$$

και ας τα χρησιμοποιήσουμε εδώ $v=u_s$ για να περάσουμε στο όριο για $n\to\infty$ στο β΄μέλος της (3.30) οπότε θα έχουμε

$$\begin{aligned}\varepsilon\liminf_{n\to\infty}\left\langle A(u_n),u-\upsilon\right\rangle &\geq \liminf_{n\to\infty}\left(-\left\langle A(u_n),u_n-u\right\rangle\right)+\liminf_{n\to\infty}\left\langle B(u_n,u_\varepsilon),u_n-u\right\rangle \\ &\quad + s\liminf_{n\to\infty}\left\langle B(u_n,u_\varepsilon),u-\upsilon\right\rangle \\ &= -\limsup_{n\to\infty}\left\langle A(u_n),u_n-u\right\rangle+\varepsilon\left\langle B(u,u_\varepsilon),u-\upsilon\right\rangle \\ &\geq \varepsilon\left\langle B(u,u_t),u-\upsilon\right\rangle.\end{aligned}$$

Διαιρώντας κατά μέλη με $\varepsilon>0$ προκύπτει η ανισότητα

$$\liminf_{n\to\infty}\left\langle A(u_n),u-\upsilon\right\rangle \geq \left\langle B(u,u_\varepsilon),u-\upsilon\right\rangle.$$

Αν τώρα $\varepsilon\to 0$ τότε (λόγω ορισμού της u_ε) $u_\varepsilon\to u$ στον $W^{1,p}(\Omega)$ το οποίο συνεπάγεται ότι

$$B(u,u_\varepsilon) \to B(u,u) \text{ στον } W^{1,p}(\Omega)^*.$$

Αυτό προκύπτει από την αυξητική συνθήκη (ανάπτυξης) (2.12_a), μαζί με το Θεώρημα των Nemytskii Απεικονίσεων:

Θεωρούμε την σύνθεση $a \circ u : (x,\xi) \mapsto a(x,u(x),\xi)$ τέτοια ώστε η $\mathcal{N}_{a\circ u} : L^p(\Omega;\mathbb{R}^N) \to L^{p'}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ να είναι (norm, norm)-συνεχής. Αν $\xi := \nabla u_\varepsilon$ τότε $(\mathcal{N}_{a\circ u}(\nabla u_\varepsilon))(x) = a(x,u(x),\nabla u_\varepsilon(x))$. Από την (norm, norm)-συνέχεια ισχύει ότι αν $u_\varepsilon \to u$ στον $W^{1,p}(\Omega)$, τότε

$$a(x,u(x),\nabla u_\varepsilon(x)) \to a(x,u(x),\nabla u(x)) \text{ στον } L^{p'}(\Omega;\mathbb{R}^N).$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Hölder, ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
&\left\|B(u,u_\varepsilon) - B(u,u)\right\|_{W^{1,p}(\Omega)^*} \\
&\quad \le \sup_{\substack{\upsilon \in W^{1,p}(\Omega) \\ \|\upsilon\|_{W^{1,p}(\Omega)^*} \le 1}} \int_\Omega \left|a(x,u(x),\nabla u_\varepsilon(x)) - a(x,u(x),\nabla u(x))\right| \left|\nabla \upsilon(x)\right| dx \\
&\quad \le \sup_{\substack{\upsilon \in W^{1,p}(\Omega) \\ \|\upsilon\|_{W^{1,p}(\Omega)^*} \le 1}} \left\|a(x,u(x),\nabla u_\varepsilon(x)) - a(x,u(x),\nabla u(x))\right\|_{L^{p'}(\Omega;\mathbb{R}^N)} \left\|\nabla \upsilon(x)\right\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)} \\
&\quad \le \left\|a(x,u(x),\nabla u_s(x)) - a(x,u(x),\nabla u(x))\right\|_{L^{p'}(\Omega;\mathbb{R}^N)} \to 0.
\end{aligned}$$

(Από την $\|\upsilon\|_{W^{1,p}(\Omega)^*} \le 1 \Rightarrow \left[\int_\Omega |\upsilon|^p\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_\Omega |\nabla \upsilon|^p\right]^{\frac{1}{p}} \le 1 \Rightarrow \left[\int_\Omega |\nabla \upsilon|^p\right]^{\frac{1}{p}} \le 1$

$$\Rightarrow \left\|\nabla \upsilon(x)\right\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)} \le 1)$$

Αυτό δείχνει ότι $u_\varepsilon \to u$ στον $W^{1,p}(\Omega)$ οπότε

$$B(u,u_\varepsilon) \to B(u,u) = A(u) \text{ στον } W^{1,p}(\Omega)^*.$$

Άρα,

$$\liminf_{n\to\infty} \langle A(u_n), u-\upsilon\rangle \ge \langle B(u,u), u-\upsilon\rangle = \langle A(u), u-\upsilon\rangle.$$

Χρησιμοποιώντας την μονοτονία στο κύριο μέρος (3.12_d) σαν

$$\langle B(u_n,u_n)-B(u_n,u),u_n-u\rangle \geq 0$$

και με τη χρήση της (3.31) με $u=\upsilon$ παίρνουμε διαδοχικά ότι

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty}\langle A(u_n),u_n-\upsilon\rangle &\geq \liminf_{n\to\infty}\langle A(u_n),u_n-u\rangle+\liminf_{n\to\infty}\langle A(u_n),u-\upsilon\rangle\\ &\geq \liminf_{n\to\infty}\langle B(u_n,u),u_n-u\rangle+\liminf_{n\to\infty}\langle B(u_n,u_n)-B(u_n,u),u_n-u\rangle\\ &+\liminf_{n\to\infty}\langle A(u_n),u-\upsilon\rangle \geq \langle A(u),u-\upsilon\rangle. \qquad (3.33)\end{aligned}$$

το οποίο είναι ακριβώς το συμπέρασμα της (3.3_b) οπότε η απόδειξη της (3.3_b) έχει ολοκληρωθεί. □

Τώρα απομένει να δείξουμε ότι οι (3.31) και (3.32) ισχύουν.

Λήμμα 3.5. Θα δείξουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\langle B(u_n,\upsilon),u_n-u\rangle=0 \qquad (3.31)$$

και

$$B(u_n,\upsilon)\rightharpoonup B(u,\upsilon) \text{ στον } W^{1,p}(\Omega)^* \qquad (3.32).$$

Απόδειξη.

Αφού, $u_n\rightharpoonup u$ στον $W^{1,p}(\Omega)$ επειδή $W^{1,p}(\Omega)\Subset L^{p^*-\varepsilon}(\Omega)$, θα έχουμε $u_n\to u$ στον $L^{p^*-\varepsilon}(\Omega)$. Όμοια, $u_n|_\Gamma\to u|_\Gamma$ στον $L^{p^\#-\varepsilon}(\Gamma)$. (Αφού ο τελεστής ίχνους $T:W^{1,p}(\Omega)\to L^{p^\#-\varepsilon}(\Gamma)$ είναι ένας συμπαγής τελεστής, τότε υπάρχει μια υπακολουθία τέτοια ώστε $T(u_{n_k})\to T(u)$ στον $L^{p^\#-\varepsilon}(\Omega)$. Το Λήμμα 1.1 μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δειχθεί ότι ακόμα και ολόκληρη η ακολουθία $\{T(u_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στον $L^{p^\#-\varepsilon}(\Gamma)$, το οποίο, ωστόσο, δεν είναι απαραίτητο). Τότε, από την συνέχεια των απεικονίσεων Nemytskiii που

επάγονται από τις απεικονίσεις $a(\cdot,\cdot,\nabla\upsilon)$ και b, παίρνουμε ότι (βλ. (3.12_a))

$$a(x,u_n,\nabla\upsilon)\to a(x,u,\nabla\upsilon)\text{στον } L^{p'}(\Omega;\mathbb{R}^N),$$

καθώς και (βλ. (3.12_b) μαζί με το Θεώρημα 1.9. (Trace Operator))

$$b(x,u_n)\to b(x,u)\text{στον } L^{p^{\#'}}(\Gamma).$$

Ως εκ τούτου, $\nabla(u_n-u)\rightharpoonup 0$ στον $L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)$ και $(u_n-u)|_\Gamma\rightharpoonup 0$ στον $L^{p^\#}(\Gamma_N)$ (ισχύει από την (weak,weak)-συνέχεια του τελεστή T). Τις παρατηρήσεις αυτές θα τις χρησιμοποιήσουμε στην ακόλουθη διαδικασία. Προσθαφαιρούμε τον όρο $a(x,u,\nabla\upsilon)\cdot\nabla(u_n-u)$ στη υπο ολοκλήρωση ποσότητα του ολοκληρώματος $\int_\Omega a(x,u_n,\nabla\upsilon)\cdot\nabla(u_n-u)dx$ και παίρνουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega a(x,u_n,\nabla\upsilon)\cdot\nabla(u_n-u)dx\\
&=\int_\Omega\left[a(x,u_n,\nabla\upsilon)\cdot\nabla(u_n-u)+a(x,u,\nabla\upsilon)\cdot\nabla(u_n-u)-a(x,u,\nabla\upsilon)\cdot\nabla(u_n-u)\right]dx\\
&=\int_\Omega\left[a(x,u_n,\nabla\upsilon)-a(x,u,\nabla\upsilon)\right]\cdot\nabla(u_n-u)dx+\int_\Omega a(x,u,\nabla\upsilon)\cdot\nabla(u_n-u)dx.
\end{aligned}$$

Αναφορικά με το πρώτο ολοκλήρωμα, από την ανισότητα Hölder προκύπτει

$$\begin{aligned}
&\left|\int_\Omega\left[a(x,u_n,\nabla\upsilon)-a(x,u,\nabla\upsilon)\right]\cdot\nabla(u_n-u)dx\right|\\
&\qquad\le\left\|a(x,u_n,\nabla\upsilon)-a(x,u,\nabla\upsilon)\right\|_{L^{p'}(\Omega;\mathbb{R}^N)}\left\|\nabla(u_n-u)\right\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)},
\end{aligned}$$

όπου η $\left\|a(x,u_n,\nabla\upsilon)-a(x,u,\nabla\upsilon)\right\|_{L^{p'}(\Omega;\mathbb{R}^N)}\to 0$ και το $\nabla(u_n-u)$ είναι φραγμένο στον $L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)$.

Αναφορικά με το δεύτερο ολοκλήρωμα, αφού $\nabla u_n\to\nabla u$ στον $L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)$, θα έχουμε

$$\int_\Omega a(x,u,\nabla\upsilon)\cdot\nabla(u_n-u)dx\to 0.$$

Επίσης επειδή $(u_n - u)|_\Gamma \rightharpoonup 0$, χρησιμοποιώντας παρόμοια επιχειρήματα, έχουμε ότι

$$\int_{\Gamma_N} b(x,u_n)(u_n - u)dS \to 0 .$$

Από όλα αυτά τα αποτελέσματα μαζί προκύπτει ότι

$$\int_\Omega a(x,u_n,\nabla\upsilon)\cdot\nabla(u_n - u)dx + \int_{\Gamma_N} b(x,u_n)(u_n - u)dS \to 0 \quad (3.34)$$

Επιπλέον, για τους ίδιους λόγους μπορεί να δειχθεί ότι για οποιοδήποτε $z \in W^{1,p}(\Omega)$, έχουμε επίσης ότι

$$\int_\Omega a(x,u_n,\nabla\upsilon)\cdot\nabla z\,dx + \int_{\Gamma_N} b(x,u_n)zdS \to \int_\Omega a(x,u,\nabla\upsilon)\cdot\nabla z\,dx + \int_{\Gamma_N} b(x,u)zdS \quad (3.35)$$

Από τις αυξητικές συνθήκες στην απεικόνιση c, όπως τις έχουμε υποθέσει στην (3.26), ισχύει από το θεώρημα του Nemytskii ότι για κάποιο $\varepsilon > 0$,

$$\mathcal{N}_c : W^{1,p}(\Omega) \times L^p(\Omega;\mathbb{R}^N) \to L^{p^{*'}+\varepsilon}(\Omega) \quad (3.36)$$

είναι (weak $\times$ norm, norm)-συνεχής.

Αφού το $u_n \rightharpoonup u$ στον $W^{1,p}(\Omega)$ και το $\nabla u_n \rightharpoonup \nabla u$ στον $L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)$, χρησιμοποιώντας την συνέχεια και το φραγμένο της απεικόνισης Nemytskii στην (3.36), μπορεί να δειχθεί ότι το σύνολο $\{c(x,u_n,\nabla u_n)\}_{n\in N}$ είναι φραγμένο στον $L^{p^{*'}-\varepsilon}(\Omega)$.

Για ε αρκετά μικρό, ισχύει ότι $(p^*-\varepsilon)' = \frac{p^*-\varepsilon}{p^*-\varepsilon-1} < p^{*'}-\varepsilon$, έτσι χρησιμοποιώντας την ανισότητα Hölder προκύπτει

$$\left|\int_\Omega c(x,u_n,\nabla u_n)(u_n - u)dx\right| \le \left(\int_\Omega |u_n - u|^{\frac{1}{p^*-\varepsilon}} dx\right)^{\frac{1}{p^*-\varepsilon}} \left(\int_\Omega |c(x,u_n,\nabla u_n)|^{(p^*-\varepsilon)'} dx\right)^{\frac{1}{(p^*-\varepsilon)'}},$$

Τότε, αφού το $u_n \to u$ στον $L^{p^*-\varepsilon}(\Omega)$, παίρνουμε

$$\int_\Omega c\left(x,u_n,\nabla u_n\right)\left(u_n-u\right)dx \to 0 \tag{3.37}$$

Έτσι η (3.37) μαζί με την (3.34) μας δίνει την (3.31).

Τώρα θέλουμε να αποδείξουμε την (3.32). Για να γίνει αυτό πρέπει να δείξουμε ότι το $\nabla u_n(x) \to \nabla u(x)$ σχεδόν παντού με $x \in \Omega$. Πρώτα θεωρούμε την ακολουθία

$$\mathcal{B}_n(x) := \left(a\left(x,u_n(x),\nabla u_n(x)\right) - a\left(x,u_n(x),\nabla u(x)\right)\right)\cdot \nabla\left(u_n(x)-u(x)\right). \tag{3.38}$$

Από την συνθήκη μονοτονίας (3.12_d) ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
0 \le \limsup_{n\to\infty}\int_\Omega \mathcal{B}_n(x)\,dx &= \limsup_{n\to\infty}\left\langle B(u_n,u_n)-B(u_n,u),u_n-u\right\rangle \\
&\le \limsup_{n\to\infty}\left\langle B(u_n,u_n),u_n-u\right\rangle - \liminf_{n\to\infty}\left\langle B(u_n,u),u_n-u\right\rangle \\
&= \limsup_{n\to\infty}\left\langle B(u_n,u_n),u_n-u\right\rangle - \lim_{n\to\infty}\left\langle B(u_n,u),u_n-u\right\rangle \le 0
\end{aligned}$$

Το τελευταίο όριο superior είναι μη θετικό από την υπόθεση, ενώ το τελευταίο όριο ισούται με μηδέν από την (3.31) με $v=u$. Αυτό συνεπάγεται ότι

$$0 \le \liminf_{n\to\infty}\int_\Omega \mathcal{B}_n(x)\,dx \le 0 \le \limsup_{n\to\infty}\int_\Omega \mathcal{B}_n(x)\,dx \le 0$$

οπότε,

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \mathcal{B}_n(x)\,dx = 0.$$

Χρησιμοποιώντας την Ανισότητα του Markov (Πρόταση 1.4) , για $\varepsilon > 0$,

$$\operatorname{meas}\left(\left\{x\in\Omega : \left|\mathcal{B}_n(x)\right| \ge \varepsilon\right\}\right) = \operatorname{meas}\left(\left\{x\in\Omega : \mathcal{B}_n(x) \ge \varepsilon\right\}\right) \le \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega \mathcal{B}_n(x)\,dx,$$

Παίρνοντας το όριο για $n \to \infty$, προκύπτει ότι η $\mathcal{B}_n(x) \to 0$ κατά μέτρο. Από την Πρόταση 1.3, ισχύει ότι μπορούμε να επιλέξουμε μια υπακολουθία τέτοια ώστε η

$$\mathcal{B}_n(x) \to 0 \text{ σχεδόν παντού για } x \in \Omega. \qquad (3.39)$$

Εφόσον έχουμε ότι η $u_n \to u$ στον $L^{p^*-\varepsilon}(\Omega) \subset L^1(\Omega)$, πάλι από την Πρόταση 1.3 ισχύει ότι μπορούμε να επιλέξουμε μια υπακολουθία τέτοια ώστε η

$$u_n(x) \to u(x) \text{ σχεδόν παντού για } x \in \Omega. \qquad (3.40)$$

Διαλέγουμε $x \in \Omega$ τέτοιο ώστε να Ισχύουν ταυτόχρονα οι (3.39) και η (3.40). Επιπλέον, οι $\nabla u(x), \nabla u_n(x)$ και η $\gamma(x)$ (από την (3.12)) είναι πεπερασμένες και η $a(x,\cdot,\cdot)$ είναι συνεχής (χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι η c είναι μια Carathéodory συνάρτηση. Τώρα υποθέτουμε ότι η ακολουθία $\{\nabla u_n(x)\}_n$ είναι μη φραγμένη, άρα υπάρχει μια υπακολουθία τέτοια ώστε η $\nabla u_n(x) \to \infty$. Χρησιμοποιώντας την πιεστικότητα που έχουμε υποθέσει από την (3.26_b) με $\xi_0 = \nabla u(x)$ παίρνουμε

$$\limsup_{n\to\infty}\left(a(x,u_n(x),\nabla u_n(x)) - a(x,u_n(x),\xi_0)\right)\cdot\left(\nabla u_n(x) - \xi_0\right) = +\infty.$$

Το αποτέλεσμα αυτό βρίσκεται σε αντίφαση με την (3.39). Επομένως έχουμε μια υπακολουθία και ένα $\xi \in \mathbb{R}^N$ τέτοιο ώστε η $\nabla u_n(x) \to \xi$ στον $\mathbb{R}^N$. Χρησιμοποιώντας τις $(3.39),(3.40)$ και την συνέχεια της $a(x,\cdot,\cdot)$, και περνώντας το όριο στην (3.38), προκύπτει

$$\left(a(x,u(x),\xi) - a(x,u(x),\nabla u(x))\right)\cdot\left(\xi - \nabla u(x)\right) = 0 \qquad (3.41)$$

Από την αυστηρή μονοτονικότητα (3.26_a), προκύπτει ότι $\xi = \nabla u(x)$. Καθώς τώρα το ξ είναι μοναδικά καθορισμένο ολόκληρη η ακολουθία $\{\nabla u_n(x)\}_n$ συγκλίνει στο $\nabla u(x)$. Επομένως έχουμε δείξει

$$\nabla u_n(x) \to \nabla u(x) \text{ σχεδόν παντού για κάθε } x \in \Omega .$$

Επομένως, επειδή η c είναι συνάρτηση Carathéodory, θα ισχύει ότι

$$c(x,u_n(x),\nabla u_n(x)) \to c(x,u(x),\nabla u(x)) \text{ σχεδόν παντού για κάθε } x \in \Omega .$$

Από την ανισότητα του Holder, για κάθε μετρήσιμο σύνολο $S \subset \Omega$ έχουμε

$$\int_S \left|c(x,u_n,\nabla u_n) - c(x,u,\nabla u)\right|^{p^{*'}} dx \le \left\|c(x,u_n,\nabla u_n) - c(x,u,\nabla u)\right\|_{L^{p^{*'}+\varepsilon}} \operatorname{meas}(S)^{1+p^{*'}/\varepsilon} \tag{3.42}$$

Εξάλλου, η ακολουθία $\left\{c(x,u_n,\nabla u_n) - c(x,u,\nabla u)\right\}_{n=1}^{\infty}$ είναι φραγμένη στον $L^{p^{*'}+\varepsilon}(\Omega)$ λόγω της (3.26_a). Άρα η (3.42) επαληθεύει την ισο-απολύτως-συνέχεια (equi-absolutely-continuous) της ακολουθίας $\left\{\left|c(x,u_n,\nabla u_n) - c(x,u,\nabla u)\right|^{p^{*'}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ (βλ. Θεώρημα 1.3). Από το θεώρημα Dunford-Pettis (βλ. Θεώρημα 1.3 (ii)) η ακολουθία $\left\{\left|c(x,u_n,\nabla u_n) - c(x,u,\nabla u)\right|^{p^{*'}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ είναι επίσης ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη και επειδή αυτή συγκλίνει στο 0 σχεδόν παντού από το Θεώρημα του Vitalli (Βλ. Θεώρημα 1.4) έχουμε

$$\left|c(x,u_n,\nabla u_n) - c(x,u,\nabla u)\right|^{p^{*'}} \to 0 \text{ στον } L^1(\Omega),$$

οπότε

$$c(x,u_n,\nabla u_n) \to c(x,u,\nabla u) \text{ στον } L^{p^{*'}}(\Omega), \tag{3.43}$$

Καθώς το όριο $c(x,u,\nabla u)$ είναι μοναδικά καθορισμένο, και ολόκληρη (όχι μόνο αυτή που επιλέξαμε στις (3.39) και (3.40)) η ακολουθία θα πρέπει να συγκλίνει. Επομένως, η (3.32) έπεται από τις (3.43) και μαζί (3.35).

Το Λήμμα 3.3 και το Λήμμα 3.4 αποδεικνύουν την ψευδομονοτονία του $A: W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\Omega)^*$ (βλ. Ορισμός 3.1(iv)).

Λήμμα 3.6. Ο $A_1 : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\Omega)^*$ είναι ψευδομονότονος.

Απόδειξη. (βλ. Λήμμα 3.1).

Παρατήρηση 3.4

(i) Αν υποθέτουμε ότι η $c(x,s,\xi)$ είναι ανεξάρτητη του ξ, δηλαδή για κάποια $\hat{c}:\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει $c(x,s,\xi)=\hat{c}(x,s)$ τότε δεν είναι πλέον απαραίτητο να κάνουμε τις υποθέσεις (3.26). Η απόδειξη της ψευδομονοτονίας σε αυτή την περίπτωση είναι απλοποιημένη. Θεωρούμε, εφόσον υποθέτουμε ότι η $u_n \rightharpoonup u$ στον $W^{1,p}(\Omega)$ και η $c(x,s,\xi)=\hat{c}(x,s)$ ικανοποιεί την αυξητική συνθήκη (ανάπτυξης) (3.12_c), χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Nemytskii, (Θεώρημα 3.3) προκύπτει ότι η $\mathcal{N}_{\hat{c}}:W^{1,p}(\Omega)\to L^{p^{*'}}(\Omega)$ είναι (weak,norm)-συνεχής. Ακολούθως, η $\hat{c}(x,u_n)\to\hat{c}(x,u)$ στον $L^{p^{*'}}(\Omega)$. Παρατηρούμε επίσης ότι $u_n-u\rightharpoonup 0$ στον $L^{p^{*'}}(\Omega)$ (εφόσον ο $W^{1,p}(\Omega)$ είναι συνεχώς εμφυτευμένος στον $L^{p^{*'}}(\Omega)$) και αυτό μας δίνει ότι $\int_\Omega \hat{c}(x,u_n)(u_n-u)dx\to 0$. Αυτό μαζί με την (3.34), μας δίνει ότι

$$\begin{aligned}\langle B(u_n,\upsilon),u_n-u\rangle &= \int_\Omega \big(a(x,u_n,\nabla\upsilon)\cdot\nabla(u_n-u)-\hat{c}(x,u_n)(u_n-u)\big)dx \\ &\quad+\int_{\Gamma_N} b(x,u_n)(u_n-u)dS\to 0\end{aligned} \tag{3.44}$$

Αυτό αποδεικνύει την (3.31). Επίσης μπορεί να δειχθεί ότι

$$\int_\Omega \hat{c}(x,u_n)\,z\,dx\to\int_\Omega \hat{c}(x,u)\,z\,dx \text{ για } z\in W^{1,p}(\Omega),$$

το οποίο μαζί με την (3.35) μας δίνει την (3.35). Άρα αποδείξαμε την ψευδομονοτονία.

Λήμμα 3.7. (Πιεστικότητα του A) Έστω ότι ισχύουν τα παρακάτω:

(i) $\exists\, \varepsilon_1,\varepsilon_2>0,\ k_1\in L^1(\Omega)$ τέτοια ώστε

$$a(x,t,\xi)\cdot\xi + c(x,t,\xi)t \geq \varepsilon_1|\xi|^p + \varepsilon_2|t|^q - k_1(x) \qquad (3.45)$$

(ii) $\exists\, c_1 < +\infty$ και $\exists\, k_2 \in L^1(\Gamma)$ τέτοια ώστε

$$b(x,t)t \geq -c_1|t|^{q_1} - k_2(x) \qquad (3.46)$$

για $1 < q_1 < q \leq p$.

Τότε, ο $A: W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\Omega)^*$ είναι πιεστικός.

Απόδειξη. Από την ανισότητα του Poincare (βλ. Θεώρημα 1.10), παίρνουμε ότι για κάθε $1 \leq q \leq p$

$$\|u\|^q_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C_p^q \left(\|\nabla u\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)} + \|u\|_{L^q(\Omega)} \right)^q$$

και χρησιμοποιώντας την ανισότητα

$$(x+1)^q \leq 2^{q-1}\left(x^q + 1\right),\ x \geq 0,\ q \geq 1 \qquad (*)$$

με $x = \dfrac{\|\nabla u\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)}}{\|u\|_{L^q(\Omega)}}$ παίρνουμε την ανισότητα

$$\|u\|^q_{W^{1,p}(\Omega)} \leq 2^{q-1} C_p^q \left(\|\nabla u\|^q_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)} + \|u\|^q_{L^q(\Omega)} \right)$$

$$\leq C_{p,q}\left(1 + \|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)} + \|u\|^q_{L^q(\Omega)}\right). \qquad (3.47)$$

Από την ανισότητα του Young ($ab \leq \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q},\ \forall a,b > 0,\ \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$) για

$\forall \varepsilon > 0$ και $1 < m < +\infty$ ισχύει η ανισότητα $ab \leq \varepsilon a^m + C_\varepsilon b^{m'}$,

όπου η σταθερά C_ε είναι η $C_\varepsilon := \dfrac{\varepsilon^{\frac{1}{p-1}} p^{\frac{1}{p'}}}{p-1} < +\infty$. Χρησιμοποιώντας αυτή την ανισότητα προκύπτει

$$\left|u(x)\right| = \left|u(x)\right| \cdot 1 \le \varepsilon \left|u(x)\right|^{m} + C_{\varepsilon} 1^{m'} = \varepsilon \left|u(x)\right|^{m} + C_{\varepsilon}.$$

Αν θέσουμε $m := \dfrac{q}{q_1} > 1$ τότε παίρνουμε την ανισότητα

$$\left|u(x)\right| \le \varepsilon \left|u(x)\right|^{\frac{q}{q_1}} + C_{\varepsilon},$$

οπότε λόγω της (*) παίρνουμε

$$\left|u(x)\right|^{q_1} \le \left(\varepsilon \left|u(x)\right|^{\frac{q}{q_1}} + C_{\varepsilon} \right)^{q_1} \le 2^{q_1 - 1} \varepsilon^{q_1} \left|u(x)\right|^{q} + C_{\varepsilon}^{\ q_1}.$$

Από την τελευταία με ολοκλήρωση πάνω στο Γ παίρνουμε

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^{q_1}(\Gamma)}^{q_1} = \int_{\Gamma} |u|^{q_1} dS &\le \int_{\Gamma} \left(2^{q_1 - 1} \varepsilon^{q_1} |u|^{q} + C_{\varepsilon}^{q_1} \right) dS \\ &\le 2^{q_1 - 1} \varepsilon^{q_1} \int_{\Gamma} |u|^{q} \, dS + C_{\varepsilon}^{q_1} \mathrm{meas}_{n-1}(\Gamma). \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ο τελεστής ίχνους $T : W^{1,\mathrm{p}}(\Omega) \to L^{q}(\Gamma)$ είναι φραγμένος, αν N είναι η νόρμα του θα έχουμε

$$\|u\|_{L^{q}(\Gamma)} \le N \|u\|_{W^{1,\mathrm{p}}(\Omega)}.$$

Επομένως, τελικα θα έχουμε την ανισότητα

$$\|u\|_{L^{q_1}(\Gamma)}^{q_1} \le 2^{q_1 - 1} \varepsilon^{q_1} N^{q} \|u\|_{W^{1,\mathrm{p}}(\Omega)}^{q} + C_{\varepsilon}^{q_1} \mathrm{meas}_{n-1}(\Gamma),$$

όπου το $\varepsilon > 0$ είναι επιλεγμένο αυθαίρετα μικρό ή αν θέσουμε αντί για $2^{q_1 - 1} \varepsilon^{q_1}$ πάλι με ένα ε (και αυτό θα είναι οσοδήποτε μικρό) και $C_{\varepsilon} < +\infty$ αντί για $C_{\varepsilon}^{q_1}$ θα πάρουμε την ανισότητα

$$\|u\|_{L^{q_1}(\Gamma)}^{q_1} \le \varepsilon N^{q} \|u\|_{W^{1,\mathrm{p}}(\Omega)}^{q} + C_{\varepsilon} \mathrm{meas}_{n-1}(\Gamma). \qquad (3.48)$$

Από τις (3.25) και (3.26) παίρνουμε την ανισότητα

$$\begin{aligned}\langle A(u),u\rangle &= \int_\Omega a(x,u,\nabla u)\cdot\nabla u + c(x,u,\nabla u)u\,dx + \int_\Gamma b(x,u)u\,dS \\ &\geq \int_\Omega \left(\varepsilon_1|\nabla u|^p + \varepsilon_2|u|^q - k_1\right)dx - \int_\Gamma \left(c_1|u|^{q_1} + k_2\right)dS \\ &\geq \min(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\int_\Omega \left(|\nabla u|^p + |u|^q\right)dx - \|k_1\|_{L^1(\Omega)} - c_1\|u\|^{q_1}_{L^{q_1}(\Gamma)} - \|k_2\|_{L^1(\Gamma)}.\end{aligned} \tag{3.49}$$

Από την (3.47) παίρνουμε

$$\int_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)} |\nabla u|^p\,dx + \int_{L^q(\Omega)} |\nabla u|^q\,dx \geq \left(\frac{\|u\|^q_{W^{1,p}(\Omega)}}{C_{p,q}} - 1\right),$$

οπότε, από την (3.49) και λόγω της (3.48) έχουμε

$$\begin{aligned}\langle A(u),u\rangle &\geq \min(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\left(\frac{\|u\|^q_{W^{1,p}(\Omega)}}{C_{p,q}} - 1\right) - \|k_1\|_{L^1(\Omega)} \\ &\quad - c_1\varepsilon N^q\|u\|^q_{W^{1,p}(\Omega)} - C_\varepsilon \mathrm{meas}_{n-1}(\Gamma) - \|k_2\|_{L^1(\Gamma)} \\ &= \left(\frac{\min(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}{C_{p,q}} - c_1\varepsilon N^q\right)\|u\|^q_{W^{1,p}(\Omega)} - \min(\varepsilon_1,\varepsilon_2) \\ &\quad - C_\varepsilon \mathrm{meas}_{n-1}(\Gamma) - \|k_2\|_{L^1(\Gamma)}\end{aligned} \tag{3.50}$$

Αν πάρουμε το ε αρκετά μικρό, ώστε να έχουμε $\varepsilon < \frac{\min(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}{C_{p,q}c_1N^q}$, με $q>1$,

τότε

$$\lim_{\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}\to\infty} \langle A(u),u\rangle = +\infty$$

και επομένως ο A είναι ένας πιεστικός τελεστής.

Λήμμα 3.8. Ο $A_1 : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\Omega)^*$ είναι πιεστικός.

Απόδειξη.

Έστω $w \in W^{1,p}(\Omega)$ σταθερό. Αν πάρουμε μια σταθερά $c > 1$ και θέσουμε $R := \dfrac{c\|w\|_{W^{1,p}(\Omega)}}{c-1}$, τότε για κάθε $u \in W^{1,p}(\Omega)$ με $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \geq R$ έχουμε

$$(c-1)\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \geq c\|w\|_{W^{1,p}(\Omega)} \Leftrightarrow c\left(\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} - \|w\|_{W^{1,p}(\Omega)}\right) \geq \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

και λόγω της ανισότητας

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} - \|w\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq \|u+w\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

παίνουμε

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq c\|u+w\|_{W^{1,p}(\Omega)} \tag{3.51}$$

Θεωρούμε $j : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, όπως στον Ορισμό 3.3, έτσι η j είναι μη φραγμένη $\left(\lim_{t\to\infty} j(t) = +\infty\right)$ και επειδή ο τελεστής A είναι πιεστικός ισχύει η ανισότητα

$$\langle A(u), u\rangle \geq j\left(\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}\right)\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Για κάθε $\upsilon \in W^{1,p}(\Omega)$ θέτουμε $\|\upsilon\|_{W^{1,p}(\Omega)} = r$ και ορίζουμε την απεικόνιση $\psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ με

$$\psi(r) := \begin{cases} c\, j\left(\|\upsilon + w\|_{W^{1,p}}\right), & r \geq R \\ 0, & r < R \end{cases} \tag{3.52}$$

Από τη (3.51) έπεται ότι αν $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \to +\infty$ τότε και $\|u+w\|_{W^{1,p}(\Omega)} \to +\infty$ οπότε η $\psi(r) \to +\infty$ όταν το $r \to \infty$.

Επιπλέον λόγω ορισμού της $\psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ και λόγω της (3.51) έχουμε:

Για κάθε $u \in W^{1,p}(\Omega)$ με $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \geq R$,

$$\begin{aligned} A_1(u) = A(u+w) &\geq j\left(\|u+w\|_{W^{1,p}}\right)\|u+w\|_{W^{1,p}} \\ &\geq \frac{1}{c} j\left(\|u+w\|_{W^{1,p}}\right)\|u\|_{W^{1,p}} \\ &\geq \psi\left(\|u_n\|_{W^{1,p}}\right)\|u_n\|_{W^{1,p}}, \end{aligned}$$

και για κάθε $u \in W^{1,p}(\Omega)$ με $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} < R$, λόγω ορισμού της ψ , θα έχουμε

$$A_1(u) = A(u+w) \geq \psi\left(\|u+w\|_{W^{1,p}}\right)\|u+w\|_{W^{1,p}} \geq 0 = \psi\left(\|u\|_{W^{1,p}}\right)\|u\|_{W^{1,p}}.$$

Άρα ο A_1 είναι πιεστικός.

Θεώρημα 3.4. (Leray-Lions)

Έστω ότι οι συναρτήσεις $\alpha_i, c : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και $b : \Gamma \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Carathéodory συναρτήσεις για $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, οι συναρτήσεις $g : \Omega \to \mathbb{R}$ και $h : \Gamma \to \mathbb{R}$ είναι τέτοιες ώστε $g \in L^{p^{*'}}(\Omega)$, $h \in L^{p^{\#'}}(\Gamma)$, και ότι οι $(3.12_a) - (3.12_c)$, (3.32), (3.12_d) και (3.45)-(3.46) ισχύουν καθώς και οι $(3.26_a) - (3.26_b)$ τότε το δεύτερης τάξης πρόβλημα συνοριακών τιμών $(3.11_a) - (3.11_c)$ θα έχει μια ασθενή λύση.

Απόδειξη.

Από τα Λήμματα 3.3 και 3.4 προκύπτει ότι ο $A : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\Omega)^*$ είναι ψευδομονότονος και από το Λήμμα 3.5 προκύπτει ότι ο $A_1 : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\Omega)^*$ είναι ψευδομονότονος.

Στο Λήμμα 3.6 αποδείξαμε ότι ο A είναι πιεστικός και στο Λήμμα 3.6 με βάση αυτό το αποτέλεσμα αποδείξαμε ότι και ο A_1 είναι πιεστικός. Αυτές είναι οι μόνες απαραίτητες προυποθέσεις για την εφαρμογή του Θεωρήματος 3.1. (Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1, ο τελεστής $A_1 : V \to V^*$ είναι 1-1 και επί. Έτσι για $f \in V^*$, υπάρχει τουλάχιστον μια λύση στην εξίσωση $A_1(u) = f$). Τότε σύμφωνα με την Πρόταση 3.6 το πρόβλημα συνοριακών τιμών $(3.11_a) - (3.11_c)$ έχει μια ασθενή λύση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Ασθενώς συνεχείς απεικονίσεις

Ημιγραμμικές Εξισώσεις

Στην περίπτωση που ο A είναι πιεστικός και ασθενώς συνεχής αντί για ψευδομονότονος, μπορούμε να αποδείξουμε την ύπαρξη μιας λύσης στην $A(u) = f$ πολύ πιο εύκολα. Αν και η υπόθεση της ασθενής συνέχειας είναι περιοριστική, τέτοιες απεικόνισεις εξακολουθούν να έχουν μεγάλο εύρος εφαρμογών. Στην συγκεκριμένη περίπτωση μπορούμε να γενικεύσουμε την έννοια για τις απεικονίσεις $A: V \to Z^*$ για κάποιο πυκνό χώρο Banach $Z \subset V$ τέτοιον ώστε $Z^* \supset V^*$. Αν $V_k \subset Z$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, μπορούμε να τροποποιήσουμε την (3.4) κι έπειτα το Θεώρημα 3.1.

Σε αυτό το σημείο θα παρουσιάσουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 3.1 (Brezis), την οποία θα χρειαστούμε για να δείξουμε την ύπαρξη λύσης για το πρόβλημά μας.

Απόδειξη. (Θεώρημα 3.1 (Brezis))
Θα χωρίσουμε την απόδειξη σε τέσσερα βήματα.
Βήμα 1: (Αφηρημένη προσέγγιση του Galerkin.) Αφού ο V έχει υποτεθεί διαχωρίσιμος, μπορούμε να πάρουμε μια ακολουθία πεπερασμένης διάστασης υποχώρων

$$\forall k \in \mathbb{N} : V_k \subset V_{k+1} \subset V \text{ και } \bigcup_{k\in\mathbb{N}} V_k \text{ είναι πυκνό στον } V . \qquad (4.1)$$

Τότε ορίζουμε μια προσέγγιση Galerkin $u_k \in V_k$ από την ταυτότητα:

$$\forall \upsilon \in V_k : \qquad \langle A(u_k), \upsilon \rangle = \langle f, \upsilon \rangle . \qquad (4.2)$$

Βήμα 2: (Ύπαρξη προσεγγιστικών λύσεων u_k.) Δηλαδή ψάχνουμε $u_k \in V_k$ να λύνει $I_k^*\left(A(u_k) - f\right) = 0$ όπου $I_k : V_k \to V$ είναι η κανονική εμφύτευση τέτοια ώστε ο συζυγής τελεστής $I_k^* : V^* \to V_k^*$ αντιπροσωπεύει τον περιορισμό $I_k^* f = f|_{V_k}$. Άλλωστε, αφού ο V_k είναι πεπερασμένης διάστασης, θα προσδιορίσουμε τον $V_k \cong V_k^*$ με έναν γραμμικό ομομορφισμό $J_k : V_k \to V_k^*$ τέτοιον ώστε $\langle J_k u, u \rangle = \|u\|_{V_k}^2$, $\|J_k u\|_{V_k^*} = \|u\|_{V_k}$ και $\langle J_k u, J_k^{-1} f \rangle = \langle f, u \rangle$.
Αφού ο A είναι πιεστικός, για ρ αρκετά μεγάλο έχουμε

$$\|u\|_{V_k} = \rho \Rightarrow \langle A(u) - f, u \rangle \geq \langle A(u), u \rangle - \|f\|_* \|u\| > 0 . \qquad (4.3)$$

Τώρα υποθέτουμε ότι $I_k^* A(u) \neq I_k^* f$ για κάθε $u \in V_k$ με $\|u\|_{V_k} \leq \rho$. Τότε η απεικόνιση

$$u \mapsto \rho \frac{J_k^{-1} I_k^*\left(f - A(u)\right)}{\left\| I_k^*\left(f - A(u)\right)\right\|_{V_k^*}} \qquad (4.4)$$

απεικονίζει το κυρτό συμπαγές σύνολο $\{u \in V_k ; \|u\| \leq \rho\}$ στον εαυτό του διότι $\|J_k^{-1}\| = 1$; λαμβάνοντας υπόψιν ότι $\|J_k^{-1} f\|_{V_k} = \|f\|_{V_k^*}$. Επιπλέον, από το

Λήμμα 3.2, η απεικόνιση $u \mapsto \langle A(u), \upsilon \rangle : V_k \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής για οποιοδήποτε υ έτσι ώστε και η $u \mapsto I_k^* A(u) : V_k \to V_k^*$ να είναι συνεχής. Από το Θεώρημα σταθερού σημείου του Brouwer (Μια συνεχής απεικόνιση σε συμπαγές κυρτό σύνολο στον $\mathbb{R}^n$ έχει σταθερό σημείο.) η απεικόνιση (4.4) έχει σταθερό σημείο u, το οποίο σημαίνει ότι

$$u = \rho \frac{J_k^{-1} I_k^* \left(f - A(u) \right)}{\left\| I_k^* \left(f - A(u) \right) \right\|_{V_k^*}}. \tag{4.5}$$

Καθώς $\left\| J_k^{-1} f \right\|_{V_k} = \| f \|_{V_k^*}$, από την προηγούμενη ισότητα συνεπάγεται ότι $\|u\|_{V_k} = \rho$. Δοκιμάζοντας στην (4.5) το $J_k u \left\| I_k^* \left(f - A(u) \right) \right\|_{V_k^*}$, παίρνουμε $\langle J_k u, u \rangle \left\| I_k^* \left(f - A(u) \right) \right\|_{V_k^*} = \rho \left\langle J_k u, J_k^{-1} \left(I_k^* \left(f - A(u) \right) \right) \right\rangle$ από $\left\langle J_k u, J_k^{-1} f \right\rangle = \langle f, u \rangle$ έχουμε

$\rho \left\langle I_k^* \left(f - A(u) \right), u \right\rangle = \rho \left\| I_k^* \left(f - A(u) \right) \right\|_{V_k^*} \|u\|_{V_k} = \rho^2 \left\| I_k^* \left(f - A(u) \right) \right\|_{V_k^*}$. Άρα

$$\begin{aligned} \rho^2 \left\| I_k^* \left(f - A(u) \right) \right\|_{V_k^*} &= \langle J_k u, u \rangle \left\| I_k^* \left(f - A(u) \right) \right\|_{V_k^*} \\ &= \rho \left\langle J_k u, J_k^{-1} I_k^* \left(f - A(u) \right) \right\rangle = \rho \left\langle I_k^* \left(f - A(u) \right), u \right\rangle \\ &= \rho \left\langle f - A(u), I_k u \right\rangle = \rho \left\langle f - A(u), u \right\rangle \end{aligned} \tag{4.6}$$

από το οποίο προκύπτει $\left\langle A(u) - f, u \right\rangle = -\rho \left\| I_k^* \left(f - A(u) \right) \right\|_{V_k^*} \le 0$ το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την (4.3).

Βήμα 3: (Μια a-priori εκτίμηση) Επιπλέον θέτοντας $\upsilon := u_k$ στην (4.2) μπορούμε να θέσουμε

$$\zeta(\|u_k\|)\|u_k\| \le \langle A(u_k), u_k \rangle = \langle f, u_k \rangle \le \| f \|_* \|u_k\| \tag{4.7}$$

με μια κατάλληλη αύξουσα συνάρτηση $\zeta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ τέτοια ώστε $\lim_{\xi \to \infty} \zeta(\xi) = +\infty$, λόγω της πιεστικότητας (3.4) της A. Έπειτα $\|u_k\| < \zeta^{-1}(\| f \|_*) < +\infty$, τέτοιο ώστε η u_k να είναι φραγμένη στον V ανεξάρτητως από το k. Αυτό ισχύει για οποιαδήποτε λύση στην (4.2).

Βήμα 4. (Πέρασμα του ορίου) Εφόσον η $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη και V είναι ανακλαστικός και διαχωρίσιμος, από το Θεώρημα Banach 1.6 και την πρόταση η οποία μας λέει ότι, αν ο V^* είναι διαχωρίσιμος τότε είναι και ο ίδιος ο χώρος V, θα έχουμε μια υπακολουθία και $u \in V$ τέτοια ώστε $u_k \rightharpoonup u$. Από την (4.2), επίσης έχουμε

$$\langle A(u_k), \upsilon_m - u_k \rangle = \langle f, \upsilon_m - u_k \rangle \tag{4.8}$$

για κάθε $k \geq m$ και $\upsilon_m \in V_m \subset V_k$. Από την συμπάγεια του $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} V_k$ στον V, μπορούμε να πάρουμε $u_k \to u$. Τότε από την (4.8) παίρνουμε

$$\begin{aligned}\limsup_{k\to\infty} \langle A(u_k), u_k - u \rangle &= \limsup_{k\to\infty} \left(\langle A(u_k), u_k - \upsilon_k \rangle - \langle A(u_k), u_k - u \rangle \right) \\ &\leq \lim_{k\to\infty} \left(\langle f, u_k - \upsilon_k \rangle + \|A(u_k)\|_* \|u_k - u\| \right) = 0 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Αποδείχθηκε ότι η ακολουθία $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη έτσι και η $\{\|A(u_k)\|_*\}_{k\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη από την (3.3_a), κι έτσι ακόμα και η ισότητα ισχύει στην (4.9) και το "limsup" είναι αριθμός. Από την ψευδομονοτονία (3.3_b) της A, παίρνουμε

$$\forall \upsilon \in V: \quad \liminf_{k\to\infty} \langle A(u_k), u_k - \upsilon \rangle \geq \langle A(u), u - \upsilon \rangle. \tag{4.10}$$

Αντιθέτως, από την (4.8) επίσης έχουμε

$$\forall \upsilon \in \bigcup_{m\in\mathbb{N}} V_m: \quad \liminf_{k\to\infty} \langle A(u_k), u_k - \upsilon \rangle = \lim_{k\to\infty} \langle f, u_k - \upsilon \rangle = \langle f, u - \upsilon \rangle. \tag{4.11}$$

Συνδυάζοντας τις (4.10) και (4.11), προκύπτει ότι $\langle A(u), u - \upsilon \rangle \leq \langle f, u - \upsilon \rangle$ για κάθε υ το οποίο ανήκει σε ένα πυκνό υποσύνολο του V, και συγκεκριμένα στο $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} V_m$, γεγονός που δείχνει ότι $A(u) = f$. □

Πρόταση 4.1. (Ύπαρξη) Αν μια ασθενώς συνεχής απεικόνιση $A: V \to Z^*$ είναι πιεστική με την τροποποιημένη έννοια

$$\lim_{\substack{\|u\|_V \to \infty \\ \upsilon \in Z}} \frac{\langle A(u), u \rangle_{Z^* \times Z}}{\|u\|_V} = +\infty, \tag{4.12}$$

κι αν $f \in V^*$, τότε η εξίσωση $A(u) = f$ έχει μια λύση.

Απόδειξη. Η τεχνική της απόδειξης του Θεωρήματος 3.1 μας επιτρέπει να κάνουμε μια πολύ απλή μετατροπή: αντί για την (4.8), θεωρούμε την ταυτότητα Galerkin ως $\langle A(u_k) - f, \upsilon_k \rangle_{Z^* \times Z} = 0$ για $\upsilon_k \to \upsilon$ στον Z και να περάσουμε το όριο κατευθείαν. Παρατηρούμε ότι η (4.7) μετατρέπεται ως εξής

$$\zeta(\|u_k\|_V)\|u_k\|_V \le \langle A(u_k), u_k \rangle_{Z^* \times Z} = \langle f, u_k \rangle_{Z^* \times Z} = \langle f, u_k \rangle_{V^* \times V} \le \|f\|_{V^*} \|u_k\|_V$$

το οποίο μας δίνει πάλι $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ φραγμένο στον V διότι $f \in V^*$. □

Σε αυτό το σημείο θα ασχοληθούμε με τα προβλήματα 2ης τάξης του προηγούμενου κεφαλαίου στην ιδιαίτερη περίπτωση όπου οι $a(x, r, \cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ και $c(x, r, \cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι γραμμικές. Αυτά τα προβλήματα θα τα ονομάζουμε ημιγραμμικά, αν και αυτός ο ορισμός μερικές φορές χρειάζεται το $a(x, \cdot, \mathrm{s})$ σταθερό. Οπότε

$$a_i(x, r, s) := \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x, r) s_j + a_{i0}(x, r), \; i = 1, \ldots, n, \tag{4.13$_a$}$$

$$c(x, r, s) := \sum_{j=1}^{n} c_j(x, r) s_j + c_0(x, r), \tag{4.13$_b$}$$

με $a_{ij}, c_j : \Omega \times R \to \mathbb{R}$ να είναι απεικονίσεις Caratheodory, των οποίων η ανάπτυξη έχει σχεδιαστεί με τέτοιον τρόπο ώστε να μας δίνουν τις απεικονίσεις Nemytskii $\mathcal{N}_{(a_{i1}, \ldots, a_{in})}, \mathcal{N}_{(c_1, \ldots, c_n)} : L^{2^* - \varepsilon}(\Omega) \to L^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ και $\mathcal{N}_{\alpha_{i0}}, \mathcal{N}_{c_0} : L^{2^* - \varepsilon}(\Omega) \to L^1(\Omega)$ με $\varepsilon > 0$. Άλλωστε η συνοριακή μη γραμμικότητα $b : \Gamma \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ θα μας δώσει την απεικόνιση Nemytskii $\mathcal{N}_b : L^{2^\# - \varepsilon}(\Gamma) \to L^1(\Gamma)$. Αυτό σημαίνει ότι για $i, j = 1, \ldots, n$,

$$\exists \gamma_1 \in L^2(\Omega), C \in \mathbb{R}: \qquad \begin{aligned} &|a_{ij}(x,r)| \le \gamma_1(x) + C|r|^{(2^*-\varepsilon)/2}, \\ &|c_j(x,r)| \le \gamma_1(x) + C|r|^{(2^*-\varepsilon)/2}, \end{aligned} \qquad (4.14_a)$$

$$\exists \gamma_2 \in L^1(\Omega), C \in \mathbb{R}: \qquad \begin{aligned} &|a_{i0}(x,r)| \le \gamma_2(x) + C|r|^{2^*-\varepsilon}, \\ &|c_0(x,r)| \le \gamma_2(x) + C|r|^{2^*-\varepsilon}, \end{aligned} \qquad (4.14_b)$$

$$\exists \gamma_3 \in L^1(\Gamma), C \in \mathbb{R}: \qquad |b(x,r)| \le \gamma_3(x) + |r|^{2^\#-\varepsilon}, \qquad (4.14_c)$$

Ο εκθέτης $p = 2$ βγαίνει φυσικά διότι η $a(x,r,\cdot)$ έχει γραμμική ανάπτυξη. Σημειώνουμε ότι αυτές οι απαιτήσεις μας εγγυώνται ότι όλα τα ολοκληρώματα στην (3.14) είναι καλά ορισμένα αν $\upsilon \in W^{1,\infty}(\Omega) := Z$.(Οι υποθέσεις (3.17)-(3.19) ισχύουν κι εδώ)

Λήμμα 4.1. (Ασθενής συνέχεια της A) Έστω ότι ισχύουν οι (4.13)-(4.14). Τότε η A είναι ασθενώς συνεχής σαν απεικόνιση $W^{1,2}(\Omega) \to W^{1,\infty}(\Omega)^*$.

Απόδειξη. Αν έχουμε μια ακολουθία $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, η οποία, συγκλίνει ασθενώς στον $W^{1,2}(\Omega)$, τότε θα συγκλίνει ισχυρώς στον $L^{2^*-\varepsilon}(\Omega)$. Τότε, από την συνέχεια των απεικονίσεων Nemytskii
$\mathcal{N}_{(a_{i1},\dots,a_{in})}, \mathcal{N}_{(c_1,\dots,c_n)} : L^{2^*-\varepsilon}(\Omega) \to L^2(\Omega;\mathbb{R}^n)$ και $\mathcal{N}_{\alpha_{i0}}, \mathcal{N}_{c_0} : L^{2^*-\varepsilon}(\Omega) \to L^1(\Omega)$, ισχύει ότι

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}(u_k) \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + a_{i0}(u_k) \right) \frac{\partial \upsilon}{\partial x_i} + \left(\sum_{j=1}^n c_j(u_k) \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + c_0(u_k) \right) \upsilon \, dx$$

$$= \int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}(u) \frac{\partial u}{\partial x_j} + a_{i0}(u) \right) \frac{\partial \upsilon}{\partial x_i} + \left(\sum_{j=1}^n c_j(u) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c_0(u) \right) \upsilon \, dx$$

για $k \to \infty$ και για κάθε $\upsilon \in W^{1,\infty}(\Omega)$. Επίσης $u_k\big|_\Gamma \to u\big|_\Gamma$ στον $L^{2^{\#}-\varepsilon}(\Gamma)$, και, από την (4.14_c) έχουμε σύγκλιση των συνοριακών ολοκληρωμάτων ως εξής $\int_\Gamma b(u_k)\upsilon\, dS \to \int_\Gamma b(u)\upsilon\, dS$. □

Πρόταση 4.2. (Υπαρξη ασθενών λύσεων) Έστω ότι ισχύουν οι (4.13)-(4.14), $g \in L^{2^{*'}}(\Omega), h \in L^{2^{\#'}}(\Gamma)$, και, για $\varepsilon > 0$, $\gamma_1 \in L^2(\Omega)$, $\gamma_2 \in L^1(\Omega)$, $\gamma_3 \in L^1(\Gamma)$, και για σχεδόν όλα τα $x \in \Omega$ ($x \in \Gamma$ αντίστοιχα για την (4.15_b)) και για όλα τα $(r,s) \in \mathbb{R}^{1+n}$, ισχύει ότι

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x,r)s_j + a_{i0}(x,r)\right)s_i + \left(\sum_{j=1}^{n} c_j(x,r)s_j + c_0(x,r)\right)r \geq \varepsilon|s|^2 + \varepsilon|r|^2 - \gamma_1(x)|s| - \gamma_2(x), \qquad (4.15_a)$$

$$b(x,r)r \geq \gamma_3(x) \qquad (4.15_b)$$

Τότε το πρόβλημα συνοριακών τιμών (3.6) με τις (3.10) έχει μια ασθενή λύση με την έννοια του Ορισμού 3.4, χρησιμοποιώντας τώρα $\upsilon \in W^{1,\infty}(\Omega)$.

Απόδειξη. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση 4.1 τώρα με $V := W^{1,2}(\Omega)$, $Z := W^{1,\infty}(\Omega)$ και V_k κάποιος πεπερασμένης διάστασης υποχώρους του $W^{1,\infty}(\Omega)$ ικανοποιώντας την (4.1). Η πιεστικότητα (4.12) προκύπτει από τις (4.15) με απλά επιχειρήματα. Έπειτα χρησιμοποιούμε το Λήμμα 4.1 και την Πρόταση 4.1. □

Βιβλιογραφία

[1] H. Brezis (μετάφραση Δ.Κραββαρίτη - Ι.Χρυσοβέργη), Συναρτησιακή Ανάλυση, Θεωρία κι Εφαρμογές, Παν/κές Εκδόσεις ΕΜΠ, 1997.

[2] M. Chipot, Elements of Nonlinear Analysis, Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 2000.

[3] S. Carl, V. Khoi Le, D. Motreanu, Nonsmooth Variational Problems and their Inequalities: Comparison Principles and Applications, Springer, New York, 2007.

[4] T. Roubíček, Nonlinear Partial Differential Equations with Applications, Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 2005.

[5] R. E. Showalter, Monotone Operator in Banach Space and Nonlinear Partial Differential Equations, American Mathematical Society, Providence Rhode Island, 1997.