

# HAIL INGESTION IN AEROENGINES

Analysis & Physical  
Modeling



National Technical  
University of Athens



**Hadi K. Harb**

Department of Mechanical Engineering

Fluids Section

Laboratory of Thermal Turbomachines



**National Technical University of Athens**  
Department of Mechanical Engineering  
Fluids Section  
Laboratory of Thermal Turbomachines

**Hail Ingestion in Aero Engines  
Analysis and Physical Modeling**

Diploma Thesis  
**Hadi K. Harb**

Advisors : N. Aretakis, I. Roumeliotis  
October 2011

Abstract :

This diploma thesis investigates the effect of hail ingestion in aero engines. Hail ingestion is the situation that aircrafts encounter when flying in severe weather conditions and denotes the massive flow of ice particles into the engine inlet. The investigation begins with a brief introduction to the phenomenon and the consequences related to it. The hail certification standards are also discussed along with the usual appearance of hail in the atmosphere and the mechanical and thermal properties of ice. A thermal analysis follows considering the melting of hailstones affected by a relative and high temperature gas stream. The analysis concludes with a physical model formed to describe the simultaneous melting and evaporation of ice particles inside the aero engine. An impact model and a motion model are also formed in the same manner in order to model the mechanical interaction between the hailstones, the airflow and the surfaces of the engine. A parametric analysis is performed to indicate the factors that affect the engine operation most and to be monitored in any hail ingestion situation.



**Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο**  
Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών  
Τομέας Ρευστών  
Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών

**Εισρόφηση Χαλαζιού σε Αεροπορικούς Κινητήρες  
Ανάλυση και Φυσική Μοντελοποίηση**

Διπλωματική Εργασία  
**Χάντι Κ. Χάρμπ**

Επιβλέποντες : Ν. Αρετάκης, Ι. Ρουμेलιώτης  
Οκτώβριος 2011

Περίληψη :

Στην παρούσα διπλωματική εργασία ερευνάται το φαινόμενο της εισρόφησης χαλαζιού σε αεροπορικούς κινητήρες. Η εισρόφηση χαλαζιού είναι μία κατάσταση που αντιμετωπίζουν τα αεροσκάφη πετώντας σε δυσμενής καιρικές συνθήκες και χαρακτηρίζεται από τη μαζική εισροή στοιχείων πάγου στον αγωγό εισόδου της μηχανής. Η ανάλυση ξεκινά με μία εισαγωγή στο φαινόμενο και τις συνέπειες που σχετίζονται με αυτό. Στη συνέχεια μελετώνται τα στάνταρ πιστοποίησης που έχουν θεσμοθετηθεί καθώς επίσης και η συνήθης μορφή εμφάνισης του χαλαζιού στην ατμόσφαιρα με τις θερμικές και μηχανικές του ιδιότητες. Ακολουθεί μία θερμική ανάλυση της υγροποίησης του χαλαζιού από ένα υψηλής θερμοκρασίας ρεύμα αέρα. Η ανάλυση καταλήγει στη διατύπωση ενός μοντέλου ικανού να περιγράψει την ταυτόχρονη υγροποίηση και ατμοποίηση των στοιχείων πάγου μέσα σε μια αεροπορική μηχανή. Ένα μοντέλο κρούσης και ένα μοντέλο κίνησης δημιουργούνται επίσης για τη μοντελοποίηση της αλληλεπίδρασης του χαλαζιού με το ρεύμα αέρα και τις επιφάνειες εντός της μηχανής. Τέλος πραγματοποιείται παραμετρική ανάλυση για τον προσδιορισμό των παραγόντων που επηρεάζουν τη λειτουργία της μηχανής περισσότερο έτσι ώστε να παρακολουθούνται σε ενδεχόμενη λειτουργία υπο συνθήκες χαλαζοεισρόφησης.





**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΘΕΡΜΙΚΩΝ ΣΤΡΟΒΙΛΟΜΗΧΑΝΩΝ**

**ΕΙΣΡΟΦΗΣΗ ΧΑΛΑΖΙΟΥ  
ΣΕ ΑΕΡΟΠΟΡΙΚΟΥΣ ΚΙΝΗΤΗΡΕΣ**

Ανάλυση και Φυσική Μοντελοποίηση

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ  
Χάντι Κ. Χάρμπ**

Επίβλεψη:  
Λέκτορας Ν. Αρετάκης  
Λέκτορας Ι. Ρουμελιώτης

**ΑΘΗΝΑ  
ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 2011**





*Αφιερώνεται στη Γιώτα...*

مهدات الى عائلت



## **ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ**

Η εργασία αυτή υλοποιήθηκε το ακαδημαϊκό έτος 2010–11 και έγινε υπο την επίβλεψη του Λέκτορα Ν. Αρετάκη και υπο την καθοδήγηση του Λέκτορα Ι. Ρουμελιώτη τους οποίους και ευχαριστώ θερμά. Στην μελέτη και την έρευνα δεν υπήρξα μόνος αλλά βοηθήθηκα από πληθώρα ανθρώπων τους οποίους και θέλω να ευχαριστήσω. Δεν θα μπορούσα να μην αναφέρω το όνομα του Χρήστου του Αμπάτη ο οποίος αφιέρωσε αρκετό από τον πολύτιμο χρόνο του συζητώντας και μελετώντας τα προβλήματα της μελέτης μου ως δικά του και του Ξενοφώντα Τρομπούκη για τις πολύτιμες του επεξηγήσεις. Θέλω να ευχαριστήσω ακόμα όλο το προσωπικό του εργαστηρίου θερμικών στροβιλομηχανών για το ευχάριστο κλίμα εργασίας και για τη βοήθεια που είχα σε όποια θέματα με απασχόλησαν κατά καιρούς. Την εργασία δεν θα μπορούσα να φέρω εις πέρας χωρίς τη χρηματοδότηση του πατέρα μου που έδωσε παράταση στις σπουδές μου για έναν ολόκληρο χρόνο. Πατέρα σε ευχαριστώ.



# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Εισαγωγή.....</b>	<b>17</b>
1.1	Σκοπός της μελέτης.....	17
1.2	Δομή της μελέτης.....	18
<b>2</b>	<b>Η Εισρόφηση Χαλαζιού στους Αεροπορικούς Κινητήρες.....</b>	<b>21</b>
2.1	Το Φαινόμενο στην ατμόσφαιρα.....	21
2.2	Η συνειδητοποίηση του Προβλήματος.....	22
2.3	Ο Κίνδυνος για τη Μηχανή.....	22
2.4	Τα Μέτρα Πιστοποίησης.....	27
2.5	Το πρόβλημα σήμερα.....	28
<b>3</b>	<b>Μοντελοποίηση στη Βιβλιογραφία και Επίγεια Μέσα Δοκιμών.....</b>	<b>29</b>
3.1	Υπάρχοντα Μοντέλα Προσομοίωσης για την Εισρόφηση Χαλαζιού.....	29
3.1.1	Purdue University - NASA 1994.....	29
3.1.2	Loughborough University - Rolls Royce 1996.....	31
3.1.3	General Electric 2005.....	33
3.2	Επίγεια μέσα διενέργειας δοκιμών.....	37
<b>4</b>	<b>Μηχανισμοί Δημιουργίας και Ιδιότητες του Χαλαζιού.....</b>	<b>41</b>
4.1	Η δομή του χαλαζιού.....	41
4.2	Το χαλάζι στην ατμόσφαιρα.....	46
4.3	Οι μηχανικές και θερμικές ιδιότητες του Χαλαζιού.....	48
4.3.1	Μηχανικές ιδιότητες.....	48
4.3.2	Θερμικές ιδιότητες.....	56
4.4	Η αποσύνθεση του χαλαζιού στη μηχανή.....	57

<b>5 Συγκέντρωση Χαλαζιού στην Ατμόσφαιρα και στον Αγωγό Εισόδου της Μηχανής .....</b>	<b>59</b>
5.1 Η Πιθανολογική Θεώρηση.....	59
5.2 Ποσότητα χαλαζιού ανά το υψόμετρο .....	60
5.3 Διάμετρος χαλαζιού ανά το υψόμετρο .....	66
5.4 Συχνότητα εμφάνισης χαλαζιού.....	67
5.5 Η θέσπιση των Standards .....	72
5.6 Η Τερματική Ταχύτητα του Χαλαζιού.....	78
5.7 Η συγκέντρωση στον αγωγό εισόδου.....	82
<b>6 Θερμική Αλληλεπίδραση του Χαλαζιού στο Εσωτερικό της Μηχανής (Υγροποίηση - Εξάτμιση).....</b>	<b>89</b>
6.1 Τοποθέτηση του Προβλήματος .....	89
6.2 Ανάλυση των όρων Μεταφοράς Μάζας.....	94
6.3 Ανάλυση των όρων Μεταφοράς Θερμότητας.....	114
6.4 Μοντέλο Υγροποίησης - Εξάτμισης.....	124
<b>7 Μηχανική Αλληλεπίδραση του Χαλαζιού στο Εσωτερικό της Μηχανής (Κρούση - Θραύση) .....</b>	<b>161</b>
7.1 Κρούση σωματιδίων πάγου.....	161
7.1.1 Στερεομηχανική Κρούση ( <i>Μικρά σωματίδια</i> ).....	163
7.1.2 Ελαστομηχανική Κρούση ( <i>Μεγάλα Σωματίδια</i> ) .....	175
7.2 Θραύση σωματιδίων πάγου .....	182
7.3 Μηχανική Αλληλεπίδραση με τις Επιφάνειες της Μηχανής .....	191
7.4 Μοντέλο Κρούσης - Θραύσης .....	198
<b>8 Κινηματική Αλληλεπίδραση του Χαλαζιού στο Εσωτερικό της Μηχανής.....</b>	<b>217</b>
8.1 Το πεδίο ροής της μηχανής.....	217

## Περιεχόμενα

---

8.2	Οι δυνάμεις πάνω στο χαλάζι.....	218
8.2.1	Οι δυνάμεις σώματος.....	218
8.2.2	Οι δυνάμεις επιφανείας.....	218
8.3	Μοντέλο Κίνησης.....	225
<b>9</b>	<b>Συμπεράσματα - Προτάσεις.....</b>	<b>229</b>
9.1	Συμπεράσματα.....	229
9.2	Προτάσεις.....	231
	<b>Βιβλιογραφία.....</b>	<b>235</b>
	<b>Π1 Σχετικά με την Ατμοποίηση.....</b>	<b>239</b>
	<b>Π2 Υπολογιστικοί Κώδικες.....</b>	<b>257</b>





# 1 Εισαγωγή

Το κεφάλαιο αυτό αποτελεί μία εισαγωγή στην παρούσα εργασία και διατυπώνει συνοπτικά το σκοπό και τη δομή της.

## 1.1 Σκοπός της μελέτης

Τα τελευταία χρόνια ο όλο και αυξανόμενος αριθμός επιβατών που ταξιδεύουν με αεροπλάνο έχει οδηγήσει τις αεροπορικές εταιρείες στην αύξηση της πυκνότητας των δρομολογίων. Η πλήρωση των εναέριων χώρων με περισσότερα αεροσκάφη και η απαίτηση να πετάνε στην ώρα τους δίχως καθυστερήσεις φέρνει νέα δεδομένα στον τρόπο λειτουργίας των αερομεταφορών. Τα αεροσκάφη πρέπει να βρίσκονται στον αέρα περισσότερες ώρες και πάντα μέσα στο προσχεδιασμένο πλάνο πτήσης τους. Αυτό αναπόφευκτα σημαίνει ότι και η πιθανότητα να αντιμετωπίσουν καθοδόν ακραία καιρικά φαινόμενα αυξάνεται συνεχώς.

Για τα σύγχρονα αεροσκάφη η αντιμετώπιση κακών καιρικών συνθηκών δεν θα πρέπει να αποτελεί απειλή αλλά μία διαφορετική κατάσταση πτήσης. Αντίστοιχα οι μηχανές θα πρέπει να σχεδιάζονται με βάση το γεγονός ότι αρκετές από τις ώρες λειτουργίας θα γίνουν σε περιβάλλον με άσχημες καιρικές συνθήκες.

Οι ατμοσφαιρικές συνθήκες είναι γνωστό ότι αποτελούν μία από τις σημαντικότερες παραμέτρους για τη λειτουργία των αεροπορικών κινητήρων. Μιλώντας για ατμοσφαιρικές συνθήκες αναφερόμαστε πάντα στις συνθήκες που επικρατούν στο άμεσο περιβάλλον της μηχανής δηλαδή μπροστά από το μέτωπο της. Όταν ένα αεροσκάφος πετά μέσα σε καταιγίδα τότε το άμεσο περιβάλλον της μηχανής είναι το περιβάλλον της καταιγίδας που αναπτύσσει μέσα του μελανά νέφη, θυελλώδη αέρα, βροχή και χαλάζι. Όλα αυτά τα στοιχεία επηρεάζουν το θερμοδυναμικό κύκλο της μηχανής άρα και το σημείο λειτουργίας. Για τον προσδιορισμό των επιδόσεων παράμετροι όπως η θερμοκρασία, η υγρασία, ο πάγος ή η ενδεχόμενη συμπύκνωση στον αγωγό εισόδου θα πρέπει να είναι πλήρως υπολογίσιμες μεταβλητές.

Η παρούσα εργασία ασχολείται με την παράμετρο των ατμοσφαιρικών συνθηκών που ονομάζεται χαλάζι αλλά επεκτείνεται και σε άλλα στοιχεία πάγου με στέρα δομή. Γίνεται αρχικά η ανάλυση του φαινομένου της χαλαζο - εισρόφησης και έπειτα μία προσπάθεια για τον προσδιορισμό των μεταβολών

που προκαλεί στα θερμοδυναμικά μεγέθη της ροής. Σκοπός είναι η περιγραφή του κινδύνου από το φαινόμενο, ο προσδιορισμός της συγκέντρωσης στο περιβάλλον και τη μηχανή και η θερμοδυναμική μελέτη λειτουργίας κατά την εισρόφηση πάγου.

## 1.2 Δομή της μελέτης

Η μελέτη της χαλαζοεισρόφησης στην παρούσα έρευνα γίνεται με το σωματίδιο του χαλαζιού στο επίκεντρο της ανάλυσης. Προκειμένου να γίνει η φυσική μοντελοποίηση του προβλήματος απομονώνεται σε κάθε επιμέρους κεφάλαιο ένα μεμονωμένο σωματίδιο χαλαζιού και μελετάται η επίδραση που έχει το περιβάλλον της μηχανής επάνω του. Με τον τρόπο αυτό, αν είναι γνωστή δηλαδή η μεταβολή των χαρακτηριστικών (*κινηματικών και θερμοδυναμικών*) για κάθε σωματίδιο, τότε εύκολα μπορεί να μελετηθεί και το αντίστροφο πρόβλημα. Το αντίστροφο πρόβλημα είναι η επίδραση ενός νέφους σωματιδίων στα αεροθερμοδυναμικά χαρακτηριστικά της ροής άρα και στο θερμοδυναμικό κύκλο λειτουργίας της μηχανής. Τα στοιχεία που διαπραγματεύεται κάθε κεφάλαιο αναλύονται ακολούθως :

Το **Κεφάλαιο 2** αποτελεί μία εισαγωγή στο φαινόμενο της χαλαζοεισρόφησης και περιγράφει περισσότερο το αίτιο και το αποτέλεσμα του φαινομένου.

Το **Κεφάλαιο 3** έχει ως στόχο την γενική βιβλιογραφική ανασκόπηση της μέχρι τώρα έρευνας πάνω στη μοντελοποίηση της εισρόφησης χαλαζιού.

Το **Κεφάλαιο 4** κάνει μία γενική περιγραφή του ατμοσφαιρικού περιβάλλοντος μιας χαλαζοθύελλας ενώ διερευνώνται σε αυτό οι μηχανικές και οι θερμικές ιδιότητες του πάγου.

Το **Κεφάλαιο 5** είναι αρκετά εκτενές και αυτό γιατί ακολουθεί όλη την πορεία προς την εξαγωγή των χρησιμοποιούμενων στάνταρ πιστοποίησης από την αεροπορική βιομηχανία. Καταλήγει στην παρουσίαση των μέγιστων ποσοτήτων συγκέντρωσης χαλαζιού στην ατμόσφαιρα που αποτελούν τη βάση των επίγειων δοκιμών ελέγχου.

Το **Κεφάλαιο 6** διαπραγματεύεται τη θερμική αλληλεπίδραση ενός μεμονωμένου σωματιδίου πάγου με το ρεύμα αέρα μιας αεροπορικής μηχανής και καταλήγει στη διατύπωση ενός μοντέλου υγροποίησης και ατμοποίησης του χαλαζιού.

Το **Κεφάλαιο 7** μελετά τη μηχανική αλληλεπίδραση του χαλαζιού με τις επιφάνειες εντός της μηχανής αναλύοντας δηλαδή τα φαινόμενα κρούσης και θραύσης. Το κεφάλαιο καταλήγει επίσης στη διατύπωση ενός μοντέλου κρούσης – θραύσης που υπολογίζει τη μεταβολή της ταχύτητας, της θέσης και της διαμέτρου κάθε μεμονωμένου χαλαζιού που συγκρούεται με μία τυχαία επιφάνεια στο εσωτερικό του κινητήρα.

Το **Κεφάλαιο 8** περιγράφει τις δυνάμεις που ενεργούν σε ένα σωματίδιο χαλαζιού που διατρέχει εσωτερικά την αεροπορική μηχανή και καταλήγει στη διατύπωση ενός μοντέλου κινηματικής αλληλεπίδρασης. Το μοντέλο υπολογίζει τη νέα θέση και τις νέες ταχύτητες του σωματιδίου ανάλογα με τα χαρακτηριστικά του ρεύματος αέρα.

Στο **Κεφάλαιο 9** διατυπώνονται τα συμπεράσματα και οι προτάσεις από την παρούσα έρευνα.

Στο **Παράρτημα 1** γίνεται μία λεπτομερής ανάλυση και επεξήγηση του σημαντικότερου ίσως φυσικού φαινομένου που εμφανίζεται κατά τη χαλαζοεισρόφηση, της ατμοποίησης του νερού.

Στο **Παράρτημα 2** δίνονται πληροφορίες για την υπολογιστική επίλυση μέσω των υπολογιστικών συναρτήσεων σε περιβάλλον *MatLab* που επιλύονται για την εξαγωγή των αποτελεσμάτων. Στα σχόλια του κώδικα που αναπτύχθηκε γίνεται πλήρης επεξήγηση της λειτουργίας του κώδικα καθώς επίσης και των μεταβλητών εισόδου και εξόδου.

Η χαλαζοεισρόφηση είναι ένα φαινόμενο αρκετά πολύπλοκο που για να περιγραφεί και να μοντελοποιηθεί χρειάζεται η διατύπωση εξισώσεων από πολλούς τομείς της επιστήμης και πειραματικά αποτελέσματα από ποικίλες έρευνες. Στην παρούσα έρευνα χρησιμοποιούνται κατά κόρων εξισώσεις από τη βιβλιογραφία και ψηφιοποιημένα διαγράμματα πειραματικών αποτελεσμάτων, οι μονάδες μέτρησης των οποίων πολύ συχνά δίνονται διαφορετικές από το Διεθνές Σύστημα Μονάδων (*SI*). Για το λόγο αυτό και για την ευκολότερη σύγκριση των παρατιθέμενων εξισώσεων με τις πηγές της βιβλιογραφίας προτιμήθηκε η χρησιμοποίηση ενός συστήματος γραφής στο οποίο σε κάθε εξίσωση που εμφανίζεται στο κείμενο δίνεται ακολούθως μία σύντομη περιγραφή των μεταβλητών και των μονάδων στις οποίες μετρώνται. Αν οι μεταβλητές έχουν εμφανιστεί αυτούσιες στο κείμενο σε προηγούμενο σημείο τότε ο αναγνώστης παραπέμπεται στο ακριβώς προηγούμενο σημείο όπου εμφανίστηκε η μεταβλητή αυτή για την περιγραφή της.



# 2

## Η Εισρόφηση Χαλαζιού στους Αεροπορικούς Κινητήρες

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται μία εισαγωγή στο φαινόμενο της εισρόφησης στοιχείων χαλαζιού και πάγου στους αεροπορικούς κινητήρες. Γίνεται περιγραφή της ατμοσφαιρικής απειλής και αναλύονται οι εντός και εκτός αεροσκάφους παράγοντες που επιδεινώνουν ή εξομαλύνουν τον κίνδυνο. Στη συνέχεια περιγράφονται οι επιπλοκές από την εισρόφηση πάγου και σχολιάζονται τα μέτρα πιστοποίησης που έχουν θεσμοθετηθεί για την αποφυγή τους.

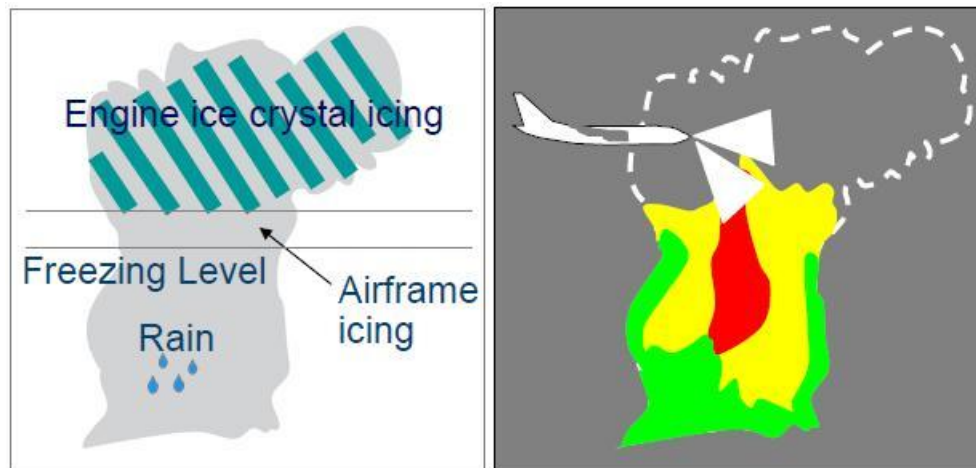
### 2.1 Το Φαινόμενο στην ατμόσφαιρα

Το χαλάζι αποτελεί μία από τις μορφές κατακρημνίσεων πάγου προερχόμενη από τα ανώτερα και τα μεσαία στρώματα της ατμόσφαιρας. Όπως κάθε άλλο μετεωρολογικό φαινόμενο έχει διάφορους τρόπους εξέλιξης και ποικίλα χαρακτηριστικά. Μία μέση χαλαζοθύελλα έχει διάρκεια από 5 έως 10 λεπτά. Κατά τη διάρκεια της 300 εκατομμύρια χαλαζόκοκκοι (50,000 τόνοι πάγου) διάφορων μεγεθών δημιουργούνται σε μία περιοχή 100 τετραγωνικών χιλιομέτρων. Αυτή η περιοχή που εκτείνεται βαθιά σε ύψος και σε πλάτος μπορεί να αποτελέσει σοβαρή απειλή για τα αεροσκάφη.

Μία χαλαζοθύελλα δεν είναι εμφανής στο Ραντάρ του αεροσκάφους μέχρις ότου μία σημαντική ποσότητα πάγου από την επιφάνεια του χαλαζιού να λιώσει<sup>1</sup>. Αυτό φαίνεται σχηματικά και στην **Εικόνα 2.1** όπου η περιοχή του νέφους με την μεγαλύτερη μάζα πάγου (στα ανώτερα στρώματα δηλαδή) εμφανίζεται δίχως ενδείξεις αποφυγής στην απεικόνιση της στο ραντάρ. Το γεγονός αυτό σημαίνει ότι ο πιλότος αντιλαμβάνεται την παρουσία του χαλαζιού πολύ αργά και από τον ήχο κρούσης του με το αλεξήνεμο, το σώμα του αεροσκάφους και το περίβλημα των μηχανών. Αν η χαλαζοθύελλα είναι ισχυρή τότε σημαντική ποσότητα πάγου θα βρεθεί μέσα στον πυρήνα της μηχανής προκαλώντας ασταθή λειτουργία ή και σβήσιμο.

---

<sup>1</sup> Η βροχή στις μετρήσεις των Ραντάρ έχει μεγαλύτερη ανάκλαση σήματος (μικρότερη διηλεκτρική σταθερά) από το χαλάζι. Τα μικρά μετεωρολογικά Ραντάρ που φέρουν στο εμπρόσθιο τμήμα τους τα αεροσκάφη δεν έχουν την απαιτούμενη ανάλυση ώστε να διακρίνουν τα χαμηλής ισχύος σήματα ανάκλασης του χαλαζιού. Έτσι αν και μεγαλύτερη απειλή για τα αεροσκάφη από τη βροχή, το χαλάζι στο φορητό Ραντάρ της πτήσης φαίνεται σαν μία «καθαρή» περιοχή.



Εικόνα 2.1 Καταιγιδοφόρο Νέφος και η εμφάνιση του στο Ραντάρ του Αεροσκάφους (Πηγή : J. Mason “Current Perspectives on Jet Engine Power Loss in Ice Crystal Conditions” 2008)

## 2.2 Η συνειδητοποίηση του Προβλήματος

Το 1988 η *Aerospace Industries Association (AIA)* σε συνεργασία με την *Association European Constructors de Material Aerospaciale (AECMA)* ξεκίνησαν μία έρευνα σχετικά με την απώλεια ισχύος σε κινητήρες αεροσκαφών που αντιμετώπιζαν δυσμενείς καιρικές συνθήκες. Πολλά αεροσκάφη έφταναν μέχρι και το σημείο κράτησης των κινητήρων λόγω αυξημένων συγκεντρώσεων βροχής και χαλαζιού στην ατμόσφαιρα. Η μελέτη ανέδειξε παράγοντες σχετικούς με το περιβάλλον αλλά και τη διαμόρφωση πτήσης που οδηγούσαν τους κινητήρες σε δυσλειτουργία. Κατέληξε μεταξύ άλλων στην αναγνώριση του γεγονότος ότι τα μέχρι τότε ισχύοντα στάνταρ πιστοποίησης ήταν ανεπαρκή και όφειλαν να αναθεωρηθούν. Η παράγραφος 33 (*FAR Part 33*) του Αμερικανικού Οργανισμού Πιστοποίησης περιλαμβάνει τρία στελέχη πιστοποίησης που αναφέρονται στην παγοποίηση από υπέρψυκτο νερό, την εισρόφηση βροχής και την εισρόφηση χαλαζιού.

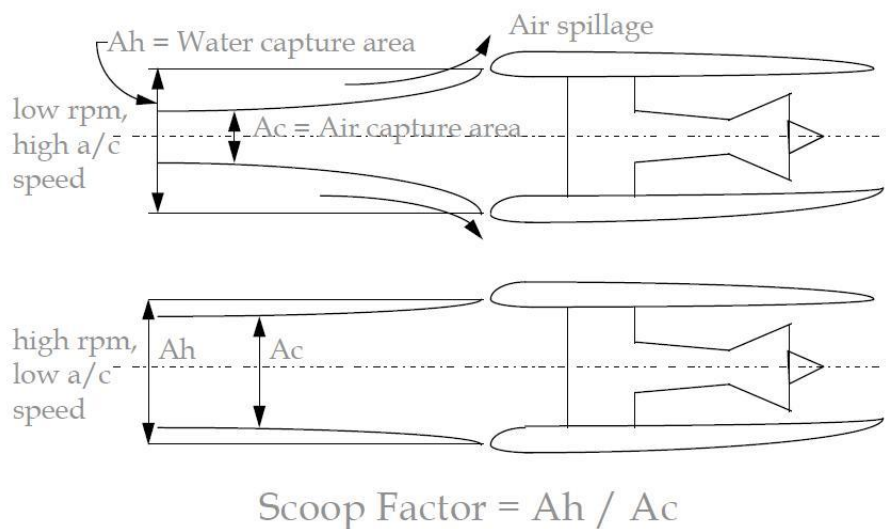
Το έτος 2000 η *Federal Aviation Administration (FAA)*, δηλαδή ο Αμερικανικός οργανισμός αεροπορικής πιστοποίησης, εξέδωσε μία συμβουλευτική εγκύκλιο, το *FAA Advisory Circular 33.78-1*. Σύμφωνα με την εγκύκλιο αυτή ενημερώνει τις κατασκευάστριες εταιρείες αεροπορικών κινητήρων για τους κινδύνους που σχετίζονται με τις συγκεντρώσεις βροχής και χαλαζιού στην ατμόσφαιρα και τις καθοδηγεί συμβουλευτικά ως προς τον τρόπο ελέγχου και πιστοποίησης των μηχανών.

## 2.3 Ο Κίνδυνος για τη Μηχανή

Από αεροπορικά συμβάντα και μακροχρόνιες έρευνες διαπιστώθηκε ότι οι συγκεντρώσεις βροχής και χαλαζιού στην ατμόσφαιρα μπορεί, υπό κάποιες

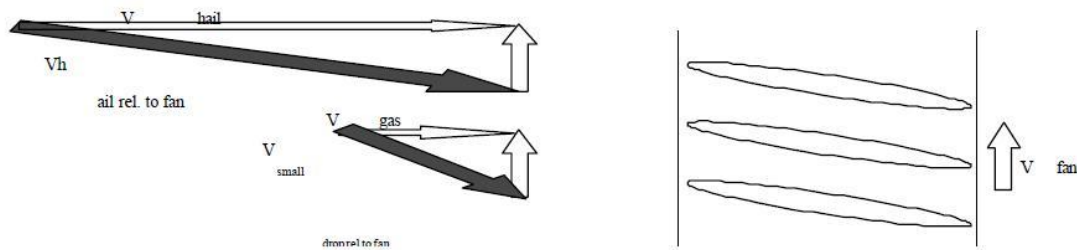
συνθήκες λειτουργίας, να αυξηθούν σημαντικά στον πυρήνα της μηχανής (π.χ. κάθοδος με χαμηλές στροφές κινητήρα). Αυτό αναμενόμενα θα προκαλέσει δυσλειτουργία και ανεπιθύμητα φαινόμενα που θα θέσουν τη μηχανή σε αστάθεια.

Σε υψηλές ταχύτητες πτήσης και χαμηλές στροφές κινητήρα (όπως σε μία κάθοδο για παράδειγμα), το χαλάζι δεν επηρεάζεται από το πεδίο ροής του αέρα (μέσα και έξω από τη μηχανή γενικά) αλλά έχοντας μεγάλη αδράνεια ακολουθεί ευθεία πορεία.



Σχήμα 2.2 Scoop Effect (Πηγή : FAA Advisory Circular AC 33.78-1)

Λόγω της χαμηλής ταχύτητας περιστροφής του κινητήρα και της υψηλής ταχύτητας πτήσης του αεροσκάφους η ροή του αέρα επιβραδύνεται στον αγωγό εισόδου (Σχήμα 2.2). Οι σταγόνες βροχής (μικρότερης μάζας από το χαλάζι) επιβραδύνονται και αυτές ενώ σε ένα ποσοστό διαλύονται σε μικρότερες σταγόνες που φυγοκεντρίζονται ευκολότερα από τον ανεμιστήρα (Fan). Για τις ίδιες στροφές κινητήρα και μεταβάλλοντας την ταχύτητα πτήσης του αεροσκάφους υπάρχει ένα εύρος ταχυτήτων μέσα στις οποίες το διάλυμα της σχετικής ταχύτητας του χαλαζιού (Σχήμα 2.3) είναι σχεδόν ευθυγραμμισμένο με το διάκενο των πτερυγίων πράγμα που αυξάνει την πιθανότητα διέλευσης του χαλαζιού χωρίς να συγκρουστεί με τα πτερύγια του Fan. Έτσι σε αυτήν την κατάσταση (που συνήθως συμβαίνει στη πτήση κατά την κάθοδο) το χαλάζι μικρής διαμέτρου διαπερνά τη πτερυγώση δίχως να συγκρουστεί μαζί της.



Σχήμα 2.3: Διανύσματα ταχυτήτων αέρα και χαλαζιού κατά την είσοδο τους στη μηχανή (Πηγή : FAA Advisory Circular AC 33.78-1)

Μερικές από τις συνήθεις βλάβες που έχει παρατηρηθεί ότι προκαλούνται από την χαλαζο εισρόφηση είναι οι επόμενες (αναφορές [2] [3] [1]) :

**Compressor Stall & Surge :** Πρόκειται για το φαινόμενο κατά το οποίο η ροή σε μία ή περισσότερες βαθμίδες του συμπιεστή αποκολλάται στην αρχή περιστροφικά<sup>1</sup> (*Rotational Stall*) ή και ολικά στη συνέχεια (*Surge*). Η παρουσία χαλαζιού στη μηχανή αυξάνει την πυκνότητα του αέρα, μειώνει την παροχή, αλλάζει την γωνία εισόδου της ροής στα πτερύγια και προκαλεί το φαινόμενο της αποκόλλησης. Στην αποκόλληση συνεισφέρει και η πιθανή επιφανειακή παγοποίηση στα σταθερά πτερύγια της μηχανής όπου το δημιουργηθέν στρώμα πάγου αλλοιώνει τη γεωμετρία και διαταράσσει τη ροή. Σε αυτό προστίθεται και το γεγονός ότι η εισρόφηση χαλαζιού προκαλεί μείωση των στροφών του κινητήρα απορροφώντας μηχανική και θερμική ενέργεια. Όλοι οι προηγούμενοι μηχανισμοί οδηγούν το συμπιεστή σε αστάθεια με την πίεση εξόδου να μειώνεται απότομα. Στην περίπτωση ολικής αποκόλλησης (*Surge*), η ροή αντιστρέφεται και τα καυσαέρια επιστρέφουν από το θάλαμο καύσης στον συμπιεστή. Η κατάσταση γίνεται άκρως επικίνδυνη αφού είναι ζήτημα χρόνου να καταστραφεί η μηχανή συνολικά.

**Flame out :** Το σβήσιμο της μηχανής προκαλείται όταν μεγάλη ποσότητα πάγου, από την συνολική που εισέρχεται στη μηχανή, φτάνει μέχρι και το θάλαμο καύσης. Ο θάλαμος καύσης αδυνατεί να διαχειριστεί τον πάγο και σβήνει.

**Roll back :** Πρόκειται για την υποβίβαση ισχύος που προκαλείται από την εισρόφηση του χαλαζιού. Το χαλάζι όταν αναρροφάται σε μεγάλες ποσότητες υποβιβάζει την απόδοση της μηχανής. Αυτό γιατί ένα μέρος της ισχύος καταναλώνεται από το χαλάζι που αποκτά περιστροφική ταχύτητα ενώ λόγω της χαμηλής του θερμοκρασίας απορροφά επίσης πολύτιμη θερμική ενέργεια από το θερμοδυναμικό κύκλο.

<sup>1</sup> Η περιστροφική αποκόλληση αναλύεται λεπτομερώς στα βιβλία στροβιλομηχανών και είναι το φαινόμενο κατά το οποίο η ροή αποκολλάται από ένα πτερύγιο και επανακολλάται στο ακριβώς επόμενο που ακολουθεί. Έτσι δημιουργούνται μία ή περισσότερες κυψελίδες αποκόλλησης που περιστρέφονται με φορά ίδια με τα κινητά πτερύγια αλλά με γωνιακή ταχύτητα περίπου μισή από αυτά. Ο συμπιεστής συνεχίζει να παράγει πίεση σαφώς όμως μικρότερη από αυτήν της κανονικής λειτουργίας. Αν οι κυψελίδες μεγαλώσουν και ενωθούν τότε προκαλούν ολική αποκόλληση της ροής και το φαινόμενο οδηγεί το συμπιεστή σε ολική απώλεια πίεσης και πάλμωση (*Surge*).



**Sensors malfunctions :** Το σύστημα ελέγχου και παρακολούθησης της μηχανής περιλαμβάνει πολλούς αισθητήρες, πολλοί εκ των οποίων βρίσκονται και στο εσωτερικό της μηχανής σε άμεση επαφή με το εργαζόμενο μέσο. Αυτό σημαίνει ότι το νερό και ο πάγος που περιέχονται στον αέρα είναι πολύ πιθανό να επικαθήσουν στα αισθητήρια και να προκαλέσουν παρεμβολές στη μέτρηση. Η λανθασμένη πληροφορία εν συνεχεία θα αξιολογηθεί λάθος από το αυτόματο σύστημα ελέγχου (FADEC) το οποίο προσπαθώντας να ισορροπήσει τη μηχανή πιθανόν και να τη θέσει εκτός ομαλών σημείων λειτουργίας.

**Case Contraction :** Καθώς η βροχή και το χαλάζι εισέρχονται στον κινητήρα η θερμοκρασία του κελύφους του συμπιεστή δύναται να μειωθεί με ταχύτερο ρυθμό από τη θερμοκρασία των πτερυγώσεων. Μία τέτοια κατάσταση θα οδηγήσει (ανάλογα και με την θερμική συμπεριφορά των μετάλλων) σε μείωση του ακτινικού διακένου. Σαν συνέπεια αυτού έρχεται η μεταβολή των αεροδυναμικών χαρακτηριστικών των πτερυγίων και στην οριακή περίπτωση που το διάκενο εξαφανίζεται, φθορά των πτερυγίων.

**Bleed Blockage :** Οι κόκκοι χαλαζιού όπως και τα κομμάτια πάγου που εισέρχονται στη μηχανή ακολουθούν μία αρκετά απρόβλεπτη τροχιά όταν συγκρούονται με τα στελέχη της μηχανής. Λόγω του μεγαλύτερου βάρους από τον αέρα δεν επηρεάζονται και δεν ακολουθούν το πεδίο ροής. Συγκρούονται συνεχώς με τα πτερύγια και ανακλώμενα δύναται να προσκολληθούν στις οπές απομάστευσης ελαττώνοντας την παροχή τους.

**Blades Damage :** Τα πτερύγια του συμπιεστή καταπονούνται και παθαίνουν ζημιά όταν μεγάλα κομμάτια πάγου συγκρούονται πάνω τους με ταχύτητα. Η ζημιά δεν είναι πάντα άμεσα ορατή όμως τα έστω και ελάχιστα παραμορφωμένα πτερύγια προκαλούν δονήσεις που μπορεί να ενισχυθούν στο μέλλον.

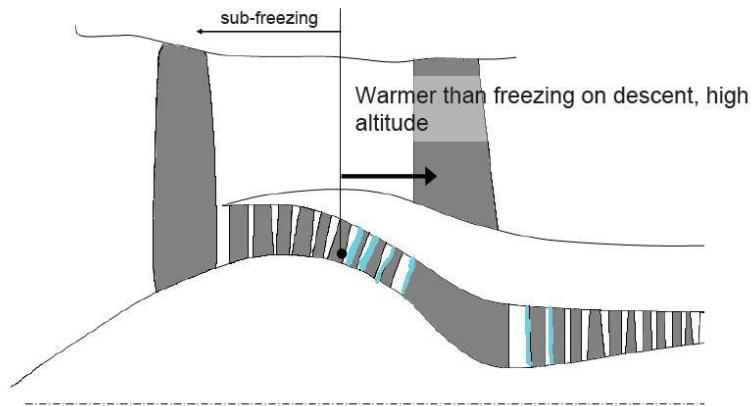
Μία άλλη εξαιρετικά ενδιαφέρουσα βλάβη από το χαλάζι έχει αρχίσει να παρατηρείται τα τελευταία χρόνια. **Πρόκειται για την εσωτερική παγοποίηση (Internal Icing) της μηχανής και συγκεκριμένα στις τελευταίες βαθμίδες του συμπιεστή χαμηλής πίεσης όπου μέχρι τώρα θεωρείτο αδύνατο να συμβεί.** Η βλάβη αυτή απασχολεί την αεροπορική βιομηχανία τα τελευταία 3 χρόνια.

**Internal Icing :** Αν και το χαλάζι έχει αποδειχθεί ότι δεν μπορεί να προκαλέσει απευθείας εσωτερική παγοποίηση στα σταθερά πτερύγια του συμπιεστή, η παρουσία του σε υψηλή συγκέντρωση μπορεί να προκαλέσει έμμεση παγοποίηση. Αυτό μπορεί να συμβεί και σε σημεία που μέχρι τώρα θεωρείτο αδύνατο να παγοποιηθούν<sup>1</sup>. Ο μηχανισμός δημιουργίας αυτού του νέου είδους παγοποίησης ξεφεύγει από τα γνωστά όρια της άμεσης παγοποίησης με υπέρψυκτες σταγόνες νερού και δεν είναι ακόμα πλήρως κατανοητός. Δεν ήταν ακόμα εύκολα παρατηρήσιμος εφόσον συμβαίνει σε περιβάλλον μικτής<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Στις τελευταίες βαθμίδες του συμπιεστή χαμηλής πίεσης για παράδειγμα εσκεμμένα δεν τοποθετείται αντιπαγωτικό σύστημα γιατί θεωρείται αδύνατη η παγοποίηση

<sup>2</sup> Περιβάλλον μικτής παγοποίησης είναι το περιβάλλον που περιέχει υπέρψυκτες σταγόνες νερού αλλά και κρυστάλλους πάγου

παγοποίησης και μάλιστα με θερμό αέρα, ένα περιβάλλον που συναντάται στα εσωτερικά μέρη της αεροπορικής μηχανής.



**Σχήμα 2.4: Πιθανά σημεία εσωτερικής παγοποίησης (Πηγή : J. Mason “Current Perspectives on Jet Engine Power Loss in Ice Crystal Conditions” 2008)**

Αν και το περιβάλλον της ατμόσφαιρας μπορεί να μην είναι ευνοϊκό ως προς την παγοποίηση μέσω υπέρψυκτων σταγόνων νερού (π.χ. με θερμοκρασίες μικρότερες των  $-40^{\circ}\text{C}$  όπου υπάρχει μόνο πάγος), στο εσωτερικό της μηχανής δύναται να δημιουργηθεί παγοποίηση με ένα έμμεσο μηχανισμό. Καθώς κρύσταλλοι πάγου διατρέχουν εσωτερικά τη μηχανή αναπόφευκτα υγροποιούνται λόγω της υψηλής θερμοκρασίας του αέρα. Ταυτόχρονα όμως συγκρούονται συνεχώς με τις επιφάνειες της μηχανής και οι συγκρούσεις οδηγούν στο σχηματισμό ενός επιφανειακού υγρού φιλμ που επιβραδύνει και εγκλωβίζει μέσα του όλο και περισσότερα σωματίδια. Η επιβράδυνση διευκολύνει τη μεταφορά θερμότητας που σε συνδυασμό με τους αυξημένους ρυθμούς εξάτμισης ψύχει οριακά την επιφάνεια μέχρι και το σημείο παγοποίησης όπου ορατός πάγος πλέον αρχίζει να σχηματίζεται [4]. Το μοναδικό ίχνος αυτής της διαδικασίας είναι η σταθερή ένδειξη στο όργανο μέτρησης της ολικής θερμοκρασίας (TAT) που παραμένει σταθερή στους  $0^{\circ}\text{C}$  από την υγροποιημένη ποσότητα πάγου. Το μηχανισμό αυτό στηρίζει και μία πιο παλιά έρευνα<sup>1</sup> σύμφωνα με την οποία κόκκοι χαλαζιού ( $d \leq 5\text{mm}$ ) που προκύπτουν από τη θραύση μεγαλύτερων χαλαζιών είτε από ένα περιβάλλον μικτής παγοποίησης μπορούν να δράσουν ως αποταμιευτές θερμότητας και με συνεχείς κρούσεις να ψύξουν σε οριακά σημεία τις μεταλλικές επιφάνειες. Αν οι επιφάνειες ακόλουθα έρθουν σε επαφή με υγρό νερό ή πολύ υγρό αέρα εύκολα θα δημιουργηθούν πάνω τους πυρήνες πάγου. Προκύπτει έτσι μείωση της παροχής άρα και πιθανή αποκόλληση της ροής ή και διασκορπισμός πάγου στον θάλαμο καύσης με αποτέλεσμα το σβήσιμο της φλόγας του θαλάμου καύσης. Στην **Εικόνα 2.5** φαίνεται ενδεικτικά σε μία πειραματική διάταξη η δημιουργία πάγου στο κανάλι μεταξύ του συμπιεστή χαμηλής πίεσης και του συμπιεστή

<sup>1</sup> Cloud Microphysical Measurements in Thunderstorm Outflow Regions (Allied/BAe 1997 Flight Trials)

υψηλής πίεσης σε ένα περιβάλλον αέρα μικτής παγοποίησης με ολική θερμοκρασία  $15^{\circ}\text{C}$  και δυναμική πίεση  $0.5\text{psi}$ .

Οι τιμές αυτές με βάση το γεγονός ότι η ολική πίεση δόθηκε στα  $13\text{psi}$  περίπου αντιστοιχούν σε στατικά μεγέθη θερμοκρασίας  $12^{\circ}\text{C}$  και πίεσης  $0.86\text{bar}$ .



Εικόνα 2.5: Εσωτερική Παγοποίηση με κρυστάλλους πάγου σε κανάλι που προσομοιώνει το πέρασμα από το συμπιεστή χαμηλής πίεσης στο συμπιεστή υψηλής πίεσης (Πηγή : J. Mason “ Understanding Ice Crystal Accretion and Shedding Phenomenon in Jet Engines Using a Rig Test ” 2011)

## 2.4 Τα Μέτρα Πιστοποίησης

Σύμφωνα με την οδηγία του Αμερικανικού Οργανισμού Πιστοποίησης (**Advisory Circular FAA – 2000**) μία εταιρεία πρέπει να ακολουθήσει δύο βασικά βήματα για την πιστοποίηση της μηχανής της. Πρέπει πρώτα να προσκομίσει μία τεχνική ανάλυση λειτουργίας της μηχανής σε κρίσιμα σημεία (**Critical Point Analysis**) στο αντίστοιχο γραφείο ελέγχου και έπειτα να προβεί στα ανάλογα προσομοιωτικά τεστ ώστε να βεβαιωθεί και πρακτικά η αντοχή της μηχανής στα φαινόμενα βροχής και χαλαζιού.

Σκοπός του **Critical Point Analysis** είναι να αναγνωριστούν σημεία μέσα στο φάκελο λειτουργίας στα οποία τα όρια των χαρακτηριστικών επηρεάζονται σημαντικά και περιορίζονται λόγω βροχής και χαλαζιού. Η ανάλυση πρέπει να περικλείει όλη τη γκάμα των εμπλεκόμενων μεταβλητών (π.χ. ατμοσφαιρικές μεταβλητές, συγκεντρωτικοί και αποσυγκεντρωτικοί παράγοντες, ισχύς λειτουργίας, απομαστεύσεις κ.τ.λ.). Το «CPA» είναι μία αποτίμηση της ικανότητας της μηχανής να αντέχει στις αυξημένες συγκεντρώσεις βροχής και χαλαζιού. Προσδιορίζει τα επίφοβα σημεία λειτουργίας και βεβαιώνει ότι η μηχανή δουλεύει μακριά από τα φαινόμενα αστάθειας.

## 2.5 Το πρόβλημα σήμερα

Τα σημερινά στάνταρ πιστοποίησης για τη βροχή παραμένουν σε ισχύ εδώ και 15 χρόνια ενώ τα στάνταρ παγοποίησης παραμένουν अपαράλλαχτα εδώ και 30 χρόνια. Οι μηχανές έχουν αναπτυχθεί τεχνολογικά σε τέτοιο βαθμό ώστε να μπορούν να ανταπεξέλθουν σε όρια πολύ μεγαλύτερα από τις δυσμενέστερες περιπτώσεις που η πιστοποίηση απαιτεί. Το γεγονός αυτό δίνει τη δυνατότητα στους πιλότους να πλησιάζουν ή και να εισέρχονται με περισσότερη αυτοπεποίθηση στις καταιγίδες με ότι μπορεί να συνεπάγεται αυτό. Όπως συζητήθηκε και πιο πριν επίσης υπάρχει αναγνωρισμένος σήμερα ένας νέος κίνδυνος που σχετίζεται με τους παγοκρυστάλλους και έχει προκαλέσει μέχρι τώρα αρκετά συμβάντα ολικής απώλειας ισχύος σε εμπορικές πτήσεις. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να θεσμοθετηθεί και ένα τέταρτο στέλεχος στην παράγραφο πιστοποίησης 33 που θα εξετάζει και τον κίνδυνο αυτό.

Τα πειραματικά δεδομένα που είναι διαθέσιμα σήμερα για τον χαρακτηρισμό ενός ατμοσφαιρικού περιβάλλοντος μικτής παγοποίησης είναι ανεπαρκή. Για την βαθύτερη γνώση του κινδύνου είναι αναγκαία η διεξαγωγή ενός πτητικού προγράμματος που θα παράσχει ακριβείς πληροφορίες για τα επίπεδα νερού και πάγου στην ατμόσφαιρα καθώς και την πιθανότητα εμφάνισης τους. Φυσικά υπάρχουν πολλές τεχνικές δυσκολίες για την κατασκευή ενός πτητικού μετρητικού συστήματος που θα παρέχει τις ακριβείς πληροφορίες που απαιτούνται. Μέχρι τώρα χρησιμοποιούνται Μοντέλα Επίλυσης Νεφών και Ατμοσφαιρικών Φαινομένων ή μετρήσεις Ραντάρ για τον υπολογισμό της έντασης των καταιγίδων.

Όταν ο ατμοσφαιρικός κίνδυνος έχει μοντελοποιηθεί και είναι γνωστός τότε η επόμενη πρόκληση αφορά την αεροπορική βιομηχανία. Εφόσον οι πειραματικές δοκιμές των μηχανών είναι ακριβές ως προς το κόστος, δύσκολες και όχι πάντα επιτυχής γίνεται εύκολα κατανοητή η σημασία της ανάπτυξης μοντέλων που θα αναπαράγουν και θα αναλύουν τη λειτουργία της μηχανής σε δυσμενείς καιρικές συνθήκες. Η παραγωγή πρέπει να αναπτύξει μεθόδους ελέγχου και προσομοίωσης της λειτουργίας των μηχανών. Η προσομοίωση και ο έλεγχος θα έχουν ανάλογη ανάδραση στον σχεδιασμό και όλος ο κύκλος θα έχει αποτέλεσμα καλύτερες μηχανές που θα αντέχουν Μηχανικά αλλά και Θερμοδυναμικά στις υψηλές συγκεντρώσεις Βροχής και Χαλαζιού στην Ατμόσφαιρα.

Από τα παραπάνω φαίνεται πως είναι εξαιρετικής σημασίας η ύπαρξη ενός **Προσομοιωτικού Μοντέλου Λειτουργίας της Μηχανής σε Συνθήκες Αυξημένων Συγκεντρώσεων Βροχής και Χαλαζιού.** Ένα τέτοιο υπολογιστικό μοντέλο θα επιτρέπει στις κατασκευάστριες εταιρείες να έχουν μεγαλύτερη εποπτεία της μηχανής και τον ευκολότερο εντοπισμό των κρίσιμων σημείων λειτουργίας.

# 3 Μοντελοποίηση στη Βιβλιογραφία και Επίγεια Μέσα Δοκιμών

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται μία περιγραφική παρουσίαση των υπαρχόντων μοντέλων προσομοίωσης στην βιβλιογραφία και των επίγειων εγκαταστάσεων ελέγχου και πιστοποίησης.

## 3.1 Υπάρχοντα Μοντέλα Προσομοίωσης για την Εισρόφηση Χαλαζιού

### 3.1.1 Purdue University - NASA 1994

Το πανεπιστήμιο Purdue των Η.Π.Α. ανέπτυξε το 1994 τον κώδικα HINCOF I που σήμερα είναι ανοιχτός και διαθέσιμος στην επιστημονική κοινότητα. Αποτελεί την πρώτη προσπάθεια μοντελοποίησης της εισρόφησης χαλαζιού σε κινητήρες Turbofan.

“Ως μέρος μίας πολύπλευρης μελέτης και έρευνας πάνω στην εισρόφηση χαλαζιού και τις επιπλοκές της” όπως λένε οι δημιουργοί του, ο κώδικας έχει να κάνει με την έρευνα του βασικού προβλήματος, δηλαδή τον προσδιορισμό της παροχής χαλαζιού (*ποσότητα και κατανομή*) στο μέτωπο της μηχανής και την πρόβλεψη της ανταπόκρισης της μηχανής. Ο προσδιορισμός της κατανομής του χαλαζιού είναι εξαιρετικής σημασίας για τις μηχανές Turbofan καθώς επηρεάζει σημαντικά το κλάσμα της μάζας του χαλαζιού που εισέρχεται στον πυρήνα της μηχανής σε σχέση με αυτό που διαφεύγει στο παρακάμπτον ρεύμα. Βασική λειτουργία του κώδικα είναι η πρόβλεψη της κίνησης των στοιχείων χαλαζιού στον αγωγό εισόδου της μηχανής αναπτύσσοντας ένα υπολογιστικό πεδίο επίλυσης.

Αναλυτικότερα ο κώδικας χωρίζεται σε δύο μέρη. Το πρώτο μέρος χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του πεδίου του ρεύματος αέρα που θεωρείται ανεπηρέαστο από την παρουσία του χαλαζιού. Το δεύτερο μέρος χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της κίνησης του χαλαζιού. Στο πρώτο μέρος και για την επίλυση του πεδίου ροής χρησιμοποιείται ο κώδικας PARC της NASA. Στο δεύτερο μέρος για τους υπολογισμούς έχει προβλεφθεί η παρασιτική οπισθέλκουσα του χαλαζιού, η πιθανή αμοιβαία κρούση διαφορετικών χαλαζιών και η κρούση με τα τοιχώματα της μηχανής, η μεταφορά θερμότητας και μάζας

από και προς το χαλάζι λόγω συναγωγής και κρούσης καθώς και τα φαινόμενα θραύσης.

Η αριθμητική διαδικασία επίλυσης που ενσωματώνεται στον κώδικα είναι η διαδικασία Monte Carlo. Χρησιμοποιώντας αυτή τη διαδικασία είναι δυνατόν να συμπεριληφθούν κατανομές πιθανοτήτων για το μέγεθος του χαλαζιού, την εμφάνιση του στο χώρο και της ταχύτητας που διατηρεί μέσα στον αγωγό εισόδου. Το κριτήριο σύγκλισης που εφαρμόζεται είναι η μεταβολή της εισρόφησης στο μέτωπο της μηχανής να μη ξεπερνά μία καθορισμένη τιμή σε επιτυχείς επαναλήψεις προσομοίωσης.

Ο κώδικας μπορεί να χρησιμοποιηθεί για ελέγχους παραμετρικής ανάλυσης όπως η μελέτη της επίδρασης της ροής του ρεύματος αέρα, η επίδραση του μεγέθους και της ποσότητας του χαλαζιού και η επιρροή που έχει γενικά κάθε μια από τις μηχανικές ιδιότητες του χαλαζιού.

Τα βασικότερα συμπεράσματα στα οποία καταλήγει η σχετική μελέτη των δημιουργών του κώδικα συγκρίνοντας τα αποτελέσματα διαφορετικών περιπτώσεων εκτέλεσης είναι :

- **Επίδραση της μορφής του Spinner :**

Το ελλειπτικού τύπου Spinner<sup>1</sup> δείχνει να ωθεί μεγαλύτερη μάζα χαλαζιού μακριά από τον πυρήνα της μηχανής σε σχέση με το κωνικό. Έτσι η μορφή του Spinner αναγνωρίζεται ως ένας από τους βασικούς σχεδιαστικούς παράγοντες για την αποτροπή της εισρόφησης χαλαζιού στον πυρήνα της μηχανής.

- **Επίδραση της ταχύτητας του αέρα :**

Η αύξηση της ταχύτητα του ρεύματος αέρα φαίνεται να έχει θετική επίδραση στην εκτόπιση μεγαλύτερης μάζας χαλαζιού προς το ρεύμα παράκαμψης. Αυτό σημαίνει ότι για χαμηλότερες ταχύτητες τα φαινόμενα υποβάθμισης ισχύος της μηχανής θα είναι εντονότερα.

- **Επίδραση της διαμέτρου του αγωγού εισόδου :**

Παρατηρείται ότι όσο μικρότερο είναι το μέγεθος του αγωγού εισόδου τόσο μικρότερη είναι και η συνολική ποσότητα που αναρροφάται στη μηχανή. Μεγαλύτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι στους μικρότερους αγωγούς εισόδου εμφανίζεται και αποδοτικότερη<sup>2</sup> λειτουργία του ελλειπτικού Spinner. Ως πιθανή αιτία εικάζεται το γεγονός ότι σε μικρότερους αγωγούς εισόδου υπάρχει μεγαλύτερη επίδραση της παρουσίας των τοιχωμάτων του αγωγού εισόδου στο πεδίο ροής άρα και στη ροή του αέρα κοντά στην επιφάνεια του Spinner. Προκαλείται έτσι μία ροή πολύ κοντά στις τυπικές ροές σωλήνα με το

<sup>1</sup> Spinner είναι η κωνική κατασκευή που καλύπτει το εμπρόσθιο τμήμα του ανεμιστήρα.

<sup>2</sup> Αποδοτικότερη λειτουργία νοείται ως προς την εκτροπή του χαλαζιού προς το ρεύμα παράκαμψης.

χαλάζι να επηρεάζεται περισσότερο από τα τοιχώματα του αγωγού εισόδου.

- **Επίδραση της γωνίας του ρεύματος αέρα εισαγωγής :**

Όταν ο αέρας εισέρχεται στην μηχανή όχι παράλληλα με τον εγκάρσιο άξονα της αλλά υπό γωνία τότε προκαλείται μία ανομοιομορφία στην κατανομή του αναρροφώμενου χαλαζιού στο μέτωπο της μηχανής. Παρατηρείται γενικά ότι με γωνία διάφορη του μηδενός σε κάθε περίπτωση η συνολική ποσότητα εισρόφησης είναι μικρότερη από την απολύτως οριζόντια περίπτωση.

- **Επίδραση του μεγέθους του χαλαζιού :**

Παρατηρείται από τα αποτελέσματα του υπολογιστικού κώδικα ότι η αύξηση στο αρχικό μέγεθος του χαλαζιού οδηγεί σε μικρότερες ποσότητες εισρόφησης στο ρεύμα του πυρήνα. Αυτό εξηγείται από την μικρότερη αδράνεια των μικρών σωματιδίων που τείνουν να ακολουθήσουν ευκολότερα το ρεύμα αέρα άρα και να κατευθυνθούν προς τον πυρήνα της μηχανής. Αξίζει να σημειωθεί ότι όταν το μέγεθος του χαλαζιού είναι μικρό τότε το ελλειπτικό Spinner πάυει να είναι πιο αποδοτικό από το κωνικό ως προς την εκτροπή του χαλαζιού προς το ρεύμα παράκαμψης.

### **3.1.2 Loughborough University - Rolls Royce 1996**

Πρόκειται για την μελέτη που ξεκίνησε το 1993 από το πανεπιστήμιο Loughborough στο Ηνωμένο Βασίλειο και την εταιρεία κατασκευής κινητήρων Rolls Royce. Η έρευνα επικεντρώθηκε κυρίως στη μελέτη της μηχανικής πλευράς του φαινομένου εστιάζοντας περισσότερο στα φαινόμενα κρούσης και θραύσης.

Αντικειμενικοί σκοποί της έρευνας ήταν οι εξής :

1. Ο σχεδιασμός τεχνικών και μεθοδολογίας για την μελέτη της εισρόφησης χαλαζιού στους αεροπορικούς κινητήρες.
2. Η εις βάθος κατανόηση των μηχανισμών που εμπλέκονται στην θραύση που ακολουθεί την κρούση του χαλαζιού.
3. Ο προσδιορισμός της επίδρασης των φαινομενικά σημαντικότερων παραμέτρων.
4. Η συλλογή πειραματικών δεδομένων που θα επιτρέψουν την ανάπτυξη μαθηματικών μοντέλων για την περιγραφή του μηχανισμού της κρούσης του χαλαζιού.

5. Η ανάπτυξη υπολογιστικού μοντέλου χρησιμοποιώντας επιλύτες ροής και μαθηματικά μοντέλα για την μοντελοποίηση της εισρόφησης χαλαζιού σε κινητήρες Turbofan.
6. Ο σχεδιασμός και η υλοποίηση επίγειων πειραματικών εγκαταστάσεων που θα προσομοιώνουν τις συνθήκες χαλαζόπτωσης για τον επίγειο έλεγχο των μηχανών.

Τα μέρη της μελέτης από 1 έως 4 υλοποιήθηκαν από το πανεπιστήμιο Loughborough και τα αποτελέσματα δημοσιεύθηκαν στην επιστημονική κοινότητα. Στα μέρη 5 και 6 που υλοποιήθηκαν από την Rolls Royce χρησιμοποιήθηκαν κώδικες επίλυσης της ροής (CFD) και δεδομένα της εταιρείας ενώ οι μέθοδοι επίλυσης και τα αποτελέσματα προφανώς για εμπορικούς λόγους δεν έγιναν ευρέως γνωστά.

Ο απώτερος στόχος της μελέτης στο πανεπιστήμιο Loughborough ήταν η διεξαγωγή ρεαλιστικών πειραμάτων κρούσης χαλαζιού με περιστρεφόμενο Fan. Η φύση της κρούσης είναι αρκετά πολύπλοκη και εξαρτάται από ποικίλους παράγοντες όπως η γεωμετρία του Fan, η περιστροφική ταχύτητα, η γωνία κρούσης κλπ. Για να απομονωθούν οι παράγοντες αυτοί και να υπάρξει μία ξεκάθαρη άποψη για την επίδραση κάθε συντελεστή διεξήχθησαν μία σειρά από πειράματα ίδιας φιλοσοφίας αλλά με διαφορετική προσέγγιση και διάταξη κάθε φορά.

Πιο συγκεκριμένα έγιναν τα εξής πειράματα :

- Κρούση σε σταθερή επίπεδη επιφάνεια ώστε να γίνουν κατανοητά τα βασικά χαρακτηριστικά της κρούσης.
- Κρούση σε σταθερό και περιστρεφόμενο Spinner για τον προσδιορισμό της επίδρασης απλών γεωμετριών επάνω στην απλή επίπεδη κρούση.
- Κρούση σε περιστρεφόμενη επίπεδη πλάκα για τον προσδιορισμό της επιρροής που έχει η περιστροφή.
- Κρούση σε μη περιστρεφόμενη συναρμογή κωνικού Spinner - Fan για την εξαγωγή συμπερασμάτων επάνω στην κρούση σε πιο πολύπλοκες γεωμετρίες.
- Κρούση σε περιστρεφόμενη συναρμογή κωνικού Spinner - Fan για τα τελικά συμπεράσματα.
- Κρούση σε κοίλες επιφάνειες για την εξαγωγή συμπερασμάτων σχετικά με την κρούση σωματιδίων πάγου στο εσωτερικό της μηχανής.

Τα βασικότερα συμπεράσματα στα οποία κατέληξαν οι ερευνητές στο πανεπιστήμιο Loughborough είναι τα εξής :



- **Η κατανομή τύπου Rosin - Rammler** δίνει μία πολύ καλή μαθηματική έκφραση για την περιγραφή του μετά της κρούσης μεγέθους των θραυσμάτων αλλά και την κατανομή της ταχύτητας.
- **Η περιστροφή της επίπεδης πλάκας υπό γωνία** δεν είχε καμία επίδραση στα αποτελέσματα κατανομών της διαμέτρου για κρούση στην πλευρά υποπίεσης (*Suction Side*) ενώ στην πλευρά υπερπίεσης της πλάκας (*Pressure side*) δεν παρατηρήθηκε περαιτέρω σπάσιμο των θραυσμάτων για το διάστημα παραμονής τους πάνω στην επιφάνεια.
- **Στην περίπτωση κρούσης χαλαζιού με το Spinner** τα θραύσματα πάγου εγκατέλειψαν το σημείο κρούσης ως μία βεντάλια αναπτυσσόμενη πάνω και περιμετρικά του Spinner, χωρίς να επηρεάζεται όμως η κατανομή των διαμέτρων. Η ταχύτητα των πρώτων στρωμάτων του νέφους σωματιδίων που ακολουθούν την κρούση έδειξε να είναι μεγαλύτερη στη περίπτωση του περιστρεφόμενου Spinner.
- **Τα αποτελέσματα κρούσης του χαλαζιού με την περιστρεφόμενη συναρμογή κωνικό Spinner - Fan** έδειξαν να είναι προβλέψιμα σύμφωνα με την γνώση και υπέρθεση των μηχανισμών κρούσης στο Spinner και την επίπεδη πλάκα. Οι χαλαζόμπαλες που συγκρούστηκαν με το Spinner έδειξαν να δημιουργούν μία σημαντική διασπορά θραυσμάτων.
- **Οι κρούσεις με κοίλες επιφάνειες** έδειξαν ότι τα θραύσματα εγκαταλείπουν την επιφάνεια με πολύ μικρή γωνία. Η καμπυλότητα της επιφάνειας είχε πολύ μικρή επίδραση στην κατανομή κατά μάζα των θραυσμάτων όμως είχε μία αξιοσημείωτη επίδραση στο μετά της κρούσης μέγεθος τους. Οι κοίλες επιφάνειες έδειξαν να μειώνουν σημαντικά την ταχύτητα των θραυσμάτων.

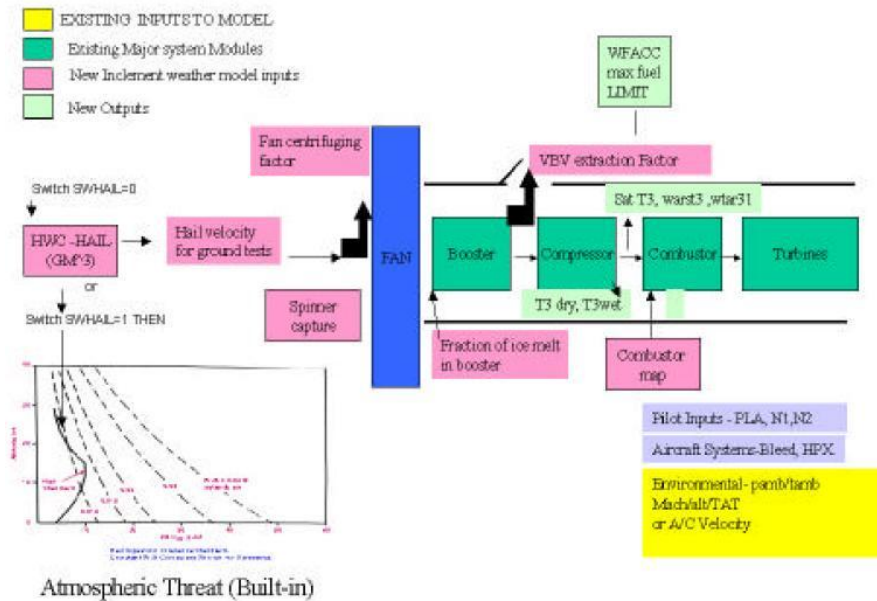
### 3.1.3 General Electric 2005

Το 2005 η κατασκευάστρια εταιρεία αεροπορικών κινητήρων General Electric δημοσίευσε τα αποτελέσματα της έρευνας της γύρω από την εισρόφηση χαλαζιού στους αεροπορικούς κινητήρες.

Η ίδια δημιούργησε ένα υπολογιστικό μοντέλο για να προσομοιώσει τη λειτουργία των μηχανών σε μεταβατική και μόνιμη κατάσταση κατά την εισρόφηση σωματιδίων πάγου και επαλήθευσε το μοντέλο αυτό πάνω σε πειραματικά δεδομένα που εκτέλεσε σε δύο κινητήρες παραγωγής της (*CFM56-3* και *CFM56-7B*). Φυσικά για εμπορικούς πάλι λόγους πέραν των αποτελεσμάτων δεν δημοσιεύθηκε καμία πληροφορία για την δομή του μοντέλου και το μαθηματικό υπόβαθρο που το υποστηρίζει. Ωστόσο το μοντέλο φαίνεται να λαμβάνει υπόψιν εξίσου τη θερμοδυναμική και τη μηχανική επιρροή της

παρουσίας των σωματιδίων πάγου στον πυρήνα της μηχανής. Ακόμα πιο ενδιαφέρουσα φαίνεται η ικανότητα του μοντέλου να εκτιμήσει την επίδραση των θυρίδων απομάστευσης του αέρα στην απομάκρυνση της μάζας χαλαζιού από τον πυρήνα της μηχανής.

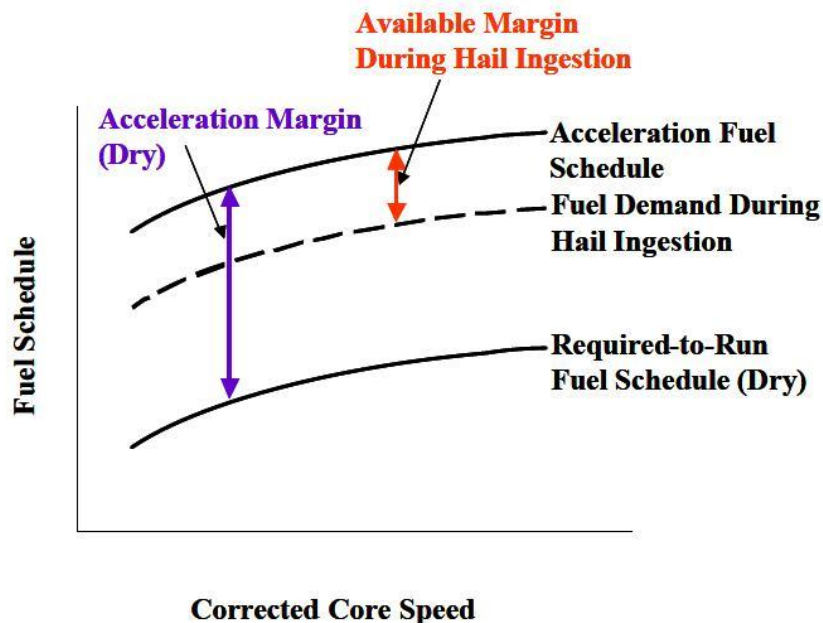
Μία σχηματική και αρκετά γενική περιγραφή του μοντέλου φαίνεται στο **Σχήμα 3.1** :



**Σχήμα 3.1:** Γενικό σχηματικό διάγραμμα της αρχιτεκτονικής του μοντέλου της GE (Πηγή : Venkataramani – “Turbofan Engine Hail Ingestion Simulation In A Cycle Deck Model” 2005)

Οι διάφορες εισοδοί σε καθένα από τα στοιχεία απεικονίζονται στα ανάλογα πλαίσια. Για κάθε προσομοίωση η συγκέντρωση σε χαλάζι του ελεύθερου ρεύματος αέρα δίνεται από τα δεδομένα του πίνακα πιστοποίησης των διεθνών οργανισμών και δίνεται ως δεδομένο εισόδου ανάλογα με το υποθετικό ύψος πτήσης ή τα δεδομένα του επίγειου πειράματος. Συσχετισμοί βασισμένοι σε στοιχεία από μελέτες και πειράματα επάνω στη μηχανή και τις επιμέρους συνιστώσες είναι μαθηματικοποιημένοι στον πυρήνα του κώδικα. Έτσι υπολογίζεται η επίδραση του Spinner, των πτερυγίων του Fan και των θυρίδων απομάστευσης αέρα μέσω παραγόντων επιρροής. Ο κώδικας λαμβάνει ακόμα μέριμνα για την μεταφορά θερμότητας και την αλλαγή φάσης της εισροφόμενης μάζας πάγου στα διάφορα στάδια κατά μήκος της μηχανής. Στον κώδικα τέλος είναι προγραμματισμένη και η αντίδραση του συστήματος αυτόματης διαχείρισης και ελέγχου της μηχανής ώστε η μοντελοποίηση να είναι πλήρης και αυτοτροφοδοτούμενη.

Η αντίδραση της μηχανής στην εισρόφηση χαλαζιού φαίνεται παραστατικά στο **Διάγραμμα 3.2** :



**Διάγραμμα 3.2:** Αντίδραση της μηχανής στην εισρόφηση χαλαζιού (Πηγή : Venkataramani – “Turbofan Engine Hail Ingestion Simulation In A Cycle Deck Model” 2005)

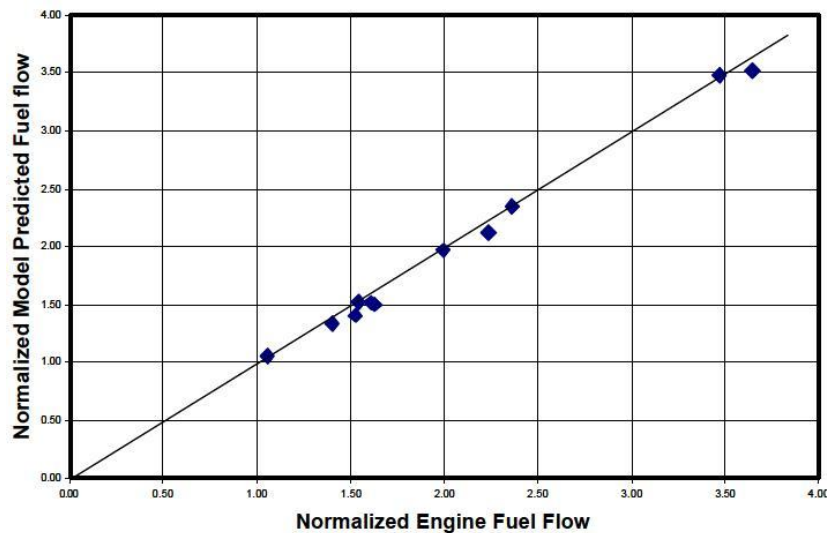
Φαίνεται στο **Διάγραμμα 3.2** ότι καθώς η μηχανή αναρροφά χαλάζι το σύστημα ελέγχου στην προσπάθεια του να εξισορροπήσει την κατάσταση αυξάνει την παροχή καυσίμου για να προσφέρει την επιπλέον ενέργεια ατμοποίησης του χαλαζιού. Υπάρχει βέβαια ένα άνω όριο στην αύξηση του τροφοδοτούμενου καυσίμου καθώς υπερτροφοδότηση σε καύσιμο οδηγεί τη μηχανή σε αποκόλληση εφόσον η μηχανή καλείται να δουλέψει έξω από τα όρια σχεδίασης της. Αν η ποσότητα του τροφοδοτούμενου καυσίμου στο μέγιστο όριο αρκεί τότε η μηχανή συνεχίζει να λειτουργεί ειδαίλλως επέρχεται σβήσιμο.

Όπως ήδη αναφέρθηκε, η αξιοπιστία του μοντέλου ελέγχθηκε πάνω σε δεδομένα πειραμάτων που έκανε η ίδια η εταιρεία στο παρελθόν σε δύο κινητήρες (CFM56-3 & CFM56-7B)<sup>1</sup>. Το μοντέλο, σύμφωνα πάντα με τα αποτελέσματα που δημοσίευσε η εταιρεία, φαίνεται να προσεγγίζει πολύ καλά την αντίδραση της μηχανής.

Παρατίθενται χαρακτηριστικά τα επόμενα διαγράμματα.

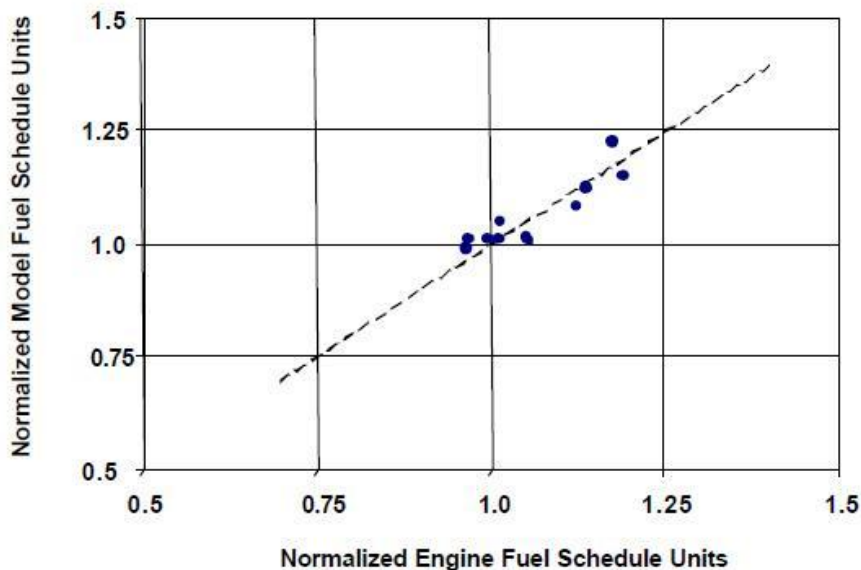
Στο **Διάγραμμα 3.3** φαίνονται τα δεδομένα της ροής καυσίμου στην περίπτωση εισρόφησης χαλαζιού από το πείραμα και η ανάλογη συνεχής γραμμή πρόβλεψης του μοντέλου.

<sup>1</sup> Αξίζει να σημειωθεί εδώ ότι οι συγκεκριμένοι κινητήρες είχαν δώσει στο παρελθόν αρκετά σημάδια ευαισθησίας στην εισρόφηση χαλαζιού στον αέρα.



**Διάγραμμα 3.3:** Σύγκριση ροής καυσίμου Μοντέλου και Πειράματος (Πηγή : Venkataramani - “Turbofan Engine Hail Ingestion Simulation In A Cycle Deck Model” 2005)

Στο **Διάγραμμα 3.4** που είναι αντίστοιχο με το **Διάγραμμα 3.3** γίνεται σύγκριση του προγράμματος διαχείρισης καυσίμου.



**Διάγραμμα 3.4:** Σύγκριση προγράμματος διαχείρισης καυσίμου Μοντέλου και Πειράματος (Πηγή : Venkataramani - “Turbofan Engine Hail Ingestion Simulation In A Cycle Deck Model” 2005)

Επιπρόσθετα έγινε και δοκιμή του μοντέλου για την μεταβατική συμπεριφορά της μηχανής και δοκιμή σε σημεία πολύ μακριά από τα μέγιστα όρια πιστοποίησης. Το μοντέλο αναφέρεται πως και πάλι ανταποκρίθηκε καλά ενώ αξιοσημείωτη ήταν και η ικανότητα του να προβλέψει με επιτυχία την υποβάθμιση της ισχύος και το ακριβές σημείο κράτησης του κινητήρα.

### 3.2 Επίγεια μέσα διενέργειας δοκιμών

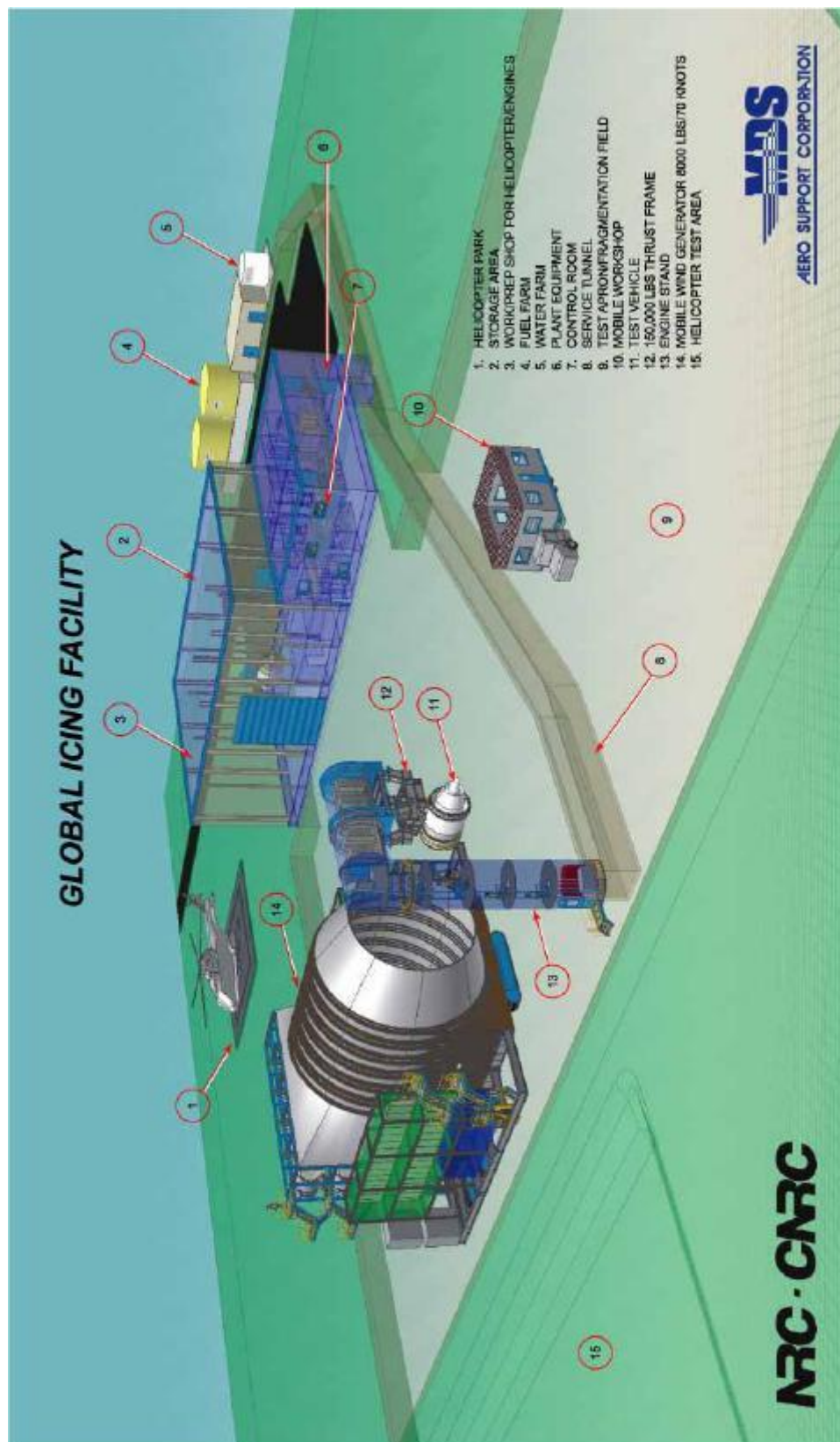
Κάθε κατασκευαστής αεροπορικών κινητήρων οφείλει, πριν την μαζική παραγωγή και πώληση ενός νέου τύπου κινητήρα, να αποδείξει την αξιοπιστία της μηχανής του. Βασικό μέρος της πιστοποίησης είναι και η επίδειξη της ικανότητας της μηχανής να ανταπεξέρχεται σε ένα δυσμενές περιβάλλον βροχής, χαλαζιού και παγοποίησης. Στην πλειοψηφία τους οι κατασκευάστριες εταιρείες διαθέτουν στις εγκαταστάσεις τους δοκιμαστήρια στα οποία ελέγχουν τις μηχανές. Για την πιστοποίηση της ικανότητας λειτουργίας σε ένα βροχερό περιβάλλον ή σε ένα περιβάλλον χαλαζόπτωσης μία εγκατάσταση έγχυσης νερού (ή βολής πάγου) τοποθετείται μπροστά από τη μηχανή. Έτσι προσομοιώνεται η λειτουργία σε κατάσταση εισρόφησης νερού και πάγου.

Το μειονέκτημα των παραπάνω περιγραφόμενων εγκαταστάσεων είναι ότι η μηχανή κατά την διάρκεια του ελέγχου δεν λειτουργεί σε συνθήκες αντίστοιχες της πτήσης και η θερμοκρασία περιβάλλοντος είναι μακράν διαφορετική από την πραγματική στις συνθήκες πτήσης σε καταιγίδα.

Το 2005 ανακοινώθηκε ένα φιλόδοξο σχέδιο, που πραγματοποιήθηκε τελικά σήμερα από την εταιρεία **MDS Aero Test**. Επρόκειτο για την κατασκευή μίας πλήρους και υπερσύγχρονης μονάδας ελέγχου αεροπορικών μηχανών σε δυσμενές ατμοσφαιρικό περιβάλλον. Φυσικά η τοποθεσία θα έπρεπε να είναι όσο το δυνατόν πιο “δυσμενής” ως προς τις συνήθεις καιρικές της συνθήκες. Έτσι Επιλέχθηκε ως τόπος εγκατάστασης η περιοχή Manitoba στην Ottawa του Καναδά.

Αναφέρονται στη συνέχεια διάφορα χαρακτηριστικά στοιχεία από το συγκεκριμένο πεδίο πιστοποίησης ως ενδεικτικά των μεθόδων πιστοποίησης που χρησιμοποιούν οι περισσότερες εταιρείες στην παραγωγή.

Το **Global Aerospace Center for Icing and Environmental Research (GLACIER)** στην περιοχή Thomson της Manitoba είναι μία κοινοπραξία ανάμεσα σε δύο κορυφαίες κατασκευάστριες εταιρείες αεροπορικού υλικού, την Pratt & Whitney και την Rolls-Royce.



Εικόνα 3.5: Επίγειες Εγκαταστάσεις (Πηγή : MDS Aero Support Corporation “MDS Proprietary Information”2005)

Το GLACIER παρέχει στην παγκόσμια βιομηχανία αεροπορικών κινητήρων ένα πεδίο δοκιμών με θυελλώδες, ρεαλιστικό και δριμύ περιβάλλον όπου μπορούν να πραγματοποιηθούν δοκιμές για πολλούς τύπους κινητήρων.

Το κέντρο επίσης στεγάζει εσωτερικές εγκαταστάσεις για την προετοιμασία των μηχανών, τους σταθμούς μέτρησης και τον έλεγχο. Το σύστημα ανάκτησης και διαχείρισης δεδομένων λέγεται ότι μπορεί να επεξεργαστεί 2000 σε αριθμό ξεχωριστές παραμέτρους με κυμαινόμενες συχνότητες για σταθερά και δυναμικά χαρακτηριστικά λειτουργίας.

Παρακάτω δίνονται οι ακραίες τιμές καιρικών συνθηκών που μπορεί να προσομοιώσει το πεδίο δοκιμών :

#### **Βροχή :**

- **Θερμοκρασιακό εύρος  $-2^{\circ}\text{C}$  μέχρι  $-22^{\circ}\text{C}$**
- **Συγκέντρωση νερού στον αέρα (LWC) από  $0.2 \text{ gr} / \text{m}^3$  μέχρι  $4.0 \text{ gr} / \text{m}^3$**
- **Μέση διάμετρος όγκου (MVD)  $13-45 \text{ microns}$  ή  $100-150 \text{ microns}$**
- **Μικτή Φάση βροχής - πάγου  $0.2 - 5.0 \text{ gr} / \text{m}^3$**

#### **Πάγος :**

- **Θερμοκρασιακό εύρος  $-2^{\circ}\text{C}$  μέχρι  $-22^{\circ}\text{C}$**
- **Συγκέντρωση τεχνητού χιονιού ή παγοκρυστάλλων  $0.3 \text{ gr} / \text{m}^3$**
- **800 ψεκαστήρες 400 μεγάλοι και 400 μικροί**
- **Ροή νερού 200 gpm – 1000000 rph**
- **Ομοιογένεια νέφους 5% - LWC  $\pm 0.1 \text{ gr} / \text{m}^3$**

Οι δοκιμές για αεροσκάφη χαμηλής ταχύτητας, όπως τα ελικοφόρα, δύναται να γίνουν και με εναέρια μέσα ψεκάζοντας ένα νέφος νερού ή πάγου με ελικόπτερο μπροστά από τον κινητήρα του αεροσκάφους. Τα μέγιστα όρια συγκεντρώσεων που μπορεί να δημιουργήσει η εναέρια μέθοδος είναι :

#### **Εναέρια Μέθοδος :**

- **Νέφος διαστάσεων 8ft x 36ft**
- **Μέγεθος Παγοκρυστάλλων 20 – 70 microns**
- **Συγκέντρωση LWC 0.25-1.0  $\text{gr} / \text{m}^3$**

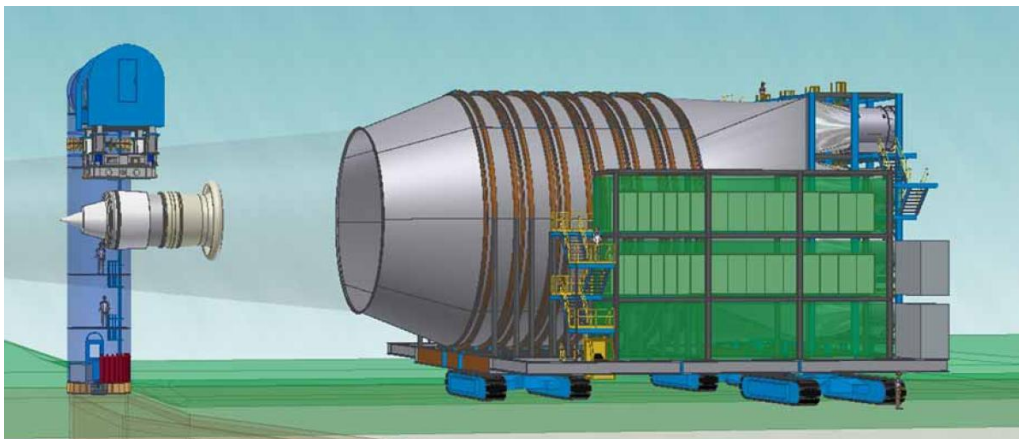


**Εικόνα 3.6: Εναέρια δοκιμή ελικοφόρων κινητήρων (Πηγή : MDS Aero Support Corporation "MDS Proprietary Information"2005)**

Οι εγκαταστάσεις διαθέτουν και την μεγαλύτερη παγκοσμίως γενέτειρα ρεύματος αέρα με τα ακόλουθα χαρακτηριστικά :

#### **Γενέτειρα Ρεύματος Αέρα :**

- Παροχή μάζας αέρα 8000 lbs/s με ταχύτητα 70 knots
- Ακροφύσιο εξόδου διαμέτρου 10 μέτρων
- Διακύμανση αέρα στην έξοδο < 10%



**Εικόνα 3.7: Γενέτειρα Αέρα (Πηγή : MDS Aero Support Corporation "MDS Proprietary Information"2005)**

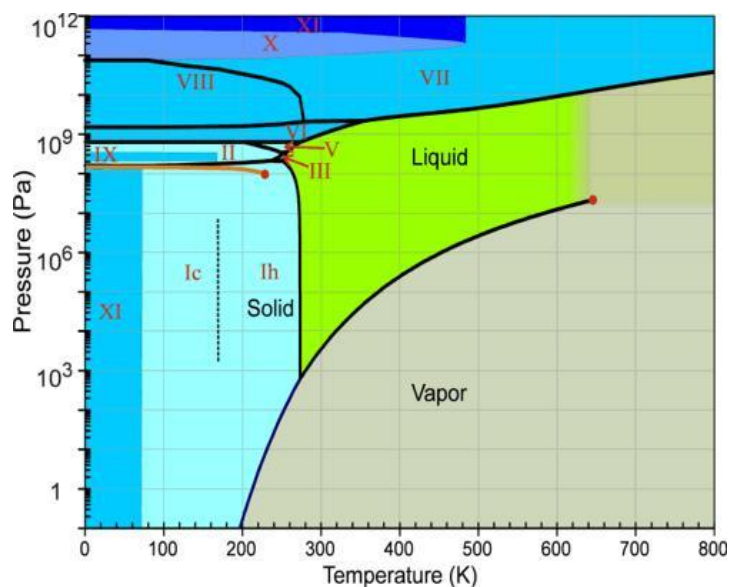


# 4 Μηχανισμοί Δημιουργίας και Ιδιότητες του Χαλαζιού

Στο κεφάλαιο αυτό αναλύονται οι μηχανισμοί δημιουργίας του χαλαζιού στην ατμόσφαιρα και της αποσύνθεσης στο εσωτερικό της μηχανής. Διατυπώνονται οι καταστάσεις με τις οποίες μπορεί να παρατηρηθεί σε κάθε ύψος και θερμοκρασία στην ατμόσφαιρα το χαλάζι.

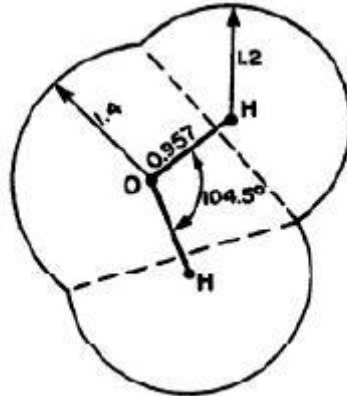
## 4.1 Η δομή του χαλαζιού

Το χαλάζι είναι μία από τις διάφορες καταστάσεις του νερού στη στερεά μορφή. Οι καταστάσεις του νερού ( $H_2O$ ) φαίνονται στο **Διάγραμμα 4.1** ενώ φαίνονται με λατινικούς χαρακτήρες και οι υπόλοιπες στερεές δομές πέραν της εξαγωνικής  $I_h$ . Οι περιοχές με διακεκριμένο χρώμα είναι οι μονοφασικές περιοχές ενώ οι γραμμές διαχωρισμού των φάσεων είναι οι γραμμές ισορροπίας στις οποίες οι φάσεις συνυπάρχουν.



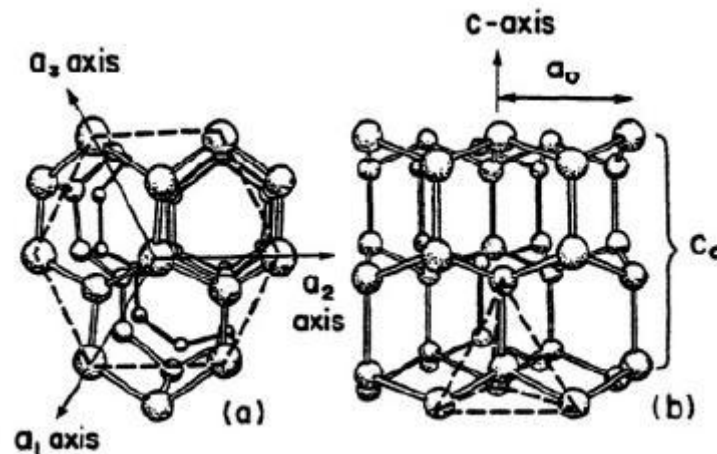
Διάγραμμα 4.1: Καταστάσεις του νερού σε διάγραμμα Πίεσης - Θερμοκρασίας (Πηγή : Wikipedia.org)

Ένα μεμονωμένο μόριο νερού αποτελείται από δύο άτομα υδρογόνου και ένα άτομο οξυγόνου. Η διάταξη των ατόμων μέσα στο μόριο είναι αυτή που παρουσιάζεται στο **Σχήμα 4.2** και προκύπτει από τις αρχές της ηλεκτροχημείας.



**Σχήμα 4.2:** Η διάταξη των ατόμων στο μόριο του νερού (Πηγή : H. Pruppacher, J. Klett *Microphysics of Clouds and Precipitation* 1997)

Σε πίεση  $1 \text{ atm}$  και θερμοκρασίες από  $-80^\circ\text{C}$  έως  $0^\circ\text{C}$  τα μόρια του νερού κρυσταλλοποιούνται από την αέρια ή την υγρή φάση για να σχηματίσουν μία εξαγωνική δομή. Αυτή είναι η συνήθης μορφή πάγου στην οποία εμφανίζεται και το χαλάζι. Η διάταξη των μορίων του νερού στον κρύσταλλο  $I_h$  φαίνεται στο **Σχήμα 4.3**.



**Σχήμα 4.3:** Η διάταξη των μορίων στον συνήθη εξαγωνικό κρύσταλλο  $I_h$  (Πηγή : H. Pruppacher, J. Klett *Microphysics of Clouds and Precipitation* 1997)

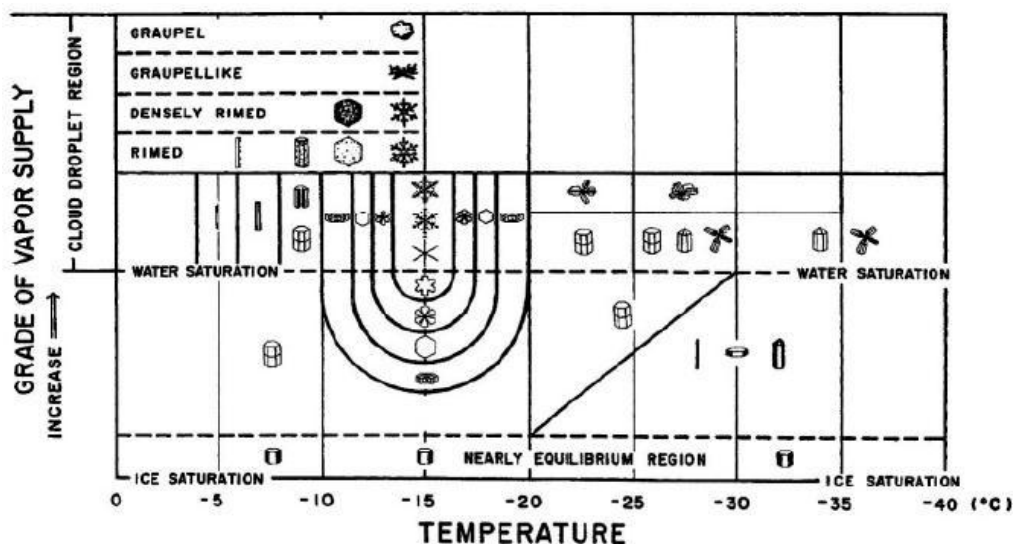
Οι κρύσταλλοι πάγου έχουν την δυνατότητα να αναπτυχθούν με διάφορους μηχανισμούς για να σχηματίσουν σωματίδια πάγου όπως το χιόνι και το χαλάζι.

Όταν τα σωματίδια πάγου αναπτύσσονται με διάχυση των ατμών νερού στην ατμόσφαιρα ο μηχανισμός ανάπτυξης λέγεται **εναπόθεση (deposition)**. Αν τα σωματίδια πάγου σχηματιστούν με εναπόθεση τότε ονομάζονται παγοκρύσταλλοι ή απλά χιόνι.

Αν τα σωματίδια πάγου αναπτυχθούν συγκρουόμενα με υπέρψυκτες<sup>1</sup> σταγόνες νερού τότε ο μηχανισμός ανάπτυξης λέγεται **δόμηση (riming)**. Έτσι προκύπτει το **χιονόνερο**.

Αν πάλι τα σωματίδια πάγου σχηματιστούν από σύγκρουση μεταξύ παγοκρυστάλλων τότε ο μηχανισμός δημιουργίας ονομάζεται **συσσώρευση (aggregation)**. Τα σωματίδια πάγου που σχηματίζονται με συσσώρευση ονομάζονται **νιφάδες χιονιού**.

Δίνονται στο επόμενο σχήμα οι συνθήκες σχηματισμού των διαφόρων μορφών σωματιδίων πάγου της ατμόσφαιρας.



Σχήμα 4.4: Οι ατμοσφαιρικές συνθήκες δημιουργίας των σωματιδίων πάγου στην ατμόσφαιρα (Πηγή : H. Pruppacher, J. Klett Microphysics of Clouds and Precipitation 1987)

Το χαλάζι δημιουργείται μέσα σε ασταθή νέφη, με σημαντικό περιεχόμενο υγρασίας, δυνατά ανοδικά ρεύματα αέρα και περιοχές νέφους με υπέρψυκτες σταγόνες νερού. Λόγω της αναγκαίας ύπαρξης ισχυρών ρευμάτων αέρα και του

<sup>1</sup> Το υγρό νερό υπό κανονικές συνθήκες κρυσταλλοποιείται και μεταβαίνει σε στερεά μορφή στη θερμοκρασία  $0^{\circ}\text{C}$ . Οι κανονικές συνθήκες υπονοούν ότι υπάρχει ευνοϊκό πεδίο για κρυσταλλοποίηση δηλαδή κάποιος ήδη υπάρχον κρύσταλλος ή ένα στερεό σύνορο. Αν η συνθήκη αυτή δεν ικανοποιείται τότε το νερό παραμένει υγρό μέχρι και την θερμοκρασία  $-42^{\circ}\text{C}$  που είναι η θερμοκρασία ομογενούς κρυσταλλοποίησης. Σε αυτήν την θερμοκρασιακή περιοχή το υγρό νερό λέγεται ότι βρίσκεται σε μετασταθή (metastable) κατάσταση και αν έρθει σε επαφή με πάγο θα στερεοποιηθεί σχεδόν ακαριαία. Τα προηγούμενα προκύπτουν από τις αρχές της χημικής θερμοδυναμικής σχετικά με την ελεύθερη ενέργεια, την ενέργεια σχηματισμού επιφανειών και του νόμου των φάσεων κατά Gibbs.

χρόνου που χρειάζεται το χαλάζι για να σχηματιστεί (10-30 λεπτά) συνδέεται κυρίως με μεγάλης κλίμακας βίαιες καλοκαιρινές καταιγίδες και ισχυρά μετεωρολογικά μέτωπα. Τα ανοδικά ρεύματα στον πυρήνα της καταιγίδας είναι δυνατά της τάξης των 100 ft/sec. Έτσι η κατακρήμνιση μπορεί να αναπτυχθεί μόνο όταν φτάσει στα ανώτερα επίπεδα του νέφους όπου η ένταση των ρευμάτων είναι μικρότερη.

Βλέπουμε λοιπόν ότι το χαλάζι είναι αποτέλεσμα καταιγιδοφόρων νεφών ενώ διακρίνονται τρεις βασικοί τρόποι δημιουργίας του :

**A) Με ξηρή ανάπτυξη**

**B) Με υγρή ανάπτυξη και**

**Γ) Με σπογγώδη ανάπτυξη**

Η ανάπτυξη του χαλαζιού ξεκινά στα ανώτερα επίπεδα του νέφους. Εκεί οι θερμοκρασίες είναι τόσο χαμηλές ώστε η ανερχόμενη υγρασία<sup>1</sup> να σχηματίζει περιοχές υπέρψυκτων σταγόνων νερού. Αυτές οι περιοχές είναι η αρχή της δημιουργίας του χαλαζιού.

Το νερό όταν δεν υπάρχουν πυρήνες κρυσταλλοποίησης (όπως σκόνη και άλλες ιπτάμενες μικροσκοπικές ουσίες), δεν στερεοποιείται στους 0°C αλλά στους -42°C. Αυτή είναι και η θερμοκρασία ομογενούς κρυσταλλοποίησης του. Όταν το νερό βρίσκεται υγρό σε αυτήν την θερμοκρασιακή περιοχή τότε ονομάζεται υπέρψυκτο υγρό.

Αν υπάρξει πυρήνας κρυσταλλοποίησης και οι πρώτοι πυρήνες ξεκινήσουν να αναπτύσσονται, αυτομάτως ξεκινούν να προσκολλώνται επάνω τους υπέρψυκτες σταγόνες. Με τον τρόπο αυτό σχηματίζεται το πρώιμο έμβρυο χαλαζιού. Οι πυρήνες συγκέντρωσης παραμένουν παγιδευμένοι στο ανώτερο νέφος μέχρι το βάρος τους να γίνει τόσο ώστε να επιτρέψει την πτώση τους. Οι σημαντικότερες καταστάσεις από τις οποίες διέρχεται κατά την ανάπτυξη του το χαλάζι είναι οι παγοκρύσταλλοι, οι παγοσβόλοι, οι μικρόκοκκοι χαλαζιού και οι κόκκοι χαλαζιού ή απλά χαλάζι.

Όταν ο πυρήνας συγκέντρωσης, που μπορεί να είναι οι σβόλοι πάγου, φτάσει σε διάμετρο τα 0.3 ~ 1.0 (mm) η σχετική τους ταχύτητα είναι ιδανική ώστε να συγκρούονται πιο αποτελεσματικά με τις σταγόνες βροχής. Η μεταφορά θερμότητας προκαλεί πολύ γρήγορη ψύξη ξεκινώντας την ανάπτυξη των μικρόκοκκων χαλαζιού. Αυτή η ανάπτυξη συνεχίζεται και δημιουργείται το πρώτο χαλάζι.

Βλέπουμε λοιπόν ότι το χαλάζι αναπτύσσεται κυρίως λόγω της ποσότητας υγρού νερού που συγκρούεται και παραμένει πάνω στην επιφάνεια του. Το υγρό νερό προέρχεται είτε από την βροχή του νέφους είτε από άλλα σωματίδια χαλαζιού που το αποβάλλουν. Αν η ανάπτυξη του πυρήνα σε τελικό χαλάζι γίνει ξηρή, υγρή ή σπογγώδης εξαρτάται από παράγοντες όπως η θερμοκρασία, το περιεχόμενο του νέφους σε υγρασία και η ενδεχόμενη ιδιοπεριστροφή του

<sup>1</sup> Υγρασία αέρα με άλλα λόγια είναι το περιεχόμενο του αέρα σε ατμό νερού

χαλαζιού ως προς το ρεύμα αέρα. Αναλύονται στη συνέχεια οι βασικοί μηχανισμοί ανάπτυξης :

### A) Η Ξηρή Ανάπτυξη

Αν η μεταφορά θερμότητας κατά την ανάπτυξη του χαλαζιού είναι τέτοια ώστε να ψύχεται γρήγορα όλη την ποσότητα προσκολλημένων υγρών σταγόνων (που δεν είναι απαραίτητα υπέρψυκτες), τότε φυσαλίδες αέρα δύναται να εγκλωβιστούν μέσα στο αναπτυσσόμενο χαλάζι. Αυτή η διαδικασία οδηγεί σε ένα κόκκο χαλαζιού μικρότερης πυκνότητας, αδιαφανή και ονομάζεται **ξηρή ανάπτυξη**. Η ξηρή ανάπτυξη δημιουργεί πορώδη πάγο δηλαδή ένα πάγο που μοιάζει με σφουγγάρι και σχηματίζεται στην περίπτωση της ταχείας ψύξης όπου οι εγκλωβισμένες ποσότητες αέρα είναι σημαντικές. Η θερμοκρασία της επιφάνειας του χαλαζιού που αναπτύσσεται ξηρά είναι πάντα κάτω των  $0^{\circ}\text{C}$ . Η πυκνότητα του χαλαζιού αυτού είναι πάντα μικρότερη από του καθαρού πάγου εφόσον περιέχει μέσα φυσαλίδες αέρα.

### B) Η Υγρή Ανάπτυξη

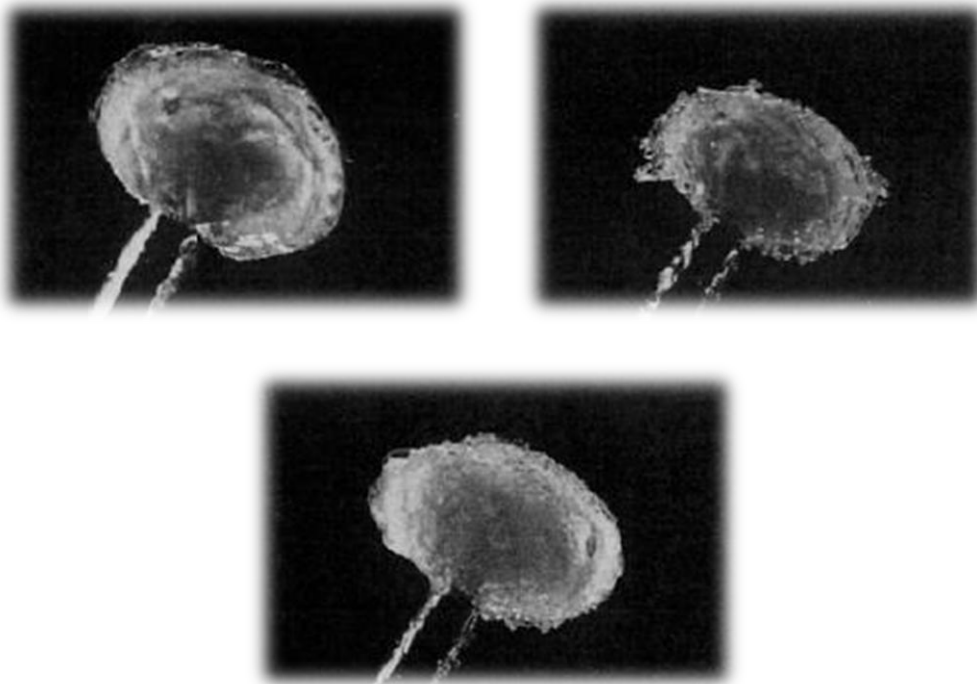
Υπάρχουν και περιπτώσεις όπου η μεταφορά θερμότητας δεν είναι αρκετή για να ψύξει ακαριαία όλη την προσκολλημένη ποσότητα υγρού νερού που παραμένει υγρή πάνω στην επιφάνεια. Αυτό μπορεί να συμβεί στα κατώτερα επίπεδα του νέφους που είναι πιο θερμά και εκεί το υπό ανάπτυξη χαλάζι με πιο μεγάλη ταχύτητα προσκολλά περισσότερες σταγόνες νερού. Η ανάπτυξη του χαλαζιού υπό αυτές τις συνθήκες ονομάζεται **υγρή ανάπτυξη**. Είναι πιο αποδοτική ανάπτυξη και οδηγεί σε υψηλότερης πυκνότητας διαφανές χαλάζι ( $0.8 \sim 0.99 \text{ gr} \cdot \text{m}^{-3}$ ). Η μεγαλύτερη μάζα του χαλαζιού αναπτύσσεται με υγρή ανάπτυξη. Η υγρή ανάπτυξη δημιουργεί συμπαγή πάγο που σχηματίζεται όταν οι προσκολλημένες σταγόνες καταλαμβάνουν όλη την επιφάνεια του χαλαζοπυρήνα πριν ψυχθούν ολικά. Μένουν έτσι σε μία επιφανειακή θερμοκρασία κάτω των  $0^{\circ}\text{C}$  (υπόψυκτες) και στερεοποιούνται αργά σχηματίζοντας σχεδόν καθαρό διαφανή πάγο. Η επιφάνεια είναι παντού υγρή και με θερμοκρασία που είναι κάτω των  $0^{\circ}\text{C}$  αλλά σπάνια ξεπερνά τους  $-8^{\circ}\text{C}$ .

### Γ) Η Σπογγώδης Ανάπτυξη

Ο σπογγώδης πάγος σχηματίζεται και αυτός όταν η μεταφορά θερμότητας δεν είναι αρκετή ώστε να ψύξει όλες τις προσκολλημένες σταγόνες. Υπάρχει όμως μία σημαντική διαφορά σε αντίθεση με την υγρή ανάπτυξη. Η κίνηση του χαλαζιού (ενδεχόμενη ιδιοπεριστροφή) και η κίνηση του ρεύματος αέρα δημιουργούν μία ασταθή επιφανειακή κατάσταση. Σε αυτήν την κατάσταση ένα μικρό μέρος μόνο από το επιφανειακό υγρό διατηρείται ενώ η μεγαλύτερη ποσότητα αποβάλλεται. Σχηματίζεται με αυτόν τον τρόπο ένας σκελετός πάγου που όταν προσκολληθεί σε αυτόν υγρό νερό δρα θετικά στην συντήρησή του. Με τη σπογγώδη ανάπτυξη σχηματίζονται στρώματα χαλαζοκόκκου που συχνά έχουν εγκλωβισμένες ποσότητες αέρα και ένα χαλάζι με αν όχι εξολοκλήρου, σίγουρα με σημαντική ποσότητα υγρού νερού επιφανειακά. Το αποτέλεσμα είναι ότι σχηματίζεται μία σύνθετη μάζα χαλαζιού μέσης πυκνότητας και με σημαντική

ποσότητα εγκλωβισμένου αέρα. Επιφανειακά αποτελείται από ένα σκελετό πάγου στον οποίο διατηρείται εξωτερικά μία ποσότητα υγρού νερού. Η θερμοκρασία επιφάνειας είναι ελάχιστα κάτω από τους  $0^{\circ}\text{C}$ .

Ενδεικτικά παρατίθενται στην **Εικόνα 4.5** φωτογραφίες από πειραματικές διατάξεις στις οποίες φαίνονται οι διάφορες καταστάσεις ανάπτυξης του χαλαζοκόκκου.



**Εικόνα 4.5: Υγρή - Σπογγώδης - Ξηρή Ανάπτυξη (κατά σειρά από πάνω αριστερά προς τα κάτω δεξιά) (Πηγή : Lesins - Sponginess And Drop Shedding Of Gyating Hailstones In A Pressure Controlled Icing Wind Tunnel 1986)**

## 4.2 Το χαλάζι στην ατμόσφαιρα

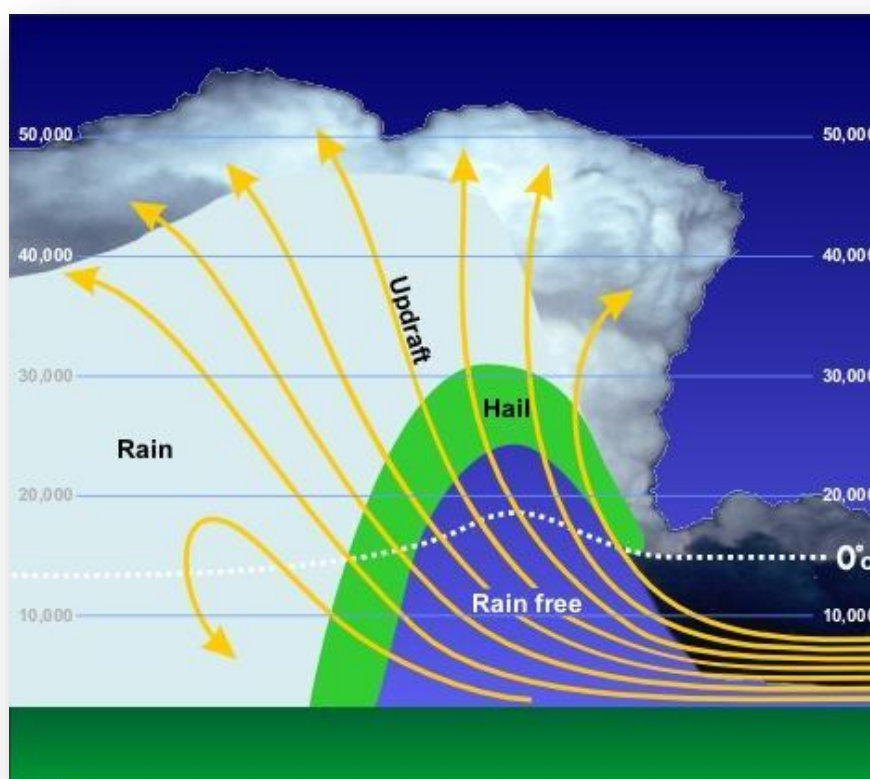
Όταν η διάμετρος του υπο ανάπτυξη χαλαζιού φτάσει τα  $5\text{ mm}$  τότε αυτό θεωρείται και ονομάζεται πλέον χαλάζι. Το χαλάζι αποτελείται από εναλλασσόμενες επιφανειακές στρώσεις πάγου, δεν είναι διαφανές, έχει σχετικά τραχιά επιφάνεια και σχήμα ελλειψοειδές προς σφαιρικό. Η πυκνότητα του χαλαζιού είναι από  $0.85$  έως  $0.98^1\text{ gr}\cdot\text{m}^{-3}$  ενώ η πυκνότητα του καθαρού πάγου στους  $0^{\circ}\text{C}$  είναι  $0.917\text{ gr}\cdot\text{m}^{-3}$ .

Όταν το χαλάζι βρίσκεται στην ατμόσφαιρα και για τα ύψη που ενδιαφέρουν τα αεροσκάφη η μορφή στην οποία βρίσκεται εξαρτάται από τις ατμοσφαιρικές συνθήκες και το στάδιο ανάπτυξης ή αποσύνθεσης. Στις περισσότερες

<sup>1</sup> Πυκνότητα χαλαζιού μεγαλύτερη από αυτήν την τιμή δείχνει έμμεσα την ύπαρξη νερού στο χαλάζι που δεν έχει ψυχθεί ακόμα.

περιπτώσεις το χαλάζι αναπτύσσεται υγρά ενώ όταν αποσυντίθεται πάλι βρίσκεται σε υγρή επιφανειακή κατάσταση. Στις πολύ μικρές διαμέτρους (μικρόκοκκοι χαλαζιού) μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το χαλάζι αποτελείται από μία μεγάλη σταγόνα νερού που περικλείει έναν στερεό πυρήνα πάγου.

Μέσα σε ένα καταιγιδοφόρο νέφος (*Cumulonimbus*) το χαλάζι κινείται ανοδικά λόγω ρευμάτων αέρα και καθοδικά λόγω βάρους. Στη μάζα του προστίθενται συνεχώς στρώματα πάγου έως ότου το βάρος ξεπεράσει μία κρίσιμη τιμή και το νέφος πλέον δεν μπορεί να το συγκρατήσει. Τότε κατακρημνίζεται προς τη γη. Κάποιοι κόκκοι χαλαζιού μπορεί να ξεφύγουν από την προσήνεμη πλευρά του ρεύματος αέρα που τα ανεβάζει και έτσι να κατακρημνιστούν προτού το βάρος τους ξεπεράσει το σύνηθες όριο.



Σχήμα 4.6: Το Νέφος Χαλαζιού στην Ατμόσφαιρα (Πηγή : NOAA)

Τα νέφη που δημιουργούν χαλάζι έχουν ισχυρά ανοδικά και καθοδικά ρεύματα αέρα, μεγάλη ποσότητα υγρασίας και το μεγαλύτερο κομμάτι τους με θερμοκρασία κάτω των μηδέν βαθμών κελσίου. Το χρώμα των νεφών που δημιουργούν χαλάζι είναι συνήθως πρασινωπό.

Το χαλάζι παρατηρείται κατά βάση σε εύκρατες ενδοηπειρωτικές περιοχές παρά σε τροπικά πλάτη ( $20^{\circ}$  -  $50^{\circ}$  γεωγραφικό πλάτος). Αυτό συμβαίνει λόγω των χαμηλότερων θερμοκρασιών των πρώτων στα κατώτερα στρώματα της ατμόσφαιρας ( $10.000ft$  -  $20000ft$ ). Χαλάζι κάτω από τα  $5000ft$  συνήθως δεν

δύναται να δημιουργηθεί. Οι πυκνότερες καταιγίδες με ισχυρά φαινόμενα κατακρημνίσεων παρατηρούνται στην νοτιοανατολική Ασία.

Οι ισχυρότερες χαλαζοθύελλες παγκοσμίως παρατηρούνται τους μήνες Ιούνιο και Ιούλιο στις περιοχές Wyoming και Nebraska των Ηνωμένων Πολιτειών. Ο μεγαλύτερος ρυθμός ανάπτυξης του χαλαζιού παρατηρείται στο εύρος θερμοκρασιών  $[-19^{\circ}\text{C}, -32^{\circ}\text{C}]$ . Σε αυτή την περιοχή θερμοκρασιών είναι που εμφανίζεται η μεγαλύτερη συγκέντρωση υπέρψυκτων σταγόνων νερού. Το χαλάζι δημιουργείται σε στρώσεις καθώς οι κόκκοι χαλαζιού ανεβοκατεβαίνουν μέσα στο σύννεφο. Πολλές φορές οι κόκκοι ενώνονται μεταξύ τους δημιουργώντας ένα άμορφο προς σφαιρικό συσσωμάτωμα.

Σε ένα καταιγιδοφόρο νέφος στα 20000ft και άνω όλη η ποσότητα χαλαζιού βρίσκεται μέσα στο κυρίως σώμα του νέφους. Από τα 10000ft έως τα 20000ft, 60% του χαλαζιού βρίσκεται στο κέντρο του νέφους ενώ το υπόλοιπο περιφερειακά. Κάτω από τα 10000ft η ποσότητα χαλαζιού είναι ομοιόμορφα κατανομημένη μέσα στο κέντρο και γύρω από το κυρίως σώμα του νέφους σε απόσταση που φτάνει μέχρι και 2 μίλια ακτινικά.

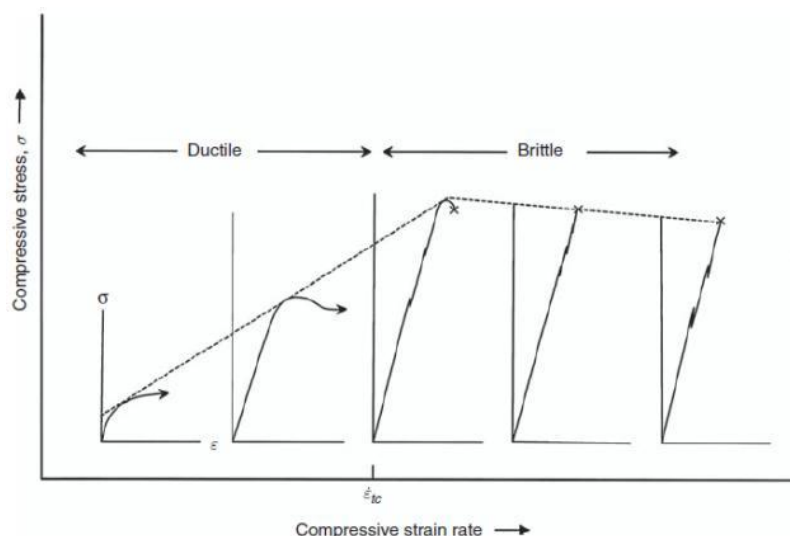
### 4.3 Οι μηχανικές και θερμικές ιδιότητες του Χαλαζιού

Το χαλάζι ανήκει στην εξαγωνική δομή  $I_h$  του πάγου. Δεν υπάρχουν στη βιβλιογραφία δεδομένα που να αναφέρονται αμιγώς στις μηχανικές και θερμικές ιδιότητες του χαλαζιού. Υπάρχει όμως πληθώρα στοιχείων σχετικά με γενικότερη εξαγωνική  $I_h$  δομή του πάγου.

#### 4.3.1 Μηχανικές ιδιότητες

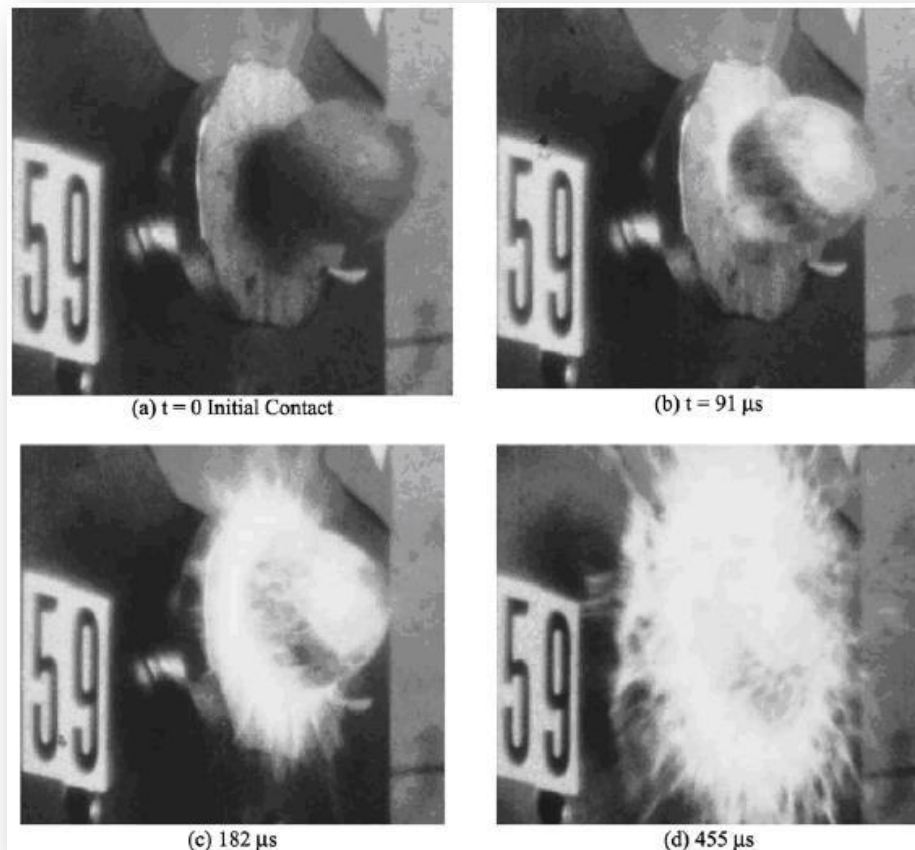
Ο πάγος είναι ένα υλικό που επιδεικνύει πολύ διαφορετικές μηχανικές ιδιότητες ανάλογα με τη θερμοκρασία, την πυκνότητα, τις εσωτερικές ανωμαλίες και τις ατέλειες στη δομή του. Η αντοχή του διαφοροποιείται σημαντικά ανάλογα με την ταχύτητα παραμόρφωσης. Έτσι ο πάγος  $I_h$  μπορεί να επιδείξει όλκιμη συμπεριφορά για χαμηλούς ρυθμούς παραμόρφωσης ή άκρως ψαθυρή συμπεριφορά για ταχεία παραμόρφωση. Αυτή η εξάρτηση φαίνεται ποιοτικά στο **Διάγραμμα 4.7**.





**Διάγραμμα 4.7:** Καμπύλες τάσης - παραμόρφωσης για διαφορετικούς ρυθμούς παραμόρφωσης στην ελεύθερη συμπίεση του πάγου (Πηγή : E. M. Schulson “Creep and Fracture of Ice” 2009)

Η όλκιμη συμπεριφορά χαρακτηρίζεται από μία ομαλή καμπύλη τάσης - παραμόρφωσης που αυξάνεται μέχρι ενός σημείου και μετά σταθεροποιείται ή για μεγαλύτερους ρυθμούς παραμόρφωσης μειώνεται. Στα τελευταία στάδια της ελαστικής συμπεριφοράς όταν ο πάγος οδηγείται προς τη θραύση, οι μικρορωγμές στο εσωτερικό του υλικού πυκνώνουν και δίνουν στον πάγο μία θολή όψη (βλέπε **Εικόνα 4.8**). Η πλαστική συμπεριφορά χαρακτηρίζεται από τη σκλήρυνση δηλαδή το φαινόμενο στο οποίο η αντοχή του υλικού αυξάνει με αύξηση του ρυθμού παραμόρφωσης ( $\sigma \sim \dot{\epsilon}^{1/3}$ ).



**Εικόνα 4.8: Πειραματική μελέτη κρούσης δοκιμίου πάγου 42.7 mm ταχύτητας 73.5 m/s (Πηγή : Kim "Experimental Investigation Of High Velocity Ice Impacts" 2002)**

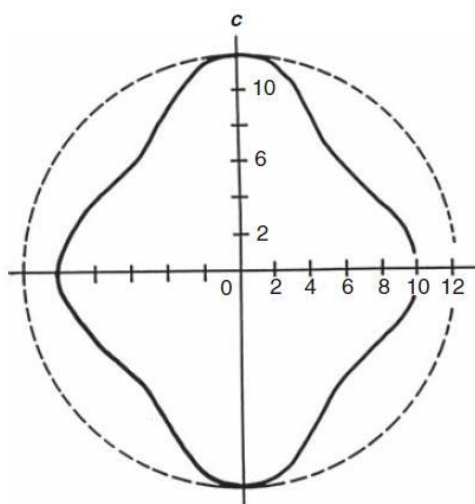
Η ψαθυρή συμπεριφορά χαρακτηρίζεται από μία καμπύλη τάσης - παραμόρφωσης που τείνει αυξανόμενη σχεδόν γραμμικά μέχρι ενός σημείου βίαιης και απότομης θραύσης. Αυτό κάνει τον πάγο να επιδεικνύει τη μέγιστη αντοχή σε ημι στατική συμπίεση όταν ο ρυθμός παραμόρφωσης γίνεται ίσος με το σημείο μετάβασης από όλκιμη σε ψαθυρή περιοχή.

Η εσωτερική δομή του πάγου μπορεί να είναι μονοκρυσταλλική ή πολυκρυσταλλική.

Ο μονοκρυσταλλικός πάγος αποτελεί την πιο τέλεια δομή της μορφής  $I_h$ . Το σώμα ενός μονοκρυσταλλικού πάγου αποτελείται από επαναλαμβανόμενη διάταξη των μορίων του νερού στην εξαγωνική δομή. Από τη θεωρία της μηχανικής των υλικών γνωρίζουμε ότι τα μονοκρυσταλλικά υλικά είναι ανισότροπα και δεν εμφανίζουν την ίδια αντοχή σε όλες τις διευθύνσεις φόρτισης. Η τάση όμως στην διεύθυνση που εμφανίζουν τη μεγαλύτερη αντοχή αποτελεί και τη μέγιστη αντοχή που δύναται να εμφανίσει το υλικό (μονοκρυσταλλικό ή όχι). Ο πολυκρυσταλλικός πάγος χαρακτηρίζεται από μία εσωτερική δομή στην οποία εμφανίζονται περιοχές υλικού (κόκκοι του υλικού) στους οποίους παρατηρείται ίδιος κρυσταλλικός προσανατολισμός. Οι κόκκοι

έχουν σύνορα ενώ στο υλικό εμφανίζονται πληθώρα κόκκων με διαφορετικό προσανατολισμό δίνοντας έτσι μία ισότροπη μηχανική συμπεριφορά. Η αντοχή του πολυκρυσταλλικού υλικού είναι μικρότερη από τη βέλτιστη προσανατολισμένη αντοχή του μονοκρυσταλλικού, όμως το πρώτο έχει το πλεονέκτημα της ισοτροπίας.

Το μέτρο ελαστικότητας του μονοκρυσταλλικού πάγου για κάθε διεύθυνση φόρτισης δίνεται γραφικά στο **Διάγραμμα 4.9**.



**Διάγραμμα 4.9:** Μέτρο ελαστικότητας σε GPa για διαφορετικές γωνίες φόρτισης ως προς τον κατακόρυφο άξονα της εξαγωνικής μορφής πάγου σε μονοκρυσταλλικό υλικό και για θερμοκρασία -16 C (Πηγή : E. M. Schulson “Creep and Fracture of Ice” 2009)

Το μέτρο ελαστικότητας του πολυκρυσταλλικού πάγου με βάση την αναφορά [13] δίνεται από τον **Πίνακα 4.10** :

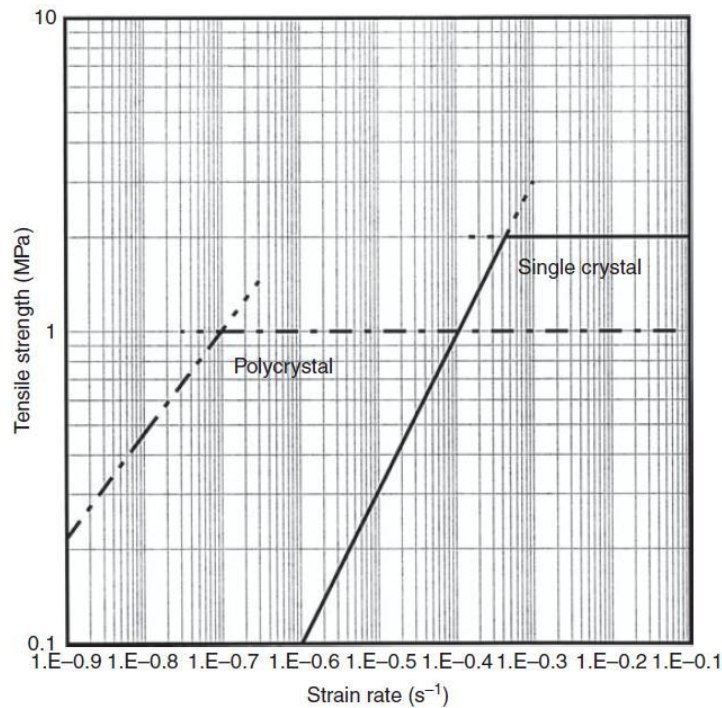
<b>Property</b>	<b>Units</b>	<b>Value</b>
Young’s modulus $E$	$N \cdot m^{-2}$	$9.33 \cdot 10^9$
Compressibility $K$	$N^{-1} \cdot m^2$	$112.4 \cdot 10^{-12}$
Bulk Modulus $B$	$N \cdot m^{-2}$	$8.90 \cdot 10^9$
Shear Modulus $G$	$N \cdot m^{-2}$	$3.52 \cdot 10^9$
Poisson’s ratio $\nu$	-	0.325

**Πίνακας 4.10:** Ελαστικές ιδιότητες ομογενούς πολυκρυσταλλικού πάγου για θερμοκρασία -16 C (Πηγή : E. M. Schulson “Creep and Fracture of Ice” 2009)

Για την κατηγοριοποίηση των μηχανικών ιδιοτήτων του πάγου μπορούμε να διακρίνουμε δύο γενικές κατηγορίες καταπόνησης, του εφελκυσμού και της συμπίεσης. Σε κάθε μία θα μελετηθεί η συμπεριφορά του μονοκρυσταλλικού και του πολυκρυσταλλικού πάγου.

#### Εφελκυσμός :

Η αντοχή του μονοκρυσταλλικού πάγου σε εφελκυσμό δίνεται στο **Διάγραμμα 4.11**. Στο ίδιο διάγραμμα δίνεται και η αντοχή του πολυκρυσταλλικού πάγου. Οι άξονες είναι σε λογαριθμική κλίμακα. Τα σημεία τομής των γραμμών αντιστοιχούν στα σημεία μετάβασης από όλκιμη σε ψαθυρή συμπεριφορά. Στην αναφορά [13] επισημαίνεται ότι αν και αναφερόμαστε σε ένα διακριτό ρυθμό παραμόρφωσης που ορίζει τη μετάβαση, στη πραγματικότητα η αλλαγή συμπεριφοράς συμβαίνει σε ένα εύρος ρυθμών παραμόρφωσης και όχι σε ένα σημείο. Το εύρος διαφοροποιείται με ένα συντελεστή περίπου ίσο με 3.

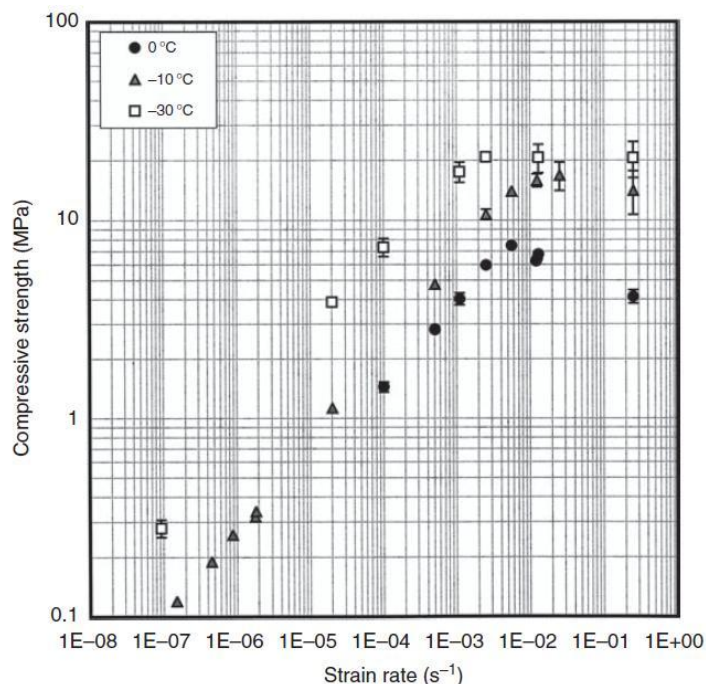


**Διάγραμμα 4.11:** Αντοχή ως συνάρτηση του ρυθμού παραμόρφωσης σε εφελκυσμό σε μονοκρυσταλλικό ή πολυκρυσταλλικό υλικό (κόκκοι διαμέτρων 1mm) και για θερμοκρασία -10 C. Τα σημεία τομής των γραμμών αντιπροσωπεύουν τη μετάβαση από εύπλαστη σε εύθραυστη συμπεριφορά (Πηγή : E. M. Schulson "Creep and Fracture of Ice" 2009)

Αναφέρεται ακόμα στην αναφορά [13] ότι η μείωση της θερμοκρασίας έχει αποτέλεσμα την αύξηση της αντοχής σε εφελκυσμό μέχρι και 10% για θερμοκρασία  $-30^{\circ}\text{C}$ .

Θλίψη :

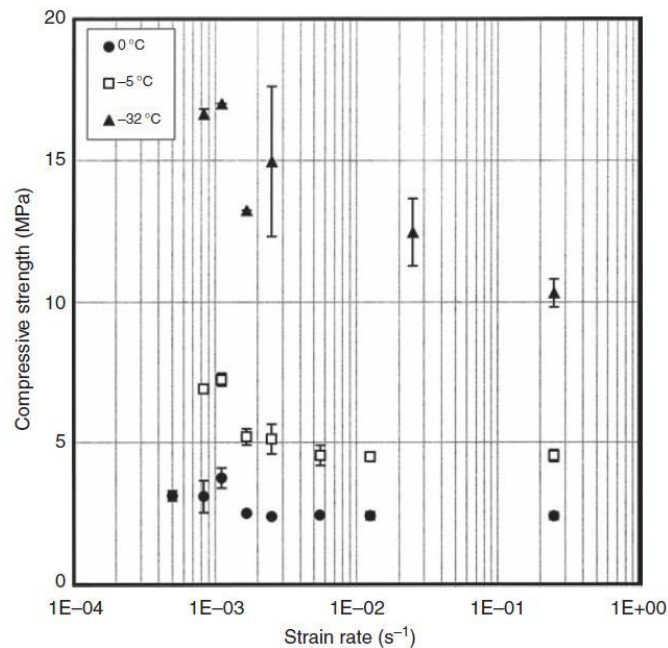
Στη συμπίεση η αντοχή που επιδεικνύει ο πάγος είναι γενικά μεγαλύτερη από την αντοχή σε εφελκυσμό. Πειραματικά δεδομένα για την αντοχή του μονοκρυσταλλικού πάγου δίνονται για διαφορετικούς ρυθμούς παραμόρφωσης και διαφορετικές θερμοκρασίες στο **Διάγραμμα 4.12** :



**Διάγραμμα 4.12:** Αντοχή ως συνάρτηση του ρυθμού παραμόρφωσης για θλίψη σε μονοκρυσταλλικό πάγο και για θερμοκρασία 0 C, -10 C και -30 C (Πηγή : E. M. Schulson “Creep and Fracture of Ice” 2009)

Η μετάβαση από την όλκιμη στη ψαθυρή συμπεριφορά χαρακτηρίζεται από την μείωση της αντοχής και συμβαίνει για ρυθμούς παραμόρφωσης κοντά στο  $10^{-3}$ . Η αύξηση της θερμοκρασίας έχει αποτέλεσμα την αύξηση της αντοχής κατά περίπου  $0.4MPa/^\circ C$ .

Η συμπεριφορά του πολυκρυσταλλικού υλικού δίνεται στο **Διάγραμμα 4.13** :

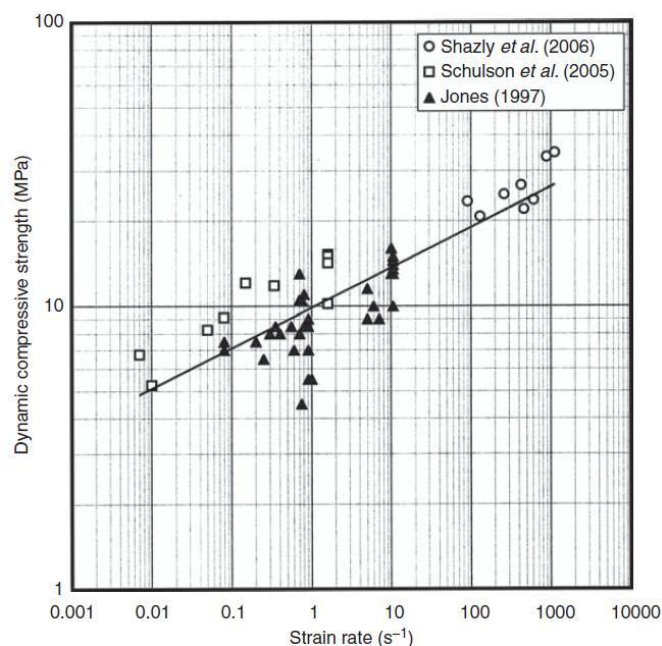


**Διάγραμμα 4.13:** Αντοχή πολυκρυσταλλικού πάγου για θερμοκρασία 0 C, -6 C και -32 C  
(Πηγή : E. M. Schulson “Creep and Fracture of Ice” 2009)

Και πάλι η μετάβαση από την όλκιμη στη ψαθυρή συμπεριφορά χαρακτηρίζεται από τη μείωση της αντοχής και συμβαίνει για ρυθμούς παραμόρφωσης κοντά στο  $10^{-3}$ .

**Μία πολύ ιδιαίτερη συμπεριφορά του πάγου εμφανίζεται κατά τη θλίψη σε δυναμικά φορτία.**

Πιο συγκεκριμένα για ρυθμούς παραμόρφωσης μεγαλύτερους του  $1\text{ s}^{-1}$  η αντοχή του υλικού δείχνει να παίρνει ταχέως αυξανόμενες τιμές μέχρι και τα  $47\text{MPa}$ .



**Διάγραμμα 4.14: Αντοχή πολυκρυσταλλικού και μονοκρυσταλλικού πάγου για δυναμική συμπίεση (Πηγή : E. M. Schulson “Creep and Fracture of Ice” 2009)**

Η συμπεριφορά αυτή είναι διαφορετική από τη σκλήρυνση στην πλαστική περιοχή και παρόλο που έχει παρατηρηθεί πειραματικά δεν υπάρχει ακόμα σαφής περιγραφή για την εξήγηση της. Σημειώνεται ακόμα ότι την συμπεριφορά αυτή εμφανίζουν και οι δύο μορφές εσωτερικής δομής (μονοκρυσταλλική και πολυκρυσταλλική).

Τριβή :

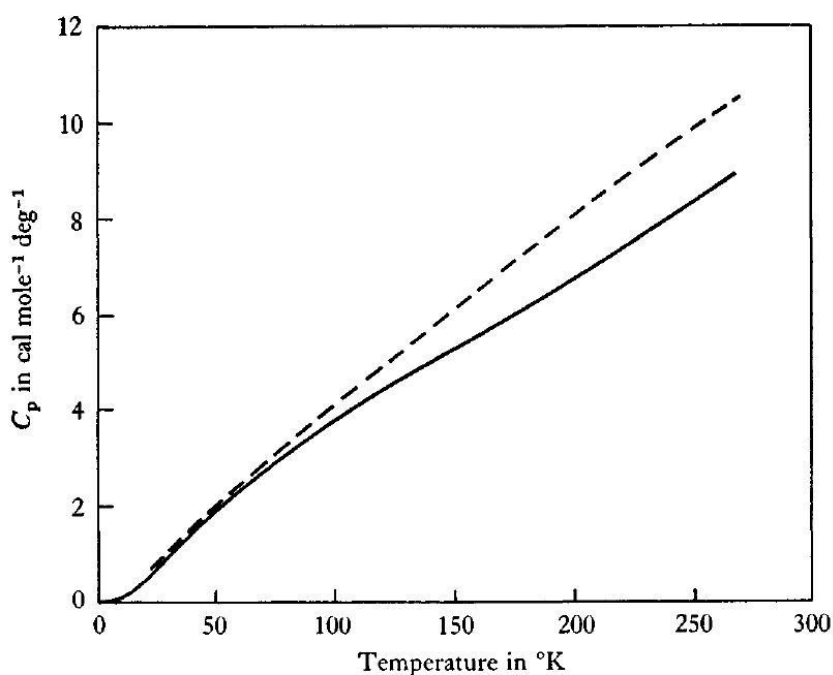
Ο πάγος είναι γενικά ένα ολισθηρό υλικό με πολύ χαμηλό συντελεστή τριβής ακόμα και όταν είναι ξηρός. Όταν ο πάγος έχει στην επιφάνεια του υγρό νερό (υγρός πάγος) τότε γίνεται ακόμα πιο ολισθηρός. Από τις αναφορές [23] και [24] προκύπτει ο επόμενος πίνακας για το συντελεστή τριβής του πάγου.

<u>Υλικό Α</u>	<u>Υλικό Β</u>	<u>Θερμοκρασία</u>	<u>Συντελεστής Στατικής Τριβής</u>	<u>Συντελεστής Τριβής Ολίσθησης</u>
Πάγος	Πάγος	0°C	0.1	0.02
Πάγος	Πάγος	-12°C	0.3	0.035
Πάγος	Πάγος	-80°C	0.5	0.09
Πάγος	Μπρούντζος	0°C	-	0.02
Πάγος	Μπρούντζος	-80°C	-	0.15
Πάγος	Ατσάλι Λείο	-5°C	0.05	0.03

Πίνακας 4.15: Συντελεστές τριβής πάγου με διάφορα υλικά και σε διάφορες θερμοκρασίες

#### 4.3.2 Θερμικές ιδιότητες

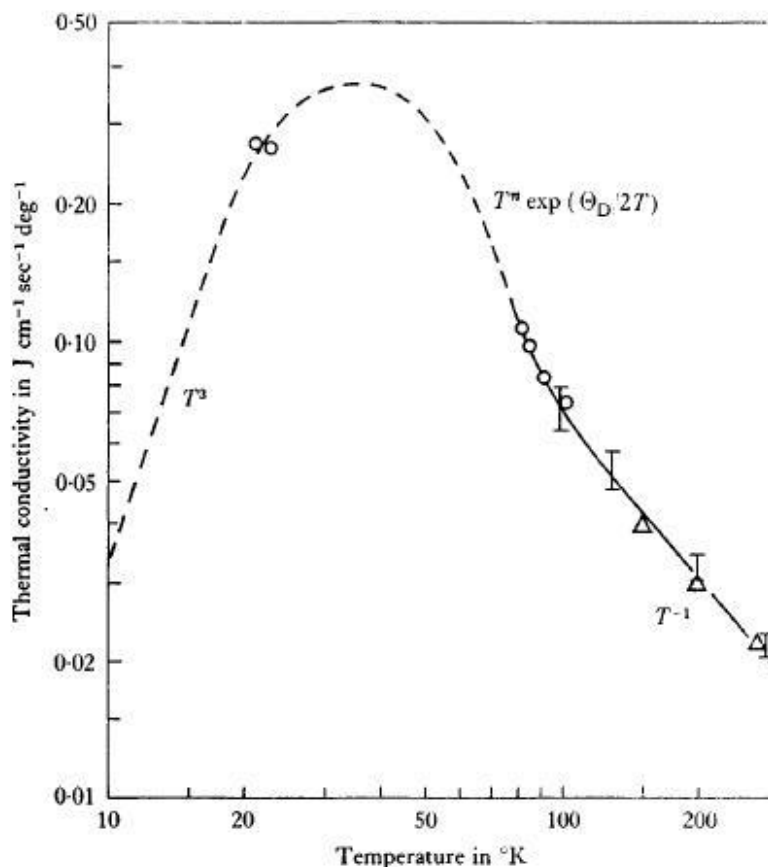
Η ειδική θερμοχωρητικότητα του πάγου υπό σταθερή πίεση και ως συνάρτηση της θερμοκρασίας σύμφωνα με την αναφορά [14] δίνεται από το **Διάγραμμα 4.16**.



Διάγραμμα 4.16: Ειδική θερμοχωρητικότητα του πάγου υπό σταθερή πίεση. Α) H<sub>2</sub>O (συνεχής γραμμή) Β) D<sub>2</sub>O (διακοπτόμενη γραμμή) (Πηγή : N. H. Fletcher "The chemical physics of ice" 1970)



Η θερμική αγωγιμότητα του πάγου δίνεται σύμφωνα με την αναφορά [14] από το Διάγραμμα 4.17.



Διάγραμμα 4.17: Θερμική αγωγιμότητα του πάγου. Α) Πειραματικά δεδομένα (συνεχής γραμμή) Β) Θεωρητικοί υπολογισμοί (διακοπτόμενη γραμμή) (Πηγή : N. H. Fletcher "The chemical physics of ice" 1970)

#### 4.4 Η αποσύνθεση του χαλαζιού στη μηχανή

Εφόσον το χαλάζι βρίσκεται ελεύθερο στην ατμόσφαιρα άρα και στην πορεία του αεροσκάφους είναι πολύ εύκολο να καταλήξει μέσα στη μηχανή. Το χαλάζι αποσυντίθεται με τρεις τρόπους. Αποσυντίθεται με τη θραύση που είναι ένα μηχανικό φαινόμενο και με την ατμοποίηση και την υγροποίηση που είναι θερμικά φαινόμενα. Η θραύση συμβαίνει όταν το χαλάζι κινείται με σχετική ταχύτητα προς τα πτερύγια της μηχανής και συγκρούεται πάνω τους. Μεγάλη ποσότητα του χαλαζιού θρυμματίζεται από την σύγκρουση με τον ανεμιστήρα (Fan) ενώ θεωρείται αδύνατο να διατρέξει το χαλάζι ολόκληρο το συμπιεστή χωρίς να συγκρουστεί με τα πτερύγια του συμπιεστή. Από ένα σημείο αποσύνθεσης και μετά το χαλάζι σταματά να θρυμματίζεται και συνεχίζει ανακλώμενο προς κάθε κατεύθυνση. Ένα σχεδόν σφαιρικό χαλάζι που θρυμματίζεται καταλήγει σε εκατοντάδες μικρότερα σωματίδια πάγου που έχουν το σχήμα νιφάδων.

Ταυτόχρονα με τη μηχανική αποσύνθεση το χαλάζι υφίσταται και θερμική αποσύνθεση. Οι θερμοκρασία και η πίεση κατά μήκος του συμπιεστή ανεβαίνουν σημαντικά ενώ στο θάλαμο καύσης η θερμοκρασία παίρνει τιμές που σε καμία περίπτωση δεν επιτρέπουν την ύπαρξη πάγου. Το χαλάζι αποσυντίθεται θερμικά με την υγροποίηση, την εξάχνωση και την εξάτμιση. Η υγροποίηση οφείλεται στην αλλαγή φάσης του νερού λόγω υψηλών θερμοκρασιών και πιέσεων. Η εξάχνωση και η ατμοποίηση ωθούνται από το χαμηλής συγκέντρωσης σε υγρασία περιβάλλον που αναπτύσσεται στις βαθμίδες του συμπιεστή και του θαλάμου καύσης. Η εξάτμιση είναι η μετάβαση του νερού από την υγρή στην αέρια μορφή δηλαδή η μετατροπή του υγρού νερού σε ατμό. Η εξάχνωση είναι η μετάβαση του νερού από τη στερεά μορφή στην αέρια χωρίς να μεσολαβήσει όμως η υγρή κατάσταση. Η εξάχνωση συμβαίνει για θερμοκρασίες κάτω της θερμοκρασίας υγροποίησης ενώ η εξάτμιση για θερμοκρασίες μεγαλύτερες της θερμοκρασίας υγροποίησης.

# 5

## Συγκέντρωση Χαλαζιού στην Ατμόσφαιρα και στον Αγωγό Εισόδου της Μηχανής

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται η διερεύνηση του τρόπου εξαγωγής των σπάνταρ πιστοποίησης των αεροπορικών μηχανών σε χαλαζόπτωση. Μελετώνται όλες οι πιθανολογικές παράμετροι που λαμβάνονται υπόψιν κατά τη θεσμοθέτηση των ελέγχων και διατυπώνονται οι ενδεικνυόμενοι πίνακες πιστοποίησης. Τέλος γίνεται μία μελέτη πάνω στα κινηματικά χαρακτηριστικά που αναμένεται να έχει το κάθε μεμονωμένο χαλάζι λίγο πριν εισέλθει στη μηχανή.

### 5.1 Η Πιθανολογική Θεώρηση

Υπάρχουν στοιχεία της ατμόσφαιρας τα οποία είναι καθορισμένα ως προς την ποσότητα τους γενικά. Για παράδειγμα η θερμοκρασία σε μέσες άκρες και στην περίπτωση μη ασταθούς ατμόσφαιρας μειώνεται κατά  $1.98^{\circ}\text{C}$  ανά  $1000\text{ ft}$  ύψους. Η πίεση κατά  $1\text{ mb}$  ανά  $30\text{ ft}$  ύψους. Αυτές οι τιμές ανήκουν στην τυπική ατμόσφαιρα και θεσπίστηκαν από τον **ICAO**<sup>1</sup>. Αποτελούν ένα κανόνα που δεν έχει απόλυτη ισχύ αλλά είναι χρήσιμος για γενικούς υπολογισμούς.

Η συγκέντρωση χαλαζιού όμως με το ύψος δεν μπορεί να ακολουθήσει κάποιο κανόνα. Δεν μπορεί δηλαδή να συσχετιστεί άμεσα και απόλυτα το ύψος με την συγκέντρωση χαλαζιού. Ο μόνος τρόπος για να γνωρίζουμε την ακριβή συγκέντρωση χαλαζιού στο περιβάλλον είναι με απευθείας μέτρηση. Για το λόγο αυτό λοιπόν και για την εκτίμηση της συμπεριφοράς μιας μηχανής σε χαλαζοθύελλα μπορούν να θεσπιστούν κάποια ανώτερα όρια, τα μέγιστα όρια που μπορεί να υπάρξει περίπτωση ποτέ να συναντήσει ένα αεροσκάφος.

Φυσικά μία τέτοιου είδους θεώρηση επιβάλλει την πιθανολογική μελέτη των παραμέτρων που μετρούνται. Όπως θα αποδειχθεί και στη συνέχεια τα όρια θεσπίζονται με βάση το γινόμενο τριών ανεξάρτητων πιθανοτήτων :

**A) Της πιθανότητας συμβάντος χαλαζοθύελλας  $P_{probability}$     B) της πιθανότητας συμβάντος συγκέντρωσης χαλαζοθύελλας  $P_{conditional}$  και Γ) της πιθανότητας διάρκειας χαλαζοθύελλας  $P_{duration}$  .**

---

<sup>1</sup> International Civil Aviation Authority (Διεθνής Οργανισμός για την Πολιτική Αεροπλοΐα)

Μετά από μετρήσεις, έρευνες και αξιολογήσεις των μετρήσεων γύρω από χαλαζοθύελλες προέκυψαν δύο συγκεντρωτικοί πίνακες μέγιστης συγκέντρωσης χαλαζιού για την ασφαλή πιστοποίηση των μηχανών. Αυτοί οι πίνακες δίνουν τη μέγιστη συγκέντρωση σε κάθε ύψος και την κατανομή των διαμέτρων του χαλαζιού. Είναι οι πίνακες που χρησιμοποιούνται γενικά για την πιστοποίηση των κινητήρων από τους οργανισμούς πιστοποίησης και αποτελούν αποτέλεσμα της έρευνας της Boeing «*Results of the Aerospace Industries Association Propulsion Committee Study, Project PC 338-1, June 1990*».

## 5.2 Ποσότητα χαλαζιού ανά το υψόμετρο

Το 1989 η κατασκευάστρια εταιρεία Boeing υπέγραψε ένα συμβόλαιο με το ερευνητικό κέντρο *Alberta Research Council*<sup>1</sup> (ARC). Σύμφωνα με το συμβόλαιο αυτό οι δεύτεροι θα παρείχαν μετεωρολογικά δεδομένα χαλαζόπτωσης στην εταιρεία που θα αξιολογούνταν μετέπειτα από αυτήν.

Το **ARC** παρείχε δεδομένα για το μήνα Ιούλιο τις χρονιές 1983 έως 1985. Ο μήνας Ιούλιος στην **Alberta** είναι ο μήνας με τη μέγιστη χαλαζόπτωση. Σε κάθε περίπτωση χαλαζοθύελλας καταγράφονταν στην ευρύτερη περιοχή το σημείο μέγιστης αντανάκλασης του Ραντάρ (καθαρό χαλάζι) και κάποια λοιπά σημεία (μικτό χαλάζι). Έπειτα υπολογίστηκε η ισοδύναμη<sup>2</sup> διάμετρος της χαλαζοθύελλας.

**Δόθηκαν συνολικά 414 “καθαρά” σημεία μέγιστης αντανάκλασης και 2868 λοιπά “μικτά” σημεία.** Τα σημεία που επεξεργάστηκαν για την παραγωγή των διαγραμμάτων συγκέντρωσης είναι τα 414 “καθαρά” σημεία<sup>3</sup>.

Ο συλλογισμός για την παραγωγή του τελικού διαγράμματος συγκέντρωσης ανά ύψος γίνεται σε επίπεδο πιθανοτήτων πάνω στα δεδομένα των 414 σημείων. Εφόσον πρόκειται για “καθαρά” σημεία αυτό υποδηλώνει ότι έχουμε μόνο χαλάζι (πάγο) και ότι τα σημεία αυτά βρίσκονται σε ύψος πάνω από το επίπεδο παγοποίησης.

---

<sup>1</sup> Το *Alberta Research Council* είναι ένα μετεωρολογικό ερευνητικό κέντρο του Καναδά με μακρόχρονη εμπειρία και πολύτιμο υλικό μετρήσεων γύρω από το χαλάζι. Διαθέτει Ραντάρ ευρέως φάσματος και βεληνεκούς που μπορούν να διακρίνουν τις περιοχές καθαρής χαλαζόπτωσης και τις περιοχές μικτής χαλαζόπτωσης (βροχή και χαλάζι).

<sup>2</sup> Ισοδύναμη είναι η διάμετρος του κύκλου που έχει εμβαδό ίσο με την πραγματική χαλαζοθύελλα.

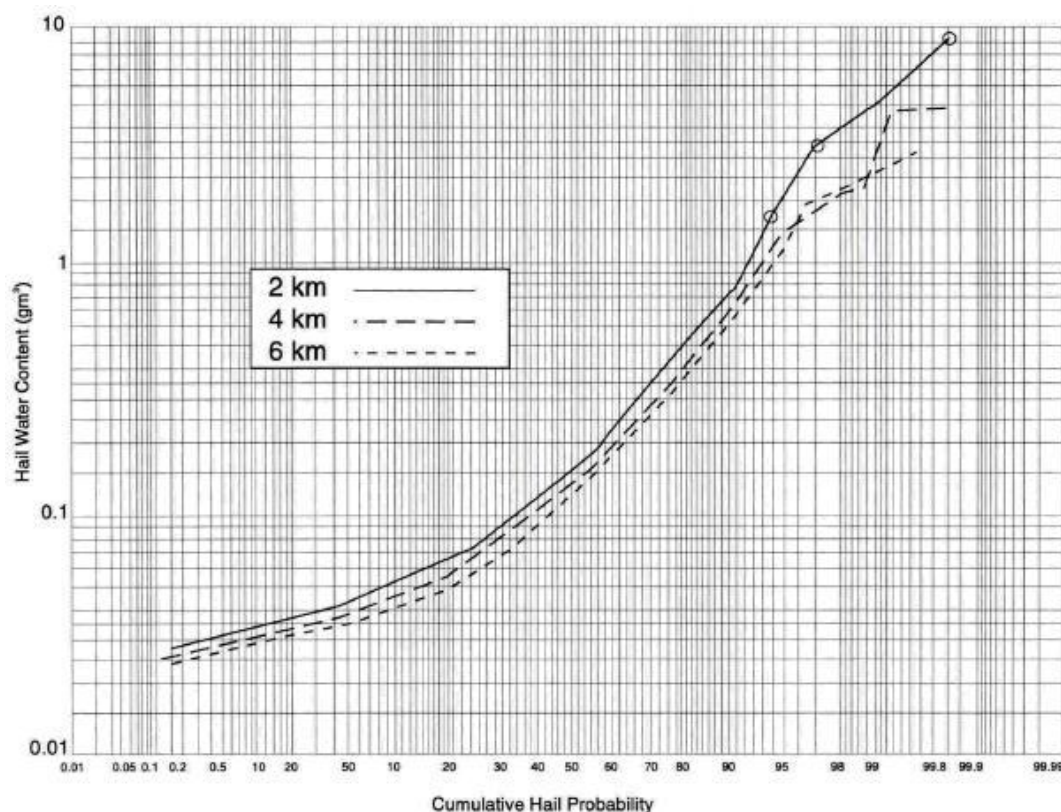
<sup>3</sup> Στο σημείο αυτό φαίνεται άμεσα ότι τα σάνταρ που πρόκειται να εξαχθούν από τη συγκεκριμένη μελέτη αναφέρονται μόνο στις περιοχές καθαρής χαλαζόπτωσης και αποκλείουν τις μικτές περιοχές. Επομένως είναι πολύ πιθανό μες στην χαλαζοθύελλα να υπάρχουν περιοχές στις οποίες το μικτό φορτίο νερού για τον κινητήρα να είναι πολύ υψηλότερο από αυτό που ορίζουν τα σάνταρ καθαρής χαλαζόπτωσης. Είναι ένα κομβικό σημείο αυτό γιατί έμμεσα φαίνεται ότι τα σάνταρ αυτά θεσπίστηκαν έχοντας περισσότερο ως στόχο να διασφαλίσουν τη λειτουργία του κινητήρα μηχανικά (κρούση) παρά αεροθερμodynamικά (ισχύς).

Η πιθανότητα να συμβεί μία συγκέντρωση χαλαζόπτωσης ή αλλιώς **πιθανότητα συμβάντος-κατάστασης**  $P_{joint} = P(HWC)$  προκύπτει από ένα γινόμενο.

Το γινόμενο αυτό είναι η πιθανότητα **να συμβεί χαλαζόπτωση**  $P_{probability} = P_p(HWC)$ <sup>1</sup> επί την πιθανότητα να συμβεί μία συγκεκριμένη συγκέντρωση χαλαζόπτωσης ή αλλιώς **πιθανότητα κατάστασης**  $P_{conditional} = P_c(HWC)$ .

Η ποσότητα HWC (*Hail Water Content*) είναι η ποσότητα χαλαζιού σε γραμμάρια που βρίσκονται σε ένα κυβικό μέτρο αέρα ( $gr / m^3$ ).

Η πιθανότητα κατάστασης  $P_c(HWC)$  δίνεται για τρία ύψη 2 Km, 4 Km και 6 Km που μέτρησε το Ραντάρ του ARC και εμφανίζεται στο **Διάγραμμα 5.1** :



**Διάγραμμα 5.1: Αθροιστικές HWC συγκεντρώσεις στα 2, 4 και 6Km AGL προερχόμενα από το ARC Reflectivity Data (Πηγή : AGARD “Recommended Practices For The Assessment Of The Effects Of Atmospheric Water Ingestion On The Performance And Operability Of Gas Turbine Engines” 1995)**

<sup>1</sup> Η  $P_{probability}$  γενικά θα έπρεπε να είναι ανεξάρτητη του HWC αλλά όπως θα φανεί στη συνέχεια έχει εξάρτηση λόγω ενός διορθωτικού παράγοντα που συσχετίζεται με την συγκέντρωση HWC.

Για τον υπολογισμό της  $P(HWC)$ , θα χρησιμοποιηθεί το ύψος 2Km που έχει και τις μεγαλύτερες τιμές για την  $P_C(HWC)$ . Οπότε στο δυσμενέστερο ύψος των δύο χιλιομέτρων πρέπει να υπολογιστεί η δυσμενέστερη πιθανότητα συμβάντος  $P_p(HWC)$  και έπειτα η δυσμενέστερη συνολική πιθανότητα συμβάντος-κατάστασης δηλαδή η  $P(HWC)$ .

Η δυσμενέστερη πιθανότητα συμβάντος υπολογίζεται ως :

$$P_p(HWC) = n \cdot t \cdot k(HWC) / 525960 \quad (5-1)$$

όπου :  $n$  = πόσες μέρες το χρόνο είναι η παγκόσμια μεγαλύτερη τιμή μέσης χαλαζόπτωσης

$t$  = πόση μέση διάρκεια σε λεπτά έχει

$k$  = ένας διορθωτικός παράγοντας που εξαρτάται από το HWC

και 525960 είναι τα λεπτά που έχει ένα έτος. Ουσιαστικά πρόκειται για το μέσο χρόνο σε λεπτά που κρατά μία χαλαζοθύελλα στο μέρος του κόσμου με την μεγαλύτερη τιμή χαλαζόπτωσης ανά έτος διαιρεμένο με τα λεπτά που έχει ένα έτος.

Στην θεώρηση της πιθανότητας συμβάντος υπονοείται ότι κάθε καταιγίδα που θα συμβεί θα έχει οπωσδήποτε ένα “καθαρό” σημείο επομένως και η πιθανότητα συμβάντος έχει ως πιθανοσύνολο τις 414 χαλαζοθύελλες που μετρήθηκαν.

Μέσα στον συνολικό όγκο μίας χαλαζοθύελλας υπάρχουν περιοχές υψηλού HWC και περιοχές χαμηλού HWC. Στην ανάλυση για την πιθανότητα συμβάντος χρησιμοποιούνται μόνο τα σημεία με την υψηλότερη συγκέντρωση (414 σημεία). Η διάρκεια ζωής όμως των περιοχών στις οποίες βρίσκονται τα σημεία αυτά, λόγω μικρότερης επιφάνειας που καταλαμβάνουν, είναι αρκετά μικρότερη της συνολικής διάρκειας της χαλαζοθύελλας. Αυτός είναι και ο διορθωτικός λόγος ύπαρξης του συντελεστή  $k$ . Ο συντελεστής  $k$  δηλώνει δηλαδή ότι αν σε μία από τις 414 χαλαζοθύελλες μετρήθηκε μία μέγιστη τιμή για το HWC το σημείο αυτό μες στην χαλαζοθύελλα δεν “έζησε” όσο όλη η χαλαζοθύελλα αλλά λίγο λιγότερο.

Ως δυσμενέστερο μέρος στον κόσμο αναγνωρίστηκε το Wyoming των Ηνωμένων Πολιτειών με εννιά (9) μέρες το χρόνο μέση χαλαζόπτωση.

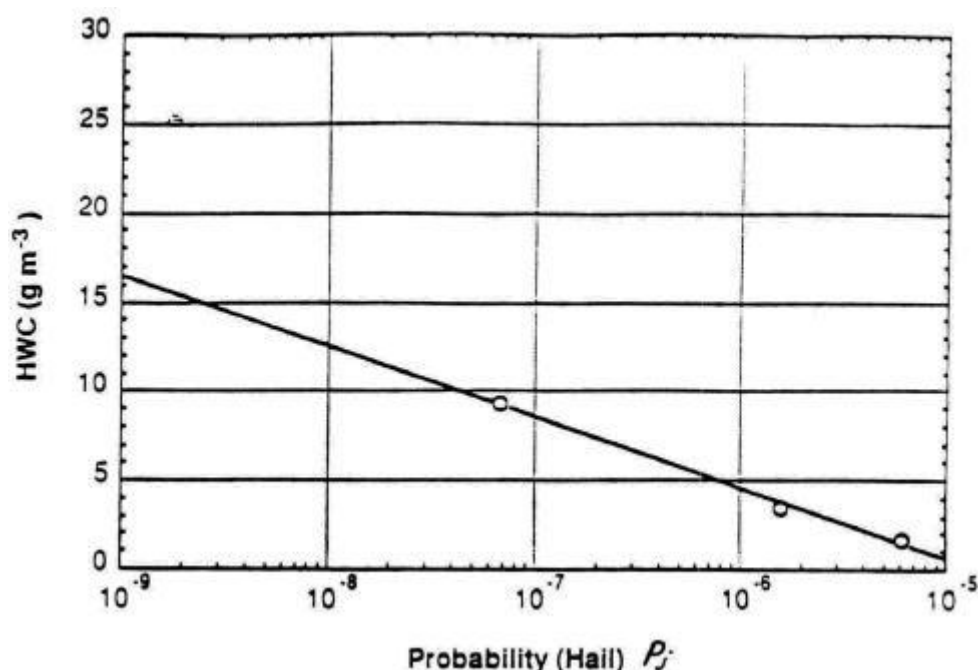
Η πιθανότητα  $P_p(HWC)$  υπολογίστηκε για 3 σημεία της καμπύλης των 2Km του διαγράμματος της πιθανότητας  $P_C(HWC)$ . Αυτές οι τρεις τιμές πολλαπλασιάστηκαν με τις τρεις πιθανότητες  $P_C(HWC)$  των ίδιων σημείων και έτσι προέκυψαν τρεις πιθανότητες συμβάντος-κατάστασης  $P(HWC)$ . Έγινε προσαρμογή καμπύλης στα τρία σημεία που ορίστηκαν και προέκυψε η καμπύλη που δίνει την πιθανότητα συμβάντος-κατάστασης κάθε τιμής συγκέντρωσης HWC.

Η καμπύλη έχει την παρακάτω εξίσωση :

$$P (HWC) = 1.39 \cdot 10^{-5} \cdot e^{-\frac{HWC}{1.73}} \quad (5-2)$$

όπου : [  $HWC$  = το περιεχόμενο του αέρα σε χαλάζι (  $gr \cdot m^{-3}$  ) ]

Με την παραπάνω εξίσωση δημιουργήθηκε και το **Διάγραμμα 5.2**. Οι ποσότητες που είναι μεγαλύτερες από την τιμή  $9.3 \text{ gr} \cdot m^{-3}$  (μεγαλύτερη τιμή που μετρήθηκε) προέκυψαν με γραμμική παρεμβολή. Αυτό έγινε γιατί το γεγονός ότι δεν παρουσιάστηκαν αυτές οι μεγαλύτερες τιμές δεν σημαίνει ότι δεν μπορεί και να εμφανιστούν κάποτε. Απλά η πιθανότητα για κάτι τέτοιο, αναλογικά με την συμπεριφορά της καμπύλης δηλαδή με γραμμική παρεμβολή, προκύπτει να είναι μικρή και να μικραίνει όσο μεγαλώνει η ποσότητα του  $HWC$ .



**Διάγραμμα 5.2:** Καμπύλη Χαλαζιού της Boeing για Τρία Σημεία Δεδομένων που χρησιμοποιήθηκαν και έγινε προσαρμογή καμπύλης σ' αυτά (Πηγή : AGARD "Recommended Practices For The Assessment Of The Effects Of Atmospheric Water Ingestion On The Performance And Operability Of Gas Turbine Engines" 1995)

Πρέπει να τονιστεί εδώ ότι υπάρχει ουσιώδης διαφορά ανάμεσα στην πιθανότητα που απεικονίζει το **Διάγραμμα 5.2** (πιθανότητα κάθε μέγιστης τιμής χαλαζόπτωσης στο χειρότερο μέρος του κόσμου) και της πιθανότητας να αντιμετωπίσει ένα αεροσκάφος την οποιασδήποτε έντασης χαλαζόπτωση. Αυτά τα δύο δεν θα πρέπει να συγχέονται.

Μία ανάλογη έρευνα με αυτήν της Boeing έγινε και στον ευρωπαϊκό χώρο από την εταιρεία **CFMI (GE & SNECMA Joint)**, η οποία μέσω της **Societe National**

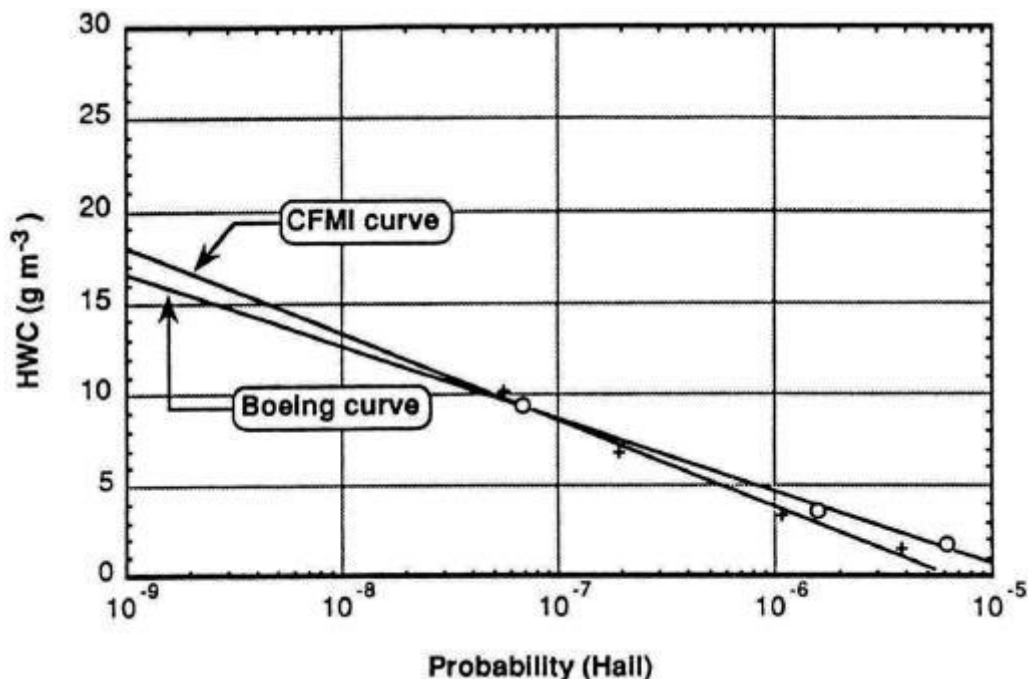
*d'Etude et de Construction de Moteurs d' Aviation (SNECMA)* υπέγραψε συμβόλαιο με το ερευνητικό κέντρο *Groupement National d'Etudes des FICaux Atmospheriques (GNEFA)* που βρίσκεται στο **Aubiere** της Γαλλίας. Έτσι το δεύτερο παραχώρησε στην **CFMI** μετεωρολογικά δεδομένα χαλαζόπτωσης από τον ευρωπαϊκό χώρο. Τα δεδομένα συλλέχθηκαν από το σταθμό Ραντάρ που βρίσκεται λίγο έξω από τη **Ζυρίχη** της Ελβετίας και ήταν στο πλαίσιο του προγράμματος **Grossversuch IV**.

Η **GNEFA** συγκέντρωσε 253 σημεία μέγιστης αντανάκλασης Ραντάρ τις χρονιές 1977-1982. Τα δεδομένα αυτά έπειτα επεξεργάστηκαν από την **CFMI** με ανάλογη μεθοδολογία όπως και της **Boeing**. Μικρή διόρθωση χρειάστηκε στα δεδομένα με ένα διορθωτικό συντελεστή λόγω ιδιομορφίας των μετρήσεων του ραντάρ στη χαλαζοθύελλα.

Η εξίσωση πιθανότητας στην οποία και κατέληξαν είναι η :

$$P(HWC) = 6.75 \cdot 10^{-6} \cdot e^{-\frac{HWC}{2.05}} \quad (5-3)$$

Η εξίσωση αυτή είναι εντελώς ανάλογη με αυτήν της **Boeing** και οι δύο εξισώσεις παρατίθενται μαζί στο **Διάγραμμα 5.3**.



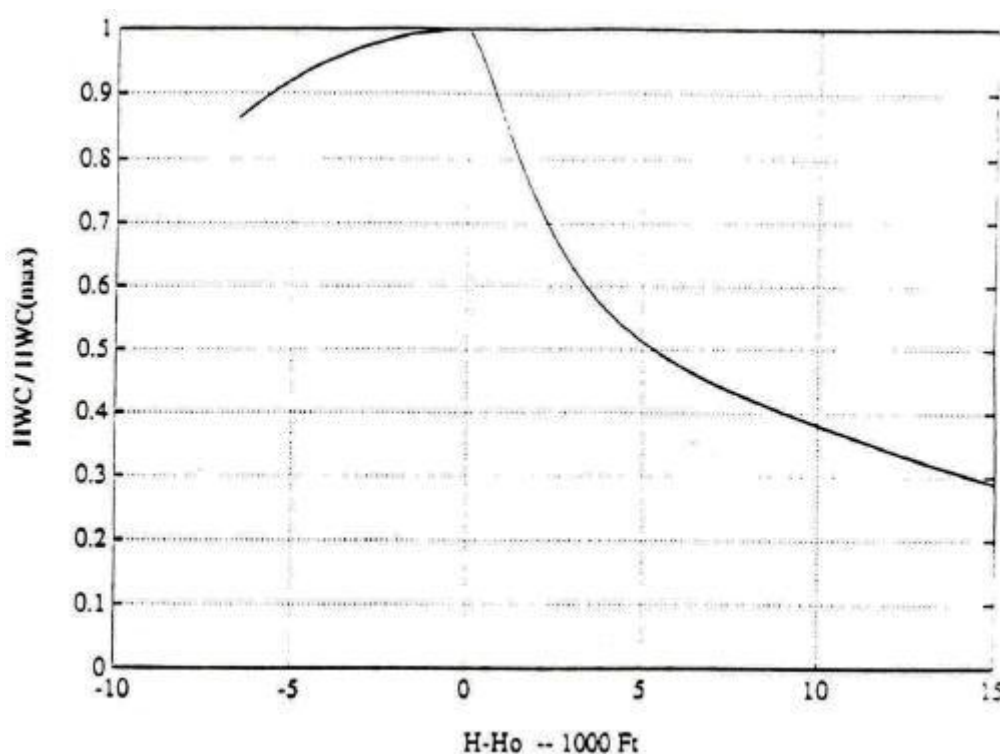
**Διάγραμμα 5.3:** Σύγκριση των Καμπύλων Χαλαζιού της **Boeing** και της **CFMI** (Πηγή : **AGARD "Recommended Practices For The Assessment Of The Effects Of Atmospheric Water Ingestion On The Performance And Operability Of Gas Turbine Engines" 1995**)

Από το **Διάγραμμα 5.1** όπου δίνεται η πιθανότητα  $P_c(HWC)$  για τα τρία ύψη των 2 Km, 4 Km και 6 Km σύμφωνα με το Ραντάρ του **ARC** και πάνω από το επίπεδο παγοποίησης, προκύπτει ότι για κάθε επίπεδο πιθανότητας η



ποσότητα *HWC* μειώνεται με το ύψος. Ο ρυθμός με τον οποίο μειώνεται το *HWC* βλέπουμε ότι είναι διαφορετικός για κάθε επίπεδο πιθανότητας.

Για να υπολογιστεί η μεταβολή του *HWC* με το ύψος μελετήθηκαν οι καμπύλες του διαγράμματος “*HWC - Probability*” στο επίπεδο πιθανότητας 99.8%. Αυτό έδωσε τρία σημεία στα οποία και έγινε προσαρμογή καμπύλης που έδωσε το Διάγραμμα 5.4.



**Διάγραμμα 5.4:** Κανονικοποιημένη συγκέντρωση χαλαζιού “*HWC*” ως συνάρτηση του ύψους “*H*” πάνω από το επίπεδο παγοποίησης “*H<sub>0</sub>*” (Πηγή : AGARD “Recommended Practices For The Assessment Of The Effects Of Atmospheric Water Ingestion On The Performance And Operability Of Gas Turbine Engines” 1995)

Εδώ πρέπει αναφερθεί ξανά ότι όλη η προηγούμενη διαδικασία αναφέρεται και έχει ισχύ για ύψη τα οποία βρίσκονται πάνω από το επίπεδο παγοποίησης δηλαδή περιοχές της ατμόσφαιρας όπου το χαλάζι αποτελείται αποκλειστικά από πάγο και δεν υπάρχει ουδεμία ποσότητα υγρασίας στην επιφάνεια του (δεξιά της τιμής  $H - H_0 = 0$  στο **Διάγραμμα 5.4**).

Για επίπεδα κάτω του σημείου παγοποίησης χρησιμοποιήθηκε ένα μοντέλο υγροποίησης του χαλαζιού (*Rasmussen and Heymsfield 1987*) μέχρι του σημείου στο οποίο το επιφανειακό νερό αρχίζει να αποσπάται από πάνω του (*shedding*). Έτσι επεκτάθηκε το διάγραμμα και για τα επίπεδα κάτω του επιπέδου παγοποίησης (αριστερά της τιμής  $H - H_0 = 0$  στο **διάγραμμα Διάγραμμα 5.4**).

### 5.3 Διάμετρος χαλαζιού ανά το υψόμετρο

Η κατανομή των διαμέτρων για κάθε ποσότητα συγκέντρωσης  $HWC$  δίνεται γενικά από μία εκθετική εξίσωση. Η εξίσωση αυτή προκύπτει από πειραματικά δεδομένα που συλλέχθηκαν σε έδαφος και σε αέρα από πολλούς ερευνητές και σε βάθος χρόνου.

Στο σύνολο τους οι έρευνες [19] καταλήγουν γενικά σε μία εξίσωση της μορφής :

$$N(D) = N_0 \cdot e^{-\Lambda \cdot D} \quad \text{για } (D_{\min} < D < D_{\max}) \quad (5-4)$$

όπου : [ $N(D)$  = ο αριθμός σωματιδίων που βρίσκονται σε ένα διάστημα διαμέτρων  $D+dD$  (-),  $N_0$  = ο συντελεστής παρεμβολής ( $m^{-4}$ ),  $\Lambda$  = ο συντελεστής κλίσης ( $m^{-1}$ ),  $D$  = η διάμετρος χαλαζιού (SI)]

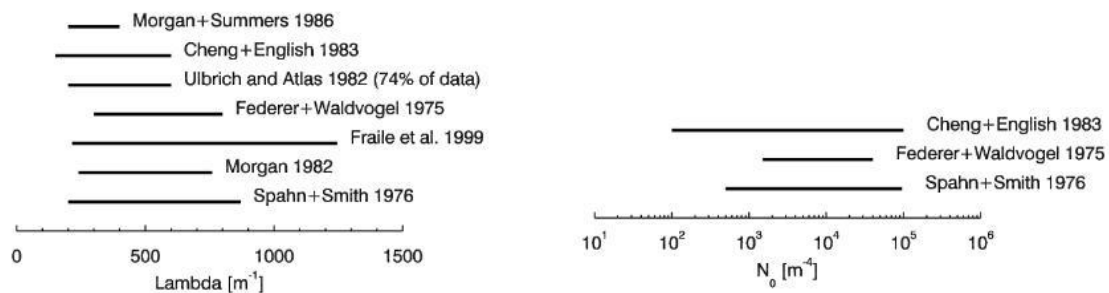
Ως τιμή  $D_{\min}$  λαμβάνεται τα 5mm εφόσον αυτή είναι η ελάχιστη διάμετρος χαλαζιού και ως  $D_{\max}$  λαμβάνεται μία τιμή τείνουσα στο άπειρο.

Η εξίσωση (5-4) μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για διαμέτρους κάτω των 5mm αλλά η ισχύς της είναι γενικά αμφιλεγόμενη [19].

Η εξίσωση (5-4) επίσης μπορεί να γραφτεί και ως ολοκλήρωμα. Με τον τρόπο αυτό διαβάζεται ως ο αριθμός χαλαζιών που έχουν διάμετρο μεταξύ των ορίων  $D_1$  και  $D_2$  ανά τετραγωνικό μέτρο αέρα δηλαδή :

$$N = \int_{D_1}^{D_2} N_0 \cdot \exp(-\Lambda \cdot D) dD \quad (5-5)$$

Οι παράμετροι  $N_0$  (παρεμβολής) και  $\Lambda$  (κλίσης) προσδιορίζονται εμπειρικά και οι τιμές που δίνονται από διάφορους ερευνητές φαίνονται στο Διάγραμμα 5.5.



**Διάγραμμα 5.5:** Εμπειρικές τιμές των τιμών  $N_0$  και  $\Lambda$  από τα πειράματα διαφόρων ερευνητών (Πηγή : EASA "Hail Threat Standardization" 2010)

Γενικά οι τιμές τους βρίσκονται στα όρια :

$$1500 \leq N_0 \leq 52000 \quad , \quad (m^{-4}) \quad (5-6)$$

$$330 \leq \Lambda \leq 640 \quad , \quad (m^{-1}) \quad (5-7)$$

Ενδεικτική τιμή για τον συντελεστή κλίσης  $\Lambda$  ώστε να προκαλείται η δυσμενέστερη περίπτωση διασποράς της συγκέντρωσης είναι η  $\Lambda = 200 m^{-1}$ .

Το ποσό *HWC* που καταλαμβάνει κάθε ομάδα χαλαζιών με διαμέτρους από  $D_1$  έως  $D_2$  δίνεται την εξίσωση (5-8) :

$$W = \frac{\pi}{6} \rho_h \int_{D_1}^{D_2} N(D) D^3 dD \quad (5-8)$$

όπου : [ $W$  = το περιεχόμενο σε νερό των χαλαζιών στο εύρος  $D + dD$  ( $gr \cdot m^{-3}$ ),  $\rho_h$  = η πυκνότητα χαλαζιού ( $gr \cdot m^{-3}$ )]

Ο συντελεστής παρεμβολής  $N_0$  με γνωστό το συντελεστή κλίσης  $\Lambda$  μπορεί να υπολογιστεί ολοκληρώνοντας την σχέση (5-8) από μηδέν έως άπειρο από όπου και προκύπτει η σχέση :

$$HWC = \pi \cdot \rho_h \cdot \frac{N_0}{\Lambda^4} \quad (5-9)$$

όπου : [ $HWC$  = το συνολικό περιεχόμενο σε νερό ( $gr \cdot m^{-3}$ ),  $\rho_h$  = η πυκνότητα του χαλαζιού ( $gr \cdot m^{-3}$ ),  $N_0$  = ο συντελεστής παρεμβολής (SI),  $\Lambda$  = ο συντελεστής κλίσης (SI)]

Λύνοντας τώρα το ολοκλήρωμα προκύπτει η παρακάτω εξίσωση :

$$W = \frac{\pi}{6} N_0 \cdot \rho_h \cdot \left[ \exp(-\Lambda D_1) \cdot \left( \frac{D_1^3}{\Lambda} + \frac{3D_1^2}{\Lambda^2} + \frac{6D_1}{\Lambda^3} + \frac{6}{\Lambda^4} \right) - \exp(-\Lambda D_2) \cdot \left( \frac{D_2^3}{\Lambda} + \frac{3D_2^2}{\Lambda^2} + \frac{6D_2}{\Lambda^3} + \frac{6}{\Lambda^4} \right) \right] \quad (5-10)$$

## 5.4 Συχνότητα εμφάνισης χαλαζιού

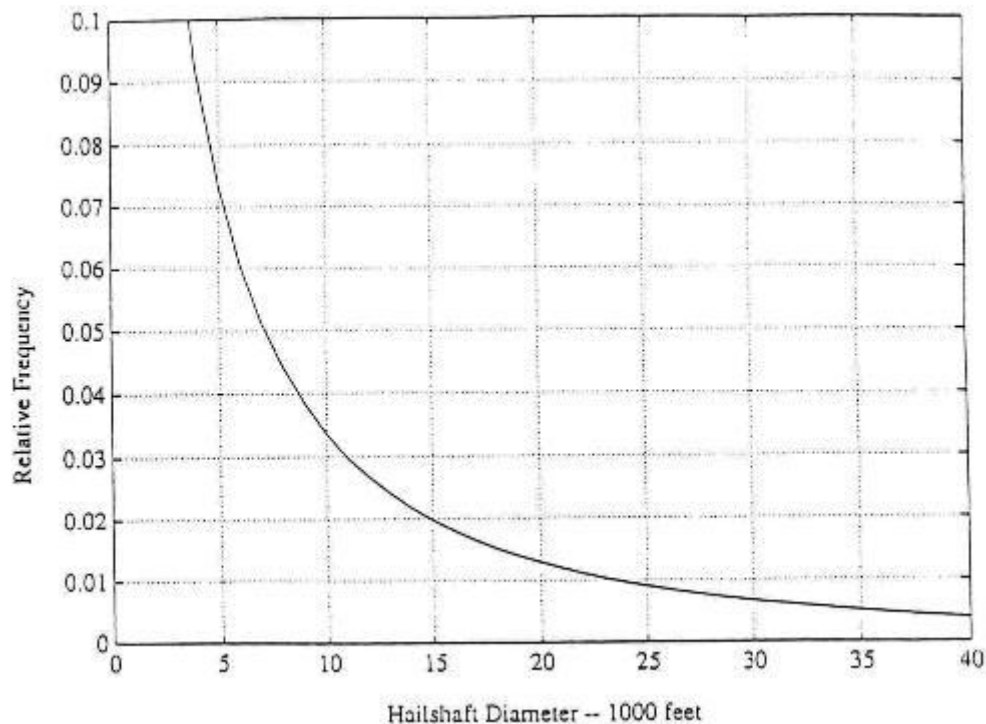
Μέχρι τώρα υπολογίστηκε η πιθανότητα που έχει ένα αεροσκάφος να συναντήσει μία συγκεκριμένη συγκέντρωση χαλαζιού στην ατμόσφαιρα στιγμιαία.

Είναι απαραίτητο όμως να γίνει μία εκτενέστερη μελέτη αυτού του γεγονότος σε βάθος χρόνου.

Για την θέσπιση των ορίων πιστοποίησης πρέπει να υπολογιστεί ένα νέο μέγεθος πιθανότητας, η **πιθανότητα διάρκειας**  $P_{duration} = P_D(t)$ .

Η πιθανότητα  $P_D(t)$  από τον ορισμό της είναι ανεξάρτητη της συγκέντρωσης  $HWC$  και υπολογίζεται με βάση τα 2868 δεδομένα της έρευνας της Boeing (ή των αντίστοιχων δεδομένων του ευρωπαϊκού προγράμματος της CFMI). Από αυτά τα δεδομένα υπολογίζεται η κατανομή των διαμέτρων των χαλαζοθυελλών και στη συνέχεια επεξεργάζονται τα σημεία για την εξαγωγή της πιθανότητας διάρκειας.

Η κατανομή των διαμέτρων χαλαζοθύελλας σύμφωνα με την έρευνα απεικονίζεται στο **Διάγραμμα 5.6**.



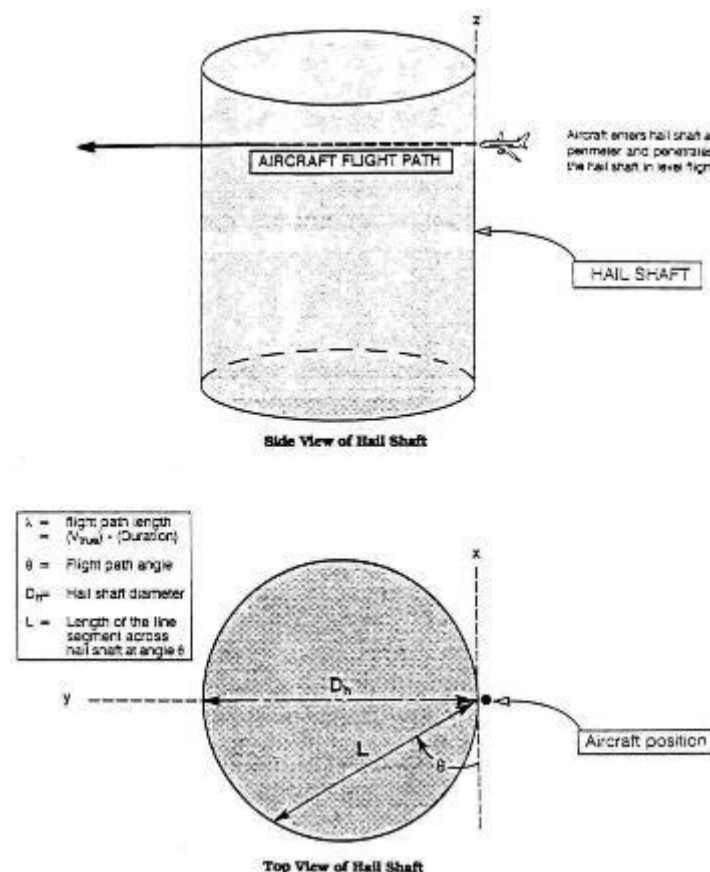
**Διάγραμμα 5.6: Σχετική Συχνότητα Συγκέντρωσης Ισοδύναμης Διαμέτρου από τα δεδομένα του ARC με διπλής πόλωσης Radar Μετρήσεις (Πηγή : AGARD "Recommended Practices For The Assessment Of The Effects Of Atmospheric Water Ingestion On The Performance And Operability Of Gas Turbine Engines" 1995)**

Για την μελέτη της πιθανότητας διάρκειας γίνονται σε πρώτη φάση οι εξής παραδοχές :

1. Οι χαλαζοθύελλες είναι κυκλικές.
2. Το αεροσκάφος εισέρχεται στην χαλαζοθύελλα περιμετρικά.
3. Το αεροσκάφος έχει σταθερό ύψος καθ όλη τη διάρκεια του φαινομένου.

4. Οι χαλαζοθύελλες είναι σταθερές στο χώρο.
5. Η κατανομή της συγκέντρωσης μέσα στην χαλαζοθύελλα είναι σταθερή.
6. Η πορεία του αεροσκάφους είναι ευθεία.
7. Η πιθανότητα διάρκειας είναι ανεξάρτητη της συγκέντρωσης.

Οι παραπάνω παραδοχές συνοψίζονται σχηματικά και στο **Σχήμα 5.7** :



**Σχήμα 5.7: Παραδοχές Πιθανότητας Διάρκειας (Πηγή : AGARD “Recommended Practices For The Assessment Of The Effects Of Atmospheric Water Ingestion On The Performance And Operability Of Gas Turbine Engines” 1995)**

Η διάμετρος της χαλαζοθύελλας ορίζεται ως  $D_h$ . Η γωνία με την οποία εισέρχεται το αεροσκάφος στην περιοχή της χαλαζοθύελλας είναι  $\theta$ . Με αυτή τη γωνία και αυτή τη διάμετρο χαλαζοθύελλας η απόσταση που καλείται να διανύσει το αεροσκάφος μέσα στη χαλαζοθύελλα είναι έστω  $L$ . Ορίζεται τέλος ως  $\lambda$  η απόσταση που διανύει σε κάποιο χρονικό διάστημα το αεροσκάφος έχοντας ως δεδομένο την ταχύτητα του και το χρονικό διάστημα αυτό.

Για την έρευνα της Boeing θεωρήθηκε η τιμή του  $\lambda$  ως  $\lambda = 5514m$ . Η τιμή αυτή προκύπτει από το γεγονός ότι οι περισσότεροι πιλότοι στην Βόρειο Αμερική ανέφεραν διάρκεια χαλαζοθύελλας 30 sec και με βάση το ότι η τυπική ταχύτητα ενός αεροσκάφους αερογραμμών είναι περίπου 184 m/s. Για να υπολογιστεί η

ταχύτητα αυτή θεωρείται πως η θερμοκρασία περιβάλλοντος είναι  $0^{\circ}\text{C}$  δηλαδή ένα ύψος παγοποίησης στα 15000 *ft*.

Η πιθανότητα η απόσταση  $L$  να είναι μεγαλύτερη του  $\lambda$  για δεδομένο  $D_h$  μπορεί να γραφτεί ως το γινόμενο της πιθανότητας  $P(L > \lambda)$  επί την πιθανότητα που υπάρχει η διάμετρος  $D_h$  να είναι ίση με μία τιμή έστω  $\xi$  δηλαδή :

$$P\{L > \lambda, D_h = \xi\} = P\{L > \lambda | D_h = \xi\} \times P\{D_h = \xi\} \quad (5-11)$$

όπου : [ $\xi$  = μία ποσότητα μήκους (SI)]

Η παραπάνω εξίσωση με δεδομένο ότι  $L = D_h \cdot \sin \theta$  γράφεται και ως :

$$P\{L > \lambda, D_h = \xi\} = P\left\{\theta > \arcsin\left(\frac{\lambda}{D_h}\right) | D_h = \xi\right\} \times P\{D_h = \xi\} \quad (5-12)$$

Αυτό που δίνει η σχέση (5-12) είναι η πιθανότητα για μία τιμή της γωνίας  $\theta(\sim \lambda, D_h)$  το αεροσκάφος να συναντήσει μία χαλαζοθύελλα για πάνω από 30 δευτερόλεπτα.

Για δεδομένο μήκος πτήσης  $\lambda$  και δεδομένη διάμετρο χαλαζοθύελλας  $D_h$  το εύρος γωνιών για τις οποίες ισχύει ότι  $L > \lambda$  είναι το  $\left[0, \frac{\pi/(2-\theta)}{\pi/2}\right]$ .

Έτσι η πιθανότητα το μήκος πτήσης  $\lambda$  να είναι μικρότερο του μήκους χαλαζοθύελλας  $L$  είναι :

$$P\left\{\theta > \arcsin\left(\frac{\lambda}{D_h}\right) | D_h = \xi\right\} = (\pi/2 - \arcsin(\lambda/\xi)) / (\pi/2) \quad (5-13)$$

Η πιθανότητα η διάμετρος της χαλαζοθύελλας να πάρει μία συγκεκριμένη τιμή δίνεται από το διάγραμμα κατανομής διαμέτρων χαλαζοθύελλας. Έτσι μπορεί να εκφραστεί ως :

$$P\{D_h = \xi\} = f_D(\xi) \quad (5-14)$$

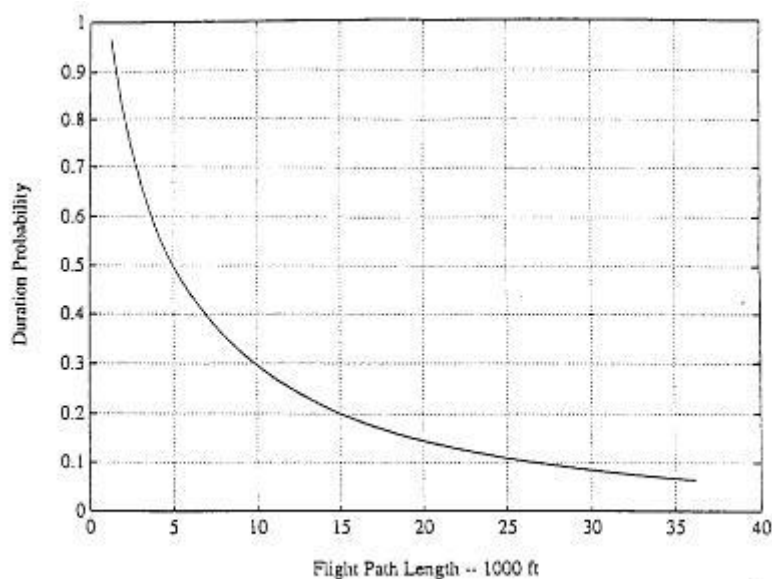
Τελικά η πιθανότητα η απόσταση  $L$  να είναι μεγαλύτερη του  $\lambda$  για δεδομένο  $D_h$  γράφεται ως :

$$P\{L > \lambda, D_h = \xi\} = (\pi/2 - \arcsin(\lambda/\xi)) / (\pi/2) \times f_D(\xi) \quad (5-15)$$

απο όπου και προκύπτει ότι :

$$P_D = P\{L > \lambda\} = \int_{\lambda}^{\infty} [(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\frac{\lambda}{\xi})) / (\frac{\pi}{2})] \cdot f_D(\xi) d\xi \quad (5-16)$$

Η εξίσωση (5-16) αναπαρίσταται γραφικά στο **Διάγραμμα 5.8** :



**Διάγραμμα 5.8: Πιθανότητα Διάρκειας ως συνάρτηση του μήκους πτήσης (Πηγή : AGARD “Recommended Practices For The Assessment Of The Effects Of Atmospheric Water Ingestion On The Performance And Operability Of Gas Turbine Engines” 1995)**

Για  $\lambda = 5154m$  και ολοκληρώνοντας εξίσωση (5-16) από  $\lambda$  έως  $\infty$  προκύπτει η πιθανότητα διάρκειας να είναι  $P_D = 0.16$ .

Αυτό δηλώνει ότι αν ένα αεροσκάφος πετά με  $184 \text{ m/s}$  σε περιβάλλον θερμοκρασίας  $0^\circ C$  μέσα σε μία χαλαζοθύελλα έχει 16% πιθανότητα να μείνει για 30 δευτερόλεπτα μέσα σε αυτήν.

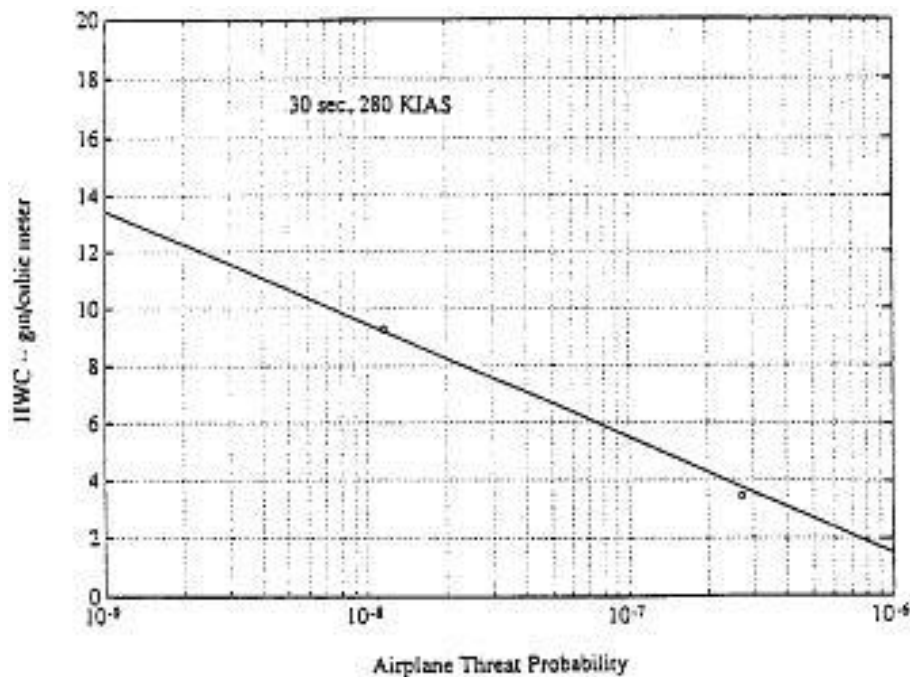
Με όλη την προηγούμενη ανάλυση προέκυψε λοιπόν ότι :

*Η πιθανότητα ένα αεροσκάφος που πετά με  $184 \text{ m/s}$  στην ατμόσφαιρα σε περιβάλλον θερμοκρασίας μηδέν βαθμών κελσίου να συναντήσει για πάνω από 30s μία χαλαζοθύελλα συγκεκριμένης συγκέντρωσης HWC δίνεται ως το γινόμενο τριών ανεξάρτητων πιθανοτήτων, της πιθανότητας συμβάντος χαλαζοθύελλας  $P_{probability}$ , της πιθανότητας συμβάντος συγκέντρωσης χαλαζοθύελλας  $P_{conditional}$  και της πιθανότητας διάρκειας χαλαζοθύελλας  $P_{duration}$ .*

Αναλυτικότερα :

$$\begin{aligned}
 P(HWC) &= P_{probability} \times P_{conditional} \times P_{duration} = \\
 &= P_{joint} \times P_{duration} = \left[ 1.39 \cdot 10^{-5} \cdot e^{\frac{HWC}{1.73}} \right] \cdot 0.16
 \end{aligned}
 \tag{5-17}$$

ή γραφικά όπως στο **Διάγραμμα 5.9** :



**Διάγραμμα 5.9:** Καμπύλη Κινδύνου του ARC για διάρκεια 30s με ταχύτητα 280 KIAS, θερμοκρασία 0 Celsius και σε ύψος 15000ft (Πηγή : AGARD "Recommended Practices For The Assessment Of The Effects Of Atmospheric Water Ingestion On The Performance And Operability Of Gas Turbine Engines" 1995)

## 5.5 Η θέσπιση των Standards

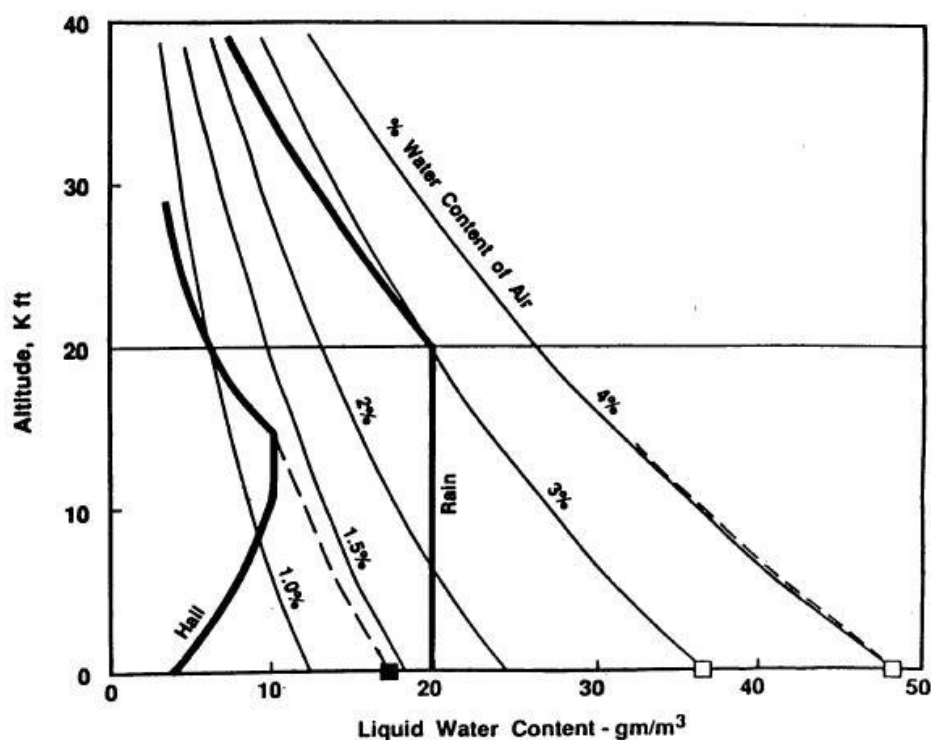
Η **AIA** (*Aerospace Industries Association*) για την πιστοποίηση των μηχανών απαιτεί να διασφαλίζεται ένα επίπεδο πιθανότητας  $P(HWC)=10^{-8}$ . Αυτό σύμφωνα με το **Διάγραμμα 5.9** σημαίνει ότι θα πρέπει να διασφαλίζεται παγκοσμίως ότι υπάρχει μόνο μία μικρή πιθανότητα της τάξης του 0.000001% αν ένα αεροσκάφος πετά με 280 KIAS<sup>1</sup> να βρεθεί μέσα σε μία χαλαζοθύελλα με

<sup>1</sup> KIAS (*Knots Indicated Air Speed*) είναι όρος που χρησιμοποιείται στην αεροπλοΐα για την ταχύτητα αέρος του αεροσκάφους



πλήθος συγκεντρώσεων χαλαζιού των οποίων η μέγιστη τιμή θα είναι 9.5 γραμμάρια ανά κυβικό μέτρο.

Με δεδομένο ότι για την Βόρειο Αμερική η μέγιστη συγκέντρωση εμφανίζεται στα 15000 *ft* και για την Ευρώπη στα 12000 *ft* και από το γεγονός ότι η συγκέντρωση θα εμφανίζει το μέγιστο των  $10 \text{ gr} \cdot \text{m}^{-3}$ , προκύπτει από το διάγραμμα ύψους - συγκέντρωσης (Διάγραμμα 5.4), το επόμενο διάγραμμα που χρησιμοποιείται από τους οργανισμούς πιστοποίησης. Η καμπύλη για την περίπτωση βροχής εξάγεται και αυτή με ανάλογο τρόπο.



Διάγραμμα 5.10: Ποσότητες βροχής και χαλαζιού ανά ύψος για την Πιστοποίηση των Αεροπορικών Κινητήρων (Πηγή : AGARD "Recommended Practices For The Assessment Of The Effects Of Atmospheric Water Ingestion On The Performance And Operability Of Gas Turbine Engines" 1995)

Η διάμετρος του χαλαζιού σε ποσοστό επί τις εκατό στο σύνολο της ποσότητας χαλαζιού ενός κυβικού μέτρου αέρα για τις προδιαγραφές πιστοποίησης του **FAA Part 33** δίνονται από τον Πίνακας 5.11.

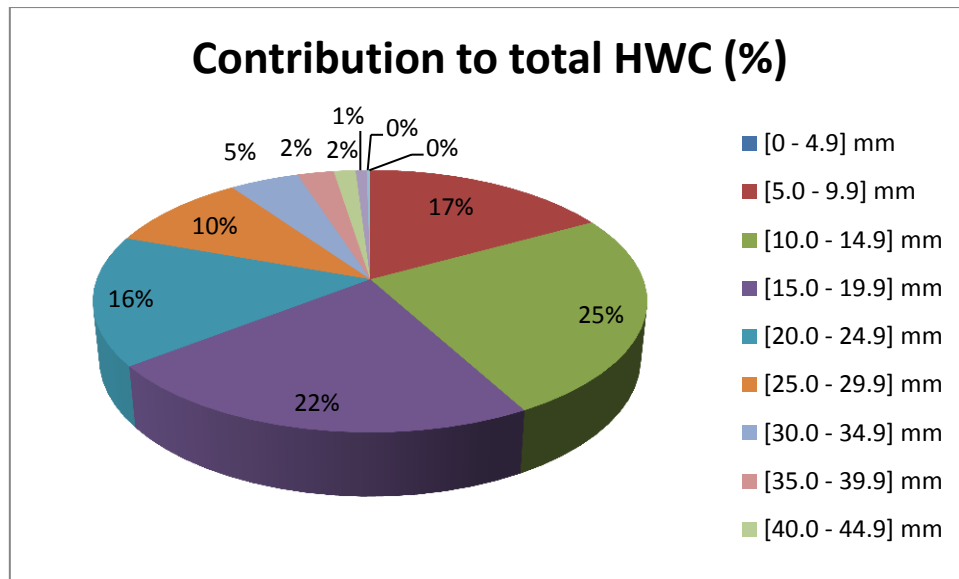
**Προφανώς υπάρχει επίδραση της κατανομής των διαμέτρων απο το ύψος και ο συγκεκριμένος πίνακας κρίνεται ότι αναφέρεται στο ύψος των 15000 *ft*.**

Η πηγή αυτού του πίνακα είναι δεδομένα από το : (Results of the Aerospace Industries Association Propulsion Committee Study, Project PC 338-1, June 1990) και χρησιμοποιούνται γενικά από όλους τους διεθνείς οργανισμούς πιστοποίησης (π.χ. FAA, EASA).

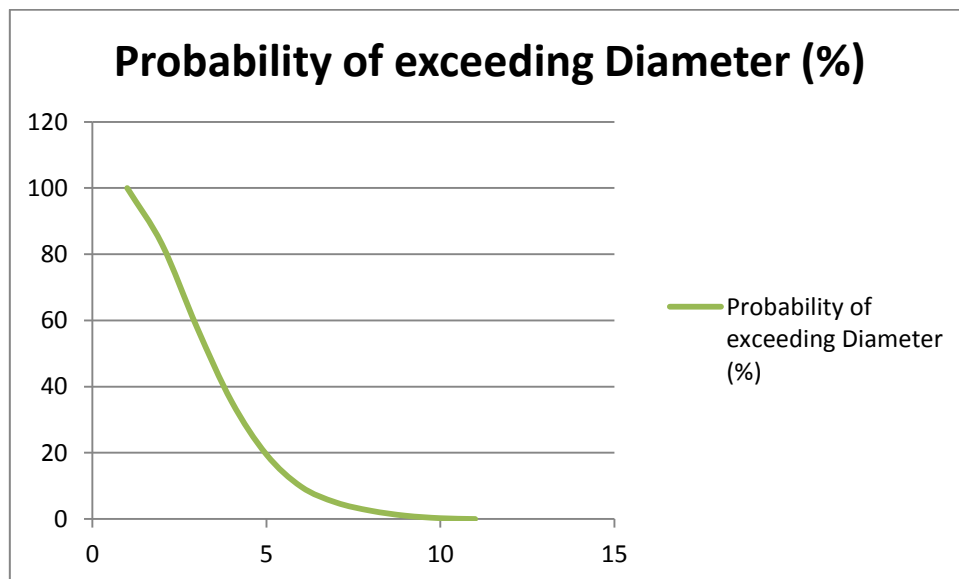
Hail Diameter (mm)	Contribution total (HWC) (%)
0-4.9----- -----	0
5.0-9.9----- -----	17.00
10.0-14.9----- -----	25.00
15.0-19.9----- -----	22.50
20.0-24.9----- -----	16.00
25.0-29.9----- -----	9.75
30.0-34.9----- -----	4.75
35.0-39.9----- -----	2.50
40.0-44.9----- -----	1.50
45.0-49.9----- -----	0.75
50.0-55.0----- -----	0.25
Total----- ----	100

**Πίνακας 5.11: Κατανομή διαμέτρων Χαλαζιού για την πιστοποίηση των Αεροπορικών Κινητήρων**

Ο πίνακας Πίνακας 5.11 δίνεται σχηματικά στο Διάγραμμα 5.12 και στο Διάγραμμα 5.13.



Διάγραμμα 5.12: Κατανομή διαμέτρων Χαλαζιού για την πιστοποίηση των Αεροπορικών Κινητήρων



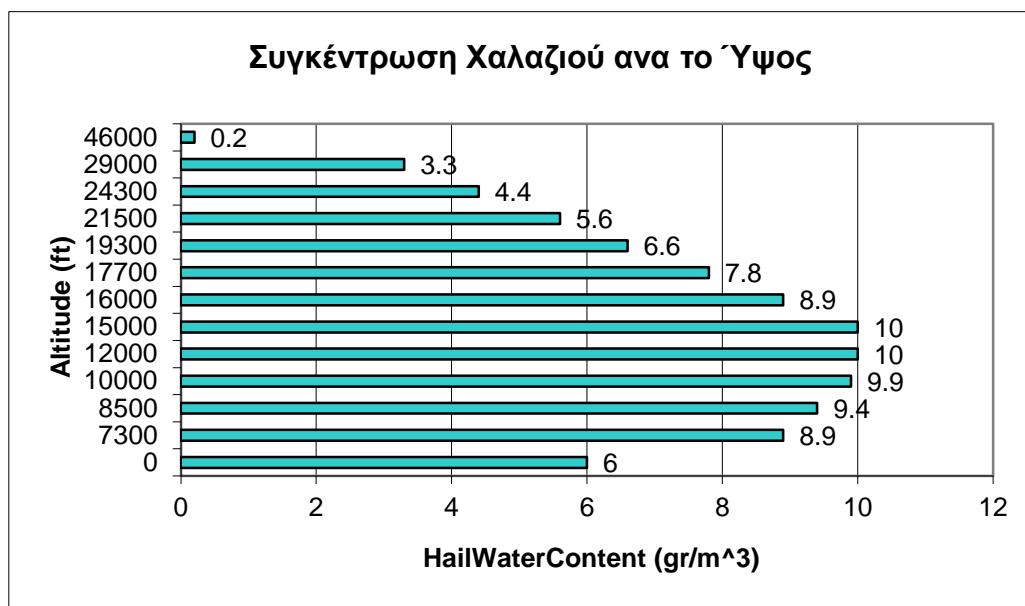
Διάγραμμα 5.13: Κατανομή Πιθανότητα Υπέρβασης Διαμέτρου σε μία Ποσότητα Χαλαζιού σύμφωνα με την κατανομή διαμέτρων Χαλαζιού για την πιστοποίηση των Αεροπορικών Κινητήρων

Η μάζα της συνολικής ποσότητας χαλαζιού ανά κυβικό μέτρο σε κάθε υψόμετρο δίνεται από τον Πίνακας 5.14 σύμφωνα με τις ίδιες προδιαγραφές πιστοποίησης του FAA. Η πηγή αυτού του πίνακα είναι δεδομένα από το : (Results of the Aerospace Industries Association Propulsion Committee Study, Project PC 338-1, June 1990) και χρησιμοποιούνται γενικά από όλους τους διεθνείς οργανισμούς πιστοποίησης (χ. FAA, EASA).

Altitude (ft)	Hail water content (gr water/ meter <sup>3</sup> air)
0-----	6.0
7,300-----	8.9
8,500-----	9.4
10,000-----	9.9
12,000-----	10.0
15,000-----	10.0
16,000-----	8.9
17,700-----	7.8
19,300-----	6.6
21,500-----	5.6
24,300-----	4.4
29,000-----	3.3
46,000-----	0.2

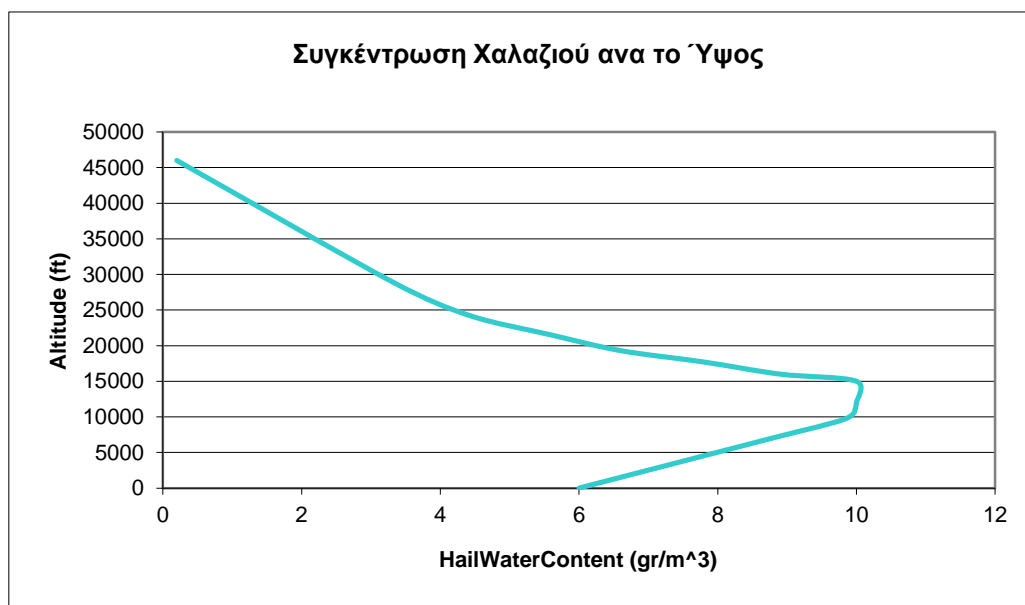
**Πίνακας 5.14: Συγκέντρωση Χαλαζιού ανά Υψόμετρο για την πιστοποίηση των Αεροπορικών Κινητήρων**

Ο Πίνακας 5.14 δίνει σχηματικά το Διάγραμμα 5.15 και το **Διάγραμμα 5.16** :



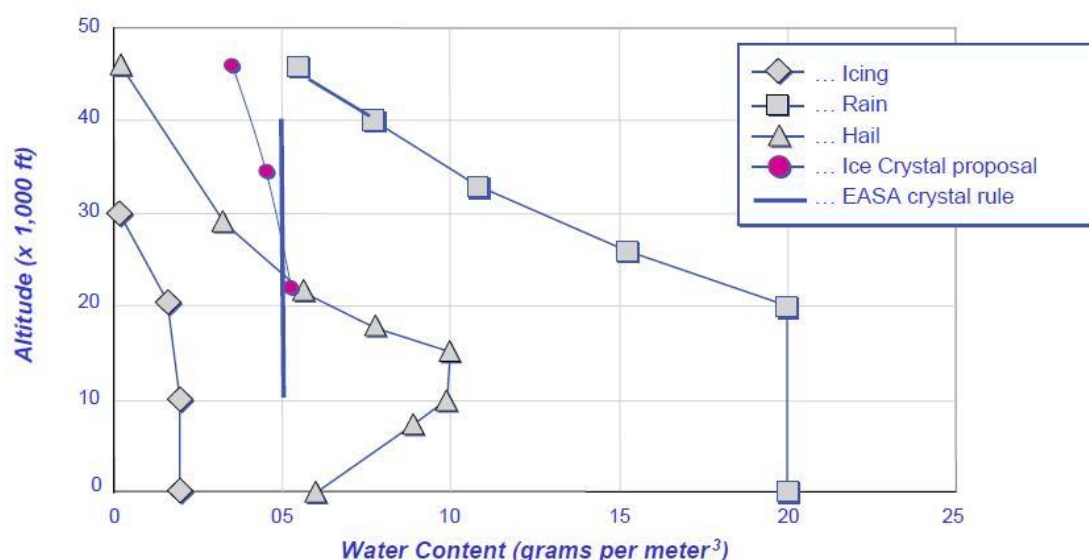
**Διάγραμμα 5.15:** Πιθανότητα Συγκέντρωση Χαλαζιού ανά Υψόμετρο για την πιστοποίηση των Αεροπορικών Κινητήρων

Για τα ενδιάμεσα ύψη οι συγκεντρώσεις χαλαζιού συνιστάται να υπολογίζονται με γραμμική παρεμβολή [18], και έτσι σχηματίζεται το επόμενο διάγραμμα συγκέντρωσης χαλαζιού ανά το υψόμετρο **Διάγραμμα 5.16**.



**Διάγραμμα 5.16:** Συγκέντρωση Χαλαζιού ανά Υψόμετρο σε όλα τα ύψη για την πιστοποίηση των Αεροπορικών Κινητήρων

Όπως ήδη έχει αναφερθεί τα προηγούμενα στάνταρ πιστοποίησης θεσμοθετήθηκαν αρκετά χρόνια πριν τότε που οι αεροπορικές μηχανές βρίσκονταν σε ένα προγενέστερο τεχνολογικό επίπεδο. Σήμερα οι μηχανές είναι πιο ανεπτυγμένες και διαφορετικής φιλοσοφίας. Τα σημερινά στάνταρ θα πρέπει να αναφέρονται στις σύγχρονες μηχανές και στους σύγχρονους κινδύνους που τις απειλούν. Η εταιρεία **General Electric** σε μία δημοσίευση της [20] προτείνει τα επόμενα στάνταρ όπως φαίνονται στο **Διάγραμμα 5.17** :



**Διάγραμμα 5.17:** Προτεινόμενα Στάνταρ Πιστοποίησης από την GE (Πηγή : McVey, Pullen, Oliver, Pritchard et al GE Aviation “Inclement Weather Regulations for Turbofan Engines, the Need for More Comprehensive Requirements and Methods of Compliance” 2007)

## 5.6 Η Τερματική Ταχύτητα του Χαλαζιού

Η κατακόρυφη ταχύτητα που έχει το χαλάζι όταν πέφτει στην ατμόσφαιρα είναι σταθερή<sup>1</sup> και ονομάζεται τερματική ταχύτητα.

Για να υπολογιστεί η τερματική ταχύτητα το χαλάζι θεωρείται ότι είναι σφαιρικό και ότι κατέρχεται χωρίς ιδιοπεριστροφή ή άλλη κίνηση πέραν της κατακόρυφης πτώσης. Οι παραπάνω παραδοχές στην πραγματικότητα δεν ισχύουν απόλυτα αφού αποδεικνύεται σε μελέτες [12] ότι το χαλάζι όταν κατέρχεται υπό συνθήκες μπορεί να εκτελεί περιδίνηση και να μην είναι απόλυτα σφαιρικό. Όταν η μάζα του είναι μεγάλη όμως κατέρχεται συνήθως ομαλά.

<sup>1</sup> Η τερματική ταχύτητα είναι σταθερή για τον ίδιο λόγο που όταν ένας αλεξιπτωτιστής εκτελεί ελεύθερη πτώση από αεροπλάνο, πρώτου ανοίξει το αλεξίπτωτο η ταχύτητα πτώσης του έχει σταθεροποιηθεί. Αυτό οφείλεται στο ότι ναι μεν το βάρος που έλκει τον αλεξιπτωτιστή προς τα κάτω είναι σταθερό και ίσο με  $m g$ , όμως η αντίσταση του αέρα είναι ευθέως ανάλογη της ταχύτητας και δίνεται από μία σχέση της μορφής  $D=b U$ . Σύντομα λοιπόν η ταχύτητα θα γίνει τέτοια ώστε ο αλεξιπτωτιστής να κατέρχεται μέσα σε μία ισορροπία δυνάμεων άρα και με σταθερή ταχύτητα.

Η ισορροπία δυνάμεων εκφράζεται με την επόμενη σχέση που λέει ότι η αντίσταση είναι ίση με το βάρος :

$$m \cdot g = \frac{1}{2} c_D U_\infty^2 \rho_\alpha A_C \quad (5-18)$$

όπου : [ $m$  = η μάζα του χαλαζοκόκκου (SI),  $g$  = η επιτάχυνση της βαρύτητας (SI),  $c_D$  = ο συντελεστής αντίστασης (-),  $U_\infty$  = η τερματική ταχύτητα (SI),  $\rho_\alpha$  = η πυκνότητα του αέρα (SI),  $A_C$  = το εμβαδό της ισημερινής τομής του χαλαζιού (SI)]

Η βαρυτική σταθερά  $g$  θεωρείται ότι είναι σταθερή και δεν αλλάζει με το ύψος.

Είναι προφανές λοιπόν ότι για να υπολογιστή η ταχύτητα πρέπει να υπάρχει μία έκφραση για την πυκνότητα, το συντελεστή αντίστασης και το εμβαδό της επιφάνειας του χαλαζιού.

Η πυκνότητα του αέρα  $\rho_\alpha$  διαφοροποιείται με το ύψος και την κατάσταση της ατμόσφαιρας. Μπορεί να θεωρηθεί μία μείωση της πυκνότητας με το ύψος όπως αυτή της ISA (*International Standard Atmosphere*). Η πυκνότητα της ISA λαμβάνει ως κατάσταση εδάφους αυτήν της τυπικής ατμόσφαιρας ISA και σύμφωνα με τις γενικές εξισώσεις αδιαβατικής μεταβολής προκύπτει η επόμενη σχέση που δίνει την πυκνότητα του αέρα για κάθε ύψος.

$$\rho_\alpha = \left[ \frac{44.3308 - H}{42.2665} \right]^{1/0.234969} \quad (5-19)$$

όπου : [ $H$  = το ύψος από τη μέση στάθμη θάλασσας MSL ( Km )]

Η παραπάνω έκφραση λόγω των παραδοχών της τυπικής ατμόσφαιρας στο έδαφος (ISA) έχει μεγάλη απόσταση από την πραγματικότητα, κυρίως σε συνθήκες κακοκαιρίας όπου εμφανίζεται το χαλάζι. Σε περιπτώσεις καταιγίδας μόνο πειραματικά ή στατιστικά δεδομένα ίσως μπορούν να βοηθήσουν περισσότερο στην εύρεση του ρυθμού μεταβολής της θερμοκρασίας και της πίεσης.

Σύμφωνα με μετρήσεις από την ανάλυση με Ραντάρ των 18 ημερών χαλαζόπτωσης στο Denver του Καναδά (*Beckwith 1960*) και με θερμοκρασίες στην περιοχή κάτω των  $5^\circ C$  δηλαδή μέσα στην περιοχή του νέφους, ισχύουν οι επόμενες σχέσεις :

$$T_A = 53 \cdot \ln(0.284 \cdot P) \quad (5-20)$$

όπου : [ $T_A$  = η θερμοκρασία ανά ύψος (SI),  $P$  = η πίεση ανά ύψος ( $mbar$ ) ]

$$H = 2.76 \cdot 10^{-4} \cdot (9.0066 \cdot 10^4 - T_A^2) \quad (5-21)$$

όπου : [ $T_A$  = η θερμοκρασία ανά ύψος (SI),  $H$  = το ύψος ( $Km$ ) ]

Ενδεικτικές τιμές της θερμοκρασίας και της πίεσης για την περιοχή κάτω του νέφους δίνονται στον **Πίνακας 5.18** :

$T_A (^{\circ}C)$	$p(mb)$	$H(Km)$
5	680	3.5
10	720	3.0
15	760	2.5
20	810	2.0
25	865	1.6

**Πίνακας 5.18:** Ενδεικτικές τιμές Πίεσης και Θερμοκρασίας κάτω από ένα καταιγιδοφόρο νέφος (Πηγή : List "Quasi State Icing And Melting Conditions And Heat Transfer Of Spherical And Spheroidal Hailstones" 1967)

Φαίνεται από τον **Πίνακας 5.18** ότι ο ρυθμός αύξησης της θερμοκρασίας κινούμενοι προς το έδαφος είναι  $10^{\circ}C$  ανά Km.

$$T = 5.0 + 10.0 \cdot H \quad (5-22)$$

όπου : [ $T$  = η θερμοκρασία κάτω από το νέφος ( $^{\circ}C$ ),  $H$  = το υψόμετρο ( $Km$ ) ]

Με προσαρμογή καμπύλης επάνω στα σημεία από τα δεδομένα του **Πίνακας 5.18** προκύπτει μία σχέση για την πίεση σε σχέση με το υψόμετρο της μορφής :

$$P = -23325 \cdot \ln(H) + 97370 \quad (5-23)$$

όπου : [ $P$  = η ατμοσφαιρική πίεση κάτω από το νέφος ( $Pa$ ) ]

Επανερχόμενοι στην εξίσωση ισορροπίας δυνάμεων στη πτώση του χαλαζιού, η σχέση (5-18) μπορεί να γραφτεί με αναδιάταξη των όρων και εισάγοντας την αναλυτική έκφραση του αριθμού Reynolds ως :

$$X = c_d \cdot Re^2 = \frac{8m \cdot g}{\pi \cdot \eta_a^2} \quad (5-24)$$

όπου : [ $X$  = ο βέλτιστος αριθμός ή αλλιώς μία μεταβλητή που παριστάνει ένα γινόμενο που ενδιαφέρει στη συγκεκριμένη περίπτωση (-),  $\eta_a$  = η δυναμική



συνεκτικότητα του αέρα (SI),  $m$  = η μάζα του χαλαζιού (Kg),  $g$  = η επιτάχυνση της βαρύτητας (SI),  $c_D$  = ο συντελεστής αντίστασης (-),  $\rho_a$  = η πυκνότητα του αέρα (SI),  $Re$  = ο αδιάστατος αριθμός Reynolds (-)]

Η δυναμική συνεκτικότητα εξαρτάται από τη θερμοκρασία, άρα και από το ύψος.

Για κάθε θερμοκρασία και για τον υπολογισμό της δυναμικής συνεκτικότητας μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο τύπος του Sutherland που είναι ο παρακάτω :

$$\eta_a = \frac{\eta_0 \cdot (T_0 + C) \cdot \left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2}}{T + C} \quad , \quad \text{για } 0K \leq T \leq 555K \quad (5-25)$$

όπου : [ $\eta_a$  = η δυναμική συνεκτικότητα του αέρα(SI),  $T$  = η θερμοκρασία στο ζητούμενο ύψος (SI),  $T_0$  = η θερμοκρασία σε ένα ύψος αναφοράς (SI),  $\eta_0$  = η δυναμική συνεκτικότητα στο ύψος αναφοράς (SI),  $C$  = η σταθερά του Sutherland ίση με 120 (SI)]

Για τα  $\eta_0$  και  $T_0$  μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι γνωστές τιμές 0.00001827 Pa·s και 291.15 K αντίστοιχα.

Η τερματική ταχύτητα βρίσκεται μέσα στον αριθμό  $Re$ . Έτσι αν δίνεται μία έκφραση για τον συντελεστή αντίστασης η τερματική ταχύτητα μπορεί τελικά να υπολογιστεί. Η έκφραση αυτή βρίσκεται με τον επόμενο τρόπο :

Η σχέση του αριθμού  $X$  για διάφορες τιμές του αριθμού  $Re$  δίνεται από τις επόμενες εμπειρικές σχέσεις [29] :

$$\log_{10} Re = 1.7095 + 1.33438 \cdot W - 0.11591 \cdot W^2$$

$$73 < X < 56 \quad (5-26)$$

$$(1 < Re < 12.2)$$

$$\log_{10} Re = -1.81391 + 1.34671 \cdot W - 0.12427 \cdot W^2 + 0.0063 \cdot W^3$$

$$562 < X < 1.83 \cdot 10^3 \quad (5-27)$$

$$(12.2 < Re < 30)$$

$$Re = 0.4487 X^{0.5536}$$

$$1.83 \cdot 10^3 < X < 3.46 \cdot 10^8 \quad (5-28)$$

$$(30 < Re < 24000)$$

$$\begin{aligned} \text{Re} &= (X / 0.6)^{1/2} \\ 3.46 \cdot 10^8 &< X < 5.4 \cdot 10^{10} \end{aligned} \quad (5-29)$$

$$(2.4 \cdot 10^4 < \text{Re} < 300000)$$

όπου :  $[W = \log_{10} X (-)]$

Από τις προηγούμενες εξισώσεις οι πρώτες δύο θεωρούν το χαλάζι ως μία λεία σφαίρα. Οι επόμενες δύο προκύπτουν από πειραματικά δεδομένα (*Rasmussen and Heymsfield 1987*).

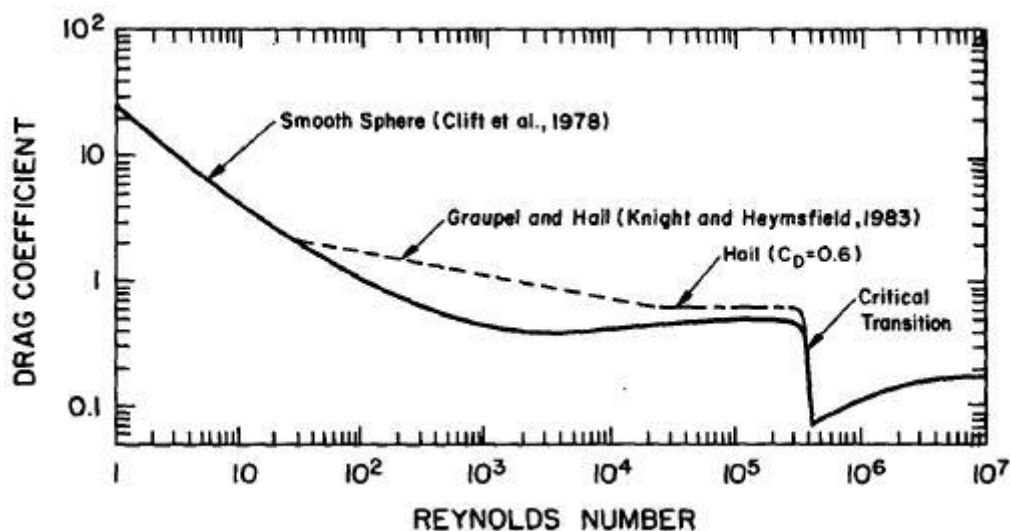
Αφού υπολογιστεί ο αριθμός Re υπολογίζεται και η ταχύτητα που εμπεριέχεται σε αυτόν από τη σχέση :

$$U_{\infty} = \frac{\eta_{\alpha} \cdot \text{Re}}{2 \cdot \alpha_D \cdot \rho_{\alpha}} \quad (5-30)$$

όπου :  $[\alpha_D = \eta$  ακτίνα του χαλαζιού (SI)]

Για αριθμούς Re μεγαλύτερους του  $2.5 \cdot 10^4$  μπορεί να θεωρηθεί αμέσως ότι  $c_D = 0.6$ .

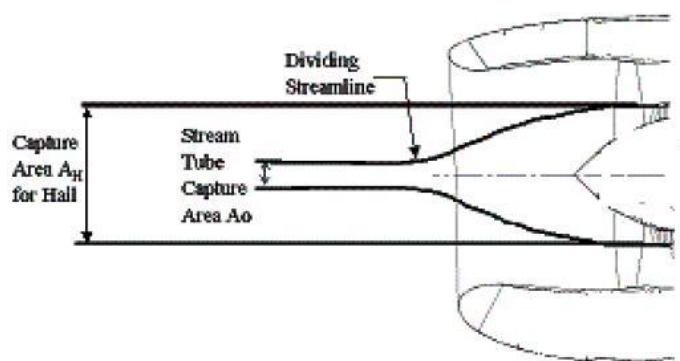
Τα παραπάνω συνοψίζονται και στο **Διάγραμμα 5.19** :



Διάγραμμα 5.19: Συντελεστής Οπισθέλκουσας Χαλαζιού σε σχέση με τον αριθμό Reynolds (Πηγή : *Rasmussen et al "Melting and Shedding of Graupel and Hail Part I Model Physics" 1987*)

## 5.7 Η συγκέντρωση στον αγωγό εισόδου

Η συγκέντρωση του χαλαζιού, δηλαδή η πυκνότητα του αέρα σε χαλάζι διαφοροποιείται σημαντικά ανάλογα με την κατάσταση λειτουργίας της μηχανής. Αναφέρθηκε ήδη στην εισαγωγή για παράδειγμα ότι το χαλάζι δεν επηρεάζεται από το πεδίο ροής και η αναρροφούμενη ποσότητα χαλαζιού που θα εισέρχεται στη μηχανή κάθε στιγμή είναι ανάλογη της συγκέντρωσης στην ατμόσφαιρα και της ταχύτητας πτήσης. Με άλλα λόγια η ποσότητα χαλαζιού που θα “σαρώνει” η μηχανή θα είναι συγκεκριμένη και ανεξάρτητη της αναρροφώμενης μάζας αέρα. Η συγκέντρωση χαλαζιού όμως θα είναι διαφορετική από αυτή του ελεύθερου ρεύματος αέρα. Για το λόγο αυτό συνηθίζεται να χρησιμοποιείται ένας συντελεστής, ο συντελεστής σάρωσης αέρα (*Scoop Factor*), που ορίζεται σαν το κλάσμα της προβαλλόμενης στο ρεύμα αέρα επιφάνειας του αγωγού εισόδου (ή του αγωγού πυρήνα) προς την επιφάνεια που έχει η ροή του αντίστοιχου ρεύματος αέρα που εισέρχεται στη μηχανή όταν βρίσκεται στο ελεύθερο σημείο μπροστά από τη μηχανή. Τα προηγούμενα είναι ευκολότερο κατανοητά βλέποντας το **Σχήμα 5.20** και το **Σχήμα 2.2**.



**Σχήμα 5.20: Scoop Effect για το ρεύμα πυρήνα (Πηγή : Venkataramani – “Scoop Effect in Inclement Weather Operation” 2005 )**

Πολλαπλασιάζοντας την επιφάνεια του ρεύματος αέρα εισόδου στο ελεύθερο σημείο με το Scoop Factor βρίσκεται αμέσως η παροχή μάζας του χαλαζιού. Τα χαρακτηριστικά του ρεύματος αέρα υπολογίζονται από τον αεροθερμοδυναμικό κύκλο της μηχανής.

Σύμφωνα με τα παραπάνω η εισροφόμενη ποσότητα χαλαζιού μπορεί να βρεθεί από τις επόμενες σχέσεις δύο σχέσεις (5-31) και (5-32):

$$\dot{m}_d = U_d \cdot A_e \cdot (HWC)_v \quad (5-31)$$

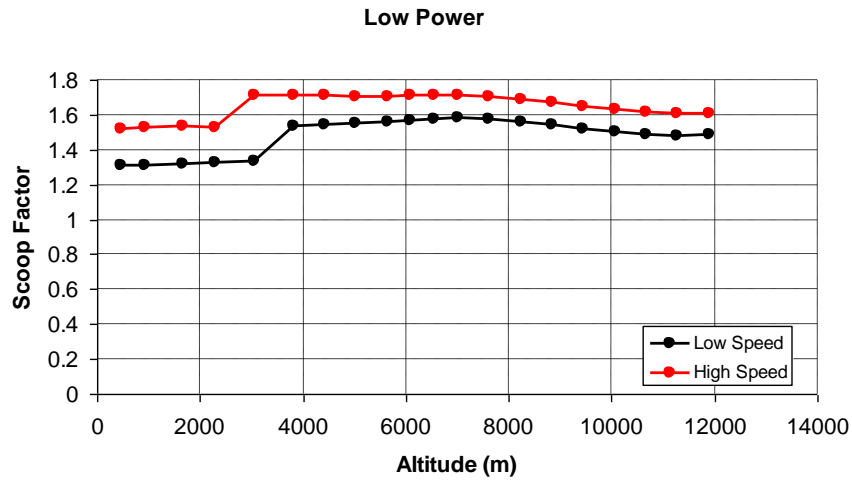
$$\begin{aligned} \dot{m}_d &= \frac{(HWC)_v}{\rho_a} \cdot \dot{m}_0 = \\ &= \frac{(HWC)_v}{\rho_a} \cdot A_e \left( p_{t,0} \cdot \sqrt{\frac{\gamma}{R_a \cdot T_{t,0}}} \cdot \cos a \cdot M_{flight} \cdot \left( 1 + \frac{\gamma-1}{2} \cdot M_{flight}^2 \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \right) \end{aligned} \quad (5-32)$$

όπου : [ $\dot{m}_d$  = η παροχή μάζας χαλαζιού (SI),  $U_d$  = η ταχύτητα με την οποία εισέρχεται το χαλάζι στη μηχανή (SI),  $A_e$  = η μετωπική κάθετη στη διεύθυνση κίνησης επιφάνεια της μηχανής (SI),  $(HWC)_v$  = η κατά όγκο συγκέντρωση χαλαζιού στο περιβάλλον (SI),  $\rho_a$  = η πυκνότητα του αέρα περιβάλλοντος (SI),  $\dot{m}_0$  = η παροχή μάζας αέρα από την επιφάνεια του ελεύθερου ρεύματος (SI),  $p_{t,0}$  = η ολική πίεση στο ελεύθερο ρεύμα αέρα (SI),  $T_{t,0}$  = η ολική θερμοκρασία στο ελεύθερο ρεύμα αέρα (SI),  $\gamma$  = ο λόγος θερμοχωρητικότητας του αέρα (-),  $R_0$  = η ειδική σταθερά αερίου του αέρα (SI),  $a$  = η γωνία του ρεύματος αέρα ως προς την μετωπική επιφάνεια της μηχανής (SI),  $M_{flight}$  = ο αριθμός Mach της πτήσης (-)]

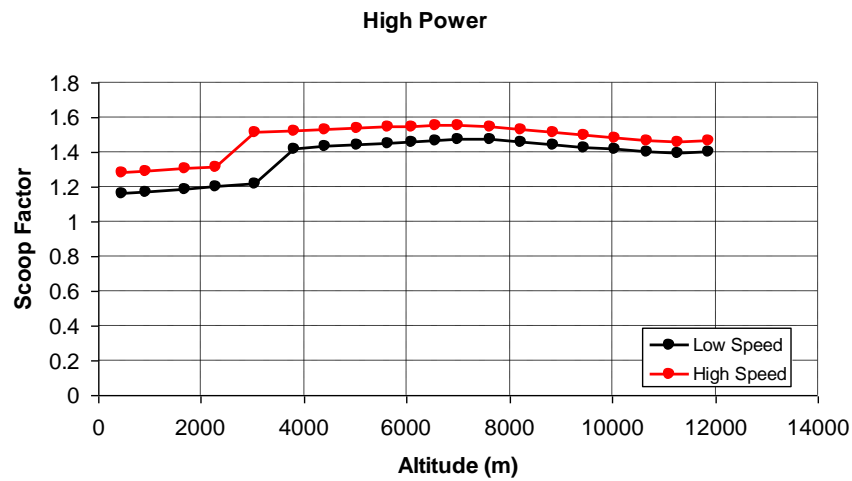
Παρακάτω δίνονται ενδεικτικά κάποια αποτελέσματα από την επίλυση του πεδίου ροής μέσω ενός υπολογιστικού κώδικα που χρησιμοποιείται από την αναφορά [21].

Παρατηρείται ότι μειώνοντας την ταχύτητα πτήσης του αεροσκάφους ή αυξάνοντας την ταχύτητα περιστροφής του κινητήρα (ή και τα δύο ταυτόχρονα) μειώνεται ο λόγος  $Sf$  (*Scoop Factor*). Αυτή η συμπεριφορά επαληθεύτηκε πάνω σε μία υποθετική μηχανή για διαφορετικά ύψη πτήσης, διαφορετικούς αριθμούς Mach πτήσης και διαφορετικές ρυθμίσεις ισχύος.

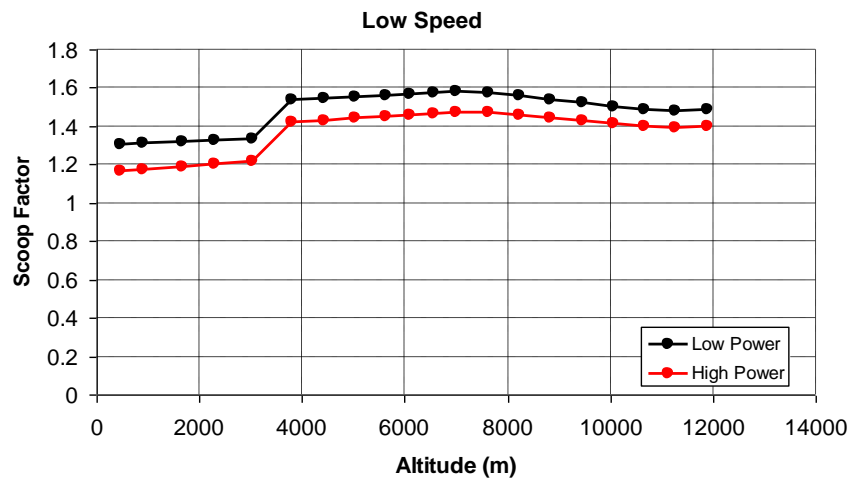
Τα αποτελέσματα δίνονται στα **Διάγραμμα 5.21** έως **Διάγραμμα 5.25** ενώ στο **Διάγραμμα 5.25** φαίνεται χαρακτηριστικά ότι η φάση της αποστολής του αεροσκάφους στην οποία παρουσιάζεται το μέγιστο Scoop Factor είναι η φάση της καθόδου.



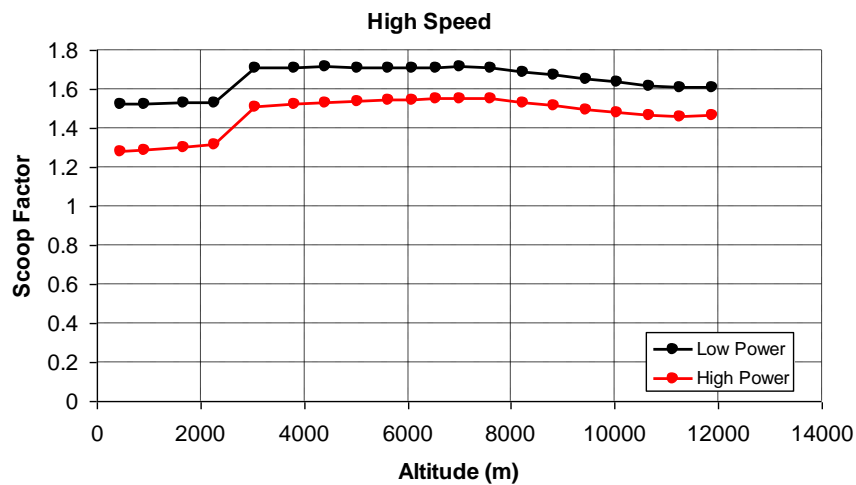
Διάγραμμα 5.21: Scoop Factor για χαμηλή ρύθμιση ισχύος και διαφορετικούς αριθμούς Mach πτήσης (Πηγή : Roumeliotis - "Internal Report" 2011)



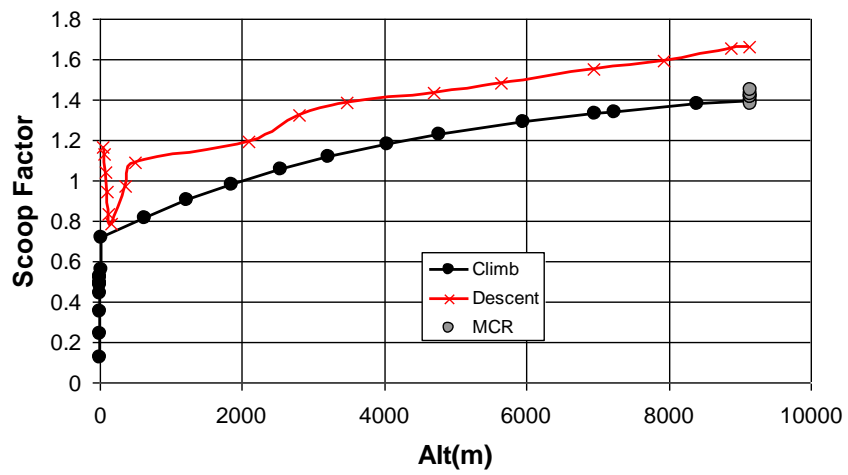
Διάγραμμα 5.22: Scoop Factor για υψηλή ρύθμιση ισχύος και διαφορετικούς αριθμούς Mach πτήσης (Πηγή : Roumeliotis - "Internal Report" 2011)



**Διάγραμμα 5.23: Scoop Factor για χαμηλό αριθμό Mach πτήσης και διαφορετική ρύθμιση ισχύος (Πηγή : Roumeliotis - "Internal Report" 2011)**



**Διάγραμμα 5.24: Scoop Factor για υψηλό αριθμό Mach πτήσης και διαφορετική ρύθμιση ισχύος (Πηγή : Roumeliotis - "Internal Report" 2011)**



Διάγραμμα 5.25: Scoop Factor για αντιπροσωπευτικές φάσης της αποστολής ενός εμπορικού αεροσκάφους (Πηγή : Roumeliotis - "Internal Report" 2011)





# 6

## Θερμική Αλληλεπίδραση του Χαλαζιού στο Εσωτερικό της Μηχανής (Υγροποίηση - Εξάτμιση)

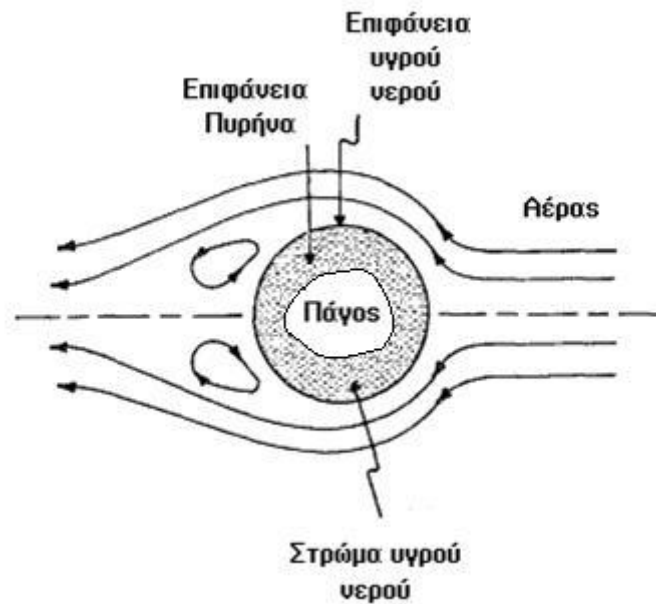
Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται λεπτομερής ανάλυση των εξισώσεων μεταφοράς θερμότητας και μεταφοράς μάζας σε ένα σφαιρικό στοιχείο πάγου που εισέρχεται στην αεροπορική μηχανή. Διατυπώνονται όλες οι εξισώσεις φαινόμενων μεταφοράς θερμότητας και μάζας ενώ στο τέλος γίνεται παρουσίαση του προτεινόμενου μοντέλου επίλυσης με ανάλυση των απλοποιητικών του παραδοχών.

### 6.1 Τοποθέτηση του Προβλήματος

Η μεταφορά θερμότητας και μάζας στο χαλάζι εξαρτάται σημαντικά από το στάδιο υγροποίησης ή ανάπτυξης του. Ο ρυθμός με τον οποίο λιώνει ένα χαλάζι είναι συνάρτηση πολλών παραγόντων. Τέτοιοι παράγοντες μπορεί να είναι η ύπαρξη και αποβολή τυχόν υγρού νερού από την επιφάνεια του, η γεωμετρία που έχει ένα τέτοιο επιφανειακό στρώμα, η πιθανή κυκλοφορία του στρώματος αυτού πάνω στον πάγο, η πυκνότητα του πάγου και κυρίως η ταχύτητα και η διάμετρος του χαλαζιού μέσα στο ρεύμα αέρα.

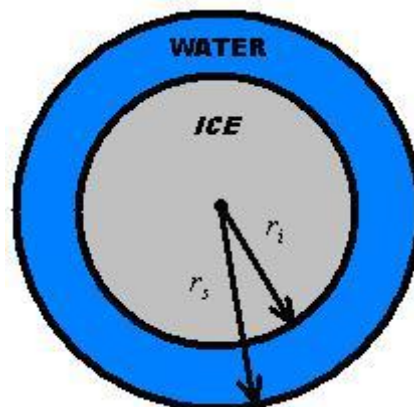
Μία ιδεατή κατάσταση υγροποίησης μπορεί να θεωρηθεί τοποθετώντας το χαλάζι μέσα σε ένα ρεύμα αέρα μεγαλύτερης θερμοκρασίας. Καθώς θα αρχίσει να λιώνει ένα επιφανειακό στρώμα υγρού νερού θα δημιουργηθεί. Αυτή η θεώρηση δεν απέχει πολύ από την πραγματικότητα εφόσον όπως αναφέρθηκε ήδη το χαλάζι στα περισσότερα στάδια ανάπτυξης ή αποσύνθεσης του βρίσκεται στην κατάσταση αυτή. Το στρώμα υγρού νερού θα συνεχίσει να διατηρείται όσο η θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη της θερμοκρασίας υγροποίησης και θα καθορίσει την μεταφορά θερμότητας και μάζας.

Η προηγούμενη θεώρηση αναπαρίσταται στο **Σχήμα 6.1**. :



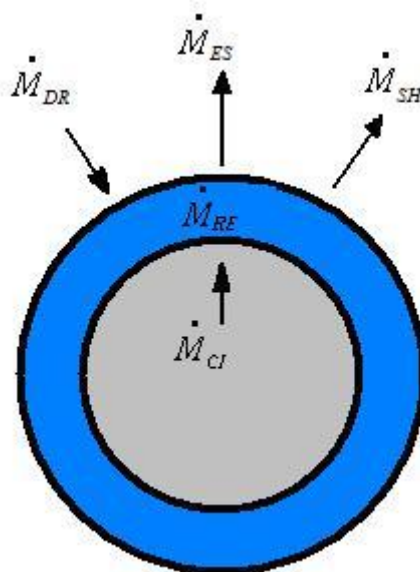
Σχήμα 6.1: Υγροποίηση του Χαλαζιού μέσα σε ένα θερμό ρεύμα αέρα

Μπορούν να διατυπωθούν οι εξισώσεις που περιγράφουν την αλληλεπίδραση του χαλαζιού με το εξωτερικό ρεύμα αέρα μελετώντας την ροή μάζας και θερμότητας στις δύο διεπιφάνειες που δημιουργούνται. Η μία διεπιφάνεια είναι αυτή του συνόρου στερεό - υγρό και η άλλη του συνόρου υγρό - αέρας. Οι δύο διεπιφάνειες ορίζουν έναν όγκο, τον όγκο του υγρού επιφανειακού νερού που μεταβάλλεται χρονικά εφόσον οι διεπιφάνειες αλλάζουν διάσταση. Για την ευκολότερη διατύπωση των εξισώσεων θεωρείται ένα σφαιρικό σχήμα χαλαζιού όπως στο Σχήμα 6.2.



Σχήμα 6.2: Οι Διεπιφάνειες (Απεικόνιση τομής)

Η ροή μάζας στον όγκο που περικλείουν οι διεπιφάνειες και σύμφωνα με τον τρόπο που ορίστηκαν απεικονίζεται στο Σχήμα 6.3 :



Σχήμα 6.3: Μεταφορά Μάζας (Απεικόνιση τομής)

Η εξίσωση μεταφοράς μάζας στο χαλάζι εκφράζεται ως :

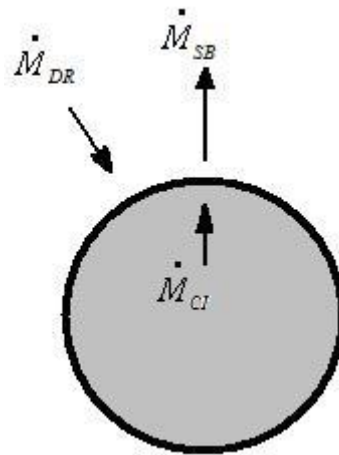
$$\dot{M}_{DR} + \dot{M}_{ES} + \dot{M}_{SH} + \dot{M}_{CI} = \dot{M}_{RE} \quad (6-1)$$

Στην εξίσωση αυτή  $\dot{M}_{DR}$  είναι η πρόσθεση μάζας λόγω προσκόλλησης σταγόνων υγρού νερού από το περιβάλλον,  $\dot{M}_{ES}$  είναι η απώλεια μάζας λόγω εξάτμισης ή εξάχνωσης,  $\dot{M}_{SH}$  η απώλεια μάζας λόγω συνεκτικών δυνάμεων και τύρβης,  $\dot{M}_{CI}$  είναι η πρόσθεση μάζας από τον πυρήνα που λιώνει ενώ  $\dot{M}_{RE}$  είναι ο ρυθμός μεταβολής της εναπομείνουσας μάζας στον όγκο του επιφανειακού στρώματος.

Όταν η θερμοκρασία της επιφάνειας του στερεού πυρήνα βρίσκεται κάτω από την εκάστοτε θερμοκρασία υγροποίησης του πάγου οι όροι  $\dot{M}_{RE}$ ,  $\dot{M}_{SH}$  εξαφανίζονται. Η πρόταση αυτή λέει επίσης ότι στις θερμοκρασίες αυτές το χαλάζι είναι εντελώς στεγνό<sup>1</sup> και το επιφανειακό στρώμα υγρού νερού απλά εξαφανίζεται (μηδενικό ύψος στρώματος). Σε αυτήν την περίπτωση δεν υφίσταται εξάτμιση αλλά εξάχνωση και αντικαθίσταται ο όρος της εξάτμισης με τον όρο εξάχνωσης  $\dot{M}_{SB}$ . Ο όρος  $\dot{M}_{CI}$  παραμένει αλλά πλέον δεν αντιπροσωπεύει την υγροποίηση αλλά την απώλεια μάζας του πυρήνα που συνεχώς εξαχνώνεται.

Ο όγκος με την θεώρηση αυτή εκφυλίζεται σε μία επιφάνεια όπως στο Σχήμα 6.4 :

<sup>1</sup> Στεγνό θεωρείται το χαλάζι που δεν έχει ουδεμία επιφανειακή ποσότητα υγρού νερού

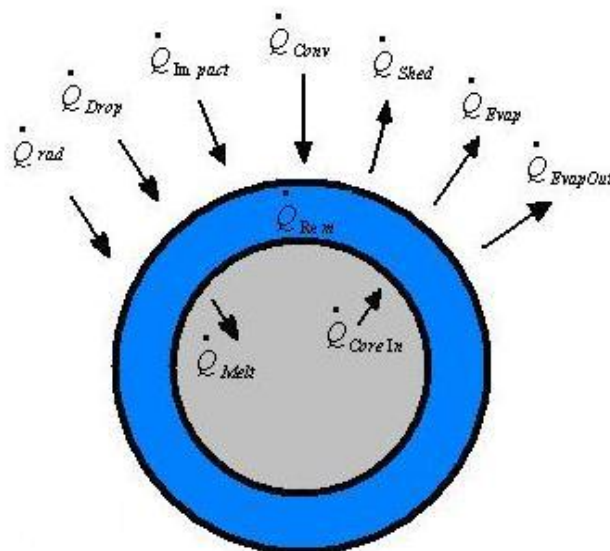


Σχήμα 6.4: Εκφυλισμένος Όγκος και Μεταφορά Μάζας για θερμοκρασίες κάτω των μηδέν βαθμών Celsius (Απεικόνιση τομής)

Για την περίπτωση εξάχνωσης η εξίσωση μεταφοράς μάζας (6-1) εκφυλίζεται στην (6-2) :

$$\dot{M}_{DR} + \dot{M}_{SB} + \dot{M}_{CI} = 0 \quad (6-2)$$

Η μεταφορά θερμότητας είναι ένα συνεπακόλουθο της μεταφοράς μάζας και των ροών θερμότητας από εσωτερικούς και εξωτερικούς μηχανισμούς πρόσδωσης και απορρόφησης θερμότητας. Σχηματικά και για τις διεπιφάνειες που μελετώνται η μεταφορά θερμότητας αναπαρίσταται στο Σχήμα 6.5.



Σχήμα 6.5: Μεταφορά Θερμότητας (Απεικόνιση τομής)

Η εξίσωση μεταφοράς θερμότητας σε ένα χαλάζι με όρους ολικής ενθαλπίας και ροών θερμότητας δίνεται από τη σχέση (6-3) :

$$\begin{aligned} & \dot{Q}_{CV} + \dot{Q}_{RD} + \dot{Q}_{IM} + \dot{Q}_{DR} + \\ & + \dot{Q}_{CI} + \dot{Q}_{ES} + \dot{Q}_{EO} + \\ & + \dot{Q}_{SH} + \dot{Q}_{ME} = \dot{Q}_{RE} \end{aligned} \quad (6-3)$$

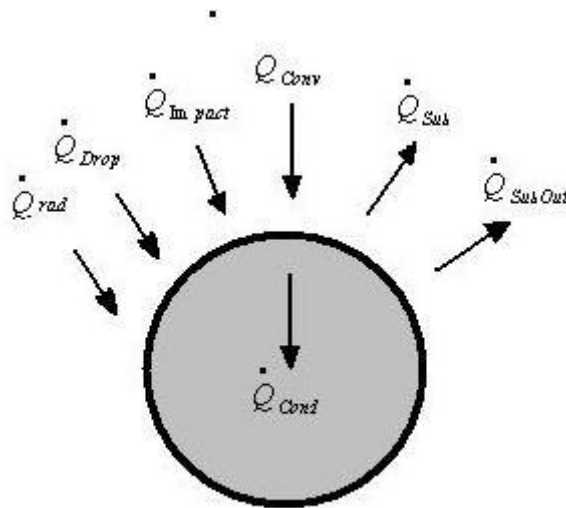
Στην εξίσωση (6-3)  $\dot{Q}_{CV}$  είναι η μεταφορά θερμότητας λόγω συναγωγής με το ρεύμα αέρα,  $\dot{Q}_{RD}$  είναι η μεταφορά θερμότητας με ακτινοβολία,  $\dot{Q}_{IM}$  είναι η μεταφορά θερμότητας λόγω πιθανής κρούσης με μία πιο θερμή επιφάνεια,  $\dot{Q}_{DR}$  η μεταφορά θερμότητας λόγω προσκόλλησης σταγόνων νερού,  $\dot{Q}_{CI}$  είναι η μεταφορά θερμότητας από την εισχώρηση του τήγματος του πυρήνα,  $\dot{Q}_{ES}$  είναι η μεταφορά λανθάνουσας θερμότητας λόγω εξάτμισης ή εξάχνωσης,  $\dot{Q}_{EO}$  είναι η μεταφορά θερμότητας από την αποχώρηση του ατμού του υγρού επιφανειακού στρώματος,  $\dot{Q}_{SH}$  είναι η μεταφορά θερμότητας από την αποκόλληση υγρού νερού,  $\dot{Q}_{ME}$  είναι η λανθάνουσα θερμότητα υγροποίησης από τον πυρήνα πάγου και τέλος  $\dot{Q}_{RE}$  είναι η θερμότητα που απομένει στο υγρό στρώμα.

Οι απώλειες θερμότητας που εντοπίζονται στο οριακό στρώμα του αέρα λόγω τριβής με το χαλάζι δεν υπολογίζεται στο παραπάνω ισοζύγιο.

Όταν η θερμοκρασία επιφάνειας του στερεού πυρήνα είναι κάτω από τη θερμοκρασία υγροποίησης οι όροι  $\dot{Q}_{ME}$ ,  $\dot{Q}_{CI}$ ,  $\dot{Q}_{RE}$ ,  $\dot{Q}_{SH}$  σταματάν να υπάρχουν. Στην περίπτωση αυτή επίσης οι όροι εξάτμισης αντικαθίστανται από τους όρους εξάχνωσης  $\dot{Q}_{SB}$  και  $\dot{Q}_{SO}$ .

Κάτω από τη θερμοκρασία υγροποίησης δεν λιώνει καμία ποσότητα από το στερεό χαλάζι. Κάθε ποσότητα υγρού που προσπίπτει στο χαλάζι θεωρείται ότι στερεοποιείται ακαριαία και οποιοδήποτε ποσό θερμότητας που εισάγεται στη μάζα άγεται προς το εσωτερικό του χαλαζιού. Επομένως για θερμοκρασίες επιφάνειας του χαλαζιού κάτω της θερμοκρασίας υγροποίησης εισάγεται ο όρος αγωγής θερμότητας  $\dot{Q}_{CD}$ .

Κατά την θεώρηση αυτή ο όγκος του επιφανειακού υγρού εκφυλίζεται σε μία επιφάνεια όπως στο επόμενο σχήμα :



Σχήμα 6.6: Εκφυλισμένος Όγκος και Μεταφορά Θερμότητας για θερμοκρασίες κάτω των μηδέν βαθμών Celsius (Απεικόνιση τομής)

Για την περίπτωση της εξάχνωσης η εξίσωση μεταφοράς θερμότητας (6-3) εκφυλλίζεται στην (6-4) :

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{CV} + \dot{Q}_{RD} + \dot{Q}_{IM} + \dot{Q}_{DR} + \\ + \dot{Q}_{SB} + \dot{Q}_{SO} + \dot{Q}_{CD} = 0 \end{aligned} \quad (6-4)$$

## 6.2 Ανάλυση των όρων Μεταφοράς Μάζας

### \*Μεταφορά μάζας με διάχυση $\dot{M}_{ES}$

Ως διάχυση συνήθως αναφέρεται η φυσική η εξαναγκασμένη εξάτμιση (ή εξάχνωση) του νερού δηλαδή η διάχυση των κορεσμένων ατμών από την επιφάνεια του χαλαζιού προς την ατμόσφαιρα.

Η διάχυση μάζας σε ένα πρόβλημα συναγωγής προκαλείται από τη διαφορά συγκέντρωσης ατμού ανάμεσα στην ατμόσφαιρα και το θεωρητικά κορεσμένο επιφανειακό ατμώδες στρώμα. Ωθείται δε περαιτέρω από τις δυνάμεις συνεκτικότητας που εξαναγκάζουν τα μόρια του ατμού να παρασυρθούν από το σχετικό ρεύμα αέρα.

Η φυσική διάχυση μάζας λόγω διαφοράς συγκέντρωσης περιγράφεται από το **νόμο διάχυσης μάζας του Fick (Fick 1855)** ένα νόμο παρατήρησης που λέει ότι η διάχυση μάζας κατευθύνεται από περιοχές υψηλής συγκέντρωσης προς περιοχές χαμηλής συγκέντρωσης και ο ρυθμός διάχυσης είναι ευθέως ανάλογος της βαθμίδας συγκέντρωσης.

Έτσι ο ρυθμός φυσικής διάχυσης μίας ποσότητας με κατά μάζα συγκέντρωση  $\rho_v$  (έστω ατμών) σε ένα μέσω (έστω αέρας) δίνεται από την έκφραση :

$$\overrightarrow{j_{v,natural}} = -D_{va} \cdot \nabla \rho_v \quad (6-5)$$

όπου :  $[\overrightarrow{j_{v,natural}} =$  ο ρυθμός φυσικής διάχυσης ή αλλιώς ροή διάχυσης ή ροή μάζας ανά επιφάνεια ( $Kg \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}$ ),  $D_{va} =$  ο συντελεστής φυσικής διάχυσης των ατμών στον αέρα ( $m^2 \cdot s^{-1}$ ),  $\rho_v =$  η κατά μάζα συγκέντρωση ατμών ( $Kg \cdot m^{-3}$ )]

Η εξαναγκασμένη διάχυση μάζας εξαρτάται από το ρεύμα αέρα και αποδεικνύεται [12] με μεθοδολογία κλασσικής μηχανικής ότι δίνεται από τη σχέση :

$$\overrightarrow{j_{v,forced}} = \rho_v \cdot \vec{u} \quad (6-6)$$

όπου :  $[\overrightarrow{j_{v,forced}} =$  ο ρυθμός εξαναγκασμένης διάχυσης ανά επιφάνεια (SI),  $\vec{u} =$  η σχετική ταχύτητα του ρεύματος (SI)]

Έτσι ο συνολικός ρυθμός διάχυσης ατμών είναι :

$$\vec{j}_v = -D_{va} \cdot \nabla \rho_v + \rho_v \cdot \vec{u} \quad (6-7)$$

όπου :  $[\vec{j}_v =$  ο συνολικός ρυθμός εξαναγκασμένης διάχυσης ανά επιφάνεια (SI)]

Φαίνεται από τη σχέση (6-7) ότι για να είναι γνωστό το διάνυσμα της ροής διάχυσης  $\vec{j}_v$  πρέπει να είναι γνωστή η διαχυτότητα, το πεδίο συγκέντρωσης και η ταχύτητα του αέρα γύρω από σώμα. Η διαχυτότητα των ατμών στον αέρα θεωρείται σταθερή ενώ εξαρτάται μόνο από την πίεση και τη θερμοκρασία. Η ταχύτητα γύρω από το σώμα βρίσκεται με επίλυση των εξισώσεων **Navier Stokes**. Τέλος το πεδίο συγκέντρωσης γύρω από το σώμα που χρειάζεται για την εύρεση της βαθμίδας συγκέντρωσης πάνω στην επιφάνεια βρίσκεται χρησιμοποιώντας μία επιπλέον εξίσωση, την εξίσωση της συνέχειας.

Εφαρμόζοντας την εξίσωση της συνέχειας για τη συγκέντρωση ατμών προκύπτει μία επιπλέον σχέση η :

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j}_v = 0 \quad (6-8)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (6-7) και (6-8) προκύπτει η εξίσωση διάχυσης ατμών με συναγωγή που είναι η :

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \rho_v = D_{va} \cdot \nabla^2 \rho_v \quad (6-9)$$

Για την εξαγωγή της εξίσωσης διάχυσης ατμών πρέπει να αναφερθεί ότι έγινε η παραδοχή ότι η διαχυτότητα  $D_{va}$  είναι σταθερή στο χρόνο και πως ο αέρας είναι ασυμπίεστος δηλαδή  $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ . Ακόμα θεωρείται ότι το μίγμα ατμών αέρα έχει συνολικά την ίδια πυκνότητα στο κορεσμένο φιλμ με το περιβάλλον. Έτσι δε χρειάζεται να γίνει αναγωγή της πυκνότητας των ατμών ως προς τη συνολική πυκνότητα αφού η τελευταία παραμένει σταθερή<sup>1</sup>.

Αν θεωρηθεί δε σταθεροποιημένη κατάσταση (όπου η χρονική παράγωγός μηδενίζεται) τότε η (6-9) γράφεται όπως η (6-10) για εξαναγκασμένη διάχυση ή όπως η (6-11) για φυσική διάχυση :

$$\vec{u} \cdot \nabla \rho_v = D_{va} \cdot \nabla^2 \rho_v \quad (6-10)$$

ή

$$\nabla^2 \rho_v = 0 \quad (6-11)$$

Όπως και να έχει λοιπόν προκύπτει ότι για την εύρεση του πεδίου συγκέντρωσης (που είναι απαραίτητο στοιχείο για τον υπολογισμό της ροής διάχυσης) πρέπει πρώτα να επιλυθεί η εξίσωση (6-11) ενώ αν υπάρχει συναγωγή πρέπει να επιλυθεί η εξίσωση (6-10) και κατά συνέπεια το πεδίο ροής. Για συμμετρικές γεωμετρίες τα προηγούμενα βήματα είναι εύκολη σχετικά διαδικασία. Στις πολύπλοκες γεωμετρίες όμως η εύρεση ακριβούς λύσης είναι σχεδόν αδύνατη.

Η εξίσωση (6-11) είναι μία εξίσωση **Laplace** και μπορεί να επιλυθεί με οριακές συνθήκες τις γνωστές συγκεντρώσεις επιφανείας  $\rho_{v,s}$  και περιβάλλοντος  $\rho_{v,\infty}$  ώστε να δώσει μία έκφραση για το πεδίο συγκέντρωσης  $\rho_v$ . Έπειτα μπορεί να βρεθεί η ροή ατμών από την επιφάνεια προς το περιβάλλον άρα και η μεταφορά μάζας. Εφόσον βρεθεί το πεδίο συγκέντρωσης ατμών άρα και η ροή διάχυσης τότε η διάχυση (δηλαδή ο ρυθμός μεταφοράς μάζας) των ατμών θα είναι το ολοκλήρωμα του ρυθμού διάχυσης στο σύνολο της επιφάνειας από την οποία διαχέονται οι ατμοί.

Λύνεται επομένως το επόμενο ολοκλήρωμα :

<sup>1</sup>Αν δεν συνέβαινε αυτό θα έπρεπε να οριστεί ως συγκέντρωση η ποσότητα  $\rho_v = m_v \cdot \rho_{mix}$  όπου  $m_v$  είναι το κλάσμα μάζας των ατμών στο σύνολο του μίγματος και  $\rho_{mix}$  η πυκνότητα του μίγματος.



$$\begin{aligned} \left( \frac{dm}{dt} \right) &= \int_S \vec{j}_v \cdot \vec{n} \, dS = \\ &= \int_S -D_{va} \cdot \nabla \rho_v \cdot \vec{n} \, dS + \int_S \rho_v \cdot \vec{u} \cdot \vec{n} \, dS \end{aligned} \quad (6-12)$$

όπου :  $\left[ \left( \frac{dm}{dt} \right) \right]$  = ο ρυθμός μεταφοράς μάζας (SI),  $S$  = η επιφάνεια από την οποία γίνεται η διάχυση (SI),  $\vec{n}$  = το μοναδιαίο κάθετο στην επιφάνεια διάνυσμα (-)]

Το πρώτο ολοκλήρωμα της σχέσης (6-12) μπορεί να λυθεί επιλύοντας το πεδίο συγκέντρωσης ή με ένα παράπλευρο τρόπο που χρησιμοποιείται συχνά στα θέματα διάχυσης, **την ηλεκτροστατική θεώρηση.**

Με χρησιμοποίηση στοιχείων από την ηλεκτροστατική θεωρία όπου ένα φορτισμένο σώμα δημιουργεί ένα ηλεκτροστατικό δυναμικό γύρω του, μπορεί εντελώς ανάλογα<sup>1</sup> να χρησιμοποιηθούν οι αντίστοιχες εξισώσεις για την επίλυση του προβλήματος της διάχυσης.

Αν ένα φορτισμένο σώμα δημιουργεί ένα ηλεκτρικό πεδίο  $\vec{E} = -\nabla\Phi$  τότε η ηλεκτρική ροή (δηλαδή το σύνολο του φορτίου του αγωγού) δίνεται ως το επιφανειακό ολοκλήρωμα του πεδίου δηλαδή :

$$\varphi_e = \int_S \nabla\Phi \cdot \vec{n} \, dS = -4\pi \cdot C \cdot (\Phi_s - \Phi_\infty) \quad (6-13)$$

όπου :  $[\varphi_e]$  = η ηλεκτρική ροή (C),  $\nabla\Phi$  = η βαθμίδα του ηλεκτρικού δυναμικού ( $V \cdot m^{-1}$ ),  $\vec{n}$  = το μοναδιαίο κάθετο στην επιφάνεια διάνυσμα (-),  $S$  = η επιφάνεια του φορτισμένου σωματιδίου ( $m^2$ ),  $C$  = η ηλεκτροχωρητικότητα του φορτισμένου σωματιδίου ( $C \cdot V^{-1}$ ),  $\Phi_s$  = το ηλεκτρικό δυναμικό στην επιφάνεια (V),  $\Phi_\infty$  = το ηλεκτρικό δυναμικό μακριά από την επιφάνεια (V)]

Στην περίπτωση που συμβαίνει μόνο φυσική διάχυση (δηλαδή μόνο ο πρώτος όρος της (6-12)) κατά αναλογία με την ηλεκτροστατική θεωρία το ολοκλήρωμα της (6-12) γράφεται ως :

$$\left( \frac{dm}{dt} \right)_0 = \int_S -D_{va} \cdot \nabla \rho_v \cdot \vec{n} \, dS = -4\pi \cdot C \cdot D_{va} \cdot (\rho_{v,s} - \rho_{v,\infty}) \quad (6-14)$$

<sup>1</sup> Η αναλογία στηρίζεται πάνω στο γεγονός ότι το δυναμικό ενός ηλεκτροστατικού πεδίου ικανοποιεί και εκείνο την εξίσωση Laplace και ότι μία υποθετικά ίδια γεωμετρία επιβάλλει ίδιες ακριβώς οριακές συνθήκες στις δύο περιπτώσεις όταν η κατανομή της συγκέντρωσης και του δυναμικού στην επιφάνεια είναι παρόμοιες.

όπου :  $\left[\left(\frac{dm}{dt}\right)_0\right]$  = ο ρυθμός μεταφοράς μάζας για φυσική διάχυση (SI),  $C$  = η ηλεκτροστατική χωρητικότητα σε μονάδες μήκους για το υποθετικό ηλεκτρικά φορτισμένου σώμα ίδιου σχήματος και μεγέθους με το σώμα από το οποίο συμβαίνει διάχυση ατμών ( $m$ ),  $\rho_{v,s}$  = η συγκέντρωση των ατμών στην επιφάνεια (SI),  $\rho_{v,\infty}$  = η συγκέντρωση των ατμών μακριά από την επιφάνεια (SI)]

Για την περίπτωση σφαίρας η τιμή για τη χωρητικότητα  $C$  αποδεικνύεται [32] ότι παίρνει την τιμή :

$$C_{sph} = r \quad (6-15)$$

όπου : [ $r$  = η ακτίνα της σφαίρας ( $m$ )]

Για την περίπτωση πεπλατυσμένου σφαιροειδούς αποδεικνύεται [32] ότι :

$$C_{spd} = a \cdot \frac{e}{\arcsin(e)} \quad (6-16)$$

με

$$e = (1 - AR^2)^{1/2}$$

και

$$AR = \frac{b}{a}$$

όπου : [ $a$  = ο μεγάλος ημι άξονας του σφαιροειδούς ( $m$ ),  $b$  = ο μικρός ημι άξονας του σφαιροειδούς ( $m$ ),  $e$  = η εκκεντρότητα του σφαιροειδούς (-)]

Η αναλογία της διάχυσης με τα ηλεκτροστατικά πεδία είναι χρήσιμη μόνο όσο υπάρχουν στη βιβλιογραφία μελετημένες και καθορισμένες τιμές για τη χωρητικότητα  $C$  που είναι άμεσα συσχετιζόμενη με τη γεωμετρία. Και οι δύο προσεγγίσεις σε αναλυτικό επίπεδο ανάγονται στην επίλυση της εξίσωσης Laplace που όπως ήδη αναφέρθηκε επιλύεται εύκολα μόνο για συμμετρικές γεωμετρίες. Στις σύνθετες γεωμετρίες υπάρχει ανάγκη για πειραματικά δεδομένα που είναι πολύ πιο εύκολο να διεξαχθούν σε ηλεκτροστατικά πεδία παρά σε πεδία διάχυσης μάζας.

Αν δεν γίνεται λόγος τώρα για φυσική διάχυση αλλά για εξαναγκασμένη τότε πρέπει να επιλυθεί και το δεύτερο ολοκλήρωμα της σχέσης (6-12). Ακολουθείται για το λόγο αυτό μία διαφορετική μεθοδολογία ορίζοντας καταρχήν το συντελεστή εξαναγκασμένης διάχυσης  $h_m$  ως :

$$h_m = \frac{\frac{dm}{dt}}{A \cdot \Delta\rho_v} \quad (6-17)$$

όπου : [ $h_m$  = ο συντελεστής εξαναγκασμένης διάχυσης ( $m \cdot s^{-1}$ ),  $\frac{dm}{dt}$  = ο ρυθμός μεταφοράς μάζας για εξαναγκασμένη διάχυση (SI),  $A$  = η ενεργή επιφάνεια διάχυσης (SI),  $\Delta\rho_v$  = η διαφορά συγκέντρωσης που προκαλεί τη διάχυση (SI)]

Αν το γινόμενο του συντελεστή εξαναγκασμένης διάχυσης με το χαρακτηριστικό μήκος του προβλήματος που μελετάτε διαιρεθεί με τον συντελεστή φυσικής διάχυσης προκύπτει ένας πολύ χρήσιμος αδιάστατος αριθμός για την εξαναγκασμένη μεταφορά μάζας, ο αριθμός **Sherwood**. Ο αριθμός Sherwood ορίζεται από την επόμενη σχέση :

$$Sh = \frac{h_m \cdot L}{D_{va}} \quad (6-18)$$

όπου : [ $Sh$  = ο αδιάστατος αριθμός Sherwood (-),  $h_m$  = ο συντελεστής εξαναγκασμένης διάχυσης ή συντελεστής μεταφοράς μάζας (SI),  $L$  = το χαρακτηριστικό μήκος (SI),  $D_{va}$  = η διαχυτότητα του ατμού νερού στον αέρα (SI)]

Ο ορισμός του χαρακτηριστικού μήκους συνήθως γίνεται με βάση το γεγονός ότι ο βαθμός διάχυσης καθορίζεται κυρίως από την επιφάνεια του σώματος που είναι μετωπικά εκτεθειμένη στο ρεύμα αέρα. Έτσι χαρακτηριστικό μήκος ορίζεται ως η συνολική επιφάνεια του σώματος διαιρεμένη με την περίμετρο της διατομής που είναι κάθετη στο πεδίο ροής δηλαδή :

$$L = \frac{A}{P} \quad (6-19)$$

όπου : [ $L$  = το χαρακτηριστικό μήκος (SI),  $A$  = η συνολική ενεργή επιφάνεια του σώματος (SI),  $P$  = η περίμετρος της κάθετης επιφάνειας στο ρεύμα αέρα (SI)]

Σε ένα σφαιρικό σώμα το χαρακτηριστικό μήκος και σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό είναι η διάμετρος δηλαδή :

$$L_{sph} = D \quad (6-20)$$

Σε ένα σφαιροειδές το χαρακτηριστικό μήκος είναι :

$$L_{spd} = a \cdot \left[ 1 + \frac{AR^2}{2e} \cdot \ln\left(\frac{1+e}{1-e}\right) \right] \quad (6-21)$$

Ο αριθμός Sherwood εκφράζει το λόγο της αντίστασης στη διάχυση που θα παρουσίαζε ακίνητο το ρευστό προς την ολική αντίσταση στη μεταφορά που παρουσιάζει κινούμενο.

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (6-17) ο αριθμός Sherwood ξαναγράφεται ως :

$$\overline{Sh} = \frac{\frac{dm}{dt} \cdot L}{A \cdot D_{va} \cdot \Delta\rho_v} \quad (6-22)$$

Με αντικατάσταση της σχέσης (6-12) στην (6-22) ο αριθμός Sherwood προκύπτει τελικά να είναι :

$$\overline{Sh} = \frac{\left[ \int_S -D_{va} \cdot \nabla \rho_v \cdot \vec{n} \, dS + \int_S \rho_v \cdot \vec{u} \cdot \vec{n} \, dS \right] \cdot L}{A \cdot D_{va} \cdot \Delta\rho_v} \quad (6-23)$$

Χρησιμοποιείται εδώ ο μέσος αριθμός Sherwood εφόσον σε αντίθεση με το ακίνητο ρευστό, το κινούμενο μπορεί να μεταβάλλει τη συγκέντρωση ατμών στην επιφάνεια του σώματος. Αποδεικνύεται ότι ο αριθμός Sherwood άρα και ο ρυθμός εξάτμισης είναι μεγαλύτερος για την περιοχή κοντά στο σημείο αποκοπής και μικρότερος στην υπήνεμη πλευρά [12].

Στην μετεωρολογία (στην οποία υπάρχουν πληθώρα δεδομένων πάνω στη διάχυση ατμών) χρησιμοποιείται ένας αντίστοιχος συντελεστής, ο συντελεστής αερισμού που γράφεται ως :

$$\overline{f}_v = \frac{\frac{dm}{dt}}{\left( \frac{dm}{dt} \right)_0} = \frac{\overline{Sh} \cdot A}{4\pi \cdot C \cdot L} \quad (6-24)$$

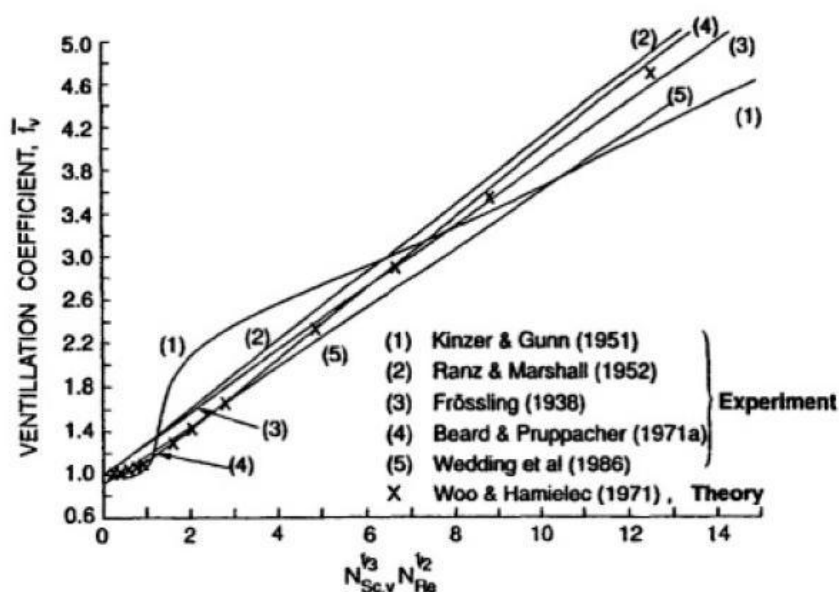
Για την περίπτωση σφαιρικού σώματος η εξίσωση (6-24) γράφεται :

$$\overline{f}_v = \frac{\overline{Sh}}{2} \quad (6-25)$$

Είναι προφανές από την εξίσωση (6-23) ότι στην εξαναγκασμένη μεταφορά μάζας για να βρεθεί ο αριθμός Sherwood πρέπει να υπάρχει γνώση του πεδίου ροής γύρω από το σώμα που μελετάτε. Αυτό σημαίνει επίλυση των εξισώσεων **Navier-Stokes**.

Με αριθμητική επίλυση αλλά και με πειραματικά δεδομένα αποδεικνύεται ότι για την γεωμετρία της σφαίρας ( $C = r$ ) [12] ο αριθμός  $f_v$  (ή  $Sh/2$  αντίστοιχα)

είναι ευθέως ανάλογος της ποσότητας  $Re^{1/2} \cdot Sc^{1/3}$ . Ενδεικτικά η αναλογία αυτή φαίνεται στο Διάγραμμα 6.7.



Διάγραμμα 6.7: Μεταβολή του αριθμού αερισμού (ή Sherwood αντίστοιχα) ως προς την ποσότητα  $Re^{1/2} Sc^{1/3}$  για μία σφαίρα σε σχετικό ρεύμα αέρα (Πηγή : Pruppacher and Klett "Microphysics of clouds and precepitation" 1997)

Για την περίπτωση σφαίρας η πιο καλή προσέγγιση από τα πειραματικά δεδομένα της αναφοράς [12] είναι η :

$$\bar{f}_v = 1.00 + 0.108 \cdot (Re^{1/2} \cdot Sc^{1/3})^2 \quad \text{για} \quad (6-26)$$

$$Re^{1/2} \cdot Sc^{1/3} < 1.4$$

$$\bar{f}_v = 0.78 + 0.308 \cdot (Re^{1/2} \cdot Sc^{1/3}) \quad \text{για} \quad (6-27)$$

$$1.4 \leq Re^{1/2} \cdot Sc^{1/3} \leq 51.4$$

Για ένα πεπλατυσμένο σφαιροειδές με το ρεύμα αέρα κάθετο στον μεγάλο άξονα η αναφορά [12] δίνει τις τιμές :

$$\bar{f}_v = 1.00 + 0.14 \cdot (Re^{1/2} \cdot Sc^{1/3})^2 \quad (6-28)$$

$$\text{για } Re^{1/2} \cdot Sc^{1/3} < 1.0$$

$$\bar{f}_v = 0.86 + 0.28 \cdot (\text{Re}^{1/2} \cdot \text{Sc}^{1/3})$$

$$\text{για } 1.0 \leq \text{Re}^{1/2} \cdot \text{Sc}^{1/3} \quad (6-29)$$

Η σχέση για τη μεταφορά μάζας με συναγωγή μπορεί να γραφτεί τελικά ως :

$$\frac{dm}{dt} = -A \cdot L^{-1} \cdot \bar{Sh} \cdot D_{va} \cdot (\rho_{v,s} - \rho_{v,\infty}) \quad (6-30)$$

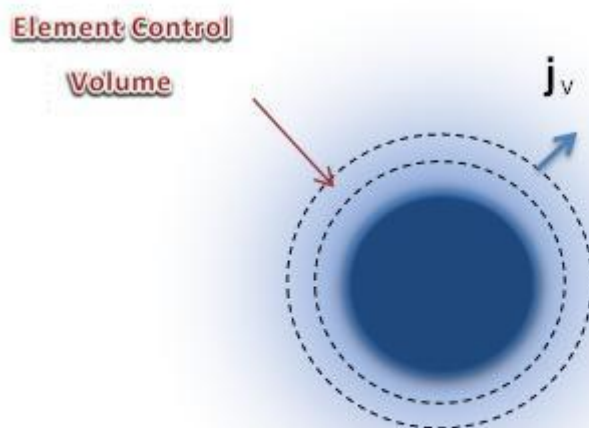
ή

$$\dot{M}_{ES} = A \cdot L^{-1} \cdot \bar{Sh} \cdot D_{va} \cdot \left( \frac{P_{w,a}}{R_a \cdot T_a} - \frac{(P_{wsat,s})_{T_s}}{R_a \cdot T_s} \right) \quad (6-31)$$

όπου : [  $\dot{M}_{ES}$  = ο ρυθμός μεταφοράς μάζας (SI),  $D_{va}$  = η διαχυτότητα του ατμού νερού στον αέρα (SI),  $L$  = το χαρακτηριστικό μήκος του χαλαζιού (SI),  $\bar{Sh}$  = ο μέσος αριθμός Sherwood (-),  $A$  = η ενεργή επιφάνεια του χαλαζιού (SI),  $P_{w,a}$  = η μερική πίεση ατμών στον αέρα περιβάλλοντος (SI),  $(P_{wsat,s})_{T_s}$  = η πίεση κορεσμού των ατμών νερού στην επιφάνεια του χαλαζιού και για την θερμοκρασία επιφάνειας  $T_s$  (SI),  $R_a$  = η ειδική σταθερά αερίου του ατμού νερού (SI),  $T_a$  = η θερμοκρασία του αέρα περιβάλλοντος (SI),  $T_s$  = η θερμοκρασία επιφάνειας (SI) ]

Εδώ πρέπει να αναφερθεί ότι το ατμώδες φιλμ ως κορεσμένο θεωρείται ότι βρίσκεται στην ίδια θερμοκρασία με την επιφάνεια και επομένως έχει και την ίδια θερμοκρασία. Επίσης έγινε η παραδοχή πως η πυκνότητα του μίγματος αέρα - ατμών είναι σταθερή σε όλο το χώρο διάχυσης και ίση με την πυκνότητα στο περιβάλλον.

Η τελευταία παραδοχή χρειάζεται προσοχή αφού μπορεί να γίνει μόνο στην περίπτωση **χαμηλών ρυθμών εξάτμισης** στις περιπτώσεις δηλαδή όπου η θερμοκρασία περιβάλλοντος δεν έχει μεγάλη διαφορά από την θερμοκρασία επιφάνειας. Στην περίπτωση **υψηλών ρυθμών εξάτμισης**, όπως κοντά στο βρασμό για παράδειγμα, το ατμώδες φιλμ αποτελείται εξολοκλήρου από ατμούς νερού και η πυκνότητα του είναι μεγαλύτερη από την πυκνότητα του αέρα. Στην περίπτωση υψηλών ρυθμών εξάτμισης ακολουθείται η επόμενη μεθοδολογία (*Spalding 1960*), και επιλύεται η εξίσωση διάχυσης με διαφορετικό τρόπο και διαφορετικές παραδοχές. Ακολουθείται η κατά ονομασία γνωστή "θεωρία του φιλμ" (**film theory**) σύμφωνα με την οποία στη διαδικασία της ατμοποίησης η μεταφορά θερμότητας και μάζας συμβαίνει σε ένα φιλμ που σχηματίζεται μεταξύ της επιφάνειας του υγρού σωματιδίου και του αέρα της ατμόσφαιρας.



Σχήμα 6.8: Διάχυση ατμών στο χώρο γύρο από μία σταγόνα (Απεικόνιση τομής)

Θεωρείτε αρχικά ένας απειροστά μικρός όγκος ελέγχου στο χώρο διάχυσης όπως στο Σχήμα 6.8. Όπως φάνηκε πρωτίτερα εφαρμόζοντας την εξίσωση συνέχειας στη ροή διάχυσης προκύπτει η εξίσωση διάχυσης που σε πολικές συντεταγμένες και για σταθεροποιημένη κατάσταση γράφεται ως :

$$\frac{d(r^2 \cdot j_{v,r})}{dr} = 0 \quad (6-32)$$

όπου : [  $r$  = η εκάστοτε ακτίνα (SI),  $j_{v,r}$  = η ροή διάχυσης κατά την ακτινική διεύθυνση στην εκάστοτε ακτίνα (SI) ]

Η σχέση (6-32) λέει διαφορετικά ότι σε κάθε ακτίνα το γινόμενο  $r^2 \cdot j_{v,r}$  είναι σταθερό. Μπορεί να γραφτεί επομένως ότι :

$$r^2 \cdot j_{v,r} = const = R^2 \cdot j_{v,R} = R^2 \cdot \frac{\dot{m}_{v,R}}{A_R} \quad (6-33)$$

όπου : [  $R$  = η ακτίνα επιφάνειας του σωματιδίου από το οποίο ξεκινά η διάχυση των ατμών ( $m$ ),  $\dot{m}_{v,R}$  = η παροχή μάζας ατμών από την επιφάνεια με ακτίνα  $R$  ( $Kg \cdot s^{-1}$ ),  $A_R$  = η επιφάνεια στην ακτίνα  $R$  ( $m^2$ ) ]

Η ίδια σχέση (6-33) για τη ροή του συνόλου του μίγματος γράφεται ως :

$$r^2 \cdot j_{v,r} = const = R^2 \cdot j_{v,R} = R^2 \cdot \frac{\dot{m}_{v,R}}{A_R} \quad (6-34)$$

όπου : [  $R$  = η ακτίνα επιφάνειας του σωματιδίου από το οποίο ξεκινά η διάχυση των ατμών (SI),  $\dot{m}_{mix,R}$  = η παροχή μάζας ατμών από την επιφάνεια με ακτίνα  $R$  (SI),  $A_R$  = η επιφάνεια στην ακτίνα  $R$  (SI)]

Η ροή διάχυσης των ατμών όπως προέκυψε έχει δύο όρους που ο ένας αναφέρεται στη φυσική διάχυση και ο άλλος στην εξαναγκασμένη. Γράφεται δηλαδή ως :

$$j_{v,r} = -\rho_{mix,r} \cdot D_{va} \cdot \frac{dm_{v,r}}{dr} + m_{v,r} \cdot j_{mix,r} \quad (6-35)$$

όπου : [  $\rho_{mix,r}$  = η συνολική πυκνότητα του μίγματος αέρα και ατμών στο φιλμ για την εκάστοτε ακτίνα ( $Kg \cdot m^{-3}$ ),  $D_{va}$  = η διαχυτότητα των ατμών στον αέρα ( $m^2 \cdot s^{-1}$ ),  $m_{v,r}$  = το κλάσμα της μάζας των ατμών στο φιλμ ως προς τη μάζα του μίγματος στο φιλμ για την εκάστοτε ακτίνα (-),  $j_{mix,r}$  = η συνολική ροή του μίγματος κατά την ακτινική διεύθυνση για την εκάστοτε ακτίνα ( $Kg \cdot s^{-1} \cdot m^{-2}$ )]

Συνδυάζοντας τις (6-33) και (6-35) προκύπτει η σχέση :

$$r^2 \cdot \left( m_{v,r} \cdot j_{mix,r} - \rho_{mix,r} \cdot D_{va} \cdot \frac{dm_{v,r}}{dr} \right) = R^2 \cdot j_{v,R} \quad (6-36)$$

Η (6-36) χρησιμοποιώντας την (6-34) γράφεται και ως :

$$\frac{1}{j_{v,R} - \frac{\dot{m}_{mix,R}}{A_R} \cdot m_{v,r}} dm_{v,r} = \frac{R^2}{\rho_{mix,R} \cdot D_{va}} \cdot \left( -\frac{1}{r^2} \right) dr \quad (6-37)$$

Ολοκληρώνοντας την (6-37) εξάγεται η σχέση :

$$\int_{m_{v,R}}^{m_{v,\infty}} \frac{1}{j_{v,R} - \frac{\dot{m}_{mix,R}}{A_R} \cdot m_{v,r}} dm_{v,r} = \frac{R^2}{\rho_{mix,R} \cdot D_{va}} \cdot \int_R^{\infty} \left( -\frac{1}{r^2} \right) dr \quad (6-38)$$

Η σχέση (6-38) εκτελώντας την ολοκλήρωση καταλήγει στην :



$$\dot{m}_{mix,R} = \frac{A_R \cdot \rho_{mix,r} \cdot D_{va}}{R} \cdot \ln \left( 1 + \frac{m_{v,\infty} - m_{v,R}}{m_{v,R} - \left( \frac{j_{v,R} \cdot A_R}{\dot{m}_{mix,R}} \right)} \right) \quad (6-39)$$

Αν θεωρηθεί ότι η διάχυση του μίγματος αποτελείται εξολοκλήρου από κίνηση των ατμών και αγνοηθεί η μεταφορά του αέρα μέσα στο ατμώδες στρώμα τότε θα ισχύει η σχέση :

$$\frac{\dot{m}_{mix,R}}{A_R} = j_{mix,R} = j_{v,R} \quad (6-40)$$

Επομένως η σχέση για την μεταφορά μάζας ατμών γράφεται τελικά ως :

$$\frac{dm}{dt} = \frac{A_R \cdot \rho_{mix,r} \cdot D_{va}}{R} \cdot \ln \left( 1 + \frac{m_{v,\infty} - m_{v,R}}{m_{v,R} - 1} \right) \quad (6-41)$$

Η ποσότητα μέσα στο λογάριθμο χωρίς τη μονάδα ονομάζεται και αριθμός μεταφοράς μάζας δηλαδή :

$$B_M = \frac{m_{v,\infty} - m_{v,R}}{m_{v,R} - 1} \quad (6-42)$$

Η σχέση (6-41) μπορεί να γραφτεί και ως :

$$\frac{dm_0}{dt} = \frac{A_R \cdot \rho_{mix,r} \cdot D_{va}}{R} \cdot \left[ \ln(1 - m_{v,\infty}) - \ln(1 - m_{v,R}) \right] \quad (6-43)$$

Για εξαναγκασμένη διάχυση από τις εξισώσεις (6-25) και (6-24) ή (6-43) (προσθέτοντας και το αρνητικό πρόσημο λόγω σύμβασης) γράφεται ως :

$$\frac{dm}{dt} = -\overline{Sh} \cdot D \cdot \rho_{mix} \cdot D_{va} \cdot \left[ \ln(1 - m_{v,\infty}) - \ln(1 - m_{v,R}) \right] \quad (6-44)$$

Συγκρίνοντας με την εξίσωση (6-30) φαίνεται ότι η έκφραση που χρησιμοποιήθηκε για χαμηλούς ρυθμούς εξάτμισης είναι σχεδόν ίση με την έκφραση για υψηλούς ρυθμούς εξάτμισης μόνο όσο ισχύει η συνθήκη :

$$\ln(1 - m_{v,R}) = m_{v,R} \quad (6-45)$$

Η τελευταία συνθήκη ισχύει ικανοποιητικά για  $\Delta m \leq 0.2$  ενώ αν θεωρηθεί ξηρός αέρας στο περιβάλλον και κατάσταση βρασμού στην επιφάνεια το σφάλμα από την παραδοχή χαμηλών ρυθμών εξάτμισης υποτιμά μέχρι και κατά το ήμισυ την ροή ατμών.

Στην περίπτωση υψηλών ρυθμών μεταφοράς μάζας η ροή των ατμών αυξάνει το πάχος του φιλμ μεταφοράς μάζας και θερμότητας. Αυτή η ροή ονομάζεται και ροή **Stefan** και οι μεταβολές που υπεισέρχονται από το φαινόμενο αυτό εκφράζεται με εμπειρικούς συντελεστές διόρθωσης.

Πρέπει να σημειωθεί εδώ ότι η διαδικασία της εξάτμισης είναι μία εξαιρετικά πολύπλοκη διαδικασία και μπορεί να μελετηθεί με πολλούς τρόπους. Παραπάνω διατυπώθηκαν δύο διαφορετικές εξισώσεις για την ίδια ποσότητα που προέκυψαν με διαφορετικές παραδοχές για το πρόβλημα. Με την ίδια λογική μπορεί να γίνουν άλλες παραδοχές ή διαφορετικές προσεγγίσεις και να εξαχθούν διαφορετικές εξισώσεις που θα περιγράφουν τη μεταφορά των ατμών. Για παράδειγμα μπορεί το πρόβλημα να προσεγγιστεί με βάση την κινητική θεωρία των αερίων και να προκύψει η σχέση (6-46) ή το πρόβλημα να μελετηθεί με όρους στατιστικής μηχανικής να προκύψει η σχέση (6-47).

$$\frac{dm}{dt} = \lambda \cdot A_s \cdot \sqrt{\frac{1}{2\pi \cdot R_w}} \cdot \left( \frac{(P_{wsat,s})_{T_s}}{\sqrt{T_s}} - \frac{P_{w,\infty}}{\sqrt{T_\infty}} \right) \quad (6-46)$$

$$\frac{dm}{dt} = 2 \cdot A_s \cdot K_e \cdot \sinh\left(\frac{\Delta S_{LV}}{k}\right) \quad (6-47)$$

όπου : [ $\lambda$  = ο συντελεστής θερμικής εξομάλυνσης (-),  $R_w$  = η ειδική σταθερά αερίου των ατμών (SI),  $K_e$ ,  $\Delta S_{LV}$  = θερμοδυναμικές συναρτήσεις (~),  $k$  = η σταθερά του Boltzmann (SI)]

Επανερχόμενη τώρα στην περίπτωση χαμηλών ρυθμών εξάτμισης υπολογίζονται οι συντελεστές που χρειάζονται για την επίλυση της εξίσωσης (6-30).

Η μερική πίεση των ατμών στον αέρα μπορεί να δοθεί από τον ορισμό της σχετικής υγρασίας για σταθερή σχετική υγρασία ή από τον λόγο υγρασίας αέρα για μεταβαλλόμενη. Η σχετική υγρασία<sup>1</sup> ορίζεται ως το γραμμομοριακό κλάσμα

<sup>1</sup> Η σχετική υγρασία είναι ένα αδιάστατο κλάσμα. Δεν δίνει καμία πληροφορία για το περιεχόμενο του αέρα σε υγρασία εκτός αν δοθεί η θερμοκρασία στην οποία αναφέρεται.

του υδρατμού σε καθορισμένη ποσότητα υγρού αέρα προς το γραμμομοριακό κλάσμα του υδρατμού σε κορεσμένο αέρα στην ίδια πίεση και θερμοκρασία. Το κλάσμα αυτό με την παραδοχή τελείου αερίου γράφεται και ως κλάσμα της μερικής πίεσης των ατμών νερού σε μία θερμοκρασία ως προς την πίεση κορεσμού των ατμών για την ίδια θερμοκρασία :

$$RH = \frac{P_{w,a}}{(P_{ws,a})_{T_a}} \quad (6-48)$$

όπου : [  $RH$  = η σχετική υγρασία για την θερμοκρασία στην οποία βρίσκεται (-),  $P_{w,a}$  = η μερική πίεση ατμών στον αέρα περιβάλλοντος (SI),  $P_{ws,a}$  = η πίεση κορεσμού των ατμών νερού για την θερμοκρασία του αέρα περιβάλλοντος  $T_a$  (SI)]

Πολλές φορές η σχετική υγρασία δεν παραμένει σταθερή (πχ. μέσα σε μία αεροπορική μηχανή) αλλά μεταβάλλεται καθώς η πίεση και η θερμοκρασία μεταβάλλονται. Αυτό που μένει σταθερό πάντα είναι ο λόγος υγρασίας αέρα που ορίζεται ως η μάζα των υδρατμών περιβάλλοντος ως προς τη μάζα του ξηρού αέρα περιβάλλοντος (αγνοείται εδώ ως αμελητέα η αύξηση της υγρασίας στον αέρα από την ατμοποίηση του νερού) :

$$war = \frac{m_{v,a}}{m_{d,a}} = \frac{\rho_{v,a}}{\rho_{d,a}} \quad (6-49)$$

όπου : [  $war$  = ο λόγος υγρασίας αέρα (-),  $m_{v,a}$  = η μάζα των ατμών νερού στον αέρα (SI),  $m_{d,a}$  = η μάζα του ξηρού αέρα (SI),  $\rho_{v,a}$  = η πυκνότητα των ατμών στον αέρα περιβάλλοντος (SI),  $\rho_{d,a}$  = η πυκνότητα του ξηρού αέρα περιβάλλοντος (SI)]

Η πυκνότητα των ατμών νερού και του ξηρού αέρα θεωρούμενα ως τέλεια αέρια μπορούν να δοθούν αντίστοιχα από τις σχέσεις :

$$\rho_{v,a} = \frac{P_{w,a} \cdot M_w}{R \cdot T_a} \quad (6-50)$$

$$\rho_{d,a} = \frac{P_{d,a} \cdot M_d}{R \cdot T_a} \quad (6-51)$$

όπου : [  $P_{w,a}$  = η μερική πίεση των ατμών νερού στον αέρα περιβάλλοντος (SI),  $P_{d,a}$  = η μερική του ξηρού αέρα περιβάλλοντος (SI),  $M_w$  = το μοριακό βάρος του νερού (SI),  $R$  = η σταθερά των τελείων αερίων ίση με 8.341 (SI),  $T_a$  = η θερμοκρασία των ατμών νερού και του αέρα (SI),  $M_d$  = το μοριακό βάρος του ξηρού αέρα (SI)]

Η συνολική πίεση στο περιβάλλον (αλλά και στην ατμώδη επιφάνεια) προκύπτει ως άθροισμα των μερικών πιέσεων των ατμών νερού και του ξηρού αέρα σύμφωνα με το νόμο του Dalton (*Dalton 1801*):

$$P_{d,a} + P_{w,a} = P_a \quad (6-52)$$

όπου : [ $P_a$  = η συνολική πίεση του αέρα στο περιβάλλον (SI)]

Από τις σχέσεις (6-49) έως (6-52) προκύπτει η έκφραση για την μερική πίεση των ατμών νερού στο περιβάλλον ως :

$$P_{w,a} = \frac{P_a}{\frac{1}{w_a} \cdot \frac{M_v}{M_d} + 1} = \frac{P_a}{\frac{1}{w_a} \cdot 0.622 + 1} \quad (6-53)$$

Η πίεση κορεσμού όπως αναφέρθηκε ήδη προκύπτει από το διάγραμμα φάσεων του νερού δηλαδή την εξίσωση Clausius - Clayperon. Λόγω όμως της παρουσίας του ξηρού αέρα στην ατμώδη φάση και της μη ιδανικής συμπεριφοράς των ατμών αλλά και του αέρα η τιμή της πίεσης κορεσμού διαφέρει αισθητά από την τιμή του διαγράμματος φάσεων. Προσεγγίζεται έτσι από εμπειρικές εξισώσεις.

Ο Wextler (1977) [36] προτείνει τις παρακάτω δύο εξισώσεις για την περίπτωση ισορροπίας ατμών με υγρό νερό και πάγο και για θερμοκρασίες  $-50^\circ C \leq \theta \leq +50^\circ C$  :

$$e_w = 0.01 \cdot \exp \left[ \begin{array}{l} -2991.2729 \cdot \theta^{-2} - 6017.0128 \cdot \theta^{-1} + 18.87643854 - \\ -0.028354721 \cdot \theta + 0.17838301 \cdot 10^{-4} \cdot \theta^2 - \\ -0.84150417 \cdot 10^{-9} \cdot \theta^3 + 0.44412543 \cdot 10^{-12} \cdot \theta^4 + \\ + 2.858487 \cdot \ln \theta \end{array} \right] \quad (6-54)$$

$$e_i = 0.01 \cdot \exp \left[ \begin{array}{l} -5865,3696 \cdot \theta^{-1} + 22,241033 + 0.013749042 \cdot \theta - \\ -0.34031775 \cdot 10^{-4} \cdot \theta^2 + \\ + 0.26967687 \cdot 10^{-7} \cdot \theta^3 + 0.6918651 \cdot \ln \theta \end{array} \right] \quad (6-55)$$

όπου : [ $e_w$  = η πίεση κορεσμού των ατμών υγρού νερού για την δεδομένη θερμοκρασία (mb),  $e_i$  = η πίεση κορεσμού των ατμών πάγου για την δεδομένη θερμοκρασία (mb),  $\theta$  = η δεδομένη θερμοκρασία (SI)]

Η πίεση κορεσμού έχει αισθητή εξάρτηση από την πίεση του ξηρού αέρα που είναι σχεδόν όση η πίεση του μίγματος. Εισάγεται έτσι η διόρθωση μέσω της επόμενης σχέσης που ισχύει για θερμοκρασίες  $-20^\circ C \leq T \leq +50^\circ C$  (*Buck 1981*) [36] :

$$e_s = (1.0007 + 3.46 \cdot 10^{-6} \cdot P) \cdot 6.1121 \cdot \exp\left(\frac{17.502 \cdot T}{240.97 + T}\right) \quad (6-56)$$

όπου : [ $e_s$  = η πίεση κορεσμού των ατμών νερού για την δεδομένη θερμοκρασία ( $hPa$ ),  $T$  = η δεδομένη θερμοκρασία ( $^{\circ}C$ ),  $P$  = η πίεση του συστήματος ( $hPa$ )]

Η διαχυτότητα του ατμού νερού στον αέρα για θερμοκρασίες  $-40^{\circ}C \leq T_a \leq 40^{\circ}C$  δίνεται ως (Pruppacher 1976) [12] :

$$D_{va} = 0.211 \cdot \left(\frac{T_a}{T_0}\right)^{1.94} \cdot \left(\frac{P_0}{P_a}\right) \quad (6-57)$$

όπου : [ $T_a$  = η δεδομένη θερμοκρασία (SI),  $T_0$  = η θερμοκρασία αναφοράς ίση με 273.15 (SI),  $P_a$  = η πίεση αέρα που μας ενδιαφέρει ( $mbar$ ),  $P_0$  = η πίεση αναφοράς ίση με 1013.25 ( $mbar$ ),  $D_{va}$  = η διαχυτότητα του ατμού νερού στον αέρα ( $cm^2 \cdot s^{-1}$ )]

Για μεγαλύτερες θερμοκρασίες μπορεί να δοθεί ικανοποιητικά από τις σχέσεις (Marrero & Mason 1972) [33] :

$$D_{va} = 1.87 \cdot 10^{-10} \frac{T_a^{2.072}}{P_a} \quad \text{για } 280K < T_a < 450K \quad (6-58)$$

$$D_{va} = 2.75 \cdot 10^{-9} \frac{T_a^{1.632}}{P_a} \quad \text{για } 451K < T_a < 1070K \quad (6-59)$$

όπου : [ $T_a$  = η δεδομένη θερμοκρασία (SI),  $P_a$  = η πίεση αέρα που μας ενδιαφέρει ( $atm$ ),  $D_{va}$  = η διαχυτότητα του ατμού νερού στον αέρα (SI)]

Η διαχυτότητα επίσης διαφοροποιείται σημαντικά όταν το χαρακτηριστικό μήκος της γεωμετρίας του σώματος είναι πολύ μικρό. Αυτό συμβαίνει μόνο όταν το μέγεθος του χαρακτηριστικού μήκους είναι συγκρίσιμο με τη μέση ελεύθερη απόσταση των μορίων του αέρα<sup>1</sup> δηλαδή μικρότερο των  $50\mu m$ . Τα παραπάνω εκφράζονται και με τον αριθμό **Knudsen** που όταν παίρνει μεγάλες τιμές η μεταφορά μάζας γίνεται με στοιχειώδης μηχανισμούς κινητικότητας των μορίων του αερίου.

Ο αριθμός Knudsen εκφράζεται ως :

<sup>1</sup> Μέση ελεύθερη απόσταση των μορίων ορίζεται ως η απόσταση στο χώρο που διανύουν τα μόρια μεταξύ δύο διαδοχικών συγκρούσεων. Για τον αέρα σε πίεση  $1atm$  η μέση ελεύθερη απόσταση ισούται περίπου με  $60nm$ .

$$Kn = \frac{\lambda}{D} \quad (6-60)$$

όπου : [  $Kn$  = ο αριθμός Knudsen (-),  $\lambda$  = η μέση ελεύθερη απόσταση των μορίων (SI),  $D$  = η διάμετρος του σωματιδίου (SI)

Η διαχυτότητα μπορεί να προσεγγιστεί από την διορθωμένη έκφραση [12] :

$$D_{va}^* = \frac{D_{va}}{\left[ \frac{a}{a + \Delta v} + \frac{D_{va}}{a \cdot \alpha_c} \cdot \left( \frac{2\pi M_w}{R \cdot T_a} \right)^{1/2} \right]} \quad (6-61)$$

όπου : [  $D_{va}^*$  = η διαχυτότητα του ατμού νερού στον αέρα για μικροσκοπικό χαρακτηριστικό μήκος ( $cm^2 \cdot s^{-1}$ ),  $D_{va}$  = η διαχυτότητα του ατμού νερού στον αέρα για όχι μικροσκοπικό χαρακτηριστικό μήκος ( $cm^2 \cdot s^{-1}$ ),  $a$  = το μισό του χαρακτηριστικού μήκους ( $cm$ ),  $\Delta v$  = η μέση ελεύθερη απόσταση των μορίων του ατμού ή αλλιώς άλμα ατμού ( $cm$ ),  $M_w$  = το μοριακό βάρος του νερού ( $gr \cdot mol^{-1}$ ),  $R$  = η παγκόσμια σταθερά των αερίων (SI),  $\alpha_c$  = ο συντελεστής συμπύκνωσης ή εξάτμισης(-),  $T_a$  = η δεδομένη θερμοκρασία (SI)]

Ο αδιάστατος αριθμός Reynolds προκύπτει από τις εξισώσεις Navier-Stokes και για κάθε πρόβλημα ορίζεται ως ο λόγος των αδρανειακών δυνάμεων ως προς τον λόγο των δυνάμεων τριβής. Εκφράζει δηλαδή την αναλογία των δυνάμεων ορμής που τείνουν να κρατήσουν τα μόρια του ρευστού σε ομοιόμορφη κίνηση ως προς τις διατμητικές δυνάμεις που τείνουν να προκαλέσουν στροβιλισμούς<sup>1</sup>. Εκφράζοντας τους όρους αυτούς των δυνάμεων ως προς το χαρακτηριστικό μήκος και προκύπτει απλοποιώντας η σχέση για τον αδιάστατο αριθμό Reynolds :

$$Re = \frac{|u_1 - u_2| \cdot D}{\nu} = \frac{u_{rev} \cdot D}{\nu} \quad (6-62)$$

όπου : [  $u_{rev}$  = η σχετική ταχύτητα (SI),  $\nu$  = η κινηματική συνεκτικότητα του περιρρέουν ρευστού (SI),  $D$  = η διάμετρος του σώματος (SI)]

Ο παραπάνω αριθμός Reynolds είναι ο σχετικός αριθμός Reynolds που θα χρησιμοποιείται στην παρούσα μελέτη.

Η κινηματική συνεκτικότητα δίνεται ως η δυναμική συνεκτικότητα δια την πυκνότητα :

<sup>1</sup> Αυτό γίνεται πιο φανερό πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας το κλάσμα του αριθμού  $Re$  με την ποσότητα  $\mu \cdot D$ .

$$v = \frac{\mu}{\rho} \quad (6-63)$$

όπου : [ $\rho$  = η πυκνότητα του μέσου που μελετάμε (SI),  $\mu$  = η δυναμική ή αλλιώς απόλυτη συνεκτικότητα (SI), και οι λοιποί συντελεστές και μονάδες όπως ορίστηκαν μέχρι τώρα]

Ο αριθμός Schmidt εκφράζει το λόγο του ρυθμού διάχυσης ορμής προς το ρυθμό διάχυσης μάζας<sup>1</sup>. Δίνεται από τη σχέση :

$$Sc = \frac{v}{D_{wa}} \quad (6-64)$$

όπου : [ $v$  = η κινηματική συνεκτικότητα περιρρέον ρευστού (SI),  $D_{wa}$  = η διαχυτότητα του ατμού νερού στον αέρα (SI)]

**\* Μεταφορά Μάζας λόγω προσκόλλησης σταγόνων νερού  $\dot{M}_{DR}$**

Όταν συμβαίνει προσκόλληση σταγόνων νερού από το περιβάλλον ο ρυθμός προσκόλλησης δίνεται ως το γινόμενο της επιφάνειας της ισημερινής τομής του χαλαζιού επί έναν συντελεστή αποδοτικότητας προσκόλλησης επί το περιεχόμενο σε υγρασία του αέρα και όλο αυτό επί την σχετική ταχύτητα του ρεύματος αέρα.

Η σχέση που δίνει τα προηγούμενα είναι η :

$$\dot{M}_{DR} = S_E \cdot E \cdot W_f \cdot u \quad (6-65)$$

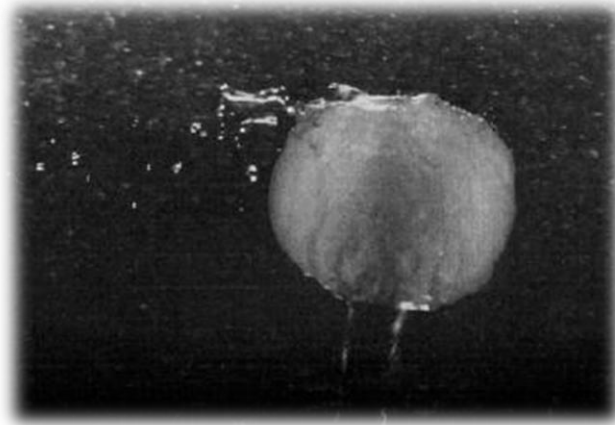
όπου : [ $\dot{M}_{DR}$  = ο ρυθμός πρόσθεσης μάζας στο χαλάζι (SI),  $S_E$  = η επιφάνεια της ισημερινής τομής του χαλαζιού (SI),  $E$  = η συνολική αποδοτικότητα προσκόλλησης ή πιθανότητα μόνιμης περισυλλογής<sup>2</sup> (-),  $W_f$  = το περιεχόμενο του περιβάλλοντος αέρα σε υγρασία ( $gr_{H_2O} \cdot m_{air}^{-3}$ ),  $u$  = η σχετική ταχύτητα χαλαζιού - αέρα (SI)]

<sup>1</sup> Ο λόγος αυτός επι της ουσίας συσχετίζει το πάχος του οριακού στρώματος ταχύτητας προς το πάχος του οριακού στρώματος μεταφοράς μάζας.

<sup>2</sup> Ο συντελεστής αυτός μπορεί να θεωρηθεί ίσος με την μονάδα. Η σταγόνες συγκρούονται πλαστικά και η πιθανότητα αναπήδησης της σταγόνας από την επιφάνεια είναι πολύ μικρή.

**\*Μεταφορά μάζας λόγω διατμητικών δυνάμεων και τύρβης  $\dot{M}_{SH}$**

Η απώλεια μάζας λόγω διατμητικών δυνάμεων και τύρβης είναι ένα καθαρά μηχανικό φαινόμενο και έχει να κάνει με τις τάσεις αποκόλλησης που προκαλεί το πεδίο ροής στην υγρή επιφάνεια του χαλαζιού.



**Εικόνα 6.9: Χαλάζι σε κατάσταση αποβολής του επιφανειακού υγρού (Πηγή : Lesins "Sponginess And Drop Shedding Of Gyration Hailstones In A Pressure Controlled Icing Wind Tunnel" 1986)**

Η κρίσιμη μάζα του επιφανειακού στρώματος υγρού νερού πέραν της οποίας συμβαίνει αποκόλληση δίνεται από τη σχέση (Rasmussen & Pruppacher 1984) [29] :

$$M_{wcrit} = 0.268 + 0.1389 \cdot M_{lcrit} \quad (6-66)$$

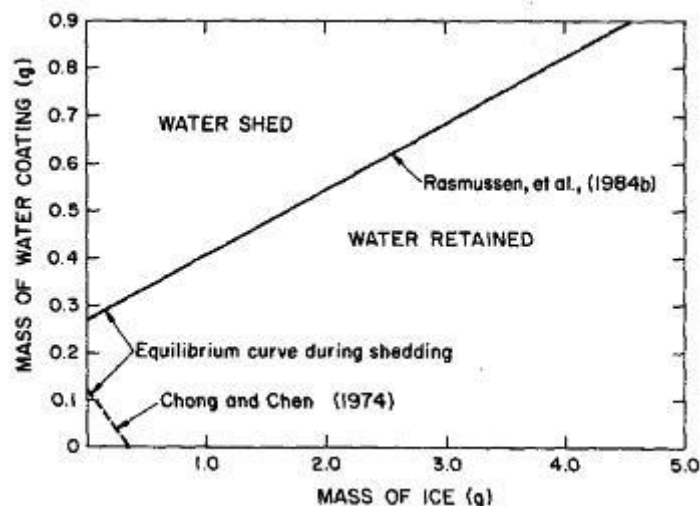
$$, Re \geq 6 \cdot 10^3$$

όπου : [ $M_{wcrit}$  = η μάζα του υγρού νερού πάνω στην επιφάνεια του χαλαζοκόκκου ακριβώς πριν ξεκινήσει η αποκόλληση ( gr ),  $M_{lcrit}$  = η μάζα του πυρήνα του πάγου στο χαλάζι ( gr )]

Σύμφωνα με την (6-66) σε αριθμούς Reynolds  $Re < 6 \cdot 10^3$  ουδεμία ποσότητα επιφανειακού υγρού νερού δεν αποκολλάται.

Τα παραπάνω φαίνονται γραφικά και στο **Διάγραμμα 6.10** :

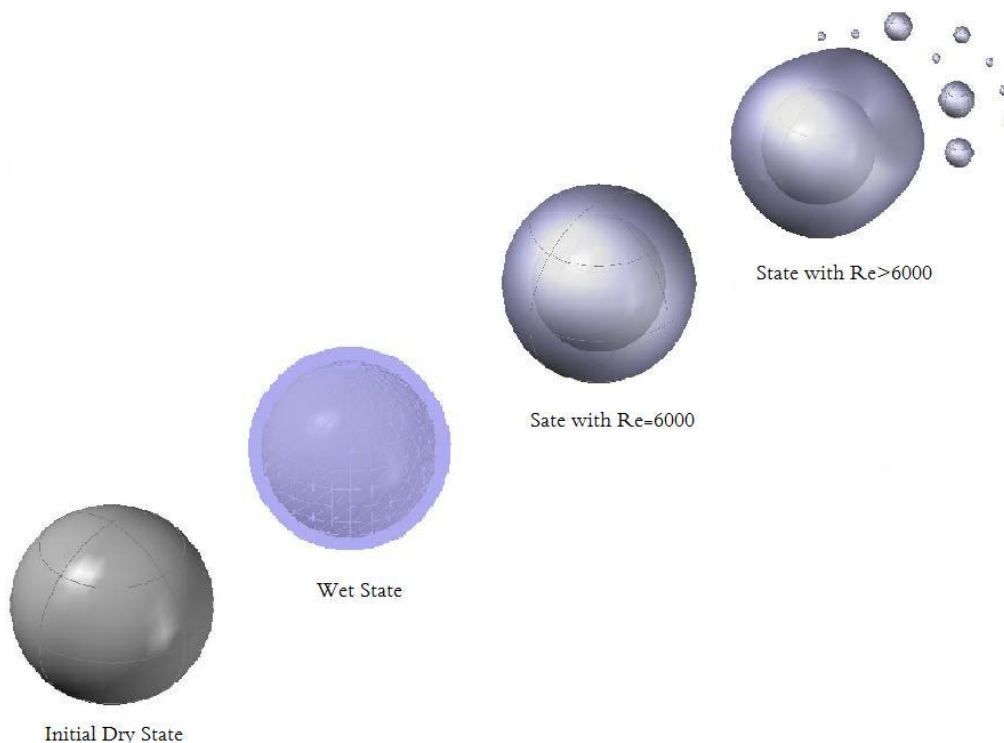




**Διάγραμμα 6.10:** Πειραματικές (Rasmussen et al 1984b) και θεωρητικές (Chong and Chen 1974) προβλέψεις της ισοδυναμίας επιφανειακής μάζας υγρού νερού και μάζας πυρήνα σφαιρικού χαλαζοκόκκου, πυκνότητας  $0.91 \text{ gr/m}^3$ . Πηγή : Rasmussen "Melting and Shedding of Graupel and Hail Part II Model Physics" 1986)

Στις περιοχές επάνω από τη γραμμή στο **Διάγραμμα 6.10** η επιπλέον ποσότητα υγρού νερού αρχίζει να αποκολλάται.

Η διαδικασία της αποκόλλησης απεικονίζεται σχηματικά και στην **Εικόνα 6.11** :



**Εικόνα 6.11:** Η διαδικασία αποκόλλησης του επιφανειακού υγρού στρώματος (3D Απεικόνιση)

Στη φάση όπου το χαλάζι αποβάλλει το επιπλέον επιφανειακό νερό, το νερό αυτό δεν έχει σφαιρική γεωμετρία<sup>1</sup>.

### 6.3 Ανάλυση των όρων Μεταφοράς Θερμότητας

#### \*Μεταφορά θερμότητας με διάχυση $\dot{Q}_{CV}$

Η μεταφορά θερμότητας με διάχυση είναι εντελώς ανάλογη με τη διάχυση μάζας. Η θερμοκρασιακή διαφορά ανάμεσα σε ένα σώμα και το περιβάλλον ρευστό προκαλεί την ροή αισθητής θερμότητας. Η ροή αυτή συμβαίνει με ανάλογο τρόπο όπως και η ροή μάζας στη μεταφορά μάζας και περιγράφεται από το **νόμο διάχυσης θερμότητας του Fourier (Fourier 1822)**. Ο νόμος του Fourier λέει ότι η φυσική διάχυση θερμότητας κατευθύνεται από περιοχές υψηλής θερμοκρασίας προς περιοχές χαμηλής θερμοκρασίας και ο ρυθμός διάχυσης θερμότητας είναι ευθέως ανάλογος της βαθμίδας θερμοκρασίας<sup>2</sup>.

Έτσι ο ρυθμός φυσικής διάχυσης θερμότητας σε μία μάζα με θερμοκρασία  $T$  δίνεται από την έκφραση :

$$\overrightarrow{j_{h,natural}} = -k \cdot \nabla T \quad (6-67)$$

όπου : [  $\overrightarrow{j_{h,natural}}$  = ο ρυθμός φυσικής διάχυσης θερμότητας ή αλλιώς ροή διάχυσης θερμότητας ( $J \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}$ ),  $k$  = ο συντελεστής φυσικής διάχυσης θερμότητας ( $J \cdot m^{-1} \cdot s^{-1} \cdot K^{-1}$ ),  $T$  = η θερμοκρασία ( $K$ ) ]

Η εξαναγκασμένη διάχυση θερμότητας είναι εντελώς ανάλογη με την εξαναγκασμένη διάχυση μάζας και για την περιγραφή του φαινομένου χρησιμοποιούνται ανάλογες εξισώσεις. Παραλείπονται λοιπόν παρακάτω οι ενδιάμεσες εξισώσεις και παρατίθενται μόνο οι τελικές εξισώσεις που όπως θα φανεί είναι εντελώς ανάλογες με τις τελικές εξισώσεις διάχυσης μάζας.

Η εξίσωση διάχυσης θερμότητας είναι η :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla T = \frac{k_a}{\rho_a \cdot c_{p,a}} \cdot \nabla^2 T \quad (6-68)$$

<sup>1</sup> Στην πραγματικότητα ούτε το επιφανειακό στρώμα υγρού νερού δεν είναι σφαιρικό αλλά ούτε και ο ίδιος ο πυρήνας ο οποίος μάλιστα είναι και έκκεντρα τοποθετημένος.

<sup>2</sup> Ο νόμος αγωγής θερμότητας του Fourier υποθέτει πως το κύμα διάδοσης της θερμότητας ταξιδεύει μέσα στην ύλη ακαριαία. Αυτό σημαίνει πως κάθε θερμοκρασιακή διαταραχή στα όρια ενός σώματος γίνεται αμέσως αντιληπτή με τη μορφή θερμοκρασιακών αλλαγών σε ολόκληρη τη μάζα του σώματος. Αυτό είναι γενικά αποδεκτό αν αναλογιστεί κανείς πως ακόμα και σε ακραία δυσμενείς περιπτώσεις όπως του υγρού ηλίου σε θερμοκρασίες κοντά στο απόλυτο μηδέν η διάδοση του θερμικού κύματος γίνεται με ταχύτητα 3162 m/s.

Ο όρος  $\frac{k_a}{\rho_a \cdot c_{p,a}}$  ονομάζεται θερμική διαχυτότητα και είναι ανάλογος της διαχυτότητας στη μεταφορά μάζας.

Η θερμική διαχυτότητα μπορεί να γραφτεί ως :

$$K_a = \frac{k_a}{\rho_a \cdot c_{p,a}} \quad (6-69)$$

Ο ρυθμός φυσικής μεταφοράς θερμότητας ή αλλιώς **η αγωγή θερμότητας** κατά αναλογία με τη διάχυση μάζας δίνεται από τη σχέση :

$$\left(\frac{dq}{dt}\right)_0 = -4\pi \cdot C \cdot k_a \cdot (T_{a,s} - T_{a,\infty}) \quad (6-70)$$

όπου :  $\left[\left(\frac{dq}{dt}\right)_0\right]$  = ο ρυθμός μεταφοράς θερμότητας για φυσική διάχυση θερμότητας ( $J \cdot s^{-1}$ ),  $C$  = η ηλεκτροστατική χωρητικότητα σε μονάδες μήκους για το υποθετικό ηλεκτρικά φορτισμένου σώμα ίδιου σχήματος και μεγέθους με το σώμα από το οποίο συμβαίνει διάχυση ατμών ( $m$ ),  $T_{a,s}$  = η θερμοκρασία στην επιφάνεια ( $K$ ),  $T_{a,\infty}$  = η θερμοκρασία μακριά από την επιφάνεια]

Οι τιμή για τη χωρητικότητα  $C$  παίρνει τιμές όπως και στη διάχυση μάζας.

Η θερμική αγωγιμότητα διαφοροποιείται στην μεταφορά θερμότητας όπως η διαχυτότητα στην μεταφορά μάζας για την περίπτωση πολύ μικρών γεωμετριών.

Η θερμική αγωγιμότητα μπορεί να προσεγγιστεί από την διορθωμένη έκφραση [12]:

$$k_a^* = \frac{k_a}{\left[ \frac{a}{a + \Delta_T} + \frac{k_a}{a \cdot \alpha_T \cdot \rho_a \cdot c_{p,a}} \cdot \left( \frac{2\pi M_a}{R \cdot T_a} \right)^{1/2} \right]} \quad (6-71)$$

όπου :  $[k_a^*]$  = η θερμική αγωγιμότητα του αέρα για μικροσκοπικό χαρακτηριστικό μήκος ( $cal \cdot cm^{-1} \cdot s^{-1} \cdot deg C^{-1}$ ),  $k_a$  = η θερμική αγωγιμότητα αέρα για όχι μικροσκοπικό χαρακτηριστικό μήκος ( $cal \cdot cm^{-1} \cdot s^{-1} \cdot deg C^{-1}$ ),  $a$  = το μισό του χαρακτηριστικού μήκους ( $cm$ ),  $\Delta_T$  = το θερμικό άλμα ( $cm$ ),  $M_a$  = το μοριακό βάρος του αέρα ( $gr \cdot mol^{-1}$ ),  $R$  = η παγκόσμια σταθερά των αερίων ( $J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$ ),  $\alpha_T$  = ο συντελεστής συμπύκνωσης ή εξάτμισης(-),  $T_a$  = η δεδομένη θερμοκρασία ( $K$ )

Σε σφαιρικές συντεταγμένες η αγωγή θερμότητας για σταθεροποιημένη κατάσταση ανάμεσα σε δύο επιφάνειες εσωτερικά μίας σφαίρας με ( $r_2 > r_1$ ), αποδεικνύεται ότι γράφεται ως [45] :

$$\left(\frac{dq}{dt}\right)_0 = -\frac{4\pi \cdot k \cdot (T_1 - T_2)}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} \quad (6-72)$$

όπου :  $\left[\left(\frac{dq}{dt}\right)_0\right]$  = ο ρυθμός μεταφοράς θερμότητας (SI),  $T_1$  = η θερμοκρασία στην ακτίνα  $r_1$  (SI),  $\Delta T$  = η θερμοκρασιακή διαφορά ανάμεσα στην ακτίνα  $r_1$  και την ακτίνα  $r_2$  (SI),  $T_2$  = η θερμοκρασία στην ακτίνα  $r_2$  (SI),  $r_1$  = η ακτίνα της εσωτερικής επιφάνειας (SI),  $r_2$  = η ακτίνα της εξωτερικής επιφάνειας (SI),  $k$  = η θερμική αγωγιμότητα του μέσου (SI)]

Αν θεωρηθεί ότι ( $T_2 > T_1$ ) τότε παίρνουμε την ήδη γνωστή σχέση (6-70):

$$\left(\frac{dq}{dt}\right)_0 = -4\pi \cdot k \cdot r_1 \cdot (T_1 - T_\infty) \quad (6-73)$$

Ακόμα το θερμοκρασιακό πεδίο που δημιουργείται δεν είναι γραμμικό και η θερμοκρασία σε ένα τυχαίο σημείο εντός του σφαιρικού σώματος δίνεται από τη σχέση :

$$T_x = T_1 - (T_1 - T_2) \cdot \frac{\left[1 - \left(\frac{r_1}{r_x}\right)\right]}{\left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2}\right)\right]} \quad (6-74)$$

όπου :  $[T_1]$  = η θερμοκρασία στην ακτίνα  $r_1$  (SI),  $r_1$  = η ακτίνα της εσωτερικής επιφάνειας (SI),  $r_2$  = η ακτίνα της εξωτερικής επιφάνειας (SI),  $r_x$  = μία τυχαία ακτίνα ανάμεσα στις  $r_1$  και  $r_2$  (SI),  $T_x$  = η θερμοκρασία στην ακτίνα  $r_x$  (SI)]

Στην εξαναγκασμένη μεταφορά θερμότητας ορίζεται ο συντελεστής εξαναγκασμένης διάχυσης θερμότητας  $h$  ως :

$$h = \frac{\frac{dq}{dt}}{A \cdot \Delta T} \quad (6-75)$$

όπου : [ $h =$  ο συντελεστής εξαναγκασμένης μεταφοράς θερμότητας ( $J \cdot m^{-2} \cdot K^{-1} \cdot s^{-1}$ ),  $\frac{dq}{dt} =$  ο ρυθμός μεταφοράς μάζας για εξαναγκασμένη διάχυση ( $J \cdot s^{-1}$ ),  $A =$  η ενεργή επιφάνεια διάχυσης θερμότητας (SI),  $\Delta T =$  η διαφορά θερμοκρασίας προκαλεί τη διάχυση θερμότητας (SI)]

Αν το γινόμενο του συντελεστή εξαναγκασμένης διάχυσης θερμότητας με το χαρακτηριστικό μήκος του προβλήματος που μελετάμε το διαιρέσουμε με τη θερμική αγωγιμότητα προκύπτει ένας πολύ χρήσιμος αδιάστατος αριθμός για τη μεταφορά θερμότητας, ο αριθμός **Nusselt**.

$$Nu = \frac{h \cdot L}{k_a} \quad (6-76)$$

όπου : [ $Nu =$  ο αδιάστατος αριθμός Nusselt (-),  $h =$  ο συντελεστής εξαναγκασμένης μεταφοράς θερμότητας (SI),  $L =$  το χαρακτηριστικό μήκος (SI),  $k_a =$  η θερμική αγωγιμότητα του αέρα (SI)]

Ο αριθμός Nusselt εκφράζει το λόγο της αντίστασης στη διάχυση θερμότητας που θα παρουσίαζε ακίνητο το ρευστό (αγωγή) προς την ολική αντίσταση στη μεταφορά που παρουσιάζει κινούμενο.

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (6-75) ο αριθμός Nusselt ξαναγράφεται ως :

$$\overline{Nu} = \frac{\frac{dq}{dt} \cdot L}{A \cdot k_a \cdot \Delta T} \quad (6-77)$$

Ο αντίστοιχος συντελεστής στη μετεωρολογία (αερισμού) γράφεται ως :

$$\overline{f}_h = \frac{\frac{dq}{dt}}{\left(\frac{dq}{dt}\right)_0} = \frac{\overline{Nu} \cdot A}{4\pi \cdot C \cdot L} \quad (6-78)$$

Για την περίπτωση της σφαιρικής γεωμετρίας η (6-78) γράφεται :

$$\overline{f}_h = \frac{\overline{Nu}}{2} \quad (6-79)$$

Για την μεταφορά θερμότητας οι συντελεστές αερισμού παίρνουν ίδιες ακριβώς τιμές με τη μεταφορά μάζας και το μόνο που αλλάζει είναι η χρήση της θερμικής αγωγιμότητας του αέρα  $k_a$  αντί της διαχυτότητας και του αριθμού Prandtl  $Pr$  αντί του αριθμού Schmidt  $Sc$ .

Γράφονται δηλαδή ως [12] :

$$\overline{f_h} = 1.00 + 0.108 \cdot (\text{Re}^{1/2} \cdot \text{Pr}^{1/3})$$

(6-80)

για  $\text{Re}^{1/2} \cdot \text{Pr}^{1/3} < 1.4$

$$\overline{f_h} = 0.78 + 0.308 \cdot (\text{Re}^{1/2} \cdot \text{Pr}^{1/3})$$

(6-81)

για  $1.4 \leq \text{Re}^{1/2} \cdot \text{Pr}^{1/3} < 51.4$

Για ένα πεπλατυσμένο σφαιροειδές η αναφορά [12] δίνει τις τιμές :

$$\overline{f_h} = 1.00 + 0.14 \cdot (\text{Re}^{1/2} \cdot \text{Pr}^{1/3})^2$$

(6-82)

για  $\text{Re}^{1/2} \cdot \text{Sc}^{1/3} < 1.0$

$$\overline{f_h} = 0.86 + 0.28 \cdot (\text{Re}^{1/2} \cdot \text{Pr}^{1/3})$$

(6-83)

για  $1.0 \leq \text{Re}^{1/2} \cdot \text{Sc}^{1/3}$

Ο αριθμός Prandtl εκφράζει το λόγο του ρυθμού διάχυσης ορμής προς το ρυθμό διάχυσης θερμότητας<sup>1</sup>. Δίνεται από τη σχέση :

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{K_a} \quad (6-84)$$

όπου : [ $\nu$  = η κινηματική συνεκτικότητα περιρρέον ρευστού (SI),  $K_a$  = η θερμική διαχυτότητα του ατμού νερού στον αέρα (SI)]

Η σχέση για την εξαναγκασμένη μεταφορά θερμότητας η αλλιώς για τη **συναγωγή θερμότητας** μπορεί να γραφτεί τελικά ως :

$$\frac{dq}{dt} = -A \cdot L^{-1} \cdot \overline{Nu} \cdot k_a \cdot (T_s - T_a) \quad (6-85)$$

ή

$$\dot{Q}_{cv} = A \cdot L^{-1} \cdot \overline{Nu} \cdot k_a \cdot (T_a - T_s) \quad (6-86)$$

<sup>1</sup> Ο λόγος αυτός επι της ουσίας συσχετίζει το πάχος του οριακού στρώματος ταχύτητας προς το πάχος του οριακού στρώματος θερμότητας.

όπου : [ $\dot{Q}_{CV}$  = η μεταφορά θερμότητας με συναγωγή (SI),  $T_a$  = η θερμοκρασία του αέρα περιβάλλοντος (SI),  $T_s$  = η θερμοκρασία επιφάνειας (SI) ]

**\*Μεταφορά θερμότητας με ακτινοβολία  $\dot{Q}_{RD}$**

Η θερμική ακτινοβολία είναι μορφή ενέργειας που εκπέμπεται από την οποιαδήποτε ύλη που βρίσκεται σε μη μηδενική απόλυτη θερμοκρασία. Ανεξάρτητα από το είδος της ύλης η θερμική ακτινοβολία οφείλεται στις αλλαγές στην διάταξη των ηλεκτρονίων στα άτομα του υλικού. Σε αντίθεση με την αγωγή, η θερμική ακτινοβολία μεταδίδεται και στο κενό και μάλιστα με το μέγιστο ρυθμό. Η μετάδοση της θερμικής ακτινοβολίας γίνεται με ηλεκτρομαγνητικά κύματα (ή φωτόνια).

Από την αναφορά [34] δίνεται μία απλοποιημένη εξίσωση για την μεταφορά θερμότητας με ακτινοβολία θεωρώντας τεφρό<sup>1</sup> σώμα ως :

$$\dot{Q}_{RD} = a_p \cdot \sigma \cdot A \cdot (T_a^4 - T_s^4) \quad (6-87)$$

όπου : [ $\dot{Q}_{RD}$  = η μεταφορά θερμότητας με ακτινοβολία (SI),  $a_p$  = η απορροφητικότητα (-),  $\sigma$  = η σταθερά Stefan – Boltzmann (SI),  $A$  = η επιφάνεια του σώματος (SI),  $T_a$  = η θερμοκρασία του αέρα περιβάλλοντος (SI),  $T_s$  = η θερμοκρασία επιφάνειας (SI)]

Η απορροφητικότητα αντιπροσωπεύει τη συνδυασμένη επιρροή του υγρού φιλμ και των επιφανειακών απορροφητικότητων και λαμβάνεται σύμφωνα με την αναφορά [34] ίση με 0.8.

**\*Μεταφορά θερμότητας με ελαστική κρούση  $\dot{Q}_{IM}$**

Η ανάλυση της μεταφοράς θερμότητας λόγω ελαστικής κρούσης σωματιδίου πάνω σε επίπεδο βασίζεται στις επόμενες παραδοχές :

1. Κρούση σχεδόν στατική (*quasi static*) ώστε να ισχύει η θεωρία κατά Hertz για την ελαστική κρούση.
2. Κρούση απόλυτα ελαστική.

<sup>1</sup> Τεφρό σώμα ονομάζεται ένα υποθετικό σώμα που απορροφά ένα συγκεκριμένο κλάσμα της ακτινοβολίας ανάμεσα στην τιμή 0 και 1 από το σύνολο της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας που προσπίπτει επάνω του. Αυτό το κλάσμα είναι η απορροφητικότητα και είναι ανεξάρτητο από το μήκος κύματος.

3. Μεταφορά θερμότητας με αγωγή μόνο στην κάθετη διεύθυνση ως προς το επίπεδο της κρούσης.
4. Κάθετη κρούση δίχως ιδιοπεριστροφή.
5. Επιφάνειες κρούσης ιδανικά λείες.

Υπό τις παραπάνω προϋποθέσεις η θερμότητα που μεταφέρεται με αγωγή λόγω μίας μόνο κρούσης δίνεται από τη σχέση [37] :

$$Q_{IM} = 0.87 \cdot \beta \cdot [T_m - T_s] \cdot A_0 \cdot t_0^{1/2} \quad (6-88)$$

όπου

$$A_0 = \pi \cdot a_0^2 \quad (6-89)$$

$$a_0 = (15mV^2R^2)^{1/5} / (16E)^{1/5} \quad (6-90)$$

$$t_0 = 2.943 \cdot \frac{a_0^2}{(R \cdot V)} \quad (6-91)$$

$$\beta = \frac{\beta_1 \beta_2}{(\beta_1 + \beta_2)} \quad (6-92)$$

$$\beta_i = (\rho_i \cdot c_i \cdot k_i)^{1/2} \quad (6-93)$$

$$m = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} \quad (6-94)$$

$$R^{-1} = R_1^{-1} + R_2^{-1} \quad (6-95)$$

$$E = \left[ \frac{(1 - v_1^2)}{E_1} + \frac{(1 - v_2^2)}{E_2} \right]^{-1} \quad (6-96)$$

όπου :  $[Q_{IM}]$  = η θερμότητα που μεταφέρεται σε μία κρούση (SI),  $A_0$  = η μέγιστη επιφάνεια επαφής (SI),  $a_0$  = η ακτίνα της μέγιστης επιφάνειας επαφής (SI),  $t_0$  = η διάρκεια της επαφής (SI),  $\beta$  = η ισοδύναμη θερμική ιδιότητα (SI),  $\beta_1$  = η θερμική ιδιότητα του χαλαζοκόκκου (SI),  $\beta_2$  = η θερμική ιδιότητα του μετάλλου



(SI),  $m$  = η ισοδύναμη μάζα (SI),  $m_1$  = η μάζα του χαλαζιού (SI),  $m_2$  = η μάζα του μετάλλου ίση με  $\infty$  (SI),  $R$  = η σχετική καμπυλότητα (SI),  $R_1$  = η καμπυλότητα του χαλαζοκόκκου (SI),  $R_2$  = η καμπυλότητα της επιφάνειας ίση με  $\infty$  (SI),  $V$  = η σχετική ταχύτητα κρούσης (SI),  $E$  = ο ισοδύναμος συντελεστής Young (SI),  $E_1$  = συντελεστής Young του χαλαζοκόκκου (SI),  $E_2$  = ο συντελεστής Young της επιφάνειας (SI),  $\nu_1$  = ο λόγος Poisson του χαλαζοκόκκου (-),  $\nu_2$  = ο λόγος Poisson της επιφάνειας (-),  $T_s$  = η θερμοκρασία του χαλαζοκόκκου πριν την κρούση ( $^{\circ}C$ ),  $T_m$  = η θερμοκρασία του μετάλλου πριν την κρούση ( $^{\circ}C$ ),  $c_i$  = η ειδική θερμοχωρητικότητα υπο σταθερή πίεση (SI),  $k_i$  = η θερμική αγωγιμότητα (SI),  $\rho_i$  = η πυκνότητα (SI) ]

Με την παραδοχή ότι το μέταλλο συμπεριφέρεται σαν τοίχος με άπειρη μάζα και άπειρη ακτίνα συμπεραίνουμε ότι  $m = m_1$  και  $R = R_1$  .

**\*Μεταφορά θερμότητας με προσκόλληση σταγόνων  $\dot{Q}_{DR}$**

Όταν μία ποσότητα υγρού προσκολλάται στην επιφάνεια του χαλαζιού μεταφέρει και το ενεργειακό της περιεχόμενο. Αν έχει διαφορετική θερμοκρασία από αυτό τότε αυτομάτως μεταφέρεται θερμότητα από τη μάζα της σταγόνας προς το χαλάζι με αγωγή. Η θερμότητα που εισάγεται από το ενεργειακό περιεχόμενο της σταγόνας δίνεται από την επόμενη σχέση :

$$\dot{Q}_{DR} = \dot{M}_{DR} \cdot \left[ c_{p,w} \cdot (T_d - 273.16) + \frac{V_d^2}{2} \right] \quad (6-97)$$

όπου : [ $\dot{Q}_{DR}$  = η μεταφορά θερμότητας (SI),  $\dot{M}_{DR}$  = ο ρυθμός πρόσθεσης μάζας στο χαλάζι (SI),  $c_{p,w}$  = η ειδική θερμοχωρητικότητα του νερού (SI),  $T_d$  = η θερμοκρασία της σταγόνας περιβάλλοντος (SI),  $V_d$  = η σχετική ταχύτητα κρούσης της σταγόνας (SI)]

Η προσκόλληση σταγόνων δρα θετικά ή αρνητικά στο λιώσιμο του χαλαζιού ανάλογα με τη θερμοκρασία των σταγόνων και προσθέτει μάζα. Αποτελεί γενικά σπάνιο φαινόμενο και συνήθως δεν λογαριάζεται στους υπολογισμούς.

**\*Μεταφορά θερμότητας από την υγροποιημένη ποσότητα πυρήνα  $\dot{Q}_{CI}$**

Από την υγροποίηση του πυρήνα μία ποσότητα υγρού νερού ενσωματώνεται στη μάζα του επιφανειακού υγρού στρώματος και προσδίδει το ενεργειακό της περιεχόμενο. Η ροή θερμότητας εκφρασμένη σε όρους ολικής ενθαλπίας είναι :

$$\dot{Q}_{CI} = \dot{M}_{CI} \cdot [c_{p,w} \cdot (T_{me} - 273.16)] \quad (6-98)$$

όπου : [ $\dot{Q}_{CI}$  = η μεταφορά θερμότητας (SI),  $\dot{M}_{ME}$  = η μεταφορά τήγματος (SI),  $c_{p,w}$  = η ειδική θερμοχωρητικότητα του νερού (SI),  $T_{me}$  = η θερμοκρασία του τήγματος ίση με τη θερμοκρασία τήξης<sup>1</sup> (SI)]

### **\*Μεταφορά θερμότητας από την εξάτμιση ή την εξάχνωση $\dot{Q}_{ES}$**

Η μεταφορά θερμότητας λόγω εξάτμισης ή εξάχνωσης συμβαίνει γιατί κάθε ποσότητα νερού που αεριοποιείται απορροφά ενέργεια. Αυτό σημαίνει ότι αν το νερό μεταβεί από υγρό σε αέριο (εξάτμιση) ή από στερεό σε αέριο (εξάχνωση) απορροφά θερμότητα λόγω αλλαγής φάσης. Η ενέργεια για να συμβεί η διαδικασία της εξάτμισης προσφέρεται από το υπόλοιπο σώμα ή από το περιβάλλον και αποθηκεύεται ως το μεγαλύτερο ενεργειακό περιεχόμενο της αέριας φάσης στην ποσότητα που αεριοποιήθηκε.

Η μεταφορά θερμότητας είναι ένα συνεπακόλουθο της μεταφοράς μάζας λόγω διαφορετικών συγκεντρώσεων υγρασίας πάνω σε μία υγρή επιφάνεια και στο περιβάλλον της. Η μεταφορά θερμότητας από την διαδικασία της εξάτμισης (ή εξάχνωσης) δίνεται ως το γινόμενο της μεταφοράς μάζας επί την λανθάνουσα θερμότητα εξάτμισης (ή εξάχνωσης αντίστοιχα). Η πρόταση αυτή εκφράζεται με την επόμενη σχέση :

$$\dot{Q}_{ES} = \dot{M}_{ES} \cdot L_{E\_S} \quad (6-99)$$

όπου : [ $\dot{Q}_{ES}$  = η μεταφορά θερμότητας (SI),  $\dot{M}_{ES}$  = η μεταφορά μάζας (SI),  $L_{E\_S}$  = η λανθάνουσα θερμότητα εξάτμισης ή εξάχνωσης ανά περίπτωση (SI)]

Η λανθάνουσα θερμότητα εξάτμισης του νερού  $L_E$  για την περιοχή θερμοκρασιών  $0.01^\circ\text{C} \leq T_s \leq 373.99^\circ\text{C}$  μπορεί να προσεγγιστεί από τη σχέση (IAPWS 1997) :

$$L_E = \left[ \begin{array}{l} 1.3022296730 \cdot 10^{-8} \cdot T_s^6 + 3.4064757956 \cdot 10^{-5} \cdot T_s^5 - \\ -3.6683175579 \cdot 10^{-2} \cdot T_s^4 + 2.0780331147 \cdot 10^1 \cdot T_s^3 - \\ -6.5271902001 \cdot 10^3 \cdot T_s^2 + 1.0752660599 \cdot 10^6 \cdot T_s + \\ +6.9907752486 \cdot 10^7 \end{array} \right] \quad (6-100)$$

όπου : [ $L_E$  = η λανθάνουσα θερμότητα εξάτμισης του νερού (SI),  $T_s$  = θερμοκρασία (SI)]

<sup>1</sup> Η αλλαγή φάσης θεωρούμε ότι είναι ισόθερμη διαδικασία.

Όπως ειπώθηκε ήδη, η εξάτμιση και η εξάχνωση συμβαίνουν λόγω της διαφοράς πυκνότητας ατμών στην επιφάνεια (στερεή ή υγρή) του χαλαζιού και της ατμόσφαιρας. Η τάση αυτή είναι ανάλογη της σχετικής υγρασίας για κάθε θερμοκρασία. Στην περίπτωση του βρασμού η θερμοκρασία είναι τέτοια ώστε η πίεση ατμών να μην είναι απλά ίση με την πίεση κορεσμού αλλά τόση όση ολόκληρη η ατμοσφαιρική πίεση. Έτσι όλη η ποσότητα του υγρού είναι σε κατάσταση λίγο πριν την εξάτμιση και οποιοδήποτε ποσό θερμότητας της προσφέρεται το χρησιμοποιεί για την “απογείωση” μορίων. Όλο το ποσό θερμότητας που προσφέρεται χρησιμοποιείται αποκλειστικά για την εξάτμιση.

Όταν υφίσταται εξάτμιση επάνω στην επιφάνεια του χαλαζιού τότε ο ρυθμός εξάτμισης (που απορροφά ενέργεια) αντιτίθεται στον ρυθμό υγροποίησης.

**\*Μεταφορά θερμότητας από την ατμοποιημένη ποσότητα του επιφανειακού υγρού στρώματος  $\dot{Q}_{EO}$**

Η ποσότητα ατμού που αεριοποιείτε μεταφέρει το ενεργειακό της περιεχόμενο. Με όρους ολικής ενθαλπίας η μεταφορά θερμότητας εκφράζεται με την επόμενη σχέση :

$$\dot{Q}_{EO} = \dot{M}_{ES} \cdot [c_{p,v} \cdot (T_s - 273.16)] \quad (6-101)$$

όπου : [ $\dot{Q}_{EO}$  = η μεταφορά θερμότητας (SI),  $\dot{M}_{ES}$  = η μεταφορά ατμού (SI),  $c_{p,v}$  = η ειδική θερμοχωρητικότητα του ατμού (SI),  $T_a$  = η θερμοκρασία της ατμόσφαιρας (SI),  $T_s$  = η θερμοκρασία των ατμών την στιγμή που αποχωρούν (SI)]

**\*Μεταφορά θερμότητας από την αποκόλληση  $\dot{Q}_{SH}$**

Με την αποκόλληση υγρού νερού από την επιφάνεια του χαλαζιού μία ποσότητα υγρού νερού αφαιρείται και μαζί με αυτήν και το περιεχόμενο της σε θερμότητα.

Η ροή θερμότητας εκφρασμένη σε όρους ολικής ενθαλπίας είναι :

$$\dot{Q}_{SH} = \dot{M}_{SH} \cdot [c_{p,w} \cdot (T_s - 273.16)] \quad (6-102)$$

όπου : [ $\dot{Q}_{SH}$  = η μεταφορά θερμότητας (SI),  $\dot{M}_{SH}$  = η μεταφορά τήγματος (SI),  $c_{p,w}$  = η ειδική θερμοχωρητικότητα του νερού (SI),  $T_s$  = η θερμοκρασία του στρώματος υγρού νερού (SI)]

### \*Μεταφορά θερμότητας υγροποίησης $\dot{Q}_{ME}$

Η μεταφορά θερμότητας λόγω υγροποίησης συμβαίνει γιατί κάθε ποσότητα νερού που υγροποιείται απορροφά ενέργεια από τη μάζα από την οποία αποσπάται ή από εξωτερικές πηγές που στην περίπτωση του προβλήματος που μελετάται εδώ τυχαίνει να είναι το επιφανειακό υγρό στρώμα νερού. Έτσι αν και η μάζα υγροποιείται εκτός του στρώματος και εισέρχεται σε αυτό μετέπειτα, παρόλα ταύτα απορροφά ενέργεια από αυτό. Η ροή θερμότητας εκφράζεται ως το γινόμενο της ροής τήγματος επί την λανθάνουσα θερμότητα υγροποίησης :

$$\dot{Q}_{ME} = \dot{M}_{CI} \cdot L_M \quad (6-103)$$

όπου : [  $\dot{Q}_{ME}$  = η μεταφορά θερμότητας (SI),  $L_M$  = η λανθάνουσα θερμότητα υγροποίησης (SI) ]

### \*Μεταφορά θερμότητας στην μάζα του υγρού επιφανειακού στρώματος ή στη μάζα του ξηρού πυρήνα $\dot{Q}_{RE}$

Το επιφανειακό στρώμα υγρού νερού διατηρεί ένα ενεργειακό περιεχόμενο που η μεταβολή του ως προς το χρόνο δίνεται από την σχέση :

$$\dot{Q}_{RE} = c_{p,w} \cdot \frac{d(m_{rem}(t) \cdot T_{rem}(r_x, t))}{dt} = \quad (6-104)$$

όπου : [  $\dot{Q}_{RE}$  = η μεταφορά θερμότητας (SI),  $m_{rem}$  = η μάζα του νερού ή του πάγου που είναι συνάρτηση του χρόνου (SI),  $c_{p,w}$  = η ειδική θερμοχωρητικότητα του νερού (SI),  $T_{rem}(r_x)$  = η θερμοκρασία του στρώματος που είναι συνάρτηση της ακτινικής θέσης και του χρόνου (SI),  $t=0$  χρόνος (SI) ]

## 6.4 Μοντέλο Υγροποίησης - Εξάτμισης

Στο σημείο αυτό αναπτύσσεται ένα φυσικό μοντέλο υγροποίησης και εξάτμισης για να περιγράψει τη θερμική αποσύνθεση του χαλαζιού ή των μικροκρυστάλλων πάγου. Η παρακάτω μέθοδος επίλυσης προτείνεται από την παρούσα εργασία και χρησιμοποιεί στοιχεία από όλη την προαναφερθείσα θεωρία ώστε να επιτύχει την πιο ρεαλιστική αντιμετώπιση του προβλήματος.

### Οι παραδοχές που λαμβάνονται είναι :

1. Το στοιχείο πάγου θεωρείται σφαιρικό και κεντρικά τοποθετημένο μέσα στο υγρό νερό που πιθανά το περιβάλλει.

2. Η μετάδοση θερμότητας γίνεται με συναγωγή, αγωγή και ακτινοβολία. Η αποκόλληση του επιφανειακού υγρού στρώματος αν συμβεί, συμβαίνει για αριθμούς Reynolds και σε ποσότητες που καθορίζονται από τη θεωρία. Όταν η θερμοκρασία επιφάνειας είναι μεγαλύτερη ή ίση των  $0.01^{\circ}\text{C}$ , που λογίζεται και ως σταθερή θερμοκρασία υγροποίησης, πάντα θα δημιουργείται επιφανειακό στρώμα νερού προς εξάτμιση και αποκόλληση.
3. Το πρόβλημα μελετάται μέσα σε μία αλληλουχία διακριτών χρονικών βημάτων στα οποία οι συνθήκες περιβάλλοντος παραμένουν σταθερές. Όταν το σωματίδιο αποτελείται από μία μόνο φάση (δηλαδή παγάκι ή σταγόνα), η θερμοκρασία είναι κοινή και οποιαδήποτε μεταβολή της συμβαίνει ταυτόχρονα σε όλη τη μάζα του σωματιδίου υποθέτοντας έτσι μία άπειρη εσωτερική αγωγιμότητα (*Lumped Capacitance Assumption*).

Στα σφαιρικά στοιχεία λόγω της απόλυτης συμμετρίας η τρισδιάστατη ανάλυση μεταπίπτει σε μονοδιάστατη ανάλυση κατά μήκος της ακτίνας εφόσον χρησιμοποιείται σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων. Η μελέτη γίνεται όχι αναλυτικά αλλά λύνοντας τις διαφορικές εξισώσεις με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών. Η μέθοδος αυτή αναπόφευκτα εισάγει σφάλματα τα οποία όμως μειώνονται όταν το χρονικό βήμα γίνεται εξαιρετικά μικρό.

Σε κάθε πεπερασμένο χρονικό βήμα δίνονται και θεωρούνται γνωστά τα εξής :

1. Η γεωμετρία του σφαιρικού στοιχείου με την έννοια της εσωτερικής και της εξωτερικής διαμέτρου στην αρχή του χρονικού βήματος..
2. Η θερμοκρασία της επιφάνειας στην αρχή του χρονικού βήματος.
3. Τα χαρακτηριστικά του ρεύματος αέρα δηλαδή η σχετική ταχύτητα, η θερμοκρασία, η πίεση και το περιεχόμενο σε υγρασία του αέρα.

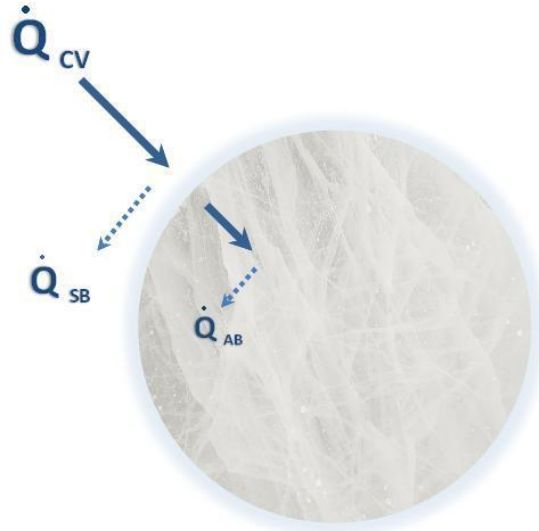
Στο τέλος κάθε χρονικού βήματος οφείλουν να υπολογιστούν οι καινούργιες τιμές των προηγούμενων δεδομένων.

Για την μοντελοποίηση εξετάζονται δύο περιπτώσεις, η μία για την απλή θέρμανση και η δεύτερη για την υγροποίηση και την εξάτμιση. Βασικός διαχωριστής των δύο περιπτώσεων είναι η θερμοκρασία επιφάνειας. Αν η θερμοκρασία επιφάνειας είναι μικρότερη από τη θερμοκρασία υγροποίησης τότε το στοιχείο πάγου μελετάται σύμφωνα με το μοντέλο εξάχνωσης – θέρμανσης. Αν αντίθετα η θερμοκρασία επιφάνειας είναι μεγαλύτερη από τη θερμοκρασία υγροποίησης τότε το στοιχείο πάγου μελετάται με το μοντέλο εξάτμισης – υγροποίησης. Ιδιαίτερη μέριμνα λαμβάνεται για την περίπτωση στην οποία η επιφανειακή θερμοκρασία παίρνει την τιμή του βρασμού και επομένως το ρευστό βρίσκεται σε κατάσταση αλλαγής φάσης.

Παρακάτω αναλύονται οι δύο περιπτώσεις :

### Α. Περίπτωση Σφαιρικού Στοιχείου Πάγου Ξηρού σε Κατάσταση Εξάχνωσης - Θέρμανσης

Στην κατάσταση αυτή η θερμοκρασία επιφάνειας είναι σίγουρα κάτω από τη θερμοκρασία υγροποίησης. Για λόγους θερμοδυναμικής ισορροπίας γύρω από τον πάγο δημιουργείται ένα φιλμ κορεσμένων ατμών και η διάχυση των ατμών προκαλεί την εξάχνωση. Αν ο αέρας γύρω από το στοιχείο πάγου κινείται με σχετική ταχύτητα η διάχυση υποβοηθάτε περαιτέρω.



Σχήμα 6.12: Κατάσταση θέρμανσης με αρχική θερμοκρασία κάτω της θερμοκρασίας υγροποίησης για σφαιρικό στοιχείο πάγου (σε τομή)

Το Σχήμα 6.12 εμφανίζει την περίπτωση εξάχνωσης - θέρμανσης σε ένα σφαιρικό στοιχείο πάγου με μη συμπαγή πυρήνα. Το στοιχείο πάγου εμφανίζει στα εξωτερικά του όρια ένα φιλμ κορεσμένων ατμών αέρα<sup>1</sup>. Στο σχήμα φαίνονται επίσης οι ροές θερμότητας κατά την ακτινική διεύθυνση (μονοδιάστατη ανάλυση). Οι ροές κάθετα στην ακτινική διεύθυνση αντιπροσωπεύουν την απορρόφηση θερμότητας.

Το στοιχείο πάγου αλλάζει διάμετρο μόνο λόγο εξάχνωσης. Το ισοζύγιο θερμότητας στον όγκο του σώματος έχει τη μορφή :

$$\frac{dq_{sub}}{dt} + \frac{dq_{conv}}{dt} + \frac{dq_{rad}}{dt} + \frac{dq_{abs}}{dt} = 0 \quad (6-105)$$

όπου :  $\left[ \frac{dq_{sub}}{dt} = \text{ο ρυθμός απορρόφησης θερμότητας για την εξάχνωση (SI)}, \frac{dq_{conv}}{dt} = \text{ο ρυθμός πρόσδωσης θερμότητας με συναγωγή (SI)}, \frac{dq_{abs}}{dt} = \text{ο ρυθμός} \right.$

<sup>1</sup> Το φιλμ κορεσμένων ατμών αέρα έχει πολύ μικρό πάχος συγκριτικά με το μέγεθος του σώματος. Στο Σχήμα 6.12 απεικονίζεται σκόπιμα πολύ μεγαλύτερο για να γίνει αντιληπτή η ύπαρξη του.

απορρόφησης θερμότητας από τη μάζα του πάγου (SI),  $\frac{dq_{rad}}{dt}$  = ο ρυθμός πρόσδωσης θερμότητας με ακτινοβολία (SI)]

Ο ρυθμός μεταφοράς θερμότητας που προκαλεί η εξάχνωση ισούται με :

$$\frac{dq_{sub}}{dt} = \frac{dm_{sub}}{dt} \cdot L_s \quad (6-106)$$

όπου :  $[\frac{dm_{sub}}{dt}$  = ο ρυθμός εξάχνωσης (SI),  $L_s$  = η λανθάνουσα θερμότητα εξάχνωσης (SI)]

Ο ρυθμός μεταβολής της μάζας λόγω εξάχνωσης δίνεται από τη σχέση :

$$\frac{dm_{sub}}{dt} = -h_m \cdot 4\pi \cdot r_b^2 \cdot \rho_a \cdot \ln \left( 1 + \frac{(m_{w,s})_{T_s} - m_{w,a}}{1 - (m_{w,s})_{T_s}} \right) \quad (6-107)$$

όπου :  $[h_m$  = ο συντελεστής μεταφοράς μάζας ( $Kg \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}$ ),  $r_b$  = η ακτίνα του σωματιδίου (SI),  $m_{w,a}$  = το κλάσμα της μάζας των ατμών στο περιβάλλον προς τη μάζα του μίγματος αέρα - ατμών (-),  $(m_{w,s})_{T_s}$  = το κλάσμα της μάζας των ατμών στην επιφάνεια προς τη μάζα του μίγματος αέρα - ατμών (-),  $\rho_a$  = η πυκνότητα του μίγματος αέρα - ατμών ακριβώς πάνω από την επιφάνεια ατμοποίησης ( $Kg \cdot m^{-3}$ )]

Η πυκνότητα του μίγματος αέρα - ατμών  $\rho_a$  όπως και όλες οι υπόλοιπες ιδιότητες μεταφοράς του μίγματος πάνω από την επιφάνεια υπολογίζονται σύμφωνα με τον κανόνα του Hubbard (Hubbard 1975). Ο κανόνας αυτός λέει πως **για τις ιδιότητες του μίγματος αέρα - ατμών και μόνο<sup>1</sup>** είναι πιο αντιπροσωπευτικό να χρησιμοποιηθεί η θερμοκρασία και η κατά μάζα αναλογία ατμών - μίγματος όπως δίνονται από τις εξισώσεις (6-108) και (6-109) :

$$T_f = T_s + \frac{1}{3} \cdot (T_\infty - T_s) \quad (6-108)$$

$$m_f = m_s + \frac{1}{3} \cdot (m_\infty - m_s) \quad (6-109)$$

Ο συντελεστής μεταφοράς μάζας ορίζεται ως :

<sup>1</sup> Η συναγωγή θερμότητας γίνεται από τον αέρα περιβάλλοντος προς το επιφανειακό στρώμα που αποτελεί μίγμα αέρα και ατμών. Αυτό το μίγμα αέρα και ατμών θεωρείται ότι βρίσκεται σε ισορροπία με τον πάγο (ή τη σταγόνα για την περίπτωση εξάτμισης) και επομένως έχει ίδια θερμοκρασία. Για τις ιδιότητες του και μόνο όμως θεωρείται ότι έχει μία υψηλότερη θερμοκρασία όπως στον εμπειρικό κανόνα που αναφέρεται παραπάνω.

$$h_m = D_{va} \cdot \overline{Sh} \cdot D^{-1} \quad (6-110)$$

Για τον αριθμό Sherwood χρησιμοποιούμε την εμπειρική έκφραση της θεωρίας για σφαιρικά σώματα (*Ranz & Marshall 1952*):

$$\overline{Sh} = 2 + 0.6 \cdot \text{Re}^{1/2} \cdot \text{Sc}^{1/3} \quad (6-111)$$

όπου: [ $D_{va}$  = η διαχυτότητα του ατμού στον αέρα ( $m^2 \cdot s^{-1}$ ),  $\overline{Sh}$  = ο αδιάστατος αριθμός Sherwood (-),  $D$  = η εξωτερική διάμετρος ( $m$ ),  $\text{Re}$  = ο αδιάστατος αριθμός Reynolds (-),  $\text{Sc}$  = ο αδιάστατος αριθμός Schmidt]

Η σχέση (6-111) έχει ισχύ για  $20 \leq \text{Re} \leq 200$ . Σύμφωνα με τους (*Rowe et al 1965*) για αριθμούς  $200 < \text{Re} \leq 2000$  μία καλύτερη προσέγγιση δίνεται αντικαθιστώντας τον αριθμό 0.60 με 0.69.

Η σχέση των Ranz & Marshall αναφέρεται σε πειράματα που έγιναν σε πορώδη βρεγμένα σφαιρικά σώματα υπό ημιστατικές συνθήκες και με σταθερή ακτίνα. Δεν λαμβάνουν υπόψη τη μεταβατική θέρμανση ή τη μεταβολή της ακτίνας και τους υψηλούς ρυθμούς εξάτμισης.

Για υψηλούς ρυθμούς μεταφοράς μάζας ο αριθμός  $Sh$  διορθώνεται και δίνεται από την έκφραση (*Sirignano 1983*) [16]:

$$\overline{Sh} = 2 \cdot \frac{\ln(1 + B_M)}{B_M} \cdot \left[ 1 + \frac{k}{2} \cdot \frac{\text{Re}^{1/2} \cdot \text{Sc}^{1/3}}{F_M} \right] \quad (6-112)$$

όπου

$$B_M = \frac{(m_{w,s})_{T_s} - m_{w,a}}{1 - (m_{w,s})_{T_s}} \quad (6-113)$$

$$F_M = (1 + B_M)^{0.7} \cdot \frac{\ln(1 + B_M)}{B_M} \quad (6-114)$$

με  $B_M \leq 20$  και  $\text{Sc} \leq 3$   $k = 0.781$

Για πολύ μικρά σώματα ( $D < 10 \mu m$ ) η διαχυτότητα πρέπει να διορθωθεί από τη σχέση (6-61) της θεωρίας. Αυτό συμβαίνει γιατί σε τέτοια κλίμακα η διάχυση μάζας συμβαίνει με στοιχειώδεις διαδικασίες κινητικότητας των μορίων.

Το κλάσμα της μάζας των ατμών στο περιβάλλον προς τη μάζα του μίγματος αέρα - ατμών μπορεί να βρεθεί από το λόγο υγρασίας ξηρού αέρα ως :



$$m_{w,a} = \frac{war}{war + 1} \quad (6-115)$$

όπου : [  $war = \text{ο λόγος υγρασίας αέρα } (Kg_{water} \cdot Kg_{dryair}^{-1})$  ]

Το κλάσμα της μάζας των ατμών στην επιφάνεια προς τη μάζα του μίγματος αέρα - ατμών είναι συνάρτηση της πίεσης κορεσμού των ατμών στην επιφάνεια  $P_{is,s}$  που δίνεται από την αντίστοιχη έκφραση της θεωρίας (6-54) και θεωρείται δεδομένη ανάλογα με τη θερμοκρασία επιφάνειας.

Ο ρυθμός πρόσδωσης θερμότητας με συναγωγή δίνεται από την έκφραση :

$$\frac{dq_{conv}}{dt} = h \cdot 4\pi \cdot r_b^2 \cdot (T_a - T_s) \quad (6-116)$$

όπου : [  $h = \text{ο συντελεστής συναγωγής (SI)}$ ,  $T_a = \text{η θερμοκρασία του αέρα περιβάλλοντος στην αρχή του χρονικού βήματος (SI)}$ ,  $T_s = \text{η θερμοκρασία της εξωτερικής επιφάνειας του σώματος (SI)}$  ]

Ο συντελεστής μεταφοράς θερμότητας ορίζεται ως :

$$h = k_a \cdot \overline{Nu} \cdot D^{-1} \quad (6-117)$$

Για τον αριθμό Nusselt χρησιμοποιείται η εμπειρική έκφραση της θεωρίας για σφαιρικά σώματα (*Ranz & Marshall 1952*) :

$$\overline{Nu} = 2.00 + 0.60 \cdot Re^{1/2} \cdot Pr^{1/3} \quad (6-118)$$

όπου : [  $k_a = \text{η θερμική αγωγιμότητα του αέρα (SI)}$ ,  $\overline{Nu} = \text{ο αδιάστατος αριθμός Nusselt (-)}$ ,  $D = \text{η εξωτερική διάμετρος (SI)}$ ,  $Re = \text{ο αδιάστατος αριθμός Reynolds (-)}$ ,  $Pr = \text{ο αδιάστατος αριθμός Prandtl}$  ]

Η σχέση αυτή έχει ικανοποιητική ακρίβεια για αριθμούς Reynolds μέχρι και  $5 \cdot 10^4$  σύμφωνα με τους (*Rowe et al 1965*).

Για υψηλούς ρυθμούς μεταφοράς μάζας ο αριθμός  $Nu$  διορθώνεται και δίνεται τελικά από την έκφραση (*Sirignano 1983*) :

$$\overline{Nu} = 2 \cdot \frac{\ln(1 + B_H)}{B_H} \cdot \left[ 1 + \frac{k}{2} \cdot \frac{Re^{1/2} \cdot Pr^{1/3}}{F_H} \right] \quad (6-119)$$

όπου

$$B_H = \frac{c_{p,a} (T_\infty - T_s)}{L_{ev}} \quad (6-120)$$

$$F_H = (1 + B_H)^{0.7} \frac{\ln(1 + B_H)}{B_H} \quad (6-121)$$

με  $B_H \geq 0$  και  $\text{Pr} \geq 1$   $k = 0.781$

Η θερμική αγωγιμότητα διορθώνεται όπως και η διαχυτότητα από τη σχέση (6-71) για πολύ μικρές γεωμετρίες.

Εφόσον η επιφάνεια δεν είναι υγρή θα έχει μία σημαντική τραχύτητα και αυτή θα αυξάνει την συναγωγή θερμότητας. Σύμφωνα με την αναφορά [46] η τραχύτητα επηρεάζει την μεταφορά θερμότητας αν οι επιφανειακές ανωμαλίες είναι μεγαλύτερες της ποσότητας :

$$h = \frac{10 \cdot \nu \cdot \text{Re}^{1/4}}{U} \quad (6-122)$$

όπου : [ $h$  = το μέγιστο ύψος των ανωμαλιών στην επιφάνεια (SI),  $\nu$  = η κινηματική συνεκτικότητα του αέρα (SI),  $\text{Re}$  = ο αριθμός Reynolds της ροής (-),  $U$  = η ταχύτητα του ρεύματος αέρα (SI)]

Στην περίπτωση που ισχύει η σχέση (6-122) τότε λόγω της τραχύτητας η αύξηση στη συναγωγή θερμότητας εκφράζεται ποσοτικά πολλαπλασιάζοντας τον αριθμό Nusselt με ένα παράγοντα που σύμφωνα με τις αναφορές [43] και [46] παίρνει περίπου την τιμή 2.0.

Ο ρυθμός πρόσδωσης θερμότητας με ακτινοβολία θεωρώντας τεφρό σώμα δίνεται από την έκφραση :

$$\frac{dq_{rad}}{dt} = a_p \cdot \sigma \cdot 4\pi \cdot r_b^2 \cdot (T_a^4 - T_s^4) \quad (6-123)$$

όπου : [ $\frac{dq_{rad}}{dt}$  = η μεταφορά θερμότητας με ακτινοβολία (SI),  $a_p$  = η απορροφητικότητα (-),  $\sigma$  = η σταθερά Stefan - Boltzmann (SI)]

Η απορροφητικότητα λαμβάνεται σύμφωνα με την αναφορά [34] ίση με 0.8.

Ο ρυθμός απορρόφησης θερμότητας από τον πυρήνα υποθέτοντας στιγμιαία ομοιόμορφη κατανομή θερμοκρασία στη μάζα του σώματος και σταθερή μάζα κατά τη θέρμανση δίνεται από τη σχέση :

$$\frac{dq_{abs}}{dt} = -\rho_i \cdot V_i \cdot c_{p,i} \cdot \frac{dT_s}{dt} \quad (6-124)$$

όπου : [  $\frac{dq_{abs}}{dt}$  = ο ρυθμός απορρόφησης θερμότητας για θέρμανση του πυρήνα (SI),  $\rho_i$  = η πυκνότητα του πάγου (SI),  $V_i$  = ο όγκος του πάγου (SI),  $c_{p,i}$  = η ειδική θερμοχωρητικότητα του πάγου (SI),  $\frac{dT_s}{dt}$  = ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας του πάγου (SI) ]

Ο ρυθμός μείωσης της μάζας δίνεται ως η χρονική παράγωγος του γινομένου της πυκνότητας με τον όγκο. Έτσι λαμβάνοντας τη χρονική παράγωγο της μάζας του πυρήνα και επιλύοντας ως προς τον ρυθμό μεταβολής της ακτίνας προκύπτει ο ρυθμός μείωσης της ακτίνας ως :

$$\frac{dr_b}{dt} = \frac{\frac{dm_{sub}}{dt}}{\rho_i \cdot 4\pi \cdot r_b^2} \quad (6-125)$$

όπου : [  $\frac{dr_b}{dt}$  = ο ρυθμός μεταβολής της κοινής ακτίνας (SI) ]

**Από τα παραπάνω δεδομένα προκύπτουν δύο βασικές εξισώσεις με δύο αγνώστους.** Η μία εξίσωση προκύπτει από το ενεργειακό ισοζύγιο και από τις εξισώσεις (6-105), (6-106), (6-116), (6-123) και (6-124). Η εξίσωση αυτή είναι η :

$$\frac{dT_s}{dt} = \frac{\left[ -h_m \cdot \rho_a \cdot \ln \left( 1 + \frac{(m_{w,s})_{T_s} - m_{w,a}}{1 - (m_{w,s})_{T_s}} \right) \cdot L_s + h \cdot (T_a - T_s) + a_p \cdot \sigma \cdot (T_a^4 - T_s^4) \right]}{\left[ \frac{1}{3} \cdot \rho_i \cdot r_b \cdot c_{p,i} \right]} \quad (6-126)$$

Η δεύτερη εξίσωση προκύπτει από την αρχή της συνέχειας και είναι η εξίσωση (6-125) που αναδιαταγμένη γράφεται ως :

$$\frac{dr_b}{dt} = \left[ -h_m \cdot \frac{\rho_a}{\rho_i} \cdot \ln \left( 1 + \frac{(m_{w,s})_{T_s} - m_{w,a}}{1 - (m_{w,s})_{T_s}} \right) \right] \quad (6-127)$$

Οι εξισώσεις (6-126) και (6-127) επιλύονται σε πεπερασμένα χρονικά βήματα με τις αριθμητικές μεθόδους. Παρόλα αυτά όμως επιλύονται θεωρώντας τις ιδιότητες του κορεσμένου μίγματος αέρα - ατμών της επιφάνειας σύμφωνα με την αρχική θερμοκρασία  $T_s$ . Το γεγονός αυτό εισάγει μία ανακρίβεια εφόσον οι ιδιότητες του φιλμ ατμών υπολογίστηκαν σε μία θερμοκρασία που μεταβάλλεται κατά το χρονικό βήμα. Το σφάλμα γίνεται αντιληπτό καλύτερα αν επαναληφθεί από την αρχή όλη η διαδικασία με αρχική θερμοκρασία επιφάνειας

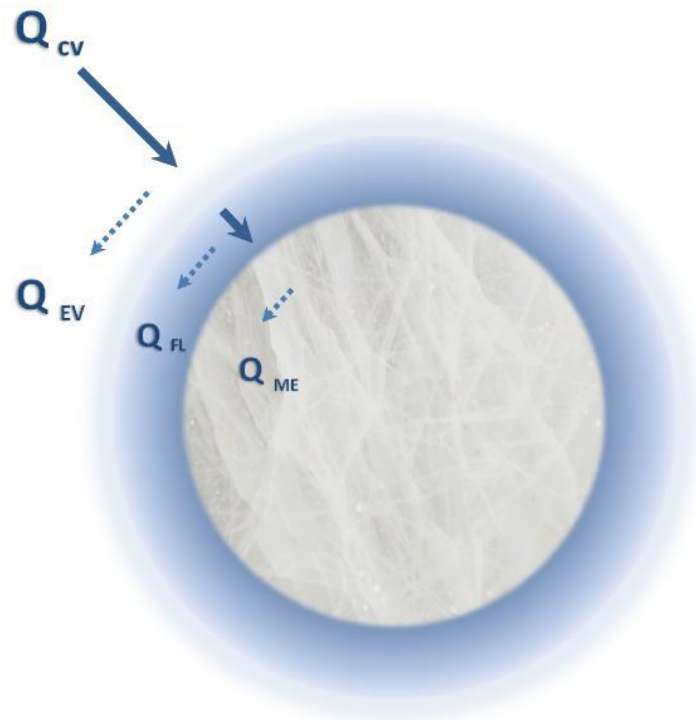
την τελική θερμοκρασία που υπολογίστηκε. Αν γίνει αυτό τότε στο αποτέλεσμα για την εξωτερική ακτίνα λαμβάνεται μία ελαφρώς διαφορετική τιμή από αυτήν που υπολογίστηκε αρχικά και αυτό είναι αναμενόμενο λόγω της εξάρτησης της πίεσης κορεσμού των ατμών στην επιφάνεια από τη θερμοκρασία. Εκτελώντας αυτή την επαναληπτική διαδικασία για ένα πεπερασμένο αριθμό βημάτων η τιμή της εξωτερικής ακτίνας θα συγκλίνει πιθανά σε μία σταθερή τιμή.

Μπορούμε να θέσουμε όριο σύγκλισης την απόκλιση κατά 0.0001% στην τιμή της ακτίνας μεταξύ δύο διαδοχικών επαναλήψεων.

## **B. Περίπτωση Σφαιρικού Στοιχείου Πάγου Υγρού σε Κατάσταση Εξάτμισης - Υγροποίησης**

Στην συγκεκριμένη κατάσταση το στοιχείο πάγου υγροποιείται και ένα στρώμα υγρού νερού σχηματίζεται στην επιφάνεια του.

Το **Σχήμα 6.13** εμφανίζει την περίπτωση υγροποίησης - εξάτμισης σε ένα στοιχείο πάγου με μη συμπαγή πυρήνα που υγροποιούμενο δημιουργεί μία σημαντική ποσότητα επιφανειακού υγρού. Το επιφανειακό υγρό εμφανίζει πάνω στα εξωτερικά του όρια ένα φιλμ κορεσμένων ατμών αέρα. Στο σχήμα φαίνονται επίσης οι ροές θερμότητας κατά την ακτινική διεύθυνση (*μονοδιάστατη ανάλυση*). Η ροές κάθετα στην ακτινική διεύθυνση αντιπροσωπεύουν την απορρόφηση θερμότητας.



**Σχήμα 6.13: Κατάσταση υγροποίησης - εξάτμισης με επιφανειακό στρώμα υγρού νερού σε σφαιρικό στοιχείο πάγου (σε τομή)**

Προτού γίνει η διατύπωση των εξισώσεων πρέπει πρώτα να γίνουν ορισμένες διευκρινήσεις επάνω στις συνθήκες εξάτμισης και υγροποίησης :

### **Διευκρίνιση 1 :**

Το υγρό στρώμα ατμοποιείται ταυτόχρονα με τη δημιουργία του ενώ ο ρυθμός ατμοποίησης μπορεί να είναι εξαιρετικά μεγάλος (αν για παράδειγμα το ρεύμα αέρα είναι ισχυρό). Υπάρχει λοιπόν η περίπτωση το επιφανειακό στρώμα να εξαφανίζεται την ίδια στιγμή που δημιουργείται. Στην περίπτωση αυτή το στοιχείο πάγου αν και βρίσκεται σε θερμοκρασία υγροποίησης εμφανίζεται τελείως στεγνό και για το συγκεκριμένο χρονικό βήμα μελετάτε μόνο η υγροποίηση. Η ατμοποίηση θα εμφανιστεί στο επόμενο χρονικό βήμα όπου θα έχει δημιουργηθεί ένα υποτυπώδες στρώμα υγρού από τη συναγωγή θερμότητας.

### **Διευκρίνιση 2 :**

Από την μελέτη της αναφοράς [42] το επιφανειακό φιλμ όταν υφίσταται εσωτερική κυκλοφορία μπορεί να θεωρηθεί ισόθερμο. Όταν θεωρείται ισόθερμο η εξωτερική του θερμοκρασία θα υποθέτεται ότι βρίσκεται οριακά πάνω από την θερμοκρασία υγροποίησης ώστε το φιλμ να βρίσκεται στην υγρή κατάσταση. Φιλμ με εσωτερική κυκλοφορία είναι και το φιλμ που υφίσταται αποκόλληση. Αν πάλι θεωρηθεί ότι το φιλμ αποκτά θερμοκρασιακή βαθμίδα τότε αυτή βρίσκεται από το νόμο αγωγής θερμότητας κατά Fourier. Ταυτόχρονα όμως για το ίδιο θερμοκρασιακό πεδίο και πιο συγκεκριμένα για τη θερμοκρασία επιφάνειας θα πρέπει να ικανοποιείται και το θερμικό ισοζύγιο.

### **Διευκρίνιση 3 :**

Αν οι συνθήκες περιβάλλοντος οδηγούν σε πολύ μεγάλο ρυθμό ατμοποίησης τότε η ενέργεια που απορροφάτε και χρησιμοποιείται για την ατμοποίηση είναι και αυτή πολύ μεγάλη. Το «πλεόνασμα» θερμότητας που άγεται μέσω του υγρού στρώματος προς το εσωτερικό του πυρήνα μπορεί να μειώνεται δραματικά, να μηδενίζεται ή και να αλλάζει πρόσημο (δηλαδή αντί για πλεόνασμα έλλειψη). Στην ακραία περίπτωση που αλλάζει πρόσημο θα πρέπει να απορροφά ενέργεια από το υγρό φιλμ και αν το θερμικό περιεχόμενο του φιλμ δεν επαρκεί τότε θα πρέπει να δημιουργηθεί πάγος στα όρια του πυρήνα με το φιλμ. Κατά την απορρόφηση θερμότητας από τον πυρήνα δεν χρησιμοποιείται κάποια εξίσωση ροής θερμότητας παρά μόνο αφαιρείται το ζητούμενο ποσό. Το ζητούμενο ποσό αφαιρείται με τέτοιο τρόπο ώστε το προφίλ της θερμοκρασίας να ικανοποιεί το νόμο αγωγής θερμότητας του Fourier στο τέλος του χρονικού βήματος για τη δεδομένη τελική εξωτερική θερμοκρασία.

### **Διευκρίνιση 4 :**

Αν η μάζα του στρώματος ξεπερνά μία μέγιστη τιμή τότε αποκολλάται μερικώς και η μέγιστη τιμή αποκόλλησης είναι συνάρτηση του αριθμού Reynolds. Αν ακόμα στο προφίλ της θερμοκρασιακής βαθμίδας του υγρού φιλμ προκύπτουν

θερμοκρασίες μεγαλύτερες από τη θερμοκρασία βρασμού τότε επιβάλλεται άμεση μείωση της ακτίνας μέχρι το σημείο της ακτίνας που έχει θερμοκρασία ακριβώς μικρότερη από το βρασμό.

### Διευκρίνιση 5 :

Στην περίπτωση που ο πυρήνας υγροποιείται πλήρως τότε ακολουθεί ατμοποίηση και θέρμανση της σταγόνας που απομένει μέχρι και αυτή να εξαφανιστεί πλήρως. Η σταγόνα αποκτά στιγμιαία τη θερμοκρασία επιφάνειας. Το μοντέλο προβλέπει την επανάψυξη της σταγόνας, αν οι συνθήκες το επιβάλλουν, διατηρώντας έναν πολύ μικρό μη υδάτινο πυρήνα κρυσταλλοποίησης στο κέντρο της σταγόνας. Έτσι η ενδεχόμενη παγοποίηση ξεκινά από μέσα προς τα έξω.

Με τις πιο πάνω διευκρινήσεις μπορούν να διατυπωθούν τώρα οι εξισώσεις υγροποίησης και εξάτμισης.

### **Αναλυτικότερα :**

Το ισοζύγιο θερμότητας μεταξύ εξωτερικής επιφάνειας και υγρού στρώματος λέει ότι ο ρυθμός με τον οποίο εισάγεται και απορροφάται θερμότητα από το υγρό στρώμα θα πρέπει να ισούται με τη ροή θερμότητας μέσω του υγρού στρώματος. Το ισοζύγιο θερμότητας μεταξύ υγρού στρώματος και επιφάνειας λέει ότι η ροή θερμότητας από το υγρό στρώμα προς τον πυρήνα ισούται με το ρυθμό πρόσδωσης θερμότητας για την υγροποίηση. Οι δύο προτάσεις αυτές εκφράζονται με τις επόμενες δύο σχέσεις :

$$\frac{dq_{evap}}{dt} + \frac{dq_{conv}}{dt} + \frac{dq_{rad}}{dt} = \frac{dq_{cond}}{dt} + \frac{dq_{film}}{dt} \quad (6-128)$$

$$\frac{dq_{cond}}{dt} = \frac{dq_{melt}}{dt} \quad (6-129)$$

όπου :  $\left[ \frac{dq_{melt}}{dt} \right]$  = ο ρυθμός απορρόφησης θερμότητας για την υγροποίηση (SI),

$\frac{dq_{film}}{dt}$  = ο ρυθμός απορρόφησης θερμότητας από το υγρό στρώμα νερού (SI),

$\frac{dq_{cond}}{dt}$  = ο ρυθμός αγωγής θερμότητας μέσω του υγρού στρώματος (SI)

Ο ρυθμός μεταφοράς θερμότητας από την εξάτμιση ισούται με :

$$\frac{dq_{evap}}{dt} = \frac{dm_{evap}}{dt} \cdot L_E \quad (6-130)$$

όπου :  $\left[ \frac{dm_{evap}}{dt} = \text{ο ρυθμός εξάτμισης (SI)}, L_E = \text{η λανθάνουσα θερμότητα εξάτμισης (SI)} \right]$

Φαίνεται εδώ ότι ο ρυθμός απορρόφησης θερμότητας εξαρτάται μόνο από τον ρυθμό διάχυσης μάζας. Ο ρυθμός εξάτμισης είναι ανάλογος της διαφοράς συγκέντρωσης και δίνεται από τη σχέση :

$$\frac{dm_{evap}}{dt} = -h_m \cdot 4\pi \cdot r_b^2 \cdot \rho_a \cdot \ln \left( 1 + \frac{(m_{w,s})_{T_s} - m_{w,a}}{1 - (m_{w,s})_{T_s}} \right) \quad (6-131)$$

Για τους συντελεστές  $h_m$ ,  $\rho_a$ ,  $(m_{w,s})_{T_s}$  και  $m_{w,a}$  ισχύουν τα ανάλογα δεδομένα όπως ειπώθηκαν και για την περίπτωση της εξάχνωσης.

Ο ρυθμός πρόσδωσης θερμότητας με συναγωγή ισούται με :

$$\frac{dq_{conv}}{dt} = h \cdot 4\pi \cdot r_b^2 \cdot (T_a - T_s) \quad (6-132)$$

όπου :  $[h = \text{ο συντελεστής συναγωγής (SI)}, A_s = \text{το εμβαδό της εξωτερικής επιφάνειας (SI)}, T_a = \text{η θερμοκρασία του αέρα περιβάλλοντος (SI)}, T_s = \text{η θερμοκρασία της εξωτερικής επιφάνειας (SI)}]$

Για τον συντελεστή  $h$  ισχύουν επίσης τα ίδια όπως ειπώθηκαν για την περίπτωση της εξάχνωσης.

Ο ρυθμός πρόσδωσης θερμότητας με ακτινοβολία δίνεται από την έκφραση :

$$\frac{dq_{rad}}{dt} = a_p \cdot \sigma \cdot 4\pi \cdot r_b^2 \cdot (T_a^4 - T_s^4) \quad (6-133)$$

όπου :  $\left[ \frac{dq_{rad}}{dt} = \text{η μεταφορά θερμότητας με ακτινοβολία (SI)}, a_p = \text{η απορροφητικότητα (-)}, \sigma = \text{η σταθερά Stefan - Boltzmann (SI)} \right]$

Υπολογίζεται τώρα ο ρυθμός απορρόφησης θερμότητας από το στρώμα νερού και αυτό γίνεται ορίζοντας πρώτα το θερμικό περιεχόμενο της μάζας από την εσωτερική μέχρι την εξωτερική επιφάνεια του στρώματος για δεδομένες ακτίνες και δεδομένες θερμοκρασίες στα σύνορα της εξωτερικής και της εσωτερικής επιφάνειας.

Αναλυτικά το συνολικό ποσό θερμότητας βρίσκεται ως :

$$Q_{film} = c_{p,w} \cdot \rho_w \cdot 4\pi \cdot \left[ \frac{T_0}{3} (r_b^3 - r_a^3) - \frac{T_0 - T_s}{1 - \left(\frac{r_a}{r_b}\right)} \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot (r_b^3 - r_a^3) - \frac{r_a}{2} \cdot (r_b^2 - r_a^2) \right) \right] \quad (6-134)$$

όπου : [ $Q_{film}$  = το συνολικό περιεχόμενο σε θερμική ενέργεια του υγρού στρώματος (SI),  $m_{r_x}$  = η στοιχειώδης μάζα της επιφάνειας της σφαίρας στην ακτίνα  $r_x$  (SI),  $c_{p,w}$  = η θερμοχωρητικότητα του νερού (SI),  $T_{r_x}$  = η θερμοκρασία της στοιχειώδους μάζας στην ακτίνα  $r_x$  (SI),  $r_b$  = η εξωτερική ακτίνα (SI),  $r_a$  = η εσωτερική ακτίνα (SI),  $dr_x$  = η στοιχειώδης ακτινική μετατόπιση (SI),  $\rho_w$  = η πυκνότητα του νερού (SI),  $T_0$  = η θερμοκρασία στην εσωτερική ακτίνα (SI),  $T_s$  = η θερμοκρασία στην εσωτερική ακτίνα (SI), ]

Ο ρυθμός απορρόφησης θερμότητας από το στρώμα θα ισούται με το αντίθετο του ρυθμού μεταβολής του θερμικού περιεχομένου του και βρίσκεται από τη χρονική παράγωγο της ποσότητας της σχέσης (6-134) κρατώντας ως μοναδικό μεταβαλλόμενο μέγεθος την επιφανειακή θερμοκρασία  $T_s$  :

$$\frac{dq_{film}}{dt} = c_{p,w} \cdot \rho_w \cdot 4\pi \cdot \left[ \frac{\left( \frac{1}{3} \cdot (r_b^3 - r_a^3) - \frac{r_a}{2} \cdot (r_b^2 - r_a^2) \right)}{1 - \left(\frac{r_a}{r_b}\right)} \right] \cdot \frac{d(T_s - T_0)}{dt} \quad (6-135)$$

όπου : [ $k_w$  = η θερμική αγωγιμότητα του υγρού νερού ( $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$ ),  $\rho_w$  = η πυκνότητα<sup>1</sup> του υγρού νερού ( $Kg \cdot m^{-3}$ ),  $T_s$  = η εξωτερική θερμοκρασία ( $K$ ),  $r_b$  = η αρχική εξωτερική ακτίνα ( $m$ ),  $r_a$  = η αρχική εσωτερική ακτίνα ( $m$ )]

Η ροή θερμότητας μέσω του υγρού στρώματος ισούται με το ρυθμό αγωγής θερμότητας λόγω διαφοράς θερμοκρασίας στα δύο όρια του στρώματος.

Επομένως η αγωγή θερμότητας μέσω του υγρού στρώματος θα δίνεται από το νόμο αγωγής θερμότητας λόγω διαφοράς θερμοκρασίας (νόμος Fourier) σε σφαιρικές συντεταγμένες δηλαδή :

$$\frac{dq_{cond}}{dt} = 4\pi \cdot k_w \cdot r_a \cdot r_b \cdot \frac{T_s - T_0}{r_b - r_a} \quad (6-136)$$

<sup>1</sup> Η πυκνότητα του υγρού νερού είναι συνάρτηση της θερμοκρασίας. Παρόλα αυτά για τους υπολογισμούς στο υγρό επιφανειακό στρώμα θα θεωρείται ότι είναι σταθερή.



Ο ρυθμός υγροποίησης του πυρήνα δίνεται από τη σχέση :

$$\frac{dq_{melt}}{dt} = -L_M \cdot \frac{dm_{melt}}{dt} \quad (6-137)$$

όπου : [ $L_M$  = η λανθάνουσα θερμότητα τήξης (SI),  $\frac{dm_{melt}}{dt}$  = ο ρυθμός μεταβολής της μάζας του πυρήνα (SI)]

Η μεταβολή της εσωτερικής ακτίνας δίνεται από το ρυθμό υγροποίησης και πιο συγκεκριμένα από τη σχέση :

$$\frac{dr_a}{dt} = \frac{dm_{melt}}{\rho_i \cdot 4\pi \cdot r_a^2} \quad (6-138)$$

όπου : [ $\frac{dr_a}{dt}$  = ο ρυθμός μεταβολής της εσωτερικής ακτίνας (SI),  $r_a$  = η εσωτερική ακτίνα (SI)]

Αντίστοιχη σχέση θα ισχύει και για την εξωτερική διάμετρο με την διαφορά όμως ότι η μείωση της διαμέτρου θα οφείλεται στο ρυθμό ατμοποίησης αλλά και στη διαφορετική πυκνότητα του πάγου από το νερό.

Ο ρυθμός μείωσης της εξωτερικής ακτίνας λόγω εξάτμισης θα είναι :

$$\left(\frac{dr_b}{dt}\right)_{ev} = \frac{dm_{evap}}{\rho_w \cdot 4\pi \cdot r_b^2} \quad (6-139)$$

όπου : [ $\left(\frac{dr_b}{dt}\right)_{ev}$  = ο ρυθμός μεταβολής της εξωτερικής ακτίνας λόγω εξάτμισης (SI),  $\rho_w$  = η πυκνότητα του νερού (SI),  $r_b$  = η εξωτερική διάμετρος (SI)]

Ταυτόχρονα όμως με την μείωση της εξωτερικής ακτίνας λόγω ατμοποίησης συμβαίνει και μείωση λόγω της μεγαλύτερης πυκνότητας του νερού από τον πάγο.

**Η μείωση της διαμέτρου από την διαφορά πυκνοτήτων λαμβάνεται υπ όψιν ως εξής :**

Όταν ο πάγος υγροποιείται λόγω της μεγαλύτερης πυκνότητας του νερού ο όγκος που καταλαμβάνει το τήγμα είναι μικρότερος του όγκου που είχε σαν πάγος πριν υγροποιηθεί. Έτσι ταυτόχρονα με τη μείωση ακτίνας λόγω

ατμοποίησης προκαλείται και ένας έξτρα όρος μείωσης της ακτίνας λόγω διαφορετικής πυκνότητας.

Μπορούμε να ορίσουμε ένα παράγοντα πυκνότητας ως το κλάσμα της πυκνότητας του πάγου ως προς την πυκνότητα του νερού :

$$Y = \frac{\rho_i}{\rho_w} \quad (6-140)$$

Αν πάλι ο πάγος λόγω του τρόπου δημιουργίας του βρίσκεται να έχει πυκνότητα μικρότερη από αυτήν που θα έπρεπε να έχει σαν καθαρός πάγος τότε αυτό προφανώς σημαίνει ότι εμπεριέχει φυσαλίδες αέρα στη μάζα του δηλαδή είναι ένας **μη συμπαγής πάγος**. Στην περίπτωση αυτή και για την ευκολότερη αντιμετώπιση του προβλήματος θεωρούμε πως οι φυσαλίδες είναι ομοιόμορφα αραιωμένες μέσα στην μάζα του πάγου και δημιουργείται έτσι ένα ομοιογενές μίγμα αέρα-πάγου. Όταν αυτό το ομοιογενές μίγμα λιώνει ο πάγος γίνεται νερό και ο αέρας παραμένει αέρας, αδιάλυτος όμως στο νερό (άρα εγκαταλείπει το σύστημα). Πλέον ο παράγοντας μείωσης γίνεται :

$$X = \frac{\rho_i}{\rho_w} \quad (6-141)$$

όπου : [ $Y$  = ο παράγοντας αύξησης για καθαρό πάγο (-),  $X$  = ο παράγοντας αύξησης για μίγμα αέρα-πάγου (-),  $\rho_i$  = η πυκνότητα του μίγματος αέρα-πάγου (SI),  $\rho_w$  = η πυκνότητα του νερού (SI)]

Ο ισολογισμός μάζας στα όρια του πυρήνα πάγου επιβάλλει ότι ο ρυθμός υγροποίησης θα είναι ίσος και αντίθετος με το ρυθμό παροχής τήγματος δηλαδή :

$$\frac{dm_i}{dt} + \frac{dm_w}{dt} = 0 \quad (6-142)$$

ή

$$\frac{d(\rho_i \cdot V_i)}{dt} + \frac{d(\rho_w \cdot V_w)}{dt} = 0 \quad (6-143)$$

όπου : [ $m_i$  = ο ρυθμός υγροποίησης του πυρήνα (SI),  $m_w$  = ο ρυθμός παροχής τήγματος ή αύξησης του επιφανειακού νερού (SI),  $V_i$  = ο ρυθμός μεταβολής του όγκου του πυρήνα (SI),  $V_w$  = ο ρυθμός αύξησης του όγκου του επιφανειακού νερού (SI)]

Η εξίσωση (6-143) με τη βοήθεια της (6-138) καταλήγει στην επόμενη έκφραση για το ρυθμό μείωσης της εξωτερικής ακτίνας λόγω διαφοράς πυκνοτήτων :

$$\left(\frac{dr_b}{dt}\right)_{de} = (1-X) \frac{dm_{melt}}{\rho_i \cdot 4\pi \cdot r_b^2} \quad (6-144)$$

Έτσι ο ρυθμός μείωσης της εξωτερικής ακτίνας θα είναι το άθροισμα της (6-139) και της (6-144) δηλαδή :

$$\frac{dr_b}{dt} = \frac{dm_{evap}}{\rho_w \cdot 4\pi \cdot r_{b,in}^2} + (1-X) \frac{dm_{melt}}{\rho_i \cdot 4\pi \cdot r_{b,in}^2} \quad (6-145)$$

**Από τα παραπάνω δεδομένα προκύπτουν τρεις εξισώσεις με τρεις αγνώστους.** Οι δύο εξισώσεις προκύπτουν από το ενεργειακό ισοζύγιο στο οποίο οι αντίστοιχοι όροι βρίσκονται από τις εξισώσεις (6-128), (6-130), (6-132), (6-133),(6-136) και (6-137). Η τρίτη εξίσωση εξάγεται από την αρχή της συνέχειας.

Από την πρώτη ισότητα του ισοζυγίου προκύπτει η πρώτη εξίσωση ως :

$$\frac{dT_u}{dt} = \frac{\left[ -h_m \cdot r_b^2 \cdot \rho_a \cdot \ln(M) \cdot L_e + h \cdot r_b^2 \cdot (T_a - T_s) + a_p \cdot \sigma \cdot r_b^2 \cdot (T_a^4 - T_s^4) - k_w \cdot B \cdot T_u \right]}{[c_{\rho,w} \cdot \rho_w \cdot A]} \quad (6-146)$$

και απο την δεύτερη ισότητα του ισοζυγίου προκύπτει η δεύτερη εξίσωση ως :

$$\frac{dr_a}{dt} = - \frac{k_w \cdot B \cdot T_u}{L_M \cdot \rho_i \cdot r_a^2} \quad (6-147)$$

ενώ η τρίτη εξίσωση προκύπτει από την αρχή της συνέχειας και είναι η εξίσωση (6-145) αναδιαταγμένη :

$$\frac{dr_b}{dt} = - \frac{h_m \cdot \rho_a \cdot \ln(M)}{\rho_w} - (1-X) \cdot \left( \frac{k_w \cdot B \cdot T_u}{L_M \cdot \rho_i \cdot r_b^2} \right) \quad (6-148)$$

Για τις παραπάνω εξισώσεις ισχύουν ότι :

$$A = \frac{\frac{1}{3} \cdot (r_b^3 - r_a^3) - \frac{r_a}{2} \cdot (r_b^2 - r_a^2)}{1 - \left(\frac{r_a}{r_b}\right)} \quad (6-149)$$

$$B = \frac{r_a \cdot r_b}{r_b - r_a} \quad (6-150)$$

$$M = 1 + \frac{(m_{w,s})_{T_s} - m_{w,a}}{1 - (m_{w,s})_{T_s}} \quad (6-151)$$

$$T_u = T_s - T_0 \quad (6-152)$$

Όταν είναι δεδομένη η θερμοκρασιακή διαφορά  $T_u$  που θα ικανοποιεί την συναγωγή την εξάτμιση και το νόμο του Fourier τότε είναι γνωστή και η αγωγή θερμότητας προς τον πυρήνα άρα και ο ρυθμός υγροποίησης ή παγοποίησης.

Υπάρχει περίπτωση να μην βρίσκεται θερμοκρασιακή διαφορά που να ικανοποιεί τις παραπάνω συνθήκες και αυτό συμβαίνει όταν η ατμοποίηση απορροφά μεγαλύτερα ποσά ενέργειας από αυτά που προσφέρονται στο σωματίδιο μέσω του θερμού ρεύματος αέρα. Αυτό σημαίνει πως πρέπει να ψυχθεί το φιλμ ή να δημιουργηθεί πάγος στα όρια του πυρήνα. Στην περίπτωση αυτή τα πράγματα περιπλέκονται αρκετά εφόσον πρέπει με κάποιο μηχανισμό να γίνει μεταφορά θερμότητας από το υγρό στρώμα ή και τον παγωμένο πυρήνα προς την επιφάνεια. Με άλλα λόγια πρέπει να αχθεί θερμότητα μέσω του επιφανειακού υγρού στρώματος και να κατευθυνθεί από χαμηλές προς υψηλές θερμοκρασίες. Αυτό αντιβαίνει το μηχανισμό αγωγής θερμότητας σύμφωνα με το νόμο του Fourier και για το λόγο αυτό θεωρούμε τον επόμενο ποσοτικοποιημένο μηχανισμό που διακρίνει τρεις περιπτώσεις ποσοτικής μεταφοράς θερμότητας.

Διακρίνονται έτσι αρχικά τρεις περιπτώσεις :

**Περίπτωση 1 :** Το θερμικό περιεχόμενο του φιλμ επαρκεί για την πλήρωση της ζήτησης σε ενέργεια.

**Περίπτωση 2 :** Το θερμικό περιεχόμενο του φιλμ δεν επαρκεί για την πλήρωση της ζήτησης σε ενέργεια αλλά προστιθέμενο σε αυτό το ενεργειακό ποσό που απελευθερώνεται κατά την αλλαγή φάσης του υγρού φιλμ σε πάγο το συνολικό ποσό επαρκεί.

**Περίπτωση 3 :** Το θερμικό περιεχόμενο του φιλμ όχι μόνο δεν επαρκεί για την πλήρωση της ζήτησης σε ενέργεια αλλά δεν επαρκεί ακόμα και αν προστεθεί σε αυτό η ενέργεια που απελευθερώνεται από την πήξη του φιλμ.

Στην Περίπτωση 1 για τον υπολογισμό της επιφανειακής θερμοκρασίας υπολογίζεται πρώτα το ποσό ενέργειας που απαιτείται στο σύνολο του χρονικού βήματος. Έπειτα υπολογίζεται το διαθέσιμο ενεργειακό περιεχόμενο του φιλμ πάνω από τη θερμοκρασία υγροποίησης και αφαιρείται από αυτό το ποσό που ζητείται. Θεωρείται ότι η κατανομή της θερμοκρασίας μέσα στο φιλμ θα είναι αυτή που επιβάλλεται από τη σταθερή αγωγή θερμότητας (*παραδοχή*) και υπολογίζεται έτσι η νέα εξωτερική θερμοκρασία.

Στην Περίπτωση 2 εξισώνεται η ομοιόμορφη τελική θερμοκρασία του φιλμ με τη θερμοκρασία υγροποίησης και υπολογίζεται η ποσότητα του φιλμ που παγοποιείται πάνω στον πυρήνα από το υπόλοιπο της ζητούμενης ενέργειας.

Στην Περίπτωση 3 θεωρείται ότι στο χρονικό βήμα παγοποιείται όλο το φιλμ.

Από τις τρεις εξισώσεις του προβλήματος βλέπουμε ότι η μεταβολή της εξωτερικής ακτίνας είναι εξαρτημένη από τη μεταβολή της εσωτερικής ακτίνας και η μεταβολή της εσωτερικής ακτίνας εξαρτάται από την αγωγή θερμότητας που με τη σειρά της εξαρτάται από τη θερμοκρασία επιφάνειας η οποία προκύπτει από την πρώτη εξίσωση του ισοζυγίου θερμότητας. Αυτή η σύνθετη εξάρτηση των μεταβλητών απαιτεί την επίλυση με μία αριθμητική μέθοδο και σε ένα αριθμό επαναλήψεων έως ότου η εξωτερική ακτίνα να συγκλίνει σε μία σταθερή τιμή με κοινή παράμετρο του προβλήματος τη θερμοκρασία επιφάνειας.

Πρέπει να σημειωθεί εδώ ότι ο όρος που εμφανίζεται στην έκφραση της αγωγής θερμότητας δηλαδή η θερμοκρασιακή διαφορά  $T_u$  είναι η πραγματική άγνωστη μεταβλητή θερμοκρασίας του προβλήματος. Αυτό γιατί η διαδικασία επιλύεται σε επαναλήψεις στις οποίες η επίλυση ξεκινά υποθέτοντας μία θερμοκρασία επιφάνειας  $T_s$  η οποία χρησιμοποιείται στην επίλυση των εξισώσεων σε ένα χρονικό βήμα. Αυτό γίνεται γιατί η θερμοκρασία της επιφάνειας στον όρο αγωγής θερμότητας δεν μπορεί να αποτελέσει δεδομένο αλλά ζητούμενο εφόσον ο όρος αγωγής είναι αυτός που προκαλεί την υγροποίηση. Σε διαφορετική περίπτωση η διαδικασία της επίλυσης δε θα μπορεί να εκкинήσει.

Την όλη προηγούμενη ανάλυση συνοδεύουν και κάποια κριτήρια που πρέπει να ελέγχονται κατά την υλοποίηση της επίλυσης των εξισώσεων. Παρακάτω διατυπώνονται και αναλύονται τα κριτήρια αυτά.

### **Κριτήριο Αποκόλλησης**

Από την θεωρία δείχθηκε ότι για αριθμούς  $Re > 6 \cdot 10^3$  αρχίζει να αποκολλάται ποσότητα από το επιφανειακό στρώμα και η μάζα που διατηρείται δίνονται ως συνάρτηση της μάζας του πυρήνα από την επόμενη σχέση [42] :

$$M_{R,cr} = 0.268 + 0.1389 \cdot M_{r,cr} \quad (6-153)$$

όπου : [ $M_{R,cr}$  = η κρίσιμη μάζα του επιφανειακού υγρού που διατηρείται κατά την αποκόλληση (SI),  $M_{r,cr}$  = η κρίσιμη μάζα του πυρήνα κατά την αποκόλληση (SI)]

Επιλύοντας την σχέση (6-153) ως προς τις ακτίνες προκύπτει η σχέση :

$$r_{b,cr} = \sqrt[3]{1.6022 + 1.1389 \cdot r_{a,cr}^3} \quad (6-154)$$

όπου : [ $r_{b,cr}$  = η εξωτερική ακτίνα κατά την αποκόλληση ( Kg ),  $r_{a,cr}$  = η εσωτερική ακτίνα κατά την αποκόλληση ( Kg )]

Πρέπει λοιπόν σε κάθε επανάληψη να ελέγχεται το κριτήριο :

$$r_{b,outfil} \leq r_{b,cr} \quad (6-155)$$

### **Κριτήριο Βρασμού**

Για κάθε δεδομένη πίεση μπορεί να υπολογιστεί μία αντίστοιχη θερμοκρασία βρασμού στην οποία αν φτάσει το νερό τότε βρίσκεται σε κατάσταση αλλαγής φάσης. Ελέγχεται λοιπόν το προφίλ θερμοκρασιών για τις διαμέτρους που βρίσκονται σε θερμοκρασία μεγαλύτερη ή ίση του βρασμού και μειώνεται η εξωτερική διάμετρος ανάλογα βέβαια και με τη θερμότητα που προσφέρεται στο σώμα.

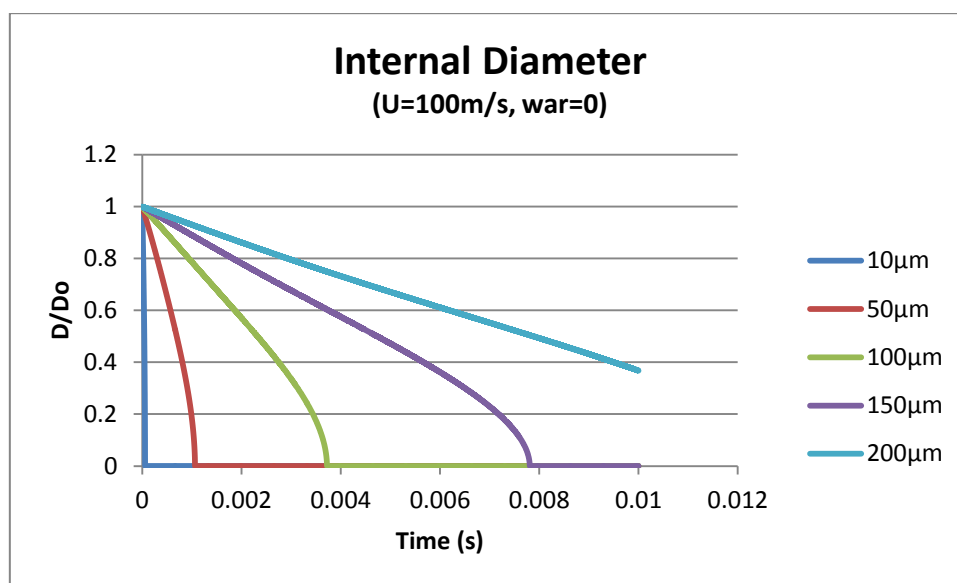
---

Υλοποιώντας τώρα υπολογιστικό κώδικα εφαρμόζονται τα παραπάνω για τη θερμική αποσύνθεση ενός σφαιρικού στοιχείου πάγου. Αρχικά μελετάτε το φαινόμενο παραμετρικά δηλαδή ερευνάται η επιρροή διαφόρων παραμέτρων στην ταχύτητα αποσύνθεσης. Έπειτα θεωρείται ένα πιο συγκεκριμένο πρόβλημα τοποθετώντας το υποτιθέμενο σωματίδιο πάγου να υγροποιηθεί διατρέχοντας το εσωτερικό μίας αεροπορικής μηχανής χωρίς να συγκρούεται με οποιαδήποτε επιφάνεια ή να επηρεάζεται κινηματικά από το πεδίο ροής.

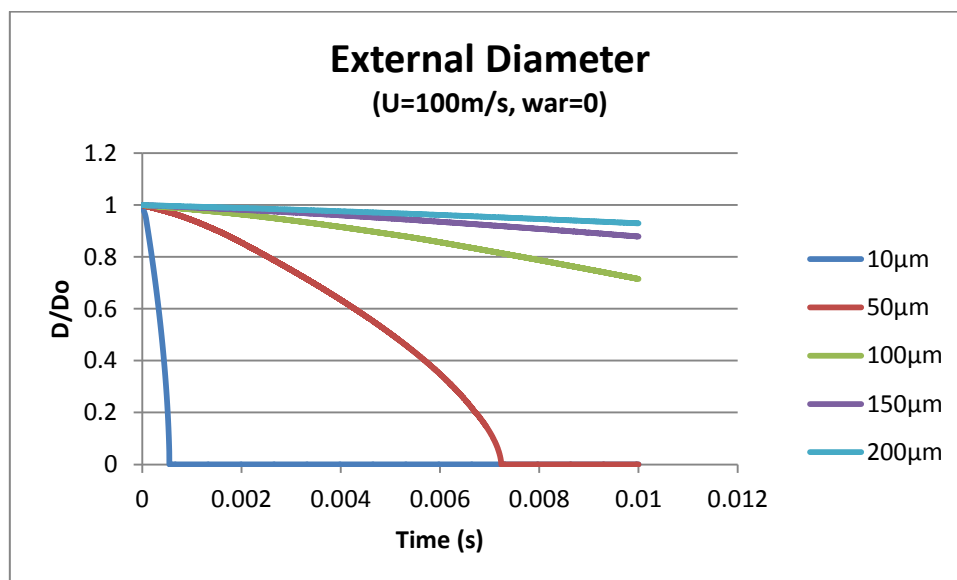
Θεωρείται αρχικά η υγροποίηση και ατμοποίηση ενός μικρού σωματιδίου πάγου που βρίσκεται σε περιβάλλον σταθερής θερμοκρασίας 650K και για χρόνο 10ms .

Το πρόβλημα επιλύεται υπολογιστικά αλλάζοντας κάθε φορά μία από τις παραμέτρους του προβλήματος, ενώ κάθε φορά καλείται η συνάρτηση **Heat** (βλέπε παράρτημα 2) που είναι η βάση της επίλυσης .

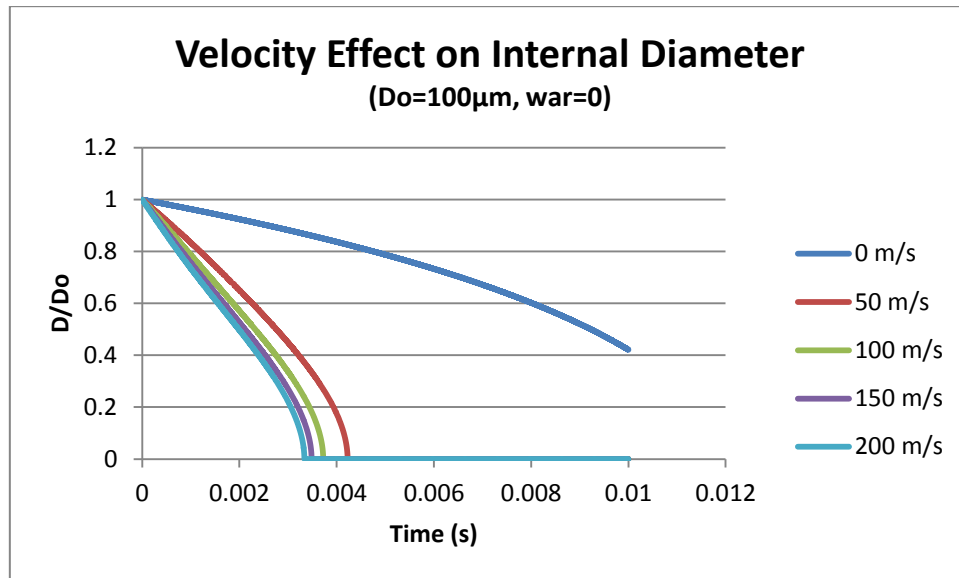
Εξάγονται έτσι τα επόμενα διαγράμματα :



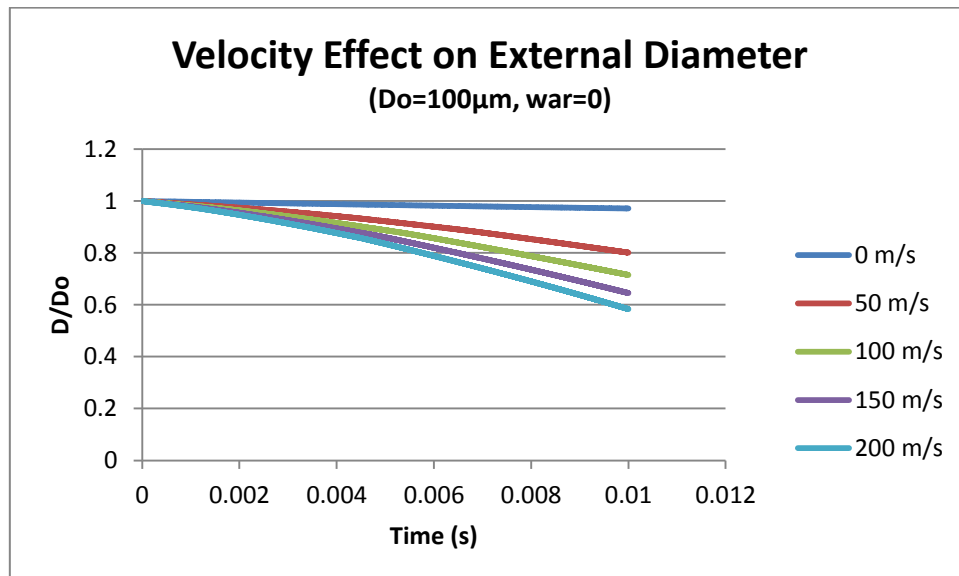
Διάγραμμα 6.14: Σχετική μεταβολή της εσωτερικής διαμέτρου για διάφορες αρχικές διαμέτρους με σχετικό ρεύμα αέρα και χωρίς σχετική υγρασία



Διάγραμμα 6.15: Σχετική μεταβολή της εξωτερικής διαμέτρου για διάφορες αρχικές διαμέτρους με σχετικό ρεύμα αέρα και χωρίς σχετική υγρασία

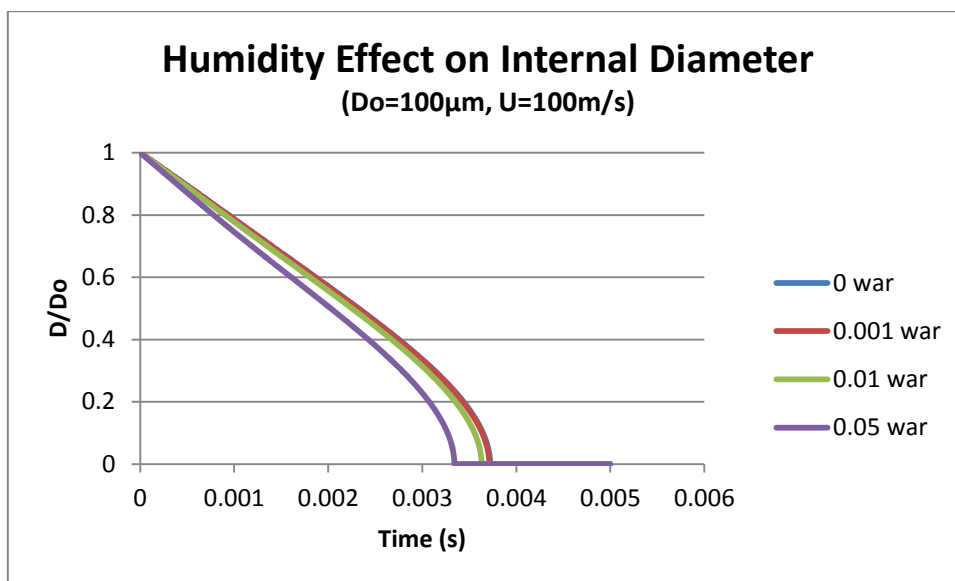


Διάγραμμα 6.16: Επιρροή της σχετικής ταχύτητας αέρα στην σχετική μεταβολή της εσωτερικής διαμέτρου για αρχική διάμετρο 100 $\mu\text{m}$  και χωρίς σχετική υγρασία

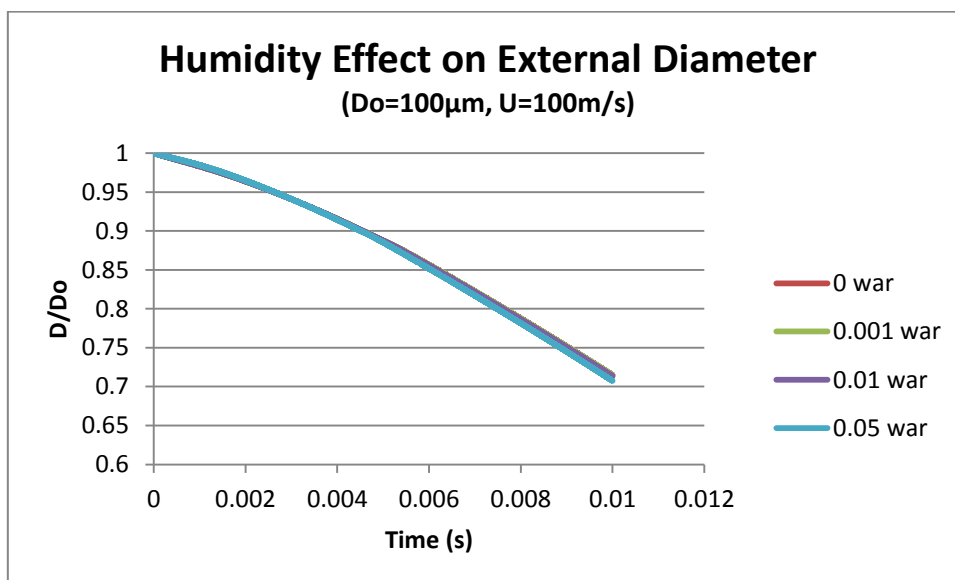


Διάγραμμα 6.17: Επιρροή της σχετικής ταχύτητας αέρα στην σχετική μεταβολή της εξωτερικής διαμέτρου για αρχική διάμετρο 100 $\mu\text{m}$  και χωρίς σχετική υγρασία

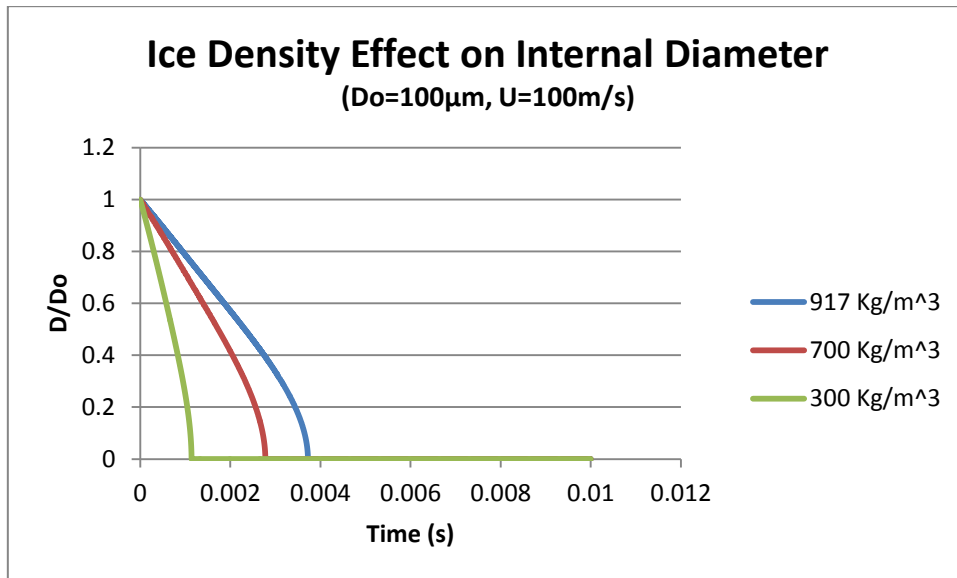




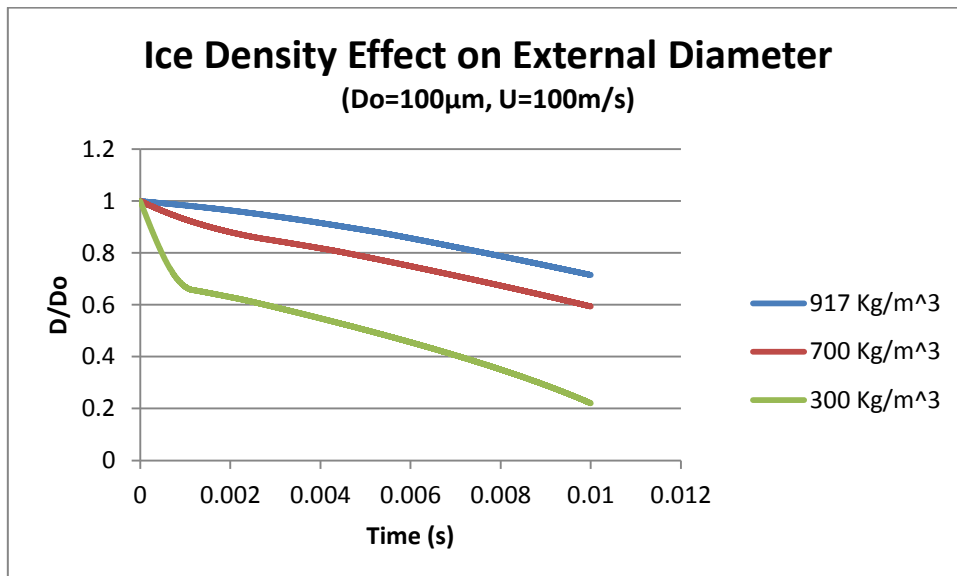
Διάγραμμα 6.18: Επιρροή της υγρασίας αέρα στην σχετική μεταβολή της εσωτερικής διαμέτρου για αρχική διάμετρο 100μm και σχετική ταχύτητα αέρα 100 m/s



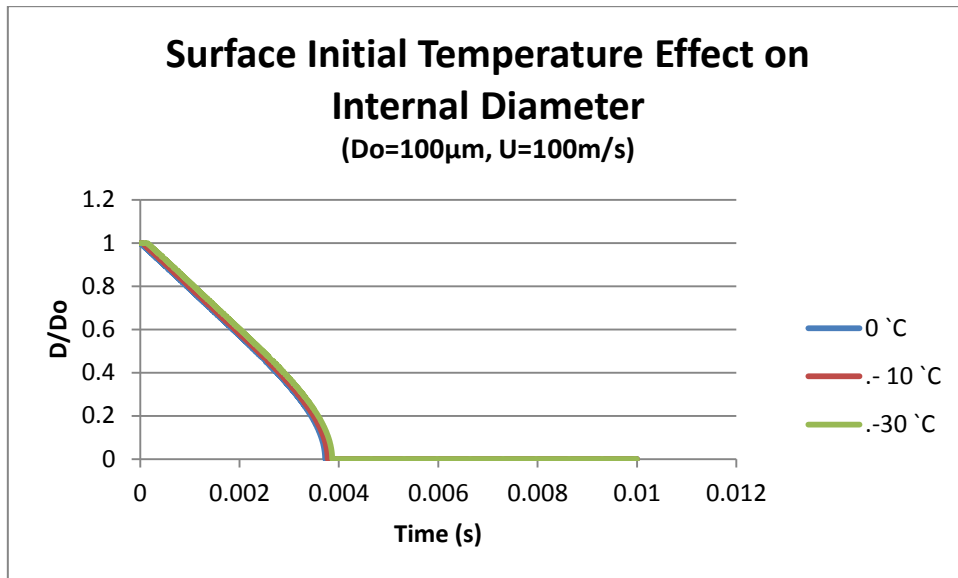
Διάγραμμα 6.19: Επιρροή της υγρασίας αέρα στην σχετική μεταβολή της εξωτερικής διαμέτρου για αρχική διάμετρο 100μm και σχετική ταχύτητα αέρα 100 m/s



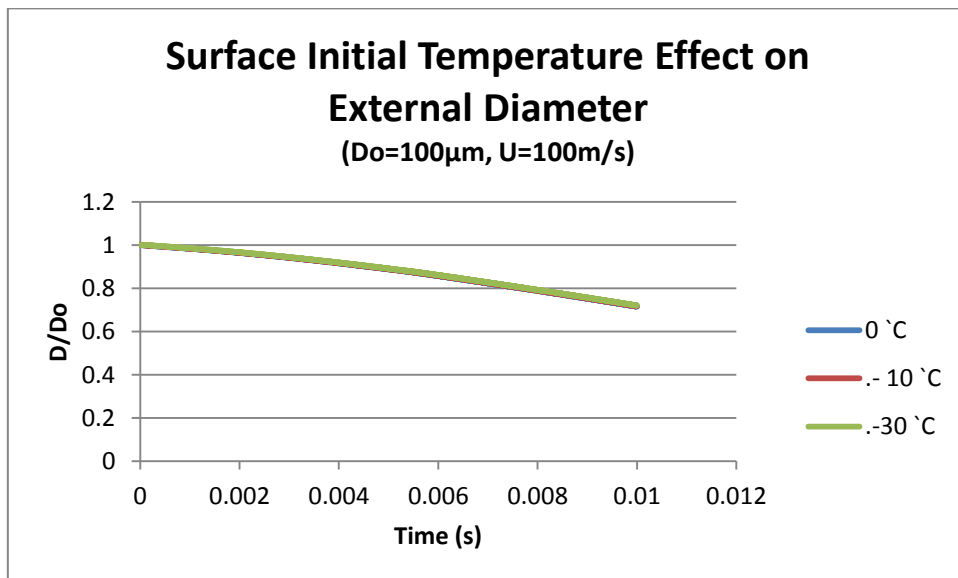
Διάγραμμα 6.20: Επιρροή της πυκνότητας πάγου στην σχετική μεταβολή της εσωτερικής διαμέτρου για αρχική διάμετρο 100 $\mu\text{m}$  και σχετική ταχύτητα αέρα 100 m/s



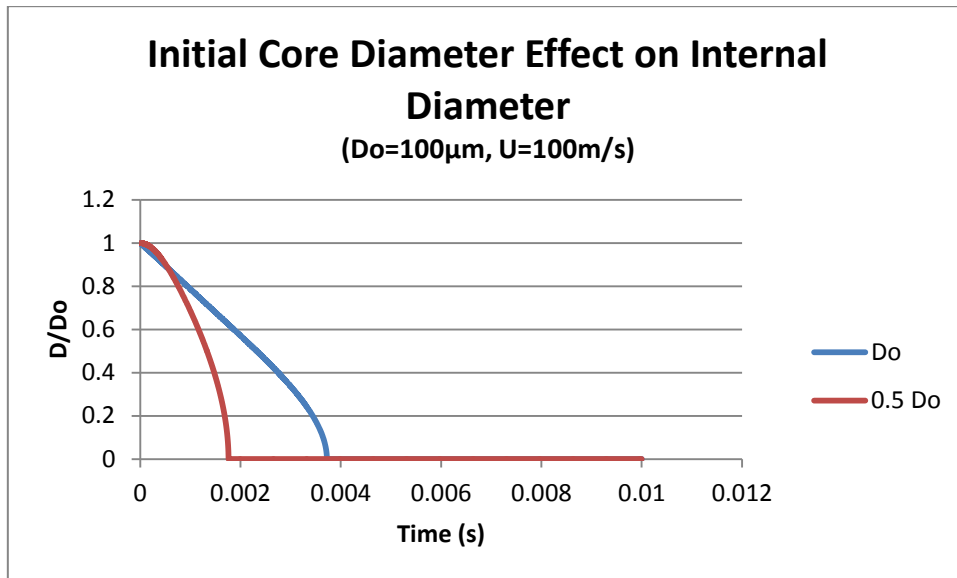
Διάγραμμα 6.21: Επιρροή της πυκνότητας πάγου στην σχετική μεταβολή της εξωτερικής διαμέτρου για αρχική διάμετρο 100 $\mu\text{m}$  και σχετική ταχύτητα αέρα 100 m/s



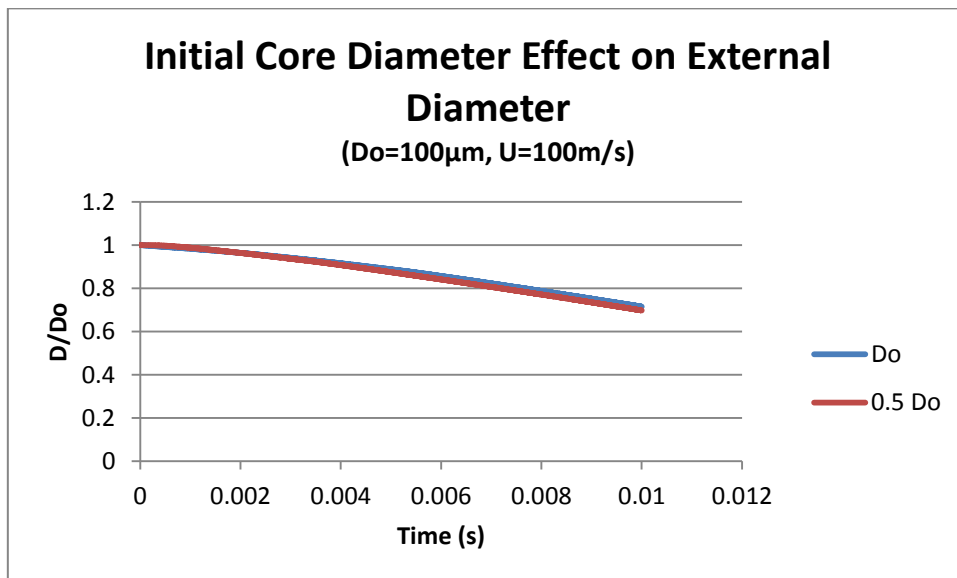
Διάγραμμα 6.22: Επιρροή της αρχικής θερμοκρασίας επιφάνειας στην σχετική μεταβολή της εσωτερικής διαμέτρου για αρχική διάμετρο 100μm και σχετική ταχύτητα αέρα 100 m/s



Διάγραμμα 6.23: Επιρροή της αρχικής θερμοκρασίας επιφάνειας στην σχετική μεταβολή της εξωτερικής διαμέτρου για αρχική διάμετρο 100μm και σχετική ταχύτητα αέρα 100 m/s



Διάγραμμα 6.24: Επιρροή του αρχικού πάχους υγρού στρώματος στην σχετική μεταβολή της εσωτερικής διαμέτρου για αρχική διάμετρο  $100\mu\text{m}$  και σχετική ταχύτητα αέρα  $100\text{ m/s}$



Διάγραμμα 6.25: Επιρροή του αρχικού πάχους υγρού στρώματος στην σχετική μεταβολή της εξωτερικής διαμέτρου για αρχική διάμετρο  $100\mu\text{m}$  και σχετική ταχύτητα αέρα  $100\text{ m/s}$

**Σχολιασμός των διαγραμμάτων :**

Από το **Διάγραμμα 6.14** και το **Διάγραμμα 6.15** βλέπουμε ότι όσο μικρότερη είναι η αρχική διάμετρος του σωματιδίου πάγου τόσο πιο εύκολα αυτό υγροποιείται. Βλέπουμε επίσης ότι η εσωτερική ακτίνα στα αρχικά στάδια μειώνεται σχεδόν γραμμικά ενώ όσο ο πυρήνας πάγου γίνεται πιο μικρός ο ρυθμός υγροποίησης γίνεται πολύ μεγάλος. Η πρώτη διαπίστωση την αντιλαμβανόμαστε και διαισθητικά αφού ένα μικρότερο σωματίδιο χρειάζεται σίγουρα λιγότερο χρόνο για να υγροποιηθεί και αυτό λόγω της μικρότερης μάζας του. Η δεύτερη διαπίστωση μπορεί να εξηγηθεί από το γεγονός ότι ο ρυθμός υγροποίησης είναι αντιστρόφως ανάλογος του τετραγώνου της ακτίνας του πυρήνα αλλά και της ενέργειας που προσφέρεται στον πυρήνα. Η ενέργεια που προσφέρεται στον πυρήνα αποτελεί το πλεόνασμα θερμότητας που καταφέρνει και διαπερνά τα εξωτερικά όρια του σωματιδίου εφόσον ένα σημαντικό ποσό χρησιμοποιείται για την ατμοποίηση. Έτσι ο συνδυασμός αυτών των δύο επιρροών δίνει ένα ρυθμό μείωσης που δείχνει να είναι γραμμικός μέχρι το σημείο όπου το μέγεθος του πυρήνα γίνεται πολύ μικρό και η επιρροή του τετραγώνου της ακτίνας είναι πολύ μεγάλη ώστε να επικρατεί στο σχηματισμό της μορφής της καμπύλης. Παρατηρούμε επίσης ότι υπάρχει μεγάλη διαφοροποίηση στο χρόνο ατμοποίησης ενός σωματιδίου που ταυτόχρονα υγροποιείται ανάλογα με το αρχικό μέγεθος του. Όσο πιο μεγάλο είναι ένα σωματίδιο τόσο πιο δύσκολα ατμοποιείται και αυτό δικαιολογείται αν αναλογιστούμε ότι και ο ρυθμός ατμοποίησης είναι αντιστρόφως ανάλογος του τετραγώνου της ακτίνας.

Στο **Διάγραμμα 6.16** είναι έντονα φανερό το γεγονός ότι η ίδια διαφορά ταχύτητας στις μεγάλες τιμές ταχυτήτων επιφέρει πολύ μικρότερη μεταβολή στο συνολικό χρόνο υγροποίησης από την αντίστοιχη διαφορά σε μικρές τιμές ταχύτητας. Ο ρυθμός υγροποίησης ειπώθηκε ήδη ότι εξαρτάται από το πλεόνασμα θερμότητας που άγεται από την εξωτερική επιφάνεια του σωματιδίου προς τον πυρήνα. Το πλεόνασμα αυτό της θερμότητας είναι η διαφορά δύο παραγόντων που μεταβάλλονται με τους ίδιους συντελεστές περίπου ενώ οι συντελεστές αυτοί (*μεταφοράς θερμότητας Nusselt και μάζας Sherwood*) είναι ανάλογοι της τετραγωνικής ρίζας του αριθμού Reynolds επομένως και της σχετικής ταχύτητας. Αν αναλογιστούμε τη μεγαλύτερη κλίση που έχει η μορφή της συνάρτησης της τετραγωνικής ρίζας της ταχύτητας για μικρές τιμές σε σχέση με την μικρότερη κλίση που εμφανίζει για μεγάλες τιμές θα αντιληφθούμε ότι στις μικρές τιμές ταχύτητας η ίδια διαφορά δίνει μεγαλύτερο πλεόνασμα θερμότητας. Και πάλι είναι φανερό ότι όσο ο πυρήνας βαίνει προς πολύ μικρές διαμέτρους τόσο πιο απότομα μειώνεται η διάμετρος του. Στο **Διάγραμμα 6.17** παρατηρείται ότι σε σχέση με την εσωτερική ακτίνα στην εξωτερική δεν υπάρχει τόση μεγάλη διαφοροποίηση μεταξύ χαμηλών και υψηλών ταχυτήτων. Η διαφοροποίηση υπάρχει βεβαίως αλλά δεν είναι τόσο έντονη ώστε να φαίνεται και αυτό οφείλεται στο ότι η λανθάνουσα θερμότητα ατμοποίησης είναι χίλιες φορές μεγαλύτερη από τη λανθάνουσα θερμότητα υγροποίησης. Έτσι για τα συγκεκριμένα ποσά θερμότητας η ατμοποίηση παρουσιάζει μεγαλύτερη 'αδράνεια' στις μεταβολές.

Στο **Διάγραμμα 6.18** και στο **Διάγραμμα 6.19** φαίνεται η επιρροή της σχετικής υγρασίας στη μεταβολή της εσωτερικής διαμέτρου. Στο διάγραμμα φαίνεται ότι όσο η υγρασία αυξάνει η υγροποίηση γίνεται μεγαλύτερη. Αυτό συμβαίνει γιατί η ατμοποίηση απορροφά πολύ μεγάλα ποσά θερμότητας και η αυξημένη

σχετική υγρασία μειώνει την ατμοποίηση. Έτσι η θερμότητα κατευθύνεται αυτούσια προς την υγροποίηση του πυρήνα. Παρόλα αυτά είναι αξιοσημείωτο ότι η υγρασία αέρα δεν έχει τόσο μεγάλη επιρροή όσο έχουν άλλες παράμετροι όπως η αρχική διάμετρος και η σχετική ταχύτητα αέρα. Αυτό οφείλεται στην αύξηση της επιφανειακής θερμοκρασίας του σωματιδίου γεγονός το οποίο αυξάνει την απαιτούμενη πίεση κορεσμού του περιβάλλοντος.

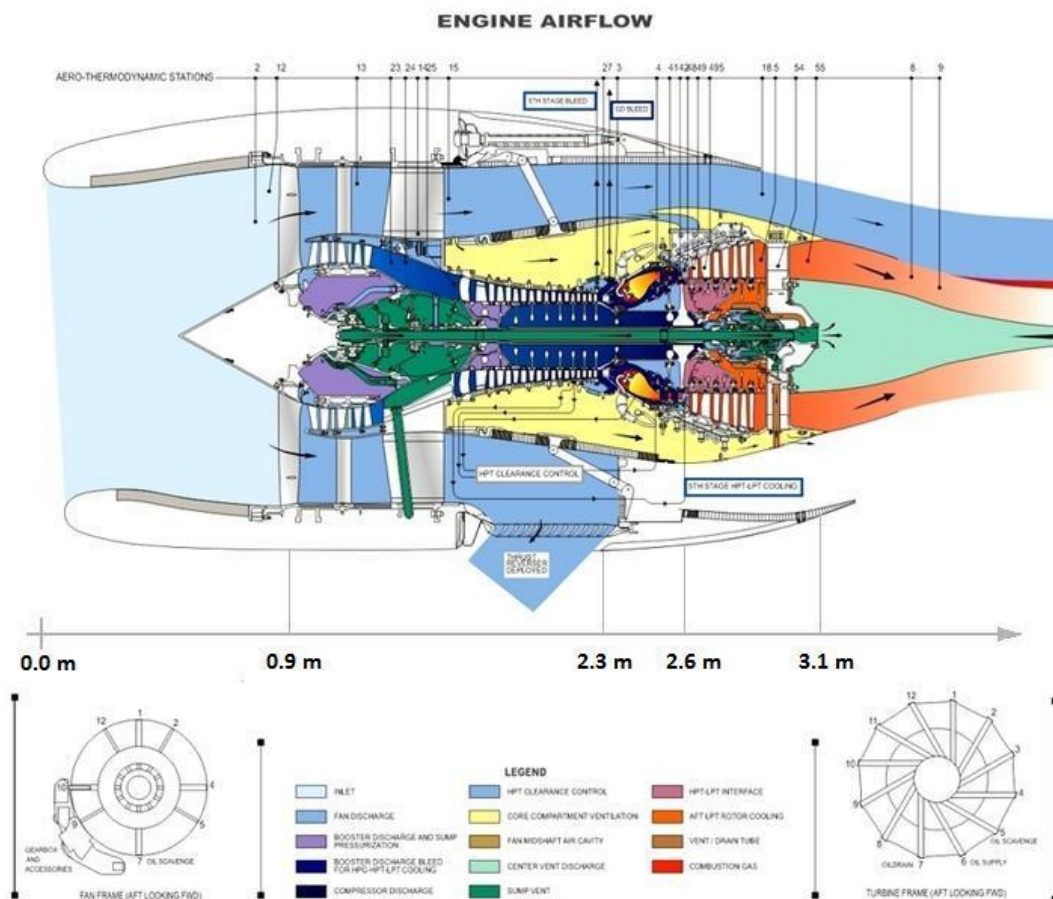
Στο **Διάγραμμα 6.20** φαίνεται ότι όσο ο πυρήνας γίνεται πιο αραιός τόσο πιο εύκολα υγροποιείται. Αυτό συμβαίνει γιατί όσο πιο μικρή είναι η πυκνότητα ενός υλικού τόσο μικρότερη είναι και η μάζα του για τον ίδιο όγκο και επομένως χρειάζεται μικρότερα ποσά θερμότητας για να υγροποιηθεί. Επίσης στο **Διάγραμμα 6.21** παρατηρείται μία έντονη αλλαγή στην κλίση της καμπύλης ατμοποίησης που φαίνεται εντονότερη στις πολύ χαμηλές πυκνότητες. Αυτή η αλλαγή στην κλίση της καμπύλης οφείλεται στο γεγονός ότι το διάγραμμα απεικονίζει τη μεταβολή της εξωτερικής διαμέτρου που δεν οφείλεται μόνο στην ατμοποίηση αλλά και στη διαφορά πυκνότητας μεταξύ νερού και πάγου. Έτσι χαρακτηριστικά για την καμπύλη των  $300 \text{ Kg/m}^3$  φαίνεται ότι το 'γόνατο' γίνεται στο σημείο που ο εσωτερικός πυρήνας έχει διαλυθεί τελείως και πλέον επικρατεί μόνο η μεταβολή ακτίνας λόγω ατμοποίησης.

Στο **Διάγραμμα 6.22** και στο **Διάγραμμα 6.23** παρατηρούμε ότι η αρχική θερμοκρασία του σωματιδίου δεν καθυστερεί σημαντικά το συνολικό χρόνο υγροποίησης. Αυτό συμβαίνει γιατί ο αρχικός χρόνος θέρμανσης (*χρόνος στον οποίο η θερμότητα εισέρχεται μόνο για θέρμανση και δεν απορροφάται λανθάνουσα θερμότητα υγροποίησης*) είναι αρκετά μικρός και έχει ανεπαίσθητη επίδραση στο συνολικό χρόνο υγροποίησης.

Στο **Διάγραμμα 6.24** και στο **Διάγραμμα 6.25** φαίνεται ότι αν το σωματίδιο ξεκινά υγροποιούμενο μέσα σε σταγόνα διπλάσιας διαμέτρου τότε ο χρόνος υγροποίησης είναι πολύ μικρότερος από τον αντίστοιχο χρόνο ενός ίδιου σωματιδίου που ξεκινά την υγροποίηση του τελείως στεγνό. Αυτό συμβαίνει γιατί η συναγωγή θερμότητας στην πρώτη περίπτωση γίνεται στα εξωτερικά όρια του σωματιδίου όπου η επιφάνεια είναι πολύ μεγαλύτερη και τα ποσά μεταφοράς θερμότητας είναι αντίστοιχα πολύ πιο μεγάλα.

Σε δεύτερη φάση μελετάτε ένα πιο συγκεκριμένο πρόβλημα τοποθετώντας το σωματίδιο πάγου μέσα στο περιβάλλον μίας αεροπορικής μηχανής.

Θεωρείται μία αεροπορική μηχανή όπως στο **Σχήμα 6.26**.



Σχήμα 6.26: Αεροπορική Μηχανή (σε τομή)

Θεωρούνται ακόμα τα στοιχεία της ροής σε συγκεκριμένες θέσεις όπως στον Πίνακα 6.27.

Αεροθερμοδυναμική Θέση	1	2	3	4	5
Ολική Θερμοκρασία $T_t$ (K)	273	302	631	1232	655
Ταχύτητα Αέρα $U_a$ (m/s)	120	90	20	60	130

Πίνακας 6.27: Πίνακας μεγεθών σε συγκεκριμένες θέσεις της μηχανής

Η μηχανή θεωρείται ότι βρίσκεται σε ύψος 12000 πόδια με συνθήκες περιβάλλοντος τυπικής ατμόσφαιρας (ISA) και ο αριθμός Mach της πτήσης είναι  $M=0.4$ . Η ταχύτητα του αέρα θεωρείται σταθερή μεταξύ των διακριτών θέσεων. Το υποθετικό σωματίδιο πάγου είναι ακίνητο στην ατμόσφαιρα και διαπερνά τη μηχανή με την ταχύτητα του αεροσκάφους αλληλεπιδρώντας με τη ροή μόνο θερμικά και όχι μηχανικά ή κινηματικά. Η μοντελοποίηση ξεκινά από την είσοδο της μηχανής και τελειώνει στην έξοδο του στροβίλου. Ο αέρας μέσα στη μηχανή θεωρείται εντελώς ξηρός. Η ολική θερμοκρασία μεταβάλλεται γραμμικά ανάμεσα στις διακριτές θερμοδυναμικές θέσεις της μηχανής. Ο ρυθμός αύξησης

της ολικής πίεσης στον συμπιεστή προκύπτει θεωρώντας πολυτροπική μεταβολή συμπίεσης με πολυτροπικό εκθέτη 0.9 ενώ στον αγωγό εισόδου και στο θάλαμο καύσης η ολική πίεση θεωρείται ότι παραμένει σταθερή.

Η στατική πίεση και η στατική θερμοκρασία υπολογίζονται από τις σχέσεις μεταξύ ολικών και στατικών μεγεθών και την πολυτροπική σχέση συμπίεσης.

Η στατική θερμοκρασία συνδέεται με την ολική θερμοκρασία μέσω της σχέσης :

$$T_{t,a} = T_a + \frac{1}{2 \cdot c_{p,a}} u_a^2 \quad (6-156)$$

όπου : [ $T_{t,a}$  = η ολική θερμοκρασία της ροής (SI),  $T_a$  = η στατική θερμοκρασία της ροής (SI),  $c_{p,a}$  = η ειδική ισοβαρής θερμοχωρητικότητα του αέρα (SI),  $u_a$  = η απόλυτη ταχύτητα του αέρα (SI)]

Η πολυτροπική σχέση συμπίεσης είναι :

$$\frac{p_{t,a2}}{p_{t,a1}} = \left( \frac{T_{t,a2}}{T_{t,a1}} \right)^{\left( \frac{n}{n-1} \right)} \quad (6-157)$$

με

$$n = \frac{1}{1 - \left( \frac{\gamma - 1}{\gamma \cdot n_{p,C-T}} \right)} \quad (6-158)$$

όπου : [ $p_{t,a2}$  = η ολική πίεση της ροής στη θέση 2 (Pa),  $p_{t,a1}$  = η ολική πίεση της ροής στη θέση 1 (Pa),  $T_{t,a2}$  = η ολική θερμοκρασία της ροής στη θέση 2 (K),  $T_{t,a1}$  = η ολική θερμοκρασία της ροής στη θέση 1 (K),  $\gamma$  = ο λόγος των θερμοχωρητικοτήτων του αέρα (-),  $n_{p,C-T}$  = ο πολυτροπικός βαθμός απόδοσης (-)]

Η ισεντροπική σχέση συνδέει τα ολικά με τα στατικά μεγέθη και γράφεται ως :

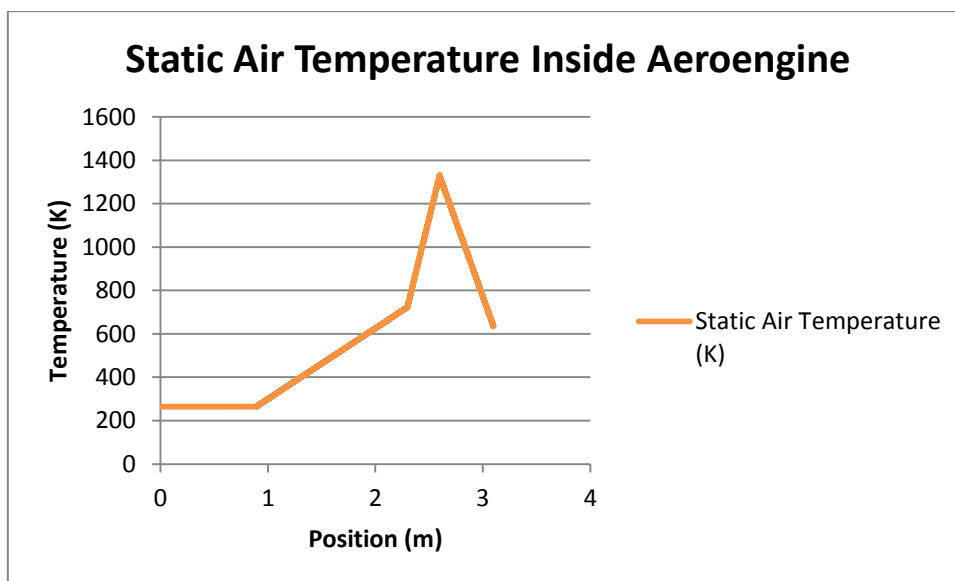
$$\frac{p_t}{p} = \left( \frac{T_t}{T} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (6-159)$$

όπου : [ $p_t$  = η ολική πίεση (Pa),  $p$  = η στατική πίεση (Pa),  $T_t$  = η ολική θερμοκρασία (K),  $T$  = η στατική θερμοκρασία (K)]

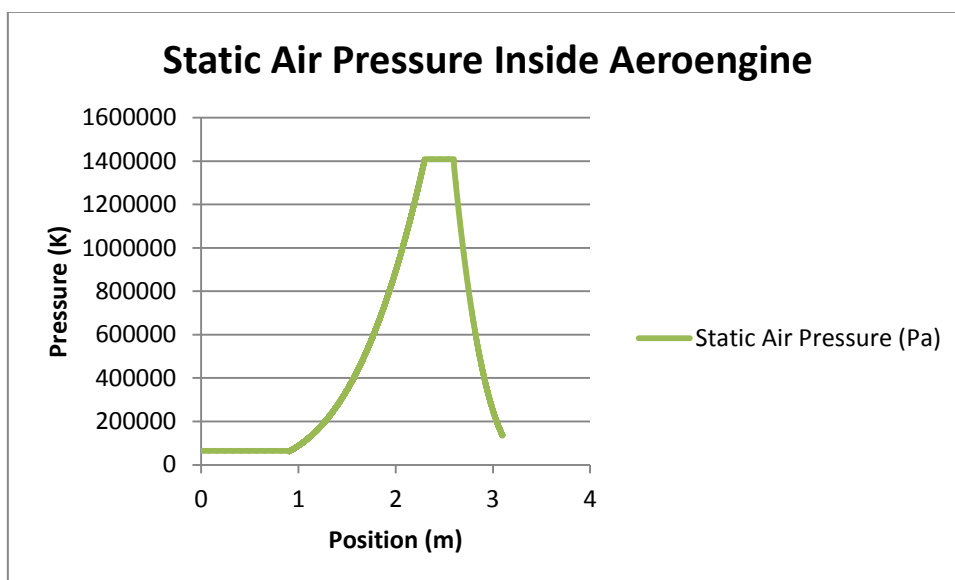
Από τις παραπάνω εξισώσεις και για το ρυθμό αύξησης της ολικής θερμοκρασίας που θεωρήθηκε προκύπτουν τα επόμενα δύο διαγράμματα,



Διάγραμμα 6.28 και Διάγραμμα 6.29, για τα θερμοδυναμικά χαρακτηριστικά του ρεύματος αέρα μέσα στη μηχανή :

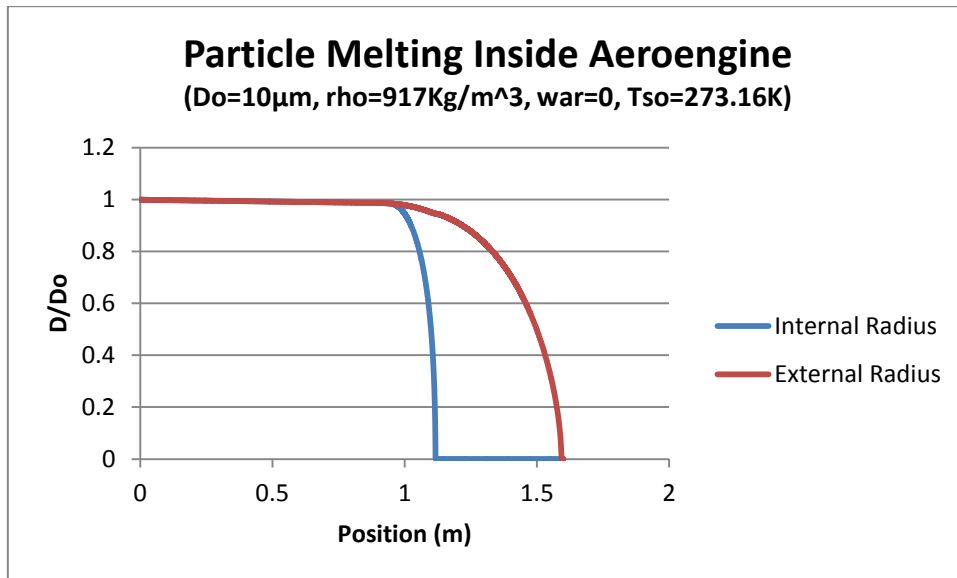


Διάγραμμα 6.28: Μεταβολή Στατικής Θερμοκρασίας μέσα στη Μηχανή

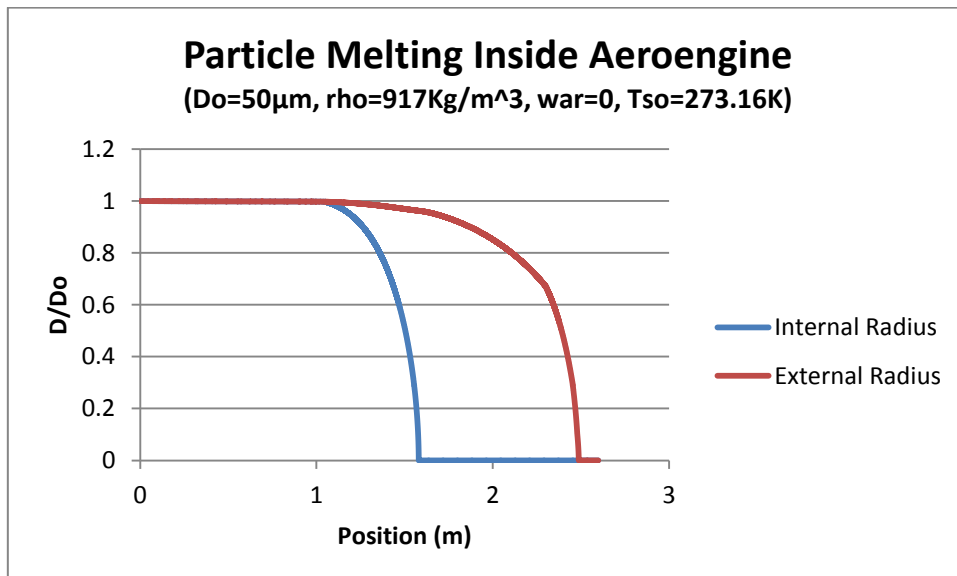


Διάγραμμα 6.29: Μεταβολή Στατικής Πίεσης μέσα στη Μηχανή

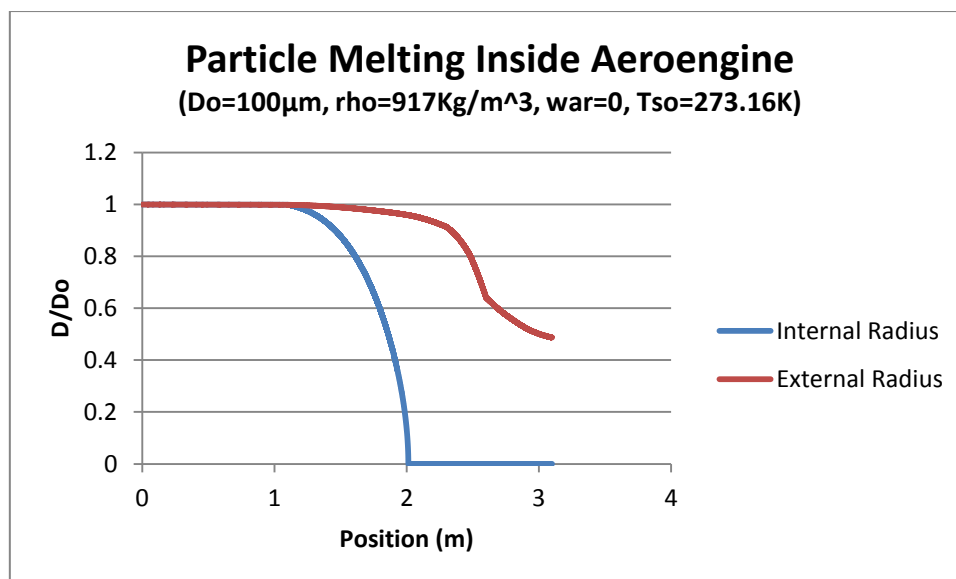
Επιλύοντας υπολογιστικά τις εξισώσεις ατμοποίησης προκύπτουν τα επόμενα διαγράμματα, Διάγραμμα 6.30, Διάγραμμα 6.31 και Διάγραμμα 6.32, για τη σχετική μείωση τριών αρχικών διαμέτρων 10μm, 50μm και 100μm.



Διάγραμμα 6.30: Σχετική μεταβολή της εσωτερικής και της εξωτερικής διαμέτρου κατά μήκος της μηχανής για σωματίδιο πάγου 10µm



Διάγραμμα 6.31: Σχετική μεταβολή της εσωτερικής και της εξωτερικής διαμέτρου κατά μήκος της μηχανής για σωματίδιο πάγου 50µm



**Διάγραμμα 6.32:** Σχετική μεταβολή της εσωτερικής και της εξωτερικής διαμέτρου κατά μήκος της μηχανής για σωματίδιο πάγου 10µm

Από το **Διάγραμμα 6.30** φαίνεται ότι ένα σωματίδιο διαμέτρου 10µm υγροποιείται πλήρως και μάλιστα πολύ γρήγορα μέσα στο συμπιεστή της μηχανής ενώ ατμοποιείται επίσης πλήρως μέσα στο συμπιεστή. Στο **Διάγραμμα 6.31** φαίνεται ότι ένα μεγαλύτερο σωματίδιο διαμέτρου 50µm υγροποιείται επίσης εξολοκλήρου μέσα στο συμπιεστή όμως για να ατμοποιηθεί πλήρως πρέπει να εισέλθει μέσα στο θάλαμο καύσης. Η είσοδος στο πολύ θερμότερο περιβάλλον του θαλάμου καύσης είναι εμφανής και από το 'γόνατο' που κάνει η καμπύλη ατμοποίησης δίνοντας ένα μεγαλύτερο ρυθμό ατμοποίησης. Στο **Διάγραμμα 6.32** παρατηρείται ότι με όλες τις παραδοχές του μοντέλου και των συνθηκών που υποτέθηκαν, ένα σωματίδιο αρχικής διαμέτρου 100µm μπορεί να υγροποιηθεί πλήρως μέσα στο συμπιεστή της μηχανής αλλά ο χρόνος παραμονής του μέσα στη μηχανή δε φτάνει για να ατμοποιηθεί ούτε η μισή από τη μάζα του. Από τα παραπάνω διαγράμματα συμπεραίνεται ότι ένα μεγάλο σωματίδιο διαμέτρου 1mm (μεγάλο για τα μέχρι τώρα μεγέθη που μελετήθηκαν αλλά μικρό στην πραγματικότητα) δεν θα ατμοποιηθεί αλλά ούτε θα υγροποιηθεί σχεδόν καθόλου κατά το πέρασμα του μέσα από την αεροπορική μηχανή. Φυσικά αυτό θα συμβεί στην περίπτωση που δε συγκρούεται καθόλου με τις επιφάνειες της μηχανής. Η τελευταία συνθήκη δε συμβαίνει στην πράξη αφού όπως θα φανεί σε επόμενο κεφάλαιο η σύγκρουση ενός σωματιδίου μεγέθους μερικών χιλιοστών το θρυμματίζει σε μεγάλο αριθμό πολύ μικρότερων σωματιδίων.

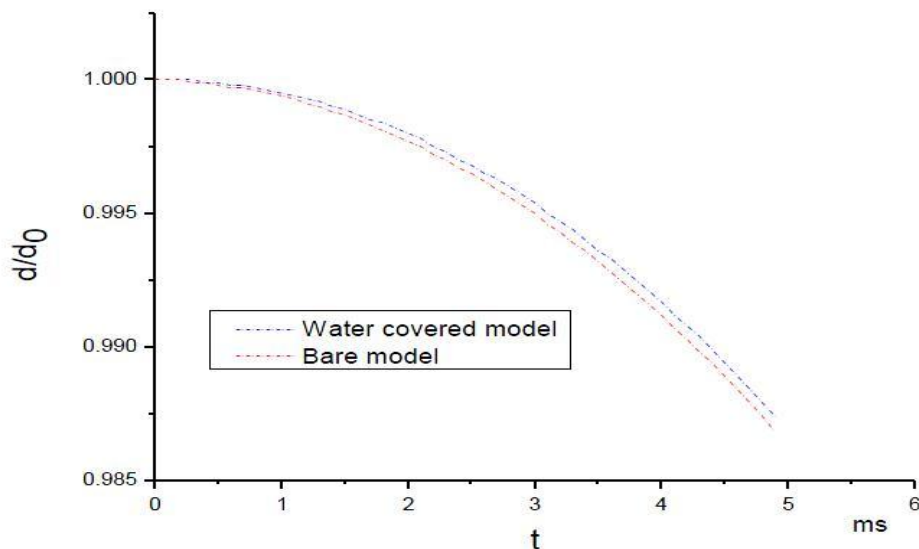
#### Επιβεβαίωση του μοντέλου :

Για την επιβεβαίωση του μοντέλου θα ήταν εξαιρετικά χρήσιμο αν υπήρχαν πειραματικά δεδομένα συσχετιζόμενα με το πρόβλημα που μελετάτε. Δυστυχώς πειραματικά δεδομένα υπάρχουν μόνο συσχετιζόμενα με μετεωρολογικές μελέτες και αφορούν την υγροποίηση μικρών παγωμένων σταγόνων κατά την

πτώση τους στην ατμόσφαιρα. Οι μοναδικές μελέτες που βρέθηκαν από την παρούσα έρευνα και εμπλέκουν πειραματικά δεδομένα από μετεωρολογικής φύσης πειράματα είναι αυτές των αναφορών [31] και [40]. Οι δύο αυτές μελέτες συνοδεύουν τα πειραματικά δεδομένα με το ανάλογο θεωρητικό μοντέλο υγροποίησης και οι εξισώσεις που χρησιμοποιούν λαμβάνονται υπόψη και στην παρούσα εργασία. Υπάρχει ακόμα και το μοντέλο υγροποίησης της αναφοράς [44] το οποίο αναφέρεται στην υγροποίηση μικρών σωματιδίων πάγου μέσα στο συμπιεστή μηχανών Turbofan. Η συγκεκριμένη μελέτη είναι εξαιρετικά χρήσιμη αν και θεωρεί αρκετές απλοποιητικές παραδοχές για την διευκόλυνση της επίλυσης.

Παρακάτω αναλύονται τα δεδομένα από τις αναφορές [40] και [44].

Από την αναφορά [44] δίνεται μεταξύ δύο διαγραμμάτων το επόμενο πιο αντιπροσωπευτικό διάγραμμα που προβλέπει την υγροποίηση ενός σωματιδίου πάγου καθώς διαπερνά το συμπιεστή μίας αεροπορικής μηχανής.

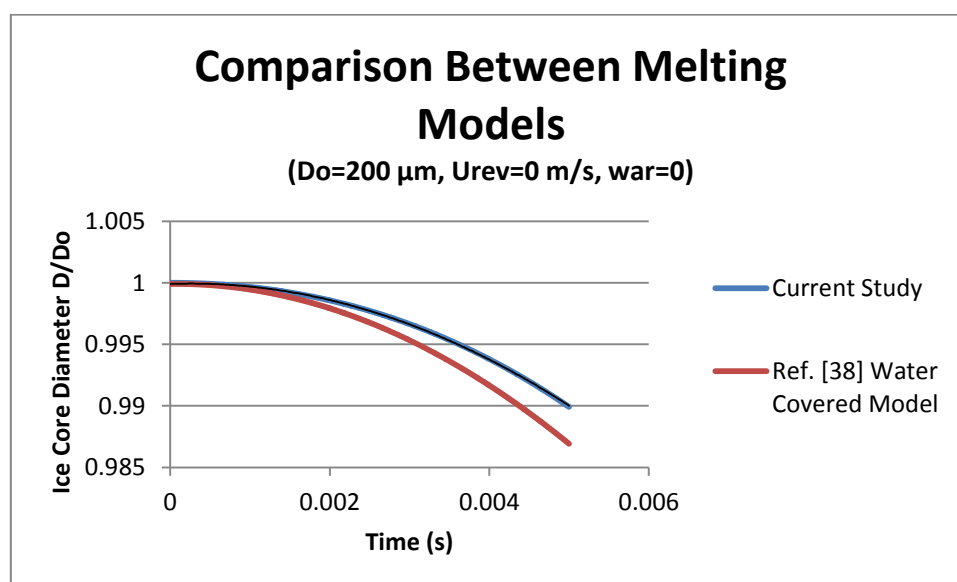


**Διάγραμμα 6.33:** Σχετική μεταβολή της εσωτερικής διαμέτρου κατά μήκος συμπιεστή αεροπορικής μηχανής για σωματίδιο πάγου αρχικής διαμέτρου 200μm (Πηγή : Lou DeCang - Heat and Mass Transfer for Ice Particle Ingestion Inside Aero-Engine, 2011)

Το **Διάγραμμα 6.33** δεν είναι όπως ακριβώς εμφανίζεται στην αναφορά [44] αλλά προέκυψε διορθωμένο και στάλθηκε κατόπιν αλληλογραφίας με τον συγγραφέα του αφού διαπιστώθηκε πως ήταν λανθασμένο από την παρούσα έρευνα. Στο μοντέλο της αναφοράς [44] και για την επίλυση των εξισώσεων το σωματίδιο πάγου θεωρείται απόλυτα σφαιρικό και κεντρικά τοποθετημένο στο συμμετρικό επιφανειακό στρώμα υγρού νερού. Το στρώμα αυτό θεωρείται ότι έχει σταθερή θερμοκρασία ίση με τη θερμοκρασία υγροποίησης. Θεωρείται δηλαδή ότι έχει άπειρη αγωγιμότητα και μηδενική θερμοχωρητικότητα. Έτσι η θερμότητα που εισέρχεται χρησιμοποιείται αποκλειστικά ως λανθάνουσα θερμότητα υγροποίησης και ατμοποίησης. Η πυκνότητα των ατμών νερού στην

ατμόσφαιρα θεωρείται μηδέν και ο πάγος όταν υγροποιείται θεωρείται πως δεν μειώνει τον όγκο του. Ο συντελεστής διάχυσης λαμβάνεται ως αυτός της φυσικής διάχυσης αγνοώντας δηλαδή την εξαναγκασμένη μεταφορά μάζας λόγω σχετικής κίνησης του αέρα. Η πίεση των ατμών στο περιβάλλον θεωρείται μηδέν και η στατική θερμοκρασία αυξάνεται με σταθερό ρυθμό 80 K/ms. Η επίλυση γίνεται θεωρώντας δύο διακριτές καταστάσεις, μία με πλήρως αποβαλλόμενο το στρώμα νερού (*Bare Model*) και μία δίχως αποβολή του επιφανειακού νερού (*Water Covered Model*). Για το λόγο αυτό εμφανίζονται δύο καμπύλες στο **Διάγραμμα 6.33**.

Εφαρμόζοντας τις ίδιες συνθήκες στο μοντέλο της παρούσας έρευνας εξάγονται τα αποτελέσματα που παρατίθενται επάνω στο ίδιο διάγραμμα (**Διάγραμμα 6.34**) μαζί με τα δεδομένα της αναφοράς [44]. Τα αποτελέσματα της αναφοράς [44] που παρατίθενται στο διάγραμμα προέκυψαν ψηφιοποιώντας την αντίστοιχη καμπύλη από το **Διάγραμμα 6.33**.

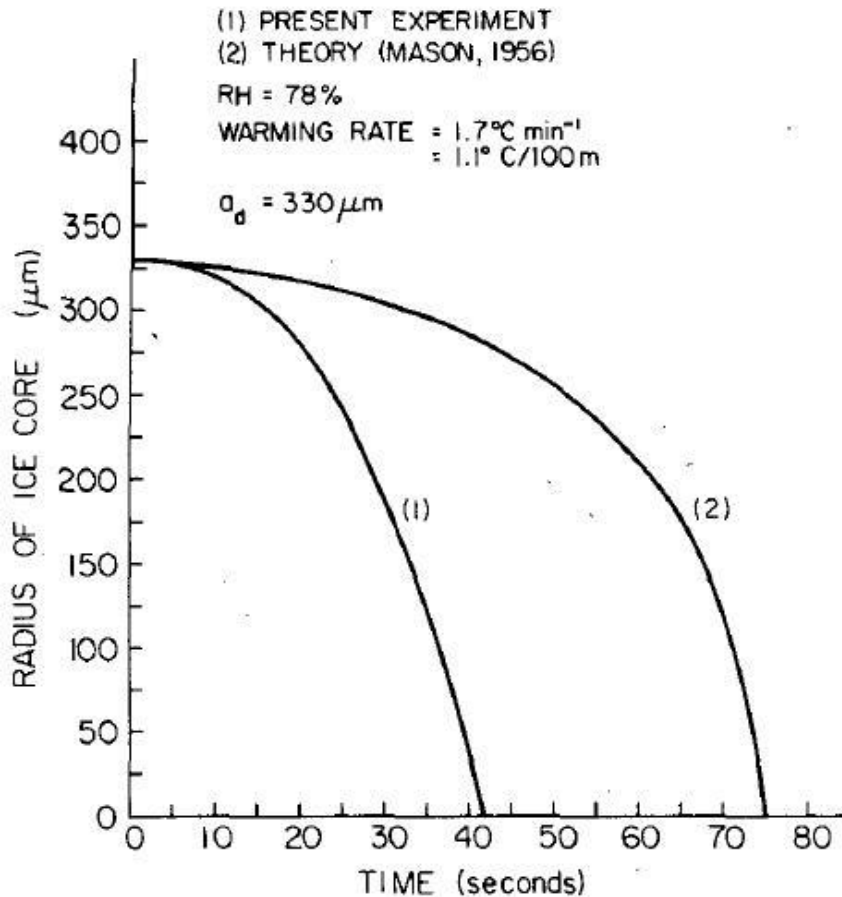


**Διάγραμμα 6.34:** Σύγκριση των αποτελεσμάτων για τη μεταβολή του εσωτερικού πυρήνα ανάμεσα στο μοντέλο της αναφοράς και της παρούσας έρευνας

Οι διαφορές φαίνεται να είναι μικρές και ο λόγος εικάζεται ότι είναι η μεταβλητότητα των ιδιοτήτων του αέρα και των ατμών ανάλογα με τη θερμοκρασία, πράγμα που λαμβάνεται υπόψιν στο προτεινόμενο μοντέλο υγροποίησης της παρούσας έρευνας.

Από την αναφορά [40] δίνεται μεταξύ άλλων και το επόμενο διάγραμμα που απεικονίζει τα προβλεπόμενα και τα εξαγόμενα από το πείραμα αποτελέσματα που αφορούν την υγροποίηση μικρών σφαιρικών σωματιδίων πάγου στο περιβάλλον θερμαινόμενης αεροσήραγγας. Η αεροσήραγγα χρησιμοποιείται για να

προσομοιώσει τις ατμοσφαιρικές συνθήκες που επικρατούν στο πραγματικό περιβάλλον του νέφους.

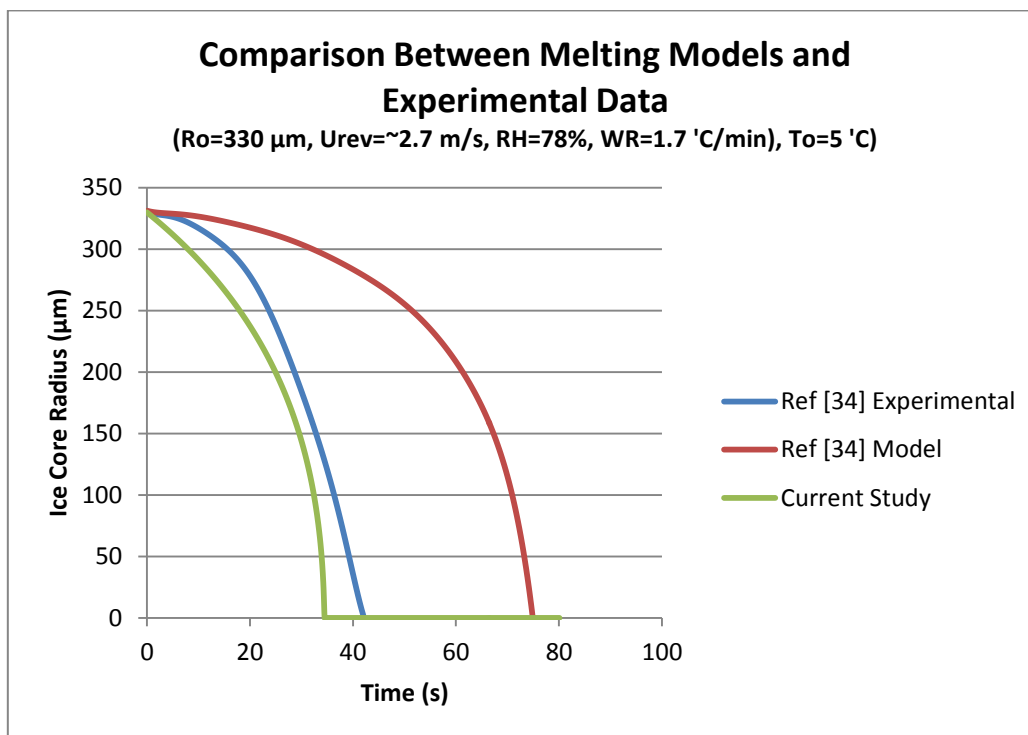


**Διάγραμμα 6.35:** Σχετική μεταβολή της εσωτερικής διαμέτρου μέσα σε θερμαινόμενη αεροσήραγγα για σωματίδιο πάγου αρχικής διαμέτρου  $330\ \mu\text{m}$  (Πηγή : Rasmussen and Pruppacher – A Wind Tunnel Study Of Frozen Drops Of Radius Lower Than 500 Microns, 1982)

Στο πείραμα αυτής της αναφοράς μικρές παγοποιημένες σταγόνες αφέθηκαν ελεύθερα μέσα στην κατακόρυφη και προς τα πάνω ροή αέρα της αεροσήραγγας με το ρεύμα αέρα να έχει τέτοια ταχύτητα ώστε να συγκρατεί τα σωματίδια ακίνητα προσομοιώνοντας έτσι την ελεύθερη πτώση τους στην ατμόσφαιρα. Τα χαρακτηριστικά της ροής δε δίνονται απευθείας. Με συσχέτιση όμως άλλων δοθέντων δεδομένων και μελετώντας πειράματα ίδιας φύσης, στην ίδια σήραγγα και από τους ίδιους ερευνητές διαπιστώνεται ότι η πίεση είναι η ατμοσφαιρική και η ταχύτητα είναι περίπου  $2.57\ \text{m/s}$ . Η θερμοκρασία του αέρα δίνεται ότι αυξάνεται με ρυθμό  $1.7\ ^{\circ}\text{C/min}$ . Αν και δε δίνεται, επιλύοντας τις εξισώσεις υγροποίησης του μοντέλου που περιγράφεται από την αναφορά [40] διαπιστώθηκε ότι η αρχική θερμοκρασία είναι περίπου  $5^{\circ}\text{C}$ .

Εφαρμόζοντας τις ίδιες συνθήκες στο μοντέλο της παρούσας έρευνας εξάγονται τα επόμενα αποτελέσματα που παρατίθενται επάνω στο ίδιο διάγραμμα

(Διάγραμμα 6.36) μαζί με τα δεδομένα της αναφοράς [40]. Και πάλι τα αποτελέσματα της αναφοράς [40] που παρατίθενται στο διάγραμμα αυτό προέκυψαν ψηφιοποιώντας την αντίστοιχη καμπύλη από το Διάγραμμα 6.35.



**Διάγραμμα 6.36: Σύγκριση των αποτελεσμάτων για τη μεταβολή του εσωτερικού πυρήνα ανάμεσα στο μοντέλο της αναφοράς και της παρούσας έρευνας**

Οι διαφορές φαίνονται να είναι μικρές με τα πειραματικά αποτελέσματα αυτή τη φορά να είναι πολύ κοντά στο προτεινόμενο από την παρούσα έρευνα μοντέλο.





# 7

## Μηχανική Αλληλεπίδραση του Χαλαζιού στο Εσωτερικό της Μηχανής (Κρούση - Θραύση)

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται μελέτη της μηχανικής αλληλεπίδρασης των σφαιρικών σωματιδίων πάγου με τις εσωτερικές επιφάνειες της αεροπορικής μηχανής. Η μελέτη χωρίζεται σε τρία μέρη. Το πρώτο μέρος εξετάζει την κρούση των σωματιδίων πάγου χωρίς αυτά να θρυμματίζονται. Το δεύτερο μέρος εξετάζει τη θραύση των σωματιδίων και υπολογίζει τις μετά την κρούση κατανομές ταχυτήτων και μάζας. Το τρίτο και τελευταίο μέρος κάνει μία γενική περιγραφή της μηχανικής συμπεριφοράς των πτερυγίων αλλά και των μεταλλικών επιφανειών απέναντι στη κρούση των στοιχείων πάγου. Το κεφάλαιο τελειώνει με την περιγραφή ενός μοντέλου που χρησιμοποιείται από τη παρούσα έρευνα για να περιγράψει τα παραπάνω φαινόμενα.

### 7.1 Κρούση σωματιδίων πάγου

Όταν δύο σώματα συγκρούονται έρχονται σε επαφή με μία σχετική ταχύτητα σε ένα αρχικό σημείο επαφής. Αν δεν υπήρχε η δύναμη επαφής που αναπτύσσεται ανάμεσα στα δύο σώματα, τότε η κάθετη στις επιφάνειες συνιστώσα της ταχύτητας θα οδηγούσε στην εισχώρηση του ενός σώματος μέσα στο άλλο. Η δύναμη επαφής μορφοποιεί τα σώματα σε μία συμβατική διάταξη σχηματίζοντας μία μορφή με κοινή επιφάνεια επαφής που συμπεριλαμβάνει φυσικά και το σημείο της αρχικής επαφής. Είναι εξαιρετικά δύσκολο και επίπονο να υπολογίσει κανείς αναλυτικά τις παραμορφώσεις που θα ικανοποιούν τις εξισώσεις κίνησης, και θα δίνουν ίσες και αντίθετες δυνάμεις αντίδρασης στα συγκρουόμενα σώματα. Για την αποφυγή της δυσκολίας έχουν προταθεί αρκετές προσεγγίσεις ανάλυσης του θέματος της κρούσης. Για τον διαχωρισμό κάθε προσέγγισης και τη δημιουργία διακριτών τύπων κρούσης πρέπει να λάβει κανείς υπόψιν του τις παραμορφώσεις που συμβαίνουν κατά τη κρούση και κυρίως το πώς οι παραμορφώσεις αυτές επηρεάζουν το χρονικό διάστημα της κρούσης.

Κατά την ανάπτυξη της θεωρίας της κρούσης διακρίθηκαν τέσσερις τομείς ενδιαφέροντος με διαφορετικές αλλά όχι τελείως ανεξάρτητες θεωρίες ανάλυσης. Ανάλογα με τα χαρακτηριστικά της κρούσης και τις παραδοχές κάθε θεωρίας ανάλυσης διαφοροποιείται και η άποψη για το ποια θεωρία είναι περισσότερο ικανή να περιγράψει με ακρίβεια την εξέλιξη του φαινομένου. Οι

τέσσερις θεωρίες που διακρίνονται περισσότερο είναι η θεωρία της κρούσης στερεού σώματος, της κρούσης ελαστικού σώματος, της κρούσης πλαστικού σώματος και της κρούσης με διάδοση κύματος.

Η θεωρία ανάλυσης κρούσης στερεού σώματος εμπεριέχει την εφαρμογή των θεμελιωδών νόμων της μηχανικής για τον προσδιορισμό μόνο των ταχυτήτων μετά την κρούση. Ο συσχετισμός ώθησης – ορμής αποτελεί τον πυρήνα αυτής της θεωρίας ανάλυσης που δεν κάνει χρονική μελέτη του φαινομένου και δεν λογαριάζει τις τάσεις παραμόρφωσης ή την ίδια την παραμόρφωση των σωμάτων. Παρόλα αυτά η αλγεβρική φύση της μεθόδου την κάνει εύκολα επιλύσιμη και εύχρηστη για τα περισσότερα προβλήματα απλής μηχανικής κρούσεων. Η ευκολία αυτή οφείλεται στην συγκεντρωτική ενσωμάτωση όλων των ενεργειακών απωλειών σε μία ποσότητα που εκφράζεται με ένα συντελεστή τον συντελεστή επαναφοράς. Η ακρίβεια της τιμής αυτού του συντελεστή, που δυστυχώς ευρίσκεται από πειράματα και δεν είναι πάντα σταθερός στην κρούση, είναι εξαιρετικής σημασίας για την ακρίβεια των αποτελεσμάτων της μεθόδου.

Η θεωρία ανάλυσης της κρούσης ελαστικού σώματος σε αντίθεση με την κρούση απόλυτα στερεού σώματος λαμβάνει υπ όψιν της τις παραμορφώσεις και τις τάσεις κατά την κρούση με μία φυσικά πιο πολύπλοκη μεθοδολογία ανάλυσης.

Οι θεωρίες κρούσης πλαστικού σώματος και κρούσης με διάδοση κύματος είναι εξαιρετικά πολύπλοκες θεωρίες και δεν αναλύονται εδώ αφού αναφέρονται σε συνθήκες κρούσης που δεν μελετώνται από την παρούσα έρευνα.

Η κρούση των σωματιδίων πάγου με τις επιφάνειες της αεροπορικής μηχανής ή και η αμοιβαία κρούση μεταξύ τους μπορεί να αναλυθεί με τις δύο πρώτες από τις τέσσερις μεθοδολογίες που αναφέρθηκαν. Ο πρώτος τρόπος είναι μελετώντας το φαινόμενο της κρούσης με συναρτήσεις ώθησης δηλαδή θεωρώντας ότι η διαφορά στην ορμή μεταξύ δύο σημείων στο χρόνο είναι το χρονικό ολοκλήρωμα της δύναμης. Η δύναμη δεν είναι γνωστή και δεν υπολογίζεται αλλά είναι γνωστός ο συσχετισμός της ταχύτητας μετά την κρούση με την ταχύτητα πριν την κρούση μέσω του συντελεστή επαναφοράς. Χρησιμοποιείται εν ολίγη η ολοκληρωτική μορφή των νευτώνειων εξισώσεων κίνησης με μία **Στερεομηχανική Θεωρία Ανάλυσης**.

Ο δεύτερος τρόπος που αφορά κυρίως μεγαλύτερα σωματίδια πάγου εισάγει στη μελέτη τις εσωτερικές δυνάμεις παραμόρφωσης και τη χρονική εξάρτηση του φαινομένου. Η περιγραφή γίνεται στο πεδίο του χρόνου και χρησιμοποιούνται μηχανικά ανάλογα όπως ελατήρια, αποσβεστήρες και ολισθαίνων τριβείς για να περιγράψουν την κρούση. Οι νευτώνειες εξισώσεις κίνησης μελετώνται πλέον στην διαφορική τους μορφή και ακολουθείται μία **Ελαστομηχανική Θεωρία Ανάλυσης**.

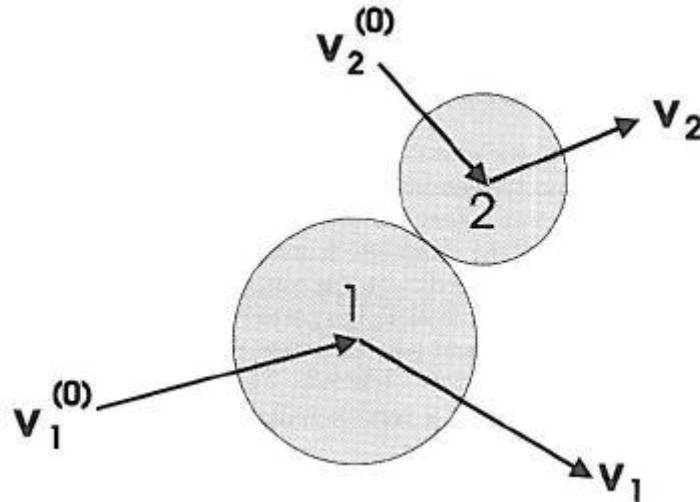
### 7.1.1 Στερεομηχανική Κρούση (Μικρά σωματίδια)

Η κρούση μικρών σωματιδίων πάγου περιγράφεται καλύτερα από την θεωρία κρούσης σκληρού σώματος. Στην θεωρία κρούσης σκληρού σώματος οι μετατοπίσεις και οι παραμορφώσεις θεωρούνται μηδενικές. Αυτό σημαίνει πως και η διάρκεια της κρούσης είναι μηδενική. Χάριν της απλότητας της μεθόδου οι εξισώσεις της δυναμικής δεν επαρκούν για να επιλύσουν τις αλλαγές στην ταχύτητα του σώματος και απαιτείται μία επιπλέον σχέση. Αυτή η σχέση παράγεται από τον ορισμό του συντελεστή επαναφοράς  $e$ , ενός εμπειρικού κατά τα άλλα συντελεστή που προτάθηκε για πρώτη φορά από τον Newton. Ο συντελεστής επαναφοράς εκφράζει κατά μία έννοια τις απώλειες ενέργειας που συμβαίνουν στην κρούση λόγω πλαστικής παραμόρφωσης των σωμάτων και τη μη αντιστρεπτή διάχυση της κινητικής ενέργειας. Μπορεί να πάρει τιμές από 1 έως 0 εκφράζοντας αντίστοιχα την απόλυτα ελαστική και την απόλυτα πλαστική κρούση.

Για την οποιαδήποτε ανάλυση μεταβολής της ορμής η παραδοχή της αμελητέας μετατόπισης απλοποιεί σημαντικά το φαινόμενο της κρούσης. Με τη παραδοχή αυτή οι μεταβολές στην ταχύτητα μπορούν να υπολογιστούν χωρίς την ολοκλήρωση των επιταχύνσεων αγνοώντας δηλαδή τις δυνάμεις παραμόρφωσης. Θεωρείται μονάχα μία ποσότητα μεταβολής της ορμής που εφαρμόζεται βηματικά. Η αλλαγή στην ταχύτητα είναι συνάρτηση της ώθησης<sup>1</sup> και όχι του χρόνου. Με τη προσέγγιση των αμελητέων μετατοπίσεων κατά την πολύ σύντομη επαφή των σωμάτων καταλήγει η θεωρία σε μία εξίσωση κίνησης σταθερών συντελεστών που είναι εύκολα ολοκληρώσιμη. Έτσι εξάγονται οι μεταβολές της ορμής του σώματος ως συνάρτηση της ώθησης των δυνάμεων επαφής. Η πηγή των αντιδρώντων δυνάμεων παραμένει απροσδιόριστη και η δύναμη έχει ένα μικρό εύρος δράσης ώστε η διάρκεια της κρούσης να είναι σχεδόν στιγμιαία.

Η κρούση ενός σφαιρικού σωματιδίου με μία επίπεδη επιφάνεια μπορεί να μοντελοποιηθεί ως η κρούση ενός σφαιρικού σωματιδίου με ένα δεύτερο σωματίδιο που η ακτίνα του τείνει στο άπειρο. Για τη διατύπωση των εξισώσεων που θα περιγράψουν τη κρούση του στερεού σφαιρικού σωματιδίου χρησιμοποιείται το **Σχήμα 7.1** και η ανάλυση σύμφωνα με την αναφορά [47].

<sup>1</sup> Στη κλασική μηχανική η ώθηση (*impulse*) ορίζεται ως το ολοκλήρωμα μίας δύναμης ως προς το χρόνο. Η ώθηση ισούται με την αλλαγή της ορμής ενός σώματος. Διαισθητικά είναι μία φυσική ποσότητα και όχι μία φυσική έννοια όπως η δύναμη. Ο όρος ώθηση συχνά χρησιμοποιείται και για να εκφράσει μία πολύ γρήγορα εφαρμοζόμενη δύναμη. Αυτού του είδους η ώθηση είναι μία εξιδανικευμένη περίπτωση κατά την οποία η αλλαγή στην ορμή επέρχεται βηματικά σε στιγμιαίο χρόνο. Η ώθηση έχει μονάδες ανάλογες με αυτές της ορμής.



**Σχήμα 7.1:** Αμοιβαία Κρούση Σωματιδίων σε δύο διαστάσεις (Πηγή : C. Crowe - *Multiphase Flow with Particles and Droplets 1998*)

Τα σωματίδια ορίζονται με δείκτες ως σωματίδιο 1 και σωματίδιο 2 . Οι εξισώσεις ώθησης διατυπώνονται ως :

$$m_1 \cdot (\overline{v_1^{(2)}} - \overline{v_1^{(0)}}) = \vec{J} \quad (7-1)$$

$$m_2 \cdot (\overline{v_2^{(2)}} - \overline{v_2^{(0)}}) = -\vec{J} \quad (7-2)$$

$$I_1 \cdot (\overline{\omega_1^{(2)}} - \overline{\omega_1^{(0)}}) = (\vec{r}_1 \cdot \vec{n}) \times \vec{J} \quad (7-3)$$

$$I_2 \cdot (\overline{\omega_2^{(2)}} - \overline{\omega_2^{(0)}}) = (\vec{r}_2 \cdot \vec{n}) \times \vec{J} \quad (7-4)$$

όπου : [ $m_{1,2}$  = η μάζα των σωματιδίων 1 και 2 αντίστοιχα (SI),  $\overline{v_{1,2}^{(0)}}$  = η αρχική μεταφορική ταχύτητα των σωματιδίων 1 και 2 αντίστοιχα (SI),  $\overline{v_{1,2}^{(2)}}$  = η τελική μεταφορική ταχύτητα των σωματιδίων 1 και 2 αντίστοιχα (SI),  $\vec{J}$  = η κοινή δύναμη ώθησης (SI),  $I_{1,2}$  = η περιστροφική αδράνεια των σωματιδίων 1 και 2 αντίστοιχα (SI),  $\vec{n}$  = το διάνυσμα κάθετο στο κοινό επίπεδο κρούσης (SI),  $\overline{\omega_{1,2}^{(0)}}$  = η αρχική μεταφορική ταχύτητα των σωματιδίων 1 και 2 αντίστοιχα (SI),  $\overline{\omega_{1,2}^{(2)}}$  = η τελική μεταφορική ταχύτητα των σωματιδίων 1 και 2 αντίστοιχα (SI)]

Η δύναμη ώθησης είναι κοινή για τα δύο σωματίδια από τον νόμο δράσης αντίδρασης.

Μιλώντας αποκλειστικά για σφαιρικά σωματίδια<sup>1</sup> είναι πιο δόκιμο να οριστεί ο συντελεστής επαναφοράς ως το κλάσμα της κάθετης στην κοινή επιφάνεια σχετικής ταχύτητας πριν και μετά την κρούση, δηλαδή :

$$e = - \frac{\overrightarrow{G^{(2)}} \cdot \vec{n}}{\overrightarrow{G^{(0)}} \cdot \vec{n}} \quad (7-5)$$

όπου : [ $e = 0$  συντελεστής επαναφοράς (-),  $\overrightarrow{G^{(2)}}$  = η τελική σχετική μεταφορική ταχύτητα των σωματιδίων (SI),  $\overrightarrow{G^{(0)}}$  = η αρχική σχετική μεταφορική ταχύτητα των σωματιδίων (SI)]

Η σχετική ταχύτητα των κέντρων των σωμάτων που πρόκειται να συγκρουστούν πριν την κρούση και μετά την κρούση θέτοντας ακίνητο το σώμα 2 είναι :

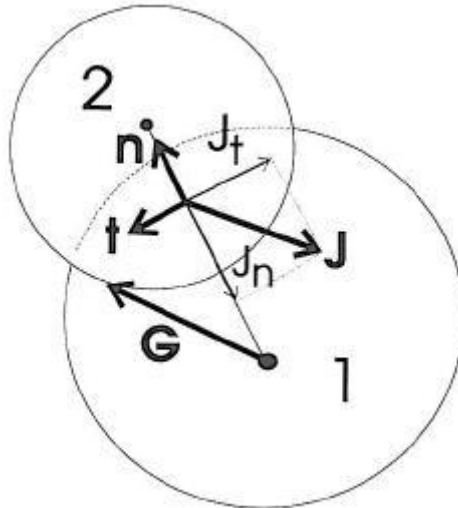
$$\overrightarrow{G^{(0)}} = \overrightarrow{v_1^{(0)}} - \overrightarrow{v_2^{(0)}} \quad (7-6)$$

$$\overrightarrow{G^{(2)}} = \overrightarrow{v_1^{(2)}} - \overrightarrow{v_2^{(2)}} \quad (7-7)$$

Η ανάλυση γίνεται βασιζόμενη στην σχετική κίνηση των σωματιδίων όπως στο **Σχήμα 7.2** :

---

<sup>1</sup> Με αυτή τη μέθοδο ορισμού όμως για μη σφαιρικά συγκρουόμενα σωματίδια η τιμή του συντελεστή επαναφοράς εξαρτάται από το σημείο επαφής του σωματιδίου με το επίπεδο. Ο συντελεστής επαναφοράς όμως πρέπει να είναι μία ιδιότητα του υλικού και όχι της διάταξης της κρούσης. Έτσι για την μελέτη της κρούσης μη σφαιρικών σωματιδίων με το επίπεδο υιοθετείται ο ορισμός του συντελεστή επαναφοράς ως το κλάσμα της ώθησης επαναφοράς ως προς την ώθηση συμπίεσης διαχωρίζοντας ταυτόχρονα την κρούση σε δύο φάσεις, τη φάση της συμπίεσης και τη φάση της επαναφοράς. Για σφαιρικά σωματίδια όμως το παραπάνω κλάσμα λόγω συμμετρίας είναι ανεξάρτητο του σημείου επαφής και ισούται επίσης με το κλάσμα των προ και μετά της κρούσης ταχυτήτων.



**Σχήμα 7.2:** Σχετικό σύστημα Κρούσης Σωματιδίων σε δύο διαστάσεις (Πηγή : C. Crowe - *Multiphase Flow with Particles and Droplets 1998*)

Η σχετική ταχύτητα του σημείου επαφής πριν την κρούση είναι :

$$\overline{G_c^{(0)}} = \overline{G^{(0)}} + (r_1 \cdot \vec{n}) \times \overline{\omega_1^{(0)}} + (r_2 \cdot \vec{n}) \times \overline{\omega_2^{(0)}} \quad (7-8)$$

όπου : [  $\overline{G_c^{(0)}}$  = η αρχική σχετική μεταφορική ταχύτητα του σημείου επαφής (SI),  
 $r_{1,2}$  = η ακτίνα των σωματιδίων 1 και 2 αντίστοιχα (SI)]

Ο αριστερά όρος της εξίσωσης (7-8) είναι διάνυσμα που δεν είναι εφαπτομενικό στο επίπεδο της κρούσης. Έχει εφαπτομενική αλλά και κάθετη στο επίπεδο συνιστώσα.

Έτσι η εφαπτομενική στο επίπεδο της κρούσης σχετική ταχύτητα του είναι :

$$\overline{G_{ct}^{(0)}} = \overline{G_c^{(0)}} - (\overline{G_c^{(0)}} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n} \quad (7-9)$$

όπου : [  $\overline{G_{ct}^{(0)}}$  = η αρχική σχετική εφαπτομενική στο κοινό επίπεδο κρούσης μεταφορική ταχύτητα του σημείου επαφής (SI)]

Η δύναμη ώθησης διαχωρίζεται στην κάθετη και στην εφαπτομενική της συνιστώσα :

$$\vec{J} = (\vec{n} \cdot \vec{J}) \cdot \vec{n} + (\vec{t} \cdot \vec{J}) \cdot \vec{t} \quad (7-10)$$

όπου : [  $\vec{t}$  = το διάνυσμα εφαπτόμενο στο κοινό επίπεδο κρούσης (SI)]

Το μοναδιαίο εφαπτομενικό στο κοινό επίπεδο κρούσης διάνυσμα  $\vec{t}$  δίνεται από τη σχέση :

$$t = \frac{\overline{G}_{ct}^{(0)}}{\left| \overline{G}_{ct}^{(0)} \right|} \quad (7-11)$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του συντελεστή επαναφοράς συσχετίζεται η πριν την κρούση ταχύτητα με τη μετά την κρούση ταχύτητα ως :

$$\overline{G}^{(2)} \cdot \vec{n} = -e \cdot \left( \overline{G}^{(0)} \cdot \vec{n} \right) \quad (7-12)$$

Οι δύο εξισώσεις ώθησης (7-1) και (7-2) χρησιμοποιώντας τη σχετική ταχύτητα γίνονται μία εξίσωση ως :

$$\overline{G}^{(2)} = \overline{G}^{(0)} + \frac{m_1 + m_2}{m_1 \cdot m_2} \cdot \vec{J} \quad (7-13)$$

Πολλαπλασιάζοντας με το μοναδιαίο διάνυσμα  $\vec{n}$  την (7-13) προκύπτει η επόμενη σχέση :

$$\vec{n} \cdot \overline{G}^{(2)} = \vec{n} \cdot \overline{G}^{(0)} + \frac{m_1 + m_2}{m_1 \cdot m_2} \vec{n} \cdot \vec{J} \quad (7-14)$$

Εισάγοντας τώρα και την εξίσωση του συντελεστή επαναφοράς (7-12) η (7-14) γίνεται :

$$-e \cdot \left( \vec{n} \cdot \overline{G}^{(0)} \right) = \vec{n} \cdot \overline{G}^{(0)} + \frac{m_1 + m_2}{m_1 \cdot m_2} \vec{J} \cdot \vec{n} \quad (7-15)$$

Από τη σχέση (7-15) και λύνοντας ως προς την κάθετη συνιστώσα της ώθησης προκύπτει ότι :

$$J_n = -\frac{m_1 + m_2}{m_1 \cdot m_2} \cdot (1 + e) \cdot \left( G_n^{(0)} \right) < 0 \quad (7-16)$$

όπου :  $[ \vec{J}_n = \text{η κοινή κάθετη δύναμη ώθησης (SI)} ]$

Υποθέτοντας ότι κατά την κρούση συμβαίνει ολίσθηση τότε για την επαπτομενική συνιστώσα της ώθησης από τον νόμο τριβής του Coulomb θα ισχύει ότι :

$$J_t = f \cdot J_n < 0 \quad (7-17)$$

όπου : [ $\vec{J}_t$  = η κοινή επαπτόμενη δύναμη ώθησης (SI),  $f$  = ο συντελεστής τριβής μεταξύ των σωμάτων (SI)]

Η (7-17) από την (7-16) γράφεται ως :

$$J_t = f \cdot \left( -\frac{m_1 + m_2}{m_1 \cdot m_2} \cdot (1+e) \cdot (G_n^{(0)}) \right) < 0 \quad (7-18)$$

Η συνισταμένη δύναμη ώθησης (7-10) τελικά γράφεται ως :

$$\vec{J} = J_n \cdot \vec{n} + J_t \cdot \vec{t} = -\left( \frac{m_1 + m_2}{m_1 \cdot m_2} \cdot (1+e) \cdot (G_n^{(0)}) \right) \cdot (\vec{n} - f \cdot \vec{t}) \quad (7-19)$$

Αντικαθιστώντας τη συνισταμένη της δύναμης ώθησης (7-19) στις εξισώσεις ώθησης (7-1) έως (7-4) προκύπτουν οι σχέσεις για τις τελικές ταχύτητες ως :

$$\vec{v}_1^{(2)} = \vec{v}_1^{(0)} - (\vec{n} + f \cdot \vec{t}) \cdot (\vec{n} \cdot \vec{G}^{(0)}) \cdot (1+e) \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad (7-20)$$

$$\vec{v}_2^{(2)} = \vec{v}_2^{(0)} - (\vec{n} + f \cdot \vec{t}) \cdot (\vec{n} \cdot \vec{G}^{(0)}) \cdot (1+e) \cdot \frac{m_1}{m_1 + m_2} \quad (7-21)$$

$$\vec{\omega}_1^{(2)} = \vec{\omega}_1^{(0)} - \left( \frac{5}{2 \cdot r_1} \right) \cdot (\vec{n} \cdot \vec{G}^{(0)}) \cdot (\vec{n} \times \vec{t}) \cdot f \cdot (1+e) \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad (7-22)$$

$$\vec{\omega}_2^{(2)} = \vec{\omega}_2^{(0)} - \left( \frac{5}{2 \cdot r_2} \right) \cdot (\vec{n} \cdot \vec{G}^{(0)}) \cdot (\vec{n} \times \vec{t}) \cdot f \cdot (1+e) \cdot \frac{m_1}{m_1 + m_2} \quad (7-23)$$

Οι εξισώσεις (7-20) έως (7-23) αναφέρονται στη περίπτωση που τα δύο συγκρουόμενα σφαιρικά σωματίδια ολισθαίνουν καθόλη την διάρκεια της επαφής τους. Τι γίνεται όμως όταν η ολίσθηση σταματά κατά την κρούση<sup>1</sup>; Ποιο κριτήριο διακρίνει αυτές τις δύο περιπτώσεις; Η τιμή της επαπτομενικής στο επίπεδο της κρούσης σχετικής ταχύτητας ορίζει το αν τα σώματα θα συνεχίσουν ή θα σταματήσουν να ολισθαίνουν.

<sup>1</sup> Όπως αναφέρθηκε ήδη δεν διακρίνεται περίοδος συμπίεσης και επαναφοράς εφόσον περιοριζόμαστε σε σφαιρικά σώματα και εφόσον ορίζουμε το συντελεστή επαναφοράς σαν κλάσμα ταχυτήτων και όχι ως κλάσμα ωθήσεων.



Η ταχύτητα του σημείου επαφής μετά τη κρούση θα είναι :

$$\overline{G}_c^{(2)} = \overline{G}^{(2)} + (r_1 \cdot \vec{n}) \times \overline{\omega}_1^{(2)} + (r_2 \cdot \vec{n}) \times \overline{\omega}_2^{(2)} \quad (7-24)$$

Χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες εξισώσεις (7-20) έως (7-23), η εξίσωση (7-24) γράφεται :

$$\overline{G}_c^{(2)} = \overline{G}_c^{(0)} + \left\{ J_n \cdot \vec{n} + \left( \frac{7}{2} \right) \cdot J_t \cdot \vec{t} \right\} \cdot \frac{m_1 + m_2}{m_1 \cdot m_2} \quad (7-25)$$

Η εφαπτομενική στο επίπεδο της κρούσης τελική ταχύτητα δίνεται από την παραπάνω εξίσωση ως :

$$\overline{G}_{ct}^{(2)} = \frac{\overline{G}_{ct}^{(0)}}{|\overline{G}_{ct}^{(0)}|} \cdot \left\{ |\overline{G}_{ct}^{(0)}| + \left( \frac{7}{2} \right) \cdot J_t \cdot \frac{m_1 + m_2}{m_1 \cdot m_2} \right\} \quad (7-26)$$

Η περίπτωση τα σωματίδια να ολισθαίνουν καθόλη την διάρκεια της κρούσης συμβαίνει όταν η αγκύλη της (7-26) είναι θετική ή αλλιώς όταν :

$$J_t > - \left( \frac{2}{7} \right) \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} |\overline{G}_{ct}^{(0)}| \quad (7-27)$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω εξίσωση την σχέση της ώθησης  $J_t$  από την (7-18) καταλήγουμε στη σχέση :

$$\frac{\vec{n} \cdot \overline{G}^{(0)}}{|\overline{G}_{ct}^{(0)}|} < \left( \frac{2}{7} \right) \cdot \frac{1}{f \cdot (1+e)} \quad (7-28)$$

Αν η τελευταία εξίσωση δεν ικανοποιείται τότε τα σωματίδια σταματάνε να ολισθαίνουν και η σχετική εφαπτομενική ταχύτητα του σημείου επαφής είναι μηδέν.

Επιβάλλοντας αυτή τη συνθήκη στην εξίσωση του σημείου επαφής (7-24) προκύπτει η σχέση :

$$J_t = -\left(\frac{2}{7}\right) \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \left| \overline{G_{ct}^{(0)}} \right| \quad (7-29)$$

Αντικαθιστώντας τώρα στις εξισώσεις ώθησης τη συνισταμένη της δύναμης ώθησης με την εφαπτομενική της συνιστώσα αυτή τη φορά να μην εξαρτάται από την κάθετη συνιστώσα αλλά να δίνεται από την (7-29) προκύπτουν οι σχέσεις για τις τελικές ταχύτητες όταν η ολίσθηση σταματά κατά την επαφή ως :

$$\overline{v_1^{(2)}} = \overline{v_1^{(0)}} - \left[ (1+e) \cdot (\vec{n} \cdot \overline{G^{(0)}}) \cdot \vec{n} + \frac{2}{7} \left| \overline{G_{ct}^{(0)}} \right| \cdot \vec{t} \right] \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad (7-30)$$

$$\overline{v_2^{(2)}} = \overline{v_2^{(0)}} - \left[ (1+e) \cdot (\vec{n} \cdot \overline{G^{(0)}}) \cdot \vec{n} + \frac{2}{7} \left| \overline{G_{ct}^{(0)}} \right| \cdot \vec{t} \right] \cdot \frac{m_1}{m_1 + m_2} \quad (7-31)$$

$$\overline{\omega_1^{(2)}} = \overline{\omega_1^{(0)}} - \frac{5}{7 \cdot r_1} \cdot \left| \overline{G_{ct}^{(0)}} \right| \cdot (\vec{n} \times \vec{t}) \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad (7-32)$$

$$\overline{\omega_2^{(2)}} = \overline{\omega_2^{(0)}} - \frac{5}{7 \cdot r_2} \cdot \left| \overline{G_{ct}^{(0)}} \right| \cdot (\vec{n} \times \vec{t}) \cdot \frac{m_1}{m_1 + m_2} \quad (7-33)$$

Οι εξαγόμενες εξισώσεις και για τις δύο περιπτώσεις ολίσθησης και μη ολίσθησης συνοψίζονται στον **Πίνακας 7.3** :

	<i>Slides All Time</i>	<i>Slides Partially</i>
<b>Condition</b>	$\frac{\vec{n} \cdot \vec{G}^{(0)}}{ \vec{G}_{ct}^{(0)} } < \left(\frac{2}{7}\right) \cdot \frac{1}{f \cdot (1+e)}$	$\frac{\vec{n} \cdot \vec{G}^{(0)}}{ \vec{G}_{ct}^{(0)} } > \left(\frac{2}{7}\right) \cdot \frac{1}{f \cdot (1+e)}$
<b>Post Impact Translational Velocity of Particles</b>	$\vec{v}_1^{(2)} = \vec{v}_1^{(0)} - (\vec{n} + f \cdot \vec{t}) \cdot (\vec{n} \cdot \vec{G}^{(0)}) \cdot (1+e) \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2}$ $\vec{v}_2^{(2)} = \vec{v}_2^{(0)} + (\vec{n} + f \cdot \vec{t}) \cdot (\vec{n} \cdot \vec{G}^{(0)}) \cdot (1+e) \cdot \frac{m_1}{m_1 + m_2}$	$\vec{v}_1^{(2)} = \vec{v}_1^{(0)} - \left[ (1+e) \cdot (\vec{n} \cdot \vec{G}^{(0)}) \cdot \vec{n} + \frac{2}{7}  \vec{G}_{ct}^{(0)}  \cdot \vec{t} \right] \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2}$ $\vec{v}_2^{(2)} = \vec{v}_2^{(0)} - \left[ (1+e) \cdot (\vec{n} \cdot \vec{G}^{(0)}) \cdot \vec{n} + \frac{2}{7}  \vec{G}_{ct}^{(0)}  \cdot \vec{t} \right] \cdot \frac{m_1}{m_1 + m_2}$
<b>Post Impact Angular Velocity of Particles</b>	$\vec{\omega}_1^{(2)} = \vec{\omega}_1^{(0)} - \left(\frac{5}{2 \cdot r_1}\right) \cdot (\vec{n} \cdot \vec{G}^{(0)}) \cdot (\vec{n} \times \vec{t}) \cdot f \cdot (1+e) \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2}$ $\vec{\omega}_2^{(2)} = \vec{\omega}_2^{(0)} - \left(\frac{5}{2 \cdot r_2}\right) \cdot (\vec{n} \cdot \vec{G}^{(0)}) \cdot (\vec{n} \times \vec{t}) \cdot f \cdot (1+e) \cdot \frac{m_1}{m_1 + m_2}$	$\vec{\omega}_1^{(2)} = \vec{\omega}_1^{(0)} - \frac{5}{7 \cdot r_1} \cdot  \vec{G}_{ct}^{(0)}  \cdot (\vec{n} \times \vec{t}) \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2}$ $\vec{\omega}_2^{(2)} = \vec{\omega}_2^{(0)} - \frac{5}{7 \cdot r_2} \cdot  \vec{G}_{ct}^{(0)}  \cdot (\vec{n} \times \vec{t}) \cdot \frac{m_1}{m_1 + m_2}$

Πίνακας 7.3: Συνοπτικός πίνακας επίλυσης εξισώσεων δυνάμεων ώθησης για αμοιβαία κρούση μικρών σφαιρικών σωματιδίων

Το μοντέλο μπορεί να επεκταθεί [49] για να λαμβάνει υπόψη την περίπτωση μεταξύ των σωματιδίων να επενεργούν επιπρόσθετες εξωτερικές δυνάμεις έλξης ή απώθησης. Η διαδικασία για την εξαγωγή των τελικών εξισώσεων είναι εντελώς ανάλογη με αυτή που υλοποιήθηκε προηγουμένως και η μόνη διαφορά είναι η εισαγωγή ενός επιπλέον όρου στην κάθετη στο επίπεδο ενεργούσας ώθησης την ώθηση  $J_{n,c}$ . Οι εξισώσεις που εξάγονται σε αυτή τη περίπτωση δίνονται συνοπτικά στον **Πίνακας 7.4** :

	<i>Slides All Time</i>	<i>Slides Partially</i>
<b>Condition</b>	$\vec{n} \cdot \vec{G}^{(0)} < -\frac{m_1 + m_2}{m_1 \cdot m_2} \cdot \frac{J_{n,c}}{(1+e)} + \left(\frac{2}{7}\right) \cdot \frac{1}{f \cdot (1+e)} \cdot \left  \vec{G}_{ct}^{(0)} \right $	$\vec{n} \cdot \vec{G}^{(0)} \geq -\frac{m_1 + m_2}{m_1 \cdot m_2} \cdot \frac{J_{n,c}}{(1+e)} + \left(\frac{2}{7}\right) \cdot \frac{1}{f \cdot (1+e)} \cdot \left  \vec{G}_{ct}^{(0)} \right $
<b>Post Impact Translational Velocity of Particles</b>	$\vec{v}_1^{(2)} = \vec{v}_1^{(0)} + \frac{J_{n,c}}{m_1} \cdot (\vec{n} - f \cdot \vec{t}) - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot (1+e) \cdot (\vec{n} \cdot \vec{G}^{(0)}) \cdot (\vec{n} + f \cdot \vec{t})$ $\vec{v}_2^{(2)} = \vec{v}_2^{(0)} - \frac{J_{n,c}}{m_1} \cdot (\vec{n} - f \cdot \vec{t}) + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot (1+e) \cdot (\vec{n} \cdot \vec{G}^{(0)}) \cdot (\vec{n} + f \cdot \vec{t})$	$\vec{v}_1^{(2)} = \vec{v}_1^{(0)} + \left[ \left( \frac{J_{n,c}}{m_1} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot (1+e) \cdot (\vec{n} \cdot \vec{G}^{(0)}) \right) \cdot \vec{n} - \frac{2}{7} \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \left  \vec{G}_{ct}^{(0)} \right  \cdot \vec{t} \right]$ $\vec{v}_2^{(2)} = \vec{v}_2^{(0)} - \left[ \left( \frac{J_{n,c}}{m_2} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot (1+e) \cdot (\vec{n} \cdot \vec{G}^{(0)}) \right) \cdot \vec{n} - \frac{2}{7} \cdot \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \left  \vec{G}_{ct}^{(0)} \right  \cdot \vec{t} \right]$
<b>Post Impact Angular Velocity of Particles</b>	$\vec{\omega}_1^{(2)} = \vec{\omega}_1^{(0)} + \left( \frac{5}{2 \cdot r_1} \right) \cdot (\vec{n} \times \vec{t}) \cdot f \cdot \left[ -\frac{J_{n,c}}{m_1} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot (1+e) \cdot (\vec{n} \cdot \vec{G}^{(0)}) \right]$ $\vec{\omega}_2^{(2)} = \vec{\omega}_2^{(0)} + \left( \frac{5}{2 \cdot r_2} \right) \cdot (\vec{n} \times \vec{t}) \cdot f \cdot \left[ -\frac{J_{n,c}}{m_2} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot (1+e) \cdot (\vec{n} \cdot \vec{G}^{(0)}) \right]$	$\vec{\omega}_1^{(2)} = \vec{\omega}_1^{(0)} - \frac{5}{7 \cdot r_1} \cdot (\vec{n} \times \vec{t}) \cdot \left  \vec{G}_{ct}^{(0)} \right  \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2}$ $\vec{\omega}_2^{(2)} = \vec{\omega}_2^{(0)} - \frac{5}{7 \cdot r_2} \cdot (\vec{n} \times \vec{t}) \cdot \left  \vec{G}_{ct}^{(0)} \right  \cdot \frac{m_1}{m_1 + m_2}$

Πίνακας 7.4: Συνοπτικός πίνακας επίλυσης επεκταμένων εξισώσεων δυνάμεων ώθησης

Συνήθως οι επιπρόσθετες δυνάμεις είναι γνωστές ως προς την απόσταση που διαχωρίζει τα συγκρουόμενα σώματα. Επίσης στο μοντέλο κρούσης σκληρού σωματιδίου δεν πρέπει να υπάρχει χρονική εξάρτηση του φαινομένου. Για το λόγο αυτό πρέπει να γίνει ο επόμενος μετασχηματισμός ώστε να εκφραστεί και να ολοκληρωθεί η δύναμη ως προς την απόσταση. Για την φάση της προσέγγισης των σωμάτων π.χ. αυτό γίνεται ως :

$$J_{n,c} = \int_0^{t_c} F_{n,c}(t) dt = \int_{D_a}^{D_c} F_{n,c}(D) \cdot \frac{dt}{dD} dD = \int_{D_a}^{D_c} \frac{F_{n,c}(D)}{G_n(D)} dD \quad (7-34)$$

όπου : [ $J_{n,c}$  = η κάθετη στο κοινό επίπεδο κρούσης πρόσθετη ώθηση (SI),  $F_{n,c}$  = η κάθετη στο κοινό επίπεδο κρούσης πρόσθετη δύναμη αλληλεπίδρασης (SI),  $t_c$  = ο χρόνος στον οποίο τελειώνει η προσέγγιση (SI),  $t$  = η μεταβλητή χρόνου (SI),  $D_c$  = η ελάχιστη απόσταση που μπορεί να πλησιάσουν οι επιφάνειες (SI),  $D_a$  = η απόσταση των επιφανειών στην οποία οι επιπρόσθετες δυνάμεις αρχίζουν να γίνονται αισθητές (SI),  $f$  = ο συντελεστής τριβής μεταξύ των σωμάτων (SI),  $G_n$  = η κάθετη στο κοινό επίπεδο κρούσης σχετική μεταφορική ταχύτητα των σωμάτων (SI),  $D$  = η μεταβλητή απόστασης μεταξύ των επιφανειών των σωμάτων (SI)]

Το ολοκλήρωμα της σχέσης (7-34) είναι δύσκολο να επιλυθεί εφόσον πρέπει να υπάρχει μία αναλυτική έκφραση για την πρόσθετη δύναμη και την σχετική ταχύτητα.

Η δύναμη  $F_{n,c}$  μπορεί να προέρχεται από διάφορους μηχανισμούς. Έτσι μπορεί να εκφράσει τη δύναμη επιβράδυνσης από τη κρούση πάνω σε βρεγμένη επιφάνεια ή τη δύναμη έλξης Van der Wals ανάμεσα στα μόρια των λείων επιφανειών.

Η δύναμη έλξης Van der Wals εκφράζεται σύμφωνα με την εξίσωση του Hamaker (Hamaker 1937) και με τις διορθώσεις λόγω τραχύτητας (Czarnecki & Dabroe 1980) από τη σχέση :

$$F = \frac{A}{6 \cdot D^2} \cdot \left( \frac{r_2}{1 + \frac{r_2}{r_1}} \right) \quad (7-35)$$

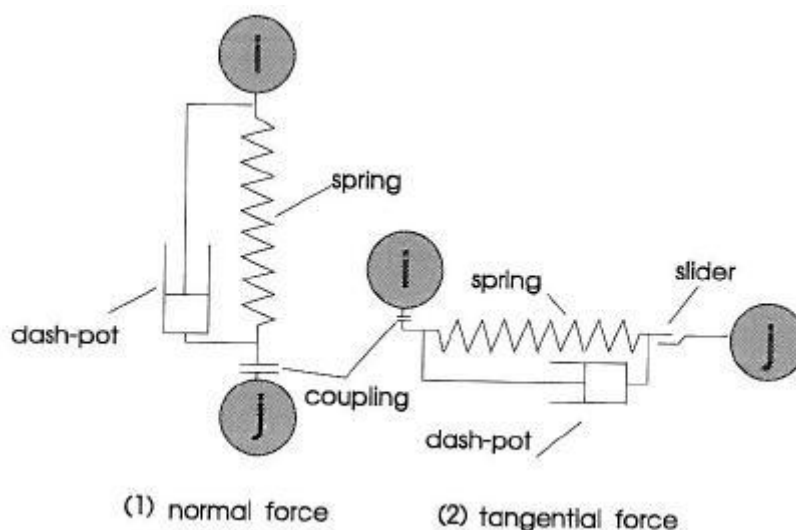
όπου : [ $A$  = η σταθερά του Hamaker (SI),  $D$  = η μεταβλητή απόστασης μεταξύ των επιφανειών των σωμάτων (SI)]

Αν η μία επιφάνεια είναι το επίπεδο τότε θεωρούμε την καμπυλότητα της άπειρη.

### 7.1.2 Ελαστομηχανική Κρούση (Μεγάλα Σωματίδια)

Κατά την κρούση μεγαλύτερων σωματιδίων οι παραμορφώσεις των σωμάτων και η διάρκεια επαφής δεν μπορούν να αμεληθούν. Έτσι χρησιμοποιείται ένα διαφορετικό μοντέλο κρούσης, το μοντέλο κρούσης μαλακού σωματιδίου. Το μοντέλο κρούσης μαλακού σωματιδίου χρησιμοποιεί τη διαφορική μορφή των νευτώνειων εξισώσεων κίνησης και έτσι οι μεταβολές στην ορμή και οι μετατοπίσεις είναι συνάρτηση του χρόνου.

Στο μοντέλο κρούσης μαλακού σωματιδίου δεν λογαριάζονται μόνο οι ταχύτητες πριν και μετά από την κρούση αλλά και οι δυνάμεις παραμόρφωσης κατά την επαφή. Η επιρροή στη κίνηση του σωματιδίου εμφανίζεται μέσω παραγόντων όπως η ακαμψία και η απόσβεση όπως στο **Σχήμα 7.5**.



**Σχήμα 7.5:** Σύστημα Ελατηρίου - Αποσβεστήρα για την προσομοίωση της κρούσης  
(Πηγή : C. Crowe - *Multiphase Flow with Particles and Droplets* 1998)

Ο Hertz (*Hertz 1882*) ήταν ο πρώτος που υπολόγισε τη κατανομή πίεσης και τις παραμορφώσεις που δημιουργούνται κατά την επαφή στερεών, γραμμικά ελαστικών και ισότροπων ελλειψοειδών σωμάτων. Έκανε ανάλυση των δυνάμεων και των παραμορφώσεων που υφίστανται κατά τη στατική επαφή και επέκτεινε τη θεωρία για να υπολογίσει τα ίδια μεγέθη στην περίπτωση δυναμικής επαφής. Για την επέκταση της θεωρίας έκανε την παραδοχή μίας ημιστατικής κρούσης. Αυτό σημαίνει πως η δυναμική επαφή μελετάται σαν μία αλληλουχία σταδιακών στατικών επαφών.

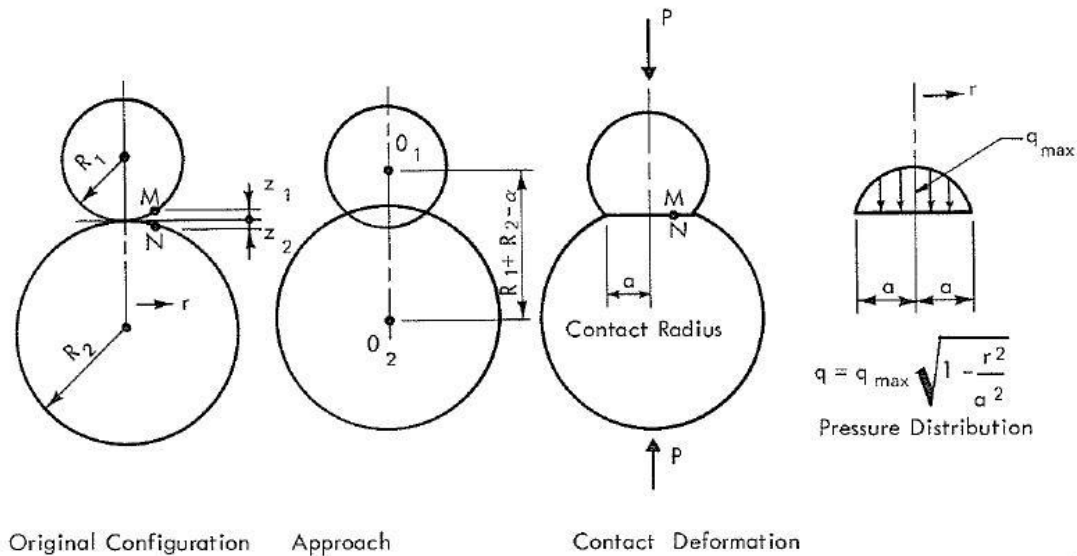
Παρακάτω αναλύονται οι δύο τρόποι ανάλυσης :

### Στατική επαφή σφαιρικών σωμάτων :

Για δύο επιφάνειες δευτέρου βαθμού γενικού τύπου  $z = A \cdot x^2 + B \cdot y^2 + C \cdot x \cdot y$ , ο Hertz βρήκε το σύστημα τάσεων που ικανοποιεί τη συμβατότητα των μετατοπίσεων για αμοιβαία επαφή σημείων σε μία κλειστή περιοχή  $S$  και τη συνθήκη για τις επιφανειακές τάσεις σε απουσία τριβής.

Το παραπάνω ονομάζεται «πρόβλημα ανάμικτων συνοριακών τιμών» στην ελαστική θεωρία εφόσον σε μία περιοχή του συνόρου οι μετατοπίσεις και οι τάσεις καθορίζονται. Παρακάτω θα αναλυθεί η στατική επαφή κατά Hertz για σφαιρικά σώματα.

Η ανάλυση θεωρεί δύο σημεία  $M$  και  $N$  από τις δύο σε επαφή σφαιρικές επιφάνειες 1 και 2, να επικαλύπτονται καθώς γίνονται μέρος της κοινής περιοχής επαφής. Το άθροισμα των ελαστικών μετατοπίσεων  $w_1$  και  $w_2$  σχετίζεται με τον αρχικό κάθετο διαχωρισμό  $(z_1 + z_2)$  των σημείων  $M, N$  και την «ελαστική προσέγγιση  $\alpha$ . Η ελαστική προσέγγιση είναι σταθερή για ζευγάρια σημείων που κείτονται στο εσωτερικό των σωμάτων καθώς η μεγαλύτερη παραμόρφωση συμβαίνει στην κοντινή περιοχή του αρχικού σημείου επαφής. Τα παραπάνω γίνονται περισσότερο κατανοητά με τη βοήθεια του Σχήμα 7.6.



**Σχήμα 7.6: Ελαστική Επαφή Σφαιρών (Πηγή : P.A. Engel - *Impact wear of materials* 1976)**

Από τη γεωμετρία έχουμε ότι :

$$w_1 + w_2 = \alpha - (z_1 + z_2) \quad (7-36)$$

όπου :  $[w_{1,2} = \eta$  ελαστική μετατόπιση των σωμάτων 1 και 2 αντίστοιχα (SI),  $\alpha = \eta$  ελαστική προσέγγιση των σωμάτων (SI),  $z_{1,2} = \alpha$  αρχικός κάθετος διαχωρισμός των σημείων που θεωρήθηκαν πάνω στα σώματα 1 και 2 (SI)]



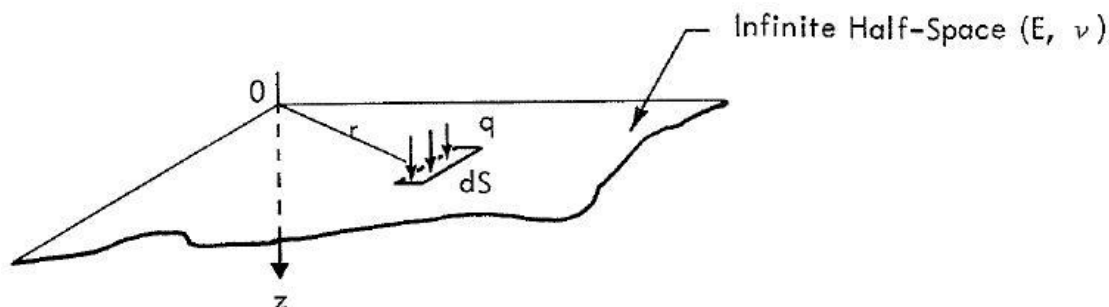
Ο σύνδεσμος μεταξύ των πιέσεων  $q(r)$  και των παραμορφώσεων  $w(r)$  είναι η «συνάρτηση επιρροής» (*Boussinesq solution*) μεταξύ της κάθετης σημειακής δύναμης  $P$  που εφαρμόζεται στην κορυφή ενός άπειρου ημιεπιπέδου και της μετατόπισης που αυτή προκαλεί σε μία απόσταση  $r$  από το σημείο εφαρμογής της. Αυτός ο συσχετισμός δίνεται από την εξίσωση (7-37) :

$$w(r) = \frac{1-\nu^2}{\pi \cdot E} \cdot \frac{P}{r} \quad (7-37)$$

όπου : [ $w$  = η παραμόρφωση του εκάστοτε σώματος (SI),  $\nu$  = ο λόγος Poisson για το υλικό του εκάστοτε σώματος (-),  $E$  = το μέτρο ελαστικότητας για το υλικό του εκάστοτε σώματος (-),  $P$  = η κάθετη σημειακή δύναμη επαφής (SI),  $r$  = η απόσταση από το σημείο εφαρμογής της σημειακής δύναμης επαφής (SI)]

Στο σημείο 0 στο Σχήμα 7.7 η μετατόπιση που οφείλεται από τη στοιχειώδη δύναμη πίεσης  $q \cdot dS$  σε απόσταση  $r$  θα είναι :

$$w(0) = \frac{1-\nu^2}{\pi \cdot E} \cdot \frac{q(0) \cdot dS(0)}{r} \quad (7-38)$$



Σχήμα 7.7: Στοιχειώδης πίεση εφαρμοζόμενη σε ημιεπίπεδο (Πηγή : P.A. Engel - *Impact wear of materials* 1976)

Από τις εξισώσεις (7-36) και (7-38) προκύπτει η ποσότητα  $q(r)$  για την επαφή δύο σφαιρικών σωμάτων από το ολοκλήρωμα της επόμενης σχέσης :

$$\left( \frac{1-\nu_1^2}{\pi \cdot E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{\pi \cdot E_2} \right) \cdot \iint_s \frac{q(\vec{r}')}{|\vec{r}' - \vec{r}|} dS = a - r^2 \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (7-39)$$

όπου : [ $R_{1,2}$  = οι ακτίνες των σωμάτων 1 και 2 αντίστοιχα (SI)]

Για την επίλυση έγινε η υπόθεση ότι οποιεσδήποτε σφαιρικές επιφάνειες  $z_{1,2}$  προσεγγίζονται από παραβολή με εξίσωση :

$$z_{1,2} \approx \frac{1}{2 \cdot R_{1,2}} \cdot r^2 \quad (7-40)$$

Στην εξίσωση (7-39) ο όρος εντός της παρένθεσης στο αριστερό μέλος αποτελεί μία σταθερά και ονομάζεται σταθερά υλικού της επαφής :

$$E = \left( \frac{1 - \nu_1^2}{\pi \cdot E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{\pi \cdot E_2} \right) \quad (7-41)$$

Στο δεξί μέλος της εξίσωσης εντοπίζεται και ένας δεύτερος σταθερός όρος που είναι μία γεωμετρική σταθερά και γεωμετρική σταθερά της επαφής :

$$\beta = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (7-42)$$

Η λύση της εξίσωσης για σταθερή ακτίνα επαφής  $a$  δίνει την κατανομή της πίεσης που είναι η :

$$q(r) = q_{\max} \cdot \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} \quad (7-43)$$

όπου : [ $a$  = η ακτίνα επαφής δηλαδή η ακτίνα του κύκλου που σχηματίζει η κοινή επιφάνεια επαφής των σωμάτων (SI)]

Μπορούν να οριστούν τέσσερις διακριτές μεταβλητές της κρούσης καθώς κάθε μία από αυτές είναι ικανή να περιγράψει τη λύση της σφαιρικής κρούσης. Οι τέσσερις αυτές «ποσότητες επαφής» συνδέονται αναμεταξύ τους και μία από αυτές είναι ικανή να προσδιορίσει τις άλλες τρεις. Οι μεταβλητές αυτές είναι : η δύναμη επαφής  $P$ , η ελαστική προσέγγιση  $\alpha$ , η ακτίνα επαφής  $a$  και η μέγιστη πίεση  $q_{\max}$ .

Ο Πίνακας 7.8 δίνει συνοπτικά τις σχέσεις συσχετισμού των μεταβλητών επαφής.

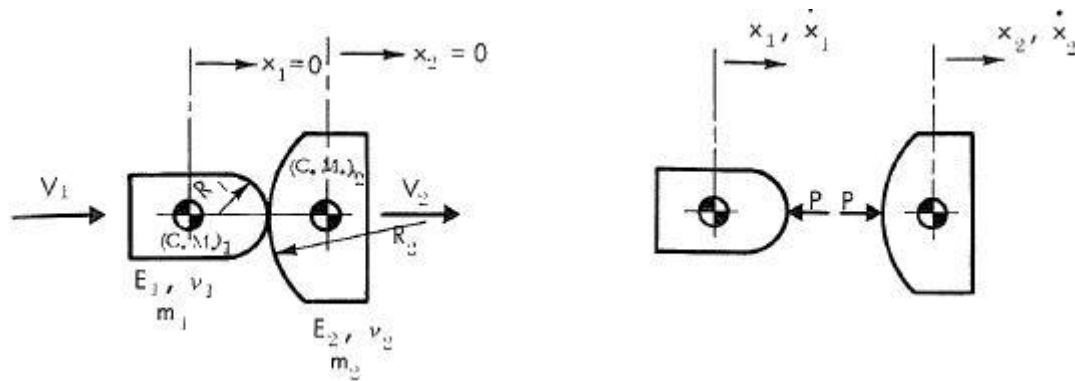
<p style="text-align: center;"><math>P = \text{Known}</math></p> $\alpha = \left( \frac{9\pi^2 \cdot \beta}{8E_r^2} \right)^{1/3} \cdot P^{2/3}$ $a = \left( \frac{3\pi \cdot \beta}{8\beta \cdot E_r} \right)^{1/3} \cdot P^{1/3}$ $q_{\max} = \frac{6}{\pi} \left( \frac{\beta \cdot E_r}{3\pi} \right)^{2/3} \cdot P^{1/3}$	<p style="text-align: center;"><math>\alpha = \text{Known}</math></p> $P = \sqrt{\frac{8}{\beta}} \cdot \frac{E_r}{3\pi} \cdot \alpha^{3/2}$ $a = \frac{1}{\sqrt{2\beta}} \cdot \alpha^{1/2}$ $q_{\max} = \frac{\sqrt{2\beta} \cdot E_r}{\pi^2} \cdot \alpha^{1/2}$
<p style="text-align: center;"><math>a = \text{Known}</math></p> $P = \frac{8\beta \cdot E_r}{3\pi} \cdot a^3$ $\alpha = 2\beta \cdot a^{2/3}$ $q_{\max} = \frac{4\beta \cdot E_r}{\pi^2} \cdot a$	<p style="text-align: center;"><math>q_{\max} = \text{Known}</math></p> $P = \left( \frac{\pi}{6} \right)^3 \left( \frac{3\pi}{\beta \cdot E_r} \right)^2 \cdot q_{\max}^3$ $\alpha = \frac{\pi^4}{8\beta \cdot E_r^2} \cdot q_{\max}^3$ $a = \frac{\pi^2}{4\beta \cdot E_r} \cdot q_{\max}$

Πίνακας 7.8: Πίνακας συσχετισμού μεταβλητών επαφής (Πηγή : P.A. Engel – *Impact wear of materials* 1976)

**Δυναμική (Ημι στατική) επαφή σφαιρικών σωμάτων :**

Ο Hertz προχώρησε και στην επίλυση της δυναμικής επαφής συγκρουόμενων σφαιρικών σωμάτων. Αγνοώντας τις δονήσεις (κυμματοεπιρροές) συσχέτισε τις μεταβαλλόμενες δυνάμεις που αναπτύσσονται στην δυναμική κρούση με τις στατικές μετατοπίσεις που αυτές οι δυνάμεις θα προκαλούσαν αν εφαρμόζονταν σταδιακά και όχι ως δυνάμεις ώθησης. Με αυτό το συλλογισμό φυσικά η ανάλυση είναι ημι - στατική και έχει ικανοποιητικά αποτελέσματα μόνο όταν περιγράφει την κρούση σφαιρικών σωμάτων με περιόδους δόνησης πολύ μικρότερες από την περίοδο επαφής.

Για την περιγραφή της ημι - στατικής κρούσης χρησιμοποιούνται δύο μάζες με σφαιρικές προτομές που συγκρούονται με αρχικές ταχύτητες  $V_1$  και  $V_2$  με  $V_1 > V_2$  όπως στο Σχήμα 7.9.



Σχήμα 7.9: Δυναμική Κρούση Σωμάτων με σφαιρική γεωμετρία επαφής (Πηγή : P.A. Engel - *Impact wear of materials* 1976)

Αν τα κέντρα μάζας των σωμάτων  $CM_1$  και  $CM_2$  μετακινούνται κατά  $x_1(t)$  και  $x_2(t)$  αντίστοιχα τότε η ελαστική προσέγγιση θα είναι :

$$\alpha(t) = x_1(t) - x_2(t) \quad (7-44)$$

Από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα :

$$m_1 \cdot \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -m_2 \cdot \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -P(t) \quad (7-45)$$

όπου : [ $x_{1,2}$  = η μετατόπιση των σωμάτων 1 και 2 αντίστοιχα (SI),  $m_{1,2}$  = η μάζα των σωμάτων 1 και 2 αντίστοιχα (SI)]

Για σφαιρική επαφή από τους συσχετισμούς του Πίνακας 7.8 και για τον συσχετισμό της δύναμης επαφής με την ελαστική προσέγγιση προκύπτει ότι :

$$P = c \cdot \alpha^{3/2} \quad (7-46)$$

όπου

$$c = \sqrt{\frac{8}{\beta}} \cdot \frac{E}{3\pi} \quad (7-47)$$

Αν ορίσουμε και μία νέα σταθερά μαζών, τη σταθερά μάζας ως :

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \quad (7-48)$$

τότε η διαφορική (7-45) γίνεται :

$$m \cdot \ddot{\alpha} + c \cdot \alpha^{3/2} = 0 \quad (7-49)$$

με αρχικές συνθήκες :

$$t = 0, \alpha = 0, \dot{\alpha} = V_1 - V_2 \quad (7-50)$$

Η μέγιστη ελαστική προσέγγιση και ο χρόνος επαφής δίνονται από τη σχέση (7-49) και ως :

$$\alpha_{\max} = \left[ \frac{1.25 \cdot m \cdot (V_1 - V_2)^2}{c} \right]^{2/5} \quad (7-51)$$

$$t_{\text{imp}} = \frac{2.943 \cdot \alpha_{\max}}{V_1 - V_2} \quad (7-52)$$

Η μεταβολή της δύναμης δεν μπορεί να δοθεί σε κλειστή μορφή και προσεγγίζεται από μία εξίσωση της μορφής [50] :

$$P(t) \approx P_{\max} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{t_{\text{imp}}}\right) \quad (7-53)$$

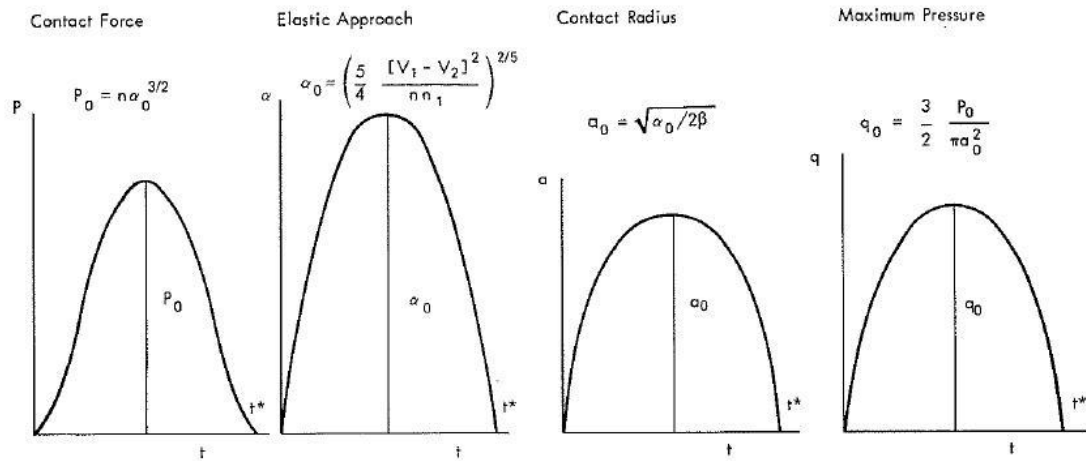
όπου

$$P_{\max} = c \cdot \alpha_{\max}^{3/2} \quad (7-54)$$

Μια άλλη καλή προσέγγιση είναι και η επόμενη [50] :

$$P(t) \approx \left( \frac{1.14 \cdot (V_1 - V_2)^2}{c \cdot \alpha_{\max}} \right) \cdot \sin\left( \frac{1.68 \cdot (V_1 - V_2) \cdot t}{\alpha_{\max}} \right) \quad (7-55)$$

Η ποιοτική μεταβολή των παραπάνω μεταβλητών στη δυναμική κρούση σφαιρικών σωμάτων απεικονίζεται στο **Σχήμα 7.10**.



Σχήμα 7.10: Ποιοτική μεταβολή ως προς τον χρόνο των μεταβλητών της δυναμικής κρούσης σφαιρικών σωμάτων (Πηγή : P.A. Engel - *Impact wear of materials* 1976)

## 7.2 Θραύση σωματιδίων πάγου

Στην περίπτωση που η ταχύτητα κρούσης είναι μεγάλη και το μέγεθος των τάσεων ξεπερνά τα όρια αντοχής του υλικού, τότε ο πάγος θα σπάσει και θα θρυμματιστεί. Είναι εξαιρετικά δύσκολο να προβλέψει κανείς με ακρίβεια το μέγεθος και την μετά την κρούση ταχύτητα των θραυσμάτων. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιούνται κυρίως συναρτήσεις κατανομών, στοχαστικές θεωρήσεις και πειραματικά δεδομένα για την πρόβλεψη των αποτελεσμάτων της θραύσης. Αν θέλουμε να υπολογίσουμε αναλυτικά τα όρια της θραύσης τότε χρειάζεται να επιλυθούν οι εξισώσεις μιας **Πλαστικής Θεωρίας Ανάλυσης**. Μία τέτοια θεωρία για να υλοποιηθεί χρειάζεται αυξημένη υπολογιστική δύναμη και ακριβή ορισμό των ιδιοτήτων της κρούσης. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιούνται κυρίως εμπειρικές εξισώσεις από πειραματικά δεδομένα ενώ μόνο τα τελευταία χρόνια η μελέτη άρχισε να γίνεται υπολογιστικά.

Πριν την ανάπτυξη οποιασδήποτε θεωρίας θραύσης πρέπει να προσδιοριστεί πρώτα το κριτήριο της κρίσιμης ταχύτητας θραύσης. Το κριτήριο αυτό θα ορίσει την τιμή εκείνης της ταχύτητας για κάθε διαφορετική γεωμετρία και κάθε διαφορετικές ιδιότητες υλικών που θα οδηγήσει στη θραύση. Αυτό μπορεί να γίνει βάσει πειραματικών δεδομένων ή επιλύοντας τις εξισώσεις ελαστοπλαστικής ανάλυσης υπολογιστικά. Στην παρούσα παράγραφο θα μελετηθεί ο προσεγγιστικός τρόπος μελέτης της θραύσης βάσει πειραματικών δεδομένων.

Η εταιρεία Pratt & Whitney [18] έκανε μελέτες πάνω στο θέμα της θραύσης σφαιρικών σωματιδίων πάγου και κατέληξε σε μία έκφραση για την κρίσιμη ταχύτητα θραύσης της μορφής :

$$V_c^2 \cdot D_0 = 18.23 \quad (7-56)$$

όπου : [ $V_c$  = η κάθετη στο επίπεδο της κρούσης συνιστώσα της ταχύτητας ( $m \cdot s^{-1}$ ),  $D_0$  = η κρίσιμη διάμετρος που για κάθε δεδομένη ταχύτητα οδηγεί στη θραύση(*inches*) ]

Η εξίσωση αυτή εξάχθηκε από πειράματα που έκαναν οι ερευνητές της εταιρείας αφήνοντας σφαιρικά σωματίδια πάγου διαμέτρου από 0.5 *inches* μέχρι 2.0 *inches* να πέσουν ελεύθερα από καθορισμένα ύψη.

Επειδή πρόκειται για εμπορική έρευνα δεν δημοσιεύθηκαν λεπτομέρειες σχετικά με τη μεθοδολογία του πειράματος. Για το λόγο αυτό δεν εμφανίζεται και στην εξίσωση εξάρτηση της ταχύτητας θραύσης από τις μηχανικές ιδιότητες του υλικού αλλά μόνο από τη γεωμετρία. Αναφέρεται μόνο η παραδοχή της θεώρησης πως η θραύση προκύπτει από την ενέργεια που απελευθερώνεται και η ενέργεια αυτή, ως ανάλογη της ενέργειας διάσπασης των δεσμών είναι ανάλογη της επιφανειακής τομής του σώματος.

Ένα άλλο κριτήριο θραύσης δίνεται από την αναφορά [48]. Στην αναφορά αυτή το κριτήριο εξάγεται συγκρίνοντας την κινητική ενέργεια του σωματιδίου με την επιφανειακή ενέργεια.

Ο λόγος της κινητικής ενέργειας ως προς την επιφανειακή ενέργεια για την περίπτωση σφαίρας γράφεται ως :

$$L = \frac{E_k}{E_\sigma} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\pi}{6} \cdot \rho \cdot D^3 \right) \cdot U^2}{\pi \cdot \sigma \cdot D^2} = \frac{\rho \cdot D \cdot U^2}{12\sigma} \quad (7-57)$$

όπου : [ $\rho$  = η πυκνότητα του σώματος (SI),  $D$  = η διάμετρος του σώματος (SI),  $U$  = η κάθετη στην επιφάνεια σχετική ταχύτητα κρούσης (SI),  $\sigma$  = η επιφανειακή τάση του σωματιδίου (SI) ]

Σύμφωνα με την αναφορά [48] το κριτήριο θραύσης για κρούση σταγόνων νερού αλλά και σωματιδίων πάγου βρίσκεται για αριθμό  $L=7$ . Η αναφορά αυτή αναφέρεται για σωματίδια παγοκρυστάλλων, κατά παραδοχή σφαιρικά, και με διάμετρο από 5  $\mu m$  μέχρι 1  $mm$ .

Αφού προσδιοριστεί το κριτήριο για τη θραύση των σωμάτων επόμενο βήμα είναι ο υπολογισμός των αποτελεσμάτων της θραύσης.

Μετά την κρούση τα θραύσματα σύμφωνα με πειράματα ερευνητών (Loughborough University 1994) [9] μοιάζουν με νιφάδες πάγου σε ακανόνιστο μέγεθος. Μπορούν να προσεγγιστούν όμως ως σχεδόν κυλινδρικά σωματίδια με μία ισοδύναμη διάμετρο  $d$  και ένα ισοδύναμο ύψος  $\delta$ .

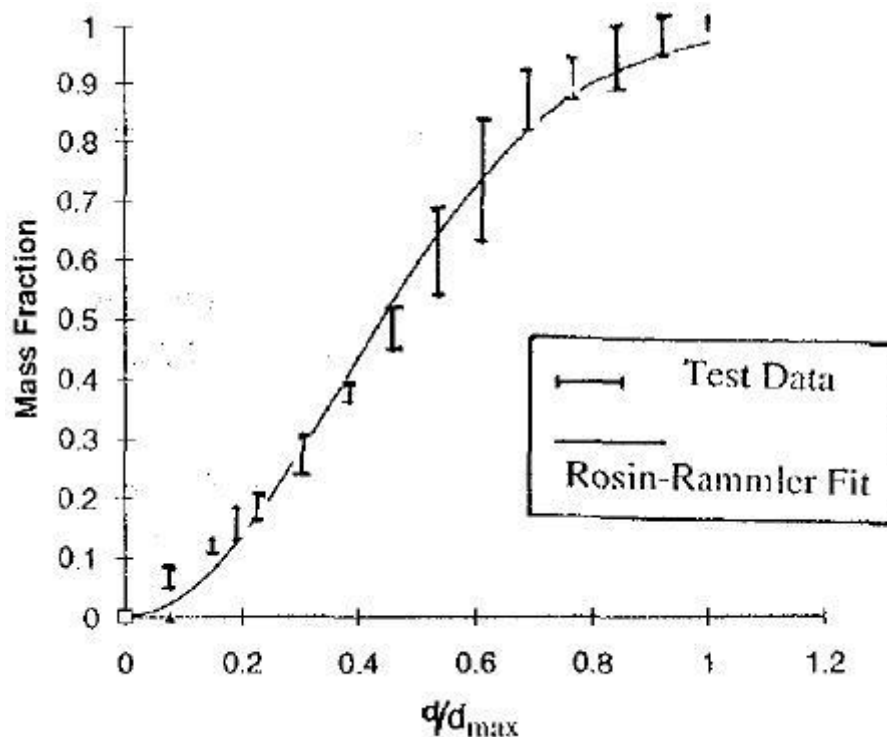
Ανάμεσα στα δύο μεγέθη  $d$  και  $\delta$  από την αρχή της συνέχειας αποδεικνύεται ότι ισχύει η επόμενη σχέση [9]:

$$k_s = \frac{\delta}{d} = 0.65 = \text{const} \quad (7-58)$$

όπου : [ $k_s$  = ο σταθερός λόγος (-),  $\delta$  = το ισοδύναμο ύψος (SI),  $d$  = η ισοδύναμη διάμετρος (SI)]

Σε ότι αφορά το μετά την κρούση μέγεθος των θραυσμάτων δεν μπορεί να υπάρξει αναλυτική έκφραση και οι νέες διαστάσεις των θραυσμάτων υπολογίζονται σε ένα επίπεδο πιθανότητας με κατανομές διαμέτρων και ταχυτήτων. Πιο συγκεκριμένα ο στατιστικός συσχετισμός από τα δεδομένα των διαφόρων πειραμάτων λίγο πολύ οδηγεί σε κατανομές τύπου **Rosin - Rammler**.

Η μορφή μίας κατανομής Rosin - Rammler είναι όπως στο **Διάγραμμα 7.11**.



**Διάγραμμα 7.11: Μορφή κατανομής Rosin - Rammler (Πηγή : Pan & Render - Experimental Studies Into The Hail Ingestion Characteristics Of Turbofan Engines 1994)**

Η κατανομή Rosin - Rammler περιγράφεται από μία εξίσωση της μορφής :

$$v = 1 - \exp\left(-\left(\frac{D}{X}\right)^N\right) \quad (7-59)$$

Αδιαστατοποιώντας τις διαμέτρους ως  $b = d / d_{\max}$  η σχέση (7-59) μπορεί να γραφτεί και ως :



$$v = 1 - \exp\left(-\left(\frac{b}{\bar{X}}\right)^N\right) \quad (7-60)$$

Οι παράγοντες  $\bar{X}$  και  $N$  εξαρτώνται από την ταχύτητα και τη γωνία κρούσης και ο συσχετισμός μεταξύ των πειραματικών δεδομένων δίνει τις παρακάτω εκφράσεις για την εύρεση τους [18] :

$$D_{\max} = 1.2647 \cdot D_0 + 0.16001 \cdot D_0 \cdot \ln\left(\frac{1}{V_N}\right) - 0.0796 \cdot D_0 \cdot (D_0 - 1) \quad (7-61)$$

$$\bar{X} = -0.19422 \cdot D_0 + 1.05 \cdot D_{\max} \quad (7-62)$$

$$N = 0.40729 \cdot \exp\left(\frac{2.326 \cdot \bar{X}}{D_{\max}}\right) \quad (7-63)$$

Με γνωστούς τους συντελεστές  $N$  και  $\bar{X}$  της κατανομής Rosin - Rammner κατασκευάζεται ένα διάγραμμα όπου στον άξονα  $x$  εμφανίζονται οι διαφορετικές ομάδες (οικογένειες διαμέτρων) και στον άξονα  $y$  εμφανίζεται το ποσοστό επί της συνολικής μάζας που τους αναλογεί. Η κάθε οικογένεια χαρακτηρίζεται από μία ελάχιστη και μία μέγιστη διάμετρο (που αντιστοιχούν και στα όρια του εύρους της) ενώ το ποσοστό επί του συνόλου της μάζας των θραυσμάτων (που είναι και ίσο με την αρχική μάζα προ θραύσης) βρίσκεται αφαιρώντας από την τιμή που αντιστοιχεί στο άνω όριο του εύρους την τιμή που αντιστοιχεί στο κάτω όριο.

Έτσι για παράδειγμα στην ομάδα με εύρος διαμέτρων  $(A, B]$ , (ή την οποιαδήποτε άλλη ομάδα με οποιοδήποτε εύρος), η μάζα που κατέχει σαν σύνολο η οικογένεια επί του συνόλου της μάζας είναι :

$$M_{(A,B]} \% = v_A - v_B \quad (7-64)$$

όπου :  $[M_{(A,B]} \% =$  το ποσοστό επί του συνόλου των θραυσμάτων που αντιπροσωπεύουν τα σωματίδια με διάμετρο από  $D_A$  μέχρι  $D_B$  (-),  $v_A =$  η τιμή της κατανομής για διάμετρο  $D_A$  (-),  $v_B =$  η τιμή της κατανομής για διάμετρο  $D_B$  (-)]

Η αρχική μάζα του σώματος πριν τη θραύση έστω ότι είναι  $M_{tot}$ . Η μάζα του συνόλου των θραυσμάτων κάθε οικογένειας προκύπτει από τις εξισώσεις (7-59) και (7-64) ως :

$$M_{(A,B)} = \left[ \left( 1 - \exp \left( - \left( \frac{D_B}{\bar{X}} \right)^N \right) \right) - \left( 1 - \exp \left( - \left( \frac{D_A}{\bar{X}} \right)^N \right) \right) \right] \cdot M_{tot} \quad (7-65)$$

Μπορεί να θεωρηθεί ότι κάθε οικογένεια έχει ίδια διάμετρο ίση με τη μέση διάμετρο της οικογένειας δηλαδή :

$$D_{mean(A,B)} = \frac{D_A + D_B}{2} \quad (7-66)$$

όπου :  $[D_{mean(A,B)} = \eta \text{ μέση διάμετρος των θραυσμάτων που αντιπροσωπεύουν τα σωματίδια με διάμετρο από } D_A \text{ μέχρι } D_B \text{ (SI)}]$

Η μάζα του σφαιρικού σωματιδίου με τη μέση διάμετρο της οικογένειας θα είναι :

$$M_{mean(A,B)} = \frac{4}{3} \cdot \rho_i \cdot \pi \cdot \left( \frac{D_A + D_B}{4} \right)^2 \quad (7-67)$$

Ο αριθμός των σωματιδίων που βρίσκονται να έχουν τη μέση διάμετρο κάθε εύρους είναι :

$$N_{mean(A,B)} = \frac{\left[ \left( 1 - \exp \left( - \left( \frac{D_B}{\bar{X}} \right)^N \right) \right) - \left( 1 - \exp \left( - \left( \frac{D_A}{\bar{X}} \right)^N \right) \right) \right] \cdot M_{tot}}{M_{mean(A,B)}} \quad (7-68)$$

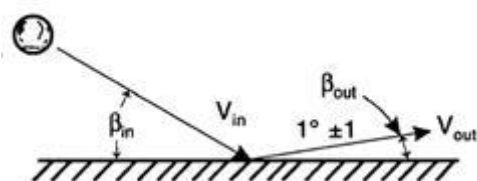
όπου :  $[N_{mean(A,B)} = \text{ο αριθμός των θραυσμάτων με διάμετρο από } D_A \text{ μέχρι } D_B \text{ (SI)}]$

Πέρα από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των θραυσμάτων πάγου στην κρούση υπολογίζονται και οι ταχύτητες που αυτά θα διατηρούν. Αποδεικνύεται από τις αναφορές [9] και [18] ότι μετά την κρούση τα θραύσματα χάνουν σχεδόν όλη την κάθετη στο επίπεδο ταχύτητα και διατηρούν μόνο την παράλληλη συνιστώσα. Σε ότι αφορά τις ταχύτητες μετά την κρούση από τα πειράματα που αναφέρονται στις αναφορές [9] και [18] με χρήση κάμερας υψηλών προδιαγραφών διατυπώνεται ο εξής μηχανισμός διασποράς των θραυσμάτων :

*«Αμέσως μετά την κρούση ένα νέφος απειροστά μικρών σωματιδίων σχηματίζεται και το νέφος αυτό κινείται ταχύτατα κατά μήκος του επιπέδου κρούσης. Η αρχική ταχύτητα του νέφους των μικρών σωματιδίων είναι μεγαλύτερη από την απόλυτη τιμή της ταχύτητας προσέγγισης και αυτό υποδηλώνει την απελευθέρωση ενέργειας από την κρούση. Πολύ σύντομα όμως η ταχύτητα αυτή*

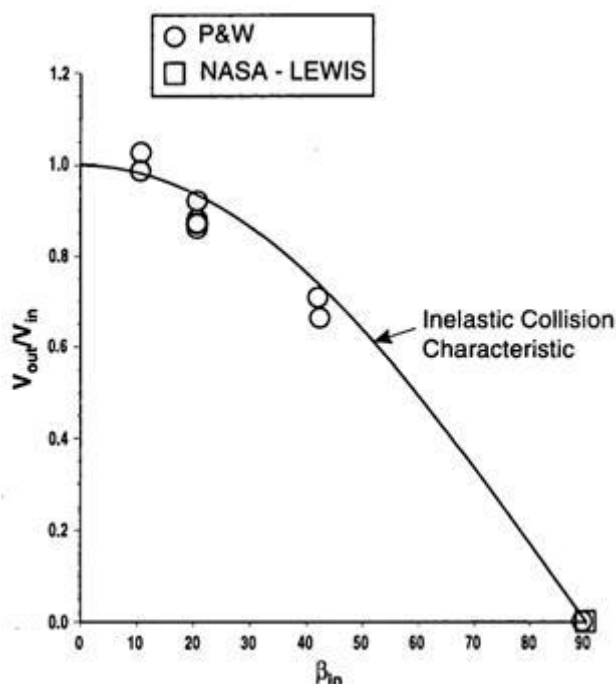
μειώνεται και σταθεροποιείται σε μία τιμή σχεδόν μισή της αρχικής. Όταν το νέφος εξαφανίζεται εμφανίζονται και τα μεγαλύτερα σωματίδια που λόγω του νέφους δεν ήταν ορατά πιο πριν. Αυτά γενικά διατηρούν ταχύτητες μικρότερες από την αρχική ταχύτητα προσέγγισης».

Τα πειράματα δείχνουν πως η κρούση είναι απόλυτα πλαστική και η γωνία αναπήδησης των θραυσμάτων δεν ξεπερνά τις 2 μοίρες για την αναφορά [18] και τις 7 μοίρες για την αναφορά [9].



Σχήμα 7.12: Γωνία των θραυσμάτων μετά την κρούση (Πηγή : AGARD “Recommended Practices For The Assessment Of The Effects Of Atmospheric Water Ingestion On The Performance And Operability Of Gas Turbine Engines” 1995)

Από την αναφορά [18] δίνεται από το Διάγραμμα 7.13 η ταχύτητα των μεγαλύτερων θραυσμάτων μετά την κρούση.



Διάγραμμα 7.13: Ταχύτητα των μεγαλύτερων θραυσμάτων μετά την κρούση (Πηγή : AGARD “Recommended Practices For The Assessment Of The Effects Of Atmospheric Water Ingestion On The Performance And Operability Of Gas Turbine Engines” 1995)

Ψηφιοποιώντας το **Διάγραμμα 7.13** προκύπτει η σχέση :

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = (7 \cdot 10^{-7}) \cdot \beta_{in}^3 - (0.0002) \cdot \beta_{in}^2 + (0.0009) \cdot \beta_{in} + 0.9954 \quad (7-69)$$

όπου :  $\left[ \frac{V_{out}}{V_{in}} = \text{ο λόγος του μέτρου της ταχύτητας των μεγαλύτερων θραυσμάτων} \right]$

μετά την κρούση που ονομάζεται και ταχύτητα διατήρησης προς το μέτρο της ταχύτητας του σωματιδίου πριν την κρούση (-),  $\beta_{in}$  = η γωνία του διανύσματος της ταχύτητας του σωματιδίου πριν την κρούση με το επίπεδο της κρούσης (°)]

Τα θραύσματα μετά την κρούση κινούνται ακτινικά πάνω σε ένα εικονικό κυκλικό δίσκο που το κέντρο του κινείται μαζί με το κέντρο μάζας των θραυσμάτων. Η ακτινική κίνηση των θραυσμάτων πάνω στον εικονικό δίσκο μπορεί να υπολογιστεί με βάση την αρχή της συνέχειας. Η θεώρηση αυτή είναι ικανοποιητική για την περιγραφή της θραύσης πλην των πολύ αρχικών σταδίων του φαινομένου. Στα αρχικά στάδια η γεωμετρία της σφαίρας δίνει επιπλέον ώθηση στα θραύσματα που κινούνται έτσι ταχύτερα. Η ταχύτητα των θραυσμάτων ενισχύεται από την πίεση που ασκεί το υπόλοιπο σώμα προσεγγίζοντας το σημείο της θραύσης προσθέτοντας έτσι ένα επιπλέον όρο ταχύτητας επηρεαζόμενο από τη γεωμετρία του σώματος και τη φάση εξέλιξης της θραύσης.

Συσχετίζοντας τα πειραματικά δεδομένα και τις θεωρητικές εξισώσεις των προαναφερθέντων μοντέλων η ταχύτητα εκτόνωσης των θραυσμάτων προκύπτει ως :

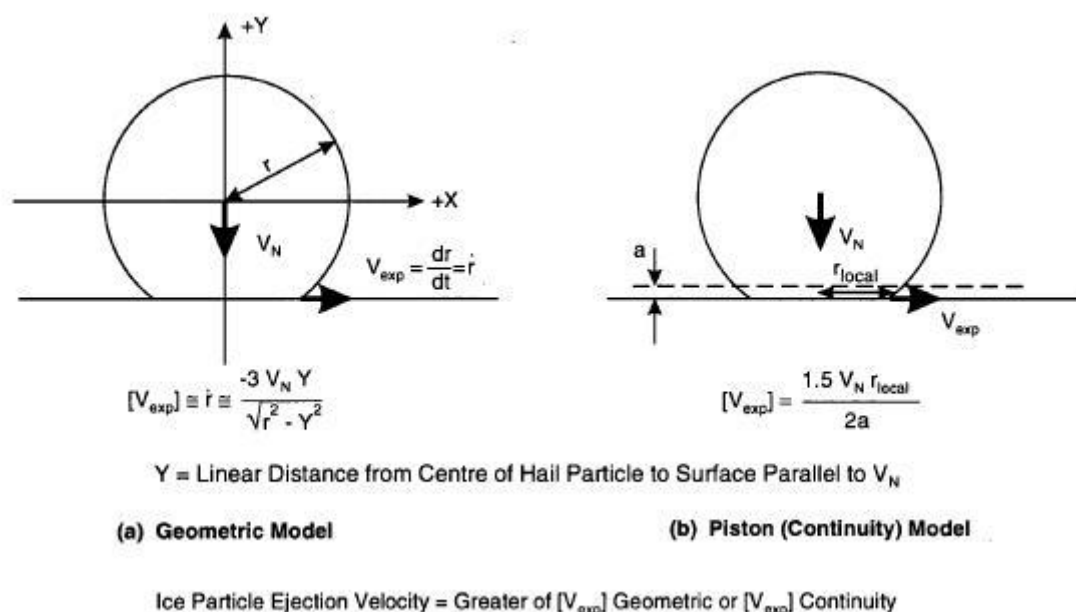
$$V_{exp} = \frac{dr}{dt} = \left[ \frac{-3 \cdot V_N \cdot Y}{\sqrt{r^2 - Y^2}} \right] \quad (7-70)$$

ή

$$V_{exp} = \left[ \frac{-3 \cdot V_N \cdot r_{local}}{2 \cdot \alpha} \right] \quad (7-71)$$

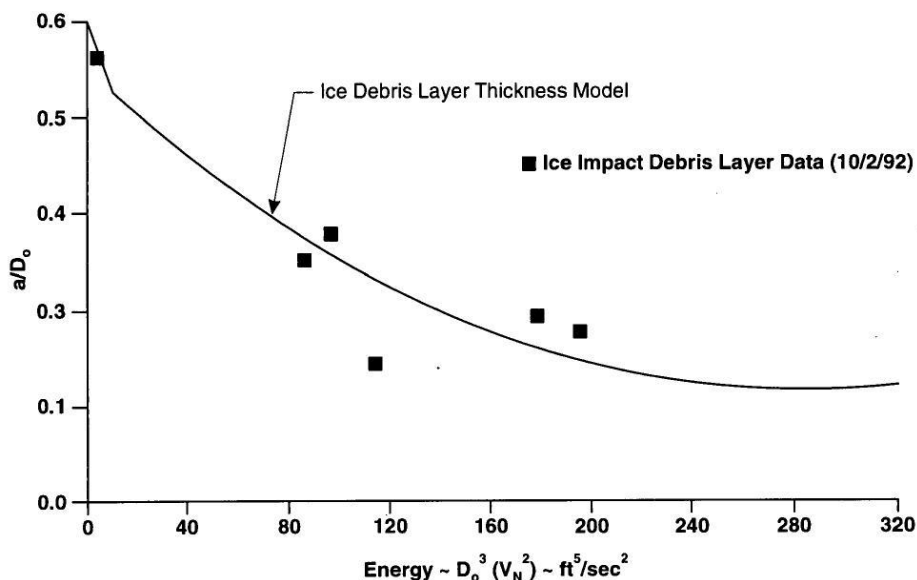
όπου :  $[V_{exp} = \text{η ταχύτητα εκτόνωσης των θραυσμάτων (SI), } Y = \text{η απόσταση του κέντρου του σφαιρικού σώματος από την επιφάνεια κάθε στιγμή (SI), } r_{local} = \text{η ακτίνα της επιφάνειας του σώματος που βρίσκεται σε επαφή με την επιφάνεια κάθε στιγμή (SI), } \alpha = \text{το πάχος του διαχεόμενου στρώματος θραυσμάτων (SI)]$

Από τις σχέσεις (7-70) και (7-71) επιλέγεται ως σωστή όποια παίρνει την μεγαλύτερη τιμή. Το γεωμετρικό μοντέλο και το μοντέλο συνέχειας απεικονίζονται σχηματικά στο **Σχήμα 7.14**.



Σχήμα 7.14: Μοντέλο συνέχειας και Γεωμετρικό Μοντέλο κίνησης θραυσμάτων πάγου (Πηγή : AGARD “Recommended Practices For The Assessment Of The Effects Of Atmospheric Water Ingestion On The Performance And Operability Of Gas Turbine Engines” 1995)

Το πάχος του διαχεόμενου στρώματος θραυσμάτων  $a$  δίνεται στην αναφορά [18] από το Διάγραμμα 7.15 :



Διάγραμμα 7.15 : Πάχος θραυσμάτων σύμφωνα με την αρχική ενέργεια κρούσης (Πηγή : AGARD “Recommended Practices For The Assessment Of The Effects Of Atmospheric Water Ingestion On The Performance And Operability Of Gas Turbine Engines” 1995)

Ψηφιοποιώντας το Διάγραμμα 7.15 προκύπτει η σχέση :

$$\frac{\alpha}{D_0} = (8 \cdot 10^{-11}) \cdot E^4 - (6 \cdot 10^{-8}) \cdot E^3 + (2 \cdot 10^{-5}) \cdot E^2 - (0.0042) \cdot E + 0.5736 \quad (7-72)$$

όπου : [  $E = \eta$  κινητική ενέργεια πρόσπτωσης (  $J$  ) ]

Με αναφορά το δίσκο που κινείται μαζί με το κέντρο μάζας των θραυσμάτων, τα θραύσματα διαχέονται προς τα έξω πάνω σε ένα γεωμετρικό τόπο που μοιάζει με κώνο. Η γεωμετρία του κώνου εξαρτάται από αρχική εφαπτομενική συνιστώσα της ταχύτητας και την μετέπειτα ακτινική ταχύτητα των θραυσμάτων. Η γωνία της τροχιάς των θραυσμάτων ως προς αυτό το σχετικό τόπο αναφοράς δίνεται με γεωμετρική ανάλυση (**Σχήμα 7.16**) ως :

$$\theta = \arctan \left[ \frac{\dot{r} \cdot \sin(\psi)}{V_P \cdot \gamma_R + \dot{r} \cdot \cos(\psi)} \right] \quad (7-73)$$

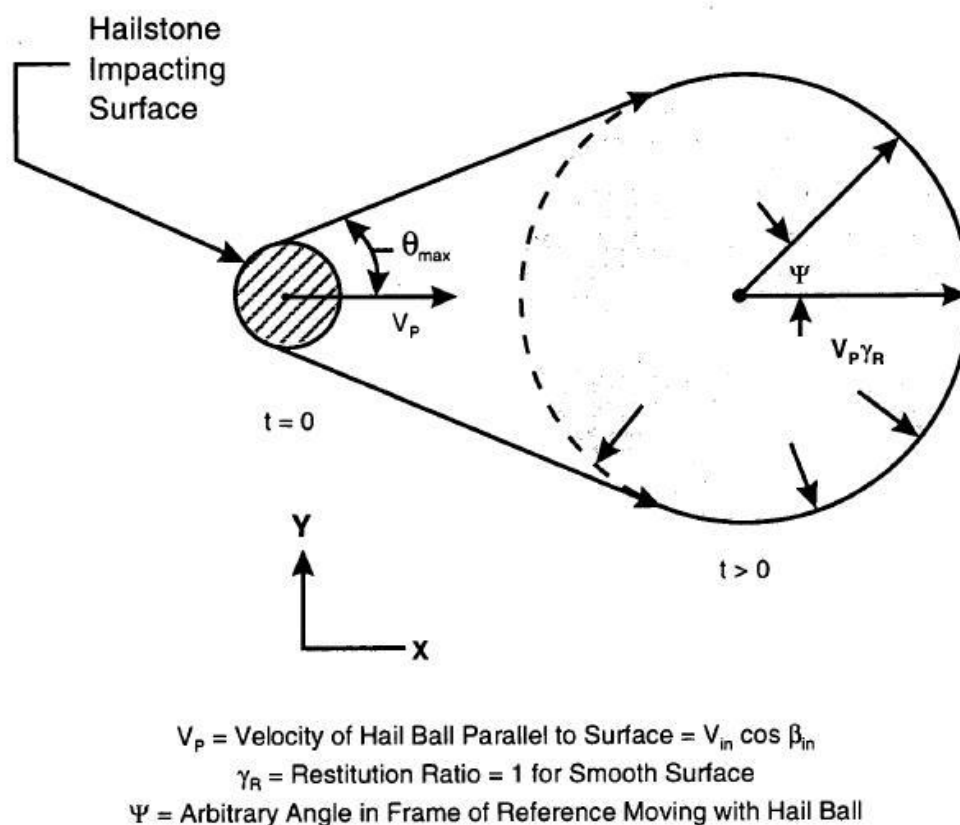
Η γωνία διασποράς ορίζεται ως η μέγιστη τιμή της σχέσης (7-73) και δίνεται από την εξίσωση :

$$\theta_{\max} = \arctan \left[ \frac{\dot{r} \cdot \sin \left( \cos^{-1} \left( -\frac{\dot{r}}{V_P \cdot \gamma_R} \right) \right)}{V_P \cdot \gamma_R - \frac{\dot{r}^2}{V_P \cdot \gamma_R}} \right] \quad (7-74)$$

Αν θεωρηθεί ότι η κατανομή της μάζας είναι ομοιόμορφη και συμμετρική τότε η μεταβολή του συνόλου της μάζας των θραυσμάτων ως προς τη γωνία  $\theta$  είναι :

$$\frac{dm}{d\theta} = \frac{\rho_i \cdot \alpha \cdot r^2 \cdot \pi}{360 \cdot D_0} \cdot \left( \frac{b^2 + 2b \cdot \cos(\psi)}{b \cdot \cos(\psi) + 1} \right) \quad (7-75)$$

Οι συντελεστές των πιο πάνω εξισώσεων δίνονται παραστατικά και στο **Σχήμα 7.16** :



Σχήμα 7.16: Διαδικασία εξάπλωσης των θραυσμάτων πάνω στην επιφάνεια κρούσης (Πηγή : AGARD "Recommended Practices For The Assessment Of The Effects Of Atmospheric Water Ingestion On The Performance And Operability Of Gas Turbine Engines" 1995)

### 7.3 Μηχανική Αλληλεπίδραση με τις Επιφάνειες της Μηχανής

Μελετήθηκε στις προηγούμενες παραγράφους η μηχανική αλληλεπίδραση των σωματιδίων πάγου που εισέρχονται στην αεροπορική μηχανή. Η περιγραφή έγινε έχοντας αναφορά μόνο το χαλάζι και όχι τις επιφάνειες με τις οποίες συγκρούεται. Ενδιέφερε δηλαδή η συμπεριφορά του χαλαζιού και όχι η μηχανική αλληλεπίδραση των επιφανειών.

Στην παρούσα παράγραφο δεν μελετάται πλέον το χαλάζι αλλά οι επιφάνειες και πιο συγκεκριμένα οι παραμορφώσεις που θα υποστούν. Για την μελέτη της επίδρασης της κρούσης του χαλαζιού στις επιφάνειες μπορούν να χρησιμοποιηθούν αναλυτικά μοντέλα όπως στην αναφορά [51], ή υπολογιστικά μοντέλα όπως στην αναφορά [52].

Η εύρεση αναλυτικών λύσεων είναι μία επώδυνη υπολογιστικά διαδικασία. Επίσης δεν είναι πάντα δεδομένο ότι υπάρχει μαθηματικό μοντέλο που να υποστηρίζει την εύρεση λύσης. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιούνται κατά κόρων σήμερα εμπορικά πακέτα ανάλυσης που επιλύουν την πλαστική συμπεριφορά

των υλικών υπολογιστικά (όπως το *LS DYNA* π.χ.). Με τον τρόπο αυτό χωροθετείται στον υπολογιστή ένα εικονικό πείραμα στο οποίο το σωματίδιο πάγου συγκρούεται με συγκεκριμένη ταχύτητα και συγκεκριμένα μηχανικά χαρακτηριστικά με ένα άλλο σώμα, το στοιχείο της μηχανής για παράδειγμα. Το πακέτο επίλυσης λαμβάνει ως δεδομένα τα στοιχεία της κρούσης, τις ιδιότητες των σωμάτων και υπολογίζει τις τελικές μηχανικές παραμορφώσεις που θα υποστούν τα σώματα. Αυτό το πετυχαίνει επιλύοντας υπολογιστικά τις εξισώσεις του προβλήματος που είτε είναι γνωστές από το πρόγραμμα είτε τις ορίζει ο χρήστης συμπληρωματικά. Επειδή ο πάγος θα θρυμματιστεί (*μιλάμε για απόλυτα πλαστική κρούση σε αυτήν την παράγραφο*), αυτό που ενδιαφέρει είναι οι παραμορφώσεις της επιφάνειας πάνω στην οποία θα θρυμματιστεί ο πάγος. Μετά το τέλος των υπολογισμών το μοντέλο καταλήγει σε μία ροή εξέλιξης της κρούσης στην οποία ανά πάσα στιγμή είναι με ικανοποιητική ακρίβεια γνώστες όλες οι παράμετροι που μελετώνται. Το κρίσιμο κομμάτι στην υλοποίησης μίας τέτοιας μεθόδου είναι ο επακριβής ορισμός των ιδιοτήτων των σωμάτων που συγκρούονται ιδιαίτερα όταν αυτές δεν είναι σταθερές αλλά διαφοροποιούνται κατά την εξέλιξη της κρούσης. Επίσης σημαντικό κομμάτι είναι και η επιλογή του κατάλληλου μοντέλου ανάλυσης αφού δεν υπάρχει μία και μόνο μεθοδολογία προσέγγισης.

Παρακάτω αναφέρονται ενδεικτικά τρία διαφορετικά υπολογιστικά μοντέλα που χρησιμοποιήθηκαν από την αναφορά [52] και γίνεται μία σύγκριση μεταξύ τους ώστε να εξαχθεί το καταλληλότερο προς χρήση.

Στην παρούσα έρευνα δεν γίνεται προσπάθεια για μία ανάλογη επίλυση και για το λόγο αυτό περιγράφονται απλά και χωρίς περισσότερη εμβάθυνση τα αποτελέσματα των αναφορών.

#### **A) Μοντέλο Πεπερασμένων Στοιχείων κατά Langrage :**

Η προσέγγιση με το μοντέλο **ΠΣ** κατά **Lagrange** είναι τυπική για προβλήματα συνέχειας στη μηχανική και η χρήση του συνίσταται όταν μελετώνται προβλήματα κρούσης. Η προσέγγιση με το μοντέλο αυτό είναι ιδιαίτερα αποδοτική όταν πρέπει να επιλυθούν μη γραμμικά προβλήματα. Παρά την ιδανικότητα του στα προβλήματα κρούσης έχει μία σημαντική αδυναμία. Αυτή έγκειται στο γεγονός ότι σταματά να αποδίδει όταν οι παραμορφώσεις των σωμάτων είναι πολύ μεγάλες. Η κατάσταση αυτή συμβαίνει και στην κρούση που αφορά τη συμπεριφορά του χαλαζιού εφόσον το χαλάζι καταλήγει σχεδόν πάντα θρυμματισμένο. Με την προσέγγιση Lagrange το πλέγμα πεπερασμένων στοιχείων «χτίζεται» πάνω στη μάζα των σωμάτων και επομένως όταν τα σώματα υφίστανται μεγάλες παραμορφώσεις, τις ίδιες παραμορφώσεις υφίσταται και το πλέγμα. Αυτό οδηγεί σε μεγάλη απώλεια ακρίβειας, σημαντική αύξηση του υπολογιστικού χρόνου και πολλές φορές απρόσμενη διακοπή της επίλυσης.



**B) Υβριδικό Μοντέλο κατά Lagrange και Euler :**

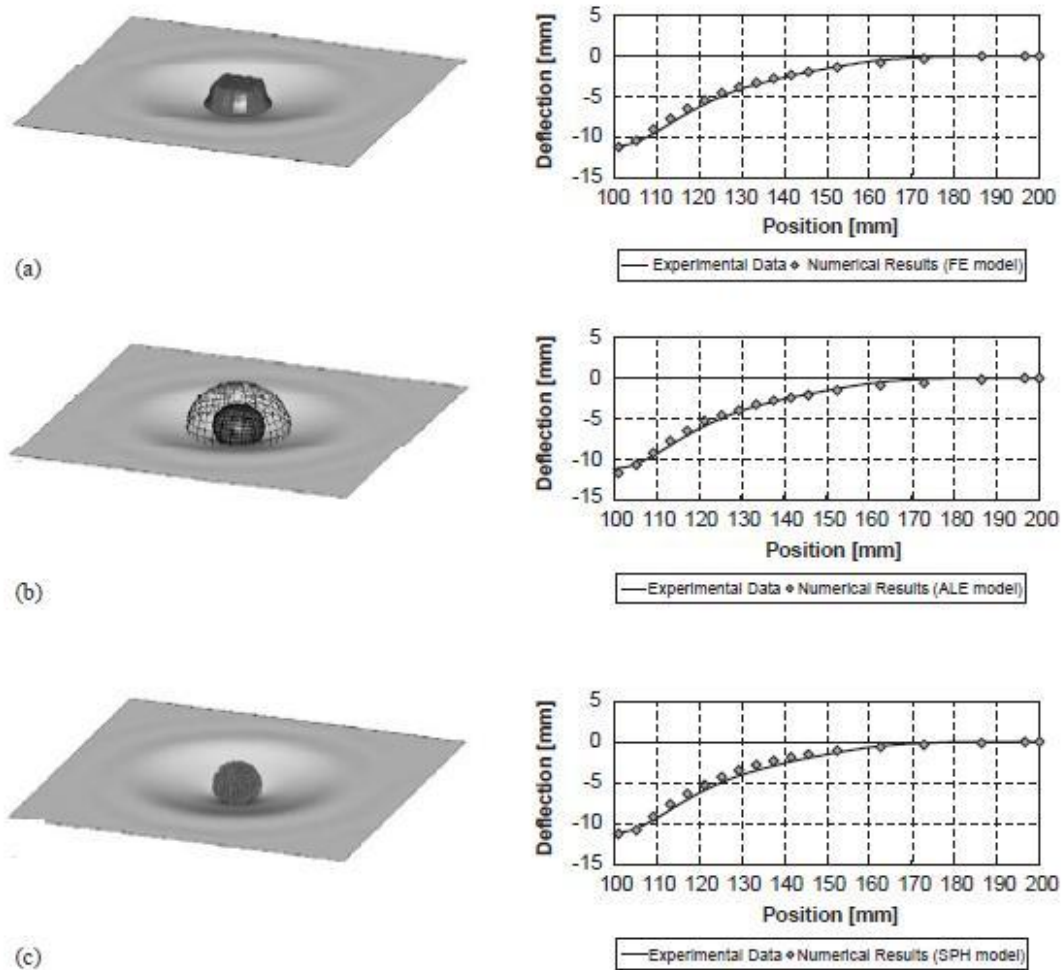
Το υβριδικό μοντέλο κατά Lagrange και Euler (*Arbitrary Lagrangian Eulerian*) αναπτύχθηκε για να κάνει συνδυασμό των πλεονεκτημάτων της προσέγγισης κατά Lagrange και κατά Euler. Η ανάλυση με το **ALE** διαφοροποιείται από το γεγονός ότι ένα πλέγμα Euler κινείται αυθαίρετα και ανεξάρτητα από την κίνηση της μάζας του υλικού. Κατά συνέπεια το υβριδικό πλέγμα έχει σημαντικό πλεονέκτημα όταν η κίνηση του σώματος καλύπτει μεγάλη περιοχή του χώρου. Στην περίπτωση του υβριδικού μοντέλου ο αριθμός των στοιχείων του πλέγματος πρέπει να είναι τόσο μεγάλος ώστε να επιτυγχάνεται η απαιτούμενη ακρίβεια. Πρέπει να αναφερθεί ακόμα ότι στο υβριδικό μοντέλο χρειάζεται να διακριτοποιηθεί όχι μόνο το χαλάζι αλλά και η εγγύς περιοχή γύρω από αυτό ώστε να αποφεύγεται η ροή υλικού έξω από το πλέγμα Euler.

**Γ) Μοντέλο λείων υδροδυναμικών σωματιδίων :**

Το μοντέλο λείων υδροδυναμικών σωματιδίων (*Smoothed Particle Hydrodynamics*) αναπτύχθηκε την δεκαετία του '90 για την μελέτη αστροφυσικών και κοσμολογικών φαινομένων. Αργότερα αναγνωρίστηκε η χρησιμότητα του σε προβλήματα υπολογιστικής ρευστομηχανικής και μηχανικής των υλικών. Η βασική διαφορά ανάμεσα στην μελέτη με πεπερασμένα στοιχεία (**FE Lagrange**) και στην μελέτη με λεία υδροδυναμικά σωματίδια (**SPH**) βρίσκεται στον τρόπο διακριτοποίησης του μέσου. Η μέθοδος SPH είναι μέθοδος χωρίς υπολογιστικό πλέγμα. Το πλέγμα αντικαθίσταται από σωματίδια που τους αποδίδεται συγκεκριμένη μάζα. Δεν υπάρχει άμεση σύνδεση των σωματιδίων που αποτελούν το σώμα και τα σωματίδια διατηρούν μία χωρική απόσταση μεταξύ τους που ονομάζεται «μήκος εξομάλυνσης». Σε αυτό το μήκος εξομάλυνσης οι ιδιότητες των σωματιδίων «εξομαλύνονται» με μία συνάρτηση εξομάλυνσης (*Kernel function*) που μπορεί να είναι τύπου Gauss ή Cubic Spline. Αυτό σημαίνει ότι η φυσική ποσότητα που μελετάται για κάθε ξεχωριστό σωματίδιο βρίσκεται από τις αντίστοιχες ποσότητες όλων των υπόλοιπων γειτονικών σωματιδίων που βρίσκονται στο εύρος της συνάρτησης Kernel. Η συνεισφορά κάθε σωματιδίου σε μία ιδιότητα ενός άλλου γειτονικού «ζυγίζεται» ανάλογα με την απόσταση και την πυκνότητα του.

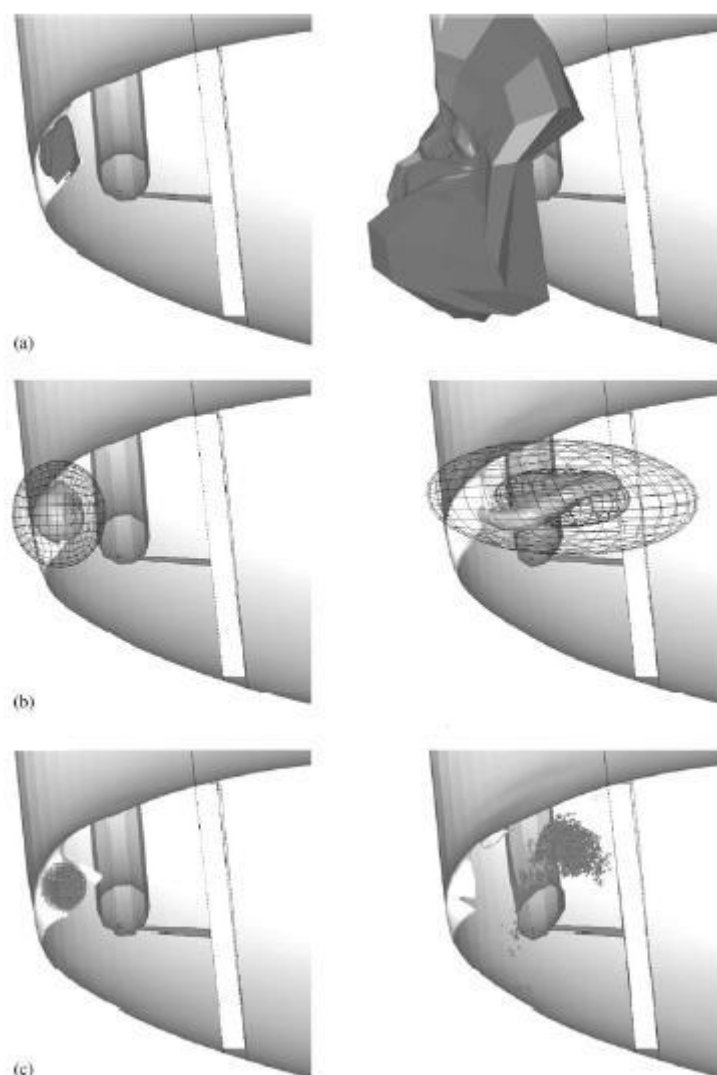
Στην αναφορά [52] χρησιμοποιήθηκαν και τα τρία προηγούμενα μοντέλα για την επίλυση της κρούσης σφαιρικών σωματιδίων πάγου με τη μετωπική επιφάνεια του περιβλήματος των αεροπορικών μηχανών.

Στην **Εικόνα 7.17** παρατίθενται τα αποτελέσματα της προσομοίωσης από τις τρεις μεθόδους για την απλή περίπτωση κρούσης με φύλλο αλουμινίου ( $d = 25.40mm, u = 192m/s$ ).



**Εικόνα 7.17:** Αποτέλεσμα επίλυσης της πλαστικής κρούσης χαλαζιού με φύλλο αλουμινίου και σύγκριση τους με πειραματικά αποτελέσματα για α) Μοντέλο ΠΕ Lagrange β) Μοντέλο Υβριδικό Lagrange - Euler γ) Μοντέλο SPH (Πηγή : M. Anghileri et al "A Survey Of Numerical Models For Hail Impact Analysis Using Explicit Finite Element Codes" 2004)

Ανάλογες προσομοιώσεις που έγιναν για την κρούση με το περίβλημα της μηχανής δίνονται στην **Εικόνα 7.18**. Στις προσομοιώσεις αυτές μελετάται περαιτέρω και η διείδυση της χαλαζόμπαλας μέσα στη μηχανή και η μετέπειτα κρούση με σωλήνα στο εσωτερικό του κινητήρα ( $d = 12.70mm, u = 185m/s$ ).



**Εικόνα 7.18: Αποτέλεσμα επίλυσης της πλαστικής κρούσης χαλαζιού με φύλλο αλουμινίου και στη συνέχεια με σωλήνα στο εσωτερικό της μηχανής για α) Μοντέλο ΠΕ Lagrange β) Μοντέλο Υβριδικό Lagrange – Euler γ) Μοντέλο SPH (Πηγή : M. Anghileri et al “A Survey Of Numerical Models For Hail Impact Analysis Using Explicit Finite Element Codes” 2004)**

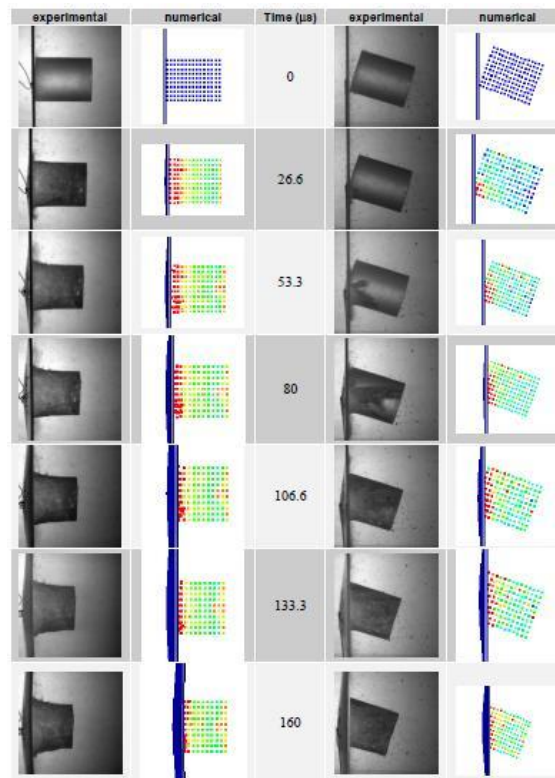
Από τις προσομοιώσεις της αναφοράς [52] είναι προφανές ότι η ανάλυση με το μοντέλο **SPH** δίνει τα βέλτιστα αποτελέσματα ενώ ο χρόνος υπολογισμού αναφέρεται ότι ήταν μακράν μικρότερος από τις άλλες δύο μεθόδους. Στην μοντελοποίηση με την μέθοδο SPH αναφέρεται ότι χρησιμοποιήθηκε το υλικό **MAT\_10 ELASTIC PLASTI HYDRO** από τη βιβλιοθήκη υλικών του εμπορικού προγράμματος LSTC LS DYNA. Το υλικό αυτό φαίνεται να προσεγγίζει καλύτερα τη μηχανική ιδιότητα του πάγου να παρουσιάζει μεγάλη ακαμψία στην αρχή της κρούσης ενώ προς το τέλος να συμπεριφέρεται σαν υγρό. Το μοντέλο υλικού χαρακτηρίζεται από ένα κριτήριο αστοχίας σχετικό με τον εφελκυσμό που ορίζει ότι όταν οι τάσεις φτάσουν στα όρια αντοχής του υλικού τότε οι αποκλίνουσες

τάσεις μηδενίζονται και το υλικό αντιστέκεται μόνο σε θλιπτικές τάσεις. Το χρησιμοποιούμενο μοντέλο υλικού απαιτεί και τον προσδιορισμό μίας εξίσωσης κατάστασης υλικού (*Equation Of State*) και ως προς αυτό χρησιμοποιήθηκε η πολυωνυμική εξίσωση κατάστασης του νερού.

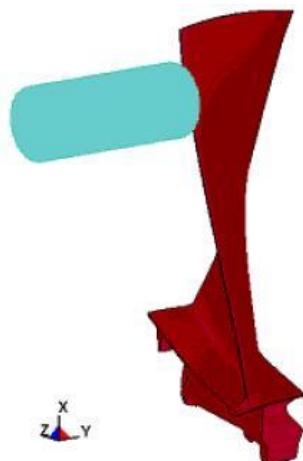
Ανάλογες έρευνες αναφέρονται και στην αναφορά [53].

Στην αναφορά [53] έγινε προσομοίωση της κρούσης κυλινδρικών τεμαχίων πάγου αρχικά με επίπεδη πλάκα και έπειτα με πτερύγια συμπίεστη. Για την πιστοποίηση του μοντέλου έγινε σύγκριση της κρούσης με επίπεδο πάνελ σε ταχύτητες ανάλογες των πειραματικών δεδομένων ( $120-405m/s$ ). Έπειτα έγινε προσομοίωση της κρούσης κυλινδρικού σωματιδίου βάρους  $150gr$  με πτερύγιο συμπίεστη στο ύψος 80% από τη βάση του πτερυγίου και με ταχύτητα  $304m/s$ .

Αποτελέσματα από τις προσομοιώσεις φαίνονται στις **Εικόνα 7.19**, **Εικόνα 7.20** και **Εικόνα 7.21**.



**Εικόνα 7.19:** Αποτέλεσμα επίλυσης της πλαστικής κρούσης κυλινδρικού σωματιδίου πάγου με επίπεδη πλάκα υπό γωνία 0 και 20 μοιρών (Πηγή : Y. Chuzel et al “Development Of Hail Material Model For High Speed Impacts On Aircraft Engine” 2010)



**Εικόνα 7.20: Προσομοίωση Κρούσης κυλινδρικού σωματιδίου πάγου με πτερύγιο συμπίεστη (Πηγή : Y. Chuzel et al “Development Of Hail Material Model For High Speed Impacts On Aircraft Engine” 2010)**



**Εικόνα 7.21: Αποτέλεσμα επίλυσης της πλαστικής κρούσης κυλινδρικού σωματιδίου πάγου με το πτερύγιο του συμπίεστη (Πηγή : Y. Chuzel et al “Development Of Hail Material Model For High Speed Impacts On Aircraft Engine” 2010)**

Για την έρευνα της αναφοράς [53] χρησιμοποιήθηκε και πάλι το εμπορικό πακέτο LS DYNA. Προκειμένου να μοντελοποιηθεί το υλικό του πάγου δεν

χρησιμοποιήθηκε κάποιο υλικό από τα προκαθορισμένα στις βιβλιοθήκες του προγράμματος αλλά δημιουργήθηκε ένα νέο (*User Defined Material*).

Από πειραματικές μελέτες των ερευνητών της αναφοράς [53] διαπιστώθηκε ότι η δύναμη με την οποία αντιστέκεται το υλικό στη θλίψη είναι στην αρχή ανάλογη της παραμόρφωσης αλλά από ένα σημείο και μετά μειώνεται απότομα. Αυτή η συμπεριφορά είναι ανάλογη με τη συμπεριφορά του τσιμέντου. Έτσι μοντελοποιήθηκε σύμφωνα με το νόμο του Μαζάρ (*Mazar 1984*) που μελέτησε το Μπετόν, αλλά με ορισμένες διαφοροποιήσεις. Οι διαφοροποιήσεις αυτές έγιναν για να ληφθεί υπόψιν η ιδιαίτερη συμπεριφορά του πάγου και η μεταβατική αντίδραση. Η βασική ιδέα στηρίζεται στην υπόθεση ότι η συμπεριφορά του υλικού οφείλεται στην δημιουργία οπών στις διατομές του υλικού κατά την παραμόρφωση. Τα υλικά με οπές στις διατομές (*ζημιωμένα υλικά*) μπορούν να προσομοιωθούν ως υλικά δίχως οπές αλλά με ένα μικρότερο μέτρο ελαστικότητας. Αυτό το νέο μέτρο ελαστικότητας θα είναι συνάρτηση της «ζημιάς»  $D$  και του μέτρου ελαστικότητας του υλικού δίχως «ζημιά».

#### 7.4 Μοντέλο Κρούσης - Θραύσης

Το επόμενο μοντέλο κρούσης - θραύσης προτείνεται από την παρούσα εργασία. Το μοντέλο αναφέρεται στην κρούση και θραύση σφαιρικών μόνο σωματιδίων πάγου και υπολογίζει τις μετά την κρούση ταχύτητες και κατανομές.

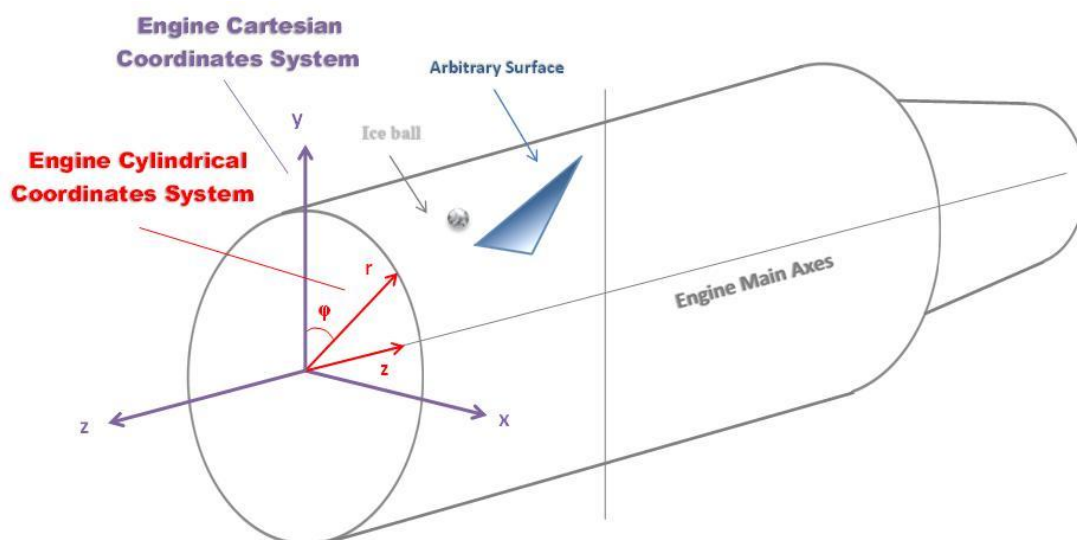
Στο μοντέλο θεωρούνται τρεις καταστάσεις εξέλιξης. Η πρώτη είναι η κατάσταση κρούσης ενός μικρού σφαιρικού σωματιδίου πάγου που συγκρούεται στερεομηχανικά με ένα κινούμενο επίπεδο και δεν υφίσταται θραύση. Η δεύτερη κατάσταση περιγράφει την ελαστική κρούση ενός μεγαλύτερου σφαιρικού σωματιδίου πάγου με το κινούμενο επίπεδο χωρίς πάλι να υφίσταται θραύση. Η τρίτη και τελευταία κατάσταση είναι η κατάσταση θραύσης για οποιοδήποτε σφαιρικό σώμα πάγου που συγκρούεται με μία επίπεδη επιφάνεια.

Οι τρεις αυτές καταστάσεις αναλύονται λεπτομερώς παρακάτω. Πριν από αυτό όμως πρέπει να γίνει μία εισαγωγή στον ορισμό της οποιασδήποτε επίπεδης επιφάνειας ως προς το σύστημα συντεταγμένων της μηχανής και στην υιοθέτηση του απαραίτητου κριτηρίου θραύσης που θα διαχωρίσει τις προαναφερθείσες καταστάσεις.

Ξεκινώντας από τον ορισμό του συστήματος συντεταγμένων διακρίνουμε δύο συστήματα. Το πρώτο σύστημα είναι το κυλινδρικό σύστημα της μηχανής με συντεταγμένες  $(\rho, \varphi, z)$ <sup>1</sup>. Το δεύτερο σύστημα είναι ένα καρτεσιανό σύστημα  $(x, y, z)$  που έχει ίδια αρχή με το κυλινδρικό, αναφέρεται ως προς τη μηχανή και χρησιμοποιείται για την επίλυση της κρούσης. Ο ορισμός του δεύτερου συστήματος γίνεται γιατί η οποιαδήποτε κρούση δεν είναι εύκολο να επιλυθεί σε κυλινδρικό σύστημα.

<sup>1</sup> Η ονομασία των αξόνων για τα συστήματα συντεταγμένων είναι σύμφωνα με το ISO Standard 31-11

Η τοποθέτηση των συστημάτων συντεταγμένων βάσει των οποίων θα χαρακτηρίζεται οποιοδήποτε σημείο στο χώρο μέσα στη μηχανή απεικονίζεται στο Σχήμα 7.22 .



Σχήμα 7.22: Κυλινδρικό και Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων της αεροπορικής μηχανής σε ψευδοαξονομετρική απεικόνιση

Στο Σχήμα 7.22 φαίνεται επίσης η τυχαία σε προσανατολισμό μέσα στη μηχανή επιφάνεια όπως και το τυχαίας ταχύτητας και θέσης στοιχείο πάγου που πρόκειται να συγκρουστεί με την επιφάνεια.

Το μοντέλο δέχεται σαν είσοδο τις συντεταγμένες των σωμάτων και τις ταχύτητες ως προς το σταθερό κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων της μηχανής και τις μετατρέπει στο καρτεσιανό σταθερό σύστημα με τις επόμενες σχέσεις μετασχηματισμού :

$$\vec{r} = (\rho \cdot \sin(\varphi), \rho \cdot \cos(\varphi), -z) \quad (7-76)$$

$$\vec{v} = (v_\rho \cdot \sin(\varphi) + v_\varphi \cdot \cos(-\varphi), v_\rho \cdot \cos(\varphi) + v_\varphi \cdot \sin(-\varphi), -v_z) \quad (7-77)$$

$$\vec{s} = (s_\rho \cdot \sin(\varphi) + s_\varphi \cdot \cos(-\varphi), s_\rho \cdot \cos(\varphi) + s_\varphi \cdot \sin(-\varphi), -s_z) \quad (7-78)$$

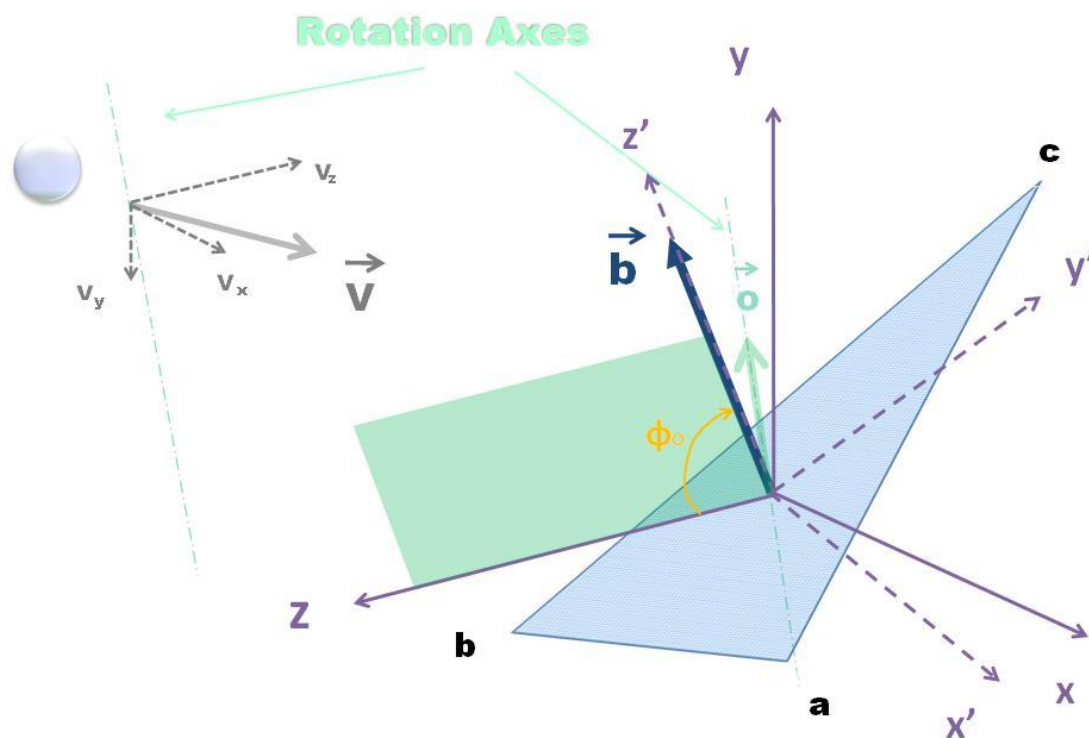
Μέχρι τώρα υπολογίστηκαν τα στοιχεία που ενδιαφέρουν για την κρούση ως προς το καρτεσιανό σταθερό σύστημα της μηχανής. Υπολογίστηκαν δηλαδή οι συνιστώσες της σχετικής ταχύτητας του στοιχείου ως προς το σταθερό σύστημα συντεταγμένων. Η κρούση όμως για να επιλυθεί πρέπει να συμβαίνει πάνω σε μία επιφάνεια που το κάθετο σε αυτή διάνυσμα θα συμπίπτει με έναν από τους

ορθοκανονικούς άξονες του καρτεσιανού σταθερού συστήματος. Πρέπει λοιπόν να οριστεί ένα νέο καρτεσιανό σύστημα πάνω στην επιφάνεια που ένας τουλάχιστον από τους άξονες (έστω ο  $z$ ), θα συμπίπτει με το κάθετο στην επιφάνεια διάνυσμα. Με τον τρόπο αυτό θα μπορεί να εκτελεστεί η κρούση με το επίπεδο.

**Η επιφάνεια της μηχανής αντιμετωπίζεται ως το εφαπτομενικό επίπεδο ενός σφαιρικού σώματος με άπειρη μάζα και άπειρη ακτίνα.**

Για να οριστεί η νέα βάση αξόνων πρέπει το διάνυσμα της σχετικής ταχύτητας να εκφραστεί σε ένα νέο περιστρεφόμενο ορθοκανονικό σύστημα. Αυτό γίνεται περιστρέφοντας το αρχικό ορθοκανονικό σύστημα (δηλαδή κάθε ένα από τα μοναδιαία του διανύσματα) με μία γωνία στο χώρο ώστε το μοναδιαίο διάνυσμα του άξονα  $z$  να συμπέσει με το κάθετο στη επιφάνεια διάνυσμα. Τα άλλα δύο μοναδιαία διανύσματα θα πάρουν αυτόματα τη θέση ώστε να σχηματίσουν ένα επίπεδο ταυτόσημο με το επίπεδο της κρούσης.

Στην κατανόηση αυτής της περιστροφής βοηθάει το **Σχήμα 7.23**.



**Σχήμα 7.23:** Στροφή αξόνων στο χώρο για την υλοποίηση της κρούσης

Το **Σχήμα 7.23** αποτελεί μεγέθυνση της περιοχής κρούσης από το σχήμα **Σχήμα 7.22**. Στο σχήμα αυτό φαίνεται το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων που ορίστηκε σταθερό πάνω στη μηχανή μεταφερόμενο όμως ώστε να συμπέσει η αρχή του με το σημείο της κρούσης. Απεικονίζεται επίσης με γκρι χρώμα το



διάνυσμα της ταχύτητας του σωματιδίου με τις συνιστώσες του ως προς το προαναφερθέν ορθοκανονικό σύστημα. Το διάνυσμα  $\vec{b}$  είναι το κάθετο στην επιφάνεια κρούσης διάνυσμα και υπολογίζεται από το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων που ορίζουν τα τρία σημεία της επιφάνειας ως  $\vec{ab} \times \vec{ac}$ .

Τα σημεία  $a$ ,  $b$  και  $c$  είναι τυχαία και το διάνυσμα  $\vec{b}$  μπορεί να προκύψει με δύο προσανατολισμούς. Για το λόγο αυτό πρέπει να είναι επίσης ορισμένο αν η κρούση συμβαίνει στην προσήνεμη ή την υπήνεμη πλευρά της επιφάνειας. Η προηγούμενη πρόταση μεταφράζεται αντίστοιχα και ως πλευρά με θετική ή αρνητική συνιστώσα  $z$  του διανύσματος  $\vec{b}$ . Εξαίρεση αποτελεί βέβαια η περίπτωση μηδενικής συνιστώσας  $z$  όπου πλέον η συγκεκριμένη συνιστώσα πρέπει να μεταβληθεί κατά ένα απειροελάχιστο ποσό για να μην είναι απολύτως οριζόντια.

Η στροφή για να συμπέσει ο άξονας  $z$  με το κάθετο στην επιφάνεια διάνυσμα  $\vec{b}$  έστω ότι είναι  $\varphi_o$ <sup>1</sup> ενώ γίνεται πάνω στο πράσινα διαγραμμισμένο επίπεδο και γύρω από τον άξονα που ορίζει το διάνυσμα  $\vec{o}$ . Το διάνυσμα  $\vec{o}$  προκύπτει από το εξωτερικό γινόμενο του μοναδιαίου στον άξονα  $z$  διανύσματος  $\vec{n}_z$  επί το διάνυσμα  $\vec{b}$  δηλαδή  $\vec{o} = \vec{n}_z \times \vec{b}$ . Από το διάνυσμα  $\vec{o}$  εύκολα βρίσκεται και το μοναδιαίο διάνυσμα στην ίδια διεύθυνση  $\vec{n}_o$ . Η γωνία  $\varphi_o$  προκύπτει από τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου ανάμεσα στα διανύσματα  $\vec{n}_z$  και  $\vec{b}$  που εμπεριέχει το συνημίτονο της μεταξύ τους γωνίας.

Η στροφή του άξονα  $z$  (και καθενός από τους άλλους δύο άξονες του συστήματος συντεταγμένων) γύρω από τον άξονα του διανύσματος  $\vec{n}_o$  υπο γωνία  $\varphi_k$  γίνεται με τη **σχέση στροφής διανύσματος στο χώρο του Rodrigues** (Olinde Rodrigues 1835) που δίνεται από την επόμενη έκφραση :

$$\begin{aligned} \vec{n}_{i,j,k} &= \vec{n}_{x,y,z} \cdot \cos(\varphi_o) + (\vec{n}_o \times \vec{n}_{x,y,z}) \cdot \sin(\varphi_o) + \\ &+ \vec{n}_o \cdot (\vec{n}_o \cdot \vec{n}_{x,y,z}) \cdot (1 - \cos(\varphi_o)) \end{aligned} \tag{7-79}$$

όπου :  $[\vec{n}_{i,j,k}]$  = το περιστρεμμένο μοναδιαίο διάνυσμα του εκάστοτε άξονα στην περιστρεμμένη βάση (-),  $\vec{n}_{x,y,z}$  = το μη περιστρεμμένο εκάστοτα μοναδιαίο διάνυσμα της αρχικής βάσης (-),  $\varphi_o$  = η γωνία περιστροφής (rad),  $\vec{n}_o$  = το μοναδιαίο διάνυσμα του άξονα γύρω από το οποίο γίνεται η περιστροφή (-)]

Στην παραπάνω σχέση αντικαθιστάται και περιστρέφεται με τον τρόπο αυτό κάθε ένα από τα τρία μοναδιαία διανύσματα του αρχικού ορθοκανονικού συστήματος. Έτσι προκύπτει η νέα **βάση** πάνω στην οποία θα απεικονιστεί το διάνυσμα της ταχύτητας.

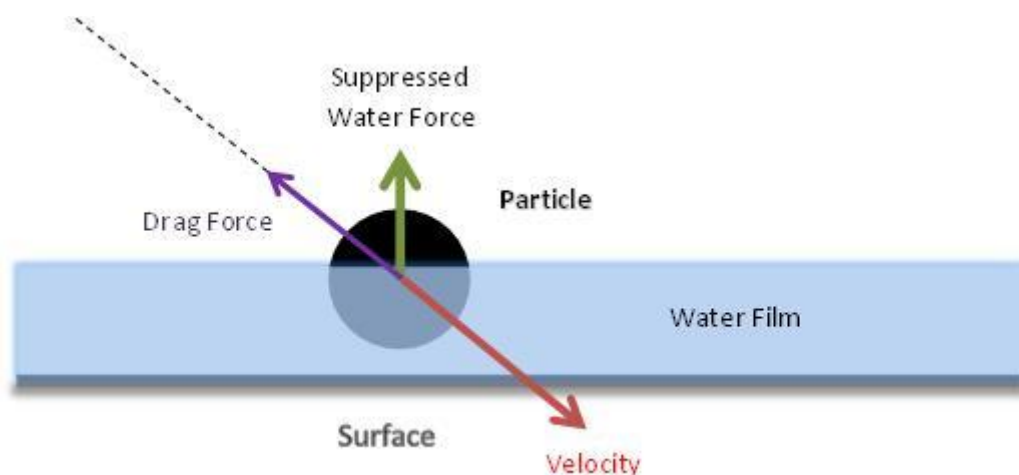
<sup>1</sup> Τα πρόσημα στροφής λαμβάνονται θετικά όταν είναι σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού

Υπό αυτές τις συνθήκες με γνωστό δηλαδή το διάνυσμα της ταχύτητας του σωματιδίου ως προς το σύστημα συντεταγμένων της επιφάνειας είναι πλέον δυνατό να μελετηθεί η κρούση. Μετά την κρούση θα πρέπει να γίνει βεβαίως ο ανάποδος μετασχηματισμός για να εκφραστούν οι νέες ταχύτητες στο κυλινδρικό σύστημα της μηχανής.

Για την επίλυση της κρούσης διαχωρίζονται αρχικά δύο γενικές περιπτώσεις. Στην πρώτη περίπτωση το σωματίδιο κινείται προς μία επιφάνεια που επικαλύπτεται με νερό (είτε το ίδιο περιβάλλεται μέσα σε σταγόνα) ενώ στη δεύτερη περίπτωση το σωματίδιο είναι ξηρό και κινείται προς μία στεγνή επιφάνεια.

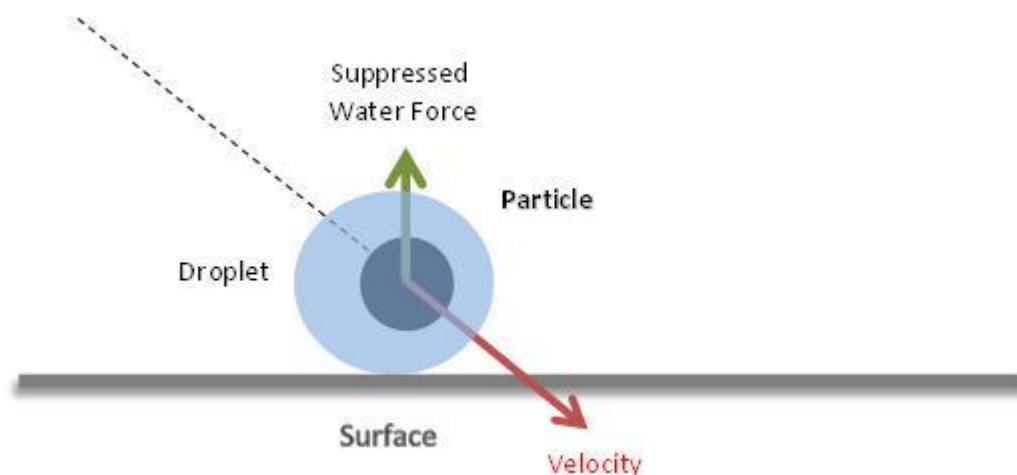
#### **A. Περίπτωση Σφαιρικού Στοιχείου Πάγου Κατευθυνόμενου προς κρούση πάνω σε Υγρή Επιφάνεια**

Στην περίπτωση που μεταξύ του σωματιδίου και της επιφάνειας της κρούσης μεσολαβεί νερό τότε το σωματίδιο επιβραδύνεται από την υγρή ποσότητα νερού που εκτοπίζει κατά την πρόσπτωση του και από την οπισθέλκουσα που εμφανίζει κινούμενο μέσα στο υγρό ρευστό.



**Σχήμα 7.24: Επιβράδυνση σωματιδίου από υγρό επιφανειακό νερό**

Στην περίπτωση που το σωματίδιο κατά την υγροποίηση του έχει μετασχηματιστεί σε σταγόνα που περικλείει ένα στερεό πυρήνα πάγου τότε η σταγόνα πιεζόμενη επιβραδύνει την κίνηση του πυρήνα.



Σχήμα 7.25: Επιβράδυνση σωματιδίου από το περίβλημα σταγόνας

Η δύναμη από την πίεση που ασκεί το συμπιεσμένο υγρό αποδεικνύεται από την αναφορά [47] ότι δίνεται από την σχέση :

$$\vec{F}_i = \frac{3\pi \cdot \mu \cdot \left(\frac{d_h}{2}\right)^2 \cdot \left| \frac{d(wa)}{dt} \right|}{2 \cdot wa} \cdot \vec{n}_k \quad (7-80)$$

όπου : [  $\vec{F}_i$  = η κάθετη στο επίπεδο δύναμη πίεσης (SI),  $\mu$  = το δυναμικό ιξώδες του νερού (SI),  $d_h$  = η διάμετρος του σωματιδίου (SI),  $wa$  = η υδροδυναμική προσέγγιση δηλαδή η απόσταση μεταξύ των επιφανειών του σωματιδίου και της επιφάνειας κρούσης (SI),  $t$  = ο χρόνος (s),  $\vec{n}_k$  = το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο κρούσης (-) ]

Η δύναμη οπισθέλκουσας υπολογίζεται μόνο όταν ολόκληρο το σωματίδιο βρίσκεται εμβαπτισμένο στο νερό και υπολογίζεται ως :

$$\vec{F}_d = \frac{1}{2} \cdot c_d \cdot A_{cs} \cdot \rho_w \cdot \left( \|\vec{v}_{abc}\| - \|\vec{v}_h\| \right) \cdot (\vec{v}_{abc} - \vec{v}_h) \quad (7-81)$$

όπου : [  $\vec{F}_d$  = η αντίθετη στην κίνηση οπισθέλκουσα (SI),  $\rho_w$  = η πυκνότητα του ρευστού (SI),  $\vec{v}_{abc}$  = η απόλυτη ταχύτητα της επιφάνειας (SI),  $\vec{v}_h$  = η απόλυτη ταχύτητα του σωματιδίου (SI),  $c_d$  = ο συντελεστής οπισθέλκουσας (-),  $A_{cs}$  = η επιφάνεια αναφοράς (SI) ]

Η επιβράδυνση του σωματιδίου θα δίνεται από τη σχέση :

$$\frac{d(\vec{v}_h)}{dt} = \frac{(\vec{F}_i + \vec{F}_d)}{m_h} \quad (7-82)$$

όπου : [  $\vec{v}_h$  = η ταχύτητα του σωματιδίου (SI),  $m_h$  = η μάζα του σωματιδίου (SI) ]

Με την ίδια εξίσωση (7-82) θα υπολογιστεί και η μεταβολή στην ταχύτητα της επιφάνειας αλλάζοντας βέβαια τον όρο της μάζας και αντικαθιστώντας τη μάζα του σώματος πάνω στο οποίο γίνεται η κρούση. Στην περίπτωση που η μάζα της επιφάνειας τείνει στο άπειρο η μεταβολή στην ταχύτητα της είναι μηδέν.

Η μετατόπιση του σωματιδίου στο ίδιο χρονικό διάστημα υπολογίζεται από την απόλυτη ταχύτητα ως :

$$\frac{d(\vec{r}_h)}{dt} = \vec{v}_h \quad (7-83)$$

Η νέα υδροδυναμική απόσταση θα δίνεται από τη σχέση :

$$\frac{dwa}{dt} = -\vec{w} \cdot \vec{n}_k \quad (7-84)$$

όπου : [ $\vec{w}$  = το διάνυσμα της σχετικής ταχύτητας (SI)]

Η θερμότητα που ανταλλάσσεται κατά την διείσδυση του σωματιδίου στο φιλμ νερού δίνεται σύμφωνα με τις γνωστές σχέσεις από τη μεταφορά θερμότητας :

$$\frac{dT_h}{dt} = \frac{h \cdot A_s \cdot (T_{abc} - T_h)}{\frac{4}{3} \cdot \rho_i \cdot \pi \cdot \left(\frac{d_h}{2}\right)^3 \cdot c_{p,i}} \quad (7-85)$$

με

$$h = \frac{k_w \cdot Nu}{d_h} \quad (7-86)$$

όπου : [ $T_h$  = η θερμοκρασία του σωματιδίου (SI),  $k_w$  = η θερμική αγωγιμότητα του νερού (SI),  $Nu$  = ο αριθμός Nusselt (-),  $A_s$  = η επιφάνεια του σωματιδίου (SI),  $T_{abc.in}$  = η αρχική θερμοκρασία του φιλμ (SI),  $\rho_i$  = η πυκνότητα του πάγου (SI),  $c_{p,i}$  = η ειδική θερμοχωρητικότητα του πάγου (SI)]

## **B. Περίπτωση Σφαιρικού Στοιχείου Πάγου κατευθυνόμενου προς κρούση πάνω σε Στεγνή Επιφάνεια**

Στην περίπτωση κρούσης με ξηρή επιφάνεια για να διαχωριστεί η περίπτωση ανάκλασης και η περίπτωση θραύσης χρησιμοποιείται το κριτήριο θραύσης από την εξίσωση των πειραμάτων της αναφοράς [18] και της αναφοράς [48].

Από την αναφορά [18] και για σωματίδια σφαιρικά με διάμετρο από 1cm μέχρι 4cm δίνεται το κριτήριο :

$$w_{k,cr}^2 \cdot d_h = 0.463 \quad (7-87)$$

όπου : [  $w_{k,cr}$  = η κρίσιμη κάθετη στο επίπεδο της κρούσης συνιστώσα της σχετικής ταχύτητας (SI),  $d_h$  = η διάμετρος του σωματιδίου (SI) ]

Απο την αναφορά [48] και για σωματίδια από 5μm μέχρι 1mm προκύπτει το κριτήριο :

$$w_{k,cr}^2 \cdot d_h = 0.066 \quad (7-88)$$

Για τα ενδιάμεσα διαστήματα διαμέτρων εφαρμόζουμε γραμμική παρεμβολή μεταξύ των δύο κριτηρίων και προκύπτει η επόμενη σχέση :

$$w_{k,cr} = d_h \cdot (-146.66) + 8.2666 \quad (7-89)$$

Στην περίπτωση ανάκλασης χρησιμοποιούνται οι εξισώσεις ώθησης – ορμής του Πίνακας 7.26 για την εύρεση των ταχυτήτων μετά την κρούση :

	<i>Slides All Time</i>	<i>Slides Partially</i>
<b>Condition</b>	$\vec{n} \cdot \vec{w}_{in} < -\frac{m_1 + m_2}{m_1 \cdot m_2} \cdot \frac{J_{n,c}}{(1+e)} + \left(\frac{2}{7}\right) \cdot \frac{1}{f \cdot (1+e)} \cdot  \vec{w}_{ct,in} $	$\vec{n} \cdot \vec{w}_{in} \geq -\frac{m_1 + m_2}{m_1 \cdot m_2} \cdot \frac{J_{n,c}}{(1+e)} + \left(\frac{2}{7}\right) \cdot \frac{1}{f \cdot (1+e)} \cdot  \vec{w}_{ct,in} $
<b>Post Impact Translational Velocity of Particles</b>	$\vec{v}_{abc,out} = \vec{v}_{abc,in} + \frac{J_{n,c}}{m_1} \cdot (\vec{n} - f \cdot \vec{t}) - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot (1+e) \cdot (\vec{n} \cdot \vec{w}_{in}) \cdot (\vec{n} + f \cdot \vec{t})$ $\vec{v}_{h,out} = \vec{v}_{h,in} - \frac{J_{n,c}}{m_1} \cdot (\vec{n} - f \cdot \vec{t}) + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot (1+e) \cdot (\vec{n} \cdot \vec{w}_{in}) \cdot (\vec{n} + f \cdot \vec{t})$	$\vec{v}_{abc,out} = \vec{v}_{abc,in} + \left[ \left( \frac{J_{n,c}}{m_1} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot (1+e) \cdot (\vec{n} \cdot \vec{w}_{in}) \right) \cdot \vec{n} - \frac{2}{7} \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot  \vec{w}_{ct,in}  \cdot \vec{t} \right]$ $\vec{v}_{h,out} = \vec{v}_{h,in} - \left[ \left( \frac{J_{n,c}}{m_2} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot (1+e) \cdot (\vec{n} \cdot \vec{w}_{in}) \right) \cdot \vec{n} - \frac{2}{7} \cdot \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot  \vec{w}_{ct,in}  \cdot \vec{t} \right]$
<b>Post Impact Angular Velocity of Particles</b>	$\vec{s}_{abc,out} = \vec{s}_{abc,in} + \left( \frac{5}{d_{h,in}} \right) \cdot (\vec{n} \times \vec{t}) \cdot f \cdot \left[ -\frac{J_{n,c}}{m_1} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot (1+e) \cdot (\vec{n} \cdot \vec{w}_{in}) \right]$ $\vec{s}_{h,out} = \vec{s}_{h,in} + \left( \frac{5}{d_{h,in}} \right) \cdot (\vec{n} \times \vec{t}) \cdot f \cdot \left[ -\frac{J_{n,c}}{m_2} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot (1+e) \cdot (\vec{n} \cdot \vec{w}_{in}) \right]$	$\vec{s}_{abc,out} = \vec{s}_{abc,in} - \frac{5}{7 \cdot \left( \frac{d_{h,in}}{2} \right)} \cdot (\vec{n} \times \vec{t}) \cdot  \vec{w}_{ct,in}  \cdot \frac{m_2}{m_1 + m_2}$ $\vec{s}_{h,out} = \vec{s}_{h,in} - \frac{5}{7 \cdot \left( \frac{d_{h,in}}{2} \right)} \cdot (\vec{n} \times \vec{t}) \cdot  \vec{w}_{ct,in}  \cdot \frac{m_1}{m_1 + m_2}$

Πίνακας 7.26: Συνοπτικός πίνακας επίλυσης εξισώσεων δυνάμεων ώθησης για αμοιβαία κρούση μικρών σφαιρικών σωματιδίων

Χρησιμοποιήθηκαν παραπάνω οι δείκτες *in* και *out* εφόσον με τις εξισώσεις ώθησης – ορμής δεν μπορεί να μελετηθεί το φαινόμενο χρονικά αλλά μόνο θεωρώντας ταχύτητα εισόδου (*πριν την κρούση*) και ταχύτητα εξόδου (*μετά την κρούση*).

Στην περίπτωση θραύσης δημιουργούνται περισσότερα από ένα θραύσματα με ποικίλες διαμέτρους και ταχύτητες. Τα θραύσματα θεωρείται ότι έχουν σχήμα σφαιρικό.

Αν η αρχική διάμετρος του σωματιδίου είναι μικρότερη από  $1mm$  τότε θεωρείται πως μετά τη θραύση το αρχικό σωματίδιο καταλήγει ως ένα σύνολο θραυσμάτων ίδιας διαμέτρου ενώ για το σχηματισμό των ορατών θραυσμάτων χρησιμοποιείται μόνο το 1% της αρχικής κινητικής ενέργειας [48].

Από την αρχή διατήρησης της μάζας προκύπτει η εξίσωση :

$$d_f = \frac{d_h}{N^{1/3}} \quad (7-90)$$

Από την εξίσωση διατήρησης της ενέργειας και χρησιμοποιώντας την προηγούμενη εξίσωση (7-90) προκύπτει ο αριθμός των όμοιων θραυσμάτων να είναι :

$$N = \left( \frac{0.01 \cdot d_h \cdot \rho_i \cdot w_{z,in}^2}{12 \cdot \sigma} \right)^3 \quad (7-91)$$

Στην περίπτωση θραύσης μεγαλύτερων σωματιδίων θεωρείται πως η διάμετρος των θραυσμάτων περιγράφεται από μία κατανομή τύπου Rosin – Rammner. Ανάμεσα στο σύνολο των θραυσμάτων διακρίνονται μία μέγιστη και μία ελάχιστη διάμετρος. Στο γενικό αυτό εύρος ορίζεται ένας αριθμός υποομάδων που θα ονομάζονται «**οικογένειες διαμέτρων**» και πρέπει να υπολογιστεί ο αριθμός και η ταχύτητα του αντιπροσωπευτικού «**μέσου σωματιδίου**» κάθε οικογένειας.

Έστω ότι ο αριθμός των υπο ομάδων είναι  $P$ .

Χρησιμοποιούνται οι εξισώσεις από την αναφορά [18] και σύμφωνα με αυτές η μάζα που κατέχει κάθε οικογένεια  $P_x$  από διάμετρο  $A$  μέχρι διάμετρο  $B$  είναι :

$$M_{P_x} = \left[ \left( 1 - \exp \left( - \left( \frac{d_B}{X} \right)^N \right) \right) - \left( 1 - \exp \left( - \left( \frac{d_A}{X} \right)^N \right) \right) \right] \cdot M_{tot} \quad (7-92)$$

Η συνολική μάζα  $M_{tot}$  είναι η μάζα που έχει το σύνολο των θραυσμάτων δηλαδή η μάζα που είχε το ενιαίο σώμα πριν συγκρουστεί.

Αν ήταν σφαιρικό η μάζα του είναι :

$$M_{tot} = \frac{1}{6} \cdot \rho_i \cdot \pi \cdot d_h^3 \quad (7-93)$$

Υπολογίζονται επίσης οι συντελεστές της (7-92) από τις εξισώσεις :

$$d_{f,max} = \frac{49.49 \cdot d_h + 0.16001 \cdot d_h \cdot \ln\left(\frac{1}{w_{z,in}}\right) - 3.134 \cdot d_h \cdot (39.37 \cdot d_h - 1)}{0.0254} \quad (7-94)$$

$$\bar{X} = -0.19422 \cdot d_h + 1.05 \cdot d_{f,max} \quad (7-95)$$

$$N = 0.40729 \cdot \exp\left(\frac{2.326 \cdot \bar{X}}{d_{f,max}}\right) \quad (7-96)$$

Η ταχύτητα των θραυσμάτων μετά την κρούση θα είναι σύμφωνα με τις αναφορές [18] και [9] παράλληλη στην επιφάνεια κρούσης και θα ισούται δε με το διανυσματικό άθροισμα δύο παραγόντων ταχύτητας, μίας από την πρόσπτωση (διατήρησης) και μίας από την απελευθέρωση ενέργειας κατά την κρούση (εκτόνωσης).

Τα θραύσματα διατηρούν μόνο το παράλληλο με την επιφάνεια στέλεχος της ταχύτητας πρόσπτωσης ελαφρώς μειωμένο όμως λόγω απωλειών. Το ένα διάνυσμα του αθροίσματος σύμφωνα με τα πειράματα της αναφοράς [18] θα είναι :

$$\vec{w}_{out,p} = \left[ (0.132) \cdot \beta_{in}^3 - (0.656) \cdot \beta_{in}^2 + (0.051) \cdot \beta_{in} + 0.9954 \right] \cdot (w_{x,in}, w_{y,in}, 0) \quad (7-97)$$

Το δεύτερο διάνυσμα του αθροίσματος θα είναι [18] :

$$\vec{w}_{out,p} = \left[ \frac{1.5 \cdot w_{z,in} \cdot r_{loc}}{2 \cdot \alpha} \right] \cdot (\cos(\gamma_n) \cdot \vec{n}_x + \sin(\gamma_n) \cdot \vec{n}_y + 0 \cdot \vec{n}_z) \quad (7-98)$$

Για την τιμή του  $r_{loc}$  θα χρησιμοποιηθεί προσεγγιστικά το μισό της αρχικής διαμέτρου ενώ το πάχος του φιλμ θραυσμάτων θα δίνεται σύμφωνα με την αναφορά [18] από τη σχέση :

$$\alpha = d_h \cdot \left[ \begin{array}{l} (8 \cdot 10^{-11}) \cdot E^4 - (6 \cdot 10^{-8}) \cdot E^3 + (2 \cdot 10^{-5}) \cdot E^2 - \\ -(0.0042) \cdot E + 0.5736 \end{array} \right] \quad (7-99)$$



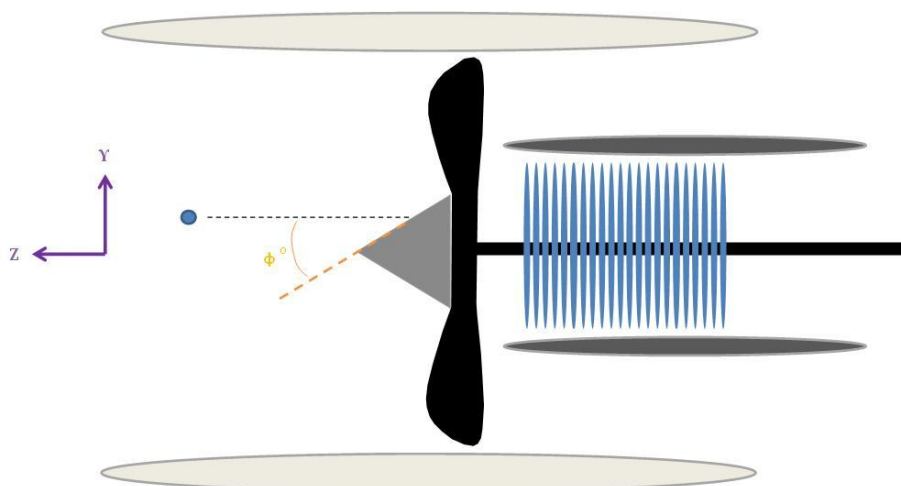
$$E = \left( \rho_i \cdot \pi \cdot \frac{d_h^3}{12} \cdot w_{z,in}^2 \right) \quad (7-100)$$

Υπολογίζεται έτσι για κάθε γωνία από  $0 \leq \gamma_n < 2\pi$  η συνισταμένη σχετική ταχύτητα των θραυσμάτων ως :

$$\vec{w}_{out} = \vec{w}_{out,p} + \vec{w}_{out,e} \quad (7-101)$$

Υλοποιώντας τώρα υπολογιστικό κώδικα εφαρμόζονται τα παραπάνω για τη μελέτη της μηχανικής συμπεριφοράς ενός σφαιρικού στοιχείου πάγου που προσπίπτει πάνω σε μία επιφάνεια της μηχανής. Μελετάτε το φαινόμενο παραμετρικά δηλαδή ερευνάται η επιρροή διαφόρων παραμέτρων στην αλλαγή της ταχύτητας ή της ποσότητας των θραυσμάτων εάν αυτό θρυμματιστεί. Θεωρείται ένα συγκεκριμένο πρόβλημα της κρούσης ενός σωματιδίου πάγου με το κωνικό spinner μίας αεροπορικής μηχανής.

Η διάταξη της κρούσης φαίνεται και στο **Σχήμα 7.27** :



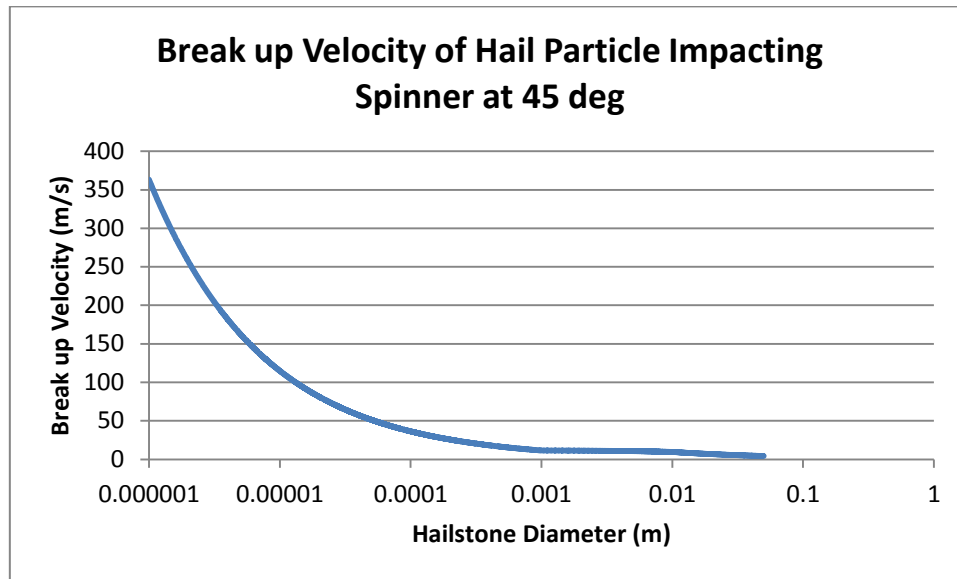
**Σχήμα 7.27:** Προφίλ διάταξης κρούσης που μελετάτε

Η κρούση επιλύεται στο τρισδιάστατο επίπεδο αλλά αρχικά θεωρείται πως η μηχανή (ή το χαλάζι στο σχετικό σύστημα) κινείται αποκλειστικά πάνω στο επίπεδο ΖΥ και με διεύθυνση παράλληλη με τον άξονα Ζ.

Θεωρείται επίσης πως η μάζα της μηχανής είναι πολύ μεγάλη συγκριτικά με το χαλάζι και πως η επιφάνεια του spinner στο σημείο πρόσκρουσης είναι

απολύτως επίπεδη. Η μηχανή έχει γραμμική ταχύτητα  $u_{abc,z}$  ενώ το spinner περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα  $s_{abc,z}$ . Το χαλάζι βρίσκεται ακίνητο στην ατμόσφαιρα. Το προφίλ του spinner τέλος αποτελεί ισοσκελές τρίγωνο.

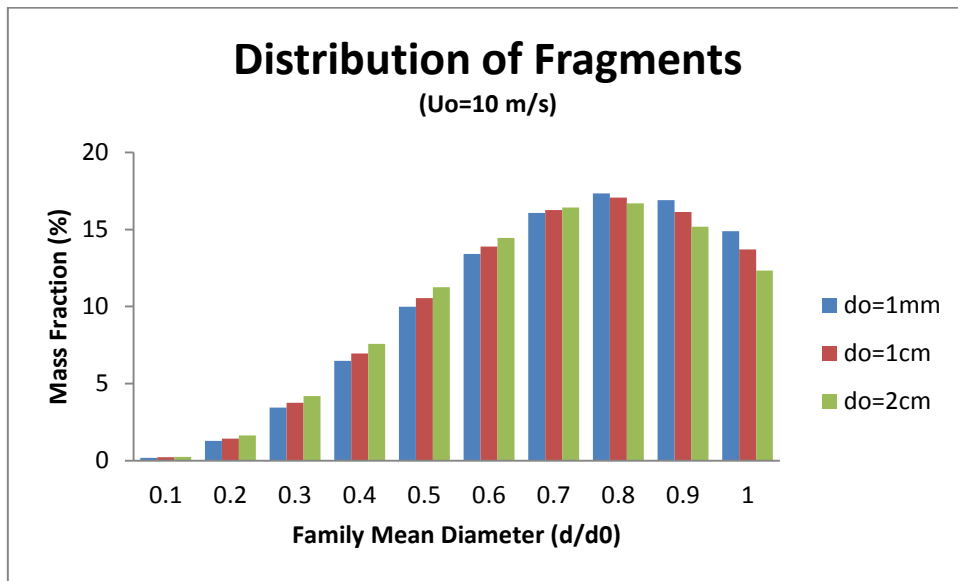
Παρακάτω δίνεται το διάγραμμα που δίνει το μέτρο της διανυσματικής σχετικής ταχύτητας που οδηγεί στη θραύση για τη συγκεκριμένη διάταξη κρούσης :



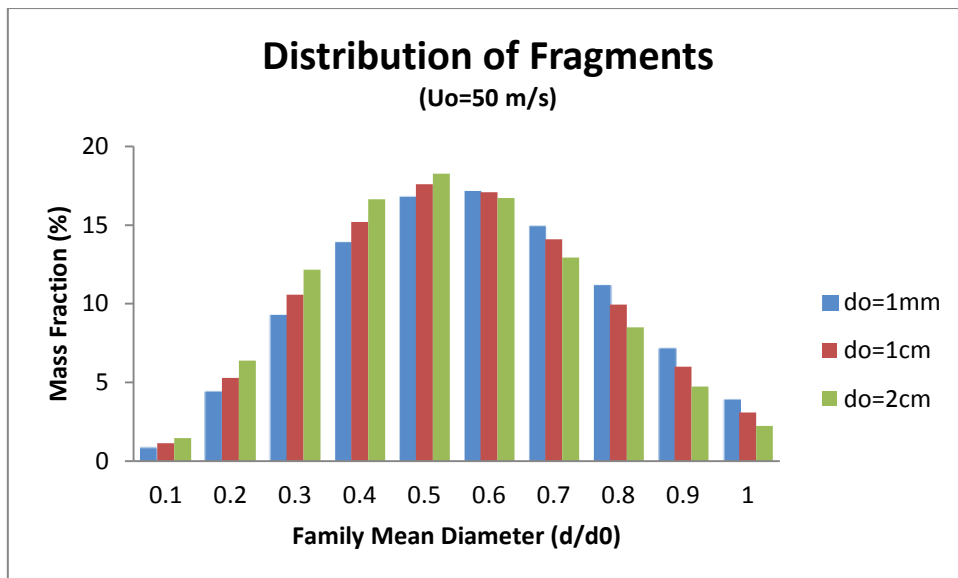
**Διάγραμμα 7.28: Κρίσιμη ταχύτητα που οδηγεί στη θραύση για την υπο μελέτη διάταξη συναρτήσσει της αρχικής διαμέτρου του σωματιδίου**

Στην περίπτωση θραύσης παράγεται μία κατανομή θραυσμάτων. Στα επόμενα διαγράμματα δίνεται η κατανομή των ορατών θραυσμάτων συναρτήσσει ενδεικτικών τιμών αρχικής διαμέτρου και ταχύτητας πρόσπτωσης και πάντα για τη διάταξη κρούσης που μελετάτε στο

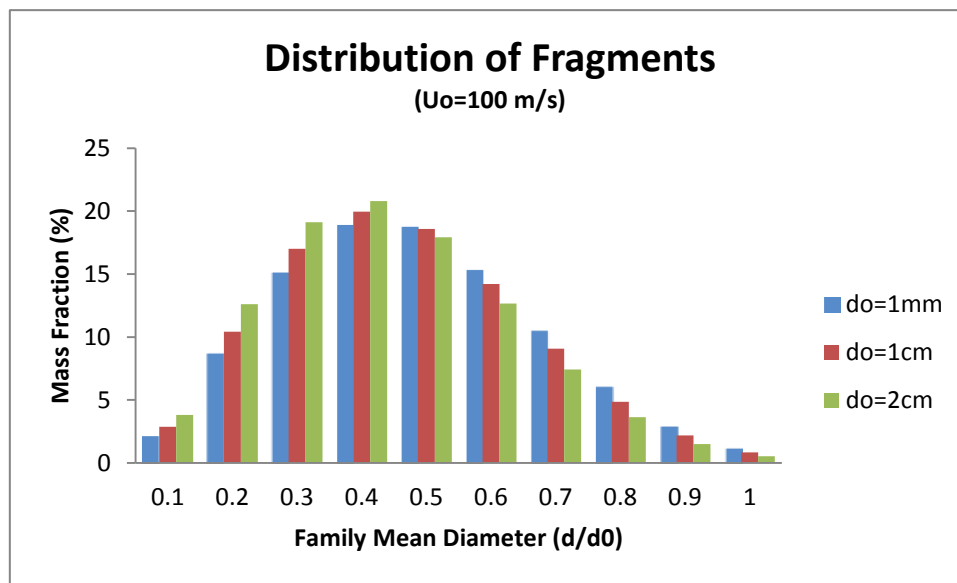
:



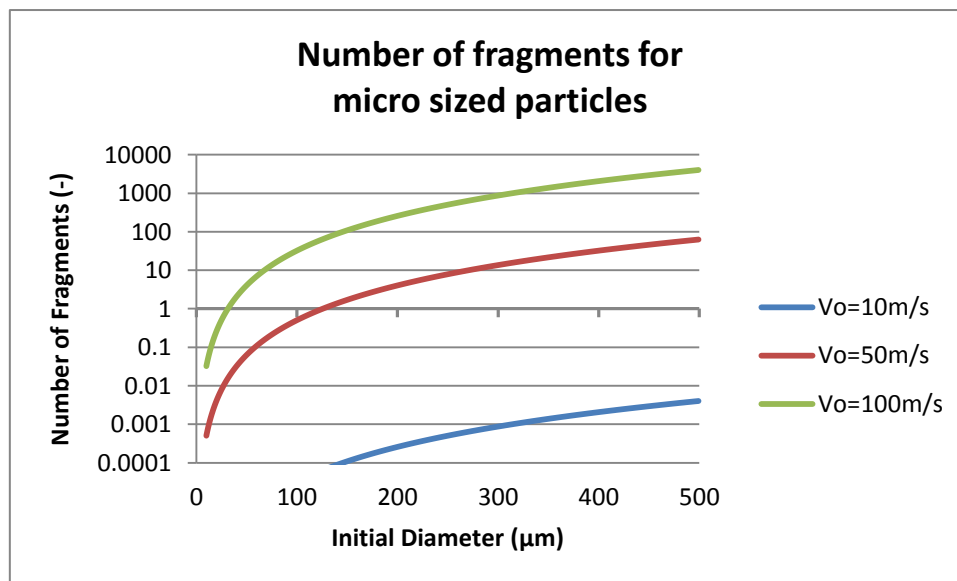
Διάγραμμα 7.29: Κρίσιμη ταχύτητα που οδηγεί στη θραύση για την υπο μελέτη διάταξη συναρτήσει της αρχικής διαμέτρου του σωματιδίου



Διάγραμμα 7.30: Κρίσιμη ταχύτητα που οδηγεί στη θραύση για την υπο μελέτη διάταξη συναρτήσει της αρχικής διαμέτρου του σωματιδίου



Διάγραμμα 7.31: Κρίσιμη ταχύτητα που οδηγεί στη θραύση για την υπο μελέτη διάταξη συναρτήσει της αρχικής διαμέτρου του σωματιδίου

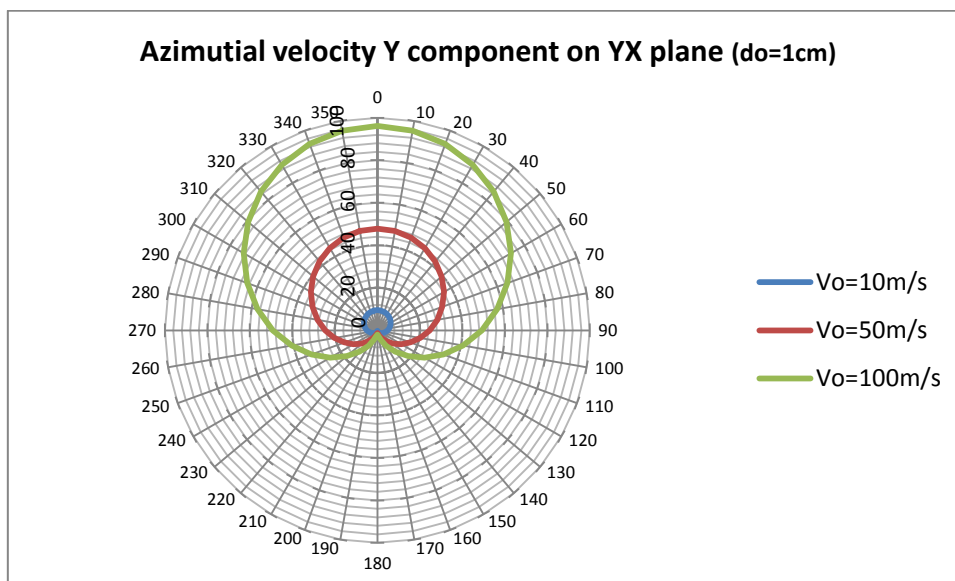


Διάγραμμα 7.32: Κρίσιμη ταχύτητα που οδηγεί στη θραύση για την υπο μελέτη διάταξη συναρτήσει της αρχικής διαμέτρου του σωματιδίου

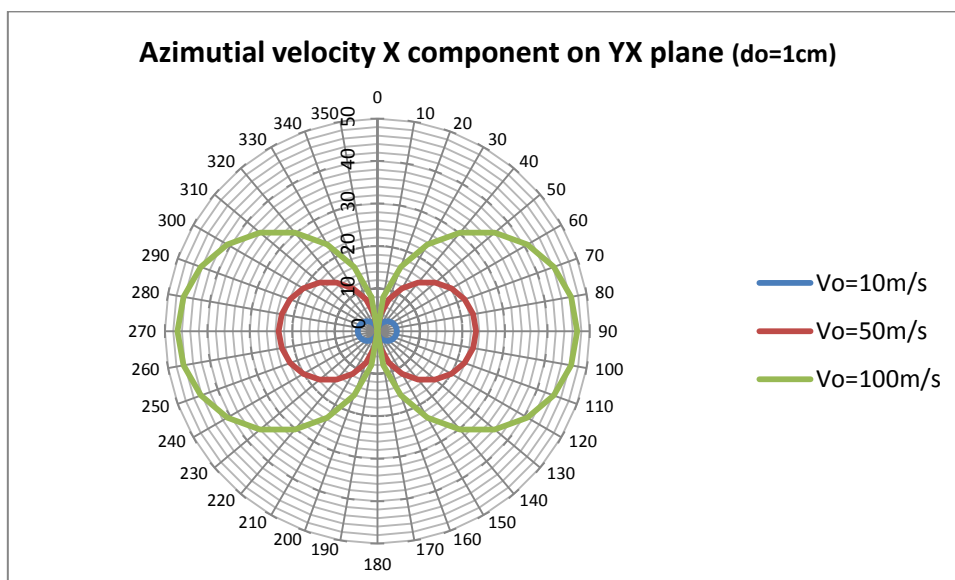
Στα επόμενα διαγράμματα (*Διάγραμμα 7.33*, *Διάγραμμα 7.34*) δίνεται η διαφοροποίηση των συνιστωσών της ταχύτητας των θραυσμάτων μετά την κρούση πάνω στο επίπεδο κρούσης XY.

Δεν παρατηρήθηκε κατά τη διερεύνηση αξιοσημείωτη μεταβολή των καμπυλών για διαφορετικές αρχικές διαμέτρους και για το λόγω αυτό απεικονίζεται μόνο η

μεταβολή της ταχύτητας των θραυσμάτων για την ενδεικτική αρχική διάμετρο του ενός εκατοστού.

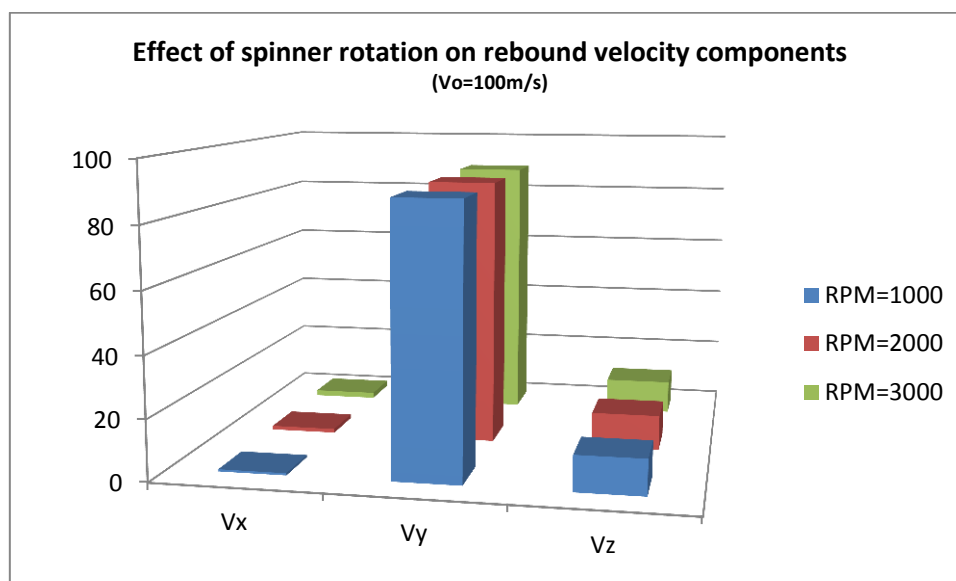


**Διάγραμμα 7.33:** Μεταβολή του μέτρου της Y συνιστώσας της ταχύτητας των θραυσμάτων κατά τη γωνία αζιμούθιου πάνω στην επιφάνεια θραύσης με αρχική διάμετρο σωματιδίου 1cm



**Διάγραμμα 7.34:** Μεταβολή του μέτρου της X συνιστώσας της ταχύτητας των θραυσμάτων κατά τη γωνία αζιμούθιου πάνω στην επιφάνεια θραύσης με αρχική διάμετρο σωματιδίου 1cm

Το **Διάγραμμα 7.35** αναφέρεται στην ταχύτητα επαναφοράς και απεικονίζει το μέτρο των συνιστωσών της ταχύτητας μετά την κρούση για διαφορετικές ταχύτητες περιστροφής του Spinner.



**Διάγραμμα 7.35:** Επίδραση της περιστροφής του κώνου στις συνιστώσες της ταχύτητας μετά την ανάκρουση του σωματιδίου.

### Σχολιασμός των προηγούμενων διαγραμμάτων :

Από το **Διάγραμμα 7.28** και σύμφωνα με τα πειραματικά δεδομένα που όρισαν το κριτήριο θραύσης φαίνεται ότι γενικά για σωματίδια με διάμετρο πάνω από μισό εκατοστό, οι ταχύτητες της τάξης των 10 m/s είναι ικανές να προκαλέσουν τη θραύση των σωματιδίων πάγου. Όσο η διάμετρος του σωματιδίου μειώνεται και ειδικότερα κάτω από το 1mm η αντοχή των μικροσωματιδίων στη θραύση γίνεται μία τάξη μεγέθους μεγαλύτερη.

Στο **Διάγραμμα 7.29**, στο **Διάγραμμα 7.30** και στο **Διάγραμμα 7.31** είναι φανερό ότι στην κατανομή των θραυσμάτων μεγάλων σωματιδίων παίζει σημαντικό ρόλο η ταχύτητα πρόσπτωσης. Όσο η αρχική ταχύτητα πρόσπτωσης αυξάνει τόσο στο σύνολο των θραυσμάτων εμφανίζονται και πιο μικρού μεγέθους σωματίδια. Αυτό είναι αναμενόμενο άλλωστε αφού όσο αυξάνεται η αρχική ενέργεια πρόσπτωσης τόση περισσότερη ενέργεια κατανέμεται στη θραύση άρα και στο σχηματισμό περισσότερων επιφανειών.

Στο **Διάγραμμα 7.32** που αναφέρεται στη θραύση μικρότερων σωματιδίων φαίνεται και πάλι ότι η αύξηση της αρχικής κάθετης ταχύτητας πρόσπτωσης οδηγεί στην παραγωγή περισσότερων θραυσμάτων.

Το **Διάγραμμα 7.33** και το **Διάγραμμα 7.34** δείχνουν τη μεταβολή των συνιστωσών της ταχύτητας των θραυσμάτων που είναι εξ ορισμού παράλληλες με την επιφάνεια. Από τα δύο διαγράμματα διαπιστώνεται ότι τα θραύσματα

μετά την αρχική θραύση εξαπλώνονται προς κάθε κατεύθυνση αλλά κυρίως προς την κατεύθυνση της αρχικής επιφανειακής ταχύτητας. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα θραύσης που μελετάτε η ταχύτητα εκτόνωσης είναι μικρότερη από την ταχύτητα διατήρησης και επομένως δεν υπάρχει ροή θραυσμάτων με κατεύθυνση αντίθετη από την αρχική ταχύτητα. Φαίνεται επίσης ότι όσο μεγαλύτερο είναι το μέτρο της αρχικής ταχύτητας πρόσπτωσης τόσο μεγαλύτερη είναι και η τάση για διασκορπισμό.

Από το **Διάγραμμα 7.35** που αναφέρεται στην ταχύτητα επαναφοράς διαπιστώνεται ότι υπάρχει πολύ μικρή επίδραση της περιστροφής του Spinner στις συνιστώσες της ταχύτητας μετά την κρούση. Αυτό συμβαίνει γιατί ο συντελεστής τριβής είναι πολύ χαμηλός και το σωματίδιο ολισθαίνει καθόλη τη διάρκεια της επαφής του με το Spinner. Η όποια επίδραση παρατηρείται στη συνιστώσα X και αυτό είναι αναμενόμενο εφόσον αυτή είναι και η κατεύθυνση της ταχύτητας επιφανείας του Spinner στο σημείο της κρούσης. Παραμετρική ανάλυση ως προς τη διάμετρο δεν έγινε γιατί η μάζα του Spinner θεωρείται απείρως μεγαλύτερη από τη μάζα του χαλαζιού και έτσι η αρχική διάμετρος δεν έχει καμία σημασία για τα αποτελέσματα της ανάκλασης.





# 8

## Κινηματική Αλληλεπίδραση του Χαλαζιού στο Εσωτερικό της Μηχανής

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται μελέτη της αλληλεπίδρασης του χαλαζιού με το πεδίο ροής της μηχανής. Γίνεται πρώτα μία γενική περιγραφή της μορφής που έχει το πεδίο ροής μπροστά και μέσα στον αγωγό εισόδου και έπειτα αναλύονται οι δυνάμεις που ενεργούν στη μάζα του χαλαζιού.

### 8.1 Το πεδίο ροής της μηχανής

Η μορφή του πεδίου ροής του αέρα ενδιαφέρει κυρίως στην περιοχή μπροστά από τη μηχανή, στον αγωγό εισόδου και ανάμεσα στις πτερυγώσεις του Fan. Αυτό γιατί η ροή σε αυτές τις περιοχές είναι που θα καθορίσει κατά βάση την εισροφόμενη στον πυρήνα ποσότητα χαλαζιού που ενδιαφέρει στους θερμοδυναμικούς υπολογισμούς. Μπροστά και μέσα στον αγωγό εισόδου το πεδίο ροής θεωρείται αξισυμμετρικό. Παρόλα αυτά όταν υπάρχει κάθετη στον άξονα της μηχανής συνιστώσα του ρεύματος αέρα τότε το πεδίο πρέπει να προσδιοριστεί σε τρισδιάστατη βάση. Στις επιφάνειες της μηχανής εμφανίζονται οριακά στρώματα τα οποία πρέπει να λαμβάνονται υπόψιν όταν μελετάται η αλληλεπίδραση μικρών γεωμετριών χαλαζιού με την επιφάνεια.

Η εύρεση του πεδίου ροής γίνεται από υπολογιστικά πακέτα (*CFX – Fluent κ.λπ.*) ή κώδικες επίλυσης της ροής (*PARC Code της NASA, MEFP της Rolls Royce κ.λπ.*). Αυτά λαμβάνουν ως είσοδο τη δεδομένη γεωμετρία της μηχανής, την παροχή αέρα και άλλα δεδομένα συσχετιζόμενα με την κατάσταση λειτουργίας ώστε να αποδώσουν τελικά μία λεπτομερή απεικόνιση (*τρειςδιάστατη στην καλύτερη περίπτωση*) των στοιχείων της ροής του αέρα σε κάθε σημείο του χώρου (*ταχύτητα, πίεση, θερμοκρασία κλπ*). Η παρουσία του χαλαζιού, στο σύνολο της μέχρι τώρα έρευνας στη βιβλιογραφία [1][5][10][18][21], θεωρείται ότι δεν επηρεάζει το πεδίο ροής μέσα στον αγωγό εισόδου. Αυτό γιατί η ποσότητα του χαλαζιού που βρίσκεται κάθε χρονική στιγμή μέσα στην περιοχή αυτή δεν είναι συγκρίσιμη με το μέγεθος του χαλαζιού και δεν επιφέρει αξιόλογες μεταβολές. Στο συμπίεστη βεβαίως και για μεγάλες ποσότητες εισρόφησης αυτή η παραδοχή γίνεται πλέον συζητήσιμη.

Στην παρούσα εργασία θεωρείται ως δεδομένο το πεδίο της ροής και ενδιαφέρει μόνο η εύρεση της επίδρασης που έχει ο αέρας στην κίνηση των μαζών χαλαζιού.

## 8.2 Οι δυνάμεις πάνω στο χαλάζι

Οι δυνάμεις που ενεργούν πάνω σε ένα σφαιρικό σώμα που ακολουθεί μία πορεία μέσα σε ένα ρευστό διακρίνονται σε δυνάμεις σώματος και δυνάμεις επιφάνειας. Οι δυνάμεις σώματος είναι οι δυνάμεις που ενεργούν στη μάζα του σώματος και από απόσταση όπως η βαρυτικές δυνάμεις ή οι ηλεκτρομαγνητικές και ηλεκτροστατικές δυνάμεις. Οι δυνάμεις επιφανείας από την άλλη έχουν προέλευση διεργασίες μεταφοράς ορμής μεταξύ του σώματος και του περιρρέον ρευστού και οφείλονται αποκλειστικά σε επιδράσεις δυνάμεων επαφής. Δυνάμεις επιφανείας είναι για παράδειγμα η άντωση και η οπισθέλκουσα. Οι δυνάμεις επιφανείας διακρίνονται επίσης σε σταθεροποιημένες δυνάμεις ή δυνάμεις που εμφανίζονται όταν υφίσταται επιτάχυνση της σχετικής ταχύτητας του σώματος ως προς το περιρρέον ρευστό.

### 8.2.1 Οι δυνάμεις σώματος

Η πιο κοινή δύναμη σώματος είναι η δύναμη βαρύτητας και αποτελεί τη μόνη δύναμη σώματος που απασχολεί την παρούσα μελέτη.

#### Δύναμη Βαρύτητας

Η δύναμη βαρύτητας οφείλεται στο βαρυτικό πεδίο που δημιουργεί κάθε μάζα στο πεδίο του χωροχρόνου. Η μάζα που προκαλεί αξιοσημείωτη δύναμη είναι η μάζα της Γής. Η δύναμη έλξης που εμφανίζεται και έχει κατεύθυνση προς τη Γή δίνεται από τη σχέση :

$$\vec{F}_g = \rho_h \cdot V_h \cdot \vec{g} \quad (8-1)$$

όπου : [  $\vec{F}_g$  = η βαρυτική δύναμη (SI),  $\rho_h$  = η πυκνότητα του σωματιδίου (SI),  $V_h$  = ο όγκος του σωματιδίου (SI),  $\vec{g}$  = η βαρυτική επιτάχυνση (SI) ]

### 8.2.2 Οι δυνάμεις επιφανείας

Οι δυνάμεις επιφανείας οφείλονται στην πίεση και τις διατμητικές τάσεις που ενεργούν στην επιφάνεια του σώματος.

Η συνισταμένη δύναμη που αναπτύσσεται από το σύνολο των πιέσεων (στατικών και δυναμικών) στην επιφάνεια του σώματος αποτελεί την καθαρή δύναμη πίεσης και δίνεται από το ολοκλήρωμα :

$$\vec{F}_p = - \int_{cs} p_s \cdot \vec{n} dS \quad (8-2)$$

όπου :  $[\vec{F}_p =$  η δύναμη των πιέσεων στο σώμα (SI),  $p_s =$  η πίεση στην επιφάνεια (SI),  $\vec{n} =$  το κάθετο προς τα έξω διάνυσμα στην επιφάνεια (-)]

Η συνισταμένη δύναμη που αναπτύσσεται από το σύνολο των διατμητικών τάσεων στην επιφάνεια του σώματος αποτελεί την καθαρή δύναμη διατμητικών τάσεων και δίνεται από το αντίστοιχο με την περίπτωση των πιέσεων ολοκλήρωμα :

$$\vec{F}_\tau = \int_{cs} \tau \cdot \vec{t} dS \quad (8-3)$$

όπου :  $[\vec{F}_\tau =$  η δύναμη διατμητικών τάσεων στο σώμα (SI),  $\tau =$  ο τανυστής των διατμητικών τάσεων στην επιφάνεια του σώματος (SI),  $\vec{t} =$  το κείμενο διάνυσμα στην επιφάνεια (-)]

Το άθροισμα των δυνάμεων πίεσης και των διατμητικών τάσεων δίνει τη συνολική δύναμη επιφανείας στο σώμα. Η δύναμη διαχωρίζεται σε μία δύναμη παράλληλη με το ρεύμα αέρα που ονομάζεται οπισθέλκουσα (**Drag**) και σε μία δύναμη κάθετη που ονομάζεται άντωση (**Lift**). Παρακάτω αναλύονται ορισμένες δυνάμεις που δημιουργούνται απο διαφορετικής φύσεως αλληλεπιδράσεις που υπάγονται στις δύο προηγούμενες κατηγορίες.

### Δύναμη Οπισθέλκουσας Σταθερής Κατάστασης

Η σταθεροποιημένη οπισθέλκουσα είναι η οπισθέλκουσα δύναμη που ενεργεί πάνω σε ένα σώμα που βρίσκεται μέσα σε ένα ομοιόμορφο πεδίο ροής όταν δεν υφίσταται επιτάχυνση και δεν ιδιοπεριστρέφεται. Η δύναμη αυτή ποσοτικοποιείται αναλογικά με ένα συντελεστή που ονομάζεται συντελεστής οπισθέλκουσας και εκφράζεται με την επόμενη σχέση :

$$\vec{F}_d = \frac{1}{2} \cdot \rho_a \cdot c_d \cdot A_h \cdot (\vec{u}_a - \vec{u}_h) \cdot \left( \|\vec{u}_a\| - \|\vec{u}_h\| \right) \quad (8-4)$$

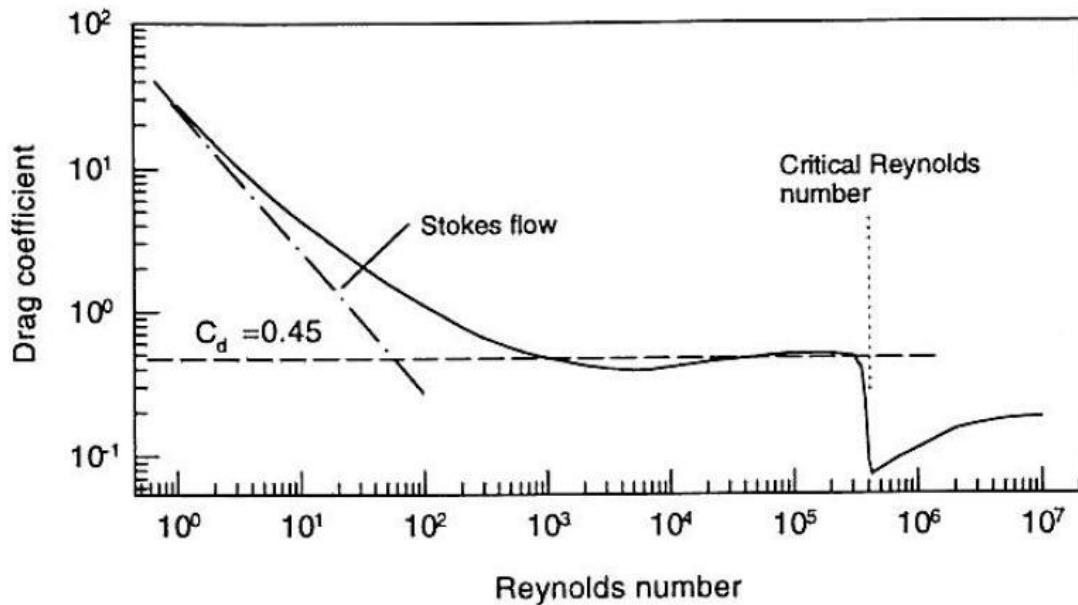
όπου :  $[\vec{F}_d =$  η σταθεροποιημένη οπισθέλκουσα (SI),  $\rho_a =$  η πυκνότητα του ρευστού (SI),  $c_d =$  ο συντελεστής οπισθέλκουσας (-),  $A_h =$  η χαρακτηριστική επιφάνεια του σώματος (SI),  $\vec{u}_a =$  η απόλυτη ταχύτητα του αέρα (SI),  $\vec{u}_h =$  η απόλυτη ταχύτητα του σωματιδίου (SI) ]

Ο συντελεστής οπισθέλκουσας  $c_d$  ενσωματώνει συγκεντρωτικά την επίδραση των πιέσεων και των δυνάμεων συνεκτικότητας που ενεργούν στο σώμα και αντιτίθενται στην κίνηση του. Βρίσκεται συνήθως πειραματικά και εκφράζει την απόκλιση της πραγματικής οπισθέλκουσας δύναμης που ενεργεί στο σώμα από

το ρευστό σε σχέση με τη δύναμη ολικής πίεσης<sup>1</sup>. Για το λόγο αυτό παίρνει κατά βάση τιμές που είναι μικρότερες της μονάδας<sup>2</sup>. Ο συντελεστής οπισθέλκουσας εξαρτάται από το σχήμα, τον προσανατολισμό ως προς τη ροή και από τα στοιχεία της ροής όπως ο αριθμός Reynolds, ο αριθμός Mach και η τύρβη.

Ως χαρακτηριστική επιφάνεια  $A$  λαμβάνεται συνήθως η επιφάνεια της μετωπικής τομής του σώματος κάθετα στο ρεύμα αέρα.

Για την περίπτωση του σφαιρικού σώματος ο συντελεστής οπισθέλκουσας μεταβάλλεται όπως στο **Διάγραμμα 8.1**.



**Διάγραμμα 8.1:** Συντελεστής Οπισθέλκουσας για μη περιστρεφόμενη σφαίρα (Πηγή : C. Crowe - *Multiphase Flow with Particles and Droplets* 1998)

Από το **Διάγραμμα 8.1** είναι φανερό ότι για πολύ χαμηλούς αριθμούς Reynolds ο συντελεστής οπισθέλκουσας μειώνεται. Αυτό είναι και το εύρος που ονομάζεται ροή Stokes κατά την οποία εντονότερες είναι οι δυνάμεις συνεκτικότητας (επιφανειακή τριβή) παρά οι δυνάμεις αδρανείας (δυνάμεις πίεσεως). Όταν ο αριθμός Reynolds αυξάνει τότε ο συντελεστής οπισθέλκουσας παίρνει μία σταθερή τιμή μέσα σε ένα εύρος αριθμών Reynolds που ονομάζεται εύρος αδρανείας ή περιοχή Newton. Έτσι για αριθμούς Reynolds από 750 μέχρι 350000 ο συντελεστής οπισθέλκουσας έχει περίπου σταθερή τιμή ίση με 0.45. Σε ένα κρίσιμο σημείο αύξησης του αριθμού Reynolds ο συντελεστής οπισθέλκουσας μειώνεται απότομα και αυτό γιατί σε αυτόν τον κρίσιμο αριθμό Reynolds το οριακό στρώμα της ροής που περιβάλλει τη σφαίρα μεταβαίνει από στρωτό σε τυρβώδες. Το τυρβώδες οριακό στρώμα αν και παρουσιάζει

<sup>1</sup> Δηλαδή τη δύναμη που θα παρουσιαζόταν αν τα μόρια του ρευστού ακινητοποιούνταν τελείως προσπίπτωντας πάνω στη μετωπική επιφάνεια του σώματος

<sup>2</sup> Οι μεγαλύτερες τιμές προκύπτουν όταν το σώμα δεν έχει ομαλό περίγραμμα και δημιουργεί υποπίεση στην υπήνεμη πλευρά λόγω αποκόλλησης της ροής

μεγαλύτερη επιφανειακή τριβή αποκολλάται σε χαμηλότερο της υπήνεμης πλευράς του σωματιδίου και δημιουργεί έτσι ένα στενότερο ρεύμα δινών σε σχέση με το ρεύμα δινών του στρωτού οριακού στρώματος. Παρουσιάζεται με τον τρόπο αυτό μία μικρότερη διαφορά πίεσης μεταξύ της εμπρός και της πίσω πλευράς από την περίπτωση αποκόλλησης του στρωτού οριακού στρώματος και παρόλο που η οπισθέλκουσα τριβής αυξάνει, η συνολική δύναμη οπισθέλκουσας μειώνεται σε αυτό το στενό εύρος ταχυτήτων.

Για ευκολία μπορεί να οριστεί ένας παράγοντας, ο παράγοντας οπισθέλκουσας που θα ισούται με το κλάσμα του συντελεστή οπισθέλκουσας ως προς το συντελεστή οπισθέλκουσας της ροής Stokes. Ο παράγοντας αυτός γράφεται ως :

$$f = \frac{c_d \cdot \text{Re}_{rev}}{24} \quad (8-5)$$

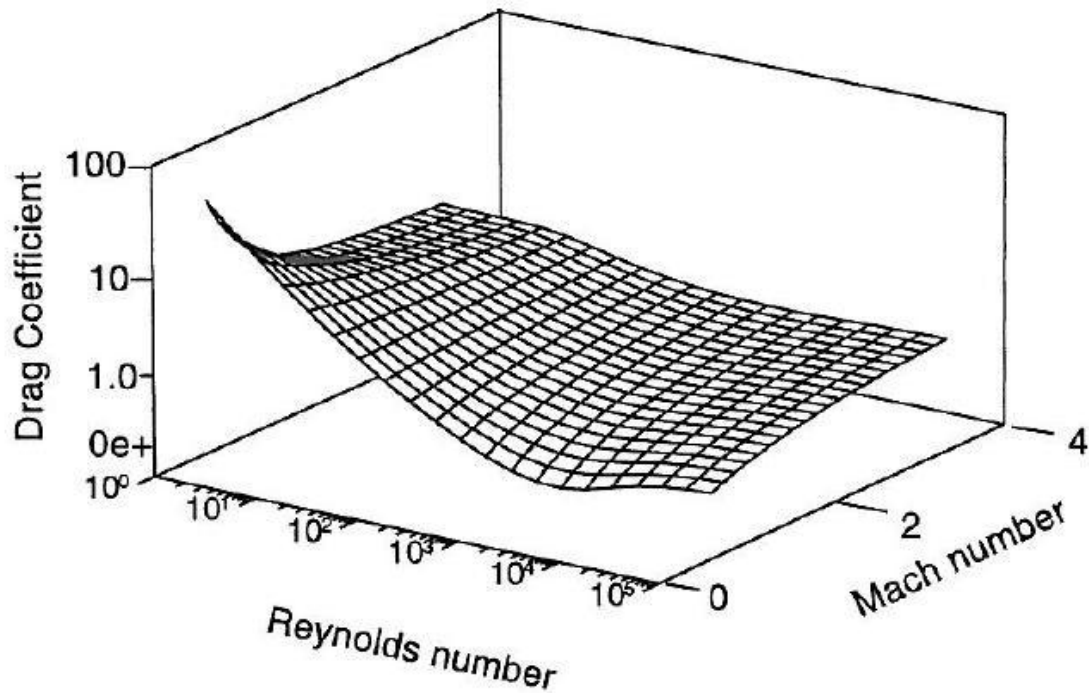
όπου : [  $\text{Re}_{rev} = 0$  σχετικός αριθμός Reynolds (-) ]

Μία πολύ καλή προσέγγιση για τον παράγοντα οπισθέλκουσας σε όλο το εύρος της υποκρίσιμης περιοχής δίνεται από τους (Clift and Gauvin 1970) :

$$f = 1 + 0.15 \cdot \text{Re}_{rev}^{0.687} + 0.0175 \cdot \text{Re}_{rev} \cdot (1 + 4.25 \cdot 10^4 \cdot \text{Re}_{rev}^{-1.16})^{-1} \quad (8-6)$$

Για την περίπτωση σφαιρικού σώματος η εξάρτηση του συντελεστή οπισθέλκουσας συναρτήσει του σχετικού αριθμού Reynolds και του σχετικού αριθμού Mach δίνεται όπως στο

Διάγραμμα 8.2 :



**Διάγραμμα 8.2:** Συντελεστής Οπισθέλκουσας για μη περιστρεφόμενη σφαίρα σαν συνάρτηση του αριθμού  $Re$  και του αριθμού  $Mach$  (Πηγή : C. Crowe - *Multiphase Flow with Particles and Droplets* 1998)

Από τους (Crowe *et al* 1972) προτείνεται η επόμενη εμπειρική σχέση για την εξάρτηση του συντελεστή οπισθέλκουσας από τους αριθμούς Reynolds και Mach :

$$c_d = 2 + (c_{d_0} - 2) \cdot \exp(-3.07 \cdot \sqrt{k} \cdot g \cdot M_{rev} \cdot Re_{rev}^{-1}) + h \cdot k^{-1/2} \cdot M_{rev}^{-1} \cdot \exp(-0.5 \cdot Re_{rev} \cdot M_{rev}^{-1}) \quad (8-7)$$

$$g = \frac{1 + Re_{rev} \cdot (12.278 + 0.548 \cdot Re_{rev})}{1 + 11.278 \cdot Re_{rev}} \quad (8-8)$$

$$h = \frac{5.6}{1 + M_{rev}} + 1.7 \cdot \sqrt{\frac{T_h}{T_a}} \quad (8-9)$$

όπου : [ $c_{d_0}$  = ο συντελεστής οπισθέλκουσας δίχως την επιρροή του αριθμού Mach (-),  $Re_{rev}$  = ο σχετικός αριθμός Reynolds (-),  $M_{rev}$  = ο σχετικός αριθμός Mach (-),  $k$  = ο λόγος των ειδικών θερμοχωρητικότητας  $c_p / c_v$  (-),  $T_h$  = η θερμοκρασία του σώματος (K),  $T_a$  = η θερμοκρασία του ρευστού (SI)]

Η παραπάνω σχέση (8-7) ισχύει και αυτή μέχρι τον κρίσιμο αριθμό Reynolds.

Δύναμη Άνωσης

Η επίδραση τοπικών βαθμίδων πίεσης δίνει ώθηση στην ανάπτυξη μίας δύναμης με κατεύθυνση ίδια με τη βαθμίδα πίεσης. Ένα ρευστό το οποίο βρίσκεται ακίνητο και με το σύνολο της μάζας του να βρίσκεται σε διαφορετικό ύψος δημιουργεί μέσα στον όγκο του μία κατανομή πίεσης στην οποία κινούμεθα προς τον πυθμένα η πίεση αυξάνει. Αυτό οφείλεται στην υδροστατική πίεση του ρευστού που βρίσκεται μέσα στο πεδίο βαρύτητας. Αν ένα σώμα βρίσκεται μέσα σε ένα τέτοιο ρευστό τότε η υδροστατική πίεση που θα εφαρμόζεται στο κατώτερο και στο ανώτερο σημείο του σώματος θα είναι διαφορετική. Αυτό σημαίνει ότι θα αναπτυχθεί μία δύναμη που ονομάζεται δύναμη άνωσης.

Η καθαρή δύναμη άνωσης δίνεται από το ολοκλήρωμα των στατικών πιέσεων  $\int_{cs} -p \cdot \vec{n} dS$  που από το θεώρημα απόκλισης του Gauss γράφεται ως  $\int_{cs} -\nabla \cdot p dV$ .

Η βαθμίδα πίεσης που δημιουργείται από το υδροστατικό πεδίο δίνεται από τη σχέση  $\nabla \cdot p = -\rho \cdot \vec{g} \cdot V$ .

Η δύναμη άνωσης λόγω πιέσεων δίνεται συνδυάζοντας τα παραπάνω από τη σχέση (νόμος του Αρχιμήδη) :

$$\vec{F}_b = \rho_a \cdot \vec{g} \cdot V_h \tag{8-10}$$

όπου : [ $\vec{F}_b$  = η δύναμη άνωσης (SI),  $\rho_a$  = η πυκνότητα του ρευστού (SI),  $V_h$  = ο όγκος του σώματος (SI),  $\vec{g}$  = η βαρυτική επιτάχυνση (SI)]

Με ανάλογο τρόπο εξάγεται και η δύναμη άνωσης λόγω διατμητικών δυνάμεων εφόσον υπάρχει βέβαια βαθμίδα διατμητικών δυνάμεων μέσα στο ρευστό.

Αυτή θα είναι :

$$\vec{F}_{b\tau} = \nabla \cdot \tau \cdot V_h \tag{8-11}$$

όπου : [ $\vec{F}_{b\tau}$  = η δύναμη άνωσης λόγω βαθμίδας διατμητικών τάσεων (SI),  $\tau$  = η διατμητική τάση (SI),  $V_h$  = ο όγκος του σώματος (SI)]

Δύναμη πρόσθετης μάζας

Όταν ένα σώμα επιταχύνεται μέσα σε ένα ρευστό, τότε αναπόφευκτα δημιουργείται μία επιτάχυνση της μάζας του ρευστού (τουλάχιστον τοπικά για αραιά ρευστά) η οποία και συμβαίνει με απορρόφηση ενέργειας έργου από το σώμα. Αυτή η επιπλέον κατανάλωση έργου για την μετακίνηση εκτός από το

σώμα και της αντίστοιχης μάζας ρευστού εκφράζεται ποσοτικά με την δύναμη πρόσθετης μάζας.

Η δύναμη πρόσθετης μάζας χωρίς περαιτέρω ανάλυση δίνεται στην τελική της μορφή από την επόμενη σχέση :

$$\overline{F}_{vm} = \frac{\rho_a \cdot V_h}{2} \cdot \frac{d(\overline{u}_{rev})}{dt} \quad (8-12)$$

όπου :  $[\overline{F}_{vm}] = \eta$  δύναμη πρόσθετης μάζας (SI)

### Δύναμη Basset

Η δύναμη Basset είναι δύναμη που προκαλείται από τα φαινόμενα συνεκτικότητας και πιο συγκεκριμένα από την υστέρηση στη δημιουργία οριακού στρώματος κατά την επιτάχυνση ενός σώματος μέσα σε ένα ρευστό. Για το λόγο αυτό αποκαλείτε πολλές φορές και ως δύναμη υστέρησης.

Η δύναμη Basset αποδεικνύεται [47] ότι δίνεται από τη σχέση :

$$\overline{F}_{bas} = \frac{3}{2} \cdot D_h^2 \cdot \sqrt{\pi \cdot \rho_a \cdot \mu_a} \cdot \left[ \int_0^t \frac{d(\overline{u}_{rev})}{\sqrt{t-t'}} dt' \right] \quad (8-13)$$

όπου :  $[\overline{F}_{bas}] = \eta$  δύναμη Basset (SI),  $D_h = \eta$  διάμετρος του σώματος (SI),  $\mu_c = \eta$  δυναμική συνεκτικότητα (SI), πυκνότητα του ρευστού (SI),  $t = \eta$  χρόνος υστέρησης (SI) ,  $t' = \eta$  μεταβλητή χρόνου ολοκλήρωσης (SI)]

Η φύση υστέρησης αυτής της μορφής δύναμης φαίνεται από το γεγονός ότι εξαρτάται από ένα χρονικό ολοκλήρωμα που αντιπροσωπεύει την “ιστορία” της επιτάχυνσης μέχρι εκείνη τη χρονική στιγμή που υπολογίζεται η δύναμη.

### Δύναμη Shaffman

Η δύναμη Shaffman είναι η δύναμη που προκαλείται από την κατανομή πίεσης που αναπτύσσεται γύρω από ένα σώμα στο οποίο η ταχύτητα της ροής του περιρρέον ρευστού είναι διαφορετική σε διαφορετικές πλευρές του σώματος.

Η δύναμη Shaffman είναι εντονότερη όταν ένα σωματίδιο πλησιάζει προς το οριακό στρώμα μίας επιφάνειας. Δίνεται συναρτήσει του σχετικού αριθμού Reynolds της ροής  $Re_{rev}$  από τη σχέση (Mei 1992) :



$$\vec{F}_{saffL} = \vec{F}_{saff} \cdot \left[ \begin{array}{l} (1 - 0.3314 \cdot \beta^{1/2}) \cdot \exp\left(-\frac{\text{Re}_{rev}}{10}\right) + \\ + 0.3314 \cdot \beta^{1/2} \end{array} \right] \quad (8-14)$$

για  $\text{Re}_{rev} \leq 40$

$$\vec{F}_{saffL} = \vec{F}_{saff} \cdot \left[ 0.0524 (\beta \cdot \text{Re}_{rev})^{1/2} \right] \quad (8-15)$$

για  $\text{Re}_{rev} > 40$

όπου

$$\vec{F}_{saff} = 1.61 \cdot D_h \cdot (\mu_a \cdot \rho_a)^{1/2} \cdot |\vec{\omega}_a|^{-1/2} \cdot [\vec{u}_{rev} \times \vec{\omega}_a] \quad (8-16)$$

$$\beta = \frac{D}{2 \cdot |\vec{u}_{rev}|} \cdot |\vec{\omega}_a| \quad (8-17)$$

$$\vec{\omega}_a = \nabla \times \vec{u}_a \quad (8-18)$$

όπου :  $[\vec{F}_{saffL}] = \eta$  δύναμη Shaffman (SI)

### Δύναμη Magnus

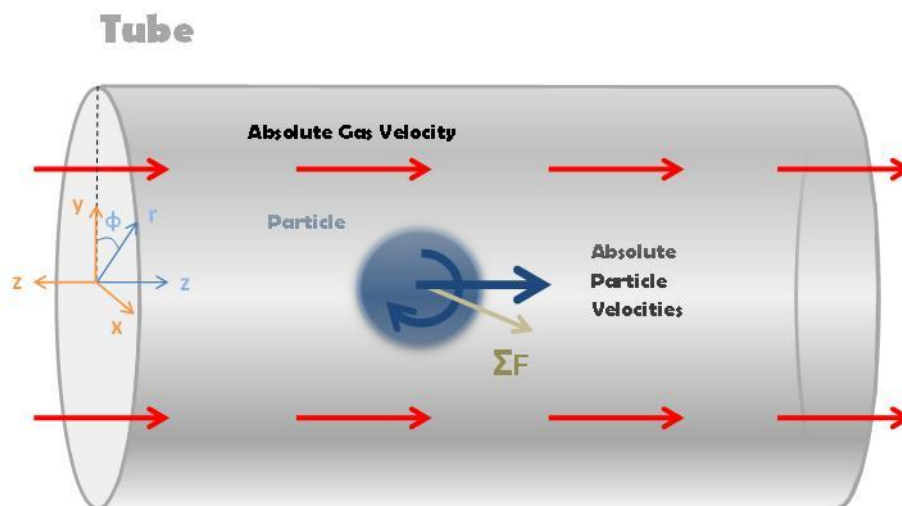
Η δύναμη Magnus είναι η δύναμη που αναπτύσσεται σε ένα σωματίδιο που περιστρέφεται γύρω από τον εαυτό του. Η δύναμη αυτή προκαλείται από τη διαφορά ταχυτήτων που εμφανίζεται στις αντιδιαμετρικές περιοχές του σωματιδίου που προκαλεί με τη σειρά της διαφορά πίεσης. Η δύναμη Magnus αποδεικνύεται ότι δίνεται από τη σχέση [47] :

$$\vec{F}_{mag} = \frac{\pi}{8} \cdot D_h \cdot \rho_a \cdot \left[ \left( \frac{1}{2} \nabla \times \vec{u}_a - \vec{\omega}_h \right) \times \vec{u}_{rev} \right] \quad (8-19)$$

όπου :  $[\vec{F}_{mag}] = \eta$  δύναμη Magnus (SI)

### 8.3 Μοντέλο Κίνησης

Για τη δημιουργία ενός μοντέλου κίνησης χρειάζεται η επίλυση των εξισώσεων κίνησης. Οι εξισώσεις κίνησης που περιγράφουν τη κίνηση του σωματιδίου εξάγονται από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα.



Σχήμα 8.3: Αλληλεπίδραση σωματιδίου με το πεδίο ροής εντός σωλήνα

Οι εξισώσεις κίνησης σε κυλινδρικές συντεταγμένες διατυπώνονται ως :

$$\sum F_r = m_h \cdot \left( \ddot{r} - r \cdot \dot{\varphi}^2 \right) \quad (8-20)$$

$$\sum F_\varphi = m_h \cdot \left( 2 \cdot \dot{r} \cdot \dot{\varphi} + 2 \cdot r \cdot \ddot{\varphi} \right) \quad (8-21)$$

$$\sum F_z = m_h \cdot \ddot{z} \quad (8-22)$$

Οι δυνάμεις που λογαριάζονται ως έχουσες τη μεγαλύτερη επίδραση στην κίνηση του σωματιδίου είναι το Βάρος, η Άνωση, η Οπισθέλκουσα σταθερής κατάστασης, η Κλίση Πίεσης και η Δύναμη Shaffman. Στις εξισώσεις (8-20) και (8-21) που αναφέρονται στην ακτινική και την περιφερειακή διεύθυνση εμφανίζονται λόγω της περιγραφής σε περιστρεφόμενο σύστημα οι φαινόμενοι όροι επιτάχυνσης δηλαδή η επιτάχυνση Coriolis και η φυγόκεντρος επιτάχυνση<sup>1</sup>.

Οι δυνάμεις που λογαριάζονται ως έχουσες επίδραση διατυπώνονται κατά αντιστοιχία με τη σειρά που αναφέρθηκαν παραπάνω ως :

<sup>1</sup> Σημειώνεται εδώ ότι οι όροι αυτοί προέκυψαν αποκλειστικά και μόνο από τη διαφορίση των σύνθετων μεταβλητών μετατόπισης. Αν και έχουν την ίδια ονομασία με την επιτάχυνση Coriolis και τη φυγόκεντρο επιτάχυνση, που εμφανίζονται στην περιγραφή περιστρεφόμενων συστημάτων σε σχετική κίνηση, δεν είναι ίδιοι και δεν θα πρέπει να συγχέονται.

$$\vec{F}_g = -\rho_h \cdot V_h \cdot \vec{g} \quad (8-23)$$

$$\vec{F}_a = \rho_a \cdot V_h \cdot \vec{g} \quad (8-24)$$

$$\vec{F}_d = \frac{1}{2} \cdot \rho_a \cdot c_d \cdot A_h \cdot (\vec{u}_a - \vec{u}_h) \cdot \left( \|\vec{u}_a\| - \|\vec{u}_h\| \right) \quad (8-25)$$

$$\vec{F}_p = V_h \cdot \nabla p \quad (8-26)$$

$$\vec{F}_s = \frac{\rho_a \cdot \pi}{8} \cdot d_{h,in}^3 \cdot C_{LS} \cdot (\vec{u}_a - \vec{u}_h) \times \nabla \vec{u}_a \quad (8-27)$$

Στις παραπάνω εξισώσεις λήφθηκαν τα πρόσημα όπως στο **Σχήμα 8.3** και ορίζοντας σχετική ταχύτητα την ταχύτητα του αέρα ως προς το σωματίδιο.

Με εισαγωγή όλων των παραπάνω όρων δυνάμεων στις εξισώσεις κίνησης και κρατώντας στο αριστερό μέλος μόνο τη δεύτερη χρονική παράγωγο κάθε μεταβλητής θέσης, προκύπτουν οι τελικές μορφές των εξισώσεων κίνησης που είναι :

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = \left[ \begin{aligned} & \frac{3}{4} \cdot \frac{\rho_a}{d_{h,in}} \cdot \frac{\rho_a}{\rho_h} \cdot c_d \left( \sqrt{|u_{r,a} - u_{r,h}|^2 + |u_{\phi,a} - u_{\phi,h}|^2 + |u_{z,a} - u_{z,h}|^2} \right) \cdot (u_{r,a} - u_{r,h}) + \\ & + \left( \frac{\rho_a}{\rho_h} - 1 \right) \cdot g \cdot \sin(\theta) + \frac{1}{\rho_h} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{F_s}{m_h} + r \cdot u_{\phi,h}^2 \end{aligned} \right] \quad (8-28)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \left[ \begin{aligned} & \frac{3}{4} \cdot \frac{\rho_a}{d_{h,in}} \cdot \frac{\rho_a}{\rho_h} \cdot c_d \left( \sqrt{|u_{r,a} - u_{r,h}|^2 + |u_{\phi,a} - u_{\phi,h}|^2 + |u_{z,a} - u_{z,h}|^2} \right) \cdot \frac{(u_{\phi,a} - u_{\phi,h})}{2r} + \\ & + \left( \frac{\rho_a}{\rho_h} - 1 \right) \cdot \frac{g \cdot \sin(\theta)}{2r} + \frac{1}{2r} \cdot \frac{1}{\rho_h} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{2r} \cdot \frac{F_s}{m_h} - 2 \cdot \frac{u_{r,h} \cdot u_{\phi,h}}{2r} \end{aligned} \right] \quad (8-29)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \left[ \begin{aligned} & \frac{3}{4} \cdot \frac{\rho_a}{d_{h,in}} \cdot \frac{\rho_a}{\rho_h} \cdot c_d \left( \sqrt{|u_{r,a} - u_{r,h}|^2 + |u_{\phi,a} - u_{\phi,h}|^2 + |u_{z,a} - u_{z,h}|^2} \right) \cdot (u_{z,a} - u_{z,h}) + \\ & + \frac{1}{\rho_h} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{F_s}{m_h} \end{aligned} \right] \quad (8-30)$$

Οι αντίστοιχες εξισώσεις σε καρτεσιανό σύστημα και για την περίπτωση που λογαριάζονται μόνο η δύναμη του βάρους και η δύναμη οπισθέλκουσας είναι :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \left[ \frac{3}{4 \cdot d_{h,in}} \cdot \frac{\rho_a}{\rho_h} \cdot c_d \left( \sqrt{|u_{x,a} - u_{x,h}|^2 + |u_{y,a} - u_{y,h}|^2 + |u_{z,a} - u_{z,h}|^2} \right) \cdot (u_{x,a} - u_{x,h}) \right] \quad (8-31)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \left[ \frac{3}{4 \cdot d_{h,in}} \cdot \frac{\rho_a}{\rho_h} \cdot c_d \left( \sqrt{|u_{x,a} - u_{x,h}|^2 + |u_{y,a} - u_{y,h}|^2 + |u_{z,a} - u_{z,h}|^2} \right) \cdot (u_{y,a} - u_{y,h}) - g \right] \quad (8-32)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \left[ \frac{3}{4 \cdot d_{h,in}} \cdot \frac{\rho_a}{\rho_h} \cdot c_d \left( \sqrt{|u_{x,a} - u_{x,h}|^2 + |u_{y,a} - u_{y,h}|^2 + |u_{z,a} - u_{z,h}|^2} \right) \cdot (u_{z,a} - u_{z,h}) \right] \quad (8-33)$$

Οι εξισώσεις αυτές επιλύονται με τις αριθμητικές μεθόδους.

# 9

## Συμπεράσματα - Προτάσεις

Στο κεφάλαιο αυτό διατυπώνονται τα συμπεράσματα από την παρούσα έρευνα και προτείνονται ορισμένα πεδία εξαιρετικά ενδιαφέροντα για περαιτέρω μελέτη.

### 9.1 Συμπεράσματα

Στην παρούσα έρευνα έγινε περιγραφή των προβλημάτων που μπορεί να δημιουργηθούν από την εισρόφηση μεγάλων ποσοτήτων χαλαζιού. Φάνηκε ότι τα προβλήματα μπορούν να εξελιχθούν σε ιδιαίτερα σημαντικά αφού εκτός από το σβήσιμο της μηχανής μπορούν να προκαλέσουν και μόνιμες μηχανικές βλάβες. Διαπιστώνεται ότι η εισρόφηση πάγου είναι ένα φαινόμενο που αξίζει το ενδιαφέρον της αεροπορικής βιομηχανίας και αποτελεί σημαντικό παράγοντα στον κλάδο της ασφάλειας των πτήσεων.

Με την ανάλυση που έγινε γύρω από τη θέσπιση των ορίων πιστοποίησης φάνηκε ότι υπάρχει ένα κενό σε σχέση με την εισρόφηση μικροκρυστάλλων στις αεροπορικές μηχανές. Τα όρια πιστοποίησης για το χαλάζι δείχνουν να έχουν θεσμοθετηθεί με στόχο τη μηχανική διασφάλιση της αντοχής της μηχανής και όχι τη θερμοδυναμική σταθερότητα του κύκλου. Αυτό είναι ιδιαίτερα εμφανές και από το γεγονός ότι οι επικίνδυνες περιοχές στις καταιγίδες που μετρήθηκαν χαρακτηρίστηκαν ως επικίνδυνες για την ποσότητα πάγου που περιείχαν και όχι από το συνολικό ποσό νερού που βρισκόταν στην περιοχή. Το θεσμοθετημένο όριο πιστοποίησης λαμβάνει υπόψιν μόνο την ποσότητα του πάγου και όχι το συνολικό φορτίο νερού στο οποίο συμπεριλαμβάνεται και η βροχή.

Οι αεροπορικές μηχανές είναι ιδιαίτερα ευάλωτες στην εισρόφηση χαλαζιού σε λειτουργία με χαμηλές στροφές κινητήρα και υψηλή ταχύτητα πτήσης. Η θεώρηση αυτή επιβεβαιώθηκε και με τη μελέτη της συγκέντρωσης του χαλαζιού στον αγωγό εισόδου της μηχανής. Η ρύθμιση ισχύος με χαμηλές στροφές κινητήρα και υψηλή ταχύτητα πτήσης αποτελεί τη συνήθη κατάσταση κατά την κάθοδο του αεροσκάφους. Έτσι το σκέλος της αποστολής με τη μεγαλύτερη επικινδυνότητα ως προς το χαλάζι είναι η κάθοδος.

Σε ότι αφορά τις μηχανικές και θερμικές ιδιότητες που λαμβάνονται υπόψιν συνήθως στη βιβλιογραφία, αυτές θεωρούνται σχεδόν πάντα ως οι ιδιότητες του καθαρού πάγου σφαιρικού σχήματος. Οι ιδιότητες του καθαρού πάγου έχουν αρκετή απόκλιση από τις πραγματικές ιδιότητες που δύναται να έχει το χαλάζι καθώς αυτό συνήθως αποτελεί πάγο διαφορετικής πυκνότητας,

διαφορετικού σχήματος, διαφορετικής επιφανειακής κατάστασης και πορώδους εσωτερικής δομής.

Κατά τη θερμική μελέτη της υγροποίησης των στοιχείων πάγου που βρίσκονται μέσα σε σχετικό ρεύμα αέρα διαπιστώθηκε πως οι παράγοντες που έχουν τη μεγαλύτερη επίδραση στο χρόνο υγροποίησης είναι η θερμοκρασία του αέρα, η σχετική ταχύτητα του αέρα και κυρίως το αρχικό μέγεθος των σωματιδίων. Χαρακτηριστικά, για ένα σφαιρικό σωματίδιο με διάμετρο μεγαλύτερη από ένα χιλιοστό, διαπιστώθηκε ότι η μεταβολή της ακτίνας του κατά τη διέλευση μέσα από το συμπιεστή της αεροπορικής μηχανής, μη λαμβάνοντας υπόψη τη μηχανική αλληλεπίδραση, είναι σχεδόν αμελητέα. Φαίνεται ακόμα ότι για να υγροποιηθεί ολικά ένα στοιχείο πάγου μέσα στο συμπιεστή πρέπει η αρχική διάμετρος να μην είναι μεγαλύτερη των 100  $\mu\text{m}$ .

Η θερμοκρασία επιφανείας κατά την υγροποίηση μπορεί να φτάσει σε πολύ υψηλά επίπεδα και η θεώρηση ενός μη ισόθερμου επιφανειακού υγρού στρώματος επιφέρει σημαντικές αλλαγές στο ρυθμό υγροποίησης και ατμοποίησης. Αυτό συμβαίνει γιατί η μεταφορά θερμότητας και κυρίως η μεταφορά μάζας έχουν πολύ ισχυρή εξάρτηση από τη θερμοκρασία επιφανείας. Η εφαρμογή επίσης διαφορετικών πυκνοτήτων ανάμεσα στο υγρό νερό και το στερεό πάγο προκαλεί σημαντική διαφορά στο ρυθμό μεταβολής του μεγέθους των σωματιδίων ιδιαίτερα όταν η πυκνότητα του πάγου είναι πολύ χαμηλή.

Στην ανάλυση της μηχανικής συμπεριφοράς και της αλληλεπίδρασης με τις επιφάνειες της μηχανής διαπιστώθηκε ότι οι διαδοχικές κρούσεις των σωματιδίων πάγου με τυπικές τιμές ταχυτήτων και γωνιών κρούσης που αναμένονται, οδηγεί κατά πάσα πιθανότητα στη θραύση μέχρι το μέγεθος των θραυσμάτων να φτάσει το κατώτερο όριο των 10  $\mu\text{m}$ . Από εκεί και έπειτα δεν αναμένεται περαιτέρω θραύση. Το όριο αυτό αυξάνει βέβαια όσο τα σωματίδια επιβραδύνονται περαιτέρω μέσα στη μηχανή. Στην περίπτωση αναπήδησης δίχως θραύση η θεωρία ώθησης – ορμής μπορεί να περιγράψει ικανοποιητικά τη φορά κίνησης των ανακλώμενων σωματιδίων. Για ταχύτητες πρόσπτωσης πάνω από 10 m/s και διάμετρο μικρότερη από 1cm ο χρόνος κρούσης είναι μικρότερος από 50  $\mu\text{s}$ . Σε αυτό το διάστημα, αν η επιφάνεια είναι εξαιρετικά θερμή (όπως στο συμπιεστή της μηχανής π.χ.) η θερμοκρασιακή αύξηση της μάζας του χαλαζιού μπορεί να φτάσει μέχρι και τους 0.01  $^{\circ}\text{C}$ . Όταν η επιφάνεια της μηχανής διατηρεί ένα επιφανειακό φιλμ υγρού νερού τότε είναι πολύ πιθανός και ο εγκλωβισμός των σωματιδίων. Αυτά θα απορροφήσουν πολύ μεγαλύτερα ποσά θερμότητας από την επιφάνεια και επομένως όντως μπορεί να δημιουργηθεί έμμεση παραγωγή σε σημεία αρκετά βαθιά μέσα στο εσωτερικό του συμπιεστή.

Κατά τη μελέτη της κίνησης οι δυνάμεις οι οποίες ενεργούν και έχουν μεγαλύτερη επίδραση στην τροχιά των σωματιδίων είναι η δύναμη οπισθέλκουσας και η δύναμη του βάρους. Τα σωματίδια πάγου μεγέθους μεγαλύτερα από 1 mm δεν επηρεάζονται σημαντικά από το πεδίο ροής του αέρα.

Στην παρούσα μελέτη έγινε εκτενής βιβλιογραφική έρευνα για την αναζήτηση των τρόπων μοντελοποίησης στη βιβλιογραφία της εισρόφησης πάγου άλλα και

της εισρόφησης βροχής στις στροβιλομηχανές. Σε ότι αφορά τη βροχή υπάρχει αντικειμενικά αρκετή και εις βάθος ανάλυση του τρόπου και ένα μεγάλο μέρος της μελέτης εμφανίζεται σε διδακτορικές διατριβές στα πλαίσια πανεπιστημιακής έρευνας. Στο πεδίο αυτό, της μοντελοποίησης των σταγόνων νερού, έχει προχωρήσει και το Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών του Ε.Μ.Π. Το κομμάτι που αφορά τη στερεά δομή του νερού δηλαδή το χαλάζι δεν είναι αρκετά μελετημένο. Αυτό πιθανά συμβαίνει γιατί η εισρόφηση πάγου αποτελεί θέμα ασφαλούς λειτουργίας των μηχανών και συνηθίζεται στην βιομηχανία τα θέματα ασφάλειας να ελέγχονται με πειραματικές διατάξεις (*χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελούν τα crash tests στην αυτοκινητοβιομηχανία*). Οι σταγόνες νερού χρησιμοποιούνται από τη δεκαετία του 60' για την αύξηση του βαθμού απόδοσης των στροβιλομηχανών μέσω έγχυσης μικροσταγονιδίων κατά τη συμπίεση. Έτσι δημιουργήθηκε ανάγκη για μεγαλύτερη έρευνα αφού υπήρχαν αρκετά περιθώρια βελτιστοποίησης. Η εισρόφηση χαλαζιού από την άλλη δεν έχει μελετηθεί αρκετά.

Μπορεί να σημειωθεί τέλος ότι ακόμα και στην περίπτωση των σταγόνων υπάρχει αρκετή δυσκολία στη μελέτη της αλληλεπίδρασης με το θάλαμο καύσης. Αυτή η δυσκολία αποτελεί μεγαλύτερο πρόβλημα στη μελέτη της αλληλεπίδρασης των στοιχείων πάγου αφού η θερμική συμπεριφορά ενός σωματιδίου δύο φάσεων όπως το υγρό χαλάζι είναι πάντα πιο πολύπλοκη. Στη βιβλιογραφία δε φαίνεται να υπάρχει μελέτη πάνω στο θέμα αυτό. Ενδεικτικά στην περίπτωση των σταγόνων θεωρείται συνήθως μία μηδενικής διάστασης ανάλυση κατά την οποία όλη η ποσότητα νερού μετατρέπεται σε ατμό. Η χρησιμοποίηση μίας ανάλογης θεώρησης στο χαλάζι είναι αμφιλεγόμενη αφού τα στοιχεία πάγου μπορεί να μην υγροποιηθούν εξ ολοκλήρου κατά το πολύ σύντομο χρονικό διάστημα της παραμονής τους στο εσωτερικό της μηχανής.

## 9.2 Προτάσεις

Λόγο της διαφορετικής ποσότητας μικτού φορτίου νερού από τα όρια πιστοποίησης κρίνεται ασφαλέστερο η πιστοποίηση των μηχανών να γίνεται επιβάλλοντας τα μέγιστα όρια βροχής και τα μέγιστα όρια χαλαζιού ταυτόχρονα. Ενδείκνυται ακόμα σύμφωνα και με πρόσφατες δημοσιεύσεις ερευνητών η εφαρμογή μίας νέας παραγράφου στο πρόγραμμα πιστοποίησης που θα περιλαμβάνει την παρατεταμένη εισρόφηση μικροκρυστάλλων. Η εισρόφηση χαλαζιού και νερού είναι φαινόμενα που διαφοροποιούνται σημαντικά σε συνθήκες πτήσης και οι συνθήκες αυτές θα πρέπει να προσομοιώνονται με το βέλτιστο δυνατό τρόπο κατά τις επίγειες δοκιμές ελέγχου. Χρειάζεται ακόμα βαθύτερη μελέτη της συμπεριφοράς του πραγματικού χαλαζιού και των υπόλοιπων δομών πάγου της ατμόσφαιρας.

Η εισρόφηση χαλαζιού και μικροκρυστάλλων πάγου δεν έχει μελετηθεί αρκετά και η ανάπτυξη υπολογιστικών μοντέλων θα είναι εξαιρετικά χρήσιμη για τη βιομηχανία. Η δυνατότητα υπολογιστικής προσομοίωσης της λειτουργίας σε κατάσταση χαλαροεισρόφησης δίνει ένα επιπλέον εργαλείο στην παραγωγή ώστε να ελέγχει την ανθεκτικότητα των μηχανών κατά τη σχεδίαση και όχι

πάνω στις εγκαταστάσεις δοκιμών όπου υπάρχει πάντα το ενδεχόμενο της αποτυχίας.

Στην παρούσα μελέτη αναπτύχθηκαν ορισμένοι τρόποι μοντελοποίησης των μηχανισμών αποσύνθεσης του χαλαζιού στο εσωτερικό της μηχανής και τα μοντέλα αυτά αφορούν ένα και μόνο μεμονωμένο σωματίδιο ανα περίπτωση. Δεν μελετήθηκε καθόλου η συμπεριφορά ενός νέφους σωματιδίων, αντικείμενο που είναι και το ουσιαστικό θέμα ενδιαφέροντος ιδιαίτερα στην περίπτωση παραγωγής θραυσμάτων. Τα μεμονωμένα μοντέλα πρέπει ακόμα να βρίσκονται σε διασύνδεση με ένα κοινό κώδικα συνολικής μοντελοποίησης που θα υπολογίζει τις παραμέτρους λειτουργίας της αεροπορικής μηχανής κατά την εισρόφηση χαλαζιού και μικροσωματιδίων πάγου.

Ένα τελευταίο θέμα που χρίζει βαθύτερης ανάλυσης και μελέτης είναι η αλληλεπίδραση των σωματιδίων νερού με το θάλαμο καύσης της αεροπορικής μηχανής. Στη βιβλιογραφία υπάρχει ελάχιστη έρευνα πάνω στο θέμα και η πλήρης ατμοποίηση του πάγου στο θάλαμο καύσης δεν είναι πειραματικά αποδεδειγμένη.

Στη **Εικόνα 9.1** δίνεται ένα στιγμιότυπο από την επίγεια δοκιμή εισρόφησης χαλαζιού στον κινητήρα παραγωγής GE 90 της εταιρείας General Electric. Ο κινητήρας GE 90 είναι η μεγαλύτερη και πιο ισχυρή αεροπορική μηχανή που κατασκευάστηκε ποτέ. Αυτό είναι ενδεικτικό του μεγέθους των εσωτερικών και των εξωτερικών διαστάσεων της. Στο παρακάτω στιγμιότυπο φαίνεται ότι μία μεγάλη χαλαζόμπαλα εισέρχεται στον κινητήρα, θρυμματίζεται πιθανόν από τη σύγκρουση της με το Fan και ένα μεγάλο μέρος της εξέρχεται από το ρεύμα παράκαμψης. Τα υπόλοιπα θραύσματα φαίνεται να εξέρχονται από το ρεύμα του πυρήνα και μάλιστα με υψηλότερη ταχύτητα. Αν η ποσότητα αυτή νερού που φαίνεται να εξέρχεται από το ρεύμα πυρήνα δεν είναι ατμός και δεν προέρχεται από το ρεύμα απομάστευσης τότε σίγουρα κάποια στοιχεία μικροπάγων επέζησαν διερχόμενα από το συμπιεστή, το θάλαμο καύσης και το στρόβιλο.





**Εικόνα 9.1: Στιγμιότυπο από βίντεο που τραβήχτηκε κατά τη δοκιμή του κινητήρα GE90 της General Electric σε λειτουργία υπο συνθήκες εισρόφησης χαλαζιού. Στον μεγάλο κόκκινο κύκλο φαίνονται τα θραύσματα που εξάγονται με το ρεύμα πυρήνα και στον μικρό κύκλο η επόμενη χαλαζόμπαλα που βάλλεται προς τη μηχανή (Πηγή : History Channel “ More of the World's Biggest Machines ” 2004)**



## Βιβλιογραφία

- [1] Q. Monsen, C.M. Ehresman, and S.N.B. Murthy, 1995. "Hail Ingestion Simulation Tunnel (Hist) For Inlet And Rotor Studies", AIAA-95-2388.
- [2] J. Mason., 2008. "Current Perspectives on Jet Engine Power Loss in Ice Crystal Conditions: Engine Icing", 2008 AIAA 7th AIRA Research Implementation Forum.
- [3] United States Federal Aviation Administration , 2000. "Advisory Circular ", 33.78-1.
- [4] Jeanne G. Mason, J. Walter Strapp, Philip Chow Andrenelli L., 2006. "The Ice Particle Threat to Engines in Flight ", AIAA 2006-206.
- [5] N. Gopalaswamy and S.N.B. Murthy, 1994. "Massive Particle Ingestion in Engine Inlets ", AI AA-94-0364.
- [6] P. Render and H. Pan, 1993. "Studies into the Hail Ingestion Characteristics of Turbofan Engines ", AIAA 93-2174.
- [7] H. Pan and P. M. Render, 1994. "Experimental Studies into the Hail Ingestion Characteristics of Turbofan Engines", AIAA 94-2956.
- [8] H. Pan and P. M. Render, 1995. "The Influence of Target Rotation on Impact Characteristics of Simulated Hailstones", AIAA 95-3038.
- [9] H. Pan and P. M. Render, 1995. "Experimental Studies Into Hail Impact Characteristics", Journal of Propulsion and Power Vol 11 No 6.
- [10] K.S. Venkataramani, B.R. Patel and D.L. Riemann, 2005. "Turbofan Engine Hail Ingestion\* Simulation in a Cycle Deck Model", AIAA 2005-1126.
- [11] MDS Aero Support Corporation, 2005. "Global Icing Certification Facility", MDS Proprietary Information 2005.
- [12] H. Pruppacher, J. Klett, 1997. "Microphysics of Clouds and Precipitation 2nd edition ", Kluwer Academic Publishers.
- [13] E. M. Schulson, P. Duval, 2009. "Creep and Fracture of Ice ", Cambridge University Press.
- [14] N. H. Fletcher, 1970. "The chemical Physics Of Ice ", Cambridge University Press.
- [15] A. F. Mills, 1995. "Heat and Mass Transfer ", IRWIN.
- [16] W. A. Sirignano, 2010. "Fluid Dynamics and Transport of Droplet and Sprays ", Cambridge University Press.
- [17] G.B. Lesins, Ronald List, 1995. "Sponginess And Drop Shedding Of Gyating Hailstones In A Pressure Controlled Icing Wind Tunnel", Journal of the Atmospheric Sciences Vol 43 No 23 .
- [18] AGARD, 1995. "Recommended Practices for the Assessment of the Effects of Atmospheric Water Ingestion on the Performance and Operability of Gas Turbine Engines ", AGARD-AR-332.
- [19] European Aviation Safety Office, 2010. "Hail Threat Standarization", Research Project EASA.2008.OP.25.
- [20] McVey, Pullen, Oliver, Pritchard et al GE Aviation "Inclement Weather Regulations for Turbofan Engines, the Need for More Comprehensive Requirements and Methods of Compliance" 2007
- [21] I. Roumeliotis, 2011. "Scoop Factor Analysis", Internal Report.
- [22] United States Federal Aviation Administration, 1996. "Airworthiness Standards; Rain and Hail Ingestion Standards ", Federal Register: Volume 61, Number 155.
- [23] David R. Lide, 2009. "CRC Handbook of Chemistry and Physics ", CRC Press 90th edition.
- [24] Allan Mills, 2008. "The coefficient of friction particularly of Ice ", Physics Education Journal.
- [25] Richard Fitzpatrick, 2006. "Thermodynamics & Statistical Mechanics ", The University of Texas at Austin .
- [26] Payam Rahimi, Charles A. Ward, 2005. "Kinetics of Evaporation : Statistical Rate Theory Approach ", Int. J. of Thermodynamics Vol.8 (No1) pp. 1-14 .
- [27] G. Strotos, M. Gavaises, A. Theodorakos, G. Bergeles, 2008. "Numerical investigation on the evaporation of droplets depositing on heated surfaces at low Weber numbers ", International Journal of Heat and Mass Transfer 51 (1516-1529) .
- [28] Roland List, J.G.Dussault, 1967. "Quasi State Icing And Melting Conditions And Heat Transfer Of Spherical And Spheroidal Hailstones ", Journal of Atmospheric Sciences Vol 24.
- [29] Roy. M. Rasmussen, Andrew. J. Heymsfield, 1987. "Melting And Shedding of Graupel and Hail Part II Model Physics ", Journal of Atmospheric Sciences Vol 44 No 19.

- [30] J. Mason, 1956. "On the melting of hailstones ", 551.578.71.
- [31] J. C. Drake, B.J. Mason, 1966. "The melting of small Ice spheres and Cones ", 551.573.
- [32] J. E. McDonald, 1963. "Use of Electrostatic Analogy in Studies of Ice Crystal Growth ", ZAMP Vol 14.
- [33] T. R. Marrero, E.A. Mason, 1972. "Gaseous Diffusion Coefficients ", Journal of Physical and Chemistry Data Vol 1 No 1.
- [34] C. Narasimhan, W. H. Gauvin, 1967. "Heat Mass Transfer to Spherew in High Temperatures Surroundings ", The Canadian Journal of Chemical Engineering Vol. 45.
- [35] J. Sun and M. M. Chen, 1987. "A theoretical analysis of heat transfer due to particle impact ", Journal of Heat Mass Transfer Vol. 31, No. 5 pp. 969-975.
- [36] Arden L. Buck, 1981. "New Equations For Computing Vapor Pressure And Enhancement Factor" Journal of Applied Meteorology Vol. 20.
- [37] F. Ben-Ammar, M. Kaviany and J. R. Barber, 1991. "Heat transfer during impact ", In, J. Hear Mass Transfer. Vol. 35. No. 6, pp. 1495-1506.
- [38] Hyonny Kim and Keith T. Kedward , 2006. "Experimental Measurement And Numerical Prediction Of Hail Ice Impact Damage On Composite Panels", DARPA Project.
- [39] Hyonny Kim, Douglas A. Welch, Keith T. Kedward, 202. "Experimental investigation of high velocity ice impacts on woven carbon epoxy composite panels ", 10.1016/S1359-835X Elsevier Science.
- [40] R. Rasmussen, H. R. Pruppacher, 1982. "A Wind Tunnel And Theoretical Study Of The Melting Behaviour Of Atmospheric Ice Particles I : A wind tunnel study of frozen drops of radius lower than 500 microns ", Journal of Atmospheric Sciences Vol 39.
- [41] R. M. Rasmussen, V. Levizzani, H. R. Pruppacher, 1984. "A Wind Tunnel And Theoretical Study Of The Melting Behaviour Of Atmospheric Ice Particles II : A theoretical study for frozen drops of radius lower than 500 Microns ", Journal of Atmospheric Sciences Vol 41 No 3.
- [42] R. M. Rasmussen, V. Levizzani, H. R. Pruppacher, 1984. "A Wind Tunnel And Theoretical Study Of The Melting Behaviour Of Atmospheric Ice Particles III. Experiment and Theory for Spherical Ice Particles of Radius Greater Than 500 Microns ", Journal of Atmospheric Sciences Vol 41 No 3.
- [43] H. R. Pruppacher, R. M. Rasmussen, 1979. "A Wind Tunnel Investigation of the rate of Evaporation of Large Water Drops Falling At Terminal Velocity in Air ", Journal of Atmospheric Sciences Vol 36.
- [44] Lou DeCang, David Hammond, 2011. "Heat and Mass Transfer for Ice Particle Ingestion Inside Aero-Engine" ASME Journal of Turbomachinery 10.1115/1.4002419.
- [45] Incorpera, De Witt, Bergman, Lavine, 2007. "Fundamentals of Heat and Mass Transfer 6th edition ", Wiley Publications.
- [46] Armin N. Aufdermaur, Jurg Joss, 1967. "A Wind Tunnel Investigation on the Local Heat Transfer from a Sphere Including the Influence of Turbulence and Roughness", ZAMP Vol 18.
- [47] Clayton Crowe, Martin Sommerfeld, Yutaka Tsuji, 1998. "Multiphase Flow with Particles and Droplets ", CRC Press.
- [48] German Vidaurre, John Hallett, 2008. "Particle Impact and Breakup in Aircraft Measurements", Journal of Atmospheric and Oceanic Technology Vol 26.
- [49] Powel Kosinski, Alex C. Hoffmann, 2010. " An extension of the hard-sphere particle-particle collision model to study agglomeration ", Chemical Engineering Science 65 (2010), pp. 3231-3239.
- [50] Peter A. Engel, 1976. "Impact Wear of Materials ", Elsevier Scientific Publishing Company.
- [51] I. I. McNaughtan, S. W. Chisman, 1993. "A Study of Hail Impact At High Speed on Light Alloy Plates ", Royal Aircraft Establishment.
- [52] Marco Anghileri, Luigi M. L. Castelletti, Fabio Invernizzi, Marco Mascheroni, 2004. "A survey of numerical models for hail impact analysis using explicit finite element codes ", International Journal of Impact Engineering 31 (2005) 929-944.
- [53] Yann Chuzel, Alain Combescure, Marco Nucci, Roland Ortiz, Yann Perrin. 2010. "Development Of Hail Material Model For High Speed Impacts On Aircraft Engine ", 11th International LS DYNA Users Conference Aerospace (1).
- [54] Magnus Holmgren 2006. "X Steam, Thermodynamic properties of water and steam ", Matlab File Exchange.

# **ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ**



# Π1 Σχετικά με την Ατμοποίηση

## Εισαγωγή

Η εξάτμιση του νερού είναι ένα φαινόμενο που λίγο πολύ όλοι το ζουν στην καθημερινότητα. Εκ πείρας και λόγω της φυσικής αντίληψης που αποκτά κανείς παρατηρώντας τα φαινόμενα στη φύση συνηθίζεται και λέγεται ότι το νερό σε πίεση μίας ατμόσφαιρας και σε θερμοκρασία δωματίου είναι υγρό. Λέγεται ακόμα ότι για θερμοκρασίες κάτω του μηδενός το νερό παγώνει ενώ για θερμοκρασίες άνω των  $100^{\circ}\text{C}$  το νερό γίνεται ατμός. Στην πραγματικότητα η κατάσταση ή η φάση (πιο δόκιμα) στην οποία θα βρίσκεται το νερό εξαρτάται από τις μεταβλητές κατάστασης που το καθορίζουν και την απόσταση που έχει από τις θερμοδυναμικές συνθήκες ισορροπίας. Για παράδειγμα στους  $25^{\circ}\text{C}$  ένα ποτήρι με νερό μπορεί να είναι υγρό στις αρχικές συνθήκες (όταν γεμίζει το ποτήρι δηλαδή) αλλά μετά από κάποιο δεδομένο χρονικό διάστημα το υγρό νερό θα έχει εξαφανιστεί τελείως και το νερό θα βρίσκεται πλέον σκορπισμένο στην ατμόσφαιρα με την μορφή ατμού (εξάτμιση). Σαφώς λοιπόν δεν υπάρχει κάποιος κανόνας που να λέει ότι το νερό στις πιο πάνω συνθήκες θα πρέπει να είναι σε υγρή φάση και σε μόνιμη κατάσταση. Για την ακρίβεια υπάρχει ένας κανόνας που λέει ότι το υγρό νερό σε κάθε θερμοκρασία και πίεση θα βρίσκεται σε ισορροπία με μία συγκεκριμένη ποσότητα ατμού ή πάγου και η κατάσταση αυτή δεν θα αλλάζει όσο οι αναλογίες των ποσοτήτων δεν μεταβάλλονται. Γιατί λοιπόν εξατμίζεται το νερό; Γιατί παρατηρείται στη φύση να συμβαίνουν αυθόρμητα μεταβάσεις ουσιών από μία φάση σε μία άλλη; Η απάντηση δεν είναι τόσο προφανής και έχει τις ρίζες της σε βασικές αρχές της χημικής θερμοδυναμικής και την κινητική θεωρία για τη θερμότητα. **Παρακάτω θα αναλυθούν μέχρι το βάθος που χρειάζεται ορισμένες έννοιες της χημικής θερμοδυναμικής για την κατανόηση του λόγου και του μηχανισμού της εξάτμισης.**

Σύμφωνα με την κινητική θεωρία κατά Browning σε μία ποσότητα μάζας  $M$  θερμοκρασίας  $T$  που αποτελείται από  $N$  σημειακές (κατά παραδοχή) μάζες τα μόρια (σημειακές μάζες) βρίσκονται συνεχώς σε μία χαοτική, τυχαία και ασταθή κίνηση που ονομάζεται κίνηση κατά Browning (Brownian motion). Λόγω της απόλυτης τυχειότητας στην κίνηση αυτή οι εσωτερικές ενέργειες των σημείων όχι μόνο δεν είναι ίσες μεταξύ τους αλλά και αλλάζουν χρονικά. Αν παρόλα ταύτα υπολογιστεί η μέση εσωτερική ενέργεια του συστήματος διαπιστώνεται ότι είναι σταθερή στο χρόνο. Η κινητική θεωρία για τη θερμότητα ορίζει πως η

εσωτερική ενέργεια για κάθε σημειακή μάζα είναι ευθέως ανάλογη της απόλυτης θερμοκρασίας<sup>1</sup>. Έτσι μπορεί να γραφτεί ότι :

$$\overline{U}_i = A \cdot T \quad (\Pi-1)$$

όπου :  $i = x, y, z$  οι βαθμοί ελευθερίας στην κίνηση της σημειακής μάζας

Για κάθε βαθμό ελευθερίας (διεύθυνση κίνησης), η κινητική ενέργεια της σημειακής μάζας ισούται με την παραπάνω ποσότητα. Στο σύνολο της (για τρεις βαθμούς ελευθερίας) η κινητική ενέργεια ισούται με το τριπλάσιο της ποσότητας αυτής.

Η ποσότητα  $A$  είναι μία σταθερή ποσότητα και ορίζεται ως  $k/2$  όπου  $k$  είναι η σταθερά του Boltzmann.

Σύμφωνα με την κλασσική μηχανική η συνολική κινητική ενέργεια κάθε σημειακής μάζας ισούται με :

$$\overline{U} = \frac{m_p \cdot u^2}{2} \quad (\Pi-2)$$

όπου :  $[\overline{U} =$  η συνολική κινητική ενέργεια της σημειακής μάζας (SI),  $m_p =$  η σημειακή μάζα (SI),  $u =$  η ταχύτητα της σημειακής μάζας (SI) ]

Εξισώνοντας τις σχέσεις (Π-1) και (Π-2) προκύπτει ότι :

$$\frac{\overline{m_p \cdot u^2}}{2} = \frac{3kT}{2} \quad (\Pi-3)$$

Για  $N$  σημειακές μάζες η εξίσωση γράφεται :

$$\sum_{i=1}^N \frac{\overline{m_p \cdot u_i^2}}{2} = N \cdot \frac{3kT}{2} \quad (\Pi-4)$$

ή

$$\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{\overline{m_p \cdot u_i^2}}{2} = \frac{3kT}{2} \quad (\Pi-5)$$

ή

<sup>1</sup> Απόλυτη θερμοκρασία είναι η θερμοκρασία που ακολουθεί τη κλίμακα του απόλυτου μηδενός. Το απόλυτο θερμοκρασιακό μηδέν ισούται με  $0K$  και ορίζεται ως το σημείο στο οποίο για σταθερό όγκο η πίεση ενός τελείου αερίου μηδενίζεται.



$$\left\langle \frac{m_p \cdot u_i^2}{2} \right\rangle = \frac{3kT}{2} \quad (\Pi-6)$$

όπου : [  $N$  = ο αριθμός των σημειακών μαζών (-) ]

Ο πρώτος όρος στην εξίσωση (Π-6) εκφράζει την μέση κινητική ενέργεια των  $N$  σημειακών σημείων του συστήματος.

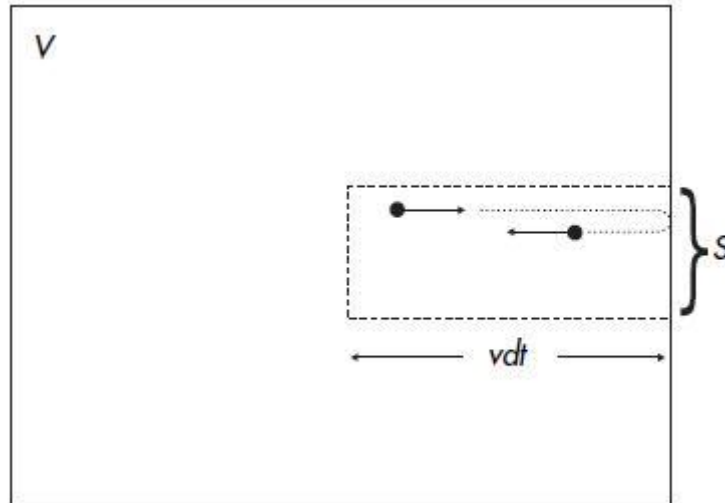
Η κινητική θεωρία για την θερμότητα έχει εφαρμογή στα ιδανικά αέρια. Ένα ιδανικό αέριο χαρακτηρίζεται από τις επόμενες παραδοχές :

- i. τα μόρια κινούνται τυχαία προς όλες τις κατευθύνσεις με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε στιγμή ο ίδιος αριθμός μορίων να κινείται προς κάθε κατεύθυνση.
- ii. κατά την κίνηση τους τα μόρια δεν επηρεάζονται από δυνάμεις πλην της περίπτωσης αμοιβαίας σύγκρουσης μεταξύ τους ή με τα τοιχώματα των φυσικών ορίων που τα περιορίζουν. Αυτό συνεπάγεται ότι κάθε μόριο μεταξύ δύο συγκρούσεων έχει ευθεία και ομοιόμορφη ταχύτητα.
- iii. οι συγκρούσεις μεταξύ των μορίων θεωρούνται απόλυτα ελαστικές. Αυτό είναι αναγκαία συνθήκη εφόσον αν οι συγκρούσεις ήταν ανελαστικές σύμφωνα με την κινητική θεωρία για την θερμότητα μετά από κάποιες συγκρούσεις η θερμοκρασία του αερίου θα μειωνόταν.
- iv. τα μόρια θεωρούνται σημειακές μάζες.

### **Η καταστατική εξίσωση των τελείων αερίων**

Μελετώντας ένα μόριο μάζας  $m_p$  που η ταχύτητα του είναι  $u$  και κατευθύνεται σε ένα κάθετο τοίχωμα η ορμή του σωματιδίου είναι :

$$P = m_p \cdot u \quad (\Pi-7)$$



**Σχήμα Π.1:** Ένα μόριο σημειακής μάζας που κινείται με ταχύτητα για να συγκρουστεί με μία επιφάνεια τοίχωμα (Πηγή: A. Tsonis "An Introduction to Atmospheric Thermodynamics" 2007)

Αν η κρούση του σωματιδίου με το τοίχωμα είναι απόλυτα ελαστική το ποσό της ορμής μετά την κρούση θα είναι :

$$P' = m_p \cdot u \quad (\Pi-8)$$

Η μεταβολή της ορμής θα είναι :

$$\delta P = 2 \cdot m_p \cdot u \quad (\Pi-9)$$

Από τους θεμελιώδεις νόμους της κλασσικής μηχανικής (*Νευτώνειοι Νόμοι*) προκύπτει ότι η δύναμη που επενεργεί σε ένα σώμα ισούται με τη χρονική μεταβολή της ορμής.

Επομένως :

$$F = \frac{dP}{dt} \quad (\Pi-10)$$

όπου : [  $F$  = η δύναμη (SI),  $P$  = η ορμή (SI),  $t$  = ο χρόνος (SI) ]

Μελετώντας  $N$  μόρια να κινούμενα μέσα σε ένα όγκο  $V$  όπως στο **Σχήμα Π.1** υπολογίζεται εύκολα η μεταβολή της ορμής  $dP$  όλων των μορίων σε ένα χρονικό διάστημα  $dt$  πολλαπλασιάζοντας την μεταβολή της ορμής του ενός μορίου επί τον αριθμό των μορίων  $dN$  που χτυπούν μία δεδομένη επιφάνεια  $S$ .

$$dP = 2 \cdot m_p \cdot u \cdot dN \quad (\Pi-11)$$

Ο αριθμός  $dN$  των μορίων που συγκρούονται με την επιφάνεια  $S$  κατά το χρονικό διάστημα  $dt$  είναι ίσος με τον αριθμό των μορίων που κινούνται προς την αντίθετη κατεύθυνση και περιλαμβάνονται σε ένα χωρίο τύπου «κουτιού» με βάση  $S$  και ύψος  $u \cdot dt$ . Εφόσον θεωρήθηκε ότι η κίνηση είναι απόλυτα τυχαία μπορεί να υποθεθεί και ότι  $1/6$  των μορίων θα κινούνται προς τον τοίχο,  $1/6$  προς την αντίθετη κατεύθυνση και τα υπόλοιπα  $4/6$  προς τις άλλες επιφάνειες του «κουτιού». Ο όγκος του κουτιού θα είναι  $S \cdot u \cdot dt$  και ο αριθμός των μορίων που περιέχονται ανά μονάδα όγκου θα είναι  $N/V$ . Επομένως ο αριθμός των μορίων που περιέχονται θα είναι :

$$N_o = \frac{N}{V} \cdot S \cdot u \cdot dt \quad (\Pi-12)$$

όπου : [ $V$  = ο όγκος (SI),  $S$  = η επιφάνεια (SI)]

Σύμφωνα με τα παραπάνω ο αριθμός των μορίων που κινούνται προς τον τοίχο θα είναι :

$$dN = \frac{N}{6V} \cdot S \cdot u \cdot dt \quad (\Pi-13)$$

όπου : [ $dN$  = αριθμός μορίων]

Από τις προηγούμενες εξισώσεις προκύπτει ότι η μεταβολή της ορμής των σημειακών μαζών θα είναι :

$$dP = 2 \cdot m_p \cdot u^2 \frac{N}{6V} \cdot S \cdot dt \quad (\Pi-14)$$

Αφού βρέθηκε η μεταβολή στην ορμή επόμενο βήμα είναι να οριστεί και η δύναμη που την προκάλεσε. Αυτό γίνεται μέσω του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα.

Η πίεση ορίζεται ως η δύναμη που ασκείται ανά μονάδα επιφάνειας :

$$p = \frac{F}{A} \quad (\Pi-15)$$

όπου : [ $p$  = η πίεση (SI),  $F$  = η δύναμη (SI),  $A$  = η επιφάνεια (SI)]

Από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα και για το σύστημα που μελετάται χρησιμοποιώντας την σχέση (Π-14) προκύπτει για την πίεση ότι :

$$p = \frac{1}{3} \cdot \frac{N}{V} \cdot m_p \cdot u^2 \quad (\Pi-16)$$

Τα μόρια όμως δεν κινούνται όλα με την ίδια ταχύτητα. Για το λόγο αυτό εισάγεται στην προηγούμενη έκφραση (Π-16) η μέση ταχύτητα των μορίων.

$$p = \frac{1}{3} \cdot \frac{N}{V} \cdot \langle m_p \cdot u^2 \rangle \quad (\text{Π-17})$$

Συνδυάζοντας λοιπόν την έκφραση αυτή με τη έκφραση για την μέση κινητική ενέργεια των μορίων προκύπτει η καταστατική εξίσωση των τελείων αερίων που είναι η :

$$p \cdot V = N \cdot k \cdot T \quad (\text{Π-18})$$

**Η σχέση αυτή είναι εξαιρετικά σημαντική γιατί είναι αρκετές οι φορές που ο αέρας της ατμόσφαιρας, το καυσάεριο και ο ατμός θεωρείται πως συμπεριφέροντε ως τέλεια αέρια.**

### Οι θερμοδυναμικοί νόμοι

Όπως και στην περίπτωση των Νευτώνειων νόμων της κλασσικής μηχανικής έτσι και οι θεμελιώδης νόμοι της θερμοδυναμικής έχουν βασική ισχύ, προκύπτουν από παρατήρηση και δεν αποδεικνύονται<sup>1</sup>.

**Ο μηδενικός θερμοδυναμικός νόμος<sup>2</sup>** ορίζει πως όταν δύο σώματα βρίσκονται σε θερμική ισορροπία με ένα τρίτο τότε βρίσκονται και σε ισορροπία αναμεταξύ τους. Με άλλα λόγια χρειάζεται διαφορά θερμοκρασίας για να μεταφερθεί θερμική ενέργεια από ένα σώμα σε ένα δεύτερο.

**Ο πρώτος θερμοδυναμικός νόμος** λέει ότι οποιαδήποτε διεργασία και αν συμβαίνει, όταν συμβαίνει πρέπει να διατηρείται η ολική ενέργεια<sup>3</sup> του συστήματος. Αυτό μπορεί να εξηγηθεί «φιλοσοφικά» ως μία συνέπεια του γεγονότος ότι οι νόμοι της φυσικής είναι अपαράλλακτοι και σταθεροί στο χρόνο.

Για ένα θερμοδυναμικό σύστημα που ανταλλάσει μάζα, θερμότητα και μηχανικό<sup>4</sup> έργο με το περιβάλλον η έκφραση του πρώτου θερμοδυναμικού νόμου είναι :

$$dU = \delta Q - \delta W + \sum_i \mu_i dN_i \quad (\text{Π-19})$$

<sup>1</sup> Πέραν της περίπτωσης των υποατομικών φαινομένων όπου η κλασσική θερμοδυναμική δεν ισχύει δεν έχει παρατηρηθεί πουθενά ασυμφωνία μεταξύ των νόμων αυτών και της παρατήρησης. Γι' αυτό το λόγο άλλωστε αποκαλούνται και θεμελιώδης νόμοι.

<sup>2</sup> Ονομάζεται μηδενικός νόμος γιατί αν και πιο θεμελιώδης διατυπώθηκε πολύ αργότερα χρονικά.

<sup>3</sup> Ενέργεια είναι μία έννοια που αντικατοπτρίζει την ικανότητα ενός συστήματος να μεταλλάσσεται.

<sup>4</sup> Έργο γενικά ονομάζεται η μορφή ενέργειας που αφαιρείται ή αποταμιεύεται σε ένα σύστημα με την μετατόπιση του κέντρου εφαρμογής μίας δύναμης. Μηχανικό είναι το έργο ογκομεταβολής  $p \cdot dV$  σε αντίθεση με το τεχνικό έργο  $V \cdot dp$  που είναι το έργο μεταβολής της πίεσης.

όπου : [  $dU$  = η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας του συστήματος(SI),  $\delta Q$  = η θερμότητα που συναλλάσσετε με το περιβάλλον (SI),  $\delta W$  = το έργο ογκομεταβολής που συναλλάσσετε με το περιβάλλον (SI),  $\mu_i$  = το χημικό δυναμικό ή αλλιώς η αλλαγή που επιφέρεται σε ένα χαρακτηριστικό θερμοδυναμικό δυναμικό από την ανταλλαγή μίας ποσότητας ύλης  $i$  (SI),  $dN_i$  = η μεταβολή του αριθμού των  $i$  σωματιδίων που ανταλλάσσονται (-) ]

Στην περίπτωση που το σύστημα είναι κλειστό και δεν συμβαίνει ανταλλαγή μάζας τότε ο τελευταίος όρος στην εξίσωση (Π-19) μηδενίζεται.

Η ενέργεια ως γνωστών μπορεί να πάρει διάφορες μορφές. Μεταφέρεται όμως αποκλειστικά και μόνο με δύο μηχανισμούς : την θερμότητα και το έργο<sup>1</sup>. Η σχέση του πρώτου θερμοδυναμικού νόμου μας ορίζει ότι οποιοδήποτε ποσό θερμότητας εισάγεται η αφαιρείται από το σύστημα θα ισούται με την μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας του συστήματος. Παρατηρείται εδώ ότι ο όρος της εσωτερικής ενέργειας είναι μία μεταβλητή κατάστασης<sup>2</sup> και έχει ολικό διαφορικό σε αντίθεση με την θερμότητα και το έργο που ορίζονται ως μεταβολές. Έτσι η εσωτερική ενέργεια (όπως ο όγκος και η εντροπία που θα φανεί στη συνέχεια) είναι μοναδικά χαρακτηριστικά της κατάστασης του συστήματος.

**Ο δεύτερος νόμος της θερμοδυναμικής** εισάγει την έννοια της φοράς των διεργασιών και της ισορροπίας. Ορίζει ότι οποιαδήποτε διεργασία και αν συμβαίνει, όταν συμβαίνει πρέπει να συμβαίνει με τέτοιο τρόπο ώστε να αυξάνεται η συνολική εντροπία<sup>3</sup> του συστήματος μέχρι το σημείο στο οποίο η εντροπία θα παίρνει μία μέγιστη τιμή. Σε αυτήν την κατάσταση όλες οι μη αντιστρεπτές<sup>4</sup> διεργασίες θα έχουν σταματήσει και θα συμβαίνουν μόνο αντιστρεπτές. Και πάλι θα μπορούσε να εξηγηθεί «φιλοσοφικά» ο δεύτερος νόμος ως μία αναπόφευκτη πορεία κάθε συστήματος προς την αποσύνθεση.

Ο δεύτερος θερμοδυναμικός νόμος στα θερμοδυναμικά συστήματα εκφράζεται με τη σχέση :

<sup>1</sup> Η ακτινοβολία θεωρείται πολλές φορές ως ένας τρίτος τρόπος μεταφοράς της ενέργειας αλλά επιστημονικά είναι πιο σωστό η ακτινοβολία να περιγράφεται ως η ικανότητα εκτέλεσης έργου από απόσταση.

<sup>2</sup> Όταν μία μεταβλητή ενός συστήματος εξαρτάται μόνο από την αρχική και την τελική θέση του συστήματος και όχι από τον τρόπο με τον οποίο έφτασε το σύστημα στην θέση αυτή τότε η μεταβλητή αυτή είναι μία μεταβλητή κατάστασης. Ένα κριτήριο για την ένδειξη του ότι μία μεταβλητή είναι μεταβλητή κατάστασης είναι να έχει ακριβές διαφορικό..

<sup>3</sup> Η εντροπία είναι ένα καταστατικό μέγεθος που ορίζει την αταξία ή αλλιώς την διαφορετικότητα των συστατικών στοιχείων ενός συστήματος. Με διερεύνηση της λειτουργίας των θερμικών μηχανών και συγκεκριμένα της πλήρους αντιστρεπτής μηχανής Carnot προκύπτει η μεταβολή της εντροπίας σε μία αντιστρεπτή θερμοδυναμική διεργασία σταθερής θερμοκρασίας να είναι  $dS = \frac{dQ}{T}$ .

<sup>4</sup> Αντιστρεπτή ονομάζεται ή θερμοδυναμική διαδικασία που αποτελείται από μία ακολουθία καταστάσεων ισορροπίας. Η αύξηση της συνολικής εντροπίας ενός κλειστού συστήματος σε μία αντιστρεπτή διεργασία είναι μηδέν.

$$dS \geq \frac{dQ}{T} \quad (\Pi-20)$$

όπου : [ $dS$  = η μεταβολή της εντροπίας ενός συστήματος που ανταλλάσει θερμότητα με το περιβάλλον του σε σταθερή θερμοκρασία (SI),  $dQ$  = το ποσό θερμότητας που συναλλάσσετε με το σύστημα (SI),  $T$  = η σταθερή θερμοκρασία της διεργασίας (SI)]

Στην εξίσωση (Π-20) η ισότητα αντιπροσωπεύει την ιδανική περίπτωση των αντιστρεπτών διεργασιών ενώ η ανισότητα τις πραγματικές διεργασίες που συμβαίνουν στη φύση.

**Ο τρίτος νόμος της θερμοδυναμικής** ορίζει πως η εντροπία δεν μετράται ως διαφορά από κάποιο σημείο αναφοράς αλλά έχει κλίμακα μέτρησης. Το απόλυτο μηδέν της εντροπίας συμβαίνει όταν η απόλυτη θερμοκρασία είναι μηδέν και η διάταξη της ύλης τελείως προβλέψιμη (π.χ. τέλειος κρύσταλλος). Πειραματικά η απόλυτη θερμοκρασία μπορεί να υπολογιστεί προσεγγιστικά με την θεωρία τελείου αερίου επεκτείνοντας προς το μηδέν την ευθεία στο διάγραμμα πίεσης θερμοκρασίας. Αναλυτικά η απόλυτη θερμοκρασία γίνεται μηδέν εκεί που η ύλη συναντά την χαμηλότερη δυνατή της ενέργεια. Ένα κβαντομηχανικό φυσικό σύστημα έχει πάντα μία χαμηλότερη στάθμη ενέργειας, την ενέργεια μηδενικού σημείου<sup>1</sup> και η ενέργεια αυτή δεν μπορεί να αφαιρεθεί από το σύστημα αλλά ούτε και να μετασχηματιστεί.

Με βάση τη στατιστική μηχανική ο τρίτος νόμος γράφεται :

$$S = k \cdot \ln(\Omega) \quad (\Pi-21)$$

όπου : [ $S$  = η απόλυτη εντροπία (SI),  $k$  = η σταθερά του Boltzmann (SI)  $\Omega$  = οι πιθανές καταστάσεις του συστήματος (-)]

### **Ο συνδυασμός του πρώτου και του δεύτερου Θερμοδυναμικού Νόμου**

Ο πρώτος θερμοδυναμικός νόμος μπορεί να γραφτεί σε μορφή τέλειων διαφορικών χρησιμοποιώντας τις σχέσεις για το έργο και την θερμότητα στις αντιστρεπτές μεταβολές ενός αερίου δηλαδή ότι  $\delta W = p \cdot dV$  και  $\delta Q = T \cdot dS$ .

Έτσι προκύπτει η σχέση :

$$dU = T \cdot dS - p \cdot dV + \sum_{i=1}^n \mu_i dN_i \quad (\Pi-22)$$

Η σχέση αυτή αποτελεί την “**θεμελιώδη θερμοδυναμική σχέση**” εκφρασμένη ως προς την εσωτερική ενέργεια  $U$  για ένα σύστημα  $n$  συστατικών.

<sup>1</sup> Η ενέργεια μηδενικού σημείου προκύπτει από τον άμεσο συσχετισμό μάζας – ενέργειας και την αντιστοιχία της ορμής με ένα μήκος κύματος.

Φαίνεται ότι ο “θερμοδυναμικός χώρος” έχει  $n+2$  διαστάσεις. Παρατηρείται επίσης ότι όλοι οι διαφορικοί όροι είναι μεταβλητές κατάστασης (εκτατές μεταβλητές) και επομένως αυτή η έκφραση μπορεί να χρησιμοποιηθεί και σε μη αντιστρεπτές μεταβολές τελικά. Οι μη διαφορικοί όροι που εμφανίζονται ως συντελεστές των διαφορικών είναι μη εκτατές μεταβλητές και μαζί με τους διαφορικούς όρους αποτελούν ζεύγος ισορροπίας με αναφορά την εσωτερική ενέργεια. Αυτό σημαίνει ότι όταν μία μη εκτατή μεταβλητή μεταβληθεί θα προκαλέσει μία “ροή” της εκτατής μεταβλητής ώστε να εξισορροπηθεί το σύστημα.

Ολοκληρώνοντας (με βάση το θεώρημα του Euler για τις ομογενείς συναρτήσεις) τον πρώτο θερμοδυναμικό νόμο και με βάση το γεγονός ότι όλες οι μεταβλητές είναι εκτατές μεταβλητές κατάστασης προκύπτει η σχέση :

$$U = T \cdot S - p \cdot V + \sum_i \mu_i N_i \quad (\Pi-23)$$

Αν τώρα εφαρμόζοντας τον μαθηματικό “κανόνα της αλυσίδας” γραφτεί το ολικό διαφορικό της εσωτερικής ενέργειας ως προς τις φυσικές μεταβλητές προκύπτει η επόμενη σχέση :

$$dU = \left. \frac{\partial U}{\partial S} \right|_{V,N} \cdot dS + \left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_{S,N} \cdot dV + \sum_i \left. \frac{\partial U}{\partial N_i} \right|_{S,V,N_{j \neq i}} \cdot dN_i \quad (\Pi-24)$$

Συγκρίνοντας τα δύο διαφορικά (Π-22) και (Π-24) βλέπουμε ότι :

$$\left. \frac{\partial U}{\partial S} \right|_{V,N} = T \quad (\Pi-25)$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial V} \right|_{S,N} = -p \quad (\Pi-26)$$

$$\sum_i \left. \frac{\partial U}{\partial N_i} \right|_{S,V,N_{j \neq i}} = -\mu_i \quad (\Pi-27)$$

Κάθε μία από τις παραπάνω εξισώσεις αποτελεί μία “εξίσωση κατάστασης” ως προς την εσωτερική ενέργεια.

Η θεμελιώδης εξίσωση που εξάχθηκε προηγουμένως με τον κανόνα της αλυσίδας μπορεί να επιλυθεί όχι μόνο ως προς το ολικό διαφορικό της εσωτερικής ενέργειας αλλά και ως προς οποιοδήποτε άλλο από τα ολικά διαφορικά που εμφανίζονται στην εξίσωση. Μπορούν να υπάρξουν επομένως διαφορετικές μορφές της θεμελιώδους εξίσωσής και ο ανάλογος αριθμός εξισώσεων κατάστασης.

Έτσι αν είναι  $\Phi$  ένα θερμοδυναμικό δυναμικό, τότε η θεμελιώδης εξίσωση θα έχει την μορφή :

$$d\Phi = \sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial X_i} dX_i \quad (\Pi-28)$$

όπου η μεταβλητή  $X_i$  αντιπροσωπεύει την εκάστοτε φυσική μεταβλητή και η μερική παράγωγος αποτελεί την αντίστοιχη μεταβλητή ζεύγους :

$$\gamma_i = \frac{\partial \Phi}{\partial X_i} \quad (\Pi-29)$$

### Τα θερμοδυναμικά δυναμικά

Ο δεύτερος θερμοδυναμικός νόμος μπορεί να εκφραστεί και σαν το γεγονός ότι για σταθερή εντροπία, όταν οι συνοριακοί περιορισμοί του συστήματος αρθούν, τότε το σύστημα τείνει προς την ελαχιστοποίηση της εσωτερικής ενέργειας.

Μπορεί να οριστεί ο συνδυασμός κάποιων από τις μεταβλητές κατάστασης ως νέες συναρτήσεις κατάστασης και όπως η εσωτερική ενέργεια, θα ελαχιστοποιούνται σύμφωνα με το δεύτερο θερμοδυναμικό νόμο υπο κάποια άλλη συνθήκη (όπως η σταθερή εντροπία στην περίπτωση της εσωτερικής ενέργειας). Αυτές οι συναρτήσεις κατάστασης ονομάζονται θερμοδυναμικά δυναμικά και τα πιο χρησιμοποιούμενα είναι η **ενθαλπία**, η **ελεύθερη ενέργεια Helmholtz** και η **ελεύθερη ενέργεια Gibbs**. Σε αυτά φυσικά μπορεί να προστεθεί και η **εσωτερική ενέργεια** ως συνάρτηση κατάστασης που εκφράζει και αυτή ένα δυναμικό.

Παρακάτω δίνεται ένας πίνακας με τα προηγούμενα θερμοδυναμικά δυναμικά, τον ορισμό και τις φυσικές<sup>1</sup> τους μεταβλητές.

Θερμοδυναμικό Δυναμικό	Ορισμός	Φυσικές Μεταβλητές
Εσωτερική Ενέργεια $U$	$\int \left( T \cdot dS - p \cdot dV + \sum_{i=1}^n \mu_i \cdot dN_i \right)$	$S, V, N_i$
Ενθαλπία $H$	$U + p \cdot V$	$S, p, N_i$
Ενέργεια Gibbs $G$	$U + p \cdot V - T \cdot S$	$T, p, N_i$
Ενέργεια Helmholtz $A$	$U - T \cdot S$	$T, V, N_i$

<sup>1</sup> Οι φυσικές μεταβλητές είναι οι μεταβλητές με τις οποίες αν εκφραστεί ένα θερμοδυναμικό δυναμικό τότε μπορεί από την εξίσωση που προκύπτει να εξαχθεί οποιαδήποτε άλλη εξίσωση που περιγράφει το σύστημα. Με άλλα λόγια η εξίσωση αυτή θα είναι μία από τις "θεμελιώδης εξισώσεις".



Εύκολα αποδεικνύεται ότι τα παραπάνω θερμοδυναμικά δυναμικά γράφονται ως θεμελιώδης εξισώσεις με τον επόμενο τρόπο :

$$dU = T \cdot dS - p \cdot dV + \sum_{i=1}^n \mu_i dN_i \quad (\Pi-30)$$

$$dH = T \cdot dS + V \cdot dp + \sum_{i=1}^n \mu_i dN_i \quad (\Pi-31)$$

$$dG = -S \cdot dT - V \cdot dp + \sum_{i=1}^n \mu_i dN_i \quad (\Pi-32)$$

$$dA = -S \cdot dT - p \cdot dV + \sum_{i=1}^n \mu_i dN_i \quad (\Pi-33)$$

Αντικαθιστώντας τώρα τη μη διαφορική έκφραση της εσωτερικής ενέργειας στις εξισώσεις ορισμού των τριών λοιπών θερμοδυναμικών δυναμικών προκύπτουν οι επόμενες σχέσεις :

$$U = T \cdot S - p \cdot V + \sum_i \mu_i N_i \quad (\Pi-34)$$

$$H = T \cdot S + \sum_i \mu_i N_i \quad (\Pi-35)$$

$$G = \sum_i \mu_i N_i \quad (\Pi-36)$$

$$A = -p \cdot V + \sum_i \mu_i N_i \quad (\Pi-37)$$

### **Η σχέση Gibbs - Duhem**

Με βάση τον τρόπο που ορίστηκε η ελεύθερη ενέργεια Gibbs αντιλαμβάνεται κανείς από τα παραπάνω ότι η ελεύθερη ενέργεια Gibbs για ανοιχτά συστήματα είναι :

$$G = \sum_i \mu_i \cdot N_i \quad (\Pi-38)$$

Το ολικό διαφορικό της ενέργειας Gibbs θα είναι τότε :

$$dG = \sum_i \mu_i \cdot dN_i + \sum_i d\mu_i \cdot N_i \quad (\Pi-39)$$

Γράφοντας επίσης το ολικό διαφορικό της ελεύθερης ενέργειας Gibbs με όρους τις φυσικές μεταβλητές της ως :

$$dG = \left. \frac{\partial G}{\partial p} \right|_{T,N} \cdot dp + \left. \frac{\partial G}{\partial T} \right|_{p,N} \cdot dT + \sum_i \left. \frac{\partial G}{\partial N_i} \right|_{p,T,N_{j \neq i}} \cdot dN_i \quad (\Pi-40)$$

Η παραπάνω έκφραση γράφεται από τα πορίσματα της προηγούμενης ανάλυσης και ως :

$$dG = -S \cdot dT + V \cdot dp + \sum_i \mu_i \cdot dN_i \quad (\Pi-41)$$

Συνδυάζοντας τις δυο σχέσεις που εξάχθηκαν για το ολικό διαφορικό της ελεύθερης ενέργειας Gibbs προκύπτει η σχέση **Gibbs - Duhem** που είναι η :

$$\sum_i N_i \cdot d\mu_i = -S \cdot dT + V \cdot dp \quad (\Pi-42)$$

### Ο κανόνας των φάσεων του Gibbs

Ο κανόνας των φάσεων εκφράζεται με τον όρο  $\varphi$  (που είναι οι φάσεις που υπάρχουν στο σύστημα), τον όρο  $c$  (που είναι ο αριθμός των συστατικών του συστήματος) και τον αριθμό των βαθμών ελευθερίας του συστήματος. Ο αριθμός των φάσεων είναι ο αριθμός των διαφορετικών ομογενών περιοχών στο σύστημα. Οι βαθμοί ελευθερίας του συστήματος είναι ο αριθμός των μη εκτατών<sup>1</sup> (*intensive*) μεταβλητών που μπορεί να μεταβληθούν ελεύθερα χωρίς την εμφάνιση ή την εξαφάνιση μίας φάσης.

Αν εκφραστεί η σύνθεση των φάσεων ως κλάσματα *mole* των διαφόρων συστατικών του συστήματος τότε απαιτούνται  $c-1$  μη εκτατές μεταβλητές για να περιγράψουν τη σύνθεση εφόσον κάθε συστατικό εμφανίζεται σε κάθε φάση και αφού τα κλάσματα *mole* αθροιζόμενα δίνουν μονάδα. Ανάλογα σε ένα σύστημα  $\varphi$  φάσεων,  $\varphi \cdot (c-1)$  μη εκτατές μεταβλητές χρειάζονται για να περιγράψουν τη σύνθεση του συστήματος. Όπως ειπώθηκε και πιο πριν ένα μονοφασικό ενός συστατικού μίγμα μπορεί να περιγραφεί από πολλές μη εκτατές μεταβλητές όμως για να οριστεί η κατάσταση του χρειάζεται δύο μόνο μη εκτατές μεταβλητές.

Ο συνολικός αριθμός των μεταβλητών που χρειάζονται για να περιγράψουν την κατάσταση ενός συστήματος πολλών συστατικών και φάσεων είναι :

$$\varphi \cdot (c-1) + 2\varphi = \varphi \cdot (c+1) \quad (\Pi-43)$$

<sup>1</sup> Εκτατές ονομάζονται οι μεταβλητές που εξαρτώνται από το μέγεθος του συστήματος. Αντίθετα οι μη εκτατές μεταβλητές δεν εξαρτώνται από το μέγεθος του συστήματος

Για να υπολογιστούν οι βαθμοί ελευθερίας του συστήματος πρέπει να υπάρχει γνώση των περιορισμών ανάμεσα στις σχέσεις των συνθηκών ισορροπίας. Οι συνθήκες ισορροπίας ορίζονται ως εξής :

**Μηχανική Ισορροπία** : Η μηχανική ισορροπία υπαγορεύει πως οι πιέσεις διαφορετικών φάσεων μέσα στο σύστημα θα πρέπει να είναι όλες ίσες.

$$P_I = P_{II} = \dots = P_\phi \quad P_I = P_{II} = \dots = P_\phi \quad (\Pi-44)$$

**Θερμική Ισορροπία** : Η θερμική ισορροπία υπαγορεύει πως οι θερμοκρασίες των διαφορετικών φάσεων μέσα στο σύστημα θα πρέπει να είναι όλες ίσες.

$$T_I = T_{II} = \dots = T_\phi \quad (\Pi-45)$$

**Χημική Ισορροπία** : Η χημική ισορροπία υπαγορεύει πως τα χημικά δυναμικά (*τάσεις διαφυγής*) των διαφορετικών φάσεων μέσα στο σύστημα θα πρέπει να είναι όλα ίδια.

$$\mu_I = \mu_{II} = \dots = \mu_\phi \quad (\Pi-46)$$

Για ένα σύστημα πολλών συστατικών και πολλών φάσεων η συνθήκη χημικής ισορροπίας δίνει  $c \cdot (\phi - 1)$  εξισώσεις περιορισμών. Αντίστοιχα οι συνθήκες θερμικής και μηχανικής ισορροπίας δίνουν άλλες  $2 \cdot (\phi - 1)$  εξισώσεις περιορισμών.

Έτσι ο συνολικός αριθμός περιορισμών γίνεται :

$$(\phi - 1) + (\phi - 1) + c \cdot (\phi - 1) = (c + 2) \cdot (\phi - 1) \quad (\Pi-47)$$

Ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας είναι η διαφορά ανάμεσα στις μεταβλητές που χρειάζονται για να περιγράψουν το σύστημα και του αριθμού των ανεξάρτητων περιορισμών μεταξύ των μεταβλητών αυτών.

Έτσι προκύπτει ότι :

$$f = \phi(c - 1) - (\phi - 1) \cdot (c + 2) = c - \phi + 2 \quad (\Pi-48)$$

Η παραπάνω σχέση είναι ο **κανόνας των φάσεων του Gibbs** και έχει ισχύ σε συστήματα που δεν αντιδρούν χημικά. Σε ένα σύστημα που δεν αντιδρά χημικά όπως το σύστημα της εξάτμισης που μελετάτε εδώ ο αριθμός των συστατικών του συστήματος είναι και ο αριθμός χημικών ειδών του συστήματος.

### Η εξίσωση Clausius Clayperon

Σε ένα σύστημα ενός συστατικού (*νερό π.χ.*), με όλες τις φάσεις του σε ισορροπία, οι βαθμοί ελευθερίας του συστήματος είναι μηδέν. Αυτό υποδεικνύει

ότι η κατάσταση αυτή μπορεί να προκύψει σε ένα μοναδικό σημείο πίεσης και θερμοκρασίας (το τριπλό σημείο). Όταν οι φάσεις του νερού είναι δύο τότε ο βαθμός ελευθερίας είναι πλέον ένας και η συνύπαρξη δύο φάσεων κινείται πάνω σε ομάδες σημείων δηλαδή γραμμές. Σε κάθε σημείο της γραμμής οι δύο φάσεις σε ισορροπία θα πρέπει να έχουν ίδια θερμοκρασία, ίδια πίεση και τα ίδια χημικά δυναμικά.

Για τα χημικά δυναμικά θα ισχύει ότι  $\mu_I = \mu_{II}$  ενώ κατά μήκος των γραμμών ισορροπίας θα ισχύει ότι  $d\mu_I = d\mu_{II}$ .

Από την εξίσωση Gibbs - Duhem για κάθε φάση ξεχωριστά θα πρέπει να ισχύει ότι :

$$d\mu_i = \frac{-S \cdot dT + V \cdot dp}{N_i} \quad (\Pi-49)$$

Εφόσον τα χημικά δυναμικά πρέπει να είναι ίδια εξισώνοντας την προηγούμενη εξίσωση για τις δύο φάσεις προκύπτει ότι :

$$-(S_I - S_{II}) \cdot dT + (V_I - V_{II}) \cdot dp = 0 \quad (\Pi-50)$$

Αναδιατάσσοντας την (Π-50) προκύπτει η σχέση :

$$\frac{dp}{dT} = \frac{(S_I - S_{II})}{(V_I - V_{II})} \quad (\Pi-51)$$

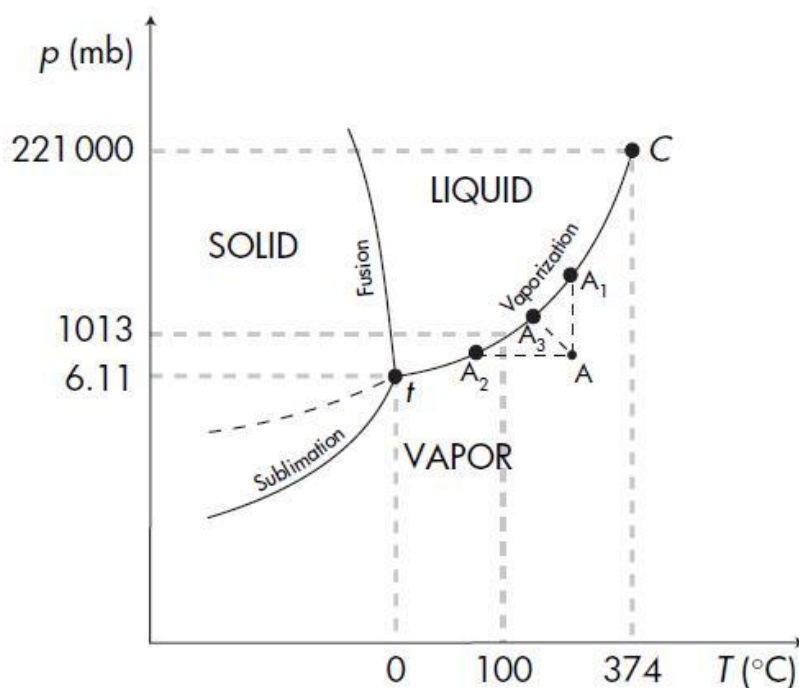
Σε αντιστρεπτές διεργασίες όπως φάνηκε η διαφορά εντροπίας από τον δεύτερο θερμοδυναμικό νόμο γράφεται ως :

$$\delta Q = T \cdot dS \quad (\Pi-52)$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (Π-51) και (Π-52) και θεωρώντας την μετάβαση μίας ουσίας από τη μία φάση ισορροπίας στη άλλη ως αντιστρεπτή διεργασία μπορεί να γραφτεί η εξίσωση **Clausius - Clayperon** ως :

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\delta Q}{T \cdot (V_I - V_{II})} \quad (\Pi-53)$$

Η τελευταία εξίσωση δίνει την κλίση των γραμμών ισορροπίας σε ένα διάγραμμα φάσεων μίας ουσίας, όπως το διάγραμμα φάσεων του νερού που φαίνεται παρακάτω (**Διάγραμμα Π.2**) :



Διάγραμμα Π.2: Ισορροπία φάσεων του νερού (Πηγή : A. Tsonis "An Introduction to Atmospheric Thermodynamics" 2007)

Εφόσον γίνεται λόγος για την εξάτμιση του νερού και θεωρώντας τον ατμό ως τέλειο αέριο εισάγεται η μηχανική καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων και η εξίσωση Clausius - Clayperon παίρνει τη μορφή :

$$\frac{d(\ln(p))}{dT} = \frac{\Delta H_{vap}}{R \cdot T^2} \quad (\Pi-54)$$

Η αναλυτική λύση της εξίσωσης αυτής είναι δύσκολη αν σκεφτεί κανείς το γεγονός ότι η λανθάνουσα θερμότητα εξάτμισης έχει σημαντική εξάρτηση από την θερμοκρασία. Για τον λόγο αυτό χρησιμοποιούνται προσεγγίσεις.

Στο διάγραμμα φαίνεται το τριπλό σημείο του νερού όπως και οι καμπύλες  $p = f(T)$  που αντιπροσωπεύουν την ισορροπία ή τα όρια μετατροπής φάσεων.

Οι γραμμές αυτές εκφράζουν τα όρια της εξάτμισης, της εξάχνωσης και της τήξης. Ο ατμός νερού που βρίσκεται πάνω στα όρια ονομάζεται κορεσμένος ατμός και η πίεση που του αντιστοιχεί για κάθε θερμοκρασία ονομάζεται πίεση κορεσμένων ατμών.

Αξιοσημείωτη είναι η επέκταση της γραμμής του ατμού κάτω του τριπλού σημείου που εκφράζει την πίεση κορεσμένων ατμών σε ισορροπία με υπέρψυκτο νερό. Αυτή η κατάσταση ισορροπίας βρίσκεται στο διάγραμμα πάνω από τη γραμμή ισορροπίας του πάγου με τον ατμό και όταν συναντάται στην ατμόσφαιρα αποτελεί μία μετασταθή κατάσταση ιδιαίτερα σημαντική για την παγοποίηση λόγω υπέρψυκτων σταγόνων νερού στα αεροσκάφη. Η μετασταθής αυτή κατάσταση τερματίζεται όταν στο

σύστημα εισαχθεί η φάση του πάγου ή ενός στερεού ορίου (πτέρυγα αεροσκάφους π.χ.).

Εξίσου ενδιαφέρον παρουσιάζει και η περιοχή με θερμοκρασίες πάνω από τους  $374^{\circ}\text{C}$ . Εκεί συναντάτε το κρίσιμο σημείο στο οποίο δεν υπάρχει σαφής διαχωρισμός ανάμεσα στην υγρή και την αέρια φάση. **Αυτή η κατάσταση είναι πιθανό να συμβεί εισάγοντας υγρό νερό στο θάλαμο καύσης μίας στροβιλομηχανής όπου οι θερμοκρασίες είναι μακράν άνω του κρίσιμου σημείου.**

### Η τάση προς την ισορροπία

Ο συνδυασμός του πρώτου νόμου με τον δεύτερο για ένα κλειστό σύστημα δίνει τη συνδυασμένη ανισότητα :

$$dU - T \cdot dS + p \cdot dV \leq 0 \quad (\text{Π-55})$$

Υποθέτοντας ότι η οποιαδήποτε ανταλλαγή θερμότητας ή μηχανικού έργου γίνεται με σταθερή πίεση, την πίεση περιβάλλοντος και σταθερή θερμοκρασία μπορούν να προστεθούν δύο μηδενικοί όροι και η σχέση να γίνει :

$$dU - T \cdot dS - s \cdot dT + p \cdot dV + V \cdot dp \leq 0 \quad (\text{Π-56})$$

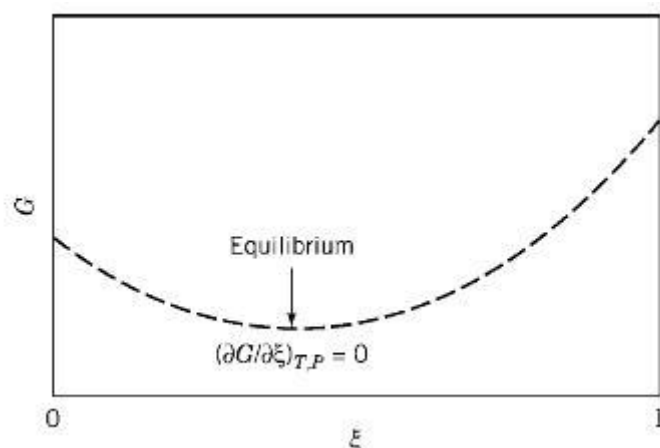
ή

$$d(U + p \cdot V - T \cdot S) \leq 0 \quad (\text{Π-57})$$

ή

$$d(G) \leq 0 \quad (\text{Π-58})$$

Η τελευταία έκφραση δηλώνει ότι κάθε σύστημα που τείνει προς την ισορροπία προσπαθεί να μειώσει την ελεύθερη ενέργεια του συστήματος μέχρι το ελάχιστο της σημείο. Αυτό φαίνεται γραφικά και στο **Διάγραμμα Π.3.**



**Διάγραμμα Π.3:** Διάγραμμα της συνάρτησης Gibbs ως συνάρτηση της ποσότητας ύλης κάθε φάσης (Πηγή : Irving M. Klotz - *Chemical Thermodynamic Basic Concepts and Methods* 2008)

Ένα ετερογενές σύστημα (όπως ένα σύστημα νερού - ατμού π.χ.) περιέχει περισσότερες από μία φάσεις. Σε αυτήν την περίπτωση αυτό που ενδιαφέρει είναι να οριστεί η κατάσταση ισορροπίας σύμφωνα με τη σύσταση του μίγματος ως προς τις δύο ξέχωρες φάσεις. Αν και συνολικά το σύστημα των δύο φάσεων είναι ένα κλειστό σύστημα, οι φάσεις του μελετώνται σαν μεμονωμένα ομογενή και ανοιχτά συστήματα που ανταλλάσσουν μάζα μεταξύ τους.

Στην περίπτωση ισορροπίας σε σταθερή πίεση και θερμοκρασία η μεταβολή της ενέργειας Gibbs γράφεται :

$$dG = \sum_i \mu_i \cdot dN_i = 0 \quad (\Pi-59)$$

Το χημικό δυναμικό είναι για κάθε φάση ανάλογο της θερμοκρασίας ή της πίεσης και επομένως σταθερό. Όταν ο νόμος των φάσεων του Gibbs ορίζει τους βαθμούς ελευθερίας του συστήματος (δηλαδή τις φάσεις σε ισορροπία) να είναι δύο και τα χημικά δυναμικά των δύο φάσεων που έρχονται σε επαφή είναι διαφορετικά τότε η αναλογία των φάσεων θα αλλάξει ούτως ώστε η ελεύθερη ενέργεια Gibbs να ελαχιστοποιηθεί.

Το θερμοδυναμικό δυναμικό Gibbs είναι κάτι ανάλογο με το βαρυτικό δυναμικό για τα συστήματα βαρύτητας. Τα χημικά συστήματα αλλάζουν αυθόρμητα προς την κατεύθυνση που θα μειώσει το συνολικό ελεύθερο δυναμικό όπως ένα σώμα κινείται αυθόρμητα αν αφεθεί ελεύθερο προς την κατεύθυνση μείωσης του βαρυτικού δυναμικού του. Θέτοντας το διαφορετικά, αν τα χημικά δυναμικά (τάσεις διαφυγής) των συστατικών ενός συστήματος διαφέρουν, αυθόρμητη μεταφορά συστατικών θα συμβεί μέσα στο σύστημα ώστε να εξισορροπηθεί η διαφορά.

**Γιατί συμβαίνει τελικά η εξάτμιση ;**

Ο μηχανισμός της εξάτμισης έχει ως εξής :

Αν σε μία θερμοκρασία (στους  $25^{\circ}\text{C}$  για παράδειγμα) τα χημικά δυναμικά του νερού και των ατμών νερού είναι διαφορετικά τότε για να επέλθει ισορροπία στο σύστημα και σύμφωνα πάντα με τους θερμοδυναμικούς νόμους και το νόμο φάσεων σε ισορροπία του Gibbs, πρέπει να εξατμιστεί μία ποσότητα υγρού νερού για να ισορροπήσει το σύστημα. Δημιουργείται έτσι ακριβώς πάνω στα όρια νερού και ατμών νερού ένα οριακό φιλμ κορεσμένων ατμών που αντιπροσωπεύει την ισορροπία του συστήματος αυτών των δύο φάσεων. Το κορεσμένο αυτό φιλμ λόγω του νόμου διάχυσης κατά Fick, ωθείται από την διαφορά συγκέντρωσης και διαχέεται συνεχώς στην ατμόσφαιρα. Ο μόνος τρόπος για να σταματήσει η διάχυση είναι να μηδενιστεί η διαφορά συγκέντρωσης δηλαδή όλη η ατμόσφαιρα να περιέχει κορεσμένους ατμούς νερού στη δεδομένη θερμοκρασία. Αυτό συμβαίνει όταν η σχετική υγρασία της ατμόσφαιρας είναι κοντά στο 100% και τότε λέγεται ότι ο αέρας είναι κορεσμένος



# Π2 Υπολογιστικοί Κώδικες

## Κώδικας υπολογισμού Συγκέντρωσης

```
%*****
%*****
% Description :
% This function calculates the distribution hail limits of FAA Part
33
% in every flight height
%
% References :
% [1] AGARD 1994, "Recommended Practices for the assessment of the
effects of
% atmospheric water ingestion on the performance and operability of
gas turbine
% engines"
% [2] Federal Register - August 9, 1996 (Volume 61, Number 155)
% [3] R. Rasmussen et al 1987, "Melting and Shedding of Graupel and
Hail Part I Model
% Physics"
% [4] R. List et al 1967, "Quasi Steady State Icing and Melting
Conditions and Heat
% and Mass Transfer of Spherical and Spheroidal Hailstones
%
% Use :
% Simple use with arguments in - arguments out
%
% Input :
% fh=flight height(ft)->[0,46000]
%
% Output :
% out=[number of hailstones(-) equivalent diameter(m) terminal
speed(m/s)]
%*****
%*****

function out=Distribution(fh)

if (fh<0)&&(fh>46000)
    error('Wrong Input Arguments')
end

rhoi=917;
lpar=200;
twc=hailwatcont(fh); %Calling function hailwatcont to calculate the
hail water content every flight height
n0par=(twc/1000)*lpar^4/pi/rhoi;
out=zeros(1);
k=1; %Pointer k is going to be used as integer pointer for saving
values into the matrices
for j=(0.5*10^-3):(10^-3):(4.5*10^-3) %From 0.5 mm hailstone diameter
to less than 5 mm with a step (interval) of 1 mm
    d1=j;
```

```

    d2=j+(1*10^-3);
    n=(n0par/lpar)*(exp(-lpar*d1)-exp(-lpar*d2)); %This is the
formula to calculate the integration from Diameter1(j) to
Diameter2(j+0.5)
    w=(pi*rhoi*n0par/6)*(exp(-
lpar*d1)*(d1^3/lpar+3*d1^2/(lpar^2)+6*d1/(lpar^3)+6/(lpar^4))-exp(-
lpar*d2)*(d2^3/lpar+3*d2^2/(lpar^2)+6*d2/(lpar^3)+6/(lpar^4)));
    ediam=(6*w/n/rhoi/pi)^(1/3);
    ut=uterm(fh,ediam,rhoi); %calling function uterm to calculate the
terminal speed of every hailstone assuming that its diameter is in
the middle of its size interval

    out(k,1)=n;
    out(k,2)=ediam;
    out(k,3)=ut;

    k=k+1;
end
for j=0.005:0.01:0.145 %From 5 mm hailstone diameter to less than
15cm mm with a step of 1 cm, so we have 1 cm interval
    d1=j;
    d2=j+0.01;
    n=(n0par/lpar)*(exp(-lpar*d1)-exp(-lpar*d2)); %Equation - this is
the formula to calculate the intergration from Diameter1(D1) to
Diameter2(D2)
    w=(pi*rhoi*n0par/6)*(exp(-
lpar*d1)*(d1^3/lpar+3*d1^2/(lpar^2)+6*d1/(lpar^3)+6/(lpar^4))-exp(-
lpar*d2)*(d2^3/lpar+3*d2^2/(lpar^2)+6*d2/(lpar^3)+6/(lpar^4)));
    ediam=(6*w/n/rhoi/pi)^(1/3);
    ut=uterm(fh,ediam,rhoi); %Calling function Uterm to calculate the
terminal speed of every hailstone assuming that its diameter is in
the middle of its size interval

    out(k,1)=n;
    out(k,2)=ediam;
    out(k,3)=ut;

    k=k+1;
end
end

function out=hailwatcont(fh)

alt=[0
7300,8500,10000,12000,15000,16000,17700,19300,21500,24300,29000,46000
]; %Data from [2]
hal=[6.0,8.9,9.4,9.9,10.0,10.0,8.9,7.8,6.6,5.6,4.4,3.3,0.2];
out=interp1(alt,hal,fh);

end

function out=uterm(fh,diam,rhoi)

g=9.81;
gasconsa=287.0;
ht=hailstormtemp(fh);
tea=ht(1,1);
pra=ht(1,2);

```

```

rhoa=pra/gasconsa/tea;

ha=0.00001827*(291.15+120)*(tea/291.15)^(3/2)/(tea+120);
%Sutherland's equation for dynamic viscosity

mi=rhoi*pi*diam^3/6;

xvar=8*mi*g*rhoa/(pi*ha^2); %Methodology and Equations from [3]
wvar=log10(xvar);

if (xvar>=73)&&(xvar<562)
    reynu=10^(1.7095+1.33438*wvar-0.11591*wvar*wvar);
end
if (xvar>=562)&&(xvar<1.83*10^3)
    reynu=10^((-1.81391)+1.34671*wvar-
0.12427*wvar*wvar+0.0063*wvar*wvar*wvar);
end
if (xvar>=1.83*10^3)&&(xvar<3.46*10^8)
    reynu=0.4487*xvar^0.5536;
end
if xvar>=3.46*10^8
    reynu=(xvar/0.6)^0.5;
end
out=ha*reynu/(diam*rhoa);

end

function out=hailstormtemp(fh)

h=fh*0.0003048; %converting ft to Km

if h>=3.5
    out(1,1)=(9.0066*10^4-h*10^4/2.76)^(1/2); %Equation from [4]
    out(1,2)=(exp(out(1,1)/53)/0.284)*100;
elseif (h>=0)&&(h<3.5)
    ha=[3.5,3.0,2.5,2.0,1.6,0]; %Data from [4]
    tea=[5,10,15,20,25,25];
    pra=[680,720,760,810,865,1013];
    out(1,1)=interp1(ha,tea,h)+273.15;
    out(1,2)=interp1(ha,pra,h)*100;
end

end

```

### **Κώδικας υπολογισμού Θερμικής Αλληλεπίδρασης**

```

%*****
%*****
% Description :
% This function calculates the change in diameter and temperature of
% a spherical
% ice particle heated or cooled by an external airflow.
%
% References :
% [1] Equations and Methology described in detail at thesis "Hail
% Ingestion in
% AeroEngines"
%
% Use :

```

```

% Simple use with arguments in - arguments out
%
% Input :
% rain=internal radius at begin of time step(m)->[rcr,~]
%
% rbin=external radius at begin of time step(m)->[rcr,~]
%
% tesin=surface temperature of particle at begin of time step(K)-
>[173.15,2000]
%
% tea=ambient temperature(K)->[150,1400]
%
% pra=ambient pressure(Pa)->[611.1,3*10^5]
%
% urev=relative speed of particle with air(m/s)->[0,200]
%
% war=water to air ratio(-)->[0,1]
%
% rhoi=density of ice (Kg/m^3)->[200,1000]
%
% rcr=crystal radius(m)->[10^-9,10^-3]
%
% dt=timestep(s)->[10^-8,1]
%
% nn=negligible number(-)->[10^-50,10^-10]
%
% mode='1' Water film with temperature gradient(-) or
%      '2' Water film without temperature gradient(-)
%
% Output :
% out=[new internal radius(m) new external radius(m) new surface
temperature(K)]
%*****
*****

function
out=Heat(rain,rbin,tesin,tea,pra,urev,war,rhoi,rcr,dt,nn,mode)

if (rain>rbin)|| (rcr<10^-9)
    error('Wrong input arguments : Radius Error');
end
if
(tesin<231.15)|| (tesin>640)|| ((rain<=rcr)&&(tesin<273.16))|| (tea<150)
|| (tea>2000)
    error('Wrong input arguments : Temperature Error');
end
if (pra>30*10^5)|| (pra<611.1)
    error('Wrong input arguments : Pressure Error');
end
if (urev>300)|| (urev<0)
    error('Wrong input arguments : Velocity Error');
end
if (war>0.2)|| (war<0)
    error('Wrong input arguments : Water to Air Ratio Error');
end
if (rhoi<100)|| (rhoi>1000)
    error('Wrong input arguments : Density Error');
end
if (dt<=0)
    error('Wrong input arguments : Time Step Error');

```

```

end
if (nn<10^-50) || (nn>10^-3)
    error('Wrong input arguments : Nill Number Error');
end
if ((mode~=1) && (mode~=2))
    error('Wrong input arguments : Mode Error');
end

filmprop=FilmProperties(tesin,tea,pra,war,rbin,urev,nn);
mwa=filmprop(1);
mws=filmprop(2);
h=filmprop(3);
hm=filmprop(4);
lhev=filmprop(5);
cp=filmprop(6);
k=filmprop(7);
tebl=filmprop(8);
rhoa=filmprop(9);
vk=filmprop(10);

teme=273.16;
tecr=647.17;
rhow=1000;
sigma=5.67*10^-8;
ap=0.8;
lhm=334000;
lhs=2834500;
xratio=rhoi/1000;
reynu=urev*(2*rbin)/vk;

if (rain<rcri) %If the internal radius is smaller than the minimum non
icy crystal core (dust for example), then function by default
corrects that mistake by making the internal radius equal to the
crystal radius
    rain=rcri;
end

if (mode==2) && (rain>rcri) %Waterfilm is supposed isothermal due to
internal circulation or shedding. Also there has to be ice core with
water film to pick up a mode. Else it is only a waterdrop.
    tesin=teme;
end

if (tesin<teme) && (rbin>rcri) %General case of Sublimation - Heating
model

out=DryIce(hm,rhoa,mws,mwa,lhs,h,tea,tesin,rhoi,rbin,dt,cp,nn,ap,sigm
a); %Get the first estimation of solutions
rbout=out(1);
rbtemp=rbout;
tesout=out(2);
testemp=tesout;
if testemp>273.16
    testemp=273.16;
end
flag=1; %Code is clear for iteration when flag is up (value=1)
and not clear when flag is down (value=-1)
iteration=1;
while flag>0 %Iterate until the convergence of the solutions

```

```

        filmprop=FilmProperties(testemp,tea,pra,war,rbtemp,urev,nn);
%Evaluate new film properties with the new data of radius and surface
temperature
        mws=filmprop(2);
        h=filmprop(3);
        hm=filmprop(4);
        rhoa=filmprop(9);

out=DryIce(hm,rhoa,mws,mwa,lhs,h,tea,testemp,rhoi,rbin,dt,cp,nn,ap,si
gma);
        rbout=out(1);
        tesout=out(2);
        if (tesout>640)|| (tesout<235) %These values are the limits
for property calculations
            tesout=tesin;
        end
        if (rbout<1.001*rbtemp)|| (rbout>0.999*rbtemp) %Convergence
criterion
            flag=-1;
        end
        if (iteration>10)&&(flag>0) %In case of convergence failure
exit loop and leave temperature intact
            tesout=tesin;
            flag=-1;
        end
        rbtemp=rbout;
        testemp=tesout;
        iteration=iteration+1;
    end
    if tesout>teme %Avoid overheating (assumption with loss of
information for big time steps)
        tesout=teme;
    end
    if (rbout>rbin) %Condensation is supposed not to happen. External
radius only disintegrates
        rbout=rbin;
    end
    raout=rbout; %No meltwater exists
elseif (tesin>=teme)&&(tesin<tebl)&&(rbin>rcr) %General case of
Evaporation model of wet ice particles or melted water droplets
    flag=1; %Code is clear for iteration when flag is up (value=1)
and not clear when flag is down (value=-1)
    if rbin-rain<=0 %At the very initial melting iteration
convergence will never happen
        flag=-1;
    end
end

out=WetIce(rbin,rain,hm,rhoa,mws,mwa,lhev,h,tea,tesin,mode,rcr,k,teme
,lhm,nn,cp,rhow,rhoi,xratio,dt,ap,sigma); %Get the first estimation
of solutions
    raout=out(1);
    rbout=out(2);
    rbtemp=rbout;
    tesout=out(3);
    testemp=tesout;
    if testemp<273.16
        testemp=273.16;
    end
    if testemp>=tebl %If boil happens avoid iteration
        flag=-1;
    end
end

```

```

    if rbout<=rcr %In case of very small droplets with high
temperature radius vanishes immediately
        flag=-1;
    end
    iteration=1;
    while flag>0 %Iterate until the convergence of the solutions
        filmprop=FilmProperties(testemp,tea,pra,war,rbtemp,urev,nn);
%Evaluate new film properties with the new data of radius and surface
temperature
        mws=filmprop(2);
        h=filmprop(3);
        hm=filmprop(4);
        rhoa=filmprop(9);

out=WetIce(rbin,rain,hm,rhoa,mws,mwa,lhev,h,tea,testemp,mode,rcr,k,te
me,lhm,nn,cp,rhow,rhoi,xratio,dt,ap,sigma);
        raout=out(1);
        rbout=out(2);
        tesout=out(3);
        if (tesout>640)|| (tesout<235) %These values are the limits
for property calculations
            tesout=tesin;
        end
        if (rbout<1.001*rbtemp)|| (rbout>0.999*rbtemp) %Convergence
criterion
            flag=-1;
        end
        if (iteration>10)&&(flag>0) %In case of convergence failure
exit loop and leave temperature intact
            tesout=tesin;
            flag=-1;
        end
        rbtemp=rbout;
        testemp=tesout;
        iteration=iteration+1;
    end
    if rbout>rbin %Condensation is supposed not to happen. External
radius only disintegrates
        rbout=rbin;
    end
    if raout>rbout %Eliminate nonphysical results for radius
        raout=rbout;
        tesout=teme;
    end
    if raout<rcr %Minimum radius is crystalline radius
        raout=rcr;
    end
    if rbout<rcr %Avoid overlapping (assumption with loss of
information for big time steps)
        rbout=rcr;
        tesout=tesin;
    end
    if tesout>=640 %If temperature output is greater than critical
point of water the present function will not accept the output as
input.
        tesout=273.16+0*tecr;
        rbout=raout;
    end
    if tesout<235 %Avoid cooling below valid data limits
        tesout=235;
    end
end

```

```

else %General case of boiling or already vanished particle so no
action has to be taken
    raout=rain;
    rbout=rbin;
    tesout=tesin;
end

if tesout>=tebl %Boiling Check
    raout=rain;
    rbout=rbin;
    tesout=tesin;
    dqcvdt=h*4*pi*rbout^2*(tea-tesout);
    dqevdt=-dqcvdt;
    dmevdt=dqevdt/lhev;
    if dqcvdt>0
        if raout>rcr %Subcase case of wet ice particle boiling with
ice core remaining intact
            rbl=(rain*(teme-tesin))/((tebl-teme)*(1-rain/rbin)+teme-
tesin);
            drbdt=dmevdt/(rhow*4*pi*rbin^2);
            rbout=rbin+drbdt*dt;
            if rbout<rbl
                rbout=rbl;
                tesout=tebl;
            else
                tesout=teme-(teme-tesin)*((1-(rain/rbout))/((1-
rain/rbin)+nn));
            end
            else %Subcase of droplet boiling (assumption of droplet with
instantly uniform temperature)
                drbdt=dmevdt/(rhow*4*pi*rbout^2);
                rbout=rbout+drbdt*dt;
            end
        else
            if raout>rcr
                raout=rcr;
                rbout=rbin;
                tesout=tesin;
            else
                raout=rain;
                rbout=rbin;
                tesout=tesin;
            end
        end
    end
    disp('!!! Notice !!! Boiling');
end

if (reynu>6*10^3)&&(rain>rcr) %Shedding Check
    rbct=(1.6022+1.1389*rain^3)^(1/3);
    if rbout>rbct
        rbout=rbct;
    end
    if rbout<raout %In the limiting case of full water film shedding
external radius must collapse to internal radius
        rbout=raout;
    end
    disp('!!! Notice !!! Shedding');
end

out(1,1)=raout;
out(1,2)=rbout;

```



```

out(1,3)=tesout;

end

function out=FilmProperties(tesin,tea,pra,war,rbin,urev,nn)

if tesin<273.16 %Get properties over Ice
    cp=XIce('cp',tesin);
    prss=XIce('psatV_T',tesin);
    tebl=XSteam('TSat_p',pra*10^-5)+273.15;
    lhev=2500500;
    k=XIce('k',tesin);
else %Get properties over water
    tebl=XSteam('TSat_p',pra*10^-5)+273.15;
    lhev=XSteam('hV_T',tesin-273.15)*1000-XSteam('hL_T',tesin-
273.15)*1000;
    prss=XSteam('pSat_T',tesin-273.15)*10^5;
    k=XSteam('tcL_T',tesin-273.15);
    cp=XSteam('CpL_T',tesin-273.15)*1000;
end

if prss>pra %Seems that boiling condition appeared in some iteration
    prss=pra;
end

mwa=1/(1+1/(war+nn));
wars=0.622*prss/((pra-prss)+nn);
mws=1/(1+1/(wars+nn));
xwf=mws+(1/3)*(mwa-mws);
warf=xwf/((1-xwf)+nn);
tef=tesin+(1/3)*(tea-tesin);

if tef>640 %Film contains water and calculation of properties over
critical point is not included so last known properties are used
    tef=640;
end

rhoa=XHumidAir('rho',tef,pra,warf);
cpa=XHumidAir('cp',tef,pra,warf);
ka=XHumidAir('k',tef,pra,warf);
vk=XHumidAir('my',tef,pra,warf)/rhoa;
dva=XHumidAir('dv',tef,pra,warf);

if rbin<5*10^-6 %Correction for knudsen effect
    dva=dva/((rbin/(rbin+(1.3*(8*10^-
6*0.01))))+(dva/(rbin*0.036))*(2*pi*(18.01528/1000)/8.3144621/tef)^(1
/2));
    ka=ka/((rbin/(rbin+(2.16*10^-
5*0.01))))+(ka/(rbin*0.7*rhoa*cpa))*(2*pi*(28.966/1000)/8.3144621/tef)
^(1/2));
end

kapaa=ka/rhoa/cpa;
pdlnu=vk/kapaa;
reynu=urev*2*rbin/vk;
schnu=vk/dva;
bm=(mws-mwa)/((1-mws)+nn);
bh=cpa*(tea-tesin)/lhev;
fm=(1+bm)^0.7*(log(1+bm)/bm);

```

```

fh=(1+bh)^0.7*(log(1+bh)/bh);
shrnu=2*(log(1+bm)/bm)*(1+(0.781/2)*(reynu^(1/2)*schnu^(1/3)/fm));
nusnu=2*(log(1+bh)/bh)*(1+(0.781/2)*(reynu^(1/2)*pdlnu^(1/3)/fh));
h=ka*nusnu/(2*rbin);
hm=dva*shrnu/(2*rbin);

out(1)=mwa;
out(2)=mws;
out(3)=h;
out(4)=hm;
out(5)=lhev;
out(6)=cp;
out(7)=k;
out(8)=tebl;
out(9)=rhoa;
out(10)=vk;

end

function
out=DryIce(hm,rhoa,mws,mwa,lhs,h,tea,tesin,rhoi,rbin,dt,cp,nn,ap,sigma)

rbout=rbin+(-hm*rhoa*rhoi^-1*log(1+(mws-mwa)/((1-mws)+nn)))*dt+nn;
tesout=tesin+((-hm*rhoa*log(1+(mws-mwa)/((1-mws)+nn))*lhs+h*(tea-tesin)+ap*sigma*(tea^4-tesin^4))/((1/3)*rhoi*rbin*cp))*dt;

out(1)=rbout;
out(2)=tesout;

end

function
out=WetIce(rbin,rain,hm,rhoa,mws,mwa,lhev,h,tea,tesin,mode,rcr,k,teme,lhm,nn,cp,rhow,rhoi,xratio,dt,ap,sigma)

if (rbin-rain)>0 %Determination whether evaporation is going to happen in this time step. At this temperature and pressure for evaporation to happen surface water must exist to built vapor for equilibrium.
    dmevdt=-hm*4*pi*rbin^2*rhoa*log(1+(mws-mwa)/((1-mws)+nn));
    %Evaporation Spalding equation
else %If surface is dry ice must build water for equilibrium and water will built vapor for equilibrium. Only water is produced in this time step to be evaporated in the next time step. Assumption that needs extra small time steps to work
    dmevdt=0;
end

if dmevdt>0
    dmevdt=0;
end

dqevdt=dmevdt*lhev;
dqcvdt=h*4*pi*rbin^2*(tea-tesin);
dqrdt=ap*sigma*4*pi*rbin^2*(tea^4-tesin^4);

if rain>rcr %Subcase case of wet ice particle evaporation with melting ice core

```

```

    if (dqcvdt+dqevdt+dqrrdt)>0 %Determination of whether conduction
of heat remains to penetrate through the water film layer
        if (mode==2) %Apply convection mode restrictions. Notice that
in some modes waterfilm is supposed isothermal due to internal
circulation or shedding. Also there has to be ice core with water
film to pick up a mode. Else it its only a waterdrop.
            tesout=teme;
            dqmedt=-(dqevdt+dqcvdt+dqrrdt);
            dradt=dqmedt/(lhm*rhoi*4*pi*rain^2);
            drbdt=dmevdt/(rhow*4*pi*rbin^2)+(1-
xratio)*dqmedt/(lhm*rhoi*4*pi*rbin^2);
            raout=rain+dradt*dt;
            rbout=rbin+drbdt*dt;
        else
            if (rbin-rain)>0
                mi=1+(mws-mwa)/((1-mws)+nn);
                avar=((1/3)*(rbin^3-rain^3)-(rain/2)*(rbin^2-
rain^2))/((1-rain/rbin)+nn);
                bvar=rain*rbin/((rbin-rain)+nn);
                tesout=(-hm*rbin^2*rhoa*log(mi)*lhev+h*rbin^2*(tea-
tesin)+ap*sigma*rbin^2*(tea^4-tesin^4)+cp*rhow*tesin*dt^
1*avar+k*teme*bvar)*(cp*rhow*avar*dt^-1+k*bvar)^-1;
                raout=rain-k*bvar*(tesout-teme)*lhm^-1*rhoi^-1*rain^-
2*dt;
                rbout=rbin+(-hm*rhoa*log(mi)*rhow^-1-(1-
xratio)*k*bvar*(tesout-teme)*lhm^-1*rhoi^-1*rbin^-2)*dt;
            else
                dqmedt=-(dqevdt+dqcvdt+dqrrdt);
                dradt=dqmedt/(lhm*rhoi*4*pi*rain^2);
                drbdt=dmevdt/(rhow*4*pi*rbin^2)+(1-
xratio)*(dqmedt)/(lhm*rhoi*4*pi*rbin^2);
                raout=rain+dradt*dt;
                rbout=rbin+drbdt*dt;
                tesout=tesin;
            end
        end
        if raout<rcr %In the limiting case of full ice disintegration
internal radius must collapse to crystal radius
            raout=rcr;
        end
    else %In case of negative conduction of heat then ice builds up
on the ice core (assumption)
        qneed=(dqevdt+dqcvdt+dqrrdt)*dt;
        qavalsense=cp*rhow*4*pi*((teme/3)*(rbin^3-rain^3)-(teme-
tesin)*(rbin^3-rain^3)/3-(rain/2)*(rbin^2-rain^2))/(1-
rain/rbin+nn)-(cp*rhow*((4/3)*pi*(rbin^3-rain^3))*teme);
        qavallat=rhow*(4/3)*pi*(rbin^3-rain^3)*lhm;
        qavaltot=qavalsense+qavallat;
        if (qavalsense+qneed)>0 %Determination whether on not water
film thermal content can cover the need for evaporation
            qfnl=qavalsense+qneed; %Assuming that the water film
temperature profile is the same as steady state conduction
            drbdt=dmevdt/((rhow*4*pi*rbin^2));
            dradt=0;
            rbout=rbin+drbdt*dt;
            raout=rain+dradt*dt;
            avar=rbout^3-raout^3;
            bvar=rbout^2-raout^2;
            cvar=1-raout/rbout;

```

```

tesout=(((qfnl+(cp*rhow*((4/3)*pi*avar)*teme))/(cp*rhow*4*pi))-
((teme/3)*avar))/((avar/3-(raout/2)*bvar)/(cvar+nn))+teme;
elseif ((qavalsense+qneed)<0)&&((qavaltot+qneed)>0) %Full
evaporation with water film (full) and ice core (partially) serving
energy
    dqfreezedt=(qavalsense+qneed)/dt;
    dradt=(dqfreezedt/(lhm*rhoi*4*pi))*(1/rain^2);
    drbdt=((dmevdt/(rhow*4*pi))+((1-
xratio)*(dqfreezedt)/(lhm*rhoi*4*pi)))*(1/rbin^2);
    raout=rain+dradt*dt;
    rbout=rbin+drbdt*dt;
    tesout=teme; %No sensible heat is left in water film
else
    dqfreezedt=(qavalsense+qneed)/dt;
    dqsubfreezedt=(qavaltot+qneed)/dt;
    drbdt=((dmevdt/(rhow*4*pi))+((1-
xratio)*(dqfreezedt)/(lhm*rhoi*4*pi)))*(1/rbin^2);
    rbout=rbin+drbdt*dt;
    raout=rbout;

tesout=((dqsubfreezedt)/(rhoi*(4/3*pi*rbout^3)*cp))*dt+teme;
end
end
if (mode==2) %Aply convection mode restrictions.
    tesout=teme;
end
else %Subcase of droplet evaporation (assumption of droplet with
instantly uniform temperature)
    if (dqcvdt+dqevdt+dqrddt)>0
        drbdt=(dqevdt/(lhev*rhow*4*pi))*(1/rbin^2);
        rbout=rbin+drbdt*dt;
        raout=rcr;

tesout=((dqevdt+dqcvdt+dqrddt)*dt*3)/(4*rhow*pi*rbin^3*cp)+tesin;
    else
        qneed=(dqcvdt+dqevdt+dqrddt)*dt;
        qavalsense=rhow*(4/3)*pi*rbin^3*cp*(tesin-teme);
        qavallat=rhow*(4/3)*pi*rbin^3*lhm;
        qavaltot=qavalsense+qavallat;
        if qavalsense+qneed>0 %Determination whether or not droplet
sensible heat content can cover the need for evaporation
            drbdt=dmevdt/((rhow*4*pi*rbin^2));
            raout=rcr;
            rbout=rbin+drbdt*dt;

tesout=(qavalsense+qneed)/(rhow*(4/3)*pi*rbout^3*cp)+teme;
        elseif (qavalsense+qneed<0)&&(qavaltot+qneed)>0) %Full
evaporation with water droplet freezing from inside
            dqfreezedt=(qavalsense+qneed)/dt;
            dradt=(dqfreezedt/(lhm*rhoi*4*pi))*(1/rain^2);
            drbdt=((dmevdt/(rhow*4*pi))+((1-
xratio)*(dqfreezedt)/(lhm*rhoi*4*pi)))*(1/rbin^2);
            raout=rain+dradt*dt;
            rbout=rbin+drbdt*dt;
            tesout=teme; %No sensible heat is left in water film
        else
            dqfreezedt=(qavalsense+qneed)/dt;
            dqsubfreezedt=(qavaltot+qneed)/dt;
            drbdt=((dmevdt/(rhow*4*pi))+((1-
xratio)*(dqfreezedt)/(lhm*rhoi*4*pi)))*(1/rbin^2);

```

```

        rbout=rbin+drbdt*dt;
        raout=rbout;

tesout=((dqsubfreezedt)/(rhoi*(4/3*pi*rbout^3)*2110))*dt+teme;
    end
end
end

out(1)=raout;
out(2)=rbout;
out(3)=tesout;

end

```

### **Κώδικας υπολογισμού Μηχανικής Αλληλεπίδρασης**

```

%*****
%*****
% Description :
% This function calculates the change in velocity, diameter and
position of a
% spherical ice particle impacted on a wet moving surface.
%
% References :
% [1] Equations and Methology described in detail at thesis "Hail
Ingestion in
% AeroEngines"
%
% Use :
% Simple use with arguments in - arguments out
%
% Input :
% pa=[radical point a position(m) peripheral point a position(rad)
longitudinal point
% a position(m)]->[[0,2) [0,2pi) [0,5]]
%
% pb=[radical point b position(m) peripheral point b position(rad)
longitudinal point
% b position(m)]->[[0,2) [0,2pi) [0,5]]
%
% pc=[radical point c position(m) peripheral point c position(rad)
longitudinal point
% c position(m)]->[[0,2) [0,2pi) [0,5]]
%
% vhin=[radical hail velocity(m/s) peripheral hail velocity(m/s)
longitudinal hail
% velocity(m/s)]->[[-200,+200] [-200,+200] [-200,+200]]
%
% vabcin=[radical surface velocity(m/s) peripheral surface
velocity(m/s) longitudinal
% surface velocity(m/s)]->[[-200,+200] [-200,+200] [-200,+200]]
%
% shin=[radical hail spin(r/s) peripheral hail spin(r/s) longitudinal
hail
% spin(r/s)]->[[-10000,+10000] [-10000,+10000] [-10000,+10000]]
%
% sabcin=[radical surface spin(r/s) peripheral surface spin(r/s)
longitudinal surface
% spin(r/s)]->[[-10000,+10000] [-10000,+10000] [-10000,+10000]]
%
%

```

```

% dhin=hail diameter(m)->[1*10^-6,~]
%
% dabcin=surface diameter(m)->[~,inf]
%
% tehin=hail temperature(K)->[230,650]
%
% teabcin=surface temperature(K)->[230,2000]
%
% proph=[density of hail(Kg/m^3) young modulus of hail(Pa) poisson
ratio of hail(-)
% specific isobaric heat capacity of hail(J/Kg/K) thermal
conductivity of
% hail(J/m/K/s)]->[~]
%
% propabc=[density of surface(Kg/m^3) young modulus of surface(Pa)
poisson ratio of surface(-)
% specific isobaric heat capacity of surface(J/Kg/K) thermal
conductivity of
% surface(J/m/K/s)]->[~]
%
% e=coefficient of restitution(-)->[0,1]
%
% f=coefficient of friction(-)->[0,1]
%
% intervals=number of families between fragments(-)->[1,1000]
%
% nn=negligible number(-)->[10^-50,10^-10]
%
% dt=timestep(s)->[10^-8,1]
%
% film=surface water film height(m)->[0,10^-2]
%
% wain=bridge distance between particle and surface(m)
%
% side='1' Upstream side(-) or
%       '2' Downstream side(-)
%
% Output :
% out1=[family mean diameter(m) family mass fraction(%)]
%
% out2=[radical hail post timestep velocity(m/s) peripheral hail post
timestep
% velocity(m/s) longitudinal hail post timestep
% velocity(m/s)]->[[-200,+200] [-200,+200] [-200,+200]]
%
% out3=[radical hail post timestep position(m) peripheral hail post
timestep
% position(rad) longitudinal post hail position(m)]->[[0,2) [0,2pi)
[0,5)]
%
% out4=post timestep hail temperature(K)
%
% out5=post timestep water approach(m)
%*****
%*****
function
[out1,out2,out3,out4,out5]=Impact(pa,pb,pc,vhin,vabcin,shin,sabcin,dh
in,dabcin,tehin,teabcin,proph,propabc,e,f,intervals,nn,dt,film,wain,s
ide)

```

```
if (pa(1))<0
    error('Wrong input arguments : Position of point a Error');
end
if (pb(1))<0
    error('Wrong input arguments : Position of point b Error');
end
if (pc(1))<0
    error('Wrong input arguments : Position of point c Error');
end
if (dhin<=1*10^-6)
    error('Wrong input arguments : Diameter hail Error');
end
if (dabcin<=1*10^-6)
    error('Wrong input arguments : Diameter abc Error');
end
if (tehin<230)|| (tehin>650)
    error('Wrong input arguments : Temperature hail Error');
end
if (teabcin<230)
    error('Wrong input arguments : Temperature abc Error');
end
if
    (proph(1)<300)|| (proph(1)>1000)|| (proph(2)<0)|| (proph(3)<0)|| (proph(4)
    )<0)|| (proph(5)<0)
    error('Wrong input arguments : Properties hail Error');
end
if
    (propabc(1)<0)|| (propabc(2)<0)|| (propabc(3)<0)|| (propabc(4)<0)|| (prop
    abc(5)<0)
    error('Wrong input arguments : Properties abc Error');
end
if (e<0)|| (e>1)
    error('Wrong input arguments : Coefficient of restitution
    Error');
end
if (f<0)|| (f>0.5)
    error('Wrong input arguments : Coefficient of friction Error');
end
if (intervals<1)
    error('Wrong input arguments : Intervals Error');
end
if (nn<10^-50)|| (nn>10^-3)
    error('Wrong input arguments : Nill Number Error');
end
if (dt<=0)
    error('Wrong input arguments : Time Step Error');
end
if (film<0)
    error('Wrong input arguments : Film heigth Error');
end
if (dt<=0)
    error('Wrong input arguments : Time Step Error');
end
if (wain<0)
    error('Wrong input arguments : Water approach Error');
end
if ((side~=1)&&(side~=2))
    error('Wrong input arguments : Side of surface Error');
end

zero=[0 0 0]; %Variable to load zero values
```

```

[pa,~,~]=Coordinates(pa,zero,zero,1); %Transformation from
cylindrical to cartesian coordinates
[pb,~,~]=Coordinates(pb,zero,zero,1);
[pc,~,~]=Coordinates(pc,zero,zero,1);

phin=[pa(1)+pb(1)+pc(1) pa(2)+pb(2)+pc(2) pa(3)+pb(3)+pc(3)]*(1/3);
%Assuming initial hail position at the triangular surface centroid
point

[~,vhin,~]=Coordinates(phin,vhin,zero,1);
[~,vabcin,~]=Coordinates(phin,vabcin,zero,1);
[~,~,shin]=Coordinates(phin,zero,shin,1);
[~,~,sabcin]=Coordinates(phin,zero,sabcin,1);

rhoh=proph(1); %Loading properties of particle and surface
rhoabc=propabc(1);
ymh=proph(2);
ymabc=propabc(2);
prh=proph(3);
prabc=propabc(3);
cph=proph(4);
cpabc=propabc(4);
tch=proph(5);
tcabc=propabc(5);

mh=(pi/6)*dhin^3*rhoh; %Loading constants
mabc=Inf;

rhow=1000;
cpw=4200;
sigma=0.12;
kw=0.54;
vkw=1.75*10^-6;

ab=pb-pa; %Surface definition
ac=pc-pa;
beta=cross(ab,ac);

if beta(3)==0 %Correction for a case of horizontal surface where beta
vector has no z coordinate component
    beta(3)=nn;
end

if (side==1) %Side definition
    if beta(3)<0
        beta=cross(ac,ab);
    end
else
    if beta(3)>0
        beta=cross(ac,ab);
    end
end

nx=[1 0 0]; %Unit vectors of engines cartesian coordinates base
ny=[0 1 0];
nz=[0 0 1];
omikron=cross(nz,beta);
no=omikron/norm(omikron);
fo=acos(dot(nz,beta)/norm(beta));

```



```

ni=nx*cos(fo)+cross(no,nx)*sin(fo)+no*dot(no,nx)*(1-cos(fo));
%Coordinate base rotation
nj=ny*cos(fo)+cross(no,ny)*sin(fo)+no*dot(no,ny)*(1-cos(fo));
nk=nz*cos(fo)+cross(no,nz)*sin(fo)+no*dot(no,nz)*(1-cos(fo));

vhin=[dot(vhin,ni) dot(vhin,nj) dot(vhin,nk)]; %Image of speeds on
the new base
shin=[dot(shin,ni) dot(shin,nj) dot(shin,nk)];
vabcin=[dot(vabcin,ni) dot(vabcin,nj) dot(vabcin,nk)];
sabcin=[dot(sabcin,ni) dot(sabcin,nj) dot(sabcin,nk)];

win=vabcin-vhin; %Relative speeds with particle to be set still

if wain>0 %General case of impact with water film
    nw=(win/norm(win));
    frci=(3*pi*vkw*rhow*(dhin/2)^2*abs(win(3)))/(2*wain)*[0 0 nw(3)];
%Force from fluid displacement
    if film>dhin
        frcd=(1/2)*0.47*(pi*(dhin/2)^2)*rhow*abs(abs(vabcin)-
abs(vhin))*(vabcin-vhin); %Force from particle drag immersed in fluid
    else
        frcd=0;
    end
    frc=frci+frcd;
    vhout=vhin+frc*(dt/mh);
    vabcout=vabcin+frc*(dt/mabc);
    wout=vabcout-vhout;
    shout=[0 0 0];
    sabcout=sabcin;
    vhm=(vhin+vhout)/2;
    phout=phin+vhm*dt; %Evaluation of new position vector via the
mean time step velocity
    wm=(win+wout)/2;
    waout=wain-wm(3)*dt; %Evaluation of new water approach via the
mean time step relative velocity
    if waout<0 %In case of impact with surface stop surface
penetration
        waout=0;
    end
    dhout=dhin;
    areas=pi*dhin^2;
    kapaw=kw/rhow/cpw;
    pdlnu=vkw/kapaw;
    reynu=norm((wout+win)/2)*(dhin)/vkw;
    nusnu=2+0.6*reynu^(1/2)*pdlnu^(1/3);
    h=kw*nusnu/dhin;
    dqcvdt=h*areas*(teabcin-tehin); %Heat transfer relation
    tehout=((dqcvdt)*dt*3)/(4*rhoh*pi*(dhin/2)^3*cpi)+tehin;
else %General case of impact with surface
    if (dhin<=1*10^-3) %Critical normal to surface fracture velocity
depended on initial velocity
        wcr=(0.066/dhin)^(1/2);
    elseif (dhin>=1*10^-3)&&(dhin<1*10^-2)
        wcr=-146.66*dhin+8.2666;
    else
        wcr=(0.463/dhin)^(1/2);
    end
    if abs(win(3))<wcr %Rebound
        wcnin=[0 0 win(3)];

```

```

n=wcnin/norm(wcnin);
wctin=win-dot(win,n)*n+(dhin/2)*cross(shin,n);
t=wctin/norm(wctin);
jnc=0;
if dot(n,win)<-
(1/mabc+1/mh)*(jnc/(1+e))+(2/7)*norm(wctin)/(f*(1+e)) %Particle
slides all the time of contact
vabcout=vabcin+jnc*(n-f*t)/mabc-
(mh/(mabc+mh))*(1+e)*dot(n,win)*(n+f*t);
vhout=vhin-jnc*(n-
f*t)/mh+(1/(1+mh/mabc))*(1+e)*dot(n,win)*(n+f*t);
sabcout=sabcin+(5/dabcin)*cross(n,t)*f*(-jnc/mabc-
(mh/(mabc+mh))*(1+e)*dot(n,win));
shout=shin+(5/dhin)*cross(n,t)*f*(-jnc/mh-
(1/(1+mh/mabc))*(1+e)*dot(n,win));
else
vabcout=vabcin+((jnc/mabc-
(mh/(mabc+mh))*(1+e)*dot(n,win))*n-
(2/7)*(mh/(mabc+mh))*norm(wctin)*t); %Particle rolls some of the
contact time
vhout=vhin-((jnc/mh-(1/(1+mh/mabc))*(1+e)*dot(n,win))*n-
(2/7)*(1/(1+mh/mabc))*norm(wctin)*t);
sabcout=sabcin-
(5/(7*(dabcin/2)))*cross(n,t)*norm(wctin)*(mh/(mabc+mh));
shout=shin-
(5/(7*(dhin/2)))*cross(n,t)*norm(wctin)*(1/(1+mh/mabc));
end
dhout=dhin;
phout=phin;
waout=0;
else
if dhin<=1*10^-3 %Fracture of small particles
nout=((0.01*dhin*rhoh*(win(3))^2)/(sigma*12))^3;
dhout=zeros(1);
if nout<1
nout=1;
end
for i=1:1:round(nout)
dhout(i,1)=1;
dhout(i,2)=dhin/((nout)^(1/3));
end
vhout=[vhin(1) vhin(2) 0];
vabcout=vabcin;
shout=shin;
sabcout=sabcin;
phout=phin;
waout=0;
else %Fracture of big particles
dmaxout=0.0254*39.37*dhin*(1.2647+0.16001*log(1/win(3))-
0.0796*(39.37*dhin-1));
xout=-0.19422*dhin+1.05*dmaxout;
ni=0.40729*exp(2.326*xout/dmaxout);
fmrng=dmaxout/intervals;
da=0;
db=da+fmrng;
dhout=zeros(1);
sum=zeros(1);
for fmnb=1:1:intervals
dhout(fmnb,1)=(da+db)/2;
dhout(fmnb,2)=((1-exp(-(db/xout)^ni))-(1-exp(-(
da/xout)^ni)));

```

```

        da=db;
        db=db+fmrng;
        sum=sum+dhout (fmbn,2);
    end
    for fmbn=1:1:intervals
        dhout (fmbn,2)=dhout (fmbn,2)/sum;
    end
    bin=acos (abs (win (3)) / (norm (win) +nn));
    woutp=(0.132*bin^3-0.656*bin^2+0.051*bin+0.9954) * [win (1)
win (2) 0];
    rloc=dhin/2;
    enrgy=rhoh*pi*dhin^3*(win (3))^2/12;
    a=dhin*(8*10^-11*enrgy^4-6*10^-8*enrgy^3+2*10^-5*enrgy^2-
0.0042*enrgy+0.5736);
    pointer=1;
    vhout=zeros (1);
    ign=atan2 (woutp (2),woutp (1));
    for gn=ign:10*pi/180:ign+(2*pi-pi/180) %Angle of
velocities is defined relative to x axes
        vhout (pointer,1)=vabcin (1)-
woutp (1)+(1.5*abs (win (3)) *rloc/2/a) *sin (gn);
        vhout (pointer,2)=vabcin (2)-
woutp (2)+(1.5*abs (win (3)) *rloc/2/a) *cos (gn);
        vhout (pointer,3)=vabcin (3)-0;
        pointer=pointer+1;
    end
    vabcout=vabcin;
    shout=shin;
    sabcout=sabcin;
    phout=phin;
    waout=0;
end
end
bh=(rhoh*cph*tch)^(1/2);
babc=(rhoabc*cpabc*tcabc)^(1/2);
b=1/(1/bh+1/babc);
ym=1/(((1-prh^2)/ymh)+((1-prabc^2)/ymabc));
r=1/(1/(dhin/2)+1/(dabcin/2));
m=1/(1/mh+1/mabc);
if abs (win (3))<wcr
    a0=((15*m*(win (3))^2*r^2)/(16*ym))^(1/5);
else
    a0=dhin/2;
end
ac0=pi*a0^2;
t0=2.943*a0^2/(r*abs (win (3)));
tehout=(0.87*b*(teabcin-tehin)*ac0*t0^(1/2))/(mh*cph)+tehin;
end

ni=nx*cos (-fo)+cross (no,nx)*sin (-fo)+no*dot (no,nx)*(1-cos (-fo));
%Return to initial coordinate base
nj=ny*cos (-fo)+cross (no,ny)*sin (-fo)+no*dot (no,ny)*(1-cos (-fo));
nk=nz*cos (-fo)+cross (no,nz)*sin (-fo)+no*dot (no,nz)*(1-cos (-fo));

for i=1:1:length (vhout (:,1)); %Image of speeds on the initial base
    tempvector=[vhout (i,1) vhout (i,2) vhout (i,3)];
    tempvector=[dot (tempvector,ni) dot (tempvector,nj)
dot (tempvector,nk)];
    vhout (i,1)=tempvector (1);
    vhout (i,2)=tempvector (2);
    vhout (i,3)=tempvector (3);
end

```

```

end
for i=1:1:length(vabcout(:,1));
    tempvector=[vabcout(i,1) vabcout(i,2) vabcout(i,3)];
    tempvector=[dot(tempvector,ni) dot(tempvector,nj)
dot(tempvector,nk)];
    vabcout(i,1)=tempvector(1);
    vabcout(i,2)=tempvector(2);
    vabcout(i,3)=tempvector(3);
end
for i=1:1:length(shout(:,1));
    tempvector=[shout(i,1) shout(i,2) shout(i,3)];
    tempvector=[dot(tempvector,ni) dot(tempvector,nj)
dot(tempvector,nk)];
    shout(i,1)=tempvector(1);
    shout(i,2)=tempvector(2);
    shout(i,3)=tempvector(3);
end
for i=1:1:length(sabcout(:,1));
    tempvector=[sabcout(i,1) sabcout(i,2) sabcout(i,3)];
    tempvector=[dot(tempvector,ni) dot(tempvector,nj)
dot(tempvector,nk)];
    sabcout(i,1)=tempvector(1);
    sabcout(i,2)=tempvector(2);
    sabcout(i,3)=tempvector(3);
end

[phout,~,~]=Coordinates(phout,zero,zero,2); %Transformation from
cartesian to cylindrical coordinates
for i=1:1:length(vhout(:,1));
    tempvector=[vhout(i,1) vhout(i,2) vhout(i,3)];
    [~,tempvector,~]=Coordinates(phout,tempvector,zero,2);
%Transformation from cartesian to cylindrical coordinates
    vhout(i,1)=tempvector(1);
    vhout(i,2)=tempvector(2);
    vhout(i,3)=tempvector(3);
end

out1=dhout;
out2=vhout;
out3=phout;
out4=tehout;
out5=waout;

end

function [out1,out2,out3]=Coordinates(in1,in2,in3,mode)

if mode==1
    r=in1(1);
    phi=in1(2);
    z=in1(3);
    vr=in2(1);
    vphi=in2(2);
    vz=in2(3);
    sr=in3(1);
    sphi=in3(2);
    sz=in3(3);
    p=[r*sin(phi) r*cos(phi) -z]; %Conversion from cylindrical to
cartesian coordinates
    v=[vr*sin(phi)+vphi*cos(-phi) vr*cos(phi)+vphi*sin(-phi) -vz];

```

```

s=[sr*sin(phi)+sphi*cos(-phi) sr*cos(phi)+sphi*sin(-phi) -sz];
out1=p;
out2=v;
out3=s;
else
x=in1(1);
y=in1(2);
z=in1(3);
vx=in2(1);
vy=in2(2);
vz=in2(3);
sx=in3(1);
sy=in3(2);
sz=in3(3);
p=[(x^2+y^2)^(1/2) atan2(x,y) -z]; %Conversion from cartesian to
cylindrical coordinates
v=[(vx-vy*cot(-atan2(x,y)))/(sin(atan2(x,y))-
cos(atan2(x,y))*cot(-atan2(x,y))) (vx-vy*tan(atan2(x,y)))/(cos(-
atan2(x,y))-sin(-atan2(x,y))*tan(atan2(x,y))) -vz];
s=[(sx-sy*cot(-atan2(x,y)))/(sin(atan2(x,y))-
cos(atan2(x,y))*cot(-atan2(x,y))) (sx-sy*tan(atan2(x,y)))/(cos(-
atan2(x,y))-sin(-atan2(x,y))*tan(atan2(x,y))) -sz];
out1=p;
out2=v;
out3=s;
end
end
end

```

### **Κώδικας υπολογισμού Κινηματικής Αλληλεπίδρασης**

```

%*****
%*****
% Description :
% This function calculates the change in velocity and position of a
% spherical ice particle affected by an air stream.
%
% References :
% [1] Equations and Methology described in detail at thesis "Hail
% Ingestion in
% AeroEngines"
%
% Use :
% Simple use with arguments in - arguments out
%
% Input :
% ph=[radical hail position(m) peripheral hail position(rad)
% longitudinal hail
% position(m)]->[[0,2) [0,2pi) [0,5]]
%
% vhin=[radical hail velocity(m/s) peripheral hail velocity(m/s)
% longitudinal hail
% velocity(m/s)]->[[-200,+200] [-200,+200] [-200,+200]]
%
% va=[radical air velocity(m/s) peripheral air velocity(m/s)
% longitudinal
% air velocity(m/s)]->[[-200,+200] [-200,+200] [-200,+200]]
%
% dhin=hail diameter(m)->[1*10^-6,~]
%

```

```

% rhoh=hail density(Kg/m^3)->[300,1000]
%
% rhoa=air density(Kg/m^3)->[~,~]
%
% teh=hail temperature(K)->[230,650]
%
% tea=surface temperature(K)->[230,2000]
%
% vka=kinematic viscosity of air(Pa*s)->[~,~]
%
% gamma=cp/cv(-)->[~,~]
%
% nn=negligible number(-)->[10^-50,10^-10]
%
% dt=timestep(s)->[10^-8,1]
%
% Output :
% out1=[radical hail post timestep position(m) peripheral hail post
timestep
% position(rad) longitudinal post hail position(m)]->[[0,2) [0,2pi)
[0,5)]
%
% out2=[radical hail post timestep velocity(m/s) peripheral hail post
timestep
% velocity(m/s) longitudinal hail post timestep
% velocity(m/s)]->[[-200,+200] [-200,+200] [-200,+200]]
%*****
*****

```

```
function
```

```
[out1,out2]=Kinesis(ph,vh,va,dh,rhoh,rhoa,teh,tea,vka,gamma,nn,dt)
```

```

if (ph(1))<0
    error('Wrong input arguments : Position Error');
end
if (dh<=1*10^-6)
    error('Wrong input arguments : Diameter hail Error');
end
if (rhoh<300)|| (rhoh>1000)
    error('Wrong input arguments : Density hail Error');
end
if (rhoa<0)
    error('Wrong input arguments : Density air Error');
end
if (teh<230)|| (tehin>650)
    error('Wrong input arguments : Temperature hail Error');
end
if (tea<230)
    error('Wrong input arguments : Temperature air Error');
end
if (vka<0)
    error('Wrong input arguments : Viscosity kinematic air Error');
end
if (gamma<1)
    error('Wrong input arguments : Cp/Cv ratio air Error');
end
if (nn<10^-50)|| (nn>10^-3)
    error('Wrong input arguments : Nill Number Error');
end
if (dt<=0)
    error('Wrong input arguments : Time Step Error');

```

```

end

zero=[0 0 0]; %Variable to load zero values
[ph,~,~]=Coordinates(ph,zero,zero,1); %Transformation from
cylindrical to cartesian coordinates
[~,vh,~]=Coordinates(ph,vh,zero,1);
[~,va,~]=Coordinates(ph,va,zero,1);

w=va-vh;
reynu=norm(wv)*dh/vka;
g=9.81+0*sh*nn;
cd=DragCoefficient(reynu,macnu,gamma,teh,tea);
c=(3/4)*(1/dh)*(rhoa/rhoh)*cd;

x0=ph(1); %The initial position
y0=ph(2);
z0=ph(3);
wx0=w(1); %The initial relative velocity
wy0=w(2);
wz0=w(3);
initial_w = [x0,y0,z0,wx0,wy0,wz0]; % The solution at the beginning
of timestep
[~,sols] = ode45(@eom,[0,dt],initial_w);
    function out=eom(~,w)
        wx=w(4);
        wy=w(5);
        wz=w(6);
        wmag=sqrt(wx^2+wy^2+wz^2);
        dxdt=wx;
        dydt=wy;
        dzdt=wz;
        dvxdt=c*wmag*wx;
        dvydt=c*wmag*wy;
        dvzdt=c*wmag*wz-g;
        out=[dxdt;dydt;dzdt;dvxdt;dvydt;dvzdt];
    end
pointer=length(sols);
phout=[sols(pointer,1),sols(pointer,2),sols(pointer,3)];
wout=[sols(pointer,4),sols(pointer,5),sols(pointer,6)];
vhout=va-wout;

[phout,~,~]=Coordinates(phout,zero,zero,2); %Transformation from
cartesian to cylindrical coordinates
[~,vhout,~]=Coordinates(phout,vhout,zero,2); %Transformation from
cartesian to cylindrical coordinates

out1=phout;
out2=vhout;

end

function [out1,out2,out3]=Coordinates(in1,in2,in3,mode)

if mode==1
    r=in1(1);
    phi=in1(2);
    z=in1(3);
    vr=in2(1);
    vphi=in2(2);
    vz=in2(3);

```

```

    sr=in3(1);
    sphi=in3(2);
    sz=in3(3);
    p=[r*sin(phi) r*cos(phi) -z]; %Conversion from cylindrical to
cartesian coordinates
    v=[vr*sin(phi)+vphi*cos(-phi) vr*cos(phi)+vphi*sin(-phi) -vz];
    s=[sr*sin(phi)+sphi*cos(-phi) sr*cos(phi)+sphi*sin(-phi) -sz];
    out1=p;
    out2=v;
    out3=s;
else
    x=in1(1);
    y=in1(2);
    z=in1(3);
    vx=in2(1);
    vy=in2(2);
    vz=in2(3);
    sx=in3(1);
    sy=in3(2);
    sz=in3(3);
    p=[(x^2+y^2)^(1/2) atan2(x,y) -z]; %Conversion from cartesian to
cylindrical coordinates
    v=[(vx-vy*cot(-atan2(x,y)))/(sin(atan2(x,y))-
cos(atan2(x,y))*cot(-atan2(x,y))) (vx-vy*tan(atan2(x,y)))/(cos(-
atan2(x,y))-sin(-atan2(x,y))*tan(atan2(x,y))) -vz];
    s=[(sx-sy*cot(-atan2(x,y)))/(sin(atan2(x,y))-
cos(atan2(x,y))*cot(-atan2(x,y))) (sx-sy*tan(atan2(x,y)))/(cos(-
atan2(x,y))-sin(-atan2(x,y))*tan(atan2(x,y))) -sz];
    out1=p;
    out2=v;
    out3=s;
end

end

function out=DragCoefficient(reynu,macnu,gamma,teh,tea)

f=1+0.15*reynu^0.687+0.0175*reynu*(1+4.25*10^4*reynu^-1.16)^-1;
cd0=f*24/reynu;
k=gamma;
gi=(1+reynu*(12.278+0.548*reynu))/(1+11.278*reynu);
hi=5.6/(1+macnu)+1.7*(teh/tea)^(1/2);
out=2+(cd0-2)*exp(-3.07*k^(1/2)*gi*macnu*reynu^-1)+hi*k^(-
1/2)*macnu^-1*exp(-0.5*reynu*macnu^-1);

end

```