ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Το θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων και εφαρμογές του

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΙΔΗΣ

Επιβλέπων καθηγητής: Κανελλόπουλος Βασίλειος

ΑΘΗΝΑ, ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 2021

Το θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων και εφαρμογές του

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΙΔΗΣ

Email: konst.semfe@gmail.com

Επιβλέπων Καθηγητής:

Κανελλόπουλος Βασίλειος

Εξεταστική Επιτροπή:

Ψαρράκος Παναγιώτης

Γρηγοριάδης Βασίλειος

Ημερομηνία εξέτασης: 08/10/2021

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Πριν προχωρήσω στην παρουσίαση της εργασίας, θα ήθελα να ευχαριστήσω, τον καθηγητή κ. Βασίλειο Κανελλόπουλο , της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών για την πολύτιμη βοήθεια και την καθοδήγηση του.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή Στο Θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων

1.1 Ιστορική Εισαγωγή

Η ιστορία του Θεωρήματος Πεπλεγμένων Συναρτήσεων είναι αρκετά μεγάλη και έχουν ασχοληθεί με αυτό οι R.Descartes(στην αλγεβρική γεωμετρία), I.Newton, G. Leibniz, J. Bernoulli και ο L. Euler(στην απειροστική ανάλυση), J.L. Lagrange(στις πραγματικές δυναμοσειρές), A.L.Cauchy(μιγαδικές δυναμοσειρές), στον οποίο αποδίδεται η πρώτη αυστηρή απόδειξη του θεωρήματος, και στον U. Dini(στις συναρτήσεις πραγματικών μεταβλητών και στην διαφορική γεωμετρία). Για περισσότερα στοιχεία σχετικά με την ιστορία του Θεωρήματος Πεπλεγμένων Συναρτήσεων (και του Θεωρήματος Αντίστροφης Συνάρτησης) και για περισσότερες εφαρμογές του (όπως διαφορική πολλαπλότητα, γεωμετρία Rieman, μερικές διαφορικές εξισώσεις, αριθμητική ανάλυση) μπορούμε να ανατρέξουμε στα έργα των Krantz and Parks[5], Dontchev και Rockafeller[2], Hurwicz και Ritchter[3], Iurato[4], και Scarpello[6].

Οι δύο πιο συνήθεις προσεγγίσεις του Θεωρήματος Πεπλεγμένων Συναρτήσεων σε έναν πεπερασμένο Ευκλείδιο χώρο ξεκινούν με μία απόδειξη του Θεωρήματος Αντίστροφης Συνάρτησης και στην συνέχεια αντλούν από αυτό το Θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων. Η βασικότερη από αυτές τις δύο προσεγγίσεις συνδέει την συμπάγεια των κλειστών σφαιρών στον $\mathbb{R}^n$, με $n \geq 1$, και το θεώρημα του Weierstrass(κάθε συνεχής συνάρτηση λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη και τιμή όταν ορίζεται σε συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$).

Η πιο γενική προσέγγιση η οποία είναι επίσης βολική για τους απειροδιάστατους πλήρεις διανυσματικούς χώρους με νόρμα (γνωστοί και ως χώροι Banach) χρησιμοποιεί το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Banach που λέει το εξής,

Το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Banach. Έστω X ένας πλήρης μετρικός χώρος, με την μετρική d. Έστω η συνάρτηση $\Phi : X \to X$ για την οποία ισχύουν ότι $d\big(\Phi(x), \Phi(y)\big) \leq \lambda d(x, y)$ για κάθε x, y στον X, όπου λ μια σταθερά με $0 < \lambda < 1$. Τότε η Φ έχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο. Επομένως υπάρχει ένα μοναδικό $x \in X$ έτσι ώστε $\Phi(x) = x$.

Ας δούμε τώρα το πώς με το παραπάνω θεώρημα αποδεικνύεται το πρώτο μέρος τους Θεωρήματος Αντίστροφης Συνάρτησης που λέει το εξής: Έστω $F :\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ μια συνάρτηση που ανήκει στην κλάση C^1 και ένα σημείο $x_o \in \mathbb{R}^n$ με $\det JF(x_0) \neq 0$. Τότε υπάρχει ένα υποσύνολο $U \subseteq \mathbb{R}^n$ με U να είναι μια περιοχή του x_0 ανοιχτό και αν $V = F(U)$ τότε το V είναι ανοιχτό και η $F : U \to V$ είναι ''1-1'' και συνεπώς υπάρχει η αντίστροφη. Θέτουμε $A = JF(x_0)$, έστω ένα σημείο $y \in \mathbb{R}^n$ και ορίζουμε την συνάρτηση $\Phi :\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ με $\Phi(x) = x + A^{-1}(y - F(x))$. Παρατηρούμε ότι $\Phi(x) = x$ αν $y = F(x)$, δηλαδή $y = F(x)$ αν και μόνο αν το x είναι σταθερό σημείο της Φ. Η Φ ανήκει στην κλάση C^1 και είναι $J\Phi(x) = I - A^{-1}JF(x)$. Επομένως το $J\Phi(x)$ είναι ανεξάρτητο του y και επιπλέον $J\Phi(x_0) = I - A^{-1}JF(x_0) = I - A^{-1}A = I - I = 0$. Άρα για κάθε ε>0 υπάρχει μια περιοχή U του x_0 ανεξάρτητη του y τέτοια ώστε $\left|\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}(x)\right| < \varepsilon$ για κάθε x στο U. Με βάση αυτή την παρατήρηση και το θεώρημα Μέσης Τιμής για πολλές μεταβλητές (Λήμμα 3) επιλέγοντας κατάλληλα μικρό ε προκύπτει ότι υπάρχει μια περιοχή U για την οποία ισχύει $||\Phi(x_1) - \Phi(x_2)|| \leq \frac{1}{2}||x_1 - x_2||$. Θα δείξουμε ότι η F είναι ''1-1'' στο U. Έστω ότι $x_1 \neq x_2$ που ανήκουν στο U και έστω ότι $F(x_1) = F(x_2)$. Είναι $\Phi(x_1) = x_1 + A^{-1}(y - F(x_1))$ και $\Phi(x_2) = x_2 + A^{-1}(y - F(x_2)) \Rightarrow \Phi(x_1) - x_1 = \Phi(x_2) - x_2 \Rightarrow \Phi(x_1) - \Phi(x_2) = x_1 - x_2 \Rightarrow \big||\Phi(x_1) - \Phi(x_2)|\big| = ||x_1 - x_2||$ το οποίο είναι άτοπο. Επομένως η F είναι ''1-1'' στο U . Θα δείξουμε τώρα ότι το $F(U)$ είναι ανοιχτό. Επιλέγουμε ένα $y_0{}'$ που ανήκει στο $V = F(U)$, επομένως θα υπάρχει ένα μοναδικό $x_0' \in U$ με $y_0' = F(x_0')$. Έστω τώρα $r > 0$ ώστε $\overline{B}(x_0', r) \subseteq U$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $r' > 0$ τέτοιο ώστε η $B(y_0', r') \subseteq V$. Έστω $y \in \mathbb{R}^n$ με $\big||y - y_0'|\big| < r'$. Αν ορίσουμε ξανά την Φ όπως και πριν αλλά αυτή την φορά για αυτό το y έχουμε ότι $\big||\Phi(x_0') - x_0'|\big| = ||x_0' + A^{-1}(y - F(x_0') - x_0'\Big|\Big| = \Big||A^{-1}\big(y - F(x_0')\big)|\Big| = \big||A^{-1}(y - y_0')|\big| \leq \big||A^{-1}|\big| \bullet \Big|\Big| y - y_0'|| < ||A^{-1}|| \bullet r'$. Άρα για κάθε $x \in \overline{B}$ είναι $\big||\Phi(x) - x_0'|\big| \leq \big||\Phi(x) - \Phi(x_0')|\big| + \big||\Phi(x_0') - x_0'|\big| \leq \frac{1}{2}\big||x - x_0'|\big| + \big||A^{-1}|\big|r' \leq \frac{r}{2} + \big||A^{-1}|\big|r' \leq r$ αν $r' = \frac{r}{4||A^{-1}||}$. Από το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Banach η $\Phi : \overline{B} \to \overline{B}$ θα έχει ένα μοναδικό σταθερό σημείο τέτοιο ώστε $\Phi(x) = x$ και επομένως $y = F(x)$.

Σε αυτή την διπλωματική εργασία ακολουθούμε την προσέγγιση του O. R. B. De Oliveira[1] θα αποδείξουμε αρχικά το Θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων επαγωγικά και στην συνέχεια το Θεώρημα Αντίστροφης Συνάρτησης. Αυτή η προσέγγιση αρχικά αποτυπώθηκε από τον U. Dini (1876), ο οποίος ήταν ο πρώτος που παρουσίασε μια απόδειξη με επαγωγή του Θεωρήματος Πεπλεγμένων Συναρτήσεων για ένα σύστημα εξισώσεων με πολλές πραγματικές μεταβλητές, και επίσης διατύπωσε και απέδειξε το Θεώρημα Αντίστροφης Συνάρτησης.

Από την άλλη η απόδειξη που θα παρουσιάσουμε απλοποιεί περαιτέρω την προσέγγιση του U. Dini και κάνει την απόδειξη του Θεωρήματος Πεπλεγμένης Συνάρτησης αρκετά εύκολη με λίγους υπολογισμούς. Έπειτα το Θεώρημα Αντίστροφης Συνάρτησης προκύπτει άμεσα.

1.2 Πεπλεγμένες Συναρτήσεις

Μια συνάρτηση καθορίζεται συνήθως από μια αναλυτική έκφραση όπως για παράδειγμα

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 3, \qquad (1.1)$$

$$g(y) = \sqrt{y^2 + 1} \qquad (1.2)$$

Ή

$$h(t) = \cos(2\pi t) \qquad (1.3)$$

Στην πραγματικότητα, περίπου 250 χρόνια πριν αυτή ήταν η προσέγγιση που πήρε ο Leonard Euler(1707-1783) όταν έγραψε ότι,

''Μια συνάρτηση μίας μεταβλητής ποσότητας είναι μια αναλυτική έκφραση που περιλαμβάνει την μεταβλητή ποσότητα και έναν αριθμό από σταθερές ποσότητες. ''

Γενικά είναι δύσκολο να μελετήσουμε μια συνάρτηση που δίνεται από μια φόρμουλα. Για παράδειγμα ο γεωμετρικός τόπος της

$$y^5 + 16y - 32x^3 + 32x = 0 \qquad (1.4)$$

ορίζει ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Καταλαβαίνουμε ότι ο γεωμετρικός τόπος της (1.4) είναι ένα γράφημα του y σαν συνάρτηση του x, αλλά δεν υπάρχει φόρμουλα για αυτή την συνάρτηση.

Σε αντίθεση με τον λανθασμένο ορισμό των συναρτήσεων σαν φόρμουλες, ο μοντέρνος θεωρητικός ορισμός της συνάρτησης διατυπώθηκε σαν ένα γράφημα της συνάρτησης. Συγκεκριμένα, μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το X και πεδίο τιμών το Y είναι ένα υποσύνολο, ας το καλέσουμε f, του καρτεσιανού γινομένου

$$X \times Y = [(x, y): x \in X, y \in Y]$$

που ικανοποιεί τις ιδιότητες

I. Για κάθε $x \in X$ υπάρχει ένα στοιχείο $(x, y) \in f$

II. Αν $(x, y) \in f$ και $(x, y') \in f$ τότε $y = y'$

Στην περίπτωση που αυτές οι ιδιότητες είναι σωστές , η επιλογή του $x \in X$ καθορίζει το μοναδικό $y \in Y$ για το οποίο $(x, y) \in f$. Χάρη σε αυτή τη μοναδικότητα γράφουμε ότι

$$y = f(x)$$

που σημαίνει ότι $(x, y) \in f$.

Για παράδειγμα ο γεωμετρικός τόπος που ορίζεται από τη (1.4) έχει την ιδιότητα ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει ένα μοναδικό $y \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε το ζευγάρι (x,y) να ικανοποιεί την εξίσωση. Επιπλέον υπάρχει μια συνάρτηση , f έτσι ώστε το γράφημα $y = f(x)$ να είναι ο γεωμετρικός τόπος της (1.4).

Για να επιβεβαιώσουμε αυτόν τον ισχυρισμό, παίρνουμε ένα σταθερό σημείο $x \in \mathbb{R}$ και θεωρούμε το αριστερό σκέλος της (1.4) σαν συνάρτηση του y. Έτσι θα εξετάσουμε την συμπεριφορά της

$$F(y) = y^5 + 16y - 32x^3 + 32x$$

Με το x να είναι σταθερό.

Αφού οι δυνάμεις του y είναι περιττοί , έχουμε ότι $\lim_{y \to -\infty} F(y) = -\infty$ και $\lim_{y \to +\infty} F(y) = +\infty$. Επίσης έχουμε ότι

$$F'(y) = 5y^4 + 16 > 0,$$

έτσι η F(y) είναι μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση. Από το Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής προκύπτει ότι η F παίρνει την τιμή 0 για ένα μοναδικό $y = f(x)$. $\square$

Σημειώνουμε ότι από την (1.4) δεν είναι ξεκάθαρο ότι το y είναι συνάρτηση του x. Μόνο αν κάνουμε έξτρα δουλεία είμαστε βέβαιοι ότι το y ορίζεται μοναδικά ως συνάρτηση του x. Επειδή δεν είναι άμεσα ξεκάθαρο από τον ορισμό της εξίσωσης ότι δίνεται μια συνάρτηση λέμε ότι πρόκειται για μια πεπλεγμένη συνάρτηση. Σε αντίθεση, όταν βλέπουμε

$$y = f(x) \qquad (1.5)$$

υποθέτουμε ότι η f(x) είναι συνάρτηση του x, χωρίς να απαιτούνται περεταίρω εξηγήσεις, ακόμα και όταν στο δεξί σκέλος η συνάρτηση είναι απλά μια συμβολική αναπαράσταση όπως στην (1.5) σε αντίθεση με τις φόρμουλες (1.1),(1.2) και (1.3) οι οποίες είναι φανερό ότι πρόκειται για συναρτήσεις του x,y και του t αντίστοιχα.

Ένα άλλο απλό παράδειγμα με δύο μεταβλητές είναι η εξίσωση

$$x^2 + y^2 = 1. \qquad (1.8)$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Ο γεωμετρικός τόπος της F είναι ο μοναδιαίος κύκλος. Παρατηρούμε ότι για κάθε $x_0 \in (-1,1)$ υπάρχουν δύο διαφορετικά y_1, y_2

με $F(x_0, y_1) = F(x_0, y_2) = 0$ και αντίστοιχα για κάθε $y_0 \in (-1,1)$ υπάρχουν δύο διαφορετικά x_1,x_2 με $F(x_1, y_0) = F(x_2, y_0) = 0$. Συνεπώς η εξίσωση (1.8) δεν μπορεί να επιλυθεί πλήρως ως προς καμία από τις μεταβλητές x,y. Όμως αν περιορίσουμε τα (x,y) με $F(x, y) = 0$ που θεωρούμε τότε μπορούμε να επιλύσουμε την $F(x, y) = 0$ ως προς μια μεταβλητή συναρτήσει της άλλης. Παρατηρούμε ότι ισχύει η εξής ισοδυναμία

$$F(x, y) = 0 \text{ και } y \geq 0 \Leftrightarrow y = \sqrt{1 - x^2}, x \in (-1,1)$$

Και

$$F(x, y) = 0 \text{ και } x \leq 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{1 - y^2}, y \in (-1,1)$$

Γενικά βλέπουμε ότι για κάθε (x_0, y_0) με $F(x_0, y_0) = 0$ υπάρχει πάντα ένα ανοιχτό διάστημα I_0 που έχει το x_0 στο εσωτερικό του και ένα διάστημα J_0 που έχει το y_0 στο εσωτερικό του όπου μέσα στο ορθογώνιο $I_0 \times J_0 = \{(x, y), x \in I_0, y \in J_0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ μπορούμε να επιλύσουμε την $F(x, y) = 0$ είτε ως προς x είτε ως προς y. Πχ. Στο σημείο (0,1) η $F(x, y) = 0$ επιλύεται ως προς y ($y = \sqrt{1 - x^2}$) όταν περιοριστούμε στα (x,y) με $x \in (-1,1)$ $και$ $y \geq 0$. □

1.3 Μια γενική περιγραφή του Θεωρήματος Πεπλεγμένων Συναρτήσεων

Γενικά θα λέγαμε ότι μια εξίσωση με μία μεταβλητή

$$\mathrm{F(x) = c}$$

όπου c σταθερά, είναι αρκετή για να προσδιορίσει την τιμή του x. Όταν υπάρχουν δύο μεταβλητές, αναμένουμε ότι θα χρειαστούν δύο εξισώσεις

$$F(x, y) = c,$$

$$G(x, y) = d,$$

όπου c και d σταθερές, για να προσδιορίσουμε τις τιμές των x και y και γενικότερα θα λέγαμε ότι ένα σύστημα m εξισώσεων και m μεταβλητών

$$\begin{matrix} F(x_1, \dots, x_m) = c_1, \\ \vdots \\ F(x_1, \dots, x_m) = c_m, \end{matrix} \qquad (1.6)$$

με $c_1, \dots, c_m$ σταθερές, είναι ακριβώς ο σωστός αριθμός εξισώσεων για τον προσδιορισμό των τιμών των μεταβλητών. Πρέπει όμως να έχουμε στο μυαλό μας και την περίπτωση που δεν έχουμε αρκετές εξισώσεις. Πρέπει να ελέγχουμε ότι δεν εξαφανίζεται κάποιος από τους κύριους όρους της εξίσωσης. Στην περίπτωση που το σύστημα (1.6) είναι γραμμικό τότε καταφεύγουμε στην Γραμμική Άλγεβρα για την λύση του. Ένας βασικός όρος για να έχει ένα γραμμικό σύστημα της μορφής (1.6) μοναδική λύση για όλες τις τιμές c_i είναι ο πίνακας των συντελεστών του γραμμικού συστήματος να έχει βαθμό m.

Αν τώρα έχουμε περισσότερες μεταβλητές από εξισώσεις στο σύστημα μας

$$\begin{array}{c} F_1(x_1, \dots, x_n) = c_1, \\ \vdots \\ F_m(x_1, \dots, x_n) = c_m, \end{array} \qquad (1.7)$$

όπου τα c_i είναι σταθερές και $n > m$ τότε θα δούμε αυτές τις επιπλέον $n - m$ μεταβλητές σαν παραμέτρους, θεωρώντας τις m μεταβλητές ως μια πεπλεγμένη συνάρτηση των υπόλοιπων $\mathrm{n} - \mathrm{m}$ μεταβλητών. Πάλι, στην περίπτωση των γραμμικών συναρτήσεων η κατάσταση είναι απλή: όσο ο πίνακας των συντελεστών έχει βαθμό m, τότε m από τις n μεταβλητές εκφράζονται ως συνάρτηση των υπόλοιπων $m - n$ μεταβλητών.

Στην γενική περίπτωση , αντίθετα με την γραμμική , το σύστημα εξισώσεων (1.7) ορίζει ένα εντελώς αυθαίρετο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Το Θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων μας λέει ότι κάτω από κάποιες απλές συνθήκες από το σύστημα εξισώσεων (1.7) όντως m από τις μεταβλητές θα δοθούν ως συνάρτηση των υπόλοιπων $n - m$ μεταβλητών.

Κεφάλαιο 2

Προαπαιτούμενα

Θα συμβολίζουμε με $\mathbb{R}$ το πλήρες πεδίο των πραγματικών αριθμών και με $\mathbb{R}^n$, όπου $n \geq 1$, τον n-διάστατο Ευκλείδειο χώρο. Έστω a και b πραγματικοί , με $a < b$, τότε θέτουμε:

$$]a , b[=\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \text{ και } [a , b]=\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} .$$

Δεχόμαστε τα παρακάτω χωρίς απόδειξη.

- **Το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής :**
  Έστω $f : [a , b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο [a , b] συνεχής. Αν λ είναι μια τιμή μεταξύ του f(a) και του f(b) τότε υπάρχει ένα c που ανήκει στο [a , b] με f(c)=λ.

- **Το θεώρημα μέσης τιμής :**
  Έστω $f : [a , b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο [a , b] και παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα] a , b[. Τότε υπάρχει c στο]a , b[για το οποίο ισχύει ότι $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.

Η πρώτη πλήρης απόδειξη του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής δόθηκε από τον B. Bolzano (1817) , ο οποίος επίσης ήταν ο πρώτος που ανέφερε την supremum ιδιότητα των πραγματικών αριθμών. Το θεώρημα μέσης τιμής αποδίδεται στον Lagrange (1797).

Στην συνέχεια θεωρούμε τις διατεταγμένες κανονικές βάσεις $\{e_1, \dots ,e_n\}$ και $\{f_1, \dots ,f_m\}$, του $\mathbb{R}^n$ και $\mathbb{R}^m$, αντίστοιχα. Δοθέντος $x=x_1e_1+ \dots +x_ne_n$ στον $\mathbb{R}^n$, όπου $x_1, \dots ,x_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί , γράφουμε $x=(x_1, \dots ,x_n)$. Αν $x=(x_1, \dots ,x_n)$ και $y=(y_1, \dots ,y_n)$ ανήκουν στον $\mathbb{R}^n$, τότε το εσωτερικό τους γινόμενο ορίζεται ως $<x , y>=x_1y_1+ \dots +x_ny_n$. Η νόρμα του x είναι $|x|=\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}=\sqrt{< x , x >}$. Είναι γνωστή η ανισότητα Cauchy-Schwarz $|<x , y>|\leq|x||y|$, για κάθε x και y που ανήκουν στον $\mathbb{R}^n$. Επιπλέον δοθέντος ενός σημείου x στον $\mathbb{R}^n$ και r>0, το σύνολο $B(x;r)=\{y\in\mathbb{R}^n : |y-x|<r\}$ είναι μια ανοιχτή μπάλα με κέντρο το x και ακτίνα r.

Δοθέντος μιας γραμμικής συνάρτησης $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί a_{ij} , με i=1, … ,m και j=1, … ,n , ώστε $T(e_j)=a_{1j}f_1+ \dots +a_{mj}f_m$, για κάθε j=1, … ,n . Ταυτίζουμε την T με τον $m \times n$ πραγματικό πίνακα

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=(a_{ij}) \text{ με } 1\leq i\leq m \text{ και } 1\leq j\leq n.$$

Η j-οστή στήλη του πίνακα (a_{ij}) περιέχει τις m συντεταγμένες του $T(e_j)$. Επιπλέον δοθέντος ενός $m \times n$ πραγματικού πίνακα $M=(a_{ij})$ τον ταυτίζουμε με την γραμμική συνάρτηση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ που ορίζεται ως $T(e_j)=(a_{1j}, \dots, a_{mj})$, για κάθε j=1, … ,m. Αν u ανήκει στον $\mathbb{R}^n$, για συντομία γράφουμε Tu αντί για T(u). Η νόρμα Hilbert-Schmidt του T είναι ο αριθμός $||T||=\sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$.

Λήμμα 1

Έστω $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ μια γραμμική συνάρτηση. Τότε έχουμε ότι $|Tu|\leq||T|||u|$, για κάθε u στον $\mathbb{R}^n$, και η T είναι συνεχής.

Απόδειξη :

Έστω (a_{ij}) ο πίνακας που σχετίζεται με την T και έστω u που ανήκει στον $\mathbb{R}^n$. Τότε ο $T=(a_{ij})$ είναι ένας $m \times n$ πίνακας και το u είναι ένας $n \times 1$ πίνακας. Έτσι έχουμε ότι

$$Tu=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} * u_1 + a_{12} * u_2 + \cdots + a_{1n} * u_n \\ \vdots \\ a_{m1} * u_1 + a_{m2} * u_2 + \cdots + a_{mn} * u_n \end{pmatrix}$$

Όμως $|Tu|= \sum_{i=1}^{m} |a_{i1}u_1 + \cdots + a_{in}u_n|$. Σύμφωνα με τον ορισμό που δώσαμε για το εσωτερικό γινόμενο δύο αριθμών έχουμε ότι $|Tu|=\sum_{i-1}^{m} | < (a_{i1}, \dots, a_{in}), u > |$. Επομένως $|Tu|^2= \sum_{i=1}^{m} | < (a_{i1}, \dots, a_{in}), u > |^2$. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε ότι $|Tu|^2 \leq \sum_{i=1}^{m} |(a_{i1}, \dots, a_{in})|^2 |u|^2 =|u|^2 \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 =||T||^2|u|^2$. Άρα $|Tu|\leq||T|||u|$.

Επειδή η T είναι γραμμική ισχύει ότι $|T(u+h)-T(u)|=|Th|\leq||T|||h|$ για κάθε u,h στον $\mathbb{R}^n$. Άρα η T είναι συνάρτηση Lipschitz και επομένως είναι συνεχής. □

Έστω Ω ένα ανοικτό σύνολο στον $\mathbb{R}^n$. Έστω μια συνάρτηση $F : \Omega \to \mathbb{R}^m$ και p που ανήκει στο Ω , γράφουμε $F(p)=(F_1(p),\dots,F_m(p))$, με $F_i : \Omega\to\mathbb{R}$ να είναι ο i-οστός όρος της F για κάθε i=1,…,m. Λέμε ότι η F είναι παραγωγίσιμη στο p αν υπάρχει γραμμική συνάρτηση $T : \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ και μια συνάρτηση $E : B(0;r) \to \mathbb{R}^m$ ορισμένη σε κάποια μπάλα B(0;r), με r>0 , και κέντρο το origin του $\mathbb{R}^n$ τέτοιες ώστε F(p+h)=F(p)+T(h)+E(h), για κάθε h στην B(0;r), όπου $E(h)/|h|\to 0$ καθώς $h\to 0$. Η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη αν είναι παραγωγίσιμη παντου στο Ω.

Η γραμμική συνάρτηση T είναι η παράγωγος της F στο p και συμβολίζεται ως DF(p). Υποθέτουμε ότι η t είναι μια πραγματική μεταβλητή και ορίζουμε για κάθε j=1,…,n την μερική παράγωγο της F στο p ως προς το e_j , ως $\frac{\partial F}{\partial e_j}(p)=\lim_{t\to 0}\frac{F(p+te_j)-F(p)}{t}$, έχουμε ότι $DF(p)(e_j)=\frac{\partial F}{\partial e_j}(p)=(\frac{\partial F_1}{\partial e_j}(p),\dots,\frac{\partial F_m}{\partial e_j}(p))$. Θέτοντας $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(p)=\frac{\partial F_i}{\partial e_j}(p)$, για κάθε i=1,…,m και για κάθε j=1,…,n, καλούμε την $\frac{\partial F}{\partial x_j}(p)=(\frac{\partial F_1}{\partial x_j}(p),\dots,\frac{\partial F_m}{\partial x_j}(p))$ j-οστή μερική παράγωγο της F στο p . Ο Ιακωβιανός πίνακας της F στο p είναι ο

$$JF(p)=(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(p))_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}=\begin{pmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(p)\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(p)\end{pmatrix}.$$

Λέμε ότι η F είναι της κλάσης C^1, αν η F και η μερικές παράγωγοι της τάξης 1 είναι συνεχής στο Ω. Σε αυτή την περίπτωση λέμε επίσης ότι η F ανήκει στο $C^1(\Omega;\mathbb{R}^n)$.

Το ακόλουθο λήμμα ισχύει για ένα ανοικτό υποσύνολο Ω του $\mathbb{R}^n$. Για ευκολία δεχόμαστε ότι $\Omega=\mathbb{R}^n$.

Το παρακάτω λήμμα είναι μια άμεση συνέπεια του Κανόνα Αλυσίδας αλλά για λόγους πληρότητας δίνουμε μια σύντομη απόδειξη.

Λήμμα 2 :

Έστω $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ παραγωγίσιμη , $T:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^n$ είναι η γραμμική συνάρτηση που σχετίζεται με έναν n *x* k πραγματικό πίνακα M και y ένα σταθερό σημείο στον $\mathbb{R}^n$. Τότε η συνάρτηση G(x)=F(y+Tx), όπου $x\in\mathbb{R}^k$, είναι παραγωγίσιμη και ισχύει ότι JG(x)=JF(y+Tx)M , για κάθε x στον $\mathbb{R}^k$.

Απόδειξη :

Θα κατασκευάσουμε το x στον $\mathbb{R}^k$. Έστω $u\in\mathbb{R}^n$, επειδή η F είναι παραγωγίσιμη , σύμφωνα με τον ορισμό που δώσαμε παραπάνω, έχουμε ότι F(y+Tx+u)=F(y+Tx)+DF(y+Tx)u+E(u), όπου $E(u)/|u|\to 0$ καθώς $u\to 0$. Θέτουμε u=Th με $h\in\mathbb{R}^k$ και έχουμε ότι F(y+Tx+Th)=F(y+Tx)+DF(y+Tx)Th+E(Th). Όμως F(y+Tx)=G(x) και F(y+Tx+Th)=G(x+h). Επομένως έχουμε ότι G(x+h)=G(x)+DF(y+Tx)Th+E(Th). Υποθέτουμε ότι $h\neq 0$, τότε $\frac{E(Th)}{|h|}=0$ αν Th=0 και $\frac{E(Th)}{|h|}=\frac{E(Th)}{|Th|}\frac{|Th|}{|h|}$, αν $Th\neq 0$. Από την στιγμή που $Th\to 0$ καθώς $h\to 0$ και , από το Λήμμα 1 , $|Th|/|h|\le||T||$, καταλήγουμε ότι $E(Th)/|h|\to 0$ καθώς $h\to 0$. Επομένως η G είναι παραγωγίσιμη. Αφού η G είναι παραγωγίσιμη στο x και σύμφωνα με τον κανόνα αλυσίδας έχουμε ότι JG(x)=JF(y+Tx)M.□

Σύμφωνα με την υπόθεση που κάναμε στο Λήμμα 2 , βλέπουμε πως αν η F είναι της κλάσης C^1 τότε είναι και η G.

Στα επόμενα θα χρησιμοποιήσουμε τον εξής συμβολισμό: Έστω a και b, τα οποία ανήκουν στον $\mathbb{R}^n$, τότε $\overline{ab}=\{a+t(b-a):0\leq t\leq 1\}$.

Λήμμα 3 (Θεώρημα Μέσης Τιμής για πολλές μεταβλητές) :

Έστω $F : \Omega \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη , με το Ω να είναι ανοικτό στον $\mathbb{R}^n$. Έστω a και b δύο σημεία στο Ω τέτοια ώστε το $\overline{ab}$ να βρίσκεται εντός του Ω. Τότε θα υπάρχει c στο $\overline{ab}$ τέτοιο ώστε

$$F(b)-F(a)=<\nabla F(c) , b-a>$$

Απόδειξη :

Η καμπύλη $\gamma(t)= a+t(b-a)$, με $t \in [0,1]$, είναι μέσα στο Ω . Θέτουμε $g(t)=F(a + t[a-b])$, $t\in [0,1]$. Από το λήμμα 2 η g είναι παραγωγίσιμη. Χρησιμοποιούμε το θεώρημα μέσης τιμής , για μια μεταβλητή , για την g και παίρνουμε ότι

$$g(1)-g(0)=g'(t_0)(a+1(b-a)-a-0(b-a))\ t_0 \in [0,1].$$

Άρα $F(b)-F(a)=<\nabla F(c) , b-a>$ με $t_0 \in [0,1]$ και c να βρίσκεται μέσα στο $\overline{ab}$. □

Θυμίζουμε ότι μια γραμμική συνάρτηση από τον $\mathbb{R}^n$ στον $\mathbb{R}^n$ είναι ′′1-1′′ αν και μόνο αν η ορίζουσα του πίνακα της δεν είναι μηδέν. Το επόμενο λήμμα λέει ότι αν μια συνάρτηση F ανήκει στην κλάση $C^1(\Omega,\mathbb{R}^n)$ και το διαφορικό της σε ένα σημείο p είναι ′′1-1′′ τότε και η F είναι ′′1-1′′ σε μια περιοχή του p.

Λήμμα 4 :

Έστω F που ανήκει στην κλάση $C^1(\Omega , \mathbb{R}^n)$, όπου το Ω είναι ανοικτό στον $\mathbb{R}^n$ και p ένα σημείο στον Ω με $\det JF(p)\neq 0$. Τότε η F είναι περιορισμένη σε κάποια μπάλα $B(p;r)$ με $r>0$ και είναι ʻʻ1-1ʼʼ.

Απόδειξη :

Αφού η F είναι της κλάσης C^1, η συνάρτηση της ορίζουσας det : $\mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και detJF(p)=det($\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$(p))≠0 , τότε θα υπάρχει r>0 τέτοιο ώστε det($\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\xi_{ij})$)≠0 για κάθε ξ_{ij} στο B(p;r) με ξ_{ij} πολύ κοντά στο p και 1≤i,j≤n. Έστω a,b στο B(p;r) με a≠b. Χρησιμοποιόντας το θεώρημα μέσης τιμής πολλών μεταβλητών για κάθε F_i βρίσκουμε c_i μέσα στο $\overline{ab}$, τέτοιο ώστε : $F_i(b)-F_i(a)=<\nabla F_i(c_i), b-a>$. Δηλαδή ,

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{F_1(b) - F_1(a)} \\ \vdots \\ \boldsymbol{F_n(b) - F_n(a)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(c_1) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(c_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(c_n) & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(c_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{b_1 - a_1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{b_n - a_n} \end{pmatrix}.$$

Όμως στα πλαίσια του B(p;r) έχουμε ότι det($\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(c_i)$)≠0 και b−a≠0. Επομένως F(b)≠F(a). Άρα η F είναι ''1-1''.□

Κεφάλαιο 3

Το Θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων

3.1 Το Θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων

Η πρώτη μορφή του θεωρήματος πεπλεγμένων συναρτήσεων που αποδεικνύουμε αφορά συναρτήσεις πολλών μεταβλητών με μία λύση. Το (x,y) ανήκει στον $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, όπου το $x = (x_1, \ldots, x_n)$ παίρνει τιμές στον $\mathbb{R}^n$ και το y στο $\mathbb{R}$.

Θεώρημα 1. : Έστω συνάρτηση $F : \Omega \to \mathbb{R}$ η οποία ανήκει στην κλάση C^1 σε ένα ανοιχτό σύνολο Ω μέσα στο $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ και (a,b) ένα σημείο στο Ω τέτοιο ώστε F(a,b)=0 και $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) > 0$. Τότε , υπάρχει ένα ανοιχτό υποσύνολο X του $\mathbb{R}^n$ και περιέχει το a , και ένα ανοιχτό υποσύνολο Y του $\mathbb{R}$ και περιέχει το b που ικανοποιεί τα ακόλουθα.

- Για κάθε x στο X υπάρχει ένα μοναδικό y = f(x) στο Y τέτοιο ώστε F(x , f(x)) = 0.
- Έχουμε ότι f(a) = b. Επιπλέον , η $f : X \to Y$ ανήκει στην κλάση C^1 και

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(x,f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,f(x))}, \text{ για κάθε x στο X και j=1, … , n.}$$

Απόδειξη : Η απόδειξη που θα παρουσιάσουμε χωρίζεται σε τρία μέρη. Αρχικά θα δείξουμε ότι υπάρχουν τα δύο ανοιχτά υποσύνολα Y και X του $\mathbb{R}^n$ και $\mathbb{R}$ αντίστοιχα(κατά αυτή την σειρά), έτσι ώστε για κάθε $x \epsilon X$ να υπάρχει μοναδικό $y \epsilon Y$ τέτοιο ώστε (α) $F(x,y) = 0$ και (β) για $b_1, b_2 \in Y$ με $b_1 < y < b_2$ να ισχύει ότι

$$F(x, b_1) < 0 < F(x, b_2).$$

Επομένως αν ορίσουμε $f: X \to Y$ να είναι η συνάρτηση που σε κάθε $x \epsilon X$ αντιστοιχεί το μοναδικό $y \epsilon Y$ με $F(x,y) = 0$ τότε θα έχουμε ότι η γραφική παράσταση C της f θα χωρίζει το ορθογώνιο $X \times Y$ σε δύο μέρη έτσι ώστε η $F(x,y)$ γνήσια θετική πάνω από την C, μηδέν πάνω στην C και γνήσια αρνητική κάτω από την C. Στο δεύτερο μέρος της απόδειξης θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής. Τέλος στο τρίτο μέρος, με την βοήθεια του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, θα δείξουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και η παράγωγος ικανοποιεί την σχέση που δίνεται στην εκφώνηση.

Για ευκολία στον συμβολισμό θα αποδείξουμε τα δύο πρώτα μέρη για $n = 1$ (η απόδειξη εύκολα γενικεύεται και για μεγαλύτερα n).

- **<u>Ύπαρξη της f και μοναδικότητα</u> .** Έχουμε ότι $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) > 0$. Επειδή η $\frac{\partial F}{\partial y}: \Omega \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής επιλέγουμε ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) > 0$ για κάθε $(x,y) \in B_\delta(a,b)$. Θέτουμε

  $$\delta_2 = \delta/_2 \,, b_1 = b - \delta_2 \,, b_2 = b + \delta_2 \text{ και } Y = (b_1, b_2).$$

  Περιορίζουμε τώρα την F στο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα (a, b_1) και (a, b_2), δηλαδή θεωρούμε την συνάρτηση $g_0: Y \to \mathbb{R}$ με $g_0(y) = F(a,y)$ για κάθε y ∈ Y. Ουσιαστικά αυτό που κάνουμε είναι να μελετήσουμε την F μόνο σαν συνάρτηση του y. Παρατηρούμε ότι $g_0'(y) = \frac{\partial F}{\partial y}(a,y)$ και έτσι $g_0'(y) > 0$ για κάθε $y \in Y$. Επομένως η g_0 είναι μια γνησίως αύξουσα και συνεχής συνάρτηση. Επειδή $g_0(a,b) = F(a,b) = 0$ θα είναι $g_0(y) < 0 < g_0(y')$ για κάθε $y < b < y'$ στο Y. Ειδικότερα ,

  $$F(a,b_1) < 0 < F(a,b_2).$$

  Επειδή η F είναι συνεχής στα (a,b_1) και (a,b_2) θα υπάρχει ένα δ' τέτοιο ώστε $F(x,y) < 0$ αν $(x,y) \in B_{\delta'}(a,b_1)$ και $F(x,y) > 0$ αν $(x,y) \in B_{\delta'}(a,b_2)$.
  Υποθέτουμε ότι το δ' είναι αρκετά μικρό ώστε οι δίσκοι $B_{\delta'}(a,b_1)$ και $B_{\delta'}(a,b_2)$ να βρίσκονται στο εσωτερικό του αρχικού $B_\delta(a,b)$.
  Θέτουμε

  $$\delta_1 = \delta', a_1 = a - \delta_1 \,, \alpha_2 = \alpha + \delta_1 \; \kappa\alpha\iota \; X = (a_1, a_2).$$

  Έτσι έχουμε ότι

  $$F(x,b_1) < 0 \,, F(x,b_2) > 0 \text{ για κάθε } x \in X.$$

  Επιπλέον $X \times Y \subseteq B_\delta(a,b)$.

  Περνάμε τώρα στην απόδειξη της ύπαρξης της συνάρτησης f: θεωρούμε ένα τυχαίο $x \in X$. Θέτουμε $g(y) = F(x,y), y \in Y$. Έχουμε ότι $g'(y) = \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) > 0$, άρα η g είναι μια γνησίως αύξουσα συνεχής συνάρτηση. Έχουμε $g(b_1) = F(x,b_1) < 0 \; \kappa\alpha\iota \; g(b_2) = F(x,b_2) > 0$, άρα από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής θα υπάρχει ένα μοναδικό $y \in Y$ με $g(y) = F(x,y) = 0$. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να ορίσουμε την f : $X \to Y$ ως την συνάρτηση που στέλνει κάθε $x \in X$ στο μοναδικό $y \in Y$ ώστε $F(x,y) = 0$.

- **Συνέχεια της f .** Έστω a′ ένα σημείο το οποίο ανήκει στο X και έστω $\varepsilon > 0$. Από την επιλογή των X και Y που έγινε παραπάνω το $\mathrm{b}' = \mathrm{f}(\mathrm{a}')$ θα είναι το μοναδικό σημείο του διαστήματος Y που ικανοποιεί τα παρακάτω,
$$F(a', b') = 0 \ \kappa\alpha\iota \ F(a', y) < 0 < F(a', y') \text{ για κάθε } y < b' < y'.$$
Επιλέγοντας ένα μικρότερο $\varepsilon > 0$ αν χρειάζεται μπορούμε να υποθέσουμε ότι $(b' - \varepsilon, b' + \varepsilon) \subseteq Y$. Επειδή $F(x, b' - \varepsilon) < 0 < F(x, b' + \varepsilon)$ και η F είναι συνεχής , επιλέγουμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $\mathrm{F(x,y)} < 0$ αν $(x, y) \in B_\delta(a', b' - \varepsilon)$ και $F(x, y) > 0$ αν $(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in B_\delta(a', b' + \varepsilon)$. Γενικά για κάθε $x \in X \cap (a' - \delta, a' + \delta)$ έχουμε ότι $F(x, b' - \varepsilon) < 0 < F(x, b' + \varepsilon)$, πράγμα που σημαίνει ότι $b' - \varepsilon < f(x) < b' + \varepsilon$ αφού από την επιλογή των X και Y και τον ορισμό της f που έγινε παραπάνω το $f(x)$ είναι το μοναδικό σημείο $y \ \sigma\tau o \ Y$ με την ιδιότητα $F(x, b_1) < 0 < F(x, b_2)$ για $b_1 < y < b_2$. Επομένως η f είναι συνεχής.

- **Παραγωγισιμότητα .** Έστω x το οποίο ανήκει στο X , e_j το j-οστό κανονικό διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$ και $t \neq 0$ αρκετά μικρό ώστε το $x + te_j$ να βρίσκεται μέσα στο X. Θέτουμε $P = (x, f(x))$ και $Q = (x + te_j, f(x + te_j))$ και παρατηρούμε ότι (α) το τμήμα $\overline{\mathrm{PQ}}$ περιέχεται στο $X \times Y$ και (β) η F μηδενίζεται σε αυτά τα δύο σημεία. Χρησιμοποιούμε το θεώρημα μέσης τιμής πολλών μεταβλητών για την F στο τμήμα $\overline{\mathrm{PQ}}$ και βρίσκουμε ένα σημείο $(\overline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{y}})$ στο $\overline{\mathrm{PQ}}$ το οποίο ικανοποιεί την παρακάτω συνθήκη :

$$\begin{aligned}
0 &= F\left(x + te_j, f\left(x + te_j\right)\right) - F\left(x, f(x)\right) = \\
&= <\nabla \mathrm{F}(\overline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{y}}), (\mathrm{Q} - \mathrm{P})> = \\
&= <\left(\frac{\partial F}{\partial x_j}(\overline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{y}}), \frac{\partial F}{\partial y}(\overline{\mathrm{x}}, \overline{\mathrm{y}})\right), \left(\mathrm{x} + \mathrm{t}e_j, \mathrm{f}\left(\mathrm{x} + \mathrm{t}e_j\right)\right) - \left(\mathrm{x}, \mathrm{f(x)}\right)> = \\
&= <\left(\frac{\partial F}{\partial x_j}(\overline{x}, \overline{y}), \frac{\partial F}{\partial y}(\overline{x}, \overline{y})\right), (te_j, f\left(x + te_j\right) - f(x))> = \\
&= \frac{\partial F}{\partial x_j}(\overline{x}, \overline{y}) te_j + \frac{\partial F}{\partial y}(\overline{x}, \overline{y})[f\left(x + te_j\right) - f(x)]
\end{aligned}$$

Αφού η $\frac{\partial F}{\partial x_j}$ και η $\frac{\partial F}{\partial y}$ είναι συνεχείς με $\frac{\partial F}{\partial y} > 0$ στο X×Y η συνάρτηση f είναι συνεχής και $(\overline{x}, \overline{y}) \rightarrow \left(x, f(x)\right)$ καθώς $t \rightarrow 0$. Επιπλέον :

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(\overline{x\,,y})t + \frac{\partial F}{\partial y}(\overline{x\,,y})\left[f\left(x + te_j\right) - f(x)\right] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{f\left(x + te_j\right) - f(x)}{t} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(\overline{x\,,y})}{\frac{\partial F}{\partial y}(\overline{x\,,y})} \rightarrow -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}\left(x, f(x)\right)}{\frac{\partial F}{\partial y}\left(x, f(x)\right)}\ \kappa\alpha\theta\acute{\omega}\varsigma\ t \rightarrow 0.$$

Από τα παραπάνω προκύπτει η ζητούμενη φόρμουλα για την $\frac{\partial f}{\partial e_j}$ καθώς και ότι η f ανήκει στην κλάση C[1] . □

3.2 Το Θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων στην γενική του μορφή

Στην συνέχεια θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε το θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων στην γενική του μορφή. Γενικά, χρησιμοποιούμε αυτό το θεώρημα όταν έχουμε ένα μη γραμμικό σύστημα m εξισώσεων και $n + m$ μεταβλητών . Αναλογικά με ένα γραμμικό σύστημα, θεωρούμε n μεταβλητές ως ανεξάρτητες και τις υπόλοιπες m μεταβλητές , τις αποκαλούμε εξαρτημένες μεταβλητές , σαν μια συνάρτηση των n ανεξάρτητων μεταβλητών.

Πριν προχωρήσουμε στο θεώρημα θα καθορίσουμε τους παρακάτω συμβολισμούς. Όπως και πριν, ορίζουμε το $x = (x_1, \dots, x_n)$ ως ένα σημείο στον $\mathbb{R}^n$ και $y = (y_1, \dots, y_m)$ ένα σημείο στον $\mathbb{R}^m$. Έστω Ω ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n x \mathbb{R}^m$ και μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, γράφουμε την $F = (F_1, \dots, F_m)$ με F_i να είναι ο i-οστός όρος της F και $i = 1, \dots, m$. Θέτουμε

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}\right)_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le m}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}$$

Κατά τον ίδιο τρόπο ορίζουμε τον πίνακα $\frac{\partial F}{\partial x} = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_k}\right)$, όπου $1 \le i \le m$ και $1 \le k \le n$.

Θεώρημα 2. (Το Θεώρημα Πεπλεγμένων συναρτήσεων στην γενική του μορφή): Έστω συνάρτηση F η οποία ανήκει στην κλάση $C^1(\Omega;\mathbb{R}^m)$, με το Ω να είναι ένα ανοιχτό σύνολο στον $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, και (a,b) ένα σημείο στο Ω τέτοιο ώστε (α) $F(a,b) = 0$ και (β) Η ορίζουσα του $m \times n$ πίνακα $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)$ είναι διάφορη του 0(ισοδύναμα ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος).

Τότε υπάρχει ένα ανοιχτό σύνολο X στον $\mathbb{R}^n$ το οποίο περιέχει το a , και ένα ανοιχτό σύνολο Y στον $\mathbb{R}^m$ και περιέχει το b, με τις παρακάτω ιδιότητες.

- Για κάθε x στο X, υπάρχει ένα μοναδικό $y = f(x)$ στο Y τέτοιο ώστε $F\big(x, f(x)\big) = 0$.
- Έχουμε ότι $f(a) = b$. Επιπλέον η $f: X \to Y$ είναι της κλάσης C^1 και
$$Jf(x) = -[\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))]^{-1}_{m\times m}[\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))]_{m\times n}$$, για κάθε x στο X.

Απόδειξη : Θα χωρίσουμε την απόδειξη σε τρία μέρη.

- **<u>Εύρεση του Y και μοναδικότητα της λύσης</u> .** Έστω η συνάρτηση $h : \Omega' \to \Omega$ με τύπο
$$h(x,y) = (x, b + \mathcal{J}^{-1}(y-b))$$
και $h(a,b) = (a,b)$. Το Ω' είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.Η συνάρτηση h θα παίρνει τιμές από το Ω' και θα στέλνει στο Ω. Στην συνέχεια ορίζουμε την συνάρτηση $G : \Omega' \to \mathbb{R}^m$ ως
$$G(x,y) = F \circ h = F(x, b + \mathcal{J}^{-1}(y-b)).$$

Από τον κανόνα της Αλυσίδας (η Λήμμα 2) έχουμε
$$\frac{\partial G}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y}\big(x, b + \mathcal{J}^{-1}(y-b)\big) \bullet \mathcal{J}^{-1}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\partial G}{\partial y}(a,b) = \frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \bullet \mathcal{J}^{-1} = \mathcal{J}\mathcal{J}^{-1} = I$$

Άρα έχουμε ότι
$$\frac{\partial G}{\partial y}(a,b) = I_m$$

Όπου I_m ο $m \times m$ ταυτοτικός πίνακας . Επομένως θα είναι $\frac{\partial G_i}{\partial y_j}(a,b) = 1 \; \alpha\nu \; i = j$ και $\frac{\partial G_i}{\partial y_j}(a,b) = 0 \; \alpha\nu \; i \neq j$.

Έστω η συνάρτηση $\Phi(x,y) = \big(x, G(x,y)\big)$, με $\Phi : \Omega' \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, έχουμε

$$detJ\Phi = det\begin{pmatrix} I & 0 \\ \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial y} \end{pmatrix} = det\frac{\partial G}{\partial y}$$

Όπου I ο ταυτοτικός πίνακας τάξης m και 0 ο $n \times m$ μηδενικός πίνακας. Μικραίνουμε το Ω' αν χρειαστεί , χωρίς βλάβη της γενικότητας , από το Λήμμα 4 προκύπτει ότι η Φ είναι ΄΄1-1΄΄ και υπάρχει ένα σύνολο $\Omega'' = X' \times Y$, με X' ένα ανοιχτό υποσύνολο στον $\mathbb{R}^n$ που περιέχει το a και Y ένα ανοιχτό υποσύνολο στον $\mathbb{R}^m$ που περιέχει το b.

Έστω τώρα ότι υπάρχουν δύο λύσεις $y_1, y_2 \in Y$ με $\mathrm{G}(\mathrm{x}, y_1) = \mathrm{G}(\mathrm{x}, y_2) = 0$. Επομένως θα είναι $\Phi(x, y_1) = \Phi(x, y_2) = \Phi(x, 0)$. Η Φ είναι μία ΄΄1-1΄΄ συνάρτηση άρα θα είναι $y_1 = y_2$. Επομένως αν υπάρχει η λύση τότε θα είναι μοναδική.

Για ευκολία στον συμβολισμό δεχόμαστε ότι $F(x,y) = G(x,y)$ και ότι $\Omega' = \Omega'' = \Omega$.

- **<u>Ύπαρξη και παραγωγισιμότητα της f</u> .** Ισχυριζόμαστε ότι η εξίσωση $F\big(x, f(x)\big) = 0$, με την προϋπόθεση ότι f(a) = b , έχει μία λύση $f = f(x)$, η οποία ανήκει στην κλάση C^1 , σε ένα ανοιχτό σύνολο που περιέχει το a. Θα αποδείξουμε τον ισχυρισμό μας επαγωγικά ως προς m.

  Για $m = 1$ είμαστε στην περίπτωση τους Θεωρήματος 1 που αποδείξαμε παραπάνω . Υποθέτουμε ότι ο ισχυρισμός μας είναι σωστός για $m - 1$.
  Για την περίπτωση m , ακολουθώντας τον συμβολισμό $F = (F_1, \dots, F_m)$ γράφουμε $F' = (F_2, \dots, F_m)$. Επιπλέον δίνουμε τους παρακάτω συμβολισμούς, $(x; y) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$, $y' = (y_2, \dots, y_m)$, $y = (y_1; y')$, και $(x; y) = (x; y_1; y')$.

  Θεωρούμε την εξίσωση $F_1(x; y_1; y') = 0$ με $y_1(a; b') = b_1$. Έχουμε $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) = I$, με I να είναι ο ταυτοτικός πίνακας, επομένως είναι $\frac{\partial F_1}{\partial y_1}(a; y_1; y') = 1$. Άρα από το Θεώρημα 1 υπάρχει μία συνάρτηση $y_1 = \varphi(x; y')$ που ανήκει στην κλάση C^1 σε κάποιο ανοιχτό σύνολο και περιέχει το $(a; b')$ και ισχύουν :

  (α) $F_1[x; \varphi(x; y'); y'] = 0$ και (β) $\varphi(a; b') = b_1$.

  Στην συνέχεια αντικαθιστούμε την $y_1 = \varphi(x; y')$ στην $F'(x; y_1; y') = 0$ και έτσι θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση $\mathrm{F}'[\mathrm{x}; \varphi(x; y'); y'] = 0$ με $\mathrm{y}'(\mathrm{a}) = \mathrm{b}'$.
  Παραγωγίζουμε την $F'[x; \varphi(x; y'); y']$ ως προς $y' = (y_2, \dots, y_m)$ και παίρνουμε

$$\frac{\partial F_i}{\partial y_1}(a;b)\frac{\partial \varphi}{\partial y_j}(a;b')+\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(a;b)=0+\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(a;b)\ \mu\varepsilon\ 2\leq i,j\leq m\,.$$

Ο πίνακας $(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(a;b))$ με $2\leq i,j\leq m$ είναι ο ταυτοτικός πίνακας τάξης $\mathrm{m}-1$. Επιπλέον από την επαγωγική υπόθεση θα υπάρχει μια συνάρτηση ψ, που ανήκει στην κλάση C^1, σε ένα ανοιχτό υποσύνολο X το οποίο περιέχει το a και ισχύουν :

(α) $F'\big[x;\varphi\big(x;\psi(x)\big),\psi(x)\big]=0$,για κάθε $x\in X$, και (β) $\psi(a)=b'$.

Επίσης έχουμε ότι $F_1\big[x;\varphi\big(x;\psi(x)\big);\psi(x)\big]=0$ για κάθε $x\in X$. Ορίζουμε την συνάρτηση $f(x)=(\varphi\big(x;\psi(x)\big);\psi(x))$, με $x\in X$. Επομένως έχουμε ότι $F[x;f(x)]=0$ για κάθε $x\in X$ και $f(a)=(\varphi(a;b');b')=(b_1;b')=b$. Οι συναρτήσεις φ,ψ ανήκουν στην κλάση C^1 , άρα και η συνάρτηση f ανήκει στην κλάση C^1 για κάθε $x\in X$.

- **<u>Παράγωγος</u> .** Παραγωγίζουμε την $F[x,f(x)]=0$, από τον κανόνα αλυσίδας προκύπτει ότι

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_k}+\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial F_i}{\partial y_j}\frac{\partial f_j}{\partial x_k}=0\ \mu\varepsilon\ 1\leq i\leq m\ \kappa\alpha\iota\ 1\leq k\leq n\,.$$

Την παραπάνω εξίσωση μπορούμε την γράψουμε ως

$$\frac{\partial F}{\partial x}\big(x,f(x)\big)+\frac{\partial F}{\partial y}\big(x,f(x)\big)Jf(x)=0$$

Η συνάρτηση F είναι αντιστρέψιμη και έτσι έχουμε την ζητούμε φόρμουλα

$$Jf(x)=-[\frac{\partial F}{\partial y}(x,f(x))]_{m\times m}^{-1}[\frac{\partial F}{\partial x}(x,f(x))]_{m\times n}\ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in X\,.$$

Κεφάλαιο 4

Το Θεώρημα Αντίστροφης Συνάρτησης

4.1 Εισαγωγή

Υπάρχει μια πολύ δυνατή σύνδεση ανάμεσα στο Θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων και στο Θεώρημα Αντίστροφης Συνάρτησης. Θα μπορούσαμε να τα χαρακτηρίσουμε ξαδερφάκια. Αποδεικνύεται ότι αυτά τα δύο θεωρήματα είναι ισοδύναμα με την έννοια του ότι μπορούμε αφού αποδείξουμε το Θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων να αντλήσουμε από αυτό το Θεώρημα Αντίστροφης Συνάρτησης.

Έστω μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία ανήκει στην κλάση C^1 και έστω ότι η παράγωγος της είναι θετική σε κάποιο $x^* \in \mathbb{R}$, τότε, από την συνέχεια της παραγώγου υπάρχει ένα ανοιχτό διάστημα U το οποίο περιέχει το x^* και η παράγωγος της f να είναι θετική για κάθε $x \in U$. Από Το Θεώρημα Μέσης Τιμής η f θα είναι παντού θετική στο U και επιπλέον η f είναι μια ΄΄1-1΄΄ συνάρτηση η οποία στέλνει από το U στο *f(U).* Έστω $V = f(U)$ και επιπλέον η $f : U \to V$ είναι αντιστρέψιμη. Το Θεώρημα Αντίστροφης Συνάρτησης που θα παρουσιάσουμε και θα αποδείξουμε παρακάτω γενικεύει την παρατήρηση μας.

4.2 Το Θεώρημα Αντίστροφης Συνάρτησης

Θεώρημα (Το Θεώρημα Αντίστροφης Συνάρτησης): Έστω $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$, κλάσης C^1 συνάρτηση, όπου Ω είναι ένα ανοιχτό σύνολο στον $\mathbb{R}^n$ και p ένα σημείο στο Ω τέτοιο ώστε η ορίζουσα του Ιακωβιανού πίνακα $JF(p)$ να είναι διάφορη του μηδέν . Τότε, υπάρχει ένα ανοιχτό σύνολο X στον $\mathbb{R}^n$ που περιέχει το p, ένα ανοιχτό σύνολο Y στον $\mathbb{R}^n$ που περιέχει το $F(p)$ και μια συνάρτηση $G\colon Y \to X$ της κλάσης C^1 για την οποία ισχύει ότι $F\big(G(y)\big) = y$, για κάθε y στο Y, και $G\big(F(x)\big) = x$, για κάθε x στον X. Επιπλέον,

$$JG(y) = JF(G(y))^{-1} \text{ για κάθε y στο Y.}$$

Απόδειξη: θα χωρίσουμε την απόδειξη σε δύο μέρη: ύπαρξη και παράγωγος.

- **Ύπαρξη:** Μικραίνουμε το Ω, αν είναι απαραίτητο, και από το Λήμμα 4 έχουμε ότι η συνάρτηση F είναι ''1-1''. Έστω η συνάρτηση $\Phi(x,y) = F(x) - y$, όπου το (x,y) ανήκει στο $\Omega \times \mathbb{R}^n$, η οποία ανήκει στην κλάση C^1 ως συνάρτηση της F και έχουμε ότι $\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x) = JF(x)$. Επειδή η F είναι ''1-1'' μπορούμε να γράψουμε ότι $\frac{\partial \Phi}{\partial x}(F(p),p) = JF(p)$. Από το Θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων θα υπάρχει ένα ανοιχτό σύνολο Y το οποίο περιέχει το F(p) και μια συνάρτηση $G: Y \to \Omega$ που ανήκει στην κλάση C^1 και ισχύει ότι $\Phi(G(y),y) = F\big(G(y)\big) - y = 0$, για κάθε $y \in Y$. Επιπλέον, το σύνολο Y βρίσκεται εντός της εικόνας της F. Αφού η F είναι συνεχής και ''1-1'' , η αντίστροφη εικόνα του συνόλου $X = F^{-1}(Y)$ είναι ανοιχτή , περιέχει το p, και η F στέλνει ισομορφικά από το X στο Y. Η ταυτότητα $F\big(G(y)\big) = y$, για κάθε $y \in Y$, προϋποθέτει ότι η G στέλνει από το Y στο X. Αφού η F είναι ένας ισομορφισμός από το X στο Y, τότε και η εξίσωση G θα είναι ένας ισομορφισμός από το Y στο X. Επομένως προκύπτει ότι $G\big(F(x)\big) = x$ για κάθε $x \in X$.

- **Παράγωγος:** Έχουμε δείξει ότι $y = F(G(y))$. Παραγωγίζοντας αυτή την σχέση από τον Κανόνα Αλυσίδας έχουμε ότι

$$\frac{\partial y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} F(G(y))$$
$$\Leftrightarrow 1 = \frac{\partial F}{\partial y}\big(G(y)\big)\ \frac{\partial G(y)}{\partial y}$$
$$\Leftrightarrow 1 = JF\big(G(y)\big)\ JG(y)$$
$$JG(y) = JF\big(G(y)\big)^{-1}$$

Επομένως μόλις αποδείξαμε της ζητούμενη φόρμουλα. □

4.3 Παραδείγματα

Θα δούμε τέσσερα παραδείγματα στον $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 1 : Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^x$ η οποία ανήκει στην κλάση C^1 . Έχουμε ότι $Jf(x) = e^x > 0$ για κάθε x . Θέτουμε $U = \mathbb{R}$ και $V = f(\mathbb{R}) = (0,\infty)$. Τότε η αντίστροφη συνάρτηση θα είναι η $f^{-1} : V \to \mathbb{R}$ με τύπο $f^{-1}(y) = \ln(y)$, η οποία ανήκει στην κλάση C^1.

Για παράδειγμα, έστω ότι $x = 1$ τότε θα είναι $y = e$. Επιπλέον $Jf^{-1}(y) = {}^{1}/_{y}$, $Jf^{-1}(e) = {}^{1}/_{e}$. Από την άλλη μεριά έχουμε ότι , $Jf(x) = e^{x}$ με $Jf(1) = e$. Άρα έχουμε ότι $Jf^{-1}(y) = (Jf(x))^{-1}$.$\square$

Παράδειγμα 2 : Έστω η $f(x) = x^2$ η οποία ανήκει στην C^1. Έχουμε ότι $Jf(x) = 2x$ για κάθε x. Για $x' = 1$ έχουμε ότι $Jf(1) = 2 > 0$, έτσι από το Θεώρημα Αντίστροφης Συνάρτησης θα υπάρχει ένα υποσύνολο U.Έστω $U = (0, \infty)$ και $V = f(U) = (0, \infty)$. Η αντίστροφη συνάρτηση θα είναι η $f^{-1} : V \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από τον τύπο $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$, η οποία ανήκει στην κλάση C^1 . Έχουμε ότι $Jf^{-1}(y) = {}^{1}/_{2\sqrt{y}}$ και $Jf(x) = 2x$. Για $x = 1$ είναι $y = 1$. Άρα $Jf^{-1}(y) = (Jf(x))^{-1}$ για $x = y = 1$.$\square$

Παράδειγμα 3 : Έστω πάλι η $f(x) = x^2$. Στο σημείο $x^* = 0$ έχουμε ότι $Jf(0) = 0$, άρα η Jf δεν είναι αντιστρέψιμη. Παρατηρούμε ότι η f δεν έχει καμία αντίστροφη συνάρτηση κοντά στο 0. Για παράδειγμα αν $U = (-1,1)$ τότε $V = (0,1)$. Αν $y = 0.1$ τότε θα έπρεπε να έχουμε δύο τιμές για την f^{-1} τις $f^{-1}(0.01) = 0.1$ και $f^{-1}(0.01) = -0.1$. $\square$

Παράδειγμα 4 : Έστω η $f(x) = x^3$ η οποία ανήκει στην C^1 . Έχουμε ότι $Jf(x) = 3x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Στο σημείο $x^* = 0$, $Jf(0) = 0$ και έτσι παραβιάζεται η βασική προϋπόθεση του Θεωρήματος Αντίστροφης Συνάρτησης. Όμως η f είναι αντιστρέψιμη. Στην πραγματικότητα θέτουμε U=V=$\mathbb{R}$ και η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ορίζεται ως $f^{-1}(y) = y^{1/3}$. Όμως η f^{-1} δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. $\square$

Κεφάλαιο 5

Εφαρμογές

5.1 Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις

Υπάρχει μια πολύ δυνατή σύνδεση ανάμεσα στο Θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων και τις θεωρίας των διαφορικών εξισώσεων. Αυτό είναι αληθές ακόμα και από ιστορική άποψη, η επαναληπτική απόδειξη του Picard για το θεώρημα ύπαρξης λύσης στις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις ενέπνευσε τον Goursat να δώσει μια επαναληπτική απόδειξη του Θεωρήματος Πεπλεγμένων Συναρτήσεων. Στα μέσα του εικοστού αιώνα ο John Nash πρωτοστάτησε με μια εκλεπτυσμένη μορφή του Θεωρήματος Πεπλεγμένων Συναρτήσεων στην μελέτη των μερικών διαφορικών εξισώσεων. Σε αυτό το κεφάλαιο θα επικεντρώσουμε την προσοχή μας στις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Αρχικά θα δείξουμε πως ένα θεώρημα ύπαρξης λύσης για τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την απόδειξη του Θεωρήματος Πεπλεγμένων Συναρτήσεων. Στην συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων για χώρους Banach για να αποδείξουμε το θεώρημα ύπαρξης λύσης του Picard για τις διαφορικές εξισώσεις.

Ένα τυπικό θεώρημα ύπαρξης λύσης για τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις είναι το :

Θεώρημα 5.1.1 (Picard) : Έστω συνάρτηση $F(t,x)\,,(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$, συνεχής στη (N+1)-διάστατη περιοχή $(t_0-a,t_0+a)\times B(x_0,r)$. Τότε υπάρχει μια λύση $x(t)$ με

$$\frac{dt}{dx}=F(t,x),\qquad x(t_0)=x_0,\qquad (5.1)$$

Που ορίζεται στο τμήμα $(t_0-h\,,t_0+h)$.

Παρατήρηση. Η λύση (5.1) μπορεί να μην είναι η μοναδική. Για παράδειγμα το πρόβλημα του να βρούμε την $x(t)$ που να ικανοποιεί τα $x'=x^{2/3}\,,x(0)=0$ έχει δύο λύσεις $x=0$ και $x(t)=(t/3)^3$. Για να είμαστε σίγουροι ότι η λύση (5.1) είναι μοναδική πρέπει η F να είναι Lipschitz συνεχής σαν συνάρτηση του x.

Θα δώσουμε μια διαφορετική απόδειξη του Θεωρήματος Πεπλεγμένων Συναρτήσεων ως συνέπεια του θεωρήματος 5.1.1 .

Θεώρημα 4.1.2 : Έστω ότι $U \subset \mathbb{R}^{N+1}$ και η συνάρτηση $H : U \to \mathbb{R}$ που ανήκει στην κλάση C[1] . Αν $H(t_0, x_0) = 0$, $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ και ο $N \times N$ πίνακας

$$(\frac{\partial H_i}{\partial x_j}(t_0, x_0))_{i,j=1,2,\dots,N}$$

Είναι διάφορος του μηδενός. Τότε υπάρχει ένα ανοιχτό διάστημα $(t_0 - h, t_0 + h)$ και μια συνεχής, παραγωγίσιμη συνάρτηση $\varphi : (t_0 - h, t_0 + h) \to \mathbb{R}^N$ έτσι ώστε (α) $\varphi(t_0) = x_0$ και (β) $\mathrm{H}(\mathrm{t}, \varphi(t)) = 0$.

Απόδειξη : Αρχικά θα εξετάσουμε την περίπτωση όπου N=1. Επιλέγουμε τα $\mathrm{a}, \mathrm{r} > 0$ έτσι ώστε $(t_0 - a, t_0 + a) \times (x_0 - r, x_0 + r) \subseteq U$ και $\frac{\partial H}{\partial x}(t, x)$ να είναι διάφορο του μηδέν στο $(t_0 - a, t_0 + a) \times (x_0 - r, x_0 + r)$. Ορίζουμε την $F : (t_0 - a, t_0 + a) \times (x_0 - r, x_0 + r) \to \mathbb{R}$

$$\text{Ως} \quad F(t, x) = -\frac{\frac{\partial H}{\partial t}(t,x)}{\frac{\partial H}{\partial x}(t,x)}. \quad (5.2)$$

Αφού η F είναι συνεχής εφαρμόζουμε το θεώρημα 5.1.1 και καταλήγουμε ότι υπάρχει μια λύση του προβλήματος

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

Που ορίζεται σε ένα διάστημα $(t_0 - h, t_0 + h)$. Ορίζουμε την $\varphi : (t_0 - h, t_0 + h) \to \mathbb{R}$ θέτοντας

$$\varphi(t) = x(t).$$

Έχουμε ότι

$$\varphi(t_0) = x(t_0) \qquad (5.3)$$

Και

$$\varphi'(t) = \frac{dx}{dt}(t) = F(t, x(t))$$

$$= -\frac{\frac{\partial H}{\partial t}(t, \varphi(t))}{\frac{\partial H}{\partial x}(t, \varphi(t))}. \quad (5.4)$$

Από την (5.3) έχουμε ότι $H(t_0, \varphi(t_0)) = H(t_0, x_0) = 0$, και από την (5.4) έχουμε ότι

$$\frac{d}{dt} H(t, \varphi(t)) = \frac{\partial H}{\partial t}(t, \varphi(t)) + \varphi'(t) \frac{\partial H}{\partial x}(t, \varphi(t)) = 0.$$

Επιπλέον στο διάστημα $(t_0 - h, t_0 + h)$ έχουμε ότι $H\big(t, \varphi(t)\big) = 0$.

Για την περίπτωση όπου $N > 1$, επιλέγουμε $a, r > 0$ ώστε $(t_0 - a, t_0 + a) \times B(x_0, r) \subseteq U$ και ο $N \times N$ πίνακας

$$D_x H = (\frac{\partial H_i}{\partial x_j})_{i,j=1,2,\dots,N}$$

Να είναι διάφορος του μηδενός στο $(t_0 - a, t_0 + a) \times B(x_0, r)$. Αντικαθιστούμε την (5.2) με την

$$F(t,x) = -[D_x H(t + t_0, x + x_0)]^{-1} \left(\frac{\partial H}{\partial t}(t + t_0, x + x_0) \right).$$

Η απόδειξη συνεχίζεται όπως και στην προηγούμενη περίπτωση.□

Παρατήρηση. Η απόδειξη του θεωρήματος 5.1.2 είναι περιορισμένη μόνο στην περίπτωση της μιας ανεξάρτητης μεταβλητής στην πεπλεγμένα ορισμένη συνάρτηση. Στην περίπτωση την μιας εξαρτημένης μεταβλητής και των πολλών ανεξάρτητων μεταβλητών αντικαθιστούμε την (5.2) με το κατάλληλο σύστημα των μερικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης. Το σύστημα των μερικών διαφορικών εξισώσεων λύνεται εφαρμόζοντας το θεώρημα ύπαρξης για τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις (Θεώρημα 5.1.1) χρησιμοποιώντας κάθε φορά ως παράμετρο τις ανεξάρτητες μεταβλητές. Για παράδειγμα, αν έχουμε την εξίσωση $H(x, y, z) = 0$ η οποία κοντά σε ένα σημείο (x_0, y_0, z_0) είναι ίση με το μηδέν και η $\frac{\partial H}{\partial z}$ είναι διάφορη του μηδέν (έτσι η πεπλεγμένη συνάρτηση z(x,y) θα έχει δύο ανεξάρτητες μεταβλητές), τότε θα υπάρχουν δύο μερικές διαφορικές εξισώσεις που η z(x,y) πρέπει να ικανοποιεί :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial H}{\partial x}}{\frac{\partial H}{\partial z}}, \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial H}{\partial y}}{\frac{\partial H}{\partial z}}, \quad (5.6)$$

Αν περιορίσουμε την H σε μια γειτονία του (x_0, y_0, z_0) στην οποία το $\frac{\partial H}{\partial z}$ δεν μηδενίζεται μπορούμε χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Rolle να καταλήξουμε ότι η $z(x, y)$ ορίζεται μοναδικά χωρίς να κάνουμε την υπόθεση για την μοναδικότητα της λύσης στις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις.

Η δεύτερη εξίσωση (5.6), επιλύεται λύνοντας την πρώτη εξίσωση, (5.5) με $y = y_0$ σταθερό και με τον αρχικό όρο $z = z_0$. Τότε η συνάρτηση που προκύπτει $z(x, y_0)$ μας παρέχει τον αρχικό όρο για την (5.6). Τώρα το πρόβλημα αρχικών τιμών λύνεται αν πάρουμε το x σαν μια παράμετρο. Αυτή η διαδικασία θα μας δώσει μια λύση για την (5.6) σε ένα ανοιχτό σύνολο που περιέχει το (x_0, y_0). Αν ακολουθήσουμε την ίδια διαδικασία με άλλη σειρά θα πάρουμε μια λύση για την (5.5) σε ένα ανοιχτό σύνολο που περιέχει το ίδιο σημείο (x_0, y_0). Λόγο της μορφής στο δεξί μέρος των εξισώσεων (5.5) και (5.6) αυτές οι δύο λύσεις θα ορίσουν μια μοναδική συνάρτηση που ικανοποιεί και τις δύο εξισώσεις.

Τελικά το Θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων στην γενική του μορφή, για κάθε αριθμό ανεξάρτητων και εξαρτημένων μεταβλητών , μπορεί να αποδειχθεί χρησιμοποιώντας την επαγωγική μέθοδο του U. Dini.

Έχουμε δείξει ότι χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Ύπαρξης Λύσης για τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις μπορούμε να αποδείξουμε το Θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων. Τώρα αυτό που θα κάνουμε είναι το αντίστροφο. Θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων για να αποδείξουμε το Θεώρημα Ύπαρξης Λύσης για τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο των χώρων Banach σε αυτή την απόδειξη.

Πρώτα θα διατυπώσουμε χωρίς να αποδείξουμε το Θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων για χώρους Banach.

Θεώρημα 4.1.3 : Έστω X,Y,Z χώροι Banach. Έστω $U \times V$ ένα ανοιχτό υποσύνολο του $X \times Y$. Υποθέτουμε ότι $G : U \times V \to Z$ είναι συνεχής και η d_2G υπάρχει και είναι συνεχής παντού στο $U \times V$. Έστω ότι για το σημείο $(x, y) \in X \times Y$ ισχύει ότι $G(x, y) = 0$ και η $d_2G(x, y)$ είναι αντιστρέψιμη .

Τότε θα υπάρχουν οι ανοιχτές σφαίρες $M = B_x(x, y)$ και $N = B_y(x, y)$ έτσι ώστε για κάθε $\zeta \in M$ υπάρχει ένα μοναδικό $\eta \in N$ και ισχύει ότι $G(\zeta, \eta) = 0$. Η συνάρτηση f η οποία ορίζεται μοναδικά κοντά στο x με $f(\zeta) = \eta$ είναι συνεχής.

Θεώρημα 5.1.1 (Picard) : Έστω συνάρτηση $F(t, x)$, $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, συνεχής στη (N+1)-διάστατη περιοχή $(t_0 - a, t_0 + a) \times B(x_0, r)$. Τότε υπάρχει μια λύση $x(t)$ με

$$\frac{dt}{dx} = F(t, x), \qquad x(t_0) = x_0, \qquad (5.1)$$

Που ορίζεται στο τμήμα $(t_0 - h\ , t_0 + h)$.

Απόδειξη: Για ευκολία στον συμβολισμό υποθέτουμε ότι $t_0 = 0$.

Έστω B_0 ο χώρος των φραγμένων συνεχών συναρτήσεων στον $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ που παίρνουν τιμές στο $(-a, a)$, και έχουν νόρμα ίση με το supremum του μέτρου της συνάρτησης. Έστω B_1 ο χώρος των φραγμένων συναρτήσεων που παίρνουν τιμές από το $(-\alpha, \alpha)$ και έχουν συνεχείς παράγωγους και επίσης η παράγωγος είναι φραγμένη. Φράσουμε αυτόν τον χώρο με το σύνολο του supremum του μέτρου της συνάρτησης και του supremum του μέτρου την παραγώγου της συνάρτησης. Ορίζουμε την απεικόνιση $\mathrm{F} :\ B_1 \to B_0 \times \mathbb{R}$ ως

$$F[x(t)] = \left[x'(t) - F\big(x, x(t)\big), x(0) - x_0\right],$$

Με αυτόν τον συμβολισμό, μια λύση η (5.1) δίνεται αν μηδενίσουμε την F. Ανάγουμε το πρόβλημα του να λύσουμε την $F[x] = [0,0]$ σε ένα μεγαλύτερο πρόβλημα ορίζοντας την $H :$ $[0,1] \times B_1 \to B_0 \times \mathbb{R}$ θέτοντας

$$H[a, X(\tau)] = [X'(\tau) - aF\big(a\tau, X(\tau)\big), X(0) - x_0],$$

Παρατηρούμε ότι

$$H[0, x_0] = [0,0], \quad (5.7)$$

Όπου το x_0 στην (5.7) αντιπροσωπεύει την σταθερή συνάρτηση. Από το Θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων για χώρους Banach για α αρκετά μικρό υπάρχει ένα $X(\alpha, \tau)$ έτσι ώστε

$$D_\tau X(\alpha, \tau) - \alpha F\big(\alpha\tau, X(\alpha, \tau)\big) = 0 \quad X(\alpha, 0) = x_0.$$

Για ένα τέτοιο $\alpha > 0$ ορίζουμε την $x(t)$ θέτοντας

$$\mathrm{x(t)} = \mathrm{X}\left(\alpha, \frac{t}{\alpha}\right).$$

Ακολουθεί ότι

$$x'(t) = \frac{1}{a} D_\tau \left(\alpha, \frac{t}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha} \alpha F\left[a\left(\frac{t}{a}\right), X\left(a, \frac{t}{a}\right)\right] = F\big(t, x(t)\big).$$

Επομένως η διαφορική μας εξίσωση έχει λυθεί και έτσι έχει αποδειχθεί και το θεώρημα.□

5.2 Αριθμητικοί Μέθοδοι Ομοτοπίας

Έστω ότι θέλουμε να λύσουμε ένα σύστημα μη γραμμικών εξισώσεων, το

$$F(x) = 0 \qquad (5.8)$$

Όπου η F : $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ είναι λεία. Μόνο κάτω από συγκεκριμένες προϋποθέσεις μπορούμε να λύσουμε την F χωρίς την χρήση αριθμητικών μεθόδων. Γενικά θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε αριθμητικές μεθόδους ώστε να βρούμε μια λύση κατά προσέγγιση. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο του Netwon αλλά χρειαζόμαστε μια αρχική συνθήκη για να εφαρμόσουμε την επαναληπτική μέθοδο. Στην περίπτωση που δεν έχουμε αυτή την αρχική συνθήκη για να εφαρμόσουμε την μέθοδο του Newton είναι απαραίτητη κάποια εναλλακτική διαδικασία. Μια τέτοια διαδικασία είναι η μέθοδος ομοτοπίας.

Στην μέθοδο ομοτοπίας ανάγουμε το πρόβλημα (5.8) σε ένα μεγαλύτερο πρόβλημα του να βρούμε που μηδενίζεται η συνάρτηση $H : \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}^N$. Επιλέγουμε την H έτσι ώστε η συνάρτηση $F_0 : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ να ορίζεται ως

$$F_0(x) = H(0, x) \qquad (5.9)$$

Ενώ η συνάρτηση F που μας ενδιαφέρει ορίζεται ως

$$F(x) = H(1, x).$$

Το σχέδιο έχει ως εξής : ακολουθούμε τα σημεία όπου μηδενίζεται η H ξεκινώντας από το σημείο $(0, x_0) \in \mathbb{R}^{N+1}$ με $F_0(x_0) = 0$ κατά μήκος μια καμπύλης $\big(t(s), x(s)\big), 0 \leq s \leq 1$, για την οποία ισχύει ότι

$$H\big(t(s), x(s)\big) = 0, \qquad (5.10)$$

Ως ένα σημείο $(1, x_1) = (t(1), x(1))$ όπου θα έχουμε ότι $F(x_1) = 0$. Έτσι θα έχουμε λύσει το αρχικό πρόβλημα (5.8). Δυο συγκεκριμένες επιλογές που μπορούμε να κάνουμε για την H είναι η κυρτή ομοτοπία

$$H(t, x) = (1 - t)F_0(x) + tF(x)$$

Και η σφαιρική ομοτοπία

$$H(t, x) = F(x) - (1 - t)F(x_0),$$

Όπου το x_0 μπορεί να έχει οποιαδήποτε βολική τιμή.

Για να μπορέσουμε να λύσουμε την H θέλουμε η καμπύλη $(t(s), x(s))$ για την οποία ισχύει η (5.10) να έχει μια βολική μορφή. Στην περίπτωση που δεν συμβαίνει αυτό το σύνολο τιμών της

$$H(t,x) = 0$$

Μπορεί ξεκινώντας από το σημείο $H(0,x_0) = 0$ να μην φτάνει ποτέ στο σημείο $H(1,x_1)$. Υπάρχουν τέσσερεις περιπτώσεις ′′κακής συμπεριφοράς′′ για την $\{(t,x) : \ H(t,x) = 0\}$: (1) η καμπύλη που ξεκινά από το $t = 0$ διπλώνει προς τα πίσω χωρίς να φτάσει ποτέ στο $t = 1$, (2) η καμπύλη δεν περιορίζεται στο x , (3) η καμπύλη φτάνει σε ένα σημείο διακλάδωσης στο οποίο οι καμπύλες διασταυρώνονται ,(4) και η καμπύλη πέφτει πάνω σε αδιέξοδο και δεν μπορεί να συνεχιστεί. Όλες αυτές οι περιπτώσεις είναι δυνατές, μπορούν όμως να αντιμετωπιστούν κάνοντας κάποιες απλές υποθέσεις και εφαρμόζοντας το θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων.

Θα δώσουμε ένα θεώρημα το οποίο χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων διασφαλίζει ότι η καμπύλη έχει την επιθυμητή μορφή.

Θεώρημα 5.2.1 Έστω U ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$. Υποθέτουμε ότι η H είναι συνεχής παραγωγίσιμη σε ένα ανοιχτό σύνολο που περιέχει το $[0,1] \times U$, έτσι ώστε η συνάρτηση

$$F_0(x) = H(0,x)$$

υπάρχει ένα μοναδικό x_0 στον U και υπάρχει $d > 0$ τέτοιο ώστε

$$\{x : |x - x_0| < d\} \subseteq U.$$

Αν παντού στο $[0,1] \times U$, ο πίνακας

$$D_x H = (\frac{\partial H_i}{\partial x_j})_{i,j=1,2,\dots,N}$$

Είναι αντιστρέψιμος και ισχύει ότι

$$|(D_x H)^{-1} D_t H| < d$$

Όπου $D_t H$ είναι διάνυσμα

$$D_t H = (\frac{\partial H_i}{\partial t})_{i=1,2,\dots,N}$$

Τότε υπάρχει μια συνεχής παραγωγίσιμη συνάρτηση $x(t), 0 \leq t \leq 1$, και ισχύει ότι

$$H\big(t, x(t)\big) = 0. \quad (5.11)$$

Συγκεκριμένα έχουμε ότι

$$F\big(x(1)\big) = H\big(1, x(1)\big) = 0.$$

Απόδειξη : Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων για την H στον $(0,x_0)$ και έτσι υπάρχει μια συνάρτηση $x(t)$ με συνεχείς παραγώγους που ορίζεται σε μια γειτονιά του 0 με $x(0) = x_0$ και ικανοποιεί την (5.11) σε αυτή την γειτονιά. Επιπλέον υπάρχει ένας θετικός αριθμός t_0 έτσι ώστε :

(1) $x(t)$ ορίζεται στο διάστημα $[0,t_0)$,

(2) $x(0) = x_0$,

(3) $x(t)$ έχει συνεχείς παραγώγους στο $(0,t_0)$,

(4) $H(t, x(t)) = 0$ για κάθε $0 \leq t < t_0$,

Θέτουμε

$$t^* = \sup[t_0 \colon \upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota\ x(t)\ \pi o\upsilon\ \iota\kappa\alpha\nu o\pi o\iota\varepsilon\acute{\iota}\ \tau\alpha\ (1) - (4)].$$

Ισχυριζόμαστε ότι $1 < t^*$. Αυτό αποδεικνύει το αποτέλεσμα. Από το Θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων έχουμε ότι

$$\frac{dx}{dt} = (D_x H)^{-1} D_t H,$$

Έτσι ώστε

$$|x'(t)| < d$$

Ισχύει όταν $t \leq 1$, υπάρχει η $x'(t)$ και η $x(t)$ βρίσκεται στο εσωτερικό του U. Έστω ότι είμαστε στην περίπτωση περίπτωση που $t^* \leq 1$ τότε το $x^* = \lim_{t \to t_0} x(t)$ υπάρχει. Τώρα μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων ξανά στο σημείο (t^*, x^*) και επιπλέον να επεκτείνουμε το $x(t)$ σε ένα μεγαλύτερο διάστημα. Πράγμα που διαψεύδει το ορισμό του t^*. □

Ας δούμε τώρα ένα παράδειγμα.

<u>Παράδειγμα.</u> Έστω ότι έχουμε την εξίσωση

$$1 + x + e^x = 0. \quad (5.12)$$

Ορίζουμε την συνάρτηση

$$H(t, x) = 1 + x + te^x.$$

Τότε ικανοποιούνται όλες οι προϋποθέσεις του θεωρήματος αν το διάστημα (-2,0) ταυτιστεί με το σύνολο U. Έτσι υπάρχει μια συνάρτηση $x(t)$ που ορίζεται για $0 \leq t \leq 1$, με $x(0) = -1$ και

$$1 + x(t) + te^{x(t)} = 0 \quad (5.13)$$

Συγκεκριμένα , $x(1) \approx= 1.278465$ επιλύει την εξίσωση (5.12).

Όπως σημειώσαμε στην απόδειξη του θεωρήματος 5.2.1, γνωρίζουμε ότι η $x(t)$ είναι η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{e^x}{1+te^x}, \quad x(0) = -1. \quad (5.14)$$

Η παρατήρηση ότι η καμπύλη την $x(t)$ ικανοποιεί ένα πρόβλημα αρχικών τιμών για μια συνήθης διαφορική εξίσωση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βρούμε το $x(1)$ μέσω μιας μεθόδου πρόβλεψης-διόρθωσης. Φανταστείτε ότι αυξάνουμε το t κατά ενός δοθέντος βήματος Δt. Η διαφορική εξίσωση (5.14) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να προβλέψει μια λογική προσέγγιση του x(t + Δt) χρησιμοποιώντας απλά την Μέθοδο Euler (Euler step)

$$\Delta x = \frac{dx}{dt}\Delta t.$$

Μία διόρθωση μπορεί να πραγματοποιηθεί χρησιμοποιώντας την εξίσωση (5.13). Για $\Delta t = \frac{1}{3}$, η διαδικασία πρόβλεψης-διόρθωσης θα παράγει μια καμπύλη η οποία αντιπροσωπεύεται σχηματικά από μια οδοντωτή προσέγγιση μιας λείας καμπύλης. Στην πραγματικότητα στο παράδειγμα μας για $\Delta t = \frac{1}{3}$ η διόρθωση είναι τόσο μικρή ώστε να είναι ανεπαίσθητη.

5.3 Ισοδυναμία Ορισμών μιας Λείας Επιφάνειας

Στην μελέτη της γεωμετρικής ανάλυσης έχει συχνά ενδιαφέρον η μελέτη μιας λείας επιφάνειας στον Ευκλείδειο χώρο. Μπορεί να καταλαβαίνουμε διαισθητικά τι σημαίνει ο όρος ΄΄λεία επιφάνεια στον Ευκλείδειο χώρο΄΄ αλλά είναι ανάγκη να δοθεί ένας ακριβής ορισμός. Μάλιστα υπάρχουν αρκετοί ορισμοί για την ΄΄λεία επιφάνεια στον Ευκλείδειο χώρο΄΄. Σε αυτή την παράγραφο θα δούμε πέντε ισοδύναμους ορισμούς που ανταποκρίνονται στις παρακάτω περιγραφές μιας λείας επιφάνειας.

- Η επιφάνεια μπορεί να ευθύνεται λεία.
- Η επιφάνεια επιλύει ένα σύστημα λείων εξισώσεων.
- Η επιφάνεια μπορεί να παραμετροποιηθεί λεία.
- Η επιφάνεια έχει λείες τοπικές συντεταγμένες.
- Η επιφάνεια είναι το γράφημα μιας λείας συνάρτησης.

Το ακόλουθο θεώρημα δίνει μια ακριβή έκφραση σε κάθε μια από τις παραπάνω περιγραφές. Ο στόχος του θεωρήματος είναι να δείξει ότι κάθε ένας από τους πιθανούς ορισμούς είναι ισοδύναμος και έτσι κάθε ένας από αυτούς μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να ορίσει ''μια λεία επιφάνεια στον Ευκλείδειο χώρο''.

Θεώρημα 5.3.1 Έστω M, N ακέραιοι με $1 \leq M < N$. Έστω $1 \leq k \leq \infty$. Έστω S ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^N$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1) [Η επιφάνεια μπορεί να ευθύνεται λεία.] Για κάθε σημείο $p \in S$ υπάρχει μια γειτονιά $U \subset \mathbb{R}^N$ του p, ένας C^k διαφορομορμισμός $\varphi : U \to \mathbb{R}^N$ και ένα M-διάστατο γραμμικό υποσύνολο $L \subset \mathbb{R}^N$ ώστε
$$\varphi(S \cap U) = L \cap \varphi(U). \quad (5.15)$$

2) [Η επιφάνεια επιλύει ένα σύστημα λείων εξισώσεων.] Για κάθε σημείο $p \in S$ υπάρχει μια γειτονία του $U \subset \mathbb{R}^N$ του p και μια συνάρτηση $f : U \to \mathbb{R}^{N-M}$ που ανήκει στην κλάση C^k, ώστε
$$S \cap U = f^{-1}(q), \quad (5.16)$$
Όπου $q = f(p)$ και
$$\operatorname{rank} Df(x) = N - M \quad (5.17)$$
για κάθε $x \in U$.

3) [Η επιφάνεια μπορεί να παραμετροποιηθεί λεία.] Για κάθε $p \in S$ υπάρχει ένα ανοιχτό $V \subset \mathbb{R}^M$ και μια συνάρτηση $g : V \to \mathbb{R}^N$της κλάσης C^k έτσι ώστε η g να παίρνει τιμές από το V και να στέλνει σε ένα ανοιχτό υποσύνολο του S, το p να είναι η εικόνα της g και να ισχύει οτι
$$\operatorname{rank} Dg(x) = M \quad (5.18)$$
για κάθε $x \in U$.

4) [Η επιφάνεια έχει λείες τοπικές συντεταγμένες.] Για κάθε σημείο $p \in S$ υπάρχει μια γειτονία $U \subset \mathbb{R}^N$ του p, ένα κυρτό ανοιχτό διάστημα $W \subset \mathbb{R}^M$ και οι συναρτήσεις $\varphi : U \to W, \psi : W \to U$ που ανήκουν στην κλάση C^k τέτοιες ώστε
$$S \cap U = \psi(W) \quad (5.19)$$
Και η $\varphi \circ \psi$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση.

5) [Η επιφάνεια είναι το γράφημα μιας λείας συνάρτησης.] Για κάθε σημείο $p \in S$ υπάρχει μια γειτονία $V \subset \mathbb{R}^N$ του p τέτοια ώστε το σύνολο $S \cap V$ να είναι ένα γράφημα μιας συνάρτησης η οποία ανήκει στην κλάση C^k. Πιο συγκεκριμένα , υπάρχει μια μετάθεση των συντεταγμένων $\Phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, ένα ανοιχτό

υποσύνολο $Z \subseteq \mathbb{R}^M$ και μια συνάρτηση , της κλάσης C¹, $F : Z \rightarrow \mathbb{R}^{N-M}$, με $DF(z)$ να είναι της τάξης M για κάθε z ∈ Z έτσι ώστε να ισχύει

$$\mathrm{S} \cap \mathrm{V} = \Phi(\{(z, F(z)) : z \in Z \cap \mathbb{R}^M\}) \quad (5.20)$$

Απόδειξη. Τα εργαλεία που θα χρησιμοποιήσουμε για να αποδείξουμε την ισοδυναμία των ορισμών είναι το Θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων και το Θεώρημα Αντίστροφης Συνάρτησης.

1) ⇒ 2) Έστω U,φ και L όπως στο 1). Επιλέγουμε ένα ορθοκανονικό σύνολο N-M διανυσμάτων $u_1, u_2, \dots, u_{N-M}$ όλα ορθογώνια ως προς το L. Ορίζουμε την συνάρτηση $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{N-M}$ ως

$$f(x) = (u_1 \bullet \varphi(x), u_2 \bullet \varphi(x), \dots, u_{N-M} \bullet \varphi(x)).$$

Προφανώς η συνάρτηση f ανήκει στην κλάση C^k. Από την (5.15) βλέπουμε ότι $f(p) = 0$ και $S \cap U = f^{-1}(0)$. Επειδή η φ είναι διαφορομορφισμός η τάξη της Df πρέπει να είναι N-M παντού στο U.

2) ⇒ 3) Έστω U, f, q όπως στο 2) . Επειδή $Df(x) = N - M$ για κάθε $x \in U$ μπορούμε να επιλέξουμε $1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_{N-m} \leq N$ έτσι ώστε

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_{k_1}} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{k_{N-M}}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{N-M}}{\partial x_{k_1}} & \cdots & \frac{\partial f_{N-M}}{\partial x_{k_{N-M}}} \end{pmatrix} \neq 0 \quad (5.21)$$

στο σημείο p.

Έστω $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_M \leq N$ οι συμπληρωματικοί δείκτες έτσι ώστε

$$\{j_1, \dots, j_M\} \cup \{k_1, \dots, k_{N-M}\} = \{1, \dots, N\}$$

Θέτουμε

$$\xi_1 = x_{j_1}, \dots, \xi_M = x_{j_M},$$

$$\eta_1 = x_{k_1}, \dots, \eta_{N-M} = x_{k_{N-M}},$$

Και

$$f^*(\xi_1, \dots, \xi_M, \eta_1, \dots, \eta_{N-M}) = f(x_1, \dots, x_N) - q .$$

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων στην f^* για το σημείο $(p_{j_1}, \dots , p_{j_M}, p_{k_1}, \dots , p_{k_{N-M}})$ και έτσι υπάρχει μια γειτονία $V \subset \mathbb{R}^M$ του $(p_{j_1}, \dots, p_{j_M})$ και μια συνάρτηση $g^* : V \to \mathbb{R}^{N-M}$ έτσι ώστε

$$f^*\big(\xi, g^*(\xi)\big) = 0$$

Για κάθε $\xi \in V$. Ορίζουμε την $g : V \to \mathbb{R}^N$ θέτοντας

$$g_{j_1}(\xi) = \xi_1, \dots , g_{j_M}(\xi) = \xi_M$$

Και

$$g_{k_1}(\xi) = g_1^*(\xi), \dots , g_{k_{N-M}}(\xi) = g_{N-M}^*(\xi) ,$$

Και έτσι βλέπουμε ότι ισχύουν οι όροι της 3).

3)⇒4) Έστω $V \subset \mathbb{R}^M$ και $g : V \to \mathbb{R}^N$ όπως στην 3). Έστω $v \in V$ τέτοιο ώστε $g(v) = p$. Εφόσον $rankDg(x) = M$ για κάθε x ∈ V μπορούμε να επιλέξουμε τους δείκτες $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_M \leq N$ έτσι ώστε

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial g_{i_1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_{i_1}}{\partial x_M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_{i_M}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_{i_M}}{\partial x_M} \end{pmatrix} \neq 0 \quad (5.22)$$

στον σημείο v.

Από το Θεώρημα Αντίστροφης Συνάρτησης υπάρχει ένα ανοιχτό σύνολο W με $v \in W \subseteq V$ στο οποίο η απεικόνιση g^* που ορίζεται ως

$$g^*(x) = (g_{i_1}(x), g_{i_2}(x), \dots, g_{i_M}(x))$$

Είναι ΄΄1-1΄΄ και ανήκει στην κλάση C^k . Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι το W είναι κυρτό.

Θέτουμε

$$U = \{(u_1, u_2, \dots, u_N) : (u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_M}) \in g^*(W)\} ,$$

Και ορίζουμε την $\varphi : U \to W$ θέτοντας

$$\varphi(u_1, \dots, u_N) = g^{*-1}\big(u_{i_1}, \dots, u_{i_M}\big).$$

Παρατηρούμε ότι οι όροι της 4) ισχύουν για $\psi = g|w$.

4)⇒5) Έστω U, W, φ και ψ όπως στο 4). Αφού η $\varphi \circ \psi$ είναι ταυτοτική , η $D\psi$ θα είναι της τάξης M σε κάθε σημείο του W και συγκεκριμένα στο $q = \varphi(p)$. Επιπλέον μπορούμε να επιλέξουμε τους δείκτες $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_M \leq N$ έτσι ώστε

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_{i_1}}{\partial w_1} & \cdots & \frac{\partial \psi_{i_1}}{\partial w_M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \psi_{i_M}}{\partial w_1} & \cdots & \frac{\partial \psi_{i_M}}{\partial w_M} \end{pmatrix} \neq 0 \qquad (5.23)$$

στο σημείο q.

Έστω $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_{N-M} \leq N$ οι συμπληρωματικού δείκτες έτσι ώστε

$$\{i_1, i_2, \dots, i_M\} \cup \{j_1, j_2, \dots, j_{N-M}\} = \{1,2, \dots, N\}.$$

Ορίζουμε την $\Psi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ ως

$$\Psi(x_1, x_2, \dots, x_N) = \left(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_M}, x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_{N-M}}\right).$$

Έστω $\Pi_1 : \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^{N-M} \to \mathbb{R}^M$ και $\Pi_2 : \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^{N-M} \to \mathbb{R}^{N-M}$ οι προβολές του πρώτου και του δεύτερου παράγοντα αντίστοιχα. Από την (5.23) μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Αντίστροφης Συνάρτησης στην $\Pi_1 \circ \Psi \circ \psi$ στο σημείο $z_0 = \Pi_1 \circ \Psi \circ \psi(q), z_0 \in Z$ για να καταλήξουμε ότι η

$$f = (\Pi_1 \circ \Psi \circ \psi)^{-1} : Z \subseteq \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^M$$

Υπάρχει, ανήκει στην κλάση C^k και είναι της τάξης M για κάθε $u \in \hat{U}$. Θέτουμε

$$F = \Pi_2 \circ \Psi \circ \psi \circ f, \quad \Phi = \Psi^{-1},$$

Μικραίνουμε το Z αν χρειαστεί και καταλήγουμε στην σχέση (5.20).

5)⇒1) Έστω V, Φ, Z όπως στο 5). Έστω $\Pi_1 : \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^{N-M} \to \mathbb{R}^M$ και $\Pi_2 : \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^{N-M} \to \mathbb{R}^{N-M}$ οι προβολές πρώτου και δεύτερου παράγοντα . Έστω $z_0 \in Z$ τέτοιο ώστε $p = \Phi(z_0, F(z_0))$ και L είναι η εικόνα υπό την Φ της εφαπτόμενου επίπεδου στον γράφημα της F στο σημείο $\left(z_0, F(z_0)\right)$.

Ορίζουμε την $H = \Pi_1 \circ \Phi^{-1}$ και $V = \Pi_2 \circ \Phi^{-1} - F \circ H$. Έτσι ορίζεται η $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ θέτοντας

$$\varphi(x) = \Phi(H(x), V(x) + F(z_0) + < DF(z_0), \Pi_1 \circ \Phi^{-1}(x) - z_0 >),$$

Και παρατηρούμε ότι η (5.15) ισχύει σε μια γειτονία του p.

Βιβλιογραφία

[1] O. R. B. de Oliveira, *The Implicit and The Inverse Function Theorems: Easy Proofs* (2012).

[2] A .L. Dontchev and R. T. Rockafellar, *Implicit Functions and Solution Mappings,* Spinger, New York, 2009.

[3] L. Hurwicz and M. K. Richter, *Implicit functions and diffeomorphisms without C^1, Adv. Math. Econ.,* 5 (2006) 65-96.

[4] G. Iurato, On the history of differentiable manifolds, *Int. Math. Forum* 7 No. 10 (2012) 477-514.

[5] S. G. Krantz and H. R. Parks, *The Implicit Function Theorem-History, Theory, and Applications,* Birkhauser, Boston, 2002.

[6] G. M. Scarpello, *A historical outline of the theorem of implicit functions, Divulg. Mat.,* 10 No. 2 (2002) 171-180.