



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο  
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών  
Τομέας Ρευστών  
Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών  
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής  
& Βελτιστοποίησης

## Αεροδυναμική Βελτιστοποίηση Μορφής Σώματος με Άμεσο Έλεγχο της Θέσης των Οριακών Κόμβων

Διπλωματική Εργασία

Δημήτριος Γεωργάκης

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου , Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, 2021

---

---

## Ευχαριστίες

Καταρχάς, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον καθηγητή μου κ. Κυριάκο Γιαννάκο-γλου για την διαρκή καθοδήγηση του κατά την εκπόνηση της διπλωματικής μου εργασίας. Επιπλέον, του είμαι ευγνώμων για την καθοδήγηση και τα ερεθίσματα που μου έδωσε ως καθηγητής κατά τις προπτυχιακές μου σπουδές, βοηθώντας με να διευρύνω τις γνώσεις μου σε επιστημονικό επίπεδο.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Δρ. Ευάγγελο Παπουτσή-Κιαχαγιά για τη συνεχή υποστήριξή του καθ' όλη τη διάρκεια της διπλωματικής εργασίας. Παρόλο το απαιτητικό και φορτωμένο πρόγραμμα του, ήταν πάντα πρόθυμος να επιλύσει τις απορίες μου. Αδιαμφισβήτητα, η συμβολή του ήταν καθοριστική για την υλοποίηση της διπλωματικής εργασίας.

Επιπροσθέτως, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλη την ομάδα της ΜΠΥΡ&Β για την βοήθεια τους την περίοδο των προπτυχιακών σπουδών μου, καθώς και που μου επέτρεψαν να χρησιμοποιήσω τους κώδικες σε περιβάλλον OpenFOAM που έχουν αναπτύξει.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου για την διαρκή υποστήριξη, τις θυσίες και την υπομονή τους ώστε να κυνηγήσω τα όνειρά μου, καθώς και τους φίλους μου και την Ε. που ήταν πάντα παρόντες στις εύκολες και δύσκολες στιγμές.





Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο  
Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών  
Τομέας Ρευστών  
Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών  
Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής  
& Βελτιστοποίησης

## Αεροδυναμική Βελτιστοποίηση Μορφής Σώματος με Άμεσο Έλεγχο της Θέσης των Οριακών Κόμβων

Διπλωματική Εργασία

Δημήτριος Γεωργάκης

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, 2021

### Περίληψη

Η διπλωματική εργασία ασχολείται με τη βελτιστοποίηση μορφής, με εφαρμογή της συνεχούς συζυγούς μεθόδου, γεωμετρίας που ορίζεται με άμεσο έλεγχο της θέσης των κόμβων του υπολογιστικού πλέγματος. Έτσι, ο χώρος σχεδιασμού των υποψήφιων βέλτιστων λύσεων γίνεται ο μέγιστος δυνατός. Το αεροδυναμικό πρόβλημα που μελετάται είναι η μείωση των απωλειών ολικής πίεσης μεταξύ εισόδου και εξόδου αγωγών τριών διαφορετικών διαμορφώσεων που διαρρέονται από στρωτή και μόνιμη ροή ασυμπίεστου ρευστού. Η επίλυση των προβλημάτων αεροδυναμικής και βελτιστοποίησης έγινε στο περιβάλλον του Openfoam, χρησιμοποιώντας τις επεκτάσεις του που έχουν προγραμματιστεί από τη Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης (ΜΠΥΡ&Β) του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου (ΕΜΠ). Με τη συγκεκριμένη μέθοδο, είναι αναγκαία η χρησιμοποίηση κάποιας τεχνικής εξομάλυνσης, προκειμένου να είναι αποδοτική η βελτιστοποίηση. Στη διπλωματική εργασία, χρησιμοποιήθηκαν δύο τεχνικές εξομάλυνσης που εφαρμόστηκαν διαδοχικά στις μεταβλητές σχεδιασμού της βελτιστοποίησης και μελετήθηκε η επίδρασή τους στη βελτιστοποίηση. Επίσης, μελετήθηκε η επίδραση στη βελτιστοποίηση της σειράς με την οποία εφαρμόζονται οι τεχνικές εξομάλυνσης στις μεταβλητές σχεδιασμού, με επέκταση του κώδικα που έχει αναπτυχθεί από την ΜΠΥΡ&Β σε περιβάλλον OpenFOAM. Επιπροσθέτως, τροποποιήθηκε περαιτέρω ο παραπάνω κώδικας ώστε η μεταβλητή εξομάλυνση της μίας τεχνικής να υπολογίζεται τοπικά, δηλαδή σε κάθε κόμβο της επιφάνειας της μεταβαλλόμενης γεωμετρίας, αντί να διατηρείται σταθερή, και μελετήθηκαν τα αποτελέσματα που προέκυψαν. Τέλος, τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης με τον άμεσο έλεγχο

---

της θέσης των οριακών κόμβων του σώματος συγκρίθηκαν με τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης με χρήση της Non-Uniform Rational B-Spline (NURBS) παραμετροποίησης.



**National Technical University of Athens**  
**School of Mechanical Engineering**  
**Fluids Department**  
**Lab of Thermal Turbomachines**  
**Parallel CFD & Optimization Unit**

## **Shape Optimization on Geometry Defined by Node-Based Parameterization**

Diploma Thesis

**Dimitrios Georgakis**

Supervisor: Kyriakos C. Giannakoglou , Proffesor NTUA

Athens, 2021

### **Abstract**

This diploma thesis is concerned with aerodynamic shape optimization that relies upon node-based parameterization, by applying the continuous adjoint method. Using this parameterization method, the design space becomes the maximum possible. The optimization problem being studied is the minimization of the total pressure losses between the inlet and outlet of ducts of three different shapes in which a laminar and steady-state flow of an incompressible fluid takes place. The flow analysis and optimization problems are solved in the OpenFOAM environment, using tools programmed by the Parallel CFD & Optimization Unit (PCopt) of the National Technical University of Athens (NTUA). With this particular parameterization method, it is necessary to use a smoothing technique to smooth out the design variables of the optimization. In this diploma thesis, two sequentially applied smoothing techniques are used.

In this thesis, the effect of the two smoothing techniques on the optimization is studied. The effect of the order in which the smoothing techniques are applied to the design variables is studied, too. In order to do so, the pre-existing code in the OpenFOAM environment developed by the PCOpt/NTUA was extended. In addition, the aforementioned code was further modified so that the smoothing variable of one of the two techniques is calculated locally at each node of the surface of the variable geometry instead of being considered constant. The results of the above change are presented in detail. Finally, to evaluate the optimization results obtained by the node-based parameterization method, the Non-Uniform Rational

---

B-Spline (NURBS) parameterization method was also used.



---

## Ακρωνύμια

EMΠ	Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
ΕΘΣ	Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών
ΜΔΕ	Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις
ΜΠΥΡ&Β	Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης
ΥΡΔ	Υπολογιστική Ρευστοδυναμική
Υ/Η	Ηλεκτρονικός Υπολογιστής

---

CAD	Computer Aided Design
CFD	Computational Fluid Dynamics
E-SI FI	Enhanced Surface Integrals Field Integrals
NURBS	Non-Uniform Rational B-Spline
LBFGS	Limited-memory Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno
NTUA	National Technical University of Athens
PCOpt	Parallel CFD & Optimization unit
SD	sensitivity derivative
SI	Surface Integrals

---

# Περιεχόμενα

Περιεχόμενα	i
<b>1 Εισαγωγή</b>	<b>1</b>
1.1 Τρόποι αναπαράστασης της γεωμετρίας . . . . .	2
1.1.1 Computer Aided Design . . . . .	2
1.1.2 Κομβικός Έλεγχος Μορφής . . . . .	4
1.2 Βελτιστοποίηση . . . . .	6
1.3 Σκοπός της Διπλωματικής Εργασίας . . . . .	9
<b>2 Εξισώσεις και Μέθοδοι Ανάλυσης και Βελτιστοποίησης με Άμεσο Έλεγχο Κόμβων</b>	<b>11</b>
2.1 Το Πρόβλημα Ροής . . . . .	11
2.1.1 Εξισώσεις Ροής . . . . .	12
2.1.2 Οριακές συνθήκες . . . . .	12
2.2 Το Συζυγές Πρόβλημα . . . . .	13
2.2.1 Εισαγωγή στις Συζυγές Μεταβλητές . . . . .	14
2.2.2 Η E-SI Συνεχής Συζυγής Μέθοδος . . . . .	17
2.2.3 Διαφόριση της Συνάρτησης-Στόχου . . . . .	19
2.2.4 Διατύπωση των Συζυγών Εξισώσεων . . . . .	20
2.2.5 Συζυγείς Οριακές Συνθήκες . . . . .	23
2.2.5.1 Συζυγείς gdPDEs . . . . .	23
2.2.5.2 Συζυγείς Εξισώσεις της Ροής . . . . .	23
2.2.6 Τελική Έκφραση των Παραγώγων Ευαισθησίας . . . . .	27
2.3 Βελτιστοποίηση Γεωμετρίας με Άμεσο Έλεγχο της Θέσης των Κόμβων	28

2.3.1	Τρόποι Εξομάλυνσης . . . . .	28
2.3.1.1	Εξομάλυνση με Μερική Διαφορική Εξίσωση . . . . .	29
2.3.1.2	Εξομάλυνση γειτνίασης . . . . .	30
2.3.2	Η Συνεχής Συζυγής Μέθοδος στην Εξομάλυνση . . . . .	32
2.3.2.1	Παραλλαγή 1 . . . . .	33
2.3.2.2	Η Διαδικασία της Βελτιστοποίησης με την Παραλλαγή 1 . . . . .	37
2.3.2.3	Παραλλαγή 2 . . . . .	40
2.3.2.4	Η Διαδικασία της Βελτιστοποίησης με την Παραλλαγή 2 . . . . .	44
2.3.2.5	Μεταβαλλόμενη ακτίνα $R$ . . . . .	47
2.3.3	Μέθοδοι Ανανέωσης των Μεταβλητών Σχεδιασμού . . . . .	47
2.3.3.1	BFGS . . . . .	49
2.3.3.2	LBFSGS . . . . .	50
<b>3</b>	<b>Εφαρμογές και αποτελέσματα</b>	<b>53</b>
3.1	Αγωγός S <b>ben</b> d . . . . .	54
3.1.1	Επίδραση της Εξομάλυνσης στη Βελτιστοποίηση . . . . .	56
3.1.2	Φυσική Επεξήγηση των Αποτελεσμάτων της Βελτιστοποίησης . . . . .	60
3.1.3	Παραλλαγή 1 . . . . .	62
3.1.4	Παραλλαγή 2 . . . . .	66
3.1.5	Μεταβαλλόμενη ακτίνα $R$ . . . . .	69
3.1.6	Σύγκριση με NURBS παραμετροποίηση . . . . .	72
3.2	90 <b>ben</b> d Αγωγός . . . . .	75
3.2.1	Παραλλαγή 1 . . . . .	75
3.2.2	Παραλλαγή 2 . . . . .	77
3.2.3	Σύγκριση με NURBS παραμετροποίηση . . . . .	79
3.3	U <b>ben</b> d Αγωγός . . . . .	82
3.3.1	Παραλλαγή 1 . . . . .	82
3.3.2	Παραλλαγή 2 . . . . .	84
3.3.3	Σύγκριση με NURBS παραμετροποίηση . . . . .	86

4 Ανακεφαλαίωση - Συμπεράσματα	89
Βιβλιογραφία	93



# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

Ο κλάδος της βελτιστοποίησης έχει αναπτυχθεί αρκετά τις τελευταίες δεκαετίες καθώς έχει βελτιωθεί πάρα πολύ η τεχνολογία του ηλεκτρονικού υπολογιστή (Η/Υ). Δηλαδή έχει αυξηθεί η ταχύτητα και ο όγκος των υπολογισμών που μπορούν να πραγματοποιηθούν καθώς και ο αποθηκευτικός χώρος του Η/Υ. Επομένως, η αξιολόγηση των υποψήφιων λύσεων κοστίζει πολύ λιγότερο υπολογιστικό χρόνο συγκριτικά με παλιότερα, που ενδεχομένως να χρειαζόταν κάποιο πείραμα προκειμένου να αξιολογηθούν τα αποτελέσματα. Ως αποτέλεσμα των ανωτέρω, η βελτιστοποίηση καθίσταται υπολογιστικά και οικονομικά συμφέρουσα οδηγώντας στη συχνή χρήση της και την εξέλιξη των αλγόριθμων βελτιστοποίησης τα τελευταία χρόνια. Προβλήματα βελτιστοποίησης συναντώνται στην φύση αλλά και στην καθημερινή ή επαγγελματική ζωή του ανθρώπου. Τα φυσικά συστήματα έχουν την τάση να βαίνουν προς την κατάσταση ελάχιστης ενέργειας. Επίσης οι ακτίνες φωτός που διέρχονται από διαφορετικά μέσα ακολουθούν την ταχύτερη (βέλτιστος χρόνος), και όχι την πιο άμεση διαδρομή, μεταξύ δύο σημείων σύμφωνα με την αρχή του Fermat. Η έννοια της βελτιστοποίησης υπεισέρχεται σε διάφορες επιστήμες όπως τα μαθηματικά, η οικονομία, η μηχανολογία και τα λοιπά. Για παράδειγμα οι αεροπορικές εταιρείες καλούνται να επιλύσουν καθημερινά το πρόβλημα βελτιστοποίησης της ανάθεσης αεροσκαφών σε πτήσεις (Fleet Assignment) ανάλογα με τις πτήσεις, το είδος και τα χαρακτηριστικά των διαθέσιμων αεροσκαφών και άλλ-

λους παράγοντες. Στη διπλωματική εργασία εξετάζονται προβλήματα βελτιστοποίησης της μορφής της γεωμετρίας, η οποία περιγράφεται με τους κόμβους του υπολογιστικού πλέγματος και όχι με κάποια καμπύλη ή επιφάνεια παραμετροποίησης, αλλά ούτε και με μία μέθοδο ογκομετρικής παραμετροποίησης, χρησιμοποιώντας τη συνεχή συζυγή μέθοδο βελτιστοποίησης (Continuous Adjoint). Η επιλογή της περιγραφής της γεωμετρίας χρησιμοποιώντας τους κόμβους του πλέγματος και όχι κάποια καμπύλη ή επιφάνεια παραμετροποίησης, καθώς και η χρήση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου βελτιστοποίησης, θα τεκμηριωθούν στη συνέχεια που θα παρουσιασθούν οι διαθέσιμες επιλογές σε κάθε περίπτωση.

## 1.1 Τρόποι αναπαράστασης της γεωμετρίας

Η επιλογή του τρόπου με τον οποίο θα ορισθεί το σχήμα της ως προς βελτιστοποίηση γεωμετρίας, επηρεάζει σημαντικά τα εξής:

- Τη μέθοδο βελτιστοποίησης που θα επιλεγεί.
- Τον υπολογιστικό χρόνο επίλυσης της βελτιστοποίησης.
- Το χώρο σχεδιασμού (design space) των υποψήφιων βέλτιστων λύσεων.

### 1.1.1 Computer Aided Design

Στη Computer Aided Design (CAD) παραμετροποίηση η γεωμετρία σχεδιάζεται με τη βοήθεια CAD λογισμικού και συνήθως χρησιμοποιούνται Bezier ή Spline ή η γενίκευση Non-uniform rational B-spline (NURBS) καμπύλες. Οι CAD παράμετροι, δηλαδή η θέση των σημείων ελέγχου (control points), μεταβάλλουν τη μορφή της επιφάνειας της ως προς βελτιστοποίηση γεωμετρίας και αποτελούν τις μεταβλητές σχεδιασμού (design variables) της βελτιστοποίησης. Επομένως, με αυτόν τον τρόπο αναπαράστασης της γεωμετρίας το πλήθος των μεταβλητών σχεδιασμού είναι μικρό. Λόγω του μικρού πλήθους των μεταβλητών σχεδιασμού, είναι εφικτή η χρήση οποιασδήποτε μεθόδου βελτιστοποίησης (αιτιοκρατικής ή στοχαστικής). Πολύ σημαντική ιδιότητα είναι ότι οι



CAD συναρτήσεις μπορούν να ορισθούν τμηματικά, με αποτέλεσμα η επιρροή του κάθε σημείου ελέγχου να περιορίζεται σε συγκεκριμένο τμήμα της επιφάνειας της γεωμετρίας. Δηλαδή, υπάρχει η δυνατότητα επιλογής μεταξύ τοπικής ή καθολικής επιρροής της παραμετροποίησης. Αφού, η αρχική και η βελτιστοποιημένη γεωμετρία ορίζονται από τον ίδιο πλήθος σημείων ελέγχου και τις ίδιες βοηθητικές συναρτήσεις, η βελτιστοποιημένη γεωμετρία διατηρεί τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της αρχικής. Επομένως, η βελτιστοποιημένη γεωμετρία μπορεί να χρησιμοποιηθεί στη θέση της αρχικής ενδεχομένως χωρίς καμία επιπλέον ενέργεια, όμως η βελτιστοποίηση περιορίζεται στην 'προφανή' για την παραμετροποίηση βέλτιστη λύση. Ως αποτέλεσμα, ο χώρος σχεδιασμού (design space) των πιθανών βέλτιστων λύσεων περιορίζεται από τη μέθοδο παραμετροποίησης και τις επιμέρους επιλογές της μεθόδου παραμετροποίησης. Τέλος, υπάρχουν μέθοδοι βελτιστοποίησης που χρειάζονται την πρόσβαση στον πηγαίο κώδικα του προγράμματος παραμετροποίησης, η οποία στη περίπτωση που χρησιμοποιείται εμπορικό πακέτο μπορεί να μην είναι εφικτή.

Οι συντεταγμένες  $\mathbf{x}$  κάθε σημείου της επιφάνειας της γεωμετρίας, χρησιμοποιώντας περιγραφή του σχήματος με καμπύλες ή επιφάνειες NURBS [1], που ορίζονται από τις παραμετρικές συντεταγμένες (parametric coordinates)  $(u, v)$  προκύπτουν ως το σταθμισμένο άθροισμα των συντεταγμένων των σημείων ελέγχου:

$$\mathbf{x}(u, v) = R_{i,j,p_u,p_v}(u, v)\mathbf{P}_{i,j}$$

όπου  $R_{i,j,p_u,p_v}(u, v)$  είναι η rational basis function βαθμού  $\{p_u, p_v\}$  και  $\mathbf{P}_{i,j}$  οι συντεταγμένες των σημείων ελέγχου.

Συνολικά, τα πλεονεκτήματα του ορισμού της γεωμετρίας με CAD παραμετροποίηση είναι:

- Η βελτιστοποιημένη γεωμετρία διατηρεί τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της αρχικής γεωμετρίας.
- Είναι εφικτή η χρήση οποιασδήποτε μεθόδου βελτιστοποίησης (αιτιοκρατικής ή

στοχαστικής).

- Δυνατότητα επιλογής μεταξύ τοπικής ή καθολικής επιρροής της παραμετροποίησης.
- Χαμηλό υπολογιστικό κόστος λόγω του μικρού πλήθους των μεταβλητών σχεδιασμού.

Συνολικά, τα μειονεκτήματα του ορισμού της γεωμετρίας με CAD παραμετροποίηση είναι:

- Περιορισμός του χώρου σχεδιασμού των βέλτιστων λύσεων.
- Αν απαιτείται πρόσβαση στον πηγαίο κώδικα του CAD εργαλείου, αυτή μπορεί να μην είναι εφικτή άμα χρησιμοποιείται εμπορικό πακέτο.

Περισσότερες πληροφορίες σχετικά με την CAD παραμετροποίηση αναφέρονται στα [2], [3], [4].

### 1.1.2 Κομβικός Έλεγχος Μορφής

Με τον τρόπο αυτόν, η γεωμετρία δεν αναπαρίσταται με κάποια καμπύλη ή επιφάνεια παραμετροποίησης αλλά χρησιμοποιούνται οι κόμβοι του πλέγματος. Δηλαδή, αφού δημιουργηθεί το πλέγμα σε μια αρχική γεωμετρία, η τελευταία ορίζεται από τη θέση των κόμβων της και όχι από κάποια παραμετροποίηση που να αντιστοιχεί σε συγκεκριμένη μορφολογία της γεωμετρίας. Επομένως, το διάλυμα των μεταβλητών σχεδιασμού αποτελούν οι συντεταγμένες των διακριτών κόμβων του πλέγματος που ορίζουν την ως προς βελτιστοποίηση γεωμετρία. Για τους παραπάνω λόγους ο συγκεκριμένος τρόπος αναπαράστασης ονομάζεται 'κομβικός έλεγχος μορφής' (node-based parameterization). Η ανεξαρτησία της αναπαράστασης της γεωμετρίας από κάποια παραμετροποίηση έχει ως αποτέλεσμα ο χώρος σχεδιασμού των πιθανών βέλτιστων λύσεων να είναι ο μεγαλύτερος δυνατός και να ταυτίζεται με το χώρο σχεδιασμού που χαρακτηρίζει την ως προς βελτιστοποίηση γεωμετρία. Το πλήθος των μεταβλητών σχεδιασμού είναι πολύ μεγαλύτερο συγκριτικά με τις μεταβλητές σχεδιασμού στη CAD παραμε-

τροποίηση της γεωμετρίας. Το μεγάλο πλήθος των μεταβλητών σχεδιασμού, καθιστά τα προβλήματα βελτιστοποίησης που χρησιμοποιούν το κομβικό έλεγχο μορφής τρόπο ορισμού της γεωμετρίας τους ως not well-posed<sup>1</sup> ή ill-posed<sup>2</sup>. Δηλαδή, τα προαναφερθέντα προβλήματα βελτιστοποίησης χαρακτηρίζονται από εξάρτηση από το πλέγμα και οδηγούν τη βελτιστοποίηση σε ανώμαλα πλέγματα και μη-ομαλές παραγώγους με αποτέλεσμα, η βελτιστοποίηση να τερματίζει σε πολύ αρχικό στάδιο αν δεν αντιμετωπισθούν αυτές ιδιαιτερότητες. Ένας αποτελεσματικός και συνήθης τρόπος για να αντιμετωπισθεί ο ill-posed χαρακτήρας των προαναφερθέντων προβλημάτων βελτιστοποίησης, είναι η εξομάλυνση (smoothing). Τέλος, λόγω του μεγάλου πλήθους των μεταβλητών σχεδιασμού και, κατά συνέπεια, του υψηλού υπολογιστικού κόστους, δεν συνηθίζεται να χρησιμοποιείται η στοχαστική μέθοδος βελτιστοποίησης αλλά μόνο η αιτιοκρατική επικουρούμενη από τη συζυγή μέθοδο (Adjoint Method) [5], [6], [7] για τον υπολογισμό των παραγώγων.

Συνολικά τα πλεονεκτήματα της συγκεκριμένης μεθόδου είναι:

- Ο μέγιστος δυνατός χώρος σχεδιασμού των βέλτιστων λύσεων.
- Θεωρητικά η βελτιστοποίηση γεωμετρίας, που ορίζεται με το κομβικό έλεγχο μορφής, μπορεί να προσεγγίσει της βέλτιστη μορφή που χαρακτηρίζει τη γεωμετρία που μελετάται.
- Δεν χρειάζεται να συμπεριληφθεί CAD εργαλείο στη βελτιστοποίηση, παρά μόνο το υπολογιστικό πλέγμα που υπάρχει ήδη για την επίλυση του αεροδυναμικού (ευθέος) προβλήματος.

Συνολικά, τα μειονεκτήματα της συγκεκριμένης μεθόδου είναι:

---

<sup>1</sup>Ο μαθηματικός όρος για τα προβλήματα που έχουν τις εξής ιδιότητες:

- Η λύση υπάρχει.
- Η λύση είναι μοναδική.
- Η συμπεριφορά της λύσης αλλάζει συνεχώς με τις αρχικές συνθήκες.

<sup>2</sup>Τα προβλήματα που δεν είναι well-posed.

- Το πρόβλημα βελτιστοποίησης χαρακτηρίζεται ως Ill-posed. Δηλαδή υφίσταται εξάρτηση από το πλέγμα και πρόωρο τερματισμό της βελτιστοποίησης λόγω ανωμαλιών στο πλέγμα που εξελίσσεται και μη-ομαλών παραγώγων ευαισθησίας.
- Ανάγκη για εξομάλυνση της γεωμετρίας ή των παραγώγων της συνάρτησης-στόχου προκειμένου να εξαλειφθούν τα ill-posed χαρακτηριστικά του προβλήματος βελτιστοποίησης.
- Υψηλό υπολογιστικό κόστος.
- Περιορισμός στο ποια μέθοδος βελτιστοποίησης θα χρησιμοποιηθεί λόγω υπολογιστικού κόστους.
- Πιθανή δυσκολία στη σύγκλιση της μεθόδου βελτιστοποίησης.

Περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τον κομβικό έλεγχο μορφής αναφέρονται στα [3], [8], [9], [10], [11], [12].

## 1.2 Βελτιστοποίηση

Η βελτιστοποίηση αποτελεί πολύ σημαντικό εργαλείο στην ανάλυση φυσικών συστημάτων και μέσω αυτής εντοπίζεται η βέλτιστη λύση από ένα σύνολο υποψήφριων λύσεων. Πιο συγκεκριμένα, ορίζεται η συνάρτηση-στόχος (objective function) που αποτελεί το μέτρο απόδοσης του φυσικού συστήματος. Η συγκεκριμένη συνάρτηση-στόχος πρέπει να ελαχιστοποιηθεί ή να μεγιστοποιηθεί, ικανοποιώντας παράλληλα σε μερικές περιπτώσεις συγκεκριμένους περιορισμούς. Επίσης, η συνάρτηση-στόχος εξαρτάται άμεσα ή έμμεσα από συγκεκριμένα χαρακτηριστικά του συστήματος που ονομάζονται μεταβλητές σχεδιασμού, η βέλτιστη τιμή των οποίων αναζητείται προκειμένου να εντοπιστεί το ελάχιστο ή μέγιστο της συνάρτησης-στόχου. Για την αξιολόγηση των πιθανών βέλτιστων μεταβλητών σχεδιασμού, δηλαδή για τον υπολογισμό της τιμής της συνάρτησης-στόχου σε αυτή την πιθανή βέλτιστη λύση, χρειάζεται η υποστήριξη από λογισμικό αξιολόγησης. Τα προβλήματα βελτιστοποίησης που μελετώνται στη διπλωματική εργασία χρησιμοποιούν ως λογισμικό αξιολόγησης τα υπολογιστικά μοντέλα της

Υπολογιστική Ρευστοδυναμικής (Computational Fluid Dynamics, CFD). Οι μέθοδοι βελτιστοποίησης διακρίνονται σε στοχαστικές [6],[13] και αιτιοκρατικές μέθοδοι [6], [14] ανάλογα με τον τρόπο που αναζητούν την πιθανή βέλτιστη λύση. Χαρακτηριστικών στοχαστικών μεθόδων είναι το υψηλό υπολογιστικό κόστος. Στη συνέχεια, ακολουθεί μια συνοπτική παρουσίαση των αιτιοκρατικών μεθόδων, αφού σε αυτές ανήκει η μέθοδος βελτιστοποίησης που χρησιμοποιείται στη διπλωματική εργασία.

### **Αιτιοκρατικές Μέθοδοι Βελτιστοποίησης**

Οι αιτιοκρατικές μέθοδοι βελτιστοποίησης χρησιμοποιούνται κυρίως σε προβλήματα μονοκριτηριακής βελτιστοποίησης (Single Objective Optimization), δηλαδή σε προβλήματα όπου η συνάρτηση-στόχος είναι μία βαθμωτή συνάρτηση. Σε περίπτωση περισσότερων συναρτήσεων, αυτές ενώνονται σε μία συνάρτηση-στόχο με συντελεστές βαρύτητας που ορίζει ο χρήστης. Οι αιτιοκρατικές μέθοδοι βελτιστοποίησης βασίζονται στον υπολογισμό ή την προσέγγιση της πρώτης ή δεύτερης παράγωγου της συνάρτησης-στόχου ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού για να προσεγγίσουν τη βέλτιστη λύση. Σημαντικό μειονέκτημα των αιτιοκρατικών μεθόδων βελτιστοποίησης είναι ότι επηρεάζονται από την επιλογή της αρχικής λύσης και ότι ενδέχεται να συγκλίνουν σε τοπικό ακρότατο, με αποτέλεσμα να μην εντοπίζεται το ολικό ακρότατο της συνάρτησης-στόχου. Σε αντίθεση με τις στοχαστικές μεθόδους, οι αιτιοκρατικές μέθοδοι χαρακτηρίζονται από μικρό υπολογιστικό κόστος καθώς συγκλίνουν γρήγορα στο τοπικό ή ολικό ακρότατο με αποτέλεσμα να πραγματοποιούν λιγότερες αξιολογήσεις της συνάρτησης-στόχου. Επίσης, τα προγράμματα των αιτιοκρατικών μεθόδων βελτιστοποίησης δεν προσαρμόζονται εύκολα σε διαφορετικά προβλήματα καθώς απαιτούν αρκετή προγραμματιστική εργασία τόσο για τον εκ μηδενός προγραμματισμό τους όσο και για οποιαδήποτε μετατροπή-προσαρμογή. Οι κύριοι αντιπρόσωποι των αιτιοκρατικών μεθόδων είναι:

- Απότομη Κάθοδος (Steepest Descent) [14]: Υπολογίζεται και χρησιμοποιείται με ακρίβεια ή με προσέγγιση η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης στόχου ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού.

- Μέθοδος του Newton [14]: Υπολογίζεται και χρησιμοποιείται με ακρίβεια τόσο η πρώτη όσο και η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης-στόχου ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού.
- Μέθοδος του Quasi-Newton [14]: Υπολογίζεται και χρησιμοποιείται με ακρίβεια η πρώτη παράγωγος, ενώ προσεγγίζεται η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης-στόχου ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού.

Η απότομη κάθοδος είναι η πιο απλή και εύρωστη μέθοδος, που όμως σε περίπλοκα προβλήματα βελτιστοποίησης χαρακτηρίζεται από αργή σύγκλιση. Η μέθοδος του Newton παρουσιάζει μεγαλύτερη ταχύτητα σύγκλισης, όμως λόγω του ακριβούς υπολογισμού της δεύτερης παραγώγου της συνάρτησης-στόχου εισάγονται υπολογιστικές δυσκολίες και αυξάνεται το υπολογιστικό κόστος. Η μέθοδος του Quasi-Newton είναι παραλλαγή της Newton Μεθόδου, με τη διαφορά να εντοπίζεται στον προσεγγιστικό τρόπο υπολογισμού της δεύτερης παραγώγου που οδηγεί σε μειωμένο υπολογιστικό κόστος διατηρώντας την μεγάλη ταχύτητα σύγκλισης. Περισσότερες πληροφορίες ο αναγνώστης μπορεί να αναζητήσει στα [6],[14].

Για τον υπολογισμό των παραγώγων της συνάρτησης-στόχου έχουν αναπτυχθεί αρκετές αριθμητικές μέθοδοι. Παραδείγματα τέτοιων μεθόδων είναι οι Πεπερασμένες Διαφορές (Finite Differences) [6], [14], η μέθοδος Μιγαδικών Μεταβλητών (Complex Variable Method) [15], [16], η μέθοδος Ευθείας Διαφόρισης (Direct Differentiation Method) [6] και η Συζυγής Μέθοδος (Adjoint Method). Χαρακτηριστικό των προαναφερθεισών μεθόδων, εκτός της συζυγούς μεθόδου, είναι ότι το υπολογιστικό κόστος τους εξαρτάται από το πλήθος των μεταβλητών σχεδιασμού. Στη συζυγή μέθοδο το υπολογιστικό κόστος για τον υπολογισμό της πρώτης παραγώγου της συνάρτησης-στόχου ισούται περίπου με δύο επιλύσεις του πρωτεύοντος προβλήματος. Περισσότερες πληροφορίες ο αναγνώστης μπορεί να αναζητήσει στα [6], [14].

## 1.3 Σκοπός της Διπλωματικής Εργασίας

Στόχος της διπλωματικής εργασίας είναι να μελετηθεί η βελτιστοποίηση μορφής (shape optimization) διδιάστατης γεωμετρίας που ορίζεται με άμεσο έλεγχο της θέσης των κόμβων επί του σώματος, καθώς ο χώρος σχεδιασμού των πιθανών βέλτιστων λύσεων είναι ο μεγαλύτερος δυνατός σε αντίθεση με τη CAD παραμετροποίηση. Πιο συγκεκριμένα, μελετώνται προβλήματα εσωτερικής αεροδυναμικής όπου, η ως προς βελτιστοποίηση γεωμετρία είναι αγωγός που διαρρέεται από στρωτή και μόνιμη ροή ασυμπίεστου ρευστού. Στη διπλωματική εργασία χρησιμοποιούνται τρεις αγωγοί διαφορετικής διαμόρφωσης. Επίσης, πραγματοποιείται σύγκριση των αποτελεσμάτων βελτιστοποίησης όταν η γεωμετρία ορίζεται με τον κομβικό έλεγχο μορφής και με τη CAD παραμετροποίηση. Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, ο κομβικός έλεγχος μορφής ισοδυναμεί με μεγάλο πλήθος μεταβλητών σχεδιασμού καθιστώντας το πρόβλημα ως ill-posed. Για να ξεπεραστεί αυτή η αδυναμία πραγματοποιείται εξομάλυνση των μεταβλητών σχεδιασμού της βελτιστοποίησης εφαρμόζοντας διαδοχικά δύο μεθόδους εξομάλυνσης. Στη διπλωματική εργασία, ως μεταβλητές σχεδιασμού, αντί για τις συντεταγμένες, χρησιμοποιούνται οι μετατοπίσεις των κόμβων του επιφανειακού πλέγματος της μεταβαλλόμενης γεωμετρίας ως προς την αρχική γεωμετρία που ξεκινά η διαδικασία της βελτιστοποίησης. Η μία τεχνική εξομάλυνσης χρησιμοποιεί τη μερική διαφορική εξίσωση (MDE) του Helmholtz, ενώ η άλλη ονομάζεται εξομάλυνση γειτνίασης και σχετίζεται με τη συνέχεια της γεωμετρίας που πρέπει να υφίσταται μεταξύ της σταθερής και της μεταβαλλόμενης γεωμετρίας. Η επίδραση της σειράς με την οποία πραγματοποιούνται οι δύο τεχνικές εξομάλυνσης στα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης εξετάζεται στη διπλωματική εργασία. Επιπροσθέτως, εξετάζεται η επίδραση στη βελτιστοποίηση όταν η μεταβλητή εξομάλυνσης της Helmholtz εξομάλυνσης μεταβάλλεται χωρικά, αντί να παραμένει σταθερή κατά μήκος του μεταβαλλόμενου τμήματος της ως προς βελτιστοποίηση γεωμετρίας. Ως μέθοδο βελτιστοποίησης επιλέγεται η αιτιοκρατική Limited-memory Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (LBFGS) [17], [18] μέθοδος που ανήκει στην κατηγορία των Quasi-Newton μεθόδων. Ο υπολογισμός των πρώτων

παραγώγων της συνάρτησης-στόχου ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού γίνεται με τη συζυγή μέθοδο, η οποία ενδείκνυται για προβλήματα με μεγάλο πλήθος μεταβλητών σχεδιασμού. Τέλος, η μαθηματική διατύπωση και ο κώδικας προγραμματισμού της συζυγούς μεθόδου, για την επίλυση των προβλημάτων που ασχολείται η διπλωματική εργασία, παρέχονται από τη ΜΠΥΡ&Β του ΕΜΠ στο προγραμματιστικό περιβάλλον του OpenFOAM.



# Κεφάλαιο 2

## Εξισώσεις και Μέθοδοι

## Ανάλυσης και Βελτιστοποίησης

## με Άμεσο Έλεγχο Κόμβων

Στο κεφάλαιο αυτό, αναπτύσσονται οι εξισώσεις που διέπουν το διδιάστατο πρόβλημα βελτιστοποίησης μορφής γεωμετρίας αγωγού που ορίζεται με τον κομβικό έλεγχο μορφής και διαρρέεται από στρωτή και μόνιμη ροή ασυμπίεστου ρευστού. Για την επίλυση των εξισώσεων, χρησιμοποιείται διακριτοποίηση Πεπερασμένων Όγκων (Finite Volume) [19] και το ανοιχτό λογισμικό OpenFOAM. Στις επόμενες ενότητες, χρησιμοποιείται η σύμβαση ότι ο επαναλαμβανόμενος δείκτης δηλώνει άθροιση, εκτός αν δηλωθεί κάτι διαφορετικό. Τέλος, με έντονα γράμματα συμβολίζονται τα διανύσματα.

### 2.1 Το Πρόβλημα Ροής

Οι εξισώσεις που διέπουν το πρόβλημα της ροής (πρωτεύον πρόβλημα) είναι οι εξισώσεις Navier-Stokes για στρωτή και μόνιμη ροή ασυμπίεστου ρευστού και συχνά αναφέρονται και ως εξισώσεις κατάστασης (State Equations). Οι εξισώσεις Navier-Stokes επιλύονται χρησιμοποιώντας το βασισμένο στην πίεση (pressure-based) αλγόριθμο SIMPLE

(Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations) [7] ,[20]. Δηλαδή, το πεδίο ταχυτήτων που προκύπτει από την επίλυση των εξισώσεων διατήρησης της ορμής διορθώνεται από την πίεση που προκύπτει από τις εξισώσεις διατήρησης μάζας και ορμής, ώστε να ικανοποιεί ταυτόχρονα και την εξίσωση διατήρησης της μάζας.

### 2.1.1 Εξισώσεις Ροής

Παρουσιάζονται η εξίσωση διατήρησης της μάζας (εξίσωση 2.1) και οι εξισώσεις διατήρησης της ορμής (εξίσωση 2.2) για στρωτή και μόνιμη ροή ασυμπίεστου ρευστού.

$$R^p = -\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0 \quad (2.1)$$

$$R_i^v = v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.2)$$

όπου  $\nu$  η κινηματική συνεκτικότητα,  $v_i$  οι συνιστώσες της ταχύτητας και  $p$  η στατική πίεση διαιρεμένη με τη σταθερή πυκνότητα  $\rho$ .

### 2.1.2 Οριακές συνθήκες

Προκειμένου να είναι εφικτή η επίλυση των προαναφερθεισών ΜΔΕ, απαιτείται η επιβολή οριακών συνθηκών που συνάδουν με το πρόβλημα ροής που εξετάζεται. Οι οριακές συνθήκες χωρίζονται σε δύο κατηγορίες:

- Dirichlet: Με αυτήν τη συνθήκη ορίζεται η σταθερή τιμή που πρέπει να έχει η υπό εξέταση μεταβλητή στο συγκεκριμένο τμήμα του ορίου της γεωμετρίας.
- Neumann: Με αυτήν τη συνθήκη ορίζεται η τιμή της, κάθετης (normal) ως προς το όριο της γεωμετρίας, παραγώγου της υπό εξέταση μεταβλητής.

Οι οριακές συνθήκες, που χρησιμοποιούνται για την επίλυση του πρωτεύοντος προβλήματος, ορίζονται στα τμήματα της γεωμετρίας που περιγράφονται στο σχήμα 3.1 και είναι οι εξής:

1. Είσοδος (Inlet)

( $\alpha'$ )  $p$ : Μηδενική Neumann συνθήκη.

( $\beta'$ )  $\mathbf{u}$ : Dirichlet συνθήκη.

### 2. Έξοδος (Outlet)

( $\alpha'$ )  $p$ : Μηδενική Dirichlet συνθήκη.

( $\beta'$ )  $\mathbf{u}$ : Μηδενική Neumann συνθήκη.

### 3. Μεταβαλλόμενα τοιχώματα (MovingWall) & Αμετάβλητα τοιχώματα (FixedWall)

( $\alpha'$ )  $p$ : Μηδενική Neumann συνθήκη.

( $\beta'$ )  $\mathbf{u}$ : Μηδενική Dirichlet συνθήκη ή αλλιώς συνθήκη μη-ολίσθησης.

## 2.2 Το Συζυγές Πρόβλημα

Όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή, σκοπός των προβλημάτων βελτιστοποίησης είναι η ελαχιστοποίηση ή μεγιστοποίηση της συνάρτησης-στόχου  $F$ , στο πλαίσιο του χώρου σχεδιασμού που ορίζουν οι μεταβλητές σχεδιασμού  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_N)$ . Στη διπλωματική εργασία χρησιμοποιείται η αιτιοκρατική μέθοδος βελτιστοποίησης και η παράγωγος της συνάρτησης-στόχου ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού  $\delta F / \delta \mathbf{b}$  υπολογίζεται με τη συνεχή συζυγή μέθοδος βελτιστοποίησης. Στη συζυγή μέθοδο βελτιστοποίησης, το κόστος υπολογισμού της παραγώγου της συνάρτησης-στόχου είναι ανεξάρτητο από τις μεταβλητές σχεδιασμού και ισούται περίπου με δύο φορές το κόστος επίλυσης των εξισώσεων του πρωτεύοντος προβλήματος. Επομένως, το συγκεκριμένο χαρακτηριστικό είναι ο κύριος παράγοντας που επιλέχθηκε η συζυγή μέθοδος, αφού στη διπλωματική εργασία η γεωμετρία ορίζεται με το κομβικό έλεγχο μορφής που συνεπάγεται μεγάλο πλήθος μεταβλητών σχεδιασμού. Η συζυγής μέθοδος διακρίνεται σε διακριτή και συνεχή μέθοδο, όπως αναφέρεται στα [21], [22]. Στη διακριτή μέθοδο, η διακριτοποίηση των εξισώσεων προηγείται της διαφορίσής τους. Ενώ στη συνεχή μέθοδο συμβαίνει το αντίστροφο, δηλαδή η διακριτοποίηση έπεται της διαφορίσής. Γενικά, στα προβλήματα βελτιστοποίησης μορφής στη μηχανική των ρευστών, όπως αυτά που εξετάζει η διπλω-

ματική εργασία, η συνάρτηση-στόχος  $F$  εξαρτάται από τις μεταβλητές κατάστασης  $\mathbf{U}$  και από τις μεταβλητές σχεδιασμού  $\mathbf{b}$ . Η εξάρτηση της συνάρτησης-στόχου από τις μεταβλητές σχεδιασμού ενδεχομένως να είναι διττή. Δηλαδή, η συνάρτησης-στόχος εξαρτάται άμεσα από τις μεταβλητές σχεδιασμού και έμμεσα μέσω των μεταβλητών κατάστασης, που με την σειρά τους εξαρτώνται από τις μεταβλητές σχεδιασμού. Έτσι, ισχύει ότι  $F = F(\mathbf{U}(\mathbf{b}), \mathbf{b})$ .

Στη συνέχεια, ακολουθεί μια εισαγωγή στη συνεχή συζυγή μέθοδο που χρησιμοποιεί η διπλωματική εργασία, βασισμένη στα [7], [23]. Η επίλυση του συζυγούς προβλήματος γίνεται με το ανοιχτό λογισμικό OpenFOAM, χρησιμοποιώντας τις επεκτάσεις που έχουν αναπτυχθεί από την ερευνητική ομάδα της ΜΠΥΡ&B του ΕΜΠ.

### 2.2.1 Εισαγωγή στις Συζυγές Μεταβλητές

Η συνεχής συζυγής μέθοδος βασίζεται στη δημιουργία της επαυξημένης συνάρτησης  $F_{aug}$  (augmented function) από τη συνάρτηση-στόχο  $F$ , μέσω της σχέσης:

$$F_{aug} = F + \int_{\Omega} \Psi_i R_i d\Omega \quad (2.3)$$

όπου  $F$  είναι η συνάρτηση-στόχος,  $R_i$  είναι τα υπόλοιπα (residuals) των εξισώσεων κατάστασης,  $\Psi_i$  οι συζυγείς μεταβλητές και  $\Omega$  το υπολογιστικό χωρίο.

Είναι προφανές ότι εφόσον οι εξισώσεις κατάστασης ικανοποιούνται στο υπολογιστικό χωρίο  $\Omega$ , άρα τα υπόλοιπα τους ισούνται με μηδέν ( $R_i = 0$ ), η  $F_{aug}$  να ισούται με την  $F$  (από την εξίσωση 2.3). Από τη διαφορίση της εξίσωση 2.3 ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού προκύπτει:

$$\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_n} = \frac{\delta F}{\delta b_n} + \frac{\delta}{\delta b_n} \int_{\Omega} \Psi_i R_i d\Omega \quad (2.4)$$

όπου  $b_n$  η μεταβλητή σχεδιασμού,  $n = (1, 2, \dots, N)$  ο δείκτης των μεταβλητών σχεδιασμού και  $N$  το πλήθος των μεταβλητών σχεδιασμού

Σε αυτό το σημείο, κρίνεται σκόπιμο να γίνει διάκριση μεταξύ των συμβόλων  $\delta()/\delta b_n$  και

$\partial()/\partial b_n$  που θα χρησιμοποιηθούν στη διπλωματική εργασία, βασιζόμενη στο [7]. Με  $\delta\Phi/\delta b_n$  συμβολίζεται η ολική (ή υλική) παράγωγος μιας αυθαίρετης ποσότητας  $\Phi$  και ισοδυναμεί με την ολική μεταβολή του  $\Phi$  που προκύπτει από τη μεταβολή του  $b_n$ . Ενώ η μερική παράγωγος  $\partial\Phi/\partial b_n$  ισοδυναμεί με τη μεταβολή του  $\Phi$  που προκαλείται από τη μεταβολή των μεταβλητών ροής, χωρίς όμως να συμπεριλαμβάνεται η συμβολή της χωρικής παραμόρφωσης. Δηλαδή, η μερική παράγωγος ισοδυναμεί με τη μεταβολή της  $\Phi$  αν οι εσωτερικοί κόμβοι του πλέγματος του  $\Omega$  παραμείνουν σταθεροί. Η συσχέτιση της ολικής και μερικής παραγωγού εξαρτάται από το που υπολογίζεται η ποσότητα  $\Phi$ .

Αν η ποσότητα  $\Phi$  υπολογίζεται στο εσωτερικό του  $\Omega$  ισχύει:

$$\frac{\delta\Phi}{\delta b_n} = \frac{\partial\Phi}{\partial b_n} + \frac{\partial\Phi}{\partial x_k} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} \quad (2.5)$$

όπου οι όροι  $\delta x_k/\delta b_n$  είναι οι παράγωγοι του πλέγματος (grid ή mesh sensitivities).

Αλλιώς, αν το  $\Phi$  υπολογίζεται στην επιφάνεια-όριο του  $\Omega$  ισχύει:

$$\frac{\delta_s\Phi}{\delta b_n} = \frac{\partial\Phi}{\partial b_n} + \frac{\partial\Phi}{\partial x_k} n_k \frac{\delta x_m}{\delta b_n} n_m \quad (2.6)$$

Επομένως, αφού το  $\partial()/\partial b_n$  βασίζεται μόνο στις αλλαγές των μεταβλητών ροής και αποκλείει τις χωρικές ή ογκικές αλλαγές του χωρίου, ισχύει ότι:

$$\frac{\partial}{\partial b_n} \left( \frac{\partial\Phi}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial\Phi}{\partial b_n} \right) \quad (2.7)$$

Γενικά, δεν ισχύει το ίδιο για την ολική παράγωγο:

$$\frac{\delta}{\delta b_n} \left( \frac{\partial\Phi}{\partial x_j} \right) \neq \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\delta\Phi}{\delta b_n} \right) \quad (2.8)$$

Όπως αναφέρεται στο [23], η συνεχής συζυγής μέθοδος μπορεί να διατυπωθεί με τρεις διαφορετικούς τρόπους. Οι τρόποι αυτοί είναι η Field Integrals (FI) διατύπωση, η Surface Integrals (SI) διατύπωση και η Enhanced SI (E-SI) διατύπωση. Στη διπλωματική εργασία χρησιμοποιείται η E-SI διατύπωση, όπου η πρώτη παράγωγος της

συνάρτησης-στόχου ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού, ή αλλιώς παράγωγος ευαισθησίας (sensitivity derivative, SD), περιέχει μόνο επιφανειακά ολοκληρώματα.

Στη E-SI συζυγή προσέγγιση χρησιμοποιείται το θεώρημα Leibniz:

$$\frac{\delta}{\delta b_n} \int_{\Omega} \Phi d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial \Phi}{\partial b_n} d\Omega + \int_S \Phi n_k \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS \quad (2.9)$$

όπου  $\Phi$  οποιαδήποτε ποσότητα και  $S$  τα όρια του  $\Omega$ .

Από τις εξισώσεις 2.4 και 2.9 προκύπτει:

$$\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_n} = \frac{\delta F}{\delta b_n} + \int_{\Omega} \Psi_i \frac{\partial R_i}{\partial b_n} d\Omega + \underbrace{\int_S \Psi_i R_i n_k \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS}_{\text{LBterm}} \quad (2.10)$$

όπου ο τελευταίος όρος του δεξιού μέλους είναι ο Leibniz όρος που συμβολίζεται εν συντομία ως LBterm.

Στο [23] αποδεικνύεται ότι για το LBterm ισχύει:

$$\underbrace{\int_S \Psi_i R_i n_k \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS}_{\text{LBterm}} = - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ -u_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - u_j \frac{\partial p}{\partial x_k} - \tau_{ij}^{\alpha} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + u_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} + q \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right\} \frac{\delta x_k}{\delta b_n} d\Omega \quad (2.11)$$

όπου  $u_i$  είναι η συζυγής ταχύτητα,  $q$  είναι η συζυγής πίεσης,  $\tau_{ij} = \nu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$  είναι ο τανυστής των τάσεων,  $\nu$  είναι κινηματική συνεκτικότητα και  $\tau_{ij}^{\alpha} = \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$  ο συζυγής τανυστής των τάσεων.

Στη E-SI συζυγή προσέγγιση θεωρείται ότι η μετατόπιση της οριακής γεωμετρίας, σε προβλήματα βελτιστοποίησης της μορφής, μεταφέρεται στο εσωτερικό πλέγμα μέσω της επίλυσης υποθετικών Laplace εξισώσεων που ονομάζονται grid displacement PDEs (gdPDEs). Η μαθηματική έκφραση των gdPDEs είναι η εξής:

$$R_i^m = \frac{\partial^2 m_i}{\partial x_j^2} = 0 \quad (2.12)$$

όπου  $m_i$  είναι οι καρτεσιανές μετατοπίσεις (Cartesian displacements) των κόμβων του

πλέγματος. Κατά μήκος του ορίου του  $\Omega$ , το  $m_i$  συμβολίζει τη μετατόπιση των οριακών κόμβων. Οι gdPDEs θεωρούνται ως επιπλέον εξισώσεις και προστίθεται ο ανάλογος όρος στην εξίσωση 2.3, όπως και με τις εξισώσεις κατάστασης του πρωτεύοντος προβλήματος. Ακολουθώντας τη διαδικασία που αναλύεται λεπτομερώς στο [23] και χρησιμοποιώντας την εξίσωση 2.11 για το LBterm, προκύπτουν οι συζυγείς εξισώσεις των gdPDE:

$$R_k^{m^\alpha} = \frac{\partial^2 m_k^\alpha}{\partial x_j^2} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ u_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + u_j \frac{\partial p}{\partial x_k} + \tau_{ij}^\alpha \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - u_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} - q \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right\} = 0 \quad (2.13)$$

όπου  $m_k^\alpha$  είναι οι συζυγείς καρτεσιανές συνταγμένες.

Η οριακή συνθήκη των συζυγών μεταβλητών  $m_i^\alpha$ , όπως προκύπτει από το [23], είναι :

$$m_k^a = 0 \quad (2.14)$$

σε όλο το όριο  $S$  του  $\Omega$ .

Στις τελικές παραγώγους ευαισθησίας που προκύπτουν προστίθεται ένα επιφανειακό ολοκλήρωμα που περιέχει τις συζυγείς μεταβλητές  $m_i^\alpha$ . Αυτός ο επιπρόσθετος όρος, χρειάζεται την επίλυση των συζυγών εξισώσεων των gdPDEs για να υπολογιστεί .

Στη συνέχεια, ακολουθεί η ανάλυση της E-SI συζυγούς μεθόδου που χρησιμοποιείται στη διπλωματική εργασία.

### 2.2.2 Η E-SI Συνεχής Συζυγής Μέθοδος

Η ανάλυση που θα ακολουθήσει, αποτελεί μια γενικευμένη παρουσίαση της συνεχούς συζυγούς μεθόδου χρησιμοποιώντας τη E-SI προσέγγιση για αεροδυναμικά προβλήματα βελτιστοποίησης μορφής. Για πιο λεπτομερή ανάλυση ο αναγνώστης παραπέμπεται στα [7], [23]. Η επαυξημένη συνάρτηση της εξίσωσης 2.3, χρησιμοποιώντας την E-SI προσέγγιση που αναλύθηκε εν συντομία στην ενότητα 2.2.1, γίνεται:

$$F_{aug} = F + \int_{\Omega} u_i R_i^v d\Omega + \int_{\Omega} q R^p d\Omega + \int_{\Omega} m_i^\alpha R_i^m d\Omega \quad (2.15)$$

όπου  $u_i$  είναι η συζυγής ταχύτητα,  $q$  είναι η συζυγής πίεση,  $m_i^\alpha$  είναι οι συζυγείς καρτεσιανές μετατοπίσεις και  $\Omega$  το υπολογιστικό χωρίο. Επισημαίνεται ότι, ο τελευταίος όρος στη εξίσωση 2.15 εμφανίζεται λόγω της E-SI προσέγγισης.

Αναπτύσσοντας την εξίσωση 2.15 χρησιμοποιώντας τα Leibniz και Green-Gauss θεωρήματα προκύπτει:

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{aug}}{\delta b_n} &= \frac{\delta F}{\delta b_n} + \frac{\delta}{\delta b_n} \int_{\Omega} u_i R_i^v d\Omega + \frac{\delta}{\delta b_n} \int_{\Omega} q R^p d\Omega + \frac{\delta}{\delta b_n} \int_{\Omega} m_i^\alpha R_i^m d\Omega \\ &= \frac{\delta F}{\delta b_n} + \int_{\Omega} u_i \frac{\partial R_i^v}{\partial b_n} d\Omega + \int_{\Omega} q \frac{\partial R^p}{\partial b_n} d\Omega + \int_S m_i^\alpha n_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\delta x_i}{\delta b_n} \right) dS \\ &- \int_{S_w} \frac{\partial m_i^\alpha}{\partial x_j} n_j \frac{\delta x_i}{\delta b_n} dS + \int_{\Omega} \frac{\partial^2 m_i^\alpha}{\partial x_j^2} \frac{\delta x_i}{\delta b_n} d\Omega + \int_S m_i^\alpha R_i^m n_k \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS + \int_S (u_i R_i^v + q R^p) n_k \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS \end{aligned} \quad (2.16)$$

όπου  $S$  είναι το όριο του υπολογιστικού χωρίου και ισχύει  $S = S_I \cup S_O \cup S_W \cup S_{W_p}$ . Τα  $S_I, S_O, S_W$  και  $S_{W_p}$  αντιπροσωπεύουν την είσοδο, έξοδο, σταθερά και μεταβλητά όρια τοίχων (wall boundaries), αντίστοιχα. Επίσης, με  $n_k$  συμβολίζονται οι συνιστώσες του μοναδιαίου διανύσματος που είναι κάθετο στην επιφάνεια. Εφόσον, το μόνο μεταβλητό όριο είναι το  $S_{W_p}$ , για όλα τα υπόλοιπα όρια ισχύει  $\delta x_k / \delta b_n = 0$ . Έτσι, χρησιμοποιώντας την παραπάνω παρατήρηση για το  $\delta x_k / \delta b_n$  και την ανάλυση για τον όρο  $\int_S (u_i R_i^v + q R^p) n_k \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS$  (εξίσωση 2.11) του [23], η εξίσωση 2.16 γίνεται:

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{aug}}{\delta b_n} &= \frac{\delta F}{\delta b_n} + \int_{\Omega} u_i \frac{\partial R_i^v}{\partial b_n} d\Omega + \int_{\Omega} q \frac{\partial R^p}{\partial b_n} d\Omega + \int_S m_i^\alpha n_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\delta x_i}{\delta b_n} \right) dS \\ &- \int_{S_{w_p}} \frac{\partial m_i^\alpha}{\partial x_j} n_j \frac{\delta x_i}{\delta b_n} dS + \int_{S_{w_p}} m_i^\alpha R_i^m n_k \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS \\ &+ \int_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 m_k^\alpha}{\partial x_j^2} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ u_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + u_j \frac{\partial p}{\partial x_k} + \tau_{ij}^\alpha \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - u_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} - q \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right\} \right) \frac{\delta x_k}{\delta b_n} d\Omega \end{aligned} \quad (2.17)$$

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, ισχύει  $F_{aug} = F$  με αποτέλεσμα να ισχύει επίσης  $\delta F_{aug} / \delta b_n = \delta F / \delta b_n$ .



### 2.2.3 Διαφόριση της Συνάρτησης-Στόχου

Απαραίτητο βήμα προτού υπολογιστούν οι συζυγείς εξισώσεις κατάστασης και οι παράγωγοι ευαισθησίας είναι ο υπολογισμός του όρου  $\delta F/\delta b_n$  στην εξίσωση 2.17. Μια αντιπροσωπευτική γενική μορφή της συνάρτησης-στόχου είναι:

$$F = \int_S F_{S_i} n_i dS \quad (2.18)$$

όπου  $F_{S_i}$  είναι οι ολοκληρωτέες ποσότητες στην επιφάνεια του υπολογιστικού χωρίου αντίστοιχα.

Διαφορίζοντας τη γενική συνάρτηση-στόχο της εξίσωσης 2.18 ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού προκύπτει:

$$\frac{\delta F}{\delta b_n} = \frac{\delta}{\delta b_n} \int_S F_{S_i} n_i dS \quad (2.19)$$

Από τη διαφόριση του επιφανειακού ολοκληρώματος της εξίσωσης 2.19, η αναλυτική διαδικασία της οποίας αναφέρεται στο [7], προκύπτει:

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta b_n} \int_S F_{S_i} n_i dS = & \int_S \frac{\partial F_{S_i}}{\partial v_k} n_i \frac{\partial v_k}{\partial b_n} dS + \int_S \frac{\partial F_{S_i}}{\partial p} n_i \frac{\partial p}{\partial b_n} dS + \int_S \frac{\partial F_{S_i}}{\partial \tau_{kj}} n_i \frac{\partial \tau_{kj}}{\partial b_n} dS \\ & + \int_S n_i \frac{\partial F_{S_i}}{\partial x_m} n_m \frac{\delta x_k}{\delta b_n} n_k dS + \int_S F_{S_i} \frac{\delta n_i}{\delta b_n} dS + \int_S F_{S_i} n_i \frac{\delta(dS)}{\delta b_n} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση 2.20 στην εξίσωση 2.19, προκύπτει η τελική μορφή του όρου  $\delta F/\delta b_n$ :

$$\begin{aligned} \frac{\delta F}{\delta b_n} = & \int_S \frac{\partial F_{S_k}}{\partial v_i} n_k \frac{\partial v_i}{\partial b_n} dS + \int_S \frac{\partial F_{S_i}}{\partial p} n_i \frac{\partial p}{\partial b_n} dS + \int_S \frac{\partial F_{S_k}}{\partial \tau_{ij}} n_k \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial b_n} dS \\ & + \int_{S_{W_p}} n_i \frac{\partial F_{S_i}}{\partial x_m} n_m \frac{\delta x_k}{\delta b_n} n_k dS + \int_{S_{W_p}} F_{S_i} \frac{\delta n_i}{\delta b_n} dS + \int_{S_{W_p}} F_{S_i} n_i \frac{\delta(dS)}{\delta b_n} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Η εξίσωση 2.21 περιέχει τις μερικές παραγώγους των μεταβλητών ροής ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού, ο υπολογισμός των οποίων απαιτεί την επίλυση συστήματος  $N$  εξισώσεων παρόμοιων με τις εξισώσεις Navier-Stokes. Επομένως, για να μειωθεί

το κόστος αυτό σχηματίζονται και επιλύονται οι συζυγείς εξισώσεις.

Η ανάλυση που προηγήθηκε σχετίζεται με τη γενική μορφή της συνάρτησης-στόχου και μπορεί να προσαρμοστεί στη συνάρτηση-στόχο της διπλωματικής εργασίας που αναφέρεται παρακάτω.

### Απώλειες Ολικής Πίεσης

Η συνάρτηση-στόχος που χρησιμοποιείται στα αεροδυναμικά προβλήματα της διπλωματικής εργασίας σχετίζεται με τις απώλειες ολικής πίεσης. Πιο συγκεκριμένα, η συνάρτηση-στόχος είναι οι (ολοκληρωμένες με την παροχή) απώλειες ολικής πίεσης μεταξύ εισόδου και εξόδου του αγωγού. Η εξίσωση της παραπάνω συνάρτησης-στόχου είναι:

$$F = - \int_{S_{I,O}} \left( p + \frac{1}{2} v_k^2 \right) v_i n_i dS \quad (2.22)$$

όπου με  $S_{I,O}$  συμβολίζονται τα τμήματα της εισόδου (inlet,  $S_I$ ) και της εξόδου (outlet,  $S_O$ ). Όπως προκύπτει από την εξίσωση 2.22, οι μονάδες της συνάρτησης-στόχου είναι απώλειες ισχύος ανά μονάδα πυκνότητας ή αλλιώς  $m^5/s^3$ .

#### 2.2.4 Διατύπωση των Συζυγών Εξισώσεων

Παρατηρώντας την εξίσωση 2.17, οι μόνοι όροι για τους οποίους δεν έχει γίνει περαιτέρω ανάλυση είναι οι όροι που περιέχουν τις μερικές παραγώγους των εξισώσεων κατάστασης ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού, δηλαδή  $\partial R_i^v / \partial b_n$  και  $\partial R^p / \partial b_n$ . Οι όροι αυτοί μπορούν να υπολογιστούν από την εφαρμογή της μερικής παραγώγου  $\partial() / \partial b_n$  στις εξισώσεις κατάστασης που αναφέρονται στην ενότητα 2.1.1.

Από τη διαφορίση των εξισώσεων 2.1 και 2.2 και λαμβάνοντας υπόψη την εξίσωση 2.7, προκύπτουν:

$$\frac{\partial R^p}{\partial b_n} = - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_j}{\partial b_n} \right) \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial R_i^v}{\partial b_n} = \frac{\partial v_j}{\partial b_n} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial b_n} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \frac{\partial}{\partial b_n} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial p}{\partial b_n} \right) \quad (2.24)$$

Από τις εξισώσεις 2.17, 2.21, 2.23, 2.24, το Green-Gauss θεώρημα και την αναλυτική διαδικασία που αναφέρεται στο [7], προκύπτει:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta F_{aug}}{\delta b_n} &= \int_S \left[ u_i v_j n_j + \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i + \frac{\partial F_{S_k}}{\partial v_i} n_k \right] \frac{\partial v_i}{\partial b_n} dS \\
&+ \int_S \left( u_j n_j + \frac{\partial F_{S_i}}{\partial p} n_i \right) \frac{\partial p}{\partial b_n} dS + \int_S \left( -u_i n_j + \frac{\partial F_{S_k}}{\partial \tau_{ij}} n_k \right) \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial b_n} dS \\
&+ \int_{S_{W_p}} n_i \frac{\partial F_{S_i}}{\partial x_m} n_m \frac{\delta x_k}{\delta b_n} n_k dS + \int_{S_{W_p}} F_{S_i} \frac{\delta n_i}{\delta b_n} dS + \int_{S_{W_p}} F_{S_i} n_i \frac{\delta(dS)}{\delta b_n} \\
&+ \int_S m_i^\alpha n_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\delta x_i}{\delta b_n} \right) dS - \int_{S_{W_p}} \frac{\partial m_i^\alpha}{\partial x_j} n_j \frac{\delta x_i}{\delta b_n} dS + \int_{S_{W_p}} m_i^\alpha R_i^m n_k \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS \\
&+ \int_\Omega \left( \frac{\partial^2 m_k^\alpha}{\partial x_j^2} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ u_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + u_j \frac{\partial p}{\partial x_k} + \tau_{ij}^\alpha \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - u_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} - q \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right\} \right) \frac{\delta x_k}{\delta b_n} d\Omega \\
&+ \int_\Omega \left\{ u_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial(v_j u_i)}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\partial q}{\partial x_i} \right\} \frac{\partial v_i}{\partial b_n} d\Omega \\
&+ \int_\Omega -\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \frac{\partial p}{\partial b_n} d\Omega
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Προκειμένου να αποφευχθεί ο υπολογισμός των μερικών παραγώγων των μεταβλητών ροής ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού καθώς και των παραγώγων του πλέγματος στον όγκο  $\Omega$ , οι πολλαπλασιαστές των  $\partial v_i / \partial b_n$ ,  $\partial p / \partial b_n$  και  $\delta x_k / \delta b_n$  στα ογκικά ολοκληρώματα τίθενται ίσοι με μηδέν, παράγοντας έτσι τις συζυγείς εξισώσεις κατάστασης και τις συζυγείς *gdPDEs* εξισώσεις.

$$R^q = -\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \tag{2.26}$$

$$R_i^u = u_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial(v_j u_i)}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\partial q}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, (3) \tag{2.27}$$

$$R_k^{m^\alpha} = \frac{\partial^2 m_k^\alpha}{\partial x_j^2} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ u_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + u_j \frac{\partial p}{\partial x_k} + \tau_{ij}^\alpha \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - u_i \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} - q \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right\} = 0 \tag{2.28}$$

Η εξίσωση 2.26 είναι η συζυγής εξίσωση συνέχειας ενώ οι εξισώσεις 2.27 είναι οι συζυγείς εξισώσεις ορμής. Οι εξισώσεις 2.28 είναι οι συζυγείς gdPDEs.

Ικανοποιώντας τις παραπάνω συζυγείς εξισώσεις, η εξίσωση 2.25 γίνεται:

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta F_{aug}}{\delta b_n} = & \int_S \left[ u_i v_j n_j + \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i + \frac{\partial F_{S_k}}{\partial v_i} n_k \right] \frac{\partial v_i}{\partial b_n} dS \\
 & + \int_S \left( u_j n_j + \frac{\partial F_{S_i}}{\partial p} n_i \right) \frac{\partial p}{\partial b_n} dS + \int_S \left( -u_i n_j + \frac{\partial F_{S_k}}{\partial \tau_{ij}} n_k \right) \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial b_n} dS \\
 & + \int_{S_{W_p}} n_i \frac{\partial F_{S_i}}{\partial x_m} n_m \frac{\delta x_k}{\delta b_n} n_k dS + \int_{S_{W_p}} F_{S_i} \frac{\delta n_i}{\delta b_n} dS + \int_{S_{W_p}} F_{S_i} n_i \frac{\delta(dS)}{\delta b_n} \\
 & + \int_S m_i^\alpha n_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\delta x_i}{\delta b_n} \right) dS - \int_{S_{W_p}} \frac{\partial m_i^\alpha}{\partial x_j} n_j \frac{\delta x_i}{\delta b_n} dS + \int_{S_{W_p}} m_i^\alpha R_i^m n_k \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

Μετά τη διατύπωση των συζυγών εξισώσεων του προβλήματος ροής και των συζυγών gdPDEs, οι όροι που χρειάζονται περαιτέρω επεξεργασία είναι οι:

$$T_1 = \int_S \left[ u_i v_j n_j + \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i + \frac{\partial F_{S_k}}{\partial v_i} n_k \right] \frac{\partial v_i}{\partial b_n} dS \tag{2.30}$$

$$T_2 = \int_S \left( u_j n_j + \frac{\partial F_{S_i}}{\partial p} n_i \right) \frac{\partial p}{\partial b_n} dS \tag{2.31}$$

$$T_3 = \int_S \left( -u_i n_j + \frac{\partial F_{S_k}}{\partial \tau_{ij}} n_k \right) \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial b_n} dS \tag{2.32}$$

$$T_4 = \int_S m_i^\alpha n_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\delta x_i}{\delta b_n} \right) dS \tag{2.33}$$

$$T_5 = \int_{S_{W_p}} m_i^\alpha R_i^m n_k \frac{\delta x_k}{\delta b_n} dS \tag{2.34}$$

Μέσω της επεξεργασίας αυτών των όρων και τη χρησιμοποίηση των οριακών συνθηκών των εξισώσεων ροής και των gdPDEs, προκύπτουν οι συζυγείς οριακές συνθήκες των

συζυγών εξισώσεων και η τελική μορφή των παραγώγων ευαισθησίας.

## 2.2.5 Συζυγείς Οριακές Συνθήκες

### 2.2.5.1 Συζυγείς gdPDEs

Οι οριακές συνθήκες για τις συζυγείς gdPDEs (εξίσωση 2.28) προκύπτουν από το ολοκλήρωμα  $T_4$  (εξίσωση 2.33), με το μηδενισμό του συντελεστή του όρου  $\partial/\partial x_j(\delta x_i/\delta b_n)$ . Επομένως, οι οριακές συνθήκες των συζυγών μεταβλητών  $m_k^\alpha$ , κατά μήκος όλων των ορίων, είναι:

$$m_k^\alpha = 0 \quad (2.35)$$

Λόγω των παραπάνω οριακών συνθηκών, το ολοκλήρωμα  $T_5$  (εξίσωση 2.34) εξαφανίζεται.

### 2.2.5.2 Συζυγείς Εξισώσεις της Ροής

#### Οριακές Συνθήκες στην Είσοδο $S_I$

Στην είσοδο  $S_I$ , όπως αναφέρεται στην ενότητα 2.1.2, εφαρμόζονται Dirichlet οριακές συνθήκες στις μεταβλητές  $v_i$  με αποτέλεσμα να ισχύει  $\delta v_i/\delta b_n = 0$ . Λόγω του ότι το  $S_I$  παραμένει αμετάβλητο κατά τη βελτιστοποίηση, ισχύει ότι  $\delta x_k/\delta b_n = 0$ . Από την εξίσωση 2.6 και λαμβάνοντας υπόψη τα ανωτέρω, προκύπτει ότι  $\delta v_i/\delta b_n = 0$ . Επομένως, το ολοκλήρωμα  $T_1$  (εξίσωση 2.30) κατά μήκος του  $S_I$  εξαφανίζεται.

Τα ολοκληρώματα  $T_2$  (εξίσωση 2.31) και  $T_3$  (εξίσωση 2.32) εξαλείφονται με τη χρησιμοποίηση των εξισώσεων:

$$u_j n_j = u_{(n)} = -\frac{\partial F_{S_I, i}}{\partial p} n_i \quad (2.36)$$

$$u_{(t)}^I = \frac{\partial F_{S_I, k}}{\partial \tau_{ij}} n_k t_i^I n_j + \frac{\partial F_{S_I, k}}{\partial \tau_{ij}} n_k t_j^I n_i \quad (2.37)$$

$$u_{(t)}^{II} = \frac{\partial F_{S_I,k}}{\partial \tau_{ij}} n_k t_i^{II} n_j + \frac{\partial F_{S_I,k}}{\partial \tau_{ij}} n_k t_j^{II} n_i \quad (2.38)$$

όπου  $t_i^I, t_i^{II}$  είναι οι συνιστώσες των εφαπτόμενων στην επιφάνεια μοναδιαίων διανυσμάτων. Το πρώτο εφαπτόμενο διάνυσμα  $t_i^I$  ορίζεται ως ένα αυθαίρετο μοναδιαίο διάνυσμα παράλληλο στο  $S_I$ , ενώ το  $t_i^{II}$  προκύπτει από το  $t_i^{II} = e_{ijk} n_j t_k^I$ , όπου το  $e_{ijk}$  είναι το σύμβολο μετάθεσης. Οι ποσότητες  $u_{(t)}^I$  και  $u_{(t)}^{II}$  είναι συνιστώσες της συζυγούς ταχύτητας στις  $t_i^I, t_i^{II}$  κατευθύνσεις, αντίστοιχα. Για την απόδειξη των εξισώσεων 2.37, 2.38 ο αναγνώστης παραπέμπεται στο [7]. Είναι άξιο αναφοράς ότι, στην περίπτωση που η συνάρτηση-στόχος  $F$  δεν ορίζεται στην είσοδο του υπολογιστικού χωρίου, τότε οι συζυγείς συνιστώσες της ταχύτητα είναι μηδέν κατά μήκος του  $S_I$ .

Τέλος, αφού καμία οριακή συνθήκη για τη συζυγή μεταβλητή  $q$  δεν εξαλείφει κάποιο από τα ολοκληρώματα  $T_1, T_2, T_3$  (εξισώσεις 2.30 - 2.32), επιλέγεται ως οριακή συνθήκη της συζυγούς πίεσης  $q$  η μηδενική Neumann.

### Οριακές Συνθήκες στην Έξοδο $S_O$

Στην έξοδο  $S_O$ , όπως αναφέρεται στην ενότητα 2.1.2, εφαρμόζεται Dirichlet οριακή συνθήκη στη μεταβλητή  $p$  με αποτέλεσμα να ισχύει  $\delta p / \delta b_n = 0$ . Λόγω του ότι το  $S_O$  παραμένει αμετάβλητο κατά τη βελτιστοποίηση, εκεί ισχύει ότι  $\delta x_k / \delta b_n = 0$ . Από την εξίσωση 2.6 και λαμβάνοντας υπόψη τα ανωτέρω, προκύπτει ότι  $\delta p / \delta b_n = 0$ . Επομένως, το ολοκλήρωμα  $T_2$  (εξίσωση 2.31) κατά μήκος του  $S_O$  εξαφανίζεται. Λόγω της απόστασης του  $S_O$  από τη μεταβαλλόμενη περιοχή, μπορεί να γίνει η παραδοχή ότι η κατανομή της ταχύτητας είναι ομοιόμορφη κατά μήκος του  $S_O$ , με αποτέλεσμα να ισχύει  $\partial \tau_{ij} / \partial b_n = 0$  στο  $S_O$ . Έτσι, το ολοκλήρωμα  $T_3$  (2.32) εξαφανίζεται και αυτό.

Προκειμένου να εξαλειφθεί το ολοκλήρωμα  $T_1$  (2.30), η ολοκληρωτέα ποσότητα εξισώνεται με το μηδέν:

$$u_i v_j n_j + \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i + \frac{\partial F_{S_O,k}}{\partial v_i} n_k = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.39)$$

Στην περίπτωση διδιάστατων ροών, η εξίσωση 2.39 περιλαμβάνει τρεις άγνωστες πο-

σότητες, οι οποίες είναι οι δύο συνιστώσες της συζυγούς ταχύτητας και η συζυγής πίεση. Επομένως, η μία εξ αυτών πρέπει να προκύψει από το εσωτερικό του υπολογιστικού χωρίου. Η ποσότητα που επιλέγεται είναι η κάθετη στην επιφάνεια του ορίου συνιστώσα της συζυγούς ταχύτητας  $u_{(n)}$ . Αντίθετα, στην περίπτωση τριδιάστατων ροών η εξίσωση 2.39 περιλαμβάνει τέσσερις άγνωστες ποσότητες, οι οποίες είναι οι τρεις συνιστώσες της συζυγούς ταχύτητας και η συζυγής πίεση. Η μία εξ αυτών πρέπει να προκύψει από το εσωτερικό του υπολογιστικού χωρίου. Όπως και στη διδιάστατη περίπτωση, η ποσότητα που επιλέγεται είναι η κάθετη στην επιφάνεια του ορίου συνιστώσα της συζυγούς ταχύτητας  $u_{(n)}$ . Για τον υπολογισμό της συζυγούς πίεσης, η εξίσωση 2.39 πολλαπλασιάζεται με το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στην επιφάνεια  $n_i$ , δίνοντας την εξίσωση για τον υπολογισμό της συζυγούς πίεσης:

$$q = u_{(n)}v_{(n)} + 2\nu \frac{\partial u_{(n)}}{\partial n} + \frac{\partial F_{S_{O,k}}}{\partial v_i} n_k n_i = 0 \quad (2.40)$$

Τέλος, οι εφαπτομενικές συζυγείς συνιστώσες της ταχύτητας προκύπτουν από τον πολλαπλασιασμό της εξίσωσης 2.39 με τα εφαπτόμενα στα επιφανειακά διανύσματα  $t_i^l$ ,  $l = 1, 2$ :

$$v_n u_{(t)}^l + \nu \left( \frac{\partial u_{(t)}^l}{\partial n} + \frac{\partial u_{(n)}}{\partial t^l} \right) + \frac{\partial F_{S_{O,k}}}{\partial v_i} n_k t_i^l = 0 \quad (2.41)$$

και από την επίλυση της *Robin* τύπου οριακής συνθήκης που προκύπτει.

### Οριακές Συνθήκες στα Μη-Παραμετροποιημένα/Σταθερά Τοιχώματα $S_W$

Οι οριακές συνθήκες των μεταβλητών ροής κατά μήκος του  $S_W$  είναι ίδιες με τις οριακές συνθήκες στην είσοδο, όπως αναφέρεται στην ενότητα 2.1.2. Επομένως, ακολουθώντας την ίδια διαδικασία που περιγράφεται για τις συζυγείς οριακές συνθήκες στην είσοδο, προκύπτουν οι οριακές συνθήκες για τη συζυγή ταχύτητα κατά μήκος του  $S_W$ :

$$u_{(n)} = -\frac{\partial F_{S_{W,i}}}{\partial p} n_i \quad (2.42)$$

$$u_{\langle t \rangle}^I = \frac{\partial F_{S_{W,k}}}{\partial \tau_{ij}} n_k t_i^I n_j + \frac{\partial F_{S_{W,k}}}{\partial \tau_{ij}} n_k t_j^I n_i \quad (2.43)$$

$$u_{\langle t \rangle}^{II} = \frac{\partial F_{S_{W,k}}}{\partial \tau_{ij}} n_k t_i^{II} n_j + \frac{\partial F_{S_{W,k}}}{\partial \tau_{ij}} n_k t_j^{II} n_i \quad (2.44)$$

Τέλος, για τη συζυγή πίεση  $q$  ορίζεται μηδενική Neumann οριακή συνθήκη κατά μήκος του  $S_W$ .

### Οριακές Συνθήκες στα Παραμετροποιημένα/Μεταβλητά Τοιχώματα $S_{W_p}$

Η ειδοποιός διαφορά μεταξύ των  $S_W$  και  $S_{W_p}$  είναι ότι το  $S_{W_p}$  είναι ελεύθερο να μεταβάλλεται κατά την βελτιστοποίηση, με αποτέλεσμα να ισχύει  $\delta x_k / \delta b_n \neq 0$ . Επίσης, όπως αναφέρεται στην ενότητα 2.1.2, ισχύει  $v_i = 0$  κατά μήκος του  $S_{W_p}$ . Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω και την εξίσωση 2.6, αντί να ισχύει  $\partial v_i / b_n = 0$  όπως στις περιπτώσεις των  $S_I$  και  $S_W$ , ισχύει:

$$\frac{\partial v_i}{\partial b_n} = - \frac{\partial v_i}{\partial x_k} n_k \frac{\delta x_m}{\delta b_n} n_m \quad (2.45)$$

Λόγω της παραπάνω διαφοράς, δεν είναι εφικτή η πλήρης εξάλειψη των ολοκληρωμάτων  $T_1 - T_3$  (εξισώσεις 2.30-2.32) χωρίς την εμφάνιση επιπρόσθετων όρων που συμβάλλουν στη διαμόρφωση του τελικού τύπου των παραγώγων ευαισθησίας. Επομένως, χρησιμοποιώντας την εξίσωση 2.45 και ακολουθώντας την πορεία που αναλύεται στο [7], προκύπτουν οι οριακές συνθήκες για τις συζυγείς μεταβλητές κατά μήκος του  $S_{W_p}$ :

$$u_{\langle n \rangle} = - \frac{\partial F_{S_{W_p,i}}}{\partial p} n_i \quad (2.46)$$

$$u_{\langle t \rangle}^I = \frac{\partial F_{S_{W_p,k}}}{\partial \tau_{ij}} n_k t_i^I n_j + \frac{\partial F_{S_{W_p,k}}}{\partial \tau_{ij}} n_k t_j^I n_i \quad (2.47)$$



$$u_{(t)}^{II} = \frac{\partial F_{S_{W_p,k}}}{\partial \tau_{ij}} n_k t_i^{II} n_j + \frac{\partial F_{S_{W_p,k}}}{\partial \tau_{ij}} n_k t_j^{II} n_i \quad (2.48)$$

μαζί με τη μηδενική *Neumann* συνθήκη για τη συζυγή πίεση  $q$ .

### 2.2.6 Τελική Έκφραση των Παραγώγων Ευαισθησίας

Από την ικανοποίηση των συζυγών εξισώσεων και των οριακών συνθηκών τους, καθώς και την προσθήκη των όρων που προέκυψαν από την παραγωγή των συζυγών οριακών συνθηκών κατά μήκος του  $S_{W_p}$ , η εξίσωση 2.29 μετατρέπεται στην τελική έκφραση των παραγώγων ευαισθησίας:

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_{aug}}{\delta b_n} = & - \int_{S_{W_p}} \left[ \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j - q n_i + \frac{\partial F_{S_{W_p,k}}}{\partial v_i} n_k \right] \frac{\partial v_i}{\partial x_k} n_k \frac{\delta x_m}{\delta b_n} n_m dS \\ & + \int_{S_{W_p}} n_i \frac{\partial F_{S_{W_p,i}}}{\partial x_m} n_m \frac{\delta x_k}{\delta b_n} n_k dS + \int_{S_{W_p}} F_{S_{W_p,i}} \frac{\delta n_i}{\delta b_n} dS + \int_{S_{W_p}} F_{S_{W_p,i}} n_i \frac{\delta(dS)}{\delta b_n} \\ & - \int_{S_{W_p}} \frac{\partial m_i^\alpha}{\partial x_j} n_j \frac{\delta x_i}{\delta b_n} dS \\ & - \int_{S_{W_p}} \left[ \left( -u_{(n)} + \frac{\partial F_{S_{W_p,k}}}{\partial \tau_{lm}} n_k n_l n_m \right) \left( \tau_{ij} \frac{\delta(n_i n_j)}{\delta b_n} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_m} n_m \frac{\delta x_k}{\delta b_n} n_k n_i n_j \right) \right] dS \\ & - \int_{S_{W_p}} \left[ \frac{\partial F_{S_{W_p,k}}}{\partial \tau_{lm}} n_k t_l^I t_m^I \left( \tau_{ij} \frac{\delta(t_i^I t_j^I)}{\delta b_n} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_m} n_m \frac{\delta x_k}{\delta b_n} n_k t_i^I t_j^I \right) \right] dS \\ & - \int_{S_{W_p}} \left[ \left( \frac{\partial F_{S_{W_p,k}}}{\partial \tau_{lm}} n_k (t_l^{II} t_m^{II} + t_l^I t_m^I) \right) \left( \tau_{ij} \frac{\delta(t_i^{II} t_j^{II})}{\delta b_n} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_m} n_m \frac{\delta x_k}{\delta b_n} n_k t_i^{II} t_j^{II} \right) \right] dS \\ & - \int_{S_{W_p}} \left[ \frac{\partial F_{S_{W_p,k}}}{\partial \tau_{lm}} n_k t_l^{II} t_m^{II} \left( \tau_{ij} \frac{\delta(t_i^{II} t_j^{II})}{\delta b_n} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_m} n_m \frac{\delta x_k}{\delta b_n} n_k t_i^{II} t_j^{II} \right) \right] dS \end{aligned} \quad (2.49)$$

Η εξίσωση 2.49 αποτελεί την τελική έκφραση των παραγώγων ευαισθησίας για τη γενική συνάρτηση-στόχο της εξίσωσης 2.18.

## 2.3 Βελτιστοποίηση Γεωμετρίας με Άμεσο Έλεγχο της Θέσης των Κόμβων

Όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή, στη διπλωματική εργασία ως μεταβλητές σχεδιασμού  $b_n$  χρησιμοποιούνται οι μετατοπίσεις κατά  $x, y, z$  των κόμβων του επιφανειακού πλέγματος της μεταβαλλόμενης γεωμετρίας ως προς την αρχική γεωμετρία που ξεκινά η διαδικασία της βελτιστοποίησης. Επομένως, το βελτιστοποιημένο τμήμα της γεωμετρίας, σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης, υπολογίζεται ως εξής:

$$x_{n,i} = x_{n,i}^o + b_{n,i}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.50)$$

όπου  $x_{n,i}$  οι συντεταγμένες της επιφάνειας της βελτιστοποιημένης γεωμετρίας,  $x_{i,n}^o$  οι συντεταγμένες της επιφάνειας της αρχικής γεωμετρίας με την οποία ξεκινά η διαδικασία της βελτιστοποίησης,  $b_{i,n}$  οι μετατοπίσεις κατά  $x, y, z$  των κόμβων του επιφανειακού πλέγματος της μεταβαλλόμενης γεωμετρίας ως προς την αρχική γεωμετρία που ξεκινά η διαδικασία της βελτιστοποίησης,  $n = (1, 2, \dots, N)$  ο δείκτης των μεταβλητών σχεδιασμού και  $N$  το πλήθος των μεταβλητών σχεδιασμού.

### 2.3.1 Τρόποι Εξομάλυνσης

Όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή, όταν χρησιμοποιείται ο κομβικός έλεγχος μορφής της γεωμετρίας, είναι αναγκαία η εξομάλυνση (smoothing) των μεταβλητών σχεδιασμού, δηλαδή των μετατοπίσεων κατά  $x, y, z$  των κόμβων του επιφανειακού πλέγματος της μεταβαλλόμενης γεωμετρίας ως προς την αρχική γεωμετρία που ξεκινά η διαδικασία της βελτιστοποίησης, σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης. Στη διπλωματική εργασία χρησιμοποιούνται δύο τρόποι εξομάλυνσης, οι οποίοι αναλύονται στη συνέχεια. Η σπουδαιότητα - αναγκαιότητα των δύο τρόπων εξομάλυνσης στη βελτιστοποίηση θα παρουσιασθεί σε επόμενο κεφάλαιο.

### 2.3.1.1 Εξομάλυνση με Μερική Διαφορική Εξίσωση

Για την εξομάλυνση των μεταβλητών σχεδιασμού, δηλαδή των μετατοπίσεων των κόμβων του επιφανειακού πλέγματος της μεταβαλλόμενης γεωμετρίας ως προς την αρχική γεωμετρία, χρησιμοποιήθηκε η αριθμητική επίλυση ΜΔΕ, διότι ο συγκεκριμένος τρόπος έχει τα εξής πλεονεκτήματα [24]:

- Χαρακτηρίζεται από μικρό υπολογιστικό κόστος.
- Παραλληλοποιείται σχετικά εύκολα.
- Επιτρέπει τη χρησιμοποίηση διαφορετικών παραμέτρων σε κάθε τμήμα του υπολογιστικού χωρίου, με αποτέλεσμα να μπορεί προαιρετικά να εφαρμοστεί διαφορετική εξομάλυνση σε διαφορετικά τμήματα.

Πιο συγκεκριμένα, ως φίλτρο της εξομάλυνσης χρησιμοποιήθηκε η ΜΔΕ του Helmholtz [24],[25]:

$$R_i^b = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left( r^2 \frac{\partial \tilde{b}_i}{\partial x_j} \right) + \tilde{b}_i - b_i = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.51)$$

όπου  $b_i$  οι μεταβλητές σχεδιασμού,  $\tilde{b}_i$  οι εξομαλυμένες με τη ΜΔΕ του Helmholtz μεταβλητές σχεδιασμού και  $r$  η παράμετρος μήκους.

Οι εξισώσεις 2.51 επιλύονται πάνω στην επιφάνεια της μεταβαλλόμενης γεωμετρίας  $S_{W_p}$  με τη μέθοδο των πεπερασμένων εμβαδών (Finite Area Method) [26], επομένως μπορούν να γραφτούν ως εξής:

$$R_i^b = -\frac{\partial}{\partial x_j^s} \left( r^2 \frac{\partial \tilde{b}_i}{\partial x_j^s} \right) + \tilde{b}_i - b_i = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.52)$$

όπου ο εκθέτης  $s$  στο  $x_j^s$  δηλώνει ότι το  $x_j$  ορίζεται πάνω στην επιφάνεια της μεταβαλλόμενης γεωμετρίας.

Η οριακή συνθήκη που συνοδεύει την ΜΔΕ του Helmholtz είναι:

$$\widetilde{b}_i|_l = 0 \quad (2.53)$$

όπου  $l$  είναι το σύνορο της επιφάνειας της μεταβαλλόμενης γεωμετρίας.

Η παράμετρος μήκους  $r$  σχετίζεται με το πλήθος των γειτονικών κόμβων που συμμετέχουν στην εξομάλυνση του εκάστοτε κόμβου. Πιο συγκεκριμένα, η εξίσωση 2.52 επιλύεται σε κάθε κόμβο της επιφάνειας της μεταβλητής γεωμετρίας, εξομαλύνοντας επαναληπτικά την τιμή της μεταβλητής του εκάστοτε κόμβου με την τιμή των μεταβλητών σχεδιασμού των γειτονικών κόμβων. Αν ο εκάστοτε κόμβος θεωρηθεί ως το κέντρο ενός κύκλου (διδιάστατη ανάλυση) ή σφαίρας (τριδιάστατη ανάλυση) με ακτίνα  $R$ , τότε το πλήθος των γειτονικών κόμβων που συμμετέχουν στην εξομάλυνση του συγκεκριμένου κόμβου εξαρτάται από την ακτίνα  $R$ . Όπως αποδεικνύεται στο [25], η συσχέτιση μεταξύ της παραμέτρου μήκους  $r$  και της ακτίνας  $R$  είναι:

$$r = \frac{R}{2\sqrt{3}} \quad (2.54)$$

Επομένως, μικρές τιμές του  $R$  και κατ' επέκταση του  $r$  συνεπάγονται τοπική επιρροή της εξομάλυνσης, ενώ όσο αυξάνεται η τιμή του  $R$  η επιρροή της εξομάλυνσης τείνει σε ολική.

### 2.3.1.2 Εξομάλυνση γειτνίασης

Ο συγκεκριμένος τρόπος εξομάλυνσης δεν σχετίζεται άμεσα με το κομβικό έλεγχο μορφής, αλλά είναι απαραίτητος για υπολογιστικούς λόγους. Με την εξομάλυνση γειτνίασης (proximity smoothing) επιτυγχάνεται η συνέχεια της γεωμετρίας μεταξύ μεταβαλλόμενης και αμετάβλητης γεωμετρίας. Σε κάθε κόμβο της επιφάνειας της μεταβαλλόμενης γεωμετρίας υπολογίζεται η ποσότητα  $r_p$  ως εξής:

$$r_p = \min\left(\frac{R_d}{R_p}, 1\right) \quad (2.55)$$

όπου  $R_d$  η απόσταση του κόμβου από την κοντινότερη αμετάβλητη γεωμετρία,  $R_p$  η μέγιστη απόσταση που έχει ισχύ η εξομάλυνση γειτνίασης.

Στη συνέχεια, σε κάθε κόμβο της μεταβαλλόμενης γεωμετρίας υπολογίζεται ο συντελεστής  $m(r_p)$  ως εξής:

$$m(r_p) = -2r_p^3 + 3r_p^2 \quad (2.56)$$

Ο συντελεστής  $m(r_p)$  έχει τις εξής ιδιότητες:

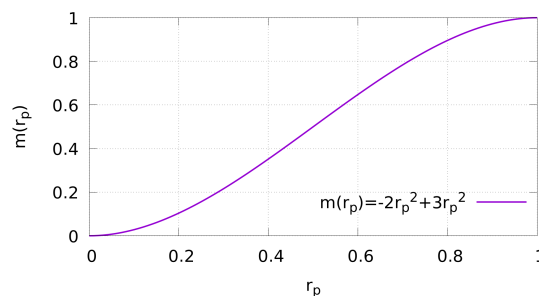
- $m(0) = 0$ : Άρα, για  $r_p = 0$  η τιμή του  $b'_i = 0$  (εξίσωση 2.57) που είναι το επιθυμητό, καθώς ο κόμβος για  $r_p = 0$  ανήκει στο αμετάβλητο τμήμα της γεωμετρίας που η μετατόπιση του πρέπει να ισούται με μηδέν.
- $m(1) = 1$ : Άρα, για  $r_p = 1$  το  $b'_i$  (εξίσωση 2.57) ισούται με το μη εξομαλυμένο  $b_i$ .
- $\frac{dm(0)}{dr_p} = \frac{dm(1)}{dr_p} = 0$ : Άρα, η επίδραση της εξομάλυνσης ξεκινάει ( $r_p = 0$ ) και σβήνει ( $r_p = 1$ ) ομαλά.

Η απεικόνιση του  $m(r_p)$  δίνεται στο σχήμα 2.1.

Τέλος, κάθε μεταβλητή σχεδιασμού πολλαπλασιάζεται με τον αντίστοιχο συντελεστή  $m(r_p)$ :

$$b'_i = m(r_p)b_i, \quad i = 1, 2, (3) \quad (2.57)$$

όπου  $b_i$  οι μεταβλητές σχεδιασμού και  $b'_i$  οι φιλτραρισμένες με την εξομάλυνση γειτνίασης μεταβλητές σχεδιασμού.



Σχήμα 2.1: Ο συντελεστής  $m(r_p)$  της εξομάλυνσης γειτνίασης.

### 2.3.2 Η Συνεχής Συζυγής Μέθοδος στην Εξομάλυνση

Η παράγωγος της συνάρτησης-στόχου ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού  $\delta F/\delta b_n$ , όταν η γεωμετρία ορίζεται με τον κομβικό έλεγχο μορφής, υπολογίζεται μέσω του κανόνα τις αλυσίδας:

$$\frac{\delta F}{\delta b_n} = \frac{\delta F}{\delta x_i} \frac{\delta x_i}{\delta b_n} \quad (2.58)$$

όπου  $x_i$  είναι οι συντεταγμένες της επιφάνειας της μεταβαλλόμενης γεωμετρίας,  $b_n$  είναι οι μετατοπίσεις των κόμβων του επιφανειακού πλέγματος της μεταβαλλόμενης γεωμετρίας ως προς την αρχική γεωμετρία που ξεκινά η διαδικασία της βελτιστοποίησης,  $\delta F/\delta x_i$  είναι η παράγωγος της συνάρτησης-στόχου ως προς τις συντεταγμένες της μεταβαλλόμενης γεωμετρίας και το  $\delta x_i/\delta b_n$  είναι οι παράγωγοι του πλέγματος.

Οι όροι  $\delta F/\delta x_i$  της εξίσωσης 2.58 υπολογίζονται από την εξίσωση 2.49. Για τις παραγώγους του πλέγματος  $\delta x_i/\delta b_n$  της εξίσωσης 2.58 δεν υπάρχει άμεσος τρόπος υπολογισμού τους στην περίπτωση του κομβικού ελέγχου μορφής, όπως για παράδειγμα στην CAD παραμετροποίηση που υπολογίζονται από τη διαφορίση της εξίσωσης της παραμετροποίησης που περιγράφει το όριο της γεωμετρίας. Οι παράγωγοι του πλέγματος μπορούν να υπολογιστούν με χρήση της μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών που αυξάνει το υπολογιστικό κόστος γραμμικά με το πλήθος των μεταβλητών σχεδιασμού. Αντί αυτού, επιλέγεται να εφαρμοσθεί η συνεχής συζυγής μέθοδος στην εξομάλυνση και να παραχθεί μια ισοδύναμη σχέση της εξίσωσης 2.58, με την οποία το υπολογιστικό κόστος είναι ανεξάρτητο του πλήθους των μεταβλητών σχεδιασμού, όπως θα αποδειχθεί στη συνέχεια. Η συνεχής συζυγής μέθοδος της διαδικασίας της εξομάλυνσης θα παρουσιασθεί με δύο παραλλαγές που βασίζονται στη σειρά με την οποία εφαρμόζονται οι παραπάνω τρόποι εξομάλυνσης στις μεταβλητές σχεδιασμού, δηλαδή στις μετατοπίσεις των κόμβων του επιφανειακού πλέγματος της μεταβαλλόμενης γεωμετρίας ως προς την αρχική γεωμετρία. Γενικά, η ακτίνα  $R$ , και κατά συνέπεια η παράμετρος μήκους  $r$ , μπορεί είτε να μεταβάλλεται κατά μήκος της μεταβαλλόμενης γεωμετρίας είτε να παραμένει σταθερή. Στη διπλωματική εργασία εξετάστηκαν και οι δύο παραπάνω περιπτώσεις. Όμως, η ανάλυση που ακολουθεί υιοθετεί τη γενική μορφή των εξισώσε-

ων, ώστε να περιλαμβάνονται και οι δύο περιπτώσεις. Τέλος, στις ακόλουθες ενότητες ο συντελεστής μήκους  $r$ , ανεξαρτήτως αν μεταβάλλεται χωρικά ή όχι, θεωρείται ότι παραμένει σταθερός κατά τη βελτιστοποίηση.

### 2.3.2.1 Παραλλαγή 1

Στην παραλλαγή αυτή, εφαρμόζεται πρώτα η εξομάλυνση γειτνίασης στις μετατοπίσεις των κόμβων του επιφανειακού πλέγματος της μεταβαλλόμενης γεωμετρίας ως προς την αρχική γεωμετρία και μετά εξομαλύνονται με τη ΜΔΕ του Helmholtz. Για τη συνέχεια, με  $b_i$  συμβολίζονται οι μη εξομαλυμένες μεταβλητές σχεδιασμού, με  $b'_i$  συμβολίζονται οι μεταβλητές σχεδιασμού που έχουν υποστεί την εξομάλυνση γειτνίασης (εξισώσεις 2.55 - 2.57) και τέλος με  $\tilde{b}_i$  συμβολίζονται οι μεταβλητές σχεδιασμού που έχουν εξομαλυνθεί πρώτα με την εξομάλυνση γειτνίασης και στη συνέχεια με τις εξισώσεις του Helmholtz. Οι ΜΔΕ του Helmholtz γίνονται:

$$R_i^{\tilde{b}} = -\frac{\partial}{\partial x_j^s} \left( r^2 \frac{\partial \tilde{b}_i}{\partial x_j^s} \right) + \tilde{b}_i - b'_i = 0, \quad i = 1, 2, (3) \quad (2.59)$$

όπου οι μεταβλητές σχεδιασμού  $b'_i$  υπολογίζονται από τη σχέση 2.57 και οι οριακές συνθήκες είναι:

$$\tilde{b}_i|_l = 0 \quad (2.60)$$

όπου  $l$  το σύνορο της μεταβαλλόμενης επιφάνειας  $S_{W_p}$ .

Επομένως, η βελτιστοποιημένη γεωμετρία, σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης, υπολογίζεται από τις εξισώσεις:

$$x_i = x_i^o + \tilde{b}_i, \quad i = 1, 2, (3) \quad (2.61)$$

όπου με  $x_i$  συμβολίζονται οι συντεταγμένες της βελτιστοποιημένης γεωμετρίας και με  $x_i^o$  συμβολίζονται οι συντεταγμένες της αρχικής γεωμετρίας με την οποία ξεκινά η διαδικασία της βελτιστοποίησης.

Ο υπολογισμός των παραγώγων του πλέγματος, χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας, γίνεται ως εξής:

$$\frac{\delta x_i}{\delta b_n} = \frac{\delta x_i}{\delta \tilde{b}_l} \frac{\delta \tilde{b}_l}{\delta b_n} \quad (2.62)$$

Ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους της εξίσωσης 2.62, από τη διαφορίση της εξίσωσης 2.61, γίνεται:

$$\frac{\delta x_i}{\delta b_n} = \delta_i^l \frac{\delta \tilde{b}_l}{\delta b_n} = \frac{\delta \tilde{b}_i}{\delta b_n} \quad (2.63)$$

όπου  $\delta_i^l$  είναι το δέλτα του Kronecker.

Από τις εξισώσεις 2.58 και 2.63 προκύπτει ότι, οι όροι που χρειάζεται να υπολογιστούν με τις πεπερασμένες διαφορές και αυξάνουν το υπολογιστικό κόστος είναι τα  $\delta \tilde{b}_i / \delta b_n$ .

Η διαδικασία για τον υπολογισμό των παραγώγων ευαισθησίας, μέσω της εφαρμογής της συζυγούς μεθόδου στη διαδικασία της εξομάλυνσης, περιγράφεται στη συνέχεια.

Όπως αποδείχθηκε στην ενότητα 2.2.1, ισχύει ότι:

$$J = F - \int_{S_{W_p}} \Psi_i R_i^{\tilde{b}} dS \quad (2.64)$$

όπου  $R_i^{\tilde{b}}$  το υπόλοιπο των ΜΔΕ του Helmholtz (εξισώσεις 2.59).

Από τη διαφορίση της εξίσωσης 2.64 ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού προκύπτει:

$$\begin{aligned} \frac{\delta J}{\delta b_n} &= \frac{\delta F}{\delta b_n} - \frac{\delta}{\delta b_n} \int_{S_{W_p}} \Psi_i R_i^{\tilde{b}} dS \\ &= \frac{\delta F}{\delta b_n} - \int_{S_{W_p}} \Psi_i \frac{\delta}{\delta b_n} (R_i^{\tilde{b}}) dS \end{aligned} \quad (2.65)$$

Η εξίσωση 2.65 με περαιτέρω ανάπτυξη των όρων της, χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις



2.59, γίνεται:

$$\frac{\delta J}{\delta b_n} = \underbrace{\frac{\delta F}{\delta b_n}}_{T_1} + \underbrace{\int_{S_{Wp}} \Psi_i \frac{\partial}{\partial x_j^s} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial x_j^s} \left( \frac{\delta \tilde{b}_i}{\delta b_n} \right) \right) dS}_{T_2} - \int_{S_{Wp}} \Psi_i \frac{\delta \tilde{b}_i}{\delta b_n} dS + \underbrace{\int_{S_{Wp}} \Psi_i \frac{\delta b'_i}{\delta b_n} dS}_{T_3} \quad (2.66)$$

Ο όρος  $T_1$  της εξίσωσης 2.66, χρησιμοποιώντας την εξίσωση 2.58, γίνεται:

$$T_1 = \frac{\delta F}{\delta b_n} = \frac{\delta F}{\delta x_i} \frac{\delta x_i}{\delta b_n} \quad (2.67)$$

όπου ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους της εξίσωσης 2.67 υπολογίζεται από την εξίσωση 2.49.

Επομένως, η εξίσωση 2.67 λόγω των εξισώσεων 2.49 και 2.63 γίνεται:

$$T_1 = \int_{S_{Wp}} \frac{\delta f}{\delta x_i} \frac{\delta \tilde{b}_i}{\delta b_n} dS \quad (2.68)$$

Ο όρος  $T_2$  της εξίσωσης 2.66 εφαρμόζοντας δύο φορές το θεώρημα Green-Gauss γίνεται:

$$T_2 = \int_{S_{Wp}} \frac{\partial}{\partial x_j^s} \left( r^2 \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_j^s} \right) \frac{\delta \tilde{b}_i}{\delta b_n} dS + \oint_l \Psi_i n_j r^2 \frac{\partial}{\partial x_j^s} \left( \frac{\delta \tilde{b}_i}{\delta b_n} \right) dl - \oint_l r^2 \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_j^s} n_j \frac{\delta \tilde{b}_i}{\delta b_n} dl \quad (2.69)$$

Ο όρος  $T_3$ , χρησιμοποιώντας την εξίσωση 2.57, γίνεται:

$$T_3 = \int_{S_{Wp}} \Psi_i m \delta_i^n dS = \int_{S_{Wp}} m \Psi_n dS \quad (2.70)$$

Η εξίσωση 2.66, χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις 2.68 - 2.70, γίνεται:

$$\begin{aligned} \frac{\delta J}{\delta b_n} = & \int_{S_{Wp}} \left[ \frac{\partial}{\partial x_j^s} \left( r^2 \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_j^s} \right) - \Psi_i + \frac{\delta f}{\delta x_i} \right] \frac{\delta \tilde{b}_i}{\delta b_n} dS + \int_{S_{Wp}} m \Psi_n dS \\ & + \oint_l \Psi_i n_j r^2 \frac{\partial}{\partial x_j^s} \left( \frac{\delta \tilde{b}_i}{\delta b_n} \right) dl - \oint_l r^2 \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_j^s} n_j \frac{\delta \tilde{b}_i}{\delta b_n} dl \end{aligned} \quad (2.71)$$

Από το μηδενισμό του συντελεστή του όρου  $\delta\tilde{b}_i/\delta b_n$  στον πρώτο όρο του δεξιού μέλους της παραπάνω εξίσωσης, προκύπτουν οι συζυγείς εξισώσεις των ΜΔΕ του Helmholtz (εξισώσεις 2.59):

$$R_i^\Psi = -\frac{\partial}{\partial x_j^s} \left( r^2 \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_j^s} \right) + \Psi_i - \frac{\delta f}{\delta x_i} = 0, \quad i = 1, 2, (3) \quad (2.72)$$

Έτσι, ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους της εξίσωσης 2.71 εξαφανίζεται. Οι οριακές συνθήκες της εξίσωσης 2.72 προκύπτουν από το μηδενισμό του τρίτου ολοκληρώματος του δεξιού μέλους της εξίσωσης 2.71:

$$\Psi_i|_l = 0 \quad (2.73)$$

με αποτέλεσμα ο τρίτος όρος του δεξιού μέλους της εξίσωσης 2.71 να εξαφανίζεται.

Οι εξισώσεις 2.59 και 2.72 επιλύονται πάνω στην επιφάνεια της μεταβαλλόμενης γεωμετρίας με τη μέθοδο των πεπερασμένων εμβαδών (Finite Area Method).

Λόγω των οριακών συνθηκών των ΜΔΕ του Helmholtz (εξισώσεις 2.60), ο τελευταίος όρος στην εξίσωση 2.71 εξαφανίζεται. Τέλος, ως επακόλουθο των ανωτέρω η εξίσωση 2.71 γίνεται:

$$\frac{\delta J}{\delta b_n} = \int_{S_{W_p}} m \Psi_n dS \quad (2.74)$$

όπου το πεδίο  $\Psi_n$  υπολογίζεται από την επίλυση των εξισώσεων 2.72. Η εξίσωση 2.74 αποτελεί την παράγωγο ευαισθησίας που προκύπτει από την εφαρμογή της συνεχούς συζυγούς μεθόδου στη διαδικασία της εξομάλυνσης, όταν οι μεταβλητές σχεδιασμού εξομαλύνονται πρώτα με την εξομάλυνση γειτνίασης, και στη συνέχεια, με τις ΜΔΕ του Helmholtz.

Από την παραπάνω διαδικασία προκύπτει ότι, με την εφαρμογή της συνεχούς συζυγούς μεθόδου στην εξομάλυνση, αντί να υπολογιστεί ο όρος  $\delta\tilde{b}_i/\delta b_n$  με το μεγάλο υπολογιστικό κόστος, υπολογίζονται οι συζυγείς μεταβλητές  $\Psi_i$  από τις εξισώσεις 2.72. Το υπολογιστικό κόστος της επίλυσης των εξισώσεων 2.72 είναι ανεξάρτητο των μεταβλη-

τών σχεδιασμού και πολύ μικρότερο από το υπολογιστικό κόστος του όρου  $\delta\tilde{b}_i/\delta b_n$ .

### 2.3.2.2 Η Διαδικασία της Βελτιστοποίησης με την Παραλλαγή 1

Στην ενότητα αυτή, περιγράφεται η διαδικασία της βελτιστοποίησης μορφής γεωμετρίας, που ορίζεται με τον κομβικό έλεγχο μορφής, όταν οι μετατοπίσεις κατά  $x, y, z$  των κόμβων του επιφανειακού πλέγματος της μεταβαλλόμενης γεωμετρίας ως προς την αρχική γεωμετρία που ξεκινά η διαδικασία της βελτιστοποίησης εξομαλύνονται πρώτα με την εξομάλυνση γειτνίασης και στη συνέχεια με την εξομάλυνση Helmholtz (Παραλλαγή 1 - ενότητα 2.3.2.1).

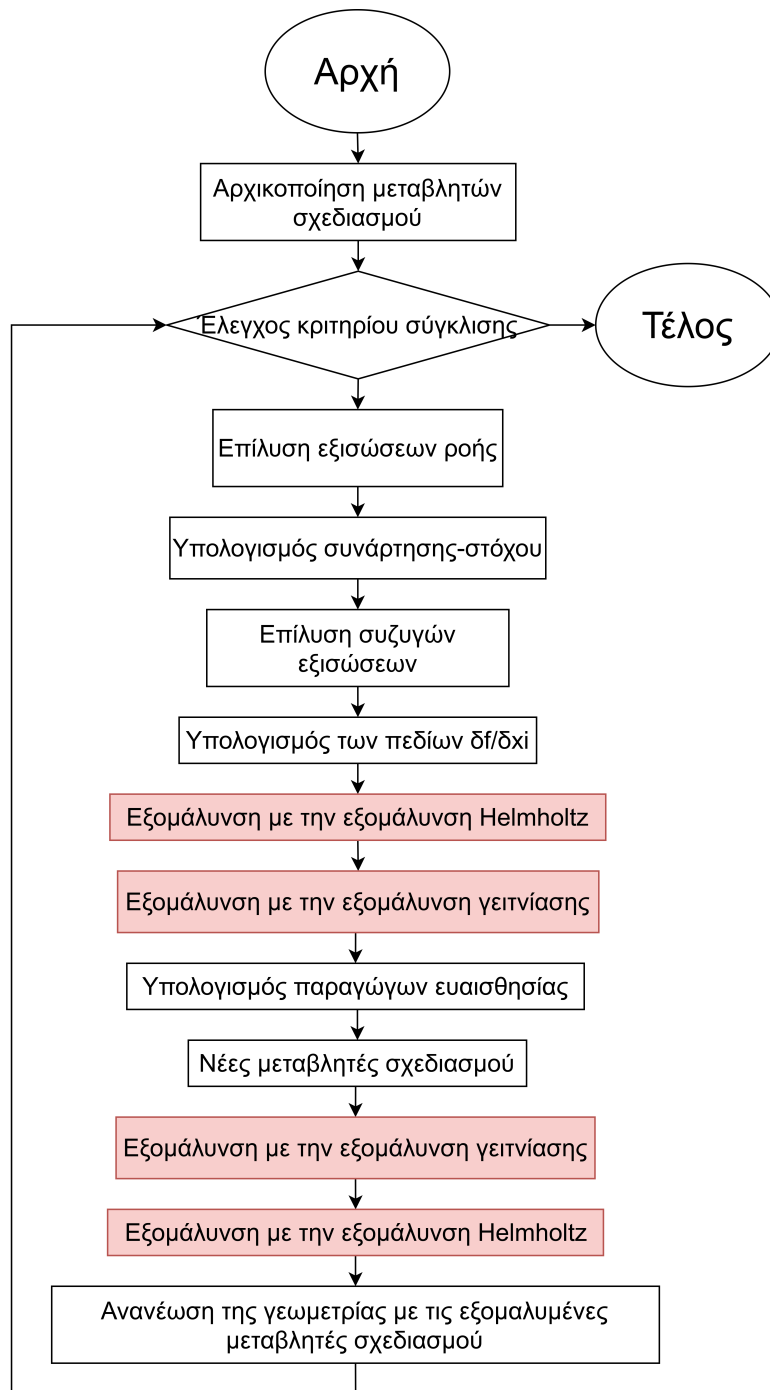
Η διαδικασία της βελτιστοποίησης αποτελείται από τα εξής βήματα:

1. Αρχικοποιούνται οι μεταβλητές σχεδιασμού, δηλαδή οι μετατοπίσεις κατά  $x, y, z$  των κόμβων του επιφανειακού πλέγματος της μεταβαλλόμενης γεωμετρίας ως προς την αρχική γεωμετρία που ξεκινά η διαδικασία της βελτιστοποίησης. Πιο συγκεκριμένα, η αρχική τιμή των μεταβλητών σχεδιασμού ισούται με μηδέν.
2. Έλεγχος κριτηρίου σύγκλισης της διαδικασίας της βελτιστοποίησης. Πιο συγκεκριμένα, ως κριτήριο σύγκλισης χρησιμοποιήθηκε το πλήθος των κύκλων βελτιστοποίησης, το οποίο ορίζεται από το χρήστη.
3. Επίλυση των εξισώσεων ροής (εξισώσεις 2.1 και 2.2).
4. Υπολογισμός συνάρτησης-στόχου  $F$  (εξίσωση 2.22).
5. Επίλυση των συζυγών εξισώσεων (εξισώσεις 2.26, 2.27, και 2.28).
6. Υπολογίζονται τα πεδία των παραγώγων της συνάρτησης-στόχου ως προς τις συντεταγμένες της μεταβαλλόμενης γεωμετρίας ( $\delta f/\delta x_i$ ) από την εξίσωση 2.49. Τα προαναφερθέντα πεδία προκύπτουν από τα επιμέρους επιφανειακά ολοκληρώματα της εξίσωσης 2.49 που απαρτίζουν την παράγωγο  $\delta F/\delta x_i$ , η οποία γράφεται ως εξής:

$$\frac{\delta F}{\delta x_i} = \int_{S_{W_p}} \frac{\delta f}{\delta x_i} dS$$

7. Υπολογίζονται τα πεδία  $\Psi_i$  από την εξομάλυνση με τις ΜΔΕ του Helmholtz των  $\delta f / \delta x_i$  (εξισώσεις 2.72).
8. Υπολογίζονται οι παράγωγοι ευαισθησίας από την εξίσωση 2.74, όπου η ολοκληρωτέα ποσότητα  $m\Psi_n$  αποτελεί την εξομάλυνση με εξομάλυνση γειτνίασης των πεδίων  $\Psi_i$ .
9. Ανανεώνονται οι μεταβλητές σχεδιασμού του τρέχοντος κύκλου βελτιστοποίησης με τη LBFGS μέθοδο ανανέωσης (Εξίσωση 2.94). Αυτές οι μεταβλητές σχεδιασμού μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελούν τις μη εξομαλυμένες μεταβλητές σχεδιασμού. Επίσης, θα χρησιμοποιηθούν για την ανανέωση των μεταβλητών σχεδιασμού στον επόμενο κύκλο βελτιστοποίησης.
10. Εξομάλυνση των μεταβλητών σχεδιασμού, που υπολογίζονται στο προηγούμενο βήμα, με την εξομάλυνση γειτνίασης (Εξισώσεις 2.55-2.57).
11. Εξομάλυνση των μεταβλητών σχεδιασμού, που υπολογίζονται στο προηγούμενο βήμα, με την εξομάλυνση Helmholtz (Εξισώσεις 2.59).
12. Ανανέωση της γεωμετρίας (εξίσωση 2.61) με τις εξομαλυμένες μεταβλητές σχεδιασμού που υπολογίζονται στο προηγούμενο βήμα. Δηλαδή, για την ανανέωση της γεωμετρίας χρησιμοποιούνται οι μεταβλητές σχεδιασμού που έχουν εξομαλυνθεί πρώτα με την εξομάλυνση γειτνίασης και, στη συνέχεια, με την εξομάλυνση Helmholtz.
13. Επιστροφή στο βήμα 2.

Η παραπάνω διαδικασία βελτιστοποίησης παρατίθεται υπό μορφή διαγράμματος ροής στο σχήμα 2.2. Επίσης, στο σχήμα 2.2 με κόκκινο απεικονίζονται οι συνιστώσες του διαγράμματος ροής που αλλάζουν στην παραλλαγή 2, οι οποία θα αναλυθεί στη συνέχεια.



Σχήμα 2.2: Ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης μορφής γεωμετρίας, που ορίζεται με τον κομβικό έλεγχο, όταν για την εξομάλυνση των μεταβλητών σχεδιασμού χρησιμοποιείται η παραλλαγή 1.

### 2.3.2.3 Παραλλαγή 2

Στην παραλλαγή αυτή, εφαρμόζεται πρώτα η εξομάλυνση με τις ΜΔΕ του Helmholtz και, στη συνέχεια, η εξομάλυνση γειτνίασης στις μεταβλητές σχεδιασμού, δηλαδή στις μετατοπίσεις των κόμβων του επιφανειακού πλέγματος της μεταβαλλόμενης γεωμετρίας ως προς την αρχική γεωμετρία που ξεκινά η διαδικασία της βελτιστοποίησης. Για τη συνέχεια, με  $b_i$  συμβολίζονται οι μη εξομαλυμένες μεταβλητές σχεδιασμού, με  $b'_i$  συμβολίζονται οι μεταβλητές σχεδιασμού που έχουν εξομαλυνθεί με τις ΜΔΕ του Helmholtz και τέλος με  $\tilde{b}_i$  συμβολίζονται οι μεταβλητές σχεδιασμού που έχουν εξομαλυνθεί πρώτα με τις ΜΔΕ του Helmholtz και, στη συνέχεια, με την εξομάλυνση γειτνίασης. Προσαρμόζοντας τις ΜΔΕ του Helmholtz στους συμβολισμούς της συγκεκριμένης παραλλαγής προκύπτει:

$$R_i^{b'} = -\frac{\partial}{\partial x_j^s} \left( r^2 \frac{\partial b'_i}{\partial x_j^s} \right) + b'_i - b_i = 0, \quad i = 1, 2, (3) \quad (2.75)$$

και οι οριακές συνθήκες είναι:

$$b'_i|_l = 0 \quad (2.76)$$

όπου  $l$  το σύνορο της μεταβαλλόμενης επιφάνειας  $S_{W_p}$ .

Οι εξισώσεις 2.57 της εξομάλυνσης γειτνίασης προσαρμόζονται στους συμβολισμούς της συγκεκριμένης παραλλαγής:

$$\tilde{b}_i = m(r_p)b'_i, \quad i = 1, 2, (3) \quad (2.77)$$

Η βελτιστοποιημένη γεωμετρία, σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης, υπολογίζεται από τις εξισώσεις:

$$x_i = x_i^o + \tilde{b}_i, \quad i = 1, 2, (3) \quad (2.78)$$

όπου με  $x_i$  συμβολίζονται οι συντεταγμένες της βελτιστοποιημένης γεωμετρίας και με  $x_i^o$  συμβολίζονται οι συντεταγμένες της αρχικής γεωμετρίας με την οποία ξεκινάει η βελτιστοποίηση.

Ο υπολογισμός των παραγώγων του πλέγματος, χρησιμοποιώντας τον κανόνα της  $\alpha$ -

λυσίδας, γίνεται ως εξής:

$$\frac{\delta x_i}{\delta b_n} = \frac{\delta x_i}{\delta \tilde{b}_l} \frac{\delta \tilde{b}_l}{\delta b'_k} \frac{\delta b'_k}{\delta b_n} \quad (2.79)$$

Η εξίσωση 2.79, χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις 2.77 και 2.78 αφού πρώτα έχουν διαφοριστεί, γίνεται:

$$\frac{\delta x_i}{\delta b_n} = \delta_i^l m \delta_l^k \frac{\delta b'_k}{\delta b_n} = m \frac{\delta b'_i}{\delta b_n} \quad (2.80)$$

όπου  $\delta_i^l$  και  $\delta_l^k$  είναι το δέλτα του Kronecker.

Από τις εξισώσεις 2.58 και 2.80 προκύπτει ότι, οι όροι που χρειάζεται να υπολογιστούν με τις πεπερασμένες διαφορές και αυξάνουν το υπολογιστικό κόστος είναι τα  $\delta b'_i / \delta b_n$ .

Η διαδικασία για την παραγωγή των παραγώγων ευαισθησίας, μέσω της εφαρμογής της συζυγούς μεθόδου στη διαδικασία της εξομάλυνσης, περιγράφεται στη συνέχεια.

Όπως και στην παραλλαγή 1, ισχύει ότι:

$$J = F - \int_{S_{W_p}} \Psi_i R_i^{b'} dS \quad (2.81)$$

όπου  $R_i^{b'}$  το υπόλοιπο των ΜΔΕ του Helmholtz (εξισώσεις 2.75).

Από τη διαφορίση της εξίσωσης 2.81 ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού προκύπτει:

$$\begin{aligned} \frac{\delta J}{\delta b_n} &= \frac{\delta F}{\delta b_n} - \frac{\delta}{\delta b_n} \int_{S_{W_p}} \Psi_i R_i^{b'} dS \\ &= \frac{\delta F}{\delta b_n} - \int_{S_{W_p}} \Psi_i \frac{\delta}{\delta b_n} (R_i^{b'}) dS \end{aligned} \quad (2.82)$$

Η εξίσωση 2.82 με περαιτέρω ανάπτυξη των όρων της, χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις 2.75, γίνεται:

$$\frac{\delta J}{\delta b_n} = \underbrace{\frac{\delta F}{\delta b_n}}_{T_1} + \underbrace{\int_{S_{W_p}} \Psi_i \frac{\partial}{\partial x_j^s} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial x_j^s} \left( \frac{\delta b'_i}{\delta b_n} \right) \right) dS}_{T_2} - \int_{S_{W_p}} \Psi_i \frac{\delta b'_i}{\delta b_n} dS + \underbrace{\int_{S_{W_p}} \Psi_i \frac{\delta b_i}{\delta b_n} dS}_{T_3} \quad (2.83)$$

Ο όρος  $T_1$  της εξίσωσης 2.83, χρησιμοποιώντας την εξίσωση 2.58 όπως και στην παραλλαγή 1, γίνεται:

$$T_1 = \frac{\delta F}{\delta b_n} = \frac{\delta F}{\delta x_i} \frac{\delta x_i}{\delta b_n} \quad (2.84)$$

όπου ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους της εξίσωσης 2.84 υπολογίζεται από την εξίσωση 2.49.

Επομένως, η εξίσωση 2.84 λόγω των εξισώσεων 2.49 και 2.80, γίνεται:

$$T_1 = \int_{S_{W_p}} m \frac{\delta f}{\delta x_i} \frac{\delta b_i'}{\delta b_n} dS \quad (2.85)$$

Ο όρος  $T_2$  της εξίσωσης 2.83 εφαρμόζοντας δύο φορές το θεώρημα Green-Gauss γίνεται:

$$T_2 = \int_{S_{W_p}} \frac{\partial}{\partial x_j^s} \left( r^2 \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_j^s} \right) \frac{\delta b_i'}{\delta b_n} dS + \oint_l r^2 \Psi_i n_j \frac{\partial}{\partial x_j^s} \left( \frac{\delta b_i'}{\delta b_n} \right) dl - \oint_l r^2 \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_j^s} n_j \frac{\delta b_i'}{\delta b_n} dl \quad (2.86)$$

Ο όρος  $T_3$  αν αναλυθεί περαιτέρω, γίνεται:

$$T_3 = \int_{S_{W_p}} \Psi_i \delta_i^n dS = \int_{S_{W_p}} \Psi_n dS \quad (2.87)$$

Η εξίσωση 2.83, χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις 2.85 - 2.87, γίνεται:

$$\begin{aligned} \frac{\delta J}{\delta b_n} = & \int_{S_{W_p}} \left( \frac{\partial}{\partial x_j^s} \left( r^2 \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_j^s} \right) - \Psi_i + m \frac{\delta f}{\delta x_i} \right) \frac{\delta b_i'}{\delta b_n} dS + \int_{S_{W_p}} \Psi_n dS \\ & + \oint_l r^2 \Psi_i n_j \frac{\partial}{\partial x_j^s} \left( \frac{\delta b_i'}{\delta b_n} \right) dl - \oint_l r^2 \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_j^s} n_j \frac{\delta b_i'}{\delta b_n} dl \end{aligned} \quad (2.88)$$

Από τον μηδενισμό του συντελεστή του όρου  $\delta b_i'/\delta b_n$  στον πρώτο όρο του δεξιού μέλους της παραπάνω εξίσωσης, προκύπτουν οι συζυγείς εξισώσεις των ΜΔΕ του



Helmholtz (εξισώσεις 2.75):

$$R_i^\Psi = -\frac{\partial}{\partial x_j^s} \left( r^2 \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_j^s} \right) + \Psi_i - m \frac{\delta f}{\delta x_i} = 0, \quad i = 1, 2, (3) \quad (2.89)$$

Έτσι, ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους της εξίσωσης 2.88 εξαφανίζεται. Οι οριακές συνθήκες της εξίσωσης 2.89 προκύπτουν από τον μηδενισμό του τρίτου ολοκληρώματος του δεξιού μέλους της εξίσωσης 2.88:

$$\Psi_i|_l = 0 \quad (2.90)$$

με αποτέλεσμα ο τρίτος όρος του δεξιού μέλους της εξίσωσης 2.88 να εξαφανίζεται.

Οι εξισώσεις 2.75 και 2.89 επιλύονται πάνω στην επιφάνεια της μεταβαλλόμενης γεωμετρίας.

Λόγω των οριακών συνθηκών των ΜΔΕ του Helmholtz (εξισώσεις 2.76), ο τελευταίος όρος στην εξίσωση 2.88 εξαφανίζεται. Τέλος, ως επακόλουθο των ανωτέρω, η εξίσωση 2.88 γίνεται:

$$\frac{\delta J}{\delta b_n} = \int_{S_{W_p}} \Psi_n dS \quad (2.91)$$

όπου το πεδίο  $\Psi_n$  υπολογίζεται από την επίλυση των εξισώσεων 2.89. Η εξίσωση 2.91 αποτελεί την παράγωγο ευαισθησίας που προκύπτει από την εφαρμογή της συνεχούς συζυγούς μεθόδους στη διαδικασία της εξομάλυνσης, όταν οι μεταβλητές σχεδιασμού εξομαλύνονται πρώτα με τις ΜΔΕ του Helmholtz και, στη συνέχεια, με την εξομάλυνση γειτνίασης.

Από την παραπάνω διαδικασία προκύπτει ότι, με τη εφαρμογή της συνεχούς συζυγούς μεθόδου στην εξομάλυνση, αντί να υπολογιστεί ο όρος  $\delta b'_i / \delta b_n$  με το μεγάλο υπολογιστικό κόστος, υπολογίζονται οι συζυγείς μεταβλητές  $\Psi_i$  από τις εξισώσεις 2.89. Το υπολογιστικό κόστος της επίλυσης των εξισώσεων 2.89 είναι ανεξάρτητο των μεταβλητών σχεδιασμού και πολύ μικρότερο από το υπολογιστικό κόστος του όρου  $\delta b'_i / \delta b_n$ .

### 2.3.2.4 Η Διαδικασία της Βελτιστοποίησης με την Παραλλαγή 2

Στην ενότητα αυτή, περιγράφεται η διαδικασία της βελτιστοποίησης μορφής γεωμετρίας, που ορίζεται με τον κομβικό έλεγχο μορφής, όταν οι μετατοπίσεις κατά  $x, y, z$  των κόμβων του επιφανειακού πλέγματος της μεταβαλλόμενης γεωμετρίας ως προς την αρχική γεωμετρία που ξεκινά η διαδικασία της βελτιστοποίησης εξομαλύνονται πρώτα με την εξομάλυνση Helmholtz και στην συνέχεια με την εξομάλυνση γειτνίασης (Παραλλαγή 2 - ενότητα 2.3.2.3).

Η διαδικασία της βελτιστοποίησης αποτελείται από τα εξής βήματα:

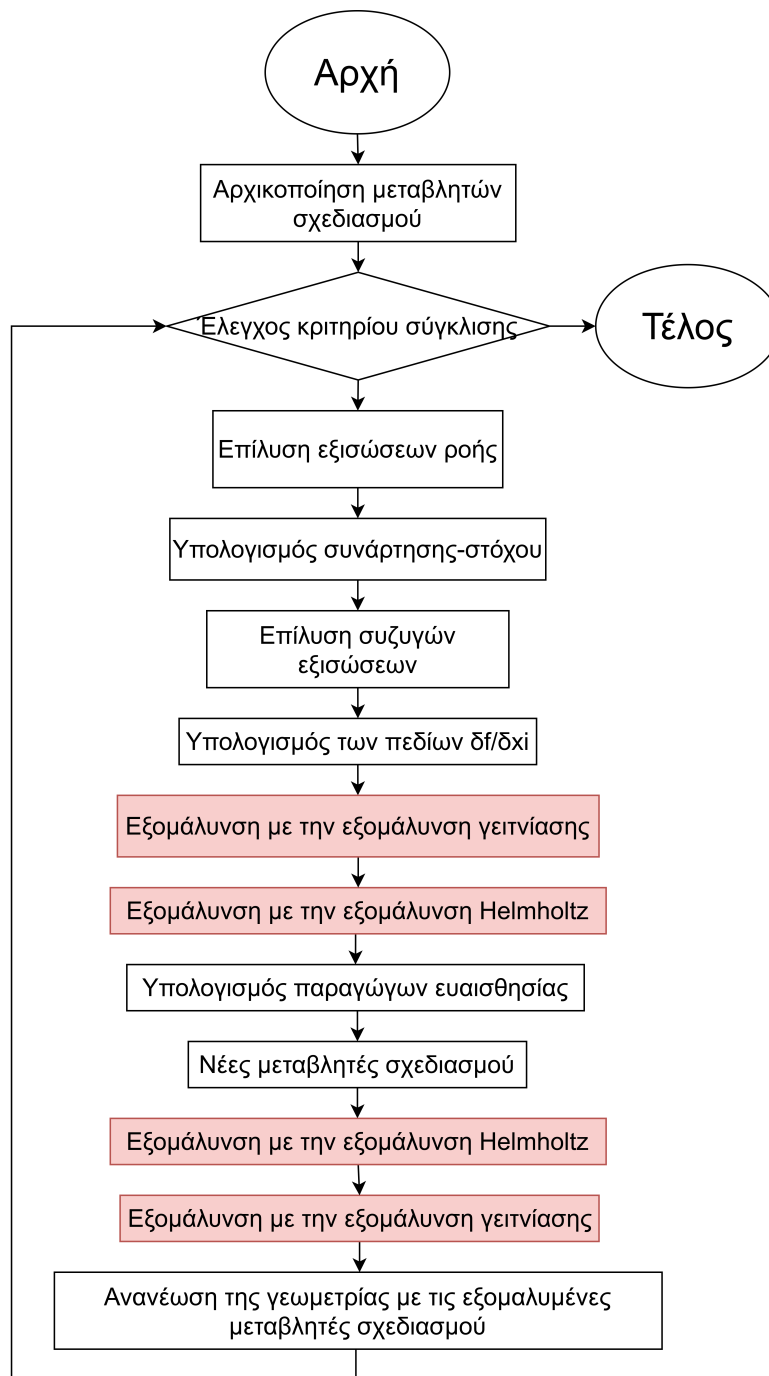
1. Αρχικοποιούνται οι μεταβλητές σχεδιασμού, δηλαδή οι μετατοπίσεις κατά  $x, y, z$  των κόμβων του επιφανειακού πλέγματος της μεταβαλλόμενης γεωμετρίας ως προς την αρχική γεωμετρία που ξεκινά η διαδικασία της βελτιστοποίησης. Πιο συγκεκριμένα, η αρχική τιμή των μεταβλητών σχεδιασμού ισούται με μηδέν.
2. Έλεγχος κριτηρίου σύγκλισης της διαδικασίας της βελτιστοποίησης. Πιο συγκεκριμένα, ως κριτήριο σύγκλισης χρησιμοποιήθηκε το πλήθος των κύκλων βελτιστοποίησης, το οποίο ορίζεται από το χρήστη.
3. Επίλυση των εξισώσεων ροής (εξισώσεις 2.1 και 2.2).
4. Υπολογισμός συνάρτησης-στόχου  $F$  (εξίσωση 2.22).
5. Επίλυση των συζυγών εξισώσεων (εξισώσεις 2.26, 2.27, και 2.28).
6. Υπολογίζονται τα πεδία των παραγώγων της συνάρτησης-στόχου ως προς τις συντεταγμένες της μεταβαλλόμενης γεωμετρίας ( $\delta f / \delta x_i$ ) από την εξίσωση 2.49. Τα προαναφερθέντα πεδία προκύπτουν από τα επιμέρους επιφανειακά ολοκληρώματα της εξίσωσης 2.49 που απαρτίζουν την παράγωγο  $\delta F / \delta x_i$ , η οποία γράφεται ως εξής:

$$\frac{\delta F}{\delta x_i} = \int_{S_{w_p}} \frac{\delta f}{\delta x_i} dS$$

7. Υπολογίζονται οι όροι  $m \frac{\delta f}{\delta x_i}$  των εξισώσεων 2.89 που προκύπτουν από την εξομάλυνση με την εξομάλυνση γειτνίασης των πεδίων  $\delta f / \delta x_i$ .

8. Υπολογίζονται τα πεδία  $\Psi_i$  από την εξομάλυνση με τις ΜΔΕ του Helmholtz των  $m \frac{\delta f}{\delta x_i}$  (εξισώσεις 2.89).
9. Υπολογίζονται οι παράγωγοι ευαισθησίας από την εξίσωση 2.91.
10. Ανανεώνονται οι μεταβλητές σχεδιασμού του τρέχοντος κύκλου βελτιστοποίηση με τη LBFGS μέθοδο ανανέωσης (Εξίσωση 2.94). Αυτές οι μεταβλητές σχεδιασμού μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελούν τις μη εξομαλυμένες μεταβλητές σχεδιασμού. Επίσης, θα χρησιμοποιηθούν για την ανανέωση των μεταβλητών σχεδιασμού στον επόμενο κύκλο βελτιστοποίησης.
11. Εξομάλυνση των μεταβλητών σχεδιασμού, που υπολογίζονται στο προηγούμενο βήμα, με την εξομάλυνση Helmholtz (Εξισώσεις 2.75).
12. Εξομάλυνση των μεταβλητών σχεδιασμού, που υπολογίζονται στο προηγούμενο βήμα, με την εξομάλυνση γειτνίασης (Εξισώσεις 2.55, 2.56, 2.77).
13. Ανανέωση της γεωμετρίας (εξίσωση 2.78) με τις εξομαλυμένες μεταβλητές σχεδιασμού που υπολογίζονται στο προηγούμενο βήμα. Δηλαδή, για την ανανέωση της γεωμετρίας χρησιμοποιούνται οι μεταβλητές σχεδιασμού που έχουν εξομαλυνθεί πρώτα με την εξομάλυνση Helmholtz και, στη συνέχεια, με την εξομάλυνση γειτνίασης.
14. Επιστροφή στο βήμα 2.

Η παραπάνω διαδικασία βελτιστοποίησης παρατίθεται υπό μορφή διαγράμματος ροής στο σχήμα 2.3. Επίσης, στο σχήμα 2.3 με κόκκινο απεικονίζονται οι συνιστώσες του διαγράμματος ροής που αλλάζουν στην παραλλαγή 1.



**Σχήμα 2.3:** Ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης μορφής γεωμετρίας, που ορίζεται με τον κομβικό έλεγχο, όταν για την εξομάλυνση των μεταβλητών σχεδιασμού χρησιμοποιείται η παραλλαγή 2.

### 2.3.2.5 Μεταβαλλόμενη ακτίνα $R$

Στην περίπτωση αυτή, η ακτίνα  $R$ , και κατά συνέπεια ο συντελεστής μήκους  $r$ , μεταβάλλεται χωρικά και υπολογίζεται τοπικά σε κάθε κόμβο της επιφάνειας του μεταβλητού ορίου της γεωμετρίας. Δηλαδή, η ακτίνα  $R$  είναι πεδίο πραγματικών αριθμών και όχι μια πραγματική σταθερά. Η τοπική ακτίνα  $R$  στον κόμβο  $i$ , του υπολογιστικού πλέγματος της επιφάνειας της μεταβαλλόμενης γεωμετρίας, συμβολίζεται με  $R_i$  και υπολογίζεται για τριδιάστατα προβλήματα ως εξής:

$$R_i = f_i \cdot \sqrt{A_i} \quad (2.92)$$

όπου  $A_i$  το εμβαδόν της φάτσας του κόμβου  $i$  του υπολογιστικού πλέγματος της επιφάνειας της μεταβαλλόμενης γεωμετρίας,  $i = (1, 2, \dots, N)$  ο δείκτης που δείχνει σε ποιον κόμβο ανήκει η ακτίνα  $R$ ,  $N$  το πλήθος των κόμβων του υπολογιστικού πλέγματος της μεταβαλλόμενης επιφάνειας που ισούται με το πλήθος των μεταβλητών σχεδιασμού και  $f_i$  ο συντελεστής που ορίζει ο χρήσης.

Η τοπική ακτίνας  $R_i$  για διδιάστατα προβλήματα υπολογίζεται ως εξής:

$$R_i = f_i \cdot L_i \quad (2.93)$$

όπου  $L_i$  το μήκος της οριακής ακμής που ενώνει δύο διαδοχικά σημεία του υπολογιστικού πλέγματος του μεταβαλλόμενου ορίου της γεωμετρίας.

Τέλος, η τοπική παράμετρο μήκους  $r_i$  υπολογίζεται σε κάθε κόμβο  $i$  από την εξίσωση 2.54.

### 2.3.3 Μέθοδοι Ανανέωσης των Μεταβλητών Σχεδιασμού

Όπως αναφέρθηκε και στην εισαγωγή, υπάρχουν διάφορες μέθοδοι για την ανανέωση των μεταβλητών σχεδιασμού που βασίζονται στις παραγώγους ευαισθησίας. Αυτές οι

μέθοδοι μπορεί να βασίζονται στην πρώτη ή και στη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης-στόχου ως προς τις μεταβλητές σχεδιασμού. Στη διπλωματική εργασία χρησιμοποιείται η limited memory BFGS (LBFGS), που αποτελεί παραλλαγή της BFGS. Η LBFGS μέθοδος ανήκει στην κατηγορία των Quasi-Newton μεθόδων, δηλαδή χρησιμοποιεί την προσέγγιση της δεύτερης παραγώγου της συνάρτησης-στόχου (εσσιανό μητρώο) για την ανανέωση των μεταβλητών σχεδιασμού.

Οι παραπάνω μέθοδοι ανανέωσης, προκειμένου να ανανεώσουν τις μεταβλητές σχεδιασμού χρησιμοποιούν εξισώσεις της μορφής:

$$b_{n,k+1} = b_{n,k} + \eta_k p_{n,k} \quad (2.94)$$

όπου  $k$  ο μετρητής των κύκλων βελτιστοποίησης,  $b_n$  οι μεταβλητές σχεδιασμού,  $n = (1, 2, \dots, N)$  ο δείκτης των μεταβλητών σχεδιασμού,  $N$  το πλήθος των μεταβλητών σχεδιασμού,  $\eta$  το θετικό βήμα μήκους (step length) και  $p_n$  η κατεύθυνση ανανέωσης.

Η επιλογή της κατεύθυνση ανανέωσης  $\mathbf{p}$ , καθορίζει αν η εξίσωση 2.94 αναφέρεται σε προβλήματα ελαχιστοποίησης ή μεγιστοποίησης της συνάρτησης-στόχου. Για την συνέχεια αυτής της ενότητας, ο δείκτης  $n$  θα παραλειφθεί για λόγους απλότητας.

Το βήμα μήκους  $\eta$  μπορεί να παραμένει σταθερό κατά τη βελτιστοποίηση ή μπορεί να μεταβάλλεται σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης χρησιμοποιώντας κάποια μέθοδο ανίχνευσης κατά γραμμή (Line Search methods). Τέλος, στη περίπτωση που το  $\eta$  παραμένει σταθερό, την τιμή του μπορεί να την καθορίζει ο χρήστης ή να υπολογίζεται από εξίσωση της μορφής:

$$\eta_k = \eta = \frac{\Delta d_{max}}{\Delta d_{act}} \quad (2.95)$$

όπου  $\Delta d_{max}$  είναι η μέγιστη επιτρεπόμενη μετατόπιση των κόμβων της μεταβαλλόμενης γεωμετρίας που δίνει ο χρήστης και  $\Delta d_{act}$  είναι η μέγιστη μετατόπιση των κόμβων της μεταβαλλόμενης γεωμετρίας που υπολογίζεται από τη βελτιστοποίηση για  $\eta = 1$ .

Συνήθως, η κατεύθυνση ανανέωσης  $p_k$  για προβλήματα ελαχιστοποίησης υπολογίζεται

από εξίσωση της μορφής:

$$p_k = -B_k^{-1} \nabla f_k \quad (2.96)$$

όπου το  $B_k$  είναι συμμετρικός πίνακας, η μορφή του οποίου εξαρτάται από τη μέθοδο ανανέωσης που επιλέγεται.

### 2.3.3.1 BFGS

Η BFGS μέθοδος ονομάστηκε έτσι από τα αρχικά των ιδρυτών της Broyden – Fletcher – Goldfarb – Shanno [14]. Ανήκει στην κατηγορία των Quasi-Newton μεθόδων ανανέωσης. Δηλαδή, αντί να υπολογιστεί και να χρησιμοποιηθεί το ακριβές εσσιανό μητρώο  $\nabla^2 f$  που συνήθως χαρακτηρίζεται από υψηλό υπολογιστικό κόστος, χρησιμοποιείται μια προσέγγισή του διατηρώντας ταυτόχρονα τους υψηλούς ρυθμούς σύγκλισης. Επομένως, ο πίνακας  $B_k$  της εξίσωσης 2.96, στην περίπτωση της BFGS μεθόδου, είναι η προσέγγιση του εσσιανού μητρώου  $\nabla^2 f$  και ανανεώνεται σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης. Σημαντική προϋπόθεση προκειμένου η LBFGS μέθοδος να επιτύχει υψηλούς ρυθμούς σύγκλισης είναι, οι παράγωγοι ευαισθησίας να υπολογίζονται με μεγάλη ακρίβεια. Σε αντίθετη περίπτωση, δηλαδή όταν το πρωτεύον και συζυγές πρόβλημα δυσκολεύονται να συγχλίνουν, συνιστάται η χρήση της μεθόδου των συζυγών κλίσεων.

Η προσέγγιση  $B_{k+1}$  του εσσιανού μητρώου πρέπει να ικανοποιεί την ακόλουθη εξίσωση, γνωστή ως εξίσωση της τέμνουσας (secant equation), προκειμένου να έχει παρόμοιες ιδιότητες με το πραγματικό εσσιανό μητρώο:

$$B_{k+1} s_k = y_k \quad (2.97)$$

όπου  $s_k = x_{k+1} - x_k$  και  $y_k = \nabla f_{k+1} - \nabla f_k$ .

Οπότε, το προσεγγιστικό εσσιανό μητρώο  $B_{k+1}$  σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης προκύπτει ως εξής:

$$B_{k+1} = B_k - \frac{B_k s_k s_k^T B_k}{s_k^T B_k s_k} + \frac{y_k y_k^T}{y_k^T s_k} \quad (2.98)$$

Προκειμένου η εξίσωση 2.98 να παράξει προσεγγιστικούς εσσιανούς πίνακες  $B_{k+1}$  θε-

τικά ορισμένους που ικανοποιούν την εξίσωση της τέμνουσας (εξίσωση 2.97), πρέπει η αρχικοποίηση  $B_0$  που επιλέγει ο χρήστης να είναι θετικά ορισμένη. Ως αρχικοποίηση  $B_0$  επιλέγεται συχνά ο μοναδιαίος πίνακας  $I$  ή πολλαπλάσιο αυτού.

Η χρησιμοποίηση της εξίσωσης 2.98 έχει υψηλό υπολογιστικό κόστος, διότι χρειάζεται η επίλυση του συστήματος  $B_k p_k = \nabla f_k$  ώστε να υπολογιστεί η κατεύθυνση ανανέωσης  $p_k$  σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης. Επομένως, μια πρακτική λύση στο προηγούμενο πρόβλημα είναι σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης να ανανεώνεται το  $B_k^{-1} = H_k$  αντί του  $B_k$ . Έτσι, η εξίσωση 2.96 γίνεται:

$$p_k = -H_k \nabla f_k \quad (2.99)$$

όπου  $H_k = B_k^{-1}$ .

Η εξίσωση 2.98, χρησιμοποιώντας τα ανωτέρω, γίνεται:

$$H_{k+1} = (I - \rho_k s_k y_k^T) H_k (I - \rho_k y_k s_k^T) + \rho_k s_k s_k^T = v_k^T H_k v_k + \rho_k s_k s_k^T \quad (2.100)$$

όπου  $\rho_k = \frac{1}{y_k^T s_k}$  και  $v_k = (I - \rho_k y_k s_k^T)$ .

Για περισσότερες πληροφορίες, ο αναγνώστης παραπέμπεται στα [6], [14].

### 2.3.3.2 LBFSGS

Η limited memory BFGS (LBFSGS) αποτελεί παραλλαγή της Quasi-Newton μεθόδου ανανέωσης των μεταβλητών σχεδιασμού BFGS. Η διαφορά είναι ότι, αντί να υπολογίζεται και να αποθηκεύεται ο αντίστροφος του προσεγγιστικού εσσιανού μητρώου  $B_k^{-1} = H_k$ , αποθηκεύονται μόνο κάποια διανύσματα από τα οποία προκύπτει πεπλεγμένα το  $H_k$ . Τα διανύσματα που αποθηκεύονται είναι τα ζεύγη  $s_k, y_k$ . Αν το πλήθος των διανυσμάτων που μπορούν να αποθηκευτούν εξισωθεί με  $2m + 1$ , όπου  $m$  φυσικός αριθμός, τότε για τους κύκλους βελτιστοποίησης που ισχύει  $k + 1 \leq m$  ο πίνακας  $H_k$  υπολογίζεται εφαρμόζοντας τη BFGS μέθοδο ανανέωσης (εξίσωση 2.100). Για τους κύκλους βελτιστοποίησης που ισχύει  $k + 1 \leq m$  η BFGS μέθοδος ανανέωσης μπορεί να



γραφτεί ως εξής [18]:

$$\begin{aligned}
 H_{k+1} &= v_k^\top v_{k-1}^\top \cdots v_0^\top H_0 v_0 \cdots v_{k-1} v_k \\
 &+ v_k^\top \cdots v_1^\top \rho_0 s_0 s_0^\top v_1 \cdots v_k \\
 &\vdots \\
 &+ v_k^\top v_{k-1}^\top \rho_{k-2} s_{k-2} s_{k-2}^\top v_{k-1} v_k \\
 &+ v_k^\top \rho_{k-1} s_{k-1} s_{k-1}^\top v_k \\
 &+ \rho_k s_k s_k^\top
 \end{aligned} \tag{2.101}$$

Για τους κύκλος βελτιστοποίησης που ισχύει  $k + 1 > m$  εφαρμόζεται η ειδική μορφή των BFGS. Για τον υπολογισμό του πίνακα  $H_{k+1}$ , στην ειδική μορφή των BFGS, χρησιμοποιούνται τα  $2m$  πιο πρόσφατά ζεύγη διανυσμάτων  $s_k, y_k$  και το διάνυσμα του διαγώνιου  $H_0$ . Η ειδική μορφή των BFGS, για τους κύκλους βελτιστοποίησης που ισχύει  $k + 1 > m$ , γράφεται εξής [18]:

$$\begin{aligned}
 H_{k+1} &= v_k^\top v_{k-1}^\top \cdots v_{k-m+1}^\top H_0 v_{k-m+1} \cdots v_{k-1} v_k \\
 &+ v_k^\top \cdots v_{k-m+2}^\top \rho_{k-m+1} s_{k-m+1} s_{k-m+1}^\top v_{k-m+2} \cdots v_k \\
 &\vdots \\
 &+ v_k^\top \rho_{k-1} s_{k-1} s_{k-1}^\top v_k \\
 &+ \rho_k s_k s_k^\top
 \end{aligned} \tag{2.102}$$

Τέλος, για περισσότερες πληροφορίες ο αναγνώστης παραπέμπεται στα [17], [18].



## Κεφάλαιο 3

### Εφαρμογές και αποτελέσματα

Στο κεφάλαιο αυτό μελετώνται εφαρμογές βελτιστοποίησης, χρησιμοποιώντας τη συνεχή συζυγή μέθοδο και τον κομβικό έλεγχο μορφής που αναλύθηκαν στο κεφάλαιο 2. Αρχικά, ελέγχθηκε η επίδραση και η αναγκαιότητα της ύπαρξης των δύο ειδών εξομάλυνσης όταν βελτιστοποιείται γεωμετρία, η επιφάνεια της οποίας περιγράφεται με τον κομβικό έλεγχο μορφής. Έπειτα, πραγματοποιήθηκαν μελέτες σχετικά με την βελτιστοποίηση της γεωμετρία του αγωγού με διαμόρφωση  $S$  (Sbend) με διαφορετικές μεταβλητές εξομάλυνσης και με διαφορετική σειρά εφαρμογής των τρόπων εξομάλυνσης στις μεταβλητές σχεδιασμού, από τις οποίες προέκυψαν διάφορα συμπεράσματα. Τα συμπεράσματα αυτά, προκειμένου να ελεγχθεί η γενική ισχύ τους, εφαρμόστηκαν σε δύο επιπλέον γεωμετρίες αγωγού. Οι επιπλέον γεωμετρίες είναι ο αγωγός με την κωδική ονομασία 90bend που η ροή εισόδου με την ροή εξόδου σχηματίζουν γωνία  $90^\circ$  και ο αγωγός με την κωδική ονομασία  $U$ bend που η ροή εισόδου με την ροή εξόδου σχηματίζουν γωνία  $180^\circ$ .

Στις εφαρμογές που θα αναλυθούν, η παρουσίαση των μεταβλητών  $R$  (εξίσωση 2.54) της εξομάλυνσης Helmholtz και  $r_p$  (εξίσωση 2.55) της εξομάλυνσης γειτνίασης, θα γίνει στην αδιάστατη μορφή:

$$R_a = \frac{R}{R_{avg}} \quad (3.1)$$

$$R_{p_a} = \frac{r_p}{R_{avg}} \quad (3.2)$$

όπου  $R_a$  η αδιάστατη μορφή της μεταβλητής  $R$ ,  $R_{p_a}$  η αδιάστατη μορφή της μεταβλητής  $r_p$  και  $R_{avg}$  η μέση ακτίνα του πλέγματος. Το  $R_{avg}$  για τριδιάστατα προβλήματα υπολογίζεται ως εξής:

$$R_{avg} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N A_i}{N}} \quad (3.3)$$

όπου  $A_i$  το εμβαδόν της φάτσας του κόμβου  $i$  του υπολογιστικού πλέγματος της επιφάνειας της μεταβαλλόμενης γεωμετρίας και  $N$  το πλήθος των κόμβων του υπολογιστικού πλέγματος της μεταβαλλόμενης επιφάνειας που ισούται με το πλήθος των μεταβλητών σχεδιασμού.

Ενώ, για διδιάστατα προβλήματα το  $R_{avg}$  υπολογίζεται ως εξής:

$$R_{avg} = \frac{\sum_{i=1}^N L_i}{N} \quad (3.4)$$

όπου  $L_i$  το μήκος της οριακής ακμής που ενώνει δύο διαδοχικά σημεία του υπολογιστικού πλέγματος του μεταβαλλόμενου ορίου της γεωμετρίας.

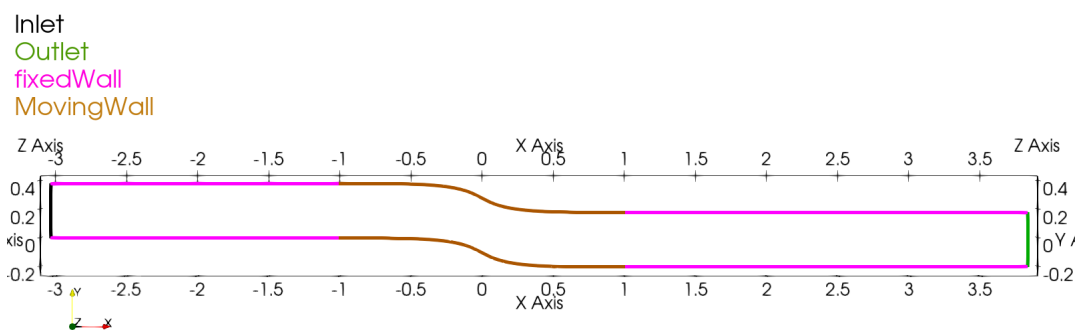
Τέλος, μέχρι να αναφερθεί κάτι διαφορετικό, χρησιμοποιείται η παραλλαγή της συνεχούς συζυγούς μεθόδου που θεωρεί ότι πρώτα συμβαίνει η εξομάλυνση γειτνίασης και στη συνέχεια η εξομάλυνση με τη ΜΔΕ του Helmholtz και τα  $R_a$ ,  $R_{p_a}$  θεωρούνται σταθερά. Δηλαδή χρησιμοποιείται η παραλλαγή 1 που αναλύεται στην ενότητα 2.3.2.1.

### 3.1 Αγωγός S-bend

Αρχικά, για τη γεωμετρία του S-bend αγωγού πραγματοποιείται επίδειξη της επίδρασης και της αναγκαιότητας της εξομάλυνσης στη βελτιστοποίηση. Στη συνέχεια, πραγμα-

τοποιείται παραμετρική μελέτη ως προς τις μεταβλητές  $R_a$  και  $R_{pa}$  για την περίπτωση που χρησιμοποιείται η παραλλαγή 1 για την εξομάλυνση των μεταβλητών σχεδιασμού. Έπειτα, οι ίδιες τιμές των μεταβλητών  $R_a$  και  $R_{pa}$  εφαρμόζονται στην περίπτωση χρησιμοποιείται η παραλλαγή 2. Επίσης, εξετάζεται η περίπτωση που το  $R_a$  δεν είναι σταθερό αλλά μεταβάλλεται χωρικά. Τέλος, τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης με τον κομβικό έλεγχο μορφής συγκρίνονται με τα αποτελέσματα της NURBS παραμετροποίησης.

Η γεωμετρία που βελτιστοποιείται απεικονίζεται στο σχήμα 3.1. Πιο συγκεκριμένα πρόκειται για γεωμετρία αγωγού με διαμόρφωση S στο κέντρο του. Οι μέγιστες διαστάσεις του αγωγού είναι  $x \in [-3.01, 3.81]$  και  $y \in [-0.2, 0.38]$ . Ο αγωγός του σχήματος 3.1 αποτελείται από τα εξής τμήματα: είσοδος (inlet), έξοδος (outlet), μεταβαλλόμενο τμήμα του αγωγού (MovingWall) και αμετάβλητο τμήμα του αγωγού (FixedWall). Επομένως, το τμήμα του αγωγού που βελτιστοποιείται αφορά τη διαμόρφωση S και έχει μέγιστες διαστάσεις  $x \in [-1, 1]$  και  $y \in [-0.2, 0.38]$ . Το υπόλοιπο τμήμα του αγωγού παραμένει αμετάβλητο κατά τη βελτιστοποίηση. Τέλος, στο λογισμικό OpenFOAM η γεωμετρία πρέπει να οριστεί τριδιάστατα με ένα υποθετικό πάχος, και στη συνέχεια, να λυθεί διδιάστατα.



**Σχήμα 3.1:** S-bend: Η γεωμετρία του αγωγού που βελτιστοποιείται. Με μαύρο χρώμα απεικονίζεται η είσοδος (inlet) του αγωγού, με πράσινο χρώμα απεικονίζεται η έξοδος (outlet) του αγωγού, με μπλε χρώμα απεικονίζεται το αμετάβλητο τμήμα του αγωγού κατά την βελτιστοποίηση (FixedWall), με καφέ χρώμα απεικονίζεται το μεταβαλλόμενο από την βελτιστοποίηση τμήμα του αγωγού (MovingWall).

### 3.1.1 Επίδραση της Εξομάλυνσης στη Βελτιστοποίηση

Προκειμένου να παρουσιασθεί η επίδραση και η αναγκαιότητα της εξομάλυνσης, σε προβλήματα βελτιστοποίησης γεωμετρίας η οποία ορίζεται με τον κομβικό έλεγχο μορφής, πραγματοποιείται αρχικά η βελτιστοποίηση της γεωμετρίας χωρίς καμία εξομάλυνση ενεργή.

Η απενεργοποίηση των δύο ειδών εξομάλυνσης, τόσο σε θεωρητικό όσο και σε προγραμματιστικό επίπεδο, επιτυγχάνεται μηδενίζοντας τις μεταβλητές  $R$  (εξίσωση 2.54) και  $r_p$  (εξίσωση 2.55). Στο συγκεκριμένο πρόβλημα βελτιστοποίησης μορφής, η βελτιστοποίηση με  $R_a = 0$  και  $R_{p_a} = 0$  σταματά λόγω ανωμαλίας που δημιουργείται στο υπολογιστικό πλέγμα και οδηγεί σε μείωση 6.0% των απωλειών ολικής πίεσης σε σχέση με την αρχική γεωμετρία ( $\Delta P_t|_{S_{I,0}}$ ). Η γεωμετρία που προκύπτει από τη βελτιστοποίηση χωρίς καμία εξομάλυνση ενεργή σε τομή απεικονίζεται στο σχήμα 3.2. Στο σχήμα 3.3, για λόγους ευκρίνειας, απεικονίζεται τμήμα της τριδιάστατης γεωμετρίας του αγωγού S-bend στο οποίο απεικονίζονται οι προβληματικοί κόμβοι που είναι υπεύθυνοι για το τερματισμό της βελτιστοποίησης. Οι προβληματικοί κόμβοι, που απεικονίζονται στο σχήμα 3.3, αντιπροσωπεύουν το κυριότερο πρόβλημα που δημιουργείται στη βελτιστοποίηση γεωμετρίας που ορίζεται με τον κομβικό έλεγχο μορφής. Δηλαδή, λόγω της ελευθερίας που έχει κάθε κόμβος της επιφάνεια της γεωμετρίας να μετακινηθεί προς όποια κατεύθυνση του ορίζει η βελτιστοποίηση, σε συνδυασμό με την ανεξαρτησία μεταξύ των κόμβων λόγω έλλειψης καμπύλης παραμετροποίησης, δημιουργούνται συχνά τέτοιες διακυμάνσεις στη γεωμετρία. Όμως, λόγω των υψίσυχων διακυμάνσεων η μεταφορά της μετατόπισης της οριακής γεωμετρίας στο εσωτερικό πλέγμα δημιουργεί προβληματικές δομές στο εσωτερικό πλέγμα, με αποτέλεσμα η βελτιστοποίηση να τερματίζεται.

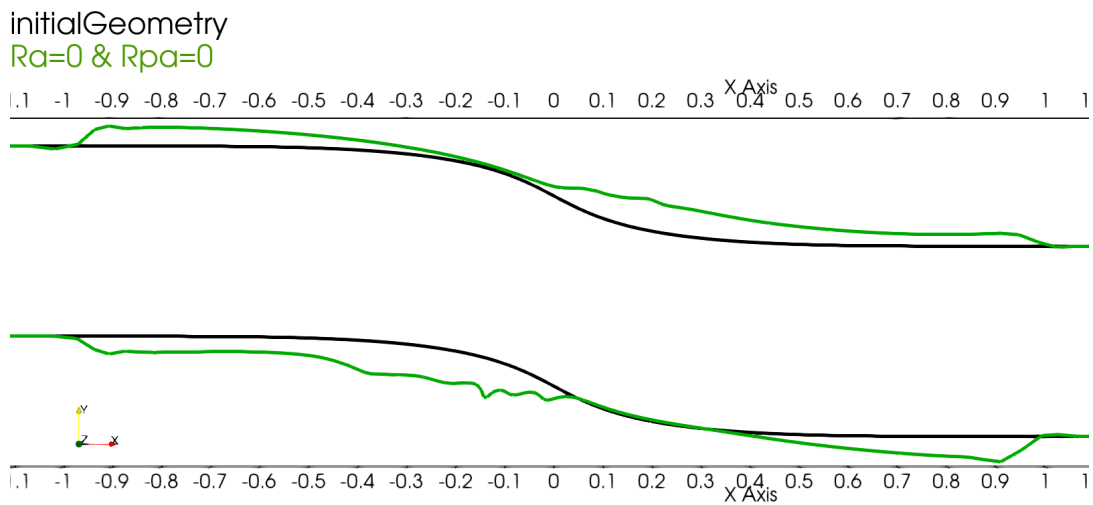
Ένας από τους τρόπους αντιμετώπισης αυτού του προβλήματος είναι η εξομάλυνση των μεταβλητών σχεδιασμού με τη ΜΔΕ του Helmholtz. Επομένως, πραγματοποιείται βελτιστοποίηση του αγωγού S-bend με ενεργή μόνο την εξομάλυνση Helmholtz και με μεταβλητές εξομάλυνσης  $R_{p_a} = 0$  και τυχαία  $R_a = 1.12$ . Η βελτιστοποίηση με ενεργή μόνο την εξομάλυνση Helmholtz ( $R_{p_a} = 0$  και  $R_a = 1.12$ ) σταματά λόγω ανωμαλι-

ών που δημιουργούνται στο υπολογιστικό πλέγμα σε διαφορετικό σημείο σε σχέση με πριν, επιτυγχάνοντας μείωση 10.5% του  $\Delta P_t|_{S_{I,O}}$ . Η βελτιστοποιημένη γεωμετρία που προκύπτει απεικονίζεται στο σχήμα 3.4 σε τομή κατά τον άξονα Z. Στο σχήμα 3.5, για λόγους ευκρίνειας, απεικονίζεται τμήμα της τριδιάστατης βελτιστοποιημένης γεωμετρίας και τα νέα προβληματικά σημεία του πλέγματος, για βελτιστοποίηση με ενεργή εξομάλυνση Helmholtz. Όπως φαίνεται στο σχήμα 3.5, τα νέα προβληματικά σημεία εντοπίζονται στην περιοχή μεταξύ σταθερών και μεταβαλλόμενων τμημάτων της γεωμετρίας.

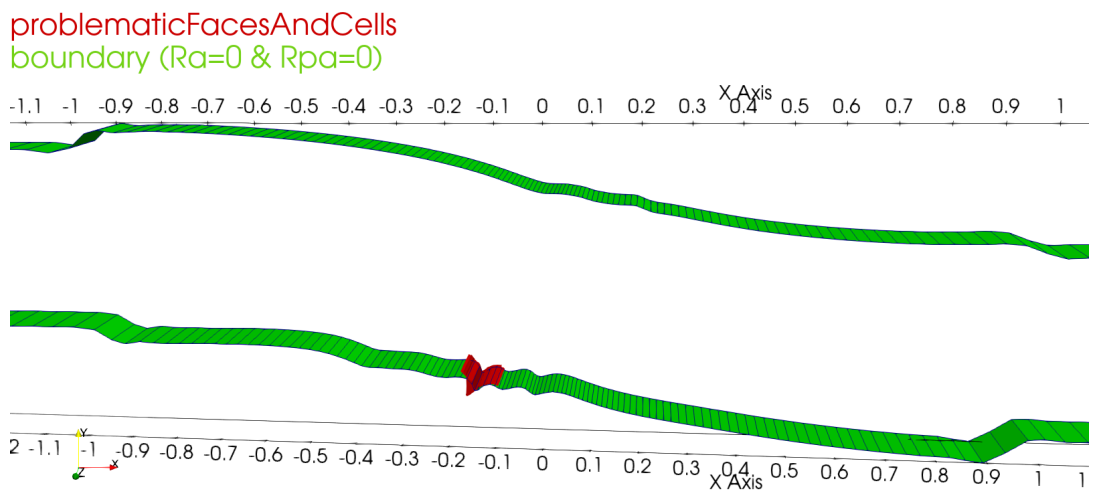
Το συγκεκριμένο πρόβλημα μπορεί να αντιμετωπισθεί χρησιμοποιώντας την εξομάλυνση γειτνίασης σε συνδυασμό με την εξομάλυνση Helmholtz, οδηγώντας σε καλύτερα αποτελέσματα βελτιστοποίησης. Έτσι, η βελτιστοποίηση με τις μεταβλητές  $R_a = 1.12$  και  $R_{pa} = 0.75$ , δηλαδή με ενεργούς και τους δύο τρόπους εξομάλυνσης, επιτυγχάνει μείωση 11.6% του  $\Delta P_t|_{S_{I,O}}$ . Η διδιάστατη απεικόνιση του τμήματος της μεταβαλλόμενης γεωμετρίας του αγωγού s-bend, που προκύπτει από την παραπάνω βελτιστοποίηση, απεικονίζεται στο σχήμα 3.6. Οι γεωμετρίες του αγωγού S-bend που προκύπτουν για βελτιστοποίηση χωρίς καμία εξομάλυνση (σχήμα 3.2) και με βελτιστοποίηση με ενεργή μόνο τη Helmholtz εξομάλυνση (σχήμα 3.4) παρουσιάζουν κατασκευαστικές δυσκολίες σε σχέση με τη γεωμετρία που προκύπτει από τη βελτιστοποίηση με ενεργούς και τους δύο τρόπους εξομάλυνσης (σχήμα 3.6). Τα αποτελέσματα της παραπάνω ανάλυσης συνοψίζονται στον πίνακα 3.1. Επομένως, από την παραπάνω ανάλυση παρουσιάζεται η σημασία της χρησιμοποίησης τόσο της εξομάλυνσης Helmholtz όσο και της εξομάλυνσης γειτνίασης, προκειμένου να προκύψει όσο το δυνατόν καλύτερο αποτέλεσμα στη βελτιστοποίηση γεωμετρίας που ορίζεται με τον κομβικό έλεγχο μορφής.

Επίδραση της Εξομάλυνσης στη Βελτιστοποίηση			
$R_{pa}$	0	0	0.75
$R_a$	0	1.12	1.12
Μείωση % του $\Delta P_t _{S_{I,O}}$	6.0	10.5	11.6

**Πίνακας 3.1:** Η μείωση των απωλειών ολικής πίεσης μεταξύ εισόδου και εξόδου που προκύπτει από τη βελτιστοποίηση της γεωμετρίας S-bend για διάφορες τιμές των μεταβλητών  $R_{pa}$  και  $R_a$ .

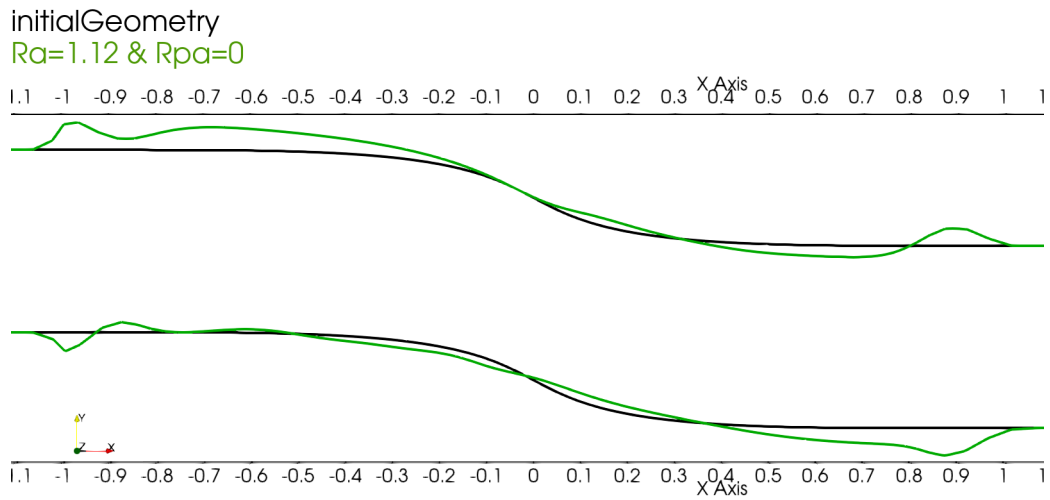


**Σχήμα 3.2:** *Sbend*: Απεικόνιση, σε τομή κατά τον άξονα  $Z$ , του μεταβαλλόμενου τμήματος της γεωμετρίας του αγωγού *Sbend* που προκύπτει από τη βελτιστοποίηση χωρίς εξομάλυνση ( $R_a = 0$  και  $R_{pa} = 0$ ). Με μαύρο χρώμα απεικονίζεται η αρχική γεωμετρία του αγωγού. Με πράσινο χρώμα απεικονίζεται η βελτιστοποιημένη γεωμετρία του αγωγού στο τέταρτο κύκλο βελτιστοποίησης χωρίς εξομάλυνση.

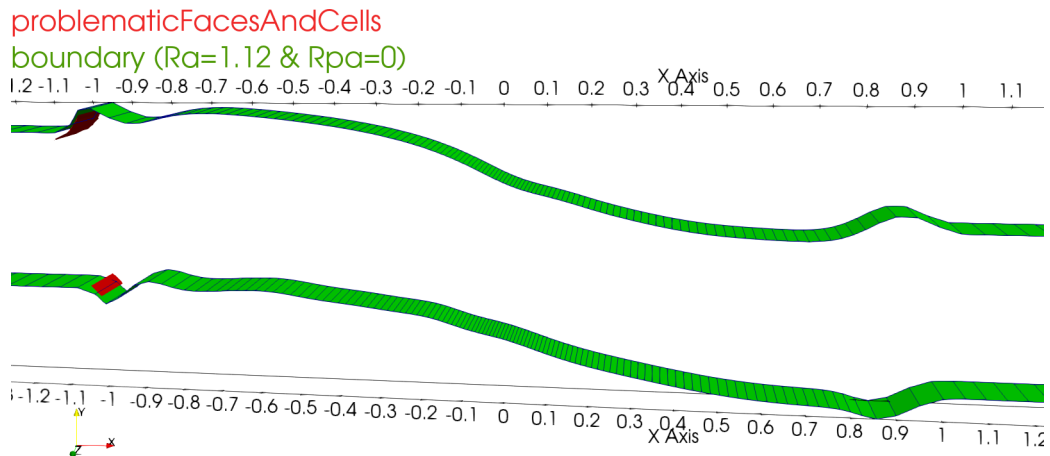


**Σχήμα 3.3:** *Sbend*: Απεικόνιση του μεταβαλλόμενου τμήματος της γεωμετρίας του αγωγού *Sbend* που προκύπτει από τη βελτιστοποίηση χωρίς ενεργή εξομάλυνση ( $R_a = 0$  και  $R_{pa} = 0$ ). Με πράσινο χρώμα απεικονίζεται η βελτιστοποιημένη γεωμετρία του αγωγού στο τέταρτο κύκλο βελτιστοποίησης χωρίς εξομάλυνση, ενώ με κόκκινο χρώμα απεικονίζονται οι προβληματικοί κόμβοι του πλέγματος που προκαλούν το τερματισμό της βελτιστοποίησης.

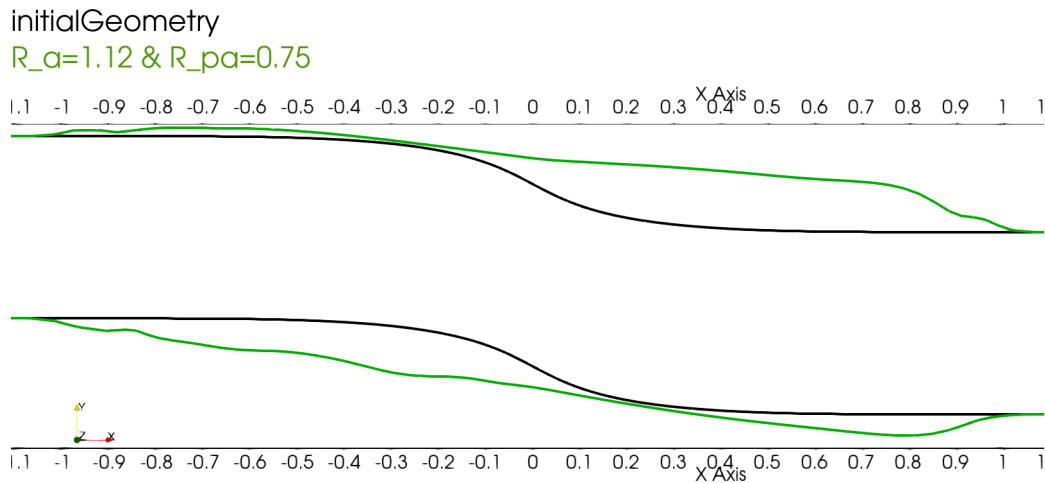




**Σχήμα 3.4:** S-bend: Απεικόνιση, σε τομή κατά τον άξονα Z, του μεταβαλλόμενου τμήματος της γεωμετρίας του αγωγού S-bend που προκύπτει από τη βελτιστοποίηση χρησιμοποιώντας μόνο την εξομάλυνση Helmholtz ( $R_\alpha = 1.12$  και  $R_{p_\alpha} = 0$ ). Με μαύρο χρώμα απεικονίζεται η αρχική γεωμετρία του αγωγού. Με πράσινο χρώμα απεικονίζεται η βελτιστοποιημένη γεωμετρία του αγωγού στο έκτο κύκλο βελτιστοποίησης.



**Σχήμα 3.5:** S-bend: Απεικόνιση του μεταβαλλόμενου τμήματος της γεωμετρίας του αγωγού S-bend που προκύπτει από τη βελτιστοποίηση χρησιμοποιώντας μόνο την εξομάλυνση Helmholtz ( $R_\alpha = 1.12$  και  $R_{p_\alpha} = 0$ ). Με πράσινο χρώμα απεικονίζεται η βελτιστοποιημένη γεωμετρία του αγωγού στο έκτο κύκλο βελτιστοποίησης, ενώ με κόκκινο χρώμα απεικονίζονται οι προβληματικοί κόμβοι του πλέγματος που προκαλούν το τερματισμό της βελτιστοποίησης.



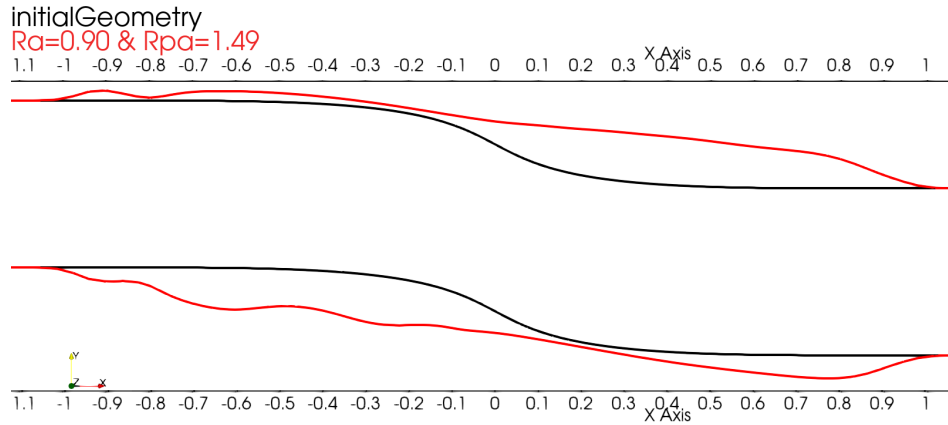
**Σχήμα 3.6:** *Sbend*: Απεικόνιση, σε τομή κατά τον άξονα  $Z$ , του μεταβαλλόμενου τμήματος της γεωμετρίας του αγωγού *Sbend* που προκύπτει από τη βελτιστοποίηση, για τις μεταβλητές  $R_\alpha = 1.12$  και  $R_{p\alpha} = 0.75$ . Με άσπρο χρώμα απεικονίζεται η αρχική γεωμετρία του αγωγού ενώ με πράσινο χρώμα απεικονίζεται η βελτιστοποιημένη γεωμετρία του αγωγού.

### 3.1.2 Φυσική Επεξήγηση των Αποτελεσμάτων της Βελτιστοποίησης

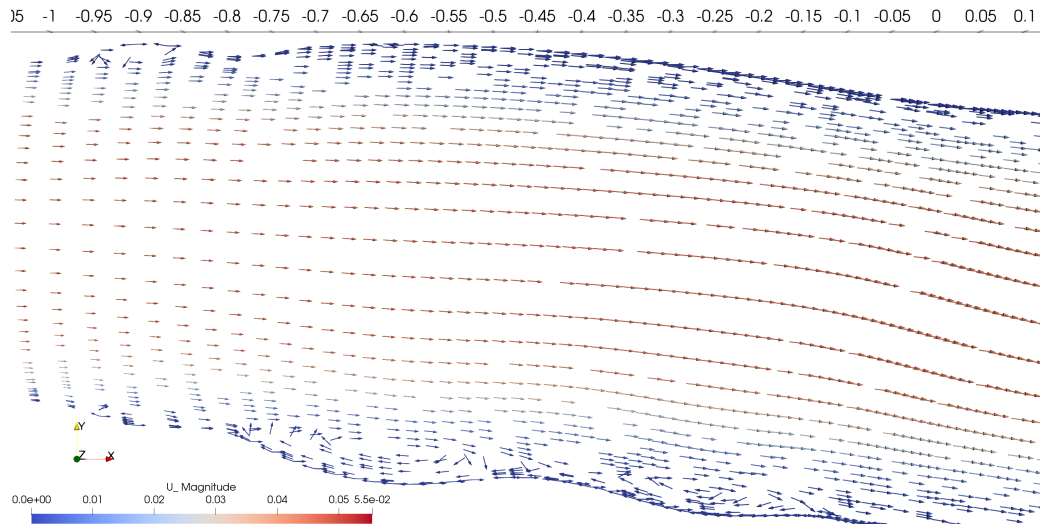
Στην συγκεκριμένη υποενότητα, γίνεται επεξήγηση του φυσικού μηχανισμού που χαρακτηρίζει το πρόβλημα αεροδυναμικής που μελετάται και είναι υπεύθυνο για τη μείωση των απωλειών ολικής πίεσης μεταξύ εισόδου και εξόδου. Η βελτιστοποιημένη γεωμετρία του αγωγού *Sbend*, σε τομή κατά τον άξονα  $Z$ , για μεταβλητές εξομάλυνσης  $R_\alpha = 0.90$  και  $R_{p\alpha} = 1.49$  απεικονίζεται στο σχήμα 3.7. Στο σχήμα 3.7, παρατηρείται ότι στη βελτιστοποιημένη γεωμετρία η διαμόρφωση  $S$  δεν υφίσταται πλέον και ότι εμφανίζονται κάποιες εξοχές - κυμματισμοί. Αυτό συμβαίνει διότι στην περίπτωση που η ροή στον αγωγό είναι στρωτή και η παροχή είναι σταθερή, εμφανίζονται ανακυκλοφορίες της ροής κοντά στο σταθερό όριο της γεωμετρίας πάνω στις οποίες ρέει το ρευστό, με αποτέλεσμα να μειώνονται οι απώλειες ολικής πίεσης. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, παρατηρούνται ανακυκλοφορίες στη βελτιστοποιημένη γεωμετρία στο  $x \approx -0.9$  του πάνω μεταβλητού ορίου του αγωγού και στα  $x \approx -0.6$ ,  $x \approx -0.3$  του κάτω μεταβλητού ορίου του αγωγού, οι οποίες απεικονίζονται σχήμα 3.8. Η βελτιστοποίηση της

### 3.1. Αγωγός S-bend

γεωμετρίας με μεταβλητές εξομάλυνσης  $R_a = 0.90$  και  $R_{pa} = 1.49$ , προκαλεί μείωση 11.5% στις απώλειες ολικής πίεσης μεταξύ εισόδου και εξόδου του αγωγού.



**Σχήμα 3.7:** S-bend: Απεικόνιση του μεταβαλλόμενου τμήματος της βελτιστοποιημένης γεωμετρίας του αγωγού, σε τομή κατά τον άξονα Z, για  $R_a = 0.90$  και  $R_{pa} = 1.49$ . Με κόκκινο χρώμα απεικονίζεται η βέλτιστη γεωμετρία του αγωγού για  $R_a = 0.90$  και  $R_{pa} = 1.49$ . Με μαύρο χρώμα απεικονίζεται η αρχική γεωμετρία του αγωγού.



**Σχήμα 3.8:** S-bend: Απεικόνιση τμήματος της μεταβλητής γεωμετρίας του αγωγού, σε τομή κατά τον άξονα Z, με μεταβλητές εξομάλυνσης  $R_a = 0.90$  και  $R_{pa} = 1.49$ . Με βέλη απεικονίζεται η κατεύθυνση της ροής σε κάθε σημείο του υπολογιστικού πλέγματος και ο χρωματισμός στο εσωτερικό του αγωγού αντιστοιχεί στις τιμές του μέτρου της ταχύτητας της ροής.

### 3.1.3 Παραλλαγή 1

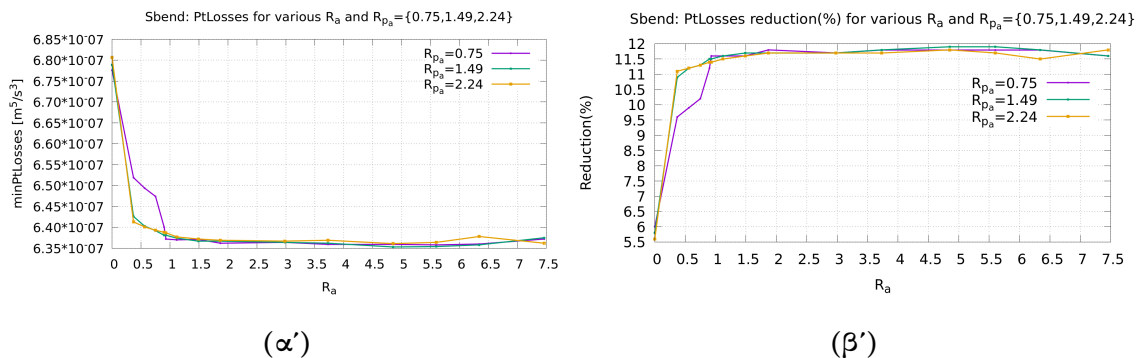
Στην υποενότητα αυτή, μελετάται η επίδραση της εξομάλυνσης γειτνίασης και της εξομάλυνσης Helmholtz στη βελτιστοποίηση όταν χρησιμοποιείται η παραλλαγή 1 για την εξομάλυνση των μεταβλητών σχεδιασμού. Πιο συγκεκριμένα, μελετάται η επίδραση στη βελτιστοποίηση διαφορετικών μεταβλητών εξομάλυνσης  $R_a$  για σταθερή μεταβλητή εξομάλυνσης  $R_{pa}$ . Εφαρμόζοντας την προαναφερθείσα μελέτη σε διαφορετικές μεταβλητές εξομάλυνσης μελετάται παράλληλα και η επίδραση διαφορετικών μεταβλητών εξομάλυνσης  $R_{pa}$  στη βελτιστοποίηση. Οι τιμές των μεταβλητών της εξομάλυνσης, που χρησιμοποιήθηκαν στην παραμετρική μελέτη, δίνονται στον πίνακα 3.2. Η βέλτιστη τιμή της συνάρτησης-στόχου  $\Delta P_t|_{S_{I,0}}$  και η μείωση της (%), για κάθε  $R_{pa}$  και  $R_a$  που αναφέρεται στον πίνακα 3.2, απεικονίζεται στα σχήματα 3.9α', 3.9β' αντίστοιχα. Από τα σχήματα 3.9α', 3.9β' προκύπτει ότι, η βελτιστοποίηση για μικρές τιμές της μεταβλητής εξομάλυνσης της εξομάλυνσης Helmholtz και με σταθερή τη μεταβλητή εξομάλυνσης της εξομάλυνσης γειτνίασης προκαλεί μικρότερη βελτίωση στη συνάρτηση-στόχο από ότι για μεγαλύτερες τιμές της μεταβλητής εξομάλυνσης της εξομάλυνσης Helmholtz. Το προηγούμενο συμπέρασμα ισχύει ανεξαρτήτως της τιμής της μεταβλητής εξομάλυνσης της εξομάλυνσης γειτνίασης. Πιο συγκεκριμένα, για τις χαμηλές τιμές του  $R_a \in [0, 1.12)$  η μείωση της συνάρτησης-στόχου είναι μικρότερη σε σχέση με τις υπόλοιπες τιμές της μεταβλητής  $R_a$  για κάθε  $R_{pa}$ . Στο εύρος τιμών του  $R_a = [1.12, 7.46]$ , για οποιαδήποτε τιμή της μεταβλητής  $R_{pa}$ , η τιμή της συνάρτησης-στόχου δεν παρουσιάζει σημαντικές διαφορές. Όμως, έστω και με μικρές διαφορές, ανεξαρτήτως της τιμής του  $R_{pa}$ , η βέλτιστη τιμή του  $\Delta P_t|_{S_{I,0}}$  μπορεί να θεωρηθεί ότι εντοπίζεται στο εύρος  $R_a \in [3.73, 7.46]$ . Στη συνέχεια, η επίδραση της εξομάλυνσης Helmholtz στη μορφή της βελτιστοποιημένης γεωμετρίας αναδεικνύεται στα σχήματα 3.10 - 3.12, στα οποία απεικονίζεται η βέλτιστη γεωμετρία για διάφορες τιμές της μεταβλητής  $R_a$ , όταν η μεταβλητή  $R_{pa} = \{0.75, 1.49, 2.24\}$ . Από τα προαναφερθέντα σχήματα προκύπτει ότι, όσο αυξάνεται η τιμή του  $R_a$ , ανεξαρτήτως της τιμής του  $R_{pa}$ , η μορφή της βελτιστοποιημένης γεωμετρίας γίνεται όλο και πιο ομαλή. Επίσης, σχετικά με την επίδραση της εξομάλυνσης γειτνίασης στη βελτιστοποίηση, παρατηρούνται

### 3.1. Αγωγός S-bend

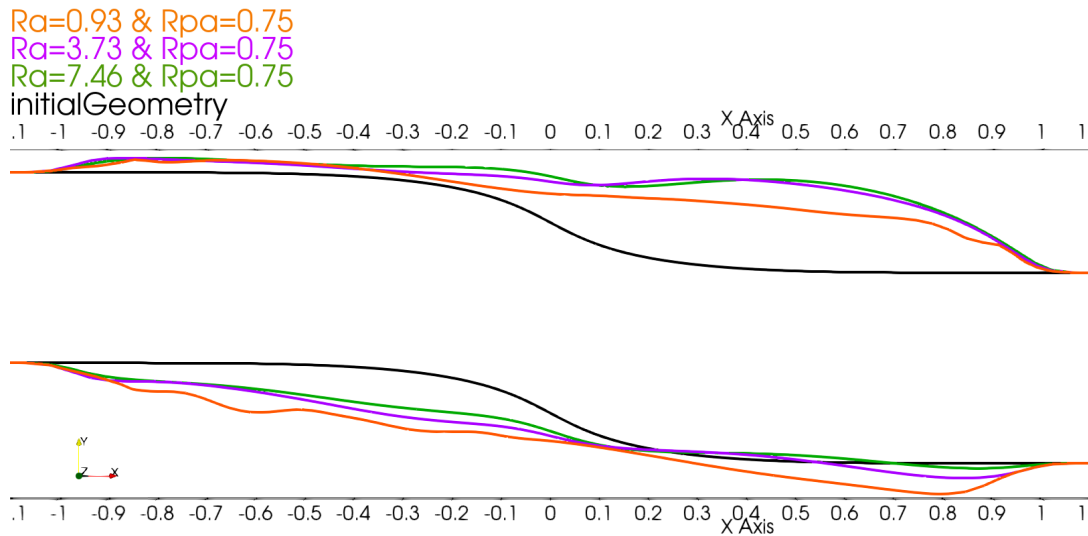
στα σχήματα 3.9α' και 3.9β' μικρές διαφορές στη μείωση της συνάρτησης-στόχου για διαφορετικές τιμές της μεταβλητής  $R_{pa}$  και με σταθερό  $R_a$ . Οι μικρές διαφορές της συνάρτησης-στόχου μεταξύ των διαφορετικών τιμών της μεταβλητής  $R_{pa}$  οφείλονται στις μικρές αλλαγές που προκύπτουν στη μορφή της βελτιστοποιημένης γεωμετρίας. Ενδεικτικά στο σχήμα 3.13 απεικονίζεται η βέλτιστη γεωμετρία του αγωγού S-bend για  $R_a = 0.65$  και  $R_{pa} = 0.75, 1.49, 2.24$ .

Παραμετρική Μελέτη Μεταβλητών Εξομάλυνσης															
$R_{pa}$	$R_a$														
0.75	0.00	0.37	0.56	0.75	0.90	0.93	1.12	1.49	1.87	2.98	3.73	4.85	5.60	6.34	7.46
1.49	0.00	0.37	0.56	0.75	0.90	0.93	1.12	1.49	1.87	2.98	3.73	4.85	5.60	6.34	7.46
2.24	0.00	0.37	0.56	0.75	0.90	0.93	1.12	1.49	1.87	2.98	3.73	4.85	5.60	6.34	7.46

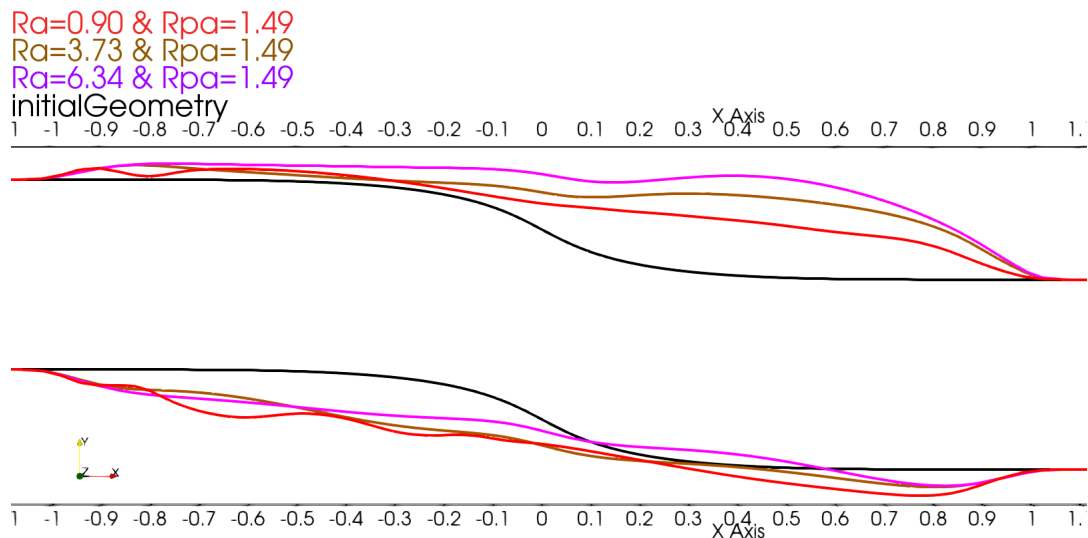
**Πίνακας 3.2:** Οι τιμές των μεταβλητών εξομάλυνσης  $R_{pa}$  και  $R_a$  που χρησιμοποιήθηκαν στη παραμετρική μελέτη.



**Σχήμα 3.9:** S-bend: Οι βέλτιστες τιμές (αριστερά) και η μείωση (%) (δεξιά) των απωλειών ολικής πίεσης μεταξύ εισόδου και εξόδου για τον αγωγό S-bend, που προέκυψαν από την παραμετρική μελέτη των μεταβλητών εξομάλυνσης  $R_a$  και  $R_{pa}$ . Με μωβ χρώμα απεικονίζονται τα αποτελέσματα για  $R_{pa} = 0.75$ , με πράσινο χρώμα για  $R_{pa} = 1.49$  και με πορτοκαλί χρώμα για  $R_{pa} = 2.24$ .

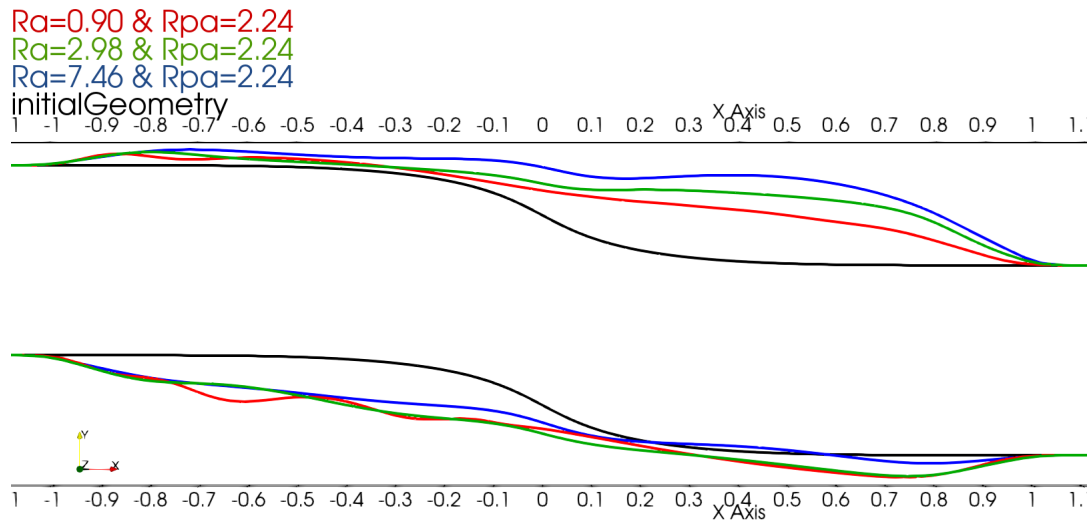


**Σχήμα 3.10:** *Sbend*: Απεικόνιση της βελτιστοποιημένης γεωμετρίας του αγωγού *Sbend*, σε τομή κατά τον άξονα *Z*, για  $R_{pa} = 0.75$  και  $R_a = \{0.93, 3.73, 7.46\}$ . Με πορτοκαλί χρώμα απεικονίζεται η βέλτιστη γεωμετρία του αγωγού για  $R_a = 0.93$  και  $R_{pa} = 0.75$ . Με μωβ χρώμα απεικονίζεται η βέλτιστη γεωμετρία του αγωγού για  $R_a = 3.73$  και  $R_{pa} = 0.75$ . Με πράσινο χρώμα απεικονίζεται η βέλτιστη γεωμετρία του αγωγού για  $R_a = 7.46$  και  $R_{pa} = 0.75$ . Με μαύρο χρώμα απεικονίζεται η αρχική γεωμετρία της βελτιστοποίησης.

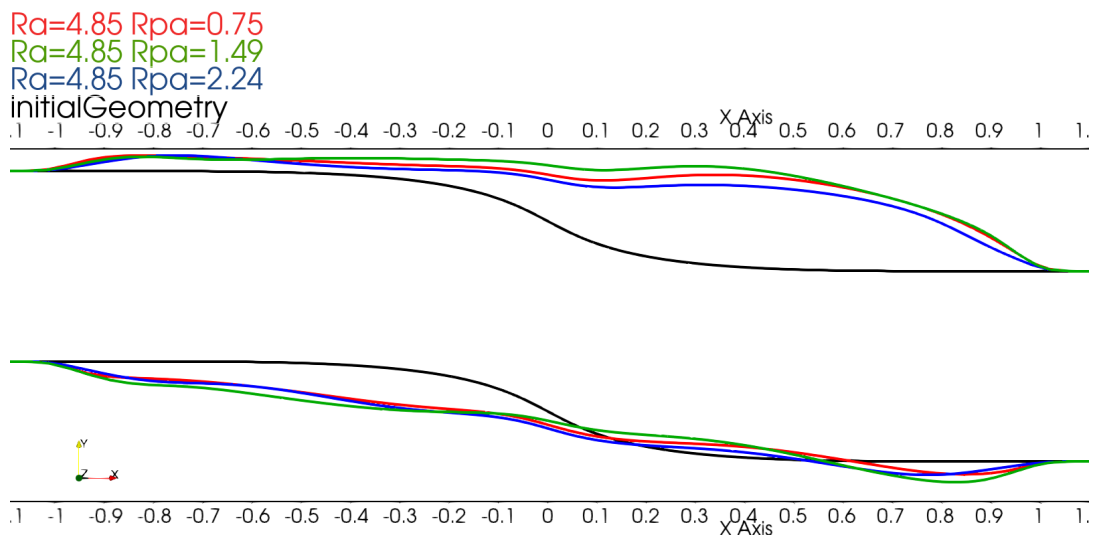


**Σχήμα 3.11:** *Sbend*: Απεικόνιση της βελτιστοποιημένης γεωμετρίας του αγωγού *Sbend*, σε τομή κατά τον άξονα *Z*, για  $R_{pa} = 1.49$  και  $R_a = \{0.90, 3.73, 6.34\}$ . Με κόκκινο χρώμα απεικονίζεται η βέλτιστη γεωμετρία του αγωγού για  $R_a = 0.90$  και  $R_{pa} = 1.49$ . Με καφέ χρώμα απεικονίζεται η βέλτιστη γεωμετρία του αγωγού για  $R_a = 3.73$  και  $R_{pa} = 1.49$ . Με μωβ χρώμα απεικονίζεται η βέλτιστη γεωμετρία του αγωγού για  $R_a = 6.34$  και  $R_{pa} = 1.49$ . Με μαύρο χρώμα απεικονίζεται η αρχική γεωμετρία της βελτιστοποίησης.

### 3.1. Αγωγός S-bend



**Σχήμα 3.12:** S-bend: Απεικόνιση της βελτιστοποιημένης γεωμετρίας του αγωγού S-bend, σε τομή κατά τον άξονα Z, για  $R_{pa} = 2.24$  και  $R_a = \{0.90, 2.98, 7.46\}$ . Με κόκκινο χρώμα απεικονίζεται η βέλτιστη γεωμετρία του αγωγού για  $R_a = 0.90$  και  $R_{pa} = 2.24$ . Με πράσινο χρώμα απεικονίζεται η βέλτιστη γεωμετρία του αγωγού για  $R_a = 2.98$  και  $R_{pa} = 7.46$ . Με μπλε χρώμα απεικονίζεται η βέλτιστη γεωμετρία του αγωγού για  $R_a = 7.46$  και  $R_{pa} = 2.24$ . Με μαύρο χρώμα απεικονίζεται η αρχική γεωμετρία της βελτιστοποίησης.



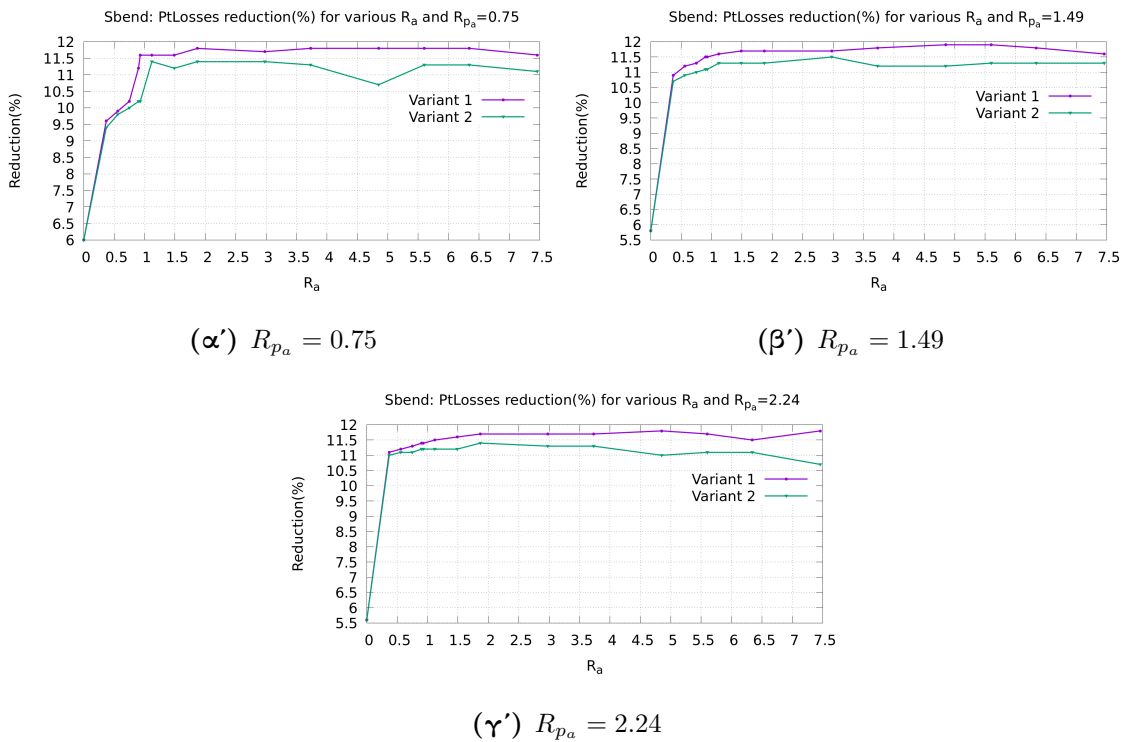
**Σχήμα 3.13:** S-bend: Απεικόνιση της βελτιστοποιημένης γεωμετρίας του αγωγού S-bend, σε τομή κατά τον άξονα Z, για  $R_a = 4.85$  και  $R_{pa} = \{0.75, 1.49, 2.24\}$ . Με κόκκινο χρώμα απεικονίζεται η βέλτιστη γεωμετρία του αγωγού για  $R_a = 4.85$  και  $R_{pa} = 0.75$ . Με πράσινο χρώμα απεικονίζεται η βέλτιστη γεωμετρία του αγωγού για  $R_a = 4.85$  και  $R_{pa} = 1.49$ . Με μπλε χρώμα απεικονίζεται η βέλτιστη γεωμετρία του αγωγού για  $R_a = 4.85$  και  $R_{pa} = 2.24$ . Με μαύρο χρώμα απεικονίζεται η αρχική γεωμετρία της βελτιστοποίησης.

### 3.1.4 Παραλλαγή 2

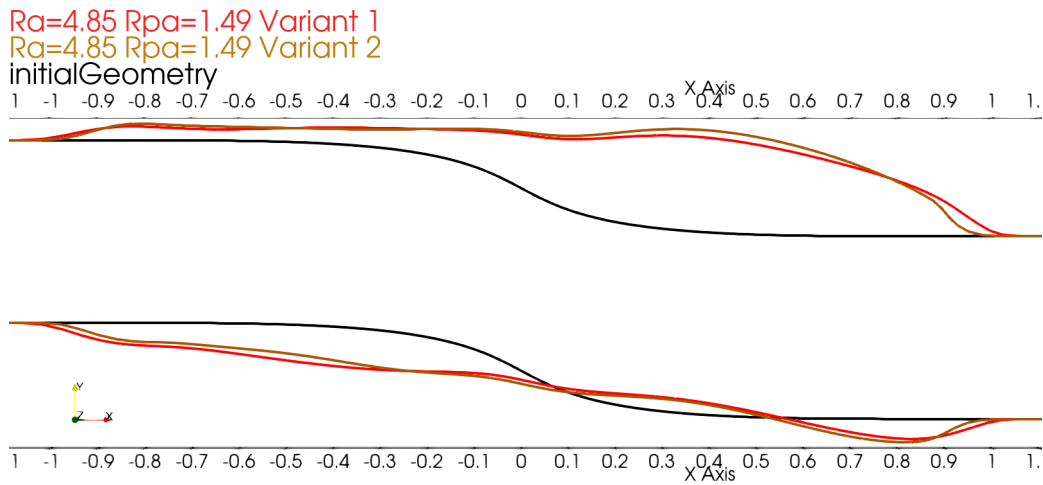
Στην υποενότητα αυτή, εξετάζεται η επίδραση της σειράς που εφαρμόζονται οι δύο τεχνικές εξομάλυνσης στις μεταβλητές σχεδιασμού στη βελτιστοποίηση γεωμετρίας που ορίζεται με τον κομβικό έλεγχο μορφής. Επίσης, συγκρίνονται τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης χρησιμοποιώντας και τις δύο παραλλαγές, προκειμένου να διαπιστωθεί αν κάποια παραλλαγή οδηγεί σε καλύτερα αποτελέσματα. Για την παραμετρική μελέτη της συγκεκριμένης υποενότητας χρησιμοποιούνται οι τιμές των  $R_a$  και  $R_{pa}$  του πίνακα 3.2. Η μείωση % της συνάρτησης-στόχου, για τις τιμές των μεταβλητών  $R_a$  και  $R_{pa}$  που δίνονται στον πίνακα 3.2, για τις δύο παραλλαγές στη σειρά της εξομάλυνσης των μεταβλητών σχεδιασμού απεικονίζεται στα σχήματα 3.14α' - 3.14γ'. Στα προαναφερθέντα σχήματα παρατηρείται ότι, για όλες τις τιμές των μεταβλητών  $R_a$  και για όλα τα  $R_{pa}$  η παραλλαγή 1 καταλήγει σε μεγαλύτερη μείωση της συνάρτησης-στόχου από ότι η παραλλαγή 2. Σχετικά με την επίδραση των δύο παραλλαγών στη μορφή των βελτιστοποιημένων γεωμετριών ισχύει ότι, στην παραλλαγή 2 η εξομάλυνση γειτνίασης εφαρμόζεται τελευταία στις μεταβλητές σχεδιασμού, με αποτέλεσμα να σβήνει ή να μειώνει οποιαδήποτε μετατόπιση στο τμήμα της γεωμετρίας που έχει ισχύ. Αντίθετα, στην παραλλαγή 1 που η εξομάλυνση Helmholtz εφαρμόζεται τελευταία, η έντονη επίδραση της εξομάλυνσης γειτνίασης μπορεί να μειωθεί. Έτσι, στην παραλλαγή 1 η γεωμετρία έχει μεγαλύτερη ελευθερία να μετατοπιστεί κοντά στα αμετάβλητα τμήματά της. Επομένως, στα προβλήματα βελτιστοποίησης που η μετατόπιση της γεωμετρίας κοντά στα αμετάβλητα τοιχώματα επηρεάζει σε μεγάλο βαθμό τη συνάρτηση-στόχο, η παραλλαγή 1 μπορεί να δώσει καλύτερα αποτελέσματα από ότι η παραλλαγή 2. Ενδεικτικά, στα σχήματα 3.15 και 3.16 απεικονίζεται η βελτιστοποιημένη γεωμετρία με τις δύο παραλλαγές. Στα προαναφερθέντα σχήματα, στη περιοχή που ενώνεται η μεταβαλλόμενη με την αμετάβλητη γεωμετρία παρατηρείται ότι, οι γεωμετρίες με τη παραλλαγή 2 μετατοπίζονται σε μικρότερο βαθμό από ότι οι γεωμετρίες με τη παραλλαγή 1, η εξήγηση του οποίου αναφέρθηκε παραπάνω.



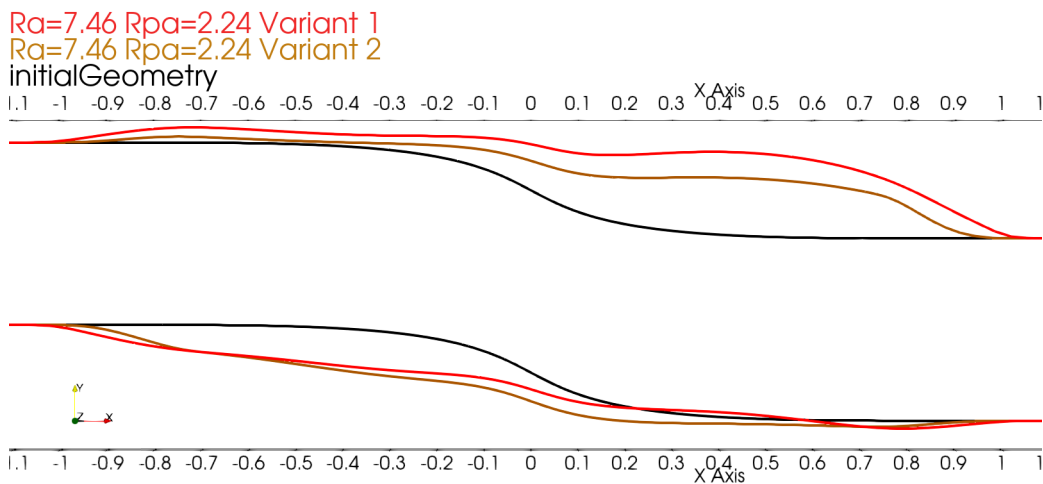
### 3.1. Αγωγός S-bend



**Σχήμα 3.14:** S-bend: Η μείωση % των απωλειών ολικής πίεσης μεταξύ εισόδου και εξόδου που προκύπτει από τη βελτιστοποίηση του αγωγού S-bend για μεταβλητές εξομάλυνσης  $R_{pa} = \{0.75, 1.49, 2.24\}$  και μεταβλητό  $R_a$ . Με μωβ χρώμα απεικονίζεται η μείωση της συνάρτησης-στόχου για την περίπτωση που οι μεταβλητές σχεδιασμού πρώτα εξομαλύνονται με την εξομάλυνση γειννίας και στη συνέχεια με τη ΜΔΕ Helmholtz, ενώ με πράσινο χρώμα όταν συμβαίνει η αντίστροφη σειρά εξομάλυνσης.



**Σχήμα 3.15:** *Sbend*: Απεικόνιση τμήματος της βέλτιστης γεωμετρίας του αγωγού, σε τομή κατά τον άξονα Z, για μεταβλητές εξομάλυνσης  $R_a = 4.85$  και  $R_{pa} = 1.49$ . Με κόκκινο χρώμα απεικονίζεται η βέλτιστη γεωμετρία που προκύπτει όταν οι μεταβλητές σχεδιασμού εξομαλύνονται πρώτα με την εξομάλυνση γειτνίασης και στη συνέχεια με τη ΜΔΕ του Helmholtz. Με καφέ χρώμα απεικονίζεται η βέλτιστη γεωμετρία που προκύπτει με την αντίστροφη σειρά εξομάλυνσης.

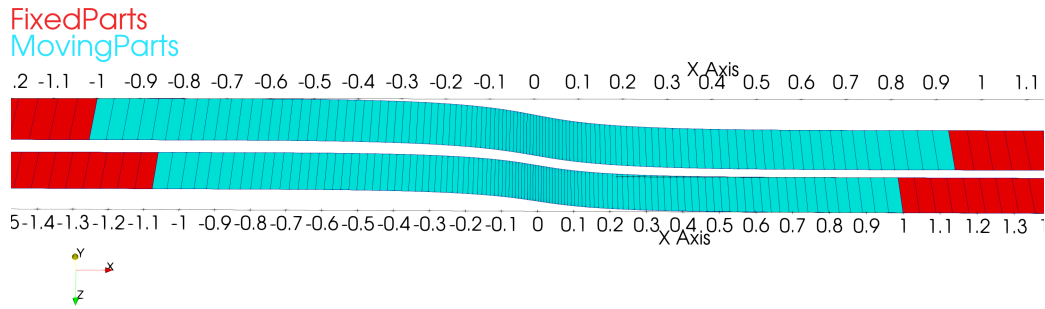


**Σχήμα 3.16:** *Sbend*: Απεικόνιση τμήματος της βέλτιστης γεωμετρίας του αγωγού, σε τομή κατά τον άξονα Z, για μεταβλητές εξομάλυνσης  $R_a = 7.46$  και  $R_{pa} = 2.24$ . Με κόκκινο χρώμα απεικονίζεται η βέλτιστη γεωμετρία που προκύπτει όταν οι μεταβλητές σχεδιασμού εξομαλύνονται πρώτα με την εξομάλυνση γειτνίασης και στη συνέχεια με τη ΜΔΕ του Helmholtz. Με καφέ χρώμα απεικονίζεται η βέλτιστη γεωμετρία που προκύπτει με την αντίστροφη σειρά εξομάλυνσης.

### 3.1.5 Μεταβαλλόμενη ακτίνα $R$

Εξετάζεται η περίπτωση που η ακτίνα  $R$  μεταβάλλεται χωρικά στην επιφάνεια του μεταβαλλόμενου τμήματος της γεωμετρίας του αγωγού S-bend, διότι η βελτιστοποίηση έχει περισσότερη ελευθερία ως προς τη μορφοποίηση της γεωμετρίας με αποτέλεσμα να μεγαλώνει περισσότερο ο χώρος σχεδιασμού των υποψήφιων βέλτιστων λύσεων. Επίσης, εκτός της αναζήτησης της ενδεχόμενης καλύτερης βέλτιστης λύσης, μελετάται και η επίδραση του πολλαπλασιαστή  $f_l$  της εξίσωσης 2.93 στη μορφή της βελτιστοποιημένης γεωμετρίας. Το υπολογιστικό πλέγμα του μεταβαλλόμενου ορίου του αγωγού S-bend, που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της τοπικής ακτίνας  $R$ , απεικονίζεται στο σχήμα 3.17. Ο λόγος της επιφάνειας του μεγαλύτερου προς του μικρότερου υπολογιστικού κελιού του πλέγματος που απεικονίζεται στο σχήμα 3.17 ισούται με πέντε. Για την περίπτωση της μεταβαλλόμενης ακτίνας  $R$ , μελετήθηκαν οι βελτιστοποιήσεις με συντελεστές  $f_l = \{1, 2.5, 5, 7.5\}$  και  $R_{pa} = 2.24$ , τα αποτελέσματα των οποίων δίνονται στον πίνακα 3.3. Στον πίνακα 3.3 αναφέρεται επιπροσθέτως η βέλτιστη λύση που επιτυγχάνεται με ακτίνα  $R$  σταθερή και συγκεκριμένα για μεταβλητές εξομάλυνσης  $R_{pa} = 1.49$  και  $R_a = 4.85$ . Από τον πίνακα 3.3 συμπεραίνεται ότι, η βέλτιστη τιμή της συνάρτησης στόχου που προέκυψε από τη βελτιστοποίηση με μεταβαλλόμενη ακτίνα  $R$  ισούται με τη βέλτιστη τιμή για σταθερή ακτίνα  $R$ . Προκειμένου να μελετηθεί η επίδραση του  $f_l$  στη μορφή της βελτιστοποιημένης γεωμετρίας, παραθέτονται τα σχήματα 3.18 και 3.19. Στα σχήματα 3.18 και 3.19 απεικονίζεται η βέλτιστη γεωμετρία του αγωγού S-bend που προκύπτει για μεταβαλλόμενη ακτίνα  $R$  και για  $f_l = \{1, 2.5, 5, 7.5\}$ . Στα προαναφερθέντα σχήματα η γεωμετρία, ειδικά για μικρές τιμές του συντελεστή  $f_l$ , εμφανίζει έντονες διακυμάνσεις στο όριο. Τέλος, συγκρίνεται η βελτιστοποιημένη γεωμετρία του αγωγού για σταθερή ακτίνα  $R$  ( $R_{pa} = 1.49$  και  $R_a = 4.85$ ) και για μεταβαλλόμενη ακτίνα  $R$  ( $R_{pa} = 2.24$  και  $f_l = 5$ ) στο σχήμα 3.20. Από τον πίνακα 3.3 και από το σχήμα 3.20 προκύπτει ότι, η γεωμετρία με τοπική ακτίνα  $R$  έχει μεγαλύτερες διακυμάνσεις στο όριο της από την αντίστοιχη βέλτιστη γεωμετρία για σταθερή ακτίνα  $R$ , προκαλώντας ίδια περίπου μείωση στο  $\Delta P_t|_{S_{I,O}}$ . Επομένως, από κατασκευαστικής σκοπιάς ίσως να προτιμηθεί η πιο ομαλή γεωμετρία της σταθερής ακτίνας  $R$

« $R_{pa} = 1.49$  και  $R_a = 4.85$ ». Διότι, οι διακυμάνσεις που εμφανίζονται στο όριο της γεωμετρίας, για την περίπτωση της μεταβλητής ακτίνας  $R$ , δεν επιφέρουν κάποια επιπρόσθετη μείωση στην συνάρτηση-στόχο.

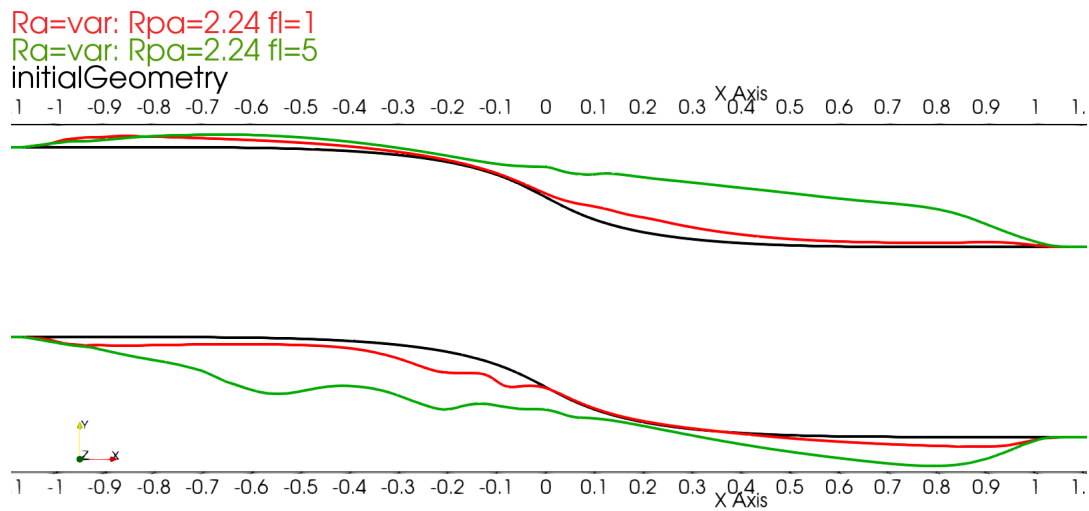


**Σχήμα 3.17:** *Sbend*: Απεικόνιση του υπολογιστικού πλέγματος του μεταβαλλόμενου ορίου του αγωγού *Sbend*. Με γαλάζιο χρώμα απεικονίζεται το μεταβαλλόμενο τμήμα του αγωγού, ενώ με κόκκινο χρώμα απεικονίζεται το σταθερό τμήμα του αγωγού.

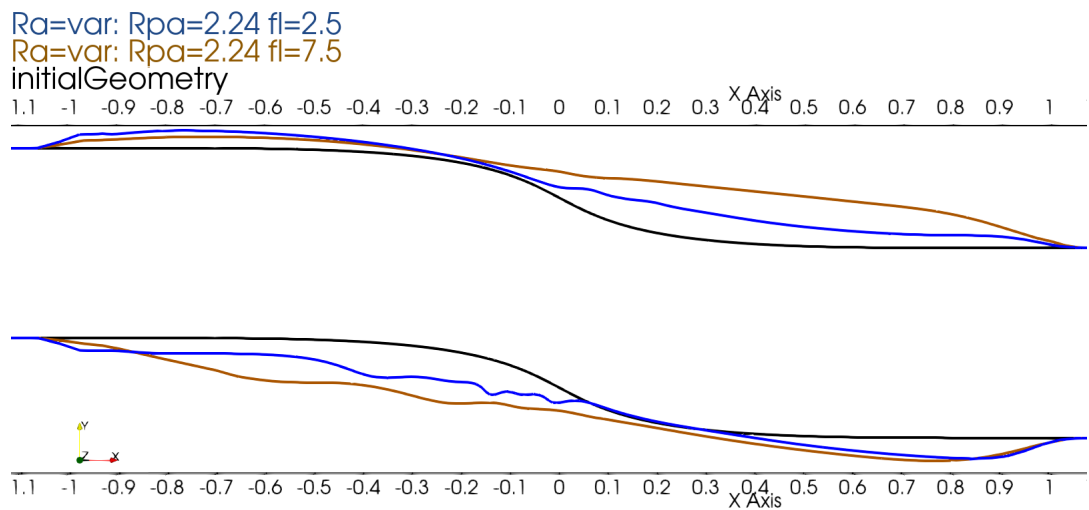
Μεταβαλλόμενη ακτίνα $R$						
	$R_a$					
	Μεταβαλλόμενο τοπικά					4.85
$R_{pa}$	2.24					1.49
$f_l$	1	2.5	5	7.5	10	-
$\Delta P_t _{S_{I,O}}$ $\left[ \frac{m^5}{s^3} \right] (10^{-7})$	6.763	6.515	6.359	6.352	6.365	6.353
Μείωση (%) του $\Delta P_t _{S_{I,O}}$	6.2	9.6	11.9	11.8	11.7	11.9

**Πίνακας 3.3:** Οι απώλειες ολικών πιέσεων μεταξύ εισόδου και εξόδου του αγωγού *Sbend* ( $\Delta P_t|_{S_{I,O}}$ ) και η μείωση τους, που προκύπτουν από τη βελτιστοποίηση όταν η ακτίνα  $R$  μεταβάλλεται τοπικά και χρησιμοποιούνται οι συντελεστές  $f_l = \{1, 2.5, 5, 7.5\}$  και για  $R_a = 4.85$  και  $R_{pa} = 1.49$ .

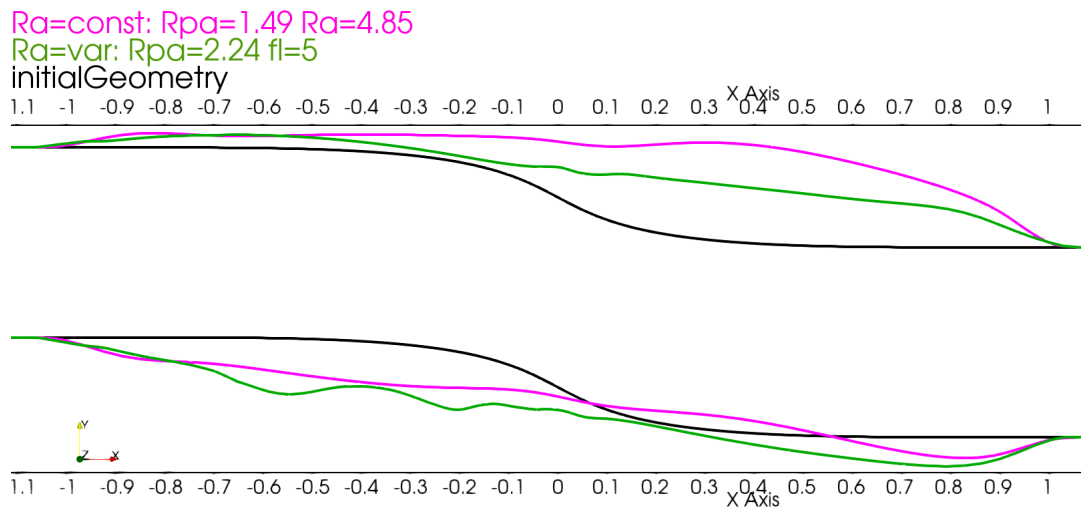
### 3.1. Αγωγός S-bend



**Σχήμα 3.18:** S-bend: Η βέλτιστη γεωμετρία του αγωγού S-bend που προκύπτει για την περίπτωση της μεταβαλλόμενης τοπικά ακτίνας  $R$  για συντελεστές  $f_l = \{1, 5\}$  και  $R_{pa} = 2.24$ . Με κόκκινο χρώμα απεικονίζεται η βέλτιστη γεωμετρία για  $f_l = 1$ , ενώ με πράσινο χρώμα για  $f_l = 5$ . Με μαύρο χρώμα απεικονίζεται η αρχική γεωμετρία του αγωγού S-bend.



**Σχήμα 3.19:** S-bend: Η βέλτιστη γεωμετρία του αγωγού S-bend που προκύπτει για την περίπτωση της μεταβαλλόμενης τοπικά ακτίνας  $R$  για συντελεστές  $f_l = \{2.5, 7.5\}$  και  $R_{pa} = 2.24$ . Με μπλε χρώμα απεικονίζεται η βέλτιστη γεωμετρία για  $f_l = 2.5$ , ενώ με καφέ χρώμα για  $f_l = 7.5$ . Με μαύρο χρώμα απεικονίζεται η αρχική γεωμετρία του αγωγού S-bend.



**Σχήμα 3.20:** *Sbend*: Η βέλτιστη γεωμετρία του αγωγού *Sbend*, που προκύπτει για την περίπτωση της σταθερής ακτίνας  $R$  με μεταβλητές εξομάλυνσης  $R_a = 4.85$  και  $R_{pa} = 1.49$ , απεικονίζεται με ροζ χρώμα. Με πράσινο χρώμα απεικονίζεται η βέλτιστη γεωμετρία για την περίπτωση της μεταβαλλόμενης ακτίνα  $R$  με  $R_{pa} = 2.24$  και  $fl = 1$ . Με μαύρο χρώμα απεικονίζεται η αρχική γεωμετρία του αγωγού *Sbend*.

### 3.1.6 Σύγκριση με NURBS παραμετροποίηση

Στη συνέχεια, πραγματοποιείται σύγκριση μεταξύ της βελτιστοποίησης της γεωμετρίας του αγωγού *Sbend* με κομβικό έλεγχο μορφής, σε σχέση με τη βελτιστοποίηση όταν το όριο του αγωγού ορίζεται με τη NURBS παραμετροποίηση. Για την παραμετροποίηση του ορίου του αγωγού με τη NURBS παραμετροποίηση, χρησιμοποιήθηκαν δώδεκα σημεία ελέγχου και συναρτήσεις βάσης ενδέκατου βαθμού. Επίσης, μελετήθηκαν οι εξής δύο περιπτώσεις:

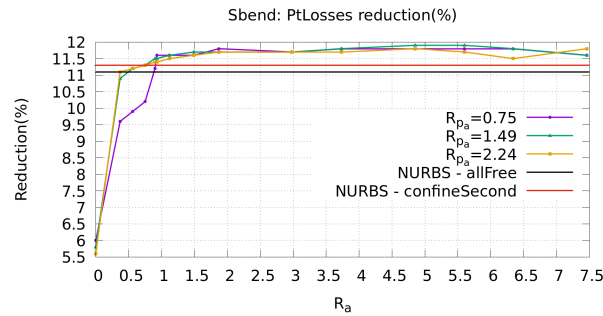
- *allFree*: Το πρώτο και το τελευταίο σημείο ελέγχου παραμένουν σταθερά κατά τη βελτιστοποίηση.
- *confineSecond*: Επιπροσθέτως, διατηρείται σταθερή η  $x$ -συνιστώσα του δεύτερου και του προτελευταίου σημείου ελέγχου, κατά τη βελτιστοποίηση.

Η μείωση(%) των απωλειών ολικής πίεσης μεταξύ εισόδου και εξόδου του αγωγού, όταν η γεωμετρία ορίζεται με τη NURBS παραμετροποίηση (*allFree*, *confineSecond*) και όταν η γεωμετρία ορίζεται με τον κομβικό έλεγχο μορφής για μεταβλητό  $R_a$  και

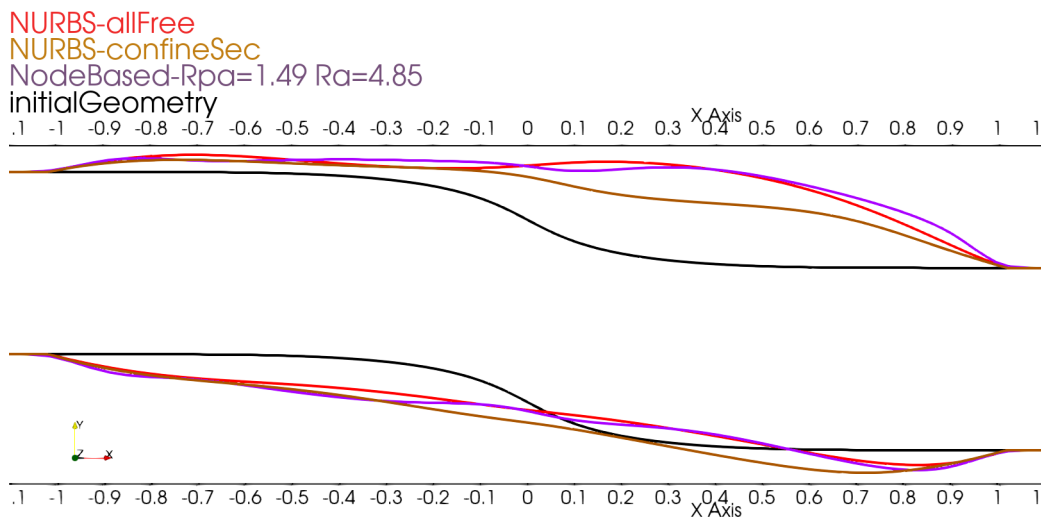
$R_{pa} = \{0.75, 1.49, 2.24\}$ , απεικονίζεται στο σχήμα 3.21. Επίσης, στον πίνακα 3.4 απεικονίζονται τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης όταν χρησιμοποιείται η NURBS παραμετροποίηση, για τις περιπτώσεις που αναφέρθηκαν παραπάνω, και για την περίπτωση που χρησιμοποιείται ο κομβικός έλεγχος μορφής με μεταβλητές εξομάλυνσης  $R_a = 4.85$  και  $R_{pa} = 1.49$ , που αποτελούν τη βέλτιστη περίπτωση της βελτιστοποίησης με τον κομβικό έλεγχο μορφής. Τόσο από το σχήμα 3.21, όσο και από τον πίνακα 3.4 προκύπτει ότι ο κομβικός έλεγχος μορφής προκαλεί μεγαλύτερη μείωση στην αντικειμενική συνάρτηση από τη NURBS παραμετροποίηση. Πιο συγκεκριμένα, από το σχήμα 3.21 παρατηρείται ότι η βελτιστοποίηση με τον κομβικό έλεγχο μορφής για  $R_a > 1.12$  και για οποιοδήποτε  $R_{pa}$ , δίνει καλύτερα αποτελέσματα από τη βελτιστοποίηση με τη NURBS παραμετροποίηση. Σχετικά με τη βέλτιστη γεωμετρία του αγωγού S-bend για τις περιπτώσεις που αναφέρονται στον πίνακα 3.4, αυτές απεικονίζονται στο σχήμα 3.22. Στο συγκεκριμένο σχήμα παρατηρείται ότι, η βέλτιστη γεωμετρία που προκύπτει από τον κομβικό έλεγχο μορφής παρουσιάζει παρόμοια μορφή με τη βέλτιστη γεωμετρία των περιπτώσεων της NURBS παραμετροποίησης. Επομένως, η διαφορά στη μείωση της συνάρτησης-στόχου οφείλεται σε μικρές διαφορές στη βελτιστοποιημένη γεωμετρία τον κομβικού ελέγχου μορφής σε σχέση με τις βελτιστοποιημένες γεωμετρίες της NURBS παραμετροποίησης.

Σύγκριση NURBS παραμετροποίησης με κομβικό έλεγχο μορφής					
		NURBS		Κομβικός έλεγχος μορφής	
		allFree	confineSecond	$R_a = 4.85 \& R_{pa} = 1.49$	
$\Delta P_t _{S_{I,O}}$	$\left[ \frac{m^5}{s^3} \right]$	$(10^{-7})$	6.407	6.396	6.353
Μείωση %		11.1	11.3	11.9	

**Πίνακας 3.4:** Οι απώλειες ολικής πίεσης μεταξύ εισόδου και εξόδου του αγωγού S-bend καθώς και η μείωση τους, όταν ο αγωγός ορίζεται με τη NURBS παραμετροποίηση και τον κομβικό έλεγχο μορφής. Ως *allFree* ορίζεται η περίπτωση που το πρώτο και το τελευταίο σημείο ελέγχου της NURBS παραμετροποίησης παραμένουν σταθερά, ενώ ως *confineSecond* όταν επιπροσθέτως διατηρείται σταθερή και η  $x$ -συνιστώσα του δεύτερου και προτελευταίου σημείου ελέγχου.



**Σχήμα 3.21:** *Sbend*: Η μείωση (%) των απωλειών ολικής πίεσης μεταξύ εισόδου και εξόδου που προκύπτει από τη βελτιστοποίηση του αγωγού *Sbend* για τις δύο περιπτώσεις της *NURBS* παραμετροποίησης και για τον κομβικό έλεγχο μορφής. Με μωβ χρώμα απεικονίζεται η μείωση για μεταβλητό  $R_a$  και  $R_{p_a} = 0.75$ , με πράσινο χρώμα για μεταβλητό  $R_a$  και  $R_{p_a} = 1.49$  και με πορτοκαλί χρώμα για μεταβλητό  $R_a$  και  $R_{p_a} = 2.24$ , όταν ο αγωγός ορίζεται με τον κομβικό έλεγχο μορφής. Με μαύρο χρώμα απεικονίζεται η μείωση των απωλειών όταν η γεωμετρία ορίζεται με *NURBS* παραμετροποίηση και το πρώτο και το τελευταίο σημείο ελέγχου μένουν σταθερά. Με κόκκινο χρώμα απεικονίζεται η μείωση των απωλειών όταν η γεωμετρία ορίζεται με *NURBS* παραμετροποίηση και επιπροσθέτως η  $x$ -συνιστώσα του δεύτερου και προτελευταίου σημείου ελέγχου παραμένει σταθερή.

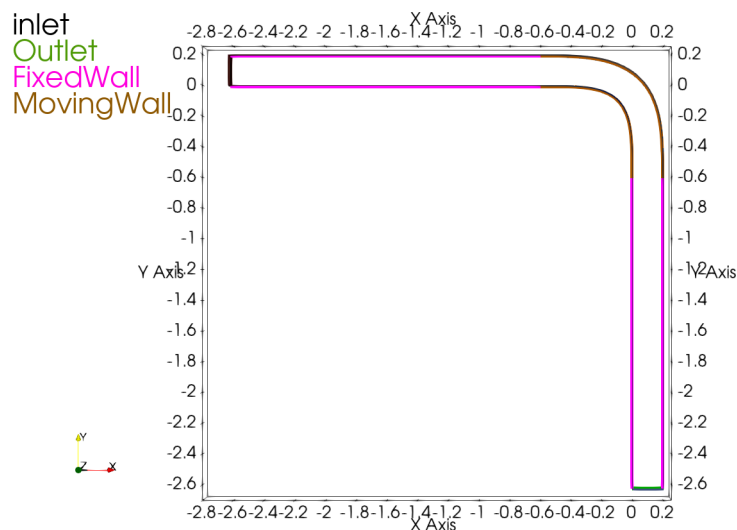


**Σχήμα 3.22:** *Sbend*: Απεικόνιση τμήματος της βέλτιστης γεωμετρίας του αγωγού σε τομή κατά τον άξονα  $Z$ . Με κόκκινο χρώμα απεικονίζεται η βέλτιστη γεωμετρία που προκύπτει όταν αυτή ορίζεται με τη *NURBS* παραμετροποίηση και το πρώτο και τελευταίο σημείο ελέγχου της *NURBS* παραμετροποίησης παραμένει σταθερό. Με καφέ χρώμα απεικονίζεται η βέλτιστη γεωμετρία που προκύπτει όταν αυτή ορίζεται με τη *NURBS* παραμετροποίηση και επιπροσθέτως η  $x$ -συνιστώσα του δεύτερου και προτελευταίου σημείο ελέγχου της παραμετροποίησης παραμένει σταθερή. Με μωβ χρώμα απεικονίζεται η βέλτιστη γεωμετρία όταν αυτή ορίζεται με τον κομβικό έλεγχο μορφής και χρησιμοποιούνται μεταβλητές εξομάλυνσης  $R_a = 4.85$  και  $R_{p_a} = 1.49$ .



## 3.2 90bend Αγωγός

Προκειμένου να ελεγχθεί η γενική ισχύς των παρατηρήσεων που προέκυψαν από τη βελτιστοποίηση του αγωγού S-bend, πραγματοποιείται η ίδια παραμετρική μελέτη για τη βελτιστοποίηση του αγωγού που η διεύθυνση εισόδου και εξόδου σχηματίζουν γωνία 90°. Για συντομία, ο εν λόγω αγωγός θα αναφέρεται ως 90bend. Η οριακή γεωμετρία του αγωγού 90bend και τα τμήματα από τα οποία απαρτίζεται απεικονίζονται στο σχήμα 3.23. Οι μέγιστες διαστάσεις του αγωγού είναι  $x \in [-2.64, 0.2]$  και  $y \in [-2.64, 0.2]$ , ενώ για το μεταβλητό τμήμα του αγωγού είναι  $x \in [-0.6, 0.2]$  και  $y \in [-0.6, 0.2]$ .

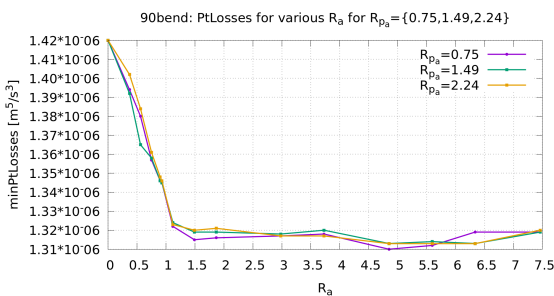


**Σχήμα 3.23:** 90bend: Η γεωμετρία του αγωγού 90bend που βελτιστοποιείται. Με μαύρο χρώμα απεικονίζεται η είσοδος (inlet) του αγωγού, με πράσινο χρώμα απεικονίζεται η έξοδος (outlet) του αγωγού, με μωβ χρώμα απεικονίζεται το αμετάβλητο τμήμα του αγωγού κατά την βελτιστοποίηση (Fixedwall), με καφέ χρώμα απεικονίζεται το μεταβαλλόμενο από την βελτιστοποίηση τμήμα του αγωγού (MovingWall).

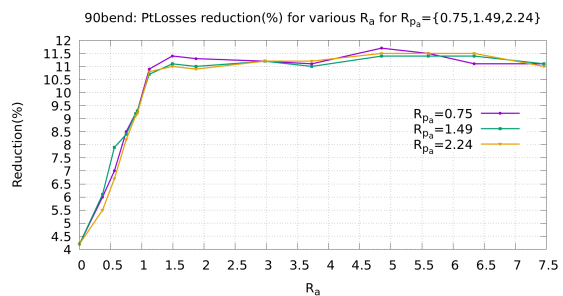
### 3.2.1 Παραλλαγή 1

Στην ενότητα αυτή μελετάται η επίδραση της εξομάλυνσης γειτνίασης και της εξομάλυνσης Helmholtz στη βελτιστοποίηση του αγωγού 90bend. Η επίδραση της εξομάλυνσης γειτνίασης και της εξομάλυνσης Helmholtz στη συνάρτηση-στόχο απεικονίζεται στα σχήματα 3.24α' και 3.24β', στα οποία απεικονίζεται η τιμή και η μείωση(%) των απωλειών ολικής πίεσης μεταξύ εισόδου και εξόδου του αγωγού 90bend για τις με-

ταβλητές εξομάλυνσης  $R_a$  και  $R_{pa}$ , που δίνονται στον πίνακα 3.2. Από τα παραπάνω σχήματα προκύπτουν τα ίδια συμπεράσματα με την περίπτωση του *Sbend* αγωγού. Δηλαδή, η βελτιστοποίηση με μικρές τιμές του  $R_a$  της εξομάλυνσης Helmholtz, ανεξαρτήτως της τιμής του  $R_{pa}$  της εξομάλυνσης γειτνίασης, προκαλεί μικρότερη μείωση στη συνάρτησης-στόχου από ότι η βελτιστοποίηση με μεγαλύτερα  $R_a$ . Πιο συγκεκριμένα, για μικρές τιμές της μεταβλητής  $R_a (< 1.12)$ , ανεξαρτήτως τη τιμή της  $R_{pa}$ , η μείωση της συνάρτησης-στόχου είναι μικρότερη συγκριτικά με την μείωση της για τις υπόλοιπες τιμές της μεταβλητής  $R_a$ . Στο εύρος τιμών  $R_a \in [1.12, 7.49]$  η μείωση της συνάρτησης-στόχου, τόσο για μεταβλητό  $R_a$  όσο και για μεταβλητό  $R_{pa}$  δεν παρουσιάζει σημαντικές διαφορές. Η μέγιστη τιμή της μείωσης των απωλειών ολικής πίεσης εντοπίζεται στο εύρος  $R_a \in [3.73, 7.46]$ . Σχετικά με την επίδραση της εξομάλυνσης γειτνίασης στη συνάρτηση-στόχο παρατηρείται ότι, όπως και στην περίπτωση του αγωγού *Sbend*, δεν εμφανίζεται σημαντική διαφορά στη συνάρτηση-στόχο για διαφορετικές τιμές της μεταβλητής  $R_{pa}$ . Η επίδραση της εξομάλυνσης Helmholtz στη μορφή της γεωμετρίας παρουσιάζεται στα σχήματα 3.25α' και 3.25β', στα οποία απεικονίζεται η βέλτιστη γεωμετρία για διάφορες τιμές της μεταβλητής  $R_a$  όταν η μεταβλητή  $R_{pa} = \{0.75, 2.24\}$ . Από τα σχήματα 3.25α' και 3.25β' προκύπτει ότι όσο αυξάνεται η τιμή του  $R_a$ , ανεξαρτήτως της τιμής του  $R_{pa}$ , η μορφή της γεωμετρίας γίνεται όλο και πιο ομαλή.

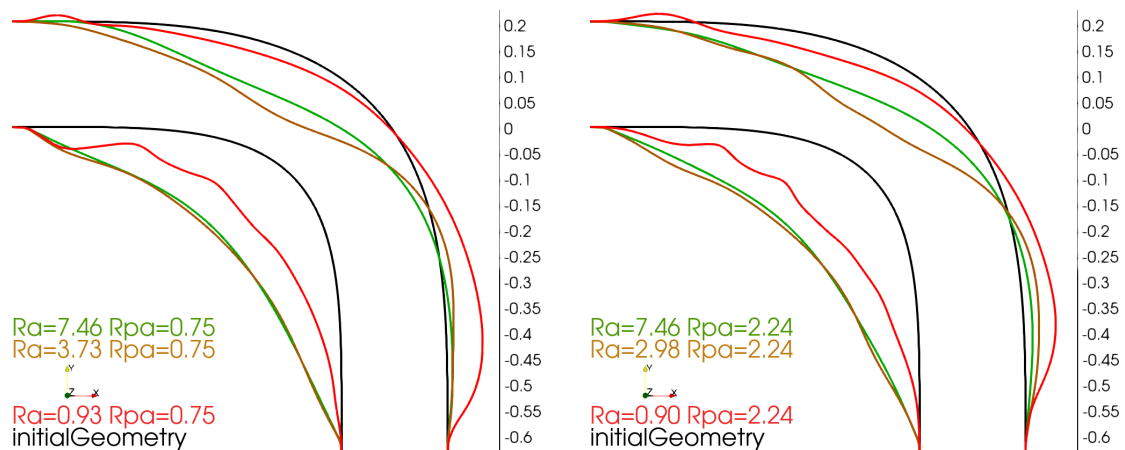


(α')



(β')

**Σχήμα 3.24:** *90bend*: Οι βέλτιστες τιμές (αριστερά) και η μείωση (%) (δεξιά) των απωλειών ολικής πίεσης μεταξύ εισόδου και εξόδου για τον αγωγό *90bend*, που προέκυψαν από την παραμετρική μελέτη των μεταβλητών εξομάλυνσης  $R_a$  και  $R_{pa}$ . Με μωβ χρώμα απεικονίζονται τα αποτελέσματα για  $R_{pa} = 0.75$ , με πράσινο χρώμα για  $R_{pa} = 1.49$  και με πορτοκαλί χρώμα για  $R_{pa} = 2.24$ .



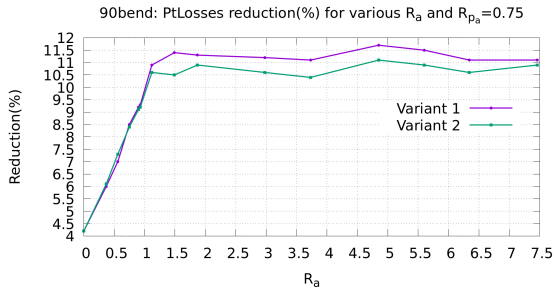
(α') Με κόκκινο χρώμα απεικονίζεται η βέλτιστη γεωμετρία του αγωγού για  $R_a = 0.90$ , με καφέ χρώμα για  $R_a = 3.73$  και με πράσινο χρώμα  $R_a = 6.34$ .

(β') Με κόκκινο χρώμα απεικονίζεται η βέλτιστη γεωμετρία του αγωγού για  $R_a = 0.90$ , με καφέ χρώμα για  $R_a = 2.98$  και με πράσινο χρώμα για  $R_a = 7.46$ .

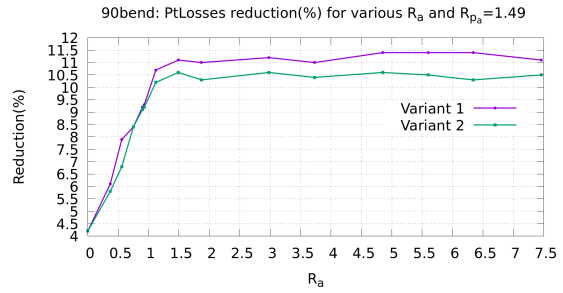
**Σχήμα 3.25:** 90bend: Απεικόνιση της βελτιστοποιημένης γεωμετρίας του αγωγού 90bend, σε τομή κατά τον άξονα Z, για μεταβλητό  $R_a$  και  $R_{pa} = 0.75$  (αριστερά),  $R_{pa} = 2.24$  (δεξιά). Με μαύρο χρώμα απεικονίζεται η αρχική γεωμετρία της βελτιστοποίησης.

### 3.2.2 Παραλλαγή 2

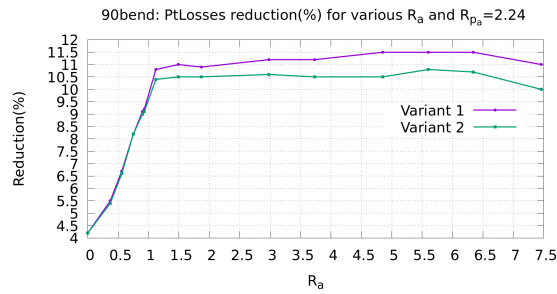
Στην συγκεκριμένη υποενοότητα, εξετάζεται η επίδραση στα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης του αγωγού 90bend της σειράς με την οποία πραγματοποιούνται η εξομάλυνση Helmholtz και η εξομάλυνση γειτνίασης στις μεταβλητές σχεδιασμού. Η επίδραση των δύο παραλλαγών στη συνάρτηση-στόχο παρουσιάζεται στα σχήματα 3.26α-3.26γ'. Συγκεκριμένα, στα σχήματα 3.26α'-3.26γ' απεικονίζεται η μείωση(%) της συνάρτησης-στόχου για τις τιμές των μεταβλητών  $R_a$  και  $R_{pa}$ , που δίνονται στον πίνακα 3.2, για τις δύο παραλλαγές στη σειρά της εξομάλυνσης. Από τα προαναφερθέντα σχήματα συμπεραίνεται ότι, όπως και στον αγωγό S-bend, η παραλλαγή 1 οδηγεί σε καλύτερα αποτελέσματα από την παραλλαγή 2. Η επίδραση των δύο παραλλαγών στη μορφή της βελτιστοποιημένης γεωμετρίας αναδεικνύεται στο σχήμα 3.27, που απεικονίζεται η βελτιστοποίηση με τις δύο παραλλαγές για τις μεταβλητές εξομάλυνσης  $R_a = 7.46$  και  $R_{pa} = 2.24$ . Στο σχήμα 3.27 παρατηρείται ότι, όπως και στην περίπτωση του αγωγού S-bend, η γεωμετρία με την παραλλαγή 2 στο σημείο σύνδεσης της μεταβαλλόμενης με την αμετάβλητη γεωμετρία παρουσιάζει μικρότερη μετατόπιση του



(α')  $R_{p_a} = 0.75$



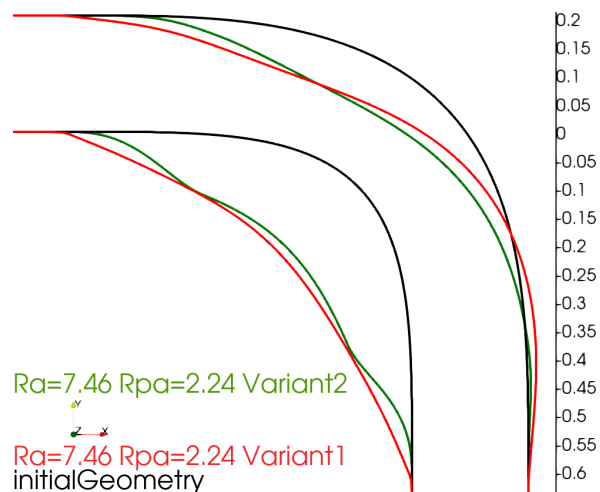
(β')  $R_{p_a} = 1.49$



(γ')  $R_{p_a} = 2.24$

**Σχήμα 3.26:** 90bend: Η μείωση % των απωλειών ολικής πίεσης μεταξύ εισόδου και εξόδου που προκύπτει από τη βελτιστοποίηση του αγωγού 90bend για μεταβλητές εξομάλυνσης  $R_{p_a} = \{0.75, 1.49, 2.24\}$  και μεταβλητό  $R_a$ . Με μωβ χρώμα απεικονίζεται η μείωση της συνάρτησης-στόχου για την περίπτωση που οι μεταβλητές σχεδιασμού πρώτα εξομαλύνονται με την εξομάλυνση γειτνίασης και στη συνέχεια με τη ΜΔΕ Helmholtz, ενώ με πράσινο χρώμα όταν συμβαίνει η αντίστροφη σειρά εξομάλυνσης.

μεταβαλλόμενου ορίου.



**Σχήμα 3.27:** 90bend: Απεικόνιση τμήματος της βέλτιστης γεωμετρίας του αγωγού 90bend, σε τομή κατά τον άξονα  $Z$ , για μεταβλητές εξομάλυνσης  $R_a = 7.46$  και  $R_{p_a} = 2.24$ . Με κόκκινο χρώμα απεικονίζεται η βέλτιστη γεωμετρία που προκύπτει όταν οι μεταβλητές σχεδιασμού εξομαλύνονται πρώτα με την εξομάλυνση γειτνίασης και στη συνέχεια με τη ΜΔΕ του Helmholtz. Με πράσινο χρώμα απεικονίζεται η βέλτιστη γεωμετρία που προκύπτει με την αντίστροφη σειρά εξομάλυνσης.

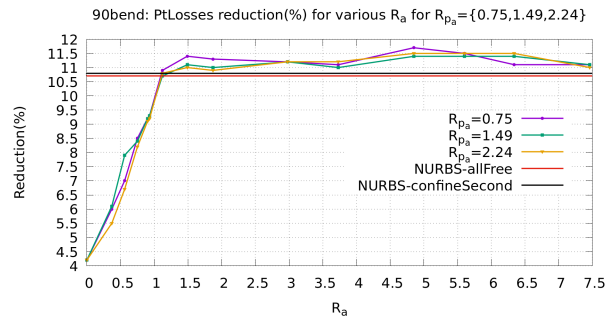
### 3.2.3 Σύγκριση με NURBS παραμετροποίηση

Ακολουθεί σύγκριση των αποτελεσμάτων της βελτιστοποίησης του αγωγού 90bend, όταν αυτός ορίζεται με τον κομβικό έλεγχο μορφής και όταν ορίζεται με τη NURBS παραμετροποίηση. Για τη NURBS παραμετροποίηση του ορίου του αγωγού χρησιμοποιήθηκαν επτά σημεία ελέγχου και συναρτήσεις βάσης έκτου βαθμού. Επίσης, μελετήθηκαν οι περιπτώσεις allFree και confineSecond όπως και με τον αγωγό Sbend. Η σύγκριση της μείωσης της συνάρτησης-στόχου μεταξύ της βελτιστοποίησης γεωμετρίας που ορίζεται με τον κομβικό έλεγχο μορφής και τη NURBS παραμετροποίηση παρουσιάζεται στο σχήμα 3.28. Πιο συγκεκριμένα, στο σχήμα 3.28 απεικονίζεται η μείωση(%) των απωλειών ολικής πίεσης μεταξύ εισόδου και εξόδου του αγωγού 90bend για τις προαναφερθείσες περιπτώσεις της NURBS παραμετροποίησης και για τον κομβικό έλεγχο μορφής για τα  $R_a$  και  $R_{p_a}$  του πίνακα 3.2. Από το σχήμα 3.28 προκύπτει ότι, ανεξαρτήτως της τιμής του  $R_{p_a}$  της εξομάλυνσης γειτνίασης, για τις περισσότερες τιμές του  $R_a$  η βελτιστοποίηση με τον κομβικό έλεγχο μορφής προκαλεί μεγαλύτερη μείωση στη συνάρτηση-στόχο από ότι η βελτιστοποίηση με τη NURBS παραμετροποίηση. Συ-

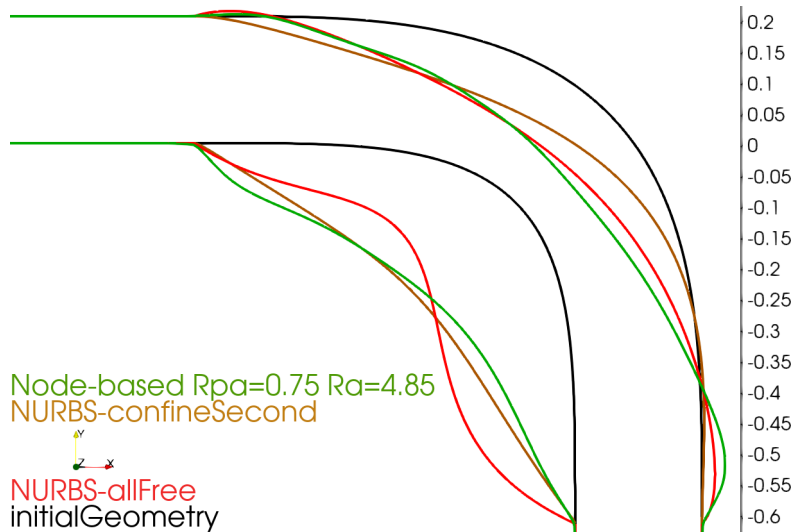
γκεκριμένα, ο κομβικός έλεγχος μορφής για  $R_a > 1.12$  δίνει καλύτερα αποτελέσματα βελτιστοποίησης από ότι οι δύο περιπτώσεις της NURBS παραμετροποίησης. Για την επίδραση στη μορφή της βελτιστοποιημένης γεωμετρίας του κομβικού ελέγχου και της NURBS παραμετροποίησης, συγκρίνονται οι περιπτώσεις του πίνακα 3.5. Στον πίνακα 3.5 δίνονται τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης με τη NURBS παραμετροποίηση και με τον κομβικό έλεγχο μορφής για μεταβλητές εξομάλυνσης  $R_{pa} = 0.75$  και  $R_a = 4.85$ , που αποτελεί τη βέλτιστη λύση της βελτιστοποίηση με τον κομβικό έλεγχο μορφής. Η βέλτιστη γεωμετρία του αγωγού 90bend των περιπτώσεων που αναφέρονται στον πίνακα 3.5, απεικονίζεται στο σχήμα 3.29. Από το σχήμα 3.29 προκύπτει ότι, παρόλο που η βέλτιστη γεωμετρία με τον κομβικό έλεγχο μορφής παρουσιάζει παρόμοια μορφή με την περίπτωση *confineSecond* της NURBS παραμετροποίησης, η μείωση της συνάρτησης-στόχου με τον κομβικό έλεγχο μορφής είναι μεγαλύτερη.

Σύγκριση NURBS παραμετροποίησης με κομβικό έλεγχο μορφής					
		NURBS		Κομβικός έλεγχος μορφής	
		allFree	confineSecond	$R_a = 4.85$ & $R_{pa} = 1.49$	
$\Delta P_t _{S_{I,O}}$	$\left[ \frac{m^5}{s^3} \right]$	$(10^{-6})$	1.324	1.322	1.310
Μείωση %		10.7	10.8	11.7	

**Πίνακας 3.5:** Οι απώλειες ολικής πίεσης μεταξύ εισόδου και εξόδου του αγωγού 90bend καθώς και η μείωση τους, όταν ο αγωγός ορίζεται με τη NURBS παραμετροποίησης και τον κομβικό έλεγχο μορφής. Ως *allFree* ορίζεται η περίπτωση που το πρώτο και το τελευταίο σημείο ελέγχου της NURBS παραμετροποίησης παραμένουν σταθερά, ενώ ως *confineSecond* όταν επιπροσθέτως διατηρείται σταθερή και η  $x$ -συνιστώσα του δεύτερου και προτελευταίου σημείου ελέγχου.



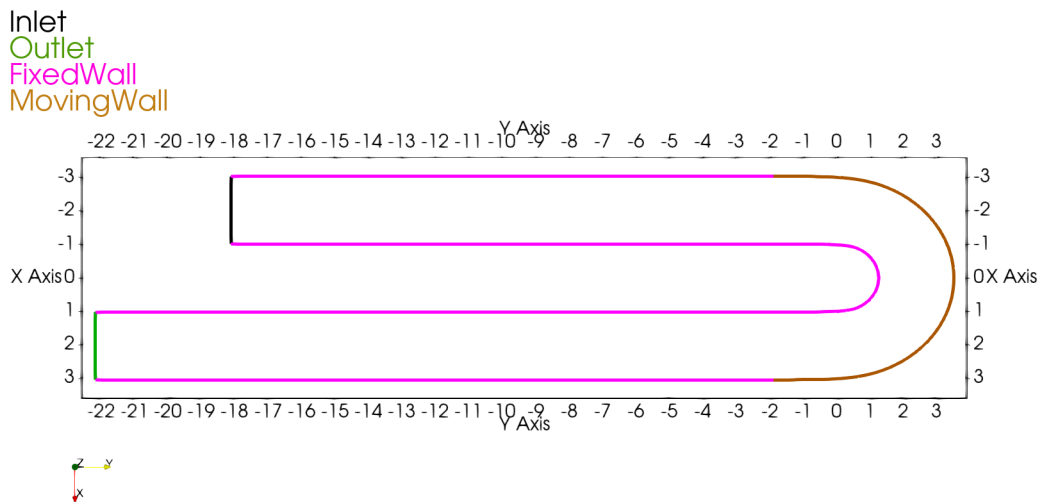
**Σχήμα 3.28:** 90bend: Η μείωση (%) των απωλειών ολικής πίεσης μεταξύ εισόδου και εξόδου που προκύπτει από τη βελτιστοποίηση του αγωγού 90bend για τις δύο περιπτώσεις της NURBS παραμετροποίησης και για τον κομβικό έλεγχο μορφής. Με μωβ χρώμα απεικονίζεται η μείωση για μεταβλητό  $R_a$  και  $R_{p_a} = 0.75$ , με πράσινο χρώμα για μεταβλητό  $R_a$  και  $R_{p_a} = 1.49$  και με πορτοκαλί χρώμα για μεταβλητό  $R_a$  και  $R_{p_a} = 2.24$ , όταν ο αγωγός ορίζεται με τον κομβικό έλεγχο μορφής. Με μαύρο χρώμα απεικονίζεται η μείωση των απωλειών όταν η γεωμετρία ορίζεται με NURBS παραμετροποίηση και το πρώτο και το τελευταίο σημείο ελέγχου μένουν σταθερά. Με κόκκινο χρώμα απεικονίζεται η μείωση των απωλειών όταν η γεωμετρία ορίζεται με NURBS παραμετροποίηση και επιπροσθέτως η  $x$ -συνιστώσα του δεύτερου και προτελευταίου σημείου ελέγχου παραμένει σταθερή.



**Σχήμα 3.29:** 90bend: Απεικόνιση τμήματος της βέλτιστης γεωμετρίας του αγωγού σε τομή κατά τον άξονα Z. Με κόκκινο χρώμα απεικονίζεται η βέλτιστη γεωμετρία που προκύπτει όταν αυτή ορίζεται με τη NURBS παραμετροποίηση και το πρώτο και τελευταίο σημείο ελέγχου της NURBS παραμετροποίησης παραμένει σταθερό. Με καφέ χρώμα απεικονίζεται η βέλτιστη γεωμετρία που προκύπτει όταν αυτή ορίζεται με τη NURBS παραμετροποίηση και επιπροσθέτως η  $x$ -συνιστώσα του δεύτερου και προτελευταίου σημείου ελέγχου της παραμετροποίησης παραμένει σταθερή. Με πράσινο χρώμα απεικονίζεται η βέλτιστη γεωμετρία όταν αυτή ορίζεται με τον κομβικό έλεγχο μορφής και με μεταβλητές εξομάλυνσης  $R_a = 4.85$  και  $R_{p_a} = 0.75$ . Με μαύρο χρώμα απεικονίζεται η αρχική γεωμετρία με την οποία ξεκινά η διαδικασία της βελτιστοποίησης.

### 3.3 Ubend Αγωγός

Εδώ, εξετάζεται η βελτιστοποίηση αγωγού που η είσοδος με την έξοδο σχηματίζουν γωνία 180°. Ο εν λόγω αγωγός θα αναφέρεται ως Ubend. Η οριακή γεωμετρία του αγωγού Ubend και τα τμήματά της απεικονίζονται στο σχήμα 3.30. Οι μέγιστες διαστάσεις του αγωγού είναι  $x \in [-3, 3]$  και  $y \in [-22, 3.33]$ , ενώ για το μεταβλητό τμήμα του αγωγού είναι  $x \in [-3, 3]$  και  $y \in [-2, 3.33]$ .



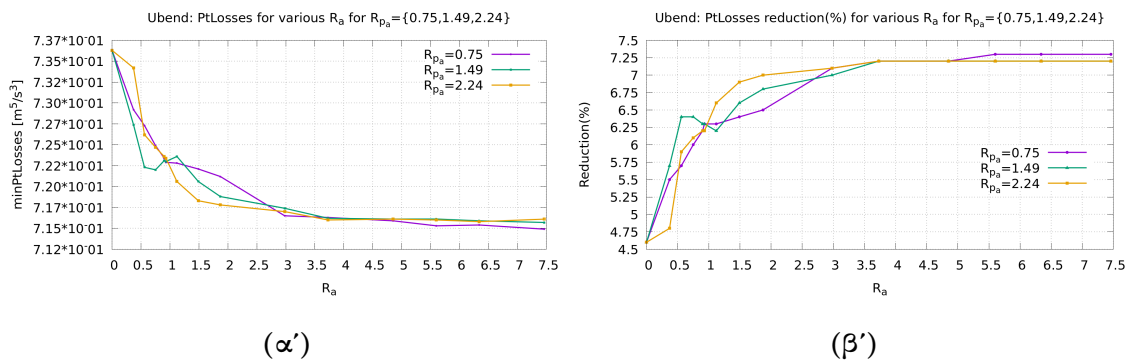
**Σχήμα 3.30:** Ubend: Η γεωμετρία του αγωγού Ubend που βελτιστοποιείται. Με μαύρο χρώμα απεικονίζεται η είσοδος (inlet) του αγωγού, με πράσινο χρώμα απεικονίζεται η έξοδος (outlet) του αγωγού, με μωβ χρώμα απεικονίζεται το αμετάβλητο τμήμα του αγωγού κατά την βελτιστοποίηση (Fixedwall), με καφέ χρώμα απεικονίζεται το μεταβαλλόμενο από την βελτιστοποίηση τμήμα του αγωγού (MovingWall).

#### 3.3.1 Παραλλαγή 1

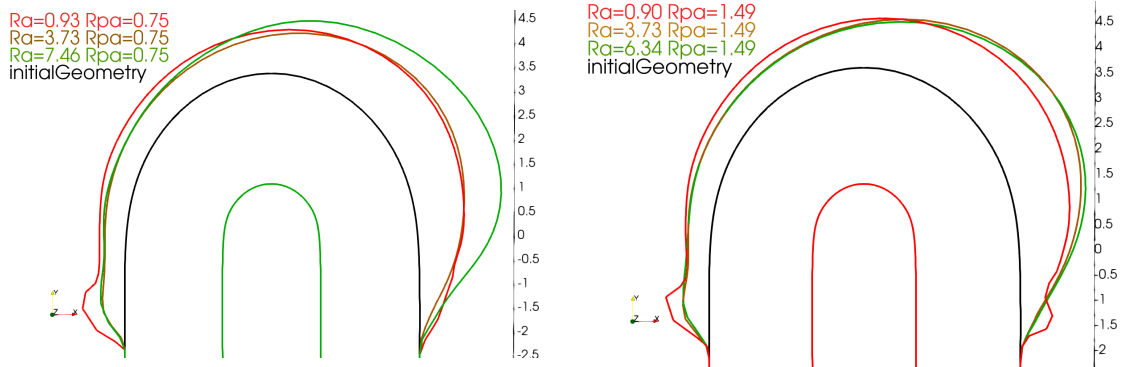
Ακολουθεί μελέτη της επίδρασης της εξομάλυνσης γειτνίασης και της εξομάλυνσης Helmholtz στη βελτιστοποίηση του αγωγού Ubend. Αρχικά, η επίδραση των εξομάλυνσεων γειτνίασης και Helmholtz στη συνάρτηση-στόχο, αναδεικνύεται στα σχήματα 3.31α' και 3.31β' που απεικονίζεται η τιμή και η μείωση(%) των απωλειών ολικής πίεσης μεταξύ εισόδου και εξόδου του αγωγού Ubend, για τις μεταβλητές εξομάλυνσης  $R_a$  και  $R_{pa}$  που δίνονται στον πίνακα 3.2. Από τα παραπάνω σχήματα προκύπτει, ότι η βελτιστοποίηση με μικρές τιμές της μεταβλητής  $R_a$  της εξομάλυνσης Helmholtz, ανε-



ξαρτήτως της τιμής της μεταβλητής  $R_{pa}$  της εξομάλυνσης γειτνίασης, επιφέρει μικρή μείωση συγκριτικά με τις μεγαλύτερες τιμές της μεταβλητής  $R_a$ . Επίσης, οι διάφορες τιμές της μεταβλητής  $R_{pa}$  της εξομάλυνση γειτνίασης, στην περιοχή των μεγάλων  $R_a$  που εμφανίζεται η μεγάλη μείωση της συνάρτησης-στόχου, δεν μεταβάλλουν σημαντικά τη συνάρτηση-στόχο. Πιο συγκεκριμένα, στα σχήματα 3.31α' και 3.31β' παρατηρείται ότι για  $R_a < 1.87$  η μείωση της συνάρτησης-στόχου, ανεξαρτήτως της μεταβλητής  $R_{pa}$ , είναι μικρότερη από τη μείωση που προκύπτει για τις υπόλοιπες τιμές του  $R_a$ . Για τις τιμές του  $R_a \in [2.98, 7.46]$  η μείωση της συνάρτησης-στόχου, ανεξαρτήτως της τιμής των μεταβλητών  $R_a$  και  $R_{pa}$ , παρουσιάζει μικρές διαφορές. Η μέγιστη τιμή της μείωσης των απωλειών ολικής πίεσης εντοπίζεται στο εύρος  $R_a \in [[3.73, 7.46]$ . Στη συνέχεια, η επίδραση της εξομάλυνσης Helmholtz στη μορφή της βελτιστοποιημένης γεωμετρίας παρουσιάζεται στα σχήματα 3.32α' και 3.32β', που απεικονίζεται η βέλτιστη γεωμετρία για διάφορες τιμές της μεταβλητής  $R_a$  όταν η μεταβλητή  $R_{pa} = \{0.75, 1.49, 2.24\}$ . Από τα σχήματα 3.32α' και 3.32β' προκύπτει ότι όσο αυξάνεται η τιμή του  $R_a$ , ανεξαρτήτως της τιμής του  $R_{pa}$ , η μορφή της γεωμετρίας γίνεται περισσότερο ομαλή. Τα παραπάνω συμπεράσματα είναι παρόμοια με τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τη βελτιστοποίηση των αγωγών Sbend και 90bend.



**Σχήμα 3.31:** Ubend: Οι βέλτιστες τιμές (αριστερά) και η μείωση (%) (δεξιά) των απωλειών ολικής πίεσης μεταξύ εισόδου και εξόδου για τον αγωγό Ubend, που προέκυψαν από την παραμετρική μελέτη των μεταβλητών εξομάλυνσης  $R_a$  και  $R_{pa}$ . Με μωβ χρώμα απεικονίζονται τα αποτελέσματα για  $R_{pa} = 0.75$ , με πράσινο χρώμα για  $R_{pa} = 1.49$  και με πορτοκαλί χρώμα για  $R_{pa} = 2.24$ .



(α') Με κόκκινο χρώμα απεικονίζεται η βέλτιστη γεωμετρία του αγωγού για  $R_a = 0.90$ , με καφέ χρώμα για  $R_a = 3.73$  και με πράσινο χρώμα  $R_a = 6.34$ .

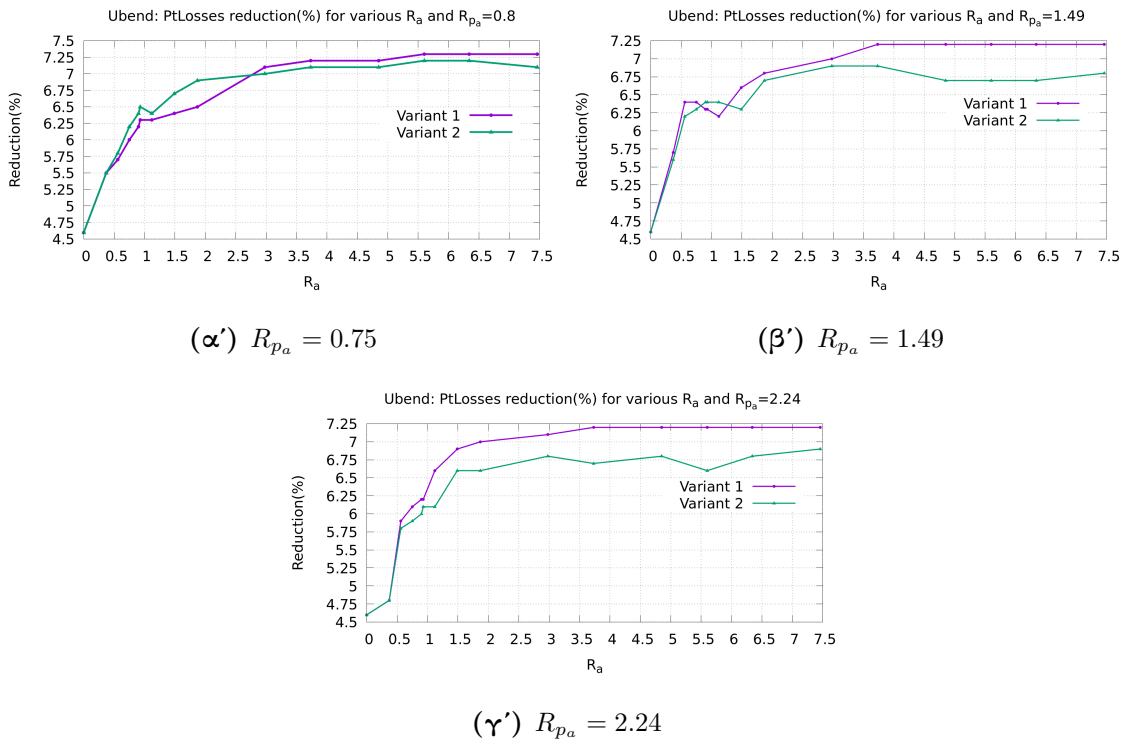
(β') Με κόκκινο χρώμα απεικονίζεται η βέλτιστη γεωμετρία του αγωγού για  $R_a = 0.90$ , με καφέ χρώμα για  $R_a = 3.73$  και με πράσινο χρώμα για  $R_a = 6.34$ .

**Σχήμα 3.32:** *U*bend: Απεικόνιση της βελτιστοποιημένης γεωμετρίας του αγωγού *U*bend, σε τομή κατά τον άξονα *Z*, για μεταβλητό  $R_a$  και  $R_{pa} = 0.75$  (αριστερά),  $R_{pa} = 1.49$  (δεξιά). Με μαύρο χρώμα απεικονίζεται η αρχική γεωμετρία της βελτιστοποίησης.

### 3.3.2 Παραλλαγή 2

Στη ενότητα αυτή, εξετάζεται η επίδραση στη βελτιστοποίηση της σειράς με την οποία εφαρμόζονται οι εξομαλύνσεις Helmholtz και γειτνίασης στις μεταβλητές σχεδιασμού. Η σύγκριση στη μείωση της συνάρτησης-στόχου από τη βελτιστοποίηση με τις δύο παραλλαγές προβάλλεται στα σχήματα 3.33α' - 3.33γ', που απεικονίζεται η μείωση(%) των απωλειών ολικής πίεσης μεταξύ εισόδου και εξόδου του αγωγού, για τις μεταβλητές  $R_a$  και  $R_{pa}$  του πίνακα 3.2 και για τις παραπάνω παραλλαγές στη σειρά εξομάλυνσης. Στο σχήμα 3.33α' παρατηρείται ότι, η μείωση της συνάρτησης-στόχου είναι μεγαλύτερη με τη παραλλαγή 2 από ότι η μείωση με τη παραλλαγή 1 για τις τιμές  $R_a \in [0.37, 2.98]$ . Όμως, σε αυτό το εύρος τιμών της μεταβλητής  $R_a$  η βελτιστοποίηση δεν εμφανίζει τη μέγιστη μείωσή της. Στη συνέχεια, για τις υπόλοιπες τιμές της μεταβλητής  $R_a$  οι παραλλαγές παρουσιάζουν ίδια ή παρόμοια μείωση. Αντίθετα, στα σχήματα 3.33β' και 3.33γ', σχεδόν για όλες τις μεταβλητές  $R_a$ , η παραλλαγή 2 δίνει χειρότερα αποτελέσματα από την παραλλαγή 1. Επομένως, συνολικά από τα σχήματα 3.33α' - 3.33γ' προκύπτει ότι η παραλλαγή 1 δίνει, στις περισσότερες περιπτώσεις, καλύτερα αποτελέσματα από την παραλλαγή 2. Σχετικά με την επίδραση των δύο παραλλαγών στη μορφή της βελτιστοποιημένης γεωμετρίας, αυτή παρουσιάζεται στο σχήμα 3.34 που απεικονίζεται

### 3.3. Ubend Αγωγός



**Σχήμα 3.33:** Ubend: Η μείωση % των απωλειών ολικής πίεσης μεταξύ εισόδου και εξόδου που προκύπτει από τη βελτιστοποίηση του αγωγού Ubend για μεταβλητές εξομάλυνσης  $R_{p_a} = \{0.75, 1.49, 2.24\}$  και μεταβλητό  $R_a$ . Με μωβ χρώμα απεικονίζεται η μείωση της συνάρτησης-στόχου για την περίπτωση που οι μεταβλητές σχεδιασμού πρώτα εξομαλύνονται με την εξομάλυνση γειτνίασης και στη συνέχεια με τη ΜΔΕ Helmholtz, ενώ με πράσινο χρώμα όταν συμβαίνει η αντίστροφη σειρά εξομάλυνσης.

η βελτιστοποίηση με τις δύο παραλλαγές για τις μεταβλητές εξομάλυνσης  $R_a = 4.85$  και  $R_{p_a} = 1.49$ . Στο σχήμα 3.34 παρατηρείται ότι, η βελτιστοποιημένη γεωμετρία με την παραλλαγή 2 παρουσιάζει μικρότερη μετατόπιση στην περιοχή σύνδεσης του μεταβαλλόμενου και αμετάβλητου ορίου της γεωμετρίας από ότι η βελτιστοποιημένη γεωμετρία με την παραλλαγή 1. Οι παραπάνω παρατηρήσεις είναι παρόμοιες με τις παρατηρήσεις που προκύπτουν από τη βελτιστοποίηση των αγωγών S-bend και 90-bend.



**Σχήμα 3.34:** Απεικόνιση τμήματος της βέλτιστης γεωμετρίας του αγωγού *Ubend*, σε τομή κατά τον άξονα *Z*, για μεταβλητές εξομάλυνσης  $R_a = 7.46$  και  $R_{pa} = 2.24$ . Με κόκκινο χρώμα απεικονίζεται η βέλτιστη γεωμετρία που προκύπτει όταν οι μεταβλητές σχεδιασμού εξομαλύνονται πρώτα με την εξομάλυνση γειτνίασης και στη συνέχεια με τη *MΔΕ* του *Helmholtz*. Με πράσινο χρώμα απεικονίζεται η βέλτιστη γεωμετρία που προκύπτει με την αντίστροφη σειρά εξομάλυνσης.

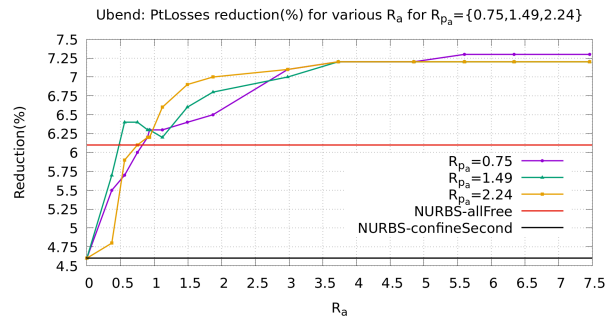
### 3.3.3 Σύγκριση με NURBS παραμετροποίηση

Επιπλέον, πραγματοποιείται σύγκριση των αποτελεσμάτων της βελτιστοποίησης του αγωγού *Ubend*, όταν αυτός ορίζεται με τη NURBS παραμετροποίηση και τον κομβικό έλεγχο μορφής. Χρησιμοποιήθηκαν έξι σημεία ελέγχου και συναρτήσεις βάσης τρίτου βαθμού για τη NURBS παραμετροποίηση. Οι περιπτώσεις που μελετήθηκαν είναι οι *all-Free* και *confineSecond*, όπως και με τους προηγούμενους αγωγούς. Η σύγκριση στη μείωση της συνάρτησης στόχου της βελτιστοποίησης με τη NURBS παραμετροποίηση και τον κομβικό έλεγχο μορφής παρουσιάζεται στο σχήμα 3.35, που απεικονίζεται η μείωση(%) των απωλειών ολικής πίεσης μεταξύ εισόδου και εξόδου του αγωγού *Ubend* για τις προαναφερθείσες περιπτώσεις της NURBS παραμετροποίησης και του κομβικού ελέγχου μορφής για μεταβλητό  $R_a$  και  $R_{pa} = \{0.75, 1.49, 2.24\}$ . Από το προηγούμενο σχήμα προκύπτει το συμπέρασμα ότι η βελτιστοποίηση με τον κομβικό έλεγχο μορφής προκαλεί μεγαλύτερη μείωση στη συνάρτηση-στόχο για τις περισσότερες τιμές του  $R_a$ , από ότι η βελτιστοποίηση με τη NURBS παραμετροποίηση. Ειδικά, ο κομβικός

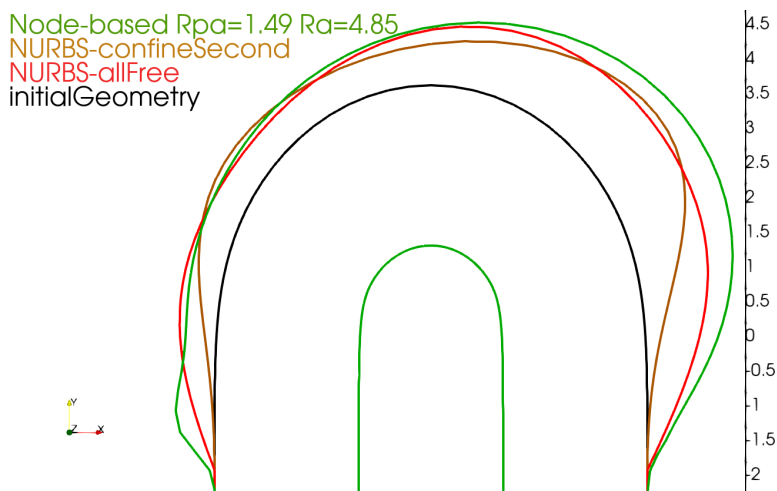
έλεγχος μορφής για  $R > 0.93$  δίνει καλύτερα αποτελέσματα από τις περιπτώσεις της NURBS παραμετροποίησης για οποιοδήποτε τιμή της μεταβλητής  $R_{pa}$ . Επιπροσθέτως, η μορφής της βελτιστοποιημένης γεωμετρίας που ορίζεται με τη NURBS παραμετροποίηση (allFree, confineSecond) και με τον κομβικό έλεγχο μορφής με  $R_a = 4.85$  και  $R_{pa} = 1.49$ , που αποτελεί τη βέλτιστη λύση του κομβικού ελέγχου μορφής, απεικονίζεται στο σχήμα 3.35. Τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης για τις περιπτώσεις που απεικονίζονται στο σχήμα 3.35 δίνονται στον πίνακα 3.6. Από τον πίνακα 3.6 και το σχήμα 3.35 προκύπτει ότι η βελτίωση στη συνάρτηση-στόχο με τον κομβικό έλεγχο μορφής, οφείλεται σε διαφορές που εντοπίζονται στη μορφή της βελτιστοποιημένης γεωμετρίας.

Σύγκριση NURBS παραμετροποίησης με κομβικό έλεγχο μορφής					
			NURBS		Κομβικός έλεγχος μορφής
			allFree	confineSecond	$R_a = 4.85 \& R_{pa} = 1.49$
$\Delta P_t _{S_{I,O}}$	$\frac{m^5}{s^3}$	$(10^{-1})$	7.2402	7.3586	7.1612
Μείωση %			6.1	4.6	7.2

**Πίνακας 3.6:** Οι απώλειες ολικής πίεσης μεταξύ εισόδου και εξόδου του αγωγού *Ubend* καθώς και η μείωση τους, όταν ο αγωγός ορίζεται με τη NURBS παραμετροποίησης και τον κομβικό έλεγχο μορφής. Ως *allFree* ορίζεται η περίπτωση που το πρώτο και το τελευταίο σημείο ελέγχου της NURBS παραμετροποίησης παραμένουν σταθερά, ενώ ως *confineSecond* όταν επιπροσθέτως διατηρείται σταθερή και η  $x$ -συνιστώσα του δεύτερου και προτελευταίου σημείου ελέγχου.



**Σχήμα 3.35:** *U bend:* Η μείωση (%) των απωλειών ολικής πίεσης μεταξύ εισόδου και εξόδου που προκύπτει από τη βελτιστοποίηση του αγωγού *U bend* όταν ορίζεται με τη NURBS και τον κομβικό έλεγχο μορφής. Με μωβ χρώμα απεικονίζεται η μείωση για μεταβλητό  $R_a$  και  $R_{p_a} = 0.75$ , με πράσινο χρώμα για μεταβλητό  $R_a$  και  $R_{p_a} = 1.49$  και με πορτοκαλί χρώμα για μεταβλητό  $R_a$  και  $R_{p_a} = 2.24$ , όταν χρησιμοποιείται ο κομβικός έλεγχος μορφής. Με μαύρο χρώμα απεικονίζεται η μείωση όταν η γεωμετρία ορίζεται με τη NURBS παραμετροποίηση και το πρώτο και το τελευταίο σημείο ελέγχου μένουν σταθερά. Με κόκκινο χρώμα απεικονίζεται η μείωση όταν η γεωμετρία ορίζεται με τη NURBS παραμετροποίηση και επιπροσθέτως η  $x$ -συνιστώσα του δεύτερου και προτελευταίου σημείο ελέγχου παραμένει σταθερή.



**Σχήμα 3.36:** *U bend:* Απεικόνιση τμήματος της βέλτιστης γεωμετρίας του αγωγού *U bend* σε τομή κατά τον άξονα  $Z$ . Με κόκκινο χρώμα απεικονίζεται η βέλτιστη γεωμετρία με τη NURBS παραμετροποίηση με το πρώτο και τελευταίο σημείο ελέγχου της NURBS παραμετροποίησης παραμένει σταθερό. Με καφέ χρώμα απεικονίζεται η βέλτιστη γεωμετρία με τη NURBS παραμετροποίηση, όταν επιπροσθέτως η  $x$ -συνιστώσα του δεύτερου και προτελευταίου σημείο ελέγχου της παραμετροποίησης παραμένει σταθερή. Με πράσινο χρώμα απεικονίζεται η βέλτιστη γεωμετρία με τον κομβικό έλεγχο μορφής και χρησιμοποιώντας τις μεταβλητές εξομάλυνσης  $R_a = 4.85$  και  $R_{p_a} = 0.75$ . Με μαύρο χρώμα απεικονίζεται η βέλτιστη γεωμετρία με την οποία ξεκινάει η διαδικασία της βελτιστοποίησης.

## Κεφάλαιο 4

### Ανακεφαλαίωση - Συμπεράσματα

Αντικείμενο της διπλωματικής εργασίας αποτέλεσε η βελτιστοποίηση μορφής σώματος στη μηχανική των ρευστών όταν αυτή ορίζεται με τον άμεσο έλεγχο των οριακών κόμβων του σώματος. Πιο συγκεκριμένα, το πρόβλημα που μελετήθηκε ήταν η μείωση των απωλειών ολικής πίεσης μεταξύ εισόδου και εξόδου αγωγού, που παρουσιάζει διαμόρφωση S στο κέντρο του (Sbend), όταν διαρρέεται από ασυμπίεστη, στρωτή και μόνιμη ροή. Τα συμπεράσματα που εξήχθησαν από τη βελτιστοποίηση του αγωγού Sbend, εφαρμόστηκαν σε δύο ακόμα αγωγούς προκειμένου να ελεγχθεί η γενική ισχύ τους. Οι δύο επιπλέον αγωγοί που βελτιστοποιήθηκαν ήταν, ο αγωγός του οποίου η διεύθυνση της εισόδου σχηματίζει γωνία  $90^\circ$  με την διεύθυνση της εξόδου (90bend) και ο αγωγός που η διεύθυνση της εισόδου σχηματίζει γωνία  $180^\circ$  με την διεύθυνση της εξόδου (Ubend). Η γενίκευση σε άλλες περιπτώσεις με άλλες συναρτήσεις-στόχους είναι εύκολα πραγματοποιήσιμη.

Όπως αναφέρεται και στη βιβλιογραφία, η βελτιστοποίηση γεωμετρίας με κομβικό έλεγχο μορφής χρειάζεται κάποια τεχνική εξομάλυνσης, προκειμένου να είναι αποδοτική η βελτιστοποίηση. Στη διπλωματική εργασία χρησιμοποιήθηκαν δύο τεχνικές εξομάλυνσης για τις μεταβλητές σχεδιασμού, που είναι οι μετατοπίσεις των κόμβων του επιφανειακού πλέγματος της μεταβαλλόμενης γεωμετρίας ως προς την αρχική γεωμετρία που ξεκινά η διαδικασία της βελτιστοποίησης. Οι τεχνικές εξομάλυνσης που χρησιμοποι-

ήθηκαν είναι η εξομάλυνση με τη ΜΔΕ του Helmholtz και η εξομάλυνση γειτνίασης.

Η επίδραση και η αναγκαιότητα της εξομάλυνσης με τη ΜΔΕ του Helmholtz παρουσιάστηκε με συγκεκριμένο παράδειγμα όπου, πραγματοποιήθηκε βελτιστοποίηση με και χωρίς την εξομάλυνση Helmholtz. Αρχικά μελετήθηκε η επίδραση της εξομάλυνσης Helmholtz στη συνάρτηση στόχο, όπου προέκυψε ότι η διαφορά στη μείωση της συνάρτησης-στόχου στις δύο βελτιστοποιήσεις ήταν σημαντική. Επίσης, από την παραμετρική μελέτη της ακτίνας  $R_a$ , κατά συνέπεια της παραμέτρου μήκους  $r$ , της εξομάλυνσης Helmholtz αναδείχθηκε ότι η τιμή της επηρεάζει σημαντικά τη βελτιστοποίηση. Δηλαδή, οι μικρές τιμές της μεταβλητής  $R_a$  συνεπάγονται μικρή μείωση της συνάρτησης-στόχου, ενώ από μία τιμή της μεταβλητής  $R_a$  και πάνω η μείωση της συνάρτησης-στόχου δεν είναι σημαντική. Το εύρος τιμών της μεταβλητής  $R_a$  που προτείνεται ώστε να προκύψουν καλά αποτελέσματα βελτιστοποίησης, μετά την παραμετρική μελέτη που πραγματοποιήθηκε, είναι το  $R_a \in [3.73, 7.46]$ . Το συγκεκριμένο εύρος τιμών της μεταβλητή  $R_a$  εμφάνισε σταθερά σε όλες τις περιπτώσεις που μελετήθηκαν πολύ καλά αποτελέσματα βελτιστοποίησης. Επίσης, από την μελέτη που πραγματοποιήθηκε στη διπλωματική εργασία συμπεραίνεται ότι η τιμή της μεταβλητής  $R_a$  επηρεάζει τη μορφή της βελτιστοποιημένης γεωμετρίας που προκύπτει. Δηλαδή, όσο αυξάνεται η τιμή της μεταβλητής  $R_a$  αυξάνεται και η ομαλότητα της γεωμετρίας που προκύπτει από τη βελτιστοποίηση.

Για την εξομάλυνση γειτνίασης προέκυψε το συμπέρασμα ότι, η συμβολή της είναι αναγκαία προκειμένου να βελτιωθούν περαιτέρω τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης. Όμως, οι διαφορετικές τιμές της μεταβλητής  $R_{p_a}$  της εξομάλυνσης γειτνίασης προκαλούν παρόμοια μείωση στη συνάρτηση στόχο στη περιοχή του  $R_a$  που εμφανίζεται η μέγιστη μείωση της συνάρτησης-στόχου. Επομένως, η εξομάλυνση γειτνίασης πρέπει να συμπεριληφθεί στη βελτιστοποίηση γεωμετρίας που ορίζεται με τον κομβικό έλεγχο μορφής, χωρίς όμως η τιμές της μεταβλητής  $R_{p_a}$  να επηρεάζει σημαντικά τη τιμή της βέλτιστης συνάρτησης-στόχου.

Η επίδραση της σειράς εφαρμογής των προαναφερθεισών μεθόδων εξομάλυνσης στα



---

αποτελέσματα της βελτιστοποίησης μελετήθηκε στη διπλωματική εργασία. Προέκυψε το συμπέρασμα ότι, η περίπτωση που πρώτα εφαρμόζεται η εξομάλυνση Helmholtz και στη συνέχεια η εξομάλυνση γειτνίασης καταλήγει σε χειρότερα αποτελέσματα βελτιστοποίησης, όσον αφορά τη συνάρτηση-στόχο, από ότι η αντίστροφη σειρά εξομάλυνσης. Διότι, στη περίπτωση που η εξομάλυνση γειτνίασης εφαρμόζεται τελευταία, η μετατόπιση στην περιοχή σύνδεσης της μεταβαλλόμενης και αμετάβλητης γεωμετρίας μειώνεται. Με αποτέλεσμα, να περιορίζεται η ελευθερία της γεωμετρίας να μετατοπισθεί στην περιοχή κοντά στη σταθερή γεωμετρία, επηρεάζοντας τη τιμή της συνάρτησης-στόχου.

Για τον αγωγό S-bend, μελετήθηκε η περίπτωση που η ακτίνα  $R_a$ , κατά συνέπεια η παράμετρος μήκους  $r$ , μεταβάλλεται χωρικά στο μεταβαλλόμενο όριο της γεωμετρίας. Η βελτιστοποίηση με μεταβαλλόμενη ακτίνα  $R_a$  οδήγησε σε παρόμοια μείωση της συνάρτησης-στόχου με την περίπτωση που ακτίνα  $R_a$  ήταν σταθερή. Όμως, η βελτιστοποιημένη γεωμετρία που προέκυψε για μεταβαλλόμενη ακτίνα  $R$  ήταν λιγότερο ομαλή από την αντίστοιχη γεωμετρία για σταθερό  $R_a$ . Επομένως, για κατασκευαστικούς λόγους ίσως να προτιμηθεί η πιο ομαλή γεωμετρία που προκύπτει για σταθερή ακτίνα  $R_a$ , αφού η μείωση της συνάρτησης-στόχου είναι παρόμοια.

Τέλος, προκειμένου να ελεγχθεί η απόδοση της βελτιστοποίησης με τον κομβικό έλεγχο μορφής, συγκρίθηκαν τα αποτελέσματά της με τα αποτελέσματα της βελτιστοποίησης με τη NURBS παραμετροποίηση. Από τη συγκεκριμένη σύγκριση προέκυψε το συμπέρασμα ότι, ο κομβικός έλεγχος μορφής παρουσιάζει καλύτερα αποτελέσματα από τη NURBS παραμετροποίηση που χρησιμοποιήθηκε, για τις περισσότερες τιμές της παραμέτρου  $R_a$  και ανεξαρτήτως της τιμής της παραμέτρου  $R_{p_a}$ . Επομένως, το αυξημένο υπολογιστικό κόστος που χαρακτηρίζει τη βελτιστοποίηση με τον κομβικό έλεγχο μορφής έναντι της NURBS παραμετροποίησης, λόγω του μεγάλου πλήθους των μεταβλητών σχεδιασμού και της ενδεχόμενης δυσκολίας στη σύγκλιση της μεθόδου βελτιστοποίησης, αντισταθμίζεται από τα καλύτερα αποτελέσματα βελτιστοποίησης.



## Βιβλιογραφία

- [1] Τσιάκας, Κ.: *Ανάπτυξη μεθόδων βελτιστοποίησης με χρήση επεξεργαστών καρτών γραφικών και εφαρμογή στις στροβιλομηχανές*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2019.
- [2] Hardee, E., Chang, K.H., Tu, J., Choi, K. K., Grindeanu, I., and Yu, X.: *A CAD-based design parameterization for shape optimization of elastic solid*. *Advances in Engineering Software*, 30(3):185–199, 1999, ISSN 0965-9978. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0965997898000659>, [https://doi.org/10.1016/S0965-9978\(98\)00065-9](https://doi.org/10.1016/S0965-9978(98)00065-9).
- [3] Vasilopoulos, I.: *CAD-based and CAD-free aerodynamic shape optimization of turbomachinery blade rows using the adjoint method*. PhD thesis, Lab of Thermal Turbomachines, NTUA, Athens, 2020.
- [4] Thompson, P., Robinson, T., and Armstrong, C.: *Efficient CAD-based aerodynamic design optimization with adjoint CFD data*. June 2013.
- [5] Giannakoglou, K. C., Papadimitriou, D. I., and Papoutsis-Kiachagas, E. M.: *Adjoint methods in CFD-based optimization - gradient computation & beyond*. ECCOMAS 2012-European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, 2012.
- [6] Γιαννάκογλου, Κ.Χ.: *Μέθοδοι Βελτιστοποίησης στην Αεροδυναμική*. Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 2006.
- [7] Papoutsis-Kiachagas, E.: *Adjoint methods for turbulent flows, applied to shape or topology optimization and robust design*. PhD thesis, Lab of Thermal Turbomachines, NTUA, Athens, 2013.
- [8] Hojjat, M.: *Node-based parametrization for shape optimal design*. Dissertation, Technische Universität München, München, 2015.
- [9] Firl, M., Wüchner, R., and Bletzinger, K. U.: *Regularization of shape optimization problems using FE-based parametrization*. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 47, April 2013. 10.1007/s00158-012-0843-z.
- [10] Le, C., Bruns, T., and Tortorelli, D.: *A gradient-based, parameter-free approach to shape optimization*. *Computer Methods in Applied Me-*

- chanics and Engineering, 200(9):985–996, 2011, ISSN 0045-7825. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782510002823>, <https://doi.org/10.1016/j.cma.2010.10.004>.
- [11] Mohammadi, B. and Pironneau, O.: *Applied shape optimization in fluids*. Applied Shape Optimization for Fluids, May 2009. 10.1093/acprof:oso/9780199546909.001.0001.
- [12] Masching, H.: *Parameter Free Optimization of Shape Adaptive Shell Structures*. Dissertation, Technische Universität München, München, 2016.
- [13] Ασούπη, Β.: *Μέθοδοι αεροδυναμικής ανάλυσης και σχεδιασμού για ροές υψηλών και χαμηλών ταχυτήτων, σε πολυεπεξεργαστικό περιβάλλον*. Διδακτορική διατριβή, Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών, Ε.Μ.Π., Αθήνα, 2009.
- [14] Nocedal, J. and Wright, S.: *Numerical Optimization*. Springer New York, 1999.
- [15] Anderson, K., Newman, J., Whitfield, D., and Nielsen, E.: *Sensitivity analysis for Navier-Stokes equations on unstructured meshes using complex variables*. AIAA Journal, 39, November 1999. 10.2514/2.1270.
- [16] Newman, J. C., Anderson, W. K., and Whitfield, D.L.: *Multidisciplinary sensitivity derivatives using complex variables*. MSSU-COE-ERC-98-08, 1998.
- [17] Nocedal, J.: *Updating quasi-newton matrices with limited storage*. Mathematics of Computation, 35(151):773–782, 1980, ISSN 00255718, 10886842. <http://www.jstor.org/stable/2006193>.
- [18] Byrd, R.H., Nocedal, J., and Schnabel, R.B.: *Representations of quasi-newton matrices and their use in limited memory methods*. Mathematical Programming, pages 129–156, 1994. <https://doi.org/10.1007/BF01582063>.
- [19] Versteeg, H. K. and Malalasekera, W.: *An introduction to computational fluid dynamics. The finite volume method*. Pearson Education Limited, 2007.
- [20] Patankar, S.V and Spalding, D.B: *A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows*. International Journal of Heat and Mass Transfer, 15(10):1787–1806, 1972, ISSN 0017-9310. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0017931072900543>, [https://doi.org/10.1016/0017-9310\(72\)90054-3](https://doi.org/10.1016/0017-9310(72)90054-3).
- [21] Nadarajah, S. and Jameson, A.: *A comparison of the continuous and discrete adjoint approach to automatic aerodynamic optimization*. November 2014. 10.2514/6.2000-667.
- [22] Papoutsis-Kiachagas, E. M, Papadimitriou, D. I., and Giannakoglou, K. C.: *Discrete and continuous adjoint methods in aerodynamic robust design problems*. ECCOMAS - European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, 2011.

- [23] Kavvadias, I.S., Papoutsis-Kiachagias, E.M., and Giannakoglou, K.C.: *On the proper treatment of grid sensitivities in continuous adjoint methods for shape optimization*. Journal of Computational Physics, 301:1–18, 2015, ISSN 0021-9991. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999115005318>.
- [24] Lazarov, B. S., Wang, F., and Sigmund, O.: *Length scale and manufacturability in density-based topology optimization*, Jan 2016. <https://link.springer.com/article/10.1007/s00419-015-1106-4>.
- [25] Lazarov, B. S. and Sigmund, O.: *Filters in topology optimization based on helmholtz-type differential equations*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 86(6):765–781, 2011. <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.3072>, <https://doi.org/10.1002/nme.3072>.
- [26] Turkovic, Z.: *Finite volume method on domains of varying shape*. PhD thesis, University of Zagreb, Faculty of Mechanical Engineering and Naval Architecture, Zagreb, 2005.