ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ :

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ

ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΙΚΤΥΩΝ ΡΟΗΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΤΟΥ ΦΟΙΤΗΤΗ

ΜΟΥΤΣΑΤΣΟΥ ΓΕΩΡΓΙΟΥ

Επιβλέπων : Ιωάννης Κολέτσος Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Τριμελής Επιτροπή :

Χρυσοβέργης Ίον	Κοκκίνης Βασίλειος	Κολέτσος Ιωάννης
Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Επίκουρος Καθ. Ε.Μ.Π.	Επίκουρος Καθ. Ε.Μ.Π.

Αθήνα , Νοέμβριος 2011

Περιεχόμενα :

Εισαγωγή

Σε οποιοδήποτε τομέα της καθημερινής μας ζωής και να κοιτάξουμε θα αντιληφθούμε ότι εμφανίζονται δίκτυα. Δίκτυα ηλεκτρικής ενέργειας μεταφέρουν ηλεκτρική ενέργεια καλύπτοντας πρώτες ανάγκες αλλά και ψυχαγωγία στο σπίτι μας. Τηλεφωνικά δίκτυα μας επιτρέπουν να επικοινωνούμε άμεσα αλλά και πέρα από τα περιφερικά και διεθνή σύνορα. Εθνικά οδικά δίκτυα, σιδηροδρομικά δίκτυα και αεροπορικά δίκτυα μας παρέχουν την δυνατότητα να ολοκληρώσουμε τις υποχρεώσεις μας σε μακρινές περιοχές, να συναντήσουμε αγαπημένα μας πρόσωπα, να επισκεφθούμε καινούριους προορισμούς και να ζήσουμε νέες εμπειρίες. Δίκτυα ηλεκτρονικών υπολογιστών, όπως συστήματα κρατήσεων αεροπορικών εισιτηρίων έχουν αλλάξει τον τρόπο που μεταφέρουμε πληροφορίες και διεκπεραιώνουμε τις εργασίες και τις καθημερινές μας υποχρεώσεις.

Σε όλες αυτές τις περιπτώσεις αλλά και σε πολλές άλλες σκοπός μας είναι η μεταφορά (κάποιου αγαθού όπως ο ηλεκτρισμός, ενός προϊόντος, ενός προσώπου η ενός οχήματος, ενός μηνύματος ή μιας πληροφορίας) από ένα σημείο σε ένα άλλο όσο το δυνατόν αποδοτικότερα τόσο για την παροχή άριστων υπηρεσιών όσο και την οικονομικότερη και συντομότερη χρήση του δικτύου. Το αντικείμενο μελέτης της ανάλυσης των δικτύων ροής είναι η μοντελοποίηση των προβλημάτων της καθημερινής ζωής σε μαθηματικά αντικείμενα γνωστά ως προβλήματα δικτύων ροής και η επίλυση τους μέσω αλγορίθμων.

Τα δίκτυα ροής αποτελούν αντικείμενο εφαρμογής πολλών ερευνητικών πεδίων όπως των εφαρμοσμένων μαθηματικών, της επιστήμης υπολογιστών, της μηχανικής, της διοίκησης και της επιχειρησιακής έρευνας. Τα δίκτυα ροής αποτελούσαν αντικείμενο μελέτης εδώ και αρκετά χρόνια ξεκινώντας από τον Gustay Kirchhof και άλλους πρωτοπόρους της ηλεκτρολογίας και της μηχανικής που πρώτοι συστηματοποίησαν και ανέλυσαν ηλεκτρικά κυκλώματα. Αυτό αποτέλεσε τους θεμέλιους λίθους της θεωρίας των δικτύων ροής και εδραίωσε τα δίκτυα ως εύχρηστα μαθηματικά εργαλεία για να αναπαράσταση φυσικών συστημάτων. Μεγάλο μέρος αυτής της πρώτης προσπάθειας προσέγγισης είχε περιγραφικό χαρακτήρα απαντώντας σε ερωτήσεις όπως : εάν εφαρμόσουμε μία σειρά τάσεων σε ένα συγκεκριμένο δίκτυο ποια θα είναι η συνολική τρέχουσα ροή του δικτύου;

Αργότερα, στα τέλη της δεκαετίας του 40 και στις αρχές του 50, ασχολήθηκαν με το αν υπάρχουν εναλλακτικοί τρόποι χρήσης ενός δικτύου όπου ερευνητές και μέλη επαγγελματικών κοινοτήτων συνέβαλαν στην ανάπτυξη και στην βελτίωση πολλών επιστημών και στην επανάσταση των υπολογιστών. Έτσι μέσω αυτών οδηγούμαστε σήμερα στις μεθόδους που χρησιμοποιούμε για την οργάνωση και εκτέλεση επιστημονικών υπολογισμών.

Θα ασχοληθούμε με τα παρακάτω βασικά ερωτήματα.

- Εύρεση της ελάχιστης διαδρομής (shortest route problem). Ποίος είναι ο καλύτερος τρόπος να διασχίσουμε ένα δίκτυο και να πάμε από ένα σημείο σε ένα άλλο όσο το δυνατόν οικονομικότερα;
- το πρόβλημα της μέγιστης ροής (maximum flow problem). Εάν ένα δίκτυο έχει δυναμικότητα στη ροή κάθε ακμής του, πώς μπορούμε να στείλουμε όσο το δυνατόν μεγαλύτερη ποσότητα μεταξύ δύο σημείων του δικτύου ενώ διατηρούμε τις δυναμικότητες ροής των ακμών;
- Πρόβλημα ελαχίστου κόστους ροής (minimum cost flow problem). Εάν επιβαρύνεται με κάποιο κόστος ανά μονάδα ροής σε δίκτυο με δυναμικότητα ακμών και επιθυμούμε να στείλουμε μονάδες προϊόντων ή υπηρεσιών από ένα ή περισσότερα σημεία σε κάποια άλλα σημεία του δικτύου, πώς μπορούμε να στείλουμε τις μονάδες που επιθυμούμε με το ελάχιστο δυνατό κόστος;

Με την βοήθεια απλών μαθηματικών και εφαρμογών τα παραπάνω προβλήματα είναι πολύ απλό να επιλυθούν με παραπάνω από έναν εναλλακτικούς τρόπους. Έτσι ένας μαθηματικός θα μπορούσε να λύσει τα παραπάνω προβλήματα υπολογίζοντας όλες τις πιθανές λύσεις και επιλέγοντας αυτήν που ικανοποιεί το ζητούμενο όσο το δυνατόν περισσότερο. Παρόλα αυτά η τακτική επίλυσης αυτής της μορφής απέχει πολύ από την πραγματικότητα, αν αναλογιστεί κανείς ότι ο αριθμός ταν πιθανών λύσεων ενός προβλήματος μπορεί να είναι τόσο μεγάλος όσος ο αριθμός των ατόμων στο σύμπαν. Αντίθετα λοιπόν με την παραπάνω διαδικασία επίλυσης προβλημάτων σκοπός μας είναι να βρούμε τρόπους που να μας βοηθούν να επιλύουμε τα εκάστοτε προβλήματα σε όσο το συντομότερο χρόνο και κάνοντας όσο το δυνατόν λιγότερους υπολογισμούς. Ένας τρόπος είναι να χρησιμοποιήσουμε αλγορίθμους οι οποίοι τρέχουν αρκετά γρήγορα και δεν μεγαλώνουν σημαντικά όσο το δίκτυο το οποίο ερευνούμε μεγαλώνει (η επιστήμη υπολογιστών, η επιχειρησιακή έρευνα και τα εφαρμοσμένα μαθηματικά ασχολούνται με την ανάπτυξη τέτοιον αλγορίθμων).

Ένα δίκτυο είναι μία διάταξη μονοπατιών (δρόμων) που συνδέονται σε διάφορα σημεία. Μέσω αυτών των μονοπατιών ένα ή περισσότερα στοιχεία μεταφέρονται από το ένα σημείο στο άλλο. Τα τελευταία χρόνια τα δικτυακά μοντέλα έχουν γίνει πολύ δημοφιλή σε πολλούς τομής της διαχείρισης έργου.

Η δικτυωτή ανάλυση χρησιμοποιείται για να παραστήσει και να επιλύσει πολλά διαφορετικά διοικητικά προβλήματα που σχετίζονται με την σχεδίαση συστημάτων μεταφοράς και επικοινωνίας και γενικότερα εντοπίζουν τον βέλτιστο τρόπο σύνδεσης δύο ή περισσοτέρων διασκορπισμένων σημείων μέσω εναλλακτικών καναλιών διασύνδεσης.

Το μεγαλύτερο μέρος των προβλημάτων επιχειρησιακής έρευνας μπορεί να εκφραστεί και να λυθεί ως ένα δίκτυο (από κόμβους ενωμένους με τόξα). Μερικές πρόσφατες έρευνες αναφέρουν ότι το 70% των πραγματικών μαθηματικών προβλημάτων προγραμματισμού μπορούν να παρουσιαστούν ως δικτυακά μοντέλα. Μπορούμε να φανταστούμε πολλά συστήματα που συναντάμε στην καθημερινή ζωή, η δομή των οποίων είναι δικτυακή και επομένως μοντελοποιείται με τις τεχνικές της δικτυωτής ανάλυσης. Η παρακάτω λίστα απεικονίζει μερικές πιθανές εφαρμογές δικτύων.

1. Ο σχεδιασμός ενός αγωγού, φυσικού αερίου, ανοικτής θαλάσσης που συνδέει την πηγή στον κόλπο του Μεξικό με ένα παράκτιο σημείο παράδοσης. Το αντικείμενο αυτού του μοντέλου είναι να ελαχιστοποιήσουμε το κόστος κατασκευής του αγωγού.
2. Ο προσδιορισμός του συντομότερού δρόμου μεταξύ δύο πόλεων σε ένα οδικό δίκτυο.
3. Ο προσδιορισμός της μέγιστης χωρητικότητας (τόνων τον χρόνο) ενός δικτύου αγωγών υγρού άνθρακα που ενώνει τα ορυχεία άνθρακα με τα εργοστάσια παραγωγής ενέργειας (οι αγωγοί μεταφέρουν υγρό άνθρακα με την άντληση ύδατος από ειδικά σχεδιασμένες σωληνώσεις)
4. Ο προσδιορισμός του χρονοδιαγράμματος ροής ελάχιστου κόστους από τις πετρελαιοπηγές στα διυλιστήρια μέσω ενός δικτύου αγωγών.
5. Ο προσδιορισμός του χρονοδιαγράμματος (έτος έναρξης και ολοκλήρωσης) για την κατασκευή ενός έργου.

Όπως βλέπουμε οι κόμβοι μπορούν να αναπαριστούν κάτι διαφορετικό, αλλά εν γένει είναι τα σημεία τομής των ακμών (π.χ. διασταυρώσεις δρόμων, πόλεις, τηλεπικοινωνιακά κέντρα, αντλιοστάσια ή ακόμη και δορυφόροι), ενώ οι ακμές, ανάλογα με τον τύπο του δικτύου, μπορούν να είναι δρόμοι, αεροδιάδρομοι, τηλεπικοινωνιακά καλώδια, κανάλια ροής δεδομένων, αγωγοί ύδρευσης κ.ά.

Η επίλυση των παραπάνω περιπτώσεων καθώς επίσης και άλλων παρόμοιων καταστάσεων επιτυγχάνεται μέσω μίας ποικιλίας αλγορίθμων βελτιστοποίησης δικτύων.

Θα αναπτύξουμε πέντε από αυτά τα είδη αλγορίθμων.

1. Ελάχιστο Ζευγνύον Δέντρο
   (Minimal spanning tree)

2. Αλγόριθμός Εύρεσης Της Συντομότερης Διαδρομής
   (Shortest route algorithm)

3. Αλγόριθμος Εύρεσης Της Μέγιστης Ροής
   (Maximum flow algorithm)

4. Minimum cost capacitated network algorithm

5. Critical path (CPM) algorithm

Οι περιπτώσεις οι οποίες μπορούν να επιλυθούν με τους διαφόρους τύπους αλγορίθμων μπορούν επίσης να διατυπωθούν και να επιλυθούν ως προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού. Ωστόσο οι προτεινόμενοι αλγόριθμοι επίλυσης δικτυακών προβλημάτων είναι αποτελεσματικότεροι από την μέθοδο simplex.

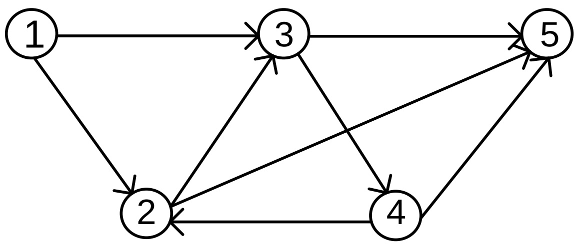
1.Ορισμοί Στοιχείων Ενός Δικτύου (Network definitions)

1.1 Βασικά συστατικά στοιχεία ενός δικτύου.

Ένα δίκτυο αναπαρίσταται με τη μορφή διαγράμματος, το οποίο αποτελείται από ένα σύνολο κόμβων (nodes) που παριστάνονται με κύκλους οι οποίοι συνδέονται μεταξύ τους με γραμμές τις οποίες τις ονομάζουμε ακμές (ή τόξα) (arcs, branches). Υποθέτουμε ότι διάφορα αντικείμενα μπορούν να ‘ρέουν’ μεταξύ των κόμβων διαμέσου των ακμών. Ο συμβολισμός για την περιγραφή ενός δικτύου είναι (N,A), όπου N ορίζεται να είναι το σύνολο των κόμβων, και A το σύνολο των ακμών. Για παράδειγμα το δίκτυο στο σχήμα 1 περιγράφεται ως εξής :

N = {1, 2, 3, 4, 5}
A = {(1,2), (1,3), (2,3), (2,5), (3,4), (3,5), (4,2), (4,5)}

Σχήμα 1
Παράδειγμα για το δίκτυο (N,A)

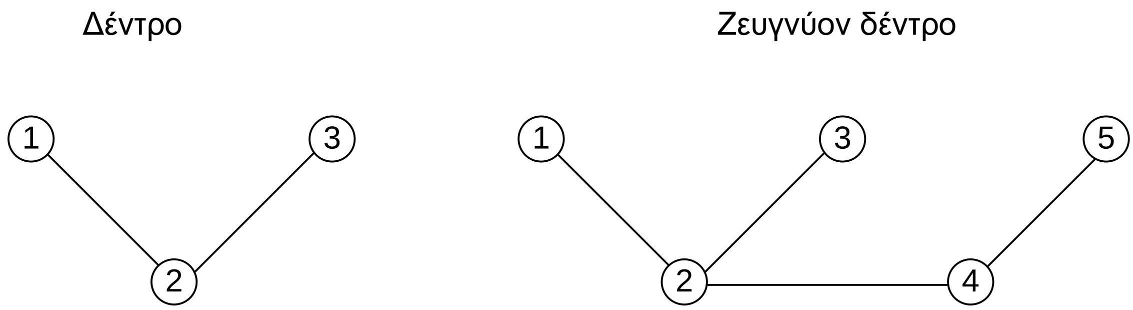


Επίσης σε ορισμένα δίκτυα κάθε ακμή που συνδέει δύο κόμβους συνοδεύεται από έναν αριθμό, ο οποίος μπορεί να παριστάνει το μήκος της διαδρομής της ακμής αυτής, το χρόνο που απαιτείται για τη διαδρομή, το κόστος της ακμής, τον παράγοντα κινδύνου ή κάποια άλλη ποσότητα, η οποία προκύπτει όταν πραγματοποιηθεί η διαδρομή από τον έναν κόμβο στον άλλο.

Ένα τόξο λέγεται **κατευθυνόμενο** ή **προσανατολισμένο** εάν επιτρέπει θετική ροή προς μία κατεύθυνση και μηδενική ροή για την αντίθετη κατεύθυνση. Στις περιπτώσεις που θέλουμε να απαγορεύσουμε τη ροή προς κάποια κατεύθυνση, χρησιμοποιούμε προσανατολισμένες ακμές, τις οποίες τις συμβολίζουμε με τη χρήση βελών που δείχνουν την συγκεκριμένη κατεύθυνση. Ένα **προσανατολισμένο δίκτυο** έχει όλα του τα τόξα προσανατολισμένα, αντίθετα μη προσανατολισμένο ονομάζεται ένα δίκτυο του οποίου οι ακμές επιτρέπουν τη ροή και προς τα δύο άκρα τους.

Ένα **μονοπάτι** είναι μια ακολουθία από διακριτά τόξα που ενώνουν δύο κόμβους μέσω άλλων (ενδιάμεσων κόμβων), ανεξάρτητα από την κατεύθυνση της ροής σε κάθε τόξο. Ένα μονοπάτι αποτελεί **κύκλο** εάν μπορούμε να επιστρέψουμε στον κόμβο από τον οποίο ξεκινήσαμε χωρίς να περάσουμε από την ίδια ακμή. Για παράδειγμα στο σχήμα 1 τα τόξα (2, 3), (3, 5) και (5, 2) αποτελούν έναν κύκλο. Ένας κύκλος είναι **προσανατολισμένος** όταν σχηματίζεται από ένα προσανατολισμένο μονοπάτι, π.χ. (2, 3), (3, 4) και (4, 2) στο σχήμα 1.

Συνεκτικό δίκτυο είναι αυτό στο οποίο κάθε δύο διακριτοί κόμβοι συνδέονται με τουλάχιστον ένα μονοπάτι. Το δίκτυο του σχήματος 1 δείχνει αυτόν τον τύπο δικτύου. **Δέντρο** είναι ένα συνεκτικό δίκτυο το οποίο μπορεί να περιλαμβάνει ένα υποσύνολο των κόμβων του δικτύου χωρίς να εμπεριέχει κύκλους και **ζευγνύον δέντρο (spanning tree)** είναι ένα δέντρο το οποίο ενώνει όλους τους κόμβους του δικτύου, πάλι χωρίς να περιλαμβάνει κύκλους. Στο σχήμα 2 μπορούμε να δούμε ένα παράδειγμα δέντρου και ένα ζευγνύοντος δέντρου για το δίκτυο του σχήματος 1.



Σχήμα 2

Συναφής με κάθε δίκτυο είναι και μερικά είδη ροής (για παράδειγμα η ροή παραγώγων πετρελαίου μέσα σε ένα δίκτυο αγωγών και ροή των αυτοκινήτων σε έναν αυτοκινητόδρομο. Γενικά η ροή σε ένα δίκτυο περιορίζεται από την ποσότητα των τόξων, τα οποία μπορεί να είναι είτε πεπερασμένα είτε άπειρα.

Στον πίνακα 1 μπορούμε να δούμε μερικά αντιπροσωπευτικά συστήματα, τα οποία θα μπορούσαν να παρασταθούν με τη μορφή δικτύων.

Πίνακας 1

Σύστημα	Κόμβοι	Ακμές	Τιμές στις ακμές	Ροή
Συγκοινωνιακό δίκτυο	Πόλεις, διασταυρώσεις, σταθμοί επιβατών, στάσεις	Δρόμοι, αεροδιάδρομοι γραμμές τρένων κ.λπ.	Απόσταση, χρόνος ταξιδιού, κόστος	Οχήματα μέσα μεταφοράς
Γραμμή παραγωγής	Σταθμοί επεξεργασίας	Ταινίες μεταφοράς	Χρόνος/κόστος μεταφοράς	Ημικατεργασμένα προϊόντα, εργασίες
Δίκτυο υπολογιστών	Υπολογιστές, εκτυπωτές, άλλοι πόροι	Καλώδια, συνδέσεις ασύρματης επικοινωνίας	Μήκος καλωδίου, ύπαρξη σύνδεσης (ασύρματη) κόστος	Δεδομένα
Δίκτυο υδροδότησης ή άρδευσης	Σημεία κατανάλωσης νερού, αντλιοστάσια	Σωληνώσεις αγωγοί	Μήκος, κόστος	Νερό

2. Το Πρόβλημα Του Ελαχίστου Ζευγνύοντος Δέντρου

(Minimal spanning tree algorithm)

Το πρόβλημα του ελαχίστου ζευγνύοντος δέντρου εξετάζει το δίκτυο ως ένα σύνολο κόμβων που πρέπει να επικοινωνούν όλοι μεταξύ τους. Ο αλγόριθμος του ελαχίστου ζευγνύοντος δέντρου ασχολείται με την σύνδεση των κόμβων ενός δικτύου άμεσα ή έμμεσα, δηλαδή να συνδέονται μέσω ενός συνόλου ακμών, χρησιμοποιώντας την ελάχιστη απόσταση συνδεόμενων ακμών, δηλαδή το συνολικό κόστος (απόσταση, χρονική διάρκεια κ.λπ.) των ακμών να είναι το ελάχιστο δυνατό. Η τεχνική του ελάχιστου ζευγνύοντος δέντρου εφαρμόζεται, για παράδειγμα, από εταιρείες τηλεπικοινωνιών, οι οποίες προσπαθούν να διασυνδέσουν τηλεφωνικά κέντρα (κόμβους) με το ελάχιστο μήκος καλωδιώσεων και γενικότερα ελάχιστο συνολικό κόστος σύνδεσης (ασύρματο ή ενσύρματο). Μία άλλη εφαρμογή αυτού το αλγορίθμου θα μπορούσε να είναι η κατασκευή ενός οδικού δικτύου που συνδέει διάφορες πόλεις (κόμβους). Ο δρόμος μεταξύ δύο πόλεων μπορεί να περνά από μία ή και περισσότερες πόλεις. Η πιο οικονομική σχεδίαση για αυτό το οδικό δίκτυο απαιτεί την ελαχιστοποίηση των συνολικών μιλίων των ασφαλτοστρωμένων δρόμων, ένα αποτέλεσμα που επιτυγχάνεται με την εφαρμογή του αλγορίθμου του ελαχίστου ζευγνύοντος δέντρου.

Τα βήματα που ακολουθούνται για την διαδικασία επίλυσης του αλγορίθμου είναι τα ακόλουθα :

Ας ονομάσουμε N = {1, 2, … , n} το σύνολο των κόμβων του δικτύου και ας ορίσουμε :

C_K = το σύνολο των κόμβων που είναι μόνιμα συνδεδεμένοι στην κ επανάληψη.

$\overline{C_K} =$ το σύνολο των κόμβων οι οποίοι δεν έχουν ακόμα συνδεθεί μόνιμα.

Βήμα 0. Το σύνολο $C_0 = \varnothing$ και το $\overline{C_0} = N$.

Βήμα 1. Ξεκινάμε από οποιοδήποτε κόμβο i, από το σύνολο των μη συνδεδεμένων κόμβων $\overline{C_0}$ και ορίζουμε $C_1 = \{i\}$, και έτσι έχουμε $\overline{C_1} = N - \{i\}$, και ορίζουμε $k = 2$.

Γενικό βήμα k. διαλέγουμε έναν κόμβο, $j*$, από το σύνολο των μη συνδεδεμένων κόμβων $\overline{C_{k-1}}$, ο οποίος αντιστοιχεί στην συντομότερη ακμή σε έναν από τους συνδεδεμένους κόμβους του συνόλου C_{k-1}. Συνδέουμε μόνιμα το $j*$ στο C_{k-1} και το αφαιρούμε από το $\overline{C_{k-1}}$ που σημαίνει

$$C_k = C_{k-1} + \{j*\}, \qquad \overline{C_k} = \overline{C_{k-1}} - \{j*\}$$

Αν το σύνολο των μη συνδεδεμένων κόμβων είναι κενό τότε σταματάμε, αλλιώς θέτουμε και επαναλαμβάνουμε το βήμα.

Αναλυτικότερα η **Μέθοδος εύρεσης ελάχιστου ζευγνύοντος δέντρου** είναι η εξής :

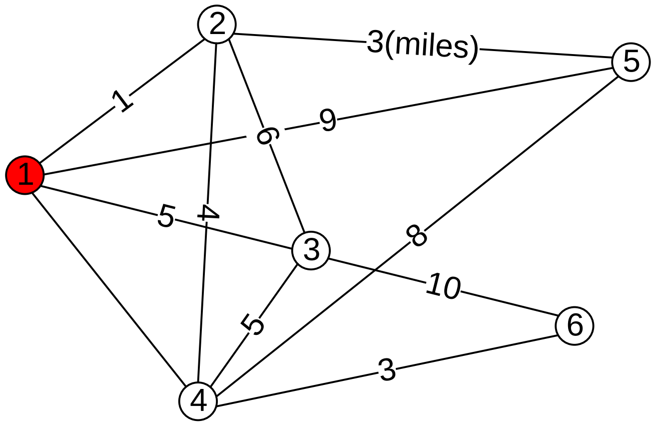
1. Επιλέγουμε αυθαίρετα έναν οποιοδήποτε κόμβο του δικτύου για να ξεκινήσουμε. Ο κόμβος αυτός εισέρχεται πρώτος στο σύνολο των συνδεδεμένων κόμβων.
2. Συνδέουμε τον προηγούμενο κόμβο με αυτόν που βρίσκεται πιο κοντά του. Ο εν λόγω κόμβος εισέρχεται στο σύνολο των συνδεδεμένων.
3. Εντοπίζουμε τον κόμβο που είναι πιο κοντά σε κάποιον από τους συνδεδεμένους κόμβους και τον συνδέουμε και αυτόν. Σε περίπτωση ισοβάθμησης επιλέγουμε αυθαίρετα ένα από τους ισοβαθμούντες κόμβους. Τότε, πιθανώς υπάρχει εναλλακτική λύση.
4. Επαναλαμβάνουμε το βήμα 3 μέχρι να συνδέσουμε όλους τους κόμβους.

Σημειώνουμε ότι με την μέθοδο αυτή επιτρέπεται η ροή και προς τις δύο κατευθύνσεις.

2.1. Παραδείγματα :

Παράδειγμα 1 :

Μια εταιρεία καλωδιακής τηλεόρασης μελετά τη διαδικασία παροχής καλωδιακών υπηρεσιών σε πέντε νέες αναπτυσσόμενες οικιστικά περιοχές. Στο σχήμα 2 περιγράφονται οι πιθανές καλωδιακές διασυνδέσεις μεταξύ των πέντε αυτών περιοχών. Τα μίλια καλωδίου που απαιτούνται για την κάθε σύνδεση φαίνονται σε κάθε ακμή ξεχωριστά. Καθορίστε το ποίο οικονομικό καλωδιακό δίκτυο.



σχήμα 2 :
καλωδιακές συνδέσεις για την τηλεοπτική εταιρία

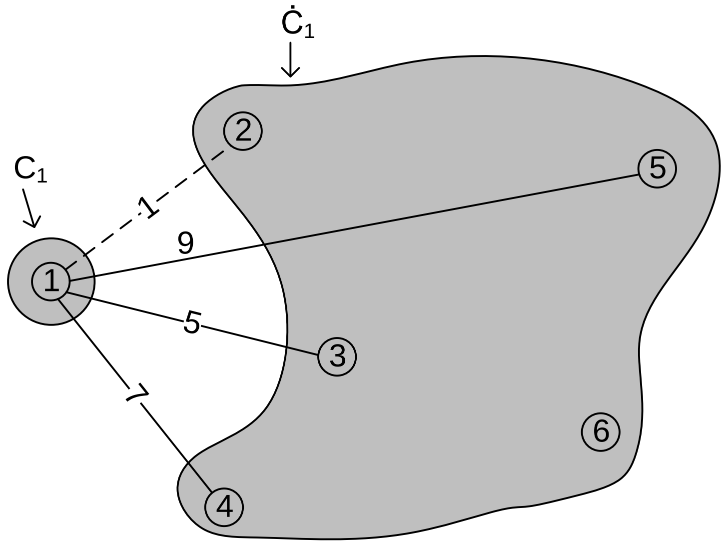
Ο αλγόριθμος ξεκινά από τον κόμβο 1 (το ίδιο θα ήταν και αν ξεκινούσαμε και από οποιοδήποτε άλλο κόμβο). Έτσι έχουμε :

$$C_1 = \{1\}, \qquad \overline{C_1} = \{2,3,4,5,6\}$$

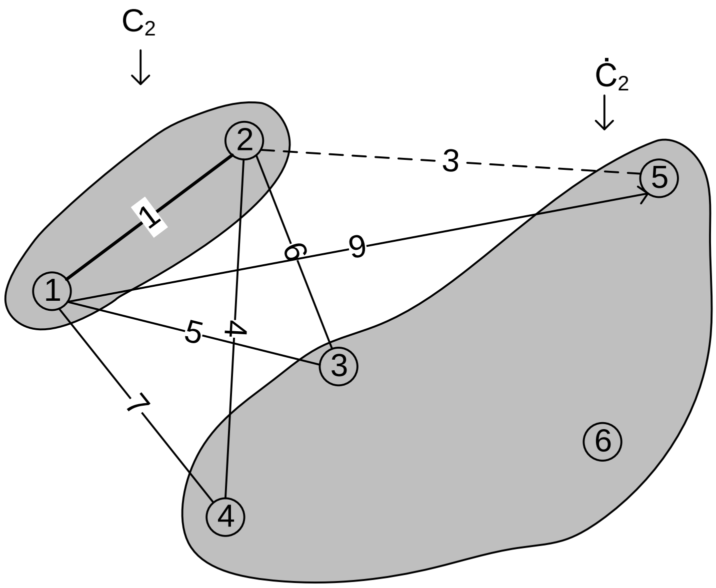
Οι επαναλήψεις του αλγορίθμου είναι συγκεντρωμένες στο σχήμα 3. Οι λεπτές ακμές δείχνουν όλες τις πιθανές συνδέσεις μεταξύ του C και του $\overline{C}$.
Οι έντονες ακμές αναπαριστούν τις μόνιμες συνδέσεις μεταξύ των κόμβων του συνδεδεμένου συνόλου C. , και οι διακεκομμένες ακμές αναπαριστούν τις καινούριες (μόνιμες) συνδέσεις που προστίθενται σε κάθε επανάληψη.
Για παράδειγμα, στην πρώτη επανάληψη, η ακμή (1,2) είναι ο πιο σύντομος σύνδεσμος (=1 mile) μεταξύ των υποψήφιων ακμών από τον κόμβο 1 στους κόμβους 2, 3, 4 και 5 από το σύνολο των ασύνδετων κόμβων $\overline{C_1}$. Κατά συνέπια η σύνδεση (1,2) γίνεται μόνιμη και j* = 2 και έτσι έχουμε :

$$C_2 = \{1,2\} \qquad \overline{C_2} = \{3,4,5,6\}$$

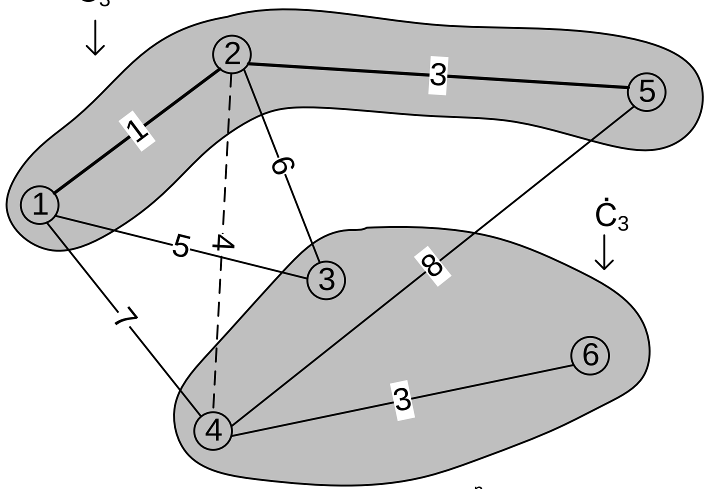
Η λύση δίνεται από το ελάχιστο ζευγνύον δέντρο (minimal spanning tree) που φαίνεται στην 6^{η} επανάληψη στο σχήμα 3. Τα ελάχιστα συνολικά καλωδιακά μίλια που χρειάζονται για να παραχθεί η επιθυμητή καλωδιακή υπηρεσία είναι:
1 + 3 + 4 + 3 + 5 = 16 miles



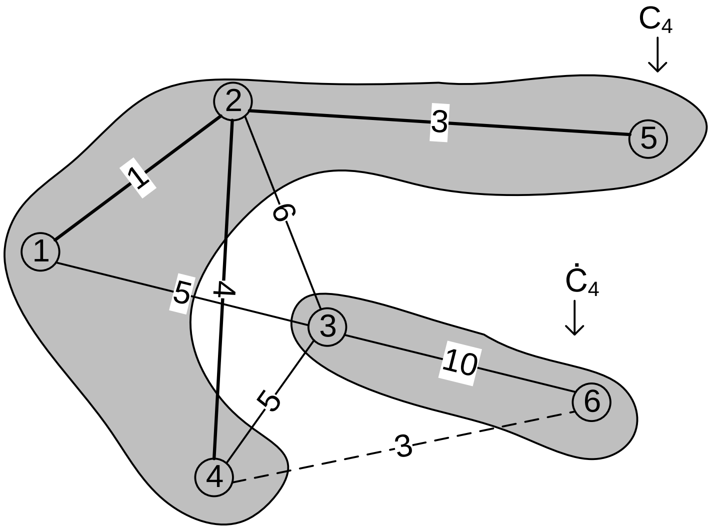
$1^{η}$ επανάληψη



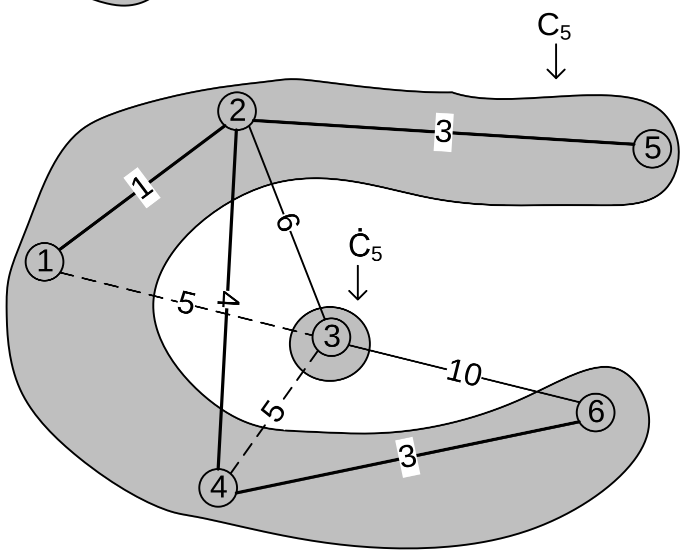
$2^{η}$ επανάληψη



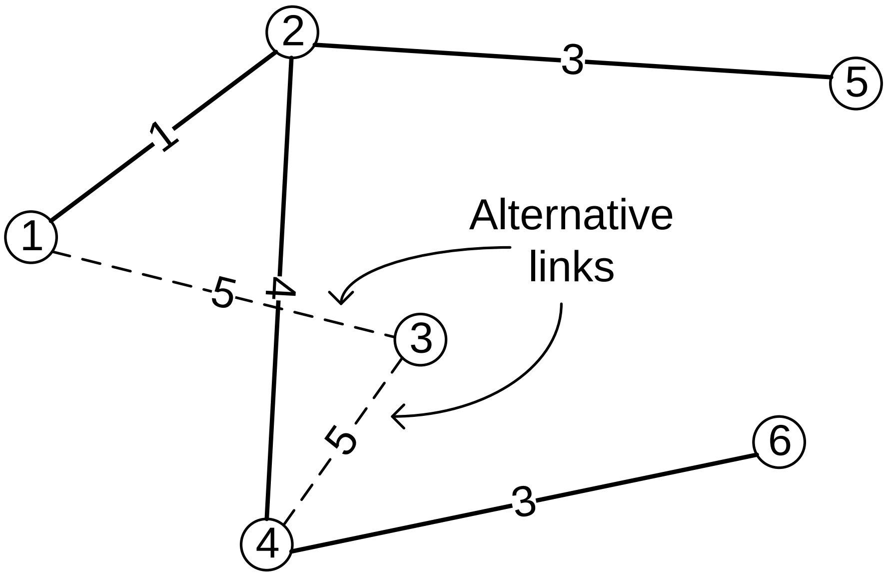
$3^{η}$ επανάληψη



4$^{\eta}$ επανάληψη



5$^{\eta}$ επανάληψη



6$^{\eta}$ επανάληψη (Minimal spanning tree)

Σχήμα 3

Επαναλήψεις για την λύση τουπροβλήματος της εταιρίας

καλωδιακής τηλεόρας

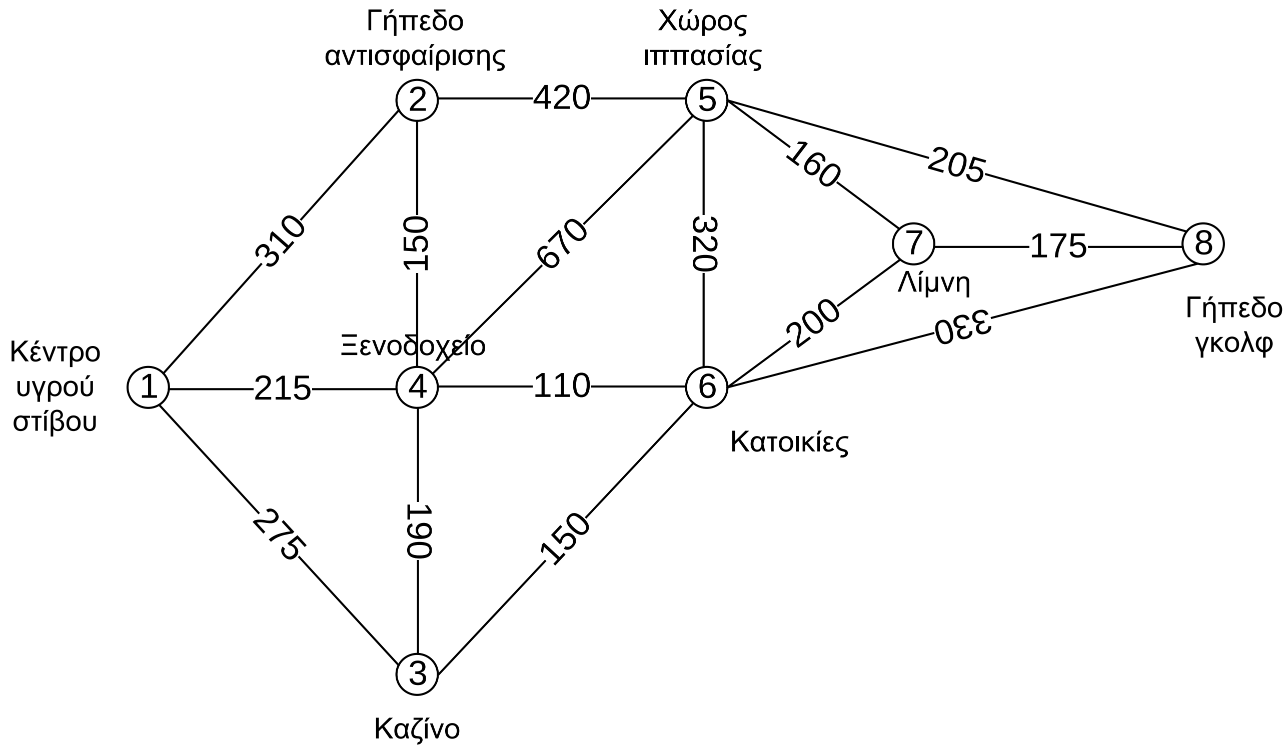
Παράδειγμα 2 :

Μία επενδυτική εταιρία αποφασίζει να αγοράσει μία μεγάλη έκταση κτημάτων στην περιοχή των Τρικάλων. Οι εκτάσεις αυτές αποτελούνται, ως επί το πλείστον, από δάση και βοσκοτόπια. Η εταιρία δεν ειδικεύεται στην κτηνοτροφία και έτσι αποφασίζει να δημιουργήσει σε αυτή την έκταση μία ξενοδοχειακή μονάδα. Άλλωστε, η περιοχή αυτή τα τελευταία χρόνια παρουσιάζει ραγδαία αύξηση στη ζήτηση τουριστικών υπηρεσιών. Η επενδυτική εταιρία όμως γνωρίζει ελάχιστα πράγματα γύρω από τις ξενοδοχειακές μονάδες, οπότε σας προσλαμβάνει ως ανώτερο διοικητικό στέλεχος της νεοσύστατης επιχείρησης που εκμεταλλεύεται τα συμφέροντα της ξενοδοχειακής μονάδας, για να ασχοληθείτε με την τουριστική αξιοποίηση της συγκεκριμένης περιοχής. Μετά από ενδελεχή μελέτη, προτείνετε στην εταιρία να κατασκευαστεί ένα τουριστικό σύμπλεγμα με ξενοδοχείο, γήπεδο αντισφαίρισης, κέντρο υγρού στίβου, χώρο ιππασίας, τεχνητή λίμνη, γήπεδο γκολφ, συγκρότημα κατοικιών και καζίνο.

Η εταιρία κατάφερε και πήρε όλες τις σχετικές άδειες για τα κτήρια και τις άλλες εγκαταστάσεις που θα κατασκευαστούν στις περιοχές, οι οποίες είναι τώρα κυρίως βοσκοτόπια. Παρουσιάζεται, όμως, μια σημαντική καθυστέρηση από το αρμόδιο υπουργείο σχετικά με την έγκριση ενός ενιαίου συστήματος μονοπατιών διασύνδεσης όλων των εγκαταστάσεων διαμέσου της δασικής έκτασης. Το υπουργείο, η δασική υπηρεσία, γειτονικές κοινότητες και άλλοι ενδιαφερόμενοι φορείς ζήτησαν να καταθέσει ένα ολοκληρωμένο σχέδιο, από το οποίο να προκύπτει ότι ελαχιστοποιείται το πλήθος των δέντρων που θα χρειαστεί να κοπούν για να κατασκευαστούν τα μονοπάτια που θα συνδέουν τις εγκαταστάσεις. Εσείς, ως διευθυντής προγραμματισμού και ανάπτυξης, πρέπει να ετοιμάσετε μία έκθεση προς το αρμόδιο υπουργείο, στην οποία να εξηγείτε πώς σκοπεύετε να ικανοποιήσετε την συγκεκριμένη απαίτηση. Στο σχήμα 4 βλέπεται τα πιθανά μονοπάτια σύνδεσης των εγκαταστάσεων, όπως προέκυψαν από την τοπογραφική μελέτη. Τα μήκη είναι σε μέτρα, ενώ υποθέτουμε ότι κατά μέσο όρο το πλήθος των δέντρων που κόβονται για την διάνοιξη ενός μονοπατιού είναι ανάλογο του μήκους του μονοπατιού.

Σχήμα 4

Σχεδιάγραμμα των υπό ανέγερση εγκαταστάσεων

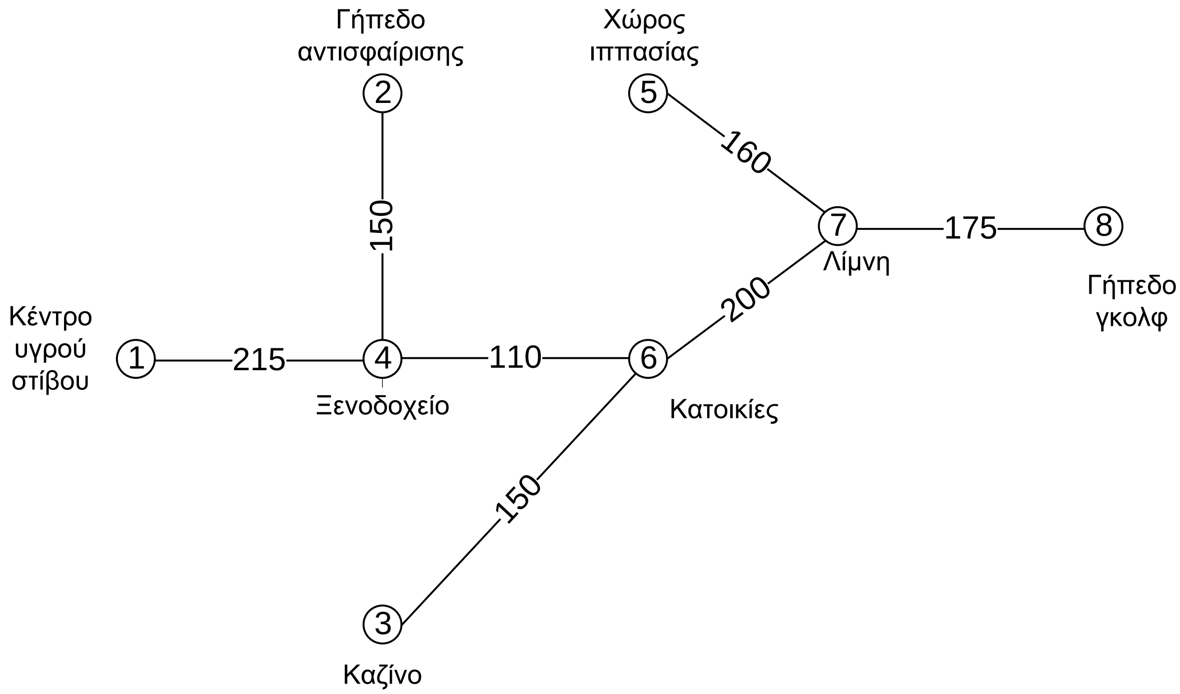


Το πρόβλημα μας τώρα είναι όχι μόνο να εντοπίσουμε την συντομότερη διαδρομή, για παράδειγμα μεταξύ του κέντρου υγρού στίβου και του γηπέδου γκολφ, αλλά θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε εκείνες τις ακμές, φτιάχνοντας αντίστοιχα μονοπάτια, που θα επιτρέπουν την επικοινωνία μεταξύ όλων των κόμβων ταυτοχρόνως, όχι κατ' ανάγκη με τον συγκεκριμένο τρόπο ανά δύο, αλλά με το μικρότερο συνολικό μήκος ακμών. Επιλέγουμε τον κόμβο 1 για να ξεκινήσουμε. Ο κόμβος 1 είναι ο πρώτος συνδεδεμένος και ο πλέον κοντινός του είναι ο κόμβος 4, αφού απέχει 215 μέτρα με άμεση σύνδεση. Κρατάμε την ακμή 1-4 και συνεχίζουμε. Το σύνολο των συνδεδεμένων κόμβων περιέχει τους κόμβους 1 και 4. Ο πιο κοντινός με άμεση σύνδεση με κάποιον από αυτούς τους δύο είναι ο κόμβος 6, με απόσταση 110 μέτρα από τον κόμβο 4. Κρατάμε την ακμή 4-6 και ο κόμβος 6 εισέρχεται στο σύνολο των συνδεδεμένων. Συνεχίζοντας, παρατηρούμε ότι στους κόμβους 1, 4 και 6 ο πιο κοντινός είναι ο 2, που συνδέεται με τον 4 με μήκος ακμής 150, αλλά και ο 3 με την ακμή 6-3 (έχουμε ισοβάθμηση). Ας επιλέξουμε αυθαίρετα την ακμή 4-2 συνδέοντας τον κόμβο 2. Στη συνέχεια συνδέεται ο κόμβος 3 με την ακμή 6-3, γιατί αυτός είναι ο πιο κοντινός (και επομένως τελικά δεν υπάρχει εναλλακτική λύση).

Μέχρι τώρα έχουν συνδεθεί οι κόμβοι 1, 2, 3, 4 και 6. Ο επόμενος κόμβος που θα συνδεθεί είναι ο 7, με την ακμή 6-7 και με μήκος 200 μέτρα, ενώ στη συνέχεια συνδέεται ο κόμβος 5 με την ακμή 5-7 και με μήκος 160 μέτρα. Τελευταίος συνδέεται ο κόμβος 8 με την ακμή 7-8 και με μήκος 175 μέτρα. Το συνολικό μήκος των ακμών του δέντρου που σχηματίζεται είναι 1.160 μέτρα και είναι το ελάχιστο μήκος που απαιτείται, ώστε να επικοινωνούν άμεσα ή έμμεσα όλοι οι κόμβοι μεταξύ τους. Στον πίνακα 2 φαίνονται οι ακμές που χρησιμοποιήθηκαν, καθώς και το μήκος τους.

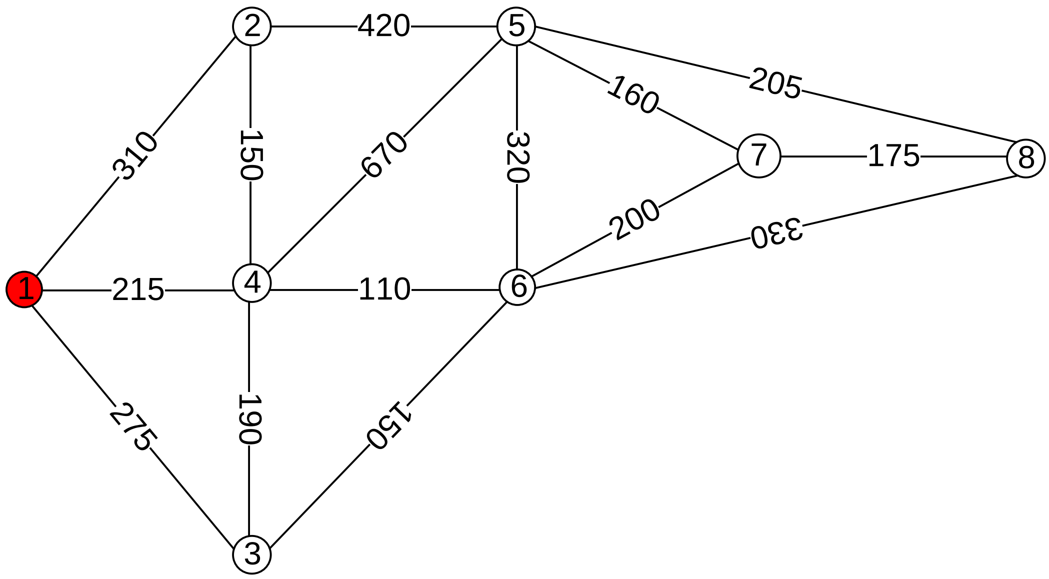
Ακμή	1-4	4-6	4-2	6-3	6-7	7-5	7-8
Μήκος	215	110	150	150	200	160	175

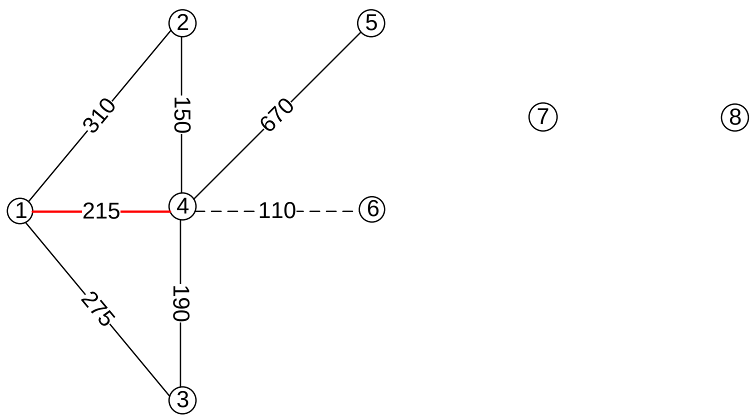
Σχήμα 5
Το ελάχιστο ζευγνύον δέντρο.

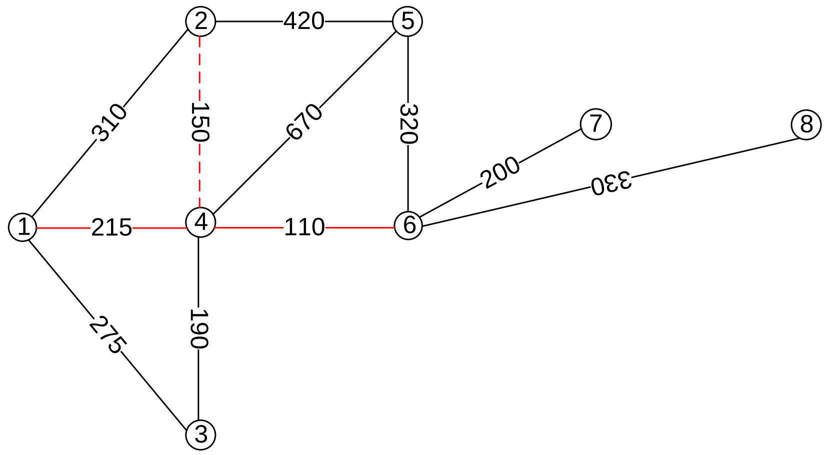


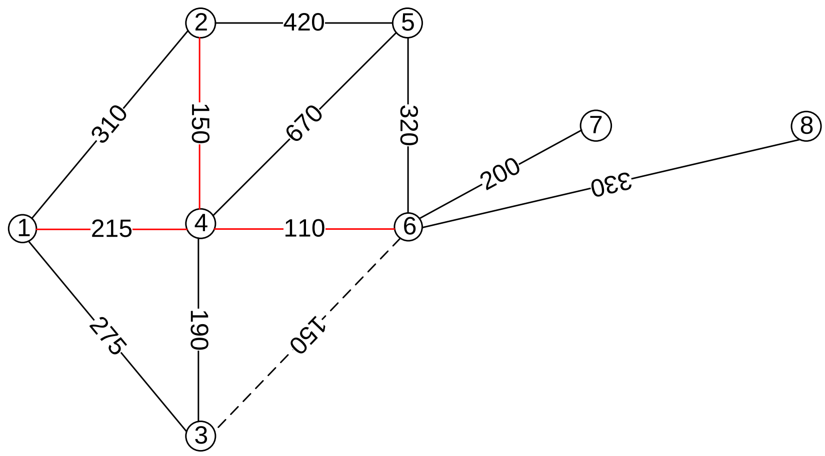
Στο σχήμα 5 δίνεται το δίκτυο που προκύπτει μετά την εφαρμογή του αλγορίθμου. Το δίκτυο αυτό είναι ένα δέντρο με 7 ακμές, τόσες όσοι οι κόμβοι του αρχικού δικτύου μείον ένα (8 – 1 = 7), το οποίο είναι και το ελάχιστο απαιτούμενο πλήθος ακμών που χρειάζεται ώστε να επικοινωνούν όλοι οι κόμβοι μεταξύ τους.

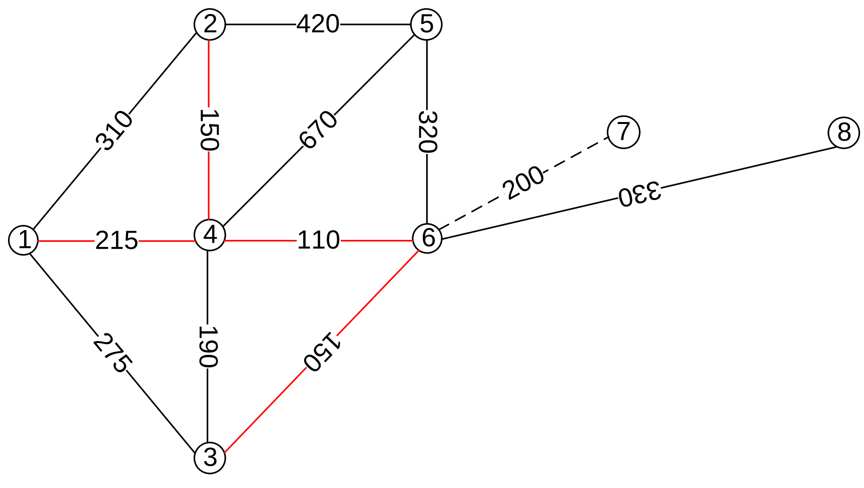
Σχήμα 6
Αναλυτικά τα βήματα του αλγορίθμου.

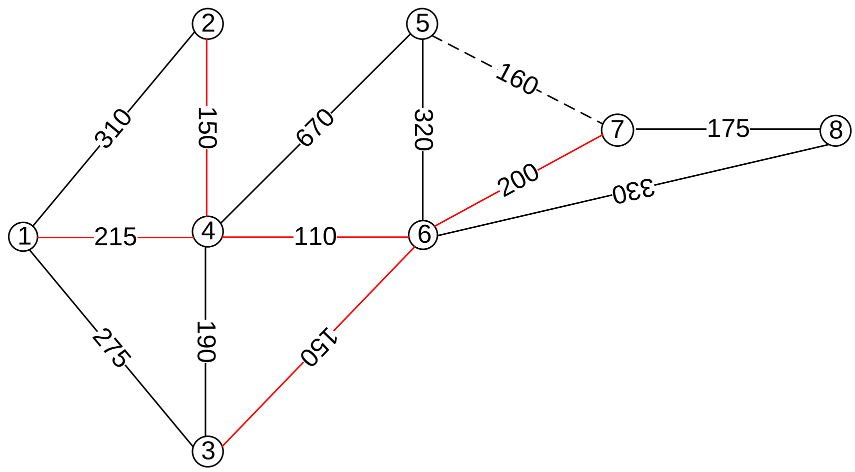


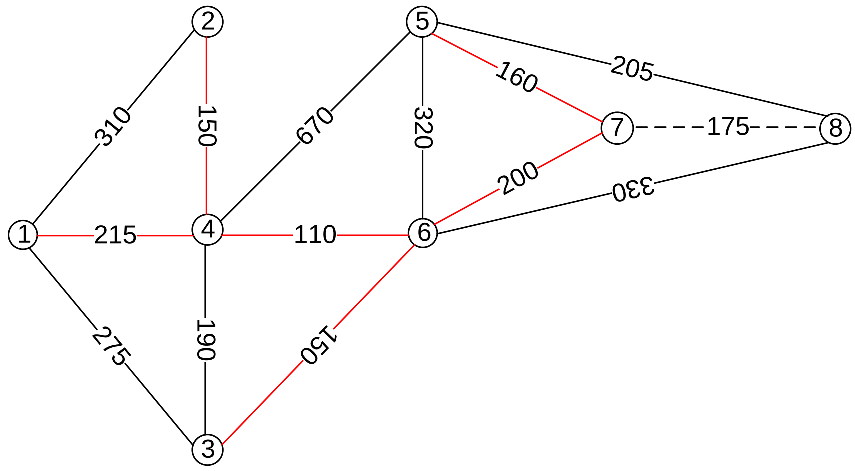


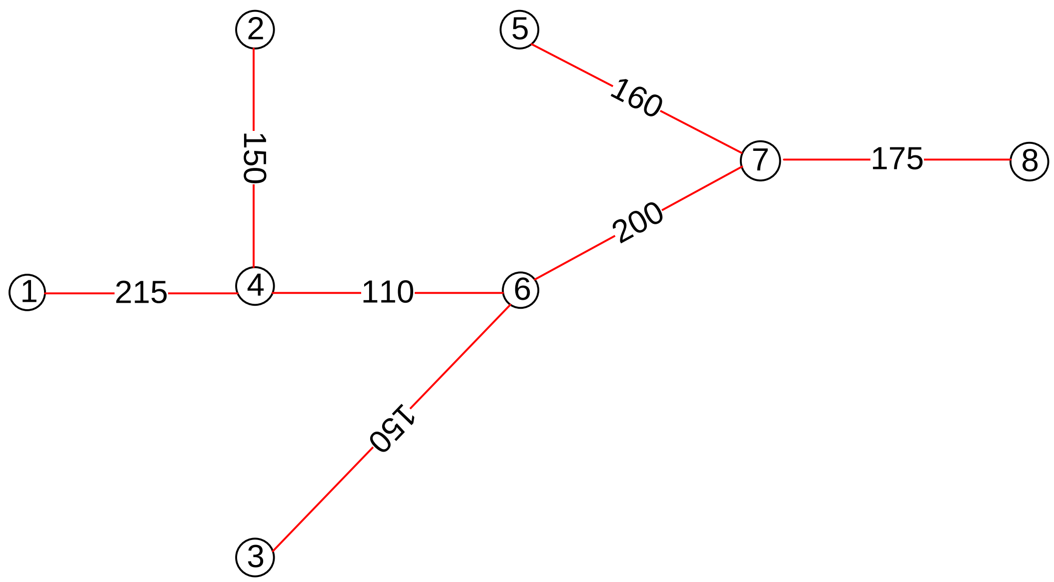

1
2
3
4
5
6
7
8
310
215
275
150
190
420
670
320
110
200
330


1
2
3
4
5
6
7
8
310
215
275
150
190
420
670
320
110
150
200
330


1
2
3
4
5
6
7
8
310
215
275
150
190
420
670
320
110
150
200
330


1
2
3
4
5
6
7
8
310
150
670
320
160
175
200
330
215
110
275
190
150


1
2
3
4
5
6
7
8
310
150
670
320
205
160
175
200
330
215
110
275
190
150


1
2
3
4
5
6
7
8
150
160
175
200
215
110
150

3.Το Πρόβλημα Της Συντομότερης Διαδρομής

SHORTEST-ROUTE PROBLEM

Το πρόβλημα της ελάχιστης ή συντομότερης διαδρομής είναι το συνηθέστερο πρόβλημα που καλείται κανείς να επιλύσει σε ένα δίκτυο. Στόχος μας σε αυτού του είδους τα προβλήματα είναι να εντοπίσουμε την συντομότερη διαδρομή (shortest route), δηλαδή την διαδρομή εκείνη με το μικρότερο συνολικό μήκος ακμών (ή κόστος, χρονική διάρκεια, κίνδυνο κ.λπ.) από μία αφετηρία προς ένα τερματικό κόμβο σε ένα δίκτυο μεταφοράς.

Μερικές άλλες εφαρμογές που μπορούν να εκπροσωπηθούν από το συγκεκριμένο μοντέλο φαίνονται στα παρακάτω παραδείγματα.

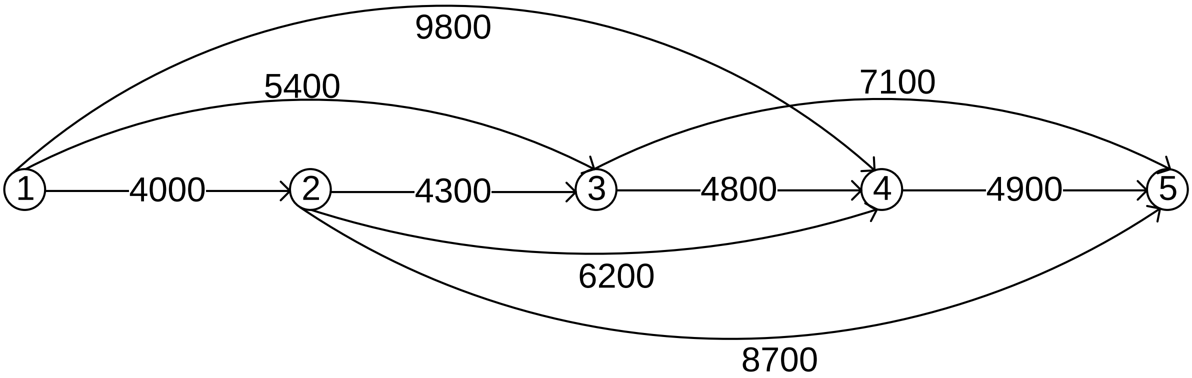
1.1. Παραδείγματα :

Παράδειγμα 1

Αντικατάσταση Εξοπλισμού (Equipment Replacement)

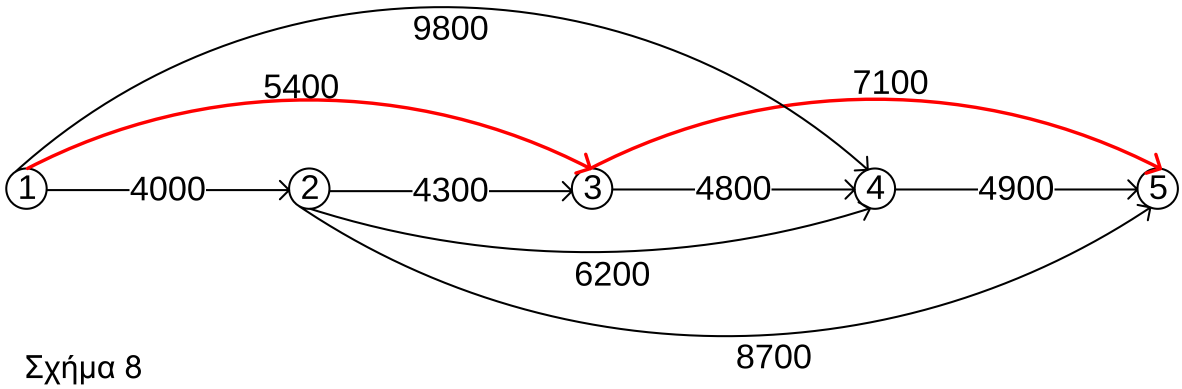
Μια εταιρία αναπτύσσει ένα σχέδιο αντικατάστασης του στόλου των αυτοκινήτων της με ένα πλάνο προγραμματισμού που ξεκινά από την 1 Ιανουαρίου του 2001 και τελειώνει στις 31 Δεκεμβρίου του 2004. Στην αρχή της κάθε χρονιάς, η εταιρία θα πρέπει να παίρνει μία απόφαση για το κάθε αυτοκίνητο εάν θα πρέπει να κρατηθεί σε λειτουργία ή θα πρέπει να αντικατασταθεί. Ένα αυτοκίνητο θα πρέπει να είναι σε λειτουργία το ελάχιστο ένα έτος και το μέγιστο τρία έτη. Ο ακόλουθος πίνακας μας δείχνει το κόστος αντικατάστασης ως συνάρτηση του έτους απόκτησης ενός αυτοκινήτου και των ετών τα οποία βρίσκεται σε λειτουργία.

Εξοπλισμός που αποκτήθηκε στις αρχές του :	κόστος αντικατάστασης ($) για δεδομένα έτη σε λειτουργία		
	1	2	3
2001	4000	5400	9800
2002	4300	6200	8700
2003	4800	7100	-
2004	4900	-	-



Σχήμα 7 :
Το πρόβλημα αντικατάστασης εξοπλισμού ως ένα πρόβλημα εύρεσης της συντομότερης διαδρομής.

Το πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί ως ένα δίκτυο στο οποίο οι κόμβοι 1 έως 5 αναπαριστούν τις αρχές των ετών 2001 έως και 2005. Οι ακμές που ξεκινούν από τον κόμβο 1 μπορούν να προσεγγίσουν μόνο τους κόμβους 2, 3 και 4 διότι ένα αυτοκίνητο μπορεί να βρίσκεται σε λειτουργία μεταξύ ενός και τριών ετών. Οι ακμές από τους υπόλοιπους κόμβους μπορούν να ερμηνευθούν παρομοίως. Το μήκος κάθε ακμής αντιπροσωπεύει το κόστος αντικατάστασης. Η λύση του προβλήματος είναι ισοδύναμη με την εύρεση της συντομότερης διαδρομής μεταξύ των κόμβων 1 και 5. Το σχήμα 8 δείχνει το δίκτυο που προκύπτει (η συντομότερη διαδρομή είναι η κόκκινη διαδρομή).



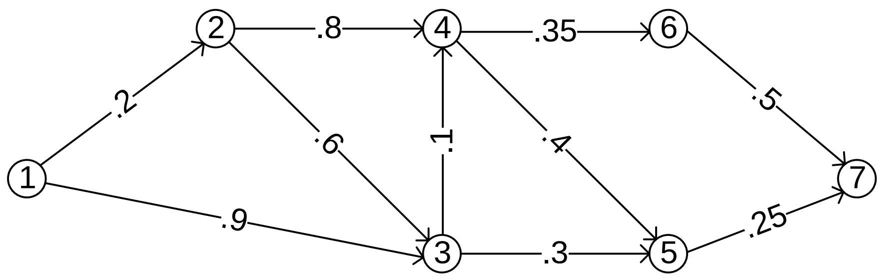
Σχήμα 8
Τελικό δίκτυο

Η λύση μας δείχνει ότι ένα αυτοκίνητο που αποκτήθηκε στην αρχή του 2001 (κόμβος 1) πρέπει να αντικατασταθεί μετά από δύο έτη στην αρχή του 2003 (κόμβος 3). Το αντικατεστημένο αυτοκίνητο θα παραμείνει στην υπηρεσία μέχρι το τέλος του 2004. Το συνολικό κόστος του προγράμματος αντικατάστασης είναι $ 12,500 (= $5400 + $7100).

Παράδειγμα 2

Πιο αξιόπιστη διαδρομή (Most reliable route)

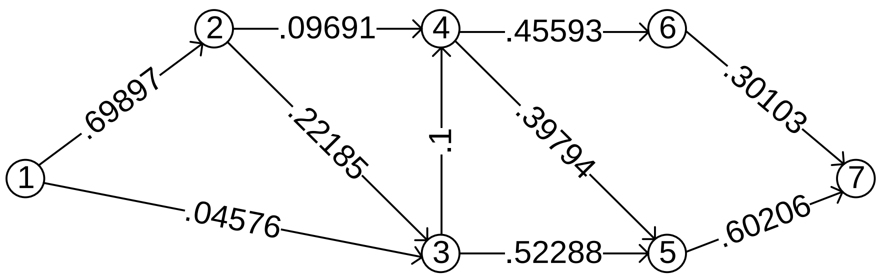
Ένας οδηγός έχει μόλις ολοκληρώσει μία σειρά μαθημάτων στην ανάλυση δικτύων, και είναι έτοιμος να εφαρμόσει την διαδικασία για να βρει την συντομότερη διαδρομή για την δουλεία του. Δυστυχώς, η επιλεγμένη διαδρομή σε μεγάλο βαθμό περιπολείται από την αστυνομία, και έχοντας πληρώσει όλων των ειδών τα πρόστιμα για υπέρβαση του ορίου ταχύτητας, η συντομότερη διαδρομή ίσως δεν είναι η καλύτερη επιλογή. Ο οδηγός θέλει να επιλέξει εκείνη την διαδρομή με την μεγαλύτερη πιθανότητα να μην συναντήσει αστυνομικό.



Σχήμα 9
Πιθανές διαδρομές

Το δίκτυο στο σχήμα 9 μας δείχνει τις πιθανές διαδρομές από το σπίτι του οδηγού στην δουλεία του και τις σχετικές πιθανότητες να μην συναντήσει διαδρομή για την δουλεία του είναι το γινόμενο των σχετικών πιθανοτήτων με τα διαδοχικά τμήματα της επιλεγμένης διαδρομής. Για παράδειγμα η πιθανότητα να μην δεχτεί πρόστιμο για την διαδρομή 1→3→5→7 είναι $.9 \times .3 \times .25 = .0675$. Ο στόχος του οδηγού είναι να επιλέξει εκείνη την διαδρομή που θα έχει την μεγαλύτερη πιθανότητα να μην ελεγχθεί.

Το πρόβλημα μπορεί να διατυπωθεί ως ένα μοντέλο ευρέσεως της συντομότερης διαδρομής χρησιμοποιώντας έναν λογαριθμικό μετασχηματισμό που μετατρέπει το γινόμενο των πιθανοτήτων σε ένα άθροισμα των λογαρίθμων των πιθανοτήτων (αυτό σημαίνει πως αν
$p_{1k} = p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_k$ είναι η πιθανότητα να μην ελεγχθεί τότε
$\log p_{1k} = \log p_1 + \log p_2 + \ldots + \log p_k$).



Σχήμα 10
Το πρόβλημα της πιο αξιόπιστης διαδρομής
διατυπωμένο ως πρόβλημα ελάχιστης διαδρομής.

Μαθηματικά, η μεγιστοποίηση του p_{1k} είναι ανάλογη της μεγιστοποίησης του log p_{1k} . Επειδή log $p_{1k} \leq 0$, η μεγιστοποίηση του log p_{1k} είναι και αυτή ανάλογη με την ελαχιστοποίηση του - log p_{1k}. Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό οι μεμονωμένες πιθανότητες p_j του σχήματος 9 αντικαθιστούνται με - log p_j για όλα τα j στο δίκτυο, έτσι καταλήγουμε στο δίκτυο συντομότερης διαδρομής του σχήματος 10.

Επιλύοντας τον αλγόριθμο βρίσκουμε ότι οι κόμβοι 1, 3, 5 και 7 αποτελούν την συντομότερη διαδρομή στο σχήμα 10 με αντίστοιχο ‘μήκος’ 1.1707 (= - log p_{17}). Έτσι η μέγιστη πιθανότητα ώστε να μην ελεγχθεί είναι p_{17}=.0675.

Παράδειγμα 3

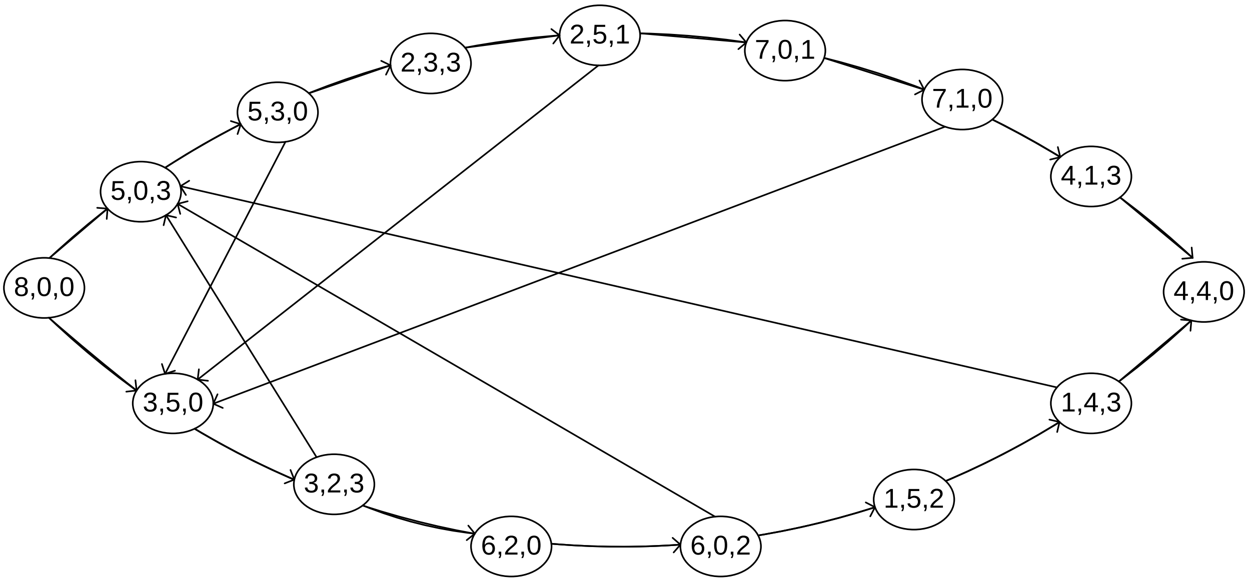
Ο γρίφος με τις τρείς κανάτες (Three-Jug Puzzle)

Μια κανάτα συνολικού όγκο οκτώ γαλονιών είναι γεμάτη με ένα υγρό. Δίνονται δύο κενές κανάτες, μία πέντε και μία τριών γαλονιών χωρητικότητας, θέλουμε να χωρίσουμε τα οκτώ γαλόνια του υγρού σε δύο ίσα μέρη χρησιμοποιώντας τις τρείς κανάτες. Κανένα άλλο όργανο μέτρησης δεν επιτρέπεται. Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός μεταγγίσεων που χρειάζεται για να πετύχουμε το αποτέλεσμα αυτό.

Πιθανώς να μπορείς να μαντέψεις την λύση αυτού του γρίφου. Παρόλα αυτά, η διαδικασία της επίλυσης μπορεί να συστηματοποιηθεί παρουσιάζοντας την ως ένα πρόβλημα εύρεσης της ελάχιστης διαδρομής.

Ο κάθε κόμβος θα εκπροσωπεί την ποσότητα του υγρού στις κανάτες των οκτώ, τριών και πέντε γαλονιών αντίστοιχα. Αυτό σημαίνει ότι το δίκτυο ξεκινά με τον κόμβο (8, 0, 0) και καταλήγει στον κόμβο (4, 4, 0). Ένας καινούριος κόμβος δημιουργείται από τον κάθε κόμβο καθώς βάζουμε υγρό από την μία κανάτα στην άλλη.

Στο σχήμα 11 βλέπουμε τις διαφορετικές διαδρομές που οδηγούν από τον πρώτο κόμβο (8, 0, 0) και καταλήγουν στον επιθυμητό τελικό κόμβο (4, 4, 0).



Σχήμα 11
Ο γρίφος με τις τρείς κανάτες
μοντελοποιημένο ως πρόβλημα ελάχιστης διαδρομής.

Η βέλτιστη λύση, δίνεται από το κάτω μονοπάτι στο σχήμα 11, απαιτεί 7 μεταγγίσεις.

1.2. Επίλυση Της Τεχνικής Εντοπισμού Της Συντομότερης Διαδρομής.

Η διαδικασία επίλυσης στηρίζεται στο γεγονός ότι σε κάθε στάδιο μπορεί να βρεθεί τουλάχιστον ένας κόμβος για τον οποίο η διαδρομή από την αφετηρία μέχρι αυτόν δεν μπορεί να βελτιωθεί περισσότερο. Τότε ο κόμβος αυτός ονομάζεται μόνιμος (permanent). Στη συνέχεια, εξετάζουμε αν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον κόμβο αυτό ως ενδιάμεσο, βελτιώνοντας προσωρινές διαδρομές που έχουν βρεθεί για τους υπόλοιπους κόμβους του δικτύου, συμπεριλαμβάνουμε και τον τερματικό (τελικό) κόμβο.

1.3. Βασικά βήματα της μεθόδου εντοπισμού της συντομότερης διαδρομής.

1. Ξεκινάμε την διαδικασία από την αφετηρία. Το οποίο είναι προφανές γιατί δεν υπάρχει συντομότερη διαδρομή από την αφετηρία στον εαυτό της. Συνεπώς ο πρώτος κόμβος γίνεται αμέσως μόνιμος.
2. Έπειτα καταγράφουμε όλους τους κόμβους που συνδέονται άμεσα (διαμέσου μίας ακμής) με την αφετηρία, τον πρώτο δηλαδή μόνιμο κόμβο. Σημειώνουμε το μήκος τις διαδρομής από την αφετηρία έως αυτούς τους κόμβους (αυτό το μήκος το ονομάζουμε προσωρινό μήκος διαδρομής). Έπειτα επιλέγουμε έναν άμεσα συνδεδεμένο κόμβο, αυτόν με την μικρότερου μήκους διαδρομή από την αφετηρία. Τον ονομάζουμε μόνιμο και τον τοποθετούμε, μαζί με την αφετηρία, στο σύνολο των μόνιμων κόμβων.
3. Καταγράφουμε όλους τους κόμβους που είναι άμεσα συνδεδεμένοι με τουλάχιστον έναν από τους μόνιμους κόμβους και σημειώνουμε το μήκος των διαδρομών από την αφετηρία προς τους κόμβους αυτούς (αυτό ονομάζεται προσωρινό μήκος διαδρομής).
4. Από τους κόμβους του βήματος 3 επιλέγουμε εκείνον με την συντομότερη διαδρομή και τον τοποθετούμε στο σύνολο των μόνιμων κόμβων. Συνεπώς η διαδρομή από τον αρχικό κόμβο προς αυτόν που μόλις προσθέσαμε στο σύνολο των μονίμων κόμβων δεν επιδέχεται καμία βελτίωση. Σε περίπτωση που έχουμε δύο ή παραπάνω διαδρομές με ίση διαδρομή τότε επιλέγουμε τυχαία ένα από αυτούς.
5. Επαναλαμβάνουμε τα βήματα 3 και 4 μέχρις ότου τοποθετήσουμε όλους τους κόμβους στο σύνολο των μόνιμων κόμβων ή μέχρι να τοποθετήσουμε τον τερματικό μας κόμβο.

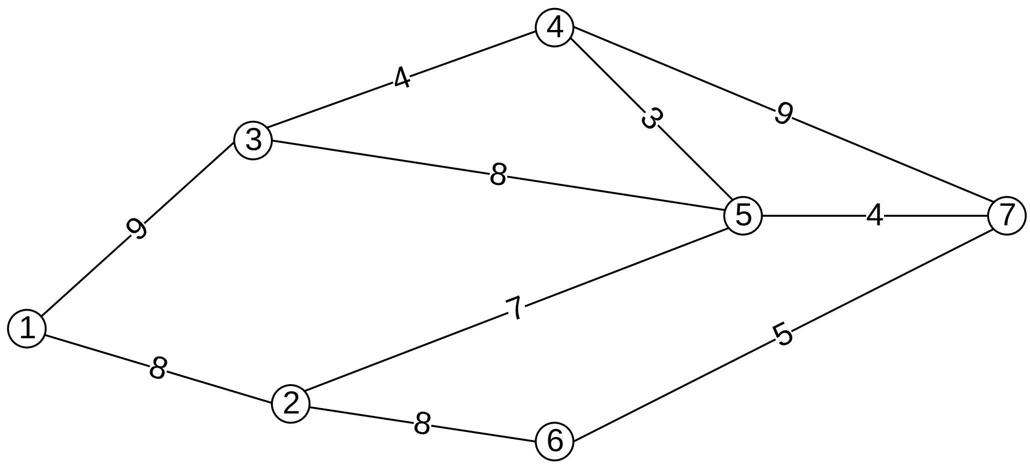
Σχόλιο :

Η διαδικασία τερματίζει όταν εισέρθει στο σύνολο των μόνιμων κόμβων ο τερματικός κόμβος, όχι κατ' ανάγκη όλοι οι κόμβοι του δικτύου (διότι τερματικός μπορεί να είναι οποιοσδήποτε κόμβος).

Ακόμη είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι προσπαθώντας να τοποθετήσουμε όλους τους κόμβους του δικτύου στο σύνολο των μόνιμων κόμβων έχει σαν αποτέλεσμα να υπολογίζουμε τις συντομότερες διαδρομές από την αφετηρία προς κάθε κόμβο του δικτύου.

1.4. Αναλυτική παρουσίαση της μεθόδου εντοπισμού της συντομότερης διαδρομής.

Θα εφαρμόσουμε την συγκεκριμένη μέθοδο στο δίκτυο του σχήματος 12. Αφετηρία είναι ο κόμβος 1 και τερματικός είναι ο κόμβος 7. Σκοπός μας είναι να βρούμε την συντομότερη διαδρομή από την αφετηρία έως τον τερματικό κόμβο.



Σχήμα 12

Αρχικά σε πρώτο βήμα το σύνολο των μόνιμων κόμβων περιέχει μόνο τον κόμβο 1, δηλαδή την αφετηρία. Έστω ότι το σύνολο των μόνιμων κόμβων το συμβολίζουμε P (από την αγγλική ορολογία permanent), συνεπώς έχουμε P = {1}. Σημαντικό είναι να σημειώσουμε ότι αφετηρία μπορεί να είναι οποιοσδήποτε κόμβος του δικτύου καθώς και τερματικός, προορισμός, μπορεί να είναι οποιοσδήποτε κόμβος. Σε οποιαδήποτε περίπτωση με την διαδικασία αυτή υπολογίζουμε την συντομότερη διαδρομή από την αφετηρία προς όλους τους υπόλοιπους κόμβους.

Συνεχίζοντας με το δεύτερο βήμα παρατηρούμε ότι ο κοντινότερος άμεσα συνδεδεμένος κόμβος στην αφετηρία είναι ο κόμβος 2. Αφού στον κόμβο 1 οι άμεσα συνδεδεμένοι κόμβοι είναι οι κόμβοι 2 και 3, από τους οποίους ο 2 έχει μήκος ακμής(1-2) 8 μονάδων και ο κόμβος 3 έχει μήκος ακμής (1-3) 9 μονάδων. Επομένως στο δεύτερο βήμα ο κόμβος 2 εισέρχεται στο σύνολο τον μόνιμα συνδεδεμένων κόμβων και έτσι έχουμε P = {1, 2}. Η συνολική απόσταση του κόμβου 2 από την αφετηρία έχει γίνει βέλτιστη, αυτή είναι η συντομότερη διαδρομή, δηλαδή 8 μονάδες. Ολοκληρώνοντας το βήμα 2 διαπιστώνουμε ότι ο κόμβος 3 (ο άλλος άμεσα συνδεδεμένος κόμβος) έχει μία προσωρινή συνολική απόσταση από τον κόμβο 1 ίση με 9 μονάδες (ακμή 1-3). Η απόσταση αυτή είναι προσωρινή γιατί σε αυτό το βήμα ο κόμβος 3 δεν εισέρχεται στο σύνολο των μόνιμα συνδεδεμένων κόμβων, αφού μόνο ένας κόμβος κάθε φορά εισέρχεται στο σύνολο αυτό (εκείνος με το μικρότερο μήκος ακμής).

Μέχρι τώρα έχουμε :

Σύνολο μόνιμων κόμβων	Ακμή άμεσα συνδεδεμένου κόμβου	Προσωρινό μήκος διαδρομής	Λυμένος κόμβος	Τελικό (συνολικό) μήκος ελάχιστης διαδρομής
P = {1, 2}	1-2	8	2	8
	1-3	9		

Μετά την εισαγωγή του κόμβου 2 στο σύνολο των μόνιμων κόμβων συνεχίζουμε με το τρίτο βήμα με P = {1, 2}. Παρατηρούμε ότι οι άμεσα συνδεδεμένοι κόμβοι με το σύνολο των μόνιμων κόμβων (1 και 2) είναι οι κόμβοι 3, 5 και 6. Ο κόμβος 3 συνδέεται άμεσα με τον κόμβο 1 ενώ οι κόμβοι 5 και 6 συνδέονται άμεσα με τον κόμβο 2.

Στην πράξη αυτό που γίνεται στο 3^{ο} βήμα της μεθόδου είναι ένας επαναπροσδιορισμός των προσωρινών διαδρομών για τους μη μόνιμους κόμβους, λαμβάνοντας υπόψη τον νέο κόμβο που προσθέσαμε στο σύνολο των μόνιμων κόμβων και ελέγχοντας εάν μας συνέφερε να φτάσουμε σε αυτούς μέσω του νέο μόνιμου κόμβου και όχι μέσω της προηγούμενης διαδρομής.

Το προσωρινό μήκος διαδρομής από τον κόμβο 1 στον κόμβο 3 δεν επηρεάζεται από την προσθήκη του κόμβου 2 στο σύνολο των μόνιμων κόμβων και παραμένει 9, και αυτό γιατί ο κόμβος 3 δεν συνδέεται άμεσα με τον κόμβο 2. Το προσωρινό μήκος διαδρομής για τον κόμβο 5, που για πρώτη φορά συνδέεται με το σύνολο των άμεσα συνδεδεμένων κόμβων, είναι 8 + 7 = 15, καθώς για να φτάσουμε από την αφετηρία στον κόμβο 5 περάμε πρώτα από τον κόμβο 2 (που έχει μήκος διαδρομής 8) και στην συνέχεια διανύουμε την ακμή 2-5 με μήκος διαδρομής 7. Τέλος ο κόμβος 6 συνδέεται άμεσα με τον κόμβο 2 και έχουμε, όπως και με τον κόμβο 5, προσωρινό μήκος διαδρομής ίσο με 16 μονάδες. Στο σημείο αυτό και επειδή δεν υπάρχουν άλλοι κόμβοι που να συνδέονται άμεσα με τους μόνιμους κόμβους τελειώνουμε με το 3^{ο} βήμα της μεθόδου.

Συνεχίζουμε την διαδικασία επίλυσης με το 4^{ο} βήμα της μεθόδου. Σε αυτό το βήμα θα επιλέξουμε εκείνον τον κόμβο που θα εισέλθει στο σύνολο των μόνιμων κόμβων. Θα επιλέξουμε έναν από τους κόμβους για τους οποίους στο προηγούμενο βήμα υπολογίσαμε το προσωρινό μήκος διαδρομής, δηλαδή τους κόμβους 3, 5 και 6.

Κριτήριο για την επιλογή του επόμενου μόνιμου κόμβου είναι το ελάχιστο μήκος προσωρινής διαδρομής από την αφετηρία, έτσι επιλέγουμε τον κόμβου 3 (με μήκος προσωρινής διαδρομής 9) να εισέλθει στο σύνολο των μόνιμων κόμβων. Οπότε έχουμε P = {1, 2, 3} (στο σύνολο P γράφουμε τους κόμβους με την σειρά που εισέρχονται).

Το 5^{ο} βήμα της μεθόδου που αποτελεί το κριτήριο του τερματισμού της δεν επαληθεύεται καθώς δεν έχουν εισέρθει όλοι οι κόμβοι στο σύνολο των μόνιμων κόμβων, συνεπώς συνεχίζουμε την μέθοδο επιστρέφοντας στο 3^{ο} βήμα με σύνολο μόνιμων κόμβων πλέον το P = {1, 2, 3}.

Συνοψίζοντας μέχρι τώρα έχουμε :

Σύνολο μόνιμων κόμβων	Ακμή άμεσα συνδεδεμένου κόμβου	Προσωρινό μήκος διαδρομής	Λυμένος κόμβος	Τελικό (συνο-λικό) μήκος ελάχιστης διαδρομής
P = {1, 2}+{3}	1-3	9	3	9
	2-5	15		
	2-6	16		

Επιστρέφουμε στο 3ο βήμα της μεθόδου και εντοπίζουμε τους άμεσα συνδεδεμένους κόμβους με τους μόνιμους κόμβους. Παρατηρούμε ότι άμεσα συνδεδεμένοι κόμβοι με τους μόνιμους κόμβους (1, 2 και 3) είναι οι κόμβοι 4, 5 και 6. Οι κόμβοι 5 και 6 έχουν ήδη ένα προσωρινό μήκος διαδρομής καθώς συνδέονται άμεσα με τον κόμβο 2, ενώ ο κόμβος 4 συνδέεται άμεσα με τον καινούριο μόνιμο κόμβο τον 3. Τώρα θα πρέπει να ελέγξουμε εάν η εισαγωγή του κόμβου 3 βελτίωσε καθόλου τις προσωρινές διαδρομές των κόμβων 5 και 6 και να υπολογίσουμε ένα προσωρινό μήκος διαδρομής για τον κόμβο 4. Ο κόμβος 5 έχει προσωρινό μήκος διαδρομής 15 μονάδες, από την άμεση σύνδεση του με τον κόμβο 2, ενώ έχει προσωρινό μήκος διαδρομής ίσο με 17 μονάδες, από την άμεση σύνδεση του με τον νέο μόνιμο κόμβο 3, οπότε το προσωρινό μήκος διαδρομής δεν βελτιώθηκε από την είσοδο του κόμβου 3. Ο κόμβος 6 έχει προσωρινό μήκος διαδρομής ίσο με 16 μονάδες, από την άμεση σύνδεση του με τον κόμβο 2, και δεν συνδέεται με τον κόμβο 3 οπότε δεν υπάρχει βελτίωση του προσωρινού του μήκος (και παραμένει ίδιο). Τέλος ο κόμβος 4 έχει προσωρινό μήκος διαδρομής ίσο με 9 + 4 = 13 μονάδες. Καθώς συνδέεται άμεσα με τον κόμβο 3 που έχει τελικό μήκος διαδρομής 9 μονάδες συν την ακμή 3-4 για να φθάσουμε στον κόμβο 4.

Κριτήριο για την εισαγωγή ενός κόμβου στο σύνολο των μόνιμα συνδεδεμένων κόμβων είναι το ελάχιστο μήκος διαδρομής από τους άμεσα συνδεδεμένους κόμβους, συνεπώς εισέρχεται ο κόμβος 4. Και το καινούριο σύνολο μόνιμα συνδεδεμένων κόμβων είναι το P = {1, 2, 3, 4}. Συνεχίζουμε με το 5ο βήμα και διαπιστώνουμε ότι δεν έχει τερματιστεί η διαδικασία καθώς δεν έχουν εισέρθει όλοι οι κόμβοι του δικτύου στο σύνολο των μόνιμα συνδεδεμένων κόμβων.

Συνοψίζοντας μέχρι τώρα έχουμε :

Σύνολο μόνιμων κόμβων	Ακμή άμεσα συνδεδεμένου κόμβου	Προσωρινό μήκος διαδρομής	Λυμένος κόμβος	Τελικό (συνολικό) μήκος ελάχιστης διαδρομής
P={1,2,3}+{4}	3-4	13	4	13
	2-5	15		
	2-6	16		

Εφόσον δεν έχει τερματιστεί η διαδικασία συνεχίζουμε επιστρέφοντας στο 3^o βήμα. Οι άμεσα συνδεδεμένοι κόμβοι με τουλάχιστον έναν από τους μόνιμα συνδεδεμένους κόμβους είναι οι κόμβοι 5, 6 και 7. Ο κόμβος 5 έχει προσωρινό μήκος διαδρομής ίσο με 15 μονάδες από την άμεση σύνδεση του με τον μόνιμο κόμβο 2, ο κόμβος 6 έχει προσωρινό μήκος διαδρομής ίσο με 16 μονάδες από την άμεση σύνδεση του με τον κόμβο 2, ενώ ο κόμβος 7 μπαίνει για πρώτη φορά μιας και συνδέεται άμεσα με τον μόνιμο κόμβο 4 (ο οποίος εισήλθε στο σύνολο των μόνιμων κόμβων στην προηγούμενη επανάληψη) και έχει προσωρινό μήκος διαδρομής ίσο με 13+9=22 μονάδες (13 μονάδες είναι η απόσταση από την αφετηρία μέχρι τον μόνιμο κόμβο 4 συν 9 μονάδες που είναι το μήκος της ακμής 4-7 που χρησιμοποιούμε για να φτάσουμε στον κόμβο 7). Τώρα σειρά έχει να ελέγξουμε εάν η διαδρομή από την αφετηρία έως τους κόμβους 5 και 6 βελτιώνεται με την εισαγωγή του κόμβου 4 στο σύνολο των μόνιμων κόμβων. Για τον κόμβο 6 δεν έχει νόημα να κάνουμε κάποιο έλεγχο μιας και δεν συνδέεται άμεσα με τον κόμβο 4. Ενώ για τον κόμβο 5 παρατηρούμε ότι εάν ακολουθήσουμε ένα μονοπάτι μέσω του κόμβου 4 έχουμε προσωρινό μήκος διαδρομής ίσο με 16 μονάδες (13 μονάδες που είναι το μήκος διαδρομής από την αφετηρία μέχρι τον κόμβο 4 συν 3 μονάδες που είναι το μήκος της ακμής 4-6). Παρατηρούμε ότι το μονοπάτι αυτό δεν βελτιώνει καθόλου το προσωρινό μήκος διαδρομής. Έτσι καταλήγουμε ότι οι άμεσα συνδεδεμένοι κόμβοι 5, 6 και 7 έχουν προσωρινό μήκος διαδρομής 15, 16 και 22 αντίστοιχα.

Κριτήριο για την εισαγωγή ενός κόμβου στο σύνολο των μόνιμα συνδεδεμένων κόμβων είναι το ελάχιστο μήκος διαδρομής από τους άμεσα συνδεδεμένους κόμβους, συνεπώς εισέρχεται ο κόμβος 5. Και το καινούριο σύνολο μόνιμα συνδεδεμένων κόμβων είναι το P = {1, 2, 3, 4, 5}. Συνεχίζουμε με το 5^o βήμα και διαπιστώνουμε ότι δεν έχει τερματιστεί η διαδικασία καθώς δεν έχουν εισέρθει όλοι οι κόμβοι του δικτύου στο σύνολο των μόνιμα συνδεδεμένων κόμβων.

Συνοψίζοντας μέχρι τώρα έχουμε :

Σύνολο μόνιμων κόμβων	Ακμή άμεσα συνδεδεμένου κόμβου	Προσωρινό μήκος διαδρομής	Λυμένος κόμβος	Τελικό (συνολικό) μήκος ελάχιστης διαδρομής
P={1,2,3,4}+{5}	2-5	15	5	15
	2-6	16		
	4-7	22		

Εξετάζουμε τους κόμβους 6 και 7 για να διαπιστώσουμε ένα υπάρχει βελτίωση του προσωρινού μήκους διαδρομής τους από την εισαγωγή του κόμβου 5 στο σύνολο των μόνιμων κόμβων και διαπιστώνουμε ότι η προσωρινή διαδρομή για τον κόμβο 6 δεν επηρεάζεται καθόλου μίας και ο κόμβος 6 δεν συνδέεται άμεσα με τον κόμβο 5. Ενώ το προσωρινό μήκος διαδρομής του κόμβο 7 είναι ίσο με 15+4=19 μονάδες (15 μονάδες που είναι το μήκος της διαδρομής από την αφετηρία μέχρι τον κόμβο 5 συν 4 μονάδες που είναι το μήκος της ακμής 5-7), εδώ παρατηρούμε ότι το μήκος της προσωρινής διαδρομής για τον κόμβο 7 βελτιώθηκε από τις 22 μονάδες που ήταν πριν μέσω της σύνδεσης του με τον κόμβο 4. Από τους κόμβους 6 και 7 μικρότερο μήκος προσωρινής διαδρομής έχει ο κόμβος 6 οπότε είναι αυτός που θα εισέλθει στο σύνολο των μόνιμα συνδεδεμένων κόμβων έτσι έχουμε P = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Σύνολο μόνιμων κόμβων	Ακμή άμεσα συνδεδεμένου κόμβου	Προσωρινό μήκος διαδρομής	Λυμένος κόμβος	Τελικό (συνολικό) μήκος ελάχιστης διαδρομής
P={1,2,3,4,5}+{6}	2-6	16	6	16
	5-7	19 βελτίωση		

Το κριτήριο τερματισμού δεν ικανοποιείται συνεπώς συνεχίζουμε την μέθοδο επιστρέφοντας στο 3^{ο} βήμα. Εξετάζουμε εάν ο κόμβος 7 μπορεί να βελτιώσει το μήκος της προσωρινής του διαδρομής με την είσοδο του κόμβου 6 στο σύνολο των μόνιμων κόμβων και διαπιστώνουμε ότι η εναλλακτική διαδρομή μέσω του κόμβου 6 μας δίνει μήκος προσωρινής διαδρομής ίσο με 16+5=21 μονάδες (16 μονάδες που είναι το ελάχιστο μήκος διαδρομής από την αφετηρία μέχρι τον κόμβο 6 συν 5 μονάδες που είναι το μήκος της ακμής 6-7) οπότε δεν υπάρχει βελτίωση. Τελικά ο κόμβος 7 εισέρχεται στο σύνολο τον μόνιμα συνδεδεμένων κόμβων με μήκος ελάχιστης διαδρομής ίσο με 19 μονάδες μέσω του κόμβου 5. Το κριτήριο τερματισμού ικανοποιείται συνεπώς δεν έχουμε άλλη επανάληψη.

Σύνολο μόνιμων κόμβων	Ακμή άμεσα συνδεδεμένου κόμβου	Προσωρινό μήκος διαδρομής	Λυμένος κόμβος	Τελικό (συνολικό) μήκος ελάχιστης διαδρομής
P={1,2,3,4,5,6}+{7}	5-7	19	7	19

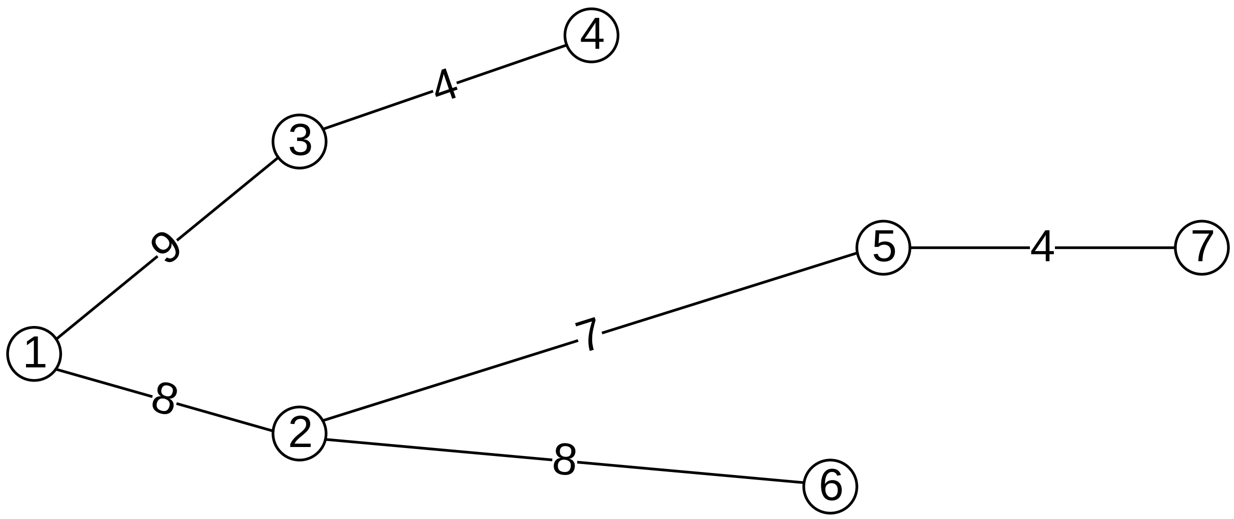
Συνοπτικά τα αποτελέσματα της μεθόδου ευρέσεως της συντομότερης διαδρομής παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα, ο οποίος περιέχει την ελάχιστη απόσταση από την αφετηρία καθώς και τον αμέσως προηγούμενο κόμβο μέσω του οποίου επιτυγχάνεται η ελάχιστη απόσταση.

Κόμβος	Άμεσα προηγούμενος κόμβος	Ελάχιστη απόσταση
1	-	-
2	1	8
3	1	9
4	3	13
5	2	15
6	2	16
7	5	19

Μπορούμε εύκολα να κατασκευάσουμε ένα πίνακα στον οποίο να εμφανίζεται η ελάχιστη απόσταση και η βέλτιστη διαδρομή από την αφετηρία για κάθε κόμβο.

Κόμβος	Βέλτιστη διαδρομή	Ελάχιστη απόσταση
1	-	-
2	1-2	8
3	1-3	9
4	1-3-4	13
5	1-2-5	15
6	1-2-6	16
7	1-2-5-7	19

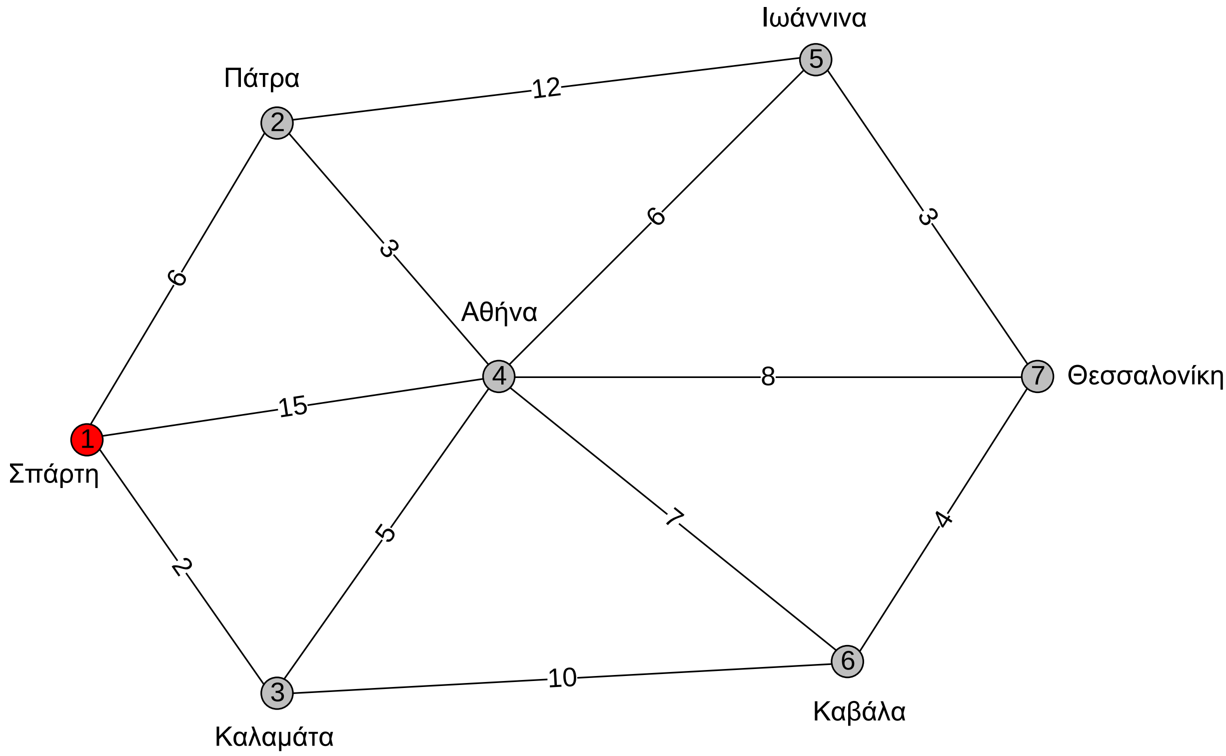
Σχηματικά οι ελάχιστες αποστάσεις από την αφετηρία προς όλους τους κόμβος είναι :



Σχήμα 13
Οι ελάχιστες διαδρομές προς όλους τους κόμβους.

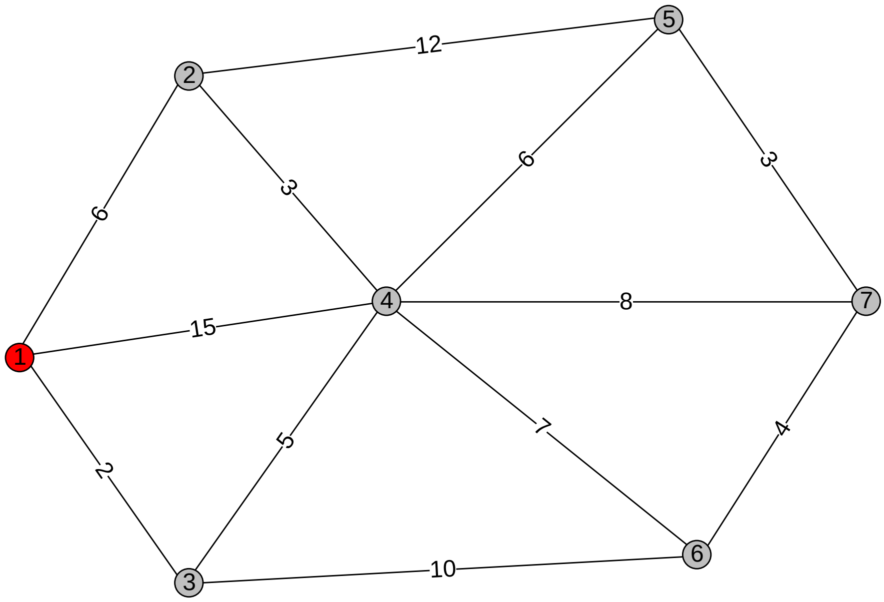
1.5. Εφαρμογή της μεθόδου εύρεσης της ελάχιστης διαδρομής.

Μια εταιρία μεταφέρει πορτοκάλια από την Σπάρτη σε έξι πόλεις με φορτηγά. Οι διαφορετικές διαδρομές από την Σπάρτη προς τις διάφορες πόλεις προορισμού καθώς και το χρονικό διάστημα σε ώρες που απαιτείται από ένα φορτηγό για να διανύσει την κάθε διαδρομή καταγράφονται στο σχήμα 14.



Σχήμα 14
Διαδρομές φορτηγών
από την Σπάρτη.

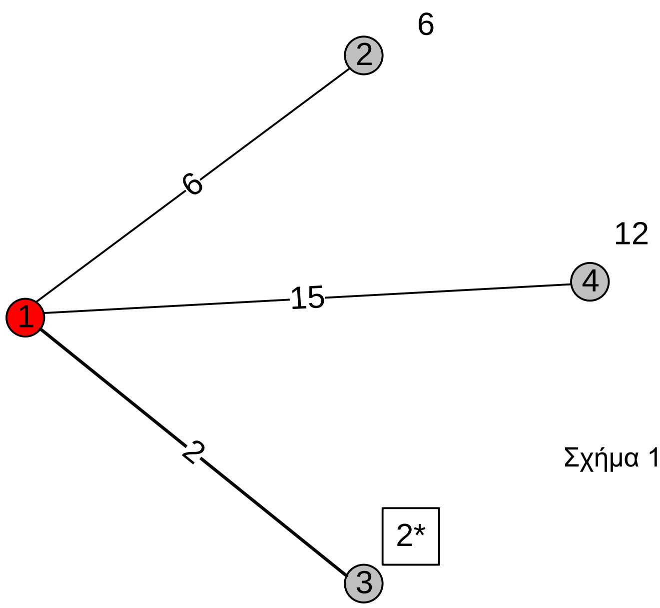
Ο διαχειριστής της μεταφορικής αυτής εταιρίας θέλει να καθορίσει την συντομότερη διαδρομή (συντομότερη σε χρόνο αποστολής) για το κάθε φορτηγό μέχρι να καταλήξει στον προορισμό του. Αυτό το πρόβλημα μπορεί να λυθεί χρησιμοποιώντας την τεχνική ευρέσεως της συντομότερης διαδρομής. Για να εφαρμόσουμε τη μεθοδολογία αυτή μας είναι απαραίτητο να παραστήσουμε το πρόβλημα ως ένα δίκτυο.



Σχήμα 15
Το πρόβλημα σε μορφή δικτύου

Ας επαναλάβουμε το αντικείμενο μας σε σχέση με το δίκτυο του σχήματος 15. Προσπαθούμε να βρούμε τις συντομότερες διαδρομές από την αφετηρία μας (κόμβος 1) στους έξι προορισμούς (κόμβοι 2-7).

Ξεκινάμε την διαδικασία επίλυσης από τον κόμβο 1 (την αφετηρία) και προσπαθούμε να εντοπίσουμε την συντομότερη διαδρομή από τους άμεσα συνδεδεμένους κόμβους. Οι τρείς κόμβοι που συνδέονται άμεσα με τον κόμβο 1 είναι οι κόμβοι 2, 3 και 4 όπως φαίνεται και στο σχήμα 15. Από αυτούς τους τρείς κόμβους η συντομότερη διαδρομή είναι 2 ώρες για τον κόμβο 3. Έτσι έχουμε καθορίσει την πρώτη μας συντομότερη διαδρομή από τον κόμβο 1 στον κόμβο 3 (από την Σπάρτη στην Καλαμάτα). Οπότε το σύνολο των μόνιμα συνδεδεμένων κόμβων περιέχει τους κόμβους 1 και 3 και έχουμε βρει την συντομότερη διαδρομή για τους κόμβους αυτούς. (επειδή ο κόμβος 1 είναι η αφετηρία μπαίνει αυτόματα στο σύνολο των μόνιμα συνδεδεμένων κόμβων.)



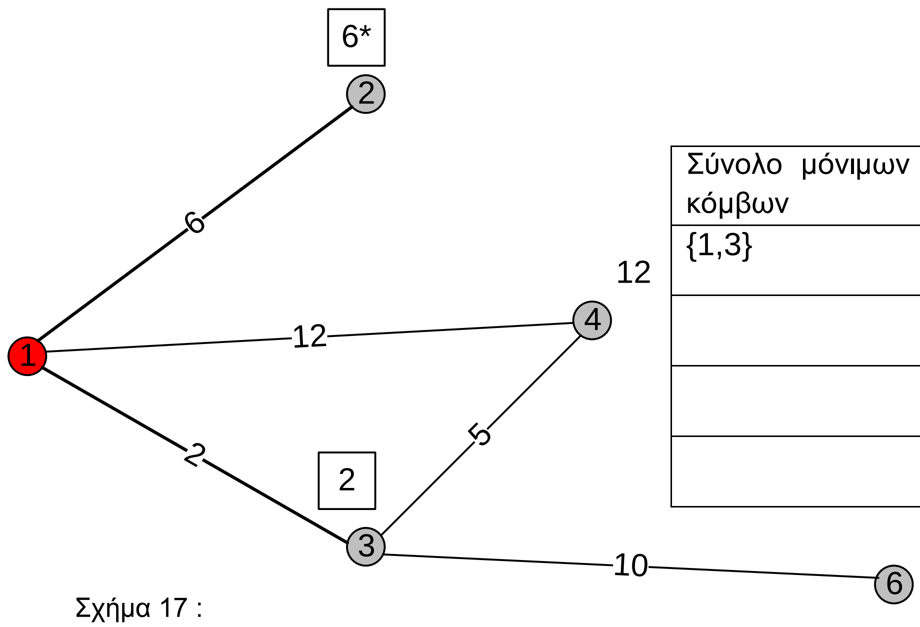
Σύνολο μόνιμων κόμβων	Ακμή	Χρόνος
{1}	1-2	6
	1-4	12
	1-3	2*

Σχήμα 16

Το δίκτυο με τον κόμβο 1 στο σύνολο
των μόνιμα συνδεδεμένων κόμβων

Σχόλιο : Στο δίκτυο του σχήματος 16 έχουμε επισημάνει με έντονη γραμμή την συντομότερη διαδρομή για τον κόμβο 3 και τον ελάχιστο χρόνο που χρειάζεται (2 ώρες) τον έχουμε τοποθετήσει σε ένα κουτί.

Στη συνέχεια επαναλαμβάνουμε τα παραπάνω βήματα για να υπολογίσουμε την συντομότερη διαδρομή για τον επόμενο κόμβο. Οι άμεσα συνδεδεμένοι κόμβοι με τους κόμβους του συνόλου των μόνιμα συνδεδεμένων κόμβων (1 και 3) είναι οι 2, 4 και 6, όπως φαίνεται και στο σχήμα 17.



Σύνολο μόνιμων κόμβων	Ακμή	Χρόνος
{1,3}	1-2	6*
	1-4	15
	3-4	7
	3-6	12

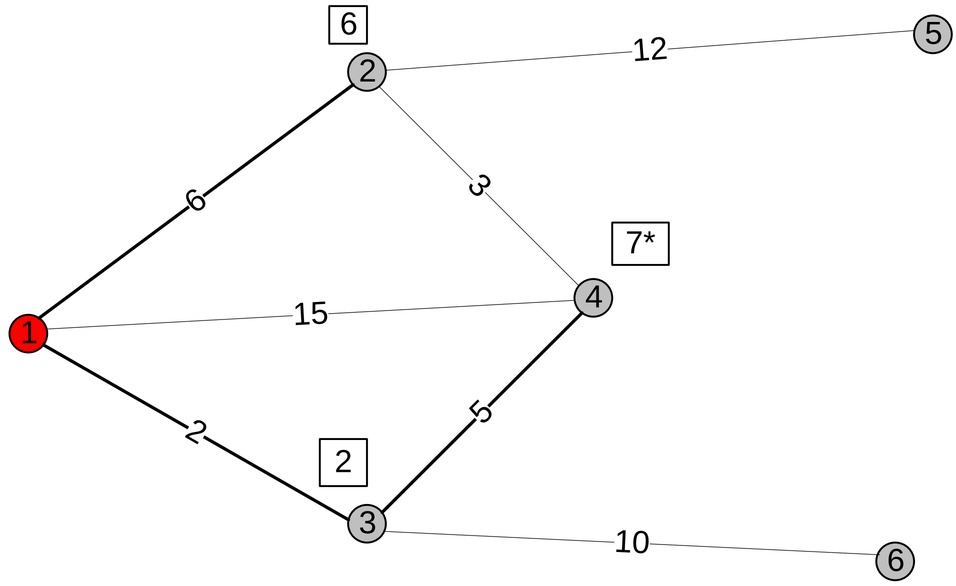
Σχήμα 17 :
Το δίκτυο με σύνολο μόνιμα
συνδεδεμένων κόμβων το {1,3}

Παρατηρούμε ότι από τους άμεσα συνδεδεμένους κόμβους σε αυτούς του συνόλου των μόνιμα συνδεδεμένων η συντομότερη διαδρομή ανήκει στον κόμβο 2 και είναι ίση με 6 ώρες. Συνεπώς ο κόμβος 2 είναι αυτός που εισέρχεται στο σύνολο των μόνιμα συνδεδεμένων κόμβων.

Καθώς προχωράμε στο επόμενο βήμα, το σύνολο των μόνιμα συνδεδεμένων κόμβων είναι το {1,2,3}, και αυτό σημαίνει ότι έχουμε βρει τις συντομότερες διαδρομές για τους κόμβους αυτούς.

Οι άμεσα συνδεδεμένοι κόμβοι με τους κόμβους του συνόλου των μόνιμα συνδεδεμένων κόμβων είναι οι 4, 5 και 6. Ο κόμβος 5 είναι ο μόνος που δεν έχει μέχρι τώρα συνδεθεί προσωρινά με το σύνολο των μόνιμα συνδεδεμένων κόμβων, και συνδέεται άμεσα με τον κόμβο 2.

Επιπλέον ο κόμβος 4 τώρα συνδέεται με τον κόμβο 2 (αφού ο κόμβος 2 πλέον ανήκει στο σύνολο των μόνιμα συνδεδεμένων κόμβων. Όπως βλέπουμε και στο σχήμα 18.



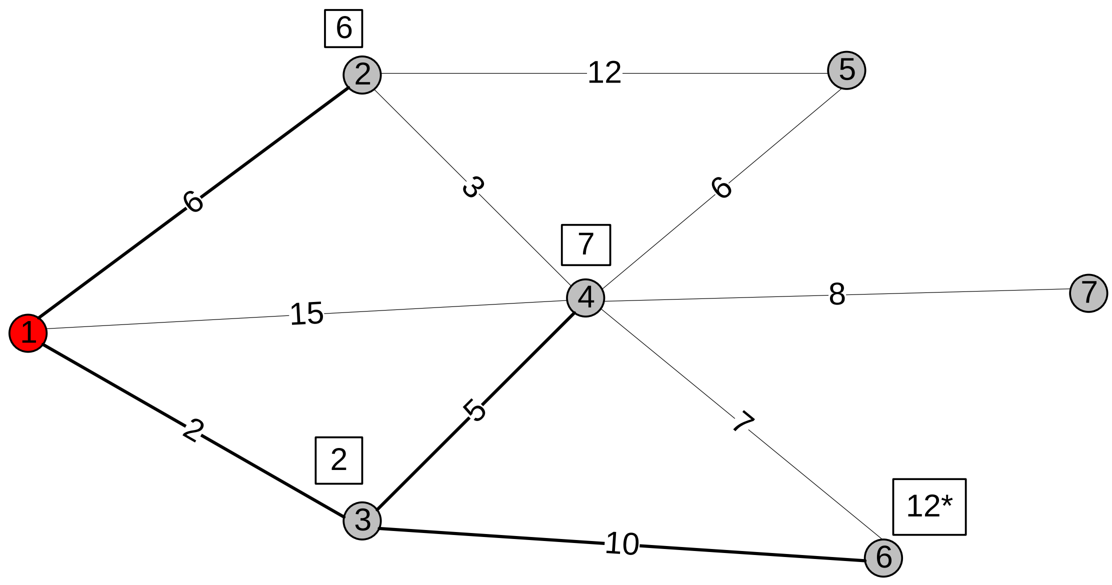
Σχήμα 18 :
Το δίκτυο με σύνολο μόνιμα
συνδεδεμένων κόμβων το {1,2,3}

Σύνολο μόνιμων κόμβων	Ακμή	χρόνος
{1,2,3}	1-4	15
	2-4	9
	2-5	18
	3-4	7*
	3-6	12

Πέντε ακμές συνδέονται με τους μόνιμα συνδεδεμένους κόμβους (1, 2 ,3) προς τους άμεσα συνδεδεμένους κόμβους όπως βλέπουμε και στον πίνακα. Η ακμή η οποία έχει το ελάχιστο χρονικό διάστημα είναι η ακμή 3-4 με χρόνο 7 ώρες. Έτσι έχουμε καθορίσει την συντομότερη διαδρομή για τον κόμβο 4 (7 ώρες) και είναι η διαδρομή από τον κόμβο 1 μέσω του κόμβου 3, οι άλλες διαδρομές από τον κόμβο 1 προς τον κόμβο 4 είναι μεγαλύτερες, παρόλα αυτά τις καταγράφουμε σαν προσωρινές διαδρομές για τον κόμβο 4.

Συνοψίζοντας, μέχρι τώρα έχουμε καθορίσει τις συντομότερες διαδρομές για τους κόμβους 1, 2, 3 και 4 , οι οποίοι αποτελούν και το σύνολο των μόνιμα συνδεδεμένων κόμβων.

Στη συνέχεια επαναλαμβάνουμε την διαδικασία και προσδιορίζουμε τους άμεσα συνδεδεμένους κόμβους στο σύνολο των μόνιμα συνδεδεμένων. Οι άμεσα συνδεδεμένοι κόμβοι είναι οι 5, 6 και 7 όπως φαίνεται και στο σχήμα 19.

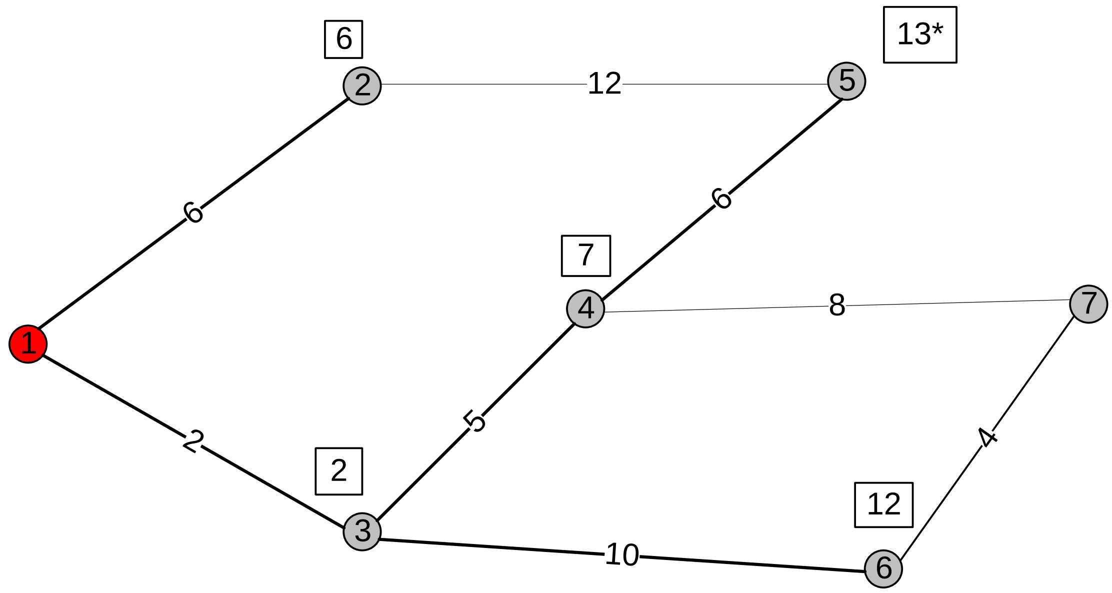


Σχήμα 19 :
Το δίκτυο με σύνολο μόνιμα
συνδεδεμένων κόμβων το {1,2,3,4}

Παρατηρούμε ότι από τις ακμές που προσεγγίζουν τους κόμβους 5, 6 και 7 η συντομότερη είναι η 3-6 με διάρκεια διαδρομής 31 ώρες. Έτσι ο κόμβος 6 προστίθεται στο σύνολο των μόνιμα συνδεδεμένων κόμβων. Αυτό σημαίνει ότι έχουμε βρει την συντομότερη διαδρομή για τους κόμβους 1, 2, 3, 4 και 6 που αποτελούν και το σύνολο των μόνιμα συνδεδεμένων κόμβων.

Σύνολο μόνιμων κόμβων	Ακμή	χρόνος
{1,2,3,4}	2-5	18
	3-6	12*
	4-5	13
	4-7	15
	4-6	14

Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία και παρατηρούμε ότι άμεσα με τους μόνιμους κόμβους συνδέονται οι κόμβοι 5 και 7 όπως φαίνεται και στο σχήμα 20. (Σημειώνουμε ότι έχουμε διαγράψει την ακμή 4-6 διότι η συντομότερη διαδρομή για τον κόμβο 6 είναι μέσω του κόμβου 3 αντί του 4)

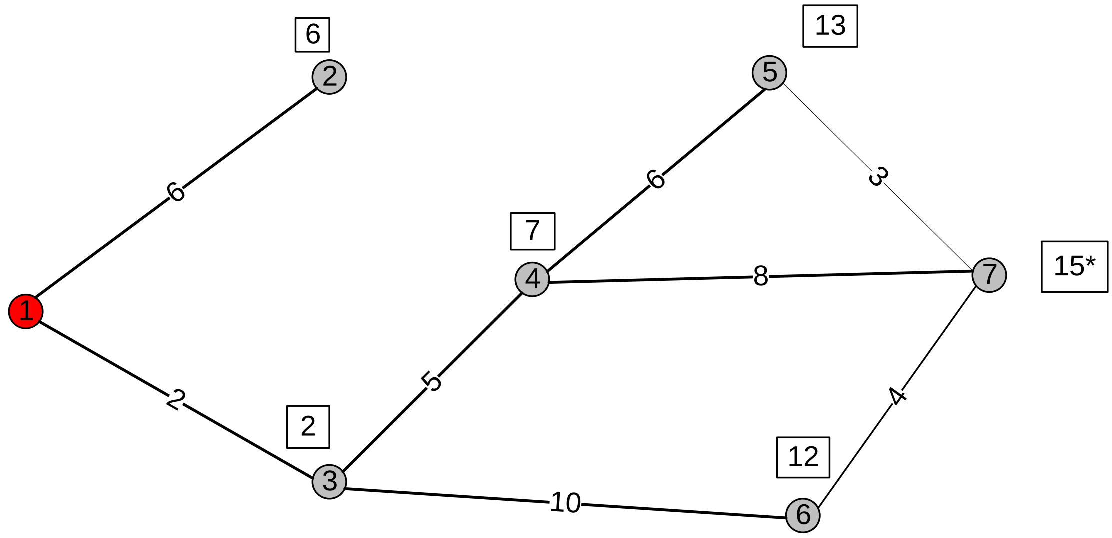


Σχήμα 20 :
Το δίκτυο με σύνολο μόνιμα
συνδεδεμένων κόμβων το {1,2,3,4,6}

Παρατηρούμε ότι από τις ακμές που προσεγγίζουν τους κόμβους 5 και 7 η συντομότερη ακμή είναι η 4 - 5 με διάρκεια διαδρομής 13 ώρες. Έτσι ο κόμβος 5 προστίθεται στο σύνολο των μόνιμα συνδεδεμένων κόμβων. Αυτό σημαίνει ότι έχουμε βρει την συντομότερη διαδρομή για τους κόμβους 1, 2, 3, 4, 5 και 6 που αποτελούν και το σύνολο των μόνιμα συνδεδεμένων κόμβων.

Σύνολο μόνιμων κόμβων	Ακμή	χρόνος
{1,2,3,4,6}	2-5	18
	4-5	13*
	4-7	15
	6-7	16

Ο μόνος κόμβος που συνδέεται άμεσα με τους μόνιμα συνδεδεμένους κόμβους είναι ο κόμβος 7, όπως φαίνεται και στο σχήμα 21.

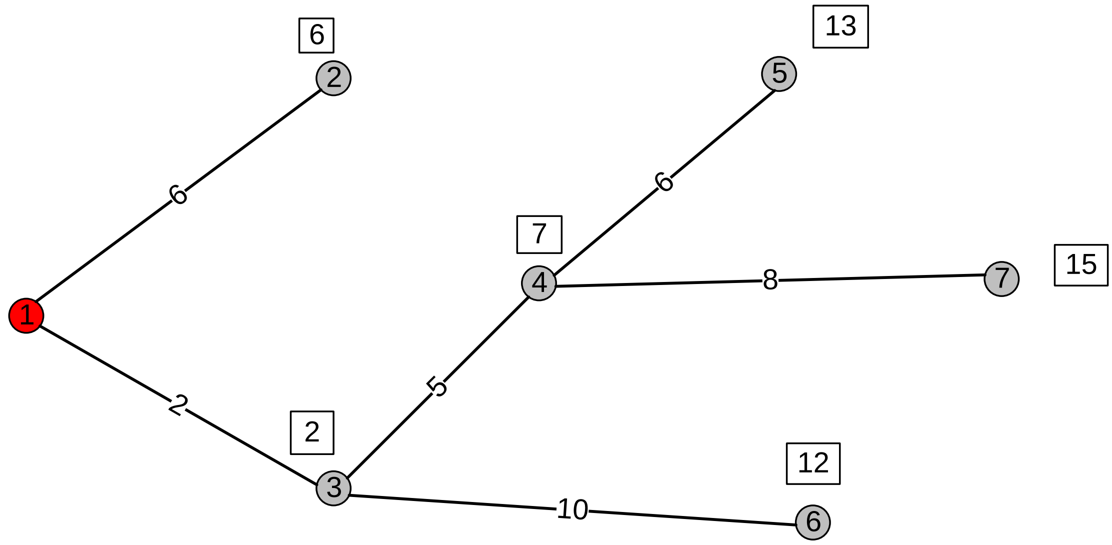


Σχήμα 21 :
Το δίκτυο με σύνολο μόνιμα
συνδεδεμένων κόμβων το {1,2,3,4,5,6}

Από τις ακμές που συνδέουν μόνιμα συνδεδεμένους κόμβους με τον κόμβο 7 η συντομότερη είναι η 4-7 με διάρκεια 15 ώρες. Έτσι ο κόμβος 7 προστίθεται στο σύνολο των μόνιμα συνδεδεμένων κόμβων.

Σύνολο μόνιμων κόμβων	Ακμή	χρόνος
{1,2,3,4,5,6}	4-7	15*
	6-7	16
	5-7	16

Οι συντομότερες, χρονικά, διαδρομές από την αφετηρία (κόμβος 1) προς τους έξι άλλους κόμβους και οι αντίστοιχοι χρόνοι που χρειάζονται δίνονται στο σχήμα 22 και στον πίνακα.



Σχήμα 22 :
Το δίκτυο με τις βέλτιστες διαδρομές από την Σπάρτη προς όλους τους προορισμούς.

Συντομότερη χρονικά διαδρομή από την αφετηρία προς όλους τους προορισμούς.

Από την Σπάρτη προς :	Διαδρομή	Συνολική διάρκεια (σε ώρες)
Πάτρα (κόμβος 2)	1-2	6
Καλαμάτα (κόμβος 3)	1-3	2
Αθήνα (κόμβος 4)	1-3-4	7
Ιωάννινα (κόμβος 5)	1-3-4-5	13
Καβάλα (κόμβος 6)	1-3-6	12
Θεσσαλονίκη (κόμβος 7)	1-3-4-7	15

1.6. Επίλυση του προβλήματος της συντομότερης διαδρομής (shortest route problem) με την βοήθεια του EXCEL.

Το πρόβλημα της συντομότερης διαδρομής μπορεί επίσης να λυθεί με την χρήση των υπολογιστικών φύλλων EXCEL διατυπώνοντας και επιλύοντας το ως ένα πρόβλημα 0-1 ακέραιου προγραμματισμού. Για να διατυπωθεί το πρόβλημα ως μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού πρέπει πρώτα να ορίσουμε μία μεταβλητή απόφασης για κάθε ακμή του δικτύου, όπως παρακάτω :

x_{ij} = 0 αν η ακμή i-j δεν είναι επιλεγμένη ως μέρος της συντομότερης διαδρομής και
1 αν η ακμή i-j είναι επιλεγμένη.

Για να μειώσουμε την πολυπλοκότητα και το μέγεθος του μοντέλου, μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι τα στοιχεία ρέουν προς μία κατεύθυνση δηλαδή από έναν μικρό κόμβο προς ένα μεγαλύτερο (για παράδειγμα από τον κόμβο 3 στον κόμβο 4 αλλά όχι από τον κόμβο 4 στον 3). Αυτό μειώνει σημαντικά τον αριθμό των μεταβλητών και τον κόμβων που έχουμε να εξετάσουμε. Η αντικειμενική συνάρτηση ορίζεται ως η ελαχιστοποίηση του αθροίσματος του γινομένου τις κάθε ακμής επί την διάρκεια του ταξιδιού της κάθε ακμής.

$$\text{minimize } Z = 6x_{12} + 2x_{13} + 15x_{14} + 3x_{24} + 12x_{25} + 5x_{34} + 10x_{36} + 6x_{45} + 7x_{46} + 8x_{47} + 3x_{57} + 4x_{67}$$

Υπάρχει ένας περιορισμός για κάθε κόμβο που ορίζει πώς όταν εισερχόμαστε σε έναν κόμβο πρέπει οπωσδήποτε να εξέλθουμε από αυτόν. Ο περιορισμός αυτός ονομάζεται διατήρηση της ροής. Που σημαίνει πως εάν ένα φορτηγό φεύγει από τον κόμβο 1 (Σπάρτη) πρέπει οπωσδήποτε να ακολουθήσει είτε την ακμή 1-2, είτε την ακμή 1-3, είτε την ακμή 1-4.

Αυτός ο περιορισμός για τον κόμβο 1 διατυπώνεται ως εξής :

$$x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1$$

Στον κόμβο 2, ένα φορτηγό, εισέρχεται διαμέσου της ακμής 1-2 και αναχωρεί μέσω ή της ακμής 2-4 ή της ακμής 2-5. Έτσι έχουμε :

$$x_{12} = x_{24} + x_{25}$$

Αυτός ο περιορισμός μπορεί να αναδιατυπωθεί ως εξής :

$$x_{12} - x_{24} - x_{25} = 0$$

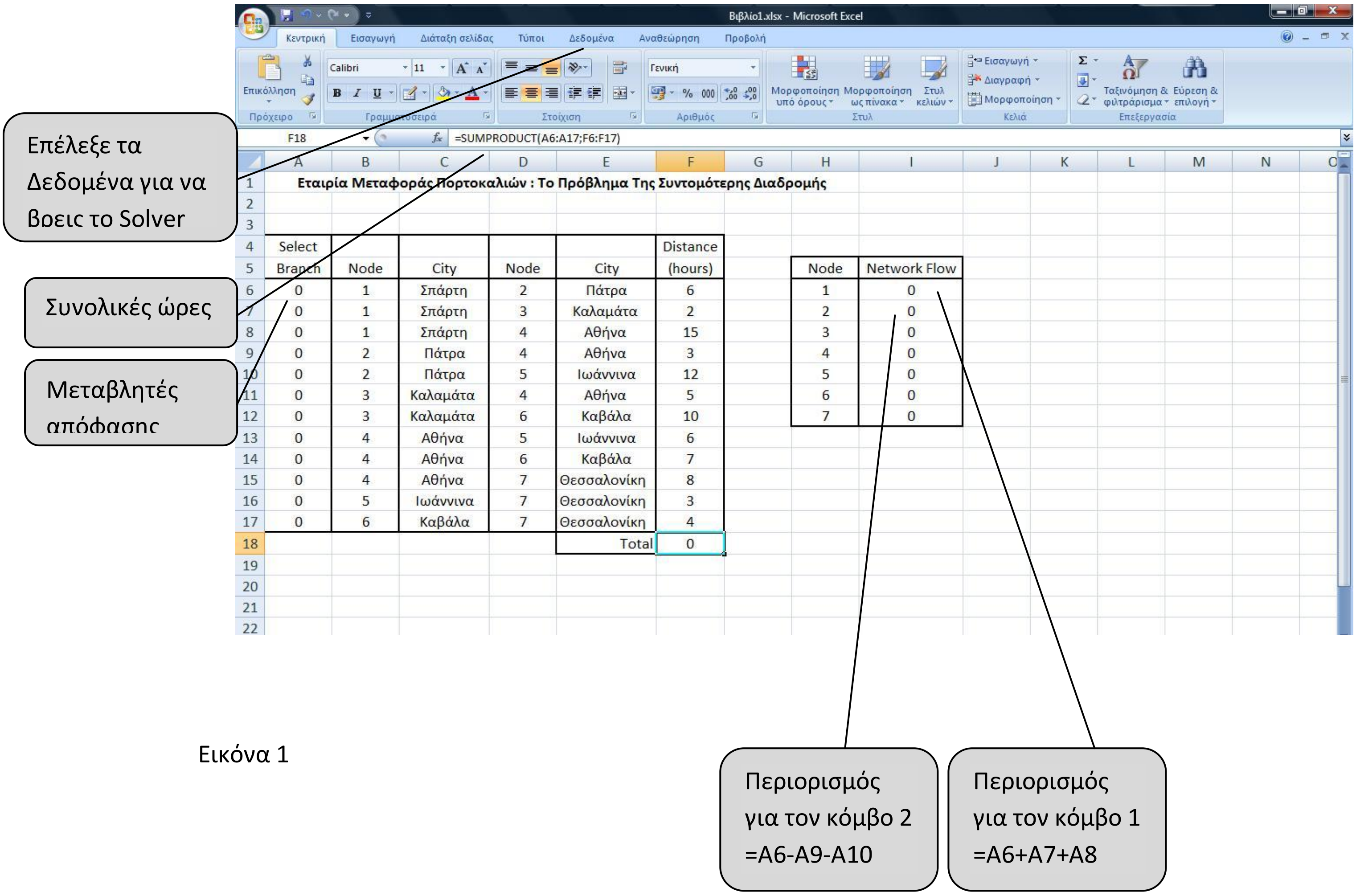
Οι περιορισμοί στους κόμβους 3, 4, 5, 6 και 7 είναι παρόμοιοι. Συνοψίζοντας και διατυπώνοντας το πρόβλημα αυτό σαν πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού έχουμε :

$$\begin{aligned} \text{minimize } Z = \; & 6x_{12} + 2x_{13} + 15x_{14} + 3x_{24} + 12x_{25} + 5x_{34} + 10x_{36} + \\ & 6x_{45} + 7x_{46} + 8x_{47} + 3x_{57} + 4x_{67} \end{aligned}$$

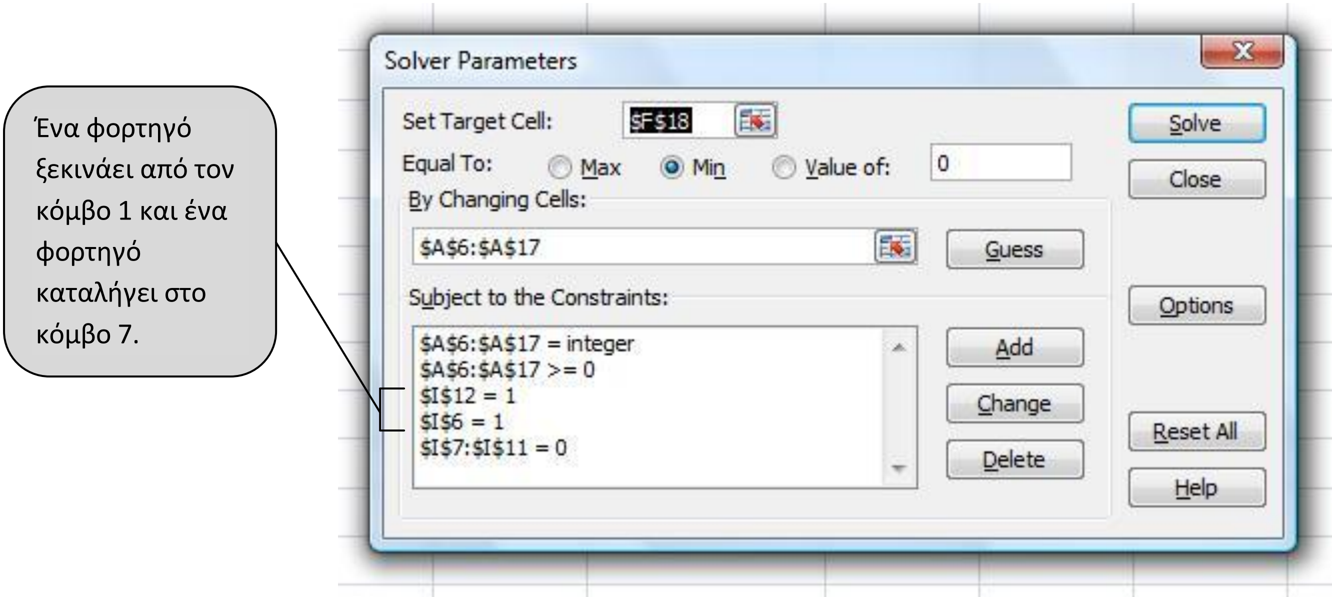
Υπό τους περιορισμούς

$$\begin{aligned} x_{12} + x_{13} + x_{14} &= 1 \\ x_{12} - x_{24} - x_{25} &= 0 \\ x_{13} - x_{34} - x_{36} &= 0 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} - x_{45} - x_{46} - x_{47} &= 0 \\ x_{25} + x_{45} - x_{57} &= 0 \\ x_{36} + x_{46} - x_{67} &= 0 \\ x_{47} + x_{57} + x_{67} &= 1 \\ x_{ij} &= 0 \text{ ή } 1 \end{aligned}$$

Αυτός ο τύπος προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού λύνεται με την βοήθεια του EXCEL χρησιμοποιώντας την επιλογή ‘Solver’ από το μενού ‘Tools’ που βρίσκεται στην κορυφή της σελίδας. Στην εικόνα 1 απεικονίζεται η επίλυση μέσω του EXCEL του προβλήματος της εταιρίας μεταφοράς πορτοκαλιών. Οι μεταβλητές απόφασης x_{ij} εκπροσωπούνται από τα κελία **A6:A17**. Έτσι μία ποσότητα 1 σε ένα από αυτά τα κελία σημαίνει ότι η αντίστοιχη ακμή επιλέγεται ως μέρος της συντομότερης διαδρομής. Τα κελία **F6:F17** αποτελούν την διάρκεια ταξιδιού (σε ώρες) για την κάθε ακμή και ο τύπος της αντικειμενικής συνάρτησης, που περιέχεται στο κελί **F18**, εμφανίζεται στην γραμμή τύπων στο πάνω μέρος της οθόνης. Οι περιορισμοί για το μοντέλο που αντιπροσωπεύουν την ροή μέσα από κάθε κόμβο βρίσκονται στον πίνακα στην δεξιά πλευρά της σελίδας του EXCEL. Για παράδειγμα το κελί **I6** αντιπροσωπεύει τον περιορισμό για τον κόμβο 1, **‘=A6+A7+A8’** και το κελί **I7** αντιπροσωπεύει τον περιορισμό για τον κόμβο 2, **‘=A6-A9-A10’**.

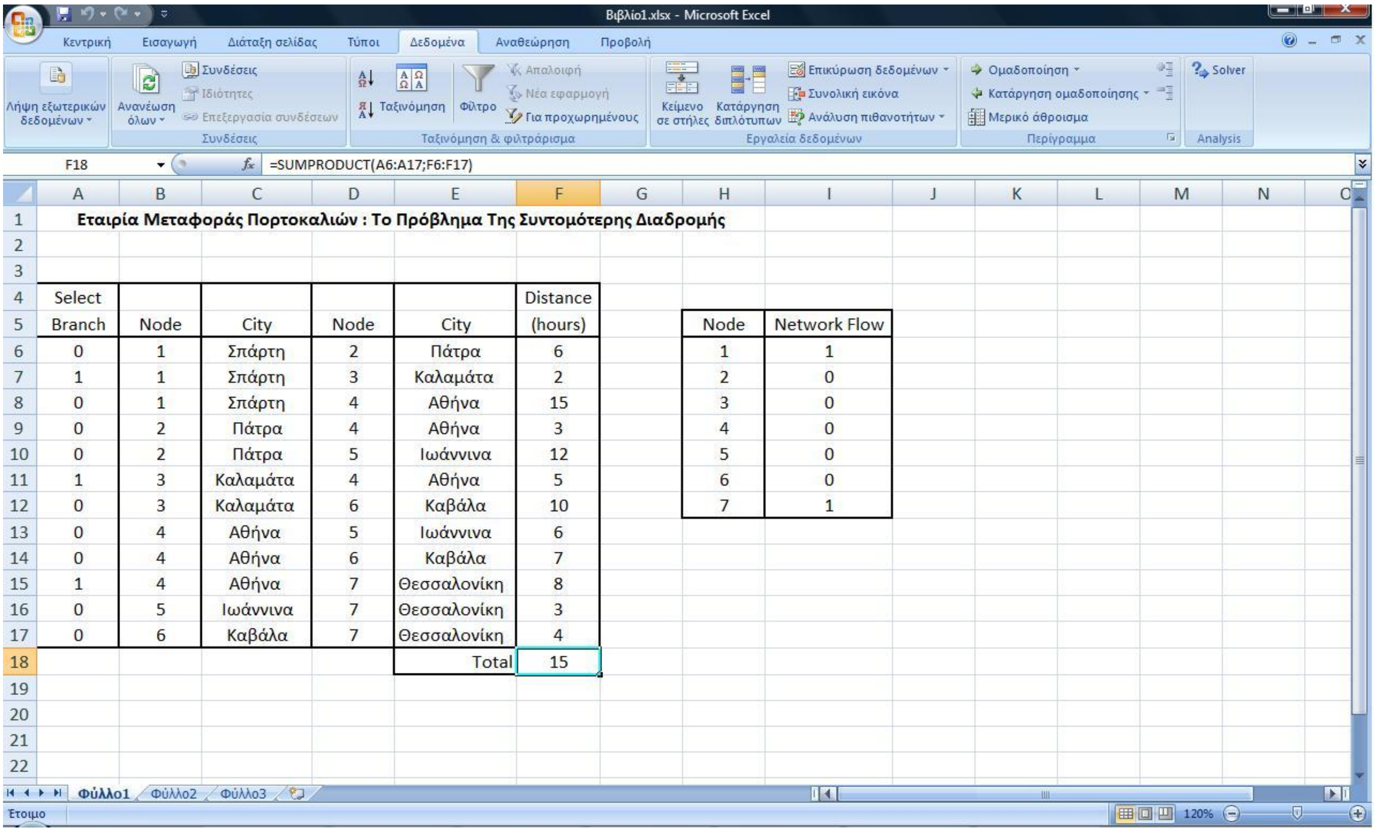


Εικόνα 1



Εικόνα 2

Τις επιλογές του Solver τις βλέπουμε στην εικόνα 2. Τον Solver τον βρίσκουμε στην επιλογή Δεδομένα που βρίσκεται στο πάνω μέρος της οθόνης μας. Προσοχή ο περιορισμός που αφορά τον κόμβο 1 και βρίσκεται στο κελί **I6** ισούται με 1, που σημαίνει ότι ένα φορτηγό ξεκινά από τον κόμβο 1, και ο περιορισμός για τον κόμβο 7 που βρίσκεται στο κελί **I12** είναι επίσης ίσος με 1, που σημαίνει ότι ένα φορτηγό τερματίζει στον κόμβο 7.



Select Branch	Node	City	Node	City	Distance (hours)
0	1	Σπάρτη	2	Πάτρα	6
1	1	Σπάρτη	3	Καλαμάτα	2
0	1	Σπάρτη	4	Αθήνα	15
0	2	Πάτρα	4	Αθήνα	3
0	2	Πάτρα	5	Ιωάννινα	12
1	3	Καλαμάτα	4	Αθήνα	5
0	3	Καλαμάτα	6	Καβάλα	10
0	4	Αθήνα	5	Ιωάννινα	6
0	4	Αθήνα	6	Καβάλα	7
1	4	Αθήνα	7	Θεσσαλονίκη	8
0	5	Ιωάννινα	7	Θεσσαλονίκη	3
0	6	Καβάλα	7	Θεσσαλονίκη	4
				Total	15

Node	Network Flow
1	1
2	0
3	0
4	0
5	0
6	0
7	1

Εικόνα 3

Η λύση μέσω του EXCEL δίνεται στην εικόνα 3. Προσοχή τα κελία **A7**, **A11** και **A15** έχουν την τιμή 1 γεγονός το οποίο δείχνει ότι οι ακμές 1-3, 3-4 και 4-7 αποτελούν την συντομότερη διαδρομή. Η συνολική απόσταση είναι 15 ώρες, η οποία φαίνεται στο κελί **F18**.

2. Ο Αλγόριθμος Εύρεσης της συντομότερης διαδρομής (The Shortest – Route Algorithm)

Θα ασχοληθούμε με δύο είδη αλγορίθμων που μας βοηθούν να εντοπίσουμε τη συντομότερη διαδρομή σε διάφορα είδη δικτυακών προβλημάτων. Τα δύο είδη αυτά είναι :

1. Ο αλγόριθμος **Dijkstra**

2. Ο αλγόριθμος **Floyd**

Ο αλγόριθμος Dijkstra είναι σχεδιασμένος για την εύρεση της συντομότερης διαδρομής μεταξύ της αφετηρίας και όλων των υπόλοιπων κόμβων ενός δικτύου. Ενώ ο αλγόριθμος Floyd είναι πιο γενικός επειδή μας επιτρέπει να υπολογίσουμε την συντομότερη διαδρομή μεταξύ δύο οποιοδήποτε κόμβων εντός του δικτύου.

2.1. Ο αλγόριθμος Dijkstra :

Θέτουμε u_i την συντομότερη διαδρομή από την αφετηρία κόμβος 1 προς τον κόμβο i, και ορίζουμε d_{ij} (≥ 0) το μήκος της ακμής (i,j). Ο αλγόριθμος καθορίζει μία ετικέτα για τον άμεσα συνδεδεμένο κόμβο j της μορφής

$$[u_i, i] = [u_i + d_{ij}, i], \; d_{ij} \geq 0$$

Η ετικέτα για την αφετηρία είναι [0, -] , που δείχνει ότι δεν υπήρχε άλλος κόμβος πριν από αυτόν.

Δύο είδη κόμβων υπάρχουν στον αλγόριθμο Dijkstra, οι προσωρινοί και οι μόνιμοι. Προσωρινός ονομάζεται ένας κόμβος όταν μπορεί να βρεθεί συντομότερη διαδρομή για τον κόμβο αυτό. Όταν δεν μπορούμε να βρούμε να βρούμε ‘καλύτερη’ (συντομότερη) διαδρομή για έναν κόμβο τότε ο όρος προσωρινός μετατρέπεται σε μόνιμος.

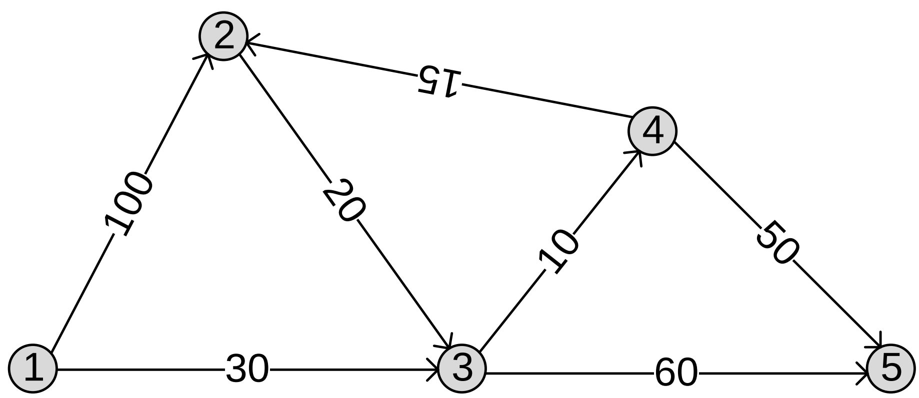
Βήμα 0. Τοποθετούμε στην αφετηρία (κόμβος 1) την μόνιμη ετικέτα [0,-] και ορίζουμε i = 1.

Βήμα i. (a) υπολογίζουμε τις προσωρινές ετικέτες [u_i + d_{ij} , i] για κάθε κόμβο j που μπορεί να προσεγγιστεί άμεσα από τον κόμβο i , υπό υην προϋπόθεση ότι ο κόμβος j δεν είναι μόνιμος. Εάν ο κόμβος j έχει ήδη χαρακτηριστεί με την ετικέτα [u_j, k] μέσω ενός άλλου κόμβου k και αν $u_i + d_{ij} < u_j$, αντικαθιστούμε την ετικέτα [u_j, k] με [u_i + d_{ij} ,i].

(b) Εάν όλοι οι κόμβοι είναι μόνιμοι τότε σταματάμε. Αλλιώς, επιλέγουμε την ετικέτα [u_r,s] με την μικρότερη απόσταση (=u_r) μεταξύ όλων των προσωρινών κόμβων. Θέτουμε i=r και επαναλαμβάνουμε το βήμα i.

2.1.1. Παράδειγμα :

Στο δίκτυο του σχήματος 23 μας δίνονται οι διαδρομές και οι αποστάσεις τους, σε μίλια, μεταξύ της πόλης 1 (κόμβος 1) και των τεσσάρων άλλων πόλεων (κόμβοι 2 έως 5). Υπολογίστε την συντομότερη διαδρομή μεταξύ της πόλης 1 και των υπολοίπων πόλεων.



Σχήμα 23

Επανάληψη 0. Τοποθετούμε την μόνιμη ετικέτα [0,-] στο κόμβο 1.

Επανάληψη 1. Οι κόμβοι 2 και 3 προσεγγίζονται από μόνιμο κόμβο 1. Έτσι η λίστα με τους μόνιμους και τους προσωρινούς κόμβους γίνεται :

Κόμβος	Ετικέτα	Κατάσταση
1	**[0,-]**	**Μόνιμος**
2	[0 + 100,1] = [100,1]	Προσωρινός
3	[0 + 30,1] = [30,1]	Προσωρινός

Από τις δύο προσωρινές ετικέτες [100,1] και [30,1] ο κόμβος 3 αποδίδει την μικρότερη απόσταση (u_3 = 30). Έτσι η κατάσταση του κόμβου 3 μετατρέπεται σε μόνιμη.

Επανάληψη 2. Οι κόμβοι 4 και 5 προσεγγίζονται από τον κόμβο 3 και η λίστα με τους μόνιμους και τους προσωρινούς κόμβους γίνεται :

Κόμβος	Ετικέτα	Κατάσταση
1	**[0,-]**	Μόνιμος
2	[100,1]	Προσωρινός
3	**[30,1]**	**Μόνιμος**
4	[30 + 10,3] = [40,3]	Προσωρινός
5	[30 + 60,3] = [90,3]	Προσωρινός

Συνεπώς η κατάσταση του κόμβου 4 μετατρέπεται από προσωρινός κόμβος σε μόνιμος, διότι έχει το ελάχιστο μήκος διαδρομής (u_4 = 40).

Επανάληψη 3. Οι κόμβοι 2 και 5 προσεγγίζονται από τον κόμβο 4 και η λίστα με τους μόνιμους και τους προσωρινούς κόμβους γίνεται :

Κόμβος	Ετικέτα	Κατάσταση
1	**[0,-]**	Μόνιμος
2	[40 + 15,4] = [55,4]	Προσωρινός
3	**[30,1]**	Μόνιμος
4	**[40,3]**	**Μόνιμος**
5	[90,3] ή [40 + 50 , 4] = [90,4]	Προσωρινός

Η ετικέτα του κόμβου 2, που ήταν [100,1] στην δεύτερη επανάληψη, άλλαξε σε [55,4], στην τρίτη επανάληψη, και μας δείχνει ότι υπάρχει συντομότερη διαδρομή μέσω του κόμβου 4. Ακόμα βλέπουμε ότι ο κόμβος 5 έχει δύο εναλλακτικές ετικέτες με το ίδιο μήκος διαδρομής u_5 = 90.

Στην τρίτη επανάληψη ο κόμβος 2 γίνεται μόνιμος.

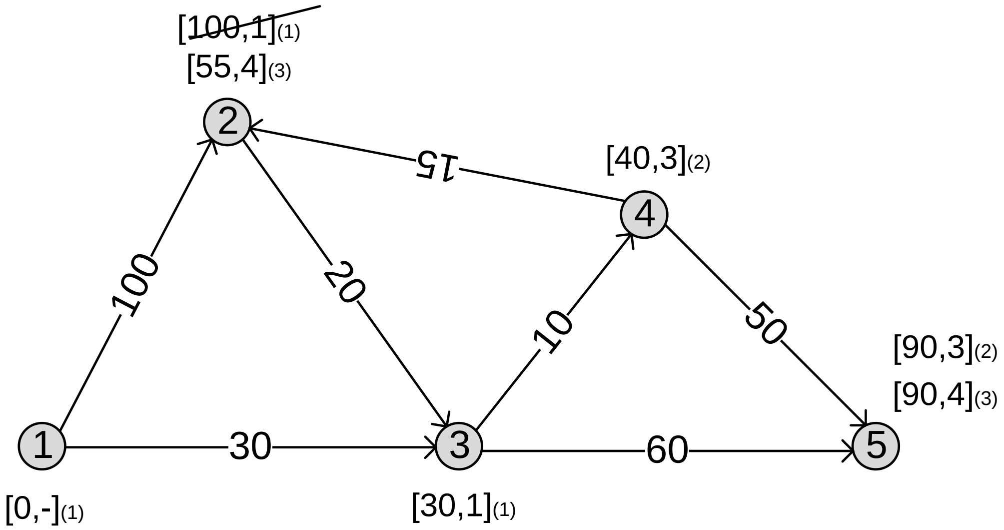
Επανάληψη 4. Μόνο ο κόμβος 3 μπορεί να προσεγγιστεί από τον κόμβο 2, όμως ο κόμβος 3 έχει ήδη χαρακτηριστεί μόνιμος. Έτσι η λίστα με τους μόνιμους και τους προσωρινούς κόμβους παραμένει ίδια με την $3^η$ επανάληψη εκτός από την ετικέτα του κόμβου 2 που τώρα χαρακτηρίζεται ως μόνιμος. Έτσι έχουμε τον κόμβο 5 να είναι ο μόνος προσωρινός κόμβος. Επειδή ο κόμβος 5 δεν οδηγεί σε κανέναν άλλο κόμβο τον μετατρέπουμε σε μόνιμο και έτσι τελειώνει η διαδικασία.

Ο υπολογισμός του αλγορίθμου μπορεί να γίνει ευκολότερα σύμφωνα με το δίκτυο του σχήματος 24.

Η συντομότερη διαδρομή μεταξύ του κόμβου1 και των υπολοίπων κόμβων του δικτύου υπολογίζεται ξεκινώντας από τον επιθυμητό κόμβο σε συνδυασμό με διάφορες υπαναχωρήσεις μέσω των άλλων κόμβων και χρησιμοποιώντας τις διάφορες πληροφορίες που μας δίνονται από τις ετικέτες των μόνιμων κόμβων. Για παράδειγμα, η ακολουθία μας δίνει τη συντομότερη διαδρομή από τον κόμβο 1 στον κόμβο 2 :

(2) → [55,4] → (4) → [40,3] → (3) → [30,1] → (1)

Έτσι η διαδρομή είναι 1 → 3 → 4 → 2 με συνολικό μήκος 55 μίλια.



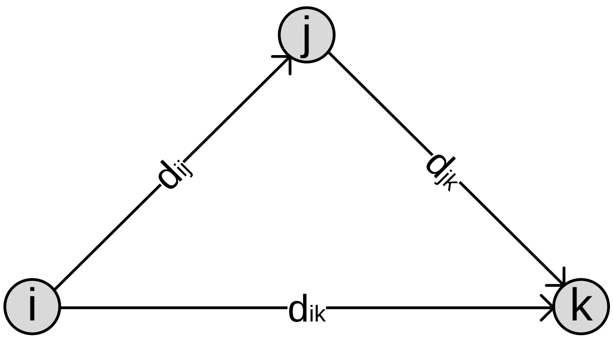
Σχήμα 24

Σχόλιο : ο αριθμός που βρίσκεται μέσα σε παρένθεση ( ) δίπλα από την ετικέτα κάθε κόμβου συμβολίζει την επανάληψη στην οποία τοποθετήθηκε η ετικέτα.

2.2. **Ο αλγόριθμος Floyd :**

Ο αλγόριθμος Floyd είναι πιο γενικός από τον Dijkstra γιατί υπολογίζει την συντομότερη διαδρομή μεταξύ δύο οποιοδήποτε κόμβων στο δίκτυο. Ο αλγόριθμος αντιστοιχεί ένα δίκτυο n κόμβων σε ένα τετραγωνικό πίνακα με n γραμμές και n στήλες. Η καταχώρηση (i,j) στον πίνακα μας δίνει την απόσταση από τον κόμβο i στον κόμβο j, που είναι πεπερασμένο όταν ο κόμβος i προσεγγίζει τον κόμβο j, αλλιώς έχουμε άπειρο (∞).

Σχήμα 25



Η ιδέα του αλγορίθμου Floyd είναι απλή. Δίνονται τρείς κόμβοι i, j και k στο σχήμα 25 και οι αποστάσεις μεταξύ τους δίνονται στις τρείς ακμές. Είναι συντομότερο να προσεγγίσεις τον κόμβο k από τον i μέσω του j εάν :

$$d_{ij} + d_{jk} < d_{ik}$$

Σε αυτή τη περίπτωση είναι προτιμότερο να αντικαταστήσουμε την άμεση διαδρομή i→k με την έμμεση διαδρομή i→j→k. Αυτή η τριπλή πράξη ανταλλαγής τριπλή λειτουργία (triple operation) και εφαρμόζεται συστηματικά στο δίκτυο χρησιμοποιώντας τα παρακάτω βήματα :

Βήμα 0. Καθορίζουμε τον πίνακα τον αποστάσεων D_0 και τον πίνακα κόμβων S_0 όπως παρακάτω. Τα διαγώνια στοιχεία χαρακτηρίζονται με (-) για να δείξουμε ότι είναι μπλοκαρισμένα. Θέτουμε k =1.

D_0 =

	1	2	…	j	…	N
1	–	d_{12}	…	d_{1j}	…	d_{1n}
2	d_{21}	–	…	d_{2j}	…	d_{2n}
⁝	⁝	⁝	⁝	⁝	⁝	⁝
I	d_{i1}	d_{i2}	…	d_{ij}	…	d_{in}
⁝	⁝	⁝	⁝	⁝	⁝	⁝
N	d_{n1}	d_{n2}	…	d_{nj}	…	–

S_0 =

	1	2	…	j	…	N
1	–	2	…	j	…	N
2	1	–	…	j	…	N
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
I	1	2	…	j	…	N
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
N	1	2	…	j	…	–

Γενικό Βήμα k. Καθορίζουμε την k γραμμή και την k στήλη ως πιλότο (οδηγό) γραμμή και πιλότο στήλη. Εφαρμόζουμε την τριπλή λειτουργία σε κάθε στοιχείο d_{ij} του πίνακα D_{k-1} για όλα τα i και j. Στην περίπτωση που η σχέση:

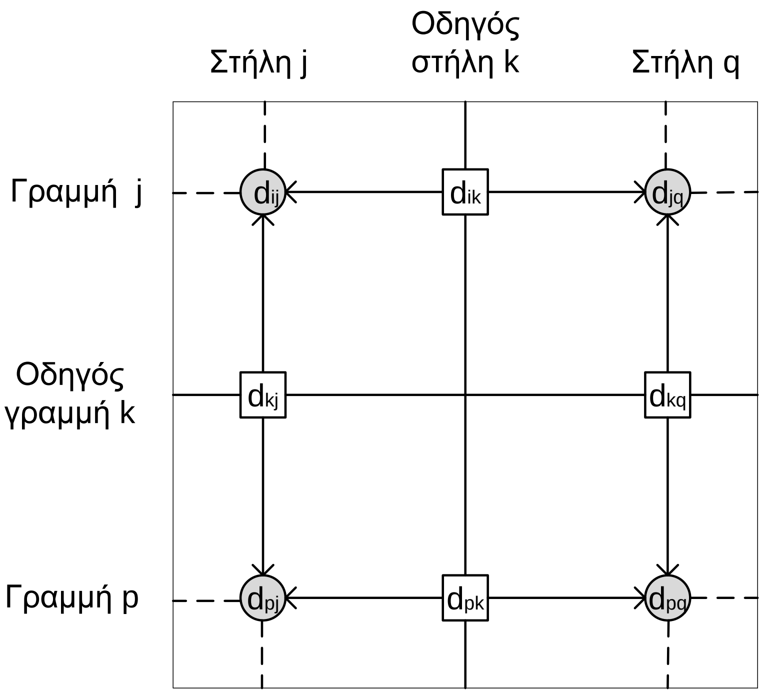
$$d_{ij} + d_{jk} < d_{ik} , (i \neq k , j \neq k , \text{και } i \neq j)$$

ικανοποιείται, εφαρμόζουμε τις ακόλουθες αλλαγές.

(a) Δημιουργούμε τον D_k αντικαθιστώντας το d_{ij} στον D_{k-1} με $d_{ik} + d_{kj}$.

(b) Δημιουργούμε τον S_k αντικαθιστώντας το s_{ij} στον S_{k-1} με k.

Ορίζουμε k = k + 1, και επαναλαμβάνουμε το βήμα k.



Σχήμα 26

Το βήμα k του αλγορίθμου μπορεί να εξηγηθεί αναπαριστώντας τον πίνακα D_{k-1} όπως φαίνεται στο σχήμα 26. Εδώ βλέπουμε την γραμμή k και την στήλη k να ορίζουν την τρέχουσα οδηγό γραμμή και στήλη. Η γραμμή i αντιπροσωπεύει τις γραμμές 1, 2, …, k-1, και η γραμμή p αντιπροσωπεύει τις γραμμές k+1, k+2, … , n. Όμοια η στήλη j αναπαριστά τις στήλες 1, 2, …, k-1 και η στήλη q αναπαριστά τις στήλες k+1, k+2, … n. Με την τριπλή πράξη, εάν το άθροισμα των στοιχείων της οδηγού γραμμής και της οδηγού στήλης (στο σχήμα εμφανίζονται σε τετράγωνα) είναι μικρότερο από το συνδεδεμένο στοιχείο της τομής τους (στο σχήμα εμφανίζεται σε κύκλο), τότε αντικαθιστούμε την απόσταση της τομής με το άθροισμα της οδηγού απόστασης.

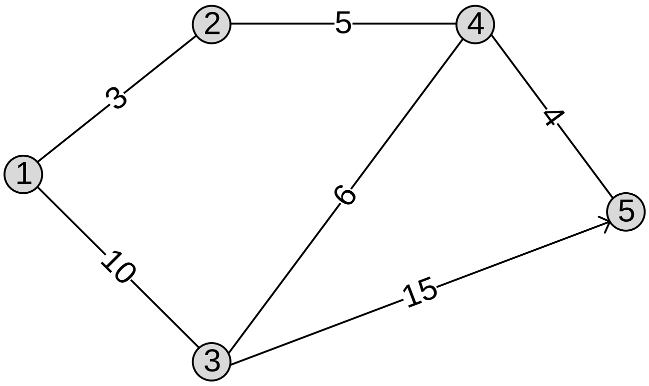
Μετά από n βήματα μπορούμε να ορίσουμε την συντομότερη απόσταση μεταξύ των κόμβων i και j μέσω των πινάκων D_n και S_n γνωρίζοντας ότι :

- Από τον πίνακα D_n το στοιχείο d_{ij} μας δίνει την ελάχιστη απόσταση μεταξύ των κόμβων i και j.

- Από τον πίνακα S_n ορίζουμε τους ενδιάμεσους κόμβους $k = s_{ij}$ οι οποίοι μας δίνουν την διαδρομή $i \rightarrow k \rightarrow j$. Αν $s_{ik} = k$ και $s_{kj} = j$ τότε σταματάμε, όλοι οι ενδιάμεσοι κόμβοι της διαδρομής έχουν βρεθεί. Αλλιώς επαναλαμβάνουμε την διαδικασία μεταξύ των κόμβων I και k, και μεταξύ των κόμβων k και j.

2.2.1. Παράδειγμα :

Βρείτε τις ελάχιστες διαδρομές μεταξύ κάθε δύο κόμβων στο δίκτυο του σχήματος 27. Η απόσταση (σε μίλια) δίνεται στις ακμές. Η ακμή (3,5) είναι προσανατολισμένη έτσι δεν επιτρέπεται ι κυκλοφορία από τον κόμβο στον κόμβο 3. Όλες οι υπόλοιπες ακμές επιτρέπουν την κυκλοφορία και προς τις δύο κατευθύνσεις.



Σχήμα 27

Επανάληψη 0. Οι πίνακες D_0 και S_0 δίνουν την αρχική αναπαράσταση του δικτύου. Ο πίνακας D_0 είναι συμμετρικός εκτός από το ότι το $d_{53} = \infty$ επειδή δεν επιτρέπεται κυκλοφορία (η ροή) από τον κόμβο 5 στον κόμβο 3.

D_0

	1	2	3	4	5
1	–	3	10	∞	∞
2	3	–	∞	5	∞
3	10	∞	–	6	15
4	∞	5	6	–	4
5	∞	∞	∞	4	–

S_0

	1	2	3	4	5
1	–	2	3	4	5
2	1	–	3	4	5
3	1	2	–	4	5
4	1	2	3	–	5
5	1	2	3	4	–

Επανάληψη 1. Θέτουμε k = 1. Η οδηγός γραμμή και στήλη διακρίνονται από την ελαφρά σκιασμένη πρώτη γραμμή και πρώτη στήλη του πίνακα D_0. Τα εντονότερα κελία, d_{23} και d_{32}, είναι τα μόνα που μπορούν να βελτιωθούν από την τριπλή λειτουργία. Έτσι οι πίνακες D_1 και S_1 παράγονται από τους D_0 και S_0 με τον ακόλουθο τρόπο.

1. Αντικαθιστούμε το d_{21} με $d_{21} + d_{13} = 3 + 10 = 13$ και ορίζουμε $s_{23} = 1$.
2. Αντικαθιστούμε το d_{32} με $d_{31} + d_{12} = 10 + 3 = 13$ και ορίζουμε $s_{32} = 1$.

Αυτές οι αλλαγές εμφανίζονται με έντονα γράμματα στους πίνακες D_1 και S_1.

D_1

	1	2	3	4	5
1	–	3	10	∞	∞
2	3	–	**13**	5	∞
3	10	**13**	–	6	15
4	∞	5	6	–	4
5	∞	∞	∞	4	–

S_1

	1	2	3	4	5
1	–	2	3	4	5
2	1	–	**1**	4	5
3	1	**1**	–	4	5
4	1	2	3	–	5
5	1	2	3	4	–

Επανάληψη 2. Θέτουμε k = 2, όπως φαίνεται από την σκίαση στον πίνακα D_1 η τριπλή λειτουργία εφαρμόζεται στα εντονότερα κελία στους πίνακες D_1 και S_1. Οι τελικές αλλαγές εμφανίζονται με έντονα γράμματα στους πίνακες D_2 και S_2.

D_2

	1	2	3	4	5
1	–	3	10	**8**	∞
2	3	–	13	5	∞
3	10	13	–	6	15
4	**8**	5	6	–	4
5	∞	∞	∞	4	–

S_2

	1	2	3	4	5
1	–	2	3	**2**	5
2	1	–	1	4	5
3	1	1	–	4	5
4	**2**	2	3	–	5
5	1	2	3	4	–

Επανάληψη 3. Θέτουμε k = 3, όπως φαίνεται από την σκιασμένη γραμμή και στήλη στον πίνακα D_2. Οι καινούριοι πίνακες είναι οι D_3 και S_3.

D_3

	1	2	3	4	5
1	–	3	10	8	**25**
2	3	–	13	5	**28**
3	10	13	–	6	15
4	8	5	6	–	4
5	∞	∞	∞	4	–

S_3

	1	2	3	4	5
1	–	2	3	2	**3**
2	1	–	1	4	**3**
3	1	1	–	4	5
4	2	2	3	–	5
5	1	2	3	4	–

Επανάληψη 4. Θέτουμε k = 4, όπως φαίνεται από την σκιασμένη γραμμή και στήλη στον πίνακα D_3. Οι καινούριοι πίνακες είναι οι D_4 και S_4.

D_4

	1	2	3	4	5
1	–	3	10	8	**12**
2	3	–	**11**	5	**9**
3	10	**11**	–	6	**10**
4	8	5	6	–	4
5	**12**	**9**	**10**	4	–

S_4

	1	2	3	4	5
1	–	2	3	2	**4**
2	1	–	**4**	4	**4**
3	1	**4**	–	4	**4**
4	2	2	3	–	5
5	**4**	**4**	**4**	4	–

Επανάληψη 5. Θέτουμε k = 5, όπως φαίνεται από την σκιασμένη γραμμή και στήλη στον πίνακα D_4. Καμία επιπλέον δεν είναι δυνατή σε αυτή την επανάληψη. Επομένως οι πίνακες D_5 και S_5 παραμένουν οι ίδιοι με τους πίνακες D_4 και S_4.

Οι τελικοί πίνακες D_5 και S_5 περιέχουν όλες τις πληροφορίες που χρειαζόμαστε για να υπολογίσουμε την συντομότερη διαδρομή μεταξύ δύο οποιονδήποτε κόμβων στο δίκτυο. Για παράδειγμα, θα προσδιορίσουμε την συντομότερη διαδρομή μεταξύ του κόμβου 1 και του κόμβου 5.

Η ελάχιστη απόσταση από τον κόμβο 1 στον κόμβο 5 δίνεται από το στοιχείο d_{15} = 12 μίλια. Για να υπολογίσουμε την ελάχιστη διαδρομή, που μας δίνει αυτή την ελάχιστη απόσταση, υπενθυμίζουμε ότι ένα ευθύγραμμο τμήμα (i,j) αναπαριστά μία άμεση σύνδεση μόνο όταν s_{ij} = j. Αλλιώς οι κόμβοι i και j συνδέονται μέσο ενός τουλάχιστον ενδιάμεσου κόμβου. Επειδή s_{15} = 4, η διαδρομή αρχικά δίνεται ως : 1 → 4 → 5. Τώρα όμως επειδή $s_{14} = 2 \neq 4$, το ευθύγραμμο τμήμα (1,4) δεν αποτελεί μία άμεση σύνδεση δύο κόμβων, και το 1 → 4 πρέπει να αντικατασταθεί από το 1 → 2 → 4. Συνεπώς η διαδρομή μας από : 1 → 4 → 5 γίνεται : 1 → 2 → 4 → 5. Συνεχίζοντας επειδή s_{12} = 2, s_{24} = 4 και s_{45} = 5, η διαδρομή 1 → 2 → 4 → 5 είναι η τελική και τελειώνει η διαδικασία.

2.3. Εύρεση της ελάχιστης διαδρομής με την χρήση γραμμικού προγραμματισμού.

Θα αναφέρουμε δύο ειδών αναπτύγματα γραμμικού προγραμματισμού για το πρόβλημα της εύρεσης της ελάχιστης διαδρομής. Οι διατυπώσεις αυτές είναι γενικές με την έννοια ότι μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να βρούμε την ελάχιστη διαδρομή μεταξύ δύο οποιοδήποτε κόμβων στο δίκτυο.

Υποθέτουμε ότι το δίκτυο μας περιέχει n κόμβους και στόχος μας είναι να υπολογίσουμε την συντομότερη διαδρομή μεταξύ δύο οποιοδήποτε κόμβων s και t στο δίκτυο.

Formulation 1: αυτή η διατύπωση προϋποθέτει ότι μία εξωτερική μονάδα ροής εισέρχεται στο δίκτυο στον κόμβο s και εξέρχεται από τον κόμβο t, όπου s και t είναι οι κόμβοι στόχοι μεταξύ των οποίων επιδιώκουμε να ορίσουμε την ελάχιστη διαδρομή.

Ορίζουμε :

x_{ij} = ποσότητα ροής στην ακμή (i,j), για όλα τα εφικτά i και j.

c_{ij} = μήκος ακμής (i,j), για όλα τα εφικτά i και j.

Επειδή μόνο μία μονάδα ροής μπορεί να βρεθεί σε οποιαδήποτε ακμή οποιαδήποτε στιγμή, η ποσότητα x_{ij} πρέπει να παίρνει μόνο δυαδικές τιμές (0 ή 1). Έτσι η αντικειμενική συνάρτηση του γραμμικού μοντέλου γίνεται :

$$\text{Minimize z} = \sum_{\substack{\text{όλες οι} \\ \text{καθορισμένες} \\ \text{ακμές } (i,j)}} c_{ij} x_{ij}$$

Υπάρχει ένας περιορισμός ο οποίος αντιπροσωπεύει την ροή σε κάθε κόμβο, και ισχύει για κάθε κόμβο j.

Συνολική εισερχόμενη ροή = Συνολική εξερχόμενη ροή

Formulation 2: Η δεύτερη διατύπωση είναι στην ουσία το δυϊκό του προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού της formulation 1. Επειδή ο αριθμός των περιορισμών της formulation 1 είναι ίδιος με τον αριθμό των κόμβων, το δυϊκό πρόβλημα θα έχει τόσες μεταβλητές όσες και ο αριθμός των κόμβων του δικτύου. Ακόμα όλες οι δυικές μεταβλητές πρέπει να είναι απεριόριστες επειδή όλοι οι περιορισμοί στην formulation 1 είναι εξισώσεις.

Θέτουμε :

y_j = δυικός περιορισμός που σχετίζεται με τον κόμβο j.

Δοθέντος s και t ως αρχικό και τερματικό κόμβο του δικτύου, το δυικό πρόβλημα ορίζεται ως :

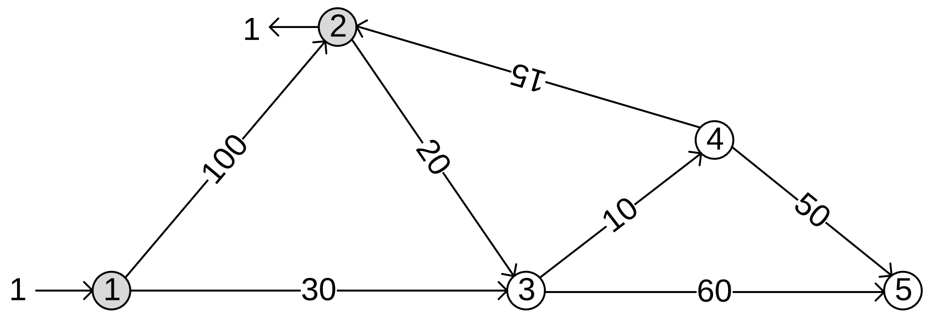
$$\text{Maximize z} = y_t - y_s$$

υπό τους περιορισμούς :

$$y_j - y_i \leq c_{ij} \text{ , για όλα τα εφικτά i και j}$$

Παράδειγμα :

Υπολογίζουμε τη συντομότερη διαδρομή για το δίκτυο του σχήματος 28. Υποθέτουμε ότι θέλουμε να ορίσουμε την συντομότερη διαδρομή από τον κόμβο 1 στον κόμβο 2, συνεπώς έχουμε s = 1 και t = 2. Στο σχήμα 28 φαίνεται πως εισέρχεται η ποσότητα της ροής στον κόμβο 1 και εξέρχεται από τον κόμβο 2.



Σχήμα 28

Εισαγωγή μονάδων ροής για την εύρεση της ελάχιστης διαδρομής.

Χρησιμοποιώντας την formulation 1, το αντίστοιχο μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού είναι :

	x_{12}	x_{13}	x_{23}	x_{34}	x_{35}	x_{42}	x_{45}	
Minimize z =	100	30	20	10	60	15	50	
Κόμβος 1	-1	-1						=-1
Κόμβος 2	1		-1			1		=1
Κόμβος 3		1	1	-1	-1			=0
Κόμβος 4				1		-1	-1	=0
Κόμβος 5					1		1	=0

Οι περιορισμοί αντιπροσωπεύουν την διατήρηση της ροής σε κάθε κόμβο. Για παράδειγμα στον κόμβο 2, εισερχόμενη ροή = εξερχόμενη ροή (input flow = output flow) συνεπώς έχουμε $x_{12} + x_{42} = 1 + x_{23}$. Παρατηρούμε ότι ένας από τους περιορισμούς είναι περιττός, προσθέτοντας τους τελευταίους τέσσερις περιορισμούς ταυτόχρονα έχουμε $x_{12} + x_{13} = 1$ που είναι ο περιορισμός 1.

Η βέλτιστη λύση είναι :

$z = 55$, $x_{13} = 1$, $x_{34} = 1$, $x_{42} = 1$

σύμφωνα με αυτή τη βέλτιστη λύση η συντομότερη διαδρομή από τον κόμβο 1 στον κόμβο 2 είναι η $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2$ με συνολική απόσταση $z = 55$ μίλια.

Χρησιμοποιώντας την formulation 2, το αντίστοιχο δυικό μοντέλο του παραπάνω προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού είναι :

Minimize $z = y_2 – y_1$

υπό τους περιορισμούς :

$y_2 – y_1 \leq 100$ (διαδρομή 1-2)

$y_3 – y_1 \leq 30$ (διαδρομή 1-3)

$y_3 – y_2 \leq 20$ (διαδρομή 2-3)

$y_4 – y_3 \leq 10$ (διαδρομή 3-4)

$y_5 – y_3 \leq 60$ (διαδρομή 3-5)

$y_2 – y_4 \leq 15$ (διαδρομή 2-4)

$y_5 – y_4 \leq 50$ (διαδρομή 4-5)

$y_1, y_2, \ldots, y_5$ απεριόριστα.

Παρόλο που το δυικό πρόβλημα που δόθηκε παραπάνω είναι ένας απλός μαθηματικός ορισμός που προέρχεται από το πρωτεύον πρόβλημα, μπορούμε να ερμηνεύσουμε το πρόβλημα αυτό λογικά.

Ορίζουμε :

y_i = η απόσταση από τον κόμβο i

Με αυτό τον ορισμό, η ελάχιστη απόσταση από την αφετηρία, κόμβος 1 στον τερματικό κόμβο 2 προσδιορίζεται μεγιστοποιώντας την διαφορά $y_2 – y_1$. Ο αντίστοιχος περιορισμός για τον διαδρομή (i,j) αναφέρει ότι η απόσταση από τον κόμβο i στον κόμβο j δεν μπορεί να υπερβαίνει το απευθείας μήκος της απόστασης αυτής. Μπορεί να είναι μικρότερο αν ο κόμβος j προσεγγίζεται από τον κόμβο i μέσω άλλων κόμβων που αποτελούν συντομότερο μονοπάτι. Για παράδειγμα, η απόσταση από τον κόμβο 1 στον κόμβο 2 είναι το πολύ 100 μονάδες. Με τον ορισμό του y_i ως η απόσταση από τον κόμβο i, μπορούμε να υποθέσουμε ότι όλες οι μεταβλητές είναι μη αρνητικές (εκτός εάν είναι απεριόριστες). Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι $y_1 = 0$ ως η απόσταση από τον κόμβο 1.

Βασιζόμενοι στην παραπάνω αναφορά και υποθέτοντας ότι όλες οι μεταβλητές είναι μη αρνητικές, η βέλτιστη λύση είναι η εξής :

$z = 55$, $y_1 = 0$, $y_2 = 55$, $y_3 = 30$, $y_4 = 40$, $y_5 = 0$

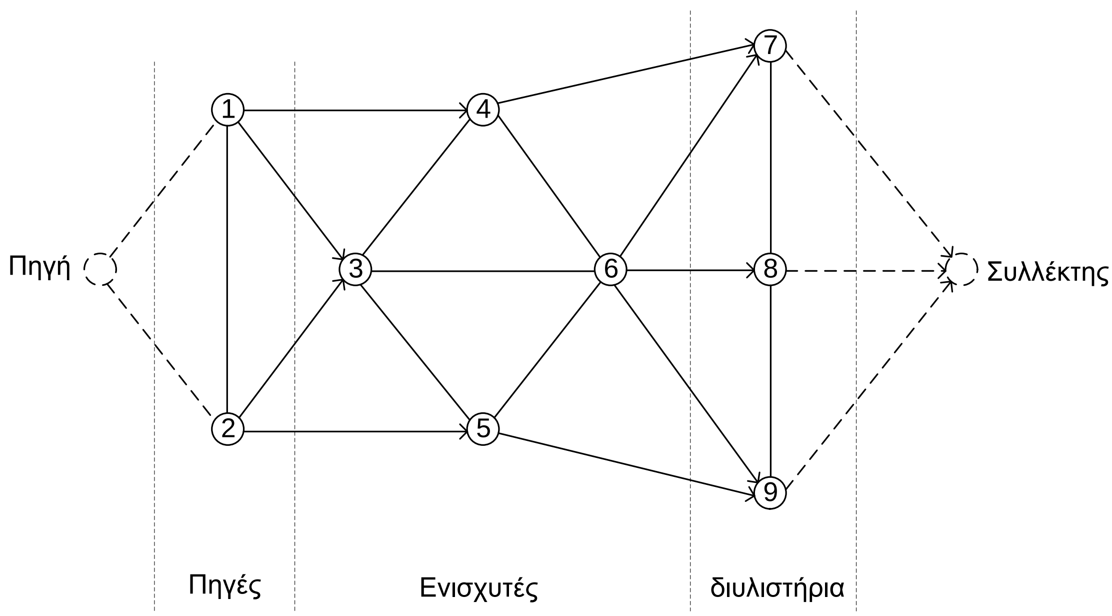
Η ποσότητα $z = 55$ μας δίνει την ελάχιστη απόσταση από τον κόμβο 1 στον κόμβο 2, που είναι επίσης ίσο με $y_2 – y_1 = 55 – 0 = 55$.

Ο καθορισμός της διαδρομής που αντιστοιχεί στην λύση αυτή είναι κάπως περίπλοκος. Παρατηρούμε ότι η λύση που ικανοποιεί τους περιορισμούς των διαδρομών 1-3, 3-4 και 4-2 επειδή έχουν χρόνο αδράνειας μηδέν που σημαίνει ότι $y_3 – y_1 = 30$, $y_4 – y_3 = 10$ και $y_2 – y_4 = 15$. Σύμφωνα με αυτό το αποτέλεσμα η συντομότερη διαδρομή είναι 1→3→4→2.

3. Το Πρόβλημα Της Μέγιστης Ροής (Maximal Flow Model)

Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα δίκτυο αγωγών το οποίο μεταφέρει αργό πετρέλαιο από τις πετρελαιοπηγές στα διυλιστήρια. Ενδιάμεσοι ενισχυτές και αντλιοστάσια έχουν τοποθετηθεί σε κατάλληλα σημεία ώστε να βοηθούν το αργό πετρέλαιο να μεταφέρεται μέσα στο δίκτυο αγωγών. Κάθε τμήμα του σωλήνα έχει πεπερασμένη μέγιστη ποσότητα ροής αργού πετρελαίου, επίσης κάθε τμήμα του σωλήνα μπορεί να έχει είτε μονόδρομη είτε αμφίδρομή ροής ανάλογα με τον σχεδιασμό του. Κάθε μονόδρομο τμήμα του αγωγού έχει κάποια περιορισμένη ποσότητα ροής προς τη μία κατεύθυνση και μηδενική προς την άλλη κατεύθυνση. Στο σχήμα 29 παρουσιάζεται ένα τυπικό δίκτυο αγωγών. Ένα σημαντικό ερώτημα είναι πως μπορούμε να καθορίσουμε την μέγιστη ποσότητα ροής στο δίκτυο μεταξύ των πετρελαιοπηγών και των διυλιστηρίων.

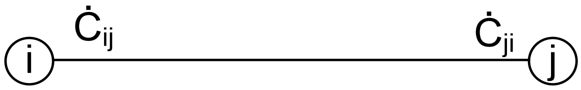
Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα απαιτεί την μετατροπή του δικτύου σε ένα δίκτυο το οποίο έχει μόνο μία πηγή και έναν συλλέκτη. Αυτή η μετατροπή μπορεί να επιτευχθεί χρησιμοποιώντας μονόδρομες ακμές απεριόριστης ποσότητας ροής, όπως οι διακεκομμένες ακμές που φαίνονται στο σχήμα 29.



Σχήμα 29

Δίκτυο ορισμένης χωρητικότητας που συνδέει πηγές με διυλιστήρια μέσω ενισχυτών.

Δοθείσας ακμής (i,j) με i < j χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό ($\dot{C}_{ij}$,$\dot{C}_{ji}$) για να αναφέρουμε τις ποσότητες της ροής προς τις δύο κατευθύνσεις i→j και j→i αντίστοιχα. Αναλυτικότερα και για την αποφυγή συγχύσεων τοποθετούμε $\dot{C}_{ij}$ πάνω στην ακμή δίπλα στον κόμβο i και $\dot{C}_{ji}$ δίπλα στον κόμβο j, όπως φαίνεται στο σχήμα 30.



Σχήμα 30

Στην ακμή ρέουν $\dot{C}_{ij}$ μονάδες από i→j και $\dot{C}_{ji}$ από j→i.

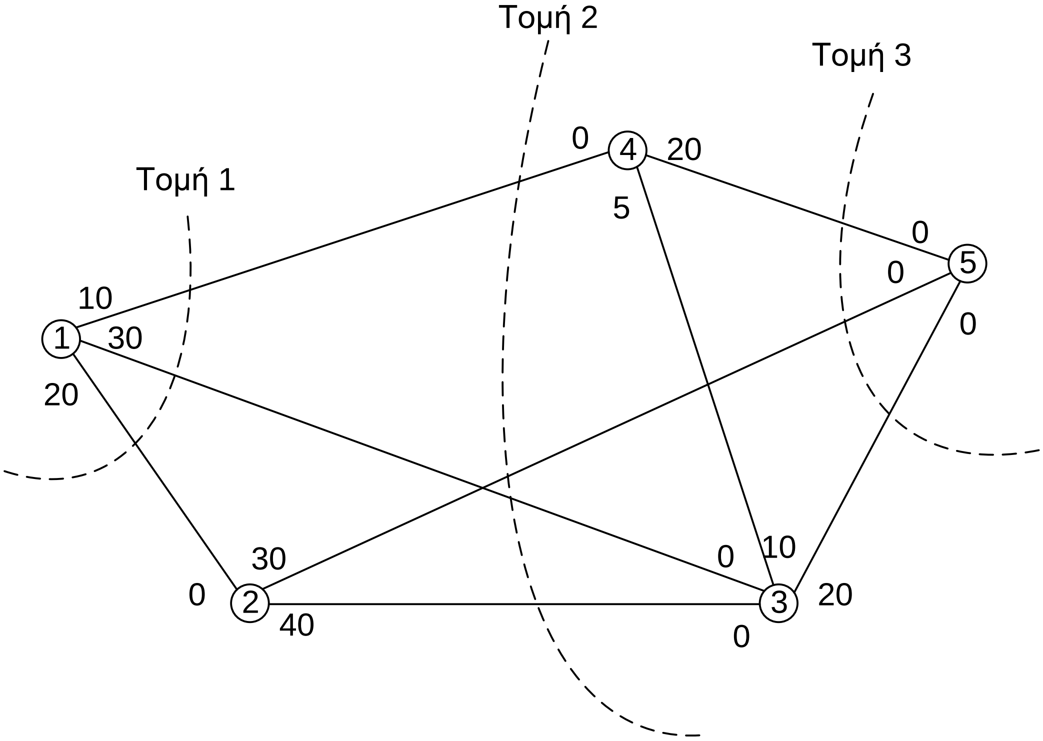
3.1. Είδη τομών

(Καταμέτρηση, Απαρίθμηση)

Μια τομή ορίζει ένα σύνολο τόξων τα όταν αποκοπούν από το δίκτυο θα προκαλέσουν πλήρη διακοπή της ροής μεταξύ της πηγής και του συλλέκτη. Η συνολική δυναμικότητα ροής της τομής (cut capacity) είναι ίση με το άθροισμα των επιμέρους δυναμικοτήτων ροής των αντίστοιχων ακμών. Μεταξύ όλων των πιθανών τομών στο δίκτυο η τομή η οποία έχει την μικρότερη δυναμικότητα ροής αποδίδει στο δίκτυο την μεγαλύτερη συνολική ροή.

3.1.1. Παράδειγμα

Υποθέτουμε ότι έχουμε το δίκτυο το σχήματος 31. Οι αμφίδρομες δυναμικότητες ροής εμφανίζονται πάνω στις αντίστοιχες ακμές χρησιμοποιώντας των συμβολισμό που αναφέραμε στο σχήμα 30. Για παράδειγμα, στην ακμή (3,4) η μέγιστη ποσότητα ροής είναι 10 μονάδες από τον κόμβο 3 προς τον κόμβο 4 και 5 μονάδες από τον κόμβο 4 προς τον κόμβο 3.



Σχήμα 31

Παράδειγμα τομών σε ένα δίκτυο ροής.

Το σχήμα 31 απεικονίζει τρείς τομές των οποίων οι δυναμικότητες υπολογίζονται στον παρακάτω πίνακα.

Τομή	Αντίστοιχες τομές	Δυναμικότητα
1	(1,2), (1,3), (1,4)	20 + 30 + 10 = 60
2	(1,3), (1,4), (2,3), (2,5)	30 + 10 + 40 + 30 = 110
3	(2,5), (3,5), (4,5)	30 + 20 + 20 = 70

Δεν μπορούμε να υπολογίσουμε ποια είναι η μέγιστη ροή του δικτύου εάν δεν εξετάσουμε όλες τις πιθανές τομές. Η μοναδική πληροφορία που μπορούμε να αντλήσουμε από τον υπολογισμό των τριών αυτών τομών είναι ότι η μέγιστη ροή του δικτύου δεν μπορεί να υπερβαίνει τις 60 μονάδες.

3.2. Αλγόριθμός εύρεσης της μέγιστης ροής (maximal flow algorithm)

Στα προβλήματα της συντομότερης διαδρομής και του ελαχίστου ζευγνύοντος δέντρου μας ενδιέφερε κυρίως η βελτιστοποίηση της απόστασης (γενικότερα ενός μέτρου κόστους), η οποία προέκυπτε από το σύνολο των ακμών που ενώνουν δύο ή περισσότερους ή ακόμα και όλους τους κόμβους του δικτύου ταυτόχρονα. Σε αυτά τα προβλήματα όμως δεν εξετάσαμε το πολύ ενδιαφέρον ερώτημα της περιορισμένης δυναμικότητας ροής των ακμών. Δηλαδή θεωρούσαμε ότι η δυναμικότητα των ακμών του δικτύου, με το οποίου ασχολούμασταν, είναι είτε απεριόριστη είτε μοναδιαία. Σε πολλές περιπτώσεις όμως έχουμε ή κατασκευάζουμε ένα δίκτυο του οποίου οι ακμές περιορίζονται ως προς το πλήθος (ή τον όγκο ή κάποια άλλη μονάδα μέτρησης) των αντικειμένων που μπορούν να περάσουν από αυτές στην μονάδα του χρόνου ή γενικότερα σε ένα ορίζοντα προγραμματισμού. Σε τέτοιου είδους προβλήματα αντικειμενικός μας στόχος είναι να μεγιστοποιηθεί η ροή από έναν κόμβο ο οποίος θεωρείται η αφετηρία (η πηγή), σε έναν άλλο κόμβο τερματισμού (δέκτης) όταν οι ενδιάμεσες ακμές περιορίζουν την συνολική ροή του συστήματος χαρακτηριζόμενες από την δυναμικότητα ροής τους. Τα προβλήματα μεγίστης ροής εμφανίζονται συχνά στη σχεδίαση συστημάτων μεταφοράς και διανομής φυσικού αερίου ή πετρελαίου, σε συστήματα ύδρευσης και άρδευσης, αλλά και σε συστήματα ελέγχου κυκλοφορίας οχημάτων, σε γραμμές παραγωγής κ.α.

3.2.1. Η τεχνική εντοπισμού της μέγιστης ροής

Σκοπός μας είναι να εντοπίσουμε εκείνες τις ακμές που πρέπει να χρησιμοποιήσουμε ώστε να μεγιστοποιήσουμε την ροή από την πηγή στον δέκτη. Συνοπτικά τα βήματα του αλγορίθμου είναι :

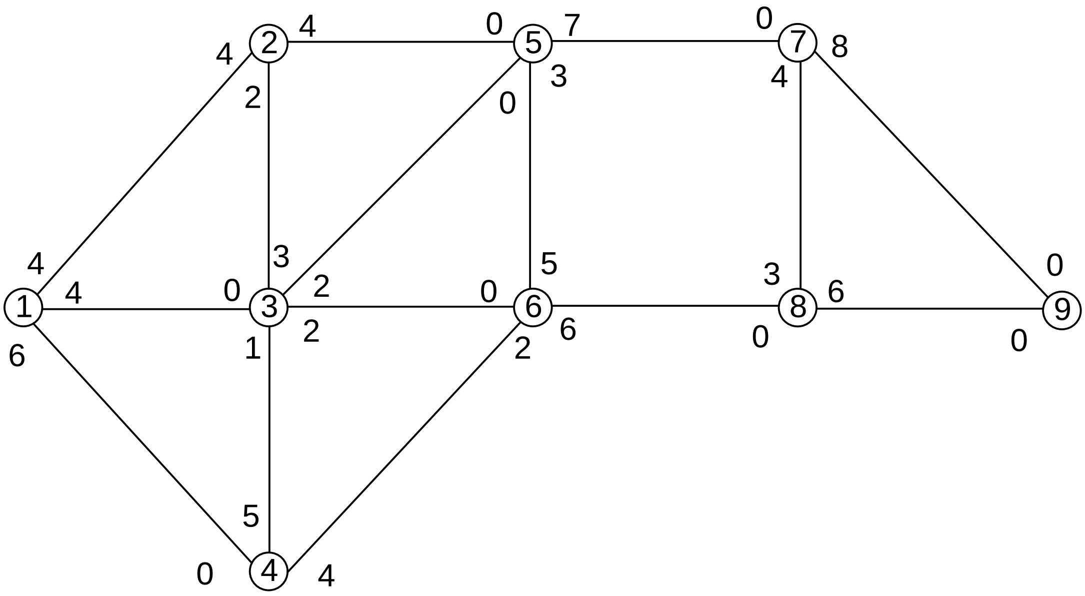
1. Επιλέγουμε αυθαίρετα ένα μονοπάτι από την πηγή προς το δέκτη με θετική (μη μηδενική) δυναμικότητα ροής.
2. Αναπροσαρμόζουμε τις δυναμικότητες ροής των ακμών του μονοπατιού, αφαιρώντας τη δυναμικότητα ροής του από όλες τις δυναμικότητες των ακμών του προς την κατεύθυνση του δέκτη.
3. Αναπροσαρμόζουμε τις δυναμικότητες ροής των ακμών του μονοπατιού, προσθέτοντας τη δυναμικότητα ροής του σε όλες τις δυναμικότητες των ακμών του προς την κατεύθυνση της πηγής.
4. Ελέγχουμε αν υπάρχει μονοπάτι με θετική δυναμικότητα ροής προς το δέκτη. Αν ναι, επαναλαμβάνουμε από το βήμα 1, διαφορετικά έχουμε εντοπίσει την αρίστη λύση.

Ο αλγόριθμος εύρεσης της μέγιστης ροής βασίζεται στην εύρεση μονοπατιών με θετική (μη μηδενική) ροή μεταξύ της πηγής και του δέκτη. Καθένα από αυτά τα μονοπάτια χρησιμοποιούν μέρος ή ακόμα και όλη τη δυναμικότητα των ακμών για την συνολική ροή στο δίκτυο.

Θα παρουσιάσουμε τη μέθοδο επίλυσης του προβλήματος ευρέσεως της μέγιστης ροής με την βοήθεια ενός παραδείγματος

3.2.2. Παράδειγμα :

Ένας μεγαλοκτηματίας αντιμετωπίζει πρόβλημα με της καλλιέργειες του. Έχει εγκαταστήσει ένα σύστημα άρδευσης στα κτήματα του, με το οποίο, μέσω δικτύου γεωτρήσεων, αγωγών και πιεστικών συστημάτων, το νερό που αντλείται από μια βασική γεώτρηση (πηγή, κόμβος 1 Σχήματος 32) διοχετεύεται προς διάφορα σημεία – κόμβους. Έτσι ποτίζονται οι ενδιάμεσες καλλιέργειες και, μέσω των πιεστικών, το νερό που απομένει προωθείται προς ένα σημείο εξόδου (δέκτης – κόμβος 9). Εκεί όσο νερό δεν χρησιμοποιείται, διοχετεύεται στο διπλανό συγκρότημα όπου υπάρχουν μεγάλες καλλιεργούμενες εκτάσεις. Στο Σχήμα 32 βλέπουμε τον καθαρό όγκο νερού που μπορεί να φύγει και να φτάσει από κόμβο σε κόμβο (δηλαδή έχει ήδη αφαιρεθεί η ποσότητα που στην πορεία χρησιμοποιείται για το ενδιάμεσο πότισμα). Είναι πολύ σημαντικό για τον παραγωγό να υπολογίσει τη δυναμικότητα του νερού που μπορεί να διοχετευθεί από τον κόμβο 9 προς τις διπλανές εκτάσεις. Δεδομένης της δυναμικότητας ροής από τη βασική γεώτρηση που θεωρείται η πηγή, το πρόβλημα είναι να βρεθεί η μέγιστη δυνατή ποσότητα ύδατος, η οποία μπορεί να διοχετευθεί προς τις γειτονικές καλλιέργειες, που είναι ο δέκτης. Ταυτοχρόνως θα πρέπει να εντοπίσουμε εκείνες τις σωληνώσεις (ακμές) που πρέπει να χρησιμοποιηθούν προκειμένου να επιτευχθεί αυτή η μέγιστη ροή νερού.



Σχήμα 32

Το διάγραμμα άρδευσης του κτήματος

Αν προσέξουμε την δομή αυτού του δικτύου παρατηρούμε ότι όλες οι ακμές έχουν έναν αριθμό σε κάθε άκρο τους. Ο αριθμός αυτός εκφράζει το πλήθος, τον όγκο ή γενικότερα τη μονάδα μέτρησης της ροής του υλικού από τον κόμβο του συγκεκριμένου άκρου προς τον κόμβο που βρίσκεται στο άλλο άκρο. Έτσι για παράδειγμα βλέπουμε ότι από τον κόμβο 1 μπορούν να φύγουν τέσσερις μονάδες υλικού (εδώ θα μπορούσαν να είναι τόνοι νερού) στην μονάδα του χρόνου και να κινηθούν προς τον κόμβο 2. Από τον κόμβο 2 μπορούν να ρέουν επίσης τέσσερις μονάδες προς τον κόμβο 1 (και αυτό γιατί η ακμή 1-2 έχει τον αριθμό 4 και στα δύο άκρα της). Στην ακμή 4-3 παρατηρούμε ότι πέντε μονάδες μπορούν να κινηθούν προς τον κόμβο 3 προερχόμενες από τον κόμβο 4, ενώ μία μονάδα μπορεί να ρέει προς την αντίθετη κατεύθυνση. Τέλους, παρατηρούμε ότι σε πολλές ακμές υπάρχουν μηδενικές δυναμικότητες ροής προς κάποιες κατευθύνσεις, όπως για παράδειγμα από τον κόμβο 7 προς τον κόμβο 5 ή ακόμη από τον τελικό κόμβο 9 προς τα πίσω. Οι ακμές του δικτύου του σχήματος 32 είναι προσανατολισμένες. Σημειώνουμε ότι η δυναμικότητα ροής ενός μονοπατιού προκύπτει από την μέγιστη ροή που μπορεί να περάσει από όλες τις ακμές του μονοπατιού αυτού, δηλαδή προκύπτει από την ακμή με τη μικρότερη δυναμικότητα ροής μεταξύ όσων το απαρτίζουν. Στο πρόβλημα αυτό ενδιαφερόμαστε να εντοπίσουμε μονοπάτια που έχουν θετική (μη μηδενική) δυναμικότητα ροής από τον πηγή προς τον δέκτη και θα εφαρμόσουμε την τεχνική εντοπισμού που αναφέραμε προηγουμένως.

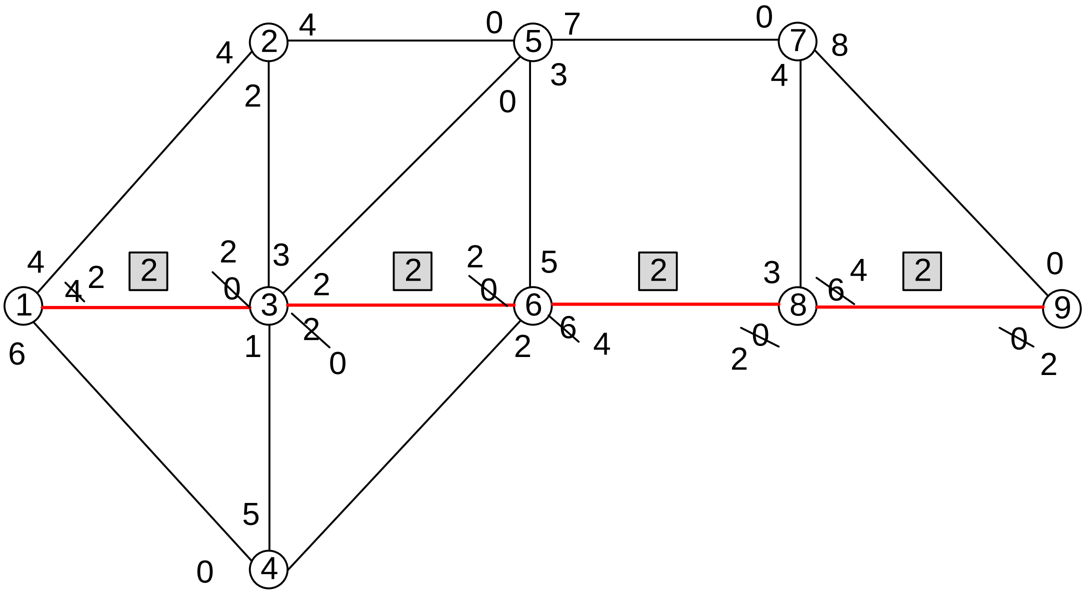
Στο πρώτο βήμα της μεθόδου επιλέγουμε αυθαίρετα ένα μονοπάτι από την πηγή μέχρι τον δέκτη, που έχει θετική δυναμικότητα ροής. Δεν υπάρχει κανένα πρόβλημα σχετικά με την αυθαίρετη επιλογή του αρχικού μονοπατιού, επειδή τελικά θα καταλήξουμε σε κάποιο δίκτυο χωρίς εναπομένουσα θετική δυναμικότητα ροής από την πηγή προς τον δέκτη. Ενδεχομένως η χρήση διαφορετικών μονοπατιών να μας οδηγήσει σε κάποια εναλλακτική λύση, αν υπάρχει τέτοια, όμως η συνολική ροή από την πηγή προς τον δέκτη θα είναι η ίδια φυσικά σε όλες της εναλλακτικές διαδρομές.

Έστω ότι το αρχικό μονοπάτι που επιλέγουμε από την πηγή προς τον δέκτη είναι το 1-3-6-8-9. Η μέγιστη δυνατή ροή που μπορεί να περάσει από αυτό το μονοπάτι είναι ίση με δύο μονάδες. Αυτό προκύπτει από την ροή στην ακμή 3-6 από τον κόμβο 3 προς τον κόμβο 6. Δηλαδή η μέγιστη δυναμικότητα ροής ενός μονοπατιού, όπως προαναφέραμε προκύπτει από την ακμή με την μικρότερη δυναμικότητα ροής μεταξύ αυτών που το απαρτίζουν, ώστε να μπορεί να περάσει από όλες τις ακμές του μονοπατιού.

Στο δεύτερο βήμα της μεθόδου αναπροσαρμόζουμε τις ροές προς τον δέκτη, αφαιρώντας τη ροή του συγκεκριμένου μονοπατιού, δείχνοντας ότι αυτή η ποσότητα μπορεί πλέον να περάσει. Σημειώνουμε τα στοιχεία αυτά στο δίκτυο και στο μονοπάτι το οποίο καταγράφουμε.

Στο τρίτο βήμα αναπροσαρμόζουμε τις ροές των ακμών που απαρτίζουν το μονοπάτι προς την αντίθετη κατεύθυνση (δηλαδή προς την πηγή) αυξάνοντας τις κατά την ροή του μονοπατιού (στην συγκεκριμένη περίπτωση κατά 2 μονάδες). Αυτό γίνεται επειδή θεωρητικά κάθε υλικό, το οποίο ρέει προς τον δέκτη θα μπορούσε να γυρίσει πίσω και να ακολουθήσει την αντίθετη κατεύθυνση, αν αυτό είναι απαραίτητο. Για να μπορέσουμε όμως να εκτελέσουμε μία τέτοια κίνηση, εάν αυτό κριθεί απαραίτητο, θα πρέπει να αναπροσαρμόσουμε κατά τον τρόπο που περιγράψαμε τις αντίθετες ροές των ακμών.

Στο σημείο αυτό με το κριτήριο τερματισμού ολοκληρώνεται μία επανάληψη της μεθόδου. Στο κριτήριο τερματισμού ελέγχεται η ύπαρξη μονοπατιών με θετική (μη μηδενική) δυναμικότητα ροής από την πηγή προς τον δέκτη. Αν διαπιστώσουμε ότι υπάρχουν τέτοιου είδους μονοπάτια τότε συνεχίζουμε επαναλαμβάνοντας την διαδικασία, διαφορετικά έχουν εντοπίσει την βέλτιστη λύση. Η πρώτη επανάληψη απεικονίζεται στο σχήμα 33.



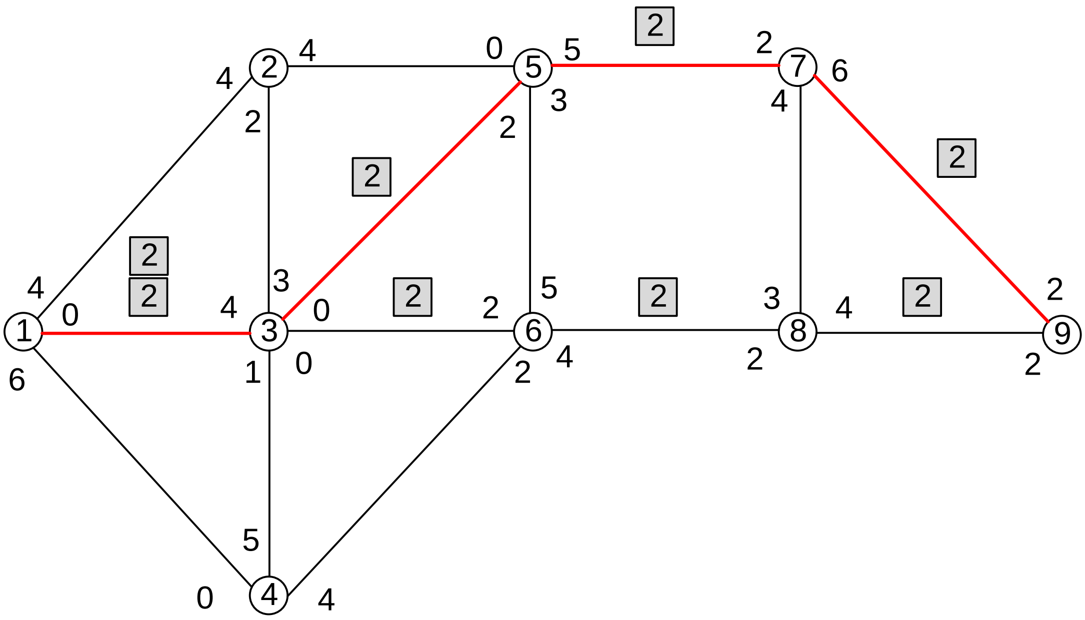
Σχήμα 33

Η πρώτη επανάληψη της μεθόδου

ευρέσεως της μέγιστης ροής.

Το μονοπάτι που έχουμε σημειώσει είναι το 1→3→6→8→9, και η αντίστοιχη ροή του είναι ίση με 2 μονάδες (η οποία εμφανίζεται μέσα στα γκρι τετράγωνα). Παρατηρούμε ακόμα, την αναπροσαρμογή των δυναμικοτήτων των ακμών που απαρτίζουν το μονοπάτι.

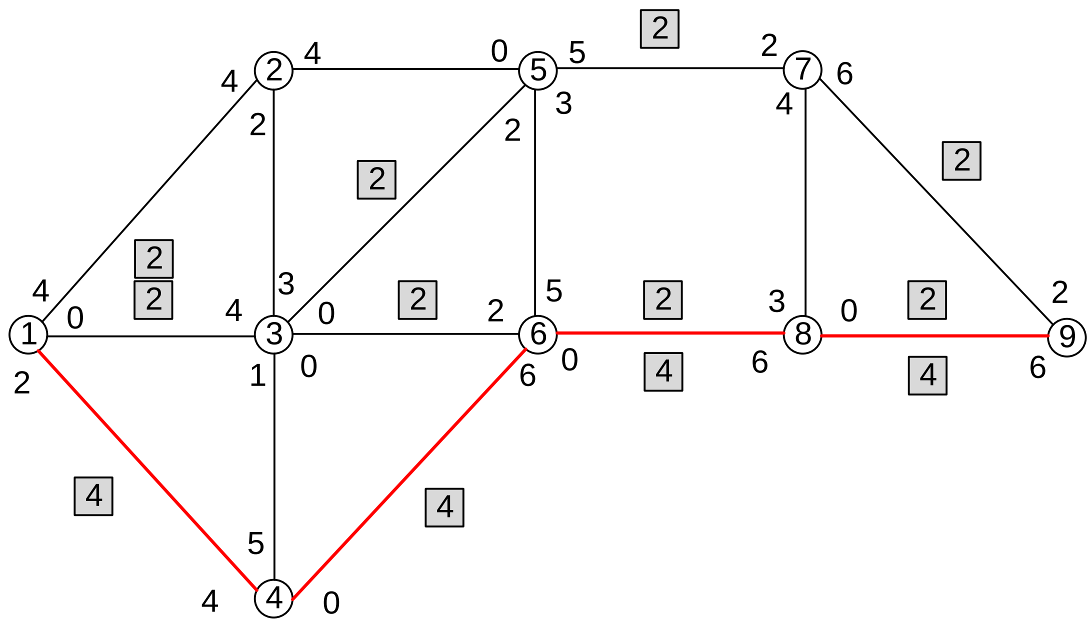
Είναι φανερό ότι το κριτήριο τερματισμού δεν ικανοποιείται, αφού υπάρχουν δρόμοι με θετική δυναμικότητα ροής, όπως για παράδειγμα το μονοπάτι 1→3→5→7→9. Από το μονοπάτι αυτό μπορούν να περάσουν οι υπόλοιπες 2 μονάδες που απέμειναν στην ακμή 1-3. Στο Σχήμα 34 αποτυπώνεται η δεύτερη επανάληψη του δεύτερου και του τρίτου βήματος του αλγορίθμου, και έχουν αναπροσαρμοστεί κατάλληλα οι ροές των ακμών καθώς επίσης έχει σημειωθεί το μονοπάτι και η αντίστοιχη ροή του, που και σε αυτή τη περίπτωση είναι 2 μονάδες. Στο δίκτυο του σχήματος έχουμε διατηρήσει και τις ροές της προηγούμενης επανάληψης.



Σχήμα 34

Το δίκτυο μετά τη δεύτερη επανάληψη.

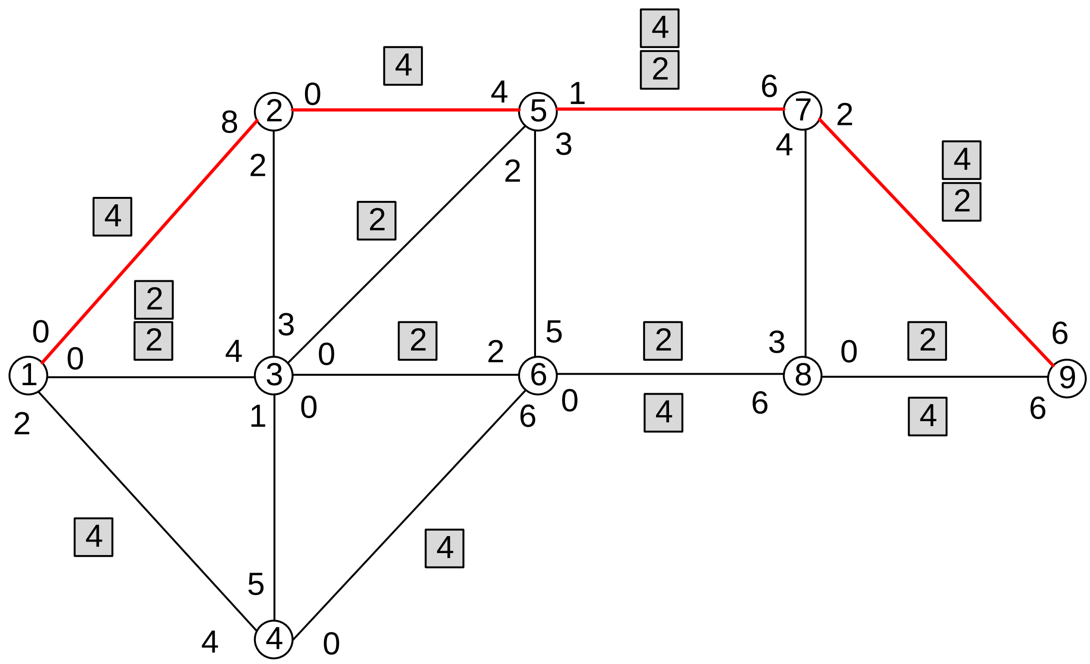
Η συνολική ροή τώρα είναι ίση με 4 μονάδες και επιτυγχάνεται μέσω των δύο διαδρομών που έχουν σημειωθεί. Το κριτήριο τερματισμού ύστερα και από τη δεύτερη επανάληψη εξακολουθεί να μην ικανοποιείται καθώς υπάρχει ένα μονοπάτι με θετική ροή, το 1→4→6→8→9. Από την ακμή 1-4 μπορούν να περάσουν 6 μονάδες όμως η δυναμικότητα του μονοπατιού είναι ίση με 4 μονάδες, όπως μπορούμε να δούμε στις ακμές 4-6, 6-8 και 8-9. Έτσι συνεχίζουμε στην τρίτη επανάληψη αναπροσαρμόζοντας κατάλληλα τις ροές των ακμών. Η αναπροσαρμογές αυτές καθώς και το μονοπάτι και η ροή του αποτυπώνονται στο Σχήμα 35.



Σχήμα 35

Το δίκτυο μετά την τρίτη επανάληψη

Παρατηρούμε ότι υπάρχει περιθώριο για μεγαλύτερη συνολική ροή από την πηγή προς τον δέκτη αν χρησιμοποιήσουμε το μονοπάτι 1→2→5→7→9, στο οποίο παρατηρούμε ότι από τις ακμές 1-2 και 2-5 μπορούν να περάσουν το πολύ 4 μονάδες. Το αντίστοιχο δίκτυο απεικονίζεται στο Σχήμα 36.



Σχήμα 36

Το δίκτυο μετά την τέταρτη επανάληψη

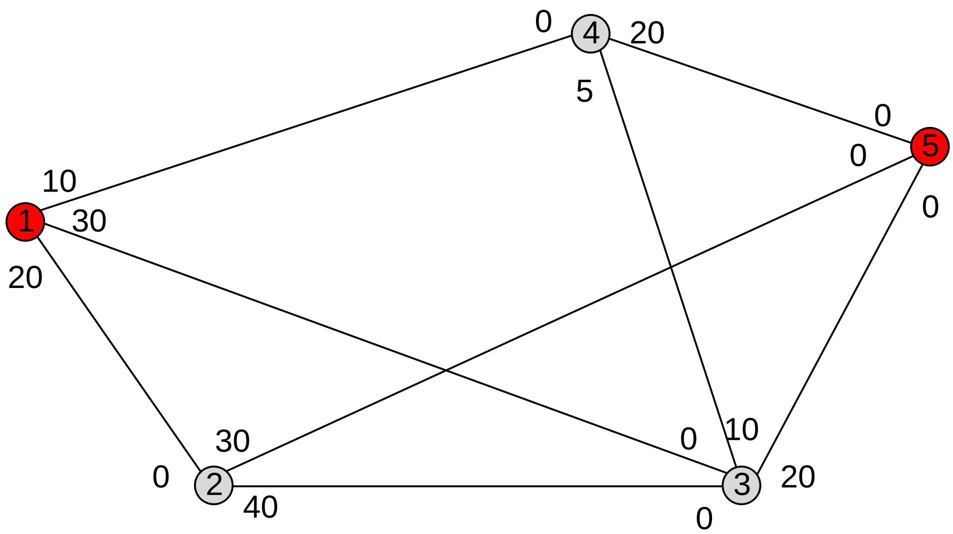
Ελέγχοντας το κριτήριο τερματισμού, διαπιστώνουμε ότι δεν υπάρχει πλέον κανένα μονοπάτι με θετική δυναμικότητα ροής από την πηγή προς τον δέκτη. Πράγματι, οι δύο μονάδες που έχουν απομείνει στην ακμή 1-4, δεν μπορούν να περάσουν από την ακμή 4-6, ενώ αν συνεχίσουν προς τον κόμβο 3 μέσω της ακμής 4-3, δεν μπορούν να προχωρήσουν ούτε προς τον κόμβο 5 αλλά ούτε και προς τον κόμβο 6. Τέλος αν 2 μονάδες συνεχίσουν προς τον κόμβο 2 από την ακμή 3-2 θα σταματήσουν σε αυτόν, αφού η δυναμικότητα της ακμής 2-5 είναι μηδενική. Συνεπώς η διαδικασία εδώ τερματίζει. Η συνολική μέγιστη ροή που μπορεί να περάσει διαμέσου του δικτύου από την πηγή προς τον δέκτη είναι το άθροισμα των δυναμικοτήτων ροής των μονοπατιών που βρέθηκαν, δηλαδή στην συγκεκριμένη περίπτωση είναι ίση με 12. Στον Πίνακα παρουσιάζονται συνοπτικά τα αποτελέσματα, δηλαδή τα μονοπάτια που πρέπει να χρησιμοποιηθούν και οι αντίστοιχες ροές για το καθένα από αυτά.

Πίνακας	
Μονοπάτι	**Ροή**
1→3→6→8→9	2
1→3→5→7→9	2
1→4→6→8→9	4
1→2→5→7→9	4
Σύνολο	**12**

3.3. Εύρεση της μέγιστης ροής με την χρήση γραμμικού προγραμματισμού.

Θέτουμε x_{ij} την ποσότητα ροής της ακμής (i,j) και c_{ij} την δυναμικότητα της ίδιας ακμής. Υποθέτουμε ότι s και t είναι η αφετηρία (πηγή) και ο τερματικός κόμβος (δέκτης) του δικτύου αντίστοιχα. Η αντικειμενική συνάρτηση μεγιστοποιεί είτε την συνολική εξερχόμενη ροή από την πηγή, κόμβος s είτε την συνολική εισερχόμενη ροή στον δέκτη, κόμβος t.

Θα εφαρμόσουμε την μοντελοποίηση ενός προβλήματος εύρεσης της μέγιστης ροής ως πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού στο δίκτυο του σχήματος 37.



Σχήμα 37

Στο δίκτυο του σχήματος 37 η πηγή είναι ο κόμβος 1 (s = 1) και ο δέκτης είναι ο κόμβος 5 (t = 5). Στον ακόλουθο πίνακα παρουσιάζεται η μετατροπή του προβλήματος εύρεσης της μέγιστης ροής σε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού με δύο διαφορετικές αντικειμενικές συναρτήσεις, στην μία μεγιστοποιούμε την εξερχόμενη ροή από την πηγή, αφετηρία (κόμβος 1) ($=z_1$) και στην άλλη μεγιστοποιούμε την εισερχόμενη ροή στον δέκτη (κόμβος 5) ($=z_2$).

	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{23}	x_{25}	x_{34}	x_{35}	x_{43}	x_{45}	
Maximize z_1=	1	1	1							
Maximize z_2=					1		1		1	
Κόμβος 2	1			-1	-1					=0
Κόμβος 3		1		1		-1	-1	1		=0
Κόμβος 4			1			1		-1	-1	=0
Δυναμικότητα	20	30	10	40	30	10	20	5	20	

Η βέλτιστη λύση και χρησιμοποιώντας οποιαδήποτε από τις δύο αντικειμενικές συναρτήσεις είναι :

$x_{12} = 20$, $x_{13} = 30$, $x_{14} = 10$, $x_{25} = 20$, $x_{35} = 20$, $x_{45} = 20$

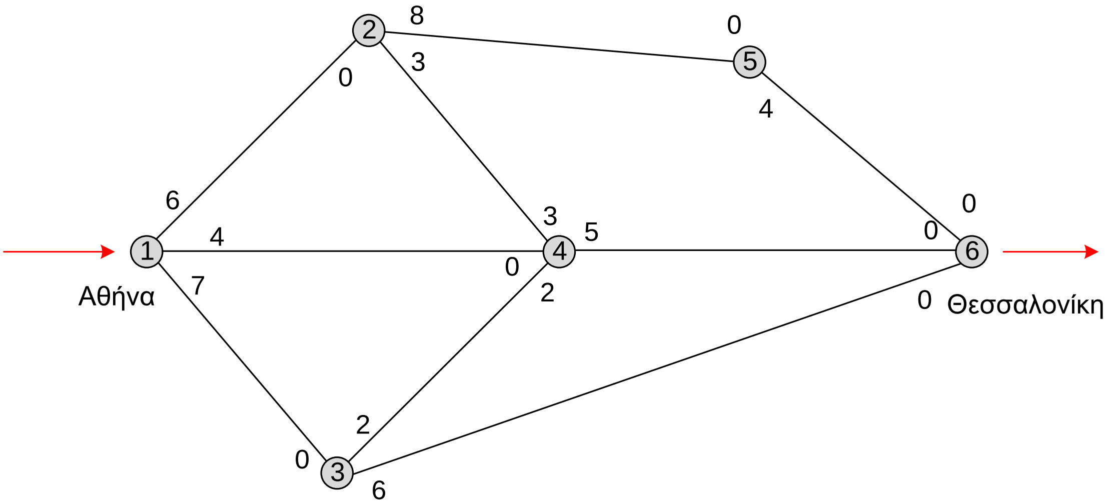
Η αντίστοιχη μέγιστη ροή είναι $z_1 = z_2 = 60$.

3.4. Επίλυση του προβλήματος εύρεσης της μεγίστης ροής (maximum flow problem) με την βοήθεια του EXCEL.

Το πρόβλημα ευρέσεως της μέγιστης ροής μπορεί να λυθεί και με τη βοήθεια του EXCEL, με τον ίδιο τρόπο που λύσαμε προηγουμένως το πρόβλημα ευρέσεως της συντομότερης διαδρομής, διατυπώνοντας το ως πρόβλημα ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού και λύνοντας το με την βοήθεια της εφαρμογής Solver από το μενού εργαλείων του EXCEL.

Θα μελετήσουμε την εύρεση της μέγιστης ροής μέσω του EXCEL με τη βοήθεια ενός παραδείγματος.

Μία εταιρία μεταφέρει τα προϊόντα της σιδηροδρομικός από την Αθήνα στην Θεσσαλονίκη. Όμως μπορεί να εξασφαλίζει τη μεταφορά περιορισμένης ποσότητας προϊόντων μέσω των βαγονιών εβδομαδιαίος.



Σχήμα 38

Σιδηροδρομικό δίκτυο

Με δεδομένες τις περιορισμένες ποσότητες μεταφοράς μέσο των βαγονιών η εταιρία θέλει να υπολογίσει ποία είναι η μέγιστη ποσότητα μεταφοράς προϊόντων από την Αθήνα στην Θεσσαλονίκη εβδομαδιαίος. Η επιτρεπτή ποσότητα μεταφοράς προϊόντων σε κάθε σιδηροδρομική γραμμή προσδιορίζεται από τους αριθμούς που εμφανίζονται στην κάθε ακμή ακριβώς δεξιά από τον αντίστοιχο κόμβο (για παράδειγμα 6 μονάδες προϊόντος μπορούν να μεταφερθούν από τον κόμβο 1 (Αθήνα) στον κόμβο 2).

Ο αριθμός που εμφανίζεται στα αριστερά κάθε ακμής αντιπροσωπεύει τον αριθμό των μονάδων προϊόντων που μπορούν να κινηθούν προς την αντίθετη κατεύθυνση της ακμής (για παράδειγμα καμία μονάδα προϊόντος δεν μπορεί να μεταφερθεί από τον κόμβο 2 στον κόμβο1). Η ακμή που ενώνει τον κόμβο 1 με τον κόμβο 2 ονομάζεται κατευθυνόμενη επειδή η ροή επιτρέπεται μόνο προς τη μία κατεύθυνση (από τον κόμβο 1 στον 2 και όχι από τον κόμβο 2 στον 1). Παρατηρήστε ότι η ροή επιτρέπεται και προς τις δύο κατευθύνσεις μεταξύ των κόμβων 2 και 4 και μεταξύ τον κόμβων 3 και 4. Αυτές οι ακμές ονομάζονται μη κατευθυνόμενες.

Οι μεταβλητές απόφασης αντιπροσωπεύουν τη ροή σε κάθε ακμή και ορίζονται ως ακολούθως :

x_{ij} = ροή κατά μήκος της ακμής i-j και είναι ακέραιος.

Για να μειώσουμε τον όγκο και την πολυπλοκότητα αυτής της μοντελοποίησης, θα εξαλείψουμε τη ροή κατά μήκος μιας ακμής με αντίθετη κατεύθυνση (π.χ. η ροή από τον κόμβο 4 στον 2 είναι μήδεν).

Πριν προχωρήσουμε στην μοντελοποίηση και εύρεση της αντικειμενικής συνάρτησης, θα πρέπει να αλλάξουμε ελαφρά το δίκτυο ώστε να μπορεί να επιλυθεί ως πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού. Θα δημιουργήσουμε μία καινούρια ακμή από τον κόμβο 6 στον κόμβο 1 και θα την ορίσουμε ως x_{61}. Η ροή κατά μήκος της ακμής που συνδέει τον δέκτη (τον τερματικό κόμβο) με την πηγή (την αφετηρία) αποτελεί την μέγιστη ποσότητα η οποία μπορεί αποσταλεί από τον κόμβο 6 πίσω στον κόμβο 1 και έπειτα μέσω του δικτύου να επιστρέψει στον κόμβο 6. Στην πραγματικότητα δημιουργούμε μία συνεχή ροή μέσω του δικτύου η οποία το διαπερνά και εξέρχεται από τον τερματικό κόμβο (κόμβος 6) και είναι η μεγαλύτερη ποσότητα που μπορεί να διαπεράσει το δίκτυο ξεκινώντας από την αφετηρία (κόμβος 1). Συνεπώς το ζητούμενο μας είναι να μεγιστοποιήσουμε την ποσότητα που ρέει από τον τερματικό κόμβο πίσω στην αφετηρία (δηλαδή την ποσότητα που ρέει από τον κόμβο 6 πίσω στον κόμβο 1).

Maximize $z = x_{61}$

Οι περιορισμοί ακολουθούν την ίδια διαδικασία με αυτή του προβλήματος ευρέσεως της συντομότερης διαδρομής, η οποία είναι, οτιδήποτε εισέρχεται σε ένα κόμβο πρέπει να εξέλθει από τον κόμβο αυτό.

Έτσι στον κόμβο 1 έχουμε τον περιορισμό ότι η ποσότητα που εισέρχεται μέσω της ακμής 6-1 πρέπει να εξέλθει μέσω των ακμών 1-2, 1-3 και 1-4.

$$x_{61} = x_{12} + x_{13} + x_{14}$$

Ο περιορισμός αυτός μπορεί να γραφεί και με τη μορφή:

$$x_{61} - x_{12} - x_{13} - x_{14} = 0$$

Κατά τον ίδιο τρόπο ο περιορισμός για τον κόμβο 2 γράφεται ως :

$$x_{12} - x_{24} - x_{25} = 0$$

κ. ο. κ.

Θα πρέπει επίσης να γράψουμε ένα σύνολο περιορισμών που θα μας διασφαλίζουν τις δυναμικότητες των ακμών του δικτύου. Αυτοί οι περιορισμοί είναι οι εξής :

$$x_{12} \leq 6 \qquad x_{34} \leq 2$$
$$x_{13} \leq 7 \qquad x_{36} \leq 6$$
$$x_{14} \leq 4 \qquad x_{46} \leq 5$$
$$x_{24} \leq 3 \qquad x_{56} \leq 4$$
$$x_{25} \leq 8 \qquad x_{61} \leq 17$$

Η ποσότητα x_{61} μπορεί να παίρνει οποιαδήποτε μεγάλη τιμή (συγκριτικά με τις δυναμικότητες των άλλων ακμών), και ορίζουμε να είναι το άθροισμα των ποσοτήτων που εξέρχονται από τον κόμβο 1.

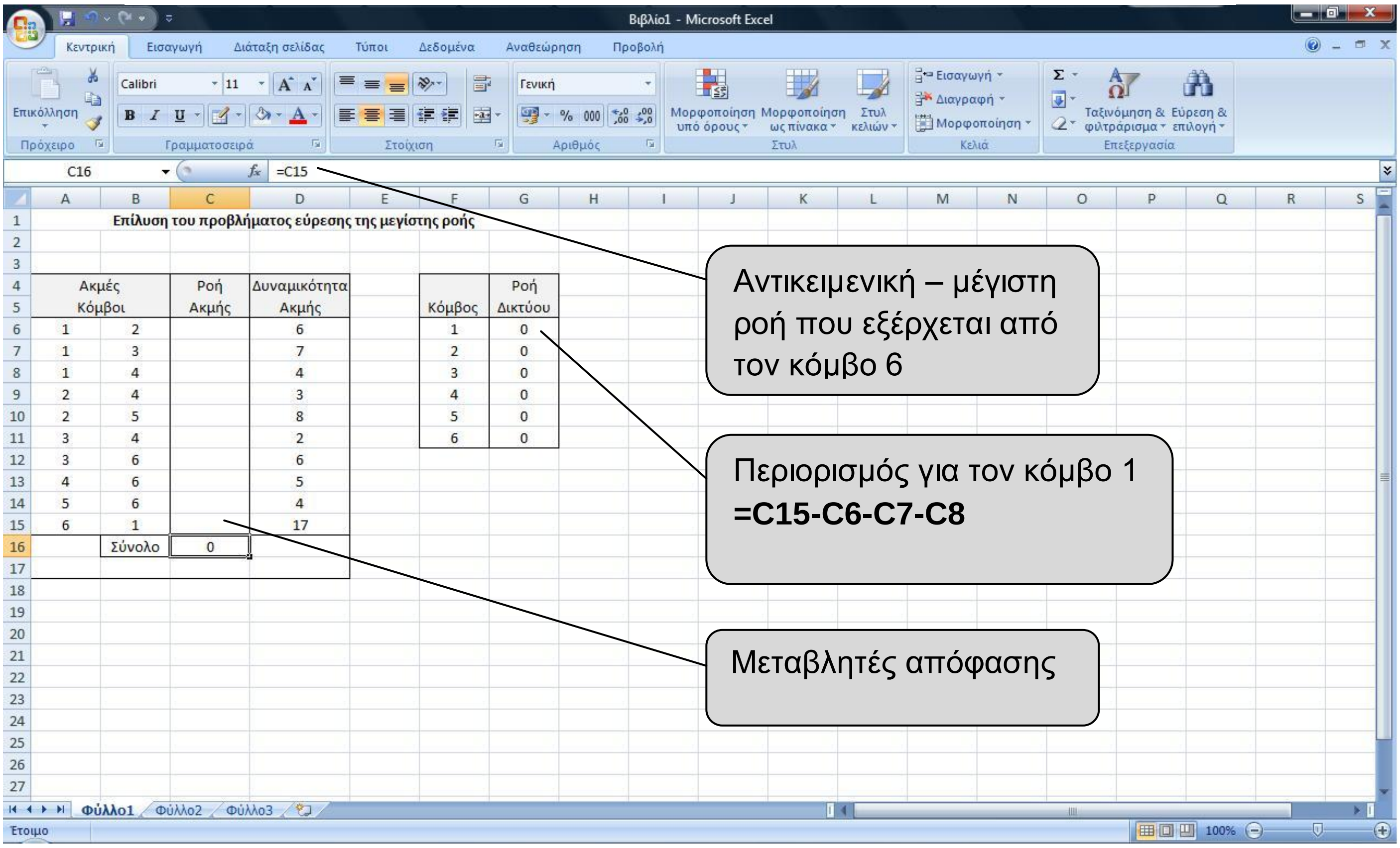
Η ολοκληρωμένη μοντελοποίηση του προβλήματος μας ως πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού είναι η ακόλουθη :

Maximize $z = x_{61}$

Υπό τους περιορισμούς :

$$x_{61} - x_{12} - x_{13} - x_{14} = 0$$
$$x_{12} - x_{24} - x_{25} = 0$$
$$x_{13} - x_{34} - x_{36} = 0$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} - x_{46} = 0$$
$$x_{25} - x_{56} = 0$$
$$x_{36} + x_{46} + x_{56} - x_{61} = 0$$
$$x_{12} \leq 6$$
$$x_{13} \leq 7$$
$$x_{14} \leq 4$$
$$x_{24} \leq 3$$
$$x_{25} \leq 8$$
$$x_{34} \leq 2$$
$$x_{36} \leq 6$$
$$x_{46} \leq 5$$
$$x_{56} \leq 4$$
$$x_{61} \leq 17$$
$$x_{ij} \geq 0 \text{ ακέραιος.}$$

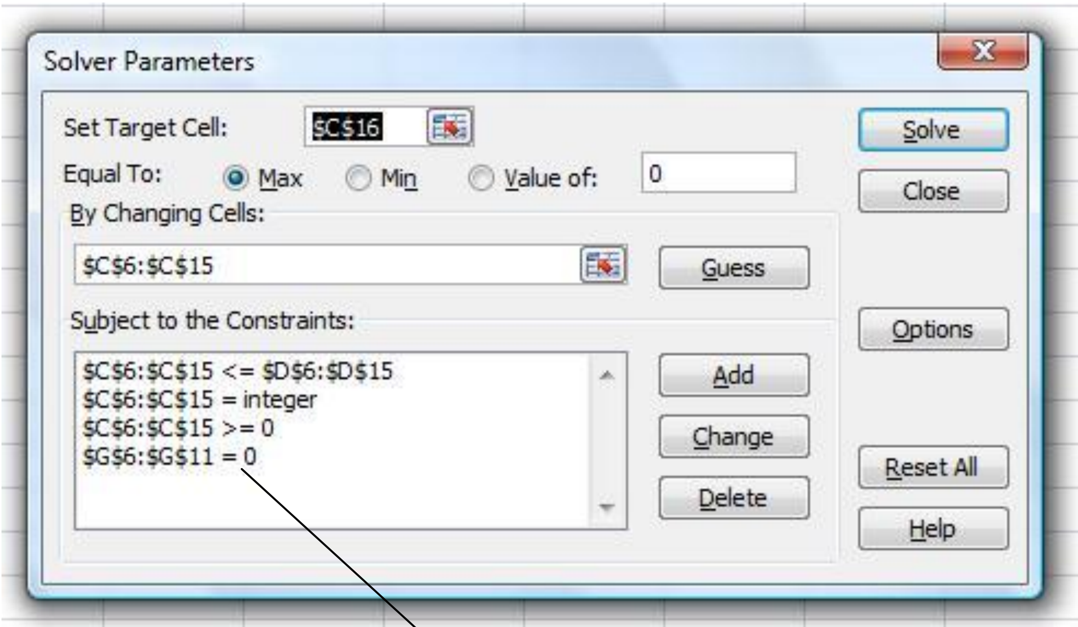
Η επίλυση του προβλήματος μεταφοράς μέσω του σιδηροδρομικού δικτύου του σχήματος 38, το οποίο είναι ήδη σε μορφή προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού, με τη βοήθεια του Excel παρουσιάζεται στην εικόνα 4. Οι μεταβλητές απόφασης x_{ij} βρίσκονται στα κελιά **C6:C15**. Τα κελία **D6:D15** περιέχουν τις δυναμικότητες των ακμών. Η αντικειμενική συνάρτηση, η οποία αποτελεί την μεγιστοποίηση της ροής μέσω της ακμής 6-1, υπολογίζεται στο κελί C16. Οι περιορισμοί της ροής του μοντέλου εμφανίζονται στον πίνακα που βρίσκεται δεξιά στο υπολογιστικό φύλλο. Για παράδειγμα το κελί G6 περιέχει τον περιορισμό για τον κόμβο 1 **‘=C15-C6-C7-C8’**, και το κελί G7 περιέχει τον περιορισμό για τον κόμβο 2 **‘=C6-C9-C10’**



Εικόνα 4

Οι περιορισμοί για τις δυναμικότητες των ακμών προσθέτονται με την εφαρμογή τις σχέσης : **‘C6:C15≤D6:D15’** στην επιλογή Solver.

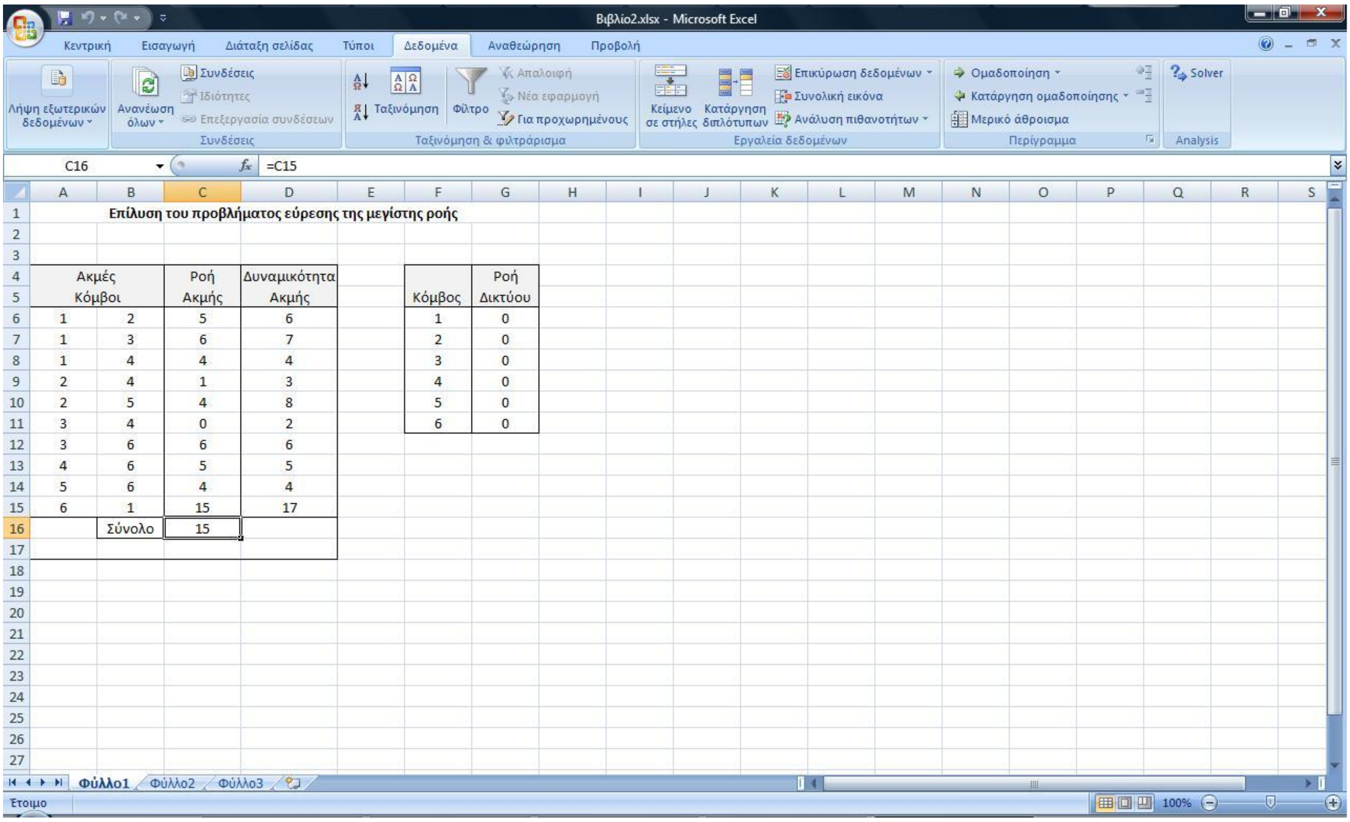
Στην εικόνα 5 βλέπουμε την εφαρμογή Solver προσαρμοσμένη στο μοντέλο μας.



Εικόνα 5

Η εισερχόμενη ροή και η εξερχόμενη ροή στους κόμβος πρέπει να είναι ίση.

Η λύση μέσω το EXCEL αποτυπώνεται στην εικόνα 6. Η ροή της κάθε ακμής παρουσιάζεται στα κελία **C6:C15** και η συνολική ποσότητα ροής του δικτύου είναι 15 μονάδες όπως παρατηρούμε στο κελί **C16**.



Επίλυση του προβλήματος εύρεσης της μεγίστης ροής

Ακμές Κόμβοι		Ροή Ακμής	Δυναμικότητα Ακμής
1	2	5	6
1	3	6	7
1	4	4	4
2	4	1	3
2	5	4	8
3	4	0	2
3	6	6	6
4	6	5	5
5	6	4	4
6	1	15	17
	Σύνολο	15	

Κόμβος	Ροή Δικτύου
1	0
2	0
3	0
4	0
5	0
6	0

Εικόνα 6

4. Πρόβλημα ελάχιστης δυναμικότητας ροής (minimum capacitated flow problem)

Το πρόβλημα ελάχιστης δυναμικότητας ροής βασίζεται στις παρακάτω προϋποθέσεις.

1. Μια (μη αρνητική) ποσότητα ροής αντιστοιχεί σε κάθε ακμή του δικτύου.
2. Οι ακμές μπορεί να έχουν ελάχιστο όριο δυναμικότητας.
3. Όλοι οι κόμβοι του δικτύου μπορούν να λειτουργούν είτε ως πηγή είτε ως δέκτης.

Το μοντέλο αυτό καθορίζει τη ροή στις ακμές του δικτύου ώστε να ελαχιστοποιείται το συνολικό κόστος, ενώ παράλληλα ικανοποιεί τους περιορισμούς της ροής στα τόξα και τις ποσότητες προσφοράς και ζήτησης των κόμβων. Πρώτα θα παρουσιάσουμε το μοντέλο δυναμικοτήτων του δικτύου και την αντίστοιχη διατύπωση σε μορφή προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού. Η διατύπωση γραμμικού προγραμματισμού αποτελεί τη βάση για την ανάπτυξη ενός αλγορίθμου δυναμικοτήτων simplex για την επίλυση του δικτυακού αυτού μοντέλου.

Μορφή δικτύου

Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα δίκτυο δυναμικοτήτων G = (N, A), όπου N είναι το σύνολο των κόμβων και A είναι το σύνολο των ακμών. Ορίζουμε :

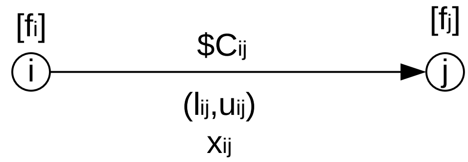
x_{ij} = ποσότητα ροής από τον κόμβο i στον κόμβο j

u_{ij} (l_{ij}) = μέγιστη (ελάχιστη) δυναμικότητα της ακμής (i, j)

c_{ij} = κόστος ροής από τον κόμβο i στον κόμβο j

f_i = καθαρή ροή στον κόμβο i.

Στο σχήμα 39 αποτυπώνονται οι παραπάνω διευκρινήσεις για την ακμή (i, j). Η ετικέτα [f_i] αντιπροσωπεύει μία θετική (αρνητική) ποσότητα για την καθαρή προσφορά (ζήτηση) που σχετίζεται με τον κόμβο i.

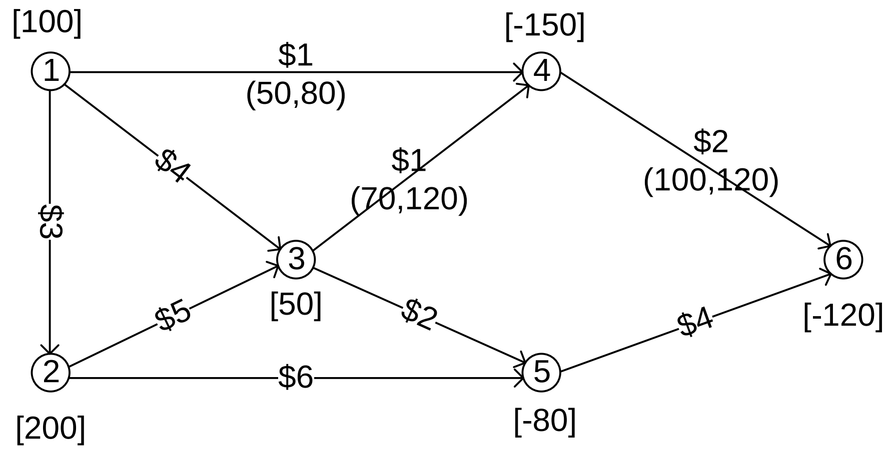


Σχήμα 39 Δυναμικότητα ακμής με εξωτερική ροή

Παράδειγμα

Μια εταιρία προμηθεύει με καλαμπόκι από τρία σιλό σε τρείς πτηνοτροφικές μονάδες. Οι ποσότητες προμήθειας από τα τρία σιλό είναι 100, 200 και 50 χιλιάδες και η ζήτηση στις τρείς πτηνοτροφικές μονάδες είναι 150, 80 και 120 χιλιάδες. Η εταιρία ως επί το πλυστών μεταφέρει σιδηροδρομικός το καλαμπόκι στις φάρμες, με εξαίρεση τρείς διαδρομές όπου χρησιμοποιούνται φορτηγά.

Στο σχήμα 40 αποτυπώνονται οι δυνατές διαδρομές μεταξύ των σιλό και των πτηνοτροφικών μονάδων. Τα σιλό εκπροσωπούνται από τους κόμβους 1, 2 και 3 όπου οι ποσότητες προμήθειας είναι [100], [200] και [50] αντίστοιχα. Οι φάρμες αντιπροσωπεύονται από τους κόμβους 4, 5 και 6 όπου οι ποσότητες ζήτησης είναι [-150], [-80] και [-120] αντίστοιχα. Οι διαδρομές επιτρέπουν την μεταφορά μεταξύ των σιλό και των πτηνοτροφικών μονάδων. Οι ακμές (1,4), (3,4) και (4,6) είναι διαδρομές που εξυπηρετούνται μέσω φορτηγών με ελάχιστη και μέγιστη δυναμικότητα. Για παράδειγμα η δυναμικότητα της ακμής (1,4) είναι μεταξύ 50 και 80 χιλιάδων μονάδων. Όλες οι άλλες διαδρομές εξυπηρετούνται σιδηροδρομικός όπου η μέγιστη δυναμικότητα είναι πρακτικά απεριόριστη. Το κόστος μεταφοράς ανά μονάδα αναγράφεται στην αντίστοιχη ακμή.



Σχήμα 40

4.1. Διατύπωση ως πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού

Η διατύπωση το μοντέλου ως πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού θέτει τις βάσεις για ανάπτυξη του αλγορίθμου simplex δυναμικοτήτων. Το γραμμικό πρόγραμμα για το δίκτυο δυναμικοτήτων είναι το ακόλουθο :

$$\text{Minimize } z = \sum_{(i,j)} \sum_{\in A} c_{ij} x_{ij}$$

Υπό τους περιορισμούς :

$$\sum_{\substack{k \\ (i,k)\in A}} x_{jk} - \sum_{\substack{i \\ (i,j)\in A}} x_{ij} = f_j , \; j \in N$$

$$l_{ij} \le x_{ij} \le u_{ij}$$

Η εξίσωση για τον κόμβο j υπολογίζει την καθαρή ροή f_j στον κόμβο j ως εξής :

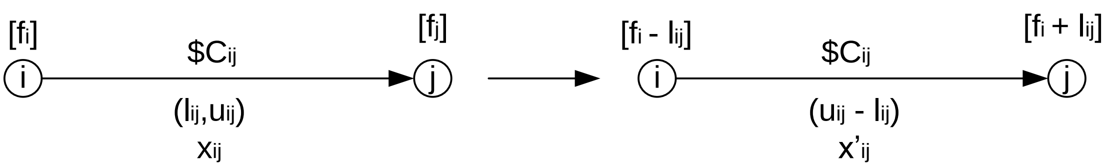
(εξερχόμενη ροή από τον κόμβο j) – (εισερχόμενη ροή στον κόμβο j) = f_j

Ο κόμβος j αποτελεί πηγή εάν $f_j > 0$ και δέκτη εάν $f_j < 0$.

Μπορούμε να αφαιρέσουμε το ελάχιστο όριο l_{ij} από τους περιορισμούς με την αντικατάσταση :

$$x_{ij} = x'_{ij} + l_{ij}$$

Η καινούρια μεταβλητή ροής x'_{ij} αποτελεί ένα μέγιστο όριο για την ποσότητα $u_{ij} - l_{ij}$. Ακόμα, η καθαρή ροή στον κόμβο i γίνεται $f_i - l_{ij}$. Στο σχήμα 41 βλέπουμε την αλλαγή της κατάστασης (i,j) μετά την αντικατάσταση του ελάχιστου ορίου.



Σχήμα 41

Αφαίρεση του ελάχιστου ορίου στις ακμές.

4.2. Παραδείγματα :

Παράδειγμα

Θα κατασκευάσουμε το γραμμικό μοντέλο του δικτύου του προβλήματος της εταιρίας που ασχολείται με τη μεταφορά καλαμποκιού (δηλαδή, του δικτύου του σχήματος 40), πριν και μετά την αντικατάσταση του ελαχίστου ορίου.

Οι κύριοι περιορισμοί του γραμμικού μοντέλου είναι η εισερχόμενη και εξερχόμενη ροή από τον κάθε κόμβο, συνεπώς προκύπτει το ακόλουθο γραμμικό μοντέλο.

	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{23}	x_{25}	x_{34}	x_{35}	x_{46}	x_{56}	
Minimize	3	4	1	5	6	1	2	2	4	
κόμβος 1	1	1	1							= 100
κόμβος 2	-1			1	1					= 200
κόμβος 3		-1		-1		1	1			= 50
κόμβος 4			-1			-1		1		= -150
κόμβος 5					-1		-1		1	= - 80
κόμβος 6								-1	-1	= - 120
Μέγιστο όριο	0	0	50	0	0	70	0	100	0	
Ελάχιστο όριο	∞	∞	80	∞	∞	120	∞	120	∞	

Σημειώνουμε ότι οι συντελεστές των περιορισμών είναι 1 και -1. Η στήλη που αντιστοιχεί στην ποσότητα x_{ij} έχει 1 στην γραμμή i και -1 στην γραμμή j. Οι υπόλοιποι συντελεστές είναι μηδέν. Αυτή η δομή είναι χαρακτηριστική για όλα τα μοντέλα δικτύων ροής.

Οι ποσότητες με ελάχιστο όριο αντικαθιστώνται από :

$x_{14} = x'_{14} + 50$

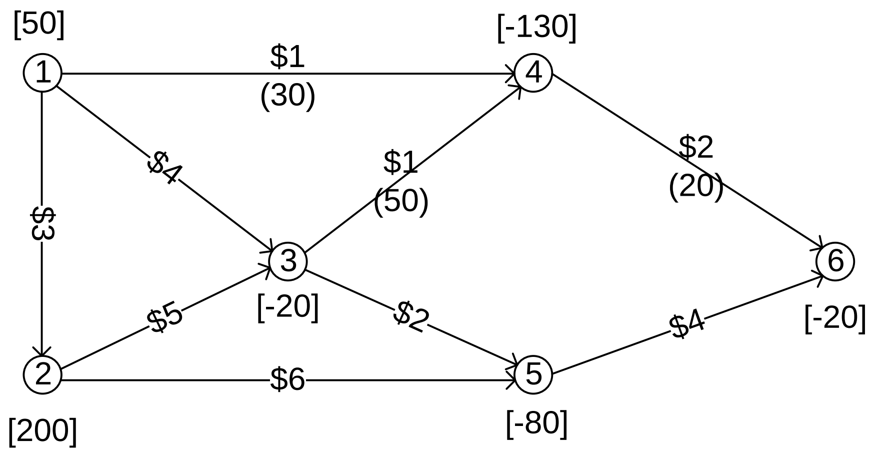
$x_{34} = x'_{34} + 70$

$x_{46} = x'_{46} + 100$

Συνεπώς το τελικό γραμμικό μοντέλο είναι :

	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{23}	x_{25}	x_{34}	x_{35}	x_{46}	x_{56}	
Minimize	3	4	1	5	6	1	2	2	4	
κόμβος 1	1	1	1							= 50
κόμβος 2	-1			1	1					= 200
κόμβος 3		-1		-1		1	1			= -20
κόμβος 4			-1			-1		1		= -130
κόμβος 5					-1		-1		1	= - 80
κόμβος 6								-1	-1	= - 20
Μέγιστο όριο	∞	∞	30	∞	∞	50	∞	20	∞	

Το αντίστοιχο δίκτυο έπειτα από την αντικατάσταση του ελαχίστου ορίου παρουσιάζεται στο σχήμα 42. Σημειώνουμε ότι η αντικατάσταση του μέγιστου ορίου μπορεί να γίνει απευθείας από το σχήμα 40 χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση του σχήματος 41 και χωρίς να είναι απαραίτητο πρώτα να αναπτύξουμε το πρόβλημα ως ένα γραμμικό μοντέλο.



Σχήμα 42

Το δίκτυο του παραδείγματος έπειτα από

την αντικατάσταση του ελαχίστου ορίου

Παράδειγμα (Πρόγραμμα Εργασίας)

Αυτό το παράδειγμα απεικονίζει ένα δικτυακό μοντέλο το οποίο αρχικά δεν πληροί τις απαιτήσεις ροής των κόμβων (δηλαδή η εξερχόμενη ροή στον κόμβο μείων την εισερχόμενη ροή στον κόμβο ισούται με την καθαρή ροή στον κόμβο), όμως αυτό μπορεί να μετατραπεί σε αυτή τη μορφή μέσω μετατροπών των περιορισμών του γραμμικού μοντέλου.

Ένα γραφείο ευρέσεως εργασίας έχει συνάψει μία σύμβαση σύμφωνα με την οποία πρέπει να παρέχει εργαζόμενους κατά την περίοδο τεσσάρων μηνών (από τον Ιανουάριο μέχρι τον Απρίλιο) ακολουθώντας το παρακάτω διάγραμμα.

Μήνας	Ιανουάριος	Φεβρουάριος	Μάρτιος	Απρίλιος
Αρ. Εργαζομένων	100	120	80	170

Εξ’ αιτίας μιας αλλαγής της ζήτησης, ίσως είναι οικονομικότερο να διατηρήσει περισσότερους εργαζομένους από ότι χρειάζεται σε κάποιο συγκεκριμένο μήνα. Το κόστος για την πρόσληψη και διατήρηση ενός εργαζομένου είναι μία συνάρτηση της περιόδου απασχόλησης τους όπως βλέπουμε και στον παρακάτω πίνακα.

Περίοδος εργασίας (σε μήνες)	1	2	3	4
Κόστος ανά εργαζόμενο ($)	100	130	180	220

x_{ij} = αριθμός εργαζομένων που προσλήφθηκαν στην αρχή του μήνα i και έληξαν την συνεργασίας τους στην αρχή του μήνα j.

Για παράδειγμα, η ποσότητα x_{12} μας δίνει τον αριθμό των εργαζομένων που προσλήφθηκαν τον Ιανουάριου για έναν μήνα μόνο.

Για να μορφοποιήσουμε το πρόβλημα ως ένα γραμμικό μοντέλο για την τετράμηνη περίοδο, θα προσθέσουμε τον Μάιο ως έναν εικονικό μήνα (μήνας 5), συνεπώς η ποσότητα x_{45} θα μας δίνει τον αριθμό των εργαζομένων που προσλήφθηκαν τον Απρίλιο για τον Απρίλιο. Οι περιορισμοί αναγνωρίζουν ότι η ζήτηση για την περίοδο κ μπορεί να ικανοποιηθεί από όλα τα για τα οποία $i \leq k < j$. Θέτοντας $s_i \geq 0$ το πλεόνασμα των εργαζομένων τον μήνα i, το γραμμικό μοντέλο είναι το ακόλουθο:

	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{34}	x_{35}	x_{45}	s_1	s_2	s_3	s_4	
Minimize	100	130	180	220	100	130	180	100	130	100					
Ιαν.	1	1	1	1							-1				=100
Φεβ.		1	1	1	1	1	1					-1			=120
Μάρτιος			1	1		1	1	1	1				-1		= 80
Απρίλιος				1			1		1	1				-1	=170

Το προηγούμενο γραμμικό μοντέλο (του παραδείγματος με την εταιρία που μετέφερε καλαμπόκι) δεν περιείχε (-1,+1) την ειδική δομή ροής του δικτύου. Παρόλα αυτά το συγκεκριμένο γραμμικό μοντέλο μπορεί να μετατραπεί σε ένα ισοδύναμο δικτυακό μοντέλο ροής χρησιμοποιώντας την παρακάτω αριθμητική διαδικασία.

1. σε ένα n εξισώσεων γραμμικό μοντέλο , δημιουργούμε μία καινούρια εξίσωση n+1, πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση n με -1.

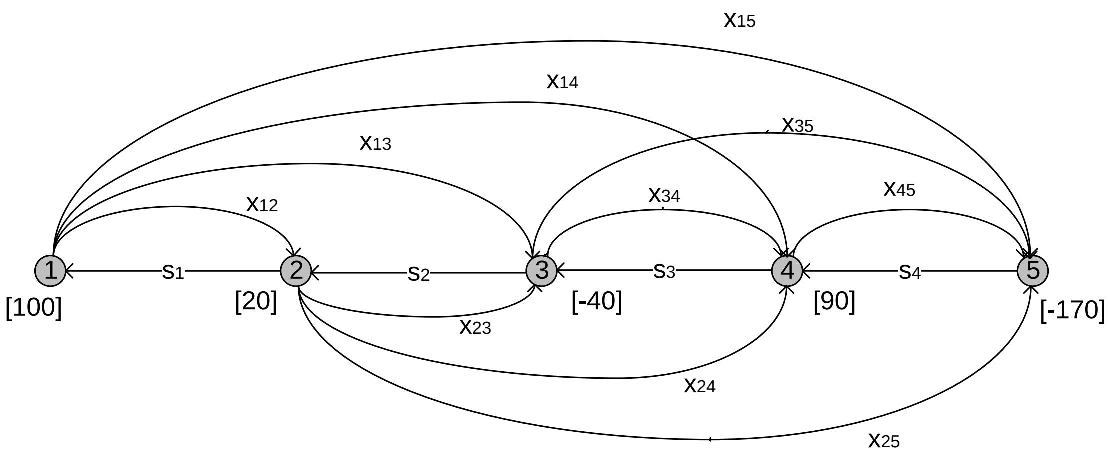
2. Κρατάμε την εξίσωση 1 χωρίς να την αλλάξουμε.

3. Για i = 1, 2, …, n, αντικαθιστούμε κάθε εξίσωση i με :
(εξίσωση i) – (εξίσωση i -1).

Εφαρμόζοντας αυτή τη διαδικασία στο παράδειγμα με το πρόγραμμα εργασίας έχουμε το ακόλουθο γραμμικό μοντέλο, του οποίου η δομή ταιριάζει στο δικτυακό μοντέλο ροής.

	X_{12}	X_{13}	X_{14}	X_{15}	X_{23}	X_{24}	X_{25}	X_{34}	X_{35}	X_{45}	S_1	S_2	S_3	S_4	
Minimize	100	130	180	220	100	130	180	100	130	100					
Ιαν.	1	1	1	1							-1				=100
Φεβ.	-1				1	1	1				1	-1			= 20
Μάρτιος		-1			-1			1	1			1	-1		=-40
Απρίλιος			-1			-1		-1		1			1	-1	= 90
Μάιος				-1			-1		-1	-1				1	=-170

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω διατύπωση, το μοντέλο εργασιακού προγράμματος μπορεί να γραφεί ισοδύναμα από ένα δίκτυο ελαχίστου κόστους όπως φαίνεται στο σχήμα 43. Πρακτικά επειδή οι ακμές δεν έχουν μέγιστο όριο, το πρόβλημα μπορεί να λυθεί και ως ένα πρόβλημα μεταφοράς.



Σχήμα 43

Δικτυακή αναπαράσταση του

προβλήματος εργασιακού προγράμματος.

4.3. Επίλυση των δικτύων δυναμικοτήτων με την βοήθεια της μεθόδου Simplex.

Ο αλγόριθμος βασίζεται ακριβός στα βήματα της κανονικής μεθόδου Simplex, αλλά διαμορφωμένος κατάλληλα ώστε να επιλύει την ειδική κατηγορία των δικτύων ελαχίστου κόστος.

Θεωρούμε f_i την καθαρή ροή στον κόμβο i ο αλγόριθμος Simplex δυναμικοτήτων ορίζει ότι το δίκτυο πρέπει να πληροί την σχέση :

$$\sum_{i=1}^{n} f_i = 0$$

Ο περιορισμός ορίζει ότι η συνολική προσφορά στο δίκτυο ισούται με την συνολική ζήτηση. Μπορούμε επίσης να καλύψουμε αυτή την απαίτηση με την προσθήκη μίας εικονικής πηγής ή τερματικού κόμβου εξισορρόπησης, ο οποίος θα συνδέεται με όλους τους άλλους κόμβους του δικτύου με μηδενικό κόστος και άπειρη δυναμικότητα τόξων.

Έπειτα από της παραπάνω διευκρινήσεις μπορούμε να περιγράψουμε τα βήματα του αλγορίθμου δυναμικοτήτων.

Βήμα 0. Ορίζουμε μία αρχική βασική εφικτή λύση (σύνολο ακμών) για το δίκτυο και πηγαίνουμε στο βήμα 1.

Βήμα 1. Ορίζουμε μία εισερχόμενη ακμή (ποσότητα) χρησιμοποιώντας τους όρους βελτιστότητας της μεθόδου Simplex. Εάν η λύση είναι βέλτιστη τότε σταματάμε, αλλιώς πηγαίνουμε στο βήμα 2.

Βήμα 2. Ορίζουμε μία εξερχόμενη ακμή (ποσότητα) χρησιμοποιώντας τους όρους βελτιστότητας της μεθόδου Simplex. Ορίζουμε την νέα λύση και επιστρέφουμε στο βήμα 1.

Σε ένα δίκτυο η-κόμβων με μηδενική καθαρή ροή (δηλαδή, $f_1 + f_2 + ... + f_n = 0$) που αποτελείται από η-1 ανεξάρτητες εξισώσεις περιορισμών. Συνεπώς μία αντίστοιχη βασική λύση θα περιέχει η-1 ακμές. Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι βασική λύση αντιστοιχεί σε ένα ζευγνύον δέντρο του δικτύου.

Η αρχική ακμή (βήμα 1) ορίζεται υπολογίζοντας $z_{ij} - c_{ij}$, οι αντικειμενικοί συντελεστές, για όλες τις μη βασικές ακμές (i, j). Εάν $z_{ij} - c_{ij} \leq 0$ για όλα τα i και j, η τρέχουσα βάση είναι βέλτιστη. Αλλιώς, επιλέγουμε μία μη βασική ακμή με την μεγαλύτερη θετική διαφορά $z_{ij} - c_{ij}$ να εισέλθει στην βάση.

Ο υπολογισμός των αντικειμενικών συντελεστών βασίζεται στο δυαδικότητα. Χρησιμοποιώντας τον γραμμικό προγραμματισμό, ορίζουμε w_i ως το αντίστοιχο δυικό με τους περιορισμούς του κόμβου i, συνεπώς το δυικό του προβλήματος είναι :

$$\text{Maximize } z = \sum_{i=1}^{n} f_i w_i$$

$$w_i - w_j \leq c_{ij}, (i, j) \in A$$

w_i ορίζεται για i = 1, 2, …, η

Από την θεωρία του γραμμικού προγραμματισμού, έχουμε :

$$w_i - w_j = c_{ij} \text{ για την βασική ακμή } (i, j)$$

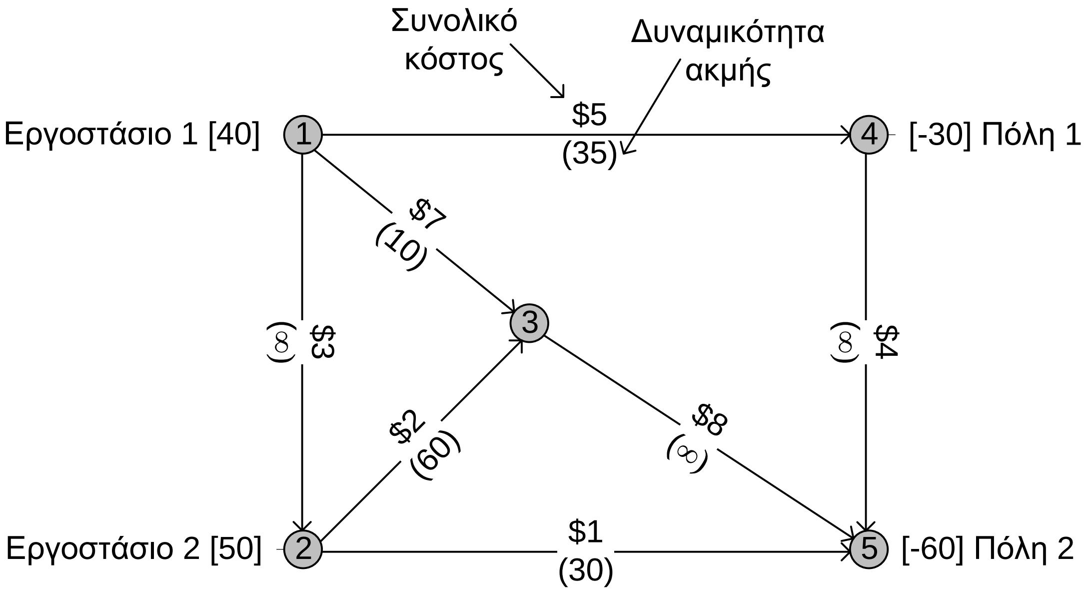
Επειδή το κανονικό γραμμικό μοντέλο έχει έναν περιττό περιορισμό εξ' ορισμού, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αντί αυτού μία αυθαίρετη ποσότητα σε μία από τις δυικές μεταβλητές. Για διευκόλυνση, ορίζουμε $w_1 = 0$ και συνεχίζουμε λύνοντας την βασική εξίσωση $w_i - w_j = c_{ij}$ για να προσδιορίσουμε τις υπόλοιπες δυικές ποσότητες. Μέθοδος 2, γνωρίζουμε ότι οι αντικειμενικοί συντελεστές των μη βασικών x_{ij} είναι η διαφορά μεταξύ του αριστερού μέλους μείων το δεξί μέλος του δυικού των αντίστοιχων δυικών περιορισμών, δηλαδή :

$$z_{ij} - c_{ij} = w_i - w_j - c_{ij}$$

Το μόνο που απομένει είναι να εξηγήσουμε με ποίο τρόπο θα ορίσουμε τις εξερχόμενες ποσότητες, το οποίο θα το δείξουμε με τη βοήθεια ενός αριθμητικού παραδείγματος.

4.3.1. Παράδειγμα:

Ένα δίκτυο αγωγών συνδέει δύο μονάδες αφαλάτωσης νερού με δύο πόλεις. Η ημερήσια ποσότητα που μπορούν να εφοδιασμού τα δύο εργοστάσια είναι 40 και 50 εκατομμύρια γαλόνια ενώ η ημερήσια ζήτηση των δύο πόλεων είναι 30 και 60 εκατομμύρια γαλόνια αντίστοιχα. Οι κόμβοι 1 και 2 αντιπροσωπεύουν τα δύο εργοστάσια αφαλάτωσης ενώ οι κόμβοι 4 και 5 αντιπροσωπεύουν τις δύο πόλεις. Ο κόμβος 3 αντιπροσωπεύει έναν ενδιάμεσο ενισχυτή μεταξύ των εργοστασίων και των πόλεων. Το μοντέλο είναι ήδη ισορροπημένο επειδή η προσφορά από τους κόμβους 1 και 2 είναι ίση με την ζήτηση των κόμβων 4 και 5. Το σχήμα 44 μας παρουσιάζει το αντίστοιχο δίκτυο.

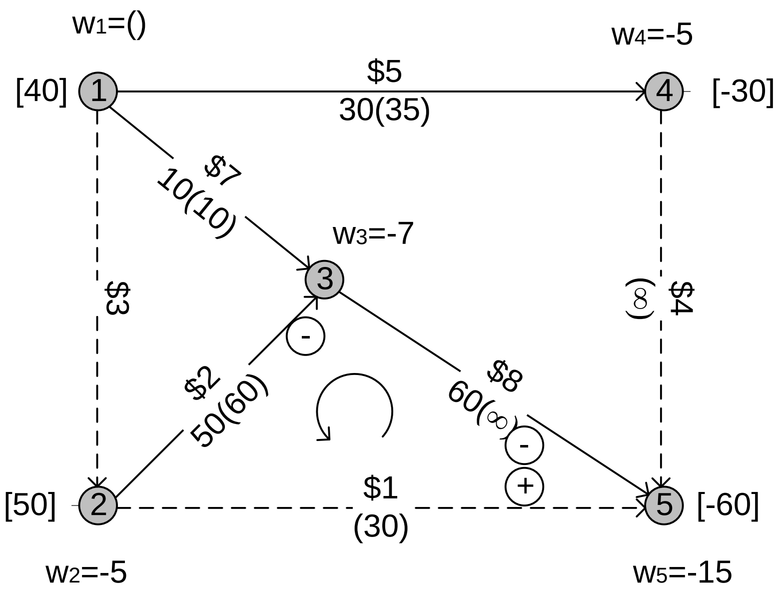


Σχήμα 44

Δίκτυο του παραδείγματος των εργοστασίων αφαλάτωσης.

Επανάληψη 0.

Βήμα 0. Ορίζουμε μία αρχική βασική εφικτή λύση : Το αρχικό εφικτό ζευγνύων δέντρο του σχήματος 45 (εμφανίζεται με έντονες γραμμές) προκύπτει από τον έλεγχο. Συνήθως, χρησιμοποιούμε μία τεχνητή μεταβλητή για να βρούμε μία τέτοια λύση.



Σχήμα 45

Δίκτυο για την Επανάληψη 0.

$$z_{12} - c_{12} = () - (-5) - 3 = 2$$
$$z_{25} - c_{25} = -5 - (-15) - 1 = 9$$
$$z_{45} - c_{45} = -5 - (-15) - 4 = 6$$

Η ακμή (2,5) έχει μέγιστο όριο 30

Αντικατάσταση $\chi_{25} = 30 - \chi_{52}$

Μείωση των χ_{23} και χ_{35} κατά 30 το καθένα.

Στο σχήμα 45 η βασική εφικτή λύση αποτελείται από τις (έντονες) ακμές (1,3), (1,4), (2,3) και (3,5) με εφικτή ροή 10, 30, 50 και 60 μονάδες αντίστοιχα. Συνεπώς οι (διακεκομμένες) ακμές (1,2), (2,5) και (4,5) αποτελούν τις μη βασικές μεταβλητές. Ο συμβολισμός x(c) που εμφανίζεται στις ακμές μας δείχνει ότι μία ροή x μονάδων αποδίδεται σε μία ακμή δυναμικότητας c μονάδων. Οι προκαθορισμένες τιμές για τα x και c είναι 0 και ∞ αντίστοιχα.

Επανάληψη 1.

Βήμα 1. Ορισμός της εισερχόμενης ακμής : υπολογίζουμε τις δυικές ποσότητες λύνοντας τις τρέχουσες βασικές εξισώσεις :

$$w_1 = 0$$

$$w_i - w_j = c_{ij}$$, για τις βασικές (i,j)

Συνεπώς έχουμε :

ακμή (1,3) : $w_1 - w_3 = 7$, με $w_3 = -7$

ακμή (1,4) : $w_1 - w_4 = 5$, με $w_4 = -5$

ακμή (2,3) : $w_2 - w_3 = 2$, με $w_2 = -5$

ακμή (3,5) : $w_3 - w_5 = 8$, με $w_5 = -15$

Τώρα υπολογίζουμε τα $z_{ij} - c_{ij}$ για τις μη βασικές μεταβλητές :

ακμή (1,2) : $w_1 - w_2 - c_{12} = 0-(-5)-3 = 2$

ακμή (2,5) : $w_2 - w_5 - c_{25} = (-5)-(-15)-1 = 9$

ακμή (4,5) : $w_4 - w_5 - c_{45} = (-5)-(-15)-4 = 6$

Συνεπώς η ακμή (2,5) εισέρχεται στη βασική λύση.

Βήμα 2. Ορισμός της εξερχόμενης ακμής : Από το σχήμα 45, η ακμή (2,5) σχηματίζει κύκλο με τις βασικές ακμές (2,3) και (3,5). Από τον ορισμό του ζευγνύοντος δέντρου, κανένας άλλος κύκλος δεν μπορεί να σχηματιστεί. Επειδή η ροή στην καινούρια ακμή (2,5) πρέπει να αυξηθεί, προσαρμόζουμε την ροή στις ακμές του κύκλου ισόποσα ώστε να διατηρήσουμε τη δυνατότητα για μια νέα λύση. Για να το πετύχουμε αυτό καθορίζουμε την θετική ροή (+) στον κύκλο ως την κατεύθυνση της ροής της εισερχόμενης ακμής (π.χ. από το 2 στο 5). Έπειτα αντιστοιχούμε (+) ή (-) στις υπόλοιπες ακμές του κύκλου, ανάλογα με το εάν η ροή σε κάθε ακμή είναι στην ίδια ή στην αντίθετη κατεύθυνση με την εισερχόμενη ακμή. Αυτά τα πρόσημα αποτυπώνονται στο σχήμα 45.

Ο ορισμός του μεγίστου επιπέδου ροής της εισερχόμενης ακμής (2,5) βασίζεται στις δύο παρακάτω προϋποθέσεις :

1. Η καινούρια ροή στις τρέχουσες ακμές του κύκλου δεν μπορεί να είναι αρνητική.

2. Η καινούρια ροή στην εισερχόμενη ακμή δεν μπορεί να υπερβαίνει την δυναμικότητα της.

Η εφαρμογή της πρώτης προϋπόθεσης μας υποδεικνύει ότι η ροή στις ακμές (2,3) και (3,5) δεν μπορεί να μειωθεί περισσότερο από το min {50,60} = 50 μονάδες. Η δεύτερη προϋπόθεση ορίζει ότι η ροή στην ακμή (2,5) μπορεί να αυξηθεί το πολύ στην τιμή της δυναμικότητας της (= 30 μονάδες). Συνεπώς η μέγιστη ροή του κύκλου αλλάζει και ισούται με το min {30,50} = 30 μονάδες. Οπότε η καινούρια ροή του κύκλου είναι 30 μονάδες στην ακμή (2,5), 50-30 = 20 μονάδες στην ακμή (2,3) και 60 - 30 = 30 μονάδες στην ακμή (3,5).

Επειδή καμία από της τρέχουσες βασικές ακμές δεν φεύγει από την βάση στην επανάληψη 0, η ακμή (2,5) πρέπει να παραμείνει μη βασική στο μέγιστο όριο. Παρόλα αυτά, για να αποφευχθεί η χρήση των μη βασικών ακμών, οι οποίες έχουν περιορισμένη δυναμικότητα (ή μέγιστο όριο), εφαρμόζουμε την εξής αντικατάσταση :

$$x_{25} = 30 - x_{52} \ , \ 0 \le x_{52} \le 30$$

Αυτή η αντικατάσταση εφαρμόζεται στις εξισώσεις ροής που σχετίζονται με τους κόμβους 2 και 5 ως ακολούθως :

Τρέχουσα εξίσωση ροής στον κόμβο 2 : $50 + x_{12} = x_{23} + x_{25}$

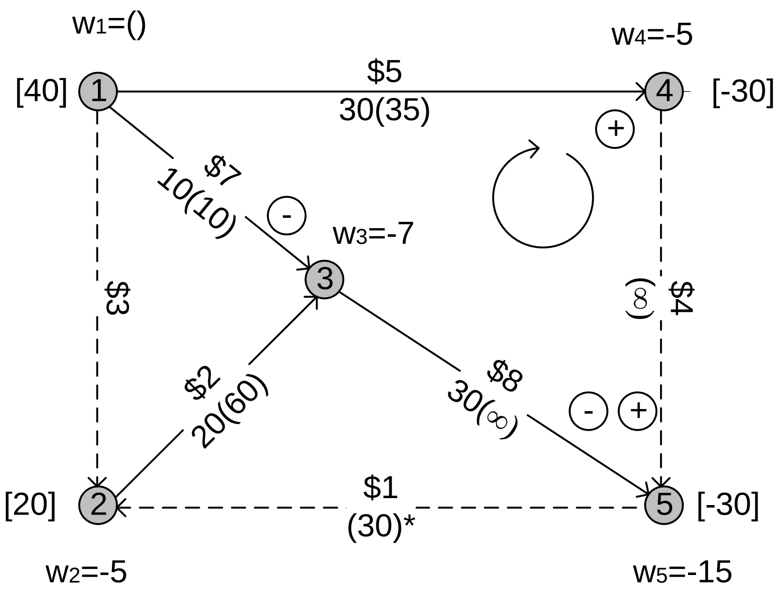
Τρέχουσα εξίσωση ροής στον κόμβο 5 : $x_{25} + x_{35} + x_{45} = 60$

Οπότε η εξίσωση $x_{25} = 30 - x_{52}$ δίνει :

Νέα εξίσωση ροής στον κόμβο 2 : $20 + x_{12} + x_{52} = x_{23}$

Νέα εξίσωση ροής στον κόμβο 5 : $x_{35} + x_{45} = x_{52} + 30$

Τα αποτελέσματα αυτών των αλλαγών παρουσιάζονται στο σχήμα 46. Η κατεύθυνση της ροής στην ακμή (2,5) έχει πλέον αντιστραφεί σε 5 → 2 με $x_{52} = 0$. Η αντικατάσταση απαιτεί επίσης αλλαγή του μοναδιαίου κόστους της ακμής (5,2) σε -\$1. Θα επισημάνουμε αυτή την αντιστροφή της ροής του δικτύου τοποθετώντας στην ακμή έναν αστερίσκο.



Σχήμα 46

Δίκτυο για την Επανάληψη 1

$$z_{12} - c_{12} = 0 - (-5) - 3 = 2$$

$$z_{52} - c_{52} = -15 - (-5) - (-1) = -9$$

$$z_{45} - c_{45} = -5 - (-15) - 4 = 6$$

Η ακμή (4,5) εισέρχεται στο επίπεδο 5.

Η ακμή (1,4) εξέρχεται στο μέγιστο όριο.

Αντικατάσταση : $x_{14} = 35 - x_{41}$.

Μείωση των x_{13} και x_{35} το καθένα κατά 5.

Επανάληψη 2.

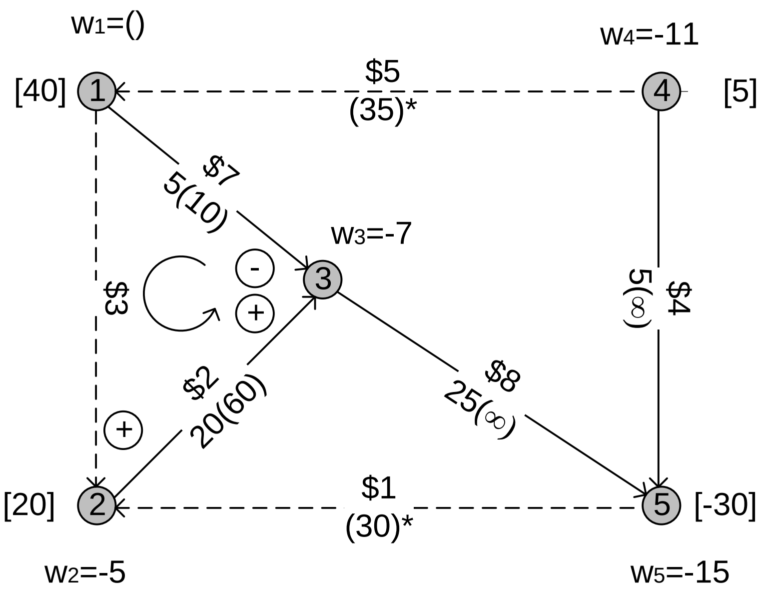
Το σχήμα 46 συνοψίζει τις νέες τιμές των $z_{ij} - c_{ij}$ (επαλήθευση) και μας δείχνει ότι η ακμή (4,5) εισέρχεται στην βασική λύση. Επίσης ορίζει τον κύκλο που συνδέεται με την εισερχόμενη ροή και επισημαίνει τα πρόσημα στις ακμές.

Η ροή στην ακμή (4,5) μπορεί να αυξηθεί κατά το μικρότερο των :

1. Μέγιστη επιτρεπόμενη αύξηση στην εισερχόμενη ακμή (4,5)=∞
2. Μέγιστη επιτρεπόμενη αύξηση στην ακμή (1,4)= 35–30= 5 μονάδες.
3. Μέγιστη επιτρεπόμενη μείωση στην ακμή (1,3) = 10 μονάδες.
4. Μέγιστη επιτρεπόμενη μείωση στην ακμή (3,5) = 30 μονάδες.

Συνεπώς, η ροή στην ακμή (4,5) μπορεί να αυξηθεί 5 μονάδες, το οποίο μετατρέπει την ακμή (4,5) σε βασική και αναγκάζει την βασική ακμή (1,4) να μετατραπεί σε μη βασική στο άνω όριο της (=35).

Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x_{14} = 35 - x_{41}$, το δίκτυο αλλάζει όπως φαίνεται στο σχήμα 47, με της ακμές (1,3), (2,3), (3,5) και (4,5) να αποτελούν την βασική εφικτή λύση (ζευγνύον δέντρο). Η αντιστροφή της ροής στην ακμή (1,4) μετατρέπει το μοναδιαίο κόστος σε -\$5. Ακόμα, πρέπει να κατανοήσουμε ότι η αντικατάσταση στις εξισώσεις ροής των κόμβων 1 και 4 έχει καθαρά εισερχόμενες 5 μονάδες σε κάθε κόμβο.



Σχήμα 47

Δίκτυο για την Επανάληψη 2

$$z_{12} - c_{12} = 0 - (-5) - 3 = 2$$

$$z_{41} - c_{41} = -11 - 0 - (-5) = -6$$

$$z_{52} - c_{52} = -15 - (-5) - (-1) = -9$$

Η ακμή (1,2) εισέρχεται στο επίπεδο 5.

Η ακμή (1,3) εξέρχεται στο επίπεδο 0.

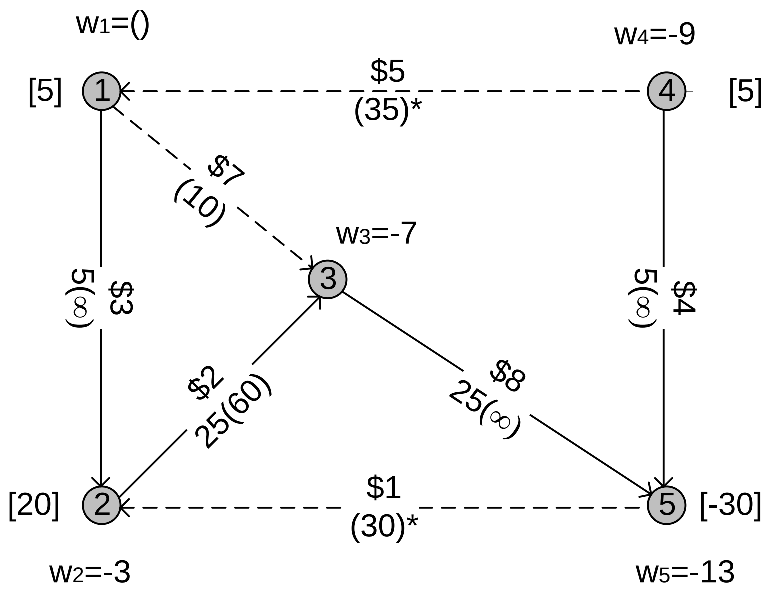
Αύξηση του x_{23} κατά 5 μανάδες

Επανάληψη 3.

Ο υπολογισμός των καινούριων $z_{ij} - c_{ij}$ για τις μη βασικές ακμές (1,2), (4,1) και (5,2) συνοψίζεται στο σχήμα 47, το οποίο δείχνει ότι η ακμή (1,2) εισέρχεται στο επίπεδο 5 και η ακμή (1,3) μετατρέπεται σε μη βασική στο επίπεδο 0. Η καινούρια λύση αποτυπώνεται στο σχήμα 48.

Επανάληψη 4.

Τα καινούρια $z_{ij} - c_{ij}$ μας δείχνουν ότι η λύση είναι βέλτιστη. Οι τιμές για τις πραγματικές μεταβλητές λαμβάνονται από την αντίστροφη αντικατάσταση όπως φαίνεται στο σχήμα 48.



Σχήμα 48

Δίκτυο για την Επανάληψη 3

$$z_{13} - c_{13} = 0 - (-5) - 7 = -2$$

$$z_{41} - c_{41} = -9 - 0 - (-5) = -4$$

$$z_{52} - c_{52} = -13 - (-3) - (-1) = -9$$

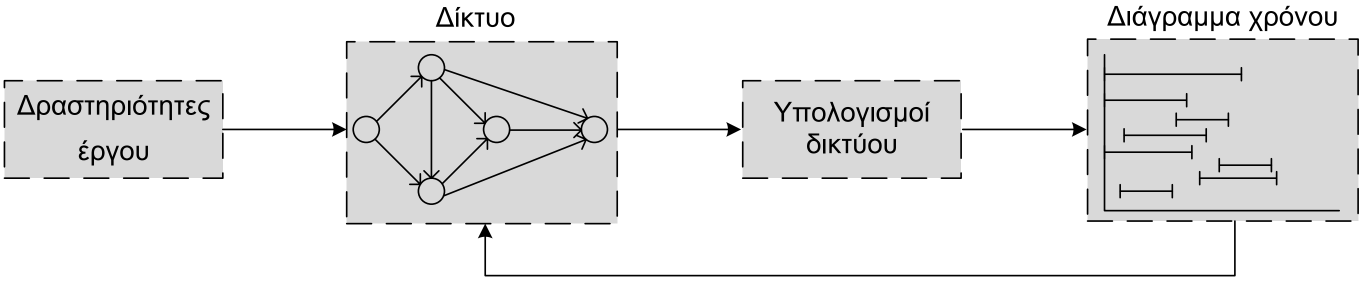
Βέλτιστη λύση :

$x_{12} = 5$	$x_{23} = 25$	$x_{35} = 25$	$x_{45} = 5$
$x_{13} = 0$	$x_{25} = 30 - 0 = 30$		
$x_{14} = 35 - 0 = 35$			

Συνολικό κόστος : \$3 x_{12} + \$7 x_{13} + \$5 x_{14} + \$2 x_{23} + \$1 x_{25} + \$8 x_{35} + \$4 x_{45} =
\$3x5 + \$7x0 + \$5x35 + \$2x25 + \$1x30 + \$8x25 + \$4x5 =
\$490.

5. Μέθοδοι Δικτυακής Ανάλυσης CPM και PERT

Η μέθοδος CPM (Critical Path Method, Μέθοδος Κρίσιμης Διαδρομής) και η μέθοδος PERT (Program Evaluation and Review Technique, Πρόγραμμα Αξιολόγησης και Τεχνικής Αναθεώρησης) είναι μέθοδοι βασισμένες σε δικτυακά μοντέλα και σχεδιασμένες για βοηθούν στον σχεδιασμό, τον προγραμματισμό και τον έλεγχο των έργων. Ένα έργο αποτελείται από μία συλλογή αλληλένδετων δραστηριοτήτων καθεμία από τις οποίες καταναλώνει χρόνο και πόρους. Το αντικείμενο των μεθόδων CPM και PERT είναι η παροχή αναλυτικών πλάνων για τον προγραμματισμό των δραστηριοτήτων. Στο σχήμα 49 βλέπουμε συνοπτικά τα βήματα αυτών των τεχνικών. Πρώτα καθορίζουμε τις δραστηριότητες του έργου, την σειρά προτεραιότητας τους και τον απαιτούμενο χρόνο. Έπειτα το έργο παίρνει την μορφή ενός δικτύου στο οποίο αποτυπώνεται η σειρά προτεραιότητας μεταξύ των δραστηριοτήτων. Το τρίτο βήμα εμπεριέχει ειδικές συλλογές δικτύων που αποτελούν τη βάση για την ανάπτυξη του διαγράμματος χρόνου του έργου.



Σχήμα 49

Στάδια για τον σχεδιασμό έργων με

την βοήθεια των μεθόδων CPM και PERT.

Κατά την διάρκεια εκτέλεσης του έργου, το διάγραμμα ενδέχεται να υλοποιείται όπως έχει σχεδιαστεί, εξαιτίας μερικών επισπεύσεων ή καθυστερήσεων ορισμένων διαδικασιών. Σε αυτή την περίπτωση είναι απαραίτητο να ανανεώσουμε το διάγραμμα ώστε να αντικατοπτρίζει την πραγματικότητα. Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο εμπεριέχεται ένας βρόχος μεταξύ της φάσης διαγράμματος χρόνου και της φάσης του δικτύου, όπως φαίνεται και στο σχήμα 49.

Οι μέθοδοι CPM και PERT, οι οποίες αναπτύσσονται ανεξάρτητα, διαφέρουν στο ότι η μέθοδος CPM υιοθετεί μια ντετερμινιστική προσέγγιση, ενώ η μέθοδος PERT υιοθετεί μία πιθανοθεωριτική προσέγγιση.

5.1. Δικτυακή Αναπαράσταση

Κάθε δραστηριότητα του έργου αναπαριστάται από μία ακμή κατευθυνόμενη προς την σειρά αποπεράτωσης του. Οι κόμβοι του δικτύου ορίζουν την σειρά προτεραιότητας μεταξύ των διάφορων δραστηριοτήτων του έργου, δηλαδή τα γεγονότα. Το μήκος της ακμής καθώς και το σχήμα του κόμβου δεν αντιστοιχούν σε κάποιο φυσικό μέγεθος. Συνήθως το δίκτυο έχει ροή από αριστερά, που βρίσκεται ο κόμβος αφετηρίας, προς τα δεξιά, δηλαδή προς τον τερματικό κόμβο. Μία δραστηριότητα Α προηγείται μίας δραστηριότητας Β όταν ο τερματικός κόμβος της Α προηγείται του κόμβου αφετηρίας της Β. Κάθε δραστηριότητα έχει αρχή και τέλος και ξεκινά μόνο όταν τελειώσουν όλες οι δραστηριότητες που προηγούνται. Μόνο μία δραστηριότητα μπορεί να υπάρχει μεταξύ δύο γεγονότων.

Δύο σημαντικοί κανόνες είναι απαραίτητοι για την κατασκευή του δικτύου.

Κανόνας 1. Κάθε δραστηριότητα αναπαριστάται από μία και μόνο ακμή.

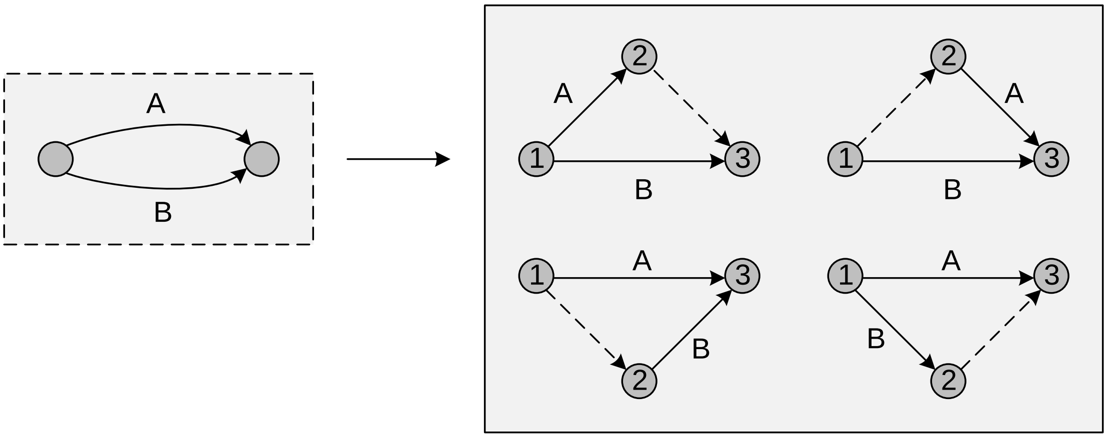
Κανόνας 2. Κάθε δραστηριότητα πρέπει να προσδιορίζεται από δύο διαφορετικούς κόμβους (έναν κόμβο αφετηρίας και έναν τερματικό κόμβο).

Σε ένα δίκτυο δεν επιτρέπονται δραστηριότητες χωρίς να υπάρχει επόμενη εκτός βέβαια από την τελευταία δραστηριότητα, καθώς επίσης και ανεξάρτητα γεγονότα, γεγονότα δηλαδή που δεν συνδέονται με καμία δραστηριότητα.

Μόνο ένα γεγονός αρχής και ένα γεγονός τερματισμού, που αποτελεί και τον τερματισμό του έργου, υπάρχουν σε ένα δίκτυο.

Σε αρκετά δίκτυα εφαρμόζεται η χρήση τεχνητών δραστηριοτήτων. Δραστηριοτήτων δηλαδή που αποτελούν αναμονή και έχουν διάρκεια αλλά δεν έχουν κόστος. Συχνή είναι και η χρήση εικονικών δραστηριοτήτων οι οποίες δεν έχουν ούτε διάρκεια αλλά ούτε και κόστος. Οι εικονικές (πλασματικές) δραστηριότητες απεικονίζονται με διακεκομμένα βέλη, έχουν μηδενική διάρκεια και δεν απαιτούν καθόλου πόρους.

Στο σχήμα 50 αποτυπώνεται πως μια εικονική (πλασματική) δραστηριότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εκπροσωπήσει δύο ταυτόχρονες δραστηριότητες A και B. Εξ' ορισμού, μία εικονική δραστηριότητα, η οποία συνήθως απεικονίζεται από μία διακεκομμένη ακμή, δεν καταναλώνει χρόνο ή πόρους. Εισάγοντας μία εικονική δραστηριότητα με έναν από τους τέσσερις τρόπους που φαίνονται στο σχήμα 50 διατηρούμε τις ιδιότητες των A και B, καθώς επίσης ορίζουν μοναδικούς τερματικούς κόμβους για τις δύο αυτές δραστηριότητες (ικανοποιώντας τον κανόνα 2).



Σχήμα 50

Χρήση εικονικής δραστηριότητας ώστε να

πραγματοποιηθούν δύο ταυτόχρονες δραστηριότητες.

Κανόνας 3. Για να διατηρήσουμε τις σχέσεις προτεραιότητας, οι ακόλουθες προτάσεις θα πρέπει να συνοδεύουν κάθε δραστηριότητα που εισέρχεται στο δίκτυο :

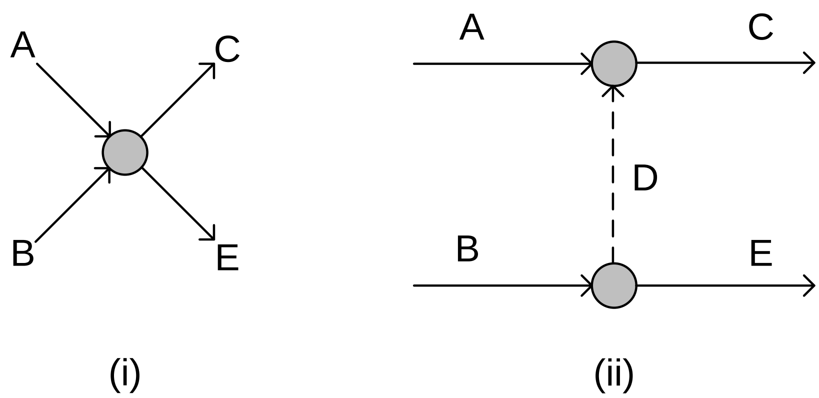
(1) Ποίες δραστηριότητες πραγματοποιούνται αμέσως πριν την τρέχουσα δραστηριότητα;
(2) Ποίες δραστηριότητες ακολουθούν την τρέχουσα δραστηριότητα;
(3) Ποίες δραστηριότητες συμβαίνουν παράλληλα με την τρέχουσα δραστηριότητα;

Οι απαντήσεις των παραπάνω ερωτημάτων δικαιολογούν την χρήση των εικονικών δραστηριοτήτων εξασφαλίζοντας την προτεραιότητα των δραστηριοτήτων.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε το ακόλουθο κομμάτι ενός έργου :

1. Η δραστηριότητα C ξεκινάει αμέσως μόλις ολοκληρωθούν οι δραστηριότητες A και B.
2. Η δραστηριότητα E ξεκινάει μόλις η δραστηριότητα B έχει ολοκληρωθεί.

Στο σχήμα 51 στο (i) παρουσιάζεται η λανθασμένη αναπαράσταση των σχέσεων προτεραιότητας επειδή είναι απαραίτητο να έχουν ολοκληρωθεί και οι δύο δραστηριότητας A και B πριν ξεκινήσει η δραστηριότητα E. Στο (ii) με την χρήση μίας εικονικής δραστηριότητας επιτυγχάνουμε την λύση του προβλήματος που δημιουργήθηκε.



Σχήμα 51

Χρήση εικονικής δραστηριότητας για την

εξασφάλιση τις προτεραιότητας των δραστηριοτήτων.

Εικονικές (πλασματικές) δραστηριότητες χρησιμοποιούμε για διαφόρους λόγους όπως για την απεικόνιση δραστηριοτήτων με κοινούς κόμβους αφετηρίας και τερματισμού καθώς επίσης και για την απεικόνιση σύνθετων σχέσεων αλληλουχίας, για παράδειγμα όταν μία δραστηριότητα έπεται μόνος ενός τμήματος μιας άλλης δραστηριότητας ή όταν σε ένα κόμβο εισέρχεται μία δραστηριότητα η οποία δεν προηγείται όλων των δραστηριοτήτων που εξέρχονται από τον κόμβο. Οι εικονικές δραστηριότητες είναι πολύ χρήσιμες στην περίπτωση που θέλουμε να αποφύγουμε παραπάνω από ένα γεγονός (κόμβος) αφετηρίας και ένα γεγονός τερματισμού.

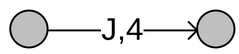
5.1.1. Παράδειγμα :

Ένας εκδότης έχει συμβόλαιο με έναν συγγραφέα με σκοπό την έκδοση ενός συγγράμματος. Οι (απλοποιημένες) δραστηριότητες που συνδέονται με την δημιουργία του συγγράμματος δίνονται παρακάτω. Θα αναπτύξουμε το δίκτυο για το έργο αυτό.

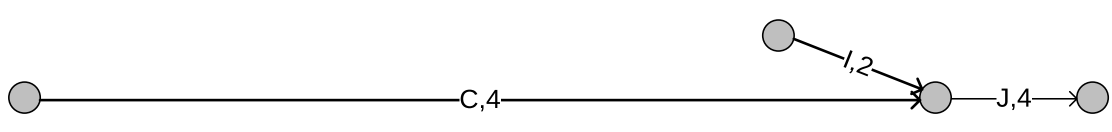
Δραστηριότητα	Προηγούμενη(ες)	Διάρκεια
A: διόρθωση χειρόγραφου από τον εκδότη	—	3
B: δημιουργία δείγματος από το τυπογραφείο	—	2
C: σχεδίαση εξωφύλλου	—	4
D: καλλιτεχνική προετοιμασία των εικόνων του βιβλίου	—	3
E: έγκριση του συγγραφέα των χειρόγραφων και του δείγματος	A, B	2
F: στοιχειοθεσία του βιβλίου	E	2
G: έλεγχος στοιχειοθετημένων σελίδων από τον συντάκτη	F	2
H: έλεγχος της εικονογράφησης από τον συγγραφέα	D	1
I: παραγωγή πλακών εκτύπωσης	G, H	2
J: παραγωγή του βιβλίου	C,I	4

Πίνακας …

Ξεκινάμε την διαδικασία κατασκευής του δικτύου με την εύρεση της τελευταίας (ή των τελευταίων) δραστηριότητας. Όπως παρατηρούμε στον πίνακα … δεν υπάρχει καμία δραστηριότητα που να έχει ως προηγούμενη της την δραστηριότητα **J**.

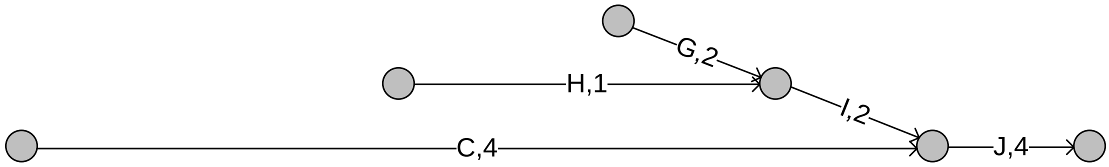


Οι δραστηριότητες **C** και **I** προηγούνται της **J** συνεπώς έχουμε :



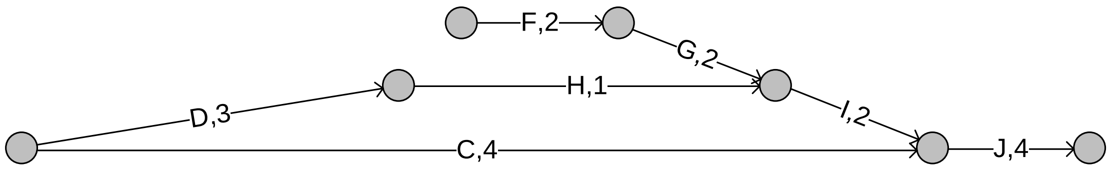
Η δραστηριότητα **C** με δεδομένο το ότι δεν έχει προηγούμενη είναι αρχική.

Οι δραστηριότητες **G** και **H** προηγούνται της **I** συνεπώς έχουμε :

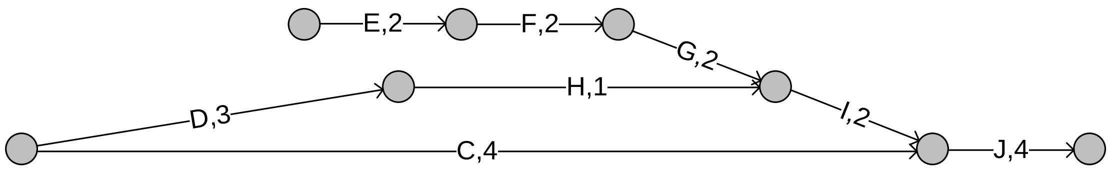


Η δραστηριότητα **D** προηγείται της **H**, και επειδή η **D** είναι αρχική (αφού δεν υπάρχει καμία δραστηριότητα που να προηγείται) έχει κοινή αρχή με την δραστηριότητα **C**.

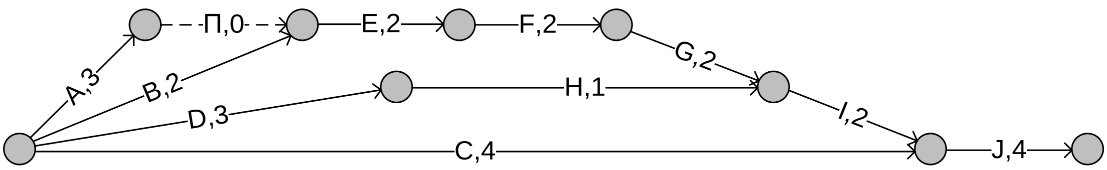
Η δραστηριότητα **F** προηγείται της **G** και συνεπώς έχουμε :



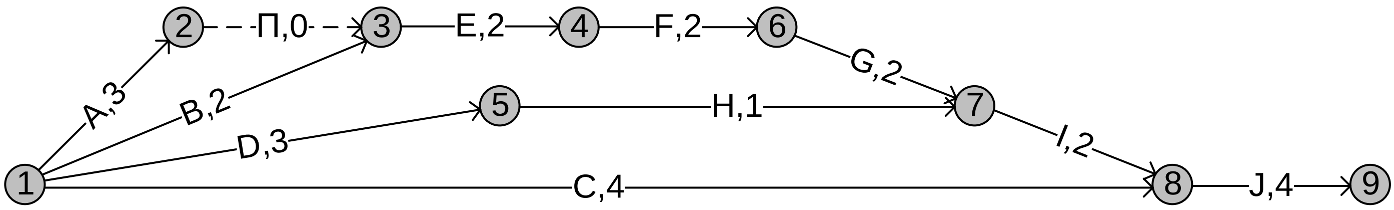
Η δραστηριότητα **E** προηγείται της **F** συνεπώς έχουμε :



Οι δραστηριότητες **A** και **B** προηγούνται της **E.** με δεδομένο ότι δεν έχουν προηγούμενες, είναι αρχικές δραστηριότητες. Επίσης από την στιγμή που έχουν κοινή αρχή, δεν μπορούν να έχουν κοινό τέλος. Για αυτό το λόγο εισάγουμε μία πλασματική δραστηριότητα **Π** (με μηδενική διάρκεια).



Στο σχήμα 52 αποτυπώνεται το δίκτυο που περιγράφει την σειρά προτεραιότητας μεταξύ των διαδικασιών. Η εικονική διαδικασία Π εξασφαλίζει ανεξάρτητο τερματικό κόμβο για τις ταυτόχρονες διαδικασίες Α και Β. Οι κόμβοι είναι αριθμημένοι σύμφωνα με την σειρά προτεραιότητας των αντίστοιχων διαδικασιών.



Σχήμα 52

Δίκτυο έργου του παραδείγματος.

Συνοπτικά οι κανόνες σχεδίασης του δικτύου είναι :

- Οι κόμβοι αναπαριστούν γεγονότα και οι ακμές δραστηριότητες.
- Το δίκτυο έχει ροή από τον κόμβο αφετηρίας προς τον τερματικό κόμβο.
- Μόνο ένα γεγονός αφετηρίας και μόνο ένα γεγονός τερματισμού υπάρχουν σε ένα δίκτυο.
- Κάθε δραστηριότητα έχει αρχή και τέλος.
- Μεταξύ δύο γεγονότων μόνο μία δραστηριότητα μπορεί να υπάρχει.
- Μια δραστηριότητα ξεκινά μόνο όταν τελειώσουν όλες οι δραστηριότητες που προηγούνται.
- Δεν επιτρέπονται ανεξάρτητα γεγονότα.
- Επιτρέπεται η χρήση τεχνητών δραστηριοτήτων .
- Επιτρέπεται η χρήση εικονικών (πλασματικών) δραστηριοτήτων.

5.2. Μέθοδος Κρίσιμης Διαδρομής CPM (Critical Path Method)

Η μέθοδος CPM προέκυψε ως αποτέλεσμα μιας έρευνας με στόχο την μέγιστη δυνατή μείωση το χρόνο αποπεράτωσης ενός έργου και φυσικά με το ελάχιστο δυνατό κόστος. Ένα μεγάλο πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι η εποπτεία των αλληλουχιών των δραστηριοτήτων, όπως επίσης και η απλή επίλυση τους. Αντίθετα ένα μειονέκτημα αυτής της απλότητας είναι το γεγονός ότι οι σχέσεις αλληλουχίας είναι πολύ απλές, δηλαδή μπορούμε να δούμε ποια σχέση προηγείται και ποια έπεται μια διαδικασίας, αυτό κάνει τον σχεδιασμό του δικτύου αρκετά χρονοβόρο.

Τα δικτυακά μοντέλα μπορούν να βοηθήσουν στον προγραμματισμό μεγάλων και περίπλοκων έργων τα οποία περιέχουν αρκετές δραστηριότητες. Εάν η διάρκεια κάθε δραστηριότητας είναι γνωστή τότε η μέθοδος CPM μπορεί να υπολογίσει το χρονικό διάστημα το οποίο χρειάζεται για να ολοκληρωθεί το έργο. Η μέθοδος CPM μπορεί ακόμα να χρησιμοποιηθεί για να μας βοηθήσει να υπολογίσουμε πόσο μπορεί η κάθε δραστηριότητα του έργου να καθυστερήσει χωρίς να προκαλέσει την καθυστέρηση ολοκλήρωσης του έργου.

Η μέθοδος CPM αναπτύχθηκε στις ΗΠΑ στα τέλη της δεκαετίας του 1950 από τους ερευνητές DuPont και Sperry Rand.

Χρονικά στοιχεία έργου :

Έστω ότι έχουμε μία δραστηριότητα Ω με κόμβο έναρξης τον i και κόμβο τερματισμού τον j διάρκειας $T_Ω$ (ή T_{ij}) χρονικών μονάδων. Τότε ορίζουμε :

- **Ενωρίτερος χρόνος έναρξης** της δραστηριότητας Ω (**$ES_Ω$ ή ES_{ij}**) ορίζεται ως ο συντομότερος χρόνος που μπορεί να αρχίσει η εκτέλεση της δραστηριότητας. Το μέγεθος αυτό προκύπτει από το ενωρίτερο πέρας του γεγονότος αρχής της **EF_i.**
- **Βραδύτερος χρόνος έναρξης** της δραστηριότητας Ω (**$LS_Ω$ ή LS_{ij}**) ορίζεται ως ο βραδύτερος χρόνος που επιτρέπεται να αρχίσει η δραστηριότητα ώστε να μην παραταθεί η διάρκεια του έργου. Το μέγεθος αυτό προκύπτει από το βραδύτερο πέρας του γεγονότος αρχής της **LF_i.**
- **Ενωρίτερος χρόνος πέρατος** της δραστηριότητας Ω (**$EF_Ω$ ή EF_{ij}**) ορίζεται ως ο συντομότερος χρόνος που αναμένεται να περατωθεί η δραστηριότητα. Προκύπτει από το ενωρίτερο πέρας του γεγονότος πέρατος της **EF_j.**
- **Βραδύτερος χρόνος πέρατος** της δραστηριότητας Ω (**$LF_Ω$ ή LF_{ij}**) ορίζεται ως ο βραδύτερος χρόνος που επιτρέπεται να περατωθεί η δραστηριότητα ώστε να μην παραταθεί η διάρκεια του έργου. Προκύπτει από το βραδύτερο πέρας του γεγονότος πέρατος της **LF_j.**
- **Ολικό χρονικό περιθώριο κάθε γεγονότος** του έργου (π.χ. **$ΔTo_i$** και **$ΔTo_j$** για τα γεγονότα που ορίζουν την δραστηριότητα Α) είναι το μέγιστο χρονικό διάστημα που μπορεί να καθηστερήσει η πραγματοποίηση του γεγονότος χωρίς να καθυστερήσει η εκτέλεση του έργου. Για παράδειγμα, το ολικό χρονικό περιθώριο του γεγονότος j ισούται με : **$ΔTo_j = LF_j – EF_j$**.
- **Ολικό χρονικό περιθώριο δραστηριότητας ($ΔTo_Ω$ ή $ΔTo_{ij}$)** είναι το μέγιστο χρονικό διάστημα που μπορεί να καθυστερήσει η ολοκλήρωση της δραστηριότητας χωρίς να καθυστερήσει η εκτέλεση του έργου. Ισούται με : **$ΔTo_Ω = LS_Ω - ES_Ω = LF_Ω - EF_Ω$**
- **Ελεύθερο χρονικό περιθώριο δραστηριότητας ($ΔTF_Ω$ ή $ΔTF_{ij}$)** ορίζεται ως το διάστημα που μπορεί να καθυστερήσει η ολοκλήρωση της δραστηριότητας χωρίς να καθυστερήσει η έναρξη της επόμενης δραστηριότητας. Ισούται με :

$$ΔTF_Ω = ΔTF_{ij} = \min \{ES_{jk}\} – EF_{ij} \text{ , } k \epsilon K$$

Όπου Κ το σύνολο των δραστηριοτήτων που ξεκινούν από τον κόμβο j.

- **Ανεξάρτητο χρονικό περιθώριο δραστηριότητας (ΔTI_{Ω} ή ΔTI_{ij}) :** είναι το χρονικό διάστημα ανάμεσα στο τέλος της δραστηριότητας και της ενωρίτερης έναρξης των επόμενων της, αν η δραστηριότητα ξεκινήσει το βραδύτερο δυνατό.

Ισχύει ότι : $\Delta TO_{\Omega} \geq \Delta TF_{\Omega} \geq \Delta TI_{\Omega}$

Κρίσιμη ονομάζεται μία δραστηριότητα της οποίας το ολικό χρονικό περιθώριο είναι μηδενικό, δηλαδή οι ενωρίτεροι και βραδύτεροι χρόνοι έναρξης και πέρατος της ταυτίζονται.

Κρίσιμη διαδρομή είναι μία ακολουθία κρίσιμων δραστηριοτήτων από τον κόμβο έναρξης του έργου μέχρι τον τερματικό κόμβο.

Καθυστέρηση μίας κρίσιμης δραστηριότητας σημαίνει αντίστοιχη καθυστέρηση στην περάτωση του έργου. Σε κάθε δίκτυο υπάρχει τουλάχιστον μία κρίσιμη διαδρομή. Αυτή έχει την μεγαλύτερη χρονική διάρκεια από όλους τους κάδους που οδηγούν από το γεγονός έναρξης στο γεγονός περάτωσης του έργου.

Η εύρεση της κρίσιμης διαδρομής και ο υπολογισμός της διάρκειας της, που είναι και η διάρκεια ολοκλήρωσης του έργου, είναι ο σκοπός της επίλυσης του δικτύου.

Για την επίλυση του δικτύου μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε **δύο προσεγγίσεις**. Η μία προσέγγιση βασίζεται στα **χρονικά στοιχεία των γεγονότων** ενώ η άλλη βασίζεται στα **χρονικά στοιχεία των δραστηριοτήτων**. Θα εφαρμόσουμε τις δύο αυτές προσεγγίσεις στο παρακάτω παράδειγμα για να καταλάβουμε πως λειτουργεί η μέθοδος CPM.

Παράδειγμα :

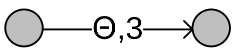
Πίνακας προτεραιότητας και διάρκειας των δραστηριοτήτων.

Δραστηριότητες	Προηγούμενες	Διάρκεια
Α	-	6
Β	-	3
Γ	-	4
Δ	Α, Β	6
Ε	Β, Γ	8
Ζ	Γ	7
Η	Δ, Ε, Ζ	5
Θ	Η	3

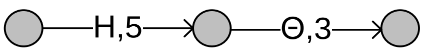
Σχεδιασμός δικτύου

Εντοπίζουμε την τελευταία δραστηριότητα. Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει δραστηριότητα για την οποία η Θ να είναι προηγούμενη.

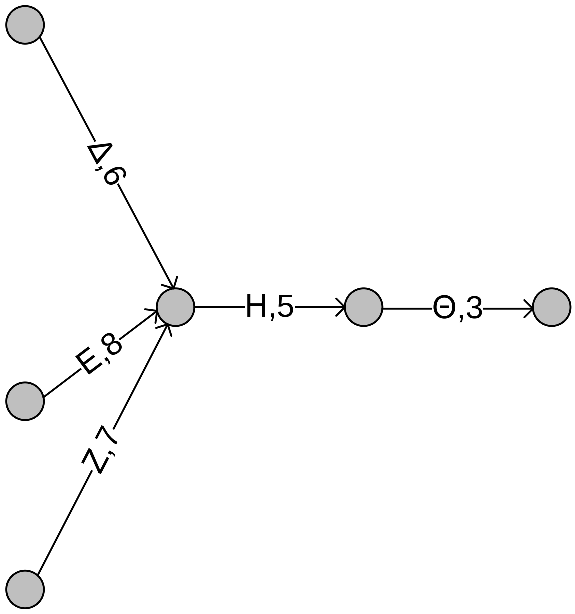
Συνεπώς :



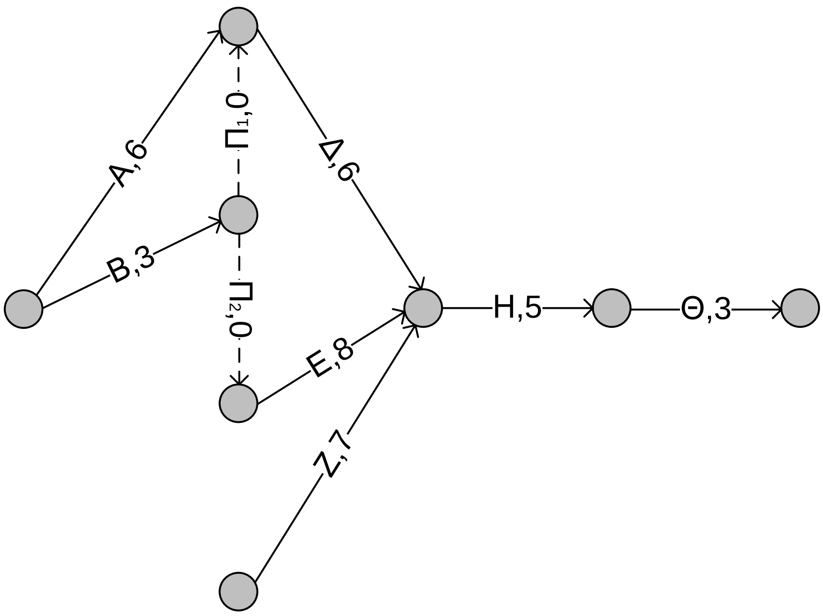
Η δραστηριότητα Η προηγείται της Θ άρα :



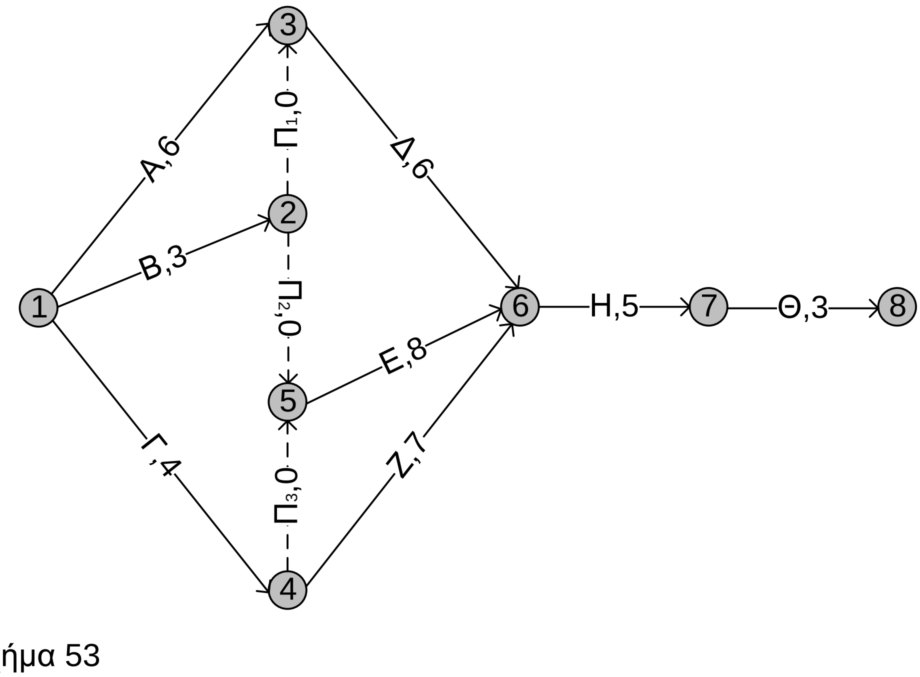
Οι δραστηριότητες Δ, Ε και Ζ προηγούνται της Η, συνεπώς :



Οι δραστηριότητες Α και Β προηγούνται της Δ. Με δεδομένο ότι δεν έχουν προηγούμενες, είναι αρχικές δραστηριότητες. Ακόμα, από τη στιγμή που έχουν κοινή αρχή δεν μπορούν να έχουν κοινό τέλος, συνεπώς εισάγουμε την πλασματική δραστηριότητα Π_1. Επιπλέον, η δραστηριότητα Β προηγείται της Ε. Αυτό εκφράζεται με την πλασματική δραστηριότητα Π_2. Συνεπώς :



Η δραστηριότητα Γ είναι αρχική δραστηριότητα. Επομένως, έχει κοινή αρχή με τις Β και Γ. Επιπλέον, προηγείται τις Ζ αλλά και της Ε. Το τελευταίο εκφράζεται με την πλασματική δραστηριότητα Π_3. Οπότε το δίκτυο του παραδείγματος έχει την τελική μορφή :



Σχήμα 53

Επίλυση του δικτύου με βάση τα χρονικά στοιχεία των γεγονότων.

Στο δίκτυο που κατασκευάσαμε προηγουμένως θα αντικαταστήσουμε τον κυκλικό συμβολισμό των κόμβων με ένα τετράγωνο της μορφής που βλέπουμε παρακάτω ώστε να εμπεριέχει τις πληροφορίες που χρειαζόμαστε.

Οι συμβολισμοί για την επίλυση του δικτύου με βάση τα χρονικά στοιχεία των γεγονότων είναι οι ακόλουθοι :

α : γεγονός

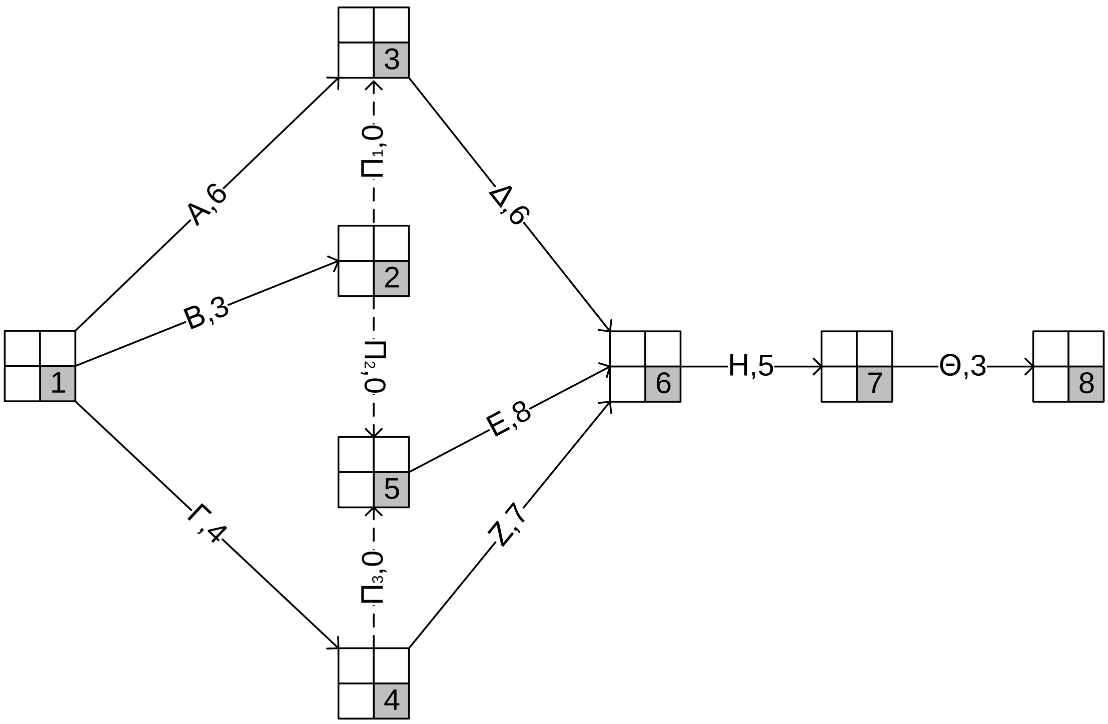
$LF_α$: βραδύτερο πέρας του γεγονότος α.

$EF_α$: ενωρίτερο πέρας του γεγονότος α.

$ΔTo_α$: ολικό χρονικό περιθώριο του γεγονότος α.

$LF_α$	$EF_α$
$ΔTo_α$	α

Συνεπώς το δίκτυο παίρνει την μορφή :



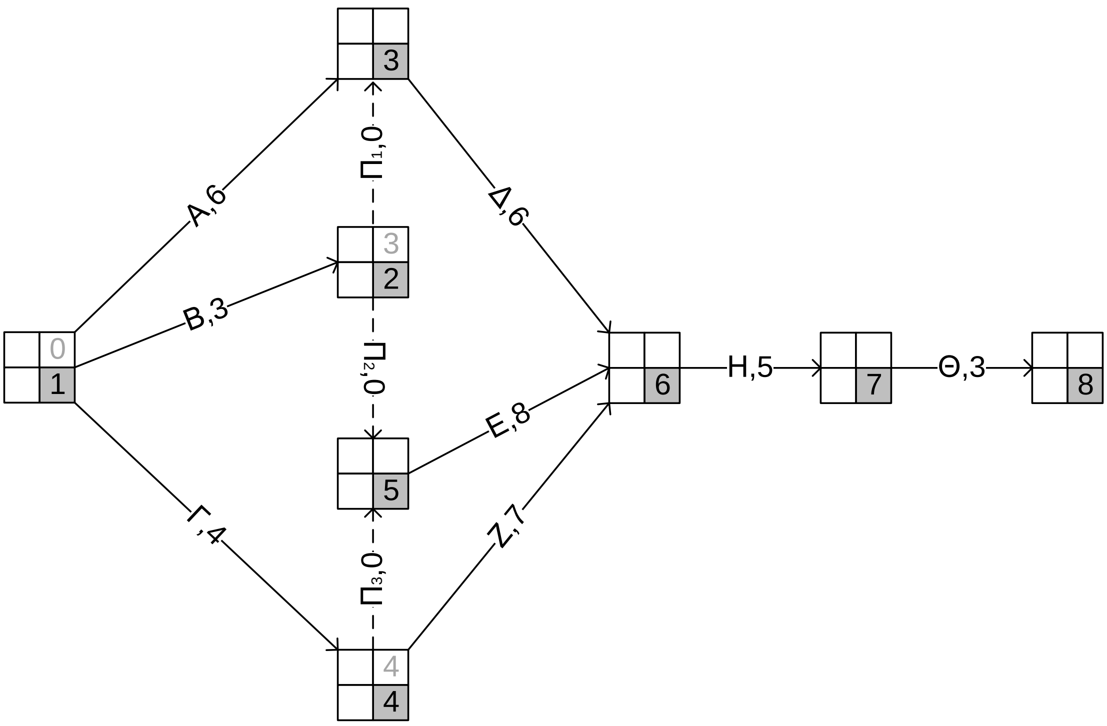
Σχήμα 54

Η επίλυση ενός δικτύου γίνεται σε δύο φάσεις. Στην πρώτη φάση κινούμαστε κατά τη φορά των βελών, από τον κόμβο έναρξης προς τον τερματικό κόμβο, αυτή η φάση λέγεται ομόρροπος υπολογισμός. Στην δεύτερη φάση κινούμαστε αντίθετα με την φορά των βελών, αυτή η φάση ονομάζεται αντίρροπος υπολογισμός.

Ομόρροπος υπολογισμός :

Ο ενωρίτερος χρόνος πέρατος του κόμβου αρχής αντιστοιχεί στην χρονική στιγμή 0. Έστω ότι ακριβώς πριν το γεγονός τα λαμβάνει χώρα μόνο το γεγονός α. Τότε, ο ενωρίτερος χρόνος πέρατος του γεγονότος τα ισούται με το άθροισμα του ενωρίτερου χρόνου πέρατος του γεγονότος α και της χρονικής δραστηριότητας που συνδέει τα γεγονότα α και τ.

Συνεπώς ισχύει : $EF_{\tau} = EF_{\alpha} + T_{\alpha\tau}$

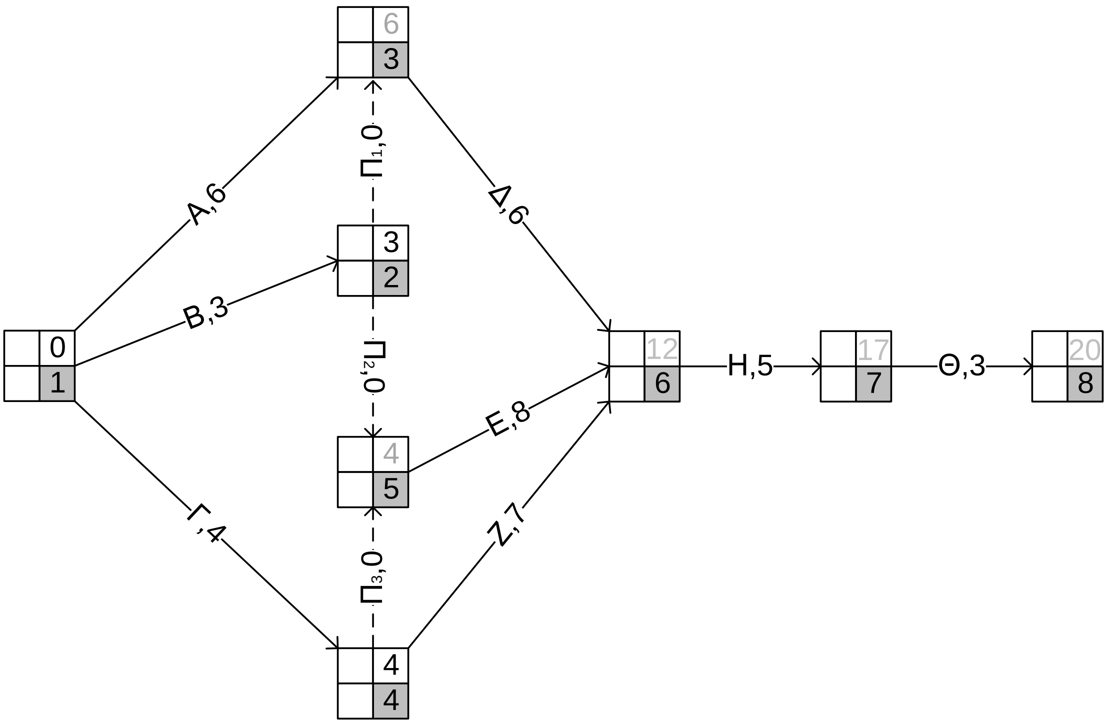


Σχήμα 55

Έστω M_T το σύνολο των γεγονότων που έχουν λάβει χώρα ακριβώς πριν το γεγονός τ.

Τότε ισχύει :

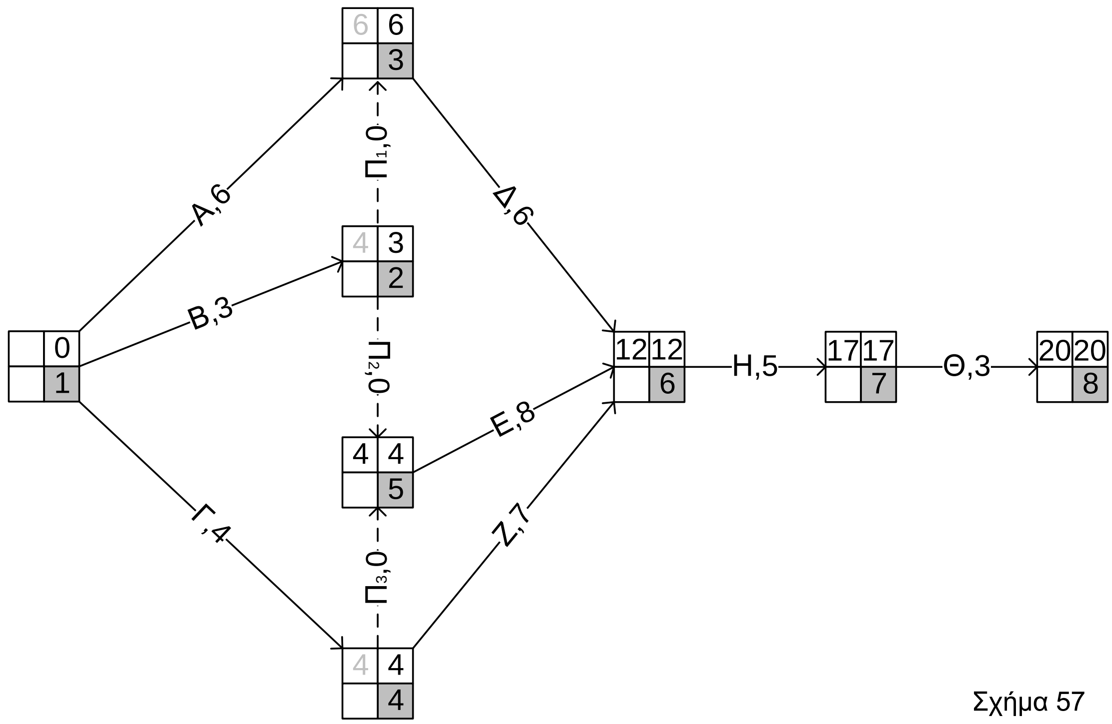
$$EF_T = MAX\ (\ EF_m + T_{m\tau}\ )\ ,\ m \in M_\tau$$



Σχήμα 56

Αντίρροπος υπολογισμός :

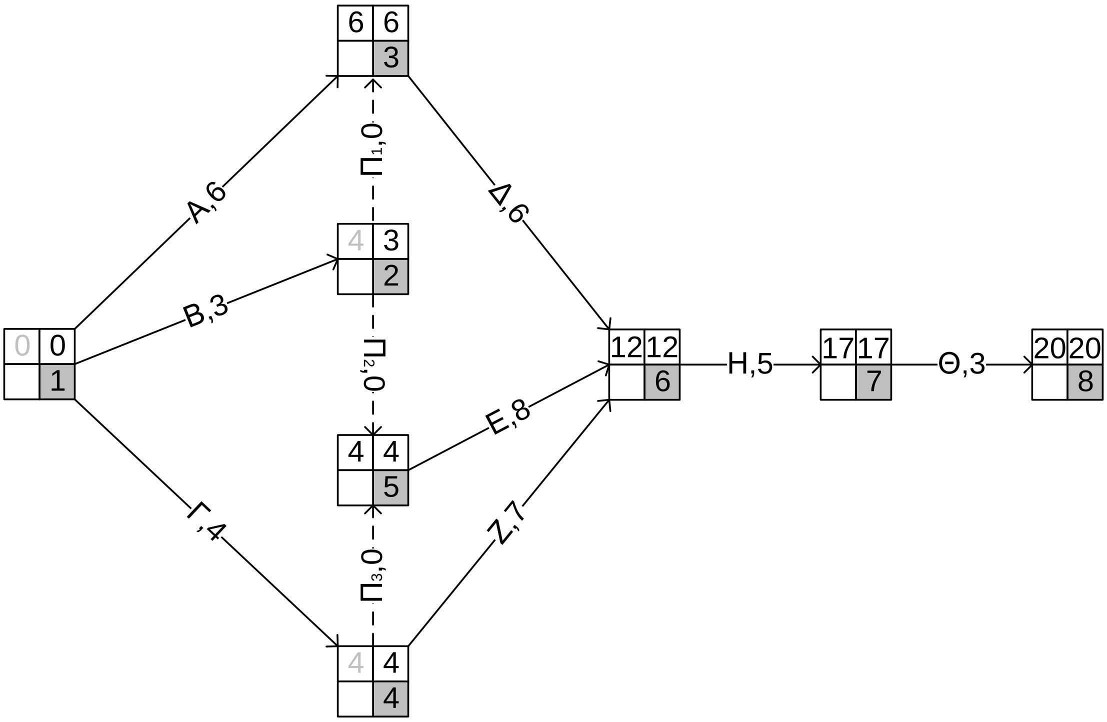
Ο βραδύτερος χρόνος πέρατος του κόμβου τέλους είναι ίσος με τον ενωρίτερο χρόνο πέρατος του. Έστω ότι μετά από το γεγονός α έχει λάβει χώρα μόνο το γεγονός τ. Τότε, ο βραδύτερος χρόνος πέρατος του γεγονότος α ισούται με τη διαφορά του βραδύτερου χρόνου πέρατος του γεγονότος τα και της χρονικής διάρκειας της δραστηριότητας που συνδέει τα γεγονότα α και τ. Ισχύει : $LF_\alpha = LF_\tau - T_{\alpha\tau}$



Σχήμα 57

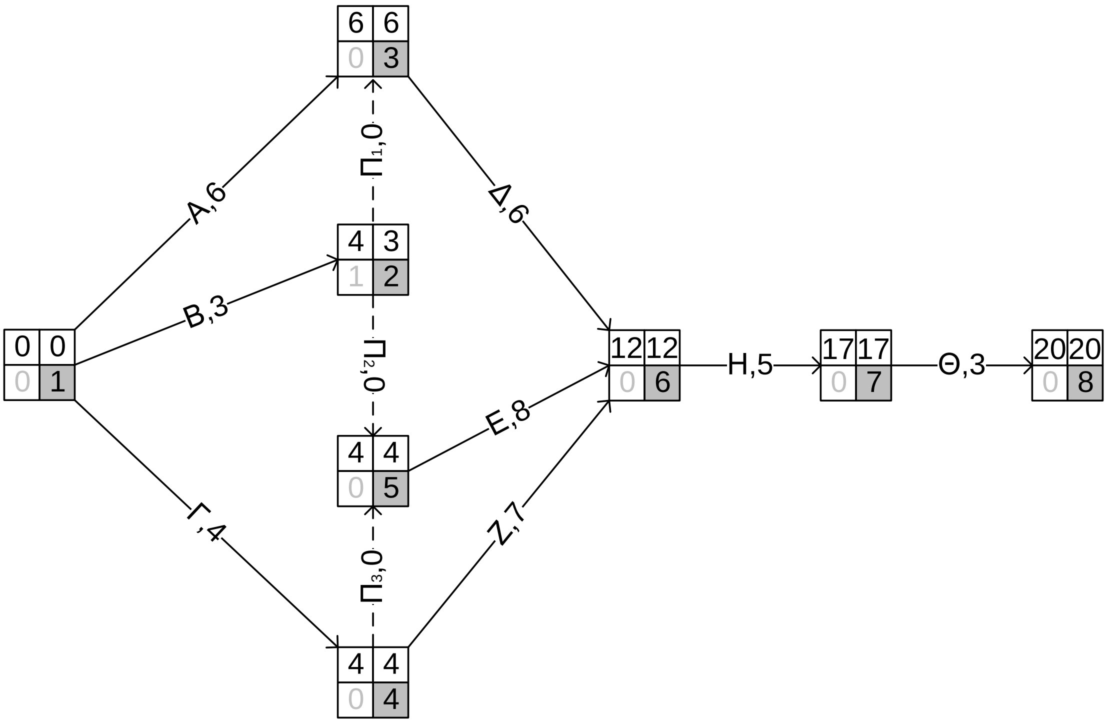
Έστω Q_α το σύνολο των γεγονότων που έχουν λάβει χώρα ακριβώς μετά το γεγονός α.

Τότε ισχύει : $LF_\alpha = MIN\ (LF_q - T_{\alpha q})\ ,\ q \in Q_\alpha$



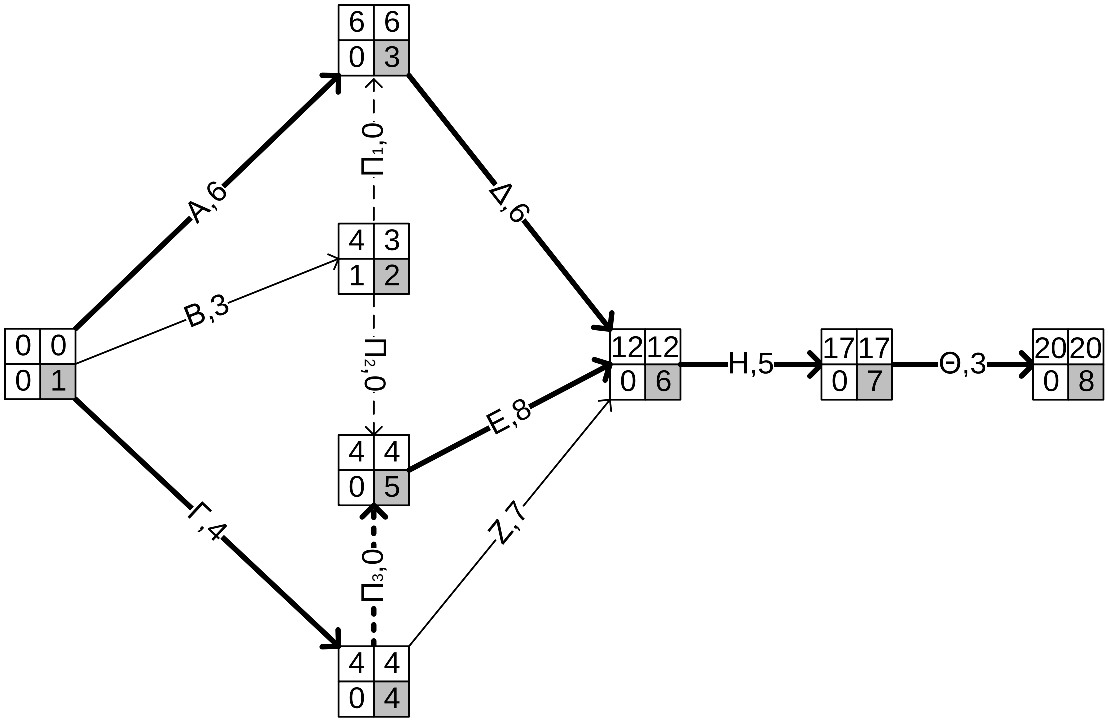
Σχήμα 58

Υπολογισμός των ολικών χρονικών περιθωρίων κάθε γεγονότος $\Delta T o_{\alpha}$.



Σχήμα 59

Από τους υπολογισμένους ενωρίτερους και βραδύτερους χρόνους των γεγονότων υπολογίζονται τα ολικά χρονικά περιθώρια των δραστηριοτήτων. Ο υπολογισμός μηδενικών ολικών χρονικών περιθωρίων σε δύο διαδοχικά γεγονότα δε συνεπάγεται ότι η δραστηριότητα που τα συνδέει είναι κρίσιμη, όπως συμβαίνει στην δραστηριότητα Ζ.



Σχήμα 60

Κρίσιμες διαδρομές :

Α – Δ – Η – Θ

Γ – $Π_3$ – Ε – Η – Θ

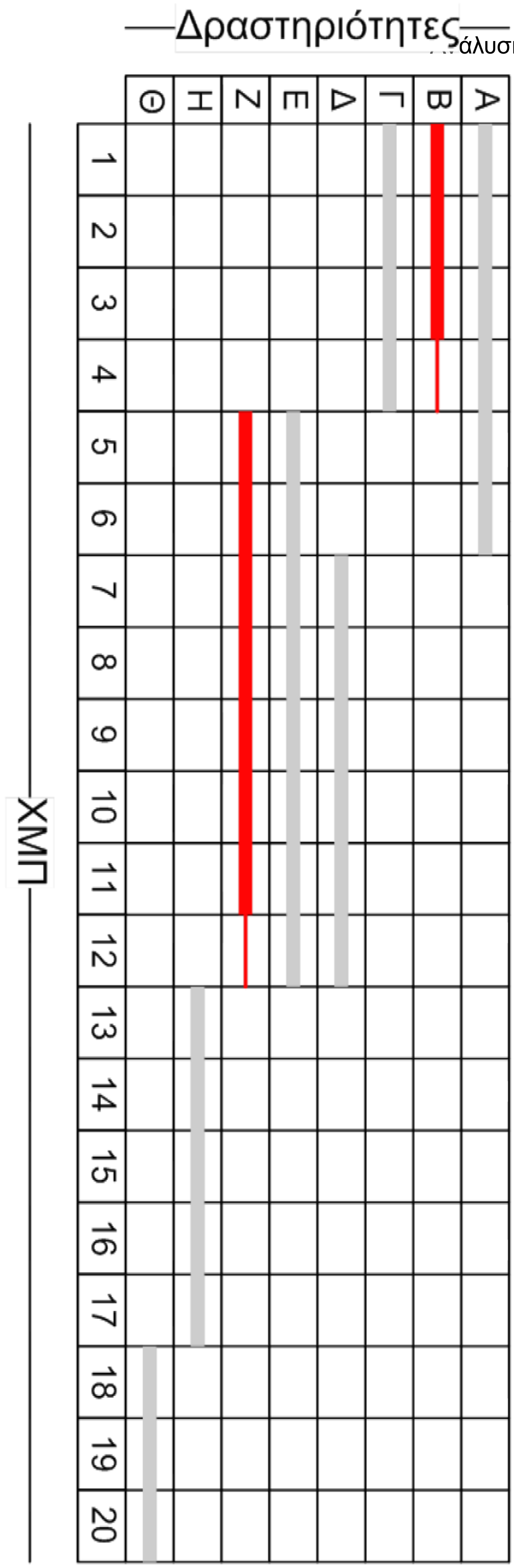
Διάρκεια έργου : 20 χρονικές μονάδες.

Διάγραμμα Gantt με βάση τους ενωρίτερους χρόνους έναρξης.

Δραστηριότητες	ES	EF	LS	LF	Δτο	ΔTF
Α	0	6	0	6	0	0
Β	0	3	1	4	1	0
Γ	0	4	0	4	0	0
$Π_1$	3	3	6	6	3	3
$Π_2$	3	3	4	4	1	1
$Π_3$	4	4	4	4	0	0
Δ	6	12	6	12	0	0
Ε	4	12	4	12	0	0
Ζ	4	11	5	12	1	1
Η	12	17	12	17	0	0
Θ	17	20	17	20	0	0

Σχήμα 61

Διάγραμμα Gantt με βάση τους ενωρίτερους χρόνους έναρξης.



Επίλυση του δικτύου με βάση τα χρονικά στοιχεία των δραστηριοτήτων.

Στο δίκτυο που κατασκευάσαμε προηγουμένως θα συμπεριλάβουμε σε κάθε ακμή που συνδέει δύο κόμβους ένα τετράγωνο της μορφής που βλέπουμε παρακάτω ώστε να εμπεριέχει τις πληροφορίες που χρειαζόμαστε.

Οι συμβολισμοί για την επίλυση του δικτύου με βάση τα χρονικά στοιχεία των δραστηριοτήτων είναι οι ακόλουθοι :

Ω : δραστηριότητα

$T_Ω$: διάρκεια δραστηριότητας

$ES_Ω$: ενωρίτερη έναρξη της δραστηριότητας Ω

$EF_Ω$: ενωρίτερο πέρας της δραστηριότητας Ω

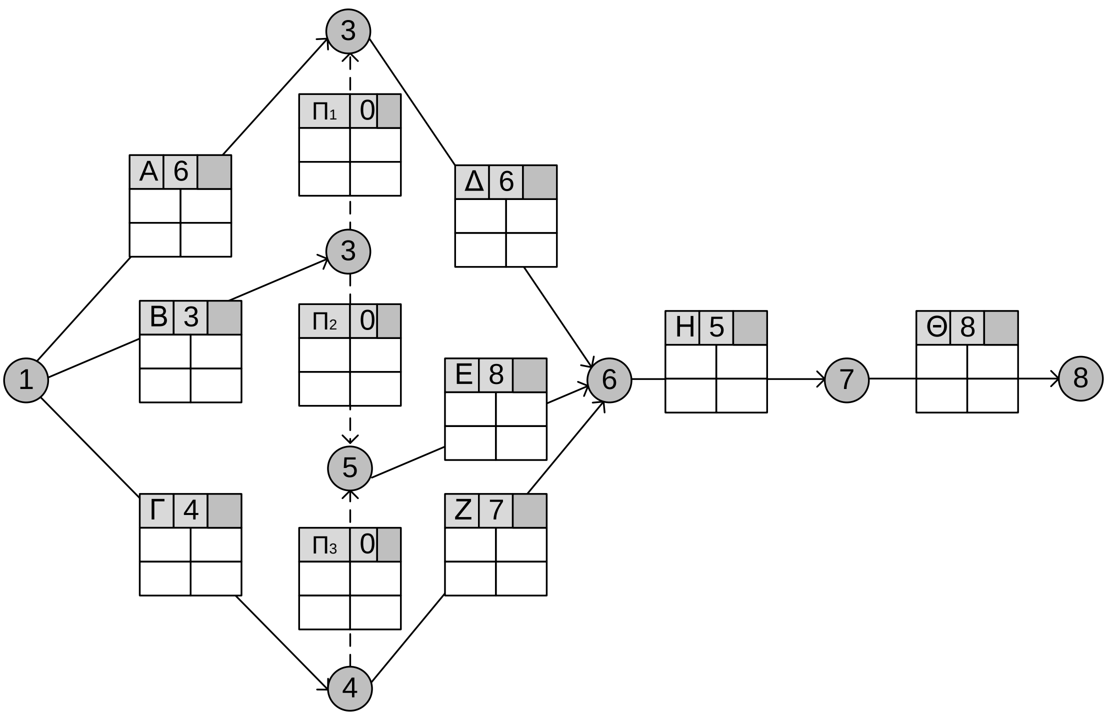
$LS_Ω$: βραδύτερη έναρξη της δραστηριότητας Ω

$LF_Ω$: βραδύτερο πέρας της δραστηριότητας Ω

$ΔTo_Ω$: ολικό χρονικό περιθώριο της δραστηριότητας Ω.

Ω	$T_Ω$	$ΔTo_Ω$
$ES_Ω$	$EF_Ω$	
$LS_Ω$	$LF_Ω$	

Συνεπώς το δίκτυο παίρνει την μορφή :



Σχήμα 62

Η επίλυση ενός δικτύου γίνεται σε δύο φάσεις.

Στην πρώτη φάση κινούμαστε κατά τη φορά των βελών, από τον κόμβο έναρξης προς τον κόμβο τερματισμού (ομόρροπος υπολογισμός).

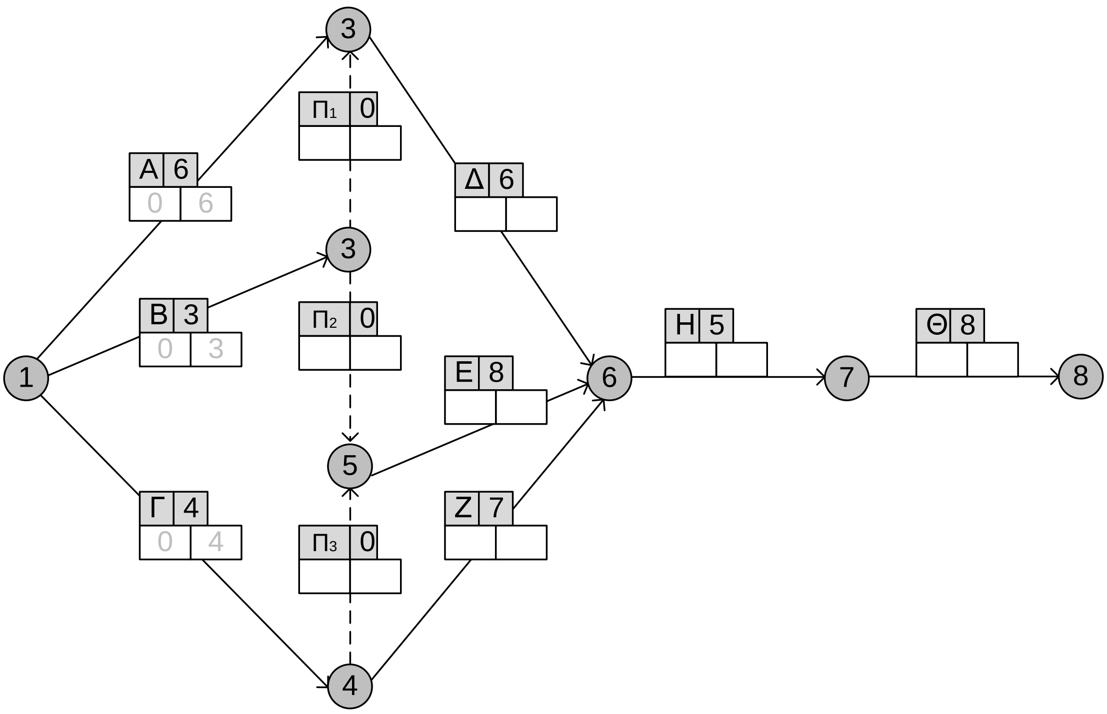
Στη δεύτερη φάση κινούμαστε αντίθετα από τη φορά των βελών, δηλαδή κινούμαστε από τον κόμβο τερματισμού προς τον κόμβο έναρξης (αντίρροπος υπολογισμός).

Ομόρροπος υπολογισμός :

Ο ενωρίτερος χρόνος έναρξης των αρχικών δραστηριοτήτων αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή 0.

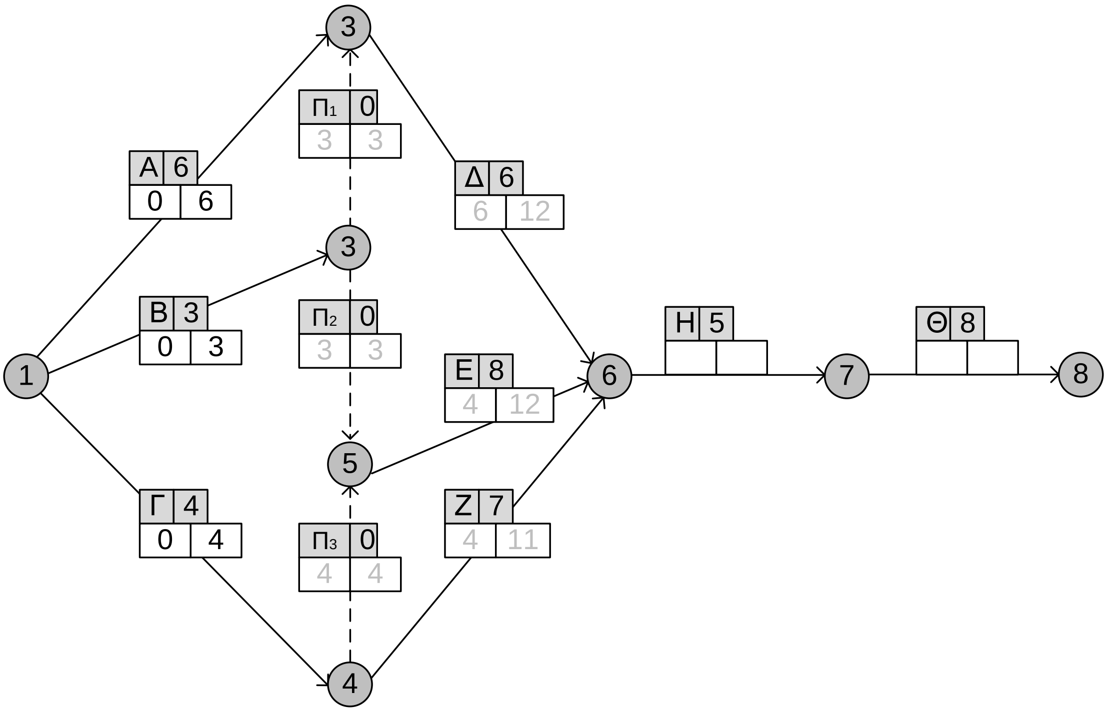
Υπολογίζουμε τους ενωρίτερους χρόνους έναρξης και τερματισμού.

Ισχύει : $EF_{\Omega} = ES_{\Omega} + T_{\Omega}$

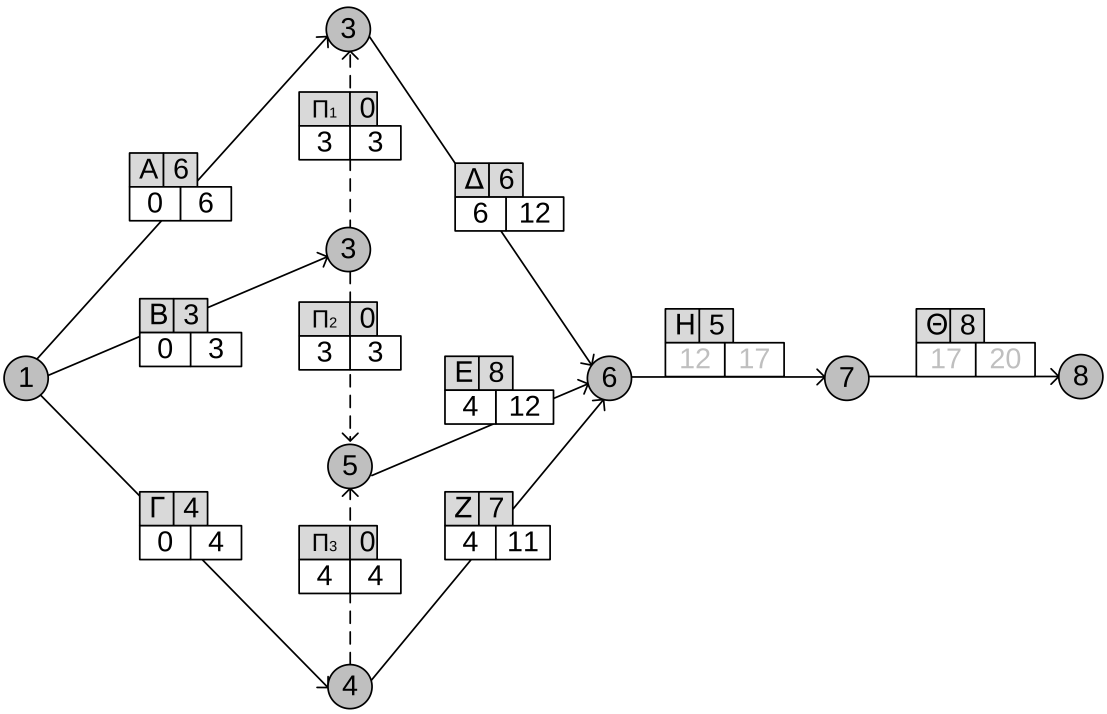


Σχήμα 63

Ο ενωρίτερος χρόνος έναρξης μίας δραστηριότητας ισούται με το μεγαλύτερο από τους ενωρίτερους χρόνους τερματισμού των αμέσως προηγούμενων δραστηριοτήτων.



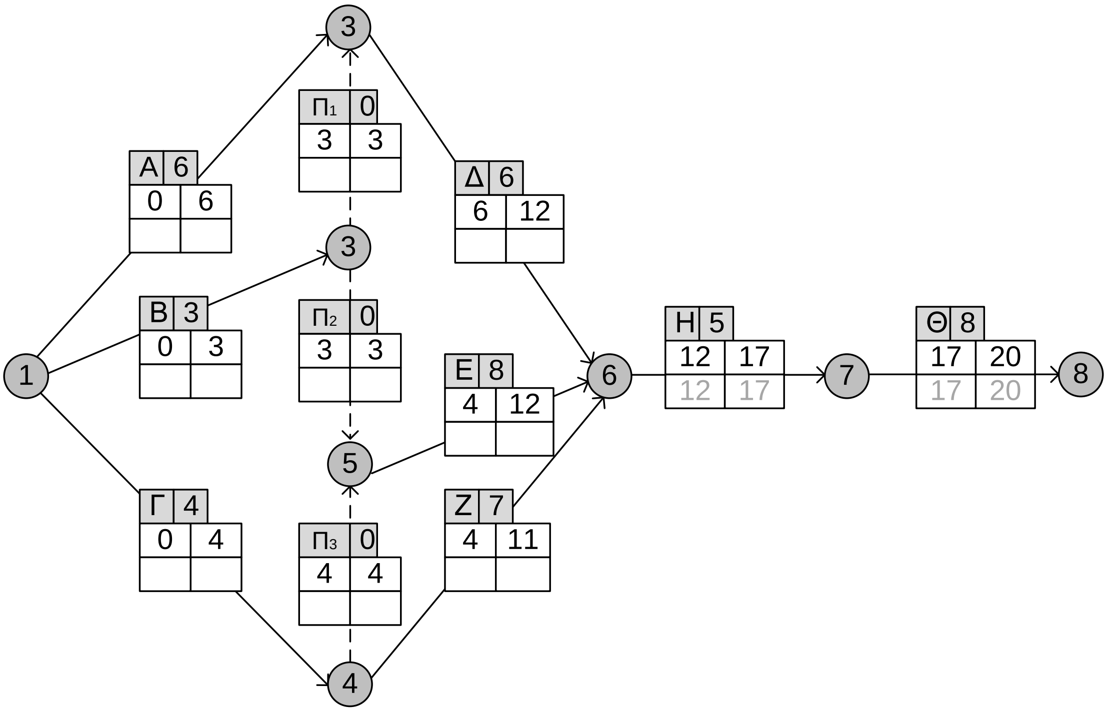
Σχήμα 64



Σχήμα 65

Αντίρροπος υπολογισμός :

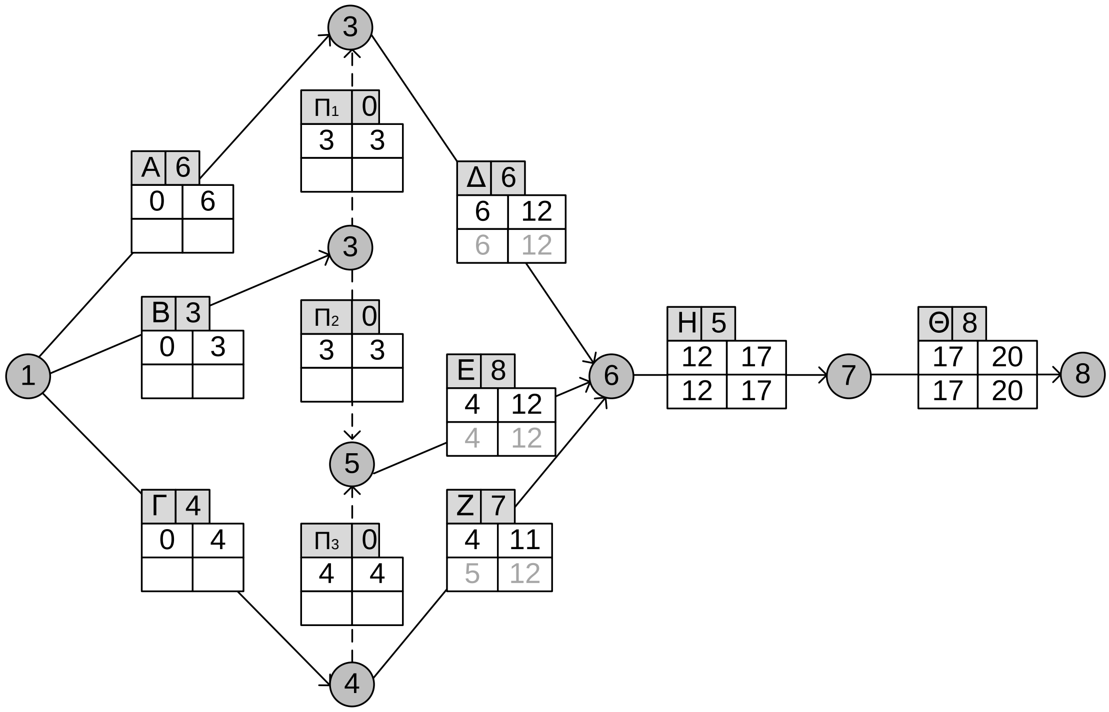
Ο βραδύτερος χρόνος τερματισμού της τελικής δραστηριότητας θεωρείται ίσος με τον ενωρίτερο χρόνο τερματισμού της.



Σχήμα 66

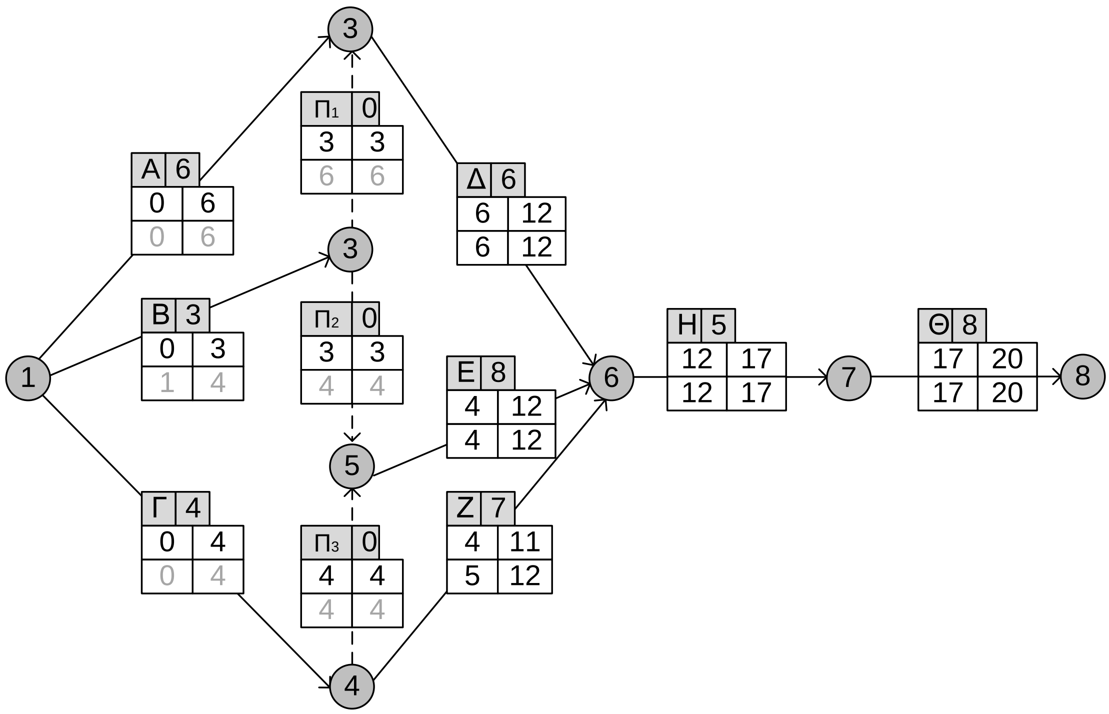
Υπολογίζουμε τους βραδύτερους χρόνους έναρξης και τερματισμού.

Ισχύει : $LS_{\Omega} = LF_{\Omega} - T_{\Omega}$



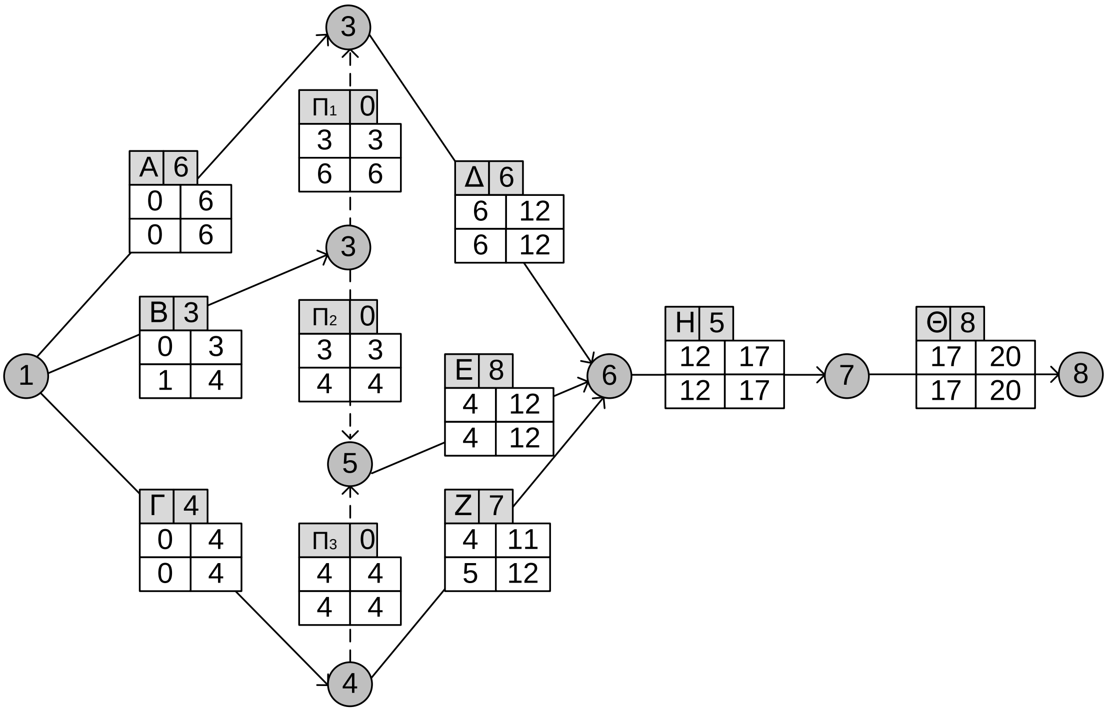
Σχήμα 67

Ο βραδύτερος χρόνος τερματισμού μίας δραστηριότητας ισούται με το μικρότερο από τους βραδύτερους χρόνους έναρξης των αμέσως επόμενων δραστηριοτήτων.



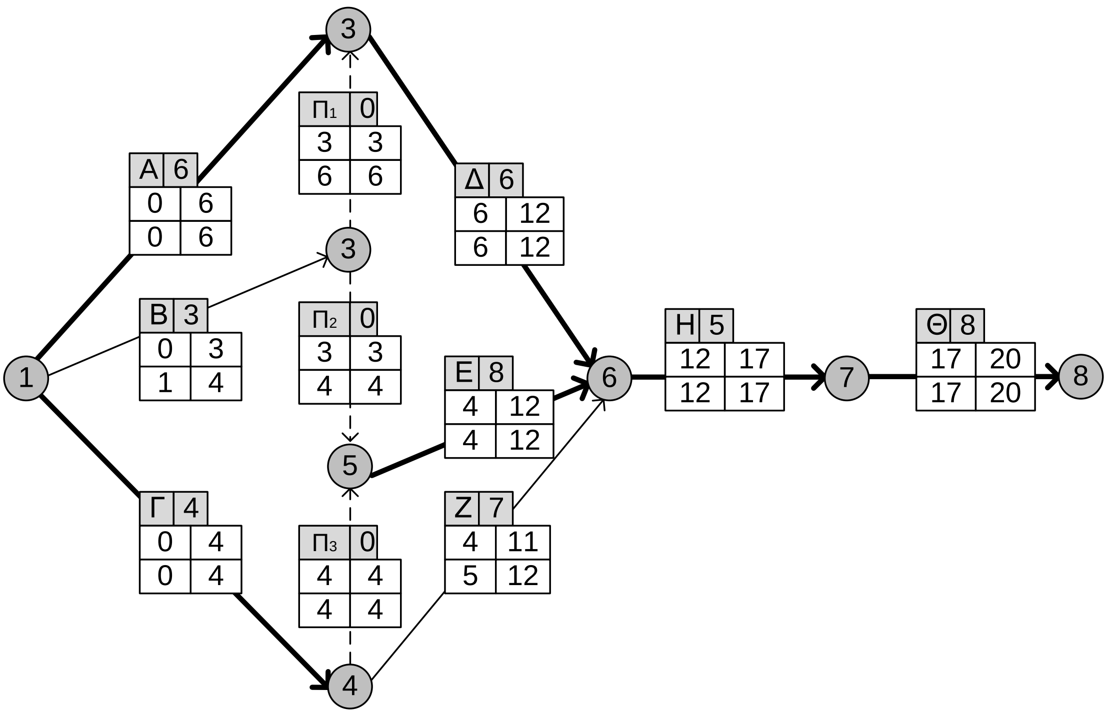
Σχήμα 68

Υπολογισμός των ολικών χρονικών περιθωρίων $ΔΤο_Ω$.



Σχήμα 69

Επίλυση δικτύου :



Σχήμα 70

Κρίσιμες διαδρομές :

Α – Δ – Η – Θ

Γ – $Π_3$ – Ε – Η – Θ

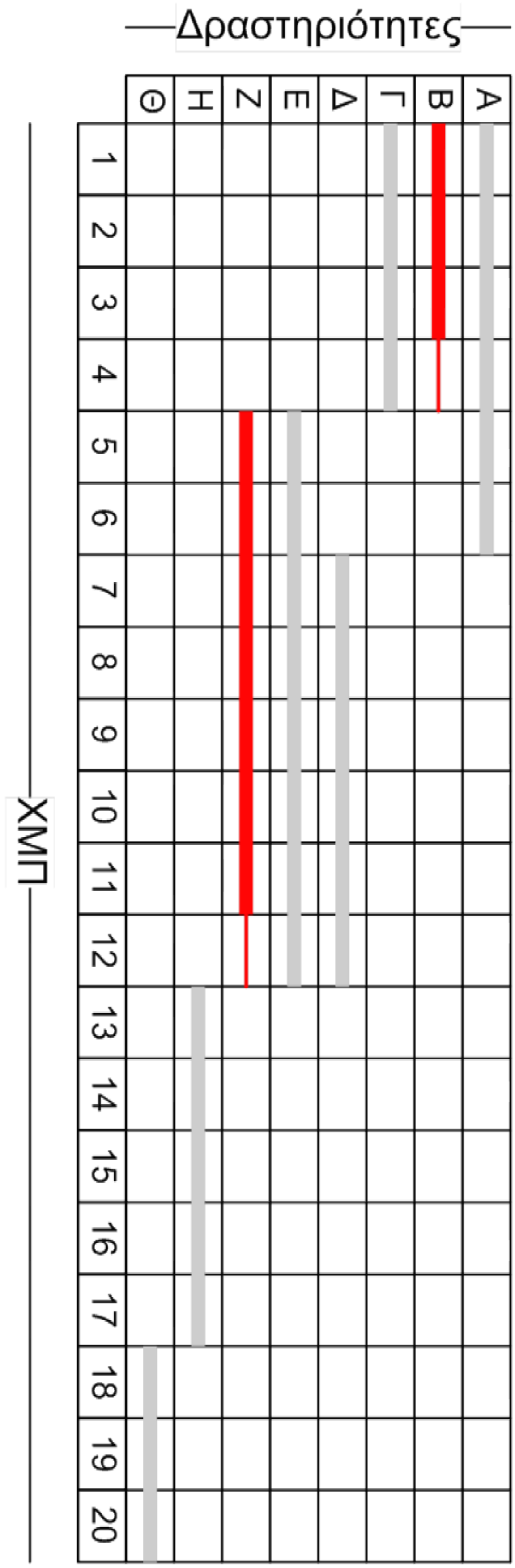
Διάρκεια έργου : 20 χρονικές μονάδες.

Διάγραμμα Gantt με βάση τους ενωρίτερους χρόνους έναρξης.

Δραστηριότητες	ES	EF	LS	LF	Δτο	ΔTF
Α	0	6	0	6	0	0
Β	0	3	1	4	1	0
Γ	0	4	0	4	0	0
$Π_1$	3	3	6	6	3	3
$Π_2$	3	3	4	4	1	1
$Π_3$	4	4	4	4	0	0
Δ	6	12	6	12	0	0
Ε	4	12	4	12	0	0
Ζ	4	11	5	12	1	1
Η	12	17	12	17	0	0
Θ	17	20	17	20	0	0

Διάγραμμα Gantt με βάση

τους ενωρίτερους χρόνους έναρξης.



5.3. Χρήση γραμμικού προγραμματισμού για την εύρεση της κρίσιμης διαδρομής.

Με τη βοήθεια του γραμμικού προγραμματισμού είναι εύκολο να καθορίσουμε το μήκος της κρίσιμης διαδρομής.

Ορίζουμε :

x_j = ο χρόνος που το γεγονός που αντιστοιχεί στον κόμβο j εμφανίζεται.

Για τη δραστηριότητα (i,j), γνωρίζουμε ότι πρέπει πριν την πραγματοποίηση του κόμβου (γεγονότος) j πρέπει να έχει πραγματοποιηθεί ο κόμβος (γεγονός) i και η δραστηριότητα (i,j), πρέπει να έχει ολοκληρωθεί. Σύμφωνα με αυτό για κάθε δραστηριότητα (ακμή) (i,j) στο δίκτυο πρέπει $x_j \geq x_i + t_{ij}$. Θέτουμε F τον κόμβο (γεγονός) που αντιπροσωπεύει τον τερματισμό του έργου. Στόχος μας είναι να ελαχιστοποιήσουμε τον χρόνο που απαιτείται για την ολοκλήρωση του έργου, συνεπώς έχουμε την αντικειμενική συνάρτηση $z = x_F - x_1$.

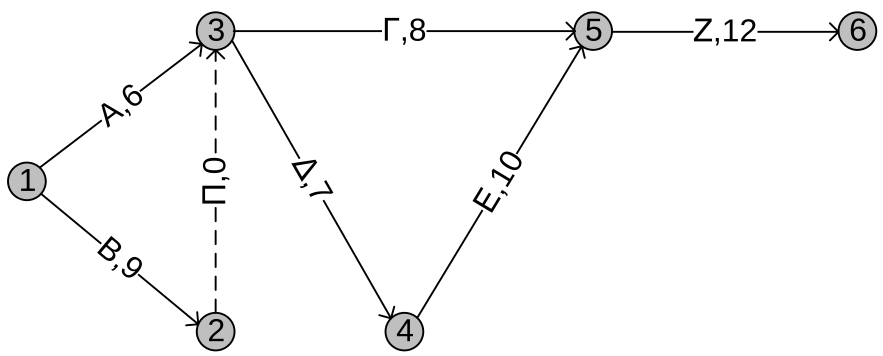
Για να παρουσιάσουμε τον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιούμε τις τεχνικές του γραμμικού προγραμματισμού για την εύρεση του μήκους της κρίσιμης διαδρομής θα χρησιμοποιήσουμε την παραπάνω προσέγγιση στο παράδειγμα που ακολουθεί.

Παράδειγμα :

Μια εταιρία πρόκειται να εισαγάγει ένα καινούριο προϊόν (προϊόν 3). Μία μονάδα του προϊόντος 3 παράγεται από τον συνδυασμό μίας μονάδας του προϊόντος 1 και μιας μονάδας του προϊόντος 2. Πριν τη συναρμολόγηση των προϊόντων 1 και 2 σε προϊόν 3, τα τελικά προϊόντα 2 πρέπει να ελεγχθούν. Στον παρακάτω πίνακα … είναι συγκεντρωμένες οι δραστηριότητες με τις αντίστοιχες διάρκειες καθώς και τις δραστηριότητες που προηγούνται.

Δραστηριότητες	**Προηγούμενες**	**Διάρκεια** (μέρες)
Α = εκπαίδευση εργαζομένων	-	6
Β = αγορά πρώτων υλών	-	9
Γ = παραγωγή προϊόντος 1	Α, Β	8
Δ = παραγωγή προϊόντος 2	Α, Β	7
Ε = έλεγχος προϊόντος 2	Γ	10
Ζ = συναρμολόγηση προϊόντων 1 και 2	Δ, Ε	12

Το δίκτυο που αντιστοιχεί στον παραπάνω πρόβλημα της εταιρίας παραγωγής είναι το ακόλουθο.



Σχήμα 71 :

Δίκτυο για την εταιρία παραγωγής.

Κόμβος 1 : κόμβος έναρξης

Κόμβος 6 : τερματικός κόμβος

Το αντίστοιχο γραμμικό μοντέλο είναι το εξής :

$\min z = x_6 - x_1$

Υπό τους περιορισμούς :

$x_3 \geq x_1 + 6$ (περιορισμός για την ακμή (1,3))

$x_2 \geq x_1 + 9$ (περιορισμός για την ακμή (1,2))

$x_5 \geq x_3 + 8$ (περιορισμός για την ακμή (3,5))

$x_4 \geq x_3 + 7$ (περιορισμός για την ακμή (3,4))

$x_5 \geq x_4 + 10$ (περιορισμός για την ακμή (4,5))

$x_6 \geq x_5 + 12$ (περιορισμός για την ακμή (5,6))

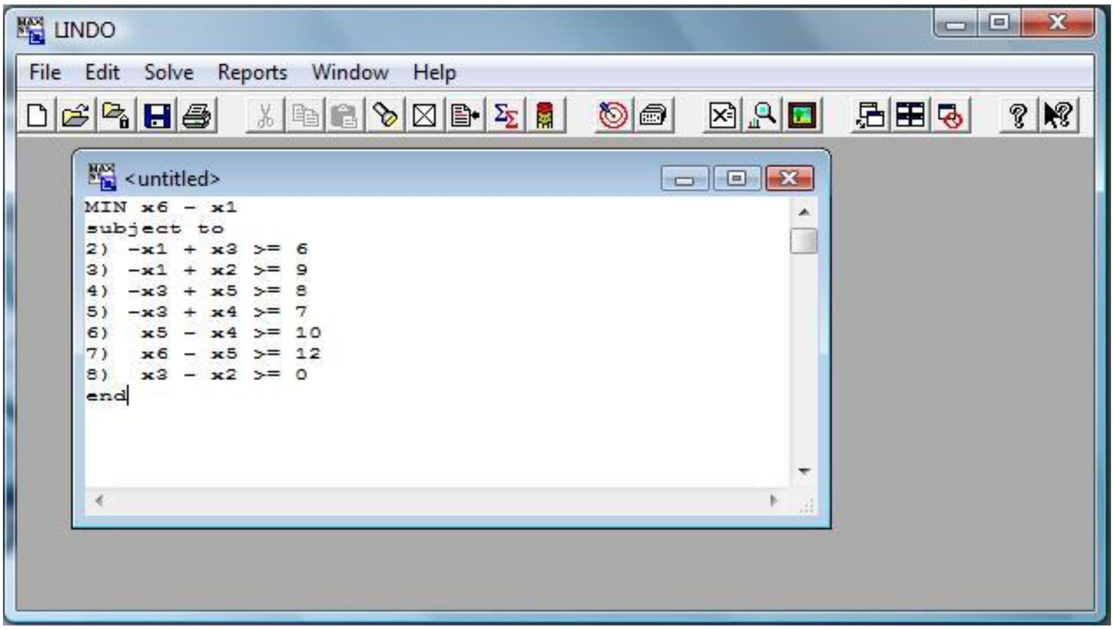
$x_3 \geq x_2$

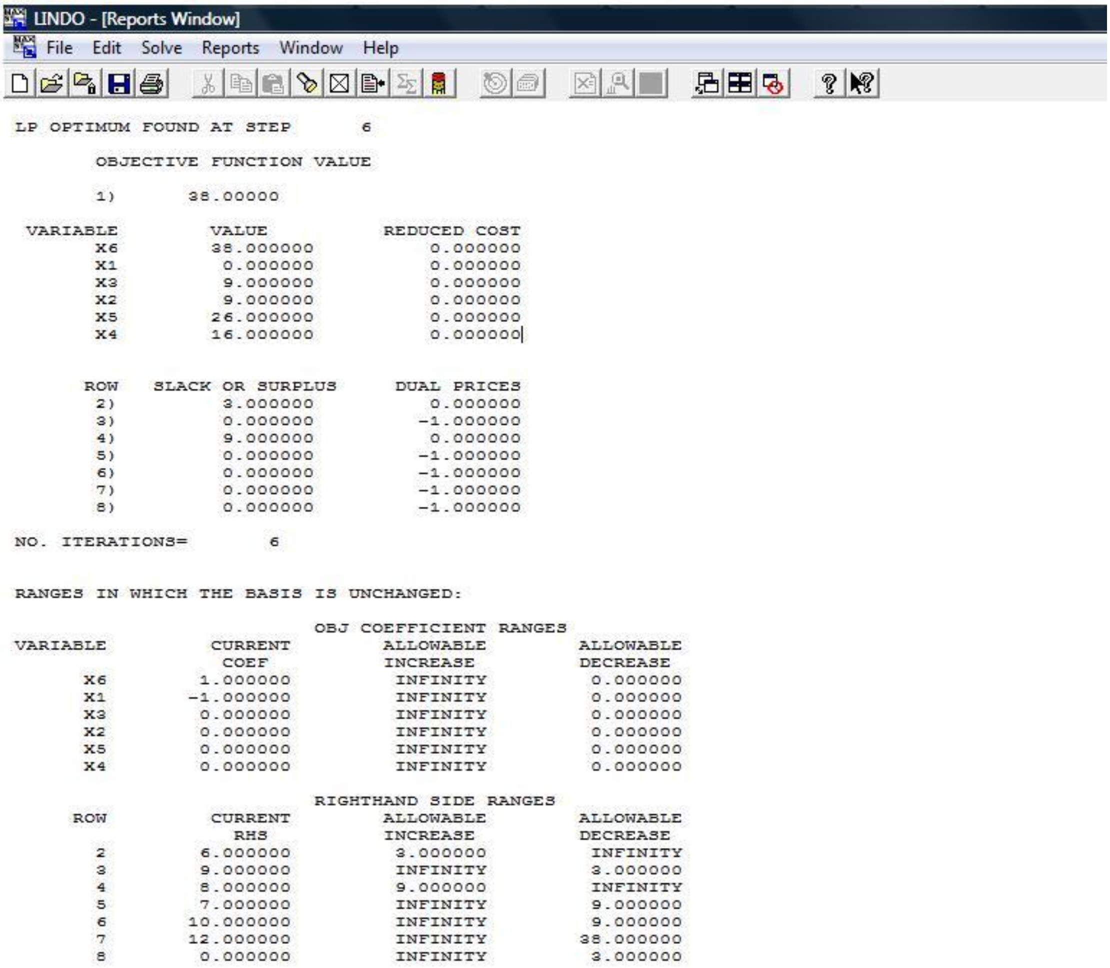
Όλες οι μεταβλητές είναι ακέραιες.

Μία βέλτιστη λύση σε αυτό το πρόβλημα γραμμικό προγραμματισμού είναι η $z = 38$, $x_1 = 0$, $x_2 = 9$, $x_3 = 9$, $x_4 = 16$, $x_5 = 26$ και $x_6 = 38$. Σύμφωνα με την οποία χρειαζόμαστε 38 ημέρες για την ολοκλήρωση του έργου μας.

Το γραμμικό πρόβλημα αυτό έχει αρκετές εναλλακτικές εφικτές λύσεις, για τις οποίες όλα τα μήκη των αντίστοιχων κρίσιμων μονοπατιών είναι 38 ημέρες.

Ένα κρίσιμο μονοπάτι για το πρόβλημα της παραγωγής των προϊόντων αποτελεί ένα μονοπάτι από την έναρξη του έργου έως και την ολοκλήρωση του στου οποίου κάθε ακμή του μονοπατιού αντιστοιχεί σε έναν περιορισμό που έχει μία δυική τιμή της τάξεως του -1. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα που προέρχονται από το πρόγραμμα LINDO, όπως φαίνεται στην εικόνα 7, βρήκαμε, όπως και πριν, ότι το 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 είναι ένα κρίσιμο μονοπάτι. Για κάθε περιορισμό με δυική τιμή -1, αύξηση της διάρκειας της δραστηριότητας που αντιστοιχεί σε αυτό τον περιορισμό κατά Δ ημέρες θα αυξήσει την διάρκεια του έργου κατά Δ ημέρες. Για παράδειγμα, μία αύξηση της τάξεως των Δ ημερών στην διάρκεια της δραστηριότητας Β θα αυξήσει τη διάρκεια του έργου κατά Δ ημέρες. Αυτό προϋποθέτει ότι η τρέχουσα λύση εξακολουθεί να είναι βέλτιστη.





LINDO - [Reports Window]

File Edit Solve Reports Window Help

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      6

       OBJECTIVE FUNCTION VALUE

       1)      38.00000

 VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
       X6        38.000000          0.000000
       X1         0.000000          0.000000
       X3         9.000000          0.000000
       X2         9.000000          0.000000
       X5        26.000000          0.000000
       X4        16.000000          0.000000


      ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
       2)         3.000000          0.000000
       3)         0.000000         -1.000000
       4)         9.000000          0.000000
       5)         0.000000         -1.000000
       6)         0.000000         -1.000000
       7)         0.000000         -1.000000
       8)         0.000000         -1.000000

NO. ITERATIONS=       6

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

                          OBJ COEFFICIENT RANGES
VARIABLE         CURRENT        ALLOWABLE         ALLOWABLE
                   COEF          INCREASE          DECREASE
      X6        1.000000         INFINITY          0.000000
      X1       -1.000000         INFINITY          0.000000
      X3        0.000000         INFINITY          0.000000
      X2        0.000000         INFINITY          0.000000
      X5        0.000000         INFINITY          0.000000
      X4        0.000000         INFINITY          0.000000

                          RIGHTHAND SIDE RANGES
     ROW         CURRENT        ALLOWABLE         ALLOWABLE
                   RHS           INCREASE          DECREASE
       2        6.000000         3.000000          INFINITY
       3        9.000000         INFINITY          3.000000
       4        8.000000         9.000000          INFINITY
       5        7.000000         INFINITY          9.000000
       6       10.000000         INFINITY          9.000000
       7       12.000000         INFINITY         38.000000
       8        0.000000         INFINITY          3.000000
```

Εικόνα 7

Δοκιμάζοντας το έργο

Σε πολλές περιπτώσεις, ο επικεφαλής του έργου, θα πρέπει να ολοκληρώσει μέσα σε χρονικό διάστημα μικρότερο από το μήκος του κρίσιμου μονοπατιού. Παραδείγματος χάριν, υποθέτουμε ότι η εταιρία παραγωγής πιστεύει ότι έχει μεγαλύτερες προϋποθέσεις κέρδους εάν το προϊόν 3 είναι διαθέσιμο προς πώληση πριν την εμφάνιση ανταγωνιστικών προϊόντων στην αγορά. Η εταιρία παραγωγής γνωρίζει ότι ανταγωνιστικά προϊόντα είναι προγραμματισμένα να βγουν στην αγορά σε 26 ημέρες από τώρα, επομένως η εταιρία παραγωγής πρέπει να εισάγει τα προϊόντα 3 σε μέσα σε διάστημα 25 ημερών. Εξ' αιτίας του ότι το μονοπάτι μας έχει μήκος 38 ημέρες, η εταιρία παραγωγής θα πρέπει να δαπανήσει επιπλέον πόρους ώστε να μην ξεπεράσει την προθεσμία των 25 ημερών. Σε αυτή τη περίπτωση, ο γραμμικός προγραμματισμός μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον κατάλληλο προσδιορισμό της κατανομής των πόρων ο οποίος ελαχιστοποιεί το απαιτούμενο κόστος ώστε η εταιρία να μην ξεπεράσει την προκαθορισμένη προθεσμία.

Υποθέτουμε ότι με τη χορήγηση πρόσθετων πόρων σε μία δραστηριότητα, η εταιρία μπορεί να μειώσει την διάρκεια κάθε δραστηριότητας έως και 5 ημέρες. Το κόστος ανά ημέρα της μείωσης της διάρκειας κάθε δραστηριότητας παρουσιάζεται στον πίνακα…. Για την εύρεση του ελαχίστου κόστους της ολοκλήρωσης του έργου, μέχρι την προθεσμία των 25 ημερών, ορίζουμε τις μεταβλητές Α, Β, Γ, Δ, Ε και Ζ ως εξής :

Α = ο αριθμός των ημερών κατά τον οποίο η διάρκεια της δραστηριότητας Α μειώνεται.

.

.

.

Ζ = ο αριθμός των ημερών κατά τον οποίο η διάρκεια της δραστηριότητας Ζ μειώνεται.

x_j = ο χρόνος στον οποίο το γεγονός που αντιστοιχεί στον κόμβο j εμφανίζεται.

Πίνακας …

Α	Β	Γ	Δ	Ε	Ζ
10 €	20€	3€	30€	40€	50€

Συνεπώς πρέπει να επιλύσουμε το ακόλουθο γραμμικό πρόβλημα :

$$\min z = 10A + 20B + 3\Gamma + 30\Delta + 40\mathrm{E} + 50\mathrm{Z}$$

Υπό τους περιορισμούς :

$\mathrm{A} \le 5$

$\mathrm{B} \le 5$

$\Gamma \le 5$

$\Delta \le 5$

$\mathrm{E} \le 5$

$\mathrm{Z} \le 5$

$x_2 \ge x_1 + 9 - \mathrm{B}$ (περιορισμός για την ακμή (1,2))

$x_3 \ge x_1 + 6 - \mathrm{A}$ (περιορισμός για την ακμή (1,3))

$x_5 \ge x_3 + 8 - \Gamma$ (περιορισμός για την ακμή (3,5))

$x_4 \ge x_3 + 7 - \Delta$ (περιορισμός για την ακμή (3,4))

$x_5 \ge x_4 + 10 - \mathrm{E}$ (περιορισμός για την ακμή (4,5))

$x_6 \ge x_5 + 12 - \mathrm{Z}$ (περιορισμός για την ακμή (5,6))

$x_3 \ge x_2 + 10$ (περιορισμός για την ακμή (2,3))

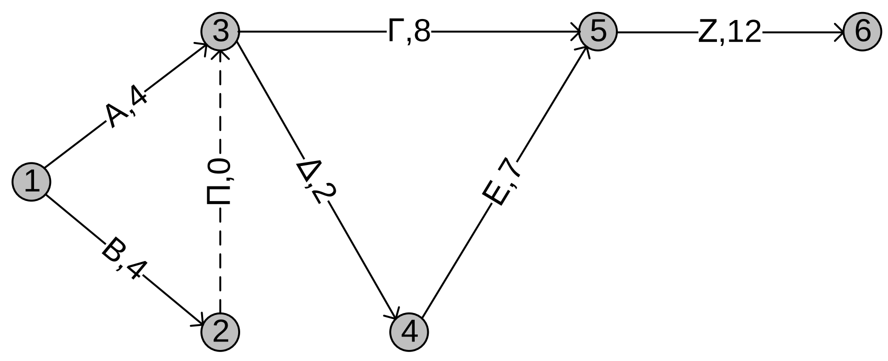
$x_6 - x_1 \le 25$

$\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma, \Delta, \mathrm{E}, \mathrm{Z} \ge 0$, x_j ακέραιος

Οι έξι πρώτοι περιορισμοί ορίζουν ότι η διάρκεια της κάθε διαδικασίας μπορεί να μειωθεί το πολύ 5 ημέρες. Όπως πριν, οι επόμενοι επτά περιορισμοί εξασφαλίζουν ότι το γεγονός j δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί πριν την πραγματοποίηση του κόμβου i και την ολοκλήρωση της δραστηριότητας (i,j). Παραδείγματος χάριν, η δραστηριότητα Β (ακμή (1,2)) τώρα έχει διάρκεια 9-Β συνεπώς χρειαζόμαστε τον περιορισμό $x_2 \geq x_1 + 9 - \mathrm{B}$. Ο περιορισμός $x_6 - x_1 \leq 25$ ορίζει ότι το έργο πρέπει να έχει ολοκληρωθεί μέσα στην προθεσμία των 25 ημερών. Η αντικειμενική συνάρτηση αποτελεί το συνολικό κόστος που προκύπτει από τη μείωση της διάρκειας των δραστηριοτήτων.

Μία βέλτιστη λύση είναι για το συγκεκριμένο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού είναι η : $z = 390$€, $x_1 = 0$, $x_2 = 4$, $x_3 = 4$, $x_4 = 6$, $x_5 = 13$, $x_6 = 25$, $A = 2$, $B = 5$, $\Gamma = 0$, $\Delta = 5$, $\mathrm{E} = 3$, $\mathrm{Z} = 0$. Μετά τη μείωση της διάρκειας των γεγονότων Β, Α, Δ και Ε στις απαιτούμενες τιμές έχουμε εξασφαλίσει το δίκτυο του σχήματος 72.

Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι οι Α, Β, Δ, Ε και Ζ είναι κρίσιμες δραστηριότητες καθώς επίσης και ότι οι 1-2-3-4-5-6 και 1-3-4-5-6 είναι και οι δύο κρίσιμες διαδρομές (κάθε μία από τις οποίες έχει μήκος 25 ημέρες). Συνεπώς μπορούμε να πετύχουμε το χρονικό περιθώριο των 25 ημερών με ελάχιστο κόστος 390€.



Σχήμα 72.

5.4. Μέθοδος δικτυωτών γραφημάτων με πιθανοτική θεώρηση των χρόνων PERT (Program Evaluation and Review Technique)

Η μέθοδος δικτυωτών γραφημάτων με πιθανοτική θεώρηση των χρόνων PERT προήλθε στα τέλη της δεκαετίας του 1950 και για την ακρίβεια το 1958 στις ΗΠΑ ύστερα από έρευνες που είχαν σκοπό την σμίκρυνση του κόστος και του απαιτούμενου χρόνου κατασκευής ενός έργου.

Η μέθοδος PERT αποτελεί μία στοχαστική θεώρηση των δικτύων. Με την μέθοδο αυτή μπορούμε να επιλύσουμε δύο είδη προβλημάτων :

- Προβλήματα που ο κύριος στόχος τους είναι ο υπολογισμός της πιθανότητας ολοκλήρωσης ενός έργου μέσα σε κάποιο συγκεκριμένο χρονικό διάστημα t_0.
- Προβλήματα στα οποία ο κύριος στόχος τους είναι ο υπολογισμός του χρόνου ολοκλήρωσης του έργου με δεδομένη πιθανότητα p, δηλαδή να βρούμε τον χρόνο στον οποίο το έργο σίγουρα θα έχει ολοκληρωθεί.

Στην μέθοδο PERT οι χρονικές διάρκειες την δραστηριοτήτων είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές (τ.μ.) οι οποίες ακολουθούν την κατανομή Βήτα. Ένα ακόμα χαρακτηριστικό της μεθόδου είναι το γεγονός ότι η κρίσιμη διαδρομή αποτελείται από μεγάλο αριθμό δραστηριοτήτων.

Η μέθοδος PERT, όπως αναφέραμε και παραπάνω, αναπαριστά ένα έργο με ένα δικτυωτό γράφημα στο οποίο οι δραστηριότητες απεικονίζονται με βέλη, δηλαδή είναι οι ακμές του δικτύου, και τε γεγονότα απεικονίζονται με κόμβος, κάτι παρόμοιο δηλαδή με τη μέθοδο CPM.

Συνεπώς οι βασικές παραδοχές της μεθόδου PERT είναι οι εξής :

- Οι χρονικές διάρκειες των δραστηριοτήτων είναι χρονικά ανεξάρτητες.
- Οι χρονικές διάρκειες των δραστηριοτήτων ακολουθούν την κατανομή Βήτα.
- Η κρίσιμη διαδρομή αποτελείται από πολλές δραστηριότητες (τουλάχιστον τέσσερις) ώστε να ισχύει το κεντρικό οριακό θεώρημα.

Οι δραστηριότητες μπορεί να μην είναι στατιστικά ανεξάρτητες, αφού οι ίδιοι πόροι μπορούν να χρησιμοποιούνται σε παραπάνω από μία δραστηριότητες με αποτέλεσμα η καθυστέρηση μιας δραστηριότητας να επηρεάζει τη χρονική διάρκεια μιας άλλης.

Το κεντρικό οριακό θεώρημα δίνει πιο αξιόπιστα αποτελέσματα όσο ο αριθμός των στατιστικά ανεξαρτήτων μεταβλητών είναι ανεξάρτητος, δηλαδή όσο αυξάνεται ο αριθμός των δραστηριοτήτων της κρίσιμης διαδρομής. Συνεπώς σε μικρά έργα η αξιοπιστία της μεθόδου είναι μικρότερη.

Για να εφαρμόσουμε τη μέθοδο PERT σε ένα έργο ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα :

1ο βήμα : για κάθε δραστηριότητα i με διάρκεια μια συνεχή τυχαία μεταβλητή T_i που ακολουθεί την κατανομή Βήτα, i = 1, …, n, εκτιμούμε :

- την αισιόδοξη διάρκεια της a_i : $P(T_i \leq a_i) = 0.05$
- την απαισιόδοξη διάρκεια της b_i : $P(T_i \geq b_i) = 0.05$
- την κανονική διάρκεια της m_i η οποία είναι η επικρατούσα τιμή της κατανομής Βήτα

2ο βήμα : Υπολογίζουμε :

- την αναμενόμενη διάρκεια της δραστηριότητας i :

$$E(T_i) = t_{mi} = \frac{a_i + 4m_i + b_i}{6}$$

- την τυπική απόκλιση της δραστηριότητας i :

$$\sigma_i = \frac{b_i - a_i}{3.2}$$

3ο βήμα : Επιλύουμε το δίκτυο που είναι προσανατολισμένο κατά βέλη με χρονικές διάρκειες δραστηριοτήτων τις t_{mi} , i = 1, … , n, και προσδιορίζουμε την κρίσιμη διαδρομή του δικτύου. Έστω ότι αυτή αποτελείται από k κρίσιμες δραστηριότητες , k ≤ n.

4ο βήμα : Για την κρίσιμη διαδρομή, εφαρμόζοντας το κεντρικό οριακό θεώρημα, η διάρκεια του έργου είναι μία συνεχής τυχαία μεταβλητή η οποία ακολουθεί κατά προσέγγιση την κανονική κατανομή

με μέση τιμή $T_{\mu\varepsilon\rho\gamma} = \sum_{i=1}^{k} t_{mi}$

και τυπική απόκλιση $\sigma_{\varepsilon\rho\gamma} = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \sigma_i^2}$

5ο βήμα : Υπολογίζουμε την τυποποιημένη μεταβλητή του έργου και με βάση τους πίνακες αθροιστικής πιθανότητας της τυποποιημένης κανονικής κατανομής επιλύουμε τα δύο προβλήματα της μεθόδου PERT.

Παράδειγμα :

Έστω $T_{mεργ}$ = 40 χρονικές μονάδες και $σ_{εργ}$ = 4 χρονικές μονάδες.

Να υπολογίσετε :

I. τη πιθανότητα να ολοκληρωθεί το έργο σε χρόνο 10% νωρίτερα από τον προγραμματισμένο του χωρίς προσθήκη μέσων.

II. Το χρόνο στον οποίο θα έχει ολοκληρωθεί το έργο με βεβαιότητα 90%.

Απάντηση :

I. Στην ουσία θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα :
$P(T_{εργ} \leq 40 - 0.1 \cdot 40) = P(T_{εργ} \leq 36)$.

Τότε από το κεντρικό οριακό θεώρημα η διάρκεια του έργου $T_{εργ}$ ακολουθεί προσεγγιστικά την κανονική κατανομή.

Συνεπώς, χρησιμοποιώντας τους πίνακες της συνάρτησης κατανομής της τυποποιημένης κανονικής κατανομής :

$$P(T_{εργ} \leq 36) = P\left(\frac{T_{εργ} - 40}{4} \leq \frac{36 - 40}{4}\right) =$$

$$P(Z \leq -1) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.84134 = 0.15866 = 15.866\%$$

II. Έστω $t_{0.9}$ ο ζητούμενος χρόνος. Τότε, χρησιμοποιώντας τους πίνακες της συνάρτησης κατανομής της τυποποιημένης κανονικής κατανομής :

$$P(T_{εργ} \leq t_{0.9}) = 0.9 \Leftrightarrow P\left(\frac{T_{εργ} - 40}{4} \leq \frac{t_{0.9} - 40}{4}\right) = 0.9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P\left(Z \leq \frac{t_{0.9} - 40}{4}\right) = 0.9 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{t_{0.9} - 40}{4}\right) = 0.9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{t_{0.9} - 40}{4} = z_{0.9} \Leftrightarrow \frac{t_{0.9} - 40}{4} \approx 1.285 \Leftrightarrow t_{0.9} \approx 46.01$$

Αν η απάντηση πρέπει να είναι φυσικός αριθμός, τότε το παραπάνω αποτέλεσμα στρογγυλοποιείται στον αμέσως επόμενο μεγαλύτερο φυσικό αριθμό, δηλαδή στο συγκεκριμένο παράδειγμα στο 47.

5.4.1. Πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα της μεθόδου PERT

Πλεονεκτήματα :

- Σχετικά απλή επίλυση γραφήματος.
- Η μέθοδος μας δίνει την δυνατότητα να υπολογίσουμε την επίδραση της αβεβαιότητας στη χρονική εκτίμηση των δραστηριοτήτων.
- Η μέθοδος μας δίνει τη δυνατότητα να υπολογίσουμε την πιθανότητα ολοκλήρωσης ενός έργου σε συγκεκριμένο χρονικό διάστημα.

Μειονεκτήματα :

- Η μέθοδος βασίζεται στη μέθοδο CPM και συνεπώς, δεν μπορούν να απεικονιστούν σύνθετες σχέσεις αλληλουχίας μεταξύ των δραστηριοτήτων του έργου.
- Χρονοβόρα σύνταξη του δικτυωτού γραφήματος του έργου, όπως και στη μέθοδο CPM, και κυρίως σε έργα με περίπλοκες σχέσεις αλληλουχίας.
- Η μέθοδος PERT βασίζεται σε τρείς παραδοχές :
  1. Οι χρονικές διάρκειες των δραστηριοτήτων είναι στατιστικά ανεξάρτητες.
  2. Οι χρονικές διάρκειες των δραστηριοτήτων ακολουθούν την κατανομή Βήτα.
  3. Η κρίσιμη διαδρομή περιλαμβάνει πολλές δραστηριότητες, τουλάχιστον τέσσερις.
- Οι μέθοδος PERT έχει προβλήματα στους υπολογισμούς με μικρά χρονικά περιθώρια μη κρίσιμων δραστηριοτήτων.

Βιβλιογραφία :

- Ravindra K. Ahuja, Thomas L. Magnanti, James B. Orlin, Network Flows (theory, algorithms and applications)
  Prentince Hall, Upper Saddle River, New Jersey
  p.p. 1 – 198, 294 – 453, 510 – 536.

- M.O. Ball, T.L. Magnanti, C.L. Monma, G.L. Nemhauser, Handbooks in operations research and management science
  Network Models , (1995) ELSEVIER

- M.O. Ball, T.L. Magnanti, C.L. Monma, G.L. Nemhauser, Handbooks in operations research and management science
  Network Routing , (1995) ELSEVIER

- McMillan and Gonzalez, Systems Analysis (A Computer approach to decision models)
  (1973, third edition), Richard D.,Irwin, INC.

- Bernard W. Taylor III, Introduction to Management Science, International Edition.

- Hamdy A. Taha Operations Research, An Introduction
  Seventh Edition
  International Edition

- Πάρις Παντουβάκης (Επίκουρος Καθηγητής Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου), Διοικητική Επιχειρήσεων και Οργανισμών (τόμος Β1), Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο

- Η. Βλάχος, Ν. Ραχανιώτης Ι. Τσουλφάς Α. Μιχιώτης
  Διοίκηση Έργων (τόμοι Β & Β1)

- Α. Γεωργίου, Γ. Οικονόμου, Ποσοτικές Μέθοδοι (Τόμος Γ)
  Επιχειρησιακή Έρευνα, Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο.