Εθνικο Μετσοβιο Πολυτεχνειο

ΔΠΜΣ Μαθηματικη Προτυποποιηση σε Συγχρονες Τεχνολογιες και τη Χρηματοοικονομικη

Διπλωματικη Εργασια

Εκτιμήσεις Σφαλμάτων για Πλήρως Διακριτά Σχήματα για Μη-γραμμικές Παραβολικές Εξισώσεις με τη Μέθοδο Πεπερασμένων Στοιχείων

Παναγιώτης Παράσχης

Επιβλέπων Καθηγητής
Κωνσταντίνος Χρυσαφίνος

22 Ιουλίου 2021

Πρόλογος

Στην παρούσα εργασία, μελετάται ένα σχεδόν-γραμμικό παραβολικό πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών, το οποίο αποτελείται από μία παραβολική εξίσωση τύπου p-Laplacian με την προσθήκη ενός Λαπλασιανού όρου, με ομογενείς συνοριακές συνθήκες Dirichlet και αρχική συνθήκη $u_0 \in W_0^{1,p+2}(\Omega)$. Το εν λόγω πρόβλημα μελετάται ως προς την ύπαρξη/μοναδικότητα ασθενούς λύσης και τις ιδιότητες αυτής, και ως προς την αριθμητική επίλυσή του, με μία μέθοδο (σύμμορφων) πεπερασμένων στοιχείων στο χώρο, και την πεπλεγμένη μέθοδο του Euler στο χρόνο. Στο αριθμητικό σχήμα αυτό, εξάγονται εκτιμήσεις σφάλματος σε μία διακριτή νόρμα του χώρου $L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, οι οποίες επιβεβαιώνονται με αριθμητικά πειράματα που πραγματοποιούνται.

Στο Κεφάλαιο 1, εισάγονται τα εργαλεία που χρησιμοποιούνται κατά τη διάρκεια της εργασίας, τα οποία προέρχονται από τον τομέα της Συναρτησιακής Ανάλυσης. Δίδονται ορισμοί των εργαλείων αυτών, και διατυπώνονται κάποια βασικά αποτελέσματα, χωρίς τις αποδείξεις τους.

Στο Κεφάλαιο 2, γίνεται η εισαγωγή στο κύριο πρόβλημα, γίνεται μία σύντομη αναφορά στα προηγούμενα αποτελέσματα σχετικά με το εν λόγω πρόβλημα, και παρουσιάζονται κάποια αποτελέσματα από τη μελέτη γενικότερων σχεδόν-γραμμικών προβλημάτων.

Στο Κεφάλαιο 3, πραγματοποιείται η μελέτη του συνεχούς προβλήματος. Αποδεικνύονται αποτελέσματα ύπαρξης και μοναδικότητας λύσης του προβλήματος, και εξάγονται εκτιμήσεις ευστάθειας και ομαλότητας της λύσης αυτής.

Στο Κεφάλαιο 4, ορίζεται η μέθοδος διακριτοποίησης του υπό μελέτη προβλήματος. Αποδεικνύονται ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης του πλήρως διακριτού προβλήματος. Εξάγονται διακριτά ανάλογα των εκτιμήσεων ευστάθειας και ομαλότητας του Κεφαλαίου 3, και εκτιμάται το σφάλμα στη νόρμα που αναφέρθηκε ανωτέρω.

Στο Κεφάλαιο 5, υπολογίζεται η λύση του πλήρως διακριτού προβλήματος για κάποια παραδείγματα, με τη χρήση της βιβλιοθήκης NetGen/NGSolve της γλώσσας προγραμματισμού python. Παρουσιάζονται πίνακες σφαλμάτων και πειραματικών τάξεων σύγκλισης, που επιβεβαιώνουν την ισχύ και το βέλτιστο της εκτίμησης σφάλματος του Κεφαλαίου 4.

Στο Παράρτημα, παρουσιάζονται κάποιοι ορισμοί και κάποια αποτελέσματα της βιβλιογραφίας, για τις ασθενείς και ασθενείς* τοπολογίες. Τα αποτελέσματα αυτά, είναι απαραίτητα για την απόδειξη ύπαρξης/μοναδικότητας ασθενούς λύσης της παραβολικής p-Λαπλασιανής, και για τις εκτιμήσεις ομαλότητας.

Κλείνοντας, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή της παρούσας διπλωματικής εργασίας, κ. Κωνσταντίνο Χρυσαφίνο, για τις υποδείξεις, τη βοήθεια, και την υποστήριξη που μου παρείχε απλόχερα, καθ᾽ όλη τη διάρκεια της εκπόνησης της εργασίας, κάτω από τις πρωτόγνωρες αυτές συνθήκες της πανδημίας, όπου η δια ζώσης επικοινωνία ήταν αδύνατη.

Παναγιώτης Παράσχης
Ιούλιος 2021

Περιεχόμενα

1 Εργαλεία Συναρτησιακής Ανάλυσης

1.1 Χώροι Lebesgue και χώροι Sobolev

Στη θεωρία ασθενών λύσεων των μερικών διαφορικών εξισώσεων, αλλά και στη θεωρία των μεθόδων πεπερασμένων στοιχείων, χρησιμοποιούνται κατά κόρον δύο κλάσεις χώρων Banach, οι χώροι Lebesgue και Sobolev. Σε αυτό το εδάφιο, αναπτύσσουμε συνοπτικά κάποια στοιχεία της θεωρίας των προαναφερθέντων χώρων. Για περισσότερες λεπτομέρειες, ο αναγνώστης παραπέμπεται στα βιβλία [5], [4] και [6].

Σε ό,τι ακολουθεί, το Ω θα είναι ένα ανοικτό φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, το οποίο θα είναι εφοδιασμένο με τη σ-άλγεβρα του Borel και το μέτρο Lebesgue. Με $\int_\Omega u dx$, θα συμβολίζουμε το ολοκλήρωμα Lebesgue μιας μετρήσιμης συνάρτησης $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Για $q \in [1, \infty)$, $k \in \mathbb{N}$, οι χώροι Lebesgue και Sobolev, ορίζονται αντίστοιχα ως

$$L^q(\Omega) := \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ μετρήσιμη} \;\middle|\; \int_\Omega |u|^q dx < \infty \right\},$$

$$W^{k,q}(\Omega) := \left\{ u \in L^q(\Omega) : \;\; \int_\Omega |D^\alpha u|^q dx < \infty, \; \forall |\alpha| \le k \right\},$$

και για $q = \infty$,

$$L^\infty(\Omega) := \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \;\middle|\; \exists C > 0 \text{ τ.ω. } |u| \le C \text{ σ.π. στο} \Omega \right\},$$

$$W^{k,\infty}(\Omega) := \{ u \in L^\infty(\Omega) : \; D^\alpha u \in L^\infty(\Omega), \; \forall |\alpha| \le k \}.$$

Τα στοιχεία των ανωτέρω χώρων, νοούνται ως κλάσεις ισοδυναμίας συναρτήσεων, όπου κάθε κλάση αποτελείται από τις συναρτήσεις που ισούνται σχεδόν παντού στο Ω. Επιπλέον, οι παράγωγοι

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}}$$

νοούνται ως ασθενείς παράγωγοι της u, τάξης α. Εφοδιάζουμε τους ανωτέρω διανυσματικούς χώρους με τις νόρμες

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} := \begin{cases} \left(\int_\Omega |u|^q dx \right)^{1/q}, & q \in [1, \infty) \\ \operatorname{esssup}_\Omega |u|, & q = \infty \end{cases}, \quad \forall u \in L^q(\Omega)$$

και

$$\|u\|_{k,q} := \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \le k} \|D^\alpha u\|^q_{L^q(\Omega)} \right)^{1/q}, & q \in [1, \infty) \\ \max_{|\alpha| \le k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}, & q = \infty \end{cases}, \quad \forall u \in W^{k,q}(\Omega),$$

οι οποίες τους καθιστούν χώρους Banach. Στην ειδικότερη περίπτωση $q = 2$, οι χώροι $L^2(\Omega)$ και $H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$ είναι χώροι Hilbert, με εσωτερικά γινόμενα

$$(u, v) := \int_\Omega uv dx, \quad \forall u, v \in L^2(\Omega)$$

και

$$(u, v)_k := \sum_{|\alpha| \le k} (D^\alpha u, D^\alpha v), \quad \forall u, v \in H^k(\Omega).$$

Χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς $\| \cdot \| = \| \cdot \|_{L^2(\Omega)}$ και $\| \cdot \|_k = \| \cdot \|_{k,2}$. Ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι χώροι

$$W_0^{k,q}(\Omega) := \{ u \in W^{k,q}(\Omega) : D^\alpha u \big|_{\partial\Omega} = 0 \;\; \forall |\alpha| < k \},$$

όπου η σχέση $D^\alpha u \big|_{\partial\Omega} = 0$, λαμβάνεται με την έννοια του τελεστή ίχνους.

Τέλος, ορίζουμε τους χώρους

$$W^{-k,q^*}(\Omega) := (W_0^{k,q}(\Omega))^*,$$

όπου $q^* = \infty$ αν $q=1$, και $1/q + 1/q^* = 1$ αν $q \in (1,\infty)$. Τα αντίστοιχα δυϊκά ζεύγη θα συμβολίζονται με $\langle \cdot, \cdot \rangle_{k,q}$ (ή $\langle \cdot,\cdot\rangle$ όταν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης), ενώ για $q=2$, $k=1$, το αντίστοιχο δυϊκό ζεύγος θα συμβολίζεται πάντοτε με $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Επιπλέον, εισάγουμε τον συμβολισμό $H^{-k}(\Omega) = W^{-k,2}(\Omega)$.

Για τους χώρους Lebesgue και Sobolev ισχύει το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Πρόταση 1. Έστω $k, \ell \in \mathbb{N}_0$, και $p, q \in [1,\infty]$, με $k \le \ell$ και $p \le q$. Τότε, ισχύει η σχέση εγκλεισμού $W^{\ell,q}(\Omega) \subset W^{k,p}(\Omega)$, με

$$\|u\|_{k,p} \le C\|u\|_{\ell,q}, \quad \forall u \in W^{\ell,q}(\Omega),$$

όπου $C>0$ είναι μια ασταθερά ανεξάρτητη της u, $W^{0,r}(\Omega) = L^r(\Omega)$ και $\|\cdot\|_{0,r} = \|\cdot\|_{L^r(\Omega)}$, για $r \in [1,\infty]$.

Απόδειξη. Κατ΄ αρχάς, θα δείξουμε ότι αν $p \le q$,

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \le C\|u\|_{L^q(\Omega)}, \quad \forall u \in L^q(\Omega). \tag{1}$$

Πράγματι, έχουμε

$$\|u\|^p_{L^p(\Omega)} = \int_\Omega |u|^p dx = \int_\Omega 1 \cdot |u|^p dx \le \left(\int_\Omega 1 dx\right)^{(q-p)/p} \cdot \left(\int_\Omega |u|^q dx\right)^{p/q},$$

όπου στην ανωτέρω ανισότητα, χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα Hölder, όπου για $s_1 = q/(q-p)$, $s_2 = q/p$, έχουμε $1/s_1 + 1/s_2 = 1$. Έτσι,

$$\|u\|^p_{L^p(\Omega)|} \le \operatorname{meas}(\Omega)^{(q-p)/q} \|u\|^p_{L^q(\Omega)},$$

και άρα αποδείξαμε την (1). Επιπλέον, για $0 \le k \le \ell$, έχουμε

$$\|u\|_{k,p} = \left(\sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{1/p} \le C \sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} \le C \sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u\|_{L^q(\Omega)},$$

όπου στην τελευταία ανισότητα, χρησιμοποιήσαμε την (1). Έτσι, έχουμε

$$\|u\|_{k,p} \le C \sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u\|_{L^q(\Omega)} \le C \sum_{|\alpha|\le \ell} \|D^\alpha u\|_{L^q(\Omega)} \le C \left(\sum_{|\alpha|\le \ell} \|D^\alpha u\|^q_{L^q(\Omega)}\right)^{1/q} = C\|u\|_{\ell,q},$$

και ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

Επικαλούμαστε επίσης, την ακόλουθη ανισότητα:

Λήμμα 1 (Ανισότητα Poincaré-Friedrichs, [5], Corollary 9.19)**.** Έστω $q \in [1,\infty)$. Τότε, ισχύει

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \le C_{PF} \|\nabla u\|_{L^q(\Omega)}, \quad \forall u \in W^{1,q}_0(\Omega), \tag{2}$$

όπου

$$\|\nabla u\|_{L^q(\Omega)} := \left(\int_\Omega |\nabla u|^q dx\right)^{1/q}.$$

Θα χρειαστούμε κάι κάποια αποτελέσματα συνεχών και συμπαγών ενσφηνώσεων, οι οποίες ορίζονται ως εξής:

Ορισμός 1. Έστω $(X, \|\cdot\|_X)$ και $(Y, \|\cdot\|_Y)$ χώροι με νόρμα. Λέμε ότι ο X είναι συνεχώς ενσφηνωμένος στον Y, αν ισχύει $X \subset Y$, και ο ταυτοτικός τελεστής $\mathrm{id} : X \to Y$ είναι συνεχής (ισοδύναμα φραγμένος), δηλαδή ισχύει η ανισότητα $\|u\|_Y \le C\|u\|_X$, για κάθε $u \in X$. Η συνεχής ενσφήνωση του X στον Y συμβολίζεται με $X \hookrightarrow Y$. Αν επιπλέον ο ταυτοτικός τελεστής είναι συμπαγής, τότε λέμε ότι ο X είναι συμπαγώς ενσφηνωμένος στον Y, και συμβολίζουμε την ενσφήνωση αυτή με $X \underset{c}{\hookrightarrow} Y$.

Από την Πρόταση 1, συμπεραίνουμε άμεσα ότι για $k \leq \ell$ και $p \leq q$, $W^{\ell,q}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,p}(\Omega)$. Επικαλούμαστε επίσης τα ακόλουθα αποτελέσματα ενσφηνώσεων:

Θεώρημα 1 (Rellich-Kondrachov, [6], Theorem 6.3)**.** Για $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ φραγμένο, ορίζουμε

$$\Omega_0^k := \Omega \cap E^k, \quad E^k := \{x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : \ x_\ell = 0 \quad \forall \ell > k\}.$$

Έστω επίσης $j \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{N}$ και $1 \leq \tilde{p} < \infty$. Τότε, αν το Ω ικανοποιεί την ιδιότητα του κώνου, οι παρακάτω ενσφηνώσεις είναι συμπαγείς:

$$\begin{aligned} &W^{j+m,\tilde{p}}(\Omega) \underset{c}{\hookrightarrow} W^{j,\tilde{q}}(\Omega_0^k), \quad 0 < d - m\tilde{p} < k \leq d, \quad 1 \leq \tilde{q} < \frac{k\tilde{p}}{d - m\tilde{p}} \\ &W^{j+m,\tilde{p}}(\Omega) \underset{c}{\hookrightarrow} W^{j,\tilde{q}}(\Omega_0^k), \quad d \leq m\tilde{p}, \quad 1 \leq \ k \leq d, \quad 1 \leq \tilde{q} < \infty. \end{aligned}$$

Θεώρημα 2 (Sobolev, [6], Theorem 4.12)**.** Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, και ορίζουμε

$$\Omega_0^k := \Omega \cap E^k, \quad E^k := \{x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : \ x_\ell = 0 \quad \forall \ell > k\}.$$

Έστω επίσης $j \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{N}$ και $1 \leq \tilde{p} < \infty$. Τότε, αν το Ω ικανοποιεί την ιδιότητα του κώνου, και αν $m\tilde{p} > d$, ισχύει η ακόλουθη συνεχής ενσφήνωση:

$$W^{j+m,\tilde{p}}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega_0^k), \quad 1 \leq k \leq d,$$

όπου $C_B^j(\Omega_0^k)$ είναι ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων $u : \Omega_0^k \to \mathbb{R}$, που έχουν συνεχείς και φραγμένες παραγώγους κάθε τάξης μικρότερης ή ίσης του j.

Κλείνοντας το παρόν υποεδάφιο, παραθέτουμε πέντε χρήσιμα θεωρήματα για τους χώρους Lebesgue και Sobolev.

Θεώρημα 3 ([5], Theorem 4.9)**.** Έστω $(u_m) \subset L^q(\Omega)$ και $u \in L^q(\Omega)$ με $u_m \to u$ στον $L^q(\Omega)$. Τότε, υπάρχει υπακολουθία (u_{k_m}), τέτοια ώστε

$$u_{k_m} \to u \text{ σ.π. στο } \Omega, \text{ και } |u_{k_m}| \leq |w| \text{ σ.π. στο } \Omega, \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

για κάποια $w \in L^q(\Omega)$.

Θεώρημα 4 ([6], Theorem 3.6)**.** Για $q \in [1, \infty)$, $k \in \mathbb{N}_0$, ο $W^{k,q}(\Omega)$ είναι διαχωρίσιμος.

Θεώρημα 5 ([6], Theorem 3.6)**.** Για $q \in (1, \infty)$, $k \in \mathbb{N}_0$, ο $W^{k,q}(\Omega)$ είναι ανακλαστικός.

Θεώρημα 6 ([5], Theorem 4.11, 4.14)**.** Έστω $q^*, q \in [1, \infty)$, με $1/q + 1/q^* = 1$ αν $q \in (1, \infty)$, και $q^* = \infty$ αν $q = 1$. Τότε, ο γραμμικός τελεστής $T : L^{q^*}(\Omega) \to (L^q(\Omega))^*$, με

$$\langle Tu, v \rangle_{(L^q(\Omega))^*, L^q(\Omega)} := \int_\Omega uv dx, \quad \forall u \in L^{q^*}(\Omega), v \in L^q(\Omega),$$

είναι ισομετρικός ισομορφισμός.

Θεώρημα 7 (Εκτίμηση ελλειπτικής ομαλότητας, [4], Κεφάλαιο 6.3)**.** Αν το Ω έχει Lipcshitz σύνορο, τότε ισχύει η ανισότητα

$$\|u\|_2 \leq C \|\Delta u\|, \quad \forall u \in \{w \in H_0^1(\Omega) : \ \Delta w \in L^2(\Omega)\}. \tag{3}$$

1.2 Χώροι Bochner

Στο παρόν εδάφιο, θα μελετήσουμε τους χώρους Bochner και Bochner-Sobolev. Για περισσότερες λεπτομέρειες, ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στα βιβλία [4], [13] και [7]. Σε ό,τι ακολουθέι, ο X θα είναι ένας χώρος Banach, η $u : [0, T] \to X$, $T > 0$ θα είναι μία μετρήσιμη συνάρτηση μίας πραγματικής μεταβλητής με τιμές στον X, το $\int_0^T u(t)dt$ θα είναι το ολοκλήρωμα Bochner της u, ως προς το σύνηθες μέτρο Lebesgue στο $[0,T]$, και $u_t : [0,T] \to X$ θα είναι η ασθενής παράγωγος της u ως προς t, όταν αυτή ορίζεται.

Θα ξεκινήσουμε με τον ορισμό των χώρων Bochner $L^q(0,T;X)$. Για $q \in [1,\infty)$, ορίζουμε

$$L^q(0,T;X) := \left\{ u : [0,T] \to X \text{ μετρήσιμη} \;\middle|\; \int_0^T \|u(t)\|_X^q dt < \infty \right\},$$

όπου το ολοκλήρωμα στον ορισμό του ανωτέρω χώρου, νοείται ως το ολοκλήρωμα Lebesgue πραγματικών συναρτήσεων μίας μεταβλητής. Για $q = \infty$, ορίζουμε

$$L^\infty(0,T;X) := \left\{ u : [0,T] \to X \;\middle|\; \operatorname*{esssup}_{t\in(0,T)} \|u(t)\|_X < \infty \right\}.$$

Εφοδιάζουμε τους ανωτέρω χώρους με τις νόρμες

$$\|u\|_{L^q(0,T;X)} := \begin{cases} \left(\int_0^T \|u(t)\|^q dt\right)^{1/q}, & q \in [1,\infty) \\ \operatorname{esssup}_{t\in(0,T)} \|u(t)\|_X, & q = \infty \end{cases}, \quad \forall u \in L^q(0,T;X),$$

οι οποίες καθιστούν τους χώρους $L^q(0,T;X)$ χώρους Banach. Ειδικότερα, αν $\mathcal{H}$ είναι χώρος Hilbert, τότε ο $L^2(0,T;\mathcal{H})$ είναι χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο

$$(u,v)_{L^2(0,T;\mathcal{H})} := \int_0^T (u(t),v(t))_{\mathcal{H}} dt, \quad \forall u \in L^2(0,T;\mathcal{H}).$$

Για τους χώρους Bochner, ισχύουν τα ακόλουθα αποτελέσματα:

Θεώρημα 8. Έστω X, Y χώροι Banach, με $X \hookrightarrow Y$. Τότε, ισχύει η συνεχής ενσφήνωση $L^q(0,T;X) \hookrightarrow L^p(0,T;Y)$, $1 \le p \le q \le \infty$.

Απόδειξη. Έστω $u \in L^q(0,T;X)$. Από την ενσφήνωση $X \hookrightarrow Y$, υπάρχει $C > 0$, τ.ω.

$$\|u(t)\|_Y \le C\|u(t)\|_X, \text{ σ.π. } t \in (0,T).$$

Επιπλέον, από την Πρόταση 1, για $\Omega = (0,T)$, $k = \ell = 0$, υπάρχει $K > 0$, τ.ω.

$$\|v\|_{L^p(0,T)} \le K\|v\|_{L^q(0,T)}.$$

Ορίζουμε

$$g_X(t) = \|u(t)\|_X, \; g_Y(t) = \|u(t)\|_Y, \quad t \in (0,T).$$

Τότε, έχουμε

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^p(0,T;Y)} &= \left(\int_0^T \|u(t)\|_Y^p dt\right)^{1/p} \le \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt\right)^{1/p} = C^{1/p}\|g_X\|_{L^p(0,T)} \\ &\le C^{1/p}K\|g_X\|_{L^q(0,T)} = C^{1/p}K\left(\int_0^T \|u(t)\|_X^q dt\right)^{1/q} = L\|u\|_{L^q(0,T;X)}, \end{aligned}$$

και ολοκληρώνεται η απόδειξη του Θεωρήματος. □

Θεώρημα 9 ([13], Proposition 1.2.29)**.** Αν ο X είναι διαχωρίσιμος, τότε ο $L^q(0,T;X)$ είναι διαχωρίσιμος για $q \in [1,\infty)$.

Θεώρημα 10 ([13], Theorem 1.3.10, 1.3.21, Corollary 1.3.22)**.** Υποθέτουμε ότι ο X είναι ανακλαστικός, και έστω $1 \leq q^*, q < \infty$, με $1/q + 1/q^* = 1$ αν $q > 1$, και $q^* = \infty$ αν $q = 1$. Τότε, ο γραμμικός τελεστής $\mathcal{S} : L^{q^*}(0,T;X^*) \to (L^q(0,T;X))^*$, με

$$\langle \mathcal{S}u, v\rangle = \int_0^T \int_\Omega \langle u(t), v(t)\rangle_{X^*,X} dt, \quad \forall u \in L^{q^*}(0,T;X^*), v \in L^q(0,T;X),$$

είναι ισομετρικός ισομορφισμός. Σημειώνουμε ότι με $\langle \cdot, \cdot \rangle$, συμβολίσαμε το δυϊκό ζεύγος μεταξύ των $(L^q(0,T;X))^*$ και $L^q(0,T;X)$.

Πριν προχωρήσουμε στον ορισμό των χώρων Bochner-Sobolev, ορίζουμε τους χώρους

$$C([0,T];X) := \{u : [0,T] \to X \big| \text{ Η } u \text{ είναι συνεχής στο } [0,T]\},$$

$$C^k([0,T];X) := \{u : [0,T] \to X \big| \ u^{(s)} \in C([0,T];X), \forall s \leq k\}, \quad k \in \mathbb{N},$$

και

$$C^\infty([0,T];X) := \{u : [0,T] \to X \big| \ u \in C^k([0,T];X), \forall k \in \mathbb{N}\},$$

όπου η $u^{(s)}$ στους ανωτέρω ορισμούς είναι η κλασική παράγωγος s-τάξης της u. Εφοδιάζουμε τους δύο εκ των τριών ανωτέρω χώρους, με τις νόρμες

$$\|u\|_{C([0,T];X)} := \max_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_X, \quad \forall u \in C([0,T];X),$$

$$\|u\|_{C^k([0,T];X)} := \sum_{s=0}^k \|u^{(s)}\|_{C([0,T];X)}, \quad \forall u \in C^k([0,T];X), \ k \in \mathbb{N}.$$

Έπειτα, για $q \in [1, \infty]$, ορίζουμε τους χώρους Bochner-Sobolev πρώτης τάξης, ως

$$W^{1,q}(0,T,X) := \{u \in L^q(0,T;X) : \ u_t \in L^q(0,T;X)\}, \quad q \in [1,\infty],$$

με αντίστοιχες νόρμες

$$\|u\|_{W^{1,q}(0,T,X)} := \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^q dt + \int_0^T \|u_t(t)\|^q dt\right)^{1/q}, \quad q \in [1,\infty),$$

και

$$\|u\|_{W^{1,\infty}(0,T,X)} := \operatorname*{esssup}_{t\in[0,T]}(\|u(t)\|_X + \|u_t(t)\|_X).$$

Σημειώνουμε ότι αν $q = 2$, χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό

$$H^1(0,T;X) = W^{1,2}(0,T,X).$$

Κλείνοντας το υποεδάφιο, παραθέτουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα, χωρίς την απόδειξή τους.

Θεώρημα 11 ([4], Κεφάλαιο 5.9.2, Theorem 2)**.** Έστω $u \in W^{1,q}(0,T;X)$, για κάποιο $1 \leq q \leq \infty$. Τότε,

(*i*) $u \in C([0,T];X)$ (με πιθανές τροποποιήσεις σε ένα σύνολο μηδενικού μέτρου),

(*ii*)

$$u(t) = u(s) + \int_s^t u_t(\tau)d\tau, \quad 0 \leq s \leq t \leq T, \tag{4}$$

(*iii*)

$$\max_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_X \leq C\|u\|_{W^{1,q}(0,T;X)}, \tag{5}$$

όπου η σταθερά C εξαρτάται μόνο από το T

Θεώρημα 12 ([4], Κεφάλαιο 5.9.2, Theorem 3)**.** Έστω $u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, με $u_t \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$. Τότε,

(i) $u \in C([0,T];L^2(\Omega))$ (με πιθανές τροποποιήσεις σε ένα σύνολο μηδενικού μέτρου)

(ii) Η συνάρτηση $t \mapsto \|u(t)\|^2$ είναι απολύτως συνεχής, με

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 = 2\langle u_t(t), u(t)\rangle, \text{ σ.π. } t \in [0,T], \tag{6}$$

(iii) Υπάρχει $C > 0$, που εξαρτάται μόνο από το T, τέτοιο ώστε

$$\max_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_X \leq C\left(\|u\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + \|u_t\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}\right). \tag{7}$$

Θεώρημα 13 ([4], Κεφάλαιο 5.9.2, Theorem 3)**.** Υποθέτουμε ότι το Ω είναι ανοικτό, και το σύνορό του $\partial\Omega$ είναι ομαλό. Υποθέτουμε επίσης, ότι $u \in L^2(0,T;H^{m+2}(\Omega))$, με $u_t \in L^2(0,T;H^m(\Omega))$, για κάποιο $m \in \mathbb{N}$. Τότε,

(i) $u \in C([0,T];H^{m+1}(\Omega))$ (με πιθανές τροποποιήσεις σε ένα σύνολο μηδενικού μέτρου)

(ii) Υπάρχει σταθερά $C > 0$, ανεξάρτητη της u, τέτοια ώστε

$$\max_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_X \leq C\left(\|u\|_{L^2(0,T;H^{m+2}(\Omega))} + \|u_t\|_{L^2(0,T;H^m(\Omega))}\right). \tag{8}$$

Λήμμα 2 (Aubin-Lions, [18], Theorem II.5.16)**.** Έστω X_0, X, X_1 χώροι Banach, για τους οποίους ισχύουν οι ενσφηνώσεις

$$X_0 \underset{c}{\hookrightarrow} X \hookrightarrow X_1.$$

Τότε, για $p, q \in [1,\infty)$ και για

$$V := \{u \in L^p(0,T;X_0) : \ u_t \in L^q(0,T;X_1)\},$$

ισχύει η συμπαγής ενσφήνωση

$$V \underset{c}{\hookrightarrow} L^p(0,T;X).$$

2 Εισαγωγή και προηγούμενα αποτελέσματα

Στην παρούσα εργασία, θα ασχοληθούμε με τη μελέτη ως προς την ύπαρξη/μοναδικότητα λύσης και με την αριθμητική επίλυση του προβλήματος

$$\begin{aligned} u_t - \operatorname{div}[(|\nabla u|^p + c)\nabla u] &= f \text{ στο } \Omega, \quad t \in (0,T] \\ u &= 0 \text{ στο } \partial\Omega, \quad t \in (0,T] \\ u(\cdot,0) &= u_0 \text{ στο } \Omega, \end{aligned} \tag{9}$$

όπου $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ είναι ένα κατάλληλα ομαλό φραγμένο σύνολο, $d = 2,3$, $T > 0$ είναι ο τελικός χρόνος, $c \geq 0$ και $p \geq 1$ είναι πραγματικοί αριθμοί, $f \in C([0,T]; L^2(\Omega))$ είναι η συνάρτηση φορτίου, $u_0 \in W_0^{1,p+2}(\Omega)$ είναι η αρχική συνθήκη, και με $|\cdot|$ συμβολίζουμε την ευκλείδεια νόρμα του $\mathbb{R}^d$, δηλαδή

$$|\nabla u| = \left(\sum_{j=1}^{d} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^2 \right)^{1/2}.$$

Το ανωτέρω πρόβλημα αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως παραβολική p-Λαπλασιανή εξίσωση (parabolic p-Laplacian equation), και συνήθως δίδεται στη μορφή

$$\begin{aligned} u_t - \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) &= f \text{ στο } \Omega, \quad t \in (0,T] \\ u &= 0 \text{ στο } \partial\Omega, \quad t \in (0,T] \\ u(\cdot,0) &= u_0 \text{ στο } \Omega, \end{aligned} \tag{10}$$

όπου στο (10), $p > 1$. Στο παρόν κεφάλαιο, θα παρουσιάσουμε κάποια αποτελέσματα της βιβλιογραφίας για το πρόβλημα (10), αλλά στα επόμενα κεφάλαια θα μελετήσουμε το πρόβλημα στη μορφή (9).

Τα προβλήματα (10) και (9) έχουν πληθώρα εφαρμογών στη μαθηματική φυσική, όπως η μη-γραμμική διάχυση (βλ. [10]) ή τα μη-Νευτώνεια ρευστά (βλ. [11]). Στην εργασία [9], έχει αποδειχθεί ύπαρξη/μοναδικότητα λύσης του προβλήματος (10), αν $p \in (2,\infty)$ και οι u_0, f ικανοποιούν τις υποθέσεις

$$u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad f \in C^{0,1}([0,T]; L^2(\Omega)), \tag{11}$$

ενώ στην ίδια εργασία, με την προσθήκη της υπόθεσης ότι $u(t) \in W^{2,p}(\Omega)$ για κάθε t, τότε το σφάλμα της πεπλεγμένης μεθόδου Euler/$\mathcal{P}_1$-πεπερασμένων στοιχείων (την οποία θα ορίσουμε σε επόμενο κεφάλαιο) για την αριθμητική επίλυση του προβλήματος (10), ικανοποιεί την

$$\|u(t_n) - U^n\|^2 \leq C_1\tau + C_2 h^{1/(p-1)} + C_3 h^{2/(p-1)}, \tag{12}$$

όπου οι θετικές σταθερές C_1, C_2, C_3 είναι ανεξάρτητες των τ και h, και εξαρτώνται από κατάλληλες νόρμες της λύσης u.

Η εκτίμηση (12) βελτιώθηκε μετέπειτα στην εργασία [8], όπου αποδείχθηκε ότι υπό τις υποθέσεις (11) για $p \in (1,\infty)$ και τις υποθέσεις

(i) $u \in L^2(0,T; W^{2,p}(\Omega))$, αν $p \in (1,2)$,

(ii) $u \in L^2(0,T; H^2(\Omega)) \cap L^\infty(0,T; W^{1,\infty}(\Omega))$, αν $p \in (2,\infty)$,

τότε το σφάλμα της πεπλεγμένης μεθόδου Euler/$\mathcal{P}_1$-πεπερασμένων στοιχείων, ικανοποιεί

$$\|u - U\|^2_{C([0,T];L^2(\Omega))} + \|u - \hat{U}\|^2_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq C(h^p + \tau), \text{ αν } p \in (1,2),$$

και

$$\|u - U\|^2_{C([0,T];L^2(\Omega))} + \|u - \hat{U}\|^p_{L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega))} \leq C(h^2 + \tau), \text{ αν } p \in (2,\infty),$$

όπου

$$U(t) = \frac{(t - t_n)}{\tau} U^n + \frac{(t_n - t)}{\tau} U^{n-1}, \quad t \in [t_{n-1}, t_n], \ n = 1, \ldots, N,$$

και

$$\hat{U}(t) = U^n, \quad t \in (t_{n-1}, t_n],\ n = 1, \dots, N.$$

Στην ίδια εργασία, αποδεικνύονται οι συνεχείς εκτιμήσεις ομαλότητας

$$\|u_t\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \|u\|^p_{L^\infty(0,T;W^{1,p}(\Omega))} \le C(\|f\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \|u_0\|^p_{1,p}),$$

και οι διακριτές εκτιμήσεις ομαλότητας

$$\tau \sum_{n=1}^{N} \left\| \frac{U^n - U^{n-1}}{\tau} \right\|^2 + \max_{1\le n\le N} \|U^n\|^p_{1,p} \le C\left(\tau \sum_{n=1}^{N} \|f^n\|^2 + \|U^0\|^p_{1,p} \right),$$

των οποίων ανάλογες εκτιμήσεις θα αποδειχθούν σε επόμενα κεφάλαια, για το πρόβλημα (9).

Μία ακόμη κατηγορία σχεδόν-γραμμικών προβλημάτων είναι τα προβλήματα της μορφής

$$\begin{aligned} u_t - \operatorname{div}(a(u)\nabla u) &= f \text{ στο } \Omega, \quad t \in (0,T] \\ u &= 0 \text{ στο } \partial\Omega, \quad t \in (0,T] \\ u(\cdot,0) &= u_0 \text{ στο } \Omega, \end{aligned} \tag{13}$$

στα οποία ο μη-γραμμικός όρος $a(u)$ δεν εξαρτάται από την κλίση της άγνωστης συνάρτησης του προβλήματος, αλλά από την άγνωστη συνάρτηση καθεαυτή. Στο βιβλίο [3], αποδεικνύεται ότι αν ο μη-γραμμικός όρος $a(u)$ είναι Lipschitz συνεχής και φραγμένος, δηλαδή αν υπάρχουν σταθερές $\mu, M, L > 0$ τέτοιες ώστε

$$\mu \le a(u) \le M \text{ και } |a(u) - a(v)| \le L|u - v|, \quad \forall u, v \in \mathbb{R},$$

τότε υπό καταλλήλως ισχυρές υποθέσεις ομαλότητας για τα δεδομένα, τον μη-γραμμικό όρο και τη λύση u, η πεπλεγμένη μέθόδος Euler/$\mathcal{P}_1$-πεπερασμένων στοιχείων για την προσεγγιστική επίλυση του (13), ικανοποιεί την εκτίμηση σφάλματος

$$\|u(t_n) - U^n\| \le C(u)(\tau + h^2), \quad n = 1, \dots, N.$$

Στο ίδιο βιβλίο, αποδεικνύεται η ίδια εκτίμηση σφάλματος και για τη μέθοδο IMEX Euler/$\mathcal{P}_1$-πεπερασμένων στοιχείων, η οποία πρόκειται για μία γραμμικοποίηση της πεπλεγμένης μεθόδου Euler, μέσω της αντικατάστασης της προσέγγισης U^{n-1} στον μη-γραμμικό όρο $a(u)$, αντί της U^n.

Τέλος, στην εργασία [12], μελετήθηκε ως προς την αριθμητική επίλυσή του το σχεδόν-γραμμικό πρόβλημα

$$\begin{aligned} u_t - \operatorname{div}(a(x,t,u)\nabla u) + a_0(x,t,u) &= f \text{ στο } \Omega, \quad t \in (0,T] \\ u &= 0 \text{ στο } \partial\Omega, \quad t \in (0,T] \\ u(\cdot,0) &= u_0 \text{ στο } \Omega. \end{aligned} \tag{14}$$

Το πρόβλημα (14) διακριτοποιήθηκε με τη μέθοδο dG(0)/$\mathcal{P}_1$-πεπερασμένων στοιχείων, υπό τις υποθέσεις

$$f \in L^{2p}(0,T;L^p(\Omega)),\ u_0 \in W^{2-2/p,p}(\Omega) \cap W^{1,p}_0(\Omega) \cap H^2(\Omega), \text{ για κάποιο } \max\{d+2, 4\} < p < \infty, \tag{15}$$

$$\begin{aligned} \exists \beta \ge 1/2 \quad \forall M > 0 \quad \exists \Lambda_M > 0 : \quad \forall t_1, t_2 \in [0,T], \quad \forall |u| \le M : \\ |a(x,t_1,u) - a(x,t_2,u)| \le \Lambda_M |t_1 - t_2|^\beta, \end{aligned} \tag{16}$$

και

$$\exists M > 0 : \begin{cases} |a(x,t,u) \le M, \\ |a(x_1,t,u_1) - a(x_2,t,u_2)| \le M(|x_1 - x_2| + |u_1 - u_2|), \\ |a_0(x_1,t,u_1) - a_0(x_2,t,u_2)| \le M(|x_1 - x_2| + |u_1 - u_2|) \end{cases} \tag{17}$$

Σημειώνουμε ότι από τις εκτιμήσεις ομαλότητας που έχουν πραγματοποιηθεί και με τη χρήση καταλλήλων ενσφηνώσεων (βλ. [12]), η υπόθεση (15), δίνει ότι η λύση ικανοποιεί $u \in W^{1,p}(0,T;W^{2,p}(\Omega)) \cap C^{0,\alpha}([0,T];C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}))$, για κάποιο $\alpha \in (0,1)$. Υπό τις ανωτέρω υποθέσεις, αποδείχθηκαν οι εκτιμήσεις

$$\|u - u_\sigma\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_h))} + \|u - u_\sigma\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega_h))} \le C(\tau^{1/2} + h),$$

και
$$\|u-u_\sigma\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_h))} \leq C(\tau+h^2), \text{ αν } d=2,$$
όπου u_σ είναι η προσεγγιστική λύση που προκύπτει από το αριθμητικό σχήμα που μελετήθηκε στην εργασία. Επιπλέον, για $d<3$, με την αφαίρεση της υπόθεσης (17), και την επιλογή χρονικού βήματος $\tau \approx h^\kappa$, $3/(2-1/p)<\kappa \leq 2$, αποδείχθηκαν τα άνω φράγματα
$$\begin{aligned}
&\|u-u_\sigma\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_h))} \leq C\ln(T/\tau)h^{\kappa(2-1/p)-2},\\
&\|u-u_\sigma\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_h))} \leq Ch^\kappa,\\
&\|u-u_\sigma\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega_h))} \leq Ch^{\kappa/2},
\end{aligned}$$
όπου στις πέντε ανωτέρω εκτιμήσεις, η σταθερά C είναι ανεξάρτητη των τ, h, και εξαρτάται από την ποσότητα $\|u\|_{W^{1,p}(0,T;W^{2,p}(\Omega))}$.

3 Μελέτη της παραβολικής p-Λαπλασιανής εξίσωσης

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα μελετήσουμε την ύπαρξη/μοναδικότητα λύσης του προβλήματος (9), που ορίσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, για $p \geq 1$. Στο εξής, θα υποθέτουμε ότι $d = 2$ ή 3, και ότι το φραγμένο σύνολο $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ικανοποιεί την ιδιότητα του κώνου. Δηλαδή για κάθε σημείο $x \in \partial\Omega$, θα υπάρχει κώνος με κορυφή το x, ο οποίος περιέχεται στο Ω. Μαζί με την απόδειξη ύπαρξης/μοναδικότητας, θα εξαγάγουμε και μία εκτίμηση ομαλότητας, παρόμοια με εκείνη που αποδεικνύεται στο [8], αλλά και μία εκτίμηση ευστάθειας. Οι εκτιμήσεις αυτές θα έχουν διακριτά ανάλογα στην αριθμητική μέθοδο που θα μελετήσουμε στη συνέχεια, τα οποία θα αποδειχθούν στο Κεφάλαιο 4. Θα ξεκινήσουμε, αποδεικνύοντας το ακόλουθο αποτέλεσμα μονοτονίας του p-Λαπλασιανού τελεστή:

Λήμμα 3 (Μονοτονία της p-Λαπλασιανής)**.** Έστω $u_1, u_2 \in W^{1,p+2}(\Omega)$. Τότε,

$$\int_\Omega (|\nabla u_1|^p \nabla u_1 - |\nabla u_2|^p \nabla u_2) \cdot (\nabla u_1 - \nabla u_2)\, dx \geq 0.$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega (|\nabla u_1|^p \nabla u_1 - |\nabla u_2|^p \nabla u_2) \cdot (\nabla u_1 - \nabla u_2)\, dx \\
&\quad = \int_\Omega \left(|\nabla u_1|^{p+2} - |\nabla u_1|^p \nabla u_1 \cdot \nabla u_2 - |\nabla u_2|^p \nabla u_1 \cdot \nabla u_2 + |\nabla u_2|^{p+2}\right) dx \\
&\quad = \int_\Omega \left(|\nabla u_1|^{p+2} - (|\nabla u_1|^p + |\nabla u_2|^p) \nabla u_1 \cdot \nabla u_2 + |\nabla u_2|^{p+2}\right) dx \\
&\quad \geq \int_\Omega \left(|\nabla u_1|^{p+2} - \frac{1}{2}(|\nabla u_1|^p + |\nabla u_2|^p)(|\nabla u_1|^2 + |\nabla u_2|^2) + |\nabla u_2|^{p+2}\right) dx \\
&\quad = \int_\Omega \left(|\nabla u_1|^{p+2} - \frac{1}{2}|\nabla u_1|^{p+2} - \frac{1}{2}|\nabla u_1|^p |\nabla u_2|^2\right) dx \\
&\qquad + \int_\Omega \left(|\nabla u_2|^{p+2} - \frac{1}{2}|\nabla u_2|^{p+2} - \frac{1}{2}|\nabla u_2|^p |\nabla u_1|^2\right) dx \\
&\quad = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla u_1|^p |\nabla u_1|^2 - |\nabla u_1|^p |\nabla u_2|^2\right) dx \\
&\qquad + \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla u_2|^p |\nabla u_2|^2 - |\nabla u_2|^p |\nabla u_1|^2\right) dx \\
&\quad = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\nabla u_1|^p (|\nabla u_1|^2 - |\nabla u_2|^2) + |\nabla u_2|^p (|\nabla u_2|^2 - |\nabla u_1|^2)\right) dx \\
&\quad = \frac{1}{2}\int_\Omega \left((|\nabla u_1|^p - |\nabla u_2|^p)(|\nabla u_1|^2 - |\nabla u_2|^2)\right) dx.
\end{aligned} \tag{18}$$

Θα αποδείξουμε ότι το τελευταίο μέλος της (18) είναι μη-αρνητικό. Πράγματι, ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$g_2(\xi) = \xi^2 \text{ και } g_p(\xi) = \xi^p, \quad \xi \geq 0.$$

Οι g_2 και g_p είναι αύξουσες, άρα για κάθε $\xi_1, \xi_2 \geq 0$, έχουμε:

- Αν $\xi_1 \geq \xi_2 \geq 0$, τότε $\xi_1^p - \xi_2^p \geq 0$ και $\xi_1^2 - \xi_2^2 \geq 0$, άρα και το γινόμενό τους θα είναι μη-αρνητικό.
- Αν $0 \leq \xi_1 < \xi_2$, τότε $\xi_1^p - \xi_2^p \leq 0$ και $\xi_1^2 - \xi_2^2 \leq 0$, άρα το γινόμενό τους θα είναι μη-αρνητικό.

Σε κάθε περίπτωση έχουμε

$$(\xi_1^p - \xi_2^p)(\xi_1^2 - \xi_2^2) \geq 0, \quad \forall \xi_1, \xi_2 \geq 0. \tag{19}$$

Συνδυάζοντας τις (18) και (19), λαμβάνουμε την αποδεικτέα. □

Στη συνέχεια, επικαλούμαστε το ακόλουθο φασματικό θεώρημα για τον Λαπλασιανό τελεστή, του οποίου η απόδειξη μπορεί να βρεθεί στο [4].

Θεώρημα 14 ([4], Κεφάλαιο 6.5.1)**.** Θεωρούμε τον τελεστή $-\Delta : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$, με

$$(-\Delta u, v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx, \quad \forall u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega),\ v \in H_0^1(\Omega),$$

ή ισοδύναμα

$$-\Delta u = -\sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \quad \forall u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

Τότε, υπάρχει ακολουθία $\{(\lambda_m, \phi_m)\}_{m=1}^\infty$ ζευγών ιδιοτιμών/ιδιοσυναρτήσεων του $-\Delta$, με $\lambda_m \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, και $(\phi_i, \phi_j) = \delta_{ij}$, για $i \neq j$, και το σύνολο $\{\phi_m\}_{m=1}^\infty$ αποτελεί ορθοκανονική βάση Schauder του $L^2(\Omega)$.

Επιπλέον, θα χρειαστούμε το ακόλουθο υπαρξιακό θεώρημα, για προβλήματα αρχικών τιμών για συνήθεις διαφορικές εξίσώσεις, του οποίου η απόδειξη μπορεί να βρεθεί στα [15], [14].

Θεώρημα 15 (Peano, [15], Theorem 2.1)**.** Έστω $G : [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, η οποία είναι συνεχής στο $\mathcal{R} := \{(t, y) \in [t_0, t_0 + T] : \ |y - y_0| \leq b\}$, για κάποιο $b \in \mathbb{R}$, και υπάρχει $M > 0$ τ.ω.

$$|G(t, y)| \leq M, \quad \forall (t, y) \in [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}^N.$$

Τότε, το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{aligned} y'(t) &= G(t, y(t)), \quad t \in (t_0, t_0 + L] \\ y(t_0) &= y_0, \end{aligned}$$

έχει τουλάχιστον μία λύση για $L := \min\{T, b/M\}$.

Πριν προχωρήσουμε στη διατύπωση και απόδειξη του κυρίου αποτελέσματος του παρόντος κεφαλαίου, θα ορίσουμε την έννοια της ασθενούς λύσης του προβλήματος (9), ως ακολούθως:

Ορισμός 2. Λέμε ότι η $u \in C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; W_0^{1,p+2}(\Omega)) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega))$ είναι ασθενής λύση του προβλήματος (9), αν

$$\begin{aligned} \langle u_t, v\rangle + ((|\nabla u|^p + c)\nabla u, \nabla v) &= \langle f, v\rangle, \quad \forall v \in W_0^{1,p+2}(\Omega),\ \text{σ.π. } t \in (0, T] \\ u(0) &= u_0. \end{aligned} \tag{20}$$

Συνήθως, στον ορισμό της ασθενούς λύσης, ο χώρος που ανήκουν οι συναρτήσεις ελέγχου v αντιστοίχων εξισώσεων της (20), είναι ο $H_0^1(\Omega)$. Όμως, σε αυτό το πρόβλημα, επιλέγεται ο χώρος $W_0^{1,p+2}(\Omega)$, ώστε να ορίζεται πάντοτε το ολοκλήρωμα

$$\int_\Omega (|\nabla u|^p + c)\nabla u \cdot \nabla v dx,$$

και να μπορεί να δουλέψει η απόδειξη του κυρίου αποτελέσματος. Επιπλέον, η ελάχιστη ομαλότητα που μπορεί να απαιτηθεί για την ασθενή λύση του (9), είναι η $u \in L^2(0, T; W_0^{1,p+2}(\Omega)) \cap H^1(0, T; W^{-1,\frac{p+2}{p+1}}(\Omega))$, αλλά με τις υποθέσεις $f \in C([0, T]; L^2(\Omega))$ και $u_0 \in W_0^{1,p+2}(\Omega)$ (οι οποίες είναι απαραίτητες για την απόδειξη του βασικού αποτελέσματος), προκύπτει περισσότερη ομαλότητα της ασθενούς λύσης.

3.1 Ύπαρξη και μοναδικότητα ασθενούς λύσης του συνεχούς προβλήματος

Σε αυτό το υποεδάφιο, θα αποδείξουμε το κύριο αποτέλεσμα ύπαρξης και μοναδικότητας ασθενούς λύσης, μαζί με μία εκτίμηση ομαλότητας. Το εν λόγω αποτέλεσμα, διατυπώνεται ως ακολούθως:

Θεώρημα 16. Υποθέτουμε ότι η $f \in C([0,T];L^2(\Omega))$, και $u_0 \in W_0^{1,p+2}(\Omega)$. Τότε, το πρόβλημα (9) έχει μοναδική ασθενή λύση $u \in C([0,T];L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;W_0^{1,p+2}(\Omega)) \cap H^1(0,T;L^2(\Omega))$, η οποία ικανοποιεί την εκτίμηση ομαλότητας

$$\begin{aligned} \|u_t\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \|\nabla u\|^{p+2}_{L^\infty(0,T;L^{p+2}(\Omega))} + \|\nabla u\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \\ \leq C\left(\|\nabla u_0\|^{p+2}_{L^{p+2}(\Omega)} + \|\nabla u_0\|^2 + \|f\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\right). \end{aligned} \tag{21}$$

Απόδειξη. Για $m \in \mathbb{N}$, ορίζουμε $V_m = \operatorname{span}\{\phi_1, \ldots, \phi_m\}$, όπου $\{\phi_j\}_{j=1}^\infty$ είναι οι L^2-ορθοκανονικές ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή $-\Delta : H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$. Θεωρούμε τη μέθοδο Galerkin στον V_m, όπου αναζητούμε $u_m(t) = \sum_{j=1}^m \alpha_j^m(t)\phi_j \in V_m$, τ.ω.

$$\begin{aligned} (\partial_t u_m, \phi_i) + ((|\nabla u_m|^p + c)\nabla u_m, \nabla \phi_i) = (f(t), \phi_i), \quad i = 1, \ldots, m,\ t \in (0,T], \\ u_m(0) = P_m u_0, \end{aligned} \tag{22}$$

όπου $P_m : L^2(\Omega) \to V_m$ είναι ο τελεστής L^2-προβολής στον V_m, με

$$(P_m v, \phi_i) = (v, \phi_i), \quad i = 1, \ldots, m,\ \forall v \in L^2(\Omega).$$

Θα δείξουμε ότι το πρόβλημα (22) έχει μοναδική λύση. Χρησιμοποιώντας την αναπαράσταση $u_m(t) = \sum_{j=1}^m \alpha_j^m(t)\phi_j$, βρίσκουμε ότι η μεταβολική εξίσωση του προβλήματος (22) είναι ισοδύναμη με την

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \dot{\alpha}_j^m(t)(\phi_j, \phi_i) + \sum_{j=1}^m \alpha_j^m(t) \int_\Omega \left|\sum_{\ell=1}^m \alpha_\ell^m(t)\nabla\phi_\ell\right|^p \nabla\phi_j \cdot \nabla\phi_i dx \\ + \sum_{j=1}^m \alpha_j^m(t)(c\nabla\phi_j, \nabla\phi_i) = (f(t), \phi_i), \quad i = 1, \ldots, m,\ t \in (0,T], \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα,

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_i^m(t) + \sum_{j=1}^m \alpha_j^m(t) \int_\Omega \left|\sum_{\ell=1}^m \alpha_\ell^m(t)\nabla\phi_\ell\right|^p \nabla\phi_j \cdot \nabla\phi_i dx \\ + \sum_{j=1}^m \alpha_j^m(t)(c\nabla\phi_j, \nabla\phi_i) = (f(t), \phi_i), \quad i = 1, \ldots, m,\ t \in (0,T]. \end{aligned}$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση $H : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m\times m}$, με

$$H_{ij}(y) = \int_\Omega \left|\sum_{\ell=1}^m y_\ell \nabla\phi_\ell\right|^p \nabla\phi_j \cdot \nabla\phi_i dx, \quad i,j = 1, \ldots, m,\ y \in \mathbb{R}^m,$$

τον πίνακα $S \in \mathbb{R}^{m\times m}$ και τη συνάρτηση $F : [0,T] \to \mathbb{R}^m$, με

$$S_{ij} = c(\nabla\phi_j, \nabla\phi_i), \text{ και } F_i(t) = (f(t), \phi_i), \quad i,j = 1, \ldots, m,\ t \in [0,T].$$

Τότε, το πρόβλημα (22) είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{aligned} &\dot{\alpha}^m(t) = G(t, \alpha^m(t)) := F(t) - S\alpha^m(t) - H(\alpha^m(t))\alpha^m(t), \quad t \in (0,T], \\ &\alpha^m(0) = \alpha^{m,0}, \end{aligned} \tag{23}$$

όπου $\alpha_i^{m,0} = (u_0, \phi_i)$, $i = 1, \ldots, m$. Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι το ανωτέρω πρόβλημα αρχικών τιμών έχει τουλάχιστον μία λύση, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Peano, και στη συνέχεια να αποδείξουμε μοναδικότητα λύσης, χρησιμοποιώντας μία μονόπλευρη συνθήκη Lipschitz. Αρχικά, θα δείξουμε ότι η συνάρτηση $\mathbb{R}^m \ni y \mapsto H(y)y \in \mathbb{R}^m$ είναι συνεχής.

Έστω ακολουθία $(y^{(k)}) \subset \mathbb{R}^m$ και $y \in \mathbb{R}^m$, τ.ω. $y^{(k)} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} y$. Τότε, σ.π. $x \in \Omega$, οι συναρτήσεις

$$\mathbb{R}^m \ni y \mapsto \sum_{j=1|^m} y_j \nabla\phi_j(x) \in \mathbb{R}^d \text{ και } \mathbb{R}^d \ni z \mapsto a(z) = |z|^p z \in \mathbb{R}^d$$

είναι συνεχείς, άρα έχουμε

$$a\left(\sum_{j=1}^m y_j^{(k)} \nabla\phi_j(x)\right) \cdot \nabla\phi_i(x) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} a\left(\sum_{j=1}^m y_j \nabla\phi_j(x)\right) \cdot \nabla\phi_i(x), \text{ σ.π. } x \in \Omega.$$

Επιπλέον, λόγω της σύγκλισης της $(y^{(k)})$ στο y, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε για κάθε $k \geq k_0$, και σ.π. στο Ω, να έχουμε

$$\begin{aligned}
\left| a\left(\sum_{j=1}^m y_j^{(k)} \nabla\phi_j\right) \cdot \nabla\phi_i \right| &\leq \left| a\left(\sum_{j=1}^m y_j^{(k)} \nabla\phi_j\right) \right| \cdot |\nabla\phi_i| \\
&= \left| \sum_{j=1}^m y_j^{(k)} \nabla\phi_j \right|^{p+1} \cdot |\nabla\phi_i| \\
&\leq C|y^{(k)}|_\infty^{p+1} \sum_{j=1}^m |\nabla\phi_j|^{p+1} \cdot |\nabla\phi_i| \\
&\leq 2C|y|_\infty^{p+1} \sum_{j=1}^m |\nabla\phi_j|^{p+1} \cdot |\nabla\phi_i|, \quad i = 1, \ldots, m,
\end{aligned} \tag{24}$$

όπου $|\cdot|_\infty$ είναι η maximum-νόρμα του $\mathbb{R}^m$. Όμως, για $d = 2$ ή 3, $k = d$, $j = 0$, $m = 2$, , και $\tilde{p} = 2$, οι υποθέσεις του Θεωρήματος 2 ικανοποιούνται, και επιπλέον ο $C_B^0(\Omega)$ είναι υπόχωρος του $L^{p+2}(\Omega)$, άρα ισχύουν οι σχέσεις εγκλεισμού

$$H^2(\Omega) \hookrightarrow C_B^0(\Omega) \subset L^{p+2}(\Omega)$$

Συνεπώς, για $j = 1, \ldots, m$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\|\nabla\phi_j\|_{L^{p+2}(\Omega)}^{p+2} &\leq C\|\phi_j\|_{W^{2,p+2}(\Omega)}^{p+2} \leq C\|\Delta\phi_j\|_{L^{p+2}(\Omega)}^{p+2} \\
&= C\|\lambda_j\phi_j\|_{L^{p+2}(\Omega)}^{p+2} \leq C|\lambda_j|^{p+2}\|\phi_j\|_{L^{p+2}(\Omega)}^{p+2} < \infty,
\end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήθηκε το γεγονός ότι $\phi_j \in H^2(\Omega) \subset L^{p+2}(\Omega)$. Άρα, έχουμε $|\nabla\phi_j|^{p+2} \in L^1(\Omega)$, για $j = 1, \ldots, m$. Συνεπώς,

$$2C|y|_\infty^{p+1} \sum_{j=1}^n |\nabla\phi_j|^{p+1} \cdot |\nabla\phi_i| \in L^1(\Omega), \quad i = 1, \ldots, m,$$

και άρα από την ανωτέρω σχέση και την (24), ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebesgue. Έτσι, έχουμε

$$\int_\Omega \left\{ a\left(\sum_{j=1}^m y_j^{(k)} \nabla\phi_j\right) - a\left(\sum_{j=1}^m y_j \nabla\phi_j\right) \right\} \cdot \nabla\phi_i dx \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{25}$$

Έτσι, χρησιμοποιώντας την (25), βρίσκουμε ότι για $i = 1, \dots, m$,

$$
\begin{aligned}
&|(H(y^{(k)})y^{(k)})_i - (H(y)y)_i| \\
&= \left| \sum_{j=1}^m y_j^{(k)} \int_\Omega \left| \sum_{\ell=1}^m y_\ell^{(k)} \nabla\phi_\ell \right|^p \nabla\phi_j \cdot \nabla\phi_i dx - \sum_{j=1}^m y_j \int_\Omega \left| \sum_{\ell=1}^m y_\ell \nabla\phi_\ell \right|^p \nabla\phi_j \cdot \nabla\phi_i dx \right| \\
&= \left| \int_\Omega \left\{ \left| \sum_{\ell=1}^m y_\ell^{(k)} \nabla\phi_\ell \right|^p \sum_{j=1}^m y_j^{(k)} \nabla\phi_j - \left| \sum_{\ell=1}^m y_\ell \nabla\phi_\ell \right|^p \sum_{j=1}^m y_j \nabla\phi_j \right\} \cdot \nabla\phi_i dx \right| \\
&= \left| \int_\Omega \left\{ a\left(\sum_{j=1}^m y_j^{(k)} \nabla\phi_j \right) - a\left(\sum_{j=1}^m y_j \nabla\phi_j \right) \right\} \cdot \nabla\phi_i dx \right| \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}
$$

Δηλαδή, $H(y^{(k)})y^{(k)} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} H(y)y$, όταν $y^{(k)} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} y$, πράγμα που σημαίνει ότι η συνάρτηση $\mathbb{R}^m \ni y \mapsto H(y)y \in \mathbb{R}^m$ είναι συνεχής. Επιπλέον, η F είναι συνεχής. Πράγματι, έστω ακολουθία $(t^{(s)}) \subset [0,T]$, $t \in [0,T]$, τ.ω. $t^{(s)} \overset{s\to\infty}{\longrightarrow} t$. Τότε, για $i = 1, \dots, m$, έχουμε

$$
|F_i(t^{(s)}) - F_i(t)| = |(f(t^{(s)}) - f(t), \phi_i)| \le \|f(t^{(s)}) - f(t)\| \cdot \|\phi_i\| = \|f(t^{(s)}) - f(t)\| \overset{s\to\infty}{\longrightarrow} 0,
$$

όπου η ανωτέρω σύγκλιση προκύπτει από την υπόθεση $f \in C([0,T]; L^2(\Omega))$. Τώρα, θα αποδείξουμε ότι η G είναι συνεχής στο $[0,T] \times \mathbb{R}^m$. Πράγματι, έστω $(t^{(s)}) \subset [0,T]$, $(y^{(k)}) \subset \mathbb{R}^m$ και $t \in [0,T]$, $y \in \mathbb{R}^m$, τ.ω. $t^{(s)} \overset{s\to\infty}{\longrightarrow} t$ και $y^{(k)} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} y$. Τότε,

$$
\begin{aligned}
|G(t^{(s)}, y^{(k)}) - G(t,y)|_\infty &= |F(t^{(s)}) - Sy^{(k)} - H(y^{(k)})y^{(k)} - F(t) + Sy + H(y)y|_\infty \\
&\le |F(t^{(s)}) - F(t)|_\infty + |S(y^{(k)} - y)|_\infty + |H(y^{(k)})y^{(k)} - H(y)y|_\infty \\
&\le |F(t^{(s)}) - F(t)|_\infty + |||S|||_\infty \cdot |y^{(k)} - y|_\infty + |H(y^{(k)})y^{(k)} - H(y)y|_\infty \\
&\overset{k,s\to\infty}{\longrightarrow} 0,
\end{aligned}
$$

όπου $|||\cdot|||_\infty$ είναι η φυσική νόρμα πινάκων που επάγεται από τη νόρμα $|\cdot|_\infty$ του $\mathbb{R}^m$. Αποδείξαμε λοιπόν, ότι η G είναι συνεχής στο $[0,T] \times \mathbb{R}^m$. Θα αποδείξουμε επιπλέον, ότι η G είναι φραγμένη. Πράγματι, έστω $i \in \{1, \dots, m\}$, $t \in [0,T]$, και $y \in \mathbb{R}^m$. Για $s_1 = \frac{p+2}{p}$, $s_2 = s_3 = p+2$, έχουμε $1/s_1 + 1/s_2 + 1/s_3 = 1$. Τότε, χρησιμοποιώντας την ανισότητα Hölder, έχουμε

$$
\begin{aligned}
&|G_i(t,y)| = |F_i(t) - (Sy)_i - (H(y)y)_i| \\
&\quad = \left| (f(t), \phi_i) - \sum_{j=1}^m y_j \int_\Omega c\nabla\phi_j \cdot \nabla\phi_i dx - \sum_{j=1}^m \int_\Omega \left| \sum_{k=1}^m y_k \nabla\phi_k \right|^p \nabla\phi_j \cdot \nabla\phi_i dx \right| \\
&\quad \le \|f(t)\| + c|y|_\infty \sum_{j=1}^m \|\nabla\phi_j\| \cdot \|\nabla\phi_i\| + C|y|_\infty^{p+1} \sum_{j=1}^m \int_\Omega \left| \sum_{k=1}^m \nabla\phi_k \right|^p |\nabla\phi_j| \cdot |\nabla\phi_i| dx \\
&\quad \le C\left(\|f\|_{C([0,T;L^2(\Omega))} + m|y|_\infty \max_{1\le j\le m} \|\nabla\phi_j\|^2 + m^2 |y|_\infty^{p+1} \max_{1\le j\le m} \|\nabla\phi_j\|_{L^{p+2}(\Omega)}^{p+2} \right) =: M,
\end{aligned}
$$

πράγμα που σημαίνει ότι $|G(t,y)|_\infty \le M$, για κάθε $(t,y) \in [0,T] \times \mathbb{R}^m$. Επιλέγουμε $b > 0$, τέτοιο ώστε $T \le b/M$. Τότε, για $\mathcal{R} = \{(t,y) \in [0,T] \times \mathbb{R}^m : |y - \alpha^{m,0}| \le b\}$, η G είναι συνεχής στο $\mathcal{R}$, ενώ $\min\{T, b/M\} = T$. Άρα, από το Θεώρημα 15, το πρόβλημα

$$
\begin{aligned}
&\dot{\alpha}^m(t) = G(t, \alpha^m(t)), \quad t \in (0,T] \\
&\alpha^m(0) = \alpha^{m,0}
\end{aligned}
$$

έχει τουλάχιστον μία λύση, και άρα το ισοδύναμο πρόβλημα (22) έχει τουλάχιστον μία λύση.

Τώρα, θα δείξουμε ότι η G ικανοποιεί τη μονόπλευρη συνθήκη Lipschitz

$$
(G(t,y_1) - G(t,y_2)) \cdot (y_1 - y_2) \le 0, \quad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^m, \ t \in [0,T]. \tag{26}
$$

Πράγματι, έστω $t \in [0,T]$, $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^m$. Τότε, το εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^m$ της (26) ικανοποιεί

$$
\begin{aligned}
&(G(t,y_1) - G(t,y_2)) \cdot (y_1 - y_2) \\
&\quad = -\sum_{i=1}^m (y_{1,i} - y_{2,i}) \sum_{j=1}^m (y_{1,j} - y_{2,j}) \int_\Omega c \nabla\phi_j \cdot \nabla\phi_i dx \\
&\quad\quad - \sum_{i=1}^m (y_{1,i} - y_{2,i}) \sum_{j=1}^m \left(y_{1,j} \int_\Omega \left| \sum_{\ell=1}^m y_{1,\ell} \nabla\phi_\ell \right|^p \nabla\phi_j \cdot \nabla\phi_i dx \right. \\
&\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \left. - y_{2,j} \int_\Omega \left| \sum_{\ell=1}^m y_{2,\ell} \nabla\phi_\ell \right|^p \nabla\phi_j \cdot \nabla\phi_i dx \right) \\
&\quad = -c \int_\Omega \sum_{j=1}^m (y_{1,j} - y_{2,j}) \nabla\phi_j \cdot \sum_{i=1}^m (y_{1,i} - y_{2,i}) \nabla\phi_i dx \\
&\quad\quad - \int_\Omega \left(\left| \sum_{\ell=1}^m y_{1,\ell} \nabla\phi_\ell \right|^p \sum_{j=1}^m y_{1,j} \nabla\phi_j - \left| \sum_{\ell=1}^m y_{2,\ell} \nabla\phi_\ell \right|^p \sum_{j=1}^m y_{2,j} \nabla\phi_j \right) \cdot \sum_{i=1}^m (y_{1,i} - y_{2,i}) \nabla\phi_i dx. \quad (27)
\end{aligned}
$$

Ορίζουμε $z_1, z_2 \in V_m$, με

$$
z_1 = \sum_{j=1}^m y_{1,j} \phi_j, \text{ και } z_2 = \sum_{j=1}^m y_{2,j} \phi_j.
$$

Τότε, η (27) δίνει

$$
\begin{aligned}
(G(t,y_1) - G(t,y_2)) \cdot (y_1 - y_2) &= -c \|\nabla(z_1 - z_2)\|^2 - \int_\Omega (|\nabla z_1|^p \nabla z_1 - |\nabla z_2|^p \nabla z_2) \cdot (\nabla z_1 - \nabla z_2) dx \\
&\leq - \int_\Omega (|\nabla z_1|^p \nabla z_1 - |\nabla z_2|^p \nabla z_2) \cdot (\nabla z_1 - \nabla z_2) dx \leq 0,
\end{aligned}
$$

όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει από την (18). Τώρα, μπορούμε να αποδείξουμε ότι το πρόβλημα (22) έχει μοναδική λύση. Πράγματι, έστω $u_m, w_m \in V_m$ λύσεις του προβλήματος (22). Θέτουμε $e^m(t) := \alpha^m(t) - \beta^m(t)$, όπου οι συναρτήσεις $\alpha^m, \beta^m : [0,T] \to \mathbb{R}^m$, ορίζονται από τις σχέσεις

$$
u_m(t) = \sum_{j=1}^m \alpha_j^m(t) \phi_j, \text{ και } w_m(t) = \sum_{j=1}^m \beta_j^m(t) \phi_j, \quad t \in [0,T].
$$

Τότε, η e^m είναι λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$
\begin{aligned}
&\dot{e}^m(t) = G(t, \alpha^m(t)) - G(t, \beta^m(t)), \quad t \in (0,T] \\
&e^m(0) = 0.
\end{aligned} \tag{28}
$$

Όμως, για $t \in (0,T]$, από την (26), έχουμε

$$
\frac{d}{dt} |e^m(t)|^2_{\mathbb{R}^m} = 2\dot{e}^m(t) \cdot e^m(t) = 2(G(t, \alpha^m(t)) - G(t, \beta^m(t))) \cdot (\alpha^m(t) - \beta^m(t)) \leq 0,
$$

όπου $|\cdot|_{\mathbb{R}^m}$ είναι η ευκλείδεια νόρμα του $\mathbb{R}^m$. Ολοκληρώνοντας την ανωτέρω σχέση, βρίσκουμε

$$
\int_0^t \frac{d}{ds} |e^m(s)|^2_{\mathbb{R}^m} ds \leq 0 \Rightarrow |e^m(t)|^2_{\mathbb{R}^m} \leq |e^m(0)|^2_{\mathbb{R}^m} = 0, \quad t \in (0,T].
$$

Συνεπώς, $e^m(t) = 0$ για κάθε $t \in [0,T]$, και άρα η διαφορά $u_m - w_m$ ικανοποιεί τη σχέση

$$
u_m(t) - w_m(t) = \sum_{i=1}^m (\alpha_i^m(t) - \beta_i^m(t)) \phi_i = \sum_{i=1}^m e_i^m(t) \phi_i = 0, \quad t \in [0,T],
$$

πράγμα που σημαίνει ότι η λύση του προβλήματος (22) είναι μοναδική.

Στη συνέχεια, πολλαπλασιάζουμε τη μεταβολική εξίσωση του προβλήματος (22) με $\dot{\alpha}_i^m(t)$, και αθροίζουμε για $i = 1, \ldots, m$, ώστε να καταλήξουμε στην

$$(\partial_t u_m, \partial_t u_m) + ((|\nabla u_m|^p + c)\nabla u_m, \nabla \partial_t u_m) = (f, \partial_t u_m).$$

Κάνοντας κάποιες απλές πράξεις παραγώγισης, δείχνουμε ότι

$$c(\nabla u_m, \nabla \partial_t u_m) = \frac{c}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_m\|^2$$

και

$$(|\nabla u_m|^p \nabla u_m, \nabla \partial_t u_m) = \frac{1}{p+2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_m\|^{p+2}_{L^{p+2}(\Omega)}, \quad \forall t \in (0,T].$$

Έτσι,

$$\|\partial_t u_m\|^2 + \frac{1}{p+2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_m\|^{p+2}_{L^{p+2}(\Omega)} + \frac{c}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_m\|^2 = (f, \partial_t u_m) \leq \|f\| \cdot \|\partial_t u_m\| \leq \frac{1}{2}\|f\|^2 + \frac{1}{2}\|\partial_t u_m\|^2.$$

Επομένως,

$$\frac{1}{2}\|\partial_t u_m\|^2 + \frac{1}{p+2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_m\|^{p+2}_{L^{p+2}(\Omega)} + \frac{c}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_m\|^2 \leq \frac{1}{2}\|f\|^2.$$

Ολοκληρώνοντας στο $(0,t)$ για $t \in (0,T]$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^t \|\partial_t u_m(s)\|^2 ds &+ \frac{1}{p+2}\|\nabla u_m(t)\|^{p+2}_{L^{p+2}(\Omega)} + \frac{c}{2}\|\nabla u_m(t)\|^2 \\
&\leq \frac{1}{p+2}\|\nabla u_m(0)\|^{p+2}_{L^{p+2}(\Omega)} + \frac{c}{2}\|\nabla u_m(0)\|^2 + \frac{1}{2}\int_0^t \|f(s)\|^2 ds \\
&\leq \frac{1}{p+2}\|\nabla u_m(0)\|^{p+2}_{L^{p+2}(\Omega)} + \frac{c}{2}\|\nabla u_m(0)\|^2 + \frac{1}{2}\int_0^T \|f(s)\|^2 ds.
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι το δεξί μέλος της παραπάνω ανισότητας δεν εξαρτάται από το t, άρα μπορούμε να πάρουμε esssup στο αριστερό μέλος, ώστε να καταλήξουμε στην ανισότητα

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^T \|\partial_t u_m(s)\|^2 ds &+ \frac{1}{p+2}\operatorname*{esssup}_{s\in(0,T)}\|\nabla u_m(s)\|^{p+2}_{L^{p+2}(\Omega)} + \frac{c}{2}\operatorname*{esssup}_{s\in(0,T)}\|\nabla u_m(s)\|^2 \\
&\leq \frac{1}{p+2}\|\nabla u_m(0)\|^{p+2}_{L^{p+2}(\Omega)} + \frac{c}{2}\|\nabla u_m(0)\|^2 + \frac{1}{2}\int_0^T \|f(s)\|^2 ds \\
&\leq C\left(\|\nabla u_0\|^{p+2}_{L^{p+2}(\Omega)} + \|\nabla u_0\|^2 + \int_0^T \|f(s)\|^2 ds\right).
\end{aligned}$$

Δηλαδή, για

$$R = C\left(\|\nabla u_0\|^{p+2}_{L^{p+2}(\Omega)} + \|\nabla u_0\|^2 + \|f\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\right),$$

δείξαμε ότι

$$\|\partial_t u_m\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \|\nabla u_m\|^{p+2}_{L^\infty(0,T;L^{p+2}(\Omega))} + \|\nabla u_m\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq R, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Θα κατασκευάσουμε την ασθενή λύση του προβλήματος (9), μέσω της ακολουθίας συναρτήσεων (u_m), που προκύπτει από το πρόβλημα (22). Κατ΄ αρχάς, ο $H^1_0(\Omega)$ είναι διαχωρίσιμος, άρα από το Θεώρημα 9, ο χώρος $L^1(0,T;H^1_0(\Omega))$ είναι διαχωρίσιμος. Συνεπώς, από το Θεώρημα Banach-Alaoglu, η κλειστή μπάλα $\overline{B}_{(L^1(H^1_0))^*}(0,R^{1/2})$ του $\left(L^1(0,T;H^1_0(\Omega))\right)^*$ είναι ακολουθιακά ασθενώς* συμπαγής. Δηλαδή, για κάθε ακολουθία $(u^*_m) \subset \overline{B}_{(L^1(H^1_0))^*}(0,R^{1/2})$, υπάρχει υπακολουθία $(u^*_{k_m})$, τέτοια ώστε $u^*_{k_m} \xrightharpoonup{*} u^*$ στον

$\left(L^1(0,T;H_0^1(\Omega))\right)^*$, για κάποιο $u^* \in \overline{B}_{(L^1(H_0^1))^*}(0,R^{1/2})$. Χρησιμοποιώντας αυτήν την ασθενή* σύγκλιση, τον εγκλεισμό της ακολουθίας (u_m) στην κλειστή μπάλα $\overline{B}_{L^\infty(H_0^1)}(0,R^{1/2})$ του $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ και το Θεώρημα 10, καταλήγουμε ότι υπάρχει υπακολουθία $(u_{k_m}) \subset (u_m)$, τέτοια ώστε

$$\int_0^T \int_\Omega \nabla u_{k_m} \cdot \nabla v dx dt \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx dt, \quad \forall v \in L^1(0,T;H_0^1(\Omega)), \tag{29}$$

για κάποια συνάρτηση $u \in \overline{B}_{L^\infty(H_0^1)}(0,R^{1/2})$, δηλαδή για κάποια συνάρτηση $u \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$, τ.ω.

$$\|\nabla u\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq R. \tag{30}$$

Όμοια, αποδεικνύνουμε ότι υπάρχει υπακολουθία $(u_{\ell_m}) \subset (u_{k_m})$ τέτοια ώστε

$$\int_0^T \int_\Omega \nabla u_{\ell_m} \cdot \nabla v dx dt \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx dt, \quad \forall v \in L^1(0,T;W_0^{1,p+2}(\Omega)), \tag{31}$$

και

$$\|\nabla u\|^{p+2}_{L^\infty(0,T;L^{p+2}(\Omega))} \leq R. \tag{32}$$

Επιπλέον, ο $H^1(0,T;L^2(\Omega))$ είναι ανακλαστικός, ως χώρος Hilbert, άρα από το Θεώρημα 19, η κλειστή μπάλα $\overline{B}_{H^1(L^2)}(0,R^{1/2})$ του $H^1(0,T;L^2(\Omega))$ είναι ασθενώς συμπαγής. Επειδή $(u_{\ell_m}) \subset \overline{B}_{H^1(L^2)}(0,CR^{1/2})$ για κάποιο $C > 0$[1], υπάρχει υπακολουθία $(u_{n_m}) \subset (u_{\ell_m})$, τέτοια ώστε $u_{n_m} \rightharpoonup u$ στον $H^1(0,T;L^2(\Omega))$, και επιπλέον $u \in \overline{B}_{H^1(L^2)}(0,CR^{1/2})$, δηλαδή $u \in H^1(0,T;L^2(\Omega))$, και

$$\|u_t\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq CR. \tag{33}$$

Ειδικότερα,

$$\int_0^T \int_\Omega \partial_t u_{n_m} v dx dt \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T \int_\Omega u_t v dx dt, \quad \forall v \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)). \tag{34}$$

Μέχρι στιγμής, έχουμε δείξει ότι υπάρχει «οριακή» συνάρτηση $u \in H^1(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;W^{1,p+2}(\Omega))$ της ακολουθίας (u_m), τέτοια ώστε

$$\begin{aligned}\|u_t\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} &+ \|\nabla u\|^{p+2}_{L^\infty(0,T;L^{p+2}(\Omega))} + \|\nabla u\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \\ &\leq C\left(\|\nabla u_0\|^{p+2}_{L^{p+2}(\Omega)} + \|\nabla u_0\|^2 + \|f\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}\right).\end{aligned}$$

Θα δείξουμε ότι η u είναι ασθενής λύση του προβλήματος (9). Αρχικά, θα δείξουμε ότι ισχύει υπακολουθιακά το όριο

$$\int_0^T \int_\Omega |\nabla u_{n_m}|^p \nabla u_{n_m} \cdot \nabla v dx dt \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T \int_\Omega |\nabla u|^p \nabla u \cdot \nabla v dx dt, \quad \forall v \in L^\infty(0,T;W_0^{1,p+2}(\Omega)).$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}\left|\int_0^T \int_\Omega |\nabla u_{n_m}|^p \nabla u_{n_m} \cdot \nabla v dx dt - \int_0^T \int_\Omega |\nabla u|^p \nabla u \cdot \nabla v dx dt\right| \\ &\leq \int_0^T \int_\Omega |\nabla u_{n_m}|^p |\nabla (u_{n_m} - u)| \cdot |\nabla v| dx dt \\ &+ \int_0^T \int_\Omega \left||\nabla u_{n_m}|^p - |\nabla u|^p\right| \cdot |\nabla u| \cdot |\nabla v| dx dt \\ &:= I^{(1)}_{n_m} + I^{(2)}_{n_m}.\end{aligned}$$

[1] Η σταθερά C προκύπτει από την ανισότητα Poincaré-Friedrichs:

$$\|u_{k_m}\|^2_{H^1(L^2)} = \|u_{k_m}\|^2_{L^2(L^2)} + \|\partial_t u_{k_m}\|^2_{L^2(L^2)} \leq C^2_{PF}\|\nabla u_{k_m}\|^2_{L^2(L^2)} + \|\partial_t u_{k_m}\|^2_{L^2(L^2)} \leq (C^2_{PF}+1)R.$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Hölder, έχουμε

$$I_{n_m}^{(1)} \leq \int_0^T \left(\int_\Omega |\nabla u_{n_m}|^{ps_1} dx\right)^{1/s_1} \left(\int_\Omega |\nabla (u_{n_m} - u)|^{s_2} dx\right)^{1/s_2} \left(\int_\Omega |\nabla v|^{s_3} dx\right)^{1/s_3} dt,$$

για $1 < s_1, s_2, s_3 < \infty$ τ.ω.

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_3} = 1. \tag{35}$$

Για $s_1 = (p+2)/p$, $s_2 = s_3 = p+2$ ισχύει η (35). Άρα,

$$\begin{aligned}
I_{n_m}^{(1)} &\leq \int_0^T \|\nabla u_{n_m}\|^p_{L^{p+2}(\Omega)} \cdot \|\nabla(u_{n_m} - u)\|_{L^{p+2}(\Omega)} \cdot \|\nabla v\|_{L^{p+2}(\Omega)} dt \\
&\leq C \|\nabla u_{n_m}\|^p_{L^\infty(0,T;L^{p+2}(\Omega))} \int_0^T \|\nabla(u_{n_m} - u)\|_{L^{p+2}(\Omega)} dt \\
&\leq C \int_0^T \|\nabla(u_{n_m} - u)\|_{L^{p+2}(\Omega)} dt \\
&\leq C \|u_{n_m} - u\|_{L^1(0,T;W^{1,p+2}(\Omega))}.
\end{aligned}$$

Όμως, για $d = 2$ ή 3, $k = d$, $j = m = 1$ και $\tilde{p} = \tilde{q} = p+2$, οι υποθέσεις του Θεωρήματος 1 ικανοποιούνται, άρα ο $W^{2,p+2}(\Omega)$ είναι συμπαγώς ενσφηνωμένος στον $W^{1,p+2}(\Omega)$. Επιπλέον, έχουμε $W^{1,p+2}(\Omega) \hookrightarrow H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, άρα ισχύουν οι ακόλουθες ενσφηνώσεις:

$$W^{2,p+2}(\Omega) \underset{\mathrm{c}}{\hookrightarrow} W^{1,p+2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega). \tag{36}$$

Συνεπώς, χρησιμοποιώντας το Λήμμα Aubin-Lions για $X_0 = W^{2,p+2}(\Omega)$, $X = W^{1,p+2}(\Omega)$, $X_1 = L^2(\Omega)$, $p = 1$, $q = 2$, και

$$V = \{v \in L^1(0,T;W^{2,p+2}(\Omega)) : \ v_t \in L^2(0,T;L^2(\Omega)\},$$

έχουμε $V \underset{\mathrm{c}}{\hookrightarrow} L^1(0,T;W^{1,p+2}(\Omega))$. Επιπλέον, για $m \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_\Omega |\Delta u_{n_m}|^{p+2} dx dt &= \int_0^T \int_\Omega \left| \sum_{j=1}^{n_m} \alpha_j^{n_m}(t) \Delta \phi_j \right|^{p+2} dx dt \\
&= \int_0^T \int_\Omega \left| \sum_{j=1}^{n_m} \alpha_j^{n_m}(t) \lambda_j \phi_j \right|^{p+2} dx dt \\
&\leq \max_{1 \leq j \leq n_m} |\lambda_j|^{p+2} \int_0^T \int_\Omega \left| \sum_{j=1}^{n_m} \alpha_j^{n_m}(t) \phi_j \right|^{p+2} dx dt \\
&= \max_{1 \leq j \leq n_m} |\lambda_j|^{p+2} \|u_{n_m}\|^{p+2}_{L^{p+2}(0,T;L^{p+2}(\Omega))} \\
&\leq C \max_{1 \leq j \leq n_m} |\lambda_j|^{p+2} \|\nabla u_{n_m}\|^{p+2}_{L^\infty(0,T;L^{p+2}(\Omega))} < \infty,
\end{aligned}$$

άρα $u_{n_m} \in L^{p+2}(0,T;W^{2,p+2}(\Omega)) \subset L^1(0,T;W^{2,p+2}(\Omega))$, για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Επειδή $\partial_t u_{n_m} \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, έχουμε $u_{n_m} \in V$, για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Επομένως, υπάρχει υπακολουθία $(u_{j_m}) \subset (u_{n_m})$, τ.ω.

$$\|u_{j_m} - u\|_{L^1(0,T;W^{1,p+2}(\Omega))} \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{37}$$

και άρα $I_{n_m}^{(1)} \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Επιπλέον, χρησιμοποιώντας την αλγεβρική ανισότητα

$$||s|^p - |r|^p| \leq C_p |s - r|(|s - r|^{p-1} + |r|^{p-1}), \quad s, r \in \mathbb{R},$$

έχουμε

$$
\begin{aligned}
I_{j_m}^{(2)} &= \int_0^T \int_\Omega ||\nabla u_{j_m}|^p - |\nabla u|^p| \cdot |\nabla u| \cdot |\nabla v| dxdt \\
&\le C_p \int_0^T \int_\Omega |\nabla (u_{j_m} - u)| (|\nabla (u_{j_m} - u)|^{p-1} + |\nabla u|^{p-1}) |\nabla u| \cdot |\nabla v| dxdt \\
&\le C_p \Bigg(\int_0^T \int_\Omega |\nabla (u_{j_m} - u)| \cdot |\nabla u|^p \cdot |\nabla v| dxdt \\
&\qquad + \int_0^T \int_\Omega |\nabla (u_{j_m} - u)|^p \cdot |\nabla u| \cdot |\nabla v| dxdt \Bigg) \\
&=: C_p (I_{j_m}^{(3)} + I_{j_m}^{(4)}).
\end{aligned}
$$

Θα δείξουμε ότι $I_{j_m}^{(3)} \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$ και $I_{j_m}^{(4)} \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Για $s_1 = p+2$, $s_2 = (p+2)/p$, $s_3 = p+2$, έχουμε $1/s_1 + 1/s_2 + 1/s_3 = 1$, άρα χρησιμοποιώντας την ανισότητα Hölder, βρίσκουμε

$$
\begin{aligned}
I_{j_m}^{(3)} &= \int_0^T \int_\Omega |\nabla (u_{j_m} - u)| \cdot |\nabla u|^p \cdot |\nabla v| dxdt \\
&\le \int_0^T \left(\int_\Omega |\nabla (u_{j_m} - u)|^{p+2} \right)^{1/(p+2)} \left(\int_\Omega |\nabla u|^{p+2} dx \right)^{p/(p+2)} \left(\int_\Omega |\nabla v|^{p+2} dx \right)^{1/(p+2)} dt \\
&= \int_0^T \|\nabla (u_{j_m} - u)\|_{L^{p+2}(\Omega)} \cdot \|\nabla u\|_{L^{p+2}(\Omega)}^p \cdot \|\nabla v\|_{L^{p+2}(\Omega)} dt \\
&\le C \|\nabla u\|_{L^\infty(0,T;L^{p+2}(\Omega))}^p \|\nabla v\|_{L^\infty(0,T;L^{p+2}(\Omega))} \|u_{j_m} - u\|_{L^1(0,T;W^{1,p+2}(\Omega))} \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0. \qquad (38)
\end{aligned}
$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Hölder με του ίδιους εκθέτες, βρίσκουμε

$$
\begin{aligned}
I_{j_m}^{(4)} &= \int_0^T \int_\Omega |\nabla (u_{j_m} - u)|^p \cdot |\nabla u| \cdot |\nabla v| dxdt \\
&\le \int_0^T \|\nabla (u_{j_m} - u)\|_{L^{p+2}(\Omega)}^p \cdot \|\nabla u\|_{L^{p+2}(\Omega)} \cdot \|\nabla v\|_{L^{p+2}(\Omega)} dt \\
&\le C \|\nabla u\|_{L^\infty(0,T;L^{p+2}(\Omega))} \|\nabla v\|_{L^\infty(0,T;L^{p+2}(\Omega))} \|u_{j_m} - u\|_{L^p(0,T;W^{1,p+2}(\Omega))}^p. \qquad (39)
\end{aligned}
$$

Θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι το Λήμμα Aubin-Lions, για να αποδείξουμε τη σύγκλιση του $I_{j_m}^{(4)}$ στο 0. Πράγματι, χρησιμοποιώντας τις ενσφηνώσεις (36), για

$$
W := \{ v \in L^p(0,T;W^{2,p+2}(\Omega)) : \ v_t \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) \},
$$

έχουμε $W \underset{c}{\hookrightarrow} L^p(0,T;W^{1,p+2}(\Omega))$. Θα δείξουμε ότι $u_{j_m} \in W$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Επειδή έχουμε δείξει ότι $\partial_t u_{j_m} \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, αρκεί να δείξουμε ότι $u_{j_m} \in L^p(0,T;W^{2,p+2}(\Omega))$, για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Πράγματι,

$$
\|u_{j_m}\|_{L^p(0,T;W^{2,p+2}(\Omega))} \le C \int_0^T \int_\Omega |\Delta u_{j_m}|^{p+2} dxdt < \infty.
$$

Άρα, για κάθε $m \in \mathbb{N}$, $u_{j_m} \in W \underset{c}{\hookrightarrow} L^p(0,T;W^{1,p+2}(\Omega))$, συνεπώς υπάρχει υπακολουθία (u_{i_m}), τέτοια ώστε

$$
\lim_{m\to\infty} \|u_{i_m} - u\|_{L^p(0,T;W^{1,p+2}(\Omega))} = 0,
$$

και άρα από την ανωτέρω σχέση και την (39), παίρνουμε τη σύγκλιση $I_{i_m}^{(4)} \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Επομένως, η σύγκλιση του $I_{i_m}^{(4)}$, μαζί με την (38), μας δίνουν ότι $I_{i_m}^{(2)} \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$, και άρα

$$
\left| \int_0^T \int_\Omega |\nabla u_{i_m}|^p \nabla u_{i_m} \cdot \nabla v dxdt - \int_0^T \int_\Omega |\nabla u|^p \nabla u \cdot \nabla v dxdt \right| \le I_{i_m}^{(1)} + I_{i_m}^{(2)} \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.
$$

Δηλαδή, βρήκαμε υπακολουθία (u_{i_m}) τ.ω.

$$\int_0^T (|\nabla u_{i_m}|^p \nabla u_{i_m}, \nabla v)dt \to \int_0^T (|\nabla u|^p \nabla u, \nabla v)dt, \quad \forall v \in L^\infty(0,T;W_0^{1,p+2}(\Omega)).$$

Άρα, από την ανωτέρω σχέση και τις (31), (34), για κατάλληλη υπακολουθία $(u_j) \subset (u_m)$, έχουμε

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_\Omega \partial_t u_j v dx dt \to \int_0^T \int_\Omega u_t v dx dt,\\
&\int_0^T \int_\Omega \nabla u_j \cdot \nabla v dx dt \to \int_0^T \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx dt,\\
&\int_0^T \int_\Omega |\nabla u_j|^p \nabla u_j \cdot \nabla v dx dt \to \int_0^T \int_\Omega |\nabla u|^p \nabla u \cdot \nabla v dx dt,
\end{aligned}$$

για κάθε $v \in L^\infty(0,T;W_0^{1,p+2}(\Omega))$. Συνεπώς, υπάρχει υπακολουθία $(u_i) \subset (u_j)$ τ.ω. σχεδόν παντού στο $[0,T]$, να έχουμε

$$(\partial_t u_i, v) \to (u_t, v), \quad (\nabla u_i, \nabla v) \to (\nabla u, \nabla v), \quad (|\nabla u_i|^p \nabla u_i, \nabla v) \to (|\nabla u|^p \nabla u, \nabla v)$$

για κάθε $v \in W_0^{1,p+2}(\Omega)$. Αθροίζοντας τα παραπάνω όρια, καταλήγουμε στην

$$(u_t, v) + ((|\nabla u|^p + c)\nabla u, \nabla v) = (f, v), \quad \forall v \in W_0^{1,p+2}(\Omega), \text{ σ.π. } t \in (0,T].$$

Επιπλέον, από το Θεώρημα 11 για $q = 2$ και $X = L^2(\Omega)$, έχουμε $u \in C([0,T];L^2(\Omega))$, και άρα

$$u(0) = \lim_{m\to\infty} u_m(0) = \lim_{m\to\infty} P_m u_0 = u_0.$$

Δηλαδή, η $u \in C([0,T];L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;W_0^{1,p+2}(\Omega)) \cap H^1(0,T;L^2(\Omega))$, είναι ασθενής λύση του προβλήματος (9), και ικανοποιεί τις εκτιμήσεις ομαλότητας (21).

Μένει να αποδείξουμε ότι το πρόβλημα (9) έχει μοναδική ασθενή λύση. Ρόλο-κλειδί σε αυτή την απόδειξη, θα παίξει η μονοτονία της p-Λαπλασιανής. Πράγματι, έστω u_1, u_2 ασθενείς λύσεις του προβλήματος (9). Θέτουμε $e = u_1 - u_2$, και αντικαθιστούμε στην (20), ώστε να λάβουμε την

$$\begin{aligned}
\langle e_t, v\rangle + \int_\Omega (|\nabla u_1|^p \nabla u_1 - |\nabla u_2|^p \nabla u_2) \cdot \nabla v dx + c(\nabla e, \nabla v) = 0, \quad \forall v \in W_0^{1,p+2}(\Omega), \text{ σ.π. } t \in (0,T]\\
e(0) = 0.
\end{aligned} \tag{40}$$

Επιλέγουμε $v = e$ στη μεταβολική εξίσωση της (40). Τότε, σ.π. $t \in (0,T]$ έχουμε

$$\langle e_t, e\rangle + \int_\Omega (|\nabla u_1|^p \nabla u_1 - |\nabla u_2|^p \nabla u_2) \cdot \nabla(u_1 - u_2) dx + c\|\nabla e\|^2 = 0. \tag{41}$$

Όμως, από το Λήμμα 3, έχουμε

$$\int_\Omega (|\nabla u_1|^p \nabla u_1 - |\nabla u_2|^p \nabla u_2) \cdot \nabla(u_1 - u_2) dx \geq 0.$$

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας την (6), και παραλείποντας τον δεύτερο και τον τρίτο όρο της (41), επειδή είναι μη-αρνητικοί, βρίσκουμε

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|e(t)\|^2 = \langle e_t(t), e(t)\rangle \leq 0, \text{ σ.π. } t \in (0,T].$$

Ολοκληρώνοντας την ανωτέρω σχέση, έχουμε

$$\int_0^t \frac{d}{ds}\|e(s)\|^2 ds \leq 0, \text{ σ.π. } t \in (0,T],$$

η οποία μας δίνει

$$\|e(t)\|^2 \leq \|e(0)\|^2 = 0, \text{ σ.π. } t \in (0,T],$$

και άρα λόγω της ανωτέρω σχέσης, έχουμε $e = 0$. Συνεπώς $u_1 = u_2$, πράγμα που σημαίνει ότι το πρόβλημα (9) έχει μοναδική ασθενή λύση, και έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη του θεωρήματος. □

3.2 Εκτιμήσεις ευστάθειας

Κλείνοντας αυτό το κεφάλαιο, θα αποδείξουμε την ακόλουθη εκτίμηση ευστάθειας:

Πρόταση 2. Υποθέτουμε ότι $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, και επιπλέον ότι η f ικανοποιεί τις απαραίτητες πρόσθετες συνθήκες ομαλότητας (π.χ. $f \in C([0,T];L^2(\Omega))$), ώστε το πρόβλημα (9) να έχει ασθενή λύση u. Τότε, αν $c>0$, έχουμε

$$\|u(t)\|^2 + \int_0^t \|\nabla u(s)\|^{p+2}_{L^{p+2}(\Omega)}ds + \int_0^t \|\nabla u(s)\|^2 ds \le \|u_0\|^2 + C\int_0^t \|f(s)\|^2 ds, \ \text{σ.π. } t\in(0,T], \tag{42}$$

ενώ αν $c=0$, έχουμε

$$\|u(t)\|^2 + \int_0^t \|\nabla u(s)\|^{p+2}_{L^{p+2}(\Omega)}ds \le \|u_0\|^2 + C\int_0^t \|f(s)\|^{\frac{p+2}{p+1}}_{L^{\frac{p+2}{p+1}}(\Omega)} ds, \ \text{σ.π. } t\in(0,T]. \tag{43}$$

Απόδειξη. Επιλέγουμε $v=u$ στην (20). Τότε, έχουμε

$$(u_t,u) + (|\nabla u|^p\nabla u, \nabla u) + c(\nabla u,\nabla u) = (f,u),$$

ή ισοδύναμα,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2 + \|\nabla u\|^{p+2}_{L^{p+2}(\Omega)} + c\|\nabla u\|^2 = (f,u). \tag{44}$$

Χρησιμοποιώντας τις ανισότητες Cauchy-Schwarz, Young και Poincaré-Friedrichs, για $c>0$, βρίσκουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2 + \|\nabla u\|^{p+2}_{L^{p+2}(\Omega)} + c\|\nabla u\|^2 &\le \|f\|\cdot\|u\| \\ &\le \frac{C_{PF}^2}{2c}\|f\|^2 + \frac{c}{2C_{PF}^2}\|u\|^2 \le \frac{C_{PF}^2}{2c}\|f\|^2 + \frac{c}{2}\|\nabla u\|^2,\end{aligned}$$

και άρα υπάρχει σταθερά $C>0$, τέτοια ώστε

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2 + \|\nabla u\|^{p+2}_{L^{p+2}(\Omega)} + \|\nabla u\|^2 \le C\|f\|^2.$$

Ολοκληρώνοντας την ανωτέρω σχέση, βρίσκουμε

$$\int_0^t \frac{d}{ds}\|u(s)\|^2 ds + \int_0^t \|\nabla u(s)\|^{p+2}_{L^{p+2}(\Omega)}ds + \int_0^t \|\nabla u(s)\|^2 ds \le C\int_0^t \|f(s)\|^2 ds, \ \text{σ.π. } t\in(0,T],$$

ή ισοδύναμα,

$$\|u(t)\|^2 + \int_0^t \|\nabla u(s)\|^{p+2}_{L^{p+2}(\Omega)}ds + \int_0^t \|\nabla u(s)\|^2 ds \le \|u_0\|^2 + C\int_0^t \|f(s)\|^2 ds, \ \text{σ.π. } t\in(0,T],$$

όπου η ανωτέρω ανισότητα είναι η (42).

Επιπλέον, αν $c=0$, τότε για $s_1=(p+2)/(p+1)$ και $s_2=p+2$, έχουμε $1/s_1+1/s_2=1$. Χρησιμοποιώντας τις ανισότητες Hölder, Young και Poincaré-Friedrichs στην (44), βρίσκουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2 + \|\nabla u\|^{p+2}_{L^{p+2}(\Omega)} &\le \|f\|_{L^{\frac{p+2}{p+1}}(\Omega)}\cdot\|u\|_{L^{p+2}(\Omega)} \\ &\le \frac{C_{PF}^{\frac{p+2}{p+1}}(p+1)}{p+2}\|f\|^{\frac{p+2}{p+1}}_{L^{\frac{p+2}{p+1}}(\Omega)} + \frac{1}{C_{PF}^{p+2}(p+2)}\|u\|^{p+2}_{L^{p+2}(\Omega)} \\ &\le \frac{C_{PF}^{\frac{p+2}{p+1}}(p+1)}{p+2}\|f\|^{\frac{p+2}{p+1}}_{L^{\frac{p+2}{p+1}}(\Omega)} + \frac{1}{p+2}\|\nabla u\|^{p+2}_{L^{p+2}(\Omega)},\end{aligned}$$

όπου για $p \geq 1$, έχουμε $1 \leq (p+2)/(p+1) \leq 3/2$, άρα $\|f\|_{L^{\frac{p+2}{p+1}}(\Omega)} \leq K\|f\| < \infty$. Επομένως, υπάρχει σταθερά $C > 0$, τέτοια ώστε

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2 + \|\nabla u\|^{p+2}_{L^{p+2}(\Omega)} \leq C\|f\|^{\frac{p+2}{p+1}}_{L^{\frac{p+2}{p+1}}(\Omega)}.$$

Ολοκληρώνοντας την ανωτέρω σχέση όπως στην περίπτωση $c > 0$, λαμβάνουμε την εκτίμηση ευστάθειας (43), και ολοκληρώνεται η απόδειξη της πρότασης. $\square$

Συμπεραίνουμε λοιπόν, ότι για $f \in C([0,T]; L^2(\Omega))$, το πρόβλημα (9) είναι καλώς ορισμένο, και ικανοποιεί αρκετά «καλές» ιδιότητες ευστάθειας και ομαλότητας. Στα επόμενα κεφάλαια, θα ασχοληθούμε με την αριθμητική επίλυση του εν λόγω προβλήματος, την οποία θα μελετήσουμε ως προς τη θεωρία (ύπαρξη, μοναδικότητα, ευστάθεια, σύγκλιση), αλλά και ως προς την υλοποίηση στον υπολογιστή.

4 Ένα πλήρως διακριτό σχήμα για την αριθμητική επίλυση της παραβολικής p-Λαπλασιανής εξίσωσης

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα ορίσουμε και θα αναλύσουμε ένα πλήρως διακριτό σχήμα για την αριθμητική επίλυση του προβλήματος (9), με $d = 2$, το οποίο αποτελείται από την $\mathcal{P}_1$-μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων στο χώρο, και την πεπλεγμένη μέθοδο του Euler στο χρόνο. Όπως θα δούμε παρακάτω, το εν λόγω σχήμα έχει τάξη σύγκλισης ίση με 1 στο χώρο και στο χρόνο ως προς τη νόρμα που θα χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση, αν υποθέσουμε ότι η ακριβής λύση του προβλήματος (9) είναι αρκούντως ομαλή.

4.1 Ορισμός του πλήρως διακριτού σχήματος

Θεωρούμε $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, ένα φραγμένο, κυρτό και ανοικτό πολυγωνικό χωρίο, και ορίζουμε την οικογένεια τριγωνισμών $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ του Ω, με $h = \max_{K\in\mathcal{T}_h} \operatorname{diam}(K)$. Υποθέτουμε ότι η εν λόγω οικογένεια των τριγωνισμών είναι σχεδόν ομοιόμορφη, δηλαδή ότι υπάρχει $\rho > 0$, τέτοιο ώστε

$$\frac{\max_{K\in\mathcal{T}_h} \operatorname{meas}(K)}{\min_{K\in\mathcal{T}_h} \operatorname{meas}(K)} \leq \rho, \quad \forall h > 0,$$

όπου $\operatorname{meas}(K)$ είναι το μέτρο Lebesgue του K, δηλαδή το εμβαδόν του K.

Στη συνέχεια, ορίζουμε τον χώρο πεπερασμένων στοιχείων $S_h \subset W_0^{1,p+2}(\Omega)$, στον οποίο θα ανήκει η προσεγγιστική λύση, ως

$$S_h := \{v_h \in C(\overline{\Omega}) : \ v_h|_K \in \mathcal{P}_1(K), \ \forall K \in \mathcal{T}_h \text{ και } v_h|_{\partial\Omega} = 0\},$$

όπου

$$\mathcal{P}_1(K) := \left\{ g \in C(K) : \ \exists \alpha_0^K, \alpha_1^K, \alpha_2^K \in \mathbb{R} \text{ τ.ω. } g(x) = \alpha_0^K + \sum_{j=1}^{2} \alpha_j^K x_j, \ \forall x \in K \right\}$$

είναι ο χώρος των γραμμικών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το K.

Υπό τις υποθέσεις που αναφέρονται ανωτέρω, ισχύει το ακόλουθο αποτέλεσμα, του οποίου η απόδειξη παραλείπεται, και ο ενδιαφερόμενος για την απόδειξη αναγνώστης παραπέμπεται στο [1].

Πρόταση 3 (Αντίστροφες εκτιμήσεις στον S_h, [1], Lemma 4.5.3, Theorem 4.5.11)**.** Έστω $q, r \in [1, \infty]$, $k, m \in \mathbb{N}_0$. Τότε, υπάρχει σταθερά $C > 0$ ανεξάρτητη του h και υπάρχει $h_0 > 0$, τέτοια ώστε

$$\left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \|v_h\|^r_{W^{k,r}(K)} \right)^{1/r} \leq C h^{m-k+\min\{0, 2/r-2/q\}} \left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \|v_h\|^q_{W^{m,q}(K)} \right)^{1/q}, \quad \forall v_h \in S_h, \tag{45}$$

για κάθε $h \leq h_0$, όπου στην περίπτωση $q = \infty$ ή $r = \infty$, ορίζουμε $1/q = 0$ ή $1/r = 0$, αντίστοιχα.

Η σημασία της ανωτέρω πρότασης είναι η ακόλουθη: λόγω της συνεχούς ενσφήνωσης του $W^{k,r}(\Omega)$ στον $W^{m,q}(\Omega)$ για $m \leq k$ και $1 \leq q \leq r \leq \infty$, ισχύει η ανισότητα $\|v\|_{m,q} \leq C\|v\|_{k,r}$, για κάθε $v \in W^{k,r}(\Omega)$, αλλά η αντίστροφη ανισότητα δεν ισχύει. Όμως, η διάσταση του χώρου S_h ισούται με το πλήθος των κορυφών των τριγώνων του $\mathcal{T}_h$, που βρίσκονται στο εσωτερικό του συνόλου Ω, δηλαδή ο S_h είναι χώρος πεπερασμένης διάστασης. Επομένως, όλες οι νόρμες στον S_h είναι ισοδύναμες, και άρα ισχύει και η αντίστροφη ανισότητα $\|v_h\|_{k,r} \leq C(h)\|v_h\|_{m,q}$, για κάθε $v_h \in S_h$, όπου σε αυτήν την περίπτωση η σταθερά $C(h)$ εξαρτάται από το h, και ισχύει $C(h) \to \infty$, καθώς $h \to 0$. Η ανωτέρω πρόταση προσδιορίζει αυτήν ακριβώς την εξάρτηση της σταθεράς $C(h)$ από το h. Στο εξής, θα θεωρούμε ότι το h θα είναι κατάλληλα μικρό, ώστε να μπορεί να ικανοποιείται η ανωτέρω πρόταση.

Στη συνέχεια, θα ορίσουμε τον τελεστή παρεμβολής μιας συνάρτησης του $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ στον S_h.

Έστω $v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Από τη συνεχή ενσφήνωση του $H^2(\Omega)$ στον $C_B^0(\Omega)$ (βλ. Θεώρημα 2), η v έχει συνεχή αντιπρόσωπο στην κλάση ισοδυναμίας της, και άρα έχει νόημα να μιλάμε για την τιμή της v σε σημεία του Ω. Με βάση αυτήν την παρατήρηση, μπορούμε να ορίσουμε τον τελεστή παρεμβολής $I_h : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \to S_h$, ως

$$I_h v := \sum_{i=1}^{J} v(x_i)\phi_i, \quad \forall v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega),$$

όπου $\{x_i\}_{i=1}^J$ είναι οι εσωτερικοί κόμβοι του τριγωνισμού $\mathcal{T}_h$, J είναι η διάσταση του S_h, και $\{\phi_i\}_{i=1}^J$ είναι η συνήθης βάση Lagrange του χώρου S_h, για την οποία ισχύει

$$\phi_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad i = 1, \dots, J.$$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις, παρατηρουμε ότι

$$I_h v(x_i) = v(x_i), \quad i = 1, \dots, J, \quad v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

Για τον τελεστή I_h ισχύει το παρακάτω αποτέλεσμα, του οποίου η απόδειξη επίσης παραλείπεται, και μπορεί να βρεθεί στο [1].

Πρόταση 4. Υπό τις παραπάνω υποθέσεις, ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

(i) Υπάρχει σταθερά $C > 0$, τέτοια ώστε

$$\|I_h v - v\| + h\|\nabla(I_h v - v)\| \le Ch^2\|v\|_2, \quad \forall v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

(ii) Για $q \in [2, \infty]$, υπάρχει $C_q > 0$, τ.ω.

$$\|I_h v\|_{1,q} \le C_q\|v\|_{1,q}, \quad \forall v \in H^2(\Omega) \cap W_0^{1,q}(\Omega),$$

ή ισοδύναμα,

$$\|\nabla I_h v\|_{L^q(\Omega)} \le C_q\|\nabla v\|_{L^q(\Omega)}, \quad \forall v \in H^2(\Omega) \cap W_0^{1,q}(\Omega).$$

Δηλαδή, ο τελεστής $I_h : H^2(\Omega) \cap W_0^{1,q}(\Omega) \to S_h$ είναι φραγμένος στον $W_0^{1,q}(\Omega)$.

Τώρα, για $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ και $u_0 \in H^2(\Omega) \cap W_0^{1,p+2}(\Omega)$, μπορούμε να ορίσουμε το ακόλουθο ημιδιακριτό πρόβλημα προσέγγισης της λύσης του (20):

Αναζητούμε $u_h : [0,T] \to S_h$, τ.ω.

$$\begin{aligned} (\partial_t u_h, v_h) + ((|\nabla u_h|^p + c)\nabla u_h, \nabla v_h) = (f, v_h), \quad \forall v_h \in S_h, \ \text{σ.π. } t \in (0,T] \\ u_h(0) = u_h^0, \end{aligned} \tag{46}$$

όπου $u_h^0 \in S_h$ είναι κατάλληλη προσέγγιση της u_0.

Μένει να διακριτοποιήσουμε το πρόβλημα (46) στο χρόνο. Για $N \in \mathbb{N}$, θεωρούμε την ομοιόμορφη διαμέριση $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$ του $[0,T]$, με χρονικό βήμα $\tau = t_n - t_{n-1}$, $n = 1, \dots, N$. Τώρα, μπορούμε να ορίσουμε την πεπλεγμένη μέθοδο του Euler, ώστε να διακριτοποιήσουμε πλήρως το πρόβλημα (20) ως εξής:

Για $U_0 = u_h^0$, αναζητούμε $\{U^n\}_{n=0}^N \subset S_h$ προσεγγίσεις των $\{u(t_n)\}_{n=0}^N$, τ.ω.

$$\frac{1}{\tau}(U^n - U^{n-1}, v_h) + ((|\nabla U^n|^p + c)\nabla U^n, \nabla v_h) = (f^n, v_h), \quad \forall v_h \in S_h, \quad n = 1, \dots, N,$$

όπου $f^n = f(t_n)$. Εισάγοντας τον συμβολισμό $\partial \alpha^n = \tau^{-1}(\alpha^n - \alpha^{n-1})$, το πλήρως διακριτό σχήμα γράφεται ως

$$(\partial U^n, v_h) + ((|\nabla U^n|^p + c)\nabla U^n, \nabla v_h) = (f^n, v_h), \quad \forall v_h \in S_h, \quad n = 1, \dots, N. \tag{47}$$

4.2 Ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης του πλήρως διακριτού προβλήματος

Κατ΄ αρχάς, θα πρέπει να αποδείξουμε ότι το ανωτέρω πρόβλημα είναι καλά ορισμένο. Πρώτα όμως, θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι επειδή το σύνολο $\{\phi_j\}_{j=1}^J$ είναι βάση του S_h, το πρόβλημα (47) είναι ισοδύναμο με το ακόλουθο πρόβλημα:

Για $U^0 = u_h^0$, αναζητούμε $\{U^n\}_{n=1}^N$, τ.ω.

$$(\partial U^n, \phi_i) + ((|\nabla U^n|^p + c)\nabla U^n, \nabla \phi_i) = (f^n, \phi_i), \quad \forall 1 \le i \le J, \quad n = 1, \dots, N.$$

Πολλαπλασιάζοντας την ανωτέρω σχέση με τ και μεταφέροντας στο δεξί μέλος τους όρους που δεν εξαρτώνται από το U^n, καταλήγουμε στην ισοδύναμη σχέση

$$(U^n, \phi_i) + \tau((|\nabla U^n|^p + c)\nabla U^n, \nabla \phi_i) = (U^{n-1}, \phi_i) + \tau(f^n, \phi_i), \quad \forall 1 \le i \le J, \quad n = 1, \dots, N.$$

Χρησιμοποιώντας την αναπαράσταση $U^n = \sum_{j=1}^J \Psi_j^n \phi_j$, $\{\Psi_j^n\}_{j=1}^J \subset \mathbb{R}$, και εναλλάσοντας τη σειρά άθροισης και ολοκλήρωσης, καταλήγουμε στην ισοδύναμη σχέση

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^J \Psi_j^n (\phi_j, \phi_i) + \tau \sum_{j=1}^J \Psi_j^n \int_\Omega \left(\left| \sum_{\ell=1}^J \Psi_\ell^n \nabla \phi_\ell \right|^p + c \right) \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i dx = \sum_{j=1}^J \Psi_j^{n-1} (\phi_j, \phi_i) \\ + (f^n, \phi_i), \quad \forall 1 \le i \le J, \quad n = 1, \dots, N,\end{aligned}$$

η οποία είναι ισοδύναμη με το μη-γραμμικό σύστημα

$$(M + \tau G(\Psi^n) + \tau S)\Psi^n = M\Psi^{n-1} + \tau F(t_n), \tag{48}$$

όπου $\Psi^n = (\Psi_1^n, \dots, \Psi_J^n)^\top$, $M, S \in \mathbb{R}^{J \times J}$ είναι οι πίνακες μάζας και ακαμψίας αντίστοιχα, με

$$M_{ij} = \int_\Omega \phi_j \phi_i dx, \quad S_{ij} = c \int_\Omega \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i dx$$

και οι συναρτήσεις $F : [0, T] \to \mathbb{R}^J$, $G : \mathbb{R}^J \to \mathbb{R}^{J \times J}$ ορίζονται ως

$$F_i(t) = \int_\Omega f(t) \phi_i dx, \quad t \in [0, T], \quad i = 1, \dots, J$$

και

$$G_{ij}(z) = \int_\Omega \left(\left| \sum_{\ell=1}^J z_\ell \nabla \phi_\ell \right|^p + c \right) \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i dx, \quad \forall z \in \mathbb{R}^J, \quad i, j = 1, \dots, J.$$

Έχοντας φέρει το πλήρως διακριτό σχήμα στην κατάλληλη μορφή, θα αποδείξουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Πρόταση 5. Για $f \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ και $u_h^0 \in S_h$, το πρόβλημα (47) έχει μοναδική λύση $\{U^n\}_{n=0}^N$.

Πριν αποδείξουμε την ανωτέρω πρόταση, επικαλούμαστε το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Brouwer, του οποίου η απόδειξη μπορεί να βρεθεί στο [2].

Θεώρημα 17 (Θεώρημα Σταθερού Σημείου το Brouwer, [2], Theorem 3.2.8)**.** Έστω $A \subset \mathbb{R}^m$ μη-κενό, συμπαγές και κυρτό. Αν $\psi : A \to A$ είναι μία συνεχής συνάρτηση, τότε η ψ έχει τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο στο A.

Τώρα, είμαστε σε θέση να αποδείξουμε ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης του (47).

Απόδειξη της Πρότασης 5. Ορίζουμε τη συνάρτηση $\Phi : [0, T] \times \mathbb{R}^J \to \mathbb{R}^J$, ως

$$\Phi(t, z) = F(t) - G(z)z - Sz, \quad \forall t \in [0, T], z \in \mathbb{R}^J.$$

Τότε, η (48) είναι ισοδύναμη με την

$$M\Psi^n = M\Psi^{n-1} + \tau\Phi(t_n, \Psi^n), \quad n = 1, \dots, N. \tag{49}$$

Ο σκοπός μας είναι να αποδείξουμε ότι το ανωτέρω πρόβλημα έχει μοναδική λύση για κάθε $n = 1, \dots, N$. Θα ξεκινήσουμε αποδεικνύοντας ότι η Φ ικανοποιεί την ακόλουθη μονόπλευρη συνθήκη Lipschitz:

$$(\Phi(t, z_1) - \Phi(t, z_2)) \cdot (z_1 - z_2) \leq 0, \quad \forall t \in [0, T], z_1, z_2 \in \mathbb{R}^J \tag{50}$$

Πράγματι, έστω $t \in [0, T]$ και $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^J$. Τότε, έχουμε

$$\begin{aligned}
&(\Phi(t, z_1) - \Phi(t, z_2)) \cdot (z_1 - z_2) \\
&= \sum_{i=1}^{J} (z_{1,i} - z_{2,i}) \Bigg[\sum_{j=1}^{J} (z_{2,j} - z_{1,j}) \int_\Omega c \nabla\phi_j \cdot \nabla\phi_i dx + \sum_{j=1}^{J} z_{2,j} \int_\Omega \left| \sum_{\ell=1}^{J} z_{2,\ell} \nabla\phi_\ell \right|^p \nabla\phi_j \cdot \nabla\phi_i dx \\
&\qquad - \sum_{j=1}^{J} z_{1,j} \int_\Omega \left| \sum_{\ell=1}^{J} z_{1,\ell} \nabla\phi_\ell \right|^p \nabla\phi_j \cdot \nabla\phi_i dx \Bigg] \\
&= \sum_{i=1}^{J} (z_{1,i} - z_{2,i}) \Bigg[\int_\Omega c \sum_{j=1}^{J} (z_{2,j} - z_{1,j}) \nabla\phi_j \cdot \nabla\phi_i dx + \int_\Omega \left| \sum_{j=1}^{J} z_{2,j} \nabla\phi_j \right|^p \sum_{j=1}^{J} z_{2,j} \nabla\phi_j \cdot \nabla\phi_i dx \\
&\qquad - \int_\Omega \left| \sum_{j=1}^{J} z_{1,j} \nabla\phi_j \right|^p \sum_{j=1}^{J} z_{1,j} \nabla\phi_j \cdot \nabla\phi_i dx \Bigg] \\
&= \int_\Omega c \sum_{j=1}^{J} (z_{2,j} - z_{1,j}) \nabla\phi_j \cdot \sum_{i=1}^{J} (z_{1,i} - z_{2,i}) \nabla\phi_i dx \\
&\quad + \int_\Omega \left(\left| \sum_{j=1}^{J} z_{2,j} \nabla\phi_j \right|^p \sum_{j=1}^{J} z_{2,j} - \left| \sum_{j=1}^{J} z_{1,j} \nabla\phi_j \right|^p \sum_{j=1}^{J} z_{1,j} \nabla\phi_j \right) \nabla\phi_j \cdot \sum_{i=1}^{J} (z_{1,i} - z_{2,i}) \nabla\phi_i dx.
\end{aligned}$$

Ορίζουμε $u_1 = \sum_{j=1}^{J} z_{1,j}\phi_j$ και $u_2 = \sum_{j=1}^{J} z_{2,j}\phi_j$. Τότε, χρησιμοποιώντας την ανωτέρω σχέση και τη μονοτονία της p-Λαπλασιανής, έχουμε

$$(\Phi(t, z_1) - \Phi(t, z_2)) \cdot (z_1 - z_2) = -c \int_\Omega |\nabla(u_1 - u_2)|^2 dx - \int_\Omega (|\nabla u_1|^p \nabla u_1 - |\nabla u_2|^p \nabla u_2) \cdot (\nabla u_1 - \nabla u_2) \leq 0,$$

πράγμα που αποδεικνύει την (50). Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι ο πίνακας μάζας M είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος ως πίνακας Gram, άρα μπορούμε να ορίσουμε εσωτερικό γινόμενο $(\cdot, \cdot)_M : \mathbb{R}^J \times \mathbb{R}^J \to \mathbb{R}$, ως

$$(z_1, z_2)_M = M z_1 \cdot z_2, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{R}^J,$$

και επειδή ο $\mathbb{R}^J$ είναι χώρος πεπερασμένης διάστασης, υπάρχει σταθερά $C_M > 0$, τέτοια ώστε

$$|z|_{\mathbb{R}^J} \leq C_M |z|_M \Leftrightarrow \frac{1}{C_M} |z|_{\mathbb{R}^J} \leq |z|_M, \quad \forall z \in \mathbb{R}^J, \tag{51}$$

όπου $|\cdot|_M$ είναι η νόρμα που παράγεται από το εσωτερικό γινόμενο $(\cdot, \cdot)_M$, και $|\cdot|_{\mathbb{R}^J}$ είναι η ευκλείδεια νόρμα στον $\mathbb{R}^J$.

Έστω τώρα $1 \leq n \leq N$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $g_n : \mathbb{R}^J \to \mathbb{R}^J$ με

$$g_n(z) = Mz - M\Psi^{n-1} - \tau\Phi(t_n, z), \quad z \in \mathbb{R}^J.$$

Τότε, το πρόβλημα (47) έχει μοναδική λύση, αν και μόνο αν υπάρχει μοναδικό $\Psi^n \in \mathbb{R}^J$, τέτοιο ώστε $g_n(\Psi^n) = 0$. Έτσι, μπορούμε να ολοκληρώσουμε την απόδειξη της πρότασης ως εξής:

Κατ' αρχάς, θα δείξουμε ότι η g_n είναι συνεχής, όπου αρκεί να δείξουμε ότι η Φ είναι συνεχής ως προς το δεύτερο όρισμά της. Θα αποδείξουμε τη συνέχεια στη νόρμα $|\cdot|_\infty$ του $\mathbb{R}^J$, δηλαδή την

$$|z|_\infty = \max\{|z_i|,\ i = 1, \dots, J\}, \quad \forall z \in \mathbb{R}^J.$$

Θα επιχειρηματολογήσουμε ως εξής:

Για κάθε $j = 1, \dots, J$, η $\nabla\phi_j$ είναι συνεχής στο $\Omega \setminus \cup_{K\in\mathcal{T}_h}\partial K =: B_h$. Έτσι, μπορούμε να ορίσουμε σημειακά τη συνάρτηση

$$\mathbb{R}^J \times B_h \ni (z, x) \mapsto \sum_{j=1}^{J} z_j \nabla\phi_j(x) \in \mathbb{R}^2.$$

Η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής ως προς z, για κάθε $x \in B_h$. Πράγματι, έστω $(z^{(m)})_{m\in N} \subset \mathbb{R}^J$ και $z \in \mathbb{R}^J$, τ.ω. $z^{(m)} \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} z$. Τότε, για κάθε $x \in B_h$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{j=1}^{J} z_j^{(m)}\nabla\phi_j(x) - \sum_{j=1}^{J} z_j\nabla\phi_j(x)\right| &\le \sum_{j=1}^{J} |z_j^{(m)} - z_j| \cdot |\nabla\phi_j(x)| \\
&\le |z^{(m)} - z|_\infty \sum_{j=1}^{J} |\nabla\phi_j(x)| \to 0.
\end{aligned}$$

Επιπλέον, ορίζουμε τη συνάρτηση $a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, με

$$a(z) = (|z|^p + c)z, \quad \forall z \in \mathbb{R}^2.$$

Επειδή η a είναι συνεχής και η $\mathbb{R}^J \times B_h \ni (z, x) \mapsto \sum_{j=1}^{J} z_j\nabla\phi_j(x) \in \mathbb{R}^2$ είναι συνεχής ως προς z, για κάθε $(z^{(m)})_{m\in N} \subset \mathbb{R}^J$ και $z \in \mathbb{R}^J$, τ.ω. $z^{(m)} \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} z$, έχουμε

$$a\left(\sum_{j=1}^{J} z_j^{(m)}\nabla\phi_j(x)\right) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} a\left(\sum_{j=1}^{J} z_j\nabla\phi_j(x)\right), \quad \forall x \in B_h.$$

Όμως, έχουμε $\mathrm{meas}(\cup_{K\in\mathcal{T}_h}\partial K) = 0$, άρα

$$a\left(\sum_{j=1}^{J} z_j^{(m)}\nabla\phi_j(x)\right) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} a\left(\sum_{j=1}^{J} z_j\nabla\phi_j(x)\right),\ \text{σ.π. } x \in \Omega.$$

Ορίζουμε $w^{(m)} = \sum_{j=1}^{J} z_j^{(m)}\nabla\phi_j$ και $w = \sum_{j=1}^{J} z_j\nabla\phi_j$. Τότε,

$$a(w^{(m)}) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} a(w),\ \text{σ.π. στο } \Omega,$$

και επιπλέον, από τη σύγκλιση της $(z^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ στο z, υπάρχει $m_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $m > m_0$, και σ.π. $x \in \Omega$, έχουμε

$$\begin{aligned}
|a(w^{(m)}(x))| &= (|w^{(m)}(x)|^p + c)|w^{(m)}(x)| = |w^{(m)}(x)|^{p+1} + c|w^{(m)}(x)| \\
&= \left|\sum_{j=1}^{J} w_j^{(m)}\nabla\phi_j(x)\right|^{p+1} + c\left|\sum_{j=1}^{J} w_j^{(m)}\nabla\phi_j(x)\right| \\
&\le |w^{(m)}|_\infty^{p+1}\left|\sum_{j=1}^{J}\nabla\phi_j(x)\right|^{p+1} + c|w^{(m)}|_\infty\left|\sum_{j=1}^{J}\nabla\phi_j(x)\right| \\
&\le C|w|_\infty^{p+1}\left|\sum_{j=1}^{J}\nabla\phi_j(x)\right|^{p+1} + C|w|_\infty\left|\sum_{j=1}^{J}\nabla\phi_j(x)\right|.
\end{aligned}$$

Το τελευταίο μέλος της ανωτέρω ανισότητας είναι συνάρτηση του $L^1(\Omega)$, συνεπώς, από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebesgue, έχουμε

$$\int_\Omega (a(w^{(m)}) - a(w))dx \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Μένει να δείξουμε ότι για κάθε $(z^{(m)})_{m\in N} \subset \mathbb{R}^J$ και $z \in \mathbb{R}^J$, τ.ω. $z^{(m)} \to z$, έχουμε

$$|\Phi(t, z^{(m)}) - \Phi(t, z)|_\infty \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \forall t \in [0, T].$$

Πράγματι, για $i = 1, \ldots, J$ έχουμε

$$\begin{aligned}
&|\Phi_i(t, z^{(m)}) - \Phi_i(t, z)| \\
&\quad = \left| \sum_{j=1}^J z_j^{(m)} \int_\Omega \left| \sum_{k=1}^J z_k^{(m)} \nabla\phi_k \right|^p \nabla\phi_j \cdot \nabla\phi_i dx - \sum_{j=1}^J z_j \int_\Omega \left| \sum_{k=1}^J z_k \nabla\phi_k \right|^p \nabla\phi_j \cdot \nabla\phi_i dx \right. \\
&\qquad \left. + \sum_{j=1}^J (z_j^{(m)} - z_j) \int_\Omega c\nabla\phi_j \cdot \nabla\phi_i dx \right| \\
&\quad = \left| \int_\Omega \left\{ \left(\left| \sum_{j=1}^J z_j^{(m)} \nabla\phi_j \right|^p \nabla\phi_j + c \right) \sum_{j=1}^J z_j^{(m)} \nabla\phi_j - \left(\left| \sum_{j=1}^J z_j \nabla\phi_j \right|^p \nabla\phi_j + c \right) \sum_{j=1}^J z_j \nabla\phi_j \right\} \cdot \nabla\phi_i dx \right| \\
&\quad \leq \|\nabla\phi_i\|_{L^\infty(\Omega)} \left| \int_\Omega (a(w^{(m)}) - a(w))dx \right| \\
&\quad \leq \max_{1\leq i\leq J} \|\nabla\phi_i\|_{L^\infty(\Omega)} \left| \int_\Omega (a(w^{(m)}) - a(w))dx \right| \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι ισχύει η συνεπαγωγή

$$z^{(m)} \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} z \Rightarrow |\Phi(t, z^{(m)}) - \Phi(t, z)|_\infty \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \forall t \in [0, T],$$

και άρα η Φ είναι συνεχής ως προς z, για κάθε $t \in [0, T]$.

Επιπλέον, για κάθε $z \in \mathbb{R}^J$, έχουμε

$$\begin{aligned}
g_n(z) \cdot z &= Mz \cdot z - (M\Psi^{n-1} + \tau\Phi(t_n, z)) \cdot z \\
&= |z|_M^2 - (M\Psi^{n-1} + \tau\Phi(t_n, 0)) \cdot z - \tau(\Phi(t_n, z) - \Phi(t_n, 0)) \cdot z.
\end{aligned}$$

Όμως, λόγω της (50), ο τρίτος όρος $\tau(\Phi(t_n, z) - \Phi(t_n, 0)) \cdot (z - 0)$ του δεξιού μέλους της ανωτέρω σχέσης είναι μη-αρνητικός, άρα χρησιμοποιώντας την ισοδυναμία των νορμών του $\mathbb{R}^J$ (σχέση (51)), βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
g_n(z) \cdot z &\geq |z|_M^2 - (M\Psi^{n-1} + \tau\Phi(t_n, 0)) \cdot z \geq |z|_M^2 - |M\Psi^{n-1} + \tau\Phi(t_n, 0)|_{\mathbb{R}^J} \cdot |z|_{\mathbb{R}^J} \\
&\geq |z|_M^2 - \frac{C_M^2}{2} |M\Psi^{n-1} + \tau\Phi(t_n, 0)|_{\mathbb{R}^J}^2 - \frac{1}{2C_M} |z|_{\mathbb{R}^J}^2 \\
&\geq \frac{1}{C_M^2} |z|_{\mathbb{R}^J}^2 - \frac{C_M^2}{2} |M\Psi^{n-1} + \tau\Phi(t_n, 0)|_{\mathbb{R}^J}^2 - \frac{1}{2C_M} |z|_{\mathbb{R}^J}^2 \\
&= \frac{1}{2C_M^2} |z|_{\mathbb{R}^J}^2 - \frac{C_M^2}{2} |M\Psi^{n-1} + \tau\Phi(t_n, 0)|_{\mathbb{R}^J}^2.
\end{aligned}$$

Θέτουμε $\alpha = C_M^4 |M\Psi^{n-1} + \tau\Phi(t_n, 0)|_{\mathbb{R}^J}^2 + 1$. Τότε, για κάθε $z \in \mathbb{R}^J$, με $|z|_{\mathbb{R}^J} = \alpha$, έχουμε

$$\frac{1}{2C_M^2} |z|_{\mathbb{R}^J}^2 = \frac{C_M^2}{2} |M\Psi^{n-1} + \tau\Phi(t_n, 0)|_{\mathbb{R}^J}^2 + 1,$$

και άρα

$$g_n(z) \cdot z \geq \frac{1}{2C_M^2} |z|_{\mathbb{R}^J}^2 - \frac{C_M^2}{2} |M\Psi^{n-1} + \tau\Phi(t_n, 0)|_{\mathbb{R}^J}^2 = 1 \geq 0. \tag{52}$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι δεν υπάρχει $z \in \mathbb{R}^J$ τ.ω. $g_n(z) = 0$. Τότε, για $A = \overline{B}_{\mathbb{R}^J}(0, \alpha)$, μπορούμε να ορίσουμε τη συνάρτηση $G_n : A \to A$ με

$$G_n(z) = -\alpha \frac{g_n(z)}{|g_n(z)|_{\mathbb{R}^J}}, \quad \forall z \in A.$$

Το A είναι μη-κενό, συμπαγές και κυρτό, και η G_n είναι συνεχής, λόγω της συνέχειας της g_n. Τότε, από το Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Brouwer, υπάρχει κάποιο $z^* \in A$, τέτοιο ώστε $G_n(z^*) = z^*$. Όμως, έχουμε

$$|z^*|_{\mathbb{R}^J} = |G_n(z^*)|_{\mathbb{R}^J} = \left| -\alpha \frac{g_n(z)}{|g_n(z)|_{\mathbb{R}^J}} \right|_{\mathbb{R}^J} = \alpha,$$

και άρα, από την (52), έχουμε

$$0 \leq |z^*|^2_{\mathbb{R}^J} = G_n(z^*) \cdot z^* = -\frac{\alpha}{|g_n(z^*)|_{\mathbb{R}^J}} g_n(z^*) \cdot z^* \leq 0.$$

Αλλά, η ανωτέρω σχέση μας οδηγεί σε άτοπο, διότι εάν ήταν αληθής, θα είχαμε $|z^*|_{\mathbb{R}^J} = 0$, ενώ $|z^*|_{\mathbb{R}^J} = \alpha \geq 1$. Άρα, υπάρχει $z \in A$ τέτοιο ώστε $g_n(z) = 0$, πράγμα που σημαίνει ότι το μη-γραμμικό σύστημα (49) έχει τουλάχιστον μία λύση. Μένει να δείξουμε ότι η λύση αυτή είναι μοναδική. Θα θεωρήσουμε $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^J$ για τα οποία ισχύει $g_n(z_1) = 0$ και $g_n(z_2) = 0$, και θα δείξουμε ότι $z_1 = z_2$. Πράγματι, έχουμε

$$Mz_1 - Mz_2 = \tau(\Phi(t_n, z_1) - \Phi(t_n, z_2)).$$

Παίρνοντας ευκλείδιο εσωτερικό γινόμενο της ανωτέρω σχέσης με το $z_1 - z_2$, και χρησιμοποιώντας την (50), βρίσκουμε

$$0 \leq |z_1 - z_2|^2_M = \tau(\Phi(t_n, z_1) - \Phi(t_n, z_2)) \cdot (z_1 - z_2) \leq 0,$$

πράγμα που σημαίνει ότι $z_1 = z_2$. Έτσι, η λύση του συστήματος (49) είναι μοναδική. Ισοδύναμα, καταλήγουμε ότι το πρόβλημα (47) έχει μοναδική λύση, και ολοκληρώνεται η απόδειξη της πρότασης. □

4.3 Διακριτές εκτιμήσεις ευστάθειας και ομαλότητας

Έχοντας αποδείξει ότι το πρόβλημα (47) έχει μοναδική λύση, θα αποδείξουμε ότι η λύση αυτή είναι ευσταθής, δηλαδή θα αποδείξουμε τα ακόλουθα διακριτά ανάλογα των εκτιμήσεων (42) και (43):

Πρόταση 6. Έστω $f \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, $u_0 \in W_0^{1,p+2}(\Omega)$. Τότε, αν $c > 0$, ισχύει η διακριτή εκτίμηση ευστάθειας

$$\|U^n\|^2 + \tau \sum_{i=1}^n \|\nabla U^i\|^{p+2}_{L^{p+2}(\Omega)} + \tau \sum_{i=1}^n \|\nabla U^i\|^2 \leq \|U^0\|^2 + \tau \sum_{i=1}^n \|f^i\|^2, \quad n = 1, \ldots, N, \tag{53}$$

ενώ αν $c = 0$, ισχύει η διακριτή εκτίμηση ευστάθειας

$$\|U^n\|^2 + \tau \sum_{i=1}^n \|\nabla U^i\|^{p+2}_{L^{p+2}(\Omega)} \leq \|U^0\|^2 + \tau \sum_{i=1}^n \|f^i\|^{\frac{p+2}{p+1}}_{L^{\frac{p+2}{p+1}}(\Omega)}, \quad n = 1, \ldots, N. \tag{54}$$

Απόδειξη. Για $n = 1, \ldots, N$, επιλέγουμε $v_h = U^n$ στην (47). Τότε, χρησιμοποιώντας τις ανισότητες Cauchy-Schwarz, Young και Poincaré-Friedrichs, βρίσκουμε

$$\begin{aligned}(\partial U^n, U^n) + \|\nabla U^n\|^{p+2}_{L^{p+2}(\Omega)} + c\|\nabla U^n\|^2 &\leq \|f^n\| \cdot \|U^n\| \\ &\leq \frac{C_{PF}^2}{2c}\|f^n\|^2 + \frac{c}{2C_{PF}^2}\|U^n\|^2 \leq \frac{C_{PF}^2}{2c}\|f^n\|^2 + \frac{c}{2}\|\nabla U^n\|^2.\end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας την ανωτέρω σχέση με τ, έχουμε

$$(U^n - U^{n-1}, U^n) + \tau\|\nabla U^n\|^{p+2}_{L^{p+2}(\Omega)} + \frac{c\tau}{2}\|\nabla U^n\|^2 \leq \frac{C_{PF}^2 \tau}{2c}\|f^n\|^2,$$

και άρα υπάρχει σταθερά $C > 0$, τέτοια ώστε

$$2(U^n - U^{n-1}, U^n) + \tau\|\nabla U^n\|^{p+2}_{L^{p+2}(\Omega)} + \tau\|\nabla U^n\|^2 \leq C\tau\|f^n\|^2. \tag{55}$$

Όμως, από τις ανισότητες Cauchy-Schwarz και Young, έχουμε επίσης,

$$(U^n - U^{n-1}, U^n) = \|U^n\|^2 - (U^{n-1}, U^n) \geq \|U^n\|^2 - \|U^{n-1}\| \cdot \|U^n\| \geq \frac{1}{2}(\|U^n\|^2 - \|U^{n-1}\|^2). \tag{56}$$

Από τις (55) και (56), λαμβάνουμε την ανισότητα

$$\|U^n\|^2 - \|U^{n-1}\|^2 + \tau\|\nabla U^n\|^{p+2}_{L^{p+2}(\Omega)} + \tau\|\nabla U^n\|^2 \leq C\tau\|f^n\|^2,$$

την οποία αθροίζουμε, ώστε να καταλήξουμε στην

$$\sum_{i=1}^{n}(\|U^i\|^2 - \|U^{i-1}\|^2) + \tau\sum_{i=1}^{n}\|\nabla U^i\|^{p+2}_{L^{p+2}(\Omega)} + \tau\sum_{i=1}^{n}\|\nabla U^i\|^2 \leq C\tau\sum_{i=1}^{n}\|f^i\|^2.$$

Παρατηρούμε ότι το πρώτο άθρισμα της ανωτέρω ανισότητας είναι τηλεσκοπικό, και άρα λαμβάνουμε την ανισότητα

$$\|U^n\|^2 + \tau\sum_{i=1}^{n}\|\nabla U^i\|^{p+2}_{L^{p+2}(\Omega)} + \tau\sum_{i=1}^{n}\|\nabla U^i\|^2 \leq \|U^0\|^2 + \tau\sum_{i=1}^{n}\|f^i\|^2, \quad n = 1, \dots, N,$$

η οποία είναι η (53).

Επιπλέον, αν $c = 0$, τότε χρησιμοποιώντας τις ανισότητες Hölder, Young και Poincaré-Friedrichs, βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
(\partial U^n, U^n) + \|\nabla U^n\|^{p+2}_{L^{p+2}(\Omega)} &\leq \|f^n\|_{L^{\frac{p+2}{p+1}}(\Omega)} \cdot \|U^n\|_{L^{p+2}(\Omega)} \\
&\leq \frac{C_{PF}^{\frac{p+2}{p+1}}(p+1)}{p+2}\|f^n\|^{\frac{p+2}{p+1}}_{L^{\frac{p+2}{p+1}}(\Omega)} + \frac{1}{C_{PF}^{p+2}(p+2)}\|U^n\|^{p+2}_{L^{p+2}(\Omega)} \\
&\leq \frac{C_{PF}^{\frac{p+2}{p+1}}(p+1)}{p+2}\|f^n\|^{\frac{p+2}{p+1}}_{L^{\frac{p+2}{p+1}}(\Omega)} + \frac{1}{p+2}\|\nabla U^n\|^{p+2}_{L^{p+2}(\Omega)},
\end{aligned}$$

και άρα όμοια με την περίπτωση $c > 0$, υπάρχει σταθερά $C > 0$, τέτοια ώστε

$$\|U^n\|^2 - \|U^{n-1}\|^2 + \tau\|\nabla U^n\|^{p+2}_{L^{p+2}(\Omega)} \leq C\tau\|f^n\|^{\frac{p+2}{p+1}}_{L^{\frac{p+2}{p+1}}(\Omega)}.$$

Αθροίζοντας την ανωτέρω σχέση όπως στην περίπτωση $c > 0$, λαμβάνουμε την εκτίμηση (54). □

Επιπλέον, μπορούμε να αποδείξουμε και το ακόλουθο διακριτό ανάλογο της εκτίμησης ομαλότητας (21) του προηγούμενου κεφαλαίου:

Πρόταση 7. Έστω $\{U^n\}_{n=0}^N$ η λύση του προβλήματος (47). Τότε, αν $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, υπάρχει $C > 0$ τ.ω.

$$\begin{aligned}
\tau\sum_{\ell=1}^{N}\|\partial U^\ell\|^2 &+ \max_{1\leq\ell\leq N}\|\nabla U^\ell\|^{p+2}_{L^{p+2}(\Omega)} + \max_{1\leq\ell\leq N}\|\nabla U^\ell\|^2 \\
&\leq C\left(\|\nabla U^0\|^{p+2}_{L^{p+2}(\Omega)} + \|\nabla U^0\|^2 + \tau\sum_{\ell=1}^{N}\|f^\ell\|^2\right).
\end{aligned} \tag{57}$$

Απόδειξη. Για $\ell = 1, \dots, N$, χρησιμοποιώντας την (47) με $v_h = \partial U^\ell$, έχουμε
$$\|\partial U^\ell\|^2 + (|\nabla U^\ell|^p \nabla U^\ell, \nabla \partial U^\ell) + c(\nabla U^\ell, \nabla \partial U^\ell) = (f^\ell, \partial U^\ell)$$
ή ισοδύναμα,
$$\|\partial U^\ell\|^2 + \frac{1}{\tau}\|\nabla U^\ell\|^{p+2}_{L^{p+2}(\Omega)} + \frac{c}{\tau}\|\nabla U^\ell\|^2 - \frac{1}{\tau}(|\nabla U^\ell|^p \nabla U^\ell, \nabla U^{\ell-1}) - \frac{c}{\tau}(\nabla U^\ell, \nabla U^{\ell-1}) = (f^\ell, \partial U^\ell). \quad (58)$$
Όμως, χρησιμοποιώντας τις ανισότητες Hölder και Young, έχουμε
$$(\nabla U^\ell, \nabla U^{\ell-1}) \leq \|\nabla U^\ell\| \cdot \|\nabla U^{\ell-1}\| \leq \frac{1}{2}\|\nabla U^\ell\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla U^{\ell-1}\|^2 \quad (59)$$
και
$$\begin{aligned}((|\nabla U^\ell|^p \nabla U^\ell, \nabla U^{\ell-1}) &\leq \||\nabla U^\ell|^p \nabla U^\ell \cdot \nabla U^{\ell-1}\|_{L^1(\Omega)} \\ &\leq \||\nabla U^\ell|^p \nabla U^\ell\|_{L^r(\Omega)} \cdot \|\nabla U^{\ell-1}\|_{L^q(\Omega)} \\ &\leq \frac{1}{r}\||\nabla U^\ell|^p \nabla U^\ell\|^r_{L^r(\Omega)} + \frac{1}{q}\|\nabla U^{\ell-1}\|^q_{L^q(\Omega)},\end{aligned}$$
για $1 < r, q < \infty$ τ.ω. $1/r + 1/q = 1$.

Για $r = \frac{p+2}{p+1}$, έχουμε
$$\begin{aligned}\||\nabla U^\ell|^p \nabla U^\ell\|^r_{L^r(\Omega)} &= \int_\Omega |\nabla U^\ell|^{pr} |\nabla U^\ell|^r dx = \int_\Omega |\nabla U^\ell|^{(p+1)r} dx \\ &= \int_\Omega |\nabla U^\ell|^{p+2} dx = \|\nabla U^\ell\|^{p+2}_{L^{p+2}(\Omega)}\end{aligned}$$
και
$$q = \frac{r}{r-1} = \frac{(p+2)/(p+1)}{(p+2)(p+1) - 1} = \frac{\frac{p+2}{p+1}}{\frac{p+2-(p+1)}{p+1}} = p + 2.$$
Άρα,
$$(\nabla U^\ell, \nabla U^{\ell-1}) \leq \frac{p+1}{p+2}\|\nabla U^\ell\|^{p+2}_{L^{p+2}(\Omega)} + \frac{1}{p+2}\|\nabla U^{\ell-1}\|^{p+2}_{L^{p+2}(\Omega)}. \quad (60)$$
Από τις (58),(59),(60),
$$\begin{aligned}\|\partial U^\ell\|^2 + \frac{1}{p+2}\frac{1}{\tau}(\|\nabla U^\ell\|^{p+2}_{L^{p+2}(\Omega)} - \|\nabla U^{\ell-1}\|^{p+2}_{L^{p+2}(\Omega)}) + \frac{c}{2}\frac{1}{\tau}(\|\nabla U^\ell\|^2 - \|\nabla U^{\ell-1}\|^2) &\leq (f^\ell, \partial U^\ell) \\ \leq \|f^\ell\| \cdot \|\partial U^\ell\| \leq \frac{1}{2}\|f^\ell\|^2 + \frac{1}{2}\|\partial U^\ell\|^2&.\end{aligned}$$
Έτσι,
$$\frac{1}{2}\|\partial U^\ell\|^2 + \frac{1}{p+2}\frac{1}{\tau}(\|\nabla U^\ell\|^{p+2}_{L^{p+2}(\Omega)} - \|\nabla U^{\ell-1}\|^{p+2}_{L^{p+2}(\Omega)}) + \frac{c}{2}\frac{1}{\tau}(\|\nabla U^\ell\|^2 - \|\nabla U^{\ell-1}\|^2) \leq \frac{1}{2}\|f^\ell\|^2.$$
Έστω τυχόν $n \in \{1, \dots, N\}$. Τότε, αθροίζοντας την παραπάνω ανισότητα από $\ell = 1, \dots, n$ και πολλαπλασιάζοντας με τ, έχουμε
$$\frac{1}{2}\tau\sum_{\ell=1}^n \|\partial U^\ell\|^2 + \frac{1}{p+2}\sum_{\ell=1}^n(\|\nabla U^\ell\|^{p+2}_{L^{p+2}(\Omega)} - \|\nabla U^{\ell-1}\|^{p+2}_{L^{p+2}(\Omega)}) + \frac{c}{2}\sum_{\ell=1}^n(\|\nabla U^\ell\|^2 - \|\nabla U^{\ell-1}\|^2) \leq \frac{1}{2}\tau\sum_{\ell=1}^n \|f^\ell\|^2.$$
Παρατηρούμε ότι ο δεύτερος και ο τρίτος όρος του αριστερού μέλους της παραπάνω ανισότητας είναι τηλεσκοπικά αθροίσματα, άρα έχουμε
$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\tau\sum_{\ell=1}^n \|\partial U^\ell\|^2 + \frac{1}{p+2}\|\nabla U^n\|^{p+2}_{L^{p+2}(\Omega)} + \frac{c}{2}\|\nabla U^n\|^2 &\leq \frac{1}{p+2}\|\nabla U^0\|^{p+2}_{L^{p+2}(\Omega)} + \frac{c}{2}\|\nabla U^0\|^2 + \frac{1}{2}\tau\sum_{\ell=1}^n \|f^\ell\|^2 \\ &\leq \frac{1}{p+2}\|\nabla U^0\|^{p+2}_{L^{p+2}(\Omega)} + \frac{c}{2}\|\nabla U^0\|^2 + \frac{1}{2}\tau\sum_{\ell=1}^N \|f^\ell\|^2.\end{aligned}$$
Παίρνοντας μέγιστο ως προς $n = 1, \dots, N$ στην παραπάνω ανισότητα, καταλήγουμε στη ζητούμενη εκτίμηση. □

4.4 Εκτιμήσεις σφάλματος

Μέχρι στιγμής, έχουμε αποδείξει ότι το πλήρως διακριτό σχήμα (47) είναι καλά ορισμένο, και «μιμείται» κάποιες ιδιότητες του συνεχούς προβλήματος. Αυτό που θα μας απασχολήσει στη συνέχεια του παρόντος κεφαλαίου, είναι να δείξουμε ότι η λύση του προβλήματος (47) προσεγγίζει σχετικά καλά τη λύση του προβλήματος (9), δηλαδή να εκτιμήσουμε το σφάλμα της μεθόδου. Η νόρμα του σφάλματος που θα εκτιμηθεί, θα είναι μιά διακριτή νόρμα τύπου $L^\infty(L^2) \cap L^2(H_0^1)$, η οποία ορίζεται ως ακολούθως:

Για $U = \{U^n\}_{n=0}^N$ και $\tilde{u} = \{u(t_n)\}_{n=1}^N$,

$$\|U - \tilde{u}\|_{L^\infty_\tau(0,T;L^2(\Omega))} + \|U - \tilde{u}\|_{L^2_\tau(0,T;H_0^1(\Omega))} := \max_{1\le n\le N} \|U^n - u(t_n)\| + \left(\tau \sum_{n=1}^N \|\nabla(U^n - u(t_n))\|^2\right)^{1/2}.$$

Για να εκτιμήσουμε την ανωτέρω ποσότητα, θα χρειαστεί να εκτιμήσουμε το σφάλμα της ελλειπτικής προβολής W_h της u στον S_h, η οποία ορίζεται από τη σχέση

$$((|\nabla u(t)|^p + c)\nabla W_h(t), \nabla v_h) = ((|\nabla u(t)|^p + c)\nabla u(t), \nabla v_h), \quad \forall v_h \in S_h, \quad t \in [0,T]. \tag{61}$$

Στο εξής, θα υποθέτουμε ότι $c > 0$, και ότι τα δεδομένα f και u_0 είναι αρκούντως ομαλά, ώστε να έχουμε

$$u \in C^1([0,T]; W_0^{1,\infty}(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \cap C([0,T]; W^{2,\infty}(\Omega)). \tag{62}$$

Με την παραπάνω υπόθεση, εύκολα μπορεί κανείς να εφαμόσει το Θεώρημα Lax-Milgram στον S_h, ώστε να αποδείξει ότι για κάθε $t \in [0,T]$, υπάρχει μοναδική $W_h(t)$, που ικανοποιεί την (61). Θα εκτιμήσουμε το σφάλμα της ελλειπτικής προβολής που ορίσαμε ανωτέρω, στην ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 8. Υποθέτουμε ότι η λύση u του (9) ικανοποιεί την υπόθεση (62). Τότε, αν W_h είναι η λύση του προβλήματος (61), έχουμε

$$\|W_h - u\| + h\|\nabla(W_h - u)\| \le C_1 h^2, \tag{63}$$

$$\|(W_h - u)_t\| + h\|\nabla(W_h - u)_t\| \le C_2 h^2, \tag{64}$$

$$\|\nabla W_h\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))} \le C_3, \tag{65}$$

όπου η C_1 εξαρτάται από τις $\|u\|_{L^\infty(0,T;W^{1,\infty}(\Omega))}$, $\|u\|_{L^\infty(0,T;W^{2,\infty}(\Omega))}$ και $\|u\|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))}$, η C_2 εξαρτάται από τις $\|u\|_{W^{1,\infty}(0,T;W^{1,\infty}(\Omega))}$, $\|u\|_{L^\infty(0,T;W^{2,\infty}(\Omega))}$ και $\|u\|_{W^{1,\infty}(0,T;H^2(\Omega))}$ και η C_3 εξαρτάται από τις $\|u\|_{L^\infty(0,T;W^{1,\infty}(\Omega))}$, $\|u\|_{L^\infty(0,T;W^{2,\infty}(\Omega))}$ και $\|u\|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))}$.

Απόδειξη. Έστω $t \in [0,T]$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $u(t) \neq 0$, επειδή αν $u(t) = 0$, τότε θα έχουμε $W_h(t) = 0$, και άρα η ζητούμενες εκτιμήσεις θα ικανοποιούνται κατά τετριμμένο τρόπο τη χρονική στιγμή t.

Έστω τώρα, $v_h \in S_h$. Για $\rho = W_h - u$, έχουμε

$$\begin{aligned} c\|\nabla\rho\|^2 &\le ((|\nabla u|^p + c)\nabla\rho, \nabla\rho) = ((|\nabla u|^p + c)\nabla\rho, \nabla(v_h - u)) \\ &\le \left(\|\nabla u\|^p_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))} + c\right) \|\nabla\rho\| \cdot \|\nabla(v_h - u)\|. \end{aligned}$$

Επιλέγουμε $v_h = I_h u$. Τότε, χρησιμοποιώντας την Πρόταση 4, έχουμε

$$\begin{aligned} \|\nabla\rho\| &\le C\left(\|\nabla u\|^p_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))} + 1\right) \|\nabla(I_h u - u)\| \\ &\le Ch\left(\|\nabla u\|^p_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))} + 1\right) \|u\|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))}. \end{aligned} \tag{66}$$

Για να εκτιμήσουμε την $\|\rho\|$, για τυχόν $t \in [0,T]$, θεωρούμε το δυϊκό πρόβλημα

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}[(|\nabla u|^p + c)\nabla z] &= \rho, \ \text{στο } \Omega \\ z &= 0, \ \text{στο } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{67}$$

Τότε,
$$c\|\nabla z\|^2 = ((|\nabla u|^p + c)\nabla z, \nabla z) = (\rho, z) \le \|\rho\| \cdot \|z\| \le C_{PF}\|\rho\| \cdot \|\nabla z\|,$$
όπου στην τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήθηκε η ανισότητα Poincaré-Friedrichs. Έτσι, έχουμε $\|\nabla z\| \le C\|\rho\|$. Επιπλέον,
$$\begin{aligned}\|z\|_2 &\le C\|\Delta z\| \le C\|(|\nabla u|^p + c)\Delta z\| = C\|\operatorname{div}[(|\nabla u|^p + c)\nabla z] - \nabla(|\nabla u|^p)\cdot\nabla z\| \\ &= C\|\rho + \nabla(|\nabla u|^p)\cdot\nabla z\| = C\|\rho + p|\nabla u|^{p-1}\nabla(|\nabla u|)\cdot\nabla z\| \\ &\le C\|\rho\| + C\|\nabla u\|^{p-1}_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))}\|u\|_{L^\infty(0,T;W^{2,\infty}(\Omega))}\|\nabla z\| \\ &\le C\left(1 + \|\nabla u\|^{p-1}_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))}\|u\|_{L^\infty(0,T;W^{2,\infty}(\Omega))}\right)\|\rho\|.\end{aligned}$$
Επομένως, για κάθε $v_h \in S_h$,
$$\begin{aligned}\|\rho\|^2 &= (\rho, W_h - u) = ((|\nabla u|^p + c)\nabla z, \nabla(W_h - u)) \\ &= ((|\nabla u|^p + c)\nabla\rho, \nabla z) = ((|\nabla u|^p + c)\nabla\rho, \nabla(z - v_h)) \\ &\le \left(\|\nabla u\|^p_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))} + c\right)\|\nabla\rho\| \cdot \|\nabla(z - v_h)\|.\end{aligned}$$
Επιλέγοντας $v_h = I_h z$, και χρησιμοποιώντας την εκτίμηση (66) και την Πρόταση 4, έχουμε
$$\begin{aligned}\|\rho\|^2 &\le Ch^2\left(\|\nabla u\|^p_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))} + 1\right)^2\|u\|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))}\|z\|_2 \\ &\le Ch^2\left(\|\nabla u\|^p_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))} + 1\right)^2\|\nabla u\|^{p-1}_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))} \\ &\qquad \times\|u\|_{L^\infty(0,T;W^{2,\infty}(\Omega))}\|u\|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))}\|\rho\|.\end{aligned}\tag{68}$$
Συνδυάζοντας τις (66) και (68), καταλήγουμε στην (63).

Για την εκτίμηση (64), παραγωγίζουμε ως προς το χρόνο την (61) και έχουμε
$$((|\nabla u|^p + c)\nabla\rho_t, \nabla v_h) + (\partial_t(|\nabla u|^p)\nabla\rho, \nabla v_h) = 0, \quad \forall v_h \in S_h.\tag{69}$$
Όμως, για $v_h \in S_h$, χρησιμοποιώντας την (69) έχουμε
$$\begin{aligned}c\|\nabla\rho_t\|^2 &\le ((|\nabla u|^p + c)\nabla\rho_t, \nabla\rho_t) \\ &= ((|\nabla u|^p + c)\nabla\rho_t, \nabla(v_h - u_t)) + ((|\nabla u|^p + c)\nabla\rho_t, \nabla(\partial_t W_h - v_h)) \\ &= ((|\nabla u|^p + c)\nabla\rho_t, \nabla(v_h - u_t)) - (\partial_t(|\nabla u|^p)\nabla\rho, \nabla(\partial_t W_h - v_h)) \\ &\le \left(\|\nabla u\|^p_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))} + c\right)\|\nabla\rho_t\| \cdot \|\nabla(v_h - u_t)\| \\ &\quad + C\|\nabla u\|^{p-1}_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))}\|u\|_{W^{1,\infty}(0,T;W^{1,\infty}(\Omega))}\|\nabla\rho\| \cdot \|\nabla(\partial_t W_h - v_h)\|.\end{aligned}$$
Επιλέγουμε $v_h = I_h u_t$. Τότε, χρησιμοποιώντας και πάλι την Πρόταση 4, έχουμε
$$\begin{aligned}\|\nabla\rho_t\|^2 &\le Ch\left(\|\nabla u\|^p_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))} + 1\right)\|u_t\|_2 \cdot \|\nabla\rho_t\| \\ &\quad + C\|\nabla u\|^{p-1}_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))}\|u\|_{W^{1,\infty}(0,T;W^{1,\infty}(\Omega))}(\|\nabla\rho_t\| + \|\nabla(u_t - I_h u_t)\|)\|\nabla\rho\| \\ &\le Ch\left(\|\nabla u\|^p_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))} + 1\right)\|u_t\|_2 \cdot \|\nabla\rho_t\| \\ &\quad + C(\|\nabla\rho_t\| + h\|u_t\|_2)\|\nabla u\|^{p-1}_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))}\|u\|_{W^{1,\infty}(0,T;W^{1,\infty}(\Omega))}\|\nabla\rho\| \\ &\le \frac{1}{2}\|\nabla\rho_t\|^2 + Ch^2\Big[\left(\|\nabla u\|^p_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))} + 1\right)^2 + 1\Big]\|u\|^2_{W^{1,\infty}(0,T;H^2(\Omega))} \\ &\quad + C_1h^2\|\nabla u\|^{2p-2}_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))}\|u\|^2_{W^{1,\infty}(0,T;W^{1,\infty}(\Omega))},\end{aligned}\tag{70}$$
όπου C_1 είναι η σταθερά της (63).

Για την εκτίμηση της $\|\rho_t\|$, θα χρησιμοποιήσουμε το δυϊκό πρόβλημα (67), αλλά στο δεξί μέλος, αντί της ρ, θα έχουμε την ρ_t. Για τυχόν $v_h \in S_h$, χρησιμοποιώντας την (69) έχουμε

$$\begin{aligned}(\rho_t, \rho_t) &= ((|\nabla u|^p + c)\nabla \rho_t, \nabla z) = ((|\nabla u|^p + c)\nabla \rho_t, \nabla(z - v_h)) + ((|\nabla u|^p + c)\nabla \rho_t, \nabla v_h)\\ &= ((|\nabla u|^p + c)\nabla \rho_t, \nabla(z - v_h)) - (\partial_t(|\nabla u|^p)\nabla \rho, \nabla v_h)\\ &= ((|\nabla u|^p + c)\nabla \rho_t, \nabla(z - v_h)) - (\partial_t(|\nabla u|^p)\nabla \rho, \nabla(z - v_h)) - (\partial_t(|\nabla u|^p)\nabla \rho, \nabla z)\,.\end{aligned}$$

Επιλέγουμε $v_h = I_h z$. Τότε, με ακόμα μία εφαρμογή της Πρότασης 4, έχουμε

$$\begin{aligned}\|\rho_t\|^2 \le C &\left(\|\nabla u\|^p_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))} + 1\right)\|\nabla \rho_t\| \cdot \|\nabla(z - I_h z)\|\\ &+ C\|\nabla u\|^{p-1}_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))}\|u\|_{W^{1,\infty}(0,T;W^{1,\infty}(\Omega))}\|\nabla\rho\| \cdot \|\nabla(z - I_h z)\|\\ &+ C\|\nabla u\|^{p-1}_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))}\|u\|_{W^{1,\infty}(0,T;W^{1,\infty}(\Omega))}\|\rho\| \cdot \|\Delta z\|,\end{aligned}$$

όπου στον τελευταίο όρο εφαρμόσαμε ολοκλήρωση κατά μέρη. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\|\rho_t\|^2 &\le Ch^2\Big[\left(\|\nabla u\|^p_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))} + 1\right)^2 + 1\Big]\|u\|_{W^{1,\infty}(0,T;H^2(\Omega))}\left(\|\nabla u\|^p_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))} + 1\right)\|z\|_2\\ &\quad + C_1 h^2\|\nabla u\|^{p-1}_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))}\|u\|_{W^{1,\infty}(0,T;W^{1,\infty}(\Omega))}\|z\|_2\\ &\le \tilde{C}_2 h^2\|\rho_t\|, \qquad (71)\end{aligned}$$

όπου η $\tilde{C}_2$ εξαρτάται από τις νόρμες της u, που εμφανίζονται στην (71). Συνδυάζοντας τις (70) και (71), καταλήγουμε στην (64).

Μένει να αποδείξουμε την (65). Θα χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση 3, η οποία με $q = 2, r = \infty$ και $k = m = 1$, δίνει

$$\|\nabla v_h\|_{L^\infty(\Omega)} \le Ch^{-1}\|\nabla v_h\|, \quad \forall v_h \in S_h.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}\|\nabla(W_h - I_h u)\|_{L^\infty(\Omega)} &\le Ch^{-1}\|\nabla(W_h - I_h u)\| \le Ch^{-1}(\|\nabla\rho\| + \|\nabla(u - I_h u)\|)\\ &\le C_1 + C\|u\|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))},\end{aligned}$$

όπου η C_1 είναι η σταθερά της (63). Όμως, ο τελεστής $I_h : H^2(\Omega) \cap W_0^{1,\infty}(\Omega) \to S_h$ είναι $W^{1,\infty}$-φραγμένος, άρα έχουμε

$$\|\nabla W_h\|_{L^\infty(\Omega)} - \|\nabla I_h u\|_{L^\infty(\Omega)} \le C_1 + C\|u\|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))},$$

και άρα

$$\begin{aligned}\|W_h\|_{L^\infty(\Omega)} &\le \|\nabla I_h u\|_{L^\infty(\Omega)} + C_1 + C\|u\|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))}\\ &\le C_1 + C\left(\|u\|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))} + \|u\|_{L^\infty(0,T;W^{1,\infty}(\Omega))}\right).\end{aligned}$$

Παίρνοντας supremum ως προς $t \in [0, T]$ στην παραπάνω ανισότητα, καταλήγουμε στην (65) και ολοκληρώνεται η απόδειξη της πρότασης. □

Τώρα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την πρόταση που αποδείξαμε ανωτέρω, για να προχωρήσουμε στη βασική εκτίμηση σφάλματος της πεπλεγμένης μεθόδου του Euler, η οποία δίνεται από το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 18. Υποθέτουμε ότι η λύση u του προβλήματος (9) ικανοποιεί την υπόθεση (62), και επιπλέον $u_{tt} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$. Αν $\tilde{u} = \{u^n\}_{n=0}^N = \{u(t_n)\}_{n=0}^N$ είναι ο περιορισμός της λύσης u στους κόμβους της διαμέρισης του $[0, T]$, και $U = \{U^n\}_{n=0}^N$ είναι η λύση του προβλήματος (47), με $u_h^0 = I_h u_0$, τότε υπάρχει σταθερά $C > 0$, τέτοια ώστε

$$\|U - \tilde{u}\|_{L^\infty_\tau(0,T;L^2(\Omega))} + \|U - \tilde{u}\|_{L^2_\tau(0,T;H^1_0(\Omega))} \le C(\tau + h), \qquad (72)$$

όπου η σταθερά C εξαρτάται από τις νόρμες της u που εξαρτώνται και οι σταθερές C_1, C_2 και C_3 των εκτιμήσεων (63), (64) και (65) αντίστοιχα, και από τη νόρμα $\|u_{tt}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}$.

Απόδειξη. Για $n = 1, \dots, N$, έχουμε $U^n - u^n = (U^n - W^n) + (W^n - u^n) := \theta^n + \rho^n$, όπου $W^n = W_h(t_n)$ είναι η λύση του προβλήματος (61) στο t_n. Τότε, από την (63), έχουμε

$$\begin{aligned}
\|\rho^n\| + \left(\tau \sum_{j=1}^{N} \|\nabla\rho^j\|^2\right)^{1/2} &\le C_1 h^2 + \left(\tau \sum_{j=1}^{N} C_1^2 h^2\right)^{1/2} \\
&\le C_1 h^2 + (\tau N C_1^2 h^2)^{1/2} \\
&\le C_1 h^2 + \sqrt{T} C_1 h. \qquad (73)
\end{aligned}$$

Έστω τώρα, $1 \le j \le n$. Για κάθε $v_h \in S_h$, έχουμε

$$\begin{aligned}
&(\partial\theta^j, v_h) + \int_\Omega (|\nabla U^j|^p \nabla U^j - |\nabla W^j|^p \nabla W^j) \cdot \nabla v_h dx + c(\nabla\theta^j, \nabla v_h) \\
&= (\partial U^j, v_h) + \int_\Omega (|\nabla U^j|^p + c)\nabla U^j \cdot \nabla v_h dx - (\partial W^j, v_h) - \int_\Omega (|\nabla W^j|^p + c)\nabla W^j \cdot \nabla v_h dx \\
&= (f^j, v_h) - (\partial W^j, v_h) - ((|\nabla W^j|^p + c)\nabla W^j, \nabla v_h) \\
&= (u_t^j, v_h) + ((|\nabla u^j|^p + c)\nabla u^j, \nabla v_h) - (\partial W^j, v_h) - ((|\nabla W^j|^p + c)\nabla W^j, \nabla v_h) \\
&= (u_t^j, v_h) + ((|\nabla u^j|^p + c)\nabla W^j, \nabla v_h) - (\partial W^j, v_h) - ((|\nabla W^j|^p + c)\nabla W^j, \nabla v_h) \\
&= (u_t^j - \partial u^j, v_h) - (\partial\rho^j, v_h) + \int_\Omega (|\nabla u^j|^p - |\nabla W^j|^p)\nabla W^j \cdot \nabla v_h dx \\
&\le \|u_t^j - \partial u^j\| \cdot \|v_h\| + \|\partial\rho^j\| \cdot \|v_h\| + \int_\Omega \big||\nabla u^j|^p - |\nabla W^j|^p\big| \cdot |\nabla W^j| \cdot |\nabla v_h| dx.
\end{aligned}$$

Επιλέγουμε $v_h = \theta^j$. Τότε,

$$\begin{aligned}
&(\partial\theta^j, \theta^j) + \int_\Omega (|\nabla U^j|^p \nabla U^j - |\nabla W^j|^p \nabla W^j) \cdot (\nabla U^j - \nabla W^j) dx + c\|\nabla\theta^j\|^2 \\
&\le (\|u_t^j - \partial u^j\| + \|\partial\rho^j\|)\|\theta^j\| + \int_\Omega \big||\nabla u^j|^p - |\nabla W^j|^p\big| \cdot |\nabla W^j| \cdot |\nabla\theta^j| dx \\
&=: r_j \|\theta^j\| + I^j. \qquad (74)
\end{aligned}$$

Τώρα, παρατηρούμε ότι για $\alpha, \beta \ge 0$, η συνάρτηση $[1, \infty) \ni s \mapsto |\alpha^s - \beta^s| \in [0, \infty)$ είναι αύξουσα, άρα έχουμε

$$\big||\nabla W^j|^p - |\nabla u^j|^p\big| \le \Big||\nabla W^j|^{[p]+1} - |\nabla u^j|^{[p]+1}\Big| \text{ σ.π. στο } \Omega, \qquad (75)$$

όπου $[p]$ είναι το ακέραιο μέρος του p. Τότε, χρησιμοποιώντας την αλγεβρική ταυτότητα

$$\alpha^m - \beta^m = (\alpha - \beta) \sum_{k=1}^{m-1} \alpha^k \beta^{m-k-1}, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N},$$

η (75) δίνει

$$\big||\nabla W^j|^p - |\nabla u^j|^p\big| \le \big||\nabla W^j| - |\nabla u^j|\big| \sum_{k=1}^{[p]} |\nabla W^j|^k |\nabla u^j|^{[p]-k} \text{ σ.π. στο } \Omega.$$

Χρησιμοποιώντας την ανωτέρω ανισότητα, αν C_3 είναι η σταθερά της (65), έχουμε

$$\begin{aligned} I^j &\leq \int_\Omega \big||\nabla W^j| - |\nabla u^j|\big| \cdot |\nabla \theta^j| \sum_{k=1}^{[p]} |\nabla W^j|^{k+1} |\nabla u^j|^{[p]-k} dx \\ &\leq \int_\Omega |\nabla \rho^j| \cdot |\nabla \theta^j| \sum_{k=1}^{[p]} |\nabla W^j|^{k+1} |\nabla u^j|^{[p]-k} dx \\ &\leq \sum_{k=1}^{[p]} C_3^{k+1} \|\nabla u\|^{[p]-k}_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))} \int_\Omega |\nabla \rho^j| \cdot |\nabla \theta^j| dx \\ &\leq \mathcal{K} \|\nabla \rho^j\| \cdot \|\nabla \theta^j\|. \end{aligned} \tag{76}$$

Στο εξής, με $\mathcal{K}$ θα συμβολίζουμε την ποσότητα

$$\sum_{k=1}^{[p]} C_3^{k+1} \|\nabla u\|^{[p]-k}_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))},$$

πολλαπλασιασμένη με οποιαδήποτε σταθερά, ανεξάρτητη της u, των παραμέτρων της διακριτοποίησης, και του δείκτη άθροισης του ανωτέρω αθροίσματος.

Επιπλέον, από τη μονοτονία του p-Λαπλασιανού τελεστή, έχουμε

$$\int_\Omega (|\nabla U^j|^p \nabla U^j - |\nabla W^j|^p \nabla W^j) \cdot (\nabla U^j - \nabla W^j) dx \geq 0,$$

και άρα, η ανωτέρω ποσότητα μπορεί να παραλειφθεί από το δεξί μέλος της (74), και η εν λόγω ανισότητα να εξακολουθεί να ισχύει. Χρησιμοποιώντας την (74) και την (76), έχουμε

$$(\partial \theta^j, \theta^j) + c\|\nabla \theta^j\|^2 \leq r_j \|\theta^j\| + \mathcal{K} \|\nabla \rho^j\| \cdot \|\nabla \theta^j\|.$$

Όμως, χρησιμοποιώντας τις ανισότητες Cauchy-Schwarz και Young, έχουμε

$$\begin{aligned} (\partial \theta^j, \theta^j) &= \tau^{-1}(\theta^j - \theta^{j-1}, \theta^j) = \tau^{-1}\|\theta^j\|^2 - \tau^{-1}(\theta^{j-1}, \theta^j) \\ &\geq \tau^{-1}(\|\theta^j\|^2 - \|\theta^{j-1}\| \cdot \|\theta^j\|) \geq \frac{\tau^{-1}}{2}(\|\theta^j\|^2 - \|\theta^{j-1}\|^2) = \frac{1}{2}\partial \|\theta^j\|^2, \end{aligned}$$

και άρα χρησιμοποιώντας τις ανισότητες Poincaré-Friedrichs και Young, οι δύο ανωτέρω ανισότητες δίνουν

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\partial \|\theta^j\|^2 + c\|\nabla \theta^j\|^2 &\leq (\partial \theta^j, \theta^j) + c\|\nabla \theta^j\|^2 \\ &\leq r_j \|\theta^j\| + \mathcal{K} \|\nabla \rho^j\| \cdot \|\nabla \theta^j\| \\ &\leq C_{PF} r_j \|\nabla \theta^j\| + \mathcal{K} \|\nabla \rho^j\| \cdot \|\nabla \theta^j\| \\ &\leq C r_j^2 + \frac{c}{2}\|\nabla \theta^j\|^2 + \mathcal{K}\|\nabla \rho^j\|^2, \end{aligned}$$

όπου C_{PF} είναι η σταθερά της ανισότητας Poincaré-Friedrichs. Πολλαπλασιάζοντας την ανωτέρω ανισότητα με 2τ, και μεταφέροντας στο αριστερό μέλος τον όρο $c\tau\|\nabla \theta^j\|^2$ που θα προκύψει, λαμβάνουμε την ανισότητα

$$\|\theta^j\|^2 - \|\theta^{j-1}\|^2 + c\tau \|\nabla \theta^j\|^2 \leq C\tau r_j^2 + \mathcal{K}\tau \|\nabla \rho^j\|^2.$$

Αθροίζοντας την ανωτέρω ανισότητα για $j = 1, \ldots, n$, έχουμε

$$\sum_{j=1}^n (\|\theta^j\|^2 - \|\theta^{j-1}\|^2) + c\tau \sum_{j=1}^n \|\nabla \theta^j\|^2 \leq C\tau \sum_{j=1}^n r_j^2 + \mathcal{K}\tau \sum_{j=1}^n \|\nabla \rho^j\|^2.$$

Αλλά, το πρώτο άθροισμα του αριστερού μέλους της παραπάνω ανισότητας είναι τηλεσκοπικό, άρα καταλήγουμε στην

$$\|\theta^n\|^2 + c\tau \sum_{j=1}^{n} \|\nabla \theta^j\|^2 \leq \|\theta^0\|^2 + C\tau \sum_{j=1}^{n} r_j^2 + \mathcal{K}\tau \sum_{j=1}^{n} \|\nabla \rho^j\|^2. \tag{77}$$

Μένει να εκτιμήσουμε το δεξί μέλος της (77). Κατ΄ αρχάς, η ποσότητα $\|\theta^0\|$, φράσσεται ως

$$\|\theta^0\| = \|U^0 - W^0\| \leq \|I_h u_0 - u_0\| + \|\rho^0\| \leq C_1 h^2. \tag{78}$$

Επιπλέον,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} r_j^2 &= \sum_{j=1}^{n} (\|u_t^j - \partial u^j\| + \|\partial \rho^j\|)^2 \\ &\leq 2\sum_{j=1}^{n} \|u_t^j - \partial u^j\|^2 + 2\sum_{j=1}^{n} \|\partial \rho^j\|^2 \\ &=: 2\sum_{j=1}^{n} \|\omega^j\|^2 + 2\sum_{j=1}^{n} \|\partial \rho^j\|^2. \end{aligned}$$

Για την εκτίμηση του ω^j, θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Taylor με ολοκληρωτικό υπόλοιπο. Για $j = 1, \ldots, n$, έχουμε

$$u^{j-1} = u^j - \tau u_t^j + \int_{t_j}^{t_{j-1}} (t_{j-1} - s) u_{tt}(s) ds.$$

Άρα,

$$\partial u^j = u_t^j - \tau^{-1} \int_{t_j}^{t_{j-1}} (t_{j-1} - s) u_{tt}(s) ds = u_t^j + \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t_{j-1} - s) u_{tt}(s) ds.$$

Συνεπώς,

$$u_t^j - \partial u^j = \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (s - t_{j-1}) u_{tt}(s) ds,$$

και άρα έχουμε

$$\begin{aligned} \|\omega^j\| &= \left\| \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (s - t_{j-1}) u_{tt}(s) ds \right\| \\ &\leq \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (s - t_{j-1}) \|u_{tt}(s)\| ds \\ &\leq \tau^{-1} \left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} (s - t_{j-1})^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} \|u_{tt}(s)\|^2 ds \right)^{1/2} \\ &\leq \tau^{-1} \left(\frac{(s - t_{j-1})^3}{3} \Big|_{t_{j-1}}^{t_j} \right) \|u_{tt}\|_{L^2(t_{j-1}, t_j; L^2(\Omega))} \\ &= \frac{\tau^{1/2}}{\sqrt{3}} \|u_{tt}\|_{L^2(t_{j-1}, t_j; L^2(\Omega))}. \end{aligned}$$

Υψώνοντας την ανωτέρω σχέση στο τετράγωνο και αθροίζοντας για $j = 1, \ldots, n$, έχουμε

$$\begin{aligned} \tau \sum_{j=1}^{n} \|\omega^j\|^2 &\leq \frac{\tau^2}{3} \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|u_{tt}(s)\|^2 ds \\ &= \frac{\tau^2}{3} \int_0^{t_n} \|u_{tt}(s)\|^2 ds \leq \frac{\tau^2}{3} \int_0^T \|u_{tt}(s)\|^2 ds. \end{aligned} \tag{79}$$

Για την εκτίμηση του $\partial\rho^j$, εφαρμόζοντας το θεώρημα Taylor, για $j = 1, \dots, n$, έχουμε

$$\rho^{j-1} = \rho^j + \int_{t_{j-1}}^{t_j} \rho_t(s)ds,$$

και άρα

$$\partial\rho^j = \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \rho_t(s)ds.$$

Παίρνοντας L^2-νόρμες στην ανωτέρω σχέση,

$$\begin{aligned}
\|\partial\rho^j\| &= \left\|\tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \rho_t(s)ds\right\| \le \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\rho_t(s)\|ds \\
&\le \tau^{-1}\|\rho_t\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \int_{t_{j-1}}^{t_j} ds \\
&\le \|\rho_t\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \le C_2h^2,
\end{aligned} \tag{80}$$

όπου στην τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε την (64). Άρα, χρησιμοποιώντας τις (79) και (80), έχουμε

$$\begin{aligned}
C\tau \sum_{j=1}^{n} r_j^2 &\le C\tau^2\|u_{tt}\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + C_2^2\tau h^4 n \\
&\le C(\tau^2\|u_{tt}\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + C_2^2h^4).
\end{aligned} \tag{81}$$

Τέλος, από την (63), έχουμε

$$\mathcal{K}\tau \sum_{j=1}^{n} \|\nabla\rho^j\|^2 \le \mathcal{K}C_1^2h^2\tau n \le \mathcal{K}C_1^2Th^2. \tag{82}$$

Συνδυάζοντας τις (78), (81) και (82), καταλήγουμε στην

$$\|\theta^n\|^2 + \tau \sum_{j=1}^{n} \|\nabla\theta^j\|^2 \le C(\tau^2 + h^2),$$

όπου η σταθερά C εξαρτάται από τις νόρμες της u που εξαρτώνται οι σταθερές C_1, C_2, C_3 της Πρότασης 8 και από την $\|u_{tt}\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}$. Άρα, για $n = 1, \dots, N$, χρησιμοποιώντας την ανωτέρω εκτίμηση του θ^n και την εκτίμηση (73) του ρ^n, έχουμε

$$\begin{aligned}
\left\{\|U^n - u^n\| + \left(\tau \sum_{j=1}^{n} \|\nabla(U^j - u^j)\|^2\right)^{1/2}\right\}^2 &\le 2\|U^n - u^n\|^2 + 2\tau \sum_{j=1}^{n} \|\nabla(U^j - u^j)\|^2 \\
&= 2\|\theta^n + \rho^n\|^2 + 2\tau \sum_{j=1}^{n} \|\nabla(\theta^j + \rho^j)\|^2 \le 2(\|\theta^n\| + \|\rho^n\|)^2 + 2\tau \sum_{j=1}^{n} (\|\nabla\theta^j\| + \|\nabla\rho^j\|)^2 \\
&\le 4\left(\|\theta^n\|^2 + \tau \sum_{j=1}^{n} \|\nabla\theta^j\|^2\right) + 4\left(\|\rho^n\|^2 + \tau \sum_{j=1}^{n} \|\nabla\rho^j\|^2\right) \le C(\tau^2 + h^2).
\end{aligned}$$

Παίρνοντας τετραγωνικές ρίζες στην ανωτέρω ανισότητα, καταλήγουμε στην

$$\|U^n - u^n\| + \left(\tau \sum_{j=1}^{n} \|\nabla(U^j - u^j)\|^2\right)^{1/2} \le C(\tau^2 + h^2)^{1/2} \le C(\tau + h),$$

στην οποία παίρνοντας μέγιστο για $1 \le n \le N$, λαμβάνουμε την εκτίμηση σφάλματος (72), πράγμα που καθιστά την απόδειξη του θεωρήματος ολοκληρωμένη. $\square$

Συμπεραίνουμε λοιπόν, ότι με την ομαλότητα που έχουμε υποθέσει ανωτέρω, το αριθμητικό σχήμα (47) προσεγγίζει τη λύση του προβλήματος αρχικών και συνοριακών τιμών (9) με την αναμενόμενη ακρίβεια, τουλάχιστον στη νόρμα που επιλέξαμε να εκτιμήσουμε. Στο επόμενο κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με την υλοποίηση του σχήματος (47), και θα προχωρήσουμε σε αριθμητικά πειράματα, ώστε να επιβεβαιώσουμε την τάξη σύγκλισης που προκύπτει στο Θεώρημα 18, αλλά και να ελέγξουμε «πειραματικά» την τάξη σύγκλισης της μεθόδου και σε άλλες νόρμες.

5 Υλοποίηση και αριθμητικά πειράματα

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα ασχοληθούμε με την υλοποίηση του προβλήματος (47). Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, το εν λόγω πρόβλημα είναι ισοδύναμο με το μη-γραμμικό σύστημα (48). Μια πρώτη σκέψη που θα μπορούσε να κάνει κανείς, θα ήταν να λύσει το μη-γραμμικό σύστημα αριθμητικά, με τη μέθοδο Newton-Raphson. Ωστόσο, ο μη-γραμμικός όρος του προβλήματος (9) δεν είναι παραγωγίσιμος στο 0, επομένως, η μη-γραμμική συνάρτηση της οποίας θέλουμε να βρούμε τα σημεία μηδενισμού για να λύσουμε το πρόβλημα (48), δεν θα είναι παραγωγίσιμη στο 0, και άρα δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο Newton-Raphson. Μπορούμε όμως, να υπολογίσουμε τη λύση με τη μέθοδο σταθερού σημείου, την οποία και θα αναπτύξουμε παρακάτω.

Κατ' αρχάς, παρατηρούμε ότι για κάθε $z \in \mathbb{R}^J$, ο πίνακας $\Lambda(z) = M + \tau G(z) + \tau S$ είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, άρα είναι αντιστρέψιμος. Πράγματι, έστω $z \in \mathbb{R}^J$. Τότε, για $1 \leq i, j \leq J$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\Lambda_{ij}(z) &= \int_\Omega \phi_j \phi_i dx + c\tau \int_\Omega \nabla\phi_j \cdot \nabla\phi_i dx + \tau \int_\Omega \left| \sum_{\ell=1}^J z_\ell \nabla\phi_\ell \right|^p \nabla\phi_j \cdot \nabla\phi_i dx \\
&= \int_\Omega \phi_i \phi_j dx + c\tau \int_\Omega \nabla\phi_i \cdot \nabla\phi_j dx + \tau \int_\Omega \left| \sum_{\ell=1}^J z_\ell \nabla\phi_\ell \right|^p \nabla\phi_i \cdot \nabla\phi_j dx \\
&= \Lambda_{ji}(z).
\end{aligned}$$

Θέτουμε $g_h = \sum_{\ell=1}^J z_\ell \phi_\ell$. Τότε, για κάθε $\xi \in \mathbb{R}^J$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\Lambda(z)\xi \cdot \xi &= \sum_{i=1}^J \sum_{j=1}^J \Lambda_{ij}(z)\xi_i\xi_j \\
&= \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^J \Big[(\phi_j, \phi_i) + c\tau(\nabla\phi_j, \nabla\phi_i) + \tau(|\nabla g_h|^p \nabla\phi_j, \nabla\phi_i) \Big] \xi_j \xi_i \\
&= \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^J \Big[(\xi_j\phi_j, \xi_i\phi_i) + c\tau(\xi_j\nabla\phi_j, \nabla\xi_i\phi_i) + \tau(|\nabla g_h|^p \xi_j\nabla\phi_j, \xi_i\nabla\phi_i) \Big] \\
&= \left(\sum_{j=1}^J \xi_j\phi_j, \sum_{i=1}^J \xi_i\phi_i \right) + c\tau\left(\sum_{j=1}^J \xi_j\nabla\phi_j, \sum_{i=1}^J \xi_i\nabla\phi_i \right) + \tau\left(|\nabla g_h|^p \sum_{j=1}^J \xi_j\nabla\phi_j, \sum_{i=1}^J \xi_i\nabla\phi_i \right) \\
&= \left\| \sum_{j=1}^J \xi_j\phi_j \right\|^2 + c\tau \left\| \sum_{j=1}^J \xi_j\nabla\phi_j \right\|^2 + \tau\int_\Omega |\nabla g_h|^p \left| \sum_{j=1}^J \xi_j\nabla\phi_j \right|^2 dx \geq 0.
\end{aligned}$$

Αν επιπλέον $\Lambda(z)\xi \cdot \xi = 0$, τότε βρίσκουμε

$$0 = \left\| \sum_{j=1}^J \xi_j\phi_j \right\|^2 + c\tau \left\| \sum_{j=1}^J \xi_j\nabla\phi_j \right\|^2 + \tau\int_\Omega |\nabla g_h|^p \left| \sum_{j=1}^J \xi_j\nabla\phi_j \right|^2 dx \geq \left\| \sum_{j=1}^J \xi_j\phi_j \right\|^2,$$

και άρα ισχύει η σχέση

$$\sum_{j=1}^J \xi_j\phi_j = 0. \tag{83}$$

Αλλά, επειδή οι συναρτήσεις βάσης $\{\phi_i\}_{i=1}^J$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, η σχέση (83) μπορεί να ισχύει αν και μόνο αν $\xi_j = 0$, $j = 1, \ldots, J$, πράγμα που σημαίνει ότι ισχύει η συνεπαγωγή $\Lambda(z)\xi \cdot \xi = 0 \Rightarrow \xi = 0$, και έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη ότι ο πίνακας $\Lambda(z)$ είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος για κάθε $z \in \mathbb{R}^J$.

Τώρα, αφού ο πίνακας

$$\Lambda(\Psi^n) = M + \tau S + \tau G(\Psi^n)$$

είναι αντιστρέψιμος, το μη-γραμμικό σύστημα (48) είναι ισοδύναμο με το σύστημα

$$\Psi^n = (\Lambda(\Psi^n))^{-1}(M\Psi^{n-1} + \tau F(t_n)), \quad n = 1, \dots, N. \tag{84}$$

Δηλαδή, η επίλυση του συστήματος (48), ισοδυναμεί με την εύρεση του σταθερού σημείου της συνάρτησης

$$H_n(z) = (\Lambda(z))^{-1}(M\Psi^{n-1} + \tau F(t_n)), z \in \mathbb{R}^J,$$

το οποίο υπάρχει και είναι μοναδικό, λόγω της ισοδυναμίας του συστήματος (48) με το σύστημα (84). Έτσι, θα επιλύσουμε αριθμητικά το σύστημα (48) με τη μέθοδο σταθερού σημείου, ως εξής:

Για $k_{max} \in \mathbb{N}$, $n = 1, \dots, N$, αναζητούμε $\Psi^n \in \mathbb{R}^J$, τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} \Psi^n_{(0)} &= \Psi^{n-1} \\ \Psi^n_{(k+1)} &= H_n(\Psi^n_{(k)}) = (\Lambda(\Psi^n_{(k)}))^{-1}(M\Psi^{n-1} + \tau F(t_n)), \quad k = 0, \dots, k_{max} - 1 \\ \Psi^n &= \Psi^n_{(k_{max})}, \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα,

$$\begin{aligned} \Psi^n_{(0)} &= \Psi^{n-1} \\ (M + \tau S + \tau G(\Psi^n_{(k)}))\Psi^n_{(k+1)} &= M\Psi^{n-1} + \tau F(t_n), \quad k = 0, \dots, k_{max} - 1 \\ \Psi^n &= \Psi^n_{(k_{max})}. \end{aligned} \tag{85}$$

Δηλαδή, σε κάθε επανάληψη της μεθόδου σταθερού σημείου, θα λύνουμε ένα γραμμικό σύστημα με συμμετρικό και θετικά ορισμένο πίνακα. Στη μέθοδο (85), θα προσθέσουμε και το κριτήριο τερματισμού

$$\frac{|\Psi^n_{(k+1)} - \Psi^n_{(k)}|_{\mathbb{R}^J}}{|\Psi^n_{(k+1)}|_{\mathbb{R}^J}} < \mathrm{tol}, \tag{86}$$

όπου $\mathrm{tol} > 0$ είναι μία προεπιλεγμένη παράμετρος ανοχής (π.χ. $\mathrm{tol} = 10^{-6}$). Δηλαδή, αν στην $k+1$-οστή επανάληψη ικανοποιείται η (86), τότε η επαναληπτική μέθοδος (85), θα τερματίζει σε αυτήν την επανάληψη, και όχι στην k_{max}-οστή.

Στη συνέχεια, θα θεωρήσουμε δύο τεχνητά προβλήματα της μορφής (9), των οποίων η ακριβής λύση είναι γνωστή, και θα υπολογίσουμε τα σφάλματα και τις τάξεις σύγκλισης ως εξής:

Αν $\tilde{u} = \{u(t_n)\}_{n=0}^N$ είναι ο περιορισμός της λύσης u του προβλήματος (9) στους κόμβους $t_0, \dots, t_N$, και $U = \{U^n\}_{n=0}^N$ είναι η λύση του αριθμητικού σχήματος (47), ορίζουμε το σφάλμα

$$\mathcal{E}_{L^\infty(L^2)\cap L^2(H_0^1)}(h, N) := \|\tilde{u} - U\|_{L^\infty_\tau(0,T;L^2(\Omega))} + \|\tilde{u} - U\|_{L^2_\tau(0,T;H_0^1(\Omega))},$$

το οποίο σύμφωνα με την εκτίμηση (72) του προηγούμενου κεφαλαίου, έχει τάξη 1 ως προς τ και h. Όταν η λύση u είναι γνωστή, το σφάλμα $\mathcal{E}_{L^\infty(L^2)\cap L^2(H_0^1)}(h, N)$ μπορεί πρακτικά να υπολογισθεί. Υπολογίζοντας το ανωτέρω σφάλμα, μία προσέγγιση της τάξης σύγκλισης της μεθόδου μπορεί να υπολογισθεί ως ακολούθως:

Για $N \in \mathbb{N}$ δοθέν, και $h = T/N = \tau$, αναμένουμε να ισχύει

$$\mathcal{E}_{L^\infty(L^2)\cap L^2(H_0^1)}(T/N, N) \approx C(\tau + h) \approx C\tau \approx C/N.$$

Τότε, για δύο διαφορετικά $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, θα ισχύει η σχέση

$$\frac{\mathcal{E}_{L^\infty(L^2)\cap L^2(H_0^1)}(T/N_1, N_1)}{\mathcal{E}_{L^\infty(L^2)\cap L^2(H_0^1)}(T/N_2, N_2)} \approx \frac{C/N_1}{C/N_2} = \frac{N_2}{N_1}.$$

Παίρνοντας λογαρίθμους στην ανωτέρω σχέση, βρίσκουμε

$$\frac{\log\left(\frac{\mathcal{E}_{L^\infty(L^2)\cap L^2(H_0^1)}(T/N_1, N_1)}{\mathcal{E}_{L^\infty(L^2)\cap L^2(H_0^1)}(T/N_2, N_2)}\right)}{\log(N_2/N_1)} \approx 1.$$

Έτσι, ορίζουμε την πειραματική $L^\infty(L^2)\cap L^2(H_0^1)$-τάξη σύγκλισης της μεθόδου (47) ως

$$R_{L^\infty(L^2)\cap L^2(H_0^1)}(N_1,N_2) := \frac{\log\left(\frac{\mathcal{E}_{L^\infty(L^2)\cap L^2(H_0^1)}(T/N_1,N_1)}{\mathcal{E}_{L^\infty(L^2)\cap L^2(H_0^1)}(T/N_2,N_2)}\right)}{\log(N_2/N_1)},$$

και αναμένουμε να είναι περίπου ίση με 1.

Επιπλέον, εκτός από την πειραματική $L^\infty(L^2)\cap L^2(H_0^1)$-τάξη σύγκλισης που ορίσαμε ανωτέρω, θα υπολογίσουμε και μία πειραματική τάξη σύγκλισης σε μία διακριτή $L^\infty(L^2)$-νόρμα, ως ακολούθως:

Ορίζουμε

$$\mathcal{E}_{L^\infty(L^2)}(h,N) := \|\tilde{u}-U\|_{L^\infty_\tau(0,T;L^2(\Omega))} = \max_{1\le n\le N}\|u^n-U^n\|.$$

Χωρίς να έχουμε εκτιμήσει το ανωτέρω σφάλμα, αναμένουμε η τάξη σύγκλισης ως προς αυτή τη νόρμα του σφάλματος, να δίδεται από την ανισότητα

$$\mathcal{E}_{L^\infty(L^2)}(h,N) \le C(\tau+h^2).$$

Αν θεωρήσουμε $h=\sqrt{\tau}=\sqrt{T/N}$, τότε αναμένουμε να ισχύει

$$\mathcal{E}_{L^\infty(L^2)}(h,N) \approx C\tau \approx Ch^2.$$

Τότε, για δοθέντα N_1,N_2, $\tau_1=T/N_1,\tau_2=T/N_2$ και $h_1=\sqrt{\tau_1},h_2=\sqrt{\tau_2}$, θα έχουμε

$$\frac{\mathcal{E}_{L^\infty(L^2)}(\sqrt{T/N_1},N_1)}{\mathcal{E}_{L^\infty(L^2)}(\sqrt{T/N_2},N_2)} \approx \frac{Ch_1^2}{Ch_2^2} = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2.$$

Παίρνοντας λογαρίθμους στην παραπάνω σχέση, βρίσκουμε

$$\log\left(\frac{\mathcal{E}_{L^\infty(L^2)}(\sqrt{T/N_1},N_1)}{\mathcal{E}_{L^\infty(L^2)}(\sqrt{T/N_2},N_2)}\right) \approx 2\log\left(\frac{h_1}{h_2}\right),$$

και άρα παίρνουμε

$$\frac{\log\left(\frac{\mathcal{E}_{L^\infty(L^2)}(\sqrt{T/N_1},N_1)}{\mathcal{E}_{L^\infty(L^2)}(\sqrt{T/N_2},N_2)}\right)}{\log(h_1/h_2)} \approx 2.$$

Έτσι, ορίζουμε τη χωρική πειραματική $L^\infty(L^2)$-τάξη σύγκλισης της μεθόδου (47), ως

$$R^x_{L^\infty(L^2)}(N_1,N_2) := \frac{\log\left(\frac{\mathcal{E}_{L^\infty(L^2)}(\sqrt{T/N_1},N_1)}{\mathcal{E}_{L^\infty(L^2)}(\sqrt{T/N_2},N_2)}\right)}{\log(h_1/h_2)} = \frac{\log\left(\frac{\mathcal{E}_{L^\infty(L^2)}(\sqrt{T/N_1},N_1)}{\mathcal{E}_{L^\infty(L^2)}(\sqrt{T/N_2},N_2)}\right)}{\log(\sqrt{N_2}/\sqrt{N_1})},$$

από την οποία περιμένουμε να είναι περίπου ίση με 2.

Τώρα, θεωρούμε δύο παραδείγματα, στα οποία θα πραγματοποιηθούν οι υπολογισμοί που περιγράψαμε ανωτέρω:

Παράδειγμα 1. Θέτουμε $p=3$, $c=1$, $\Omega=(0,1)\times(0,1)$, $T=1$, και δεδομένα u_0,f, τέτοια ώστε η συνάρτηση

$$u(x,t) = \exp\left(-t+\frac{|x|^2}{2}\right)\sin\left(x_1x_2(1-x_1)(1-x_2)\right),\quad x=(x_1,x_2)\in[0,1]\times[0,1],\quad t\in[0,1],$$

να είναι η ακριβής λύση του προβλήματος (9).

Παράδειγμα 2. Θέτουμε $p=2$, $c=1$, $\Omega=(0,1)\times(0,1)$, $T=1$, και δεδομένα u_0,f, τέτοια ώστε η συνάρτηση

$$u(x,t) = e^{-t}x_1x_2(1-x_1)(1-x_2)\sin(\pi x_1x_2),\quad x=(x_1,x_2)\in[0,1]\times[0,1],\quad t\in[0,1],$$

να είναι η ακριβής λύση του προβλήματος (9).

Ακολουθούν οι πίνακες που περιέχουν τα αντίστοιχα σφάλματα και τάξεις για τα δύο ανωτέρω παραδείγματα, όπου για τους υπολογισμούς των $L^\infty(L^2) \cap L^2(H_0^1)$-σφαλμάτων και τάξεων θέτουμε $N = 10, 20, 40, 80, 160, 320$ και $h = \tau = T/N$, ενώ για τους υπολογισμούς των $L^\infty(L^2)$-σφαλμάτων και τάξεων θέτουμε $N = 100, 200, 400, 800, 1600, 3200$ και $h = \sqrt{\tau} = \sqrt{T/N}$. Για τον υπολογισμό των ακολούθων αποτελεσμάτων, χρησιμοποιήθηκε η βιβλιοθήκη πεπρασμένων στοιχείων NetGen/NGSolve της python.

N	$\mathcal{E}_{L^\infty(L^2)\cap L^2(H_0^1)}(T/N, N)$	τάξη	N	$\mathcal{E}_{L^\infty(L^2)}(\sqrt{T/N}, N)$	τάξη
10	2.1134(-2)	-	100	7.2767(-4)	-
20	9.7746(-3)	1.11	200	3.5145(-4)	2.09
40	4.7192(-3)	1.05	400	1.6499(-4)	2.18
80	2.3229(-3)	1.02	800	8.1785(-5)	2.02
160	1.1564(-3)	1.00	1600	3.9679(-5)	2.08
320	5.7748(-4)	1.00	3200	1.9612(-5)	2.03

Πίνακας 1: Παράδειγμα 1

N	$\mathcal{E}_{L^\infty(L^2)\cap L^2(H_0^1)}(T/N, N)$	τάξη	N	$\mathcal{E}_{L^\infty(L^2)}(\sqrt{T/N}, N)$	τάξη
10	1.2027(-2)	-	100	3.9302(-4)	-
20	5.7089(-3)	1.07	200	2.0292(-4)	1.90
40	2.8166(-3)	1.01	400	9.6552(-5)	2.14
80	1.3919(-3)	1.01	800	4.9632(-5)	1.92
160	6.9547(-4)	1.00	1600	2.4602(-5)	2.02
320	3.4732(-4)	1.00	3200	1.2250(-5)	2.01

Πίνακας 2: Παράδειγμα 2

Από του δύο ανωτέρω πίνακες, επιβεβαιώνεται η ισχύς της εκτίμησης σφάλματος (72) του προηγούμενου κεφαλαίου ως προς την $L^\infty(L^2) \cap L^2(H_0^1)$-νόρμα, ενώ όσον αφορά την $L^\infty(L^2)$-νόρμα, πράγματι, αν εκτιμήσει κανείς το σφάλμα ως προς αυτή τη νόρμα, η τάξη σύγκλισης που αναμένεται να προκύψει είναι 1 ως προς τ και 2 ως προς h, υπό κατάλληλες υποθέσεις ομαλότητας.

Τα δύο ανωτέρω παραδείγματα που ελέγξαμε ως προς τα σφάλματα και τις τάξεις σύγκλισης, αποτελούνται από ομαλές αρχικές συνθήκες u_0 και συναρτήσεις φορτίου f. Θα ελέγξουμε τα σφάλματα και τις τάξεις σύγκλισης ενός προβλήματος με ασυνεχή αρχική συνθήκη $u_0 \in L^2(\Omega)$, το οποίο ορίζουμε ως ακολούθως:

Παράδειγμα 3. Θέτουμε $p = 2$, $c = 1$, $f = 0$, $T = 1$, $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ και

$$u_0(x) = \begin{cases} 0.1, & x \in (0.25, 0.75) \times (0.25, 0.75) \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}.$$

Υπολογίζουμε την προσεγγιστική λύση του προβλήματος (9) με τα ανωτέρω δεδομένα, με την ακόλουθη παραλλαγή της μεθόδου (47):

Λόγω της ασυνέχειας της αρχικής συνθήκης, αντί για $U^0 = I_h u_0$, θέτουμε $U^0 = P_h u_0$, όπου $P_h : L^2(\Omega) \to S_h$ είναι ο τελεστής L^2-προβολής στον S_h. Επιπλέον, για να αποφύγουμε μεγάλα σφάλματα προσέγγισης του U^1 λόγω ασυνεχειών, υπολογίζουμε το U^1 ως εξής:

Θέτουμε $\tau_0 = 1/320000$, και $N_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\tau_0 N_0 = \tau$. Τότε, για $\tilde{U}^0 = U^0$, υπολογίζουμε τις προσεγγιστικές λύσεις $\{\tilde{U}^n\}_{n=0}^{N_0}$ των $\{u(n\tau_0)\}_{n=0}^{N_0}$ με τη μέθοδο (47), με χρονικό βήμα τ_0. Στη συνέχεια, θέτουμε $U^1 = \tilde{U}^{N_0}$, και υπολογίζουμε τις υπόλοιπες προσεγγίσεις με χρονικό βήμα τ.

Για τον έλεγχο σφαλμάτων και πειραματικών τάξεων σύγκλισης, υπολογίζουμε τις ποσότητες

$$\mathcal{E}_{L^\infty(L^2)}(\sqrt{T/N}, N) \text{ και } R^x_{L^\infty(L^2)}(N_1, N_2)$$

με $N = 100, 200, 400, 800$, αλλά επειδή δεν γνωρίζουμε την ακριβή λύση για το συγκεκριμένο παράδειγμα, αντικαθιστούμε την ακριβή λύση στις δύο ποσότητες που υπολογίζουμε, με μία προσεγγιστική λύση που υπολογίζεται όπως περιγράψαμε για το Παράδειγμα 3, με πυκνότερο χωροχρονικό πλέγμα $N = 3200$, $h = 0.01$. Στον Πίνακα 3, περιέχονται τα σφάλματα και οι τάξεις σύγκλισης που προαναφέραμε.

N	$\mathcal{E}_{L^\infty(L^2)}(\sqrt{T/N}, N)$	τάξη
100	9.5918(-7)	-
200	7.8092(-7)	0.59
400	6.4044(-7)	0.57
800	8.0831(-7)	-0.67

Πίνακας 3: Παράδειγμα 3

Παρατηρούμε ότι στον ανωτέρω πίνακα τα σφάλματα συμπεριφέρονται με ασυνήθιστο τρόπο. Το γεγονός αυτό, εξηγείται ως εξής:

Στο [3], στην περίπτωση του αντιστοίχου γραμμικού προβλήματος με μη-ομαλή αρχική συνθήκη $u_0 \in L^2(\Omega)$, αποδεικνύεται ότι το ημιδιακριτό πρόβλημα

$$(\partial_t u_h(t), v_h) + (\nabla u_h(t), \nabla v) = 0, \quad \forall v_h \in S_h$$
$$u_h(0) = P_h u_0,$$

ικανοποιεί την εκτίμηση σφάλματος

$$\|u_h(t) - u(t)\| \leq C t^{-1} h^2 \|u_0\|,$$

και άρα για αρκούντως μικρές τιμές του t, το σφάλμα μπορεί να γίνει οσοδήποτε μεγάλο. Έτσι, θα πρέπει να υπολογίσουμε το σφάλμα για t φραγμένο αρκούντως μακριά από το 0.

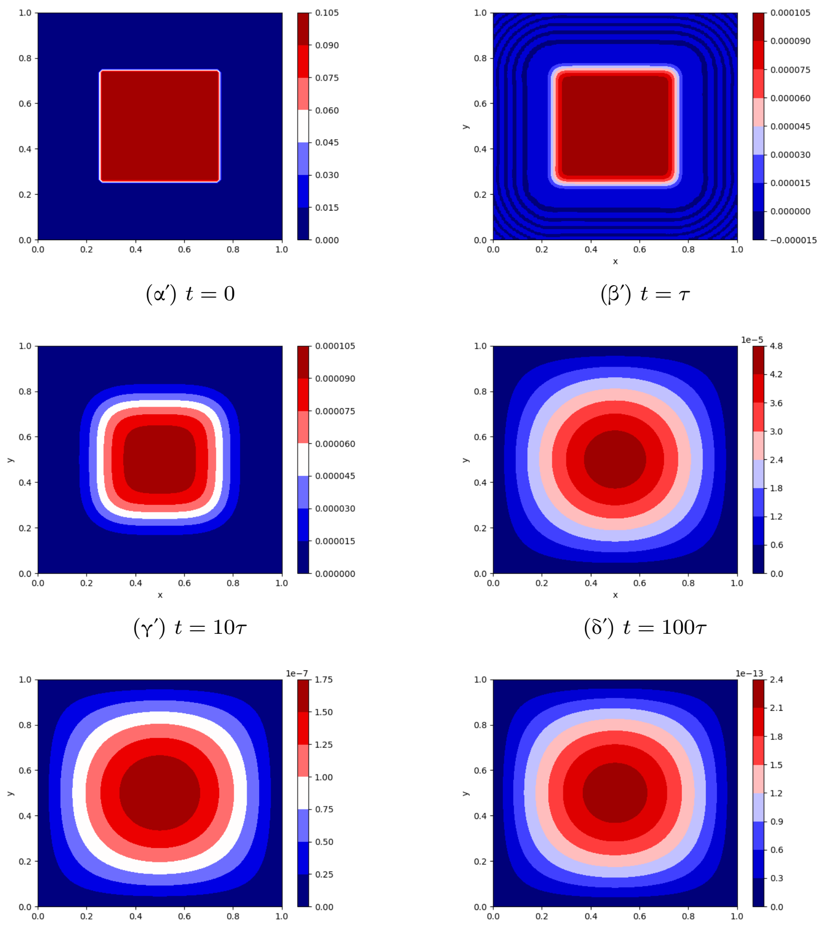
Κάτι αντίστοιχο αναμένουμε να ισχύει και στην περίπτωση της παραβολικής p-Λαπλασιανής εξίσωσης. Αν υπολογίσουμε το σφάλμα μόνο στους χρόνους $t > 0.25$, τότε λαμβάνουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

N	$\mathcal{E}_{L^\infty(L^2)}(\sqrt{T/N}, N)$	τάξη
100	1.0514(-7)	-
200	5.4255(-8)	1.90
400	2.6156(-8)	2.10
800	1.4353(-8)	1.73

Πίνακας 4: Παράδειγμα 3, $t > 0.25$

Πράγματι, παρατηρούμε σημαντική μείωση των σφαλμάτων, και σημαντική αύξηση της πειραματικής τάξης σύγκλισης.

Τέλος, στο Σχήμα 1, απεικονίζονται τα στιγμιότυπα της προσεγγιστικής λύσης του προβλήματος (9) με τα δεδομένα του Παραδείγματος 3, και με παραμέτρους διακριτοποίησης $N = 3200$, $h = 0.01$, τις χρονικές στιγμές $t = 0, \tau, 10\tau, 100\tau, 1000\tau, 1$. Σημειώνουμε ότι το στιγμιότυπο για $t = 0$, προέρχεται από την αρχική αρχική συνθήκη, και όχι από την L^2-προβολή της.



(α′) $t = 0$

(β′) $t = \tau$

(γ′) $t = 10\tau$

(δ′) $t = 100\tau$

(ε′) $t = 1000\tau$

(ϛ′) $t = 1$

Σχήμα 1: Στιγμιότυπα της λύσης του Παραδείγματος 3 για $t = 0, \tau, 10\tau, 100\tau, 1000\tau, 1$.

6 Παράρτημα

6.1 Ασθενείς και ασθενείς* τοπολογίες

Σε αυτό το υποεδάφιο, θα ορίσουμε και θα μελετήσουμε δύο εναλλακτικές τοπολογίες, με τις οποίες μπορεί να εφοδιαστεί ένας χώρος με νόρμα ή ο δυϊκός του. Η μελέτη αυτή θα είναι άκρως συνοπτική, και οι αποδείξεις των αποτελεσμάτων που ακολουθούν, θα παραλειφθούν. Για βαθύτερη μελέτη επί του θέματος, ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στο βιβλίο [5].

Ξεκινάμε με τον ορισμό της ασθενούς τοπολογίας. Σε ό,τι ακολουθεί, ο $(X, \|\cdot\|_X)$ θα είναι ένας χώρος με νόρμα, και X^* θα είναι ο (τοπολογικός) δυϊκός του χώρος.

Ορισμός 3. Η μικρότερη τοπολογία, η οποία καθιστά όλα τα γραμμικά συναρτησιακά $f \in X^*$ συνεχή, ονομάζεται ασθενής τοπολογία του X, και θα συμβολίζεται με w.

Ορίζουμε τις ακόλουθες δύο ασθενείς τοπολογικές έννοιες:

Ορισμός 4. Ένα σύνολο $K \subset X$ καλείται ασθενώς συμπαγές, αν κάθε ασθενώς ανοικτή κάλυψη του K (δηλαδή κάθε κάλυψη του K που ανήκει στην τοπολογία w), έχει πεπερασμένη υποκάλυψη.

Ορισμός 5. Έστω ακολουθία $(u_m) \subset X$ και $u \in X$. Λέμε ότι η u_m συγκλίνει ασθενώς στο u, αν για κάθε $\mathcal{U} \in w$, υπάρχει $m_0 \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $u_m - u \in \mathcal{U}$, για κάθε $m \geq m_0$. Η ασθενής σύγκλιση της u_m στο u θα συμβολίζεται με $u_m \rightharpoonup u$, ή όταν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης, με «$u_m \rightharpoonup u$ στον X».

Για την ασθενή σύγκλιση, ισχύει η ακόλουθη χρήσιμη χαρακτηριστική ιδιότητα:

Πρόταση 9 ([5], Proposition 3.5)**.** Έστω $(u_m) \subset X$ και $u \in X$. Τότε, ισχύει η ισοδυναμία

$$u_m \rightharpoonup u \Leftrightarrow \langle f, u_m \rangle_{X^*,X} \to \langle f, u \rangle_{X^*,X} \quad \forall f \in X^*,$$

όπου με $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X^*,X}$, συμβολίζουμε το δυϊκό ζεύγος μεταξύ των X^* και X.

Είναι προφανές ότι αν μια ακολουθία συγκλίνει ως προς τη νόρμα του χώρου X, τότε συγκλίνει ασθενώς στο ίδιο όριο. Επιπλέον, είναι χρήσιμη και η ακόλουθη έννοια ασθενούς συμπάγειας.

Ορισμός 6. Έστω $K \subset X$. Το K καλείται ακολουθιακά ασθενώς συμπαγές, αν για κάθε ακολουθία $(u_m) \subset K$, υπάρχει υπακολουθία (u_{k_m}), $u \in K$, τ.ω. $u_{k_m} \rightharpoonup u$.

Είναι γνωστό ότι αν ο X είναι απειροδιάστατος, τότε η κλειστή μοναδιαία μπάλα δεν είναι συμπαγής ως προς την τοπολογία που επάγει η νόρμα. Ωστόσο, ισχύει το ακόλουθο αποτέλεσμα στην ασθενή τοπολογία.

Θεώρημα 19 (Eberlein-Smulian, [5], Theorem 3.18, 3.19)**.** Η κλειστή μοναδιαία μπάλα $\overline{B}_X(0,1)$ είναι ασθενώς συμπαγής, αν και μόνο αν ο X είναι ανακλαστικός. Ισοδύναμα, ο X είναι ανακλαστικός, αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $(u_m) \subset \overline{B}_X(0,1)$, υπάρχει υπακολουθία (u_{k_m}), τέτοια ώστε $u_{k_m} \rightharpoonup u$, για κάποιο $u \in \overline{B}_X(0,1)$.

Στη συνέχεια, θα ορίσουμε μία τοπολογία, με την οποία μπορεί να εφοδιαστεί ο δυϊκός χώρος X^* του X, τη λεγόμενη ασθενή* τοπολογία.

Ορισμός 7. Θεωρούμε την κανονική ισομετρική εμφύτευση $\mathrm{i} : X \to X^{**}$, με

$$\langle \mathrm{i}(u), f \rangle_{X^{**},X^*} = \langle f, u \rangle_{X^*,X}, \quad \forall u \in X, \ f \in X^*.$$

Η μικρότερη τοπολογία του X^*, που καθιστά τα γραμμικά συναρτησιακά $F \in \mathrm{i}(X) \subset X^{**}$ συνεχή, καλείται ασθενής* τοπολογία του X^*, και θα τη συμβολίζουμε με w^*.

Όμοια με τους αντίστοιχους ορισμούς ως προς την ασθενή τοπολογία, ορίζονται οι ασθενείς* σύγκλιση,συμπάγεια και ακολουθιακή ασθενής* συμπάγεια, αντικαθιστώντας τον X με τον δυϊκό του χώρο, και την w με την w^*. Η ασθενής σύγκλιση μιας ακολουθίας $(u_m^*) \subset X^*$ σε συναρτησιακό $u^* \in X^*$, θα συμβολίζεται με $u_m^* \overset{*}{\rightharpoonup} u^*$, ή αν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης, με «$u_m^* \overset{*}{\rightharpoonup} u^*$ στον X^*». Για την ασθενή* σύγκλιση, ισχύει η ακόλουθη ιδιότητα:

Πρόταση 10 ([5], Proposition 3.13)**.** Έστω $(u_m^*) \subset X^*$ και $u^* \in X^*$. Τότε, ισχύει η ισοδυναμία

$$u_m^* \overset{*}{\rightharpoonup} u^* \Leftrightarrow \langle u_m^*, u \rangle_{X^*,X} \to \langle u^*, u \rangle_{X^*,X}, \quad \forall u \in X.$$

Τέλος, ισχύει το ακόλουθο θεώρημα για την ασθενή* συμπάγεια της κλειστής μοναδιαίας μπάλας του X^*.

Θεώρημα 20 (Banach-Alaoglu, [5], Theorem 3.16, 3.28)**.** Η κλειστή μοναδιαία μπάλα $\overline{B}_{X^*}(0,1) \subset X^*$ είναι ασθενώς* συμπαγής. Επιπλέον, αν ο X είναι διαχωρίσιμος, τότε η $\overline{B}_{X^*}(0,1)$ είναι ακολουθιακά ασθενώς* συμπαγής, δηλαδή για κάθε ακολουθία $(u_m^*) \subset \overline{B}_{X^*}(0,1)$, υπάρχει υπακολουθία $(u_{k_m}^*)$ και $u^* \in \overline{B}_{X^*}(0,1)$ τ.ω. $u_{k_m}^* \overset{*}{\rightharpoonup} u^*$.

Τέλος, θα ορίσουμε την ακόλουθη κλάση γραμμικών τελεστών:

Ορισμός 8. Έστω $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής, $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ χώροι με νόρμα. Ο T καλείται συμπαγής, αν για κάθε φραγμένη ακολουθία $(u_m) \subset X$, υπάρχει υπακολουθία (u_{k_m}), τέτοια ώστε $Tu_{k_m} \to w$, για κάποιο $w \in Y$.

Αναφορές

[1] Susanne Brenner, L. Ridway Scott, *"The Mathematical Theory of Finite Element Methods"*, Springer (2008)

[2] Dimitrios C. Kravvaritis, Athanasios N. Yannacopoulos, *"Variatonal Methods in Nonlinear Analysis"*, De Gruyter (2019)

[3] Vidar Thomée, *"Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems"*, Springer (2006)

[4] Lawrence C. Evans, *"Partial Differential Equations"*, American Mathematical Society (2010)

[5] Haim Brezis, *"Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations"*, Springer (2010)

[6] Robert A. Adams, John J.F. Fournier, *"Sobolev Spaces"*, Elsevier (2002)

[7] Roger Temam, *"Navier-Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis"*, North -Holland Publishing Company (1977)

[8] John W. Barrett, W. B. Liu, *"Finite Element Approximation of the Parabolic p-Laplacian"*, SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol. 31, No. 2 (1994)

[9] D. Wei, *"Existence, Uniqueness, and Numerical Analysis of Solutions of a Quasilinear Parabolic Problem"*, SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol. 29 (1994)

[10] J. R. Philip, *"n-Diffusion"*, Austral. J. Phys., Vol. 14 (1961)

[11] C. Atkinson, C. W. Jones, *"Similarity Solutions in Some Non-linear Diffusion Problems and in Boundary-layer Flow of a Pseudo-plastic Fluid"*, Quart. J. Mech. Appl. Math., Vol. 27 (1974)

[12] Eduardo Casas, Konstantinos Chrysafinos, *"Numerical Analysis of Quasilinear Parabolic Equations Under Low Regularity Assumptions"*, Numerische Mathematik, Vol. 143 (2019)

[13] Tuomas Hytönen, Jan van Neerven, Mark Veraar, Lutz Weis, *"Analysis in Banach Spaces, Volume I: Martingales and Littlewood-Paley Theory"*, Springer (2019)

[14] G. Birkhoff, C. Rota, *"Ordinary Differential Equations"*, Wiley (1978)

[15] Philip Hartman, *"Ordinary Differential Equations"*, Wiley (1964)

[16] William McLean, *"Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations"*, Cambridge University Press (2000)

[17] Γ. Ακρίβης, Β. Α. Δουγαλής, *«Αριθμητικές Μέθοδοι για Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις»*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης (2006)

[18] Frank Boyer, Pierre Fabrie, *"Mathematical Tools for the Study of the Incompressible Navier-Stokes Equations and Related Models"*, Springer (2010)

[19] Philippe G. Ciarlet, *"The Finite Element Method for Elliptic Problems"*, SIAM's Classics in Applied Mathematics (2002)

[20] Hans Petter Langtangen, Anders Logg, *"Solving PDEs in Python, The FEniCS Tutorial I"*, Springer Open (2016)

[21] https://ngsolve.org/docu/nightly/i-tutorials/, *"Interactive NGSolve Tutorial"*