



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Ηλεκτρομαγνητικών Εφαρμογών
Ηλεκτροοπτικής & Ηλεκτρονικών Υλικών

**Διανυσματική θεωρία περίθλασης με τη μέθοδο των
πεπερασμένων-διαφορών στο πεδίο της συχνότητας:
Εφαρμογή σε 2D διαφράγματα**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΟΥ

ΝΙΚΟΛΑΟΥ ΧΑΤΖΑΡΑ

Επιβλέπων: Ηλίας Ν. Γλύτσης

Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούνιος 2021



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Ηλεκτρομαγνητικών Εφαρμογών
Ηλεκτροοπτικής & Ηλεκτρονικών Υλικών

**Διανυσματική θεωρία περίθλασης με τη μέθοδο των
πεπερασμένων-διαφορών στο πεδίο της συχνότητας:
Εφαρμογή σε 2D διαφράγματα**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΟΥ

ΝΙΚΟΛΑΟΥ ΧΑΤΖΑΡΑ

Επιβλέπων: Ηλίας Ν. Γλύτσης

Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 17^η Ιουνίου 2021.

.....
Ηλίας Ν. Γλύτσης
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Χρήστος Καψάλης
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Γεώργιος Φικιώρης
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούνιος 2021

.....

Νικόλαος Χατζάρας

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Κάποια από τα σχήματα και τις εικόνες που βρίσκονται στην διπλωματική εργασία έχουν εμπνευστεί, ή βασιστεί επάνω, σε σχήματα και εικόνες που υπάρχουν σε άλλες δημοσιευμένες εργασίες. Σε κάθε περίπτωση αυτό αναφέρεται στο επεξηγηματικό κείμενο κάτω από την εικόνα καθώς και δίνεται πάντα η πηγή της αρχικής εικόνας. Αναγνωρίζω και ευγνωμονώ την άδεια χρήσης των σχημάτων και εικόνων από τους σχετικούς κατόχους των πνευματικών δικαιωμάτων.

Copyright © Νικόλαος Χατζάρας, 2021

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία έχει ως αντικείμενο την ανάπτυξη ενός αλγορίθμου και την δημιουργία ενός προγράμματος στο Matlab που θα επιτρέπει τη προσομοίωση της διανυσματικής περίθλασης H/M κυμάτων γύρω από ένα ορθογώνιες 2D γεωμετρίες. Το φαινόμενο της περίθλασης κυμάτων από ένα μικρό άνοιγμα ενός *τέλεια ανακλαστικού* εμποδίου περιγράφεται σε ένα βαθμό από την βαθμωτή θεωρία της περίθλασης, στην οποία, για ευκολία, επιλέγεται το πεδίο να είναι μία βαθμωτή συνάρτηση U που ικανοποιεί το ολοκλήρωμα Fresnel-Kirchhoff. Στη περίπτωση όμως, που δεν θέλουμε μία *ποιοτική* εικόνα του πεδίου, αλλά τη πραγματική διανυσματική λύση, τότε χρειάζεται να λυθούν οι εξισώσεις του Maxwell και μέσω αυτών να βρεθεί η διανυσματική λύση. Η φύση του προβλήματος όμως καθιστά δύσκολη την αναλυτική λύση των εξ. Maxwell, συνεπώς επιλέγεται η εφαρμογή της αριθμητικής μεθόδου των Πεπερασμένων Διαφορών στο πεδίο της συχνότητας (FDFD) στο πρόβλημα.

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο FDFD, οι εξισώσεις Maxwell απλοποιούνται σημαντικά, αλλά για την ύπαρξη μη-τετριμμένης λύσης στο πρόβλημα χρειάζεται ένας μη-ομογενής όρος (η διέγερση) ο οποίος μπορεί να δωθεί μέσω του αλγόριθμου Total-Field/Scattered-Field (TF/SF). Ο αλγόριθμος TF/SF βρίσκει εφαρμογές κυρίως σε προβλήματα σκέδασης H/M κυμάτων σε εμπόδια αυθαίρετης γεωμετρίας, συνεπώς στόχος της εργασίας αυτής θα αποτελέσει η προσαρμογή του αλγορίθμου TF/SF σε προβλήματα περίθλασης.

Το πεδίο που μπορεί το πρόγραμμα στον υπολογιστή να λύσει, εξαρτάται από το μέγεθος του πλέγματος (διακριτού χώρου) που χρησιμοποιείται. Για το μακρινό πεδίο όπου η προσομοίωση από υπολογιστή είναι πρακτικά αδύνατη, αναλύεται η μέθοδος της διανυσματικής ανάλυσης του πεδίου σε ένα φάσμα επιπέδων κυμάτων (VPWS), που μέσω κατάλληλων Fourier ολοκληρωμάτων γίνεται εφικτή η κατασκευή του πεδίου στη μακρινή περιοχή.

Η μεθοδολογία για την ανάπτυξη τέτοιων προγραμμάτων παρουσιάζεται με αναλυτικό τρόπο, καθώς και αρκετοί μέθοδοι για την αντιμετώπιση ορισμένων προβλημάτων/περιορισμών της μεθόδου. Τελικά, το πρόγραμμα που αναπτύσσεται αποσκοπεί στη μελέτη της πραγματικής εικόνας του πεδίου που περιθλαται από το εμπόδιο στο χώρο, όπως ακριβώς διέπουν οι εξισώσεις Maxwell, ενώ παράλληλα γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων αυτών της βαθμωτής θεωρίας.

Λέξεις Κλειδιά: διανυσματική περίθλαση, πεπερασμένες διαφορές, προσομοίωση περίθλασης, PML, διανυσματικό φάσμα επιπέδων κυμάτων, TF/SF αλγόριθμος

Abstract

The aim of this dissertation is the development of a program in Matlab that will simulate the vectorial diffraction of EM waves on rectangular two dimensional slits. In order to obtain the actual vectorial solution to the problem, one would have to solve Maxwell's equations. However, due to the nature of the problem, it is impossible to obtain an analytic solution from Maxwell's equations and therefore, the numerical method of the finite difference in the frequency domain (FDFD) will be used to solve this problem.

Using the FDFD method, the Maxwell equations are greatly simplified, but in order for a unique solution to exist we require a non-homogeneous term (excitation), which is provided by the Total-Field/Scattered-Field (TF/SF) algorithm. The TF/SF algorithm finds applications mainly in problems of scattering EM waves in devices of arbitrary geometry, therefore the aim of this work will be that of adjusting this algorithm to problems of diffraction.

The field that the program can simulate on the computer greatly depends on the size of the grid (discrete space) that will be used. Consequently, the limited computational space makes it impossible for the program to calculate a solution in the Far Field. The method of vector plane wave spectrum (VPWS) is used to tackle this challenge, where the far field is calculated by applying a Fourier analysis on the solutions obtained by the program inside the grid.

The methodology for the construction of this program is presented in detail, as well as several techniques that are necessary for overcoming certain problems/limitations that arise in such problems. Finally, this program aims at studying the nature of the vectorially diffracted field exactly as governed by Maxwell's equations, while simultaneously comparing the results to the predicted solutions of the scalar theory.

Keywords: Vector diffraction, finite difference, diffraction simulation, PML, vector plane wave spectrum, TF/SF algorithm

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου, Ηλία Γλύτση, για τη συνεργασία και τη βοήθεια που μου προσέφερε. Επίσης, ευχαριστώ την Άννα και την οικογένεια μου, για την υποστήριξή τους.

Νικόλαος Χατζάρας
Αθήνα, 2021

Περιεχόμενα

Περίληψη	i
Abstract	i
Ευχαριστίες	ii
Περιεχόμενα	iv
Κατάλογος σχημάτων	x
1 Υπολογιστικός Ηλεκτρομαγνητισμός (CEM)	1
1.1 Εξισώσεις του Maxwell	1
1.2 Η/Μ κύματα σε υλικά με απώλειες	3
1.3 Συμμετρικές εξισώσεις Maxwell	5
1.4 Θεωρία προσαρμοσμένου στρώματος	6
1.5 Uniaxial Perfectly Matched Layer (UPML)	9
1.6 Δισδιάστατο UPML	15
2 Πεπερασμένες Διαφορές στο πεδίο της Συχνότητας (FDFD)	18
2.1 Σχέσεις πεπερασμένων διαφορών	19
2.2 Διακριτοποίηση του χώρου	21
2.3 FDFD εξισώσεις στο Yee-πλέγμα	23
2.4 Ιδιότητες του Yee-πλέγματος	26
2.5 Εφαρμογή στο δισδιάστατο πρόβλημα	31
2.6 Οι τελεστές παραγώγων \mathbf{D} σε μορφή πίνακα	34
2.7 Total-Field/Scattered-Field Formula	36
2.8 Αριθμητική διασπορά λόγω διακριτοποίησης	38
3 Εφαρμογή του αλγορίθμου TS/SF	41
3.1 Διάγραμμα αλγορίθμου	41
3.2 Η διάταξη στο υπολογιστικό περιβάλλον	43
3.3 Οι περιοχές TF και SF στο πρόβλημα	45
3.4 Προσομοίωση της περίθλασης	48
3.5 Περίθλαση από περισσότερες πηγές	55
3.6 Μέγιστη απόσταση προσομοίωσης	57

4	Φασματική ανάλυση του H/M πεδίου	59
4.1	Φάσμα επίπεδων κυμάτων (PWS)	59
4.2	Εφαρμογή του αλγορίθμου Fast Fourier Transform	62
4.3	Διανυσματικό φάσμα επίπεδων κυμάτων (VPWS)	65
4.4	Ασυμπτωτική συμπεριφορά του πεδίου	67
5	Αποτελέσματα - Παρατηρήσεις	73
5.1	Σύγκριση με τη βαθμωτή θεωρία	73
5.1.1	Βαθμωτά Ολοκληρώματα	73
5.1.2	Περίθλαση από μία σχισμή	74
5.1.3	Περίθλαση από ημι-άπειρο πέτασμα	76
5.1.4	Περίθλαση από δύο σχισμές	79
5.1.5	Σφάλματα αποτελεσμάτων	81
5.2	Η ολόκληρη περιγραφή του πεδίου	86
5.3	Κριτική πάνω στις βαθμωτές θεωρίες	93
5.3.1	Ως προς το πάχος w του εμποδίου	93
5.3.2	Ως προς τα αξιώματα της βαθμωτής θεωρίας	95
5.4	TF/SF και το θεώρημα Ισοδυναμίας του H/M	102
5.5	Αριθμητική διασπορά της FDFD μεθόδου	105
5.6	Επεξεργασία του FFT	107
5.7	Τελευταία Σχόλια	108
6	Appendix A	109
6.1	Εξίσωση Helmholtz	109
6.2	Θεώρημα του Green	110
6.3	Ανάκλαση/Διάθλαση από διηλεκτρική πλάκα	111
6.4	Τρισδιάστατες μητρικές εξισώσεις	115
6.5	PWS του πεδίου πάνω στο άνοιγμα	116
7	Κώδικες στο Matlab	118
7.1	2-D PML κώδικας	118
7.2	Script Ανάκλαση-Διάθλαση	120
7.3	Πίνακες 2D παραγώγων	122
7.4	Inpolygon Κώδικας	123
7.5	Κώδικας για τα σφάλματα	125
	Βιβλιογραφία	127

Κατάλογος σχημάτων

1.1	Οι εικόνες στο πάνω μέρος απεικονίζουν το πραγματικό πρόβλημα, ενώ το κάτω μέρος περιλαμβάνει την αναλυτική συνέχιση του χώρου. Εικόνα προσαρμοσμένη από: Steven G Johnson, Notes on Perfectly Matched Layers (PMLs), MIT, 2007, p. 7.	7
1.2	Πρόσπτωση H/M κύματος TE (πράσινο) και TM (κόκκινο) πάνω στη διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ του ελεύθερου χώρου ($z < 0$) και του UPML ($z > 0$).	10
1.3	Uniaxial Perfectly Matching Layers περιμετρικά του υπολογιστικού χώρου του προβλήματος στις x και z διευθύνσεις.	15
2.1	Forward difference	19
2.2	Backward difference	19
2.3	Central difference	19
2.4	2-D πλέγμα για τη $f^{i,j}$	21
2.5	Η γεωμετρία μίας Yee-βάσης (cell) στις τρεις διαστάσεις. Με πράσινο (κόκκινο) βέλος παρουσιάζονται οι θέσεις των ηλεκτρικών (μαγνητικών) πεδίων πάνω στο Yee-cell.	23
2.6	Το Yee-πλέγμα με τις κατάλληλες πλεγματικές συντεταγμένες για κάθε πεδιακή συνιστώσα. Το μπλέ σχήμα αποτελεί το Yee-cell που περιέχει όλες τις συνιστώσες των \mathbf{E} , \mathbf{H} στη συντεταγμένη (i,j,k).	25
2.7	Οι συνιστώσες του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου στο Yee-πλέγμα. Η εικόνα είναι προσαρμοσμένη από: A. Taflove and S. C. Hagness, "Introduction to Maxwell's Equations and the Yee Algorithm," in Computational Electrodynamics The Finite-Difference Time-Domain Method, 3rd ed., London, 2005, pp. 59.	26
2.8	Η τοποθεσία των \mathbf{E} , \mathbf{H} πεδίων στο εσωτερικό του Yee-cell. Εικόνα προσαρμοσμένη από: Rumpf R.C., CEM Lectures, Maxwell's Equations On A Yee Grid	27
2.9	Οι βρόχοι Ampere που δημιουργούνται στην τρισδιάστατη περιγραφή. Επιλέγουμε να υπολογίσουμε με τον νόμο του Ampere την συνιστώσα $H_z^{i,j,k=0}$ χρησιμοποιώντας τα E_y, E_x στα σύνορα του Yee-cell.	28
2.10	Οι βρόχοι Ampere που δημιουργούνται στην τρισδιάστατη περιγραφή. Εμείς επιλέγουμε να υπολογίσουμε με τον νόμο του Ampere την συνιστώσα $E_x^{i=0,j,k}$ από τα H_y, H_z στα σύνορα του Yee-cell.	29

2.11	Αριστερά έχουμε το 3D Yee-cell στο οποίο μπορούμε να διακρίνουμε τις δύο επιφάνειες xz των E και H modes. Δεξιά απεικονίζονται τα 2D Yee-cells που θα χρησιμοποιήσουμε στην ανάλυση.	32
2.12	Το Yee-πλέγμα διαστάσεων 3×3 μόνο για το E-Mode. Πάνω σε αυτό υπολογίζονται εύκολα οι πίνακες παραγώγων \mathbf{D} για τον υπολογισμό των πεδίων. Θεωρούμε για ευκολία εκτός του πλέγματος συνθήκες Dirichlet	35
2.13	Ο πίνακας \mathbf{Q} στην ανάκλαση H/M κύματος από μία διάταξη χρυσού σε σχήμα ρόμβου.	36
3.1	Το διάγραμμα ροής του αλγορίθμου που αναπτύσσουμε για την προσομοίωση της περίθλασης ενός H/M πεδίου FDFD χρησιμοποιώντας τη TF/SF μέθοδο.	42
3.2	Η ανάλυση του πλέγματος είναι $N_x \times N_z$ Yee cells. Οι συντεταγμένες των σημείων αποτελούν τους δείκτες των πινάκων στο Matlab που αναφέρονται σε εκείνο το σημείο.	43
3.3	Αναπαράσταση της διαδικασίας μετασχηματισμού ενός τετραγωνικού πίνακα σε πίνακα στήλης και ύστερα μετατροπή σε διαγώνιο αραιό πίνακα. Οι διαγώνιοι αραιοί πίνακες έχουν τα <i>περιττά</i> μηδενικά εκτός των σημαντικών διαγωνίων τους, με αποτέλεσμα να μην χρειάζονται να αποθηκεύονται στη μνήμη.	44
3.4	Η πηγή $\text{Re}\{f_{src}\}$ στο πρόβλημα μας με γωνία πρόσπτωσης $\theta = 45^\circ$. Για παράδειγμα που απεικονίζεται θεωρούμε παντού στον χώρο ότι $\mu = \mu_0$	45
3.5	Απεικόνιση του πίνακα \mathbf{Q} πάνω στο πρόβλημα μας.	46
3.6	Η επιλογή του πίνακα \mathbf{Q} για δύο διαφορετικά πειράματα. Η επιλογή είναι τέτοια ώστε πάντα ο πίνακας \mathbf{Q} να βλέπει ολόκληρες τις σχισμές όπου πρέπει να περνάει η πηγή f_{src}	47
3.8	Το $\text{Re}\{e_y\}$ στον χώρο (x, z) με $n_3 = 1.5168$. Ο κατακόρυφος άξονας αντιστοιχεί στο πλάτος του ολικού πραγματικού πεδίου. Η σχισμή βρίσκεται στο $z = 0$	49
3.9	Οι κατανομές του πεδίου στον χώρο (x, z) με $n_3 = 1.5168$ για το $ E_y ^2$ με $h = 10 \mu\text{m}$	49
3.10	Η κατανομή της έντασης του κανονικοποιημένου πεδίου $(E_y / E_{y0})^2$ σε απόσταση $z_0 = 12 \mu\text{m}$ μακριά από το εμπόδιο.	50
3.11	Η κατανομή της έντασης του κανονικοποιημένου πεδίου $(E_y / E_{y0})^2$ σε απόσταση $z_0 = 1 \mu\text{m}$ μακριά από το εμπόδιο.	50
3.13	Οι μορφές των πεδίων E_y που παίρνουμε από την εφαρμογή του αλγορίθμου για διαφορετικές τιμές του h . Όλες οι κατανομές υπολογίζονται σε απόσταση $z_0 = 12 \mu\text{m}$	52
3.15	Η ακτινοβολία από τη σχισμή διάστασης $h = \lambda_1$. Το πεδίο στον ημιχώριο $z > 0$, τείνει να πάρει τη κυλινδρική μορφή όσο μικραίνει το άνοιγμα h	53
3.16	Το $ E_y ^2$ πεδίου στον χώρο (x, z) από σχισμή $h = 8 \mu\text{m}$. Παρατηρούμε πως το πεδίο εμφανίζει μέγιστα κατά μήκος του z άξονα στο $x = 0$, μόνο σε συγκεκριμένα διαστήματα του z , ενώ σε διαφορετικές περιοχές εμφανίζει τοπικά ελάχιστα.	54

- 3.17 Το πεδίο στο $z > 0$ που δημιουργείται από μία κυλινδρική πηγή τοποθετημένη πάνω στον άξονα z στο σημείο $z_1 = -12.5\lambda_0$ 55
- 3.18 Η διάταξη του προβλήματος περίθλασης από δύο πηγές κυλινδρικών κυμάτων. Η περιοχή SF καλύπτει και τα δύο κέντρα των πηγών, ενώ η δεξιά πλευρά του τετραπλεύρου βλέπει ολόκληρη τη σχισμή του εμποδίου. 56
- 3.19 Ο χώρος $z > 0$ δεξιά του εμποδίου για το πρόβλημα της περίθλασης από δύο πηγές κυλινδρικών κυμάτων. Οι δύο κύριες διευθύνσεις όπου εμφανίζεται η μέγιστη διάδοση της ενέργειας, είναι αυτές όπου οι πηγές f_{src}^i έχουν ανεμπόδιο οπτικό μονοπάτι (Line of Sight) με τον χώρο δεξιά του εμποδίου. Λόγω της περίθλασης, θα έχουμε στην κοντινή περιοχή και δευτερεύοντες λοβούς ακτινοβολίας οι οποίοι όσο μετακινούμαστε μακρύτερα από το εμπόδιο, προς τη μακρινή περιοχή, θα εξαφανίζονται λόγω καταστροφικών συμβολών με τα ανακλώμενα κύματα. 56
- 3.20 Οι περιοχές που χωρίζουμε το πρόβλημα της βαθμωτής περίθλασης. Το σημείο παρατήρησης είναι το $P(x_0, z_0)$, ενώ το εμπόδιο είναι πάνω στον άξονα x στο $z = 0$ με τη σχισμή $x' \in [-h/2, h/2]$. Εικόνα προσαρμοσένη από [28]. 57
- 4.1 Το μιγαδικό πεδίο αναλύεται σε οδεύοντα κύματα της ζώνης συχνοτήτων $|k_x| < \omega/c$ και σε αποσβενόμενα κύματα στις υψηλότερες ζώνες συχνοτήτων. 61
- 4.2 Η δειγματοληψίας της κατανομής $f(x)$ από το DFT με βήμα $2\pi/L$ 64
- 4.3 Όσο αυξάνεται το όρισμα του συνημιτόνου $\cos(kx^2)$, το μέρος εκείνου που συνεισφέρει στο ολοκλήρωμα τελικά θα είναι εκεί όπου η ταλάντωση παίρνει "πλατιά" μορφή, κοντά στο $x = 0$ στη συγκεκριμένη περίπτωση. Για μία μιγαδική συνάρτηση, συνεισφορά στο ολοκλήρωμα θα έχει το σημείο όπου η φάση γίνεται σταθερή. Ασυμπτωτικά για $k \rightarrow \infty$, μόνο το στάσιμο σημείο θα δίνει κάποια τιμή στο ολοκλήρωμα, ενώ για οποιαδήποτε άλλα x το ολοκλήρωμα είναι μηδέν. 68
- 4.4 Απεικόνιση της προσέγγισης του μακρινού πεδίου. Ένας μακρινός παρατηρητής βλέπει μόνο εκείνο το επίπεδο κύμα που διαδίδεται με διεύθυνση \hat{s} προς αυτόν, ενώ τα υπόλοιπα κύματα συμβάλλουν καταστροφικά μεταξύ τους. Εικόνα προσαρμοσμένη από: [33]. 71
- 5.1 Η κατανομή του πεδίου E_y που παίρνουμε από την προσομοίωση με τη μέθοδο FDFD (κόκκινο) σε σύγκριση με τη βαθμωτή θεωρία του Rayleigh-Sommerfeld (μπλε) και με την προσέγγιση Fresnel (πορτοκαλί). Η περίθλαση έχει δημιουργηθεί από ορθογώνιο άνοιγμα διάστασης $h = 10 \mu\text{m}$ ($\lambda_0 = 1 \mu\text{m}$). 74
- 5.2 Σύγκριση του FDFD πεδίου E_y με τα βαθμωτά ολοκληρώματα, σε απόσταση $z = 100 \mu\text{m}$ 75
- 5.3 Σύγκριση του FDFD πεδίου E_y με τα βαθμωτά ολοκληρώματα, σε απόσταση $z = 1000 \mu\text{m}$ 75

5.4	Σύγκριση των πεδίων που παίρνουμε από τη μέθοδο FDFD και το ολοκλήρωμα Rayleigh-Sommerfeld από τη περίθλαση κύματος από μία ακμή σε απόσταση $z = 1 \mu\text{m}$	76
5.5	Σύγκριση των πεδίων που παίρνουμε από τη μέθοδο FDFD και το ολοκλήρωμα Fresnel από τη περίθλαση κύματος από μία ακμή σε απόσταση $z = 1 \mu\text{m}$	76
5.6	Σύγκριση των πεδίων που παίρνουμε από τη μέθοδο FDFD και το ολοκλήρωμα Rayleigh-Sommerfeld από τη περίθλαση κύματος από μία ακμή σε απόσταση $z = 2 \mu\text{m}$	77
5.7	Σύγκριση των πεδίων που παίρνουμε από τη μέθοδο FDFD και το ολοκλήρωμα Fresnel από τη περίθλαση κύματος από μία ακμή σε απόσταση $z = 2 \mu\text{m}$	77
5.8	Σύγκριση των πεδίων που παίρνουμε από τη μέθοδο FDFD και τα ολοκληρώματα Rayleigh-Sommerfeld και Fresnel από τη περίθλαση κύματος από μία ακμή σε απόσταση $z = 5 \mu\text{m}$	78
5.9	Το κανονικοποιημένο πεδίο $ E_y ^2$ στον χώρο δεξιά του εμποδίου. Τρισδιάστατη απεικόνιση του δισδιάστατου πεδίου, όπου ο κάθετος άξονας του x, z επιπέδου αντιστοιχεί στην ένταση του πεδίου.	78
5.10	Σύγκριση των βαθμωτών πεδίων με το διανυσματικό πεδίο FDFD στο σημείο $z = 10 \mu\text{m}$ από τη περίθλαση κύματος από δύο ακμές διάστασης $h = 4 \mu\text{m}$ και μεταξύ τους απόσταση $\Lambda = 12 \mu\text{m}$	79
5.11	Το $ E_y ^2$ πεδίο που περιθλάται από δύο σχισμές με $h = 4 \mu\text{m}$ και απόσταση $\Lambda = 12 \mu\text{m}$ μεταξύ των κεντρών τους.	79
5.12	Σύγκριση των βαθμωτών πεδίων με το διανυσματικό πεδίο FDFD στο σημείο $z = 100 \mu\text{m}$ από τη περίθλαση κύματος από δύο ακμές διάστασης $h = 4 \mu\text{m}$ και μεταξύ τους απόσταση $\Lambda = 12 \mu\text{m}$	80
5.13	Σύγκριση των βαθμωτών πεδίων με το διανυσματικό πεδίο FDFD στο σημείο $z = 1000 \mu\text{m}$ από τη περίθλαση κύματος από δύο ακμές διάστασης $h = 4 \mu\text{m}$ και μεταξύ τους απόσταση $\Lambda = 12 \mu\text{m}$	80
5.14	Το απόλυτο σφάλμα μεταξύ της διανυσματικής προσομοίωσης FDFD και της βαθμωτής προσέγγισης Fresnel για την περίθλαση από μία σχισμή για τις αποστάσεις $z = 12, 100$ και $1000 \mu\text{m}$	82
5.15	Το απόλυτο σφάλμα μεταξύ της διανυσματικής προσομοίωσης FDFD και του βαθμωτού ολοκληρώματος RS1 στην περίθλαση από ημίπειρο πέτασμα για τις αποστάσεις $z = 1, 2$ και $5 \mu\text{m}$	84
5.16	Το απόλυτο σφάλμα μεταξύ της διανυσματικής προσομοίωσης FDFD και της βαθμωτής προσέγγισης Fresnel στην περίθλαση από ημίπειρο πέτασμα για τις αποστάσεις $z = 1, 2$ και $5 \mu\text{m}$	84
5.17	Το απόλυτο σφάλμα μεταξύ της διανυσματικής προσομοίωσης FDFD και του βαθμωτού ολοκληρώματος RS1 στην περίθλαση από δύο σχισμές για τις αποστάσεις $z = 10, 100$ και $1000 \mu\text{m}$	85
5.18	Το απόλυτο σφάλμα μεταξύ της διανυσματικής προσομοίωσης FDFD και της βαθμωτής προσέγγισης Fresnel στην περίθλαση από δύο σχισμές για τις αποστάσεις $z = 10, 100$ και $1000 \mu\text{m}$	85
5.19	Οι εντάσεις των E_y, \widetilde{H}_x και \widetilde{H}_z πεδίων στο $z = 5 \mu\text{m}$	87

5.20	Οι εντάσεις των \widetilde{H}_y, E_x και E_z πεδίων στο $z = 5 \mu\text{m}$	87
5.21	Οι εντάσεις των E_y, \widetilde{H}_x και \widetilde{H}_z πεδίων στο $z = 12 \mu\text{m}$	88
5.22	Οι εντάσεις των \widetilde{H}_y, E_x και E_z πεδίων στο $z = 12 \mu\text{m}$	88
5.23	Οι εντάσεις των E_y, \widetilde{H}_x και \widetilde{H}_z πεδίων στο $z = 20 \mu\text{m}$	89
5.24	Οι εντάσεις των \widetilde{H}_y, E_x και E_z πεδίων στο $z = 20 \mu\text{m}$	89
5.25	Προσομοίωση του πεδίου \widetilde{H}_x που περιθλάται από σχισμή $h = 10\lambda_1$	90
5.26	Προσομοίωση του πεδίου \widetilde{H}_z (διάσταση ανοίγματος $h = 10\lambda_1$). Το πεδίο H_z παράλο που είναι αρκετά μικρότερο από τις υπόλοιπες συνιστώσες του προβλήματος, κοντά στη σχισμή παρουσιάζει μία αρκετά σημαντική μορφή που δεν μπορεί να αγνοηθεί.	90
5.27	Προσομοίωση του πεδίου E_x που περιθλάται από σχισμή $h = 10\lambda_1$	91
5.28	Προσομοίωση του πεδίου E_z που περιθλάται από σχισμή $h = 10\lambda_1$	91
5.29	Τρισδιάστατη απεικόνιση του $ \widetilde{H}_x ^2$ στον χώρο (x, z) . Ο κατακόρυφος άξονας αντιστοιχεί στην κανονικοποιημένη ένταση του πεδίου.	92
5.30	Τρισδιάστατη απεικόνιση του $ E_x ^2$ στον χώρο (x, z) . Ο κατακόρυφος άξονας αντιστοιχεί στην κανονικοποιημένη ένταση του πεδίου.	92
5.31	Αναπαράσταση του πεδίου μέσα στη σχισμή για διαφορετικά πάχη w του εμποδίου. Το πεδίο αλληλεπιδρά με τα τοιχώματα του εμποδίου (συνοριακές συνθήκες PEC) και επηρεάζει τη τελική μορφή του πεδίου.	93
5.32	Οι κατανομές του πεδίου στο σημείο $z = w$ ακριβώς μετά τη σχισμή, όταν αυξάνουμε το πάχος w	94
5.33	Παρουσιάζεται ο τρόπος με τον οποίο χρησιμοποιούμε το ολοκλήρωμα Kirchhoff για να υπολογίζουμε το περιθλώμενο πεδίο από οποιοδήποτε εμπόδιο. Ως s ορίζεται η απόσταση μεταξύ του σημείου παρατήρησης και του σημείου ολοκλήρωσης, ενώ ως r η απόσταση της πηγής και του σημείου ολοκλήρωσης. Εικόνα από: [43].	95
5.34	Με κόκκινο χρώμα απεικονίζεται η συνθήκη συνέχειας της βαθμωτής θεωρίας, όπου το πεδίο μέσα στη σχισμή θεωρούμε ότι ισοδυναμεί με την πηγή μας, ενώ με μπλέ χρώμα απεικονίζεται το πραγματικό FDFD πεδίο.	96
5.35	Το πρόβλημα συνοριακών τιμών για το πεδίο μέσα στη σχισμή του εμποδίου. Στις περιοχές $x > h/2$ και $x < -h/2$ είναι τοποθετημένος ένας τέλειος αγωγός (PEC). Εικόνα προσαρμοσμένη από [45].	97
5.36	Η διαχωριστική επιφάνεια TF/SF όπως ορίζεται (i) από το διάνυσμα της πηγής b (ii) πάνω στη διάταξη του προβλήματος.	102
5.37	Η νοητή επιφάνεια Huygens στο πλέγμα για το H-Mode. Η πηγή f_{src} έρχεται από την SF περιοχή και συναντάει την διαχωριστική επιφάνεια TF/SF. Εικόνα προσαρμοσμένη από: M. E. Potter and J. Bérenger, "A Review of the Total Field / Scattered Field Technique for the FDTD Method," Fermat, vol. 19, 2017.	103
5.38	Η νοητή επιφάνεια Huygens στο πλέγμα για το H-Mode. Η πηγή f_{src} έρχεται από την SF περιοχή και συναντάει την διαχωριστική επιφάνεια TF/SF. Εικόνα προσαρμοσμένη από: M. E. Potter and J. Bérenger, "A Review of the Total Field / Scattered Field Technique for the FDTD Method," Fermat, vol. 19, 2017.	104

5.39	Η μεταβολή του κυματαριθμού $\xi(\Delta z)$ του αριθμητικού κύματος, καθώς αυξάνουμε τη μία διάσταση Δz του Yee-cell.	105
5.40	Η κατεύθυνση διάδοσης του κύματος $\xi(\theta)$ μέσα στο Yee-cell ως προς την γωνία θ	106
5.41	Πολικό διάγραμμα της ταχύτητα $\nu(\theta)$ του αριθμητικού κύματος. Η μέγιστη διασπορά εμφανίζεται στα σημεία όπου το κύμα διαδίδεται πάνω στις διαγωνίους του Yee-cell.	106
6.1	Σχηματική αναπαράσταση της διάθλασης και ανάκλασης H/M κύματος από διηλεκτρική πλάκα μήκος d	111
6.2	Αναπαράσταση της μεθόδου προσέγγισης του βαθμωτού πεδίου δεξιά του πετάσματος.	116

Κεφάλαιο 1

Υπολογιστικός Ηλεκτρομαγνητισμός (CEM)

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε τις βασικές εξισώσεις που θα χρησιμοποιήσουμε για την κατασκευή του ηλεκτρομαγνητικού προβλήματος. Αρχικά, θέλουμε να φέρουμε τις εξισώσεις του Maxwell σε ένα **συμμετρικό** σύστημα εξισώσεων του ηλεκτρικού \mathbf{E} και μαγνητικού πεδίου \mathbf{H} , προτού εφαρμόσουμε την αριθμητική μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών. Η συμμετρία αυτή θα μας βοηθήσει στην ευκολότερη εφαρμογή του αλγορίθμου FDFD πάνω στις εξισώσεις αυτές.

Στο δεύτερο μέρος του κεφαλαίου παρουσιάζουμε αναλυτικά τη θεωρία του Προσαρμοσμένου Στρώματος (Perfectly Matched Layer ή PML). Το PML μας επιτρέπει να προσομοιώσουμε στον υπολογιστή με έναν εύκολο τρόπο τον άπειρο ελεύθερο χώρο, όταν το σύστημα μας έχει πεπερασμένες διαστάσεις. Κανονικά, εκεί όπου τελειώνει ο υπολογιστικός χώρος θα δημιουργούνται ανακλάσεις H/M κυμάτων λόγω του απότομου σταματημού, αλλά όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 3, ενώ δεν μπορούμε να έχουμε πραγματικά άπειρο χώρο στο πρόγραμμα μας, το PML θα μας βοηθήσει να λύσουμε αυτό το πρόβλημα.

1.1 Εξισώσεις του Maxwell

Παρουσιάζουμε αρχικά τις εξισώσεις του Maxwell που θα χρησιμοποιήσουμε για την ανάλυση μας [1].

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \qquad (1.1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \qquad (1.1.2)$$

Το ρεύμα \mathbf{J} αποτελείται από το ρεύμα-πηγή \mathbf{J}_i του πεδίου και το ρεύμα αγωγιμότητας $\mathbf{J}_c = \sigma \mathbf{E}$ [2]. Στην διαφορική τους μορφή, οι τέσσερις εξισώσεις συνοδεύονται από τέσσερις συνοριακές συνθήκες που βοηθούν στην εύρεση της τελικής λύσης. Οι συνοριακές συνθήκες είναι οι παρακάτω:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot [\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1] = \sigma \qquad \hat{\mathbf{n}} \times [\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1] = 0 \qquad (1.2.1)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot [\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1] = 0 \qquad \hat{\mathbf{n}} \times [\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1] = \mathbf{K} \qquad (1.2.2)$$

Το $\hat{\mathbf{n}}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα, κάθετο στη διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ των υλικών 1 και προς το 2. Οι δεξιά συνοριακές συνθήκες αφορούν τις συνιστώσες του πεδίου που είναι κάθετες στο $\hat{\mathbf{n}}$ και συχνά αναφέρονται ως οι εφαπτομενικές συνοριακές συνθήκες.

Στις εξισώσεις Maxwell αναζητούμε αρμονικές λύσεις του χρόνου της μορφής $e^{j\omega t}$, όπου η συχνότητα του πεδίου είναι ω . Με εφαρμογή του μετασχηματισμού Fourier στις εξισώσεις (1.1) μπορούμε να μελετήσουμε το πρόβλημα μας στο πεδίο της συχνότητας. Έτσι απλοποιείται σημαντικά το πρόβλημα διότι όλα τα πεδία τώρα με τη νέα μορφή $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \omega)$ μπορούν να μελετηθούν αγνοώντας την χρονική τους εξάρτηση. Από εδώ και πέρα θα συμβολίζονται τα πεδία αυτά απλώς ως \mathbf{F} και φυσικά αν χρειάζεται να βρεθεί η λύση στο πεδίο του χρόνου, τότε αρκεί να γίνει εφαρμογή της επαλληλίας του Μ/Σ Fourier. Η χρονική παράγωγος της $e^{j\omega t}$ είναι $j\omega e^{j\omega t}$, οπότε σε κάθε εξίσωση αντικαθιστούμε τη χρονική παράγωγο $\partial/\partial t \rightarrow j\omega$. Οι εξισώσεις περιστροφής (1.1) τώρα παίρνουν τη παρακάτω μορφή:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \boldsymbol{\mu} \mathbf{H}, \qquad (1.3.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + j\omega \epsilon \mathbf{E}, \qquad (1.3.2)$$

ενώ αν τις αναλύσουμε πάνω στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων οι βαθμωτές συνιστώσες θα έχουν την παρακάτω μορφή:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -j\omega \mu_0 \mu_{xx} H_x \qquad \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = J_x + j\omega \epsilon_0 \epsilon_{xx} E_x \qquad (1.4.1)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -j\omega \mu_0 \mu_{yy} H_y \qquad \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = J_y + j\omega \epsilon_0 \epsilon_{yy} E_y \qquad (1.4.2)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega \mu_0 \mu_{zz} H_z \qquad \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = J_z + j\omega \epsilon_0 \epsilon_{zz} E_z \qquad (1.4.3)$$

Οι συντακτικές σχέσεις (*constitutive relations*) περιγράφουν τη συμπεριφορά των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων μέσα στα υλικά με τη βοήθεια των συντελεστών ϵ και $\boldsymbol{\mu}$. Στη γενικότερη περίπτωση, τα ϵ και $\boldsymbol{\mu}$ είναι ταχυστές αλλά στην εργασία αυτή θα ασχοληθούμε με **γραμμικά, ομογενή** υλικά χωρίς φαινόμενα διασποράς και με **διαγώνια ανισοτροπία**. Έτσι η διηλεκτρική επιτρεπτότητα ϵ και μαγνητική διαπερατότητα $\boldsymbol{\mu}$

παίρνουν την μορφή διαγώνιων πινάκων, όπως φαίνεται παρακατω:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \epsilon_0 \underbrace{\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\epsilon}_r}, \quad (1.5)$$

$$\boldsymbol{\mu} = \mu_0 \underbrace{\begin{bmatrix} \mu_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{zz} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\mu}_r}, \quad (1.6)$$

όπου φυσικά ϵ_0 είναι η επιτρεπτότητα και μ_0 η διαπερατότητα του κενού. Οι συντακτικές σχέσεις τότε παίρνουν την απλή μορφή:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{\epsilon}_r \mathbf{E}, \quad (1.7)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \boldsymbol{\mu}_r \mathbf{H}. \quad (1.8)$$

1.2 Η/Μ κύματα σε υλικά με απώλειες

Κατά την προσομοίωση του προβλήματος της περίθλασης το εμπόδιο που θα χρησιμοποιήσουμε είναι τέτοιο ώστε να μην επιτρέπει το προσπίπτον κύμα με συχνότητα ω να το διαπεράσει. Το κύμα θα ανακλάται και θα εξασθενεί μέσα στο εμπόδιο λόγω της απόσβεσης που θα εμφανίζει στη συχνότητα αυτή. Παρακάτω, παρουσιάζουμε συνοπτικά πως εισάγονται οι απώλειες των υλικών στις εξισώσεις του ηλεκτρομαγνητισμού.

Για να περιγράψουμε ένα υλικό το οποίο εκτός από διηλεκτρικότητα παρουσιάζει και αγωγιμότητα, χρησιμοποιούμε την μιγαδική διηλεκτρική σταθερά $\tilde{\epsilon}$. Από την εξίσωση (1.3.2) για μηδενικές πηγές θα έχουμε,

$$\mathbf{J}_{tot} = \mathbf{J}_{cond} + \mathbf{J}_{disp} = \sigma \mathbf{E} + j\omega \epsilon \mathbf{E} = j\omega \tilde{\epsilon} \mathbf{E} \quad (1.9)$$

όπου ορίσαμε τη μιγαδική διηλεκτρική σταθερά ως

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon - j \frac{\sigma}{\omega}. \quad (1.10)$$

Οι ποσότητες σ , ϵ μπορούν και αυτές να πάρουμε φανταστικές τιμές και εν γένει είναι μιγαδικοί αριθμοί, ενώ παράλληλα εξαρτώνται και από τη συχνότητα ω . Θα θεωρήσουμε πως η αγωγιμότητα είναι πραγματική πάνω στη ζώνη οπτικών συχνοτήτων που μελετάμε οπότε μπορούμε να πούμε ότι,

$$\tilde{\epsilon} = \text{Re}\{\epsilon\} - j \left(\text{Im}\{\epsilon\} + \frac{\sigma}{\omega} \right) = \epsilon' - j\epsilon'', \quad (1.11)$$

Οι ωμικές απώλειες προκύπτουν αποκλειστικά λόγω του φανταστικού όρου ϵ'' της μιγαδικής σταθεράς και αυτό μπορεί να αποδειχθεί μέσω του θεωρήματος Poynting [3],

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{P} = -\mathbf{J}_{\text{tot}} \cdot \mathbf{E}, \quad (1.12)$$

όπου w είναι η πυκνότητα ενέργειας ανά μονάδες όγκου [joule/m³] και \mathcal{P} το διάνυσμα Poynting [Watt/m²]. Στο δεξί μέλος της σχέσης (1.12) έχουμε τον ρυθμό απώλειας ενέργειας λόγω του φαινομένου Joule που μετατρέπεται σε θερμότητα και την ισχύ των πηγών [Watt/m³]. Χρησιμοποιούμε την θεώρηση της ημιτονοειδούς μόνιμης κατάστασης οπότε για τα \mathbf{J} , \mathbf{E} θα ισχύει:

$$\mathbf{J}_{\text{tot}}(\mathbf{x}, t) = \text{Re} \left\{ \mathbf{J}_{\text{tot}} e^{j\omega t} \right\}, \quad \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \text{Re} \left\{ \mathbf{E} e^{j\omega t} \right\}. \quad (1.13)$$

Ο χρονικός μέσος του δεξιού μέλους της εξίσωσης (1.12) υπολογίζεται εύκολα ως

$$\langle \mathbf{J}_{\text{tot}} \cdot \mathbf{E} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{J}_{\text{tot}} \cdot \mathbf{E} dt = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \mathbf{J}_{\text{tot}} \cdot \mathbf{E}^* \right\}, \quad (1.14)$$

και έτσι οι ωμικές απώλειες ενέργειας ανά μονάδες όγκου είναι:

$$\frac{dP_{\text{loss}}}{dV} = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \mathbf{J}_{\text{tot}} \cdot \mathbf{E}^* \right\} = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ j\omega(\epsilon' - j\epsilon'')E^2 \right\} = \omega\epsilon'' |\mathbf{E}|^2. \quad (1.15)$$

Χρησιμοποιώντας την μιγαδική σταθερά $\tilde{\epsilon}$ μπορούμε να εκφράσουμε τον μιγαδικό κυματαριθμό, τη μιγαδική κυματική αντίσταση και τον μιγαδικό δείκτη διάθλασης ως:

$$k_c = \omega \sqrt{\mu \tilde{\epsilon}}, \quad Z_c = \sqrt{\frac{\mu}{\tilde{\epsilon}}}, \quad n_c = \sqrt{\frac{\epsilon' - j\epsilon''}{\epsilon_0}}. \quad (1.16)$$

Ο μιγαδικός δείκτης διάθλασης n_c γράφεται πολλές φορές με τη μορφή $n_c = n - j\kappa$, όπου n είναι ο πραγματικός δείκτης διάθλασης και κ ο συντελεστής απόσβεσης του μέσου για ένα ορισμένο μήκος κύματος (extinction coefficient). Τον μιγαδικό κυματαριθμό k_c μπορούμε να τον γράψουμε με τη γενική μορφή ενός μιγαδικού αριθμού:

$$k_c = \omega \sqrt{\mu(\epsilon' - j\epsilon'')} = \beta - j\alpha. \quad (1.17)$$

Αν έχουμε ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα που διαδίδεται στη z διεύθυνση, παρατηρούμε πως θα είναι ο παράγοντας α αυτός που επηρεάζει την απόσβεση του κύματος μέσω της εκθετικής ποσότητας,

$$e^{-jk_c z} = e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} = e^{-jk_0 n z} e^{-k_0 \kappa z}. \quad (1.18)$$

Το διάνυσμα Poynting σε αυτή τη περίπτωση είναι $\mathbf{P}(z) = \hat{\mathbf{z}}P(0)e^{-2\alpha z}$ οπότε η ενέργεια φθίνει σύμφωνα με τον παράγοντα $e^{-2\alpha z}$. Επίσης το βάθος διείσδυσης δ (skin depth) ορίζεται ως η απόσταση εκείνη όπου το πλάτος του Η/Μ κύματος θα εξασθενήσει στο $1/e$ της αρχικής του τιμής. Από τη σχέση (1.18) το δ είναι ίσο με

$$\delta = \frac{1}{\alpha}. \quad (1.19)$$

Το βάθος διείσδυσης μας βοηθάει να δούμε πόσο πρέπει να είναι το ελάχιστο πάχος του εμποδίου, για το οποίο τα ηλεκτρομαγνητικά δεν θα καταφέρνουν να το διεισδύσουν και να επηρεάσουν την προσομοίωση μας.

1.3 Συμμετρικές εξισώσεις Maxwell

Προτού εφαρμόσουμε τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών, είναι χρήσιμο να φέρουμε τις εξισώσεις (1.4) σε μία απλούστερη μορφή. Με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών αποκτούμε ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων, συνεπώς οποιαδήποτε απλοποίηση των εξισώσεων βοηθάει στην καλύτερη διαχείριση και ευαναγνωσιμότητα του προβλήματος. Οι εξισώσεις μπορούν να αποκτήσουν συμμετρική μορφή αν κανονικοποιήσουμε ένα από τα δύο πεδία.

Το πρόβλημα της περίθλασης έχει κυματικό χαρακτήρα, συνεπώς οι πηγές (\mathbf{J}_1, ρ) και η ειδική αγωγιμότητα σ κατά τη διάδοση στον ελεύθερο χώρο μπορούν να θεωρηθούν μηδενικές. Χρησιμοποιούμε τη κυματική αντίσταση του κενού $(\mu_0/\epsilon_0)^{1/2}$ για να κανονικοποιήσουμε το πλάτος του μαγνητικού πεδίου \mathbf{H} ως προς το ηλεκτρικού \mathbf{E} πεδίο [4].

$$\tilde{\mathbf{H}} = -j\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \mathbf{H}. \quad (1.20)$$

Το " $-j$ " χρησιμοποιείται για να διώξει το αρνητικό πρόσημο από το δεξί μέλος των σχέσεων του μαγνητικού πεδίου. Χρησιμοποιώντας τώρα το $\tilde{\mathbf{H}}$ στη θέση του \mathbf{H} και δεδομένου πως η σταθερά διάδοσης στο κενό δίνεται από τη σχέση $k_0 = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$, οι εξισώσεις (1.3) γράφονται ως εξής:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = k_0\mu_{xx}\tilde{H}_x \quad \frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial z} = k_0\epsilon_{xx}E_x \quad (1.21.1)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = k_0\mu_{yy}\tilde{H}_y \quad \frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial x} = k_0\epsilon_{yy}E_y \quad (1.21.2)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = k_0\mu_{zz}\tilde{H}_z \quad \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial y} = k_0\epsilon_{zz}E_z \quad (1.21.3)$$

Η σταθερά k_0 εξαφανίζεται εύκολα αν θεωρήσουμε τον μετασχηματισμό των καρτεσιανών συντεταγμένων σε $(x' = k_0x, y' = k_0y, z' = k_0z)$.

$$\frac{\partial E_z}{\partial y'} - \frac{\partial E_y}{\partial z'} = \mu_{xx}\tilde{H}_x \quad \frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial y'} - \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial z'} = \epsilon_{xx}E_x \quad (1.22.1)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z'} - \frac{\partial E_z}{\partial x'} = \mu_{yy}\tilde{H}_y \quad \frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial z'} - \frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial x'} = \epsilon_{yy}E_y \quad (1.22.2)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x'} - \frac{\partial E_x}{\partial y'} = \mu_{zz}\tilde{H}_z \quad \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial x'} - \frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial y'} = \epsilon_{zz}E_z \quad (1.22.3)$$

Οι εξισώσεις αυτές αποτελούν τη βάση του συστήματος πάνω στο οποίο θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο των Πεπερασμένων Διαφορών στο πεδίο της συχνότητας. Προτού επιχειρήσουμε αυτό όμως, πρέπει να παρουσιάσουμε τον τρόπο με τον οποίο θα αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα του περιορισμένου υπολογιστικού χώρου σε μία προσομοίωση διάδοσης H/M κυμάτων.

1.4 Θεωρία προσαρμοσμένου στρώματος

Όταν θέλουμε να κάνουμε κάποια προσομοίωση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, πρέπει ως πρώτο βήμα να ορίσουμε τον υπολογιστικό χώρο του προβλήματος \mathbf{A} . Τα Η/Μ κύματα μπορούν να διαδοθούν στον αέρα σε τεράστιες αποστάσεις, ωστόσο εμάς μας ενδιαφέρει η προσομοίωση τους μόνο μέσα στον υπολογιστικό μας χώρο \mathbf{A} . Το πρόβλημα που εμφανίζεται τώρα είναι ότι κατά τη προσομοίωση των πεδίων δεν μπορούμε να επιβάλλουμε τον απότομο μηδενισμό τους στο σύνορο $\partial\mathbf{A}$, διότι για ένα κύμα που ικανοποιεί τις κυματικές εξισώσεις Maxwell, στο σύνορο $\partial\mathbf{A}$ θα "βλέπει" κάποιο υλικό με διαφορετική αντίσταση και συνεπώς θα ανακλάται. Θέλουμε συνεπώς να φτιάξουμε ένα *τεχνητό* στρώμα γύρω από το \mathbf{A} τέτοιο ώστε να έχει τις εξής δύο ιδιότητες

1. **Μηδενική ανάκλαση** (ιδανικά) για κάθε γωνία πρόσπτωσης, πόλωσης και συχνότητας των προσπίπτοντων κυμάτων.
2. **Εξασθένιση** των διαθλώμενων κυμάτων μέσα στο τεχνικό υλικό.

Εφόσον το στρώμα PML δεν χρειάζεται να αντιστοιχεί σε κάποιο πραγματικό υλικό αλλά είναι δικό μας δημιούργημα, μπορούμε μαθηματικά να δημιουργήσουμε ένα φανταστικό υλικό που να εμφανίζει αυτές τις δύο ιδιότητες.

Έστω ένα κύμα ηλεκτρικού πεδίου που διαδίδεται στον άξονα x και περιγράφεται από τη σχέση $E(x) = e^{-jkx}$ με πλάτος μονάδα και συχνότητα $\omega = c|k|$. Ο υπολογιστικός χώρος του προβλήματος μας στη μία διάσταση θα είναι το διάστημα $(-x_0, x_0)$ στον πραγματικό άξονα x με x_0 κάποιο οριακό σημείο. Η $E(x)$ είναι αναλυτική¹ στο \mathbf{A} , συνεπώς μπορούμε με *αναλυτική συνέχιση* να υποθέσουμε ότι υπάρχει μία συνάρτηση \tilde{E} που ορίζεται στον **μιγαδικό** χώρο \mathbf{B} που καλύπτει ολόκληρο τον \mathbf{A} χώρο του προβλήματος [5]. Η συνάρτηση \tilde{E} στα σημεία x που ανήκουν μέσα στο \mathbf{A} έχει ακριβώς την ίδια συμπεριφορά με την γνωστή E , ενώ εξωτερικά στο χώρο \mathbf{B} μπορεί να παρουσιάζει διαφορετική συμπεριφορά. Δηλαδή, προηγουμένως μελετούσαμε απλώς τη περίπτωση όπου ίσχυε $\tilde{E} = E$. Η μεταβλητή θέσης x τώρα θα πρέπει να αντικατασταθεί από τη γενικότερη μιγαδική μεταβλητή

$$\hat{x} = x - jf(x).$$

Η $f(x)$ είναι μία συνάρτηση που μας δείχνει πόσο έχουμε *απομακρυνθεί* από τον πραγματικό άξονα x καθώς κινούμαστε στον μιγαδικό χώρο. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, η $f(x)$ είναι αυτή που εξασθενεί τα κύματα στον χώρο έξω από το \mathbf{A} . Η $\tilde{E}(\hat{x})$ είναι αναλυτική συνέχιση της $E(x)$ όταν ισχύουν τα παρακάτω:

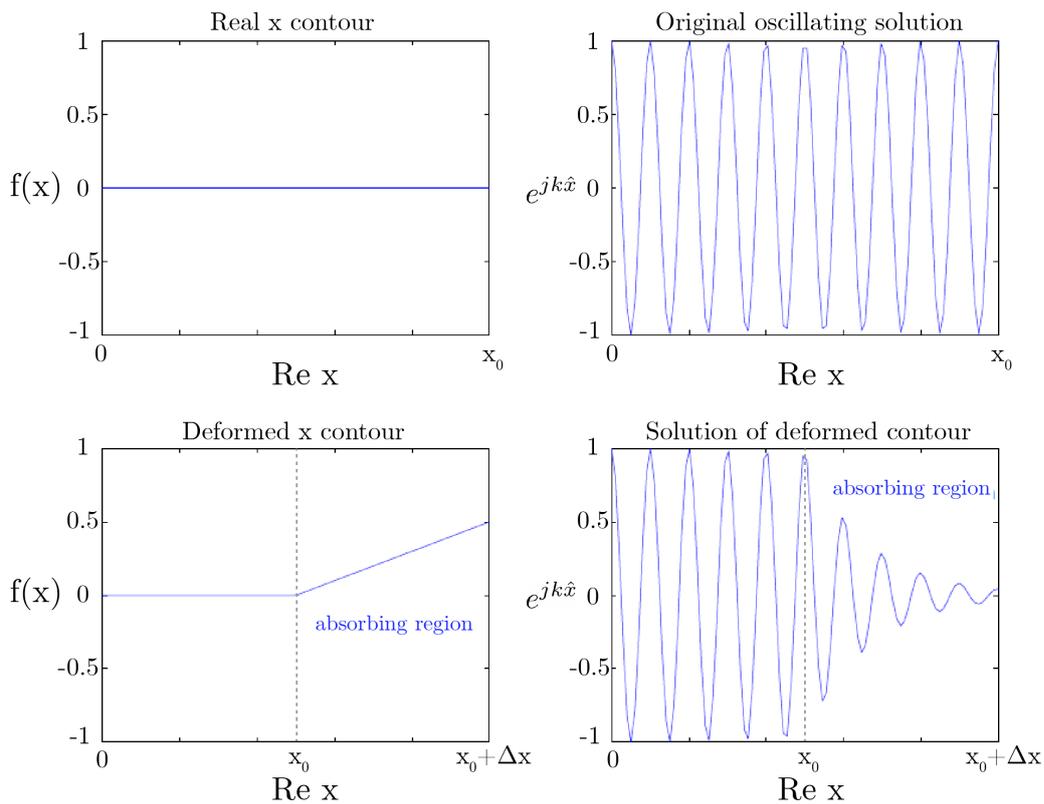
1. Το \mathbf{B} σύνολο καλύπτει ολόκληρο το \mathbf{A}
2. Η $\tilde{E}(\hat{x})$ είναι *αναλυτική* στο \mathbf{B}
3. Ισχύει $\tilde{E}(\hat{x}) = E(x), \forall \hat{x} \in \mathbf{A}$.

Εφόσον $x \rightarrow \hat{x} = x - jf(x)$ τότε η συνάρτηση $E(\hat{x})$ θα έχει τη παρακάτω μορφή,

$$E(\hat{x}) = e^{-jk\hat{x}} = e^{-jkx} e^{-kf(x)}.$$

¹Άπειρες φορές παραγωγίσιμη $\forall x \in \mathbf{A}$ και κάθε γειτονικό σημείο του.

Το κύμα τώρα εξασθενεί εκθετικά λόγω του όρου $e^{-k f(x)}$ (όταν $k, f(x) > 0$). Μέσα στον χώρο \mathbf{A} θα συμπεριφέρεται ακριβώς όπως πριν, ενώ εκτός του \mathbf{A} τώρα του εισήχθει εκθετική εξασθένηση (Σχήμα 1.1). Έτσι η περιοχή εξωτερικά του \mathbf{A} θα λειτουργεί ως ένα απορροφητικό υλικό (*Absorbing Material*) και ταυτόχρονα εφόσον το πρόβλημα στο \mathbf{A} παραμένει **αμετάβλητο** δεν θα εμφανίζονται ανακλάσεις λόγω του απορροφητικού υλικού. Καταλήγουμε, να έχουμε φτιάξει τελικά ένα τέλεια προσαρμοστικό στρώμα (*Perfectly Matching Layer*) γύρω από το χώρο του προβλήματος μας.



Σχήμα 1.1: Οι εικόνες στο πάνω μέρος απεικονίζουν το πραγματικό πρόβλημα, ενώ το κάτω μέρος περιλαμβάνει την αναλυτική συνέχιση του χώρου. Εικόνα προσαρμοσμένη από: [Steven G Johnson, Notes on Perfectly Matched Layers \(PMLs\), MIT, 2007, p. 7.](#)

Με την ίδια ακριβώς μεθοδολογία μπορούμε να περιγράψουμε και τις υπόλοιπες δύο ορθογώνιες συντεταγμένες (\hat{y}, \hat{z}). Επειδή όμως οι μιγαδικές χωρικές μεταβλητές δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν εύκολα, θα κάνουμε *αλλαγή των συντεταγμένων* ως προς το πραγματικό μέρος αυτών, δηλαδή θα φέρουμε έξω τα (x, y, z) μέσα από αυτές. Αυτό γίνεται εύκολα με την αντικατάσταση των διαφορικών ($\partial \hat{x}, \partial \hat{y}, \partial \hat{z}$) στην εξίσωση μας με τις παρακάτω σχέσεις:

$$\partial \hat{x} = \left[1 - \frac{df_x(x)}{dx} \right] \partial x = [1 - \sigma_x(x)] \partial x, \quad (1.23)$$

$$\partial \hat{y} = \left[1 - \frac{df_y(y)}{dy} \right] \partial y = [1 - \sigma_y(y)] \partial y, \quad (1.24)$$

$$\partial \hat{z} = \left[1 - \frac{df_z(z)}{dz} \right] \partial z = [1 - \sigma_z(z)] \partial z, \quad (1.25)$$

όπου φυσικά θεωρήσαμε ότι $df_i(i)/di = \sigma_i(i)$ για $i = x, y, z$. Τώρα μπορούμε να αντικαταστήσουμε τις μιγαδικές συντεταγμένες της εξίσωση μας με τις πραγματικές, χρησιμοποιώντας απλώς τους παρακάτω μετασχηματισμούς:

$$\frac{\partial}{\partial \hat{x}} \rightarrow \frac{1}{1 - \sigma_x(x)} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{s_x} \frac{\partial}{\partial x}, \quad (1.26)$$

$$\frac{\partial}{\partial \hat{y}} \rightarrow \frac{1}{1 - \sigma_y(y)} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{s_y} \frac{\partial}{\partial y}, \quad (1.27)$$

$$\frac{\partial}{\partial \hat{z}} \rightarrow \frac{1}{1 - \sigma_z(z)} \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{s_z} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (1.28)$$

όπου $s_i = 1 - \sigma_i$. Η **τεχνητή** αυτή αγωγιμότητα σ επιβεβαιώνουμε πως θα εξασθενεί τα κύματα λόγω του όρου

$$e^{-jk\hat{x}} = e^{-jkx} e^{-k \int^x \sigma_x(x') dx'}, \quad (1.29)$$

για την x εξάρτηση και αντίστοιχα οι σ_y, σ_z για τις y, z . Ταυτόχρονα στο πρόβλημα μας θα έχουμε και κύματα τα οποία έχουν αντίθετη διεύθυνση διάδοσης $k < 0$. Σε αυτή τη περίπτωση μας αρκεί να τοποθετήσουμε ένα ίδιο με πριν PML στην αντίθετη πλευρά του προβλήματος, δεδομένου πως θα έχουμε αρνητικά x τώρα και έτσι τα κύματα θα αποσβένονται στην αντίθετη κατεύθυνση.

Μπορούμε να απλοποιήσουμε ακόμα περισσότερο την μέθοδο μας πάνω στις εξισώσεις του Maxwell, αν αντί να χρησιμοποιήσουμε τους μετασχηματισμούς (1.26) για κάθε διαφορικό τελεστή των εξισώσεων μας, θεωρήσουμε το PML ως μία επέκταση των υλικών μας μέσω των πινάκων ϵ, μ . Δεν χρειάζεται δηλαδή να αντικαταστήσουμε κάθε τελεστή στις εξισώσεις μας αλλά εισάγοντας νέους πίνακες υλικών το αποτέλεσμα είναι ακριβώς το ίδιο. Ο λόγος που μπορεί να γίνει αυτό οφείλεται στην ιδιότητα των εξισώσεων του Maxwell να *αντιλαμβάνονται* την αλλαγή του χωρικών συντεταγμένων σαν την ύπαρξη ενός ισοδύναμου ανισοτροπικού υλικού [6].

$$\frac{1}{s_x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{s_y} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{s_z} \frac{\partial}{\partial z} \leftrightarrow \epsilon, \mu$$

Η ιδιότητα αυτή ονομάζεται (*form-invariance*) των εξ. Maxwell. Καταλήγουμε να έχουμε δύο ισοδύναμες μορφές PML. Η πρώτη χρησιμοποιεί γενικευμένες συντεταγμένες και ονομάζεται *Stretched-Coordinate PML (SC-PML)*, ενώ η δεύτερη χρησιμοποιεί ανισοτροπικά υλικά και λέγεται *Uniaxial PML (UPML)*. Εμείς για την ανάλυση μας επιλέγουμε τη UPML μέθοδο η οποία αναλύεται παρακάτω.

1.5 Uniaxial Perfectly Matched Layer (UPML)

Θα εφαρμόσουμε τώρα τη θεωρία του PML στη περίπτωση όπου έχουμε ένα επίπεδο κύμα που προσπίπτει σε μία επίπεδη επιφάνεια (Σχήμα 1.2). Οι εξισώσεις Fresnel για τους συντελεστές ανάκλασης-διάθλασης στις TE και TM πολώσεις [7] είναι οι παρακάτω

$$r^{TE} = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t}, \quad r^{TM} = \frac{n_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_t}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t}. \quad (1.30)$$

Θέλουμε τα r^{TE}, r^{TM} να μηδενίζονται ανεξάρτητα της γωνίας πρόσπτωσης θ_i . Αυτό είναι αδύνατον στην περίπτωση της ανάκλασης από ισοτροπικά υλικά, συνεπώς το UPML πρέπει αναγκαστικά να είναι ένα ανισοτροπικό υλικό. Αριστερά του UPML θεωρούμε διηλεκτρικές και μαγνητικές σταθερές ίσες με ϵ_0, μ_0 , ενώ για το UPML θεωρούμε διαγώνια ανισοτροπικό υλικό με συντελεστές της μορφής,

$$[\epsilon] = \epsilon_0[\Lambda] = \epsilon_0 \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}, \quad (1.31)$$

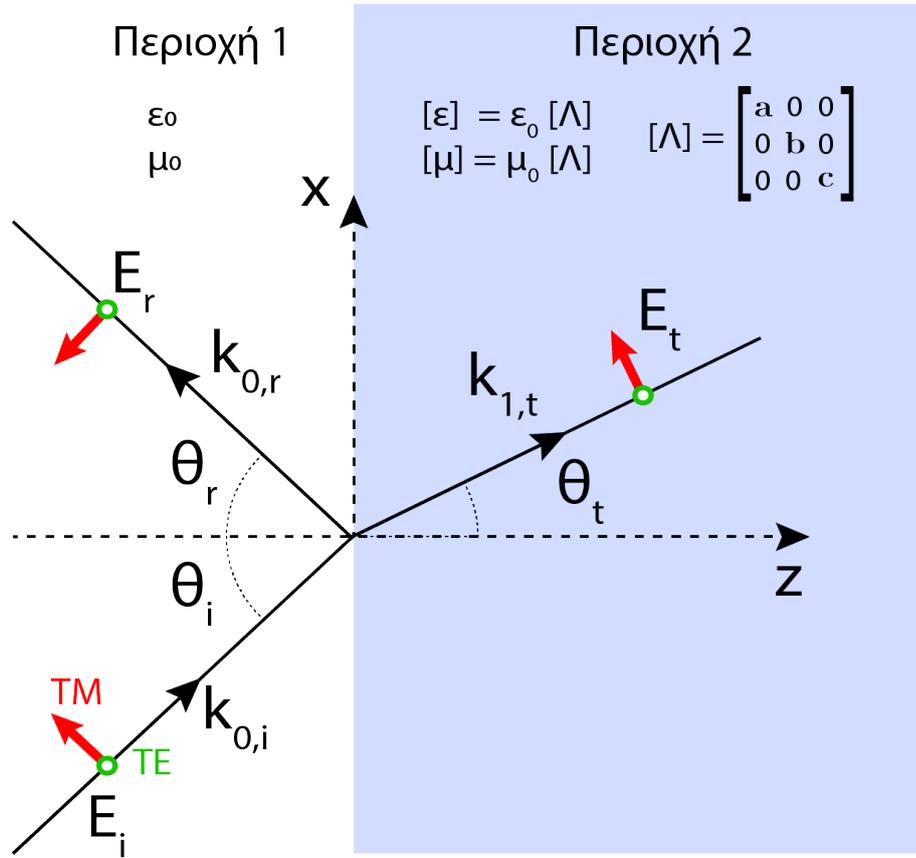
$$[\mu] = \mu_0[\Lambda] = \mu_0 \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}, \quad (1.32)$$

όπου $[\Lambda]$ ο πίνακας ανισοτροπίας του UPML, ενώ (a, b, c) οι παράμετροι της ανισοτροπίας που η μορφή τους θα δοθεί αργότερα στην ανάλυση. Χρησιμοποιώντας τη **θεωρία γραμμών μεταφοράς**, γνωρίζουμε πως οι ανακλάσεις των κυμάτων οφείλονται στη διαφορά της κυματικής αντίστασης $Z = (\mu/\epsilon)^{1/2}$ που συναντούν τα κύματα κατά τη μετάβαση τους από το υλικό 1 στο υλικό 2. Όσο μεγαλύτερη είναι η διαφορά των δύο κυματικών αντιστάσεων Z_1 και Z_2 , τόσο μεγαλύτερος γίνεται ο συντελεστής ανάκλασης ρ αφού

$$|\rho| = \left| \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right|. \quad (1.33)$$

Έτσι για να έχουμε μηδενικές ανακλάσεις ($\rho = 0$), θα πρέπει να κάνουμε **προσαρμογή** των κυματικών αντιστάσεων Z_1 και Z_2 [8]. Η μέθοδος του UPML που αναλύεται παρακάτω βασίζεται στη μέθοδο που αναπτύσσεται στο άρθρο [9]. Η προσαρμογή για μηδενικές ανακλάσεις μεταφράζεται από την παρακάτω συνθήκη:

$$Z_1 = Z_2 \implies \frac{[\epsilon]}{\epsilon_0} = \frac{[\mu]}{\mu_0} \quad (1.34)$$



Σχήμα 1.2: Πρόσπτωση H/M κύματος TE (πράσινο) και TM (κόκκινο) πάνω στη διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ του ελεύθερου χώρου ($z < 0$) και του UPML ($z > 0$).

Σύμφωνα με τη διαγώνια ανισοτροπία Λ των νέων σταθερών (1.31, 1.32) οι εξισώσεις (1.3) του ηλεκτρομαγνητικού προβλήματος στο UPML μπορούν να γραφτούν με τη παρακάτω μορφή:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot [\Lambda] \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \cdot [\Lambda] \mathbf{H} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -j\omega\mu_0[\Lambda] \mathbf{H} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= j\omega\epsilon_0[\Lambda] \mathbf{E} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{e^{j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}} \begin{aligned} \mathbf{k} \cdot [\Lambda] \mathbf{E} &= 0 \\ \mathbf{k} \cdot [\Lambda] \mathbf{H} &= 0 \\ \mathbf{k} \times \mathbf{E} &= \omega\mu_0[\Lambda] \mathbf{H} \\ \mathbf{k} \times \mathbf{H} &= -\omega\epsilon_0[\Lambda] \mathbf{E} \end{aligned}$$

Για να βρούμε τη σχέση διασποράς χρησιμοποιούμε για ευκολία τους παρακάτω μετασχηματισμούς

$$\mathbf{E}' = [\Lambda]^{1/2} \mathbf{E}, \quad \mathbf{H}' = [\Lambda]^{1/2} \mathbf{H}, \quad \mathbf{k}' = \frac{1}{\sqrt{abc}} [\Lambda]^{1/2} \mathbf{k}, \quad (1.35)$$

και οι εξισώσεις του Maxwell γίνονται:

$$\mathbf{k}' \cdot \mathbf{E}' = 0, \quad (1.36)$$

$$\mathbf{k}' \cdot \mathbf{H}' = 0, \quad (1.37)$$

$$\mathbf{k}' \times \mathbf{E}' = \omega \mu_0 \mathbf{H}', \quad (1.38)$$

$$\mathbf{k}' \times \mathbf{H}' = -\omega \epsilon_0 \mathbf{E}'. \quad (1.39)$$

Το \mathbf{k}' τώρα είναι κάθετο ως προς τα \mathbf{E}' , \mathbf{H}' και από την σχέση (1.39) παίρνουμε ότι

$$\mathbf{k}' \times \mathbf{k}' \times \mathbf{H}' = -\omega \epsilon_0 (\mathbf{k}' \times \mathbf{E}'),$$

$$(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}') \mathbf{H}' = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{H}',$$

που ισχύει για κάθε \mathbf{H}' , συνεπώς $(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}') = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 = k_0^2$. Αν αντικαταστήσουμε με τη σχέση (1.35) παίρνουμε ότι,

$$k_x'^2 + k_y'^2 + k_z'^2 = k_0^2,$$

$$\frac{k_x^2}{bc} + \frac{k_y^2}{ac} + \frac{k_z^2}{ab} = k_0^2 \quad (1.40)$$

Η σχέση διασποράς (1.40) έχει τη μορφή έλλειψης και οι συνιστώσες k_x, k_y, k_z δίνονται από τις εξισώσεις:

$$k_x = k_0 \sqrt{bc} \sin \theta \cos \phi, \quad k_y = k_0 \sqrt{ac} \sin \theta \sin \phi, \quad k_z = k_0 \sqrt{ab} \cos \theta, \quad (1.41)$$

όπου ϕ, θ η αζιμουθιακή και πολική γωνία αντίστοιχα. Στο δισδιάστατο πρόβλημα ορίζουμε την επιφάνεια πρόσπτωσης (x, z) όπως φαίνεται στο σχήμα 1.2 και θέτοντας τη γωνία $\phi = 0$ για ευκολία έχουμε ότι,

$$k_x = k_0 \sqrt{bc} \sin \theta, \quad k_y = 0, \quad k_z = k_0 \sqrt{ab} \cos \theta. \quad (1.42)$$

Στη συνέχεια θα αναλύσουμε το πρόβλημα ως προς τις TE και TM πολώσεις και θα υπολογίσουμε τις σχέσεις των συντελεστών ανάκλασης $r^{TE}, t^{TE}, r^{TM}, t^{TM}$. Για τη TE πό-

λωση οι εξισώσεις για το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο δίνονται παρακάτω:

$$\mathbf{E}_i^{TE}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{y}} \mathcal{E}_0 e^{-jk_0(\sin \theta_i x + \cos \theta_i z)}, \quad (1.43)$$

$$\mathbf{E}_r^{TE}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{y}} r^{TE} \mathcal{E}_0 e^{-jk_0(\sin \theta_r x - \cos \theta_r z)}, \quad (1.44)$$

$$\mathbf{E}_t^{TE}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{y}} t^{TE} \mathcal{E}_0 e^{-jk_0(\sqrt{bc} \sin \theta_t x + \sqrt{ab} \cos \theta_t z)}, \quad (1.45)$$

$$\mathbf{H}_i^{TE}(\mathbf{r}) = (-\cos \theta_i \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta_i \hat{\mathbf{z}}) \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \mathcal{E}_0 e^{-jk_0(\sin \theta_i x + \cos \theta_i z)}, \quad (1.46)$$

$$\mathbf{H}_r^{TE}(\mathbf{r}) = (\cos \theta_r \hat{\mathbf{x}} - \sin \theta_r \hat{\mathbf{z}}) \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} r^{TE} \mathcal{E}_0 e^{-jk_0(\sin \theta_r x - \cos \theta_r z)}, \quad (1.47)$$

$$\mathbf{H}_t^{TE}(\mathbf{r}) = \left(-\sqrt{\frac{b}{a}} \cos \theta_t \hat{\mathbf{x}} + \sqrt{\frac{b}{c}} \sin \theta_t \hat{\mathbf{z}} \right) \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} t^{TE} \mathcal{E}_0 e^{-jk_0(\sqrt{bc} \sin \theta_t x + \sqrt{ab} \cos \theta_t z)}. \quad (1.48)$$

Επιβάλλουμε τη συνέχεια των εφαπτομενικών συνιστωσών (1.2.2) των \mathbf{E}^{TE} , \mathbf{H}^{TE} πάνω στη διαχωριστική επιφάνεια ($z = 0$ για ευκολία). Εξισώνοντας τις συνιστώσες των πεδίων για τις x και y διευθύνσεις βρίσκουμε τις παρακάτω σχέσεις:

$$e^{-jk_0 \sin \theta_i x} + r^{TE} e^{-jk_0 \sin \theta_r x} = t^{TE} e^{-jk_0 \sqrt{bc} \sin \theta_t x},$$

$$-\cos \theta_i e^{-jk_0 \sin \theta_i x} + \cos \theta_r r^{TE} e^{-jk_0 \sin \theta_r x} = \sqrt{\frac{b}{a}} \cos \theta_t t^{TE} \mathcal{E}_0 e^{-jk_0 \sqrt{bc} \sin \theta_t x}.$$

Τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε τις φάσεις και τα πλάτη ξεχωριστά ως:

$$\text{(I)} \quad \sin \theta_i = \sin \theta_r = \sqrt{bc} \sin \theta_t,$$

$$\text{(II)} \quad -\cos \theta_i + \cos \theta_r r^{TE} = -\sqrt{\frac{b}{a}} \cos \theta_t t^{TE},$$

$$\text{(III)} \quad 1 + r^{TE} = t^{TE}.$$

Η (I) μας δίνει το γενικό νόμο του Snell για την ανάκλαση και τη διάθλαση. Με τη βοήθεια των (II) και (III) μπορούμε να υπολογίσουμε τους συντελεστές ανάκλασης r^{TE}

και διάθλασης t^{TE} :

$$r^{TE} = \frac{\cos \theta_i - \sqrt{\frac{b}{a}} \cos \theta_t}{\cos \theta_i + \sqrt{\frac{b}{a}} \cos \theta_t}, \quad (1.49)$$

$$t^{TE} = \frac{2\sqrt{\frac{b}{a}} \cos \theta_t}{\cos \theta_i + \sqrt{\frac{b}{a}} \cos \theta_t}. \quad (1.50)$$

Αν αναλύσουμε το πρόβλημα ως προς τη TM πόλωση τότε παίρνουμε τις παρακάτω εξισώσεις για το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο.

$$\mathbf{E}_i^{TM}(\mathbf{r}) = (\cos \theta_i \hat{\mathbf{x}} - \sin \theta_i \hat{\mathbf{z}}) \mathcal{E}_0 e^{-jk_0(\sin \theta_i x + \cos \theta_i z)}, \quad (1.51)$$

$$\mathbf{E}_r^{TM}(\mathbf{r}) = (-\cos \theta_r \hat{\mathbf{x}} - \sin \theta_r \hat{\mathbf{z}}) r^{TM} \mathcal{E}_0 e^{-jk_0(\sin \theta_r x - \cos \theta_r z)}, \quad (1.52)$$

$$\mathbf{E}_t^{TM}(\mathbf{r}) = \left(\sqrt{\frac{b}{a}} \cos \theta_t \hat{\mathbf{x}} - \sqrt{\frac{b}{c}} \sin \theta_t \hat{\mathbf{z}} \right) t^{TM} \mathcal{E}_0 e^{-jk_0(\sqrt{bc} \sin \theta_t x + \sqrt{ab} \cos \theta_t z)}, \quad (1.53)$$

$$\mathbf{H}_i^{TM}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{y}} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \mathcal{E}_0 e^{-jk_0(\sin \theta_i x + \cos \theta_i z)}, \quad (1.54)$$

$$\mathbf{H}_r^{TM}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{y}} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} r^{TM} \mathcal{E}_0 e^{-jk_0(\sin \theta_r x - \cos \theta_r z)}, \quad (1.55)$$

$$\mathbf{H}_t^{TM}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{y}} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} t^{TM} \mathcal{E}_0 e^{-jk_0(\sqrt{bc} \sin \theta_t x + \sqrt{ab} \cos \theta_t z)}. \quad (1.56)$$

Επιβάλλουμε τη συνέχεια των εφαπτομενικών συνιστωσών (1.2.2) των E^{TM} , H^{TM} πάνω στη διαχωριστική επιφάνεια ($z = 0$ για ευκολία). Για το ηλεκτρικό πεδίο και το μαγνητικό πεδίο έχουμε,

$$\cos \theta_i e^{-jk_0 \sin \theta_i x} - \cos \theta_r r^{TM} e^{-jk_0 \sin \theta_r x} = \sqrt{\frac{b}{a}} \cos \theta_t t^{TM} e^{-jk_0 \sqrt{bc} \sin \theta_t x},$$

$$e^{-jk_0 \sin \theta_i x} + r^{TM} e^{-jk_0 \sin \theta_r x} = t^{TM} e^{-jk_0 \sqrt{bc} \sin \theta_t x}.$$

Εξισώνουμε τις φάσεις και τα πλάτη ξεχωριστά και βρίσκουμε ότι:

$$\text{(I)} \quad \sin \theta_i = \sin \theta_r = \sqrt{bc} \sin \theta_t ,$$

$$\text{(II)} \quad \cos \theta_i - \cos \theta_r r^{TM} = \sqrt{\frac{b}{a}} \cos \theta_t t^{TM} ,$$

$$\text{(III)} \quad 1 + r^{TM} = t^{TM} .$$

Η (I) μας δίνει το γενικό νόμο του Snell για την ανάκλαση και τη διάθλαση. Με τη βοήθεια των (II) και (III) μπορούμε να υπολογίσουμε τους συντελεστές ανάκλασης r^{TM} και διάθλασης t^{TM} :

$$r^{TM} = \frac{\sqrt{\frac{b}{a}} \cos \theta_t - \cos \theta_i}{\sqrt{\frac{b}{a}} \cos \theta_t + \cos \theta_i} , \quad (1.57)$$

$$t^{TM} = \frac{2 \cos \theta_i}{\sqrt{\frac{b}{a}} \cos \theta_t + \cos \theta_i} . \quad (1.58)$$

Οι συντελεστές ανάκλασης και η γωνία θ_t εξαρτώνται από τις παραμέτρους (a, b, c) του πίνακα $[\Lambda]$. Αν θέσουμε

$$a = b = \frac{1}{c} ,$$

τότε η γωνία πρόσπτωσης θα είναι ίση με τη γωνία διάθλασης και ο συντελεστής ανάκλασης θα μηδενίζεται και για τις δύο πολώσεις.

$$\theta_i = \theta_t ,$$

$$r^{TE} = r^{TM} = 0 .$$

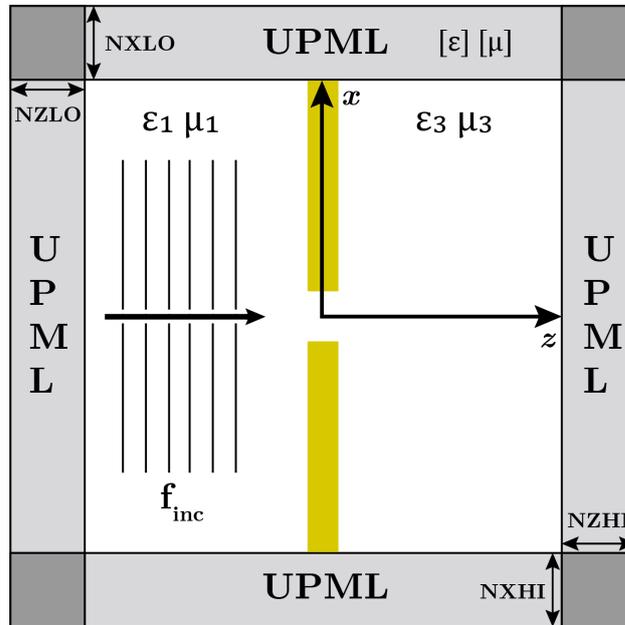
Με αυτό το τρόπο έχουμε καταφέρει οι συντελεστές ανάκλασης να είναι **ανεξάρτητοι** από τη γωνία πρόσπτωσης, αφού εξαρτώνται μόνο από τις παραμέτρους (a, b, c) της ανισοτροπίας. Έτσι έχουμε μηδενική ανάκλαση και για τις δύο πολώσεις TE και TM, και φυσικά ανεξάρτητα της συχνότητας ω . Ο πίνακας ανισοτροπίας $[\Lambda]$ τώρα έχει μόνο a και a^{-1} όρους στις διαγωνίους του και εκεί οφείλεται η ονομασία του PML ως *Uniaxial PML*.

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a^{-1} \end{bmatrix} .$$

1.6 Δισδιάστατο UPML

Το UPML θα πρέπει να το κατασκευάσουμε με τέτοιο τρόπο ώστε να περικλύει το δισδιάστατο πρόβλημα μας και εξωτερικά της διάταξης μας να παρομοιάζει την διάδοση κυμάτων στον ελεύθερο χώρο. Είναι ευκολότερο να εμφανίσουμε τον πίνακα ανισοτροπίας $[\Lambda]$ σε όλες τις εξ. Maxwell και στα σημεία όπου δεν είμαστε στο UPML να θεωρήσουμε ότι ο $[\Lambda]$ είναι ίσος με τον μοναδιαίο πίνακα \mathcal{I} . Δηλαδή μόνον όταν δεν βρισκόμαστε στον χώρο του προβλήματος θα ισχύει $a \neq 1$.

Η παράμετρος a είναι ένας μιγαδικός αριθμός, οπότε τη γράφουμε ως $a = \alpha - j\beta$, για $\alpha, \beta > 0$. Από τις σχέσεις των πεδίων $\mathbf{E}_t, \mathbf{H}_t$ έχουμε ότι το α είναι αυτό που ορίζει το μήκος κύματος διάδοσης μέσα στο UPML και το β λειτουργεί ως ο συντελεστή εξασθένισης του κύματος.



Σχήμα 1.3: Uniaxial Perfectly Matching Layers περιμετρικά του υπολογιστικού χώρου του προβλήματος στις x και z διευθύνσεις.

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} \alpha - j\beta & 0 & 0 \\ 0 & \alpha - j\beta & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha + j\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \end{bmatrix}.$$

Για να επεκτείνουμε το UPML στις δύο διαστάσεις μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα ίδιο UPML και για τον δεύτερο άξονα όπως φαίνεται στην Εικόνα (1.3). Για να ξεχωρίζουμε τα UPML του x -άξονα και z -άξονα, θα ονομάσουμε τους πίνακες $[\Lambda]$ ως $[S_x]$ και $[S_z]$ για τη κάθε διεύθυνση. Παρατηρούμε πως ο όρος a^{-1} , σύμφωνα με τη προηγούμενη ανάλυση, θα πηγαίνει πάντα στη θέση της διαγωνίου του πίνακα Λ που δείχνει τη διεύθυνση που εφαρμόζεται το UPML στο πρόβλημα μας. Άρα για τους πίνακες $[S_x]$

και $[S_z]$ έχουμε ότι

$$[S_x] = \begin{bmatrix} s_x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & s_x & 0 \\ 0 & 0 & s_x \end{bmatrix}, \quad [S_z] = \begin{bmatrix} s_z & 0 & 0 \\ 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & s_z^{-1} \end{bmatrix}. \quad (1.59)$$

Μπορούμε να συνδυάσουμε τους δύο πίνακες σε έναν πίνακα $[S]$ γράφοντας

$$[S] = [S_x] \cdot [S_z] = \begin{bmatrix} s_z/s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_x s_z & 0 \\ 0 & 0 & s_x/s_z \end{bmatrix}. \quad (1.60)$$

Στις εξισώσεις του Maxwell (1.22) μπορούμε τώρα να εισάγουμε τον $[S]$ πίνακα ως

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mu_r [S] \tilde{\mathbf{H}}, \quad \nabla \times \tilde{\mathbf{H}} = \epsilon_r [S] \mathbf{E}, \quad (1.61)$$

ενώ σε συνδυασμό με τις σταθερές των υλικών θα έχουμε ότι $\epsilon_r [S] = \epsilon'_r$ και $\mu_r [S] = \mu'_r$. Τελικά καταλήγουμε στις παρακάτω εξισώσεις.

$\nabla \times \mathbf{E} = \mu'_r \tilde{\mathbf{H}}$	$\nabla \times \tilde{\mathbf{H}} = \epsilon'_r \mathbf{E}$
$\frac{\partial E_z}{\partial y'} - \frac{\partial E_y}{\partial z'} = \mu'_{xx} \tilde{H}_x$	$\frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial y'} - \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial z'} = \epsilon'_{xx} E_x$
$\frac{\partial E_x}{\partial z'} - \frac{\partial E_z}{\partial x'} = \mu'_{yy} \tilde{H}_y$	$\frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial z'} - \frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial x'} = \epsilon'_{yy} E_y$
$\frac{\partial E_y}{\partial x'} - \frac{\partial E_x}{\partial y'} = \mu'_{zz} \tilde{H}_z$	$\frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial x'} - \frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial y'} = \epsilon'_{zz} E_z$

(1.62)

$$\epsilon'_r = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \frac{s_z}{s_x} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{yy} s_z s_x & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \frac{s_x}{s_z} \end{bmatrix}, \quad \mu'_r = \begin{bmatrix} \mu_{xx} \frac{s_z}{s_x} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{yy} s_z s_x & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{zz} \frac{s_x}{s_z} \end{bmatrix}. \quad (1.63)$$

Η μορφή των παραμέτρων s_x, s_z θέλουμε να είναι τέτοια ώστε όσο βαθύτερα βρισκόμαστε στο UPML, τόσο μεγαλύτερη να είναι η εξασθένιση του κύματος. Οι σχέσεις αυτές είναι ελεύθερες να έχουν οποιαδήποτε μορφή θέλουμε. Για την εργασία αυτή θα χρησιμοποιήσουμε τις προτεινόμενες σχέσεις από το άρθρο [10]. Η μορφή τους δίνεται παρακάτω:

$$s_z(z) = \alpha_z(z) [1 - jZ_0 \sigma_z(z)] , \quad (1.64)$$

$$s_x(x) = \alpha_x(x) [1 - jZ_0 \sigma_x(x)] , \quad (1.65)$$

όπου Z_0 είναι η κυματική αντίσταση του κενού χώρου, ενώ τις συναρτήσεις a, σ τις υπολογίζουμε από τις σχέσεις,

$$\alpha_z(z) = 1 + \alpha_{max} \left(\frac{z}{L} \right)^p , \quad \sigma_z(z) = \sigma_{max} \sin^2 \left(\frac{\pi z}{2L} \right) , \quad (1.66)$$

$$\alpha_x(x) = 1 + \alpha_{max} \left(\frac{x}{L} \right)^p , \quad \sigma_x(x) = \sigma_{max} \sin^2 \left(\frac{\pi x}{2L} \right) . \quad (1.67)$$

Οι σταθερές $\alpha_{max}, p, \sigma_{max}$ επιλέγονται ελεύθερα να έχουν τιμές στα διαστήματα,

$$0 \leq \alpha_{max} \leq 5 , \quad 3 \leq p \leq 5 , \quad \sigma_{max} \approx 1 . \quad (1.68)$$

Σε αυτό το σημείο έχουμε αναπτύξει την Η/Μ θεωρία και έχουμε φέρει τις εξισώσεις του Maxwell σε κατάλληλη μορφή, ώστε να εφαρμόσουμε την αριθμητική μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών. Στο επόμενο κεφάλαιο αναλύουμε την μέθοδο επίλυσης των διαφ. εξισώσεων Maxwell με FDFD και την εφαρμογή του πάνω στο Yee-πλέγμα.

Κεφάλαιο 2

Πεπερασμένες Διαφορές στο πεδίο της Συχνότητας (FDFD)

Όταν έχουμε ένα ηλεκτρομαγνητικό πρόβλημα συνοριακών τιμών (boundary problem), τότε πρέπει λύνοντας τις εξισώσεις Maxwell (1.1) πάνω στη γεωμετρία του προβλήματος να βρεθεί η λύση που ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες. Στις περισσότερες περιπτώσεις τα προβλήματα δεν αποτελούνται από απλές γεωμετρίες και συνεπώς δεν μπορεί να βρεθεί η αναλυτική λύση του προβλήματος (*analytical solution*) [11]. Αντ'αυτού χρησιμοποιούνται **αριθμητικές μέθοδοι** επίλυσης μερικών διαφορικών εξισώσεων που μπορούν να προσεγγίσουν τη λύση πάνω σε οποιαδήποτε γεωμετρία, μειώνοντας σημαντικά τη πολυπλοκότητα του προβλήματος (*rigorous analysis*).

Για τη λύση του H/M προβλήματος της περίθλασης επιλέγουμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των Πεπερασμένων Διαφορών στο πεδίο των Συχνοτήτων (*Finite-Difference Frequency Domain*). Η μέθοδος FDFD βρίσκει εφαρμογές σε πολλά προβλήματα που περιλαμβάνουν τη μελέτη διάθλασης/σκέδασης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων.

$$\begin{array}{ccc} \text{(Διαφορική Εξίσωση)} & & \text{(Αλγεβρικό Σύστημα)} \\ \widehat{\mathbf{L}}\{f\} = g & \xrightarrow{\text{Finite-Differences}} & [\mathbf{A}][\mathbf{x}] = [\mathbf{b}] \end{array}$$

Αν $\widehat{\mathbf{L}}\{f\}$ αποτελεί μία διαφορική εξίσωση (δ.ε.) ως προς τη συνάρτηση f και g ο μη-ομογενής όρος, τότε με τις πεπερασμένες διαφορές μπορούμε να μελετήσουμε τη δ.ε. σαν ένα αλγεβρικό σύστημα όπου $[A]$ ένας τετραγωνικός πίνακας και $[x]$, $[b]$ διανύσματα στήλης.

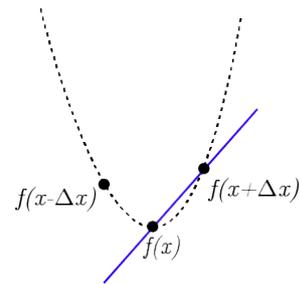
Η αριθμητική μέθοδος FDFD μετατρέπει τις διαφορικές εξισώσεις σε ένα σύστημα (πολλών) αλγεβρικών εξισώσεων που ένας υπολογιστής μπορεί εύκολα και γρήγορα να λύσει [12]. Ένα τυπικό πρόγραμμα FDFD έχει διάρκεια μερικών λεπτών ακόμα και στους πιο απλούς υπολογιστές. Με κατάλληλη διακριτοποίηση του χώρου μπορούμε επίσης να μελετήσουμε με ευκολία οποιαδήποτε γεωμετρία που μπορεί να έχει το πρόβλημα μας. Έτσι, με την ιδιότητα αυτή θα επιχειρήσουμε να λύσουμε τις διαφορικές εξισώσεις του Maxwell στο πρόβλημα της περίθλασης του H/M κύματος.

2.1 Σχέσεις πεπερασμένων διαφορών

Η μέθοδος των Πεπερασμένων Διαφορών (*FDM*) χρησιμοποιήθηκε πρώτη φορά το 1928 και ενώ υπάρχουν πλέον πιο σύγχρονες μέθοδοι επίλυσης των PDE, η μέθοδος FDM παραμένει να είναι η πιο διαδεδομένη αριθμητική μέθοδος στους επιστημονικούς κλάδους της φυσικής και της μηχανικής [13]. Ο λόγος αυτής της προτίμησης οφείλεται στο γεγονός ότι η FDM εφαρμόζεται πολύ εύκολα σε οποιοδήποτε PDE χωρίς να αλλάζει δραματικά την αρχική της μορφή.

Αρχικά θα θεωρήσουμε στο συνεχή χώρο σημεία τα οποία απέχουν μεταξύ τους απειροστά μικρή απόσταση Δx . Αν μελετάμε μία συνάρτηση f , τότε μπορούμε να προσεγγίσουμε τη παράγωγο (και γενικότερα οποιοδήποτε γραμμικό μετασχηματισμό) σε ένα σημείο x , χρησιμοποιώντας απλώς τις τιμές της f από γειτονικά σημεία.

$$\frac{d^n f}{dx^n} \approx \sum_i a_i f_i.$$

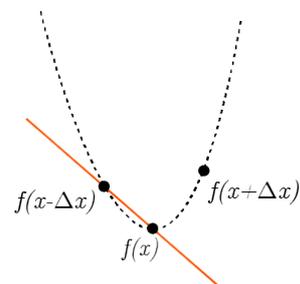


Όπως παρουσιάζεται στο Σχήμα 2.1 η παράγωγος μπορεί να οριστεί με τη σχέση των *forward difference* [14] που χρησιμοποιεί τη τιμή του $f(x + \Delta x)$:

Σχήμα 2.1: *Forward difference*

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (2.1)$$

Με ίδια λογική ορίζεται η *backward difference* σχέση της παραγώγου, χρησιμοποιώντας την $f(x - \Delta x)$ και παίρνουμε:



$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x}. \quad (2.2)$$

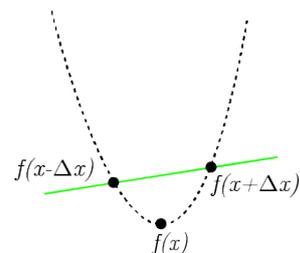
Τελικά η τρίτη σχέση των πεπερασμένων διαφορών δίνεται αν λάβουμε υπόψιν τα $f(x + \Delta x)$ και $f(x - \Delta x)$ στο διάστημα $2\Delta x$:

Σχήμα 2.2: *Backward difference*

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x}, \quad (2.3)$$

και ονομάζεται *central difference*. Για να χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις (2.1 - 2.3) χωρίς τα όρια θα πρέπει να αξιοποιήσουμε το ανάπτυγμα Taylor των $f(x \pm \Delta x)$ [12].

Αν υποθέσουμε πως η f είναι μία ομαλή συνάρτηση, τότε το ανάπτυγμα Taylor των $f(x \pm \Delta x)$ είναι το παρακάτω:



Σχήμα 2.3: *Central difference*

$$f(x \pm \Delta x) = f(x) \pm \Delta x \left. \frac{df}{dx} \right|_x + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_x \pm \frac{(\Delta x)^3}{3!} \left. \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_x \cdots \\ \cdots \frac{(\pm \Delta x)^N}{N!} \left. \frac{d^N f}{dx^N} \right|_x + \mathcal{O}(\Delta x^{N+1}).$$

Εφόσον $\Delta x \ll 1$ τότε θα ισχύει ότι $\Delta x \gg (\Delta x)^2$. Άρα ο πρώτος όρος που αγνοούμε από τη σειρά Taylor θα είναι και αυτός που θα προσδιορίζει το σφάλμα. Αυτό συμβολίζεται από το $\mathcal{O}(\Delta x^{N+1})$ στη σειρά.

Από τις σειρές Taylor του $f(x + \Delta x)$ και $f(x - \Delta x)$ μπορούμε να λύσουμε ως προς $\frac{df}{dx}$ και τότε έχουμε για τις *forward* και *backward* διαφορές έχουμε ότι,

$$f' = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x), \quad (2.4)$$

$$f' = \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x). \quad (2.5)$$

Όλοι οι όροι του αναπτύγματος της $f(x + \Delta x)$ έχουν θετικό πρόσημο, ενώ στο ανάπτυγμα της $f(x - \Delta x)$ μόνο οι περιττοί όροι εμφανίζουν αρνητικό πρόσημο. Αφαιρώντας τις δύο σχέσεις παίρνουμε ότι

$$f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x) = 2\Delta x \left. \frac{df}{dx} \right|_x + 2 \frac{(\Delta x)^3}{3!} \left. \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_x + \cdots,$$

και λύνοντας ως προς $\frac{df}{dx}$ έχουμε

$$f' = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2). \quad (2.6)$$

Προσθέτοντας τις $f(x - \Delta x)$ και $f(x + \Delta x)$ μεταξύ τους προκύπτει

$$f(x + \Delta x) + f(x - \Delta x) = 2f(x) + 2 \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_x + 2 \frac{(\Delta x)^4}{4!} \left. \frac{d^4 f}{dx^4} \right|_x + \cdots,$$

ενώ λύνοντας ως προς $\frac{d^2 f}{dx^2}$ παίρνουμε

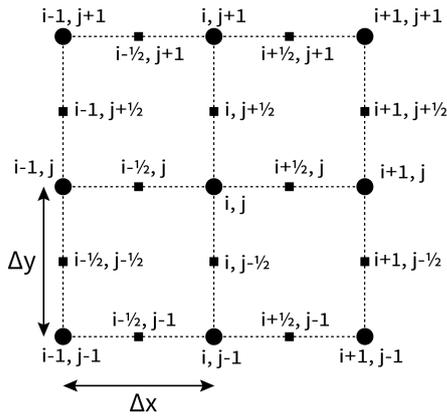
$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2). \quad (2.7)$$

2.2 Διακριτοποίηση του χώρου

Οι σχέσεις (2.1-2.3) δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν από τους υπολογιστές καθώς πρέπει να προηγηθεί πρώτα μια **διακριτοποίηση** (*discretization*) του χώρου. Ο χώρος χωρίζεται σε απειροστά μικρά γεωμετρικά σχήματα (ή βάσεις) με διαστάσεις Δx , Δy , Δz . Μέσα σε κάθε βάση μπορούμε με εύκολο τρόπο να λύσουμε τις εξισώσεις Maxwell και τότε η τελική λύση του προβλήματος θα είναι (προσεγγιστικά) απλώς το άθροισμα όλων των λύσεων που έχουμε βρεί σε κάθε βάση [14]. Για μία συνάρτηση f που αναζητούμε μπορούμε να πούμε ότι

$$f(\mathbf{r}) = \sum_n a_n f_n(\mathbf{r})$$

όπου $f_n(\mathbf{r})$ η λύση της f μέσα στη n -οστή βάση \mathbf{D}_n και φυσικά $f_n(\mathbf{r}) = 0, \forall \mathbf{r} \notin \mathbf{D}_n$. Η μέθοδος FD μας επιτρέπει την προσέγγιση των παραγώγων μιας συνάρτησης γύρω από ένα σημείο x_0 , αν είναι γνωστές οι τιμές της συνάρτησης στη γειτονιά γύρω από το x_0 όπως αποδείχθηκε προηγουμένως.



Σχήμα 2.4: 2-D πλέγμα για τη $f^{i,j}$

Στο Σχήμα 2.4 θεωρούμε ένα δισδιάστατο πλέγμα (grid) όπου έχουμε χρησιμοποιήσει ως βάσεις απειροστά μικρά ορθογώνια με διαστάσεις Δx και Δy . Για να είναι πιο ευανάγνωστες οι εξισώσεις FD, συνήθως χρησιμοποιούνται οι δείκτες (i, j, k) στις εξισώσεις (2.1) στη θέση των μεταβλητών (x_i, y_j, z_k) . Οι νέες συντεταγμένες δείχνουν τη βάση μέσα στο πλέγμα στο οποίο αναφερόμαστε. Οι εξισώσεις FD γράφονται για τις παραγώγους πρώτου βαθμού ως:

$$\frac{\partial f^{i,j}}{\partial x} = \begin{cases} \frac{f^{i+1,j} - f^{i-1,j}}{2\Delta x} & (\text{central difference}) \\ \frac{f^{i+1,j} - f^{i,j}}{\Delta x} & (\text{forward difference}) \\ \frac{f^{i,j} - f^{i-1,j}}{\Delta x} & (\text{backward difference}) \end{cases}, \quad (2.8)$$

ενώ για του δευτέρου βαθμού:

$$\frac{\partial^2 f^{i,j}}{\partial x^2} = \frac{f^{i+1,j} - 2f^{i,j} + f^{i-1,j}}{\Delta x^2}. \quad (2.9)$$

Παρατηρώντας το δισδιάστατο πλέγμα του σχήματος 2.4 και σύμφωνα με τις σχέσεις (2.8) μπορούμε να δούμε ότι η παράγωγος κάθε σημείου μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας τις σχέσεις:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i \approx \frac{f^{i+1,j} - f^{i,j}}{\Delta x} \quad (\text{forward difference του } f^{i,j}) \quad (2.10)$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{i+0.5} \approx \frac{f^{i+1,j} - f^{i,j}}{\Delta x} \quad (\text{central difference του } f^{i+0.5,j}) \quad (2.11)$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{i+1} \approx \frac{f^{i+1,j} - f^{i,j}}{\Delta x} \quad (\text{backward difference του } f^{i+1,j}) \quad (2.12)$$

Ανάλογα με τη δική μας θεώρηση, η ίδια σχέση μας επιτρέπει να υπολογίσουμε τις παραγωγούς διαδοχικών στοιχείων του πλέγματος. Είναι συνεπώς απαραίτητο να επιλέξουμε μόνο μία μορφή πεπερασμένων διαφορών που θα χρησιμοποιούμε. Λόγω του μικρότερου σφάλματος $\mathcal{O}(\Delta x^2)$ που εμφανίζει η *central difference*, επιλέγουμε να χρησιμοποιήσουμε αυτήν. Η σχέση αυτή όμως υπολογίζει το πεδίο στο $(i + 0.5)$ το οποίο δεν αντιστοιχεί σε "πραγματικό" και ακέραιο σημείο του πλέγματος. Θεωρητικά θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε την εξ' ορισμού σχέση (2.6) αλλά αυτή χρησιμοποιεί στοιχεία που απέχουν $2\Delta x$ μεταξύ τους με αποτέλεσμα οι πεπερασμένες διαφορές να προεκτείνονται στο πλέγμα μακρύτερα απ'ότι χρειάζεται και να μειώνεται η αποδοτικότητα του αλγορίθμου αφού χρησιμοποιεί μακρύτερα στοιχεία.

Επιπλέον, παρατηρούμε πως στις εξ. Maxwell έχουμε συζευγμένες (*coupled*) διαφορικές εξισώσεις. Αν εφαρμόσουμε τη σχέση πεπερασμένων διαφορών (2.11) σε μία από τις (1.22) για το \mathbf{E} και το \mathbf{H} πεδίο στο δισδιάστατο πλέγμα (i, j) , τότε παρατηρούμε ότι

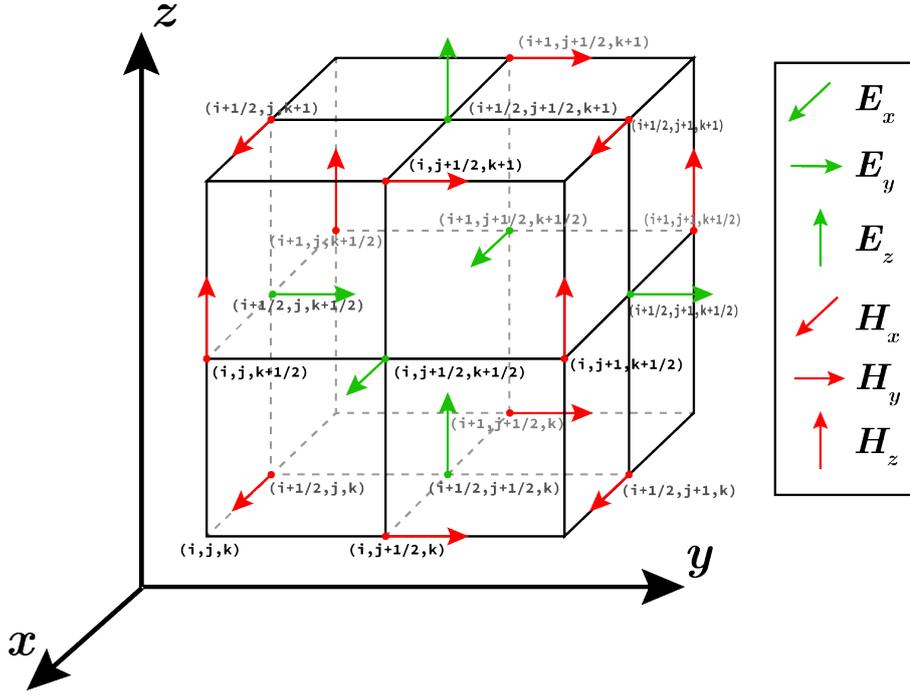
$$\overbrace{\frac{E_z^{i,j+1} - E_z^{i,j}}{\Delta y'}}^{\text{Ορίζεται στο } (i,j+0.5)} = \overbrace{\mu_{xx}^{i,j} \widetilde{H}_x^{i,j}}^{\text{Ορίζεται στο } (i,j)} \quad (2.13)$$

$$\underbrace{\frac{\widetilde{H}_y^{i+1,j} - \widetilde{H}_y^{i,j}}{\Delta x'}}_{\text{Ορίζεται στο } (i+0.5,j)} - \underbrace{\frac{\widetilde{H}_x^{i,j+1} - \widetilde{H}_x^{i,j}}{\Delta y'}}_{\text{Ορίζεται στο } (i,j+0.5)} = \underbrace{\epsilon_{zz}^{i,j} E_z^{i,j}}_{\text{Ορίζεται στο } (i,j)} \quad (2.14)$$

Το αριστερό και το δεξί μέλος των διαφορικών εξισώσεων δεν αναφέρεται στο ίδιο σημείο με αποτέλεσμα να μειώνεται η ακρίβεια των υπολογισμών. Για να το αντιμετωπίσουμε αυτά τα προβλήματα θα χρησιμοποιήσουμε ένα *staggered grid*, δηλαδή θα τοποθετήσουμε τα \mathbf{E} και \mathbf{H} πεδία σε ξεχωριστές θέσεις, όπως θα δούμε στην συνέχεια με το Yee-πλέγμα [15].

2.3 FDFD εξισώσεις στο Υεε-πλέγμα

Χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις (1.22) του Κεφαλαίου 1 και εφαρμόζουμε τη σχέση των *central difference* (2.11) σε κάθε παράγωγο. Θα παραλείψουμε την έκφραση του UPML σε αυτό το σημείο και θα το συμπληρώσουμε στο τέλος της ανάλυσης. Η σχέση (2.11) εφαρμόζεται σε κάθε μία από τις εξισώσεις (1.22) και θεωρούμε ότι ο χώρος είναι διακριτοποιημένος σε ένα *staggered* πλέγμα (Εικόνα 2.5) που ονομάζεται Υεε-πλέγμα [15]. Οι εξισώσεις FDFD πάνω στο Υεε-πλέγμα έχουν τη μορφή:



Σχήμα 2.5: Η γεωμετρία μίας Υεε-βάσης (cell) στις τρεις διαστάσεις. Με πράσινο (κόκκινο) βέλος παρουσιάζονται οι θέσεις των ηλεκτρικών (μαγνητικών) πεδίων πάνω στο Υεε-cell.

$$\frac{E_z^{(i-\frac{1}{2}, j+\frac{3}{2}, k+1)} - E_z^{(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k+1)}}{\Delta y'} - \frac{E_y^{(i-\frac{1}{2}, j+1, k+\frac{3}{2})} - E_y^{(i-\frac{1}{2}, j+1, k+\frac{1}{2})}}{\Delta z'} = \mu_{xx}^{(i-\frac{1}{2}, j+1, k+1)} \widetilde{H}_x^{(i-\frac{1}{2}, j+1, k+1)} \quad (2.15.1)$$

$$\frac{E_x^{(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{3}{2})} - E_x^{(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2})}}{\Delta z'} - \frac{E_z^{(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k+1)} - E_z^{(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k+1)}}{\Delta x'} = \mu_{yy}^{(i, j+\frac{1}{2}, k+1)} \widetilde{H}_y^{(i, j+\frac{1}{2}, k+1)} \quad (2.15.2)$$

$$\frac{E_y^{(i+\frac{1}{2}, j+1, k+\frac{1}{2})} - E_y^{(i-\frac{1}{2}, j+1, k+\frac{1}{2})}}{\Delta x'} - \frac{E_x^{(i, j+\frac{3}{2}, k+\frac{1}{2})} - E_x^{(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2})}}{\Delta y'} = \mu_{zz}^{(i, j+1, k+\frac{1}{2})} \widetilde{H}_z^{(i, j+1, k+\frac{1}{2})} \quad (2.15.3)$$

$$\frac{\widetilde{H}_z^{(i,j+1,k+\frac{1}{2})} - \widetilde{H}_z^{(i,j,k+\frac{1}{2})}}{\Delta y'} - \frac{\widetilde{H}_y^{(i,j+\frac{1}{2},k+1)} - \widetilde{H}_y^{(i,j+\frac{1}{2},k)}}{\Delta z'} = \epsilon_{xx}^{(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})} E_x^{(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})} \quad (2.16.1)$$

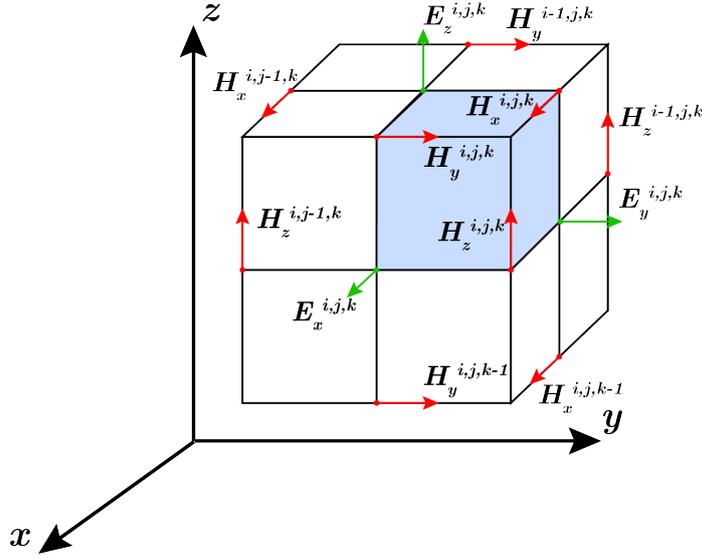
$$\frac{\widetilde{H}_x^{(i-\frac{1}{2},j+1,k+1)} - \widetilde{H}_x^{(i-\frac{1}{2},j+1,k)}}{\Delta z'} - \frac{\widetilde{H}_z^{(i,j+1,k+\frac{1}{2})} - \widetilde{H}_z^{(i-1,j+1,k+\frac{1}{2})}}{\Delta x'} = \epsilon_{yy}^{(i-\frac{1}{2},j+1,k+\frac{1}{2})} E_y^{(i-\frac{1}{2},j+1,k+\frac{1}{2})} \quad (2.16.2)$$

$$\frac{\widetilde{H}_y^{(i,j+\frac{1}{2},k+1)} - \widetilde{H}_y^{(i-1,j+\frac{1}{2},k+1)}}{\Delta x'} - \frac{\widetilde{H}_x^{(i-\frac{1}{2},j+1,k+1)} - \widetilde{H}_x^{(i-\frac{1}{2},j,k+1)}}{\Delta y'} = \epsilon_{zz}^{(i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+1)} E_z^{(i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+1)} \quad (2.16.3)$$

Κάθε μία από τις προηγούμενες σχέσεις γράφεται μία φορά για κάθε ένα Yee-cell στο χώρο, συνεπώς καταλήγουμε σε ένα μεγάλο σύστημα αλγευρικών εξισώσεων. Οι σχέσεις αυτές θα πρέπει να μεταφερθούν στο πρόγραμμα στο Matlab, για να μπορεί να βρεθεί η λύση. Κάθε μία πεδιακή συνιστώσα $E_x, E_y, E_z, \widetilde{H}_x, \widetilde{H}_y, \widetilde{H}_z$, θα περιγράφεται από έναν πίνακα $A(i, j)$ στον οποίο είναι αποθηκευμένες όλες οι λύσεις που έχουμε βρει από το σύστημα εξισώσεων. Ο πίνακας A έχει διαστάσεις $N_x \times N_z$, όπου N_x, N_z το πλήθος των Yee-cells στη x και z διεύθυνση αντίστοιχα, ενώ για τους δείκτες ισχύει ότι $i = 1, 2, \dots, N_x$ και $j = 1, 2, \dots, N_z$.

Προτού μελετήσουμε τις εξισώσεις FDFD (2.15, 2.16) πάνω στο Yee-πλέγμα, θα χρησιμοποιήσουμε ένα διαφορετικό συμβολισμό (i, j, k) για το πλέγμα. Ο λόγος είναι πως στο Matlab δεν μπορούμε να έχουμε ημιακέραιους δείκτες πινάκων. Συνεπώς, τα πεδία του πλέγματος που βρίσκονται σε ημιακέραιες θέσεις (π.χ. $E_x^{(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})}$) θα πρέπει να συμβολιστούν με κατάλληλο τρόπο ώστε αφενός να μην δημιουργείται πρόβλημα κατά τον ορισμό των πινάκων, αφετέρου να μην χάνουμε την τοποθεσία του κάθε πεδίου πάνω στο Yee-πλέγμα.

Οι αναλυτικές FDFD εξισώσεις (2.15, 2.16) περιγράφουν κάθε πεδίο ξεχωριστά στον χώρο. Για την ανάλυση μας, έναντι την περιγραφής του κάθε πεδίου ξεχωριστά, ορίζουμε ως (i, j, k) το Yee-cell στο οποίο οι εξισώσεις FDFD εφαρμόζονται. Όπως φαίνεται στην Εικόνα 2.6, όλα τα πεδία $E_x^{i,j,k}, E_y^{i,j,k}, E_z^{i,j,k}, \widetilde{H}_x^{i,j,k}, \widetilde{H}_y^{i,j,k}, \widetilde{H}_z^{i,j,k}$ ανήκουν στο (i, j, k) Yee-cell. Με αυτό το τρόπο αποκτούμε μία πιο "ευανάγνωστη" ισοδύναμη περιγραφή των FDFD εξισώσεων που μπορούμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε στο πρόγραμμά μας. Οι εξισώσεις με τον νέο αυτό συμβολισμό δίνονται παρακάτω:



Σχήμα 2.6: Το Υεε-πλέγμα με τις κατάλληλες πλεγματικές συντεταγμένες για κάθε πεδιακή συνιστώσα. Το μπλέ σχήμα αποτελεί το Υεε-cell που περιέχει όλες τις συνιστώσες των \mathbf{E} , \mathbf{H} στη συντεταγμένη (i,j,k) .

$$\frac{\partial E_z}{\partial y'} - \frac{\partial E_y}{\partial z'} = \mu_{xx} \widetilde{H}_x \Rightarrow \frac{E_z^{i,j+1,k} - E_z^{i,j,k}}{\Delta y'} - \frac{E_y^{i,j,k+1} - E_y^{i,j,k}}{\Delta z'} = \mu_{xx}^{i,j,k} \widetilde{H}_x^{i,j,k} \quad (2.17.1)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z'} - \frac{\partial E_z}{\partial x'} = \mu_{yy} \widetilde{H}_y \Rightarrow \frac{E_x^{i,j,k+1} - E_x^{i,j,k}}{\Delta z'} - \frac{E_z^{i+1,j,k} - E_z^{i,j,k}}{\Delta x'} = \mu_{yy}^{i,j,k} \widetilde{H}_y^{i,j,k} \quad (2.17.2)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x'} - \frac{\partial E_x}{\partial y'} = \mu_{zz} \widetilde{H}_z \Rightarrow \frac{E_y^{i+1,j,k} - E_y^{i,j,k}}{\Delta x'} - \frac{E_x^{i,j+1,k} - E_x^{i,j,k}}{\Delta y'} = \mu_{zz}^{i,j,k} \widetilde{H}_z^{i,j,k} \quad (2.17.3)$$

$$\frac{\partial \widetilde{H}_z}{\partial y'} - \frac{\partial \widetilde{H}_y}{\partial z'} = \epsilon_{xx} E_x \Rightarrow \frac{\widetilde{H}_z^{i,j,k} - \widetilde{H}_z^{i,j-1,k}}{\Delta y'} - \frac{\widetilde{H}_y^{i,j,k} - \widetilde{H}_y^{i,j,k-1}}{\Delta z'} = \epsilon_{xx}^{i,j,k} E_x^{i,j,k} \quad (2.18.1)$$

$$\frac{\partial \widetilde{H}_x}{\partial z'} - \frac{\partial \widetilde{H}_z}{\partial x'} = \epsilon_{yy} E_y \Rightarrow \frac{\widetilde{H}_x^{i,j,k} - \widetilde{H}_x^{i,j,k-1}}{\Delta z'} - \frac{\widetilde{H}_z^{i,j,k} - \widetilde{H}_z^{i-1,j,k}}{\Delta x'} = \epsilon_{yy}^{i,j,k} E_y^{i,j,k} \quad (2.18.2)$$

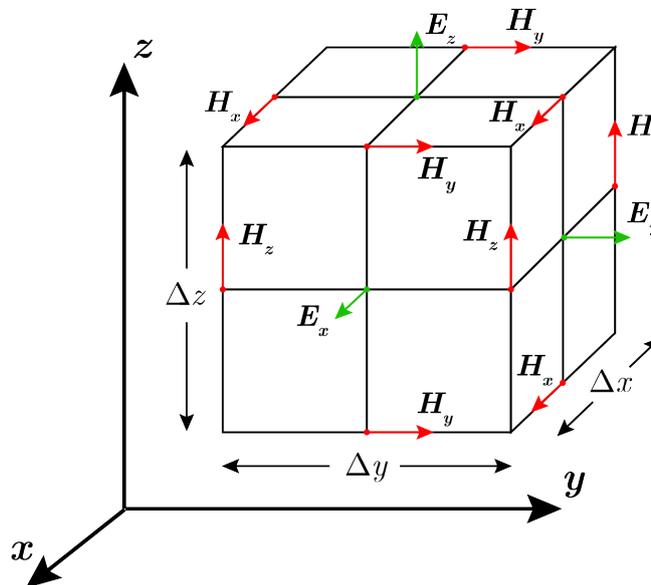
$$\frac{\partial \widetilde{H}_y}{\partial x'} - \frac{\partial \widetilde{H}_x}{\partial y'} = \epsilon_{zz} E_z \Rightarrow \frac{\widetilde{H}_y^{i,j,k} - \widetilde{H}_y^{i-1,j,k}}{\Delta x'} - \frac{\widetilde{H}_x^{i,j,k} - \widetilde{H}_x^{i,j-1,k}}{\Delta y'} = \epsilon_{zz}^{i,j,k} E_z^{i,j,k} \quad (2.18.3)$$

Η μορφή των εξισώσεων (2.17,2.18) τώρα είναι συμβατή με το Matlab, διότι δεν υπάρχουν ημιακέραιες τιμές στους δείκτες (i, j, k) . Με αυτόν τον ορισμό χάνουμε την πραγματική απεικόνιση του πεδίου μέσα στο πλέγμα, διότι με (i, j, k) αναφερόμαστε στο

Yee-cell και όχι σε σημεία του διακριτού χώρου. Συνεπώς, θα πρέπει αφότου βρεθεί η λύση των εξ. να τοποθετηθούν τα πεδία στη πραγματική τους θέση.

2.4 Ιδιότητες του Yee-πλέγματος

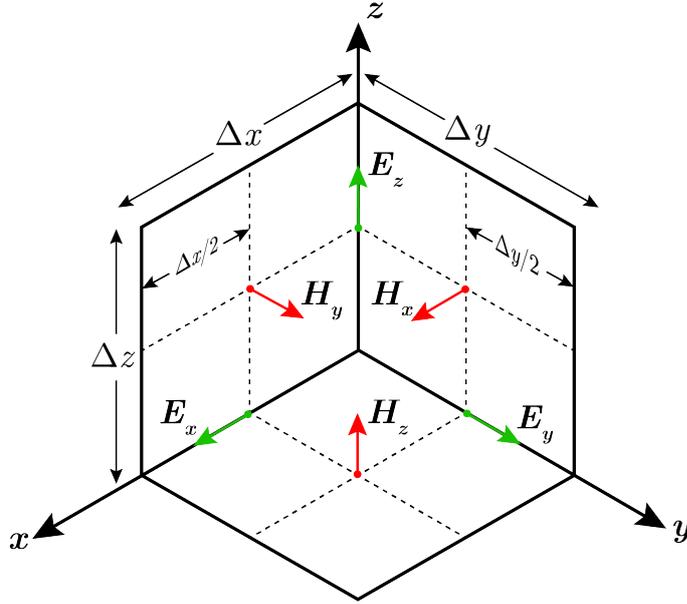
Προηγουμένως, παρουσιάσαμε πως τοποθετούνται οι πεδιακές συνιστώσες πάνω στο Yee-πλέγμα. Παρατηρούμε πως κάθε πεδιακή συνιστώσα είναι πάντα "περικυκλωμένη" από συνιστώσες του άλλου πεδίου. Αυτό μας επιτρέπει να απεικονίζουμε το H/M πεδίο στο διακριτό χώρο με τέτοιο τρόπο ώστε να διατηρείται η μορφή των διαφορικών εξισώσεων του συνεχή πραγματικού χώρου. Επίσης, επειδή χρησιμοποιεί και τα δύο πεδία ταυτόχρονα για τη εύρεση της λύσης, ο αλγόριθμος αυτός παρέχει μεγαλύτερη αξιοπιστία και ακρίβεια έναντι της αναζήτησης του κάθε πεδίου ξεχωριστά [16].



Σχήμα 2.7: Οι συνιστώσες του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου στο Yee-πλέγμα. Η εικόνα είναι προσαρμοσμένη από: A. Taflov and S. C. Hagness, "Introduction to Maxwell's Equations and the Yee Algorithm," in *Computational Electrodynamics The Finite-Difference Time-Domain Method*, 3rd ed., London, 2005, pp. 59.

Το Yee-πλέγμα όπως φαίνεται στην εικόνα 2.7, έχει πεπερασμένες διαστάσεις (Δx , Δy , Δz). Αυτό σημαίνει πως στη διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ δύο υλικών κάποιες από τις συνιστώσες των \mathbf{E} και \mathbf{H} πεδίων, που ανήκουν στο ίδιο Yee-πλέγμα, θα συνυπάρχουν σε ξεχωριστά υλικά. Η διαγώνια ανισοτροπία που θεωρήσαμε στις εξισώσεις (1.3) τώρα ουσιαστικά μας βοηθάει αναθέτοντας σε κάθε πεδιακή συνιστώσα τη δική του ξεχωριστή διηλεκτρική επιτρεπτότητα και μαγνητική διαπερατότητα που εκείνη "βλέπει".

Πάνω στο Yee-πλέγμα μπορούμε να διατυπώσουμε τους ολοκληρωτικούς νόμους του Maxwell. Στη Εικόνα 2.9 παρουσιάζονται οι βρόχοι Ampere που χρησιμοποιούμε για να υπολογίσουμε το μαγνητικό πεδίο [17]. Αν θεωρήσουμε ομοιογένεια για τα ϵ , μ μέσα στο Yee-cell, τότε ξεκινώντας από τη σχέση Faraday (1.3.1) και ολοκληρώνοντας πάνω



Σχήμα 2.8: Η τοποθεσία των \mathbf{E}, \mathbf{H} πεδίων στο εσωτερικό του Yee-cell. Εικόνα προσαρμοσμένη από: Rumpf R.C., CEM Lectures, [Maxwell's Equations On A Yee Grid](#)

στην επιφάνεια Σ του κύβου έχουμε

$$\mu_r \int_{\Sigma} \widetilde{\mathbf{H}} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\Sigma} \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial\Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l},$$

όπου χρησιμοποίησαμε τον νόμο του Stokes για να μετατρέψουμε το επιφανειακό ολοκλήρωμα σε επικαμπύλιο. Τώρα σύμφωνα με το Yee-πλέγμα του σχήματος στο σημείο $(i, j, k = 0)$, για να υπολογίσουμε το $\widetilde{H}_z^{i,j}$ θα πάρουμε τις συνοριακές τιμές των E_x, E_y στο Yee-cell.

$$k_0 \mu_{zz}^{i,j} \widetilde{H}_z^{i,j} \Delta_x \Delta_y = E_x^{i,j} \Delta_x + E_y^{i+1,j} \Delta_y - E_x^{i,j+1} \Delta_x - E_y^{i,j} \Delta_y \Rightarrow$$

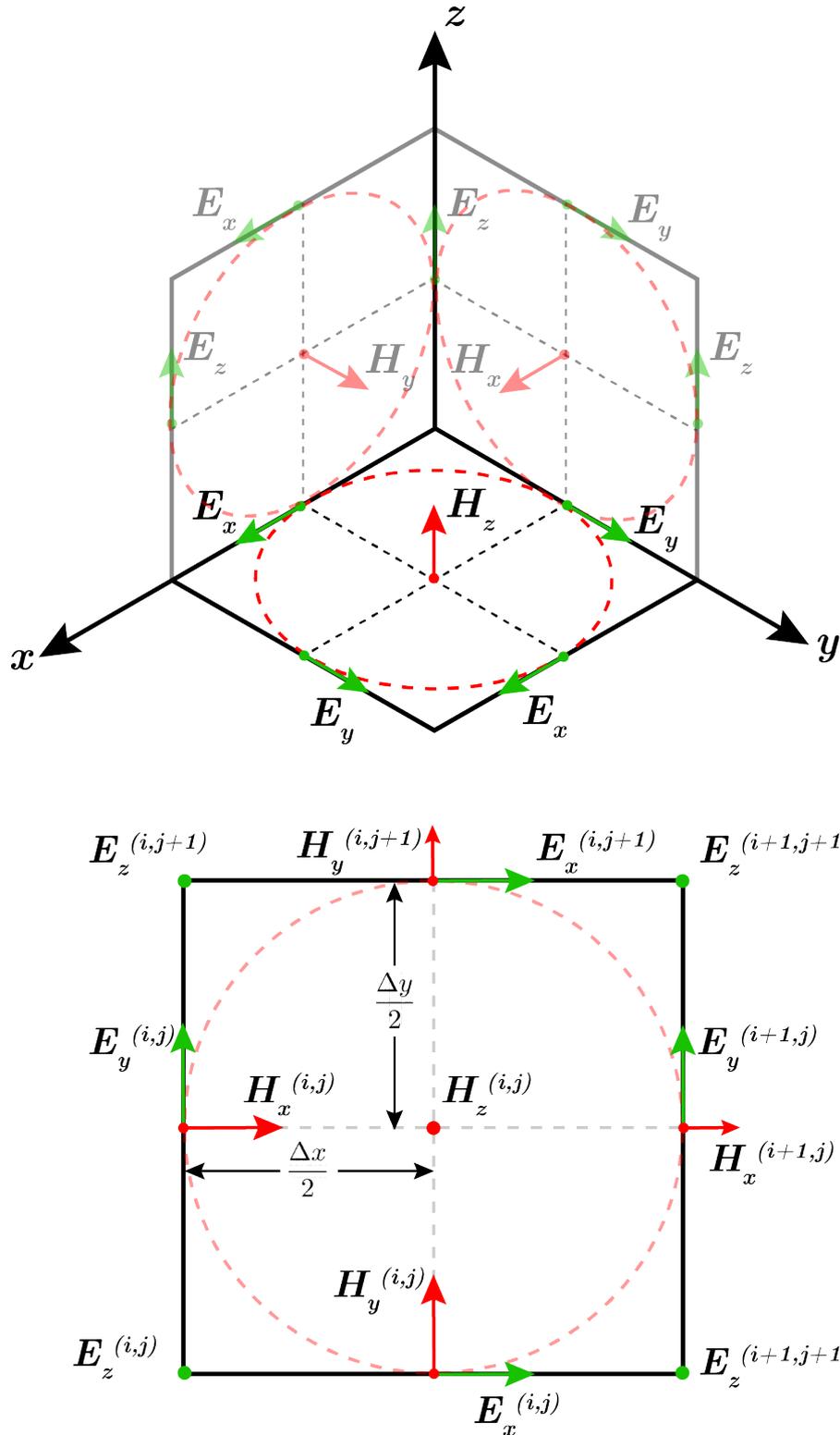
$$k_0 \mu_{zz}^{i,j} \widetilde{H}_z^{i,j} = \frac{E_y^{i+1,j} - E_y^{i,j}}{\Delta_x} - \frac{E_x^{i,j+1} - E_x^{i,j}}{\Delta_y}.$$

Αντίστοιχα και για το ηλεκτρικό πεδίο, μέσω του νόμου Ampere (1.3.2) επιλέγουμε να υπολογίσουμε την E_x συνιστώσα, όπως ακριβώς φαίνεται στην Εικόνα 2.10,

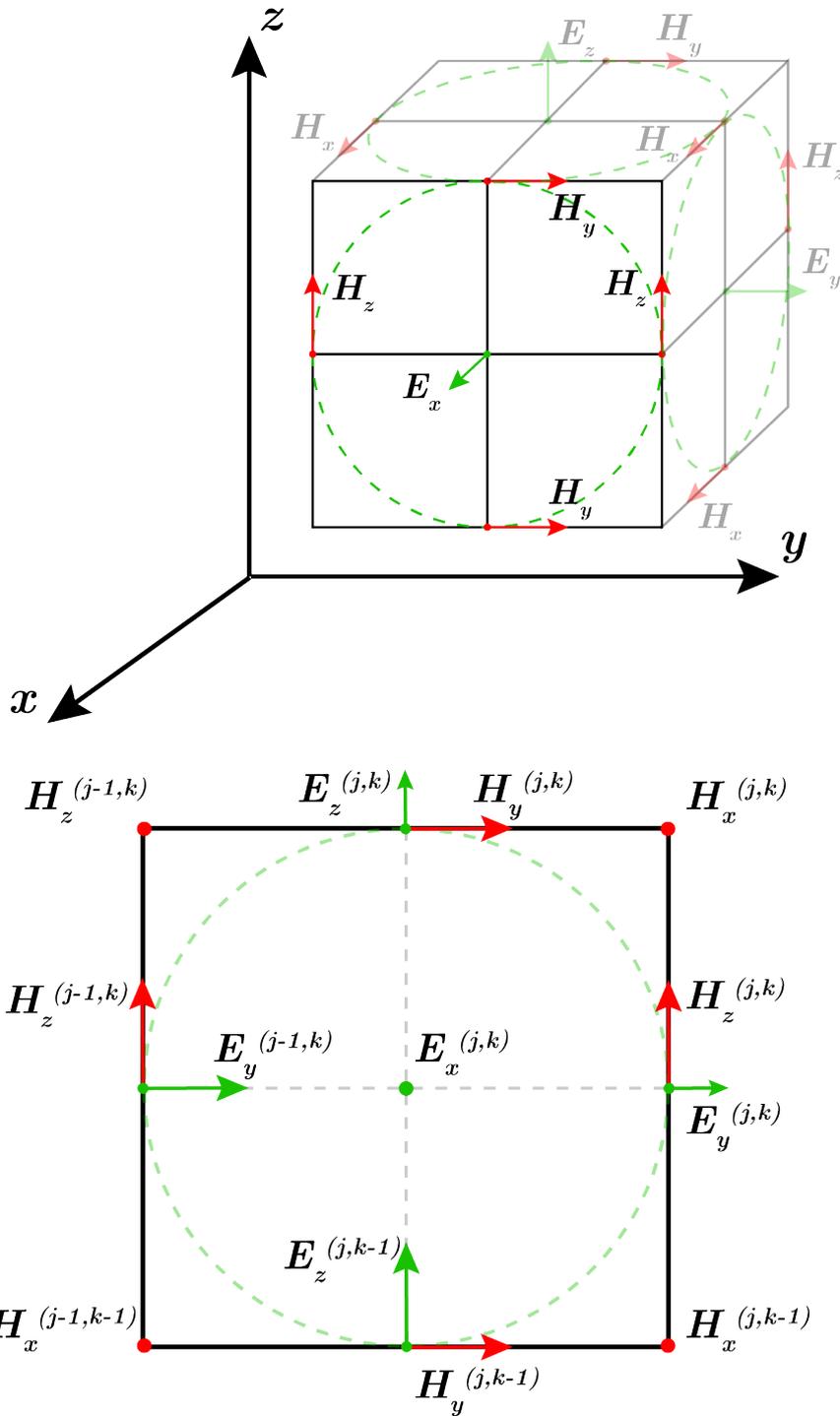
$$\epsilon_r \int_{\Sigma} \widetilde{\mathbf{E}} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\Sigma} \nabla \times \widetilde{\mathbf{H}} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial\Sigma} \widetilde{\mathbf{H}} \cdot d\mathbf{l},$$

και αναλύοντας τα ολοκληρώματα έχουμε ότι:

$$k_0 \epsilon_{xx}^{i,j,k} E_x^{i,j,k} = \frac{\widetilde{H}_z^{i,j,k} - \widetilde{H}_z^{i,j-1,k}}{\Delta_y} - \frac{\widetilde{H}_y^{i,j,k} - \widetilde{H}_y^{i,j,k-1}}{\Delta_z}.$$



Σχήμα 2.9: Οι βρόχοι Ampere που δημιουργούνται στην τρισδιάστατη περιγραφή. Επιλέγουμε να υπολογίσουμε με τον νόμο του Ampere την συνιστώσα $H_z^{i,j,k=0}$ χρησιμοποιώντας τα E_y , E_x στα σύνορα του Yee-cell.



Σχήμα 2.10: Οι βρόχοι Ampere που δημιουργούνται στην τρισδιάστατη περιγραφή. Εμείς επιλέγουμε να υπολογίσουμε με τον νόμο του Ampere την συνιστώσα $E_x^{i=0,j,k}$ από τα H_y, H_z στα σύνορα του Yee-cell.

Μέχρι τώρα έχουμε χρησιμοποιήσει τις περιστροφικές εξισώσεις για να δημιουργήσουμε το μαθηματικό μοντέλο μας, οπότε είναι σημαντικό να επιβεβαιώσουμε πως στο Yee-cell ικανοποιούνται και οι εξισώσεις απόκλισης των πεδίων. Παίρνουμε τον ολοκληρωτικό νόμο του Gauss σε όλο το Yee-cell:

$$\int_{\text{Yee cell}} \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \epsilon_0 \underbrace{\left(E_x^{i,j,k} - E_x^{i-1,j,k} \right) \Delta_y \Delta_z}_{\text{1ος όρος}} \quad (2.19)$$

$$+ \epsilon_0 \underbrace{\left(E_y^{i,j,k} - E_y^{i,j-1,k} \right) \Delta_z \Delta_x}_{\text{2ος όρος}} \quad (2.20)$$

$$+ \epsilon_0 \underbrace{\left(E_z^{i,j,k} - E_z^{i,j-1,k} \right) \Delta_x \Delta_y}_{\text{3ος όρος}} \quad (2.21)$$

Χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις πεπερασμένων διαφορών (2.18) για κάθε ηλεκτρική συνιστώσα που εμφανίζεται στην εξίσωση (2.19) και τότε θα έχουμε για τους τρεις όρους ότι

$$\begin{aligned} \text{1ος όρος} &= \frac{\Delta_y \Delta_z}{j\omega \epsilon_{xx}^{i,j,k}} \left[\frac{H_z^{i,j,k} - H_z^{i,j-1,k}}{\Delta_y} - \frac{H_y^{i,j,k} - H_y^{i,j,k-1}}{\Delta_z} \right] \\ &\quad - \frac{\Delta_y \Delta_z}{j\omega \epsilon_{xx}^{i-1,j,k}} \left[\frac{H_z^{i-1,j,k} - H_z^{i-1,j-1,k}}{\Delta_y} - \frac{H_y^{i-1,j,k} - H_y^{i-1,j,k-1}}{\Delta_z} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{2ος όρος} &= \frac{\Delta_z \Delta_x}{j\omega \epsilon_{yy}^{i,j,k}} \left[\frac{H_x^{i,j,k} - H_x^{i,j,k-1}}{\Delta_z} - \frac{H_z^{i,j,k} - H_z^{i-1,j,k}}{\Delta_x} \right] \\ &\quad - \frac{\Delta_y \Delta_z}{j\omega \epsilon_{yy}^{i,j-1,k}} \left[\frac{H_x^{i,j,k} - H_x^{i,j-1,k-1}}{\Delta_z} - \frac{H_z^{i,j-1,k} - H_z^{i-1,j-1,k}}{\Delta_x} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{3ος όρος} &= \frac{\Delta_x \Delta_y}{j\omega \epsilon_{zz}^{i,j,k}} \left[\frac{H_y^{i,j,k} - H_y^{i-1,j,k}}{\Delta_x} - \frac{H_x^{i,j,k} - H_x^{i,j-1,k}}{\Delta_y} \right] \\ &\quad - \frac{\Delta_y \Delta_z}{j\omega \epsilon_{zz}^{i,j,k-1}} \left[\frac{H_y^{i,j,k-1} - H_y^{i-1,j,k-1}}{\Delta_x} - \frac{H_x^{i,j,k-1} - H_x^{i,j-1,k-1}}{\Delta_y} \right]. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε, πως σε μη-ανισοτροπικά υλικά όπου ισχύει $\epsilon_{xx}^{i,j,k} = \epsilon_{yy}^{i,j,k} = \epsilon_{zz}^{i,j,k}$, για κάθε (i, j, k) , οι τρεις όροι αν προστεθούν μαζί δίνουν,

$$\begin{aligned} \int_{\text{Yee cell}} \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= \text{1ος όρος} + \text{2ος όρος} + \text{3ος όρος} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_{\text{Yee cell}} \nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E}) dV &= 0 \Rightarrow \nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E}) = 0. \quad (\text{divergence-free}) \quad (2.22) \end{aligned}$$

Με ακριβώς ίδιο τρόπο αποδεικνύεται πως και το μαγνητικό πεδίο είναι *divergent free*.

2.5 Εφαρμογή στο δισδιάστατο πρόβλημα

Θα μεταφερθούμε τώρα από τη γενική τρισδιάστατη περιγραφή που αναπτύξαμε στο απλούστερο δισδιάστατο πρόβλημα. Χρησιμοποιούμε το σύστημα συντεταγμένων στο οποίο ο χώρος εκτείνεται στο άπειρο ως προς τη y διεύθυνση, άρα δεν υπάρχει εξάρτηση ως προς το y . Η παράγωγος ∂_y μπορεί να αγνοηθεί οπότε οι εξισώσεις Maxwell αποσυνπλέκονται σε δύο ανεξάρτητα συστήματα εξισώσεων τα οποία ονομάζουμε **E-mode** (TE) και **H-mode** (TM). Οι εξισώσεις (2.17, 2.18) που αποδείξαμε προηγουμένως τώρα απλοποιούνται στις παρακάτω εξισώσεις:

$$-\frac{E_y^{i,k+1} - E_y^{i,k}}{\Delta z'} = \mu_{xx}^{i,k} \tilde{H}_x^{i,k} \quad (2.23.1)$$

$$\frac{E_x^{i,k+1} - E_x^{i,k}}{\Delta z'} - \frac{E_z^{i+1,k} - E_z^{i,k}}{\Delta x'} = \mu_{yy}^{i,k} \tilde{H}_y^{i,k} \quad (2.23.2)$$

$$\frac{E_y^{i+1,k} - E_y^{i,k}}{\Delta x'} = \mu_{zz}^{i,k} \tilde{H}_z^{i,k} \quad (2.23.3)$$

$$-\frac{\tilde{H}_y^{i,k} - \tilde{H}_y^{i,k-1}}{\Delta z'} = \epsilon_{xx}^{i,k} E_x^{i,k} \quad (2.24.1)$$

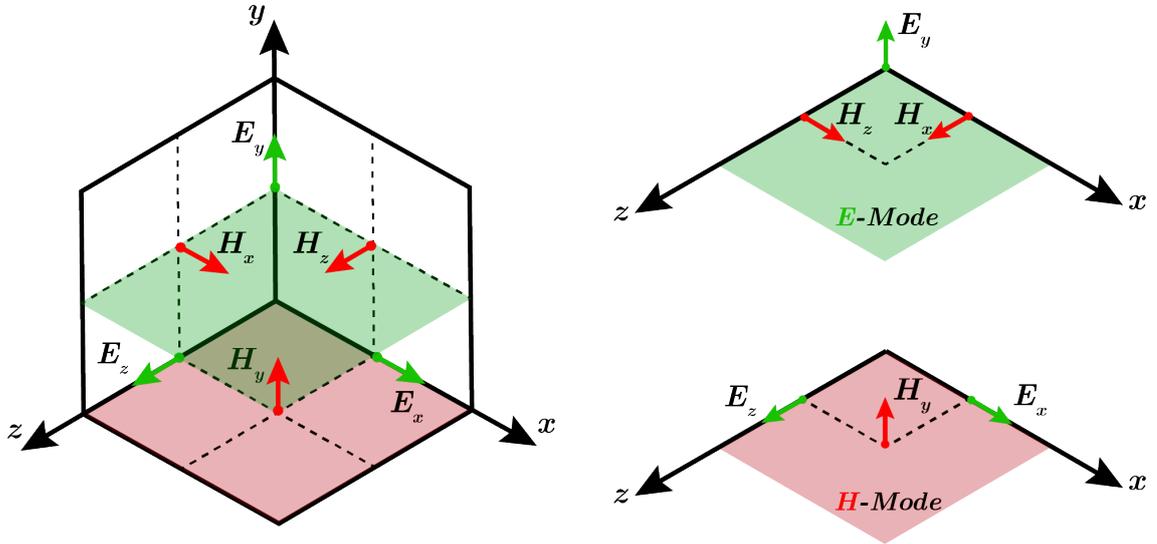
$$\frac{\tilde{H}_x^{i,k} - \tilde{H}_x^{i,k-1}}{\Delta z'} - \frac{\tilde{H}_z^{i,k} - \tilde{H}_z^{i-1,k}}{\Delta x'} = \epsilon_{yy}^{i,k} E_y^{i,k} \quad (2.24.2)$$

$$\frac{\tilde{H}_y^{i,k} - \tilde{H}_y^{i-1,k}}{\Delta x'} = \epsilon_{zz}^{i,k} E_z^{i,k} \quad (2.24.3)$$

E-mode	H-mode
$\frac{\tilde{H}_x^{i,k} - \tilde{H}_x^{i,k-1}}{\Delta z'} - \frac{\tilde{H}_z^{i,k} - \tilde{H}_z^{i-1,k}}{\Delta x'} = \epsilon_{yy}^{i,k} E_y^{i,k}$	$\frac{\tilde{H}_y^{i,k} - \tilde{H}_y^{i-1,k}}{\Delta x'} = \epsilon_{zz}^{i,k} E_z^{i,k}$
$\frac{E_y^{i+1,k} - E_y^{i,k}}{\Delta x'} = \mu_{zz}^{i,k} \tilde{H}_z^{i,k}$	$-\frac{\tilde{H}_y^{i,k} - \tilde{H}_y^{i,k-1}}{\Delta z'} = \epsilon_{xx}^{i,k} E_x^{i,k}$
$-\frac{E_y^{i,k+1} - E_y^{i,k}}{\Delta z'} = \mu_{xx}^{i,k} \tilde{H}_x^{i,k}$	$\frac{E_x^{i,k+1} - E_x^{i,k}}{\Delta z'} - \frac{E_z^{i+1,k} - E_z^{i,k}}{\Delta x'} = \mu_{yy}^{i,k} \tilde{H}_y^{i,k}$

Πίνακας 2.1: Οι εξισώσεις μπορούν να αποσυνπλεχτούν σε δύο συστήματα E-mode και H-mode.

Το δισδιάστατο Yee-cell που θα χρησιμοποιήσουμε είναι η επιφάνεια (x, z) πάνω στην οποία βρίσκονται τα πεδία των E και H mode.



Σχήμα 2.11: Αριστερά έχουμε το 3D Yee-cell στο οποίο μπορούμε να διακρίνουμε τις δύο επιφάνειες xz των E και H modes. Δεξιά απεικονίζονται τα 2D Yee-cells που θα χρησιμοποιήσουμε στην ανάλυση.

Οι προσεγγιστικές εξισώσεις (2.17, 2.18) μπορούν να χρησιμοποιηθούν στη μορφή που βρίσκονται και με τη βοήθεια του υπολογιστή να δημιουργηθούν οι πίνακες $[\mathbf{E}_x]$, $[\mathbf{E}_y]$, $[\mathbf{E}_z]$, $[\mathbf{H}_x]$, $[\mathbf{H}_y]$, $[\mathbf{H}_z]$. Όμως, στα περισσότερα προβλήματα οι πίνακες αυτοί έχουν υπερβολικά μεγάλες διαστάσεις και απαιτούν υπέρογκη μνήμη για την αποθήκευση όλων των στοιχείων τους. Η παρακάτω ανάλυση αποσκοπεί στη βελτίωση της μεθόδου FDFD με τη χρήση κατάλληλων τελεστών, που μειώνουν σημαντικά την υπολογιστική πολυπλοκότητα του προβλήματος [18].

Θα εκφράσουμε τον τελεστή της παραγώγου με τη μορφή ενός τετραγωνικού πίνακα. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί διότι κάθε γραμμικός μετασχηματισμός \mathcal{L} μιας συνάρτησης f μπορεί να υλοποιηθεί μέσω της δράσης ενός τετραγωνικού πίνακα [19]. Η παράγωγος είναι γραμμικός τελεστής αφού ισχύουν:

$$(I) \quad \frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x),$$

$$(II) \quad \frac{d}{dx}(cf(x)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} = cf'(x).$$

Μπορούμε να βρούμε τον πίνακα \mathbf{D}_x^f που δρα πάνω στην f και υπολογίζει τη τιμή της παραγώγου ως προς x και τον \mathbf{D}_y^f για το y . Τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία \mathbf{E} , \mathbf{H} τώρα στο αλγεβρικό σύστημα που αναπτύσσουμε θα πρέπει να είναι διανύσματα στήλης τα οποία τα συμβολίζουμε e και \tilde{h} αντίστοιχα. Ο τρόπος με τον οποίο αποθηκεύονται τα σημεία του πλέγματος στα διανύσματα στήλης παρουσιάζεται αναλυτικά στην επόμε-

νη ενότητα 2.6.

$$\frac{\partial}{\partial x}\{e\} = \mathbf{D}_x^e e \quad \text{και} \quad \frac{\partial}{\partial x}\{\tilde{h}\} = \mathbf{D}_x^h \tilde{h} \quad (2.25)$$

Οι εξισώσεις (2.23, 2.24) τώρα μπορούν να γραφτούν σε μητρική μορφή,

$$-\mathbf{D}_z^e e_y = \mu_{xx} \tilde{h}_x \quad -\mathbf{D}_z^h \tilde{h}_y = \epsilon_{xx} e_x \quad (2.26.1)$$

$$\mathbf{D}_z^e e_x - \mathbf{D}_x^e e_z = \mu_{yy} \tilde{h}_y \quad \mathbf{D}_z^h \tilde{h}_x - \mathbf{D}_x^h \tilde{h}_z = \epsilon_{yy} e_y \quad (2.26.2)$$

$$\mathbf{D}_x^e e_y = \mu_{zz} \tilde{h}_z \quad \mathbf{D}_x^h \tilde{h}_y = \epsilon_{zz} e_z \quad (2.26.3)$$

Αν ομαδοποιήσουμε όλες τις παραπάνω σχέσεις σε μορφή πινάκων καταλήγουμε στο εξής σύστημα:

$$\begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{D}_z^e & 0 \\ \mathbf{D}_z^e & 0 & -\mathbf{D}_x^e \\ 0 & \mathbf{D}_x^e & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{h}_x \\ \tilde{h}_y \\ \tilde{h}_z \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{C}^e \vec{e} = [\mu_r] \vec{h} \quad (2.27)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{D}_z^h & 0 \\ \mathbf{D}_z^h & 0 & -\mathbf{D}_x^h \\ 0 & \mathbf{D}_x^h & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{h}_x \\ \tilde{h}_y \\ \tilde{h}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{C}^h \vec{h} = [\epsilon_r] \vec{e} \quad (2.28)$$

Τις εξισώσεις (2.26) του δισδιάστατου προβλήματος μπορούμε να τις απλοποιήσουμε περαιτέρω αν λύσουμε ως προς τις συνιστώσες $e_x, e_y, \tilde{h}_x, \tilde{h}_z$ και δημιουργήσουμε ένα σύστημα δύο εξισώσεων για τα e_y, \tilde{h}_y .

$$\left. \begin{aligned} -\mathbf{D}_z^e e_y = \mu_{xx} \tilde{h}_x &\Rightarrow \tilde{h}_x = -\mu_{xx}^{-1} \mathbf{D}_z^e e_y \\ \mathbf{D}_x^e e_y = \mu_{zz} \tilde{h}_z &\Rightarrow \tilde{h}_z = \mu_{zz}^{-1} \mathbf{D}_x^e e_y \end{aligned} \right\} \Rightarrow \underbrace{(\mathbf{D}_z^h \mu_{xx}^{-1} \mathbf{D}_z^e + \mathbf{D}_x^h \mu_{zz}^{-1} \mathbf{D}_x^e + \epsilon_{yy})}_{\mathbf{A}_e} e_y = 0$$

$$\left. \begin{aligned} -\mathbf{D}_z^h \tilde{h}_y = \epsilon_{xx} e_x &\Rightarrow e_x = -\epsilon_{xx}^{-1} \mathbf{D}_z^h \tilde{h}_y \\ \mathbf{D}_x^h \tilde{h}_y = \epsilon_{zz} e_z &\Rightarrow e_z = \epsilon_{zz}^{-1} \mathbf{D}_x^h \tilde{h}_y \end{aligned} \right\} \Rightarrow \underbrace{(\mathbf{D}_z^e \epsilon_{xx}^{-1} \mathbf{D}_z^h + \mathbf{D}_x^e \epsilon_{zz}^{-1} \mathbf{D}_x^h + \mu_{yy})}_{\mathbf{A}_h} \tilde{h}_y = 0$$

Οπότε καταλήγουμε στις δύο εξισώσεις:

$$\mathbf{A}_e e_y = 0 \quad (E\text{-MODE}) \quad (2.29)$$

$$\mathbf{A}_h \tilde{h}_y = 0. \quad (H\text{-MODE}) \quad (2.30)$$

Οι δύο αυτές εξισώσεις αποτελούν το σύστημα εξ. του Maxwell σε μορφή FDFD που λύνει το δισδιάστατο H/M πρόβλημα και μέσω αυτών μπορεί το πρόγραμμα στον υπολογιστή να προσομοιώσει τη διάδοση H/M κυμάτων στον χώρο.

2.6 Οι τελεστές παραγώγων D σε μορφή πίνακα

Έστω ότι έχουμε ένα 3×3 πλέγμα για τα πεδία του E-Mode όπως φαίνεται στην εικόνα 2.12. Οι πίνακες \mathbf{D} κατασκευάζονται χρησιμοποιώντας τη *central difference* σχέση (2.11). Οι πίνακες \mathbf{D} έχουν στοιχεία μόνο στις διαγωνίους τους και μηδενικά στις υπόλοιπες θέσεις (αραιοί πίνακες). Με αυτό το τρόπο μπορούμε να έχουμε μεγάλου μεγέθους πίνακες που δεν κοστίζουν πολύ χώρο στη μνήμη, αφού όλη η πληροφορία είναι αποθηκευμένη μόνο στις διαγωνίους. Στο Matlab αυτό το επιτυγχάνουμε με την εντολή *sparse()*.

$$\mathbf{D}_z^e e = \frac{1}{\Delta z'} \begin{bmatrix} -1 & 1 & & & & & & & \\ & -1 & 1 & & & & & & \\ & & -1 & 0 & & & & & \\ & & & -1 & 1 & & & & \\ & & & & -1 & 1 & & & \\ & & & & & -1 & 0 & & \\ & & & & & & -1 & 1 & \\ & & & & & & & -1 & 1 \\ & & & & & & & & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ E_5 \\ E_6 \\ E_7 \\ E_8 \\ E_9 \end{bmatrix} \quad (2.31.1)$$

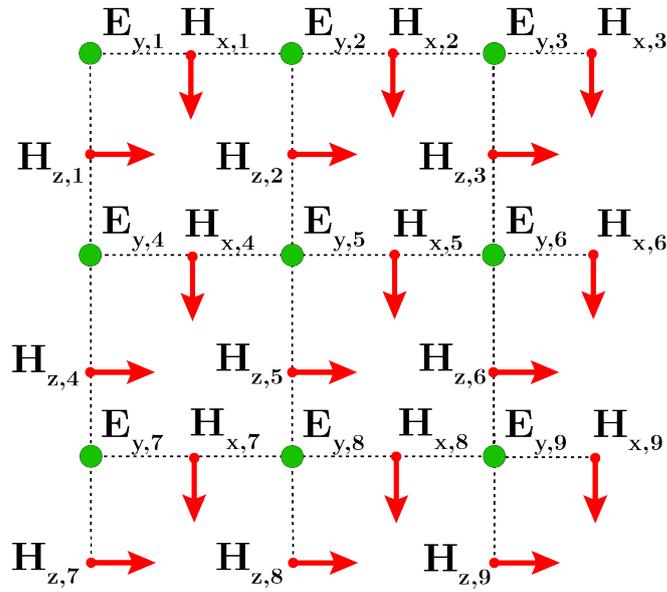
$$\mathbf{D}_x^e e = \frac{1}{\Delta x'} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & & & & & \\ & -1 & 0 & 0 & 1 & & & & \\ & & -1 & 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & -1 & 0 & 0 & 1 & & \\ & & & & -1 & 0 & 0 & 1 & \\ & & & & & -1 & 0 & 0 & 1 \\ & & & & & & -1 & 0 & 0 \\ & & & & & & & -1 & 0 \\ & & & & & & & & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ E_5 \\ E_6 \\ E_7 \\ E_8 \\ E_9 \end{bmatrix} \quad (2.31.2)$$

Ο πίνακας \mathbf{D}_z περιέχει περιοδικά μηδενικά στα σημεία της διαγωνίου όπου τελειώνει το πλέγμα (συνθήκη Dirichlet). Δηλαδή, αν το πλέγμα έχει συνολικά N_z στοιχεία τότε για κάθε N_z στοιχείο της διαγωνίου των μονάδων θα εμφανίζεται ένα μηδενικό. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα $N_z = 3$. Για τον πίνακα \mathbf{D}_x έχουμε μηδενικά ανάμεσα των δύο διαγωνίων -1 και 1 . Το πλήθος διαγωνίων με μηδενικά που χρειάζονται μεταξύ των δύο κύριων διαγωνίων είναι $N_x - 1$, δηλαδή εξαρτάται από το πλήθος στοιχείων κατά το x άξονα.

Οι παράγωγοι των μαγνητικών πεδίων θα είναι διαφορετικοί από των ηλεκτρικών πεδίων λόγω του staggered Yee πλέγματος, αλλά συνδέονται εύκολα με τις παραγώγους του ηλεκτρικού πεδίου μέσω των απλών σχέσεων,

$$\mathbf{D}_x^h = -[\mathbf{D}_x^e]^T, \quad \mathbf{D}_z^h = -[\mathbf{D}_z^e]^T, \quad (2.32)$$

όπου με $[\mathbf{D}]^T$ συμβολίζεται ο ανάστροφος πίνακας.



Σχήμα 2.12: Το Yee-πλέγμα διαστάσεων 3×3 μόνο για το **E-Mode**. Πάνω σε αυτό υπολογίζονται εύκολα οι πίνακες παραγώγων **D** για τον υπολογισμό των πεδίων. Θεωρούμε για ευκολία εκτός του πλέγματος συνθήκες **Dirichlet**.

Μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι οι πίνακες (2.33) μας δίνουν τις σωστές παραγώγους παρατηρώντας το σχήμα 2.12. Τελικά, αρκεί να κατασκευάσουμε μόνο του πίνακες $\mathbf{D}_{x,z}^e$ και μετά εύκολα φτιάχνουμε τους $\mathbf{D}_{x,z}^h$ αν πάρουμε τους αντίστοιχους ανάστροφους πίνακες στο Matlab.

$$\mathbf{D}_z^h h = \frac{1}{\Delta z'} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ -1 & 1 & & & & & & & & \\ & -1 & 1 & & & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & 1 & & & & & \\ & & & & -1 & 1 & & & & \\ & & & & & 0 & 1 & & & \\ & & & & & & -1 & 1 & & \\ & & & & & & & -1 & 1 & \\ & & & & & & & & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \\ H_5 \\ H_6 \\ H_7 \\ H_8 \\ H_9 \end{bmatrix} \quad (2.33.1)$$

$$\mathbf{D}_x^h h = \frac{1}{\Delta x'} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & & & & & \\ -1 & 0 & 0 & 1 & & & & & & \\ & -1 & 0 & 0 & 1 & & & & & \\ & & -1 & 0 & 0 & 1 & & & & \\ & & & -1 & 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & & -1 & 0 & 0 & 1 & & \\ & & & & & -1 & 0 & 0 & 1 & \\ & & & & & & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \\ H_5 \\ H_6 \\ H_7 \\ H_8 \\ H_9 \end{bmatrix} \quad (2.33.2)$$

2.7 Total-Field/Scattered-Field Formula

Σε αυτό το σημείο έχουμε καταφέρει να μετατρέψουμε το σύστημα των έξι εξισώσεων σε δύο αλγεβρικά συστήματα της μορφής $\mathbf{A}x = 0$ για τα e_y, \tilde{h}_y . Η λύση των εξισώσεων (2.29) είναι η τετριμμένη $x = 0$ επειδή δεν έχουν συμπεριληφθεί ακόμη οι πηγές f_{src} στο πρόβλημα. Με τη βοήθεια του *Total-Field/Scattered-Field Formula* θα μετατρέψουμε τις εξισώσεις αυτές στη μορφή $\mathbf{A}x = b$, όπου τότε η λύση των πεδίων μπορεί να υπολογιστεί εύκολα [10] για τα δύο modes ως

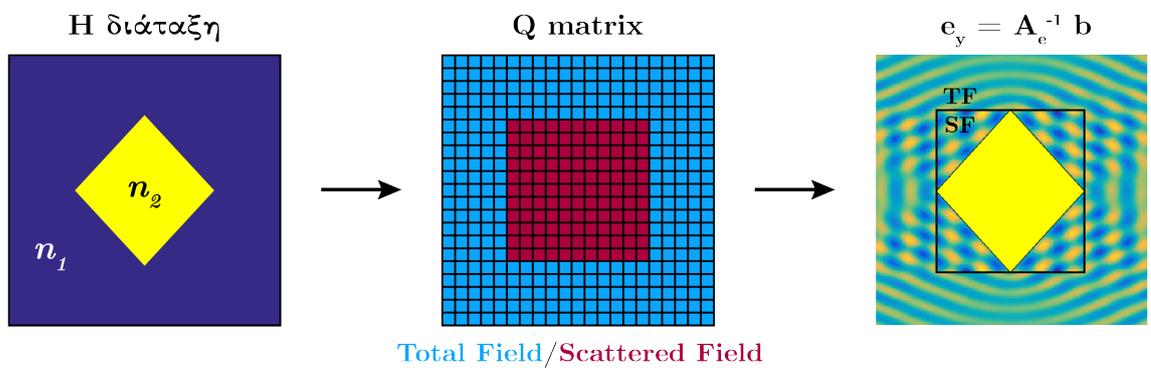
$$e_y = \mathbf{A}_e^{-1}b, \quad (2.34)$$

$$\tilde{h}_y = \mathbf{A}_h^{-1}b. \quad (2.35)$$

Ορίζουμε με f_{src} το διάνυσμα στήλης που έχει τη τιμή του πεδίου-πηγής σε κάθε σημείο του χώρου. Είναι σημαντικό για τη μέθοδο αυτή η πηγή να έχει τη μορφή κύματος που να ικανοποιεί τις εξισώσεις του Maxwell, δηλαδή επίπεδα, σφαιρικά, κυλινδρικά κύματα κ.ο.κ. Θα θεωρήσουμε επίπεδα κύματα ($e^{-jk \cdot r}$) για τη πηγή μας,

$$f_{src} = \exp[-j(k_z, inc z + k_x, inc x)] = \begin{bmatrix} f^{1,1} \\ \vdots \\ f^{N_x, N_z} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Στη συνέχεια διχοτομούμε τον χώρο του προβλήματος σε δύο περιοχές. Ως *Total Field* ορίζουμε τη περιοχή εκείνη όπου το συνολικό πεδίο αποτελείται από τη πηγή συν το σκεδαζόμενο πεδίο. Αντίθετα, θεωρούμε ως *Scattered Field* τη περιοχή εκείνη όπου θα έχουμε μόνο το σκεδαζόμενο πεδίο και όχι τη πηγή. Η *Scattered Field* περιοχή δεν αντιπροσωπεύει μία πραγματική περιοχή στον χώρο, αλλά είναι ένα "μαθηματικό" εργαλείο για να εισάγουμε τις πηγές στις εξισώσεις μας όπως θα δούμε στη συνέχεια. Για να διακρίνουμε τις δύο περιοχές *TF* και *SF* χρησιμοποιούμε τον διαγώνιο πίνακα \mathbf{Q} που παίρνει τιμή 1 στην *SF* περιοχή και 0 οπουδήποτε αλλού.



Σχήμα 2.13: Ο πίνακας \mathbf{Q} στην ανάκλαση H/M κύματος από μία διάταξη χρυσού σε σχήμα ρόμβου.

Η f_{src} είναι ορισμένη παντού στον χώρο. Η πηγή απομονωμένη στην SF περιοχή ονομάζεται f_{scat} και η πηγή απομονωμένη στην TF περιοχή f_{tot} . Αυτές μπορούμε να τις βρούμε από τις σχέσεις:

$$f_{scat} = \mathbf{Q}f_{src}, \quad f_{tot} = (\mathcal{I} - \mathbf{Q})f_{src}, \quad (2.37)$$

όπου \mathcal{I} ο μοναδιαίος πίνακας. Οι όροι τώρα που ανήκουν στην TF περιοχή αλλά εμφανίζονται¹ στις εξισώσεις του Maxwell στην SF περιοχή, είναι οι $\mathbf{Q}\mathbf{A}f_{tot}$. Ουσιαστικά το \mathbf{Q} μας απομονώνει ό,τι βρίσκεται στην SF περιοχή, ενώ το $\mathbf{A}f_{tot}$ είναι οι εξ. πεπερασμένων διαφορών του Maxwell που ικανοποιεί η πηγή μας η οποία έχουμε απαιτήσει να βρίσκεται στην **Total Field** περιοχή. Έτσι όροι που **δεν** ανήκουν στην TF περιοχή πρέπει να αφαιρεθούν από τις εξισώσεις (2.29) για να είναι συνεπής η θεώρησή μας.

Αντίστοιχα οι όροι $(\mathcal{I} - \mathbf{Q})\mathbf{A}f_{scat}$ είναι πηγές που εμφανίζονται στις εξ. Maxwell της SF περιοχής αλλά προέρχονται από την TF περιοχή (λόγω των πεπερασμένων διαφορών) και έτσι θα πρέπει να προστεθεί η συνεισφορά τους στις σχέσεις. Τελικά καταλήγουμε με δύο διορθωτικούς όρους. Για το E-Mode μπορούμε να πούμε ότι,

$$\mathbf{A}e - \mathbf{Q}\mathbf{A}f_{tot} + (\mathcal{I} - \mathbf{Q})\mathbf{A}f_{scat} = 0. \quad (2.38)$$

Σύμφωνα με τις σχέσεις (2.37) αντικαθιστούμε στην (2.38) και παίρνουμε ότι,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}e &= \mathbf{Q}\mathbf{A}(\mathcal{I} - \mathbf{Q})f_{src} - (\mathcal{I} - \mathbf{Q})\mathbf{A}\mathbf{Q}f_{src}, \\ \mathbf{A}e &= \underbrace{(\mathbf{Q}\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{Q})}_{b}f_{src}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Το b είναι ο μη-ομογενής όρος της εξίσωσης που ψάχναμε και αποτελεί τώρα το διάνυσμα των πηγών μας. Η μορφή του είναι διάνυσμα στήλης. Οι εξισώσεις που καταλήγουμε τελικά για τα E και H modes είναι οι:

$$\mathbf{A}_e e = \underbrace{(\mathbf{Q}\mathbf{A}_e - \mathbf{A}_e\mathbf{Q})}_{b}f_{src}, \quad (2.40)$$

$$\mathbf{A}_h h = \underbrace{(\mathbf{Q}\mathbf{A}_h - \mathbf{A}_h\mathbf{Q})}_{b}f_{src}. \quad (2.41)$$

Οι εξισώσεις αυτές αναφέρονται στη βιβλιογραφία ως διορθωμένες (corrected) FDFD εξισώσεις [20]. Οι σχέσεις αυτές μοιάζουν αρκετά με το θεώρημα ισοδυναμίας (equivalence theorem) και στην πραγματικότητα ο αλγόριθμος TF/SF αποτελεί μία άλλη μορφή του θεωρήματος αυτού στον διακριτοποιημένο χώρο.

Θεώρημα Ισοδυναμίας (Equivalence Theorem): Έστω V όγκος τυχαίου σχήματος και S η επιφάνεια που τον περικλύει. Οι πηγές που δημιουργούν το πεδίο στον χώρο βρίσκονται εκτός του όγκου V . Έστω τα πεδία \mathbf{E}_{inc} , \mathbf{H}_{inc} μέσα στον όγκο V . Τότε αν

¹Λόγω της φύσης των πεπερασμένων διαφορών, οι παράγωγοι χρησιμοποιούν γειτονικά σημεία για τον υπολογισμό της συνάρτησης σε εκείνο το σημείο.

αντικαταστήσουμε όλες τις πηγές με κατάλληλα ηλεκτρικά και μαγνητικά επιφανειακά ρεύματα $\mathbf{J}_S(S)$, $\mathbf{K}_S(S)$ πάνω στην επιφάνεια S , τότε καταλήγουμε σε ένα ισοδύναμο πρόβλημα μέσα στον όγκο V , όπου

$$\mathbf{J}_S(S) = -\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}_{inc}, \quad \mathbf{K}_S(S) = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_{inc}, \quad (2.42)$$

όταν το n είναι κάθετο για κάθε σημείο πάνω στην επιφάνεια S και έχει κατεύθυνση προς τα έξω. Μέσα στον όγκο V τα ρεύματα δημιουργούν τα \mathbf{E}_{inc} , \mathbf{H}_{inc} πεδία, ενώ εκτός το πεδίο είναι μηδέν.

Στη δική μας περίπτωση, έχουμε την πηγή f_{src} που διαδίδεται στον χώρο και ορίσαμε τον πίνακα Q για να φτιάξουμε τους κλειστούς χώρους Total Field και Scattered Field. Χωρίς τη διάταξη μας, το f_{src} τοποθετείται μόνο μέσα στον χώρο Total Field, ενώ εξωτερικά αυτού θα είναι μηδέν. Όταν εισάγουμε την διάταξη, τα ανακλώμενα κύματα από το εμπόδιο θα συναντάνε την διαχωριστική επιφάνεια S και θα τη διαπερνούν ανενόχλητα. Έτσι, στην Scattered Field περιοχή είναι απομονωμένα τα ανακλώμενα πεδία από το προσπίπτον πεδίο-πηγή.

Αναφορικά στην περίπτωση όπου η πηγή μας έχει τυχαία κατεύθυνση μπορούμε να την αναλύσουμε στις τρεις ορθογώνιες συνιστώσες της και να γενικεύσουμε τις εξισώσεις (2.40) με τους παρακάτω φορμαλισμούς, τους οποίους όμως δεν θα χρειαστούμε για την εργασία αυτή.

$$\tilde{f}_{src} = \begin{bmatrix} f_{x,src} \\ f_{y,src} \\ f_{z,src} \end{bmatrix}, \quad \tilde{Q} = \begin{bmatrix} Q_x & 0 & 0 \\ 0 & Q_y & 0 \\ 0 & 0 & Q_z \end{bmatrix}, \quad b = (\tilde{Q}A - A\tilde{Q}) \tilde{f}_{src}, \quad (2.43)$$

2.8 Αριθμητική διασπορά λόγω διακριτοποίησης

Η μέθοδος FDFD που εφαρμόζεται στις διαφορικές εξισώσεις του Maxwell δίνει λύσεις οι οποίες, λόγω της διακριτής μαθηματικής τους φύσης, δεν συμπεριφέρονται σαν πραγματικά κύματα. Συνεπώς, κυματικές ιδιότητες όπως η ταχύτητα c και η σχέση διασποράς $\omega(k)$, θα διαφέρουν μεταξύ των δύο ειδών κυμάτων. Βεβαίως, πρέπει τα αποτελέσματα που παίρνουμε από τη προσομοίωση μας να τείνουν πάντα στις πραγματικές τιμές όταν οι διαστάσεις Δx , Δy , Δz πάνε στο μηδέν. Παρακάτω, λύνοντας της εξίσωση Helmholtz με την FDFD μέθοδο για ένα επίπεδο κύμα f , υπολογίζουμε την διασπορά και την ταχύτητα του FD κύματος.

Θεωρούμε ένα επίπεδο κύμα f που διαδίδεται με κυματαριθμό $\mathbf{k} = k_x \hat{x} + k_y \hat{y} + k_z \hat{z}$ και αποτελεί λύση της εξίσωσης Helmholtz (6.3).

$$f(\mathbf{r}) = e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (2.44)$$

Μετατρέπουμε την (2.44) στη διακριτή μορφή FD $f^{i,j,k}$ απλώς αλλάζοντας τις καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y, z) σε $(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z)$. Έτσι έχουμε ότι

$$f^{i,j,k} = e^{-j(k_x i\Delta x + k_y j\Delta y + k_z k\Delta z)}. \quad (2.45)$$

Το σύμβολο k χρησιμοποιείται ταυτόχρονα για τον μετασχηματισμό $z \rightarrow k\Delta z$ αλλά και για τον κυματαριθμό του κύματος $f(\mathbf{r})$, οπότε με το σύμβολο ξ ονομάζουμε τον κυματαριθμό του FD κύματος $f^{i,j,k}$. Η εξίσωση Helmholtz στη μορφή των FDFD είναι:

$$\frac{f^{i+1,j,k} + f^{i-1,j,k} - 2f^{i,j,k}}{\Delta x^2} + \frac{f^{i,j+1,k} + f^{i,j-1,k} - 2f^{i,j,k}}{\Delta y^2} + \frac{f^{i,j,k+1} + f^{i,j,k-1} - 2f^{i,j,k}}{\Delta z^2} + \xi^2 f^{i,j,k} = 0.$$

Πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο με $(\Delta x \Delta y \Delta z)^2$ και αντικαθιστούμε τις f σύμφωνα με την σχέση (2.45) και παρατηρούμε ότι,

$$0 = [e^{-jk_x \Delta x} + e^{+jk_x \Delta x} - 2](\Delta y \Delta z)^2 f^{i,j,k} + [e^{-jk_y \Delta y} + e^{+jk_y \Delta y} - 2](\Delta x \Delta z)^2 f^{i,j,k} + [e^{-jk_z \Delta z} + e^{+jk_z \Delta z} - 2](\Delta x \Delta y)^2 f^{i,j,k} + (\xi \Delta x \Delta y \Delta z)^2 f^{i,j,k}. \quad (2.46)$$

Το $(\Delta x \Delta y \Delta z)^2 f^{i,j,k}$ μπορεί να βγεί κοινός παράγοντας από κάθε όρο και τότε για να ικανοποιείται η εξίσωση (2.46) στη μη τετριμμένη περίπτωση ($f^{i,j,k} \neq 0$) θα πρέπει να ισχύει

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{e^{-jk_x \Delta x} + e^{+jk_x \Delta x} - 2}{\Delta x^2} + \frac{e^{-jk_y \Delta y} + e^{+jk_y \Delta y} - 2}{\Delta y^2} + \frac{e^{-jk_z \Delta z} + e^{+jk_z \Delta z} - 2}{\Delta z^2} + \xi^2 \\ &= \frac{2 \cos k_x \Delta x - 2}{\Delta x^2} + \frac{2 \cos k_y \Delta y - 2}{\Delta y^2} + \frac{2 \cos k_z \Delta z - 2}{\Delta z^2} + \xi^2 \\ &= \frac{4}{\Delta x^2} \sin^2 \left(\frac{k_x \Delta x}{2} \right) + \frac{4}{\Delta y^2} \sin^2 \left(\frac{k_y \Delta y}{2} \right) + \frac{4}{\Delta z^2} \sin^2 \left(\frac{k_z \Delta z}{2} \right) - \xi^2 \end{aligned}$$

Τελικά λύνοντας ως προς τον κυματαριθμό ξ παίρνουμε την εξίσωση διασποράς του FDFD κύματος

$$\xi = \sqrt{\left[\frac{2}{\Delta x} \sin \left(\frac{k_x \Delta x}{2} \right) \right]^2 + \left[\frac{2}{\Delta y} \sin \left(\frac{k_y \Delta y}{2} \right) \right]^2 + \left[\frac{2}{\Delta z} \sin \left(\frac{k_z \Delta z}{2} \right) \right]^2}. \quad (2.47)$$

Παρατηρούμε πως εφόσον για τον κυματαριθμό k ισχύει ότι $k = \frac{\omega}{c_0} \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$, όπου c_0 η ταχύτητα του φωτός στο κενό, τότε θα έχουμε κατ'αναλογία για το ξ ότι $\xi = \frac{\omega}{\nu} \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$, όπου ν είναι η ταχύτητα διάδοσης του τεχνητού κύματος στο διακριτό χώρο.

$$\nu = \omega \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \left(\left[\frac{2}{\Delta x} \sin \left(\frac{k_x \Delta x}{2} \right) \right]^2 + \left[\frac{2}{\Delta y} \sin \left(\frac{k_y \Delta y}{2} \right) \right]^2 + \left[\frac{2}{\Delta z} \sin \left(\frac{k_z \Delta z}{2} \right) \right]^2 \right)^{-\frac{1}{2}}$$

Φυσικά και εδώ πρέπει να ισχύει ότι $\nu \rightarrow c_0$ όταν οι διαστάσεις τείνουν στο μηδέν. Για να μην υπάρχει αριθμητική διασπορά, η σχέση (2.47) πρέπει να τείνει στον κυματαριθμό k . Σύμφωνα με τον κανόνα *L'Hôpital* ισχύει

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{k_x}{2},$$

άρα πράγματι στο όριο όπου $(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \rightarrow 0$ το ξ^2 ισοδυναμεί με το k^2 ,

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \xi^2 &= \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \left(\left[\frac{2}{\Delta x} \sin\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right) \right]^2 + \left[\frac{2}{\Delta y} \sin\left(\frac{k_y \Delta y}{2}\right) \right]^2 + \left[\frac{2}{\Delta z} \sin\left(\frac{k_z \Delta z}{2}\right) \right]^2 \right) \\ &= k_x^2 + k_y^2 + k_z^2. \end{aligned}$$

Συνεπώς, έχουμε τη δυνατότητα να ελέγχουμε την αριθμητική διασπορά της FDFD μεθόδου, αλλάζοντας μονάχα τις διαστάσεις των Yee-cells. Στη συνέχεια μπορούμε να ορίζουμε τον παράγοντα επιβράδυνσης γ σύμφωνα με τη σχέση $\nu = c_0/\gamma$ και τότε φυσικά έχουμε για το γ ότι

$$\gamma = \frac{1}{k_0 n} \sqrt{\left[\frac{2}{\Delta x} \sin\left(\frac{k_x \Delta x}{2}\right) \right]^2 + \left[\frac{2}{\Delta y} \sin\left(\frac{k_y \Delta y}{2}\right) \right]^2 + \left[\frac{2}{\Delta z} \sin\left(\frac{k_z \Delta z}{2}\right) \right]^2}. \quad (2.48)$$

Η διασπορά που εμφανίζεται στη δική μας δισδιάστατη περίπτωση ($k_y = 0$) υπολογίζεται εύκολα αν θεωρήσουμε ότι στον ελεύθερο χώρο για γωνία πρόσπτωσης $\theta_{inc} = 0$ θα έχουμε $|k_z| = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ και αν $\Delta z = \lambda_0/20$ τότε

$$\nu = \frac{40\omega}{\lambda_0} \sin\left(\frac{\pi\lambda_0^2}{20}\right) = 1.0034 c_0 \quad (\lambda_0 = 1\mu\text{m}). \quad (2.49)$$

Παρατηρούμε πως το αριθμητικό κύμα $f^{i,j}$ διαδίδεται με ταχύτητα ν μεγαλύτερη της ταχύτητας του φωτός (superluminal). Αυτό σημαίνει πως αν το $f^{i,j}$ έχει διανύσει απόσταση $5\lambda_0 = 100$ Yee-cells, τότε το πραγματικό κύμα $f(\mathbf{r})$ έχει διανύσει 99.66 Yee-cells ή $4.983\lambda_0$ απόσταση. Στο πρόβλημα μας συνεπώς έχουμε εισάγει ένα **αριθμητικό σφάλμα φάσης** ίσο με

$$\frac{2\pi}{\lambda_0} (100 - 99.661) \Delta x = 0.0339\pi = 6.102^\circ. \quad (2.50)$$

Για να αντιμετωπίσουμε αυτό το πρόβλημα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον παράγοντα επιβράδυνσης γ και τεχνητά να μεταβάλλουμε τις σταθερές των υλικών κατά ϵ_r/γ και μ_r/γ , ώστε να μειώσουμε τη ταχύτητα του αριθμητικού κύματος και να γίνει ίδια με τη ταχύτητα του πραγματικού κύματος. Όταν όμως ο κυματαριθμός έχει δύο διευθύνσεις, τότε δεν μπορούμε να εξαλείψουμε πλήρως το σφάλμα και στις δύο κατευθύνσεις αλλά μόνο σε μία. Επίσης, ο παράγοντας επιβράδυνσης έχει διαφορετική τιμή όταν αλλάζουν οι τιμές των ϵ_r, μ_r όπως φαίνεται στην εξίσωση (2.48), οπότε αυτός είναι άλλος ένας λόγος που είναι δύσκολο να εξαλείψουμε πλήρως το σφάλμα της μεθόδου αυτής.

Κεφάλαιο 3

Εφαρμογή του αλγορίθμου TS/SF

Στο κεφάλαιο αυτό θα αξιοποιήσουμε τη μέθοδο TF/SF στο πρόβλημα της περίθλασης στις δύο διαστάσεις για τον υπολογισμό των περιθλώμενων πεδίων από διάφορα εμπόδια (slits/barriers). Αρχικά, παρουσιάζουμε τα βασικά βήματα για τη κατασκευή του προβλήματος στο υπολογιστικό περιβάλλον. Για να είναι συνεπής η προσομοίωση θα πρέπει να ορίσουμε τη διάταξη και το πλέγμα του προβλήματος με κατάλληλο τρόπο. Προς το τέλος του κεφαλαίου παρουσιάσουμε μερικές προσομοιώσεις και κάποιους από τους περιορισμούς που προκύπτουν από ένα τέτοιο πρόγραμμα.

3.1 Διάγραμμα αλγορίθμου

Για το πρόβλημα της περίθλασης από μία σχισμή θεωρούμε δύο χώρους με δείκτες διάθλασης n_1, n_3 και ένα εμπόδιο ενδιάμεσα τους με n_2 . Το εμπόδιο αποτελείται από υλικό με απώλειες (π.χ. χρυσός) και πάχος w . Το πάχος θα πρέπει να είναι τουλάχιστον μερικά δ (επιδερμικό βάθος), ώστε να μην διαπερνά το προσπίπτον κύμα το εμπόδιο. Ονομάζουμε Λ_x, Λ_z τις πραγματικές διαστάσεις του προβλήματος μας και αν dz, dx είναι οι διαστάσεις των Yee cells, τότε το πλήθος Yee cells S_x, S_z που χρειάζεται για να γεμίσει ο χώρος αυτός υπολογίζεται από τις σχέσεις

$$\Lambda_x = S_x \Delta x, \quad (3.1)$$

$$\Lambda_z = S_z \Delta z. \quad (3.2)$$

Θα προσθέσουμε το UPML τώρα περιμετρικά της διάταξης όπως είδαμε στο πρώτο κεφάλαιο. Στην Εικόνα 1.3 έχουμε το UPML με τις διαστάσεις (NZLO, NZHI, NXLO, NXHI) να αποτελούν τα πάχη των τεσσάρων στρωμάτων. Τότε οι προηγούμενες σχέσεις προσαρμόζονται στις παρακάτω,

$$L_x = N_x \Delta x = S_x \Delta x + (NXLO + NXHI) \Delta x, \quad (3.3)$$

$$L_z = N_z \Delta z = S_z \Delta z + (NZLO + NZHI) \Delta z, \quad (3.4)$$

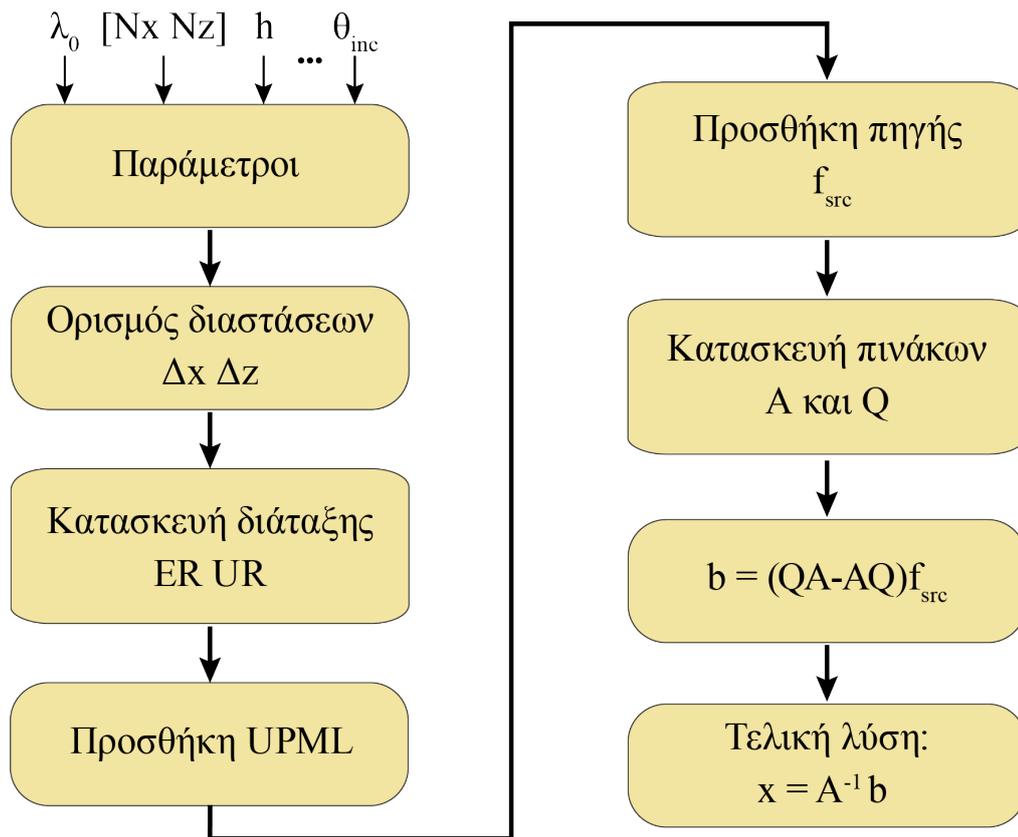
με $N_x \times N_z$ να είναι ο συνολικός αριθμός Yee cells που χρησιμοποιούμε στην προσομοίωσή μας. Επιλέγουμε τα βήματα Δz και Δx να είναι 20 φορές μικρότερα του ελάχιστου μήκους κύματος που εμφανίζεται μέσα στο πρόβλημα μας (εκτός της περιοχής 2 με απώλειες). Δηλαδή για τα $\Delta x, \Delta z$ ισχύουν οι σχέσεις

$$\Delta z = \Delta x = \frac{\lambda_{min}}{20} = \frac{\lambda_0}{20 n_{max}},$$

οπότε η συνολική ανάλυση (resolution) του πλέγματος $[N_x \times N_z]$ είναι,

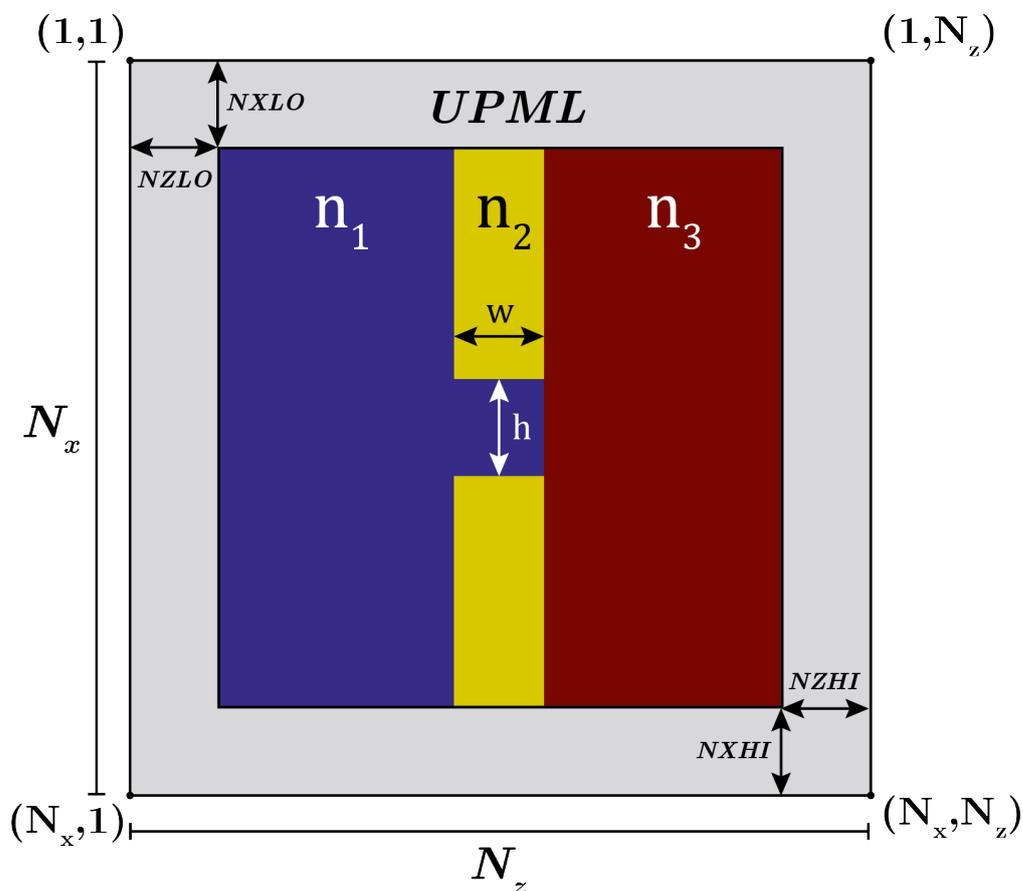
$$[N_x, N_z] = \left[\frac{L_x}{d_x}, \frac{L_z}{d_z} \right] = \left[\frac{20 n_{max} L_x}{\lambda_0}, \frac{20 n_{max} L_z}{\lambda_0} \right]. \quad (3.5)$$

Η ανάλυση του πλέγματος καθώς και όλοι οι παράμετροι του προβλήματος (συχνότητα λειτουργίας, γωνία προσπτώσης κ.α.) θα εισάγονται στην αρχή του προγράμματος μας, ενώ σαν έξοδο θα παίρνουμε τα πεδία στον χώρο και τις κατανομές για διάφορα σημεία του z άξονα. Παρακάτω δίνουμε το διάγραμμα ροής του αλγορίθμου.



Σχήμα 3.1: Το διάγραμμα ροής του αλγορίθμου που αναπτύσσουμε για την προσομοίωση της περίθλασης ενός H/M πεδίου FDFD χρησιμοποιώντας τη TF/SF μέθοδο.

3.2 Η διάταξη στο υπολογιστικό περιβάλλον



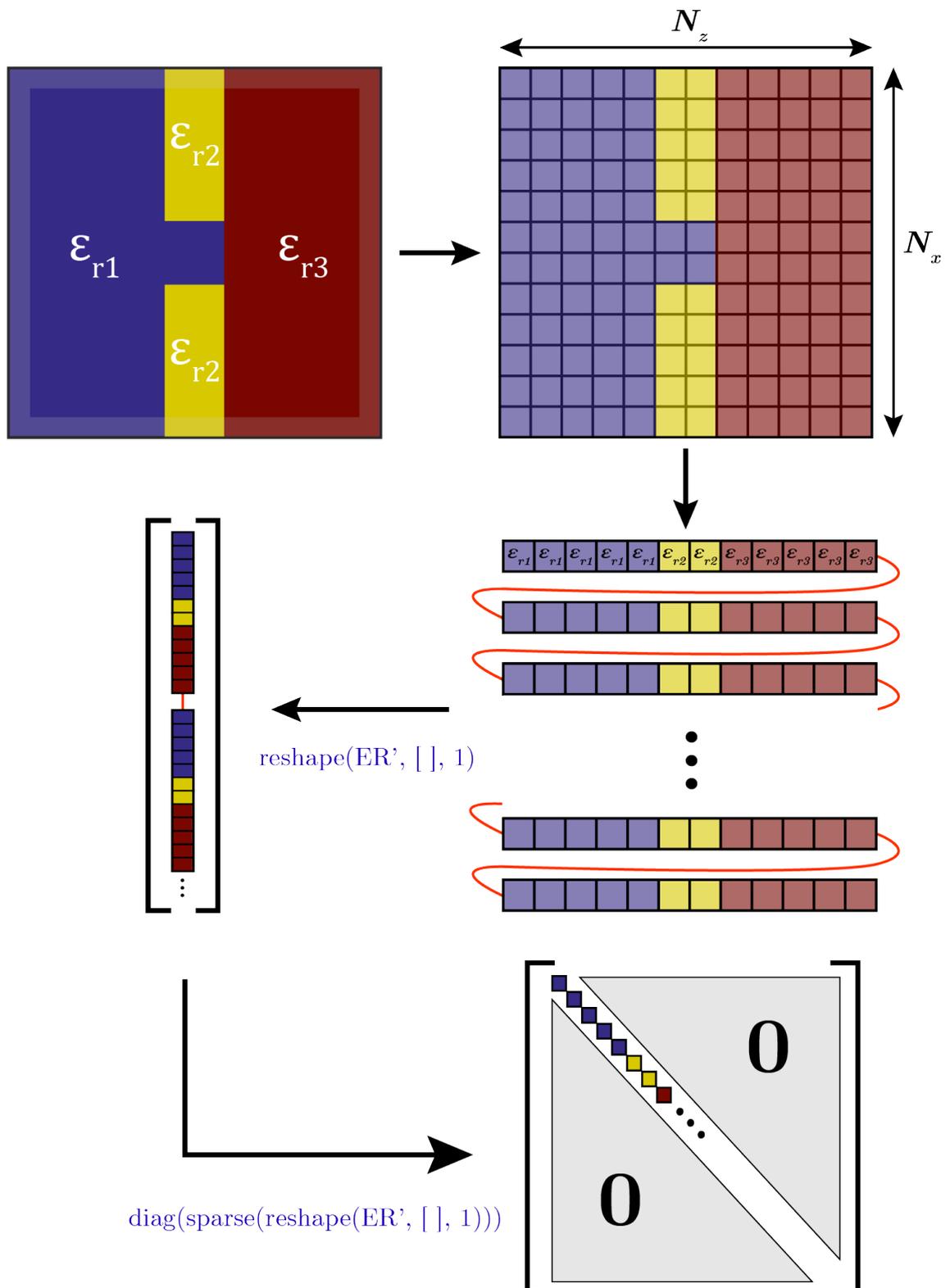
Σχήμα 3.2: Η ανάλυση του πλέγματος είναι $N_x \times N_z$ Yee cells. Οι συντεταγμένες των σημείων αποτελούν τους δείκτες των πινάκων στο Matlab που αναφέρονται σε εκείνο το σημείο.

Για την ανάλυσή μας θα θεωρήσουμε έναν υπολογιστικό χώρο διαστάσεων $[1000 \times 1000]$. Μία εκτέλεση του προγράμματος σε αυτόν απαιτεί χρόνο εκτέλεσης 10 δευτερολέπτων σε έναν τυπικό υπολογιστή. Ως προς τη διάταξη μας, η περιοχή 2 με απώλειες επιλέγουμε να αποτελείται από χρυσό που έχει δείκτη διάθλασης [21] [22]

$$\tilde{n}_2 = 0.13231 - j 6.9045 \quad (\text{για } \lambda_0 = 1 \mu m).$$

Ο φανταστικός όρος περιγράφει φυσικά τις απώλειες του Η/Μ κύματος μέσα στο υλικό όπως ακριβώς περιγράψαμε στην ενότητα 1.2. Η περιοχή 1 θα θεωρήσουμε πως έχει δείκτη διάθλασης $n_1 = 1$, ενώ για τη περιοχή 3 επιλέγουμε να αποτελείται από γυαλί (BK7) με δείκτη διάθλασης $n_3 = 1.5168^1$. Στη συνέχεια, θέλουμε να φέρουμε τους πίνακες των πεδίων (e, h, f_{src}) στη μορφή πινάκων στήλης, ενώ τους πίνακες ($\epsilon_r, \mu_r, \mathbf{A}_e$) σε διαγώνιους τετραγωνικούς πίνακες.

¹Όταν χρειαστεί να συγκρίνουμε τα αποτελέσματά μας με τη βαθμωτή θεωρία, τότε θα χρησιμοποιήσουμε $n_3 = 1$

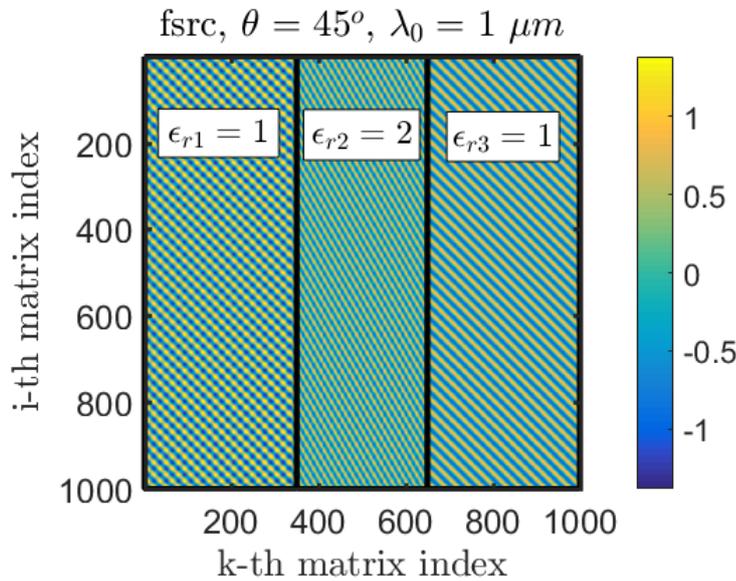


Σχήμα 3.3: Αναπαράσταση της διαδικασίας μετασχηματισμού ενός τετραγωνικού πίνακα σε πίνακα στήλης και ύστερα μετατροπή σε διαγώνιο αραιό πίνακα. Οι διαγώνιοι αραιοί πίνακες έχουν τα περιττά μηδενικά εκτός των σημαντικών διαγωνίων τους, με αποτέλεσμα να μην χρειάζονται να αποθηκεύονται στη μνήμη.

Στην Εικόνα 3.3 γίνεται μία αναπαράσταση της διαδικασίας βελτιστοποίησης του μεγέθους των πινάκων με τη βοήθεια του Matlab. Για τη κατασκευή του πίνακα διηλεκτρικών σταθερών $[\epsilon_r]$ κατασκευάζουμε αρχικά τον πίνακα $ER(i, j)$ διαστάσεων $(N_x \times N_z)$. Ο i δείκτης απεικονίζει τις γραμμές του πίνακα και στο πρόβλημα μας "αναπαριστά" τον x -άξονα. Ο j δείκτης αντιπροσωπεύει τις στήλες του πίνακα και συνεπώς θα αντιπροσωπεύει τον z -άξονα. Για να τον μετατρέψουμε σε πίνακα στήλης, χρησιμοποιούμε την εντολή **reshape(ER)**. Για τους τελεστές και τις σταθερές των υλικών που είναι διαγώνιοι τετραγωνικοί πίνακες διαστάσεων $(N_x N_z \times N_x N_z)$ χρειαζόμαστε άλλο ένα βήμα. Για να μετατρέψουμε τον πίνακα στήλης σε διαγώνιο τετραγωνικό πίνακα χρησιμοποιούμε τις εντολές **sparse()** και **diag()**.

3.3 Οι περιοχές TF και SF στο πρόβλημα

Ο αλγόριθμος **Total-Field/Scattered-Field** χρησιμοποιείται για την προσομοίωση προβλημάτων σκέδασης H/M κυμάτων. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, της δισδιάστατης διάθλασης μεταξύ δύο περιοχών, χρειάζεται να ορίσουμε το προσπίπτον κύμα-πηγή σε κάθε χώρο ξεχωριστά. Ο λόγος που δεν χρησιμοποιούμε παντού το ίδιο f_{src} , είναι επειδή στη περιοχή 3 έχουμε διαφορετικό δείκτη διάθλασης, οπότε η συνεισφορά του προσπίπτοντος κύματος στον χώρο εκείνο θα ήταν λανθασμένη, αφού δεν θα είχε λάβει υπόψιν την αλλαγή του υλικού.



Σχήμα 3.4: Η πηγή $Re\{f_{src}\}$ στο πρόβλημα μας με γωνία πρόσπτωσης $\theta = 45^\circ$. Για παράδειγμα που απεικονίζεται θεωρούμε παντού στον χώρο ότι $\mu = \mu_0$.

Για το λόγο αυτό, υπολογίζουμε το f_{src} σύμφωνα με το πρόβλημα ανάκλασης-διάθλασης από διηλεκτρική πλάκα. Δηλαδή, υπολογίζουμε το f_{src} σαν να μην υπάρχει άνοιγμα στο αδιαφανές πέτασμα n_2 . Αυτό μπορούμε να το κάνουμε επειδή το ανακλώμενο πεδίο στο FDFD πηγάζει από την ανομοιογένεια του χώρου, δηλαδή από τη μορφή της διάταξης μας που εμφανίζεται μέσω των πινάκων ϵ_r, μ_r . Το πρόβλημα παραμένει ίδιο με πριν, ενώ

η πηγή τώρα έχει τη κατάλληλη μορφή. Όλοι οι συντελεστές ανάκλασης-διάθλασης υπολογίζονται με τη βοήθεια του script `dielectric_slab_final ()` που δίνεται στην ενότητα 7.2, ενώ η H/M θεωρία ανάκλασης-διάθλασης από διηλεκτρική πλάκα μήκους d παρουσιάζεται αναλυτικά στην ενότητα 6.3.

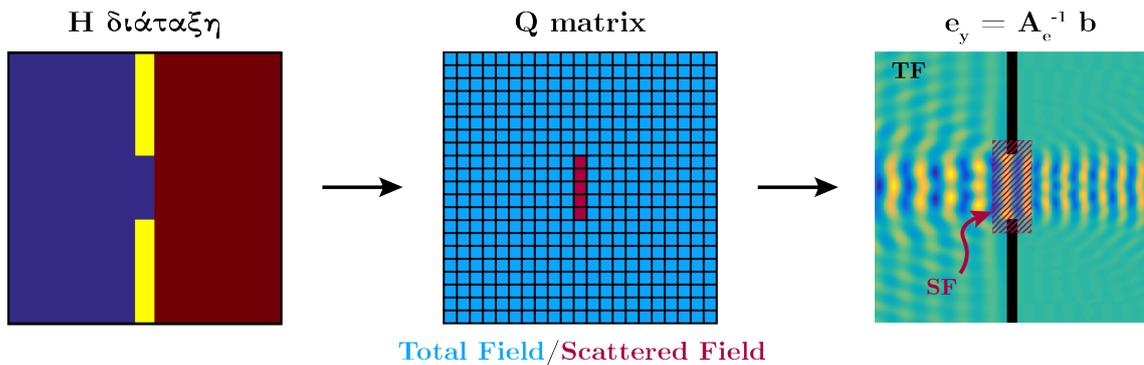
Έχοντας υπολογίσει τους συντελεστές διάθλασης και ανάκλασης, το πεδίο εύκολα εισάγεται στο πρόβλημα μας μέσω των εξισώσεων (6.6, 6.27), όπου φυσικά στη θέση των μεταβλητών θέσης έχουμε ότι

$$z \rightarrow k \Delta z, \quad k = 1 : N_z, \quad (3.6)$$

$$x \rightarrow (N_x - i + 1) \Delta x, \quad i = 1 : N_x. \quad (3.7)$$

Ο λόγος που ορίζουμε το x αντίστροφα είναι επειδή η γραμμή $i = 1$, όπως φαίνεται και στην Εικόνα 3.2, ξεκινάει από την κορυφή και πηγαίνοντας προς τα κάτω το i αυξάνεται. Άρα ο x -άξονας έχει αντίθετη φορά για το πρόγραμμα στο Matlab. Συνεπώς, θα πρέπει να το αλλάξουμε αλλιώς όταν $\theta_{inc} \neq 0$ η κατεύθυνση του f_{src} θα είναι λάθος. Οι Εικόνες 3.4 παρουσιάζουν τη μορφή των πηγών που χρησιμοποιούμε στον κώδικα μας. Παρατηρούμε πως το αδιαφανές πέτασμα από χρυσό, πάχους $2\lambda_0$, είναι αρκετό ώστε να μην διαρρέει σχεδόν καθόλου η πηγή στην περιοχή 3.

Τώρα χρειάζεται να εισάγουμε τον πίνακα \mathbf{Q} στον κώδικα για να φτιάξουμε το διάνυσμα στήλης των πηγών b , όπως φαίνεται στις εξισώσεις (2.40). Ορίζουμε τον πίνακα \mathbf{Q} να έχει τέτοια μορφή ώστε να καλύπτει **ολόκληρο** το άνοιγμα του εμποδίου στο πρόβλημα μας.



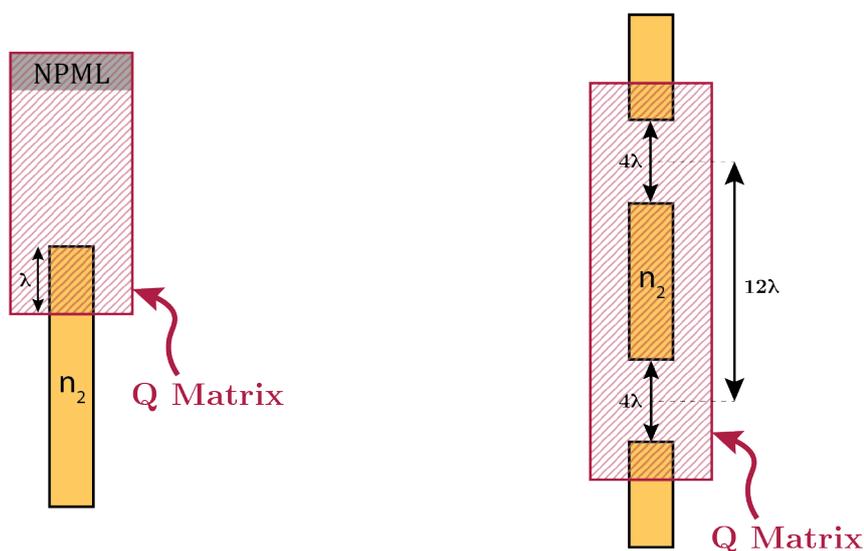
Σχήμα 3.5: Απεικόνιση του πίνακα \mathbf{Q} πάνω στο πρόβλημα μας.

Αυτό που επιτυγχάνουμε με την σχέση $b = (\mathbf{Q}\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{Q})f_{src}$ είναι να δίνουμε ένα *έναυσμα* στην εξίσωση $\mathbf{A}x = b$ για να αρχίσει να κατασκευάζει τη λύση. Χωρίς το διάνυσμα b δεν γνωρίζουμε πουθενά τιμές της x για να εφαρμόσουμε τις πεπερασμένες διαφορές, οπότε το αποτέλεσμα είναι πάντα η τετριμμένη λύση $x = 0$. Αντίθετα, με το διάνυσμα b βάζουμε στη σχέση μας μία πολύ "συνοπτική" εικόνα του y πεδίου στα όρια μεταξύ των TF/SF περιοχών και ύστερα οι FDFD σχέσεις καταστρώνουν τη λύση στον υπόλοιπο

χώρο (λαμβάνοντας υπόψιν του πίνακες των υλικών). Ο πίνακας \mathbf{Q} πρέπει αναγκαστικά να καλύπτει ολόκληρη την περιοχή του ανοίγματος h για να λειτουργήσει η μέθοδος TF/SF όπως θέλουμε και να μας δώσει τα περιθλώμενα πεδία.

Μπορούμε εύκολα να επεκτείνουμε τη μέθοδο αυτή για την προσομοίωση του πεδίου από διαφορετικά εμπόδια. Για να το επιτύχουμε αυτό χρειάζεται να αλλάξουμε μόνο δύο κομμάτια του κώδικα μας:

1. Οι πίνακες ϵ_r, μ_r πρέπει να αντιστοιχούν στη νέα διάταξη,
2. Ο πίνακας \mathbf{Q} πρέπει πάντα να "βλέπει" τις σχισμές του εμποδίου.



(i) Ο πίνακας \mathbf{Q} της ημι-άπειρης σχισμής.

(ii) Ο πίνακας \mathbf{Q} στις δύο σχισμές.

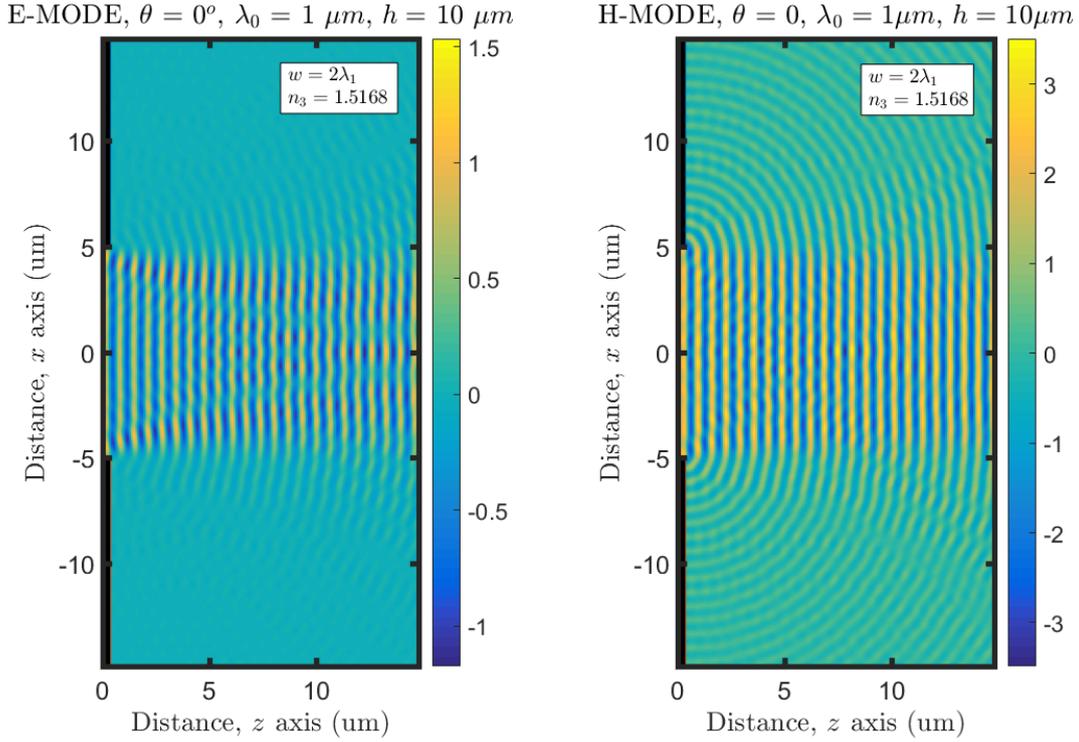
Σχήμα 3.6: Η επιλογή του πίνακα \mathbf{Q} για δύο διαφορετικά πειράματα. Η επιλογή είναι τέτοια ώστε πάντα ο πίνακας \mathbf{Q} να βλέπει ολόκληρες τις σχισμές όπου πρέπει να περνάει η πηγή f_{src} .

Όλα τα υπόλοιπα κομμάτια του κώδικα δεν χρειάζονται να αλλάξουν. Έτσι, παρουσιάζεται η ευκολία στη χρήση του προγράμματος σε οποιοδήποτε πείραμα μας ενδιαφέρει, αφού χρειάζεται να αλλάξουμε μόνο τρεις πίνακες. Παραπάνω δείχνουμε ποιοτικά τις επιλογές του πίνακα \mathbf{Q} στις περιπτώσεις περίθλασης από ημι-άπειρο πέτασμα και από δύο σχισμές διάστασης $h = 4\lambda$. Στο κεφάλαιο 5.1.3 δείχνουμε μερικά αποτελέσματα από αυτές τις δύο προσομοιώσεις.

Ιδιαίτερη προσοχή χρειάζεται στη δεύτερη συνθήκη, διότι ο πίνακας \mathbf{Q} είναι αυτός που ουσιαστικά μας επιτρέπει να μεταφέρουμε τη πηγή στο πρόβλημα μας. Αν δεν καλύπτει το \mathbf{Q} πλήρως τις σχισμές, τότε είναι πιθανόν να μην έχουμε καλή προσομοίωση της περίθλασης γιατί θα υπάρχουν μέρη που η πηγή δεν θα πηγαίνει.

3.4 Προσομοίωση της περίθλασης

Έχοντας κατασκευάσει τους πίνακες των σταθερών ϵ , μ της διάταξης, την πηγή f_{src} , και τον πίνακα \mathbf{Q} , μπορούμε τώρα να λύσουμε το σύστημα εξισώσεων FDFD (2.40) και να βρούμε τα περιθλωμένα πεδία. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε τα πεδία που παίρνουμε από την εκτέλεση του προγράμματος στο Matlab.



(i) Προσομοίωση του πεδίου $Re\{e_y\}$ με γωνία πρόσπτωσης $\theta = 0^\circ$ και διάσταση ανοίγματος $h = 10\lambda_1$ (παρουσιάζεται μόνο η περιοχή 3).

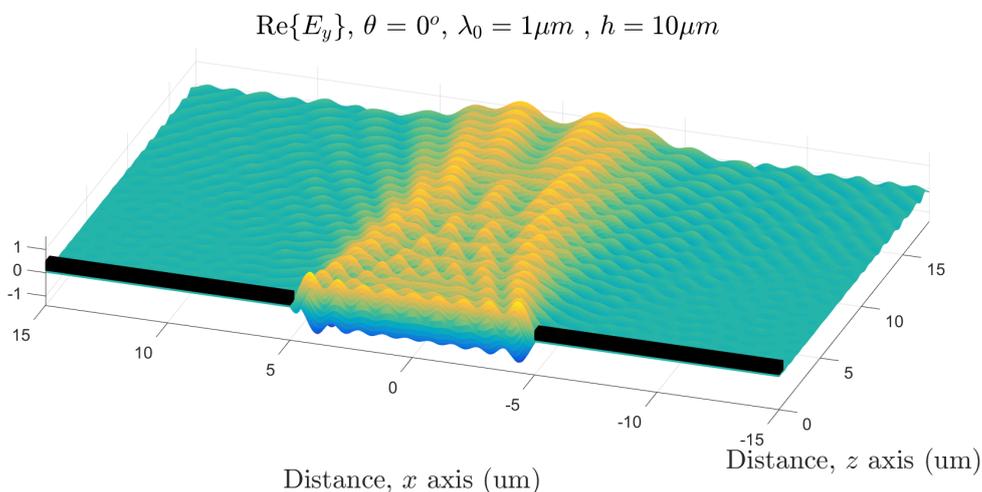
(ii) Προσομοίωση του πεδίου $Re\{h_y\}$ με γωνία πρόσπτωσης $\theta = 0^\circ$ και διάσταση ανοίγματος $h = 10\lambda_1$ (παρουσιάζεται μόνο η περιοχή 3).

Στο σχήμα 3.7i παρουσιάζεται το ολικό πεδίο e_y στον $z > 0$ χώρο (χωρίς το UPML), που δημιουργείται από το επίπεδο κύμα-πηγή που περιθλάται πάνω στη δισδιάστατη ορθογώνια σχισμή διάστασης $h = 10\lambda_1$. Αντίστοιχα στο σχήμα 3.7ii παρουσιάζεται το μαγνητικό πεδίο h_y στον $z > 0$ χώρο. Το πεδίο στα αρνητικά z (αριστερά του εμποδίου) δεν θα μας απασχολήσει και γι'αυτό επιλέγουμε να μην το απεικονίζουμε.

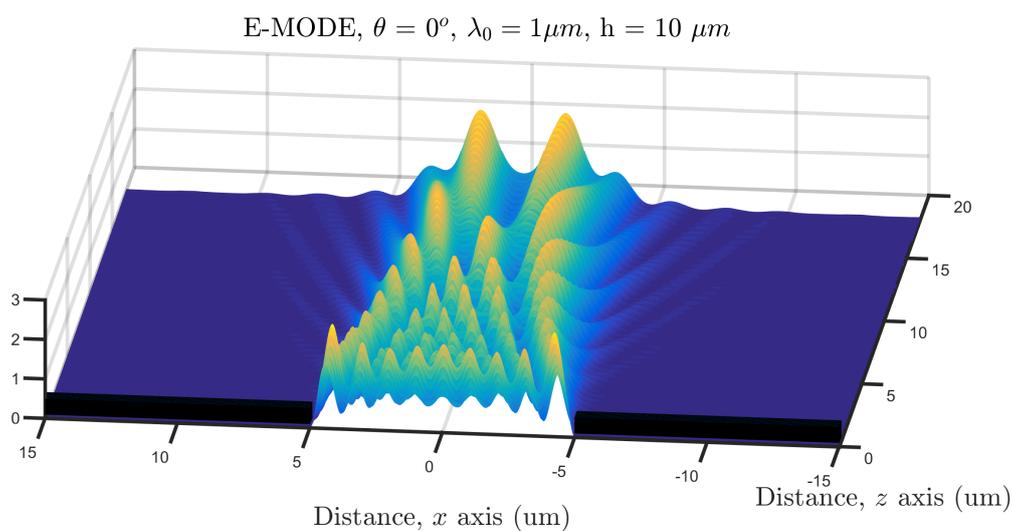
Μπορούμε να παρατηρήσουμε τα δευτερεύοντα κυλινδρικά κύματα, από τις ακμές του εμποδίου, που συμβάλουν με το προσπίπτον επίπεδο κύμα και δημιουργούν τις διαφορετικές κατανομές του πεδίου. Οι εικόνες 3.8, 3.9 απεικονίζουν τη μορφή του δισδιάστατου πραγματικού πεδίου και της έντασης αντίστοιχα. Στο σχήμα 3.10 βλέπουμε αναλυτικά την κατανομή του πεδίου σε απόσταση $z_0 = 12 \mu\text{m}$, όταν πάρουμε μία κάθετη, ως προς τον z -άξονα, τομή του χώρου.

Όλες οι κατανομές είναι κανονικοποιημένες ως προς την ένταση στο σημείο $x = 0$, εκτός αν αναφέρεται κάτι διαφορετικό. Παρουσιάζουμε παρακάτω, μερικές από τις κα-

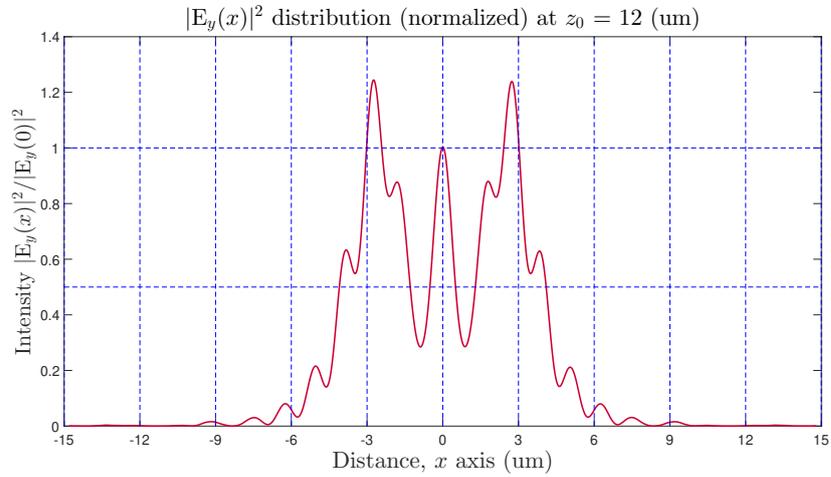
τανομές των πεδίων που παίρνουμε, όταν μεταβάλλουμε τη διάσταση του ανοίγματος h στο διάστημα $[3, 10]$ μm και ταυτόχρονα κρατάμε σταθερό το σημείο παρατήρησης $z_0 = 12$ μm μακριά από την οθόνη.



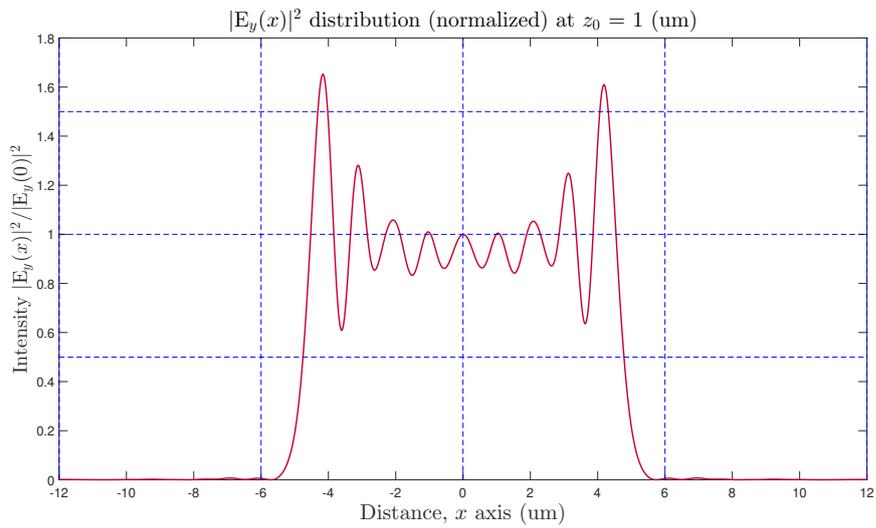
Σχήμα 3.8: Το $\text{Re}\{e_y\}$ στον χώρο (x, z) με $n_3 = 1.5168$. Ο κατακόρυφος άξονας αντιστοιχεί στο πλάτος του ολικού πραγματικού πεδίου. Η σχισμή βρίσκεται στο $z = 0$.



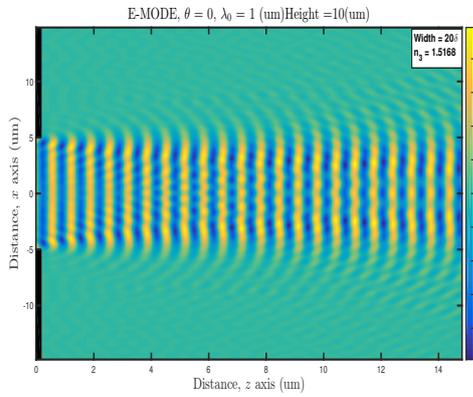
Σχήμα 3.9: Οι κατανομές του πεδίου στον χώρο (x, z) με $n_3 = 1.5168$ για το $|E_y|^2$ με $h = 10\mu\text{m}$.



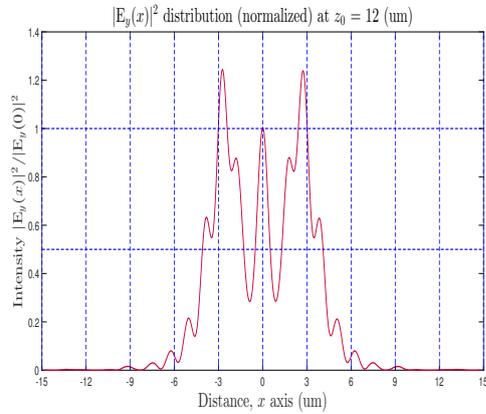
Σχήμα 3.10: Η κατανομή της έντασης του κανονικοποιημένου πεδίου $(|E_y|/|E_{y0}|)^2$ σε απόσταση $z_0 = 12 \mu\text{m}$ μακριά από το εμπόδιο.



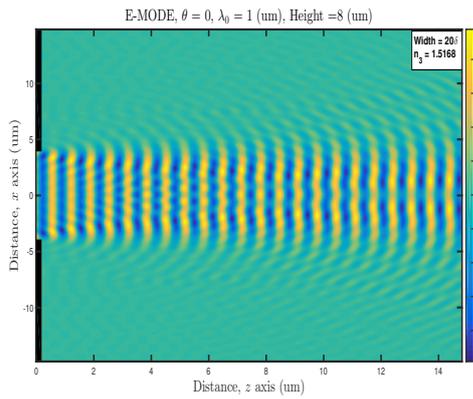
Σχήμα 3.11: Η κατανομή της έντασης του κανονικοποιημένου πεδίου $(|E_y|/|E_{y0}|)^2$ σε απόσταση $z_0 = 1 \mu\text{m}$ μακριά από το εμπόδιο.



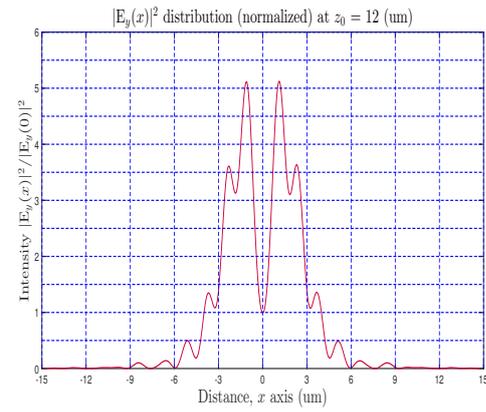
(i) Περίθλαση από σχισμή $h = 10\mu m$



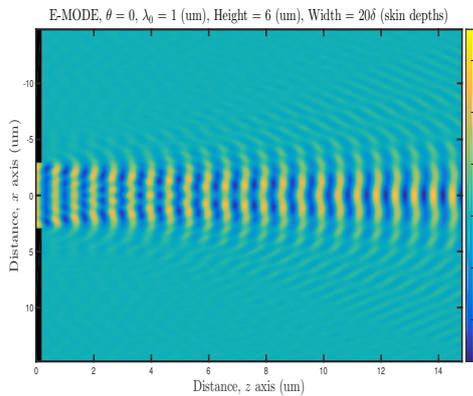
(ii) Η κατανομή της έντασης για $h = 10\mu m$



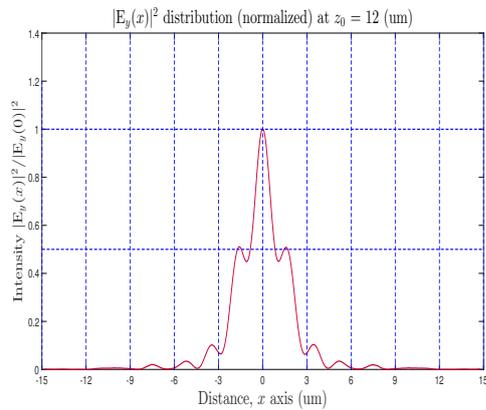
(iii) Περίθλαση από σχισμή $h = 8\mu m$



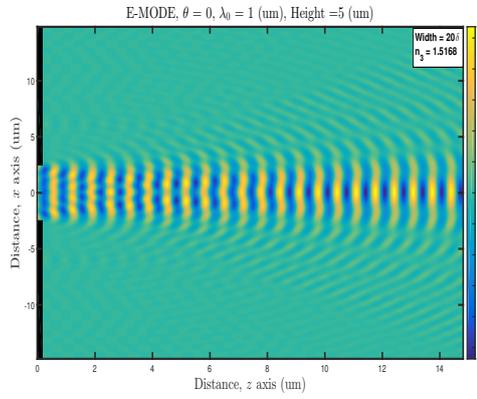
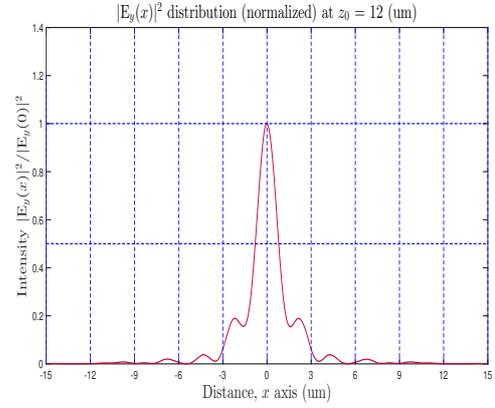
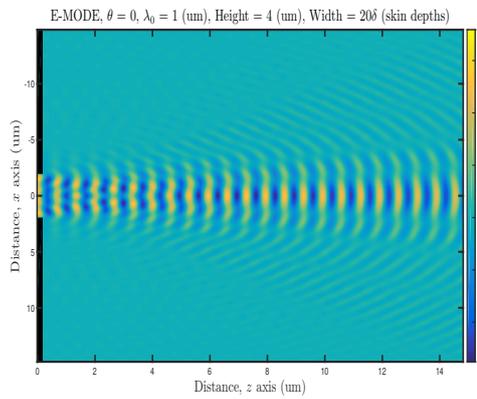
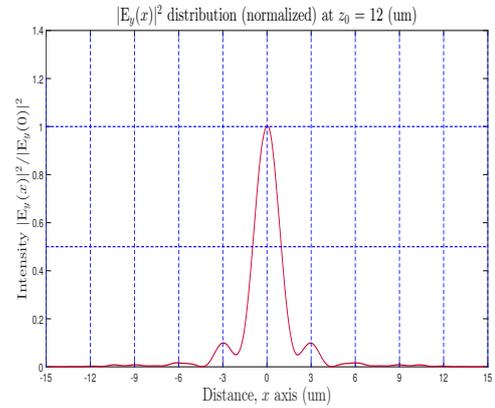
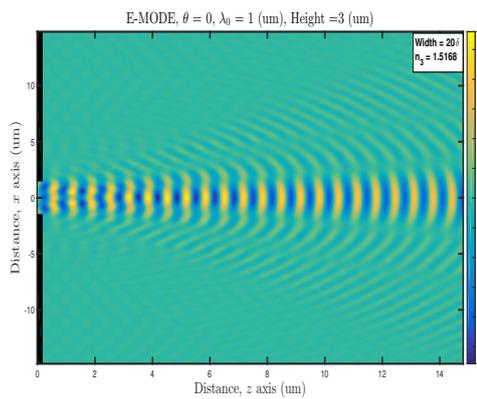
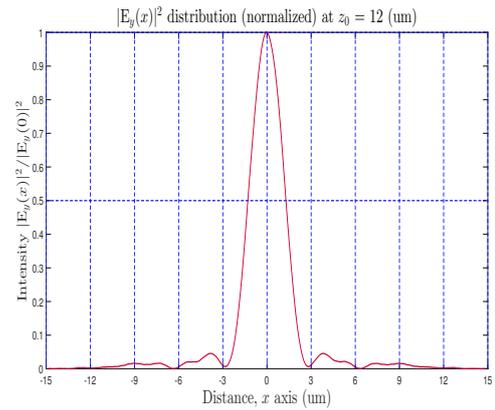
(iv) Η κατανομή της έντασης για $h = 8\mu m$



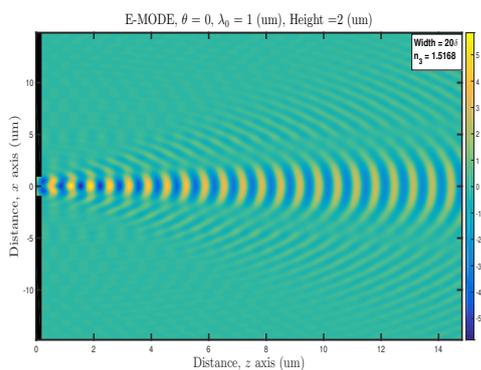
(v) Περίθλαση από σχισμή $h = 6\mu m$



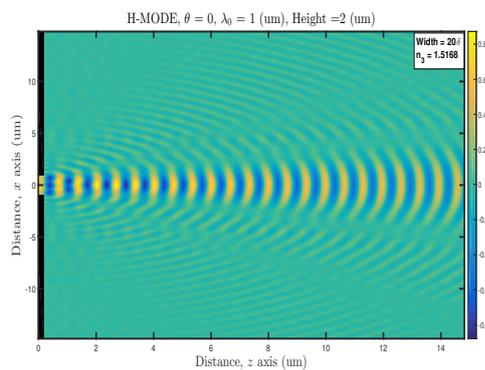
(vi) Η κατανομή της έντασης για $h = 6\mu m$

(i) Περίθλαση από σχισμή $h = 5\mu\text{m}$ (ii) Η κατανομή της έντασης για $h = 5\mu\text{m}$ (iii) Περίθλαση από σχισμή $h = 4\mu\text{m}$ (iv) Η κατανομή της έντασης για $h = 4\mu\text{m}$ (v) Περίθλαση από σχισμή $h = 3\mu\text{m}$ (vi) Η κατανομή της έντασης για $h = 3\mu\text{m}$

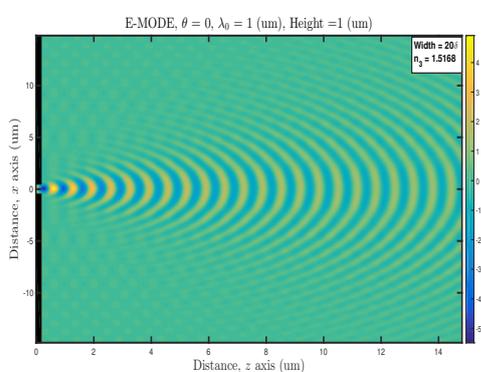
Σχήμα 3.13: Οι μορφές των πεδίων E_y που παίρνουμε από την εφαρμογή του αλγορίθμου για διαφορετικές τιμές του h . Όλες οι κατανομές υπολογίζονται σε απόσταση $z_0 = 12\mu\text{m}$.



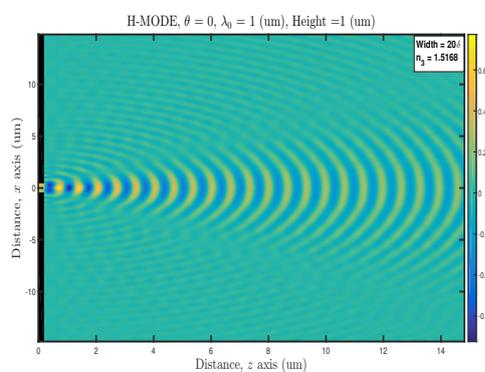
(i) Προσομοίωση του πεδίου E_y με διάσταση σχισμής $h = 2\lambda_1$.



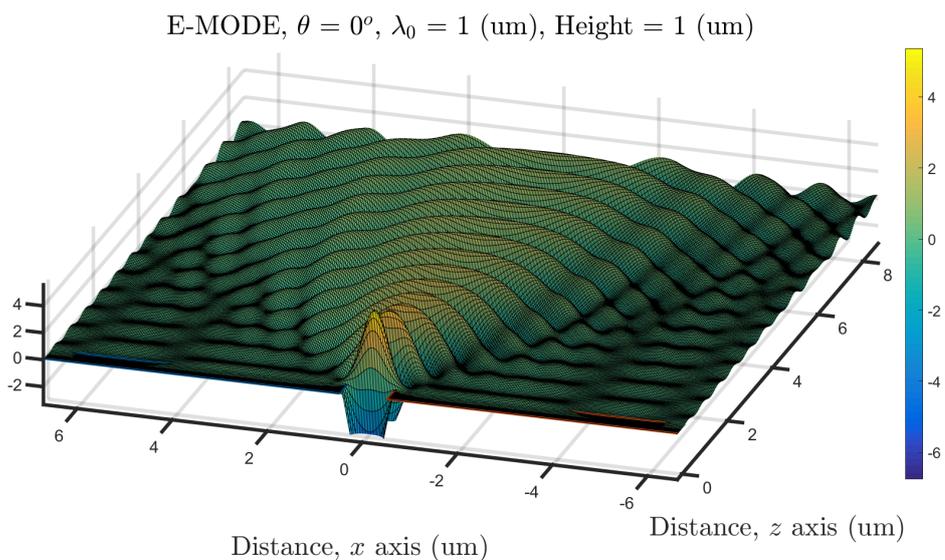
(ii) Προσομοίωση του πεδίου \tilde{H}_y με διάσταση σχισμής $h = 2\lambda_1$.



(iii) Προσομοίωση του πεδίου E_y με διάσταση σχισμής $h = \lambda_1$.

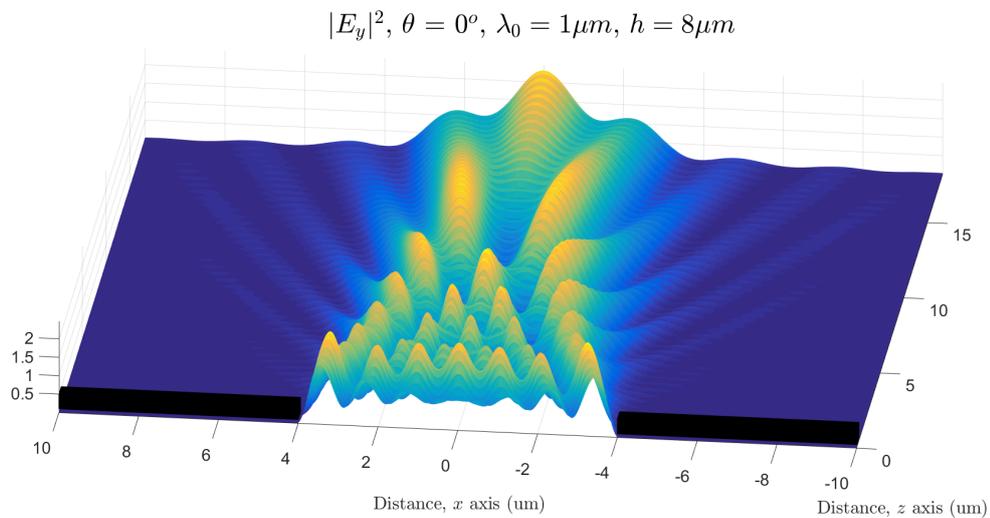


(iv) Προσομοίωση του πεδίου \tilde{H}_y με διάσταση σχισμής $h = \lambda_1$.



Σχήμα 3.15: Η ακτινοβολία από τη σχισμή διάστασης $h = \lambda_1$. Το πεδίο στον ημιχώριο $z > 0$, τείνει να πάρει τη κυλινδρική μορφή όσο μικραίνει το άνοιγμα h .

Αν μικρύνουμε την διάσταση h αρκετά ώστε να είναι περίπου ίση με ένα μήκος κύματος, τότε το πεδίο θα τείνει να πάρει την μορφή ενός κυλινδρικού κύματος. Αυτό φαίνεται στο σχήμα 3.15. Από τη βαθμωτή θεωρία, το τελικό πεδίο υπολογίζεται από τη συμβολή κυμάτων που προέρχονται από δευτερεύουσες κυλινδρικές (στις δύο διαστάσεις) πηγές πάνω στη σχισμή του περιθλαστικού εμποδίου. Αυτό εκφράζεται από την αρχή των Huygens – Fresnel [23]. Όσο αυξάνουμε τη διάσταση της σχισμής h (κυριότερα όταν $h > 4\lambda_1$), η κατανομή του πεδίου αρχίζει να αποκτά μία αρκετά πολύπλοκη μορφή. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι αυξάνοντας το h , δημιουργούνται περισσότερες κυλινδρικές πηγές και η συμβολή τους δημιουργεί τη τελική μορφή της περίθλασης.



Σχήμα 3.16: Το $|E_y|^2$ πεδίου στον χώρο (x, z) από σχισμή $h = 8 \mu\text{m}$. Παρατηρούμε πως το πεδίο εμφανίζει μέγιστα κατά μήκος του z άξονα στο $x = 0$, μόνο σε συγκεκριμένα διαστήματα του z , ενώ σε διαφορετικές περιοχές εμφανίζει τοπικά ελάχιστα.

Στην περίπτωση της περίθλασης με $h = 8\lambda_1$ (Σχήμα 3.16), παρατηρούμε τη κατανομή του πεδίου στο κέντρο της σχισμής $x = 0$. Καθώς αυξάνεται το z , η κατανομή εμφανίζει άλλοτε μηδενισμούς ή τοπικά μέγιστα. Η ένταση του πεδίου στο $x = 0$ για $z = 12 \mu\text{m}$ εμφανίζεται μηδενική, ενώ για $z = 17 \mu\text{m}$ γίνεται το ολικό μέγιστο της κατανομής. Θα περιμέναμε ότι στο κέντρο της σχισμής ($x = 0$) θα έχουμε πάντα την μέγιστη ένταση για κάθε σημείο του z , αφού πάντα θα έχει ένα άμεσο οπτικό μονοπάτι με τη πηγή. Ωστόσο, λόγω της καταστροφικής συμβολής με τα ανακλώμενα πεδία, η κατανομή μπορεί να εμφανίζει τοπικό ελάχιστο ακόμη και στο $x = 0$.

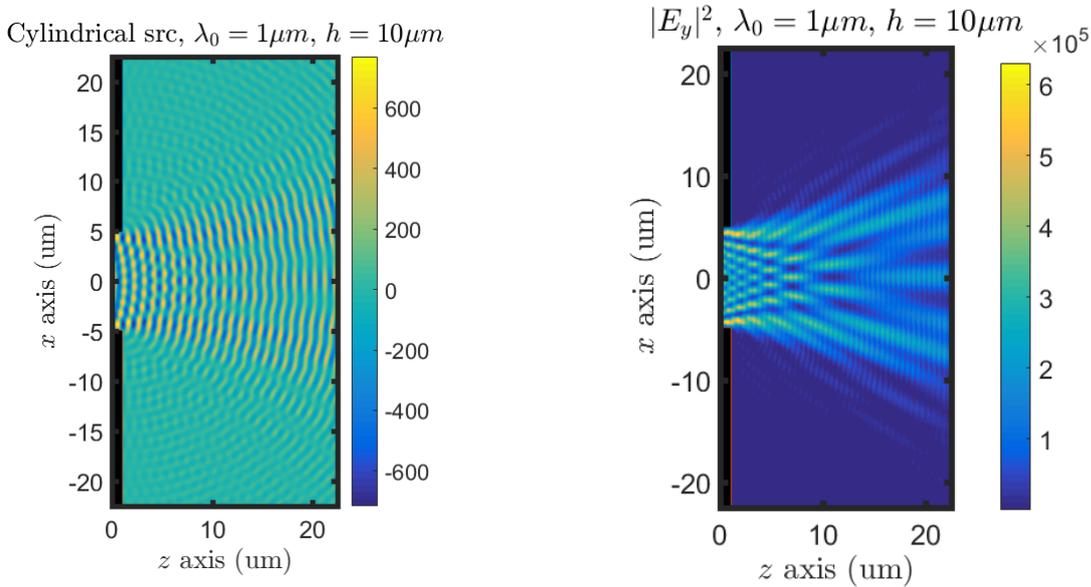
Στο μακρινό πεδίο, από τη θεωρία Fraunhofer, οι κατανομές παίρνουν τη μορφή sinc συναρτήσεων που στο κέντρο $x = 0$ εμφανίζουν τη μέγιστη ένταση. Συνεπώς, μόνο στην περιοχή κοντά στο εμποδίο παρατηρείται η απότομη αλλαγή της μορφής της κατανομής από σημείο σε σημείο.

3.5 Περίθλαση από περισσότερες πηγές

Μπορούμε να αξιοποιήσουμε την γραμμικότητα των εξ. Maxwell για να προσομοιώσουμε τη περίθλαση του πεδίου από περισσότερες από μία πηγές στο πρόβλημα μας. Θα χρησιμοποιήσουμε δύο πηγές κυλινδρικών κυμάτων για το επόμενο πρόβλημα. Έστω μία κυλινδρική πηγή με αρχή το σημείο (x_i, z_i) που έχει τη μορφή,

$$f_i^{\text{src}} = \frac{1}{\sqrt{R_i}} \exp(jk_0 n R_i), \quad (3.8)$$

όπου $R_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (z - z_i)^2}$ η ακτινική απόσταση από το κέντρο της πηγής. Η πηγή ικανοποιεί τις εξ. Maxwell, συνεπώς μπορούμε να την χρησιμοποιήσουμε με τον αλγόριθμο TF/SF. Η μόνη επιπλέον προσοχή που χρειάζεται η συγκεκριμένη πηγή, σε αντίθεση με τα επίπεδα κύματα, είναι πως η περιοχή SF που θα χρησιμοποιήσουμε θα πρέπει να περιβάλλει το κέντρο (x_i, z_i) με μία κλειστή καμπύλη.

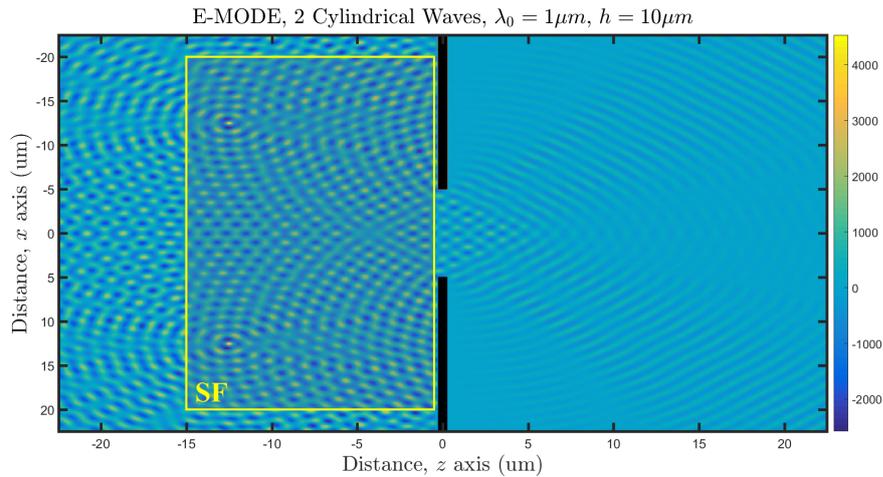


Σχήμα 3.17: Το πεδίο στο $z > 0$ που δημιουργείται από μία κυλινδρική πηγή τοποθετημένη πάνω στον άξονα z στο σημείο $z_1 = -12.5\lambda_0$.

Ας υποθέσουμε τώρα πως έχουμε N πηγές στο πρόβλημα μας. Για κάθε μία f_i^{src} λύνουμε τη σχέση,

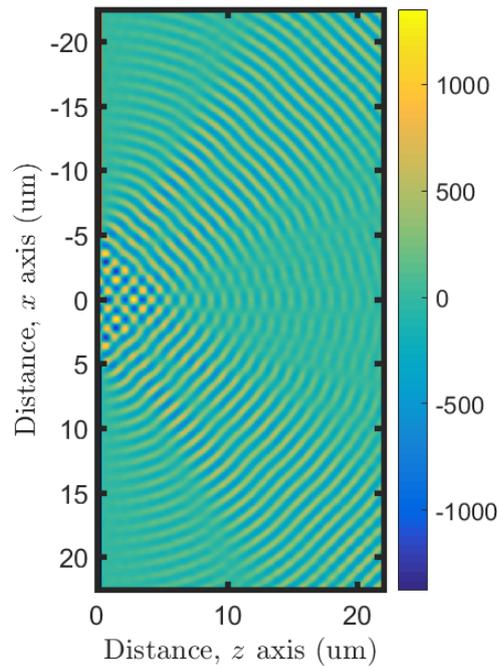
$$b_i = (\mathbf{QA} - \mathbf{AQ}) f_i^{\text{src}}, \quad b_{\text{overall}} = b_1 + b_2 + \dots + b_N = \sum_{i=1}^N b_i, \quad (3.9)$$

και βρίσκουμε το διάνυσμα στήλης b_i . Τελικά, μπορούμε να αθροίσουμε όλα τα b_i και να φτιάξουμε το διάνυσμα b_{overall} το οποίο θα μας δώσει την λύση του συνολικού προβλήματος μέσω της σχέσης $x = \mathbf{A}^{-1} b_{\text{overall}}$. Παρακάτω απεικονίζεται η περίθλαση από δύο κυλινδρικά κύματα, που βρίσκονται στα σημεία $z_1 = z_2 = -12.5\mu\text{m}$ και $x_1 = -x_2 = 12.5\mu\text{m}$ όταν συναντούν ένα χρυσό εμπόδιο με μία οπή διάστασης $h = 10\lambda_0$.



Σχήμα 3.18: Η διάταξη του προβλήματος περίθλασης από δύο πηγές κυλινδρικών κυμάτων. Η περιοχή SF καλύπτει και τα δύο κέντρα των πηγών, ενώ η δεξιά πλευρά του τετραπλεύρου βλέπει ολόκληρη τη σχισμή του εμποδίου.

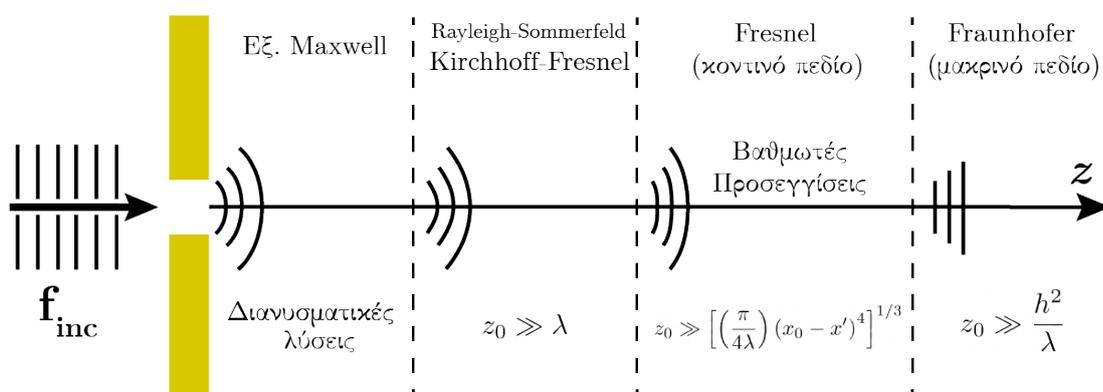
Cylindrical wave sources , $\lambda_0 = 1\mu m$, $h = 10\mu m$



Σχήμα 3.19: Ο χώρος $z > 0$ δεξιά του εμποδίου για το πρόβλημα της περίθλασης από δύο πηγές κυλινδρικών κυμάτων. Οι δύο κύριες διευθύνσεις όπου εμφανίζεται η μέγιστη διάδοση της ενέργειας, είναι αυτές όπου οι πηγές f_{src}^i έχουν ανεμπόδιστο οπτικό μονοπάτι (Line of Sight) με τον χώρο δεξιά του εμποδίου. Λόγω της περίθλασης, θα έχουμε στην κοντινή περιοχή και δευτερεύοντες λοβούς ακτινοβολίας οι οποίοι όσο μετακινούμαστε μακρύτερα από το εμπόδιο, προς τη μακρινή περιοχή, θα εξαφανίζονται λόγω καταστροφικών συμβολών με τα ανακλώμενα κύματα.

3.6 Μέγιστη απόσταση προσομοίωσης

Σύμφωνα με τη βαθμωτή θεωρία της περίθλασης μπορούμε να χωρίσουμε τον χώρο $z > 0$ σε τέσσερις περιοχές, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.20. Σε απόσταση πολύ μεγαλύτερη του ενός μήκους κύματος, τα βαθμωτά ολοκληρώματα Kirchhoff-Fresnel και Rayleigh-Sommerfeld χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό του βαθμωτού πεδίου. Ύστερα, ορίζεται το **κοντικό πεδίο** (near field) της περιοχής Fresnel² και το μακρινό πεδίο της περιοχής Fraunhofer. Οι δύο τελευταίες περιοχές προκύπτουν από τις προσεγγίσεις Fresnel & Fraunhofer (αντίστοιχα) πάνω στο ολοκλήρωμα Kirchhoff-Fresnel, όπως αναλύεται εκτενώς στη βιβλιογραφία [25],[26],[27].



Σχήμα 3.20: Οι περιοχές που χωρίζουμε το πρόβλημα της βαθμωτής περίθλασης. Το σημείο παρατήρησης είναι το $P(x_0, z_0)$, ενώ το εμπόδιο είναι πάνω στον άξονα x στο $z = 0$ με τη σχισμή $x' \in [-h/2, h/2]$. Εικόνα προσαρμοσμένη από [28].

Στο Σχήμα 3.20 θεωρούμε $P(x_0, z_0)$ το σημείο παρατήρησης ενώ το εμπόδιο είναι τοποθετημένο παράλληλα με τον άξονα x στο $z = 0$ και το άνοιγμα ανήκει στο διάστημα $x' \in [-h/2, h/2]$. Για τον ορισμό των περιοχών του κοντινού και μακρινού πεδίου περίθλασης ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες:

1. Συνθήκη *Fresnel* περιοχής: $z_0 \gg \left[\left(\frac{\pi}{4\lambda} \right) (x_0 - x')^4 \right]^{1/3} = \left(\frac{\pi D^4}{4\lambda} \right)^{1/3}$
2. Συνθήκη *Fraunhofer* περιοχής: $z_0 \gg \frac{h^2}{\lambda}$

Με D συμβολίζουμε την μέγιστη απόσταση μεταξύ του σημείου παρατήρησης x_0 και του ανοίγματος x' . Σε μία απλή εφαρμογή περίθλασης από σχισμή $h = 10 \mu\text{m}$ και μήκος κύματος $\lambda = 1 \mu\text{m}$, αν θέλουμε να παρατηρήσουμε την κατανομή στο $x_0 = 5 \mu\text{m}$ τότε

²Στην θεωρία κεραιών διακρίνεται περαιτέρω το κοντινό πεδίο στο *αντιδρόν κοντινό πεδίο* και το ακτινοβολούμενο κοντινό πεδίο Fresnel. Στη δική μας περίπτωση, το κοντικό πεδίο Fresnel ορίζεται ως η απόσταση z_0 κατά την οποία το ολοκλήρωμα Fresnel μπορεί να προβλέψει σε ικανοποιητικό βαθμό τη κατανομή του πεδίου [24].

θα έχουμε ότι,

$$z_0 \gg 20\mu m \quad (\text{κοντινό πεδίο}), \quad (3.10)$$

$$z_0 \gg 100\mu m \quad (\text{μακρινό πεδίο}).$$

Θεωρώντας, για ευκολία, τον χώρο δεξιά του εμποδίου να αποτελείται από αέρα με $n_3 = 1$, τότε για να φτάσουμε μέχρι τη περιοχή Fresnel χρειαζόμαστε σύμφωνα με τη σχέση (3.1),

$$S_x \times S_z = 400 \times 400 = 160,000 \text{ Yee cells},$$

εξαιρουμένων των UPML. Αντίστοιχα υπολογίσουμε ότι για το μακρινό πεδίο θα χρειαζόμαστε τουλάχιστον,

$$S_x \times S_z = 2000 \times 400 = 800,000 \text{ Yee cells},$$

όπου $\Delta x, \Delta z = \lambda/20$ και θεωρήσαμε ίδιο N_x και στις δύο περιπτώσεις. Αν προσθέσουμε και τον χώρο αριστερά του εμποδίου, που χρησιμοποιήσαμε για τον ορισμό της πηγής, παρατηρούμε ότι το πρόβλημα μας απαιτεί συνολικά πάρα πολλούς υπολογισμούς και τεράστιους πίνακες.

Όσον αφορά το πεδίο κοντά στο εμπόδιο, το πρόγραμμα μας παρέχει την διανυσματική λύση όλων των πεδιακών συνιστωσών του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου. Η ακρίβεια των υπολογισμών ελέγχεται από τα $\Delta x, \Delta z$. Όμως, λόγω του περιορισμένου υπολογιστικού χώρου, του υπερβολικού πλήθους πράξεων και της πεπερασμένης χωρητικότητας της μνήμης, είναι τελικά δύσκολο να υπολογίσουμε με το πρόγραμμα το μακρινό πεδίο. Για να αντιμετωπίσουμε αυτό το πρόβλημα θα αξιοποιήσουμε την τεχνική ανάλυσης του πεδίου σε επίπεδα κύματα (Vector Plane Wave Spectrum) τα οποία μπορούμε εύκολα να βρούμε και χρησιμοποιώντας τα να υπολογίσουμε το πεδίο στη μακρινή περιοχή. Η μέθοδος αυτή αναλύεται στο επόμενο κεφάλαιο.

Σημειώνουμε, ότι το πρόγραμμα μπορεί θεωρητικά να έχει όσο μεγάλη ανάλυση επιθυμεί ο χρήστης. Όπως αναφέραμε προηγουμένως, η ανάλυση 1000×1000 επιλέχθηκε επειδή προσφέρει αρκετή ακρίβεια και μπορεί να τρέξει στους περισσότερους σύγχρονους υπολογιστές. Επίσης, στο κέντρο ακριβώς του υπολογιστικού χώρου ($N_z/2$) είναι τοποθετημένο το εμπόδιο μας. Φυσικά, το εμπόδιο είναι ελεύθερο να τοποθετηθεί και πιο αριστερά ώστε να υπάρχει όσο το δυνατόν μεγαλύτερος χώρος δεξιά του εμποδίου. Με αυτόν τον τρόπο όμως η πηγή (που ενδεχομένως να έχει διαφορετική μορφή από επίπεδο κύμα) είναι αρκετά περιορισμένη. Η τοποθέτηση του εμποδίου στο κέντρο έγινε για λόγους συμμετρίας, όπου γίνεται ευκολότερη η ανάπτυξη του κώδικα.

Κεφάλαιο 4

Φασματική ανάλυση του Η/Μ πεδίου

Όπως είδαμε από τις προσομοιώσεις του προηγούμενου κεφαλαίου, ο περιορισμένος χώρος $N_x \times N_z$ δεν είναι αρκετός για τον υπολογισμό του μακρινού πεδίου (far field). Στη καλύτερη περίπτωση μπορούμε να παρατηρήσουμε μόνο την κοντινή περιοχή της περιθλάσης. Για να υπολογίσουμε τη κατανομή του πεδίου στη μακρινή περιοχή Fraunhofer, θα εφαρμόσουμε τη τεχνική της ανάλυσης σε **φάσμα επίπεδων κυμάτων** (Plane Wave Spectrum) που χρησιμοποιείται αρκετά σε πολλούς κλάδους της φυσικής και μηχανικής. Στην συγκεκριμένη περίπτωση, με σκοπό τη διανυσματική μελέτη του προβλήματος, θα επεκτείνουμε το PWS στο **φάσμα διανυσματικών επίπεδων κυμάτων** (Vectorial Plane Wave Spectrum) που λαμβάνει υπόψιν και τις πολώσεις των κυμάτων.

4.1 Φάσμα επίπεδων κυμάτων (PWS)

Η PWS μέθοδος (γνωστή και ως *angular spectrum method*) μας επιτρέπει να υπολογίσουμε την μορφή ενός μονοχρωματικού κύματος στο μακρινό πεδίο, όταν είναι ήδη γνωστό το πεδίο σε μία τομή $z = z_0$ του χώρου (*cross section*) [29]. Ο χώρος μας είναι ιστροπικός και ομογενής. Οποιοδήποτε μονοχρωματικό κύμα μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα άθροισμα επιπέδων κυμάτων που διαδίδονται σε διαφορετικές κατευθύνσεις με διαφορετικά πλάτη, αλλά έχουν ίδια συχνότητα [30]. Με τη βοήθεια του προγράμματος μας μπορούμε να βρούμε την κατανομή του πεδίου $U(x, z)$ σε ένα σημείο z_0 . Το μιγαδικό αυτό πεδίο μπορούμε να το αναλύσουμε χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό Fourier σε ένα άθροισμα επιπέδων κυμάτων, όπου το καθένα διαδίδεται ανεξάρτητα από τα άλλα. Τελικά, μπορούμε να υπολογίσουμε το μακρινό πεδίο απλώς παίρνοντας τη συνεισφορά όλων αυτών των επιπέδων κυμάτων στο μακρινό σημείο [31].

Έστω $U(x, z_0)$ η κατανομή του πεδίου που έχουμε υπολογίσει στο σημείο z_0 στον υπολογιστικό μας χώρο. Εμείς ψάχνουμε να βρούμε το πεδίο $U(x, z)$ για $z \gg z_0$. Ο μονοδιάστατος μετασχηματισμός Fourier του πεδίου $U(x, z)$ ως προς τη μεταβλητή x

με χωρική συχνότητα $k_x = 2\pi f_x$ είναι

$$U(x, z) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{U}\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{U}(k_x; z) e^{-jk_x x} dk_x. \quad (4.1)$$

Η ολοκληρωτέα ποσότητα της σχέσης (4.1) μας αποδεικνύει ότι το πεδίο U μπορεί να εκφραστεί ως ένα άπειρο πλήθος επίπεδων κυμάτων, το κάθε ένα με πλάτος $\hat{U}(k_x; z)$ που υπολογίζεται από τον αντίστροφο Μ/Σ Fourier:

$$\hat{U}(k_x; z) = \mathcal{F}\{U\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U(x', z) e^{jk_x x'} dx'. \quad (4.2)$$

Είναι σημαντικό να αναφέρουμε πως τα πρόσημα στα εκθετικά επιλέχθηκαν με τέτοιο τρόπο, ώστε ο εμπρόσθιος Μ/Σ (εξ. 4.1) να αναπαριστά επίπεδα κύματα που διαδίδονται προς τα θετικά x, z . Για περισσότερα επάνω σε αυτή τη σύμβαση που επιλέξαμε παραπέμπουμε στις σημειώσεις του *T. Kaiser* [32]. Το πεδίο $U(x, z)$ στο μακρινό πεδίο δεν είναι γνωστό ακόμη, αλλά πρέπει αναγκαστικά να ικανοποιεί την κυματική εξίσωση Helmholtz. Συνεπώς, αν αντικαταστήσουμε στην εξίσωση Helmholtz την σχέση (4.1), μπορούμε να βρούμε μία έκφραση για τους όρους $\hat{U}(k_x; z)$,

$$\nabla^2 U(x, z) + k^2 U(x, z) = 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{d^2 \hat{U}(k_x; z)}{dz^2} + \underbrace{(k^2 - k_x^2)}_{k_z^2} \hat{U}(k_x; z) \right] dk_x = 0$$

και θεωρώντας ως αρχική τιμή, την ήδη γνωστή $\hat{U}(k_x; z_0)$, η λύση¹ είναι τελικά,

$$\hat{U}(k_x; z) = \hat{U}(k_x; z_0) e^{-jk_z(z-z_0)}, \quad (4.3)$$

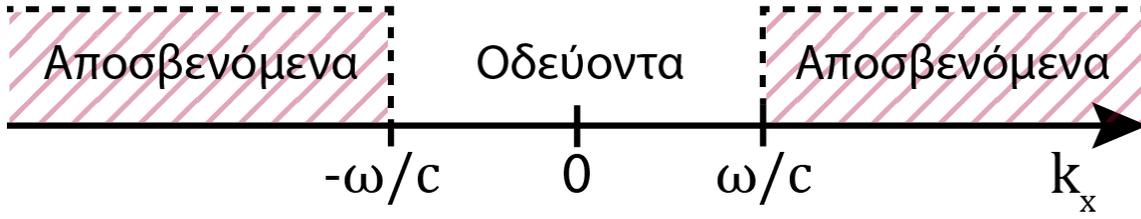
όπου φυσικά για τον κυματαριθμός k_z ισχύει ότι:

$$k_z = \begin{cases} \sqrt{k^2 - k_x^2}, & \text{όταν } k_x^2 \leq k^2, \\ -j\sqrt{k_x^2 - k^2}, & \text{όταν } k_x^2 > k^2. \end{cases} \quad (4.4)$$

Στη δεύτερη περίπτωση όπου ο κυματαριθμός k_z είναι φανταστικός, έχουμε αποσβενόμενα (*evanescent*) κύματα που δεν μεταφέρουν ενέργεια. Τα πρόσημα επιλέγονται έτσι ώστε ο κυματαριθμός να περιγράφει διάδοση πάντα προς τα θετικά z . Τώρα μπορούμε να αντικαταστήσουμε τη λύση των πλατών $\hat{U}(k_x; z)$ στην αρχική μας σχέση (4.1), οπότε αυτή παίρνει την παρακάτω μορφή,

$$U(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{U}(k_x; z_0) e^{-jk_x x} e^{-jk_z(z-z_0)} dk_x, \quad (4.5)$$

¹Κανονικά στον εκθέτη της λύσης θα έχουμε \pm διότι υπάρχουν και κύματα που διαδίδονται στο $z < 0$ ημιχώριο, όμως εμείς θα θεωρήσουμε μόνο τα $z > 0$.



Σχήμα 4.1: Το μιγαδικό πεδίο αναλύεται σε οδεύοντα κύματα της ζώνης συχνοτήτων $|k_x| < \omega/c$ και σε αποσβενόμενα κύματα στις υψηλότερες ζώνες συχνοτήτων.

Η σχέση (4.5) αποδεικνύει πως μπορούμε να υπολογίσουμε το πεδίο U στο σημείο (x, z) , αν ξεκινήσουμε από το φάσμα επίπεδων κυμάτων του πεδίου στο z_0 , τα διαδώσουμε απόσταση $(z - z_0)$ στον χώρο πολλαπλασιάζοντας με τον παράγοντα $e^{-jk(z-z_0)}$ και στο τέλος πάρουμε το ολοκλήρωμα όλων αυτών². Είναι καλύτερο να γράψουμε την σχέση των PWS χρησιμοποιώντας τον τελεστή \mathcal{F} διότι μας προσφέρει μία καλύτερη οπτική του προβλήματος και ταυτόχρονα απλοποιείται αρκετά ώστε να τη χρησιμοποιήσουμε στο Matlab.

$$\hat{U}(k_x; z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} U(x', z_0) e^{jk_x x'} dx' = \mathcal{F}\{U(x, z_0)\},$$

$$U(x, z_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{U}(k_x; z_0) e^{-jk_x x} dk_x,$$

και για να υπολογίσουμε το πεδίο στο z , παίρνουμε τον Μ/Σ Fourier και αντικαθιστούμε με τη λύση (4.3),

$$\begin{aligned} U(x, z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\hat{U}(k_x; z_0) e^{-jk_z(z-z_0)}}_{\hat{U}(k_x; z)} e^{-jk_x x} dk_x \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}\{U(x, z_0)\} e^{-jk_z(z-z_0)} e^{-jk_x x} dk_x \\ &= \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{U(x, z_0)\} e^{-jk_z(z-z_0)}\}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε τον κυματαριθμό k_z με τη σχέση (4.4) που έχουμε βρει και καταλήγουμε στη τελική σχέση,

$$U(x, z) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{U(x, z_0)\} e^{-j(z-z_0)\sqrt{(\frac{\omega}{c})^2 - k_x^2}}\}. \quad (4.7)$$

Η συνάρτηση με πράσινο χρώμα ονομάζεται *propagator* του ανάστροφου χώρου ή *optical transfer function* (OTF) του ελευθέρου χώρου [33]. Κάθε μιγαδικό πεδίο επομένως, αποτελείται από ένα μεγάλο **άθροισμα οδεύοντων και αποσβενόμενων κυμάτων**. Παρατηρούμε επίσης πως το φάσμα των επίπεδων κυμάτων που καταλήγουμε να παίρνουμε

²Λόγω της γραμμικότητας της εξίσωσης Helmholtz μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα επαλληλίας.

με τη μέθοδο PWS είναι *περιορισμένο*, αφού τα αποσβενόμενα κύματα με εκθέτη,

$$e^{-(z-z_0)\sqrt{|(\omega/c)^2-k_x^2|}},$$

θα εξαφανίζονται μέχρι το σημείο παρατήρησης z που μας ενδιαφέρει. Ως προς την τελική εικόνα που παίρνουμε, οι μεγαλύτερες χωρικές συχνότητες k_x αντιστοιχούν στις higher-resolution συχνότητες της εικόνας μας. Το γεγονός όμως, ότι αυτές οι συχνότητες δεν διαδίδονται αλλά αποσβένουν, σημαίνει πως θα χάνεται πληροφορία και θα έχουμε χειρότερη ανάλυση σαν αποτέλεσμα. Το μέγεθος της ζώνης οδεύοντων κυμάτων εξαρτάται από το λ^{-1} και όσο μικρότερο μήκος κύματος χρησιμοποιούμε, τόσο καλύτερη ανάλυση παίρνουμε με τη μέθοδο αυτή.

Εναλλακτικά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα *πολλ/σμού* \leftrightarrow *συνέλιξης* του Μ/Σ Fourier και να γράψουμε ότι,

$$U(x, z) = U(x, z_0) * h(x, z), \quad (4.8)$$

$$\text{όπου } h(x, z) = \mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-j(z-z_0)\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2-k_x^2}}\right\}. \quad (4.9)$$

Δηλαδή, το πεδίο μας είναι η συνέλιξη του γνωστού πεδίου στο σημείο z_0 με τον αντίστροφο Μ/Σ Fourier του *propagator* [34].

4.2 Εφαρμογή του αλγορίθμου Fast Fourier Transform

Από το πρόγραμμα έχουμε αποκτήσει μία συνάρτηση κατανομής $f(x)$ (για το ηλεκτρικό ή μαγνητικό πεδίο) που είναι το πεδίο υπολογισμένο σε όλον τον x άξονα στο σημείο $z = z_0$. Οι πεπερασμένες διαφορές μας δίνουν μία τιμή σε κάθε Yee-cell, οπότε η κατανομή μας δεν έχει συνεχή μορφή αλλά διακριτή $f(n \Delta x)$, όπου Δx το βήμα μας μεταξύ δύο διαδοχικών τιμών. Μπορούμε να αξιοποιήσουμε τον αλγόριθμο FFT για να υπολογίσουμε τα ολοκληρώματα της προηγούμενης ενότητας και να πάρουμε το περιθλώμενο πεδίο στο μακρινό πεδίο. Παρακάτω δίνουμε τον ορισμό του διακριτού Μ/Σ Fourier (DFT).

$$\begin{aligned} X_k &= \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot e^{-j2\pi \frac{k}{N}n}, \quad (k = 0, \dots, N-1) \\ &= x_0 + x_1 e^{-j2\pi \frac{k}{N}} + \dots + x_{N-1} e^{-j2\pi \frac{k}{N}(N-1)} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Η κατανομή μας είναι μη-μηδενική μόνο σε ένα πεπερασμένο διάστημα, άρα θα χρησιμοποιήσουμε την DFT θεωρία χρονικά (ή χωρικά) περιορισμένων σημάτων [35]. Ο N -point αντίστροφος DFT για $k \in \{0, \dots, N-1\}$ ορίζεται ως

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{j2\pi \frac{k}{N}n}, & n = 0, \dots, N-1 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (4.11)$$

Ο ορισμός αυτός έχει νόημα όταν το πλήθος τιμών L που γνωρίζουμε για το πεδίο, είναι μικρότερο από το πλήθος χωρικών συχνοτήτων N που χρειαζόμαστε για να το υπολογίσουμε. Οι δύο αυτές ποσότητες είναι διαφορετικές επειδή (όπως θα δούμε στη συνέχεια) θα χρειαστεί να προσθέσουμε κάποια μηδενικά αμφοτέρα της κατανομής για να πάρουμε καλύτερα αποτελέσματα στο τέλος. Το $L = S_x$ είναι ο συνολικός αριθμός δειγμάτων³. Συνήθως είναι βολικό ο αριθμός N να είναι της μορφής $N = 2^p$ για p ακέραιο, αλλά στο Matlab αυτό δεν είναι απαραίτητο.

Ο αλγόριθμος FFT δίνει ως αποτέλεσμα έναν πίνακα που έχει ίδιο μήκος με την είσοδο. Επίσης όσο περισσότερα δείγματα έχουμε πάρει κατά τη δειγματοληψία μας, τόσο μεγαλύτερη ακρίβεια θα έχουμε στο φάσμα συχνοτήτων. Σημειώνουμε πως στο Matlab οι δείκτες των πινάκων ξεκινάνε από τη μονάδα, ενώ για να απεικονίζεται το φάσμα συμμετρικά ως προς τη μηδενική συχνότητα, χρησιμοποιούμε την εντολή `fftshift()`.

Το φάσμα συχνοτήτων (ή χώρος Fourier) είναι ένας διακριτός χώρος, που αποτελείται από επίπεδα κύματα που διαδίδονται προς τη διεύθυνση $\hat{n} = \left(\frac{k_x}{k}, \frac{k_z}{k} \right)$, διαφορετική για το καθένα. Οι κυματαριθμοί k_x, k_z του κάθε επίπεδου κύματος υπολογίζονται από τις σχέσεις :

$$k_x = \frac{2\pi}{L_x} m, \quad k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2}, \quad (4.12)$$

όπου $m = -N/2 : N/2 - 1$. Το βήμα μεταξύ διαδοχικών συχνοτήτων είναι $\delta = L_x/N$. Συνεπώς, θα έχουμε περισσότερη ακρίβεια στο τελικό σχήμα, όσο περισσότερα δείγματα N έχουμε στη διάθεση μας. Μπορούμε να γράψουμε τις προηγούμενες σχέσεις για το $f(x)$ σύμφωνα με τις σχέσεις (4.12) ως εξής:

$$f(n \Delta x) \xrightarrow{\text{Matrix}} f[n] = \frac{1}{N} \sum_{m=-N/2}^{N/2-1} F[m] e^{-j \frac{2\pi}{N} mn}, \quad (4.13)$$

$$F[m] = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} f[n] e^{j \frac{2\pi}{N} mn}, \quad (4.14)$$

όπου με τις αγκύλες $[\cdot]$ δείχνουμε ότι τα $f[n], F[m]$ αντιστοιχούν σε πίνακες που αποθηκεύονται στη μνήμη του υπολογιστή. Τα πρόσημα των εκθετικών είναι ίδια με αυτά που χρησιμοποιεί το Matlab. Οι αθροίσεις πηγαινούν από το $-N/2$ έως $N/2 - 1$ επειδή στη κατανομή μας θεωρήσαμε ως $x = 0$ το κεντρικό σημείο⁴. Το Matlab μπορεί να υπολογίσει εύκολα αυτούς τους μετασχηματισμούς με τις εντολές `fft()` και `ifft()`. Αυτό που απομένει είναι να αναπτύξουμε τον πολλαπλασιασμό κάθε συνιστώσας με τη propagator συνάρτηση $\exp[jk_z(z - z_0)]$. Έχοντας υπολογίσει την $F[m]$ πολλαπλασιάζουμε κάθε

³Υπενθυμίζουμε πως S_x είναι το πλήθος των Yee-cells στην x διεύθυνση όταν δεν λαμβάνουμε υπόψη τα UPML (σχέση 3.1)

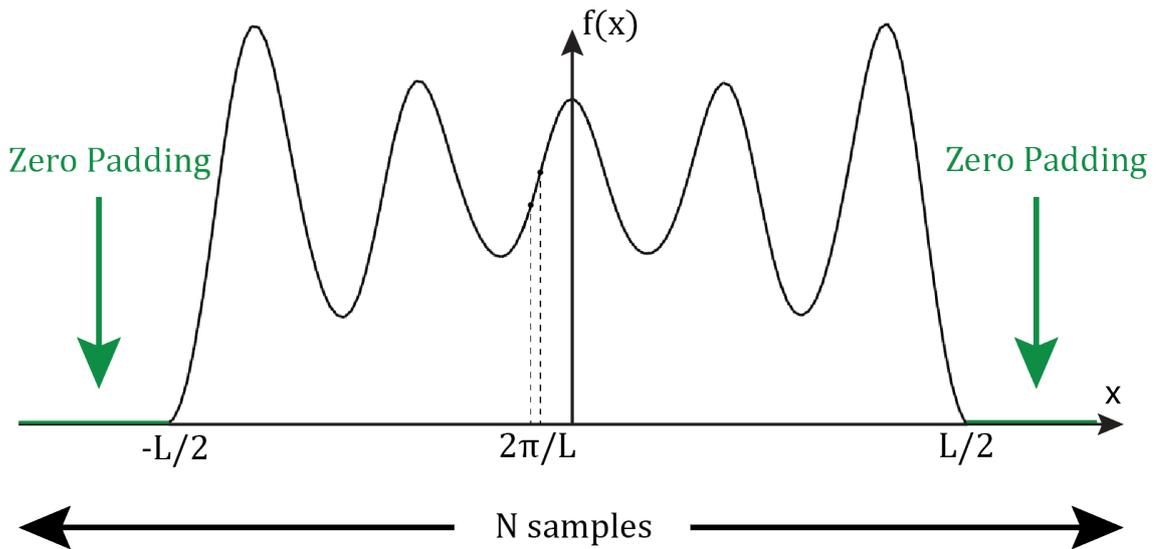
⁴Οι δείκτες στους πίνακες στο Matlab δεν παίρνουν αρνητικές τιμές οπότε πρακτικά έχουμε άθροισμα από το 1 έως το N και μετά με `fftshift()` αλλάζουν οι θέσεις των τιμών.

επίπεδο κύμα $F[m]$ με τη δική του εκθετική συνάρτηση. Το αποτέλεσμα αυτού συμβολίζεται με $F_p[m]$ και για ευκολία μπορούμε να αγνοήσουμε τις συχνότητες των αποσβενόμενων κυμάτων. Αυτό προκύπτει από το γεγονός πως για αρκετά μεγάλα z τα αποσβενόμενα κύματα θα έχουν εξαφανιστεί⁵.

$$F_p[m] = \sum_{k_{xm}^2 < k^2} F[m] e^{j(z-z_0)\sqrt{k^2-k_{xm}^2}}, \quad (4.15)$$

Τώρα για να πάρουμε την τελική σχέση του μακρινού πεδίου στο z , αρκεί να πάρουμε τον αντίστροφο Μ/Σ Fourier της $F_p[m]$ σύμφωνα με τη σχέση (4.13).

$$U(x; z) = \frac{1}{N} \sum_{m=-N/2}^{N/2-1} F_p[m] e^{-j\frac{2\pi}{N}mx}, \quad (4.16)$$



Σχήμα 4.2: Η δειγματοληψία της κατανομής $f(x)$ από το DFT με βήμα $2\pi/L$.

Με το FFT μας δίνεται συνεπώς η δυνατότητα να υπολογίσουμε τα ολοκληρώματα των πεδίων όταν αυτά είναι δύσκολο να μας δώσουν την αναλυτική λύση του προβλήματος. Στη συνέχεια ακολουθούμε μία παρόμοια διαδικασία για τη διανυσματική μέθοδο VPWS, όπου θα φέρουμε και τη διανυσματική μορφή των πεδίων στη φασματική μορφή.

⁵Παρόμοια λειτουργία με αυτή ενός βαθυπερατό φίλτρου με συχνότητα αποκοπής $|\omega_0|$

4.3 Διανυσματικό φάσμα επίπεδων κυμάτων (VPWS)

Ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα σύμφωνα με την προηγούμενη θεωρία μπορεί να αναλυθεί σε ένα άπειρο άθροισμα επίπεδων κυμάτων, λόγω του μετασχηματισμού Fourier. Όταν όμως μας ενδιαφέρει και ο διανυσματικός χαρακτήρας του κύματος, η πόλωση του κύματος που μελετάμε, τότε θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε διανυσματικές μεθόδους στην ανάλυση μας, ενώ ταυτόχρονα παύει να ισχύει η βαθμωτή θεωρία. Για να βρούμε τη VPWS θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο PWS για κάθε συνιστώσα των πεδίων και θα τις εισάγουμε στις εξ. Maxwell [36], [37].

Έστω $\mathbf{E}(x, z)$ το ηλεκτρικό πεδίο σε κάθε σημείο του δισδιάστατου χώρου (x, z) . Θεωρούμε στον άξονα z το σημείο z_0 για το οποίο το πεδίο $\mathbf{E}(x, z_0)$ είναι γνωστό από τη προσομοίωση μας. Πάνω στην κατανομή μας μπορούμε να υπολογίσουμε τον μονοδιάστατο Μ/Σ του πεδίου κατά μήκος του x άξονα [33]:

$$\hat{\mathbf{E}}(k_x; z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}(x, z_0) e^{jk_x x} dx, \quad (4.17)$$

$$\mathbf{E}(x, z_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\mathbf{E}}(k_x; z_0) e^{-jk_x x} dk_x, \quad (4.18)$$

όπου φυσικά το πεδίο αποτελείται από τις βαθμωτές συνιστώσες $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$ και αντίστοιχα για τον Μ/Σ Fourier $\hat{\mathbf{E}} = (\hat{E}_x, \hat{E}_y, \hat{E}_z)$. Αν θεωρήσουμε ομογενή, ισοτροπικό, γραμμικό και χωρίς φαινόμενα διασποράς χώρο, με μηδενικές πηγές, τότε λύνοντας την εξίσωση Helmholtz (6.3) για αρμονικά κύματα συχνότητας ω παίρνουμε ότι οι συντελεστές Fourier θα έχουν τη μορφή:

$$\hat{\mathbf{E}}(k_x; z) = \hat{\mathbf{E}}(k_x; z_0) e^{-jk_z(z-z_0)}, \quad (4.19)$$

όταν για το k_z ισχύουν οι ίδιες συνθήκες (4.3) του PWS. Συνδυάζοντας τις (4.18, 4.19) έχουμε την *vector angular wave spectrum* σχέση του ηλεκτρικού πεδίου,

$$\mathbf{E}(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\mathbf{E}}(k_x; z_0) e^{-jk_x x} \underbrace{e^{-j(z-z_0)\sqrt{k^2-k_x^2}}}_{\text{Propagator}} dk_x. \quad (4.20)$$

Μέχρι τώρα δεν έχουμε κάνει κάτι διαφορετικό από την εφαρμογή της PWS σχέσης σε κάθε συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου. Για να εμφανιστεί η διανυσματική φύση των πεδίων, θα πρέπει να ικανοποιούνται όλες οι εξισώσεις του Maxwell. Το μαγνητικό πεδίο $\mathbf{H}(x, z)$ θα περιγράφεται από μία ίδια ακριβώς σχέση:

$$\mathbf{H}(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\mathbf{H}}(k_x; z_0) e^{-jk_x x} e^{-j(z-z_0)\sqrt{k^2-k_x^2}} dk_x. \quad (4.21)$$

Χρησιμοποιούμε την εξίσωση περιστροφής, $\mathbf{H} = (-jk_0 Z)^{-1} (\nabla \times \mathbf{E})$, και παρατηρούμε πως συντελεστές Fourier $\hat{\mathbf{E}}, \hat{\mathbf{H}}$ θα συνδέονται μεταξύ τους με τις παρακάτω σχέσεις:

$$-jk_0 Z \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\mathbf{H}}(k_x; z) e^{-jk_x x} dk_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \nabla \times [\hat{\mathbf{E}}(k_x; z) e^{-jk_x x}] dk_x. \quad (4.22)$$

Περνάμε τον τελεστή $(\nabla \times)$ μέσα στην ολοκλήρωση και τότε μπορούμε να μελετήσουμε το πρόβλημα στον φασματικό χώρο k_x όπου βλέπουμε ότι,

$$\hat{\mathbf{H}} = \frac{j e^{j k_x x}}{k_0 Z} \nabla \times (\hat{\mathbf{E}} e^{-j k_x x}) \Rightarrow \begin{cases} \hat{H}_x(k_x; z_0) = Z^{-1} \left(-\frac{k_z}{k} \hat{E}_y \right) \\ \hat{H}_y(k_x; z_0) = Z^{-1} \left(\frac{k_z}{k} \hat{E}_x - \frac{k_x}{k} \hat{E}_z \right) \\ \hat{H}_z(k_x; z_0) = Z^{-1} \left(\frac{k_x}{k} \hat{E}_y \right) \end{cases} \quad (4.23)$$

Οι σχέσεις που έχουμε βρεί για τα $\hat{\mathbf{E}}, \hat{\mathbf{H}}$ ικανοποιούν την εξίσωση Helmholtz, ωστόσο δεν είναι απαραίτητα λύσεις του Η/Μ προβλήματος γιατί πρέπει να ικανοποιούνται και οι εξισώσεις αποκλίσεων $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ και $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x, z) = e^{-j[k_x x + k_z(z-z_0)]}$ και τότε μπορούμε να δούμε για τις εξισώσεις απόκλισης των πεδίων ότι,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot [\hat{\mathbf{E}}(k_x; z_0) f(x, z)] &= \frac{\partial f(x, z)}{\partial x} \hat{E}_x(k_x; z_0) + \frac{\partial f(x, z)}{\partial z} \hat{E}_z(k_x; z_0) \\ &= -j k_x f(x, z) \hat{E}_x(k_x; z_0) - j k_z f(x, z) \hat{E}_z(k_x; z_0) \\ &= 0 \Rightarrow \hat{E}_z(k_x; z_0) = -\frac{k_x}{k_z} \hat{E}_x(k_x; z_0) \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\nabla \cdot [\hat{\mathbf{H}}(k_x; z_0) f(x, z)] = \frac{j}{k_0 Z} \nabla \cdot \nabla \times (\hat{\mathbf{E}} e^{-j k_x x}) = 0 \quad (4.25)$$

Ξεκινώντας από τις 6 βαθμωτές συνιστώσες των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων, τελικά καταλήγουμε να χρειαζόμαστε μόνο τις E_y, H_y και μέσω αυτών υπολογίζουμε όλες τις υπόλοιπες.

$$\hat{E}_z(k_x; z_0) = -\frac{k_x}{k_z} \hat{E}_x(k_x; z_0) = -Z \left(\frac{k_x}{k} \right) \hat{H}_y(k_x; z_0), \quad (4.26)$$

$$\hat{H}_z(k_x; z_0) = -\frac{k_x}{k_z} \hat{H}_x(k_x; z_0) = Z^{-1} \left(\frac{k_x}{k} \right) \hat{E}_y(k_x; z_0). \quad (4.27)$$

Στη συνέχεια θα αναλύσουμε τα \mathbf{E}, \mathbf{H} πεδία σε **E-Mode** και **H-Mode**, όπως κάναμε και στο Κεφάλαιο 2.5 για την δισδιάστατη περίπτωση. Η **E** πόλωση θα εμφανίζει μόνο το ηλεκτρικό πεδίο στη y διεύθυνση ($H_y = 0$), ενώ στην **H** μόνο το μαγνητικό πεδίο θα είναι μη μηδενικό στη y διεύθυνση ($E_y = 0$). Η ολική λύση υπολογίζεται φυσικά από το άθροισμα των δύο πολώσεων,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^E + \mathbf{E}^H, \quad (4.28)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^E + \mathbf{H}^H. \quad (4.29)$$

Για το E-Mode το ηλεκτρικό πεδίο \mathbf{E}^E υπολογίζεται σύμφωνα με την εξίσωση (4.18) ως,

$$\mathbf{E}^E = (0, E_y, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\mathbf{y}} \hat{E}_y(k_x; z_0) e^{-j[k_x x + k_z(z-z_0)]} dk_x,$$

ενώ για το μαγνητικό πεδίο \mathbf{H}^E ισχύει,

$$\mathbf{H}^E = (H_x, 0, H_z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\hat{H}_x(k_x; z_0) \hat{\mathbf{x}} + \hat{H}_z(k_x; z_0) \hat{\mathbf{z}} \right] e^{-j[k_x x + k_z(z-z_0)]} dk_x \quad (4.30)$$

$$= \frac{1}{Z} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[-\frac{k_z}{k} \hat{\mathbf{x}} + \frac{k_x}{k} \hat{\mathbf{z}} \right] \hat{E}_y(k_x; z_0) e^{-j[k_x x + k_z(z-z_0)]} dk_x. \quad (4.31)$$

Για το μαγνητικό πεδίο χρησιμοποιήσαμε τις σχέσεις (4.27) για να αντικαταστήσουμε με την E_y . Με ίδιο τρόπο για το H-mode βρίσκουμε ότι,

$$\mathbf{H}^H = (0, H_y, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\mathbf{y}} \hat{H}_y(k_x; z_0) e^{-j[k_x x + k_z(z-z_0)]} dk_x, \quad (4.32)$$

$$\mathbf{E}^H = (E_x, 0, E_z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\hat{E}_x(k_x; z_0) \hat{\mathbf{x}} + \hat{E}_z(k_x; z_0) \hat{\mathbf{z}} \right] e^{-j[k_x x + k_z(z-z_0)]} dk_x, \quad (4.33)$$

$$= -Z \int_{-\infty}^{+\infty} \left[-\frac{k_z}{k} \hat{\mathbf{x}} + \frac{k_x}{k} \hat{\mathbf{z}} \right] \hat{H}_y(k_x; z_0) e^{-j[k_x x + k_z(z-z_0)]} dk_x. \quad (4.34)$$

Καταλήξαμε λοιπόν στο γεγονός ότι εφαρμόζοντας τη PWS μέθοδο σε κάθε συνιστώσα του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, σε συνδυασμό με τις εξ. Maxwell, μπορούμε να παρουμε τη VPWS περιγραφή του πεδίου. Αναφορικά στο άρθρο [38] αναπτύσσεται η θεωρία VPWS χρησιμοποιώντας τις βαθμωτές συναρτήσεις δυναμικών Hertz για την περιγραφή του πεδίου. Έτσι, η διανυσματική θεωρία περιγράφεται πάλι από βαθμωτά ολοκληρώματα και μέσω των Hertz συναρτήσεων υπολογίζονται εύκολα οι διανυσματικές λύσεις. Αν και η μέθοδος αυτή είναι καλύτερη, αφού λειτουργεί και για κύματα με τυχαίες πολώσεις, εμείς θα υπολογίσουμε τα \mathbf{E} , \mathbf{H} πεδία απευθείας μέσω των προηγούμενων ολοκληρωμάτων. Αυτά τα ολοκληρώματα συνήθως δεν μπορούν να δώσουν μία αναλυτική λύση και γι'αυτό χρησιμοποιώντας τη μέθοδο FFT θα επιχειρήσουμε να βρούμε τη μορφή της λύσης.

4.4 Ασυμπτωτική συμπεριφορά του πεδίου

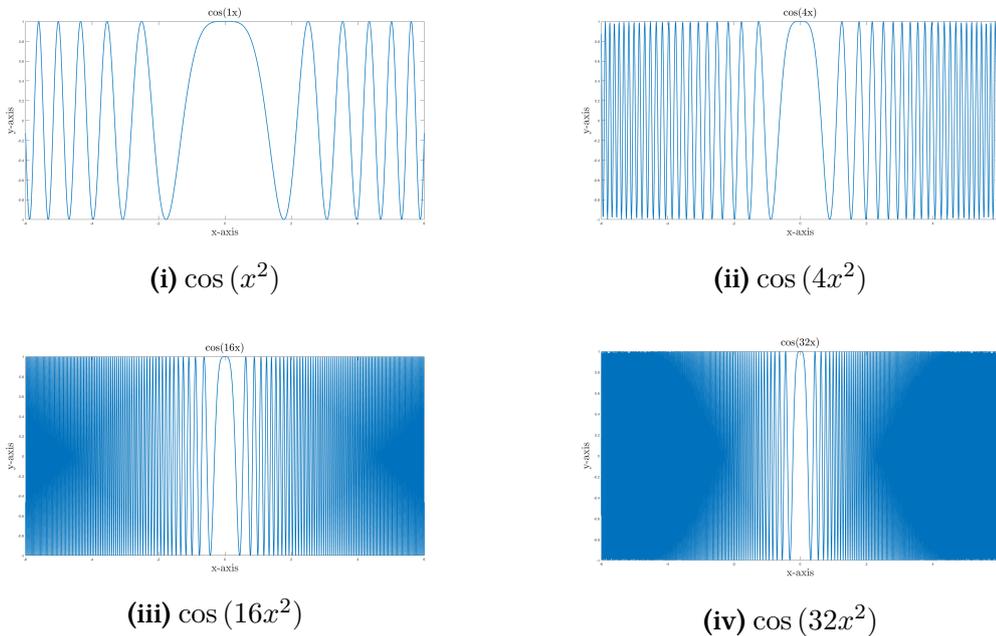
Τα ολοκληρώματα που αποδείξαμε προηγουμένως είναι τις περισσότερες φορές αδύνατον να υπολογιστούν αναλυτικά. Θέλουμε ωστόσο να μελετήσουμε τη συμπεριφορά των ολοκληρωμάτων αυτών στο ασυμπτωτικά μακρινό πεδίο ($r_\infty = \sqrt{x^2 + z^2}$), δηλαδή σε "άπειρη" απόσταση μακριά από το εμπόδιο.

$$\mathbf{E}(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\mathbf{E}}(k_x; z_0) e^{-jk_x x} e^{-j(z-z_0)\sqrt{k^2 - k_x^2}} dk_x$$

Για να μελετήσουμε αυτό το ολοκλήρωμα ασυμπτωτικά, θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της στάσιμης φάσης (method of stationary phase) [39]. Παρατηρώντας ένα ολοκλήρωμα της μορφής

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) e^{f(x)} dx,$$

όπου $g(x)$ είναι μία πραγματική συνάρτηση και $f(x)$ μία φανταστική. Ο όρος $g(x)$ αποτελεί τον διαμορφωτή πλάτους του ταλαντούμενου εκθετικού όρου $e^{f(x)}$. Όταν όμως το k γίνεται πολύ μεγάλο, τότε θα έχουμε πολύ γρήγορες ταλαντώσεις και, αγνοώντας την επιρροή του $g(x)$, βλέπουμε πως τα θετικά μέρη του ολοκληρώματος θα αλληλοαναιρούνται με τα αρνητικά. Η μεγαλύτερη συνεισφορά της ολοκληρωτέας ποσότητας στο ολοκλήρωμα θα πηγάζει από τα στάσιμα σημεία της.



Σχήμα 4.3: Όσο αυξάνεται το όρισμα του συνημιτόνου $\cos(kx^2)$, το μέρος εκείνου που συνεισφέρει στο ολοκλήρωμα τελικά θα είναι εκεί όπου η ταλάντωση παίρνει "πλατιά" μορφή, κοντά στο $x = 0$ στη συγκεκριμένη περίπτωση. Για μία μιγαδική συνάρτηση, συνεισφορά στο ολοκλήρωμα θα έχει το σημείο όπου η φάση γίνεται σταθερή. Ασυμπτωτικά για $k \rightarrow \infty$, μόνο το στάσιμο σημείο θα δίνει κάποια τιμή στο ολοκλήρωμα, ενώ για οποιαδήποτε άλλα x το ολοκλήρωμα είναι μηδέν.

Έστω πως ο εκθέτης είναι η συνάρτηση $f(k_x) = -j[k_x x + z\sqrt{(k^2 - k_x^2)}]$, όπου για ευκολία θεωρήσαμε⁶ πως $(z - z_0) \approx z$. Θα αξιοποιούμε το γεγονός πως γύρω από σαγματικά/στάσιμα σημεία της συνάρτησης $f(k_x)$, ένα ολοκλήρωμα αυτής της μορφής μπορεί να προσεγγιστεί από κατάλληλα γκαουσιανά ολοκληρώματα [40]. Η πρώτη παράγωγος της συνάρτησης f είναι,

$$\frac{df(k_x)}{dk_x} \equiv f'(k_x) = -j \left[x - \frac{zk_x}{\sqrt{(k^2 - k_x^2)}} \right]. \quad (4.35)$$

⁶Στην τελική έκφραση θα αντικαταστήσουμε το z με το $z - z_0$ για να πάρουμε το σωστό αποτέλεσμα.

Για να βρούμε τα στάσιμα σημεία, ψάχνουμε τα k_{x0} για τα οποία η 1η παράγωγος μηδενίζεται, δηλαδή

$$x - \frac{zk_{x0}}{\sqrt{(k^2 - k_{x0}^2)}} = 0 \Leftrightarrow k_{x0}^2 = \left(\frac{x}{z}\right)^2 (k^2 - k_{x0}^2),$$

$$k_{x0}^2 \left(1 + \frac{x^2}{z^2}\right) = \frac{k^2 x^2}{z^2} \Leftrightarrow k_{x0}^{\pm} = \pm \frac{kx}{\sqrt{x^2 + z^2}} = \pm \frac{kx}{r} \quad (4.36)$$

όπου $r = (z^2 + x^2)^{1/2}$ από τις πολικές συντεταγμένες. Ισχύει ότι

$$\frac{x}{r} = \frac{x}{\pm x \sqrt{1 + \frac{z^2}{x^2}}} \Rightarrow \left|\frac{x}{r}\right| \leq 1,$$

άρα το στάσιμο σημείο k_{x0} θα είναι **πάντα** μικρότερο του k , οπότε το k_z υπολογίζεται από τον πάνω κλάδο της σχέσης (4.4):

$$k_z(k_{x0}) = \sqrt{k^2 - (kx/r)^2} = \pm \frac{kz}{r} \quad (4.37)$$

Παρατηρούμε πως λόγω των "±" μπροστά από τα k_x, k_z , θα έχουμε συνολικά τέσσερις λύσεις. Στην πραγματικότητα όμως έχουμε μόνο μία λύση, ένα στάσιμο σημείο k_{x0} , διότι η γνώση των (x, z) μας παρέχει μία επιπλέον συνθήκη. Αν $P(x, z)$ είναι το σημείο παρατήρησης και r είναι η απόσταση από το κέντρο των αξόνων, τότε ορίζουμε το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{s} = (s_x, s_z) = \left(\frac{x}{r}, \frac{z}{r}\right)$ και τότε από τις σχέσεις (4.36), (4.37) έχουμε ότι,

$$\left. \begin{array}{l} \frac{k_{z0}}{k} = \frac{z}{r} = s_z \\ \frac{k_{x0}}{k} = \frac{x}{r} = s_x \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{k_{z0}}{k_{x0}} = \frac{s_z}{s_x} = \text{σταθερό} \quad (4.38)$$

Παρατηρούμε πως εφόσον $k_{z0} = k s_z$ και $k_{x0} = k s_x$, τότε το μοναδιαίο διάνυσμα \hat{s} μπορεί να γραφτεί ως

$$\hat{s} = \left(\frac{k_{x0}}{k}, \frac{k_{z0}}{k}\right), \quad (4.39)$$

και όπως θα δούμε στη συνέχεια, στο μακρινό πεδίο τελικά μόνο το επίπεδο κύμα με τη διεύθυνση $\hat{k} = \hat{s}$ θα συνεισφέρει στο τελικό αποτέλεσμα, ενώ τα υπόλοιπα επίπεδα κύματα θα συμβάλλουν καταστροφικά μεταξύ τους.

Συνεχίζουμε τη μέθοδο γράφοντας το ανάπτυγμα Taylor της $f(k_x)$ γύρω από το σταγματικό σημείο k_{x0} ,

$$f(k_x) = f_0 + \cancel{f'(k_{x0})(k_x - k_{x0})} + \frac{1}{2} f''(k_{x0})(k_x - k_{x0})^2 + \mathcal{O}(k_x - k_{x0})^3. \quad (4.40)$$

Θεωρητικά μπορούμε να κρατήσουμε όσους όρους θέλουμε από το ανάπτυγμα Taylor, ωστόσο εμείς θα σταματήσουμε μέχρι τον τετραγωνικό όρο. Για να βρούμε την τιμή

της 2ης παραγώγου στο σαγματικό σημείο χρησιμοποιούμε τις παρακάτω σχέσεις και βλέπουμε ότι,

$$\left. \begin{aligned} f''(k_x) &= j \frac{z}{k_z} \left(1 + \frac{k_x^2}{k_z^2} \right) = jz \frac{k^2}{k_z^3} \\ k_z(k_{x0}) &= \sqrt{k^2 - (k_x/r)^2} = \frac{kz}{r} \end{aligned} \right\} \Rightarrow f''(k_{x0}) = j \frac{r^3}{kz^2},$$

Αν συμβολίσουμε τη δεύτερη παράγωγο ως $Ae^{ja} = f''(k_{x0})$ όπου $A = |f''(k_{x0})|$ και $a = \arg\{f''(k_{x0})\}$, τότε για το ανάπτυγμα Taylor έχουμε ότι,

$$f(k_x) = f_0 + \frac{1}{2} A e^{ja} (k_x - k_{x0})^2. \quad (4.41)$$

Η προσεγγιστική έκφραση του ολοκληρώματος (4.20) για το μακρινό πεδίο, δίνεται σύμφωνα με τη σχέση [40]:

$$\int g(k_x) e^{f(k_x)} dk_x \approx \pm \sqrt{\frac{2\pi}{A}} g(k_{x0}) \exp(f_0) \exp\left[j \frac{\pi - a}{2}\right], \quad (4.42)$$

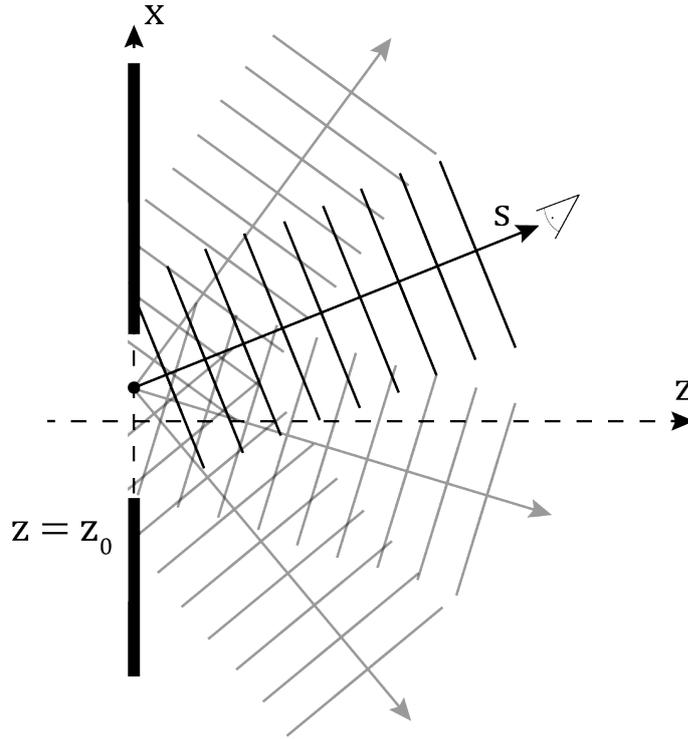
όπου το θετικό πρόσημο επιλέγεται όταν η ολοκλήρωση γίνεται πάνω στη προσανατολισμένη καμπύλη που το k_x αυξάνεται. Από τη μεριά της κυματικής θεωρίας μπορούμε να πούμε, πως η μετατροπή του ολοκληρώματος σε απλή αναζήτηση των λύσεων της ολοκληρωτέας συνάρτησης στα στάσιμα σημεία της, εξηγεί την συμπεριφορά της καταστροφικής συμβολής των κυμάτων στο μακρινό πεδίο. Αν αντικαταστήσουμε στην (4.42) έχουμε,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\infty(x, z) &\approx \sqrt{\frac{2\pi k z^2}{r^3}} \hat{\mathbf{E}}(k_{x0}; z_0) e^{-jkr} e^{j\frac{\pi}{4}} \\ &= e^{j\frac{\pi}{4}} \sqrt{2\pi k} \hat{\mathbf{E}}(k_{x0}; z_0) \frac{e^{-jkr}}{\sqrt{r}} s_z \end{aligned} \quad (4.43)$$

Από τη παραπάνω σχέση βλέπουμε πως στο μακρινό πεδίο θα υπάρχει μόνο η συνεισφορά του επίπεδου κύματος πλάτους $\hat{\mathbf{E}}(k_{s_x}; z_0)$ με διεύθυνση διάδοσης,

$$\hat{\mathbf{s}} = \left(\frac{k_{x0}}{k}, \frac{k_{z0}}{k} \right) = \left(\frac{x}{r}, \frac{z}{r} \right),$$

όπου $P(x, z)$ το σημείο παρατήρησης δεξιά της σχισμής, όπως ακριβώς φαίνεται στο σχήμα 4.4. Τα υπόλοιπα επίπεδα κύματα θα συμβάλλουν καταστροφικά μεταξύ τους. Ολόκληρο το μακρινό πεδίο τώρα υπολογίζεται πλήρως από το φάσμα επιπέδων κυμάτων του πεδίου στο σημείο z_0 , αν κάνουμε την αντικατάσταση $k_x \rightarrow k_{s_x}$. Κάθε σημείο x στην ασυμπτωτικά μακρινή περιοχή υπολογίζεται από το επίπεδο κύμα που διαδίδεται προς τη διεύθυνση ($\hat{\mathbf{s}}$). Μπορούμε να πούμε ότι το μακρινό πεδίο είναι απλώς μία συλλογή ακτίνων, όταν κάθε ακτίνα περιγράφεται από ένα επίπεδο κύμα του φάσματος του \mathbf{E} .



Σχήμα 4.4: Απεικόνιση της προσέγγισης του μακρινού πεδίου. Ένας μακρινός παρατηρητής βλέπει μόνο εκείνο το επίπεδο κύμα που διαδίδεται με διεύθυνση \hat{s} προς αυτόν, ενώ τα υπόλοιπα κύματα συμβάλλουν καταστροφικά μεταξύ τους. Εικόνα προσαρμοσμένη από: [33].

Σύμφωνα με την εξίσωση (4.43) έχουμε συσχετίσει το μακρινό πεδίο $\mathbf{E}_\infty(x, z)$ στο σημείο $P(x, z)$ με το κατάλληλο επίπεδο κύμα $\hat{\mathbf{E}}(k_{x0}; z_0)$. Μπορούμε χρησιμοποιώντας την ίδια σχέση να δούμε πως το πεδίο $\mathbf{E}(x, z)$ στον χώρο μπορεί να οριστεί μέσω του $\mathbf{E}_\infty(x, z)$. Ουσιαστικά, γνωρίζοντας το μακρινό πεδίο θα ψάξουμε τον υπολογισμό ολόκληρου του πεδίου σε όλον τον χώρο. Λύνοντας τη σχέση (4.43) ως προς τον φασματικό όρο $\hat{\mathbf{E}}(k_{x0}; z_0)$ θα έχουμε,

$$\hat{\mathbf{E}}(k_x; z_0) = \frac{e^{-j\pi/4} \sqrt{r} e^{jkr}}{\sqrt{2\pi k} s_z} \mathbf{E}_\infty(x, z) = e^{-j\pi/4} \sqrt{\frac{kr}{2\pi}} \frac{e^{jkr}}{k_z} \mathbf{E}_\infty(x, z). \quad (4.44)$$

Έστω πως γνωρίζουμε τη κατανομή του πεδίου στο μακρινό πεδίο $\mathbf{E}_\infty(x)$ σε ένα κάθετο επίπεδο στο σημείο $z \gg z_0$ και αναζητούμε μία περιγραφή του πεδίου⁷ $\mathbf{E}(x, z_0)$. Μπορούμε να πούμε ότι ο κυματαριθμός k_x κάθε επίπεδου κύματος του φάσματος VPWS στο z_0 , θα συνδέεται με ένα σημείο x του επιπέδου στο z με το οποίο ικανοποιεί τη σχέση:

$$k_x(x, z) = k \frac{x}{r} = k s_x. \quad (4.45)$$

⁷Όταν πάρουμε $z_0 = 0$ τότε το πεδίο $\mathbf{E}(x, 0)$ που βρίσκουμε είναι θεωρητικά πάνω στη σχισμή.

Γράφουμε τη σχέση (4.44) ως προς τη k_x συνιστώσα,

$$\hat{\mathbf{E}}(k_x; z_0) = e^{-j\pi/4} \sqrt{\frac{kr}{2\pi}} \frac{e^{jkr}}{k_z} \mathbf{E}_\infty(k_x), \quad (4.46)$$

αφου μέσω των z και x βρίσκουμε το k_x . Αντικαθιστώντας τη σχέση αυτή στο ολοκλήρωμα του γωνιακού φάσματος (4.20) παίρνουμε τελικά,

$$\mathbf{E}(x, z_0) = e^{-j\pi/4} \sqrt{\frac{kr}{2\pi}} e^{jkr} \int_{k_x^2 \leq k^2} \mathbf{E}_\infty(k_x) e^{-jk_x x} e^{-jk_z(z-z_0)} \frac{1}{k_z} dk_x, \quad (4.47)$$

όπου η ολοκλήρωση γίνεται σε όλα τα $k_x^2 \leq k^2$, αφού τα αποσβενόμενα κύματα δεν θα συνεισφέρουν στη τελική λύση. Το ολοκλήρωμα (4.47) μας παρέχει τη σύνδεση μεταξύ του πεδίου παντού στο χώρο και του μακρινού πεδίου. Πολλές φορές είναι ευκολότερο να γνωρίζουμε τη μορφή του μακρινού πεδίου, οπότε μέσω της εξ. (4.47) μπορούμε να υπολογίσουμε το πεδίο κοντά στο άνοιγμα. Αν πάρουμε τη προσέγγιση $k_z \approx k$ και θεωρήσουμε $z_0 = 0$, τότε το ολοκλήρωμα αυτό μας αποδεικνύει ότι το μακρινό πεδίο είναι ο Μ/Σ Fourier του πεδίου πάνω στο άνοιγμα (ακριβώς όπως διέπει η βαθμωτή θεωρία⁸). Η απόκλιση οφείλεται στον όρο $1/k_z$ και εκφράζει το όριο της Οπτικής Fourier. Σημειώνουμε πως για λόγους πληρότητας, επαναφέραμε τον όρο $(z - z_0)$ πίσω στις εξισώσεις, δηλαδή θεωρούμε πάλι ότι η απόσταση r είναι ίση με $r = \sqrt{x^2 + (z - z_0)^2}$ και $z \rightarrow z - z_0$. Γενικότερα, στις δύο διαστάσεις αν είναι γνωστές οι εφαπτομενικές συνιστώσες πάνω σε μία επιφάνεια ($z = \text{σταθ.}$), τότε μπορούμε να βρούμε μέσω του φάσματος επιπέδων κυμάτων το πεδίο σε μία άλλη επιφάνεια z_0 παράλληλη με την αρχική [30].

⁸Στο Appendix 6.5 δίνεται η εφαρμογή του PWS ολοκληρώματος για το πεδίο επάνω στο εμπόδιο στη βαθμωτή θεωρία.

Κεφάλαιο 5

Αποτελέσματα - Παρατηρήσεις

Σε αυτήν την εργασία έχουμε δημιουργήσει ένα πρόγραμμα που μας επιτρέπει τον υπολογισμό της διανυσματικής λύσης του Η/Μ προβλήματος περίθλασης από ένα ορθογώνιο άνοιγμα. Για να βρούμε τη λύση, αξιοποιήσαμε την αριθμητική μέθοδο FDFD σε συνδυασμό με τον αλγόριθμο TS/SF. Στο σημείο αυτό θα αναφέρουμε τα αποτελέσματα και συμπεράσματα στα οποία καταλήξαμε από την ανάπτυξη αυτού του προγράμματος. Επιπλέον, μέσω της εργασίας αυτής θέλουμε να αναδείξουμε τα σημεία όπου η βαθμωτή θεωρία αποτυγχάνει να προβλέψει το πεδίο με ικανοποιητικό τρόπο.

5.1 Σύγκριση με τη βαθμωτή θεωρία

5.1.1 Βαθμωτά Ολοκληρώματα

Θα συγκρίνουμε την κατανομή του περιθλώμενου πεδίου από εμπόδια με ορθογώνιες σχισμές, με τα αποτελέσματα που προβλέπει η βαθμωτή θεωρία. Για τον χώρο δεξιά του εμποδίου θεωρούμε ότι έχουμε $n_3 = 1$. Θα χρησιμοποιήσουμε το βαθμωτό ολοκληρώμα Rayleigh-Sommerfeld και τις προσεγγίσεις Fresnel και Fraunhofer για τις συγκρίσεις με το FDFD πεδίο. Τα ολοκληρώματα αυτά παρουσιάζονται παρακάτω χωρίς να αποδεικνύουμε τον υπολογισμό τους, διότι υπολογίζονται αναλυτικά στη βιβλιογραφία [41].

Αν $P(x, z)$ είναι το σημείο παρατήρησης, x' τα σημεία ολοκλήρωσης πάνω στη σχισμή $x' \in [-h/2, h/2]$ και U_{inc} το βαθμωτό πεδίο στο άνοιγμα $z = 0$ τότε το ολοκληρώμα Rayleigh-Sommerfeld πρώτου είδους για το πεδίο $U(x, z)$ είναι,

$$U_{RS1}(x, z) = e^{j3\pi/4} \int_{-h/2}^{h/2} \left[U_{inc} \frac{k}{2j} \sqrt{\frac{2}{\pi k R_T}} e^{-jk R_T} \frac{z}{R_T} \right] dx', \quad (5.1)$$

όπου $R_T = \sqrt{(x - x')^2 + z^2}$. Μέσω αυτού του ολοκληρώματος αν χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση Fresnel βρίσκουμε το ολοκληρώμα του κοντινού πεδίου:

$$U(x, z) = \frac{U_0}{\sqrt{2}} e^{j\pi/4} e^{-jkz} \{ [C(u_2) - C(u_1)] - j [S(u_2) - S(u_1)] \}, \quad (5.2)$$

όπου $u_1 = (2/\lambda z)^{1/2} (x - h/2)$ και $u_2 = (2/\lambda z)^{1/2} (x + h/2)$ και $C(w), S(w)$ τα ολοκληρώματα Fresnel που ορίζονται ως:

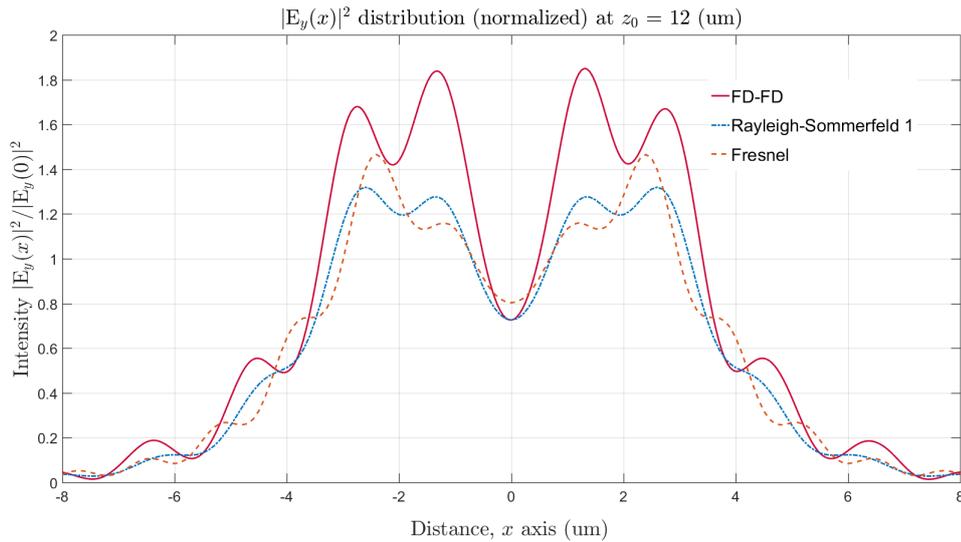
$$C(w) = \int_0^w \cos\left(\frac{\pi}{2}u^2\right) du, \quad S(w) = \int_0^w \sin\left(\frac{\pi}{2}u^2\right) du. \quad (5.3)$$

Η προσέγγιση Fraunhofer έχει τη γνωστή μορφή του μετασχηματισμού Fourier της διάταξης του ανοίγματος $t_a(x') = \text{rect}(x'/h)$ όπως φαίνεται παρακάτω:

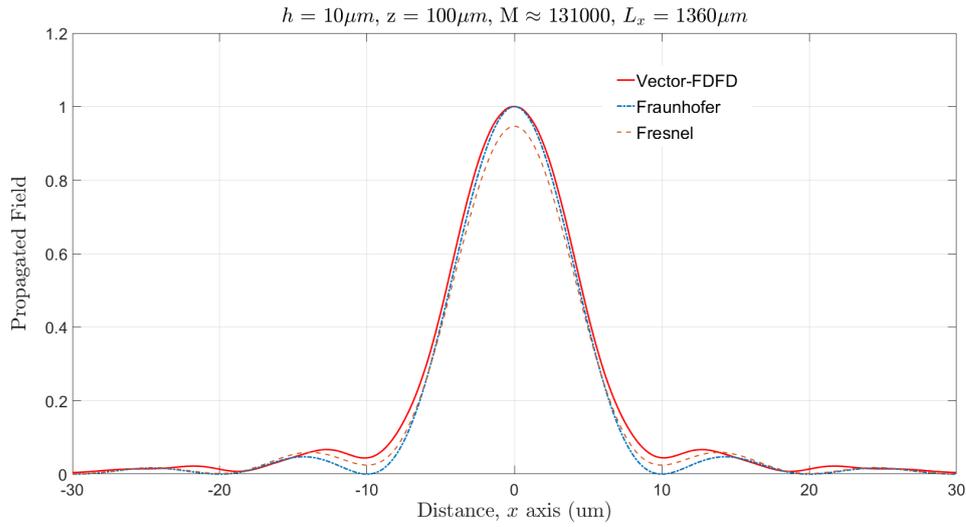
$$\begin{aligned} U_{ff}(x, z) &= U_0 \sqrt{\frac{k}{2\pi z}} e^{-jkz} \exp\left(-j\frac{k}{2z}x^2\right) \mathcal{F}\{t_a(x')\} \\ &= U_0 h \sqrt{\frac{k}{2\pi z}} e^{-jkz} \exp\left(-j\frac{k}{2z}x^2\right) \text{sinc}\left(\frac{xh}{\lambda z}\right) \end{aligned} \quad (5.4)$$

5.1.2 Περίθλαση από μία σχισμή

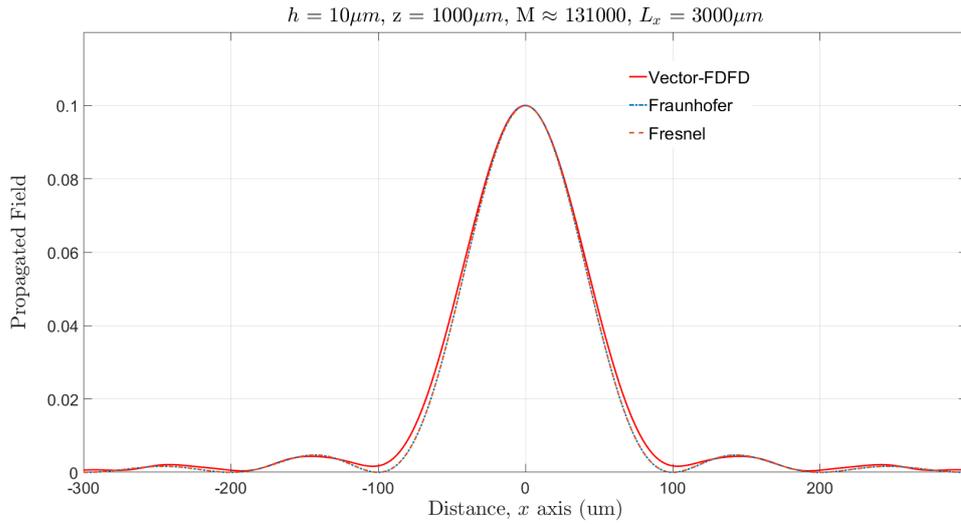
Αρχικά συγκρίνουμε τις κατανομές σε απόσταση $z = 12 \mu\text{m}$ μακριά από το εμπόδιο με $h = 10 \mu\text{m}$ σχισμή. Η Fresnel προσέγγιση ξέρουμε πως αδυνατεί να προβλέψει τη κατανομή του πεδίου με ακρίβεια τόσο κοντά στο εμπόδιο. Συγκεκριμένα, παρατηρούμε στην Εικόνα 5.1 πως οι πτώσεις της έντασης από τοπικά μέγιστα σε τοπικά ελάχιστα απέχουν μεταξύ τους σφάλμα ενός μήκους κύματος. Το αποτέλεσμα αυτό ήταν αναμενόμενο, αφού η προσέγγιση του κοντινού πεδίου να προβλέψει την κατανομή μόνο για αποστάσεις πολύ μεγαλύτερες των $20 \mu\text{m}$ (στο δικό μας παράδειγμα). Αντίθετα, το ολοκλήρωμα Rayleigh-Sommerfeld παρουσιάζει μέγιστα και ελάχιστα που συμπίπτουν με αυτά της προσομοίωσης.



Σχήμα 5.1: Η κατανομή του πεδίου E_y που παίρνουμε από την προσομοίωση με τη μέθοδο FDFD (κόκκινο) σε σύγκριση με τη βαθμωτή θεωρία του Rayleigh-Sommerfeld (μπλε) και με την προσέγγιση Fresnel (πορτοκαλί). Η περίθλαση έχει δημιουργηθεί από ορθογώνιο άνοιγμα διάστασης $h = 10 \mu\text{m}$ ($\lambda_0 = 1 \mu\text{m}$).



Σχήμα 5.2: Σύγκριση του FDFD πεδίου E_y με τα βαθμωτά ολοκληρώματα, σε απόσταση $z = 100 \mu\text{m}$.



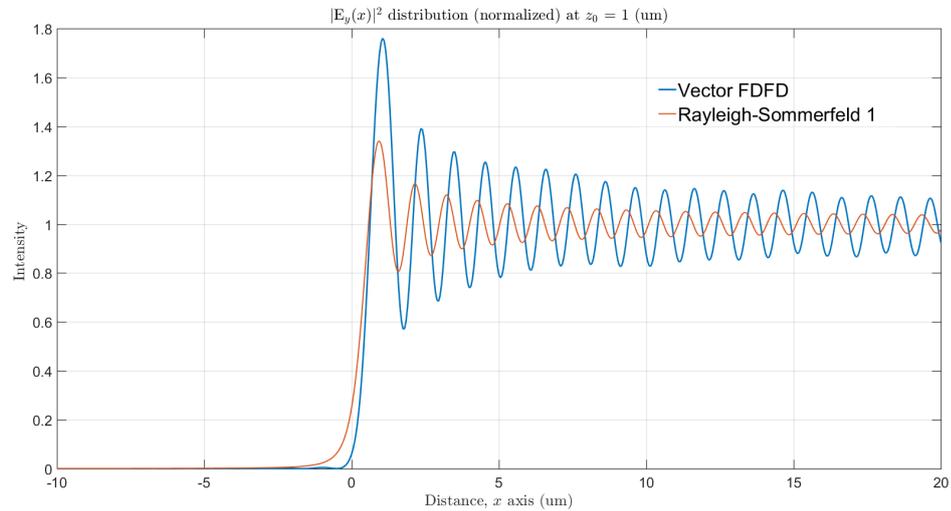
Σχήμα 5.3: Σύγκριση του FDFD πεδίου E_y με τα βαθμωτά ολοκληρώματα, σε απόσταση $z = 1000 \mu\text{m}$.

Στις μακρινές αποστάσεις των $z = 100 \mu\text{m}$ και $z = 1000 \mu\text{m}$, το μοντέλο μας ακολουθεί αρκετά καλά την πρόβλεψη των Fresnel και Fraunhofer ολοκληρωμάτων. Για αποστάσεις ακόμη μεγαλύτερες οι γραφικές παραστάσεις συμπίπτουν ακριβώς. Από το ολοκλήρωμα Fraunhofer έχουμε ότι τα ελάχιστα θα δίνονται από τους μηδενισμούς της συνάρτησης sinc, δηλαδή για κάθε x που ικανοποιεί τη σχέση,

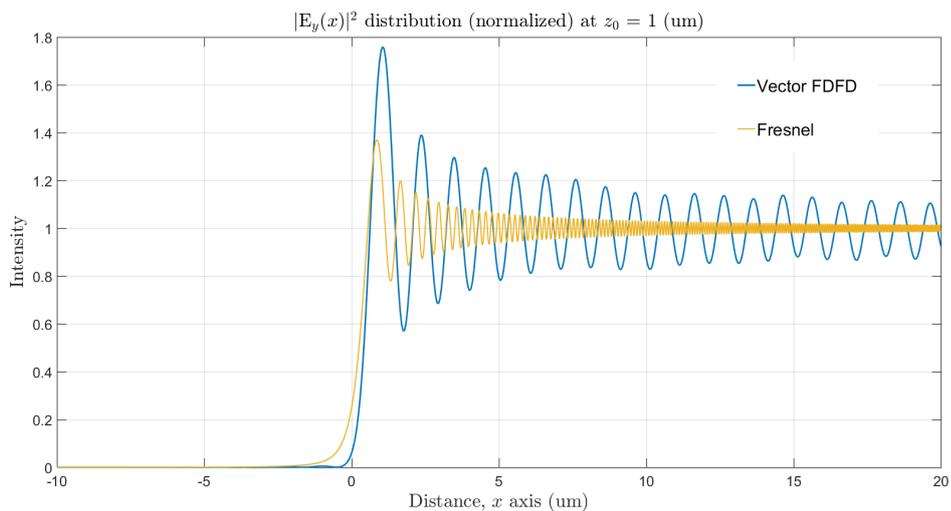
$$x_m = m\lambda \frac{z}{h}, \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (5.5)$$

συνεπώς στη μακρινή απόσταση των $z = 1000 \mu\text{m}$ τα ελάχιστα εμφανίζονται κάθε $x = 100 \mu\text{m}$ κατά μήκος του x άξονα.

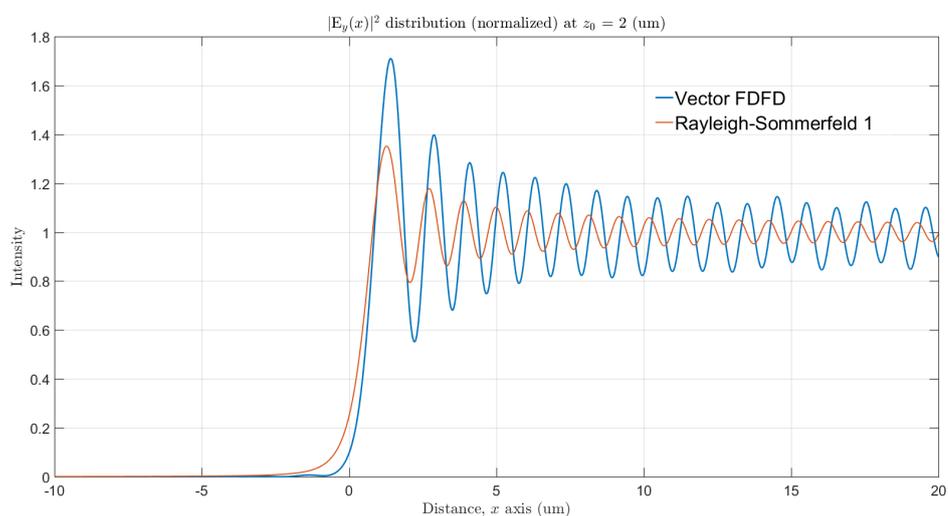
5.1.3 Περίθλαση από ημι-άπειρο πέτασμα



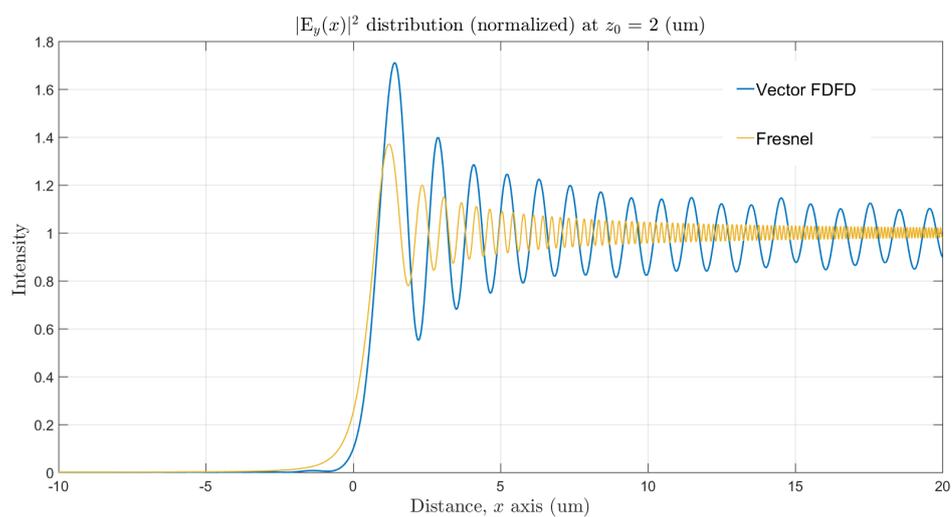
Σχήμα 5.4: Σύγκριση των πεδίων που παίρνουμε από τη μέθοδο FDFD και το ολοκλήρωμα Rayleigh-Sommerfeld από τη περίθλαση κύματος από μία ακμή σε απόσταση $z = 1 \mu\text{m}$.



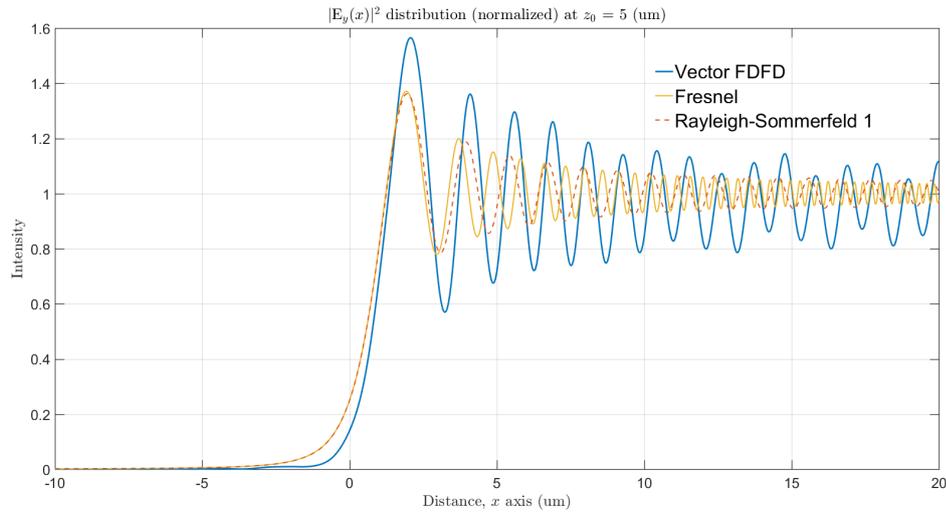
Σχήμα 5.5: Σύγκριση των πεδίων που παίρνουμε από τη μέθοδο FDFD και το ολοκλήρωμα Fresnel από τη περίθλαση κύματος από μία ακμή σε απόσταση $z = 1 \mu\text{m}$.



Σχήμα 5.6: Σύγκριση των πεδίων που παίρνουμε από τη μέθοδο FDFD και το ολοκλήρωμα Rayleigh-Sommerfeld από τη περίθλαση κύματος από μία ακμή σε απόσταση $z = 2 \mu\text{m}$.

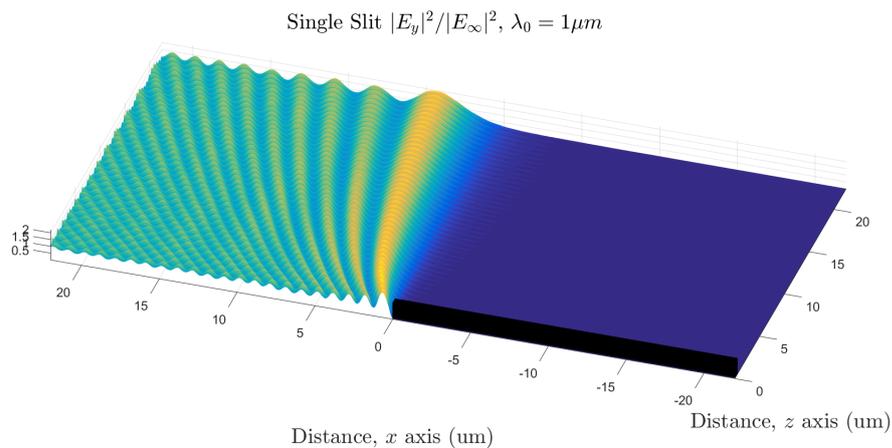


Σχήμα 5.7: Σύγκριση των πεδίων που παίρνουμε από τη μέθοδο FDFD και το ολοκλήρωμα Fresnel από τη περίθλαση κύματος από μία ακμή σε απόσταση $z = 2 \mu\text{m}$.



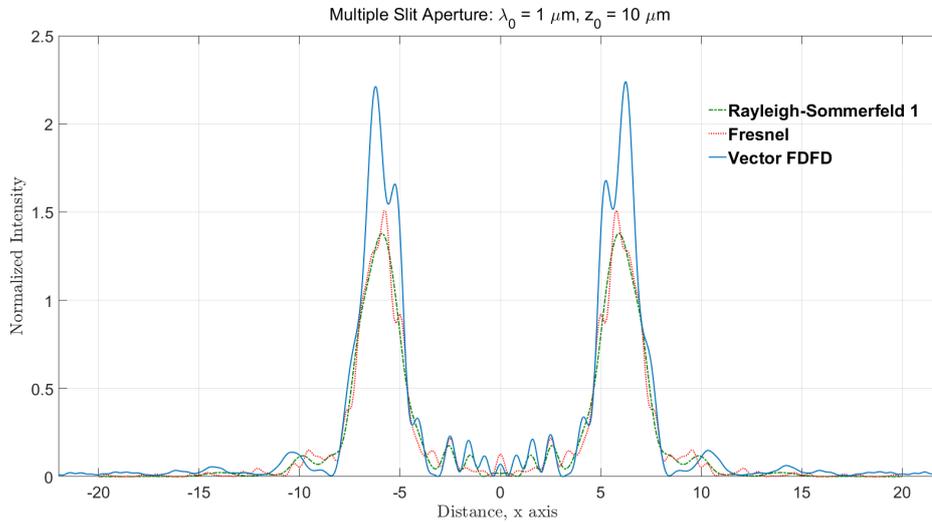
Σχήμα 5.8: Σύγκριση των πεδίων που παίρνουμε από τη μέθοδο FDFD και τα ολοκληρώματα Rayleigh-Sommerfeld και Fresnel από τη περίθλαση κύματος από μία ακμή σε απόσταση $z = 5 \mu\text{m}$.

Για τη περίθλαση από ημιάπειρο πέτασμα, θεωρούμε ένα εμπόδιο χρυσού που είναι τοποθετημένο πάνω στον αρνητικό x ημιάξονα και έχει πάχος $w = 2\lambda_0$. Συγκρίνουμε το πεδίο *Vector FDFD* της προσομοίωσής μας με τα ολοκληρώματα Fresnel και Rayleigh-Sommerfeld στις αποστάσεις $z = 1 \mu\text{m}$, $2 \mu\text{m}$ και $5 \mu\text{m}$. Στην προσομοίωση φαίνεται ότι η μορφή του διανυσματικού πεδίου είναι αρκετά κοντά με του ολοκληρώματος Rayleigh-Sommerfeld. Αντίθετα, η Fresnel προσέγγιση ταλαντώνεται πολύ γρηγορότερα από το πεδίο, το οποίο είναι αναμενόμενο διότι δεν βρισκόμαστε στην κοντινή περιοχή.

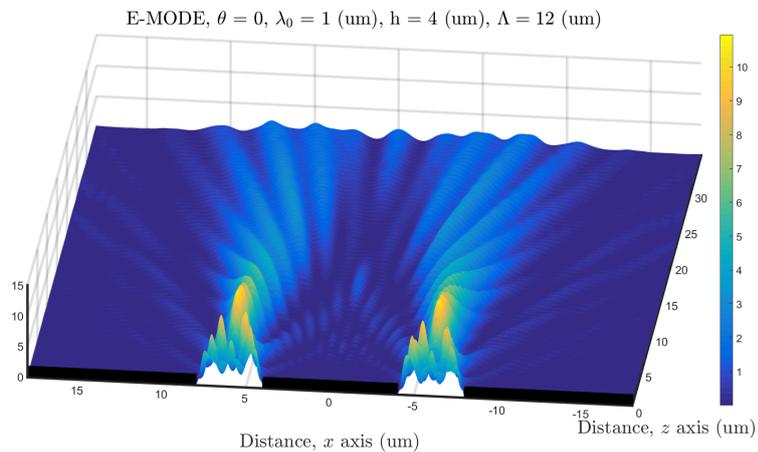


Σχήμα 5.9: Το κανονικοποιημένο πεδίο $|E_y|^2$ στον χώρο δεξιά του εμποδίου. Τρισδιάστατη απεικόνιση του δισδιάστατου πεδίου, όπου ο κάθετος άξονας του x, z επιπέδου αντιστοιχεί στην ένταση του πεδίου.

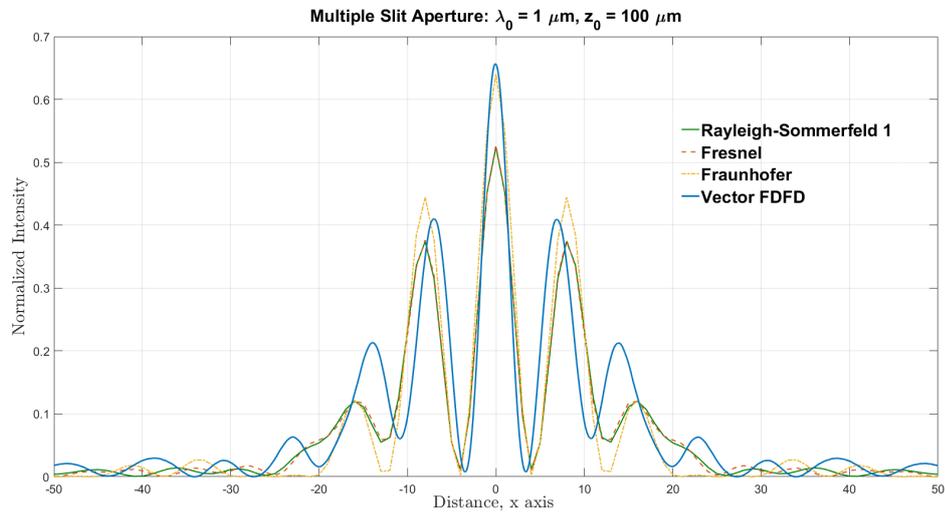
5.1.4 Περίθλαση από δύο σχισμές



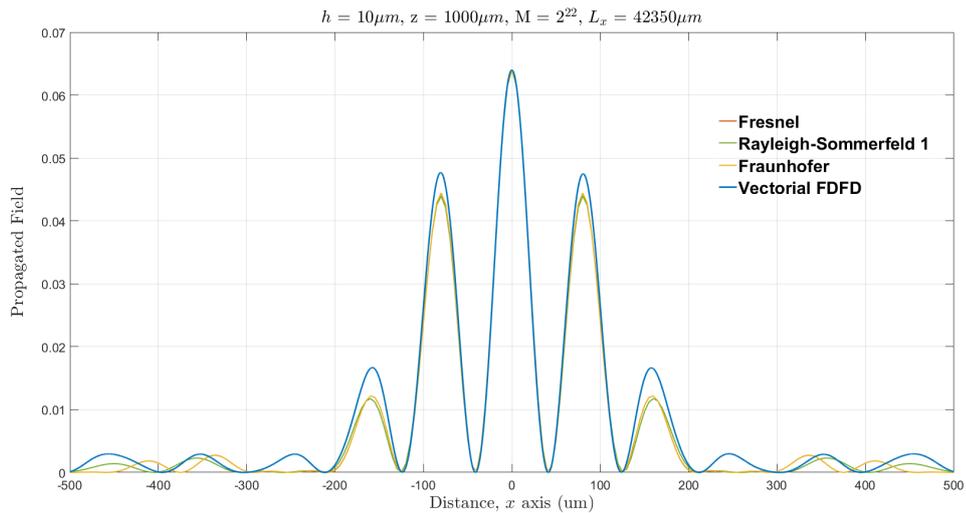
Σχήμα 5.10: Σύγκριση των βαθμωτών πεδίων με το διανυσματικό πεδίο FDFD στο σημείο $z = 10 \mu\text{m}$ από τη περίθλαση κύματος από δύο ακμές διάστασης $h = 4 \mu\text{m}$ και μεταξύ τους απόσταση $\Lambda = 12 \mu\text{m}$.



Σχήμα 5.11: Το $|E_y|^2$ πεδίο που περιθλάται από δύο σχισμές με $h = 4 \mu\text{m}$ και απόσταση $\Lambda = 12 \mu\text{m}$ μεταξύ των κεντρών τους.



Σχήμα 5.12: Σύγκριση των βαθμωτών πεδίων με το διανυσματικό πεδίο FDFD στο σημείο $z = 100 \mu\text{m}$ από τη περίθλαση κύματος από δύο ακμές διάστασης $h = 4 \mu\text{m}$ και μεταξύ τους απόσταση $\Lambda = 12 \mu\text{m}$.



Σχήμα 5.13: Σύγκριση των βαθμωτών πεδίων με το διανυσματικό πεδίο FDFD στο σημείο $z = 1000 \mu\text{m}$ από τη περίθλαση κύματος από δύο ακμές διάστασης $h = 4 \mu\text{m}$ και μεταξύ τους απόσταση $\Lambda = 12 \mu\text{m}$.

5.1.5 Σφάλματα αποτελεσμάτων

Για να βρούμε την απόκλιση των αποτελεσμάτων μεταξύ της βαθμωτής θεωρίας και τις προσομοιώσεις Vector FDFD, εφαρμόζουμε τις παρακάτω σχέσεις σφαλμάτων σε όλες τις προηγούμενες προσομοιώσεις. Αν x και x_i οι πεδιακές συνιστώσες E_y (ή H_y) του διανυσματικού FDFD και της βαθμωτής θεωρίας, τότε ορίζονται οι διάφοροι τύποι σφαλμάτων ως:

$$e_i = |x_i - x| \quad (\text{Απόλυτο Σφάλμα}) \quad (5.6)$$

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i - x \quad (\text{Μέσο Σφάλμα}) \quad (5.7)$$

$$MAE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |x_i - x| \quad (\text{Μέσο Απόλυτο Σφάλμα}) \quad (5.8)$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - x)^2} \quad (\text{Ρίζα Τετραγωνικού Μέσου Σφάλματος}) \quad (5.9)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (e_i - \mu)^2} \quad (\text{Τυπική Απόκλιση}) \quad (5.10)$$

Πίνακας 5.1: Μία Σχισμή, $z = 12\mu m$

	Μέσο Σφάλμα	Μέσο Απ. Σφάλμα	RMSE	Τυπική Απόκλιση
R-S 1	0.0867	0.0897	0.1704	0.1469
Fresnel	0.0853	0.1046	0.2	0.1813

Πίνακας 5.2: Μία Σχισμή, $z = 100\mu m$

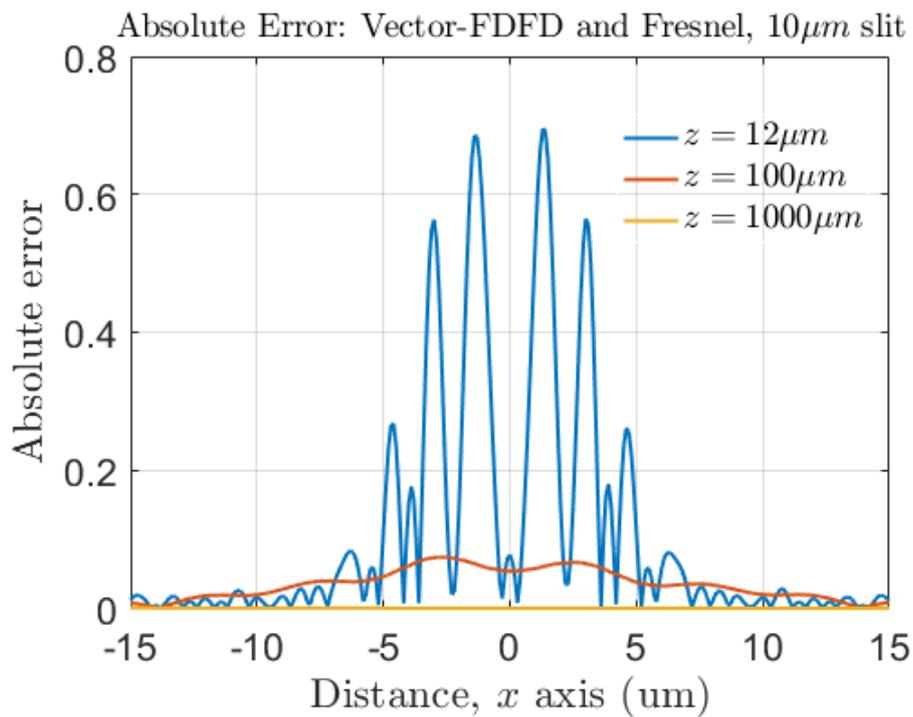
	Μέσο Σφάλμα	Μέσο Απ. Σφάλμα	RMSE	Τυπική Απόκλιση
Fresnel	0.0184	0.0206	0.0295	0.0230
Fraunhofer	0.0183	0.0189	0.0259	0.0184

Πίνακας 5.3: Μία Σχισμή, $z = 1000\mu m$

	Μέσο Σφάλμα	Μέσο Απ. Σφάλμα	RMSE	Τυπική Απόκλιση
Fresnel	9.1797e-04	9.8847e-04	0.0015	0.0012
Fraunhofer	9.1782e-04	9.8660e-04	0.0015	0.0012

Το ολοκλήρωμα Rayleigh-Sommerfeld (R-S) παρουσιάζει τη μεγαλύτερη ακρίβεια από τα υπόλοιπα δύο ολοκληρώματα, αφού τα Fresnel και Fraunhofer αποτελούν προσεγγίσεις αυτού για τον κοντινό και τον μακρινό χώρο αντίστοιχα. Στη περίπτωση της περίθλασης από μία σχισμή διάστασης $h = 10\mu\text{m}$, για την απόσταση $10\mu\text{m}$ η προσέγγιση Fresnel αδυνατεί να προβλέψει το πεδίο. Στα $100\mu\text{m}$ το σφάλμα είναι αρκετά μικρότερο, ενώ στα $1000\mu\text{m}$ το σφάλμα είναι πρακτικά μηδενικό. Αντίθετα, στο ημί-πειρο πέτασμα που έχουμε λάβει υπόψιν αποστάσεις πολύ κοντά στο εμπόδιο, το ολοκλήρωμα R-S πράγματι παρουσιάζει σημαντικά καλύτερη περιγραφή του πεδίο σε σχέση με τα Fresnel/Fraunhofer.

Στη περίθλαση από δύο σχισμές διάστασης $h = 4\mu\text{m}$ και μεταξύ τους απόσταση $\Lambda = 12\mu\text{m}$, τόσο το R-S όσο και το Fresnel ολοκλήρωμα εμφανίζουν σχεδόν ίδιας τάξης σφάλματα. Για $z > 10\mu\text{m}$ φαίνεται πως το ολοκλήρωμα R-S δεν μας παρέχει κάποια επιπλέον πληροφορία από τη προσέγγιση Fresnel, παρουσιάζοντας ελάχιστα μικρότερη απόκλιση.



Σχήμα 5.14: Το απόλυτο σφάλμα μεταξύ της διανυσματικής προσομοίωσης FDFD και της βαθμωτής προσέγγισης Fresnel για την περίθλαση από μία σχισμή για τις αποστάσεις $z = 12, 100$ και $1000\mu\text{m}$.

Πίνακας 5.4: Ημίπειρο Πέτασμα, $z = 1\mu m$

	Μέσο Σφάλμα	Μέσο Απ. Σφάλμα	RMSE	Τυπική Απόκλιση
R-S 1	-4.8887e-04	0.1265	0.1577	0.1579
Fresnel	-0.0012	0.0161	0.1708	0.1710

Πίνακας 5.5: Ημίπειρο Πέτασμα, $z = 2\mu m$

	Μέσο Σφάλμα	Μέσο Απ. Σφάλμα	RMSE	Τυπική Απόκλιση
R-S 1	-0.0081	0.1196	0.1449	0.1448
Fresnel	-0.0080	0.1240	0.1680	0.1680

Πίνακας 5.6: Ημίπειρο Πέτασμα, $z = 5\mu m$

	Μέσο Σφάλμα	Μέσο Απ. Σφάλμα	RMSE	Τυπική Απόκλιση
R-S 1	-0.0309	0.1071	0.1256	0.1579
Fresnel	-0.0303	0.1286	0.1628	0.1601

Πίνακας 5.7: Δύο Σχισμές, $z = 10\mu m$

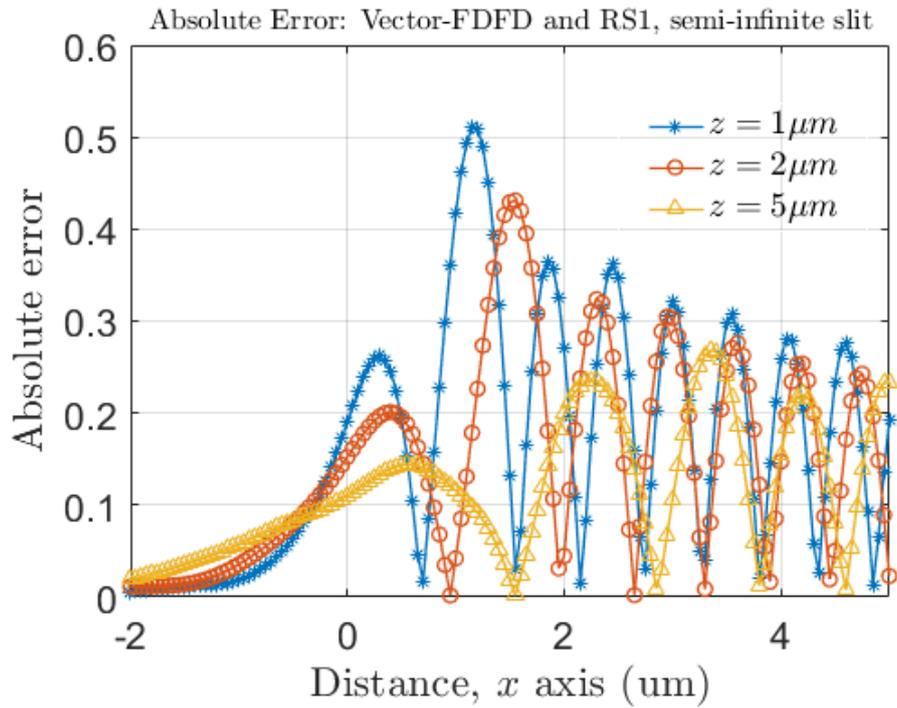
	Μέσο Σφάλμα	Μέσο Απ. Σφάλμα	RMSE	Τυπική Απόκλιση
R-S 1	0.0716	0.0909	0.1957	0.1823
Fresnel	0.0685	0.0961	0.1993	0.1874

Πίνακας 5.8: Δύο Σχισμές, $z = 100\mu m$

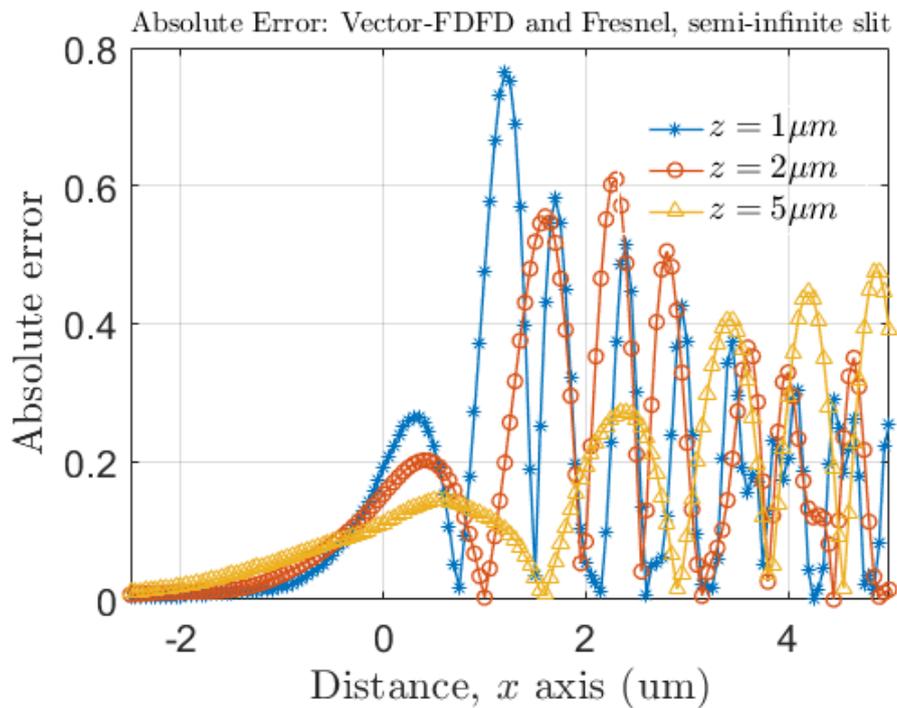
	Μέσο Σφάλμα	Μέσο Απ. Σφάλμα	RMSE	Τυπική Απόκλιση
R-S 1	0.0045	0.0116	0.0295	0.0292
Fresnel	0.0042	0.0116	0.0288	0.0285
Fraunhofer	0.0042	0.0126	0.0329	0.0326

Πίνακας 5.9: Δύο Σχισμές, $z = 1000\mu m$

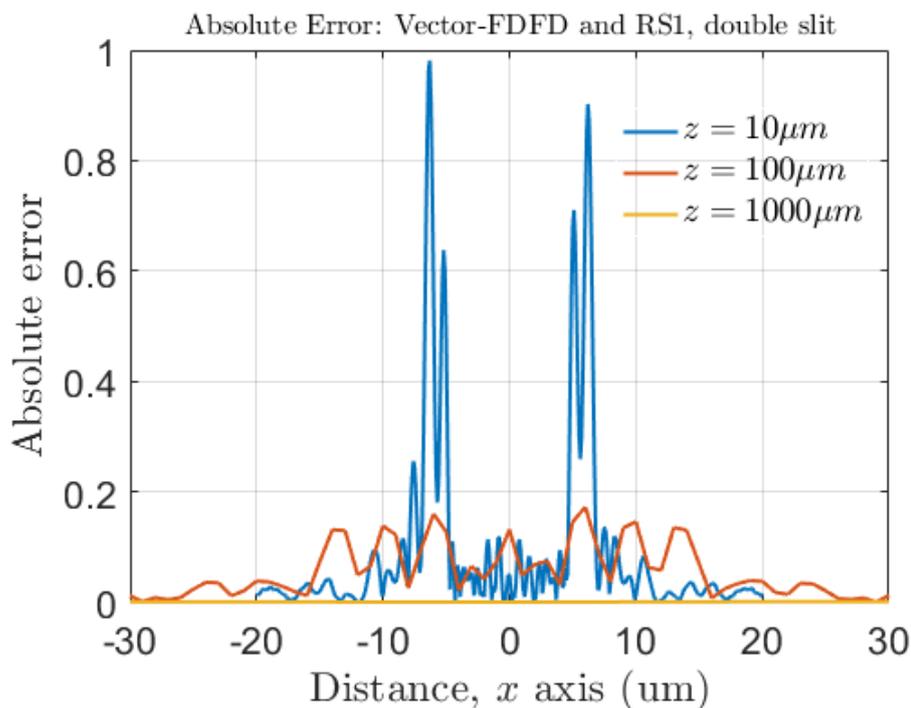
	Μέσο Σφάλμα	Μέσο Απ. Σφάλμα	RMSE	Τυπική Απόκλιση
R-S 1	7.8650e-04	8.4955e-04	0.0013	0.0011
Fresnel	7.5269e-04	9.4889e-04	0.0014	0.0012
Fraunhofer	7.5269e-04	9.5218e-04	0.0014	0.0012



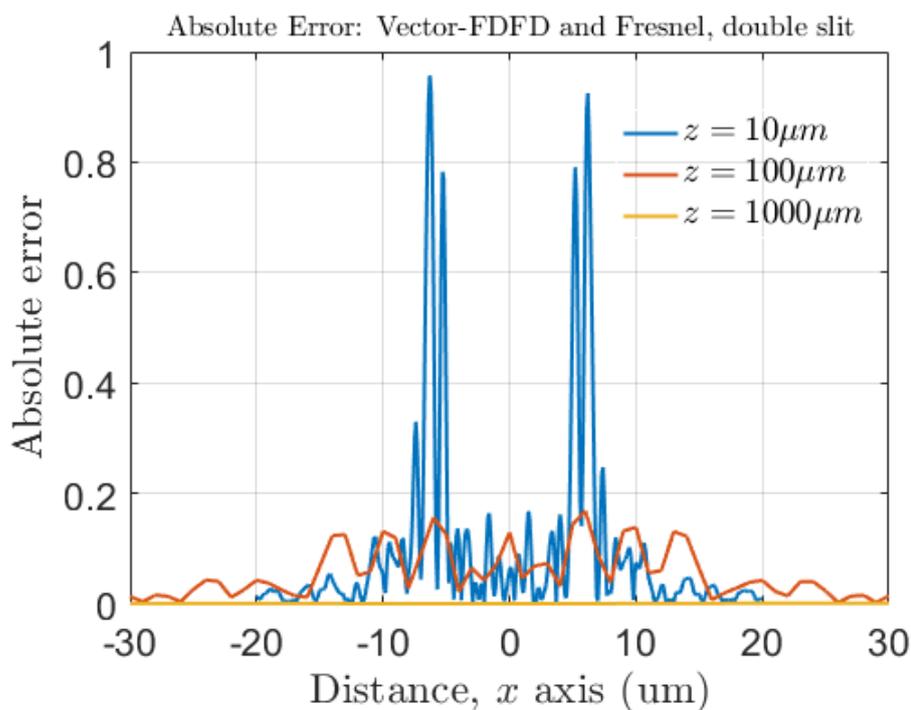
Σχήμα 5.15: Το απόλυτο σφάλμα μεταξύ της διανυσματικής προσομοίωσης FDFD και του βαθμωτού ολοκληρώματος RS1 στην περίθλαση από ημίπειρο πέτασμα για τις αποστάσεις $z = 1, 2$ και $5\ \mu\text{m}$.



Σχήμα 5.16: Το απόλυτο σφάλμα μεταξύ της διανυσματικής προσομοίωσης FDFD και της βαθμωτής προσέγγισης Fresnel στην περίθλαση από ημίπειρο πέτασμα για τις αποστάσεις $z = 1, 2$ και $5\ \mu\text{m}$.



Σχήμα 5.17: Το απόλυτο σφάλμα μεταξύ της διανυσματικής προσομοίωσης FDFD και του βαθμωτού ολοκληρώματος RS1 στην περίθλαση από δύο σχισμές για τις αποστάσεις $z = 10, 100$ και $1000\mu\text{m}$.



Σχήμα 5.18: Το απόλυτο σφάλμα μεταξύ της διανυσματικής προσομοίωσης FDFD και της βαθμωτής προσέγγισης Fresnel στην περίθλαση από δύο σχισμές για τις αποστάσεις $z = 10, 100$ και $1000\mu\text{m}$.

5.2 Η ολόκληρη περιγραφή του πεδίου

Το πλεονέκτημα της διανυσματικής μεθόδου έναντι της βαθμωτής θεωρία, είναι πως μπορούμε να βρούμε εύκολα (μέσω των εξισώσεων Maxwell) τη μορφή όλων των συνιστωσών \mathbf{E} , \mathbf{H} του πεδίου. Συνήθως, στη βαθμωτή θεωρία εκφράζουμε το κάθετο H_x ή E_x πεδίο προσεγγιστικά χρησιμοποιώντας την κυματικής αντίστασης Z . Ωστόσο, τα βαθμωτά ολοκληρώματα δεν λαμβάνουν υπόψιν τη πόλωση του κύματος στις εκφράσεις τους, συνεπώς για τα πεδία E_z και H_z δεν έχουμε κάποια έκφραση για να τα υπολογίσουμε. Πρακτικά, τα πεδία E_z και H_z έχουν μικρή συνεισφορά στο ολικό πρόβλημα μας, αλλά στη περιοχή κοντά του εμποδίου τα E_z και H_z έχουν όλο και σημαντικότερη μορφή.

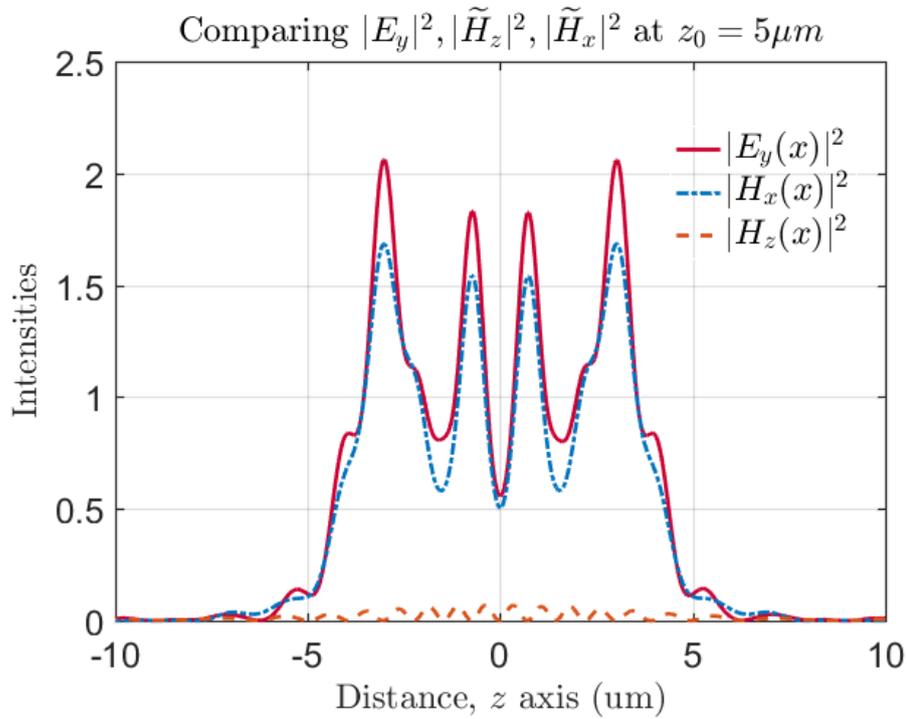
Με το Matlab βρίσκουμε εύκολα τις υπόλοιπες συνιστώσες του διανυσματικού H/M πεδίου, εφόσον γνωρίζουμε τα e_y ή h_y , μέσω των σχέσεων (2.26). Παρακάτω δίνουμε τη μορφή του κώδικα για τον γρήγορο υπολογισμό αυτών των πεδίων:

Πίνακας 5.10: Μετατροπή των H/M πεδίων σε κώδικα του Matlab

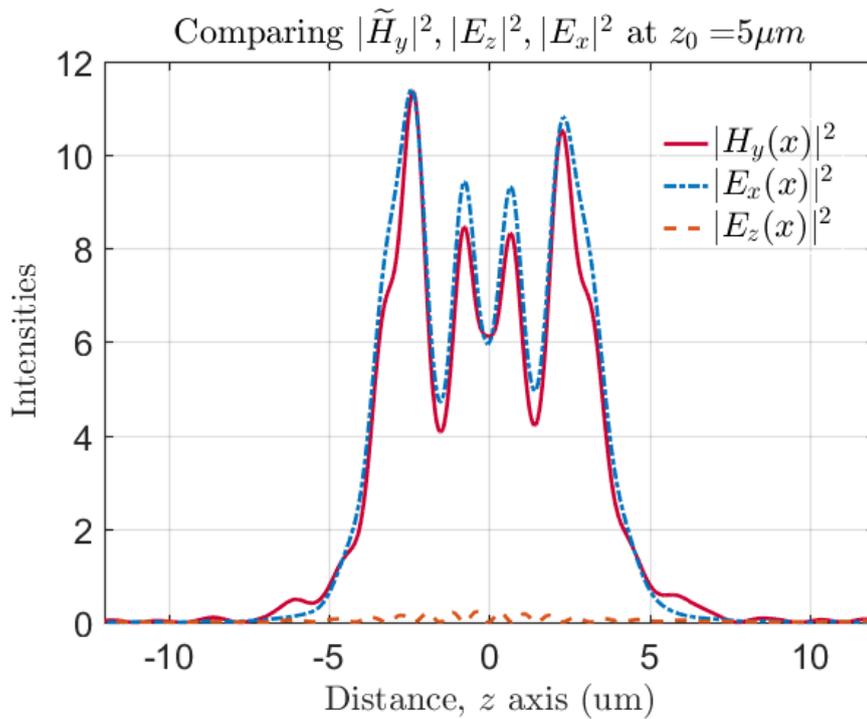
Εξισώσεις Maxwell	Matlab Κώδικας
$E_z = \frac{1}{\epsilon_{zz}} \frac{\partial \widetilde{H}_y}{\partial x}$	$e_z = \text{ERzz} \backslash \text{DHX} * h_y$
$\widetilde{H}_z = \frac{1}{\mu_{zz}} \frac{\partial E_y}{\partial x}$	$h_z = \text{URzz} \backslash \text{DEX} * e_y$
$E_x = -\frac{1}{\epsilon_{xx}} \frac{\partial \widetilde{H}_y}{\partial z}$	$e_x = -\text{ERxx} \backslash \text{DHZ} * h_y$
$\widetilde{H}_x = -\frac{1}{\mu_{xx}} \frac{\partial E_y}{\partial z}$	$h_x = -\text{URxx} \backslash \text{DEZ} * e_y$

Στις παρακάτω εικόνες απεικονίζονται όλες οι κατανομές των πεδίων από τη προσομοίωση για τις αποστάσεις $z = 5, 12$ και $20 \mu\text{m}$. Τα πεδία στη z διεύθυνση e_z, h_z παρουσιάζουν ελάχιστη συνεισφορά στο πρόβλημα σε σύγκριση με τα πεδία των x και z διευθύνσεων. Επιπλέον, τα e_x, h_x πεδία έχουν συγκρίσιμη ένταση με αυτή των e_y, h_y πεδίων. Τα μαγνητικά πεδία \mathbf{H} που απεικονίζονται είναι τα κανονικοποιημένα πεδία, σύμφωνα με την σχέση (1.20).

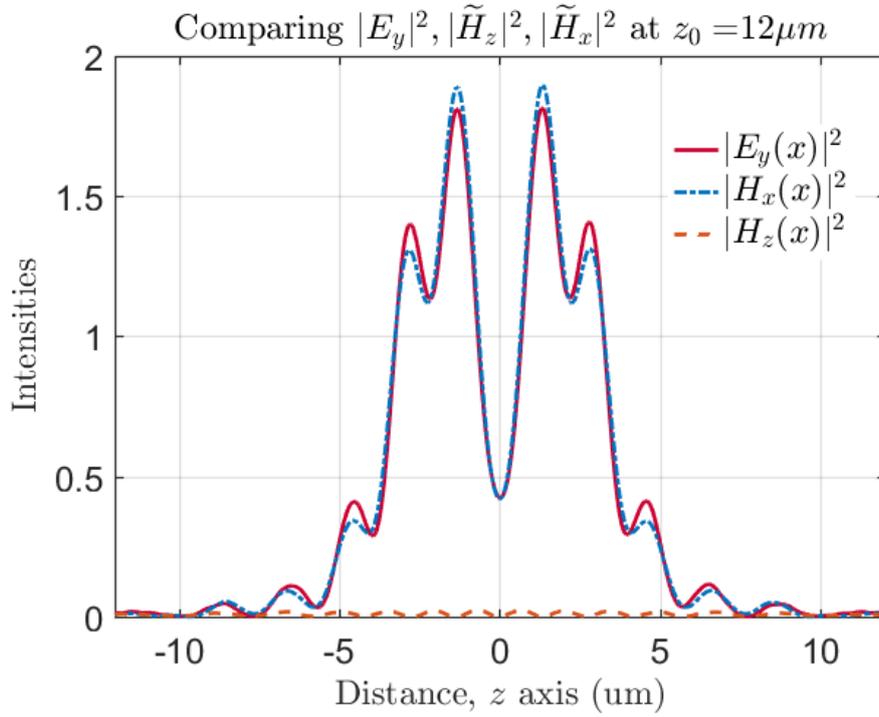
Λόγω της μικρής συνεισφοράς των πεδίων E_z και H_z στο πρόβλημα, τα H_x και E_x πεδία πράγματι μπορούν να θεωρηθούν ότι έχουν παρόμοια μορφή με τα E_y και H_y πεδία, εκτός αν βρισκόμαστε πολύ κοντά ($z \leq 5\lambda$) στο εμπόδιο όπου εκεί παρουσιάζεται σημαντική διαφορά μεταξύ τους.



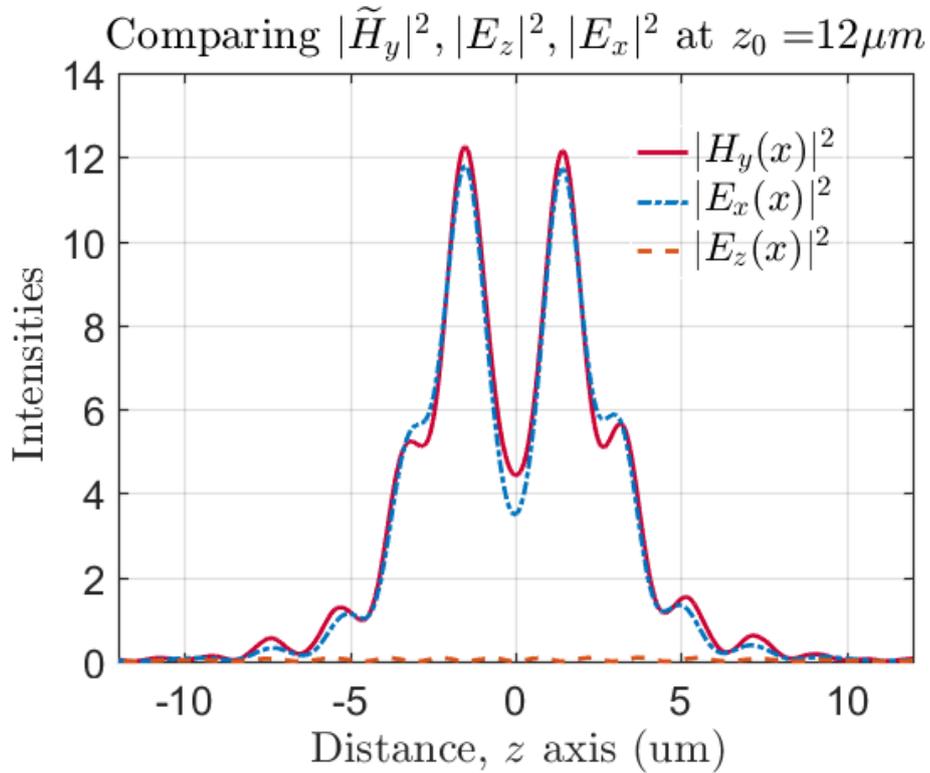
Σχήμα 5.19: Οι εντάσεις των E_y , \tilde{H}_x και \tilde{H}_z πεδίων στο $z = 5\mu m$.



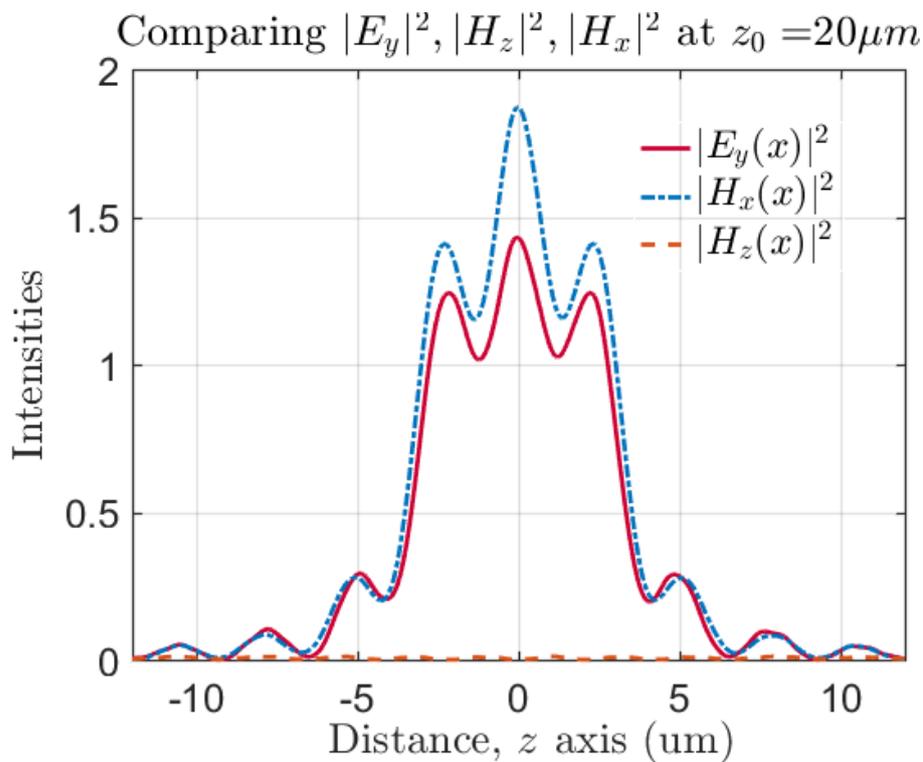
Σχήμα 5.20: Οι εντάσεις των \tilde{H}_y , E_x και E_z πεδίων στο $z = 5\mu m$.



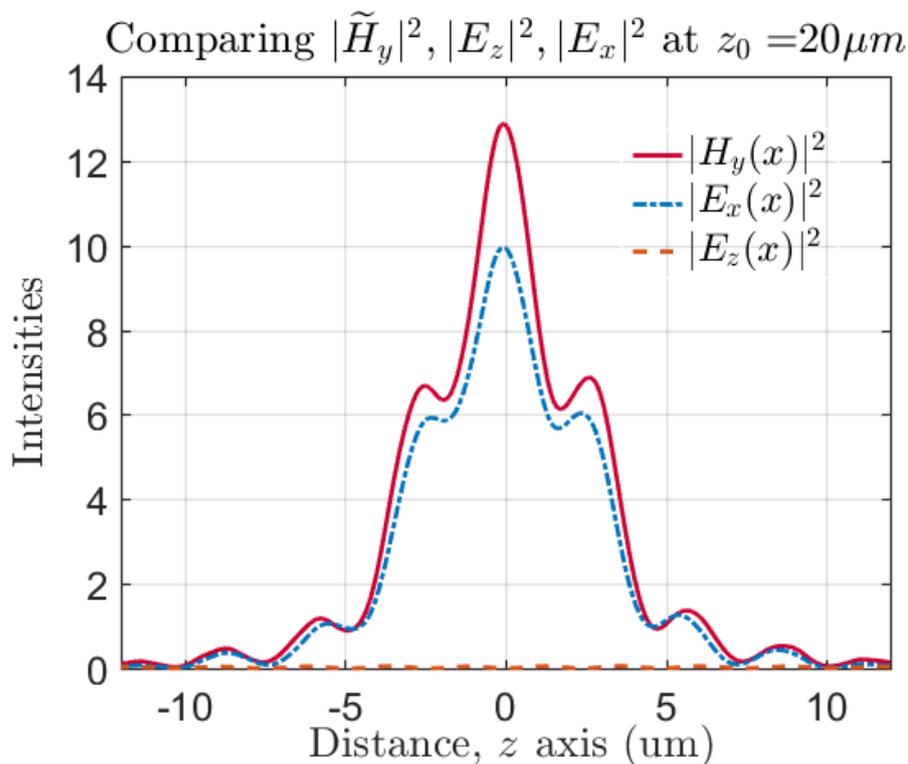
Σχήμα 5.21: Οι εντάσεις των E_y , \tilde{H}_x και \tilde{H}_z πεδίων στο $z = 12 \mu m$.



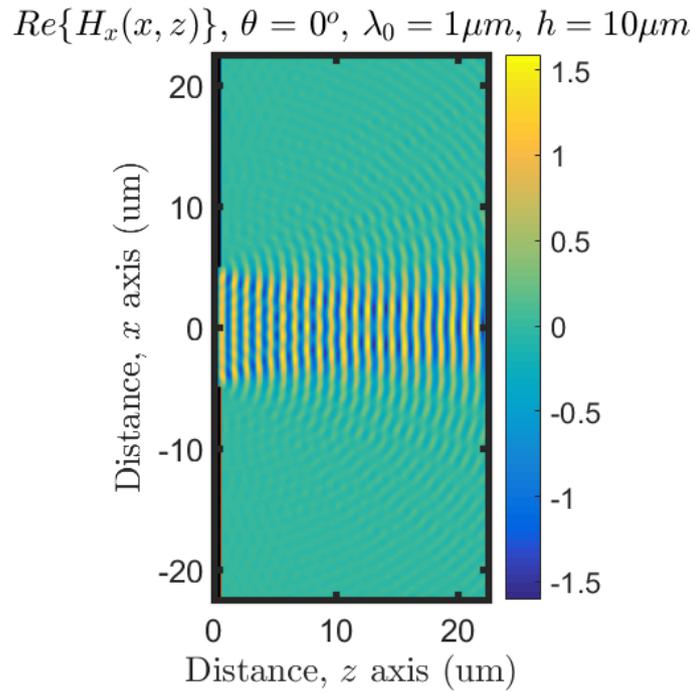
Σχήμα 5.22: Οι εντάσεις των \tilde{H}_y , E_x και E_z πεδίων στο $z = 12 \mu m$.



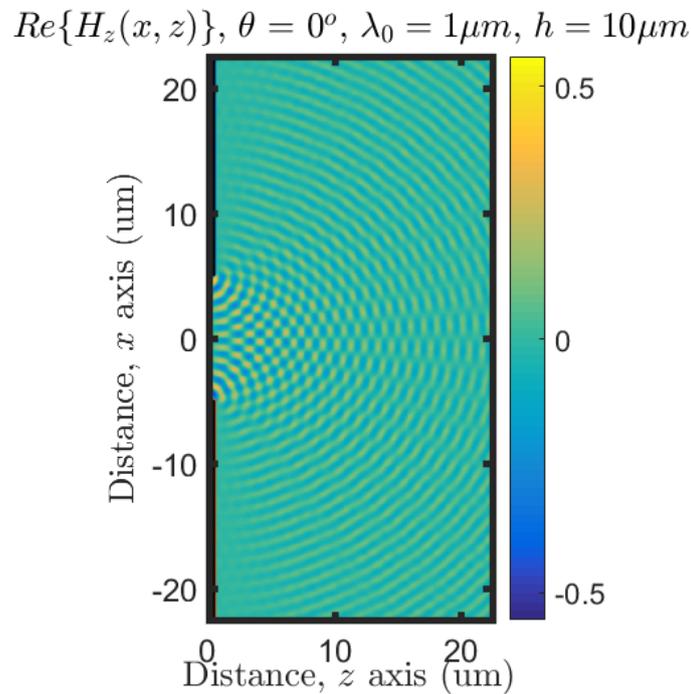
Σχήμα 5.23: Οι εντάσεις των E_y , \tilde{H}_x και \tilde{H}_z πεδίων στο $z = 20 \mu m$.



Σχήμα 5.24: Οι εντάσεις των \tilde{H}_y , E_x και E_z πεδίων στο $z = 20 \mu m$.

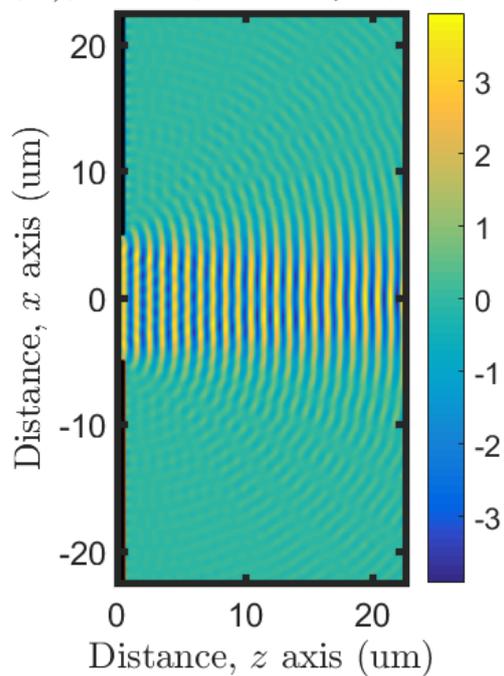


Σχήμα 5.25: Προσομοίωση του πεδίου \tilde{H}_x που περιθλάται από σχισμή $h = 10\lambda_1$.



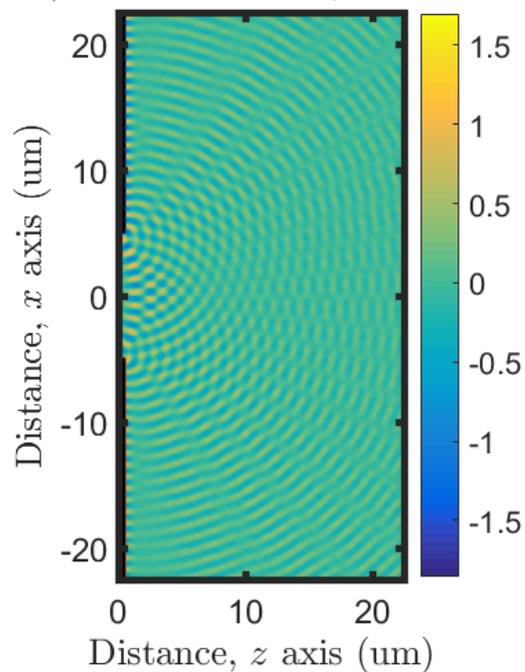
Σχήμα 5.26: Προσομοίωση του πεδίου \tilde{H}_z (διάσταση ανοίγματος $h = 10\lambda_1$). Το πεδίο H_z παρόλο που είναι αρκετά μικρότερο από τις υπόλοιπες συνιστώσες του προβλήματος, κοντά στη σχισμή παρουσιάζει μία αρκετά σημαντική μορφή που δεν μπορεί να αγνοηθεί.

$$E_x(x, z), \theta = 0^\circ, \lambda_0 = 1 \mu m, h = 10 \mu m$$

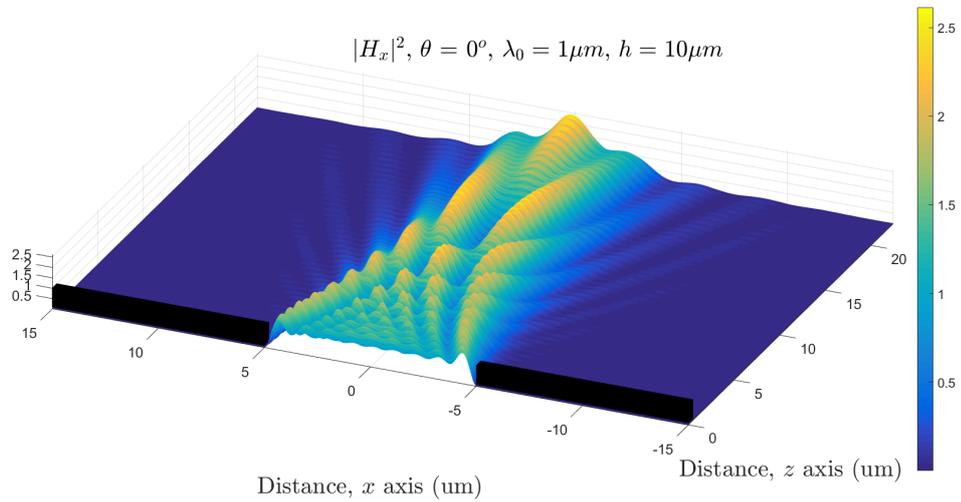


Σχήμα 5.27: Προσομοίωση του πεδίου E_x που περιθλάται από σχισμή $h = 10\lambda_1$.

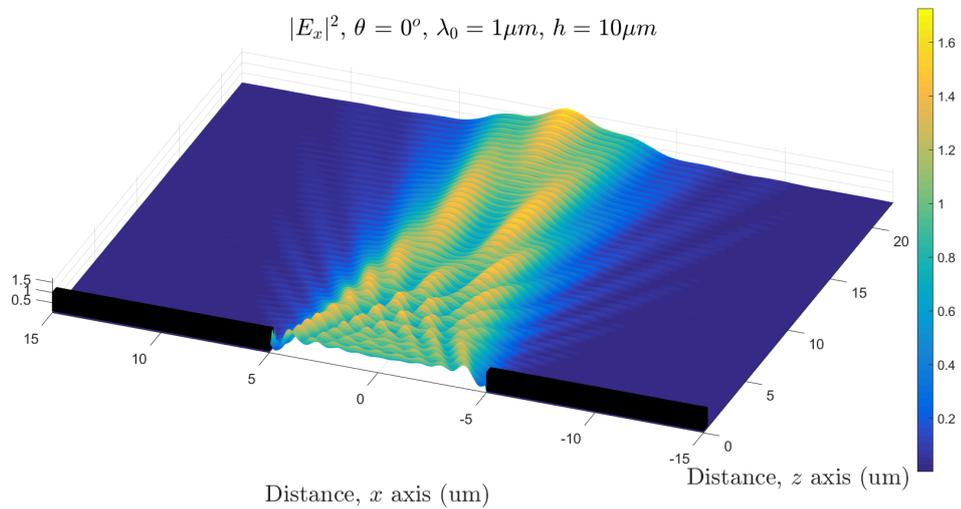
$$E_z(x, z), \theta = 0^\circ, \lambda_0 = 1 \mu m, h = 10 \mu m$$



Σχήμα 5.28: Προσομοίωση του πεδίου E_z που περιθλάται από σχισμή $h = 10\lambda_1$.



Σχήμα 5.29: Τρισδιάστατη απεικόνιση του $|\widetilde{H}_x|^2$ στον χώρο (x, z) . Ο κατακόρυφος άξονας αντιστοιχεί στην κανονικοποιημένη ένταση του πεδίου.

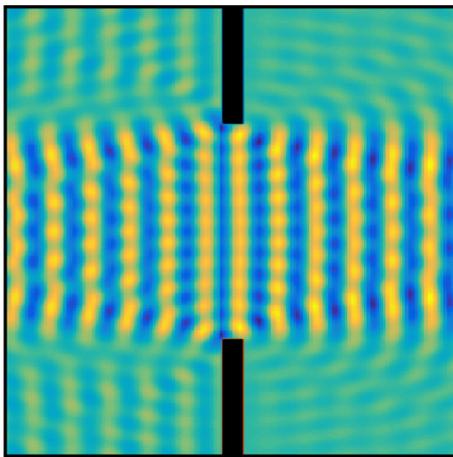


Σχήμα 5.30: Τρισδιάστατη απεικόνιση του $|E_x|^2$ στον χώρο (x, z) . Ο κατακόρυφος άξονας αντιστοιχεί στην κανονικοποιημένη ένταση του πεδίου.

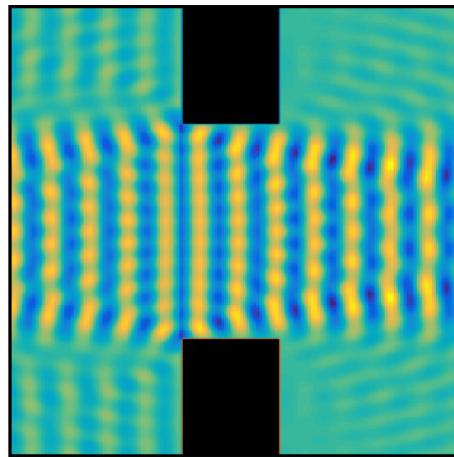
5.3 Κριτική πάνω στις βαθμωτές θεωρίες

5.3.1 Ως προς το πάχος w του εμποδίου

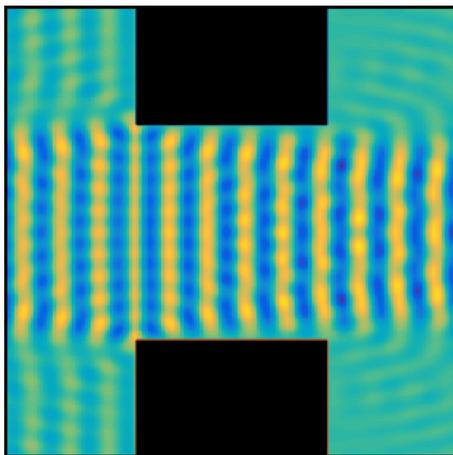
Τα βαθμωτά ολοκληρώματα (5.1), (5.2) και (5.4) δεν λαμβάνουν υπόψιν το πάχος w του εμποδίου στους υπολογισμούς του πεδίου στον ημι-άπειρο χώρο $z > 0$. Όμως, από τις προσομοιώσει φαίνεται ότι το πάχος w επηρεάζει τελικά το πεδίο δεξιά. Θέλουμε να δούμε κατά πόσο αποκλίνει η βαθμωτή θεωρία από την πραγματική περιγραφή της συμπεριφοράς του φωτός, όταν μεταβάλλουμε το πάχος του εμποδίου. Για κάθε μία από τις περιπτώσεις της Εικόνας 5.31, συγκρίνουμε τις κατανομές του πεδίου που παίρνουμε ακριβώς μετά το εμπόδιο.



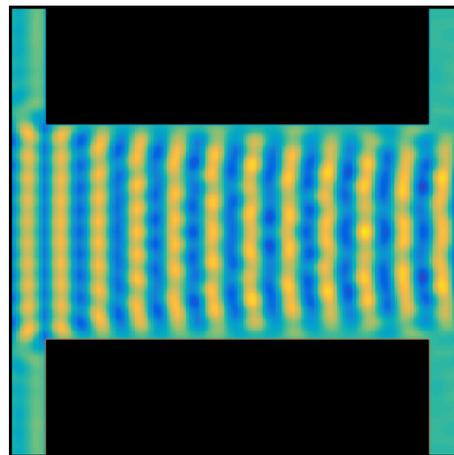
(i) Πάχος εμποδίου $w = 0.5\lambda$



(ii) Πάχος εμποδίου $w = 2.5\lambda$

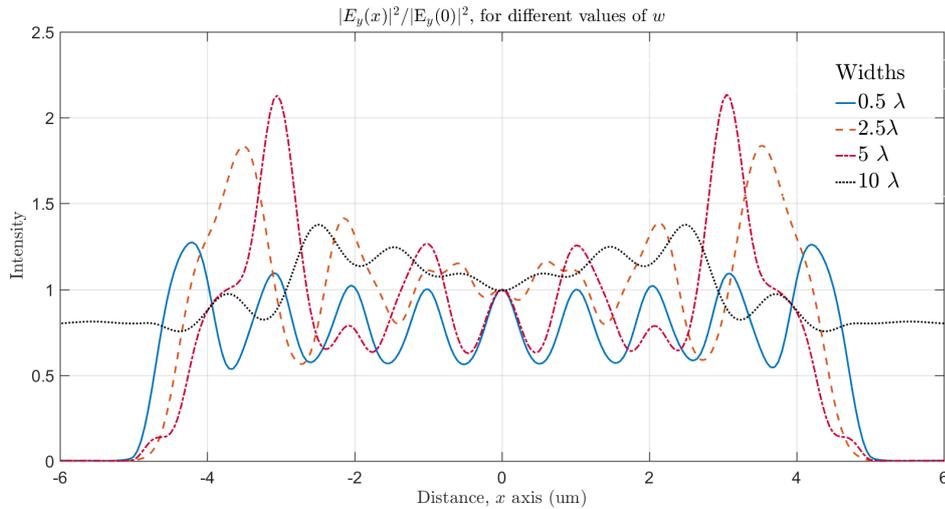


(iii) Πάχος εμποδίου $w = 5\lambda$



(iv) Πάχος εμποδίου $w = 10\lambda$

Σχήμα 5.31: Αναπαράσταση του πεδίου μέσα στη σχισμή για διαφορετικά πάχη w του εμποδίου. Το πεδίο αλληλεπιδρά με τα τοιχώματα του εμποδίου (συνοριακές συνθήκες PEC) και επηρεάζει τη τελική μορφή του πεδίου.



Σχήμα 5.32: Οι κατανομές του πεδίου στο σημείο $z = w$ ακριβώς μετά τη σχισμή, όταν αυξάνουμε το πάχος w .

Στην περίπτωση όπου το πλάτος του εμποδίου είναι απειροελάχιστο (και ταυτόχρονα πλήρως ανακλαστικό), τότε η κατανομή θα τείνει να πάρει την προβλεπόμενη μορφή της βαθμωτής θεωρίας στην κοντινή περιοχή. Αν χρησιμοποιήσουμε ακόμη λεπτότερο εμπόδιο ($< 0.5\lambda$), τότε η πηγή f_{src} διαπερνά εύκολα το στρώμα χρυσού και εμφανίζεται δεξιά. Οι ανακλάσεις από τα οριζόντια τοιχώματα του ανοίγματος επηρεάζουν την μορφή που θα έχει το πεδίο όταν βγαίνει από το άνοιγμα στη $z > 0$ περιοχή.

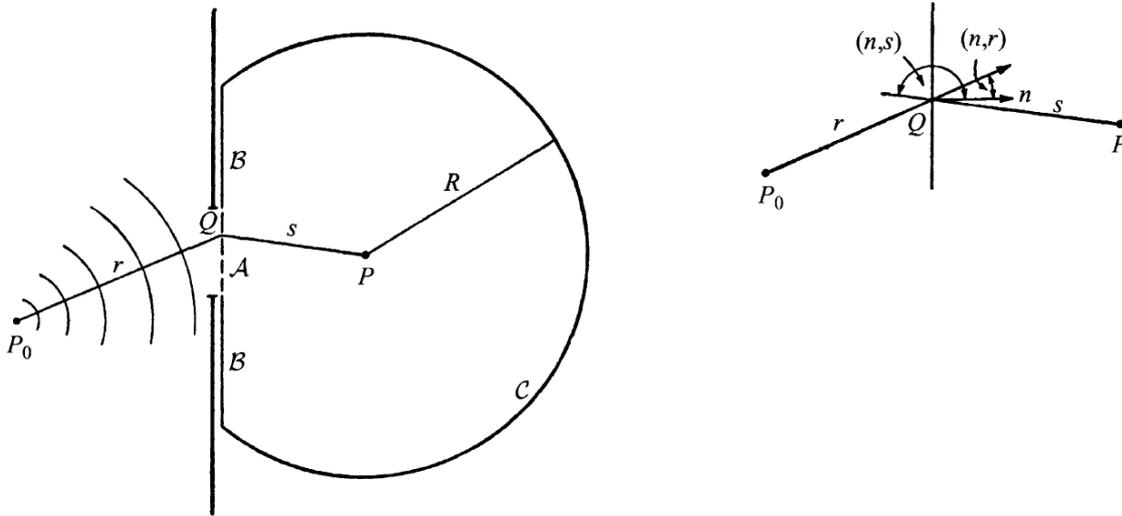
Αν λάβουμε υπόψιν την αρχή των Huygens-Fresnel, τότε εκεί που το εμπόδιο μας κόβει το προσπίπτον κύμα θα εμφανίζονται σφαιρικές πηγές των οποίων η ακτινοβολία θα συναντάει τα οριζόντια τοιχώματα του εμποδίου και θα δημιουργεί επιπρόσθετα φαινόμενα σκέδασης. Οι ανακλάσεις αυτές είναι φυσικά περισσότερο σημαντικές κοντά στο άνοιγμα και όσο πηγαίνουμε μακρύτερα θα εξαφανίζονται λόγω καταστροφικής συμβολής με τα υπόλοιπα κύματα.

Παρ'όλα αυτά, η αρχή των Huygens-Fresnel αποτελεί ένα *μαθηματικό μοντέλο* που μπορεί να δώσει μία περιγραφή της εξέλιξης των κυμάτων στον χώρο. Οι δευτερεύουσες σφαιρικές ή κυλινδρικές πηγές δεν μπορούν να εντοπιστούν πρακτικά, αλλά μπορούμε να υποθέσουμε την συμβολή τους και να βρούμε το πεδίο. Ο Young το 1802 είχε προτείνει πως η περίθλαση ορίζεται από τη συμβολή του προσπίπτοντος H/M με το φως που δημιουργείται από κάθε σημείο πάνω στη διαχωριστική επιφάνεια του εμποδίου. Εφόσον όμως δεν είχε κάποια ισχυρή μαθηματική περιγραφή (σε αντίθεση με τον Kirchhoff) για να υποστηρίξει το επιχείρημα του, τελικά αγνοήθηκε η θεωρία αυτή από την επιστημονική κοινότητα [42].

5.3.2 Ως προς τα αξιώματα της βαθμωτής θεωρίας

Η θεμελίωση της βαθμωτής θεωρίας της περίθλασης ξεκινάει από τον Kirchhoff ο οποίος χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Green στην χρονο-ανεξάρτητη εξίσωση Helmholtz απέδειξε το *Ολοκληρωτικό Θεώρημα των Helmholtz-Kirchhoff* [43].

$$U(P) = \frac{1}{4\pi} \left[\iint_A + \iint_B + \iint_C \right] \left\{ U \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{jks}}{s} \right) - \left(\frac{e^{jks}}{s} \right) \frac{\partial U}{\partial n} \right\} dS \quad (5.11)$$



Σχήμα 5.33: Παρουσιάζεται ο τρόπος με τον οποίο χρησιμοποιούμε το ολοκλήρωμα Kirchhoff για να υπολογίζουμε το περιθλώμενο πεδίο από οποιοδήποτε εμπόδιο. Ως s ορίζεται η απόσταση μεταξύ του σημείου παρατήρησης και του σημείου ολοκλήρωσης, ενώ ως r η απόσταση της πηγής και του σημείου ολοκλήρωσης. Εικόνα από: [43].

Για να μπορέσει ο Kirchhoff να βρεί την ακριβή λύση του προβλήματος, έπρεπε πρώτα να το μετατρέψει σε μίας κλειστής μορφής πρόβλημα και γι'αυτό όρισε τα τρία θεμελιώδη **αξιώματα** της βαθμωτής θεωρίας:

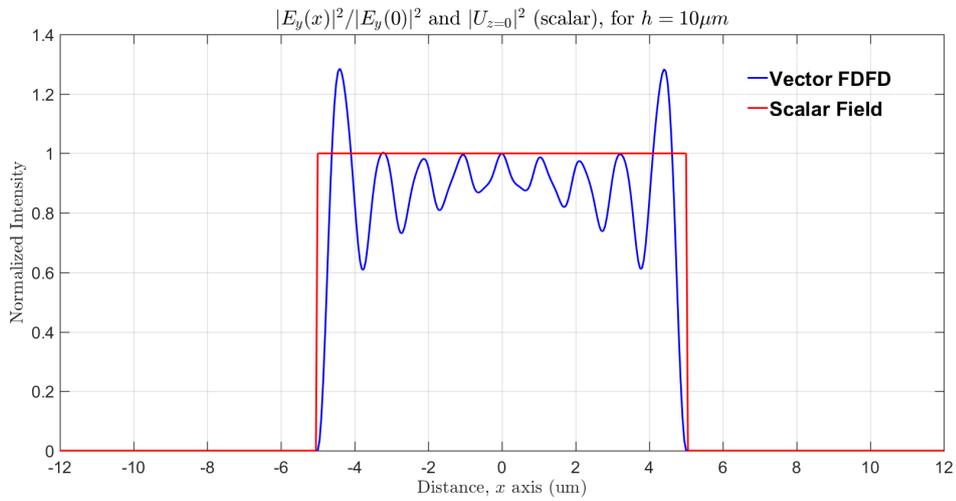
1. Το πεδίο U στο άνοιγμα A είναι ίσο με το προσπίπτον πεδίο (*Συνθήκη Kirchhoff*).
2. Το πεδίο U και η παράγωγος $\partial U / \partial n$ πάνω στο εμπόδιο B είναι ίσα με μηδέν.
3. Η συνεισφορά του πεδίου στο ολοκλήρωμα από τη καμπύλη C εξαφανίζεται για $R \rightarrow \infty$ (*Συνθήκη Ακτινοβολίας Sommerfeld*).

Τα παραπάνω αναφέρονται ως αξιώματα διότι, όταν αναπτύχθηκε η θεωρία αυτή στις αρχές του 19ου αιώνα, οι εξισώσεις του Maxwell δεν είχαν ανακαλυφθεί και συνεπώς ο Kirchhoff δεν γνώριζε την φύση των H/M κυμάτων. Η απομυθοποίηση της θεωρίας του αιθέρα που επικρατούσε εκείνη την εποχή απέδειξε πως τα αξιώματα αυτά του Kirchhoff δεν είναι ικανά για να περιγράψουν τη συμπεριφορά του φωτός και συνεπώς η θεωρία Kirchhoff θα περιμέναμε να ήταν λανθασμένη¹. Αυτό που συμβαίνει όμως,

¹Συγκεκριμένα, οι δύο πρώτες συνθήκες έρχονται σε αντίθεση με τη πραγματικότητα, ενώ η συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld είναι σωστή.

είναι ότι η θεωρία Kirchhoff καταφέρνει να επαληθεύεται πειραματικά, όπως είδαμε και στην ενότητα 5.1, ανεξάρτητα από τη πόλωση και το διανυσματικό χαρακτήρα του H/M κύματος. Συνεπώς, έχουμε μία "ασυνεπή" μαθηματική θεωρία η οποία όμως καταφέρνει να δίνει σωστά αποτελέσματα [44].

Επιστρέφοντας στο πρόγραμμα, η κατανομή του πεδίου στο $z = 0$ (στο κέντρο ακριβώς της σχισμής) φαίνεται στην εικόνα 5.34. Μπορούμε να δούμε ότι η κατανομή του πεδίου στο εμπόδιο δεν ισοδυναμεί με μία ορθογώνια κατανομή², αλλά αποτελεί μία κατανομή ημιτονοειδούς μορφής. Η θεωρία Kirchhoff θεωρεί μία υπεραπλουστευμένη εικόνα του πεδίου μέσα στη σχισή, αλλά προσφέρει μία εξαιρετική προσέγγιση της περιθλούμενης μορφής του πεδίου μακριά από το εμπόδιο.



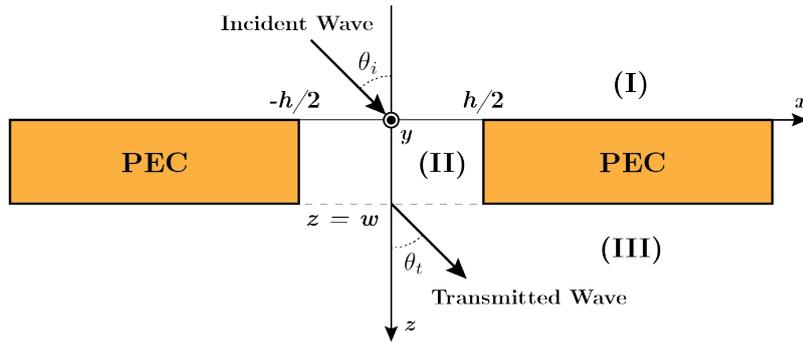
Σχήμα 5.34: Με κόκκινο χρώμα απεικονίζεται η συνθήκη συνέχειας της βαθμωτής θεωρίας, όπου το πεδίο μέσα στη σχισμή θεωρούμε ότι ισοδυναμεί με την πηγή μας, ενώ με μπλέ χρώμα απεικονίζεται το πραγματικό FDFD πεδίο.

Μπορούμε να βρούμε αυτή την αναλυτική μορφή των πεδίων μέσα στη σχισμή, αν θεωρήσουμε το κλειστό συνοριακό πρόβλημα που φαίνεται στην εικόνα 5.35. Το πεδίο στον χώρο πρέπει να ικανοποιεί την κυματική εξίσωση Helmholtz, δηλαδή θα έχουμε ότι,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{Bmatrix} = 0, \quad (5.12)$$

Θα λύσουμε την κυματική εξίσωση ως προς τη συνιστώσα E_y (ή H_y) για το E-Mode (ή H-Mode) και ύστερα από τις εξισώσεις περιστροφής (1.3) μπορούμε να βρούμε τις υπόλοιπες δύο συνιστώσες. Θεωρούμε ϵ_0, μ_0 παντού στον χώρο εκτός από τις περιοχές όπου βρίσκεται το εμπόδιο που είναι τέλειος αγωγός (PEC). Για να επιβάλλουμε τη μοναδικότητα της λύσης μέσα στη σχισμή στη περιοχή (II), θα πρέπει να είναι γνωστές οι τιμές των εφαπτομενικών συνιστωσών του πεδίου στα σύνορα του κλειστού χώρου [45]. Για την περιοχή (II) που μας ενδιαφέρει, αυτό σημαίνει πως χρειαζόμαστε τις τιμές του πεδίου στα $x = \pm h/2, z = 0$ και $z = w$.

²Όπως χρησιμοποιούμε στην βαθμωτή θεωρία με τη Συνθήκη Kirchhoff



Σχήμα 5.35: Το πρόβλημα συνοριακών τιμών για το πεδίο μέσα στη σχισμή του εμποδίου. Στις περιοχές $x > h/2$ και $x < -h/2$ είναι τοποθετημένος ένας τέλει αγωγός (PEC). Εικόνα προσαρμοσμένη από [45].

Προτού ορίσουμε τις οριακές συνθήκες θα χρησιμοποιήσουμε τον χωρισμό μεταβλητών, δηλαδή θεωρούμε ότι $E_y(x, z) = X(x)Z(z)$ και τότε από τη κυματική εξίσωση ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$X''(x) = -k_x^2 X(x), \quad Z''(z) = -\underbrace{(k^2 - k_x^2)}_{k_z^2} Z(z). \quad (5.13)$$

Μέσα στο PEC εμποδίο το ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδενικό οπότε στα άκρα $x = \pm h/2$ θα ισχύει για το πεδίο $E_y(x, z)$ ότι

$$E_y^{(II)}(-h/2, z) = E_y^{(II)}(h/2, z) = 0. \quad (5.14)$$

Λαμβάνοντας υπόψιν τις συνθήκες των $x = \pm h/2$, θα έχουμε ότι:

$$X(x) = A \sin(k_x x) + B \cos(k_x x) \xrightarrow{(5.14)} X(x) = A_n \sin\left[\frac{n\pi}{h}\left(x + \frac{h}{2}\right)\right], \quad (5.15)$$

όπου θεωρήσαμε ότι $k_x = n\pi/h$. Χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό β_n για το k_z όπως είθισται, $k_z \equiv \beta_n = \sqrt{k^2 - (n\pi/h)^2}$ και τότε η συνάρτηση $Z(z)$ θα γράφεται,

$$Z(z) = C_n \sin \beta_n z + D_n \cos \beta_n z.$$

Οι οριακές συνθήκες συνέχειας των πεδίων στα $z = 0, w$ θα δίνονται από τη συνέχεια των εφαπτομενικών μαγνητικών πεδίων:

$$\hat{\mathbf{z}} \times (\mathbf{H}^{(II)} - \mathbf{H}^{(I)}) = 0, \quad \text{για } z = 0, \quad (5.16)$$

$$\hat{\mathbf{z}} \times (\mathbf{H}^{(III)} - \mathbf{H}^{(II)}) = 0, \quad \text{για } z = w. \quad (5.17)$$

Στην περιοχή (III) το πεδίο αποτελείται μόνο από το διαδιδόμενο πεδίο $E_y^t(x, z)$. Ο μετασχηματισμός Fourier του πεδίου E_y^t ως προς τη μεταβλητή x είναι:

$$E_y^t(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{E}_y^t(\zeta; z) e^{-j\zeta x} d\zeta, \quad (5.18)$$

ενώ ο αντίστροφος Μ/Σ Fourier:

$$\hat{E}_y^t(\zeta; z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_y^t(x, z) e^{j\zeta x} dx. \quad (5.19)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (5.18) στην εξίσωση Helmholtz βρίσκουμε τη παρακάτω λύση:

$$\left(\frac{d}{dz} + \underbrace{k_0^2 - \zeta^2}_{\kappa_0^2} \right) \hat{E}_y^t(z, \zeta) = 0 \Rightarrow \hat{E}_y^t(z, \zeta) = \hat{E}_y^t(\zeta) e^{-j\kappa_0(z-w)}, \quad (5.20)$$

όπου για τη λύση χρησιμοποιήσαμε την συνθήκη ακτινοβολίας $\hat{E}_y^t(\infty, \zeta) \rightarrow 0$. Η έκφραση (5.18) τώρα παίρνει τη παρακάτω μορφή,

$$E_y^t(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{E}_y^t(\zeta) e^{-j\kappa_0(z-w)} e^{-j\zeta x} d\zeta. \quad (5.21)$$

Η συνθήκη συνέχειας του ανακλώμενου πεδίου μεταξύ των περιοχών (II) και (III) στο $z = w$ διέπει ότι:

$$E_y^t(x, w) = E_y^{(II)}(x, w) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \left[k_{xn} \left(x + \frac{h}{2} \right) \right] Z_n(w), \quad \text{για } |x| \leq h/2$$

Εφαρμόζοντας τον αντίστροφο Μ/Σ Fourier στα δύο μέλη της εξίσωσης μπορούμε να βρούμε μία έκφραση που συνδέει τα πλάτη του πεδίου μέσα στη σχισμή με το $\hat{E}_y^t(\zeta)$.

$$\begin{aligned} \hat{E}_y^t(\zeta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(w) \sin \left[k_{xn} \left(x + \frac{h}{2} \right) \right] e^{j\zeta x} dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_n(w)}{4\pi j} \int_{-h/2}^{h/2} \left[e^{jk_{xn} \frac{h}{2}} e^{j(k_{xn} + \zeta)x} - e^{-jk_{xn} \frac{h}{2}} e^{j(\zeta - k_{xn})x} \right] dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_n(w)}{4\pi j} \left[\frac{e^{jk_{xn} \frac{h}{2}}}{j(\zeta + k_{xn})} e^{j(\zeta + k_{xn})x} - \frac{e^{-jk_{xn} \frac{h}{2}}}{j(\zeta - k_{xn})} e^{j(\zeta - k_{xn})x} \right]_{-h/2}^{h/2} \end{aligned}$$

Οι αριθμητές των δύο κλασμάτων μπορούν να απλοποιηθούν, αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f_n(\zeta)$ για την οποία ισχύει:

$$f_n(\zeta) = e^{jk_{xn} \frac{h}{2}} e^{j(\zeta + k_{xn})x} \Big|_{-h/2}^{h/2} = e^{j\zeta h/2} e^{jn\pi} - e^{-j\zeta h/2} = e^{j\zeta h/2} (-1)^n - e^{-j\zeta h/2}$$

και τότε η προηγούμενη σχέση του $\hat{E}_z^t(\zeta)$ θα έχει τη παρακάτω μορφή,

$$\begin{aligned}\hat{E}_y^t(\zeta) &= \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{Z_n(w)}{4\pi} \left[\frac{f_n(\zeta)(\zeta - k_{xn}) - f_n(\zeta)(\zeta + k_{xn})}{\zeta^2 - k_{xn}^2} \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_n(w)k_{xn}}{2\pi} \frac{f_n(\zeta)}{\zeta^2 - k_{xn}^2}\end{aligned}$$

Αν αντικαταστήσουμε την $f_n(\zeta)$ στο $\hat{E}_y^t(\zeta)$ θα ισχύει τότε:

$$\hat{E}_y^t(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_n(w)k_{xn}}{2\pi} \left[\frac{e^{j\zeta\frac{h}{2}}(-1)^n - e^{-j\zeta\frac{h}{2}}}{\zeta^2 - \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2} \right] \quad (5.22)$$

Χρησιμοποιήσαμε την φασματική περιγραφή PWS του πεδίου ακριβώς μετά τη σχισμή και σύμφωνα με την σχέση (5.24), καταφέραμε να συσχετίσουμε τα πλάτη των επιπέδων κυμάτων με τους ρυθμούς n του πεδίου μέσα στη σχισμή, μέσω της συνάρτησης $Z_n(w)$. Για ευκολία μπορούμε να ορίσουμε την συνάρτηση $F(u)$ για την οποία ισχύει,

$$F_n(u) = \frac{e^{ju}(-1)^n - e^{-ju}}{u^2 - \left(\frac{n\pi}{2}\right)^2}, \quad (5.23)$$

για να απλοποιήσουμε περισσότερο τις σχέσεις των πεδίων, ακολουθώντας τη μεθοδολογία του άρθρου [45]. Το ηλεκτρικό πεδίο, σύμφωνα με την $F_n(u)$, γράφεται ως,

$$\hat{E}_y^t(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_n(w)k_{xn}}{2\pi} \frac{h^2}{4} F_n\left(\zeta\frac{h}{2}\right) \quad (5.24)$$

Το μαγνητικό πεδίο H_x υπολογίζεται μέσω της σχέσης $H_x = -\frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial E_y}{\partial z}$. Συνεπώς, για το μαγνητικό πεδίο $H_x^{(II)}$ μέσα στη σχισμή θα ισχύει ότι,

$$H_x^{(II)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n \sin\left[k_{xn}\left(x + \frac{h}{2}\right)\right]}{j\omega\mu} (C_n \cos \beta_n z - D_n \sin \beta_n z), \quad (5.25)$$

ενώ για το μαγνητικό πεδίο στη περιοχή (III):

$$H_x^t(x, z) = -j \int_{-\infty}^{\infty} \kappa_0 \hat{E}_y^t(\zeta) e^{-j\kappa_0(z-w)} e^{-j\zeta x} d\zeta. \quad (5.26)$$

Η συνέχεια του εφαπτομενικού μαγνητικού πεδίου στο $z = w$ προϋποθέτει ότι:

$$H_x^{(II)}(z = w) = H_x^t(z = w).$$

Μπορούμε να αντικαταστήσουμε τα μαγνητικά πεδία με τις σχέσεις που έχουμε βρει σε αυτό το σημείο και ταυτόχρονα να χρησιμοποιήσουμε την ορθογωνιότητα των ημιτόνων στο $|x| \leq h/2$. Θα ισχύει ότι,

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sin k_{xn}(x + h/2)e^{-j\zeta x} dx = k_{xn} \frac{h^2}{4} F_n \left(-\zeta \frac{h}{2} \right), \quad (5.27)$$

οπότε στη συνθήκη των μαγνητικών πεδίων αν αντικαταστήσουμε με τις εκφράσεις των πεδίων (5.25, 5.26) θα έχουμε ότι,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin \left[k_{xn} \left(x + \frac{h}{2} \right) \right] Z'_n(w) = -j \int_{-\infty}^{\infty} \kappa_0 \hat{E}_y^t(\zeta) e^{-j\zeta x} d\zeta, \quad (5.28)$$

όπου $Z'_n(w) = (C_n \cos \beta_n w - D_n \sin \beta_n w)$, ενώ χρησιμοποιώντας την ορθογωνιότητα των ημιτόνων στην παραπάνω σχέση:

$$\beta_n Z'_n(w) \frac{h}{2} = -j \int_{-\infty}^{\infty} \kappa_0 \hat{E}_y^t(\zeta) k_{xn} \frac{h^2}{4} F_n \left(-\zeta \frac{h}{2} \right) d\zeta, \quad (5.29)$$

Αντικαθιστούμε με την σχέση (5.24) που έχουμε βρει για το $\hat{E}_y^t(\zeta)$ και καταλήγουμε στη τελική έκφραση των δύο πεδίων στις περιοχές (II) και (III):

$$j\beta_n Z'_n(w) \frac{h}{2} = \frac{k_{xn}}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} Z_m(w) k_{xm} I(k_0), \quad (5.30)$$

$$\text{όπου } I(k_0) = \frac{h^4}{16} \int_{-\infty}^{\infty} F_m \left(\zeta \frac{h}{2} \right) F_n \left(-\zeta \frac{h}{2} \right) \sqrt{k_0^2 - \zeta^2} d\zeta.$$

Για τη δεύτερη έκφραση θα χρησιμοποιήσουμε την οριακή συνθήκη στο $z = 0$. Το πεδίο στην περιοχή (I) αποτελείται από το προσπίπτον πεδίο-πηγή $E_{y,inc}(x, z)$ του προβλήματος και το σκεδαζόμενο (*backscattered*) πεδίο $E_y^s(x, z)$ από τα τοιχώματα του εμπόδιου. Το πεδίο $E_{y,inc}$ θεωρούμε ότι είναι ένα επίπεδο κύμα με μοναδιαίο πλάτος της μορφής

$$E_{y,inc}(x, z) = e^{-j(k_{z,inc}z + k_{x,inc}x)}$$

Το σκεδαζόμενο πεδίο δεν μπορούμε να το γνωρίζουμε εκ των προτέρων αλλά μπορούμε να ακολουθήσουμε την ίδια διαδικασία με το $E_y^t(x, z)$. Δηλαδή, θα έχουμε ότι,

$$E_y^s(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{E}_y^s(\zeta) e^{-j\kappa_0 z} e^{-j\zeta x} d\zeta, \quad (5.31)$$

όπου $\kappa_0 = \sqrt{k_0^2 - \zeta^2}$. Η συνθήκη συνέχειας του ανακλώμενου πεδίου μεταξύ των περιοχών (I) και (II) στο $z = 0$ διέπει ότι:

$$E_y^s(x, 0) = E_y^{(II)}(x, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} D_m \sin \left[k_{xm} \left(x + \frac{h}{2} \right) \right], \quad \text{για } |x| \leq h/2$$

και εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier βρίσκουμε ότι:

$$\hat{E}_y^s(\zeta) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{D_m k_{xm} h^2}{2\pi} F_m \left(\zeta \frac{h}{2} \right) \quad (5.32)$$

Η συνέχεια των μαγνητικών πεδίων στο $z = 0$ μας επιβάλλει ότι:

$$H_{x,inc} + H_x^s = H_x^{(II)}. \quad (5.33)$$

Για κάθε όρο της παραπάνω σχέσης έχουμε ότι:

$$H_{x,inc}(x, 0) = \frac{k_{z,inc}}{\omega\mu_0} e^{-jk_{x,inc}x}, \quad (5.34)$$

$$H_x^s(x, 0) = \frac{1}{\omega\mu_0} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{E}_y^s(\zeta) \kappa_0 e^{-j\zeta x} d\zeta, \quad (5.35)$$

$$H_x^{(II)}(x, 0) = \frac{j}{\omega\mu_0} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n C_n \sin k_{xn} \left(x + \frac{h}{2} \right). \quad (5.36)$$

Χρησιμοποιούμε την ιδιότητα ορθογωνιότητας (5.27) που αποδείξαμε προηγουμένως βρίσκουμε ότι:

$$k_{z,inc} k_{xn} \frac{h^2}{4} F_n \left(-k_{x,inc} \frac{h}{2} \right) + \int_{-\infty}^{\infty} \hat{E}_y^s(\zeta) \kappa_0 k_{xn} \frac{h^2}{4} F_n \left(-\zeta \frac{h}{2} \right) d\zeta = j\beta_n C_n \frac{h}{2}$$

ή αν αντικαταστήσουμε το $\hat{E}_y^s(\zeta)$ από τη σχέση (5.32):

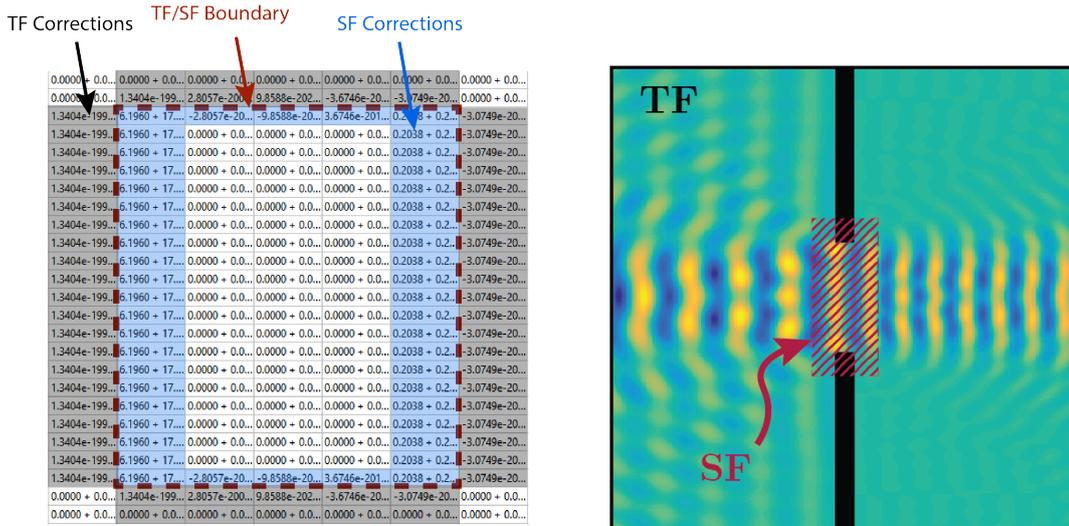
$$k_{z,inc} k_{xn} \frac{h^2}{4} F_n \left(-k_{x,inc} \frac{h}{2} \right) + \frac{k_{xn}}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} D_m k_{xm} I(k_0) = j\beta_n C_n \frac{h}{2} \quad (5.37)$$

Οι σχέσεις (5.30, 5.37) αποτελούν δύο εξισώσεις για τις συναρτήσεις πλάτους C_n, D_n του πεδίου μέσα στην περιοχή (II) που συσχετίζονται με τα m modes των ανακλώμενων πεδίων των περιοχών (I) και (III). Λύνοντας το ολοκλήρωμα $I(k_0)$ και τις δύο σχέσεις (5.30, 5.37) αριθμητικά έχουμε τη δυνατότητα να βρούμε την αναλυτική λύση του πεδίου.

Η σχέση μεταξύ του πεδίου μέσα στη σχισμή περιοχή (II) και του πεδίου μετά του εμποδίου περιοχή (III) παρουσιάζεται να έχει μία αρκετά πολύπλοκη μορφή. Η ανακρίβεια που παρουσιάζει η βαθμωτή θεωρία στην κοντινή περιοχή, ενδεχομένως να οφείλεται σε αυτήν ακριβώς τη συμπεριφορά του Η/Μ κύματος που αγνοείται καθολικά με την εφαρμογή της συνθήκης Kirchhoff. Το πεδίο μέσα στη σχισμή επηρεάζει τα πλάτη των επιπέδων κυμάτων $\hat{E}_z^t(\zeta)$ του φάσματος του πεδίου μετά του εμποδίου, μέσω της σχέσης (5.24). Όμως, λόγω του τυχαίου προσανατολισμού των επιπέδων κυμάτων, όσο πηγαίνουμε μακρύτερα από το εμπόδιο αυτά θα συμβάλλουν καταστροφικά και θα δημιουργούνται οι γνωστές περιθλαστικές κατανομές (diffraction patterns). Το όριο $z \gg \lambda$ στο οποίο τα ολοκληρώματα Kirchhoff και Rayleigh-Sommerfeld μπορούν να προβλέψουν τη κατανομή του πεδίου, είναι το όριο εκείνο που η βαθμωτή θεωρία μπορεί να αγνοήσει την παραπάνω συμπεριφορά του πεδίου.

5.4 TF/SF και το θεώρημα Ισοδυναμίας του Η/Μ

Αναφέραμε στην ενότητα 2.7 πως ο αλγόριθμος TF/SF αποτελεί ουσιαστικά το θεώρημα ισοδυναμίας του διακριτοποιημένου χώρου. Η διαχωριστική επιφάνεια TF/SF είναι η ισοδύναμη επιφάνεια (*Huygens Surface*), που το θεώρημα ισοδυναμίας χρησιμοποιεί για την εφαρμογή των επιφανειακών ρευμάτων. Μπορούμε να δούμε την επιφάνεια αυτή πάνω στο διάνυσμα πηγών b στα αποθηκευμένα δεδομένα του Matlab.



(i) Το διάνυσμα b περιλαμβάνει τις διορθώσεις των εξ. FDFD, από τις περιοχές TF/SF.

(ii) Οι TF/SF περιοχές στο πρόβλημα μας.

Σχήμα 5.36: Η διαχωριστική επιφάνεια TF/SF όπως ορίζεται (i) από το διάνυσμα της πηγής b (ii) πάνω στη διάταξη του προβλήματος.

Μέσα στο πλέγμα η TF/SF επιφάνεια δεν μπορεί να βρίσκεται πάνω σε κάποια επιφάνεια των Yee-cells, διότι κάθε πλευρά του Yee-cell περιλαμβάνει μία εφαπτομενική πεδιακή συνιστώσα. Οι επιφανειακές ρευματικές κατανομές εκφράζουν την **ασυνέχεια** του πεδίου μεταξύ δύο περιοχών, συνεπώς η επιφάνεια TS/SF πρέπει να βρίσκεται ενδιάμεσα των Yee-cells.

Πάνω στην επιφάνεια TF/SF υποθέτουμε πως δημιουργούνται ηλεκτρικά επιφανειακά ρεύματα \mathbf{J}_s λόγω της πηγής $\tilde{H}_{y,inc}$ και μαγνητικά επιφανειακά ρεύματα \mathbf{M}_s λόγω της πηγής $\tilde{E}_{y,inc}$. Τα ρεύματα αυτά εμφανίζονται στις FDFD σχέσεις μέσω των f_{src} και b όρων. Στη συνέχεια αποδεικνύουμε την ισοδυναμία του TF/SF αλγορίθμου για τον διακριτοποιημένο χώρο με το θεώρημα ισοδυναμίας του συνεχούς χώρου.

Για ευκολία, θεωρούμε πως το επιφανειακό ρεύμα στο σημείο (i, k) πάνω στη TF/SF επιφάνεια δημιουργείται από το πεδίο που βρίσκεται κοντινότερα στην επιφάνεια. Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (2.42) για το Η-Mode όπου $\tilde{H}_{y,inc} \equiv f_{src}$ η πηγή του προβλήματος, μπορούμε να γράψουμε ότι τα ισοδύναμα ρεύματα θα είναι,

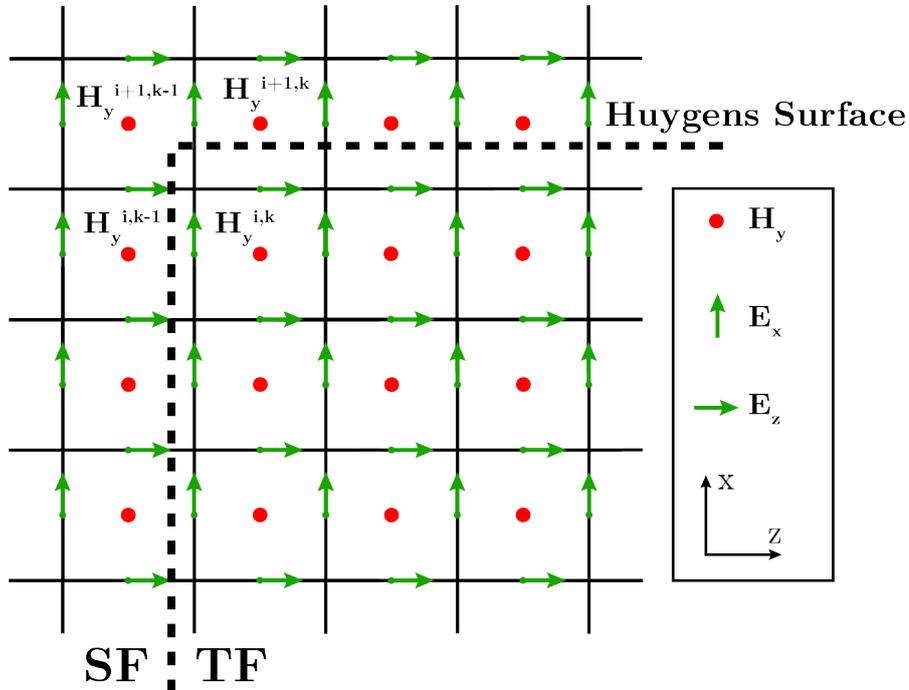
$$\mathbf{J}_{\text{sx}} = -\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{y}} \widetilde{H}_{y,inc}) = -\hat{\mathbf{x}} \widetilde{H}_{y,inc}, \quad (5.38)$$

$$\mathbf{J}_{\text{sz}} = -\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{y}} \widetilde{H}_{y,inc}) = -\hat{\mathbf{z}} \widetilde{H}_{y,inc}, \quad (5.39)$$

όταν το κάθετο διάνυσμα $\hat{\mathbf{n}}$ έχει κατεύθυνση από την επιφάνεια Huygens προς την SF περιοχή. Στις προσομοιώσεις μας η πηγή f_{src} είναι μόνο y διεύθυνση οπότε και εδώ θεωρούμε το ίδιο. Για να επαληθεύσουμε ότι τα επιφανειακά ρεύματα δίνουν το σωστό πεδίο μέσα στη κλειστή περιοχή, χρησιμοποιούμε την εξίσωση περιστροφής (2.24). Θεωρούμε ότι τα επιφανειακά ρεύματα $\mathbf{J}_{\text{sx}}^i, \mathbf{J}_{\text{sz}}^k$ περιγράφονται από τις πυκνότητες ρεύματος $\mathbf{J}_{\text{x}} = \mathbf{J}_{\text{sx}}/\Delta z'$ και $\mathbf{J}_{\text{z}} = \mathbf{J}_{\text{sz}}/\Delta x'$ που διαδίδονται μέσα στο Yee-cell. Τότε από την (2.24) βρίσκουμε ότι,

$$\epsilon_{xx}^{i,k} E_x^{i,k} = -\frac{\widetilde{H}_y^{i,k} - \widetilde{H}_y^{i,k-1}}{\Delta z'} - J_x^{i,k} = -\frac{1}{\Delta'_z} \left[\widetilde{H}_y^{i,k} - \underbrace{(\widetilde{H}_y^{i,k-1} + \widetilde{H}_{y,inc}^{i,k-1})}_{\widetilde{H}_{tot}^{i,k-1}} \right], \quad (5.40)$$

$$\epsilon_{zz}^{i+1,k} E_z^{i+1,k} = \frac{\widetilde{H}_y^{i+1,k} - \widetilde{H}_y^{i,k}}{\Delta x'} - J_z^{i+1,k+1} = \frac{1}{\Delta'_x} \left[\underbrace{(\widetilde{H}_y^{i+1,k} + \widetilde{H}_{y,inc}^{i+1,k})}_{\widetilde{H}_{tot}^{i+1,k}} - \widetilde{H}_y^{i,k} \right]. \quad (5.41)$$



Σχήμα 5.37: Η νοητή επιφάνεια Huygens στο πλέγμα για το H-Mode. Η πηγή f_{src} έρχεται από την SF περιοχή και συναντάει την διαχωριστική επιφάνεια TF/SF. Εικόνα προσαρμοσμένη από: M. E. Potter and J. Bérenger, "A Review of the Total Field / Scattered Field Technique for the FDTD Method," *Fermat*, vol. 19, 2017.

Το ίδιο ισχύει και κατά τον υπολογισμό του $E_z^{i+1,k}$. Με αυτόν τον τρόπο εισάγεται η πληροφορία της f_{src} στο πρόβλημα μας. Η ίδια διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί για τον υπολογισμό των μαγνητικών ρευμάτων M_{sx}, M_{sz} του E-Mode, λόγω του $E_{y,inc}$. Οι εξισώσεις H/M για το ηλεκτρικό πεδίο με τη παρουσία μαγνητικών ρευμάτων \mathbf{M} είναι οι παρακάτω [46]:

$$\nabla' \times \mathbf{E} = -\mathbf{M} + \mu \tilde{\mathbf{H}}, \quad -\hat{\mathbf{n}}_{12} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = \mathbf{M}_s, \quad (5.42)$$

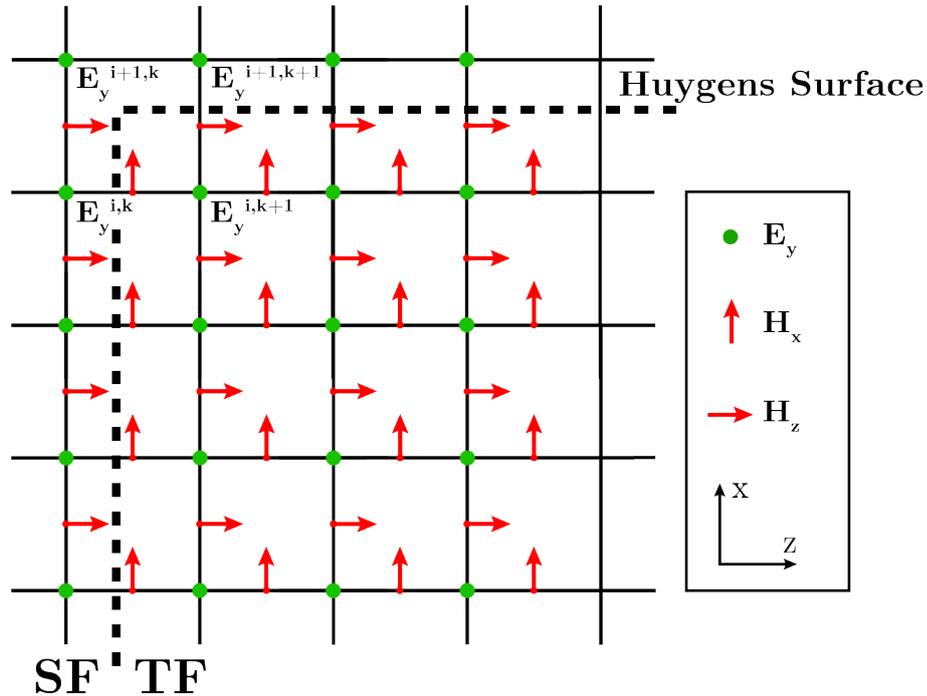
Οι πυκνότητες μαγνητικών ρευμάτων υπολογίζονται ως $\mathbf{M}_x = \mathbf{M}_{sx}/\Delta z'$ και $\mathbf{M}_z = \mathbf{M}_{sz}/\Delta x'$. Τα επιφανειακά ρεύματα (σύμφωνα με το σχήμα 5.38) είναι,

$$\mathbf{M}_{sx} = \hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{y}} \tilde{E}_{y,inc}) = \hat{\mathbf{x}} E_{y,inc}, \quad \mathbf{M}_{sz} = \hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{y}} \tilde{E}_{y,inc}) = \hat{\mathbf{z}} E_{y,inc}, \quad (5.43)$$

και θα έχουμε τελικά,

$$\mu_{xx}^{i,k} \tilde{H}_{xx}^{i,k} = -\frac{E_z^{i+1,k} - E_z^{i,k}}{\Delta x'} + M_x^{i,k} = -\frac{1}{\Delta x'} \left[E_y^{i+1,k} - \underbrace{(E_y^{i,k} + E_{y,inc}^{i,k})}_{E_{tot}^{i,j}} \right] \quad (5.44)$$

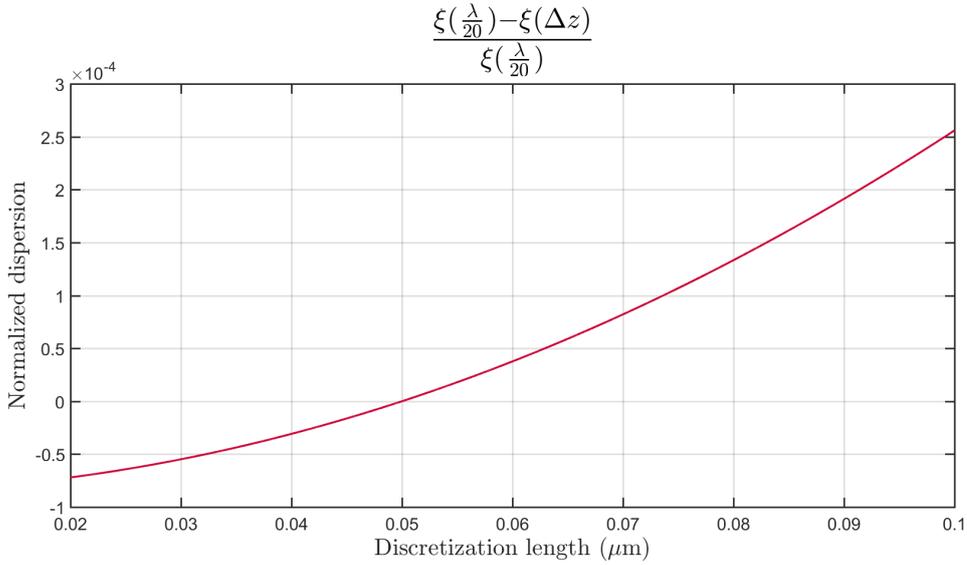
Στην TF περιοχή υπολογίζεται τελικά το πεδίο που προκύπτει από το άθροισμα του ανακλώμενου πεδίου μαζί με προσπίπτον f_{src} .



Σχήμα 5.38: Η βοηθή επιφάνεια Huygens στο πλέγμα για το H-Mode. Η πηγή f_{src} έρχεται από την SF περιοχή και συναντάει την διαχωριστική επιφάνεια TF/SF. Εικόνα προσαρμοσμένη από: M. E. Potter and J. Bérenger, "A Review of the Total Field / Scattered Field Technique for the FDTD Method," *Fermat*, vol. 19, 2017.

5.5 Αριθμητική διασπορά της FDFD μεθόδου

Η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών (και γενικότερα οποιαδήποτε μέθοδος που διακριτοποιεί τον χώρο) εμφανίζει μία αριθμητική διασπορά στα δεδομένα, δηλαδή το κύμα της προσομοίωσης διαδίδεται στον διακριτό χώρο με ταχύτητα διάδοσης διαφορετική της πραγματικής. Το πεπερασμένο βήμα που έχουμε επιλέξει για τις διαστάσεις των Yee-cells είναι πάντα μη-μηδενικό, συνεπώς μικραίνοντας τα βήματα θα έχουμε μεγαλύτερη ακρίβεια. Όπως φαίνεται και από την εικόνα 5.39, μεταβάλλοντας τη διάσταση Δz ο κυματαριθμός ξ δεν παραμένει σταθερός αλλά επηρεάζεται σημαντικά.

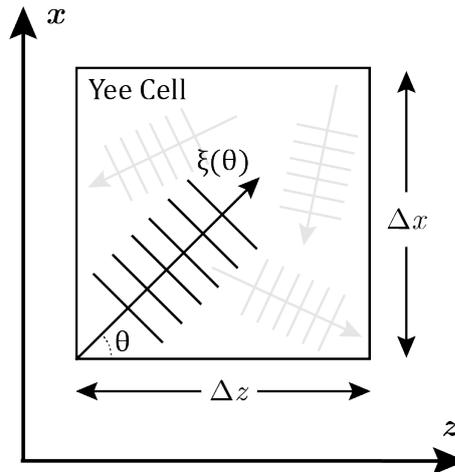


Σχήμα 5.39: Η μεταβολή του κυματαριθμού $\xi(\Delta z)$ του αριθμητικού κύματος, καθώς αυξάνουμε τη μία διάσταση Δz του Yee-cell.

Επιπλέον, η τιμή του κυματαριθμού ξ του αριθμητικού κύματος θα μεταβάλλεται ανάλογα με τη κατεύθυνση διάδοσης του κύματος στο διακριτό χώρο. Ένα κύμα που εμφανίζεται με γωνία θ μέσα σε ένα Yee-cell θα διαδίδεται και με διαφορετική ταχύτητα $\nu(\theta)$. Αυτό φαίνεται από τη σχέση (2.8) της ταχύτητας, όπου τα k_x, k_z εξαρτώνται από τη γωνία θ που δημιουργούν με τους άξονες x, z . Άρα, ενώ στην πραγματικότητα η γωνία θ θα περιμέναμε να μην επιφέρει κάποια αλλαγή στην ταχύτητα του κύματος μέσα σε ιστροπικά υλικά, αφού ισχύει $|k|^2 = k_x^2 + k_z^2$ για κάθε θ , στην προσομοίωση έχουμε τελικά εισάγει μία αριθμητική ανισοτροπία.

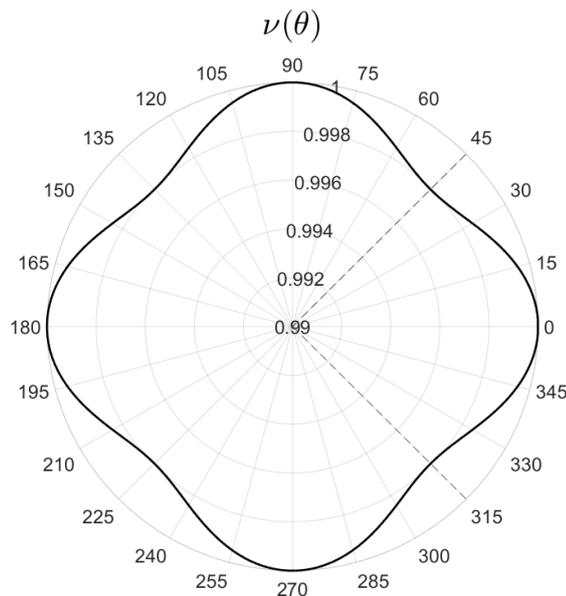
$$\xi(\theta) = \sqrt{\left[\frac{2}{\Delta x} \sin\left(\frac{k_0 \sin(\theta) \Delta x}{2}\right) \right]^2 + \left[\frac{2}{\Delta z} \sin\left(\frac{k_0 \cos(\theta) \Delta z}{2}\right) \right]^2} \quad (5.45)$$

$$\nu(\theta) = \omega n \left[\left[\frac{2}{\Delta x} \sin\left(\frac{k_0 \sin(\theta) \Delta x}{2}\right) \right]^2 + \left[\frac{2}{\Delta z} \sin\left(\frac{k_0 \cos(\theta) \Delta z}{2}\right) \right]^2 \right]^{-1/2} \quad (5.46)$$



Σχήμα 5.40: Η κατεύθυνση διάδοσης του κύματος $\xi(\theta)$ μέσα στο Yee-cell ως προς την γωνία θ .

Τα περιθλώμενα κύματα θα επηρεάζονται κατά ένα βαθμό από την *ανισοτροπία* αυτή του διακριτού χώρου και όσο μακρύτερα διαδίδονται, τόσο θα αποκλύουν από την πραγματική μορφή τους. Ο παράγοντας επιβράδυνσης γ μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να *προσαρμόσει* μία από τις δύο διευθύνσεις (x ή z), όμως τα ανακλώμενα κύματα θα υποφέρουν πάντα από κάποια διασπορά. Λόγω του μικρού $[500 \times 1000]$ χώρου (δεξιά του εμποδίου) θεωρούμε ότι δεν ήταν τόσο αισθητή η επιρροή της διασποράς στα τελικά αποτελέσματά μας, ωστόσο σε μεγαλύτερα προβλήματα θα πρέπει πάντα να λαμβάνεται υπόψιν.



Σχήμα 5.41: Πολικό διάγραμμα της ταχύτητα $\nu(\theta)$ του αριθμητικού κύματος. Η μέγιστη διασπορά εμφανίζεται στα σημεία όπου το κύμα διαδίδεται πάνω στις διαγωνίους του Yee-cell.

5.6 Επεξεργασία του FFT

Η φύση της περιθλάσης κρύβεται στην αρχή του Huygens. Κάθε σημείο του μετωπικού κύματος αποτελεί μία πηγή δευτερευόντων κυλινδρικών (στις δύο διαστάσεις) κυμάτων, και λαμβάνοντας υπόψιν την συμπεριφορά όλων αυτών μπορούμε να υπολογίσουμε το πεδίο σε ένα διαφορετικό σημείο. Μία σχετική παραλλαγή αυτής της ιδέας, που αποδείξαμε στην ενότητα 4.1, αποτελεί η ανάλυση του μετωπικού κύματος σε επίπεδα κύματα (PWS) που διαδίδονται ανεξάρτητα το ένα με το άλλο σε διαφορετικές διευθύνσεις στον χώρο, και παίρνοντας τη συνεισφορά όλων αυτών υπολογίζουμε τη κατανομή του πεδίου σε ένα διαφορετικό σημείο. Αυτοί οι δύο μέθοδοι είναι *ισοδύναμοι* για το πρόβλημα μας, με τη δεύτερη μέθοδο να είναι και μαθηματικά συνεπέστερη.

Το κοινό πρόβλημα που εμφανίζουν και οι δύο μέθοδοι είναι ότι όλες οι εξισώσεις περιλαμβάνουν δυσεπίλυτα ολοκληρώματα, λόγω των γρήγορων ταλαντώσεων των ολοκληρωτέων συναρτήσεων. Το αποτέλεσμα είναι ότι χρειαζόμαστε υψηλή δειγματοληψία και αρκετή υπολογιστική δύναμη για να υπολογίσουμε τις λύσεις. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε τις τεχνικές που χρειάστηκαν να χρησιμοποιήσουμε πάνω στον αλγόριθμο FFT, για να καταφέρουμε να πάρουμε μία καλή εικόνα του πεδίου από τα ολοκληρώματα.

Η βασική διαφορά μεταξύ της αναλυτικής λύσης των ολοκληρωμάτων Fourier και της μεθόδου FFT είναι πως:

- Το μακρινό πεδίο ορίζεται από το ολοκλήρωμα Fourier της *συνεχούς* κατανομής του πεδίου.
- Το FFT υπολογίζει το διακριτό Μ/Σ Fourier του δειγματοληπτούμενου πεδίου.

Η αναλυτική λύση είναι συνάρτηση συνεχών μεταβλητών, ενώ το FFT έχει διακριτή μορφή. Από μόνο του το FFT είναι δύσκολο να υπολογίσει το μακρινό πεδίο με απόλυτη ακρίβεια, αφού το πλήθος δειγμάτων N που έχουμε κανονικά για την κατανομή μας εξαρτάται από την διάσταση του grid και το βήμα Δx . Άρα έχουμε περιορισμένο N , δεν μπορούμε να έχουμε άπειρα μεγάλο grid στην προσομοίωση μας, και καταλήγουμε να έχουμε **undersampling**. Χωρίς αρκετά δείγματα δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και μεγαλύτερες συχνότητες (λόγω του Nyquist περιορισμού), συνεπώς έχουμε φαινόμενα **aliasing** στην εικόνα.

Για να αντιμετωπίσουμε αυτό το πρόβλημα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις δύο μεθόδους: *upsampling* και *zero-padding*. Το *upsampling* ουσιαστικά κάνει interpolate μία συνάρτηση με σκοπό την αύξηση των δειγμάτων της. Αυτό πραγματοποιείται με την εντολή *interp()* στο Matlab. Με το *zero-padding* εισάγουμε εκατέρωθεν της κατανομής μας μηδενικά ώστε να αυξήσουμε πάλι τον συνολικό αριθμό δειγμάτων N .

Η απόσταση που έχουμε πάρει τη γνωστή κατανομή, προτού εφαρμόσουμε το FFT πάνω της, είναι αρκετά κοντά στο εμπόδιο (περίπου στα $z = 5 \mu\text{m}$). Ο λόγος είναι πως θέλουμε να έχουμε μία κατανομή που να έχει φτάσει σε ομαλό μηδενισμό αρκετά πριν τη γειτονιά του UPML στον x άξονα. Αν δεν ακολουθήσουμε αυτή τη προϋπόθεση και επιλέξουμε το πεδίο σε απόσταση π.χ. $z \geq 12 \mu\text{m}$, τότε η πληροφορία της κατανομής μας θα εκτείνεται πάνω σε όλον τον άξονα x και θα **κόβεται απότομα** στο UPML. Αυτό

σημαίνει πως αφενός θα χάνουμε κάποια πληροφορία της πραγματικής κατανομής από το UPML, αφετέρου θα εισάγονται άπειρες υψηλές συχνότητες στο φάσμα εξαιτίας του απότομου μηδενισμού.

5.7 Τελευταία Σχόλια

Με τη μέθοδο των Πεπερασμένων Διαφορών στο Πεδίο της Συχνότητας, γνωστή ως *FDFD*, σε συνδυασμό με την τεχνική του *Total Field/Scattered Field* αλγορίθμου, οι εξισώσεις του *Maxwell* μετατρέπονται σε ένα αλγεβρικό σύστημα της μορφής $Ax = b$. Η διακριτοποίηση του χώρου με το *Yee-πλέγμα*, προσφέρει έναν εξαιρετικά ευέλικτο τρόπο εφαρμογής των ηλεκτρομαγνητικών εξισώσεων σε πρακτικά προβλήματα, ενώ σαν μέθοδος στον χώρο συχνοτήτων μελετάει με αρκετή ευκολία υλικά με φαινόμενα διασποράς και πεδία στην ημιτονοειδή μόνιμη κατάσταση. Αν και δεν αναπτύχθηκαν τρισδιάστατα προβλήματα σε αυτή την εργασία, λόγω των υπερβολικών πράξεων που συνήθως απαιτούν, μπορεί εύκολα κάποιος να εφαρμόσει τις ίδιες σχέσεις πεπερασμένων διαφορών (όπως φαίνεται στο *3D Yee-πλέγμα*) στις εξισώσεις του *Maxwell* και να κατασκευάσει την τρισδιάστατη *FDFD* μορφή των εξισώσεων.

Η μέθοδος αυτή, μέσω του *Matlab*, αποδείχθηκε ότι είναι ένα εξαιρετικό εργαλείο για τη μελέτη του φαινομένου της διανυσματικής περίθλασης H/M κυμάτων από δισδιάστατες ορθογώνιες γεωμετρίες. Επίσης, απαραίτητη για την προσομοίωση διάδοσης H/M κυμάτων στον ελεύθερο χώρο αποτέλεσε και το Προσαρμοσμένο Στρώμα *UPML* που χρησιμοποιήθηκε περιμετρικά της διάταξης. Ο περιορισμένος $[N_z \times N_x]$ χώρος της προσομοίωσης καθιστά σχεδόν αδύνατη την εύρεση του πεδίου στο μακρινό πεδίο μέσω των εξισώσεων *FDFD*. Ωστόσο, η ανάλυση του διανυσματικού πεδίου στο φάσμα επιπέδων κυμάτων με τη μέθοδο *VPWS*, αποτελεί μία εναλλακτική μέθοδο περιγραφής του πεδίου με ολοκληρώματα που μπορούν να λυθούν μέσω του *FFT* αλγορίθμου και να βρεθεί η λύση στις περιοχές *Fresnel* και *Fraunhofer*.

Τα βαθμωτά ολοκληρώματα μπορούν να προβλέψουν την κατανομή του πεδίου κυρίως σε αποστάσεις αρκετά μακρύτερα του εμποδίου, ενώ παρατηρήθηκε πως το H/M πεδίο δεν μπορεί να υπακούει τη βαθμωτή θεωρία στην περιοχή κοντά στο εμπόδιο. Εκεί, το διανυσματικό πεδίο επηρεάζεται από το εμπόδιο με τέτοιο τρόπο, που δεν είναι εύκολο να συμπεριληφθεί στα βαθμωτά ολοκληρώματα. Η μέθοδος *FDFD* υπήρξε ένα θαυμάσιο εργαλείο για την μελέτη του φαινομένου της περίθλασης, το οποίο ανυπομονούμε να χρησιμοποιήσουμε και σε διαφορετικά προβλήματα του ηλεκτρομαγνητισμού που θα συμβάλλουν στην πρόοδο της επιστήμης και της τεχνολογίας.

Κεφάλαιο 6

Appendix A

6.1 Εξίσωση Helmholtz

Οι εξισώσεις (1.1) αποτελούν ένα σύνολο συζευγμένων πρωτοτάξιων μερικών διαφορικών εξισώσεων για τα δύο πεδία \mathbf{E} , \mathbf{B} . Για αρχή αγνοούνται φαινόμενα ανισοτροπίας και μη γραμμικότητας των υλικών. Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (1.1) μεταξύ τους προκύπτει

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)$$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B}$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}). \quad (6.1)$$

Η εξίσωση (6.1) αποτελεί τη μορφή μίας κυματική εξίσωση λόγω του όρου $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ και ταυτόχρονα εξίσωση διάχυσης λόγω του $\frac{\partial}{\partial t}$ [47]. Στη συνέχεια θεωρούμε μηδενικές πηγές \mathbf{J} , ρ οπότε ο μη-ομογενής όρος θα ισούται με μηδέν, αφού από τον νόμο του Gauss: $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, ενώ ο όρος της διάχυσης εξαφανίζεται. Η απλοποιημένη νέα εξίσωση είναι η ομογενής κυματική εξ. όπως φαίνεται παρακάτω για το ηλεκτρικό πεδίο.

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{v} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (6.2)$$

όπου $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ η ταχύτητα διάδοσης του κύματος μέσα στο υλικό. Εύκολα αποδεικνύεται ότι και το \mathbf{H} περιγράφεται από ίδια κυματική εξίσωση. Υπενθυμίζεται πως ο τελεστής Laplace που δρα πάνω σε ένα διάνυσμα έχει τη μορφή: $\nabla^2 \mathbf{E} = (\nabla^2 E_x, \nabla^2 E_y, \nabla^2 E_z)$.

Με το θεώρημα Fourier μπορούμε να εξαφανίσουμε τις χρονικές παραγώγους όπως κάναμε στο Κεφάλαιο 1. Η λύση τώρα περιγράφεται από ένα άπειρο άθροισμα μονοχρω-

ματικών κυμάτων με συχνότητες ω_n [48]. Αν ορίσουμε $k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$ τότε έχουμε την εξίσωση Helmholtz των \mathbf{E} ή \mathbf{H} πεδίων που είναι

$$(\nabla^2 + k^2) \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{Bmatrix} = 0. \quad (6.3)$$

Πάντα επιλέγουμε να λύσουμε την (6.3) είτε ως προς το \mathbf{E} ή \mathbf{H} και μετά το άλλο πεδίο το υπολογίζουμε από τις σχέσεις στροβιλισμού 1.3.

6.2 Θεώρημα του Green

Για να αντιμετωπιστούν προβλήματα στα οποία δεν είναι γνωστές οι κατανομές των φορτίων στις διαχωριστικές επιφάνειες, χρησιμοποιούνται από τα μαθηματικά οι συναρτήσεις Green [48]. Από την διανυσματική ανάλυση ισχύουν τα εξής:

$$1. \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} \, d^3x = \oint_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS \quad (\text{Θεώρημα Gauss})$$

2. Έστω $\mathbf{A} = f\nabla g$ και f, g δύο αυθαίρετα βαθμωτά πεδία. Τότε η απόκλιση του \mathbf{A} θα είναι: $\nabla \cdot (f\nabla g) = f\nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g$

$$3. f\nabla g \cdot \hat{\mathbf{n}} = f \frac{\partial g}{\partial n}$$

Χρησιμοποιώντας τις τρεις αυτές ιδιότητες, κατασκευάζεται η ακόλουθη παράσταση:

$$\int_V [f\nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g] \, dV = \oint_S f \frac{\partial g}{\partial n} \, dS \quad (6.4)$$

Αν εναλλαχθεί το f με το g και αφαιρεθούν οι δύο εξισώσεις αυτές, τότε προκύπτει το **Θεώρημα του Green**:

$$\int_V [f\nabla^2 g - g\nabla^2 f] \, d^3x = \oint_S \left[f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right] \, dS \quad (6.5)$$

6.3 Ανάκλαση/Διάθλαση από διηλεκτρική πλάκα

Η πηγή που ορίζουμε για το πρόβλημα μας προέρχεται από το πρόβλημα σκέδασης-διάθλασης του Η/Μ κύματος από μία πλάκα μήκους d με δείκτη διάθλασης n_2 που διαχωρίζει δύο επιφάνειες με δείκτες διάθλασης n_1 και n_3 .

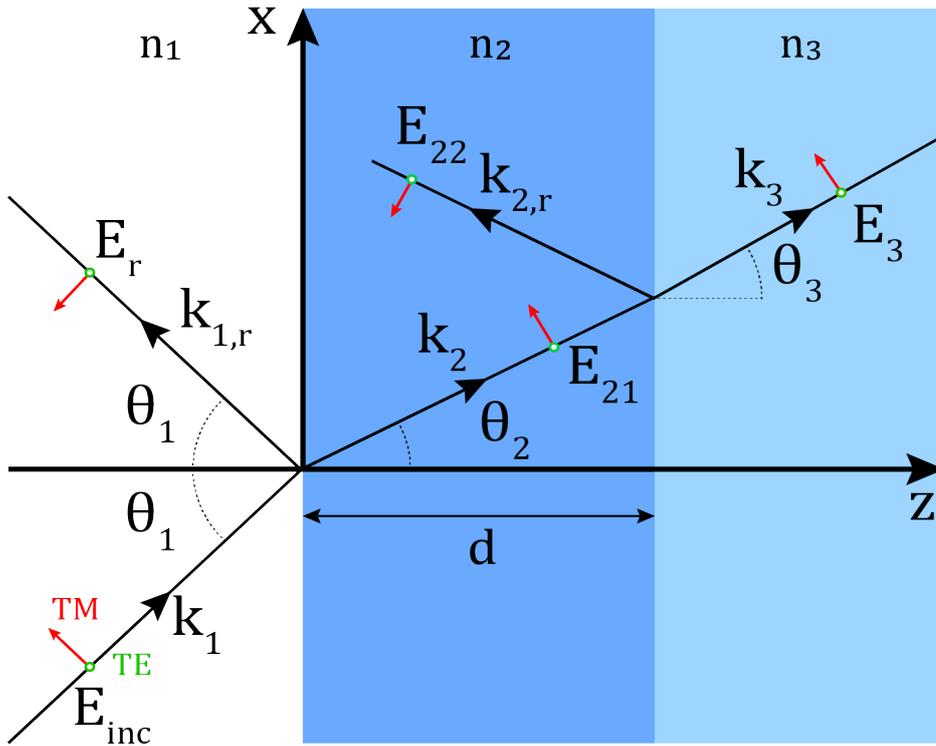


Figure 6.1: Σχηματική αναπαράσταση της διάθλασης και ανάκλασης Η/Μ κύματος από διηλεκτρική πλάκα μήκους d .

Ξεκινώντας από τη ΤΕ περίπτωση γράφουμε τη γενική μορφή των ηλεκτρικών πεδίων στους τρεις χώρους.

$$E_1 = \underbrace{\hat{y} E_0 e^{-jk_0 n_1 (\sin \theta_1 x + \cos \theta_1 z)}}_{E_{inc}} + \hat{y} E_r e^{-jk_0 n_1 (\sin \theta_1 x - \cos \theta_1 z)}, \quad (6.6)$$

$$E_2 = \hat{y} E_{21} e^{-jk_0 n_2 (\sin \theta_2 x + \cos \theta_2 z)} + \hat{y} E_{22} e^{-jk_0 n_2 (\sin \theta_2 x - \cos \theta_2 z)}, \quad (6.7)$$

$$E_3 = \hat{y} E_3 e^{-jk_0 n_3 [\sin \theta_3 x + \cos \theta_3 (z-d)]}, \quad (6.8)$$

ενώ ο νόμος του Snell είναι

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 = n_3 \sin \theta_3. \quad (6.9)$$

Το μαγνητικά πεδία \mathbf{H}_i ($i = 1, 2, 3$ για κάθε χώρο) υπολογίζονται εύκολα από τη σχέση

$$\mathbf{H}_i = \frac{n_i}{Z_0} (\mathbf{k}_i \times \mathbf{E}_i), \quad (6.10)$$

όπου $Z_0 \approx 376.73\Omega$ η κυματική αντίσταση στο κενό. Τα μαγνητικά πεδία σε κάθε περιοχή είναι συνεπώς

$$H_1 = (-\hat{\mathbf{x}} \cos \theta_1 + \hat{\mathbf{z}} \sin \theta_1) \frac{n_1 E_0}{Z_0} e^{-j\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}} + (\hat{\mathbf{x}} \cos \theta_1 + \hat{\mathbf{z}} \sin \theta_1) \frac{n_1 E_r}{Z_0} e^{-j\mathbf{k}_{1r} \cdot \mathbf{r}}, \quad (6.11)$$

$$H_2 = (-\hat{\mathbf{x}} \cos \theta_2 + \hat{\mathbf{z}} \sin \theta_2) \frac{n_2 E_{21}}{Z_0} e^{-j\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}} + (\hat{\mathbf{x}} \cos \theta_2 + \hat{\mathbf{z}} \sin \theta_2) \frac{n_2 E_{22}}{Z_0} e^{-j\mathbf{k}_{2r} \cdot \mathbf{r}}, \quad (6.12)$$

$$H_3 = (-\hat{\mathbf{x}} \cos \theta_3 + \hat{\mathbf{z}} \sin \theta_3) \frac{n_3 E_3}{Z_0} e^{-j\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{r}} e^{jk_3 z d}, \quad (6.13)$$

Οι οριακές συνθήκες στα $z = 0$ και $z = d$ μας δίνουν τις παρακάτω τέσσερις σχέσεις:

$$E_0 + E_r = E_{21} + E_{22}, \quad (6.14)$$

$$n_1 \cos \theta_1 (E_r - E_0) = n_2 \cos \theta_2 (E_{22} - E_{21}), \quad (6.15)$$

$$E_{21} e^{-jk_0 n_2 \cos \theta_2 d} + E_{22} e^{jk_0 n_2 \cos \theta_2 d} = E_3, \quad (6.16)$$

$$n_2 \cos \theta_2 (E_{21} e^{-jk_0 n_2 \cos \theta_2 d} - E_{22} e^{jk_0 n_2 \cos \theta_2 d}) = n_3 \cos \theta_3 E_3. \quad (6.17)$$

Ορίζουμε τους συντελεστές ανάκλασης και διάθλασης r, r_2, t_2, t ως προς το E_0

$$r = \frac{E_r}{E_0}, \quad r_2 = \frac{E_{21}}{E_0}, \quad t_2 = \frac{E_{22}}{E_0}, \quad t = \frac{E_3}{E_0}, \quad (6.18)$$

και οι προηγούμενες εξισώσεις τώρα μπορούν γίνονται οι παρακάτω:

$$1 + r = r_2 + t_2, \quad (6.19)$$

$$n_1 \cos \theta_1 (r - 1) = n_2 \cos \theta_2 (t_2 - r_2), \quad (6.20)$$

$$t = r_2 e^{-jX} + t_2 e^{jX}, \quad (6.21)$$

$$t = \frac{n_2 \cos \theta_2}{n_3 \cos \theta_3} (r_2 e^{-jX} - t_2 e^{jX}), \quad (6.22)$$

όπου θεωρήσαμε $X = k_0 n_2 \cos \theta_2 d$. Τώρα λύνουμε το σύστημα εξισώσεων και βρίσκουμε τις σχέσεις που υπολογίζουν τα r, r_2, t_2, t .

$$t_2 = \frac{2}{1 - (1 + K_{21}) \left(\frac{1 + K_{23}}{1 - K_{23}} \right) e^{j2X} - K_{21}}, \quad (6.23)$$

$$r_2 = -\frac{1 + K_{23}}{1 - K_{23}} e^{j2X} t_2, \quad (6.24)$$

$$t = r_2 e^{-jX} + t_2 e^{jX}, \quad (6.25)$$

$$r = \frac{1}{2} [r_2 (1 - K_{21}) + t_2 (1 + K_{21})], \quad (6.26)$$

όταν $K_{21} = \frac{n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1}$ και $K_{23} = \frac{n_2 \cos \theta_2}{n_3 \cos \theta_3}$ για ευκολία.

Για τη ΤΜ περίπτωση οι εξισώσεις των πεδίων είναι οι παρακάτω:

$$E_1 = \underbrace{(\hat{\mathbf{x}} \cos \theta_1 - \hat{\mathbf{z}} \sin \theta_1) E_0 e^{-j\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}}}_{E_{inc}} - (\hat{\mathbf{x}} \cos \theta_1 + \hat{\mathbf{z}} \sin \theta_1) E_r e^{-j\mathbf{k}_{1r} \cdot \mathbf{r}}, \quad (6.27)$$

$$E_2 = (\hat{\mathbf{x}} \cos \theta_2 - \hat{\mathbf{z}} \sin \theta_2) E_{21} e^{-j\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}} - (\hat{\mathbf{x}} \cos \theta_2 + \hat{\mathbf{z}} \sin \theta_2) E_{22} e^{-j\mathbf{k}_{2r} \cdot \mathbf{r}}, \quad (6.28)$$

$$E_3 = (\hat{\mathbf{x}} \cos \theta_3 - \hat{\mathbf{z}} \sin \theta_3) E_3 e^{-j\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{r}} e^{-jk_3 z d}, \quad (6.29)$$

$$H_1 = \hat{\mathbf{y}} \frac{n_1 E_0}{Z_0} e^{-j\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}} + \hat{\mathbf{y}} \frac{n_1 E_r}{Z_0} e^{-j\mathbf{k}_{1r} \cdot \mathbf{r}}, \quad (6.30)$$

$$H_2 = \hat{\mathbf{y}} \frac{n_2 E_{21}}{Z_0} e^{-j\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}} + \hat{\mathbf{y}} \frac{n_2 E_{22}}{Z_0} e^{-j\mathbf{k}_{2r} \cdot \mathbf{r}}, \quad (6.31)$$

$$H_3 = \hat{\mathbf{y}} \frac{n_3 E_3}{Z_0} e^{-j\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{r}} e^{-jk_3 z d}, \quad (6.32)$$

Οι οριακές συνθήκες στα $z = 0$ και $z = d$ μας δίνουν τις παρακάτω τέσσερις σχέσεις:

$$n_1 (E_0 + E_r) = n_2 (E_{21} + E_{22}), \quad (6.33)$$

$$\cos \theta_1 (E_0 - E_r) = \cos \theta_2 (E_{21} - E_{22}), \quad (6.34)$$

$$E_{21} e^{-jk_0 n_2 \cos \theta_2 d} + E_{22} e^{jk_0 n_2 \cos \theta_2 d} = \frac{n_3}{n_2} E_3, \quad (6.35)$$

$$\cos \theta_2 (E_{21} e^{-jk_0 n_2 \cos \theta_2 d} - E_{22} e^{jk_0 n_2 \cos \theta_2 d}) = \cos \theta_3 E_3. \quad (6.36)$$

Εισάγουμε στις εξισώσεις (6.27) τους συντελεστές ανάκλασης-διάθλασης (6.18) και οι εξισώσεις τώρα γίνονται οι παρακάτω:

$$n_1 (1 + r) = n_2 (r_2 + t_2), \quad (6.37)$$

$$\cos \theta_1 (1 - r) = \cos \theta_2 (r_2 - t_2), \quad (6.38)$$

$$r_2 e^{-jX} + t_2 e^{jX} = \frac{n_3}{n_2} t, \quad (6.39)$$

$$\frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_3} (r_2 e^{-jX} - t_2 e^{jX}) = t, \quad (6.40)$$

όπου υπενθυμίζουμε ότι $X = k_0 n_2 \cos \theta_2 d$. Λύνουμε το σύστημα των r, r_2, t_2, t και βρίσκουμε τελικά τις σχέσεις των συντελεστών ανάκλασης-διάθλασης:

$$t_2 = \frac{2}{\Gamma_{21}^- + \Gamma_{21}^+ \frac{\Gamma_{32}^+}{\Gamma_{32}^-} e^{j2X}}, \quad (6.41)$$

$$r_2 = t_2 e^{j2X} \frac{\Gamma_{32}^+}{\Gamma_{32}^-}, \quad (6.42)$$

$$r = \frac{1}{2} (r_2 \Gamma_{21}^- + t_2 \Gamma_{21}^+), \quad (6.43)$$

$$t = \frac{n_2}{n_3} (r_2 e^{-jX} + t_2 e^{jX}), \quad (6.44)$$

όπου θεωρήσαμε $\Gamma_{21}^\pm = \left(\frac{n_2}{n_1} \pm \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1} \right)$ και $\Gamma_{32}^\pm = \left(\frac{n_3}{n_2} \pm \frac{\cos \theta_3}{\cos \theta_2} \right)$.

Το *script* στο *Matlab* που υπολογίζει όλους τους συντελεστές (6.18) στο κώδικα μας δίνεται στην ενότητα 7.2.

6.4 Τρισδιάστατες μητρικές εξισώσεις

Ξεκινάμε από τη γενική μορφή των εξισώσεων (2.26) όπου θεωρούμε τώρα ότι $\partial_y \neq 0$, οπότε θα έχουμε και τον πίνακα \mathbf{D}_y^e στη θέση των y παραγώγων.

$$\mathbf{D}_y^e e_z - \mathbf{D}_z^e e_y = \boldsymbol{\mu}_{xx} \tilde{h}_x \quad \mathbf{D}_y^h \tilde{h}_z - \mathbf{D}_z^h \tilde{h}_y = \boldsymbol{\epsilon}_{xx} e_x \quad (6.45.1)$$

$$\mathbf{D}_z^e e_x - \mathbf{D}_x^e e_z = \boldsymbol{\mu}_{yy} \tilde{h}_y \quad \mathbf{D}_z^h \tilde{h}_x - \mathbf{D}_x^h \tilde{h}_z = \boldsymbol{\epsilon}_{yy} e_y \quad (6.45.2)$$

$$\mathbf{D}_x^e e_y - \mathbf{D}_y^e e_x = \boldsymbol{\mu}_{zz} \tilde{h}_z \quad \mathbf{D}_x^h \tilde{h}_y - \mathbf{D}_y^h \tilde{h}_x = \boldsymbol{\epsilon}_{zz} e_z \quad (6.45.3)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{D}_z^e & \mathbf{D}_y^e \\ \mathbf{D}_z^e & 0 & -\mathbf{D}_x^e \\ -\mathbf{D}_y^e & \mathbf{D}_x^e & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\mu}_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{\mu}_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{h}_x \\ \tilde{h}_y \\ \tilde{h}_z \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{C}^e \vec{\mathbf{e}} = [\boldsymbol{\mu}_r] \vec{\mathbf{h}} \quad (6.46)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{D}_z^h & \mathbf{D}_y^h \\ \mathbf{D}_z^h & 0 & -\mathbf{D}_x^h \\ -\mathbf{D}_y^h & \mathbf{D}_x^h & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{h}_x \\ \tilde{h}_y \\ \tilde{h}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\epsilon}_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\epsilon}_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{\epsilon}_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{C}^h \vec{\mathbf{h}} = [\boldsymbol{\epsilon}_r] \vec{\mathbf{e}} \quad (6.47)$$

Συνδυάζοντας τις δύο εξισώσεις (6.46), (6.47) μπορούμε να εκφράσουμε τις δύο κυματικές εξισώσεις σε *block* μορφή πινάκων ως,

$$\left(\mathbf{C}^e [\boldsymbol{\epsilon}_r]^{-1} \mathbf{C}^h - [\boldsymbol{\mu}_r] \right) \vec{\mathbf{h}} = 0, \quad (6.48)$$

$$\left(\mathbf{C}^e [\boldsymbol{\mu}_r]^{-1} \mathbf{C}^h - [\boldsymbol{\epsilon}_r] \right) \vec{\mathbf{e}} = 0. \quad (6.49)$$

Οπότε, για το τρισδιάστατο πρόβλημα θα πρέπει να λυθεί η εξίσωση $\mathbf{A} \vec{\mathbf{e}} = 0$ μέσω του τρισδιάστατου αλγορίθμου TF/SF. Τις περισσότερες φορές όμως ο πίνακας \mathbf{A} έχει υπερβολικά μεγάλες διαστάσεις και δεν μπορεί να υπολογιστεί από έναν απλό υπολογιστή.

6.5 PWS του πεδίου πάνω στο άνοιγμα

Για να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση (4.5) θα πρέπει με κάποιο τρόπο να βρούμε τα πλάτη $A(k_x; 0)$ και γι' αυτό θα χρειαστεί να αξιοποιούμε τις δύο βασικές συνθήκες της βαθμωτής θεωρίας περίθλασης:

1. **Συνθήκη Kirchhoff:** Το πεδίο στο άνοιγμα ισοδυναμεί με το προσπίπτον πεδίο στο σημείο εκεί, όπως και η κάθετη παράγωγος στο εμπόδιο $\partial_n U$. Επάνω στην αδιαφανή περιοχή (*black screen*) του εμποδίου το πεδίο και η παράγωγος είναι ίσα με μηδέν (Kirchhoff boundary conditions).

2. **Amplitude transmittance function:** $t_a(x) = \frac{U(x, 0)}{U_{inc}(x, 0)}$

Η συνάρτηση t_a συνδέει τα πλάτη του προσπίπτοντος πεδίου U_{inc} στο $z = 0$ με του περιθλώμενου πεδίου U και εξαρτάται από τη γεωμετρία του ανοίγματος. Παίρνοντας τον

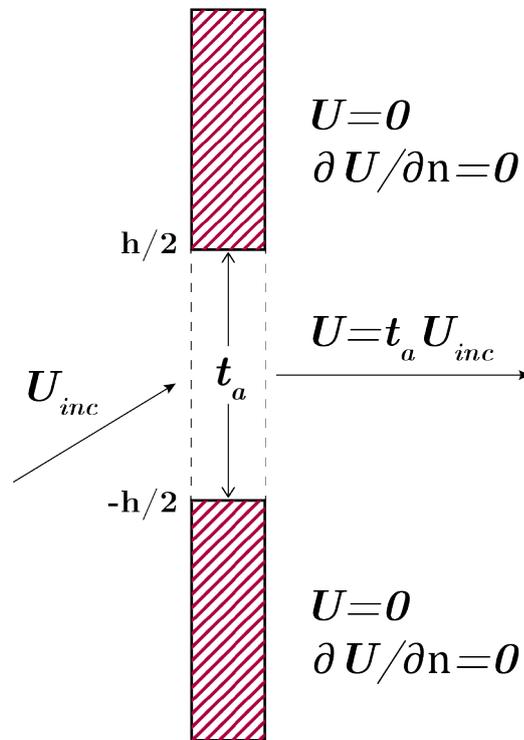


Figure 6.2: Αναπαράσταση της μεθόδου προσέγγισης του βαθμωτού πεδίου δεξιά του πετάσματος.

Μ/Σ Fourier βλέπουμε ότι

$$A(k_x; z) = \mathcal{F}\{t_a(x)U_{inc}(x, z)\} = T_a(k_x) * A_{inc}(k_x; z), \quad (6.50)$$

$$\text{όπου,} \quad T_a = \mathcal{F}\{t_a(x)\},$$

$$A_{inc} = \mathcal{F}\{U_{inc}(x)\},$$

και με "*" συμβολίζουμε την πράξη της συνέλιξης. Το φάσμα επίπεδων κυμάτων αποτελείται από την συνέλιξη του φάσματος του προσπίπτοντος πεδίου με τον Μ/Σ Fourier της χαρακτηριστικής περιθλαστικής διάταξης μας. Στη δική μας περίπτωση όπου η πηγή μας είναι ένα επίπεδο κύμα με πλάτος ίσο με τη μονάδα, συνεπώς το φάσμα είναι απλώς η συνάρτηση $\delta(k_x)$.

$$A_{inc}(k_x) = \delta(k_x) \xrightarrow{(4.1)} A(k_x) = \delta(k_x) * T_a = T_a(k_x) \quad (6.51)$$

Επομένως ο παράγοντας της διάταξης t_a στο πεδίο της χωρικής συχνότητας k_x ως $T_a(k_x)$, θα είναι τελικά μόνο αυτό που επηρεάζει το φάσμα του πεδίου δεξιά του εμποδίου στην ανάλυση μας.

Η συνάρτηση t_a για το μονοδιάστατο ορθογώνιο άνοιγμα μας που έχει διάσταση h

$$t_a(x) = \text{rect}\left(\frac{x}{h}\right) \Rightarrow T_a(k_x) = h \text{sinc}\left(\frac{hk_x}{2}\right) \quad (6.52)$$

Οπότε τελικά η εξίσωση PWS θα έχει τη μορφή:

$$U(x, z) = h \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}\left(\frac{hk_x}{2}\right) e^{-jk_x x} e^{-jz(k^2 - k_x^2)^{1/2}} dk_x. \quad (6.53)$$

Chapter 7

Κώδικες στο Matlab

7.1 2-D PML κώδικας

```
1 function [sz , sx] = calcpml(NGRID, NPML)
2 % calcpml calculates the PML parameters on a 2D grid where:
3 %HORIZONTAL AXIS IS "z" AND VERTICAL AXIS IS "x" (to be in
4 % par with the
5 % mathematical model of Diffraction .
6 % [sz , sx] = calcpml2d(NGRID, NPML);
7 %
8 % With this script we calculate the 2D-PML
9 % EXAMPLE: NGRID = [100 100]
10 %           NPML = [20 20 20 20]
11 %           [sz , sx] = calcpml(NGRID, NPML)
12 %
13 % Input Arguments
14 % =====
15 % NGRID Array containing the number of points in the grid
16 % = [ Nz Nx ]
17 % NPML Array containing the size of the PML at each
18 % boundary
19 % = [ Nzlo Nzhi Nxlo Nxhi ]
20 %
21 % Output Arguments
22 % =====
23 % sz , sx 2D arrays containing the PML parameters on a 2D
24 % grid
25 % Initialize parameters
26 Nz = NGRID(1);
27 Nx = NGRID(2);
```

```

26 a_max = 3;
27 p = 3;
28 s_max = 1;
29 n0 = 376.730313668; %[Ohm] free space Impedance
30 NZLO = NPML(1);
31 NZHI = NPML(2);
32 NXLO = NPML(3);
33 NXHI = NPML(4);
34 ax = ones(Nz,Nx);
35 az = ones(Nz,Nx);
36 sigma_z = ones(Nz,Nx);
37 sigma_x = ones(Nz,Nx);
38 %ADD ZLO PML
39 for nz = 1:NZLO
40     az(:,NZLO-nz+1) = 1 + a_max*(nz/NZLO)^p;
41     sigma_z(:,NZLO-nz+1) = s_max*sin((pi*nz)/(2*NZLO))^2;
42 end
43 %ADD ZHI PML
44 for nz = 1:NZHI
45     az(:,Nz-NZHI+nz) = 1 + a_max*(nz/NZHI)^p;
46     sigma_z(:,Nz-NZHI+nz) = s_max*sin((pi*nz)/(2*NZHI))^2;
47 end
48 %ADD XLO PML
49 for nx=1:NXLO
50     ax(NXLO-nx+1,:) = 1 + a_max*(nx/NXLO)^p;
51     sigma_x(NXLO-nx+1,:) = s_max*sin((pi*nx)/(2*NXLO))^2;
52 end
53 %ADD XHI PML
54 for nx=1:NXHI
55     ax(Nx-NXHI+nx,:) = 1 + a_max*(nx/NXHI)^p;
56     sigma_x(Nx-NXHI+nx,:) = s_max*sin((pi*nx)/(2*NXHI))^2;
57 end
58 sz = az.*(1+1i*n0.*sigma_z);
59 sx = ax.*(1+1i*n0.*sigma_x);
60 figure(1)
61 imagesc(real(sz))
62 title('Real Sz')
63 figure(2)
64 imagesc(real(sx))
65 title('Real Sx')
66 end

```

7.2 Script Ανάκλαση-Διάθλαση

```

1 function [r,t,Refl,Tran,r2,t2,theta2,theta3]=
    dielectric_slab_final(Pol,n1,n2,n3,d,lambda0,theta_inc)
2 %
3 % [Pol,r,t,Refl,Tran]= dielectric_slab_rev(Pol,n1,n2,n3,d,
    lambda0,theta_inc)
4 %
5 % Reflection and Transmission from a dielectric slab
6 %
7 % n1 | n2 | n3
8 %
9 % n1, n2, n3 = refractive indices
10 % d = slab thickness (microns)
11 % Pol = Polarization ('TE' or 'TM')
12 % lambda0 = Freespace Wavelength (microns)
13 % theta_inc = Angle of Incidence (deg)
14 % r = reflection coefficient (E_r/E_i)
15 % t = transmission coefficient (E_t/E_i)
16 % Refl = Reflectivity |r|^2
17 % Tran = Transmissivity [n3*cos(theta3)/n1*cos
    (theta1)]|t|^2
18
19 k0 = 2*pi/lambda0;
20 theta1 = theta_inc*pi/180;
21 theta2 = asin(n1.*sin(theta1)/n2);
22 theta3 = asin(n1.*sin(theta1)/n3);
23
24 Snell_2 = n1*sin(theta1)/n2;
25 if Snell_2 > 1
26     costheta2 = 1i*sqrt((n1/n2)^2*sin(theta1)^2-1);
27 else
28     costheta2 = cos(theta2);
29 end
30
31 Snell_3 = n1*sin(theta1)/n3;
32 if Snell_3 > 1
33     costheta3 = 1i*sqrt((n1/n3)^2*sin(theta1)^2-1);
34 else
35     costheta3 = cos(theta3);
36 end
37
38 if Pol == 'E'
39     K21 = n2.*costheta2./(n1.*cos(theta1));

```

```

40     K23      = n2.* costheta2 ./ (n3.* costheta3);
41     X        = k0*n2.* costheta2 .* d;
42
43     denom    = 1 - (1+K21) .* ((1+K23) ./ (1-K23)) .* exp(1 i * 2 .* X)
      -K21;
44     t2      = 2 ./ denom;
45     r2      = t2 .* ( (1+K23) ./ (1-K23) ) .* exp(2*1 i .* X);
46
47     r       = 0.5*(r2.*(1-K21)+t2.*(1+K21));
48     t       = r2 .* exp(-1 i .* X) + t2 .* exp(+1 i .* X);
49
50     elseif   Pol=='H'
51         G32p  = (n3/n2) + (costheta3 ./ costheta2);
52         G32m  = (n3/n2) - (costheta3 ./ costheta2);
53         G21p  = (n2/n1) + (costheta2 ./ cos(theta1));
54         G21m  = (n2/n1) - (costheta2 ./ cos(theta1));
55         X     = k0*n2.* costheta2 .* d;
56
57         denom = G21p + (G32m ./ G32p) .* G21m .* exp(-1 i * 2 .* X);
58         r2    = 2 ./ denom;
59         t2    = r2 .* (G32m ./ G32p) .* exp(-2*1 i .* X);
60
61         r     = 0.5*(r2 .* G21m + t2 .* G21p);
62         t     = (r2 .* exp(-1 i .* X) + t2 .* exp(+1 i .* X)) *(n2/n3);
63     else
64         return
65     end
66
67
68     Refl     = abs(r) .^ 2;
69     Tran    = ((real(n3.* costheta3)) ./ (n1.* cos(theta1))) .* abs
      (t) .^ 2; % check for TM!!!!!!
70
71     end

```

7.3 Πίνακες 2D παραγώγων

```

1 function [DEZ,DEX,DHZ,DHX] = calcder(NGRID,RES,kappa0)
2 % Input Arguments
3 % =====
4 % NGRID = [Nz Nx] grid size
5 % RES = [dz dx] grid resolution of the 1X grid
6 % kinc = [kz kx] incident wave vector
7 %
8 Nz = NGRID(1);
9 Nx = NGRID(2);
10 diag = Nz*Nx;
11 % DERIVATIVE MATRICES (Notice that their size is NzNx-by-
    NxNz)
12 %
13 % S = spdiags(Bin,d,m,n) creates an m-by-n sparse matrix S
    by taking the
14 % columns of Bin and placing them along the diagonals
    specified by d.
15 %
16 %
17 %% DEX
18 %
19 center_diag = -ones(diag,1);
20 added_diag = [zeros(Nz,1); ones(diag-Nz,1)];
21 DEX = spdiags([center_diag added_diag],[0 Nz],diag,diag)/(
    kappa0*RES(2));
22 %
23 %[zeros(Nz,1);ones(diag-Nz,1)]
24 % Because the first elements are cut when they are inserted
    into diagonals
25 %
26 % spdiags([center_diag added_diag],[0 Nz],diag,diag) means
    that the column
27 % center_diag is inserted into the 0-th diagonal and column
    added_diag into
28 % the Nz-th diagonal.
29 %
30 %
31 %% DEZ
32 %
33 % The second diagonal of DEZ has ones and a zero for every
    Nz-th diagonal
34 % element.

```

```

35 center_diag = -ones(diag,1);
36 added_diag = [0;ones(diag-1,1)];
37 for i = 1:Nx-1
38     added_diag(1+Nz*i) = 0;
39 end
40 DEZ = spdiags([center_diag added_diag], [0 1], diag,diag)/(
    kappa0*RES(1));
41 %
42 %% DHZ and DHX
43 DHZ = -DEZ';
44 DHX = -DEX';

```

7.4 Inpolygon Κώδικας

Μπορούμε να φτιάξουμε τη διάταξη του προβλήματος με τη βοήθεια πολυγώνων. Δεν επιλέξαμε την μέθοδο αυτή διότι χρειάζεται περισσότερο χρόνο για την επεξεργασία ένταντι του *bruteforce* κώδικα, ωστόσο σε δυσκολότερες γεωμετρίες η χρήση πολυγώνων είναι φυσικά προτιμότερη. Παρακάτω είναι ο εναλλακτικός κώδικας με τα πολύγωνα.

```

1 %Polygons on the 2x grid
2 %Optional: Add this instead of ER2,UR2
3
4 P1 = [1 1];
5 P2 = [1,2*(opaque_zleft-1)];
6 P3 = [2*(height_up+1),2*(opaque_zleft-1)];
7 P4 = [2*(height_up+1),2*opaque_zright];
8 P5 = [2*(height_down-1),2*opaque_zright];
9 P6 = [2*(height_down-1),2*(opaque_zleft-1)];
10 P7 = [Nx2 2*(opaque_zleft-1)];
11 P8 = [Nx2 1];
12
13
14 Y = [P1(1),P2(1),P3(1),P4(1),P5(1),P6(1),P7(1),P8(1),P1(1)];
15 X = [P1(2),P2(2),P3(2),P4(2),P5(2),P6(2),P7(2),P8(2),P1(2)];
16
17
18 F1 = [1,2*(opaque_zleft)];
19 F2 = [1,2*(opaque_zright)];
20 F3 = [2*(height_up),2*(opaque_zright)];
21 F4 = [2*(height_up),2*(opaque_zleft)];
22 F5 = [2*(height_down),2*(opaque_zleft)];
23 F6 = [2*(height_down),2*(opaque_zright)];
24 F7 = [Nx2,2*(opaque_zright)];
25 F8 = [Nx2,2*(opaque_zleft)];

```

```

26
27
28 Y1 = [ F1 (1) , F2 (1) , F3 (1) , F4 (1) , F1 (1) ];
29 X1 = [ F1 (2) , F2 (2) , F3 (2) , F4 (2) , F1 (2) ];
30
31
32 Y2 = [ F5 (1) , F6 (1) , F7 (1) , F8 (1) , F5 (1) ];
33 X2 = [ F5 (2) , F6 (2) , F7 (2) , F8 (2) , F5 (2) ];
34
35 L1 = [ 1 2*( opaque_zright +1) ];
36 L2 = [ 1 , Nz2 ];
37 L3 = [ Nx2 , Nz2 ];
38 L4 = [ Nx2 , 2*( opaque_zright +1) ];
39 Y3 = [ L1 (1) L2 (1) L3 (1) L4 (1) L1 (1) ];
40 X3 = [ L1 (2) L2 (2) L3 (2) L4 (2) L1 (2) ];
41
42 %plot (X, Y, X1, Y1, X2, Y2, X3, Y3)
43 ER2 = er1 * ones (Nx2, Nz2);
44 UR2 = ur1 * ones (Nx2, Nz2);
45
46 for k = 1:Nz2
47     for i = 1:Nx2
48         if inpolygon (k, i, X3, Y3) == 1
49             ER2 (i, k) = er1;
50             UR2 (i, k) = ur1;
51         elseif inpolygon (k, i, X1, Y1) == 1 || inpolygon (k, i,
52             X2, Y2) == 1
53             ER2 (i, k) = er;
54             UR2 (i, k) = ur;
55         end
56     end
end
end

```

7.5 Κώδικας για τα σφάλματα

```

1 %
2 %FOR z12 Diffraction
3     fig0 = openfig( 'compare_z12.fig' );
4     axObjs0 = fig0.Children;
5     dataObjs0 = axObjs0.Children;
6     %z1 = dataObjs0(1).ZData;
7     x01 = dataObjs0(1).XData; %Fresnel
8     y01 = dataObjs0(1).YData;
9     x02 = dataObjs0(2).XData; %RS1
10    y02 = dataObjs0(2).YData;
11    x03 = dataObjs0(3).XData; %FDFD
12    y03 = dataObjs0(3).YData;
13    x03_cut = zeros(1,301);
14    y03_cut = zeros(1,301);
15    j = 1;
16    min_z12 = find(x03==min(x01));
17    max_z12 = find(x03==max(x01));
18    for i = min_z12:2:max_z12
19        x03_cut(1,j) = x03(1,i);
20        y03_cut(1,j) = y03(1,i);
21        j = j+1;
22    end
23    Err01 = y03_cut - y01 ;
24    Err02 = y03_cut - y02 ;
25    mean_err_z12_01 = mean(Err01); %Fresnel
26    mean_err_z12_02 = mean(Err02); %RS1
27    mean_abs_err_z12_01 = mean(abs(Err01));
28    mean_abs_err_z12_02 = mean(abs(Err02));
29    RMSE_z12_01 = sqrt(mean(Err01.^2));
30    RMSE_z12_02 = sqrt(mean(Err02.^2));
31    std_err_z12_01 = std(Err01);
32    std_err_z12_02 = std(Err02);
33
34 %FOR z100
35    fig1 = openfig( 'compare_z100new.fig' );
36    ax1 = gca;
37    dataObjs1 = ax1.Children;
38    x11 = dataObjs1(1).XData; %Fresnel
39    y11 = dataObjs1(1).YData;
40    x12 = dataObjs1(2).XData; %Fraunhofer
41    y12 = dataObjs1(2).YData;
42    x13 = dataObjs1(3).XData; %FDFD

```

```
43 y13 = dataObjs1(3).YData;
44 x13_cut = zeros(1,601);
45 y13_cut = zeros(1,601);
46 j = 1;
47 for i = min(x11):0.1:max(x11)
48     x13_min = min(abs(x13-i));
49     t = find(x13==i+x13_min);
50     if isempty(t)
51         t = find(x13==i-x13_min);
52     end
53     x13_cut(1,j) = x13(1,t);
54     y13_cut(1,j) = y13(1,t);
55     j = j +1;
56 end
57 Err11 = y13_cut - y11;
58 Err12 = y13_cut - y12;
59 mean_err_z12_11 = mean(Err11); %Fresnel
60 mean_err_z12_12 = mean(Err12); %Fraunhofer
61 mean_abs_err_z100_01 = mean(abs(Err11));
62 mean_abs_err_z100_02 = mean(abs(Err12));
63 RMSE_z100_01 = sqrt(mean(Err11.^2));
64 RMSE_z100_02 = sqrt(mean(Err12.^2));
65 std_err_z100_01 = std(Err11);
66 std_err_z100_02 = std(Err12);
```

Βιβλιογραφία

- [1] Ιωάννης Τσαλαμέγκας and Ιωάννης Ρουμελιώτης. *Ηλεκτρομαγνητικά Πεδία Τόμος Α'*. Θεσσαλονίκη: Τζιόλας, 2017. ISBN: 978-960-418-214-5.
- [2] Constantine A. Balanis. «Electrical Properties of Matter». In: *Advanced Engineering Electromagnetics*. Arizona, 2012. Chap. 2, pp. 77–79. DOI: [10.1109/MAP.1989.6102037](https://doi.org/10.1109/MAP.1989.6102037).
- [3] Sophocles J Orfanidis. *Uniform Plane Waves*. 2008. URL: <http://www.ece.rutgers.edu/~7B~%7Dorfanidi/ewa/>.
- [4] Raymond Rumpf. *Lecture notes in <Advanced Computation: Computational Electromagnetics>*. 2013. URL: <https://empossible.net/academics/emp5337/>.
- [5] Jeremy Orloff. *Analytic Continuation and the Gamma Function*. URL: <https://math.mit.edu/~jorloff/18.04/notes/topic13.pdf>.
- [6] Publisher Taylor, A J Ward, and J B Pendry. «Refraction and geometry in Maxwell's equations». In: *Journal of Modern Optics* 43.No. 4 (1996), pp. 773–793.
- [7] Elias N. Glytsis. *Basic Principles & Interference (Lecture notes, not publised)*. Athens, 2020.
- [8] Akira Ishimaru. *Electromagnetic Wave Propagation, Radiation, and Scattering From Fundamentals to Applications*. 2017.
- [9] Zackary Sacks, Robert Lee, David Kingsland, et al. «A Perfectly Matched Anisotropic Absorber for Use as an Absorbing Boundary Condition». In: *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 43.12 (1995), pp. 1460–1463. ISSN: 15582221. DOI: [10.1109/8.477075](https://doi.org/10.1109/8.477075).
- [10] R. C. Rumpf. «Simple implementation of arbitrarily shaped total-field/scattered-field regions in finite-difference frequency-domain». In: *Progress In Electromagnetics Research B* 36 (2012), pp. 221–248. ISSN: 19376472. DOI: [10.2528/PIERB11092006](https://doi.org/10.2528/PIERB11092006).
- [11] Ιωάννης Βομβορίδης. «Ηλεκτροστατικό Πεδίο». In: *Ηλεκτρομαγνητικά Πεδία Μέρος Α'*. Αθήνα: ΣΥΜΕΩΝ, 2009. Chap. 2.2, pp. 129–143. ISBN: 9789607888938.
- [12] Randall J. LeVeque. *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations*. 2007. ISBN: 9780898716290.
- [13] Sandip Mazumder. *Numerical methods for partial differential equations: Finite difference and finite volume methods*. 2015, pp. 1–461. ISBN: 9780128498941.

- [14] Ramesh Garg. *Analytical and Computational Methods in Electromagnetics*. 2008, pp. 199–353. ISBN: 9781596933859.
- [15] Kane Yee. «Numerical Solution of Initial Boundary Value Problems Involving Maxwell's Equations in Isotropic Media». In: *IEEE Trans. Antennas and Propagation* 14.3 (1966), pp. 302–307. DOI: [10.1109/TAP.1966.1138693](https://doi.org/10.1109/TAP.1966.1138693).
- [16] Allen Taflove and Susan C Hagness. «Introduction to Maxwell's Equations and the Yee Algorithm». In: *Computational Electrodynamics The Finite-Difference Time-Domain Method*. 3rd. London, 2005. Chap. 3, pp. 59–61. ISBN: 1580538320.
- [17] Thomas Pertsch. *Computational Photonics*. FSU Jena, 2015.
- [18] Raymond C. Rumpf, Cesar R. Garcia, Eric A. Berry, et al. «Finite-difference frequency-domain algorithm for modeling electromagnetic scattering from general anisotropic objects». In: *Progress In Electromagnetics Research B* 61.1 (2015), pp. 55–67. ISSN: 19376472. DOI: [10.2528/PIERB14071606](https://doi.org/10.2528/PIERB14071606).
- [19] Gilbert Strang. «Linear Transformations». In: *Introduction to Linear Algebra*. 3rd. 2003. Chap. 7, pp. 371–373.
- [20] Michael E. Potter and Jean-pierre Bérenger. «A Review of the Total Field / Scattered Field Technique for the FDTD Method». In: *Fermat* 19 (2017).
- [21] *Optical constants of Au (Gold)*. <https://refractiveindex.info/?shelf=main&book=Au&page=McPeak>. [Online; accessed 14-April-2021].
- [22] P. G. Etchegoin, E. C. Le Ru, and M. Meyer. «An analytic model for the optical properties of gold». In: *The Journal of Chemical Physics* 125 (16 Oct. 2006), p. 164705. ISSN: 0021-9606. DOI: [10.1063/1.2360270](https://doi.org/10.1063/1.2360270).
- [23] Max Born and Emile Wolf. «Elements of the theory of diffraction». In: *Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light*. Cambridge: Cambridge University Press, 1999. Chap. 8, pp. 417–443. ISBN: 0521642221.
- [24] Νικόλα Άλμπερτ. «Σχεδίαση και ανάλυση της λογαριθμικής περιοδικής κεραίας». PhD thesis. 2010.
- [25] Elias N. Glytsis. *Fundamentals of the Scalar Diffraction Theory (Lecture notes, not published)*. Athens, 2019.
- [26] C. D. Cantrell. *Fresnel-Kirchhoff diffraction theory • Partial differential equation*. The University of Texas at Dallas, Erik Jonsson School PhoTEC, 1997.
- [27] Ulrich Brosa. «Diffraction of electromagnetic waves». In: *Zeitschrift fur Naturforschung - Section A Journal of Physical Sciences* 65.1 (2010), pp. 1–24. ISSN: 09320784. DOI: [10.1515/zna-2010-1-200](https://doi.org/10.1515/zna-2010-1-200). arXiv: [0911.3663](https://arxiv.org/abs/0911.3663).
- [28] Xia Dr. Guoxing. *Wave Optics*. University of Manchester, 2017.
- [29] Joseph W. Goodman and Mary E. Cox. «Introduction to Fourier Optics». In: *Physics Today* 22.4 (1969), pp. 97–101. ISSN: 0031-9228. DOI: [10.1063/1.3035549](https://doi.org/10.1063/1.3035549).
- [30] Constantine A. Balanis. «17.2 Near field-Far Field Measurements». In: *Antenna Theory Analysis and Design*. 3rd. Hoboken: John Wiley & Sons, 2005. Chap. 17, pp. 1019–1025. ISBN: 0-471-66782-X.

- [31] Leonard Mandel and Emil Wolf. *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge University Press, 1995. DOI: [10.1017/CB09781139644105](https://doi.org/10.1017/CB09781139644105).
- [32] Thomas Kaiser. *On the sign and prefactor conventions in Fourier transforms*. 2016. URL: https://www.iap.uni-jena.de/iapmedia/de/Lecture/Fundamentals+of+modern+optics1490997600/FoM016_supplement_01.pdf.
- [33] Lukas Novotny and Bert Hecht. *Principles of Nano-optics Second edition*. Vol. 34. 2007, pp. 38–46. ISBN: 9781107005464. arXiv: [arXiv:1011.1669v3](https://arxiv.org/abs/1011.1669v3).
- [34] Jack D. Gaskill. «The propagation and diffraction of optical wave fields». In: *Linear systems, Fourier transforms, and optics*. John Wiley & Sons, 1978. Chap. 10, pp. 356–359. ISBN: 0-471-29288-5.
- [35] Jeff Fessler. *Lecture Notes: EECS 451, Digital Signal Processing and Analysis: The Discrete Fourier Transform*. 2011.
- [36] Hanming Guo, Jiabi Chen, and Songlin Zhuang. *Vector plane wave spectrum of an arbitrary polarized electromagnetic wave*. 2006. DOI: [10.1364/oe.14.002095](https://doi.org/10.1364/oe.14.002095).
- [37] D. R. Rhodes. «On a fundamental principle in the theory of planar antennas». In: *Proceedings of the IEEE* 52.9 (1964), pp. 1013–1021. DOI: [10.1109/PROC.1964.3231](https://doi.org/10.1109/PROC.1964.3231).
- [38] Peter Muys. *The angular spectrum representation of vectorial laser beams*. Belgium, 2011.
- [39] Leonard Mandel, Emil Wolf, and Pierre Meystre. «Method of Stationary phase». In: *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge University Press, 1996. Chap. 3.3, pp. 120–140. ISBN: 0 52141711 2.
- [40] K F Riley, M P Hobson, and S J Bence. *Mathematical Methods for Physics and Engineering: A Comprehensive Guide*. 3rd ed. Cambridge University Press, 2006. DOI: [10.1017/CB09780511810763](https://doi.org/10.1017/CB09780511810763).
- [41] J.W. Goodman. *Introduction to Fourier Optics*. Electrical Engineering Series. McGraw-Hill, 1996, pp. 32–60. ISBN: 9780070242548. URL: <https://books.google.gr/books?id=Q11RAAAAMAAJ>.
- [42] Kenro Miyamoto and Emil Wolf. «Generalization of the Maggi-Rubinowicz Theory of the Boundary Diffraction Wave---Part I». In: *J. Opt. Soc. Am.* 52.6 (June 1962), pp. 615–625. DOI: [10.1364/JOSA.52.000615](https://doi.org/10.1364/JOSA.52.000615). URL: <http://www.osapublishing.org/abstract.cfm?URI=josa-52-6-615>.
- [43] Max Born and Emile Wolf. «'Elements of the theory of diffraction'». In: *Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light*. Cambridge: Cambridge University Press, 1999. Chap. 8, pp. 417–443. ISBN: 0521642221.
- [44] Juha Saatsi and Peter Vickers. «Miraculous Success? Inconsistency and Untruth in Kirchhoff's Diffraction Theory». In: *The British Journal for the Philosophy of Science* 62 (2011). DOI: [10.2307/41241806](https://doi.org/10.2307/41241806).

- [45] Hyo Eom. «Slit in Conducting Plane». In: *Electromagnetic Wave Theory for Boundary-Value Problems An Advanced Course on Analytical Methods*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004. Chap. 7.4, pp. 160–170. ISBN: 978-3-662-06943-1. DOI: [10.1007/978-3-662-06943-1](https://doi.org/10.1007/978-3-662-06943-1).
- [46] Constantine A. Balanis. «Time-Varying and Time-Harmonic Electromagnetic Fields». In: *Advanced Engineering Electromagnetics*. Arizona, 2012. Chap. 1, pp. 1–18. DOI: [10.1109/MAP.1989.6102037](https://doi.org/10.1109/MAP.1989.6102037).
- [47] H.J. Pain. *Φυσική των Ταλαντώσεων και Κυμάτων*. Συμμετρία. ISBN: 978-960-266-001-0.
- [48] J. David Jackson. *Classical Electrodynamics 3rd Edition.pdf*. John Wiley & Sons, 1999. ISBN: 047130932X.