ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

**Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών**

**Τομέας Μαθηματικών**

Διπλωματική Εργασία

# Νόρμες Πινάκων και Διανυσμάτων σε Χώρους Πεπερασμένης Διάστασης

**Νούσια Ανέτα**

Αθήνα, Νοέμβριος 2011

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

**Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών**

**Τομέας Μαθηματικών**

Διπλωματική Εργασία

# Νόρμες Πινάκων και Διανυσμάτων σε Χώρους Πεπερασμένης Διάστασης

**Νούσια Ανέτα**

Εξεταστική Επιτροπή:

- Σωτήριος Καρανάσιος, Καθηγητής Ε.Μ.Π.
- Αλέξανδρος Παπαϊωάννου, Αναπλ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.
- Παναγιώτης Ψαρράκος, Αναπλ. Καθηγητής Ε.Μ.Π. (Επιβλέπων)

Αθήνα, Νοέμβριος 2011

***Στους γονείς μου…♥***

# Περιεχόμενα

# ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η παρούσα διπλωματική εκπονήθηκε στα πλαίσια των υποχρεώσεων της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου με σκοπό την απόκτηση του Διπλώματος.

Το θέμα που αναπτύσσεται στην εργασία αυτή είναι οι νόρμες πινάκων και διανυσμάτων σε χώρους πεπερασμένης διάστασης.

Σκοπός μας είναι η αναφορά των κύριων χαρακτηριστικών των νορμών πινάκων και διανυσμάτων, η μελέτη των αντίστοιχων ιδιοτήτων τους, και η αναφορά ορισμένων εφαρμογών τους, όπως επίσης και η χρησιμότητα των αποτελεσμάτων που προκύπτουν σε διάφορα προβλήματα των Θετικών Επιστημών. Τέτοια προβλήματα συναντάμε σε πολλούς τομείς, όπως η Στατιστική, η Βελτιστοποίηση, η Ανάλυση (προβλήματα σύγκλισης αριθμητικών αλγορίθμων), καθώς επίσης και οι Φυσικές Επιστήμες, όπως για παράδειγμα η Κβαντομηχανική και η Ανάλυση Σήματος. Η πλήρης καταγραφή και περιγραφή όλων των στοιχείων σχετικά με τις νόρμες θα ήταν αδύνατη στα πλαίσια μιας διπλωματικής εργασίας, λόγω του όγκου τους. Γι' αυτό θα περιοριστούμε σε βασικά αποτελέσματα της μελέτης των νορμών.

Η εργασία απαρτίζεται από τέσσερα κεφάλαια. Το πρώτο κεφάλαιο αποτελεί μια αναφορά στη Γραμμική Άλγεβρα, τη Θεωρία Πινάκων και την Πραγματική Ανάλυση. Οι έννοιες και τα αποτελέσματα του κεφαλαίου αυτού αποτελούν απαραίτητα εργαλεία για τα κεφάλαια που θα ακολουθήσουν, όπως για παράδειγμα το *Θεώτημα Τριγωνοποίησης Schur* και το *Θεώρημα Παραγοντοποίησης Ιδιαζουσών Τιμών*. Για περισσότερη μελέτη και εμβάθυνση στο περιεχόμενο του πρώτου κεφαλαίου, είναι προτιμότερο ο αναγνώστης να ανατρέξει στη βιβλιογραφία. Στο δεύτερο κεφάλαιο διατυπώνονται αρχικά οι απαραίτητοι ορισμοί και τα άμεσα αποτελέσματά τους για τις νόρμες διανυσμάτων σε χώρους πεπερασμένης διάστασης, όπως επίσης και βασικά παραδείγματα νορμών. Στη συνέχεια γίνεται αναλυτική μελέτη των ιδιοτήτων τους. Στο τέλος του κεφαλαίου παρουσιάζονται ορισμένα αριθμητικά παραδείγματα και γίνεται επίσης αριθμητική επαλήθευση ενός πολύ σημαντικού αποτελέσματος των νορμών, της σχέσης ισοδυναμίας που υπάρχει μεταξύ τους. Το τρίτο κεφάλαιο αναφέρεται στις νόρμες πινάκων σε χώρους πεπερασμένης διάστασης. Αρχικά, δίνονται οι απαραίτητοι ορισμοί, καθώς και βασικά παραδείγματα των νορμών αυτών. Στη συνέχεια παρουσιάζονται σημαντικές εφαρμογές των νορμών πινάκων και επιπλέον γίνεται αναλυτικότερη μελέτη μιας πολύ βασικής κατηγορίας νορμών, των *επαγόμενων* (induced) νορμών πινάκων. Στο τέλος, όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο, παρουσιάζονται κάποια αριθμητικά παραδείγματα και επαληθεύονται αριθμητικά βασικά αποτελέσματα, όπως για παράδειγμα η σχέση ισοδυναμίας μεταξύ των νορμών πινάκων. Στο τέταρτο και τελευταίο κεφάλαιο μελετώνται οι νόρμες διανυσμάτων στον χώρο των πινάκων, οι λεγόμενες *γενικευμένες* (generalized) νόρμες πινάκων.

Στο σημείο αυτό, θα ήθελα πρωτίστως να ευχαριστήσω τον Αναπληρωτή Καθηγητή κύριο Παναγιώτη Ψαρράκο, υπεύθυνο της διπλωματικής αυτής, για το υλικό που μου προμήθευσε, για την απεριόριστη βοήθεια και καθοδήγηση που μου παρείχε όλο αυτό το διάστημα και την κατανόησή του σε όποια δυσκολία μου παρουσιαζόταν καθ’ όλη τη διάρκεια της συγγραφής της εργασίας.

Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους φίλους μου εντός και εκτός σχολής Ντινοπούλου Γεωργία, Ζαφείρη Σοφία, Ικάριο Μάνο, Τσιαντό Κώστα, Φίλιο Κώστα, Κούκου Θεοδώρα, Καλογεράκη Μαριάννα και ιδιαίτερα τον Καλογεράκη Μιχάλη για όλες τις ωραίες στιγμές που περάσαμε στα φοιτητικά μας χρόνια και για τη στήριξή τους σε κάθε μου πρόβλημα.

Τέλος, θα ήθελα να πω ένα πολύ μεγάλο ευχαριστώ στους γονείς μου για την υποστήριξη και κατανόηση που έδειξαν όλα αυτά τα χρόνια και την αμέριστη βοήθεια που μου προσέφεραν σε οτιδήποτε κι αν χρειαζόμουν.

# Κεφάλαιο 1. Εισαγωγικές Έννοιες και Ορισμοί

Το πρώτο κεφάλαιο αυτής της εργασίας έχει ως σκοπό την υπενθύμιση ορισμένων βασικών εννοιών και συμπερασμάτων, τα οποία θεωρούνται απαραίτητα για την κατανόηση της μελέτης που θα ακολουθήσει. Μία πρώτη εξοικείωση με τη Γραμμική Άλγεβρα και τη Θεωρία Πινάκων θεωρείται ότι προϋπάρχει και γι' αυτό πολλές από τις αποδείξεις στο κεφάλαιο αυτό παραλείπονται. Επίσης, γίνεται αναφορά σε κάποια στοιχεία από την Πραγματική Ανάλυση. Για περισσότερες λεπτομέρειες και εμβάθυνση σε ότι ακολουθεί μπορεί κανείς να ανατρέξει στη βιβλιογραφία.

## 1.1 Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας και Θεωρίας Πινάκων

***Ορισμός 1.1.1.*** Έστω $V$ ένας διανυσματικός χώρος πάνω σε ένα σώμα $\mathbf{F}$ ($\boldsymbol{R}$ ή $\boldsymbol{C}$). Τα διανύσματα $x_1, x_2, \dots, x_k$ του $V$ ονομάζονται ***γραμμικώς εξαρτημένα*** (linearly dependent) αν και μόνο αν υπάρχουν συντελεστές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbf{F}$, όχι όλοι μηδέν, τέτοιοι ώστε να ισχύει:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_k x_k = 0. \tag{1.1.2}$$

Τα διανύσματα $x_1, x_2, \dots, x_k$ του $V$ ονομάζονται ***γραμμικώς ανεξάρτητα*** (linearly independent) αν κάθε σχέση της μορφής (1.1.2) ισχύει μόνο όταν:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0.$$

***Ορισμός 1.1.3.*** Μία γραμμική απεικόνιση $T \in L(U, V)$ ονομάζεται (γραμμικός) ***ισομορφισμός*** (isomorphism) μεταξύ των διανυσματικών χώρων $U$ και $V$, αν είναι *αμφιμονοσήμαντη* και «*επί*», το οποίο ισοδυναμεί με την ύπαρξη της αντίστροφης απεικόνισης της $T$, την $T^{-1}$. Οι χώροι $U, V$ ονομάζονται ***ισόμορφοι*** (isomorphic).

***Παρατήρηση***: Το σύνολο των $m \times n$ μιγαδικών ή πραγματικών πινάκων συμβολίζεται $M_{m\times n}(\boldsymbol{C})$ ή $M_{m\times n}(\boldsymbol{R})$ αντίστοιχα. Επίσης, χρησιμοποιούμε για απλότητα και τα σύμβολα $M_{m\times n}$ και $M_n = M_{n\times n}$.

***Ορισμός 1.1.4. Πυρήνας*** (kernel, null space) ενός πίνακα $A \in M_{m\times n}$, ονομάζεται το σύνολο όλων των διανυσμάτων $x$, $x \in \boldsymbol{R}^n$ ή $\boldsymbol{C}^n$, για τα οποία ισχύει: $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$.

***Ορισμός 1.1.5.*** Για κάθε πίνακα $A \in M_{m\times n}$ μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν άλλο πίνακα $B$ του οποίου οι γραμμές είναι οι στήλες του $A$ με την ίδια σειρά. Προφανώς, οι στήλες του $B$ θα είναι τότε οι γραμμές του $A$ με την ίδια σειρά και ο $B \in M_{n\times m}$. Ο πίνακας $B$ ονομάζεται ***ανάστροφος*** (transpose) του $A$ και τον συμβολίζουμε με $A^T$. Έτσι, αν $A^T = [\beta_{ij}]$ και $A = [\alpha_{ij}]$ τότε ισχύει:

$$\beta_{ij} = \alpha_{ij}, \qquad \text{για κάθε } i = 1,2,\dots,n \text{ και } j = 1,2,\dots,m.$$

Για κάθε πίνακα $A \in M_{m\times n}$ ισχύει ότι: $(A^T)^T = A$.

***Ορισμός 1.1.6.*** Ένας *τετραγωνικός* πίνακας $A \in M_{n\times n}$ ονομάζεται ***συμμετρικός*** (symmetric) αν $A^T = A$ και ***αντισυμμετρικός*** (skew-symmetric) αν $A^T = -A$.

***Ορισμός 1.1.7.*** Για κάθε πίνακα $A \in M_{m\times n}$, ο πίνακας με στοιχεία τα συζυγή των στοιχείων του $A$ ονομάζεται ***συζυγής*** (conjugate) του $A$ και συμβολίζεται με $\bar{A}$. Αν $A = [a_{ij}]$, τότε θα είναι $\bar{A} = [\overline{a_{ij}}]$.

***Ορισμός 1.1.8.*** Για κάθε πίνακα $A \in M_{m\times n}$, ο πίνακας $A^* \in M_{m\times n}$ που ορίζεται από την σχέση $A^* = (\bar{A})^T = \overline{A^T}$ ονομάζεται ***αναστροφοσυζυγής*** (conjugate transpose) του $A$. Για κάθε πίνακα $A \in M_{m\times n}(\boldsymbol{C})$ ισχύει ότι: $(A^*)^* = A$.

***Ορισμός 1.1.9.*** Ένας *τετραγωνικός* πίνακας $A \in M_{n\times n}$ ονομάζεται ***ερμιτιανός*** (Hermitian) αν ισχύει $A^* = A$ και ***αντιερμιτιανός*** (skew-Hermitian) αν ισχύει $A^* = -A$.

Για κάθε *τετραγωνικό* πίνακα $A = [a_{ij}] \in M_{n\times n}$, η εξίσωση

$$Ax = \lambda x,$$

όπου $x \in \boldsymbol{R}^n$ και $\lambda \in \boldsymbol{R}$, ονομάζεται ***χαρακτηριστική εξίσωση*** (characteristic equation) (χ.ε.) του πίνακα $A$ και είναι ισοδύναμη με το ομογενές σύστημα

$$(A - \lambda I)x = 0, \tag{1.1.10}$$

όπου $I \in M_{n\times n}$ είναι ο μοναδιαίος πίνακας.

Αναζητώντας τις μη-μηδενικές λύσεις του συστήματος (1.1.10), θα πρέπει η ορίζουσά του (determinant) να είναι μηδενική. Δηλαδή,

$$\det(A - \lambda I) = |A - \lambda I| = 0. \tag{1.1.11}$$

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα (1.1.11) προκύπτει το ***χαρακτηριστικό πολυώνυμο*** (characteristic polynomial) του πίνακα $A$:

$$p_A(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0.$$

Για το πολυώνυμο $p_A(x)$ μπορεί εύκολα να δειχθεί ότι:

$$a_{n-1} = -(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}) = -tr(A),$$

όπου με $tr(\cdot)$ συμβολίζουμε το *ίχνος* (trace) ενός πίνακα

και

$$a_0 = p_A(0) = (-1)^n \det(A) = \det(-A).$$

Οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του πίνακα $A$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ $(m \leq n)$, ονομάζονται ***ιδιοτιμές*** (eigenvalues) του $A$. Στην ξένη βιβλιογραφία αναφέρονται και ως *characteristic values*. Το σύνολο των ιδιοτιμών του $A$ ονομάζεται ***φάσμα*** (spectrum) του $A$ και συμβολίζεται με $\sigma(A)$, δηλαδή

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \boldsymbol{R} : \, p_A(\lambda) = 0\}.$$

Αν $A^T$ είναι ο ανάστροφος του πίνακα $A$, τότε εύκολα μπορεί να δειχθεί ότι ισχύει:

$$\sigma(A) = \sigma(A^T).$$

Αντικαθιστώντας τις ιδιοτιμές $\lambda = \lambda_i$, $i = 1,2, \ldots, m$ στο παραπάνω ομογενές σύστημα (1.1.10), βρίσκουμε

$$k_i = n - rank(A - \lambda_i I)$$

γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του συστήματος $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik_i} \in \boldsymbol{R}^n$, όπου με $rank(\cdot)$ συμβολίζουμε το *βαθμό* ενός πίνακα, ο οποίος είναι ο μεγαλύτερος αριθμός γραμμικώς ανεξάρτητων στηλών ή γραμμών του πίνακα. Τα διανύσματα αυτά ονομάζονται ***ιδιοδιανύσματα*** (eigenvectors, characteristic vectors) του πίνακα $A$, αντίστοιχα της ιδιοτιμής $\lambda_i$. Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του $A$ ονομάζονται ***ιδιοποσά*** ή ***χαρακτηριστικά μεγέθη*** του $A$. Βρίσκουν πολυάριθμες εφαρμογές και στα Θεωρητικά αλλά και στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά.
Ο υπόχωρος $span\{x_{i1}, x_{i2,} \ldots, x_{ik_i}\}$ ονομάζεται ***ιδιόχωρος*** (eigenspace). Η διάσταση $k_i$ του ιδιόχωρου ονομάζεται ***γεωμετρική πολλαπλότητα*** (geometric multiplicity) της ιδιοτιμής $\lambda_i$ και είναι πάντα μικρότερη ή ίση της ***αλγεβρικής πολλαπλότητας*** (algebraic multiplicity) της $\lambda_i$, δηλαδή της πολλαπλότητάς της ως ρίζα του $p_A(x)$.

***Πρόταση 1.1.12.*** Αν $\lambda$ είναι μια ιδιοτιμή του πίνακα $A \in M_{n\times n}$ και $x$ το αντίστοιχο ιδιοδιανύσμα, τότε το $\lambda^k$ είναι ιδιοτιμή του $A^k$ και $x$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα, για κάθε $k \in Z$.

***Απόδειξη.*** Από την χαρακτηριστική εξίσωση $Ax = \lambda x$ έχουμε:

$$A^2 x = A(Ax) = A(\lambda x) = \lambda(Ax) = \lambda(\lambda x) = \lambda^2 x.$$

Εργαζόμαστε επαγωγικά για κάθε φυσικό αριθμό $k$ και τελικά διαπιστώνουμε ότι:

$$A^k x = \lambda^k x. \quad \blacksquare$$

***Ορισμός 1.1.13.*** Ένας *τετραγωνικός* μιγαδικός πίνακας $A \in M_{n\times n}$ ονομάζεται ***κανονικός*** (normal), αν ισχύει το ακόλουθο:

$$A^* A = AA^*.$$

***Ορισμός 1.1.14.*** Ένας *τετραγωνικός* πίνακας $A \in M_{n\times n}$ ονομάζεται ***ορθομοναδιαίος*** (unitary) ή ***ορθοκανονικός*** (orthonormal), ακριβώς όταν ισχύει μία από τις επόμενες ισοδύναμες συνθήκες:

$$A^*A = I_n, \quad AA^* = I_n.$$

Ένας ορθομοναδιαίος πίνακας $A = [a_{ij}]$ ονομάζεται ***ορθογώνιος*** (orthogonal) αν είναι πραγματικός.

***Πρόταση 1.1.15.*** Ένας πίνακας $A \in M_{n\times n}$ είναι ορθομοναδιαίος αν και μόνο αν ο πίνακας $A^*$ είναι ορθομοναδιαίος.

***Ορισμός 1.1.16.*** Ένας *τετραγωνικός* πίνακας $A \in M_{n\times n}$ ονομάζεται ***πίνακας μετάθεσης*** (permutation matrix) αν σε κάθε σειρά και στήλη παρουσιάζεται μόνο μία φορά η μονάδα ως στοιχείο και όλα τα υπόλοιπα στοιχεία είναι μηδενικά.

Οι πίνακες μετάθεσης είναι στην ουσία πίνακες που έχουν γραμμές μια μετάθεση των γραμμών του μοναδιαίου πίνακα $I_n$ και είναι ορθογώνιοι.

***Ορισμός 1.1.17.*** Ένας *τετραγωνικός* πίνακας $A \in M_{n\times n}$ ονομάζεται ***αντιστρέψιμος*** (invetrible, nonsingular, nondegenerate) αν και μόνο αν υπάρχει πίνακας $B \in M_{n\times n}$ τέτοιος ώστε να ισχύει $AB = BA = I_n$. Ο πίνακας $B$ ονομάζεται ***αντίστροφος*** (inverse) του $A$ και συμβολίζεται με $A^{-1}$.

***Ορισμός 1.1.18.*** Δύο τετραγωνικοί πίνακες $A, B \in M_{n\times n}$ ονομάζονται ***όμοιοι*** (similar), αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P$ τέτοιος ώστε να ισχύει:

$$A = PBP^{-1} \quad \text{ή} \quad B = P^{-1}AP.$$

Ο πίνακας $P$ ονομάζεται ***πίνακας ομοιότητας*** (similarity matrix ή similarity transformation).

***Πρόταση 1.1.19.*** Αν οι πίνακες $A$ και $B$ είναι όμοιοι, τότε $\sigma(A) = \sigma(B)$ και τα ιδιοδιανύσματα των πινάκων που αντιστοιχούν στην ίδια ιδιοτιμή είναι $x$ και $P^{-1}x$, όπου $P$ είναι ο πίνακας ομοιότητας.

***Ορισμός 1.1.20.*** Ένας *τετραγωνικός* πίνακας $A \in M_{n\times n}$ ονομάζεται ***διαγωνοποιήσιμος*** (diagonalizable) , ή λέμε ότι διαγωνοποιείται, αν είναι όμοιος με έναν διαγώνιο πίνακα.

Δύο πολύ σημαντικά θεωρήματα που θα χρησιμοποιήσουμε στα επόμενα κεφάλαια και αποτελούν θεμελιώδη εργαλεία στη Θεωρία Πινάκων είναι το *Θεώρημα Τριγωνοποίησης Schur* (The Schur Triangularization ή The Schur Decomposition) και το *Θεώρημα Παραγοντοποίησης Ιδιαζουσών Τιμών* (Singular Value Decomposition), το οποίο θα καλούμε *Θεώρημα Παραγοντοποίησης SVD.* Το πρώτο, πήρε το όνομά του από τον μαθηματικό Issai Schur. Η πληροφορία που μας παρέχει ότι κάθε τετραγωνικός πίνακας $A \in M_{n\times n}$ είναι ορθομοναδιαία όμοιος με έναν άνω τριγωνικό πίνακα $D = [d_{ij}]_{i,j=1}^{n,n}$, απλουστεύει σημαντικά τη μορφή του πίνακα $A$. Σύμφωνα με το Θεώρημα Schur, τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου του πίνακα $D$ ταυτίζονται με

τις ιδιοτιμές του πίνακα $A$. Το γεγονός αυτό μας δίνει τη δυνατότητα να μελετήσουμε με μεγαλύτερη ευκολία τις ιδιότητες του πίνακα $A$.
Η μέθοδος παραγοντοποίησης SVD είναι η σημαντικότερη παραγοντοποίηση πινάκων ως προς τις εφαρμογές της. Εφαρμόζεται πολύ στην Επεξεργασία Σήματος αλλά και στη Στατιστική. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί στον υπολογισμό του *ψευδοαντιστρόφου* (pseudoinverse) ενός πίνακα, στην επίλυση γραμμικών εξισώσεων, στην προσέγγιση ενός πίνακα, έστω $M$ με έναν άλλο πίνακα $\widetilde{M}$ συγκεκριμένου βαθμού και αλλού. Επιπλέον, η μέθοδος αυτή παρέχει μία σαφή αναπαράσταση του βαθμού και του πυρήνα ενός πίνακα.

***Θεώρημα 1.1.21.*** (Τριγωνοποίηση Schur). Έστω $A \in M_{n\times n}$ ένας τετραγωνικός πίνακας και $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ οι ιδιοτιμές του. Τότε, υπάρχει ορθομοναδιαίος πίνακας $Q \in M_{n\times n}$ τέτοιος ώστε ο πίνακας

$$Q^*AQ = D = [d_{ij}]$$

είναι άνω τριγωνικός, με διαγώνια στοιχεία $d_{ij} = \lambda_i, \quad i = 1,2,\dots,n.$

Αν επιπλέον ο πίνακας $A$ έχει ως στοιχεία μόνο πραγματικούς αριθμούς, δηλαδή $A \in M_n\,(\boldsymbol{R})$, και έχει όλες τις ιδιοτιμές του πραγματικές, τότε ο πίνακας $Q$ μπορεί να επιλεχθεί ώστε να είναι ορθογώνιος.

***Θεώρημα 1.1.22.*** (Παραγοντοποίηση SVD). Αν $A$ είναι ένας $n \times m$ *μιγαδικός* πίνακας, τότε υπάρχουν ορθομοναδιαίοι πίνακες $U \in C_{n\times n}$ και $V \in C_{n\times n}$ τέτοιοι ώστε να ισχύει:

$$A = U\,diag\{s_1, s_2, \dots, s_{\min\{n,m\}}\}\,V^*, \tag{1.1.23}$$

όπου $s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_{\min\{n,m\}} \geq 0$, $s_i$ οι ιδιάζουσες τιμές του $A$.

Ο πίνακας $U$ ονομάζεται ***πίνακας αριστερών ιδιαζόντων διανυσμάτων*** και ο $V$ ***πίνακας δεξιών ιδιαζόντων διανυσμάτων***. Η ισότητα (1.1.23) ονομάζεται ***παραγοντοποίηση ιδιαζουσών τιμών*** του πίνακα $A$.

## 1.2 Στοιχεία Πραγματικής Ανάλυσης

***Ορισμός 1.2.1.*** ***Μετρικός χώρος*** (metric space) είναι ένα ζεύγος $(X,\rho)$, όπου $X$ είναι ένα μη κενό σύνολο και $\rho : X \times X \to \boldsymbol{R}$ είναι μία απεικόνιση που ικανοποιεί τις ιδιότητες:

i. $\rho(x,y) \geq 0$, για κάθε $x,y \in X$ και $\rho(x,y) = 0$, αν και μόνο αν $x = y$,
ii. $\rho(x,y) = \rho(y,x)$, για κάθε $x,y \in X$ (Συμμετρική Ιδιότητα),
iii. $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$, για κάθε $x,y \in X$ (Τριγωνική Ανισότητα).

Η απεικόνιση $\rho$ ονομάζεται ***μετρική*** (metric), τα στοιχεία του συνόλου $X$ ονομάζονται ***σημεία*** (points) και ο αριθμός $\rho(x,y)$ ονομάζεται ***απόσταση*** (distance) του $x$ από το $y$.

***Ορισμός 1.2.2.*** Έστω $(X,\rho)$ και $(Y,d)$ δύο μετρικοί χώροι και $f : (X,\rho) \to (Y,d)$ μια συνάρτηση. Η συνάρτηση $f$ ονομάζεται ***Lipschitz συνεχής*** (Lipschitz continuous), ή λέμε ότι ικανοποιεί τη συνθήκη ***Lipschitz***, αν υπάρχει πραγματική σταθερά $C \geq 0$ τέτοια ώστε για κάθε $x,y \in X$ να ισχύει:

$$d\big(f(x), f(y)\big) \leq C\, \rho(x,y).$$

Η σταθερά $C$ ονομάζεται ***Lipschitz σταθερά*** (Lipschitz constant) για τη συνάρτηση $f$.

***Ορισμός 1.2.3.*** Έστω $(X,\rho)$ και $(Y,d)$ δύο μετρικοί χώροι και $f : (X,\rho) \to (Y,d)$ μία συνάρτηση. Η συνάρτηση $f$ ονομάζεται ***ομοιόμορφα συνεχής*** (uniformly continuous), αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta(\epsilon) > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x,y \in X$ με $\rho(x,y) < \delta$ να ισχύει ότι: $d\big(f(x), f(y)\big) < \epsilon$.

***Παρατήρηση*:** Είναι εύκολο να δειχθεί πως κάθε συνάρτηση Lipschitz είναι ομοιόμορφα συνεχής. Αρκεί να θέσουμε για $\epsilon > 0$ και $\delta = \frac{\epsilon}{C}$, όπου $C$ η σταθερά Lipchitz.

***Ορισμός 1.2.4.*** Έστω $X, Y$ δύο τοπολογικοί χώροι. Μια συνάρτηση $f : X \to Y$ ονομάζεται ***συνεχής*** (continuous), αν και μόνο αν ισχύει:

για κάθε $V \sqsubseteq Y$ ανοικτό, το σύνολο $f^{-1}(V)$ είναι ανοικτό,

ή αλλιώς,

για κάθε $F \sqsubseteq Y$ κλειστό, το σύνολο $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό.

# Κεφάλαιο 2. Νόρμες Διανυσμάτων σε Χώρους Πεπερασμένης Διάστασης

## 2.1 Ορισμός Νόρμας Διανυσμάτων και Εσωτερικού Γινομένου

Αν είχαμε αρκετά διανύσματα σε έναν διανυσματικό χώρο, έστω στον $\boldsymbol{C}^n$ (ή ακόμα και πίνακες στον $M_n$ όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο) θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι κάποια απ' αυτά είναι "μικρά" ενώ άλλα είναι "μεγάλα"? Τι ακριβώς θα εννοούσαμε με αυτό? Υπό ποιες συνθήκες θα μπορούσαμε να πούμε πως δύο διανύσματα είναι "αρκετά κοντά το ένα στο άλλο" ή "αρκετά μακριά"? Γεννιούνται επομένως ερωτήματα που αφορούν το «*μέγεθος*» και την «*εγγύτητα*» πραγματικών ή μιγαδικών διανυσμάτων είτε σε διανυσματικούς χώρους πεπερασμένης διάστασης είτε σε απειροδιάστατους χώρους, αλλά και ερωτήματα σχετικά με το «μέγεθος» πινάκων, οι οποίοι μπορούν να θεωρηθούν ως διανύσματα ενός χώρου πολύς μεγάλης διάστασης. Ένας τρόπος να απαντηθούν τα ερωτήματα αυτά είναι να μελετήσουμε τις λεγόμενες «***νόρμες***» (norms) των διανυσμάτων και των πινάκων, όπως θα δούμε και στη συνέχεια. Όμως, είναι σημαντικό να μην εστιάσουμε την προσοχή μας στη μελέτη μια μόνο νόρμας, αλλά στις κοινές ιδιότητες όλων των νορμών.

Προκειμένου λοιπόν να καθοριστούν οι ιδιότητες που απαιτείται να έχει μία συνάρτηση ώστε να είναι νόρμα, χρησιμοποιούμε τη γνωστή έννοια της απόλυτης τιμής πραγματικών ή μιγαδικών βαθμωτών μεγεθών, μιας και η νόρμα σε έναν διανυσματικό χώρο είναι το ανάλογο της απόλυτης τιμής στο $\boldsymbol{R}$. Βέβαια, μια σημαντική διαφορά μεταξύ απόλυτης τιμής και νόρμας διανύσματος είναι ότι ενώ η απόλυτη τιμή είναι μία πραγματική συνάρτηση (δηλαδή το σύνολο τιμών της είναι το $\boldsymbol{R}$) *μίας* πραγματικής ή μιγαδικής μεταβλητής, απαιτούμε η νόρμα να είναι μία πραγματική συνάρτηση των *πολλών* μεταβλητών που περιγράφουν το κάθε διάνυσμα. Μία τέτοια συνάρτηση στον $\boldsymbol{C}^n$, για παράδειγμα, είναι το Ευκλείδιο μέτρο $(z^*z)^{1/2}$, $z \in \boldsymbol{C}^n$. Υπάρχουν όμως κι άλλες συναρτήσεις, οι οποίες διαθέτουν κάποιες από τις βασικές ιδιότητες του Ευκλείδιου μέτρου και υπάρχει πιθανότητα σε ορισμένες περιπτώσεις να μας παρέχουν επιπρόσθετες πληροφορίες ή και ακόμα να είναι πιο κατάλληλες στη χρήση.

Σε ολόκληρη την εργασία θα θεωρούμε μόνο πραγματικούς ή μιγαδικούς διανυσματικούς χώρους. Όλα τα σημαντικά αποτελέσματα θα ισχύουν και για τα δύο πεδία ($\boldsymbol{R}$ ή $\boldsymbol{C}$), αλλά σε κάθε αποτέλεσμα θα αναφέρουμε το πεδίο το οποίο χρησιμοποιήθηκε.

***Ορισμός 2.1.1.*** Έστω $V$ ένας διανυσματικός χώρος πάνω σε ένα σώμα $\mathbf{F}$ ($\boldsymbol{R}$ ή $\boldsymbol{C}$). Μία συνάρτηση $\|\bullet\| : V \to \boldsymbol{R}$ ονομάζεται ***νόρμα διανυσμάτων*** (vector norm) αν για κάθε $x, y \in V$ ικανοποιεί τα ακόλουθα:

i. $\|x\| \geq 0,$ (Μη Αρνητική, Nonnegative)
ii. $\|x\| = 0$ αν και μόνο αν $x = 0,$ (Θετική, Positive)

iii. $\|cx\| = |c|\,\|x\|$, για κάθε $c \in \mathbf{F}$, (Ομογενής, Homogeneous)
iv. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. (Τριγωνική Ανισότητα, Triangle Inequality)

Αυτά τα τέσσερα αξιώματα είναι γνωστές ιδιότητες του Ευκλείδιου μέτρου στο επίπεδο, το οποίο όμως διαθέτει κι άλλες ιδιότητες είναι ανεξάρτητες από τα προηγούμενα αξιώματα, όπως η λεγόμενη "*Ταυτότητα Παραλληλογράμμου*". Η θεμελιώδης ιδιότητα που περιέχεται στον ορισμό είναι πως κάθε νόρμα ορίζει μια "απόσταση" μεταξύ των διανυσμάτων του χώρου.

Μία συνάρτηση που ικανοποιεί τα Αξιώματα 2.1.1(i), 2.1.1(iii) και 2.1.1(iv) αλλά όχι απαραίτητα το Αξίωμα 2.1.1(ii) ονομάζεται ***ημι-νόρμα*** (*seminorm*) διανυσμάτων. Η ημι-νόρμα γενικεύει την έννοια της νόρμας, αφού μη-μηδενικά διανύσματα μπορούν να έχουν μηδενικό μέτρο.

***Λήμμα 2.1.2.*** Εάν $\|\bullet\|$ είναι μία *ημι-νόρμα* διανυσμάτων στον $V$, τότε για κάθε $x, y \in V$ ισχύει:

$$\big|\,\|x\| - \|y\|\,\big| \leq \|x - y\|.$$

***Απόδειξη.*** Προφανώς ισχύει $y = x + (y - x)$. Επομένως, έχουμε:

$$\|y\| = \|x + (y - x)\| \leq \|x\| + \|y - x\| = \|x\| + \|x - y\|.$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι: $\|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|$.

Επίσης, ισχύει $x = y + (x - y)$. Επομένως, έχουμε $\|x\| = \|y + (x - y)\|$ και χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα και πάλι καταλήγουμε στο ακόλουθο:

$$\|x\| \leq \|y\| - \|x - y\|,$$

ή ισοδύναμα,

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|.$$

Συνεπώς, δείξαμε ότι $\pm\,(\|x\| - \|y\|) \leq \|x - y\|$, το οποίο είναι ισοδύναμο με τον ισχυρισμό του λήμματος. ■

***Ορισμός 2.1.3.*** Μία νόρμα $\|\bullet\|$ ονομάζεται ***ορθομοναδιαία αναλλοίωτη*** (unitarily invariant) αν $\|Ux\| = \|x\|$, για κάθε διάνυσμα $x \in \boldsymbol{C}^n$ και για κάθε ορθομοναδιαίο πίνακα $U \in M_n$.

Το γνωστό Ευκλείδιο μέτρο στον $\boldsymbol{C}^n$ επάγεται από το σύνηθες Ευκλείδιο εσωτερικό γινόμενο $y^*x$, το οποίο σχετίζεται με τη "γωνία" μεταξύ δύο διανυσμάτων: τα διανύσματα $x$ και $y$ είναι *ορθογώνια* (κάθετα) αν $y^*x = 0$. Όπως και στις νόρμες, έτσι και εδώ κάποια από τα βασικά χαρακτηριστικά του Ευκλείδιου εσωτερικού γινομένου μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως αξιώματα για τη γενική θεωρία των εσωτερικών γινομένων.

***Ορισμός 2.1.4.*** Έστω $V$ ένας διανυσματικός χώρος πάνω σε ένα σώμα $\mathbf{F}$ ($\boldsymbol{R}$ ή $\boldsymbol{C}$). Μία συνάρτηση $\langle\bullet,\bullet\rangle : V \times V \to \mathbf{F}$ ονομάζεται ***εσωτερικό γινόμενο*** (*inner product*) αν για κάθε $x, y, z \in V$, ικανοποιεί τα ακόλουθα:

i. $\langle x, x\rangle \geq 0$, (Μη Αρνητικό, Nonnegative)
ii. $\langle x, x\rangle = 0$ αν και μόνο αν $x = 0$, (Θετικό, Positive)
iii. $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$, (Προσθετικό, Additive)
iv. $\langle cx, y\rangle = c\langle x, y\rangle$, για κάθε $c \in \mathbf{F}$, (Ομογενές, Homogeneous)
v. $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$. (Ερμιτιανή Ιδιότητα, Hermitian Property)

***Πρόταση 2.1.5.*** Από τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου διαπιστώνουμε τις παρακάτω ιδιότητες:

i. $\langle x, cy\rangle = \bar{c}\langle x, y\rangle$,
ii. $\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$,
iii. $\langle x, y\rangle = 0$ για κάθε $y \in V$ αν και μόνο αν $x = 0$,
iv. $\langle x, \langle x, y\rangle y\rangle = |\langle x, y\rangle|^2$.

***Απόδειξη.***

i. $\langle x, cy\rangle = \overline{\langle cy, x\rangle} = \bar{c}\overline{\langle y, x\rangle} = \bar{c}\langle x, y\rangle$,
ii. $\langle x, y + z\rangle = \overline{\langle y + z, x\rangle} = \overline{\langle y, x\rangle} + \overline{\langle z, x\rangle} = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$,
iii. $\langle x, y\rangle = 0$ για κάθε $y \in V \to \langle x, x\rangle = 0$ όταν $y = x \to x = 0$,
αντιστρόφως: $x = 0 \to \langle x, y\rangle = 0$ για κάθε $y \in V$,
v. $\langle x, \langle x, y\rangle y\rangle = \overline{\langle\langle x, y\rangle y, x\rangle} = \overline{\langle x, y\rangle}\,\overline{\langle y, x\rangle} = \langle y, x\rangle\overline{\langle y, x\rangle} = |\langle x, y\rangle|^2$. ■

***Πόρισμα 2.1.6.*** Αν $\langle\bullet,\bullet\rangle$ είναι ένα εσωτερικό γινόμενο στον διανυσματικό χώρο $V$, τότε η συνάρτηση

$$\|x\| \triangleq (\langle x, x\rangle)^{1/2}$$

είναι νόρμα διανυσμάτων στον $V$.

***Απόδειξη.*** Εύκολα αποδεικνύονται τα αξιώματα του ορισμού της νόρμας, οπότε η παραπάνω σχέση παριστάνει νόρμα διανύσματος. ■

Αν $\|\bullet\|$ είναι μία νόρμα διανύσματος τέτοια ώστε να ισχύει $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ για κάποιο εσωτερικό γινόμενο $\langle\bullet,\bullet\rangle$, τότε λέμε ότι η διανυσματική νόρμα $\|\bullet\|$ *προέρχεται (επάγεται) από ένα εσωτερικό γινόμενο* (δηλαδή από το αντίστοιχο $\langle\bullet,\bullet\rangle$ κάθε φορά).

***Παρατήρηση***: Οποιαδήποτε διανυσματική νόρμα $\|\bullet\|$ επάγεται από ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle\bullet,\bullet\rangle$ στον διανυσματικό χώρο $V$, είναι δηλαδή της μορφής $\|x\| \triangleq (\langle x, x\rangle)^{1/2}$ για κάθε $x \in V$ (Πόρισμα 2.1.6), ικανοποιεί την "*Ταυτότητα Παραλληλογράμμου*":

$$\frac{1}{2}(\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2) = \|x\|^2 + \|y\|^2, \quad \text{για κάθε } x, y \in V \qquad (2.1.7)$$

Μία αρκετά σημαντική ιδιότητα όλων των εσωτερικών γινομένων είναι η ανισότητα *Cauchy-Schwarz*, γνωστή και ως ανισότητα *Bunyakovsky*.

***Θεώρημα 2.1.8.*** (Ανισότητα Cauchy-Schwarz). Αν $\langle \bullet, \bullet \rangle$ είναι ένα εσωτερικό γινόμενο σε έναν διανυσματικό χώρο $V$ πάνω σε ένα σώμα $\mathbf{F}$ ($\boldsymbol{R}$ ή $\boldsymbol{C}$), τότε ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\, \langle y, y\rangle \qquad \text{για κάθε } x, y \in V.$$

Ισοδύναμα, παίρνοντας την τετραγωνική ρίζα και στα δύο μέρη και αναφερόμενοι στις νόρμες διανυσμάτων, η προηγούμενη ανισότητα γράφεται ως εξής:

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\, \|y\|.$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν τα $x$ και $y$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα, δηλαδή είναι της μορφής $x = ay$ για κάποιο $a \in \mathbf{F}$, $a \neq 0$.

***Απόδειξη.*** Έστω τα διανύσματα $x, y$ τα οποία ανήκουν στον διανυσματικό χώρο $V$. Αν $y = 0$, τότε ο ισχυρισμός είναι τετριμμένος και γι'αυτό υποθέτουμε ότι $y \neq 0$. Θεωρούμε το διάνυσμα $x + ty \in V$ και το πολυώνυμο $p(t) \triangleq \langle x + ty, x + ty\rangle$, $t \in \boldsymbol{R}$. Υπολογίζοντας το εσωτερικό γινόμενο καταλήγουμε στο εξής:

$$\begin{aligned} p(t) \triangleq \langle x + ty, x + ty\rangle &= \langle x, x\rangle + t\langle y, x\rangle + t\langle x, y\rangle + t^2\, \langle y, y\rangle \\ &= \langle y, y\rangle t^2 + 2Re\langle x, y\rangle t + \langle x, x\rangle, \end{aligned}$$

δηλαδή το $p(t)$ είναι ένα πραγματικό δευτεροβάθμιο πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές. Από το Αξίωμα 2.1.4(i) γνωρίζουμε ότι $p(t) \geq 0$ για κάθε πραγματική τιμή του $t$ και συνεπώς το $p(t)$ δεν μπορεί να έχει πραγματικές απλές ρίζες. Η διακρίνουσα του $p(t)$ θα πρέπει επομένως να είναι μη-θετική, δηλαδή

$$\Delta = (2\, Re\langle x, y\rangle)^2 - 4\langle y, y\rangle\langle x, x\rangle \leq 0$$

και έτσι έχουμε

$$(Re\langle x, y\rangle)^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle. \tag{2.1.9}$$

Επειδή η παραπάνω ανισότητα θα πρέπει να ισχύει για κάθε ζεύγος διανυσμάτων, θα ισχύει και αν το y αντικατασταθεί από το $\langle x, y\rangle y$. Τότε η (2.1.9) γράφεται ως εξής:

$$(Re\langle x, \langle x, y\rangle y\rangle)^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle|\langle x, y\rangle|^2.$$

Όμως,

$$\begin{aligned} Re\langle x, \langle x, y\rangle y\rangle &= Re\overline{\langle\langle x, y\rangle y, x\rangle} = Re\overline{\langle x, y\rangle}\,\overline{\langle y, x\rangle} \\ &= Re\overline{\langle x, y\rangle}\langle x, y\rangle = Re|\langle x, y\rangle|^2 = |\langle x, y\rangle|^2. \end{aligned}$$

Επομένως, θα έχουμε:

$$|\langle x,y\rangle|^4 \le \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle|\langle x,y\rangle|^2. \tag{2.1.10}$$

Εάν $\langle x,y\rangle = 0$, τότε ο ισχυρισμός του θεωρήματος είναι τετριμμένος. Αν $\langle x,y\rangle \neq 0$, τότε μπορούμε να διαιρέσουμε τη σχέση (2.1.10) με την ποσότητα $|\langle x,y\rangle|^2$ ώστε να αποκτήσουμε την επιθυμητή ανισότητα. Από το Αξίωμα 2.1.4(ii), το $p(t)$ μπορεί να έχει πραγματική (διπλή) ρίζα μόνο όταν $x + ty = 0$ για κάποια πραγματική τιμή του $t$. Επομένως, η ισότητα

$$|\langle x,y\rangle|^2 = \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle,$$

ή ισοδύναμα,

$$|\langle x,y\rangle| = \|x\|\,\|y\|$$

στη σχέση (2.1.9) μπορεί να συμβεί αν και μόνο αν τα $x, y$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα. ■

***Θεώρημα 2.1.11.*** Η *Ταυτότητα Παραλληλογράμμου*, σχέση (2.1.7), είναι ***ικανή*** και ***αναγκαία*** συνθήκη ώστε μία διανυσματική νόρμα $\|\bullet\|$ να επάγεται από ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle\bullet,\bullet\rangle$.

***Απόδειξη.*** Έστω $V$ ένας διανυσματικός χώρος πάνω σε ένα σώμα **F** ($\boldsymbol{R}$ ή $\boldsymbol{C}$) και $\|\bullet\|$ μία διανυσματική νόρμα στον $V$. Για λόγους απλότητας και οικονομίας χώρου παραθέτουμε την απόδειξη για πραγματικούς συντελεστές. Η απόδειξη για μιγαδικούς συντελεστές είναι ουσιαστικά η ίδια.
Ορίζουμε τώρα την ακόλουθη σχέση:

$$\langle x,y\rangle = \frac{\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2} \qquad \text{για κάθε} \quad x,y \in V. \tag{2.1.12}$$

Θα δείξουμε ότι το $\langle x,y\rangle$, σχέση (2.1.12), ικανοποιεί τα αξιώματα του εσωτερικού γινομένου στον $V$.

- $\langle x,x\rangle = \frac{\|x+x\|^2 - \|x\|^2 - \|x\|^2}{2} = \frac{\|2x\|^2 - 2\|x\|^2}{2} = \frac{2^2\|x\|^2 - 2\|x\|^2}{2} = \frac{2\|x\|^2}{2} = \|x\|^2 \ge 0,$

  αφού $\|x\| \ge 0$ για κάθε $x \in V$ (2.1.1(i)).

- $\langle 0,0\rangle = \frac{0}{2} = 0$ αν $x = 0$ και $\langle x,x\rangle = 0 \Longrightarrow \frac{\|x+x\|^2 - \|x\|^2 - \|x\|^2}{2} = 0 \Longrightarrow \|x\|^2 = 0$

  $\Longrightarrow \|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0$ (2.1.1(ii)).

- $\langle y,x\rangle = \frac{\|y+x\|^2 - \|y\|^2 - \|x\|^2}{2} = \langle x,y\rangle$, αφού $x, y \in \boldsymbol{R}$.

- Έχουμε:

$$4\langle x,y\rangle + 4\langle z,y\rangle = 2\|x+y\|^2 - 2\|x\|^2 - 2\|y\|^2 + 2\|z+y\|^2 - 2\|z\|^2 - 2\|y\|^2$$

$$= 2\|x+y\|^2 + 2\|z+y\|^2 - 4\|y\|^2 - \|x+z\|^2 - \|x-z\|^2$$

$$= \|x+2y+z\|^2 + \|x-z\|^2 - 4\|y\|^2 - \|x+z\|^2 - \|x-z\|^2$$

$$= \|x+2y+z\|^2 - \|x+z\|^2 - 4\|y\|^2. \qquad (\text{σχέση } \alpha')$$

Η δεύτερη ισότητα προκύπτει μέσω της Ταυτότητας Παραλληλογράμμου για τους όρους $2\|x\|^2$ και $2\|z\|^2$, ενώ η τρίτη για τους όρους $2\|x+y\|^2$ και $2\|z+y\|^2$.

Επίσης, ισχύει:

$$4\langle x+z, y\rangle = 2\|(x+z)+y\|^2 - 2\|x+z\|^2 - 2\|y\|^2$$

$$= 2\|(x+z)+y\|^2 + 2\|y\|^2 - 2\|x+z\|^2 - 4\|y\|^2$$

$$= \|x+2y+z\|^2 + \|x+z\|^2 - 2\|x+z\|^2 - 4\|y\|^2$$

$$= \|x+2y+z\|^2 - \|x+z\|^2 - 4\|y\|^2. \qquad (\text{σχέση } \beta')$$

Στην πρώτη ισότητα προσθέτουμε και αφαιρούμε τον όρο $2\|y\|^2$, ώστε να μπορέσομε να κάνουμε χρήση της σχέσης (2.1.7).

Άρα οι σχέσεις $\alpha'$ και $\beta'$ είναι ίσες, δηλαδή ισχύει $\langle x+z, y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle z, y\rangle$.

- i. $\langle kx, y\rangle = k\langle x, y\rangle, \quad k = 1,2,3,\ldots \ (k \in N)$, επαγωγικά από την προσθετικότητα.

  ii. $\lambda\langle \left(\frac{k}{\lambda}\right)x, y\rangle = \langle \lambda\left(\frac{k}{\lambda}\right)x, y\rangle = \langle kx, y\rangle = k\langle x, y\rangle \Longrightarrow \langle\left(\frac{k}{\lambda}\right)x, y\rangle = \frac{k}{\lambda}\langle x, y\rangle, \quad k, \lambda = 1,2,\ldots$

  iii. $\langle -x, y\rangle = \frac{\|-x+y\|^2 - \|-x\|^2 - \|y\|^2}{2} = \frac{\|y-x\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2}$.

  Όμως, $\|y-x\|^2 = 2\|y\|^2 + 2\|x\|^2 - \|y+x\|^2$ (σχέση 2.1.7).

  Επομένως:

$$\langle -x, y\rangle = \frac{2\|y\|^2 + 2\|x\|^2 - \|y+x\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2}$$

$$= \frac{-\|y+x\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2}{2}$$

$$= -\frac{\|y+x\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2} = -\langle x, y\rangle.$$

  Άρα, $\langle qx, y\rangle = q\langle x, y\rangle$ για κάθε $q \in Q$.

  Επομένως, λόγω συνέχειας της νόρμας, βλέπε Πόρισμα 2.2.5 παρακάτω, θα ισχύει ότι $\langle ax, y\rangle = a\langle x, y\rangle$ για κάθε $a \in R$.

- Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη, μας είναι απαραίτητη η ανισότητα Cauchy-Schwarz $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $p(t) = t^2\|x\|^2 + 2t\langle x, y\rangle + \|y\|^2$, $t \in \boldsymbol{R}$ και παρατηρούμε ότι για $q \in Q$ ισχύει: $p(q) = \|qx + y\|^2$ (αφού $\langle qx, y\rangle = q\langle x, y\rangle$ λόγω ομογένειας). Η $p(t)$ είναι συνεχής ως προς $t$, $t \in \boldsymbol{R}$, ως πολυώνυμο 2^ου^ βαθμού. Άρα, αφού $p(t) = t^2\|x\|^2 + 2t\langle x, y\rangle + \|y\|^2 = \|tx + y\|^2 \geq 0$ για κάθε $t \in Q$, τότε λόγω της συνέχειας θα ισχύει και για κάθε $t \in \boldsymbol{R}$. Επιπλέον, αφού $p(t) \geq 0$ θα πρέπει η διακρίνουσά του να είναι μη-θετική, δηλαδή $\Delta \leq 0$. Επομένως,

$$\Delta = 4\langle x, y\rangle^2 - 4\|x\|^2\,\|y\|^2 \leq 0 \Longrightarrow |\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|.$$

Για τυχαίο $a \in \boldsymbol{R}$ και τυχαίο $\beta \in Q$, θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
|\langle ax, y\rangle - a\langle x, y\rangle| &= |\langle ax, y\rangle - \langle \beta x, y\rangle - a\langle x, y\rangle + \langle \beta x, y\rangle| \\
&= |\langle (a-\beta)x, y\rangle - (a-\beta)\langle x, y\rangle| \\
&\leq |\langle (a-\beta)x, y\rangle| + |(a-\beta)\langle x, y\rangle| \\
&= |a-\beta|\,|\langle x, y\rangle| + |a-\beta|\,|\langle x, y\rangle| \\
&\leq |a-\beta|\,\|x\|\,\|y\| + |a-\beta|\,\|x\|\,\|y\| \\
&= 2|a-\beta|\,\|x\|\,\|y\| \quad \text{για κάθε } \beta \in Q. \quad (\text{σχέση } \gamma')
\end{aligned}$$

Παίρνουμε τώρα μία ακολουθία ρητών $\beta_n$, για την οποία ισχύει: $\beta_n \to a$. Οπότε, $\beta_n - a \to 0$. Επομένως, από τη σχέση $\gamma'$ προκύπτει ότι:

$$|\langle ax, y\rangle - a\langle x, y\rangle| \to 0.$$

Όμως, λόγω της συνέχειας της απόλυτης τιμής η προηγούμενη σχέση ισούται τελικά με το μηδέν: $|\langle ax, y\rangle - a\langle x, y\rangle| = 0 \Longrightarrow \langle ax, y\rangle = a\langle x, y\rangle$. ■

Μερικά παραδείγματα νορμών διανυσμάτων που χρησιμοποιούνται πολύ συχνά δίνονται παρακάτω:

- **$l_p$ *νόρμα*** στον $\boldsymbol{C}^n$:

  Για κάθε πραγματικό αριθμό $p \geq 1$, η $p$-νόρμα ενός διανύσματος $x = [x_1 \;\; x_2 \; \dots \; x_n]^T$, $x \in \boldsymbol{C}^n$ είναι:

  $$\|x\|_p \triangleq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}.$$

  Μπορεί να αποδειχθεί ότι κάθε $p$-νόρμα, με $1 \leq p < \infty$, ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του ορισμού. Η τριγωνική ανισότητα για τις $p$-νόρμες είναι γνωστή ως ανισότητα *Minkowski*:

  $$\|x + y\|_p \;\leq\; \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Επιπλέον, για τις $p$-νόρμες ισχύει η ανισότητα *Hölder* (γενίκευση της ανισότητας Cauchy-Schwarz):

$$|x \circ y| \leq \|x\|_p \, \|y\|_q,$$

όπου $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ και $x \circ y$ είναι το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $x$ και $y$ (Ορισμός 2.1.4).

- ***Ευκλείδια νόρμα*** (*Euclidean norm*) ή $\boldsymbol{l_2}$ ***νόρμα*** στον $\boldsymbol{C^n}$:
  Η Ευκλείδια νόρμα στον $\boldsymbol{C^n}$ αποτελεί μία ειδική περίπτωση της $p$-νόρμας, για $p = 2$:

$$\|x\|_2 \triangleq \left( \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2} = (|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2)^{1/2}.$$

  Ίσως είναι η πιο γνωστή νόρμα διανύσματος, μιας και η νόρμα $\|x - y\|_2$ υπολογίζει την Ευκλείδια απόσταση μεταξύ δύο σημείων $x, y \in \boldsymbol{C^n}$. Επίσης, η νόρμα αυτή προέρχεται από το Ευκλείδιο εσωτερικό γινόμενο, δηλαδή $\|x\|_2^2 = \langle x, x \rangle = x^* x$. Μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι η Ευκλείδια νόρμα $\|\bullet\|_2$ είναι ορθομοναδιαία αναλλοίωτη.

- ***Αθροιστική νόρμα*** (*sum norm*) ή $\boldsymbol{l_1}$ ***νόρμα*** στον $\boldsymbol{C^n}$:
  Η Αθροιστική νόρμα ονομάζεται και «νόρμα-ένα», εξαιτίας της ευθύγραμμης μέτρησης του μήκους μόνο σε συντεταγμένες κατευθύνσεις:

$$\|x\|_1 \triangleq \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|.$$

  Επίσης, είναι γνωστή και ως *Νόρμα Μανχάταν* (Manhattan norm). Το όνομα αυτής της νόρμας σχετίζεται με την απόσταση που θα διανύσει ένα αυτοκίνητο κινούμενο πάνω σε ένα ορθογώνιο πλέγμα δρόμων, ώστε ξεκινώντας από την αρχή των αξόνων να καταλήξει στο ζητούμενο σημείο $x$.

- ***Μέγιστη νόρμα*** (*max norm*) ή $\boldsymbol{l_\infty}$ ***νόρμα*** στον $\boldsymbol{C^n}$:

$$\|x\|_\infty \triangleq max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}.$$

***Παρατήρηση*:** Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η νόρμα-$\infty$ και η $p$-νόρμα συνδέονται με την ακόλουθη σχέση:

$$\|x\|_\infty = \lim_{p \to \infty} \|x\|_p.$$

***Απόδειξη.*** Έστω ένα διάνυσμα $x \in \boldsymbol{C^n}$. Τότε από τον ορισμό της $p$-νόρμας θα έχουμε:

$$\|x\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p}.$$

Έστω τώρα $a = max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} = \|x\|_\infty$. Τότε, θα ισχύει:

$$\sqrt[p]{|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p} = a \sqrt[p]{\left|\frac{x_1}{a}\right|^p + \cdots + \left|\frac{x_n}{a}\right|^p},$$

με $\left|\frac{x_i}{a}\right| \leq 1$. Άρα, $0 \leq \left|\frac{x_i}{a}\right|^p \leq 1$ και για κάποιο $i_0$ θα ισχύει: $\left|\frac{x_{i_0}}{a}\right| = 1$.
Επομένως, θα έχουμε:

$$1 \leq \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{x_i}{a}\right|^p \leq n.$$

Επειδή $\sqrt[p]{1} \to 1$ και $\sqrt[p]{n} \to 1$ καθώς $p \to \infty$, τότε σύμφωνα με το Κριτήριο Παρεμβολής καταλήγουμε στο ακόλουθο συμπέρασμα:

$$\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} \left|\frac{x_i}{a}\right|^p} \to 1.$$

Άρα, $$\|x\|_p = a \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} \left|\frac{x_i}{a}\right|^p} \to a = \|x\|_\infty, \qquad \text{καθώς} \quad p \to \infty$$

ή ισοδύναμα,

$$\|x\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|x\|_p. \quad \blacksquare$$

Παρ' όλο που όλα τα προηγούμενα παραδείγματα νορμών διανυσμάτων ήταν στον $\boldsymbol{C}^n$, αυτές οι νόρμες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη δημιουργία νέων νορμών σε οποιονδήποτε πραγματικό ή μιγαδικό διανυσματικό χώρο $V$ πεπερασμένης διάστασης. Αν $\mathcal{B} = \{b^{(1)}, \dots, b^{(n)}\}$ είναι μια βάση του $V$, υπενθυμίζουμε ότι η απεικόνιση

$$x \to [x]_{\mathcal{B}} \triangleq \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \boldsymbol{C}^n, \qquad x = \sum_{i=1}^{n} x_i b^{(i)}$$

είναι ένας ***ισομορφισμός*** του $V$ πάνω στον $\boldsymbol{C}^n$. Αν $\|\bullet\|$ είναι οποιαδήποτε νόρμα διανυσμάτων στον $\boldsymbol{C}^n$, τότε μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι συνάρτηση

$$\|x\|_{\mathcal{B}} \triangleq \|[x]_{\mathcal{B}}\| = \|[x_1, \dots, x_n]^T\|, \qquad x = \sum_{i=1}^{n} x_i b^{(i)}$$

είναι διανυσματική νόρμα στον $V$.

Ο ορισμός της νόρμας διανυσμάτων, τον οποίο αναφέραμε στην αρχή του κεφαλαίου, δεν απαιτεί ο χώρος $V$ να είναι πεπερασμένης διάστασης. Για παράδειγμα, ο $V$ θα μπορούσε να είναι ο διανυσματικός χώρος $\boldsymbol{C}[a,b]$ των πραγματικών ή μιγαδικών συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα $[a,b]$.

***Παράδειγμα*:** Έστω $f$ μία συνάρτηση στον $\boldsymbol{C}[a,b]$. Υπάρχουν νόρμες στον $\boldsymbol{C}[a,b]$ οι οποίες είναι παρόμοιες με αυτές που ορίσαμε προηγουμένως στον $\boldsymbol{C}^n$:

$$\|f\|_p \triangleq \left[\int_a^b |f(t)|^p \, dt\right]^{1/p}, \quad p \geq 1 \qquad L_p \; norm,$$

$$\|f\|_2 \triangleq \left[\int_a^b |f(t)|^2 \, dt\right]^{1/2} \qquad L_2 \; norm,$$

$$\|f\|_1 \triangleq \int_a^b |f(t)| \, dt \qquad L_1 \; norm,$$

$$\|f\|_\infty \triangleq \max\{|f(x)| \; : \; x \in [a,b]\} \qquad L_\infty \; norm.$$

## 2.2 Ιδιότητες Νορμών

Οι ιδιότητες των νορμών διανυσμάτων μπορούν να χωριστούν στις τρεις ακόλουθες κατηγορίες :

- *Αλγεβρικές Ιδιότητες,*
- *Αναλυτικές Ιδιότητες,*
- *Γεωμετρικές Ιδιότητες.*

**Α.** Αλγεβρικές Ιδιότητες

Οι αλγεβρικές ιδιότητες των νορμών αναφέρονται σε τρόπους κατασκευής νέων νορμών χρησιμοποιώντας ήδη υπάρχουσες. Για παράδειγμα, είναι εύκολο να δείξει κανείς πως το άθροισμα δύο διανυσματικών (ημι)νορμών είναι (ημι)νόρμα και πως κάθε θετικό πολλαπλάσιο μιας (ημι)νόρμας είναι και πάλι (ημι)νόρμα. Επίσης, μπορεί να δειχθεί ότι αν $\|\bullet\|_a$ και $\|\bullet\|_\beta$ είναι δύο διανυσματικές νόρμες, τότε η συνάρτηση $\|\bullet\|$ που ορίζεται ως $\|x\| \triangleq max\{\|x\|_a, \|x\|_\beta\}$ είναι κι αυτή νόρμα. Όλα όσα αναφέρθηκαν προηγουμένως αποτελούν ειδικές περιπτώσεις του θεωρήματος που ακολουθεί.

***Θεώρημα 2.2.1.*** Θεωρούμε $n$ νόρμες $\|\bullet\|_{a_1}, \dots, \|\bullet\|_{a_n}$ σε έναν διανυσματικό χώρο $V$ πάνω σε ένα σώμα $\mathbf{F}$ ($\boldsymbol{R}$ ή $\boldsymbol{C}$) και μία νόρμα $\|\bullet\|_\beta$ στον $\boldsymbol{R}^n$ τέτοια ώστε να ισχύει $\|y\|_\beta \leq \|y+z\|_\beta$, για κάθε διάνυσμα $y, z \in \boldsymbol{R}^n$ με μη-αρνητικά στοιχεία. Τότε η συνάρτηση $\|\bullet\| : V \to \boldsymbol{R}$ που ορίζεται ως

$$\|x\| \triangleq \left\| \left[\, \|x\|_{a_1}, \dots, \|x\|_{a_n} \,\right]^T \right\|_\beta ,$$

είναι νόρμα στον $V$.

***Απόδειξη.*** Εύκολα αποδεικνύονται τα αξιώματα του ορισμού της νόρμας. ■

Η υπόθεση μονοτονίας της νόρμας $\|\bullet\|_\beta$ στο προηγούμενο θεώρημα εξασφαλίζει ότι η συνάρτηση $\|\bullet\|$ που κατασκευάστηκε ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα. Όλες οι $l_p$-νόρμες έχουν αυτήν την ιδιότητα μονοτονίας, όπως και κάθε διανυσματική νόρμα $\|x\|_\beta$ στον $\boldsymbol{R}^n$ που είναι μια συνάρτηση μόνο των απόλυτων τιμών των στοιχείων του $x$.

Ένας δεύτερος τρόπος για να κατασκευάσουμε νέες νόρμες από ήδη υπάρχουσες δίνεται στο ακόλουθο θεώρημα.

***Θεώρημα 2.2.2.*** Αν $\|\bullet\|$ είναι μία νόρμα στον $\boldsymbol{C}^n$ και αν $T \in M_n$ είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας, τότε και η συνάρτηση $\|\bullet\|_T$ που ορίζεται ως

$$\|x\|_T \triangleq \|Tx\|,$$

είναι νόρμα στον $\boldsymbol{C}^n$.

***Απόδειξη.*** Εύκολα αποδεικνύονται τα αξιώματα του ορισμού της νόρμας. ■

**Β.** Αναλυτικές Ιδιότητες

Είναι σαφές από τα παραδείγματα που προηγήθηκαν πως υπάρχουν πολλές διαφορετικές συναρτήσεις $\|\bullet\| : V \to \boldsymbol{R}$, οι οποίες ικανοποιούν τα αξιώματα της νόρμας. Αυτό είναι πολύ σημαντικό, καθώς μια νόρμα μπορεί να είναι περισσότερο εύχρηστη από κάποια άλλη για ένα συγκεκριμένο πρόβλημα. Για παράδειγμα, η $\boldsymbol{l_2}$ ***νόρμα*** συχνά χρησιμοποιείται σε προβλήματα βελτιστοποίησης επειδή είναι συνεχώς διαφορίσιμη (εκτός από την αρχή των αξόνων). Απ' την άλλη μεριά, η $\boldsymbol{l_1}$ ***νόρμα*** χρησιμοποιείται ευρέως στη Στατιστική και στη Θεωρία Προσεγγίσεων. Η $\boldsymbol{l_\infty}$ ***νόρμα*** είναι γενικά η νόρμα που χρησιμοποιείται περισσότερο από οποιαδήποτε άλλη, δεδομένου του εύκολου υπολογισμού της. Είναι χρήσιμη για τις αποδείξεις σε προβλήματα σύγκλισης και έχει αποδειχθεί σημαντικό εργαλείο στη σύγκλιση αριθμητικών αλγορίθμων.

Στις διάφορες εφαρμογές, υπάρχει η πιθανότητα η νόρμα στην οποία βασίζεται η θεωρία και η νόρμα που είναι πιο εύκολο να υπολογιστεί σε μία δεδομένη κατάσταση να μην ταυτίζονται. Επομένως, είναι σημαντικό να γνωρίζουμε τη σχέση που μπορεί να υπάρχει ανάμεσα σε δύο διαφορετικές νόρμες. Όμως, σε πεπερασμένης διάστασης χώρους (μόνο με τους οποίους θα ασχοληθούμε στην εργασία αυτή) όλες οι νόρμες είναι «*ισοδύναμες*» υπό μία αυστηρή έννοια, όπως θα διαπιστώσουμε και στη συνέχεια.

Η βασικότερη ίσως έννοια της Ανάλυσης είναι η «*σύγκλιση*» μιας ακολουθίας. Οι διανυσματικές νόρμες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να "μετρήσουμε" τη σύγκλιση μιας ακολουθίας διανυσμάτων, με την έννοια ότι η επιλογή της νόρμας επηρεάζει την ταχύτητα σύγκλισης.

Αρχικά, θα αναφέρουμε μια συνθήκη η οποία θα μας χρειαστεί για τον αμέσως επόμενο ορισμό.

***Παρατήρηση*:** Έστω μία ακολουθία διανυσμάτων $\{x^{(k)}\}$ ενός χώρου $V$ και ένα διάνυσμα $x \in V$. Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να ισχύει $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x$ είναι η σχέση:

$$\left\| x^{(k)} - x \right\| \to 0 \qquad (\text{ή} \quad \lim_{k\to\infty} \left\| x^{(k)} - x \right\| = 0).$$

***Ορισμός 2.2.3.*** Έστω ένας διανυσματικός χώρος $V$ πάνω σε ένα σώμα $\mathbf{F}$ ($\boldsymbol{R}$ ή $\boldsymbol{C}$) και μία νόρμα $\|\bullet\|$ στον $V$. Θα λέμε ότι η ακολουθία διανυσμάτων $\{x^{(k)}\}$ του $V$ ***συγκλίνει*** στο διάνυσμα $x \in V$ ως προς τη νόρμα $\|\bullet\|$, αν και μόνο αν ισχύει το εξής:

$$\left\|x^{(k)} - x\right\| \to 0, \qquad \text{καθώς} \quad k \to \infty.$$

Αν η ακολουθία $\{x^{(k)}\}$ συγκλίνει στο $x$ ως προς τη νόρμα $\|\bullet\|$, θα γράφουμε:

$$x^{(k)} \underset{\|\bullet\|}{\longrightarrow} x \qquad \text{ή} \qquad \lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x.$$

Κατά τη μελέτη σύγκλισης μιας ακολουθίας απαιτείται να είναι ξεκάθαρο ποια νόρμα χρησιμοποιείται. Ένα πολύ λεπτό και ενδιαφέρον πρόβλημα είναι το αν μία ακολουθία διανυσμάτων μπορεί να συγκλίνει ως προς μία νόρμα και να μη συγκλίνει ως προς μία άλλη, δηλαδή αν το όριο επηρεάζεται από τη νόρμα που επιλέγεται. Κάτι τέτοιο μπορεί να συμβεί σε απειροδιάστατους διανυσματικούς χώρους και αυτό θα το διαπιστώσουμε στο παράδειγμα που ακολουθεί.

***Παράδειγμα***: Θεωρούμε μία ακολουθία συναρτήσεων $\{f_k\}$ στον $C[0,1]$ ($C[0,1] \to$ ο διανυσματικός χώρος των πραγματικών ή μιγαδικών συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα $[0,1]$), η οποία ορίζεται ως εξής:

$$f_k(x) = 0, \qquad 0 \le x \le \frac{1}{k},$$

$$f_k(x) = 2\left(k^{3/2}x - k^{1/2}\right), \qquad \frac{1}{k} \le x \le \frac{3}{2k},$$

$$f_k(x) = 2\left(-k^{3/2}x + 2\,k^{1/2}\right), \qquad \frac{3}{2k} \le x \le \frac{2}{k},$$

$$f_k(x) = 0, \qquad \frac{2}{k} \le x \le 1,$$

για $k = 2, 3, 4, \ldots$ Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε ότι:

$$\|f_k\|_1 = \tfrac{1}{2}k^{-1/2} \to 0, \qquad \text{καθώς} \quad k \to \infty,$$

$$\|f_k\|_2 = \tfrac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \text{για κάθε } k,$$

$$\|f_k\|_\infty = k^{1/2} \to \infty, \qquad \text{καθώς} \quad k \to \infty.$$

Επομένως, έχουμε ότι $\lim_{k\to\infty} f_k = 0$ ως προς την $L_1$ *νόρμα* αλλά όχι ως προς τις άλλες δύο νόρμες ($L_2$ και $L_\infty$).

Το φαινόμενο του προηγούμενου παραδείγματος δεν παρατηρείται στους χώρους πεπερασμένης διάστασης. Προκειμένου να το διαπιστώσουμε αυτό και να καταλήξουμε έτσι στην ισοδυναμία των νορμών, θα χρειαστούμε αρχικά ένα γενικό λήμμα σχετικά με τις ιδιότητες συνέχειας των νορμών.

***Λήμμα 2.2.4.*** Έστω μία νόρμα $\|\bullet\|$ σε έναν διανυσματικό χώρο $V$ πάνω σε ένα σώμα $\mathbf{F}$ ($\boldsymbol{R}$ ή $\boldsymbol{C}$) και τα δεδομένα διανύσματα $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)} \in V$. Η συνάρτηση $g : \mathbf{F}^n \to \boldsymbol{R}$ που ορίζεται ως

$$g(z_1, z_2, \ldots, z_n) \triangleq \left\| z_1 x^{(1)} + z_2 x^{(2)} + \cdots + z_n x^{(n)} \right\|$$

είναι ***ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση*** (uniformly continuous function).

***Απόδειξη.*** Αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση $g$ είναι *Lipschitz συνεχής*, μιας και κάθε συνάρτηση *Lipschitz* είναι ομοιόμορφα συνεχής (Παρατήρηση-Κεφάλαιο 1).

Έστω $u = \sum_{i=1}^{n} u_i x^{(i)}$ και $\upsilon = \sum_{i=1}^{n} v_i x^{(i)}$. Υπολογίζουμε τώρα το παρακάτω:

$$\begin{aligned} |g(u_1, u_2, \ldots, u_n) - g(v_1, v_2, \ldots, v_n)| &= |\, \|u\| - \|v\| \,| \leq \|u - v\| \\ &= \left\| \sum_{i=1}^{n} (u_i - v_i)\, x^{(i)} \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \left\| (u_i - v_i)\, x^{(i)} \right\| \quad \text{(Τριγωνική Ανισότητα)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} |u_i - v_i| \left\| x^{(i)} \right\| \quad \text{(Ιδιότητα του Ομογενούς)} \\ &\leq \mathrm{C} \max_{1 \leq i \leq n} |u_i - v_i|, \end{aligned}$$

όπου $\mathrm{C} \triangleq n \max_{1 \leq i \leq n} \left\| x^{(i)} \right\|$. Η πρώτη ανισότητα προέρχεται από το Λήμμα 2.1.2. Παρατηρούμε πως η πεπερασμένη σταθερά C εξαρτάται μόνο από τη νόρμα $\|\bullet\|$ και τα $n$ διανύσματα $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$. Αν τα διανύσματα $x^{(i)}$ είναι όλα μηδενικά, τότε δεν υπάρχει κάτι να δείξουμε. Αν όχι, τότε $\mathrm{C} > 0$. Για να ισχύει επομένως η ανισότητα

$$|g(u_1, u_2, \ldots, u_n) - g(v_1, v_2, \ldots, v_n)| < \epsilon$$

ώστε η συνάρτηση $g$ να είναι ομοιόμορφα συνεχής, θα πρέπει απλά να επιλέξουμε $|u_i - v_i| < \epsilon / C$. ■

Στο προηγούμενο λήμμα, ο χώρος $V$ δεν είναι απαραίτητο να είναι πεπερασμένης διάστασης. Όμως, είναι σημαντικό ο αριθμός των διανυσμάτων $x^{(i)}$ να είναι πεπερασμένος, καθώς για να μπορούμε να μιλάμε για συνέχεια και ομοιόμορφη συνέχεια της συνάρτησης $g$, θα πρέπει ο χώρος $\mathbf{F}^n$ στον οποίο ορίζεται να είναι πεπερασμένος. Στην ουσία, τα διανύσματα $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$ προορίζονται να είναι βάση του $\mathbf{F}^n$. Έτσι, προκύπτει το ακόλουθο πόρισμα.

***Πόρισμα 2.2.5.*** Κάθε νόρμα στους χώρους $\boldsymbol{R}^n$ και $\boldsymbol{C}^n$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Το θεώρημα που ακολουθεί, μας δείχνει τις ιδιότητες που διαθέτει μια ***προ-νόρμα*** (pre-norm). Στο θεώρημα αυτό, είναι απαραίτητο ο διανυσματικός χώρος $V$ να είναι πεπερασμένης διάστασης σε αντίθεση με το προηγούμενο λήμμα, γιατί αλλιώς δεν θα ίσχυε η συνέχεια που χρησιμοποιείται ως δεδομένο.

***Θεώρημα 2.2.6.*** Έστω $f_1$ και $f_2$ δύο πραγματικές συναρτήσεις σε έναν πεπερασμένο διανυσματικό χώρο $V$ πάνω σε ένα σώμα $\mathbf{F}$ ($\boldsymbol{R}$ ή $\boldsymbol{C}$) και $\mathcal{B} = \{x^{(1)}, \dots, x^{(n)}\}$ μία βάση του $V$. Υποθέτουμε ότι οι $f_1$ και $f_2$ είναι:

i. *Θετικές*: $f_i(x) \geq 0$ για κάθε $x \in V$, $f_i(x) = 0$ αν και μόνο αν $x = 0$,

ii. *Ομογενείς*: $f_i(ax) = |a|\, f_i(x)$ για κάθε $a \in \mathbf{F}$ και $x \in V$,

iii. *Συνεχείς*: $f_i\big(x(z)\big)$ είναι συνεχής στον $\mathbf{F}^n$, όπου

$$z = [z_1, \dots, z_n]^T \in \mathbf{F}^n \qquad \text{και} \qquad x(z) \triangleq z_1 x^{(1)} + \dots + z_n x^{(n)}.$$

Τότε, υπάρχουν πεπερασμένες θετικές σταθερές $C_m$ και $C_M$ τέτοιες ώστε να ισχύει

$$C_m\, f_1(x) \leq f_2(x) \leq C_M\, f_1(x), \qquad \text{για κάθε} \quad x \in V.$$

***Απόδειξη.*** Ορίζουμε τη συνάρτηση $h(z) \triangleq f_2\big(x(z)\big) \,/\, f_1\big(x(z)\big)$ πάνω στην Ευκλείδια μοναδιαία σφαίρα $S = \{z \in \mathbf{F}^n : \|z\|_2 = 1\}$, η οποία είναι ένα συμπαγές (δηλαδή κλειστό και φραγμένο) σύνολο στον χώρο $\mathbf{F}^n$. Παρατηρούμε, πως ο παρονομαστής της συνάρτησης $h(z)$ δεν μηδενίζεται πάνω στη σφαίρα $S$ και αυτό εξηγείται ως εξής: αφού $z \in S$, τότε $\|z\|_2 = 1 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 = 1$ και έτσι σίγουρα κάποια $z_i$ είναι μη-μηδενικά. Λόγω της γραμμικής ανεξαρτησίας των διανυσμάτων $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$, αφού αποτελούν βάση του $V$, και του ορισμού του $x(z)$, αν $x(z) = \sum_{i=1}^{n} z_i x^{(i)} = 0 \Longrightarrow z_i = 0$ (άτοπο). Άρα, $x(z) \neq 0$ και λόγω της ιδιότητας 2.2.6(i), η συνάρτηση $h(z)$ είναι θετική πάνω στην $S$. Επομένως, η $h(z)$ είναι και συνεχής στην $S$ λόγω της ιδιότητας 2.2.6(iii). Σύμφωνα με το *Θεώρημα Weierstrass*, η συνεχής συνάρτηση $h$ επιτυγχάνει ένα πεπερασμένο θετικό μέγιστο $C_M$ και ένα πεπερασμένο θετικό ελάχιστο $C_m$ στο συμπαγές σύνολο $S$ και έτσι για κάθε $z \in S$ έχουμε

$$C_m \leq \frac{f_2\big(x(z)\big)}{f_1\big(x(z)\big)} \leq C_M,$$

ή ισοδύναμα,

$$C_m\, f_1\big(x(z)\big) \leq f_2\big(x(z)\big) \leq C_M\, f_1\big(x(z)\big). \tag{2.2.7}$$

Επειδή το $z \,/\, \|z\|_2 \in S$ για κάθε μη-μηδενικό $z \in \mathbf{F}^n$ (αφού $\left\| \frac{z}{\|z\|_2} \right\|_2 = 1$), η ιδιότητα 2.2.6(ii) εξασφαλίζει ότι η (2.2.7) ισχύει για κάθε μη-μηδενικό $z \in \mathbf{F}^n$:

$$C_m\, f_1\left(\frac{x(z)}{\|z\|_2}\right) \leq f_2\left(\frac{x(z)}{\|z\|_2}\right) \leq C_M\, f_1\left(\frac{x(z)}{\|z\|_2}\right), \qquad (\text{αφού} \quad z \,/\, \|z\|_2 \in S)$$

ή ισοδύναμα,

$$\|z\|_2\, C_m\, f_1\big(x(z)\big) \leq \|z\|_2\, f_2\big(x(z)\big) \leq \|z\|_2\, C_M\, f_1\big(x(z)\big), \qquad (\text{Λόγω } 2.2.6(\text{ii}))$$

ή ισοδύναμα,

$$C_m\, f_1\big(x(z)\big) \leq f_2\big(x(z)\big) \leq C_M\, f_1\big(x(z)\big), \qquad \text{για κάθε μη-μηδενικό } z \in \mathbf{F}^n.$$

Η παραπάνω ανισότητα ισχύει τετριμένα για $z = 0$, δεδομένου ότι από υπόθεση ισχύει ότι $f_i(0) = 0$. Όμως, κάθε $x \in V$ είναι της μορφής $x = x(z)$ για κάποια $z \in \mathbf{F}^n$ επειδή το $\mathcal{B}$ είναι βάση του $V$ και έτσι η (2.2.7) ισχύει για κάθε $x \in V$. ■

***Ορισμός 2.2.8.*** Έστω $V$ ένας πραγματικός ή μιγαδικός διανυσματικός χώρος. Μία συνάρτηση $f : V \to \boldsymbol{R}$ η οποία ικανοποιεί την υπόθεση της θετικότητας, του ομογενούς και της συνέχειας του Θεωρήματος 2.2.6, ονομάζεται ***προ-νόρμα*** (pre-norm).

Το πιο σημαντικό παράδειγμα της οικογένειας των προ-νορμών είναι φυσικά οι νόρμες διανυσμάτων. Το Λήμμα 2.2.4, στην ουσία μας δείχνει ότι κάθε διανυσματική νόρμα ικανοποιεί την υπόθεση συνέχειας (iii) του Θεωρήματος 2.2.6, αφού ως ομοιόμορφα συνεχής θα είναι και (σημειακά) συνεχής, κι επομένως είναι μια προ-νόρμα.
Αν μία προ-νόρμα ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα, τότε είναι νόρμα.

Απ' όλα τα παραπάνω, καταλήγουμε στο ακόλουθο σημαντικό πόρισμα.

***Πόρισμα 2.2.9.*** Έστω $\|\bullet\|_a$ και $\|\bullet\|_\beta$ δύο οποιεσδήποτε διανυσματικές νόρμες σε έναν πεπερασμένης διάστασης πραγματικό ή μιγαδικό διανυσματικό χώρο $V$. Τότε, υπάρχουν πεπερασμένες θετικές σταθερές $C_m$ και $C_M$, τέτοιες ώστε για κάθε $x \in V$ να ισχύει:

$$C_m\, \|x\|_a \leq \|x\|_\beta \leq C_M\, \|x\|_a.$$

***Απόδειξη.*** Άμεση, από το Λήμμα 2.2.4 και το Θεώρημα 2.2.6. ■

Μία πολύ σημαντική συνέπεια του παραπάνω πορίσματος είναι το γεγονός ότι η σύγκλιση μιας ακολουθίας διανυσμάτων ως προς μία νόρμα σε έναν χώρο πεπερασμένης διάστασης είναι *ανεξάρτητη* από τη νόρμα που χρησιμοποιείται.

***Πόρισμα 2.2.10.*** Αν $\|\bullet\|_a$ και $\|\bullet\|_\beta$ είναι δύο νόρμες διανυσμάτων σε έναν πραγματικό ή μιγαδικό διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης και αν $\{x^{(k)}\}$ είναι μία δεδομένη ακολουθία διανυσμάτων, τότε $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x$ ως προς τη νόρμα $\|\bullet\|_a$ αν και μόνο αν $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x$ ως προς τη νόρμα $\|\bullet\|_\beta$.

***Απόδειξη.*** Αφού $\|\bullet\|_a$ και $\|\bullet\|_\beta$ είναι νόρμες, τότε από το Πόρισμα 2.2.9 θα ισχύει ότι:

$$C_m\, \left\|x^{(k)} - x\right\|_a \leq \left\|x^{(k)} - x\right\|_\beta \leq C_M\, \left\|x^{(k)} - x\right\|_a,$$

για κάθε $k$. Επομένως, θα έχουμε $\left\|x^{(k)} - x\right\|_a \to 0$ (δηλαδή $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x$ ως προς τη νόρμα $\|\bullet\|_a$) αν και μόνο αν $\left\|x^{(k)} - x\right\|_\beta \to 0$, καθώς $k \to \infty$. ■

***Ορισμός 2.2.11.*** Δύο νόρμες $\|\bullet\|_a$ και $\|\bullet\|_\beta$ ονομάζονται ***ισοδύναμες*** (equivalent), αν μία ακολουθία διανυσμάτων $\{x^{(k)}\}$ η οποία συγκλίνει σε ένα διάνυσμα $x$ ως προς την πρώτη νόρμα $\|\bullet\|_a$, θα συγκλίνει στο ίδιο διάνυσμα και ως προς τη δεύτερη νόρμα $\|\bullet\|_\beta$.

Συνεπώς, το Πόρισμα 2.2.10 μας εξασφαλίζει ότι σε κάθε πραγματικό ή μιγαδικό χώρο *πεπερασμένης διάστασης* όλες οι νόρμες είναι ισοδύναμες. Όμως, στο παράδειγμα που αναφέραμε προηγουμένως, είδαμε πως δύο διαφορετικές νόρμες ενδέχεται να μην είναι ισοδύναμες σε *απειροδιάστατους* χώρους.

Είδαμε προηγουμένως ότι όλες οι νόρμες διανυσμάτων στον $\boldsymbol{R}^n$ ή στον $\boldsymbol{C}^n$ είναι ισοδύναμες. Επομένως, κάθε νόρμα θα είναι ισοδύναμη και με την $\|\bullet\|_\infty$. Άρα, θα λέμε ότι η ακολουθία $\{x^{(k)}\}$ συγκλίνει σε ένα διάνυσμα $x$ ως προς μία οποιαδήποτε νόρμα και θα γράφουμε $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x$ αν και μόνο αν ισχύει:

$$\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i, \qquad \text{για κάθε} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Δηλαδή, η σύγκλιση κατά συνιστώσες (componentwise convergence) μιας ακολουθίας διανυσμάτων, ως προς οποιαδήποτε βάση, είναι ισοδύναμη με τη σύγκλιση της ακολουθίας ως προς οποιαδήποτε διανυσματική νόρμα.

Ακόμα μία πολύ σημαντική συνέπεια της ισοδυναμίας των νορμών σε πεπερασμένο χώρο (στην ουσία συνέπεια του Πορίσματος 2.2.10) είναι το γεγονός ότι η *μοναδιαία μπάλα* και η *μοναδιαία σφαίρα* κάθε νόρμας, για τις οποίες θα αναφερθούμε αναλυτικά παρακάτω στις γεωμετρικές ιδιότητες, είναι *συμπαγείς*. Αυτό συνεπάγεται ότι μία συνεχής μιγαδική συνάρτηση πάνω στη μοναδιαία μπάλα οποιασδήποτε νόρμας είναι φραγμένη και επιτυγχάνει μέγιστο και ελάχιστο εάν είναι πραγματική. (Στην ουσία είναι το Θεώρημα Weierstrass, το οποίο αναφέρεται σε συνεχείς πραγματικές συναστήσεις, μιας και κάθε μιγαδικός αποτελείται από δύο συνιστώσες οι οποίες είναι πραγματικοί αριθμοί.)

***Πόρισμα 2.2.12.*** Έστω ένας διανυσματικός χώρος $V$ ($V = \boldsymbol{R}^n$ ή $\boldsymbol{C}^n$) και $f(\bullet)$ μία προ-νόρμα στον $V$. Τα σύνολα $\{x : f(x) \le 1\}$ και $\{x : f(x) = 1\}$ είναι ***συμπαγή*** (compact). Ειδικότερα, αν $\|\bullet\|$ είναι μία νόρμα στον $V$, τότε η κλειστή μοναδιαία μπάλα $\{x : \|x\| \le 1\}$ και η μοναδιαία σφαίρα $\{x : \|x\| = 1\}$ είναι και οι δύο *συμπαγείς*.

***Απόδειξη.*** Δείξαμε προηγουμένως ότι κάθε νόρμα είναι προ-νόρμα. Άρα το ίδιο θα ισχύει και για την Ευκλείδια νόρμα $\|x\|_2$. Από το Θεώρημα 2.2.6, αφού $\|x\|_2$ και $f(\bullet)$ είναι προ-νόρμες, υπάρχει θετική σταθερά $C$ ($C > 0$) τέτοια ώστε:

$$\|x\|_2 \leq C\, f(x), \qquad \text{για κάθε} \quad x \in V. \tag{2.2.13}$$

Επομένως, το σύνολο $\{x : f(x) \leq 1\}$, το οποίο περιέχεται σε μία Ευκλείδια μπάλα ακτίνας $C$ και με κέντρο την αρχή των αξόνων, είναι φραγμένο. Αυτό εξηγείται ως εξής:

$$\{x : f(x) \leq 1\} = \left\{x : \frac{\|x\|_2}{C} \leq 1\right\} \qquad \text{(Λόγω (2.2.13))}$$

$$= \{x : \|x\|_2 \leq C\}. \qquad \text{(φραγμένο σύνολο)}$$

Και τα δύο σύνολα $\{x : f(x) \leq 1\}$ και $\{x : f(x) = 1\}$ είναι κλειστά, επειδή η συνάρτηση $f(\bullet)$ είναι συνεχής: Αφού η $f(\bullet)$ είναι μία προ-νόρμα, τότε είναι συνεχής (Ορισμός 2.2.8).

$$\{x : f(x) \leq 1\} = f^{-1}([0,1]), \text{ όπου το σύνολο } [0,1] \text{ είναι κλειστό.}$$

Επειδή η $f(\bullet)$ είναι συνεχής και το $[0,1]$ είναι κλειστό, τότε και το $f^{-1}([0,1])$ είναι κλειστό (Ορισμός 1.2.4). Γνωρίζουμε ότι κάθε κλειστό και φραγμένο σύνολο στον $\boldsymbol{R}^n$ ή στον $\boldsymbol{C}^n$ είναι συμπαγές. Άρα, το ίδιο θα ισχύει και για τα δύο προηγούμενα σύνολα. ■

Στην αρχή της ενότητας αυτής, είδαμε ότι οι νόρμες χρησιμοποιούνται στη σύγκλιση ακολουθιών. Πολλές φορές, αυτό που μας ενδιαφέρει περισσότερο να διαπιστώσουμε για μία δεδομένη ακολουθία διανυσμάτων $\{x^{(k)}\}$ είναι αν συγκλίνει γενικά και όχι αν αυτή η ακολουθία συγκλίνει σε ένα δεδομένο διάνυσμα $x$. Για τον λόγο αυτό, χρειαζόμαστε ένα κριτήριο σύγκλισης το οποίο θα είναι ανεξάρτητο από το όριο $x$ στο οποίο συγκλίνει η ακολουθία. Αν υπήρχε τέτοιο όριο $x$ (δηλαδή $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x$, το οποίο σημαίνει πως $\|x^{(k)} - x\| \to 0$), τότε θα είχαμε:

$$\|x^{(k)} - x^{(j)}\| = \|x^{(k)} - x + x - x^{(j)}\|$$

$$\leq \|x^{(k)} - x\| + \|x - x^{(j)}\| \to 0,$$

καθώς $k, j \to \infty$. Η ανισότητα προκύπτει από την τριγωνική ανισότητα. Όλα αυτά μας οδηγούν στη διατύπωση του παρακάτω ορισμού που θα μας χρειαστεί στο επόμενο θεώρημα, το οποίο αποτελεί ένα βασικό κριτήριο σύγκλισης μιας ακολουθίας $\{x^{(k)}\}$ ως προς μία νόρμα διανύσματος (όταν δεν γνωρίζουμε το όριο).

***Ορισμός 2.2.14.*** Μία ακολουθία $\{x^{(k)}\}$ σε έναν διανυσματικό χώρο $V$ είναι ***ακολουθία Cauchy*** ως προς τη νόρμα $\|\bullet\|$, αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει θετικός ακέραιος $N(\epsilon)$ (δηλαδή που εξαρτάται από το $\epsilon$) τέτοιος ώστε:

$$\|x^{(k_1)} - x^{(k_2)}\| \leq \epsilon, \qquad \text{για κάθε} \quad k_1, k_2 \geq N(\epsilon).$$

Μία ακολουθία Cauchy είναι μια ακολουθία της οποίας τα στοιχεία πλησιάζουν *αυθαίρετα* μεταξύ τους καθώς αυτή προχωράει. Πήρε το όνομά της από τον Γάλλο Μαθηματικό Augustin-Louis Cauchy, ο οποίος ήταν απ' τους πρωτοπόρους της Μαθηματικής Ανάλυσης.

***Θεώρημα 2.2.15.*** Έστω μία νόρμα $\|\bullet\|$ σε έναν πραγματικό ή μιγαδικό χώρο $V$ πεπερασμένης διάστασης και $\{x^{(k)}\}$ μία ακολουθία διανυσμάτων του $V$. Η ακολουθία $\{x^{(k)}\}$ συγκλίνει σε ένα διάνυσμα στον $V$ αν και μόνο αν είναι ακολουθία Cauchy ως προς τη νόρμα $\|\bullet\|$.

***Απόδειξη.*** Επιλέγοντας μία βάση $\mathcal{B}$ του $V$ και θεωρώντας την ισοδύναμη νόρμα $\|[x]_{\mathcal{B}}\|_\infty$, δεν υπάρχει βλάβη της γενικότητας αν υποθέσουμε ότι $V = \boldsymbol{R}^n$ ή $\boldsymbol{C}^n$ για κάποιο ακέραιο $n$ και ότι η νόρμα $\|\bullet\|$ είναι η νόρμα-άπειρο $\|\bullet\|_\infty$.

$\xRightarrow{\text{ευθύ}}$ Έστω ότι υπάρχει $x \in V$ τέτοιο ώστε να ισχύει $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x$. Τότε, θα έχουμε:

$$\left\|x^{(k_1)} - x^{(k_2)}\right\| \le \left\|x^{(k_1)} - x\right\| + \left\|x - x^{(k_2)}\right\|.$$

Όμως, για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει θετικός ακέραιος $N_1(\epsilon)$ τέτοιος ώστε να ισχύει:

$$\left\|x^{(k_1)} - x\right\| \le \frac{\epsilon}{2}, \qquad \text{για κάθε } k_1 \ge N_1(\epsilon)$$

και θετικός ακέραιος $N_2(\epsilon)$ τέτοιος ώστε:

$$\left\|x^{(k_2)} - x\right\| \le \frac{\epsilon}{2}, \qquad \text{για κάθε } k_2 \ge N_2(\epsilon).$$

Έστω $N(\epsilon) = \max\{N_1(\epsilon), N_2(\epsilon)\}$. Τότε, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει θετικός ακέραιος $N(\epsilon)$ τέτοιος ώστε να ισχύει:

$$\left\|x^{(k_1)} - x^{(k_2)}\right\| \le \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \qquad \text{για κάθε } k_1, k_2 \ge N(\epsilon).$$

Επομένως, η ακολουθία $\{x^{(k)}\}$ είναι Cauchy κατά νόρμα.

$\xLeftarrow{\text{αντίστροφο}}$ Αν η ακολουθία $\{x^{(k)}\}$ είναι Cauchy κατά νόρμα, τότε για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει θετικός ακέραιος $N(\epsilon)$ τέτοιος ώστε να ισχύει: $\left\|x^{(k_1)} - x^{(k_2)}\right\| \le \epsilon$, για κάθε $k_1, k_2 \ge N(\epsilon)$. Αφού όλες οι νόρμες είναι ισοδύναμες στον $V$, η $\{x^{(k)}\}$ θα είναι Cauchy και ως προς τη νόρμα $\|\bullet\|_\infty$, δηλαδή θα ισχύει:

$$\max\left\{\left|x_1^{(k_1)} - x_1^{(k_2)}\right|, \left|x_2^{(k_1)} - x_2^{(k_2)}\right|, \dots, \left|x_n^{(k_1)} - x_n^{(k_2)}\right|\right\} \le \epsilon, \quad \text{για κάθε } k_1, k_2 \ge N(\epsilon).$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι για κάθε κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει θετικός ακέραιος $N(\epsilon)$ τέτοιος ώστε:

$$\left|x_i^{(k_1)} - x_i^{(k_2)}\right| \le \epsilon, \qquad \text{για κάθε } k_1, k_2 \ge N(\epsilon) \quad \text{και} \quad i = 1,2,\dots,n.$$

Κατά συνέπεια, κάθε συνιστώσα ακολουθία $\left\{x_i^{(k)}\right\}$ πραγματικών ή μιγαδικών αριθμών είναι Cauchy για κάθε $i = 1,2,\dots,n$. Δεδομένου ότι μία Cauchy ακολουθία πραγματικών ή μιγαδικών αριθμών πρέπει να έχει όριο, αυτό σημαίνει πως για κάθε $i = 1,2,\dots,n$ υπάρχει μία βαθμωτή ποσότητα $x_i$ τέτοια ώστε να ισχύει: $\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i$. Επειδή ο $V$ είναι πεπερασμένης διάστασης, η κατά στοιχείο σύγκλιση έπεται την κατά νόρμα σύγκλιση. Επομένως $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x$, όπου $x = [\, x_1, \dots, x_n \,]^T$. ■

Μία από τις θεμελιώδεις ιδιότητες των πραγματικών και μιγαδικών αριθμών, που χρησιμοποιήθηκε και στην απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος, είναι η λεγόμενη «***Ιδιότητα της Πληρότητας***» (Completeness Property) σύμφωνα με την οποία μία ακολουθία αριθμών είναι *Cauchy* αν και μόνο αν συγκλίνει. Η ιδιότητα αυτή επεκτείνεται σε πραγματικούς ή μιγαδικούς χώρους πεπερασμένης διάστασης ως προς οποιαδήποτε νόρμα. Δυστυχώς όμως, μπορεί και να μην ισχύει για απειροδιάστατους χώρους.

***Ορισμός 2.2.16.*** Ένας διανυσματικός χώρος $V$ εφοδιασμένος με μία νόρμα $\|\bullet\|$ ονομάζεται ***πλήρης*** (complete) ως προς τη νόρμα $\|\bullet\|$, αν κάθε ακολουθία που είναι Cauchy ως προς τη νόρμα $\|\bullet\|$ συγκλίνει σε ένα στοιχείο του $V$.

## **Γ.** Γεωμετρικές Ιδιότητες

Οι γεωμετρικές ιδιότητες της νόρμας σχετίζονται με τη μοναδιαία μπάλα της, μέσω της οποίας μπορούμε να αποκομίσουμε σημαντικές πληροφορίες για την αντίστοιχη νόρμα.

***Ορισμός 2.2.17.*** Έστω μία νόρμα $\|\bullet\|$ στον πραγματικό ή μιγαδικό διανυσματικό χώρο $V$, $x$ ένα σημείο του $V$ και $r > 0$. Η (***κλειστή***) ***μπάλα με ακτίνα r και κέντρο x*** είναι το σύνολο:

$$B_{\|\bullet\|}(x,r) \triangleq \{y \in V : \|y - x\| \le r\}.$$

Η (***κλειστή***) ***μοναδιαία μπάλα*** ((closed) unit ball) της νόρμας $\|\bullet\|$ είναι το σύνολο:

$$B_{\|\bullet\|} \triangleq B_{\|\bullet\|}(0,1) \triangleq \{y \in V : \|y\| \le 1\}.$$

***Παράδειγμα***:

- Αν θεωρήσουμε τον χώρο $\boldsymbol{R}^3$ και σαν νόρμα επιλέξουμε την $\|\bullet\|_2$, τότε αυτή εκφράζει το μέτρο του διανύσματος $x$ και η μοναδιαία μπάλα της είναι η σφαίρα με κέντρο το μηδέν και ακτίνα ίση με τη μονάδα.
- Αν θεωρήσουμε τον χώρο $\boldsymbol{R}^3$ με τη νόρμα $\|\bullet\|_\infty$, τότε η μοναδιαία μπάλα της είναι το σύνολο:

$$B_{\|\bullet\|} \triangleq \{x \in \boldsymbol{R}^3 \ : \ \|x\|_\infty \leq 1\} = \{x \in \boldsymbol{R}^3 \ : \ max\{|x_1|, |x_2|, |x_3|\} \leq 1\}.$$

Δηλαδή, το σύνολο $B_{\|\bullet\|}$ είναι ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο.

Μία μπάλα δεδομένης ακτίνας και με κέντρο οποιοδήποτε σημείο $x$ φαίνεται ίδια με μία μπάλα ίδιας ακτίνας και κέντρου μηδέν, απλά είναι μετατοπισμένη κατά $x$. Η μοναδιαία μπάλα είναι στην ουσία μία "γεωμετρική σύνοψη" της νόρμας, η οποία λόγω της ιδιότητας του ομογενούς χαρακτηρίζει τη νόρμα. Στο κομμάτι που ακολουθεί θα καθορίσουμε ακριβώς ποια υποσύνολα του $\mathbf{C}^n$ μπορούν να είναι μοναδιαίες μπάλες διανυσματικών νορμών. Πρώτα όμως, θα αναφέρουμε δύο παραδείγματα τα οποία θα μας βοηθήσουν και στην περαιτέρω κατανόηση των γεωμετρικών ιδιοτήτων των νορμών.

***Παράδειγμα***: Έστω δύο διανυσματικές νόρμες $\|\bullet\|_a$ και $\|\bullet\|_\beta$ στον χώρο $V$. Ισχύει ότι $\|\bullet\|_a \leq \|\bullet\|_\beta$ για κάθε $x \in V$, αν και μόνο αν $B_{\|\bullet\|_\beta} \subset B_{\|\bullet\|_a}$.

***Απόδειξη.*** $\overset{\text{ευθύ}}{\Longrightarrow}$ Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε σημείο της μπάλας $B_{\|\bullet\|_\beta}$ ανήκει στην $B_{\|\bullet\|_a}$. Έστω ότι $x \in B_{\|\bullet\|_\beta}$. Με βάση τον ορισμό της μοναδιαίας μπάλας ισχύει ότι $\|x\|_\beta \leq 1$. Όμως, από την υπόθεση θα έχουμε: $\|x\|_a \leq \|x\|_\beta \leq 1$. Άρα, $x \in B_{\|\bullet\|_a}$ και επομένως $B_{\|\bullet\|_\beta} \subset B_{\|\bullet\|_a}$.

$\overset{αντίστροφο}{\Longleftarrow}$ Αφού $B_{\|\bullet\|_\beta} \subset B_{\|\bullet\|_a}$, υπάρχει $x \in B_{\|\bullet\|_a}$ τέτοιο ώστε $x \notin B_{\|\bullet\|_\beta}$. Επομένως, γι' αυτό το $x$ θα ισχύει: $\|x\|_a \leq 1$ (αφού $x \in B_{\|\bullet\|_a}$) και $\|x\|_\beta > 1$ (αφού $x \notin B_{\|\bullet\|_\beta}$). Οπότε, $\|x\|_a < \|x\|_\beta$. Για εκείνα τα $x$ τα οποία ανήκουν στην τομή $B_{\|\bullet\|_\beta} \cap B_{\|\bullet\|_a}$, προφανώς θα ισχύει $\|x\|_a = \|x\|_\beta$. ■

Στο επόμενο παράδειγμα θα δούμε τι θα συμβεί στη μοναδιαία μπάλα μιας νόρμας αν αυτή πολλαπλασιαστεί με μία θετική σταθερά.

***Παράδειγμα***: Έστω μία διανυσματική νόρμα $\|\bullet\|$ στον $V$ και $a$ ένας αριθμός ώστε να ισχύει: $\|ax\| = \|x\|$. Τότε, $x = 0$ ή $|a| = 1$. Επιπλέον, κάθε τμήμα $\text{ray}(x) = \{ax : a > 0\}$ τέμνει το σύνορο της μοναδιαίας μπάλας της νόρμας $\|\bullet\|$ ακριβώς μία φορά.

***Απόδειξη.*** Από τις ιδιότητες της νόρμας έχουμε: $\|ax\| = |a|\,\|x\|$.
Όμως, από υπόθεση γνωρίζουμε ότι $\|ax\| = \|x\|$. Από τις δύο αυτές σχέσεις προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} |a|\,\|x\| = \|x\| &\Leftrightarrow \|x\|\,(1 - |a|) = 0 \\ &\Leftrightarrow \|x\| = 0 \ \text{ ή } \ |a| = 1 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \ \text{ ή } \ |a| = 1. \end{aligned}$$

Θέλουμε τώρα να δείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό $z \in \text{ray(x)} \cap B_{\|\bullet\|}$.
Έστω $z_1, z_2 \in \text{ray}(x) \cap B_{\|\bullet\|}$. Τότε, θα ισχύει:

$$z_1 = a_1 x, \quad \text{με} \quad \|z_1\| = 1$$

και

$$z_2 = a_2 x, \quad \text{με} \quad \|z_2\| = 1.$$

Άρα,

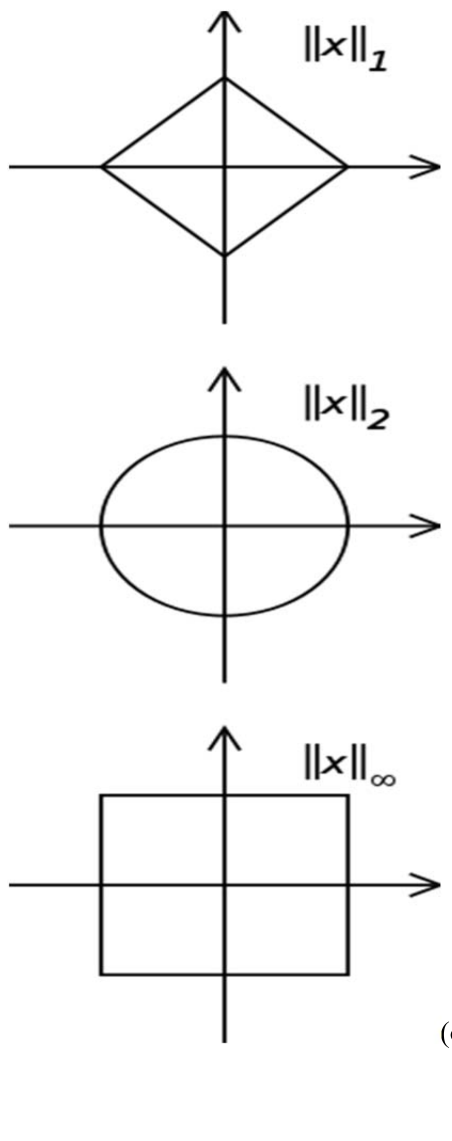
$$\|z_1\| = \|z_2\| \Leftrightarrow \|a_1 x\| = \|a_2 x\| \Leftrightarrow a_1\|x\| = a_2\|x\|$$

$$\Leftrightarrow \|x\|\,(a_1 - a_2) = 0 \Leftrightarrow a_1 = a_2 \quad \text{ή} \quad x = 0.$$

Επομένως, και στις δύο περιπτώσεις ισχύει ότι $z_1 = z_2$ και έτσι το σύνολο $\mathrm{ray}(x) \cap B_{\|\bullet\|}$ έχει μόνο ένα στοιχείο. ■

***Ορισμός 2.2.18.*** Μία νόρμα ονομάζεται ***πολυεδρική*** (polyhedral), αν η μοναδιαία μπάλα της είναι πολύεδρο.

Από τις $l_p$-νόρμες, *πολυεδρικές* είναι μόνο η νόρμα-ένα ($l_1$) και η νόρμα-άπειρο ($l_\infty$). Αυτό φαίνεται και από το παρακάτω σχήμα, το οποίο δείχνει τις μοναδιαίες μπάλες των νορμών $l_1$, $l_2$ και $l_\infty$ αντίστοιχα στον χώρο $\boldsymbol{R}^2$.




(σχήμα 2.2.19)

Η βασική τοπολογική έννοια του ανοικτού και κλειστού συνόλου είναι εύκολο να οριστεί σε έναν διανυσματικό χώρο ο οποίος είναι εφοδιασμένος με μία νόρμα. Υπενθυμίζουμε τους ακόλουθους βασικούς ορισμούς.

***Ορισμός 2.2.20.*** Έστω μία νόρμα $\|\bullet\|$ σε έναν πραγματικό ή μιγαδικό διανυσματικό χώρο $V$ και $S$ ένα υποσύνολο του $V$.

i. ***Εσωτερικό σημείο*** (interior point)**:** Ένα σημείο $x \in S$ ονομάζεται *εσωτερικό σημείο* του $S$, αν υπάρχει $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε $B(x, \epsilon) \subset S$. Το σύνολο των εσωτερικών σημείων του $S$ συμβολίζεται ως $intS$ ή $S°$.

ii. ***Σημείο συσσώρευσης*** (accumulation point)**:** Ένα σημείο $x \in V$ ονομάζεται *σημείο συσσώρευσης* του $S$, αν για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει το ακόλουθο:

$$S \cap (B(x, \epsilon) \setminus \{x\}) \neq \emptyset.$$

Δηλαδή, αν κάθε περιοχή του $x$ περιέχει τουλάχισον ένα σημείο του $S$ διαφορετικό από το $x$.

iii. ***Οριακό σημείο*** (limit point)**:** Ένα *οριακό σημείο* του $S$ είναι ένα σημείο $x \in V$ τέτοιο ώστε $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x$ ως προς τη νόρμα $\|\bullet\|$ για κάποια ακολουθία $\{x^{(k)}\} \subset S$.

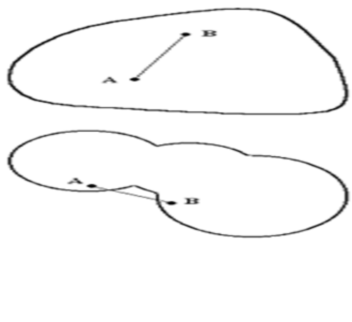
iv. ***Ανοικτό σύνολο*** (open set)**:** Το σύνολο $S$ ονομάζεται *ανοικτό*, αν κάθε σημείο του $S$ είναι εσωτερικό σημείο.

v. ***Κλειστό σύνολο*** (closed set)**:** Το σύνολο $S$ ονομάζεται *κλειστό*, αν το συμπλήρωμά του, δηλαδή το $S^{C}$, είναι ανοικτό.

***Παρατήρηση*:** Ένας άλλος ορισμός για το κλειστό σύνολο είναι ο εξής: Το σύνολο $S$ ονομάζεται *κλειστό*, αν περιέχει όλα τα σημεία συσσώρευσής του.

vi. ***Κυρτό σύνολο*** (convex set)**:** Το σύνολο $S$ ονομάζεται *κυρτό*, αν για κάθε δύο σημεία του $x, y \in S$ και $\lambda \in [0,1]$ το ευθύγραμμο τμήμα που τα συνδέει, δηλαδή το $\lambda x + (1-\lambda)y$, βρίσκεται ολόκληρο μέσα στο $S$.

Για παράδειγμα, από τα δύο ακόλουθα σχήματα το πρώτο παριστάνει ένα κυρτό σύνολο, ενώ το δεύτερο όχι μιας και το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία Α και Β δεν περιέχεται μέσα στο σύνολο.



vii. ***Κλειστότητα συνόλου*** (closure)**:** Η *κλειστότητα* του $S$ είναι η ένωση του $S$ με το σύνολο που αποτελείται από τα οριακά σημεία του $S$. Δηλαδή:

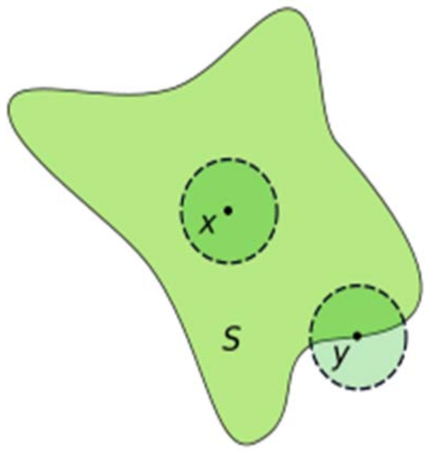
$$\overline{S} \triangleq S \cup \{x \in V \ : \ \lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x \ \}.$$

viii. ***Σύνορο συνόλου*** (boundary)**:** Το *σύνορο* του $S$ είναι η τομή της κλειστότητας του $S$ με την κλειστότητα του συμπληρώματος του $S$. Δηλαδή:

$$\partial S \triangleq \bar{S} \cap \overline{S^{C}},$$

ή ισοδύναμα,
το *σύνορο* του $S$ είναι η κλειστότητά του εκτός από τα εσωτερικά του σημεία. Δηλαδή:

$$\partial S \triangleq \bar{S} \setminus S^{\circ}.$$




Στο σχήμα αυτό, το σημείο $x$ είναι ένα εσωτερικό σημείο του $S$, γιατί υπάρχει ανοικτή μπάλα με κέντρο το $x$ που περιέχεται στο $S$. Όμως, το σημείο $y$ δεν είναι εσωτερικό, αλλά ανήκει στο σύνορο του $S$.

ix. ***Φραγμένο σύνολο*** (bounded set)**:** Το σύνολο $S$ είναι *φραγμένο*, αν υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε

$$S \subset B_{\|\bullet\|}(0, M).$$

x. ***Συμπαγές σύνολο*** (compact set)**:** Το σύνολο $S$ είναι *συμπαγές*, αν από κάθε κάλυμμα $\bigcup_a S_a \supset S$ ανοικτών συνόλων $S_a$ μπορούμε να πάρουμε πεπερασμένο αριθμό συνόλων $S_{a_1}, \dots, S_{a_N}$ τέτοια ώστε

$$\bigcup_{\mathbf{1}}^{\boldsymbol{N}} S_{a_i} \supset S.$$

Δηλαδή, το σύνολο $S$ είναι *συμπαγές* αν κάθε ανοικτό κάλυμμά του έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα.

Η επόμενη παρατήρηση αφορά τις ιδιότητες που έχει η μοναδιαία μπάλα μιας νόρμας $\|\bullet\|$, οι οποίες επαρκούν για να χαρακτηρίσουν τη νόρμα. Θα μας οδηγήσει σε ένα πολύ σημαντικό θεώρημα, το οποίο καθορίζει ποια σύνολα μπορούν να είναι οι μοναδιαίες μπάλες διανυσματικών νορμών.

***Παρατήρηση***: Οι ιδιότητες που έχει η μοναδιαία μπάλα $B_{\|\bullet\|}$ μιας νόρμας $\|\bullet\|$ είναι οι ακόλουθες:

i. Αν $\|\bullet\|$ είναι μία νόρμα διανυσμάτων σε έναν μη-τετριμμένο πραγματικό ή μιγαδικό διανυσματικό χώρο $V$ (δηλαδή $V \neq \{0\}$), τότε το μηδέν είναι ένα εσωτερικό σημείο της $B_{\|\bullet\|}$. Αυτό έπεται από τις ιδιότητες (2.1.1(iii)) και (2.1.1(ii)) της νόρμας και συνεπάγεται ότι:

$$B_{\|\bullet\|}\left(0,\frac{1}{2}\right) \subset B_{\|\bullet\|}(0,1).$$

***Απόδειξη.*** $B_{\|\bullet\|}\left(0,\frac{1}{2}\right) = \left\{y \in V : \|y\| \leq \frac{1}{2}\right\}$ και $B_{\|\bullet\|}(0,1) = \{y \in V : \|y\| \leq 1\}$. Λόγω της θετικότητας της νόρμας ισχύει ότι: $\|y\| \geq 0$, για κάθε $y \in V$. Για να δείξουμε ότι το μηδέν είναι εσωτερικό σημείο της $B_{\|\bullet\|}(0,1)$, αρκεί να δείξουμε ότι $B_{\|\bullet\|}\left(0,\frac{1}{2}\right) \underbrace{\subseteq}_{υποσύνολο} B_{\|\bullet\|}(0,1)$ (δηλαδή κάθε σημείο της πρώτης μπάλας ανήκει στην δεύτερη). Έστω $x \in B_{\|\bullet\|}\left(0,\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \|x\| \leq \frac{1}{2}$. Καθώς η νόρμα είναι ομογενής θα ισχύει:

$$\left\|\frac{1}{2}x\right\| = \frac{1}{2}\|x\| \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 1.$$

Επομένως, $x \in B_{\|\bullet\|}(0,1)$ και έτσι έχουμε το ζητούμενο. ■

ii. Η μοναδιαία μπάλα μιας νόρμας είναι ***ισορροπημένη*** (equilibrated). Αυτό σημαίνει πως αν το σημείο $x$ βρίσκεται μέσα στην μπάλα $B_{\|\bullet\|}$, τότε θα ισχύει το ίδιο και για το σημείο $ax$ για κάθε βαθμωτό μέγεθος $a$ μέτρου 1 (δηλαδή $|a| = 1$). Η ιδιότητα αυτή έπεται επίσης από το γεγονός ότι η νόρμα είναι ομογενής.

***Απόδειξη.*** Έστω $x \in B_{\|\bullet\|}(0,1) \triangleq \{y \in V : \|y\| \leq 1\}$. Άρα, ισχύει: $\|x\| \leq 1$. Όμως, $\|ax\| = |a|\,\|x\| = \|x\| \leq 1$ και αυτό συνεπάγεται ότι το σημείο $ax$ ανήκει στη μπάλα $B_{\|\bullet\|}(0,1)$. ■

iii. Η μοναδιαία μπάλα μιας νόρμας σε χώρο πεπερασμένης διάστασης είναι ***συμπαγής***, δηλαδή κλειστό και φραγμένο σύνολο. Είναι φραγμένη λόγω της ιδιότητας 2.1.1(iii) και κλειστή γιατί η νόρμα είναι πάντα μια συνεχής συνάρτηση. Στην περίπτωση που ένας χώρος είναι πεπερασμένης διάστασης, κάθε κλειστό κ φραγμένο σύνολο είναι συμπαγές. Αυτό προκύπτει από το *Θεώρημα Weierstrass*: Μία συνεχής πραγματική συνάρτηση πάνω σε συμπαγές σύνολο είναι φραγμένη και επιτυγχάνει το «ελάχιστο άνω φράγμα» (least upper bound - supremum) και το «μέγιστο κάτω φράγμα» (greatest lower bound - infimum) πάνω στο σύνολο. Γι' αυτό τον λόγο, συνήθως αναφερόμαστε στο μέγιστο και στο ελάχιστο μιας τέτοιας συνάρτησης.

iv. Η μοναδιαία μπάλα μιας νόρμας είναι ***κυρτή*** (convex).

***Απόδειξη.*** Αρκεί να δείξουμε πως για κάθε $x, y \in B_{\|\bullet\|}$ και $a \in [0,1]$, το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα $x$ και $y$ (δηλαδή το $ax + (1-a)y$) βρίσκεται ολόκληρο μέσα στη μοναδιαία μπάλα $B_{\|\bullet\|}$.
Έστω $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ και $a \in [0,1]$. Τότε έχουμε:

$$\|ax + (1-a)y\| \leq \|ax\| + \|(1-a)y\| \quad \text{(Τριγωνική Ανισότητα)}$$

$$= a\|x\| + (1-a)\|y\| \quad \text{(Ιδιότητα του Ομογενούς)}$$

$$\leq a + (1-a) \leq 1 \quad \text{(Λόγω υπόθεσης)}$$

Επομένως, το $ax + (1-a)y$ βρίσκεται μέσα στη $B_{\|\bullet\|}$. ■

***Παρατήρηση***: Γεωμετρικά, η τριγωνική ανισότητα για κάθε διανυσματική νόρμα σχετίζεται με την *κυρτότητα* της μπάλας της. Οι $l_p$-νόρμες για $0 \leq p < 1$ δεν ικανοποιούν την τριγωνική ανισότητα, γιατί η μοναδιαία μπάλα τους δεν είναι κυρτό σύνολο (όπως φαίνεται και από το σχήμα 2.2.19) και επομένως δεν αποτελούν νόρμες διανυσμάτων.

***Θεώρημα 2.2.20.*** Ένα σύνολο $B$ σε έναν πραγματικό ή μιγαδικό διανυσματικό χώρο $V$ πεπερασμένης διάστασης είναι η μοναδιαία μπάλα μιας νόρμας στον $V$ αν και μόνο αν είναι

i. συμπαγές,
ii. κυρτό,
iii. ισορροπημένο,
iv. με το μηδέν εσωτερικό σημείο του.

***Απόδειξη.*** $\overset{ευθύ}{\Longrightarrow}$ Οι συνθήκες (i) – (iv) έχουν ήδη αναφερθεί και αποδειχθεί στην προηγούμενη παρατήρηση.

$\overset{αντίστροφο}{\Longleftarrow}$ Για να δείξουμε ότι οι συνθήκες (i) – (iv) επαρκούν για να ορίσουμε μια νόρμα της οποίας η μοναδιαία μπάλα θα είναι το σύνολο $B$, θεωρούμε ένα στοιχείο $x \in V$. Κατασκευάζουμε το ευθύγραμμο τμήμα $\{ax : 0 \leq a \leq 1\}$ από την αρχή των αξόνων έως το $x$. Στη συνέχεια, ορίζουμε τη συνάρτηση $\|\bullet\|$ ως εξής:

$$\|x\| = 0, \qquad \text{αν } x = 0,$$

$$\|x\| = min\left\{\frac{1}{t} : t > 0 \ και \ tx \in B\right\}, \qquad \text{αν } x \neq 0.$$

Η συνάρτηση $\|x\|$ είναι καλά ορισμένη, πεπερασμένη και θετική για κάθε μη-μηδενικό διάνυσμα $x$, γιατί το σύνολο $B$ είναι συμπαγές και το μηδέν είναι εσωτερικό του σημείο. Χρησιμοποιώντας τη συνθήκη (iii), μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι η συνάρτηση $\|\bullet\|$ είναι ομογενής. Επομένως, μένει μόνο να δειχθεί ότι ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα. Αν $x$ και $y$ είναι μη-μηδενικά διανύσματα, τότε οι ποσότητες $\frac{x}{\|x\|}$ και $\frac{y}{\|y\|}$ είναι "μοναδιαία" διανύσματα τα οποία βρίσκονται πάνω στο σύνορο του συνόλου $B$. Λόγω της κυρτότητας του $B$, θεωρούμε ένα διάνυσμα $z$ που θα είναι κυρτός συνδιασμός των διανυσμάτων $\frac{x}{\|x\|}$ και $\frac{y}{\|y\|}$. Δηλαδή,

$$z = \frac{\|x\|}{\|x\|+\|y\|}\frac{x}{\|x\|} + \frac{\|y\|}{\|x\|+\|y\|}\frac{y}{\|y\|}. \qquad \left(\text{αφού } \frac{\|x\|}{\|x\|+\|y\|} + \frac{\|y\|}{\|x\|+\|y\|} = 1\right) \qquad (2.2.21)$$

Επομένως, το διάνυσμα $z$ βρίσκεται κι αυτό στο σύνολο $B$. Με άλλα λόγια, $\|z\| \leq 1$ και από τη σχέση (2.2.21) προκύπτει εύκολα έπειτα από υπολογισμούς ότι $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$. ■

Όλες οι γνωστές $l_p$-νόρμες έχουν την ιδιότητα να εξαρτώνται μόνο από τις απόλυτες τιμές των στοιχείων του $x$. Επιπλέον, κάθε $l_p$-νόρμα είναι μία αύξουσα συνάρτηση των απόλυτων τιμών των στοιχείων του $x$. Οι δύο αυτές ιδιότητες σχετίζονται μεταξύ τους και τον τρόπο με τον οποίο συμβαίνει αυτό θα τον διαπιστώσουμε στο αμέσως επόμενο θεώρημα.

***Ορισμός 2.2.22.*** Έστω $x = [x_i] \in \mathbf{F}^n$ ($\boldsymbol{R}^n$ ή $\boldsymbol{C}^n$) και ορίζουμε $|x| = [|x_i|]$. Θα λέμε ότι $|x| \leq |y|$, αν $|x_i| \leq |y_i|$ για κάθε $i = 1, \dots, n$. Μία νόρμα διανυσμάτων $\|\bullet\|$ στον $\mathbf{F}^n$ θα λέγεται:

- ***Μονότονη***: Αν $|x| \leq |y|$ συνεπάγεται $\|x\| \leq \|y\|$ για κάθε $x, y \in \mathbf{F}^n$.
- ***Απόλυτη***: Αν $\|x\| = \|\,|x|\,\|$ για κάθε $x \in \mathbf{F}^n$.

***Θεώρημα 2.2.23.*** Μία νόρμα $\|\bullet\|$ στον $\mathbf{F}^n$ ($\boldsymbol{R}^n$ ή $\boldsymbol{C}^n$) είναι *μονότονη* αν και μόνο αν είναι *απόλυτη*.

***Απόδειξη.*** $\overset{\text{ευθύ}}{\Longrightarrow}$ Έστω ότι η νόρμα $\|\bullet\|$ είναι μονότονη και $x \in \mathbf{F}^n$. Ορίζουμε $y \triangleq |x|$. Οπότε, θα ισχύει: $|y| = y = |x|$, το οποίο ισοδυναμεί με $|y| \leq |x|$ και $|x| \leq |y|$. Παίρνοντας νόρμες και στα δύο μέλη των προηγούμενων ανισώσεων, θα έχουμε αντίστοιχα:

$$\|y\| \leq \|x\| \qquad \text{και} \qquad \|x\| \leq \|y\|,$$

ή ισοδύναμα,

$$\|x\| = \|y\| = \|\,|x|\,\|, \qquad (\text{αφού } \; y \triangleq |x|)$$

δηλαδή η νόρμα $\|\bullet\|$ είναι απόλυτη.

$\xLeftarrow{αντίστροφο}$ Έστω ότι η νόρμα $\|\bullet\|$ είναι απόλυτη, $x = [x_i] \in \mathbf{F}^n$ ένα διάνυσμα, $k$ ένας ακέραιος τέτοιος ώστε $1 \le k \le n$ και $a \in [0,1]$. Τότε θα ισχύει:

$$\begin{aligned}
&\|[x_1, \dots, x_{k-1}, ax_k, x_{k+1}, \dots, x_n]^T\| \\
&= \left\|\tfrac{1}{2}(1-a)[x_1, \dots, x_{k-1}, -x_k, x_{k+1}, \dots, x_n]^T + \tfrac{1}{2}(1-a)x + ax\right\| \\
&\le \tfrac{1}{2}(1-a)\|[x_1, \dots, x_{k-1}, -x_k, x_{k+1}, \dots, x_n]^T\| + \tfrac{1}{2}(1-a)\|x\| + a\|x\| \\
&= \tfrac{1}{2}(1-a)\|x\| + \tfrac{1}{2}(1-a)\|x\| + a\|x\| \\
&= \|x\|. \qquad (2.2.24)
\end{aligned}$$

Η υπόθεση ότι η νόρμα είναι απόλυτη χρησιμοποιείται μόνο στην προ-τελευταία ισότητα. Επαναλαμβάνοντας τη σχέση (2.2.24) για διαφορετικές συνιστώσες, μπορούμε να δείξουμε πως μία απόλυτη νόρμα έχει την ακόλουθη ιδιότητα:

$$\|[a_1x_1, \dots, a_nx_n]^T\| \le \|[x_1, \dots, x_n]^T\|, \qquad (2.2.25)$$

για κάθε $x \in \mathbf{F}^n$ και $a_k \in [0,1]$, $k = 1, \dots, n$. Τελικά, αν $|x| \le |y|$, τότε για κάθε $k = 1, \dots, n$ υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $a_k$ και $\theta_k$ με $a_k \in [0,1]$ τέτοιοι ώστε $x_k = a_k e^{i\theta_k} y_k$. Τότε, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα $\|x\| = \|\,|x|\,\|$ θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
\|x\| &= \left\|[a_1 e^{i\theta_1} y_1, \dots, a_n e^{i\theta_n} y_n]\right\| \\
&= \|[a_1|y_1|, \dots, a_n|y_n|]^T\| \qquad (\text{αφού } \left|e^{i\theta}\right| = 1) \\
&\le \|[|y_1|, \dots, |y_n|]^T\| = \|y\|.
\end{aligned}$$

Συνεπώς, η νόρμα $\|\bullet\|$ είναι μονότονη. ■

Η ανισότητα (2.2.24) μας οδηγεί σε μια ελαφρώς ασθενέστερη έννοια της μονοτονίας.

***Ορισμός 2.2.26.*** Μία νόρμα διανύσματος $\|\bullet\|$ στον $\mathbf{F}^n$ ($\boldsymbol{R}^n$ ή $\boldsymbol{C}^n$) ονομάζεται ***ασθενώς μονότονη*** αν ισχύει:

$$\|[x_1, \dots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \dots, x_n]^T\| \le \|[x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n]^T\|,$$

για κάθε $x \in \mathbf{F}^n$ και $k = 1, \dots, n$.

Αν μία νόρμα $\|\bullet\|$ είναι *ασθενώς μονότονη* και $a \in [0,1]$, τότε ισχύει:

$$\begin{aligned}
&\|[x_1, \dots, x_{k-1}, ax_k, x_{k+1}, \dots, x_n]^T\| \\
&\qquad = \|(1-a)[x_1, \dots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \dots, x_n]^T + ax\|
\end{aligned}$$

$$\leq (1-a)\|[x_1, \dots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \dots, x_n]^T\| + a\|x\|$$

$$\leq (1-a)\|x\| + a\|x\| = \|x\|.$$

Επομένως, μία ασθενώς μονότονη νόρμα ικανοποιεί τη φαινομενικά ισχυρότερη συνθήκη (2.2.25). Έτσι, αν δίνεται ένα σημείο πάνω στη μοναδιαία σφαίρα μιας ασθενώς μονότονης νόρμας και αν μία από τις συντεταγμένες του τείνει στο μηδέν, τότε ολόκληρο το ευθύγραμμο τμήμα θα πρέπει να είναι μέσα στη μοναδιαία μπάλα. Μία μονότονη νόρμα είναι προφανώς ασθενώς μονότονη, αλλά δεν ισχύει το αντίστροφο.

## 2.3 Αριθμητικά Παραδείγματα

Στην ενότητα αυτή, θα παρουσιάσουμε ορισμένα αριθμητικά παραδείγματα σχετικά με τις νόρμες διανυσμάτων σε χώρους πεπερασμένης διάστασης. Επίσης, θα επαληθεύσουμε αριθμητικά τη σχέση ισοδυναμίας που υπάρχει μεταξύ των νορμών, τουλάχιστον για τις βασικές νόρμες $l_1$, $l_2$ και $l_\infty$.

Στο Πόρισμα 2.2.8 είδαμε ότι δύο οποιεσδήποτε νόρμες $\|\bullet\|_a$ και $\|\bullet\|_\beta$, σε χώρο πεπερασμένης διάστασης, συνδέονται με τη σχέση: $C_m\,\|x\|_a \le \|x\|_\beta \le C_M\,\|x\|_a$ δηλαδή είναι *ισοδύναμες*. Επιπλέον, μπορούμε να υπολογίσουμε τους συντελετές της σχέσης ισοδυναμίας, τουλάχιστον για τις βασικές νόρμες.

Για παράδειγμα, θεωρούμε τις νόρμες $l_1$, $l_2$ και $l_\infty$. Θεωρούμε επίσης ένα τυχαίο διάνυσμα $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x \in \boldsymbol{C}^n$.
Αρχικά, παρατηρούμε ότι

$$(|x_1| - |x_2|)^2 \ge 0 \Longrightarrow |x_1|^2 + |x_2|^2 - 2|x_1||x_2| \ge 0$$

$$\Longrightarrow |x_1|^2 + |x_2|^2 \ge 2|x_1||x_2|. \qquad (2.3.1)$$

Οπότε:

$$\|x\|_1{}^2 = (|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|)^2$$

$$= |x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2 + (2|x_1||x_2| + 2|x_1||x_3| + \cdots + 2|x_{n-1}||x_n|)$$

$$\le |x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2 + [(|x_1|^2 + |x_2|^2) + \cdots + (|x_{n-1}|^2 + |x_n|^2)]$$

$$= |x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2 + [(n-1)|x_1|^2 + \cdots + (n-1)|x_n|^2]$$

$$= n\,(|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2) = n\,\|x\|_2{}^2 \Longrightarrow \|x\|_1 \le \sqrt{n}\,\|x\|_2.$$

Επιπλέον,

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \le n \max|x_i| = n\,\|x\|_\infty,$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2} \le \sqrt{(|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|)^2} = \|x\|_1,$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2} \le \sqrt{n \max|x_i|^2} = \sqrt{n}\max|x_i| = \sqrt{n}\,\|x\|_\infty,$$

$$\|x\|_\infty = \max|x_i| \le |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| = \|x\|_1,$$

$$\|x\|_\infty = \max|x_i| = \max\sqrt{|x_i|^2} \le \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2} = \|x\|_2.$$

Επομένως, στον $\boldsymbol{C}^n$ ισχύει:

$$\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le \sqrt{n}\,\|x\|_2, \tag{2.3.2}$$

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le n\,\|x\|_\infty, \tag{2.3.3}$$

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\,\|x\|_\infty. \tag{2.3.4}$$

Ο πίνακας με τους παραπάνω συντελεστές $C_m\big(\|\bullet\|_a, \|\bullet\|_\beta\big)$ και $C_M\big(\|\bullet\|_a, \|\bullet\|_\beta\big)$ μεταξύ των νορμών $l_1$, $l_2$ και $l_\infty$ για κάθε $x \in \boldsymbol{C}^n$ και $a, \beta = 1{,}2, \infty$ είναι ο ακόλουθος:

| $\|\bullet\|_a \backslash \|\bullet\|_\beta$ | $\|\bullet\|_1$ | $\|\bullet\|_2$ | $\|\bullet\|_\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\|\bullet\|_1$ | $1$ | $\sqrt{n}$ | $n$ |
| $\|\bullet\|_2$ | $1$ | $1$ | $\sqrt{n}$ |
| $\|\bullet\|_\infty$ | $1$ | $1$ | $1$ |

Κάθε αριθμός που εμφανίζεται στον παραπάνω πίνακα είναι ο συντελεστής $C_M(\|\bullet\|_a, \|\bullet\|_\beta)$ που ικανοποιεί τη σχέση $\|x\|_a \le C_M\,\|x\|_\beta$, όπου $\|\bullet\|_\beta$ είναι η νόρμα που αντιστοιχεί στη γραμμή και $\|\bullet\|_a$ είναι αυτή που αντιστοιχεί στη στήλη. Τονίζεται ότι με απλά παραδείγματα, μπορεί κανείς να επαληθεύσει ότι οι συνελεστές του πίνακα είναι *βέλτιστοι* (καθώς σε απλά παραδείγματα, δίνουν ισότητα).

Έστω τώρα δύο διανύσματα:

$$x = \{0, -2{,}6{,}4\}, \quad x \in \boldsymbol{R}^4 \qquad \text{και} \qquad y = \{1{,}2 - i, 0\}, \quad y \in \boldsymbol{C}^3.$$

Οι γνωστές $l_p$-νόρμες, για $p = 1{,}2, \infty$, για τα διανύσματα $x, y$ είναι:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{4} |x_i| = 12, \qquad \|y\|_1 = \sum_{i=1}^{3} |y_i| = 1 + \sqrt{5} \quad (\alpha\varphi o\acute{\upsilon}\ |2 - i| = \sqrt{5}),$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{4} |x_i|^2\right)^{1/2} = 2\sqrt{14}, \qquad \|y\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{3} |y_i|^2\right)^{1/2} = \sqrt{6},$$

$$\|x\|_\infty = max\{|x_1|, \dots, |x_4|\} = 6, \qquad \|y\|_\infty = max\{|y_1|, |y_2|, |y_3|\} = \sqrt{5}.$$

Προφανώς, επαληθεύονται οι σχέσεις (2.3.2), (2.3.3) και (2.3.4):

$$\|x\|_1 = 12 \leq \sqrt{4}\ \|x\|_2 = \sqrt{4}\left(2\sqrt{14}\right) = 4\sqrt{14} \cong 4 \times 3{,}742 = 14{,}968,$$

$$\|x\|_1 = 12 \leq 4\ \|x\|_\infty = 4 \times 6 = 24,$$

$$\|x\|_2 = 2\sqrt{14} \cong 7{,}484 \leq \|x\|_1 = 12,$$

$$\|x\|_2 = 2\sqrt{14} \cong 7{,}484 \leq \sqrt{4}\ \|x\|_\infty = 2 \times 6 = 12,$$

$$\|x\|_\infty = 6 \leq \|x\|_1 = 12,$$

$$\|x\|_\infty = 6 \leq \|x\|_2 = 2\sqrt{14} \cong 7{,}484.$$

# Κεφάλαιο 3. Νόρμες Πινάκων σε Χώρους Πεπερασμένης Διάστασης

## 3.1 Ορισμός Νόρμας Πινάκων και Παραδείγματα

Ο χώρος των τετραγωνικών πινάκων $M_{n\times n}$ (ή αλλιώς $M_n$) είναι ένας διανυσματικός χώρος διάστασης $n^2$ (δηλαδή $\dim M_n = n^2$). Επειδή είναι ισόμορφος με τον χώρο των διανυσμάτων $\boldsymbol{C}^{n^2}$, μπορούμε στην ουσία να μετρήσουμε το "μέγεθος" ενός πίνακα χρησιμοποιώντας οποιαδήποτε νόρμα διανύσματος στον $\boldsymbol{C}^{n^2}$. Με αυτόν τον τρόπο εισάγεται η έννοια «νόρμα πινάκων».

Ο χώρος $M_n$ διαθέτει μία επιπλέον λειτουργία από τον $\boldsymbol{C}^n$, την *πολλαπλασιαστική* λειτουργία, η οποία είναι πολύ χρήσιμη στο να κάνουμε εκτιμήσεις ώστε να συσχετίσουμε το "μέγεθος" ενός πίνακα $AB$ με τα "μεγέθη" των πινάκων $A$ και $B$.

***Ορισμός 3.1.1.*** Μία συνάρτηση $\|\circ\| : M_n \to \boldsymbol{R}$ ονομάζεται ***νόρμα πινάκων*** (matrix norm) αν για κάθε πίνακα $A, B \in M_n$ ικανοποιεί τα ακόλουθα:

i. $\|A\| \geq 0,$ (Μη Αρνητική, Nonnegative)
ii. $\|A\| = 0$ αν και μόνο αν $A = 0,$ (Θετική, Positive)
iii. $\|cA\| = |c|\,\|A\|,$ για κάθε $c \in \boldsymbol{C},$ (Ομογενής, Homogeneous)
iv. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|,$ (Τριγωνική Ανισότητα, Triangle Inequality)
v. $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|.$ (Υποπολλαπλασιαστικότητα, Submultiplicative)

Παρατηρούμε πως τα Αξιώματα 3.1.1(i) – 3.1.1(iv) είναι πανομοιότυπα με εκείνα που πρέπει να ικανοποιεί μια συνάρτηση ώστε να είναι νόρμα διανυσμάτων (Ορισμός 2.1.1).

Μία νόρμα διανυσμάτων στους πίνακες, δηλαδή μία συνάρτηση που ικανοποιεί τα τέσσερα πρώτα προηγούμενα αξιώματα και όχι απαραίτητα το τελευταίο, ονομάζεται ***γενικευμένη νόρμα πινάκων*** (generalized matrix norm). Οι έννοιες ***ημι-νόρμα πινάκων*** (matrix seminorm) και ***γενικευμένη ημι-νόρμα πινάκων*** (generalized matrix norm) μπορούν να οριστούν παραλείποντας αντίστοιχα τα Αξίωματα 3.1.1(ii), 3.1.1(ii) και 3.1.1(v) του παραπάνω ορισμού.

Το Αξίωμα 3.1.1(v) αναφέρει ότι για κάθε νόρμα πινάκων ενός τυχαίου πίνακα $A \in M_n$ ισχύει:

$$\|A^2\| = \|AA\| \leq \|A\|\,\|A\| = \|A\|^2\,.$$

Επομένως, θα πρέπει να ισχύει $\|A\| \geq 1$ για κάθε μη-μηδενικό πίνακα $A$, ο οποίος ικανοποιεί τη σχέση $A^2 = A$ (ένας τέτοιος πίνακας ονομάζεται ***αδύναμος***-idempotent):

$$\|A^2\| \leq \|A\|^2 \Leftrightarrow \|A\| \leq \|A\|^2 \Leftrightarrow \|A\|^2 - \|A\| \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \|A\|(\|A\| - 1) \geq 0 \Longrightarrow \|A\| \geq 1. \qquad (\text{αφού } A \neq \mathbb{O})$$

Ειδικότερα, για τον μοναδιαίο πίνακα $I$ ισχύει:

$$\|I\| \geq 1, \quad \text{για κάθε νόρμα πινάκων} \quad (\text{αφού } I^2 = I \neq \mathbb{O}). \tag{3.1.2}$$

Αν ένας πίνακας $A$ είναι αντιστρέψιμος, τότε $I = AA^{-1}$ και επομένως από το Αξίωμα 3.1.1(v) θα ισχύει: $\|I\| = \|AA^{-1}\| \leq \|A\|\,\|A^{-1}\|$. Έτσι, προκύπτει το ***κάτω φράγμα*** (lower bound) για κάθε νόρμα πινάκων $\|\circ\|$, που είναι το ακόλουθο:

$$\|A^{-1}\| \geq \|I\|/\|A\| = \frac{1}{\|A\|}. \tag{3.1.3}$$

Η σχέση (3.1.3), χρησιμοποιώντας και την (3.1.2), μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$\|A^{-1}\| \geq 1 \,/\, \|A\|. \tag{3.1.4}$$

Κάποιες από τις νόρμες διανυσμάτων που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο είναι νόρμες πινάκων όταν εφαρμόζονται στον διανυσματικό χώρο $M_n$ και κάποιες άλλες όχι. Τα πιο γνωστά παραδείγματα είναι οι $l_p$-νόρμες για $p = 1, 2, \infty$. Γνωρίζουμε ήδη ότι είναι νόρμες διανυσμάτων, οπότε ικανοποιούν τα Αξιώματα 3.1.1(i) – 3.1.1(iv), και έτσι χρειάζεται μόνο να επαληθευτεί το Αξίωμα 3.1.1(v).

- Η ***$l_1$ νόρμα*** για κάθε πίνακα $A \in M_n$ ορίζεται από την σχέση:

$$\|A\|_{1,e} \triangleq \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Είναι νόρμα πινάκων γιατί:

$$\begin{aligned}\|AB\|_{1,e} &= \sum_{i,j=1}^{n} \Big|\underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}}_{\text{τα στοιχεία του πίνακα } AB}\Big| \leq \sum_{i,j,k=1}^{n} |a_{ik}b_{kj}| \\ &\leq \sum_{i,j,k,m=1}^{n} |a_{ik}b_{mj}| = \sum_{i,j,k,m=1}^{n} |a_{ik}|\,|b_{mj}| \\ &= \Big(\sum_{i,k=1}^{n} |a_{ik}|\Big)\Big(\sum_{j,m=1}^{n} |b_{mj}|\Big) \\ &= \|A\|_{1,e}\,\|B\|_{1,e}.\end{aligned}$$

Η πρώτη ανισότητα έπεται από την τριγωνική ανισότητα και η δεύτερη από την τοποθέτηση πρόσθετων όρων στο άθροισμα. Το γράμμα "$e$" στο συμβολισμό της ***$l_1$ νόρμας*** για τους πίνακες προέρχεται από τη λέξη "***entrywise***" και θα το χρησιμοποιούμε για να ξεχωρίζουμε τις $l_p$-νόρμες από τις επαγόμενες.

- Η ***Frobenius νόρμα***, η οποία είναι γνωστή και ως ***Schur νόρμα*** ή ***Hilbert-Schmidt νόρμα***, για κάθε πίνακα $A \in M_n$ ορίζεται από τη σχέση:

$$\|A\|_F \triangleq \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{1/2}.$$

Είναι νόρμα πινάκων γιατί:

$$\begin{aligned}
\|AB\|_F{}^2 &= \textstyle\sum_{i,j=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \right|^2 \\
&\le \textstyle\sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}b_{kj}|^2 \quad \text{(Τριγωνική Ανισότητα)} \\
&\le \textstyle\sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k,m=1}^{n} |a_{ik}b_{mj}|^2 \quad \text{(Πρόσθετοι Όροι)} \\
&= \textstyle\sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k,m=1}^{n} |a_{ik}|^2 |b_{mj}|^2 \\
&= \textstyle\sum_{i,j=1}^{n} (\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2) \left(\sum_{m=1}^{n} |b_{mj}|^2\right) \\
&= \textstyle\left(\sum_{i,k=1}^{n} |a_{ik}|^2\right) \left(\sum_{j,m=1}^{n} |b_{mj}|^2\right) = \|A\|_F{}^2 \ \|B\|_F{}^2.
\end{aligned}$$

Η ανισότητα αυτή είναι η γνωστή ανισότητα Cauchy-Schwarz.
Με όρους Συναρτησιακής Ανάλυσης, η Frobenius νόρμα μπορούμε να πούμε πως είναι η Ευκλείδια νόρμα ($l_2$ νόρμα). Μπορεί κάποιος να παρατηρήσει πως αν ένας πίνακας $A \in M_n$ είναι της μορφής $A = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n]$, δηλαδή γραμμένος ως προς τις στήλες του με $a_i \in \boldsymbol{C}^n$, τότε:

$$\|A\|_F^2 = \|a_1\|_F^2 + \cdots + \|a_n\|_F^2.$$

Δεδομένου ότι η $l_2$ νόρμα στον $\mathbf{C}^n$ είναι ορθομοναδιαία αναλλοίωτη, προκύπτει το εξής σημαντικό γεγονός:

$$\begin{aligned}
\|UA\|_F^2 &= \|Ua_1\|_F^2 + \cdots + \|Ua_n\|_F^2 \\
&= \|a_1\|_F^2 + \cdots + \|a_n\|_F^2 = \|A\|_F^2,
\end{aligned}$$

για κάθε ορθομοναδιαίο πίνακα $U \in M_n$.
Επίσης, επειδή $\|B^*\|_F = \|B\|_F$ για κάθε πίνακα $B \in M_n$, έπεται ότι:

$$\|UAV\|_F = \|AV\|_F = \|(AV)^*\|_F = \|V^*A^*\|_F = \|A^*\|_F = \|A\|_F,$$

για οποιουσδήποτε ορθομοναδιαίους πίνακες $U, V \in M_n$. Δηλαδή, *η Frobenius νόρμα στον $M_n$ είναι ορθομοναδιαία αναλλοίωτη.*

***Παρατήρηση***: Η *Frobenius* νόρμα ικανοποιεί τη σχέση:

$$\|A\|_F = \sqrt{tr(A^*A)} = \sqrt{\sum \lambda_{A^*A}},$$

όπου $tr(A^*A)$ είναι το *ίχνος* του πίνακα $A^*A$, δηλαδή το άθροισμα των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου του.

➢ Η $\boldsymbol{l_\infty}$ ***νόρμα*** για κάθε πίνακα $A \in M_n$ ορίζεται από τη σχέση:

$$\|A\|_{\infty,e} \triangleq \max_{1\le i,j\le n} |a_{ij}|.$$

Η $l_\infty$ νόρμα είναι νόρμα στον διανυσματικό χώρο $M_n$, αλλά *δεν* είναι νόρμα πινάκων. Για να το διαπιστώσουμε αυτό θεωρούμε τον πίνακα $J = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in M_2$, οπότε θα έχουμε:

$$J^2 = 2J, \quad \|J\|_\infty = 1, \qquad \|J^2\|_\infty = \|2J\|_\infty = 2\|J\|_\infty = 2.$$

Δηλαδή, δεν ισχύει $\|J^2\|_\infty \le \|J\|_\infty^2$ (αφού $2 \neq 1$) και επομένως δεν ισχύει η υποπολλαπλασιαστικότητα για τη νόρμα $\|\bullet\|_{\infty,e}$. Όμως, εάν ορίσουμε την ακόλουθη συνάρτηση:

$$\|A\| \triangleq n\, \|A\|_{\infty,e}, \qquad A \in M_n,$$

τότε μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι ισχύει το εξής:

$$\begin{aligned}
\|AB\| &= n \max_{1\le i,j\le n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right| \le n \max_{1\le i,j\le n} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik} b_{kj}| \\
&= n \max_{1\le i,j\le n} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}| |b_{kj}| \\
&\le n \max_{1\le i,j\le n} \sum_{k=1}^{n} \|A\|_{\infty,e}\ \|B\|_{\infty,e} \\
&= n\, \|A\|_{\infty,e}\ n\|B\|_{\infty,e} = \|A\|\ \|B\|.
\end{aligned}$$

Επομένως, απαιτείται μόνο μια μικρή τροποποίηση της διανυσματικής νόρμας $\|\circ\|_{\infty,e}$ ώστε να γίνει νόρμα πινάκων.

Πολύ σημαντικό κομμάτι στις νόρμες πινάκων αποτελούν οι *επαγόμενες νόρμες*, ή αλλιώς *φυσικές* νόρμες. Κάθε διανυσματική νόρμα $\|\bullet\|$ στον $\boldsymbol{C^n}$ συνδέεται με μία νόρμα πινάκων $\|\circ\|$, η οποία "*επάγεται*" (induced) από την διανυσματική νόρμα στον $M_n$. Αυτός ο τρόπος κατασκευής μιας νόρμας πινάκων αποτελεί μία επιπλέον μέθοδο για τη δημιουργία νέων νορμών από ήδη υπάρχουσες.

***Ορισμός 3.1.5.*** Έστω $\|\bullet\|$ μία διανυσματική νόρμα στον $\boldsymbol{C^n}$. Η ***επαγόμενη νόρμα*** (induced norm) $\|\circ\|$ στον $M_n$ ορίζεται από τη σχέση:

$$\|A\| \triangleq \max_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Δείξαμε στο Κεφάλαιο 2 (συγκεκριμένα στο Λήμμα 2.2.4) ότι κάθε νόρμα διανύσματος είναι μια ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση, άρα και (σημειακά) συνεχής. Επομένως, η συνάρτηση $\|Ax\|$ είναι μία συνεχής συνάρτηση των $x$ και η μοναδιαία μπάλα $B_{\|\bullet\|}$ είναι ένα συμπαγές σύνολο. Οπότε, σύμφωνα με το Θεώρημα Weierstrass, η $\|Ax\|$ επιτυγχάνει μέγιστο και ελάχιστο και γι' αυτό στον προηγούμενο ορισμό μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε "max" αντί για "sup".

***Παρατήρηση***: Η νόρμα $\|\circ\|$ του προηγούμενου ορισμού μπορεί να υπολογιστεί και με τους ακόλουθους ισοδύναμους τρόπους:

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \max_{\|x\|\leq 1} \|Ax\|$$

$$= \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|_a=1} \frac{\|Ax\|}{\|x\|},$$

όπου $\|\bullet\|_a$ είναι μία οποιαδήποτε διανυσματική νόρμα στον $\boldsymbol{C}^n$.

***Θεώρημα 3.1.6.*** Η συνάρτηση $\|\circ\|$ του Ορισμού 3.1.5 είναι μία ***νόρμα πινάκων*** στον $M_n$, $\|Ax\| \leq \|A\|\,\|x\|$ για κάθε πίνακα $A \in M_n$ και κάθε διάνυσμα $x \in \boldsymbol{C}^n$, $\|I\| = 1$.

***Απόδειξη.*** Για να δείξουμε ότι η συνάρτηση $\|\circ\|$ είναι νόρμα πινάκων, αρκεί να αποδείξουμε τα αξιώματα του ορισμού. Το Αξίωμα 3.1.1(i) έπεται από το γεγονός ότι η $\|A\|$, όπως ορίστηκε προηγουμένως, είναι το μέγιστο μιας μη-αρνητικής συνάρτησης και το Αξίωμα 3.1.1(ii) από το γεγονός ότι $Ax = 0$ για κάθε $x$ ακριβώς όταν $A = 0$. Το Αξίωμα 3.1.1(iii) έπεται από τον υπολογισμό:

$$\|cA\| = \max\|cAx\| = \max|c|\,\|Ax\| = |c| \max\|Ax\| = |c|\,\|A\|.$$

Ομοίως, η Τριγωνική Ανισότητα 3.1.1(iv) επαληθεύεται ως εξής:

$$\|A+B\| = \max\|(A+B)x\| = \max\|Ax+Bx\| \leq \max(\|Ax\| + \|Bx\|)$$

$$\leq \max\|Ax\| + \max\|Bx\| = \|A\| + \|B\|.$$

Το Αξίωμα 3.1.1(v) –Υποπολλαπλασιαστικότητα έπεται από το ακόλουθο γεγονός:

$$\|AB\| = \max \frac{\|ABx\|}{\|x\|} = \max \frac{\|ABx\|}{\|Bx\|}\frac{\|Bx\|}{\|x\|}$$

$$\leq \max \frac{\|Ay\|}{\|y\|} \max \frac{\|Bx\|}{\|x\|} = \|A\|\,\|B\|,$$

όπου υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, πως το μέγιστο επιτυγχάνεται μόνο για εκείνα τα $x$ τα οποία δεν ανήκουν στον πυρήνα (kernel-null space) του πίνακα $B$. Για τον επόμενο ισχυρισμό του θεωρήματος, παρατηρούμε ότι αν $x \neq 0$, τότε $\big\|Ax/\|x\|\big\| \leq \|A\|$ και αυτό λόγω του ορισμού της νόρμας $\|A\|$ ως ένα μέγιστο. Από την ιδιότητα του ομογενούς της διανυσματικής νόρμας έχουμε ότι $\|Ax\| \leq \|A\|\,\|x\|$, το οποίο ισχύει και για $x = 0$. Επιπλέον, ισχύει:

$$\|I\| = \max_{\|x\|=1} \|Ix\| = \max_{\|x\|=1} \|x\| = 1. \quad \blacksquare$$

***Παρατήρηση*:**

i. Η *επαγόμενη νόρμα* είναι νόρμα πινάκων ως συνέπεια γενικών ιδιοτήτων όλων των διανυσματικών νορμών. Συνεπώς, ένας τρόπος για να αποδείξει κανείς πως μία συγκεκριμένη συνάρτηση στον $M_n$ είναι νόρμα πινάκων, αρκεί να δείξει ότι επάγεται από κάποια διανυσματική νόρμα στον $\boldsymbol{C}^n$.

ii. Η ανισότητα στα δεδομένα του Θεωρήματος 3.1.6 μας λέει ότι η διανυσματική νόρμα $\|\bullet\|$ είναι "***συμβατή***" (compatible) με την επαγόμενη νόρμα πινάκων $\|\circ\|$. Το Θεώρημα 3.1.6 στην ουσία δείχνει ότι για κάθε διανυσματική νόρμα στον $\boldsymbol{C}^n$ υπάρχει μία επαγόμενη νόρμα πινάκων στον $M_n$. Επίσης, παρέχει και την *αναγκαία συνθήκη* $\|I\| = 1$ για μία νόρμα πινάκων ώστε να επάγεται από κάποια διανυσματική νόρμα, η οποία όμως δυστυχώς δεν είναι και ικανή συνθήκη.

iii. Αν $\|\circ\|$ είναι μία *επαγόμενη* (φυσική) νόρμα πινάκων τότε για κάθε $k = 1,2,\dots$ και για κάθε πίνακα $A \in M_n$ ισχύει:

$$\|A^k\| \le \|A\|^k.$$

***Απόδειξη*.** Γνωρίζουμε ότι $A^k = A^{k-1}A$ και παίρνοντας νόρμες και στα δύο μέλη της ισότητας θα έχουμε:

$$\|A^k\| = \|A^{k-1}A\| \le \|A^{k-1}\|\,\|A\| \qquad \text{(Λόγω 3.1.1(v))}$$

$$\le \|A^{k-2}\|\,\|A\|\,\|A\| = \|A^{k-2}\|\,\|A\|^2$$

$$\vdots$$

$$\le \|A^{k-k}\|\,\|A\|^k = \|A^o\|\,\|A\|^k = \|I\|\,\|A\|^k = \|A\|^k.$$

Η τελευταία ισότητα προκύπτει από το Θεώρημα 3.1.6, αφού η νόρμα $\|\circ\|$ είναι επαγόμενη ($\|I\| = 1$). $\blacksquare$

iv. Αν $\|\circ\|$ είναι μία *επαγόμενη* (φυσική) νόρμα πινάκων, τότε για κάθε πίνακα $A \in M_n$ ισχύει:

$$\|A\|^{-1} \le \|A^{-1}\|.$$

***Απόδειξη*.** Έχουμε $1 = \|I\| = \|AA^{-1}\| \le \|A\|\,\|A^{-1}\|$, (Λόγω 3.1.1(v))

ή ισοδύναμα,

$$\|A^{-1}\| \le \|A\|. \quad \blacksquare$$

Επειδή ο διανυσματικός χώρος των πινάκων $M_n(\boldsymbol{C})$ είναι ισόμορφος με τον χώρο των διανυσμάτων $\boldsymbol{C}^{n^2}$, μπορεί να οριστεί οποιαδήποτε από τις νόρμες $l_1$, $l_2$, $l_\infty$ στον χώρο $M_n$. Στη συνέχεια, θα αναφέρουμε κάποια σημαντικά παραδείγματα νορμών πινάκων που επάγονται από τις γνωστές $l_p$ νόρμες, οι οποίες όμως μπορούν να υπολογιστούν και ανεξάρτητα από τον Ορισμό 3.1.5. Σε κάθε περίπτωση, θα θεωρούμε έναν πίνακα $A = [a_{ij}] \in M_n$.

- ***Νόρμα Πινάκων Μεγίστου Αθροίσματος κατά Στήλη*** στον $M_n$:
  Η νόρμα πινάκων μεγίστου αθροίσματος κατά στήλη (maximum column sum matrix norm) ορίζεται στον $M_n$ από την σχέση:

$$\|A\|_1 \triangleq \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Η νόρμα $\|\circ\|_1$ επάγεται από την $l_1$ νόρμα, δηλαδή είναι και της μορφής $\|A\|_1 = \max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1$, και επομένως πρέπει να είναι νόρμα πινάκων σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1.6. Αυτό μπορούμε να το αποδείξουμε ως εξής: Θεωρούμε έναν πίνακα $A \in M_n$, ο οποίος είναι γραμμένος ως προς τις στήλες του, δηλαδή είναι της μορφής $A = [a_1\ a_2\ \cdots\ a_n]$. Τότε: $\|A\|_1 = \max_{1\le i\le n}\|a_i\|_1$ από τον ορισμό, με $\|a_i\|_1 = \sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|$. Αν $x = [x_i]$, τότε:

$$\|Ax\|_1 = \|x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n\|_1 \le \sum_{i=1}^{n} \|x_i a_i\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|\ \|a_i\|_1$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} |x_i| \left( \max_{1\le k\le n} \|a_k\|_1 \right) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|\ \|A\|_1 = \|x\|_1\ \|A\|_1.$$

Επομένως:

$$\max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 \le \|A\|_1. \tag{3.1.7}$$

Αν τώρα επιλέξουμε ως διάνυσμα το $x = e_k$ ($e_k$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα το οποίο στην $k$-οστή θέση έχει την μονάδα και παντού αλλού είναι μηδέν, $\|e_k\|_1 = 1$), τότε για κάθε $k = 1,2,\dots,n$ θα έχουμε:

$$\max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 \ge \|1 a_k\|_1 = \|a_k\|_1,$$

και επομένως

$$\max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 \ge \max_{1\le k\le n} \|a_k\|_1 = \|A\|_1. \tag{3.1.8}$$

Από τις σχέσεις (3.1.7) και (3.1.8) καταλήγουμε στο ότι η νόρμα $\|\circ\|_1$ είναι ταυτόχρονα άνω και κάτω φράγμα της ποσότητας $\max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1$, δηλαδή:

$$\|A\|_1 \le \max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 \le \|A\|_1,$$

ή ισοδύναμα,

$$\|A\|_1 = \max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1.$$

Άρα, η $\|A\|_1$ είναι νόρμα πινάκων αφού επάγεται από την $l_1$ νόρμα. ■

- ***Νόρμα Πινάκων Μεγίστου Αθροίσματος κατά Σειρά*** στον $M_n$:
Η νόρμα πινάκων μεγίστου αθροίσματος κατά σειρά (maximum row sum matrix norm) ορίζεται στον $M_n$ από τη σχέση:

$$\|A\|_\infty \triangleq \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Η νόρμα $\|\circ\|_\infty$ επάγεται από την $l_\infty$ νόρμα, δηλαδή είναι και της μορφής $\|A\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty$. Επομένως πρέπει να είναι και αυτή νόρμα πινάκων σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1.6. Η επιχειρηματολογία που χρησιμοποιείται είναι παρόμοια με αυτή της απόδειξης για τη νόρμα μεγίστου αθροίσματος κατά στήλη.

$$\|Ax\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \right| \le \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}x_j|$$

$$\le \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \, \|x\|_\infty = \|A\|_\infty \, \|x\|_\infty.$$

Επομένως:

$$\max_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty \le \|A\|_\infty. \tag{3.1.9}$$

Αν $A = 0$, τότε δεν υπάρχει κάτι να αποδείξουμε. Οπότε, υποθέτουμε ότι $A \neq 0$. Έστω τώρα ότι η $k$-οστή σειρά του πίνακα $A$ είναι μη-μηδενική. Ορίζουμε στη συνέχεια ένα διάνυσμα $z = [z_i] \in \boldsymbol{C}^n$:

$$z_i = \frac{\bar{a}_{ki}}{|a_{ki}|}, \qquad \text{αν} \quad a_{ki} \neq 0,$$

$$z_i = 1, \qquad \text{αν} \quad a_{ki} = 0.$$

Τότε θα ισχύει: $\|z\|_\infty = 1$ και $a_{kj}\, z_j = |a_{kj}|$ για κάθε $j = 1,2,\dots,n$.

$$\max_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty \ge \|Az\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, z_j \right|$$

$$\geq \left|\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\, z_j\right| = \left|\sum_{j=1}^{n} |a_{kj}|\right| = \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}|.$$

Επομένως:

$$\max_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty \geq \max_{1\leq k\leq n} \textstyle\sum_{j=1}^{n} |a_{kj}| = \|A\|_\infty. \qquad (3.1.10)$$

Από τις σχέσεις (3.1.9) και (3.1.10) προκύπτει ότι:

$$\|A\|_\infty \leq \max_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty \leq \|A\|_\infty,$$

ή ισοδύναμα,

$$\|A\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty=1} \|Ax\|_\infty.$$

Άρα, η $\|A\|_\infty$ είναι νόρμα πινάκων αφού επάγεται από την $l_\infty$ νόρμα. ■

- ***Φασματική Νόρμα Πινάκων*** στον $M_n$:
  Η φασματική νόρμα πινάκων (spectral norm) ορίζεται στον $M_n$ από την σχέση:

  $$\|A\|_2 \triangleq \max\{\sqrt{\lambda} \,:\, \lambda \text{ είναι μία ιδιοτιμή του πίνακα } \mathrm{A}^*\mathrm{A}\}.$$

  Παρατηρούμε ότι αν $\mathrm{A}^*\mathrm{A}x = \lambda x$ και $x \neq 0$, τότε θα ισχύει:

  $$x^*\mathrm{A}^*Ax \;(= (Ax)^*Ax) = x^*\lambda x = \lambda(x^*x),$$

  ισοδύναμα,

  $$\|Ax\|_2^2 = \lambda\, \|x\|_2^2.$$

  Άρα, $\lambda \geq 0$ και $\sqrt{\lambda}$ είναι μία ποσότητα πραγματική, μη-αρνητικές.
  Μπορεί να δειχθεί ότι η φασματική νόρμα $\|\circ\|_2$ είναι νόρμα πινάκων, η οποία επάγεται από την Ευκλείδια νόρμα $\|\bullet\|_2$. Δηλαδή είναι και της μορφής:

  $$\|A\|_2 \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2.$$

  Επιπλέον, η φασματική νόρμα είναι μία ορθομοναδιαία αναλλοίωτη νόρμα πινάκων. Οπότε, για κάθε πίνακα $A \in M_n$ και κάθε ορθομοναδιαίο πίνακα $U, V \in M_n$ ισχύει: $\|UAV\|_2 = \|A\|_2$.

Το επόμενο θεώρημα μας παρέχει έναν ακόμα τρόπο κατασκευής μιας νόρμας πινάκων, σύμφωνα με τον οποίο μία νόρμα πινάκων μπορεί να μετατραπεί σε μία άλλη μέσω ενός μετασχηματισμού ομοιότητας.

***Θεώρημα 3.1.11.*** Αν $\|\circ\|$ είναι μία νόρμα πινάκων στον $M_n$ και $S \in M_n$ είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας, τότε:

$$\|A\|_S \triangleq \|S^{-1}AS\|$$

είναι νόρμα πινάκων για κάθε πίνακα $A \in M_n$.

***Απόδειξη.*** Αρκεί να επαληθευτούν τα αξιώματα του ορισμού. Τα Αξιώματα 3.1.1(i)-3.1.1(iv) επαληθεύονται κατά απλό τρόπο για τη νόρμα $\|\circ\|_S$, ενώ το 3.1.1(v) έπεται από τον ακόλουθο υπολογισμό:

$$\|AB\|_S = \|S^{-1}ABS\| = \|(S^{-1}AS)(S^{-1}BS)\| \qquad (\text{αφού } SS^{-1} = S^{-1}S = I)$$

$$\leq \|S^{-1}AS\|\,\|S^{-1}BS\| = \|A\|_S\,\|B\|_S. \quad \blacksquare$$

## 3.2 Εφαρμογές Νορμών Πινάκων

Οι νόρμες πινάκων, όπως και οι διανυσματικές νόρμες, έχουν ένα ευρύ φάσμα εφαρμογών. Μία πολύ σημαντική περιοχή εφαρμογών τους είναι ο καθορισμός ορίων στο *φάσμα* ενός πίνακα, δηλαδή στο σύνολο των ιδιοτιμών του.

***Ορισμός 3.2.1.*** Η ***φασματική ακτίνα*** (spectral radius) $\rho(A)$ ενός πίνακα $A \in M_n$ δίνεται από τη σχέση:

$$\rho(A) \triangleq \max\{|\lambda| \,:\, \lambda \text{ είναι μία ιδιοτιμή του πίνακα } A\}.$$

***Παρατήρηση***: Αν $\lambda$ είναι μία ιδιοτιμή του πίνακα $A$, τότε από τον ορισμό της φασματικής ακτίνας θα ισχύει: $|\lambda| \le \rho(A)$. Επιπλέον, υπάρχει τουλάχιστον μία ιδιοτιμή $\lambda$ (λέμε τουλάχιστον μία, καθώς το $\lambda$ μπορεί να είναι πολλαπλή ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου), τέτοια ώστε $|\lambda| = \rho(A)$. Αν $Ax = \lambda x$, $x \neq 0$ και $|\lambda| = \rho(A)$, θεωρούμε τον πίνακα $X \in M_n$, όλες οι στήλες του οποίου είναι το ιδιοδιάνυσμα $x$. Δηλαδή ο πίνακας είναι της μορφής: $X = [x\ x \cdots x]$. Τότε, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι ισχύει: $AX = \lambda X$. Αν $\|\circ\|$ είναι μία οποιαδήποτε νόρμα πινάκων, τότε θα ισχύει:

$$|\lambda|\,\|X\| = \|\lambda X\| = \|AX\| \le \|A\|\,\|X\|.$$

Επομένως, $|\lambda| \le \|A\|$. Αυτή είναι στην ουσία και η απόδειξη του θεωρήματος που ακολουθεί.

***Θεώρημα 3.2.2.*** Αν $\|\circ\|$ είναι μία νόρμα πινάκων και $A \in M_n$, τότε $\rho(A) \le \|A\|$.

***Απόδειξη.*** Η απόδειξη του θεωρήματος περιέχεται στην προηγούμενη παρατήρηση. ∎

Η φασματική ακτίνα δεν αποτελεί η ίδια μία νόρμα πινάκων ή μία διανυσματική νόρμα στον $M_n$. Αυτό μπορούμε να το διαπιστώσουμε με το επόμενο παράδειγμα.

***Παράδειγμα***: Θεωρούμε τη φασματική ακτίνα $\rho(\bullet)$ και τους πίνακες $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in M_2$. Για να δείξουμε ότι η $\rho(\bullet)$ είναι νόρμα πινάκων στον $M_n$, αρκεί να αποδείξουμε τα αξιώματα του ορισμού για κάθε πίνακα $A, B \in M_n$. Όμως, αν υπάρχουν πίνακες για τους οποίους δεν ικανοποιούνται τα αξιώματα, τότε η $\rho(\bullet)$ δεν είναι νόρμα πινάκων.

***Απόδειξη.*** Από το Θεώρημα 3.2.2. γνωρίζουμε ότι για κάθε νόρμα πινάκων ισχύει: $\rho(A) \le \|A\|$. Άρα, η απεικόνιση $\rho(\bullet) : M_n \to R_+$ είναι συνεχής.

- Το Αξίωμα 3.1.1(i) έπεται από το γεγονός ότι η φασματική ακτίνα είναι το μέγιστο ενός συνόλου, το οποίο αποτελείται από μη-αρνητικές ποσότητες (από τον ορισμό της $\rho(\bullet)$).
- Η ιδιότητα 3.1.1(iii) έπεται από τον ακόλουθο υπολογισμό:

$$\begin{aligned}\rho(cA) &= \max\{|c\lambda| \,:\, \lambda \text{ είναι μία ιδιοτιμή του πίνακα } A\}\\ &= \max\{|c||\lambda| \,:\, \lambda \text{ είναι μία ιδιοτιμή του πίνακα } A\}\\ &= |c| \max\{|\lambda| \,:\, \lambda \text{ είναι μία ιδιοτιμή του πίνακα } A\} = |c|\,\rho(A).\end{aligned}$$

- Για το Αξίωμα 3.1.1.(ii) ισχύει το εξής:
  Αν $A = \mathbb{O}$, τότε $\rho(A) = 0$ (αφού όλες οι ιδιοτιμές του $A$ είναι μηδενικές).
  Αν $A$ είναι ο πίνακας των δεδομένων του παραδείγματος, τότε βρίσκοντας τις ιδιοτιμές του θα έχουμε:
  $$\det(A - \lambda I) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 = 0,$$
  ή ισοδύναμα,
  $$\lambda = 0.$$
  Άρα, $\rho(A) = \max\{|\lambda| \,:\, \lambda$ είναι μία ιδιοτιμή του πίνακα $A\} = 0$, ενώ ο πίνακας $A$ είναι διάφορος του μηδενικού ($A \neq \mathbb{O}$).

- Για την Τριγωνική Ανισότητα 3.1.1(iv), ισχύει:
  $$A + B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$
  Βρίσκοντας τις ιδιοτιμές του πίνακα $(A + B)$ και του $B$ όπως προηγουμένως, καταλήγουμε στο εξής: $\rho(B) = 0$ και $\rho(A + B)$ =1. Επομένως:
  $$\rho(A + B) > \rho(A) + \rho(B).$$

- Για το Αξίωμα 3.1.1.(v), ισχύει:
  $$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \rho(AB) = 1.$$
  Επομένως, $\rho(AB) > \rho(A)\rho(B)$, όπου $A, B \neq \mathbb{O}$.
  ΄Αρα, η φασματική ακτίνα δεν ικανοποιεί όλα τα αξιώματα του Ορισμού 3.1.1 και έτσι δεν είναι νόρμα πινάκων - ούτε διανυσματική νόρμα στον $M_n$.

Στο λήμμα που ακολουθεί αποδεικνύεται ότι η φασματική ακτίνα $\rho(A)$ είναι το *μεγαλύτερο κάτω φράγμα* των τιμών όλων των νορμών πινάκων, για κάθε πίνακα $A \in M_n$.

***Λήμμα 3.2.3.*** Έστω ένας πίνακας $A \in M_n$ και $\epsilon > 0$ γνωστό. Υπάρχει μια νόρμα πινάκων $\|\circ\|$, τέτοια ώστε:

$$\rho(A) \leq \|A\| \leq \rho(A) + \epsilon.$$

***Απόδειξη.*** Σύμφωνα με το Θεώρημα Τριγωνοποίησης Schur (Θεώρημα 1.1.21), για κάθε πίνακα $A \in M_n$ υπάρχει ένας ορθομοναδιαίος πίνακας $U \in M_n$ και ένας άνω τριγωνικός πίνακας $P$, τέτοιοι ώστε $A = UPU^*$. Τα διαγώνια στοιχεία του $P$ είναι $p_{ii} = \lambda_i$, όπου $\lambda_i$ είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα $A$. Αφού ο $U$ είναι ορθομοναδιαίος, αντιστρέφεται και ο αντίστροφός του είναι ο $U^{-1} = U^*$. Ορίζουμε τώρα τον διαγώνιο πίνακα $D_t \triangleq \text{diag}\,(t, t^2, t^3, \ldots, t^n)$ με $t \neq 0$, όπου $d_{ii} \neq 0$ και $d_{ij} = 0$. Αφού όλα τα στοιχεία του $D_t$ είναι διάφορα του μηδενός, η ορίζουσά του $\det(D_t) = t \times t^2 \times \cdots \times t^n$ θα είναι και αυτή διάφορη του μηδενός. Επομένως, υπάρχει ο αντίστροφος πίνακας του $D_t$, δηλαδή ο ${D_t}^{-1}$, ο οποίος δίνεται απ' τη σχέση:

$${D_t}^{-1} = \text{diag}\,(t^{-1}, t^{-2}, t^{-3}, \ldots, t^{-n}).$$

Έτσι, μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε τον πίνακα $D_t P {D_t}^{-1}$.

$$D_t P D_t^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & t^{-1}p_{12} & t^{-2}p_{13} & \cdots & t^{-n+1}p_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & t^{-1}p_{23} & \cdots & t^{-n+2}p_{2n} \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & t^{-n+3}p_{3n} \\ . & . & . & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t^{-1}p_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Για $t > 0$ αρκετά μεγάλο, το άθροισμα των απόλυτων τιμών όλων των μη-διαγώνιων στοιχείων του πίνακα $D_t P\, {D_t}^{-1}$ είναι μικρότερο του $\epsilon$. Ειδικότερα, $\left\|D_t P\, {D_t}^{-1}\right\|_1 \leq \rho(A) + \epsilon$ για αρκετά μεγάλο $t$, αφού η νόρμα $\|\circ\|_1$ είναι το μέγιστο άθροισμα των απόλυτων τιμών των στοιχείων κατά στήλη:

$$\left\|D_t P\, {D_t}^{-1}\right\|_1 = \max_i \left\{|\lambda_i| + \textstyle\sum_j \left|t^{-j+1}\, p_{ij}\right|\right\} \leq \rho(A) + \epsilon.$$

Επομένως, αν ορίσουμε τη νόρμα $\|\circ\|$ για κάθε πίνακα $B \in M_n$ από τη σχέση:

$$\|B\| \triangleq \left\|D_t U^* B U\, {D_t}^{-1}\right\|_1 = \left\|\left(U\, {D_t}^{-1}\right)^{-1} B \left(U\, {D_t}^{-1}\right)\right\|_1 \qquad (U^* B U = P),$$

τότε από το Θεώρημα 3.1.11 συμπεραίνουμε ότι αυτή είναι νόρμα πινάκων, αφού ο πίνακας $U\, {D_t}^{-1}$ είναι αντιστρέψιμος. Αν επιλέξουμε τώρα πολύ μεγάλο $t$, τότε θα έχουμε κατασκευάσει μία νόρμα πινάκων τέτοια ώστε $\|A\| \leq \rho(A) + \epsilon$. Δεδομένου ότι ισχύει $\rho(A) \leq \|A\|$ για κάθε νόρμα πινάκων, σύμφωνα με το Θεώρημα 3.2.2, έχουμε το ζητούμενο. ■

***Παρατήρηση*:**

i. Στην αρχή αυτού του κεφαλαίου, δείξαμε ότι ένα κάτω φράγμα για κάθε νόρμα πινάκων, για κάθε αντιστρέψιμο πίνακα $A \in M_n$ είναι:

$$\|A\| \geq \|I\| \,/\, \|A^{-1}\|.$$

Επειδή η φασματική ακτίνα $\rho(A)$ είναι το μεγαλύτερο κάτω φράγμα κάθε νόρμας πινάκων, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\rho(A) \geq \|I\| \ / \ \|A^{-1}\|,$$

ή ισοδύναμα

$$\rho(A) \geq \|1\| \ / \ \|A^{-1}\| \qquad (\text{αφού } \ \|I\| \geq 1).$$

ii. Αναγκαία και ικανή συνθήκη για να ισχύει $\lim_{k\to\infty} A^{(k)} = A$ είναι να ικανοποιείται η σχέση:

$$\left\| A^{(k)} - A \right\| \to 0 \qquad (\text{ή} \quad \lim_{k\to\infty} \left\| A^{(k)} - A \right\| = 0).$$

Η σχέση αυτή θα μας χρειαστεί στο επόμενο λήμμα.

Η φασματική ακτίνα είναι ένα χρήσιμο εργαλείο για τη σύγκλιση δυνάμεων πινάκων και γενικά ακολουθιών πινάκων, όπως θα δούμε και αμέσως παρακάτω. Αρκετά μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι πίνακες $A \in M_n$, για τους οποίους ισχύει: $\lim_{k\to\infty} A^k = 0$. Το λήμμα που ακολουθεί, είναι απαραίτητο για να επιλύσουμε αυτό το πρόβλημα.

***Λήμμα 3.2.4.*** Έστω ένας πίνακας $A \in M_n$, γνωστός. Εάν υπάρχει νόρμα πινάκων $\|\circ\|$ τέτοια ώστε να ισχύει $\|A\| < 1$, τότε $\lim_{k\to\infty} A^k = 0$. Δηλαδή, όλα τα στοιχεία του πίνακα $A^k$ τείνουν στο μηδέν, καθώς $k \to \infty$.

***Απόδειξη.*** Δεδομένου ότι ισχύει $\left\|A^k\right\| \leq \|A\|^k$, αν $\|A\| < 1$ τότε $\left\|A^k\right\| \leq \|A\|^k \to 0$, καθώς $k \to \infty$. Αυτό σημαίνει πως $A^k \to 0$ ως προς τη νόρμα $\|\circ\|$. Όμως, επειδή όλες οι διανυσματικές νόρμες στον πεπερασμένης διάστασης χώρο $M_n$ είναι ισοδύναμες, θα ισχύει: $A^k \to 0$ ως προς τη νόρμα $\|\bullet\|_\infty$, δηλαδή $(a_{ij})^k \to 0$. Έτσι έχουμε το ζητούμενο. ■

Ένας πίνακας $A \in M_n$ για τον οποίο ισχύει $\lim_{k\to\infty} A^k = 0$, θα λέμε ότι ***συγκλίνει*** (converge). Ο πίνακας $A$ ονομάζεται ***convergent***. Τέτοιοι πίνακες είναι σημαντικοί σε πολλές εφαρμογές, όπως για παράδειγμα στην ανάλυση επαναληπτικών διαδικασιών. Επομένως, είναι πολύ σπουδαίο να μπορούμε να προσδώσουμε σε έναν πίνακα την ιδιότητα ότι συγκλίνει.

***Θεώρημα 3.2.5.*** Έστω ένα πίνακας $A \in M_n$. Θα ισχύει $\lim_{k\to\infty} A^k = 0$ αν και μόνο αν $\rho(A) < 1$.

***Απόδειξη.*** $\overset{\text{ευθύ}}{\Longrightarrow}$ Αν $A^k \to 0$ και αν $x \neq 0$ είναι ένα διάνυσμα τέτοιο ώστε $Ax = \lambda x$, τότε $A^k x = \lambda^k x \to 0$ μόνο αν $|\lambda| < 1$. Επειδή αυτή η ανισότητα θα πρέπει να ισχύει για κάθε ιδιοτιμή του πίνακα $A$, συμπεραίνουμε ότι $\rho(A) < 1$.

$\xLeftarrow{\alpha\nu\tau i\sigma\tau\rho o\varphi o}$ Αν $\rho(A) < 1$, τότε σύμφωνα με το Λήμμα 3.2.3 υπάρχει κάποια νόρμα πινάκων $\|\circ\|$ τέτοια ώστε $\|A\| < 1$. Επομένως, σύμφωνα με το Λήμμα 3.2.4 θα ισχύει $A^k \to 0$ καθώς $k \to \infty$, δηλαδή $\lim_{k\to\infty} A^k = 0$. ∎

Μερικές φορές, χρειαζόμαστε φράγματα για το μέγεθος των στοιχείων ενός πίνακα $A^k$ καθώς $k \to \infty$. Μία άμεση συνέπεια του προηγούμενου θεωρήματος είναι ένα τέτοιο χρήσιμο φράγμα.

***Πόρισμα 3.2.6.*** Έστω ένα πίνακας $A \in M_n$ και $\epsilon > 0$, γνωστά. Υπάρχει μια σταθερά $C = C(A, \epsilon)$, που εξαρτάται δηλαδή από τον $A$ και το $\epsilon$, τέτοια ώστε:

$$\left|\left(A^k\right)_{ij}\right| \leq C(\,\rho(A) + \epsilon)^k,$$

για κάθε $k = 1,2,3,\dots$ και για κάθε $i, j = 1,2,3,\dots,n$.

***Απόδειξη.*** Έστω ο πίνακας $\tilde{A}$ που ορίζεται από τη σχέση $\tilde{A} \triangleq [\rho(A) + \epsilon]^{-1}$Α. Η φασματική ακτίνα του πίνακα αυτού είναι αυστηρά μικρότερη της μονάδας, καθώς:

$$\rho(\tilde{A}) = \frac{1}{\rho(A) + \epsilon}\,\rho(A) = \frac{\rho(A)}{\rho(A) + \epsilon} < 1 \qquad (\alpha\varphi o\acute{u}\ \epsilon > 0).$$

Άρα, ο $\tilde{A}$ συγκλίνει και επομένως $\tilde{A}^k \to 0$, καθώς $k \to \infty$. Ειδικότερα, τα στοιχεία της ακολουθίας $\{\tilde{A}^k\}$ είναι φραγμένα και επομένως υπάρχει κάποια πεπερασμένη σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε $\left|\left(\tilde{A}^k\right)_{ij}\right| \leq C$, για κάθε $k = 1,2,3,\dots$ και για κάθε $i, j = 1,2,\dots,n$. Αυτό είναι το ζητούμενο φράγμα. ∎

Παρ' όλο που δεν είναι απόλυτα ακριβές να λέμε πως κάθε μεμονωμένο στοιχείο του πίνακα $A^k$ συμπεριφέρεται όπως η φασματική ακτίνα $\rho(A)^k$ καθώς $k \to \infty$, η ακολουθία $\{\|A^k\|\}$ έχει αυτή την ασυμπτωτική συμπεριφορά για κάθε νόρμα πινάκων $\|\circ\|$ στον $M_n$. Αυτό θα το διαπιστώσουμε και στο πόρισμα που ακολουθεί, το οποίο συνδέει ασυμπτωτικά τη φασματική ακτίνα ενός πίνακα $A$ με την ακολουθία των νορμών των διαδοχικών δυνάμεων του $A$.

***Πόρισμα 3.2.7.*** Έστω μία οποιαδήποτε νόρμα πινάκων $\|\circ\|$ στον $M_n$. Τότε θα ισχύει:

$$\rho(A) = \lim_{k\to\infty} \left\|A^k\right\|^{1/k}, \qquad \text{για κάθε πίνακα } A \in M_n.$$

***Απόδειξη.*** Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.2.2, ισχύει ότι $\rho(A) \leq \|A\|$ για κάθε πίνακα $A \in M_n$ και άρα $\rho(A^k) \leq \|A^k\|$. Επιπλέον, ισχύει ότι $\rho(A)^k = \rho(A^k)$ και έτσι τελικά θα έχουμε $\rho(A) \leq \|A^k\|^{1/k}$. Αν $\epsilon > 0$ δεδομένο, τότε ο πίνακας $\tilde{A}$ που ορίζεται από τη σχέση $\tilde{A} \triangleq [\rho(A) + \epsilon]^{-1}$Α έχει φασματική ακτίνα $\rho(\tilde{A})$ αυστηρά μικρότερη της μονάδας και επομένως συγκλίνει. Άρα, $\|\tilde{A}^k\| \to 0$ καθώς $k \to \infty$ και υπάρχει

$N = N(\epsilon, A)$ τέτοιος ώστε να ισχύει: $\|\tilde{A}^k\| < 1$ για κάθε $k \geq N$. Από τον ορισμό του πίνακα $\tilde{A}$ προκύπτει ότι:

$$\|A^k\| \leq [\rho(A) + \epsilon]^{\mathrm{k}}, \qquad \text{για κάθε } k \geq N,$$

ή ισοδύναμα,

$$\|A^k\|^{1/k} \leq [\rho(A) + \epsilon], \qquad \text{για κάθε } k \geq N.$$

Δεδομένου ότι $\rho(A) \leq \|A^k\|^{1/k}$, για κάθε $k$ και επειδή το $\epsilon > 0$ είναι αυθαίρετο, συμπεραίνουμε πως το όριο $\lim_{k\to\infty} \|A^k\|^{1/k}$ υπάρχει και ισούται με τη φασματική ακτίνα $\rho(A)$ του πίνακα $A$. ■

Προβλήματα που αφορούν τη σύγκλιση άπειρων ακολουθιών ή σειρών πινάκων μπορούν να επιλυθούν με τη χρήση διανυσματικών νορμών, όπως συμβαίνει και με άπειρες ακολουθίες ή σειρές διανυσμάτων.
Επειδή για οποιαδήποτε νόρμα πινάκων $\|\circ\|$ στον $M_n$, ισχύει (λόγω τριγωνικής ανισότητας):

$$\left\|\sum_{k=0}^{n} A_k\right\| \leq \sum_{k=0}^{n} \|A_k\|$$

για κάθε $n \in N$, προκύπτει άμεσα το ακόλουθο θεώρημα.

***Θεώρημα 3.2.8.*** Έστω μία άπειρη ακολουθία πινάκων $\{A_k\} \subset M_n$, γνωστή. Η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ συγκλίνει σε έναν πίνακα στον $M_n$, αν υπάρχει διανυσματική νόρμα $\|\bullet\|$ στον $M_n$ τέτοια ώστε η πραγματική (ή αλλιώς αριθμητική) σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} \|A_k\|$ να συγκλίνει.

***Απόδειξη.*** Για να δείξουμε ότι η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ συγκλίνει, αρκεί να αποδείξουμε ότι η ακολουθία μερικών αθροισμάτων της, $S_n = \sum_{k=0}^{n} A_k$, είναι Cauchy ως προς τη νόρμα $\|\bullet\|$. Δηλαδή, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in N$ τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$\left\|\sum_{k=n_0}^{n} A_k\right\| < \epsilon, \qquad \text{για κάθε } n \geq n_0.$$

Έστω $\epsilon > 0$. Αφού η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} \|A_k\|$ συγκλίνει, σημαίνει ότι υπάρχει $n_0 \in N$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει: $\sum_{k=n_0}^{n} \|A_k\| < \epsilon$. Όμως, έχουμε:

$$\underbrace{\left\|\sum_{k=n_0}^{n} A_k\right\|}_{\|S_n - S_{n_0-1}\|} \leq \sum_{k=n_0}^{n} \|A_k\| < \epsilon.$$

Άρα, η ακολουθία $(S_n)_{n\in N}$ είναι Cauchy και επειδή ο χώρος $M_n$ είναι πεπερασμένης διάστασης (*πλήρης*), η $S_n$ συγκλίνει. Επομένως, και η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ συγκλίνει. ■

Το Θεώρημα 3.2.8 έχει ως συνέπεια δύο σημαντικά κριτήρια αντιστρεψιμότητας για έναν πίνακα $A \in M_n$.

***Πόρισμα 3.2.9.*** Ένας πίνακας $A \in M_n$ είναι ***αντιστρέψιμος***, αν υπάρχει νόρμα πινάκων $\|\circ\|$ τέτοια ώστε $\|I - A\| < 1$. Αν αυτή η συνθήκη ικανοποιείται, τότε ο αντίστροφος του πίνακα $A$, δηλαδή ο πίνακας $A^{-1}$, θα δίνεται απ' τη σχέση:

$$A^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (I - A)^k. \tag{3.2.10}$$

***Απόδειξη.*** Αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει η σχέση $AA^{-1} = I$, όπου ο $A^{-1}$ θα είναι ο πίνακας της σχέσης (3.2.10). Αν $\|I - A\| < 1$, τότε η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty}\|I - A\|^k$ συγκλίνει και επομένως, με τη βοήθεια του Θεωρήματος 3.2.8, προκύπτει ότι η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} (I - A)^k$ συγκλίνει σε κάποιον πίνακα $C$, δηλαδή $\sum_{k=0}^{\infty} (I - A)^k = C$. Γνωρίζουμε ότι ισχύει η σχέση:

$$A^n - B^n = (A - B)\sum_{k=0}^{n-1} A^k\, B^k, \qquad αν\ AB = BA.$$

Οπότε, θα έχουμε:

$$\begin{aligned} I - (I - A)^{n+1} &= A\sum_{k=0}^{n}(I - A)^k = [I - (I - A)]\sum_{k=0}^{n}(I - A)^k \\ &= I - (I - A)^{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} I - 0 = I \qquad \text{(Από Λήμμα 3.2.4).} \end{aligned}$$

Επομένως, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ο αντίστροφος του πίνακα $A$ και μάλιστα $A^{-1} = C$. ■

Η διατύπωση του Πορίσματος 3.2.9 είναι ισοδύναμη με την ακόλουθη: Αν $\|\circ\|$ είναι μία νόρμα πινάκων και $A \in M_n$ με $\|A\| < 1$, τότε ο πίνακας $I - A$ είναι *αντιστρέψιμος* και ο αντίστροφός του είναι: $(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$.

Ένα άλλο πόρισμα στο οποίο διατυπώνεται μία ικανή συνθήκη για να ελέγχει γρήγορα και εύκολα την αντιστρεψιμότητα ενός πίνακα είναι το ακόλουθο.

***Πόρισμα 3.2.11.*** Έστω ένας πίνακας $A = [a_{ij}] \in M_n$. Αν όλα τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου του πίνακα $A$ ικανοποιούν την ανισότητα:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \qquad για\ \ κάθε\ \ i = 1,2,\dots,n,$$

τότε ο πίνακας $A$ είναι *αντιστρέψιμος*.

***Απόδειξη.*** Η υπόθεση εξασφαλίζει ότι όλα τα στοιχεία $a_{ii}$ της κυρίας διαγωνίου είναι μη-μηδενικά. Ορίζουμε τώρα τον πίνακα $D$ ως εξής: $D = \mathrm{diag}\,(a_{11}, \dots, a_{nn})$. Ο πίνακας αυτός είναι αντιστρέψιμος, αφού η ορίζουσά του είναι διάφορη του μηδενός. Δηλαδή υπάρχει ο $D^{-1}$, $D^{-1} = \mathrm{diag}\,({a_{11}}^{-1}, \dots, {a_{nn}}^{-1})$. Ο πίνακας $D^{-1}A$ έχει παντού τη μονάδα σε όλη την κύρια διαγώνιο. Ο πίνακας $B$ που ορίζεται από τη σχέση $B = [b_{ij}] = I - D^{-1}A$ έχει παντού το μηδέν στην κύρια διαγώνιο και τα υπόλοιπα στοιχεία του είναι της μορφής $b_{ij} = -a_{ij}/a_{ii}$, αν $i \neq j$. Η υπόθεση εγγυάται ότι $\|B\|_\infty < 1$, αφού

$$\|B\|_\infty = \|I - D^{-1}A\|_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{-a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1.$$

Άρα, ο πίνακας $I - B = D^{-1}A$ είναι αντιστρέψιμος σύμφωνα με το Πόρισμα 3.2.9. Δηλαδή, υπάρχει ο $(D^{-1}A)^{-1}$, $(D^{-1}A)^{-1} = A^{-1}D$ και επομένως ο πίνακας $A$ είναι αντιστρέψιμος. ∎

Ένας πίνακας που ικανοποιεί την υπόθεση του Πορίσματος 3.2.11 λέμε ότι έχει ***ισχυρή διαγώνια κυριαρχία*** (strictly diagonally dominant). Αυτή η ικανή συνθήκη για την αντιστρεψιμότητα ενός πίνακα είναι γνωστή ως «*Θεώρημα Levy-Desplanques*».

***Παράδειγμα***: Θεωρούμε τους πίνακες $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$.

Για τον πίνακα $A$ έχουμε:

$$|a_{11}| \ge |a_{12}| + |a_{13}|, \qquad \text{αφού } |3| \ge |-2| + |1|,$$

$$|a_{22}| \ge |a_{21}| + |a_{23}|, \qquad \text{αφού } |-3| \ge |1| + |2|,$$

$$|a_{33}| \ge |a_{31}| + |a_{32}|, \qquad \text{αφού } |4| \ge |-1| + |2|.$$

Επομένως, ο $A$ ***δεν*** είναι *αυστηρά διαγώνια κυρίαρχος*. Είναι απλά *διαγώνια κυρίαρχος*.

Για τον πίνακα $B$ έχουμε:

$$|\beta_{11}| > |\beta_{12}| + |\beta_{13}|, \qquad \text{αφού } |-4| > |2| + |1|,$$

$$|\beta_{22}| > |\beta_{21}| + |\beta_{23}|, \qquad \text{αφού } |6| > |1| + |2|,$$

$$|\beta_{33}| > |\beta_{31}| + |\beta_{32}|, \qquad \text{αφού } |5| > |1| + |-2|.$$

Επομένως, ο $B$ είναι *αυστηρά διαγώνια κυρίαρχος*.

## 3.3 Ανάλυση των Επαγόμενωμων Νορμών Πινάκων

Σε αυτήν την ενότητα θα αναφερθούμε στις επαγόμενες νόρμες πινάκων με περισσότερες λεπτομέρειες, ο ορισμός των οποίων δόθηκε στην αρχή του κεφαλαίου. Οι νόρμες αυτές είναι από τις πιο γνωστές νόρμες πινάκων στον $M_n$ και έχουν μία πολύ σημαντική ιδιότητα, την ***ιδιότητα ελαχιστότητας*** (minimality property), η οποία τις χαρακτηρίζει. Επειδή συχνά επιθυμούμε να αποδεικνύουμε ότι ένας γνωστός πίνακας $A \in M_n$ συγκλίνει χρησιμοποιώντας το κριτήριο $\|A\| < 1$, είναι φυσικό να προτιμάμε νόρμες πινάκων οι οποίες είναι όσο πιο μικρές γίνεται, για κάθε πίνακα $A \in M_n$.

Στο Κεφάλαιο 2 είδαμε ότι δύο οποιεσδήποτε διανυσματικές νόρμες σε ένα χώρο πεπερασμένης διάστασης είναι ισοδύναμες. Το ίδιο ισχύει και για δύο οποιεσδήποτε νόρμες πινάκων $\|\circ\|_a$ και $\|\circ\|_\beta$. Επομένως, υπάρχει μία ελάχιστη πεπερασμένη θετική σταθερά $C_M(a,\beta)$ τέτοια ώστε για κάθε πίνακα $A \in M_n$ να ισχύει:

$$\|A\|_a \leq C_M(a,\beta)\, \|A\|_\beta.$$

Η σταθερά αυτή υπολογίζεται από την ακόλουθη σχέση:

$$C_M(a,\beta) = \max_{A\neq 0} \frac{\|A\|_a}{\|A\|_\beta}.$$

Εάν αντιστραφούν οι ρόλοι των $a$ και $\beta$, θα πρέπει να υπάρχει μία ελάχιστη πεπερασμένη θετική σταθερά $C_M(\beta,a)$, η οποία θα ορίζεται αντίστοιχα με την $C_M(a,\beta)$, έτσι ώστε να ισχύει: $\|A\|_\beta \leq C_M(\beta,a)\, \|A\|_a$, για κάθε $A \in M_n$. Γενικά, δεν υπάρχει προφανής σχέση μεταξύ των δύο αυτών σταθερών. Όμως, για οποιοδήποτε ζεύγος επαγόμενων νορμών πινάκων, όπως είναι οι $\|A\|_1$, $\|A\|_2$ και $\|A\|_\infty$, ισχύει ότι:

$$C_M(a,\beta) = C_M(\beta,a).$$

Αυτή η συμμετρία είναι μία ιδιότητα που διαθέτουν όλες οι επαγόμενες νόρμες.

***Θεώρημα 3.3.1.*** Έστω $\|\bullet\|_a$ και $\|\bullet\|_\beta$ δύο διανυσματικές νόρμες στον $\mathbf{C}^n$ και έστω $\|\circ\|_a$ και $\|\circ\|_\beta$ οι αντίστοιχες επαγόμενες νόρμες πινάκων στον $M_n$, δηλαδή

$$\|A\|_a \triangleq \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_a}{\|x\|_a} \quad \text{και} \quad \|A\|_\beta \triangleq \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_\beta}{\|x\|_\beta}.$$

Ορίζουμε:

$$R_{a\beta} \triangleq \max_{x\neq 0} \frac{\|x\|_a}{\|x\|_\beta} \quad \text{και} \quad R_{\beta a} \triangleq \max_{x\neq 0} \frac{\|x\|_\beta}{\|x\|_a}.$$

Τότε, θα ισχύει:

$$\max_{A\neq 0} \frac{\|A\|_a}{\|A\|_\beta} = R_{a\beta}\, R_{\beta a}. \qquad (3.3.2)$$

Ειδικότερα, θα ισχύει ότι:

$$\max_{A\neq 0}\frac{\|A\|_a}{\|A\|_\beta} = \max_{A\neq 0}\frac{\|A\|_\beta}{\|A\|_a} = R_{a\beta}\, R_{\beta a}. \qquad (3.3.3)$$

***Απόδειξη.*** Η απόδειξη είναι τεχνική. Βασίζεται στην έννοια της δυϊκής νόρμας, η οποία δεν αποτέλεσε αντικείμενο μελέτης στην παρούσα διπλωματική και έτσι παραλείπεται. ∎

Τίθεται τώρα το εξής ερώτημα: Θα μπορούσαν δύο διαφορετικές νόρμες στον $\boldsymbol{C}^n$ να επάγουν την ίδια νόρμα πινάκων στον $M_n$? Κάτι τέτοιο μπορεί να συμβεί αν και μόνο αν η μία διανυσματική νόρμα είναι ένα σταθερό βαθμωτό πολλαπλάσιο της άλλης, δηλαδή είναι της μορφής: $\|x\|_a = c\,\|x\|_\beta$. Αυτό αποτελεί συνέπεια του Θεωρήματος 3.3.1.

***Πόρισμα 3.3.4.*** Έστω $\|\bullet\|_a$ και $\|\bullet\|_\beta$ δύο διανυσματικές νόρμες στον $\boldsymbol{C}^n$ και έστω $\|\circ\|_a$ και $\|\circ\|_\beta$ οι αντίστοιχες επαγόμενες νόρμες πινάκων στον $M_n$. Τότε, θα ισχύει $\|A\|_a = \|A\|_\beta$ για κάθε $A \in M_n$ αν και μόνο αν υπάρχει μία θετική σταθερά $c > 0$, τέτοια ώστε $\|x\|_a = c\,\|x\|_\beta$ για κάθε $x \in \boldsymbol{C}^n$.

***Απόδειξη.*** Από τον ορισμό του $R_{\beta a}$ παρατηρούμε ότι:

$$R_{\beta a} = \max_{x\neq 0}\frac{\|x\|_\beta}{\|x\|_a} = \left[\min_{x\neq 0}\frac{\|x\|_a}{\|x\|_\beta}\right]^{-1} \geq \left[\max_{x\neq 0}\frac{\|x\|_a}{\|x\|_\beta}\right]^{-1} = \frac{1}{R_{a\beta}}.$$

Επομένως, έχουμε τη γενική ανισότητα: $R_{a\beta}\, R_{\beta a} \geq 1.$ (3.3.5)

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν: $\min_{x\neq 0}\frac{\|x\|_a}{\|x\|_\beta} = \max_{x\neq 0}\frac{\|x\|_a}{\|x\|_\beta}$, το οποίο μπορεί να συμβεί αν και μόνο αν η συνάρτηση $\|x\|_a/\|x\|_\beta$ είναι σταθερή για κάθε $x \neq 0$.

$\xRightarrow{\text{ευθύ}}$ Αν $\|x\|_a \triangleq c\,\|x\|_\beta$, τότε σίγουρα έχουμε ότι $R_{a\beta}\, R_{\beta a} = 1$ και επομένως ισχύει:

$$\|A\|_a \leq \|A\|_\beta \quad \text{και} \quad \|A\|_\beta \leq \|A\|_a \quad \text{για κάθε } A \in M_n, \qquad (\text{Λόγω } (3.3.3))$$

ή ισοδύναμα

$$\|A\|_a = \|A\|_\beta, \quad \text{για κάθε } A \in M_n.$$

$\xLeftarrow{\text{αντίστροφο}}$ Αν οι δύο επαγόμενες νόρμες πινάκων $\|\circ\|_a$ και $\|\circ\|_\beta$ ταυτίζονται, τότε $R_{a\beta}\, R_{\beta a} = 1$ σύμφωνα με την (3.3.2). Επομένως, ισχύει η ισότητα στη σχέση (3.3.5) και έτσι ο λόγος $\|x\|_a/\|x\|_\beta$ είναι σταθερός. ∎

***Πόρισμα 3.3.6.*** Έστω $\|\bullet\|_a$ και $\|\bullet\|_\beta$ δύο διανυσματικές νόρμες στον $\boldsymbol{C}^n$ και έστω $\|\circ\|_a$ και $\|\circ\|_\beta$ οι αντίστοιχες επαγόμενες νόρμες πινάκων στον $M_n$. Τότε, θα ισχύει $\|A\|_a \leq \|A\|_\beta$ για κάθε $A \in M_n$ αν και μόνο αν $\|A\|_a = \|A\|_\beta$ για κάθε $A \in M_n$.

***Απόδειξη.*** $\overset{\text{ευθύ}}{\Longrightarrow}$ Αν $\|A\|_a \leq \|A\|_\beta$ για κάθε $A \in M_n$, τότε $R_{a\beta}\, R_{\beta a} \leq 1$. Λόγω της γενικής ανισότητας (3.3.4), συνεπάγεται ότι $R_{a\beta}\, R_{\beta a} = 1$. Επομένως, $\|A\|_a \leq \|A\|_\beta$ και $\|A\|_\beta \leq \|A\|_a$ για κάθε πίνακα $A \in M_n$. (Λόγω (3.3.3))

$\overset{αντίστροφο}{\Longleftarrow}$ Το αντίστροφο είναι προφανές. ■

Από το προηγούμενο πόρισμα διαπιστώνουμε στην ουσία πως καμία επαγόμενη νόρμα πινάκων δεν κυριαρχεί κάποια άλλη, για κάθε $A \in M_n$.

***Θεώρημα 3.3.7.*** Έστω $\|\circ\|$ μία δεδομένη νόρμα πινάκων στον $M_n$ και $\|\circ\|_a$ μία δεδομένη επαγόμενη νόρμα στον $M_n$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

i. Υπάρχει μία επαγόμενη νόρμα πινάκων $N(\circ)$ στον $M_n$ τέτοια ώστε:

$$N(A) \leq \|A\|, \quad \text{για κάθε πίνακα } A \in M_n.$$

ii. $\|A\| \leq \|A\|_a$ για κάθε πίνακα $A \in M_n$ αν και μόνο αν $\|A\| = \|A\|_a$ για κάθε $A \in M_n$.

***Απόδειξη.*** Έστω $\|\bullet\|$ μία διανυσματική νόρμα στον $\boldsymbol{C}^n$, η οποία ορίζεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\|x\| \triangleq \|X\|, \text{ όπου ο πίνακας } X \text{ είναι της μορφής } X \triangleq [x\ x \cdots x\,] \in M_n. \quad (3.3.8)$$

i. Θεωρούμε τη νόρμα πινάκων $N(\circ)$, που επάγεται από τη νόρμα $\|\bullet\|$. Τότε, για κάθε πίνακα $A \in M_n$ θα ισχύει:

$$N(A) \triangleq \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{x \neq 0} \frac{\|[Ax\ Ax\ \cdots\ Ax]\|}{\|[x\ x \cdots x]\|}$$

$$= \max_{x \neq 0} \frac{\|AX\|}{\|X\|} \leq \max_{x \neq 0} \frac{\|A\|\ \ \|X\|}{\|X\|} = \|A\|.$$

Η ανισότητα ισχύει λόγω του Αξιώματος 3.1.1.(v ), επειδή η $\|\circ\|$ είναι νόρμα πινάκων.

ii. Υποθέτουμε ότι $\|A\| \leq \|A\|_a$ για κάθε $A \in M_n$. Τότε, από το 3.3.7(i) θα έχουμε:

$$N(A) \leq \|A\| \leq \|A\|_a, \quad \text{για κάθε } A \in M_n.$$

Όμως, $N(\circ)$ και $\|\circ\|_a$ είναι και οι δύο επαγόμενες νόρμες κι έτσι σύμφωνα με το Πόρισμα 3.3.6 θα ισχύει $N(A) \triangleq \|A\|_a$. Επομένως, $\|A\| = \|A\|_a$ για κάθε $A \in M_n$. ■

Το προηγούμενο θεώρημα μας οδηγεί στον παρακάτω σημαντικό ορισμό.

***Ορισμός 3.3.9.*** Μία νόρμα πινάκων $\|\circ\|$ στον $M_n$ ονομάζεται ***ελάχιστη νόρμα πινάκων*** (minimal matrix norm), αν η μόνη νόρμα πινάκων $N(\circ)$ στον $M_n$ για την οποία ισχύει $N(A) \leq \|A\|$ για κάθε $A \in M_n$, είναι η ακόλουθη: $N(\circ) = \|\circ\|$.

***Παρατήρηση***: Ο ισχυρισμός (ii) του Θεωρήματος 3.3.7 δείχνει ότι κάθε επαγόμενη νόρμα στον $M_n$ είναι *ελάχιστη* (minimal). Ο ισχυρισμός 3.3.7(i) συνεπάγεται άμεσα ότι κάθε ελάχιστη νόρμα είναι επαγόμενη (induced).

Η διανυσματική νόρμα $\|x\| \triangleq \|X\|$, σχέση (3.3.8), αποτελεί ειδική περίπτωση μιας ολόκληρης οικογένειας νορμών, οι οποίες μπορούν να κατασκευαστούν από μία δεδομένη νόρμα πινάκων.
Έστω μία δεδομένη νόρμα πινάκων $\|\circ\|$ στον $M_n$ και ένα μη-μηδενικό διάνυσμα $y \in \boldsymbol{C}^n$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $\|\bullet\|_y : \boldsymbol{C}^n \to \boldsymbol{R}$ ως εξής:

$$\|x\|_y \triangleq \|xy^*\|, \qquad y \in \boldsymbol{C}^n \text{ με } y \neq 0. \tag{3.3.10}$$

Τότε, η $\|\bullet\|_y$ είναι μία διανυσματική νόρμα στον $\boldsymbol{C}^n$ με την ακόλουθη ιδιότητα:

$$\|Ax\|_y = \|A(xy^*)\| \leq \|A\|\,\|xy^*\| = \|A\|\,\|x\|_y, \qquad \text{για κάθε } A \in M_n.$$

Αν $y = [1\,1 \cdots 1]^T$, τότε η (3.3.10) μετατρέπεται στην (3.3.8). Αν τώρα ορίσουμε ως $N_y(\circ)$ τη νόρμα πινάκων που επάγεται από την $\|\bullet\|_y$, τότε από την προηγούμενη ανισότητα θα έχουμε:

$$N_y(A) \triangleq \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_y}{\|x\|_y} \leq \max_{x \neq 0} \frac{\|A\|_y \quad \|x\|_y}{\|x\|_y} = \|A\|. \tag{3.3.11}$$

Η σχέση (3.3.11) αποτελεί προφανώς μια γενίκευση του (i) ισχυρισμού του Θεωρήματος 3.3.7.

Αν η δεδομένη νόρμα πινάκων $\|\circ\|$ είναι ελάχιστη, τότε από την (3.3.11) συνεπάγεται ότι $\|A\| = N_y(A)$, για κάθε $A \in M_n$. Δεδομένου ότι το διάνυσμα $y$ που χρησιμοποιήθηκε προηγουμένως μπορεί να είναι οποιοδήποτε μη-μηδενικό διάνυσμα, θα ισχύει ότι:

$$N_y(\circ) = \|\circ\| = N_z(\circ), \quad \text{για όλα τα μη-μηδενικά διανύσματα } y, z \in \boldsymbol{C}^n.$$

***Θεώρημα 3.3.12.*** Έστω μία νόρμα πινάκων $\|\circ\|$ στον $M_n$ και $N_y(\circ)$ η επαγόμενη νόρμα που ορίστηκε στις σχέσεις (3.3.10) και (3.3.11). Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

i. Η $\|\circ\|$ είναι μία επαγόμενη νόρμα πινάκων.
ii. Η $\|\circ\|$ είναι μία ελάχιστη νόρμα πινάκων.
iii. $\|\circ\| = N_y(\circ)$, για κάθε μη-μηδενικό διάνυσμα $y \in \boldsymbol{C}^n$.

***Απόδειξη.*** Το (i) συνεπάγεται το (ii) και αυτό προκύπτει άμεσα από τον (ii) ισχυρισμό του Θεωρήματος 3.3.7. Προηγουμένως δείξαμε ότι αν η νόρμα $\|\circ\|$ είναι ελάχιστη, τότε $\|\circ\| = N_y(\circ)$ και επομένως το (ii) συνεπάγεται το (iii). Αν τώρα ισχύει το (iii), τότε η νόρμα $\|\circ\|$ είναι επαγόμενη, επειδή η $N_y(\circ)$ είναι επαγόμενη σύμφωνα με τον ορισμό της. ■

***Παρατήρηση***: Από όσα αναφέρθηκαν παραπάνω, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι αν $N_y(\circ) = \|\circ\|$ για κάθε μη-μηδενικό διάνυσμα $y \in \boldsymbol{C}^n$, τότε θα ισχύει και $N_y(\circ) = N_z(\circ) = \|\circ\|$, για όλα τα μη-μηδενικά $y, z \in \boldsymbol{C}^n$. Όμως, σύμφωνα με το Πόρισμα 3.3.4, η διανυσματική νόρμα που επάγει μία νόρμα πινάκων είναι μοναδική ως προς ένα συντελεστή. Επομένως, $\|\bullet\|_y = c_{yz}\|\bullet\|_z$ για κάποια θετική σταθερά $c_{yz} > 0$.

***Θεώρημα 3.3.13.*** Έστω μία νόρμα πινάκων $\|\circ\|$ στον $M_n$ και η διανυσματική νόρμα $\|\bullet\|_y$ στον $\boldsymbol{C}^n$, η οποία ορίστηκε προηγουμένως στη σχέση (3.3.10). Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

i. Για κάθε ζεύγος μη-μηδενικών διανυσμάτων $y, z \in \boldsymbol{C}^n$, υπάρχει μία θετική σταθερά $c_{yz} > 0$ τέτοια ώστε να ισχύει:

$$\|x\|_y = c_{yz}\|x\|_z, \quad \text{για κάθε } x \in \boldsymbol{C}^n.$$

ii. $$\|xy^*\| = \frac{\|xz^*\| \ \|zy^*\|}{\|zz^*\|}, \quad \text{για κάθε } x, y, z \in \boldsymbol{C}^n \text{ με } z \neq 0.$$

***Απόδειξη.*** $\overset{\mathrm{i} \to \mathrm{ii}}{\Longrightarrow}$ Αν ισχύει το (i), τότε:

$$\|x\|_y = c_{yz}\|x\|_z \qquad \text{και} \qquad \|x\|_z = c_{zy}\|x\|_y.$$

Αντικαθιστώντας στην πρώτη ισότητα το $\|x\|_z$, θα έχουμε:

$$\|x\|_y = c_{yz}c_{zy}\|x\|_y \Rightarrow c_{yz} = \frac{1}{c_{zy}}.$$

Επομένως: $$\|xz^*\| \ \|zy^*\| = \|x\|_z \ \|z\|_y = c_{zy} \ \|x\|_y \ \|z\|_y = (1/c_{yz})\|x\|_y \ c_{yz} \ \|z\|_z$$

$$= \|x\|_y \ \|z\|_z = \|xy^*\|\|zz^*\|.$$

$\overset{\mathrm{ii} \to \mathrm{i}}{\Longleftarrow}$ Αν ισχύει το (ii), τότε το (i) προκύπτει αν επιλέξουμε ως θετική σταθερά $c_{yz} > 0$ την $c_{yz} = \|zy^*\|/\|zz^*\|$. Δείξαμε προηγουμένως ότι αν $N_y(\circ) = \|\circ\|$, τότε συνεπάγεται το (i) (επομένως και το (ii)) και αυτό θα γίνει στην περίπτωση που η νόρμα $\|\circ\|$ είναι επαγόμενη νόρμα, σύμφωνα με το Θεώρημα 3.3.12. ■

***Παρατήρηση***:

i. Αν $\|\circ\|$ είναι μία επαγόμενη νόρμα, τότε ικανοποιεί τον ισχυρισμό 3.3.13(ii).

***Απόδειξη.*** Σύμφωνα με τον ορισμό της επαγόμενης νόρμας θα ισχύει:

$$\|xy^*\| = \max_{\|z\|=1}\|xy^*z\| = \max_{\|z\|=1}\|x(y^*z)\| = \max_{\|z\|=1}\|x\langle z, y\rangle\|$$

$$= \max_{\|z\|=1} |\langle z, y\rangle| \, \|x\| = \|y\| \, \|x\|.$$

Ομοίως: $\|xz^*\| = \|z\| \, \|x\|$, $\|zy^*\| = \|y\| \, \|z\|$ και $\|zz^*\| = \|z\| \, \|z\|$.

Άρα, $\frac{\|xz^*\| \; \|zy^*\|}{\|zz^*\|} = \frac{\|z\| \;\; \|x\| \;\; \|y\| \;\; \|z\|}{\|z\| \;\; \|z\|} = \|y\| \, \|x\| = \|xy^*\|$. ■

ii. Οι διανυσματικές νόρμες που κατασκευάζονται από μία επαγόμενη νόρμα σύμφωνα με τη σχέση (3.3.10) ικανοποιούν τον ισχυρισμό 3.3.13(i).

***Απόδειξη.*** Θεωρούμε τις νόρμες $\|x\|_y = \|xy^*\| = \|y\| \, \|x\|$ και $\|x\|_z = \|xz^*\| = \|z\| \, \|x\|$.
Λύνοντας την δεύτερη ισότητα ως προς $\|x\|$ και αντικαθιστώντας στην πρώτη, θα έχουμε:

$$\|x\|_y = \|xy^*\| = \|y\| \, \|x\| = \|y\| \, \frac{\|x\|_z}{\|z\|} = c_{yz}\|x\|_z. \quad ■$$

Στο Θεώρημα 3.1.3 είδαμε πως αν $\|\circ\|$ είναι μία επαγόμενη νόρμα, τότε $\|I\| = 1$. Δυστυχώς, αυτή η ιδιότητα *δεν είναι ικανή* ώστε μία νόρμα πινάκων να είναι επαγόμενη. Για να το διαπιστώσουμε αυτό, θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$\|A\| \triangleq \max \{\|A\|_1, \|A\|_\infty\}.$$

Είναι εύκολο να δειχθεί ότι η παραπάνω συνάρτηση ορίζει μία νόρμα πινάκων στον $M_n$ και επίσης ότι $\|I\| = 1$:

$$\|I\| = \max \{\|I\|_1, \|I\|_\infty\}, \quad \|I\|_1 = 1, \quad \|I\|_\infty = 1$$

ή

$$\|I\| = 1.$$

Όμως, δεδομένου ότι $\|A\|_1 \le \|A\|$ για κάθε πίνακα $A \in M_n$ και $\|A\|_1 < \|A\|$ για τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ (αφού $\|A\|_1 = 3$ και $\|A\|_\infty = 4$), η $\|\circ\|$ δεν είναι μία ελάχιστη νόρμα και επομένως δεν μπορεί να είναι επαγόμενη.

Μεταξύ όλων των νορμών πινάκων, μόνο οι επαγόμενες νόρμες είναι ελάχιστες. Μία πολύ σημαντική κατηγορία νορμών πινάκων είναι αυτή των *ορθομοναδιαία αναλλοίωτων* νορμών, για τις οποίες ισχύει $\|A\| = \|UAV\|$, για κάθε $A \in M_n$ και κάθε ορθομοναδιαίο πίνακα $U, V \in M_n$. Θα δούμε παρακάτω ότι στην κατηγορία αυτή υπάρχει μία μόνο ελάχιστη νόρμα, η φασματική $\|\circ\|_2$.

***Πόρισμα 3.3.14.*** Αν $\|\circ\|$ είναι μία ορθομοναδιαία αναλλοίωτη νόρμα πινάκων, τότε $\|A\|_2 \le \|A\|$ για κάθε πίνακα $A \in M_n$. Η φασματική νόρμα $\|\circ\|_2$ είναι η μόνη νόρμα πινάκων στον $M_n$, η οποία είναι επαγόμενη και ορθομοναδιαία αναλλοίωτη.

***Απόδειξη.*** Έστω ότι η νόρμα $\|\circ\|$ είναι μία δεδομένη ορθομοναδιαία αναλλοίωτη νόρμα πινάκων. Από τον πρώτο ισχυρισμό του Θεωρήματος 3.3.7 γνωρίζουμε ότι

$N(A) \leq \|A\|$ για κάθε πίνακα $A \in M_n$, όπου η νόρμα $N(A)$ επάγεται από τη διανυσματική νόρμα $\|\bullet\|$, η οποία ορίστηκε στη σχέση (3.3.8). Αν ο πίνακας $U \in M_n$ είναι ορθομοναδιαίος, τότε $\|Ux\| = \|UX\| = \|X\| = \|x\|$ και επομένως η νόρμα $\|\bullet\|$ είναι ορθομοναδιαία αναλλοίωτη. Αν $x \in \boldsymbol{C}^n$ είναι ένα δεδομένο μη-μηδενικό διάνυσμα, τότε υπάρχει ένας ορθομοναδιαίος πίνακας $U$, τέτοιος ώστε $Ux = \|x\|_2\, e_1$. Οπότε, $x = \|x\|_2\, U^*\, e_1$. Επομένως, ισχύει:

$$\|x\| = \|\|x\|_2\, U^* e_1\| = \|x\|_2\, \|U^* e_1\| = \|x\|_2\, \|e_1\|, \quad \text{για κάθε} \quad x \in \boldsymbol{C}^n.$$

Άρα, η νόρμα $\|\bullet\|$ είναι ένα βαθμωτό πολλαπλάσιο της Ευκλείδιας νόρμας. Σύμφωνα με το Πόρισμα 3.3.4, έχουμε ότι η $N(\circ)$ (η νόρμα πινάκων που επάγεται από την $\|\bullet\|$) ισούται με την $\|\circ\|_2$ (η νόρμα πινάκων που επάγεται από την $\|\bullet\|_2$). Επομένως, θα ισχύει: $\|\circ\|_2 = N(A) \leq \|A\|$, για κάθε $A \in M_n$. Αν τώρα υποθέσουμε πως η νόρμα $\|\circ\|$ είναι επαγόμενη, τότε θα είναι και ελάχιστη και ως εκ τούτου $\|A\|_2 = \|A\|$, για κάθε πίνακα $A \in M_n$. Συνεπώς, αφού από υπόθεση έχουμε ότι η νόρμα $\|A\|$ είναι ορθομοναδιαία αναλλοίωτη, το ίδιο θα ισχύει και για τη νόρμα $\|A\|_2$. ■

Αν $\|\circ\|$ είναι μία νόρμα πινάκων στον $M_n$, τότε η συνάρτηση $\|\circ\|^*$ που ορίζεται από τη σχέση $\|A\|^* \triangleq \|A^*\|$, είναι κι αυτή νόρμα πινάκων στον $M_n$. Μπορεί εύκολα να δειχθεί ότι:

$$\|A\|_F^* = \|A^*\|_F = \|A\|_F \quad \text{και} \quad \|A\|_{1,e}^* = \|A^*\|_{1,e} = \|A\|_{1,e},$$

για κάθε πίνακα $A \in M_n$, όπου $\|A\|_{1,e}$ είναι η $l_1$ νόρμα πινάκων.
Όμως, η ιδιότητα αυτή δεν ισχύει για κάθε νόρμα πινάκων δεδομένου ότι:

$$\|A\|_1^* = \|A\|_\infty \neq \|A\|_1,$$ όπου εδώ η $\|A\|_1$ είναι η νόρμα που επάγεται από την $l_1$ νόρμα.

Μία νόρμα πινάκων για την οποία ισχύει $\|\circ\|^* = \|\circ\|$ ονομάζεται ***αυτοσυζυγής*** (self-adjoint). Η Frobenius νόρμα $\|A\|_F$ και η $l_1$ νόρμα πινάκων $\|A\|_{1,e}$ είναι αυτοσυζυγείς. Επειδή $(\|A\|_2^*)^2 = \|A^*\|_2^2 = \rho(AA^*) = \rho(A^*A) = \|A\|_2^2$, συνεπάγεται ότι και η φασματική νόρμα $\|A\|_2$ είναι αυτοσυζυγής. Συγκεκριμένα, όλες οι ορθομοναδιαία αναλλοίωτες νόρμες στον $M_n$ είναι αυτοσυζυγείς. Η φασματική νόρμα $\|A\|_2$ είναι η μόνη επαγόμενη νόρμα πινάκων η οποία είναι αυτοσυζυγής.

***Θεώρημα 3.3.15.*** Έστω μία δεδομένη νόρμα πινάκων $\|\circ\|$ στον $M_n$. Τότε, ισχύουν τα ακόλουθα:

i. Η νόρμα $\|\circ\|^*$ είναι επαγόμενη αν και μόνο αν η νόρμα $\|\circ\|$ είναι επαγόμενη.
ii. Η φασματική νόρμα $\|A\|_2$ είναι η μόνη νόρμα πινάκων στον $M_n$ η οποία είναι επαγόμενη και αυτοσυσυζής.

***Απόδειξη.***

i. Αν $N(\circ)$ είναι μία νόρμα πινάκων και $N(A) \leq \|A\|^* = \|A^*\|$ για κάθε $A \in M_n$, τότε και για τον πίνακα $A^*$ θα ισχύει: $N(A^*) \leq \|A^*\|^* = \|(A^*)^*\| = \|A\|$.

Επομένως, θα έχουμε: $N(A)^* = N(A^*) \leq \|A\|$, για κάθε πίνακα $A \in M_n$. Αν η νόρμα πινάκων $\|\circ\|$ είναι ελάχιστη, τότε $N(\circ)^* = \|\circ\|$ και έτσι $N(\circ) = \|\circ\|^*$. Επομένως, η νόρμα $\|\circ\|^*$ είναι ελάχιστη και ο ισχυρισμός (i) έπεται από το Θεώρημα 3.3.12.

ii. Η απόδειξη του ισχυρισμού αυτού χρησιμοποιεί και την έννοια της δυϊκής νόρμας και έτσι παραλείπεται. ■

Οι απόλυτες και οι μονότονες διανυσματικές νόρμες, στις οποίες αναφερθήκαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, είναι αυτές που χρησιμοποιούνται πιο συχνά απ' όλες τις διανυσματικές νόρμες. Υπάρχει ένας απλός και πολύ χρήσιμος χαρακτηρισμός των νορμών πινάκων οι οποίες επάγονται από μονότονες νόρμες.

***Θεώρημα 3.3.16.*** Έστω μία διανυσματική νόρμα $\|\bullet\|$ στον $\boldsymbol{C}^n$ και η νόρμα πινάκων $\|\circ\|$ στον $M_n$ που επάγεται από αυτήν. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

i. Η νόρμα $\|\bullet\|$ είναι απόλυτη, δηλαδή $\||x|\| = \|x\|$ για κάθε $x \in \boldsymbol{C}^n$.

ii. Η νόρμα $\|\bullet\|$ είναι μονότονη, δηλαδή $\|x\| \leq \|y\|$ αν ισχύει $|x| \leq |y|$ για κάθε $x, y \in \boldsymbol{C}^n$.

iii. Αν $D$ είναι ένας διαγώνιος πίνακας, δηλαδή $D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n) \in M_n$, τότε η νόρμα πινάκων που επάγεται από τη μονότονη νόρμα θα είναι:

$$\|D\| = \max_{1 \leq i \leq n} |d_i|.$$

***Απόδειξη.*** Η ισοδυναμία των (i) και (ii) είναι στην ουσία το Θεώρημα 2.2.23. Αρκεί να αποδείξουμε τώρα την ισοδυναμία των (ii) και (iii).

$\xRightarrow{(ii) \to (iii)}$ Αν η νόρμα $\|\bullet\|$ είναι μονότονη και ορίσουμε:

$$d \triangleq \max_{1 \leq i \leq n} |d_i|, \qquad d = |d_k|,$$

τότε $|Dx| \leq |dx|$ και επομένως θα ισχύει:

$$\|Dx\| \leq \|dx\| = |d|\,\|x\| = d\|x\|, \quad \text{όπου η ισότητα ισχύει για } x = e_k.$$

Άρα, $\|D\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Dx\|}{\|x\|} = d$ και επομένως το (ii) συνεπάγεται το (iii).

$\xLeftarrow{(iii) \to (ii)}$ Αν ισχύει ο ισχυρισμός (iii), τότε για δεδομένα διανύσματα $x, y \in \boldsymbol{C}^n$ με $|x| \leq |y|$ υπάρχουν μιγαδικοί αριθμοί $d_k$ τέτοιοι ώστε:

$$|x_k| = d_k\, y_k \qquad \text{και} \qquad |d_k| \leq 1, \qquad k = 1,2,\dots,n.$$

Επομένως, αν $D \triangleq \mathrm{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$, τότε θα έχουμε $Dy = |x|$ και $\|D\| \leq 1$. Όμως, $\||x|\| = \|Dy\| \leq \|D\|\,\|y\| \leq \|y\|$ και επομένως η νόρμα $\|\bullet\|$ είναι μονότονη. ■

## 3.4 Αριθμητικά Παραδείγματα

Στην ενότητα αυτή, θα παρουσιάσουμε ορισμένα αριθμητικά παραδείγματα σχετικά με τις νόρμες πινάκων σε χώρους πεπερασμένης διάστασης. Επίσης, θα επαληθεύσουμε αριθμητικά τη σχέση ισοδυναμίας που υπάρχει μεταξύ των νορμών, τουλάχιστον για τις $l_1$, $l_2(Frobenius)$, $nl_\infty$ και τις επαγόμενες νόρμες $\|\circ\|_1$, $\|\circ\|_2$, $\|\circ\|_\infty$.

Στην αρχή της Ενότητας 3.3 είδαμε ότι δύο οποιεσδήποτε νόρμες πινάκων $\|\circ\|_a$ και $\|\circ\|_\beta$, σε χώρο πεπερασμένης διάστασης, συνδέονται με τη σχέση:

$$C_m \|A\|_a \leq \|A\|_\beta \leq C_M \|A\|_a, \quad \text{δηλαδή είναι } \textit{ισοδύναμες.}$$

Επιπλέον, μπορούμε να υπολογίσουμε τους συντελεστές της σχέσης ισοδυναμίας, τουλάχιστον για τις βασικές νόρμες.

Ο πίνακας με τους παραπάνω συντελεστές $C_m(\|\circ\|_a, \|\circ\|_\beta)$ και $C_M(\|\circ\|_a, \|\circ\|_\beta)$ μεταξύ των νορμών $l_1$, $l_2\,(Frobenius)$, $nl_\infty$ και των επαγόμενων νορμών $\|\circ\|_1$, $\|\circ\|_2$, $\|\circ\|_\infty$ για κάθε πίνακα $A \in M_n$ με $a, \beta = 1,2,\infty$ είναι ο ακόλουθος:

| $\|\circ\|_a \backslash \|\circ\|_\beta$ | $\|\circ\|_1$ | $\|\circ\|_2$ | $\|\circ\|_\infty$ | $\|\circ\|_{1,e}$ | $\|\circ\|_F$ | $n\|\circ\|_{\infty,e}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\|\circ\|_1$ | 1 | $\sqrt{n}$ | $n$ | 1 | $\sqrt{n}$ | 1 |
| $\|\circ\|_2$ | $\sqrt{n}$ | 1 | $\sqrt{n}$ | 1 | 1 | 1 |
| $\|\circ\|_\infty$ | $n$ | $\sqrt{n}$ | 1 | 1 | $\sqrt{n}$ | 1 |
| $\|\circ\|_{1,e}$ | $n$ | $n^{3\backslash 2}$ | $n$ | 1 | $n$ | $n$ |
| $\|\circ\|_F$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt{n}$ | $\sqrt{n}$ | 1 | 1 | 1 |
| $n\|\circ\|_{\infty,e}$ | $n$ | $n$ | $n$ | $n$ | $n$ | 1 |

Οι τρεις πρώτες νόρμες στον πίνακα αυτόν είναι οι επαγόμενες νόρμες, ενώ οι τρεις επόμενες είναι οι αντίστοιχες των διανυσματικών νορμών $l_p$. Κάθε αριθμός που εμφανίζεται παραπάνω είναι ο συντελεστής $C_M(\|\circ\|_a, \|\circ\|_\beta)$ που ικανοποιεί τη σχέση $\|A\|_a \leq C_M\|A\|_\beta$, όπου $\|\circ\|_\beta$ είναι η νόρμα που αντιστοιχεί στη γραμμή και $\|\circ\|_a$ είναι αυτή που αντιστοιχεί στη στήλη. Όπως και στην περίπτωση των διανυσμάτων, σημειώνεται ότι με απλά παραδείγματα, μπορεί κανείς να επαληθεύσει ότι οι συνελεστές του πίνακα είναι *βέλτιστοι* (καθώς σε απλά παραδείγματα, δίνουν ισότητα).

***Απόδειξη Συντελεστών.*** Ενδεικτικά, επιλέγουμε να παρουσιάσουμε κάποιες από τις αποδείξεις που προκύπτουν άμεσα με χρήση μαθηματικών εργαλείων που διαθέτουμε.

- $\|A\|_1 = \max\limits_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} \leq \sqrt{n} \max\limits_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1} \leq \sqrt{n} \max\limits_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \sqrt{n}\,\|A\|_2.$
- $\|A\|_1 = \max\limits_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} \leq n \max\limits_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_1} \leq n \max\limits_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = n\|A\|_\infty.$
- $\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \leq \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}| = \|A\|_{1,\mathrm{e}}.$

  Ομοίως για τη σχέση $\|A\|_\infty \leq \|A\|_{1,\mathrm{e}}.$
- $\|A\|_1{}^2 = \max\limits_{1\leq j\leq n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|\right)^2 = \max\limits_{1\leq j\leq n} \left\|\left(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}\right)\right\|_1{}^2$

  $\leq n \max\limits_{1\leq j\leq n} \left\|\left(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}\right)\right\|_2{}^2 = n \max\limits_{1\leq j\leq n} \left(\left|a_{1j}\right|^2 + \left|a_{2j}\right|^2 + \cdots + \left|a_{2j}\right|^2\right)$

  $\leq n \sum_{i,j=1}^{n} \left|a_{ij}\right|^2 = n\|A\|_F{}^2.$

  Άρα, $\|A\|_1 \leq \sqrt{n}\,\|A\|_F.$

  Ομοίως για τη σχέση $\|A\|_1 \leq n\,\|A\|_{\infty,e}.$
- $\|A\|_2 = \max\limits_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \leq \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_2} \leq \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_1} = \sqrt{n} \max\limits_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} = \sqrt{n}\,\|A\|_1.$
- $\|A\|_2 = \max\limits_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \leq \sqrt{n} \max\limits_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_2} \leq \sqrt{n} \max\limits_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \sqrt{n}\,\|A\|_\infty.$
- $\|A\|_\infty = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \max\limits_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_\infty} \leq \max\limits_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\frac{1}{n}\|x\|_1} = n \max\limits_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} = n\,\|A\|_1.$
- $\|A\|_\infty = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \max\limits_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_\infty} \leq \max\limits_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_2} = \sqrt{n} \max\limits_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \sqrt{n}\,\|A\|_2.$
- $\|A\|_\infty{}^2 = \max\limits_{1\leq i\leq n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right)^2 = \max\limits_{1\leq i\leq n} \|(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})\|_1{}^2$

  $\leq n \max\limits_{1\leq i\leq n} \|(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})\|_2{}^2 = n \max\limits_{1\leq i\leq n} (|a_{i1}|^2 + |a_{i2}|^2 + \cdots + |a_{in}|^2)$

  $\leq n \sum_{i,j=1}^{n} \left|a_{ij}\right|^2 = n\|A\|_F{}^2.$

  Άρα, $\|A\|_\infty \leq \sqrt{n}\,\|A\|_F.$
- $\|A\|_\infty = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \leq \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}| \leq n \max\limits_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}| = n\|A\|_{\infty,\mathrm{e}}.$
- $\|A\|_{1,\mathrm{e}} = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}| \leq n \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = n\|A\|_1.$

  Ομοίως για τη σχέση $\|A\|_{1,\mathrm{e}} \leq n\|A\|_\infty.$

- $\|A\|_F{}^2 = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \le n \max_{1\le j\le n} \left(|a_{1j}|^2 + |a_{2j}|^2 + \cdots + |a_{2j}|^2\right)$

  $= n \max_{1\le j\le n} \left\|(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj})\right\|_2{}^2 \le n \max_{1\le j\le n} \left\|(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj})\right\|_1{}^2 = n\|A\|_1{}^2.$

  Άρα, $\|A\|_F \le \sqrt{n}\,\|A\|_1$.

  Ομοίως για τις σχέσεις $\|A\|_F \le \sqrt{n}\,\|A\|_\infty$ και $\|A\|_F \le n\|A\|_{\infty,e}$.

- $\|A\|_F{}^2 = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \le (\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|)^2 = \|A\|_{1,e}{}^2$.

  Άρα, $\|A\|_F \le \|A\|_{1,e}$. ■

Έστω τώρα οι πίνακες:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \end{bmatrix} \in M_3(\boldsymbol{R}) \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 5 & -2-i & -3 \\ 1+i & 2 & -6 \end{bmatrix} \in M_3(\boldsymbol{C}).$$

Οι αντίστοιχες $l_p$-νόρμες, για $p = 1,2\ (Frobenius), \infty$, για τους πίνακες $A, B$ θα είναι:

$$\|A\|_{1,e} = \sum_{i,j=1}^{3} |a_{ij}| = 28, \qquad \|B\|_{1,e} = \sum_{i,j=1}^{3} |\beta_{ij}| = 22 + \sqrt{5} + \sqrt{2} \cong 25{,}66$$

(αφού $|1+i| = \sqrt{2}$ και $|-2-i| = \sqrt{5}$),

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i,j=1}^{3} |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}\,, \qquad \|B\|_F = \left(\sum_{i,j=1}^{3} |\beta_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{101} \cong 10,$$

$$\|A\|_{\infty,e} = \max_{1\le i,j\le 3} |a_{ij}| = 6, \qquad \|B\|_{\infty,e} = \max_{1\le i,j\le 3} |\beta_{ij}| = 6.$$

Οι επαγόμενες νόρμες $\|\circ\|_1$, $\|\circ\|_2 (\varphi\alpha\sigma\mu\alpha\tau\iota\kappa\acute{\eta}\ \nu\acute{o}\rho\mu\alpha)$, $\|\circ\|_\infty$ για τους πίνακες $A, B$ θα είναι:

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le 3} \sum_{i=1}^{3} |a_{ij}| = 13, \qquad \|B\|_1 \triangleq \max_{1\le j\le 3} \sum_{i=1}^{3} |\beta_{ij}| = 13,$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le 3} \sum_{j=1}^{3} |a_{ij}| = 10, \qquad \|B\|_\infty = \max_{1\le i\le 3} \sum_{j=1}^{3} |\beta_{ij}| = 8 + \sqrt{5},$$

ενώ για την $\|\circ\|_2$, βρίσκουμε τον πίνακα $A^*A$ και τις ιδιοτιμές του:

$$\sigma(\,A^*A) = \{90{,}4952,\ 15{,}1322,\ 2{,}3726\},$$

και καταλήγουμε στο ότι η φασματική νόρμα του $A$ είναι:

$$\|A\|_2 = \max\{\sqrt{\lambda}\ :\ \lambda \text{ είναι μία ιδιοτιμή του πίνακα } \mathrm{A^*A}\} = \sqrt{90{,}4952}.$$

Ομοίως, βρίσκοντας τον πίνακα $B^*B$ και τις ιδιοτιμές του:

$$\sigma(\,B^*B) = \{79{,}9457,\ 21{,}0162,\ 0{,}0380917\},$$

η φασματική νόρμα του $B$ είναι:

$$\|B\|_2 = \max\{\sqrt{\lambda}\ :\ \lambda \text{ είναι μία ιδιοτιμή του πίνακα } \mathrm{B^*B}\} = \sqrt{79{,}9457}.$$

Για να βρούμε την φασματική ακτίνα $\rho(A)$ του πίνακα $A$, βρίσκουμε αρχικά τις ιδιοτιμές του:

$$\sigma(A) = \{-5{,}27816, \qquad -2{,}86092 + 1{,}6169i, \qquad -2{,}86092 - 1{,}6169i\}.$$

Επομένως, $\rho(A) = \max\{|\lambda|\ :\ \lambda \text{ είναι μία ιδιοτιμή του πίνακα } A\} = 5{,}27816$,

(αφού $|-2{,}86092 + 1{,}6169i| = \sqrt{(-2{,}86092)^2 + 1{,}6169^2} \cong 3{,}29$).

Παρατηρούμε πως η φασματική ακτίνα $\rho(A)$ είναι μικρότερη κάθε επαγόμενης νόρμας του πίνακα $A$. (Θεώρημα 3.2.2)

Ομοίως, για τον πίνακα $B$ έχουμε:

$$\sigma(B) = \{-5.32351 - 3.04688i, \qquad -4{,}919 + 2{,}07623i, \qquad 0{,}242508 + 0{,}0293493i\}.$$

Επομένως:

$$\begin{aligned}\rho(B) &= \max\{|\lambda|\ :\ \lambda \text{ είναι μία ιδιοτιμή του πίνακα } B\}\\ &= |-5.32351 - 3.04688i| \cong 6{,}134.\end{aligned}$$

Είχαμε δει πως για κάθε πίνακα και κάθε επαγόμενη νόρμα του ισχύει:

$$\|A^k\| \le \|A\|^k, \qquad \text{για κάθε } A \in M_n \text{ και } k = 1,2,\ldots$$

Έστω οι προηγούμενοι πίνακες $A, B$ και $k = 3, 4$. Τότε:

$$\|A\|_1{}^3 = 2197 \quad \text{και} \quad \|A^3\|_1 = 789 \implies \|A^3\|_1 \le \|A\|_1{}^3,$$

$$\|B\|_1{}^4 = 28561 \quad \text{και} \quad \|B^4\|_1 \cong 3754{,}5 \implies \|B^4\|_1 \le \|B\|_1{}^4.$$

Προφανώς, επαληθεύονται οι σχέσεις ισοδυναμίας μεταξύ των νορμών, όπως αυτές παρουσιάζονται στον πίνακα στην αρχή της ενότητας αυτής:

$$\|A\|_1 = 13 \leq \sqrt{3}\ \|A\|_2 = \sqrt{3}\ \sqrt{90{,}4952} \cong 1{,}732 \times 9{,}5129 \cong 16{,}476,$$

$$\|A\|_1 = 13 \leq 3\ \|A\|_\infty = 3 \times 10 = 30,$$

$$\|A\|_1 = 13 \leq \sqrt{3}\ \|A\|_F = \sqrt{3}\ \sqrt{108} = 18,$$

$$\|A\|_1 = 13 \leq \|A\|_1 = 28,$$

$$\|A\|_1 = 13 \leq 3\ \|A\|_\infty = 18,$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{90{,}4952} = 9{,}5129 \leq \sqrt{3}\ \|A\|_1 = \sqrt{3}\ \times 13 \cong 1{,}732 \times 13 \cong 22{,}516,$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{90{,}4952} = 9{,}5129 \leq \sqrt{3}\ \|A\|_\infty = \sqrt{3}\ \times 10 \cong 1{,}732 \times 10 = 17{,}32,$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{90{,}4952} = 9{,}5129 \leq \|A\|_1 = 28,$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{90{,}4952} = 9{,}5129 \leq\ \|A\|_F = \sqrt{108}\ \cong 10{,}39,$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{90{,}4952} = 9{,}5129 \leq 3\ \|A\|_\infty = 18,$$

$$\|A\|_\infty = 10 \leq 3\ \|A\|_1 = 3 \times 13 = 39,$$

$$\|A\|_\infty = 10 \leq \sqrt{3}\ \|A\|_2 = \sqrt{3}\ \sqrt{90{,}4952} \cong 1{,}732 \times 9{,}5129 \cong 16{,}476,$$

$$\|A\|_\infty = 10 \leq \|A\|_1 = 28,$$

$$\|A\|_\infty = 10 \leq \sqrt{3}\ \|A\|_F = \sqrt{3}\ \sqrt{108} = 18,$$

$$\|A\|_\infty = 10 \leq 3\ \|A\|_\infty = 18,$$

$$\|A\|_1 = 28 \leq 3\ \|A\|_1 = 3 \times 13 = 39,$$

$$\|A\|_1 = 28 \leq \sqrt[2]{3^3}\ \|A\|_2 = \sqrt{27}\ \sqrt{90{,}4952} \cong 5{,}196 \times 9{,}5129 \cong 49{,}43,$$

$$\|A\|_1 = 28 \leq 3\ \|A\|_\infty = 3 \times 10 = 30,$$

$$\|A\|_1 = 28 \leq 3\ \|A\|_F = 3 \times \sqrt{108} = 18\sqrt{3} \cong 18 \times 1{,}732 \cong 31{,}176,$$

$$\|A\|_1 = 28 \leq 3 \times 3\|A\|_F = 9 \times 6 = 54,$$

$$\|A\|_F = \sqrt{108} \cong 10{,}39 \leq \sqrt{3}\ \|A\|_1 = \sqrt{3}\ \times 13 \cong 1{,}732 \times 13 = 22{,}516,$$

$$\|A\|_F = \sqrt{108} \cong 10{,}39 \leq \sqrt{3}\ \|A\|_2 = \sqrt{3}\ \times \sqrt{90{,}4952} \cong 1{,}732 \times 9{,}5129 \cong 16{,}476,$$

$$\|A\|_F = \sqrt{108} \cong 10{,}39 \leq \sqrt{3}\ \|A\|_\infty = \sqrt{3} \times 10 \cong 1{,}732 \times 10 = 17{,}32,$$

$$\|A\|_F = \sqrt{108} \cong 10{,}39 \le \|A\|_1 = 28,$$

$$\|A\|_F = \sqrt{108} \cong 10{,}39 \le 3\ \|A\|_\infty = 18,$$

$$n\|A\|_\infty = 18 \le n\ \|A\|_1 = 3 \times 13 = 39,$$

$$n\|A\|_\infty = 18 \le n\ \|A\|_2 = 3 \times \sqrt{90{,}4952} \cong 3 \times 9{,}5129 = 28{,}5387,$$

$$n\|A\|_\infty = 18 \le n\ \|A\|_\infty = 3 \times 10 = 30,$$

$$n\|A\|_\infty = 18 \le n\ \|A\|_1 = 3 \times 28 = 84,$$

$$n\|A\|_\infty = 18 \le n\ \|A\|_F = 3 \times \sqrt{108} \cong 3 \times 10{,}39 = 31{,}176.$$

# Κεφάλαιο 4. Διανυσματικές Νόρμες στον Χώρο των Πινάκων

Στο Κεφάλαιο 3 είδαμε πως υπάρχουν νόρμες διανυσμάτων πάνω στους πίνακες, δηλαδή διανυσματικές νόρμες στον χώρο των πινάκων $M_n$ οι οποίες δεν ικανοποιούν απαραίτητα το Αξίωμα της Υποπολλαπλασιαστικότητας 3.1.1.(v). Οι νόρμες αυτές ονομάζονται *γενικευμένες νόρμες πινάκων*, τις οποίες από εδώ και στο εξής θα τις συμβολίζουμε ως $\|\circ\|$ ή ως $G(\circ)$. Σε πολλές σημαντικές εφαρμογές δεν είναι αναγκαίο το Αξίωμα 3.1.1(v). Για παράδειγμα, το πολύ χρήσιμο όριο του Πορίσματος 3.2.7 ισχύει για μία κατηγορία συναρτήσεων πιο γενικών από τις νόρμες διανυσμάτων, όχι μόνο για τις νόρμες πινάκων. Γι' αυτό το λόγο, στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε αναλυτικά τις νόρμες αυτές.

Αρχικά, θα αναφέρουμε μερικά παραδείγματα διανυσματικών νορμών στον $M_n$, κάποιες απ' τις οποίες μπορεί να είναι νόρμες πινάκων.

- Αν $G(\circ)$ είναι μία νόρμα διανυσμάτων στον $M_n$ και αν $T, S \in M_n$ είναι αντιστρέψιμοι πίνακες, τότε η συνάρτηση που ορίζεται από τη σχέση:

$$G_{T,S}(A) \triangleq G(TAS), \qquad A \in M_n$$

  είναι διανυσματική νόρμα στον $M_n$. Ακόμα και αν η $G(\circ)$ είναι νόρμα πινάκων, η $G_{T,S}(\circ)$ μπορεί να μην ικανοποιεί το Αξίωμα 3.1.1(v) και επομένως δεν είναι απαραίτητα νόρμα πινάκων.

- Το ***γινόμενο Hadamard*** (Hadamard product) δύο πινάκων $A = [a_{ij}]$ και $B = [b_{ij}]$ ίδιου μεγέθους είναι απλά το γινόμενο στοιχείο-προς-στοιχείο των δύο πινάκων και συμβολίζεται ως: $A \circ B \triangleq [a_{ij}b_{ij}]$.
  Πήρε το όνομά του από τον Γάλλο μαθηματικό Jacques Hadamard και είναι γνωστό και ως ***Schur product*** ή ως ***entrywise product***.
  Αν $H \in M_n$ είναι ένας δεδομένος πίνακας χωρίς μηδενικά στοιχεία και $G(\circ)$ είναι μία νόρμα διανυσμάτων στον $M_n$, τότε η συνάρτηση που ορίζεται από την ακόλουθη σχέση:

$$G_H(A) \triangleq G(H \circ A), \qquad A \in M_n$$

  είναι νόρμα διανύσματος στον $M_n$. Ακόμα και αν η $G(\circ)$ είναι νόρμα πινάκων, η $G_H(\circ)$ δεν είναι απαραίτητα νόρμα πινάκων και αυτό εξαρτάται από την επιλογή του πίνακα $H$.

- Η συνάρτηση που ορίζεται από τη σχέση:

$$G\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \triangleq \frac{1}{2}[|a+d| + |a-d| + |b| + |c|]$$

  είναι νόρμα διανύσματος στον χώρο $M_2$.

- Έστω ένας πίνακας $A \in M_n$. Το σύνολο που ορίζεται από τη σχέση:

  $$F(A) \triangleq \{x^*Ax \ : \ x \in C^n \ \text{και} \ \ x^*x = 1\},$$

  ονομάζεται ***αριθμητικό πεδίο*** (numerical range) του πίνακα $A$.
  Η συνάρτηση που ορίζεται από τη σχέση:

  $$r(A) \triangleq \max_{x^*x \le 1} |x^*Ax| = \max_{z \in F(A)} |z|,$$

  ονομάζεται ***αριθμητική ακτίνα*** (numerical radius) του $A$. Η $r(A)$ είναι μία νόρμα διανυσμάτων στον $M_n$, αλλά όχι νόρμα πινάκων.

- Η $l_\infty$ νόρμα στον $M_n$, ορίζεται από τη σχέση:

  $$\|A\|_{\infty,e} \triangleq \max_{1 \le i,j \le n} |a_{ij}|.$$

  Όπως είδαμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, η $\|\circ\|_{\infty,e}$ είναι νόρμα διανυσμάτων στον $M_n$, αλλά όχι νόρμα πινάκων. Όμως, η $n\|\circ\|_{\infty,e}$ είναι νόρμα πινάκων.

Όλα τα προηγούμενα παραδείγματα αποδεικνύουν επαρκώς ότι υπάρχουν πολλές διανυσματικές νόρμες στον $M_n$ οι οποίες δεν είναι νόρμες πινάκων. Θα δούμε αμέσως μετά πως κάθε νόρμα διανυσμάτων στον $M_n$ είναι *ισοδύναμη* με οποιαδήποτε νόρμα πινάκων, υπό την έννοια ότι έχουν τις ίδιες συγκλίνουσες ακολουθίες. Στην πραγματικότητα, ένα κάπως πιο γενικό αποτέλεσμα έπεται άμεσα από το Θεώρημα 2.2.5 και είναι το ακόλουθο πόρισμα.

***Πόρισμα 4.1.*** Έστω $f(\circ)$ μία προ-νόρμα στον $M_n$, δηλαδή μία πραγματική συνάρτηση στον $M_n$ που είναι θετική, ομογενής και συνεχής. Έστω επίσης μία νόρμα πινάκων $\|\circ\|$ στον $M_n$. Τότε, υπάρχουν πεπερασμένες θετικές σταθερές $C_m$ και $C_M$ τέτοιες ώστε για κάθε πίνακα $A \in M_n$ να ισχύει:

$$C_m \|A\| \le f(A) \le C_M \|A\|. \tag{4.2}$$

Ειδικότερα, η προηγούμενη ανισότητα ισχύει κάθε φορά που η $f(\circ)$ είναι μια νόρμα διανυσμάτων στον $M_n$.

Η σχέση (4.2) είναι πολύ χρήσιμη, γιατί μας δίνει την δυνατότητα να επεκτείνουμε δεδομένα που αφορούν τις νόρμες πινάκων στις διανυσματικές νόρμες στους πίνακες, ή πιο γενικά, στις διανυσματικές προ-νόρμες στους πίνακες. Για παράδειγμα, το όριο του Πορίσματος 3.2.7 επεκτείνεται κατ' ανάλογο τρόπο και θα το διαπιστώσουμε στο αμέσως επόμενο πόρισμα.

***Πόρισμα 4.3.*** Αν $f(\circ)$ είναι μία προ-νόρμα στο χώρο $M_n$, τότε το όριο $\lim_{k\to\infty}[f(A^k)]^{1/k}$ υπάρχει για κάθε πίνακα $A \in M_n$ και επίσης ισχύει:

$$\lim_{k\to\infty} [f(A^k)]^{1/k} = \rho(A), \qquad \text{για κάθε } A \in M_n.$$

Ειδικότερα, το όριο αυτό ισχύει κάθε φορά που η $f(\circ)$ είναι μια νόρμα διανυσμάτων στον $M_n$.

***Απόδειξη.*** Έστω μία νόρμα πινάκων $\|\circ\|$ στον $M_n$. Θεωρούμε την ανισότητα:

$$C_m \left\|A^k\right\| \leq f\left(A^k\right) \leq C_M \left\|A^k\right\|,$$

η οποία συνεπάγεται

$${C_m}^{1/k} \left\|A^k\right\|^{1/k} \leq \left[f\left(A^k\right)\right]^{1/k} \leq {C_M}^{1/k} \left\|A^k\right\|^{1/k}, \quad \text{για κάθε } k = 1,2,3,\ldots$$

Όμως, ${C_m}^{1/k} \to 1$, ${C_M}^{1/k} \to 1$ και $\left\|A^k\right\|^{1/k} \to \rho(A)$, καθώς $k \to \infty$ (Πόρισμα 3.2.7). Επομένως, $\left[f\left(A^k\right)\right]^{1/k} \to \rho(A)$, καθώς $k \to \infty$ και έτσι καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το όριο $\lim_{k\to\infty}\left[f\left(A^k\right)\right]^{1/k}$ υπάρχει και ισούται με $\rho(A)$. ∎

Το τελευταίο παράδειγμα από όσα αναφέραμε πιο πάνω δείχνει και μια άλλη έννοια της ισοδυναμίας που υπάρχει μεταξύ μιας διανυσματικής νόρμας στον $M_n$ και μιας νόρμας πινάκων. Θα δούμε στη συνέχεια ότι οποιαδήποτε διανυσματική νόρμα πίνακα στον $M_n$, όπως και η $\boldsymbol{l}_\infty$, μπορεί να μετατραπεί σε νόρμα πινάκων με μία απλή τροποποίηση: αρκεί να πολλαπλασιαστεί με ένα σταθερό παράγοντα n.

***Θεώρημα 4.4.*** Για κάθε διανυσματική νόρμα $G(\circ)$ στον $M_n$, υπάρχει μία πεπερασμένη θετική σταθερά $c(G) > 0$ τέτοια ώστε η συνάρτηση $c(G)G(\circ)$ να είναι μία νόρμα πινάκων στον $M_n$. Αν $\|\circ\|$ είναι μία νόρμα πινάκων στον $M_n$ και ισχύει

$$C_m \|A\| \leq G(A) \leq C_M \|A\| \qquad \text{για κάθε } A \in M_n, \tag{4.5}$$

τότε:

$$c(G) \leq \frac{C_M}{{C_m}^2}.$$

Επιπλέον, υπάρχει μία νόρμα πινάκων για την οποία αυτό το άνω φράγμα του $c(G)$ είναι "βέλτιστο", δηλαδή:

$$c(G) = min\left\{\frac{C_M}{{C_m}^2} \;:\; \|\circ\| \textit{ είναι μία νόρμα πίνακα και η σχέση } (4.5) \textit{ ισχύει}\right\}.$$

***Απόδειξη.*** Για κάθε $c > 0$, η συνάρτηση $\|\circ\| \triangleq c\, G(\circ)$ ικανοποιεί όλα τα αξιώματα μιας νόρμας πινάκων εκτός ίσως από το Αξίωμα της Υποπολλαπλασιαστικότητας. Όμως, μπορούμε εύκολα να συμπεράνουμε από την συνέχεια της $G(\circ)$ και από τη συμπάγεια της μοναδιαίας μπάλας της ότι το $c(G)$ που ορίζεται ως:

$$c(G) \triangleq \max_{A\neq\mathbb{O}\neq B} \frac{G(AB)}{G(A)\,G(B)} = \max_{G(A)=1=G(B)}\, G(AB),$$

είναι πεπερασμένο και θετικό. (Σύμφωνα με το Θεώρημα Weierstrass, η $G(\circ)$ επιτυγχάνει μέγιστο και ελάχιστο, τα οποία είναι πεπερασμένα. Επομένως το $c(G)$, λόγω του ορισμού του, είναι πεπερασμένο.) Τότε, θα ισχύει:

$$G(AB) \leq c(G)G(A)G(B) \qquad \text{και} \qquad c(G)G(AB) \leq c(G)G(A)c(G)G(B),$$

για κάθε πίνακα $A, B \in M_n$. Υποθέτουμε τώρα πως η $\|\circ\|$ είναι μία νόρμα πινάκων στον $M_n$ και ότι ισχύουν οι ανισότητες μεταξύ $G(\circ)$ και $\|\circ\|$ (σχέση (4.5)). Τότε:

$$G(AB) \leq C_M \|AB\| \leq C_M \|A\| \|B\| \leq \frac{C_M}{{C_m}^2} G(A)G(B).$$

Επομένως, $c(G) \leq \frac{C_M}{{C_m}^2}$. Αν επιλέξουμε ως νόρμα πίνακα την $\|\circ\| = c(G)G(\circ)$, τότε θα έχουμε $C_M = c(G)$ και $C_m = 1/c(G)$. Οπότε, $C_M / {C_m}^2 = c(G)$. ■

Μία από τις συνέπειες της υποπολλαπλασιαστικότητας μιας νόρμας πινάκων είναι το γεγονός ότι για κάθε νόρμα πινάκων στον $M_n$ υπάρχει μία συμβατή διανυσματική νόρμα στον $\boldsymbol{C}^n$. Συνέπεια αυτού είναι και η ανισότητα $\rho(A) \leq \|A\|$ που ισχύει για κάθε νόρμα πινάκων $\|\circ\|$, την οποία αποδείξαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Μία νόρμα διανυσμάτων στον $M_n$ που ικανοποιεί την προηγούμενη ανισότητα για κάθε πίνακα $A \in M_n$ ονομάζεται ***φασματικά κυρίαρχη*** (spectrally dominant).

***Ορισμός 4.6.*** Η διανυσματική νόρμα $\|\bullet\|$ στον $\boldsymbol{C}^n$ ονομάζεται ***συμβατή*** (compatible, consistent) με την διανυσματική νόρμα $G(\circ)$ στον $M_n$, αν ισχύει:

$$\|Ax\| \leq G(A)\|x\|, \quad \text{για κάθε } x \in \boldsymbol{C}^n \text{ και πίνακα } A \in M_n.$$

Συχνά λέμε ότι η διανυσματική νόρμα $\|\bullet\|$ είναι ***εξαρτημένη*** (subordinate) από τη γενικευμένη νόρμα πινάκων $G(\circ)$.

Είναι αρκετά ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ότι κάποιες διανυσματικές νόρμες στον $M_n$ έχουν συμβατές διανυσματικές νόρμες στον $\boldsymbol{C}^n$ και κάποιες άλλες όχι. Επίσης, θα δούμε πιο κάτω ότι μία διανυσματική νόρμα στον $M_n$ μπορεί να έχει μία συμβατή νόρμα στον $\boldsymbol{C}^n$, χωρίς να είναι νόρμα πινάκων.

Στο προηγούμενο κεφάλαιο, αναφέραμε ένα σημαντικό θεώρημα, το Θεώρημα 3.1.6, σύμφωνα με το οποίο εάν $\|\bullet\|$ είναι μια διανυσματική νόρμα στον $\boldsymbol{C}^n$, τότε υπάρχει νόρμα πινάκων (η επαγόμενη νόρμα (3.1.5)) που είναι συμβατή με αυτήν. Το αμέσως επόμενο θεώρημα αποτελεί το αντίστροφο του Θεωρήματος 3.1.6.

***Θεώρημα 4.7.*** Αν $\|\circ\|$ είναι μία νόρμα πινάκων στον $M_n$, τότε υπάρχει διανυσματική νόρμα $\|\bullet\|$ στον $\boldsymbol{C}^n$ η οποία είναι συμβατή με αυτήν.

***Απόδειξη.*** Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει νόρμα $\|\bullet\|$ στον $\boldsymbol{C}^n$ τέτοια ώστε να ισχύει $\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$, σύμφωνα με τον προηγούμενο ορισμό.
Αν ορίσουμε τη νόρμα $\|x\|$ ως $\|x\| \triangleq \|[x \;\; 0 \;\; 0 \cdots 0]\|$, τότε θα ισχύει:

$$\begin{aligned}\|Ax\| = \|[Ax \;\; 0 \;\; 0 \cdots 0]\| &= \|A[x \;\; 0 \;\; 0 \cdots 0]\| \\ &\leq \|A\| \|[x \;\; 0 \;\; 0 \cdots 0]\| = \|A\| \|x\|. \quad ■\end{aligned}$$

Τίθεται τώρα το εξής ερώτημα: *Πότε μία διανυσματική νόρμα στον* $M_n$ *έχει συμβατή νόρμα στον* $\boldsymbol{C}^n$? Το θεώρημα που ακολουθεί μας παρέχει την ***αναγκαία*** συνθήκη ώστε να συμβαίνει αυτό.

***Θεώρημα 4.8.*** Έστω $G(\circ)$ μία διανυσματική νόρμα στον $M_n$, η οποία έχει συμβατή νόρμα $\|\bullet\|$ στον $\boldsymbol{C}^n$. Τότε, $G(A) \geq \rho(A)$ για κάθε $A \in M_n$. Πιο γενικά, ισχύει:

$$G(A_1)\,G(A_2)\,\cdots\,G(A_k) \geq \rho(A_1 A_2 \cdots A_k), \tag{4.9}$$

για κάθε $A_1, A_2, \dots, A_k \in M_n$ και $k = 1,2,\dots$

***Απόδειξη.*** Αφού η νόρμα $\|\bullet\|$ είναι συμβατή με την $G(\circ)$, τότε θα ισχύει:

$$\|Ax\| \leq G(A)\|x\|, \quad \text{για κάθε } x \in \boldsymbol{C}^n \text{ και πίνακα } A \in M_n.$$

Υποθέτουμε τώρα ότι $k = 2$ και θεωρούμε ένα μη-μηδενικό διάνυσμα $x \in \boldsymbol{C}^n$, $x \neq 0$, τέτοιο ώστε να ισχύει: $A_1 A_2 x = \lambda x$, με $|\lambda| = \rho(A_1 A_2)$. Τότε, θα έχουμε:

$$\rho(A_1 A_2)\|x\| = |\lambda|\|x\| = \|\lambda x\| = \|A_1 A_2 x\| = \|A_1(A_2 x)\|$$

$$\leq G(A_1)\,\|A_2 x\| \leq G(A_1)\,G(A_2)\|x\|. \tag{4.10}$$

Δεδομένου ότι το διάνυσμα $x$ είναι μη-μηδενικό (άρα $\|x\| \neq 0$), καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $\rho(A_1 A_2) \leq G(A_1)\,G(A_2)$. Η γενική περίπτωση έπεται με τον ίδιο τρόπο μέσω επαγωγής. ■

Η συνθήκη (4.9) του προηγούμενου θεωρήματος είναι η *αναγκαία* συνθήκη που χρειαζόμαστε. Το τεχνικό λήμμα που ακολουθεί θα μας βοήθησει να δείξουμε στο παρακάτω θεώρημα ότι η (4.9) είναι και ***ικανή***.

***Λήμμα 4.11.*** Έστω $G(\circ)$ μία διανυσματική νόρμα στον $M_n$, η οποία ικανοποιεί τη συνθήκη (4.9) και $\|\circ\|_2$ η φασματική νόρμα στον $M_n$. Τότε, υπάρχει μία πεπερασμένη θετική σταθερά $c = c(G) > 0$, τέτοια ώστε να ισχύει:

$$G(A_1)\,G(A_2)\,\cdots\,G(A_k) \geq c\,\|A_1 A_2 \cdots A_k\|_2,$$

για κάθε $A_1, A_2, \dots, A_k \in M_n$ και $k = 1,2,\dots$

***Απόδειξη.*** Σύμφωνα με το Πόρισμα 2.2.8, υπάρχει μία πεπερασμένη θετική σταθερά $b = b(G)\ (b > 0)$, τέτοια ώστε $\|A\|_2 \geq b\,G(A)$ για κάθε $A \in M_n$. Έστω $k$ ένας θετικός ακέραιος και οι πίνακες $A_1, A_2, \dots, A_k \in M_n$. Σύμφωνα με το Θεώρημα Παραγοντοποίησης SVD (Θεώρημα 1.1.22), υπάρχουν ορθομοναδιαίοι πίνακες $V$ και $W$ και ένας διαγώνιος $\Sigma = diag\,(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$, όπου $\sigma_i \geq 0$ είναι οι ιδιάζουσες τιμές του πίνακα $A_1 A_2 \cdots A_k$, τέτοιοι ώστε:

$$A_1 A_2 \cdots A_k = V\Sigma W^* \quad \text{και} \quad \rho(\Sigma) = max\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\} = \|A_1 A_2 \cdots A_k\|_2.$$

Από τη σχέση (4.9) θα έχουμε:

$$\begin{aligned} G(V^*)\, G(A_1)\, G(A_2) \cdots G(A_k) G(W) &\geq \rho(V^* A_1 A_2 \cdots A_k W) \\ &= \rho(\Sigma) \qquad (A_1 A_2 \cdots A_k = V \Sigma W^*) \\ &= \|\Sigma\|_2 \qquad (\text{Ορισμός νόρμας } \|\circ\|_2) \\ &= \|V^* A_1 A_2 \cdots A_k W\|_2 \\ &= \|A_1 A_2 \cdots A_k\|_2. \quad (V^* \text{ ορθομοναδιαίος}) \end{aligned}$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει γιατί η φασματική νόρμα $\|A\|_2$ είναι ορθομοναδιαία αναλλοίωτη. Επομένως, συμπεραίνουμε ότι:

$$\begin{aligned} G(A_1)\, G(A_2) \cdots G(A_k) G(W) &\geq \frac{1}{G(V^*) G(W)} \|A_1 A_2 \cdots A_k\|_2 \\ &\geq \frac{b^2}{\|V^*\|_2 \, \|W\|_2} \|A_1 A_2 \cdots A_k\|_2 \\ &= b^2 \|A_1 A_2 \cdots A_k\|_2. \quad (\|V^*\|_2 = 1 = \|W\|_2) \end{aligned}$$

Η δεύτερη ανισότητα ισχύει γιατί οι νόρμες $\|\circ\|_2$ και $G(\circ)$ είναι ισοδύναμες, οπότε θα ισχύει $\|\circ\|_2 \geq bG(\circ)$. Η παραπάνω ισότητα εξηγείται ως εξής:

$W$ ορθομοναδιαίος, δηλαδή $W^* W = W W^* = I$ και έτσι έχουμε $\|W^* W\|_2 = \|I\|_2 = 1$. Όμως:

$$1 = \|W^* W\|_2 = \|W\|_2^2,$$

ή ισοδύναμα,

$$\|W\|_2 = 1.$$

Αν τώρα επιλέξουμε ως $b^2$ το $c \triangleq b^2$, τότε έχουμε αποδείξει τον ισχυρισμό του λήμματος. ■

***Θεώρημα 4.12.*** Έστω $G(\circ)$ μία διανυσματική νόρμα στον $M_n$. Υπάρχει μια διανυσματική νόρμα $\|\bullet\|$ στον $\boldsymbol{C}^n$, τέτοια ώστε

$$\|Ax\| \leq G(A)\|x\|, \quad \text{για κάθε } x \in \boldsymbol{C}^n \text{ και πίνακα } A \in M_n,$$

αν και μόνο αν ισχύει:

$$G(A_1)\, G(A_2) \cdots G(A_k) \geq \rho(A_1 A_2 \cdots A_k),$$

για κάθε $A_1, A_2, \ldots, A_k \in M_n$ και $k = 1,2, \ldots$

***Απόδειξη.*** Η *αναγκαιότητα* έχει ήδη αποδειχθεί στο Θεώρημα 4.8. Για την *επάρκεια,* θα δείξουμε ότι υπάρχει νόρμα πινάκων $\|\circ\|$ στον $M_n$, τέτοια ώστε να ισχύει:

$$G(A) \geq \|A\|, \quad \text{για κάθε πίνακα } A \in M_n.$$

Έστω $\|\bullet\|$ μια διανυσματική νόρμα στον $\boldsymbol{C}^n$, η οποία είναι συμβατή με τη νόρμα $\|\circ\|$ (υπάρχει σίγουρα η $\|\bullet\|$, σύμφωνα με το Θεώρημα 4.7). Έστω επίσης ένα διάνυσμα $x \in \boldsymbol{C}^n$ και ένας πίνακας $A \in M_n$, γνωστά. Τότε, $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\| \leq G(A)\|x\|$. Επομένως, αρκεί τώρα να κατασκευάσουμε μία νόρμα πινάκων η οποία θα κυριαρχείται από την $G(\circ)$. Για έναν δεδομένο πίνακα $A \in M_n$, υπάρχουν αναρίθμητοι τρόποι να τον αναπαραστήσουμε σαν γινόμενο πινάκων ή σαν άθροισμα γινομένου πινάκων. Ορίζουμε:

$$\|A\| \triangleq inf\left\{\sum_i G(A_{i1}) \cdots G(A_{ik_i}) \ : \sum_i A_{i1} \cdots A_{ik_i} = A \quad και\ κάθε\ \ A_{ik_j} \in M_n\right\}.$$

Αν $\sum A_{i1} \cdots A_{ik_i} = A$, τότε σύμφωνα με το Λήμμα 4.11 και την τριγωνική ανισότητα για τη φασματική νόρμα $\|\circ\|_2$, θα έχουμε:

$$\begin{aligned}\sum_i G(A_{i1}) \cdots G(A_{ik_i}) &\geq \sum_i c\left\|A_{i1} \cdots A_{ik_i}\right\|_2 \\ &\geq c\left\|\sum_i A_{i1} \cdots A_{ik_i}\right\|_2 = c\ \|A\|_2.\end{aligned}$$

Από την προηγούμενη ανισότητα έπεται ότι η συνάρτηση $\|\circ\|$ που κατασκευάσαμε είναι θετική, για κάθε μη-μηδενικό πίνακα. Η ομογένειά της έπεται άμεσα από την ομογένεια της $G(\circ)$. Η τριγωνική ανισότητα και η υποπολλαπλασιαστικότητα για την $\|\circ\|$ προκύπτουν από τον ορισμό της, ως το ελάχιστο αθροίσματος γινομένων. ■

Μέχρι τώρα είδαμε ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε μία διανυσματική νόρμα στον $M_n$ να έχει συμβατή νόρμα στον $\boldsymbol{C}^n$. Στο προηγούμενο κεφάλαιο είχαμε δει ότι αν έχουμε μία νόρμα $\|\bullet\|$ στον $\boldsymbol{C}^n$, τότε η νόρμα που επάγεται απ' αυτήν (Ορισμός 3.1.2) είναι μία υποπολλαπλασιαστική διανυσματική νόρμα στον $M_n$, δηλαδή είναι νόρμα πίνακα, η οποία είναι συμβατή με την $\|\bullet\|$.

Θα μας απασχολήσει τώρα το εξής ερώτημα: *Πότε μία νόρμα στον $\boldsymbol{C}^n$ έχει συμβατή διανυσματική νόρμα στον $M_n$, η οποία δεν είναι υποπολλαπλασιαστική και άρα δεν είναι νόρμα πίνακα*? Η απάντηση είναι ότι αυτό ισχύει πάντα και θα το διαπιστώσουμε στο επόμενο θεώρημα.

***Θεώρημα 4.13.*** Έστω μία δεδομένη νόρμα $\|\bullet\|$ στον $\boldsymbol{C}^n$. Τότε, υπάρχει μία διανυσματική νόρμα $G(\circ)$ στον $M_n$, η οποία *δεν* είναι νόρμα πινάκων, τέτοια ώστε να ισχύει:

$$\|Ax\| \leq G(A)\|x\|, \quad \text{για κάθε } x \in \boldsymbol{C}^n \text{ και πίνακα } A \in M_n.$$

***Απόδειξη.*** Θεωρούμε έναν πίνακα μετάθεσης $P \in M_n$, ο οποίος έχει μηδενική κύρια διαγώνιο. Για παράδειγμα,

$$P = [p_{ij}] \quad \text{με} \quad p_{ij} = 1, \quad \text{αν} \quad j = i + 1 \quad \text{ή} \quad i = n \quad \text{και} \quad j = 1$$

$$\text{και} \quad p_{ij} = 0, \quad \text{αλλού.}$$

Τότε, και ο ανάστροφος πίνακας του $P$, δηλαδή ο $P^T$, έχει μηδενική κύρια διαγώνιο και ισχύει: $PP^T = I$. Έστω τώρα η νόρμα πίνακα $\|\circ\|$ στον $M_n$, η οποία επάγεται από την διανυσματική νόρμα $\|\bullet\|$ (Ορισμός 3.1.2). Ορίζουμε τη $G(\circ)$ στον $M_n$, από την ακόλουθη σχέση:

$$G(A) \triangleq \|A\| + \|P\| \, \|P^T\| \, \max_{1 \leq i \leq n} |a_{ii}|.$$

Είναι ολοφάνερο πως η $G(\circ)$ είναι μία διανυσματική νόρμα στον $M_n$, $G(A) \geq \|A\|$ για κάθε $A \in M_n$ και $\|Ax\| \leq \|A\| \, \|x\| \leq G(A)\|x\|$, για κάθε $A \in M_n$ και $x \in \boldsymbol{C}^n$. Όμως:

$$G(PP^T) = G(I) = \|I\| + \|P\| \, \|P^T\| \times 1 = 1 + \|P\| \, \|P^T\|, \qquad (\|I\| = 1, \text{Θεώρημα } 3.1.6)$$

$$G(P) = \|P\|, \qquad (\text{αφού } p_{ii} = 0)$$

$$G(P^T) = \|P^T\|, \qquad (\text{αφού } {p_{ii}}^T = 0)$$

$$G(PP^T) > G(P)G(P^T).$$

Επομένως, η νόρμα $G(\circ)$ στον $M_n$ είναι συμβατή με την δεδομένη νόρμα $\|\bullet\|$ στον $\boldsymbol{C}^n$, αφού $G(A) \geq \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$, αλλά όχι υποπολλαπλασιαστική και άρα δεν είναι νόρμα πίνακα. ∎

## Βιβλιογραφία


- B. J. Stone, Best Possible Ratios of Certain Matrix Norms, *Numerische Math.* 4 (1962), 114-116.

- D. Fearnley-Sander and J. S. V. Symons, Apollonius and Inner Products, *Amer. Math. Monthly* 81 (1974), 990-993.

- E. F. Beckenbach and R. Bellman, *Inequalities*, Springer - Verlag, New York 1965.

- F. A. Valentine, *Convex Sets*, Mc Graw - Hill, New York 1964.

- H. Schneider and W. G. Strang, Comparison Theorems for Supremum Norms, *Numerische Math.* 4 (1962), 15-20.

- J. Von Neumann, Some Matrix - Inequalities and Metrization of Matric - Space, *Tomsk Univ. Rev.* 1 (1937), 205-218.

- Roger A. Horn and Charles R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge 1990.

- Αργυρός Σπυρίδων, *Σημειώσεις Πραγματικής Ανάλυσης*, Αθήνα 2003.

- Καδιανάκης Νικόλαος, Σωτήριος Καρανάσιος, *Γραμμική Άλγεβρα - Αναλυτική Γεωμετρία και Εφαρμογές*, Αθήνα 2001.

- Μαρουλάς Ιωάννης, *Γραμμική Άλγεβρα*, Αθήνα 2000.