



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
Δ.Π.Μ.Σ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ  
ΤΟΜΕΑΣ ΡΕΥΣΤΩΝ  
ΜΟΝΑΔΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ  
ΡΕΥΣΤΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ &  
ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Μεταπτυχιακή Εργασία

Μετατόπιση 3Δ Περιοδικών Πλεγμάτων με  
χρήση Προτύπου Κίνησης Απαραμόρφωτου  
Στερεού

Αλέξανδρος Εσκαντάρ

Επιβλέπων : Καθηγητής Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου

Ιούλιος, 2021

## Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση αυτής της μεταπτυχιακής εργασίας, επισφραγίζεται η ολοκλήρωση των μεταπτυχιακών σπουδών στο μεταπτυχιακό εξειδίκευσης του ΔΠΜΣ Υπολογιστικής Μηχανικής.

Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή της μεταπτυχιακής μου εργασίας κ. Κυριακό Γιαννάκογλου, Καθηγητή του Τμήματος Μηχανολόγων του ΕΜΠ, που μου έδειξε εμπιστοσύνη και μου ανέθεσε μια πολύ ενδιαφέρον εργασία, για όλες τις συζητήσεις που είχαμε και τέλος για όλη την γνώση που μετέδωσε καθόλη την διάρκεια των μεταπτυχιακών σπουδών μου.

Έπειτα θα ήθελα να ευχαριστήσω τη Δρ. Βαρβάρα Ασουτή για τον σημαντικό χρόνο που αφιέρωσε, να αποσαφηνίζει απορίες, να αποστέλει επιστημονικό υλικό αλλά και λογισμικό ώστε να ολοκληρώσω έγκαιρα και με επιτυχία την εργασία μου.

Επιπλέον ευχαριστώ θερμά τον καλό μου φίλο και συνάδελφο Άχμεντ - Τριαντάφυλλο Ναιντί για την υπομονή του και την άψογη συνεργασία. Χωρίς τις αμέτρητες ώρες συζήτησης, υποστήριξης και συνεχούς προσπάθειας για την κατάκτηση γνώσης, δεν θα είχα καταφέρει να ολοκληρώσω μια τόσο απαιτητική εργασία. Η συμβολή του ήταν σημαντική τόσο σε επίπεδο δουλειάς αλλά και σε επίπεδο παρέας.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου Μαρία και Ηλία για την υποστήριξη τους σε όλες τις επιλογές μου αλλά και σε όλη την διάρκεια των σπουδών μου. Όλοι οι καλοί μου φίλοι ήταν δίπλα μου και συνετέλεσαν στο να ολοκληρώσω τις σπουδές μου επιτυχία, επομένως τους ευχαριστώ θερμά για όλα.



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
Δ.Π.Μ.Σ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ  
ΤΟΜΕΑΣ ΡΕΥΣΤΩΝ  
ΜΟΝΑΔΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ  
ΡΕΥΣΤΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ & ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

## Μετατόπιση 3Δ Περιοδικών Πλεγμάτων με χρήση Προτύπου Κίνησης Απαραμόρφωτου Στερεού.

Μεταπτυχιακή εργασία του  
**Αλέξανδρου Εσκαντάρ**

Επιβλέπων: Κυριάκος Χ. Γιαννάκογλου, Καθηγητής ΕΜΠ  
Αθήνα, Ιούλιος, 2021

### Περίληψη

Στη μεταπτυχιακή αυτή εργασία προγραμματίζεται και αξιολογείται η μέθοδος παραμόρφωσης 2Δ και 3Δ υπολογιστικών πλεγμάτων με τη χρήση του Προτύπου Κίνησης Απαραμόρφωτου Στερεού (ΚΑΣ). Η μέθοδος αυτή συγκαταλέγεται στις μεθόδους προσαρμοστικής παραμόρφωσης φυσικών αναλόγων και αναπτύσσεται με σκοπό την εφαρμογή της στη διαδικασία βελτιστοποίησης σχήματος στη μηχανική των ρευστών. Ωστόσο, μπορεί να εφαρμοστεί εξίσου και σε άλλες εφαρμογές που απαιτούν παραμόρφωση πλέγματος, όπως είναι οι υπολογισμοί αεροελαστικότητας ή προβλήματα πρόλεξης ρωών. Η μέθοδος ΚΑΣ, έχοντας ως δεδομένες τις μετακινήσεις των οριακών κόμβων, μετακινεί κάθε κυψέλη του πλέγματος, προσεγγίζοντας την ιδανική κίνηση του απαραμόρφωτου στερεού σώματος. Για την υλοποίηση της μεθόδου αναπτύσσεται λογισμικό το οποίο δέχεται ως είσοδο το προς παραμόρφωση πλέγμα και τις μετατοπίσεις των οριακών κόμβων του και υπολογίζει τις νέες θέσεις των πλεγματικών κόμβων, διατηρώντας προφανώς την τοπολογία του αρχικού πλέγματος.

Στην εργασία αυτή, αρχικά παρουσιάζονται οι πιο διαδεδομένες μέθοδοι προσαρμοστικής παραμόρφωσης. Στη συνέχεια, αναπτύσσεται το θεωρητικό υπόβαθρο της μεθόδου ΚΑΣ και αναλύονται τα βασικά βήματα της διαδικασίας παραμόρφωσης με βάση το πρότυπο κίνησης απαραμόρφωτου στερεού. Για την επίδειξη και αξιολόγηση της λειτουργίας και της στιβαρότητάς της, η μέθοδος που αναπτύσσεται εφαρμόζεται σε μια πληθώρα περιπτώσεων 2Δ και 3Δ υπολογιστικών πλεγμάτων. Επιπλέον προτείνονται δύο επεκτάσεις της μεθόδου που αφορούν τη διαχείριση παραμορφώσεων σε περιοδικά πλέγματα κυρίως για εφαρμογές στροβιλομηχανών και την προσθήκη στάθμισης στην αρχική μέθοδο, με σκοπό τη διατήρηση της απαραμόρφωτης δομής του πλέγματος γύρω από την παραμορφωμένη γεωμετρία. Η βελτιωμένη μέθοδος που προκύπτει με την προσθήκη στάθμισης ονομάζεται Σταθμισμένη Κίνηση Απαραμόρφωτου Στερεού ΣΚΑΣ.





NATIONAL TECHNICAL UNIVERSITY OF ATHENS  
MASTER IN COMPUTATIONAL MECHANICS  
FLUIDS DEPARTMENT  
PARALLEL CFD & OPTIMIZATION UNIT

## Displacement of 3D Periodic Meshes in Computational Fluid Dynamics using the Rigid Body Motion pattern

Master Thesis by

**Alexandros Eskantar**

Supervisor: Kyriakos C. Giannakoglou, Professor NTUA

Athens, July, 2021

### **Abstract**

On this master's thesis, a 2D and 3D mesh deformation technique is programmed and evaluated using Rigid Body Motion (RBM) pattern. The RBM is classified with the methods of adaptive deformation of natural analogies and is developed to apply in process of shape optimization, in the field of fluid dynamics. However, it can also be applied to other applications that require mesh deformation, such as aeroelasticity calculations or flow prediction problems. Given the movements of the boundary nodes, the RBM method moves each cell of the mesh, approaching the ideal motion of the undeformed rigid body. For the implementation of the method a software is developed, which receives as input the mesh to be deformed and the displacements of its boundary nodes, and computes the new positions of the mesh nodes as output, maintaining the topology of the initial mesh.

In this work, first, the most common adaptive deformation techniques are presented. Then, the theoretical background of the RBM method is described, as the basic steps of the deformation process. To demonstrate and evaluate its operation and robustness, the RBM is applied to a variety of 2D and 3D cases. In addition, two improvements of the method are proposed, handling of deformations in periodic meshes for turbomachinery applications and the addition of weighting to the initial method. The improved method that results from adding weights is called Weighted Rigid Body Motion (WRBM).

# Ακρωνύμια

2Δ	Δύο Διαστάσεων/Διδιάστατο.
3Δ	Τριών Διαστάσεων/Τριδιάστατο.
CFD	Computational Fluid Dynamics.
GMRES	Generalized Minimal Residual Method.
IDW	Inverse Distance Weighting.
RANS	Reynolds Averaged Navier Stokes.
RBM	Rigid Body Motion.
WRBM	Weighted Rigid Body Motion.
EMΠ	Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.
ΚΑΣ	Κίνηση Απαραμόρφωτου Στερεού.
ΜΠΥΡ&Β	Μονάδα Παράλληλης Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής & Βελτιστοποίησης.
ΣΚΑΣ	Σταθμισμένη Κίνηση Απαραμόρφωτου Στερεού.
ΥΡΔ	Υπολογιστική Ρευστοδυναμική.

# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Εισαγωγή</b>	<b>1</b>
1.1	Υπολογιστικά Πλέγματα . . . . .	1
1.2	Περί Αεροδυναμικής Βελτιστοποίησης . . . . .	2
1.3	Ανάγκη Παραμόρφωσης Πλέγματος . . . . .	4
1.4	Μέθοδοι Προσαρμοστικής Παραμόρφωσης Πλέγματος . . . . .	5
1.4.1	Μέθοδοι Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων . . . . .	6
1.4.2	Μέθοδοι Φυσικών Αναλόγων . . . . .	7
1.4.3	Αλγεβρικές Μέθοδοι . . . . .	9
1.4.4	Τεχνική Απαραμόρφωτου Σώματος (ΚΑΣ) . . . . .	12
1.4.5	Σύνοψη . . . . .	14
1.5	Στόχος και Δομή της Εργασίας . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Πρότυπο Κίνησης Απαραμόρφωτου Σώματος (ΚΑΣ)</b>	<b>18</b>
2.1	Μαθηματική Θεμελίωση ΚΑΣ . . . . .	18
2.2	Δομή Αλγορίθμου της μεθόδου ΚΑΣ . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Πρότυπο Σταθμισμένης Κίνησης Απαραμόρφωτου Σώματος (ΣΚΑΣ)</b>	<b>25</b>
3.1	Θεωρητική Θεμελίωση ΣΚΑΣ . . . . .	25
3.2	Μαθηματική Θεμελίωση ΣΚΑΣ . . . . .	27
3.3	Υπολογισμός Βαρών ΣΚΑΣ . . . . .	29
3.4	Σύγκριση των μεθόδων ΣΚΑΣ-ΚΑΣ . . . . .	30
3.5	Δομή Αλγορίθμου της μεθόδου ΣΚΑΣ . . . . .	33
<b>4</b>	<b>Παραμόρφωση Περιοδικών Πλεγμάτων</b>	<b>34</b>
4.1	Περί Περιοδικότητας στα Υπολογιστικά Πλέγματα . . . . .	34
4.2	Μέθοδος Παραμόρφωσης Περιοδικών Ορίων στη μέθοδο ΣΚΑΣ . . . . .	35
4.3	Εφαρμογές Επίδειξης Μεθόδου ΣΚΑΣ σε Περιοδικά Πλέγματα . . . . .	38
4.3.1	Εφαρμογή 1 <sup>η</sup> . . . . .	39

4.3.2	Εφαρμογή 2 <sup>η</sup> . . . . .	42
<b>5</b>	<b>Εφαρμογές ΣΚΑΣ σε 2Δ και 3Δ Υπολογιστικά Πλέγ- ματα</b>	<b>45</b>
5.1	Εφαρμογή σε Πτερύγιο Στροβιλομηχανής . . . . .	45
5.2	Εφαρμογή στην Πτέρυγα ONERA M6 . . . . .	50
5.3	Ορθογώνιο Παραλληλεπίπεδο σε Χωρίο με Περιφερειακή Περιοδικότητα . . . . .	53
<b>6</b>	<b>Σύγκριση ΣΚΑΣ με τη μέθοδο IDW</b>	<b>57</b>
6.1	Βασικές Αρχές της Μεθόδου IDW με Παρεμβολή Στροφών .	57
6.2	Συγκριτική Εφαρμογή σε 3Δ πλέγμα, γύρω από δύο σώματα χοίρων . . . . .	58
<b>7</b>	<b>Ανακεφαλαίωση και Συμπεράσματα</b>	<b>62</b>
7.1	Ανακεφαλαίωση . . . . .	62
7.2	Συμπεράσματα . . . . .	63
7.3	Προτάσεις για Μελλοντική Μελέτη . . . . .	64
<b>A</b>	<b>Μαθηματική Ανάπτυξη ΚΑΣ 2Δ</b>	<b>66</b>
<b>B</b>	<b>Μαθηματική Ανάπτυξη ΚΑΣ 3Δ</b>	<b>69</b>
<b>C</b>	<b>Μετρικές Ποιότητας στα Υπολογιστικά Πλέγματα</b>	<b>75</b>
C.1	Μετρικές 2Δ Πλεγμάτων . . . . .	76
C.1.1	Υπολογισμός Ιακωβιανής . . . . .	76
C.1.2	Μετρική Σχήματος . . . . .	78
C.2	Μετρικές 3Δ πλεγμάτων . . . . .	78
C.2.1	Υπολογισμός Ιακωβιανής . . . . .	78
C.2.2	Μετρική Σχήματος . . . . .	79
	<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>81</b>



# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

### 1.1 Υπολογιστικά Πλέγματα

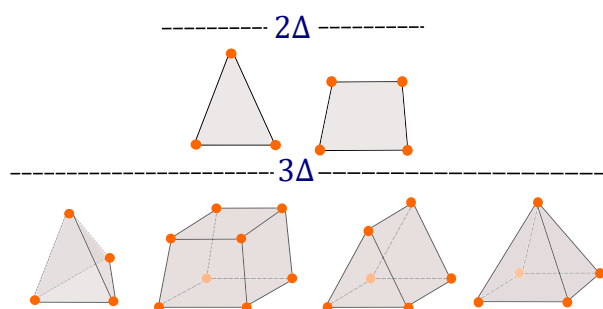
Στην επιστήμη της υπολογιστικής μηχανικής, η έννοια του υπολογιστικού πλέγματος αποτελεί έναν από τους πιο βασικούς παράγοντες μιας υπολογιστικής μελέτης. Στην ουσία ένα υπολογιστικό πλέγμα τελικά οδηγεί στη διακριτοποίηση των εξισώσεων του φυσικού προβλήματος σε πεπερασμένους όγκους ή στοιχεία. Εφόσον η παρούσα αυτή εργασία αφορά κυρίως εφαρμογές ρευστομηχανικής από εδώ και στο εξής θα αναφέρονται έννοιες από τον επιστημονικό χώρο των ρευστών, χωρίς να σημαίνει ότι όσα θα ειπωθούν στις παρακάτω παραγράφους δεν αντιστοιχίζονται ένα προς ένα και στον επιστημονικό χώρο της μηχανικής στερεών.

Οι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν τη μηχανική των ρευστών είναι οι γνωστές Navier-Stokes. Όταν εισάγεται η έννοια της τύρβης σε αυτές τότε παράγονται οι Reynolds Averaged Navier Stokes (RANS), όπου μέσω διάφορων μοντέλων τύρβης όπως (k- $\omega$ , RNG k- $\omega$ , SST, k- $\epsilon$ ) προσομοιώνονται φαινόμενα ρευστομηχανικής σε ροές υψηλού αριθμού Reynolds.

Οι εξισώσεις RANS στη γενική τους μορφή ολοκληρώνονται χώρο-χρονικά, με εξαίρεση να αποτελούν περιπτώσεις μόνιμης κατάστασης (Steady State), όπου οι χρονικοί παράγωγοι μηδενίζονται και απλοποιούνται αρκετά οι εξισώσεις προς επίλυση. Έτσι η χρονική διακριτοποίηση γίνεται μέσω ενός σταθερού χρονικού βήματος ενώ η χωρική διακριτοποίηση μέσω του υπολογιστικού πλέγματος. Για αυτόν τον λόγο, οι μηχανικοί δίνουν ιδιαίτερη προσοχή στη γένεση του, καθώς η ποιότητα των κυψελών που δημιουργούνται επηρεάζει άμεσα τα αποτελέσματα της προσομοίωσης. Η ποιότητα του υπολογιστικού πλέγματος εξετάζεται με διάφορα κριτήρια ποιότητας, όπου κάποια από αυτά θα αναφερθούν σε επόμενη παράγραφο.

Τα υπολογιστικά πλέγματα διαχωρίζονται σε διδιάστατα (2D) και τριδιά-

τατα (3Δ). Ξεκινώντας από τα 2Δ, χωρίζονται σε τρεις κατηγορίες ανάλογα το τύπο στοιχείων που τα αποτελούν. Τα πιο διαδεδομένα στοιχεία πλεγμάτων αυτού του τύπου είναι τα τρίγωνα και τα τετράπλευρα. Έτσι τα 2Δ υπολογιστικά πλέγματα κατηγοριοποιούνται σε τριγωνικά, τετραπλευρικά και υβριδικά. Οι δύο πρώτες κατηγορίες είναι αρκετά σαφείς, ενώ η κατηγορία των υβριδικών πλεγμάτων έχει κατακτήσει το ενδιαφέρον των μηχανικών καθώς εκμεταλλεύεται τις δυνατότητες και των δύο τύπων πλεγμάτων. Τα 3Δ πλέγματα αποτελούνται κυρίως από τετράεδρα, πρίσματα, πυραμίδες και εξάεδρα. Ένα 3Δ πλέγμα μπορεί να περιέχει ταυτόχρονα όλα τα παραπάνω, μόνο ένα ή μερικά από τα προαναφερθέντα στοιχεία (κελιά), Σχήμα 1.1.



Σχήμα 1.1: Είδη πλεγματικών στοιχείων σε 3Δ και 2Δ πλέγματα.

## 1.2 Περί Αεροδυναμικής Βελτιστοποίησης

Στον τομέα της αεροδυναμικής και της μηχανικής των ρευστών, το πρόβλημα της ανάλυσης και της πρόλεξης των χαρακτηριστικών της ροής γύρω από αεροδυναμικά σώματα αποτελούσε ανέκαθεν βασικό πεδίο ενδιαφέροντος. Με την ανάπτυξη των θεωριών και τη διατύπωση των νόμων που διέπουν τη φυσική των ρευστών, επόμενο βήμα ήταν η ανάπτυξη κατάλληλων μεθόδων επίλυσης των εξισώσεων που διέπουν τις ροές, ώστε να προλέγονται τα χαρακτηριστικά της ροής γύρω από σώματα των οποίων η αεροδυναμική συμπεριφορά αποτελεί κρίσιμο παράγοντα σε τεχνολογικές εφαρμογές. Βασικό παράδειγμα τέτοιων εφαρμογών αποτελεί το αεροσκάφος, του οποίου η εξέλιξη ανέκαθεν ακολουθούσε τις εξελίξεις στον τομέα της αεροδυναμικής. Η γενική αδυναμία αναλυτικής επίλυσης των εξισώσεων που διέπουν τις ροές, δηλαδή των εξισώσεων συνέχειας, ορμής (γνωστές και ως εξισώσεις Navier-Stokes) και ενέργειας, οδήγησε στην ανάπτυξη του κλάδου της Υπολογιστικής Ρευστοδυναμικής (CFD), που ασχολείται με την υλοποίηση μεθόδων για την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων αυτών, με τη χρήση ηλεκτρονικών υπολογιστών.

Εκτός, όμως, από την πρόλεξη της ροής γύρω από αεροδυναμικά σώματα, μεγάλο τεχνολογικό ενδιαφέρον παρουσιάζει και η δυνατότητα σχεδιασμού της βέλτιστης μορφής των σωμάτων αυτών, έτσι ώστε να ικανοποιούν τις σχετικές με την αεροδυναμική τους συμπεριφορά απαιτήσεις. Για παράδειγμα, η διαδικασία σχεδιασμού μπορεί να έχει ως στόχο την ελαχιστοποίηση της αντίστασης ενός σώματος σε εξωτερική ροή, τη μεγιστοποίηση της άνωσης ενός σώματος, την ελαχιστοποίηση των απωλειών ολικής πίεσης σε εσωτερική ροή ή τη μεγιστοποίηση του βαθμού απόδοσης της ροής σε μία περύγωση συμπίεστη ή στροβίλου. Τα προβλήματα αυτά είναι γνωστά και ως προβλήματα βέλτιστου σχεδιασμού (optimal design) ή βελτιστοποίησης σχήματος (shape optimization).

Για την ικανοποίηση της ανάγκης αυτής έχουν αναπτυχθεί μέθοδοι βελτιστοποίησης, οι οποίες έχουν ως στόχο την ελαχιστοποίηση ή τη μεγιστοποίηση μίας ή περισσότερων συναρτήσεων, που είναι γνωστές και ως συναρτήσεις κόστους (cost functions) ή συναρτήσεις καταλληλότητας (fitness functions) ή συναρτήσεις-στόχοι (objective functions). Οι μέθοδοι βελτιστοποίησης μπορούν να διακριθούν σε στοχαστικές και αιτιοκρατικές μεθόδους[32]. Οι μέθοδοι στοχαστικής βελτιστοποίησης χαρακτηρίζονται από το ότι αναζητούν τη βέλτιστη λύση με τρόπο τυχαίο ή οργανωμένα τυχαίο. Οι αλγόριθμοι της κατηγορίας αυτής είναι γενικοί, δηλαδή μπορούν εύκολα να εφαρμοστούν για την επίλυση διαφορετικών προβλημάτων, ενώ μπορούν να εντοπίσουν το ολικό ακρότατο μιας συνάρτησης στόχου, ανεξάρτητα από την αρχικοποίησή τους. Όμως, έχουν το μειονέκτημα ότι απαιτούν την αξιολόγηση πολλών διαφορετικών λύσεων προτού καταλήξουν στη βέλτιστη, κάτι που τις καθιστά αργές. Χαρακτηριστικό παράδειγμα στοχαστικών αλγορίθμων είναι οι εξελικτικοί αλγόριθμοι (Evolutionary Algorithms - EA) [32] [1] [13]. Μία αιτιοκρατική μέθοδος βελτιστοποίησης χρησιμοποιεί τη γενικευμένη έννοια της παραγώγου της συνάρτησης στόχου, τιμές της οποίας καλείται να υπολογίσει ή να προσεγγίσει. Το να δημιουργηθεί μια αιτιοκρατική μέθοδος βελτιστοποίησης απαιτεί μεγαλύτερο χρόνο επένδυσης από την πλευρά του μηχανικού-προγραμματιστή, είναι δυσκολότερα επεκτάσιμη σε άλλα παρεμφερή προβλήματα δηλαδή όταν αλλάζει η συνάρτηση-στόχος ή οι περιορισμοί, συγκλίνει γενικά γρήγορα στη βέλτιστη λύση, με κίνδυνο όμως εγκλωβισμού σε τοπικό βέλτιστο η ακόμα και σε αδυναμία υπολογισμού κάποιου ακρότατου (απόκλιση από τη λύση). Μία αιτιοκρατική μέθοδος καθορίζεται αρκετά από τη σημείο εκκίνησης της (αρχικοποίηση) και αποτελεί σημαντική απόφαση για την

αποτελεσματική σύγκλιση στο καθολικό βέλτιστο. Πολλές σύγχρονες μέθοδοι βελτιστοποίησης χρησιμοποιούν συγχρόνως στοιχεία και από τις δυο μεθόδους με σκοπό να εκμεταλλευτούν τα δυνατά στοιχεία των μεθόδων. Για παράδειγμα, η ιδανική μέθοδος βελτιστοποίησης θα συνέκλινε με ταχύτητα αιτιοκρατικής μεθόδου αλλά με δυνατότητα αποφυγής τοπικών βέλτιστων, όπως μια στοχαστική μέθοδος.

Σε όλες τις μεθόδους βελτιστοποίησης που αναφέρθηκαν παραπάνω, η αξιολόγηση της κάθε διαφορετικής λύσης απαιτεί την παραμετροποίηση της εκάστοτε γεωμετρίας ώστε να αναδειχτούν οι μεταβλητές σχεδιασμού (design variables) και, στη συνέχεια, τη γένεση υπολογιστικού πλέγματος (grid generation) το οποίο θα προσαρμόζεται με ακρίβεια στην κάθε διαφορετική γεωμετρία. Λόγω του κόστους γένεσης του πλέγματος, συχνά η διαδικασία βελτιστοποίησης ξεκινά με ένα πλέγμα γύρω από την αρχική γεωμετρία, το οποίο δεν ξαναδημιουργείται μετά από κάθε μεταβολή στη γεωμετρία – αφού κάτι τέτοιο θα είχε υψηλό υπολογιστικό κόστος – αλλά προσαρμόζεται σε κάθε νέο σχήμα, όπως αυτό προκύπτει από τη μέθοδο βελτιστοποίησης που χρησιμοποιείται. Για το λόγο αυτό, η μέθοδος παραμόρφωσης πλέγματος αποτελεί βασική συνιστώσα της διαδικασίας αεροδυναμικής βελτιστοποίησης.

### 1.3 Ανάγκη Παραμόρφωσης Πλέγματος

Όπως αναφέρθηκε στην ενότητα 1.2 μια αποδοτική μέθοδος παραμόρφωσης πλέγματος αποτελεί αναπόσπαστο κομμάτι κατά την βελτιστοποίηση αεροδυναμικών σχημάτων στην ρευστοδυναμική. Ωστόσο, η ανάγκη παραμόρφωσης υπολογιστικών πλεγμάτων προκύπτει σε πληθώρα μηχανολογικών εφαρμογών στην βιομηχανία. Συγκεκριμένα, εφαρμογές όπως προβλήματα με κινητά όρια [15], προβλήματα εμβιομηχανικής [10, 26], προβλήματα ελεύθερης ροής και γενικότερα αλληλεπίδρασης ρευστών-στερεών (Fluid-Structure Interaction problems-FSI). Σε τέτοιου είδους εφαρμογές όταν τα όρια του πεδίου ροής υφίστανται κάποια μετακίνηση, η πιο συνηθισμένη τακτική είναι να προσαρμοστεί το εσωτερικό πλέγμα στο νέο τροποποιημένο πεδίο ροής.

Η μετακίνηση του εσωτερικού πλέγματος μπορεί να επιτευχθεί είτε διαγράφοντας το παλιό πλέγμα και παράγοντας ένα νέο εξαρχής (remeshing), είτε προσαρμόζοντας δυναμικά το αρχικό πλέγμα στη νέα γεωμετρία. Για εφαρμογές που απαιτείται ανανέωση του πλέγματος σε κάθε χρονικό βήμα ή κύκλο βελτιστοποίησης, η επαναπλεγματοποίηση απαιτεί υψηλό υπολογιστικό κόστος, κάτι που την καθιστά πρακτικά αδύνατη. Επιπλέον, η αντιστοίχιση

(mapping) της λύσης του παλιού στο νέο πλέγμα έχει επιπλέον υπολογιστικό κόστος. Οπότε η επιλογή της προσαρμογής του πλέγματος καθίσταται μονόδρομος, όντας πιο πρακτική και ευέλικτη.

Ο στόχος μιας μεθόδου παραμόρφωσης πλεγμάτων είναι η διάδοση της μετακίνησης του επιφανειακού (οριακού) πλέγματος στο εσωτερικό του υπολογιστικού χωρίου, έτσι ώστε να μετατοπιστούν όλοι εσωτερικοί κόμβοι και να προσαρμοστεί το πλέγμα στη νέα γεωμετρία. Το νέο πλέγμα δημιουργείται είτε με επαναπλεγματοποίηση στις περιοχές του νέου υπολογιστικού χωρίου που δεν παραμετροποιούνται σωστά από το υπάρχον πλέγμα, ή με παραμόρφωση του υπάρχοντος πλέγματος. Αν και η πρώτη μέθοδος εξασφαλίζει καλύτερα την ποιότητα του πλέγματος, προτιμάται η δεύτερη μέθοδος, αφού διατηρεί την τοπολογία του πλέγματος. Με χρήση κατάλληλης μεθόδου παραμόρφωσης, ένα πλέγμα μπορεί να διατηρήσει την ποιότητά του σε αποδεκτά επίπεδα, ακόμα και για μεγάλες παραμορφώσεις της εκάστοτε γεωμετρίας. Προφανώς, κάθε μέθοδος έχει τα όρια της στην δυνατότητα απορρόφησης και διάδοσης των παραμορφώσεων.

## 1.4 Μέθοδοι Προσαρμοστικής Παραμόρφωσης Πλέγματος

Τα τελευταία χρόνια έχουν προταθεί αρκετές μέθοδοι προσαρμοστικής παραμόρφωσης πλέγματος. Από το 1980 έχει αποτελέσει πρόκληση η ανάπτυξη μιας αποδοτικής και ταυτόχρονα στιβαρής τεχνικής προσαρμοστικής παραμόρφωσης πλέγματος. Ωστόσο, διαφορετικοί τύποι προσομοιώσεων έχουν διαφορετικές απαιτήσεις παραμόρφωσης πλέγματος. Η διαχείριση της παραμόρφωσης δομημένων πλεγμάτων αποτελεί ευκολότερη υπόθεση σε σχέση με τα μη-δομημένα πλέγματα, ακόμη η αντιμετώπιση μικρών παραμορφώσεων είναι προφανέστερα απλούστερη σε σχέση με μεγάλες. Τέλος, οι συνεκτικές ροές χρειάζονται ειδική μεταχείριση, ώστε να διατηρηθεί η ποιότητα των στοιχείων στην περιοχή του οριακού στρώματος. Λαμβάνοντας υπόψη ότι στην περιοχή του οριακού στρώματος το πλέγμα είναι πολύ πυκνό και τα στοιχεία πολύ τεντωμένα, είναι αναγκαίο να μετακινηθούν απαραμόρφωτα μαζί με τα κινούμενα όρια. Η έρευνα και η ανάπτυξη στον τομέα της προσαρμοστικής παραμόρφωσης πλεγμάτων, έγκειται στην επιδίωξη ανάπτυξης μεθόδων που πετυχαίνουν καλής ποιότητας πλέγματα με το χαμηλότερο δυνατό υπολογιστικό κόστος.

Στη βιβλιογραφία έχει εμφανιστεί πληθώρα μεθόδων παραμόρφωσης (ή

μετατόπισης ή προσαρμογής) δομημένων και μη-δομημένων υπολογιστικών πλεγμάτων [25]. Οι διάφορες τεχνικές παραμόρφωσης πλεγμάτων μπορούν να διακριθούν σε μεθόδους μερικών διαφορικών εξισώσεων (ΜΔΕ), σε μεθόδους φυσικών αναλόγων (physical analogies), και σε αλγεβρικές μεθόδους, καθώς και συνδυασμό αυτών.

### 1.4.1 Μέθοδοι Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων

Σ' αυτήν την προσέγγιση, η παραμόρφωση του πλέγματος επιτυγχάνεται με τη χρήση των εξισώσεων *Laplace* (Laplace Smoothing equations) και έχει αποδειχθεί μια αποδοτική τεχνική. Η γενική ιδέα της μεθόδου είναι ότι οι εξισώσεις Laplace ικανοποιούν την αρχή του ελάχιστου/μέγιστου. Με άλλα λόγια, αυτό σημαίνει ότι οι τιμές των εσωτερικών μετακινήσεων οριοθετούνται από τις οριακές επιφάνειες. Αυτή η ιδιότητα εγγυάται ότι οι εσωτερικοί κόμβοι θα παραμένουν πάντα εντός ορίων. Η διανυσματική σχέση 1.1 περιγράφει την κλασική Λαπλασιανή μέθοδο. Οι εξισώσεις που προκύπτουν είναι τόσες όσες και η διάσταση του προς παραμόρφωση πλέγματος. Με  $\vec{u}$  συμβολίζεται η ταχύτητα παραμόρφωσης του πλέγματος.

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\nabla \vec{u}) &= 0 \\ \Delta \vec{X} &= \vec{u} \Delta t \\ \vec{X}_{new} &= \vec{X}_{old} + \Delta \vec{X}\end{aligned}\tag{1.1}$$

#### Τροποποιημένη Λαπλασιανή μέθοδος (Modified Laplacian)

Η τροποποιημένη Λαπλασιανή μέθοδος περιλαμβάνει την ποσότητα  $\gamma$  υψωμένη σε έναν εκθέτη  $q$ ,

$$\nabla \cdot (\gamma^q \nabla \vec{u}) = 0,\tag{1.2}$$

όπου  $\gamma$  είναι ο συντελεστής διάχυσης. Εάν ο εκθέτης  $q = 0$  τότε οδηγούμαστε στην κλασική Λαπλασιανή μέθοδο. Η επιλογή του συντελεστή  $\gamma$  εξαρτάται κάθε φορά από τη συγκεκριμένη περίπτωση παραμόρφωσης του πλέγματος (case sensitive). Ο συντελεστής διάχυσης  $\gamma$  σχετίζεται με την επιρροή της παραμόρφωσης στο πλέγμα κοντά στα κινητά όρια. Μεγάλες τιμές του  $\gamma$  οδηγούν σε σχετικά μικρές κλίσεις των μετακινήσεων  $\delta \vec{Q}$ . Έτσι, τα μικρά πλεγματικά στοιχεία που βρίσκονται κοντά στη γεωμετρία τείνουν να κινηθούν ως απαραμόρφωτο σώμα μαζί με τη γεωμετρία. Με αυτόν τον τρόπο αποφεύγεται η πιθανότητα να δημιουργηθούν στρεβλωμένα ή ακόμη

και ανεστραμμένα πλεγματικά στοιχεία κοντά στη γεωμετρία λόγω μεγάλων παραμορφώσεων. Έχουν διερευνηθεί αρκετές προσεγγίσεις για τον υπολογισμό της παραμέτρου  $\gamma$ . Οι Crumpton και Giles [8] χρησιμοποίησαν τον συντελεστή διάχυσης ως τιμή αντιστρόφως ανάλογη του όγκου των πλεγματικών στοιχείων, ενώ ο Lohner [22] τον συσχετίζει με την απόσταση κάθε κόμβου από τα όρια της κινούμενης γεωμετρίας.

Ένα μειονέκτημα, που περιορίζει τη χρήση της κλασικής Λαπλασιανής μεθόδου είναι ότι η κάθε συντεταγμένη της παραμόρφωσης επιλύεται ανεξάρτητα από τις υπόλοιπες δύο. Για παράδειγμα, εάν τα όρια της γεωμετρίας κινούνται μόνο στον  $x$  άξονα, τότε και οι εσωτερικοί κόμβοι κινούνται μόνο στον ίδιο άξονα [16].

Επιλέγοντας κατάλληλες τιμές για την εκθετική παράμετρο  $q$ , η τροποποιημένη Λαπλασιανή μέθοδος οδηγεί σε πολύ ικανοποιητικά αποτελέσματα σε εφαρμογές που η γεωμετρία κινείται ως απαραμόρφωτο στερεό.

### 1.4.2 Μέθοδοι Φυσικών Αναλόγων

Οι μέθοδοι φυσικών αναλόγων (physical analogies) είναι οι περισσότερο χρησιμοποιούμενες μέθοδοι παραμόρφωσης πλεγμάτων. Δύο από τις πιο διαδεδομένες και αξιόπιστες τεχνικές φυσικών αναλόγων είναι η μέθοδος ελατηρίων και η ελαστική μέθοδος.

#### Μέθοδος των ελατηρίων (spring analogy method)

Αυτή η μέθοδος αναπτύχθηκε αρχικά από τον Batina[4]. Κάθε ακμή του πλέγματος αντιστοιχίζεται με ένα ελατήριο και το μέγεθος της σταθεράς του ελατηρίου είναι αντιστρόφως ανάλογο του μήκους της ακμής. Πολλοί ερευνητές έχουν υιοθετήσει αυτήν την τεχνική και τη συγκεκριμένη υπόθεση για την σταθερά του κάθε ελατηρίου-ακμής [11, 6, 24]. Τα μήκη των ελατηρίων σε ισορροπία ορίζονται ίσα με τα μήκη των πλεγματικών ακμών. Έτσι, εφαρμόζοντας τον νόμο του *Hook* για τις μετατοπίσεις των κόμβων, υπολογίζεται η δύναμη που ασκείται σε κάθε κόμβο:

$$\vec{F}_i = \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij} (\vec{\delta}_j - \vec{\delta}_i), \quad (1.3)$$

όπου  $\alpha_{ij}$  είναι η σταθερά του κάθε ελατηρίου μεταξύ των πλεγματικών κόμβων  $i$  και  $j$ ,  $\vec{\delta}$  είναι η μετατόπιση του κάθε κόμβου και  $n_i$  ο αριθμός των γειτόνων του κόμβου  $i$ . Στην περίπτωση στατικής ισορροπίας, η δύναμη

$\vec{F}$  σε κάθε κόμβο είναι ίση με 0. Η εξίσωση που προκύπτει για την εύρεση των μετατοπίσεων επιλύεται επαναληπτικά,

$$\vec{\delta}_i^{k+1} = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij} \vec{\delta}_j^k}{\sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij}} \quad (1.4)$$

Η παραμόρφωση του πλέγματος καθορίζεται από την επίλυση των εξισώσεων στατικής ισορροπίας του συνολικού συστήματος, αφού οι οριακοί κόμβοι μετακινηθούν σύμφωνα με την παραμόρφωση της γεωμετρίας. Αν και η μέθοδος των γραμμικών ελατηρίων εφαρμόζεται εύκολα, σε μεγάλες μετατοπίσεις και σε πυκνά πλέγματα εμφανίζει προβλήματα στιβαρότητας, οδηγώντας στην εμφάνιση αρνητικών όγκων ιδιαίτερα σε τριγωνικά πλέγματα. Βελτίωση της μεθόδου αυτής αποτελεί η προσέγγιση του Farhat [11], όπου προστίθενται μη-γραμμικά, στρεπτικά ελατήρια για την αποφυγή της εμφάνισης αρνητικών όγκων. Μια εναλλακτική λύση είναι να διαιρεθεί η σταθερά ελατηρίου κάθε ακμής με την γωνία που δημιουργείται μεταξύ των άλλων δύο ακμών του τριγώνου τριγώνου. Ωστόσο, αυτό οδηγεί σε ένα σύστημα μη-γραμμικών εξισώσεων αφού το μητρώο  $\alpha_{ij}$  συναρτάται των μετατοπίσεων. Αυτή η προσέγγιση συνήθως αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως μέθοδος ημι-στρεπτικών ελατηρίων (semi-torsional spring approach).

### Ελαστική μέθοδος (elastic analogy method)

Εδώ η παραμόρφωση του πλέγματος επιτυγχάνεται επιλύοντας τις εξισώσεις γραμμικής ελαστικότητας από την ελαστική θεωρία των στερεών, για κάθε κόμβο του εσωτερικού πεδίου. Αφού οι εξισώσεις ελαστικότητας εμπεριέχουν το μέτρο ελαστικότητας  $E$  και τον λόγο Poisson  $\nu$ , αυτές οι ιδιότητες τώρα σχετίζονται με τα χαρακτηριστικά του πλέγματος. Μια κοινή πρακτική είναι ο λόγος Poisson  $\nu$  να ορίζεται σταθερός σε ένα εύρος μεταξύ 0 και 1/2 και το μέτρο ελαστικότητας  $E$  να υπολογίζεται ως αντιστρόφως ανάλογο της απόστασης μεταξύ κάθε εσωτερικού κόμβου με την πιο κοντινή εσωτερική επιφάνεια, είτε να υπολογίζεται αντιστρόφως ανάλογα του όγκου του κάθε εσωτερικού πλεγματοειδούς στοιχείου [5, 29, 17]. Αυτή η προσέγγιση αποδείχτηκε πολύ ευεργετική αποφεύγοντας τα μη-αποδεκτά στοιχεία ιδιαίτερα στην περιοχή κοντά στα όρια. Μια εναλλακτική πρόταση είναι η χρήση σταθερού μέτρου ελαστικότητας  $E$  και η τροποποίηση του  $\nu$ , ώστε ο όρος  $\frac{1}{1-2\nu}$  να ισούται με τον λόγο επιμήκους (Aspect Ratio) του πλεγματοειδούς στοιχείου [18]. Αυτή η προσέγγιση αυξάνει τη στιβαρότητα της μεθόδου σε περιοχές του πλέγματος που τα στοιχεία έχουν υψηλό λόγο



επιμήκους, όπως η περιοχή του οριακού στρώματος πολύ κοντά στα όρια της γεωμετρίας. Έτσι, πραγματοποιείται κίνηση των εσωτερικών κόμβων πιο κοντά στο πρότυπο κίνησης του απαραμόρφωτου στερεού κοντά στη γεωμετρία.

Οι Yang και Mavriplis [30] ανέπτυξαν μια μέθοδο βασιζόμενη στη συζυγή μέθοδο βελτιστοποίησης (Adjoint-based), με σκοπό να επιτευχθεί πιο βέλτιστη κατανομή του μέτρου ελαστικότητας στο εσωτερικό πλέγμα. Σ' αυτήν την εργασία, η συνάρτηση-κόστους επιλέγεται να είναι ανάλογη του όγκου των στοιχείων του πλέγματος και ελαχιστοποιείται δοκιμάζοντας διαφορετικές τιμές του  $E$  σε κάθε στοιχείο. Αν και η βελτιστοποίηση οδήγησε στην αποφυγή μη-αποδεκτών στοιχείων για πολύ μεγάλες παραμορφώσεις και πολύ τανυσμένα στοιχεία διαφορετικών τύπων, η λύση του είναι πολύ ακριβή σε σχέση με τις απαιτήσεις της σε υπολογιστική ισχύ (*CPU time*).

Οι περισσότερες τεχνικές παραμόρφωσης πλέγματος που χρησιμοποιούν τη φυσική αναλογία της ελαστικής θεωρίας χρησιμοποιούν την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων (FEM) για τη διακριτοποίηση των γραμμικών ελαστικών εξισώσεων και επιλύουν το γραμμικό σύστημα με τη μέθοδο GMRES [5, 18, 16].

### 1.4.3 Αλγεβρικές Μέθοδοι

Γενικότερα αυτές οι μέθοδοι δεν απαιτούν τοπολογική πληροφορία για το πλέγμα. Γι αυτόν τον λόγο, αυτοί οι αλγόριθμοι μπορούν να εφαρμοστούν σε οποιοδήποτε πλέγμα ακόμη και σε πλέγματα που εμπεριέχουν μετέωρους κόμβους (*hanging nodes*) [23]. Τα αλγεβρικά σχήματα που βασίζονται κυρίως στην παρεμβολή της παραμόρφωσης των ορίων στο εσωτερικό πλέγμα, καταφέρνουν πολύ μικρότερο υπολογιστικό κόστος με μικρότερες απαιτήσεις σε μνήμη, σε σχέση με τις μεθόδους φυσικών αναλόγων. Ωστόσο, οποιαδήποτε μέθοδος παρεμβολής έχει τα δικά της περιθώρια σφάλματος. Παρακάτω παρουσιάζονται οι βασικές αρχές μερικών από τους πιο διαδεδομένους αλγεβρικούς αλγορίθμους.

#### Μέθοδος Παρεμβολής με Στάθμιση Αντιστρόφως Ανάλογη της Απόστασης (IDW)

Η παρεμβολή IDW αρχικά εισήχθη το 1968 από τον D. Shepard [27] και χρησιμοποιήθηκε για την παραγωγή χαρτών με ισοϋψείς καμπύλες στον τομέα της γεωγραφίας [3]. Στη βασική της μορφή, η παρεμβολή με IDW

υπολογίζει την παρεμβαλλόμενη τιμή  $u$  σε ένα δοσμένου σημείο  $\vec{x}$  ως έναν σταθμισμένο μέσο όρο των γνωστών μετατοπίσεων σε όλα τα σημεία του ορίου  $u_j = u(\vec{x}_j)$ . Η παρεμβολή IDW δίνεται από την εξίσωση

$$\vec{u}(\vec{x}) = \frac{\sum_{j=0}^N w_j(\vec{x}) \vec{u}_j}{\sum_{j=0}^N w_j(\vec{x})}, \quad (1.5)$$

όπου  $N$  είναι ο αριθμός των παρεμβαλλόμενων σημείων και  $w_j$  η συνάρτηση στάθμισης. Η βασική συνάρτηση στάθμισης είναι

$$w_j(\vec{x}) = \frac{1}{\|\vec{x} - \vec{x}_j\|^p}, \quad (1.6)$$

όπου  $\|\cdot\|$  είναι η Ευκλείδεια απόσταση και  $p$  μια εκθετική παράμετρος. Μελέτες για την επιλογή της παραμέτρου  $p$  μπορούν να βρεθούν στη βιβλιογραφία [27]. Συχνά επιλέγεται  $p = 2$ , διότι οδηγεί σε ικανοποιητικά αποτελέσματα με το χαμηλότερο δυνατό υπολογιστικό κόστος.

Στην παραμόρφωση των πλεγμάτων, η παρεμβαλλόμενη τιμή είναι η γνωστή μετακίνηση όλων των οριακών κόμβων του πλέγματος. Ωστόσο, για να επιτευχθεί καλή ποιότητα πλέγματος προτιμάται η παρεμβολή και των στροφών των οριακών κόμβων στο εσωτερικό του πλέγματος.

### Μέθοδος Συναρτήσεων Ακτινικής Βάσης (RBF)

Η μέθοδος παρεμβολής χρησιμοποιώντας συναρτήσεις ακτινικής βάσης (RBF) αναπτύχθηκε αρχικά από τον Boer[9]. Η μέθοδος αυτή, χρησιμοποιεί τις μετατοπίσεις των οριακών κόμβων για τη δημιουργία της εξίσωσης παρεμβολής  $u(\vec{x})$ , η οποία αποτελεί ένα άθροισμα ακτινικών βάσεων

$$u(\vec{x}) = \sum_{b=1}^{n_b} \alpha_b \phi(\|\vec{x} - \vec{x}_b\|) + p(\vec{x}), \quad (1.7)$$

όπου  $x_b$  οι γνωστές μετατοπίσεις των οριακών κόμβων,  $p$  ένα πολυώνυμο,  $n_b$  ο αριθμός των οριακών κόμβων,  $b$  οι συντελεστές που θα αναφερθούν στη συνέχεια και  $\phi$  μια ακτινική βάση που βασίζεται στην Ευκλείδεια απόσταση  $\|\cdot\|$ . Οι συντελεστές  $\alpha_b$  και το πολυώνυμο πρέπει να επιλέγονται με τέτοιο τρόπο, ώστε να γίνει επακριβής παρεμβολή των γνωστών μετατοπίσεων

$$u(\vec{x}_b) = u_b, \quad (1.8)$$

όπου  $u_b$  είναι οι γνωστές μετατοπίσεις σε μια συγκεκριμένη κατεύθυνση, επειδή κάθε κατεύθυνση  $(x, y, z)$  παρεμβάλλεται ξεχωριστά. Ακόμη, υπάρχει

μια επιπλέον απαίτηση για τους συντελεστές  $\alpha_b$ ,

$$\sum_{b=1}^{n_b} \alpha_b q(\vec{x}_b) = 0, \quad (1.9)$$

όπου  $q$  είναι πολυώνυμο, με βαθμό μικρότερο ή ίσο του πολυωνύμου  $p$ . Με σκοπό τον υπολογισμό των συντελεστών  $\alpha_b$  και του γραμμικού πολυωνύμου, οι εξισώσεις 1.8, 1.9 αναπαρίστανται σε μητρική μορφή

$$\begin{bmatrix} u_b \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{b,b} & P_b \\ P_b^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \quad (1.10)$$

όπου, ο όρος  $\alpha$  περιέχει τους συντελεστές  $\alpha_b$ , ο όρος  $\beta$  περιέχει τους συντελεστές του γραμμικού πολυωνύμου  $p$ , ο όρος  $M_{b,b}$  αποτελεί ένα  $n_b \times n_b$  μητρώο παρεμβολής και δίνεται ως εξής

$$M_{jk} = \phi(\|\vec{x}_j - \vec{x}_k\|), \quad (1.11)$$

Ο όρος  $P_b$  αποτελεί ένα μητρώο που σχετίζεται με την επιλογή του πολυωνύμου. Στην περίπτωση επιλογής ενός πρωτοβάθμιου πολυωνύμου, ο όρος  $P_b$  δίνεται από ένα  $n_b \times 4$  μητρώο

$$P_b = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n_b} & y_{n_b} & z_{n_b} \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

Τελικά, οι τιμές των μετακινήσεων για τους εσωτερικούς κόμβους του πλέγματος  $u_i$ , σε κάθε θέση  $\vec{x}_i$  μπορεί να βρεθούν εφαρμόζοντας την εξίσωση

$$u_i = u(\vec{x}_i). \quad (1.13)$$

Η μέθοδος RBF μπορεί να εφαρμοστεί πολύ εύκολα και παράγει πλέγματα καλής ποιότητας που διατηρούν ικανοποιητικά την ορθογωνικότητα των κελιών κοντά στα όρια. Ωστόσο, η άμεση εφαρμογή του σε μεγάλα  $3\Delta$  προβλήματα έχει υψηλό υπολογιστικό κόστος. Το κόστος αυτό μπορεί να μειωθεί χρησιμοποιώντας κατάλληλο προσταθεροποιητή. Όπως όλοι οι αλγόριθμοι παραμόρφωσης πλέγματος με παρεμβολή μπορεί να εφαρμοστεί σε οποιοδήποτε τύπο πλέγματος, αφού δεν εξαρτάται από την τοπολογική συνδεσμολογία των πλεγματικών κόμβων.

### Μέθοδος Γράφων Delaunay

Η μέθοδος παραμόρφωσης πλεγμάτων με παραμετροποίηση γράφων Delaunay (Delaunay Graph Mapping Method), είναι μια αλγεβρική μέθοδος, η οποία προτάθηκε αρχικά από τον Liu [21] ως μια γρήγορη και απλή μέθοδος μετακίνησης πλεγμάτων. Στη Διπλωματική Εργασία του Α.Γ Τσολοβίκου [35] που πραγματοποιήθηκε στη ΜΠΥΡ&Β του ΕΜΠ παρουσιάζεται αναλυτικά και υλοποιείται η μέθοδος Γράφων Delaunay σε 2Δ και 3Δ πλέγματα. Αυτή η προσέγγιση παράγει πλέγματα πολύ καλής ποιότητας και είναι πολύ στιβαρή σε μεγάλες παραμορφώσεις. Τα βασικά της βήματα είναι:

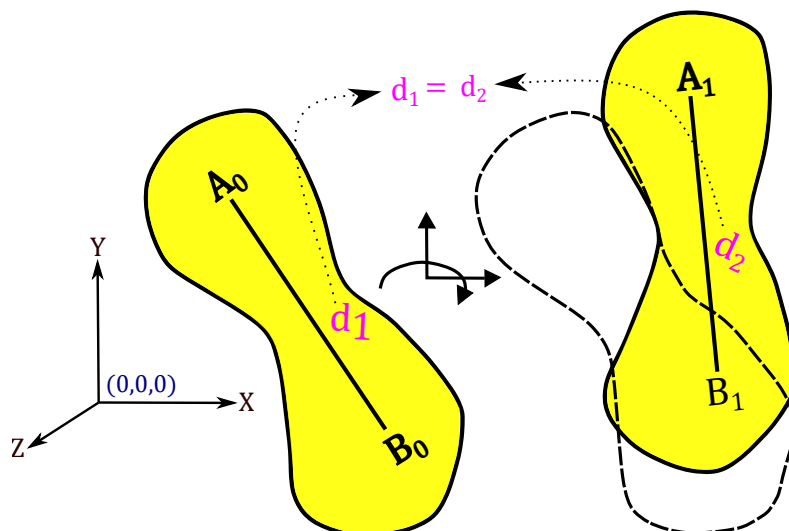
1. Παραγωγή Γράφου Delaunay από τους οριακούς πλεγματικούς κόμβους,
2. Εισαγωγή των πλεγματικών κόμβων στον γράφο,
3. Προσαρμογή του Παραμετροποιημένου γράφου με βάση την παραμόρφωση της γεωμετρίας
4. Υπολογισμός νέας θέσης των εσωτερικών κόμβων από τον παραμορφωμένο γράφο.

Προϋπόθεση στιβαρότητας της μεθόδου είναι τα εμβαδά των τριγώνων είτε αντίστοιχα οι όγκοι των τετραέδρων να παραμένουν θετικά κατά την μετατόπιση των κορυφών του πλέγματος. Με άλλα λόγια απαιτείται σε κάθε αλλαγή της γεωμετρίας η εγκυρότητα του γράφου. Η απαίτηση αυτή οδηγεί στην επιλογή της τριγωνοποίησης ή τετραεδροποίησης Delaunay για τη γένεση του γράφου, αφού μία από τις βασικές ιδιότητές της είναι η μεγιστοποίηση της ελάχιστης γωνίας κάθε τριγώνου ή τετραέδρου. Η επιλογή της ψηφιοποίησης του χωρίου κατά Delaunay μεγιστοποιεί την ευελιξία του γράφου, και άρα τη στιβαρότητα της μεθόδου.

#### 1.4.4 Τεχνική Απαραμόρφωτου Σώματος (ΚΑΣ)

Ως απαραμόρφωτο σώμα θεωρείται ένα στερεό το οποίο κινείται χωρίς να παραμορφώνεται, δηλαδή η απόσταση κάθε εσωτερικού σημείου από τα υπόλοιπα παραμένει σταθερή ύστερα από οποιαδήποτε μετακίνηση του στον χώρο, σχήμα 1.2.

Εφόσον ένα σώμα δεν παραμορφώνεται ή κατ' επέκταση δεν αλλάζει σχήμα κατά τη μετακίνηση του, μπορεί εύκολα να υπολογιστεί η μετατόπιση κάθε εσωτερικού σημείου, ορίζοντας έναν άξονα περιστροφής, τρεις γωνίες και τέλος μία μετατόπιση. Η εν λόγω προσέγγιση έχει κεντρίσει το ενδιαφέρον



**Σχήμα 1.2:** Σχηματική περιγραφή κίνησης στερεού ως απαράμορφωτο σώμα.

των μηχανικών ως μέθοδος παραμόρφωσης υπολογιστικών πλεγμάτων. Ο λόγος που θεωρείται ελκυστική μέθοδος πηγάζει από την ανάγκη διατήρησης της ποιότητας του υπολογιστικού πλέγματος, μετά από κάθε παραμόρφωση. Υπάρχουν υπολογιστικά πλέγματα με υψηλές απαιτήσεις ως προς το σχήμα και την τοπολογία τους, τα οποία αφορούν κυρίως μελέτες ρευστομηχανικής. Τέτοια πλέγματα χρησιμοποιούνται για την ακριβή προσομοίωση φαινομένων που λαμβάνουν χώρα σε ένα πολύ λεπτό στρώμα πάνω από στερεές επιφάνειες, το λεγόμενο οριακό στρώμα. Για την ακριβή προσομοίωση του οριακού στρώματος, χρησιμοποιούνται πλέγματα που είναι ιδιαίτερος πυκνά στην κάθετη απόσταση από το στερεό τοίχωμα, ξεκινώντας σε πολύ μικρή απόσταση από το τοίχωμα. Δεδομένου ότι τα κελιά του πλέγματος είναι πολύ μικρά, τα καθιστά δοκιμασία μεγάλης βαρύτητας για κάθε μεθοδολογία παραμόρφωσης. Εκτός από το πολύ μικρό τους μέγεθος το οποίο αποτελεί ήδη δυσκολία, πρέπει να διατηρηθεί η αρχική ποιότητα των πλεγματικών γραμμών, ώστε να μπορεί να χρησιμοποιηθεί για ακριβείς προσομοιώσεις ρευστομηχανικής. Η παραμόρφωση του πλέγματος ως απαράμορφωτο στερεό είναι ο στόχος και έτσι ορίζεται ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης.

Σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν, το μόνο που χρειάζεται να υπολογισθεί για κάθε κόμβο του υπολογιστικού πλέγματος είναι οι γωνίες περιστροφής και η μετατόπιση τους. Παρόλο που στη συγκεκριμένη ενότητα δεν γίνεται αναφορά στη μαθηματική θεμελίωση, γίνεται αναφορά σε δύο μητρώα στρωφής που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εν λόγω μέθοδο.

Η κύρια αναπαράσταση μητρώων στροφής γίνεται μέσω των γωνιών Euler. Οι γωνίες Euler αναπαριστούν τη στροφή γύρω από τους τρεις Καρτεσιανούς άξονες  $x$ ,  $y$  και  $z$ , με γωνίες  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  και  $\theta_z$  αντίστοιχα. Κάθε Euler στροφή ως προς κάθε άξονα μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα μητρώο στροφής [28].

$$R_{\theta_x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & \sin\theta_x \\ 0 & -\sin\theta_x & \cos\theta_x \end{bmatrix}, R_{\theta_y} = \begin{bmatrix} \cos\theta_y & 0 & \sin\theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y \end{bmatrix}, R_{\theta_z} = \begin{bmatrix} \cos\theta_z & \sin\theta_z & 0 \\ -\sin\theta_z & \cos\theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

Το τελικό μητρώο στροφής υπολογίζεται ως γινόμενο των τριών επιμέρους μητρώων. Η συγκεκριμένη αναπαράσταση του μητρώου στροφής είναι και η πιο διαδεδομένη, όπου και επιλέγεται για την εφαρμογή της μεθόδου σε αυτή τη μεταπτυχιακή εργασία.

Εναλλακτικά τα μητρώα στροφής μπορούν να κατασκευαστούν μέσω του μητρώου άξονα γωνίας, όπου ορίζονται η γωνία  $\theta$  και ο μοναδιαίος άξονας στροφής  $n = [n_x, n_y, n_z]^T$ . Το μητρώο στροφής σε αυτή την περίπτωση ορίζεται ως εξής,

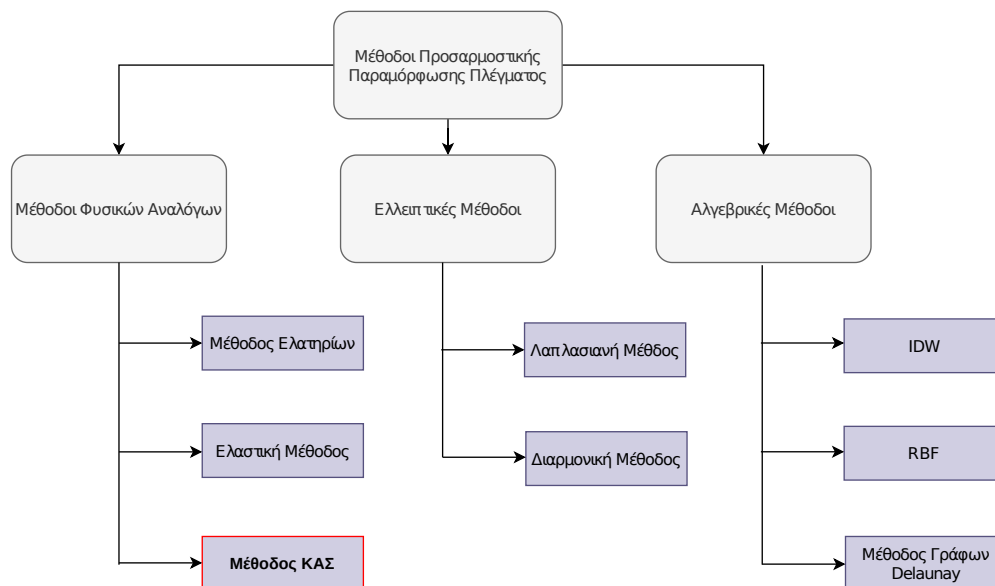
$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta + n_x^2(1 - \cos\theta) & n_x n_y(1 - \cos\theta) - n_z \sin\theta & n_x n_z(1 - \cos\theta) + n_y \sin\theta \\ n_y n_x(1 - \cos\theta) + n_z \sin\theta & \cos\theta + n_y^2(1 - \cos\theta) & n_x n_z(1 - \cos\theta) - n_x \sin\theta \\ n_z n_x(1 - \cos\theta) - n_y \sin\theta & n_z n_y(1 - \cos\theta) + n_x \sin\theta & \cos\theta + n_z^2(1 - \cos\theta) \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

### 1.4.5 Σύνοψη

Βασιζόμενοι στην επισκόπηση των μεθόδων παραμόρφωσης πλέγματος που παρουσιάστηκαν περιληπτικά στις προηγούμενες παραγράφους προκύπτουν κάποια αρχικά σχόλια. Αρχικά φαίνεται να μην υπάρχει μια μοναδική μέθοδος που να είναι η καλύτερη για οποιοδήποτε πρόβλημα. Αυτό συμβαίνει διότι φαίνεται ότι η στιβαρότητα και το υπολογιστικό κόστος είναι αντικρουόμενοι παράγοντες σε κάθε μέθοδο προσαρμοστικής παραμόρφωσης πλέγματος. Κάθε μέθοδος είναι συνήθως είτε στιβαρή και υπολογιστικά κοστοβόρα, είτε αντίστροφα υπολογιστικά αποδοτική με χαμηλότερη στιβαρότητα, είτε κάπου στο ενδιάμεσο. Έτσι, σε εφαρμογές που παρουσιάζονται μικρές παραμορφώσεις είναι σωστό να επιλέγονται διαφορετικοί αλγόριθμοι σε σχέση με εφαρμογές που παρουσιάζουν πολύ μεγάλες παραμορφώσεις. Αυτός είναι και ο λόγος που στα λογισμικά ΥΡΔ που χρησιμοποιούνται σε βιομηχανικές εφαρμογές υπάρχει μια πληθώρα μεθόδων παραμόρφωσης πλέγματος. Οι μέθοδοι που συνήθως εφαρμόζονται στη βιομηχανία συνδυάζουν μεθόδους

που βασίζονται στην τοπολογία του πλέγματος, όπως η μέθοδος των ελατηρίων (spring analogy), με αλγεβρικές μεθόδους όπως η παρεμβολή με RBF. Στόχος είναι η εξισορρόπηση της στιβαρότητας και ταυτόχρονα του υπολογιστικού κόστους μεταξύ των μεθόδων που παρουσιάστηκαν.

Στην μεταπτυχιακή αυτή εργασία αναπτύσσεται και ενισχύεται η μέθοδος προσαρμοστικής παραμόρφωσης πλέγματος, βασιζόμενη στην τεχνική Κίνησης του Απαραμόρφωτου Στερεού (ΚΑΣ) (Rigid Body Motion (RBM)). Η μέθοδος παρουσιάστηκε και αξιολογήθηκε, αρχικά στη διπλωματική εργασία του Α. Κοντού [33] στη ΜΠΥΡ&Β του ΕΜΠ και εμπίπτει στην κατηγορία των φυσικών αναλόγων. Η ΚΑΣ δεν εξαρτάται από την τοπολογία του αρχικού πλέγματος, επίσης εξασφαλίζει πολύ καλή ποιότητα πλεγματικών στοιχείων στο παραμορφωμένο πλέγμα και σε σχετικά χαμηλό υπολογιστικό κόστος, αν και απαιτεί επαναλήψεις. Η μέθοδος ΚΑΣ μετατοπίζει κάθε εσωτερικό κόμβο της ροής σε σχέση με τη γνωστή μετακίνηση του ορίου σύμφωνα με τις αρχές κίνησης του απαραμόρφωτου στερεού, από τη μηχανική του συνεχούς μέσου. Έτσι, η κυψέλη που απαρτίζεται από τους γειτονικούς κόμβους οποιουδήποτε εσωτερικού σχηματίζει ένα απαραμόρφωτο στερεό που απαιτείται να κινηθεί αντιστοίχως. Η αρχική μέθοδος τροποποιείται, ώστε να είναι συμβατή και σε πλέγματα που παρουσιάζουν περιοδικότητα κυρίως σε εφαρμογές ρευστοδυναμικής σε στροβιλομηχανές. Ακόμη, η ΚΑΣ βελτιώθηκε σταθμίζοντας τις μετακινήσεις των κόμβων βάσει γεωμετρικών χαρακτηριστικών της κάθε "απαραμόρφωτης" κυψέλης. Αυτή η τροποποίηση έδωσε πολύ ικανοποιητικά αποτελέσματα διατηρώντας την ποιότητα των στοιχείων κοντά στην περιοχή του οριακού στρώματος ακόμα και αρκετά μεγάλες παραμορφώσεις. Στη συνέχεια της εργασίας αναλύεται λεπτομερώς η προτεινόμενη μέθοδος και εξετάζεται η στιβαρότητα της σε παραμορφώσεις  $2\Delta$  και  $3\Delta$  πλεγμάτων.



Σχήμα 1.3: Σύνοψη των πιο διαδεδομένων αλγορίθμων προσαρμοστικής παραμόρφωσης πλέγματος.

## 1.5 Στόχος και Δομή της Εργασίας

Η μεταπτυχιακή αυτή εργασία εστιάζεται στην υλοποίηση της μεθόδου παραμόρφωσης πλέγματος με την τεχνική Κίνησης Απαραμόρφωτου Στερεού ΚΑΣ για 2Δ και 3Δ προβλήματα. Συγκεκριμένα η μέθοδος ΚΑΣ προγραμματίζεται σε C++ και βασίστηκε στην αρχική μέθοδο ΚΑΣ, η οποία αναπτύχθηκε στην ΜΠΥΡ&Β του ΕΜΠ και παρουσιάζεται στη διπλωματική εργασία [33]. Στην αρχική μέθοδο προστίθενται δύο βελτιώσεις. Στην πρώτη, η μέθοδος τροποποιείται με τέτοιο τρόπο, ώστε να είναι δυνατή η παραμόρφωση πλεγμάτων με περιοδικά όρια, όπως λόγω χάρη σε πτερυγώσεις στροβιλομηχανών, και στην δεύτερη, προστίθενται συγκεκριμένα βάρη με σκοπό τη διαχείριση πλεγμάτων με μεγάλες παραμορφώσεις.

Η εργασία αποτελείται από τα εξής κεφάλαια:

**Κεφάλαιο 2:** Περιγράφονται η θεωρητική και μαθηματική θεμελίωση της μεθόδου ΚΑΣ, καθώς και η δομή του αλγορίθμου που διέπει την μέθοδο.

**Κεφάλαιο 3:** Αναπτύσσεται η ακριβής περιγραφή των βημάτων για την εισαγωγή βαρών στη συνάρτηση-στόχο και παρουσιάζονται συγκριτικά αποτελέσματα με την αρχική μέθοδο. Η σταθμισμένη ΚΑΣ ονομάζεται ΣΚΑΣ



**Κεφάλαιο 4:** Παρουσιάζεται η μέθοδος παραμόρφωσης περιδικών πλεγμάτων με τη μέθοδο ΣΚΑΣ. Στη συνέχεια, γίνεται επίδειξη της βελτιωμένης μεθόδου σε παραμόρφωση 2Δ περιδικού πλέγματος.

**Κεφάλαιο 5:** Η μέθοδος εφαρμόζεται σε 2Δ και 3Δ προβλήματα παραμόρφωσης πλεγμάτων, απλών και σύνθετων γεωμετριών, ενώ παράλληλα εξετάζεται η στιβαρότητά της με βάση τη μετρική ποιότητας σχήματος.

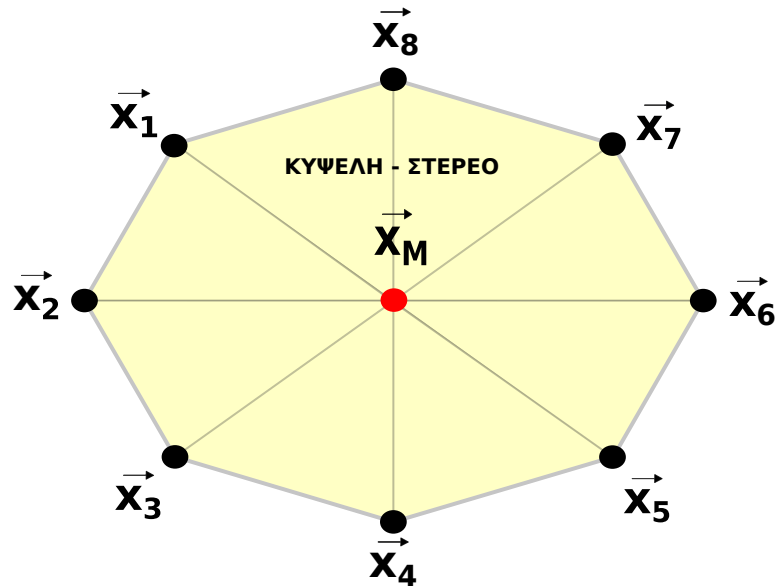
## Κεφάλαιο 2

# Πρότυπο Κίνησης Απαραμόρφωτου Σώματος (ΚΑΣ)

### 2.1 Μαθηματική Θεμελίωση ΚΑΣ

Σε αυτήν την ενότητα αναπτύσσονται οι μαθηματικές εκφράσεις που διέπουν την προτεινόμενη μεθοδολογία, καθώς και η αλγοριθμική δομή που αυτή υλοποιείται. Ως σύμβαση οι μαθηματικές σχέσεις αναπτύσσονται στις 3Δ, ενώ η σχηματική απεικόνιση στις 2Δ χάριν ευκολίας στην κατανόηση. Η μαθηματική θεμελίωση για 2Δ πλέγματα προκύπτει αφαιρώντας μια διάσταση από το διάνυσμα θέσης  $\vec{x}$ , καθώς και δύο στροφές του διανύσματος στροφών  $\vec{\theta}$ , από την 3Δ μαθηματική διατύπωση. Η πλήρης μαθηματική ανάπτυξη σε 2Δ και 3Δ παρουσιάζονται λεπτομερώς στα Παραρτήματα **A**, **B**.

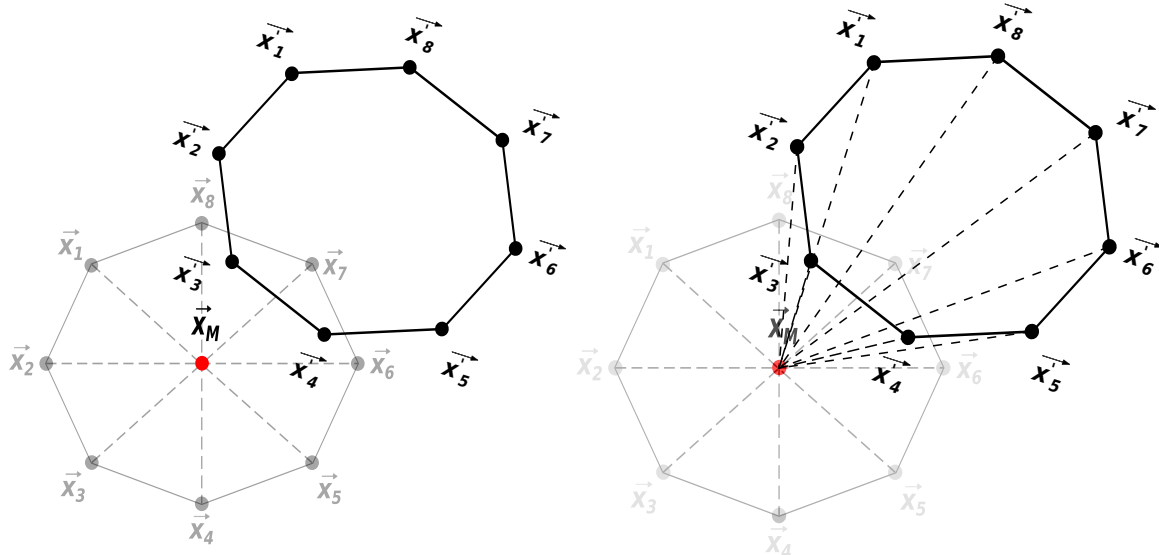
Για την αναπαράσταση της μεθόδου καθώς και για την αντιστοίχιση των συμβολισμών στις μαθηματικές εκφράσεις χρησιμοποιείται μια τυχαία κυψέλη (χαρταετός) 9 κόμβων μη-δομημένου 2Δ πλέγματος τριγωνικών στοιχείων, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.1.



**Σχήμα 2.1:** Αρχική κυψέλη (Απαραμόρφωτο Στερεό) μη-δομημένου τριγωνικού πλέγματος

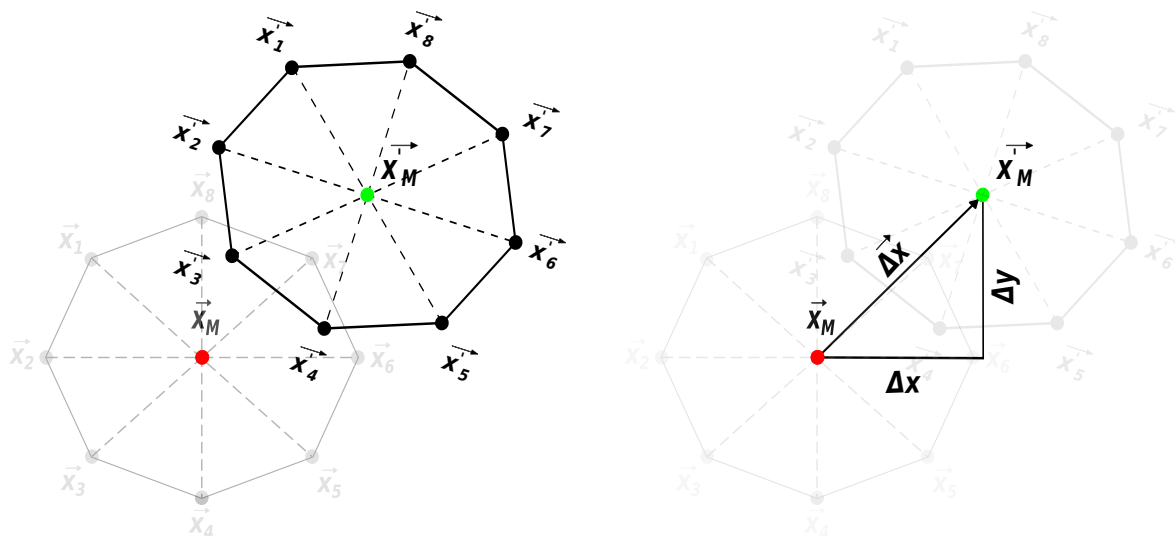
Ζητούμενο είναι ο υπολογισμός της μετακίνησης του εσωτερικού κόμβου  $\vec{x}_M'$ , σύμφωνα με τις γνωστές μετατοπίσεις των γειτόνων του  $\vec{x}_i'$ , με τέτοιο τρόπο, ώστε να διέπεται από την αρχή κίνησης του απαραμόρφωτου στερεού σώματος. Ουσιαστικά η μέθοδος προσπαθεί να διατηρήσει την αρχική τοπολογία της κυψέλης βρίσκοντας τη συνολική μετακίνησή της  $\Delta\vec{x}$  και τη στροφή  $\vec{\theta}$  γύρω από τον κόμβο M. Επειδή, κατά την κίνηση του στερεού όλα τα σημεία του διατηρούν την αρχική τους θέση, όπως αναφέρθηκε στην Ενότητα 1.4.4, η μετακίνηση του κόμβου M θα είναι ίδια με τη συνολική μετακίνηση της στερεής κυψέλης.

Στο Σχήμα 2.2 παρουσιάζεται σχηματικά η ιδανική μετατόπιση του κόμβου M έπειτα από την επιβολή στροφής και μετατόπισης της αρχικής κυψέλης. Ακόμη στο σχήμα 2.3 παρουσιάζεται μια τυχαία παραμόρφωση των οριακών κόμβων της κυψέλης καθώς και η τελική μετακίνηση του εσωτερικού κόμβου M.



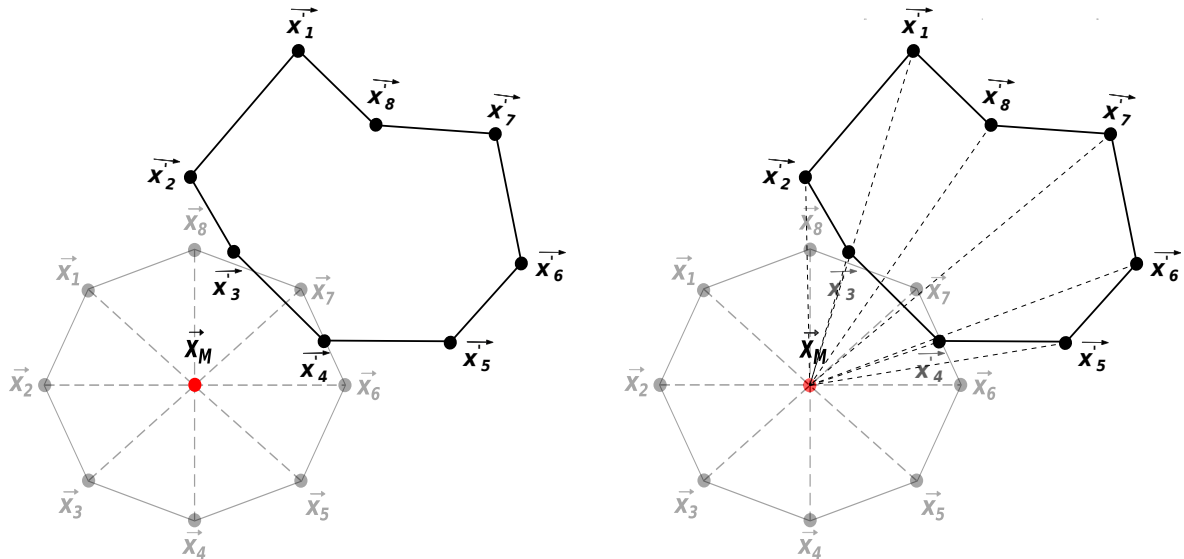
(a) Μεταφορά και Περιστροφή των οριακών κόμβων της κυψέλης  $\vec{x} \rightarrow \vec{x}'$

(b) Αρχική τοπολογία της παραμορφωμένης κυψέλης πριν την μετακίνηση του κόμβου M



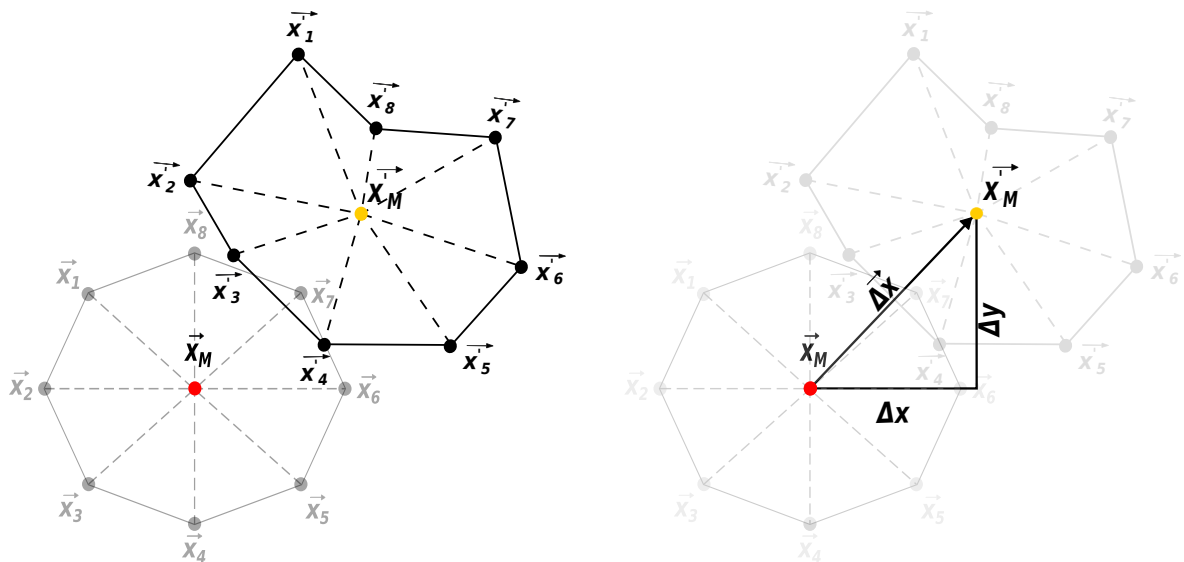
(c) Τελική τοπολογία της παραμορφωμένης κυψέλης μετά την μετακίνηση του κόμβου M (αριστερά). Συνολική μετακίνηση  $\Delta\vec{x}$  του εσωτερικού κόμβου M (δεξιά)

**Σχήμα 2.2:** Αναπαράσταση εφαρμογής της μεθόδου ΚΑΣ για ιδανική μετακίνηση της κυψέλης ως απαραμόρφωτο στερεό



(a) Τυχαία παραμόρφωση των οριακών κόμβων της κυψέλης  $\vec{x} \rightarrow \vec{x}'$

(b) Αρχική τοπολογία της παραμορφωμένης κυψέλης πριν την μετακίνηση του κόμβου M



(c) Τελική τοπολογία της παραμορφωμένης κυψέλης μετά τη μετακίνηση του κόμβου M (αριστερά). Συνολική μετακίνηση  $\Delta \vec{x}$  του εσωτερικού κόμβου M (δεξιά)

**Σχήμα 2.3:** Αναπαράσταση εφαρμογής της μεθόδου ΚΑΣ για τυχαία παραμόρφωση των οριακών κόμβων της κυψέλης

Οι εξισώσεις κίνησης του απαραμόρφωτου στερεού για την ιδανική μετατόπιση ενός σημείου στον χώρο περιγράφονται σε ταυνοστική μορφή από την σχέση 2.1,

$$\vec{x}'_i = R\vec{x}_i + \Delta\vec{x} \quad (2.1)$$

όπου  $\vec{x}'_i$  η τελική θέση του σημείου  $\vec{x}_i$ ,  $R$  το μητρώο περιστροφής και  $\Delta\vec{x}$  η μετατόπιση του σημείου στο χώρο.

Καθώς σκοπός της μεθόδου είναι η όσο το δυνατόν καλύτερη προσέγγιση της κίνησης κάθε κυψέλης του πλέγματος ως απαραμόρφωτο στερεό, εφαρμόζεται η μέθοδος των ελάχιστων τετραγώνων. Η συνάρτηση  $I$  που προκύπτει, ελαχιστοποιεί τα υπόλοιπα μεταξύ της ιδεατής κίνησης των κόμβων ως απόλυτο στερεό και της πραγματικής μετακίνησής τους από την παραμόρφωση των ορίων του πλέγματος.

$$I = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [\vec{x}'_i - (R\vec{x}_i + \Delta\vec{x})]^2 \quad (2.2)$$

$i = [1..N]$ , οι γειτονικοί κόμβοι του  $M$ .

Αρχικά η θέση του κάθε κόμβου της κυψέλης περιγράφεται στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων με αρχή των αξόνων τον κόμβο  $M$ , όπως φαίνεται στη σχέση 2.3:

$$\begin{aligned} \vec{x}_i &= \vec{x}_i - \vec{x}_M \\ \vec{x}'_i &= \vec{x}'_i - \vec{x}_M \end{aligned} \quad (2.3)$$

Οι εξισώσεις για την εύρεση των μετακινήσεων  $\Delta\vec{x}$  καθώς και των στροφών  $\vec{\theta}$  προκύπτουν διαφορίζοντας τη συνάρτηση ελαχιστοποίησης  $I$  ως προς  $\Delta\vec{x}$  και  $\vec{\theta}$ . Έτσι, προκύπτει σύστημα δύο διανυσματικών εξισώσεων (μία για τις μετατοπίσεις  $\Delta\vec{x}$  και μία για τις στροφές  $\vec{\theta}$ ) (Σχέσεις 2.4, 2.5).

$$\frac{\partial I}{\partial \Delta\vec{x}} = 0 \quad \longrightarrow \quad \Delta\vec{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N [\vec{x}'_i{}^T - \vec{x}_i{}^T R^T] \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial I}{\partial \vec{\theta}} = 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{A} \sin \vec{\theta} + \vec{B} \cos \vec{\theta} = 0 \quad (2.5)$$

Εύκολα παρατηρείται ότι η σχέση 2.5, για την εύρεση των γωνιών  $\vec{\theta}$  είναι μη γραμμική, οπότε για την επίλυσή της είναι απαραίτητο να εφαρμοστεί

μια επαναληπτική μέθοδος. Στην εργασία επιλέγεται η μέθοδος Newton-Raphson [31]. Ορίζοντας την συνάρτηση  $\vec{F} = \vec{A} \sin \theta + \vec{B} \cos \theta$ , οι νέες γωνίες υπολογίζονται με την Εξίσωση 2.6.

$$\vec{\theta}^{new} = \vec{\theta}^{old} - \frac{\vec{F}}{\frac{\partial \vec{F}}{\partial \theta}} \quad (2.6)$$

Επιλέγοντας ως κριτήριο τερματισμού της επαναληπτικής επίλυσης έναν μικρό αριθμό επαναλήψεων (3 – 10), υπολογίζεται η μετακίνηση  $\Delta \vec{x}$  του κόμβου  $M$  για την τρέχουσα εξωτερική επανάληψη της μεθόδου. Έτσι η νέα θέση του κόμβου  $M$  θα είναι

$$\vec{x}'_M = \vec{x}_M + \Delta \vec{x} \quad (2.7)$$

Στο τέλος, έχοντας υπολογίσει τις μετατοπίσεις  $\Delta \vec{x}$  και τις στροφές  $\vec{\theta}$  για τον εσωτερικό κόμβο  $M$ , επιστρέφεται η κυψέλη στο ολικό σύστημα συντεταγμένων και η διαδικασία επαναλαμβάνεται για κάθε κόμβο του εσωτερικού πλέγματος σχέση 2.8.

$$\begin{aligned} \vec{x}_i &= \vec{x}_i + \vec{x}_M \\ \vec{x}'_i &= \vec{x}'_i + \vec{x}_M \end{aligned} \quad (2.8)$$

## 2.2 Δομή Αλγορίθμου της μεθόδου ΚΑΣ

Ολοκληρώνοντας τη μαθηματική διατύπωση της μεθόδου η οποία αποτελεί ένα πολύ βασικό τμήμα της εργασίας, η υλοποίηση της μεθόδου ΚΑΣ είναι αρκετά απλή και εύκολη στην κατανόηση. Αν και αποτελεί μια επαναληπτική διαδικασία λόγω του υπολογισμού των στροφών  $\vec{\theta}$ , όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη ενότητα, τα βήματα που απαιτούνται για την ολοκλήρωση της παραμόρφωσης οποιουδήποτε  $2\Delta/3\Delta$  και ανεξαρτήτως τοπολογικής σύνδεσης πλέγματος, παρουσιάζονται στον αλγόριθμο που ακολουθεί:

---

**Αλγόριθμος 1 Μέθοδος ΚΑΣ**

---

**Δεδομένα:**

1. Κόμβοι Αρχικού Πλέγματος  $\rightarrow \vec{x}$ ,
2. Κόμβοι Πλέγματος Παραμορφωμένης Γεωμετρίας  $\rightarrow \vec{x}'$ ,
3. Αριθμός Επαναλήψεων  $K$

**Αποτέλεσμα:** Προσαρμοσμένο Πλέγμα  $\rightarrow \vec{x}'$ 

- 1: **Αρχή Επανάληψης**
  - 2: **Για** κάθε εσωτερικό κόμβο  $M$  του πλέγματος **επανάλαβε**
  - 3:     Βρες τους γείτονες  $i$  του  $M$
  - 4:     Όρισε άξονα περιστροφής τον κόμβο  $M$  για την αρχική και παραμορφωμένη κυψέλη
    - ▷ Ολικό σε Τοπικό Σύστημα Συντεταγμένων
    - ▷  $\vec{x}_i \leftarrow \vec{x}_i - \vec{x}_M$  {Οριακοί Κόμβοι Αρχικής κυψέλης}
    - ▷  $\vec{x}'_i \leftarrow \vec{x}'_i - \vec{x}_M$  {Οριακοί Κόμβοι Παραμορφωμένης Κυψέλης}
  - 5:      $\vec{\theta} \leftarrow 0$  {Αρχικοποίηση στροφών}
  - 6:     **Αρχή Επανάληψης**
    - ▷ Επαναληπτική μέθοδος Newton-Raphson
  - 7:      $\Delta \vec{x} \leftarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N [\vec{x}'_i{}^T - \vec{x}_i{}^T R^T] \{N = \text{αριθμός γειτόνων του } M\}$
  - 8:      $\vec{F} \leftarrow \vec{A} \sin \vec{\theta} + \vec{B} \cos \vec{\theta}$
  - 9:      $\vec{\theta}^{new} \leftarrow \vec{\theta}^{old} - \frac{\vec{F}}{\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{\theta}}}$
  - 10:     **Μέχρις ότου** αριθμό επαναλήψεων (3-10)
  - 11:     Νέα θέση του κόμβου  $M$  :  $\vec{x}'_M \leftarrow \vec{x}_M + \Delta \vec{x}$
  - 12:     Επιστροφή της κυψέλης στο Ολικό Σύστημα Συντεταγμένων
    - ▷  $\vec{x}_i \leftarrow \vec{x}_i + \vec{x}_M$
    - ▷  $\vec{x}'_i \leftarrow \vec{x}'_i + \vec{x}_M$
  - 13:     **Τέλος Για**
  - 14: **Μέχρις ότου** ικανοποιείται το κριτήριο σύγκλισης ( $K$  επαναλήψεις ή έλεγχος Υπολοίπων)
-



## Κεφάλαιο 3

# Πρότυπο Σταθμισμένης Κίνησης Απαραμόρφωτου Σώματος (ΣΚΑΣ)

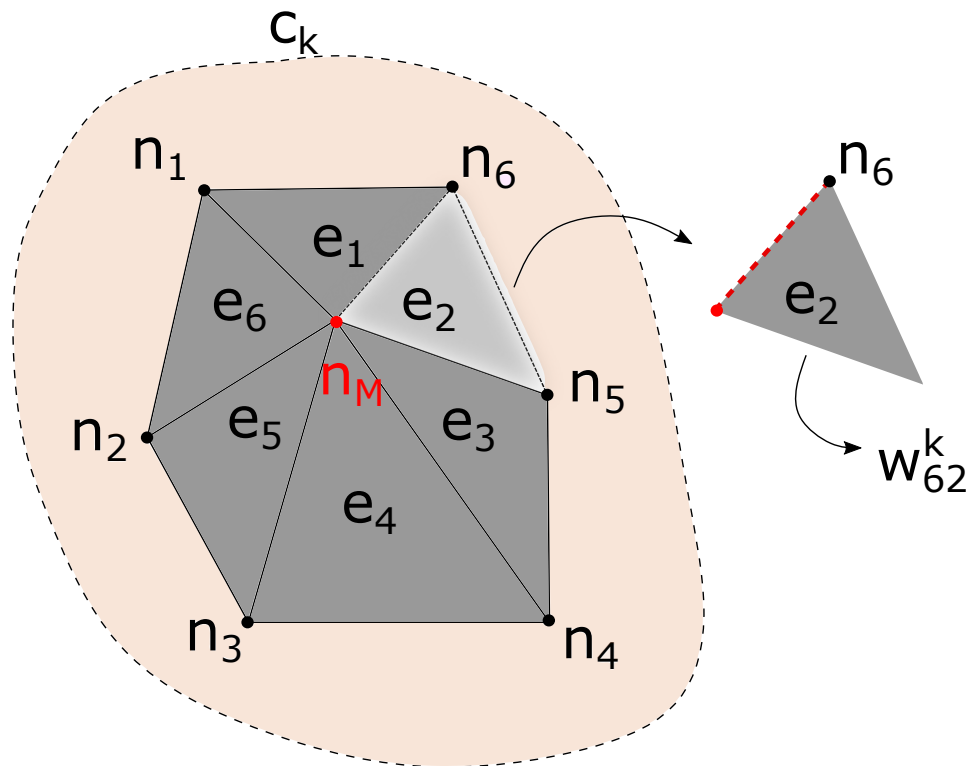
### 3.1 Θεωρητική Θεμελίωση ΣΚΑΣ

Η μέθοδος προσαρμοστικής παραμόρφωσης ΚΑΣ όπως διατυπώθηκε στο κεφάλαιο 2.1 αποτελεί τη βάση για τη μέθοδο προσαρμοστικής παραμόρφωσης ΣΚΑΣ. Στόχος αυτής της επέκτασης είναι η αναδιατύπωση της συνάρτησης στόχου B.4 με σκοπό τη βελτίωση της μεθόδου. Η χρήση βαρών έδειξε πως βελτιώνει συνολικά τη διαδικασία παραμόρφωσης συγκριτικά με την ΚΑΣ, τόσο στην επίτευξη σύγκλισης αλλά και στην επιβολή μεγαλύτερων παραμορφώσεων. Η μέθοδος ΚΑΣ, ορίζει ένα σύνολο γειτονικών κόμβων  $n_i$  του κόμβου  $n_M$  για κάθε κυψέλη  $c_k$  με  $k = [1..M]$ , όπου  $M$  ο αριθμός κόμβων προς επίλυση. Έτσι δεδομένης της μετακίνησης των γειτονικών κόμβων  $n_i$ , υπολογίζεται η νέα θέση του κόμβου  $n_M$  ο οποίος μετατοπίζεται κατά  $\Delta\vec{x}$  και στρέφεται κατά  $\vec{\theta}$ . Η μέθοδος ΣΚΑΣ επιβάλλει σε κάθε γειτονικό κόμβο  $n_i$  και ένα βάρος  $w_{ij}^k$  σχέση [3.4] εντός του συνόλου τιμών  $[0, 1]$ , ώστε να συνεισφέρει στην τελική θέση του κόμβου  $n_M$  με διαφορετικό ποσοστό. Αξίζει να σημειωθούν κάποια πολύ βασικά στοιχεία της μεθόδου ΣΚΑΣ:

- Ο υπολογισμός των βαρών  $w_{ij}^k$  γίνεται στο αρχικό πλέγμα (μη-παραμορφωμένο).
- Ο υπολογισμός των βαρών  $w_{ij}^k$  γίνεται μία φορά πριν την επαναληπτική επίλυση του συστήματος.
- Η συνεισφορά  $w_{ij}^k$  ενός κοινού κόμβου των κυψελών  $c_a, c_b$  είναι διαφορετική  $w_{ij}^a \neq w_{ij}^b$ .

Ο υπολογισμός των βαρών  $w_{ij}^k$  γίνεται συσχετίζοντας γεωμετρικές πληροφορίες του κόμβου  $n_i$  και του αντίστοιχου στοιχείου  $e_j$  της κυψέλης  $c_k$ .

Από τον κόμβο  $n_i$  υπολογίζεται βάρος ανάλογο της απόστασης του από τον κεντρικό κόμβο  $n_M$ , ενώ από το στοιχείο  $e_j$  υπολογίζεται βάρος ανάλογο με το εμβαδόν του, σχήμα 3.1.

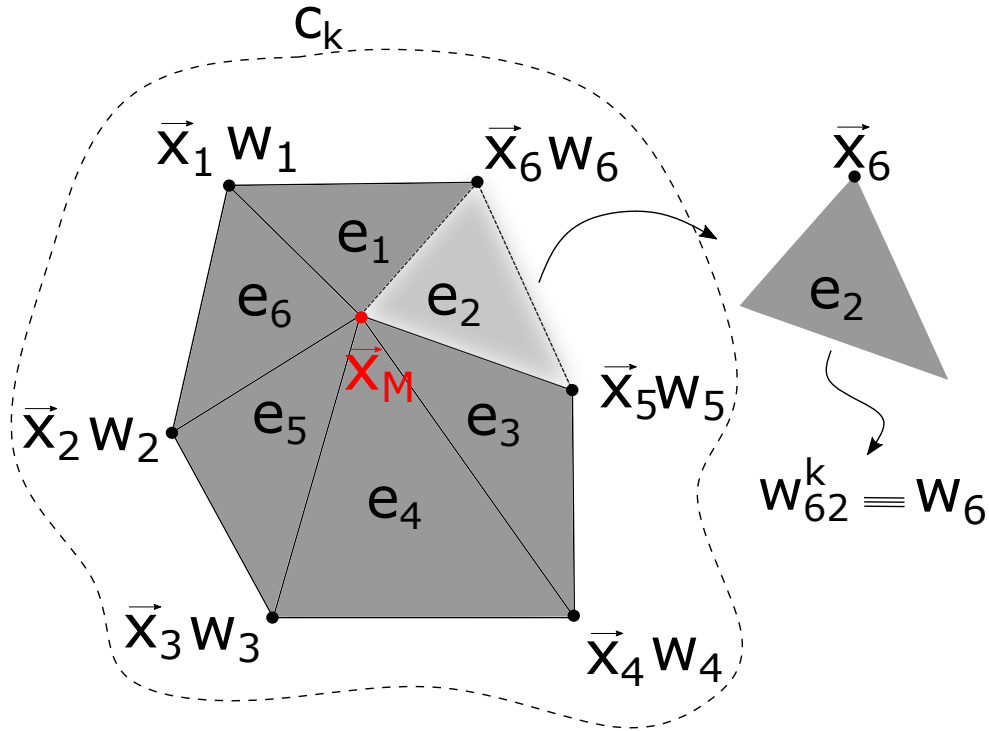


**Σχήμα 3.1:** Κάθε κόμβος  $n_i$  αντιστοιχίζεται με ένα στοιχείο  $e_j$  της κυψέλης  $c_k$  ώστε να υπολογισθεί το βάρος  $w_{ij}^k$ . Συγκεκριμένα στην παραπάνω κυψέλη  $c_k$  ο κόμβος  $n_6$  έχει αντιστοιχηθεί με το στοιχείο  $e_2$ , ώστε να υπολογισθεί το βάρος  $w_{62}^k$ .

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιαστεί η αναδιατύπωση της συνάρτησης στόχου B.4, ώστε να περιλαμβάνονται βάρη αλλά και η επίδραση αυτής της αλλαγής στον υπολογισμό παραγώγων. Τέλος, παρουσιάζεται αναλυτικά η διαδικασία υπολογισμού των βαρών.

### 3.2 Μαθηματική θεμελίωση ΣΚΑΣ

Σε αυτήν την ενότητα αναπτύσσονται οι μαθηματικές εκφράσεις που διέπουν την μεθοδολογία ΣΚΑΣ, καθώς και η αλγοριθμική δομή που αυτή υλοποιείται. Ως σύμβαση οι μαθηματικές σχέσεις αναπτύσσονται σε  $3\Delta$ , ενώ η σχηματική απεικόνιση γίνεται σε  $2\Delta$  χάριν ευκολίας στην κατανόηση.



**Σχήμα 3.2:** Κυψέλη στο απαραμόρφωτο πλέγμα μη-δομημένου τριγωνικού πλέγματος με βάρη  $w_i$ . Τα βάρη σε κάθε κυψέλη εκφράζονται ως  $w_{ij}^k$  όπου ο μετρητής  $k$  αριθμεί σε καθολική αρίθμηση τις κυψέλες, ενώ οι μετρητές  $i, j$  αριθμούν σε τοπική αρίθμηση τους κόμβους  $\vec{x}_i$  και τα στοιχεία  $e_j$  αντίστοιχα.

Η διατύπωση του προβλήματος ελαχιστοποίησης γίνεται σε κάθε κυψέλη  $c_k$  απεμπλεγμένα από τις υπόλοιπες κυψέλες. Επίσης κάθε κόμβος  $n_i$  συσχετίζεται ακριβώς με ένα στοιχείο  $e_j$ , επομένως από εδώ και πέρα για λόγους απλότητας ο συμβολισμός  $w_{ij}^k \equiv w_i$  όπου  $i = 1, \dots, N$  (αριθμός κόμβων κυψέλης) και συμβολίζει το  $i$ -οστό βάρος στη συνάρτηση 3.1. Η προσθήκη βαρών επηρεάζει τη συνάρτηση στόχου  $I$  (συγκριτικά με την ΚΑΣ) και κατεπέκταση τον υπολογισμό παραγώγων της συνάρτησης στόχου ως προς  $\Delta\vec{x}$  και  $\vec{\theta}$ . Η συνάρτηση στόχου  $I$  για την ΣΚΑΣ δίνεται από τη σχέση.

$$I = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N w_i [\vec{x}'_i - (R\vec{x}_i + \Delta\vec{x})]^2 \quad (3.1)$$

$i = [1..N]$ , οι γειτονικοί κόμβοι του  $n_M$ .

Οι εξισώσεις για την εύρεση των μετακινήσεων  $\Delta \vec{x}$  καθώς και των στροφών  $\vec{\theta}$  προκύπτουν διαφορίζοντας την συνάρτηση στόχο  $I$  ως προς  $\Delta \vec{x}$  και  $\vec{\theta}$ . Έτσι, προκύπτει σύστημα δύο διανυσματικών εξισώσεων, μία για τις μετατοπίσεις  $\Delta \vec{x}$  και μία άλλη για τις στροφές  $\vec{\theta}$ .

$$\frac{\partial I}{\partial \Delta \vec{x}} = 0 \quad \longrightarrow \quad \Delta \vec{x} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N w_i} \sum_{i=1}^N w_i [\vec{x}'_i{}^T - \vec{x}_i^T R^T] \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial I}{\partial \vec{\theta}} = 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{A}_w \sin \vec{\theta} + \vec{B}_w \cos \vec{\theta} = 0 \quad (3.3)$$

Οι όροι  $A_w$ ,  $B_w$  υπολογίζονται όμοια με τους όρους  $A$ ,  $B$  της ΚΑΣ στα Παραρτήματα Α, Β. Οι νέες γωνίες  $\vec{\theta}^{new}$  και η νέα θέση  $\vec{x}'_M$  του κόμβου  $n_M$  σε κάθε επανάληψη υπολογίζονται από τις σχέσεις 2.6, 2.7 αντίστοιχα.

### 3.3 Υπολογισμός Βαρών ΣΚΑΣ

Κάθε κυψέλη  $c_k$  αποτελείται από ένα σύνολο κόμβων  $n_i$  με  $i = [1..N]$ , ένα σύνολο στοιχείων  $e_j$  με  $j = [1..N]$  και άξονα περιστροφής τον κεντρικό κόμβο  $n_M$ , όπου ( $N = \text{Αριθμός κόμβων κυψέλης}$ ). Η συνεισφορά (βάρος)  $w_{ij}^k$  κάθε κόμβου της κυψέλης  $c_k$ , υπολογίζεται ως:

$$w_{ij}^k = \frac{J_j + D_i}{2} \quad (3.4)$$

Ο όρος  $J_j$  εκφράζει την αναλογία εμβαδού η όγκου ( $2\Delta-3\Delta$ ) του στοιχείου  $e_j$  με το μέγιστο εμβαδόν η όγκο ( $2\Delta-3\Delta$ )  $j_k$  που υπάρχει εντός της κυψέλης  $c_k$ , και κατανέμεται ομαλά στο εύρος τιμών  $[0, 1]$  μέσω της κατανομής συνημιτόνου.

$$j_j = \det(A_{e_j}) \quad (3.5)$$

$$j_k = \max(j_j) \quad (3.6)$$

$$J_j = \cos \left[ P \left( 1 - \frac{j_j}{j_k} \right) \right] \quad (3.7)$$

Η παράμετρος  $P$  ορίζει την κλίση της κατανομής συνημιτόνου, όπου σε αυτή την εργασία επιλέχθηκε η τιμή  $P = 1.5$ . Η ποσότητα  $A_{e_j}$  είναι το Ιακωβιανό μητρώο του στοιχείου  $e_j$ , το οποίο μπορεί να υπολογισθεί με τη σχέση C.1 για τριγωνικά στοιχεία, ή με τη σχέση C.3 για τετράεδρα.

Ο όρος  $D_i$  εκφράζει την αναλογία απόστασης του κόμβου  $n_i$  από τον κόμβο  $n_M$  σε σχέση με τη μέγιστη απόσταση  $d_k$  που υπάρχει εντός της κυψέλης  $c_k$ , και κατανέμεται ομαλά στο εύρος τιμών  $[0, 1]$  μέσω της κατανομής συνημιτόνου.

$$d_i = \|\vec{x}_i - \vec{x}_M\|_2 \quad (3.8)$$

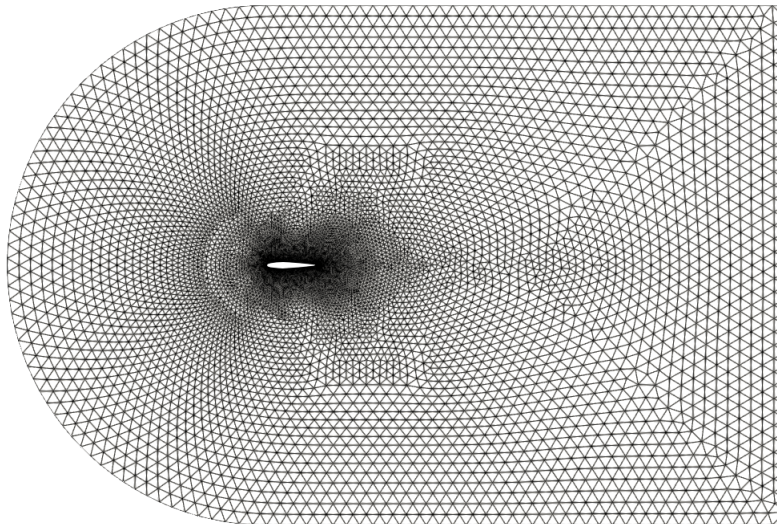
$$d_k = \max d_i \quad (3.9)$$

$$D_i = \cos \left( \frac{d_i}{d_k} \right) \quad (3.10)$$

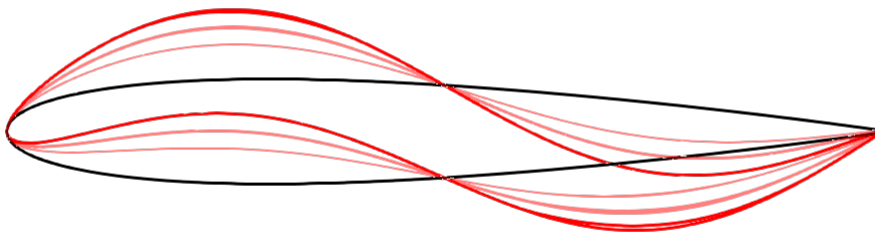
Ο όρος  $\vec{x}_i$  αναπαριστά συντεταγμένες στο Καρτεσιανό επίπεδο του κόμβου  $n_i$ . Κόμβοι οι οποίοι έχουν μικρή Ευκλείδεια απόσταση από τον κόμβο  $n_M$  και ταυτόχρονα ανήκουν σε μικρό στοιχείο της κυψέλης, αποκτούν μεγαλύτερο βάρος από κόμβους που έχουν μεγάλη Ευκλείδεια απόσταση από τον κόμβο  $n_M$  και ταυτόχρονα ανήκουν σε μεγάλο στοιχείο της κυψέλης.

### 3.4 Σύγκριση των μεθόδων ΣΚΑΣ-ΚΑΣ

Σκοπός αυτού το κεφαλαίου είναι η επίδειξη των δυνατοτήτων της ΣΚΑΣ σε σχέση με την ΚΑΣ. Εφαρμόζονται τρεις ημιτονοειδείς παραμορφώσεις στην αεροτομή NACA 12, όπου περιγράφονται από τη σχέση 5.2. Στη συνέχεια, μέσω της μετρικής ποιότητας σχήματος και τον αριθμό ανεστραμμένων κελιών αξιολογούνται οι δύο μέθοδοι. Το αρχικό υπολογιστικό χωρίο απαρτίζεται από 39202 τριγωνικά στοιχεία. Το πλέγμα περιέχει κατάλληλη δομή κοντά στην αεροτομή, κάθετες πλεγματικές γραμμές και πύκνωση, ώστε να αυξηθεί η δυσκολία κατά την παραμόρφωση. Στα παρακάτω σχήματα παρουσιάζεται το αρχικό πλέγμα γύρω από την αεροτομή αλλά και οι παραμορφώσεις που εφαρμόζονται.

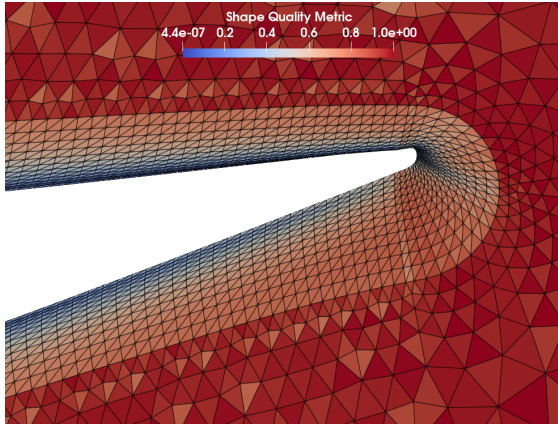
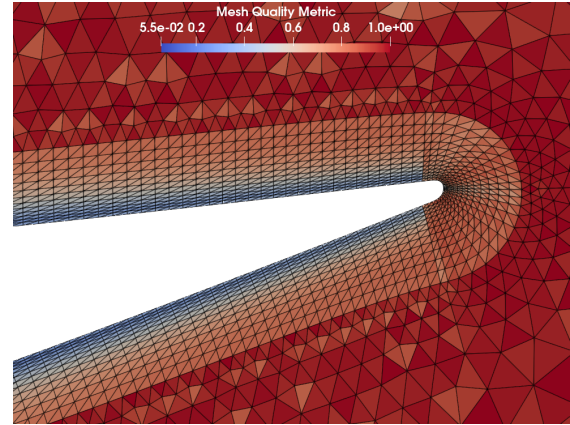
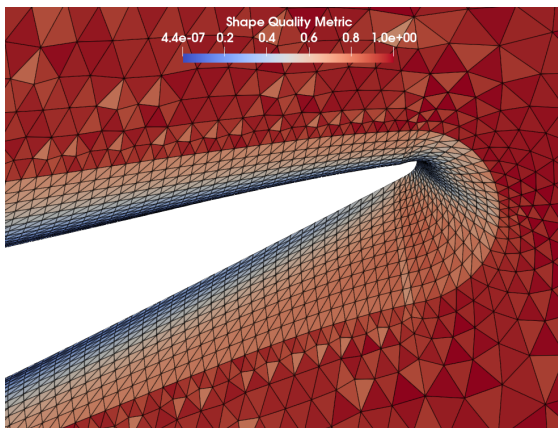
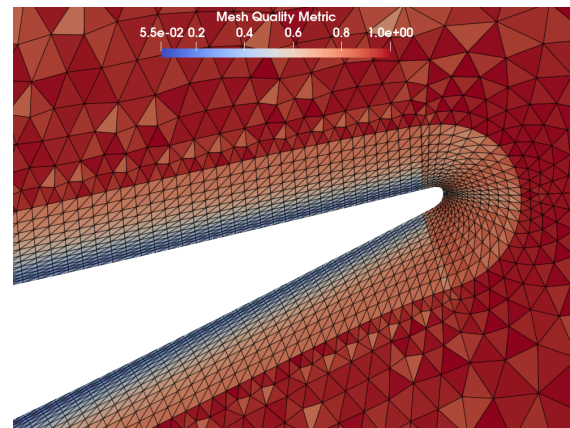
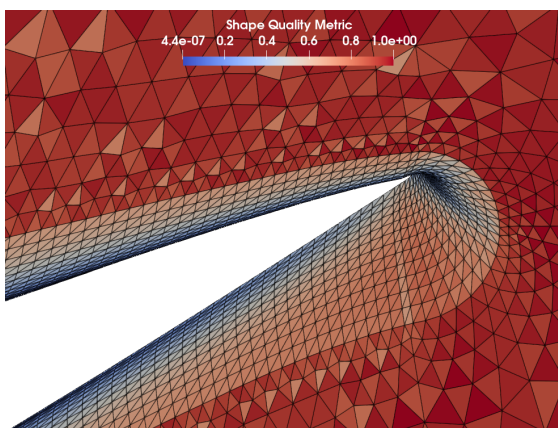
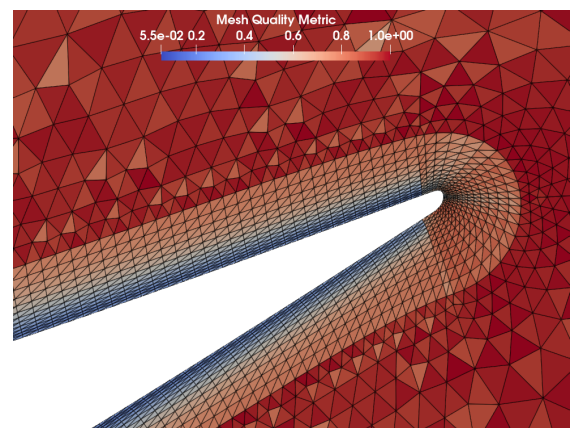


Σχήμα 3.3: Αρχικό 2D υπολογιστικό πλέγμα



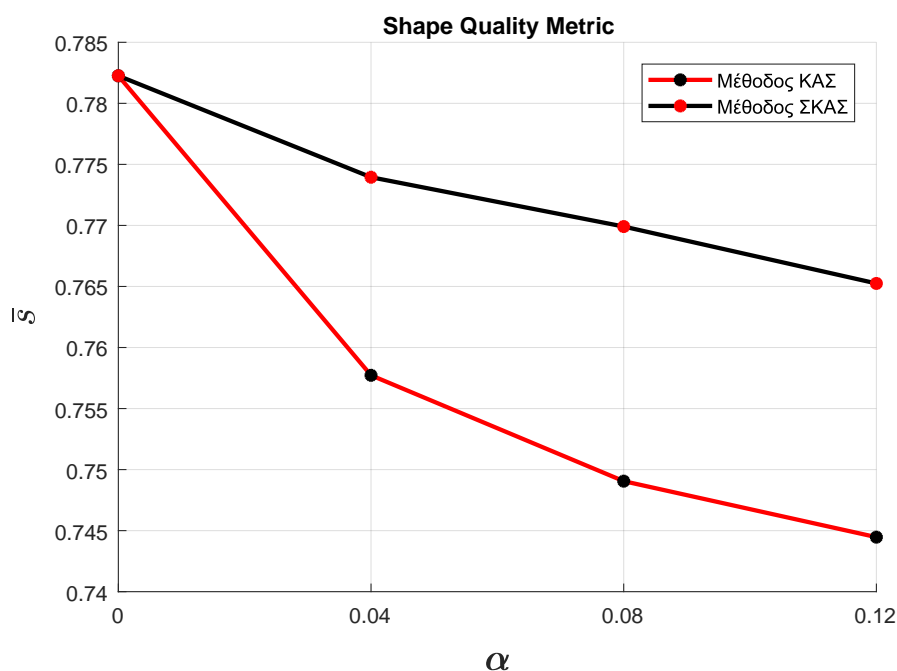
Σχήμα 3.4: Το αρχικό σχήμα της αεροτομής NACA 12 με μαύρο χρώμα, ενώ με κόκκινο χρώμα οι διαδοχικές παραμορφώσεις.

Στα σχήματα που ακολουθούν παρουσιάζονται αποτελέσματα του βαθμωτού πεδίου τιμών της μετρικής σχήματος για κάθε παραμόρφωση. Τα σχήματα προβάλλουν το πλέγμα κοντά στην ακμή εκφυγής καθώς σε αυτή την περιοχή παρατηρούνται εντονότερες διαφορές.

(a)  $\alpha = 0.04$ (b)  $\alpha = 0.04$ (c)  $\alpha = 0.08$ (d)  $\alpha = 0.08$ (e)  $\alpha = 0.12$ (f)  $\alpha = 0.12$ 

**Σχήμα 3.5:** Συγκριτικά αποτελέσματα των μεθόδων ΚΑΣ και ΣΚΑΣ. Στην αριστερή στήλη παρουσιάζονται αποτελέσματα της μεθόδου ΚΑΣ, ενώ στη δεξιά στήλη της μεθόδου ΣΚΑΣ.

Σύμφωνα με τα σχήματα 3.5a - 3.5f, παρατηρείται ότι η μέθοδος ΣΚΑΣ διατηρεί το αρχικό σχήμα των τριγωνικών στοιχείων ακόμα και σε μεγάλες παραμορφώσεις. Αντίθετα η μέθοδος ΚΑΣ, στρεβλώνει τα τριγωνικά στοιχεία κοντά στην αεροτομή και για μικρές παραμορφώσεις. Τα συμπεράσματα υποστηρίζονται από το ακόλουθο διάγραμμα μέσης τιμής της μετρικής σχήματος, και από τον πίνακα αναστραμμένων κελιών για κάθε παραμόρφωση.



**Σχήμα 3.6:** Συγκριτικό διάγραμμα μεταβολής μέσης τιμής της μετρικής ποιότητας σχήματος μεταξύ των μεθόδων ΚΑΣ - ΣΚΑΣ, για κάθε παραμόρφωση. Όσο πιο κοντά στο 1 βρίσκεται, τόσο πιο υψηλή ποιότητα έχουν τα τρίγωνα του πλέγματος.

Συγκριτικός Πίνακας Αναστραμμένων Κελιών		
α	ΣΚΑΣ	ΚΑΣ
0.04	0	559
0.08	0	2317
0.12	0	3607

Ο έλεγχος εγκυρότητας των στοιχείων γίνεται κάθε 100 επαναλήψεις ΣΚΑΣ-ΚΑΣ, και η διαδικασία αυτή ονομάζεται 1 κύκλος. Εφόσον, σε 5 συνεχόμενους κύκλους ο αριθμός αναστραμμένων αυξάνεται η παραμένει σταθερός, τότε η ΣΚΑΣ-ΚΑΣ τερματίζεται. Έτσι από υπολογιστική σκοπιά, η μέθοδος ΣΚΑΣ σε λιγότερο από 100 επαναλήψεις, παράγει το τελικό προσαρμοσμένο πλέγμα χωρίς κανένα αναστραμμένο στοιχείο, για όλες τις παραμορφώσεις της αεροτομής. Η μέθοδος ΚΑΣ τερματίστηκε στις 500 επαναλήψεις σε όλες τις περιπτώσεις.



### 3.5 Δομή Αλγορίθμου της μεθόδου ΣΚΑΣ

Η ΣΚΑΣ αναπτύσσεται άμεσα αν έχει προηγηθεί η ανάπτυξη της ΚΑΣ όπως περιγράφηκε στο κεφάλαιο 2. Διατηρώντας την επαναληπτική δομή του κώδικα ΚΑΣ και εναλλάσσοντας τις εξισώσεις 2.2, 2.4, 2.5 με τις εξισώσεις 3.1, 3.2, 3.3 αντίστοιχα, επιτυγχάνεται η μετάβαση από ΚΑΣ σε ΣΚΑΣ. Σε περίπτωση που τα όλα τα βάρη  $w_i$  σε κάθε κυψέλη  $c_k$  γίνουν μονάδα  $w_i = 1, \forall c_k$ , τότε η ΣΚΑΣ εκφυλίζεται σε ΚΑΣ.

---

#### Αλγόριθμος 2 Μέθοδος ΣΚΑΣ

---

##### Δεδομένα:

1. Κόμβοι Αρχικού Πλέγματος  $\rightarrow \vec{x}$ ,
2. Κόμβοι Πλέγματος Παραμορφωμένης Γεωμετρίας  $\rightarrow \vec{x}'$ ,
3. Αριθμός Επαναλήψεων  $\mathbf{K}$
4. Υπολογισμός βαρών  $w_{ij}^k$  στο αρχικό πλέγμα

##### Αποτέλεσμα: Προσαρμοσμένο Πλέγμα $\rightarrow \vec{x}'$

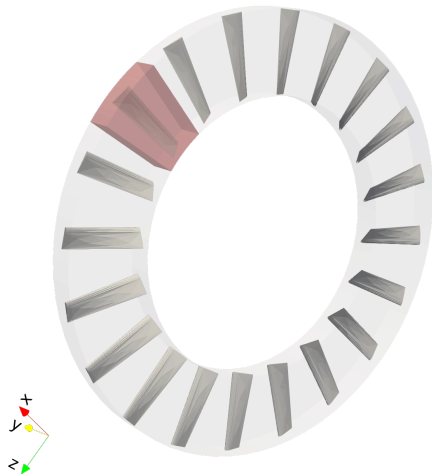
- 1: **Αρχή Επανάληψης**
  - 2: **Για** κάθε εσωτερικό κόμβο  $\mathbf{M}$  του πλέγματος **επανάλαβε**
  - 3:     Βρες τους γείτονες  $\mathbf{i}$  του  $\mathbf{M}$
  - 4:     'Όρισε άξονα περιστροφής τον κόμβο  $\mathbf{M}$  για την αρχική και παραμορφωμένη κυψέλη
    - ▷ Ολικό σε Τοπικό Σύστημα Συντεταγμένων
    - ▷  $\vec{x}_i \leftarrow \vec{x}_i - \vec{x}_M$  {Οριακοί Κόμβοι Αρχικής κυψέλης}
    - ▷  $\vec{x}'_i \leftarrow \vec{x}'_i - \vec{x}'_M$  {Οριακοί Κόμβοι Παραμορφωμένης Κυψέλης}
  - 5:      $\vec{\theta} \leftarrow 0$  {Αρχικοποίηση στρωφών}
  - 6:     **Αρχή Επανάληψης**
    - ▷ Επαναληπτική μέθοδος Newton-Raphson
  - 7:     
$$\Delta \vec{x} \leftarrow \frac{1}{\sum_{i=1}^N w_i} \sum_{i=1}^N w_i [\vec{x}'_i{}^T - \vec{x}_i{}^T R^T] \{N = \text{αριθμός γειτόνων του } M\}$$
  - 8:     
$$\vec{F} \leftarrow \vec{A}_w \sin \vec{\theta} + \vec{B}_w \cos \vec{\theta}$$
  - 9:     
$$\vec{\theta}^{new} \leftarrow \vec{\theta}^{old} - \frac{\vec{F}}{\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{\theta}}}$$
  - 10:     **Μέχρις ότου** αριθμό επαναλήψεων (3-10)
  - 11:     Νέα θέση του κόμβου  $\mathbf{M}$  :  $\vec{x}'_M \leftarrow \vec{x}'_M + \Delta \vec{x}$
  - 12:     Επιστροφή της κυψέλης στο Ολικό Σύστημα Συντεταγμένων
    - ▷  $\vec{x}_i \leftarrow \vec{x}_i + \vec{x}_M$
    - ▷  $\vec{x}'_i \leftarrow \vec{x}'_i + \vec{x}'_M$
  - 13:     **Τέλος Για**
  - 14: **Μέχρις ότου** ικανοποιείται το κριτήριο σύγκλισης (K επαναλήψεις ή έλεγχος Υπολοίπων)
-

## Κεφάλαιο 4

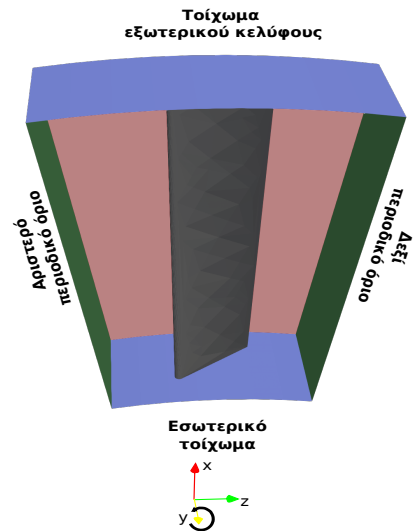
# Παραμόρφωση Περιοδικών Πλεγμάτων

### 4.1 Περί Περιοδικότητας στα Υπολογιστικά Πλέγματα

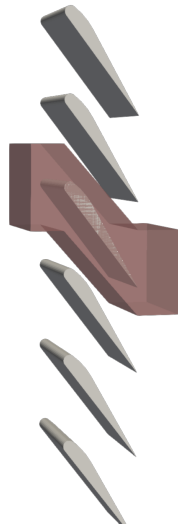
Η περιοδικότητα ως γενική έννοια συναντάται σε πολλά και διαφορετικά επιστημονικά πεδία και αναφέρεται στην πανομοιότυπη επανάληψη ενός φαινομένου είτε χρονικά, είτε χωρικά. Στη ρευστομηχανική η περιοδικότητα συναντάται κυρίως σε εφαρμογές προσομοίωσης ροών γύρω από πτερύγια στροβιλομηχανών. Συγκεκριμένα, κατά το σχεδιασμό στροβιλομηχανών, η ροή γύρω από κάθε πτερύγιο, λαμβάνεται ως ταυτόσημη με το επόμενο ή το προηγούμενο. Οπότε τελικά αρκεί να πραγματοποιηθεί υπολογισμός της ροής στο πέρασμα που αντιστοιχεί σε ένα μόνο πτερύγιο και έπειτα η υπολογισμένη ροή "αντιγράφεται" στα υπόλοιπα. Το υπολογιστικό χωρίο κάθε πτερυγίου οριοθετείται από τα φυσικά όρια της γεωμετρίας της στροβιλομηχανής και από το βήμα της πτερύγωσης ( $\frac{2\pi}{N}$ ), όπου  $N$  ο αριθμός των πτερυγίων. Έτσι, τα περιοδικά όρια απέχουν μεταξύ τους όσο το βήμα της πτερύγωσης. Ανάλογα με τη διάταξη των πτερυγίων, γραμμικά (linear cascade) ή περιφερειακά (peripheral cascade), η περιοδικότητα ονομάζεται γραμμική ή περιφερειακή αντίστοιχα. Στο σχήμα 4.1 παρουσιάζονται περιπτώσεις με γραμμική και περιφερειακή περιοδικότητα.



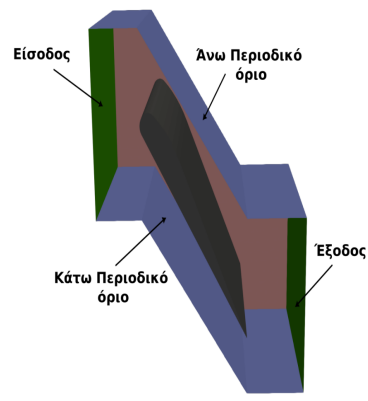
(a) Υπολογιστικό χωρίο περιφερειακής περι-  
οδικότητας (κόκκινο χρώμα)



(b) Όρια υπολογιστικού χωρίου περιφερ-  
ειακού πλέγματος



(c) Υπολογιστικό χωρίο γραμμικής περι-  
οδικότητας (κόκκινο χρώμα)



(d) Όρια υπολογιστικού χωρίου με γραμμική  
περιοδικότητα

Σχήμα 4.1: Περιπτώσεις περιφερειακής (a), (b) και γραμμικής (c), (d) περιοδικότητας

## 4.2 Μέθοδος Παραμόρφωσης Περιοδικών Ορίων στη μέθοδο ΣΚΑΣ

Κατά την αεροδυναμική βελτιστοποίηση σχήματος, λόγω της επαναληπτικής παραμόρφωσης του αεροδυναμικού σώματος, υπάρχει ο κίνδυνος είτε παραβίασης των περιοδικών ορίων του πλέγματος από τη γεωμετρία, είτε η νέα γεωμετρία να προσεγγίσει τα όρια σε μη αποδεκτό βαθμό για τη σωστή επίλυση της ροής. Η προτεινόμενη μέθοδος παραμόρφωσης πλέγματος εκμεταλλεύεται την περιοδικότητα των ορίων (ίδια τοπολογία οριακών κόμβων), με σκοπό τη μετακίνηση των περιοδικών κόμβων ακολουθώντας την παραμόρ-

φωση της γεωμετρίας σε κάθε κύκλο βελτιστοποίησης. Παράλληλα, είναι απαραίτητο να διατηρείται σταθερό το βήμα της πτερύγωσης ώστε να μην παραβιάζεται το φυσικό πρόβλημα. Παρακάτω παρουσιάζεται σε βήματα η μέθοδος παραμόρφωσης των περιοδικών ορίων σε ένα αραιό  $2\Delta$  τριγωνικό πλέγμα.

**Βήμα 1** Αρχικά, οι κόμβοι των αντίστοιχων περιοδικών ορίων είναι ουσιαστικά ταυτόσημοι, λόγω της περιοδικότητας του υπολογιστικού πλέγματος. Έτσι, για την επίδειξη της μεθόδου επιλέγεται ένα ζεύγος περιοδικών κόμβων από τα δύο όρια. Με  $\mathbf{n}_U$  συμβολίζεται ο άνω περιοδικός κόμβος και με  $\mathbf{n}_L$  ο κάτω.

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_U &= (x_U, y_U) \\ \mathbf{n}_L &= (x_L, y_L) \end{aligned} \quad (4.1)$$

που,  $x_U = x_L$  και  $|y_U - y_L| = p$

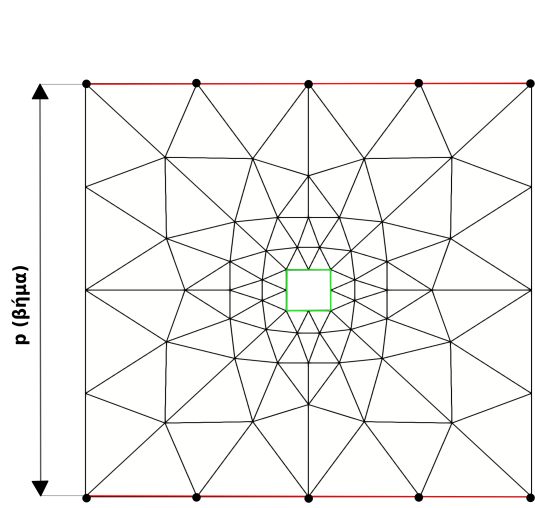
**Βήμα 2** Στη συνέχεια, επιλέγεται το άνω περιοδικό όριο και δημιουργείται εικονική σύνδεση του κόμβου  $\mathbf{n}_U$  με τους εσωτερικούς γείτονες  $\mathbf{v}_i$  του  $\mathbf{n}_L$  (virtual nodes), όπως φαίνεται στα σχήματα 4.2b, 4.2c

$$\mathbf{v}_i = (x_i, y_i + p) \quad (4.2)$$

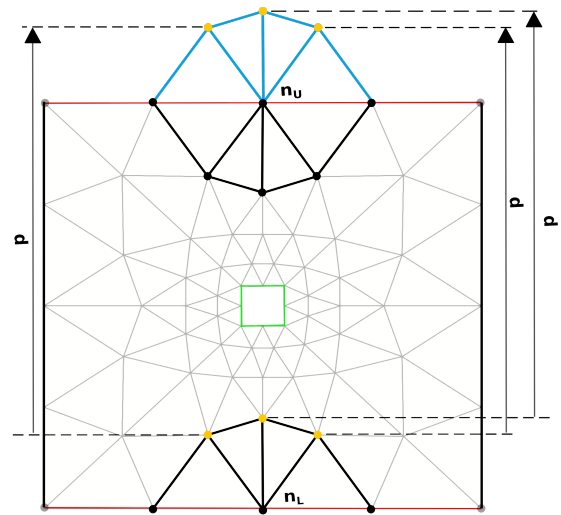
Όπου,  $p$  το βήμα του περιοδικού πλέγματος

**Βήμα 3** Έτσι, πλέον είναι δυνατόν να υπολογιστούν οι νέες θέσεις των περιοδικών κόμβων του επιλεγμένου ορίου με τη μέθοδο ΣΚΑΣ, σχήμα 4.2d. Τέλος, η νέα θέση του κόμβου  $\mathbf{n}'_L$  υπολογίζεται αφαιρώντας το βήμα από τη μετατοπισμένη θέση  $\mathbf{n}'_U$  που υπολογίστηκε με τη μέθοδο ΚΑΣ.

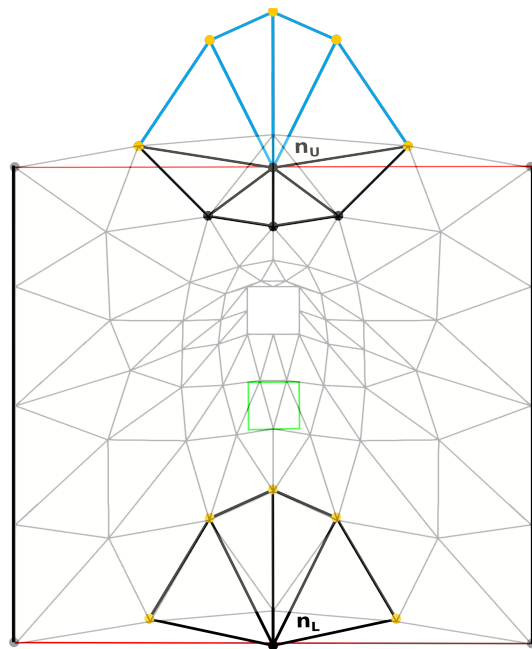
$$\begin{aligned} \mathbf{n}'_U &= (x'_U, y'_U) \\ \mathbf{n}'_L &= (x'_U, y'_U - p) \end{aligned} \quad (4.3)$$



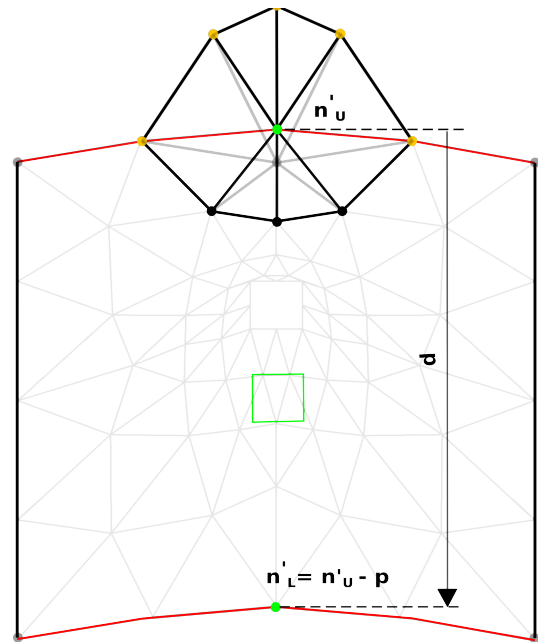
(a) Αρχικό πλέγμα. Περιοδικά όρια (κόκκινο)



(b) Δημιουργία κυψέλης με εικονικούς κόμβους



(c) Παραμόρφωση πλέγματος και εικονικής κυψέλης.



(d) Μετακίνηση περιοδικού κόμβου  $n'_u$  με την μέθοδο ΚΑΣ

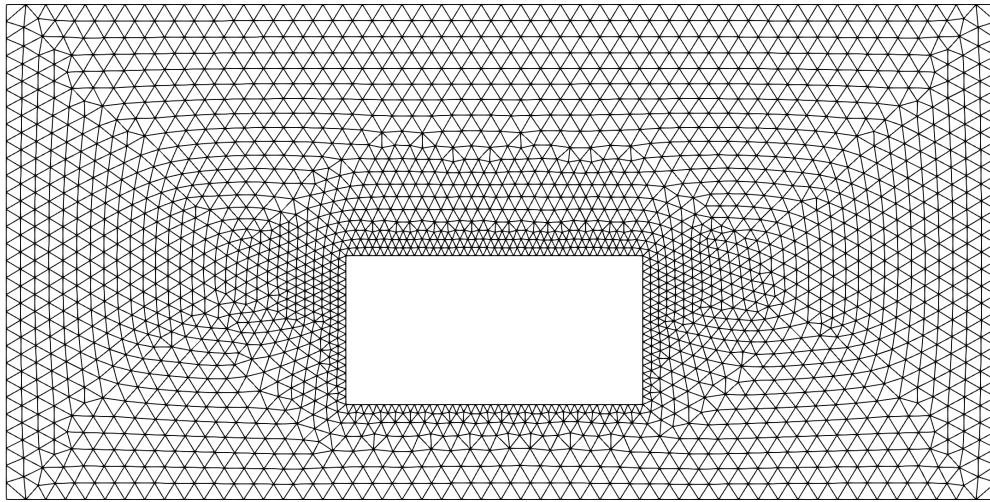
**Σχήμα 4.2:** Διαδικασία παραμόρφωσης περιοδικών ορίων με ΣΚΑΣ

### 4.3 Εφαρμογές Επίδειξης Μεθόδου ΣΚΑΣ σε Περιοδικά Πλέγματα

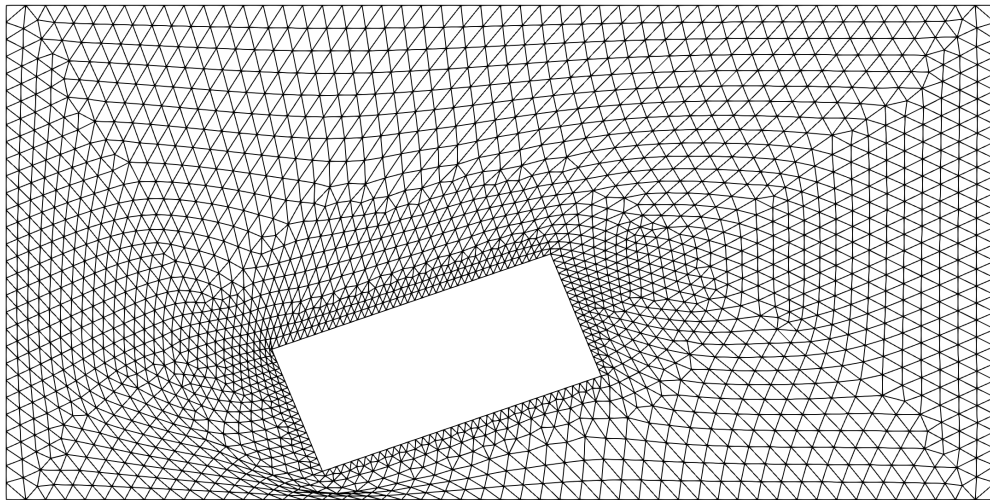
Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζονται δύο εφαρμογές παραμόρφωσης πλεγμάτων με αξονική και περιφερειακή περιοδικότητα, με σκοπό την επίδειξη της εφαρμογής της μεθόδου ΣΚΑΣ σε πλέγματα με περιοδικά όρια. Οι εφαρμογές αναφέρονται σε  $2\Delta$  τριγωνικά πλέγματα γύρω από μία ορθογωνική γεωμετρία στην οποία επιβάλλεται μεταφορά και περιστροφή.

- Εφαρμογή 1<sup>η</sup>: Παραμόρφωση σε πλέγμα γραμμικής περιοδικότητας.  
Σε αυτήν την εφαρμογή δοκιμάζεται τριγωνικό πλέγμα 2270 κόμβων, όπου στην εσωτερική γεωμετρία επιβάλλεται μεταφορά  $(-0,3, -0.1)$  μονάδες απόστασης και περιστρέφεται κατά  $20^\circ$ . Στη συνέχεια, γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων της μεθόδου ΣΚΑΣ με περιοδικότητα (1<sup>η</sup> Περίπτωση - 4.3c) και χωρίς (2<sup>η</sup> Περίπτωση - 4.3b).
- Εφαρμογή 2<sup>η</sup>: Παραμόρφωση σε πλέγμα περιφερειακής περιοδικότητας.  
Εδώ δοκιμάζεται τριγωνικό πλέγμα 1681 κόμβων, όπου επιβάλλεται η ίδια παραμόρφωση με την 1<sup>η</sup> εφαρμογή. Αντίστοιχα γίνεται σύγκριση της μεθόδου ΣΚΑΣ με (2<sup>η</sup> Περίπτωση - 4.5c) και χωρίς (1<sup>η</sup> Περίπτωση - 4.5b) παραμόρφωση περιοδικών ορίων.

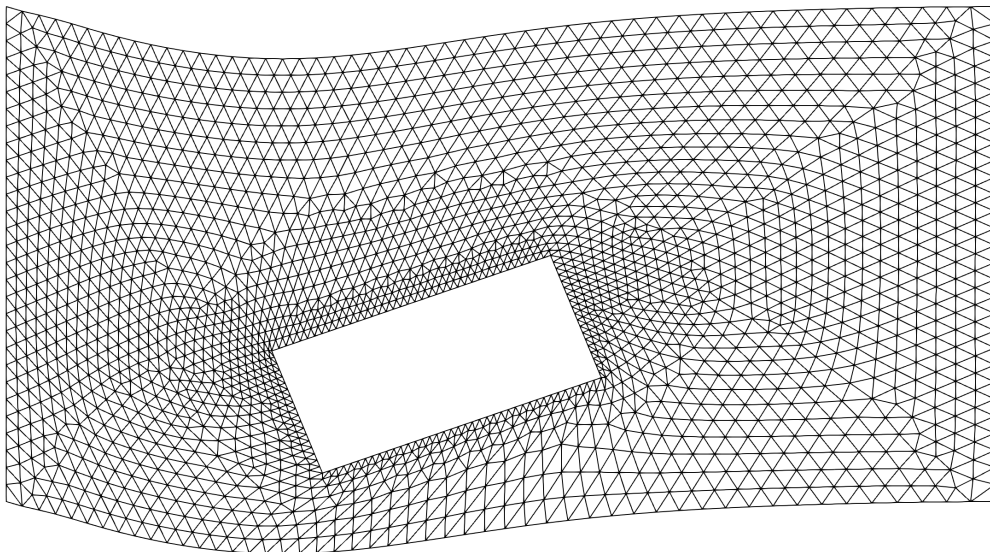
### 4.3.1 Εφαρμογή 1<sup>η</sup>



(a) Αρχικό 2Δ υπολογιστικό πλέγμα



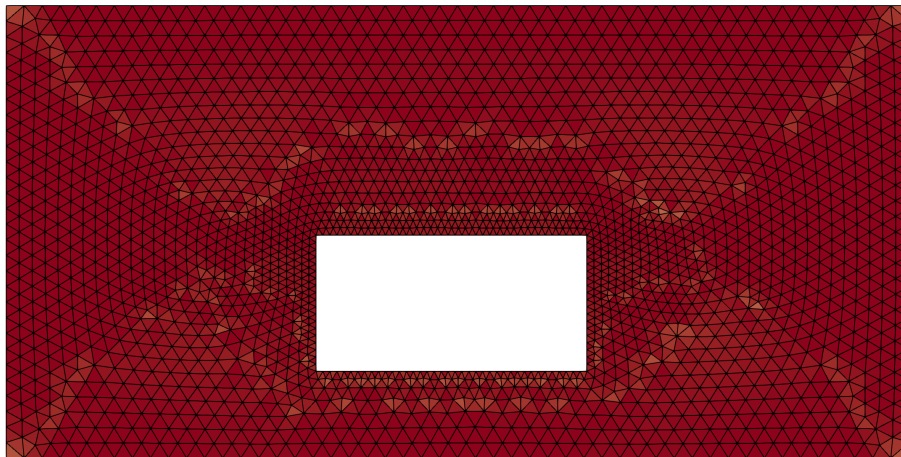
(b) 1<sup>η</sup> Περίπτωση: Παραμόρφωση ΣΚΑΣ χωρίς αξονική περιοδικότητα



(c) 1<sup>η</sup> Περίπτωση: Παραμόρφωση ΣΚΑΣ με αξονική περιοδικότητα

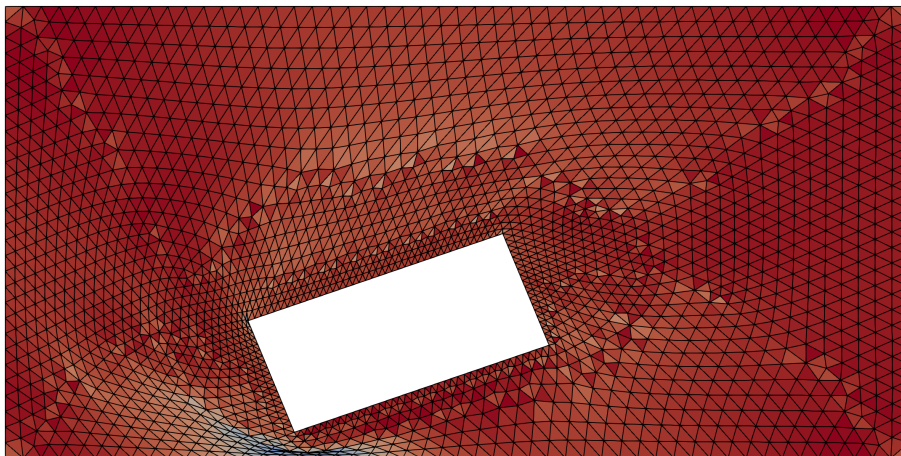
**Σχήμα 4.3:** Εφαρμογή παραμόρφωσης πλέγματος γραμμικής περιοδικότητας με την μέθοδο ΣΚΑΣ

Shape Quality Metric  
2.7e-02 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1.0e+00



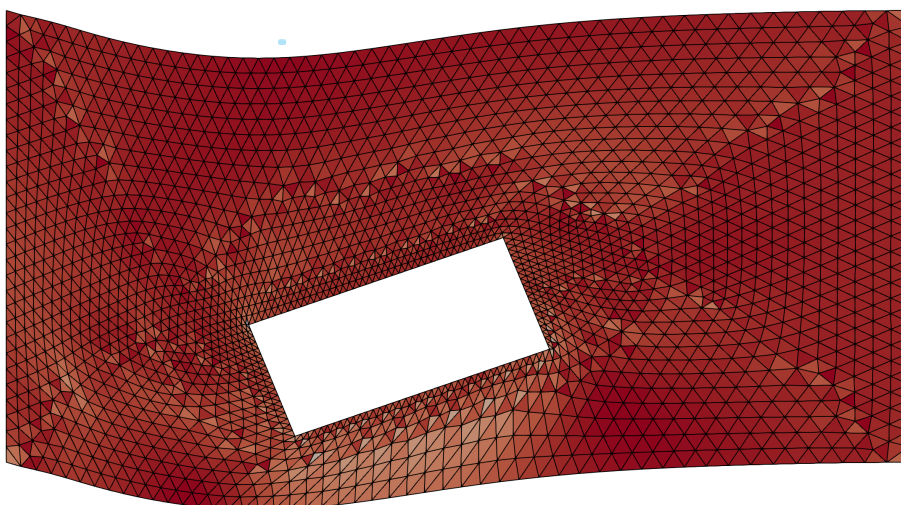
(a) Κατανομή ποιότητας Σχήματος στο αρχικό πλέγμα

Shape Quality Metric  
2.7e-02 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1.0e+00



(b) 1<sup>η</sup> Περίπτωση: Μεταβολή κατανομής ποιότητας Σχήματος χωρίς παραμόρφωση περιοδικών ορίων

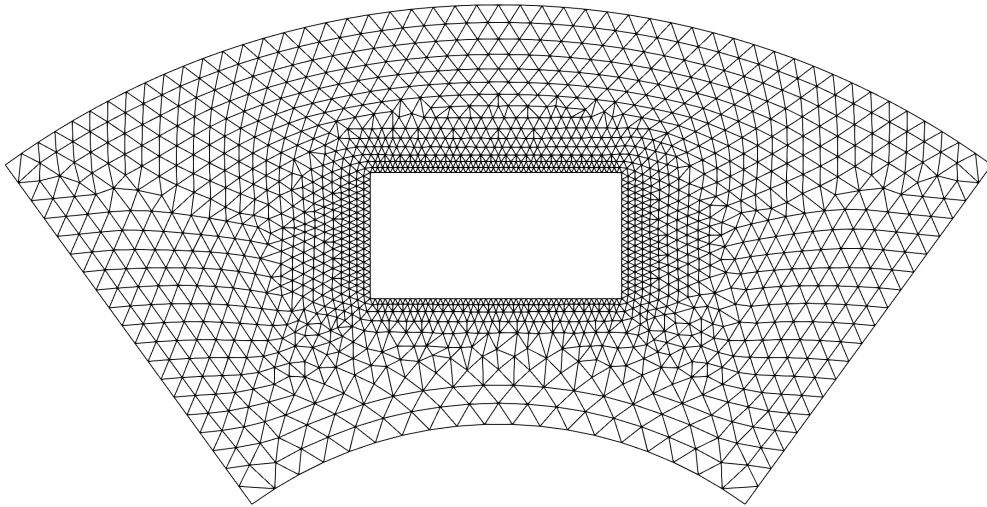
Shape Quality Metric  
2.7e-02 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1.0e+00



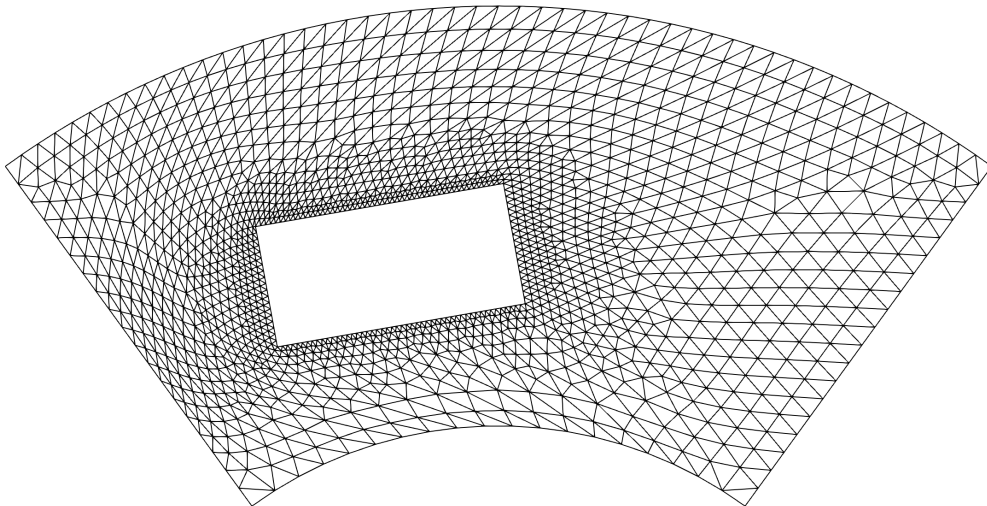
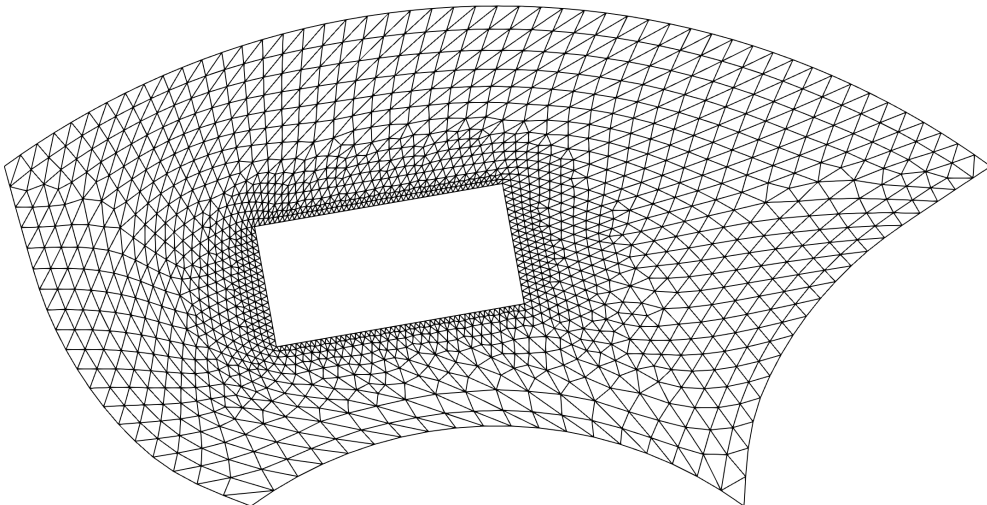
(c) 2<sup>η</sup> Περίπτωση: Μεταβολή κατανομής ποιότητας Σχήματος με αξονική περιοδικότητα  
**Σχήμα 4.4:** Μεταβολή της κατανομής ποιότητας σχήματος κατά τη παραμόρφωση με την μέθοδο ΣΚΑΣ, (4.4b) χωρίς περιοδικότητα και (4.4c) με περιοδικότητα.



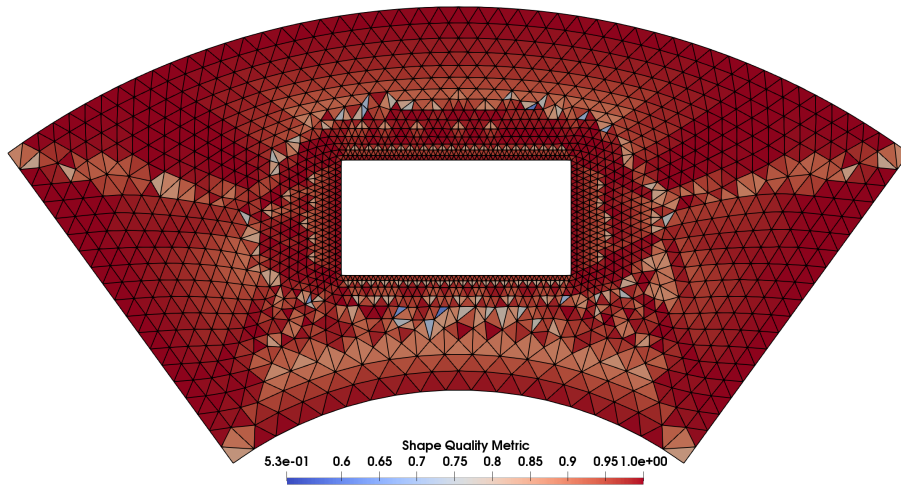
Στην 1<sup>η</sup> περίπτωση πραγματοποιείται παραμόρφωση του πλέγματος με ΣΚΑΣ χωρίς περιοδικότητα εικόνα 4.4b. Παρατηρείται ότι λόγω του περιορισμένου χώρου μεταξύ του κάτω περιοδικού ορίου και της παραμορφωμένης γεωμετρίας δημιουργούνται στρεβλωμένα τρίγωνα κακής ποιότητας ( $\bar{s} < 0.4$ ). Στη 2<sup>η</sup> περίπτωση πραγματοποιείται παραμόρφωση λαμβάνοντας υπόψη την γραμμική περιοδικότητα του πλέγματος σχήμα 4.4c. Η παραμόρφωση των περιοδικών ορίων με βάση την κίνηση της γεωμετρίας, οδηγεί στη δημιουργία μεγαλύτερου διαστήματος μεταξύ της γεωμετρίας και των ορίων του χωρίου, με αποτέλεσμα να επιτυγχάνεται ομαλότερα η διάχυση της παραμόρφωσης, στο εσωτερικό πλέγμα ( $\bar{s} > 0.6$ ).

4.3.2 Εφαρμογή 2<sup>η</sup>

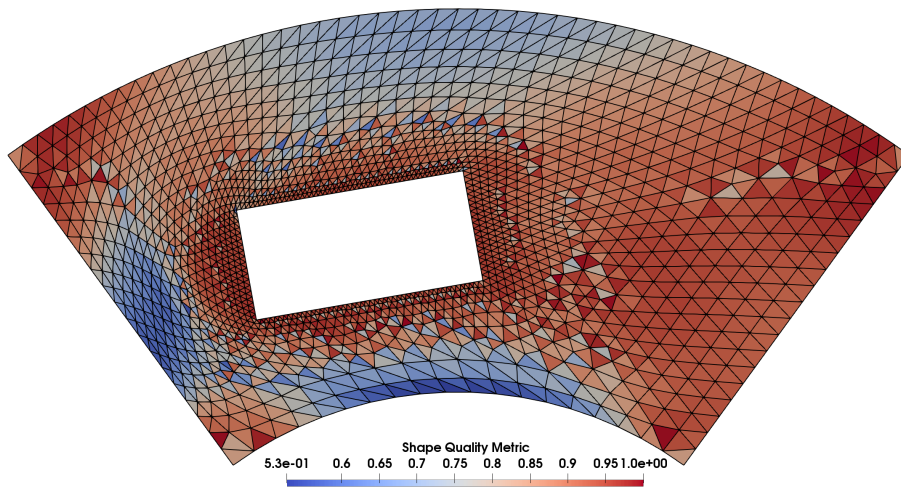
(a) Αρχικό 2Δ υπολογιστικό πλέγμα

(b) 1<sup>η</sup> Περίπτωση: Παραμόρφωση ΣΚΑΣ χωρίς περιφερειακή περιοδικότητα(c) 1<sup>η</sup> Περίπτωση: Παραμόρφωση ΣΚΑΣ με περιφερειακή περιοδικότητα

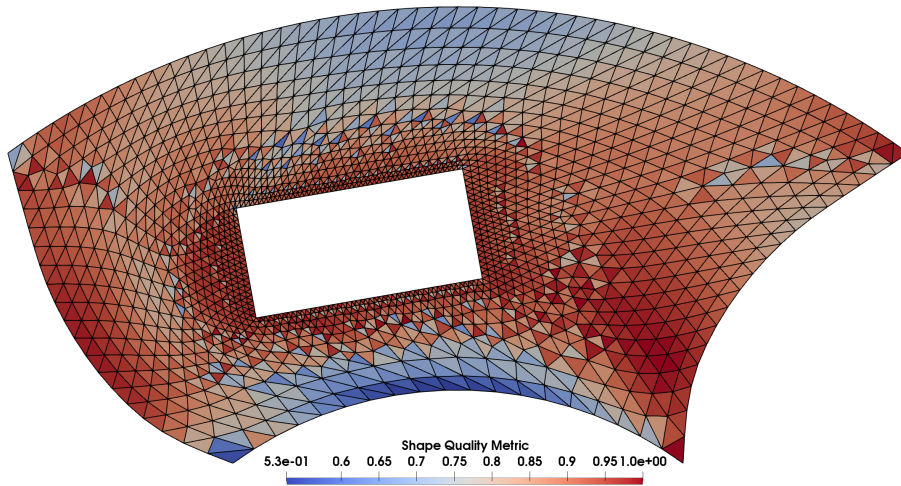
**Σχήμα 4.5:** Εφαρμογή παραμόρφωσης πλέγματος περιφερειακής περιοδικότητας με τη μέθοδο ΣΚΑΣ



(a) Κατανομή ποιότητας Σχήματος στο αρχικό πλέγμα



(b) 1<sup>η</sup> Περίπτωση: Μεταβολή κατανομής ποιότητας Σχήματος χωρίς παραμόρφωση περιοδικών ορίων



(c) 2<sup>η</sup> Περίπτωση: Μεταβολή κατανομής ποιότητας Σχήματος με περιφερειακή περιοδικότητα

**Σχήμα 4.6:** Μεταβολή της κατανομής ποιότητας σχήματος κατά τη παραμόρφωση με τη μέθοδο ΣΚΑΣ, (4.6b) χωρίς περιοδικότητα και (4.6c) με περιοδικότητα.

Αντίστοιχα με την 1<sup>η</sup> εφαρμογή, παρατηρείται ότι η ποιότητα του πλέγματος βελτιώνεται στην περιοχή όπου παραμορφώνεται το περιοδικό όριο ακολουθώντας την παραμορφωμένη γεωμετρία. Συγκεκριμένα, συγκρίνοντας τις δύο περιπτώσεις στα σχήματα 4.6b, 4.6c, φαίνεται ότι ο χώρος που δημιουργείται ανάμεσα στη γεωμετρία και στο αριστερό παραμορφωμένο περιοδικό όριο, διευκολύνει τη διάδοση της παραμόρφωσης του πλέγματος με αποτέλεσμα τη διόρθωση της ποιότητας των ενδιάμεσων στοιχείων.

Στον πίνακα που ακολουθεί γίνεται σύγκριση της ποιότητας σχήματος των παραμορφωμένων πλεγμάτων χρησιμοποιώντας τη μέθοδο ΣΚΑΣ με και χωρίς περιοδικότητα.

Μέσος όρος Μετρικής Ποιότητας Σχήματος			
Εφαρμογές	Αρχικό Πλέγμα	ΣΚΑΣ χωρίς Περιοδικότητα	ΣΚΑΣ με Περιοδικότητα
1 <sup>η</sup>	0.98	0.9083	0.93
2 <sup>η</sup>	0.96	0.86	0.88

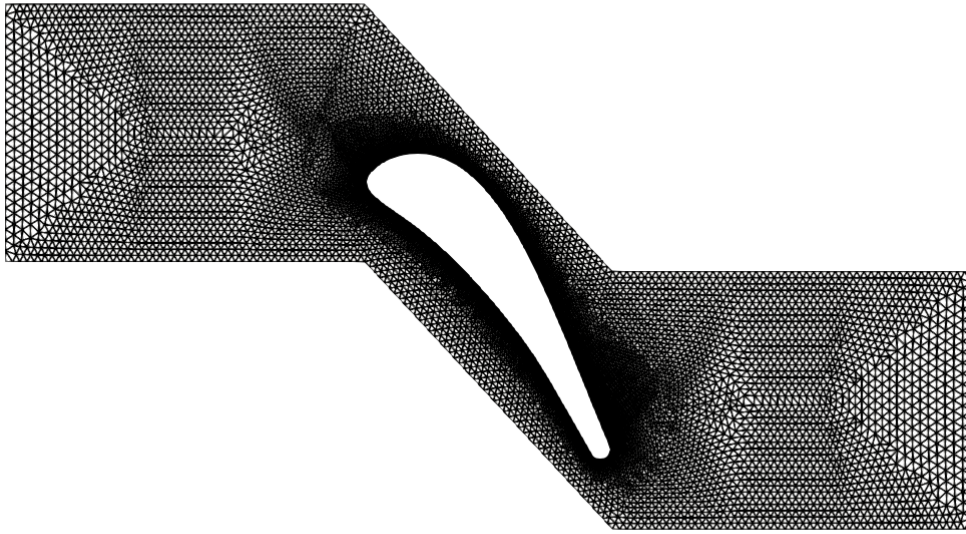
## Κεφάλαιο 5

# Εφαρμογές ΣΚΑΣ σε 2Δ και 3Δ Υπολογιστικά Πλέγματα

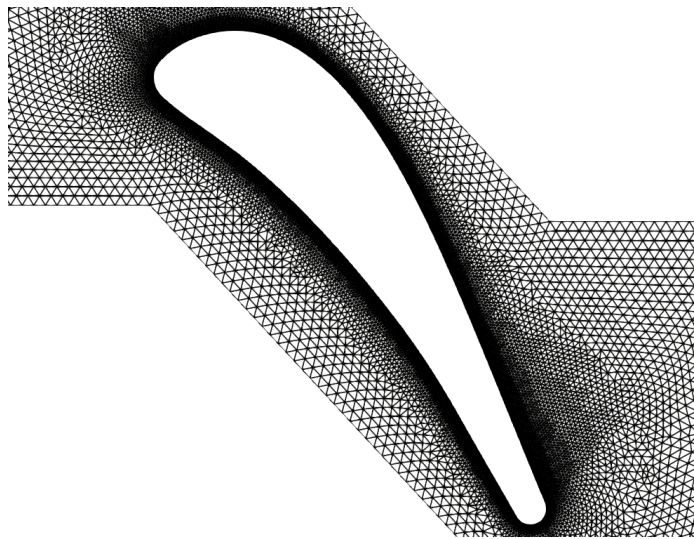
Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται εφαρμογές με γραμμική και περιφερειακή περιοδικότητά, αλλά και εφαρμογές χωρίς περιοδικότητα μέσω της μεθόδου ΣΚΑΣ. Σκοπός του κεφαλαίου είναι η ανάδειξη των δυνατοτήτων της μεθόδου, τόσο 2Δ αλλά και 3Δ προβλήματα. Τα υπολογιστικά πλέγματα που χρησιμοποιούνται διαφέρουν σε μέγεθος αλλά και σε τύπο στοιχείων. Οι εφαρμογές μελετώνται ως προς τη διατήρηση της ποιότητας των στοιχείων τους, μέσω μιας μετρικής. Η μετρική που επιλέχθηκε για την αξιολόγηση της ποιότητας των πλεγμάτων είναι η μετρική σχήματος (Shape). Αρχικά υπολογίζεται η μέση τιμή της μετρικής Shape στο αρχικό παραμόρφωτο πλέγμα και, στη συνέχεια, στο παραμορφωμένο. Έπειτα παρουσιάζονται διαγράμματα ή πίνακες όπου συγκρίνονται οι μεταβολές της μέσης τιμής της μετρικής Shape σε σχέση με το αρχικό πλέγμα. Σε κάθε εφαρμογή υπολογίζεται ο αριθμός αναστραμμένων στοιχείων εφόσον χρειάζεται.

### 5.1 Εφαρμογή σε Πτερύγιο Στροβιλομηχανής

Σε αυτήν την ενότητα, γίνεται εφαρμογή της ΣΚΑΣ στην παραμόρφωση μη-δομημένου πλέγματος σε 2Δ γραμμική πτερύγωση στροβιλομηχανής. Το αρχικό πλέγμα αποτελείται από 18746 κόμβους και 36345 τριγωνικά στοιχεία, ενώ κοντά στα τοιχώματα έχει κατάλληλη πύκνωση για την προσομοίωση συνεκτικών ροών. Το αρχικό πλέγμα δίνεται από τα σχήματα 5.1, 5.2.



Σχήμα 5.1: Αρχικό 2Δ υπολογιστικό πλέγμα



Σχήμα 5.2: Το υπολογιστικό πλέγμα κοντά στο πτερύγιο

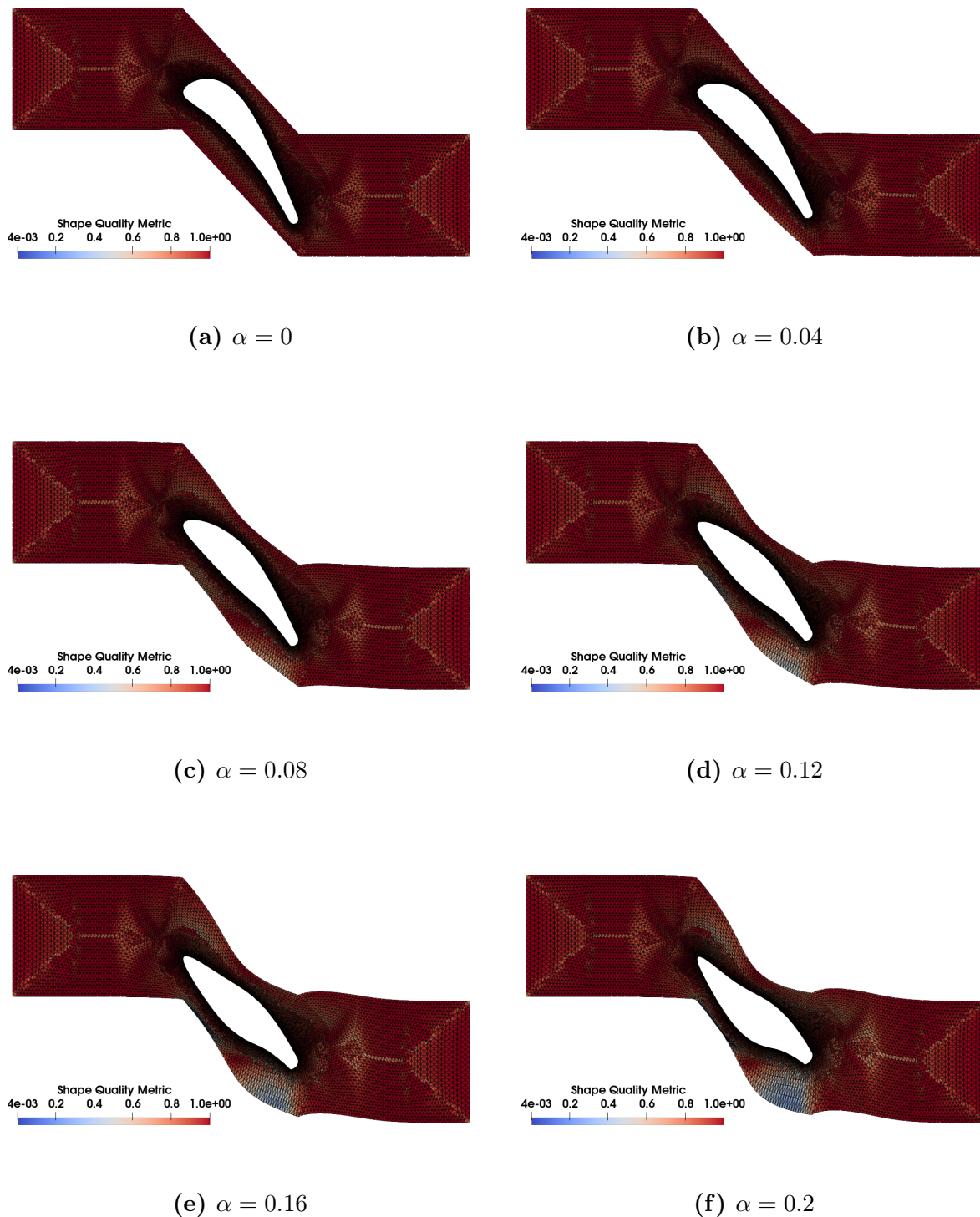
Στην αρχική γεωμετρία, εφαρμόζεται παραμόρφωση που περιγράφεται από τη σχέση

$$\vec{x} = \vec{x}_0 \quad (5.1)$$

$$\vec{y} = \vec{y}_0 - \alpha \sin(2\pi\vec{x}) \quad (5.2)$$

όπου  $\vec{x}_0$ ,  $\vec{y}_0$  οι αρχικές θέσεις των σημείων του πλέγματος και  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  οι αντίστοιχες τελικές θέσεις. Η παραμόρφωση που επιβάλλει η σχέση 5.2

δίνει μια τυχαία παραμόρφωση. Η παραμόρφωση αυξάνεται όσο μεγαλώνει ο συντελεστής  $\alpha$ , ο οποίος παίρνει τιμές από 0 έως 0.2 με βήμα 0.04. Η γεωμετρία που προκύπτει έπειτα από κάθε βήμα παραμόρφωσης, αναδεικνύει τις δυνατότητες της μεθόδου σε εφαρμογές έντονων παραμορφώσεων. Για κάθε τιμή του συντελεστή  $\alpha$  υπολογίζεται η μετρική σχήματος  $s$ , αλλά και ο αριθμός αναστραμμένων τριγώνων. Τα αποτελέσματα της προσαρμογής του πλέγματος παρουσιάζονται στο σχήμα 5.3, με το βαθμωτό πεδίο τιμών της μετρικής σχήματος.

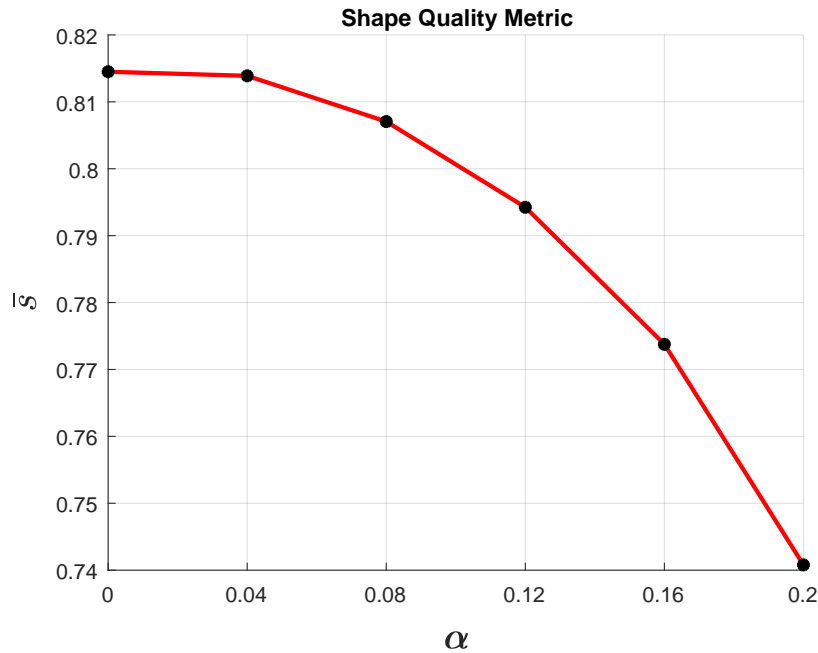


Σχήμα 5.3: Παραμόρφωση πτερυγίου, μέσω της μεθόδου ΣΚΑΣ.

Η μετατόπιση των περιοδικών ορίων δημιουργεί χώρο σε περιοχές όπου η παραμόρφωση του πτερυγίου είναι εντονότερη. Έτσι επιτυγχάνονται μεγαλύτερες παραμορφώσεις, καθώς το υπολογιστικό πλέγμα στρεβλώνεται λιγότερο. Σύμφωνα με το βαθμωτό πεδίο τιμών της μετρικής  $s$ , παρατηρείται ότι για τιμές του συντελεστή  $\alpha$  μεταξύ 0 – 0.12 η στρεβλότητα του πλέγματος διατηρείται σε ανεκτά όρια. Για τιμές του συντελεστή  $\alpha$  άνω



του 0.16, η παραμόρφωση του πλέγματος δεν μπορεί να διαδοθεί ομοιόμορφα στο εσωτερικό του, αλλά ούτε να απορροφηθεί από την μετατόπιση των περιοδικών ορίων. Μέχρι και για τιμή της σταθεράς  $\alpha = 0.12$ , δεν παράγεται κανένα αναστραμμένο τρίγωνο, ενώ για τιμές της σταθεράς  $\alpha = 0.16, 0.2$  παράγονται 4 και 6 αναστραμμένα τρίγωνα αντίστοιχα. Στη συνέχεια, παρουσιάζεται διάγραμμα μέσης τιμής για τη μετρική  $s$  για κάθε τιμή του συντελεστή  $\alpha$ .



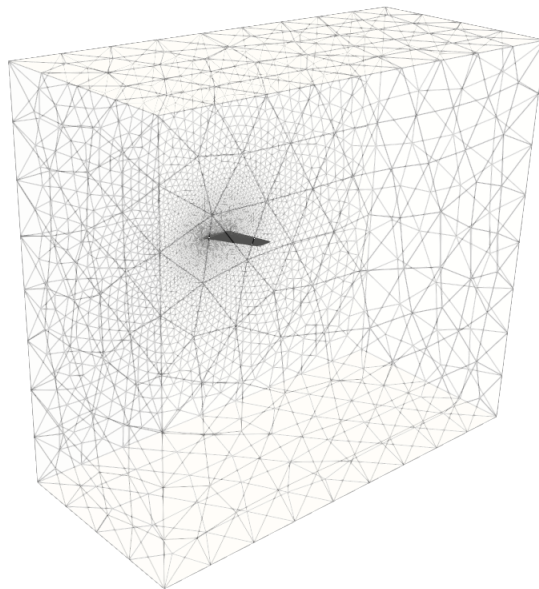
**Σχήμα 5.4:** Διάγραμμα μεταβολής μέσης τιμής της μετρικής ποιότητας σχήματος  $s$ , σε σχέση με τη γωνία περιστροφής της αεροτομής.

Στο διάγραμμα του σχήματος 5.4 παρατηρείται ότι ο μέσος όρος της μετρικής σχήματος μεταβάλλεται σε ποσοστό της τάξης 7.5% σε σχέση με την αρχική ποιότητα του πλέγματος. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο μέσος όρος της ποιότητας του αρχικού πλέγματος είναι χαμηλότερος από τον ιδανικό ( $\bar{s} \approx 1$ ), λόγω της επιρροής των στρεβλωμένων κελιών του οριακού στρώματος. Έτσι, η μεταβολή του μέσου όρου συγκρίνεται με ποιότητα αναφοράς αυτή του αρχικού πλέγματος συμπεριλαμβάνοντας τη στρεβλότητα των κελιών του οριακού στρώματος.

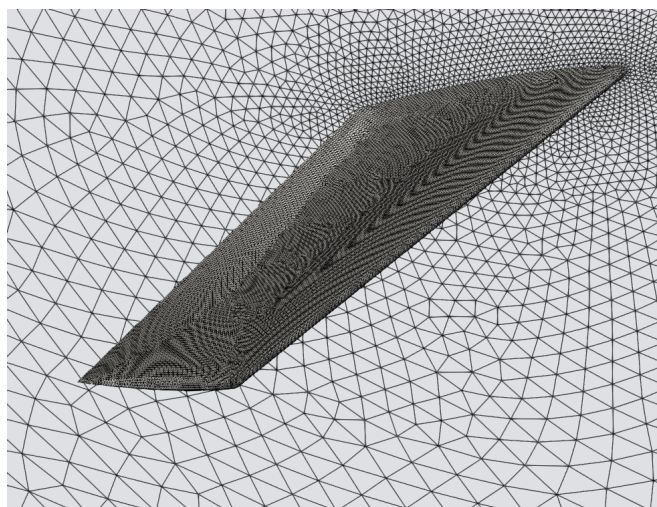
## 5.2 Εφαρμογή στην Πτέρυγα ONERA M6

Η πτέρυγα ONERA M6 αφορά μια 3D εφαρμογή, με μη-δομημένο πλέγμα τετραεδρικών στοιχείων. Το πλέγμα αποτελείται από 72791 κόμβους και 341797 τετράεδρα. Το αρχικό επιφανειακό και ογκικό πλέγμα δίνονται από τα σχήματα 5.6 - 5.7, ενώ το υπολογιστικό χωρίο παρουσιάζεται στο σχήμα 5.5.

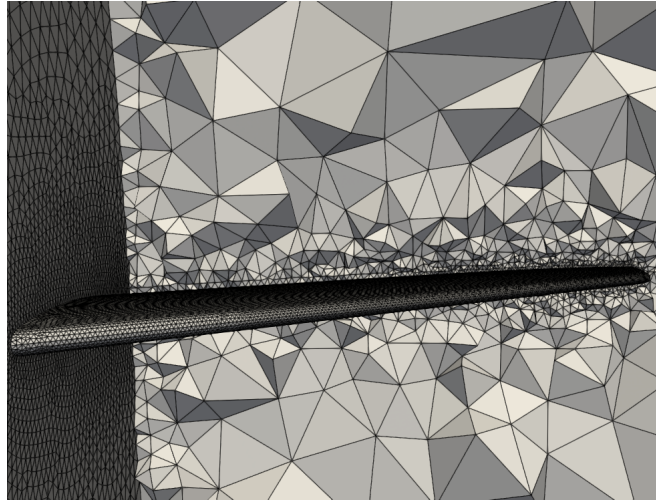
Σε αυτήν την εφαρμογή, η πτέρυγα κάμπτεται κατά το εκπέτασμά της (άξονας Z). Εξετάζονται τα αποτελέσματα μέσω του βαθμωτού πεδίου της μετρικής σχήματος στο πλέγμα, αλλά και με γράφημα μέσης ποιότητας της ίδιας μετρικής.



Σχήμα 5.5: Το υπολογιστικό χωρίο γύρω από την πτέρυγα.



Σχήμα 5.6: Το υπολογιστικό πλέγμα στην επιφάνεια της πτέρυγας.

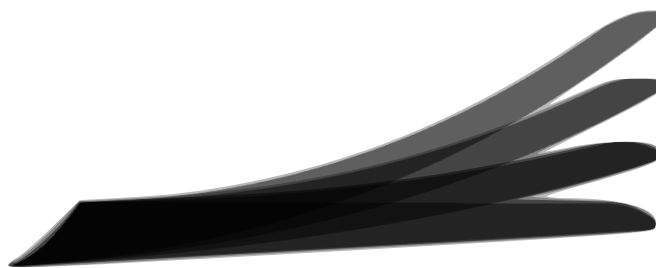


Σχήμα 5.7: Το υπολογιστικό πλέγμα γύρω από την πτέρυγα

Οι μετατοπίσεις του επιφανειακού πλέγματος της πτέρυγας δίνονται από τη σχέση:

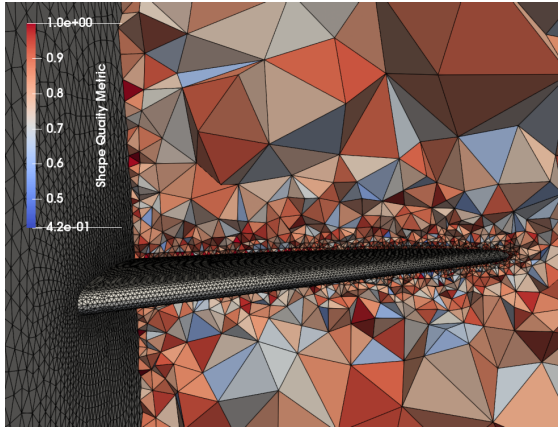
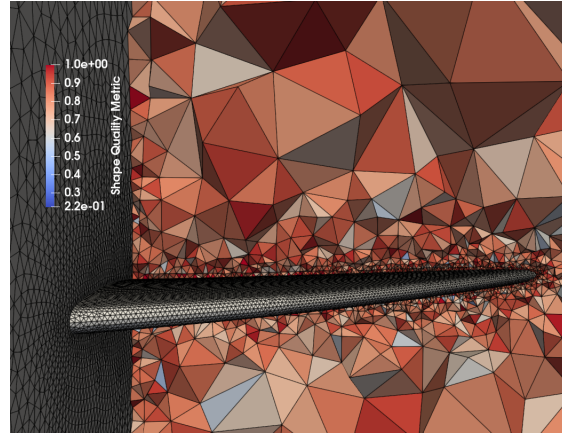
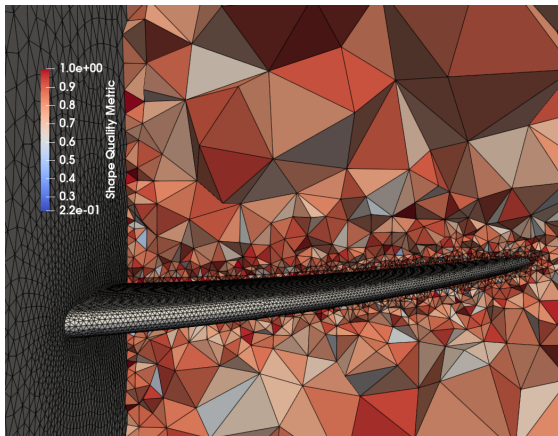
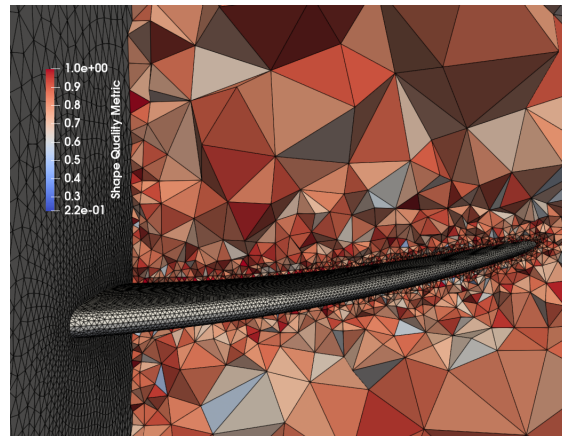
$$\vec{x} = \vec{x}_0, \quad \vec{y} = \vec{y}_0 + \alpha \vec{z}_0^2, \quad \vec{z} = \vec{z}_0 \quad (5.3)$$

όπου  $\vec{x}_0$ ,  $\vec{y}_0$ ,  $\vec{z}_0$  οι αρχικές θέσεις των κόμβων, ενώ  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$ ,  $\vec{z}$  οι τελικές θέσεις. Η πτέρυγα παραμορφώνεται χωρίς ενδιάμεσα βήματα, ως τις παραμορφώσεις που αντιστοιχούν στις τιμές  $a = 0.05$ ,  $a = 0.1$ ,  $a = 0.15$ . Η κάμψη της πτέρυγας για κάθε τιμή της σταθεράς  $\alpha$ , παρουσιάζεται στο σχήμα 5.8.



Σχήμα 5.8: Κάμψη της πτέρυγας για τιμές του συντελεστή  $\alpha = 0.05, 0.1, 0.15$

Στα σχήματα 5.9a- 5.9d παρουσιάζεται το βαθμωτό πεδίο τιμών της μετρικής σχήματος στο τετραεδρικό πλέγμα γύρω από την πτέρυγα, για κάθε εφαρμογή κάμψης.

(a)  $\alpha = 0$ (b)  $\alpha = 0.05$ (c)  $\alpha = 0.1$ (d)  $\alpha = 0.15$ 

**Σχήμα 5.9:** Κάμψη της πτέρυγας ONERA M6, και το πεδίο τιμών της μετρικής σχήματος στα τετράεδρα.

Στον πίνακα που ακολουθεί, παρουσιάζεται η μεταβολή της μέσης, της μέγιστης και ελάχιστης τιμής της μετρικής σχήματος για κάθε εφαρμογή κάμψης. Σύμφωνα με τον πίνακα, παρατηρείται αρκετά μικρή μεταβολή στη μέση και μέγιστη τιμή της μετρικής σχήματος, ενώ η ελάχιστη τιμή μεταβάλλεται αισθητά αλλά σε ανεκτό επίπεδο, εκτός από την εφαρμογή κάμψης για  $\alpha = 0.15$ . Έτσι παρόλο που εφαρμόστηκαν έντονες μετατοπίσεις στην πτέρυγα, η ποιότητα του πλέγματος παρέμεινε σε ανεκτά επίπεδα.

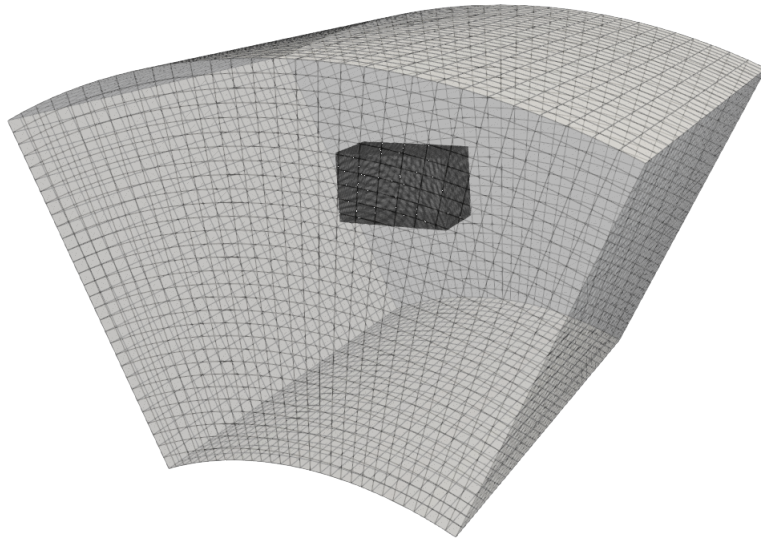
Συγκριτικός Πίνακας Μετρικής Σχήματος (Shape)			
$\alpha$	Shape Mean	Shape Max	Shape Min
0	0.82341	1	0.39545
0.05	0.82005	0.99996	0.24101
0.1	0.82069	0.99984	0.2241
0.15	0.81725	0.99991	0

Μέχρι και για τιμή της σταθεράς  $\alpha = 0.1$  δεν παράγεται κανένα αναστραμμένο τετράεδρο, ενώ για  $\alpha = 0.15$  παράγονται 4 αναστραμμένα τετράεδρα. Έτσι σύμφωνα με τα αποτελέσματα, η μέθοδος ΣΚΑΣ παράγει υψηλής ποιότητας πλέγματα, ακόμα και σε εφαρμογές με έντονες παραμορφώσεις όπως η κάμψη της πτέρυγας για τιμή της σταθεράς  $\alpha = 0.1$ .

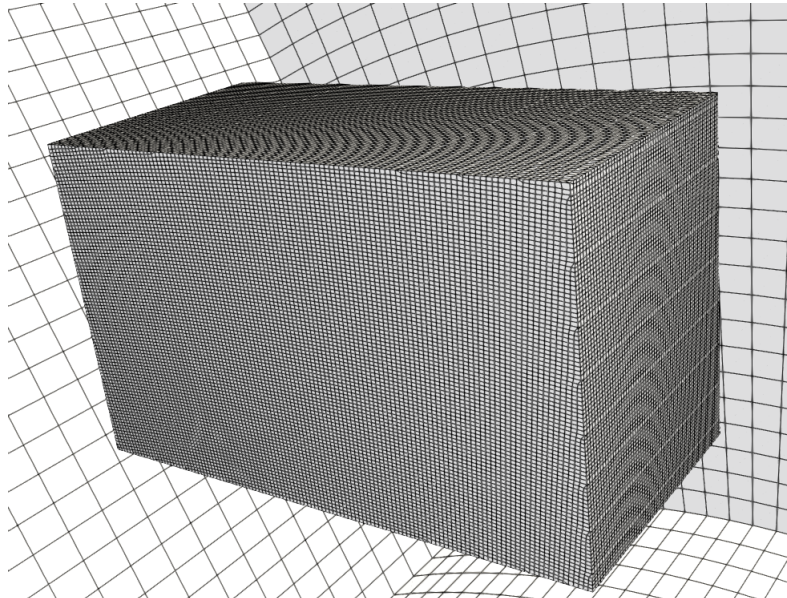
### 5.3 Ορθογώνιο Παραλληλεπίπεδο σε Χωρίο με Περιφερειακή Περιοδικότητα

Σε αυτό το κεφάλαιο εξετάζεται μια μη-ρευστοδυναμική εφαρμογή, όπου τοποθετείται ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο η πιο απλά κουτί, εντός χωρίου με περιφερειακή περιοδικότητα. Το κουτί μετατοπίζεται κατά  $\Delta y = 0.05, 0.1$  και ταυτόχρονα μετατοπίζονται τα περιοδικά όρια του χωρίου. Παρόλο που η συγκεκριμένη εφαρμογή δεν αφορά κάποια ρεαλιστική περίπτωση, επιδεικνύεται η δυνατότητα της μεθόδου ΣΚΑΣ, να μετατοπίζει περιοδικά όρια στις τρεις διαστάσεις.

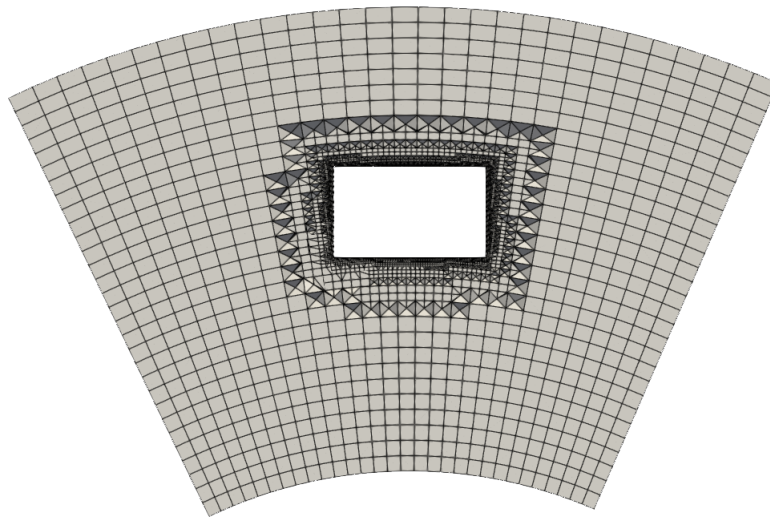
Το αρχικό πλέγμα αποτελείται από 260061 κόμβους και 430105 κελιά από μεικτά στοιχεία (79972 τετράεδρα, 189012 πρίσματα, 1856 πυραμίδες, 159265 εξάεδρα). Το αρχικό επιφανειακό και ογκικό πλέγμα δίνονται από τα σχήματα 5.11 - 5.12, ενώ το υπολογιστικό χωρίο παρουσιάζεται στο σχήμα 5.10.



Σχήμα 5.10: Το υπολογιστικό χωρίο γύρω από το κουτί.



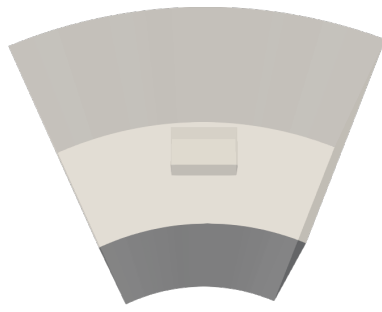
Σχήμα 5.11: Το υπολογιστικό πλέγμα στην επιφάνεια του κουτιού.



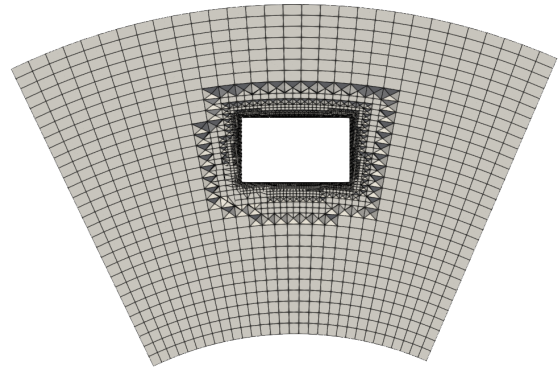
**Σχήμα 5.12:** Τομή στο επίπεδο  $Z$  και το υπολογιστικό πλέγμα γύρω από το κουτί.

Για να γίνει εμφανής η μετατόπιση των περιοδικών ορίων αλλά και του εσωτερικού πλέγματος, παρουσιάζονται δύο σχήματα για κάθε περίπτωση ( $\Delta y = 0.05, 0.1$ ) σχήμα 5.13. Στο πρώτο σχήμα τοποθετείται το υπολογιστικό χωρίο μετά την παραμόρφωση, ενώ στο δεύτερο σχήμα τοποθετείται τομή στο επίπεδο  $Z$ , με το εσωτερικό πλέγμα μετά την παραμόρφωση. Μέχρι και την περίπτωση  $\Delta y = 0.05$  σχήμα 5.13c - 5.13d, δεν παράγεται κανένα αναστραμμένο στοιχείο. Στην περίπτωση  $\Delta y = 0.1$  σχήμα 5.13e - 5.13f παράγονται 66 αναστραμμένα στοιχεία. Παρακάτω παρουσιάζεται πίνακας με την μέση, μέγιστη και ελάχιστη τιμή της μετρικής σχήματος.

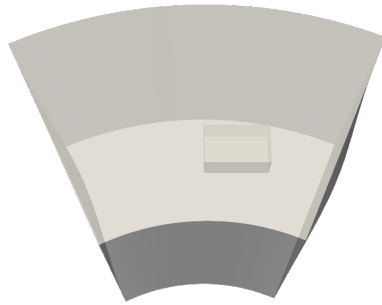
Συγκριτικός Πίνακας Μετρικής Σχήματος (Shape)			
$\Delta y$	Shape Mean	Shape Max	Shape Min
0	0.4732	0.9982	1.e-6
0.05	0.4488	0.9749	1.e-7
0.1	0.3962	0.9747	0



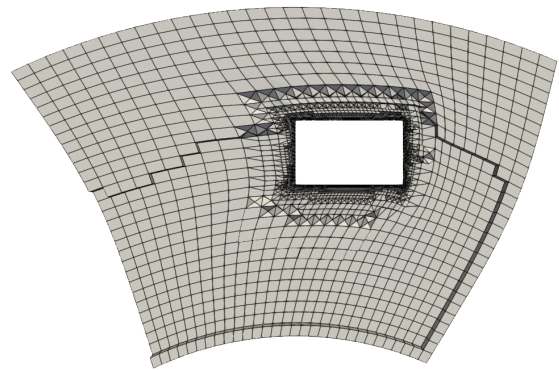
(a) Αρχικό υπολογιστικό χωρίο



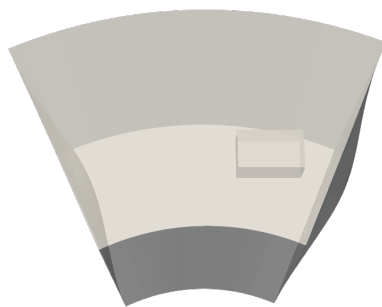
(b) Τομή στον επίπεδο  $Z$



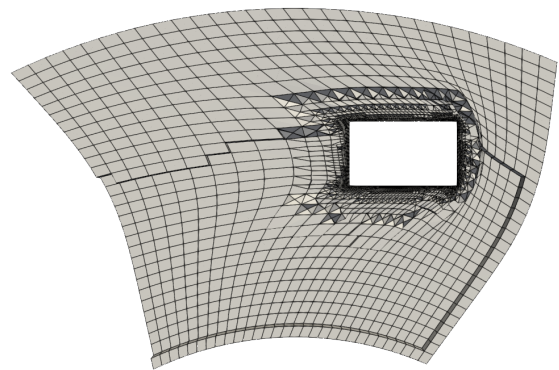
(c) Υπολογιστικό χωρίο για  $\Delta y = 0.05$



(d) Τομή στον επίπεδο  $Z$  για  $\Delta y = 0.05$



(e) Υπολογιστικό χωρίο για  $\Delta y = 0.1$



(f) Τομή στον επίπεδο  $Z$  για  $\Delta y = 0.1$

**Σχήμα 5.13:** Μετατόπιση κουτιού εντός χωρίου με περιφερειακή περιοδικότητα, για τιμές  $\Delta y = 0.05, 0.1$ .



## Κεφάλαιο 6

# Σύγκριση ΣΚΑΣ με τη μέθοδο IDW

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζονται συγκριτικά αποτελέσματα παραμόρφωσης πλέγματος μεταξύ της μεθόδου Σταθμισμένης Κίνησης Απαραμόρφωτου Σώματος ΣΚΑΣ και της μεθόδου IDW με παρεμβολή στροφών [34]. Οι δύο μέθοδοι αναπτύχθηκαν και υλοποιήθηκαν στη ΜΠΥΡ&Β του ΕΜΠ. Η μέθοδος προσαρμοστικής παραμόρφωσης πλέγματος IDW συγκαταλέγεται στην κατηγορία των αλγεβρικών μεθόδων. Αρχικά, περιγράφονται περιληπτικά οι βασικές αρχές της μεθόδου IDW με παρεμβολή στροφών και, στη συνέχεια, οι δύο μέθοδοι αξιολογούνται σε μια 3Δ μη-αεροδυναμική εφαρμογή παραμόρφωσης πλέγματος. Η συγκριτική εφαρμογή αφορά την παραμόρφωση και περιστροφή δύο χοίρων, εντός ενός παραλληλόγραμμου υπολογιστικού χωρίου.

### 6.1 Βασικές Αρχές της Μεθόδου IDW με Παρεμβολή Στροφών

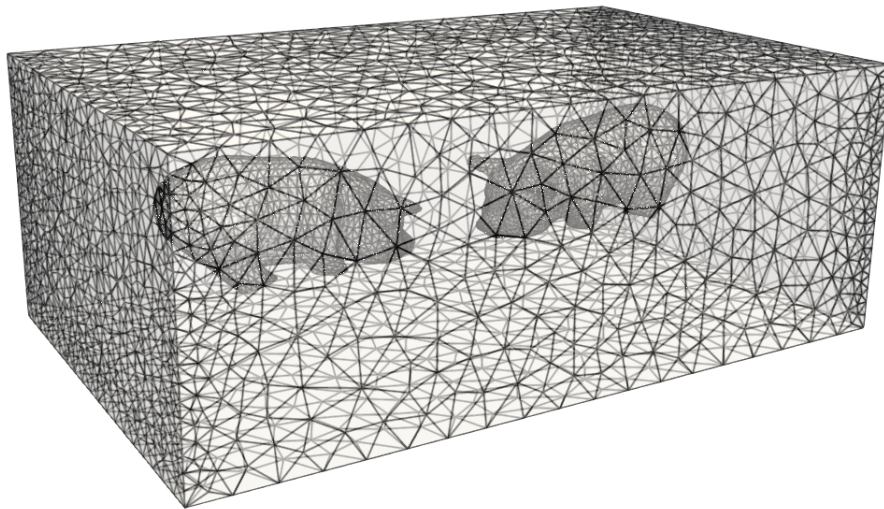
Η μέθοδος IDW, αποτελεί μια ρητή τεχνική παρεμβολής διάσπαρτων σημείων. Η μέθοδος παρεμβολής IDW, υπολογίζει την παρεμβαλλόμενη τιμή  $u$  σε ένα δοσμένο σημείο  $\vec{x}_i$ , ως ένα σταθμισμένο μέσο όρο των γνωστών τιμών στα σημεία  $u_j = u(\vec{x}_j)$ . Έτσι, υπολογίζονται οι μετατοπίσεις  $d\vec{x}_j$  και οι περιστροφές  $R_j$  σε κάθε οριακό κομβό. Έπειτα μέσω της μεθόδου IDW οι μετατοπίσεις  $d\vec{x}_j$  και οι περιστροφές  $R_j$  παρεμβάλλονται στους εσωτερικούς κόμβους  $\vec{x}_i$  ώστε να επιτευχθεί η τελική θέση τους. Η εξίσωση παρεμβολής IDW δίνεται από τη σχέση 1.5.

Οι μετατοπίσεις  $d\vec{x}_j$  υπολογίζονται ως η διαφορά της τελικής με την αρχική θέση του οριακού κόμβου  $\vec{x}_j$ , ενώ οι περιστροφές  $R_j$  αναπαρίστανται μέσω

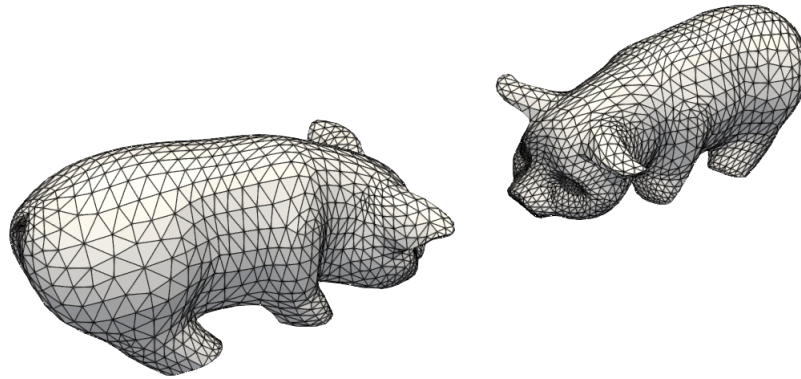
τετραδονίων και υπολογίζονται μέσω μιας αλγεβρικής μεθόδου. Η μέθοδος IDW αναπτύσσεται λεπτομερώς στη μεταπτυχιακή εργασία του Α.Τ Ναιντί [34] που πραγματοποιήθηκε στη ΜΠΥΡ&Β του ΕΜΠ, όπου γίνεται αναπαράσταση των στροφών σε κάθε κόμβο των κινητών ορίων εφαρμόζοντας τη θεωρία των τετραδονίων.

## 6.2 Συγκριτική Εφαρμογή σε 3Δ πλέγμα, γύρω από δύο σώματα χοίρων

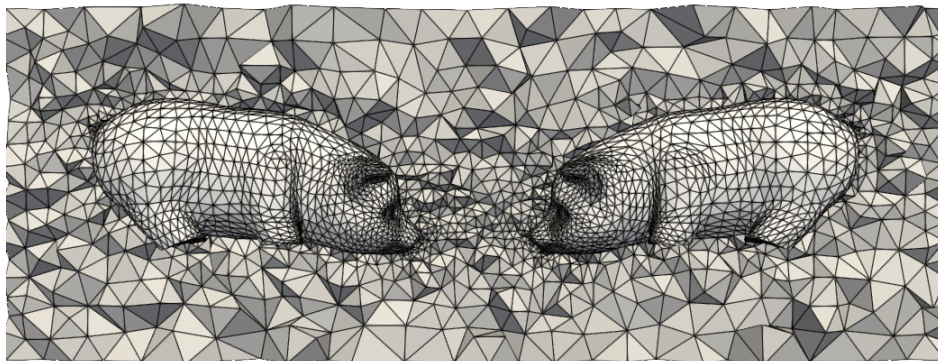
Η εφαρμογή που εξετάζεται, αφορά την παραμόρφωση πλέγματος γύρω από δύο σώματα χοίρων. Το αρχικό πλέγμα αποτελείται από 21663 κόμβους και 111323 τετράεδρα στοιχεία. Το αρχικό επιφανειακό και ογκικό πλέγμα δίνονται στα σχήματα 6.2 - 6.3, ενώ το υπολογιστικό χωρίο παρουσιάζεται στο σχήμα 6.1. Συγκεκριμένα, αξιολογούνται οι δύο μέθοδοι σε μια εφαρμογή μετατόπισης και περιστροφής των δύο χοίρων. Για την επικύρωση των αποτελεσμάτων, παρουσιάζονται συγκριτικά διαγράμματα της μετρικής ποιότητας σχήματος, καθώς και ο αριθμός των αναστραμμένων στοιχείων.



**Σχήμα 6.1:** Το αρχικό υπολογιστικό χωρίο.

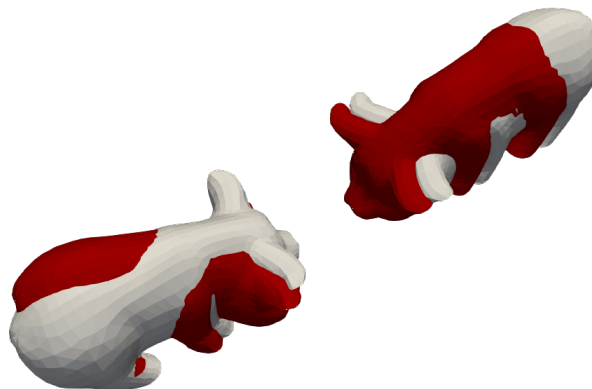


Σχήμα 6.2: Το επιφανειακό πλέγμα στην επιφάνεια των δύο χοίρων.



Σχήμα 6.3: Το αρχικό ογκικό πλέγμα εντός του υπολογιστικού χωρίου.

Σε αυτήν εφαρμογή, εφαρμόζεται διαφορετική μετακίνηση στους οριακούς κόμβους κάθε χοίρου. Στον πρώτο χοίρο εφαρμόζεται μετατόπιση  $dz = 1$ , ενώ στον δεύτερο χοίρο εφαρμόζεται περιστροφή γύρω από τους άξονες  $x, y, z$  με κέντρο το  $(0, 0, 0)$  σε γωνία  $\theta_x, \theta_y, \theta_z = 10^\circ$ . Στο σχήμα 6.4 παρουσιάζεται το αρχικό σχήμα των χοίρων και το σχήμα τους μετά την εφαρμογή των μετατοπίσεων.



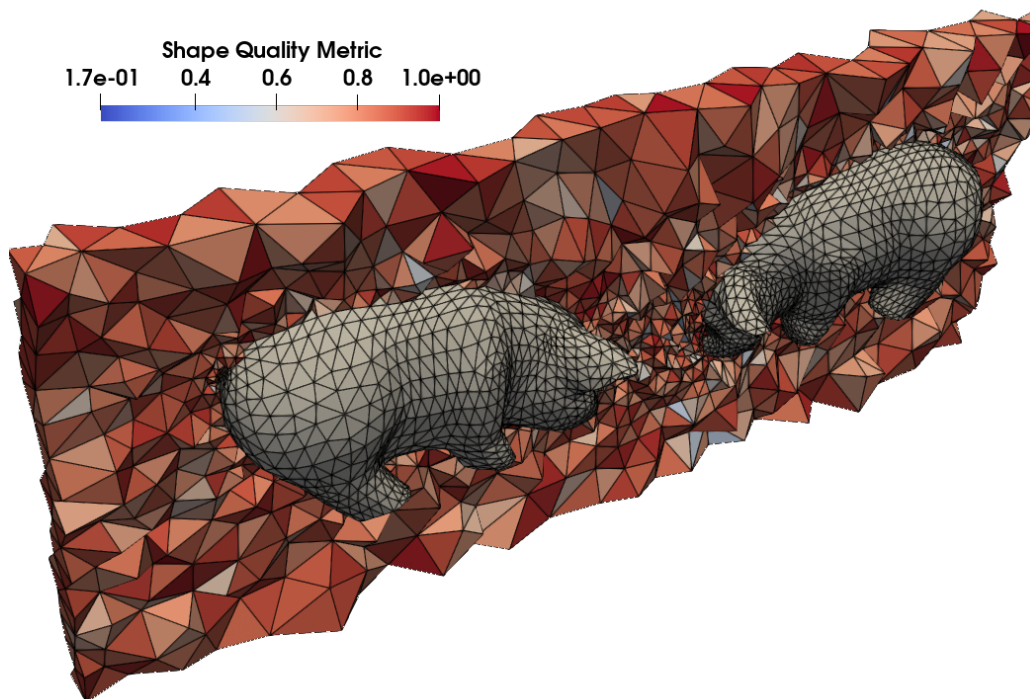
Σχήμα 6.4: Με κόκκινο χρώμα παρουσιάζονται οι χοίροι μετά την μετατόπιση τους, ενώ με μπέζ χρώμα οι χοίροι στην αρχική τους θέση.

Για τη σύγκριση των δύο μεθόδων χρησιμοποιείται η μετρική ποιότητας σχήματος αλλά και ο αριθμός αναστραμμένων στοιχείων. Στον πίνακα 6.1 παρουσιάζεται η μέση τιμή του βαθμωτού πεδίου της μετρικής σχήματος για κάθε μέθοδο IDW, ΣΚΑΣ.

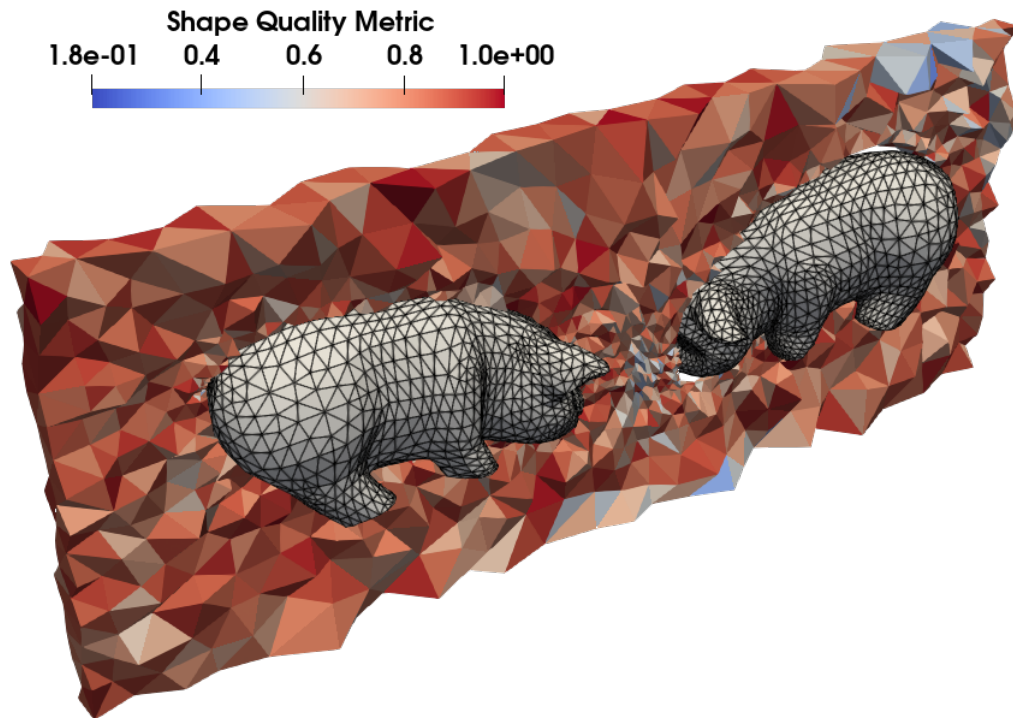
Συγκριτικός Πίνακας Μετρικής Σχήματος (Shape)			
Μέθοδος	Shape Mean	Shape Max	Shape Min
IDW	0.8215	0.9995	0.1512
WRBM	0.8098	0.9979	0
Αρχικό Πλέγμα	0.8283	0.9944	0.1512

**Πίνακας 6.1:** Περίπτωση δύο χοίρων. Μεταβολή μέσης τιμής της μετρικής ποιότητας σχήματος για τις μεθόδους IDW με παρεμβολή στροφών και ΣΚΑΣ.

Στα σχήματα 6.5-6.6, παρουσιάζεται το ογκικό πλέγμα μετά τη μετατόπιση των χοίρων με (WRBM, IDW) αλλά και το βαθμωτό πεδίο της μετρικής σχήματος.



**Σχήμα 6.5:** Τομή στο τελικό ογκικό πλέγμα γύρω από τις δύο φιγούρες και το βαθμωτο πεδίο της μετρικής σχήματος. Παραμόρφωση με τη μέθοδο ΣΚΑΣ.



**Σχήμα 6.6:** Τομή στο τελικό ογκικό πλέγμα γύρω από τις δύο φιγούρες και το βαμθωτό πεδίο της μετρικής σχήματος. Παραμόρφωση με τη μέθοδο IDW.

Αξίζει να σημειωθεί πως με τη μέθοδο ΣΚΑΣ δεν παράγεται κανένα αναστραμμένο τετράεδρο ενώ με τη μέθοδο IDW παράγονται 125 αναστραμμένα τετράεδρα. Συνοψίζοντας, παρατηρείται ότι και οι δύο μέθοδοι δίνουν ικανοποιητικά αποτελέσματα ως προς την μετρική ποιότητας σχήματος για την εφαρμογή παραμόρφωσης που παρουσιάστηκε στο παρόν κεφάλαιο. Υπενθυμίζεται πως η μετρική σχήματος δεν αναγνωρίζει αναστραμμένα στοιχεία. Παρόλα αυτά, μόνο η μέθοδος ΣΚΑΣ έδωσε ως αποτέλεσμα έγκυρο πλέγμα. Συμπερασματικά, στη συγκεκριμένη εφαρμογή φαίνεται να υπερτερεί η μέθοδος ΣΚΑΣ, κάτι το οποίο δεν την καθιστά γενικά καλύτερη μέθοδο. Για την εξαγωγή τέτοιου συμπεράσματος, απαιτείται εκτεταμένη μελέτη των δύο μεθόδων σε μια πληθώρα εφαρμογών.

# Κεφάλαιο 7

## Ανακεφαλαίωση και Συμπεράσματα

### 7.1 Ανακεφαλαίωση

Στην εργασία αυτή, παρουσιάστηκε και αναπτύχθηκε η μέθοδος παραμόρφωσης 2Δ και 3Δ υπολογιστικών πλεγμάτων με την χρήση της μεθόδου ΚΑΣ, για χρήση, μεταξύ άλλων, κατά τη διαδικασία αεροδυναμικής βελτιστοποίησης σχήματος. Αρχικά παρουσιάστηκαν οι βασικές ιδιότητες και οι πιο διαδεδομένοι αλγόριθμοι παραμόρφωσης πλέγματος που υπάρχουν στη βιβλιογραφία. Στη συνέχεια αναλύθηκαν τα βήματα της διαδικασίας παραμόρφωσης, όπως αυτή εφαρμόζεται με τη μέθοδο ΚΑΣ. Επιπλέον προτάθηκαν δύο βελτιώσεις της μεθόδου που αφορούν τη διαχείριση παραμορφώσεων σε περιοδικά πλέγματα κυρίως για εφαρμογές στροβιλομηχανών (Κεφάλαιο 4) και την προσθήκη στάθμισης στην αρχική μέθοδο, με σκοπό τη διατήρηση της απαραμόρφωτης δομής του πλέγματος γύρω από την παραμορφωμένη γεωμετρία (Κεφάλαιο 3). Η βελτιωμένη μέθοδος που προκύπτει με την προσθήκη στάθμισης ονομάστηκε Σταθμισμένη Κίνηση Απαραμόρφωτου Στερεού ΣΚΑΣ. Για την επίδειξη της λειτουργίας και της στιβαρότητάς της, η μέθοδος που αναπτύχθηκε εφαρμόστηκε σε περιπτώσεις παραμόρφωσης 2Δ και 3Δ υπολογιστικών πλεγμάτων, για μηχανολογικές και μη εφαρμογές.

Ένα πολύ βασικό τμήμα της μεταπτυχιακής αυτής εργασίας αποτελεί το λογισμικό παραμόρφωσης πλέγματος που αναπτύχθηκε για την εφαρμογή της μεθόδου και χρησιμοποιήθηκε για τις εφαρμογές που παρουσιάστηκαν. Συγκεκριμένα, το λογισμικό παραμόρφωσης πλεγμάτων με τη μέθοδο ΣΚΑΣ, προγραμματίστηκε σε γλώσσα προγραμματισμού C++. Το λογισμικό αυτό αναπτύχθηκε τόσο για 2Δ όσο και για 3Δ πλέγματα, ενώ εφαρμόζεται με τον ίδιο τρόπο σε δομημένα και μη-δομημένα πλέγματα.

Κατά την ανάπτυξη του λογισμικού παραμόρφωσης πλέγματος, προγραμ-

ματίστηκαν τα εξής:

- Ανάγνωση του πλέγματος και της επιβαλλόμενης παραμόρφωσης των οριακών κόμβων, όπως αυτή προκύπτει, για παράδειγμα, σε κάθε κύκλο μιας διαδικασίας βελτιστοποίησης, η οποία αποτελεί την οριακή συνθήκη για την παραμόρφωση του πλέγματος.
- Ανάπτυξη κατάλληλου λογισμικού το οποίο δέχεται ως είσοδο πλέγμα το οποίο έχει παραχθεί από το λογισμικό ανοιχτού λογισμικού Open-FOAM (points, faces, boundary), στα αρχεία πλέγματος του (.nod, .ele).
- Μετατροπή του επιλύτη ΚΑΣ με σκοπό τον υπολογισμό των παραμορφώσεων στα περιοδικά όρια διατηρώντας παράλληλα σταθερό το βήμα της περιοδικότητας.
- Υπολογισμός βαρών για κάθε κυψέλη με βάση τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των κυψελών του αρχικού πλέγματος, όπως περιγράφεται στο κεφάλαιο 3.

## 7.2 Συμπεράσματα

Με την ανάλυση που έγινε στην εργασία αυτή, φαίνεται ότι η μέθοδος παραμόρφωσης πλεγμάτων με τη χρήση της μεθόδου ΚΑΣ, είναι μια στιβαρή και αξιόπιστη μέθοδος. Σε όλες τις εφαρμογές που παρουσιάστηκαν, η μέθοδος αυτή έδωσε ικανοποιητικής ποιότητας πλέγματα σε σχέση με το αρχικό, ακόμα και για μεγάλες παραμορφώσεις.

Συνοπτικά τα βασικά συμπεράσματα που προκύπτουν από την ανάλυση που έγινε στη μεταπτυχιακή αυτή εργασία, ως προς τη χρήση και την εφαρμογή της μεθόδου, είναι τα εξής:

- Η ποιότητα του παραμορφωμένου πλέγματος διατηρείται σε υψηλά επίπεδα και είναι σχεδόν ισάξια με την αρχική. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η μέθοδος ΚΑΣ τείνει να παραμορφώνει το υπολογιστικό πλέγμα ως απολύτως στερεό σώμα.

- Παρατηρήθηκε ότι στις εφαρμογές με περιοδικά όρια, η ποιότητα του παραμορφωμένου πλέγματος βελτιώνεται με την προσθήκη περιοδικότητας στη μέθοδο ΚΑΣ. Αυτό, οφείλεται στη δημιουργία περισσότερου ελεύθερου χώρου μεταξύ των ορίων του χωρίου για την απορρόφηση της παραμόρφωσης στο εσωτερικό πλέγμα.
- Η προσθήκη βαρών στην αρχική μέθοδο, οδηγεί σε καλύτερα αποτελέσματα στην παραμόρφωση της περιοχής γύρω από την γεωμετρία. Ακόμη και σε εφαρμογές με πυκνό οριακό πλέγμα γύρω από τη γεωμετρία, (NACA 4412), η σταθμισμένη μέθοδος ΣΚΑΣ έδειξε ότι διατηρεί απαραμόρφωτο το πλέγμα γύρω από τα κινητά όρια, ακόμα και για μεγάλες παραμορφώσεις.
- Η μέθοδος ΚΑΣ εφαρμόζεται σε κάθε είδους πλέγμα και με διαφορετικά πλεγματικά στοιχεία, αφού δεν εξαρτάται από την τοπολογική σύνδεση των πλεγματικών κόμβων.
- Η μέθοδος ΚΑΣ μπορεί να εφαρμοστεί με τον ίδιο ακριβώς τρόπο σε 2Δ και 3Δ πλέγματα εσωτερικής και εξωτερικής αεροδυναμικής.
- Η μέθοδος που αναπτύχθηκε μπορεί να εφαρμοστεί με την ίδια ευκολία τόσο σε περιπτώσεις αεροδυναμικής βελτιστοποίησης, όσο και σε μη μόνιμα προβλήματα ΥΡΔ που περιλαμβάνουν κινούμενα όρια ή υπολογισμούς αεροελαστικότητας.

### 7.3 Προτάσεις για Μελοντική Μελέτη

Θέματα για περαιτέρω έρευνα και προγραμματισμό σχετικά με τη μέθοδο παραμόρφωσης πλεγμάτων με τη μέθοδο IDW, θα μπορούσαν να είναι τα εξής:

- Με σκοπό την αύξηση της στιβαρότητας της μεθόδου, θα μπορούσε να ερευνηθεί εάν η χρήση διαφορετικών συναρτήσεων υπολογισμού των βαρών με σκοπό την ταυτόχρονη διατήρηση της απαραμόρφωτης δομής του πλέγματος στην περιοχή γύρω από τα κινητά όρια, αλλά ταυτόχρονη και την ομαλή διάχυσή της στο εσωτερικό πλέγμα.



- Η μέθοδος θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί στην επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης με τη συζυγή μέθοδο ή με άλλες μεθόδους βελτιστοποίησης, όπως οι εξελικτικοί αλγόριθμοι, έτσι ώστε να πιστοποιηθεί η αποτελεσματικότητα και η ταχύτητά της στο πλαίσιο μιας διαδικασίας βελτιστοποίησης.

# Παράρτημα Α

## Μαθηματική Ανάπτυξη ΚΑΣ 2Δ

Για τη μαθηματική ανάπτυξη της τεχνικής ΚΑΣ Στις 2Δ θεωρούμε ότι κάθε κόμβος του πλέγματος μετακινείται κατά τους άξονες  $(x, y)$  κατά  $\Delta\vec{x} = (\Delta x, \Delta y)$  και στρέφεται γύρω τους κατά γωνία  $\theta_z$ . Αντίστοιχα, οι σχέσεις ισχύουν επιλέγοντας διαφορετικό σύστημα συντεταγμένων (π.χ  $x, z$ ). Αναπτύσσοντας την σχέση 2.1 προκύπτει η εξίσωση κίνησης απαραμόρφωτου σώματος στις 2Δ:

$$\begin{aligned}\vec{x}'_i &= R\vec{x}_i + \Delta\vec{x} \\ \begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

όπου,

- $\vec{x}_i$  : αρχική θέση κόμβου,
- $\vec{x}'_i$  : τελική θέση κόμβου,
- $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$  : Μητρώο στροφής γύρω από τον  $z$  άξονα.

Όπως αναφέρθηκε στο Κεφάλαιο 1.4.4 η τεχνική ΚΑΣ εφαρμόζεται σε κάθε κυψέλη του πλέγματος με τους άξονες περιστροφής της να περνούν από τον κεντρικό κόμβο  $\mathbf{M}$ . Έτσι, από εδώ και στο εξής, κατά την ανάπτυξη των εξισώσεων αναφερόμαστε στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων της κάθε κυψέλης με κέντρο τη θέση του κόμβου  $\vec{x}_M$ .

Μετατροπή από ολικό σε τοπικό σύστημα συντεταγμένων ως προς τον κόμβο  $\mathbf{M}$

$$\begin{aligned}\vec{x}_i &= \vec{x}'_i - \vec{x}_M = \begin{bmatrix} x_i - x_M \\ y_i - y_M \end{bmatrix} \\ \vec{x}'_i &= \vec{x}'_i - \vec{x}_M = \begin{bmatrix} x'_i - x_M \\ y'_i - y_M \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Έτσι σύμφωνα η συνάρτηση που ζητείται να ελαχιστοποιηθεί σύμφωνα με την θεωρία του Κεφαλαίου 1.4.4 είναι:

$$I = \sum_{i=1}^N \{ [x_i \cos \theta + y_i \sin \theta + \Delta x - x'_i]^2 + [-x_i \sin \theta + y_i \cos \theta + \Delta y - y'_i]^2 \} \quad (\text{A.2})$$

Προκειμένου να επιτευχθεί η ελαχιστοποίηση της συνάρτησης I μηδενίζονται οι μερικές παράγωγοι ως προς  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  και  $\theta$ .

$$\frac{\partial I}{\partial \Delta x} = \sum_{i=1}^N \{ x_i \cos \theta + y_i \sin \theta + \Delta x - x'_i \} = 0 \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\partial I}{\partial \Delta y} = \sum_{i=1}^N \{ -x_i \sin \theta + y_i \cos \theta + \Delta y - y'_i \} = 0 \quad (\text{A.4})$$

Οπότε, λύνοντας ως προς  $\Delta x$  και  $\Delta y$ , καταλήγουμε στις παρακάτω σχέσεις για τον υπολογισμό της μετακίνησης του εσωτερικού κόμβου M:

$$\Delta x = \sum_{i=1}^N \{ x'_i - x_i \cos \theta - y_i \sin \theta \} \quad (\text{A.5})$$

$$\Delta y = \sum_{i=1}^N \{ y'_i + x_i \sin \theta - y_i \cos \theta \} \quad (\text{A.6})$$

Αντίστοιχα, προκύπτει η εξίσωση για τον υπολογισμό της γωνίας  $\theta$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial \theta} = & \sum_{i=1}^N [(x_i \cos \theta + y_i \sin \theta + \Delta x - x'_i)(-x_i \sin \theta + y_i \cos \theta)] + \\ & \sum_{i=1}^N [(-x_i \sin \theta + y_i \cos \theta + \Delta y - y'_i)(x_i \cos \theta + y_i \sin \theta)] \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Αναπτύσσοντας την Εξίσωση A.7, προκύπτει μια μη-γραμμική εξίσωση της μορφής  $A \sin \theta + B \cos \theta = 0$  και επιλύεται επαναληπτικά εφαρμόζοντας τη μέθοδο Newton-Raphson[31] όπως έχει αναφερθεί στο Κεφάλαιο 1.4.4. Έτσι η νέα γωνία  $\theta$  που προκύπτει είναι:

$$\theta^{n+1} = \theta^n - \frac{F}{\frac{\partial F}{\partial \theta}} \quad (\text{A.8})$$

όπου,

- $F = A \sin \theta + B \cos \theta, \frac{\partial F}{\partial \theta} = A \cos \theta - B \sin \theta$
- $A = \sum_{i=1}^N (-x_i \Delta x + x'_i x_i - y_i \Delta y + y'_i y_i)$
- $B = \sum_{i=1}^N (y_i \Delta x - x'_i y_i - x_i \Delta y + y'_i x_i)$

Τέλος, πραγματοποιείται η διόρθωση των συντεταγμένων του κόμβου M(A.9) και επιστροφή των συντεταγμένων των οριακών κόμβων της κυψέλης(γείτονες) πίσω στο ολικό σύστημα.

$$\vec{x}'_M = \vec{x}_M + \Delta \vec{x} \longrightarrow \begin{bmatrix} x'_M \\ y'_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_M \\ y_M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{aligned} \vec{x}_i &= \vec{x}'_i + x_M \longrightarrow \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_i \\ y'_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_M \\ y_M \end{bmatrix} \\ \vec{x}'_i &= \vec{x}_i - x_M \longrightarrow \begin{bmatrix} x'_i \\ y'_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_M \\ y_M \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Συνοψίζοντας, στο Παράρτημα Α παρουσιάστηκε η λεπτομερής μαθηματική ανάπτυξη της τεχνικής ΚΑΣ για 2Δ, χάριν ευκολότερης κατανόησης και πληρότητας. Ωστόσο, στο λογισμικό που αναπτύσσεται στην εργασία χρησιμοποιείται η μαθηματική διατύπωση για τις 3Δ που παρουσιάζεται στο Παράρτημα Β, αφού οι εφαρμογές παραμόρφωσης πλέγματος σε 2Δ αποτελούν υποπερίπτωση της 3Δ μοντελοποίησης.

## Παράρτημα Β

### Μαθηματική Ανάπτυξη ΚΑΣ 3Δ

Στον χώρο ο κάθε κόμβος του πλέγματος μετακινείται κατά τους άξονες  $(x, y, z)$  κατά  $\Delta\vec{x} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$  και στρέφεται γύρω τους κατά γωνίες  $\vec{\theta} = (\theta_x, \theta_y, \theta_z)$ . Έτσι αναπτύσσοντας τη σχέση 2.1 προκύπτει η εξίσωση κίνησης απαραμόρφωτου σώματος στις 3Δ:

$$\begin{aligned} \vec{x}'_i &= R\vec{x}_i + \Delta\vec{x} \\ \begin{pmatrix} x'_i \\ y'_i \\ z'_i \end{pmatrix} &= R \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

όπου,

- $\vec{x}_i$  = αρχική θέση κόμβου,
- $\vec{x}'_i$  = τελική θέση κόμβου,
- $R$  = Συνολικό μητρώο στροφής.

Όπως αναφέρθηκε στην Εξίσωση 1.14 της Ενότητας 1.4.4 τα μητρώα στροφής αναπαρίστανται μέσω των γωνιών Euler, ένα για από κάθε άξονα περιστροφής ( $R_{\theta_x}, R_{\theta_y}, R_{\theta_z}$ ).

$$R_{\theta_x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & \sin\theta_x \\ 0 & -\sin\theta_x & \cos\theta_x \end{bmatrix}, R_{\theta_y} = \begin{bmatrix} \cos\theta_y & 0 & \sin\theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y \end{bmatrix}, R_{\theta_z} = \begin{bmatrix} \cos\theta_z & \sin\theta_z & 0 \\ -\sin\theta_z & \cos\theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

Έτσι το συνολικό μητρώο  $R$  προκύπτει από το γινόμενο των επιμέρους μητρώων στροφής ως εξής:

$$R = R_{\theta_x} R_{\theta_y} R_{\theta_z} \quad (\text{B.2})$$

Συνακόλουθα, ο ανάστροφος του  $R$  θα είναι  $R^T = R_{\theta_x}^T R_{\theta_y}^T R_{\theta_z}^T$ , οπότε κάνοντας τις πράξεις ο πίνακας  $R^T$  θα είναι ένα  $3 \times 3$  τετραγωνικό μητρώο αποτελούμενο από τα στοιχεία που παρουσιάζονται αναλυτικά παρακάτω.

$$R^T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

όπου τα στοιχεία του είναι τα εξής:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{11} &= \cos \theta_x \cos \theta_z & \mathbf{r}_{21} &= \cos \theta_x \cos \theta_z \\ \mathbf{r}_{12} &= -\cos \theta_x \sin \theta_z + \cos \theta_z \sin \theta_x \sin \theta_y & \mathbf{r}_{22} &= \cos \theta_x \cos \theta_z + \sin \theta_x \sin \theta_y \sin \theta_z \\ \mathbf{r}_{13} &= \sin \theta_x \sin \theta_z + \cos \theta_x \cos \theta_z \sin \theta_y & \mathbf{r}_{23} &= -\cos \theta_z \sin \theta_x + \sin \theta_y \sin \theta_z \cos \theta_x \\ & & \mathbf{r}_{31} &= -\sin \theta_y \\ & & \mathbf{r}_{32} &= \cos \theta_y \sin \theta_x \\ & & \mathbf{r}_{33} &= \cos \theta_x \cos \theta_y \end{aligned}$$

Όπως αναφέρθηκε στο Κεφάλαιο 1.4.4 η τεχνική ΚΑΣ εφαρμόζεται σε κάθε κυψέλη του πλέγματος με τους άξονες περιστροφής της να διαπερνούν από τον κεντρικό κόμβο  $\mathbf{M}$ . Έτσι, από εδώ και στο εξής, κατά την ανάπτυξη των εξισώσεων αναφερόμαστε στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων της κάθε κυψέλης με κέντρο την θέση του κόμβου  $\vec{\mathbf{x}}_M$ .

Μετατροπή από ολικό σε τοπικό σύστημα συντεταγμένων ως προς τον κόμβο  $\mathbf{M}$

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{x}}_i &= \vec{\mathbf{x}}_i - \vec{\mathbf{x}}_M \\ \vec{\mathbf{x}}'_i &= \vec{\mathbf{x}}'_i - \vec{\mathbf{x}}_M \end{aligned}$$

Από την Εξίσωση 2.2 προκύπτει η εξίσωση ελαχιστοποίησης  $3\Delta$  σε τανυστική μορφή (Εξίσωση Β.4).

$$I = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\vec{R}\vec{\mathbf{x}}_i + \Delta\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{x}}'_i)^T (\vec{R}\vec{\mathbf{x}}_i + \Delta\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{x}}'_i) \quad (\text{B.4})$$

Για την ελαχιστοποίηση της είναι απαραίτητο να υπολογίζονται οι μερικές παράγωγοι της  $I$  ως προς  $\Delta\vec{\mathbf{x}} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$  και  $\vec{\theta} = (\theta_x, \theta_y, \theta_z)$  και τίθενται ίσες με 0.

Έτσι, έχουμε:

$$\frac{\partial I}{\partial \Delta\vec{\mathbf{x}}} = \sum_{i=1}^N [\Delta\vec{\mathbf{x}}^T + \vec{\mathbf{x}}_i^T R^T - \vec{\mathbf{x}}'_i{}^T] = n\Delta\vec{\mathbf{x}}^T + \sum_{i=1}^N [\vec{\mathbf{x}}_i^T R^T - \vec{\mathbf{x}}'_i{}^T] = 0 \quad (\text{B.5})$$

Οπότε προκύπτει η εξίσωση των μετακινήσεων:

$$\Delta \vec{x}^T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N [\vec{x}'_i{}^T - \vec{x}_i^T R^T] \quad (\text{B.6})$$

Ανοίγοντάς την διανυσματική Εξίσωση Β.6 προκύπτουν οι εξής τρεις βαθμωτές:

$$\begin{aligned} \Delta x &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N \left\{ x'_i - r_{11}x_i - r_{12}y_i - r_{13}z_i \right\} \\ \Delta y &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N \left\{ y'_i - r_{21}x_i - r_{22}y_i - r_{23}z_i \right\} \\ \Delta z &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N \left\{ z'_i - r_{31}x_i - r_{32}y_i - r_{33}z_i \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Αντίστοιχα προσδιορίζεται η μερική παράγωγος ως προς τις γωνίες στροφής γύρω από τους τρεις άξονες συντεταγμένων.

$$\frac{\partial I}{\partial \vec{\theta}} = \frac{\partial}{\partial \vec{\theta}} \left[ \sum_{i=1}^N \vec{x}_i^T R^T (\Delta \vec{x} - \vec{x}'_i) \right] = \sum_{i=1}^N \vec{x}_i^T \left[ \frac{\partial R}{\partial \vec{\theta}} \right]^T (\Delta \vec{x} - \vec{x}'_i) = 0 \quad (\text{B.8})$$

Από την διανυσματική Εξίσωση Β.8 προκύπτουν οι εξής τρεις βαθμωτές (μία για κάθε γωνία περιστροφής  $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ ), όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\theta_x : \left( \frac{\partial I}{\partial \theta_x} = 0 \right) \longrightarrow \sum_{i=1}^N \vec{x}_i^T \left[ \frac{\partial R}{\partial \theta_x} \right]^T R_{\theta_y}^T R_{\theta_z}^T (\Delta \vec{x} - \vec{x}'_i) = 0 \quad (\text{B.9})$$

$$\theta_y : \left( \frac{\partial I}{\partial \theta_y} = 0 \right) \longrightarrow \sum_{i=1}^N \vec{x}_i^T R_{\theta_x}^T \left[ \frac{\partial R}{\partial \theta_y} \right]^T R_{\theta_z}^T (\Delta \vec{x} - \vec{x}'_i) = 0 \quad (\text{B.10})$$

$$\theta_z : \left( \frac{\partial I}{\partial \theta_z} = 0 \right) \longrightarrow \sum_{i=1}^N \vec{x}_i^T R_{\theta_x}^T R_{\theta_y}^T \left[ \frac{\partial R}{\partial \theta_z} \right]^T (\Delta \vec{x} - \vec{x}'_i) = 0 \quad (\text{B.11})$$

Χάρην ευκολίας μαθηματικής διατύπωσης και παρουσίασης της μαθηματικής ανάπτυξης των παραπάνω Εξισώσεων (Β.9 - Β.11), οι πράξεις αριστερά της μερικής παραγώγου για κάθε γωνία θα παρουσιάζονται συμπυκνωμένες στο διάνυσμα  $\vec{t}_i^T = [t_1 \ t_2 \ t_3]_i^T$ , ενώ οι πράξεις δεξιά της στο διάνυσμα  $\vec{q}_i = [q_1 \ q_2 \ q_3]_i$ . Έτσι για κάθε γωνία  $\theta$  η Εξίσωση Β.8 έχει τη μορφή:

$$\sum_{i=1}^N \vec{t}_i^T \left[ \frac{\partial R}{\partial \theta} \right]^T \vec{q}_i = 0$$

- Όροι εξίσωσης γωνίας  $\theta_x$ :

$$\vec{t}_i^T = \vec{x}_i^T = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}$$

$$\vec{q}_i = R_{\theta_y}^T R_{\theta_z}^T (\Delta \vec{x} - \vec{x}'_i)$$

$$\vec{q}_i = \begin{bmatrix} (\Delta x - x'_i) \cos \theta_x \cos \theta_z - (\Delta y - y'_i) \cos \theta_y \sin \theta_z + (\Delta z - z'_i) \sin \theta_y \\ (\Delta x - x'_i) \sin \theta_z + (\Delta y - y'_i) \cos \theta_z \\ -(\Delta x - x'_i) \sin \theta_y \cos \theta_z + (\Delta y - y'_i) \sin \theta_y \sin \theta_z + (\Delta z - z'_i) \cos \theta_y \end{bmatrix}$$

- Όροι εξίσωσης γωνίας  $\theta_y$ :

$$\vec{t}_i^T = \vec{x}_i^T R_{\theta_x}^T = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \cos \theta_x - z_i \sin \theta_x \\ y_i \sin \theta_x + z_i \cos \theta_x \end{bmatrix}$$

$$\vec{q}_i = R_{\theta_z}^T (\Delta \vec{x} - \vec{x}'_i)$$

$$\vec{q}_i = \begin{bmatrix} (\Delta x - x'_i) \cos \theta_z - (\Delta y - y'_i) \sin \theta_z \\ (\Delta x - x'_i) \sin \theta_z + (\Delta y - y'_i) \cos \theta_z \\ \Delta z - z'_i \end{bmatrix}$$

- Όροι εξίσωσης γωνίας  $\theta_z$ :

$$\vec{t}_i^T = \vec{x}_i^T R_{\theta_x}^T R_{\theta_y}^T = \begin{bmatrix} x_i \cos \theta_y + y_i \sin \theta_x \sin \theta_y + z_i \cos \theta_x \cos \theta_y \\ y_i \cos \theta_x - z_i \sin \theta_x \\ -x_i \sin \theta_y + y_i \cos \theta_y \sin \theta_x + z_i \cos \theta_x \cos \theta_y \end{bmatrix}$$

$$\vec{q}_i = (\Delta \vec{x} - \vec{x}'_i) = \begin{bmatrix} \Delta x - x'_i \\ \Delta y - y'_i \\ \Delta z - z'_i \end{bmatrix}$$

Αναπτύσσοντας τα μητρώα και εκτελώντας τις πράξεις των εξισώσεων (B.9 - B.11), προκύπτει η μη-γραμμική διανυσματική εξίσωση 2.5, όπως αναφέρθηκε στο Κεφάλαιο 1.4.4. Χάριν πληρότητας παρουσιάζεται αναλυτικά παρακάτω:



$$\vec{A} \sin \vec{\theta} + \vec{B} \cos \vec{\theta} = 0$$

$$\text{Όπου, } \vec{A} = \begin{bmatrix} A_{\theta_x} \\ A_{\theta_y} \\ A_{\theta_z} \end{bmatrix}, \vec{B} = \begin{bmatrix} B_{\theta_x} \\ B_{\theta_y} \\ B_{\theta_z} \end{bmatrix} \text{ και } \vec{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Οι συντελεστές  $\vec{A}$  και  $\vec{B}$  της Εξίσωσης 2.5 παρατίθενται στη συνέχεια.

$$\begin{bmatrix} A_{\theta_x} \\ A_{\theta_y} \\ A_{\theta_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \{-t_3 q_3 - t_2 q_2\} \\ \sum_{i=1}^N \{-t_1 q_1 - t_3 q_3\} \\ \sum_{i=1}^N \{t_1 q_1 - t_2 q_2\} \end{bmatrix} \text{ και } \begin{bmatrix} B_{\theta_x} \\ B_{\theta_y} \\ B_{\theta_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N \{t_2 q_3 - t_3 q_2\} \\ \sum_{i=1}^N \{t_3 q_1 - t_1 q_3\} \\ \sum_{i=1}^N \{t_1 q_2 - t_2 q_1\} \end{bmatrix} \quad (B.12)$$

Έτσι, αντίστοιχα με τη 2Δ μαθηματική διατύπωση, καταλήγουμε σε τρεις βαθμωτές μη γραμμικές εξισώσεις:

$$A_{\theta_x} \sin \theta_x + B_{\theta_x} \cos \theta_x = 0 \quad (B.13)$$

$$A_{\theta_y} \sin \theta_y + B_{\theta_y} \cos \theta_y = 0 \quad (B.14)$$

$$A_{\theta_z} \sin \theta_z + B_{\theta_z} \cos \theta_z = 0 \quad (B.15)$$

Παρόμοια και εδώ, για την εύρεση των γωνιών  $(\theta_x, \theta_y, \theta_z)$ , επιλύονται οι εξισώσεις (B.13 - B.15) με την επαναληπτική μέθοδο Newton-Raphson [31], όπου η συνάρτηση  $\vec{F}$  στις 3Δ θα είναι:

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} F_{\theta_x} \\ F_{\theta_y} \\ F_{\theta_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{\theta_x} \sin \theta_x + B_{\theta_x} \cos \theta_x \\ A_{\theta_y} \sin \theta_y + B_{\theta_y} \cos \theta_y \\ A_{\theta_z} \sin \theta_z + B_{\theta_z} \cos \theta_z \end{bmatrix} \quad (B.16)$$

$$\begin{bmatrix} \theta_x^{n+1} \\ \theta_y^{n+1} \\ \theta_z^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_x^n \\ \theta_y^n \\ \theta_z^n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{F_{\theta_x}}{F'_{\theta_x}} \\ \frac{F_{\theta_y}}{F'_{\theta_y}} \\ \frac{F_{\theta_z}}{F'_{\theta_z}} \end{bmatrix} \quad (B.17)$$

Τέλος, όπως έχει αναφερθεί στη μεθοδολογία του 2<sup>ου</sup> Κεφαλαίου, αφού υπολογιστούν οι μετατοπίσεις  $\Delta \vec{x} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$  μπορεί να βρεθεί η νέα θέση του εσωτερικού κόμβου Μ της κυψέλης.

$$\begin{bmatrix} x'_M \\ y'_M \\ z'_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} \quad (B.18)$$

Συνοψίζοντας, στο Παράρτημα Β παρουσιάστηκε όλο το μαθηματικό μοντέλο που χρησιμοποιείται στο λογισμικό που προγραμματίστηκε για την παρούσα εργασία, για την προσαρμοστική παραμόρφωση 3Δ πλεγμάτων οποιασδήποτε τοπολογίας. Όπως είναι φανερό από την μαθηματική ανάπτυξη της τεχνικής ΚΑΣ και για 2Δ, ο τρόπος συνδεσμολογίας των κόμβων δεν παίζει κανέναν ρόλο. Το μόνο που είναι απαραίτητο για την εφαρμογή της είναι οι γειτονικοί κόμβοι κάθε εσωτερικού κόμβου  $M$  που συναποτελούν την "απαραμόρφωτη" κυψέλη.

## Παράρτημα C

### Μετρικές Ποιότητας στα Υπολογιστικά Πλέγματα

Οι μετρικές ποιότητας πλέγματος χρησιμοποιούνται για να αξιολογήσουν το αποτέλεσμα της διαδικασίας γένεσης πλέγματος και, κατ' επέκταση, το αποτέλεσμα κάθε μεθόδου παραμόρφωσης. Χωρίς αυτές θα ήταν ακατόρθωτο να καθοριστεί αν το πλέγμα που παράχθηκε πληρεί ακόμα και τις ελάχιστες προδιαγραφές ποιότητας, ώστε να χρησιμοποιηθεί σε μία υπολογιστική προσομοίωση [19]. Το ελάχιστο κριτήριο ποιότητας είναι τα στοιχεία που παράγονται να είναι μη-αναστραμμένα. Επεκτείνοντας τις απαιτήσεις είναι συχνά επιθυμητό τα στοιχεία που παράγονται να έχουν καλό σχήμα. Επίσης δεν υπάρχει πρόσβαση στη λύση καθώς δεν μπορεί να παραχθεί χωρίς να υπάρχει πλέγμα. Εφόσον δεν υπάρχει γνώση για τη λύση, αυτό που μπορεί να χρησιμοποιηθεί είναι οι γεωμετρικές ιδιότητες των στοιχείων του πλέγματος, ώστε να αντιστοιχούν θεωρητικά στο προς επίλυση πρόβλημα. Οι μετρικές που βασίζονται σε γεωμετρικές ιδιότητες χρησιμοποιούνται ώστε να μπορούν να αναγνωρίσουν στοιχεία χαμηλής ποιότητας. Τα στοιχεία αυτά μπορούν να διορθωθούν χρησιμοποιώντας διάφορες τεχνικές, όπως μεθοδολογίες μετακίνησης κόμβων που χρησιμοποιούν τεχνικές βελτιστοποιήσεις χρησιμοποιώντας συναρτήσεις κόστους βασιζόμενες σε μετρικές ποιότητας [12]. Επιπλέον, η ποιότητα του πλέγματος μπορεί να επηρεάσει σημαντικά την απόδοση μιας προσομοίωσης με διάφορους τρόπους. Για παράδειγμα, στοιχεία χαμηλής ποιότητας μπορεί να καθυστερήσουν αρκετά τους επαναληπτικούς επιλύτες η ακόμα και να τους οδηγήσουν σε απόκλιση. Έτσι μέχρι να δημιουργηθούν αλγόριθμοι παραγωγής και παραμόρφωσης πλέγματος που εγγυώνται ποιητικά αποτελέσματα, οι εκ των προτέρων (a priori) μετρικές πλέγματος θα παραμένουν ένα σημαντικό εργαλείο.

Γενικά, μια μετρική ποιότητας ενός στοιχείου δίνεται από την  $F$ . Η  $F$  είναι συνάρτηση της θέσης των κόμβων του στοιχείου και δίνει συνήθως μια βα-

θμωτή ποσότητα ως αποτέλεσμα. Η παρακάτω λίστα αριθμεί μερικές από τις ιδιότητες που πρέπει να κατέχουν όλες οι μετρικές ποιότητας [19].

- Η  $F$  πρέπει να είναι αδιάστατη,
- Το χωρίο της  $F$ , το οποίο περιέχει όλα τα στοιχεία όπου η μετρική ορίζεται, πρέπει να είναι σαφώς ορισμένο [14],
- Η  $F$  αναφέρεται σε ένα ιδανικό στοιχείο το οποίο περιγράφει την επιθυμητή γεωμετρική μορφή [2],
- Η τιμή της  $F$  είναι αμετάβλητη σε παράλληλες μετατοπίσεις του στοιχείου στο χώρο,
- Εκτός από τις μετρικές φορές, η τιμή της  $F$  δεν εξαρτάται από την φορά των στοιχείων.

## C.1 Μετρικές 2Δ Πλεγμάτων

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιαστούν μετρικές ποιότητας που αφορούν μη-δομημένα 2Δ πλέγματα που αποτελούνται από τριγωνικά στοιχεία. Συγκεκριμένα, θα παρουσιαστεί ο υπολογισμός της Ιακωβιανής και της μετρικής σχήματος.

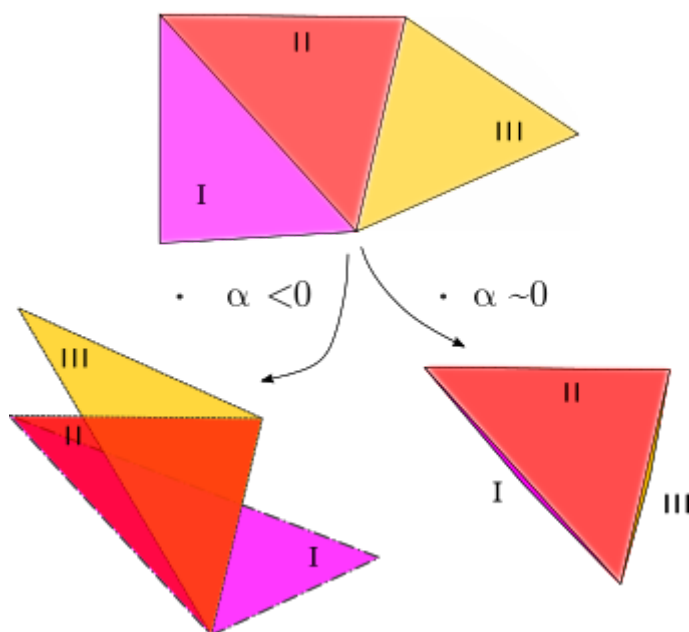
### C.1.1 Υπολογισμός Ιακωβιανής

Το πρώτο βήμα για τον καθορισμό της ποιότητας ενός τριγωνικού στοιχείου, είναι ο ορισμός της φοράς με την οποία γίνεται η αρίθμηση των κόμβων του στοιχείου. Επιλέγεται η ανθρωπολογιακή φορά, γεγονός που εξασφαλίζει το θετικό πρόσημο της ιακωβιανής ορίζουσας για τα αποδεκτά τρίγωνα. Έστω οι κόμβοι  $(x_i, y_i)$ ,  $(x_j, y_j)$ ,  $(x_k, y_k)$  ενός τριγωνικού στοιχείου. Σε κάθε κορυφή αυτού του τριγωνικού στοιχείου υπολογίζεται η Ιακωβιανή ορίζουσα. Για τον κόμβο  $k$  υπολογίζεται ως:

$$A_k = \begin{bmatrix} x_j - x_k & x_k - x_i \\ y_j - y_k & y_k - y_i \end{bmatrix} \quad (\text{C.1})$$

Η ορίζουσα του  $A_n$ ,  $n = i, j, k$  δίνει ως αποτέλεσμα δύο φορές το εμβαδόν του τριγώνου όπου υπολογίζεται, ανεξαρτήτως του πιο από τα τρία Ιακωβιανά μητρώα χρησιμοποιείται. Εφαρμόζοντας τους τρεις συνδυασμούς

του γινομένου  $A_n^T A_n$  [19], σχηματίζονται τρία μητρώα (μετρικοί τανυστές). Έστω  $\lambda_{ab}^n$ ,  $a, b = 1, 2$ , τα οποία είναι τα  $i, j$  στοιχεία του  $n$  μετρικού τανυστή. Γεωμετρικά, για τον  $i$  κόμβο ισχύει ότι,  $\lambda_{11}^i$  ισούται με το τετράγωνο του μήκους της πλευράς που ενώνει τον κόμβο  $i$  με τον κόμβο  $j$ ,  $\lambda_{22}^i$  ισούται με το τετράγωνο του μήκους της πλευράς που ενώνει τον κόμβο  $i$  με τον κόμβο  $k$ . Το εσωτερικό γινόμενο ισούται με  $\lambda_{12}^i = \sqrt{\lambda_{11}^i \lambda_{22}^i} \cos \theta_i$ , όπου  $\theta_i$  είναι η γωνία μεταξύ των δύο πλευρών που ενώνονται στο  $i$  κόμβο. Έστω  $a = \det(A_n)$ , δεκτά τρίγωνα θεωρούνται αυτά με θετικό εμβαδόν, π.χ.  $0 < a < \infty$ . Τιμές πολύ κοντά στο μηδέν υποδεικνύουν εκφυλισμένα τρίγωνα ενώ αρνητικές τιμές υποδεικνύουν μη αποδεκτά τρίγωνα (ανεστραμμένα) [20]. Το σχήμα C.1 βοηθά στο να γίνουν αντιληπτές οι επιπτώσεις αρνητικής και κοντά στο μηδέν τιμής της Ιακωβιανής ορίζουσας.



**Σχήμα C.1:** Αρχικά τα τρίγωνα I,II,III έχουν  $\alpha > 0$ , μετά από δύο τυχαίες παραμορφώσεις, αριστερά του σχήματος τα τρίγωνα I,III υπολογίζονται με  $\alpha < 0$  ενώ τα τρίγωνα I,III δεξιά υπολογίζονται με  $\alpha \approx 0$

### C.1.2 Μετρική Σχήματος

Η μετρική σχήματος (Shape) χρησιμοποιείται για την ανεύρεση στρεβλώσεων στο σχήμα των τριγώνων, ανεξάρτητα από το μέγεθος του εκάστοτε τριγώνου. Όπως και στην μετρική μεγέθους έτσι και στην μετρική σχήματος πρέπει να ορισθεί ένα στοιχείο αναφοράς. Εφόσον η μετρική αφορά το σχήμα του τριγώνου, ορίζεται ως σχήμα αναφοράς το ισόπλευρο τρίγωνο. Η μετρική σχήματος δίνεται από τη σχέση C.2

$$f_{shape} = \sqrt{3}a/(\lambda_{11} + \lambda_{22} - \lambda_{12}) \quad (C.2)$$

Ο τρόπος υπολογισμού των  $\lambda_{11}$ ,  $\lambda_{22}$ ,  $\lambda_{12}$  περιγράφεται στο κεφάλαιο C.1.1, ενώ  $a$  είναι η ορίζουσα του Ιακωβιανού μητρώου στο τρίγωνο μετά την παραμόρφωση. Οι βασικές ιδιότητες της μετρικής σχήματος (Shape) δίνονται παρακάτω:

- $f_{shape} = 1$  αν και μόνο αν το τρίγωνο μετά την παραμόρφωση είναι ισόπλευρο.
- $f_{shape} = 0$  αν και μόνο αν το τρίγωνο μετά την παραμόρφωση είναι εκφυλισμένο.

## C.2 Μετρικές 3Δ πλεγμάτων

Για τα 3Δ πλέγματα παρουσιάζεται ο υπολογισμός μετρικών μόνο για τετραεδρικά στοιχεία. Για άλλα στοιχεία, όπως είναι τα εξάεδρα και οι σφήνες, οι μετρικές δεν υπολογίζονται τόσο εύκολα, καθώς δεν διέπονται από βασικές μαθηματικές ιδιότητες που περιγράφονται αναλυτικά στην [7]. Στοιχεία όπως οι πυραμίδες, τα πρίσματα και άλλα 3Δ στοιχεία όπου τρεις η παραπάνω ακμές συναντώνται σε ένα κόμβο, παρουσιάζουν και αυτά δυσκολίες, καθώς πολλές φορές δεν ορίζεται Ιακωβιανό μητρώο [7]. Στις παρακάτω παραγράφους περιγράφεται ο υπολογισμός του Ιακωβιανού μητρώου αλλά και μετρικών μεγέθους-σχήματος (Size-Shape) μόνο για τετράεδρα στοιχεία.

### C.2.1 Υπολογισμός Ιακωβιανής

Ένα τετράεδρο αποτελείται από τέσσερις κόμβους. Έστω ότι οι συντεταγμένες των κόμβων είναι  $(x_k, y_k, z_k)$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$ . Έτσι δημιουργούνται τέσσερα Ιακωβιανά μητρώα  $A_k$ , ένα για κάθε κόμβο του τετραέδρου,

$$(-1)^k \begin{bmatrix} x_{k+1} - x_k & x_{k+2} - x_k & x_{k+3} - x_k \\ y_{k+1} - y_k & y_{k+2} - y_k & y_{k+3} - y_k \\ z_{k+1} - z_k & z_{k+2} - z_k & z_{k+3} - z_k \end{bmatrix} \quad (\text{C.3})$$

Η ορίζουσα του  $A_k$  δίνει ως αποτέλεσμα έξι φορές τον όγκο του τετραέδρου όπου υπολογίζεται και παραμένει ίδια ανεξάρτητα σε ποια από τις τέσσερις Ιακωβιανές υπολογίζεται. Έστω  $a = \det(A_k)$ . Τέσσερα επιπλέον μητρώα (μετρικοί τανυστές) δίνονται σχηματίζοντας τους τέσσερις συνδυασμούς του γινομένου  $A_k^T A_k$ . Αυτά τα μητρώα είναι συμμετρικά και έχουν έξι ξεχωριστά στοιχεία. Έστω  $\lambda_{ij}^k, i, j = 1, 2, 3$ , τα οποία είναι τα  $i, j$  στοιχεία του  $k$  μετρικού τανυστή. Γεωμετρικά, για τον  $k$  κόμβο ισχύει ότι,  $\lambda_{11}^k$  ισούται με το τετράγωνο του μήκους της πλευράς που ενώνει τον κόμβο  $k$  με τον κόμβο  $k + 1$ ,  $\lambda_{22}^k$  ισούται με το τετράγωνο του μήκους της πλευράς που ενώνει τον κόμβο  $k$  με τον κόμβο  $k + 2$ , και  $\lambda_{33}^k$  ισούται με το τετράγωνο του μήκους της πλευράς που ενώνει τον κόμβο  $k$  με τον κόμβο  $k + 3$ . Τα μη-διαγώνια στοιχεία  $\lambda_{12}^k, \lambda_{23}^k, \lambda_{13}^k$  ισούνται με το γινόμενο του μήκους τους επί το συνημίτονο της μεταξύ τους γωνίας. Δεκτά τετράεδρα θεωρούνται αυτά που έχουν θετικό όγκο. Όγκοι πολύ κοντά στο μηδέν υποδεικνύουν εκφυλισμένα τετράεδρα, ενώ οι αρνητικοί όγκοι υποδεικνύουν μη-αποδεκτά τετράεδρα (αναστραμμένα).

### C.2.2 Μετρική Σχήματος

Οι μετρικές μεγέθους και σχήματος χρησιμοποιούνται πιο συχνά για τον έλεγχο της ποιότητας των τετραέδρων. Σε αυτό το κεφάλαιο περιγράφεται ο υπολογισμός της μετρικής σχήματος. Η μετρική σχήματος (Shape) χρησιμοποιείται για την ανεύρεση στρεβλώσεων στο σχήμα των τετραέδρων, ανεξάρτητα από το μέγεθος του εκάστοτε τετραέδρου και δίνεται από την σχέση

$$f_{shape} = \frac{3(\alpha\sqrt{2})^{2/3}}{\frac{3}{2}(\lambda_{11} + \lambda_{22} + \lambda_{33}) - (\lambda_{12} + \lambda_{23} + \lambda_{13})} \quad (\text{C.4})$$

Με βάση τις τιμές της συνάρτησης αυτής, γίνεται η αξιολόγηση της ποιότητας των προσαρμοσμένων πλεγμάτων τετραεδρικών στοιχείων, που υπολογίζονται στις 3Δ εφαρμογές της διπλωματικής εργασίας. Οι βασικές ιδιότητες της μετρικής μεγέθους είναι οι εξής:

- $f_{shape} = 1$  αν και μόνο αν το τετράεδρο στοιχείο είναι ισόπλευρο.

- $f_{shape} = 0$  αν και μόνο αν το τετράεδρο στοιχείο είναι εκφυλισμένο.
- $f_{shape} < 0$  σημαίνει ότι το τετραεδρικό στοιχείο είναι αναστραμμένο, δηλαδή δεν είναι έγκυρο και δε συμπεριλαμβάνεται στη μετρική.

Η μετρική αυτή αποτελεί και μια σαφή ένδειξη για την εγκυρότητα του νέου πλέγματος. Σε περίπτωση που η συνάρτηση  $F_{shape}$  πάρει αρνητική τιμή για ένα ή περισσότερα τετραεδρικά στοιχεία, τότε ο χρήστης ενημερώνεται ότι στο νέο πλέγμα έχουν εμφανιστεί αναστραμμένα στοιχεία, κάτι που σημαίνει ότι αυτό δεν είναι έγκυρο.



# Βιβλιογραφία

- [1] W. Annicchiarico, J. Periaux, M. Cerrolaza, and G. Winter. *Evolutionary Algorithms And Intelligent Tools In Engineering Optimization*. World Bank, 2005.
- [2] I. Babuška and A. K. Aziz. On the angle condition in the finite element method. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 13(2):214–226, 1976.
- [3] P. M. Bartier and C. P. Keller. Multivariate interpolation to incorporate thematic surface data using inverse distance weighting (idw). *Computers & Geosciences*, 22(7):795–799, 1996.
- [4] J. T. Batina. Unsteady euler airfoil solutions using unstructured dynamic meshes. *AIAA Journal*, 28(8):1381–1388, 1990.
- [5] R. Biedron and E. Lee-Rausch. Rotor airloads prediction using unstructured meshes and loose cfd/csd coupling. In *26th AIAA Applied Aerodynamics Conference*, page 7341, 2008.
- [6] F. Blom, P. Leyland, F. Blom, and P. Leyland. Analysis of fluid-structure interaction on moving airfoils by means of an improved ale-method. In *28th Fluid Dynamics Conference*, page 1770, 1997.
- [7] Y. K. Choo. Surface modeling, grid generation, and related issues in computational fluid dynamic CFD solutions. 1995.
- [8] P. Crumpton and M. Giles. Implicit time accurate solutions on unstructured dynamic grids. In *12th Computational Fluid Dynamics Conference*, page 1671, 1995.
- [9] A. De Boer, M. Van der Schoot, and H. Bijl. Mesh deformation based on radial basis function interpolation. *Computers & structures*, 85(11-14):784–795, 2007.
- [10] Z. Ding, H. Zhu, and M. H. Friedman. Coronary artery dynamics in vivo. *Annals of Biomedical Engineering*, 30(4):419–429, 2002.

- [11] C. Farhat, C. Degand, B. Koobus, and M. Lesoinne. Torsional springs for two-dimensional dynamic unstructured fluid meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 163(1-4):231–245, 1998.
- [12] L. A. Freitag and P. Knupp. Tetrahedral element shape optimization via the jacobian determinant and condition number. Technical report, Sandia National Labs., Albuquerque, NM (US); Sandia National Labs, 1999.
- [13] K. Giannakoglou, D. Papadimitriou, and I. Kampolis. Aerodynamic shape design using evolutionary algorithms and new gradient-assisted metamodels. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(44):6312 – 6329, 2006.
- [14] P. F. H. Borouchaki, F. Hecht. Mesh gradation control.
- [15] O. Hassan, E. Probert, and K. Morgan. Unstructured mesh procedures for the simulation of three-dimensional transient compressible inviscid flows with moving boundary components. *International Journal for Numerical Methods in fluids*, 27(1-4):41–55, 1998.
- [16] S.-Y. Hsu, C.-L. Chang, and J. Samareh. A simplified mesh deformation method using commercial structural analysis software. In *10th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference*, page 4409, 2004.
- [17] A. A. Johnson and T. E. Tezduyar. Simulation of multiple spheres falling in a liquid-filled tube. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 134(3-4):351–373, 1996.
- [18] S. L. Karman Jr. Unstructured viscous layer insertion using linear-elastic smoothing. *AIAA journal*, 45(1):168–180, 2007.
- [19] P. M. Knupp. Algebraic mesh quality metrics for unstructured initial meshes. *Finite Elements in Analysis and Design*, 39(3):217–241, 2003.
- [20] W. Kwok and Z. Chen. A simple and effective mesh quality metric for hexahedral and wedge elements. In *IMR*, pages 325–333. Citeseer, 2000.
- [21] X. Liu, N. Qin, and H. Xia. Fast dynamic grid deformation based on delaunay graph mapping. *Journal of Computational Physics*, 211(2):405–423, 2006.

- [22] R. Löhner, C. Yang, E. Oñate, and S. Idelsohn. Viscous free surface hydrodynamics using unstructured grids. In *Proc. 22nd Symp. Naval Hydro*, pages 476–490, 1998.
- [23] E. Luke, E. Collins, and E. Blades. A fast mesh deformation method using explicit interpolation. *Journal of Computational Physics*, 231(2):586–601, 2012.
- [24] S. Piperno. Explicit/implicit fluid/structure staggered procedures with a structural predictor and fluid subcycling for 2d inviscid aeroelastic simulations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 25(10):1207–1226, 1997.
- [25] M. Selim, R. Koomullil, et al. Mesh deformation approaches—a survey. *Journal of Physical Mathematics*, 7(2), 2016.
- [26] M. M. Selim and A. Gupta. Feasibility study of substituting the ffr invasiv e procedure with CFD analysis for assessment of human coronary arter y stenosis. In *Proceedings of the Fifteenth Annual Early Career Technica l Conference, The University of Alabama, USA*, 2015.
- [27] D. Shepard. A two-dimensional interpolation function for irregularly-spaced data. In *Proceedings of the 1968 23rd ACM National Conference*, pages 517–524, 1968.
- [28] K. Shoemake. Animating rotation with quaternion curves. In *Proceedings of the 12th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 245–254, 1985.
- [29] Z. Yang and D. Mavriplis. Unstructured dynamic meshes with higher-order time integration schemes for the unsteady navier-stokes equations. In *43rd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, page 1222, 2005.
- [30] Z. Yang and D. J. Mavriplis. Mesh deformation strategy optimized by the adjoint method on unstructured meshes. *AIAA Journal*, 45(12):2885–2896, 2007.
- [31] Κ. Γιαννάκογλου. Αριθμητική Ανάλυση για Μηχανικούς. *Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανών*, 2003.
- [32] Κ. Γιαννάκογλου. Μέθοδοι Βελτιστοποίησης στην Αεροδυναμική. *Εργαστήριο Θερμικών Στροβιλομηχανων, Σχολή Μηχανολόγων Μηχανικών, Ε.Μ.Π.*, 2006.

- [33] Α. Κοντός. Προσαρμοστική Παραμόρφωση 2Δ/3Δ Δομημένων και Μη-Δομημένων Πλεγμάτων με το Πρότυπο Κίνησης του Απαραμόρφωτου Σώματος. Διπλωματική Εργασία, Σχολή Μηχ μηχ ΕΜΠ. 2019.
- [34] Α. Τ. Ναϊντί. Παραμόρφωση Υπολογιστικών Πλεγμάτων με την μέθοδο Στάθμισης Αντιστρόφως Ανάλογης της Απόστασης (IDW). Μεταπτυχιακή Εργασία. 2021.
- [35] Α. Τσολοβίκος. Προσαρμογή Υπολογιστικών Πλεγμάτων με χρήση γράφων delaunauy - Εφαρμογές στην Βελτιστοποίηση με χρήση της Συζυγούς Μεθόδου. Διπλωματική Εργασία, Σχολή Μηχ μηχ ΕΜΠ. 2018.