

Σε αυτό το σημείο θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Αιμίλιο Σιδερίδη (Λέκτορα του ΕΜΠ) για την υποδειγματική συνεργασία και για την άριστη επιστημονική καθοδήγηση κατά τη διάρκεια εκπόνησης αυτής της διπλωματικής εργασίας.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου, το σύντροφο μου αλλά και τους φίλους μου για την υποστήριξη που μου προσέφεραν καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Ιστορικό Σύνθετων Υλικών

1.1.2 Η εξέλιξη των πολυμερών

1.2 Εποξειδικές ρητίνες

1.2.1 Γενικά-ορισμός

1.2.2 Ιδιότητες υγρών εποξειδικών ρητινών

1.3 Σύνθετα Υλικά-Εγκλείσματα Στις Εποξειδικές Ρητίνες

1.3.1 Γενικά Ορισμοί

1.3.2 Παράμετροι που ορίζουν ένα σύνθετο υλικό

1.3.3 Κατάταξη και ταξινόμηση

1.4 Επίδραση των εγκλεισμάτων στις ιδιότητες των εποξειδικών ρητινών.

1.4.1 Γενική περιγραφή

1.4.2 Ιδιότητες-Συμπεριφορά στον εφελκυσμό

1.4.3 Κοκκώδη σύνθετα υλικά (Particulate composites)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: Παράμετροι που χαρακτηρίζουν τη μηχανική συμπεριφορά των υλικών

2.1 Ελαστικές Σταθερές (ν, E)

2.1.1 Μοντέλα και εκφράσεις για το μέτρο ελαστικότητας (E) κοκκωδών σύνθετων υλικών

2.1.1.1 Το μοντέλο του Counto [1]

2.1.1.2 Το μοντέλο Paul [2]

2.1.2 Μέτρα ελαστικότητας με σφαιρικά εγκλείσματα

2.1.3 Περιορισμοί θεωρητικών μοντέλων σχετικά με το μέτρο ελαστικότητας των σύνθετων υλικών

2.1.4 Θεωρητική μελέτη μοντέλων για τον υπολογισμό του μέτρου ελαστικότητας του κοκκώδους υλικού

2.2 Παράμετροι που χαρακτηρίζουν την αντοχή των κοκκωδών υλικών

2.2.1 Τάση θραύσης

2.2.1.1 Μοντέλο του Broutman

2.2.1.2 Ο νόμος των δυνάμεων (The power law)

2.2.1.3 Η εξίσωση των Leidner – Woodhams

2.2.1.4 Περιορισμοί των θεωρητικών μοντέλων σχετικά με την αντοχή των σύνθετων υλικών

2.2.2 Παραμόρφωση θραύσης των κοκκωδών σύνθετων υλικών

2.2.3 Ο μηχανισμός της ενισχυτικής δράσης των εγκλεισμάτων στα πολυμερή

2.2.4 Ενέργεια θραύσης - στερρότητα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 : ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΦΑΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

3.1 Προσδιορισμός της ειδικής θερμότητας και της θερμοκρασίας μεταβάσεως στην υαλώδη κατάσταση των συνθέτων υλικών ενισχυμένων με κόκκους μετάλλου. Εκτίμηση της ενδιάμεσης φάσης.

3.1.1 Εισαγωγή

3.1.2 Υλικά και πειραματική διαδικασία

3.1.3 Προσδιορισμός του πάχους της ενδιάμεσης φάσης

3.1.4 Η επίδραση της ενδιάμεσης φάσης και του ρυθμού θέρμανσης επί της υαλώδους μεταβατικής θερμοκρασίας (ή θερμοκρασία υαλώδους μεταπτώσεως) T_g .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 : ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΤΩΝ ΕΓΚΛΕΙΣΜΑΤΩΝ

4.1 Τριφασικό Μοντέλο Κυβικό 1

4.2 Τριφασικό Μοντέλο Κυβικό 2

4.3 Τριφασικό Μοντέλο Κυβικό 3

4.4 Γεωμετρικοί περιορισμοί

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΜΕ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΦΑΣΗ

5.1 Υπολογισμός ακτινών του ισοδύναμου πενταφασικού μοντέλου

5.2 Ελαστικές σταθερές για την ενδιάμεση φάση

5.2.1 Γραμμικό Μοντέλο

5.2.2 Παραβολικό Μοντέλο

5.2.3 Εκθετικό Μοντέλο

5.2.4 Υπερβολικό Μοντέλο

5.2.5 Λογαριθμικό Μοντέλο

5.3 Πίνακες – Διαγράμματα Ενδιαμέσου Φάσεως – Συμπεράσματα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ ΜΕΣΩ ΤΩΝ ΘΕΩΡΗΤΙΚΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ

6.1 Παραδοχές για την ανάπτυξη του θεωρητικού μοντέλου

6.2 Πενταφασικό Μοντέλο

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7: ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕ ΑΛΛΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

7.1 Πειραματική διαδικασία- μεθοδολογία

7.2 Πίνακες – Διαγράμματα – Συμπεράσματα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8 : ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΜΕΤΡΟΥ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

8.1 Προσεγγιστικός Υπολογισμός

8.2 Σύγκριση με άλλα μοντέλα

8.3 Γενικά Συμπεράσματα

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Ιστορικό Σύνθετων Υλικών

Ο όρος σύνθετο υλικό απλοποιητικά σημαίνει ότι δυο ή περισσότερα υλικά συνδυαζόμενα μακροσκοπικά μπορούν να σχηματίσουν ένα νέο υλικό που συνήθως παρουσιάζει καλύτερες ιδιότητες από εκείνες των αρχικών υλικών κάτι που συχνά ακόμη μπορεί να εμφανίζει και ιδιότητες τις οποίες κανένα από τα αρχικά υλικά δεν διέθετε.

Με βάση αυτό τον απλό ορισμό, μπορούμε να πούμε ότι ο άνθρωπος επινόησε και χρησιμοποίησε σύνθετα υλικά από τα πολύ παλιά χρόνια. Έτσι οι Εβραίοι χρησιμοποίησαν το άχυρο για να δώσουν μεγαλύτερη αντοχή στα λασπότουβλα. Οι Αιγύπτιοι χρησιμοποίησαν ένα είδος <<κόντρα πλακέ>> όταν κατάλαβαν ότι στρώματα ξύλου μπορούν να συνδυαστούν κατάλληλα ώστε να παρουσιάσουν ικανοποιητική αντοχή σε διάφορες κατευθύνσεις και να είναι ανθεκτικά στην διόγκωση και στη στρέβλωση που προκαλείται από την υγρασία. Επίσης στην Αίγυπτο και στην Μεσοποταμία εμφανίσθηκαν σχεδίες από καλάμι παπύρου <<δεμένο>> με άσφαλτο. Οι Ασύριοι έφτιαξαν πλωτές γέφυρες με σανίδες εμποτισμένες με αδιάβροχη άσφαλτο. Στο Μεσαίωνα κατασκευάστηκαν σπαθιά, ασπίδες και θώρακες από συνδυασμούς στρωμάτων διαφόρων μετάλλων και πιο πρόσφατα ινώδη σύνθετα υλικά που έχουν μεγάλους λόγους αντοχής/βάρους και ακαμψίας/βάρους χρησιμοποιήθηκαν σε κατασκευές στις οποίες το μικρό βάρος αποτελεί σημαντικό παράγοντα, όπως π.χ. σε αεροσκάφη και διαστημόπλοια.

Τα όσα αναφέρθηκαν μας δείχνουν ότι ο άνθρωπος από τα πρώτα βήματα της ζωής του είχε <<δαισθανθεί>> ότι συνδυάζοντας δυο ή περισσότερα υλικά μπορούμε να κατασκευάσει ένα τρίτο <<σύνθετο υλικό>>, που ικανοποιούσε καλύτερα τις κατασκευαστικές του ανάγκες.

Η πορεία εξέλιξης των συνθέτων υλικών δεν παρουσιάζει την ίδια ταχύτητα δια μέσου των αιώνων. Μέχρι τον 19^ο αιώνα μ.Χ. η εξέλιξη αυτή είναι πολύ μικρή και τα σύνθετα υλικά του 19^{ου} αιώνα δεν απέχουν και πάρα πολύ από αυτά των αρχαίων Αιγυπτίων, Ελλήνων κ.λ.π., ούτε σε ποιότητα ούτε σε μεθόδους κατασκευής.

Οι δεξαμενές και τα μεγάλα δοχεία τα οποία κατασκευάζονται με τη μέθοδο περιτυλίξεως ινών υάλου υπήρξαν η πρώτη εφαρμογή χρήσεως των μοντέρνων συνθέτων υλικών. Στη δεκαετία του '60 εμφανίστηκαν οι ίνες βορίου οι οποίες συντέλεσαν στη δημιουργία προγραμμάτων για την προώθηση της κατασκευής αεροσκαφών από σύνθετα υλικά για την αεροπορία των Η.Π.Α.. Ο οριζόντιος σταθεροποιητής (stabilizer) των αεροσκαφών F-111 υπήρξε το πρώτο τεμάχιο αεροσκάφους που κατασκευάστηκε από σύνθετο υλικό. Στις αρχές της δεκαετίας του '70 η παραγωγή σταθεροποιητών από σύνθετα υλικά για τα αεροσκάφη F-14 ήταν άλλο ένα σημαντικό βήμα. Ακολούθησε ο σταθεροποιητής των F-15 και το πηδάλιο και ο σταθεροποιητής για τα F-16.

Στην αρχή της δεκαετίας του '80 το νεοκατασκευασθέν Boeing 767 περιείχε σχεδόν δυο τόνους συνθέτου υλικού στις δοκούς δαπέδου και σε όλες τις επιφάνειες ελέγχου. Το γιγαντιαίο σοβιετικό μεταγωγικό Antonov 124 έχει συνολικά 5500 kgg συνθέτου υλικού από τα οποία τα 2500 kgg περιέχουν ίνες γραφίτου. Το πτερύγιο των Airbus A310-300 κατασκευασμένο όλο από σύνθετο υλικό και παρά την απλότητα του είναι μια εντυπωσιακή κατασκευή. Σχεδόν όλα τα τότε εμφανιζόμενα αεροσκάφη κάνουν εκτεταμένη χρήση των συνθέτων υλικών. Παραδείγματα είναι το αεροσκάφος Rafale της Dassault-Brequet, το Lavi της ισραηλινής αεροπορικής βιομηχανίας, το JAS-39 Gripen της σουηδικής Saab-Scania και το μαχητικό αεροσκάφος (European Fighter Aircraft) των Βρετανία, Γερμανία, Ιταλία και Ισπανίας. Το 1986 το Voyager κατασκευασμένο εξολοκλήρου από σύνθετα υλικά δημιούργησε παγκόσμιο ρεκόρ ταξιδεύοντας άνευ στάσεως. Το αεροπλάνο ήταν πολύ ελαφρύ και παρουσίαζε καταπληκτική ελαστικότητα και ανθεκτικότητα έναντι των καταιγίδων που συνάντησε. Σύνθετα υλικά υψηλής αντοχής από ίνες γραφίτου χρησιμοποιούνταν επίσης για την κατασκευή των διπλών πηδαλίων μιας νέας επαναστατικού τύπου θαλαμηγού μήκους 12 μέτρων, η οποία όπως και το Voyager καθιέρωσαν τη χρήση υλικών υψηλής τεχνολογίας σε καθημερινής χρήσεως κατασκευές.

Το 1985 στη διάσκεψη της Εταιρίας Μηχανικών στο Detroit των Η.Π.Α. εκφράστηκε η άποψη ότι η χρήση των συνθέτων υλικών στη βιομηχανία αυτοκινήτων θα είναι τόσο μεγάλη όσο και των ηλεκτρονικών συστημάτων. Η πραγματική αλματώδης εξέλιξη των συνθέτων υλικών σημειώνεται τον 20^ο αιώνα και θα μπορούσαμε να πούμε τις τελευταίες δεκαετίες και είναι συνέπεια μιας άλλης σημαντικής εξέλιξης, της εξέλιξης της επιστήμης των γιγαντιαίων μορίων των πολυμερών.

1.1.2 Η εξέλιξη των πολυμερών

Το μόριο ενός πολυμερούς είναι ένα μόριο μεγάλου μεγέθους (μακρομόριο) που αποτελείται από επαναλαμβανόμενες δομικές μονάδες. Οι δομικές μονάδες είναι απλά χημικά παράγωγα τα οποία προέρχονται από τα αντίστοιχα μονομερή ή αρχικά υλικά με άνοιγμα διπλού δεσμού.

Τα πολυμερή συνθέτουν το υλικό όλων των ζωντανών οργανισμών. Τα κύτταρα τόσο των ζωικών όσο και των φυτικών ιστών με το πρωτόπλασμα τους και τον πυρήνα τους, αποτελούνται από τέτοια μόρια. Ωστόσο η μοριακή δομή των πολυμερών και η επίδραση της δομής αυτής πάνω στις ιδιότητές τους ήταν άγνωστες ως πριν λίγες δεκαετίες.

Ευθύς μόλις ανακαλύφθηκε ότι τα πολυμερή είναι μακριές και με τάξη οργανωμένες αλυσίδες μικροτέρων μορίων, ο άνθρωπος κατώρθωσε να δημιουργήσει κατά βούληση, όχι μόνο πολυμερή πανομοιότυπα με τα ήδη γνωστά των ζώντων οργανισμών –πράγμα που άλλοτε ήταν εντελώς αδύνατο-αλλά επιπλέον και πρωτότυπα πολυμερή, που δεν απαντώνται στη φύση. Τα τελευταία αυτά είναι και τα πιο ενδιαφέροντα από τη σκοπιά των συνθέτων υλικών. Το αποτέλεσμα των επιτευγμάτων αυτών ήταν η δημιουργία πλήθους νέων βιομηχανιών, τεράστιας σπουδαιότητας σήμερα, που παράγουν μια τρομακτική ποικιλία από πλαστικές ύλες, συνθετικές υφαντικές ύλες και συνθετικό ελαστικό.

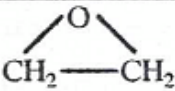
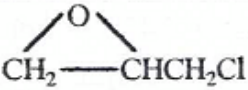
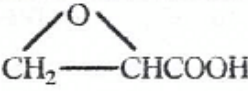
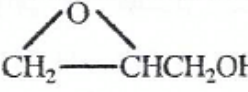
Ένα πολυμερές υλικό ικανοποιεί τον ορισμό του συνθέτου υλικού, που δόθηκε παραπάνω σε μικροσκοπική κλίμακα γιατί αποτελείται από δομικές μονάδες προερχόμενες από αντίστοιχα μονομερή ή αρχικά υλικά που συνήθως έχουν πολύ διαφορετικές ιδιότητες από τις δικές του.

1.2 Εποξειδικές ρητίνες

1.2.1 Γενικά-ορισμός

Με τον ορό εποξειδική ρητίνη εννοούμε την ένωση η οποία σχηματίζεται από περισσότερα από ένα εποξείδια τα οποία συνδέονται μεταξύ τους υπό μορφή ευθείας ή δακτυλίου. Ως εποξείδιο ή εποξειδικό εννοούμε τη χημική ομάδα που αποτελείται από ένα άτομο οξυγόνου [O], ενωμένο με δυο άτομα άνθρακα [C] που είναι ήδη ενωμένα με άτομα άλλων στοιχείων.

Στο Σχήμα 1.1 φαίνονται οι συντακτικοί τύποι διαφόρων εποξειδίων και η αντίστοιχη ονοματολογία τους. Η ονοματολογία αυτή προκύπτει από το όνομα της ομάδας που ενώνεται με το τρίτο άτομο άνθρακα του εποξειδίου.

	εποξείδιον του αιθυλενίου
	επιχλωρούδρινη
	γλυκιδικό οξύ
	γλυκιδολική ομάδα

Σχήμα 1.1

Οι εποξειδικές ρητίνες ανήκουν στην κατηγορία των θερμοσκληρυνόμενων ή θερμοσταθερών πολυμερών. Είναι προϊόντα ατελούς πολυμερισμού που θερμαινόμενα γίνονται μαλακά. Με την αύξηση όμως της θερμοκρασίας, ο πολυμερισμός καθίσταται πλήρης και σκληρύνονται οριστικά.

Οι στερεές εποξειδικές ρητίνες παρουσιάζουν ισχυρή αντίσταση τριβής και επίσης πολύ καλή χημική αντίσταση. Τα σημαντικότερα πλεονεκτήματα των στερεών εποξειδικών ρητινών σε σύγκριση με των υγρών ρητινών είναι

- η εύκολη επεξεργασία τους
- η μηχανική αντοχή
- η υψηλή χημική αντίσταση
- το άριστο κολλώδες.

Ένας σημαντικός αριθμός ιδιοτήτων των εποξειδικών ρητινών είχε ως αποτέλεσμα το γρήγορο ρυθμό ανάπτυξης και την ευρεία σε έκταση χρήση τους. Έτσι αποτελούν σχεδόν πάντα το ένα από τα δυο ή περισσότερα προϊόντα που συνδυάζονται για να δώσουν το τελικό σύνθετο υλικό. Σε παρά πολλές περιπτώσεις χρησιμοποιούνται εντελώς μόνες τους.

1.2.2 Ιδιότητες υγρών εποξειδικών ρητινών

Οι υγρές εποξειδικές ρητίνες παρουσιάζουν τις παρακάτω ιδιότητες:

- Χαμηλή υγροσκοπικότητα και ικανοποιητική αντοχή στην επίδραση διαλύματος οξέων, βάσεων και πολλών οργανικών διαλυτών. Είναι υγρά με χαμηλό ιξώδες καθώς και τα μίγματα τους με πρόσθετα (πλαστικοποιητές, σκληρυντές) με αποτέλεσμα την εύκολη κατεργασία τους.
- Οι βασικές τους ιδιότητες μπορούν να τροποποιούνται κάθε φορά ανάλογα με τις απαιτήσεις της συγκεκριμένης εφαρμογής (ανάμιξη με κάποιο πρόσθετο της επιλογής μας, χρήση τροποποιητικών και συνθέσεων), κάτι που έχει αποτέλεσμα ποικιλία εφαρμογών.
- Υψηλή δύναμη συγκόλλησης, στη σύγχρονη τεχνολογία πλαστικών, ιδιότητα που είναι από τις μεγαλύτερες που έχουν παρατηρηθεί. Υψηλές μηχανικές ιδιότητες και άριστη ηλεκτρική μόνωση. Εύκολη επεξεργασία των ρητινών από 5°C έως 150°C, ενώ αυτό εξαρτάται και από την εκλογή του προσθέτου.

- Μικρή συστολή κατά τον πολυμερισμό κατά τη διάρκεια της επεξεργασίας τους. Αυτή η μικρή συστολή είναι ένα μεγάλο πλεονέκτημα για τις εποξειδικές ρητίνες.
- Εξασφαλίζουν πρόσφυση σε ξηρές και υγρές επιφάνειες, ενώ στερεοποιούνται και κάτω από την επιφάνεια ύδατος. Η πρόσφυση εξασφαλίζεται πάνω σε γνωστά δομικά υλικά όπως σκυρόδεμα, μέταλλα, μάρμαρα, πέτρα και ξύλο.
- Παρουσιάζουν καλή χημική αντίσταση που εξαρτάται από πρόσθετο που χρησιμοποιείται. Συνολικά οι περισσότερες ρητίνες έχουν υψηλή αντίσταση στα καυστικά και καλή μέχρι άριστη στα οξέα.
- Συνδυάζουν υψηλή αντοχή, δεν έχουν όγκο κατά την σκλήρυνση και δεν γίνονται εύθραυστες. Είναι απόλυτα μη διαβρωτικές και είναι κατάλληλες για χρήση σε κατασκευές από οπλισμένο σκυρόδεμα ή δομικό χάλυβα.

Μερικές από τις σημαντικότερες εφαρμογές των εποξειδικών ρητινών είναι οι ακόλουθες:

- Στην κατασκευή κτιρίων, αυτοκινητοδρόμων, γενικά σε κατασκευές που έχουν απαιτήσεις για υψηλή χημική αντίσταση (βασικό συγκολλητικό σκυροδέματος).
- Στη βιομηχανία κατασκευής αεροσκαφών, αυτοκινήτων, πλοίων (βασικό συγκολλητικό σε δομικά μέρη της ατράκτου αεροσκάφους, μεταλλικών και πλαστικών τμημάτων σε βάρκες και αυτοκίνητα) λόγω της υψηλής και τέλει στεγανότητας.
- Στην κατασκευή τριχών για πινέλα.

- Ως φυλλώδεις ρητίνες (laminated resins) για την κατασκευή πλαισίων και τελειωμάτων αεροσκαφών και πυραύλων.
- Ως διαλύματα επίστρωσης που έχουν ως βασικό συστατικό τη ρητίνη, που είναι χρήσιμα για τη συντήρηση και την κατασκευή τελειωμάτων όπως τελειώματα θαλασσιάς αφής, τελειώματα λιθοδομής, τελειώματα αεροσκαφών. Ακόμη χρησιμοποιούνται για επαλείψεις κατασκευαστικού χάλυβα, επαλείψεις δεξαμενών, πτυσσομένων αγωγών και πλακών σκυροδέματος.
- Συστήματα εποξυ-ρητινών χρησιμοποιούνται σαν συγκολλητικά, επικαλυπτικά και σα μέσα ενσωμάτωσης ηλεκτρικών εξαρτημάτων.
- Τυπικές εφαρμογές χυτών εποξυ-ρητινών αποτελούν οι κατασκευές ανθεκτικών σε χημικά αντλιών και σωλήνων, εργαλείων, μητρών, καθώς και ηλεκτρομαγνητικών μονωτικών ειδών.

Επίσης υπάρχουν ρητίνες (wetcome) δυο συστατικών για επαλείψεις επιφανειών (υγρών και στερεών). Η ξηρή μεμβράνη που σχηματίζουν έχει πυρανασχετικές ιδιότητες και έτσι δεν επιτρέπουν την εξάπλωση της φωτιάς. Οι ρητίνες αυτές προορίζονται:

- Για υγρομόνωση, για προστασία και διακόσμηση δαπέδων, τοίχων και ορόφων σε οικοδομικούς, βιομηχανικούς αγροτικούς και άλλους χώρους.
- Εφαρμόζονται σε επιφάνειες σκυροδέματος, πέτρας, σοβάδων, τούβλων, γύψου, ασφάλτου κ.α..
- Για τη σύνδεση παλιού και νέου σκυροδέματος κυρίως σε υγρούς χώρους.
- Για την προστασία κτιρίων από την διάβρωση και διείσδυση της υγρασίας.
- Για την υγρομόνωση πισινών και δεξαμενών.

- Για την υγρομόνωση απογείων χώρων, παταριών και δαπέδων κ.λ.π..

Μειονεκτήματα των εποξυ-ρητινών αποτελεί το υψηλό τους κόστους. Το γεγονός αυτό αντισταθμίζεται από τη μεγάλη χρησιμότητα τους και την ευρεία εφαρμογή που έχουν.

1.3 Σύνθετα Υλικά-Εγκλείσματα Στις Εποξειδικές Ρητίνες

1.3.1 Γενικά Ορισμοί

Στην κατηγορία των συνθέτων υλικών ανήκουν τα πολυμερή και οι ρητίνες με εγκλείσματα. Ένα υλικό εξεταζόμενο μακροσκοπικά χαρακτηρίζεται ως σύνθετο όταν σχηματίζεται από τον συνδυασμό δυο ή περισσότερων υλικών και έχει ιδιότητες διαφορετικές από τα αρχικά υλικά που το δημιούργησαν. Συνήθως τα υλικά αυτά παρουσιάζουν βελτίωση των ιδιοτήτων των επιμέρους υλικών που το αποτελούν ή και εντελώς διαφορετικές από αυτά. Τις περισσότερες φορές τα αρχικά υλικά του συνθέτου αντιδρούν χημικά μεταξύ τους. Έτσι προκύπτει μια νέα φάση. Με τον όρο «φάση» εννοούμε κάθε ομογενές τμήμα του συνθέτου υλικού. Με τον όρο «ενδιάμεση φάση» στα σύνθετα υλικά εννοούμε την περιοχή μεταξύ των ορίων των φάσεων που εμφανίζει διαφορετικές φυσικές ιδιότητες από τα αρχικά υλικά. Τα σύνθετα υλικά μπορούν να θεωρηθούν ότι αποτελούνται από μια συνεχή μήτρα με μια ή περισσότερες διάχυτες φάσεις (τα εγκλείσματα). Το απλούστερο σύνθετο υλικό αποτελείται από δυο υλικά από τα οποία το ένα είναι η μήτρα (matrix) και το δεύτερο το έγκλεισμα (filler).

1.3.2 Παράμετροι που ορίζουν ένα σύνθετο υλικό

Για την περιγραφή ενός συνθέτου υλικού θα πρέπει να αναφέρουμε τα παρακάτω χαρακτηρίστηκα:

- τη συγκέντρωση και την κατανομή συγκέντρωσης των σωματιδίων
- το σχήμα των σωματιδίων
- το μέγεθος και τη κατανομή μεγέθους των σωματιδίων
- το προσανατολισμό των σωματιδίων
- την τοπολογία των σωματιδίων

Η συμπεριφορά ενός συνθέτου υλικού εξαρτάται σημαντικά από περιεκτικότητα των αρχικών υλικών. Οι παράμετροι που πρέπει να ληφθούν για την περιγραφή ενός συνθέτου υλικού με μια ή περισσότερες διάχυτες μέσα σε μια συνεχή είναι:

α) το είδος των υλικών διαχύτων φάσεων (εγκλεισμάτων)

β) η γεωμετρία της διάχυτης φάσης

γ) το είδος του υλικού που χρησιμοποιείται ως μήτρα.

1.3.3 Κατάταξη και ταξινόμηση

Τα σύνθετα υλικά μπορούν να ταξινομηθούν ανάλογα με τη φύση της μήτρας και των συστατικών πρόσμειξης των εγκλεισμάτων ως εξής:

1. Διάκριση ως προς την προέλευση της μήτρας:
 - σύνθετα με πλαστική μήτρα
 - σύνθετα με μεταλλική μήτρα.
 - σύνθετα με κεραμική μήτρα.
2. Διάκριση ως προς τη μορφή του εγκλείσματος:
 - εγκλείσματα με μορφή ινών
 - εγκλείσματα με μορφή κόκκων
 - εγκλείσματα με μορφή φύλλων.

1.4 Επίδραση των εγκλεισμάτων στις ιδιότητες των εποξειδικών ρητινών.

1.4.1 Γενική περιγραφή

Τα εγκλείσματα είναι ανόργανα υλικά χρησιμοποιούνται μέσα στη μήτρα των εποξειδικών ρητινών, έχουν πολύ μικρές διαστάσεις και μορφή πούδρας σκόνης με μέση διάμετρο 0,015μ. Όσο αυξάνει η κατ' όγκο περιεκτικότητα σε εγκλείσμα, τόσο αυξάνει το ιξώδες και η ρητίνη μετατρέπεται από υγρό σε μια πιο στερεή μορφή.

Τα εγκλείσματα ρυθμίζουν το ιξώδες των ρητινών, ελαττώνουν το ποσοστό συστολής και το συντελεστή θερμικής διαστολής, ενώ ταυτόχρονα χρωματίζουν το σύνθετο. Τα εγκλείσματα πρέπει να είναι από χημικής απόψεως ουδέτερα ή ελαφρά βασικά και να μην αντιδρούν με τη ρητίνη ή το μέσο σκλήρυνσης.

Το σημαντικότερο όμως πλεονέκτημα των εγκλεισμάτων είναι ότι ελαττώνουν το κόστος του συνθέτου με παράλληλο συνδυασμό καλύτερων ποιοτικών ιδιοτήτων.

Για καλύτερα αποτελέσματα, τα εγκλείσματα πρέπει να θερμαίνονται για την απομάκρυνση της υγρασίας και του αέρα, που τυχόν απορροφήθηκε, και μετά να ενσωματώνονται στη ρητίνη. Επίσης είναι σκόπιμη η χρησιμοποίηση κάποιου ειδικού μηχανήματος για πλήρη ανάμειξη.

1.4.2 Ιδιότητες-Συμπεριφορά στον εφελκυσμό

Η παρουσία εγκλεισμάτων στις ρητίνες, γενικά αυξάνει το μέτρο ελαστικότητας σε αυτές, ενώ αντίθετα η παραμόρφωση θραύσης ελαττώνεται και η μεταβολή αυτή είναι ανάλογη με την περιεκτικότητά της σε εγκλείσμα. Αυτό ισχύει για μετρήσεις σε θερμοκρασίες περιβάλλοντος.

Συστολή

Η συστολή κατά τη διάρκεια σκλήρυνσης της ρητίνης ελαττώνεται ανάλογα με την αύξηση της περιεκτικότητας σε έγκλεισμα του συνθέτου υλικού. Αυτό οφείλεται στο ότι η ρητίνη αντικαθίσταται τοπικά από υλικό που δεν εμφανίζει μεταβολή στις διαστάσεις του, σε αντίθεση με την καθαρή ρητίνη.

Αντοχή σε χημικά αντιδραστήρια και σε διάβρωση

Μερικά εγκλείσματα όπως π.χ. το ανθρακικό ασβέστιο μειώνουν την αντοχή των ρητινών σε οξέα ενώ άλλα όπως το αλουμίνιο μειώνουν την αντοχή αυτή σε υγρασία, τα εγκλείσματα γενικά μειώνουν την ταχύτητα διάχυσης του νερού στα σύνθετα υλικά. Τα εγκλείσματα επίσης συμμετέχουν στην διάβρωση των πολυμερών στην επαφή τους με τα μέταλλα.

Ιόντα που υπάρχουν στη στερεοποιημένη μήτρα μπορούν να μεταφέρουν γαλβανικά ρεύματα και να ενισχύσουν τη διάβρωση. Αυτό οφείλεται στην αύξηση της αγωγιμότητας του συνθέτου, λόγω της ικανότητας των εγκλεισμάτων να απελευθερώνουν ιόντα.

Ειδική πυκνότητα

Τα εγκλείσματα που στην πλειοψηφία τους έχουν μεγαλύτερη πυκνότητα από την ρητίνη, αυξάνουν την πυκνότητα των συνθέτων υλικών ανάλογα με την κατ' όγκο περιεκτικότητά τους. Έτσι η παρουσία των εγκλεισμάτων μειώνει αισθητά το κόστος συνθέτου υλικού.

Ιξώδες

Τα εγκλείσματα αυξάνουν το ιξώδες των εποξειδικών ρητινών. Η αύξηση αυτή είναι μεγαλύτερη σε ινώδη και λιγότερο σε κοκκώδη εγκλείσματα.

Συντελεστής θερμικής διαστολής

Ο συντελεστής θερμικής διαστολής της στερεοποιημένης εποξειδικής ρητίνης ελαττώνεται με την αύξηση της κατ' όγκο συγκέντρωσης σε εγκλείσματα. Η ελάττωση δεν είναι γραμμική.

Πρόσφυση

Τα εγκλείσματα ελαττώνουν το βαθμό συστολής και έτσι αυξάνουν την ικανότητα πρόσφυσης των εποξειδικών ρητινών αποτελεσματικά.

Θερμική σταθερότητα

Ενισχύεται με την παρουσία εγκλεισμάτων. Με τον όρο θερμική σταθερότητα, εννοούμε την κατάσταση του συνθέτου όταν δεν παρατηρούνται αλλοιώσεις στη δομή του συναρτήσει της θερμοκρασίας.

Θερμική αγωγιμότητα

Τα εγκλείσματα αυξάνουν τη θερμική αγωγιμότητα των ρητινών και μεγάλες περιεκτικότητες σε έγκλεισμα αυξάνουν την παρουσία φυσαλίδων αέρα μέσα στο σύνθετο, που ως γνωστόν αποτελούν θερμομονωτικά σώματα. Περισσότερο αυξάνεται η θερμική αγωγιμότητα στην περίπτωση των μεταλλικών ινών, συγκριτικά με τα κοκκώδη μεταλλικά εγκλείσματα.

Αντοχή στη συμπίεση

Τα κοκκώδη εγκλείσματα αυξάνουν την αντοχή σε συμπίεση λόγω της δυσκαμψίας που προκαλούν.

Συμπεριφορά στην κρούση

Τα κοκκώδη εγκλείσματα επηρεάζουν την αντοχή σε κρούση λόγω της δυσκαμψίας που προκαλούν.

Συμπεριφορά στην κρούση

Τα κοκκώδη εγκλείσματα επηρεάζουν την αντοχή σε κρούση των σκληρυνόμενων εποξειδικών ρητινών σε βαθμό που ποικίλει ανάλογα με τον τύπο του εγκλείσματος, τον τύπο της ρητίνης και το είδος της δοκιμής κρούσης. Γενικά τόσο τα κοκκώδη όσο και τα ινώδη εγκλείσματα ενισχύουν την αντοχή των ρητινών σε κρούση.

Συμπεριφορά στην κάμψη

Τα κοκκώδη εγκλείσματα γενικά ελαττώνουν την αντοχή στην κάμψη και αυξάνουν το μέτρο ελαστικότητας σε κάμψη.

Σκληρότητα επιφάνειας – Αντίσταση στην τριβή

Τα εγκλείσματα αυξάνουν την σκληρότητα της επιφάνειας του συνθέτου και την αντίσταση τριβής.

1.4.3 Κοκκώδη σύνθετα υλικά (Particulate composites)

Τα κοκκώδη σύνθετα υλικά αποτελούν από κόκκους ενός υλικού μέσα σε μήτρα ενός άλλου. Οι κόκκοι μπορεί να είναι μεταλλικοί ή όχι, όπως και η μήτρα. Έτσι από αυτή την άποψη έχουμε τέσσερις δυνατούς συνδυασμούς.

1) Υλικά μη μεταλλικού εγκλείσματος εντός μη μεταλλικής μήτρας

Παράδειγμα τέτοιου υλικού είναι το σκυρόδεμα (όχι το οπλισμένο). Το σκυρόδεμα αποτελείται από κόκκους άμμου και πέτρας δεμένους με ένα μίγμα τσιμέντου και νερού, το οποίο έχει αντιδράσει χημικά και έχει σκληρύνει. Η αντοχή του σκυροδέματος αποδίδει στην ύπαρξη κόκκων πέτρας.

Επίσης φλούδες μη μεταλλικών υλικών, όπως η μίκα ή το γυαλί, μπορούν να αποτελέσουν το κοκκώδες εγκλείσμα μιας γυάλινης ή πλαστικής μήτρας αντίστοιχα και με τον τρόπο αυτό να προκύψει, ένα σύνθετο υλικό αυτού του είδους.

2) Υλικά μεταλλικού εγκλείσματος εντός μη μεταλλικής μήτρας

Πολλά υλικά αυτού του είδους έχουν κατασκευασθεί με σκοπό την αύξηση της θερμικής αγωγιμότητας, τη μείωση του συντελεστή θερμικής διαστολής και τη μείωση της φθοράς της μήτρας. Παράδειγμα, τέτοιου υλικού είναι εγκλείσμα χαλκού μέσα σε εποξειδική ρητίνη, που αυξάνει κατά πολύ την ηλεκτρική αγωγιμότητα αυτής. Επίσης είναι συνήθη τα σύνθετα υλικά με εγκλείσμα από το μέταλλο υπό μορφή φλούδας.

3) Υλικά μεταλλικού εγκλείσματος εντός μεταλλικής μήτρας

Τα υλικά αυτού του τύπου δεν είναι κράματα. Το μεταλλικό εγκλείσμα έχει μορφή κόκκων μέσα στη μήτρα και δεν είναι διαλυμένο μέσα σε αυτήν, όπως είναι στα κράματα.

Σαν παράδειγμα για αυτήν την κατηγορία μπορούμε να αναφέρουμε τους κόκκους μόλυβδου εντός κραμάτων χαλκού και χάλυβα, που σκοπό έχουν τη βελτίωση της κατεργασιμότητας του κράματος στις εργαλειομηχανές.

Σαν παράδειγμα για αυτήν την κατηγορία μπορούμε να αναφέρουμε τους κόκκους μολύβδου εντός κραμάτων χαλκού και χάλυβα, που σκοπό έχουν τη βελτίωση της κατεργασιμότητας του κράματος στις εργαλειομηχανές.

4) Υλικά μη μεταλλικού εγκλείσματος εντός μεταλλικής μήτρας

Μη μεταλλικά υλικά μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε μορφή κοκκώδους εγκλείσματος μέσα σε μεταλλική μήτρα. Τα προκύπτοντα υλικά ονομάζονται κεραμομέταλλα. Τα κεραμομέταλλα μπορούν να είναι δυο ειδών ανάλογα με το εγκλείσμα. Το πρώτο είδος είναι κεραμομέταλλα με κόκκους οξειδίου ενός μετάλλου πάνω σε μεταλλική μήτρα, τα οποία χρησιμοποιούνται στη κατασκευή εργαλείων και σε εφαρμογές υψηλής θερμοκρασίας όπου η αντίσταση στη διάβρωση είναι σημαντική. Το άλλο είδος είναι τα κεραμομέταλλα με κόκκους καρβιδίου ενός μετάλλου σε μεταλλική μήτρα. Έτσι το καρβίδιο του βολφραμίου μέσα σε μήτρα κοβαλτίου χρησιμοποιείται σε τμήματα μηχανών τα οποία απαιτούν μεγάλη αντοχή στην οξειδωση και στη διάβρωση, ενώ έχει συντελεστή θερμικής διαστολής παραπλήσιο με αυτόν του χάλυβα και έτσι είναι κατάλληλο για χρήσεις σε βαλβίδες κ.λ.π.. Επίσης το καρβίδιο του τιτανίου μέσα σε μήτρα νικελίου ή κοβαλτίου χρησιμοποιείται συχνά σε εφαρμογές υψηλής θερμοκρασίας, όπως π.χ. σε διάφορα μέρη στροβιλομηχανών. Τέλος τα κεραμομέταλλα χρησιμοποιούνται στους πυρηνικούς αντιδραστήρες σαν καύσιμα.

1.5 ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΜΕ ΕΙΚΟΝΕΣ ΑΠΟ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Το πεδίο εφαρμογής των συνθέτων υλικών εξαπλώνεται σε όλες σχεδόν τις εκφάνσεις της ανθρώπινης κοινωνίας. Όπου εμφανίζεται η ανάγκη για ένα υλικό το οποίο θα έχει ιδιότητες που δεν υπάρχουν ή δεν μπορούν να βρεθούν εύκολα σε κάποιο συμβατικό υλικό, αυτή η ανάγκη θα καλυφθεί από κάποιο σύνθετο υλικό.

Στην ιατρική:



Στην αυτοκινητοβιομηχανία:

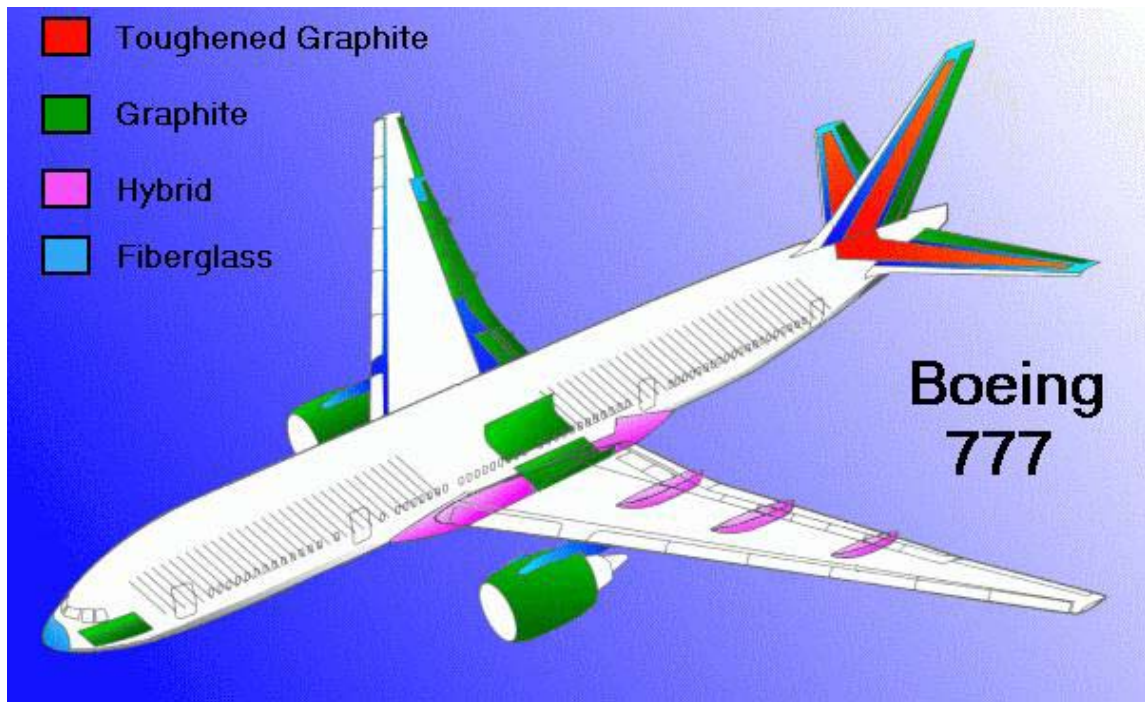


Στην ναυπηγική:



Στην αεροναυπηγική:





Στον αθλητισμό:



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 Παράμετροι που χαρακτηρίζουν τη μηχανική συμπεριφορά των υλικών

2.1 Ελαστικές Σταθερές (ν, E)

Από τη μηχανική γνωρίζουμε ότι εφόσον τα φορτία δεν υπερβαίνουν μια ορισμένη τιμή, οι παραμόρφωσης που προκαλούν είναι ανάλογες των τάσεων. Η αναλογία αυτή στην περίπτωση του μονοαξονικού εφελκυσμού εκφράζεται από την παρακάτω σχέση:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (2.1)$$

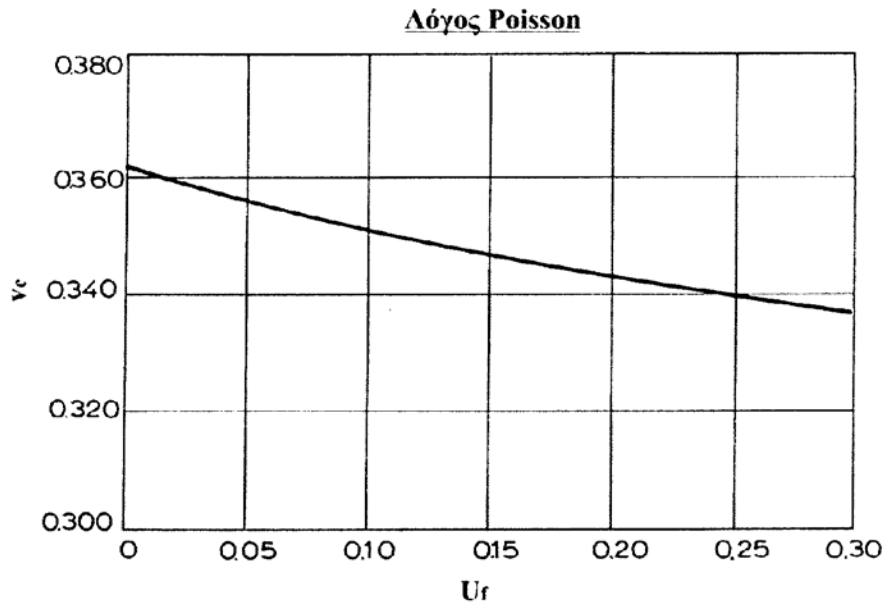
που είναι η μαθηματική έκφραση του νόμου του Hooke. Η σχέση αυτή, είναι γραμμική και γι' αυτό τα υλικά για τα οποία ισχύει ονομάζονται και γραμμικά.

Ο συντελεστής αναλογίας E ονομάζεται μέτρο ελαστικότητας ή μέτρο του Young. Εξάλλου η αρχική επιμήκυνση μιας ράβδου που εφελκύεται, συνοδεύεται πάντοτε από κάποια πλευρική συστολή. Έχει αποδειχθεί ότι τα πηλίκια των ανηγμένων πλευρικών βραχύνσεων ε_x και ε_y κατά τους άξονες x και y αντίστοιχα, προς την ανηγμένη αξονική επιμήκυνση είναι ίσα προς έναν αριθμό ν , σταθερο για κάθε υλικό που καταπονείται με φορτία τέτοια ώστε να ισχύει ο νόμος του Hooke. Η σταθερά αυτή ονομάζεται λόγος του Poisson ή συντελεστής εγκάρσιας συστολής.

Έτσι ισχύει η σχέση:

$$\nu = \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_z} = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_z} \quad (2.2)$$

Η γραφική παράσταση του λόγου Poisson για τα σύνθετα υλικά συναρτήσει της περιεκτικότητας των εγκλεισμάτων φαίνεται στο διάγραμμα του σχήματος 2.1 που ακολουθεί:



Σχήμα 2.1

Δεδομένου ότι οι ανηγμένες βραχύνσεις είναι αρνητικοί αριθμοί δικαιολογεί το αρνητικό πρόσημο στη σχέση (2.2) αφού ο λόγος του Poisson εκφράζεται με ένα θετικό αριθμό, ο οποίος πάντοτε είναι μικρότερος από το $1/2$. Ο λόγος αυτός για όλα τα υλικά παίρνει οριακή την τιμή $1/2$ όταν αυτά δεν καταπονούνται με φορτία μέσα στην ελαστική περιοχή, στην περιοχή δηλαδή όπου ισχύει ο νόμος του Hooke, αλλά με φορτία μεγαλύτερα, που βρίσκονται δηλαδή στην πλαστική περιοχή.

Η παράμετρος $\Delta V/V$ (δηλ. η ανηγμένη μεταβολή του όγκου ή μέτρο διογκώσεως) σχετίζεται με τον λόγο του Poisson, με βάση τη σχέση :

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{1 - 2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (2.3)$$

2.1.1 Μοντέλα και εκφράσεις για το μέτρο ελαστικότητας (E) κοκκωδών σύνθετων υλικών

Από πολλούς ερευνητές αναπτύχθηκαν διάφορα θεωρητικά μοντέλα για τον υπολογισμό του μέτρου ελαστικότητας. Τα μοντέλα αυτά και οι εξισώσεις που πρόεκυψαν, είναι άλλοτε απλά και άλλοτε πολύπλοκα, ανάλογα με τις παραδοχές που ο καθένας χρησιμοποίησε.

Εδώ αναφερόμαστε σε ορισμένα από αυτά τα μοντέλα.

2.1.1.1 Το μοντέλο του Counto [1]

Το μοντέλο για τα σύνθετα υλικά δυο φάσεων το οποίο προτάθηκε από τον Counto προϋποθέτει τέλεια πρόσφυση ανάμεσα στον κόκκο και τη μήτρα. Το μέτρο του συνθέτου υλικού, δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{1}{E_c} = \frac{1 - U_f^{1/2}}{E_m} + \frac{1}{(1 - U_f^{1/2})U_f E_m + E_f} \quad (2.4)$$

Αυτό το μοντέλο προβλέπει τα μέτρα ελαστικότητας και συμφωνεί με μια ευρεία σειρά από πειραματικά δεδομένα, κυρίως για υλικά από σκυρόδεμα.

2.1.1.2 Το μοντέλο Paul [2]

Στην προσεγγιστική λύση του Paul τα συστατικά (οι φάσεις) του σύνθετου υλικού, υποτίθεται ότι είναι στην κατάσταση μακροσκοπικώς ομοιογενούς τάσης. Η πρόσφυση υποτίθεται ότι υπάρχει στην ενδιάμεση επιφάνεια ενός κυβικού εγκλείσματος το οποίο είναι μέσα σε κυβική μήτρα. Όταν μια ομοιόμορφη τάση εφαρμοσθεί στο σύνορο, το μέτρο ελαστικότητας του σύνθετου υλικού δίνεται από τη σχέση:

$$E_c = E_m \left\{ \frac{1 + (m - 1)U_f^{2/3}}{1 + (m - 1)(U_f^{2/3} - U_f)} \right\} \quad (2.5)$$

2.1.2 Μέτρα ελαστικότητας με σφαιρικά εγκλείσματα

Τα σφαιρικά εγκλείσματα είναι συνήθως αρκετά μεγάλα, έτσι ώστε η μέση απόσταση μεταξύ τους, ακόμα και για μεγάλες περιεκτικότητες, είναι μεγάλη αν συγκριθεί με τις τιμές της τετραγωνικής ρίζας της απόστασης μεταξύ των άκρων των μακρομορίων του πολυμερούς. Επίσης τα σωματίδια είναι τόσο απομακρυσμένα μεταξύ τους, που δε μπορούν να συνδέονται μαζί μέσω μιας απλής αλυσίδας πολυμερούς.

Για τα σύνθετα υλικά όπου το πάχος του στρώματος του πολυμερούς μεταξύ των σωματιδίων είναι πολύ μεγαλύτερο από το πάχος του

οριακού στρώματος, η επίδραση του οριακού στρώματος στις διάφορες ιδιότητες μπορεί να αμεληθεί. Με βάση αυτή την υπόθεση έχουν προταθεί κατά καιρούς πολλές εξισώσεις που να περιγράφουν τη μηχανική συμπεριφορά σύνθετων υλικών με σφαιρικά εγκλείσματα.

Ο πρώτος που ασχολήθηκε με το θέμα ήταν ο Einstein [3] , όταν το 1906 έκανε παρατηρήσεις στο ιξώδες αιωρήματος στερεών σφαιρών διασπαρμένων σε κάποιο Νευτώνειο υγρό και κατέληξε στην εξίσωση:

$$E_c = E_m(1 + 2.5U_f) \quad (2.6)$$

Η εξίσωση αυτή ισχύει για μικρές περιεκτικότητες σε εγκλείσμα και για περιπτώσεις πλήρους συνοχής μεταξύ εγκλείσματος και μήτρας. Με τον όρο 'τέλεια συνοχή' εννοούμε ότι δεν υπάρχει σχετική κίνηση μήτρας-σωματιδίων, κατά τη διάρκεια φόρτισης μέχρι κάποιου ορίου πάνω από το οποίο σπάει ο δεσμός μήτρας-σωματιδίου.

Προϋπόθεση για την παραπάνω εξίσωση είναι ότι το εγκλείσμα είναι σκληρότερο υλικό από τη μήτρα. Ο όγκος του εγκλείσματος είναι η σημαντική παράμετρος για την εξίσωση και όχι το βάρος του. Τέλος το μέγεθος των σωματιδίων δεν επηρεάζει την ενισχυτική τους δράση.

Συνέχισαν την έρευνα οι Guth και Smallwood [4] προτείνοντας την εξίσωση:

$$E_c = E_m(1 + 2.5U_f + 14.1U_f^2) \quad (2.7)$$

Αργότερα συνέχισε ο Kerner [5] με την σχέση

$$\frac{E_c}{E_m} = \frac{\frac{U_f G_f}{(7 - 5\nu_m)G_m + (8 - 10\nu_m)G_f} + \frac{U_m}{15(1 - \nu_m)}}{\frac{U_f G_m}{(7 - 5\nu_m)G_m + (8 - 10\nu_m)G_f} + \frac{U_m}{15(1 - \nu_m)}} \quad (2.8)$$

όπου G , το μέτρο διάτμησης και ν , ο λόγος Poisson.

Για εγκλείσματα πιο σκληρά από τη μήτρα η εξίσωση (2.8) απλοποιείται ως εξής:

$$\frac{E_c}{E_m} = 1 + \frac{U_f}{U_m} \frac{15(1 - \nu_m)}{8 - 10\nu_m} \quad (2.9)$$

Στην πραγματικότητα δεν ισχύει η προϋπόθεση συνοχής μεταξύ μήτρας και εγκλείσματος όπως έχει ήδη προαναφερθεί σε παραπάνω παράγραφο. Τότε η πραγματική ενισχυτική δράση του εγκλείσματος είναι μικρότερη από αυτή που υπολογίζεται θεωρητικά και σε ακραίες περιπτώσεις μπορεί να ελαττώσει, παρά να αυξήσει το μέτρο ελαστικότητας του σύνθετου.

Ο Einstein[3] κατά τις παρατηρήσεις που έκανε το 1906 και αναφέρονται παραπάνω κατέληξε πως όταν μεταξύ του αιωρήματος στερεών σφαιρών και του Νευτώνειου υγρού δεν υπάρχει τέλεια συνοχή ισχύει η εξίσωση:

$$E_c = E_m(1 + U_f) \quad (2.10)$$

Εάν τα σωματίδια είναι φυσαλίδες αέρα ή βρίσκονται μέσα σε κενά τότε η εξίσωση Kerner[5] γράφεται:

$$\frac{1}{E_c} = \frac{1}{E_m} + \frac{U_f}{U_m} \frac{15(1 - v_m)}{7 - 5v_m} \quad (2.11)$$

Τέλος ο Takahashi [6] πρότεινε την παρακάτω πιο σύνθετη σχέση:

$$\frac{E_c}{E_m} = 1 + (1 - v_m)U_f \frac{E_f(1 - 2v_m) - E_m(1 - v_f) + 10(1 + v_m)E_f(1 + v_m) - E_m(1 + v_f)}{E_f(1 + v_m) + 2E_m(1 - 2v_f) + 2E_f(4 - 5v_m)(1 + v_m) + E_m(7 - 5v_m)(1 + v_f)} \quad (2.12)$$

Μια βασική παραδοχή για τις παραπάνω θεωρίες είναι ότι τα εγκλείσματα δεν σχηματίζουν συσσωματώματα και αυτό οφείλεται στο ότι τα συσσωματώματα δημιουργούν κοιλότητες αέρα και έτσι ο φαινόμενος όγκος του εγκλείσματος είναι μεγαλύτερος του πραγματικού.

Για την περίπτωση ενάρξεως των συσσωματωμάτων ο Mooney[7] διετύπωσε την ακόλουθη εξίσωση:

$$\frac{E_c}{E_m} = \exp\left(\frac{2.5U_f}{1 - SU_f}\right) \quad (2.13)$$

Όπου S ορίζεται από τη σχέση :

$$S = \frac{\text{φαινόμενος ογκος εγκλείσματος}}{\text{πραγματικός ογκος εγκλείσματος}}$$

Η ελάχιστη τιμή του είναι η μονάδα. Σύμφωνα με πειραματικές μετρήσεις οι τιμές που παίρνει κυμαίνονται από 1.2 μέχρι 2.

Μια άλλη θεωρία που προτάθηκε από τους Eilers και Van-Dyck[8] περιγράφεται από την εξίσωση:

$$\frac{E_c}{E_m} = 1 + \frac{kU_f}{1 - SU_f} \quad (2.14)$$

όπου k και S έχουν τιμές 1.25 και 1.20 αντίστοιχα.

Στο εργαστήριο Αντοχής Υλικών έχει γίνει μελέτη, πάνω στο βαθμό πρόσφυσης μεταξύ μήτρας και εγκλείσματος. Με βάση τον ορισμό της ενδιάμεσης φάσης που έχει μελετηθεί προτείνεται το ακόλουθο μοντέλο για την περίπτωση των κοκκωδών εγκλεισμάτων. Ο δείκτης i αναφέρεται στην ενδιάμεση φάση και k , είναι μια παράμετρος που περιγράφει το βαθμό σύνδεσης μεταξύ εγκλείσματος και ενδιάμεσης φάσης:

$$E_c = E_f U_f k + E_m U_m + E_i U_i \quad (2.15)$$

Καλύτερη προσέγγιση του προβλήματος έγινε σε μελέτη Π.Σ. Θεοχάρη, όπου προτείνεται μια σειρά μοντέλων στα οποία θεωρείται ότι αναπτύσσεται μια τρίτη ψευδο-φάση μήτρας και εγκλεισμάτων στη διάρκεια του πολυμερισμού της μήτρας.

Επίσης μια άλλη εξίσωση για το μέτρο ελαστικότητας σύνθετου υλικού με εγκλείσματα πρότειναν αργότερα οι Αιμ. Σιδερίδης και Π.Σ. Θεοχάρης [9-11]:

$$\frac{2(1 - 2\nu_c)}{E_c} = \frac{2\lambda^2 U_f}{E_f} + \frac{1}{E_m} \frac{U_f(1 - \lambda^2)(1 + \nu_m) + 2(\lambda U_f - 1)^2(1 - 2\nu_m)}{1 - U_f} \quad (2.16)$$

όπου v_c και λ δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις :

$$\frac{1}{v_c} = \frac{U_f}{v_f} + \frac{U_m}{v_m}$$

$$\lambda = \frac{3(1 - v_m)E_f}{[2U_f(1 - 2v_m) + 1 + v_m]E_f + 2(1 - 2v_f)(1 - U_f)E_m}$$

2.1.3 Περιορισμοί θεωρητικών μοντέλων σχετικά με το μέτρο ελαστικότητας των σύνθετων υλικών

Σε αυτό το σημείο πρέπει να τονιστεί ότι στην ανασκόπηση δεν έγινε καμία προσπάθεια για να συζητηθούν οι προσεγγίσεις, αλλά να δειχθεί ένας αριθμός σε χρήσιμες θεωρητικές υποθέσεις που περιγράφουν τα μέτρα ελαστικότητας ενός συστήματος εγκλεισμάτων. Για την λεπτομερή συζήτηση των θεωριών γίνεται αναφορά στους Hashin και Hill[12,13].

Στην πράξη τα εγκλείσματα κόκκων δεν μπορούν τελείως να αποχωρισθούν το ένα από το άλλο και η ενίσχυση του στοιχείου μπορεί να είναι σε μικρή κλίμακα, στην πραγματικότητα είναι ένα συσσωμάτωμα από μικρούς κόκκους. Έτσι λοιπόν ως απάντηση στο εφαρμοζόμενο φορτίο, η τάση θα κατανεμηθεί ομοιόμορφα ανάμεσα στους κόκκους και τα συσσωματώματα και η παραδοχή τάση ή ομοιόμορφη επιμήκυνση (παραμόρφωση) είναι καθαρά υπεραπλούστευση.

Οι θεωρίες που ασχολούνται με συστήματα εγκλεισμάτων δέχονται ότι τα μέτρα ελαστικότητας για δεδομένο έγκλεισμα και μήτρα εξαρτώνται μόνο από την περιεκτικότητα σε όγκο του εγκλείσματος και όχι από το μέγεθος των κόκκων. Όμως γενικά το μέτρο αυξάνει όσο το μέγεθος των κόκκων μειώνεται. Οι Lewis και Nielsen[16] παραδέχονται ότι όσο το μέγεθος του κόκκου μειώνεται η επιφάνεια των κόκκων αυξάνεται παρέχοντας ένα πιο ενεργό επιφανειακό δεσμό μεταξύ των δυο φάσεων. Αυτό θα μπορούσε να συνοδευτεί από μια κλίση για την αύξηση συσσωρευσης των κόκκων(συσσωματώματα). Οι ιδιότητες των σύνθετων υλικών μπορούν επίσης να μεταβάλλονται, όταν αλλάζει το σχήμα (μορφή) κόκκου. Ο Bueche [14,15] παρατήρησε ότι οι

διαφορετικές μορφές εγκλεισμάτων καταλήγουν σε διαφορετικές μηχανικές ιδιότητες. Το αποτέλεσμα ήταν ιδιαίτερα έντονο με μεγαλύτερους ή μη σφαιρικούς (μη σφαιροειδείς) κόκκους όπου ένας προτιμώμενος προσανατολισμός θα μπορούσε να τροποποιήσει τη συμπεριφορά παραμόρφωσης.

Ο Wu [16] απέδειξε θεωρητικά ότι κόκκοι σε μορφή δίσκου έδωσαν καλύτερη ενίσχυση από βελονοειδούς ή σφαιρικής μορφής κόκκους, αλλά αγνόησε την ανισοτροπία η οποία συνδέεται με τη χρήση μη σφαιρικών κόκκων σε σύνθετα υλικά.

Ο Chow [17] έχει ασχοληθεί με πρόβλημα για ευθυγραμμισμένους ελλειψοειδείς κόκκους και προέβλεψε το διάμηκες και εγκάρσιο μέτρο ελαστικότητας. Οι επιδράσεις από το μέγεθος του εγκλείσματος και από την επιφάνεια του εγκλείσματος αγνοήθηκαν. Όμως είναι απίθανο στην πράξη ότι τα εγκλείσματα μπορούν να διαταχθούν ομοιόμορφα με τρόπο που παραδέχεται ο Chow έτσι ώστε η πειραματική επιβεβαίωση των δυο θεωριών να είναι απαραίτητη.

Η κατανομή του μεγέθους των κόκκων επηρεάζει την περιεκτικότητα του εγκλείσματος στη μήτρα. Μίγματα από κόκκους με διαφορετικό μέγεθος εγκλεισμάτων μπορούν να διαταχθούν πιο πυκνά από εγκλείσματα ενός μεγέθους διότι τα μικρά εγκλείσματα μπορούν να γεμίσουν το χώρο μεταξύ των στενά διατεταγμένων μεγάλων εγκλεισμάτων και να σχηματίσουν συσσωματώματα. Αυτοί οι κόκκοι που συσσωματώνονται είναι ικανοί να μεταφέρουν ένα μεγαλύτερο μέτρο ελαστικότητας για την ίδια περιεκτικότητα που προβλέπεται από τις περισσότερες θεωρίες.

Αυτή η επίδραση δημιουργείται όπου υπάρχει μια διαφορετική ενισχυτική ικανότητα άμμου, όπως έχει παρατηρηθεί από τους Ahmed και Jones [18]. Μια εμπειρική τροποποίηση στην εξίσωση Kerner η οποία περιλαμβάνει ένα συντελεστή αλληλεπίδρασης εγκλείσματος προτάθηκε από τον Dickie [19]. Κάθε μια από τις εξισώσεις εμφανίζεται ικανοποιητική στο να περιγράφει τα δεδομένα των διαφόρων ερευνητών.

Πρέπει να σημειωθεί το σχόλιο από τον Christensen [20] επάνω στην εξίσωση του Kerner, ότι το σαφές σφάλμα σ' αυτή την εξίσωση δεν μπορεί να δειχθεί λόγω της συντομίας της παραγωγίσεως. Αυτό συνεπώς δημιουργεί αμφιβολίες στην εξίσωση του Kerner και στις επακόλουθες τροποποιήσεις.

Οι περισσότερες από τις θεωρίες οι οποίες εξηγούν την ενισχυτική δράση των εγκλεισμάτων παραδέχονται τέλεια πρόσφυση ανάμεσα στα εγκλείσματα και τη πολυμερική μήτρα. Η περίπτωση της ελλιπούς προσφύσεως ήταν στην ελαστική περιοχή, όπως συζητήθηκε από τους Sato και Furukawa [21]. Αυτοί παραδέχονται ότι συνδεδεμένοι κόκκοι λειτουργούν ως οπές και προβλέπουν μείωση στα μέτρα ελαστικότητας με την αύξηση της περιεκτικότητας σε εγκλείσμα.

Μπορεί να υποστηριχθεί ότι οι μη συνδεδεμένοι κόκκοι δεν λειτουργούν εντελώς ως οπές, επειδή αυτοί συγκρατούν τη μήτρα από την κατάρρευση. Σε αυτή την περίπτωση το μέτρο ελαστικότητας συστήματος εγκλεισμάτων πρέπει να αυξάνει με την αύξηση περιεκτικότητας του εγκλείσματος, η οποία είναι η γενικώς αναμενόμενη συμπεριφορά.

Μια μεταβολή στην πρόσφυση μήτρας – εγκλεισμάτων έχει μικρότερη επίδραση στα μέτρα ελαστικότητας από ότι στην αντοχή. Το τελευταίο είναι περισσότερο εξαρτώμενο από την κατεργασία της επιφάνειας. Στην πραγματικότητα ο βαθμός πρόσφυσης δεν φαίνεται να είναι σημαντικός παράγοντας όσο οι δυνάμεις τριβής ανάμεσα στις φάσεις δεν υπερβαίνονται απ την εφαρμοζόμενη τάση.

Οι Spanoudakis και Young [22] εξέτασαν εγκλείσματα γυαλιού σε εποξειδική ρητίνη και βρήκαν ότι οι καλύτερες συνολικές μηχανικές ιδιότητες αποκτήθηκαν από σύνθετα υλικά που περιείχαν κόκκους οι οποίοι είχαν εμβαπτισθεί σε ουσία (coupling agent) προς αύξηση της προσφύσεως μήτρας – εγκλείσματος.

Είναι ξεκάθαρο από τις προηγούμενες αναφορές ότι τα μέτρα ελαστικότητας ενός συστήματος εγκλεισμάτων είναι μια λεπτομερειακή συνάρτηση της μικροδομής, όπως επίσης και της ποιότητας πρόσφυσης μεταξύ των δυο φάσεων.

2.1.4 Θεωρητική μελέτη μοντέλων για τον υπολογισμό του μέτρου ελαστικότητας του κοκκώδους υλικού

Η θεωρητική μελέτη που ακολουθεί βασίζεται στις ακόλουθες παραδοχές:

- Οι φάσεις του συνθέτου υλικού (έγκλεισμα και μήτρα) είναι ελαστικά ισότροπα και ομογενή υλικά.
- Ο αριθμός των εγκλεισμάτων είναι μεγάλος και η κατανομή τους ομοιόμορφη, έτσι ώστε το σύνθετο υλικό μπορεί να θεωρηθεί ομοιογενές και ισότροπο (μακροσκοπικώς ισότροπο υλικό).
- Το έγκλεισμα αποτελείται από κόκκους που έχουν τέλειο σφαιρικό σχήμα.
- Οι παραμορφώσεις που αναπτύσσονται στο σύνθετο υλικό είναι αρκετά μικρές έτσι ώστε να μπορεί να θεωρηθεί ότι ισχύουν οι γραμμικές σχέσεις παραμορφώσεων. Η κατ' όγκο περιεκτικότητα των εγκλεισμάτων είναι αρκετά μικρή, έτσι ώστε η αλληλεπίδραση μεταξύ αυτών να μπορεί να αμεληθεί.

Για τον προσδιορισμό των σχέσεων οι οποίες θα δώσουν την θεωρητική έκφραση για το μέτρο ελαστικότητας (E_c) του συνθέτου υλικού, θα εφαρμόσουμε την θεωρία της ελαστικότητας στον στοιχειώδη αντιπροσωπευτικό όγκο του συνθέτου, όπου θεωρείται ότι έχει μέσο όρο τις ιδιότητες του κοκκώδους συνθέτου υλικού.

2.2 Παράμετροι που χαρακτηρίζουν την αντοχή των κοκκωδών υλικών

Όπως έχει επισημανθεί από τον Nielsen [23] οι θεωρίες για την αντοχή των σύνθετων υλικών με εγκλείσματα είναι λιγότερο ανεπτυγμένες από αυτές για τα μέτρα ελαστικότητας. Εκτός από την περίπτωση για ελαστικό (rubber) με εγκλείσματα, υπάρχουν σημαντικοί περιορισμοί.

2.2.1 Τάση θραύσης

2.2.1.1 Μοντέλο του Broutman

Στην προσέγγιση του Broutman [24], υποτίθεται ότι το σύνθετο υλικό αστοχεί όταν ένα στοιχείο υποστεί θραύση ως αποτέλεσμα μιας συγκεντρώσεως τάσεως γύρω από το έγκλεισμα. Έπεται ότι η αντοχή πίπτει ταχέως με την προσθήκη μικρών ποσοτήτων εγκλεισμάτων και παραμένει βασικά σε αυτό το επίπεδο με περαιτέρω προσθήκες εγκλεισμάτων.

Με αυτή την υπόθεση αυτοί χρησιμοποίησαν την ανάλυση για πεπερασμένα στοιχεία για να μοντελοποιήσουν το σύνθετο υλικό και συσχέτισαν τα αποτελέσματα με τις πειραματικές αντοχές υλικού με εγκλείσματα από σφαίρα γυαλιού μέσα σε θερμοσκυρηνόμενη ρητίνη.

Οι θεωρητικές προβλέψεις δεν έχουν καλή σύμπτωση με τα πειραματικά δεδομένα διότι το μοντέλο αγνοεί αλληλεπίδραση κόκκων. Επιπλέον τα σύνθετα υλικά είναι πιθανόν να μην έχουν αστοχήσει ως αποτέλεσμα αστοχίας του πρώτου στοιχείου.

2.2.1.2 Ο νόμος των δυνάμεων (The power law)

Η δεύτερη προσέγγιση υποθέτει ότι η αντοχή συνθέτου υλικού προσδιορίζεται από την (υπάρχουσα) έκταση της φέρουσας φορτίο μήτρας λόγω της παρουσίας του εγκλείσματος.

Στην περίπτωση μιας πτωχής προσφύσεως ανάμεσα στη μήτρα και το έγκλεισμα και της απουσίας συγκέντρωσης τάσεως στην ενδιάμεση επιφάνεια κόκκου – μήτρας, η αντοχή περιγράφεται από το νόμο δυνάμεως:

$$\sigma_{cu} = \sigma_{mu}(1 - \alpha U_f^n) \quad (2.17)$$

όπου σ_{cu} και σ_{mu} οι αντοχές (τάσεις θραύσεως) του συνθέτου και της μήτρας αντιστοίχως, α και n είναι σταθερές εξαρτώμενες από

το υποτιθέμενο σχήμα κόκκου και την ταξινόμηση στο μοντέλο του σύνθετου.

Ο Nielsen [25] έχει εισηγηθεί έναν παράγοντα συγκεντρώσεως τάσεως, K με προτεινόμενη τιμή την 0,5. Για κυβικούς κόκκους μέσα σε κυβική μήτρα η εξίσωση μπορεί να γραφτεί ως :

$$\sigma_{cu} = \sigma_{mu}(1 - \alpha U_f^{2/3})K \quad (2.18)$$

Οι Nicolais και Narkis [26] θεώρησαν μια κυβική μήτρα ενισχυμένη με ομοιομόρφως διασκορπισμένους κόκκους όπου υποτίθεται ότι η θραύση γίνεται στην ελάχιστη εγκάρσια διατομή συνεχούς φάσεως. Η σχέση για την αντοχή δίνεται ως :

$$\sigma_{cu} = \sigma_{mu}(1 - 1.21U_f^{2/3}) \quad (2.19)$$

Οι Piggott και Leidner [27] υποστήριξαν ότι η υποτιθέμενη ομοιόμορφη κατανομή των εγκλεισμάτων σε πάρα πολλά μοντέλα είχε μικρή πιθανότητα επιτεύξεως στην πράξη και προτείνουν μια εμπειρική σχέση:

$$\sigma_{cu} = K\sigma_{mu} - bU_f \quad (2.20)$$

όπου K : συντελεστής συγκέντρωσης τάσεων και b μια σταθερά εξαρτώμενη από την πρόσφυση κόκκου – μήτρας.

Ο Landon [27] πρότεινε μια εξίσωση όμοια:

$$\sigma_{cu} = \sigma_{mu}(1 - U_f) - KU_f d \quad (2.21)$$

όπου d είναι η μέση διάμετρος κόκκου και K είναι η κλίση στο διάγραμμα εφελκυσμένης αντοχής μέσης διαμέτρου κόκκου.

2.2.1.3 Η εξίσωση των Leidner – Woodhams

Μια απλούστερη αλλά πιο λεπτομερής προσέγγιση έχει αναπτυχθεί από τον Leidner [29] όπου το μοντέλο του συνθέτου υλικού αποτελείται από σφαιρικούς κόκκους μέσα σε μη ελαστικά μήτρα. Για να εφαρμοσθεί η θεωρία ενισχύσεως το μέγεθος κόκκου θα προσεγγισθεί στον κύλινδρο. Κατ' αυτόν τον τρόπο μπορεί να προσδιορισθεί η κατανομή τάσεων στο έγκλεισμα στο σημείο θραύσεως.

Στην περίπτωση μη καλώς συνδεδεμένων κόκκων, η μεταβίβαση τάσεως ανάμεσα στον κόκκο και την μήτρα υποτίθεται ότι γίνεται ως αποτέλεσμα του συνδυασμού της τριβής μεταξύ κόκκου – μήτρας και των παραμενουσών θλιπτικών τάσεων οι οποίες ενεργούν επάνω στην ενδιάμεση επιφάνεια κόκκου – μήτρας.

Στην περίπτωση από καλά συνδεδεμένους κόκκους οι τάσεις μεταβιβάζονται δια μέσου μηχανισμού διάτμησης. Η μέγιστη τάση είναι στο κόκκο, συνεπώς εξαρτάται από την αντοχή του δεσμού κόκκου – μήτρας.

Η τελική εφελκυστική τάση (αντοχή) του συνθέτου ελήφθη απλά ως το άθροισμα του μεγίστου φορτίου που αναλαμβάνεται από την μήτρα και από το έγκλεισμα και δίνεται ως :

$$\sigma_{cu} = (\sigma_a + 0.83\tau_m) + \sigma_a K(1 - U_f) \quad (2.22)$$

για καλή πρόσφυση μεταξύ των δυο φάσεων και

$$\sigma_{cu} = 0,83\sigma_{th}aU_f + k\sigma_{mu}(1 - U_f) \quad (2.23)$$

στην περίπτωση μη προσφύσεως μεταξύ των δυο φάσεων. Τα σ_a και σ_{mu} είναι η αντοχή του ενδιάμεσου επιφανειακού δεσμού και η αντοχή της μήτρας αντιστοίχως, τ_m είναι η αντοχή σε διάτμηση της μήτρας, K είναι ο συντελεστής συγκεντρώσεως τάσεων, k είναι μια παράμετρος η οποία εξαρτάται από το μέγεθος των κόκκων, και σ_{th}

είναι η θλιπτική θερμική τάση η οποία ενεργεί επάνω στο σύνορο του κόκκου και α είναι ο συντελεστής τριβής.

Υπήρξαν προσπάθειες για τον συσχετισμό της αντοχής των σύνθετων υλικών ενισχυμένων με κόκκους με την διάμετρο d των εγκλεισμάτων. Για παράδειγμα : ο Hojo [30,31] έχει βρει ότι η αντοχή εποξειδικής ρητίνης με εγκλείσματα πυριτίου ελαττώνεται όταν το μέγεθος κόκκου αυξάνει ακολουθώντας μια σχέση της μορφής:

$$\sigma_{cu} = \sigma_{mu} k d^{-1/2} \quad (2.24)$$

όπου k είναι σταθερά και d είναι η μέση διάμετρος κόκκου.

Ο Schraeger [31] πρότεινε κάποιο μοντέλο που περιγράφεται από εξίσωση διαφορετικής μορφής από τις προηγούμενες :

$$\sigma_{cu} = \sigma_{mu} \exp(-rU_f) \quad (2.25)$$

με $r=2.66$ που βρέθηκε πειραματικά.

Το μειονέκτημα αυτού του μοντέλου είναι ότι είναι ακριβώς για περιορισμένη περιοχή εγκλεισμάτων. Η εξίσωση (2.26) είναι αντίστοιχη με εκείνη που προτάθηκε από τον Passmore [32] για την περίπτωση των πορωδών συστημάτων :

$$\sigma_{cu} = \sigma_{fo} \exp(-\alpha P) \quad (2.26)$$

όπου σ_{fo} είναι η αντοχή της μητρας χωρίς πορους, α μια σταθερά και P η κατ' όγκο περιεκτικότητα σε πόρους.

2.2.1.4 Περιορισμοί των θεωρητικών μοντέλων σχετικά με την αντοχή των σύνθετων υλικών

Το μέγεθος των κόκκων επηρεάζει πολύ την αντοχή σε εφελκυσμό των συστημάτων. Γενικά η αντοχή σε εφελκυσμό αυξάνει με την ελάττωση του μεγέθους. Η αύξηση της ενδιάμεσης επιφάνειας μεταξύ δυο φάσεων παρέχει έναν πολύ αποτελεσματικό δεσμό στην επιφάνεια μεταξύ των δυο φάσεων και θεωρείται ότι είναι πολύ σημαντικός παράγων. Το μέγεθος κόκκου είναι επίσης σχετικό με την εξάρτηση από το μέγεθος της ατέλειας του υλικού.

Ο Goodier [33] έχει αποδείξει ότι το τασικό πεδίο κοντά σ' ένα κόκκο, είναι ανεξάρτητο από το μέγεθος του κόκκου. Όμως ο όγκος του πολυμερούς που υφίσταται συγκέντρωση τάσεων, αυξήθηκε με την αύξηση του μεγέθους του κόκκου.

Η επίδραση από την διεπιφανειακή (λεπτή επιφάνεια μεταξύ δυο φάσεων) πρόσφυση επί της αντοχής μπορεί να δικαιολογηθεί με όμοιο τρόπο εφόσον ένας αδύναμος δεσμός μεταξύ εγκλεισμάτων και μήτρας θα δράσει ως μια υπάρχουσα ατέλεια που θα παράγει μια κοιλότητα ίση με το μέγεθος της.

Η μορφή (σχήμα) εγκλείσματος αναμένεται να παίζει σημαντικό ρόλο στον προσδιορισμό της αντοχής του συστήματος εγκλεισμάτων. Όταν έχουμε εγκλείσματα τα οποία δεν έχουν κανονική μορφή, η εξασθένιση της αντοχής του συστήματος εγκλεισμάτων οφείλεται σε μεγάλη συγκέντρωση τάσεων που συζευγνύεται με επίδραση μεγέθους. Σε στρογγυλευμένες ρωγμές και εγκλείσματα, η συγκέντρωση τάσης είναι ολιγότερα σημαντική παρά σε εγκλείσματα με οξείες (κοπτερές) γωνίες.

Η προαναφερθείσα αναφορά αποδεικνύει καθαρά ότι αυτά τα υπάρχοντα μοντέλα για την πρόβλεψη της αντοχής θέτουν ένα άνω όριο στην αντοχή ενός συστήματος εγκλεισμάτων.

Όταν γίνεται πρόβλεψη της αντοχής ενός υλικού με έγκλεισμα με την χρησιμοποίηση του νόμου των δυνάμεων (power law) η εκλογή των καταλλήλων σταθερών επηρεάζεται από το σχήμα των κόκκων και την διάταξη τους μέσα στο γεωμετρικό μοντέλο. Επιπλέον η συγκέντρωση τάσεων θα χαμηλώσει αυτές τις τιμές κατά ακαθόριστη ποσότητα.

Από την άλλη, στις αναλύσεις των Leidner και Woodhams, οι θερμικές τάσεις (σ_{th}) και της αντοχής του δεσμού μήτρας – κόκκου είναι δύσκολο να μετρηθούν για πραγματικά σύνθετα υλικά. Στις πολύ χαμηλές περιεκτικότητες κατ' όγκο U_f μπορούν να γίνουν εκτιμήσεις για τις θερμικές τάσεις, αλλά σε μεγαλύτερες περιεκτικότητες κατ' όγκο U_f οι υπολογισμοί περιπλέκονται από την παρουσία γειτονικών κόκκων.

2.2.2 Παραμόρφωση θραύσης των κοκκωδών σύνθετων υλικών

Παρακάτω αναφέρονται τα διάφορα θεωρητικά μοντέλα που έχουν προβλεφθεί από τους διάφορους ερευνητές για την παραμόρφωση θραύσης.

Ο Smith πρότεινε τον παρακάτω τύπο με ε_c και ε_m την παραμόρφωση θραύσης του συνθέτου και της μήτρας αντιστοίχα :

$$\varepsilon_c = \varepsilon_m(1 - 1.106U_f^{1/3}) \quad (2.27)$$

Ο Bueche [14,15] πρότεινε μια αντίστοιχη εξίσωση χρησιμοποιώντας ένα μοντέλο από κυβικά σωματίδια σε κυβική διάταξη :

$$\varepsilon_c = \varepsilon_m(1 - U_f^{1/3}) \quad (2.28)$$

Ο Nielsen [22,24] πρότεινε την εξίσωση που έχει την ίδια μορφή με την παραπάνω εξίσωση :

$$\varepsilon_c = \varepsilon_m(1 - U_f^{1/3}) \quad (2.29)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις στηρίζονται περισσότερο στο πείραμα και λιγότερο στη θεωρία και συνοψίζουν τη συμπεριφορά τάσεων – παραμορφώσεων στα σύνθετα υλικά με κοκκώδες έγκλεισμα. Περιγράφουν την επίδραση διαφόρων παραγόντων όπως της κατ' όγκο περιεκτικότητας του εγκλείσματος, των συσσωματωμάτων του μεγέθους των σωματιδίων, του μέτρου πρόσφυσης μεταξύ μήτρας και εγκλείσματος στην μηχανική συμπεριφορά των συνθέτων υλικών.

2.2.3 Ο μηχανισμός της ενισχυτικής δράσης των εγκλεισμάτων στα πολυμερή

Η ενσωμάτωση μέσα στη μήτρα του πολυμερούς πολύ λεπτών σωματιδίων ή ινωδών υλικών, ανόργανης ή οργανικής φύσης συνοδεύεται με αλλαγή των φυσικοχημικών, μηχανικών, θερμικών, ηλεκτρικών και άλλων ιδιοτήτων του υλικού, αν και η βασικότερη επιδίωξη μας είναι η βελτίωση των φυσικοχημικών ιδιοτήτων.

Ανάλογα με την αποτελεσματικότητά τους τα εγκλείσματα διακρίνονται σε ενεργά (είναι εκείνα που προκαλούν ενίσχυση) και σε αδρανή (είναι εκείνα που δεν βελτιώνουν τις ιδιότητες του υλικού, αλλά προκαλούν μόνο αλλαγή χρωματισμού και μείωση του κόστους).

Αναφορικά με τα ενεργά εγκλείσματα μπορούμε να διακρίνουμε τη δραστηριότητά τους σε δομική, κινητική και θερμοδυναμική. Με τον όρο δομική δραστηριότητα εννοείται η ικανότητα του εγκλείσματος να επηρεάζει τη δομή του πολυμερούς. Έτσι με την ενσωμάτωση των εγκλεισμάτων στη μήτρα παρατηρούνται αλλαγές στο μέγεθος, στο σχήμα και στην κατανομή των δομικών μονάδων.

Με τον όρο κινητική δραστηριότητα εννοείται η ικανότητα του εγκλείσματος να επηρεάζει διάφορες θερμοδυναμικές παραμέτρους του σύνθετου υλικού.

Η ενίσχυση του υλικού λόγω των εγκλεισμάτων μπορεί να συσχετισθεί με την ενέργεια W θραύσης του πολυμερούς. Μετρείται από το εμβαδόν της επιφάνειας κάτω από την καμπύλη τάσεων – παραμορφώσεων, όπου L_b το μήκος του δοκιμίου στη θραύση και L_o το αρχικό μήκος και σ η επιβαλλόμενη τάση.

$$W = \int_{L_o}^{L_b} \sigma dL \quad (2.30)$$

Η αύξηση της ενέργειας θραύσης ανά μονάδα όγκου με την παρουσία εγκλεισμάτων μπορεί να θεωρηθεί σαν βασικό χαρακτηριστικό της ενισχυτικής δράσης των εγκλεισμάτων στα πολυμερή στην ελαστική κατάσταση.

Έτσι τα εγκλείσματα που αυξάνουν την ενέργεια θραύσης θεωρούνται ενεργά, ενώ εκείνα που δεν την αυξάνουν θεωρούνται αδρανή. Το μέγεθος της αύξησης ή της ελάττωσης εξαρτάται από την φύση του εγκλείσματος.

Ένας άλλος τρόπος έλεγχου της ενισχυτικής δράσης των εγκλεισμάτων είναι η επίδραση τους στην αντοχή των σύνθετων υλικών. Αυτή η αντοχή επηρεάζεται από πολλούς παράγοντες λόγω της αλληλεπίδρασης μήτρας και εγκλείσματος. Ένας σημαντικός παράγοντας που επηρεάζει τις φυσικοχημικές και μηχανικές ιδιότητες του συνθέτου υλικού είναι η διαφοροποιούμενη δομή της ενδιάμεσης φάσης.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η μηχανική αντοχή του συνθέτου υλικού αυξάνει ανάλογα με την περιεκτικότητα και τη λεπτότητα του εγκλείσματος. Το θεωρητικό όριο της περιεκτικότητας σε έγκλεισμα καθορίζεται από το ποσό του εγκλείσματος που κάνει πιθανή την ύπαρξη κάποιας ενδιάμεσης φάσης ή ενδιάμεσου στρώματος μεταξύ των σωματιδίων.

Έτσι η ενίσχυση των πολυμερών με την προσθήκη λεπτών κοκκωδών σωματιδίων οφείλεται στο σχηματισμό ενός συνεχούς ενισχυτικού σκελετού, σαν το αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης των σωματιδίων μεταξύ τους.

Έτσι η ενίσχυση των πολυμερών με την προσθήκη λεπτών κοκκωδών σωματιδίων οφείλεται στο σχηματισμό ενός συνεχούς ενισχυτικού

σκελετού, σαν το αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης των σωματιδίων μεταξύ τους.

Παράλληλα η αντοχή του συνθέτου υλικού αυξάνει με την περιεκτικότητα σε έγκλεισμα, με την βέλτιστη (optimum) περιεκτικότητα όπου προκαλείται κορεσμός των κέντρων πρόσφυσης μακρομορίων επάνω στην επιφάνεια του εγκλείσματος.

2.2.4 Ενέργεια θραύσης - στερρότητα

Οι δυο θεμελιώδεις τρόποι με τους οποίους τα υλικά αντιδρούν στην επιβολή εξωτερικών δυνάμεων είναι η αλλαγή του όγκου τους και η αλλαγή του σχήματός τους. Η αλλαγή όγκου ενός στοιχειώδους κύβου μπορεί να γίνει με ομοιόθετη αλλαγή όλων των γραμμικών του διαστάσεων και προφανώς θα πρέπει να εξαρτάται μόνον από τις ορθές συνιστώσες των τάσεων (δηλαδή των παραμορφώσεων). Στην περίπτωση αυτή ο στοιχειώδης κύβος διατηρεί το σχήμα του, αλλά με ίνες διαστάσεις των ακμών του.

Η αλλαγή σχήματος μπορεί να επιτευχθεί με δυο τρόπους:

α. Με αλλαγή των γωνιών του κύβου χωρίς αισθητή αλλαγή των γραμμικών του διαστάσεων (π.χ. περίπτωση καθαρής διατμήσεως).

β. Με μη ομοιόθετη αλλαγή των γραμμικών διαστάσεων του στοιχειώδους κύβου οπότε αυτός μετατρέπεται σε στοιχειώδες ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο. Αυτό βεβαίως σημαίνει ότι μερικές γωνίες, θα αλλάξουν τιμή, όπως εκείνες των διαγωνίων του. Επομένως, η αλλαγή σχήματος επιτυγχάνεται και από ορθές και από διατμητικές τάσεις και άρα παραμορφώσεις.

Για τις αλλαγές αυτές απαιτείται η καταβολή εξωτερικού έργου που προσφέρεται από τη μηχανή επιβολής των φορτίων. Το έργο αυτό αποθηκεύεται στο δοκίμιο ως ενέργεια παραμορφώσεων η οποία αποτελείται από δυο προσθετέους, έναν που αντιστοιχεί στην αλλαγή όγκου και ονομάζεται ενέργεια μεταβολής όγκου και έναν που αντιστοιχεί σε αλλαγές σχήματος ή στρέβλωση του υλικού και καλείται στροφική ενέργεια. Προφανώς το άθροισμα των δυο αυτών όρων

παριστά το σύνολο της ενέργειας παραμορφώσεων που αποθηκεύθηκε στο υλικό και ισούται με το έργο των εξωτερικών δυνάμεων που δαπανήθηκε για τη φόρτιση του δοκιμίου.

Το εμβαδόν του χωρίου ανάμεσα στην καμπύλη $\sigma - \varepsilon$ και τον άξονα των παραμορφώσεων παριστάνει τη συνολική πυκνότητα της ενέργειας των παραμορφώσεων που έχει αποθηκευθεί στο υλικό ή καταναλωθεί από αυτό από την αρχή της φορτίσεως μέχρι τη στιγμή που η τάση είναι σ και η αντίστοιχη παραμόρφωση ε . Όταν το ζεύγος (σ, ε) αντιστοιχεί στο σημείο θραύσεως θ του υλικού τότε η συνολική πυκνότητα της ενέργειας παραμορφώσεων καλείται στερρότητα (toughness) του υλικού και αποτελεί μέτρο της απαιτούμενης από το υλικό ενέργειας για τη θραύση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΦΑΣΗ ΣΥΝΘΕΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

4.1 Προσδιορισμός της ειδικής θερμότητας και της θερμοκρασίας μεταβάσεως στην υαλώδη κατάσταση των συνθέτων υλικών ενισχυμένων με κόκκους μετάλλου. Εκτίμηση της ενδιάμεσης φάσης.

3.1.1 Εισαγωγή

Μεταξύ των σπουδαιότερων παραγόντων οι οποίοι προσδιορίζουν την βισκοελαστική συμπεριφορά των συνθέτων υλικών από πολυμερή είναι η προσρόφηση πολυμερικών μακρομορίων εντός των κόκκων των εγκλεισμάτων, όπως επίσης και η πρόσφυση μεταξύ μήτρας και εγκλεισμάτων. Η προσρόφηση των πολυμερικών μορίων εντός των κόκκων, είναι η κυρία αιτία για την δημιουργία διαφορετικών διαμορφώσεων των μακρομορίων στα περίχωρα των κόκκων. Η αλλαγή της μορφής των μακρομορίων προσδιορίζει την περιοχή της ενδιάμεσης φάσης, η οποία έχει διαφορετική δομή και ιδιότητες από την μήτρα. Έτσι η παρουσία εγκλεισμάτων μέσα στην πολυμερική μήτρα καταλήγει σε μια ατέλεια του πολυμερικού δικτύου.

Είναι γνωστό [34-41] ότι οι ιδιότητες κατά την χαλάρωση των πολυμερικών συνθέτων υλικών επηρεάζονται πολύ από την ύπαρξη ενδιάμεσης φάσης. Από αυτή την άποψη είναι πολύ σημαντική η μελέτη της θερμικής συμπεριφοράς αυτών των συνθέτων και η διαλογή πληροφοριών οι οποίες αφορούν την δομή και τις ιδιότητες της ενδιάμεσης φάσης καθώς επίσης και την επίδρασή της στην βισκοελαστική συμπεριφορά του συνθέτου συστήματος.

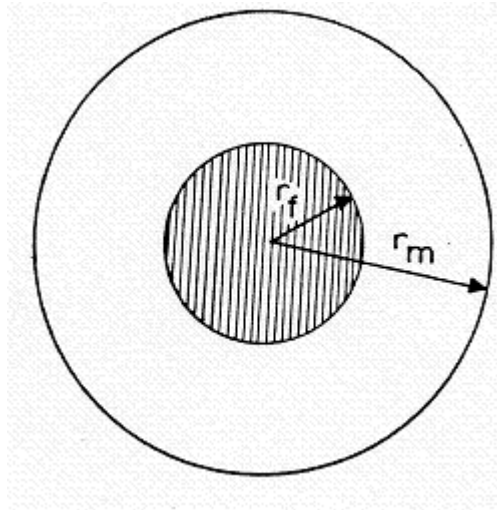
Όμως, η συμπεριφορά και οι ιδιότητες της ενδιάμεσης φάσης εξαρτώνται, μεταξύ άλλων, από την πειραματική μέθοδο η οποία χρησιμοποιείται στις δοκιμές και αυτό διότι κάθε μία από τις πειραματικές μεθόδους χαρακτηρίζεται από τους δικούς της ιδιαίτερους περιορισμούς. Έτσι, κάθε μέθοδος τείνει να επιδείξει έναν ιδιαίτερο τύπο μοριακών κινήσεων ως συνέπεια των παραπάνω διαφορών τα αποτελέσματα τα οποία λαμβάνονται από τις διαφορετικές μεθόδους είναι συχνά διαφορετικά, όταν συγκρίνονται μεταξύ τους. Το αποτέλεσμα αυτών των διαφορών είναι οι διαφορετικές τιμές για την θερμοκρασία μεταβάσεως στην υαλώδη κατάσταση, T_g , οι οποίες λαμβάνονται από διαφορετικές πειραματικές μεθόδους, όπως η θερμιδομετρία, διαστολομετρία, δυναμικές μετρήσεις κ.λ.π. [42,43].

Επίσης, υπάρχουν διαφορές όσον αφορά την επίδραση της περιεκτικότητας των εγκλεισμάτων, U_f , στην θερμοκρασία T_g [44]. Αρκετοί ερευνητές βρήκαν ότι όταν αυξάνεται η περιεκτικότητα των κόκκων, αυξάνεται και η T_g , και ότι η σχέση αυτή είναι γραμμική. Άλλοι όμως βρήκαν ότι η T_g δεν επηρεάζεται σημαντικά από την περιεκτικότητα [45,46,47]. Μετρήσεις διαστολομετρίας οι οποίες έγιναν [48] σε ρητίνη ενισχυμένη με κόκκους μετάλλου έδειξαν ότι οι τιμές της T_g εξαρτώνται πολύ από την περιεκτικότητα του εγκλείσματος, και σε πολλές περιπτώσεις η T_g ελαττώνεται όταν αυξάνεται η περιεκτικότητα.

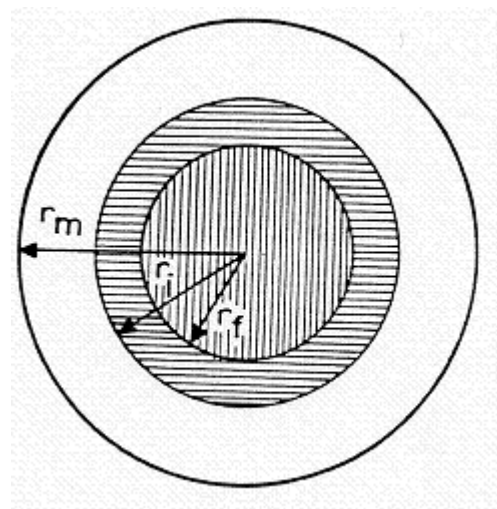
Στην περίπτωση μετρήσεων θερμιδομετρίας ή διαστολομετρίας μια παράμετρος η οποία επιδρά στη θέση των μεταβατικών θερμοκρασιών, είναι ο ρυθμός θέρμανσης. Έχει παρατηρηθεί [49,50,51] ότι, σε μετρήσεις D.S.C, η εξάρτηση από τον ρυθμό θέρμανσης, H_r , είναι τέτοια ώστε διαφορές της τάξεως 15°C να μπορούν να παρατηρηθούν στις μεταβατικές θερμοκρασίες του πολυμερούς.

Στο Εργαστήριο Αντοχής Υλικών έχουν γίνει συστηματικές μετρήσεις θερμοχωρητικότητας επί δοκιμίων εποξειδικής ρητίνης και κόκκων σιδήρου [52]. Η επίδραση της περιεκτικότητας των εγκλεισμάτων και της διαμέτρου αυτών στην θερμική συμπεριφορά των δοκιμίων του συνθέτου υλικού έχει μελετηθεί εκτενώς. Έχει διερευνηθεί η επίδραση του ρυθμού θέρμανσης επί της T_g και έχει υπολογισθεί το πάχος και ο όγκος της ενδιάμεσης φάσης με βάση αυτές τις θερμικές μετρήσεις. Επίσης, έχουν γίνει ορισμένα πειράματα μικρότερης έκτασης (μία διάμετρος κόκκων) με δοκίμια εποξειδικής ρητίνης και κόκκους αλουμινίου για την διερεύνηση της επιδράσης της περιεκτικότητας, ρυθμού θέρμανσης και τον προσδιορισμό του πάχους της ενδιάμεσης φάσης.

Ένα μοντέλο με τρεις φάσεις, έγκλεισμα, μήτρα και ενδιάμεση φάση το οποίο προκύπτει από το διφασικό μοντέλο (Σχήμα 3.1), με την ενδιάμεση φάση να έχει μεταβαλλόμενες ιδιότητες (μέτρο ελαστικότητας, λόγος Poisson, συντελεστής θερμικής διαστολής), έχει χρησιμοποιηθεί για τον θεωρητικό προσδιορισμό του μέτρου ελαστικότητας και συντελεστή θερμικής διαστολής του συνθέτου υλικού, με την εφαρμογή της θεωρίας ελαστικότητας (Σχήμα 3.2). Οι θεωρητικοί τύποι, οι οποίοι προέκυψαν με την εφαρμογή αυτού του μοντέλου, δύνανται να συγκριθούν με άλλους θεωρητικούς τύπους της βιβλιογραφίας καθώς επίσης και με πειραματικά αποτελέσματα.



Σχήμα 3.1



Σχήμα 3.2

3.1.2 Υλικά και πειραματική διαδικασία

Τα υλικά των οποίων τα στοιχεία έχουν χρησιμοποιηθεί σ' αυτήν την μελέτη είναι σύνθετα υλικά τα οποία κατασκευάσθηκαν στο Εργαστήριο Αντοχής Υλικών του Ε.Μ.Π. Η μήτρα των συνθέτων υλικών, ήταν σε όλες τις περιπτώσεις εποξειδική ρητίνη του τύπου DGEBA (Diglycidyl Ether of Bisphenol A) με ισοδύναμο 185-192, με μοριακό βάρος μεταξύ 370 και 384, και με ιξώδες 15000cP στους 25°C, πολυμεριζομένη εν ψυχρώ με 8% τριεθυλενική τετραμίνη. Εξ' άλλου, χρησιμοποιήθηκαν κόκκοι σκόνης σιδήρου ως εξής (Πίνακας 3.1):

Μέγεθος κόκκου (<i>mm</i>)	Ειδικός όγκος (<i>cm³/100gr</i>)	Φαινόμενη πυκνότητα (<i>gr/cm³</i>)
0,15	38-41	2,60-2,40

Πίνακας 3.1

Οι ιδιότητες των υλικών του συνθέτου υλικού μας είναι όπως φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα 3.2.

Ιδιότητες της μήτρας και των εγκλεισμάτων

Ιδιότητες	Σύμβολα	Μονάδες	Σίδηρος	Ρητίνη
Σταθερές του Lamé	λ μ M	N/m^2 N/m^2	$11,20 \times 10^{10}$ $8,10 \times 10^{10}$	$3,34 \times 10^9$ $1,30 \times 10^9$
Μέτρο Ελαστικότητας	E	N/m^2	$21,00 \times 10^{10}$	$3,53 \times 10^9$
Μέτρο Διογκώσεως	K	N/m^2	$16,70 \times 10^{10}$	$4,21 \times 10^9$
Λόγος Poisson	ν	—	0,29	0,36
Πυκνότητα	ρ	gr/cm^3	7,80	1,19
Συντελεστής θερμικής διαστολής	a	C^{-1}	$15,00 \times 10^{-6}$	$65,26 \times 10^{-6}$

Πίνακας 3.2

Οι μηχανικές ιδιότητες της μήτρας E και ν έχουν μετρηθεί κατά την διάρκεια πειράματος ερπυσμού στους 20°C και σε χρόνο 15sec από την αρχή του πειράματος. Πρέπει να διευκρινισθεί ότι με a συμβολίζουμε τον συντελεστή θερμικής διαστολής για θερμοκρασίες κάτω της υαλώδους θερμοκρασίας T_g .

Όσον αφορά την παρασκευή των δοκιμίων, θερμαίνουμε το προπολυμερές στους 30°C περίπου για να ελαττωθεί η εσωτερική

τριβή του και στην συνέχεια προσθέτουμε τις κατάλληλες ποσότητες αμίνης και μετάλλου. Ανακατώνουμε το μίγμα, και στην συνέχεια το τοποθετούμε σε θάλαμο κενού, έτσι ώστε να ελευθερωθούν όλες οι φυσαλίδες αέρος τις οποίες περιέχει το μίγμα.

Στην συνέχεια γίνεται απόχυση του μίγματος σ' ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο καλούπι από plexiglass, διαστάσεων $250 \times 250 \times 50 \text{ mm}$, το οποίο σφραγίσθηκε με ένα σκέπασμα από plexiglass, ούτως ώστε να είναι δυνατή η εκ νέου ανάδευση του μείγματος για να έχουμε τελικά ένα όσο το δυνατόν ομογενές προϊόν. Το μίγμα έμεινε μέσα στο καλούπι και σε θερμοκρασία περιβάλλοντος επί 24 ώρες. Στην συνέχεια, το στερεό πλέον σύνθετο υλικό, υποβλήθηκε σε θερμική κατεργασία διάρκειας 7 ημερών ως εξής:

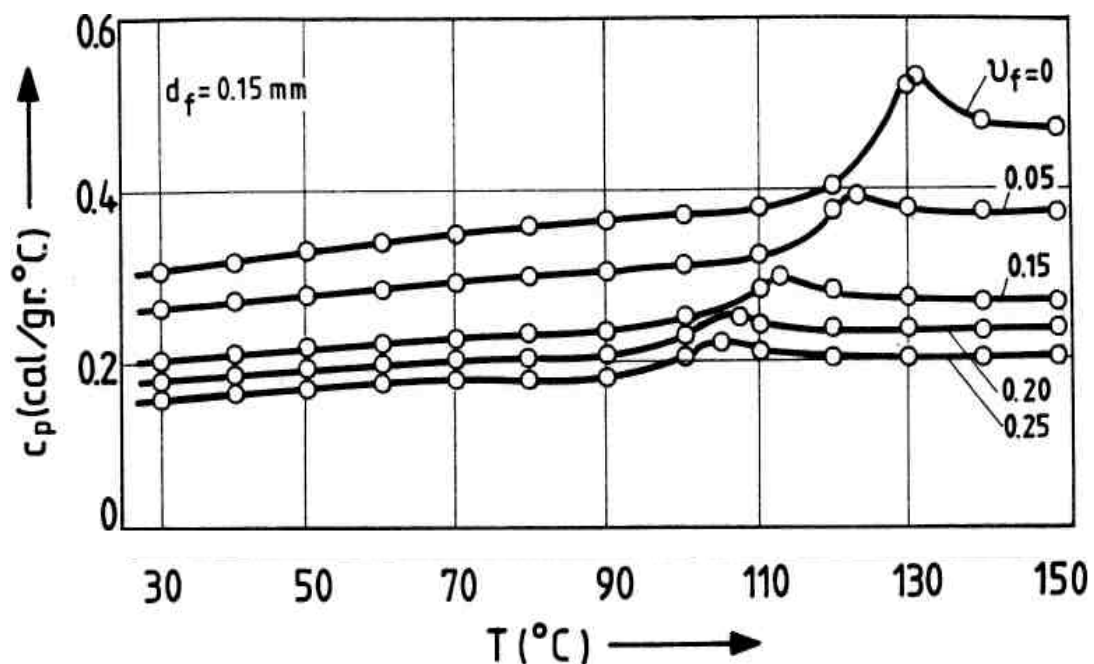
Εισήχθει σε φούρνο, προγραμματισμένο, έτσι ώστε η θερμοκρασία να αυξάνει κατά 5° C/h , στη συνέχεια να παραμείνει σταθερά στους 100° C και τέλος να ελαττώνεται κατά 1° C/h έως την θερμοκρασία του περιβάλλοντος.

Με αυτόν τον τρόπο, επιτυγχάνεται πλήρης πολυμερισμός της μήτρας, σ' ένα διάστημα που το σύνθετο υλικό να μη παρουσιάζει έντονη βισκοελαστική συμπεριφορά.

Δοκίμια με διάμετρο 4mm και πάχους 1-1,50mm κόπηκαν από κάθε υλικό με διαφορετική περιεκτικότητα και διάμετρο κόκκων του μετάλλου. Οι μετρήσεις έγιναν με την βοήθεια ενός θερμικού αναλυτή (DSC) Du-Pont 900. Η τοποθέτηση των δοκιμίων έγινε όταν η συσκευή ήταν σε θερμοκρασία περιβάλλοντος και μετά η αύξηση της θερμοκρασίας έγινε με σταθερό ρυθμό. Για να μελετηθεί η επίδραση του ρυθμού θέρμανσης χρησιμοποιήθηκαν τρεις διαφορετικοί ρυθμοί θέρμανσης ($5, 10$ και 205° C/min). Η περιεκτικότητα των εγκλεισμάτων σε σίδηρο μεταβάλλεται από 5% έως 25%.

3.1.3 Προσδιορισμός του πάχους της ενδιάμεσης φάσης

Η μεταβολή της ειδικής θερμότητας (C_p) με την θερμοκρασία για κόκκους σιδήρου με $d_f=150\mu\text{m}$, εξετάζεται για πέντε περιεκτικότητες ($U_f=0, 0,05, 0,10, 0,15, 0,20, 0,25$) με ρυθμό θέρμανσης $H_r=5^\circ\text{C}/\text{min}$. Από το (Σχήμα 3.3) παρατηρούμε όχι μόνο μια μεταβολή στην θέση της μεταβατικής περιοχής, η οποία εκδηλώνεται με μια απότομη μεταβολή στην ειδική θερμότητα, αλλά επίσης και μια μείωση της ΔC_p στην υαλώδη μεταβατική περιοχή όταν αυξάνεται η περιεκτικότητα του εγκλείσματος.



Σχήμα 3.3

Όταν η περιεκτικότητα των εγκλεισμάτων αυξάνεται, το ποσοστό των μακρομορίων τα οποία χαρακτηρίζονται από μειωμένη κινητικότητα επίσης αυξάνεται, έτσι ώστε ο αριθμός των μακρομορίων, τα οποία συμμετέχουν στην διαδικασία της υαλώδους μεταβατικής θερμοκρασίας T_g ελαττώνεται. Αυτό είναι ισοδύναμο με μια αύξηση του όγκου της ενδιάμεσης φάσης και οδηγεί στο συμπέρασμα, ότι δηλαδή υπάρχει μια σχέση μεταξύ της ΔC_p και του όγκου της ενδιάμεσης φάσης [53], η οποία εκφράζεται ως εξής:

$$\lambda = 1 - \frac{\Delta C_p^f}{\Delta C_p^0} \quad (3.1)$$

όπου ΔC_p^f και ΔC_p^0 είναι τα άλματα (απότομη μεταβολή) της ειδικής θερμότητας στην μεταβατική περιοχή για το ενισχυμένο και μη ενισχυμένο πολυμερές αντιστοίχως, ενώ λ είναι μία σταθερά η οποία πολλαπλασιάζεται με την περιεκτικότητα του εγκλείσματος U_f ώστε να ληφθεί υπόψη η συνεισφορά του όγκου της ενδιάμεσης φάσης στην θερμομηχανική συμπεριφορά του συνθέτου υλικού.

Εάν r_f , r_i , r_m συμβολίζουν τις εξωτερικές ακτίνες του εγκλείσματος, της ενδιάμεσης φάσης και της μήτρας αντιστοίχως, τότε οι όγκοι των τριών φάσεων δίνονται ως εξής:

$$U_f = \frac{r_f^3}{r_m^3} \quad (3.2)$$

$$U_i = \frac{r_i^3 - r_f^3}{r_m^3} \quad (3.3)$$

$$U_m = \frac{r_m^3 - r_i^3}{r_m^3} \quad (3.4)$$

$$\text{με } U_f + U_i + U_m = 1$$

Για να προσδιορισθεί η ακτίνα του σφαιρικού τμήματος το οποίο αντιστοιχεί στην ενδιάμεση φάση εκφράζουμε αυτό ως $r_i = r_f + \Delta r_i$, όπου Δr_i το πάχος της ενδιάμεσης φάσης και χρησιμοποιούμε την σχέση η οποία δίνεται από τον Lipatov.

$$\frac{(r_f + \Delta r_i)^3}{r_f^3} - 1 = \frac{\lambda U_f}{1 - U_f} \quad (3.5)$$

3.1.4 Η επίδραση της ενδιάμεσης φάσης και του ρυθμού θέρμανσης επί της υαλώδους μεταβατικής θερμοκρασίας (ή θερμοκρασία υαλώδους μεταπτώσεως) T_g .

Όταν ένα πολυμερές θερμαίνεται ή ψύχεται, υφίσταται ορισμένα είδη μεταβατικών καταστάσεων οι οποίες δημιουργούν μεταβολές στις φυσικές ιδιότητες του. Μία από τις σημαντικότερες είναι η υαλώδης μεταβατική θερμοκρασία ή η θερμοκρασία υαλώδους μεταπτώσεως ενός αμόρφου πολυμερούς το οποίο μεταβάλλεται από ένα στερεό ως ύαλο υλικό σε μαλακό υλικό όταν αυτό θερμανθεί.

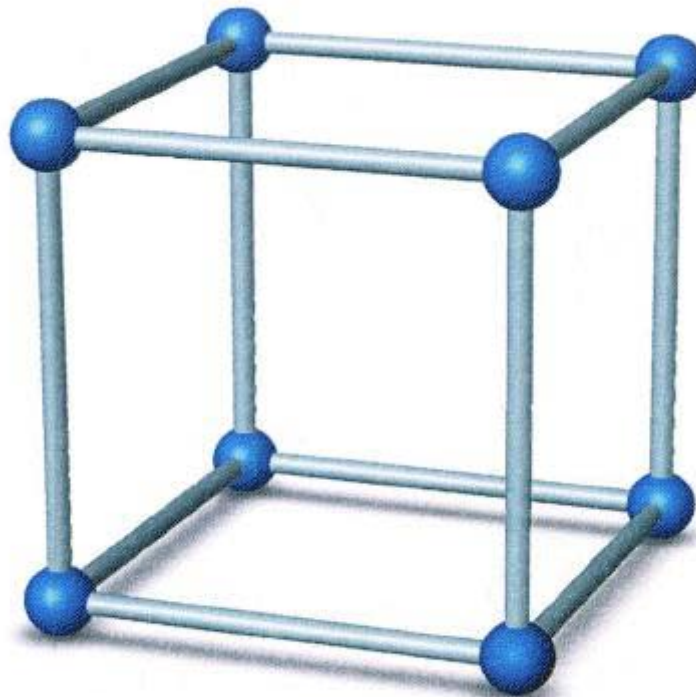
U_f	$\Delta r_i (\mu m)$	U_i
0,05	0,30	0,0013
0,10	1,06	0,0040
0,15	2,12	0,0130
0,20	3,53	0,0280
0,25	5,00	0,0500

Πίνακας 3.3

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΤΩΝ ΕΓΚΛΕΙΣΜΑΤΩΝ

4.1 ΤΡΙΦΑΣΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΚΥΒΙΚΟ 1

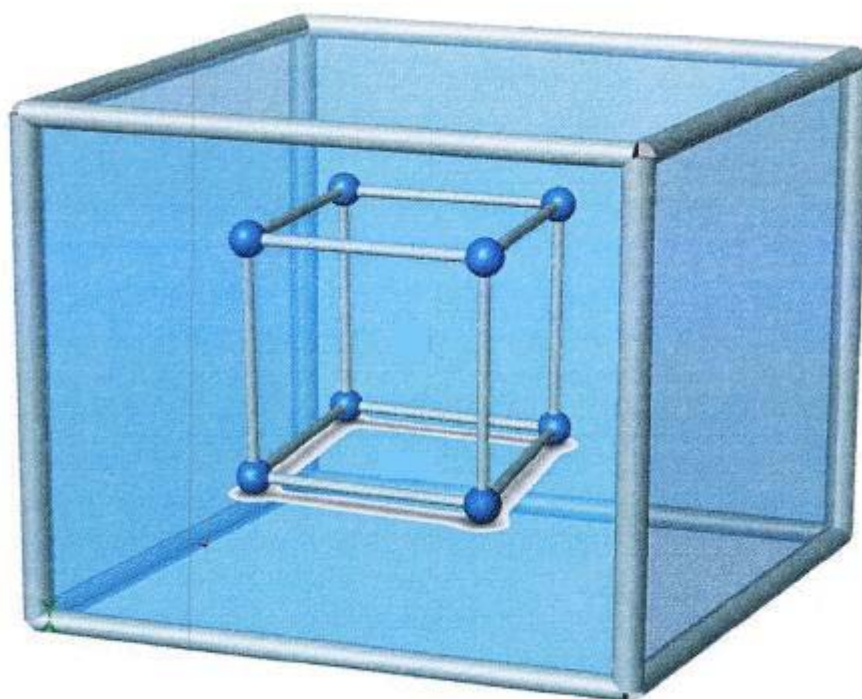
Πρώτο βήμα είναι η θεώρηση του τρόπου με τον οποίο κατανέμονται οι κόκκοι (σφαιρικά εγκλείσματα) μέσα στη μάζα της μήτρας. Θεωρούμε λοιπόν ότι **8 σφαιρικά εγκλείσματα καταλαμβάνουν τις κορυφές ενός Κύβου** ακμής l . Το δομικό αυτό μοντέλο επαναλαμβάνεται με πλήρη συμμετρία στο χώρο. Το Τμήμα μεταξύ των σφαιρών αντιπροσωπεύει τη μήτρα του σύνθετου υλικού (βλέπε Σχήμα 4.1).



Σχήμα 4.1

Στη συνέχεια για απλούστευση της μελέτης μας, ανάγουμε το παραπάνω κυβικό μοντέλο σε ένα "ισοδύναμο" σφαιρικό για να εκμεταλλευθούμε την σφαιρική συμμετρία και τις απλοποιήσεις που θα προκύψουν από αυτή.

Ο Κύβος αυτός ακμής l , ο οποίος περιγράψαμε παραπάνω, θεωρούμε λοιπόν ότι περικλείεται σε έναν δεύτερο Κύβο ακμής $2l$, δημιουργώντας έτσι το δομικό "κύτταρο" του σώματος το οποίο επαναλαμβάνεται συμμετρικά καθ' όλη τη μάζα του σύνθετου υλικού (βλέπε Σχήμα 4.2).



Σχήμα 4.2

Τον κύβο ακμής $2l$ θα τον ανάγουμε σε ένα τριφασικό μοντέλο αποτελούμενο από τρεις ομόκεντρες σφαίρες ακτίνας a , b , και c αντίστοιχα ($a < b < c$) (Σχήμα 4.3).



Σχήμα 4.3

Σε αυτό το μοντέλο, η πρώτη και η τρίτη φάση, που τις αποτελούν ο σφαιρικός φλοιός με ακτίνα a και ο σφαιρικός φλοιός με εσωτερική ακτίνα b και εξωτερική c , αντιπροσωπεύουν το υλικό της μήτρας. Ο σφαιρικός φλοιός με εσωτερική ακτίνα a και εξωτερική b (δεύτερη φάση) αντιπροσωπεύουν το σύνολο των σφαιρών, δηλαδή το υλικό ενίσχυσης.

Ο όγκος του κύβου ακμής $2l$ θα είναι:

$$V_{2l} = (2l)^3 = 8l^3$$

Για ένα οποιοδήποτε σύνθετο υλικό γνωρίζουμε την κατ' όγκο περιεκτικότητα U_f των σφαιρών, όπως και την ακτίνα τους r_f . Για τον κύβο ακμής $2l$ ή U_f θα προκύπτει ως ο λόγος του όγκου των 8 σφαιρών που βρίσκονται στις κορυφές του κύβου προς τον όγκο του Κύβου ακμής $2l$, δηλαδή:

$$U_f = \frac{8 \frac{4}{3} \pi r_f^3}{(2l)^3} \Rightarrow l = r_f \sqrt[3]{\frac{8 \frac{4}{3} \pi}{8U_f}} = r_f \sqrt[3]{\frac{4\pi}{3U_f}} \quad (4.1)$$

Ο όγκος του Κύβου ακμής $2l$, στο κυβικό μοντέλο αντιπροσωπεύεται από τον όγκο της σφαίρας ακτίνας c , ισχύει λοιπόν:

$$8l^3 = \frac{4}{3} \pi c^3 \quad \Rightarrow \quad c = l \sqrt[3]{\frac{8 \cdot 3}{4\pi}} = l \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}$$

και από την (4.1):

$$c = r_f \sqrt[3]{\frac{4\pi}{3U_f}} \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}} = r_f \sqrt[3]{\frac{8}{U_f}} \quad (4.2)$$

Θεωρούμε τον κύβο ακμής l . Η απόσταση από το κέντρο βάρους του κύβου έως μία εκ των κορυφών του, όπως προκύπτει από τη γεωμετρία, έχει μήκος

$$w = l \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Αυτή η απόσταση, το w , αντιπροσωπεύει την απόσταση του κέντρου βάρους του κύβου από τα κέντρα των σφαιριδίων που βρίσκονται στις κορυφές του.

Η φάση 3 αποτελείται από τα εγκλείσματα. Άρα για τον όγκο της τρίτης φάσης ισχύει:

$$\frac{4}{3}\pi (b^3 - a^3) = 8\frac{4}{3}\pi r_f^3 \Rightarrow (b^3 - a^3) = 8r_f^3 \quad (4.3)$$

Θεωρούμε ότι ο σφαιρικός φλοιός με ακτίνες a , b , κατανέμεται ισοογκικά εκατέρωθεν της σφαιρικής επιφάνειας που ορίζει η ακτίνα w . Με αφετηρία δηλαδή την επιφάνεια αυτή, η δεύτερη φάση "απλώνεται" κατά τέτοιο τρόπο ώστε να ισχύει:

$$\frac{4}{3}\pi (b^3 - w^3) = \frac{4}{3}\pi (w^3 - a^3) \Rightarrow (b^3 + a^3) = 2w^3 \quad (4.4)$$

Από το παραπάνω σύστημα προσθέτοντας κατά μέλη(4.3) και (4.4) έχω :

$$b = \sqrt[3]{w^3 + 4r_f^3}$$

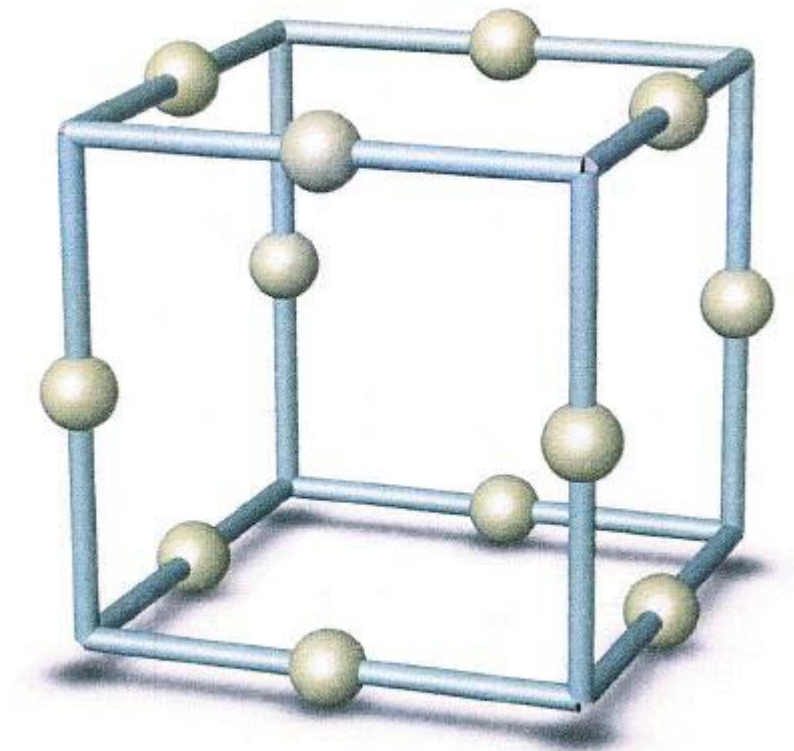
ενώ αφαιρώντας έχω:

$$a = \sqrt[3]{w^3 - 4r_f^3}$$

Εκφράσαμε τις ακτίνες a , b και c συναρτήσει των γνωστών μεγεθών U_f και r_f . Για να δούμε πως κατανέμονται οι ακτίνες a , b , και c στο σφαιρικό μοντέλο βλέπουμε την τομή του στο παρακάτω σχήμα.

4.2 ΤΡΙΦΑΣΙΚΟ ΚΥΒΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ 2

Θεωρώ ότι υπάρχουν 12 εγκλείσματα στα μέσα των ακμών του κύβου (Σχήμα 4.4).



Σχήμα 4.4

Το παραπάνω μοντέλο ανάγεται στο ισοδύναμο τριφασικό σφαιρικό μοντέλο, τομή του οποίου φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (Σχήμα 4.5).



Σχήμα 4.5

Η κατ' όγκο περιεκτικότητα των κόκκων U_f είναι:

$$U_f = \frac{12 \frac{4}{3} \pi r_f^3}{(2l)^3} \Rightarrow l = r_f \sqrt[3]{\frac{12 \frac{4}{3} \pi}{8U_f}} = r_f \sqrt[3]{\frac{2\pi}{U_f}} \quad (4.5)$$

Ο όγκος του Κύβου ακμής $2l$, στο κυβικό μοντέλο αντιπροσωπεύεται από τον όγκο της σφαίρας ακτίνας c , ισχύει λοιπόν:

$$8l^3 = \frac{4}{3} \pi c^3 \Rightarrow c = l \sqrt[3]{\frac{8 \cdot 3}{4\pi}} = l \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}$$

και από την (4.5):

$$c = r_f \sqrt[3]{\frac{2\pi}{U_f}} \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}} = r_f \sqrt[3]{\frac{12}{U_f}} \quad (4.6)$$

Η απόσταση από το κέντρο βάρους του κύβου έχει μήκος $w = l \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Από το σύστημα των εξισώσεων:

$$(b^3 - a^3) = 12 r_f^3 \quad \text{και} \quad (b^3 + a^3) = 2w^3$$

προκύπτουν οι εκφράσεις των ακτινών a , b στο ισογυκικό μοντέλο ως εξής:

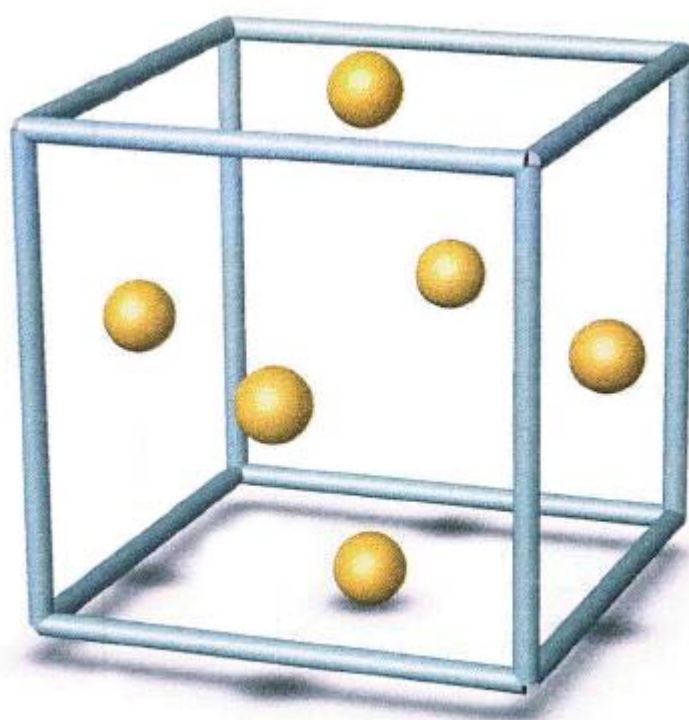
$$b = \sqrt[3]{w^3 + 6 r_f^3}$$

και

$$a = \sqrt[3]{w^3 - 6 r_f^3}$$

4.3 ΤΡΙΦΑΣΙΚΟ ΚΥΒΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ 3

Θεωρώ ότι υπάρχουν 6 εγκλείσματα στα μέσα των ακμών του κύβου (Σχήμα 4.5).



Σχήμα 4.6

Το παραπάνω μοντέλο ανάγεται στο ισοδύναμο τριφασικό σφαιρικό μοντέλο, τομή του οποίου φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 4.7

Η κατ' όγκο περιεκτικότητα των κόκκων U_f είναι:

$$U_f = \frac{6 \frac{4}{3} \pi r_f^3}{(2l)^3} \Rightarrow l = r_f \sqrt[3]{\frac{6 \frac{4}{3} \pi}{8U_f}} = r_f \sqrt[3]{\frac{\pi}{U_f}} \quad (4.7)$$

Ο όγκος του Κύβου ακμής $2l$, στο κυβικό μοντέλο αντιπροσωπεύεται από τον όγκο της σφαίρας ακτίνας c , ισχύει λοιπόν:

$$8l^3 = \frac{4}{3} \pi c^3 \Rightarrow c = l \sqrt[3]{\frac{8 \cdot 3}{4\pi}} = l \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}$$

$$c = r_f \sqrt[3]{\frac{\pi}{U_f}} \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}} = r_f \sqrt[3]{\frac{6}{U_f}} \quad (4.8)$$

Η απόσταση από το κέντρο βάρους του κύβου έχει μήκος $w = \frac{l}{2}$.

Από το σύστημα των εξισώσεων:

$$(b^3 - a^3) = 6 r_f^3 \quad \text{και} \quad (b^3 + a^3) = 2w^3$$

προκύπτουν οι εκφράσεις των ακτινών a , b στο ισογυκικό μοντέλο ως εξής:

$$b = \sqrt[3]{w^3 + 3 r_f^3}$$

και

$$a = \sqrt[3]{w^3 - 3 r_f^3}$$

4.4 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ

Στο παρών κεφάλαιο θα εξετάσουμε τους γεωμετρικούς περιορισμούς που προκύπτουν από το κάθε κυβικό μοντέλο, λόγω της διάταξης των μορίων του σιδήρου που θεωρούμε κάθε φορά. Επειδή η ανάπτυξη της ενδιάμεσου φάσεως γίνεται μέσα στην περιοχή της μήτρας, γι αυτό

άλλωστε μπορεί να θεωρηθεί και σαν αλλοιωμένη μήτρα, δεν προσθέτει κάποιον επιπλέον γεωμετρικό περιορισμό σχετικά με τις μέγιστες δυνατές περιεκτικότητες που μπορεί να έχουμε στο κάθε μοντέλο. Για αυτό και θα τους εξετάσουμε στα τριφασικά μοντέλα μας, αγνοώντας την επίδραση της ενδιαμέσου φάσεως.

- **ΤΡΙΦΑΣΙΚΟ ΚΥΒΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ 1**

$$a > 0 \Rightarrow \sqrt[3]{w^3 - 4r_f^3} > 0 \Rightarrow w^3 - 4r_f^3 > 0 \Rightarrow$$

$$\left(l \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 - 4r_f^3 > 0 \Rightarrow \left(r_f \sqrt[3]{\frac{4\pi \sqrt{3}}{3U_f} \frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^3 - 4r_f^3 > 0 \Rightarrow \frac{4\pi}{3U_f} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 > 4$$

$$\frac{\pi}{3U_f} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 > 1 \Rightarrow U_f < \frac{\pi\sqrt{3}}{8} \Rightarrow U_f < 0,68017$$

$$b < c \Rightarrow \sqrt[3]{w^3 + 4r_f^3} < r_f \sqrt[3]{\frac{8}{U_f}} \Rightarrow w^3 + 4r_f^3 < r_f^3 \frac{8}{U_f}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2} r_f \sqrt[3]{\frac{4\pi}{3U_f}}\right)^3 + 4r_f^3 < r_f^3 \frac{8}{U_f} \Rightarrow U_f < 2 - \frac{\sqrt{3}\pi}{8} \Rightarrow$$

$$U_f < 1,31982$$

Άρα θα πρέπει $U_f < U_{f_{min}} \Rightarrow U_f < 0,68017$

- **ΤΡΙΦΑΣΙΚΟ ΚΥΒΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ 2**

$$\begin{aligned}
 a > 0 &\Rightarrow \sqrt[3]{w^3 - 6r_f^3} > 0 \Rightarrow w^3 - 6r_f^3 > 0 \\
 \Rightarrow \left(r_f^3 \sqrt[3]{\frac{2\pi\sqrt{2}}{U_f} \frac{\sqrt{2}}{2}} \right)^3 - 6r_f^3 > 0 &\Rightarrow r_f^3 \frac{2\pi\sqrt{2}^3}{U_f} - 6r_f^3 > 0 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow U_f < \frac{\pi\sqrt{2}}{12} \Rightarrow U_f < 0,37024
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b < c &\Rightarrow \sqrt[3]{w^3 + 6r_f^3} < r_f^3 \sqrt[3]{\frac{12}{U_f}} \Rightarrow w^3 + 6r_f^3 < r_f^3 \frac{12}{U_f} \Rightarrow \\
 w^3 + 6r_f^3 < r_f^3 \frac{12}{U_f} &\Rightarrow \left(r_f^3 \sqrt[3]{\frac{2\pi\sqrt{2}}{U_f} \frac{\sqrt{2}}{2}} \right)^3 + 6r_f^3 < r_f^3 \frac{12}{U_f} \Rightarrow \\
 \Rightarrow r_f^3 \frac{2\pi}{U_f} \frac{\sqrt{2}^3}{8} + 6r_f^3 < r_f^3 \frac{12}{U_f} &\Rightarrow U_f < 2 - \frac{\pi\sqrt{2}}{12} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow U_f < 1,62975
 \end{aligned}$$

Άρα θα πρέπει $U_f < U_{f_{min}} \Rightarrow U_f < 0,37024$

• **ΤΡΙΦΑΣΙΚΟ ΚΥΒΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ 3**

$$a > 0 \Rightarrow \sqrt[3]{w^3 - 3r_f^3} > 0 \Rightarrow w^3 - 3r_f^3 > 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2} r_f^3 \sqrt{\frac{\pi}{U_f}} \right)^3 - 3r_f^3 > 0 \Rightarrow \frac{1}{8} r_f^3 \frac{\pi}{U_f} - 3r_f^3 > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U_f < \frac{\pi}{24} \Rightarrow U_f < 0,13089$$

$$b < c \Rightarrow \sqrt[3]{w^3 + 3r_f^3} < r_f \sqrt[3]{\frac{6}{U_f}} \Rightarrow w^3 + 3r_f^3 < r_f^3 \frac{6}{U_f} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2} r_f^3 \sqrt{\frac{\pi}{U_f}} \right)^3 + 3r_f^3 < r_f^3 \frac{6}{U_f} \Rightarrow \frac{1}{8} r_f^3 \frac{\pi}{U_f} + 3r_f^3 < r_f^3 \frac{6}{U_f} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U_f < 2 - \frac{\pi}{24} \Rightarrow U_f < 1,86910$$

Άρα θα πρέπει $U_f < U_{f_{min}} \Rightarrow U_f < 0,13089$

Άρα τελικά οι μέγιστες δυνατές περιεκτικότητες σε κόκκους σιδήρου για κάθε μοντέλο είναι:

	Κυβ. Μοντέλο 1	Κυβ. Μοντέλο 2	Κυβ. Μοντέλο 3
Μεγίστη Δυνατή Περιεκτικότητα U_f	68,02 %	37,02 %	13,09 %

Πίνακας 4.1

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΜΕ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΦΑΣΗ

5.1 Υπολογισμός ακτινών του ισοδύναμου πενταφασικού μοντέλου

Το πενταφασικό μοντέλο που χρησιμοποιούμε αποτελείται από μια περιοχή εγκλεισμάτων κόκκων σιδήρου (περιοχή 3) και δυο περιοχές μήτρας εποξειδικής ρητίνης (περιοχές 1 και 5). Ανάμεσα σε αυτές θεωρούμε ότι αναπτύσσεται περιοχή ενδιάμεσης φάσης (περιοχές 2 και 4).

Το μέσο μέτρο ελαστικότητας σε αυτές καθώς και ο μέσος λόγος Poisson που τους αντιστοιχεί E_2, E_4 και ν_2, ν_4 χρειάζεται αρχικά να προσδιορισθούν όπως και οι ακτίνες που αντιστοιχούν στα όρια της κάθε περιοχής, ώστε στη συνέχεια να γίνει εφικτός ο υπολογισμός του μέτρου ελαστικότητας E_c του σύνθετου υλικού καθώς και ο λόγος Poisson ν_c .

Κατά τα άλλα γνωρίζουμε ότι:

$$E_3 = E_f = 210 \text{ GPa}$$

και

$$E_1 = E_5 = E_m = 3,5 \text{ GPa}$$

Με U_f συμβολίζουμε την συνολική κατά όγκο περιεκτικότητα του εγκλεισματος άρα $U_f = U_3$ της τρίτης φάσης.

Με $U_1 = U_{m,1}$ και $U_5 = U_{m,2}$ συμβολίζουμε τις συνολικές κατά όγκο περιεκτικότητες της μήτρας στις φάσεις 1 και 5 αντίστοιχα.

Επίσης με $U_2 = U_{i,1}$ και $U_4 = U_{i,2}$ συμβολίζουμε τις συνολικές κατά όγκο περιεκτικότητες των ενδιάμεσων φάσεων 2 και 4 αντίστοιχα.

Άρα ισχύουν τα παρακάτω:

$$U_{i,1} + U_{i,2} = U_i$$

$$U_{m,1} + U_{m,2} = U_m$$

$$\text{και } U_m = 1 - U_f - U_i$$

Κάνοντας την παραδοχή ότι η ενδιάμεση φάση μπορεί να θεωρηθεί ως αλλοιωμένη μήτρα και ότι η αναλογία της σε σχέση με το υλικό του εγκλείσματος θα είναι σταθερή και στις δύο περιοχές εμφάνισής της θα ισχύει ότι:

$$\frac{U_{i,1}}{U_{m,1}} = \frac{U_{i,2}}{U_{m,2}} = \frac{U_{i,1} + U_{i,2}}{U_{m,1} + U_{m,2}} = \frac{U_i}{U_m} = \frac{U_i}{1 - U_f - U_i} = k$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτουν τα παρακάτω:

$$U_{i,1} = kU_{m,1} \Rightarrow \frac{\frac{4}{3}\pi(r_2^3 - r_1^3)}{\frac{4}{3}\pi r_5^3} = k \frac{\frac{4}{3}\pi r_1^3}{\frac{4}{3}\pi r_5^3} \Rightarrow (r_2^3 - r_1^3) = kr_1^3 \Rightarrow r_2 = r_1(k + 1)^{1/3}$$

$$U_{i,2} = kU_{m,2} \Rightarrow \frac{\frac{4}{3}\pi(r_4^3 - r_3^3)}{\frac{4}{3}\pi r_5^3} = k \frac{\frac{4}{3}\pi(r_5^3 - r_4^3)}{\frac{4}{3}\pi r_5^3} \Rightarrow$$

$$(r_4^3 - r_3^3) = k(r_5^3 - r_4^3) \Rightarrow r_4 = \sqrt[3]{\frac{k r_5^3 + r_3^3}{k + 1}}$$

Οι ακτίνες των φάσεων 1, 3 και 5 βρίσκονται στο κεφάλαιο 4 για κάθε κυβικό μοντέλο όπου πλέον οι ακτίνες με ονομασία a,b και c αντιστοιχούν στις ακτίνες r_1 , r_3 και r_5 .

Για τις κατ' όγκο περιεκτικότητες όλων των φάσεων θα ισχύει κατά τα γνωστά:

$$U_{m,1} = U_1 = \frac{\frac{4}{3}\pi r_1^3}{\frac{4}{3}\pi r_5^3} = \frac{r_1^3}{r_5^3}$$

$$U_{i,1} = U_2 = \frac{\frac{4}{3}\pi(r_2^3 - r_1^3)}{\frac{4}{3}\pi r_5^3} = \frac{(r_2^3 - r_1^3)}{r_5^3}$$

$$U_f = U_3 = \frac{\frac{4}{3}\pi(r_3^3 - r_2^3)}{\frac{4}{3}\pi r_5^3} = \frac{(r_3^3 - r_2^3)}{r_5^3}$$

$$U_{i,2} = U_4 = \frac{\frac{4}{3}\pi(r_4^3 - r_3^3)}{\frac{4}{3}\pi r_5^3} = \frac{(r_4^3 - r_3^3)}{r_5^3}$$

$$U_{m,2} = U_5 = \frac{\frac{4}{3}\pi(r_5^3 - r_4^3)}{\frac{4}{3}\pi r_5^3} = \frac{(r_5^3 - r_4^3)}{r_5^3}$$

Από τον πίνακα 3.3, σε κάθε σύσταση U_f αντιστοιχεί μια σύσταση U_i για το σύνολο της ενδιάμεσης φάσης. Έτσι έχουμε τα ζεύγη :

U_f	U_i
0,05	0,0013
0,10	0,004
0,15	0,013
0,20	0,02
0,25	0,05

Όποτε χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις για κάθε ζεύγος τιμών (U_f , U_i) υπολογίζονται οι ακτίνες στα όρια της κάθε ενδιάμεσης φάσης καθώς και οι αντίστοιχες τους κατ' όγκο περιεκτικότητες.

Στους παρακάτω πίνακες παρουσιάζονται συνοπτικά τα αποτελέσματα που προέκυψαν σε κάθε περίπτωση σύστασης και κυβικού μοντέλου. Όλες οι ακτίνες είναι σε μm :

Κυβικό Μοντέλο 1:

U_f	U_i	R_1 (μm)	R_2 (μm)	R_3 (μm)	R_4 (μm)	R_5 (μm)
0,05	0,0013	276,8858	277,0122	290,9590	291,1898	407,1626
0,1	0,004	213,5682	213,8855	236,0919	236,6379	323,1652
0,15	0,013	180,3842	181,3133	210,5622	212,0652	282,3108
0,2	0,028	157,4984	159,3799	195,0761	197,9317	256,4963
0,25	0,05	139,3838	142,6264	184,4600	189,0621	238,1101

Ενώ η περιεκτικότητα της κάθε φάσης είναι :

U_f	U_i	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5
0,05	0,0013	0,314484035	0,000430936	0,05	0,000869064	0,634215965
0,1	0,004	0,28862646	0,001288511	0,1	0,002711489	0,60737354
0,15	0,013	0,26086333	0,004051641	0,15	0,008948359	0,57613667
0,2	0,028	0,231517947	0,008397024	0,2	0,019602976	0,540482053
0,25	0,05	0,200587306	0,014327665	0,25	0,035672335	0,499412694

Κυβικό Μοντέλο 2:

U_f	U_i	R_1 (μm)	R_2 (μm)	R_3 (μm)	R_4 (μm)	R_5 (μm)
0,05	0,0013	252,9283	253,0436	277,0487	277,5226	466,0848
0,1	0,004	189,5043	189,7846	228,2936	229,3843	369,9318
0,15	0,013	154,0728	154,8543	206,2672	209,1735	323,1652
0,2	0,028	127,6387	129,1108	193,2294	198,5455	293,6150
0,25	0,05	104,4509	106,7223	184,4765	192,6613	272,5680

Ενώ η περιεκτικότητα της κάθε φάσης είναι :

U_f	U_i	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5
0,05	0,0013	0,159807291	0,000218983	0,05	0,001081017	0,788892709
0,1	0,004	0,134426158	0,000600117	0,1	0,003399883	0,761573842
0,15	0,013	0,10834352	0,001682755	0,15	0,011317245	0,72865648
0,2	0,028	0,082050355	0,00297592	0,2	0,02502408	0,689949645
0,25	0,05	0,056024523	0,004001752	0,25	0,045998248	0,643975477

Κυβικό Μοντέλο 3:

U_f	U_i	R_1 (μm)	R_2 (μm)	R_3 (μm)	R_4 (μm)	R_5 (μm)
0,05	0,0013	126,8948	126,9526	166,0368	166,7942	369,9318
0,1	0,004	72,9681	73,0760	142,9556	144,5536	293,6150
0,15	0,013	-54,2070	-54,4820	133,3175	137,2956	256,4963
0,2	0,028	-75,0603	-75,9260	127,9267	134,8236	233,0424
0,25	0,05	-82,6983	-84,4967	124,4610	134,6315	216,3374

Ενώ η περιεκτικότητα της κάθε φάσης είναι :

U_f	U_i	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5
0,05	0,0013	0,04036136	5,5307E-05	0,05	0,001244693	0,90833864
0,1	0,004	0,015348148	6,85185E-05	0,1	0,003931481	0,880651852
0,15	0,013	-0,009436765	-0,000146569	0,15	0,013146569	0,846436765
0,2	0,028	-0,033372917	-0,001210417	0,2	0,029210417	0,805372917
0,25	0,05	-0,055611111	-0,003972222	0,25	0,053972222	0,755611111

5.2 Ελαστικές σταθερές για την ενδιάμεση φάση

Η φυσική συμπεριφορά του συστήματος εξαρτάται ξεχωριστά από τις ιδιότητες του εγκλείσματος της μήτρας, όπως επίσης και από την αλληλεπίδρασή τους. Αυτή η αλληλεπίδραση είναι δυνατό να ληφθεί υπόψη υπό τη μορφή της ενδιάμεσης περιοχής, το οποίο δημιουργείται κατά την παράγωγη του σύνθετου υλικού και παίζει ένα πολύ σημαντικό ρόλο στη γενική θερμομηχανική συμπεριφορά του σύνθετου.

Γενικώς το μέτρο ελαστικότητας E_i και ο λόγος Poisson ν_i της ενδιάμεσης φάσης μπορούν να εκφραστούν ως ένα πολυώνυμο n -βαθμού με μεταβλητή τη ακτίνα r .

Δηλαδή:

$$E_i(r) = f(r) \quad \text{και} \quad \nu_i(r) = g(r)$$

ή

$$E_i(r) = A r^n + B r^{n-1} + C r^{n-2} + \dots, \quad \nu_i(r) = A' r^n + B' r^{n-1} + C' r^{n-2} + \dots$$

όπου $r_f \leq r \leq r_i$

Στη μελέτη αυτή, για απλουστευτικούς λόγους, λαμβάνουμε υπόψη την γραμμική, την υπερβολική, την λογαριθμική και την παραβολική και εκθετική μεταβολή των $E_i(r)$ και $\nu_i(r)$.

Θεωρούμε ότι $E_m \leq E_i(r) \leq E_f$ και $\nu_f \leq \nu_i(r) \leq \nu_m$, όταν $r_f \leq r \leq r_i$. Οι οριακές συνθήκες τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε είναι:

$$\text{Στο } r = r_f : \quad E_i(r) = \eta E_f \quad \text{και} \quad \nu_i(r) = \xi \nu_f$$

$$\text{Στο } r = r_i : \quad E_i(r) = E_m \quad \text{και} \quad \nu_i(r) = \nu_m$$

Δεχόμαστε δηλαδή, ότι τα $E_i(r)$ και $\nu_i(r)$ της ενδιάμεσης φάσης στο όριο αυτής με την μήτρα είναι ίσα με E_m και ν_m αντιστοίχως, ενώ στο όριο αυτής με το εγκλείσμα είναι τμήμα των E_f και ν_f αντιστοίχως,

που εκφράζεται με τους συντελεστές η και ξ . Όμως για να εκτιμήσουμε την μέγιστη δυνατή επίδραση της ενδιάμεσης φάσης, θα θεωρήσουμε ότι τα $E_i(r)$ και $v_i(r)$ στο όριο αυτής με το έγκλεισμα είναι ίσα με E_f και v_f αντιστοίχως, δηλαδή ότι $\eta=\xi=1$.

5.2.1 Γραμμικό Μοντέλο

Σύμφωνα με αυτήν την μεταβολή τα $E_i(r)$ και $v_i(r)$ μεταβαλλονται ως εξής:

$$E_i(r) = A + Br \quad \text{και} \quad v_i(r) = A' + B' r \quad \text{με} \quad r_f \leq r \leq r_i$$

Εφαρμόζοντας τις οριακές συνθήκες προκύπτει:

$$A = nE_f + \frac{nE_f - E_m}{r_i - r_f} r_f$$

$$B = \frac{nE_f - E_m}{r_i - r_f}$$

Για τον υπολογισμό της μέσης τιμής του μέτρου ελαστικότητας της ενδιάμεσης περιοχής θα ισχύει ότι

$$E_i = \frac{1}{v_i} \int_{r_f}^{r_i} E_i(r) dV = \frac{1}{v_i} \int_{r_f}^{r_i} (A - Br) 4\pi r^2 dr = \frac{1}{v_i} 4\pi \left[A \frac{r^3}{3} - B \frac{r^4}{4} \right]_{r_f}^{r_i}$$

Όπου dV ο όγκος της στοιχειώδους περιοχής της ενδιάμεσης φάσης ίσος με :

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow dV = 4\pi r^2 dr$$

Επομένως προκύπτει :

$$E_i = \frac{1}{v_i} 4\pi \left[\frac{A}{3}(r_i^3 - r_f^3) - \frac{B}{4}(r_i^4 - r_f^4) \right]$$

5.2.2 Παραβολικό Μοντέλο

Σύμφωνα με αυτήν την μεταβολή τα $E_i(r)$ και $v_i(r)$ μεταβάλλονται ως εξής :

$$E_i(r) = A r^2 + B r + C \quad \text{και} \quad v_i(r) = A' r^2 + B' r + C' \quad \text{με} \quad r_f \leq r \leq r_i$$

Για τον υπολογισμό των A , B , C και A' , B' , C' εκτός από τις προαναφερθείσες οριακές συνθήκες θα θεωρήσουμε ότι η $E_i(r)$ παρουσιάζει ελάχιστο και η $v_i(r)$ παρουσιάζει μέγιστο για $r = r_i$. Δηλαδή:

$$\text{Στο } r = r_i: \quad \frac{dE_i(r)}{dr} = 0 \quad \text{με} \quad \frac{d^2E_i(r)}{dr^2} > 0$$

$$\text{και} \quad \frac{dv_i(r)}{dr} = 0 \quad \text{με} \quad \frac{d^2v_i(r)}{dr^2} < 0$$

Έτσι βρίσκουμε:

$$A = \frac{nE_f - E_m}{(r_i - r_f)^2}$$

$$B = -\frac{(nE_f - E_m)2r_i}{(r_i - r_f)^2}$$

$$C = \frac{nE_f r_i^2 + E_m r_f - 2E_m r_f r_i}{(r_i - r_f)^2}$$

Για τον υπολογισμό της μέσης τιμής του μέτρου ελαστικότητας της ενδιάμεσης περιοχής θα ισχύει όπως και παραπάνω ότι

$$E_i = \frac{1}{v_i} \int_{r_f}^{r_i} E_i(r) dV = \frac{1}{v_i} \int_{r_f}^{r_i} (A r^2 + B r + C) 4\pi r^2 dr$$

Αντικαθιστώντας προκύπτει ,

$$E_i = \frac{1}{v_i} 4\pi \left[\frac{A}{5} (r_i^5 - r_f^5) + \frac{B}{4} (r_i^4 - r_f^4) + \frac{C}{3} (r_i^3 - r_f^3) \right]$$

5.2.3 Εκθετικό Μοντέλο

Σύμφωνα με αυτήν την μεταβολή το $E_i(r)$ μεταβάλλεται ως εξής :

$$E = Ae^{Br}$$

Με τις προαναφερθείσες οριακές συνθήκες βρίσκουμε:

$$E_m = Ae^{Br_i}$$

$$\eta E_f = Ae^{Br_f}$$

Διαιρώντας κατά μέλη προκύπτει :

$$\frac{E_m}{E_f} = e^{B(r_i - r_f)} \Rightarrow \ln \left(\frac{E_m}{\eta E_f} \right) = B(r_i - r_f) \Rightarrow$$

Άρα:

$$B = \frac{\ln \left(\frac{E_m}{\eta E_f} \right)}{r_i - r_f} \quad \text{και} \quad A = \frac{E_m}{e^{Br_i}}$$

Για τη μέση τιμή του μέτρου ελαστικότητας $E_i(r)$ θα ισχύει ότι :

$$E_i = \frac{1}{v_i} \int_{r_f}^{r_i} E_i(r) dV = \frac{1}{v_i} \int_{r_f}^{r_i} Ae^{Br} 4\pi r^2 dr \Rightarrow$$

$$E_i = \frac{4\pi}{v_i} A \int_{r_f}^{r_i} e^{Br} 4r^2 dr \Rightarrow$$

και τελικά προκύπτει

$$E_i = \frac{1}{V_i B^3} 4\pi A [e^{Br_i}(Br_i(Br_i - 2) + 2) - e^{Br_f}(Br_f(Br_f - 2) + 2)]$$

5.2.4 Υπερβολικό Μοντέλο

Σύμφωνα με αυτήν την μεταβολή το $E_i(r)$ μεταβάλλεται ως εξής:

$$E_i(r) = A + \frac{B}{r}$$

Εφαρμόζοντας τις οριακές συνθήκες που αναφέρθηκαν παραπάνω, προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις για τις σταθερές A και B:

$$B = \frac{r_i r_f}{r_i - r_f} (\eta E_f - E_m)$$

$$A = \eta E_f - \frac{B}{r_f}$$

Για την μέση τιμή του μέτρου ελαστικότητας $E_i(r)$ θα ισχύει όπως και για τις προηγούμενες προσεγγίσεις ότι:

$$E_i = \frac{1}{V_i} \int_{r_f}^{r_i} E_i(r) dV$$

Οπότε αντικαθιστώντας προκύπτει,

$$E_i = \frac{1}{V_i} \int_{r_f}^{r_i} \left(A + \frac{B}{r} \right) 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi}{V_i} \int_{r_f}^{r_i} (Ar^2 + Br) dr$$

Άρα τελικά :

$$E_i = \frac{1}{V_i} 4\pi \left[\frac{A}{3} (r_i^3 - r_f^3) + \frac{B}{2} (r_i^2 - r_f^2) \right]$$

5.2.5 Λογαριθμικό Μοντέλο

Σύμφωνα με αυτήν την μεταβολή το $E_i(r)$ μεταβάλλεται ως εξής:

$$E_i(r) = A \ln \frac{B}{r}$$

Όπου χρησιμοποιώντας τις οριακές συνθήκες προκύπτουν οι τιμές των σταθερών ίσες με :

$$A = \frac{\eta E_f - E_m}{\ln \frac{r_i}{r_f}}$$

$$B = r_i e^{\frac{E_m}{A}}$$

Για τη μέση τιμή του μέτρου ελαστικότητας $E_i(r)$ θα ισχυει

$$\begin{aligned} E_i &= \frac{1}{V_i} \int_{r_f}^{r_i} E_i(r) dV = \frac{1}{V_i} \int_{r_f}^{r_i} A \left(\frac{B}{r} \right) 4\pi r^2 dr = \frac{1}{V_i} \int_{r_f}^{r_i} A(\ln B - \ln r) 4\pi r^2 dr = \\ &= \frac{1}{V_i} \int_{r_f}^{r_i} A \ln B 4\pi r^2 dr - \frac{1}{V_i} \int_{r_f}^{r_i} A \ln r 4\pi r^2 dr \end{aligned}$$

Οπότε τελικά προκύπτει,

$$E_i = \frac{1}{V_i} 4\pi A \ln B \frac{(r_i^3 - r_f^3)}{3} - \frac{4\pi A}{V_i} \left[\frac{3r^3 \ln r - r^3}{9} \right]_{r_f}^{r_i} \Rightarrow$$

$$E_i = \frac{1}{V_i} 4\pi A \ln B \frac{(r_i^3 - r_f^3)}{3} - \frac{4\pi A}{9V_i} (3r_i^3 \ln r_i - r_i^3 - 3r_f^3 \ln r_f + r_f^3)$$

Και στις πέντε προσεγγίσεις που εξετάσαμε η διαδικασία για την εύρεση των v_i και είναι ακριβώς η ίδια όπως άλλωστε εξηγήσαμε ήδη, γι' αυτό και οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν ακριβώς όπως είναι και για τα v_i . Αυτό που αλλάζει μόνο είναι οι τιμές των συντελεστών που έχουμε βάλει (οι τιμές A και B δηλαδή) και οι όποιες προσδιορίζονται με βάση τις οριακές τιμές του λόγου Poisson στα όρια των δυο φάσεων.

5.3 Πίνακες – Διαγράμματα Ενδιαμέσου Φάσεως – Συμπεράσματα

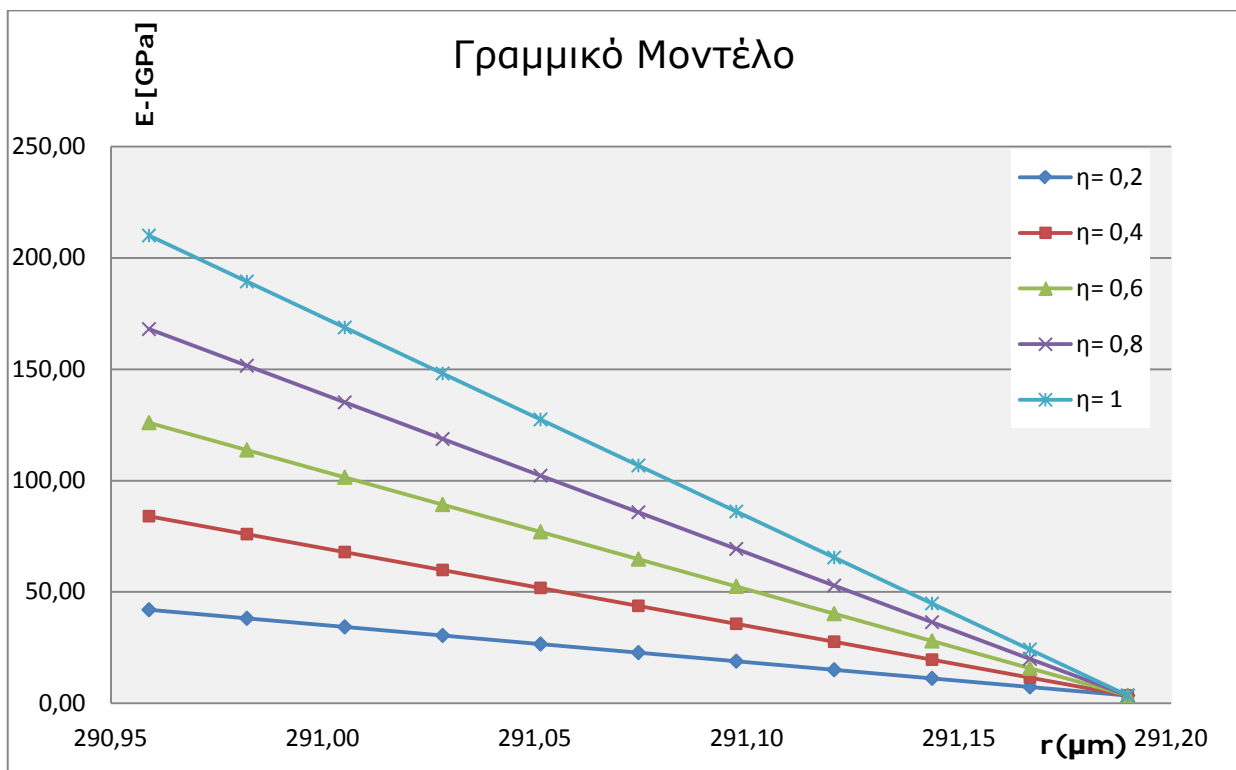
r (μm)	E (Gpa) (Γραμμικό Μοντέλο)				
	η= 0,2	η= 0,4	η= 0,6	η= 0,8	η= 1
290,96	42,00	84,00	126,00	168,00	210,00
290,98	38,15	75,95	113,75	151,55	189,35
291,01	34,30	67,90	101,50	135,10	168,70
291,03	30,45	59,85	89,25	118,65	148,05
291,05	26,60	51,80	77,00	102,20	127,40
291,07	22,75	43,75	64,75	85,75	106,75
291,10	18,90	35,70	52,50	69,30	86,10
291,12	15,05	27,65	40,25	52,85	65,45
291,14	11,20	19,60	28,00	36,40	44,80
291,17	7,35	11,55	15,75	19,95	24,15
291,19	3,50	3,50	3,50	3,50	3,50

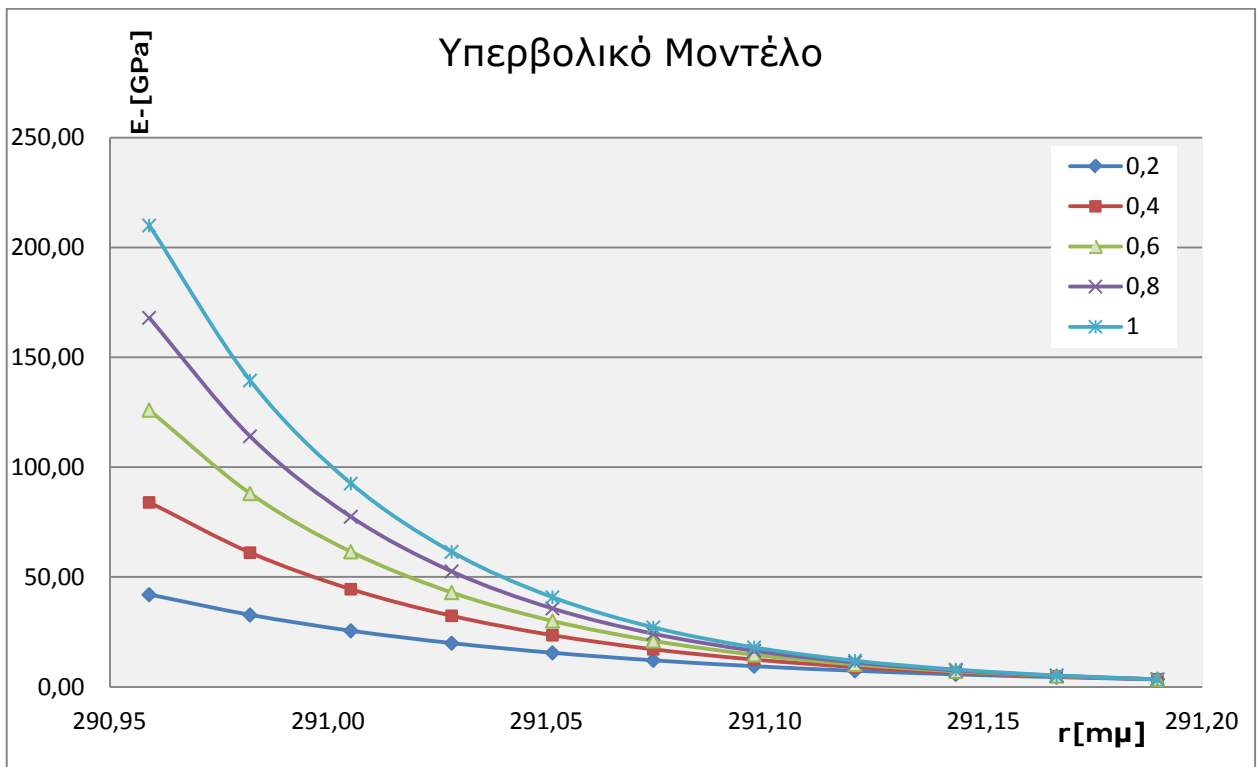
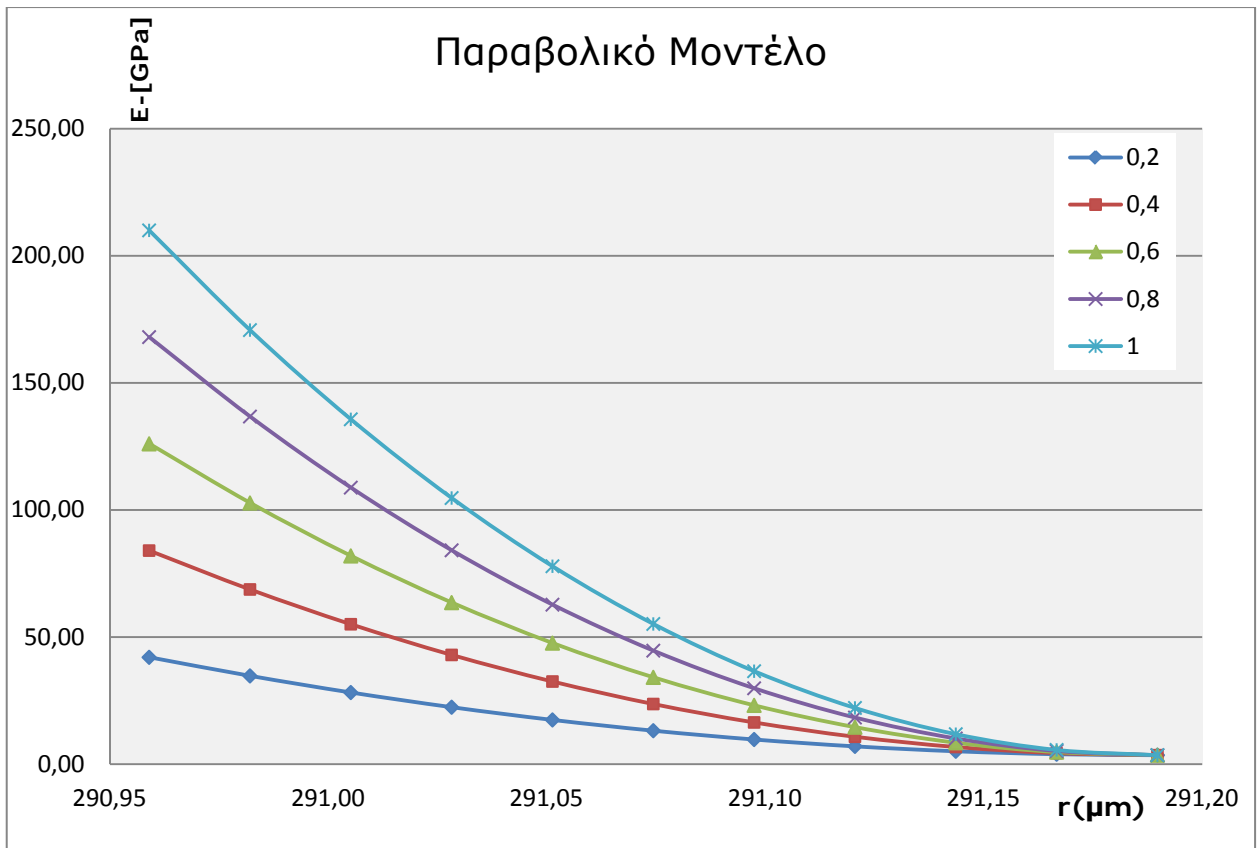
r (μm)	E (Gpa) (Παραβολικό Μοντέλο)				
	0,2	0,4	0,6	0,8	1
290,96	42,00	84,00	126,00	168,00	210,00
290,98	34,69	68,71	102,73	136,74	170,77
291,01	28,14	55,02	81,90	108,78	135,66
291,03	22,37	42,95	63,53	84,11	104,69
291,05	17,36	32,48	47,60	62,72	77,84
291,07	13,13	23,63	34,13	44,63	55,13
291,10	9,66	16,38	23,10	29,82	36,54
291,12	6,97	10,75	14,53	18,30	22,09
291,14	5,04	6,72	8,40	10,08	11,76
291,17	3,89	4,31	4,73	5,14	5,57
291,19	3,50	3,50	3,50	3,50	3,50

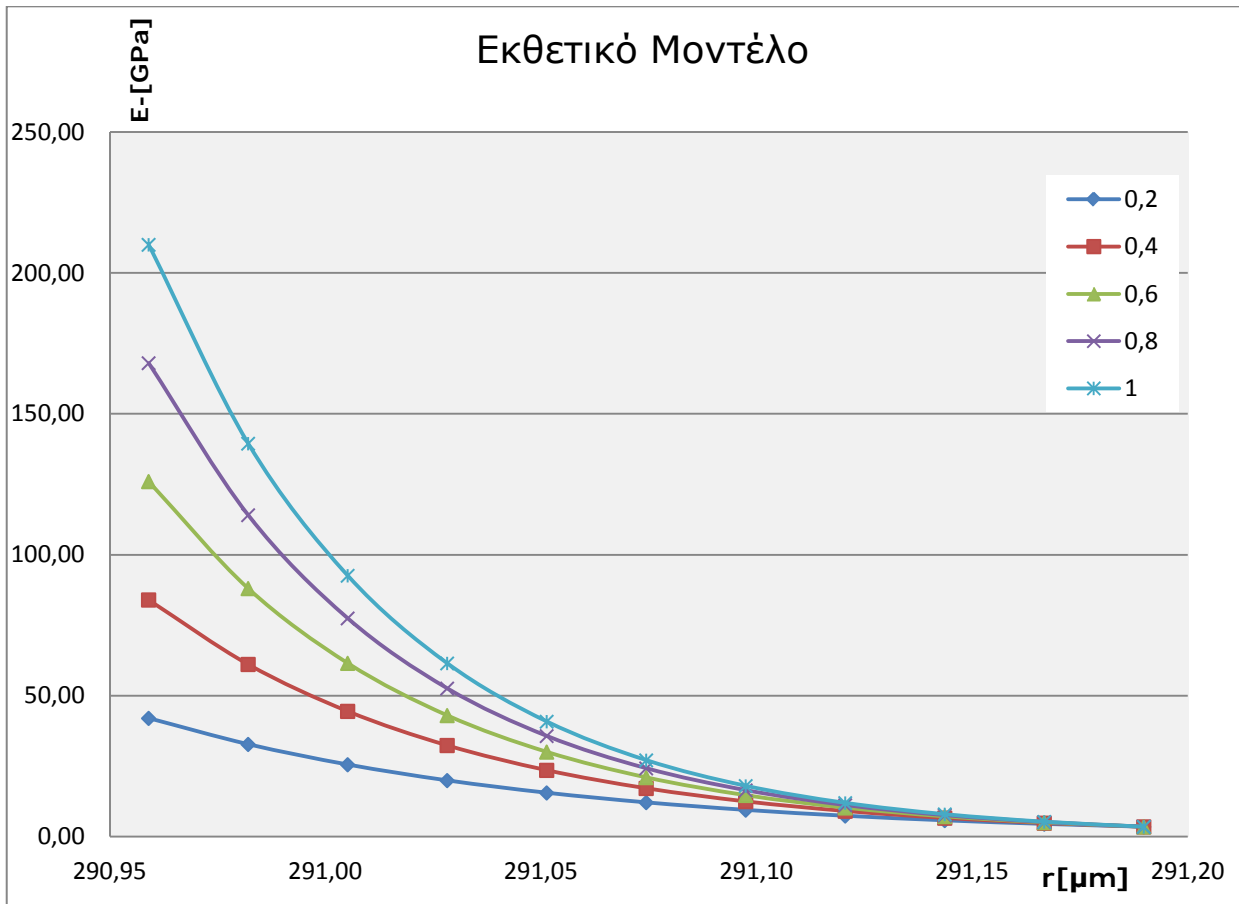
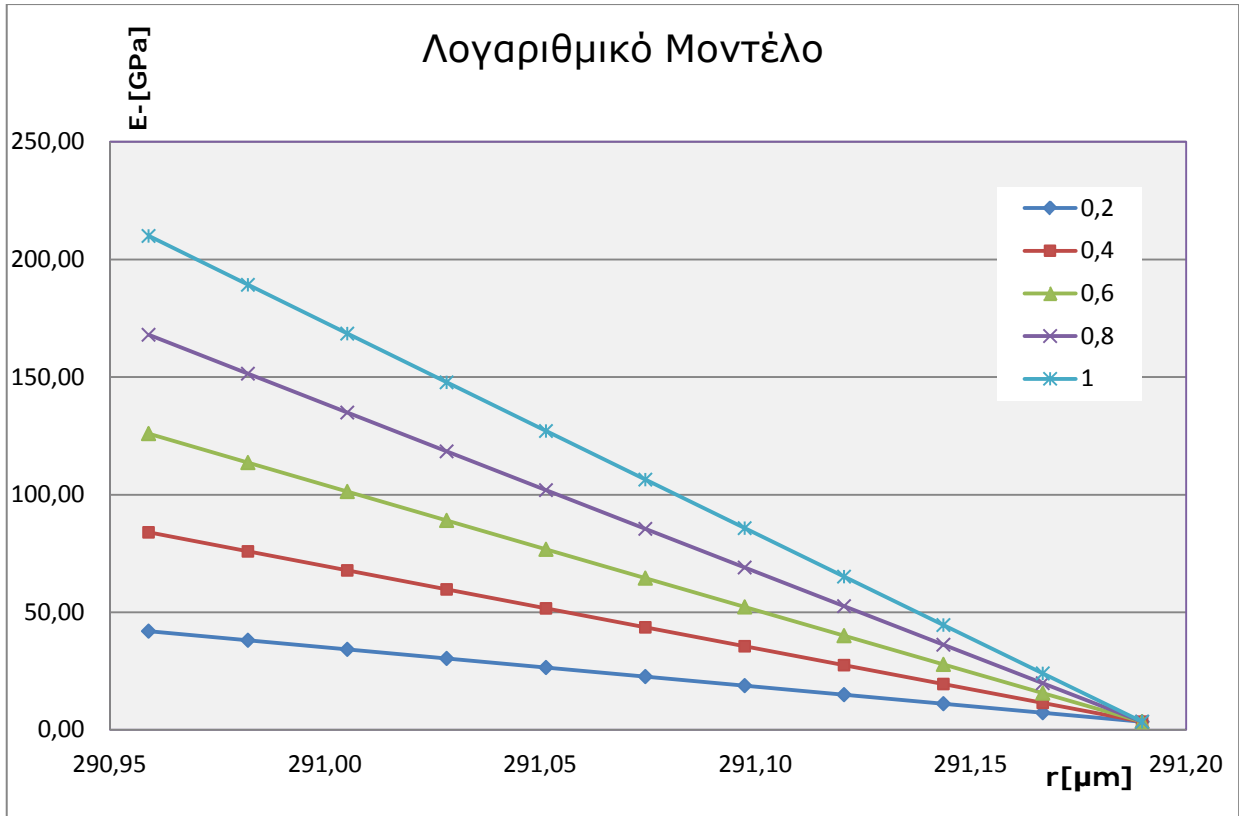
r (μm)	E (Gpa) (Υπερβολικό Μοντέλο)				
	0,2	0,4	0,6	0,8	1
290,96	42,00	84,00	126,00	168,00	210,00
290,98	32,76	61,13	88,05	114,07	139,45
291,01	25,55	44,49	61,53	77,46	92,60
291,03	19,93	32,38	43,00	52,59	61,49
291,05	15,54	23,56	30,05	35,71	40,83
291,07	12,12	17,15	21,00	24,25	27,11
291,10	9,46	12,48	14,68	16,47	18,00
291,12	7,38	9,08	10,26	11,18	11,95
291,14	5,75	6,61	7,17	7,59	7,94
291,17	4,49	4,81	5,01	5,15	5,27
291,19	3,50	3,50	3,50	3,50	3,50

r (μm)	E (Gpa) (Λογαριθμικό Μοντέλο)				
	0,2	0,4	0,6	0,8	1
290,96	42,00	84,00	126,00	168,00	210,00
290,98	38,13	75,90	113,68	151,45	189,23
291,01	34,26	67,82	101,37	134,93	168,48
291,03	30,40	59,74	89,08	118,42	147,77
291,05	26,54	51,67	76,81	101,94	127,08
291,07	22,69	43,62	64,55	85,48	106,41
291,10	18,84	35,57	52,31	69,04	85,78
291,12	15,00	27,54	40,08	52,62	65,17
291,14	11,16	19,52	27,87	36,23	44,58
291,17	7,33	11,50	15,68	19,85	24,03
291,19	3,50	3,50	3,50	3,50	3,50

r (μm)	E (GPa) (Εκθετικό Μοντέλο)				
	0,2	0,4	0,6	0,8	1
290,96	42,00	84,00	126,00	168,00	210,00
290,98	32,76	61,13	88,05	114,07	139,45
291,01	25,55	44,49	61,53	77,46	92,60
291,03	19,93	32,38	43,00	52,59	61,49
291,05	15,54	23,56	30,05	35,71	40,83
291,07	12,12	17,15	21,00	24,25	27,11
291,10	9,46	12,48	14,68	16,47	18,00
291,12	7,38	9,08	10,26	11,18	11,95
291,14	5,75	6,61	7,17	7,59	7,94
291,17	4,49	4,81	5,01	5,15	5,27
291,19	3,50	3,50	3,50	3,50	3,50







Οι παραπάνω πίνακες και τα διαγράμματα αναφέροντα στη δεύτερη ενδιάμεση φάση του Κυβικού Μοντέλου 1.

Σε όλες τις παραπάνω γραφικές παραστάσεις παρατηρούμε ότι η τιμή των E πέφτει καθώς αυξάνεται η ακτίνα r . Αυτό είναι κάτι που αναμένουμε, αφού αυξανόμενης της ακτίνας r , πλησιάζουμε φάση μήτρας και απομακρυνόμαστε από τη φάση του εγκλείσματος.

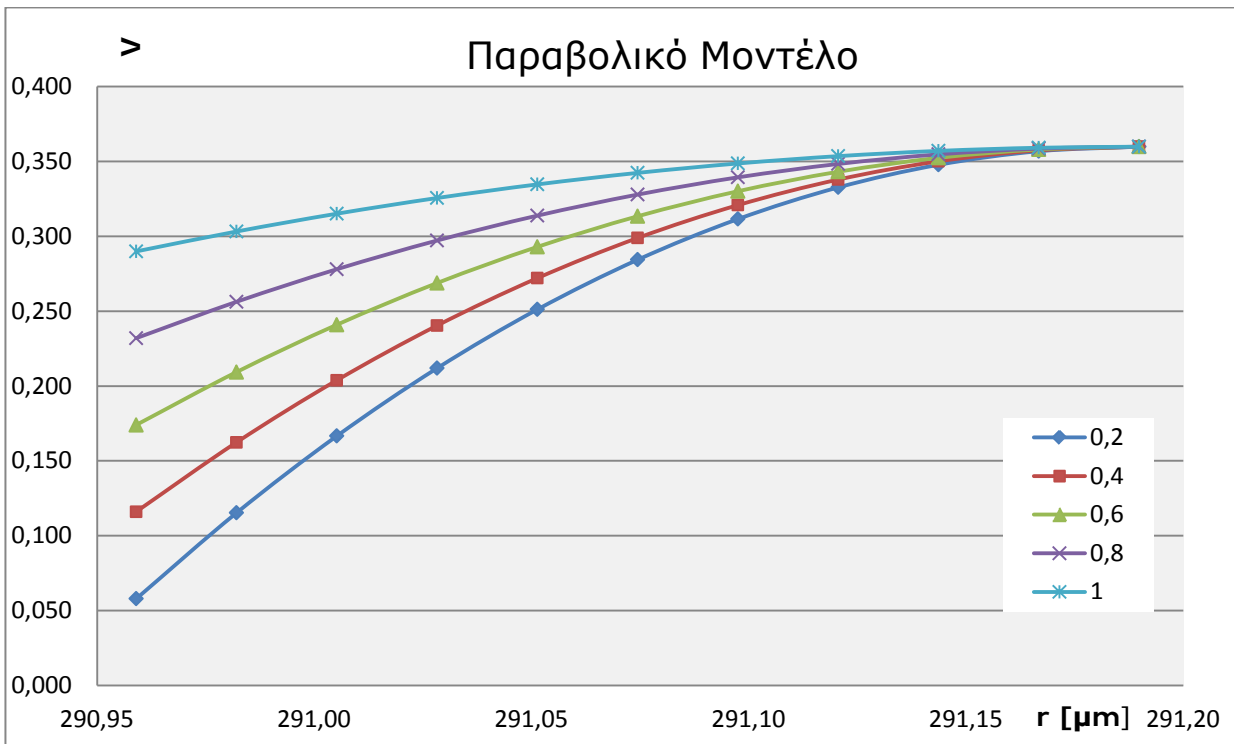
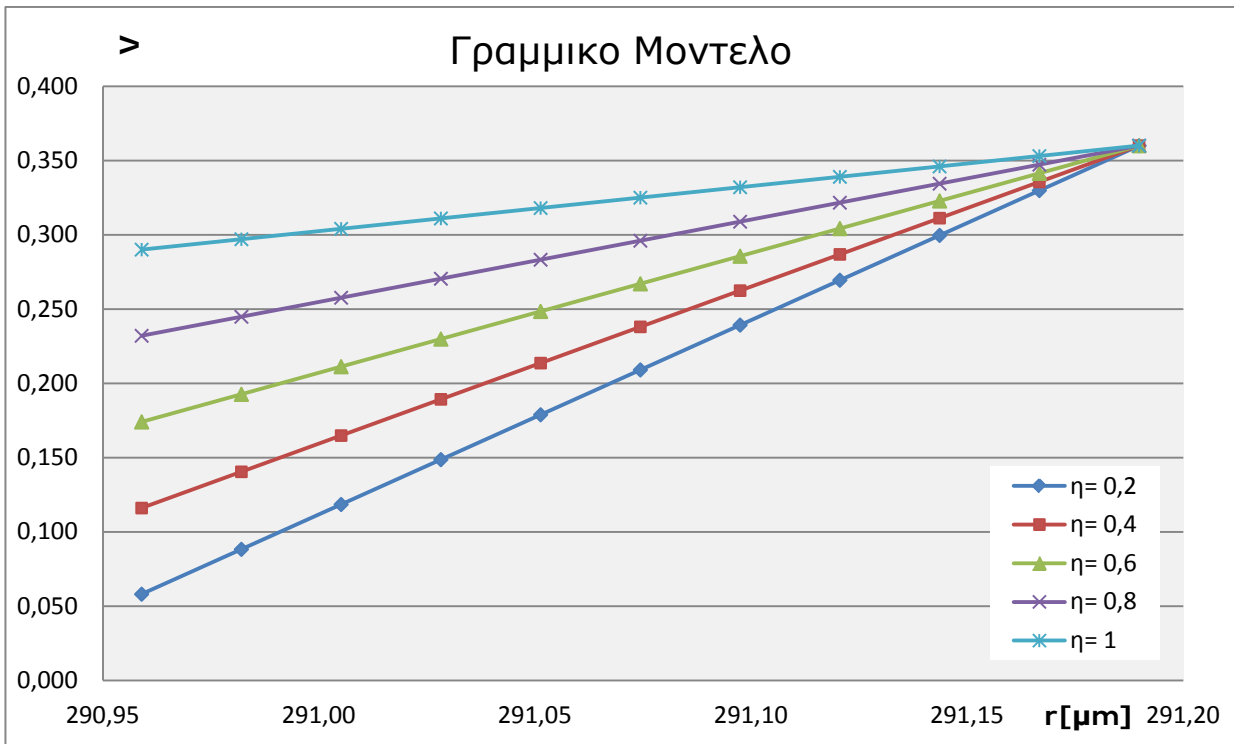
r (μm)	ν (Λογαριθμικό Μοντέλο)				
	0,2	0,4	0,6	0,8	1
290,96	0,058	0,116	0,174	0,232	0,290
290,98	0,088	0,141	0,193	0,245	0,297
291,01	0,119	0,165	0,211	0,258	0,304
291,03	0,149	0,190	0,230	0,271	0,311
291,05	0,179	0,214	0,249	0,283	0,318
291,07	0,209	0,238	0,267	0,296	0,325
291,10	0,240	0,263	0,286	0,309	0,332
291,12	0,270	0,287	0,304	0,322	0,339
291,14	0,300	0,311	0,323	0,335	0,346
291,17	0,330	0,336	0,342	0,347	0,353
291,19	0,360	0,360	0,360	0,360	0,360

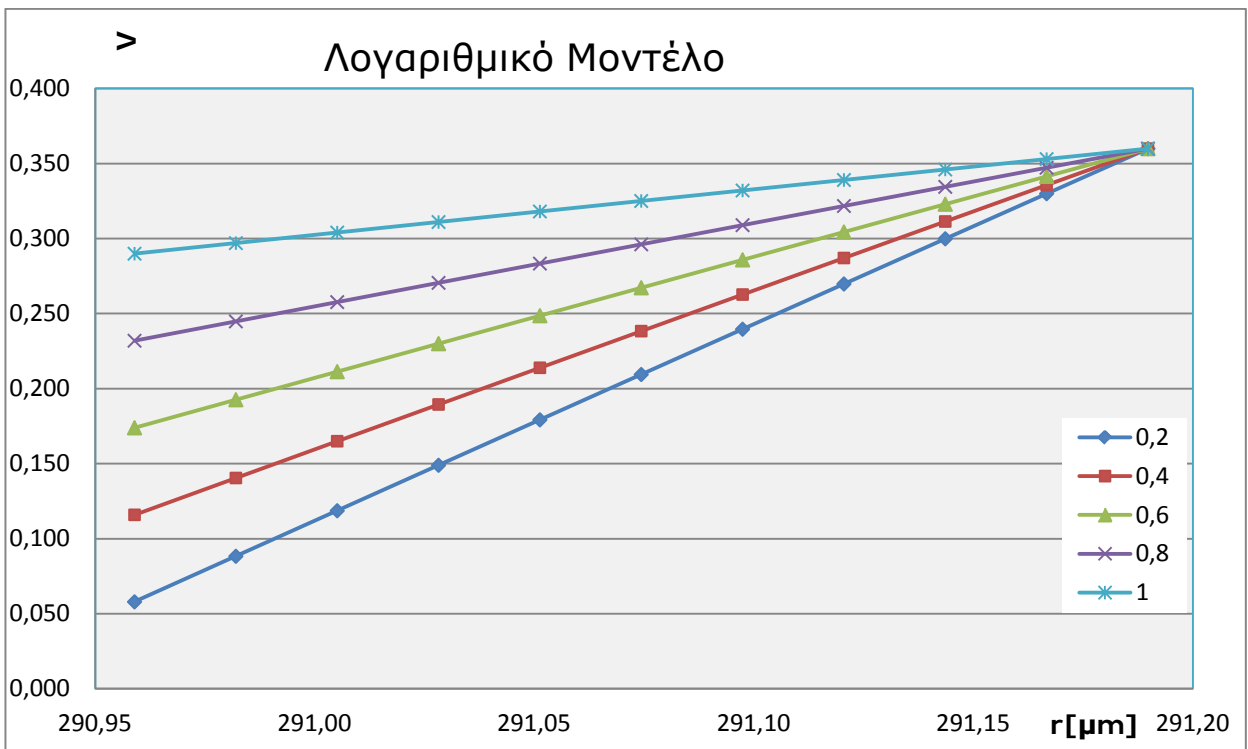
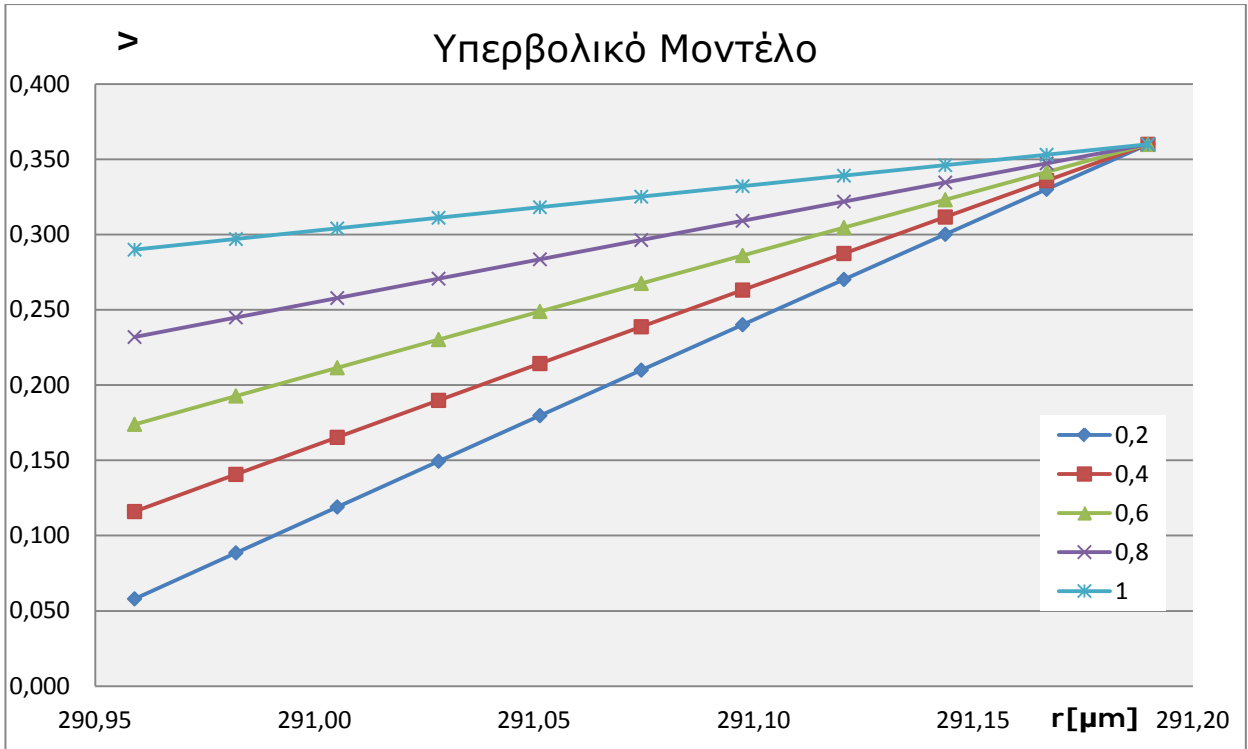
r (μm)	ν (Παραβολικό Μοντέλο)				
	0,2	0,4	0,6	0,8	1
290,96	0,058	0,116	0,174	0,232	0,290
290,98	0,115	0,162	0,209	0,256	0,303
291,01	0,167	0,204	0,241	0,278	0,315
291,03	0,212	0,240	0,269	0,297	0,326
291,05	0,251	0,272	0,293	0,314	0,335
291,07	0,284	0,299	0,313	0,328	0,342
291,10	0,312	0,321	0,330	0,340	0,349
291,12	0,333	0,338	0,343	0,348	0,354
291,14	0,348	0,350	0,353	0,355	0,357
291,17	0,357	0,358	0,358	0,359	0,359
291,19	0,360	0,360	0,360	0,360	0,360

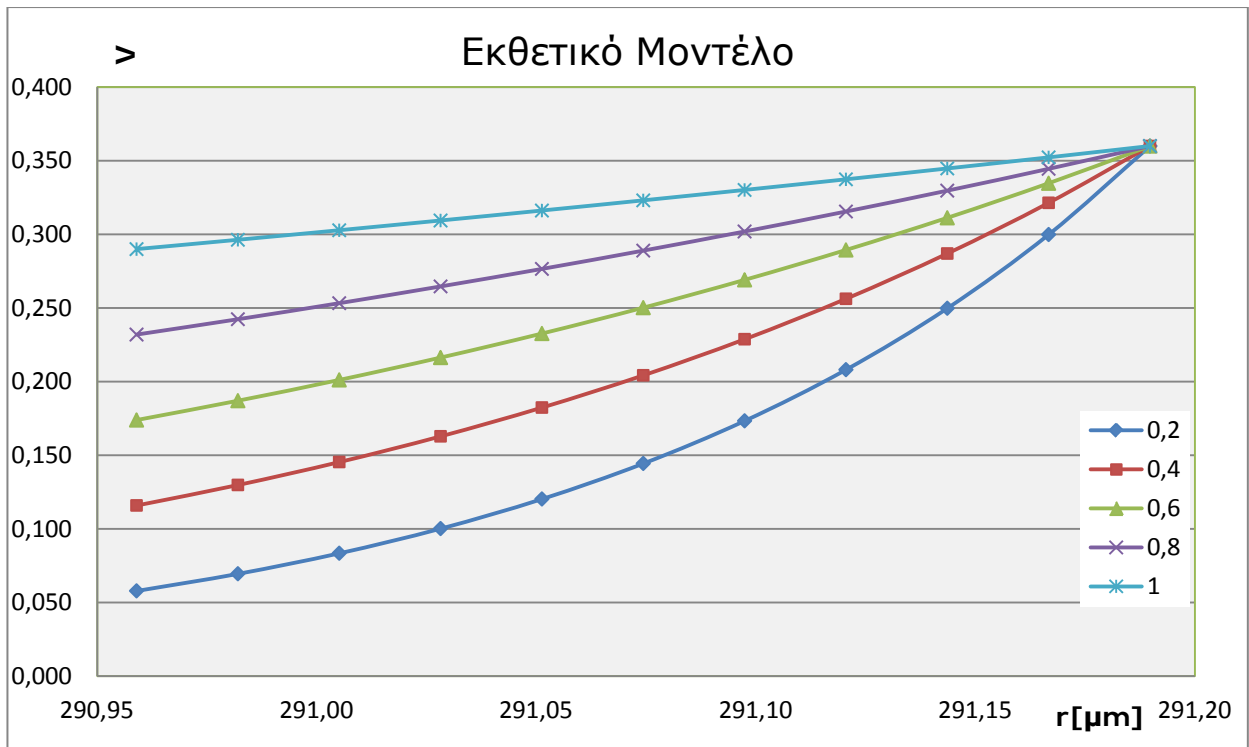
r (μm)	ν (Υπερβολικό Μοντέλο)				
	0,2	0,4	0,6	0,8	1
290,96	0,058	0,116	0,174	0,232	0,290
290,98	0,089	0,141	0,193	0,245	0,297
291,01	0,119	0,165	0,212	0,258	0,304
291,03	0,149	0,190	0,230	0,271	0,311
291,05	0,180	0,214	0,249	0,284	0,318
291,07	0,210	0,239	0,268	0,296	0,325
291,10	0,240	0,263	0,286	0,309	0,332
291,12	0,270	0,287	0,305	0,322	0,339
291,14	0,300	0,312	0,323	0,335	0,346
291,17	0,330	0,336	0,342	0,347	0,353
291,19	0,360	0,360	0,360	0,360	0,360

r (μm)	ν (Λογαριθμικό Μοντέλο)				
	0,2	0,4	0,6	0,8	1
290,96	0,058	0,116	0,174	0,232	0,290
290,98	0,088	0,141	0,193	0,245	0,297
291,01	0,119	0,165	0,211	0,258	0,304
291,03	0,149	0,190	0,230	0,271	0,311
291,05	0,179	0,214	0,249	0,283	0,318
291,07	0,209	0,238	0,267	0,296	0,325
291,10	0,240	0,263	0,286	0,309	0,332
291,12	0,270	0,287	0,304	0,322	0,339
291,14	0,300	0,311	0,323	0,335	0,346
291,17	0,330	0,336	0,342	0,347	0,353
291,19	0,360	0,360	0,360	0,360	0,360

r (μm)	ν (Εκθετικό Μοντέλο)				
	0,2	0,4	0,6	0,8	1
290,96	0,058	0,116	0,174	0,232	0,290
290,98	0,070	0,130	0,187	0,242	0,296
291,01	0,084	0,145	0,201	0,253	0,303
291,03	0,100	0,163	0,216	0,265	0,309
291,05	0,120	0,182	0,233	0,277	0,316
291,07	0,144	0,204	0,250	0,289	0,323
291,10	0,173	0,229	0,269	0,302	0,330
291,12	0,208	0,256	0,289	0,316	0,337
291,14	0,250	0,287	0,311	0,330	0,345
291,17	0,300	0,321	0,335	0,345	0,352
291,19	0,360	0,360	0,360	0,360	0,360







Οι παραπάνω πίνακες και τα διαγράμματα αναφέροντα στη δεύτερη ενδιάμεση φάση του Κυβικού Μοντέλου 1.

Σε όλες τις παραπάνω γραφικές παραστάσεις παρατηρούμε ότι η τιμή του ν αυξάνει καθώς αυξάνεται η ακτίνα r . Αυτό είναι κάτι που αναμένουμε, αφού αυξανόμενης της ακτίνας r , πλησιάζουμε φάση μήτρας και απομακρυνόμαστε από τη φάση του εγκλείσματος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΕΛΑΣΤΙΚΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ ΜΕΣΩ ΤΩΝ ΘΕΩΡΗΤΙΚΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ

6.1 ΠΑΡΑΔΟΧΕΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΤΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

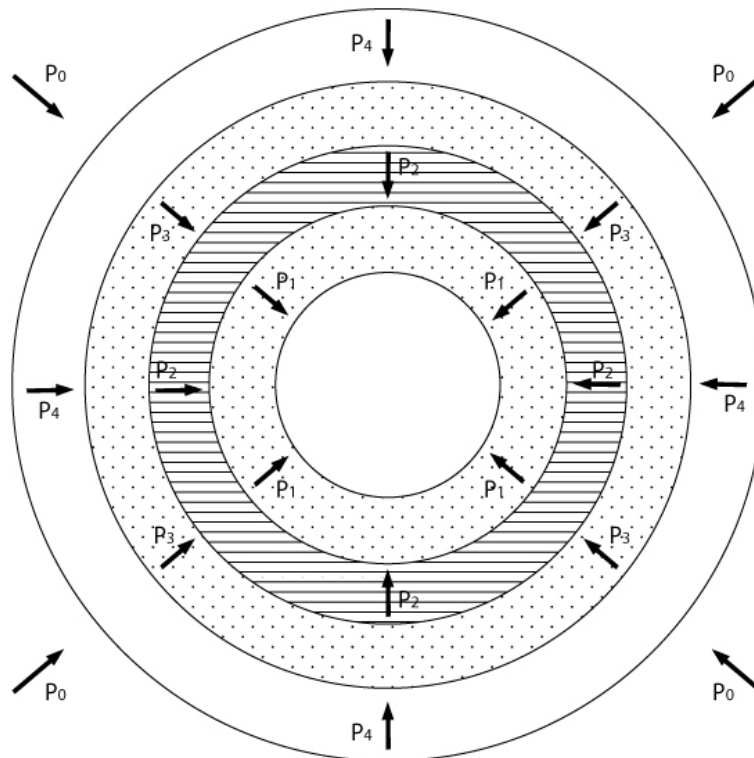
Η μοντελοποίηση του πραγματικού συνθέτου υλικού για να γίνει η μελέτη του με χρήση της θεωρίας ελαστικότητας βασίζεται στις εξής παραδοχές :

- Το έγκλεισμα (filler) αποτελείται από κόκκους οι οποίοι έχουν τέλειο σφαιρικό σχήμα και είναι όλοι του ίδιου μεγέθους με διάμετρο $d_f = 150\mu\text{m}$.
- Οι δύο φάσεις του συνθέτου υλικού (έγκλεισμα και μήτρα) θεωρούνται ελαστικά, ομογενή και ισότροπα υλικά, ενώ η τρίτη φάση (ενδιάμεση φάση) μη ομοιογενής με μεταβλητές ιδιότητες κατά την ακτινική διεύθυνση.
- Ο αριθμός των εγκλεισμάτων είναι μεγάλος και η κατανομή τους μπορεί να θεωρηθεί ομοιόμορφη, έτσι ώστε το σύνθετο υλικό να μπορεί να θεωρηθεί ομοιογενές και ισότροπο ή μακροσκοπικώς ισότροπο.
- Οι παραμορφώσεις που αναπτύσσονται στο σύνθετο υλικό είναι αρκετά μικρές ώστε να μπορεί να θεωρηθεί ότι ισχύουν οι γραμμικές σχέσεις τάσεων - παραμορφώσεων

6.2 ΠΕΝΤΑΦΑΣΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

Θεωρούμε το πενταφασικό, σφαιρικό μοντέλο.

Έστω ότι στην εξωτερική επιφάνεια της σφαίρας ακτίνας r_5 ασκούμε ομοιόμορφα ακτινική πίεση P_0 . Λόγω της αλληλεπίδρασης μεταξύ 5ης και 4ης φάσης, στο σύνορο τους θα υπάρχει μια κοινή τάση (πίεση) που την καλούμε P_4 . Ομοίως, λόγω αλληλεπίδρασης 4ης και 3ης φάσης, στο σύνορο τους θα υπάρχει μια τάση P_3 και λόγω αλληλεπίδρασης 3ης και 2ης φάσης στο σύνορο τους θα υπάρχει μια τάση P_2 . Τέλος λόγω αλληλεπίδρασης 1ης και 2ης φάσης στο σύνορο τους θα υπάρχει μια τάση P_1 . Ακολουθεί το σχήμα:



Η τασική συνάρτηση Φ σε σφαιρικές συντεταγμένες, που περιγράφει το πρόβλημα μας είναι:

$$\Phi = \frac{k_1}{r} + k_2 r^2$$

Κάθε μια από τις πέντε φάσεις έχει τη δική της τασική συνάρτηση:

$$\Phi_1 = \frac{A}{r} + B r^2$$

$$\Phi_2 = \frac{C}{r} + D r^2$$

$$\Phi_3 = \frac{F}{r} + H r^2$$

$$\Phi_4 = \frac{K}{r} + L r^2$$

$$\Phi_5 = \frac{M}{r} + N r^2$$

Στη θέση $r = 0$ πρέπει η τασική συνάρτηση να μην απειρίζεται δηλ. για $r = 0$ πρέπει $A = 0$, άρα

$$\Phi_1 = B r^2$$

Οι μετατοπίσεις δίνονται από τον τύπο :

$$\vec{u} = \frac{1}{2G} \text{grad } \Phi$$

Λόγω της σφαιρικής συμμετρίας οι μετατοπίσεις κατά τις διευθύνσεις ϕ και θ είναι μηδενικές:

$$u_\phi = u_\theta = 0$$

Οι ακτινικές μετατοπίσεις είναι:

$$u_{r,1} = \frac{Br}{G_1}$$

$$u_{r,2} = \frac{-\frac{C}{r^2} + 2Dr}{2G_2}$$

$$u_{r,3} = \frac{-\frac{F}{r^2} + 2Hr}{2G_3}$$

$$u_{r,4} = \frac{-\frac{K}{r^2} + 2Lr}{2G_4}$$

$$u_{r,5} = \frac{-\frac{M}{r^2} + 2Nr}{2G_5}$$

Οι παραμορφώσεις είναι:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}$$

$$u_\phi = u_\theta = 0$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} 0 = \frac{u_r}{r}$$

$$\varepsilon_\phi = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} 0 = \frac{u_r}{r}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\varepsilon_{r,1} = \varepsilon_{\theta,1} = \varepsilon_{\phi,1} = 2B \frac{1+\nu_1}{E_1}$$

$$\varepsilon_{r,2} = \left[\frac{2C}{r^3} + 2D \right] \frac{1 + \nu_2}{E_2}$$

$$\varepsilon_{\theta,2} = \varepsilon_{\varphi,2} = \left[-\frac{C}{r^3} + 2D \right] \frac{1 + \nu_2}{E_2}$$

$$\varepsilon_{r,3} = \left[\frac{2F}{r^3} + 2H \right] \frac{1 + \nu_3}{E_3}$$

$$\varepsilon_{\theta,3} = \varepsilon_{\varphi,3} = \left[-\frac{F}{r^3} + 2H \right] \frac{1 + \nu_3}{E_3}$$

$$\varepsilon_{r,4} = \left[\frac{2K}{r^3} + 2L \right] \frac{1 + \nu_4}{E_4}$$

$$\varepsilon_{\theta,4} = \varepsilon_{\varphi,4} = \left[-\frac{K}{r^3} + 2L \right] \frac{1 + \nu_4}{E_4}$$

$$\varepsilon_{r,5} = \left[\frac{2M}{r^3} + 2N \right] \frac{1 + \nu_5}{E_5}$$

$$\varepsilon_{\theta,5} = \varepsilon_{\varphi,5} = \left[-\frac{M}{r^3} + 2N \right] \frac{1 + \nu_5}{E_5}$$

ΤΑΣΕΙΣ

Από το βιβλίο «Μηχανική Παραμορφώσιμων Σωμάτων Ι» του Τσαμασφύρου [53]

$$\sigma_r = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_r + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \theta$$

$$\theta = \varepsilon_r + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_\theta$$

Προκύπτουν οι παρακάτω τάσεις άνα φάση:

$$\sigma_{r,1} = \sigma_{\theta,1} = \sigma_{\varphi,1} = \frac{2(1+\nu_1)}{(1-2\nu_1)} B$$

$$\sigma_{r,2} = \frac{2C}{r^3} + \frac{2(1+\nu_2)}{(1-2\nu_2)} D$$

$$\sigma_{\theta,2} = \sigma_{\varphi,2} = -\frac{C}{r^3} + \frac{2(1+\nu_2)}{(1-2\nu_2)} D$$

$$\sigma_{r,3} = \frac{2F}{r^3} + \frac{2(1 + \nu_3)}{(1 - 2\nu_3)} H$$

$$\sigma_{\theta,3} = \sigma_{\varphi,3} = -\frac{F}{r^3} + \frac{2(1 + \nu_3)}{(1 - 2\nu_3)} H$$

$$\sigma_{r,4} = \frac{2K}{r^3} + \frac{2(1 + \nu_4)}{(1 - 2\nu_4)} L$$

$$\sigma_{\theta,4} = \sigma_{\varphi,4} = -\frac{K}{r^3} + \frac{2(1 + \nu_4)}{(1 - 2\nu_4)} L$$

$$\sigma_{r,5} = \frac{2M}{r^3} + \frac{2(1 + \nu_5)}{(1 - 2\nu_5)} N$$

$$\sigma_{\theta,5} = \sigma_{\varphi,5} = -\frac{M}{r^3} + \frac{2(1 + \nu_5)}{(1 - 2\nu_5)} N$$

Συνοριακές συνθήκες τάσεων

Για $r = r_1$: $\sigma_{r,1} = \sigma_{r,2} = -P_1$

Για $r = r_2$: $\sigma_{r,2} = \sigma_{r,3} = -P_2$

Για $r = r_3$: $\sigma_{r,3} = \sigma_{r,4} = -P_3$

Για $r = r_4$: $\sigma_{r,4} = \sigma_{r,5} = -P_4$

Για $r = r_5$: $\sigma_{r,5} = -P_0$

Εφαρμόζοντας τις παραπάνω συνθήκες στις σχέσεις τάσεων που υπολόγισα έχω:

$$\frac{2(1 + \nu_1)}{(1 - 2\nu_2)} B = -P_1$$

$$\frac{2C}{r^3} + \frac{2(1 + \nu_2)}{(1 - 2\nu_2)} D = -P_1$$

$$\frac{2C}{r^3} + \frac{2(1 + \nu_2)}{(1 - 2\nu_2)} D = -P_2$$

$$\frac{2F}{r^3} + \frac{2(1 + \nu_3)}{(1 - 2\nu_3)} H = -P_2$$

$$\frac{2F}{r^3} + \frac{2(1 + \nu_3)}{(1 - 2\nu_3)} H = -P_3$$

$$\frac{2K}{r^3} + \frac{2(1 + \nu_4)}{(1 - 2\nu_4)} L = -P_3$$

$$\frac{2K}{r^3} + \frac{2(1 + \nu_4)}{(1 - 2\nu_4)} L = -P_4$$

$$\frac{2M}{r^3} + \frac{2(1 + \nu_5)}{(1 - 2\nu_5)} N = -P_4$$

$$\frac{2M}{r^3} + \frac{2(1 + \nu_5)}{(1 - 2\nu_5)} N = -P_0$$

Εφαρμόζοντας τις παραπάνω οριακές συνθήκες στις αντίστοιχες σχέσεις των ακτινικών τάσεων που παραθέσαμε προηγουμένως διαμορφώνεται ένα σύστημα 9x9 με αγνώστους τις σταθερές B,C,D,F,K,H,L,M,N .

Από την επίλυση του παραπάνω συστήματος προκύπτει

$$B = -\frac{P_1 (1 - 2\nu_2)}{2(1 + \nu_1)}$$

$$C = \frac{(P_2 - P_1) r_1^3 r_2^3}{2(r_2^3 - r_1^3)}$$

$$D = \frac{(r_1^3 P_1 - r_2^3 P_2)(1 - 2\nu_2)}{(r_2^3 - r_1^3)2(1 + \nu_2)}$$

$$F = \frac{(P_3 - P_2) r_2^3 r_3^3}{2(r_3^3 - r_2^3)}$$

$$H = \frac{(r_2^3 P_2 - r_3^3 P_3)(1 - 2\nu_3)}{(r_3^3 - r_2^3)2(1 + \nu_3)}$$

$$K = \frac{(P_4 - P_3) r_3^3 r_4^3}{2(r_4^3 - r_3^3)}$$

$$L = \frac{(r_3^3 P_3 - r_4^3 P_4)(1 - 2\nu_4)}{(r_4^3 - r_3^3)2(1 + \nu_4)}$$

$$M = \frac{(P_0 - P_4) r_4^3 r_5^3}{2(r_5^3 - r_4^3)}$$

$$N = \frac{(r_4^3 P_4 - r_5^3 P_0)(1 - 2v_5)}{(r_5^3 - r_4^3)2(1 + v_5)}$$

Αντικαθιστώ στις σχέσεις των μετατοπίσεων τις τιμές των σταθερών και έχω:

$$u_{r,1} = -\frac{P_1(1 - 2v_1)}{E_1} r \quad (6.1)$$

$$u_{r,2} = -\frac{(P_2 - P_1) r_1^3 r_2^3 (1 + v_2)}{2(r_2^3 - r_1^3)E_2} \frac{1}{r^2} + \frac{(r_1^3 P_1 - r_2^3 P_2)(1 - 2v_2)}{(r_2^3 - r_1^3)E_2} r \quad (6.2)$$

$$u_{r,3} = -\frac{(P_3 - P_2) r_2^3 r_3^3 (1 + v_3)}{2(r_3^3 - r_2^3)E_3} \frac{1}{r^2} + \frac{(r_2^3 P_2 - r_3^3 P_3)(1 - 2v_3)}{(r_3^3 - r_2^3)E_3} r \quad (6.3)$$

$$u_{r,4} = -\frac{(P_4 - P_3) r_3^3 r_4^3 (1 + v_4)}{2(r_4^3 - r_3^3)E_4} \frac{1}{r^2} + \frac{(r_3^3 P_3 - r_4^3 P_4)(1 - 2v_4)}{(r_4^3 - r_3^3)E_4} r \quad (6.4)$$

$$u_{r,5} = -\frac{(P_0 - P_4) r_4^3 r_5^3 (1 + v_5)}{2(r_5^3 - r_4^3)E_5} \frac{1}{r^2} + \frac{(r_4^3 P_4 - r_5^3 P_0)(1 - 2v_5)}{(r_5^3 - r_4^3)E_5} r \quad (6.5)$$

Συνοριακές συνθήκες μετατοπίσεων:

$$\text{Για } r = r_1 : \quad u_{r,1} = u_{r,2}$$

$$\text{Για } r = r_2 : \quad u_{r,2} = u_{r,3}$$

$$\text{Για } r = r_3 : \quad u_{r,3} = u_{r,4}$$

$$\text{Για } r = r_4 : \quad u_{r,4} = u_{r,5}$$

Εξισώνοντας τις σχέσεις (6.1) και (6.2) για $r = r_1$ έχω :

$$-\frac{P_1(1-2v_1)}{E_1}r_1 = -\frac{(P_2-P_1)r_1^3 r_2^3(1+v_2)}{2(r_2^3-r_1^3)E_2r_1^2} + \frac{(r_1^3P_1-r_2^3P_2)(1-2v_2)r_1}{(r_2^3-r_1^3)E_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{P_1(1-2v_1)}{E_1}r_1 - P_1 \frac{r_1^3 r_2^3(1+v_2)}{2(r_2^3-r_1^3)E_2r_1^2} - P_1 \frac{r_1^3(1-2v_2)r_1}{(r_2^3-r_1^3)E_2} =$$

$$= -P_2 \frac{r_1^3 r_2^3(1+v_2)}{2(r_2^3-r_1^3)E_2r_1^2} - P_2 \frac{r_1^3(1-2v_2)r_1}{(r_2^3-r_1^3)E_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_1[(1-2v_1)r_1^3 2 E_2(r_2^3-r_1^3) + r_1^3 r_2^3(1+v_2) E_1 + 2 E_1 r_1^6(1-2v_2)] =$$

$$= P_2[(1+v_2)r_1^3 r_2^3 E_1 + 2 r_1^3 r_2^3 E_1(1-2v_2)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_2 r_1^3(3r_2^3 E_1 - 3r_2^3 E_1 v_2) = P_1 r_1^3[2(1-2v_2)(r_2^3-r_1^3)E_2 + [r_2^3(1+v_2) + 2 r_1^3(1-2v_2)]E_1] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{3r_2^3 E_1 (1-v_2)}{2(1-2v_2)(r_2^3-r_1^3)E_2 + [r_2^3(1+v_2) + 2 r_1^3(1-2v_2)]E_1}$$

Θέτω $\frac{P_1}{P_2} = \mu$ άρα

$$\mu = \frac{3r_2^3 E_1 (1 - v_2)}{2(1 - 2v_2)(r_2^3 - r_1^3)E_2 + [r_2^3 (1 + v_2) + 2r_1^3(1 - 2v_2)]E_1}$$

Εξισώνοντας τις σχέσεις (6.2) και (6.3) για $r = r_2$ έχω :

$$\begin{aligned} & -\frac{(P_2 - P_1) r_1^3 r_2^3 (1 + v_2)}{2(r_2^3 - r_1^3)E_2 r_2^2} + \frac{(r_1^3 P_1 - r_2^3 P_2)(1 - 2v_2)r_2}{(r_2^3 - r_1^3)E_2} = \\ & -\frac{(P_3 - P_2) r_2^3 r_3^3 (1 + v_3)}{2(r_3^3 - r_2^3)E_3 r_2^2} + \frac{(r_2^3 P_2 - r_3^3 P_3)(1 - 2v_3) r_2}{(r_3^3 - r_2^3)E_3} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & P_1[3r_1^3(1 - v_2)(r_3^3 - r_2^3)E_3] + P_3[3r_3^3(1 - v_3)E_2(r_2^3 - r_1^3)] = \\ & = P_2[[r_1^3(1 + v_2) + 2r_3^3(1 - 2v_2)] E_3(r_3^3 - r_2^3) + [r_3^3(1 + v_3) + 2r_2^3(1 - \\ & 2v_3)]E_2(r_2^3 - r_1^3)] \Rightarrow \end{aligned}$$

$$P_3[3r_3^3(1 - v_3)E_2(r_2^3 - r_1^3)] = P_2[[r_1^3(1 + v_2) + 2r_3^3(1 - 2v_2)] E_3(r_3^3 - r_2^3) + [r_3^3(1 + v_3) + 2r_2^3(1 - 2v_3)]E_2(r_2^3 - r_1^3)] - 3\mu r_1^3(1 - v_2)(r_3^3 - r_2^3)E_3$$

Θέτω $P_2 = \lambda P_3$ με

$$\lambda = \frac{3r_3^3(1-v_3)E_2(r_2^3 - r_1^3)}{P_2[r_1^3(1+v_2)+2r_3^3(1-2v_2)] E_3(r_3^3-r_2^3)+[r_3^3(1+v_3)+2r_2^3(1-2v_3)]E_2(r_2^3-r_1^3)} \cdot 3\mu r_1^3(1-v_2)(r_3^3 - r_2^3)E_3$$

Εξισώνοντας τις σχέσεις (6.3) και (6.4) για $r = r_3$ έχω :

$$\begin{aligned} & -\frac{(P_3 - P_2) r_2^3 r_3^3(1 + v_3)}{2(r_3^3 - r_2^3)E_3 r_3^2} + \frac{(r_2^3 P_2 - r_3^3 P_3)(1 - 2v_3) r_3}{(r_3^3 - r_2^3)E_3} = \\ & -\frac{(P_4 - P_3) r_3^3 r_4^3(1 + v_4)}{2(r_4^3 - r_3^3)E_4 r_3^2} + \frac{(r_3^3 P_3 - r_4^3 P_4)(1 - 2v_4) r_3}{(r_4^3 - r_3^3)E_4} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & P_2[3r_2^3(1 - v_3)(r_4^3 - r_3^3)E_4] + P_4[3r_4^3(1 - v_4)(r_3^3 - r_2^3)E_3] = \\ & P_3[r_2^3(1 + v_3) + 2r_3^3(1 - 2v_3)]E_4(r_4^3 - r_3^3) + [r_4^3(1 + v_4) + 2r_3^3(1 - 2v_4)] \\ & \cdot (r_3^3 - r_2^3)E_3 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & P_4[3r_4^3(1 - v_4)(r_3^3 - r_2^3)E_3] = P_3[r_2^3(1 + v_3) + 2r_3^3(1 - 2v_3)]E_4 \\ & \cdot (r_4^3 - r_3^3) + [r_4^3(1 + v_4) + 2r_3^3(1 - 2v_4)](r_3^3 - r_2^3)E_3 - 3\lambda r_2^3(1 - v_3) \\ & \cdot (r_4^3 - r_3^3)E_4 \end{aligned}$$

Θέτω $P_3 = \nu P_4$

Εξισώνοντας τις σχέσεις (6.4) και (6.5) για $r = r_4$ έχω :

$$-\frac{(P_4 - P_3) r_3^3 r_4^3(1 + v_4)}{2(r_4^3 - r_3^3)E_4 r_4^2} + \frac{(r_3^3 P_3 - r_4^3 P_4)(1 - 2v_4) r_4}{(r_4^3 - r_3^3)E_4} =$$

$$= -\frac{(P_0 - P_4) r_4^3 r_5^3 (1 + v_5)}{2(r_5^3 - r_4^3) E_5 r_4^2} + \frac{(r_4^3 P_4 - r_5^3 P_0)(1 - 2v_5) r_4}{(r_5^3 - r_4^3) E_5} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P_0 [3r_5^3 (1 - v_5)(r_4^3 - r_3^3) E_4] &= P_4 [r_3^3 (1 + v_4) + 2r_4^3 (1 - 2v_4)] E_5 \\ \cdot (r_5^3 - r_4^3) + [r_5^3 (1 + v_5) + 2r_4^3 (1 - 2v_5)] &\cdot (r_4^3 - r_3^3) E_4 - 3vr_3^3 (1 - v_4) \\ &\cdot (r_5^3 - r_4^3) E_5 \end{aligned}$$

Θέτω $P_4 = \xi P_0$

Αντικαθιστώ τις τιμές των σταθερών που έχω υπολογίσει στις εξισώσεις των τάσεων:

$$\sigma_{\theta,1} = \sigma_{\varphi,1} = \sigma_{r,1} = \frac{2(1 + v_1) (-P_1) (1 - 2v_2)}{(1 - 2v_2) 2(1 + v_1)} = -P_1$$

$$\sigma_{r,2} = \frac{(P_2 - P_1) r_1^3 r_2^3}{(r_2^3 - r_1^3)} \frac{1}{r^3} + \frac{r_1^3 P_1 - r_2^3 P_2}{(r_2^3 - r_1^3)}$$

$$\sigma_{\theta,2} = \sigma_{\varphi,2} = -\frac{(P_2 - P_1) r_1^3 r_2^3}{2(r_2^3 - r_1^3)} \frac{1}{r^3} + \frac{r_1^3 P_1 - r_2^3 P_2}{(r_2^3 - r_1^3)}$$

$$\sigma_{r,3} = \frac{(P_3 - P_2) r_2^3 r_3^3}{(r_3^3 - r_2^3)} \frac{1}{r^3} + \frac{r_2^3 P_2 - r_3^3 P_3}{(r_3^3 - r_2^3)}$$

$$\sigma_{\theta,3} = \sigma_{\varphi,3} = -\frac{(P_3 - P_2) r_2^3 r_3^3}{2(r_3^3 - r_2^3)} \frac{1}{r^3} + \frac{r_2^3 P_2 - r_3^3 P_3}{(r_3^3 - r_2^3)}$$

$$\sigma_{r,4} = \frac{(P_4 - P_3) r_3^3 r_4^3}{(r_4^3 - r_3^3)} \frac{1}{r^3} + \frac{r_3^3 P_3 - r_4^3 P_4}{(r_4^3 - r_3^3)}$$

$$\sigma_{\theta,4} = \sigma_{\varphi,4} = -\frac{(P_4 - P_3) r_3^3 r_4^3}{2(r_4^3 - r_3^3)} \frac{1}{r^3} + \frac{r_3^3 P_3 - r_4^3 P_4}{(r_4^3 - r_3^3)}$$

$$\sigma_{r,5} = \frac{(P_0 - P_4) r_4^3 r_5^3}{(r_5^3 - r_4^3)} \frac{1}{r^3} + \frac{r_4^3 P_4 - r_5^3 P_0}{(r_5^3 - r_4^3)}$$

$$\sigma_{\theta,5} = \sigma_{\varphi,5} = -\frac{(P_0 - P_4) r_4^3 r_5^3}{2(r_5^3 - r_4^3)} \frac{1}{r^3} + \frac{r_4^3 P_4 - r_5^3 P_0}{(r_5^3 - r_4^3)}$$

Αντικαθιστώ τις τιμές των σταθερών που έχω υπολογίσει στις εξισώσεις των παραμορφώσεων:

$$\varepsilon_{r,1} = \varepsilon_{\theta,1} = \varepsilon_{\varphi,1} = \frac{2(-P_1) (1 - 2\nu_1)}{2(1 + \nu_1)} \frac{1 + \nu_1}{E_1} = -\frac{P_1 (1 - 2\nu_1)}{E_1}$$

$$\varepsilon_{r,2} = \frac{(P_2 - P_1) r_1^3 r_2^3 (1 + v_2)}{(r_2^3 - r_1^3) E_2} \frac{1}{r^3} + \frac{(1 - 2v_1) r_1^3 P_1 - r_2^3 P_2}{E_2 (r_2^3 - r_1^3)}$$

$$\varepsilon_{\theta,2} = \varepsilon_{\varphi,2} = -\frac{(P_2 - P_1) r_1^3 r_2^3 (1 + v_2)}{2(r_2^3 - r_1^3) E_2} \frac{1}{r^3} + \frac{(1 - 2v_1) r_1^3 P_1 - r_2^3 P_2}{E_2 (r_2^3 - r_1^3)}$$

$$\varepsilon_{r,3} = \frac{(P_3 - P_2) r_2^3 r_3^3 (1 + v_3)}{(r_3^3 - r_2^3) E_3} \frac{1}{r^3} + \frac{(1 - 2v_3) r_2^3 P_2 - r_3^3 P_3}{E_3 (r_3^3 - r_2^3)}$$

$$\varepsilon_{\theta,3} = \varepsilon_{\varphi,3} = -\frac{(P_3 - P_2) r_2^3 r_3^3 (1 + v_3)}{2(r_3^3 - r_2^3) E_3} \frac{1}{r^3} + \frac{(1 - 2v_3) r_2^3 P_2 - r_3^3 P_3}{E_3 (r_3^3 - r_2^3)}$$

$$\varepsilon_{r,4} = \frac{(P_4 - P_3) r_3^3 r_4^3 (1 + v_4)}{(r_4^3 - r_3^3) E_4} \frac{1}{r^3} + \frac{(1 - 2v_4) r_3^3 P_3 - r_4^3 P_4}{E_4 (r_4^3 - r_3^3)}$$

$$\varepsilon_{\theta,4} = \varepsilon_{\varphi,4} = -\frac{(P_4 - P_3) r_3^3 r_4^3 (1 + v_4)}{2(r_4^3 - r_3^3) E_4} \frac{1}{r^3} + \frac{(1 - 2v_4) r_3^3 P_3 - r_4^3 P_4}{E_4 (r_4^3 - r_3^3)}$$

$$\varepsilon_{r,5} = \frac{(P_0 - P_4) r_4^3 r_5^3 (1 + v_5)}{(r_5^3 - r_4^3) E_5} \frac{1}{r^3} + \frac{(1 - 2v_5) r_4^3 P_4 - r_5^3 P_0}{E_5 (r_5^3 - r_4^3)}$$

$$\varepsilon_{\theta,5} = \varepsilon_{\varphi,5} = -\frac{(P_0 - P_4) r_4^3 r_5^3 (1 + v_5)}{2(r_5^3 - r_4^3) E_5} \frac{1}{r^3} + \frac{(1 - 2v_5) r_4^3 P_4 - r_5^3 P_0}{E_5 (r_5^3 - r_4^3)}$$

Για να υπολογίσω το μέτρο ελαστικότητας E_c του σύνθετου υλικού, θεωρώ ότι η ενέργεια παραμόρφωσης του υλικού ισούται με το άθροισμα των ενεργειών παραμόρφωσης των πέντε φάσεων από τις οποίες αποτελείται:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{v_c} \frac{P_0^2}{K_c} dv &= \frac{1}{2} \int_{v_1} (\sigma_{r,1} \cdot \varepsilon_{r,1} + \sigma_{\theta,1} \cdot \varepsilon_{\theta,1} + \sigma_{\varphi,1} \cdot \varepsilon_{\varphi,1}) dv_1 + \frac{1}{2} \int_{v_2} (\sigma_{r,2} \cdot \varepsilon_{r,2} + \sigma_{\theta,2} \\ &\cdot \varepsilon_{\theta,2} + \sigma_{\varphi,2} \cdot \varepsilon_{\varphi,2}) dv_2 + \frac{1}{2} \int_{v_3} (\sigma_{r,3} \cdot \varepsilon_{r,3} + \sigma_{\theta,3} \cdot \varepsilon_{\theta,3} + \sigma_{\varphi,3} \cdot \varepsilon_{\varphi,3}) dv_3 \\ &+ \frac{1}{2} \int_{v_4} (\sigma_{r,4} \cdot \varepsilon_{r,4} + \sigma_{\theta,4} \cdot \varepsilon_{\theta,4} + \sigma_{\varphi,4} \cdot \varepsilon_{\varphi,4}) dv_4 + \frac{1}{2} \int_{v_5} (\sigma_{r,5} \cdot \varepsilon_{r,5} \\ &+ \sigma_{\theta,5} \cdot \varepsilon_{\theta,5} + \sigma_{\varphi,5} \cdot \varepsilon_{\varphi,5}) dv_5 \end{aligned}$$

Όπου $K_c = \frac{E_c}{3(1-2\nu_c)}$ το μέτρο διόγκωσης συνθέτου υλικού και $v =$

$$\frac{4}{3} \pi r^3 \Rightarrow dv = 4\pi r^2 dr$$

Η παραπάνω σχέση μετασχηματίζεται ως :

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{r_5} \frac{3P_0^2(1-2\nu_c)}{E_c} r^2 dr \\
 &= \int_0^{r_1} (\sigma_{r,1} \cdot \varepsilon_{r,1} + \sigma_{\theta,1} \cdot \varepsilon_{\theta,1} + \sigma_{\varphi,1} \cdot \varepsilon_{\varphi,1}) r^2 dr + \int_{r_1}^{r_2} (\sigma_{r,2} \cdot \varepsilon_{r,2} + \sigma_{\theta,2} \\
 &\cdot \varepsilon_{\theta,2} + \sigma_{\varphi,2} \cdot \varepsilon_{\varphi,2}) r^2 dr + \int_{r_2}^{r_3} (\sigma_{r,3} \cdot \varepsilon_{r,3} + \sigma_{\theta,3} \cdot \varepsilon_{\theta,3} + \sigma_{\varphi,3} \cdot \varepsilon_{\varphi,3}) r^2 dr \\
 &+ \int_{r_3}^{r_4} (\sigma_{r,4} \cdot \varepsilon_{r,4} + \sigma_{\theta,4} \cdot \varepsilon_{\theta,4} + \sigma_{\varphi,4} \cdot \varepsilon_{\varphi,4}) r^2 dr + \int_{r_4}^{r_5} (\sigma_{r,5} \cdot \varepsilon_{r,5} + \sigma_{\theta,5} \\
 &\cdot \varepsilon_{\theta,5} + \sigma_{\varphi,5} \cdot \varepsilon_{\varphi,5}) r^2 dr \tag{6.6}
 \end{aligned}$$

Θα υπολογίσω τα επιμέρους ολοκληρώματα:

$$\int_0^{r_5} \frac{3P_0^2(1-2\nu_c)}{E_c} r^2 dr = \frac{3P_0^2(1-2\nu_c)}{E_c} \int_0^{r_5} r^2 dr = \frac{3P_0^2(1-2\nu_c)}{E_c} \frac{r_5^3}{3} = \frac{P_0^2(1-2\nu_c)r_5^3}{E_c}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^{r_1} (\sigma_{r,1} \cdot \varepsilon_{r,1} + \sigma_{\theta,1} \cdot \varepsilon_{\theta,1} + \sigma_{\varphi,1} \cdot \varepsilon_{\varphi,1}) r^2 dr &= \int_0^{r_1} 3(-P_1) \frac{(-P_1)(1-2\nu_1)}{E_1} r^2 dr = \\
 &= \frac{3P_1^2(1-2\nu_1)}{E_1} \int_0^{r_1} r^2 dr = \frac{3P_1^2(1-2\nu_1)}{E_1} \frac{r_1^3}{3} = \frac{P_1^2(1-2\nu_1)r_1^3}{E_1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{r_1}^{r_2} (\sigma_{r,2} \cdot \varepsilon_{r,2} + \sigma_{\theta,2} \cdot \varepsilon_{\theta,2} + \sigma_{\varphi,2} \cdot \varepsilon_{\varphi,2}) r^2 dr \\
&= \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{(P_2 - P_1) r_1^3 r_2^3}{(r_2^3 - r_1^3)} \frac{1}{r^3} \right. \\
&+ \left. \frac{r_1^3 P_1 - r_2^3 P_2}{(r_2^3 - r_1^3)} \right) \left(\frac{(P_2 - P_1) r_1^3 r_2^3 (1 + v_2)}{(r_2^3 - r_1^3) E_2} \frac{1}{r^3} \right. \\
&+ \left. \frac{(1 - 2v_2) r_1^3 P_1 - r_2^3 P_2}{E_2 (r_2^3 - r_1^3)} \right) \\
&+ 2 \left(- \frac{(P_2 - P_1) r_1^3 r_2^3}{2(r_2^3 - r_1^3)} \frac{1}{r^3} \right. \\
&+ \left. \frac{r_1^3 P_1 - r_2^3 P_2}{(r_2^3 - r_1^3)} \right) \left(- \frac{(P_2 - P_1) r_1^3 r_2^3 (1 + v_2)}{2(r_2^3 - r_1^3) E_2} \frac{1}{r^3} \right. \\
&+ \left. \frac{(1 - 2v_1) r_1^3 P_1 - r_2^3 P_2}{E_2 (r_2^3 - r_1^3)} \right) dr
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{r_1}^{r_2} (\sigma_{r,2} \cdot \varepsilon_{r,2} + \sigma_{\theta,2} \cdot \varepsilon_{\theta,2} + \sigma_{\varphi,2} \cdot \varepsilon_{\varphi,2}) r^2 dr \\
&= \int_{r_1}^{r_2} \left\{ \left[\frac{(P_2 - P_1) r_1^3 r_2^3 (1 + v_2)}{(r_2^3 - r_1^3)^2 E_2} \frac{1}{r^6} \right. \right. \\
&+ \frac{(P_2 - P_1) r_1^3 r_2^3 (r_1^3 P_1 - r_2^3 P_2) (1 - 2v_2)}{(r_2^3 - r_1^3)^2 E_2} \frac{1}{r^3} \\
&+ \left. \frac{(r_1^3 P_1 - r_2^3 P_2) (1 + v_2)}{(r_2^3 - r_1^3)^2 E_2} \frac{1}{r^3} + \frac{(r_1^3 P_1 - r_2^3 P_2)^2 (1 - 2v_2)}{(r_2^3 - r_1^3)^2 E_2} \right] \\
&+ 2 \left[\frac{(P_2 - P_1) r_1^3 r_2^3 (1 + v_2)}{4(r_2^3 - r_1^3)^2 E_2} \frac{1}{r^6} \right. \\
&- \frac{(P_2 - P_1) r_1^3 r_2^3 (r_1^3 P_1 - r_2^3 P_2) (1 + v_2)}{2(r_2^3 - r_1^3)^2 E_2} \frac{1}{r^3} \\
&+ \left. \left. \frac{(r_1^3 P_1 - r_2^3 P_2)^2 (1 - 2v_2)}{(r_2^3 - r_1^3)^2 E_2} \right] \right\} r^2 dr =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{r_1}^{r_2} \left[\frac{3 (P_2 - P_1) r_1^3 r_2^3 (1 + v_2)}{2(r_2^3 - r_1^3)^2 E_2} \frac{1}{r^6} + 3 \frac{(r_1^3 P_1 - r_2^3 P_2)^2 (1 - 2v_2)}{(r_2^3 - r_1^3)^2 E_2} \right] r^2 dr = \\
&= \frac{3 (P_2 - P_1)^2 (r_1^3 r_2^3)^2 (1 + v_2)}{2(r_2^3 - r_1^3)^2 E_2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^4} dr + 3 \frac{(r_1^3 P_1 - r_2^3 P_2)^2 (1 - 2v_2)}{(r_2^3 - r_1^3)^2 E_2} \int_{r_1}^{r_2} r^2 dr \\
&= \frac{3 (P_2 - P_1)^2 (r_1^3 r_2^3)^2 (1 + v_2)}{2(r_2^3 - r_1^3)^2 E_2} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} \right) + 3 \frac{(r_1^3 P_1 - r_2^3 P_2)^2 (1 - 2v_2)}{3(r_2^3 - r_1^3)^2 E_2} (r_2^3 - r_1^3) \\
&\quad \frac{3 (P_2 - P_1)^2 r_1^3 r_2^3 (1 + v_2)}{2(r_2^3 - r_1^3)^2 E_2} = \\
&= \frac{(P_2 - P_1)^2 r_1^3 r_2^3 (1 + v_2)}{2(r_2^3 - r_1^3)^2 E_2} + \frac{(r_1^3 P_1 - r_2^3 P_2)^2 (1 - 2v_2)}{(r_2^3 - r_1^3)^2 E_2}
\end{aligned}$$

Ομοίως

$$\begin{aligned}
&\int_{r_2}^{r_3} (\sigma_{r,3} \cdot \varepsilon_{r,3} + \sigma_{\theta,3} \cdot \varepsilon_{\theta,3} + \sigma_{\varphi,3} \cdot \varepsilon_{\varphi,3}) r^2 dr = \\
&= \frac{(P_3 - P_2)^2 r_2^3 r_3^3 (1 + v_3)}{2(r_3^3 - r_2^3) E_3} + \frac{(r_2^3 P_2 - r_3^3 P_3)^2 (1 - 2v_3)}{(r_3^3 - r_2^3)^2 E_3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{r_3}^{r_4} (\sigma_{r,4} \cdot \varepsilon_{r,4} + \sigma_{\theta,4} \cdot \varepsilon_{\theta,4} + \sigma_{\varphi,4} \cdot \varepsilon_{\varphi,4}) r^2 dr = \\
&= \frac{(P_4 - P_3)^2 r_3^3 r_4^3 (1 + v_4)}{2(r_4^3 - r_3^3) E_4} + \frac{(r_3^3 P_3 - r_4^3 P_4)^2 (1 - 2v_4)}{(r_4^3 - r_3^3)^2 E_4}
\end{aligned}$$

$$\int_{r_4}^{r_5} (\sigma_{r,5} \cdot \varepsilon_{r,5} + \sigma_{\theta,5} \cdot \varepsilon_{\theta,5} + \sigma_{\varphi,5} \cdot \varepsilon_{\varphi,5}) r^2 dr$$

$$= \frac{(P_0 - P_4)^2 r_4^3 r_5^3 (1 + \nu_5)}{2(r_5^3 - r_4^3) E_5} + \frac{(r_4^3 P_4 - r_5^3 P_0)^2 (1 - 2\nu_5)}{(r_5^3 - r_4^3)^2 E_5}$$

Η σχέση (6.6) μετασχηματίζεται σε

$$\frac{2 P_0^2 (1 - 2\nu_c) r_5^3}{E_c} =$$

$$= \frac{2 P_1^2 (1 - 2\nu_1) r_1^3}{E_1} + \frac{(P_2 - P_1)^2 r_1^3 r_2^3 (1 + \nu_2)}{(r_2^3 - r_1^3)^2 E_2}$$

$$+ \frac{2(r_1^3 P_1 - r_2^3 P_2)^2 (1 - 2\nu_2)}{(r_2^3 - r_1^3)^2 E_2} + \frac{(P_3 - P_2)^2 r_2^3 r_3^3 (1 + \nu_3)}{(r_3^3 - r_2^3) E_3}$$

$$+ \frac{2(r_2^3 P_2 - r_3^3 P_3)^2 (1 - 2\nu_3)}{(r_3^3 - r_2^3)^2 E_3} + \frac{(P_4 - P_3)^2 r_3^3 r_4^3 (1 + \nu_4)}{(r_4^3 - r_3^3) E_4}$$

$$+ \frac{2(r_3^3 P_3 - r_4^3 P_4)^2 (1 - 2\nu_4)}{(r_4^3 - r_3^3)^2 E_4} + \frac{(P_0 - P_4)^2 r_4^3 r_5^3 (1 + \nu_5)}{(r_5^3 - r_4^3) E_5}$$

$$+ \frac{2(r_4^3 P_4 - r_5^3 P_0)^2 (1 - 2\nu_5)}{(r_5^3 - r_4^3)^2 E_5} \quad (6.7)$$

Ισχύει όπως εκφράστηκε και παραπάνω:

$$P_4 = \xi P_0 \quad (6.8)$$

$$P_3 = \nu P_4 = \nu \xi P_0 \quad (6.9)$$

$$P_2 = \lambda P_3 = \lambda \nu \xi P_0 \quad (6.10)$$

$$P_1 = \mu P_2 = \mu \lambda \nu \xi P_0 \quad (6.11)$$

Επίσης ισχύει

$$U_1 = \frac{r_1^3}{r_5^3}$$

$$U_2 = \frac{r_2^3 - r_1^3}{r_5^3}$$

$$U_3 = \frac{r_3^3 - r_2^3}{r_5^3}$$

$$U_4 = \frac{r_4^3 - r_3^3}{r_5^3}$$

$$U_5 = \frac{r_5^3 - r_4^3}{r_5^3}$$

$$U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 = 1$$

Αντικαθιστώ στη (6.7) τις (6.8) – (6.11) και διαιρώ με $P_0^2 r_5^3$:

$$\begin{aligned}
\frac{2(1-2v_c)}{E_c} &= \frac{2(\mu\lambda\nu\xi)^2(1-2v_1)r_1^3}{E_1 r_5^3} + \frac{(\lambda\nu\xi - \mu\lambda\nu\xi)^2 r_1^3 r_2^3 (1+v_2)}{(r_2^3 - r_1^3)^2 E_2 r_5^3} \\
&+ \frac{2(r_1^3 \mu\lambda\nu\xi - r_2^3 \lambda\nu\xi)^2 (1-2v_2)}{(r_2^3 - r_1^3)^2 E_2 r_5^3} + \frac{(\nu\xi - \lambda\nu\xi)^2 r_2^3 r_3^3 (1+v_3)}{(r_3^3 - r_2^3) E_3 r_5^3} \\
&+ \frac{2(\lambda\nu\xi r_2^3 - \nu\xi r_3^3)^2 (1-2v_3)}{(r_3^3 - r_2^3)^2 E_3 r_5^3} + \frac{(\xi - \nu\xi)^2 r_3^3 r_4^3 (1+v_4)}{(r_4^3 - r_3^3) E_4 r_5^3} \\
&+ \frac{2(\nu\xi r_3^3 - \xi r_4^3)^2 (1-2v_4)}{(r_4^3 - r_3^3)^2 E_4 r_5^3} + \frac{(1-\xi)^2 r_4^3 r_5^3 (1+v_5)}{(r_5^3 - r_4^3) E_5 r_5^3} \\
&+ \frac{2(r_4^3 \xi - r_5^3)^2 (1-2v_5)}{(r_5^3 - r_4^3)^2 E_5 r_5^3} \Rightarrow
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας και U_1, U_2, U_3, U_4 και U_5 των φάσεων προκύπτει τελικά:

$$\begin{aligned}
\frac{2(1-2v_c)}{E_c} &= 2(\mu\lambda\nu\xi)^2 \frac{2(1-2v_1)}{E_1} U_1 \\
&+ \frac{1}{E_2} \left[(\lambda\nu\xi)^2 (1-\mu)(1+v_2) \frac{U_1(U_1+U_2)}{U_2} \right. \\
&+ \left. 2(1-2v_2)(\lambda\nu\xi)^2 \frac{[\mu U_1 - (U_1+U_2)]^2}{U_2} \right] \\
&+ \frac{1}{E_3} \left[(\nu\xi)^2 (1-\lambda)^2 (1+v_3) \frac{(U_1+U_2)(U_1+U_2+U_3)}{U_3} \right. \\
&+ \left. 2(1-2v_3)(\nu\xi)^2 \frac{[(U_1+U_2)\lambda - (U_1+U_2+U_3)]^2}{U_3} \right] \\
&+ \frac{1}{E_4} \left[(\xi)^2 (1-\nu)^2 (1+v_4) \frac{(U_1+U_2+U_3)(U_1+U_2+U_3+U_4)}{U_4} \right. \\
&+ \left. 2(1-2v_4)(\xi)^2 \frac{[(U_1+U_2+U_3)\nu - (U_1+U_2+U_3+U_4)]^2}{U_4} \right] \\
&+ \frac{1}{E_5} \left[(1-\xi)^2 (1+v_5) \frac{1-U_5}{U_5} + 2(1-2v_5) \frac{[(1-U_5)\xi - 1]^2}{U_5} \right]
\end{aligned}$$

Ο λόγος Poisson του συνθέτου υλικού προκύπτει από τον νόμο των φάσεων και είναι:

$$\frac{1}{\nu_c} = \frac{U_1}{\nu_1} + \frac{U_2}{\nu_2} + \frac{U_3}{\nu_3} + \frac{U_4}{\nu_4} + \frac{U_5}{\nu_5}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕ ΑΛΛΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

7.1 Πειραματική διαδικασία- μεθοδολογία

Για να ελέγξουμε το πόσο καλά προσεγγίζουν την πραγματικότητα τα κυβικά πενταφασικά μοντέλα μας με ενδιάμεση φάση χρησιμοποιήσαμε πειραματικά δεδομένα από πειράματα τα οποία πραγματοποιήθηκαν στο εργαστήριο Αντοχής Υλικών.

Τα δοκίμια που χρησιμοποιήθηκαν στο πείραμα έχουν ως μήτρα εποξειδική ρητίνη τύπου DGEBA (Dyglycidyl Ether Bisphenol A) με ισοδύναμο 185-192, με μοριακό βάρος μεταξύ 370 και 384 και με ιξώδες 15000P στους 25°C, πολυμεριζόμενα εν ψυχρώ με 8% τριεθυλενική τετραμίνη.

Τα υλικά παρασκευάζονται ως εξής:

Το προ-πολυμερές θερμαίνεται σε θερμοκρασία πάνω από τους 30°C ώστε να μειωθεί το ιξώδες του και στη συνέχεια σε κατάλληλη ποσότητα αυτού προστίθεται κονιοποιημένος σίδηρος με διάμετρο κόκκων 150 μm. Το μείγμα αφού ανακατευθεί πλήρως τοποθετείται σε θάλαμο χαμηλής πίεσης για περίπου 15 λεπτά για απομαγνητισμό.

Στη συνέχεια τοποθετείται σε ορθογώνιο καλούπι από plexiglass, με κατάλληλο όγκο και σχήμα, επενδυμένο με σιλικόνη ώστε να μην κολλήσει.

Έπειτα κλείνεται έτσι ώστε να είναι δυνατό να περιστραφεί, για να αποτραπεί η κατακάθιση των εγκλεισμάτων σιδήρου και να προκύψει όσο το δυνατό ομοιογενές υλικό. Ο χρόνος τον οποίο χρειάζεται για να

«πήξει» το υλικό, για θερμοκρασία 20°C είναι 20-25 λεπτά, χρόνος ο οποίος μειώνεται ελαφρά από την παρουσία εγκλεισμάτων. Μετά την πάροδο των 20-25 λεπτών το ανακάτεμα δεν είναι πλέον απαραίτητο.

Το καλούπι απομακρύνεται 24 ώρες αργότερα και το χυτό υποβάλλεται σε θερμική επεξεργασία που περιλαμβάνει:

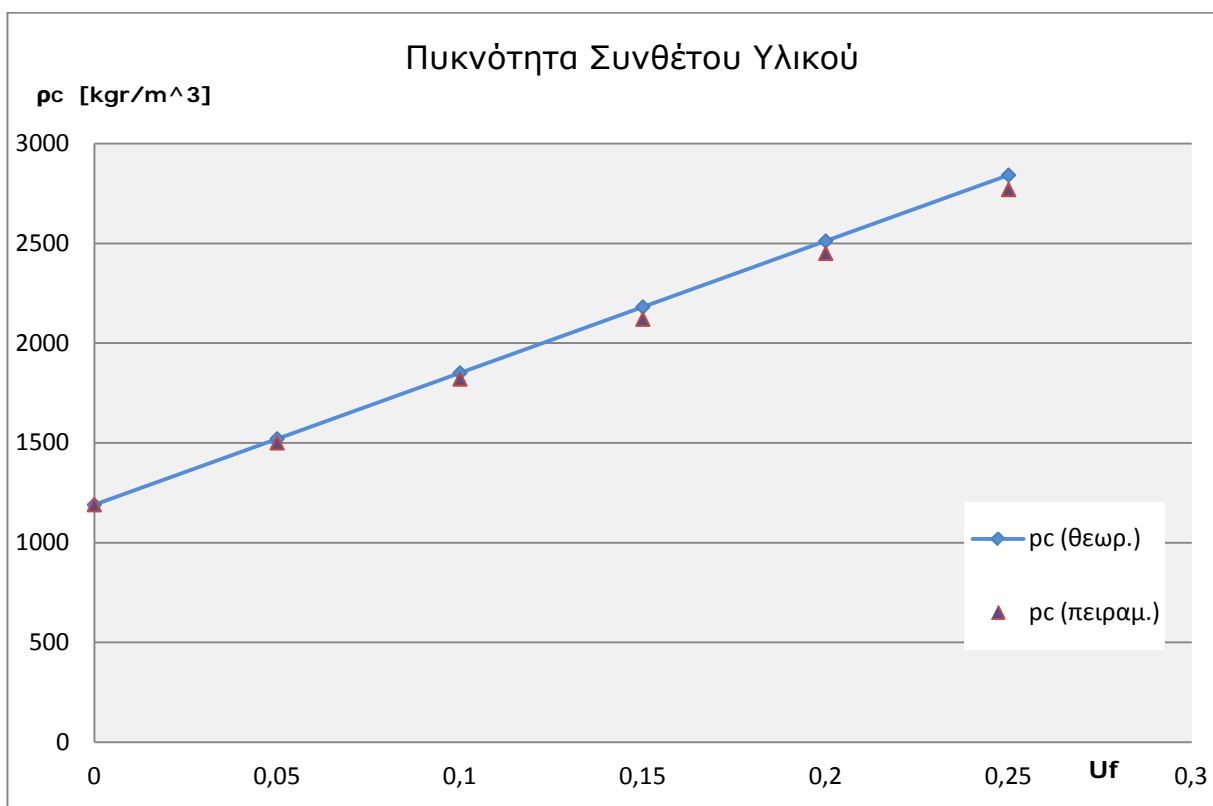
- Αύξηση της θερμοκρασίας με ρυθμό 5°C/h, σταθερή διατήρηση στους 100°C
- Τελική μείωση σε θερμοκρασία περιβάλλοντος με ρυθμό 1°C/h.

Με αυτό τον τρόπο επιτυγχάνουμε πλήρη πολυμερισμό του υλικού που θα χρησιμοποιηθεί ως μήτρα και επομένως οι ιδιότητες του τελικού προϊόντος είναι οι επιθυμητές.

Στα επεξεργασμένα δοκίμια γίνεται μέτρηση της πυκνότητας και η τιμή αυτή συγκρίνεται με την αντίστοιχη θεωρητική που προκύπτει από τη σχέση:

$$\rho_c = \rho_f U_f + \rho_m U_m$$

Τα αποτελέσματα από αυτή τη μέτρηση φαίνονται στο διάγραμμα που ακολουθεί :

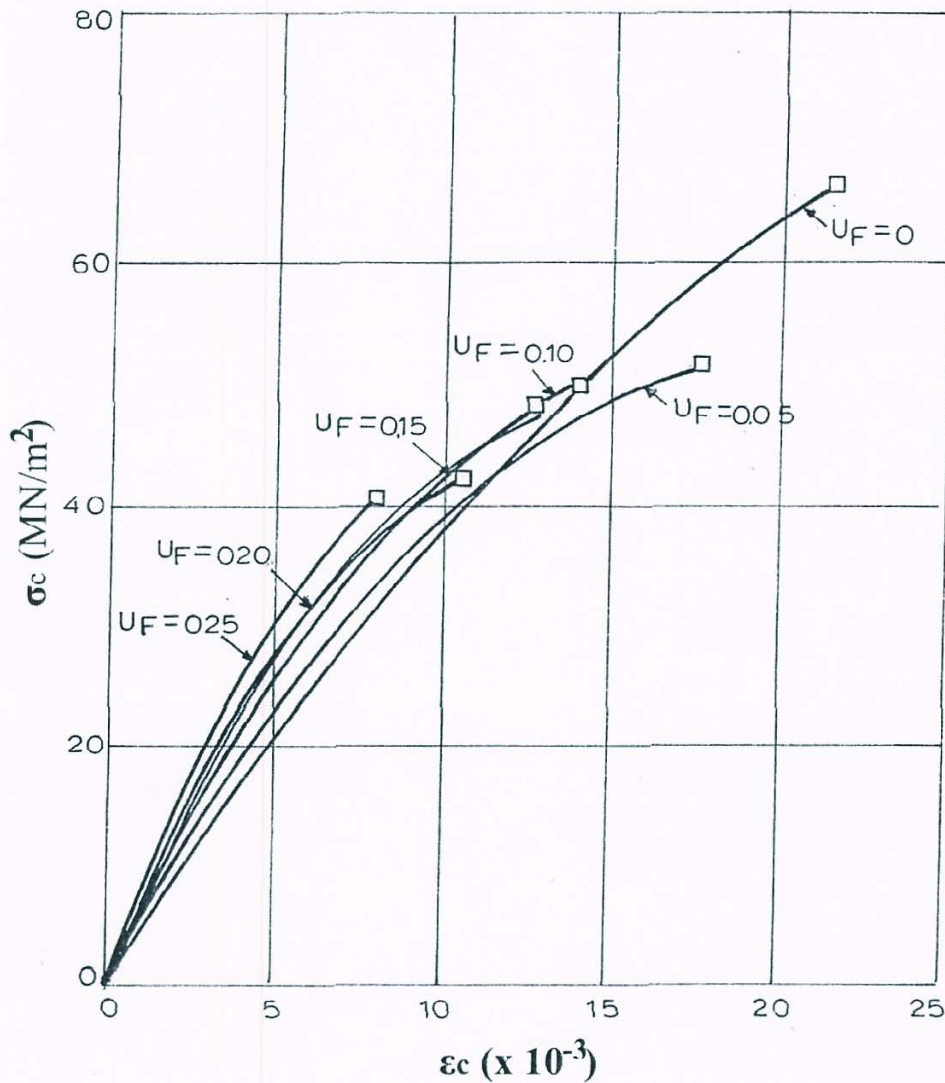


U_f	0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25
$\rho_c - \text{θεωρ. [kg/m}^3\text{]}$	1190	1520,5	1851	2181,5	2512	2842,5
$\rho_c - \text{πειρ. [kg/m}^3\text{]}$	1190	1500	1820	2120	2450	2770

Παρατηρούμε ότι τα πειραματικά μας αποτελέσματα έχουν πολύ μικρή απόκλιση από τα θεωρητικά, οπότε το υλικό μας μπορεί να θεωρηθεί συμπαγές και χωρίς ατέλειες (ασυνέχειες, κενά αέρος κ.λ.π.).

Για τον προσδιορισμό των μηχανικών ιδιοτήτων του κοκκώδους συνθέτου υλικού έγιναν πειράματα εφελκυσμού με συσκευή τύπου Instron σε θερμοκρασία δωματίου. 5 δοκίμια διαστάσεων 45x6x3mm χρησιμοποιήθηκαν για κάθε περιεκτικότητα. Η ταχύτητα φόρτισης $\dot{\epsilon}$ ήταν 0,1 cm/min.

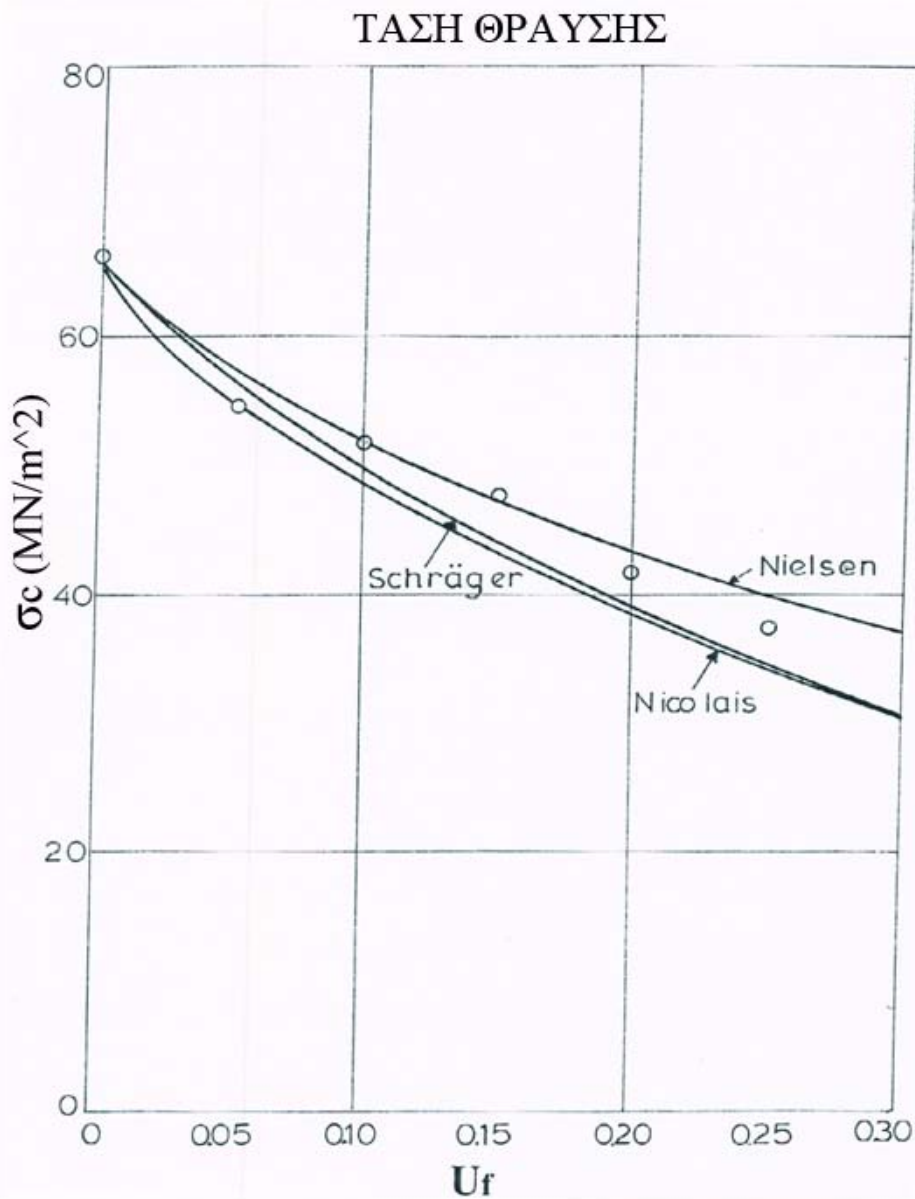
Στο σχήμα που ακολουθεί φαίνονται οι καμπύλες τάσεων-παραμορφώσεων για την εποξειδική ρητίνη ενισχυμένη με κόκκους σιδήρου.



Από τις καμπύλες αυτές φαίνεται η επίδραση της κατ' όγκο περιεκτικότητας σε σίδηρο στη μηχανική συμπεριφορά του συνθέτου υλικού. Η μορφή των καμπυλών αυτών δείχνει ότι γενικά τα σύνθετα αυτά υλικά εμφανίζουν μη γραμμικότητα. Επειδή η μήτρα είναι βισκοελαστικό υλικό η μη γραμμική συμπεριφορά η οποία παρατηρείται δύναται να οφείλεται σε παράγοντες εξαρτώμενους από το χρόνο. Είναι φανερό ότι ελαστική συμπεριφορά παρατηρείται μόνο στο αρχικό τμήμα τάσεων παραμορφώσεων.

Από τις ίδιες καμπύλες φαίνεται ότι καθώς αυξάνει η κατ' όγκο περιεκτικότητα του εγκλείσματος, προκύπτει μια πλέον ελαστική συμπεριφορά. Το γεγονός αυτό οφείλεται στο ότι το εγκλείσμα είναι καθαρά ελαστικό υλικό και η παρουσία του αποδυναμώνει την βισκοελαστική συμπεριφορά της μήτρας.

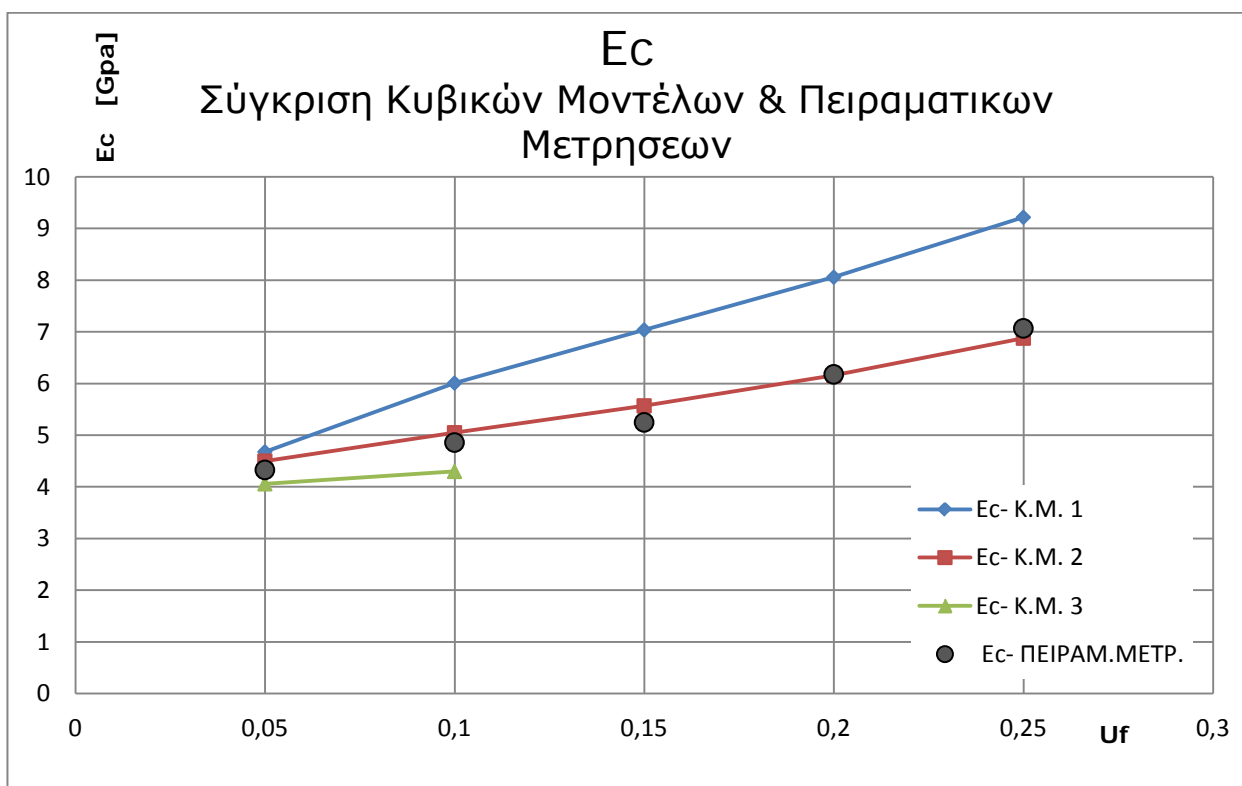
Τέλος μετρήθηκε η τάση θραύσης για διάφορες περιεκτικότητες και για ταχύτητα φορτίσεως $c=0,1\text{cm/min}$. Τα αποτελέσματα των μετρήσεων φαίνονται στο διάγραμμα που ακολουθεί.



Η κάποια διασπορά η οποία εμφανίζεται στα αποτελέσματα βρίσκεται μέσα στα όρια

των θεωρητικών καμπυλών των Nielsen, Nicolais και Schraeger.

7.2 Πίνακες – Διαγράμματα – Συμπεράσματα



Διάγραμμα 7.1

U_f	Πειραματικά	Κυβικό 1	Κυβικό 2	Κυβικό 3
	E_c (Gra)	E_c (Gra)	E_c (Gra)	E_c (Gra)
0,05	4,33	4,68	4,5	4,06
0,1	4,86	6,01	5,05	4,30
0,15	5,25	7,04	5,57	-
0,2	6,18	8,06	6,16	-
0,25	7,07	9,22	6,88	-

Πίνακας 7.1

Για να δούμε πόσο προσεγγίζουν οι θεωρητικές καμπύλες για το κάθε μοντέλο, τα πειραματικά σημεία, εισάγουμε από τη στατιστική ένα δείκτη προσαρμογής που φανερώνει πόσο καλά προσαρμόζεται η θεωρητική καμπύλη στα πειραματικά σημεία.

Ο συντελεστής προσαρμογής δίνεται από τον παρακάτω τύπο :

$$s = 100 \left[1 + \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \hat{y}_i)^2}{\hat{y}_i^2} \right] \%$$

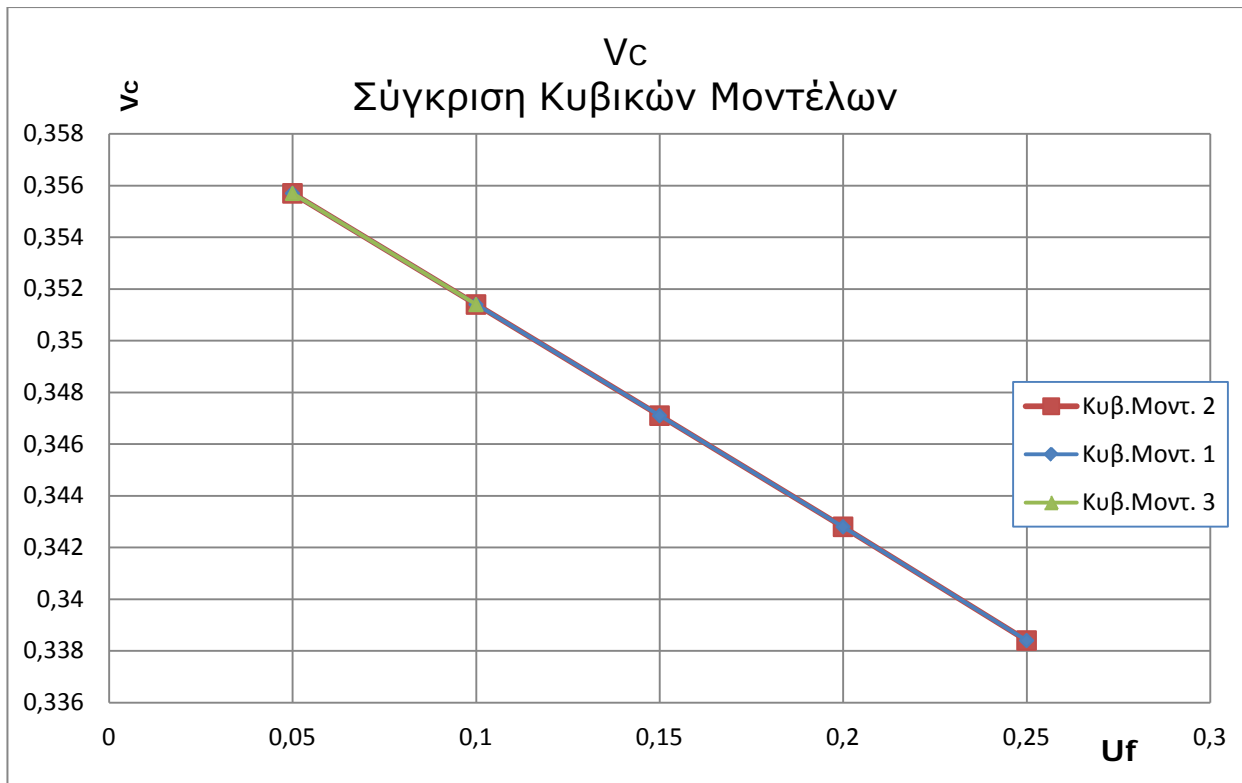
όπου y η πρόβλεψη του μεγέθους y (για εμάς E_c) στην τιμή x_i (U_f).

Η τιμή του συντελεστή προσαρμογής κυμαίνεται στο διάστημα $[0, 1]$. Μάλιστα όσο πιο πολύ τείνει προς τη μονάδα τόσο πιο καλή προσέγγιση στα πειραματικά μου δεδομένα έχω ενώ όσο τείνει προς το μηδέν, τόσο πιο κακή είναι η θεωρητική μου εκτίμηση.

Για τον συντελεστή προσαρμογής των δύο κυβικών μοντέλων 1 και 2 σε σχέση με τις πειραματικές τιμές, προέκυψαν τα παρακάτω αποτελέσματα:

	Συντελ. Προσαρμογής
S₁	92,81%
S₂	99,78%

Για το κυβικό μοντέλο 3 δεν ορίζεται ο συντελεστής προσαρμογής με τα σημεία που έχουμε, διότι για να ορισθεί ο συντελεστής προσαρμογής απαιτούνται τουλάχιστον τρία σημεία. Όμως είναι φανερό και οπτικά ακόμα, απλά κοιτάζοντας το διάγραμμα ότι δεν προσεγγίζει ιδιαίτερα καλά τα πειραματικά μας δεδομένα. Συνεπώς όπως είναι φανερό άλλωστε και από το παραπάνω διάγραμμα η καλύτερη προσέγγιση των πειραματικών δεδομένων γίνεται από το δεύτερο κυβικό μοντέλο.

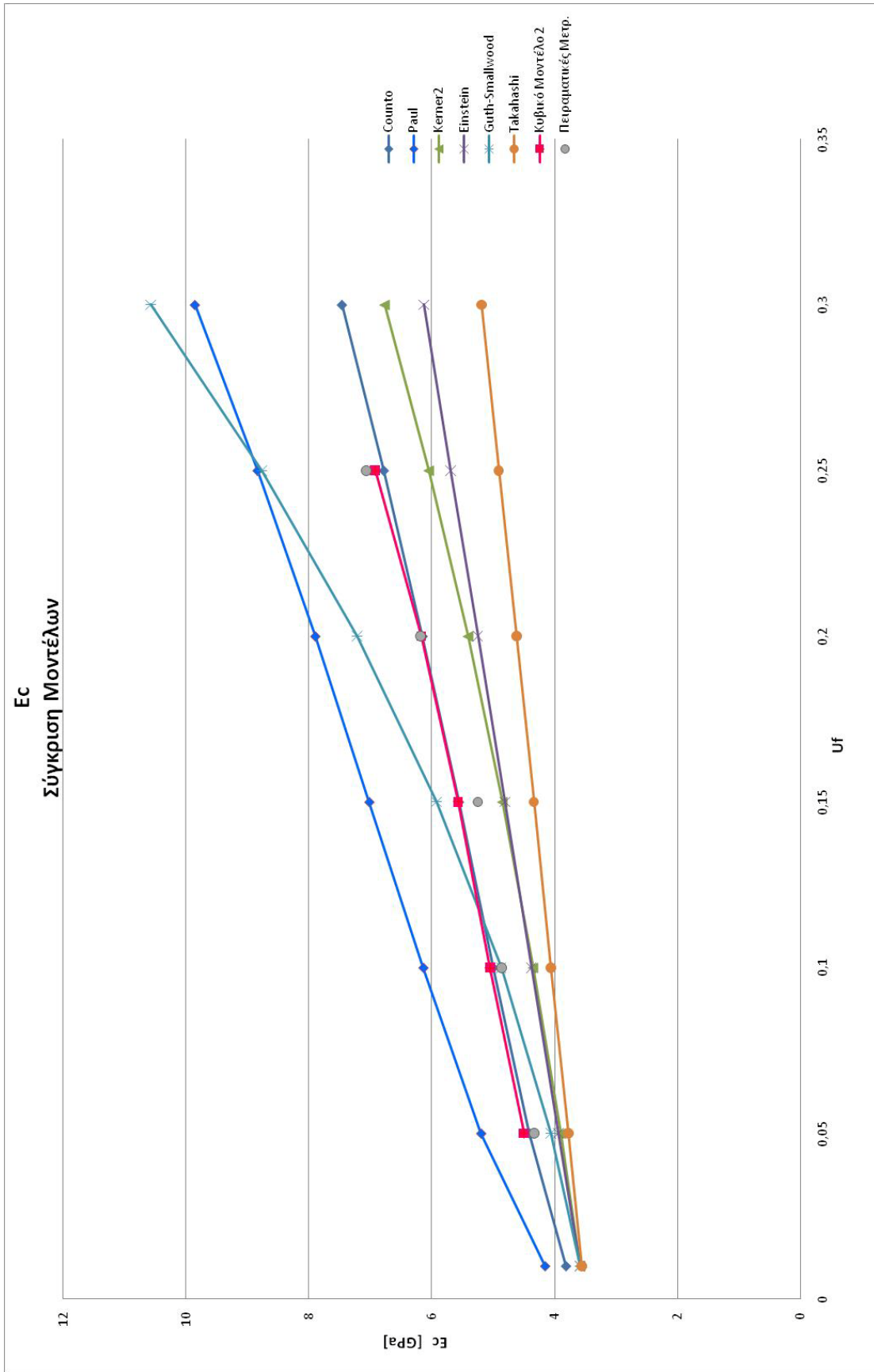


Διάγραμμα 7.2

U_f	Κυβικό 1	Κυβικό 2	Κυβικό 3
	V_c	V_c	V_c
0,05	0,3557	0,3557	0,3557
0,1	0,3514	0,3514	0,3514
0,15	0,3471	0,3471	-
0,2	0,3428	0,3428	-
0,25	0,3384	0,3384	-

Πίνακας 7.2

Για την τιμή του v_c παρατηρούμε ότι και τα τρία διαγράμματα σχεδόν συμπίπτουν. Αυτό συμβαίνει γιατί το εύρος μεταβολής του v_c , είναι πολύ μικρό, οπότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε οποιοδήποτε από τα τρία κυβικά μοντέλα (βεβαίως το κυβικό 3 μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε μόνο για $U_f < 13\%$, ώστε να ορίζεται).



Διάγραμμα 7.3

	Counto	Paul	Kerner2	Einstein	Guth-Smallwood	Takahashi
U_f	E_c (Gpa)	E_c (Gpa)	E_c (Gpa)	E_c (Gpa)	E_c (Gpa)	E_c (Gpa)
0,01	3,82	4,16	3,58	3,59	3,59	3,56
0,05	4,41	5,20	3,90	3,94	4,06	3,78
0,1	5,00	6,14	4,35	4,38	4,87	4,06
0,15	5,56	7,02	4,85	4,81	5,92	4,34
0,2	6,15	7,90	5,41	5,25	7,22	4,62
0,25	6,78	8,84	6,05	5,69	8,77	4,91
0,3	7,46	9,86	6,77	6,13	10,57	5,19

Πίνακας 7.3

Στο διάγραμμα 7.3 που αποτελεί τον πυρήνα της παρούσας εργασίας παρουσιάζεται η μεταβολή του μέτρου ελαστικότητας του συνθέτου E_c του κυβικού μοντέλου 2 συναρτήσει της κατ' όγκον περιεκτικότητας U_f όπου οι τιμές του μέτρου οι οποίες προκύπτουν από το μοντέλο μας συγκρίνονται με τις θεωρητικές τιμές που προκύπτουν από μοντέλα (θεωρητικές εκφράσεις) άλλων ερευνητών της βιβλιογραφίας, ως επίσης και με πειραματικά αποτελέσματα.

Παρατηρούμε ότι όλες οι εκφράσεις δίνουν τιμές για το E_c που αυξάνουν αυξανόμενης της περιεκτικότητας του εγκλείσματος, ως αναμένετο.

Επίσης παρατηρούμε ότι κάποια μοντέλα άλλων ερευνητών έχουν μεγάλη απόκλιση από τις πειραματικές μετρήσεις. Τη μεγαλύτερη απόκλιση την παρουσιάζει το μοντέλο του Takahashi και ακολουθείται από το μοντέλο Paul και το μοντέλο του Einstein. Το μοντέλα Kerner 2 και Guth-Smallwood δίνει καλύτερα αποτελέσματα όμως το καλύτερο θεωρητικό μοντέλο προκύπτει το μοντέλο Counto για το υλικό μας.

Το μοντέλο μας αποτελεί μια πολύ καλή προσέγγιση της πραγματικότητας του συνθέτου υλικού μας, δηλαδή ενός συνθέτου υλικού που έχει ως εγκλείσμα κόκκους σιδήρου διαμέτρου $d=150\mu\text{m}$ και μήτρα εποξειδική ρητίνη. Το αποτέλεσμα μας είναι λίγο καλύτερο από το μοντέλο του Counto, το οποίο αποτέλεσε έως σήμερα ένα από τα καλύτερα μοντέλα για το σύνθετο υλικό που εξετάζουμε.

Αυτό επιβεβαιώνεται και μαθηματικά, εάν υπολογίσουμε την τιμή του s για κάθε ερευνητή, οπότε προκύπτει:

Ερευνητής	s (%)
COUNTO	99,74
ΚΥΒΙΚΟ ΕΞΑΦΑΣΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ 2 ΜΕ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΦΑΣΗ	99,78
GUTH-SMALLWOOD	97,41
KERNER 2	97,07
EINSTEIN	95,69
PAUL	92,39
TAKAHASHI	85,88

Η απόκλιση των θεωρητικών μας προβλέψεων για το E_c από τα πειραματικά δεδομένα είναι αναμενόμενη κυρίως για τους εξής λόγους:

1. Η κατανομή των εγκλεισμάτων μέσα στη ρητίνη στην πραγματικότητα είναι ανομοιογενής και τυχαία και όχι ομοιογενής όπως έχουμε υποθέσει.
2. Ύπαρξη ατελειών στη μήτρα (φυσαλίδες, ατελείς δεσμοί κλπ)
3. Ύπαρξη ασυνέχειας μεταξύ εγκλείσματος και μήτρα, δηλαδή όχι καλή συνοχή του υλικού.
4. Τα θεωρητικά μοντέλα προβλέπουν τέλεια γεωμετρικά σχήματα (σφαιρικοί κόκκοι) και του ίδιου ενώ στην πραγματικότητα η επιφάνεια των εγκλεισμάτων είναι ανώμαλη και τραχεία και το μέγεθος τους διαφορετικό.

Κεφάλαιο 8 - Προσεγγιστικός θεωρητικός υπολογισμός του μέτρου ελαστικότητας

8.1 Προσεγγιστικός Υπολογισμός

Εδώ θα προσπαθήσουμε να απλοποιήσουμε το θεωρητικό μας μοντέλο μέσω κάποιων παραδοχών ώστε να έχουμε μια πλέον συμπαγή έκφραση.

Ας θεωρήσουμε το πενταφασικό μοντέλο που όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως το σύνθετο υλικό αποτελείται από πέντε φάσεις οι οποίες απεικονίζουν τα εγκλείσματα, τη μήτρα και την ενδιάμεση φάση.

Η θεωρητική ανάλυση βασίζεται στις ακόλουθες υποθέσεις:

- Τα εγκλείσματα και η μήτρα είναι ελαστικά, ισότροπα και ομοιογενή υλικά, ενώ η ενδιάμεση φάση είναι ανομοιογενής και έχει μεταβλητές ιδιότητες κατά την ακτινική διεύθυνση.
- Τα εγκλείσματα έχουν σχήμα σφαιρικό.
- Ο αριθμός των εγκλεισμάτων είναι μεγάλος και η κατανομή τους ομοιόμορφη, έτσι ώστε το σύνθετο υλικό να δύναται να θεωρηθεί ως μακροσκοπικά ομοιογενές και ισότροπο.
- Οι εφαρμοζόμενες καταπονήσεις στο σύνθετο υλικό είναι αρκετά μικρές έτσι ώστε να διατηρείται η γραμμικότητα στις σχέσεις τάσεων παραμορφώσεων.

Για την εύρεση των σχέσεων οι οποίες θα δώσουν την θεωρητική έκφραση για το μέτρο ελαστικότητας του συνθέτου υλικού, θα εφαρμοστεί, όπως και πριν, η θεωρία ελαστικότητας στο αντιπροσωπευτικό στοιχείο όγκου των πέντε ομόκεντρων σφαιρών, το οποίο θεωρείται ότι έχει κατά μέσο όρο τις ιδιότητες του κοκκώδους σύνθετου υλικού.

Ας θεωρήσουμε λοιπόν ότι εφαρμόζεται μια εξωτερική πίεση P_0 . Λόγω της σφαιρικής συμμετρίας του εφαρμοζόμενου εξωτερικού φορτίου, οι τάσεις και οι παραμορφώσεις είναι συναρτήσεις μόνο της ακτίνας r , μη εξαρτώμενες από τις γωνίες θ και φ .

Η λύση του προβλήματος δίνεται από την τασική συνάρτηση:

$$\Phi = \frac{k_1}{r} + k_2 r^2$$

Η καθεμία από τις πέντε φάσεις χαρακτηρίζεται από μια αντίστοιχη συνάρτηση όπως αναφέρθηκε και στο κεφάλαιο 6.

$$\Phi_1 = \frac{A}{r} + B r^2$$

$$\Phi_2 = \frac{C}{r} + D r^2$$

$$\Phi_3 = \frac{F}{r} + H r^2$$

$$\Phi_4 = \frac{K}{r} + L r^2$$

$$\Phi_5 = \frac{M}{r} + N r^2$$

Στη θέση $r = 0$ πρέπει η τασική συνάρτηση να μην απειρίζεται. Άρα $A = 0$, άρα

$$\Phi_1 = B r^2$$

Οι μετατοπίσεις δίνονται από τον τύπο :

$$\vec{u} = \frac{1}{2G} \text{grad } \Phi$$

Λόγω της σφαιρικής συμμετρίας οι μετατοπίσεις κατά τις διευθύνσεις φ και θ είναι μηδενικές:

$$u_\varphi = u_\theta = 0$$

Οι ακτινικές μετατοπίσεις είναι:

$$u_{r,1} = \frac{Br}{G_1}$$

$$u_{r,2} = \frac{-\frac{C}{r^2} + 2Dr}{2G_2}$$

$$u_{r,3} = \frac{-\frac{F}{r^2} + 2Hr}{2G_3}$$

$$u_{r,4} = \frac{-\frac{K}{r^2} + 2Lr}{2G_4}$$

$$u_{r,5} = \frac{-\frac{M}{r^2} + 2Nr}{2G_5}$$

Οι παραμορφώσεις είναι:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}$$

$$u_\phi = u_\theta = 0$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} 0 = \frac{u_r}{r}$$

$$\varepsilon_\phi = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} 0 = \frac{u_r}{r}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\varepsilon_{r,1} = \varepsilon_{\theta,1} = \varepsilon_{\phi,1} = 2B \frac{1+\nu_1}{E_1}$$

$$\varepsilon_{r,2} = \left[\frac{2C}{r^3} + 2D \right] \frac{1+\nu_2}{E_2}$$

$$\varepsilon_{\theta,2} = \varepsilon_{\varphi,2} = \left[-\frac{C}{r^3} + 2D \right] \frac{1 + \nu_2}{E_2}$$

$$\varepsilon_{r,3} = \left[\frac{2F}{r^3} + 2H \right] \frac{1 + \nu_3}{E_3}$$

$$\varepsilon_{\theta,3} = \varepsilon_{\varphi,3} = \left[-\frac{F}{r^3} + 2H \right] \frac{1 + \nu_3}{E_3}$$

$$\varepsilon_{r,4} = \left[\frac{2K}{r^3} + 2L \right] \frac{1 + \nu_4}{E_4}$$

$$\varepsilon_{\theta,4} = \varepsilon_{\varphi,4} = \left[-\frac{K}{r^3} + 2L \right] \frac{1 + \nu_4}{E_4}$$

$$\varepsilon_{r,5} = \left[\frac{2M}{r^3} + 2N \right] \frac{1 + \nu_5}{E_5}$$

$$\varepsilon_{\theta,5} = \varepsilon_{\varphi,5} = \left[-\frac{M}{r^3} + 2N \right] \frac{1 + \nu_5}{E_5}$$

Οι τάσεις υπολογίζονται από τις σχέσεις τάσεων παραμορφώσεων:

$$\sigma_{r,1} = \sigma_{\theta,1} = \sigma_{\varphi,1} = \frac{2(1 + \nu_1)}{(1 - 2\nu_1)} B$$

$$\sigma_{r,2} = \frac{2C}{r^3} + \frac{2(1 + \nu_2)}{(1 - 2\nu_2)} D$$

$$\sigma_{\theta,2} = \sigma_{\varphi,2} = -\frac{C}{r^3} + \frac{2(1 + \nu_2)}{(1 - 2\nu_2)} D$$

$$\sigma_{r,3} = \frac{2F}{r^3} + \frac{2(1 + \nu_3)}{(1 - 2\nu_3)} H$$

$$\sigma_{\theta,3} = \sigma_{\varphi,3} = -\frac{F}{r^3} + \frac{2(1 + \nu_3)}{(1 - 2\nu_3)} H$$

$$\sigma_{r,4} = \frac{2K}{r^3} + \frac{2(1 + \nu_4)}{(1 - 2\nu_4)} L$$

$$\sigma_{\theta,4} = \sigma_{\varphi,4} = -\frac{K}{r^3} + \frac{2(1 + \nu_4)}{(1 - 2\nu_4)} L$$

$$\sigma_{r,5} = \frac{2M}{r^3} + \frac{2(1 + \nu_5)}{(1 - 2\nu_5)} N$$

$$\sigma_{\theta,5} = \sigma_{\varphi,5} = -\frac{M}{r^3} + \frac{2(1 + \nu_5)}{(1 - 2\nu_5)} N$$

Στη μελέτη αυτή, λαμβάνουμε υπ' όψιν την παραβολική μεταβολή των $E_i(r)$ και $\nu_i(r)$ (κεφάλαιο 5), η οποία θεωρείται η πλέον αντιπροσωπευτική.

Οι οριακές συνθήκες τις οποίες λοιπόν θα χρησιμοποιήσουμε είναι:

$$\text{ΣΤΟ } r = r_{m,1} \Rightarrow E_i(r) = E_m \quad \text{και} \quad \nu_i(r) = \nu_m$$

$$\text{ΣΤΟ } r = r_{i,1} \Rightarrow E_i(r) = \eta E_f \quad \text{και} \quad \nu_i(r) = \eta \nu_f$$

$$\text{ΣΤΟ } r = r_f \Rightarrow E_i(r) = \eta E_f \quad \text{και} \quad \nu_i(r) = \eta \nu_f$$

$$\text{ΣΤΟ } r = r_{i,2} \Rightarrow E_i(r) = E_m \quad \text{και} \quad \nu_i(r) = \nu_m$$

Οπότε προκύπτουν οι εξής Συνοριακές συνθήκες τάσεων:

Για $r = r_{m,1}$: $\sigma_{r,1} = \sigma_{r,2}$ και $u_{r,1} = u_{r,2}$ δηλ.

$$\frac{2(1 + \nu_{m,1})}{(1 - 2\nu_{1m})} B = \frac{2C}{r_{m,1}^3} + \frac{2(1 + \nu_{i,1})}{(1 - 2\nu_{i,1})} D$$

$$\frac{2(1 + \nu_{m,1})}{(1 - 2\nu_{1m})} B = \frac{2C}{r_{m,1}^3} + \frac{2(1 + \nu_{m,1})}{(1 - 2\nu_{m,1})} D \quad (8.1)$$

και

$$\frac{Br_{m,1}}{G_1} = \frac{-\frac{C}{r_{m,1}^2} + 2Dr_{m,1}}{2G_2} \xrightarrow{G = \frac{E}{2(1+\nu)}} \Rightarrow B \frac{r_{m,1}2(1+\nu_{m,1})}{E_{m,1}} = \left(-\frac{C}{r_{m,1}^2} + 2Dr_{m,1} \right) \frac{(1+\nu_{m,1})}{E_{m,1}} \quad (8.2)$$

Για $r = r_{i,1}$: $\sigma_{r,2} = \sigma_{r,3}$ και $u_{r,2} = u_{r,3}$ δηλ.

$$\frac{2C}{r_{i,1}^3} + \frac{2(1+\nu_{i,1})}{(1-2\nu_{i,1})}D = \frac{2F}{r_{i,1}^3} + \frac{2(1+\nu_f)}{(1-2\nu_f)}H$$

$$\frac{2C}{r_{i,1}^3} + \frac{2(1+\eta\nu_f)}{(1-2\eta\nu_f)}D = \frac{2F}{r_{i,1}^3} + \frac{2(1+\nu_f)}{(1-2\nu_f)}H \quad (8.3)$$

και

$$\frac{-\frac{C}{r_{i,1}^2} + 2Dr_{i,1}}{2G_2} = \frac{-\frac{F}{r_{i,1}^2} + 2Hr_{i,1}}{2G_3} \xrightarrow{G = \frac{E}{2(1+\nu)}} (-C + 2Dr_{i,1}^3) \left(\frac{1+\eta\nu_f}{\eta E_f} \right) = (-F + 2Hr_{i,1}^3) \left(\frac{1+\nu_f}{E_f} \right) \quad (8.4)$$

Για $r = r_f$: $\sigma_{r,3} = \sigma_{r,4}$ και $u_{r,3} = u_{r,4}$ δηλ.

$$2F + \frac{2(1 + \nu_f)}{(1 - 2\nu_f)} r_f^3 H = 2K + \frac{2(1 + \eta\nu_f)}{(1 - 2\eta\nu_f)} r_f^3 L \quad (8.5)$$

και

$$(-F + 2Hr_f^3) \frac{(1 + \nu_f)}{E_f} = (-K + 2Lr_f^3) \frac{(1 + \eta\nu_f)}{\eta E_f} \quad (8.6)$$

Για $r = r_{i,2}$: $\sigma_{r,4} = \sigma_{r,5}$ και $u_{r,4} = u_{r,5}$ δηλ.

$$2K + \frac{2(1 + \nu_m)}{(1 - 2\nu_m)} r_{i,2}^3 L = 2M + \frac{2(1 + \nu_m)}{(1 - 2\nu_m)} r_{i,2}^3 N \quad (8.7)$$

και

$$(-K + 2Lr_{i,2}^3) \frac{(1 + \nu_m)}{E_m} = (-M + 2Nr_{i,2}^3) \frac{(1 + \nu_m)}{E_m} \quad (8.8)$$

Για $r = r_{m,2}$: $\sigma_{r,5} = -P_0$

$$2M + \frac{2(1 + \nu_m)}{(1 - 2\nu_m)} r_{m,2}^3 N \quad (8.9)$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (8.1) – (8.9) προκύπτουν οι εξής λύσεις των σταθερών:

$$B = \left[\left[\frac{1 + \eta v_f}{1 - 2\eta v_f} r_{i,1}^3 + \frac{1 + v_f}{1 - 2v_f} + \frac{(1 + v_f)}{(1 - 2v_f)} r_f^3 - \frac{1 + \eta v_f}{1 - 2\eta v_f} r_f^3 \frac{(1 + v_f) + \frac{(1 + v_f)}{(1 - 2v_f)}}{(1 + \eta v_f)} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(1 + v_m)}{(1 - 2v_m)} r_{m,2}^3 \frac{(1 + v_f) + \frac{(1 + v_f)}{(1 - 2v_f)}}{(1 + \eta v_f)} \right] \frac{2(1 + \eta v_f)}{\eta(1 + v_f)} - \frac{(1 + \eta v_f)}{(1 - 2\eta v_f)} \right]^{-1} (-P_0 r_{m,2}^3)$$

$$C = 0$$

$$D = B$$

$$H = \frac{\frac{2(1 + \eta v_f)}{\eta(1 + v_f)} - \frac{(1 + \eta v_f)}{(1 - 2\eta v_f)}}{2 - \frac{(1 + v_f)}{(1 - 2v_f)} \frac{1}{r_{i,1}^3}} B$$

$$F = -\frac{(1 + \eta v_f)}{(1 - 2\eta v_f)} B r_{i,1}^3 + \frac{(1 + v_f)}{(1 - 2v_f)} H$$

$$L = \frac{(1 + v_f) + \frac{(1 + v_f)}{(1 - 2v_f)}}{\frac{(1 + \eta v_f)}{\eta} + \frac{(1 + \eta v_f)}{(1 - 2\eta v_f)}} H$$

$$K = \left[-\frac{(1 + \eta v_f)}{(1 - 2\eta v_f)} r_{i,1}^3 + \frac{(1 + v_f)}{(1 - 2v_f)} H + \frac{(1 + v_f)}{(1 - 2v_f)} r_f^3 H \right. \\ \left. + \frac{(1 + \eta v_f)}{(1 - 2\eta v_f)} r_f^3 \frac{(1 + v_f) + \frac{(1 + v_f)}{(1 - 2v_f)}}{\frac{(1 + \eta v_f)}{\eta} + \frac{(1 + \eta v_f)}{(1 - 2\eta v_f)}} H \right] B$$

$$K = M$$

$$N = L$$

Από το παραπάνω μοντέλο για να προκύψει μια πλέον απλουστευμένη έκφραση και για να διερευνηθεί η μέγιστη επίδραση της ενδιαμέσου φάσεως λαμβάνω υπ' όψιν το μεγαλύτερο συντελεστή η δηλ. $\eta = 1$ οπότε προκύπτουν οι παρακάτω απλουστευμένες σταθερές:

$$C = F = K = M = 0$$

$$B = D = H = L = -P_0 \frac{(1 - 2v_m)}{2(1 + v_m)}$$

Αντικαθιστώ στις σχέσεις των τάσεων τις τιμές των σταθερών και έχω:

$$\sigma_{r,1} = \sigma_{\theta,1} = \sigma_{\varphi,1} = -P_0$$

$$\sigma_{r,2} = \sigma_{\theta,2} = \sigma_{\varphi,2} = \frac{2(1 + \nu_{i,1})}{(1 - 2\nu_{i,1})} \left(-P_0 \frac{1 - 2\nu_m}{2(1 + \nu_m)} \right)$$

$$\sigma_{r,3} = \sigma_{\theta,3} = \sigma_{\varphi,3} = \frac{2(1 + \nu_f)}{(1 - 2\nu_f)} \left(-P_0 \frac{1 - 2\nu_m}{2(1 + \nu_m)} \right)$$

$$\sigma_{r,4} = \sigma_{\theta,4} = \sigma_{\varphi,4} = \frac{2(1 + \nu_{i,2})}{(1 - 2\nu_{i,2})} \left(-P_0 \frac{1 - 2\nu_m}{2(1 + \nu_m)} \right)$$

$$\sigma_{r,5} = \sigma_{\theta,5} = \sigma_{\varphi,5} = -P_0$$

Και στις παραμορφώσεις έχω:

$$\varepsilon_{r,1} = \varepsilon_{\theta,1} = \varepsilon_{\varphi,1} = -P_0 \frac{1 - 2\nu_m}{E_m}$$

$$\varepsilon_{r,2} = \varepsilon_{\theta,2} = \varepsilon_{\varphi,2} = -P_0 \frac{(1 + \nu_{i,1})(1 - 2\nu_m)}{E_{i,1}(1 + \nu_m)}$$

$$\varepsilon_{r,3} = \varepsilon_{\theta,3} = \varepsilon_{\varphi,3} = -P_0 \frac{(1 + \nu_f)(1 - 2\nu_m)}{E_f(1 + \nu_m)}$$

$$\varepsilon_{r,4} = \varepsilon_{\theta,4} = \varepsilon_{\varphi,4} = -P_0 \frac{(1 + \nu_{i,2})(1 - 2\nu_m)}{E_{i,2}(1 + \nu_m)}$$

$$\varepsilon_{r,5} = \varepsilon_{\theta,5} = \varepsilon_{\varphi,5} = -P_0 \frac{(1 - 2\nu_m)}{E_m}$$

Για τον προσδιορισμό του μέτρου ελαστικότητας E_c του κοκκώδους σύνθετου υλικού θα εφαρμοσθεί η συνθήκη ισορροπίας ενέργειας στο σφαιρικό πενταφασικό μοντέλο. Δηλαδή ότι η ενέργεια παραμορφώσεως των πέντε φάσεων, του εγκλείσματος, της μήτρας και της ενδιάμεσου φάσεως. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{v_c} \frac{P_0^2}{K_c} dv &= \frac{1}{2} \int_{v_1} (\sigma_{r,1} \cdot \varepsilon_{r,1} + \sigma_{\theta,1} \cdot \varepsilon_{\theta,1} + \sigma_{\varphi,1} \cdot \varepsilon_{\varphi,1}) dv_1 + \frac{1}{2} \int_{v_2} (\sigma_{r,2} \cdot \varepsilon_{r,2} + \sigma_{\theta,2} \\ &\cdot \varepsilon_{\theta,2} + \sigma_{\varphi,2} \cdot \varepsilon_{\varphi,2}) dv_2 + \frac{1}{2} \int_{v_3} (\sigma_{r,3} \cdot \varepsilon_{r,3} + \sigma_{\theta,3} \cdot \varepsilon_{\theta,3} + \sigma_{\varphi,3} \cdot \varepsilon_{\varphi,3}) dv_3 \\ &+ \frac{1}{2} \int_{v_4} (\sigma_{r,4} \cdot \varepsilon_{r,4} + \sigma_{\theta,4} \cdot \varepsilon_{\theta,4} + \sigma_{\varphi,4} \cdot \varepsilon_{\varphi,4}) dv_4 + \frac{1}{2} \int_{v_4} (\sigma_{r,5} \cdot \varepsilon_{r,5} \\ &+ \sigma_{\theta,5} \cdot \varepsilon_{\theta,5} + \sigma_{\varphi,5} \cdot \varepsilon_{\varphi,5}) dv_5 \end{aligned} \quad (8.10)$$

Όπου $K_c = \frac{E_c}{3(1-2\nu_c)}$ το μέτρο διόγκωσης του σύνθετου υλικού και

$$v = \frac{4}{3} \pi r^3 \Rightarrow dv = 4\pi r^2 dr$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^{r_5} \frac{3P_0^2(1-2\nu_c)}{E_c} r^2 dr \\
&= \int_0^{r_1} (\sigma_{r,1} \cdot \varepsilon_{r,1} + \sigma_{\theta,1} \cdot \varepsilon_{\theta,1} + \sigma_{\varphi,1} \cdot \varepsilon_{\varphi,1}) r^2 dr + \int_{r_1}^{r_2} (\sigma_{r,2} \cdot \varepsilon_{r,2} + \sigma_{\theta,2} \\
&\quad \cdot \varepsilon_{\theta,2} + \sigma_{\varphi,2} \cdot \varepsilon_{\varphi,2}) r^2 dr + \int_{r_2}^{r_3} (\sigma_{r,3} \cdot \varepsilon_{r,3} + \sigma_{\theta,3} \cdot \varepsilon_{\theta,3} + \sigma_{\varphi,3} \cdot \varepsilon_{\varphi,3}) r^2 dr \\
&\quad + \int_{r_3}^{r_4} (\sigma_{r,4} \cdot \varepsilon_{r,4} + \sigma_{\theta,4} \cdot \varepsilon_{\theta,4} + \sigma_{\varphi,4} \cdot \varepsilon_{\varphi,4}) r^2 dr + \int_{r_4}^{r_5} (\sigma_{r,5} \cdot \varepsilon_{r,5} + \sigma_{\theta,5} \\
&\quad \cdot \varepsilon_{\theta,5} + \sigma_{\varphi,5} \cdot \varepsilon_{\varphi,5}) r^2 dr
\end{aligned}$$

Θα υπολογίσω τα επιμέρους ολοκληρώματα:

$$\int_0^{r_5} \frac{3P_0^2(1-2\nu_c)}{E_c} r^2 dr = \frac{3P_0^2(1-2\nu_c)}{E_c} \int_0^{r_5} r^2 dr = \frac{3P_0^2(1-2\nu_c)r_5^3}{E_c \cdot 3} = \frac{P_0^2(1-2\nu_c)r_5^3}{E_c}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{r_1} (\sigma_{r,1} \cdot \varepsilon_{r,1} + \sigma_{\theta,1} \cdot \varepsilon_{\theta,1} + \sigma_{\varphi,1} \cdot \varepsilon_{\varphi,1}) r^2 dr &= \int_0^{r_1} 3(-P_0) \left(-P_0 \frac{1-2\nu_m}{E_m(1+\nu_m)} \right) r^2 dr = \\
&= \frac{3P_0^2(1-2\nu_m)}{(1+\nu_m)} \int_0^{r_1} r^2 dr = \frac{3P_0^2(1-2\nu_m)r_1^3}{(1+\nu_m) \cdot 3} = \frac{P_0^2(1-2\nu_m)r_1^3}{E_m}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{r_1}^{r_2} (\sigma_{r,2} \cdot \varepsilon_{r,2} + \sigma_{\theta,2} \cdot \varepsilon_{\theta,2} + \sigma_{\varphi,2} \cdot \varepsilon_{\varphi,2}) r^2 dr \\
&= \int_{r_1}^{r_2} 3 \frac{2(1+\nu_{i,1})}{(1-2\nu_{i,1})} \left(-P_0 \frac{1-2\nu_m}{2(1+\nu_m)} \right) \left(-P_0 \frac{(1+\nu_{i,1})(1-2\nu_m)}{E_{i,1}(1+\nu_m)} \right) r^2 dr \\
&= 3P_0^2 \frac{(1-2\nu_m)^2}{(1+\nu_m)^2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{(1+\nu_{i,1})^2}{E_{i,1}(1-2\nu_{i,1})^2} r^2 dr
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{r_2}^{r_3} (\sigma_{r,3} \cdot \varepsilon_{r,3} + \sigma_{\theta,3} \cdot \varepsilon_{\theta,3} + \sigma_{\varphi,3} \cdot \varepsilon_{\varphi,3}) r^2 dr = \\
& = \int_{r_2}^{r_3} 3 \frac{2(1+v_f)}{(1-2v_f)} \left(-P_0 \frac{1-2v_m}{2(1+v_m)} \right) \left(-P_0 \frac{(1+v_f)(1-2v_m)}{E_f(1+v_m)} \right) r^2 dr \\
& = \frac{P_0^2 (1+v_f)^2 (1-2v_m)^2}{(1-2v_f)(1+v_m)^2 E_f} (r_3^3 - r_2^3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{r_3}^{r_4} (\sigma_{r,4} \cdot \varepsilon_{r,4} + \sigma_{\theta,4} \cdot \varepsilon_{\theta,4} + \sigma_{\varphi,4} \cdot \varepsilon_{\varphi,4}) r^2 dr \\
& = \int_{r_3}^{r_4} 3 \frac{2(1+v_{i,2})}{(1-2v_{i,2})} \left(-P_0 \frac{1-2v_m}{2(1+v_m)} \right) \left(-P_0 \frac{(1+v_{i,2})(1-2v_m)}{E_{i,2}(1+v_m)} \right) r^2 dr \\
& = \frac{3 P_0^2 (1-2v_m)^2}{(1+v_m)^2} \int_{r_3}^{r_4} \frac{(1+v_{i,2})^2}{E_{i,2} (1-2v_{i,2})^2} r^2 dr
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{r_4}^{r_5} (\sigma_{r,5} \cdot \varepsilon_{r,5} + \sigma_{\theta,5} \cdot \varepsilon_{\theta,5} + \sigma_{\varphi,5} \cdot \varepsilon_{\varphi,5}) r^2 dr = \int_{r_4}^{r_5} 3(-P_0) \left(-P_0 \frac{1-2v_m}{E_m} \right) r^2 dr \\
& = P_0^2 \frac{1-2v_m}{E_m} (r_5^3 - r_4^3)
\end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned}
 & \frac{P_0^2(1-2\nu_c)r_5^3}{E_c} \\
 &= \frac{P_0^2(1-2\nu_m)}{E_m}r_1^3 + 3P_0^2\frac{(1-2\nu_m)^2}{(1+\nu_m)^2}\int_{r_1}^{r_2}\frac{(1+\nu_{i,1})^2}{E_{i,1}(1-2\nu_{i,1})^2}r^2dr \\
 &+ \frac{P_0^2(1+\nu_f)^2(1-2\nu_m)^2}{(1-2\nu_f)(1+\nu_m)^2E_f}(r_3^3-r_2^3) \\
 &+ \frac{3P_0^2(1-2\nu_m)^2}{(1+\nu_m)^2}\int_{r_3}^{r_4}\frac{(1+\nu_{i,2})^2}{E_{i,2}(1-2\nu_{i,2})^2}r^2dr + P_0^2\frac{1-2\nu_m}{E_m}(r_5^3-r_4^3)
 \end{aligned}$$

Επειδή ισχύει

$$U_{m,1} = \frac{r_1^3}{r_5^3}$$

$$U_{i,1} = \frac{r_2^3 - r_1^3}{r_5^3}$$

$$U_f = \frac{r_3^3 - r_2^3}{r_5^3}$$

$$U_{i,2} = \frac{r_4^3 - r_3^3}{r_5^3}$$

$$U_{m,2} = \frac{r_5^3 - r_4^3}{r_5^3}$$

Τελικά

$$\begin{aligned} \frac{1-2\nu_c}{E_c} &= \frac{(1-2\nu_m)}{E_m} (U_{m,1} + U_{m,2}) + \frac{(1+\nu_f)^2 (1-2\nu_m)^2}{(1-2\nu_f)(1+\nu_m)^2 E_f} U_f \\ &+ 3 \frac{(1-2\nu_m)^2}{(1+\nu_m)^2} \frac{U_{i,1}}{r_2^3 - r_1^3} \int_{r_1}^{r_2} \frac{(1+\nu_{i,1})^2}{(1-2\nu_{i,1})^2 E_{i,1}} r^2 dr \\ &+ \frac{3(1-2\nu_m)^2}{(1+\nu_m)^2} \frac{U_{i,2}}{r_4^3 - r_3^3} \int_{r_3}^{r_4} \frac{(1+\nu_{i,2})^2}{(1-2\nu_{i,2})^2 E_{i,2}} r^2 dr \end{aligned}$$

Ο λόγος Poisson του σύνθετου υλικού προκύπτει από τον νόμο των φάσεων και είναι:

$$\nu_c = \nu_m u_{m,1} + \nu_{i,1}(r) u_{i,1} + \nu_f u_f + \nu_{i,2}(r) u_{i,2} + \nu_m u_{m,2}$$

Εφόσον ο λόγος Poisson στην περιοχή της ενδιάμεσου φάσεως είναι μεταβλητός έχουμε

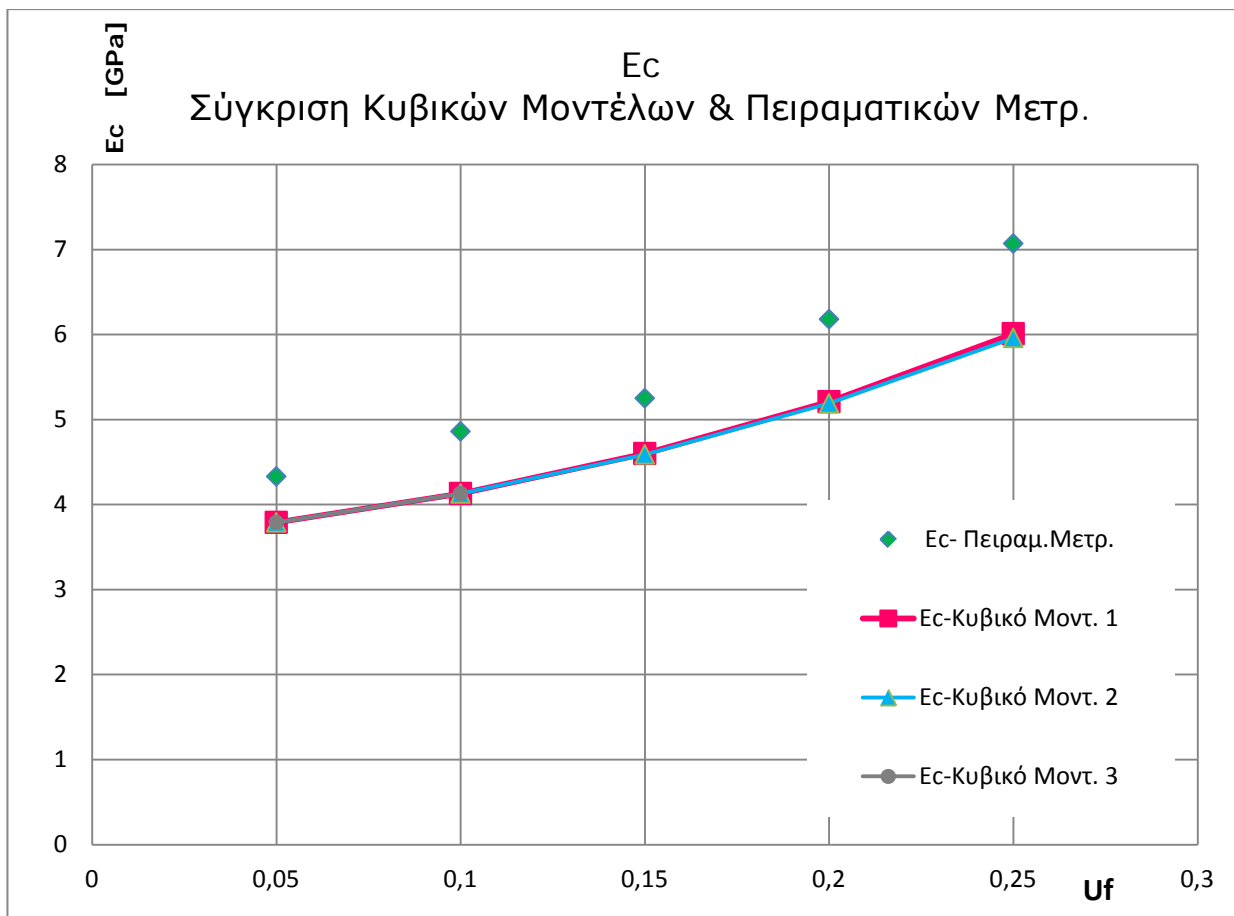
$$\nu_c = \nu_m (u_{m,1} + u_{m,2}) + \nu_f u_f + \frac{3u_f}{r_m^3} \int_{r_i}^{r_f} \nu_{i,1}(r) r^2 dr + \frac{3u_f}{r_m^3} \int_{r_f}^{r_i} \nu_{i,2}(r) r^2 dr$$

Όπου και η μεταβολή του λόγου Poisson ακολουθεί την παραβολική μεταβολή.

8.2 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕ ΑΛΛΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

Για να ελέγξουμε το πόσο καλά προσεγγίζουν την πραγματικότητα τα κυβικά πενταφασικά μοντέλα μας με ενδιάμεση φάση που υπολογίσθηκαν με την προσεγγιστική μέθοδο χρησιμοποιούμε τα ίδια πειραματικά δεδομένα που αναλύθηκαν στο κεφάλαιο 7.

Παρακάτω παρουσιάζονται οι πίνακες και διαγράμματα των αποτελεσμάτων των υπολογισμών του προσεγγιστικού θεωρητικού υπολογισμού του μέτρου ελαστικότητας.



Διάγραμμα 8.1

U _f	Πειραματικά	Κυβικό 1	Κυβικό 2	Κυβικό 3
	E _c (Gra)	E _c (Gra)	E _c (Gra)	E _c (Gra)
0,05	4,33	3,79	3,79	3,79
0,1	4,86	4,13	4,13	4,13
0,15	5,25	4,6	4,59	-
0,2	6,18	5,21	5,19	-
0,25	7,07	6,01	5,96	-

Πίνακας 8.1

Για να δούμε πόσο προσεγγίζουν οι θεωρητικές καμπύλες για το κάθε μοντέλο, τα πειραματικά σημεία, εισάγουμε από τη στατιστική ένα δείκτη προσαρμογής που φανερώνει πόσο καλά προσαρμόζεται η θεωρητική καμπύλη στα πειραματικά σημεία.

Ο συντελεστής προσαρμογής δίνεται από τον παρακάτω τύπο :

$$s = 100 \left[1 + \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \hat{y}_i)^2}{\hat{y}_i^2} \right] \%$$

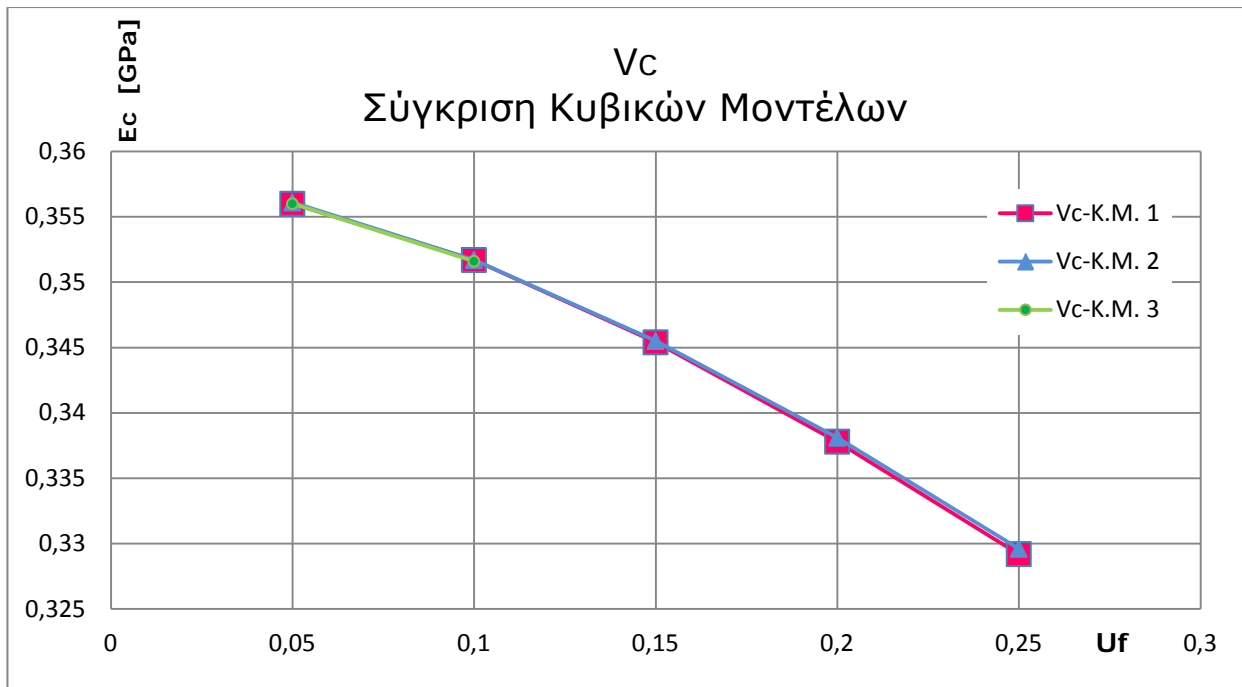
όπου y η πρόβλεψη του μεγέθους y (για εμάς E_c) στην τιμή x_i (U_f).

Η τιμή του συντελεστή προσαρμογής κυμαίνεται στο διάστημα $[0, 1]$. Μάλιστα όσο πιο πολύ τείνει προς τη μονάδα τόσο πιο καλή προσέγγιση στα πειραματικά μου δεδομένα έχω ενώ όσο τείνει προς το μηδέν, τόσο πιο κακή είναι η θεωρητική μου εκτίμηση.

Για τον συντελεστή προσαρμογής των δύο κυβικών μοντέλων 1 και 2 σε σχέση με τις πειραματικές τιμές, προέκυψαν τα παρακάτω αποτελέσματα:

	Συντελ. Προσαρμογής
S₁	92,81%
S₂	95,22%

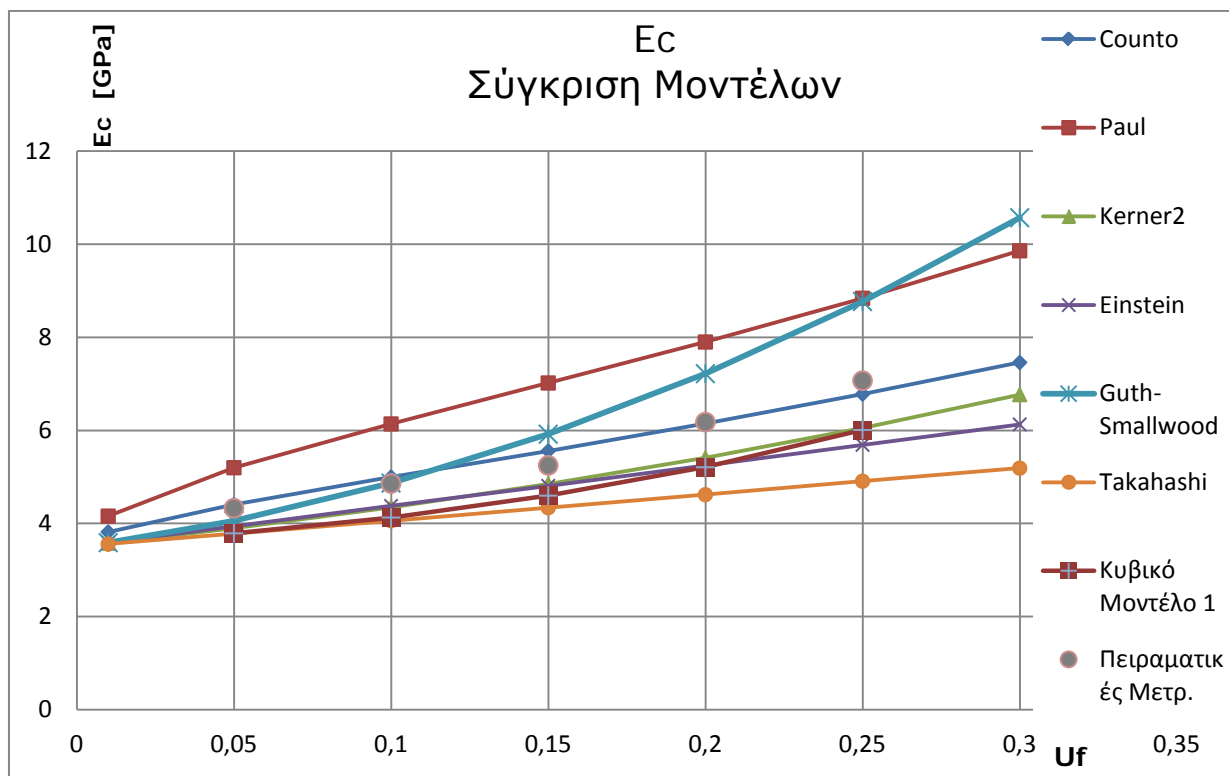
Για το κυβικό μοντέλο 3 δεν ορίζεται ο συντελεστής προσαρμογής με τα σημεία που έχουμε, διότι για να ορισθεί ο συντελεστής προσαρμογής απαιτούνται τουλάχιστον τρία σημεία.



Διάγραμμα 8.2

U _f	Κυβικό 1	Κυβικό 2	Κυβικό 3
	V _c	V _c	V _c
0,05	0,3557	0,3557	0,3557
0,1	0,3514	0,3514	0,3514
0,15	0,3471	0,3471	-
0,2	0,3428	0,3428	-
0,25	0,3384	0,3384	-

Πίνακας 8.2



Διάγραμμα 8.3

	Counto	Paul	Kerner2	Einstein	Guth-small	Takahashi
U_f	E_c (Gpa)	E_c (Gpa)	E_c (Gpa)	E_c (Gpa)	E_c (Gpa)	E_c (Gpa)
0,01	3,82	4,16	3,58	3,59	3,59	3,56
0,05	4,41	5,2	3,9	3,94	4,06	3,78
0,1	5	6,14	4,35	4,38	4,87	4,06
0,15	5,56	7,02	4,85	4,81	5,92	4,34
0,2	6,15	7,9	5,41	5,25	7,22	4,62
0,25	6,78	8,84	6,05	5,69	8,77	4,91
0,3	7,46	9,86	6,77	6,13	10,57	5,19

Πίνακας 8.3

Στο διάγραμμα 8.3 παρουσιάζεται η μεταβολή του μέτρου ελαστικότητας του σύνθετου E_c του κυβικού μοντέλου 1 συναρτήσει της κατ' όγκον περιεκτικότητας U_f όπου οι τιμές του μέτρου οι οποίες προκύπτουν από το μοντέλο μας συγκρίνονται με τις θεωρητικές τιμές που προκύπτουν από μοντέλα (θεωρητικές εκφράσεις) άλλων ερευνητών της βιβλιογραφίας, ως επίσης και με τα πειραματικά αποτελέσματα.

Παρατηρούμε ότι το προσεγγιστικό μοντέλο παρουσιάζει απόκλιση με τα πειραματικά αποτελέσματα αλλά και με το μοντέλο Counto. Προφανώς οι απλουστεύσεις και οι παραδοχές οδήγησαν σ' αυτό το αποτέλεσμα.

8.3 ΓΕΝΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Σ' αυτήν την εργασία έγινε η θεωρητική μελέτη προσδιορισμού του μέτρου ελαστικότητας και του λόγου Poisson κοκκώδους συνθέτου υλικού λαμβάνοντας υπόψη την επίδραση των κοκκών αλλά και της ενδιαμέσου φάσεως.

Μέσω της μεθόδου της θεωρίας ελαστικότητας και δια της θεωρήσεως ενός μοντέλου το οποίο πρόεκυψε από συγκεκριμένη κατανομή (διάταξη) κόκκων στο χώρο υπολογίσθηκε το μέτρο ελαστικότητας του συνθέτου υλικού του οποίου οι τιμές συγκρίθηκαν με τις τιμές άλλων μοντέλων γνωστών ερευνητών της βιβλιογραφίας αλλά και με πειραματικά αποτελέσματα.

Με βάση τη θεωρία περί ισοτρόπων φάσεων, περί ισομεγέθων σφαιρικών εγκλεισμάτων, με μη ύπαρξη συσσωματωμάτων, φυσαλίδων, πράγματα τα οποία ισχύουν μερικώς στην πραγματικότητα, αλλά και περί ελαστικών υλικών γνωρίζοντας ότι η μήτρα είναι βισκοελαστική υπολογίσθηκε το μέτρο ελαστικότητας το οποίο είναι σε σύγκλιση με τα πειραματικά αποτελέσματα αλλά και με το μοντέλο Counto το οποίο θεωρείται από τα καλύτερα στο συγκεκριμένο τομέα.

Αντιθέτως, οι απλουστεύσεις και οι παραδοχές δεν ευνόησαν το προσεγγιστικό μοντέλο το οποίο παρ' ότι συμπαγές και συντομότερο δεν είχε καλή σύγκλιση με τα πειραματικά αποτελέσματα αλλά και με το μοντέλο Counto.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Counto, Mag. Concr. Res 16 (1964) 129.
2. Paul, Trans Amer. Inst. Mech. Eng. 36 (1960) 218.
3. A. Einstein, "Ueber die von Molekularkinetischen Theorie der Waerme Gefoderto Bewegung von in Ruhenden Flussigkeiten suspendionten Teilchen", Ann Physic, Vol. 17, p. 549, (1905), "Eine Neue Bestimmung der Molekuldimensionen", Ann Physic, Vol 19, p. 289, (1906), "Berichtigung zu meiner Arbeit Eine neue Bestimmung der Molekuldimensionen", Vol. 34, p. 591, (1911).
4. E. H. Kerner, "The Elastic and Thermoelastic Properties of Composite Media", Proc. Phys. Soc. 698, pp. 808-813, (1956).
5. K. Takahashi, M. Ikeda, K. Harakawa and K. Tanaka, "Analysis of the Effect of Intefacial Slippage on the Elastic Moduli of a Particle - Filled Polymer", Jnl. Pol. Phys. Ed., Vol. 16, pp. 415-421, (1978).
6. M Mooney, "The Viscosity of a Concentrated Suspension of Spherical Particles", Jnl. Colloid Sci. Vol. 6, pp. 162-169, (1951).
7. H. Eilers and Van Dyck, kolloid Z, Vol. 97, pp. 313-318, (1941).
8. P. S. Theocharis, "The Mesophase and its influence on the Mechanical Behaviour of Composites", Advances in Polymer Science 66, Springer - Verlag Berlin, pp. 149-186, (1985).
9. P. S. Theocharis, "The Adhesion Quality and the Extent of the Mesophase in Particulates", Jnl. of Reinforced Plastics and Composites, Vol. 3, pp. 204 2331, (1984).
10. P. S. Theocharis and E. Sideridis, Journal of Applied Polymer Science, Vol. 29, 2997-3011 (1984).
11. Z. Hashin and B. W. Rosen, J. Appl. Mech. 31 (1964) 223.
12. R. Hill, J. Mech, Phys. Solids 13 (1965) 213.
13. F. Bueche, "Molecular Basis for the Mullins Effect", Jnl. Appl. Polym. Sci., Vol. 4, pp. 107-114,(1960).
14. A. M. Bueche, J. Polym. Sci. 25 (1957) 139.
15. T. T. Wu, Int. J. Solids Struc. 2 (1966) I.

16. T. S. Chow, *J. Polym. Phys.* 16 (1978) 959
17. S. Ahmed and F. R. Jones, *Composites* 19 (1988) 277
18. R. A. Dickie, *J. Appl. Polym. Sci.*, 17 (1973) 454.
19. R. M. Christensen, "Mechanics of Composite Materials", (Wiley New York, 1979).
20. Y. Sato and Furukawa, "A Molecular Theory of Filler Reinforcement based upon the conception of the internal Deformation", *Rubber Chem. Technol.*, Vol. 35, pp. 857-862, (1962).
21. J. Spanoudakis and R. J. Young, *J. Mater. Sci.* 19 (1984) 487.
22. L. E. Nielsen, *J. Appl. Polym. Sci.* 10 (1966) 97.
23. J. Broutman and R. H. Krock, "Modern Composite Materials" (Addison Wesley), Reading, Mass, (1967).
24. L. F. Nielsen, *J. Compos. Mater.* 1 (1967) 100
25. L. Nicolais and M. Narkis, *ibid* 11 (1971) 194
26. M. R. Piggott and J. Leidner, *J. Appl. Polym. Sci.* 18 (1974) 1619.
27. G. Landon, G. Lewis and G. Boden, *J. Mater. Sci* 12 (1977) 1605
28. J. Leidner and R. T. Woodhams, *J. Appl. Polym. Sci.* 18 (1974) 1639
29. H. Hojo and W. Toyoshima, 31st ANTEC, SPE Montreal, Canada (1973) (*Teehnomics*, 1973), p. 163.
30. H. Hojo, W. Tanura and N. Kawanura, *Polym. Eng. Sci.* 14 (1974) 604
31. M. Schrager, *Jnl, Appl. Pol. Sci.*, Vol 32, p 2379 (1978)
32. Passmore, *J. Appl. Polym. Sci.*, 17 (1989).
33. S.P. Timoshenko and J.N. Goodier, "Theory of Elasticity", Mc Graw-Hill (1983).
34. Yu.S. Lipatov, V.F. Babich and V.F. Rosovizky, *J. Appl. Polym. Sci.*, 18, p. 1213 (1974).
35. Yu.S. Lipatov and L.M. Sergeeva, *Adsorption of Polymer*, New York, (1974).
36. Yu.S. Lipatov, *Plaste Kautschuk*, 10, p. 738 (1973).
37. Yu.S. Lipatov and V.F. Babich, *Vysokomol, Soedin, B10*, p. 848 (1968).
38. Yu.S. Lipatov and T.E Geller, *Vysokomol, Soedin*, 8, p. 592, (1966).

39. Yu.S. Lipatov and F.G. Fabulyak, *J. Appl. Polym. Sci.*, 16, p. 2131 (1972).
40. Yu.S. Lipatov, V.F. Babich and V.F. Rosovozky, *J. Appl. Polymer Sci.*, 20, p. 1787 (1976).
41. G.C. Papanicolaou, P.S. Theocaris, *Colloid and Polymer Sci.*, 257, 3, p. 239 (1979).
42. P.S. Theocaris and G.C. Papanicolaou, *Colloid and Polymer Sci.*, 258, 9, p. 1044 (1980).
43. R.F. Landel and T.L. Smith, *American Rocket Society Jnl.*, p. 599 (1961).
44. S. Turner, *Appl. Mat. Res.*, p. 10, (1965).
45. C.W. Van Der Wal, H.W. Bree and F.R. Schwarzl, *J. Appl. Pol. Sci.*, 9, p. 2143 (1965).
46. C.A. Kumins and J. Roteman, *J. Pol. Sci.*, 1-A, p. 527 (1963).
47. G.C. Papanicolaou, S.A. Paipetis and P.S. Theocaris, *J. Appl. Pol. Sci.*, 21, p. 689 (1977).
48. S. Strella and P.F. Erhardt, *J. Appl. Pol. Sci.*, 13, p. 1373 (1969).
49. S. Strella, *J. Appl. Pol. Sci.*, 7, p. 569 (1963).
50. S. Strella, *J. Appl. Pol. Sci.*, 7, p. 1281 (1963).
51. Αιμ. Σιδερίδης, "Μελέτη της θερμομηχανικής συμπεριφοράς των κοκκωδών και ινωδών συνθέτων υλικών διά της θεωρίας της ενδιαμέσου φάσεως", Διδακτορική διατριβή, ΕΜΠ (1998).
52. Yu.S. Lipatov, *Physical Chemistry of Filled Polymers*, Translated from the Russian by R.J. Moseley, *International Polymer Science and Technology Monograph No 2*, Originally Published "Khimiya", Moscow, (1977).
53. Γ.Ι. Τσαμασφύρος, *Μηχανική Παραμορφωσίμων Σωμάτων Ι*, Εκδόσεις Συμμετρία 1991