



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΤΑΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΕΙΣΜΙΚΩΝ ΕΡΕΥΝΩΝ

**ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ
ΣΠΟΥΔΩΝ**

**ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΟΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ & ΑΝΑΛΥΣΗ
ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ**

**ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΣΤΟΙΧΕΙΟ ΔΟΚΟΥ
ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ
ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΑΝΩΤΕΡΑΣ
ΒΑΘΜΙΑΔΑΣ**

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ελευθέριος Λ. Ασημίνας

Επιβλέπων : Βλάσης Κ. Κουμούσης

Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούλιος 2011



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΗΣ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΤΑΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΕΙΣΜΙΚΩΝ ΕΡΕΥΝΩΝ

ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΔΟΜΟΣΤΑΤΙΚΟΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ & ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

<h2>ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΣΤΟΙΧΕΙΟ ΔΟΚΟΥ ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΑΝΩΤΕΡΑΣ ΒΑΘΜΙΔΑΣ</h2>
--

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ελευθέριος Λ. Ασημίνας

Επιβλέπων : Βλάσης Κ. Κουμούσης

Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 21^η Ιουλίου 2011.

Αθήνα, Ιούλιος 2011

.....
B. Κουμούσης

.....
X. Γεωργιάδης

.....
K. Σπηλιόπουλος

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία ολοκληρώνεται μετά από εντατική ενασχόληση αρκετών μηνών, καθώς αποτέλεσε την πρώτη επαφή με το αντικείμενο της Θεωρίας Ελαστικότητας Ανωτέρας Βαθμίδας. Το γεγονός ότι ο Καθηγητής Ε.Μ.Π. και επιβλέπων την εργασία, κ. Βλάσης Κουμούσης μου εμπιστεύτηκε τη διεκπεραίωση μίας εργασίας πάνω σε ένα αρκετά σύνθετο και απαιτητικό αντικείμενο, αποτελεί ιδιαίτερη τιμή για εμένα. Μέσα από τη σχετική μελέτη εμπλουτίστηκαν οι γνώσεις μου και λύθηκαν αρκετές απορίες γύρω από τη γενική θεωρία της μηχανικής του συνεχούς μέσου. Με αυτόν τον τρόπο συνεχίζεται μία ιδιαίτερα εποικοδομητική και ευχάριστη συνεργασία, κατά την οποία ο κύριος Κουμούσης εκτός από δάσκαλος, σύμβουλος και αρωγός των προσπαθειών μου, είναι μία συνεχής πηγή έμπνευσης για την εις βάθος ενασχόληση με την επιστήμη, ακόμα και σε πεδία, των οποίων την ύπαρξη αγνοούσα μέχρι πρότινος. Για όλα τα παραπάνω τον ευχαριστώ και του είμαι ευγνώμων.

Ιδιαίτερες ευχαριστίες οφείλω στον Αναπληρωτή Καθηγητή Ε.Μ.Π., κ. Ευάγγελο Σαπουντζάκη, καθώς και στον Καθηγητή Ε.Μ.Π., κ. Ιωάννη Δαφαλιά. Παρ' ότι δεν συνδέονται άμεσα με την παρούσα μεταπτυχιακή εργασία, η διδασκαλία εκ μέρους τους των μεταπτυχιακών μαθημάτων «Εφαρμοσμένη Ανάλυση Ραβδωτών και Επιφανειακών Φορέων» και «Μηχανική του Συνεχούς Μέσου» αντιστοίχως, (στα πλαίσια του Δ.Π.Μ.Σ. «Δομοστατικός Σχεδιασμός και Ανάλυση των Κατασκευών») συνέβαλε σε μεγάλο βαθμό στην κατανόηση πολλών θεμάτων, χωρίς την οποία θα ήταν αδύνατη η ολοκλήρωση της παρούσας εργασίας.

Νιώθω επίσης ευγνώμων για τον εκλιπόντα Καθηγητή Ε.Μ.Π. Ιωάννη Βαρδουλάκη, ο οποίος υπήρξε ο πρώτος μου δάσκαλος της Μηχανικής του Παραμορφώσιμου Στερεού, κατά τον προπτυχιακό κύκλο σπουδών, η δε ερευνητική του παρακαταθήκη στο πεδίο της Ελαστικότητας Ανωτέρας Βαθμίδας, υπήρξε ιδιαίτερα χρήσιμος οδηγός για την παρούσα εργασία.

Τέλος θέλω να ευχαριστήσω τους γονείς μου για την αμέριστη συμπαράστασή τους σε όλες τις προσπάθειές μου.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα μεταπτυχιακή εργασία πραγματεύεται τη διατύπωση ενός πεπερασμένου στοιχείου δοκού σύμφωνα με τη γραμμική θεωρία ελαστικότητας ανωτέρας βαθμίδας (Linear Gradient Elasticity). Η εν λόγω θεωρία εισάγει παραμέτρους εσωτερικού μήκους στις καταστατικές σχέσεις του συνεχούς μέσου.

Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται μια σύντομη αναφορά στην ανάγκη εισαγωγής παραμέτρων μικροδομής στα προσομοιώματα συνεχούς μέσου, στις πρακτικές εφαρμογές της εν λόγω θεωρίας, καθώς και μια ιστορική αναδρομή στα στάδια της εξέλιξής της.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζεται μια απλοποιημένη εκδοχή της θεωρίας των αδελφών Cosserat, η οποία υπήρξε η πρώτη θεωρία ανωτέρας βαθμίδας στην ιστορία. Το κεφάλαιο αυτό έχει κυρίως εισαγωγικό χαρακτήρα και αποσκοπεί στην εξοικείωση του μη σχετικού με τις εν λόγω θεωρίες, αναγνώστη.

Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζεται αναλυτικά η γενική θεωρία ελαστικότητας με μικροδομή, του Mindlin. Η θεωρία που αναπτύσσεται σε αυτό το κεφάλαιο αποτελεί τη βάση των απλούστερων θεωριών που παρουσιάζονται στα επόμενα κεφάλαια.

Στο τέταρτο κεφάλαιο αναλύονται οι τρεις απλοποιημένες διατυπώσεις της γενικής θεωρίας του Mindlin. Παρουσιάζεται επίσης το προσομοίωμα γραμμικής ελαστικότητας με μικροδομή, των Vardoulakis&Sulem το οποίο μπορεί να θεωρηθεί υποπερίπτωση του απλοποιημένου προσομοιώματος του Mindlin. Το προσομοίωμα αυτό εισάγει δύο επιπλέον παραμέτρους εσωτερικού μήκους και είναι αυτό που χρησιμοποιείται στις αριθμητικές εφαρμογές της παρούσας εργασίας. Γίνεται επίσης αναφορά σε άλλα σημαντικά προσομοιώματα βαθμίδας που προέκυψαν με διαδικασία διαφορετική από τη θεωρία του Mindlin.

Στο πέμπτο κεφάλαιο διατυπώνονται δύο νέα πεπερασμένα στοιχεία με βάση το προσομοίωμα των Vardoulakis&Sulem. Το πρώτο στοιχείο αντιστοιχεί στο πρόβλημα του μονοαξονικού εφελκυσμού ή της απλής διάτμησης πρισματικής ράβδου. Το δεύτερο προσομοίωμα αντιστοιχεί στην κάμψη δοκού κατά Euler-Bernoulli. Τα δύο στοιχεία επαλληλίζονται για να αποτελέσουν ένα ενιαίο πεπερασμένο στοιχείο δοκού που αναλαμβάνει σε κάθε κόμβο αξονική δύναμη, διάτμηση, ροπή κάμψης, αυτοϊσορροπούμενο ζεύγος ροπών κάμψης και αυτοϊσορροπούμενο ζεύγος αξονικών δυνάμεων.

Στο έκτο κεφάλαιο εκτελούνται αριθμητικές εφαρμογές με τη χρήση των στοιχείων που αναπτύχθηκαν στο πέμπτο κεφάλαιο. Η πρώτη κατηγορία εφαρμογών αφορά την κάμψη αμφιέριστης δοκού υπό ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο, ενώ η δεύτερη αφορά την απόκριση μονοδιάστατου σχηματισμού, λόγω σεισμικής διέγερσης στη βάση του. Παρουσιάζονται αποτελέσματα με τη μορφή διαγραμμάτων, τα οποία στη συνέχεια αξιολογούνται.

Στο έβδομο κεφάλαιο διατυπώνονται γενικά συμπεράσματα και σκέψεις για μελλοντική έρευνα στο παρόν αντικείμενο.

ABSTRACT

The present diploma thesis deals with Linear Gradient Elasticity Theory, through the formulation of a beam element, based on this theory. This theory is connected with the introduction of internal length scales to the constitutive equations of the continuum.

The first chapter serves as a brief reference to the need of the use of gradient theories and their most common practical applications. An overview of the most important stages of the evolution of the theory is also presented.

In the second chapter a simplified version of the Cosserat theory (which was the first gradient theory in history) is presented. This chapter is merely an introduction to the more general and complicated theories that are discussed in the next chapters.

In the third chapter the general theory of Microstructure in Linear Elasticity, by Mindlin, is presented in detail. The equations that are produced in this chapter are the basis of the much simpler equations that are presented in the next chapters.

In the fourth chapter, three simplified versions suggested by Mindlin are presented. The linear model of Vardoulakis&Sulem that is discussed in detail, can be seen as a simple case of the second of the simplified versions. This model introduces two new internal length parameters, and is the one used in the numerical implementations of the present thesis.

In the fifth chapter two new finite elements are proposed. The first is a truss-shear rod element and the second is an Euler-Bernoulli beam element. Both make use of the Vardoulakis&Sulem model. These two elements can be unified, in order to shape a beam element that can bear in each node: an axial force, a shear force, a bending moment, a double axial force and a double bending moment.

In the sixth chapter practical applications that make use of the new beam element, are proposed. The first category of applications deals with the behavior of a simply supported beam under uniformly distributed vertical load. The second category deals with the propagation of seismic shear wave through a horizontal soil layer. The results that are presented through the use of diagrams, are discussed in detail.

The results of the current thesis are summarized in the seventh chapter. Thoughts on further research in the field of Gradient Elasticity are also expressed.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΕΙΣΑΓΩΓΗ	1
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΑΠΛΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΘΕΩΡΙΑ COSSERAT	3
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΜΕ ΜΙΚΡΟΔΟΜΗ ΚΑΤΑ MINDLIN	11
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΑΠΛΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΘΕΩΡΙΑ MINDLIN 1ης ΒΑΘΜΙΔΑΣ	25
4.1 1η ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ	25
4.2 2η ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ.....	31
4.3 3η ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ.....	33
4.4 ΣΥΓΚΡΙΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ ΜΟΡΦΩΝ, ΠΕΡΑΙΤΕΡΩ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ.....	36
4.5 ΣΥΣΧΕΤΙΣΗ ΚΑΤΑΣΤΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΤΑΣΕΩΝ.....	37
4.6 ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΜΑ VARDOULAKIS & SULEM.....	41
4.7 ΛΑΠΛΑΣΙΑΝΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΜΑΤΑ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ.....	42
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΔΟΚΟΥ ΜΕ ΚΑΤΑΣΤΑΤΙΚΟ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΜΑ ΒΑΘΜΙΔΩΤΗΣ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ	47
5.1 ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΟ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΣΤΟΙΧΕΙΟ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ- ΑΠΛΗΣ ΔΙΑΤΜΗΣΗΣ.....	47
5.2 ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΣΤΟΙΧΕΙΟ ΔΟΚΟΥ.....	55
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ	65
6.1 ΔΟΚΟΣ ΕΝΟΣ ΑΝΟΙΓΜΑΤΟΣ ΥΠΟ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΟ ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΟ ΦΟΡΤΙΟ.....	65

6.2 ΟΜΟΙΟΓΕΝΗΣ ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΟΣ ΕΔΑΦΙΚΟΣ ΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΨΟΥΣ Η, ΥΠΟ ΗΜΙΤΟΝΙΚΗ ΔΙΕΓΕΡΣΗ ΣΤΗ ΒΑΣΗ ΤΟΥ.....	77
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7: ΓΕΝΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΣΚΕΨΕΙΣ ΓΙΑ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ.....	87
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α:ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ.....	89
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β:ΚΕΝΤΡΙΚΕΣ ΡΟΥΤΙΝΕΣ ΤΩΝ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ	
MATLAB	91
1.ΕΔΑΦΙΚΟΣ ΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ.....	91
2.ΔΟΚΟΣ.....	94
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	99

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι κλασσικές εξισώσεις της (γραμμικής ή μη γραμμικής) θεωρίας του συνεχούς μέσου χρησιμοποιούνται σχεδόν αποκλειστικά για την ανάλυση και το σχεδιασμό δομημάτων από συνηθισμένα υλικά (σκυρόδεμα, χάλυβας), καθώς και για τη μελέτη της συμπεριφοράς κοκκωδών (έδαφος) και κρυσταλλικών υλικών (ορυκτά). Σύμφωνα με την κλασσική θεωρία η τάση εξαρτάται μόνο από την παραμόρφωση (και τη χρονοϊστορία της αν πρόκειται για πλαστική συμπεριφορά) και όχι από τις βαθμίδες της παραμόρφωσης. Οι καταστατικές εξισώσεις της κλασσικής θεωρίας δεν περιέχουν παραμέτρους που συνδέονται με τη μικροδομή του υλικού. Ως εκ τούτου αδυνατούν να περιγράψουν σε ικανοποιητικό βαθμό τη συμπεριφορά συστημάτων στα οποία η χαρακτηριστική διάσταση είναι επαρκώς μικρή, ώστε οι διαστάσεις, το σχήμα και η κατανομή στο χώρο των αντιπροσωπευτικών όγκων του υλικού (κόκκοι για έδαφος, αδρανή για σκυρόδεμα) να παίζουν καθοριστικό ρόλο στην τελική παραμόρφωση. Το φαινόμενο αυτό παρατηρείται πιο έντονα σε υλικά όπως το σκυρόδεμα, το έδαφος, τα πολυμερή, τα πορώδη υλικά, τα οργανικά υλικά κ.α..

Η επιρροή της μικροδομής συναντάται ακόμα και σε περιπτώσεις δομημάτων ή γενικά συστημάτων μεγάλης κλίμακας (εδαφικές αποθέσεις, πρηνή, βραχώδεις σχηματισμοί κ.α.), όπου η παραμόρφωση «συγκεντρώνεται» σε συγκεκριμένες ζώνες (επιφάνειες ολίσθησης στο έδαφος, ρωγμές στο σκυρόδεμα και άλλα ψαθυρά υλικά, περιοχές έντονης διαρροής σε μέταλλα), των οποίων η χαρακτηριστική διάσταση προσεγγίζει την αντίστοιχη της εσωτερικής δομής του υλικού, η οποία καθίσταται πλέον σημαντική.

Μία επιπλέον αδυναμία της κλασσικής θεωρίας ελαστικότητας είναι η εμφάνιση απειρισμού της τάσης ή της παραμόρφωσης στις περιπτώσεις των ρωγμών ή των επιφανειών σχετικής ολίσθησης αντιστοίχως. Μία άλλη κατηγορία προβλημάτων στην επίλυση των οποίων η κλασσική θεωρία παρουσιάζεται ανεπαρκής είναι η αστάθειες που εμφανίζονται στη συμπεριφορά υλικών με φθίνοντα κλάδο στη σχέση τάσης-παραμόρφωσης.

Για την αντιμετώπιση των παραπάνω αδυναμιών, καθώς και την καλύτερη κατανόηση της γενικότερης συμπεριφοράς των υλικών, αλλά και τη διερεύνηση φαινομένων που επηρεάζονται σε μεγάλο βαθμό από τη μικροδομή, αναπτύχθηκαν (ουσιαστικά από τις αρχές του 20^{ου} αιώνα) οι θεωρίες συνεχούς μέσου ανώτερης βαθμίδας.

Κύριο χαρακτηριστικό των περισσότερων από τις παραπάνω θεωρίες είναι η εξάρτηση της πυκνότητας ενέργειας παραμόρφωσης όχι μόνο από τις τροπές, αλλά και από τις παραγώγους των τροπών.

Αν και ο Cauchy ήδη από τη δεκαετία του 1850 χρησιμοποίησε ανώτερες χωρικές παραγώγους για να περιγράψει με μεθόδους συνεχούς μέσου τη συμπεριφορά διακριτών κρυσταλλικών σωματιδίων, ήταν οι αδελφοί Cosserat αυτοί οι οποίοι στις αρχές του 20^{ου} αιώνα ανέπτυξαν μία συστηματική θεωρία συνεχούς μέσου με βάση την οποία λαμβάνεται υπόψη η μικροδομή του υλικού. Η επόμενη σημαντική γενιά

εργασιών ήρθε τη δεκαετία του 1960 με τις σημαντικές δημοσιεύσεις των Tourin, Green, Rivlin, Germain, Koiter, Casal και κυρίως του Mindlin, ο οποίος μαζί με τους Tiersten και Eshel διατύπωσε μία γενική μαθηματική θεωρία βασισμένη σε ένα ρητώς διατυπωμένο φυσικό προσομοίωμα της μικροδομής του υλικού.

Το ενδιαφέρον για τις μη κλασικές θεωρίες συνεχούς μέσου αναθερμάνθηκε (και διατηρείται έως σήμερα) στις αρχές της δεκαετίας του 1980, οπότε δημοσιεύθηκε πλήθος σημαντικών εργασιών αρχικά από τους Eringen, Aifantis και αργότερα από τους Vardoulakis & Sulem, Fleck & Hutchinson, Georgiadis, Zang, Sharma κ.α..

Εξ' αιτίας της γενικότητας της θεωρίας του συνεχούς μέσου με μικροδομή που αναπτύχθηκε από τον Mindlin, της συστηματικής διατύπωσής της από άποψης μαθηματικής ανάλυσης, αλλά και της φυσικής εποπτείας που αυτή προσφέρει, κρίνεται σκόπιμη η λεπτομερής παρουσίαση της εν λόγω θεωρίας και των σχετικών απλοποιήσεών της. Άλλωστε, τα αρκετά απλούστερα, και εφοδιασμένα με λιγότερες παραμέτρους, προσομοιώματα των Aifantis και Vardoulakis&Sulem (το οποίο χρησιμοποιείται στις αριθμητικές εφαρμογές της παρούσας εργασίας) μπορούν να προκύψουν με κατάλληλες απλοποιήσεις των εξισώσεων του Mindlin.

Για λόγους πληρότητας, αλλά και κατανόησης της σύνδεσης μεταξύ των διαφόρων θεωριών περιγράφονται στο επόμενο κεφάλαιο τα βασικά στοιχεία της θεωρίας των αδελφών Cosserat, ενώ γίνονται αναφορές και στα προσομοιώματα που διατυπώθηκαν από άλλους σημαντικούς ερευνητές, όπως οι Tourin, Casal, Eringen, Aifantis, Vardoulakis&Sulem.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΑΠΛΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΘΕΩΡΙΑ COSSERAT

Σύμφωνα με αυτή τη θεωρία κάθε σημείο εφοδιάζεται με τρεις επιπλέον ανεξάρτητους βαθμούς ελευθερίας $\theta_{x_1}, \theta_{x_2}, \theta_{x_3}$, οι οποίοι αποτελούν τις μικροστροφές κάθε υλικού σημείου. Η πυκνότητα ελαστικής ενέργειας εξαρτάται, εκτός από τις τροπές, και από τη βαθμίδα του διανύσματος της στροφής. Το αντίστοιχο εντατικό (όχι ενεργειακά συζυγές) μέγεθος του τανυστή της βαθμίδας της στροφής είναι ο τανυστής της εσωτερικής ροπής ανά επιφάνεια (couple stress tensor). Το μέγεθος αυτό έχει διαστάσεις ροπής ανά τετραγωνικό μέτρο. Σε κάθε εσωτερική τομή του υλικού εμφανίζεται εκτός από το διάνυσμα του ελκυστή της τάσης, το διάνυσμα του ζεύγους τάσης με συνιστώσες m_1, m_2, m_3 κατά τους τρεις καρτεσιανούς άξονες.

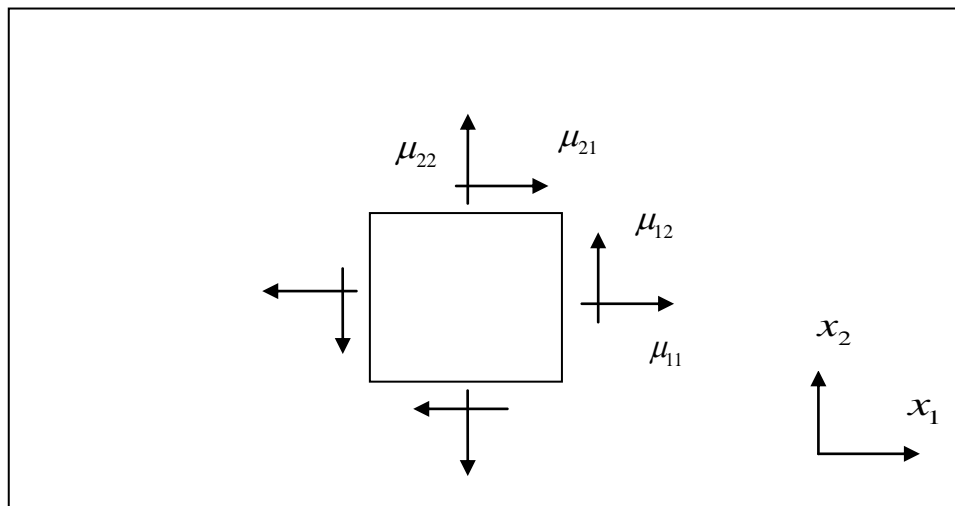
Ο τανυστής του ζεύγους τάσης μ_{ij} και ο ελκυστής του ζεύγους τάσης m_i συνδέονται με τη γνωστή σχέση:

$$m_i = n_k \mu_{ki} \quad (2.1)$$

όπου n το εξωτερικό διάνυσμα της εξωτερικής επιφάνειας που δημιουργείται από την εν λόγω τομή, κατ' αναλογία με τη σχέση μεταξύ ελκυστή και τανυστή τάσης.

Η ύπαρξη των εσωτερικών ροπών ανά επιφάνεια έχει (εν γένει) ως αποτέλεσμα τη μη συμμετρία του τανυστή τάσης, όπως προκύπτει από την ικανοποίηση των εξισώσεων ορμής και στροφορμής.

Η ερμηνεία των δεικτών του τανυστή ζευγών τάσης φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 2.1



Θεωρώντας στατικές συνθήκες, από την εξίσωση ισορροπίας δυνάμεων λαμβάνεται η γνωστή εξίσωση:

$$\begin{aligned} \int_V F_i dV + \int_S t_i dS &= 0 \\ \Rightarrow \int_V F_i dV + \int_S n_j \tau_{ji} dS &= 0 \\ \Rightarrow \int_V (F_i + \partial_j \tau_{ji}) dV &= 0 \\ \forall V \end{aligned}$$

$$\Rightarrow F_i + \partial_j \tau_{ji} = 0 \quad (2.2)$$

, όπου F_i είναι το διάνυσμα των μαζικών δυνάμεων ανά μονάδα όγκου και τ_{ij} είναι ο τανυστής της τάσης.

Η εξίσωση ισορροπίας ροπών δίνει:

$$\begin{aligned} \int_V C_i dV + \int_V \varepsilon_{ijk} x_j F_k dV + \int_S m_i dS + \int_S \varepsilon_{ijk} x_j t_k dS &= 0 \\ \Rightarrow \int_V (C_i + \varepsilon_{ijk} x_j F_k) dV + \int_S n_j \mu_{ji} dS + \int_S n_m \varepsilon_{ijk} x_j \tau_{mk} dS &= 0 \\ \Rightarrow \int_V (C_i + \varepsilon_{ijk} x_j (F_k + \partial_m \tau_{mk}) + \partial_j \mu_{ji} + \varepsilon_{ijk} \tau_{mk} \delta_{jm}) dV &= 0 \\ \forall V \end{aligned}$$

$$\Rightarrow C_i + \partial_j \mu_{ji} + \varepsilon_{ijk} \tau_{jk} = 0 \quad (2.3)$$

, όπου C_i είναι το ενδιάμεσα των εξωτερικών ροπών ανά μονάδα όγκου.

Παρατηρείται ότι η εμφάνιση της βαθμίδας τους ζεύγους τάσης, καθώς και οι εξωτερικά ασκούμενες ροπές ανά μονάδα όγκου ακυρώνουν τη συμμετρία του τανυστή τάσης.

Για ένα γραμμικώς ελαστικό ισότροπο υλικό οι καταστατικές σχέσεις της θεωρίας Cosserat είναι οι εξής:

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= \lambda \cdot \varepsilon_{kk} \cdot \delta_{ij} + (G + \kappa) \cdot \varepsilon_{ij} + G \cdot \varepsilon_{ji} \\ \mu_{ij} &= \alpha \cdot \partial_k \varphi_k \cdot \delta_{ij} + \beta \cdot \partial_i \varphi_j + \gamma \cdot \partial_j \varphi_i \end{aligned} \quad (2.4)$$

, δηλαδή ο τανυστής τάσης προκύπτει συμμετρικός.

Σημειώνεται ότι στις σχέσεις (2.1.4) η τροπή ε_{ij} και η μικροστροφή φ_i συνδέονται με τη σχέση:

$$\varepsilon_{ij} = \partial_i u_j - \varepsilon_{ijk} \varphi_k \quad (2.5)$$

Παρατηρείται ότι στις υπάρχουσες σταθερές λ, G του προστίθενται τέσσερις ακόμη σταθερές $\alpha, \beta, \gamma, \kappa$.

Οι συνοριακές συνθήκες δεν είναι εύκολο να διατυπωθούν επειδή δεν υπάρχει ξεκάθαρος ορισμός των μικροστροφών και των ζευγών τάσης στο σύνορο S .

Οι καταστατικές (και όχι οι πραγματικές) τάσεις είναι ενεργειακά συζυγείς με τα κινηματικά μεγέθη. Μπορούν να προκύψουν θεωρώντας μία (εν προκειμένω) δευτεροβάθμια συνάρτηση πυκνότητας ελαστικής ενέργειας (χωρίς να οριστούν εξ' αρχής καταστατικές σχέσεις για τις τάσεις και τα ζεύγη τάσης):

$$W \equiv W(\varepsilon_{ij}, \partial_i \varphi_j) = \frac{1}{2} A_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + B_{ijkl} \varepsilon_{ij} \partial_k \varphi_l + \frac{1}{2} C_{ijkl} (\partial_i \varphi_j) (\partial_k \varphi_l) \quad (2.6)$$

Η παραπάνω έκφραση είναι μία από τις απλοποιημένες μορφές της συνάρτησης πυκνότητας ελαστικής ενέργειας κατά Cosserat. Μία πιο περίπλοκη έκφραση προκύπτει από τη θεώρηση ότι η ελαστική ενέργεια εξαρτάται επιπλέον από τη διαφορά της μακροσκοπικής στροφής από τη μικροστροφή, δηλαδή από τη διαφορά $\varphi_j - \frac{1}{2} \varepsilon_{jkl} \partial_k u_l$.

Οι καταστατικές τάσεις ορίζονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_{ij} &\equiv \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} = \hat{\tau}_{ji} \neq \tau_{ij} \\ \hat{\mu}_{ij} &\equiv \frac{\partial W}{\partial \partial_i \varphi_j} \neq \mu_{ij} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Η σχέση μεταξύ των πραγματικών (που προκύπτουν από τις εξισώσεις ισορροπίας) τάσεων με τις καταστατικές μπορεί να προκύψει από την εξίσωση των δυνατών μετατοπίσεων.

Το δυνατό έργο των εσωτερικών δυνάμεων ισούται με:

$$\begin{aligned}
\delta W_{\text{int}} &= \int_V (\hat{\tau}_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \hat{\mu}_{ij} \delta (\partial_i \varphi_j)) dV \\
&= \int_V \left(\hat{\tau}_{ij} \frac{1}{2} \delta (\partial_i u_j + \partial_j u_i) + \hat{\mu}_{ij} \partial_i \delta \varphi_j \right) dV \\
&= \int_V (\hat{\tau}_{ij} \partial_i \delta u_j + \hat{\mu}_{ij} \partial_i \delta \varphi_j) dV \\
&= \int_V \left[\partial_i (\hat{\tau}_{ij} \delta u_j + \hat{\mu}_{ij} \delta \varphi_j) - (\partial_i \hat{\tau}_{ij}) \delta u_j - (\partial_i \hat{\mu}_{ij}) \delta \varphi_j \right] dV \\
&= \int_S n_i \cdot (\hat{\tau}_{ij} \delta u_j + \hat{\mu}_{ij} \delta \varphi_j) \cdot dS - \int_V \left[(\partial_i \hat{\tau}_{ij}) \delta u_j + (\partial_i \hat{\mu}_{ij}) \delta \varphi_j \right] dV \\
&\forall V
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Το δυνατό έργο των εξωτερικών δυνάμεων ισούται με:

$$\begin{aligned}
\delta W_{\text{ext}} &= \int_V F_i \delta u_i dV + \int_V C_i \delta \varphi_i dV + \int_S t_i \delta u_i dS + \int_S m_i \delta \varphi_i dS \\
&\forall V
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Όπως θα εξηγηθεί στην ενότητα (4.5), η παραπάνω μορφή του δυνατού έργου των εξωτερικών δυνάμεων δεν είναι σε κάθε περίπτωση ορθή, καθώς τα διανύσματα που εισέρχονται στους εξωτερικούς όρους της εξίσωσης των δυνατών έργων («ενεργειακά» συμβατά μεγέθη), δεν ταυτίζονται εν γένει με τα αντίστοιχα μεγέθη που υπεισέρχονται στις εξισώσεις ισορροπίας. Παρ' όλα αυτά θα υιοθετηθεί σε αυτό το σημείο η εν λόγω παραδοχή, καθώς το παρόν κεφάλαιο έχει εισαγωγικό και διερευνητικό χαρακτήρα.

Διακρίνονται δύο περιπτώσεις:

A) Οι μικροστροφές είναι ανεξάρτητες από τις μετακινήσεις κάθε υλικού σημείου (η δε ελαστική ενέργεια δεν εξαρτάται από τη διαφορά μικροστροφών και μακροστροφών).

Με βάση τη γνωστή διαδικασία του λογισμού των μεταβολών (λαμβάνονται διαδοχικά μηδενικές δυνατές μετατοπίσεις και δυνατές μικροστροφές, κάτι που είναι επιτρεπτό, αφού είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους) προκύπτουν οι εξισώσεις ισορροπίας:

$$\begin{aligned}
\partial_i \hat{\tau}_{ij} + F_j &= 0 \\
\partial_i \hat{\mu}_{ij} + C_j &= 0
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Προκύπτει δηλαδή ότι οι καταστατικές τάσεις ικανοποιούν τις εξισώσεις ισορροπίας, επομένως η απόκλιση της διαφοράς των καταστατικών από τις πραγματικές τάσεις είναι μηδενική.

$$\begin{aligned}
\partial_j (\tau_{jk} - \widehat{\tau}_{jk}) &= 0 \\
\partial_j (\mu_{jk} - \widehat{\mu}_{jk}) &= 0 \\
\forall V
\end{aligned} \tag{2.11}$$

και λόγω του θεωρήματος της απόκλισης του Gauss:

Προκύπτουν επίσης από τις συνοριακές συνθήκες:

$$\begin{aligned}
\int_S n_k \tau_{kj} dS &= \int_S n_i \widehat{\tau}_{ij} dS \\
\int_S n_k \mu_{kj} dS &= \int_S n_i \widehat{\mu}_{ij} dS
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Οι παραπάνω εξισώσεις ισχύουν για κάθε όγκο V , οπότε προκύπτει ότι οι καταστατικές και οι πραγματικές τάσεις και ζεύγη τάσεων ταυτίζονται:

$$\begin{aligned}
\widehat{\tau}_{ij} &= \tau_{ij} \\
\widehat{\mu}_{ij} &= \mu_{ij}
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Η εξίσωση ισοροπίας ροπών (2.3) ανάγεται (λαμβάνοντας υπόψη ότι $\varepsilon_{ijk} \tau_{jk} = \varepsilon_{ijk} \widehat{\tau}_{jk} = 0$ και τη σχέση (2.10)ii στη σχέση (2.8)ii.

Επομένως σε αυτήν την περίπτωση παρατηρείται ταύτιση μεταξύ πραγματικών και καταστατικών τάσεων και ζευγών τάσης, ενώ ο τανυστής τάσης προκύπτει ως εκ τούτου συμμετρικός.

B) Οι μικροστροφές ταυτίζονται με τις μακροσκοπικές στροφές σε κάθε υλικό σημείο.

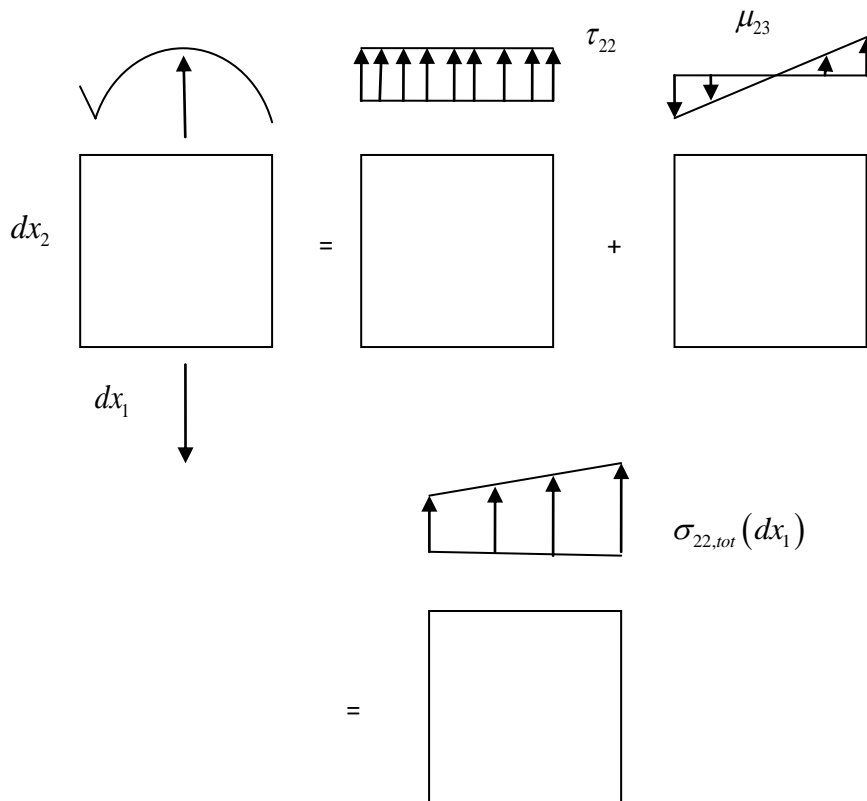
Σε αυτήν την περίπτωση ισχύει:

$$\begin{aligned}
\vec{\varphi} &= \frac{1}{2} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{u} \\
\Rightarrow \varphi_i &= \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_{ijk} \partial_j u_k
\end{aligned} \tag{2.14}$$

, επομένως οι μικροστροφές και οι μετατοπίσεις κάθε υλικού σημείου παύουν να είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Η εξίσωση των δυνατών έργων χρειάζεται πλέον τροποποίηση, καθώς σε κάθε σημείο του συνόρου S μόνο η προβολή του μεγέθους $\partial_i \delta u_j$ κατά τη διεύθυνση του κάθετου διανύσματος \vec{n} είναι ανεξάρτητη από τη δυνατή μετατόπιση δu_i .

Οι ενεργειακά συμβατές συνοριακές συνθήκες προκύπτουν από πιο περίπλοκη διαδικασία, η οποία θα αναπτυχθεί σε επόμενη ενότητα, καθώς το παρόν πρόβλημα προκύπτει ως υποπερίπτωση των απλοποιημένων εξισώσεων του Mindlin.

Ο τρόπος με τον οποίο εισάγεται η επιρροή της μικροδομής του υλικού φαίνεται εποπτικά στα παρακάτω σχήματα.



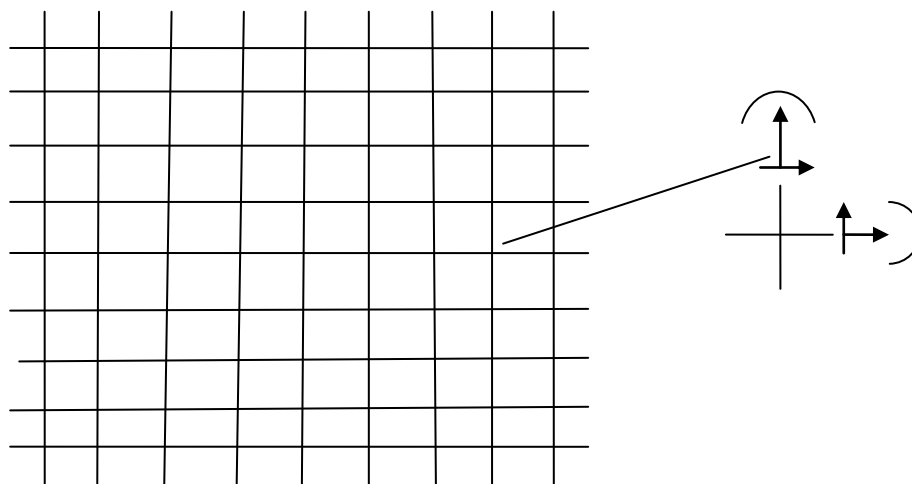
Σχήμα 2.2

Στο παρακάτω σχήμα παρατηρείται ότι το προσομοίωμα Cosserat με τα ζεύγη τάσης μπορεί να θεωρηθεί ισοδύναμο με ένα προσομοίωμα που διαθέτει μόνο τάσεις, οι οποίες όμως δεν είναι τοπικά ομοιογενείς (εντός του διαφορικού στοιχείου), αλλά παρουσιάζουν γραμμική μεταβολή (κάθετα στη διεύθυνσή τους) εντός αυτού. Το ίδιο συμβαίνει και για τις αντίστοιχες παραμορφώσεις.

Οι μετατοπίσεις είναι φανερό ότι μεταβάλλονται παραβολικά εντός του διαφορικού στοιχείου. Αυτό σημαίνει ότι η θεωρία Cosserat είναι μία θεωρία 2^{ης} βαθμίδας ως προς τις μετατοπίσεις. Σε κάθε σημείο η τοπική τιμή της μετατόπισης (και επομένως και οι τοπικές τιμές της τάσης και της παραμόρφωσης) δεν ταυτίζεται με τη μέση τιμή εντός ενός θεωρούμενου δειγματοληπτικού μήκους (του διαφορικού στοιχείου στην

προκειμένη περίπτωση). Η μεταβολή ενός μεγέθους από μία θέση σε μία άλλη πολύ κοντινή παύει να θεωρείται γραμμική, καθώς με τη θεώρησης γραμμικής μεταβολής αδυνατεί να προσεγγιστεί η μεταβολή του μεγέθους εντός του χαρακτηριστικού μικροόγκου. Η εν λόγω μεταβολή παίζει σημαντικό ρόλο σε κάποιες κατηγορίες φαινομένων, όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή.

Μία άλλη φυσική ερμηνεία της θεωρίας Cosserat φαίνεται στο επόμενο σχήμα:



Σχήμα 2.3

Το προσομοίωμα του συνεχούς μπορεί να αντικατασταθεί από ένα προσομοίωμα διακριτών κόμβων συνδεδεμένων με μεταξύ τους με διακριτά μέλη. Σε κάθε κόμβο μεταφέρονται από κάθε συντρέχον μέλος δυνάμεις και ροπές. Θεωρώντας ότι οι αποστάσεις μεταξύ των κόμβων ταυτίζονται ή ότι ανήκουν στην ίδια τάξη μεγέθους με τη χαρακτηριστική διάσταση της μικροδομής (π.χ. μέγεθος κόκκου για έδαφος), το εν λόγω διακριτό προσομοίωμα μπορεί να αντικατασταθεί από ένα προσομοίωμα συνεχούς, σε κάθε σημείο του οποίου θα ορίζονται τρεις επιπλέον (ανεξάρτητοι ή συσχετισμένοι με τις μετατοπίσεις) βαθμοί ελευθερίας, ενώ σε κάθε τομή θα αποκαλύπτονται εκτός από ελκυστές τάσης και ροπές ανά επιφάνεια.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΜΕ ΜΙΚΡΟΔΟΜΗ ΚΑΤΑ MINDLIN

Το 1964 ο Mindlin [36] ανέπτυξε μία θεωρία συνεχούς μέσου συστηματική και βασισμένη σε ένα σαφές προσομοίωμα της μικροδομής του υλικού. Όπως θα δειχτεί, οι εξισώσεις της θεωρίας Cosserat μπορούν να προκύψουν ως ειδικές περιπτώσεις των εξισώσεων της θεωρίας του Mindlin. Η εν λόγω θεωρία αναπτύσσεται ως εξής:

Σε ένα υλικό σώμα όγκου V , ο οποίος περικλείεται από μία επιφάνεια S ορίζεται για κάθε σημείο το διάνυσμα της μακροσκοπικά θεωρούμενης μετατόπισης από τη σχέση:

$$u_i \equiv x_i - X_i \quad (3.1)$$

, όπου x_i, X_i είναι αντιστοίχως η τελική (μετά την παραμόρφωση) και η αρχική θέση του υλικού σημείου.

Στη γειτονιά κάθε υλικού σημείου ορίζεται ένας μικροόγκος με χαρακτηριστική διάσταση αρκούντως μικρή ως προς τις διαστάσεις dx_1, dx_2, dx_3 του διαφορικού στοιχείου που ορίζεται κατά τη μακροσκοπική έννοια ως προς το εν λόγω υλικό σημείο.

Η θεμελιώδης διαφορά με την κλασσική θεωρία του συνεχούς μέσου είναι ότι σε κάθε υλικό σημείο ορίζονται δύο όγκοι. Ένας μακροσκοπικός διαφορικός όγκος αυθαίρετου σχήματος και διαστάσεων, ο οποίος συνδέεται κατά συνεχή τρόπο με τους γειτονικούς διαφορικούς όγκους και ένας διακριτός μικροόγκος ο οποίος περικλείεται στο μακροόγκο. Το σχήμα οι διαστάσεις και ο προσανατολισμός του μικροόγκου ορίζονται πλήρως. Το σχήμα είναι παραλληλεπίπεδο, ο προσανατολισμός μπορεί να ταυτίζεται ή μη με το θεωρούμενο καθολικό καρτεσιανό σύστημα αναφοράς, ενώ το μέγεθος των τριών υψών του παραλληλεπιπέδου εξαρτάται από τη μικροδομή (π.χ. κοκκομετρία) του υλικού.

Το σώμα αποτελείται από διακριτούς όγκους συγκεκριμένων διαστάσεων, οι οποίοι όμως κατανέμονται κατά αυθαίρετο και όχι ρητά διατυπωμένο τρόπο στο χώρο. Σε οποιοδήποτε μακροσκοπικά ορισμένο σημείο του χώρου υπάρχει ένας μικροόγκος.

Σε κάθε μικροόγκο ορίζεται ένα σύστημα συντεταγμένων με άξονες παράλληλους με τους άξονες του σταθερού καθολικού συστήματος, του οποίου όμως η αρχή κινείται μαζί με το υλικό σημείο που περιέχει το μικροόγκο, μετατοπιζόμενο κατά u_i . Για κάθε σημείο του μικροόγκου ορίζονται αντιστοίχως η τελική και η αρχική συντεταγμένη x'_i, X'_i , ως προς το κινητό σύστημα αξόνων. Η σχετική μικρομετατόπιση ορίζεται από τη σχέση:

$$u'_i = x'_i - X'_i \quad (3.2)$$

Στα πλαίσια της θεωρίας μικρών μετατοπίσεων γίνονται οι εξής παραδοχές:

$$\left| \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \right| \ll 1$$

$$\left| \frac{\partial u'_i}{\partial X'_j} \right| \ll 1$$
(3.3)

Οι παραπάνω παραδοχές επιτρέπουν τις εξής απλοποιήσεις:

$$\frac{\partial u_j}{\partial X_i} \approx \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \equiv \partial_i u_j, u_j = u_j(x_i, t)$$

$$\frac{\partial u'_j}{\partial X'_i} \approx \frac{\partial u_j}{\partial x'_i} \equiv \partial'_i u'_j, u'_j = u'_j(x_i, x'_k, t)$$
(3.4)

Η σχετική μικρο-μετατόπιση θεωρείται ότι μεταβάλλεται γραμμικά εντός του μικροόγκου:

$$u'_j = x'_k \cdot \psi_{kj}$$
(3.5)

Οι συναρτήσεις ψ_{ij} εξαρτώνται από τη μακρο-συντεταγμένη x_i και τον χρόνο. Επομένως η βαθμίδα της μετατόπισης δίνεται από τη σχέση:

$$\partial'_i u'_j = \psi_{ij}$$
(3.6)

και ταυτίζεται με τη δυαδική ψ_{ij} που είναι ο τανυστής της βαθμίδας της μικρομετατόπισης.

Κατ' αναλογία με τον τανυστή της μακροσκοπικής μετατόπισης, το συμμετρικό μέρος του τανυστή ψ_{ij} αποτελεί τον τανυστή της μικροπαραμόρφωσης και το αντισυμμετρικό μέρος τον τανυστή της μικροστροφής.

$$\psi_{(ij)} \equiv \frac{1}{2}(\psi_{ij} + \psi_{ji})$$
(3.7)

$$\psi_{[ij]} \equiv \frac{1}{2}(\psi_{ij} - \psi_{ji})$$
(3.8)

Οι τανυστές της μικροπαραμόρφωσης και της μικροστροφής ορίζονται αντιστοίχως από τις γνωστές σχέσεις:

$$\varepsilon_{ij} \equiv \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i)$$
(3.9)

$$\omega_{ij} \equiv \frac{1}{2}(\partial_i u_j - \partial_j u_i)$$
(3.10)

Στη συνέχεια ορίζονται δύο μεγέθη που συνδέουν τις μακροσκοπικές μετατοπίσεις και παραμορφώσεις με τις αντίστοιχες της μικροδομής. Ορίζεται ο τανυστής της διαφοράς των βαθμίδων μακρομετατόπισης και μικρομετατόπισης:

$$\gamma_{ij} = \partial_i u_j - \psi_{ij} \quad (3.11)$$

, καθώς και ο τανυστής της μεταβολής, ως προς το μακροσκοπικά θεωρούμενο χώρο, της βαθμίδας μικρομετατόπισης:

$$\kappa_{ijk} = \partial_i \psi_{jk} \quad (3.12)$$

Και οι τρεις τανυστές $\varepsilon_{ij}, \gamma_{ij}, \kappa_{ijk}$ είναι ανεξάρτητοι από τις μικροσυντεταγμένες x'_i .

Η πυκνότητα ελαστικής ενέργειας θεωρείται ότι είναι συνάρτηση των μεγεθών $\varepsilon_{ij}, \gamma_{ij}, \kappa_{ijk}$:

$$w = w(\varepsilon_{ij}, \gamma_{ij}, \kappa_{ijk}) \quad (3.13)$$

Η αρχή του Hamilton χρησιμοποιείται για τη διατύπωση της διαφορικής εξίσωσης κίνησης και των ενεργειακά συμβατών συνοριακών συνθηκών.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (K - W) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_1 dt = 0 \quad (3.14)$$

, όπου K, W είναι αντιστοίχως η ολική κινητική και ελαστική ενέργεια.

$$\begin{aligned} K &= \int_V k dV \\ W &= \int_V w dV \end{aligned} \quad (3.15)$$

, ενώ k είναι η πυκνότητα κινητικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου.

Η πυκνότητα κινητικής ενέργειας υπολογίζεται ως εξής. Το μικροστοιχείο έχει σχήμα παραλληλεπίπεδου όγκου V' , διαστάσεις ακμών ίσες με $2 \cdot d_i$ και συνημίτονα κατεύθυνσης των ακμών ως προς τους κινητούς άξονες x'_i ίσα με l_{ij} . Έστω x''_i οι λοξές καρτεσιανές συντεταγμένες κατά άξονες παράλληλους με τις ακμές του μικροστοιχείου. Αποδεικνύεται ότι:

$$x'_i = l_{ij} x''_j \quad (3.16)$$

$$V' = 8 \left\| l_{ij} \cdot l_{ik} \right\|^{\frac{1}{2}} d_1 d_2 d_3 \quad (3.17)$$

$$dV' = \left\| l_{ij} \cdot l_{ik} \right\|^{\frac{1}{2}} dx''_1 dx''_2 dx''_3 \quad (3.18)$$

Αν ρ_M είναι η μάζα μακρο-υλικού ανά μονάδα μακρο-όγκου και ρ' η μάζα μικρο-υλικού ανά μονάδα μακρο-όγκου, η πυκνότητα κινητικής ενέργειας δίνεται από τη σχέση:

$$k \equiv \frac{1}{2} \rho_M \dot{u}_j \dot{u}_j + \frac{1}{V'} \int \frac{1}{2} \rho' (\dot{u}_j + \dot{u}'_j) (\dot{u}_j + \dot{u}'_j) dV' \quad (3.19)$$

Η ολοκλήρωση της παραπάνω σχέσης δίνει:

$$k = \frac{1}{2} \rho \dot{u}_j \dot{u}_j + \frac{1}{6} \rho' d'_{kl} \dot{\psi}_{kj} \dot{\psi}_{lj} \quad (3.20)$$

, όπου:

$$\rho \equiv \rho_M + \rho' \quad (3.21)$$

$$d'_{kl} \equiv d_p d_q (\delta_{p1} \delta_{q1} l_{k1} l_{l1} + \delta_{p2} \delta_{q2} l_{k2} l_{l2} + \delta_{p3} \delta_{q3} l_{k3} l_{l3}) = d_{lk}^2 \quad (3.22)$$

Στην περίπτωση που το μικρο-στοιχείο είναι σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου, με ακμές παράλληλες στους κινητούς άξονες x'_i , ισχύουν οι σχέσεις:

$$\begin{aligned} l_{ij} &= \delta_{ij} \\ d_1 &= d_2 = d_3 \equiv d \end{aligned} \quad (3.23)$$

Σε αυτήν την περίπτωση ο δεύτερος όρος της σχέσης (2.2.20) απλοποιείται σε $\frac{1}{6} \rho' d^2 \dot{\psi}_{ij} \dot{\psi}_{ij}$. Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει:

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} K dt &= \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \left(\frac{1}{2} \rho \dot{u}_j \dot{u}_j + \frac{1}{6} \rho' d'_{kl} \dot{\psi}_{kj} \dot{\psi}_{lj} \right) dV = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \left(\rho \dot{u}_j \delta \dot{u}_j + \frac{1}{6} \rho' d'^2_{kl} \dot{\psi}_{kj} \delta \dot{\psi}_{lj} + \frac{1}{6} \rho' d'^2_{kl} \dot{\psi}_{lj} \delta \dot{\psi}_{kj} \right) dV = \\ &= \int_V \left(\rho \dot{u}_j \delta u_j + \frac{1}{3} \rho' d'^2_{jl} \dot{\psi}_{lk} \delta \psi_{jk} \right) dV \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \left(\rho \ddot{u}_j \delta u_j + \frac{1}{3} \rho' d'^2_{jl} \ddot{\psi}_{lk} \delta \psi_{jk} \right) dV \\ &\Rightarrow \delta \int_{t_1}^{t_2} K dt = - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \left(\rho \ddot{u}_j \delta u_j + \frac{1}{3} \rho' d'^2_{jl} \ddot{\psi}_{lk} \delta \psi_{jk} \right) dV \end{aligned} \quad (3.24)$$

, αφού κατά τις χρονικές στιγμές t_1, t_2 οι μετατοπίσεις και οι μικροπαραμορφώσεις θεωρούνται γνωστές.

Για να υπολογιστεί η παραλλαγή της ελαστικής ενέργειας ορίζονται πρώτα οι καταστατικές τάσεις και διπλές τάσεις:

$$\tau_{ij} \equiv \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}} = \tau_{ji} \quad (3.25)$$

$$\sigma_{ij} \equiv \frac{\partial w}{\partial \gamma_{ij}} \quad (3.26)$$

$$\mu_{ijk} \equiv \frac{\partial w}{\partial \kappa_{ijk}} \quad (3.27)$$

Μετά από τους παραπάνω ορισμούς:

$$\begin{aligned} \delta w &= \tau_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \sigma_{ij} \delta \gamma_{ij} + \mu_{ijk} \delta \kappa_{ijk} \\ &= \tau_{ij} \partial_i \delta u_j + \sigma_{ij} (\partial_i \delta u_j - \delta \psi_{ij}) + \mu_{ijk} \partial_i \delta \psi_{jk} \\ &= \partial_i \left[(\tau_{ij} + \sigma_{ij}) \delta u_j \right] - \left[\partial_i (\tau_{ij} + \sigma_{ij}) \right] \delta u_j - \sigma_{ij} \delta \psi_{ij} \\ &\quad + \partial_i (\mu_{ijk} \delta \psi_{jk}) - \left[\partial_i \mu_{ijk} \right] \delta \psi_{jk} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Ολοκληρώνοντας ως προς το χώρο και εφαρμόζοντας το θεώρημα της απόκλισης προκύπτει:

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_V \delta w dV \\ &= - \int_V \partial_i (\tau_{ij} + \sigma_{ij}) \delta u_j dV - \int_V (\partial_i \mu_{ijk} + \sigma_{jk}) \delta \psi_{jk} dV \\ &\quad + \int_S n_i (\tau_{ij} + \sigma_{ij}) \delta u_j dS + \int_S n_i \mu_{ijk} \delta \psi_{jk} dS \end{aligned} \quad (3.29)$$

Από τη μορφή της εξίσωσης (2.2.29) προκύπτουν οι απαραίτητοι (για την ενεργειακή συμβατότητα) όροι που αντιστοιχούν στο έργο των εξωτερικών δυνάμεων.

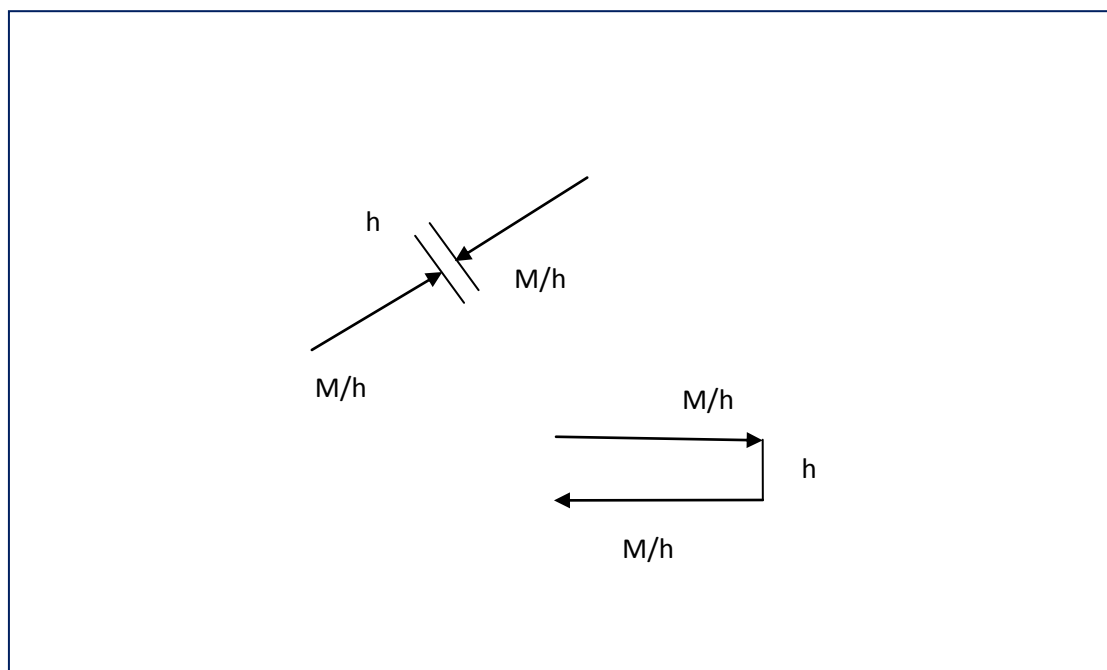
$$\delta W_1 = \int_V f_i \delta u_i dV + \int_V \Phi_{jk} \delta \psi_{jk} dV + \int_S t_i \delta u_i dS + \int_S T_{jk} \delta \psi_{jk} dS \quad (3.30)$$

Ο πρώτος και ο τρίτος όρος της παραπάνω εξίσωσης εμφανίζονται και στην κλασσική ελαστικότητα. Οι καινούριοι όροι Φ_{jk}, T_{jk} είναι τα ζεύγη δυνάμεων (double forces) ανά όγκο και επιφάνεια αντίστοιχα. Η έννοια της διπλής δύναμης είναι η εξής. Πρόκειται για δύο συγκεντρωμένες δυνάμεις ιδίου μέτρου, οι οποίες ασκούνται σε απείρως μικρή απόσταση μεταξύ τους. Η εν λόγω απόσταση έχει την ίδια τάξη μεγέθους με τη χαρακτηριστική συντεταγμένη του μικροόγκου, οπότε είναι μηδενική κατά τη μακροσκοπική θεώρηση. Οι δύο δυνάμεις ασκούνται στο ίδιο σημείο κατά τη μακροσκοπική θεώρηση και ως εκ τούτου δεν υπεισέρχονται στις εξισώσεις ισορροπίας του σώματος, δημιουργούν όμως ελαστική ενέργεια και επηρεάζουν τις εξισώσεις της μικρο-κίνησης και τις αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες.

Ένα ζεύγος δυνάμεων (double force, force doublet) μέτρου M προκαλείται από δύο παράλληλες δυνάμεις μέτρου $\frac{M}{h}$ και αντιθέτου φοράς. Όταν οι δυνάμεις είναι

συγγραμμικές δεν παράγουν ροπή και h είναι η απόσταση των σημείων εφαρμογής τους. Σε αντίθετη περίπτωση παράγουν ροπή και h είναι η απόσταση των αξόνων τους. Η απόσταση h είναι μηδενική κατά τη μακροσκοπική θεώρηση και σχετίζεται

με τη μικροδομή του υλικού. Το ζεύγος δυνάμεων έχει διαστάσεις ροπής. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται δύο περιπτώσεις διπλών δυνάμεων μία με ροπή και μία χωρίς ροπή.



Σχήμα 3.1

Οι διαγώνιοι όροι των δυαδικών Φ_{jk}, T_{jk} αντιστοιχούν σε ζεύγη δυνάμεων χωρίς ροπή ενώ οι μη διαγώνιοι όροι σε ζεύγη δυνάμεων με ροπή. Το αντισυμμετρικό μέρος $\Phi_{[jk]}$ των ζευγών δυνάμεων ανά μονάδα όγκου, Φ_{jk} , είναι η εξωτερική ροπή ανά μονάδα όγκου του υλικού (body couple) και αντιστοιχεί στο διάνυσμα C_i της θεωρίας Cosserat. Το αντισυμμετρικό μέρος $T_{[jk]}$ των ζευγών δυνάμεων ανά μονάδα εξωτερικής επιφάνειας, T_{jk} , είναι το διάνυσμα του ζεύγους τάσης και αντιστοιχεί στο διάνυσμα m_i της θεωρίας Cosserat. Σε κάθε μία από τις εν λόγω δυαδικές ο πρώτος δείκτης αναφέρεται στον προσανατολισμό του μοχλοβραχίονα που δημιουργούν οι δύο δυνάμεις και ο δεύτερος αναφέρεται στον προσανατολισμό των δυνάμεων. Όταν οι δύο δυνάμεις δε δημιουργούν μοχλοβραχίονα, οι δύο δείκτες ταυτίζονται. Τα ζεύγη δυνάμεων θεωρούνται θετικά όταν κατά μήκος μιας επιφάνειας με εξωτερικό διάνυσμα κατά τη θετική διεύθυνση, η δύναμη που βρίσκεται στο θετικό άκρο του μοχλοβραχίονα (κατά την έννοια της διεύθυνσης της παράλληλης με το μοχλοβραχίονα) ασκείται κατά τη θετική διεύθυνση.

Η ολοκληρωτική εξίσωση κίνησης (2.2.14) γίνεται (θεωρώντας ότι το χρονικό διάστημα (t_1, t_2) είναι αυθαίρετο:

$$\begin{aligned}
& \int_V \left(\partial_i \tau_{ij} + \partial_i \sigma_{ij} + f_j - \rho \ddot{u}_j \right) \delta u_j dV + \\
& + \int_V \left(\partial_i \mu_{ijk} + \sigma_{jk} + \Phi_{jk} - \frac{1}{3} \rho' d_{jl}^2 \ddot{\psi}_{lk} \right) \delta \psi_{jk} dV + \\
& + \int_S \left[t_j - n_i (\tau_{ij} + \sigma_{ij}) \right] \delta u_j dS + \int_S \left(T_{jk} - n_i \mu_{ijk} \right) \delta \psi_{jk} dS = 0
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Κατά τη συνήθη διαδικασία του λογισμού των μεταβολών θεωρείται ένα ομαλό πεδίο μετατοπίσεων και μικρο-παραμορφώσεων το οποίο στο σύνορο είναι μηδενικό. Επειδή το χωρίο V είναι αυθαίρετο προκύπτουν πρώτα οι δώδεκα εξισώσεις κίνησης:

$$\partial_i (\tau_{ij} + \sigma_{ij}) + f_j = \rho \ddot{u}_j \tag{3.32}$$

$$\partial_i \mu_{ijk} + \sigma_{jk} + \Phi_{jk} = \frac{1}{3} \rho' d_{ij}^2 \ddot{\psi}_{lk} \tag{3.33}$$

και ακολουθούν οι δώδεκα φυσικές ή κινηματικές συνοριακές συνθήκες:

$$\begin{aligned}
t_j &= n_i (\tau_{ij} + \sigma_{ij}) \\
&\dot{\eta} \\
\delta u_j &= 0
\end{aligned} \tag{3.34}$$

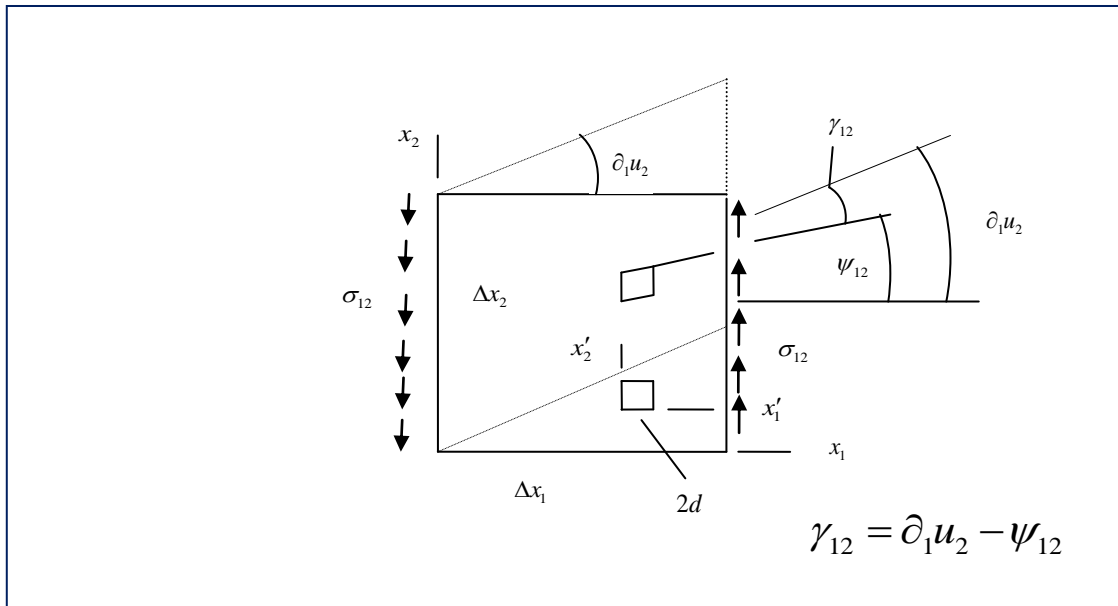
$$\begin{aligned}
T_{jk} &= n_i \mu_{ijk} \\
&\dot{\eta} \\
\delta \psi_{jk} &= 0
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Από την εξίσωση (2.2.32) συνάγεται ότι η πραγματική τάση ισούται με το άθροισμα των καταστατικών τάσεων τ_{ij}, σ_{ij} .

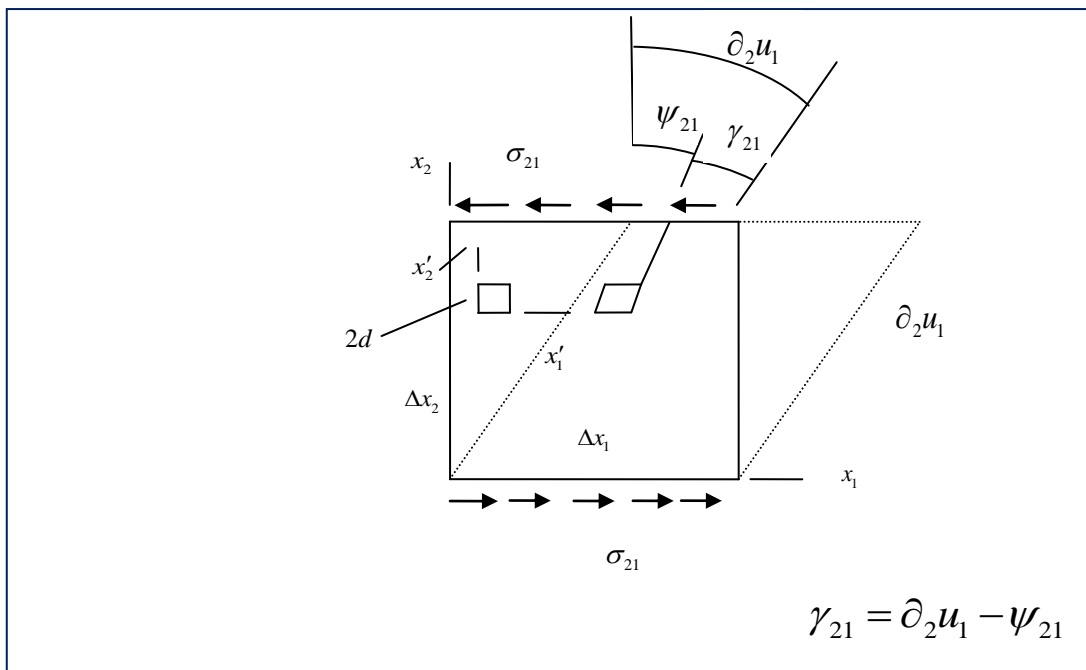
Οι καταστατικές τάσεις μ_{ijk} είναι ζεύγη δυνάμεων ανά μονάδα επιφάνειας που ασκούνται στις τρεις έδρες του στοιχειώδους μακρο-κύβου. Ο πρώτος δείκτης αναφέρεται στη διεύθυνση του καθέτου διανύσματος της επιφάνειας στην οποία ασκείται το ζεύγος δύναμης, ενώ οι άλλοι δύο έχουν την ίδια σημασία με τους αντίστοιχους δείκτες των εξωτερικών ζευγών δυνάμεων.

Οι εξισώσεις της θεωρίας Cosserat με έξι ανεξάρτητους κινηματικούς βαθμούς ελευθερίας προκύπτουν από τις εξισώσεις της παρούσας θεωρίας αν τεθεί $\psi_{(ij)} = 0$ και $\gamma_{ij} = 0$. Συνεπεία αυτής της απαίτησης, προκύπτει $\sigma_{ij} = 0$ και $\mu_{i(jk)} = 0$, οπότε απομένει το αντισυμμετρικό μέρος $\mu_{[jk]}$ που ταυτίζεται με τον τανυστή εσωτερικής ροπής κατά Cosserat (Cosserat couple stress tensor). Οι όροι του αντισυμμετρικού μέρους $\psi_{[ij]}$ του τανυστή της μικροπαραμόρφωσης, αντιστοιχούν στο διάνυσμα της μικροστροφής της θεωρίας Cosserat. Σημειώνεται επίσης ότι πρέπει να θεωρηθεί $\rho' = 0$.

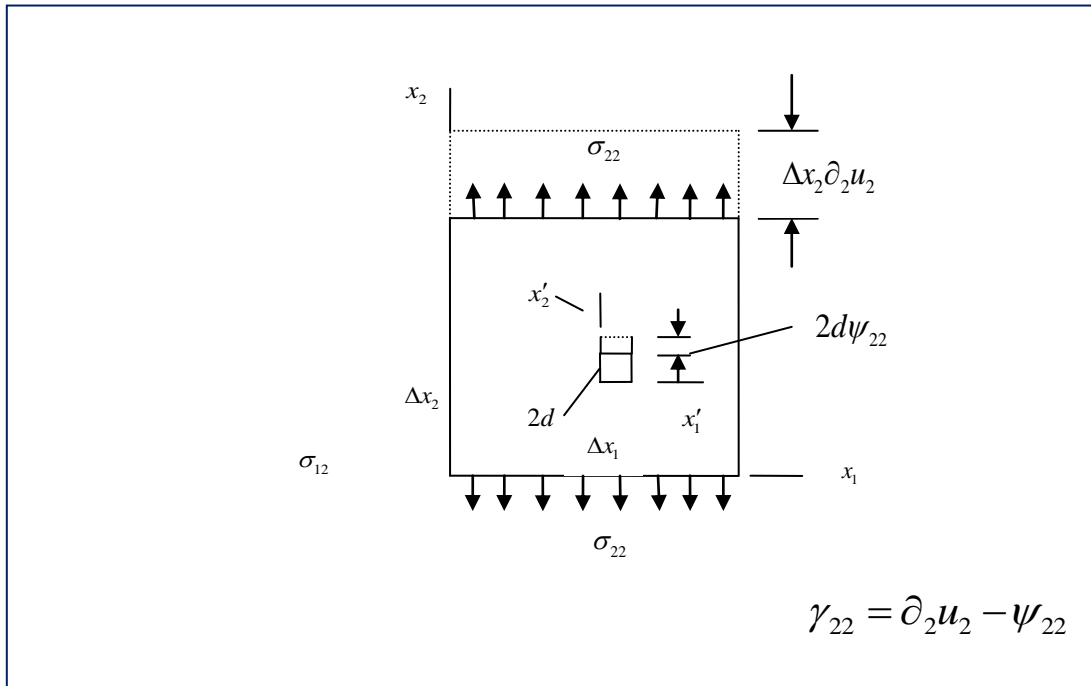
Στα παρακάτω σχήματα απεικονίζονται ορισμένες χαρακτηριστικές συνιστώσες των τανυστών $\varepsilon_{ij}, \psi_{ij}, \gamma_{ij}, \kappa_{ijk}, \sigma_{ij}, \mu_{ijk}$.



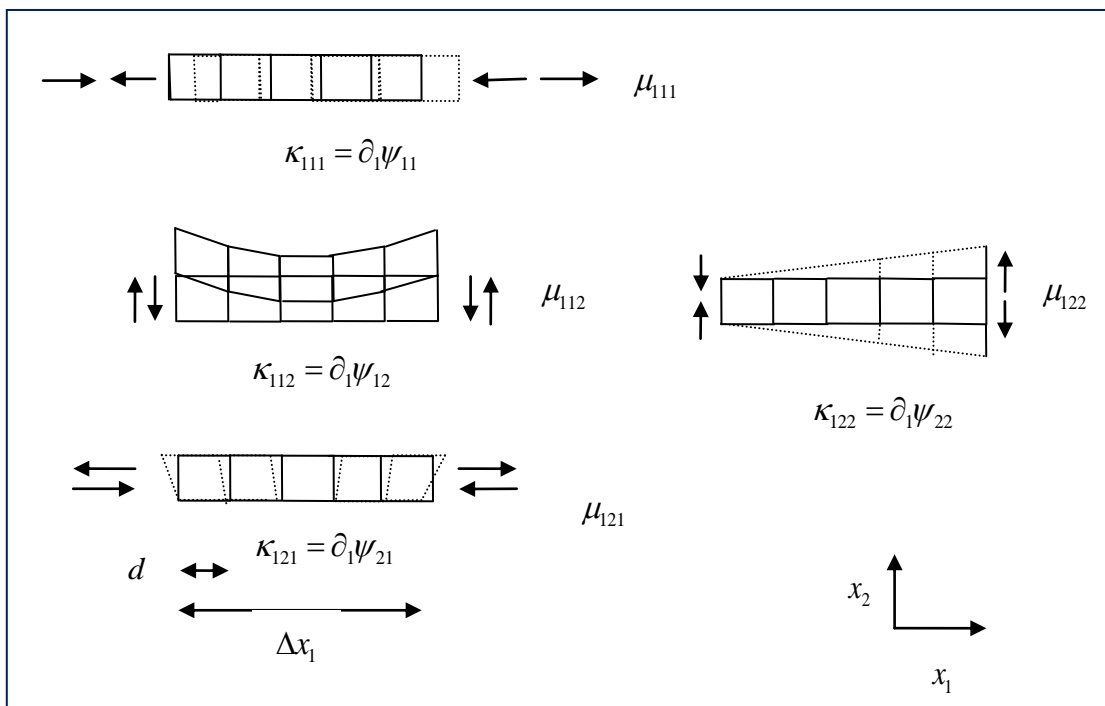
Σχήμα 3.2



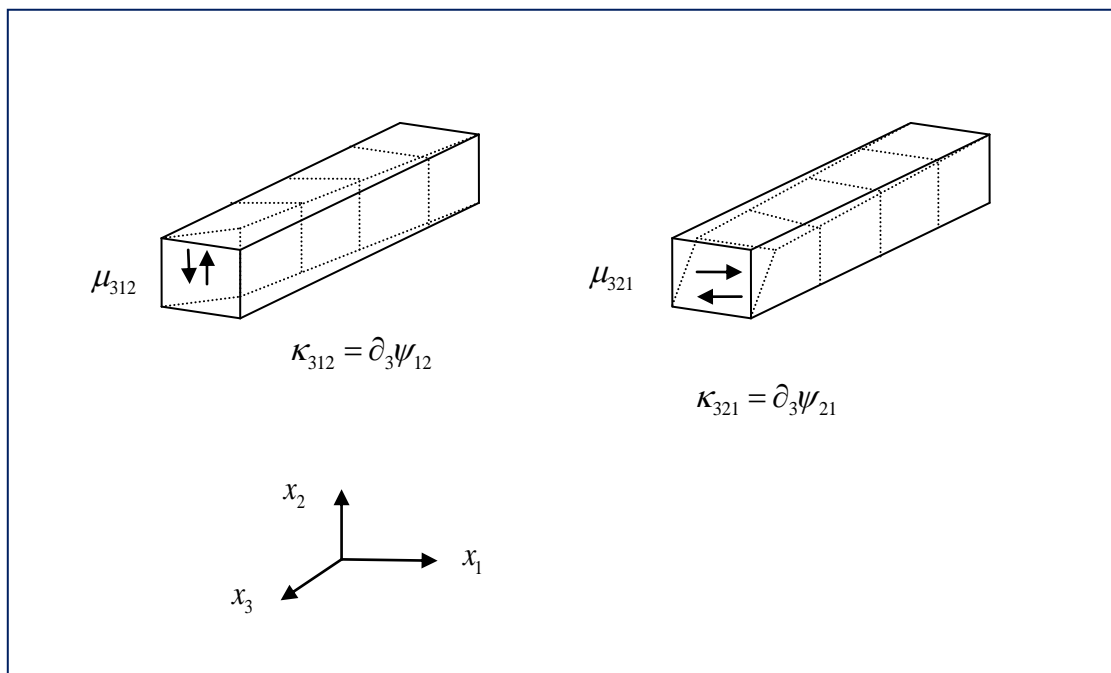
Σχήμα 3.3



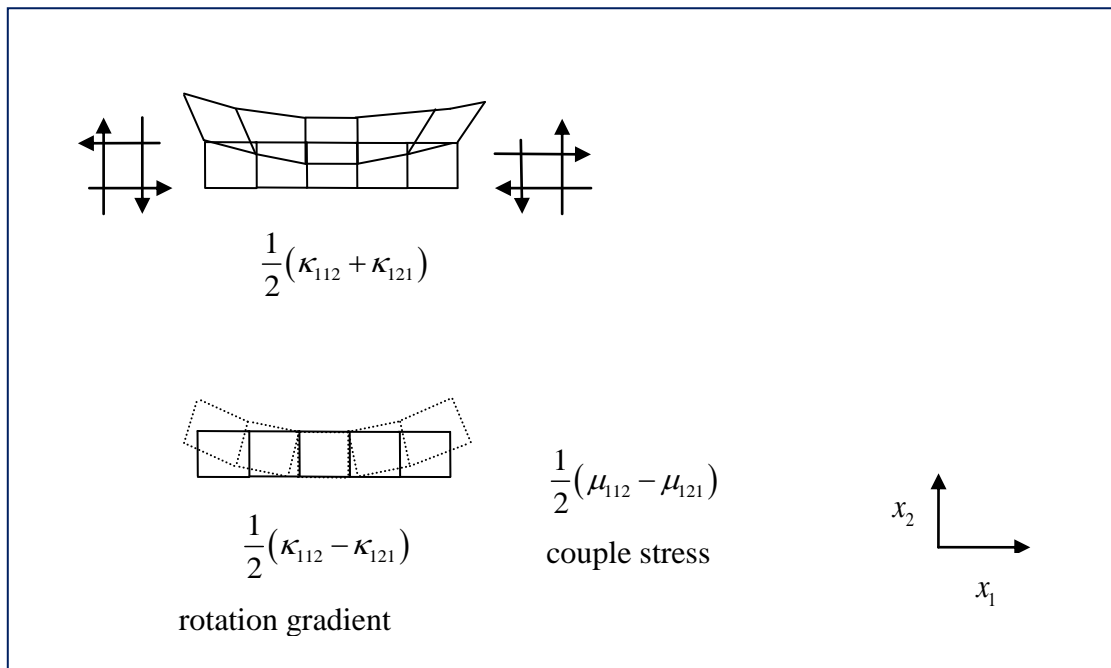
Σχήμα 3.4



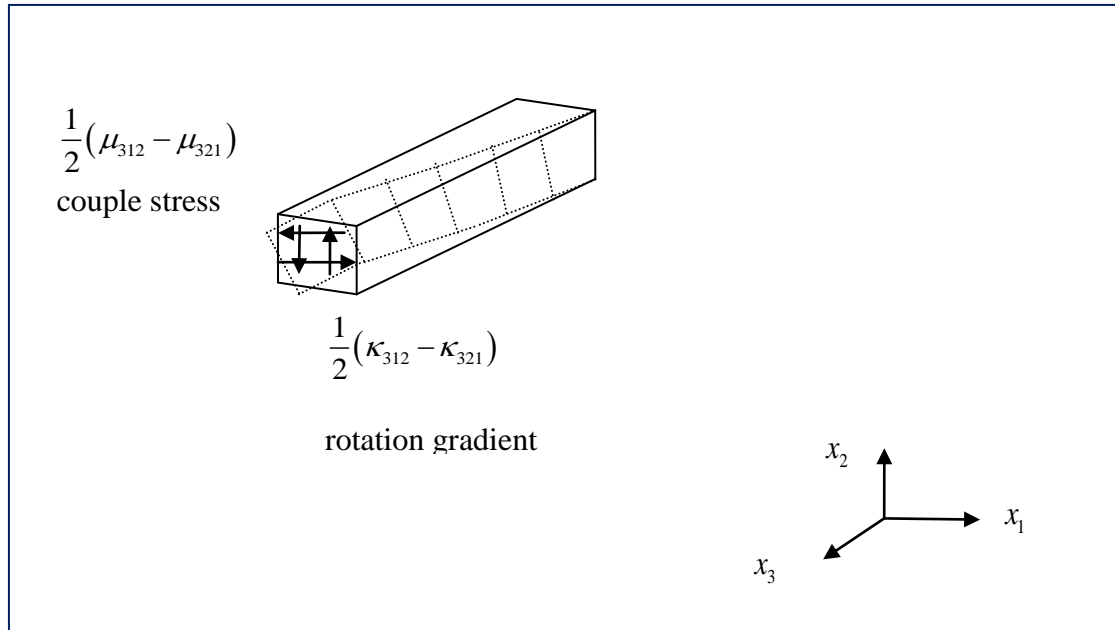
Σχήμα 3.5



Σχήμα 3.6



Σχήμα 3.7



Σχήμα 3.8

Στη συνέχεια δείχνεται με φυσικά εποπτικό τρόπο ότι τα μεγέθη μ_{ijk}, κ_{ijk} και σ_{ij}, γ_{ij} είναι ενεργειακώς συζυγή.

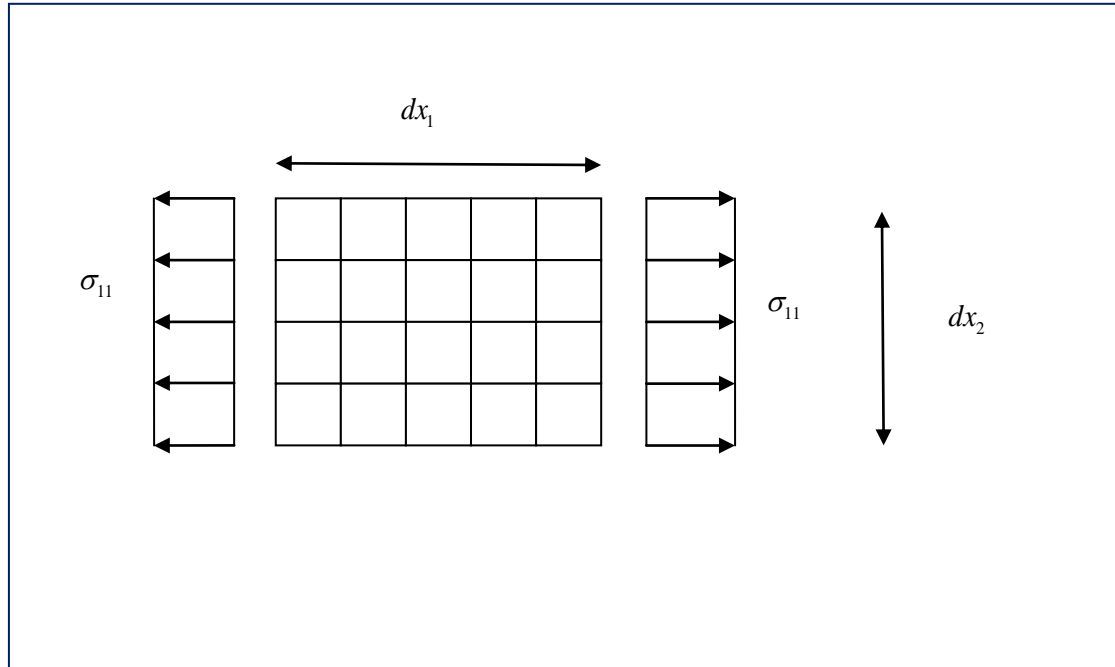
Από το σχήμα 3.5 παρατηρείται ότι το δυνατό έργο του ζεύγους τάσης μ_{111} είναι ίσο με:

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta w_{\mu_{111}}}{dx_2 dx_3} &= \frac{\mu_{111}}{l} \delta u'_1 - \frac{\mu_{111}}{l} (\delta u'_1 + \delta \psi_{11} l) - \frac{\mu_{111}}{l} \left(\delta u'_1 + \frac{\partial \delta u'_1}{\partial x_1} dx_1 \right) + \\
 &\frac{\mu_{111}}{l} \left[\delta u'_1 + \frac{\partial \delta u'_1}{\partial x_1} dx_1 + l \cdot \left(\delta \psi_{11} + \frac{\partial \delta \psi_{11}}{\partial x_1} \right) dx_1 \right] = \\
 &= \mu_{111} \frac{\partial \delta \psi_{11}}{\partial x_1} dx_1 = \mu_{111} \delta \kappa_{111} dx_1
 \end{aligned}$$

, όπου l είναι το μήκος του μοχλοβραχίονα του ζεύγους δυνάμεων. Η μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της δεύτερης δύναμης ισούται με τη μετατόπιση του σημείου εφαρμογής της πρώτης δύναμης, προσαυξημένη κατά $\psi_{11} \cdot l$, δεδομένου ότι η παραμόρφωση εντός του μικροόγκου είναι σταθερή. Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται η ενεργειακή συζυγία και για τις υπόλοιπες συνιστώσες του τανυστή ζεύγους τάσης.

Οι σχετικές τάσεις (relative stresses) σ_{ij} εφαρμόζονται στα επιφανειακά σημεία κάθε μικροόγκου. Επομένως η μετατόπιση των σημείων εφαρμογής τους είναι ίση με τη μακρομετατόπιση u_i μείον τη μετατόπιση του μικροόγκου. Η μετατόπιση του τελικού άκρου του παρακάτω σχήματος ισούται με τη μακρομετατόπιση μείον τη σχετική μετατόπιση του άκρου του τελευταίου μικροόγκου. Αν d η διάσταση του μικροόγκου κατά τη διεύθυνση x_1 , σε ένα μήκος dx_1 υπάρχουν $\frac{dx_1}{d}$ μικροόγκοι, κάθε

έναν από τους οποίους παραμορφώνεται κατά μέσο όρο κατά ψ_{11} . Επομένως το δυνατό έργο της συνιστώσας σ_{11} ισούται με:



Σχήμα 3.9

$$\begin{aligned} \frac{\delta w_{\sigma_{11}}}{dx_2 dx_3} &= -\sigma_{11} \delta u_1 + \sigma_{11} \left(\delta u_1 + \frac{\partial \delta u_1}{\partial x_1} dx_1 - \delta \psi_{11} d \frac{dx_1}{d} \right) = \\ &= \sigma_{11} \left(\frac{\partial \delta u_1}{\partial x_1} - \delta \psi_{11} \right) dx_1 = \sigma_{11} \delta \gamma_{11} dx_1 \end{aligned}$$

Στη συνέχεια, και προκειμένου να διατυπωθούν οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης, υιοθετείται μία δευτεροβάθμια συνάρτηση πυκνότητας ελαστικής ενέργειας, για τη γενική περίπτωση ενός ανισότροπου υλικού:

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2} c_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} + \frac{1}{2} b_{ijkl} \gamma_{ij} \gamma_{kl} + \frac{1}{2} a_{ijklmn} \kappa_{ijk} \kappa_{lmn} + d_{ijklm} \gamma_{ij} \kappa_{klm} \\ &+ f_{ijklm} \kappa_{ijk} \epsilon_{lm} + g_{ijkl} \gamma_{ij} \epsilon_{kl} \end{aligned} \quad (3.36)$$

Από τις παραπάνω 1458 σταθερές μόνο 903 είναι ανεξάρτητες, λόγω των παρακάτω σχέσεων:

$$\begin{aligned}
c_{ijkl} &= c_{klij} = c_{jikl} \\
b_{ijkl} &= b_{klij} \\
a_{ijklmn} &= a_{lmnijk} \\
f_{ijklm} &= f_{ijkml} \\
g_{ijkl} &= g_{ijlk}
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Από τις σχέσεις (3.25), (3.26), (3.27) και (3.36) προκύπτουν οι καταστατικές σχέσεις:

$$\tau_{pq} = c_{pqij} \varepsilon_{ij} + g_{ijpq} \gamma_{ij} + f_{ijkpq} \kappa_{ijk} \tag{3.38}$$

$$\sigma_{pq} = g_{pqij} \varepsilon_{ij} + b_{ijpq} \gamma_{ij} + f_{pqijk} \kappa_{ijk} \tag{3.39}$$

$$\mu_{pq\rho} = f_{pqrij} \varepsilon_{ij} + d_{ijpqr} \gamma_{ij} + a_{pqrijk} \kappa_{ijk} \tag{3.40}$$

Στην περίπτωση ενός ισότροπου υλικού επιτυγχάνεται σημαντική μείωση των ανεξάρτητων σταθερών. Οι τανυστές d_{ijklm} και f_{ijklm} μηδενίζονται, αφού δεν υπάρχουν ιστροπικοί τανυστές περιτού βαθμού (εκτός από τον τανυστή Levi-Chivita). Οι υπόλοιποι τανυστές γράφονται ως γραμμικοί συνδυασμοί του δέλτα του Kronecker.

$$c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu_1 \delta_{ik} \delta_{jl} + \mu_2 \delta_{il} \delta_{jk} \tag{3.41}$$

$$b_{ijkl} = b_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + b_2 \delta_{ik} \delta_{jl} + b_3 \delta_{il} \delta_{jk} \tag{3.42}$$

$$g_{ijkl} = g_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + g_2 \delta_{ik} \delta_{jl} + g_3 \delta_{il} \delta_{jk} \tag{3.43}$$

$$\begin{aligned}
a_{ijklmn} &= a_1 \delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} + a_2 \delta_{ij} \delta_{km} \delta_{nl} + a_3 \delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{lm} + \\
&+ a_4 \delta_{jk} \delta_{il} \delta_{mn} + a_5 \delta_{jk} \delta_{im} \delta_{nl} + a_6 \delta_{jk} \delta_{in} \delta_{lm} + \\
&+ a_7 \delta_{ki} \delta_{jl} \delta_{mn} + a_8 \delta_{ki} \delta_{jm} \delta_{nl} + a_9 \delta_{ki} \delta_{jn} \delta_{lm} + \\
&+ a_{10} \delta_{il} \delta_{jm} \delta_{kn} + a_{11} \delta_{jl} \delta_{km} \delta_{in} + a_{12} \delta_{kl} \delta_{im} \delta_{jn} + \\
&+ a_{13} \delta_{il} \delta_{jn} \delta_{km} + a_{14} \delta_{jl} \delta_{kn} \delta_{im} + a_{15} \delta_{kl} \delta_{in} \delta_{jm}
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (3.37), οι ανεξάρτητες σταθερές μειώνονται σε 18:

$$\mu_1 = \mu_2 \equiv \mu$$

$$g_2 = g_3$$

$$a_1 = a_6$$

$$a_2 = a_9$$

$$a_5 = a_7$$

$$a_{11} = a_{12}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει σημαντική απλοποίηση της συνάρτησης πυκνότητας ελαστικής ενέργειας και των καταστατικών σχέσεων.

$$\begin{aligned}
w &= \frac{1}{2} \lambda \varepsilon_{ii} \varepsilon_{jj} + \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} b_1 \gamma_{ii} \gamma_{jj} + \frac{1}{2} b_2 \gamma_{ij} \gamma_{ij} + \\
&+ \frac{1}{2} b_3 \gamma_{ij} \gamma_{ji} + g_1 \gamma_{ii} \varepsilon_{jj} + g_2 (\gamma_{ij} + \gamma_{ji}) \varepsilon_{ij} + \\
&+ a_1 \kappa_{ik} \kappa_{kj} + a_2 \kappa_{ik} \kappa_{jk} + \frac{1}{2} a_3 \kappa_{ik} \kappa_{jkk} + \frac{1}{2} a_4 \kappa_{ij} \kappa_{ikk} + \\
&+ a_5 \kappa_{ij} \kappa_{kik} + \frac{1}{2} a_8 \kappa_{ji} \kappa_{kjk} + \frac{1}{2} a_{10} \kappa_{ijk} \kappa_{ijk} + a_{11} \kappa_{ijk} \kappa_{jki} + \\
&+ \frac{1}{2} a_{13} \kappa_{ijk} \kappa_{ikj} + \frac{1}{2} a_{14} \kappa_{ijk} \kappa_{jik} + \frac{1}{2} a_{15} \kappa_{ijk} \kappa_{kji}
\end{aligned} \tag{3.45}$$

$$\tau_{pq} = \lambda \delta_{pq} \varepsilon_{ii} + 2\mu \varepsilon_{pq} + g_1 \delta_{pq} \gamma_{ii} + g_2 (\gamma_{pq} + \gamma_{qp}) \tag{3.46}$$

$$\sigma_{pq} = g_1 \delta_{pq} \varepsilon_{ii} + 2g_2 \varepsilon_{pq} + b_1 \delta_{pq} \gamma_{ii} + b_2 \gamma_{pq} + b_3 \gamma_{qp} \tag{3.47}$$

$$\begin{aligned}
\mu_{pqr} &= a_1 (\kappa_{ip} \delta_{qr} + \kappa_{ri} \delta_{pq}) + a_2 (\kappa_{iq} \delta_{pr} + \kappa_{ri} \delta_{pq}) + a_3 \kappa_{ir} \delta_{pq} + \\
&+ a_4 \kappa_{pi} \delta_{qr} + a_5 (\kappa_{qi} \delta_{pr} + \kappa_{ip} \delta_{qr}) + a_8 \kappa_{iqi} \delta_{pr} + a_{10} \kappa_{pqr} + \\
&+ a_{11} (\kappa_{rpq} + \kappa_{qrp}) + a_{13} \kappa_{prq} + a_{14} \kappa_{qpr} + a_{15} \kappa_{rqp}
\end{aligned} \tag{3.48}$$

Από τις παραπάνω καταστατικές σχέσεις, τις κινηματικές σχέσεις (3.9), (3.11), (3.12) και τις εξισώσεις ισορροπίας (3.32) και (3.33) προκύπτουν οι εξισώσεις κίνησης σε όρους μακρο-μετατοπίσεων και μικρο-παραμορφώσεων:

$$\begin{aligned}
&(\mu + 2g_2 + b_2) \partial_j \partial_j u_i + (\lambda + \mu + 2g_1 + 2g_2 + b_1 + b_3) \partial_i \partial_j u_j - \\
&-(g_1 + b_1) \partial_i \psi_{jj} - (g_2 + b_2) \partial_j \psi_{ji} - (g_2 + b_3) \partial_j \psi_{ij} + f_i = \rho \ddot{u}_i
\end{aligned} \tag{3.49}$$

$$\begin{aligned}
&(a_1 + a_5) (\partial_k \partial_l \psi_{kl} \delta_{ij} + \partial_i \partial_j \psi_{kk}) + (a_2 + a_{11}) (\partial_j \partial_k \psi_{ki} + \partial_i \partial_k \psi_{jk}) + \\
&+ (a_3 + a_{14}) \partial_i \partial_k \psi_{kj} + a_4 \partial_k \partial_k \psi_{ll} \delta_{ij} + (a_8 + a_{15}) \partial_j \partial_k \psi_{ik} + \\
&+ a_{10} \partial_k \partial_k \psi_{ij} + a_{13} \partial_k \partial_k \psi_{ji} + g_1 \partial_k u_k \delta_{ij} + g_2 (\partial_i u_j + \partial_j u_i) + \\
&+ b_1 (\partial_k u_k - \psi_{kk}) \delta_{ij} + b_2 (\partial_i u_j - \psi_{ij}) + b_3 (\partial_j u_i - \psi_{ji}) + \Phi_{ij} = \frac{1}{3} \rho' d^2 \ddot{\psi}_{ij}
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Η θεωρία που αναπτύχθηκε στο παρόν κεφάλαιο, παρά τη μαθηματική της πληρότητα και τη φυσική εποπτεία που προσφέρει είναι αρκετά πολύπλοκη λόγω του μεγάλου αριθμού σταθερών που πρέπει να προσδιοριστούν και κυρίως λόγω της εμπλοκής των 9 επιπλέον βαθμών ελευθερίας που συνιστούν οι μικρο-παραμορφώσεις. Γι' αυτό το λόγο ο Mindlin στηριζόμενος σε υποθέσεις που απορρέουν από τα δυναμικά χαρακτηριστικά του παραπάνω προσομοιώματος, καθώς και σε ομοιότητες ανάμεσα στις παραπάνω εξισώσεις και στις εξισώσεις ταλάντωσης απείρων εκτεινόμενων χοντρών πλακών, διατύπωσε απλοποιημένες παραλλαγές των παραπάνω εξισώσεων, στις οποίες υπεισέρχονται μόνο οι συνήθεις μακρο-μετατοπίσεις u_i . Η ανάπτυξη αυτής της απλοποιημένης θεωρίας οδηγεί σε τρεις ισοδύναμες μεταξύ τους διατυπώσεις των εξισώσεων κίνησης. Στο επόμενο κεφάλαιο παρουσιάζεται διεξοδικά η εν λόγω τροποποιημένη θεωρία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΑΠΛΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΘΕΩΡΙΑ MINDLIN 1^{ης} ΒΑΘΜΙΔΑΣ

4.1 1^η ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ

Ο Mindlin [36,38] διατύπωσε απλοποιημένες εξισώσεις της θεωρίας που αναπτύχθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο εξετάζοντας τη μορφή των εξισώσεων μονοδιάστατων κυμάτων σε υλικό με μικροδομή. Στην περιοχή των μικρών συχνοτήτων και πολύ μεγάλων μηκών κύματος υιοθετούνται οι παρακάτω παραδοχές:

$$\sigma_{(ij)} = 0 \quad (4.1.1)$$

$$b_2 - b_3 \rightarrow \infty \quad (4.1.2)$$

$$\gamma_{[ij]} \rightarrow 0$$

Οι καταστατικές σχέσεις για την περίπτωση ισοτροπικού υλικού διαχωρίζονται για τις τάσεις τ_{pq}, σ_{pq} στα συμμετρικά και αντισυμμετρικά μέρη τους:

$$\tau_{pq} = \lambda \delta_{pq} \varepsilon_{ii} + 2\mu \varepsilon_{pq} + g_1 \delta_{pq} \gamma_{ii} + 2g_2 \gamma_{(pq)} \quad (4.1.3)$$

$$\sigma_{(pq)} = g_1 \delta_{pq} \varepsilon_{ii} + 2g_2 \varepsilon_{pq} + b_1 \delta_{pq} \gamma_{ii} + (b_2 + b_3) \gamma_{(pq)} \quad (4.1.4)$$

$$\sigma_{[pq]} = (b_2 - b_3) \gamma_{[pq]} \quad (4.1.5)$$

Από τις σχέσεις (4.1.2) προκύπτει ότι το συμμετρικό μέρος του ταυυστή της σχετικής τάσης είναι απροσδιόριστο, ενώ η (4.14), λόγω της (4.1.1), μπορεί να επιλυθεί ως προς $\gamma_{(pq)}$ συναρτήσει των όρων του ταυυστή ε_{pq} .

$$\gamma_{(pq)} = -\alpha \delta_{pq} + (1 - \beta) \varepsilon_{pq} \quad (4.1.6)$$

, όπου οι σταθερές α, β δίνονται από τις σχέσεις:

$$\alpha = \frac{1}{b_2 + b_3} \left[g_1 - \frac{b_1 (3g_1 + 2g_2)}{3b_1 + b_2 + b_3} \right] \quad (4.1.7)$$

$$\beta = 1 + \frac{2g_2}{b_2 + b_3}$$

Από τη σχέση $\gamma_{pq} = \partial_p u_q - \psi_{pq}$ και από την υπόθεση (4.12) προκύπτει:

$$\psi_{[pq]} = \omega_{pq} \quad (4.1.8)$$

$$\psi_{(pq)} = \alpha \delta_{pq} \varepsilon_{ii} + \beta \varepsilon_{pq}$$

Ο τανυστής της μακρο-μεταβολής της μικρο-παραμόρφωσης, $\kappa_{ijk} \equiv \partial_i \psi_{(jk)} + \partial_i \psi_{[jk]}$ γράφεται ως:

$$\kappa_{ijk} \rightarrow \alpha \tilde{\kappa}_{ill} \delta_{jk} + \frac{1}{2}(1+\beta) \tilde{\kappa}_{ijk} - \frac{1}{2}(1-\beta) \tilde{\kappa}_{ikj} \quad (4.1.9)$$

, όπου:

$$\tilde{\kappa}_{ijk} \equiv \partial_i \partial_j u_k = \tilde{\kappa}_{jik} \quad (4.1.10)$$

Παρατηρείται ότι το τμήμα της πυκνότητας ελαστικής ενέργειας που είναι συνάρτηση του κ_{ijk} μπορεί να γραφεί ως συνάρτηση της δεύτερης παραγώγου της μακρομετατόπισης $\tilde{\kappa}_{ijk} = \partial_i \partial_j u_k$. Ο τανυστής $\tilde{\kappa}_{ijk}$ έχει 18 ανεξάρτητους όρους, και μπορεί να διατυπωθεί με διάφορους τρόπους ως γραμμικός συνδυασμός των όρων $\partial_i \partial_j u_k$, έτσι ώστε να προκύψουν διαφορετικές μορφές της συνάρτησης πυκνότητας ελαστικής ενέργειας.

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (4.1.2), (4.1.6) και (4.1.10) στην (3.45) προκύπτει η νέα έκφραση της συνάρτησης πυκνότητας ελαστικής ενέργειας:

$$w \rightarrow \tilde{w} = \frac{1}{2} \tilde{\lambda} \varepsilon_{ii} \varepsilon_{jj} + \tilde{\mu} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \tilde{a}_1 \tilde{\kappa}_{iik} \tilde{\kappa}_{kij} + \tilde{a}_2 \tilde{\kappa}_{ijj} \tilde{\kappa}_{ikk} + \tilde{a}_3 \tilde{\kappa}_{iik} \tilde{\kappa}_{jjk} + \tilde{a}_4 \tilde{\kappa}_{ijk} \tilde{\kappa}_{ijk} + \tilde{a}_5 \tilde{\kappa}_{ijk} \tilde{\kappa}_{kji} \quad (4.1.11)$$

, όπου οι σταθερές $\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, \tilde{a}_i$ είναι συναρτήσεις των σταθερών $\lambda, \mu, a_i, \alpha, \beta$. Στη συνέχεια ορίζονται νέες καταστατικές τάσεις:

$$\tilde{\tau}_{ij} \equiv \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \tilde{\tau}_{ji} \quad (4.1.12)$$

$$\tilde{\mu}_{ijk} \equiv \frac{\partial w}{\partial \tilde{\kappa}_{ijk}} = \tilde{\mu}_{jik} \quad (4.1.13)$$

Οι καταστατικές σχέσεις τάσεων παραμορφώσεων γίνονται:

$$\tilde{\tau}_{pq} = \tilde{\lambda} \delta_{pq} \varepsilon_{ii} + 2 \tilde{\mu} \varepsilon_{pq} \quad (4.1.14)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_{pqr} = & \frac{1}{2} \tilde{a}_1 (\tilde{\kappa}_{iip} \delta_{qr} + 2 \tilde{\kappa}_{rii} \delta_{pq} + \tilde{\kappa}_{iik} \delta_{pr}) + \tilde{a}_2 (\tilde{\kappa}_{pii} \delta_{qr} + \tilde{\kappa}_{qii} \delta_{pr}) + \\ & + 2 \tilde{a}_3 \tilde{\kappa}_{iir} \delta_{pq} + 2 \tilde{a}_4 \tilde{\kappa}_{pqr} + \tilde{a}_5 (\tilde{\kappa}_{rqp} + \tilde{\kappa}_{rpq}) \end{aligned} \quad (4.1.15)$$

Παρατηρείται ότι η καταστατική σχέση για την τάση Cauchy έχει την ίδια μορφή με την κλαστική θεωρία ελαστικότητας.

Για να διατυπωθούν οι εξισώσεις κίνησης και οι κατάλληλες συνοριακές συνθήκες ακολουθείται η ίδια διαδικασία με το προηγούμενο κεφάλαιο.

$$\begin{aligned}
\delta\tilde{w} &= \tilde{\tau}_{ij}\delta\varepsilon_{ij} + \tilde{\mu}_{ijk}\delta\tilde{\kappa}_{ijk} = \\
&= \tilde{\tau}_{ij}\partial_i\delta u_j + \tilde{\mu}_{ijk}\partial_i\partial_j\delta u_k = \\
&= \partial_j\left[\left(\tilde{\tau}_{jk} - \partial_i\tilde{\mu}_{ijk}\right)\delta u_k\right] - \left[\partial_j\left(\tilde{\tau}_{jk} - \partial_i\tilde{\mu}_{ijk}\right)\right]\delta u_k + \partial_i\left(\tilde{\mu}_{ijk}\partial_j\delta u_k\right)
\end{aligned} \tag{4.1.16}$$

Επομένως:

$$\begin{aligned}
\int_V \delta\tilde{w}dV &= \int_S n_j\left(\tilde{\tau}_{jk} - \partial_i\tilde{\mu}_{ijk}\right)\delta u_k dS - \int_V \left[\partial_j\left(\tilde{\tau}_{jk} - \partial_i\tilde{\mu}_{ijk}\right)\right]\delta u_k dV + \\
&+ \int_S n_i\tilde{\mu}_{ijk}\partial_j\delta u_k dS
\end{aligned} \tag{4.1.17}$$

Η παραπάνω σχέση χρειάζεται περαιτέρω ανάλυση προκειμένου να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος του λογισμού των μεταβολών, αφού στο τελευταίο ολοκλήρωμα μόνο η εφαπτομενική συνιστώσα του όρου $\partial_j u_k$ είναι ανεξάρτητη από την τιμή δu_k στο σύνορο. Για το λόγο αυτό ο τανυστής της βαθμίδας της μετατόπισης $\partial_j u_k$ αναλύεται στο σύνορο σε δύο συνιστώσες, την εφαπτομενική και την κάθετη στο σύνορο, κάνοντας χρήση του τελεστή της εφαπτομενικής παραγώγου, D_j .

Αν φ είναι ένα παραγωγίσιμο βαθμωτό πεδίο που ορίζεται σε ένα χωρίο V που περιορίζεται από μία επιφάνεια S , η χωρική παράγωγος του εν λόγω πεδίου στο σύνορο S δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\varphi &= \vec{D}\varphi + (D\varphi)\vec{n} \\
&\acute{\eta} \\
\partial_i\varphi &= D_i\varphi + (n_k\partial_k\varphi)\cdot n_i
\end{aligned} \tag{4.1.18}$$

, όπου \vec{D} είναι το διάνυσμα της εφαπτομενικής παραγώγου, του οποίου οι συνιστώσες δίνονται από τη σχέση:

$$D_i \equiv (\delta_{il} - n_l n_i)\partial_l \tag{4.1.19}$$

, ενώ D είναι ο τελεστής προβολής του διανύσματος της κλίσης (gradient) ενός πεδίου στην κατεύθυνση του εξωτερικού εφαπτομενικού διανύσματος \vec{n} :

$$D \equiv n_l\partial_l \tag{4.1.20}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει:

$$n_i\tilde{\mu}_{ijk}\partial_j u_k = n_i\tilde{\mu}_{ijk}D_j\delta u_k + n_i\tilde{\mu}_{ijk}D\delta u_k \tag{4.1.21}$$

Ο πρώτος όρος του δευτέρου μέλους της παραπάνω εξίσωσης περιλαμβάνει τη μη ανεξάρτητη εφαπτομενική συνιστώσα της παραγώγου του όρου $\partial_j\delta u_k$ και επομένως χρειάζεται περαιτέρω επεξεργασία:

$$n_i \tilde{\mu}_{ijk} D_j (\delta u_k) = D_j (n_i \tilde{\mu}_{ijk} \delta u_k) - n_i (D_j \tilde{\mu}_{ijk}) \delta u_k - (D_j n_i) \tilde{\mu}_{ijk} \delta u_k \quad (4.1.22)$$

Οι δύο τελευταίοι όροι του δευτέρου μέλους της παραπάνω σχέσης περιέχουν την ανεξάρτητη παραλλαγή της μετατόπισης, δu_k . Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα:

$$D_j q_j = (D_p n_p) n_j q_j + [\vec{\nabla} \times (\vec{n} \times \vec{q})] \cdot \vec{n} \quad (4.1.23)$$

, μπορεί να γραφεί για τον όρο $D_j (n_i \tilde{\mu}_{ijk} \delta u_k)$:

$$D_j (n_i \tilde{\mu}_{ijk} \delta u_k) = (D_l n_l) n_j n_i \tilde{\mu}_{ijk} \delta u_k + n_q \varepsilon_{qpm} \partial_p (\varepsilon_{mlj} n_l n_i \tilde{\mu}_{ijk} \delta u_k) \quad (4.1.24)$$

Ο πρώτος όρος του δευτέρου μέλους της παραπάνω σχέσης περιλαμβάνει την ανεξάρτητη ποσότητα δu_k , ενώ για το δεύτερο όρο διακρίνονται δύο περιπτώσεις. Αν η επιφάνεια είναι λεία τότε από το θεώρημα του Stokes ο δεύτερος όρος μηδενίζεται. Αν η επιφάνεια χωρίζεται σε δύο λείες επιφάνειες που σχηματίζουν γωνία μεταξύ τους κατά μήκος της τομής τους C , το θεώρημα του Stokes δίνει:

$$\int_S n_q \varepsilon_{qpm} \partial_p (\varepsilon_{mlj} n_l n_i \tilde{\mu}_{ijk} \delta u_k) dS = \oint_C [n_i m_j \tilde{\mu}_{ijk}] \delta u_k \delta s \quad (4.1.25)$$

, όπου $m_j = \varepsilon_{mlj} s_m n_l$ και s_m είναι οι συνιστώσες του μοναδιαίου εφαπτομενικού διανύσματος της καμπύλης C . Η αγκύλη $[]$ δείχνει ότι η περιεχόμενη ποσότητα είναι η διαφορά των αντιστοίχων τιμών στις υποπεριοχές S_1 και S_2 .

Για το πρώτο εφαπτομενικό ολοκλήρωμα της σχέσης (4.1.17) ισχύει:

$$n_j \partial_i \tilde{\mu}_{ijk} = n_j D_i \tilde{\mu}_{ijk} + n_i n_j D \tilde{\mu}_{ijk} \quad (4.1.26)$$

Με βάση τα παραπάνω η εξίσωση (4.1.17) γίνεται:

$$\begin{aligned} \int_V \tilde{w} dV &= - \int_V [\partial_j (\tilde{\tau}_{jk} - \partial_i \tilde{\mu}_{ijk})] \cdot \delta u_k dV + \\ &+ \int_S [n_j \tilde{\tau}_{jk} - n_i n_j D \tilde{\mu}_{ijk} - 2n_j D_i \tilde{\mu}_{ijk} + (n_i n_j D_l n_l - D_j n_i) \tilde{\mu}_{ijk}] \delta u_k dS + \\ &+ \int_S n_i n_j \tilde{\mu}_{ijk} D \delta u_k dS + \oint_C [n_i m_j \tilde{\mu}_{ijk}] \delta u_k dS \end{aligned} \quad (4.1.27)$$

Η παραπάνω μορφή του έργου των εσωτερικών δυνάμεων υποδεικνύει τη μορφή του έργου των εξωτερικών δυνάμεων:

$$\delta W_1 = \int_V F_k \delta u_k dV + \int_S \tilde{P}_k \delta u_k dS + \int_S \tilde{R}_k D \delta u_k dS + \oint_C \tilde{E}_k \delta u_k dS \quad (4.1.28)$$

Το διάνυσμα \tilde{R}_k είναι το εξωτερικά ασκούμενο ζεύγος δύναμης (χωρίς ροπή) ανά επιφάνεια, ενώ το διάνυσμα \tilde{E}_k είναι η εξωτερικά ασκούμενη δύναμη ανά μέτρο μήκους της τομής των επιφανειών S_1, S_2 .

Τονίζεται ότι η εφαπτομενική παράγωγος του εξωτερικού διανύσματος \vec{n} ορίζεται με τον ίδιο τρόπο, παρ' όλο που το εξωτερικό διάνυσμα ορίζεται μόνο πάνω στην επιφάνεια S . Η διαφορά είναι ότι τα στοιχεία της δυαδικής $D_j n_i$ είναι συσχετισμένα μεταξύ τους, αφού ισχύει η σχέση:

$$D_i n_j = D_j n_i \quad (4.1.29)$$

Για τον υπολογισμό της κινητικής ενέργειας οι μικρο-ταχύτητες $\dot{\psi}_{ij}$ γράφονται ως γραμμικός συνδυασμός των βαθμίδων των μακρο-ταχυτήτων:

$$\dot{\psi}_{ij} \rightarrow h_{ijkl} \partial_k \dot{u}_l \quad (4.1.30)$$

, όπου:

$$h_{ijkl} \equiv \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}) + \alpha \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{1}{2} \beta (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (4.1.31)$$

, ώστε να ικανοποιούνται οι σχέσεις (4.1.8).

Η κινητική ενέργεια ανά μονάδα όγκου γράφεται:

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{2} \rho \dot{u}_j \dot{u}_j + \frac{1}{6} \rho' \tilde{d}_{pkmn}^2 \partial_m \dot{u}_n \partial_p \dot{u}_k = \\ &= \frac{1}{2} \rho \dot{u}_j \dot{u}_j + \frac{1}{6} \partial_p \left[\rho' \tilde{d}_{pkmn}^2 (\partial_m \dot{u}_n) \dot{u}_k \right] - \frac{1}{6} \left[\partial_p \left(\rho' \tilde{d}_{pkmn}^2 (\partial_m \dot{u}_n) \right) \right] \dot{u}_k \end{aligned} \quad (4.1.32)$$

, όπου:

$$\begin{aligned} \tilde{d}_{pkmn}^2 &\equiv d_{jl}^2 h_{lqpk} h_{jqmn} = \tilde{d}_{mnpk}^2 = \\ &= \frac{1}{2} d^2 \left[\delta_{pm} \delta_{kn} - \delta_{pn} \delta_{km} + 2\alpha (3\alpha + 2\beta) \delta_{pk} \delta_{mn} + \beta^2 (\delta_{pm} \delta_{kn} + \delta_{pn} \delta_{km}) \right] \end{aligned} \quad (4.1.33)$$

Η ολική κινητική ενέργεια ισούται με:

$$\begin{aligned} K &= \int_V k dV = \int_V \left\{ \frac{1}{2} \rho \dot{u}_j \dot{u}_j - \frac{1}{6} \left[\partial_p \left(\rho' \tilde{d}_{pkmn}^2 (\partial_m \dot{u}_n) \right) \right] \dot{u}_k \right\} dV + \\ &+ \int_S \frac{1}{6} \rho' n_p \tilde{d}_{pkmn}^2 (\partial_m \dot{u}_n) \dot{u}_k dS \end{aligned} \quad (4.1.34)$$

Και η παραλλαγή της:

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} K dt = & - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \left[\rho \ddot{u}_k - \frac{1}{3} \partial_p \left(\rho' \tilde{d}_{pkmn}^2 \partial_m \dot{u}_n \right) \right] \delta u_k dV - \\ & - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_S \frac{1}{3} \rho' n_p \tilde{d}_{pkmn}^2 \left(D_m \ddot{u}_n + n_m D \ddot{u}_n \right) \delta u_k dS \end{aligned} \quad (4.1.35)$$

Η εξισώσεις κίνησης και οι συνοριακές συνθήκες προκύπτουν από την συνήθη διαδικασία:

$$\partial_j \left(\tilde{\tau}_{jk} - \partial_i \tilde{\mu}_{ijk} \right) + F_k = \rho \ddot{u}_k - \frac{1}{3} \partial_p \left(\rho' \tilde{d}_{pkmn}^2 \partial_m \ddot{u}_n \right) \quad (4.1.36)$$

$$\begin{aligned} n_j \tilde{\tau}_{jk} - n_i n_j D \tilde{\mu}_{ijk} - 2 n_j D_i \tilde{\mu}_{ijk} + \left(n_i n_j D_l n_l - D_j n_i \right) \tilde{\mu}_{ijk} + \\ + \frac{1}{3} \rho' n_p \tilde{d}_{pkmn}^2 \left(D_m \ddot{u}_n + n_m D \ddot{u}_n \right) = \tilde{P}_k \end{aligned} \quad (4.1.37)$$

$$n_i n_j \tilde{\mu}_{ijk} = \tilde{R}_k \quad (4.1.38)$$

$$\left[n_i m_j \tilde{\mu}_{ijk} \right] = \tilde{E}_k \quad (4.1.39)$$

Αντικαθιστώντας τις κινηματικές σχέσεις στις εξισώσεις (4.1.36) προκύπτουν οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης σε όρους μετατοπίσεων:

$$\begin{aligned} \left(\tilde{\lambda} + 2 \tilde{\mu} \right) \left(1 - \tilde{l}_1^2 \nabla^2 \right) \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} - \tilde{\mu} \left(1 - \tilde{l}_2^2 \nabla^2 \right) \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{u} + \vec{F} = \\ = \rho \left(\ddot{\vec{u}} - h_1^2 \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \ddot{\vec{u}} + h_2^2 \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \ddot{\vec{u}} \right) \end{aligned} \quad (4.1.40)$$

Οι σταθερές \tilde{l}_i^2, h_i^2 δίνονται από τις σχέσεις:

$$\tilde{l}_1^2 = \frac{2(\tilde{a}_1 + \tilde{a}_2 + \tilde{a}_3 + \tilde{a}_4 + \tilde{a}_5)}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}} \quad (4.1.41)$$

$$\tilde{l}_2^2 = \frac{2(\tilde{a}_3 + \tilde{a}_4)}{\tilde{\mu}}$$

$$h_1^2 = \frac{\rho' d^2 \left[2\alpha^2 + (\alpha + \beta)^2 \right]}{3\rho} \quad (4.1.42)$$

$$h_2^2 = \frac{\rho' d^2 (1 + \beta^2)}{6\rho}$$

Με τις παραδοχές που υιοθετήθηκαν διατυπώθηκαν οι εξισώσεις ισορροπίας και οι συνοριακές συνθήκες αποκλειστικά σε όρους μακροσκοπικών μεγεθών. Παρατηρείται επίσης ότι το αριστερό μέλος των εξισώσεων (4.1.40) έχει την ίδια μορφή με τις κλασσικές εξισώσεις, με απόκλιση κάθε όρου κατά τον τελεστή $\tilde{l}_i^2 \nabla^2$. Ο τελεστής αυτός εκφράζει τη συμβολή της μικροδομής στη συμπεριφορά του υλικού και όπως θα αναφερθεί και σε επόμενο κεφάλαιο οδήγησε πολλούς ερευνητές να χρησιμοποιήσουν την εν λόγω απόκλιση στις καταστατικές σχέσεις τάσεων-παραμορφώσεων.

Αξίζει επίσης να αναφερθεί ότι ο Tourin [52,53] εξήγαγε εξισώσεις πανομοιότυπες με τις (4.1.36)-(4.1.39), αν εξαιρεθούν οι όροι επιτάχυνσης της εξίσωσης (4.1.37) και ο όρος της βαθμίδας της επιτάχυνσης της εξίσωσης (4.1.36). Σύμφωνα με τη γενική θεωρία ελαστικότητας με ζεύγη τάσεων η πυκνότητα ελαστικής ενέργειας θεωρείται συνάρτηση της παραμόρφωσης και της περιστροφής (*curl*) της παραμόρφωσης. Στα πλαίσια της γραμμικής θεωρίας η περιστροφή της παραμόρφωσης ισούται με τη βαθμίδα της μακροσκοπικής στροφής. Ο εν λόγω ταυυστής αποτελείται από 8 ανεξάρτητους γραμμικούς συνδυασμούς των συνολικά 18 όρων του ταυυστή της δεύτερης παραγώγου της μετατόπισης $\tilde{\kappa}_{ijk} = \partial_i \partial_j u_k$. Ο Tourin επεξέτεινε αυτή τη θεωρία εισάγοντας στη συνάρτηση πυκνότητας ελαστικής ενέργειας και τους 18 ανεξάρτητους όρους του προαναφερθέντος ταυυστή. Σε αντίθεση με τον Mindlin, η θεωρία του δε βασίστηκε σε ένα συγκεκριμένο προσομοίωμα μικρομηχανικής συμπεριφοράς του υλικού, ούτε σε αποτελέσματα φασματικής ανάλυσης των μονοδιάστατων κυμάτων στο εν λόγω μέσο.

4.2 2^η ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ

Οι 18 ανεξάρτητες συνιστώσες του ταυυστή $\partial_i \partial_j u_k$ μπορούν να ταξινομηθούν και με άλλους τρόπους σε γραμμικούς συνδυασμούς, ώστε να συνιστούν ταυυστές. Στο παρόν κεφάλαιο η δεύτερη παράγωγος της μετατόπισης γράφεται σε όρους βαθμίδας της παραμόρφωσης.

$$\hat{\kappa}_{ijk} \equiv \partial_i \varepsilon_{jk} = \frac{1}{2} (\partial_i \partial_j u_k + \partial_i \partial_k u_j) = \hat{\kappa}_{ikj} \quad (4.2.1)$$

Οι ταυυστές $\tilde{\kappa}_{ijk}, \hat{\kappa}_{ijk}$ συνδέονται με τη σχέση:

$$\tilde{\kappa}_{ijk} = \hat{\kappa}_{ijk} + \hat{\kappa}_{jki} - \hat{\kappa}_{kij} \quad (4.2.2)$$

Η συνάρτηση πυκνότητας ελαστικής ενέργειας διατυπώνεται συναρτήσει της παραμόρφωσης και της βαθμίδας της παραμόρφωσης.

$$w \rightarrow \hat{w} = \frac{1}{2} \tilde{\lambda} \varepsilon_{ii} \varepsilon_{jj} + \tilde{\mu} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \hat{a}_1 \hat{\kappa}_{iik} \hat{\kappa}_{kij} + \hat{a}_2 \hat{\kappa}_{ijj} \hat{\kappa}_{ikk} + \hat{a}_3 \hat{\kappa}_{iik} \hat{\kappa}_{jjk} + \hat{a}_4 \hat{\kappa}_{ijk} \hat{\kappa}_{ijk} + \hat{a}_5 \hat{\kappa}_{ijk} \hat{\kappa}_{kji} \quad (4.2.3)$$

, όπου:

$$\begin{aligned} \hat{a}_1 &= 2\tilde{a}_1 - 4\tilde{a}_3 \\ \hat{a}_2 &= -\tilde{a}_1 + \tilde{a}_2 + \tilde{a}_3 \\ \hat{a}_3 &= 4\tilde{a}_3 \\ \hat{a}_4 &= 3\tilde{a}_4 - \tilde{a}_5 \\ \hat{a}_5 &= -2\tilde{a}_4 + 2\tilde{a}_5 \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Ορίζονται οι νέες καταστατικές τάσεις:

$$\hat{\tau}_{ij} \equiv \frac{\partial \hat{w}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \hat{\tau}_{ji} \quad (4.2.5)$$

$$\hat{\mu}_{ijk} \equiv \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{\kappa}_{ijk}} = \hat{\mu}_{ikj} \quad (4.2.6)$$

Οι καταστατικές σχέσεις γράφονται:

$$\hat{\tau}_{pq} = \tilde{\lambda} \delta_{pq} \varepsilon_{ii} + 2\tilde{\mu} \varepsilon_{pq} \quad (4.2.7)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{pqr} = & \frac{1}{2} \hat{a}_1 (\delta_{pq} \hat{\kappa}_{rii} + 2\delta_{qr} \hat{\kappa}_{iip} + \delta_{rp} \hat{\kappa}_{qii}) + 2\hat{a}_2 \delta_{qr} \hat{\kappa}_{pii} + \\ & + \hat{a}_3 (\delta_{pq} \hat{\kappa}_{iir} + \delta_{pr} \hat{\kappa}_{iiq}) + 2\hat{a}_4 \hat{\kappa}_{pqr} + \hat{a}_5 (\hat{\kappa}_{rpq} + \hat{\kappa}_{qrp}) \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

Και σε αυτήν την περίπτωση η καταστατική σχέση της τάσης Cauchy έχει την ίδια μορφή με την κλασσική θεωρία.

Το δυνατό έργο των εσωτερικών δυνάμεων είναι:

$$\begin{aligned} \delta \hat{w} = & \hat{\tau}_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \hat{\mu}_{ijk} \delta \hat{\kappa}_{ijk} = \\ = & \hat{\tau}_{ij} \partial_i \delta u_j + \hat{\mu}_{ijk} \partial_i \partial_j \delta u_k = \\ = & \partial_j \left[(\hat{\tau}_{jk} - \partial_i \hat{\mu}_{ijk}) \delta u_k \right] - \left[\partial_j (\hat{\tau}_{jk} - \partial_i \hat{\mu}_{ijk}) \right] \delta u_k + \partial_i (\hat{\mu}_{ijk} \partial_j \delta u_k) \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

Η παραπάνω εξίσωση έχει την ίδια μορφή με την εξίσωση (4.1.16). Επομένως η εξίσωση των δυνατών έργων έχει την ίδια μορφή με την αντίστοιχη της προηγούμενης ενότητας. Οι εξισώσεις κίνησης και οι συνοριακές συνθήκες έχουν επομένως την ίδια μορφή, αν αντικατασταθεί στην εξίσωση (4.1.37) ο τελεστής $2n_j D_i$ με τον $(n_j D_i + n_i D_j)$.

$$\partial_j (\hat{\tau}_{jk} - \partial_i \hat{\mu}_{ijk}) + F_k = \rho \ddot{u}_k - \frac{1}{3} \partial_p (\rho' \tilde{d}_{pkmn}^2 \partial_m \ddot{u}_n) \quad (4.2.10)$$

$$\begin{aligned} n_j \hat{\tau}_{jk} - n_i n_j D_i \hat{\mu}_{ijk} - (n_j D_i + n_i D_j) \hat{\mu}_{ijk} + (n_i n_j D_l n_l - D_j n_i) \hat{\mu}_{ijk} + \\ + \frac{1}{3} \rho' n_p \tilde{d}_{pkmn}^2 (D_m \ddot{u}_n + n_m D_i \ddot{u}_n) = \hat{P}_k \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

$$n_i n_j \hat{\mu}_{ijk} = \hat{R}_k \quad (4.2.12)$$

$$[n_i m_j \hat{\mu}_{ijk}] = \hat{E}_k \quad (4.2.13)$$

Οι διαφορικές εξισώσεις ισορροπίας σε όρους μετατοπίσεων είναι οι παρακάτω:

$$\begin{aligned} (\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})(1 - \hat{l}_1^2 \nabla^2) \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} - \tilde{\mu}(1 - \hat{l}_2^2 \nabla^2) \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{u} + \vec{F} = \\ = \rho (\ddot{\vec{u}} - h_1^2 \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \ddot{\vec{u}} + h_2^2 \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \ddot{\vec{u}}) \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

, όπου:

$$\begin{aligned}\hat{l}_1^2 &= \frac{2(\hat{a}_1 + \hat{a}_2 + \hat{a}_3 + \hat{a}_4 + \hat{a}_5)}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}} = \tilde{l}_1^2 \\ \hat{l}_2^2 &= \frac{2(\hat{a}_3 + \hat{a}_4)}{\tilde{\mu}} = \tilde{l}_2^2\end{aligned}\quad (4.2.15)$$

Επομένως οι εξισώσεις κίνησης σε όρους μετατοπίσεων είναι ίδιες με τις αντίστοιχες της πρώτης διατύπωσης.

Η διατύπωση που παρουσιάστηκε στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζει κάποια πλεονεκτήματα, όπως η συμμετρία του τανυστή $\sigma_{jk} = \hat{\tau}_{jk} - \partial_i \hat{\mu}_{ijk}$ ο οποίος ικανοποιεί τις εξισώσεις ισορροπίας και χρησιμοποιείται σε αρκετά προσομοιώματα κατά τη διατύπωση των καταστατικών σχέσεων. Επισημαίνεται ακόμα ότι ο τανυστής $\hat{\mu}_{ijk}$ έχει παρόμοια φυσική ερμηνεία με τον τανυστή μ_{ijk} . Η παρούσα διατύπωση της απλοποιημένης θεωρίας του Mindlin, τροποποιημένη από του Vardoulakis&Sulem είναι αυτή που χρησιμοποιείται στην παρούσα εργασία για την ανάπτυξη πεπερασμένων στοιχείων δικτύωματος και δοκού, καθώς και για τις αριθμητικές εφαρμογές.

4.3 3^η ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ

Στην τρίτη διατύπωση ο τανυστής $\partial_i \partial_j u_k$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός του τανυστή της βαθμίδας της μακρο-στροφής (ο οποίος δημιουργεί τα ζεύγη τάσης) και του συμμετρικού μέρους του $\partial_i \partial_j u_k$.

Ο τανυστής της βαθμίδας της μακρο-στροφής δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{\kappa}_{ij} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon_{jlm} \partial_i \partial_l u_m \quad (4.3.1)$$

Εύκολα μπορεί δειχτεί ότι $\bar{\kappa}_{ii} = 0$, επομένως μόνο 8 από τις συνολικά 9 συνιστώσες του τανυστή $\bar{\kappa}_{ij}$ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Οι υπόλοιποι 10 ανεξάρτητοι γραμμικοί συνδυασμοί των συνιστωσών του $\bar{\kappa}_{ijk}$ περιέχονται στον τανυστή:

$$\bar{\bar{\kappa}}_{ijk} \equiv \frac{1}{3} (\partial_i \partial_j u_k + \partial_k \partial_i u_j + \partial_j \partial_k u_i) = \hat{\kappa}_{ijk} + \frac{1}{3} \varepsilon_{ijl} \bar{\kappa}_{kl} + \frac{1}{3} \varepsilon_{ilk} \bar{\kappa}_{jl} \quad (4.3.2)$$

Από τη σχέση:

$$\hat{\kappa}_{ijk} = \bar{\bar{\kappa}}_{ijk} - \frac{1}{3} \varepsilon_{ijl} \bar{\kappa}_{kl} - \frac{1}{3} \varepsilon_{ilk} \bar{\kappa}_{jl} \quad (4.3.3)$$

και τη σχέση (4.2.3), προκύπτει η νέα έκφραση της συνάρτησης πυκνότητας δυναμικής ενέργειας:

$$\begin{aligned}
w \rightarrow \bar{w} &= \frac{1}{2} \tilde{\lambda} \varepsilon_{ii} \varepsilon_{jj} + \tilde{\mu} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + 2\bar{d}_1 \bar{k}_{ij} \bar{k}_{ij} + 2\bar{d}_2 \bar{k}_{ij} \bar{k}_{ji} + \\
&+ \frac{3}{2} \bar{a}_1 \bar{k}_{ij} \bar{k}_{kkj} + \bar{a}_2 \bar{k}_{ijk} \bar{k}_{ijk} + \bar{f} \varepsilon_{ijk} \bar{k}_{ij} \bar{k}_{kll}
\end{aligned} \tag{4.3.4}$$

, όπου:

$$\begin{aligned}
18\bar{d}_1 &= -2\hat{a}_1 + 4\hat{a}_2 + \hat{a}_3 + 6\hat{a}_4 - 3\hat{a}_5 \\
18\bar{d}_2 &= 2\hat{a}_1 - 4\hat{a}_2 - \hat{a}_3 \\
3\bar{a}_1 &= 2(\hat{a}_1 + \hat{a}_2 + \hat{a}_3) \\
\bar{a}_2 &= \hat{a}_4 + \hat{a}_5 \\
3\bar{f} &= \hat{a}_1 + 4\hat{a}_2 - 2\hat{a}_3
\end{aligned} \tag{4.3.5}$$

Όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις ορίζονται οι νέες καταστατικές τάσεις:

$$\bar{\tau}_{ij} \equiv \frac{\partial \bar{w}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \bar{\tau}_{ji} \tag{4.3.6}$$

$$\bar{\mu}_{ij} \equiv \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{k}_{ij}} \tag{4.3.7}$$

$$\bar{\mu}_{ii} = 0$$

$$\bar{\mu}_{ijk} \equiv \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{k}_{ijk}} = \bar{\mu}_{kij} = \bar{\mu}_{jki} = \bar{\mu}_{jik} \tag{4.3.8}$$

Οι καταστατικές σχέσεις γίνονται:

$$\bar{\tau}_{pq} = \tilde{\lambda} \delta_{pq} \varepsilon_{ii} + 2\tilde{\mu} \varepsilon_{pq} \tag{4.3.9}$$

$$\bar{\mu}_{pq} = 4\bar{d}_1 \bar{k}_{pq} + 4\bar{d}_2 \bar{k}_{qp} + \bar{f} \varepsilon_{pqi} \bar{k}_{ij} \tag{4.3.10}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\mu}_{pqr} &= \bar{a}_1 (\bar{k}_{ir} \delta_{pq} + \bar{k}_{ip} \delta_{qr} + \bar{k}_{iq} \delta_{rp}) + \\
&+ 2\bar{a}_2 \bar{k}_{pqr} + \frac{1}{3} \bar{f} \bar{k}_{ij} (\delta_{pq} \varepsilon_{ijr} + \delta_{qr} \varepsilon_{ijp} + \delta_{rp} \varepsilon_{ijq})
\end{aligned} \tag{4.3.11}$$

Το δυνατό έργο των εσωτερικών δυνάμεων γράφεται στην ίδια μορφή με τις προηγούμενες περιπτώσεις:

$$\begin{aligned}\delta\bar{w} &= \bar{\tau}_{ij}\delta\varepsilon_{ij} + \bar{\mu}_{ij}\delta\bar{\kappa}_{ij} + \bar{\bar{\mu}}_{ijk}\delta\bar{\bar{\kappa}}_{ijk} = \\ &= \partial_j \left[(\bar{\tau}_{jk} - \partial_i \bar{\mu}_{ijk}^*) \delta u_k \right] - \left[\partial_j (\bar{\tau}_{jk} - \partial_i \bar{\mu}_{ijk}^*) \right] \delta u_k + \partial_i (\bar{\mu}_{ijk}^* \partial_j \delta u_k)\end{aligned}\quad (4.3.12)$$

, όπου:

$$\bar{\mu}_{ijk}^* \equiv \frac{1}{2} \varepsilon_{jkl} \bar{\mu}_{il} + \bar{\bar{\mu}}_{ijk} \quad (4.3.13)$$

Η σχέση (4.3.12) έχει την ίδια μορφή με τις σχέσεις (4.1.16) και (4.2.9), οπότε μπορεί να εφαρμοστεί η ίδια διαδικασία με τις προηγούμενες ενότητες για την εξαγωγή των εξισώσεων κίνησης και των συνοριακών συνθηκών. Παρ' όλα αυτά ο Mindlin για να συγκρίνει τα αποτελέσματα της παρούσας διατύπωσης με τα αντίστοιχα της δημοσίευσης [52], στην οποία ένας από τους ανεξάρτητους βαθμούς ελευθερίας στο σύνορο είναι η εφαπτομενική συνιστώσα της μακροστροφής (η οποία εμπεριέχεται στον όρο $D\delta u_k$), διατύπωσε την τελική εξίσωση της αρχής των δυνατών έργων σε μία πιο περίπλοκη μορφή. Για το λόγο αυτό η κάθετη στο σύνορο S συνιστώσα της βαθμίδας της μετατόπισης γράφεται:

$$D\delta u_k = 2\delta w_i n_j \varepsilon_{ijk} + D_k (n_i \delta u_i) - (D_k n_i) \delta u_i + n_k \delta \varepsilon_{nn} \quad (4.3.14)$$

, όπου $w_i \equiv \frac{1}{2} \varepsilon_{ilm} \partial_l u_m$ είναι η μακροστροφή και $\varepsilon_{nn} = n_i n_j \varepsilon_{ij}$ είναι η συνιστώσα του τανυστή παραμόρφωσης η κάθετη στο σύνορο S . Η μορφή που υιοθετείται για το δυνατό έργο των εξωτερικών δυνάμεων είναι:

$$\begin{aligned}\delta\bar{w}_1 &= \int_V F_k \delta u_k dV + \int_S \left[\bar{P}_k \delta u_k + \bar{Q}_k (\delta_{kj} - n_k n_j) \delta w_j + R \delta \varepsilon_{nn} \right] dS + \\ &+ \int_C \bar{E}_k \delta u_k ds\end{aligned}\quad (4.3.15)$$

, όπου ο τανυστής $\underline{I} - (\underline{n} \otimes \underline{n}) = (\delta_{ij} - n_i n_j) e_i \otimes e_j$ απεικονίζει γραμμικά ένα διάνυσμα που ορίζεται σε μία επιφάνεια, στην εφαπτομενική προβολή του πάνω στην εν λόγω επιφάνεια.

Οι εξισώσεις κίνησης και οι συνοριακές συνθήκες που προκύπτουν είναι:

$$\partial_j \bar{\tau}_{jk} - \partial_i \partial_j \left(\frac{1}{2} \bar{\mu}_{il} \varepsilon_{ljk} \right) - \partial_i \partial_j \bar{\bar{\mu}}_{ijk} + F_k = \rho \ddot{u}_k \quad (4.3.16)$$

$$\bar{P}_k = n_j \left[\bar{\tau}_{jk} + \frac{1}{2} (\partial_l \bar{\mu}_{li} - \partial_i \bar{\mu}_{nn}) \varepsilon_{jik} - \partial_i \bar{\bar{\mu}}_{ijk} \right] - \quad (4.3.17)$$

$$- (D_j - n_j D_l n_l) (n_i \bar{\bar{\mu}}_{ijk} + n_p n_q n_k \bar{\bar{\mu}}_{pqj}) \quad (4.3.18)$$

$$\bar{Q}_k = n_i \bar{\mu}_{ij} (\delta_{jk} - n_j n_k) + 2n_q n_i n_j \bar{\bar{\mu}}_{ijp} \varepsilon_{qpk} \quad (4.3.18)$$

$$\bar{R} = n_i n_j n_k \bar{\bar{\mu}}_{ijk} \quad (4.3.19)$$

$$\bar{E}_k = s_p \left[\frac{1}{2} \delta_{pk} \bar{\mu}_{nn} + n_q n_i (\bar{\bar{\mu}}_{ijk} + n_k n_l \bar{\bar{\mu}}_{lij}) \varepsilon_{jpq} \right] \quad (4.3.20)$$

Στις παραπάνω σχέσεις \bar{Q}_k είναι το εξωτερικώς ασκούμενο διάνυσμα του ζεύγους τάσης και \bar{R} είναι το εξωτερικώς ασκούμενο διάνυσμα διπλής τάσης (χωρίς ροπή) ανά επιφάνεια.

Οι διαφορικές εξισώσεις κίνησης σε όρους μετατοπίσεων είναι πανομοιότυπες με τις δύο προηγούμενες διατυπώσεις.

Σημειώνεται τέλος ότι οι εξισώσεις της απλοποιημένης θεωρίας Cosserat (όπου μακροστροφή και μικροστροφή ταυτίζονται) προκύπτουν από τις εξισώσεις της παρούσας διατύπωσης, αν αγνοηθούν τα μεγέθη $\bar{\kappa}_{ijk}$, $\bar{\mu}_{ijk}$ και τεθεί $\rho' = 0$.

4.4 ΣΥΓΚΡΙΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ ΜΟΡΦΩΝ, ΠΕΡΑΙΤΕΡΩ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΕΙΣ

Ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις μεταξύ των παραμορφώσεων και των τάσεων που ορίζονται σε κάθε μία από τις τρεις διατυπώσεις.

$$\tilde{\kappa}_{ijk} = \hat{\kappa}_{ijk} + \hat{\kappa}_{jki} - \hat{\kappa}_{kij} = \bar{\kappa}_{ijk} + \frac{2}{3} \bar{\kappa}_{il} \varepsilon_{ljk} + \frac{2}{3} \bar{\kappa}_{jl} \varepsilon_{lik} \quad (4.4.1)$$

$$\hat{\kappa}_{ijk} = \bar{\kappa}_{ijk} - \frac{1}{3} \bar{\kappa}_{jl} \varepsilon_{kil} - \frac{1}{3} \bar{\kappa}_{kl} \varepsilon_{jil} = \frac{1}{2} (\tilde{\kappa}_{ijk} + \tilde{\kappa}_{jik}) \quad (4.4.2)$$

$$\bar{\kappa}_{ij} = \partial_i w_j = \frac{1}{2} \tilde{\kappa}_{ilk} \varepsilon_{jlk} = \hat{\kappa}_{lik} \varepsilon_{jlk} \quad (4.4.3)$$

$$\bar{\kappa}_{ijk} = \frac{1}{3} (\tilde{\kappa}_{ijk} + \tilde{\kappa}_{jki} + \tilde{\kappa}_{kij}) = \frac{1}{3} (\hat{\kappa}_{ijk} + \hat{\kappa}_{jki} + \hat{\kappa}_{kij}) \quad (4.4.4)$$

$$\tilde{\mu}_{ijk} = \frac{1}{2} (\hat{\mu}_{ijk} + \hat{\mu}_{ikj}) = \bar{\mu}_{ijk} + \frac{1}{4} \bar{\mu}_{il} \varepsilon_{ljk} + \frac{1}{4} \bar{\mu}_{jl} \varepsilon_{lik} \quad (4.4.5)$$

$$\hat{\mu}_{ijk} = \tilde{\mu}_{ijk} + \tilde{\mu}_{kij} - \tilde{\mu}_{jki} = \bar{\mu}_{ijk} + \frac{1}{2} \bar{\mu}_{jl} \varepsilon_{lik} + \frac{1}{2} \bar{\mu}_{kl} \varepsilon_{lij} \quad (4.4.6)$$

$$\bar{\mu}_{ij} = \frac{4}{3} \tilde{\mu}_{ipq} \varepsilon_{jpq} = \frac{2}{3} (\hat{\mu}_{ipq} + \hat{\mu}_{piq}) \varepsilon_{jpq} \quad (4.4.7)$$

$$\bar{\mu}_{ijk} = \frac{1}{3} (\tilde{\mu}_{ijk} + \tilde{\mu}_{jki} + \tilde{\mu}_{kij}) = \frac{1}{3} (\hat{\mu}_{ijk} + \hat{\mu}_{jki} + \hat{\mu}_{kij}) \quad (4.4.8)$$

Οι σχέσεις μεταξύ των ενεργειακώς συμβατών εξωτερικών εντατικών μεγεθών είναι οι εξής:

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_k &= \hat{P}_k \\
\tilde{R}_k &= \hat{R}_k \\
\tilde{E}_k &= \hat{E}_k
\end{aligned}
\tag{4.4.9}$$

$$\begin{aligned}
\bar{P}_k &= \tilde{P}_k - (D_j - n_j D_i n_i) (\tilde{R}_j n_k) \\
\bar{Q}_k &= 2n_i \tilde{R}_j \varepsilon_{ijk} \\
\bar{R} &= n_i \tilde{R}_i \\
\bar{E}_k &= \tilde{E}_k + s_l [n_i \tilde{R}_j n_k] \varepsilon_{lij}
\end{aligned}
\tag{4.4.10}$$

4.5 ΣΥΣΧΕΤΙΣΗ ΚΑΤΑΣΤΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΤΑΣΕΩΝ

Κατά τη διατύπωση των εξισώσεων της απλοποιημένης θεωρίας του Mindlin χρησιμοποιήθηκε η αρχή των δυνατών έργων, στην οποία υπεισέρχονται εντατικά μεγέθη ορισμένα μέσω καταστατικών σχέσεων. Δεν ορίστηκαν εντατικά μεγέθη απ' ευθείας από την ικανοποίηση των αρχών διατήρησης ορμής και στροφορμής. Στην παρούσα ενότητα ορίζονται οι πραγματικές τάσεις, οι οποίες ικανοποιούν τις εξισώσεις ισορροπίας, και παρουσιάζονται οι σχέσεις μεταξύ αυτών και των καταστατικών τάσεων.

Ακολουθώντας τη διαδικασία του [59] και ανεξαρτήτως από τις καταστατικές τάσεις και τα αντίστοιχα ενεργειακά συμβατά ασκούμενα εντατικά μεγέθη, ορίζονται οι ακόλουθες εξωτερικές δράσεις: μαζικές δυνάμεις $F_k dV$, επιφανειακοί ελκυστές $t_k dS$ (surface tractions), επιφανειακές ροπές $m_k dS$ (surface couples with moment), αυτοϊσορροπούμενα ζεύγη δυνάμεων $R_{ik} dS$ (self-equilibrating surface double tractions). Τα μεγέθη F_k, t_k εμφανίζονται στις εξισώσεις διατήρησης ορμής στροφορμής και ενέργειας, το μέγεθος m_k εμφανίζεται στις εξισώσεις διατήρησης στροφορμής και ενέργειας, ενώ το μέγεθος R_{ik} εμφανίζεται μόνο στην εξίσωση διατήρησης της ενέργειας.

Από την ισορροπία δυνάμεων ενός στοιχειώδους τριέδρου, ο ελκυστής t_k συνδέεται με τον τοπικό τανυστή τάσης ισορροπίας (balance stress tensor) με βάση τη γνωστή σχέση:

$$t_i = n_k \tau_{ki} \tag{4.5.1}$$

Από την ισορροπία ροπών του ίδιου στοιχειώδους τριέδρου συνδέεται (όπως φάνηκε και στο, εισαγωγικό, κεφάλαιο 2) το διάνυσμα της επιφανειακής ροπής με τον τοπικό τανυστή εσωτερικής ροπής (couple stress tensor):

$$m_i = n_k \mu_{ki} \tag{4.5.2}$$

Σαν επέκταση των παραπάνω σχέσεων, συνδέεται την επιφανειακή διπλή τάση με τον τοπικό «πραγματικό» τανυστή διπλής τάσης (balanced double-stress tensor):

$$R_{ij} = n_k \mu_{kij} \quad (4.5.3)$$

Αγνοώντας χάριν απλούστευσης τις αδρανειακές δυνάμεις (οι σχέσεις μεταξύ των καταστατικών και πραγματικών εντατικών μεγεθών δε μεταβάλλονται από αυτήν την παραδοχή), προκύπτουν από τις εξισώσεις ισορροπίας δυνάμεων και ροπών και από τις σχέσεις (4.5.1), (4.5.2):

$$\int_V F_i dV + \int_S t_i dS = 0$$

$$\nabla V \quad (4.5.4)$$

$$\Rightarrow \dots \partial_j \tau_{jk} + F_k = 0$$

$$\int_V \varepsilon_{ijk} x_j F_k dV + \int_S (\varepsilon_{ijk} x_j t_k + m_i) dS = 0$$

$$\nabla V \quad (4.5.5)$$

$$\Rightarrow \dots \partial_j \mu_{jk} + \varepsilon_{ijk} \tau_{ij} = 0$$

Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφεί εναλλακτικά:

$$\partial_i \mu_{ij} + \varepsilon_{ijk} \tau_{[ki]} = 0 \quad (4.5.6)$$

, αφού $\varepsilon_{ijk} \tau_{(ki)} = 0$.

Στη συνέχεια διατυπώνεται η εξίσωση της αρχής διατήρησης της ενέργειας. Τονίζεται ότι η αρχή διατήρησης της ενέργειας είναι ανεξάρτητη από την αρχή των δυνατών έργων. Η τελευταία είναι ισοδύναμη με τις αρχές διατήρησης της ορμής και της στροφορμής (στην πραγματικότητα είναι μία βαθμωτή διατύπωσή των διανυσματικών εξισώσεών τους), μόνο που οδηγεί στον ορισμό διαφορετικών εντατικών μεγεθών (καταστατικών-πραγματικών). Επομένως τα εντατικά μεγέθη που προκύπτουν από τις δύο ισοδύναμες αρχές (αρχή διατήρησης ορμής, στροφορμής-αρχή δυνατών έργων) συνδέονται μεταξύ τους. Οι σχέσεις μεταξύ των «πραγματικών» (balanced) και των καταστατικών (constitutive) τάσεων θα προκύψουν από την εξίσωση διατήρησης της ενέργειας. Η τελευταία εξίσωση δεν προκύπτει από το συνδυασμό των εξισώσεων διατήρησης ορμής και στροφορμής, αλλά αποτελεί έκφραση του πρώτου θερμοδυναμικού αξιώματος, σύμφωνα με το οποίο:

«Ο ρυθμός αλλαγής του αθροίσματος της κινητικής και εσωτερικής ενέργειας, ισούται με το ρυθμό έργου όλων των εξωτερικών (πραγματικών-balanced) δυνάμεων συν το συνολικό ρυθμό παροχής θερμότητας.»

Θεωρώντας ισοθερμικές και ψευδοστατικές συνθήκες, ο ρυθμός έργου όλων των εξωτερικών δυνάμεων ισούται με το ρυθμό αλλαγής της εσωτερικής ενέργειας παραμόρφωσης του σώματος. Στην περιοχή των μικρών μετατοπίσεων υιοθετούνται οι ακόλουθες εκφράσεις του ρυθμού έργου εξωτερικών δυνάμεων και του ρυθμού έργου των εσωτερικών δυνάμεων:

$$W_{(ext)} = \int_V F_k v_k dV + \int_S (t_k v_k + m_k \dot{v}_k + R_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}) dS \quad (4.5.7)$$

, όπου

$$\dot{w}_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \partial_j v_k \quad (4.5.8)$$

, είναι το διάνυσμα του ρυθμού στροφής.

$$\dot{W}_{(int)} = \dot{W}_{(el)} = \int_V \left(\hat{\tau}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + \hat{\mu}_{ijk} \dot{\kappa}_{ijk} \right) dV \quad (4.5.9)$$

Για την έκφραση του ρυθμού έργου των εσωτερικών δυνάμεων χρησιμοποιήθηκε η δεύτερη απλοποιημένη διατύπωση της θεωρίας του Mindlin.

Επομένως η εξίσωση διατήρησης της ενέργειας γράφεται:

$$\begin{aligned} W_{(ext)} = \dot{W}_{(int)} \Rightarrow \\ \int_V \left(\hat{\tau}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + \hat{\mu}_{ijk} \dot{\kappa}_{ijk} \right) dV = \int_V F_k v_k dV + \int_S \left(t_k v_k + m_k \dot{v}_k + R_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} \right) dS \end{aligned} \quad (4.5.10)$$

Οι σχέσεις μεταξύ των καταστατικών μεγεθών προκύπτουν σύμφωνα με τη διαδικασία που παρουσιάζεται στο [59]. Λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (4.5.1-6), (4.2.1) και τις παρακάτω:

$$\tau_{ij} \partial_i v_j = \tau_{(ij)} \dot{\varepsilon}_{ij} + \tau_{[ij]} \dot{w}_j = \tau_{(ij)} \dot{\varepsilon}_{ij} + \tau_{[ij]} \varepsilon_{jki} \dot{w}_k \quad (4.5.11)$$

$$\mu_{ij} \partial_i \dot{w}_j = \mu_{ij} \varepsilon_{jlk} \dot{\kappa}_{lik} = \frac{1}{2} \mu_{ij} \varepsilon_{jlk} \dot{\kappa}_{lik} + \frac{1}{2} \mu_{kj} \varepsilon_{jli} \dot{\kappa}_{lki} \quad (4.5.12)$$

$$\mu_{ijk} \partial_i \dot{\varepsilon}_{jk} = \mu_{ijk} \dot{\kappa}_{ijk} = \mu_{lik} \dot{\kappa}_{lik} \quad (4.5.13)$$

, προκύπτει τελικώς:

$$\begin{aligned} \int_V \left(\hat{\tau}_{jk} \dot{\varepsilon}_{jk} + \hat{\mu}_{lik} \dot{\kappa}_{lik} \right) dV = \\ = \int_V \left[\left(\tau_{(jk)} + \partial_i \mu_{ijk} \right) \dot{\varepsilon}_{jk} + \left(\frac{1}{2} \mu_{ij} \varepsilon_{jlk} + \frac{1}{2} \mu_{kj} \varepsilon_{jli} + \mu_{lik} \right) \dot{\kappa}_{lik} \right] dV \end{aligned} \quad (4.5.14)$$

Στη συνέχεια ακολουθείται ο εξής συλλογισμός. Δεδομένου ότι (με βάση τις καταστατικές σχέσεις που υιοθετήθηκαν) οι καταστατικές και πραγματικές τάσεις είναι σε κάθε χρονική στιγμή ανεξάρτητες από τους στιγμιαίους ρυθμούς μεταβολής των παραμορφωσιακών μεγεθών, αλλά εξαρτώνται μόνο από τις τιμές τους τη δεδομένη στιγμή, η παραπάνω εξίσωση ισχύει για δεδομένες τιμές των τάσεων αλλά αυθαίρετες τιμές των ρυθμών παραμόρφωσης. Επομένως μπορεί να υποθεθεί ένα μη μηδενικό ομοιογενές πεδίο ρυθμού παραμόρφωσης, οπότε $\dot{\kappa}_{ijk} = \partial_i \dot{\varepsilon}_{jk} = 0$. Επομένως προκύπτει η σχέση:

$$\dot{\varepsilon}_{jk} \int_V \left[\hat{\tau}_{jk} - \left(\tau_{(jk)} + \partial_i \mu_{ijk} \right) \right] dV \Rightarrow \quad (4.5.15)$$

$$\hat{\tau}_{jk} = \tau_{(jk)} + \partial_i \mu_{ijk}$$

Χρησιμοποιώντας και την παραπάνω σχέση, προκύπτει με το ίδιο σκεπτικό:

$$\hat{\mu}_{ijk} = \mu_{ijk} + \frac{1}{2} \mu_{jl} \varepsilon_{lik} + \frac{1}{2} \mu_{kl} \varepsilon_{lij} \quad (4.5.16)$$

Οι παραπάνω σχέσεις αν συνδυαστούν, καταλήγουν στην:

$$\tau_{(jk)} = \hat{\tau}_{jk} - \partial_i \hat{\mu}_{ijk} + \frac{1}{2} \partial_i \mu_{jl}^D \varepsilon_{lik} + \frac{1}{2} \partial_i \mu_{kl}^D \varepsilon_{lij} \quad (4.5.17)$$

, όπου μ_{ij}^D είναι το αποκλίνον (deviatoric) τμήμα του τανυστή της εσωτερικής ροπής:

$$\mu_{ij} = \mu_{ij}^D + \frac{1}{3} \mu_{kk} \delta_{ij} \quad (4.5.18)$$

Εύκολα αποδεικνύονται μετά από πράξεις και οι παρακάτω σχέσεις:

$$\mu_{ij}^D = \frac{2}{3} (\hat{\mu}_{ipq} + \hat{\mu}_{piq}) \varepsilon_{jprq} \quad (4.5.19)$$

$$\bar{\mu}_{ij} = \mu_{ij}^D \quad (4.5.20)$$

$$\mu_{ijk} = \frac{1}{3} (\hat{\mu}_{ijk} + \hat{\mu}_{jki} + \hat{\mu}_{kij}) \quad (4.5.21)$$

$$\bar{\mu}_{il} \varepsilon_{ljk} + \bar{\mu}_{jl} \varepsilon_{lki} + \bar{\mu}_{kl} \varepsilon_{lij} = 0 \quad (4.5.22)$$

Από τις προηγούμενες σχέσεις παρατηρούνται τα εξής:

Ο πραγματικός τανυστής μ_{ijk} είναι απολύτως συμμετρικός και ισούται με το συμμετρικό μέρος του καταστατικού τανυστή $\hat{\mu}_{ijk}$. Ο καταστατικός τανυστής εσωτερικής ροπής της δεύτερης διατύπωσης, $\bar{\mu}_{ij}$ ισούται με το αποκλίνον τμήμα του πραγματικού τανυστή εσωτερικής ροπής μ_{ij} . Επίσης, το ομοιόμορφο (spherical) τμήμα του τανυστή μ_{ij} είναι απροσδιόριστο από τις καταστατικές σχέσεις, ενώ αποδεικνύεται [59] ότι δεν επηρεάζει την επίλυση του τελικού προβλήματος συνοριακών τιμών της παρούσας θεωρίας.

Σημειώνεται τέλος ότι τα εξωτερικά εντατικά μεγέθη που προκύπτουν από την εφαρμογή της αρχής των δυνατών έργων διαφέρουν από τους επιφανειακούς ελκυστές που προκύπτουν από τους καταστατικούς ή τους πραγματικούς τανυστές τάσης. Π.χ. για τη 2^η διατύπωση:

$$\hat{P}_k \neq n_i \hat{\tau}_{ik} \quad (4.5.23)$$

και επίσης:

$$\hat{P}_k \neq n_i \tau_{ik} \quad (4.5.24)$$

4.6 ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΜΑ VARDOULAKIS&SULEM

Το 1995 οι Vardoulakis&Sulem [55] πρότειναν μία έκφραση της συνάρτησης πυκνότητας ελαστικής ενέργειας, εμπνεόμενοι από μία δημοσίευση του Casal (1961), στην οποία εξετάζεται ο μονοδιάστατος εφελκυσμός μίας ράβδου μήκους L και ελαστικής δυσκαμψίας EA . Σύμφωνα με τη δημοσίευση του Casal, η συνολική ελαστική ενέργεια δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int_0^L EA (\varepsilon^2 + \ell^2 (\varepsilon')^2) dx + \frac{1}{2} EA \ell' \varepsilon^2 \Big|_0^L = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L EA (\varepsilon^2 + \ell^2 (\varepsilon')^2) dx + \int_0^L EA \ell' (\varepsilon \cdot \varepsilon') dx \end{aligned} \quad (4.6.1)$$

Οι Vardoulakis&Sulem διεύρυναν την παραπάνω σχέση, υιοθετώντας για την τριδιάστατη περίπτωση την παρακάτω έκφραση της πυκνότητας ελαστικής ενέργειας:

$$\begin{aligned} \hat{w} &= \frac{1}{2} \lambda \varepsilon_{mm} \varepsilon_{nn} + G \varepsilon_{mn} \varepsilon_{nm} + \ell^2 \left(\frac{1}{2} \lambda \hat{\kappa}_{kmn} \hat{\kappa}_{kmn} + G \hat{\kappa}_{kmn} \hat{\kappa}_{kmn} \right) + \\ &+ \ell'_k \left[\frac{1}{2} \lambda (\hat{\kappa}_{kmn} \varepsilon_{nn} + \varepsilon_{mm} \hat{\kappa}_{kmn}) + G (\hat{\kappa}_{kmn} \varepsilon_{nn} + \varepsilon_{nn} \hat{\kappa}_{kmn}) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \lambda \varepsilon_{mm} \varepsilon_{nn} + G \varepsilon_{mn} \varepsilon_{nm} + G \ell^2 (\partial_k \varepsilon_{mn}) (\partial_k \varepsilon_{nm}) + G \partial_k (\ell'_k \varepsilon_{mn} \varepsilon_{nm}) \end{aligned} \quad (4.6.2)$$

, όπου:

$$\begin{aligned} \ell'_k &= \ell' \cdot \nu_k \\ \nu_k \cdot \nu_k &= 1 \end{aligned} \quad (4.6.3)$$

Το παραπάνω προσομοίωμα φαίνεται ότι αποτελεί ειδική περίπτωση της δεύτερης διατύπωσης της απλοποιημένης θεωρίας του Mindlin. Ολοκληρώνοντας τον τελευταίο όρο της εξίσωσης (4.6.2ii) προκύπτει:

$$\int_V \partial_k (\ell'_k \varepsilon_{mn} \varepsilon_{nm}) dV = \ell' \int_S (\varepsilon_{mn} \varepsilon_{nm}) (\nu_k n_k) dS$$

Ο παραπάνω όρος αντιστοιχεί στην επιφανειακή ελαστική ενέργεια. Προκύπτει ότι δεν απαιτείται η γνώση του διανύσματος ℓ'_k σε όλον τον όγκο αλλά μόνο στην επιφάνεια του σώματος. Οι καταστατικές σχέσεις διατυπώνονται ως:

$$\hat{\tau}_{ij} = \frac{\partial \hat{w}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij} + \ell'_k (\lambda \hat{\kappa}_{kmn} \delta_{ij} + 2G \hat{\kappa}_{kij}) \quad (4.6.4)$$

$$\hat{\mu}_{ijk} = \frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{\kappa}_{ijk}} = \ell^2 (\lambda \hat{\kappa}_{imn} \delta_{jk} + 2G \hat{\kappa}_{ijk}) + \ell'_i (\lambda \varepsilon_{mn} \delta_{jk} + 2G \varepsilon_{jk}) \quad (4.6.5)$$

Θωρώντας τους γνωστούς μετασχηματισμούς για τις συνιστώσες των τανυστικών μεγεθών στα διάφορα συστήματα συντεταγμένων:

$$\begin{aligned}
 \underline{\tau}_{pq} &= Q_{pi} Q_{qj} \tau_{ij} \\
 \underline{\varepsilon}_{pq} &= Q_{pi} Q_{qj} \varepsilon_{ij} \\
 \underline{\mu}_{pqr} &= Q_{pi} Q_{qj} Q_{rk} \mu_{ijk} \\
 \underline{\kappa}_{pqr} &= Q_{pi} Q_{qj} Q_{rk} \kappa_{ijk} \\
 \underline{\ell}'_i &= Q_{ip} \ell'_p \\
 Q_{ij} Q_{iq} &= \delta_{jq} \\
 Q_{ij} Q_{pj} &= \delta_{ip}
 \end{aligned} \tag{4.6.6}$$

, όπου Q_{ij} ο ορθογωνικός τανυστής μετασχηματισμού συντεταγμένων, προκύπτουν πάλι οι καταστατικές σχέσεις (4.6.4), (4.6.5) για τα μεγέθη $\underline{\tau}_{pq}, \underline{\varepsilon}_{pq}, \underline{\mu}_{pqr}, \underline{\kappa}_{pqr}, \underline{\ell}'_i$. Επομένως οι καταστατικές εξισώσεις που προκύπτουν από τη συνάρτηση πυκνότητας ελαστικής ενέργειας κατά Vardoulakis&Sulem είναι ισοτροπικές.

Για μηδενικές τιμές των μηκών ℓ, ℓ' οι καταστατικές σχέσεις εμπίπτουν στις αντίστοιχες της κλασσικής ελαστικότητας.

Σημειώνεται επίσης πως αποδεικνύεται (Georgiadis et al. 2002) ότι η συνάρτηση πυκνότητας ελαστικής ενέργειας είναι θετικά ορισμένη όταν ισχύουν οι παρακάτω ανισότητες:

$$\begin{aligned}
 3\lambda + 2G &> 0 \\
 G &> 0 \\
 \ell^2 &> 0 \\
 -1 < \frac{\ell'}{\ell} < 1
 \end{aligned} \tag{4.6.7}$$

4.7 ΛΑΠΛΑΣΙΑΝΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΜΑΤΑ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Ορίζοντας τον τανυστή $\sigma_{jk} = \hat{\tau}_{jk} - \partial_i \hat{\mu}_{ijk}$ και λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις τις προηγούμενης ενότητας, προκύπτει ότι αυτός ικανοποιεί τις εξισώσεις ισοροπίας:

$$\partial_j \sigma_{jk} + F_k = 0 \tag{4.7.1}$$

Χρησιμοποιώντας τις καταστατικές σχέσεις της παρούσας ενότητας, προκύπτει για τον παραπάνω τανυστή:

$$\sigma_{jk} = (1 - \ell^2 \nabla^2) (\lambda \varepsilon_{ii} \delta_{jk} + 2G \varepsilon_{jk}) \tag{4.7.2}$$

, όπου $\nabla^2 \equiv \partial_m \partial_m$. Οι εξισώσεις ισορροπίας σε όρους μετατοπίσεων γίνονται:

$$\begin{aligned} & \lambda \partial_k \partial_i (u_i - \ell^2 \nabla^2 u_i) + \\ & + G \left[\partial_j \partial_j (u_k - \ell^2 \nabla^2 u_k) + \partial_j \partial_k (u_j - \ell^2 \nabla^2 u_j) \right] + F_k = 0 \end{aligned} \quad (4.7.3)$$

Όπως εξηγείται και στο [9], εξισώσεις της μορφής της (4.6.8) μπορούν να προκύψουν και από συλλογισμούς που δεν απαιτούν τον ορισμό μίας συνάρτησης πυκνότητας ελαστικής ενέργειας και των αντίστοιχων καταστατικών τάσεων. Η εξίσωση (4.6.8) μπορεί να ερμηνευθεί ως εξής: Ο νόμος του Hooke, της κλασσικής ελαστικότητας, θεωρείται ότι ισχύει για μία μέση τάση ισορροπίας, και όχι για την τοπική τάση ισορροπίας. Η μέση αυτή τάση ασκείται σε έναν αντιπροσωπευτικό πεπερασμένο όγκο (π.χ. κύβο) του υλικού, ο οποίος είναι αρκετά μεγάλος σε σχέση με τον αντιπροσωπευτικό στοιχειώδη όγκο της μικροδομής του υλικού (π.χ. κόκκος).

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \int_{REV} \sigma_{ij} dV = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij} \quad (4.7.4)$$

Για την περίπτωση κυβικού χωρίου διάστασης a , η μέση τάση μπορεί να προσεγγιστεί από τη σχέση:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \left(1 + \frac{a^2}{24} \nabla^2 \right) \sigma_{ij}(x_k) \quad (4.7.5)$$

Αντιστρέφοντας το διαφορικό τελεστή $1 + \frac{a^2}{24} \nabla^2$ προκύπτει:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{1 + \frac{a^2}{24} \nabla^2} \langle \sigma_{ij} \rangle \approx \left(1 - \frac{a^2}{24} \nabla^2 \right) (\lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij}) \quad (4.7.6)$$

Επομένως για την τοπική τάση ισορροπίας (local equilibrium stress) ο νόμος του Hooke εμπλουτίζεται με την προσθήκη της Λαπλασιανής της μέσης τάσης επί ένα χαρακτηριστικό μήκος $\ell^2 = \frac{a^2}{24}$.

Πολλοί ερευνητές πρότειναν προσομοιώματα που λαμβάνουν υπόψη τη μικρομηχανική συμπεριφορά μέσω δευτέρων παραγώγων των κλασσικών μεγεθών. Από τις σημαντικότερες εργασίες στο πεδίο της μη-τοπικής ελαστικότητας (non-local elasticity) είναι του Eringen, καθώς και του Aifantis.

Ο Eringen ακολούθησε μία παρόμοια διαδικασία με αυτήν που παρουσιάστηκε. Συσχέτισε την τοπική σ_{ij}^c με τη μη τοπική σ_{ij}^s τάση, ως εξής:

$$\sigma_{ij}^g(x_k) = \int_V \alpha(s) \sigma_{ij}^c(x_k + s) dV \quad (4.7.7)$$

, όπου $\alpha(s)$ είναι συνάρτηση βάρους (weight function). Διατύπωσε επίσης μια θεωρία, η οποία καταλήγει σε εξισώσεις του τύπου:

$$\sigma_{ij}^g - \ell^2 \nabla^2 \sigma_{ij}^g = \sigma_{ij}^c = C_{ijkl} \partial_l u_k \quad (4.7.8)$$

Ο Aifantis στηρίχθηκε σε προγενέστερες εργασίες του στη θεωρία πλαστικότητας (Aifantis 1984, 1987), για να εμπλουτίσει τις κλασσικές εξισώσεις της ελαστικότητας με τη Λαπλασιανή της παραμόρφωσης (Aifantis 1992, Altan and Aifantis 1992, Ru and Aifantis 1993):

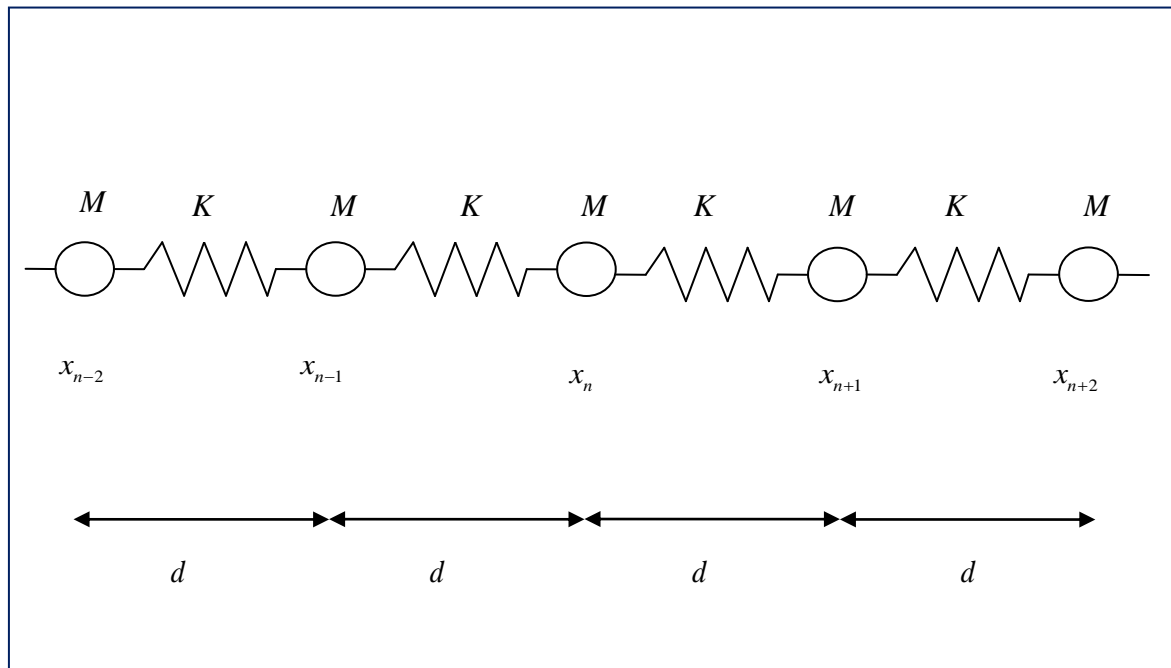
$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \ell^2 \nabla^2 \varepsilon_{kl}) \quad (4.7.9)$$

, καταλήγοντας στις παρακάτω εξισώσεις σε όρους μετατοπίσεων:

$$C_{ijkl} (\partial_j \partial_k u_l - \ell^2 \nabla^2 \partial_j \partial_k u_l) + P_i = 0 \quad (4.7.10)$$

, που έχουν την ίδια μορφή με την εξίσωση (6.7.3) και με τις εξισώσεις κίνησης σε όρους μετατοπίσεων της απλοποιημένης θεωρίας του Mindlin.

Αναφέρεται τέλος ότι σε αρκετές ερευνητικές προσπάθειες, οι Λαπλασιανές θεωρίες ή γενικότερα οι θεωρίες ανώτερης βαθμίδας (gradient theories) προέκυψαν από την εξέταση της ταλάντωσης συστημάτων διακριτών μαζών που συνιστούν δικτυώματα (lattice) σε μία ή περισσότερες διευθύνσεις. Εξετάζοντας για παράδειγμα το παρακάτω μονοδιάστατο σύστημα μαζών:



Σχήμα 4.7.1

Η εξίσωση κίνησης για τη μάζα που βρίσκεται στη θέση x_n δίνεται από τη σχέση:

$$K(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) = M\ddot{u}_n \quad (4.7.11)$$

Μετατρέποντας σε συνεχές το παραπάνω πεδίο μετατοπίσεων, λαμβάνεται:

$$u(x \pm d, t) = u(x, t) \pm d \frac{du(x, t)}{dx} + \frac{1}{2} d^2 \frac{d^2 u(x, t)}{dx^2} \pm \dots \quad (4.7.12)$$

Χρησιμοποιώντας την (6.7.12), η (6.7.11) μπορεί να γραφεί:

$$E \left(\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1}{12} d^2 \frac{d^4 u}{dx^4} + \dots \right) = \rho \ddot{u} \quad (4.7.13)$$

, όπου $\rho = \frac{M}{Ad}$, $E = \frac{Kd}{A}$ και A είναι το εμβαδό της ισοδύναμης διατομής.

Η εξίσωση (6.7.13), αν θεωρηθεί εξίσωση ισορροπίας σε όρους μετατοπίσεων ενός μονοδιάστατου συνεχούς, οδηγεί στη διατύπωση της καταστατικής σχέσης τάσης παραμόρφωσης:

$$\sigma = E \left(\varepsilon + \frac{1}{12} d^2 \varepsilon'' \right) \quad (4.7.14)$$

, που έχει την ίδια μορφή με τις εξισώσεις (6.7.6), (6.7.9) με τη διαφορά ότι η Λαπλασιανή προστίθεται αντί να αφαιρείται από τον κλασσικό όρο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΔΟΚΟΥ ΜΕ ΚΑΤΑΣΤΑΤΙΚΟ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΜΑ ΒΑΘΜΙΔΩΤΗΣ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Στόχος της παρούσας εργασίας είναι η διερεύνηση της επιρροής της μικροδομής στη δυναμική συμπεριφορά μονοδιάστατων εδαφικών σχηματισμών, καθώς και στην καμπτική συμπεριφορά δοκών. Επιδιώκεται ακόμα η συσχέτιση της επιρροής με τα γεωμετρικά και δυναμικά χαρακτηριστικά των προαναφερθέντων συστημάτων. Για την υλοποίηση αριθμητικών υπολογισμών χρησιμοποιείται στην ουσία η απλοποιημένη θεωρία Mindlin, με τη μορφή του προσομοιώματος Vardoulakis&Sulem. Ο κυριότερος λόγος είναι η προσθήκη δύο επιπλέον σταθερών ℓ, ℓ' , σε αντίθεση με τη διατύπωση του Mindlin, στην οποία απαιτούνται πέντε σταθερές $\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_5$, πέραν των σταθερών $\hat{\lambda}, \hat{\mu}$ του Lamé. Οι γενικές τρισδιάστατες εξισώσεις που παρουσιάστηκαν στην ενότητα (4.6) εξειδικεύονται, για να λάβουν υπόψη τις παραδοχές της θεωρίας δοκού. Η επίλυση των εξισώσεων που προκύπτουν γίνεται με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, με τη συνήθη διαδικασία διακριτοποίησης του (μονοδιάστατου στην προκειμένη περίπτωση) χωρίου και την υιοθέτηση συγκεκριμένων συναρτήσεων σχήματος. Στα πλαίσια αυτής της διαδικασίας, προτείνεται ένα νέο γραμμικό πεπερασμένο στοιχείο δοκού, το οποίο σε αντίθεση με τα κλασσικά πεπερασμένα στοιχεία, εμπεριέχει τις δύο νέες παραμέτρους εσωτερικού μήκους.

Προκειμένου να παρουσιαστεί καλύτερα η διαδικασία διατύπωσης των νέων πεπερασμένων στοιχείων, χωρίζεται σε δύο ενότητες. Στην πρώτη διατυπώνεται πεπερασμένο στοιχείο δικτύωματος, το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε προβλήματα απλής διάτμησης, όπως είναι το πρόβλημα της διάδοσης σεισμικού κύματος σε μονοδιάστατο εδαφικό σχηματισμό.

Στη δεύτερη ενότητα του παρόντος κεφαλαίου διατυπώνεται ένα νέο πεπερασμένο στοιχείο δοκού κατά Euler-Bernoulli με μικροδομή, το οποίο μπορεί να συμπληρωθεί με τους αξονικούς βαθμούς ελευθερίας του προσομοιώματος της πρώτης ενότητας.

5.1 ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΟ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΣΤΟΙΧΕΙΟ ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΟΣ-ΑΠΛΗΣ ΔΙΑΤΜΗΣΗΣ

Στην περίπτωση της απλής διάτμησης μονοδιάστατου μέσου γίνεται η παραδοχή του παρακάτω πεδίου παραμορφώσεων:

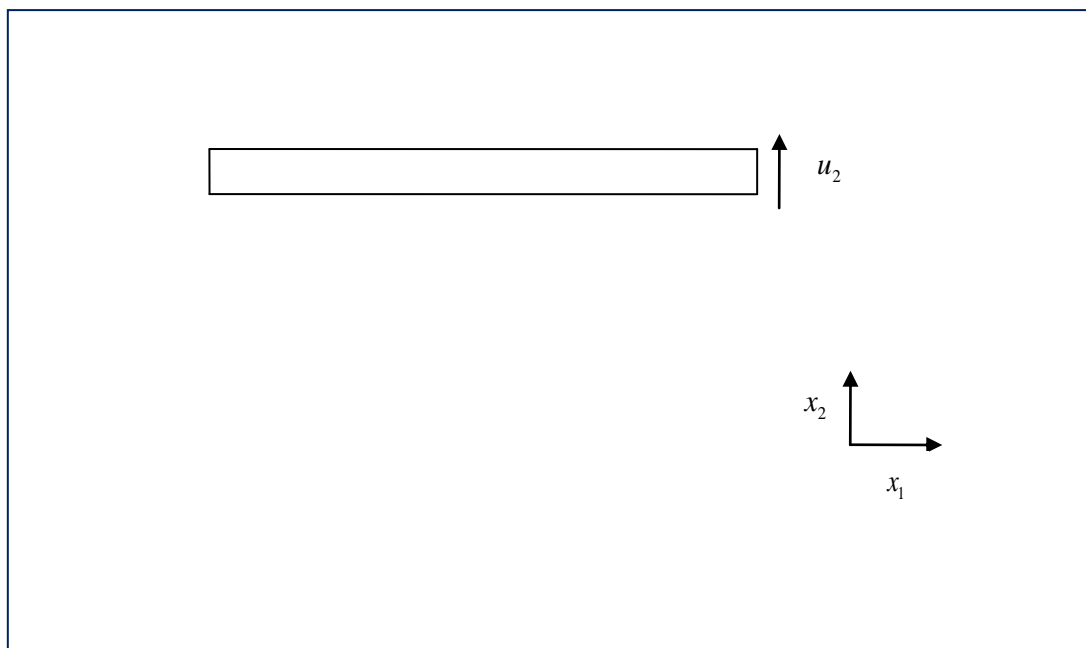
$$\begin{aligned} u_2 &\equiv u_2(x_1) \\ u_1 = u_3 &= 0 \Rightarrow \\ \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} &= 0 \\ \varepsilon_{12} &\equiv \varepsilon_{12}(x_1) = \frac{1}{2} \partial_1 u_2 \neq 0 \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

Από τις καταστατικές εξισώσεις (4.6.4), (4.6.5) προκύπτει:

$$\hat{\tau}_{11} = \hat{\tau}_{22} = \hat{\tau}_{33} = \hat{\tau}_{13} = \hat{\tau}_{23} = 0 \quad (5.1.2)$$

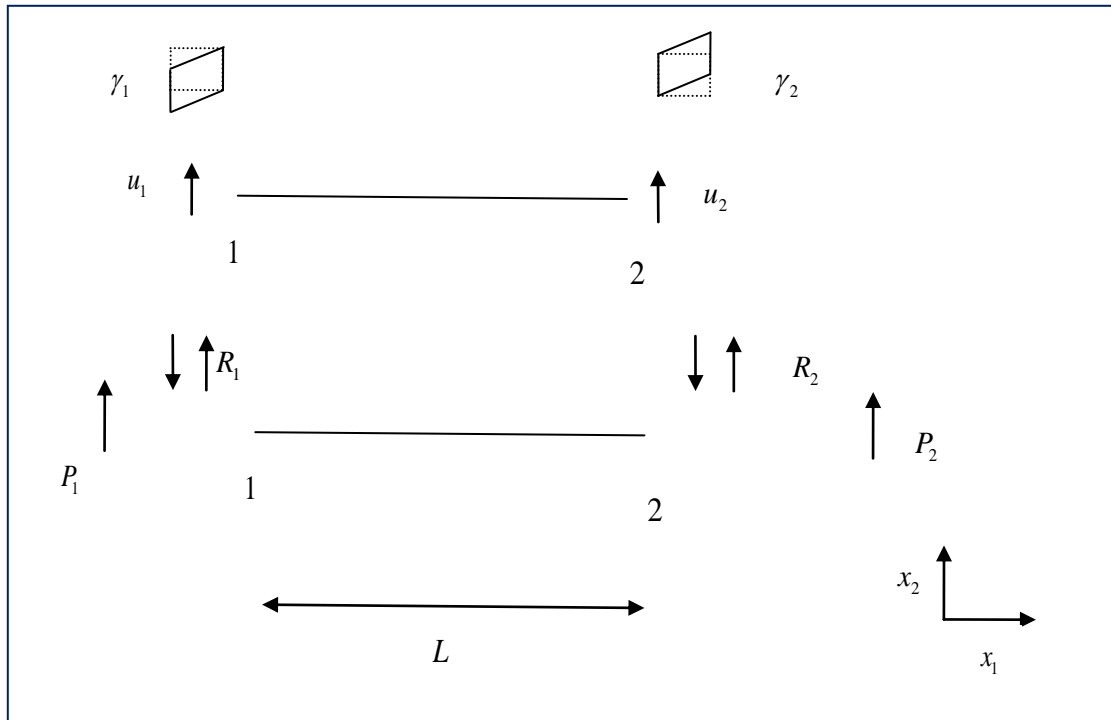
$$\hat{\tau}_{12} = G\partial_1 u_2 + \ell' G\partial_1 \partial_1 u_2 = G\gamma_{12} + \ell' G\hat{\kappa}_{112} \quad (5.1.3)$$

, ενώ όλες οι υπόλοιπες συνιστώσες του τανυστή ζεύγους τάσης θεωρούνται μηδενικές.



Σχήμα 5.1.1

Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, κάθε πεπερασμένο στοιχείο έχει τέσσερις βαθμούς ελευθερίας. Πρόκειται για τη μετατόπιση u_2 (εφ' εξής u) και τη διατμητική παραμόρφωση γ_{12} κάθε άκρου. Οι διατμητικές παραμορφώσεις (εφ' εξής γ) είναι αναγκαίο να εισαχθούν ως ανεξάρτητοι βαθμοί ελευθερίας κάθε στοιχείου λόγω της ύπαρξης εντατικών μεγεθών ενεργειακώς συζυγών (κατά την έννοια του δυνατού έργου), όπως είναι τα εξωτερικά ζεύγη δυνάμεων ανά επιφάνεια (βλ. τον 3^ο όρο της σχέσης 4.1.28).



Σχήμα 5.1.2

Επικόμβιοι βαθμοί ελευθερίας και επικόμβιες δράσεις.

Το διάνυσμα των επικομβίων «γενικευμένων» μετατοπίσεων στο τοπικό σύστημα του στοιχείου είναι το:

$$\{D\} = \{u_1 \quad \gamma_1 \quad u_2 \quad \gamma_2\} \quad (5.1.4)$$

, ενώ το διάνυσμα των επικομβίων δράσεων ανά επιφάνεια διατομής, στο τοπικό σύστημα του στοιχείου είναι το:

$$\{F\} = \{P_1 \quad R_1 \quad P_2 \quad R_2\} \quad (5.1.5)$$

Η εξίσωση των δυνατών έργων, θεωρώντας ότι δεν υπάρχουν μαζικές δυνάμεις, γράφεται:

$$\delta W_{int} = \delta W_{ext} \quad (5.1.6)$$

, όπου:

$$\delta W_{int} = \int_V \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dV \quad (5.1.7)$$

$$\begin{aligned}\delta W_{ext} &= \int_S \{\delta D\}^T \cdot \{F\} dS - \int_V \rho \ddot{u} \delta u dV = \\ &= \{\delta D\}^T \cdot \int_S \{F\} dS - \int_V \rho \ddot{u} \delta u dV\end{aligned}\quad (5.1.8)$$

, όπου:

$$\{\varepsilon\} = \{\gamma \quad \kappa\}^T \quad (5.1.9)$$

$$\{\sigma\} = \{\tau \quad \mu\} \quad (5.1.10)$$

είναι τα διανύσματα τάσεων και παραμορφώσεων κάθε σημείου. Σημειώνεται ότι με $\kappa = \frac{d\gamma}{dx}$ συμβολίζεται εφ' εξής η παράγωγος της παραμόρφωσης, $\hat{\kappa}_{112}$, ενώ τ είναι η διατμητική τάση $\hat{\tau}_{12}$ και μ είναι το ζεύγος τάσης $\hat{\mu}_{112}$. Επίσης ρ είναι η μακροσκοπική πυκνότητα του υλικού (για λόγους απλοποίησης αγνοείται η συμβολή της μικροδομής στην κινητική ενέργεια).

Για την παρεμβολή της μετατόπισης εντός του στοιχείου χρησιμοποιείται ένα κυβικό πολυώνυμο, αφού οι επικόμβιοι βαθμοί ελευθερίας είναι τέσσερις.

$$\begin{aligned}u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix}\end{aligned}\quad (5.1.11)$$

Ισχύει επίσης:

$$\gamma = \frac{du}{dx} = \alpha_2 + 2\alpha_3 x + 3\alpha_4 x^2 \quad (5.1.12)$$

Το διάνυσμα των γενικευμένων συντεταγμένων $\{\alpha\} = \{\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4\}^T$ συνδέεται με το διάνυσμα $\{D\}$ των επικομβίων γενικευμένων μετατοπίσεων μέσω των συνοριακών συνθηκών του στοιχείου:

$$\begin{aligned}u(0) &= u_1 \\ u(L) &= u_2 \\ \gamma(0) &= \gamma_1 \\ \gamma(L) &= \gamma_2\end{aligned}\quad (5.1.13)$$

Προκύπτει η σχέση:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ \gamma_1 \\ u_2 \\ \gamma_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix}$$

ή

$$\{D\} = [A] \cdot \{\alpha\} \quad (5.1.14)$$

, επομένως:

$$\{\alpha\} = [A]^{-1} \cdot \{D\} \Rightarrow \quad (5.1.15)$$

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L^2} & \frac{3}{L^2} & -\frac{1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ \gamma_1 \\ u_2 \\ \gamma_2 \end{Bmatrix}$$

Αντικαθιστώντας την (5.1.15) στην (5.1.11) προκύπτει η συσχέτιση της μετατόπισης κάθε σημείου, με τις επικόμβιες γενικευμένες μετατοπίσεις:

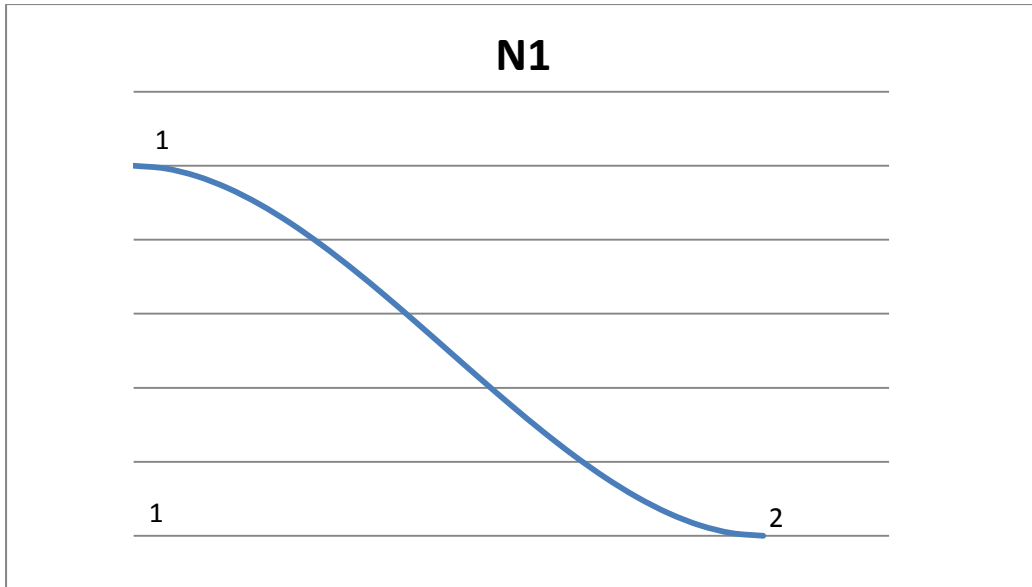
$$u = \{1 \quad x \quad x^2 \quad x^3\} \cdot [A]^{-1} \cdot \{D\} \Rightarrow$$

$$u = [N] \cdot \{D\} \quad (5.1.16)$$

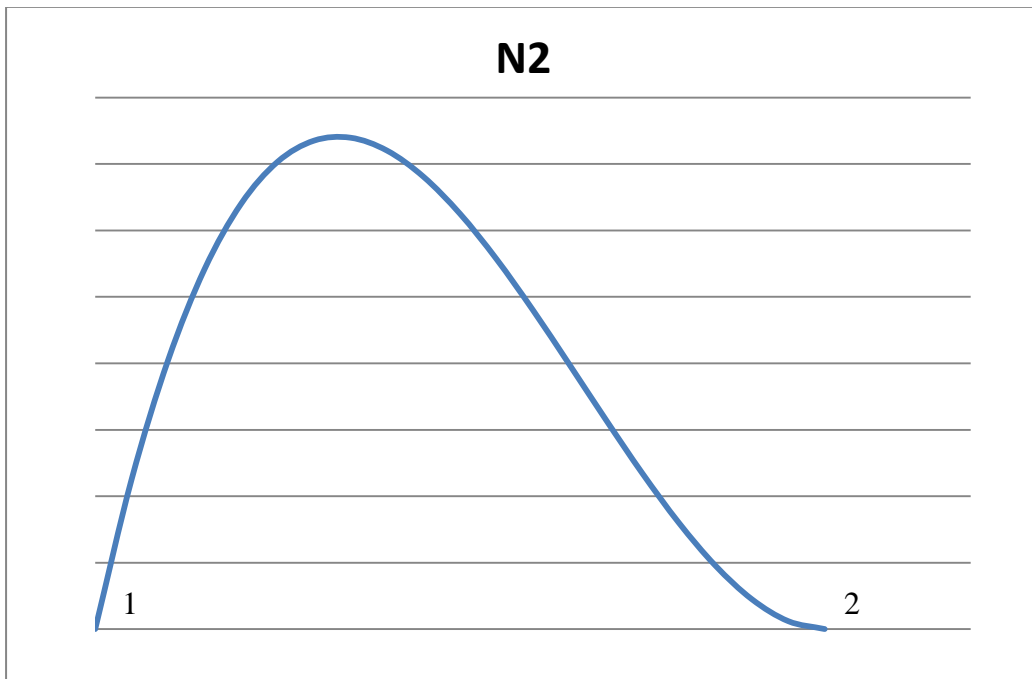
, όπου $[N]$ είναι το μητρώο γραμμή των συναρτήσεων σχήματος:

$$[N] = \left[1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \quad x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \quad \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \quad -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \right] \quad (5.1.17)$$

Τα στοιχεία του μητρώου συναρτήσεων σχήματος ορίζονται ως συνήθως: η μετατόπιση κατά μήκος του στοιχείου για μοναδιαία τιμή της συγκεκριμένης επικόμβιας μετατόπισης και μηδενικές τιμές για τις υπόλοιπες:



Σχήμα 5.1.1 Συνάρτηση σχήματος N_1



Σχήμα 5.1.2 Συνάρτηση σχήματος N_2

Στη συνέχεια διατυπώνεται η σχέση μεταξύ του μητρώου παραμορφώσεως με το διάνυσμα $\{D\}$:

$$\begin{aligned} \{\varepsilon\} = \{\gamma \quad \kappa\}^T &= \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} \\ \frac{d^2}{dx^2} \\ \frac{d}{dx} \end{bmatrix} u = [\partial]u = \\ &= [\partial][N] \cdot \{D\} = [B] \cdot \{D\} \end{aligned} \quad (5.1.18)$$

, όπου $[B]$ είναι το μητρώο παραμόρφωσης:

$$[B] = [\partial][N] = \begin{bmatrix} -\frac{6x}{L^2} + \frac{6x^2}{L^3} & 1 - \frac{4x}{L} + \frac{3x^2}{L^2} & \frac{6x}{L^2} - \frac{6x^2}{L^3} & -\frac{2x}{L} + \frac{3x^2}{L^2} \\ -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} & -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} & \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} & -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \end{bmatrix} \quad (5.1.19)$$

Το κατευθυντήριο διάνυσμα ℓ'_k , όπως αποδεικνύεται στο [59], δεν μπορεί να είναι σταθερό στον όγκο του σώματος. Στην περίπτωση της ράβδου (αλλά και της δοκού), για λόγους συμμετρίας ισχύει:

$$\ell'_1(0) = -\ell'_1(L) \equiv -\ell' \quad (5.1.20)$$

, όπου ℓ' είναι η αλγεβρική τιμή του «κατευθυντηρίου» μήκους στα άκρα της ράβδου (όχι του στοιχείου). Δεδομένου ότι δεν επηρεάζει τα αποτελέσματα ο τρόπος που μεταβάλλεται το παραπάνω μήκος εντός του όγκου του σώματος, μπορεί να υποτεθεί εντός κάθε στοιχείου μία αυθαίρετη (αντισυμμετρική ως προς το κέντρο) κατανομή, π.χ. γραμμική:

$$\begin{aligned} \ell'_e(\xi) &= (1-\xi)(-\ell') + \xi\ell' = \ell'(2\xi-1) \\ \xi &= \frac{x}{L} \end{aligned} \quad (5.1.21)$$

Τα διανύσματα τάσεων και παραμορφώσεων συνδέονται μεταξύ τους με τη σχέση:

$$\{\sigma\} = [E] \cdot \{\varepsilon\} \quad (5.1.22)$$

, όπου:

$$[E] = G \begin{bmatrix} 1 & \ell'(2\xi-1) \\ \ell'(2\xi-1) & \ell^2 \end{bmatrix} \quad (5.1.23)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (5.1.16), (5.1.18) και (5.1.20) στις σχέσεις (5.1.7), (5.1.8):

$$\delta W_{\text{int}} = \int_V \{\delta D\}^T [B]^T [E][B]\{D\} dV = \{\delta D\}^T \left(\int_V [B]^T [E][B] dV \right) \{D\} \quad (5.1.24)$$

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{ext}} &= \{\delta D\}^T \cdot \int_S \{F\} dS - \int_V \rho [N]\{\ddot{D}\}[N]\{\delta D\} dV = \\ &= \{\delta D\}^T \cdot \int_S \{F\} dS - \{\delta D\}^T \left(\int_V \rho [N]^T [N] dV \right) \{\ddot{D}\} \end{aligned} \quad (5.1.25)$$

Επομένως η εξίσωση (5.1.6) καταλήγει στη γνωστή μορφή:

$$[M]\{\ddot{D}\} + [K]\{D\} = \{F_r\} \quad (5.1.26)$$

, όπου $[M]$, $[K]$ είναι αντιστοίχως τα μητρώα μάζας και δυσκαμψίας.

$$\begin{aligned} [M] &= \int_V \rho [N]^T [N] dV = \int_0^L \left(\int_A \rho [N]^T [N] dA \right) dx = \\ &= \rho A \begin{bmatrix} \frac{13L}{35} & \frac{11L^2}{210} & \frac{13L}{140} & -\frac{13L^2}{420} \\ \frac{11L^2}{210} & \frac{L^3}{105} & \frac{3L^2}{140} & -\frac{L^3}{140} \\ \frac{13L}{140} & \frac{3L^2}{140} & \frac{3L}{35} & -\frac{L^2}{35} \\ -\frac{13L^2}{420} & -\frac{L^3}{140} & -\frac{L^2}{35} & \frac{L^3}{105} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.1.27)$$

$$[K] = \int_V [B]^T [E][B] dV = \int_0^L \left(\int_A [B]^T [E][B] dA \right) dx =$$

$$= EA \begin{bmatrix} 6 \frac{L^2 - 2\ell L + 10\ell^2}{5L^3} & \frac{1}{10} + 6 \left(\frac{\ell}{L} \right)^2 - \frac{1}{5} \frac{\ell}{L} & -6 \frac{L^2 - 2\ell L + 10\ell^2}{5L^3} & \frac{1}{10} + 6 \left(\frac{\ell}{L} \right)^2 - \frac{1}{5} \frac{\ell}{L} \\ \frac{1}{10} + 6 \left(\frac{\ell}{L} \right)^2 - \frac{1}{5} \frac{\ell}{L} & \frac{2L^2 + 11\ell' L + 60\ell^2}{15L} & -\frac{1}{10} - 6 \left(\frac{\ell}{L} \right)^2 + \frac{1}{5} \frac{\ell}{L} & -\frac{L^2 - 2\ell L - 60\ell^2}{30L} \\ -6 \frac{L^2 - 2\ell L + 10\ell^2}{5L^3} & -\frac{1}{10} - 6 \left(\frac{\ell}{L} \right)^2 + \frac{1}{5} \frac{\ell}{L} & 6 \frac{L^2 - 2\ell L + 10\ell^2}{5L^3} & -\frac{1}{10} - \frac{6\ell^2}{L^2} + \frac{1}{5} \frac{\ell}{L} \\ \frac{1}{10} + 6 \left(\frac{\ell}{L} \right)^2 - \frac{1}{5} \frac{\ell}{L} & -\frac{L^2 - 2\ell L - 60\ell^2}{30L} & -\frac{1}{10} - \frac{6\ell^2}{L^2} + \frac{1}{5} \frac{\ell}{L} & \frac{2L^2 + 11\ell' L + 60\ell^2}{15L} \end{bmatrix}$$

$$(5.1.28)$$

Το διάνυσμα των συνολικών επικομβίων δράσεων είναι το:

$$\{F_T\} = \int_A \{F\} dA = A \cdot \{F\} \quad (5.1.29)$$

Οι εξισώσεις που παρήχθησαν στην παρούσα ενότητα μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην περίπτωση της μονοδιαστατης αξονικής παραμόρφωσης ράβδου, αν γίνει η παρακάτω εναλλαγή μεγεθών:

$$\begin{aligned} G &\rightarrow E \\ u_2 &\rightarrow u_1 \\ \gamma_{12} &\rightarrow \varepsilon_{11} \\ \hat{\kappa}_{112} &\rightarrow \hat{\kappa}_{111} \\ \hat{\tau}_{12} &\rightarrow \hat{\tau}_{11} \\ \hat{\mu}_{112} &\rightarrow \hat{\mu}_{111} \end{aligned} \quad (5.1.30)$$

5.2 ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΣΤΟΙΧΕΙΟ ΔΟΚΟΥ

Για το στοιχείο δοκού θεωρείται το παρακάτω πεδίο παραμορφώσεων:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} &= 0 \\ \varepsilon_{11} &= \varepsilon_{11}(x_1) + k(x_1) \cdot x_2 \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

, όπου $k(x_1)$ είναι η καμπυλότητα της δοκού στη θέση x_1 .

Ο όρος $\varepsilon_{11}(x_1)$ θεωρείται ότι μεταβάλλεται κατά μήκος της δοκού με τις συναρτήσεις σχήματος της προηγούμενης ενότητας, επομένως η συνεισφορά του στην ελαστική ενέργεια γίνεται ανεξάρτητα από το δεύτερο όρο, που αντιστοιχεί στη μεταβολή της παραμόρφωσης καθ' ύψος της διατομής της δοκού. Στην ανάπτυξη των εξισώσεων της παρούσας ενότητας λαμβάνεται υπόψη μόνο ο καμπτικός όρος $k \cdot x_2$ και το μητρώο δυσκαμψίας που προκύπτει απλώς διευρύνεται εισάγοντας το μητρώο των αξονικών βαθμών ελευθερίας της προηγούμενης ενότητας.

Η μοναδική συνιστώσα του τανυστή $\hat{\kappa}_{ijk}$ που παράγει ελαστική ενέργεια, είναι η $\hat{\kappa}_{111} = \partial_1 \varepsilon_{11} = \frac{d\varepsilon_{11}}{dx} = \varepsilon'_{11}$. Παρ' ότι υπάρχει μεταβολή της ε_{11} κατά x_2 , οπότε υπάρχει η συνιστώσα $\hat{\kappa}_{211}$, δεν εμφανίζεται στις καταστατικές σχέσεις, αφού λόγω του μονοδιάστατου του προβλήματος θεωρείται $\ell'_2 = \ell'_3 = 0$. Η παραδοχή (5.2.1) θεωρείται (με σκεπτικό κλασσικής θεωρίας) ότι συνεπάγεται μηδενικό λόγο Poisson ν , επομένως $\lambda + 2G = E$.

Επομένως οι μόνες συνιστώσες τάσης που συμμετέχουν στην εξίσωση δυνατών έργων είναι οι $\hat{\tau}_{11}$ και $\hat{\mu}_{111}$, εφ' εξής τ και μ αντιστοίχως. Οι καταστατικές σχέσεις που προκύπτουν είναι όμοιες με τις αντίστοιχες της προηγούμενης ενότητας (οι $\varepsilon_{11}, \kappa_{111}$ συμβολίζονται εφ' εξής ε, κ αντιστοίχως) :

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_{11} &= E\partial_1 u_1 + \ell' E\partial_1 \partial_1 u_1 = E\varepsilon_{11} + \ell' E\hat{\kappa}_{111} \\ \text{ή} \\ \tau &= E\varepsilon + \ell' E\kappa \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{111} &= \ell^2 E\partial_1 \partial_1 u_1 + \ell' E\partial_1 u_2 = \ell^2 G\hat{\kappa}_{111} + \ell' G\varepsilon_{11} \\ \text{ή} \\ \mu &= \ell^2 G\kappa + \ell' G\varepsilon \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

Οι άξονες x_1, x_2 συμβολίζονται εφ' εξής ως x, y αντιστοίχως.

Η θεωρία συμπληρώνεται με την παραδοχή Euler-Bernoulli:

$$k = -\frac{d^2 w}{dx^2} = -w'' \quad (5.2.4)$$

, όπου w η μετατόπιση της διατομής της δοκού κατά x_2 .

Τα δυνατό έργο των εσωτερικών δυνάμεων δίνεται (όπως και στην προηγούμενη ενότητα) από τη σχέση:

$$\delta W_{\text{int}} = \int_V \{\delta\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV \quad (5.2.5)$$

, όπου:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon \quad \kappa\}^T \quad (5.2.6)$$

$$\{\sigma\} = \{\tau \quad \mu\} \quad (5.2.7)$$

είναι τα διανύσματα παραμόρφωσης και τάσης αντιστοίχως.

Θεωρώντας κατανεμημένο φορτίο q κατά μήκος της δοκού, το δυνατό έργο των εξωτερικών δυνάμεων δίνεται από τη σχέση:

$$\delta W_{\text{ext}} = \int_0^L q\delta w dx + \int_S (t\delta u + r\delta\varepsilon) dS + V_1\delta w_1 + V_2\delta w_2 \quad (5.2.8)$$

, όπου t, r είναι αντιστοίχως ελκυστής και ζεύγος δύναμης (χωρίς ροπή) ανά επιφάνεια ακραίας διατομής της δοκού, ενώ $u \equiv u_1$.

Οι δύο τελευταίοι όροι της παραπάνω σχέσης αντιστοιχούν στο δυνατό έργο των τεμνουσών V_1, V_2 στα άκρα 1,2 αντιστοίχως. Ο όρος $\int_S t \delta u dS$ οδηγεί, μέσω της παραδοχής Euler-Bernoulli στην έκφραση $M_1 \delta \theta_1 + M_2 \delta \theta_2$, όπου M_1, M_2 και θ_1, θ_2 είναι αντιστοίχως οι ροπές και στροφές των διατομών των άκρων της δοκού. Με το ίδιο σκεπτικό:

$$\begin{aligned} \int_S r \delta \varepsilon dS &= \int_{A_1} r \delta \varepsilon dA_1 + \int_{A_2} r \delta \varepsilon dA_2 = \int_{A_1} ry \delta k dA_1 + \int_{A_2} ry \delta k dA_2 = \\ &= \delta k_1 \int_{A_1} ry dA_1 + \delta k_2 \int_{A_2} ry dA_2 = \delta k_1 m_1 + \delta k_2 m_2 \end{aligned} \quad (5.2.9)$$

, όπου:

$$m = \int_A \mu y dA \quad (5.2.10)$$

είναι το ζεύγος αυτοϊσορροπούμενων ροπών της διατομής (ζεύγος τάσης επί απόσταση από τον κεντροβαρικό άξονα). Επομένως το δυνατό έργο των εξωτερικών δυνάμεων γράφεται:

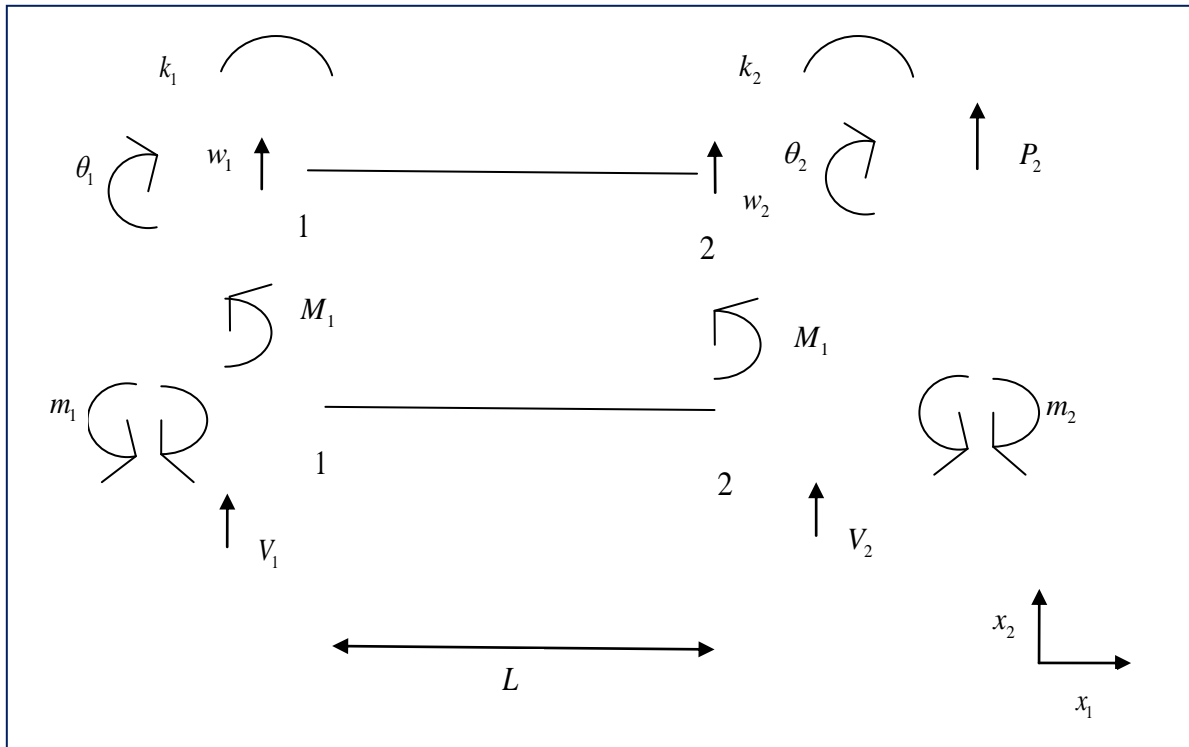
$$\delta W_{ext} = \int_0^L q \delta w dx + \{ \delta D_b \}^T \cdot \{ F_b \} \quad (5.2.11)$$

, όπου $\{ D_b \}, \{ F_b \}$ είναι τα διανύσματα επικομβίων μετατοπίσεων και δράσεων αντιστοίχως:

$$\{ D_b \} = \{ w_1 \quad \theta_1 \quad k_1 \quad w_2 \quad \theta_2 \quad k_2 \}^T \quad (5.2.12)$$

$$\{ F_b \} = \{ V_1 \quad M_1 \quad m_1 \quad V_2 \quad M_2 \quad m_2 \}^T \quad (5.2.13)$$

Παρατηρείται ότι για το πεπερασμένο στοιχείο δοκού ανωτέρας βαθμίδας, στο διάνυσμα των ανεξαρτήτων επικομβίων μετατοπίσεων προστίθενται οι επικόμβιες καμπυλότητες, ενώ στο διάνυσμα των ενεργειακώς συζυγών εντατικών μεγεθών (με την έννοια του δυνατού έργου) προστίθενται οι επικόμβιες γενικευμένες ροπές.



Σχήμα 5.2.1

Επικόμβιοι βαθμοί ελευθερίας και επικόμβιες δράσεις.

Το παραπάνω αποτέλεσμα συνιστά την υιοθέτηση ενός πολυωνύμου 5^{ου} βαθμού για τη μεταβολή της βύθισης w κατά μήκος της δοκού:

$$\begin{aligned}
 w &= \alpha_1^b + \alpha_2^b x + \alpha_3^b x^2 + \alpha_4^b x^3 + \alpha_5^b x^4 + \alpha_6^b x^5 = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 & x^5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1^b \\ \alpha_2^b \\ \alpha_3^b \\ \alpha_4^b \\ \alpha_5^b \\ \alpha_6^b \end{Bmatrix} \quad (5.2.14)
 \end{aligned}$$

Για τη στροφή και την καμπυλότητα κατά μήκος της δοκού προκύπτει:

$$\theta = \frac{dw}{dx} = \alpha_2^b + 2\alpha_3^b x + 3\alpha_4^b x^2 + 4\alpha_5^b x^3 + 5\alpha_6^b x^4 \quad (5.2.15)$$

$$k = -\frac{d^2w}{dx^2} = -2\alpha_3^b - 6\alpha_4^b x - 12\alpha_5^b x^2 - 20\alpha_6^b x^3 \quad (5.2.16)$$

Ο υπολογισμός των γενικευμένων συντεταγμένων $\alpha_1^b \dots \alpha_6^b$ γίνεται λαμβάνοντας υπόψη τις συνοριακές συνθήκες:

$$\begin{aligned}
w_1 &= w(0) \\
\theta_1 &= \theta(0) \\
k_1 &= k(0) \\
w_2 &= w(L) \\
\theta_2 &= \theta(L) \\
k_2 &= k(L)
\end{aligned} \tag{5.2.17}$$

Επομένως προκύπτει:

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ k_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \\ k_2 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 & L^4 & L^5 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 & 4L^3 & 5L^4 \\ 0 & 0 & -2 & -6L & -12L^2 & -20L^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \alpha_1^b \\ \alpha_2^b \\ \alpha_3^b \\ \alpha_4^b \\ \alpha_5^b \\ \alpha_6^b \end{Bmatrix} \\
\dot{\eta} \\
\{D_b\} &= [A_b] \cdot \{\alpha_b\}
\end{aligned} \tag{5.2.18}$$

Αντιστρέφοντας την παραπάνω σχέση:

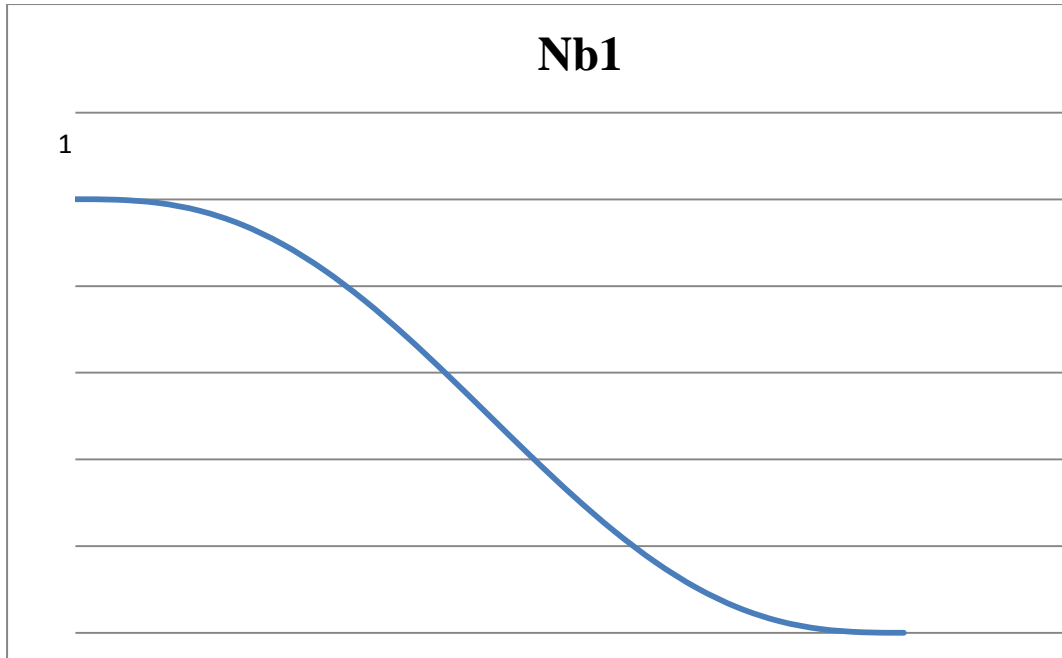
$$\begin{aligned}
\{\alpha_b\} &= [A_b]^{-1} \cdot \{D_b\} \Rightarrow \\
\begin{Bmatrix} \alpha_1^b \\ \alpha_2^b \\ \alpha_3^b \\ \alpha_4^b \\ \alpha_5^b \\ \alpha_6^b \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{10}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & \frac{3}{2L} & \frac{10}{L^3} & -\frac{4}{L^2} & -\frac{1}{2L} \\ \frac{15}{L^4} & \frac{8}{L^3} & -\frac{3}{2L^2} & -\frac{15}{L^4} & \frac{7}{L^3} & \frac{1}{L^2} \\ -\frac{6}{L^5} & -\frac{3}{L^4} & \frac{1}{2L^3} & \frac{6}{L^5} & -\frac{3}{L^4} & \frac{1}{2L^3} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ k_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \\ k_2 \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{5.2.19}$$

Αντικαθιστώντας την (5.2.19) στην (5.2.14) προκύπτει:

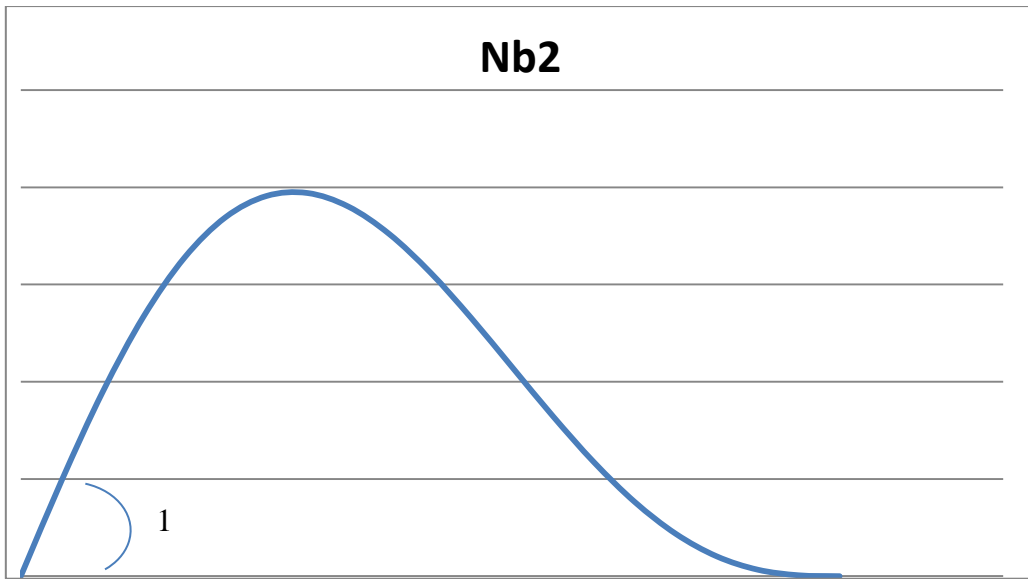
$$\begin{aligned}
w &= [1 \ x \ x^2 \ x^3 \ x^4 \ x^5] \cdot [A_b]^{-1} \{D_b\} \Rightarrow \\
w &= [N_b] \cdot \{D_b\}
\end{aligned} \tag{5.2.20}$$

, όπου $[N_b]$ είναι το μητρώο γραμμή των συναρτήσεων σχήματος.

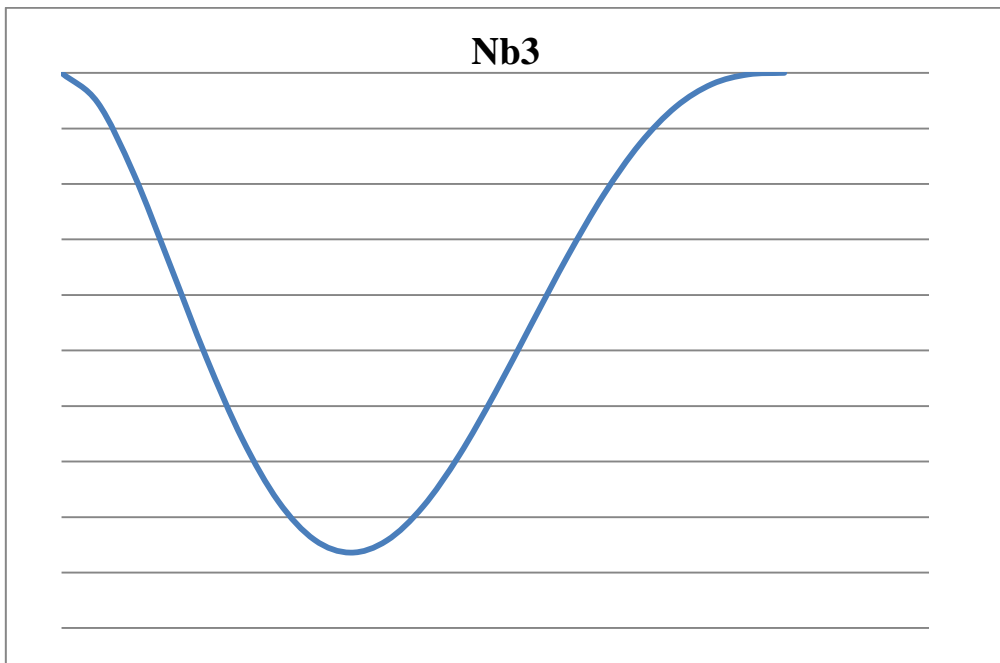
$$[N_b] = \begin{bmatrix} \frac{15x^4}{L^4} - \frac{10x^3}{L^3} - \frac{6x^5}{L^5} + 1 \\ x - \frac{6x^3}{L^2} + \frac{8x^4}{L^3} - \frac{3x^5}{L^4} \\ \frac{3x^3}{2L} - \frac{x^2}{2} - \frac{3x^4}{2L^2} + \frac{x^5}{2L^3} \\ \frac{10x^3}{L^3} - \frac{15x^4}{L^4} + \frac{6x^5}{L^5} \\ \frac{7x^4}{L^3} - \frac{4x^3}{L^2} - \frac{3x^5}{L^4} \\ \frac{x^4}{L^2} - \frac{x^3}{2L} - \frac{x^5}{2L^3} \end{bmatrix}^T \quad (5.2.21)$$



Σχήμα 5.2.2 Συνάρτηση σχήματος N_{b1}



Σχήμα 5.2.3 Συνάρτηση σχήματος N_{b2}



Σχήμα 5.2.4 Συνάρτηση σχήματος N_{b3}

Στη συνέχεια διατυπώνεται η σχέση μεταξύ του μητρώου παραμορφώσεως με το διάνυσμα $\{D\}$:

$$\begin{aligned} \{\varepsilon\} &= \{\varepsilon \quad \kappa\}^T = \{-y w'' \quad -y w'''\}^T = \\ &= y \cdot \begin{bmatrix} -N_{1,xx} & -N_{2,xx} & -N_{3,xx} & -N_{4,xx} & -N_{5,xx} & -N_{6,xx} \\ -N_{1,xxx} & -N_{2,xxx} & -N_{3,xxx} & -N_{4,xxx} & -N_{5,xxx} & -N_{6,xxx} \end{bmatrix} \cdot \{D_b\} = \quad (5.2.22) \\ &= [B_b] \cdot \{D_b\} \end{aligned}$$

, όπου $[B_b]$ το (2x6) καμπτικό μητρώο παραμόρφωσης, του οποίου τα στοιχεία είναι τα παρακάτω:

$$\begin{aligned} [B_b]_{11} &= y \left(\frac{60x^3}{L^4} - \frac{30x^2}{L^3} - \frac{30x^4}{L^5} \right) \\ [B_b]_{12} &= y \left(1 - \frac{18x^2}{L^2} + \frac{32x^3}{L^3} - \frac{15x^4}{L^4} \right) \\ [B_b]_{13} &= y \left(\frac{9x^2}{2L} - x - \frac{6x^3}{L^2} + \frac{5x^4}{2L^3} \right) \\ [B_b]_{14} &= y \left(\frac{30x^2}{L^3} - \frac{60x^3}{L^4} + \frac{30x^4}{L^5} \right) \\ [B_b]_{15} &= y \left(\frac{28x^3}{L^3} - \frac{12x^2}{L^2} - \frac{15x^4}{L^4} \right) \\ [B_b]_{16} &= y \left(\frac{4x^3}{L^2} - \frac{3x^2}{2L} - \frac{5x^4}{2L^3} \right) \\ [B_b]_{21} &= y \left(\frac{180x^2}{L^4} - \frac{60x}{L^3} - \frac{120x^3}{L^5} \right) \\ [B_b]_{22} &= y \left(-36 \frac{x}{L^2} + \frac{96x^2}{L^3} - \frac{60x^3}{L^4} \right) \\ [B_b]_{23} &= y \left(\frac{9x}{L} - 1 - \frac{18x^2}{L^2} + \frac{10x^3}{L^3} \right) \quad (5.2.23) \\ [B_b]_{24} &= y \left(\frac{60x}{L^3} - \frac{180x^2}{L^4} + \frac{120x^3}{L^5} \right) \\ [B_b]_{25} &= y \left(\frac{84x^2}{L^3} - \frac{24x}{L^2} - \frac{60x^3}{L^4} \right) \\ [B_b]_{26} &= y \left(\frac{12x^2}{L^2} - \frac{3x}{L} - \frac{10x^3}{L^3} \right) \end{aligned}$$

Τα διανύσματα τάσης και παραμόρφωσης συνδέονται μεταξύ τους με την ίδια σχέση με την προηγούμενη ενότητα, αν αντικατασταθεί το μέτρο διάτμησης G με το μέτρο ελαστικότητας E .

$$\{\sigma\} = [E] \cdot \{\varepsilon\} \quad (5.2.24)$$

$$[E] = E \begin{bmatrix} 1 & \ell'(2\xi - 1) \\ \ell'(2\xi - 1) & \ell^2 \end{bmatrix} \quad (5.2.25)$$

Εισάγοντας τις σχέσεις (5.2.20), (5.2.22), (5.2.24), (5.2.25) στις (5.2.5) και (5.2.8) προκύπτει η τελική εξίσωση ισορροπίας:

$$[K_b] \{D_b\} = \{F_{Tb}\} \quad (5.2.26)$$

, όπου $[K_b]$ είναι το (6x6) καμπτικό μητρώο δυσκαμψίας, που δίνεται από τη σχέση:

$$[K_b] = EI \begin{bmatrix} \frac{120(L^2 - 2\ell L + 42\ell^2)}{7L^5} & \frac{60(L^2 - 2\ell L + 42\ell^2)}{7L^4} & -\frac{3(L^2 - 2\ell L + 140\ell^2)}{7L^3} & -\frac{120(L^2 - 2\ell L + 42\ell^2)}{7L^5} & \frac{60(L^2 - 2\ell L + 42\ell^2)}{7L^4} & \frac{3(L^2 - 2\ell L + 140\ell^2)}{7L^3} \\ & \frac{192(L^2 - 2\ell L + 35\ell^2)}{35L^3} & -\frac{11}{35} - 36\left(\frac{\ell}{L}\right)^2 + \frac{22}{35} \frac{\ell}{L} & -\frac{60(L^2 - 2\ell L + 42\ell^2)}{7L^4} & \frac{12(9L^2 - 18\ell L + 490\ell^2)}{35L^3} & \frac{4}{35} + 24\left(\frac{\ell}{L}\right)^2 - \frac{8}{35} \frac{\ell}{L} \\ & & \frac{3L^2 + 29\ell L + 315\ell^2}{35L} & \frac{3(L^2 - 2\ell L + 140\ell^2)}{7L^3} & -\frac{4}{35} - 24\left(\frac{\ell}{L}\right)^2 + \frac{8}{35} \frac{\ell}{L} & \frac{L^2 - 2\ell L - 210\ell^2}{70L} \\ & & & \frac{120(L^2 - 2\ell L + 42\ell^2)}{7L^5} & \frac{60(L^2 - 2\ell L + 42\ell^2)}{7L^4} & \frac{3(L^2 - 2\ell L + 140\ell^2)}{7L^3} \\ & & & & \frac{192(L^2 - 2\ell L + 35\ell^2)}{35L^3} & \frac{11}{35} + 36\left(\frac{\ell}{L}\right)^2 - \frac{22}{35} \frac{\ell}{L} \\ & & & & & \frac{3L^2 + 29\ell L + 315\ell^2}{35L} \end{bmatrix} \quad (5.2.27)$$

Στην παραπάνω σχέση I είναι η ροπή αδρανείας της διατομής της δοκού, η οποία λαμβάνεται σταθερή κατά μήκος.

Στη σχέση (5.2.26) $\{F_{Tb}\}$ είναι το συνολικό διάνυσμα των επικομβίων καμπτικών δράσεων:

$$\{F_{Tb}\} = \{F_b\} + \{F_{eb}\} \quad (5.2.28)$$

, όπου $\{F_b\}$ είναι το διάνυσμα των απ' ευθείας επικομβίων καμπτικών δράσεων που δίνεται από τη σχέση (5.2.13) και $\{F_{eb}\}$ το διάνυσμα των ισοδύναμων επικομβίων καμπτικών δράσεων που οφείλονται στο (θεωρούμενο ως ομοιόμορφο) κάθετο στον άξονα της δοκού, κατανεμημένο φορτίο q . Το διάνυσμα αυτό δίνεται από τη σχέση:

$$\{F_{eb}\} = \int_0^L q[N]^T dx = q \int_0^L [N]^T dx \Rightarrow$$

$$\{F_{eb}\} = q \begin{Bmatrix} \frac{L}{2} \\ \frac{L^2}{10} \\ -\frac{L^3}{120} \\ \frac{L}{2} \\ -\frac{L^2}{10} \\ -\frac{L^3}{120} \end{Bmatrix} \quad (5.2.29)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η σύγκριση των αποτελεσμάτων της ελαστικής θεωρίας βαθμίδας (με δύο επιπλέον παραμέτρους) με την κλασική ελαστική θεωρία, για τις απλές περιπτώσεις δοκού ενός ανοίγματος καθώς και για τη διάδοση σεισμικού κύματος σε μονοδιάστατο εδαφικό σχηματισμό.

Για το σκοπό αυτό δημιουργήθηκαν δύο κώδικες σε γλώσσα Matlab (οι κεντρικές ρουτίνες των οποίων παρουσιάζονται στο Παράρτημα Β) στους οποίους γίνεται επίλυση των εξισώσεων της επίπεδης κάμψης δοκού Bernoulli και της μετάδοσης του σεισμικού κύματος αντιστοίχως. Στους κώδικες αυτούς χρησιμοποιήθηκαν τα πεπερασμένα στοιχεία που διατυπώθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο. Για έλεγχο των πεπερασμένων στοιχείων που δημιουργήθηκαν, καθώς και των προγραμμάτων Matlab που συντάχθηκαν, έγινε σύγκριση με τα αποτελέσματα αντιστοίχων παραδειγμάτων των δημοσιεύσεων [41] και [54] και παρατηρήθηκε απόλυτη ταύτιση των αποτελεσμάτων.

Στο παρόν κεφάλαιο ολοκληρώνονται οι στόχοι της παρούσας εργασίας, που είναι οι εξής:

Α. Παρουσίαση και επεξήγηση των διαφόρων θεωριών συνεχούς μέσου ανωτέρας βαθμίδας, καθώς και σύγκριση των θεωρητικών τους χαρακτηριστικών.

Β. Διατύπωση πεπερασμένων στοιχείων ράβδου και δοκού κατά Euler-Bernoulli, χρησιμοποιώντας τη δεύτερη απλοποιημένη διατύπωση του Mindlin με δύο επιπλέον παραμέτρους (προσομοίωμα Vardoulakis&Sulem).

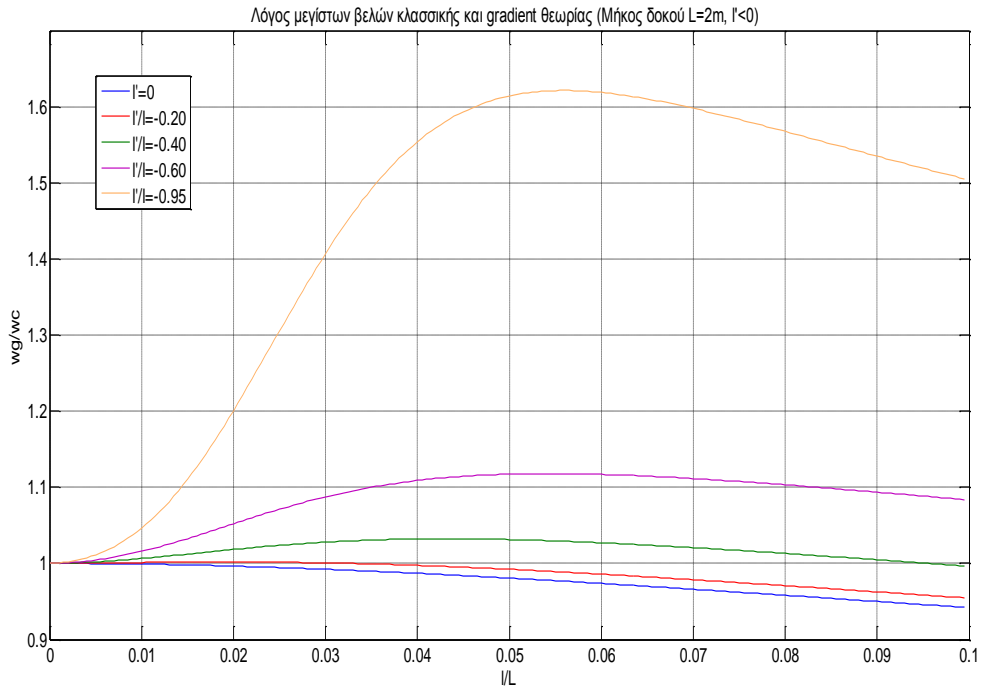
Γ. Εκτέλεση εφαρμογών με τη χρήση των πεπερασμένων στοιχείων που διατυπώθηκαν και σύγκριση των αποτελεσμάτων των δύο θεωριών (κλασικής και μη κλασικής).

6.1 ΔΟΚΟΣ ΕΝΟΣ ΑΝΟΙΓΜΑΤΟΣ ΥΠΟ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΟ ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΟ ΦΟΡΤΙΟ

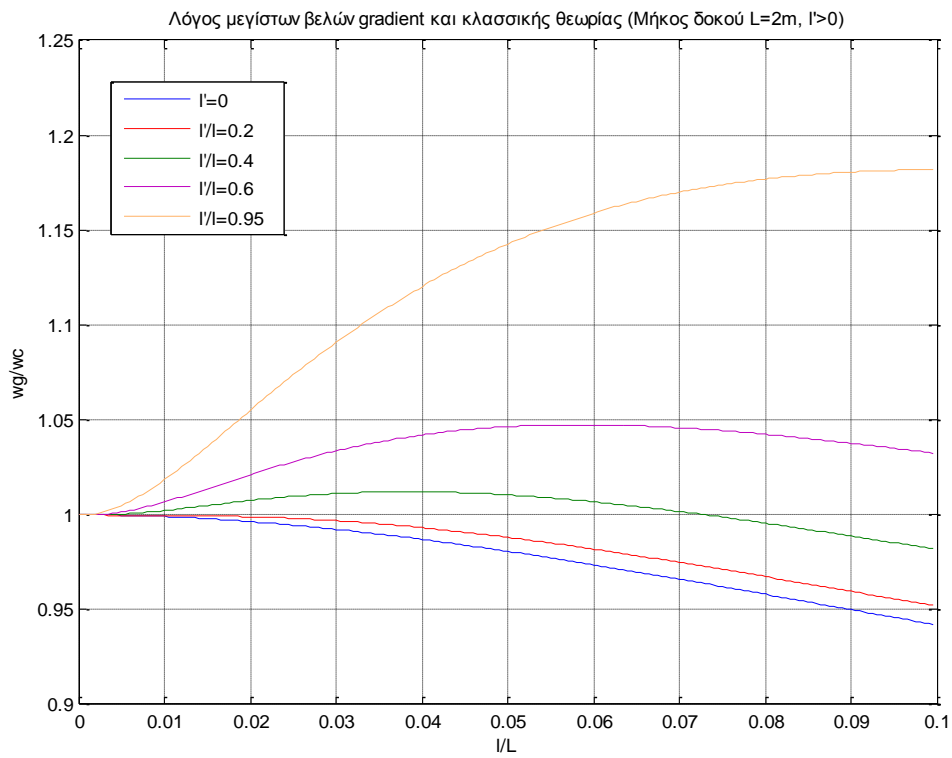
Διενεργήθηκε μεγάλος αριθμός αναλύσεων για διάφορες τιμές του ανοίγματος της δοκού και των δύο παραμέτρων της μικροδομής. Στην παρούσα ενότητα επιλέγονται εκείνα τα αποτελέσματα αναλύσεων δοκού ενός ανοίγματος υπό ομοιόμορφο κατακόρυφο φορτίο, μέσα από τα οποία διακρίνεται εμφανώς η επιρροή της μικροδομής στη συνολική συμπεριφορά. Στη πρώτη ομάδα διαγραμμάτων απεικονίζεται η μεταβολή του λόγου των μεγίστων βελών κάμψης των δύο θεωριών (gradient προς κλασική) ως προς το λόγο της παραμέτρου ℓ της μικροδομής, προς το άνοιγμα L της δοκού. Σε κάθε διάγραμμα θεωρείται σταθερό το άνοιγμα της δοκού, λαμβάνοντας χαρακτηριστικές τιμές που εμφανίζονται στην πράξη και αναδεικνύουν επιπροσθέτως το λόγο της μικροδομής. Από τις αναλύσεις που εκτελέστηκαν έγινε

φανερó ότι ο λόγος των δύο παραμέτρων, $\frac{\ell'}{\ell}$, καθώς και το πρόσημο της παραμέτρου ℓ' , επηρεάζουν καθοριστικά τα αποτελέσματα, επομένως σε κάθε διάγραμμα, κάθε κλάδος αντιστοιχεί σε διαφορετικό λόγο $\frac{\ell'}{\ell}$.

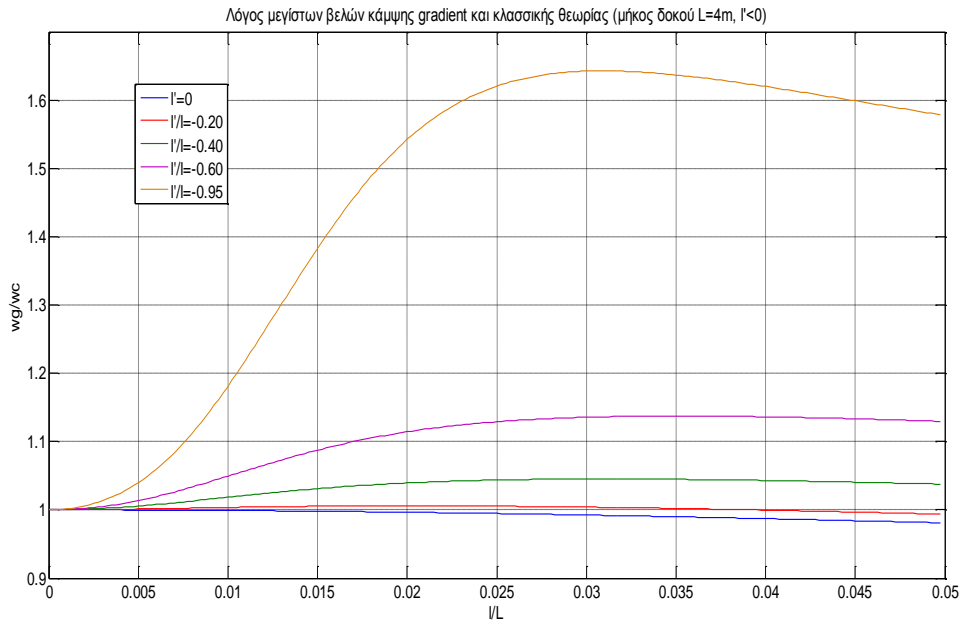
Στη δεύτερη ομάδα διαγραμμάτων απεικονίζονται τα ίδια μεγέθη, με τη διαφορά ότι ο λόγος των μεγίστων βελών κάμψης των δύο θεωριών αντικαθίσταται από το λόγο των μεγίστων τάσεων Cauchy (για τη θεωρία βαθμίδας $\hat{\tau}_{11} = \frac{\partial \hat{w}}{\partial \varepsilon_{11}}$). Η συσχέτιση γίνεται ως προς τις ίδιες παραμέτρους με τα βέλη κάμψης.



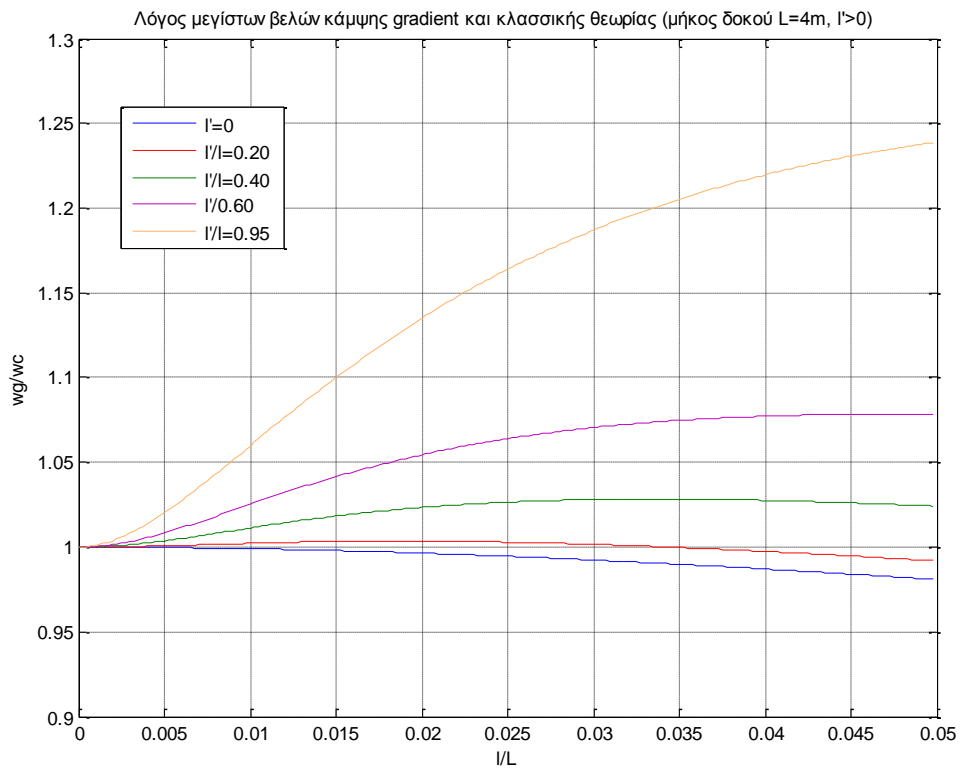
Σχήμα 6.1.1



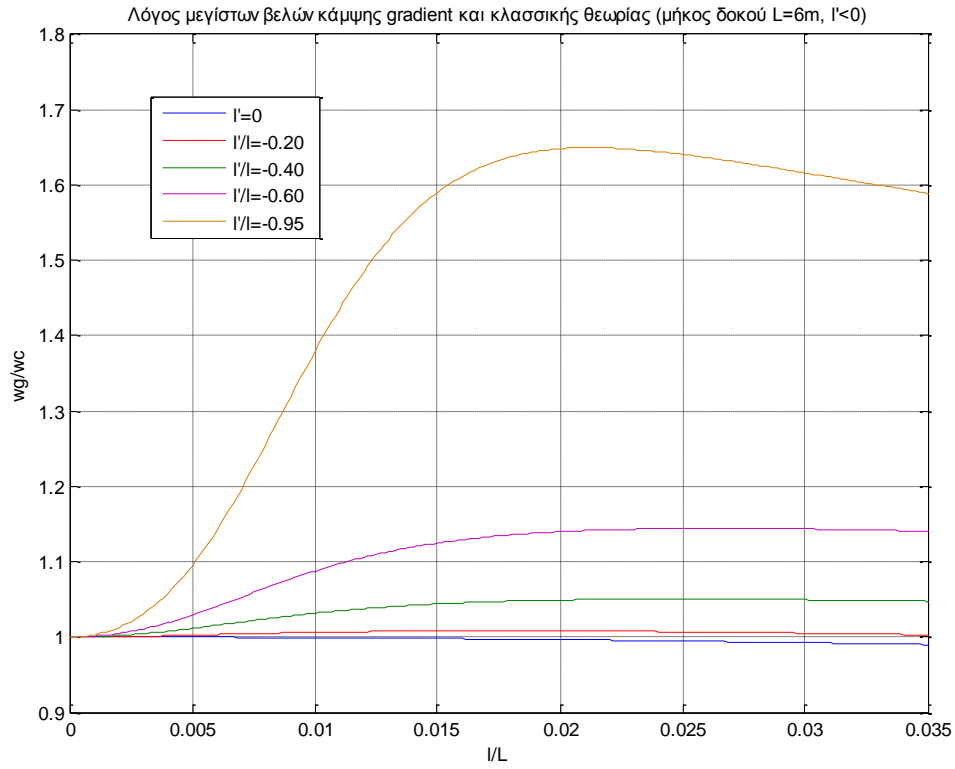
Σχήμα 6.1.2



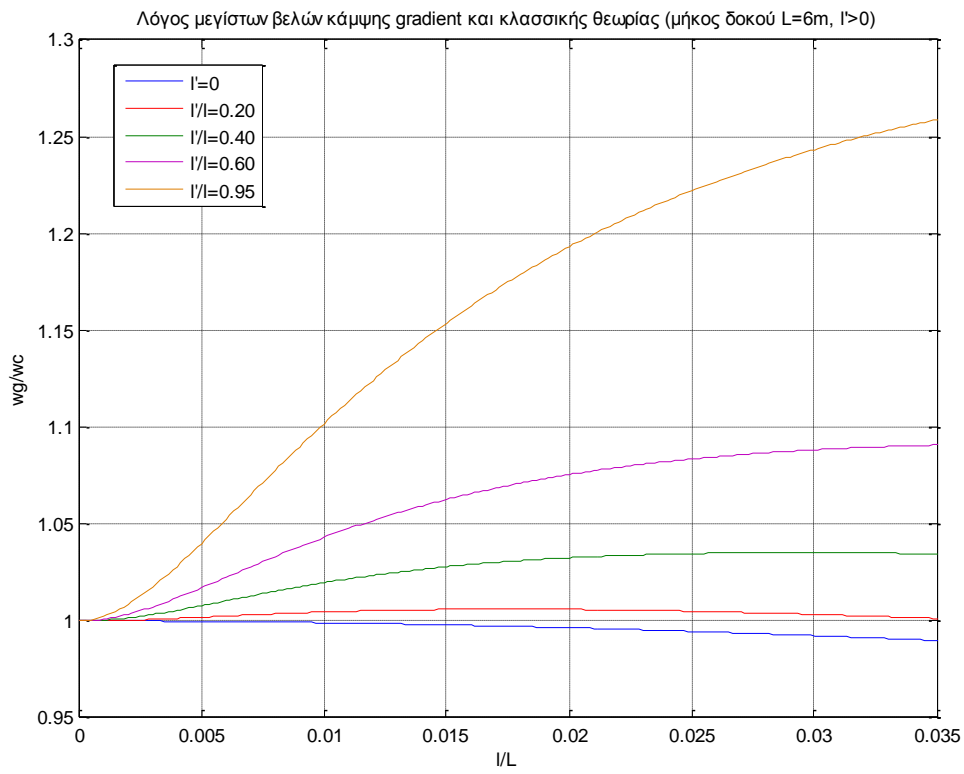
Σχήμα 6.1.3



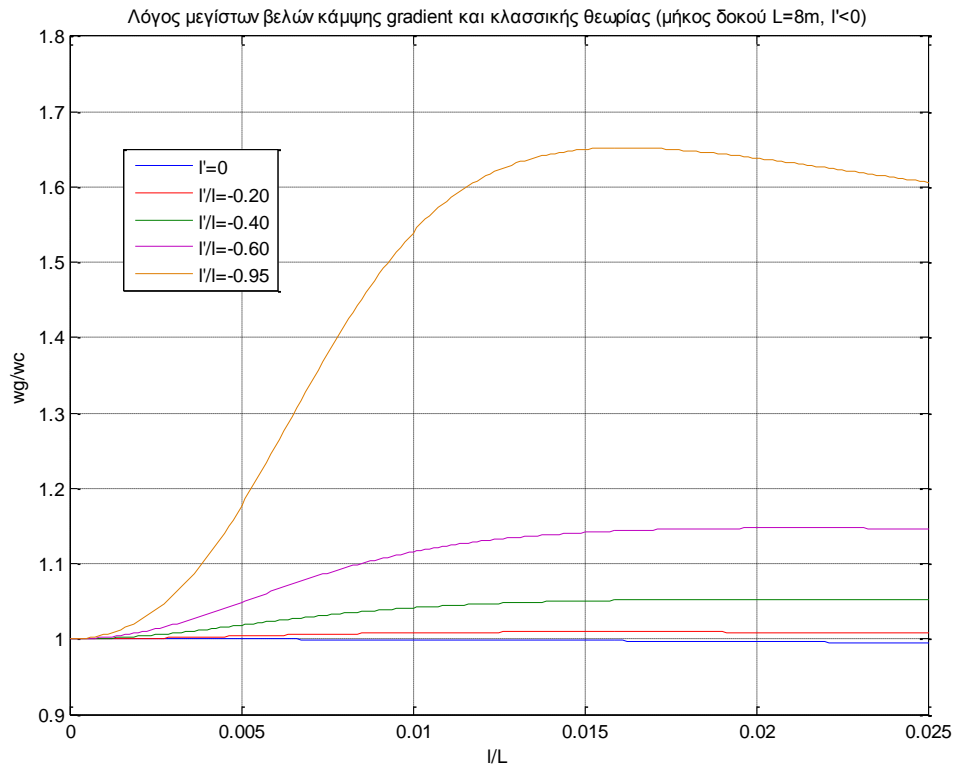
Σχήμα 6.1.4



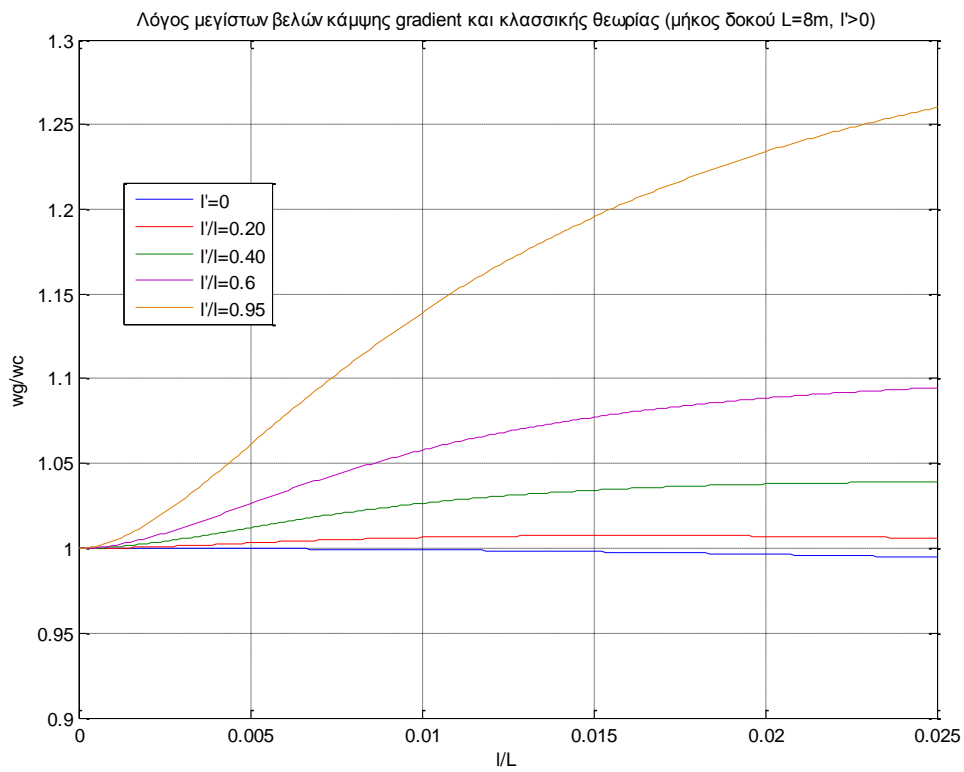
Σχήμα 6.1.5



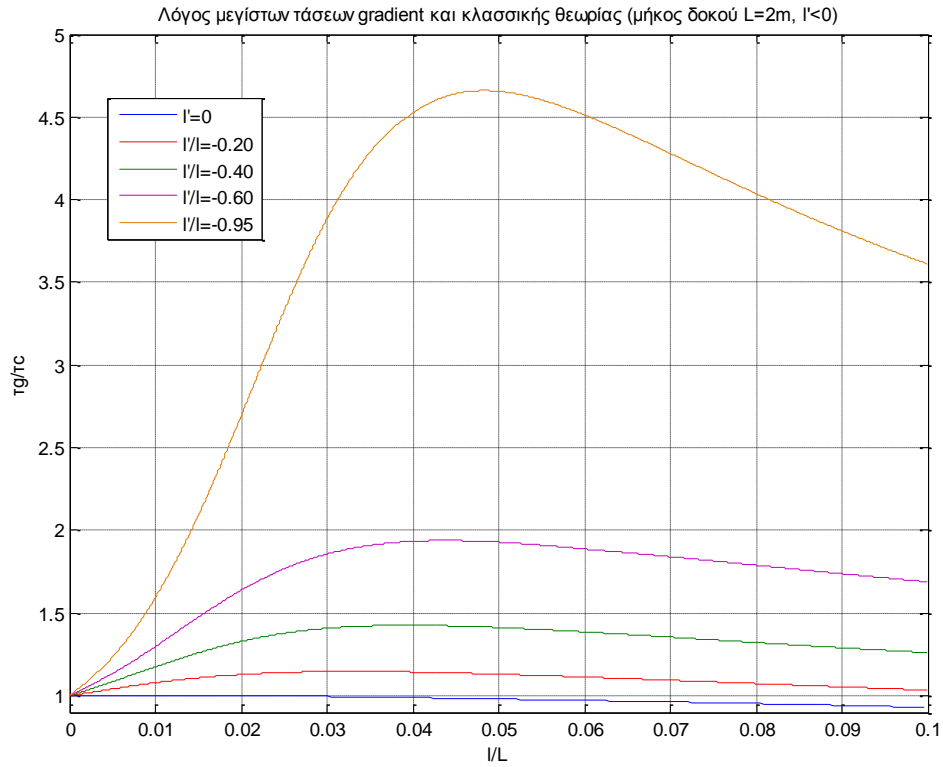
Σχήμα 6.1.6



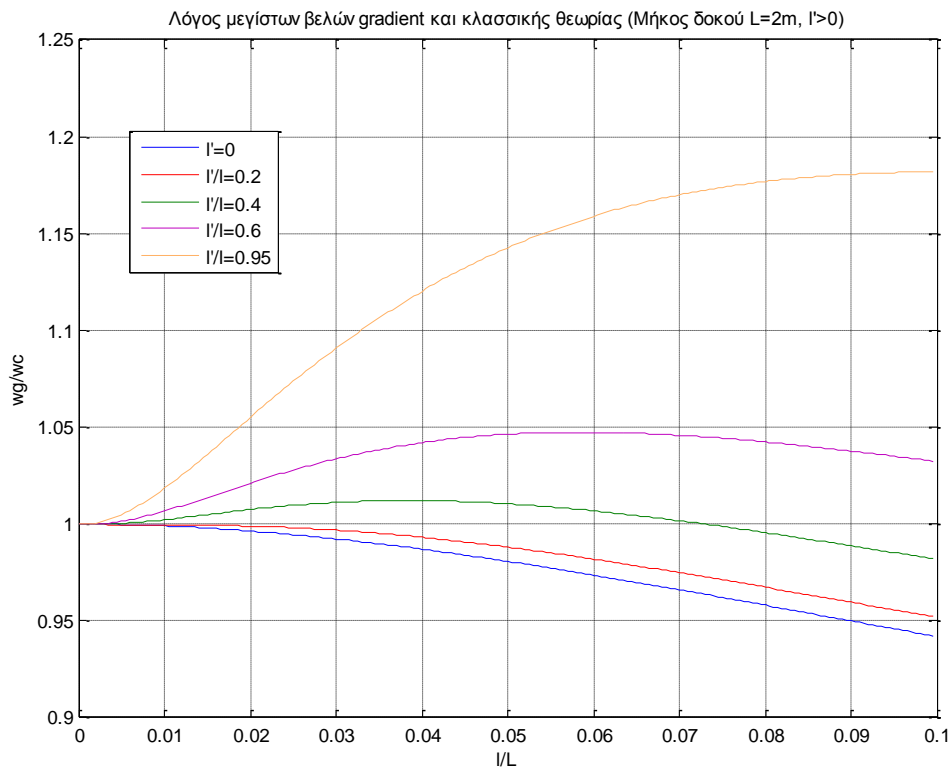
Σχήμα 6.1.7



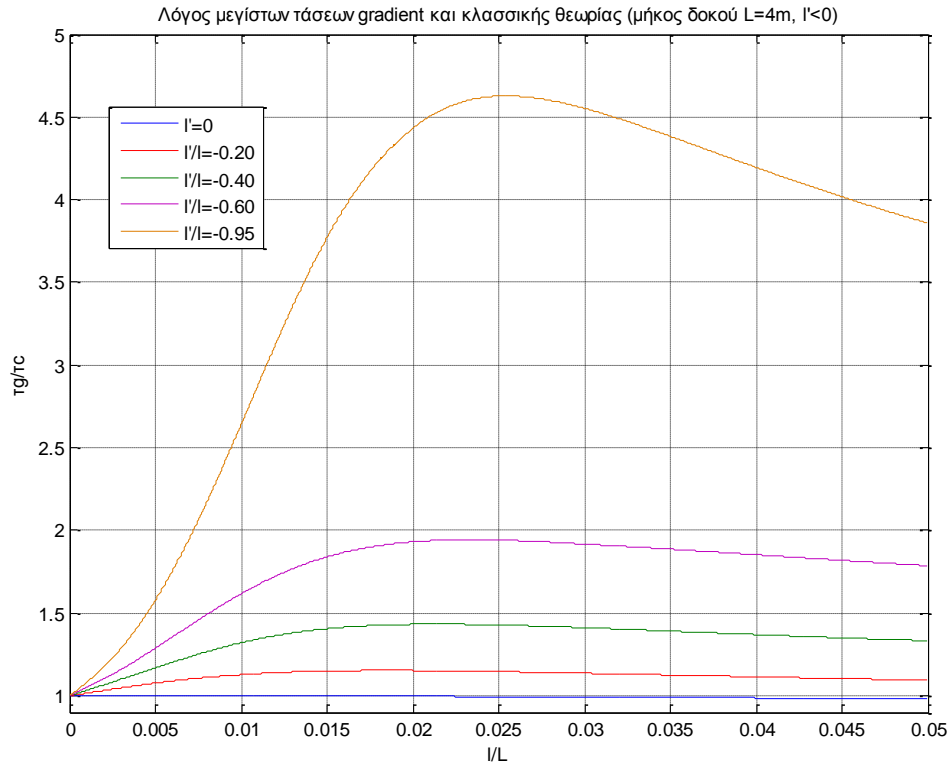
Σχήμα 6.1.8



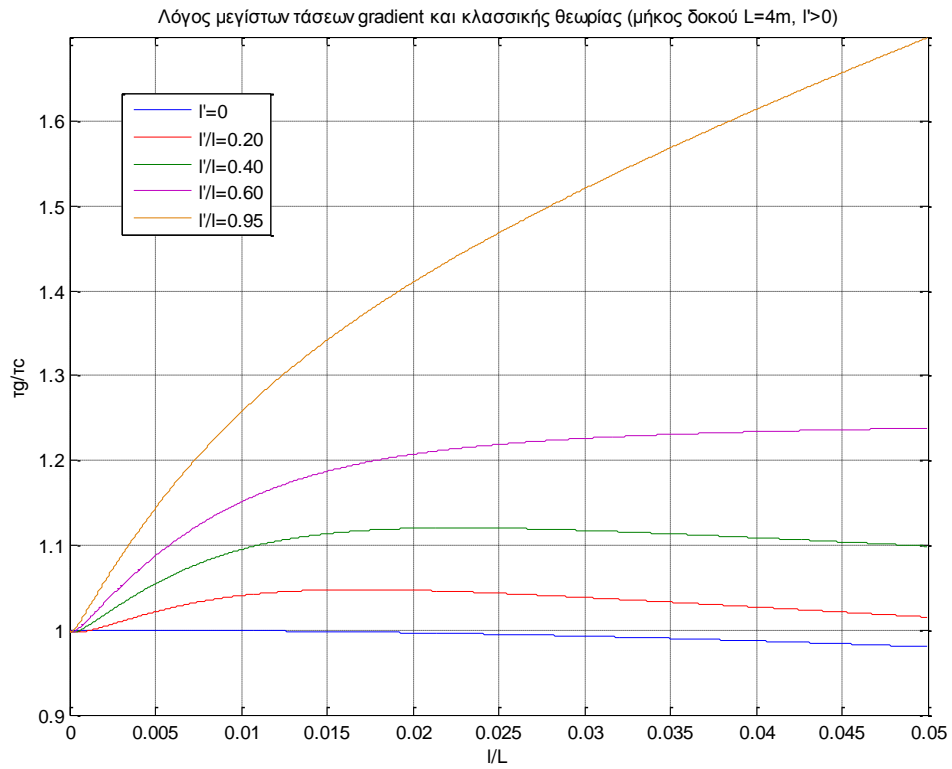
Σχήμα 6.1.9



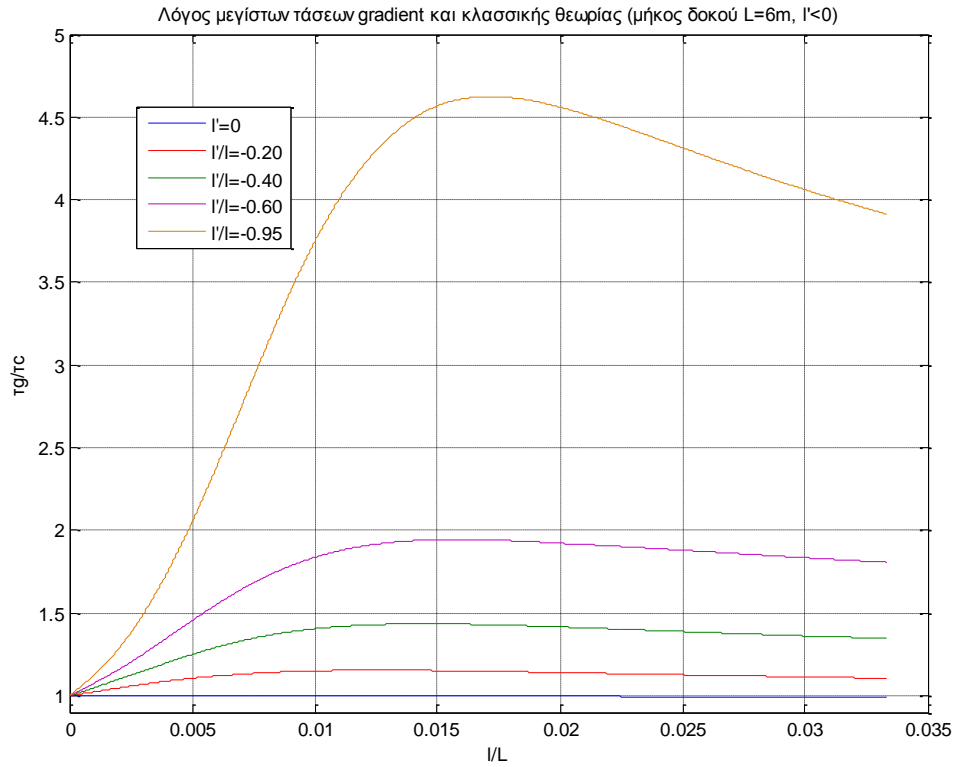
Σχήμα 6.1.10



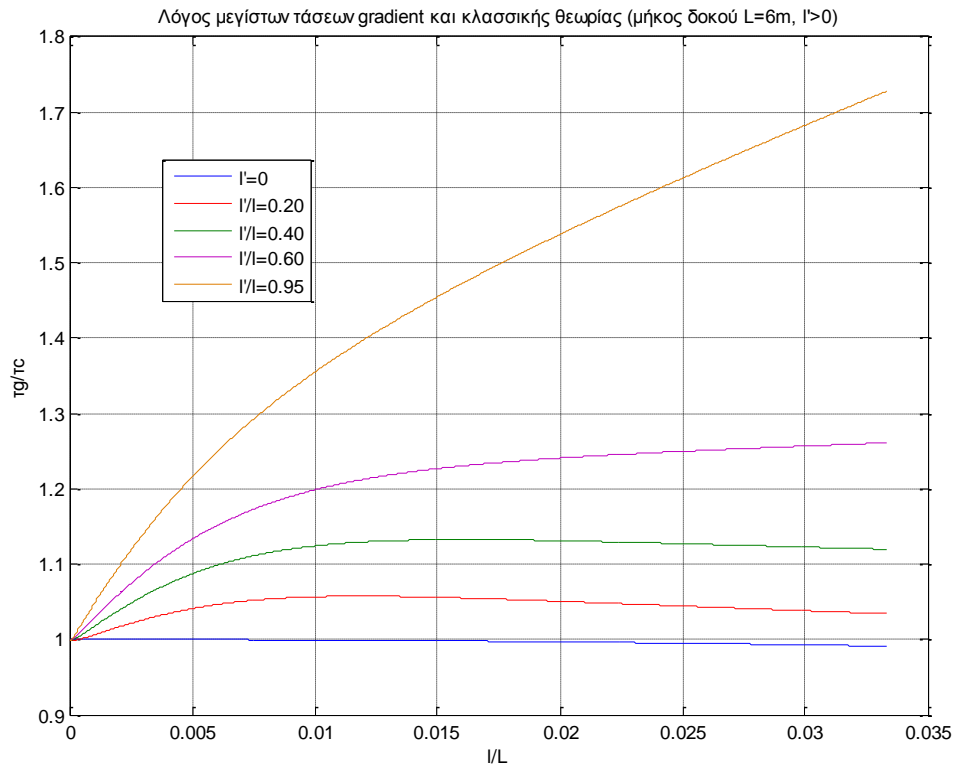
Σχήμα 6.1.11



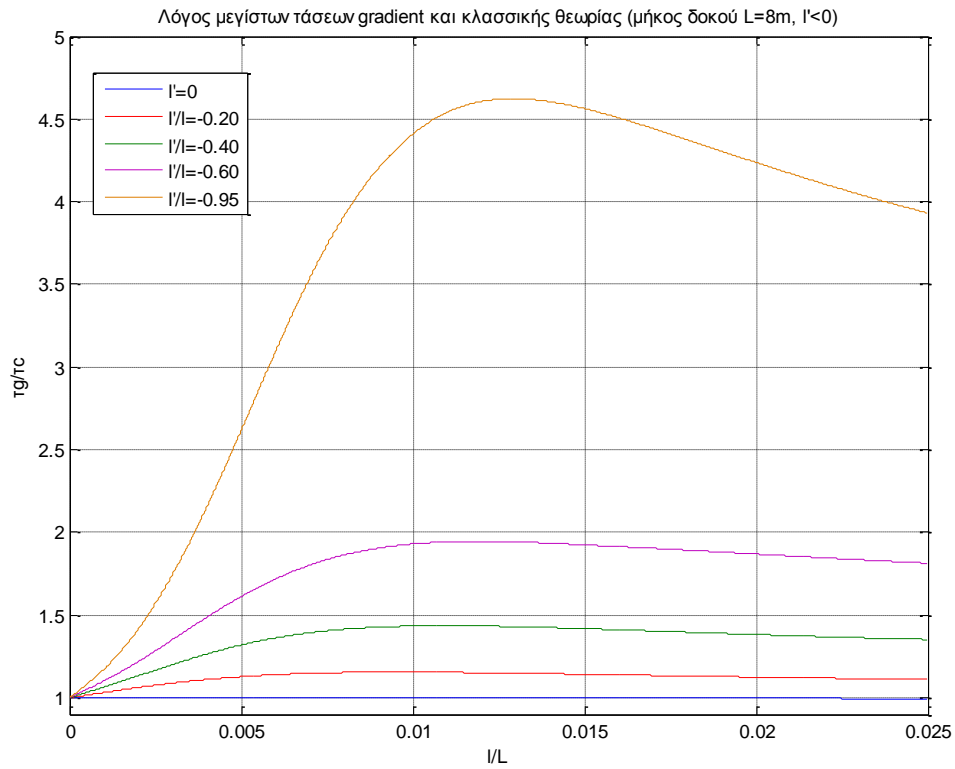
Σχήμα 6.1.12



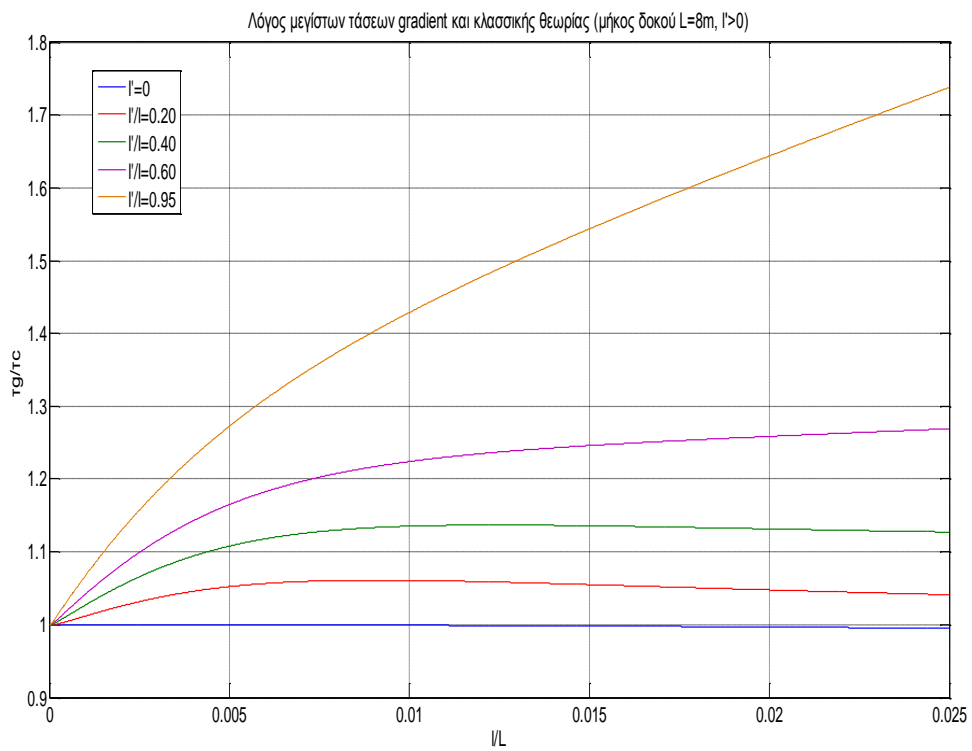
Σχήμα 6.1.13



Σχήμα 6.1.14



Σχήμα 6.1.15



Σχήμα 6.1.16

Στα παραπάνω διαγράμματα παρατηρούνται τα εξής:

- Για τιμές του ανοίγματος της αμφιέριστης δοκού, μεγαλύτερες από 2 m , το μέγιστο βέλος της θεωρίας βαθμίδας είναι μεγαλύτερο από το αντίστοιχο της κλασσικής θεωρίας, για όλο το (πρακτικό) εύρος του λόγου $\frac{\ell}{L}$. Το ίδιο ισχύει και για τους λόγους μεγίστων τάσεων.
- Ανεξαρτήτως ανοίγματος, όταν ο λόγος $\frac{\ell'}{\ell} \rightarrow -1$ ο μέγιστος λόγος βελών κάμψης, καθώς και ο μέγιστος λόγος τάσεων τείνουν στις τιμές 1,66 και 4,52 αντιστοίχως. Συνάγεται επομένως ότι η υιοθέτηση αρνητικών τιμών για την παράμετρο ℓ' δεν ενδείκνυται, παρ' ότι κάτι τέτοιο δεν απαγορεύεται από την απαίτηση θετικώς ορισμένης συνάρτησης πυκνότητας δυναμικής ενέργειας. Παρόμοιο συμπέρασμα συνάγεται και στη δημοσίευση [59]. Σημειώνεται ότι στην περίπτωση των αρνητικών τιμών $\frac{\ell'}{\ell}$ παρατηρούνται μεγαλύτεροι λόγοι $\frac{w_{gradient}}{w_{classical}}, \frac{\hat{\tau}_{gradient}}{\hat{\tau}_{classical}}$.
- Όταν ληφθεί μηδενική τιμή της παραμέτρου ℓ' , η θεωρία βαθμίδας οδηγεί σε πιο δύσκαμπτες λύσεις, με μικρότερες τιμές για τα βέλη κάμψης και τις τάσεις Cauchy, σε σχέση με την κλασσική θεωρία. Παρ' όλα αυτά η μείωση είναι μικρή, έως 2% περίπου για σχετικά μεγάλες τιμές $\frac{\ell}{L}$. Εξαιρέση αποτελεί η περίπτωση δοκού μικρού ανοίγματος, $L=2m$, όπου η μείωση τόσο για τα βέλη κάμψης όσο και για τις τάσεις, φτάνει το 6%.
- Θεωρώντας θετικές τιμές για την παράμετρο ℓ' , οι λόγοι μεγίστων τάσεων και μεγίστων βελών κάμψης αυξάνονται αυξανόμενου του λόγου $\frac{\ell'}{\ell}$, για κάθε τιμή του λόγου $\frac{\ell}{L}$.
- Για άνοιγμα $L=2m$ (και για θετικές τιμές ℓ'), οι λόγοι μεγίστων βελών και μεγίστων τάσεων μειώνονται συναρτήσει του λόγου $\frac{\ell}{L}$, για τιμές του λόγου $\frac{\ell'}{\ell}$ έως $\sim 0,30$, ενώ για μεγαλύτερες τιμές του λόγου, οι καμπύλες εμφανίζουν αύξοντα κλάδο, λαμβάνοντας μία μέγιστη τιμή και στη συνέχεια φθίνουν, λαμβάνοντας τιμές κοντά στη μονάδα.
- Για ανοίγματα μεγαλύτερα των 2m οι καμπύλες παρουσιάζουν αύξοντα κλάδο, φθάνουν μία μέγιστη τιμή και στη συνέχεια ακολουθούν φθίνουσα πορεία σε τιμές μεγαλύτερες της μονάδας (αν εξαιρεθεί η περίπτωση του ανοίγματος των 4 m, για τα βέλη κάμψης, όταν $\frac{\ell'}{\ell} = 0,20$). Για μεγάλες τιμές

των ανοιγμάτων και σχετικά μεγάλες τιμές του λόγου $\frac{\ell'}{\ell}$, οι καμπύλες ουσιαστικά τείνουν σε μία σταθερή τιμή, αυξανόμενου του λόγου $\frac{\ell}{L}$.

- Για τιμές του λόγου $\frac{\ell'}{\ell}$, κοντά στο 0.50 οι διαφορές των βελών κάμψης είναι της τάξης του 5% (εκτός από την περίπτωση ανοίγματος $2m$, όπου οι διαφορές είναι της τάξης του 10%) για μέτριες τιμές του λόγου $\frac{\ell}{L}$. Για μικρότερες τιμές του λόγου $\frac{\ell'}{\ell}$ οι αντίστοιχες τιμές είναι της τάξης του 2,5%.

Στην περιοχή των μικρών τιμών $\frac{\ell}{L}$, οι διαφορές των βελών κάμψης είναι αρκετά μικρότερες, της τάξης του 1%. Για τις τάσεις οι τιμές των αντίστοιχων λόγων είναι μεγαλύτερες. Για τιμές του λόγου $\frac{\ell'}{\ell}$, κοντά στο 0.50 οι διαφορές μεταξύ των αποτελεσμάτων των δύο θεωριών είναι της τάξης του 15%, ενώ για μικρότερες τιμές του λόγου, η διαφορά είναι της τάξης του 5%.

- Όταν μηδενίζονται οι παράμετροι ℓ, ℓ' ανακτάται η κλασική λύση.
- Όταν $\frac{\ell'}{\ell} \rightarrow 1$ παρατηρούνται μεγάλες αποκλίσεις μεταξύ των δύο θεωριών (έως 25% για τα βέλη κάμψης και έως 70% για τις τάσεις), ενώ η μορφή των διαγραμμάτων είναι πρακτικά η ίδια ανεξαρτήτως ανοίγματος L . Συμπεραίνεται επομένως ότι υιοθέτηση μεγάλων τιμών του λόγου $\frac{\ell'}{\ell}$ οδηγεί σε μη ρεαλιστικά αποτελέσματα.
- Η θεωρία βαθμίδας οδηγεί γενικά σε ένα πιο εύκαμπτο σύστημα. Αυτό είναι σε ένα βαθμό αναμενόμενο, καθώς η εσωτερική παραμόρφωση αναλύεται σε δύο συνιστώσες: μία μακροσκοπική και μία μικροσκοπική.

6.2 ΟΜΟΙΟΓΕΝΗΣ ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΟΣ ΕΔΑΦΙΚΟΣ ΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΥΨΟΥΣ H , ΥΠΟ ΗΜΙΤΟΝΙΚΗ ΔΙΕΓΕΡΣΗ ΣΤΗ ΒΑΣΗ ΤΟΥ

Η δεύτερη κατηγορία αναλύσεων που εκτελέστηκαν στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας, αφορά εδαφικό σχηματισμό ύψους H , εδραζόμενο σε βραχώδες υπόβαθρο. Στη βάση του σχηματισμού θεωρείται ότι επιβάλλεται μετατόπιση αρμονικά μεταβαλλόμενη με το χρόνο. Και σε αυτήν την περίπτωση εκτελέστηκε πλήθος αναλύσεων για μεγάλο φάσμα τιμών των δυναμικών (πυκνότητα, μέτρο διάτμησης, λόγος απόσβεσης), γεωμετρικών (ύψος) χαρακτηριστικών του συστήματος, καθώς και για διάφορες τιμές των λόγων $\frac{\ell}{H}, \frac{\ell'}{\ell}$. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν υποδεικνύουν ότι η επιρροή της μικροδομής στη συμπεριφορά ελαστικού μονοδιάστατου εδαφικού σχηματισμού δεν είναι ιδιαίτερα σημαντική, για τα συνήθη ύψη των εδαφικών σχηματισμών (αρκετά μεγάλα σε σχέση με τις χαρακτηριστικές διαστάσεις της μικροδομής) και για της συνήθεις συχνότητες των επιβαλλομένων σεισμικών διεγέρσεων. Για ύψη του εδαφικού σχηματισμού πάνω από $H = 10m$ τα αποτελέσματα των δύο θεωριών πρακτικά ταυτίζονται, τουλάχιστον για τη μονοδιάστατη ελαστική θεώρηση.

Παρ' όλα αυτά, για ορισμένες τιμές των λόγων $\frac{\ell}{H}, \frac{\ell'}{\ell}$ και για ορισμένες συχνότητες διέγερσης παρατηρείται όχι αμελητέα απόκλιση μεταξύ των δύο θεωριών (κλασσικής θεωρίας και θεωρίας ανωτέρας βαθμίδας) όσον αφορά τους λόγους ενίσχυσης μετατοπίσεων και επιταχύνσεων, στην επιφάνεια του εδαφικού σχηματισμού.

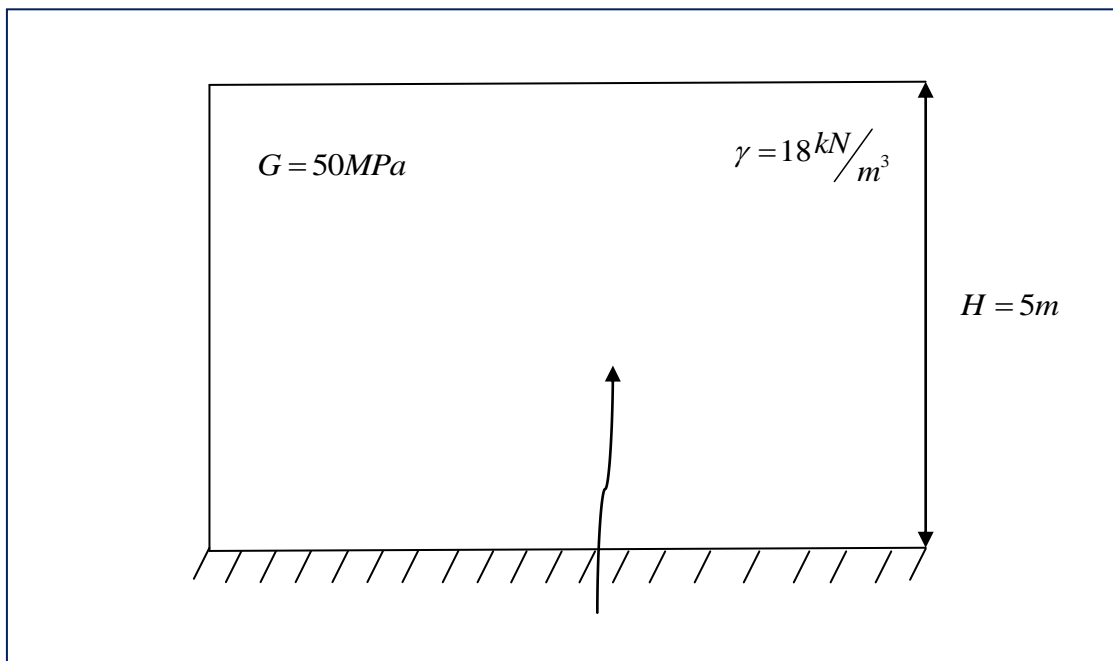
Στα επόμενα σχήματα παρουσιάζεται μια χαρακτηριστική περίπτωση εδαφικού σχηματισμού μικρού ύψους, $H = 5m$, στην οποία παρατηρείται σημαντική επιρροή της μικροδομής για ορισμένες χαρακτηριστικές τιμές της συχνότητας διέγερσης, καθώς και των χαρακτηριστικών μηκών ℓ, ℓ' . Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται με μορφή χρονοϊστορίας των λόγων ενίσχυσης της μετατόπισης και της επιτάχυνσης στην επιφάνεια του εδαφικού σχηματισμού. Σε κάθε διάγραμμα λαμβάνεται σταθερή η τιμή της παραμέτρου ℓ και της συχνότητας διέγερσης, ενώ κάθε κλάδος αντιστοιχεί σε διαφορετική τιμή του λόγου $\frac{\ell'}{\ell}$.

Αξίζει να σημειωθεί ότι (για κάθε τιμή ύψους, δυναμικών χαρακτηριστικών και μικρομηχανικών παραμέτρων) οι θεμελιώδεις ιδιοσυχνότητες του συστήματος, για τις δύο θεωρήσεις, ταυτίζονται.

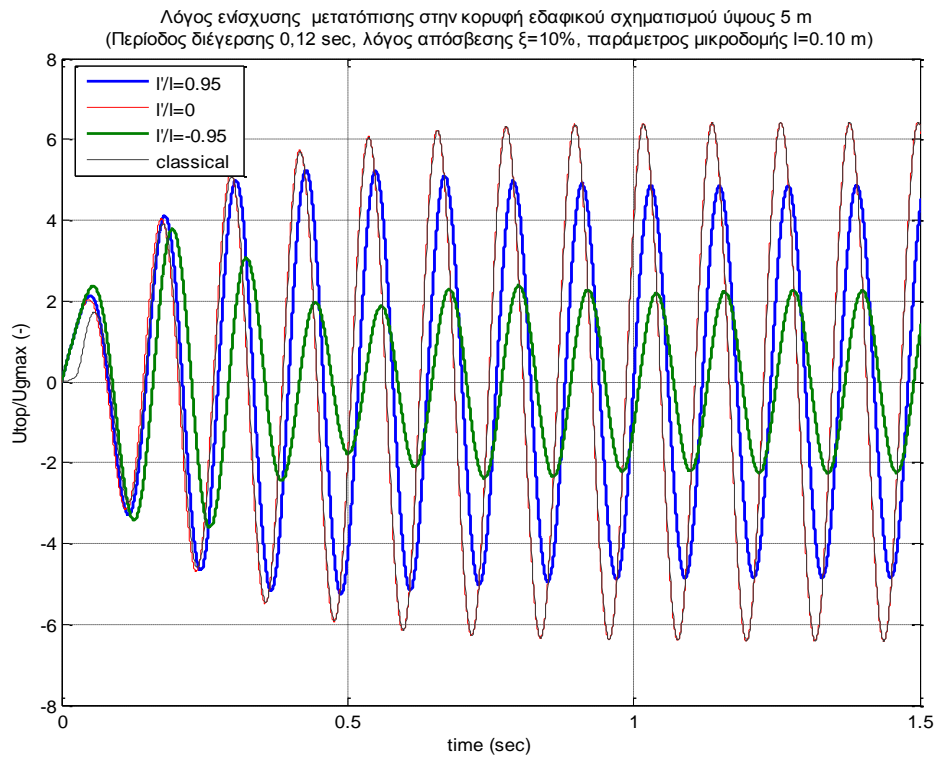
Τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται παρακάτω αναφέρονται σε εδαφικό σχηματισμό με τις παρακάτω ιδιότητες (πυκνότητα, μέσο τέμνον μέτρο διάτμησης, ισοδύναμος λόγος απόσβεσης, ύψος, θεμελιώδης ιδιοπερίοδος):

$$\begin{aligned}
 \rho &= 1.8 \text{ } \frac{\text{Mgr}}{\text{m}^3} \\
 G &= 50 \text{ MPa} \\
 \xi &= 10\% \\
 H &= 5 \text{ m} \\
 T_{i\delta} &= 0.12 \text{ sec}
 \end{aligned}
 \tag{6.2.1}$$

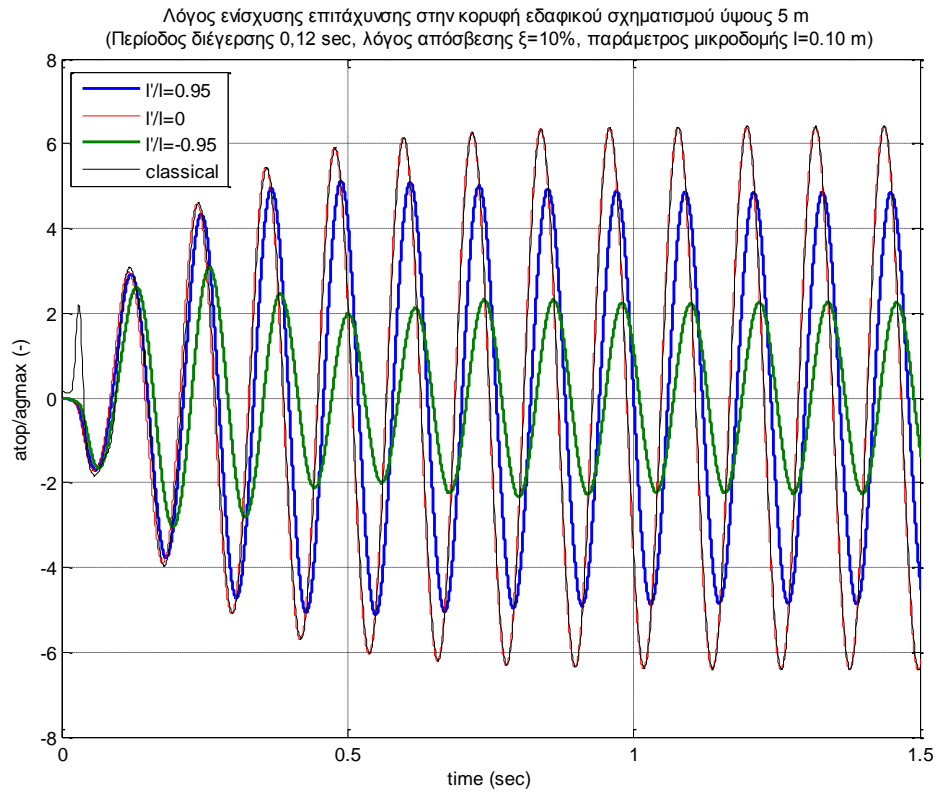
Παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για τρεις περιπτώσεις συχνοτήτων διέγερσης:
 $\omega_1 = 0.12 \text{ sec}$, $\omega_2 = 0.30 \text{ sec}$, $\omega_3 = 0.60 \text{ sec}$.



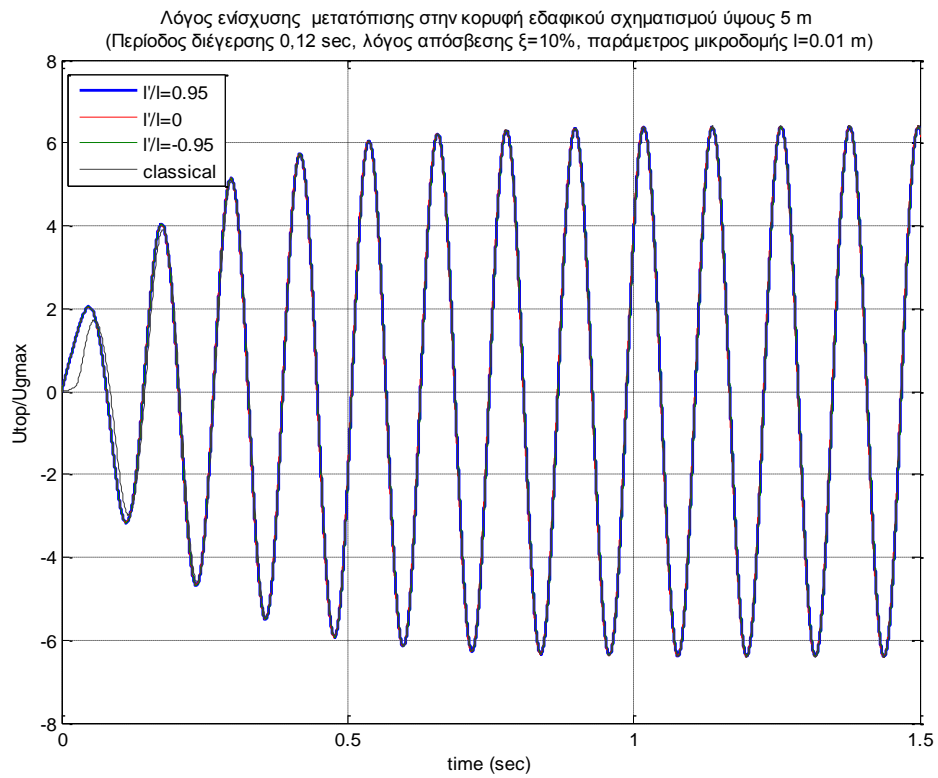
Σχήμα 6.2.1



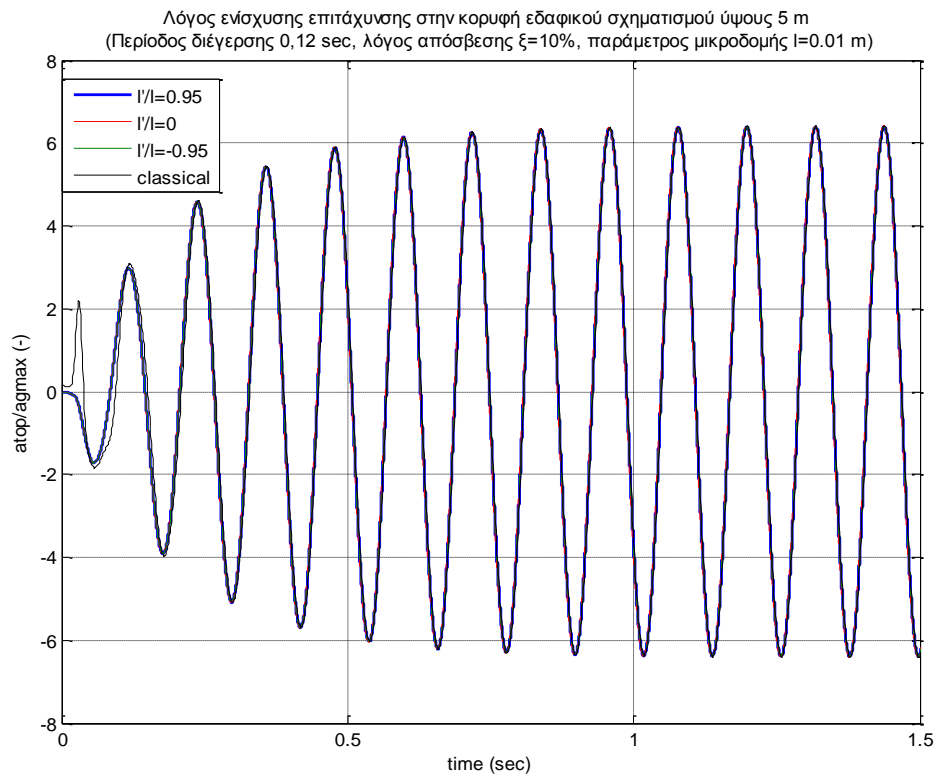
Σχήμα 6.2.2



Σχήμα 6.2.3

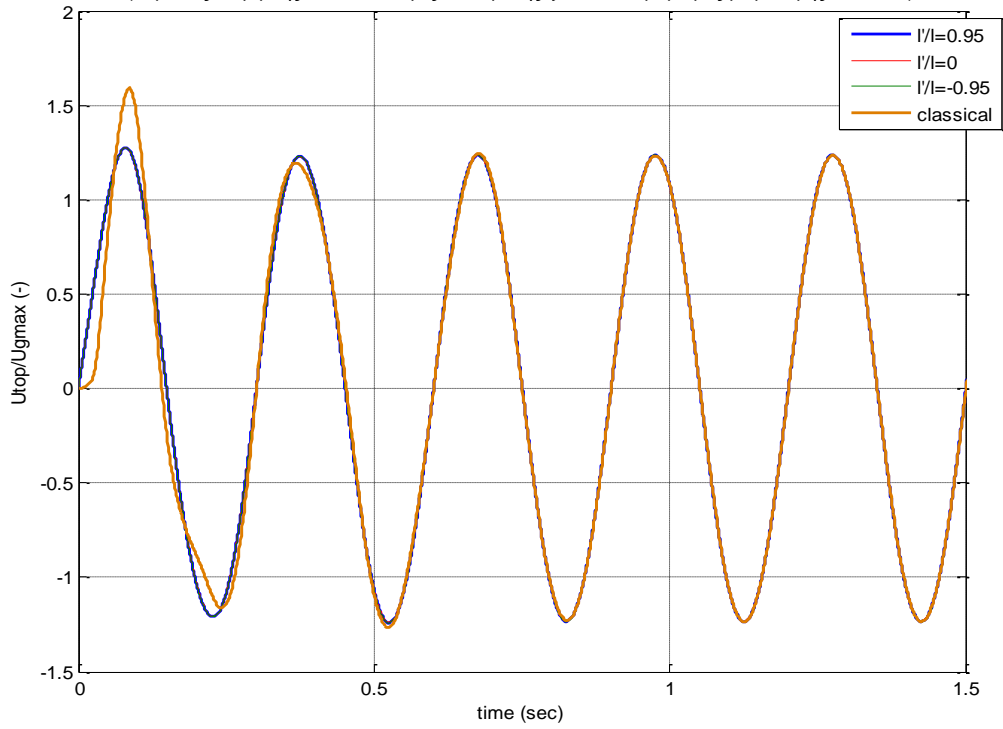


Σχήμα 6.2.4



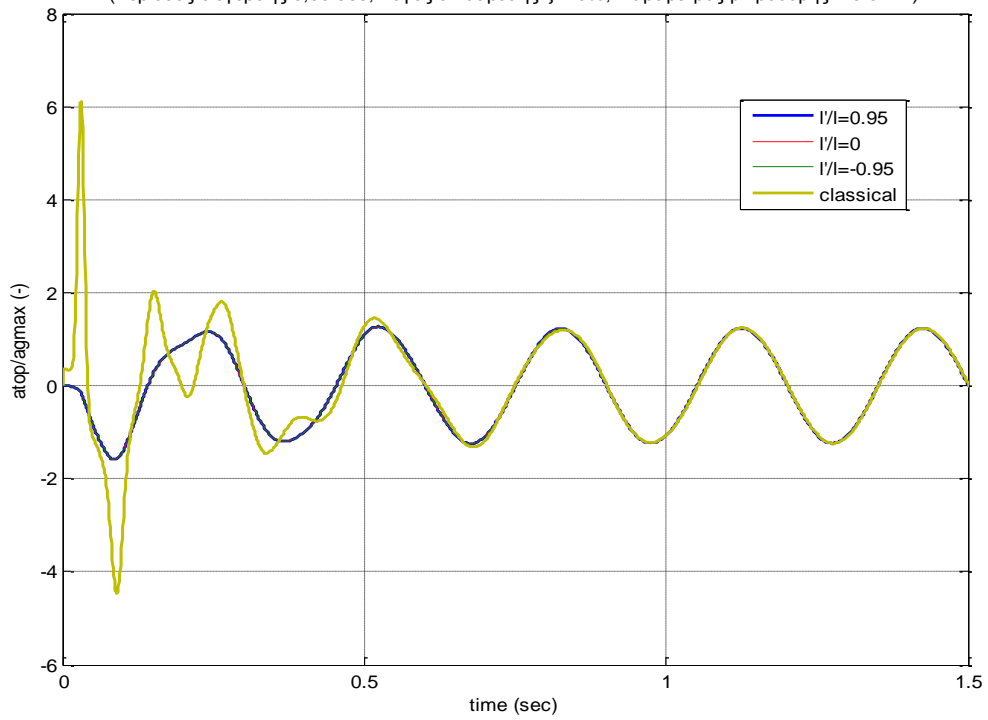
Σχήμα 6.2.5

Λόγος ενίσχυσης μετατόπισης στην κορυφή εδαφικού σχηματισμού ύψους 5 m
(Περίοδος διέγερσης 0,30sec, λόγος απόσβεσης $\xi=10\%$, παράμετρος μικροδομής $l=0.01$ m)

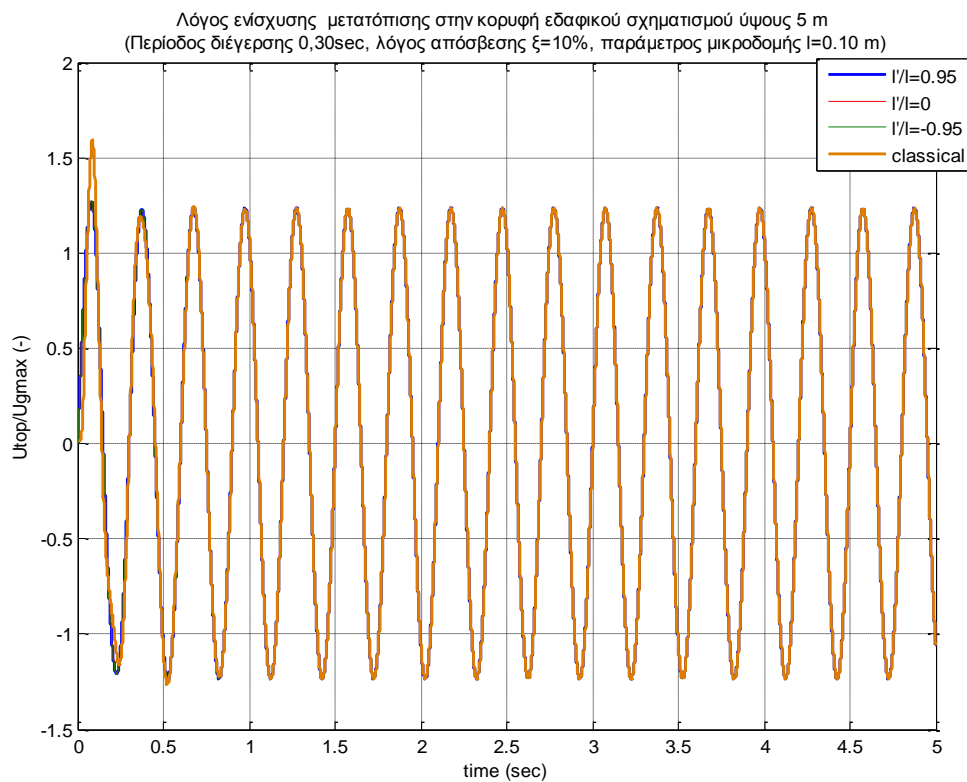


Σχήμα 6.2.6

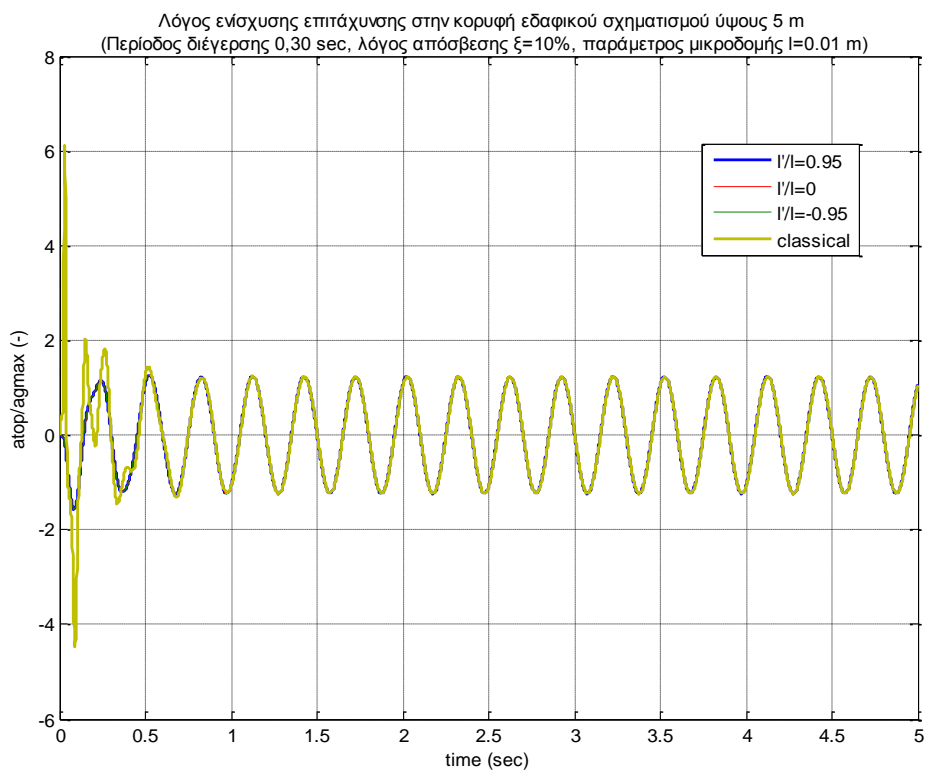
Λόγος ενίσχυσης επιτάχυνσης στην κορυφή εδαφικού σχηματισμού ύψους 5 m
(Περίοδος διέγερσης 0,30 sec, λόγος απόσβεσης $\xi=10\%$, παράμετρος μικροδομής $l=0.01$ m)



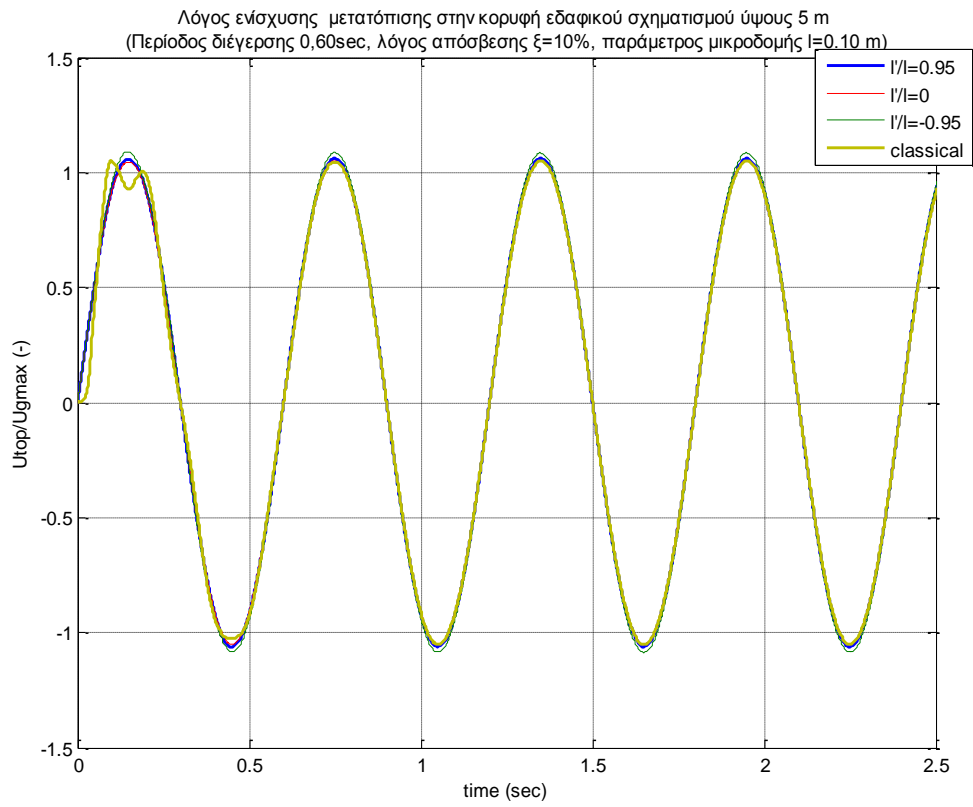
Σχήμα 6.2.7



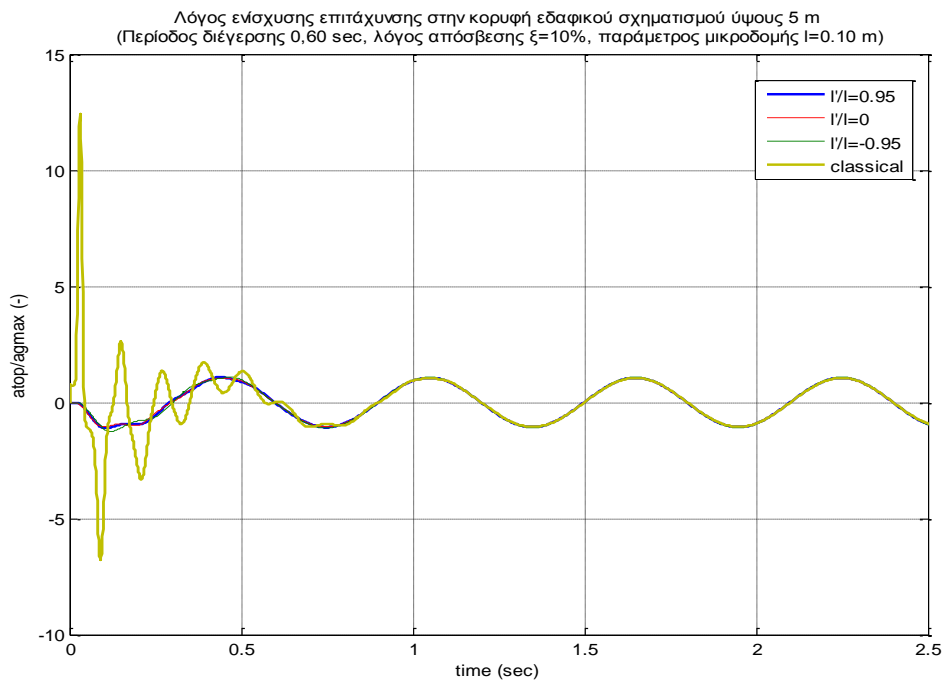
Σχήμα 6.2.8



Σχήμα 6.2.9

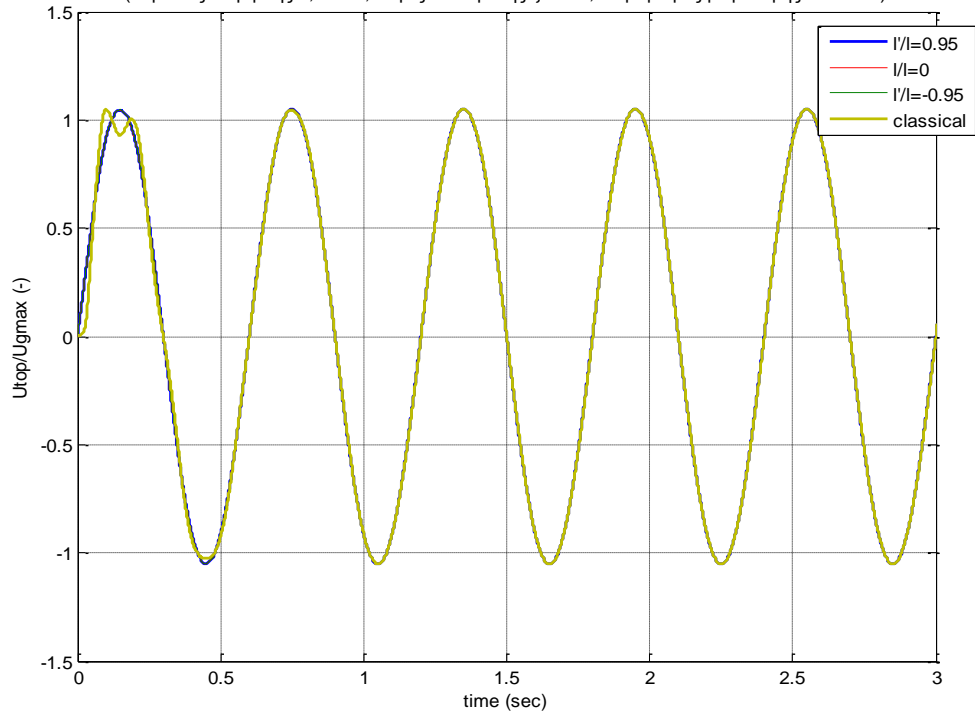


Σχήμα 6.2.10



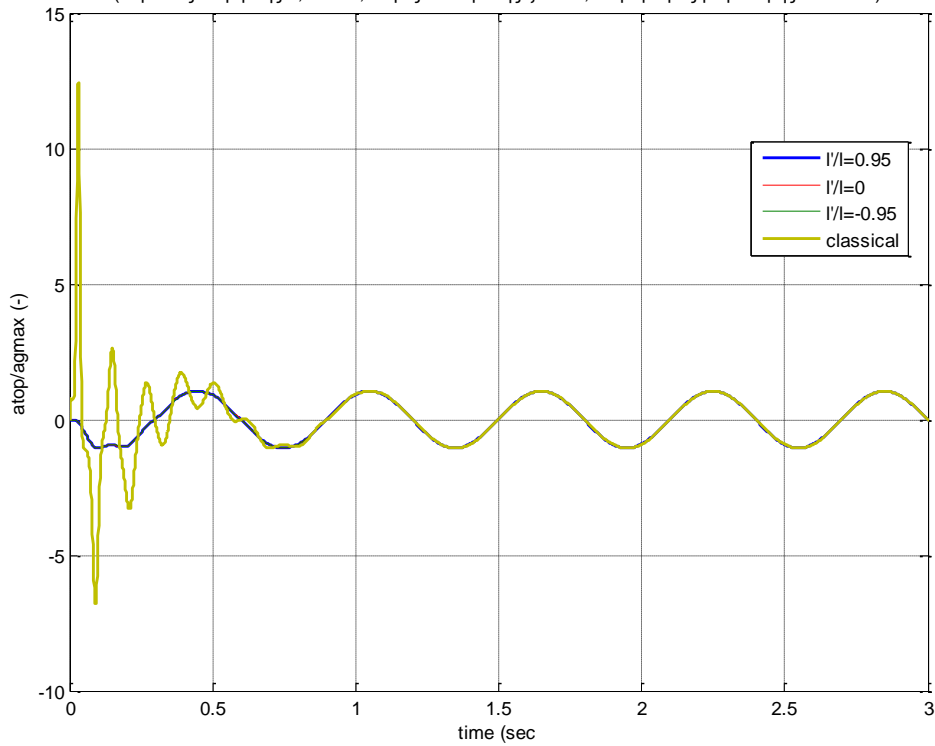
Σχήμα 6.2.11

Λόγος ενίσχυσης μετατόπισης στην κορυφή εδαφικού σχηματισμού ύψους 5 m
 (Περίοδος διέγερσης 0,60sec, λόγος απόσβεσης $\xi=10\%$, παράμετρος μικροδομής $I=0.01$ m)



Σχήμα 6.2.11

Λόγος ενίσχυσης επιτάχυνσης στην κορυφή εδαφικού σχηματισμού ύψους 5 m
 (Περίοδος διέγερσης 0.60 sec, λόγος απόσβεσης $\xi=10\%$, παράμετρος μικροδομής $I=0.01$ m)



Σχήμα 6.2.12

Από τα παραπάνω συμπεραίνονται τα εξής:

- Για τιμές της παραμέτρου ℓ μικρότερες από 0,1 οι τιμές της ενίσχυσης της μετατόπισης ταυτίζονται για τις δύο θεωρίες. Για σχετικά μεγάλες τιμές της παραμέτρου ℓ (π.χ. $\ell = 0.1m$), παρατηρείται απόκλιση των αποτελεσμάτων έως 40% για $\frac{\ell'}{\ell} \rightarrow 1$ και για περίοδο διέγερσης ίση με 0.12 sec. Για τιμές του λόγου $\frac{\ell'}{\ell}$ μικρότερες από 0,60, καθώς και για μεγαλύτερες περιόδους διέγερσης, τα αποτελέσματα των δύο θεωρήσεων πρακτικά ταυτίζονται για τις μετατοπίσεις στην επιφάνεια. Για αρνητικές τιμές του λόγου $\frac{\ell'}{\ell}$ οι αποκλίσεις είναι αρκετά μεγαλύτερες, ωστόσο όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη ενότητα, η υιοθέτηση αρνητικών τιμών για το συγκεκριμένο λόγο δεν ενδείκνυται.
- Παρατηρείται ότι η κλασσική θεώρηση δίνει ελαφρώς μεγαλύτερες τιμές για την ενίσχυση της μετατόπισης κατά το μεταβατικό (transient) χρονικό τμήμα, παρ' ότι η μόνιμες (steady state) λύσεις ταυτίζονται.
- Για τις επιταχύνσεις ισχύουν παρόμοια συμπεράσματα για συχνότητες κοντά στη συχνότητα συντονισμού. Για χαμηλές συχνότητες διέγερσης παρατηρείται ότι ενώ η κλασσική θεωρία οδηγεί σε μεγάλες τιμές της ενίσχυσης κατά το μεταβατικό στάδιο (έως και δέκα φορές), η θεωρία βαθμίδας δίνει αρκετά μικρότερες τιμές για την ενίσχυση στο εν λόγω στάδιο, οδηγώντας σε λύσεις πιο ομαλά μεταβαλλόμενες με το χρόνο, όπως φαίνεται για παράδειγμα στο σχήμα (6.2.12). Κάτι τέτοιο παρατηρείται ανεξαρτήτως λόγου $\frac{\ell'}{\ell}$ και τιμής ℓ .

Κατά τη φάση τις μόνιμης απόκρισης οι δύο θεωρήσεις δίνουν ταυτόσημα αποτελέσματα για την περίπτωση της (σχετικώς) χαμηλόσυχνης διέγερσης. Μπορεί να θεωρηθεί ότι η gradient θεωρία εισάγει μία αυξημένη απόσβεση κατά το μεταβατικό στάδιο, κρατώντας σε χαμηλά επίπεδα τις τιμές της ενίσχυσης επιταχύνσεων.

Σημειώνεται επίσης ότι κατά την εκτέλεση περαιτέρω αναλύσεων προέκυψε ότι οι δύο θεωρήσεις οδηγούν στις ίδιες ιδιοπεριόδους για το σύστημα του εδαφικού σχηματισμού ανεξαρτήτως τιμής των παραμέτρων ℓ, ℓ' .

Επίσης κατά την εξέταση της συμπεριφοράς εδαφικών σχηματισμών μεγαλύτερου ύψους (από 10 m και πάνω) προέκυψε ουσιαστικά ταύτιση των αποτελεσμάτων, με την εξαίρεση της απόσβεσης της ενίσχυσης επιταχύνσεων κατά το μεταβατικό στάδιο. Παρατηρείται ότι η επιρροή της μικροδομής στη συμπεριφορά μονοδιάστατου ιξωδοελαστικού σχηματισμού είναι αρκετά περιορισμένη, κάτι που οφείλεται σε ένα βαθμό στο μεγάλο ύψος των πραγματικών οριζόντιων εδαφικών σχηματισμών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΓΕΝΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΣΚΕΨΕΙΣ ΓΙΑ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

Στην παρούσα εργασία παρουσιάστηκε αναλυτικά η πρωταρχική θεωρία συνεχούς μέσου με μικροδομή του Mindlin. Η εν λόγω θεωρία αποτέλεσε τη βάση για την ανάπτυξη απλούστερων θεωριών. Παρά τη μαθηματική πληρότητα της διατύπωσής της και τη φυσική εποπτεία που προσφέρει, εισάγει εννιά επιπλέον βαθμούς ελευθερίας ψ_{ij} , ενώ στην περίπτωση της ισοτροπίας απαιτεί τον προσδιορισμό 16 επιπλέον σταθερών (πέραν των δύο της κλασσικής θεωρίας). Οι τρεις απλοποιημένες εκδοχές της ίδιας θεωρίας, που προτάθηκαν από τον Mindlin, οδηγούν στην απαλοιφή των επιπλέον βαθμών ελευθερίας, ενώ οι επιπλέον σταθερές που πρέπει να προσδιοριστούν μειώνονται στις 5. Ακόμα και με αυτήν την απλοποίηση ο αριθμός των επιπλέον σταθερών κρίνεται μεγάλος.

Μεταξύ των νεότερων θεωριών ελαστικότητας ανωτέρας βαθμίδας, η αντίστοιχη των Vardoulakis&Sulem παρουσιάζει αρκετά πλεονεκτήματα και προσφέρεται για πρακτικές εφαρμογές. Παραμένοντας στο πνεύμα της 2^{ης} απλοποιημένης διατύπωσης του Mindlin, οδηγεί στην εισαγωγή δύο επιπλέον μικρομηχανικών παραμέτρων μήκους. Η μορφή του προσομοιώματος που διατυπώνεται οδηγεί σε μία φυσική εποπτεία του φαινομένου, ενώ είναι προσιτή για την ανάπτυξη αριθμητικών μεθόδων επίλυσης (π.χ. πεπερασμένα στοιχεία), ειδικά σε εφαρμογές Πολιτικού Μηχανικού.

Για το λόγο αυτό αναπτύχθηκε με βάση την προαναφερθείσα θεωρία ένα καινούριο πεπερασμένο στοιχείο δοκού, που οδηγεί στην εμφάνιση 5 βαθμών ελευθερίας και 5 ενεργειακά συζυγών εντατικών μεγεθών σε κάθε κόμβο (σε αντίθεση με την κλασσική θεωρία δοκού, στην οποία τα αντίστοιχα επικόμβια μεγέθη είναι 3). Το στοιχείο αυτό χρησιμοποιήθηκε στην επίλυση δύο τύπων προβλημάτων: ενός στατικού (ομοιόμορφη φόρτιση αμφιέριστης δοκού διαφόρων ανοιγμάτων) κι ενός δυναμικού (διάδοση σεισμικού κύματος σε μονοδιάστατο εδαφικό σχηματισμό, ιξωδοελαστικής συμπεριφοράς). Στο δυναμικό πρόβλημα εξατάστηκαν αποκλειστικά μονοχρωματικές αρμονικές σεισμικές διεγέρσεις.

Τα αποτελέσματα που προέκυψαν υποδεικνύουν ότι στην περίπτωση της δοκού η επιρροή της μικροδομής μπορεί να επηρεάσει σε όχι αμελητέο βαθμό τόσο την ένταση όσο και την παραμόρφωση, ειδικά για μικρά ανοίγματα της δοκού, ακόμα και όταν η τιμή του ισοδύναμου εσωτερικού μήκους ℓ είναι σχετικώς μικρή. Σε γενικές γραμμές φάνηκε ότι για σχετικά μεγάλους λόγους $\frac{\ell}{L}$ (χαρακτηριστικό μήκος μικροδομής προς άνοιγμα) η θεωρία βαθμίδας μπορεί κατά να οδηγήσει σε απόκλιση 5% για τις μετατοπίσεις και 15% για τις τάσεις Cauchy (για συνήθειες τιμές ανοιγμάτων και για λόγους $\frac{\ell'}{\ell} \sim 0.50$, $\frac{\ell}{L} \sim 0.03$).

Σε μία μελλοντική ερευνητική προσπάθεια, θα μπορούσε να εξεταστεί η κάμψη δοκού κατά Timoshenko, χωρίς την αγνόηση των διατμητικών τάσεων και ζευγών τάσης καθ' ύψος της διατομής. Μια τέτοια θεώρηση αναμένεται να αναδείξει σε

μεγαλύτερο βαθμό την επιρροή της μικροδομής καθώς και του μεγέθους της διατομής (size effect). Ο λόγος είναι ότι στη θεωρία κατά Bernoulli το διάνυσμα της κατεύθυνσης του εσωτερικού μήκους (director length) λήφθηκε παράλληλο με τον άξονα της δοκού. Κάτι τέτοιο είχε σαν αποτέλεσμα την ανεξαρτησία των αποτελεσμάτων από τη σχέση του εσωτερικού μήκους με τις διαστάσεις της διατομής.

Όσον αφορά τον εδαφικό σχηματισμό, παρατηρήθηκε μικρή επιρροή της μικροδομής στη γενική συμπεριφορά, κυρίως λόγω των μεγάλων τιμών του ύψους των πραγματικών εδαφικών σχηματισμών. Δύο σημαντικά συμπεράσματα είναι η ταύτιση των ιδιοπεριόδων για τις δύο θεωρήσεις, καθώς και η εισαγωγή φαινόμενης απόσβεσης από τη θεωρία βαθμίδας, η οποία απεικονίζεται ως μείωση του λόγου ενίσχυσης επιταχύνσεων κατά τις χαμηλόσυχνες διεγέρσεις. Στις περιοχές των τιμών των μικρομηχανικών παραμέτρων, όπου παρατηρείται μη αμελητέα επιρροή, η θεωρία βαθμίδας δίνει πιο ευνοϊκά αποτελέσματα (ειδικά για μεγάλους λόγους $\frac{\ell'}{\ell}$), οδηγώντας σε μικρότερους συντελεστές ενίσχυσης. Είναι φανερό ότι επηρεάζει τα αποτελέσματα εισάγοντας επιπλέον απόσβεση.

Στην περίπτωση του εδάφους χρειάζεται ακόμη μεγαλύτερη διερεύνηση προκειμένου να διασαφηνιστεί η επιρροή της μικροδομής. Μία βελτίωση του προσομοιώματος θα μπορούσε να γίνει θεωρώντας υστερητική (και όχι ιζωδοελαστική συμπεριφορά), ή τροποποιώντας το προσομοίωμα σύμφωνα με τη θεωρία πλαστικότητας (κάτι που έχει γίνει από τους Vardoulakis&Sulem [55]), ώστε να γίνει δυνατή η εμφάνιση ενδεχόμενων ζωνών ολίσθησης (shear bands) εντός του εδαφικού σχηματισμού. Κάτι τέτοιο θα απαιτούσε την ανάπτυξη διδιάστατων ή χωρικών πεπερασμένων στοιχείων συνεχούς μέσου ανωτέρας βαθμίδας, αυξάνοντας σημαντικά την πολυπλοκότητα του προσομοιώματος.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ

1. Αθροιστική σύμβαση κατά Einstein:

$$a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

2. Συνθήκη μη άθροισης

$$A_{\underline{ii}} \neq A_{11} + A_{22} + A_{33}$$

3. Συμβολισμός διανύσματος:

$$\vec{a} = a_i \vec{e}_i$$

4. Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων \vec{a}, \vec{b} :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i b_i$$

5. Τανυστικό γινόμενο διανυσμάτων \vec{a}, \vec{b}

$$(\vec{a} \otimes \vec{b}) \vec{c} = (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a}$$

6. Συμβολισμός τανυστή \tilde{A} :

$$\tilde{A} = \bar{A}_{ij} e_i \otimes e_j$$

7. Ισοτροπικός τανυστής δευτέρας τάξης (δέλτα του Kronecker)

$$\delta_{ij} = 1 \text{ αν } i = j$$

$$\delta_{ij} = 0 \text{ αν } i \neq j$$

8. Τανυστής τρίτης τάξης Levi-Chivita

$$\varepsilon_{ijk} = 0 \text{ αν } i = j \text{ ή } j = k \text{ ή } i = k$$

$$\varepsilon_{ijk} = 1 \text{ αν οι τρεις δείκτες εναλλάσσονται κυκλικά με θετική φορά}$$

$$\varepsilon_{ijk} = -1 \text{ αν οι τρεις δείκτες εναλλάσσονται κυκλικ με θετική φορά}$$

9. Εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων \vec{a}, \vec{b}

$$\vec{a} \times \vec{b} = \varepsilon_{ijk} a_i b_j \vec{e}_k$$

10. Περιστροφή διανύσματος \vec{a}

$$\text{rot} \vec{a} = \vec{\nabla} \times \vec{a} = \varepsilon_{ijk} \partial_i a_j \vec{e}_k$$

11. Χρήσιμη ταυτότητα

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}$$

12. Θεώρημα της απόκλισης του Gauss

Για το διαφορίσιμο βαθμωτό πεδίο φ ορισμένο στον όγκο V , ο οποίος περικλείεται από την επιφάνεια S ισχύει:

$$\int_V \partial_i \varphi dV = \int_S n_i \varphi dS$$

, όπου \vec{n} το εξωτερικό διάνυσμα της επιφάνειας.

13. Σημαντικό Λήμμα

Αν για το συνεχές βαθμωτό πεδίο φ που ορίζεται εντός του όγκου V ισχύει:

$$\int_{V'} \varphi dV' = 0 \\ \forall V' \subseteq V$$

, τότε

$$\varphi = 0 \text{ σε όλο το } V$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

ΚΕΝΤΡΙΚΕΣ ΡΟΥΤΙΝΕΣ ΤΩΝ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ MATLAB

1. ΕΛΑΦΙΚΟΣ ΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ

```
%%%%%%%%CALCULATIONS%%%%%%%%
%%%%%%%%LOCAL STIFNESS MATRIX%%%%%%%%
k=zeros(4,4);

k=E*A*[(6*(L^2-2*L+10*g^2))/(5*L^3)      1/10-((L*1)/5-6*g^2)/L^2
-(6*(L^2-2*L+10*g^2))/(5*L^3)      1/10-((L*1)/5-6*g^2)/L^2;
      1/10-((L*1)/5-6*g^2)/L^2      (2*L)/15+(11*1)/15+(4*g^2)/L
((L*1)/5-6*g^2)/L^2-1/10      1/15-L/30+(2*g^2)/L;
      -(6*(L^2-2*L+10*g^2))/(5*L^3)      ((L*1)/5-6*g^2)/L^2-1/10
(6*(L^2-2*L+10*g^2))/(5*L^3)      ((L*1)/5-6*g^2)/L^2-1/10;
      1/10-((L*1)/5-6*g^2)/L^2      1/15-L/30+(2*g^2)/L
((L*1)/5-6*g^2)/L^2-1/10      (2*L)/15+(11*1)/15+(4*g^2)/L];

%%%%%%%%LOCAL MASS MATRIX%%%%%%%%
m=zeros(4,4);

m=r*A*[(13*L)/35 (11*L^2)/210 (9*L)/70 -(13*L^2)/420;
      (11*L^2)/210 L^3/105 (13*L^2)/420 -L^3/140;
      (9*L)/70 (13*L^2)/420 (13*L)/35 -(11*L^2)/210;
      -(13*L^2)/420 -L^3/140 -(11*L^2)/210 L^3/105];

%%%%%%%%TOTAL STIFNESS MATRIX%%%%%%%%
K=zeros(N,N);
for i=1:n
    R=zeros(4,N);
    for j=1:4
R(j,j+2*(i-1))=1;
end
    KT=R'*k*R;
    K=K+KT;
end

%%%%%%%%TOTAL MASS MATRIX%%%%%%%%

M=zeros(N,N);

for i=1:n

R=zeros(4,N);

for j=1:4
R(j,j+2*(i-1))=1;
end
```

```

MT=R'*m*R;

M=M+MT;

end

%%%%%BOUNDARY CONDITIONS%%%%%

%%%%%NUMBER OF FREE DEGREES OF FREEDOM%%%%%
count=0;

for i=1:n+1
for j=1:2

if Cn(i,j)==1;
count=count+1;
end

end
end

NF=N-count;

B=zeros(N,NF);

c1=0;

Cnn=zeros(N,1);

for i=1:n+1
for j=1:2
Cnn(2*(i-1)+j)=Cn(i,j);
end
end

for i= 1:N
if Cnn(i)==1, c1=c1+1;
else B(i,i-c1)=1;
end
end
B;

%%%%%FINAL STIFNESS MATRIX%%%%%

Kf=B'*K*B;

%%%%%FINAL MASS MATRIX%%%%%

Mf=B'*M*B;

```

```
%%%%%Ig MATRIX%%%%%
```

```
Igg=zeros(N,1);
```

```
for i=1:2:N  
Igg(i)=1;  
end
```

```
Ig=zeros(NF,1);
```

```
count=0;  
for i=1:N  
if Cnn(i)==0;  
count=count+1;  
Ig(count)=Igg(i);  
end  
end
```

```
%%%%%TIME VECTOR%%%%%
```

```
%%%%%NUMBER OF MOMENTS%%%%%
```

```
LL=Te/Dt+1;
```

```
t=zeros(LL,1);
```

```
for i=1:LL  
t(i)=(i-1)*Dt;  
end
```

```
%%%%%BEDROCK EXCITATION%%%%%
```

```
ug=zeros(LL,1) ;  
for j=1:LL  
ug(j)=ugmax*sin(2*pi/Td*t(j)) ;  
end
```

```
%%%%%BEDROCK ACCELERATION%%%%%
```

```
acc=zeros(LL,1);
```

```
for j=1:LL  
acc(j)=(-4*pi()^2/Td^2)*ugmax*sin(2*pi()/Td*t(j)) ;  
end
```

```
%%%%%DISPLACEMENT AND STRAIN VECTOR%%%%%
```

```
D=zeros(NF,LL);
```

%%%%SOLUTION OF THE EQUATION OF MOTION%%%%

```

for i=1:LL
if i==1
D(:,i)=0;
end
if i==2
D(:,i)=D(:,i-1);
elseif i>2
D(:,i)=Dt^2*(-inv(Mf)*Kf*D(:,i-1)-Ig*acc(i-1))+2*D(:,i-1)-D(:,i-2);
end
end

```

2. ΔΟΚΟΣ

%%%%CALCULATIONS%%%%

%%%%LOCAL STIFNESS MATRIX%%%%

k=zeros(6,6);

```

k=E*I*[ (120*(L^2-2*L+42*g^2))/(7*L^5)   (60*(L^2-
2*L+42*g^2))/(7*L^4)   -(3*(L^2-2*L+140*g^2))/(7*L^3)   -
(120*(L^2-2*L+42*g^2))/(7*L^5)   (60*(L^2-
2*L+42*g^2))/(7*L^4)   (3*(L^2-2*L+140*g^2))/(7*L^3);
(60*(L^2-2*L+42*g^2))/(7*L^4)   (192*(L^2-
2*L+35*g^2))/(35*L^3)   ((22*L)/35-36*g^2)/L^2-11/35   -(60*(L^2-
2*L+42*g^2))/(7*L^4)   (12*(9*L^2-18*L+490*g^2))/(35*L^3)
4/35-(8*L)/35-24*g^2/L^2;
-(3*(L^2-2*L+140*g^2))/(7*L^3)   ((22*L)/35-36*g^2)/L^2-
11/35   (3*L)/35+(29)/35+(9*g^2)/L   (3*(L^2-
2*L+140*g^2))/(7*L^3)   ((8*L)/35-24*g^2)/L^2-4/35
L/70-1/35-(3*g^2)/L;
-(120*(L^2-2*L+42*g^2))/(7*L^5)   -(60*(L^2-
2*L+42*g^2))/(7*L^4)   (3*(L^2-2*L+140*g^2))/(7*L^3)   (120*(L^2-
2*L+42*g^2))/(7*L^5)   -(60*(L^2-2*L+42*g^2))/(7*L^4)   -
(3*(L^2-2*L+140*g^2))/(7*L^3);
(60*(L^2-2*L+42*g^2))/(7*L^4)   (12*(9*L^2-
18*L+490*g^2))/(35*L^3)   ((8*L)/35-24*g^2)/L^2-4/35   -
(60*(L^2-2*L+42*g^2))/(7*L^4)   (192*(L^2-2*L+35*g^2))/(35*L^3)
11/35-((22*L)/35-36*g^2)/L^2;
(3*(L^2-2*L+140*g^2))/(7*L^3)   4/35-((8*L)/35-24*g^2)/L^2
L/70-1/35-(3*g^2)/L   -(3*(L^2-2*L+140*g^2))/(7*L^3)
11/35-((22*L)/35-36*g^2)/L^2   (3*L)/35+(29)/35+(9*g^2)/L];

```

%%%%TOTAL STIFNESS MATRIX%%%%

```

K=zeros(N,N);

for i=1:n

R=zeros(6,N);

for j=1:6
R(j,j+3*(i-1))=1;
end

KT=R'*k*R;

K=K+KT;

end

%%%%LOCAL FORCE VECTOR%%%%

p=zeros(6,1);

p=q*[L/2;
     L^2/10;
     -L^3/120;
     L/2;
     -L^2/10;
     -L^3/120];

%%%%TOTAL EXTERNAL FORCE VECTOR%%%%

P=zeros(N,1);

for i=1:n

R=zeros(6,N);

for j=1:6
R(j,j+3*(i-1))=1;
end

PT=R'*p;

P=P+PT;

end

```



```
%%%%%%%%BOUNDARY CONDITIONS%%%%%%%%
```

```
%%%%%%%%NUMBER OF FREE DEGREES OF FREEDOM%%%%%%%%
```

```
count=0;
```

```
for i=1:n+1  
for j=1:3
```

```
if Cn(i,j)==1;  
count=count+1;  
end
```

```
end  
end
```

```
NF=N-count;
```

```
B=zeros(N,NF);
```

```
c1=0;
```

```
Cnn=zeros(N,1);
```

```
for i=1:n+1  
for j=1:3  
Cnn(3*(i-1)+j)=Cn(i,j);  
end  
end
```

```
for i= 1:N  
if Cnn(i)==1, c1=c1+1;  
else B(i,i-c1)=1;  
end  
end  
B;
```

```
%%%%%%%%FINAL STIFNESS MATRIX%%%%%%%%
```

```
Kf=B'*K*B;
```

```
%%%%%%%%FINAL EXTERNAL FORCE VECTOR%%%%%%%%
```

```
Pf=B'*P;
```

```
%%%%%%%%DISPLACEMENT AND STRAIN VECTOR%%%%%%%%
```

```
D=zeros(NF,1);
```

```
D=inv(Kf)*Pf;
```


BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Aifantis E.C., 1999, «Strain gradient interpretation of size effects», *International Journal of Fracture* 95: 299-314.
- [2] Alsaleh M.I., 1992, «Numerical modeling of strain localization in granular materials using Cosserat theory enhanced with microfabric properties», Dissertation, Louisiana State University, Department of Civil and Environmental Engineering.
- [3] Altan S.B., Aifantis E.C., 1992, «On the Structure of Mode III Crack-Tip in Gradient Elasticity », *Scripta Metallurgica et Materialia*, Vol. 26: 319-324.
- [4] Amanatidou E., Aravas N. 2002, «Mixed finite element formulations of strain-gradient elasticity problems», *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 191, 1723-1751.
- [5] Anthoine A., 2000, «Effect of couple-stresses on the elastic bending of beams», *International Journal of Solids Structures*, 37: 1003-1018.
- [6] Askes H., Suiker A.S.J, Sluys L.J., 2002, «A classification of higher-order strain-gradient models-linear analysis», *Archive of Applied Mechanics* 72: 171-188.
- [7] Askes H., Aifantis E.C., 2006, «Gradient Elasticity Theories in Statics and Dynamics-A Unification of Approaches», *Computer and Structures* 86: 1266-1279.
- [8] Askes H., Morata I., Aifantis E.C., 2008, «Finite element analysis with staggered gradient elasticity», *International Journal of fracture* 139: 297-304.
- [9] Askes H., Aifantis E.C., 2011, «Gradient elasticity in statics and dynamics: An overview of formulations, length scale identification procedures, finite element implementations and new results», *International Journal of Solids and Structures* 48: 1962-1990
- [10] Bakogianni D.G., Lazopoulos K.A., 2007, «Stability of strain gradient elastic bars in tension», *Optimization Letters* 1: 407-420
- [11] Beda G., 2005, «Generalized Mindlin's method for the determination of constitutive equations of solids», *Journal of Computational and Applied Mechanics*, Vol.6, No. 2: 153-158.

- [12] Chang C.S., Gao J., 1995, «Second-gradient constitutive theory for granular material with random packing structure», *International Journal of Solids Structures*, Vol. 32: 2279-2293.
- [13] Chang C.S., Askes A., Sluys L.J., 2002, «Higher-order strain/higher-order stress gradient models derived from a discrete microstructure, with application to fracture», *Engineering Fracture Mechanics* 69: 1907-1924.
- [14] Chopra Anil K., 2008, «Δυναμική των κατασκευών: Θεωρία και εφαρμογές στη σεισμική μηχανική», τρίτη έκδοση, Επιστημονική Μετάφραση στα ελληνικά: Σταύρος Αναγνωστόπουλος, Καθηγητής Πολιτικών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Πατρών.
- [15] Δαφαλιάς Ι.Φ., 2010, «Μηχανική του Συνεχούς Μέσου», Διδακτικές Σημειώσεις Δ.Π.Μ.Σ. Δομοστατικός Σχεδιασμό και Ανάλυση Κατασκευών-Υπολογιστική Μηχανική., Ε.Μ.Π..
- [16] De Borst R., *Mühlhaus H – B*, 1992, «Gradient-Dependent Plasticity: Formulation and Algorithmic Aspects», *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 35: 521-539.
- [17] Eringen A.C., Suhubi E.S., 1964, «Non-Linear Theory of Simple Microelastic Solids», *International Journal of Engineering Science*, Vol. 2, 189-203.
- [18] Eringen A.C., 1972, «Nonlocal Polar Elastic Continua», *International Journal of Engineering Science*, Vol. 10, 1-16.
- [19] Eringen A.C., Edelen D.G.B., 1972, «On Nonlocal Elasticity», *International Journal of Engineering Science*, Vol. 10, 233-248.
- [20] Eringen A.C., 1992, «Balance Laws of Micromorphic Continua Revisited», *International Journal of Engineering Science*, Vol. 30, No. 6, 805-810.
- [21] Fleck N.A., Hutchinson J.W., 1997, «Strain Gradient Plasticity», *Advances in Applied Mechanics*, Vol. 33: 295-362
- [22] Georgiadis H.G., Vardoulakis I., 1998, «Anti-plane shear Lamb's problem treated by gradient elasticity with surface energy», *Wave Motion* 28: 353-366.
- [23] Germain P., 1973b, «The Method of Virtual Power in Continuum Mechanics, Part 2: Microstructure», εκδόσεις ΕΜΠ., SIAM, *Journal of Applied Mathematics*, 25 :556-575

- [24] Green A.E., 1965, «Micro-Materials and Multipolar Continuum Mechanics», *International Journal of Engineering Science*, 533-537
- [25] Green A.E., Rivlin A.S. 1964 «Multipolar Continuum Mechanics», *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 113-147.
- [26] Hadjesfandiari A.R., Dargush Gary F., «Couple stress theory for polar solids».
- [27] Karlis G.F., «BEM Solutions for Linear Elastic and Fracture Mechanics Problems with Microstructural Effects», Doctoral Thesis, Department of Mechanical Engineering and Aeronautics, University of Patras.
- [28] Κατσιαδέλης Ι.Θ. , 2007, «Δυναμική των Κατασκευών», τόμος 1/τόμος2, εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα.
- [29] Κουμούσης Β. , 1998, «Εισαγωγή Στο Λογισμό των Μεταβολών», Διδακτικές Σημειώσεις, Ε.Μ.Π..
- [30] Lam D.C.C., Yang F., Chong A.C.M., Wang J., Tong P., 2003, «Experiments and theory in strain gradient elasticity», *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 51: 1477-1508.
- [31] «Mechanics of Generalized Continua, One Hundred Years After the Cosserats», 2010, *Advances in Mechanics and Mathematics Volume 21*, Collection of papers, Edited by Maugin G.A., Metrikine A.V., Published by Springer
- [32] Metrikine A.V., Askes H., 2002, «One-dimensional dynamically consistent gradient elasticity models derived from a discrete microstructure», Part 1: Generic Formulation, *European Journal of Mechanics A/Solids* 21: 555-572.
- [33] Mindlin R. D., 2006, «An Introduction to the Mathematical Theory of vibrations of elastic plates», *World Scientific* (Edited by Jiashi Yang).
- [34] Mindlin R.D., 1951, «Thickness-Shear and Flexural Vibrations of Crystal Plates», *Journal of Applied Physics*, V.22, N.3.
- [35] Mindlin R.D., Tiersten H. F., 1962, «Effects of couple stresses in linear elasticity», *Archive for Rational, Mechanics and Analysis* 11, 415-448.

- [36] Mindlin R.D., 1964, «Micro-structure in Linear Elasticity», *Archive for Rational, Mechanics and Analysis* 16, 51-78.
- [37] Mindlin R.D., 1965, «Second gradient of strain and surface tension in linear elasticity» *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 1, 417-438.
- [38] Mindlin R.D., N.N. Eshel, 1968, «On first strain-gradient theories in linear elasticity» *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 1, 109-124.
- [39] Μώκιος Γ.Π., 2009, «Εφαρμογή του Μοντέλου του Συνεχούς σε Νανοϋμένια και Νανოსύνθετα Υλικά», Διδακτορική Διατριβή, Α.Π.Θ., Πολυτεχνική Σχολή, Γενικό Τμήμα Φυσικών και Μαθηματικών Επιστημών, Τομέας Μηχανικής, Εργαστήριο Μηχανικής και Υλικών.
- [40] Παπαδρακάκης Μ., 2001, «Ανάλυση Φορέων με τη Μέθοδο των Πεπερασμένων Στοιχείων», Εκδόσεις Παπασωτηρίου.
- [41] Papargyri-Beskou S., Tsepoura K.G., Polyzos D., Beskos D.E., 2003, «Bending and stability analysis of gradient elastic beams», *International Journal of Solids and Structures* 40: 385-400.
- [42] Papargyri-Beskou S., Polyzos D., Beskos D.E., 2009, «Wave dispersion in gradient elastic solids and structures: A unified treatment», *International Journal of Solids and Structures* 46: 3751-3759.
- [43] Park S.K., Gao X-L, 2006, «Bernoulli-Euler beam model based on a modified couple stress theory», *Journal of Micromechanics and Microengineering* 16: 2355-2359.
- [44] Park S.K., 2006, «Two Higher Order Elasticity Theories: Their Variational Formulations and Applications», Doctor of Philosophy, Texas A&M University.
- [45] Pastrone F., 2007, «Microstructures and Granular Media», *Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino*, Vol.65, 2: 269-277.
- [46] Peerlings R.H.J., Fleck N.A., 2002, «A numerical framework for homogenization towards higher-order continua», *Fifth World Congress on Computational Mechanics*, Vienna, Austria.
- [47] Reddy J.N., 2008, «An introduction to Continuum Mechanics, with Applications», Cambridge University Press.

- [48] Riahi A., Curran J.H., 2010, «Comparison of the Cosserat Continuum Approach with Finite Element Interface Models in a Simulation of Layered Materials», *Transaction A: Civil Engineering* Vol.17, No.1: 39-52.
- [49] Sadd M.H., 2005, «Elasticity: Theory, Applications and Numerics», Elsevier Academic Press.
- [50] Sauma V.E., 1998, «Introduction to Continuum Mechanics and Elements of Elasticity/Structural Mechanics», Lecture Notes, University of Colorado, Dept. of Civil, Environmental and Architectural Engineering.
- [51] Simmonds J.G., 1994, «A Brief on Tensor Analysis», Springer-Verlag.
- [52] Toupin R.A., 1962, «Elastic materials with couple-stresses», *Archive for Rational, Mechanics and Analysis* 11, 385-414.
- [53] Toupin R.A., 1964, «Theories of elasticity with couple-stress», *Archs ration, Mech. Analysis* 17, 85-112.
- [54] Tsepoura K.G., Papargyri-Beskou S., Polyzos D., Beskos D.E., 2002, «Static and dynamic analysis of a gradient-elastic bar in tension», *Archive of Applied Mechanics* 72: 483-497.
- [55] Vardoulakis I., Sulem J., 1995, Blackie Academic & Professional.
- [56] Vardoulakis I., Exadaktylos G., Aifantis E., 1996, «An example of double forces taken from structural analysis», *International Journal of Solids and Structures* 43: 4047-4062.
- [57] Vardoulakis I., Georgiadis H.G., 1997, «Gradient Elasticity with Surface Energy: Mode-III Crack Problem », *International Journal of Solids and Structures* Vol. 33, No 30: 4531-4559.
- [58] Vardoulakis I., Georgiadis H.G., 1997, «SH Surface Waves in a Homogenous Gradient-Elastic Half-Space with Surface Energy», *Journal of Elasticity* 47: 147-165.
- [59] Vardoulakis I., 2004, «Linear Micro-Elasticity», *Degradation and Instabilities in Geomaterials, CISM, DIGA-sponsored Course, Chapter 4, Springer: 635-652.*
- [60] Vardoulakis I., 2004, «Second gradient elasto-plastic models for geomaterials», *RFGC-Failure, Degradation and Instabilities: 635-652.*

- [61] Vardoulakis I., Giannakopoulos A.E., 2006, «An example of double forces taken from structural analysis», *International Journal of Solids and Structures* 43: 4047-4062.
- [62] Vardoulakis I., 2009, «Lecture Notes on Cosserat Continuum Mechanics with Application to the Mechanics of Granular Media», 3rd National Meeting on “Generalized Continuum Theories and Applications”, Thessaloniki, Greece
- [63] Zhang X., Sharma P., 2005, «Inclusions and inhomogeneities in strain gradient elasticity with couple stresses and related problems», *International Journal of Solids and Structures* 42: 3833-3851.
- [64] Zhao J., Sheng D., Zhou W., 2005, «Shear banding analysis of geomaterials by strain gradient enhanced damage model», *International Journal of Solids and Structures* 42: 5335-5355.