



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**  
**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ**  
**ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**  
**ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ**

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**Διερεύνηση τασικού πεδίου και πεδίου μετατοπίσεων σε  
δοκίμια μορφής κυκλικού ημιδακτυλίου**

Μαρία Ε. Σταυροπούλου

**Επιβλέπων:** Δρ. Σταύρος Κ. Κουρκουλής, Καθηγητής Ε.Μ.Π

**ΑΘΗΝΑ 2021**



## **ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ**

Σταύρος Κ. Κουρκουλής, Καθηγητής  
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, ΕΜΠ

## **ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ**

Σταύρος Κ. Κουρκουλής, Καθηγητής  
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, ΕΜΠ

Ευστάθιος Ε. Θεοτόκογλου, Καθηγητής  
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, ΕΜΠ

Νικόλαος Δ. Αλεξόπουλος, Καθηγητής  
Σχολή Μηχανικών Οικονομίας και Διοίκησης, Πανεπιστήμιο Αιγαίου



Στον παππού μου τον Χρήστο



## **ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ**

Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Χρήστο Μαρκίδη για τον χρόνο που αφιέρωσε και την προσπάθεια που κατέβαλε ώστε να κατανοήσω την θεωρία της παρούσας εργασίας και να μου επιλύσει όλες τις απορίες. Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω την Μεταδιδακτορική ερευνήτρια κ. Ερμιόνη Πάσιου για την καθοριστική συμβολή της στο πειραματικό κομμάτι της εργασίας αλλά και για την υποστήριξή της σε οτιδήποτε και αν χρειάστηκα.

Ιδιαίτερες ευχαριστίες θα ήθελα να απευθύνω στον επιβλέποντα καθηγητή της εργασίας, τον κ. Σταύρο Κ. Κουρκουλή για την υπομονή και επιμονή του τόσο κατά τη διάρκεια της εκπόνησης της διπλωματικής εργασίας, όσο και κατά την διάρκεια των σπουδών μου. Παρά το επιβαρυνμένο πρόγραμμά του, προσέφερε πάντα τον χρόνο του για να επιλύσει τις απορίες μου και τους προβληματισμούς μου.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου για την στήριξή τους καθόλη την διάρκεια των σπουδών μου.





## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ	15
ΠΕΡΙΛΗΨΗ	17
ABSTRACT	19

### **1<sup>ο</sup> ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΒΡΑΖΙΛΙΑΝΟΣ ΔΙΣΚΟΣ – ΚΥΚΛΙΚΟΣ ΔΑΚΤΥΛΙΟΣ – ΗΜΙΑΚΤΥΛΙΟΣ (BRAZILIAN DISK – CIRCULAR RING – SEMI RING)**

1.1	ΕΙΣΑΓΩΓΗ	22
1.2	ΠΑΡΑΔΟΧΕΣ –ΚΡΙΤΗΡΙΟ GRIFFITH	24
1.3	Η ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΩΝ ΘΕΩΡΙΩΝ ΓΙΑ ΤΟ ΒΡΑΖΙΛΙΑΝΟ ΔΙΣΚΟ	26
1.3.1	ΠΕΡΙΟΔΟΣ 1943–1978	26
1.3.2	ΠΕΙΡΑΜΑ ΚΥΚΛΙΚΟΥ ΔΙΣΚΟΥ ΜΕ ΟΠΗ ΣΤΟ ΚΕΝΤΡΟ (CIRCULAR RING TEST)	30
1.3.3	Η ΠΡΟΤΑΣΗ ΤΗΣ ISRM ΓΙΑ ΤΗΝ ΒΕΛΤΙΩΣΗ ΤΟΥ ΠΕΙΡΑΜΑΤΟΣ ΤΟΥ ΒΡΑΖΙΛΙΑΝΟΥ ΔΙΣΚΟΥ	37
1.3.4	Η ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΟΥ ΒΡΑΖΙΛΙΑΝΟΥ ΔΙΣΚΟΥ ΤΗΝ ΠΕΡΙΟΔΟ 1979–1999	39
1.3.5	Η ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΟΥ ΒΡΑΖΙΛΙΑΝΟΥ ΔΙΣΚΟΥ ΤΗΝ ΠΕΡΙΟΔΟ 2000–2020	41
1.4	ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ	45

1.5	ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟΝ ΗΜΙΔΑΚΤΥΛΙΟ	47
1.6	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	50

## **2<sup>ο</sup> ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ (THEORETICAL ANALYSIS)**

2.1	ΕΙΣΑΓΩΓΗ –ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ	51
2.2	ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ	54
	2.2.1 Ο ΚΥΚΛΙΚΟΣ ΔΑΚΤΥΛΙΟΣ	54
	2.2.2 Ο ΚΥΚΛΙΚΟΣ ΗΜΙΔΑΚΤΥΛΙΟΣ	58
2.3	Η ΕΦΕΛΚΥΣΤΙΚΗ ΑΝΤΟΧΗ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΜΕ ΤΗΝ ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΟΥ ΗΜΙΔΑΚΤΥΛΙΟΥ	66
2.4	ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΣΤΗΡΙΞΗΣ, ΣΧΕΣΗ ΜΕ ΤΗΝ ΤΕΜΝΟΥΣΑ ΚΑΙ ΤΗΝ ΡΟΠΗ	68

## **3<sup>ο</sup> ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΤΕΧΝΙΚΕΣ**

3.1	ΤΕΧΝΙΚΗ ΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΙΚΟΝΑΣ (DIC)	71
3.2	ΤΕΧΝΙΚΗ ΑΚΟΥΣΤΙΚΗΣ ΕΚΠΙΟΜΠΗΣ (ΑΕ)	74
3.3	ΤΕΧΝΙΚΗ ΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΣΗΜΑΤΩΝ ΔΙΕΓΕΙΡΟΜΕΝΩΝ ΑΠΟ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΦΟΡΤΙΣΗ	80
	3.3.1 ΔΙΑΤΟΜΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΚΑΙ ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ	80
	3.3.2 ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΑΤΕΛΕΙΕΣ ΤΗΣ ΚΡΥΣΤΑΛΛΙΚΗΣ ΔΟΜΗΣ	83
	3.3.3 ΕΠΙΠΕΔΑ ΟΛΙΣΘΗΣΗΣ	87

3.3.4	ΔΙΑΝΥΣΜΑ BURGERS	88
3.3.5	“ΥΠΕΡΠΗΔΗΣΗ” (CLIMB)	89
3.3.6	“ΩΘΗΣΕΙΣ” (JOGS)	90
3.3.7	ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΩΝ ΚΙΝΟΥΜΕΝΩΝ ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΩΝ ΕΞΑΡΜΩΣΕΩΝ (MOVING CHARGED DISLOCATIONS – MCD MODEL)	91
3.4	ΜΕΛΕΤΕΣ ΠΟΥ ΣΥΝΔΥΑΖΟΥΝ ΤΗΝ ΧΡΗΣΗ ΤΩΝ ΠΡΟΑΝΑΦΕΡΘΕΙΣΩΝ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΩΝ ΤΕΧΝΙΚΩΝ	93

#### **4<sup>ο</sup> ΚΕΦΑΛΑΙΟ** **ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ**

4.1	ΕΙΣΑΓΩΓΗ	94
4.2	ΥΛΙΚΟ – ΔΟΚΙΜΙΟ	95
4.2.1	ΥΛΙΚΟ	95
4.2.1.1	Η ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΤΟΥ ΔΙΟΝΥΣΙΑΚΟΥ ΜΑΡΜΑΡΟΥ ΥΠΟ ΑΜΕΣΟ ΕΦΕΛΚΥΣΜΟ	97
4.2.1.2	Η ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΤΟΥ ΔΙΟΝΥΣΙΑΚΟΥ ΜΑΡΜΑΡΟΥ ΥΠΟ ΜΟΝΟΑΞΟΝΙΚΗ ΚΑΙ ΤΡΙΑΞΟΝΙΚΗ ΘΛΙΨΗ	100
4.2.1.3	ΤΟ ΠΛΗΡΕΣ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΤΑΣΕΩΝ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ ΤΟΥ ΔΙΟΝΥΣΙΑΚΟΥ ΜΑΡΜΑΡΟΥ	102
4.2.2	ΔΟΚΙΜΙΑ	103
4.3	ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟΣ ΕΞΟΠΛΙΣΜΟΣ	104
4.4	ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ	107

4.4.1	ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑΤΩΝ ΔΟΚΙΜΙΩΝ ΚΑΙ ΤΗΣ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗΣΔΙΑΤΑΞΗΣ	107
4.4.2	ΚΥΡΙΩΣ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ	111
4.5	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ	113
4.5.1	ΜΟΡΦΗ ΘΡΑΥΣΗΣ	113
4.5.2	ΠΡΩΤΟΓΕΝΗ ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΜΗΧΑΝΗΣ	114
4.5.3	ΠΡΩΤΟΓΕΝΗ ΔΕΔΟΜΕΝΑ DIC	117
4.5.4	ΠΡΩΤΟΓΕΝΗ ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΔΕ ΚΑΙ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΡΕΥΜΑΤΟΣ	122

**5<sup>ο</sup> ΚΕΦΑΛΑΙΟ**  
**ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΛΥΣΗΣ ΚΑΙ**  
**ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ**

5.1	ΕΙΣΑΓΩΓΗ	127
5.2	ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΛΥΣΗΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΜΗΧΑΝΗΣ	128
5.3	ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΛΥΣΗΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ DIC	133
5.4	Η ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΩΝ ΠΡΑΜΕΤΡΩΝ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΤΑΣΕΩΝ ΚΑΙ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ	135
5.4.1	Η ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΤΟΥ ΤΑΣΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ	135
5.4.2	Η ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΤΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ	141
5.4.3	Η ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΤΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΤΑΣΕΩΝ ΚΑΙ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ ΓΙΑ $\theta=30^\circ$	145
5.5	Η ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΤΗΣ ΣΥΝΙΣΤΩΣΑΣ $\sigma_\theta$ ΓΙΑ $R=R_1$ ΚΑΙ $R=R_2$ ΚΑΘΩΣ ΜΕΤΑΒΑΛΛΕΤΑΙ Η ΓΩΝΙΑ $\theta$	152

**6<sup>ο</sup> ΚΕΦΑΛΑΙΟ**  
**ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ**

6.1	ΕΙΣΑΓΩΓΗ	154
6.2	ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ	156
6.2.1	ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ	156
6.2.2	ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗΣ	158
6.2.3	ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗΣ	159
6.3	ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΜΑΤΟΣ	161
6.3.1	ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΤΟΥ ΛΟΓΟΥ $\rho$	161
6.3.2	ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΤΗΣ ΕΚΚΕΝΤΡΟΤΗΤΑΣ $c$	168
6.3.3	ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΤΗΣ ΦΟΡΤΙΣΗΣ	174
6.4	ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΤΑΣΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΚΑΙ ΤΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ ΓΙΑ PLANE STRAIN ΚΑΙ PLANE STRESS	180
	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	182
	ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ	184
	ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ	186



## ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα διπλωματική εργασία με τίτλο «Διερεύνηση τασικού πεδίου και πεδίου μετατοπίσεων σε δοκίμια μορφής κυκλικού ημιδακτυλίου» εκπονήθηκε στο Εργαστήριο Αντοχής Υλικών της Σχολής Ε.Μ.Φ.Ε του Ε.Μ.Π τη χρονική περίοδο από τον Ιούλιο του 2019 έως τον Οκτώβριο του 2021.

Στα πλαίσια της υλοποίησής της, μελετήθηκε πειραματικά το πεδίο μετατοπίσεων με την χρήση της τεχνικής Συσχέτισης Ψηφιακής Εικόνας (DIC). Επιπλέον, χρησιμοποιήθηκαν η τεχνική Ακουστικής Εκπομπής και η τεχνική Ηλεκτρικών Σημάτων διεγερόμενων από πίεση προκειμένου να ανιχνευθεί η θραύση του δοκιμίου λίγο πριν πραγματοποιηθεί. Κατά την υλοποίηση του πειραματικού πρωτοκόλλου διενεργήθηκαν δοκιμές αντιδιαμετρικής θλίψης, τα δεδομένα των οποίων πρέκυψαν από τον συνδυασμό των ως άνω μεθόδων.

Σχετικά με την αναλυτική λύση μελετήθηκε η μεταβολή του τασικού πεδίου και του πεδίου μετατοπίσεων μεταβάλλοντας παραμέτρους, όπως το πάχος ( $h$ ) του δοκιμίου, το λόγο των ακτίνων ( $\rho$ ), τη φύση του υλικού ( $E, \nu$ ), την εκκεντρότητα ( $c$ ), την τιμή του φορτίου ( $P$ ). Επιπλέον, στην περίπτωση των μετατοπίσεων, μελετήθηκε η «συμπεριφορά» τους απουσία και παρουσία τριβής.

Τέλος, δημιουργήθηκε διδιάστατο αριθμητικό προσομοίωμα και πραγματοποιήθηκε εκτενής παραμετρικός έλεγχος με σκοπό να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων με τα αντίστοιχα της αναλυτικής λύσης και να επιτευχθεί η επικύρωση της τελευταίας. Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι στην περίπτωση της αριθμητικής προσέγγισης μελετάται το τασικό πεδίο για την περίπτωση που η φόρτιση θεωρηθεί ημιτονοειδής ή παραβολική.





## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η πειραματική, αναλυτική και αριθμητική διερεύνηση του τασικού πεδίου και του πεδίου μετατοπίσεων του κυκλικού ημιδακτυλίου.

Στο 1<sup>ο</sup> κεφάλαιο, περιγράφονται οι λόγοι που οδηγούν την επιστημονική κοινότητα στην ανάπτυξη εναλλακτικών πειραματικών μεθόδων για τον προσδιορισμό της εφελκυστικής αντοχής. Γίνεται μία εκτενής ανάλυση των θεωριών του πειράματος του Βραζιλιανού δίσκου από το 1943 μέχρι και σήμερα. Λόγω των δυο βασικών μειονεκτημάτων της εν λόγω δοκιμής που είναι η εμφάνιση διαξονικού τασικού πεδίου στο κέντρο του δίσκου και η εμφάνιση πρόιμης θραύσης στην περιοχή επαφής δίσκου – πλάκας φόρτισης, προτείνεται το πείραμα του κυκλικού ημιδακτυλίου ως εναλλακτική μέθοδος για τον προσδιορισμό της εφελκυστικής αντοχής.

Στο 2<sup>ο</sup> κεφάλαιο, βασιζόμενοι στην προσέγγιση των μιγαδικών δυναμικών του Muskhelishvili, η θεωρητική λύση του CSR προκύπτει από την λύση του 1<sup>ου</sup> θεμελιώδους προβλήματος, του ομοιόμορφου δακτυλίου.

Στο 3<sup>ο</sup> κεφάλαιο, γίνεται μία σύντομη ανάλυση των βασικών χαρακτηριστικών των τεχνικών που εφαρμόστηκαν κατά την υλοποίηση του πειραματικού πρωτοκόλλου.

Στο 4<sup>ο</sup> κεφάλαιο, περιγράφεται η πειραματική διαδικασία και παρουσιάζονται τα πρωτογενή δεδομένα του πλαισίου φόρτισης, των καμερών της τεχνικής DIC, της High Speed Camera, της Ακουστικής Εκπομπής και του Ηλεκτρικού Ρεύματος.

Στο 5<sup>ο</sup> κεφάλαιο, βασιζόμενοι στην αναλυτική λύση, διερευνάται η μεταβολή του τασικού πεδίου και του πεδίου μετατοπίσεων του κυκλικού ημιδακτυλίου υπό την επίδραση της μεταβολής των παραμέτρων όπως είναι: το πάχος ( $h$ ) του δοκιμίου, ο λόγος των ακτίνων ( $\rho$ ), η φύση του υλικού ( $E, \nu$ ), η εκκεντρότητα ( $c$ ) και η τιμή του φορτίου ( $P$ ).

Στο 6<sup>ο</sup> κεφάλαιο, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από την αριθμητική επίλυση επίπεδου αριθμητικού προσομοιώματος με την μέθοδο των

πεπερασμένων στοιχείων. Πραγματοποιείται παραμετρικός έλεγχος και μελετάται η μεταβολή των πεδίων τάσεων και μετατοπίσεων. Προκύπτει επικύρωση της αναλυτικής λύσης.

Στο τέλος, παρατίθενται κάποια συμπεράσματα που αφορούν τα πειραματικά δεδομένα, την αναλυτική λύση και το προσομοίωμα και προτείνονται μέθοδοι βελτίωσης των αποτελεσμάτων που προέκυψαν στην παρούσα εργασία.

## ABSTRACT

The purpose of the present Diploma Thesis is the experimental, analytical and numerical investigation of the tensile field and the displacement field of the circular semi - ring.

Chapter 1 describes the reasons that lead the scientific community to develop alternative experimental methods for determining tensile strength. An extensive analysis of the theories of the Brazilian record experiment from 1943 until today is made. Due to the two main disadvantages of this test, which is the appearance of a biaxial tension field in the center of the disk and the appearance of early fracture in the contact area of the disk - load plate, the circular semi ring experiment is proposed as an alternative method for determining tensile strength.

In 2<sup>nd</sup> chapter, following Muskhelishvili's complex potentials approach, the theoretical solution of the CSR is obtained from the solution of the 1st fundamental problem of the uniform ring.

Chapter 3 provides a brief analysis of the key features of the techniques applied during the implementation of the experimental protocol.

The 4<sup>th</sup> chapter describes the experimental procedure and presents the primary data of the charging frame, the DIC cameras, the High Speed Camera, the Acoustic Emission and the Electric Currents.

In the 5<sup>th</sup> chapter, based on the analytical solution, the change of the tensile field and the displacement field of the circular semi – ring is being investigated under the influence of parameters such as, the thickness ( $h$ ) of the specimen, the ratio of the rays ( $r$ ), the nature of the material ( $E$ ,  $\nu$ ), the eccentricity ( $c$ ) and the value of the load ( $P$ ).

In the 6<sup>th</sup> chapter, the results from the numerical analysis of a 2D numerical simulation are presented with the finite element method. Parametric investigation is carried out, and the change of stress and displacement fields is studied. The analytical solution occurs validated.

Finally, some conclusions are presented regarding the experimental data, the analytical solution and the simulation, and methods are proposed for improving the results obtained in the present work.



## **1<sup>ο</sup> ΚΕΦΑΛΑΙΟ**

### **ΒΡΑΖΙΛΙΑΝΟΣ ΔΙΣΚΟΣ-ΚΥΚΛΙΚΟΣ ΔΑΚΤΥΛΙΟΣ – ΗΜΙΔΑΚΤΥΛΙΟΣ (BRAZILIAN DISK – CIRCULAR RING – SEMI RING)**

#### **1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ**

Οι τρόποι με τους οποίους μπορεί να καταπονηθεί ένα δοκίμιο είναι ο εφελκυσμός, η θλίψη, η διάτμηση, η στρέψη, η κάμψη, ο λυγισμός και ο συνδυασμός τους. Η απλούστερη και σημαντικότερη πειραματική διαδικασία για τον προσδιορισμό πολλών εκ των μηχανικών ιδιοτήτων των υλικών είναι το κλασικό πείραμα του μονοαξονικού εφελκυσμού. Κατά την εν λόγω πειραματική διαδικασία, πρισματικά ή κυλινδρικά δοκίμια με κατάλληλα διαμορφωμένα άκρα τοποθετούνται στις “αρπάγες” της μηχανής και καταπονούνται σε μονοαξονικό εφελκυσμό μέχρι να επέλθει θραύση.

Το πλαίσιο φόρτισης μετράει το επιβαλλόμενο φορτίο και το ειδικό μηχανικό μέτρο την αντίστοιχη επιμήκυνση/εγκάρσια βράχυνση στην κεντρική περιοχή του δοκιμίου (όπου επικρατεί μονοαξονική εντατική κατάσταση).

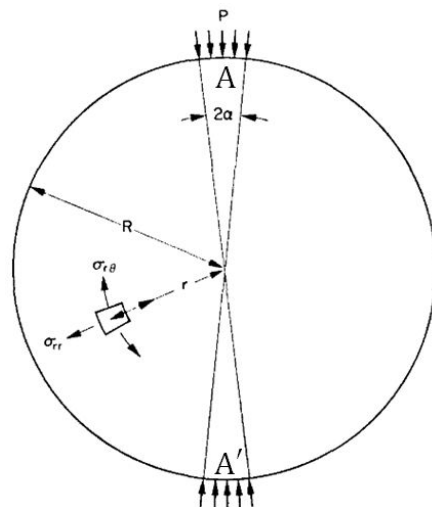
Χρησιμοποιούμε τον όρο θραύση για να περιγράψουμε τον διαχωρισμό ή θρυμματισμό του δοκιμίου σε δυο ή περισσότερα κομμάτια. Η θραύση αποτελείται από δυο στάδια, τον σχηματισμό (initiation) και την διάδοση (propagation) της ρωγμής και διακρίνεται στην όλκιμη (ductile) και την ψαθυρή (brittle). Η όλκιμη θραύση χαρακτηρίζεται από σημαντικές πλαστικές παραμορφώσεις που υφίσταται το υλικό πριν και κατά την διάρκεια διάδοσης της ρωγμής μέχρι τη θραύση του.

Όσον αφορά στην ψαθυρή θραύση, αυτή πραγματοποιείται χωρίς αισθητή παραμόρφωση (καταστροφική θραύση χωρίς προειδοποίηση) και με απότομη διάδοση της ρωγμής σχεδόν κάθετα στην διεύθυνση της αναπτυσσόμενης

εφελκυστικής ορθής τάσης, που ουσιαστικά αποτελεί και την εφελκυστική αντοχή του υλικού. Ωστόσο, η εμπειρία αποδεικνύει ότι η εκτέλεση του πειράματος του μονοαξονικού εφελκυσμού σε ψαθυρά υλικά προσκρούει σε μία σειρά προβλημάτων, όπως η πρόωγη θραύση στις περιοχές σύσφιξης των κεφαλών των δοκιμίων από τις αρπάγες λόγω τοπικής συγκέντρωσης τάσεων, ανάπτυξης στρεπτοκαμπτικών ροπών στο δοκίμιο λόγω μη δυνατότητας αυτό-ευθυγράμμισής του με τον άξονα φόρτισης, κλπ. Για το λόγο αυτό, η επιστημονική κοινότητα οδηγήθηκε στην ανάπτυξη άλλων, εναλλακτικών πειραματικών μεθόδων για τον προσδιορισμό των μηχανικών ιδιοτήτων των ψαθυρών υλικών υπό εφελκυσμό. Μία από τις ευρύτερα διαδεδομένες μεθόδους που έχει απασχολήσει πολλούς επιστήμονες είναι το πείραμα του Βραζιλιανού δίσκου.

## 1.2 ΠΑΡΑΔΟΧΕΣ – ΚΡΙΤΗΡΙΟ GRIFFITH

Σε σχέση με τη συγκεκριμένη πειραματική μέθοδο και αγνοώντας τις τάσεις τριβής μεταξύ πλακών φόρτισης και δίσκου, ο δίσκος θεωρείται ότι καταπονείται με ομοιόμορφη ακτινική φόρτιση κατά μήκος ζεύγους πεπερασμένων τόξων (**Εικ. 1.1**). Η αστοχία του δίσκου θεωρείται ότι διέπεται από το κριτήριο του Griffith [1], το οποίο θα αναλυθεί εκτενώς παρακάτω. Μια βασική παραδοχή για τον προσδιορισμό της αντοχής σε εφελκυσμό ψαθυρών υλικών είναι ότι το υλικό θεωρείται ομογενές, ισότροπο και γραμμικώς ελαστικό πριν την αστοχία του.



**Εικ. 1.1:** Ο Βραζιλιανός δίσκος υπό ομοιόμορφα κατανεμήμενη φόρτιση πάνω σε πεπερασμένα συμμετρικά τόξα [2].

Το 1924 ο Griffith έθιξε το πρόβλημα της θραύσης σε ψαθυρά υλικά όταν μία ή και δυο κύριες τάσεις είναι θλιπτικές. Θεώρησε πλάκα ομοιόμορφου πάχους που υπόκειται σε μονοαξονική θλιπτική τάση που περιέχει ανοιχτή έλλειψη με πολύ μικρό τον ένα ημιάξονα (βλέπε **Εικ. 1.2**) προσανατολισμένη υπό γωνία  $\alpha$  με την κύρια τάση  $\sigma_{II}$ . Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα του Inglis (1913) [3] ο Griffith υπολόγισε τον κρίσιμο προσανατολισμό της ελλειπτικής ρωγμής για τον οποίο εμφανίζεται η μέγιστη εφελκυστική τάση



στο άκρο της, συναρτήσει των κύριων τάσεων  $\sigma_I$  και  $\sigma_{II}$  ( $|\sigma_I| > |\sigma_{II}|$ ). Κατά τον Griffith, η ρωγμή θα διαδιδόταν όταν η παραπάνω τάση θα υπερνικούσε την τάση συνοχής,  $K$ , μεταξύ των μορίων του υλικού. Σε αυτήν δε την περίπτωση και αντικαθιστώντας κατάλληλα την  $K$  από την εφελκυστική αντοχή,  $\sigma_t$  του υλικού, το κριτήριο θραύσης του Griffith γράφεται ως:

$$(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + 8\sigma_t(\sigma_I + \sigma_{II}) = 0, \text{ εάν } \sigma_I + 3\sigma_{II} \geq 0$$

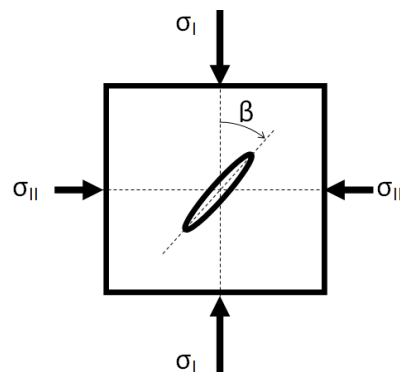
$$\sigma_{II} = \sigma_t, \quad \text{εάν } \sigma_I + 3\sigma_{II} < 0$$

Στην περίπτωση μονοαξονικής θλίψης, με  $\sigma_I, \sigma_{II} = 0$ , η πρώτη εκ των παραπάνω σχέσεων παρέχει την αντοχή του υλικού σε μονοαξονική θλίψη,  $\sigma_I = \sigma_c$ , η οποία τότε συνδέεται με την εφελκυστική αντοχή,  $\sigma_t$ , του υλικού μέσω της σχέσης:

$$\sigma_c = 8\sigma_t,$$

ένα εκ των σημείων κριτικής για το κριτήριο του Griffith καθώς η παραπάνω θεωρητικά προβλεπόμενη σχέση 8:1 μεταξύ αντοχής σε μονοαξονική θλίψη και μονοαξονικό εφελκυσμό είναι συνήθως μεγαλύτερη της πειραματικά παρατηρούμενης.

Στην συνέχεια ο Orowan (1948) [4] τροποποίησε την εξίσωση Griffith ώστε να ληφθεί υπ' όψη και η μη απολύτως ψαθυρή συμπεριφορά.



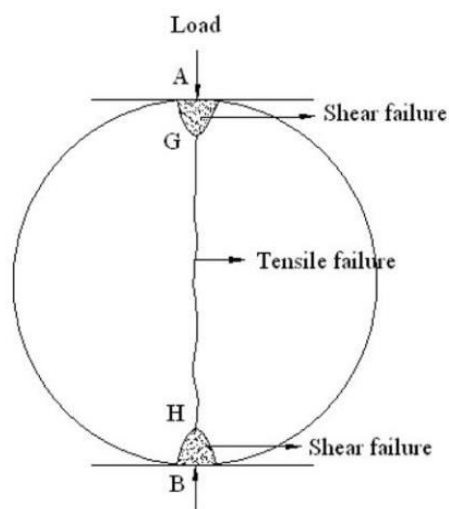
*Εικ. 1.2: Άπειρη πλάκα υπό διαξονική φόρτιση στο άπειρο, με ρωγμή μορφής έλλειψης υπό γωνία  $\beta$  προς την κατεύθυνση της κύριας τάσης  $\sigma_I$ .*

### 1.3 Η ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΩΝ ΘΕΩΡΙΩΝ ΓΙΑ ΤΟ ΒΡΑΖΙΛΙΑΝΟ ΔΙΣΚΟ

#### 1.3.1 ΠΕΡΙΟΔΟΣ 1943- 1978

Η συγκεκριμένη μέθοδος προτάθηκε το 1943 από τον Carneiro [5] για τον προσδιορισμό του ορίου αντοχής του σκυροδέματος σε εφελκυσμό και δυο μήνες αργότερα δημοσιεύτηκε σε Ιαπωνικό περιοδικό από τον Akazawa [6] μία παρόμοια μέθοδος. Η μέθοδος αυτή περιλαμβάνει την αντιδιαμετρική θλίψη κυλινδρικού δίσκου. Όπως φαίνεται στην **Εικ. 1.3**, από αυτό το είδος φόρτισης το δοκίμιο αστοχεί κατά τη διάμετρο φόρτισης σε εφελκυσμό. Η αντοχή του δοκιμίου σε εφελκυσμό υπολογίζεται με βάση την παραδοχή ότι η αστοχία συμβαίνει στο σημείο μέγιστης εφελκυστικής τάσης στο κέντρο του δίσκου.

Το 1959 εισάγεται από τον Hondros [8] η πρώτη ολοκληρωμένη θεωρητική λύση για τις τάσεις στο Βραζιλιανό δίσκο. Υπό την προϋπόθεση ότι το υλικό είναι ομογενές, ισότροπο και γραμμικώς ελαστικό, το φορτίο από τις πλάκες φόρτισης κατανέμεται ομοιόμορφα σε δυο συμμετρικά πεπερασμένα τόξα στο σύνορο του δίσκου (βλέπε **Εικ. 1.1**). Η λύση μπορεί να εφαρμοστεί τόσο σε επίπεδη ένταση (δίσκοι), όσο και σε επίπεδη παραμόρφωση (κύλινδροι). Ο Hondros ανέλυσε την κατανομή των τάσεων της μεθόδου αυτής στην περίπτωση λεπτού δίσκου που φορτίζεται με ομοιόμορφη πίεση όπως στην **Εικ. 1.1**.



**Εικ. 1.3:** Το πείραμα του Βραζιλιανού δίσκου [7].

Οι τάσεις που μας ενδιαφέρουν είναι αυτές που αναπτύσσονται κατά μήκος της διαμέτρου AA' και δίνονται από τις σχέσεις:

$$\sigma_{\theta y} = + \frac{2p}{\pi} \left[ \frac{\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \sin(2a)}{1 - 2 \frac{r^2}{R^2} \cos(2a) + \frac{r^4}{R^4}} - \tan^{-1} \left( \frac{1 + \frac{r^2}{R^2}}{1 - \frac{r^2}{R^2}} \right) \tan(a) \right] \quad (1)$$

$$\sigma_{ry} = - \frac{2p}{\pi} \left[ \frac{\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \sin(2a)}{1 - 2 \frac{r^2}{R^2} \cos(2a) + \frac{r^4}{R^4}} + \tan^{-1} \left( \frac{1 + \frac{r^2}{R^2}}{1 - \frac{r^2}{R^2}} \right) \tan(a) \right] \quad (2)$$

Όπου :

- $\sigma_{\theta y}$  : η εγκάρσια ορθή τάση σε ένα σημείο της AA',
- $\sigma_{ry}$  : η ακτινική ορθή τάση σε ένα σημείο της AA',
- $p$  : η ομοιόμορφη πίεση ( $p=P/at$ ),
- $P$  : το συνολικό φορτίο της μηχανής,
- $R$  : η ακτίνα του δίσκου,
- $r$  : η επιβατική ακτίνα τυχαίου σημείου του δίσκου,
- $2a$  : τόξο γωνίας στο οποίο δρα η ομοιόμορφη πίεση  $p$ ,
- $t$  : το πάχος του δίσκου.

Στο κέντρο του δίσκου ισχύει:

$$\sigma_{\theta y} = + \frac{2p}{\pi} (\sin(2a) - a) \cong \frac{2pa}{\pi}, \quad (a < R/5)$$

και αντικαθιστώντας,  $P/Dt = pa$ ,

$$\sigma_{\theta y} = \frac{2P}{\pi Dt}$$

Ωστόσο, η προσέγγιση του Βραζιλιανού δίσκου παρουσιάζει δύο βασικά μειονεκτήματα: το τασικό πεδίο στο κέντρο του δίσκου δεν είναι μονοαξονικό αλλά διαξονικό και η υψηλή συγκέντρωση τάσεων στην

περιοχή επαφής του δίσκου με την πλάκα φόρτισης οδηγεί συχνά σε πρόωμη θραύση στην περιοχή αυτή αντί στο κέντρο του δίσκου.

Τα μειονεκτήματα της μεθόδου δημιούργησαν προβληματισμό στον επιστημονικό κόσμο σχετικά την εγκυρότητα της μεθόδου. Ήδη, το 1964 ο Fairhurst [2] βασιζόμενος στο κριτήριο του Griffith μελετά τα προβλήματα του πειράματος του Βραζιλιανού δίσκου. Επισημαίνει πως τα αποτελέσματα δείχνουν ότι η αστοχία μπορεί να επέλθει μακριά από το κέντρο του δίσκου για μικρές γωνίες επαφής μεταξύ δίσκου-αρπάγης στην περιοχή φόρτισης για υλικά με μικρό λόγο θλιπτικής αντοχής προς εφελκυστική αντοχή. Σε αυτές τις περιπτώσεις, η τιμή της πειραματικής εφελκυστικής αντοχής είναι μικρότερη από την θεωρητική τιμή.

Ο Colback (1966) [9] υπήρξε από τους ερευνητές που επίσης αμφισβήτησε την ορθότητα των αποτελεσμάτων που προέκυπταν από τα πειράματα του Βραζιλιανού δίσκου. Υποστηρίζει ότι η θραύση πρέπει να ξεκινάει από το κέντρο του δίσκου, εκεί δηλαδή που η μέγιστη εφελκυστική τάση προκαλεί την αστοχία. Στηριζόμενος στην τροποποιημένη θεωρία του Griffith για τη θραύση, προσπάθησε να εκτιμήσει την έναρξη της θραύσης σε φορτισμένο Βραζιλιανό δίσκο, χρησιμοποιώντας την μέθοδο της φωτοελαστικότητας. Με τον τρόπο αυτό αποσκοπούσε στο να προσδιορίσει το σημείο της έναρξης της αστοχίας. Κατέληξε στο συμπέρασμα ότι η μέθοδος αυτή δεν μπορούσε να αξιολογηθεί πλήρως καθώς δεν υπήρχαν επαρκή στοιχεία που να επιβάλουν την έναρξη της ρωγμής στο κέντρο ακόμα και αν η κατανομή ήταν η κατάλληλη.

Αργότερα, ο Hooper (1970) [10] χρησιμοποιεί γυάλινα κυλινδρικά δοκίμια για να εξετάσει αν υπό διαμετρική θλίψη, η αστοχία θα ξεκινήσει από τα σημεία επαφής δίσκου-αρπάγης. Συμπεραίνει ότι στην περιοχή επαφής αναπτύσσονται τάσεις τριβής, που ερμηνεύουν το γεγονός ότι η θραύση δεν ξεκινάει πάντα από το κέντρο του δοκιμίου. Επίσης, όταν οι πλάκες είναι πιο άκαμπτες συγκριτικά με το δοκίμιο, αναπτύσσονται θλιπτικές τάσεις στις άκρες του τόξου επαφής κατά μήκος του κυλίνδρου. Η θεωρία ότι η τέλεια

επαφή χωρίς ολίσθηση του δοκιμίου με τις πλάκες φόρτισης ευθύνεται για την ανάπτυξη υψηλών εφαπτομενικών τάσεων καταρρίπτεται, καθώς η ολίσθηση των επιφανειών συνεπάγεται την μείωσή τους.

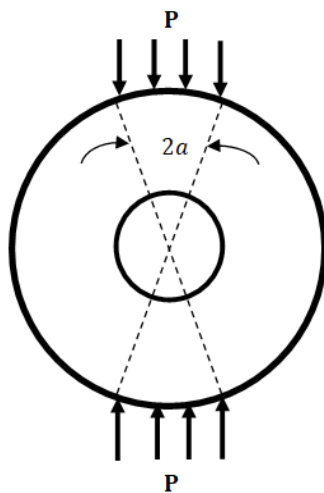
Τέλος, η πειραματική και θεωρητική διερεύνηση της επάρκειας των μεθόδων του Βραζιλιανού δίσκου και του δακτυλίου, που αναλύεται στην επόμενη παράγραφο για ισότροπα υλικά, μελετήθηκε εκτενώς στην περίπτωση της ανισοτροπίας από τους Barla και Innaurato (1973) [11] για δυο εγκαρσίως ισότροπα υλικά.

### 1.3.2 ΠΕΙΡΑΜΑ ΚΥΚΛΙΚΟΥ ΔΙΣΚΟΥ ΜΕ ΟΠΗ ΣΤΟ ΚΕΝΤΡΟ (CIRCULAR RING TEST)

Στην συγκεκριμένη ενότητα θα μας απασχολήσει το πρόβλημα του δίσκου με οπή στο κέντρο και για το λόγο αυτό θα γίνει μια μικρή αναφορά σε ερευνητές που έχουν ασχοληθεί με το πρόβλημα σε θεωρητικό επίπεδο.

Το 1898 ο Kirsch [12] εξάγει λύση για το τασικό πεδίο που αναπτύσσεται γύρω από κυκλική οπή φορτισμένης πλάκας απείρων διαστάσεων. Τα πεδία τάσεων ενός δακτυλίου υπό αντιδιαμετρική θλίψη διερευνήθηκαν αναλυτικά από τους Timpe (1905) [13], Timoshenko και Goodier (1910) [14] και Filon (1924) [15], ενώ μελετήθηκαν εκτεταμένα και από τον Frocht (1948) [16] με την μέθοδο της φωτοελαστικότητας.

Αναγνωρίζοντας τα προβλήματα του Βραζιλιανού δίσκου, η μέθοδος του κυκλικού δακτυλίου προτείνεται σχεδόν αμέσως μετά τον Βραζιλιανό δίσκο, από τους Ripperger και Davids (1946) [17]. Τη μέθοδο του κυκλικού δακτυλίου χρησιμοποίησαν σύντομα και άλλοι ερευνητές, όπως ο Assur (1958) [18] σε δοκίμια από πάγο.



*Εικ. 1.4: Το πείραμα του κυκλικού δακτυλίου.*

Οι Stevenson (1945) [19] και Jaeger (1962) [20] χρησιμοποιώντας μιγαδική ανάλυση καταλήγουν σε αναλυτικές εκφράσεις για τις τάσεις στον κυκλικό δακτύλιο. Το 1963 ο Hobbs [7],[21] «εμπνευσμένος» από το πείραμα των Berenbaum και Brodie (1959) [22], αναλύει την κατανομή των τάσεων σε ένα στερεό δίσκο με μία μικρή οπή στο κέντρο, ο οποίος φορτίζεται υπό διαμετρική θλίψη (ring test), προσδιορίζει την εφελκυστική αντοχή σε πετρώματα και την συγκρίνει με τα αντίστοιχα αποτελέσματα από το πείραμα του Βραζιλιανού δίσκου. Οι τάσεις κατά μήκος της διαμέτρου φόρτισης στερεού δίσκου παχους  $t$  και ακτίνας  $a$  είναι οι εξής:

- (i) Εφελκυστική τάση  $P_s$ , με σταθερή τιμή, που δρα κάθετα στην φόρτισης και ισούται με

$$P_s = \frac{W}{\pi t a}$$

- (i) Θλιπτική τάση  $Q_s$ , δρα κατά μήκος της διαμέτρου φόρτισης, και δίνεται από την σχέση :

$$Q_s = \frac{W}{\pi t a} \left[ \frac{a}{a - 2y} + \frac{a}{a + 2y} - 1 \right]$$

Όπου,  $W$  το φορτίο φόρτισης και  $y$  η απόσταση από το κέντρο κατά μήκος της διαμέτρου φόρτισης. Για πολύ μικρό  $y$  έχουμε :

$$Q_s = \frac{W}{\pi t a}$$

Σύμφωνα με τον Kirsch στο σημείο A η  $P_s$  παράγει εφελκυστική τάση  $3P_s$ , ενώ στο B θλιπτική τάση  $P_s$ . Ομοίως, στο A η  $Q_s$  παράγει εφελκυστική τάση  $Q_s$  και στο B θλιπτική  $3Q_s$ .

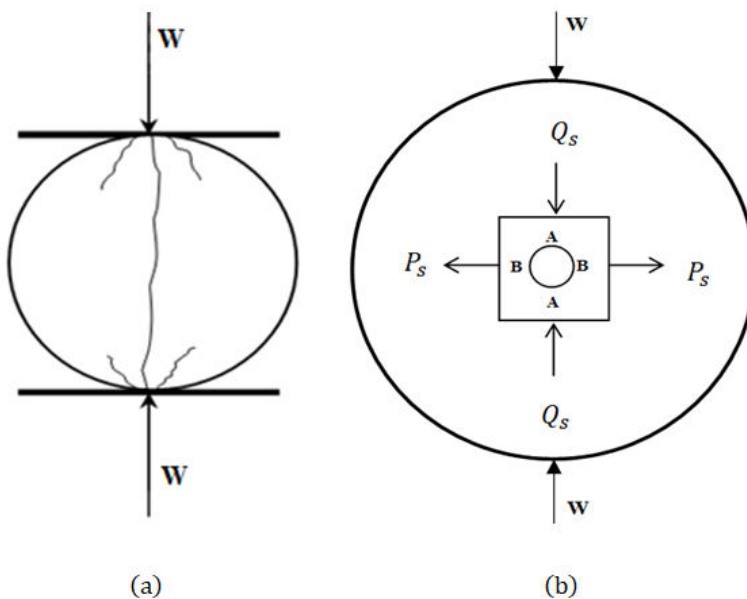
Συνεπώς, στο σημείο A η εφελκυστική τάση δίνεται από την σχέση:

$$P = 3P_s + Q_s = \frac{6W}{\pi t a}$$

Και στο σημείο B η θλιπτική τάση είναι :

$$Q = P_s + 3Q_s = \frac{10W}{\pi ta}$$

δηλαδή παρατηρείται ότι, η μέγιστη εφελκυστική τάση σε στερεό δίσκο με μικρή οπή στο κέντρο είναι 6 φορές μεγαλύτερη από την μέγιστη τάση σε στερεό δίσκο χωρίς οπή που υπόκειται στο ίδιο διαμετρικό φορτίο.



**Εικ. 1.5:** (a) Διατμητική τάση σε στερεό δίσκο, (b) Διάγραμμα που απεικονίζει την θεωρία του Kirsch [7].

Ο Hobbs διεξάγει σειρά πειραμάτων με κυκλικό δίσκο με μικρή οπή στο κέντρο του, φορτίζοντας είτε με αντιδιαμετρικές δυνάμεις, είτε με ομοιόμορφη φόρτιση που ασκείται κατά μήκος δύο πεπερασμένων συμμετρικών τόξων στην περιμέτρό του. Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων, προκύπτει ότι η μέγιστη εφελκυστική τάση στο σημείο που η διάμετρος φόρτισης τέμνει την περιφέρεια του εσωτερικού κύκλου (κεντρικής οπής) ισούται με:



$$\sigma_{\max} = q \frac{W}{\pi t R_{\text{out}}}$$

Όπου,

$q$	:	ο λόγος $R_{\text{out}}/R_{\text{in}}$
$R_{\text{out}}$	:	η εξωτερική ακτίνα και
$R_{\text{in}}$	:	εσωτερική ακτίνα του δακτυλίου και
$t$	:	το πάχος του και
$W$	:	το εξωτερικό φορτίο.

Συγκρίνοντας τις εκφράσεις για την εφελκυστική αντοχή του Βραζιλιανού δίσκου και του δακτυλίου, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι οι εκφράσεις αυτές είναι παρόμοιες διαφέροντας κατά το συντελεστή  $q$ .

Το 1966 οι Jaeger και Hoskins [23] μελέτησαν την πειραματική και θεωρητική ανάλυση των τάσεων σε έναν δακτύλιο που φορτίζεται ομοιόμορφα κατά μήκος δυο συμμετρικών τόξων της περιμέτρου του, γωνίας  $2\alpha = 15^\circ$ . Πραγματοποιούν τρία είδη πειραμάτων:

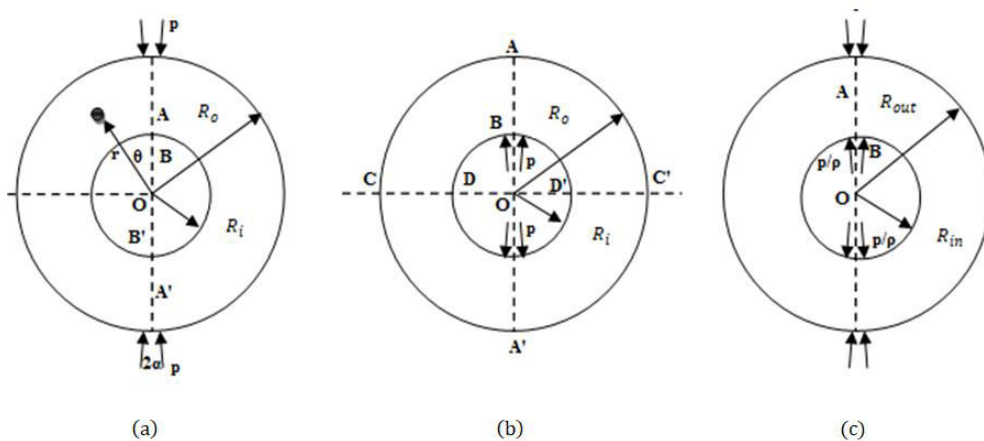
- εξωτερική περίμετρος φορτισμένη, εσωτερική αφόρτιστη
- εσωτερική περίμετρος φορτισμένη, εξωτερική αφόρτιστη
- συνδυασμός των δύο παραπάνω (βλέπε *Εικ. 1.6*).

Στο πρώτο είδος φόρτισης παρατήρησαν ρωγμές στην εσωτερική επιφάνεια του μαρμάρου οι οποίες δεν διαδόθηκαν για να επέλθει αστοχία. Το συγκεκριμένο γεγονός τους οδήγησε στο συμπέρασμα ότι η αστοχία του υλικού επέρχεται παράλληλα με την διάδοση της ρωγμής στο εσωτερικό του δακτυλίου και επεκτείνεται προς την επιφάνεια του μαρμάρου.

Μια ενδιαφέρουσα παρατήρηση είναι αυτή των Addinall και Hackett (1965) [24], ότι η εφελκυστική αντοχή που προκύπτει από το ring test αυξάνεται καθώς μειώνεται η διάμετρος της οπής. Με άλλα λόγια, η αντοχή σε εφελκυσμό σε τέτοιου είδους πειράματα είναι τεχνολογική ιδιότητα και όχι ιδιότητα του υλικού. Στο ίδιο συμπέρασμα κατέληξε ο Hudson (1969) [25], [26], ο οποίος σε δημοσίευσή του αναφέρει ότι οι επαναλαμβανόμενες μετρήσεις της εφελκυστικής αντοχής κάτω από τις ίδιες πειραματικές συνθήκες παρουσιάζουν μια μεταβλητότητα, η οποία ξεφεύγει από τα

επιτρεπτά όρια του πειραματικού σφάλματος. Επιπλέον, η μέση εφελκυστική αντοχή ποικίλλει ανάλογα με την γεωμετρία του δοκιμίου και τις συνθήκες φόρτισης. Στην προσπάθειά του να δώσει μια εξήγηση για αυτή την διαφορά των εφελκυστικών τάσεων ο Hudson αναφέρει τέσσερις πιθανές εξηγήσεις:

- (a) Η φύση της εφελκυστικής αντοχής, κατά την οποία μεγάλα κομμάτια πετρώματος έχουν περισσότερες και μεγαλύτερες ρωγμές και συνεπώς αστοχούν σε μικρότερα αναλογικά φορτία,
- (b) Η θραύση ξεκινάει αλλά δεν μεταδίδεται,
- (c) Η τάση που υπολογίζεται δεν είναι η ‘πραγματική’
- (d) Συνδυασμός των παραπάνω.



**Εικ. 1.6:** (a) Εξωτερική φόρτιση με ακτινική πίεση  $p$ , (b) Εσωτερική φόρτιση με ακτινική πίεση  $p$ , (c) Εξωτερική και εσωτερική φόρτιση  $p$  [23].

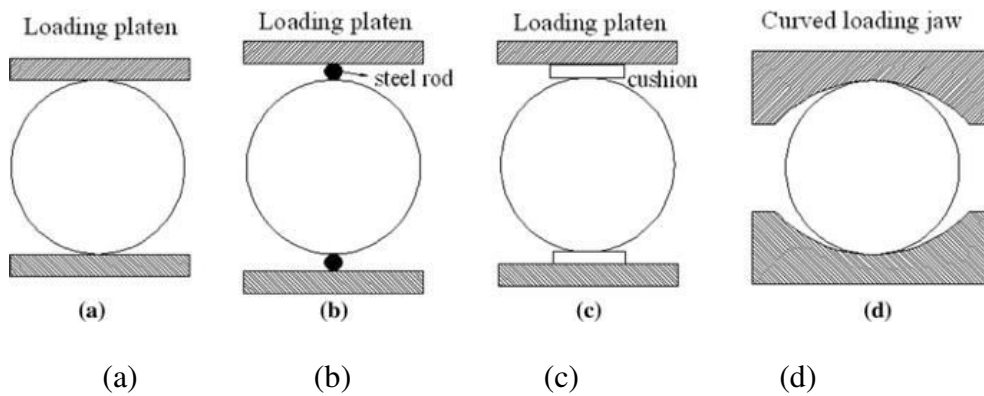
Θα εστιάσουμε στην τρίτη περίπτωση, η οποία χρήζει σχολιασμού. Στα πειράματα του δακτυλίου η οπή μπορεί να μειωθεί μέχρι να μην έχει καμία επίδραση. Δηλαδή, φυσικώς, η οπή δεν μπορεί να θεωρηθεί παρά μία ασυνέχεια σε τελείως ελαστικό συνεχές υλικό. Ο Hudson κατέληξε στο συμπέρασμα ότι για τα υλικά που χρησιμοποίησε για το πείραμα του δακτυλίου, ακόμα και για το εύρος των τιμών του  $k$  (όπου  $k$  ο συντελεστής που συσχετίζει την κρίσιμη τάση στον B.D με την αντίστοιχη στον δακτύλιο) που προκύπτει η τιμή της κρίσιμης αντοχής, αυτή δεν ανταποκρίνεται στην τιμή της πραγματικής αντοχής.

Όσον αφορά την θραύση στο πείραμα του Βραζιλιανού δίσκου, παρατήρησε πως στην περίπτωση που χρησιμοποιήθηκαν επίπεδες χαλύβδινες πλάκες σε μηχανή κλειστού κυκλώματος, η θραύση ξεκινούσε κάτω από τα σημεία φόρτισης. Στα πειράματα του δακτυλίου, παρατήρησε ότι η αστοχία ξεκινούσε από αυτά τα σημεία αλλά και από το σημείο τομής του εσωτερικού συνόρου της οπής με την διάμετρο φόρτισης. Τα πειράματα πραγματοποιήθηκαν με την χρήση μηχανής κλειστού κυκλώματος, επειδή απελευθερώνει σταδιακά ενέργεια σε σύγκριση με αυτή που απαιτείται για να αστοχήσει το δοκίμιο. Άλλος ένας λόγος που οδήγησε στην χρήση της μηχανής κλειστού κυκλώματος είναι ότι πρέπει να αναπτυχθεί η ικανότητα για ασφαλή αποφόρτιση του δοκιμίου σε οποιοδήποτε στάδιο της αστοχίας, για τον προσδιορισμό της έναρξης της ρωγμής τόσο στα πειράματα του Βραζιλιανού δίσκου, όσο και στα πειράματα του δακτυλίου. Επίσης, για την μελέτη της ρωγμής χρησιμοποιήθηκαν φωτογραφίες των δοκιμίων από την σάρωση των επιφανειών τους με δέσμη ηλεκτρονίων εστιασμένη στις ρωγμές. Μέσω των φωτογραφιών, εύκολα παρατηρεί κάποιος ότι η μικροδομή του υλικού παίζει ρόλο στην ανάπτυξη και διάδοση των ρωγμών.

Στο σημείο αυτό να αναφέρουμε ότι πολλοί ερευνητές μελέτησαν την εφαρμογή του δακτυλίου σε πάγο μετά τον Assur [18] και συγκεκριμένα την επίδραση της μεταβολής του μεγέθους της οπής επί της αντοχής. Οι Paige και Keneddy (1967) [27] υλοποίησαν πειράματα σε δοκίμια με θαλάσσιο πάγο και παρατήρησαν ότι όταν το  $q$  κυμαίνεται μεταξύ  $5/6$  και  $1/6$ , η αντοχή δεν μεταβάλλεται.

Μια ενδιαφέρουσα και εκτενής μελέτη για τους παράγοντες που επηρεάζουν τα πειράματα του Βραζιλιανού δίσκου και του κυκλικού δακτυλίου πραγματοποιείται από τους Mellor και Hawkes (1971) [28]. Από τα αποτελέσματα των πειραμάτων τους, οδηγήθηκαν στο συμπέρασμα ότι το πείραμα του Βραζιλιανού δίσκου υπερτερεί του δακτυλίου. Για τα υλικά τύπου Griffith, από το πρώτο είδος πειραμάτων, προκύπτει καλύτερη προσέγγιση της μονοαξονικής αντοχής σε εφελκυσμό. Επιπροσθέτως, εισάγουν μια νέα τεχνική στην φόρτιση του δίσκου. Συγκεκριμένα, αντί της χρήσης επίπεδων πλακών φόρτισης, προτείνονται καμπύλες πλάκες ώστε να μειωθεί η συγκέντρωση τάσης στα σημεία φόρτισης. Τέλος, οι Tokonyu,

Hung και Ma (2010) [29] εισάγουν μια αναλυτική λύση για το πεδίο των τάσεων σε δακτύλιο που υποβάλλεται σε θλίψη από ομοιόμορφες αντιδιαμετρικές δυνάμεις.



**Εικ. 1.7:** Τεχνικές φόρτισης Βραζιλιανού δίσκου, (a) επίπεδες πλάκες φόρτισης, (b) επίπεδες πλάκες φόρτισης με δυο χαλύδινες ράβδους μικρής διαμέτρου, (c) επίπεδες πλάκες φόρτισης με παρέμβυσμα, (d) καμπύλες πλάκες φόρτισης.[30]

### 1.3.3 Η ΠΡΟΤΑΣΗ ΤΗΣ ISRM ΓΙΑ ΤΗΝ ΒΕΛΤΙΩΣΗ ΤΟΥ ΠΕΙΡΑΜΑΤΟΣ ΤΟΥ ΒΡΑΖΙΛΙΑΝΟΥ ΔΙΣΚΟΥ

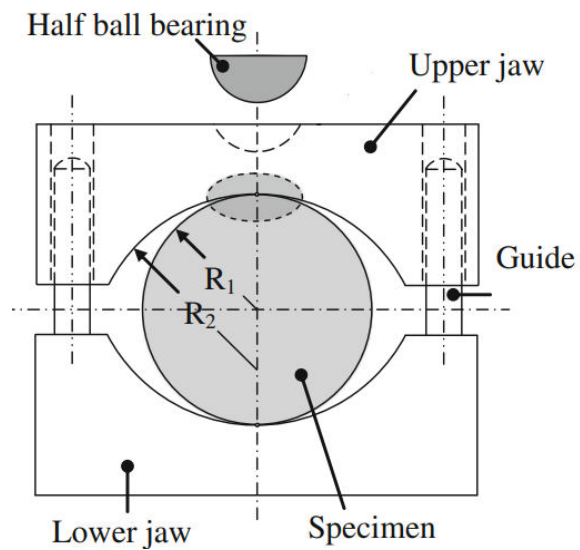
Οι πειραματικές και θεωρητικές μελέτες από το 1943 μέχρι το 1978 θέτουν τα θεμέλια για την ανάπτυξη προτυποποιημένης μεθόδου από την ISRM [31] για την βελτίωση των αποτελεσμάτων των πειραμάτων του Βραζιλιανού δίσκου. Η μέθοδος που προτάθηκε είναι παρόμοια με την τεχνική που εφάρμοσαν οι Mellor και Hawkes. Βασίστηκε στο γεγονός ότι στα γεωϋλικά το τασικό πεδίο είναι διαξονικό και η αστοχία επέρχεται όταν η μία κύρια τάση είναι εφελκυστική ( $\sigma_I$ ) και η άλλη θλιπτική ( $\sigma_{II}$ ) (και ισχύει  $\sigma_{II} \leq 3\sigma_I$ ). Η πειραματική διάταξη, όπως φαίνεται και στην **Εικ. 1.8**, αποτελείται από δυο μεταλλικές αρπάγες εσωτερικής ακτίνας καμπυλότητας  $R_2 = 1.5R_1$ , όπου  $R_1$  η ακτίνα του κυλινδρικού δοκιμίου. Όταν αγνοείται το βάρος των αρπάγων, η αρχική επαφή αρπάγων δοκιμίου πραγματοποιείται κατά μήκος της κοινής γενέτειρας των κυλινδρικών επιφανειών του δίσκου και της αρπάγης. Αναφερόμαστε δηλαδή σε γραμμές που είναι κάθετες στην διάμετρο  $OO'$  και στα σημεία  $O$  και  $O'$ . Η σταδιακή αύξηση του εξωτερικού φορτίου προκαλεί παραμόρφωση τόσο στις αρπάγες όσο και στο δοκίμιο (είτε πλαστικά είτε ελαστικά) και η επαφή πραγματοποιείται κατά μήκος δυο πεπερασμένων τόξων μήκους  $2l$  (συμμετρικού ως προς τον άξονα  $y$ ). Το μήκος αυτό είναι ανάλογο του φορτίου, δηλαδή αύξηση του φορτίου επιφέρει αύξηση του μήκους αλλά γενικώς θεωρείται αμελητέο συγκριτικά με το μέγεθος του δίσκου. Η αρπάγη μπορεί να θεωρηθεί στερεό σώμα, όμως σε πολλές εφαρμογές η παραμόρφωση της σε σχέση με αυτή του δίσκου δεν μπορεί να αγνοηθεί. Το πεδίο των τάσεων που αναπτύσσεται στην περιοχή επαφής δίσκου - αρπάγης επηρεάζεται σημαντικά από το μέγεθος του μήκους αλλά και από την κατανομή της ακτινικής πίεσης, η οποία μεταβάλλεται από την παραμόρφωση τόσο των αρπαγών όσο και του δοκιμίου.

Η θλίψη δημιουργεί εφελκυστικές τάσεις κάθετα στην κατακόρυφη διάμετρο οι οποίες παραμένουν περίπου σταθερές σε μία ευρεία περιοχή του κατακόρυφου άξονα περί το κέντρο του δίσκου. Για τον υπολογισμό της έμμεσης αντοχής σε εφελκυσμό υποθέτουμε ότι η αστοχία συμβαίνει στο σημείο όπου η εφελκυστική τάση λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της, δηλαδή ακριβώς στο κέντρο του δίσκου. Η έκφραση για τον υπολογισμό της εφελκυστικής αντοχής για τον Βραζιλιανό δίσκο που προτείνεται από την ISRM είναι ίδια με αυτήν που εισήγαγε ο Hondros και δίνεται από την σχέση:

$$\sigma_t = \frac{2P}{\pi dt} = 0.636 \frac{P}{dt}$$

Όπου,

- P : το φορτίο αστοχίας  
d : η διάμετρος του δίσκου  
t : το πάχος



*Εικ. 1.8: Προτεινόμενη πειραματική διάταξη του Βραζιλιανού Δίσκου από την ISRM [32].*

#### 1.3.4 ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΟΥ ΒΡΑΖΙΛΙΑΝΟΥ ΔΙΣΚΟΥ ΤΗΝ ΠΕΡΙΟΔΟ 1979-1999

Ύστερα από την μέθοδο για τον προσδιορισμό της εφελκυστικής αντοχής πετρωμάτων που προτάθηκε από την ISRM ξεκινά μια νέα περίοδος για το πείραμα του Βραζιλιανού δίσκου, το οποίο πλέον έχει γίνει ευρέως γνωστό στην επιστημονική κοινότητα και απασχολεί τους ερευνητές για την εγκυρότητά του.

Η ανισοτροπία με την οποία ήδη ασχολήθηκαν από το 1973 οι Barla και Innaurato, η μη γραμμική παραμόρφωση υπό εφελκυσμό, η θλίψη, καθώς και η επίδραση του μεγέθους των δοκιμίων αποτελούν σημαντικά ζητήματα προς διερεύνηση για τους ειδικούς.

Το 1980 ο Lajtai [33] υποστηρίζει ότι στο πείραμα φόρτισης με σημειακό φορτίο (point load test) η τιμή της αντοχής σε εφελκυσμό που προκύπτει είναι μικρότερη σε σχέση με αυτή που υπολογίζεται από το πείραμα του Βραζιλιανού δίσκου, το οποίο δίνει ακριβέστερη τιμή της εφελκυστικής αντοχής και της διασποράς της συναρτήσει του προασαντολισμού του φορτίου.

Οι Sundaram και Corrales (1980) [34] διατύπωσαν την άποψη ότι να αποδεχόμαστε τις ίδιες υποθέσεις τόσο για τον εφελκυσμό όσο και για την θλίψη συνεπάγεται την 'υπερεκτίμηση' της μεθόδου του Βραζιλιανού δίσκου και θεώρησαν διαφορετικές παραδοχές για τα υλικά όταν εφελκύνονται και όταν θλίβονται. Αργότερα, οι Pandey και Singh (1986) [35] σύγκριναν την έμμεση μέθοδο εφελκυσμού (Brazilian disk) με την άμεση συμβατική και παρατήρησαν ότι η τιμή της αντοχής από την πρώτη είναι διπλάσια από αυτή της δεύτερης, αποδεχόμενοι και αυτοί την αντίληψη που είχε αναπτυχθεί από τον Hudson το 1969 [25].

Η στατιστική μελέτη των Newman και Bennett (1990) [36] σχετικά με την επιρροή της γεωμετρίας / διαστάσεων δοκιμίου από αμμόλιθο επί του πεδίου των τάσεων και της αντοχής του υλικού με την μέθοδο του Βραζιλιανού δίσκου επιβεβαιώνει ότι ο λόγος μήκους προς διάμετρο του δοκιμίου επηρεάζει σημαντικά την αντοχή.

Ο Adreev (1991) [37], [38] επικεντρώθηκε στον τύπο υπολογισμού της εφελκυστικής αντοχής του υλικού από το πείραμα του Βραζιλιανού δίσκου

και στις συνθήκες επαφής. Αποφάνθηκε ότι θραύση στην επιφάνεια επαφής δεν εμφανίζεται αν το μέτρο ελαστικότητας του υλικού είναι διαφορετικό από αυτό της αρπάγης και ότι τα αποτελέσματα από το πείραμα του Βραζιλιανού δίσκου είναι έγκυρα μόνο για υλικά που αστοχούν ψαθυρά. Ο τύπος υπολογισμού της έμμεσης εφελκυστικής αντοχής που εισάγει είναι :

$$R_t = \frac{2P}{\pi DL} \left( n + \frac{3}{n} \right)$$

όπου,

- P : το φορτίο  
L : το πάχος του δοκιμίου  
D : η διάμετρος  
n : ο λόγος της θλιπτικής αντοχής  $R_c$  προς την εφελκυστική αντοχή  $R_c$

Την περίοδο αυτή για πρώτη φορά η εξέλιξη της τεχνολογίας στον τομέα των υπολογιστών δρα ως αρωγός στην προσπάθεια των ερευνητών να μελετήσουν την έμμεση μέθοδο. Πιο συγκεκριμένα, οι Malan et. al (1994) [39], ερευνούν την επιρροή της διεπαφής στο ξεκίνημα και την διάδοση της θραύσης και χρησιμοποιούν ένα λογισμικό για την προσομοίωση της διαδικασίας της αστοχίας και το κριτήριο Mohr-Coulomb. Η επιρροή της ανισοτροπικής φύσης των υλικών στο πείραμα του Βραζιλιανού δίσκου μελετάται πειραματικά και αναλυτικά από τους Chen et. al. (1998) [40], οι οποίοι συμπεραίνουν ότι η μέθοδος βασίζεται σε παραδοχές ελαστικότητας και ισοτροπίας του υλικού και δεν μπορεί να εφαρμοστεί σε ανισότροπα υλικά. Επίσης, απέδειξαν ότι η έμμεση εφελκυστική αντοχή σε ανισότροπα πετρώματα είναι μεταβλητή, και εξαρτάται από την γωνία μεταξύ του άξονα ανισοτροπίας και του άξονα φορτίσεως.



### 1.3.5 Η ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΩΝ ΘΕΩΡΙΩΝ ΤΟΥ ΒΡΑΖΙΛΙΑΝΟΥ ΔΙΣΚΟΥ ΤΗΝ ΠΕΡΙΟΔΟ 2000-2020

Για πρώτη φορά από το 1943 τα ονόματα δυο Ελλήνων επιστημόνων περιλαμβάνονται στην παγκόσμια λίστα όσων μελέτησαν το πείραμα του Βραζιλιανού δίσκου. Οι Exadaktylos και Kaklis (2001) [41] παρουσιάζουν αναλυτικές λύσεις για τον υπολογισμό των τάσεων και των παραμορφώσεων σε οποιοδήποτε σημείο ανισότροπου κυκλικού δακτυλίου που φορτίζεται θλιπτικά με ακτινικό φορτίο. Στην συνέχεια, οι Lavron et al. (2002) [42] παρουσίασαν την ανάλυση της μηχανικής υποβάθμισης σύμφωνα με το φαινόμενο Kaiser με αυξανόμενη απόκλιση της κύριας καταπόνησης μεταξύ φόρτισης και δίσκων στο πείραμα του Βραζιλιανού δίσκου. Με την χρήση της μεθόδου της ασυνέχειας της μετατόπισης επιβεβαίωσαν τα αποτελέσματά τους. Κατά την διάρκεια των πειραμάτων καταγράφηκαν ακουστικές εκπομπές.

Οι Yu et al. το 2003 [43], χρησιμοποιώντας την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων για την επίπεδη ψηφιακή επεξεργασία της εικόνας, παρουσίασαν μία διδιάστατη ανάλυση των γεωϋλικών λαμβάνοντας υπόψιν την ανομοιογένεια και τη μικροδομή του υλικού που επηρεάζουν σημαντικά την κατανομή των τάσεων κατά μήκος του άξονα φόρτισης του δοκιμίου. Οι Yu et al. το 2006 [44], από την ανάλυση των τάσεων που προκύπτουν από την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων σε τρεις διαστάσεις, αντιλαμβάνονται ότι η τεχνική της έμμεσης μεθόδου εφελκυσμού επηρεάζεται από το μέγεθος και ο σχήμα του δοκιμίου. Επίσης, εισάγουν την παρακάτω σχέση για τον υπολογισμό της εφελκυστικής αντοχής

$$\sigma_{BTS} = (0.2621 * k_R + 1) \frac{2F}{\pi dt}$$

όπου,

- $k_R$  : ο λόγος μεταξύ πάχους και διαμέτρου του δοκιμίου
- $F$  : το φορτίο φόρτισης (kN)
- $D$  : η διάμετρος του δοκιμίου (mm)
- $t$  : το πάχος (mm)
- $\sigma_{BTS}$  : η έμμεση εφελκυστική αντοχή που προσδιορίζεται από το πείραμα του Βραζιλιανού δίσκου (MPa).

Οι Ye et al. το 2009 [45] παρουσίασαν μια πειραματική μέθοδο από την οποία υπολογιζόταν το μέτρο ελαστικότητας σε εφελκυσμό  $E_t$  διαφόρων γεωυλικών, βασιζόμενοι στη μέτρηση των παραμορφώσεων στην επιφάνεια του δοκιμίου (με strain gauges). Διαπίστωσαν ότι οι λόγοι του μέτρου ελαστικότητας σε εφελκυσμό προς τον αντίστοιχο σε θλίψη, για μάρμαρο, αμμίτη, ασβεστόλιθο και γρανίτη κυμαίνεται μεταξύ 60 και 90%.

$$E_t = A_t E_s$$

$$A_t = \left(1 - \frac{d}{t} \arctan \frac{2t}{d}\right) (1 - \nu) + \frac{2d^2(1 + \nu)}{4t^2d^2}$$

$$E_s = \frac{0.5\sigma_t}{\varepsilon_t}$$

όπου,

- $A_t$  : συντελεστής διόρθωσης
- $E_s$  : splitting μέτρο ελαστικότητας
- $\nu$  : λόγος Poisson
- $d$  : διάμετρος του δοκιμίου (mm)
- $t$  : το πάχος (mm)
- $\sigma_t$  : η μέγιστη τάση του πειράματος (MPa)
- $\varepsilon_t$  : η παραμόρφωση που δίνεται από την σχέση  $\sigma_t/2$  στην καμπύλη τάση-παραμόρφωση.

Οι Wang et al. (2004) [46] ανέπτυξαν πειραματική τεχνική για τον προσδιορισμό μηχανικών ιδιοτήτων ψαθυρών υλικών, στην οποία χρησιμοποίησαν το Βραζιλιανό δίσκο με επίπεδη επαφή (flattened), με τις δύο επίπεδες επιφάνειές του σε απόλυτη επαφή με τις αντίστοιχες επίπεδες πλάκες πίεσης της μηχανής. Θεώρησαν λογικό ότι για να επιτευχθεί η έναρξη ρωγμών στο κέντρο του δοκιμίου (κάτι που είναι κρίσιμο για την εγκυρότητα του πειράματος), πρέπει η γωνία της φόρτισης να είναι μεγαλύτερη από 20°. Η αντοχή σε εφελκυσμό υπέθεσαν ότι δίνεται από την σχέση:

$$\sigma_{BTS} = \frac{2F}{\pi dt} k_w$$

Όπου,

$k_w$ : συντελεστής που σχετίζεται με την γωνία  $2a$ .

Για  $2a=20^\circ$ , τότε  $k_w = 0.9644$ , ενώ για  $2a=30^\circ$ , τότε  $k_w = 0.9205$ .

Ο Lanaro (2009) [47] μελέτησε την επιρροή των λανθάνουσων ρωγμών στην κατανομή των τάσεων και χρησιμοποιώντας ένα λογισμικό για συνοριακές συνθήκες κατάφερε να μοντελοποιήσει για το πείραμα του Βραζιλιανού δίσκου την έναρξη και μετάδοση των ρωγμών στα δοκίμια .

Την επιρροή της ανισοτροπίας στην εφελκυστική αντοχή και τις μεθόδους αστοχίας στο πείραμα του Βραζιλιανού δίσκου ανέλυσαν οι Tavallali, Vervoort (2010) [48], [49]. Διέκριναν τρία είδη θραύσης σε συγκεκριμένο στρωσιγενή αμμίτη: την αστοχία στρώσεων, τις κεντρικές και μη κεντρικές θραύσεις.

Το 2011-2012 οι Markides et.al. [50] θεωρώντας υλικό γραμμικά ελαστικό, ομογενές και ισότροπο και χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των μιγαδικών δυναμικών Kolosov–Muskhelishvili [51], δίνουν λύσεις για το πεδίο των τάσεων και μετατοπίσεων του δίσκου υπό ομοιόμορφη ακτινική φόρτιση κατά μήκος δυο συμμετρικών τόξων της περιφέρειας, είτε για επίπεδη ένταση είτε για επίπεδη παραμόρφωση.

Οι Markides et al. μελετούν παράλληλα το 2012 [52] τέσσερα είδη φόρτισης:

- (i) σημειακό φορτίο
- (ii) ομοιόμορφα κατανεμημένη ακτινική πίεση
- (iii) ημιτονοειδή ακτινική πίεση και
- (iv) παραβολική πίεση

Συμπέραναν ότι η παραβολική πίεση υπερτερεί, αλλά και πάλι το αποτέλεσμα δεν είναι απολύτως αξιόπιστο, καθώς στην ανάλυση υιοθετήθηκε η γραμμική ελαστικότητα ενώ αγνοήθηκαν και οι δυνάμεις τριβής στη διεπιφάνεια δίσκου αρπάγης. Η διερεύνηση για την βελτίωση του πειράματος πραγματοποιείται μέχρι και σήμερα από την επιστημονική κοινότητα με τους Markides et al. [53], [54] να προτείνουν μια νέα τεχνική, η οποία θα αναλυθεί σε επόμενο κεφάλαιο.

Οι Zhou et al. (2014) [55] έκαναν χρήση high-speed camera για την ορθή ανάλυση των αποτελεσμάτων κατά την διάρκεια πειράματος σε εφελκυσμό υπό στατική και δυναμική φόρτιση σε δοκίμια από γρανίτη. Διαπιστώθηκαν τέσσερα είδη θραύσης.

- (i) το δοκίμιο εμφανίζει ρωγμή στο κέντρο και ‘σπάει’ σε δυο τμήματα,
- (ii) το δοκίμιο αστοχεί κατά μήκος της κεντρικής γραμμής αλλά προκαλούνται κάποια θραύσματα,
- (iii) εμφανίζεται διαμετρικά κατανεμημένη θρυμματισμένη ζώνη,
- (iv) Κατά την αύξηση της τάσης δημιουργείται “damage zone” στην περιοχή φόρτισης του δοκιμίου από την οποία ξεκινάει η ρωγμή και όχι από το κέντρο.

#### 1.4 ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

Κυρίαρχη ήταν η αντίληψη ότι το τασικό πεδίο στο κέντρο του δίσκου ανεξάρτητα από της συνθήκες που επικρατούν κατά μήκος του τόξου επαφής δίσκου-αρπάγης περιγράφεται από την κλασική λύση του Hondros (1959) [8] που θεώρησε ως φόρτιση μια ομοιόμορφη ακτινική κατανομή πίεσης απαλλαγμένη από επαπτομενική τάση (τριβής). Αργότερα, οι Lavron και Vervoort (2002) [56], αναφέρουν ότι η τριβή στην διεπαφή δίσκου-αρπάγης προκαλεί και διατμητικές επιφανειακές τάσεις. Το 2012 οι Markides et al. [57] εστιάζουν επίσης, στην ανάπτυξη τάσεων τριβής στις επιφάνειες επαφής δίσκου-αρπάγης. Η αιτία για την εμφάνιση τριβών στην συγκεκριμένη περιοχή είναι η διαφορετική παραμόρφωση των υλικών σημείων του δίσκου και της αρπάγης και άρα η τάση για σχετική μετατόπιση των σημείων επαφής δίσκου και αρπάγης. Ωστόσο, όπως προέκυψε, το τασικό πεδίο στο κέντρο του δίσκου παραμένει σχεδόν αμετάβλητο από την παρουσία ή μη διατμητικών τάσεων στη διεπιφάνεια δίσκου-αρπάγης.

Όπως ήδη έχουμε αναφέρει, η πρόιμη θραύση σε περιοχές μακριά από το κέντρο του δίσκου (που είναι και ένα από τα βασικά κριτήρια για να θεωρηθεί ένα πείραμα Βραζιλιανού δίσκου επιτυχημένο) δημιουργούσε αμφιβολίες για την αξιοπιστία της μεθόδου. Ο Hooper (1970) [10] θεώρησε ως αιτία για τις εφελκυστικές τάσεις που «εμφανίζονται» στην διεπαφή πλάκας φόρτισης-δίσκου λόγω της μη τέλειας ομαλής επαφής καθώς και την τριαξονικότητα του τασικού πεδίου στην περιοχή επαφής. Η τριαξονικότητα δεν είναι εφικτό να εξαλειφθεί στο πλαίσιο επίπεδης ανάλυσης. Την προσέγγιση του Hooper υιοθετεί και ο Fairhurst (1964) [2], ο οποίος υποστηρίζει ότι για να αποφευχθούν τα εσφαλμένα αποτελέσματα πρέπει να βρεθεί τεχνική ελαχιστοποίησης των εφελκυστικών τάσεων λόγω τριβής.

Για τον ακριβή προσδιορισμό των οριακών συνθηκών που θα συμβάλει στην εύρεση επιτρεπτής λύσης και σχετίζεται επίσης με την ακριβή κατανομή του τασικού πεδίου σε όλο τον δίσκο, είναι αναγκαίο να δοθεί απάντηση σε τέσσερις σημαντικές ερωτήσεις:

- Ποιο το πραγματικό μήκος του τόξου επαφής;
- Ποια η κατανομή της ακτινικής πίεσης κατά μήκος του τόξου επαφής;
- Ποια η κατανομή των τάσεων τριβής κατά μήκος του τόξου επαφής;
- Πώς οι τάσεις τριβής σχετίζονται με τις ορθές τάσεις;

Προσεγγιστικά οι δυο πρώτες απαντήθηκαν από τους Timoschenko, Goodier (1979) [58] και Markides, Kourkoulis (2012) [52]. Δεν έχει δοθεί διευκρινιστική απάντηση για το τρίτο ερώτημα που είναι μείζον ζήτημα. Στις ακόλουθες μελέτες η κατανομή των τάσεων τριβής είναι αυθαίρετες: οι Addinal, Hackett (1964) [24], και Lavron, Vervoort (2002) [56], την θεώρησαν ημιτονική ενώ οι Markides, Kourkoulis [59] ομοιόμορφη με ασυνέχεια στον άξονα συμμετρίας.

Μία καλύτερη προσέγγιση δόθηκε από τους Kourkoulis, Markides, Hemsley [60], βασισμένη στο ότι οι τάσεις τριβής θα είναι ανάλογες της σχετικής μετατόπισης των υλικών σημείων δίσκου-αρπάγης σε επαφή, λόγω διαφοράς στις παραμορφώσεις/μετατοπίσεις.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι επιφάνειες επαφής που δεν είναι λείες με αποτέλεσμα την εμφάνιση τάσεων τριβών. Ο μη μηδενικός συντελεστής τριβής συνεπάγεται την εμφάνιση επαπτομενικών τάσεων με το μέγεθός τους να κυμαίνεται από μηδέν έως το ανώτατο όριο που επιβάλλει ο νόμος Amontou - Coulomb. Ως εκ τούτου, μέρος της διεπιφάνειας χαρακτηρίζεται από τέλεια συγκόλληση, ενώ το υπόλοιπο από σχετική ολίσθηση των αρχικά σε επαφή επιφανειών δίσκου και αρπάγης.

Σχετικά με το μέγεθος του τόξου επαφής, αυτό μεταβάλλεται μεταξύ εξαιρετικά ευρέων ορίων για διαφορετικά υλικά δίσκου και, συνεπώς, η απόδοση σε αυτό αυθαίρετων τιμών μπορεί να οδηγήσει σε εσφαλμένα αποτελέσματα. Το ίδιο ισχύει και για την μέγιστη τιμή της ακτινικής πίεσης, διότι για δύσκαμπτα υλικά φθάνει σε πολύ υψηλές τιμές που μπορούν να οδηγήσουν σε τοπικές συγκεντρώσεις τάσεων που δεν προβλέπονται από την ομοιόμορφη κατανομή πίεσης που συνήθως υιοθετείται στις θεωρητικές αναλύσεις.

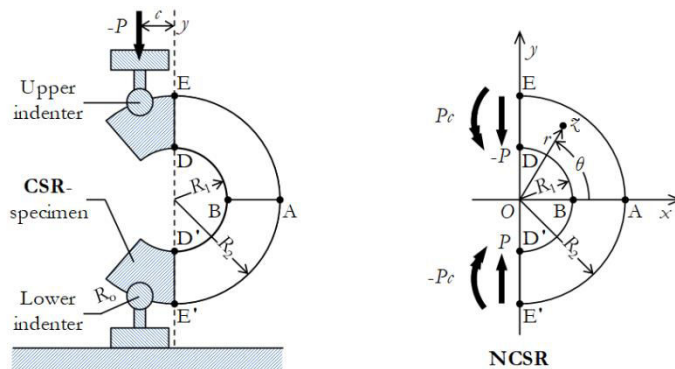
## 1.5 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟ ΗΜΙΔΑΚΤΥΛΙΟ

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει το πείραμα του Βραζιλιανού δίσκου είναι πολύ δημοφιλές λόγω της απλής γεωμετρίας του δοκιμίου, όμως, το διαξονικό τασικό πεδίο στο κέντρο του δίσκου και το γεγονός ότι η θραύση υπό ειδικές συνθήκες μπορεί να ξεκινάει από την περιοχή εφαρμογής του φορτίου και όχι από το κέντρο του δίσκου οδηγεί στην αμφισβήτηση του αποτελέσματος της εφελκυστικής αντοχής που προκύπτει. Για την εξάλειψη των προβλημάτων αυτών, αναπτύχθηκαν διάφορες εναλλακτικές πειραματικές μέθοδοι, όπως η μέθοδος του κυκλικού δακτυλίου που ήδη αναφέρθηκε, του Βραζιλιανού δίσκου με επίπεδη επαφή (flattened) και το πείραμα της κάμψης του ημίδισκου.

Πρόσφατα, οι Markides et al. (2018) [54], [55] χρησιμοποιούν το δοκίμιο της **Εικ. 1.9** κατασκευασμένο από Polymethyl methacrylate γνωστό ως plexiglass, εσωτερικής ακτίνας  $R_1$  και εξωτερικής  $R_2 = 2R_1$ , πάχους  $2h$ , φορτισμένο υπό κεντρική ή ελαφρώς έκκεντρη διαμετρική θλίψη (βλέπε **Εικ. 1.9**) εκκεντρότητας  $c = R_2/8$ . Το plexiglass προτιμήθηκε ως σχετικά ψαθυρό (το αρχικό τμήμα της καμπύλης τάσης - παραμόρφωσης είναι σχεδόν τελείως γραμμικό σύμφωνα) σύμφωνα με τις παραδοχές ότι το υλικό πρέπει να είναι ομογενές, ισοτροπο και γραμμικώς ελαστικό. Η μέθοδος που επέλεξαν εμφανίζει τα εξής πλεονεκτήματα :

- εύκολη προετοιμασία του δοκιμίου,
- ο λόγος ( $\rho$ ),  $R_1$  προς  $R_2$  μπορεί να μεταβάλλεται μεταξύ μεγάλων ορίων,
- το πολύ χαμηλό φορτίο θραύσης,
- η ανάπτυξη μονοαξονικού εφελκυστικού τασικού πεδίου στο σημείο A,
- ο λόγος της μέγιστης εφελκυστικής προς την θλιπτική τάση ελέγχεται από τον λόγο  $\rho$ .

Στη μελέτη αυτή εισάγονται αναλυτικές λύσεις (θα αναλυθούν στο επόμενο κεφάλαιο) σύμφωνα με τη μέθοδο που προτάθηκε από τον Mushkelishvili [61] για καμπύλες δοκούς. Σύγκριση των θεωρητικών δεδομένων με τα αποτελέσματα του πειραματικού πρωτοκόλλου έδειξαν ότι η θεωρητική τιμή της εφελκυστικής αντοχής που προέκυψε προσδιορίζει ικανοποιητικά την αντοχή του υπό εξέταση υλικού.



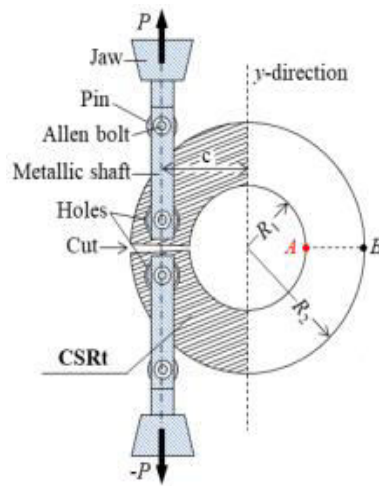
**Εικ. 1.9:** (a) Η διάταξη που χρησιμοποιείται για την πειραματική μελέτη του CSR, (b) Η τεχνική του ημιδακτυλίου που χρησιμοποιείται για την αναλυτική λύση του προβλήματος [54].

Πιο αναλυτικά, από τα επιτυχημένα πειράματα, η μέση δύναμη θραύσης ήταν ίση με 1.85 kN και η ισοδύναμη κρίσιμη εφελκυστική τάση στο σημείο A 60 MPa. Συγκρίνοντάς την με την τιμή που προκύπτει από την άμεση μέθοδο εφελκυσμού που είναι ίση με 58.5 MPa (απόκλιση 2.56% της πειραματικής από την θεωρητική τιμή) συμπεραίνουμε ότι η μέθοδος είναι αρκετά αποτελεσματική. Επιπλέον, μια αξιοσημείωτη παρατήρηση είναι ότι ο λόγος της μέγιστης θλιπτικής τάσης (που αναπτύχθηκε στο σημείο B) προς την μέγιστη εφελκυστική (που αναπτύχθηκε στο σημείο A) προέκυψε 2.

Είναι γνωστό ότι για τα περισσότερα ψαθυρά υλικά γεωϋλικά η εφελκυστική αντοχή είναι μικρότερη από το ήμισυ της θλιπτικής, επιβεβαιώνοντας έτσι το γεγονός ότι η θραύση σε αυτό το πείραμα θα ξεκινά πάντα από το σημείο A εξαιτίας της μοναδικής εφελκυστικής τάσης. Μελετώντας την επιρροή των παραμέτρων του λόγου  $\rho$ , της εκκεντρότητας  $c$ , και του παχους  $2h$  προέκυψε το συμπέρασμα ότι το πάχος των δοκιμών παίζει ρόλο και δεν πρέπει να αγνοείται (στο ίδιο συμπέρασμα οδηγούμαστε και στο κεφάλαιο 6-αριθμητικό προσομοίωμα).

Σε πρόσφατη δημοσίευση οι Markides et.al [62] προτείνουν μία νέα πειραματική διαδικασία, τον εφελκυσμό του ημιδακτυλίου, όπως φαίνεται στην **Εικ. 1.10**, και η θεωρητική ανάλυση αποδεικνύει ότι η τιμή του φορτίου θραύσης στον εφελκυσμό είναι ακόμη μικρότερη από την απαιτούμενη στο αντίστοιχο πείραμα της θλίψης του ημιδακτυλίου. Επίσης, τότε η εφελκυστική τάση στο σημείο A είναι διπλάσια σε μέτρο της θλιπτικής στο B, εξασφαλίζοντας έτσι πάντα την εφελκυστική αστοχία του δοκιμίου στο σημείο A.





*Εικ. 1.10: Η πειραματική διάταξη που προτείνεται για τον εφελκυσμό ημιδακτυλίου[62].*

## 1.6 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παραπάνω ανάλυση για τον Βραζιλιανό δίσκο από το 1943 μέχρι και σήμερα παρατηρούμε ότι η μέθοδος αυτή έχει μελετηθεί πειραματικά, θεωρητικά και αριθμητικά. Πολλοί ενδιαρμοί σχετικά με την εγκυρότητα των αποτελεσμάτων της μεθόδου έχουν εκφραστεί λόγω του διαξονικού πεδίου τάσεων και της πρώιμης θραύσης στην περιοχή επαφής δίσκου – πλάκας φόρτισης. Παρ' όλα αυτά, ο Βραζιλιανός δίσκος είναι μία πολύ διαδεδομένη τεχνική για τον προσδιορισμό της εφελκυστικής αντοχής σε γεωϋλικά και γενικά ψαθυρά υλικά, καθώς η προετοιμασία και η πειραματική διαδικασία είναι ευκολότερες σε σχέση με την συμβατική μέθοδο του μονοαξονικού εφελκυσμού. Παρά τη διεξοδική μελέτη, παραμένουν ακόμα αμφιβολίες και ερωτήματα στα οποία δεν έχουν δοθεί εξήγηση.

Το μείζον πρόβλημα που δυσκολεύει τους επιστήμονες είναι ο περιορισμός του σημείου έναρξης της θραύσης στο κέντρο του δίσκου λόγω της συχνής εμφάνισης πρώιμης θραύσης στην περιοχή άμεσης γειτνίασης του δίσκου και των πλακών φόρτισης. Τα αποτελέσματα της μεθόδου είναι έγκυρα μόνο όταν η θραύση ξεκινάει από το κέντρο του δίσκου όπως παρατήρησε και ο Yanagidani (1978) [63]. Χρησιμοποιώντας strain gauges διαπίστωσε ότι η αρχική θραύση εμφανιζόταν στην περιοχή ανάπτυξης της μέγιστης εφελκυστικής τάσης. Σε παρόμοιες παρατηρήσεις κατέληξαν και οι Van De Steen (2005) [64], Zhu και Tang (2006) [65], Cai και Kaiser (2004) [66].

Παρά τη διεξοδική μελέτη, παραμένουν ακόμα ερωτήματα στα οποία δεν έχει δοθεί ακόμα εξήγηση. Όπως αναφέρεται και σε δημοσίευση των Markides, Kourkoulis (2014) [67], παραμένουν ακόμα άγνωστες οι συνθήκες φόρτισης στην περιοχή επαφής δοκιμίου-πλάκας φόρτισης. Θεωρείται γνωστό ότι η πίεση είναι διαμετρική αλλά δεν είναι γνωστό το είδος της πραγματικής κατανομής των τάσεων.

## 2<sup>ο</sup> ΚΕΦΑΛΑΙΟ

### ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ (THEORETICAL ANALYSIS)

#### 2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ–ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται μία αναλυτική λύση για το πρώτο θεμελιώδες πρόβλημα του ημιδακτυλίου που υπόκειται σε αντιδιαμετρική θλίψη. Το πάχος του ημιδακτυλίου θεωρείται συγκρίσιμο της ακτίνας του και για το υλικό ισχύουν οι παραδοχές που αναφέρθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο ότι είναι ισότροπο, ομογενές και γραμμικά ελαστικό. Η αναλυτική λύση που θα δοθεί για το πρόβλημα βασίζεται σε αναλυτικές λύσεις που δόθηκαν από τον Muskhelishvili (1963) [61] με τη μέθοδο των μιγαδικών δυναμικών. Θα αφορά δε, από θεωρητικής άποψης, στον καθαρό κυκλικό ημιδακτύλιο (Net Circular Semi Ring: NCSR), αλλά με τη βοήθεια της αρχής του Saint-Venant θα αναφέρεται στην εκάστοτε γεωμετρία του υπό εξέταση δοκιμίου, το οποίο θα εκτείνεται πάντα πέραν του θεωρητικού ημιδακτυλίου και το οποίο θα καλούμε στο εξής χάριν ευκολίας κυκλικό ημιδακτύλιο (Circular Semi Ring: CSR) (*Εικ. 2.4*).

Κατά τον Muskhelishvili [61], ο πρώτος που ασχολείται με τέτοια προβλήματα καμπύλων δοκών υπό καμπτική ροπή ή δύναμη στα άκρα τους είναι ο Golovin [68] από το 1882. Η παρούσα μέθοδος, που προτάθηκε από τον Muskhelishvili, βασίζεται σε μία φυσική ερμηνεία των πλειότιμων μετατοπίσεων, εφόσον αυτές επιτραπεί να λαμβάνουν χώρα στο πρόβλημα της παραμόρφωσης του ημιδακτυλίου. Η φυσική αυτή ερμηνεία δόθηκε για πρώτη φορά από τον Timpe [13] το 1905, στην περίπτωση του κυκλικού δακτυλίου και γενικεύθηκε το 1907 από τον Volterra [69] για τα πολλαπλά συνεκτικά χωρία γενικά. Η φυσική αυτή ερμηνεία έγκειται στο εξής: αν κανείς φανταστεί μια μαθηματική τομή,  $ab$ , σε ένα δακτύλιο, από το

εσωτερικό έως το εξωτερικό του σύνορο (**Εικ. 2.1**), τότε οι μορφές των μιγαδικών δυναμικών του Muskhelishvili,  $\varphi(z)$  και  $\psi(z)$ , είναι τέτοιες που αν το  $z$  κινηθεί κατά μήκος καμπύλης πέριξ του εσωτερικού κύκλου από τη μία πλευρά (-) της τομής στην άλλη (+), οι συναρτήσεις αυτές και κατ' επέκταση οι μετατοπίσεις εκφρασμένες σε όρους αυτών των συναρτήσεων, παίρνουν μία μεταβολή μη φυσικά συμβατή αφού ο δακτύλιος πρέπει να συμπεριφέρεται ως συνεχές μέσο. Δηλαδή το ίδιο σημείο της τομής προκύπτει θεωρητικά να μετατοπίζεται διαφορετικά προσεγγιζόμενο από την (-) από ότι από τη (+) πλευρά. Αυτό έχει ως θεωρητικό αποτέλεσμα οι δύο πλευρές της τομής να βρίσκονται τελικά είτε με ένα κενό ανάμεσά τους, είτε να είναι αλληλοεπικαλυμμένες, είτε αλλού με κενό και αλλού με αλληλοεπικάλυψη (όπου βέβαια στα πλαίσια των μικρών παραμορφώσεων που ισχύει η θεωρία, οι παραπάνω σχετικές μετατοπίσεις είναι απειροστές ποσότητες). Στα συνήθη προβλήματα ελαστικότητας, οι παραπάνω πλειότιμες μετατοπίσεις δεν επιτρέπονται με την εισαγωγή αντίστοιχων συνθηκών, απαραίτητων για την επίλυσή τους. Κάποτε όμως, όπως στην περίπτωση της καμπύλης δοκού, διευκολύνουν οπότε εκ προθέσεως επιτρέπονται με την υιοθέτηση άλλων αντίστοιχων συνθηκών για την επίλυση του προβλήματος. Η αποδοχή από φυσικής άποψης πλειότιμων μετατοπίσεων έγινε με την υπόθεση ότι απειροστά τμήματα του δακτυλίου αφαιρούνται από αυτόν ή απειροστά τμήματα από το ίδιο υλικό προστίθενται σε αυτόν πριν την παραμόρφωση. Για παράδειγμα, αν μετά την παραμόρφωση η πλευρά (-) της τομής  $ab$  πρόκειται να βρεθεί στη θέση  $a'b''$  και η πλευρά (+) στη θέση  $a'b'$ , δηλαδή με κενό ανάμεσά τους, τότε αρκεί πριν την παραμόρφωση να αφαιρεθεί από το δακτύλιο η απειροστή λωρίδα  $a'b'a''b''$  και να «συγκολληθούν» τα δύο ελεύθερα άκρα του δακτυλίου. Τότε περιστροφή του  $z$  πέριξ του εσωτερικού κύκλου  $L_1$  θα προκαλέσει «διαστολή» και ο δακτύλιος θα αποκτήσει τις αρχικές του διαστάσεις ώστε να παραμορφωθεί ως συνεχές μέσο υπό την όποια εξωτερική φόρτιση. Αν μετά την παραμόρφωση η πλευρά (-) της τομής  $ab$  πρόκειται να βρεθεί στη θέση  $a'b'$  και η πλευρά (+) στη θέση  $a''b''$ , δηλαδή πρόκειται να υπάρξει αλληλοεπικάλυψη, τότε αρκεί πριν την παραμόρφωση να προστεθεί και να συγκολληθεί στο δακτύλιο μια απειροστή λωρίδα

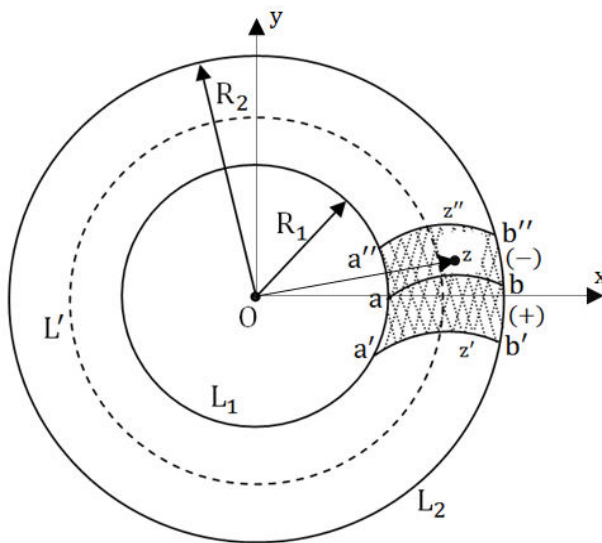
$a'b'a''b''$ . Τότε περιστροφή του  $z$  περίξ του εσωτερικού κύκλου  $L_1$  θα προκαλέσει «συστολή» και ο δακτύλιος θα αποκτήσει τις αρχικές του διαστάσεις ώστε να παραμορφωθεί ως συνεχές μέσο υπό την όποια εξωτερική φόρτιση.

Οι παραπάνω διαφορές στις μετατοπίσει των (-) και (+) πλευρών μιας θεωρητικής τομής του δακτυλίου αποδεικνύεται ότι είναι μετατοπίσεις στερεού σώματος (δηλαδή δεν περιέχουν παραμόρφωση) και μπορούν να εκφραστούν με τρεις συνιστώσες:  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $\epsilon$ , που αντιστοιχούν σε οριζόντια, κατακόρυφη και περιστροφική (πέριξ της αρχής των αξόνων) στερεές μετατοπίσεις, τις λεγόμενες χαρακτηριστικές ποσότητες της ασυνέχειας της μετατόπισης (characteristics of dislocations· ο όρος “dislocation”, δόθηκε από τον A.E.H. Love το 1927 [70], αντί του αρχικά χρησιμοποιούμενου “distortion”, από τον Volterra).

Η λύση του κυκλικού δακτυλίου, υπό τη θεώρηση μονότιμων μετατοπίσεων δίδεται αρχικά το 1931 από τον Kolosov [71] με τη χρήση ολοκληρωτικών εξισώσεων. Το 1934 ο Mikhlin [72], κάνοντας την χρήση δυναμοσειρών επιλύει ένα πιο γενικό πρόβλημα στο οποίο ο δακτύλιος αποτελείται από δυο ομόκεντρους δακτύλιους με διαφορετικές ελαστικές σταθερές υπό την υπόθεση ότι ενώνονται κατά μήκος ενός κοινού ορίου. Επιπλέον, ο εσωτερικός δακτύλιος μπορούσε να είναι συνεχής δίσκος. Το 1936, ο Muskhelishvili οδηγείται στην ίδια λύση για τον κυκλικό δακτύλιο με τη χρήση των μιγαδικών δυναμικών καθώς επίσης και στη λύση της καμπύλης δοκού, ως τμήμα του κυκλικού δακτυλίου, με τη βοήθεια της έννοιας των πλειότιμων μετατοπίσεων. Χρήση αυτών των λύσεων γίνεται και στην παρούσα εργασία.

## 2.2 ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ

### 2.2.1 Ο ΚΥΚΛΙΚΟΣ ΔΑΚΤΥΛΙΟΣ



Εικ. 2.1: Η 'μαθηματική' τομή

Έστω  $S$  η περιοχή που καταλαμβάνει η διατομή κυκλικού δακτυλίου, εσωτερικής ακτίνας  $R_1$  και εξωτερικής ακτίνας  $R_2$ , με  $R_1 < R_2$ . Τα  $L_1, L_2$  συμβολίζουν το εσωτερικό και το εξωτερικό σύνορο, αντίστοιχα. Το πάχος του δακτυλίου θα συμβολίζεται με  $h$ . Ο δακτύλιος θα θεωρείται ότι κείται στο μιγαδικό επίπεδο  $z = x + iy = re^{i\theta}$ , με το κέντρο  $O$  του Καρτεσιανού συστήματος αναφοράς  $Oxy$  να συμπίπτει με το κέντρο του δακτυλίου (Εικ. 2.1).

Έστω  $\sigma_{rr}$  και  $\sigma_{r\theta}$  οι τάσεις στα σύνορα στα  $L_1$  και  $L_2$ . Αναπτύσσοντας τις τάσεις αυτές σε σειρά Fourier για  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , γράφονται σε μιγαδική μορφή ως:

$$\sigma_{rr} - i \sigma_{r\theta} = \sum_{-\infty}^{+\infty} A'_k e^{ik\theta}, \text{ στο } L_1 \quad (2.1)$$

$$\sigma_{rr} - i \sigma_{r\theta} = \sum_{-\infty}^{+\infty} A''_k e^{ik\theta}, \text{ στο } L_2 \quad (2.2)$$

Οι ίδιες τάσεις συναρτήσεων των μιγαδικών δυναμικών:

$$\Phi(z) = \frac{d\varphi}{dz}, \quad \Psi(z) = \frac{d\psi}{dz} \quad (2.3)$$

γράφονται ως εξής (ο τόνος παριστάνει την παράγωγο και η μπάρα τη συζυγή τιμή):

$$\Phi(z) + \overline{\Phi(\bar{z})} - e^{2i\theta} [\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)] = \sigma_{rr} - i\sigma_{r\theta}, \quad \text{στα } L_{1,2} \quad (2.4)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (2.1), (2.2) και (2.4) προκύπτουν οι εκφράσεις :

$$\Phi(z) + \overline{\Phi(\bar{z})} - e^{2i\theta} [\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)] = \begin{cases} \sum_{-\infty}^{+\infty} A'_k e^{ik\theta}, & r = R_1 \\ \sum_{-\infty}^{+\infty} A''_k e^{ik\theta}, & r = R_2 \end{cases} \quad (2.5)$$

Στη γενική περίπτωση, η  $\Phi(z)$  στο χωρίο  $S$  γράφεται ως:

$$\Phi(z) = A \log z + \Phi^*(z) \quad (2.6)$$

όπου,  $\Phi^*(z)$  ολόμορφη, δηλαδή μονότιμη, συνάρτηση εντός του δακτυλίου.

Η  $\Psi(z)$  και στη γενική περίπτωση είναι πάντα μια ολόμορφη συνάρτηση.

Επομένως οι  $\Phi^*(z)$  και  $\Psi(z)$  μπορούν να αναπτυχθούν σε σειρά Laurent. Άρα γενικά οι εκφράσεις των  $\Phi(z)$  και  $\Psi(z)$  θα είναι:

$$\Phi(z) = A \log z + \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k z^k, \quad \Psi(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a'_k z^k \quad (2.7)$$

όπου  $z^k = r e^{ik\theta}$ . Αντικατάσταση των (2.7) στις (2.5) οδηγεί μετά από σύγκριση των όρων ίδιων δυνάμεων του  $\theta$ , στον υπολογισμό των συντελεστών  $a_k$ ,  $a'_k$  των  $\Phi(z)$  και  $\Psi(z)$ . Στην ουσία, για τον υπολογισμό των συντελεστών  $a_k$  και  $a'_k$  απαιτούνται δύο ακόμα συνθήκες, ενώ το φανταστικό μέρος του  $a_0$  παραμένει αυθαίρετο και για ευκολία θεωρείται  $\Im\{a_0\} = 0$ .

Στην περίπτωση μη αποδοχής πλειότιμων μετατοπίσεων, οι δύο επιπλέον συνθήκες για τον υπολογισμό των  $a_k$  και  $a'_k$  είναι οι:

$$A = 0, \quad ka_{-1} + \bar{a}'_{-1} = 0 \quad (2.8)$$

όπου  $\kappa$  είναι η σταθερά του Muskhelishvili συνδεδεμένη με τις σταθερές Lamé μέσω των σχέσεων:

$$\kappa = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}, \quad \lambda = \begin{cases} Ev/(1 + \nu)(1 - 2\nu), & \text{επίπεδη παραμόρφωση} \\ Ev/(1 - \nu^2), & \text{επίπεδη ένταση} \end{cases} \quad (2.9)$$

όπου  $E$  το μέτρο ελαστικότητας Young,  $\nu$  ο λόγος Poisson και  $\mu=G$  το μέτρο διάτμησης. Στην παρούσα εργασία, δεν παρατίθενται οι αναλυτικές εκφράσεις των συντελεστών  $a_k$  και  $a'_k$  (όπως υπολογίστηκαν από τον Muskhelishvili) καθώς αυτό εκφεύγει του αντικείμενου της παρούσας εργασίας.

Ας εξετάσουμε τώρα την περίπτωση που μας απασχολεί στην παρούσα εργασία η οποία έχει να κάνει με την αποδοχή πλειότιμων μετατοπίσεων (multi-valued displacements), προκειμένου να φτάσουμε στη λύση του ημιδακτυλίου.

Σε αυτήν την περίπτωση, προσεγγίζοντας τη θεωρητική τομή  $ab$  του δακτυλίου (**Εικ. 2.1**) από την  $(-)$  και την  $(+)$  πλευρά προκύπτουν οι κάτωθι διαφορές στις τιμές των μετατοπίσεων (παρούσας ή μη εξωτερικής φορτίσεως):

$$u^+ - u^- = -ey + a, \quad v^+ - v^- = ex + \beta \quad (2.10)$$

όπου,

$$\varepsilon = \frac{(1 + \kappa)\pi A}{\mu}, \quad \alpha + i\beta = \frac{\pi i}{\mu}(ka_{-1} + \bar{a}'_{-1}) \quad (2.11)$$



ή

$$A = \frac{\mu \varepsilon}{(1 + \kappa)\pi}, \quad \kappa a_{-1} + \bar{a}'_{-1} = \frac{\mu(\alpha + i\beta)}{\pi i} \quad (2.12)$$

με  $u$  και  $v$  την οριζόντια και κατακόρυφη συνιστώσα της μετατόπισης, αντίστοιχα. Οι παράμετροι  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\varepsilon$  είναι οι παραπάνω (§ 2.1) αναφερθείσες χαρακτηριστικές ποσότητες της ασυνέχειας της μετατόπισης (characteristics of dislocations), εκφράζουν, όπως φαίνεται από τις (2.11), μετατόπιση στερεού σώματος και παραμένουν τελείως αυθαίρετες, δηλαδή κανείς θα πρέπει να τις ορίσει ο ίδιος προκειμένου να λύσει το πρόβλημα.

Απουσία εξωτερικής φόρτισης, δηλαδή για  $\sigma_{rr} - i\sigma_{r\theta} = 0$ , συνδυασμός των (2.5), (2.7) και (2.12) παρέχουν (ακόμη και για τον αφόρτιστο δακτύλιο) κάποιους μη μηδενικούς συντελεστές γιατί  $\Phi(z)$  και  $\Psi(z)$ , οι οποίες σε αυτήν την περίπτωση γίνονται:

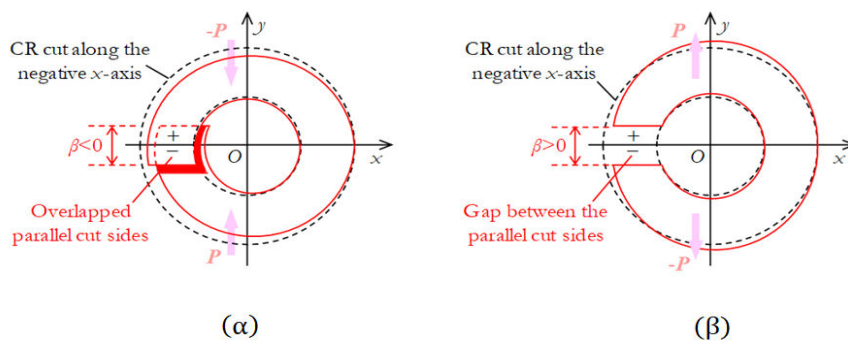
$$\Phi(z) = A \log z + a_0 + a_1 z + a_{-1} z^{-1} \quad (2.13)$$

$$\Psi(z) = a'_{-1} z^{-1} + a'_{-2} z^{-2} + a'_{-3} z^{-3} \quad (2.14)$$

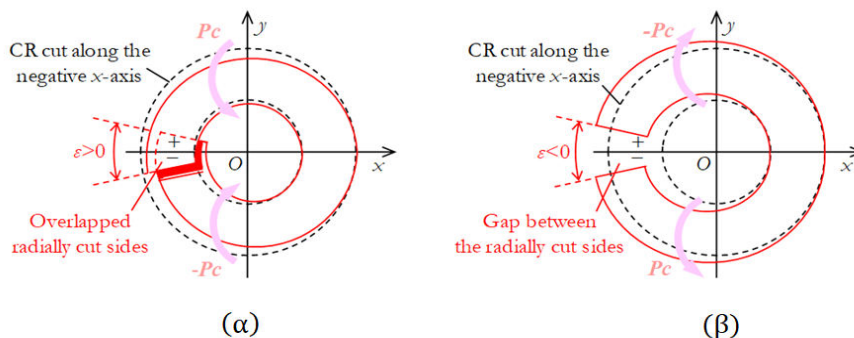
όπου οι αναλυτικές εκφράσεις των παραπάνω μη μηδενικών  $a_k$ ,  $a'_k$  δίδονται από τον Muskhelishvili [61].

## 2.2.2 Ο ΚΥΚΛΙΚΟΣ ΗΜΙΔΑΚΤΥΛΙΟΣ

Σε σχέση με την ανάλυση της προηγούμενης παραγράφου (§2.2.1) ο Muskhelishvili [61] έδειξε ότι η αποδοχή πλειότιμων μετατοπίσεων στον κυκλικό δακτύλιο οδηγεί σε ένα ιδιότυπο είδος παραμόρφωσης του κομμένου δακτυλίου (κατά μήκος μιας μαθηματικής τομής), καίτοι αυτός θεωρείται στην αφόρτιστη κατάσταση. Οι δε ποσότητες  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $\varepsilon$ , αν και εκφράζουν μετατοπίσεις στερεού σώματος (δηλαδή των δύο πλευρών της τομής), έχουν ρόλο σε αυτήν την ιδιότυπη παραμόρφωση. Ειδικά για τον κυκλικό ημιδακτύλιο που θα μας απασχολήσει σε αυτήν την παράγραφο, ο ρόλος του  $\beta$ , για  $\alpha=\varepsilon=0$  και του  $\varepsilon$ , για  $\alpha=\beta=0$ , φαίνονται για τον κομμένο κυκλικό δακτύλιο στις **Εικ. 2.2** και **Εικ. 2.3**, αντίστοιχα.



**Εικ. 2.2:** Η φύση της  $\beta$ -ασυνέχειας (α) για  $\beta < 0$ ,  $\alpha = \varepsilon = 0$  και (β) για  $\beta > 0$ ,  $\alpha = \varepsilon = 0$ , ως αποτέλεσμα τεμνουσών δυνάμεων, επί του κομμένου κυκλικού δακτυλίου



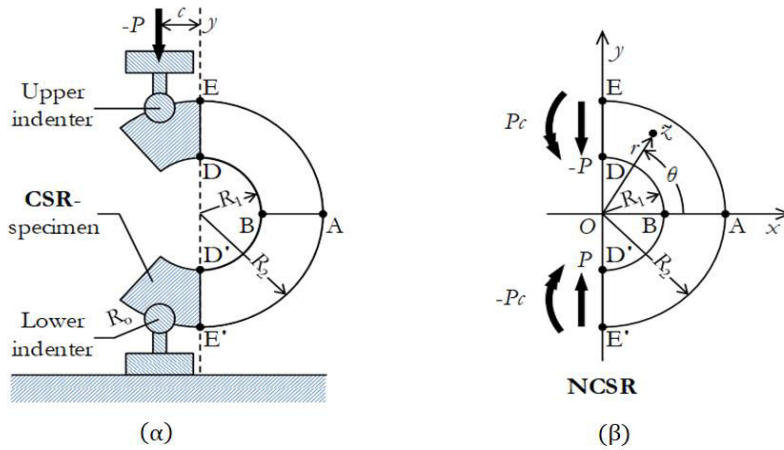
**Εικ. 2.4:** Η φύση της  $\varepsilon$ -ασυνέχειας (α) για  $\varepsilon < 0$ ,  $\alpha = \beta = 0$  και (β) για  $\varepsilon > 0$ ,  $\alpha = \beta = 0$ , ως αποτέλεσμα τεμνουσών δυνάμεων, επί του κομμένου κυκλικού δακτυλίου.

Δηλαδή από τα παραπάνω σχήματα φαίνεται ότι η  $\beta$  ασυνέχεια της μετατόπισης μπορεί να θεωρηθεί ως αποτέλεσμα μίας τέμνουσας δύναμης στην εγκάρσια διατομή του κομμένου δακτυλίου, ενώ η  $\varepsilon$  ασυνέχεια ως το αποτέλεσμα ενός ζεύγους ροπών στην εγκάρσια διατομή του κομμένου δακτυλίου (η φανταστική τομή επιτρέπει στον θεωρητικά κομμένο δακτύλιο να παραμορφώνεται κατ' αυτόν τον τρόπο, δηλαδή επιτρέπει την αλληλοεπικάλυψη ή τη δημιουργία κενού μεταξύ των (-) και (+) πλευρών της θεωρητικής τομής).

Στην παραπάνω φυσική περιγραφή των πλειότιμων μετατοπίσεων στον κομμένο κυκλικό δακτύλιο βασίζεται και η περιγραφή της αναλυτικής λύσης του ημιδακτυλίου που θα μας απασχολήσει στην παρούσα παράγραφο. Θεωρώντας ουσιαστικά τον ημιδακτύλιο ως τμήμα του κομμένου δακτυλίου τα  $\beta$  και  $\varepsilon$  θα συνδεθούν με πραγματικές εξωτερικές τέμνουσες δυνάμεις και ροπές, περιγράφοντας ένα πραγματικό πρόβλημα που δεν θα αντιβαίνει ούτε και στην πειραματική πραγματικότητα αφού σε αυτήν την περίπτωση οι παραλληλόγραμμες εγκάρσιες τομές του ημιδακτυλίου θα είναι σε ικανή απόσταση μεταξύ τους.

Προς τούτο, έστω τμήμα του κομμένου κυκλικού δακτυλίου, που για ευκολία θα καλούμε κυκλικό ημιδακτύλιο (CSR) ή απλά ημιδακτύλιο, για την περιγραφή του πειράματος με αντίστοιχο δοκίμιο, που στη γενική περίπτωση φορτίζεται όπως φαίνεται στην **Εικ. 2.4(α)**, δηλαδή με πεπερασμένη εκκεντρότητα  $c$  του άξονα της εξωτερικής φόρτισης  $P$ , σε σχέση με τη διάμετρο  $EE'$ .

Για την αναλυτική αντιμετώπιση του πειράματος της **Εικ. 2.4(α)** και με το ενδιαφέρον να εστιάζεται στην περιοχή γύρω από το τμήμα  $AB$ , κανείς μπορεί να θεωρήσει το ισοδύναμο, βάσει της αρχής του Saint-Venant, πρόβλημα του καθαρού κυκλικού ημιδακτυλίου (NCSR) ή απλά επίσης ημιδακτυλίου, υπό τέμνουσα δύναμη  $P$  και ροπή  $M=cP$  (**Εικ. 2.4(β)**).



**Εικ. 2.4:** (α) Η πειραματική διάταξη του CSR και (β) Το ισοδύναμο μαθηματικό πρόβλημα για το NCSR [54].

Σε σχέση με το μαθηματικό πρόβλημα της **Εικ. 2.4(β)** και μετά τα όσα είπαμε στην αρχή της παρούσας παραγράφου, το πρόβλημα αυτό μπορεί να περιγραφεί από μία υπέρθεση δύο προβλημάτων για το NCSR, αυτών που φαίνονται στις **Εικ. 2.2(α)** και **Εικ. 2.3(α)**.

Σε αυτήν την κατεύθυνση, παρακάτω παρατίθενται οι λύσεις για κάθε ένα από αυτά τα προβλήματα.

I. Ο ημιδακτύλιος (NCSR) σε κάμψη υπό τέμνουσα δύναμη  $P$  στις διατομές του  $ED$  ( $\theta = +\frac{\pi}{2}$ ),  $E'D'$  ( $\theta = -\frac{\pi}{2}$ ). Το πρόβλημα αυτό (I) αντιστοιχεί στην περίπτωση της **Εικ. 2.2 (α)**, δηλαδή στο  $\beta < 0$ ,  $\alpha = \varepsilon = 0$ . Τότε σύμφωνα με τη μέθοδο του Muskhelishvili [61], οι μη μηδενικοί συντελεστές των μιγαδικών δυναμικών  $\Phi(z)$ ,  $\Psi(z)$  είναι:

$$a_1 = \frac{2\mu\beta}{\pi(1+k)(R_1^2 + R_2^2)} \quad (2.15)$$

$$a_{-1} = a'_{-1} = \frac{-\mu\beta}{\pi(1+k)} \quad (2.16)$$

$$a'_{-3} = \frac{-2\mu\beta R_1^2 R_2^2}{\pi(1+k)(R_1^2 + R_2^2)} \quad (2.17)$$

Ενώ η ασυνέχεια (dislocation)  $\beta$ , όπως προκύπτει από τη συνθήκη ικανοποίησης της καθολικής ισορροπίας του ημιδακτυλίου ως:

$$P = 2b \int_{R_1}^{R_2} \tau_{r\theta}^\beta \left( \theta = \pm \frac{\pi}{2} \right) dr =$$

$$= \pm \beta \frac{2b\mu(\lambda + \mu)}{\pi(\lambda + 2\mu)} \frac{(R_1^2 + R_2^2) \log \frac{R_2}{R_1} - R_2^2 + R_1^2}{R_1^2 + R_2^2} \quad (2.18)$$

θα ισούται με:

$$\beta = \frac{\pi(\lambda + 2\mu)P(R_1^2 + R_2^2)}{h\mu(\lambda + \mu)[(R_1^2 + R_2^2) \log \frac{R_2}{R_1} + R_1^2 - R_2^2]} \quad (2.19)$$

Συνδυάζοντας τις (2.13) έως (2.17) και (2.18) και εισάγοντας τις γενικές εκφράσεις:

$$\sigma_{rr} - i \sigma_{r\theta} = \Phi(z) + \overline{\Phi(\bar{z})} - e^{2i\theta} [\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)] \quad (2.20)$$

$$\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = 4\Re\Phi(z) \quad (2.21)$$

οι τάσεις για το πρόβλημα (I) προκύπτουν ως εξής ( $\rho = R_2/R_1$ ):

$$\sigma_{rr}^I = \frac{P}{h} \left( \frac{\frac{\rho^2 r}{R_2^2} - \frac{\rho^2 + 1}{r} + \frac{R_2^2}{r^3}}{(\rho^2 + 1)\log\rho - \rho^2 + 1} \right) \cos\theta \quad (2.22)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^I = \frac{P}{h} \left( \frac{\frac{3\rho^2 r}{R_2^2} - \frac{\rho^2 + 1}{r} + \frac{R_2^2}{r^3}}{(\rho^2 + 1)\log\rho - \rho^2 + 1} \right) \cos\theta \quad (2.23)$$

$$\tau_{r\theta}^I = \left( \frac{\frac{\rho^2 r}{R_2^2} - \frac{\rho^2 + 1}{r} + \frac{R_2^2}{r^3}}{(\rho^2 + 1)\log\rho - \rho^2 + 1} \right) \sin\theta \quad (2.24)$$

II. Ο ημιδακτύλιος (NCSR) σε κάμψη υπό ζεύγος ροπών  $M=cP$  στις διατομές του ED ( $\theta = +\frac{\pi}{2}$ ), E'D' ( $\theta = -\frac{\pi}{2}$ ). Το πρόβλημα αυτό (II) αντιστοιχεί στην περίπτωση του **Εικ. 2.3** (a), δηλαδή στο  $\varepsilon > 0$ ,  $\alpha = \beta = 0$ . Τότε σύμφωνα με τη μέθοδο του Muskhelishvili [61], οι μη μηδενικοί συντελεστές των μιγαδικών δυναμικών  $\Phi(z)$ ,  $\Psi(z)$  είναι:

$$a_0 = \frac{\mu\varepsilon}{2\pi(1+k)} \left( 1 - 2 \frac{R_2^2 \log R_2 - R_1^2 \log R_1}{R_2^2 - R_1^2} \right) \quad (2.25)$$

$$a'_{-2} = \frac{2\mu\varepsilon R_1^2 R_2^2}{\pi(1+k)(R_2^2 - R_1^2)} \log \frac{R_2}{R_1} \quad (2.26)$$

ενώ για την ασυνέχεια (dislocation)  $\varepsilon$ , ικανοποίηση της καθολικής ισορροπίας του ημιδακτυλίου:

$$M = 2h \int_{R_1}^{R_2} \sigma_{\theta\theta}^{\text{II}} r \, dr = \frac{\varepsilon\mu(\lambda + \mu)}{\pi(\lambda + 2\mu)} h \frac{(R_2^2 - R_1^2)^2 - 4R_1^2 R_2^2 \left( \log \frac{R_2}{R_1} \right)^2}{2(R_2^2 - R_1^2)} \quad (2.27)$$

οδηγεί στην:

$$\varepsilon = \frac{4\pi(\lambda + 2\mu)Pc(R_2^2 - R_1^2)}{h\mu(\lambda + \mu)[(R_2^2 - R_1^2)^2 - 4R_1^2 R_2^2 \left( \log \frac{R_2}{R_1} \right)^2]} \quad (2.28)$$

Συνδυάζοντας τις (2.13), (2.14), (2.25), (2.26), (2.28) και εισάγοντας στις (2.20), (2.21), οι τάσεις για το πρόβλημα (II) προκύπτουν ως ( $\rho = R_2/R_1$ ):

$$\sigma_{rr}^{\text{II}} = Pc \frac{4\rho^2 (\rho^2 - 1) \log \frac{r}{R_2} + \left(\frac{R_2^2}{r^2} - 1\right) \log \rho}{h R_2^2 [(\rho^2 - 1)^2 - 4\rho^2 (\log \rho)^2]} \quad (2.29)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{\text{II}} = Pc \frac{4\rho^2 (\rho^2 - 1) \left(\log \frac{r}{R_2} + 1\right) - \left(\frac{R_2^2}{r^2} - 1\right) \log \rho}{h R_2^2 [(\rho^2 - 1)^2 - 4\rho^2 (\log \rho)^2]} \quad (2.30)$$

$$\tau_{r\theta}^{\text{II}} = 0 \quad (2.31)$$

Το τασικό πεδίο για το συνολικό πρόβλημα του ημιδακτυλίου υπό κάμψη, λόγω τέμνουσας και ροπής (**Εικ. 2.4**), προκύπτει από την υπέρθεση των αντίστοιχων πεδίων των επί μέρους προβλημάτων (I) και (II), ως εξής:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \sigma_{rr}^{\text{I}} + \sigma_{rr}^{\text{II}} = \\ &= \frac{P}{h} \left[ \frac{\frac{\rho^2 r}{R_2^2} - \frac{\rho^2 + 1}{r} + \frac{R_2^2}{r^3}}{(\rho^2 + 1) \log \rho - \rho^2 + 1} \cos \theta + \frac{4c\rho^2 (\rho^2 - 1) \log \frac{r}{R_2} + \left(\frac{R_2^2}{r^2} - 1\right) \log \rho}{R_2^2 [(\rho^2 - 1)^2 - 4\rho^2 (\log \rho)^2]} \right] \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{r\theta}^{\text{I}} + \tau_{r\theta}^{\text{II}} = \frac{\frac{\rho^2 r}{R_2^2} - \frac{\rho^2 + 1}{r} + \frac{R_2^2}{r^3}}{(\rho^2 + 1) \log \rho - \rho^2 + 1} \sin \theta \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_{\theta\theta}^{\text{I}} + \sigma_{\theta\theta}^{\text{II}} = \\ &= \frac{P}{h} \left[ \frac{\frac{3\rho^2 r}{R_2^2} - \frac{\rho^2 + 1}{r} + \frac{R_2^2}{r^3}}{(\rho^2 + 1) \log \rho - \rho^2 + 1} \cos \theta + \frac{4\rho^2 c (\rho^2 - 1) \left(\log \frac{r}{R_2}\right) - \left(\frac{R_2^2}{r^2} - 1\right) \log \rho}{R_2^2 [(\rho^2 - 1)^2 - 4\rho^2 (\log \rho)^2]} \right] \end{aligned} \quad (2.33)$$

Από τις παραπάνω εκφράσεις, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει εξάρτηση των τάσεων από την τέμνουσα δύναμη  $P$ , τη ροπή  $cP$ , δηλαδή την εκκεντρότητα  $c$ , το λόγο  $\rho = R_2/R_1$ , το πάχος  $h$  και τις συνθήκες φόρτισης (επίπεδη ένταση ή επίπεδη παραμόρφωση) και από την φύση του υλικού.

Οι συνιστώσες της μετατόπισης προκύπτουν από την έκφραση (Muskhelishvili [61]):

$$u + iv = \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} \quad (2.35)$$

όπου

$$\varphi(z) = \int \Phi(z)dz, \quad \psi(z) = \int \Psi(z)dz \quad (2.36)$$

Έτσι για το πρόβλημα (I) της κάμψης δοκού λόγω τέμνουσας  $P(\beta)$ , προκύπτει:

$$u^I = \frac{\beta(\lambda + \mu)}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \left\{ \frac{\lambda + 3\mu - 1}{\lambda + \mu} \log r - \left[ \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \frac{r^2}{R_1^2 + R_2^2} + 1 - \frac{1}{\lambda + \mu} \frac{R_1^2 R_2^2}{(R_1^2 + R_2^2) r^2} \right] \cos\theta - \frac{1}{\lambda + \mu} \frac{R_1^2 R_2^2}{(R_1^2 + R_2^2) r^2} \right\} \cos\theta + \frac{2r^2}{R_1^2 + R_2^2} \quad (2.37)$$

$$v^I = \frac{\beta(\lambda + \mu)}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \left\{ \frac{\lambda + 3\mu - 1}{\lambda + \mu} \theta - \left[ \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \frac{r^2}{R_1^2 + R_2^2} + 1 - \frac{1}{\lambda + \mu} \frac{R_1^2 R_2^2}{(R_1^2 + R_2^2) r^2} \right] \sin 2\theta \right\} \quad (2.38)$$

Ενώ για το πρόβλημα (II) της κάμψης δοκού λόγω ροπής  $M(\varepsilon)$ , προκύπτει:

$$u^{II} = \frac{\varepsilon(\lambda + \mu)}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \left[ \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} - 1 \left( \frac{1}{2} - \frac{R_2^2 \log R_2 - R_1^2 \log R_1}{R_2^2 - R_1^2} + \log r \right) r \cos\theta - \left( \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} + 1 \right) r \theta \sin\theta - \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} r \cos\theta - \frac{2R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \log \frac{R_2 \cos\theta}{R_1 r} \right] \quad (2.39)$$

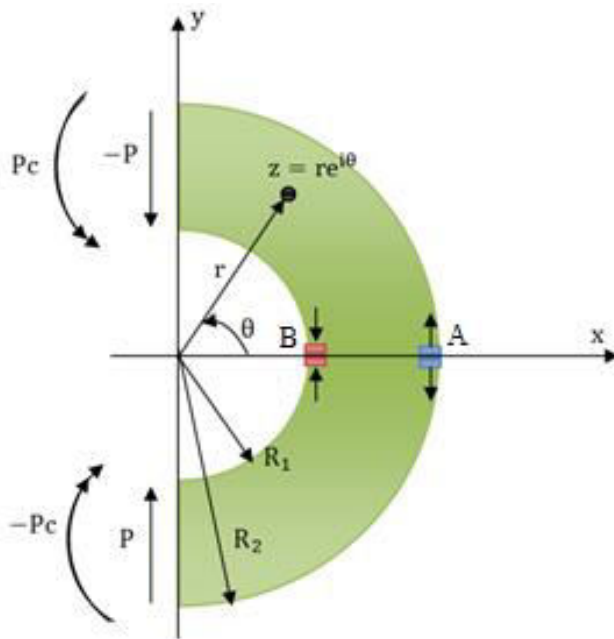


$$v_{II} = \frac{\varepsilon(\lambda + \mu)}{4\pi(\lambda + 2\mu)} \left[ \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} - 1 \left( \frac{1}{2} - \frac{R_2^2 \log R_2 - R_1^2 \log R_1}{R_2^2 - R_1^2} + \log r \right) r \sin \theta - \left( \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} + 1 \right) r \theta \cos \theta - \right. \\ \left. \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} r \sin \theta - \frac{2R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \log \frac{R_2 \sin \theta}{R_1 r} \right] \quad (2.40)$$

Πάλι το συνολικό πεδίο των μετατοπίσεων για το πρόβλημα του ημιδακτυλίου υπό κάμψη, λόγω τέμνουσας και ροπής (**Εικ. 2.4**), προκύπτει από την υπέρθεση των αντίστοιχων πεδίων.

### 2.3 Η ΕΦΕΛΚΥΣΤΙΚΗ ΑΝΤΟΧΗ ΤΟΥ ΥΛΙΚΟΥ ΜΕ ΤΗΝ ΒΟΗΘΕΙΑ ΤΟΥ ΗΜΙΔΑΚΤΥΛΙΟΥ

Για τον ημιδακτύλιο της παρακάτω **Εικ. 2.5**, τα κρίσιμα σημεία της διατομής είναι τα σημεία A και B όπου αναπτύσσονται οι μέγιστες ορθές τάσεις. Στο σημείο A το πεδίο είναι μονοαξονικό εφελκυστικό και έχουμε την εμφάνιση της μέγιστης εφελκυστικής τάσης. Στο σημείο B το πεδίο είναι μονοαξονικό θλιπτικό και έχουμε την εμφάνιση της μέγιστης θλιπτικής τάσης.



**Εικ. 2.5:** Τα κρίσιμα σημεία εμφάνισης των μεγίστων τιμών των ορθών τάσεων στον ημιδακτύλιο υπό τέμνουσα και ροπή.

Ειδικότερα, ο ημιδακτύλιος της **Εικ. 2.5** ή της **Εικ. 2.4(β)**, αναμένεται να αστοχήσει υπό μονοαξονικό εφελκυσμό στο σημείο A και ως εκ τούτου η μέγιστη τιμή της εφελκυστικής τάσης,  $\sigma_{\theta\theta}$  στο σημείο A θεωρείται και η εφελκυστική αντοχή του υλικού. Αντικαθιστώντας στην (2.33)  $r = R_2$  και  $\theta = 0^\circ$ , η εφελκυστική αντοχή του υλικού θα είναι:

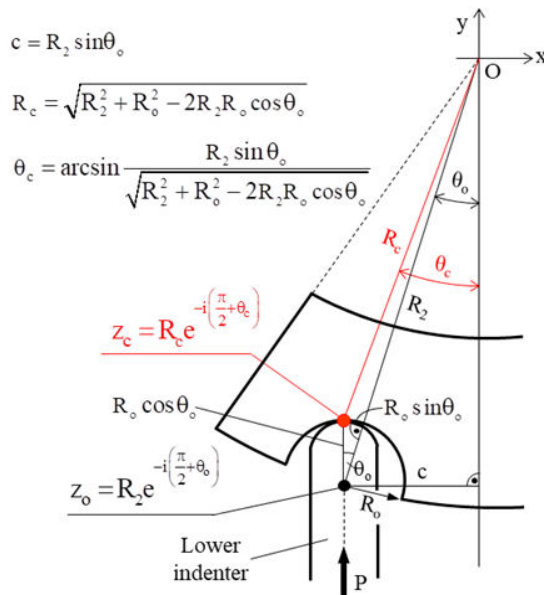
$$\sigma_t = \frac{2P_f}{R_2 h} \left\{ \frac{2c\rho^2(\rho^2 - 2\log\rho - 1)}{R_2[(\rho^2 - 1)^2 - 4\rho^2(\log\rho)^2]} + \frac{\rho^2 - 1}{(\rho^2 + 1)\log\rho - \rho^2 + 1} \right\} \quad (2.41)$$

Αντικαθιστώντας στην (2.33)  $r = R_1$  και  $\theta = 0^\circ$ , η θλιπτική τάση στο σημείο B, είναι:

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{2P_f \rho}{R_2 h} \left\{ \frac{2c\rho(2\rho^2 \log \rho + 1 - \rho^2)}{R_2 [(\rho^2 - 1)^2 - 4\rho^2 (\log \rho)^2]} + \frac{\rho^2 - 1}{(\rho^2 + 1) \log \rho - \rho^2 + 1} \right\} \quad (2.42)$$

## 2.4 ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΣΤΗΡΙΞΗΣ , ΣΧΕΣΗ ΜΕ ΤΗΝ ΤΕΜΝΟΥΣΑ ΚΑΙ ΤΗΝ ΡΟΠΗ

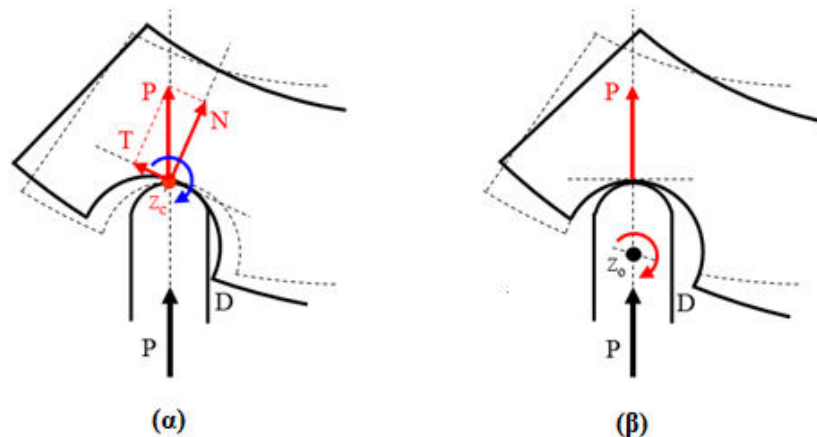
Σύμφωνα με το πειραματικό πρωτόκολλο η επιβολή της εξωτερικής φόρτισης γίνεται μέσω δύο μεταλλικών στελεχών που είναι στερεωμένα στις αρπάγες του πλαισίου φόρτισης και εφάπτονται του δοκιμίου σε δύο κατάλληλες κοιλότητες ακτίνας  $R_0$  που δημιουργούνται σε αυτό. Το κάτω στέλεχος παραμένει ακίνητο καθ' όλη τη διάρκεια του πειράματος. Το πάνω στέλεχος κινείται πολύ αργά προς τα κάτω με περιορισμό της κίνησης στην οριζόντια διεύθυνση. Οι κεφαλές των στελεχών (σε επαφή με το δοκίμιο) είναι κυλινδρικές με ακτίνα καμπυλότητας μικρότερη του  $R_0$  όπως φαίνεται στην **Εικ. 2.6**. Ο άξονας των μεταλλικών στελεχών απέχει γενικά απόσταση  $c$  από την κατακόρυφο άξονα  $y$ , εξου και η ύπαρξη ροπής  $cP$  στην κατακόρυφη διατομή, πλέον της τέμνουσας δύναμης  $P$ . Σημαντικά για τον τρόπο παραμόρφωσης σε σχέση με την στήριξη είναι τα σημεία  $z_0$  και  $z_T$ .



**Εικ. 2.6:** Η απεικόνιση των σημείων  $z_T$  και  $z_0$  [62].

Στην περίπτωση παρουσίας τριβής στην επαφή δοκιμίου–στελέχους δηλαδή στο σημείο και  $z_T$  και θεωρώντας ικανό συντελεστή τριβής ώστε να αποφευχθεί η ολίσθηση, η περιοχή στήριξης του δοκιμίου θα περιστρέφεται ως σχεδόν στερεό σώμα πέριξ του σημείου  $z_T$  (**Εικ. 2.7(α)**). Σε αυτήν την περίπτωση υπάρχει κίνδυνος σύνθλιψης και ρηγμάτωσης της άντυγας της κοιλότητας του δοκιμίου στο σημείο D. Σε αυτήν την περίπτωση για τον υπολογισμό των μετατοπίσεων, το σημείο  $z_T$  σταθεροποιείται με την αφαίρεση των μετατοπίσεών του (ως μετατοπίσεων στερεού σώματος από το γενικό πεδίο των μετατοπίσεων).

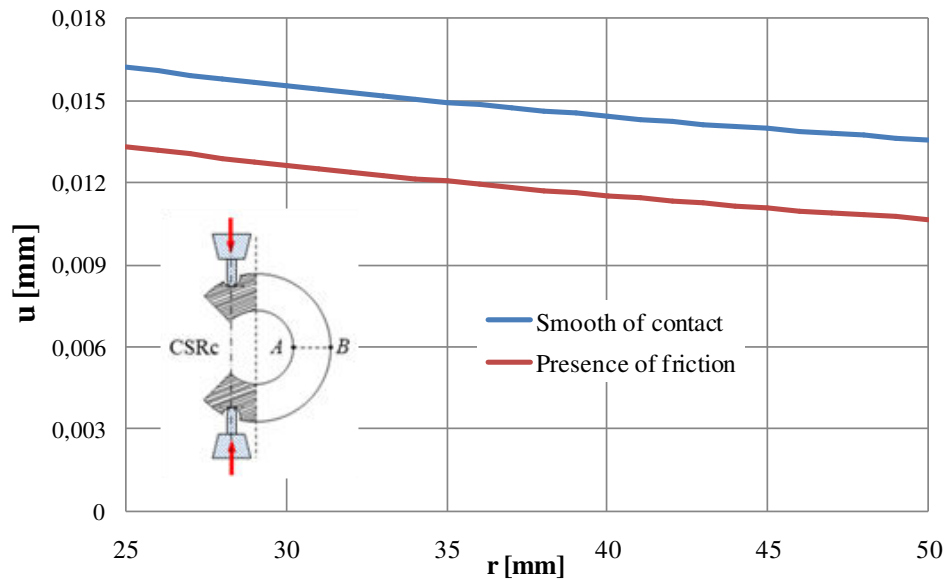
Για απουσία τριβής, μέσω π.χ. χρήσης κατάλληλου λιπαντικού, μπορεί να θεωρηθεί ότι το δοκίμιο περιστρέφεται πέριξ του σημείου  $z_0$  (**Εικ. 2.7 (β)**). Σε αυτήν την περίπτωση μειώνεται ο κίνδυνος σύνθλιψης και ρηγμάτωσης της άντυγας της κοιλότητας του δοκιμίου στο σημείο D κάτι που κάνει και αυτήν την επιλογή πιο καλή σε πειραματικό επίπεδο. Σε αυτήν την περίπτωση για τον υπολογισμό των μετατοπίσεων, το σημείο που σταθεροποιείται είναι το  $z_0$  με την αφαίρεση των μετατοπίσεών στερεού σώματος από το γενικό πεδίο των μετατοπίσεων.



**Εικ. 2.7:** Η περιοχή επαφής εσοχής δοκιμίου στελέχους (α) παρουσία και (β) απουσία τριβής [62].

Στο παρακάτω διάγραμμα, φαίνονται η οριζόντια συνιστώσα της μετατόπισης, δυνάμει των (2.37) και (2.39), κατά μήκος της γραμμής AB της

διατομής του ημιδακτυλίου. Όπως αναμενόταν, στην περίπτωση απουσίας τριβής, δηλαδή απουσίας του περιορισμού στην οριζόντια μετατόπιση του σημείου  $z_T$ , η οριζόντια μετατόπιση  $u$  είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη στην περίπτωση παρουσίας τριβής.



**Εικ. 2.8:** Η οριζόντια μετατόπιση  $u$ , κατά μήκος του ευθύγραμμου τμήματος  $AB$ , παρουσία και απουσία τριβής στην περιοχή επαφής δοκιμίου–εσοχής.

## 3<sup>ο</sup> ΚΕΦΑΛΑΙΟ

### ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΕΣ ΤΕΧΝΙΚΕΣ

#### 3.1 ΤΕΧΝΙΚΗ ΣΥΣΧΕΤΙΣΗΣ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΙΚΟΝΑΣ (DIC)

Η DIC είναι μία σύγχρονη, αποτελεσματική και ευρέως χρησιμοποιούμενη ψηφιακή οπτική μέθοδος που χρησιμοποιείται για τον εντοπισμό της θέσης οποιουδήποτε σημείου του υπό μελέτη δοκιμίου στην απαραμόρφωτη και παραμορφωμένη κατάσταση **Εικ. 3.1** [73]. Πιο συγκεκριμένα, χρησιμοποιεί μαθηματική ανάλυση συσχέτισης για να εξετάσει τα δεδομένα ψηφιακής εικόνας που λαμβάνονται ενώ τα δοκίμια καταπονούνται. Η τεχνική αυτή προτάθηκε από τους Sutton et al. [74] το 1983 και έκτοτε εξελίσσεται συνεχώς.

Θεωρούμε ένα σημείο P στην απαραμόρφωτη κατάσταση και το ίδιο σημείο P\* στην παραμορφωμένη. Οι συντεταγμένες των σημείων αυτών συνδέονται μέσω των σχέσεων :

$$x^* = x + u(x, y), \quad y = y + v(x, y) \quad (1)$$

Οι ανηγμένες παραμορφώσεις υπολογίζονται ως εξής :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (2)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (3)$$

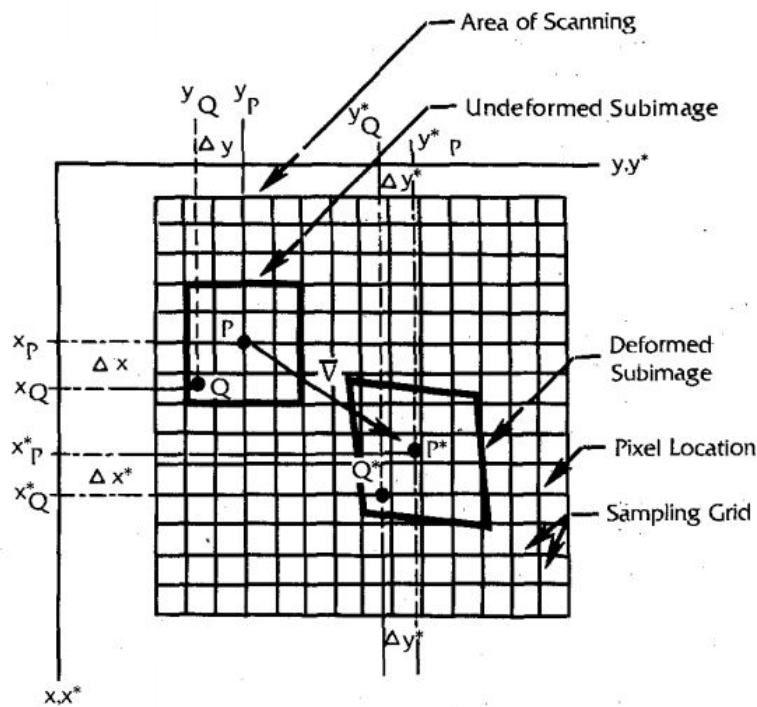
$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right] \quad (4)$$

$$\varepsilon_{uM} = \frac{\sqrt{2[(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_3^2]}}{3} \quad (5)$$

όπου,  $\epsilon_{uM}$  η ισοδύναμη κατά Mises [75] ανηγμένη παραμόρφωση και  $\epsilon_1$  και  $\epsilon_3$  η μέγιστη και η ελάχιστη αντίστοιχα ανηγμένη παραμόρφωση.

Η ορθή εφαρμογή της μεθόδου αυτής επιτυγχάνεται όταν τηρούνται δυο βασικές προϋποθέσεις:

1. Ύπαρξη μοτίβου κουκκίδων στην επιφάνεια του υπό μελέτη δοκιμίου.
2. Το επίπεδο καμερών να είναι παράλληλο με την επιφάνεια του δοκιμίου.

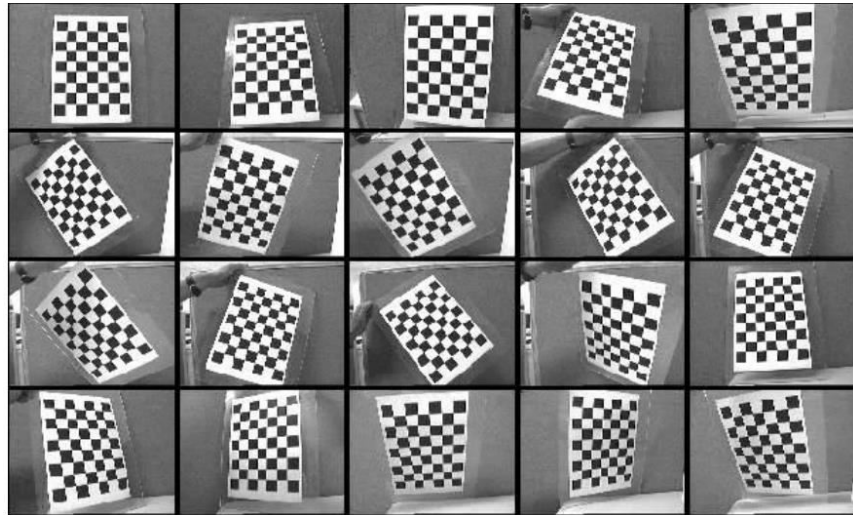


**Εικ. 3.1:** Σχηματική απεικόνιση της σχετικής θέσης των εικόνων στην απαραμόρφωτη και παραμορφωμένη κατάσταση της επιφάνειας. [73]

Όσον αφορά την υλοποίηση της τεχνικής αυτής περιλαμβάνει τη διαδοχική λήψη εικόνων από ψηφιακές κάμερες (για διδιάστατες ή τριδιάστατες μετρήσεις) κατά τη διάρκεια του χρονικού διαστήματος που το υπό μελέτη δοκίμιο υφίσταται φορτίσεις που προκαλούν την παραμόρφωσή του. Τα αποτελέσματα της μεθόδου συμβάλλουν στην κατανόηση της συμπεριφοράς του υλικού κατά την πειραματική διαδικασία.



Με τη χρήση ειδικών πλακιδίων βαθμονόμησης (calibration panels) βαθμονομείται το σύστημα ώστε να καθοριστούν οι ενδογενείς κι εξωγενείς παράμετροι του συστήματος. Το calibration panel είναι μια άκαμπτη πλάκα με μαύρα και άσπρα πλέγματα σταθερού μεγέθους. Η βαθμονόμηση των καμερών εξαρτάται από την παρατήρηση αυτών των πλεγμάτων υπό διαφορετικές γωνίες.



*Εικ. 3.2: Φωτογράφιση των στόχων βαθμονόμησης (calibration panels) σε διαφορετικές γωνίες [76].*

Στις εφαρμογές της τεχνικής περιλαμβάνονται ο προσδιορισμός του πεδίου μετατοπίσεων και παραμορφώσεων σε πλαστικά υλικά αφρού πολουρεθάνης, των μηχανικών τους ιδιοτήτων (Zhang, Zhang και Cheng, 1999 [77]) και η αξιολόγηση της θερμικής καταπόνησης στις αρθρώσεις συγκόλλησης ((Lu, Yeh and Wyatt, 1998 [78])). Επιπλέον, η τεχνική αυτή έχει εφαρμοστεί για τη μελέτη της παραμόρφωσης σε δοκίμια μορφής πλάκας από αλουμίνιο ενώ υπόκεινται σε εφελκυστικά φορτία. Ποικίλες εργασίες υπάρχουν που μελετούν τη θραύση (προσδιορισμό της ζώνης εσωτερικών διεργασιών, του ανοίγματος της αιχμής της ρωγμής CTOD και της διάδοσης της ρωγμής) σε σκυρόδεμα και κονιάματα, όπως για παράδειγμα στις αναφορές [79–81].

Αντίθετα, η μελέτη της τεχνικής σε γεωυλικά είναι περιορισμένη είτε αφορά τη μελέτη ρωγμών είτε τον προσδιορισμό του πεδίου παραμορφώσεων και μετατοπίσεων στην επιφάνεια του δοκιμίου. Ενδεικτικά αναφέρονται [82,83].

### 3.2 ΤΕΧΝΙΚΗ ΑΚΟΥΣΤΙΚΗΣ ΕΚΠΟΜΠΗΣ (ΑΕ)

Η ακουστική εκπομπή είναι μία από τις νεότερες πολλά υποσχόμενες τεχνικές ελέγχου με Μη Καταστροφικές Δοκιμές. Σύμφωνα με τον ορισμό της ASTM, ως Ακουστική Εκπομπή χαρακτηρίζεται το φαινόμενο κατά το οποίο προκαλούνται παροδικά ελαστικά κύματα στο εσωτερικό ενός υλικού που οφείλονται στην απότομη απελευθέρωση ενέργειας από πηγή ή πηγές (ANS/ASTM E610–77). Η απότομη απελευθέρωση ενέργειας συνεπάγεται την παραγωγή ακουστικών κυμάτων που διαδίδονται προς όλες τις διευθύνσεις του υλικού. Τα ακουστικά κύματα χαρακτηρίζονται ως μηχανικά επειδή διαδίδονται μόνο όπου υπάρχει ύλη. Επίσης, χαρακτηρίζονται ως ελαστικά γιατί η διάδοσή τους οφείλεται σε ελαστικές ιδιότητες των σωμάτων που ευθύνονται για τις συνεχείς ταλαντώσεις των σωματιδίων της ύλης [84, 85].

Η καταγραφή των ελαστικών κυμάτων που δημιουργούνται επιτυγχάνεται με τη χρήση πιεζοηλεκτρικών αισθητήρων που εφάπτονται πάνω στο υλικό. Το ποσοστό της απόσβεσης ενός κύματος ακουστικής εκπομπής διαφέρει από υλικό σε υλικό, για παράδειγμα είναι μεγαλύτερο σε πορώδη υλικά όπως το ξύλο από ό,τι στα μεταλλικά.

Η παραγωγή των ακουστικών κυμάτων εξαρτάται από τους εκάστοτε μηχανισμούς παραμόρφωσης, δημιουργίας και διάδοσης ρωγμών. Στα μέταλλα οι πηγές εκπομπής ακουστικών κυμάτων μπορεί να προέρχονται από πολλά σημεία στο εσωτερικό του υλικού, όπως μικρορωγμές, κρυσταλλικές ατέλειες (π.χ μεταστάσεις, διδυμίες, κατακρημνίσεις, ολίσθηση διαχωριστικών επιφανειών κόκκων, την θραύση, τον αποχωρισμό τους κ.α) θραύση και αποχωρισμό προσμείξεων από την μήτρα του υλικού [86]. Σχετικά με τα σύνθετα υλικά η μέθοδος αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αναγνώριση διαδοχικών φάσεων καταπόνησης όπως τη μικρορωγμάτωση της μήτρας, την αποκόλληση των ινών ενίσχυσης από την μήτρα, τη διαστρωματική αποκόλληση και την μακροσκοπική θραύση των ινών του υλικού και τον γεωμετρικό εντοπισμό της βλάβης [87].

Γεννάται το ερώτημα αν αυτή η μέθοδος μπορεί να ενταχθεί στις απολύτως μη καταστροφικές ή όχι. Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται κατά τη φόρτιση της κατασκευής – δοκιμίου, αντίθετα οι άλλες μη καταστροφικές μέθοδοι εφαρμόζονται πριν ή μετά την φόρτιση. Επιπλέον στην τεχνική αυτή είναι απαραίτητη η θραύση του υλικού για την δοκιμή του. Το βασικό ερώτημα

που εύλογα δημιουργείται είναι αν η μέθοδος αυτή μπορεί ενταχθεί στις απολύτως μη καταστροφικές ή όχι, καθώς είναι απαραίτητη η θραύση του υλικού για τη δοκιμή του.

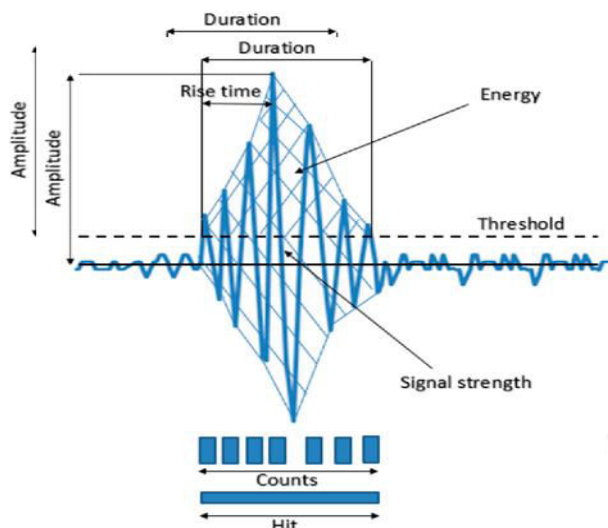
Η συγκεκριμένη πειραματική μέθοδος εμφανίζει τα εξής πλεονεκτήματα:

- Είναι εφικτός ο έλεγχος σε πραγματικό χρόνο, δηλαδή μπορεί να παρακολουθείται η εξέλιξη της αστοχίας του υλικού κατά τη διάρκεια της φόρτισής του χωρίς να προκληθεί διατάραξη του δοκιμίου.
- Τα σήματα που ξεπερνούν το κατώφλι, μπορούν να καταγραφούν από λίγους αισθητήρες που τοποθετούνται πάνω στο δοκίμιο χωρίς να είναι απαραίτητη η μετακίνησή τους κατά τη διάρκεια των δοκιμών.
- Ακόμα, μπορεί να πραγματοποιηθεί έλεγχος και σε κατασκευές που επικαλύπτονται με μονωτικό υλικό, το οποίο αφαιρείται μόνο από τα σημεία που τοποθετούνται οι αισθητήρες.
- Μπορεί να ανιχνεύσει–προσδιορίσει τη θέση νέων ρωγμών καθώς και τη διάδοση υπαρχουσών ρωγμών ή φαινόμενα τριβής. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι εξαρτάται από μη αντιστρεπτές (μη ελαστικές) παραμορφώσεις. Αυτό την καθιστά μία πολύ χρήσιμη μέθοδο σε διαδικασίες για την παρακολούθηση κατασκευών που υφίστανται πραγματικά φορτία για να καταγραφεί η προβλεπόμενη αστοχία [88].

Όμως, σχετικά με την συγκεκριμένη μέθοδο, η μη επαναληψιμότητα μιας δοκιμής εξαιτίας, π.χ. της ξαφνικής ή και σε κάποιες περιπτώσεις της τυχαίας δημιουργίας ρωγμής, συγκαταλέγεται στα μειονεκτήματα της μεθόδου. Επιπλέον, ένα άλλο μειονέκτημα είναι η ενέργεια που απελευθερώνεται από μία ακουστική εκπομπή. Για δοκίμια–κατασκευές ίδιου σχήματος και με ίδιες ιδιότητες υλικού είναι αναμενόμενο υπό την επιβολή φορτίου να εξάγονται παρόμοια αποτελέσματα ΑΕ, γεγονός που δεν συμβαίνει συχνά. Συγκρίνοντας τα σήματα, ιδίως αυτά που χρησιμοποιούνται ως προάγγελοι της αστοχίας, με τα σήματα που χρησιμοποιούνται στους υπερήχους παρατηρείται καταγραφή αρκετά μικρότερων μεγεθών. Αυτό καθιστά αναγκαία τη χρήση πολύ πιο ευαίσθητων αισθητήρων καθώς και αξιόπιστων ενισχυτών και προ-ενισχυτών. Συνεπώς, για την ανίχνευση των ακουστικών εκπομπών, για τον προσδιορισμό της θέσης τους και για την εφαρμογή άλλων προηγμένων τεχνικών απαιτούνται τεχνικές εξελιγμένης επεξεργασίας δεδομένων [88]. Όσον αφορά τα υφιστάμενα προβλήματα που πρέπει να εξομαλυνθούν είναι η επίδραση του περιβαλλοντικού θορύβου, η απόσβεση των σημάτων και ο πιθανόν μικρός λόγος σήματος προς θόρυβο.

Οι πιο συχνά χρησιμοποιούμενες παράμετροι ακουστικής εκπομπής είναι (Εικ. 3.3):

- “Χτύπος” (hit): Όταν ένα σήμα υπερβεί το κατώφλι τάσης προκαλεί τους αισθητήρες να καταγράψουν μία κυματομορφή. Δείχνει την ακουστική δραστηριότητα.
- “Απαριθμήσεις” (count or ring-down count or emission count): Το πλήθος των φορών όπου περνά ένα σήμα το κατώφλι τάσης. Δείχνει την ακουστική δραστηριότητα. Εξαρτώνται από το κατώφλι τάσης που έχει οριστεί και τη συχνότητα λειτουργίας. Συχνά, οι “απαριθμήσεις” μέχρι το μέγιστο πλάτος του σήματος χαρακτηρίζονται ως “απαριθμήσεις μέχρι το μέγιστο (counts to peak)”.
- Πλάτος (amplitude): Η μέγιστη τάση ρεύματος του σήματος συνήθως εκφρασμένη σε decibels. Ο όρος decibel ορίζεται ως  $dB=20\log(V_{max}/1\mu\text{volt})$ . Το πλάτος είναι άρρηκτα συνδεδεμένο με το μέγεθος της πηγής του ακουστικού γεγονότος.



Εικ. 3.3: Ένα τυπικό ακουστικό σήμα και βασικές έννοιες [89].

- Διάρκεια (duration): Το χρονικό διάστημα μεταξύ της πρώτης φοράς που ξεπερνιέται το κατώφλι τάσης μέχρι το σήμα να μην ανιχνεύεται πια. Η διάρκεια εξαρτάται από το μέγεθος της πηγής και το φιλτράρισμα του θορύβου και εκφράζεται σε μικροδευτερόλεπτα ( $\mu\text{s}$ ).

- Χρόνος ανύψωσης (rise time): Ο χρόνος μεταξύ της πρώτης φοράς που ξεπερνιέται το κατώφλι τάσης μέχρι το μέγιστο πλάτος. Συνδέεται στενά με τη συνάρτηση πηγής-χρόνου και χρησιμοποιείται για την ταξινόμηση του τύπου θραύσης ή για την εξάλειψη των σημάτων θορύβου.
- Ενέργεια (energy): Η ολική ελαστική ενέργεια που απελευθερώνεται από ένα γεγονός ακουστικής εκπομπής, παρουσιάζει ευαισθησία στο πλάτος καθώς και στη διάρκεια, και είναι λιγότερο εξαρτώμενη από το κατώφλι τάσης και τις συχνότητες λειτουργίας.
- Μέση συχνότητα (average frequency): Ο λόγος των “απαριθμήσεων” προς τη διάρκεια, για κάθε χτύπο και χρησιμοποιείται όταν οι κυματομορφές είναι πρακτικά δύσκολο να καταγραφούν.
- Αρχική συχνότητα (initial frequency): Ορίζεται ως ο λόγος των “απαριθμήσεων μέχρι το μέγιστο” προς το χρόνο ανύψωσης.
- Συχνότητα αντήχησης (reverberation frequency): Ορίζεται ως ο λόγος των (“απαριθμήσεων”–“απαριθμήσεις μέχρι το μέγιστο”) προς το χρόνο (“διάρκεια” - “χρόνος ανύψωσης”).
- Τιμή RA (RA value): Μέγεθος που ισούται με τον λόγο του χρόνου ανύψωσης προς το πλάτος. Μετράται σε ms/V. Οι τιμές RA χρησιμοποιούνται για την ταξινόμηση του τύπου των ρωγμών [88].

Το 1990 ο Drouillard δημοσιεύει την πρώτη περιεκτική καταγραφή σε επιστημονικό πείραμα ακουστικής εκπομπής. Το πείραμα πραγματοποιήθηκε από τον F. Kishinoue στις 21 Νοεμβρίου 1933 σε μια συνάντηση του Ινστιτούτου Έρευνας Σεισμών (Earthquake Research Institute) στο Πανεπιστήμιο του Τόκιο (Imperial University of Tokyo). Η μελέτη αφορούσε τη διαδικασία εμφάνισης κραδασμών σε δοκίμια ξύλου υπό κάμψη [88]. Στα τέλη της δεκαετίας του 1930 οι ερευνητές Obert και Duvall (1942) [90] πραγματοποιούν ηχητικές μελέτες σε ορυχεία και ανακαλύπτουν ότι καθώς σε ένα πέτρωμα ασκείται τάση, το πέτρωμα εκπέμπει χαμηλής συχνότητας ήχο. Η μελέτη αυτή των εν λόγω ερευνητών θεωρείται η αρχή της εφαρμογής της μεθόδου AE στη μηχανική των πετρωμάτων.

Από τις πιο σημαντικές μελέτες θεωρούνται αυτές του Kaiser (1950) [91], ο οποίος κατά τη διάρκεια της διδακτορικής του διατριβής παρατήρησε ότι τα υλικά έχουν “μνήμη” καθώς τους ασκείται τάση, φαινόμενο γνωστό ως φαινόμενο Kaiser.

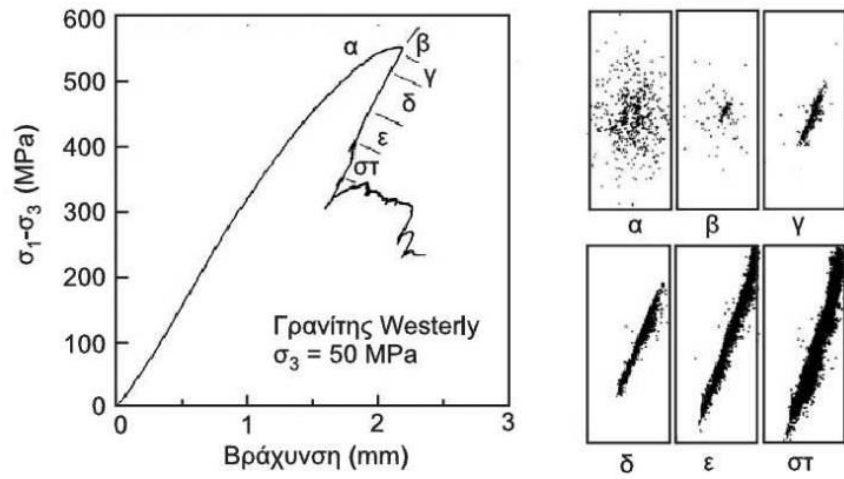
Την στιγμή της αστοχίας ο ρυθμός παραγωγής των ακουστικών γεγονότων είναι αρκετά μεγάλος οπότε δεν μπορούν να εντοπιστούν τα ανεξάρτητα γεγονότα. Αυτό οδήγησε τον Lockner [92] το 1963 να δηλώσει ότι πρέπει να σχεδιαστεί ένα ελεγχόμενο σύστημα φόρτισης που να διατηρεί σταθερό τον ρυθμό παραγωγής ακουστικών γεγονότων ώστε να είναι δυνατή η παρακολούθηση της αστοχίας. Στην **Εικ. 3.4** απεικονίζονται τα αποτελέσματα των αντίστοιχων πειραμάτων που υλοποίησε.

Από το 1985 [93] ξεκίνησαν τα πειράματα κάμψης τριών σημείων σε δοκίμια από γνευσίτη και τα αποτελέσματα αυτών έδειξαν ότι τα ακουστικά γεγονότα ‘εμφανίζονται’ όταν η καμπύλη δύναμης-βύθισης ξεφεύγει από τη γραμμικότητα.

Ακόμα, προέκυψε το συμπέρασμα ότι η μορφή της καμπύλης των ακουστικών εκπομπών δεν είναι συνάρτηση του τύπου του υπό εξέταση λίθου αλλά της ταχύτητας ανάπτυξης της ρωγμής και της αύξησης της επιφάνειας της κύριας ρωγμής ανά μονάδα χρόνου.

Οι Hashida and Takahashi [94] χρησιμοποίησαν για τις δοκιμές τους δοκίμια γρανίτη και εφάρμοσαν κάμψη τριών σημείων προκειμένου να προσδιορίσουν τη δυσθραυστότητα του γρανίτη μέσω του ολοκληρώματος  $J$  όπως αυτό προσδιορίστηκε μέσω της μεθόδου της ακουστικής εκπομπής. Και σε αυτή την δοκιμή η έναρξη των ακουστικών κυμάτων ταυτίζεται με το επίπεδο φόρτισης όπου η καμπύλη δύναμης-βύθισης γίνεται μη γραμμική.

Οι Labuz and Biolzi [95] έκαναν χρήση δοκιμίων μεγάλων διστάσεων από γρανίτη και αμμόπετρα (sandstone) με εγκοπή για να πραγματοποιήσουν δοκιμές κάμψης τεσσάρων σημείων και κατάφεραν να προσδιορίσουν τη ζώνη εσωτερικών διεργασιών (fracture process zone) τους. Τέλος, το 1989 οι Bazant and Pijauder-Cabot [96] αναφέρουν ότι το πλάτος της ζώνης αυτής μπορεί να αποτελεί χαρακτηριστικό του υλικού.



**Εικ. 3.13:** Αποτελέσματα εντοπισμού θέσης ακουστικών γεγονότων σε δοκίμιο γρανίτη Westerly διαμέτρου 76.2mm υπό τριαξονική θλίψη με πλευρική πίεση  $\sigma_3 = 50\text{MPa}$  και ελεγχόμενο ρυθμό εκπομπής ακουστικών γεγονότων [92].

### 3.3 ΤΕΧΝΙΚΗ ΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΣΗΜΑΤΩΝ ΔΙΕΓΕΙΡΟΜΕΝΩΝ ΑΠΟ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΦΟΡΤΙΣΗ (PSC)

#### 3.3.1 ΔΙΑΤΟΜΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΚΑΙ ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ [97], [98]

Η σύνδεση των ατόμων στην στερεή κατάσταση είναι αρκετά σύνθετη. Αναπτύσσονται τύποι δεσμών όπως ο μεταλλικός δεσμός, οι δυνάμεις van der Waals κ.λ.π. Οι εν λόγω δυνάμεις είναι ηλεκτροστατικής φύσης, οπότε η ενέργεια δεσμού δίνεται από την σχέση:

$$U = -\frac{A}{r^n} + \frac{B}{r^m} \quad (6)$$

Η δυναμική ενέργεια σύμφωνα με τη συνήθη σύμβαση είναι αρνητική αν οφείλεται σε ελκτική δύναμη και θετική αν οφείλεται σε απωστική δύναμη. Από την παραπάνω εξίσωση έχουμε ότι  $r$  είναι η απόσταση μεταξύ των πυρήνων,  $A$  και  $B$  σταθερές και τα  $n$ ,  $m$  είναι άγνωστα και χαρακτηρίζουν τον τύπο του δεσμού.

Αν διαφορίσουμε την σχέση (6) ως προς  $r$ , τότε θα προκύψει η εξίσωση που περιγράφει την δύναμη  $F$  που αναπτύσσεται μεταξύ ενός ζεύγους ατόμων:

$$F = -\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{-nA}{r^{n+1}} + \frac{mB}{r^{m+1}} \quad (7)$$

Από την σχέση (7) συμπεραίνουμε ότι όταν τα άτομα πλησιάζουν μεταξύ τους τότε επικρατούν οι απωστικές δυνάμεις, ενώ όταν απομακρύνονται επικρατούν οι ελκτικές.

Για  $m > n$  υπάρχει μία τιμή ελάχιστης ενέργειας σύνδεσης – ισορροπία. Στην κατάσταση ισορροπίας των ατόμων ισχύει ότι η δύναμη ισούται με μηδέν και η ενέργεια ελαχιστοποιείται σε κρίσιμη απόσταση  $r_0$ , δηλ.

$$\min U \Rightarrow F = 0 \Rightarrow 0 = \frac{-nA}{r_0^{n+1}} + \frac{mB}{r_0^{m+1}} \Rightarrow r_0 = \sqrt[m-n]{\frac{mB}{nA}} \quad (8)$$

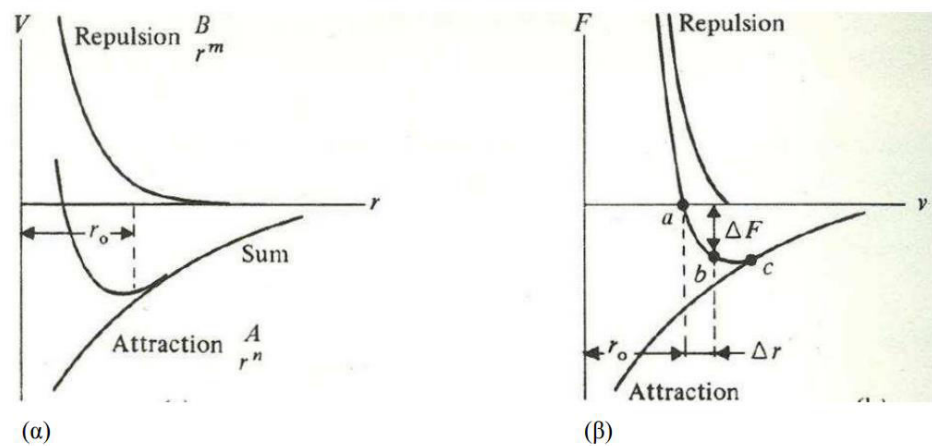


Στην περίπτωση που το  $n$  ισούται με μονάδα τότε προκύπτει ότι το  $m$  είναι περίπου δέκα για ιοντικό κρύσταλλο όπως το ορυκτό άλας.

Από την **Εικ. 3.5(β)** εξάγεται το εξής συμπέρασμα: καθώς τα άτομα αναγκάζονται να απομακρυνθούν, εξαιτίας της επίδρασης εξωτερικής δύναμης που ενεργεί σε έναν κρύσταλλο, τότε τα άτομα μετατοπίζονται από τη θέση ισορροπίας έως το σημείο που η δύναμη γίνεται ίση με την αύξηση  $\Delta F$  της ελκτικής δύναμης που αναπτύσσεται μεταξύ των ατόμων κατά την μεταφορά τους από το σημείο  $a$  στο  $b$ . Αν η δύναμη προκαλέσει επιμήκυνση του κρυστάλλου, τότε το νέο μήκος του γίνεται  $l+\Delta l$  (όπου  $l$  το αρχικό μήκος του). Για την μετατόπιση κάθε ατόμου από τη θέση ισορροπίας θα έχουμε:

$$\frac{\Delta r}{r_0} = \frac{\Delta l}{l} \quad (9)$$

Αν υποθέσουμε ελαστική συμπεριφορά του κρυστάλλου τότε τα άτομα θα επιστρέψουν στις αρχικές τους θέσεις όταν σταματήσει να ενεργεί η δύναμη.



**Εικ. 3.5:** Οι καμπύλες Gordon –Morse (α) Η δυναμική ενέργεια  $V$  και (β) η δύναμη συναρτήσει της απόστασης  $r$  [97].

Από την κλίση της εφαπτομένης στην καμπύλη, στη θέση ισορροπίας  $(\frac{\partial F}{\partial r})_{r=r_0}$  μπορεί να υπολογιστεί ο λόγος  $\Delta F/\Delta r$ .

Λόγω της ελαστικής συμπεριφοράς των κρυστάλλων ισχύει ότι  $\frac{\Delta l}{l} \leq 0.5\%$ , οπότε το  $\Delta r$  λαμβάνει πολύ μικρές τιμές και κατ' επέκταση η κλίση  $\partial F/\partial r$  στην καμπύλη της δύναμης θεωρείται σταθερή για το μικρό αυτό εύρος του

γ. Από τον νόμο ελαστικότητας του Hooke, προκύπτει ότι στην ελαστική περιοχή η δύναμη και η μετατόπιση  $\Delta r$  είναι ανάλογες ποσότητες. Τα ίδια συμπεράσματα προκύπτουν και στην περίπτωση που η εξωτερική εφαρμοζόμενη δύναμη είναι θλιπτική.

Υποθέτοντας ότι η τιμή της εφελκυστικής δύναμης είναι αρκετά μεγάλη τότε από την **Εικ. 3.5(β)** παρατηρούμε ότι η ισορροπία επιτυγχάνεται στο σημείο c και στο υλικό επέρχεται αστοχία, καθώς στο σημείο αυτό αντιστοιχεί η δύναμη συνοχής. Παρόλα αυτά ο λόγος  $\Delta r/r_0$  λαμβάνει μικρές τιμές στο σημείο αυτό. Ψαθυρά υλικά όπως οι κρύσταλλοι καθαρού πυριτίου ή γερμανίου παρουσιάζουν τη συμπεριφορά που περιγράφηκε. Αντίθετα, άλλα υλικά όπως π.χ. τα μέταλλα παρουσιάζουν αρκετά σημαντική επιμήκυνση πριν αστοχήσουν και εμφανίζουν παράμενουσα παραμόρφωση αν οι δυνάμεις που εφαρμοστούν έχουν μεγάλες τιμές. Εξαιτίας του ότι υπάρχει εξάρτηση των μηχανικών ιδιοτήτων από τις ατέλειες στην κρυσταλλική δομή των υλικών είναι σημαντικό να ερευνάται η φύση και η επίδραση των δυνάμεων συνοχής.

### 3.3.2 ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΑΤΕΛΕΙΕΣ ΤΗΣ ΚΡΥΣΤΑΛΛΙΚΗΣ ΔΟΜΗΣ [97], [98]

Στη φύση είναι πρακτικά αδύνατο η δομή κάποιου κρυσταλλικού υλικού να είναι τέλεια. Δηλαδή, όλοι οι κρύσταλλοι και όλα τα κρυσταλλικά ή πολυκρυσταλλικά υλικά παρουσιάζουν ατέλειες που μπορούν να περιγραφούν σαν ανωμαλίες, οι οποίες “επιβάλλονται” από την ίδια τη φύση που προτιμάει ατελείς παρά τέλειους κρυστάλλους [99, 100]. Οι ατέλειες διακόπτουν την κανονικότητα του κρυσταλλικού πλέγματος και με βάση τη γεωμετρία και τη μορφή τους κατηγοριοποιούνται σε:

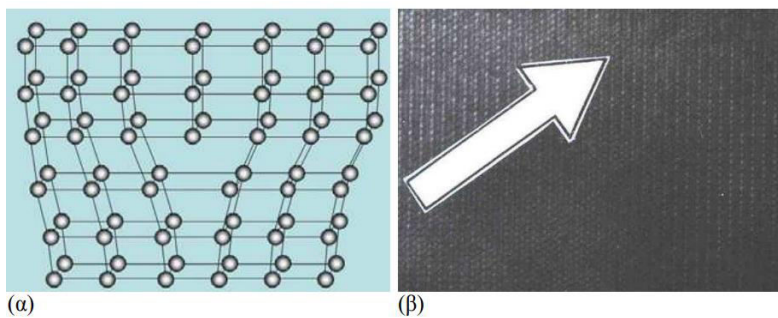
- Ατέλειες μηδενικής διάστασης ή σημειακές ατέλειες. Πλεγματικά κενά, ένθετα άτομα παρεμβολής και αντικατάστασης, ατέλειες Frenkel και Schottky.
- Ατέλειες μίας διάστασης ή γραμμικές ατέλειες (διαταραχές). Διαταραχές ακμής, έλικα και μικτές.
- Ατέλειες δύο διαστάσεων ή επίπεδες ατέλειες. Όρια κόκκων, διδυμίες, σφάλματα επιστοιίβασης.
- Ατέλειες τριών διαστάσεων. Πόροι, ρωγμές, ακαθαρσίες (εγκλείσματα), κατακρημνίσματα [100].

Ως γραμμική ατέλεια (**Εικ. 3.6**) χαρακτηρίζουμε μία γραμμή που χωρίζει ένα κρυσταλλικό επίπεδο σε δυο επιμέρους τμήματα με τέλεια κρυσταλλική δομή το καθένα αλλά στα σημεία επαφής τους ατελή. Δημιουργούνται κατά τη διάρκεια της στερεοποίησης ή της πλαστικής παραμόρφωσης του υλικού ή εξαιτίας των θερμικών τάσεων που αναπτύσσονται κατά τη γρήγορη ψύξη του. Υπάρχουν τρεις βασικοί τύποι διαταραχών, οι διαταραχές ακμής και οι διαταραχές κοιλία ή ελικοειδείς διαταραχές καθώς και η μικτή διαταραχή που συνδυάζει στοιχεία και από τους δυο τύπους [100].

Όταν ένα επιπλέον επίπεδο ατόμων εισέρχεται μεταξύ των παράλληλων επιπέδων που σχηματίζουν τα άτομα σε έναν φυσιολογικό κρύσταλλο μπορεί να προκαλέσει στρέβλωση του κρυσταλλικού πλέγματος (**Εικ. 3.7**) και το φαινόμενο αυτό ονομάζεται γραμμική διαταραχή ή διαταραχή ακμής (edge dislocation). Υπό την ενέργεια διατμητικής τάσης μικρότερου μεγέθους από αυτή που απαιτείται για να επιτευχθεί ολίσθηση ενός ολόκληρου επιπέδου ως προς ένα άλλο, μπορεί να μετακινηθεί προκαλώντας ολίσθηση μέσα στον κρύσταλλο (**Εικ. 3.8**).

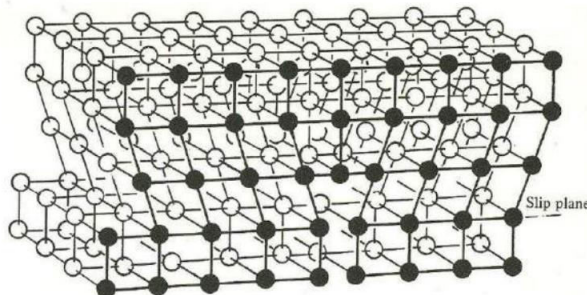
Πιο αναλυτικά, στην **Εικ. 3.8**, τα ζεύγη 1–2 και 3–4 απέχουν μεταξύ τους περισσότερο από τη φυσιολογική τους απόσταση ισορροπίας κι έτσι έχουν

αποθηκευμένη μία συγκεκριμένη ποσότητα ενέργειας παραμόρφωσης. Υπό την επίδραση διατμητικής τάσης,  $\tau$ , το 1 μετατοπίζεται στην νέα θέση, 1', με αποτέλεσμα να μειώνεται η ενέργεια παραμόρφωσης μεταξύ του 1 και του 3. Το άτομο 5 θα μετακινηθεί στο 5' πλησιάζοντας περισσότερο στο 4 δηλαδή στην κανονική διατομική απόσταση ισορροπίας από το 4, ενώ το 3 μετακινούμενο στο 3' απομακρύνεται από το 4 αυξάνοντας την ενέργεια παραμόρφωσης. Η αύξηση αυτή αντισταθμίζεται από το άτομο 3 που γίνεται τώρα άτομο της διαταραχής ακμής, ενώ τα 1-2 και 5-4 γίνονται ζεύγη σε γειτονικά επίπεδα. Έτσι, η εξάρμωση έχει μετακινηθεί υπό την επίδραση της διατμητικής τάσης κατά μία θέση στο πλέγμα προς τα δεξιά. Αν η μετατόπιση συνεχιστεί το τελικό αποτέλεσμα θα είναι η ολίσθηση ολόκληρου του επιπέδου που περιλαμβάνει τη γραμμική διαταραχή (**Εικ. 3.9**). Ας σημειωθεί ότι το επίπεδο της διαταραχής ακμής και η κατεύθυνση της κίνησής της είναι κάθετα στο επίπεδο ολίσθησης [97].

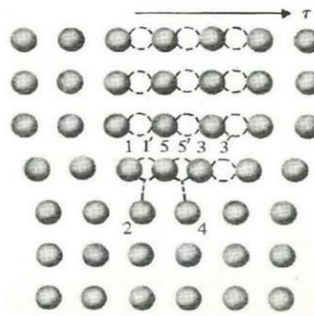


**Εικ. 3.6:** (α) Σχηματική παράσταση μιας τυπικής περίπτωσης γραμμικής ατέλειας σε κρύσταλλο.

(β) Η γραμμική ατέλεια όπως προσδιορίζεται στο ηλεκτρονικό μικροσκόπιο διέλευσης υψηλής διακριτικής ικανότητας [99].

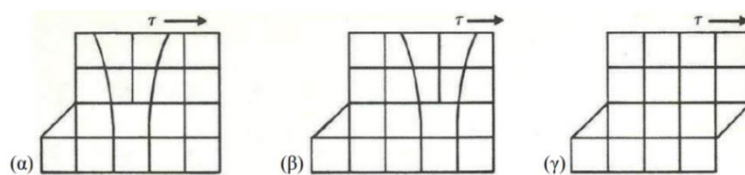


**Εικ. 3.7:** Μια διαταραχή ακμής [97]

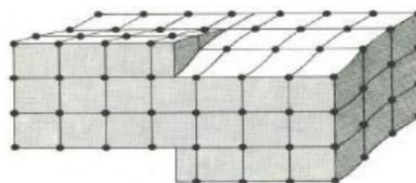


**Εικ. 3.8:** Κίνηση των ατόμων γύρω από μία διαταραχή, όταν επιβάλλεται διατμητική τάση [97]

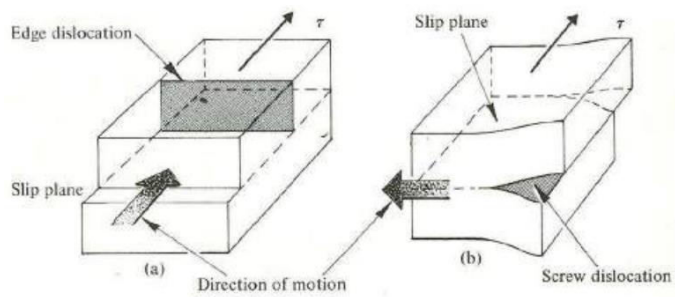
Σχετικά με την ελικοειδή διαταραχή ή διαταραχή κοχλία (screw dislocation), **Εικ. 3.10** [97] γύρω από τη γραμμή της διαταραχής σχηματίζεται ελικοειδής επιφάνεια που προκαλείται από την στροφή του κρυσταλλικού πλέγματος πέριξ της γραμμής διαταραχής [100]. Συνεπώς, τα άτομα μετατοπίζονται σε δύο διαφορετικά επίπεδα που είναι κάθετα μεταξύ τους [97]. Υπό την επίδραση της διατμητικής τάσης η διαταραχή μετατοπίζεται εντός του επιπέδου ολίσθησης με κατεύθυνση κίνησης κάθετη στην κατεύθυνση ολίσθησης. Στην **Εικ. 3.11** γίνεται σύγκριση των δυο τύπων διαταραχών γραμμικής και ελικοειδούς.



**Εικ. 3.9:** Η εξέλιξη μιας διαταραχής ακμής μέσω ενός κρυστάλλου και η ολίσθηση που προκαλείται [97].



**Εικ. 3.10:** Μια διαταραχή κοχλία [97].



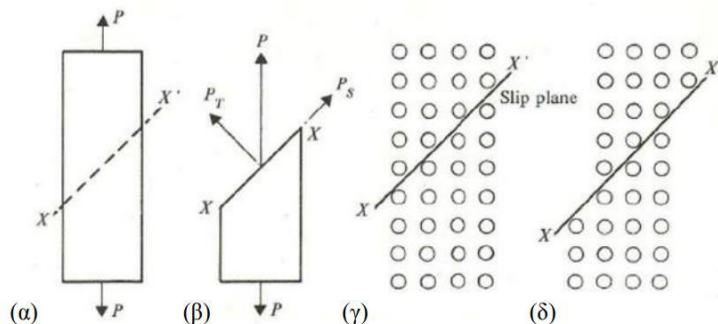
**Εικ. 3.11:** Οι κατεθύνσεις ολίσθησης και κίνησης μιας  
 (α) γραμμικής διαταραχής και  
 (β) διαταραχής κοχλία [97]

### 3.3.3 ΕΠΙΠΕΔΑ ΟΛΙΣΘΗΣΗΣ [97], [98]

Στην αντοχή υλικών προκειμένου να επιτευχθεί η απομάκρυνση των ατόμων και η αστοχία του υλικού είναι απαραίτητο να εφαρμοστούν αρκετά μεγάλες δυνάμεις. Για το δοκίμιο της **Εικ. 3.12(α)** που υπόκειται σε εφελκυσμό θεωρούμε ότι το δοκίμιο χωρίζεται σε δυο τμήματα κατά την γραμμή  $xx'$  και στην περίπτωση που εφαρμοστεί μία εφελκυστική δύναμη  $P$ , αναλύεται στις συνιστώσες  $P_S$ ,  $P_T$ . Η  $P_S$  αντιστοιχεί στην διατμητική δύναμη του επιπέδου  $xx'$  ενώ η  $P_T$  είναι συνιστώσα κάθετη στο εν λόγω επίπεδο. Συμπεραίνουμε ότι μια εφελκυστική δύναμη είναι ικανή να προκαλέσει διατμητικές τάσεις.

Αντικαθιστούμε το δοκίμιο με σφαιρικά άτομα (**Εικ. 3.12(γ)**). Παρατηρούμε ότι, στην κατεύθυνση  $xx'$  τα άτομα βρίσκονται σε επίπεδα πυκνής διάταξης και συνεπώς είναι εύκολο ένα από αυτά τα επίπεδα να ολισθήσει ως προς το άλλο υπό την επίδραση διατμητικής τάσης. Το  $xx'$  καλείται επίπεδο ολίσθησης. Από την **Εικ. 3.12(δ)** προκύπτει το συμπέρασμα ότι κατά την ολίσθηση ενός επιπέδου ως προς ένα άλλο υφίσταται μετακίνηση των ατόμων των γειτονικών επιπέδων σε νέες θέσεις πυκνής διάταξης. Η απαιτούμενη ενέργεια είναι μικρότερη από την ενέργεια που απαιτείται για την διάσπαση των δεσμών που ενώνουν τα άτομα.

Ένας κρύσταλλος διαθέτει αρκετά επίπεδα ολίσθησης, η ολίσθηση ξεκινά από το επίπεδο ολίσθησης που η αντίστοιχη διατμητική τάση λαμβάνει την μέγιστη τιμή. Στη περίπτωση που οι διατμητικές τάσεις είναι ισοδύναμες η ολίσθηση ξεκινά ταυτόχρονα σε όλα τα επίπεδα ολίσθησης.



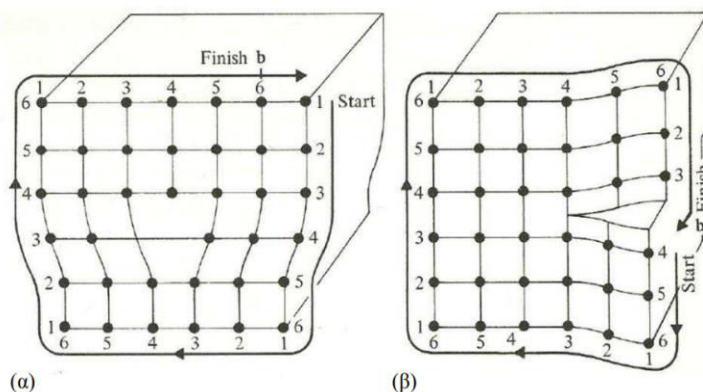
**Εικ. 3.12:** Ανάλυση της εφελκυστικής τάσης και παραμόρφωσης [97].

### 3.3.4 ΔΙΑΝΥΣΜΑ BURGERS [97], [98]

Για την ουσιαστικότερη περιγραφή των διαταραχών ο Burgers εισήγαγε την έννοια του διανύσματος Burgers.

Το μέτρο και η διεύθυνση της ολίσθησης που σχετίζεται με κάποια διαταραχή δίνονται από το διάνυσμα Burgers, **b**. Αν κινηθούμε στην περίμετρο μιας διαταραχής, **Εικ. 3.13**, και απαιτήσουμε κάθε παράλληλο ζεύγος “ποδιών” της περιμέτρου να περιλαμβάνει τον ίδιο αριθμό ατόμων, τότε η διαδρομή αυτή δεν μπορεί να “κλείσει” λόγω του διανύσματος Burgers. Οφείλουμε να αναφέρουμε ότι το διάνυσμα Burgers έχει πάντα τη διεύθυνση και το μέγεθος της ολίσθησης που έχει πραγματοποιηθεί κατά μήκος του επιπέδου ολίσθησης που οφείλεται στη μετακίνηση της διαταραχής.

Η θετική φορά του διανύσματος Burgers είναι σύμφωνα με τους δείκτες του ρολογιού (δεξιόστροφη), και ξεκινά από τα μη ολισθαίνοντα προς τα ολισθαίνοντα τμήματα του κρυστάλλου. Αφού το πλέγμα για μια τέλεια διαταραχή πρέπει να είναι σε συμφωνία με τα ολισθαίνοντα και τα μη ολισθαίνοντα όρια, το διάνυσμα Burgers θα είναι πάντα ένας ακέραιος αριθμός της χωροθέτησης των ατόμων για μια τέτοια διαταραχή.



**Εικ. 3.13:** Η “διαδρομή “ Burgers που ορίζει το διάνυσμα για μια (α) γραμμική διαταραχή (β) ελικοειδή διαταραχή [97]

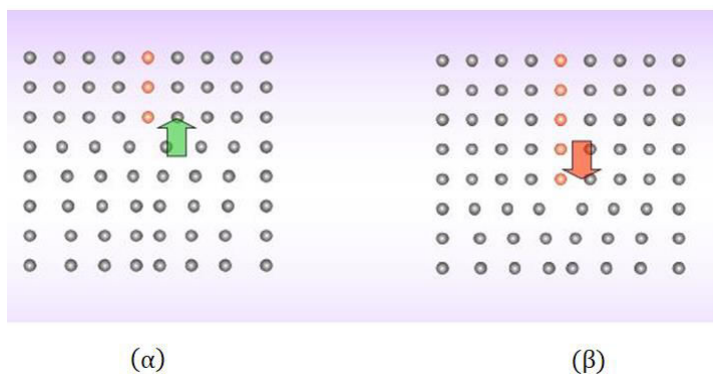


### 3.3.5 “ΥΠΕΡΠΗΔΗΣΗ” (CLIMB) [97], [98]

Κατά την ολίσθηση (glide), η διαταραχή κινείται κατά μήκος ενός επιπέδου και μπορούν να την εμποδίσουν παράγοντες όπως τα όρια ενός κόκκου όπου τα άτομα δεν βρίσκονται στην κανονική τους διάταξη.

Σε υψηλές θερμοκρασίες μια διαταραχή της ακμής μπορεί να μετακινηθεί εντός του δικού της επιπέδου ολίσθησης, κάθετα στο επίπεδο ολίσθησης επειδή ευνοείται η διάχυση ατόμων ή κενών (θέσεις που απουσιάζουν άτομα) στον κρύσταλλο, μια διαδικασία που καλείται “υπερπήδηση” (climb). Από την **Εικ. 3.14** αν η γραμμή των ατόμων A που βρίσκεται στην κανονική της διάταξη στο επίπεδο αφαιρεθεί, τότε η γραμμή διαταραχής μετακινείται προς τα πάνω κατά μία θέση εντός του επιπέδου ολίσθησης και καλείται θετική “υπερπήδηση”. Ομοίως, αν μια γραμμή από άτομα προστεθούν στο άκρο του πρόσθετου ημι-επιπέδου, η γραμμή διαταραχής μετακινείται καθοδικά κατά μια θέση εντός του επιπέδου ολίσθησης και λέγεται αρνητική “υπερπήδηση”.

Με τον τρόπο αυτό τα εμπόδια που μπορεί να εμφανίζονται στα επίπεδα ολίσθησης ξεπερνιούνται και η διαταραχή πηδά σε άλλο επίπεδο και συνεχίζει την ολίσθηση.



**Εικ. 3.14:** (α) “Θετική υπερπήδηση”, αφαίρεση γραμμής ατόμων, και  
(β) “Αρνητική υπερπήδηση” προσθήκη γραμμής ατόμων[101].

### 3.3.6 “ΩΘΗΣΕΙΣ” (JOGS) [97], [98]

Όπως αναφέρθηκε στη προηγούμενη, παράγραφο η “υπερπήδηση” της διαταραχής προϋποθέτει την πλήρη προσθήκη ή αφαίρεση γραμμής ατόμων από τη γραμμική διαταραχή καθ’ όλο το μήκος της. Στην περίπτωση όμως που δεν συμβεί η διαδικασία αυτή, τότε το πρόσθετο ημι-επίπεδο μπορεί να να υπερβαίνει ή να υπολείπεται μόνο κατά ένα μέρος του μήκους του. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η διαταραχή να μετακινηθεί ταυτόχρονα σε δυο επίπεδα ολίσθησης. Αυτός ο τύπος διαταραχής καλείται “ώθηση” διαταραχής (dislocation jog). Στη διαταραχή κοιλία η κατεύθυνση της ολίσθησης συμπίπτει με τη γραμμή της διαταραχής και ως “ώθηση” θεωρείται ένα μικρό τμήμα γραμμικής διαταραχής που εισέρχεται στην ελικοειδή διαταραχή. Η διαταραχή κοιλία με “ωθήσεις” μπορεί να συνεχίσει να κινείται στο επίπεδο ολίσθησης και να μεταφέρει την “ώθηση” κατά μήκος της. Η κατεύθυνση της κίνησης της γραμμικής διαταραχής αποκλίνει από την αντίστοιχη της διαταραχής του κοιλία και επειδή δεν πραγματοποιείται διάχυση των ατόμων ώστε να μεγαλώσει το ημι-επίπεδο, αφήνει κατά την μετακίνηση της ίχνη από κενά. Οι “ωθήσεις” δυσχεραίνουν τη μετακίνηση των διαταραχών και συνεπώς το έργο που χρειάζεται για τις διαταραχές με “ωθήσεις” είναι μεγαλύτερο από αυτό για τις διαταραχές χωρίς “ωθήσεις”.

### 3.3.7 ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΩΝ ΚΙΝΟΥΜΕΝΩΝ ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΦΟΡΤΙΣΜΕΝΩΝ ΕΞΑΡΜΩΣΕΩΝ (MOVING CHARGED DISLOCATIONS - MCD MODEL) [98]

Το 1997 οι Vallianatos και Tzaniς διατυπώνουν τη θεωρία αυτή και χρησιμοποιούν πειραματικά δεδομένα από δοκιμές σε γεωυλικά. Για τη περίπτωση μονοαξονικής θλίψης (ή και εφελκυσμού, έστω  $\Lambda^+$  και  $\Lambda^-$  η πυκνότητα των θετικά και αρνητικά φορτισμένων γραμμικών εξαρμώσεων αντίστοιχα, τότε η κίνησή τους προκαλεί εγκάρσια πόλωση P [102] δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$P = (\Lambda^+ - \Lambda^-)q_1 \frac{\delta x}{\sqrt{2}} = (\delta\Lambda)q_1 \frac{\delta x}{\sqrt{2}} \quad (10)$$

με  $q_1$  το φορτίο ανά μονάδα μήκους της εξάρμωσης (της τάξης  $10^{-11}\text{Cb/m}$ ). Αγνοώντας τις ελικοειδείς εξαρμώσεις, όταν οι εξαρμώσεις με διάνυσμα Burgers  $\mathbf{b}$  κινηθούν κατά μία απόσταση  $\delta x$ , η πλαστική παραμόρφωση είναι:

$$\varepsilon = (\Lambda^+ - \Lambda^-)\mathbf{b} \frac{\delta x}{2} \quad (11)$$

Ο ρυθμός αλλαγής της πολικότητας είναι εξ' ορισμού ισοδύναμος με την πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος. Από τις σχέσεις (11) – (12) προκύπτει:

$$J = \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\sqrt{2} q_1}{\beta \mathbf{b}} \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (12)$$

Το ηλεκτρικό ρεύμα δίνεται από τη σχέση:

$$I = \frac{\sqrt{2} q_1 A}{\beta \mathbf{b} E} \frac{d\sigma}{dt} \Rightarrow I = \gamma \frac{d\sigma}{dt} \quad (13)$$

όπου  $\mathbf{b}$  το διάνυσμα Burgers, A το εμβαδό ηλεκτροδίου, E το μέτρο ελαστικότητας του υλικού και  $\gamma$  ένας συντελεστής αναλογίας που εξαρτάται από το μέτρο ελαστικότητας του υλικού.

$$\beta = \frac{\Lambda^+ + \Lambda^-}{\Lambda^+ - \Lambda^-} \quad (15)$$

Οι τιμές του  $\beta$  συνήθως κυμαίνονται μεταξύ 1 και 1.5.

Η τελευταία σχέση δείχνει ότι η παρατηρούμενη παροδική ηλεκτρική διακύμανση σχετίζεται με τη μη στατική συσσώρευση παραμόρφωσης.

### 3.4 ΜΕΛΕΤΕΣ ΠΟΥ ΣΥΝΔΥΑΖΟΥΝ ΤΗΝ ΧΡΗΣΗ ΤΩΝ ΠΡΟΑΝΑΦΕΡΘΕΙΣΩΝ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΩΝ ΤΕΧΝΙΚΩΝ [98]

Οι προαναφερθείσες πειραματικές τεχνικές έχουν αρχίσει να εφαρμόζονται συνδυαστικά σε μεταλλικά υλικά, σε σκυρόδεμα και σε γεωυλικά. Για το σκυρόδεμα οι Shuhong Dai et al. [103] συνδύασαν τη μέθοδο της ακουστικής εκπομπής με την DIC για να μελετήσουν την έναρξη και διάδοση θραύσης σε δοκίμια ορθογωνικής διατομής από σκυρόδεμα σε δοκιμές κάμψης.

Οδηγήθηκαν στο συμπέρασμα ότι η τεχνική DIC προσδιορίζει τα πεδία μετατόπισης και καταπόνησης, καθώς και τη θέση της ρωγμής. Επιπλέον, η μέθοδος AE εντόπισε τα εσωτερικά συμβάντα μικρορωγμών. Οι A. V. Byakov et al. [104] χρησιμοποίησαν δοκίμια κράματος AA2024 και συνδύασαν τις μεθόδους DIC και AE, γεγονός που τους βοήθησε να συμπεράνουν ότι η τεχνική AE είναι πιο ευαίσθητη στην ανίχνευση παραμορφώσεων από το μικρο–στο μεσο–επίπεδο, αντίθετα η τεχνική DIC “αναγνωρίζει” καλύτερα τις παραμορφώσεις από το μεσο–στο μακρο–επίπεδο.

Όσον αφορά όμως, το συνδυασμό των τεχνικών PSC και AE έχει εφαρμοστεί ευρέως στην μελέτη δοκιμών κονιάματος και επίσης σε δοκίμια Διονυσιακού μαρμάρου. Σχετικά με τα κονιάματα, χρησιμοποιήθηκαν πρισματικά δοκίμια που υπόκεινται σε κάμψη τριών σημείων [105,106,107]. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι δυο τεχνικές εμφάνισαν πολύ καλή συσχέτιση μεταξύ τους. Η μεταβολή του ηλεκτρικού ρεύματος παρουσίασε “κορυφές” (μέγιστα) που η καταγραφή τους πραγματοποιήθηκε όταν οι ακουστικές εκπομπές είχαν μεγάλο πλάτος, υψηλή ενέργεια και όταν ο ρυθμός παραγωγής τους ήταν μεγάλος. Η συσχέτιση μεταξύ των ηλεκτρικών και των ακουστικών εκπομπών αποδείχθηκε και στην περίπτωση του μαρμάρου Διονύσου, όπως αποδείχθηκε από δοκιμές μονοαξονικής θλίψης [108,109].

Μέχρι σήμερα έχουν πραγματοποιηθεί αρκετές έρευνες που μελετούν τον συνδυασμό των προαναφερθείσων τεχνικών.

## 4<sup>ο</sup> ΚΕΦΑΛΑΙΟ

### ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ

#### 4.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Για την επικύρωση της αναλυτικής λύσης, υλοποιήθηκαν μία σειρά πειραμάτων σε δοκίμια μορφής ημιδακτυλίου (CSR) με και χωρίς εκκεντρότητα κατασκευασμένα από μάρμαρο Διονύσου που υποβάλλεται σε αντιδιαμετρική θλίψη. Η μέθοδος αυτή έχει προταθεί ως εναλλακτική για να υποκαταστήσει το πείραμα του Βραζιλιανού δίσκου για τον προσδιορισμό της εφελκυστικής αντοχής των ψαθυρών υλικών.

Το πειραματικό πρωτόκολλο υλοποιήθηκε στο Εργαστήριο Αντοχής Υλικών του Ε.Μ.Π κατά την διάρκεια του Ακαδημαϊκού Εξαμήνου 2018-2019. Όλα τα δοκίμια κατασκευάστηκαν από την ίδια πλάκα Διονυσιακού μαρμάρου. Η ακραία ευθραυστότητα και οι πολύ μικρές μετατοπίσεις του Διονυσιακού μαρμάρου οδήγησαν στην επιλογή του. Χρησιμοποιήθηκαν πολλές μέθοδοι για τον προσδιορισμό του πεδίου μετατοπίσεων. Ενδεικτικά αναφέρονται η τεχνική Συσχέτισης Ψηφιακής Εικόνας (DIC), και η τεχνική Ακουστικών Εκπομπών.

## 4.2 ΥΛΙΚΟ – ΔΟΚΙΜΙΟ

### 4.2.1 ΥΛΙΚΟ [98]

Το Διονυσιακό μάρμαρο αποτελείται κατά 98% από ασβεστίτη, 0.5% από μοσχοβίτη, 0.5% από σερεσίτη, 0.5% από χαλαζία, 0.5% από χλωρίτη και η πυκνότητα του έχει υπολογιστεί ότι είναι ίση με  $2730 \text{ kgf/m}^3$ , ενώ η φαινομενική πυκνότητα είναι  $2717 \text{ kgf/m}^3$ .

Ο συντελεστής υδαταπορρόφησης κατά βάρος είναι περίπου 0.11.

Ο συντελεστής θερμικής διαστολής έχει προσδιορισθεί ότι είναι περίπου  $9 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$  μεταξύ  $15 ^\circ\text{C}$  και  $100^\circ\text{C}$ .

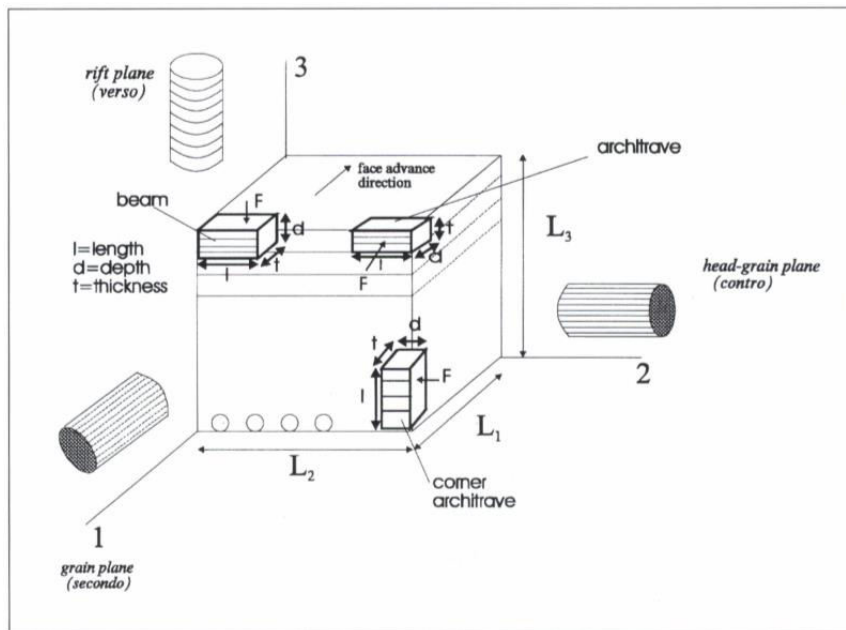
Παρουσιάζει χαμηλή τιμή πορώδους που κυμαίνεται μεταξύ 0.3% στην παρθενική του κατάσταση και 0.7% όταν έχει υποστεί την επίδραση διαφόρων φυσικών ή και τεχνητών διαβρωτικών παραγόντων. Το μέγεθος των κόκκων κυμαίνεται γύρω στα  $0.43 \times 10^{-3} \text{ m}$  και οι κρύσταλλοί του είναι πολυγωνικοί με διαστάσεις μεταξύ  $900 \mu\text{m} \times 650 \mu\text{m}$  και  $950 \mu\text{m} \times 874 \mu\text{m}$ , σχεδόν ομοιόμορφου μεγέθους. Το χρώμα του είναι λευκό και παρουσιάζει λίγες σταχτοπράσινες φλέβες με διεύθυνση κατά την σχιστότητα του υλικού. Εντοπίζονται ασημόχρωμες περιοχές που οφείλονται στην παρουσία μικρών ποσοτήτων μοσχοβίτη και χλωρίτη.

Όσον αφορά τις μηχανικές ιδιότητες, σύμφωνα με τα υπάρχοντα δεδομένα ποικίλλουν εντός ευρέων ορίων. Οι τιμές της εφελκυστικής αντοχής κυμαίνονται μεταξύ 2.4 MPa και 19.4 MPa ενώ του μέτρου ελαστικότητας μεταξύ 23 GPa και 90 GPa. Η διασπορά που παρατηρείται οφείλεται τόσο στις διαφορετικές συνθήκες που πραγματοποιούνται τα πειράματα όσο και στην ανισοτροπία, που είναι βασικό χαρακτηριστικό της μηχανικής συμπεριφοράς του Διονυσιακού μαρμάρου. Οι διευθύνσεις ανισοτροπίας, είναι τρεις και είναι οι εξής: 1) **μία** κάθετη στις υλικές στρώσεις (rift plane ή verso ή Π-plane) και 2) **δύο** εντός του επιπέδου των στρώσεων (grain plane ή second ή M-plane και head grain ή contro ή k - plane) (*Εικ. 4.1*).

Στον *Πίν. 4.1* παρουσιάζονται οι τιμές του μέτρου Ελαστικότητας E, του λόγου Poisson ν και της εφελκυστικής αντοχής του Διονυσιακού μαρμάρου στις τρεις διευθύνσεις όπως προέκυψαν από πειράματα άμεσου εφελκυσμού. Παρατηρείται ότι σε δυο διευθύνσεις κατά τα επίπεδα grain και head grain οι τιμές των τριών ποσοτήτων είναι παραπλήσιες. Το γεγονός αυτό εξηγεί και την ευρέως υιοθετούμενη παραδοχή ότι το μάρμαρο αυτό μπορεί να

αντιμετωπίζεται ως εγκάρσιως ισότροπο υλικό με έναν άξονα ελαστικής συμμετρίας απείρου τάξεως (τον κάθετο στις στρώσεις).

Συνεπάγεται ότι με την χρήση πέντε σταθερών: δυο μέτρων ελαστικότητας  $E$  και  $E'$  στο επίπεδο εγκάρσιας ισοτροπίας και κάθετα σε αυτό, των δυο λόγων Poisson,  $\nu$  και  $\nu'$  οι οποίοι περιγράφουν την εγκάρσια απόκριση των παραμορφώσεων εντός του επιπέδου ισοτροπίας σε εφελκυστικές φορτίσεις παράλληλα και κάθετως σε αυτό και του μέτρου διατμήσεως,  $G$ , σε επίπεδα κάθετα στο επίπεδο ισοτροπίας μπορεί να περιγραφεί η μηχανική συμπεριφορά του μαρμάρου.



Εικ. 4.1: Η ανισοτροπία του Διονυσιακού μαρμάρου και η σχετική διεθνής ορολογία για τα δοκίμια [110].

	$E$ [GPa]	$\nu$	$\sigma_f$ [MPa]
Ισχυρή διεύθυνση(1)	84.5	0.26	10.8
Ενδιάμεση διεύθυνση (2)	79.5	0.26	9.5
Ασθενής διεύθυνση (3)	50.0	0.11	5.3

Πίν. 4.1: Μηχανικές ιδιότητες του Διονυσιακού μαρμάρου [110].



#### 4.2.1.1 Η ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΤΟΥ ΔΙΟΝΥΣΙΑΚΟΥ ΜΑΡΜΑΡΟΥ ΥΠΟ ΑΜΕΣΟ ΕΦΕΛΚΥΣΜΟ [110]

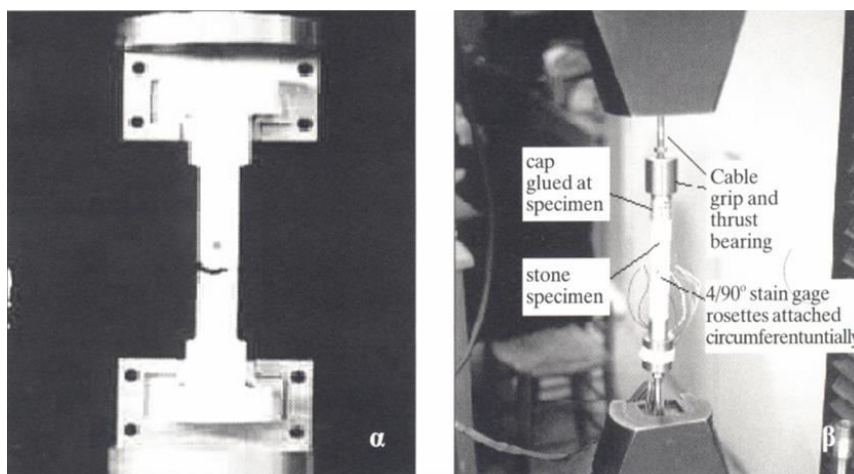
Το πείραμα του μονοαξονικού εφελκυσμού παρέχει αρκετές πληροφορίες σχετικά σχετικά με την μηχανική συμπεριφορά των υλικών και την τιμή των ελαστικών τους σταθερών εκτός από την περίπτωση των γεωυλικών. Σε αυτή την κατηγορία υλικών λόγω της δημιουργίας των απαραίτητων δυνάμεων τριβής που αναπτύσσονται εντός των αρπαγών (που θα συμβάλλουν στην ανάπτυξη εφελκυστικών τάσεων) κατά την φόρτιση με θλιπτικά φορτία προκαλούν τον θρυμματισμό στις κεφαλές εξαιτίας της αυξημένης ψαθυρότητας. Για το λόγο αυτό το πείραμα του μονοαξονικού εφελκυσμού αντικαταστάθηκε από το πείραμα της αντιδιαμετρικής θλίψης, στο οποίο όμως αναπτύσσεται πολυαξονικό εντατικό πεδίο. Το φαινόμενο αυτό μας καθιστά επιφυλακτικούς ως προς τα αποτελέσματα ειδικά στην περίπτωση που επιβάλλεται η ακριβής γνώση τη καταστατικής εξίσωσης του υλικού.

Έχουν πραγματοποιηθεί δοκιμές σε δοκίμια από Διονυσιακό μάρμαρο στα οποία έχουν εφαρμοστεί μονοαξονικά εφελκυστικά φορτία με την συμβολή δυο πειραματικών διατάξεων: 1) συνδυασμό κυλινδρικών δοκιμίων διπλής βαθμίδας στη διατομή τύπου «dogbone» και ειδικές διαιρούμενες αρπάγες (**Εικ. 4.2(α)**) και 2) χρήση «εύκαμπτων» αρπαγών (συρματόσχοινα ειδικού τύπου) που ασκούν εφελκυστικό φορτίο σε ειδικό κέλυφος εντός του οποίου «κοχλιώνεται» μεταλλική κεφαλή, με εσωτερική διάμετρο αυτή του δοκιμίου, εντός της οποίας συγκρατείται το δοκίμιο με κατάλληλη κυανοακρυλική συγκολλητική ουσία (**Εικ. 4.2(β)**).

Στην πρώτη διάταξη το φορτίο εφαρμόζεται από τις αρπάγες στην πρώτη βαθμίδα των δοκιμίων διατμητικώς, χωρίς σύνθλιψη. Τα αποτελέσματα ήταν ενθαρρυντικά αλλά η μέθοδος αποδείχθηκε ευαίσθητη και στις ελάχιστες αποκλίσεις από την απόλυτη ευθυγράμμιση μεταξύ του άξονα φορτίσεως της μηχανής και του άξονα του δοκιμίου, με αποτέλεσμα τη δημιουργία παρασιτικών καμπικών τάσεων.

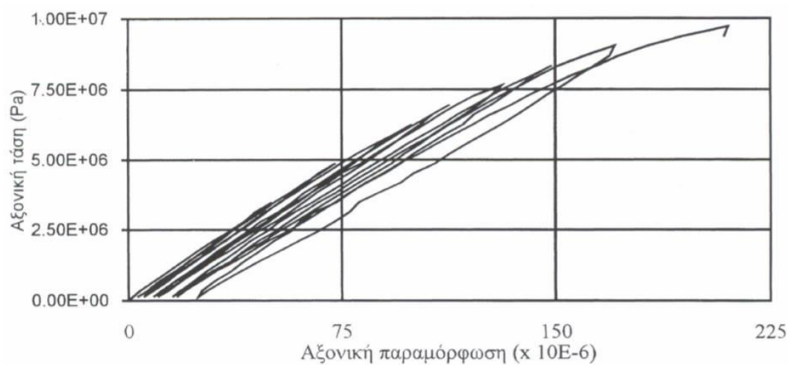
Από τις δυο μεθόδους προέκυψαν συμπεράσματα, εκ των οποίων το σημαντικότερο αφορά την καταστατική συμπεριφορά του Διονυσιακού μαρμάρου και σχετίζεται με την μη γραμμική απόκριση και στα σχετικά αρχικά στάδια φορτίσεως που παρατηρείται από το διάγραμμα τάσεων–αξονικών παραμορφώσεων της **Εικ. 4.3**.

Το συγκεκριμένο διάγραμμα παρουσιάζει τα δεδομένα σειράς οκτώ κύκλων φορτίσεως αποφορτίσεως. Το ίδιο συμπέρασμα προέκυψε και για το λόγο της εγκάρσιας συστολής σε συνάρτηση με την διαμήκη επιμήκυνση (λόγος Poisson).



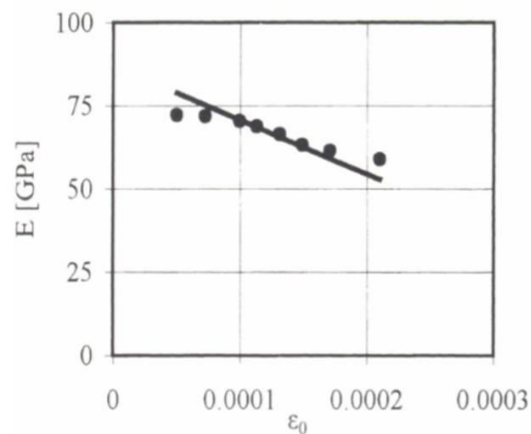
**Εικ. 4.2:** Διατάξεις για τα πειράματα άμεσου μονοαξονικού εφελκυσμού δοκιμίων από Διονυσιακό μάρμαρο. [110].

Επιπλέον, το Διονυσιακό μάρμαρο παρουσιάζει σημαντικές παραμένουσες παραμορφώσεις που στον τέταρτο κύκλο φορτίσεως-αποφορτίσεως πλησιάζουν το  $10 \times 10^{-6}$ , ενώ στον όγδοο προσεγγίζουν το  $25 \times 10^{-6}$ . Οπότε, χαρακτηρίζεται ως σχετικά όλκιμο (!) υλικό, η συμπεριφορά του οποίου προσεγγίζει (φαινομενικά) την αντίστοιχη του αλουμινίου.



**Εικ. 4.3:** Αξονική παραμόρφωση ( $\times 10E-6$ ) [110].

Σχετικά με το μέτρο ελαστικότητας,  $E$  του υλικού μεταβάλλεται συναρτήσει του επιπέδου των επιβαλλόμενων αξονικών παραμορφώσεων,  $\varepsilon$ . Από την **Εικ. 4.4** συμπεραίνουμε ότι ενώ η αρχική τιμή του μέτρου ελαστικότητας,  $E$  είναι περίπου 75 GPa, σταδιακά μειώνεται κάτω από 60 GPa ελάχιστα πριν την αστοχία. Η αντίστοιχη συνάρτηση  $E=E(\varepsilon)$  εμφανίζεται ελαφρώς «σιγμοειδής», όμως μπορεί σε πρώτη προσέγγιση να θεωρηθεί γραμμική. Τέλος, για την ορθή περιγραφή της καταστατικής συμπεριφοράς του Διονυσιακού μαρμάρου κρίνεται αναγκαίο να λαμβάνεται υπ' όψιν και η μηχανική φθορά (mechanical damage).

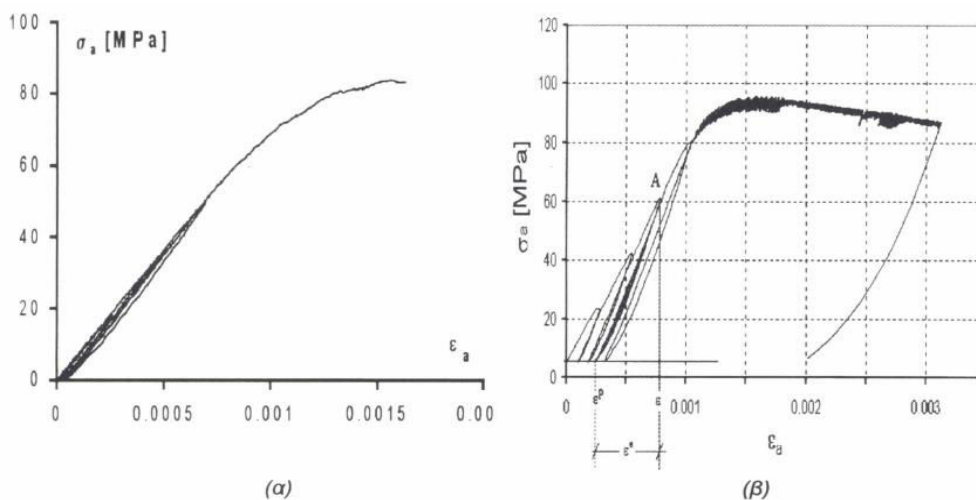


**Εικ. 4.4:** Φθορά του μέτρου ελαστικότητας του Διονυσιακού μαρμάρου συναρτήσει της αξονικής παραμορφώσεως.[110].

#### 4.2.1.2 Η ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΤΟΥ ΔΙΟΝΥΣΙΑΚΟΥ ΜΑΡΜΑΡΟΥ ΥΠΟ ΜΟΝΟΑΞΟΝΙΚΗ ΚΑΙ ΤΡΙΑΞΟΝΙΚΗ ΘΛΙΨΗ [110]

Για την μελέτη της συμπεριφοράς του Διονυσιακού μαρμάρου όταν στο δοκίμιο επενεργούν θλιπτικά φορτία πραγματοποιήθηκαν δοκιμές υπό μονοαξονική θλίψη και υπό θλίψη με παράπλευρη πίεση. Από την **Εικ. 4.5** που φαίνονται τα αποτελέσματα των αντίστοιχων πειραμάτων προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα:

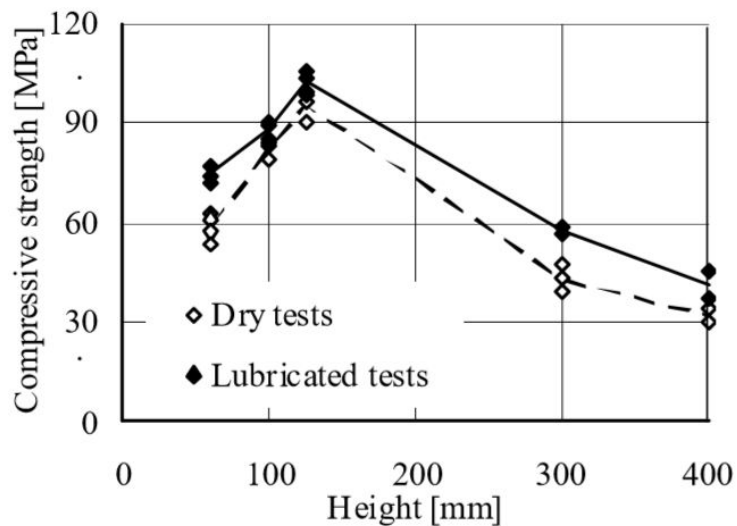
- Η θλιπτική και εφελκυστική αντοχή του υλικού διαφέρουν σημαντικά καθώς η θλιπτική αντοχή είναι περίπου δεκαπλάσια από την εφελκυστική.
- Για τιμές των παραμορφώσεων αρκετά μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες του εφελκυσμού εντοπίζεται γραμμική συμπεριφορά του υλικού .
- Κατά την αποφόρτιση παρατηρήθηκαν σημαντικές παραμένουσες παραμορφώσεις.
- Η παράπλευρη πίεση οδήγησε σε αύξηση της ολκιμότητας του μαρμάρου και επιπλέον καταγράφηκε έντονη μηχανική φθορά (στον κλάδο της αποφόρτισης το μέτρο ελαστικότητας είναι 40% μικρότερο σε σχέση με το αρχικό).



**Εικ. 4.5:** Το διάγραμμα τάσεων-παραμορφώσεων υπό (α) μονοαξονική και (β) τριαξονική θλίψη [110].

Τέλος, εξαγεται το συμπέρασμα, ότι καθοριστική παράμετρος για τα αποτελέσματα των πειραμάτων θλίψης είναι το μέγεθος των δοκιμίων, κάτι που είναι αναμενόμενο καθώς στην Μηχανική ιδιαίτερα στην κατηγορία των γεωυλικών τα αποτελέσματα εξαρτώνται έντονα από τις διαστάσεις του δοκιμίου (size effect).

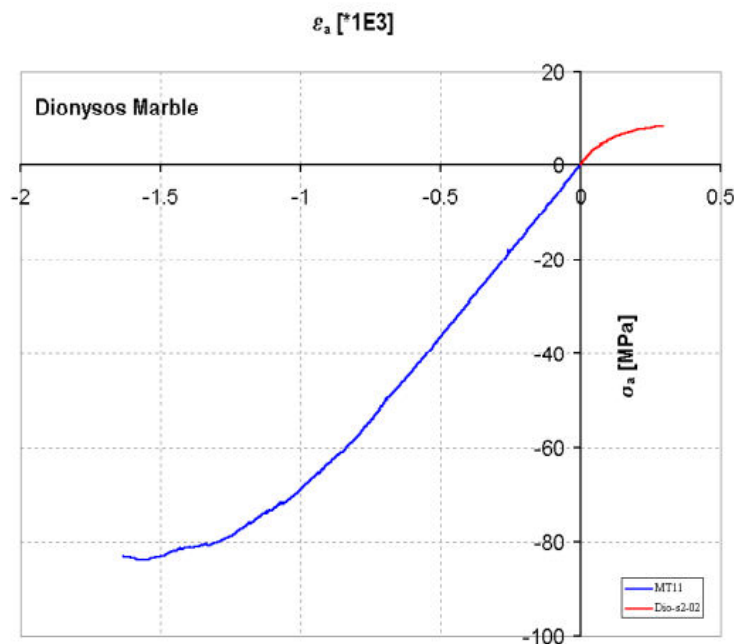
Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι η εξάρτηση αυτή δεν είναι μονότονη, καθώς υπάρχει συγκεκριμένη διάσταση (για λόγο ύψους προς διάμετρο ίσο περίπου με 2, για δοκίμια με ύψος 12 cm), για την οποία η θλιπτική αντοχή λαμβάνει μέγιστη τιμή (**Εικ. 4.6**).



**Εικ. 4.6:** Το φαινόμενο κλίμακος για το μάρμαρο του Διονύσου [110].

#### 4.2.1.3 ΤΟ ΠΛΗΡΕΣ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ ΤΑΣΕΩΝ–ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ ΤΟΥ ΔΙΟΝΥΣΙΑΚΟΥ ΜΑΡΜΑΡΟΥ [110]

Για πρώτη φορά το πλήρες διάγραμμα τάσεων–παραμορφώσεων του Διονυσιακού μαρμάρου παρουσιάστηκε από τους Vardoulakis et al. [110], (**Εικ. 4.7**). Είναι εμφανής η μεγάλη διαφορά στις απόλυτες τιμές των τάσεων και των παραμορφώσεων. Επιπλέον, παρατηρείται ότι στην περιοχή του εφελκυσμού η καταστατική σχέση είναι σε σημαντικό βαθμό μη γραμμική, ενώ στην αντίστοιχη περιοχή θλίψης είναι απολύτως γραμμική. Η εν λόγω καμπύλη τάσεων–παραμορφώσεων του Διονυσιακού μαρμάρου προέκυψε από τα αποτελέσματα φόρτισης δοκιμίων κατά την ισχυρή διεύθυνση της ανισοτροπίας, δηλαδή παράλληλα στις στρώσεις του υλικού. Από την **Εικ. 4.7** προκύπτει ότι το μάρμαρο Διονύσου είναι ελαφρώς “διπλομετρικό” (bimodular) υλικό, με άλλα λόγια το μέτρο ελαστικότητας λόγω θλίψης είναι μεγαλύτερο από το αντίστοιχο σε εφελκυσμό (ο λόγος είναι περίπου 1.15).



**Εικ. 4.7:** Το πλήρες διάγραμμα τάσεων–παραμορφώσεων [110].

#### 4.2.2 ΔΟΚΙΜΙΑ

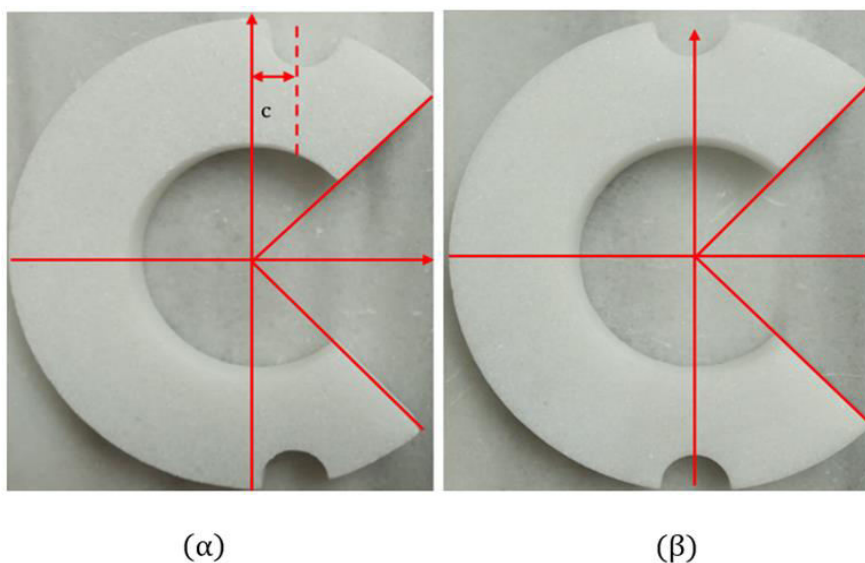
Τα δοκίμια της παρούσης εργασίας διαμορφώθηκαν από τους έμπειρους μαρμαροτεχνίτες του Παρθενώνα, σε σχήμα CSR και NCSR από την ίδια πλάκα Διονυσιακού μαρμάρου. Ελέγχθηκαν προσεχτικά για ορατά ελαττώματα. Στο εργαστήριο με την χρήση παχύμετρου μετρήθηκαν οι διαστάσεις των δοκιμίων που φαίνονται στους ακόλουθους πίνακες:

Αριθμός δοκιμίου	Εσωτερική διάμετρος (cm)	Εξωτερική διάμετρος (cm)	Πάχος (mm)
1	5.20	10.04	12.64
2	5.30	10.20	13.41
3	5.25	10.15	12.05

*Πιν. 4.2: Στοιχεία δοκιμίων χωρίς εκκεντρότητα.*

Αριθμός δοκιμίου	Εσωτερική διάμετρος (cm)	Εξωτερική διάμετρος (cm)	Πάχος (mm)
1	5.20	10.04	11.34
2	5.20	10.04	12.76

*Πιν. 4.3: Στοιχεία δοκιμίων με εκκεντρότητα.*



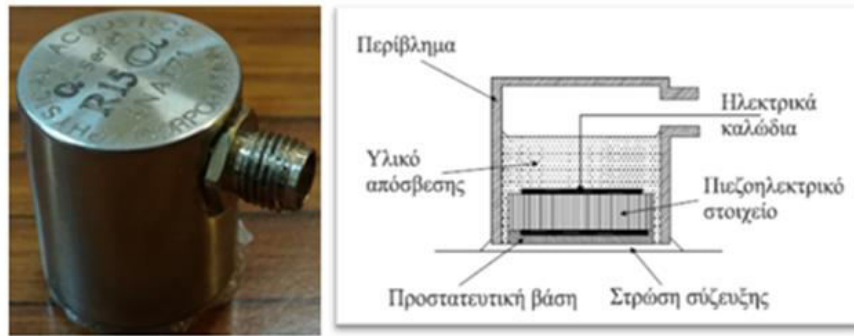
*Εικ. 4.8: (α) Δοκίμιο με εκκεντρότητα και (β) δοκίμιο χωρίς εκκεντρότητα.*

### 4.3 ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟΣ ΕΞΟΠΛΙΣΜΟΣ

Για την πραγματοποίηση των πειραμάτων χρησιμοποιήθηκε ο εξής εξοπλισμός:

- Ηλεκτρομηχανικό πλαίσιο φόρτισης MTS Insight 10 kN. Το συγκεκριμένο πλαίσιο έχει τη δυνατότητα ακριβούς καταγραφής του φορτίου μέσω κατάλληλης δυναμοκυψέλης (load cell) ευαισθησίας 0.01N.
- Διάταξη Τεχνικής Ψηφιακής Συσχέτισης τριών διαστάσεων «3D-DIC System» (LIMESS Messtechnik & Software GmbH, Germany) ανάλυσης 1624x1234 pixel.
- High Speed Camera Photron SA5, που ικανοποιεί τις εξής απαιτήσεις: υψηλή ευαισθησία στο φως οπότε απαιτείται λιγότερος πρόσθετος φωτισμός, υψηλή ταχύτητα, υψηλή ανάλυση εικόνας.
- Αισθητήρες ακουστικής εκπομπής πιεζοηλεκτρικού στοιχείου. Το PZT (leadzirconate-titanate) πρόκειται για ειδικό κεραμικό υλικό που αποτελεί το ενεργό στοιχείο του αισθητήρα.
- Δυο αισθητήρες ηλεκτρικού ρεύματος.
- Strain gauges, που τοποθετούνται στο δοκίμιο που παραμορφώνεται όταν υπόκειται σε φόρτιση και με την σειρά τους παραμορφώνονται. Συνεπώς, καθώς παραμορφώνονται τα strain gauges παρουσιάζονται αλλαγές στην ηλεκτρική αντίσταση συναρτήσει του φορτίου.
- Μαύρο σπρέι για τον χρωματισμό του δοκίμιου και την δημιουργία κατάλληλου μοτίβου κουκκίδων.
- Δυο πηγές λευκού φωτός.
- Συσκευή καταγραφής δεδομένων (γέφυρα).
- Πλάκες βαθμονόμησης (calibration panels) της εταιρείας Dantec.
- Κατάλληλες πλάκες φόρτισης.





(α)

(β)

**Εικ. 4.9:** (α) Αισθητήρας πιεζοηλεκτρικού στοιχείου της PAC και (β) λεπτομέρειες κατασκευής αισθητήρα πιεζοηλεκτρικού στοιχείου [111].



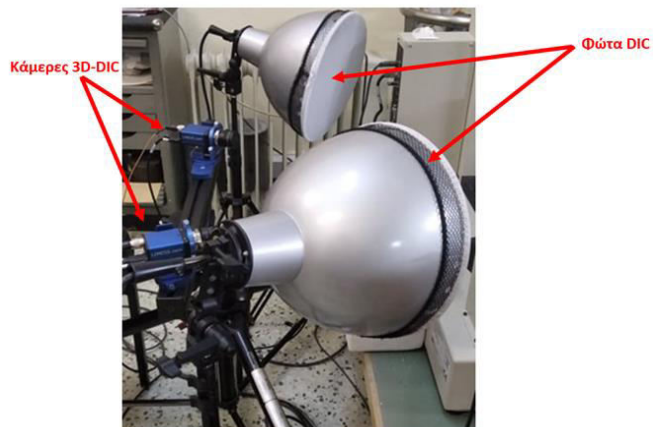
(α)

(β)

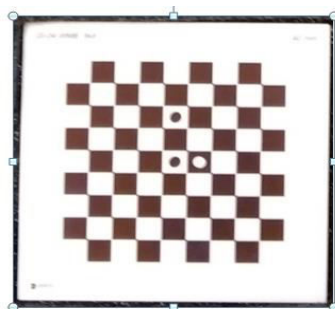
**Εικ. 4.10:** Ηλεκτρομηκνισιόμετρο στην (α) εξωτερική και (β) εσωτερική παρειά του δοκιμίου.



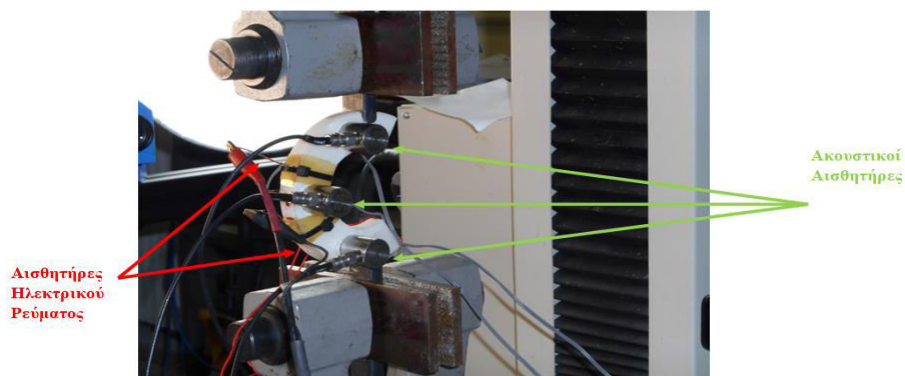
**Εικ. 4.11:** Συσκευή καταγραφής δεδομένων.



*Εικ. 4.12: Οι κάμερες της τεχνικής DIC και τα φώτα τους.*



*Εικ. 4.13: Πλάκα βαθμονόμησης*



*Εικ. 4.14: Δοκίμιο τοποθετημένο στις αρπάγες κατά την διάρκεια πειραματικής διαδικασίας με την χρήση αισθητήρων ηλεκτρικού ρεύματος και ακουστικών αισθητήρων.*

#### 4.4 ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ

##### 4.4.1 ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑ ΤΩΝ ΔΟΚΙΜΙΩΝ ΚΑΙ ΤΗΣ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗΣ ΔΙΑΤΑΞΗΣ

Κατά την διάρκεια της προετοιμασίας τοποθετούμε κατάλληλες πλάκες φόρτισης στο πλαίσιο φόρτισης και στην συνέχεια στερεώνουμε το δοκίμιο πάνω σε αυτές. Αφού βεβαιωθούμε για την καταλληλότητα της θέσης του δοκιμίου στήνουμε τις κάμερες 3D-DIC πάνω σε τρίποδο, σωστά οριζοντιωμένο με τρόπο τέτοιο ώστε το σύστημα δοκίμιο – αρπάγη και βάση καμερών να είναι παράλληλα. Ρυθμίζουμε τη θέση των καμερών με τρόπο ώστε να εστιάζουν στο κέντρο του δοκιμίου που αναμένεται η ρωγμή. Αυτή η λεπτομέρεια ελέγχεται και πριν από την έναρξη του πειράματος από κάθε κάμερα ξεχωριστά. Ακολουθεί η τοποθέτηση της High Speed Camera, πίσω από τις κάμερες 3D-DIC και σε ύψος που να επιτρέπει εστίαση στην κρίσιμη περιοχή.



*Εικ. 4.15: Στήσιμο High Speed Camera και 3D – DIC.*

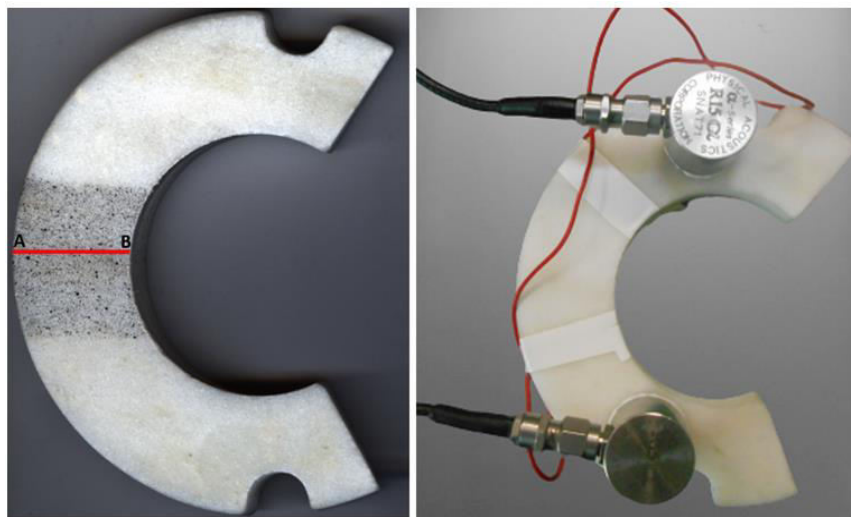
Σχετικά με την βαθμονόμηση των 3D-DIC αυτή πραγματοποιήθηκε με την χρήση κατάλληλης πλάκας βαθμονόμησης για να επιτευχθεί η κάλυψη του μέγιστου χώρου του οπτικού παραθύρου. Στην παρούσα πειραματική διαδικασία χρησιμοποιήθηκε η πλάκα βαθμονόμησης Calibration Target AI-11-BMB\_9x9 την οποία τοποθετούσαμε σε διάφορες θέσεις για να προκύψει ο συντελεστής σφάλματος από το λογισμικό Instra 4D που λαμβάνει τιμή εντός προκαθορισμένου εύρους για να είναι εφικτή η συσχέτιση των εικόνων.

Η απόστασή της από τις κάμερες είναι η απόσταση του δοκιμίου από αυτές. Το ενεργό πεδίο της 3D-DIC είναι ένα ορθογώνιο διαστάσεων  $44 \times 27 \text{ mm}^2$ .

Αφού έχουμε μετρήσει με το παχύμετρο την εσωτερική και εξωτερική διάμετρο και το πάχος του δοκιμίου βάζουμε την μπροστινή επιφάνεια με μαύρο σπρέι ώστε να σχηματιστεί κατάλληλο μοτίβο κουκκίδων στην περιοχή που περιμένουμε την έναρξη και διάδοση της ρωγμής. Από την βαθμονόμηση των 3D-DIC καμερών προέκυψε ότι οι διαστάσεις του οριζόντιου οπτικού παραθύρου ήταν ίσες με  $33 \times 27 \text{ mm}^2$ , οπότε στο μοτίβο των κουκκίδων το μέγεθος του στίγματος είναι περίπου  $0.05 \text{ mm}$  και η αντίστοιχη ανάλυση  $2 \mu\text{m}$ .

Στη συνέχεια με τη χρήση σιλικόνης τοποθετούμε στην πίσω επιφάνεια τρεις (σε κάποιες πειραματικές διαδικασίες δυο) ακουστικούς αισθητήρες R15a, σε κατάλληλες θέσεις τέτοιες ώστε να καλύπτουν τις περιοχές γύρω από τα σημεία που προβλέπεται η αστοχία, ένα στο κέντρο της κρίσιμης περιοχής και δυο πάνω και κάτω από αυτή (ή δυο πάνω και κάτω από την κρίσιμη περιοχή). Αφού ολοκληρωθεί και αυτή η διαδικασία συνεχίζουμε με εφαρμογή της τεχνικής ηλεκτρικών σημάτων, προσαρμόζοντας στην περιοχή που αναμένεται η αστοχία δυο αισθητήρες ηλεκτρικού ρεύματος για την καταγραφή της διαφοροποίησης των ηλεκτρικών σημάτων που συσχετίζεται με το μέγεθος της μηχανικής καταπόνησης του δοκιμίου. Μεταξύ δοκιμίου και ηλεκτροδίων παρεμβάλλεται μία λεπτή στρώση υγρού άργυρου εξαιτίας της αγωγιμότητάς του.

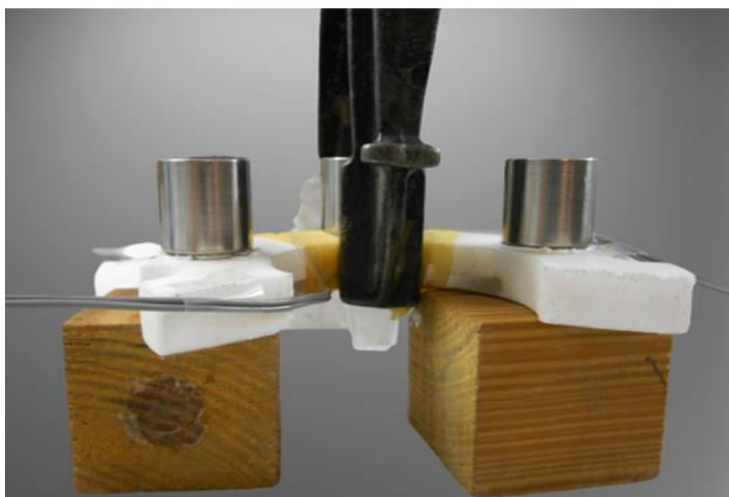
Τέλος, προσαρμόζονται δυο παραδοσιακά ηλεκτρομηκυσιόμετρα, ένα στην εσωτερική και ένα στην εξωτερική παρειά του δοκιμίου. Τοποθετείται το δοκίμιο στις πλάκες φόρτισης και πραγματοποιούνται δοκιμές.



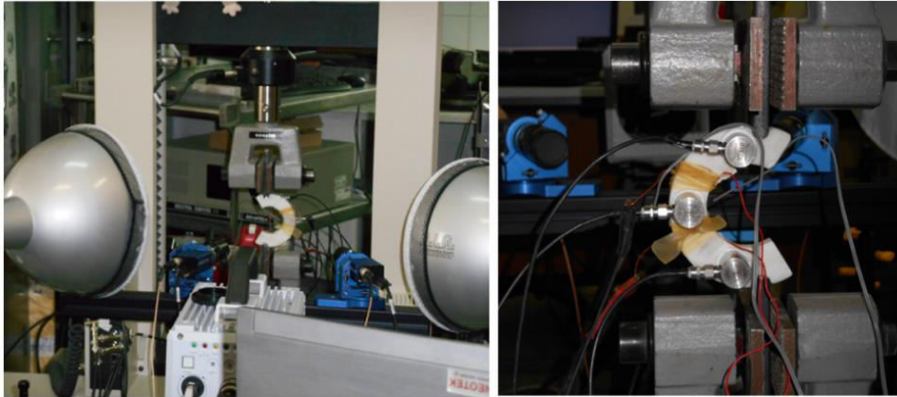
(α)

(β)

**Εικ. 4.16:** (α) Το μοτίβο των κουκκίδων στην περιοχή που αναμένεται η έναρξη και διάδοση ρηγμάτωσης, (β) Τοποθέτηση των ακουστικών αισθητήρων (μαύρο καλώδιο).



**Εικ. 4.17:** Η διαδικασία συγκόλλησης των strain-gauges (γκρι καλώδια).



(α)

(β)

**Εικ. 4.18:** Η πειραματική διάταξη πριν την έναρξη του πειράματος  
(α) εμπρόσθια και (β) οπίσθια όψη.

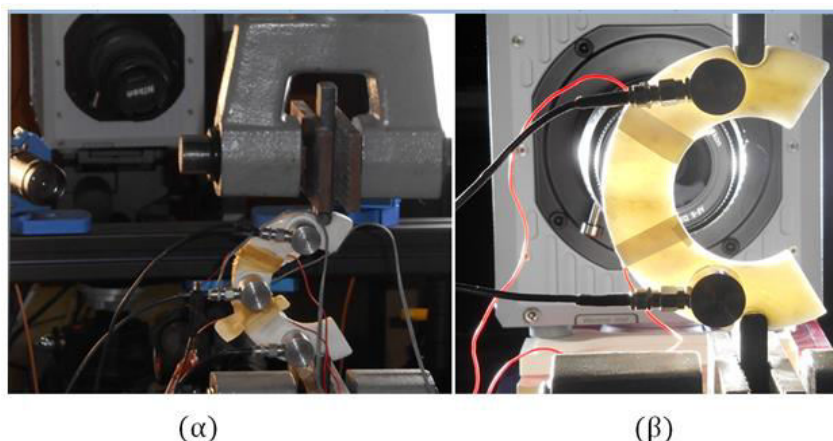
Για να ελεγχθούν οι αισθητήρες ακουστικής εκπομπής και να διαπιστωθεί ότι όλοι εντοπίζουν τα εκπεμπόμενα σήματα ΑΕ χρησιμοποιούμε την τεχνική PLB (Pencil Lead Break technique) γνωστή και ως μέθοδος Hsu –Nielsen. Στην τεχνική αυτή σπάμε μύτες μηχανικού μολυβιού διαμέτρου 0.5mm που προεξέχουν κατά 3mm που παράγουν έντονο ακουστικό σήμα παρόμοιο με αυτό που παράγει φυσική πηγή ΑΕ και ανιχνεύουν οι αισθητήρες ως ισχυρό. Ήμασταν προσεχτικοί ώστε να επιτευχθεί η αποφυγή επαφής του μολυβιού με την επιφάνεια και η σταθερή γωνία σπασίματος της μύτες. Τα σπασίματα εφαρμόστηκαν στο κέντρο του δοκιμίου που σύμφωνα με τις προβλέψεις μας θα επέλθει η αστοχία του υλικού. Η ένταση των σημάτων ήταν εντός επιτρεπτών ορίων, δηλαδή ήταν περίπου 90 με 100 dB.

#### 4.4.2 ΚΥΡΙΩΣ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ

Σε όλα τα πειράματα επιβλήθηκε ρυθμός επιβολής μετατόπισης 0.2 min/mm ώστε να προσομοιώνονται “οιονεί” στατικές (quasi-static) συνθήκες από το ηλεκτρομηχανικό πλαίσιο MTS Insight 10kN. Το φορτίο εφαρμόζεται στην άνω αρπάγη ενώ η κάτω παραμένει σταθερή. Κατά τη διάρκεια της διαδικασίας καταγράφονται τα εξής :

- Οι ενδείξεις του φορτίου και της μετατόπισης της αρπάγης του πλαισίου φόρτισης από το λογισμικό TestWorks 4.
- Οι ανηγμένες παραμορφώσεις από τα ηλεκτρομηκυνσιόμετρα.
- Η θέση και τα χαρακτηριστικά των ακουστικών σημάτων.
- Το ηλεκτρικό ρεύμα που παράγεται.

Επιπλέον στη διάρκεια της δοκιμής λαμβάνονται φωτογραφίες της προστινής επιφάνειας του δοκιμίου από την High Speed Camera και σε προκαθορισμένα χρονικά διαστήματα από τις δυο κάμερες της μεθόδου DIC. Να σημειωθεί ότι για τις κάμερες της μεθόδου DIC η πρώτη φωτογραφία που λαμβάνει το λογισμικό Instron 4D απεικονίζει το δοκίμιο αφορτιστολίγο πριν την έναρξη του πειράματος (Reference Step). Φωτογραφίες λαμβάνονται και καταγράφονται μέχρι να επέλθει η επικείμενη αστοχία.



**Εικ. 4.19:** (α ) Κατά την έναρξη της πειραματικής διαδικασίας με την χρήση τριών ακουστικών αισθητήρων, δυο αισθητήρων ηλεκτρικού ρεύματος, strain-gauges, DIC, High Speed Camera και (β) Κατά την διάρκεια της πειραματικής διαδικασίας με την χρήση δυο ακουστικών αισθητήρων και High Speed Camera.

Ακολουθούν δυο πίνακες στους οποίους καταγράφεται ο εξοπλισμός που χρησιμοποιήθηκε σε κάθε πείραμα για δοκίμια χωρίς και με εκκεντρότητα.

	Δοκίμιο 1	Δοκίμιο 2	Δοκίμιο 3
Strain gauges FLAB-2-11-1 L J C-F (gauge factor=2.09)	Τοποθετήθηκαν ένα στην εσωτερική και ένα στην εξωτερική παρειά.	Δεν τοποθετήθηκαν.	Δεν τοποθετήθηκαν.
Ακουστικοί αισθητήρες	Τοποθετήθηκαν 3 στην οπίσθια όψη του δοκιμίου με την διάταξη της <b>Εικ. 4.19 (α)</b> και ταχύτητα διάδοσης ήχου 2700 m/s.	Τοποθετήθηκαν 2 στην οπίσθια όψη του δοκιμίου με την διάταξη της <b>Εικ. 4.19 (β)</b> και ταχύτητα διάδοσης ήχου 2700 m/s.	Τοποθετήθηκαν 2 στην οπίσθια όψη του δοκιμίου με την διάταξη της <b>Εικ. 4.19 (β)</b> και ταχύτητα διάδοσης ήχου 2700 m/s.
Αισθητήρες ηλεκτρικού ρεύματος	Τοποθετήθηκε 1 ζεύγος στην εξωτερική παρειά του δοκιμίου.	Δεν τοποθετήθηκαν.	Δεν τοποθετήθηκαν.
Κάμερες τεχνικής DIC	Λήψη φωτογραφίας κάθε 3 sec.	Δεν τοποθετήθηκαν.	Δεν τοποθετήθηκαν.
High Speed Camera	Η ανάλυση των φωτογραφιών ήταν 1024x1024 και η ταχύτητα εγγραφής 5000 fps.	Η ταχύτητα εγγραφής ήταν 8400 fps.	Η ανάλυση των φωτογραφιών ήταν 512x320 και η ταχύτητα εγγραφής 1000 fps.

**Πιν. 4.4:** Ο εξοπλισμός που χρησιμοποιήθηκε για δοκίμια χωρίς εκκεντρότητα.

	Δοκίμιο 1	Δοκίμιο 2
Strain gauges FLAB-2-11-1 L J C-F (gauge factor=2.09)	Τοποθετήθηκαν ένα στην εσωτερική και ένα στην εξωτερική παρειά.	Τοποθετήθηκαν ένα στην εσωτερική και ένα στην εξωτερική παρειά.
Ακουστικοί αισθητήρες	Τοποθετήθηκαν 3 στην οπίσθια όψη του δοκιμίου με την διάταξη της <b>Εικ. 4.19 (α)</b> και ταχύτητα διάδοσης ήχου 2700 m/s.	Τοποθετήθηκαν 3 στην οπίσθια όψη του δοκιμίου με την διάταξη της <b>Εικ. 4.19 (α)</b> και ταχύτητα διάδοσης ήχου 2700 m/s.
Αισθητήρες ηλεκτρικού ρεύματος	Τοποθετήθηκε 1 ζεύγος στην εξωτερική παρειά του δοκιμίου.	Τοποθετήθηκε 1 ζεύγος στην εξωτερική παρειά του δοκιμίου.
Κάμερες τεχνικής DIC	Λήψη φωτογραφίας κάθε 4 sec.	Λήψη φωτογραφίας κάθε 3 sec.
High Speed Camera	Η ανάλυση των φωτογραφιών ήταν 1024x1024 και η ταχύτητα εγγραφής 7000 fps.	Η ανάλυση των φωτογραφιών ήταν 1024x1024 και η ταχύτητα εγγραφής 5000 fps.

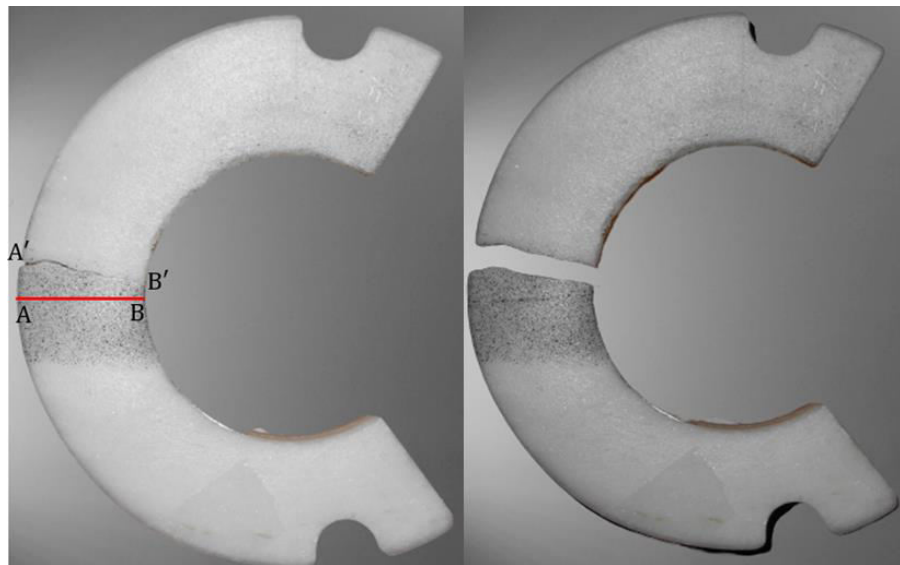
**Πιν. 4.5:** Ο εξοπλισμός που χρησιμοποιήθηκε για δοκίμια με εκκεντρότητα.



## 4.5 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

### 4.5.1 ΜΟΡΦΗ ΘΡΑΥΣΗΣ

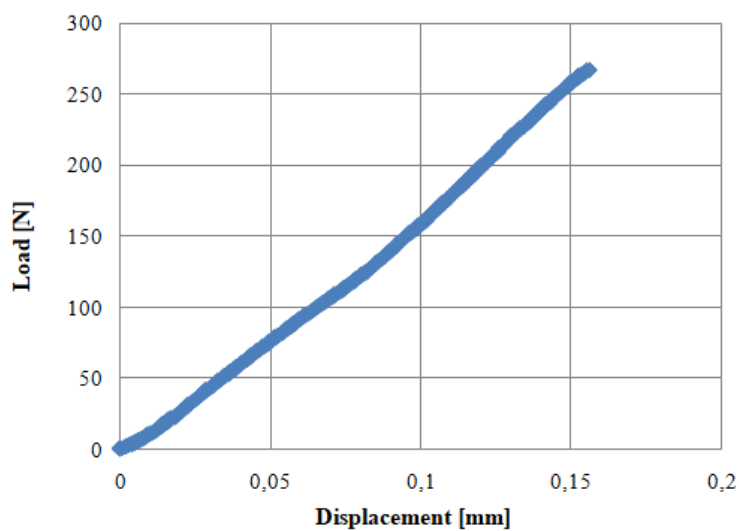
Σε όλα τα δοκίμια η ρωγμή ξεκίνησε στην περιοχή που προέβλεψε η αναλυτική λύση. Το φορτίο θραύσης ποικίλλει για κάθε δοκίμιο και εξαρτάται από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του, αλλά σε όλα τα δοκίμια ήταν εντός των ορίων που προκύπτουν από τους υπολογισμούς μας. Επιπλέον, οι ρωγμές ξεκινούσαν από το εξωτερικό σημείο Α' της **Εικ. 4.20** και διαδίδονταν έως το σημείο Β'.



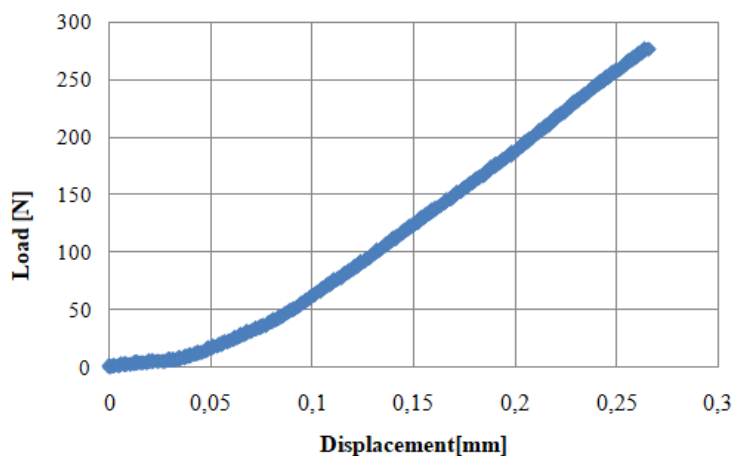
**Εικ. 4.20:** Δοκίμιο μετά την θραύση.

#### 4.5.2 ΠΡΩΤΟΓΕΝΗ ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΜΗΧΑΝΗΣ

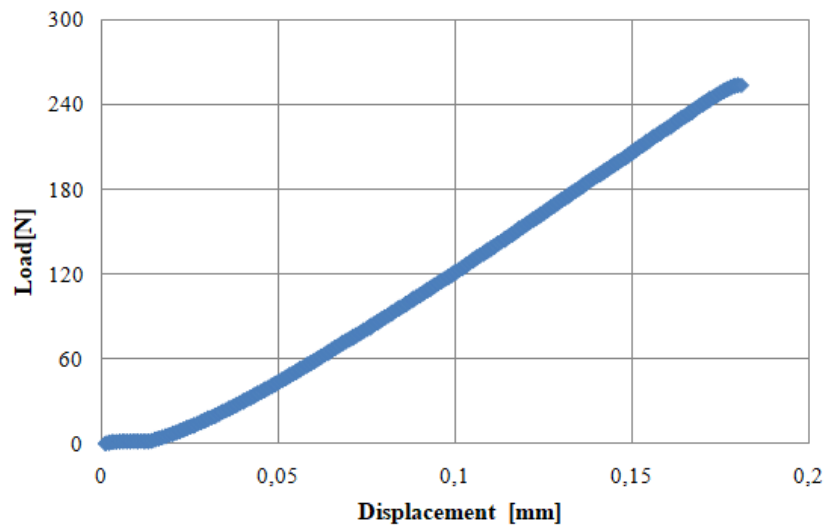
Ακολουθούν τα διαγράμματα δύναμης–μετατόπισης από τα δεδομένα του πλαισίου φόρτισης.



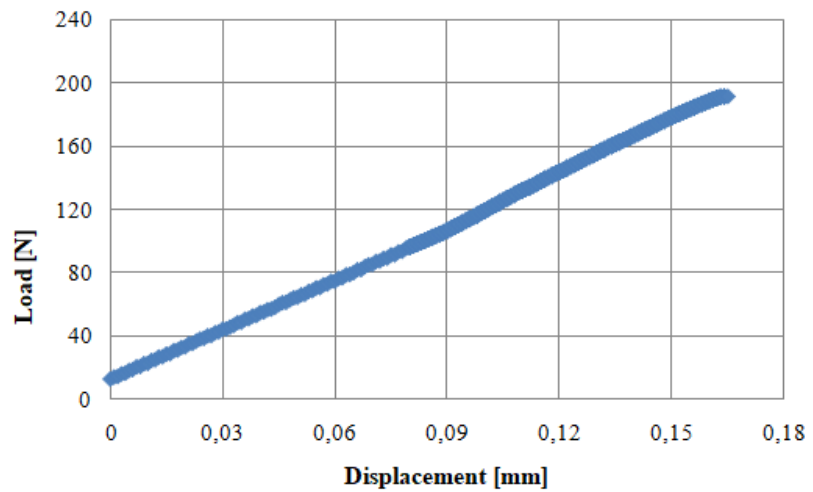
*Εικ. 4.21: Γραφική παράσταση δύναμης–μετατόπισης για δοκίμιο χωρίς εκκεντρότητα (δοκίμιο 0-1).*



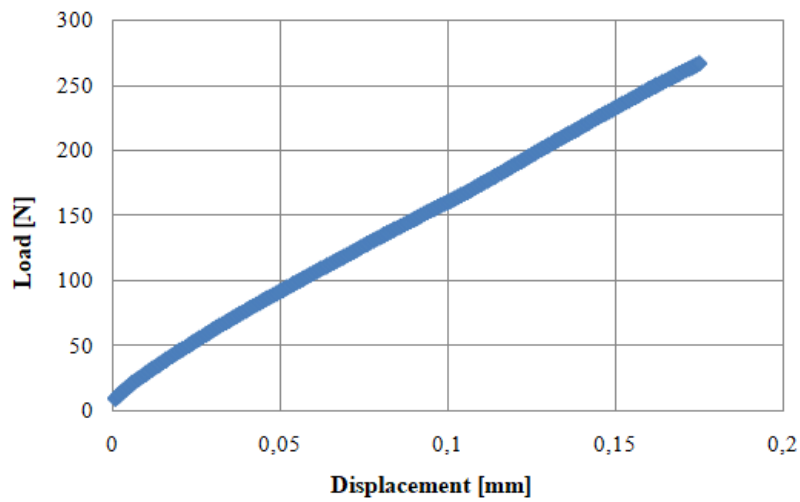
*Εικ. 4.22: Γραφική παράσταση δύναμης–μετατόπισης για δοκίμιο χωρίς εκκεντρότητα (δοκίμιο 0-2).*



*Εικ. 4.23: Γραφική παράσταση δύναμης–μετατόπισης για δοκίμιο χωρίς εκκεντρότητα (δοκίμιο 0-3).*



*Εικ. 4.24: Γραφική παράσταση δύναμης–μετατόπισης για δοκίμιο με εκκεντρότητα (δοκίμιο 1-1).*

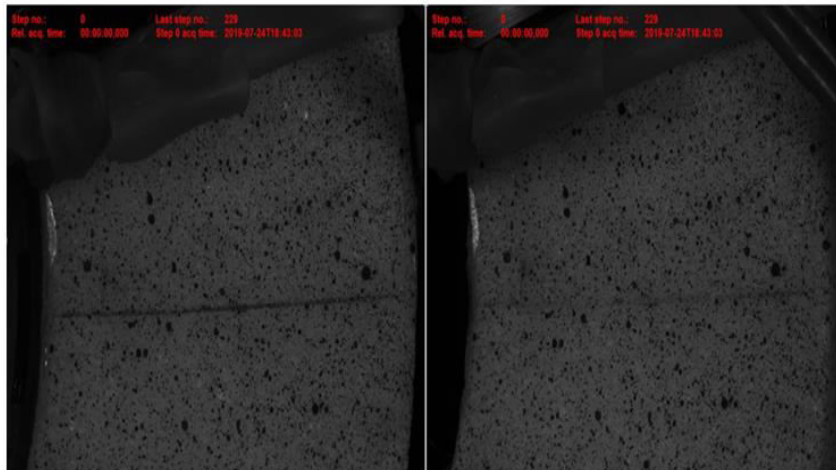


**Εικ. 4.25:** Γραφική παράσταση δύναμης–μετατόπισης για δοκίμιο με εκκεντρότητα (δοκίμιο 1-2).

Από τα παραπάνω γραφήματα παρατηρούμε ότι εμφανίζεται σχετική γραμμική εξάρτηση μεταξύ φορτίου και μετατόπισης. Συνάγεται επομένως, ότι μακροσκοπικά το μάρμαρο βρίσκεται στην γραμμική ελαστική περιοχή

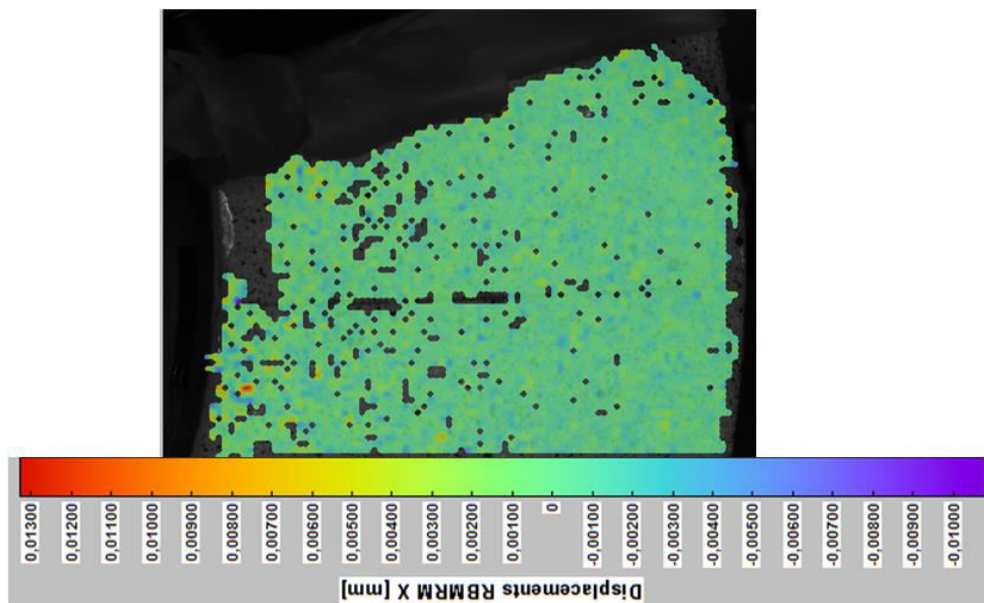
### 4.5.3 ΠΡΩΤΟΓΕΝΗ ΔΕΔΟΜΕΝΑ DIC

Αφού ολοκληρωθεί η πειραματική διαδικασία, αποθηκεύονται όλες οι φωτογραφίες και με την χρήση του λογισμικού Instra4D πραγματοποιείται η επεξεργασία τους. Η τεχνική DIC βασίζεται στην αντιστοίχιση των σημείων που καταγράφουν οι δύο κάμερες πριν την φόρτιση (απαραμόρφωτη κατάσταση) και κατά τη διάρκεια επιβολής του φορτίου (παραμορφωμένη κατάσταση). Με τον τρόπο αυτό επιτυγχάνεται ο προσδιορισμός του πεδίου των μετατοπίσεων στην υπό μελέτη περιοχή του δοκιμίου.

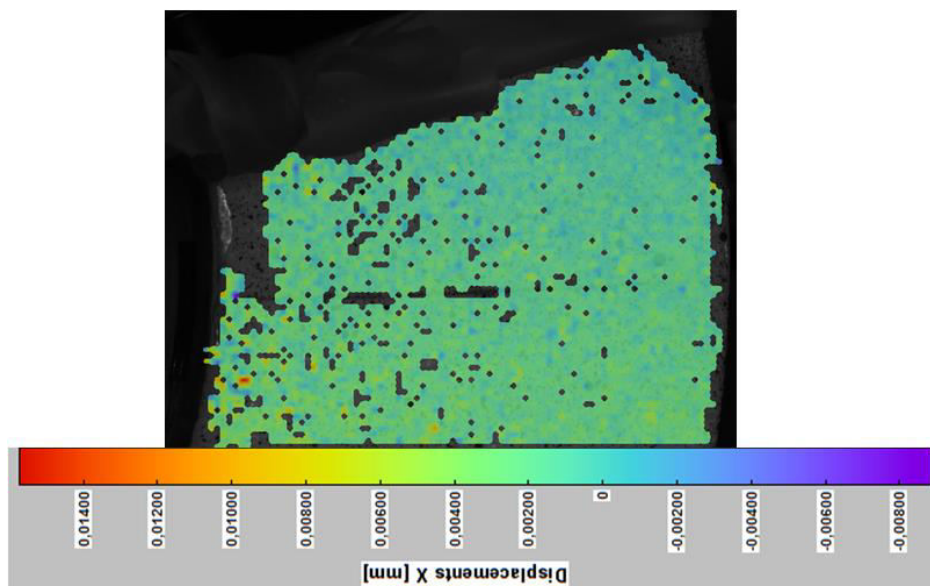


**Εικ. 4.26:** Η αρχική φωτογραφία του αφόρτιστου δοκιμίου όπως καταγράφηκε από τις δύο κάμερες του συστήματος 3D-DIC.

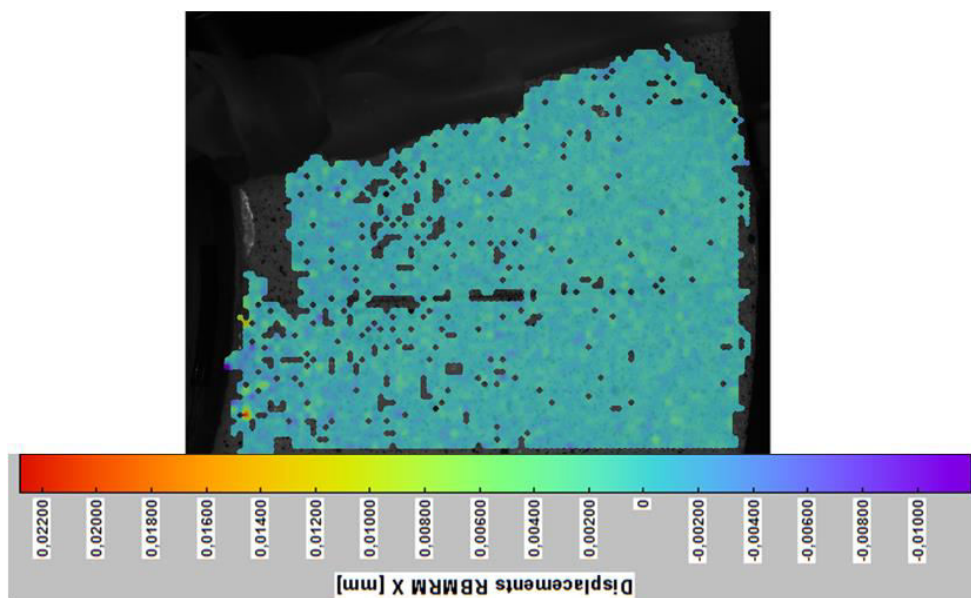
Ακολουθούν εικόνες με χρωματοκλίμακες που αντιστοιχούν στην οριζόντια συνιστώσα της μετατόπισης ( $u_x$ ) με και χωρίς την κίνηση του στερεού σώματος (rigid body) για διάφορες τιμές του φορτίου που επιβάλλεται στο δοκίμιο.



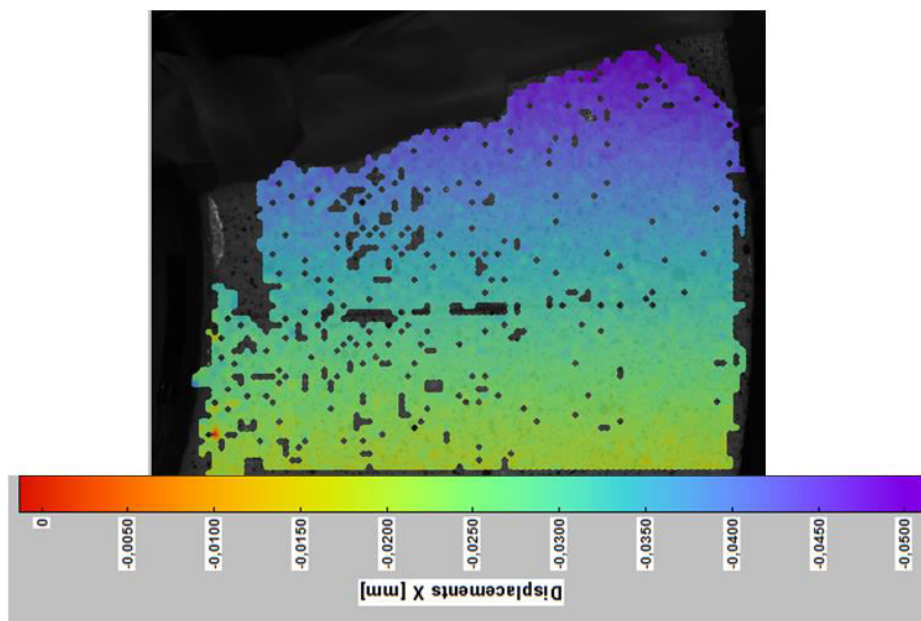
*Εικ. 4.27: Πεδίο μετατοπίσεων κατά x [mm] (έχει αφαιρεθεί η κίνηση στερεού σώματος (rigid body)) για φορτίο ίσο με 35.67N.*



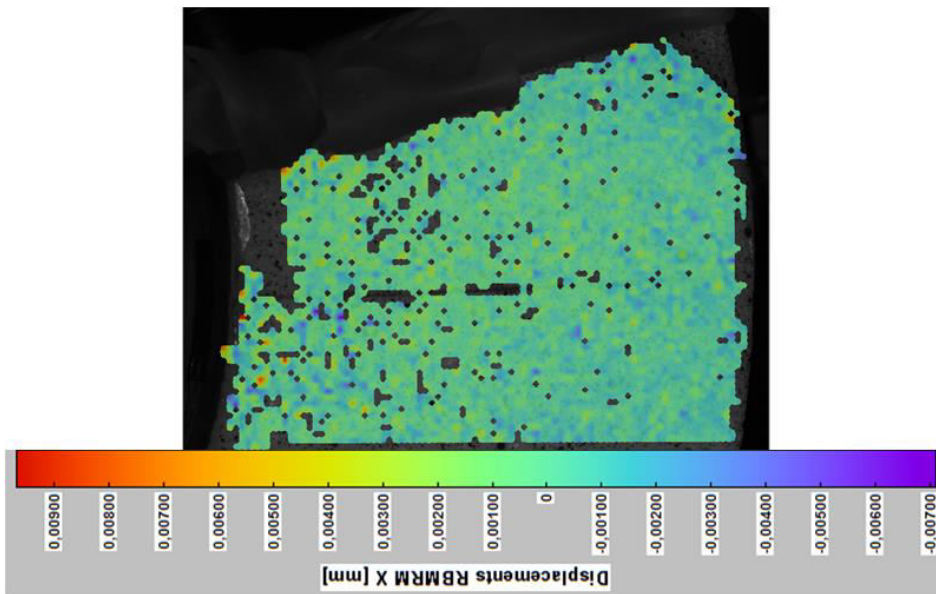
*Εικ. 4.28: Πεδίο μετατοπίσεων κατά x [mm] (δεν έχει αφαιρεθεί η κίνηση στερεού σώματος) για φορτίο ίσο με 35.67N.*



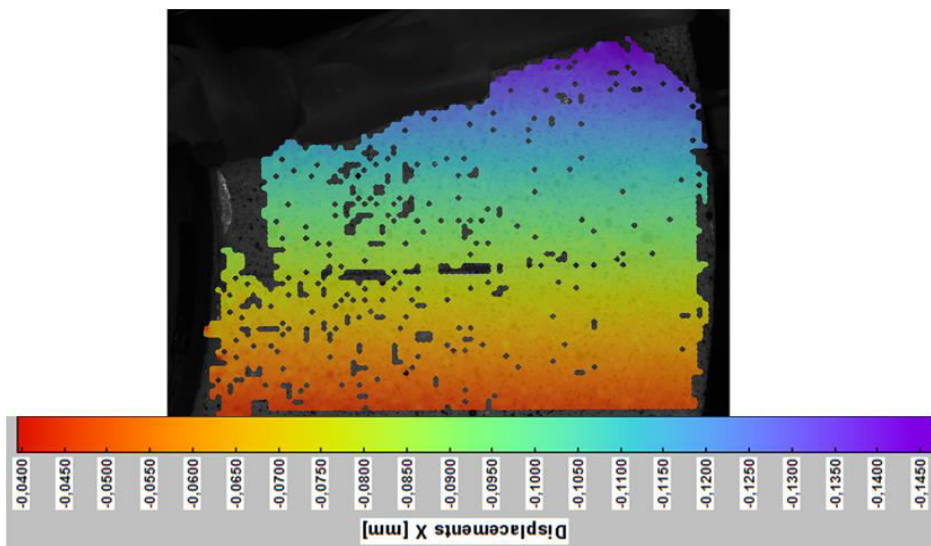
**Εικ. 4.29:** Πεδίο μετατοπίσεων κατά  $x$  [mm] (έχει αφαιρεθεί η κίνηση στερεού σώματος (rigidbody)) για φορτίο ίσο με 106.29N.



**Εικ. 4.30:** Ολικό πεδίο μετατοπίσεων κατά  $x$  [mm] (δεν έχει αφαιρεθεί η κίνηση στερεού σώματος) για φορτίο ίσο με 106.29N.

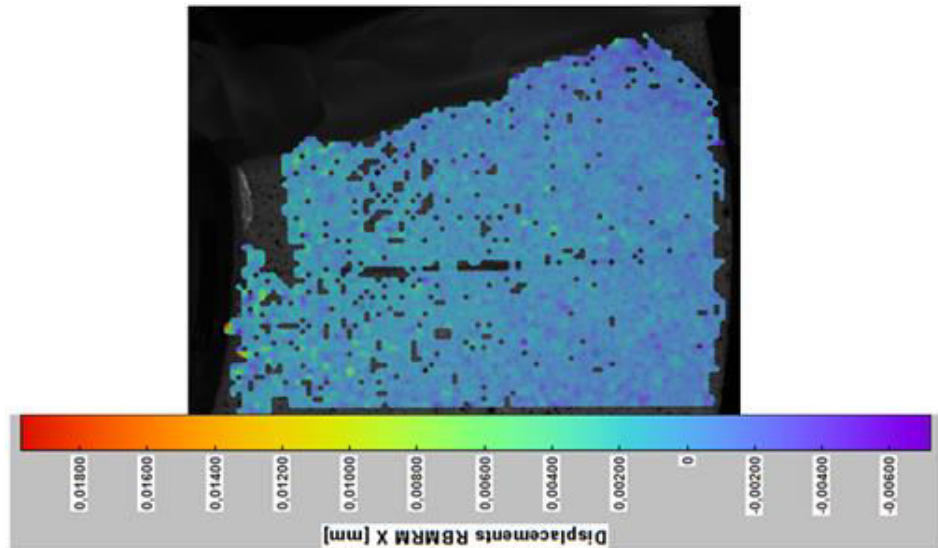


**Εικ. 4.31:** Ολικό πεδίο μετατοπίσεων κατά  $x$  [mm] (έχει αφαιρεθεί η κίνηση στερεού σώματος (rigid body)) για φορτίο ίσο με 177.83N.

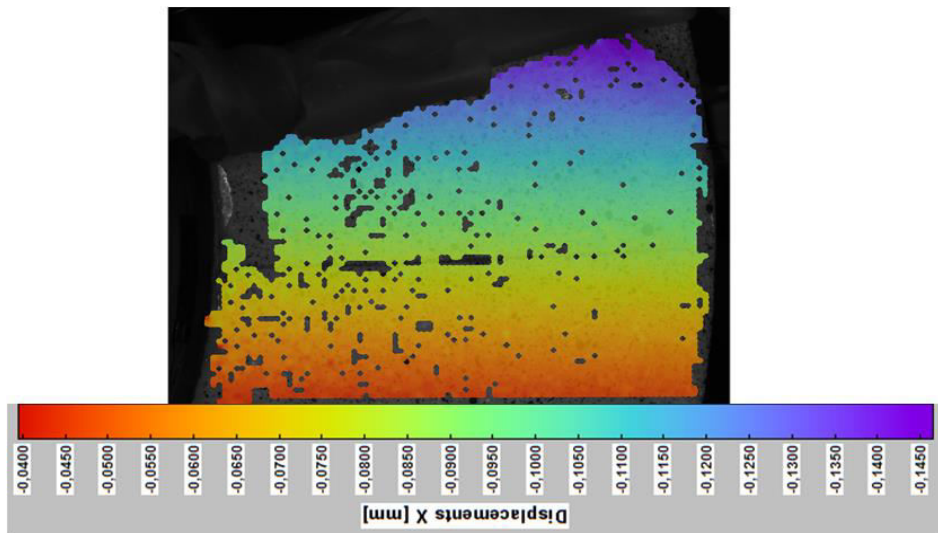


**Εικ. 4.32:** Ολικό πεδίο μετατοπίσεων κατά  $x$  [mm] (δεν έχει αφαιρεθεί η κίνηση στερεού σώματος) για φορτίο ίσο με 177.83N.





*Εικ. 4.33: Ολικό πεδίο μετατοπίσεων κατά  $x$  [mm], (έχει αφαιρεθεί η κίνηση στερεού σώματος (rigid body)) για φορτίο ίσο με 279.03N.*



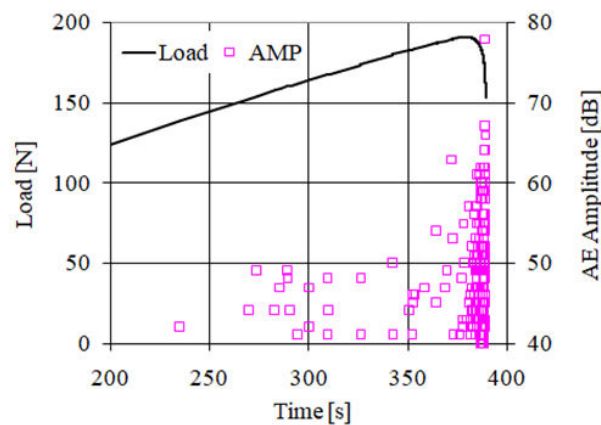
*Εικ. 4.34: Ολικό πεδίο μετατοπίσεων κατά  $x$  [mm], (δεν έχει αφαιρεθεί η κίνηση στερεού σώματος) για φορτίο ίσο με 279.03N.*

#### 4.5.4 ΠΡΩΤΟΓΕΝΗ ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΑΕ ΚΑΙ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΡΕΥΜΑΤΟΣ

Η ακουστική δραστηριότητα μελετήθηκε με τη χρήση των κάτωθι παραμέτρων:

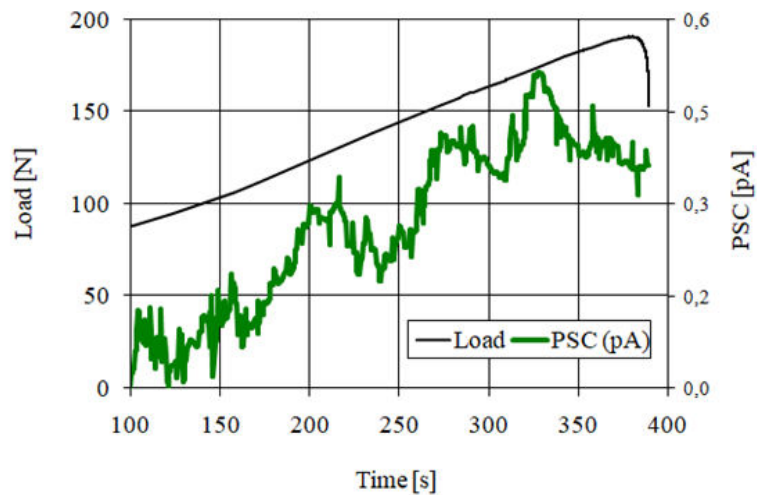
1. Μέση Συχνότητα (AF)
2. Χρόνος ανόδου του σήματος ως προς το εύρος του σήματος (RA) των ακουστικών εκπομπών.
3. Προκειμένου να δοθούν περαιτέρω κρίσιμες λεπτομέρειες της ακουστικής δραστηριότητας χρησιμοποιήθηκε η συνάρτηση F [112].

Η ηλεκτρική δραστηριότητα αναλύθηκε ως προς την χρονική εξέλιξη των ηλεκτρικών ρευμάτων σύμφωνα με την τεχνική των ηλεκτρικών σημάτων διεγειρομένων από πίεση (Pressure Stimulated Currents (PSC) technique).



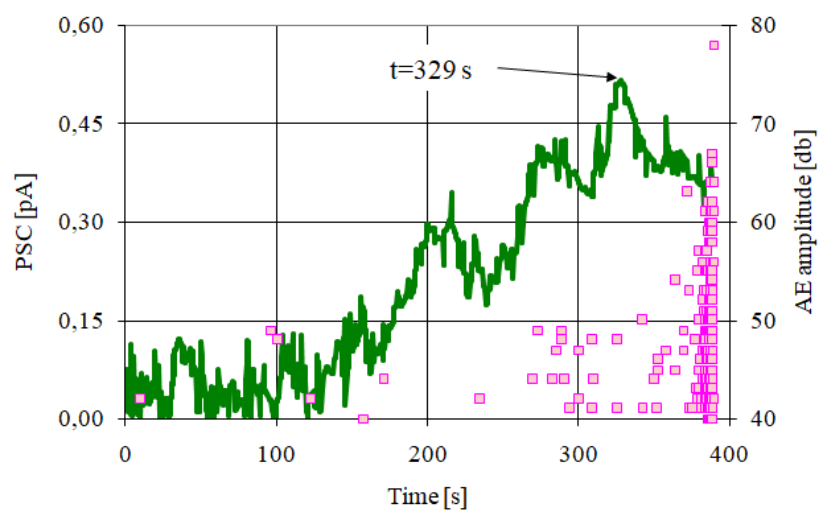
**Εικ. 4.35:** Χρονική εξέλιξη του εφαρμοζόμενου φορτίου και του πλάτους των ΑΕ [112].

Παρατηρείται ότι όπως αναμένεται, η ακουστική δραστηριότητα είναι αμιδρή μέχρι τα τελευταία στάδια πριν την θραύση. Είναι προφανές ότι, ο συγκεκριμένος τρόπος απεικόνισης της ακουστικής δραστηριότητας σκιαάζει κρίσιμες πληροφορίες. Ως εκ τούτου οι Triantis και Kourkoulis πρότειναν την περιγραφή της ακουστικής δραστηριότητας μέσω της F-function σε συνάρτηση με την παράμετρο  $(t_f - t)$  όπου  $t_f$  η χρονική στιγμή της θραύσεως. Η συγκεκριμένη φάση της μελέτης συνεχίζεται.



**Εικ. 4.36:** Η χρονική εξέλιξη του εφαρμοζόμενου φορτίου και η αντίστοιχη εξέλιξη της έντασης του PSC [112].

Παρατηρείται ότι η ηλεκτρική δραστηριότητα παρακολουθεί παρά τις έντονες διακυμάνσεις την εξέλιξη της φόρτισης. Είναι σημαντικό να τονιστεί ότι υπάρχει έντονη μεταβολή λίγο πριν την εμφάνιση της αστοχίας.



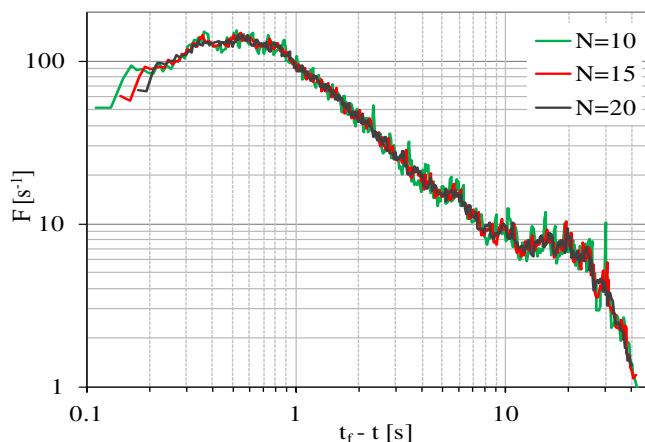
**Εικ. 4.37:** Χρονική εξέλιξη της ηλεκτρικής και ακουστικής δραστηριότητας [112].

Η συγκριτική αξιολόγηση των AE και PSC υποδεικνύει ότι τόσο η ακουστική όσο και η ηλεκτρική δραστηριότητα εντείνονται σταδιακά και κορυφώνονται λίγο πριν την μακροσκοπική ρηγμάτωση. Η συγκριτική αξιολόγηση είναι υπό μελέτη.

Η απεικόνιση της ακουστικής δραστηριότητας βασίζεται στην συνάρτηση του χρόνου  $F(\tau)$  η οποία αντικατοπτρίζει τη μέση συχνότητα εμφάνισης χτύπων AE σε χρονικό διάστημα  $n$  χτύπων. Η συνάρτηση  $F$  σχεδιάζεται εκμεταλλευόμενοι τους χρόνους μεταξύ των γεγονότων ενός επαρκούς αριθμού  $N$  ( $N > 10$ ) διαδοχικών χτύπων. Κάθε τιμή της συνάρτησης  $F$  αντιστοιχίζεται σε μία μέση χρονική στιγμή των χρονικών στιγμών των διαδοχικών χτύπων που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό της συγκεκριμένης τιμής της συνάρτησης  $F$ .

Η συγκεκριμένη προσέγγιση είναι ιδιαίτερα διαφωτιστική δεδομένου ότι επιτρέπει ένα είδος «συνεχούς» παρουσίασης της ακουστικής δραστηριότητας σε μια δεδομένη χρονική περίοδο παρά μια «κβαντισμένη» παρουσίαση των αντίστοιχων δεδομένων που χαρακτηρίζουν τα αντίστοιχα διαγράμματα χτύπων ανά δευτερόλεπτο.

Αυτή η παρουσίαση είναι ιδιαίτερα χρήσιμη όταν η έντονη ακουστική δραστηριότητα καταγράφεται σε πολύ μικρό χρονικό διάστημα. Προσφέρει επίσης πολύτιμες πληροφορίες σχετικά με τη χρονική εξέλιξη της ακουστικής δραστηριότητας λίγο πριν από την αστοχία των δοκιμίων.

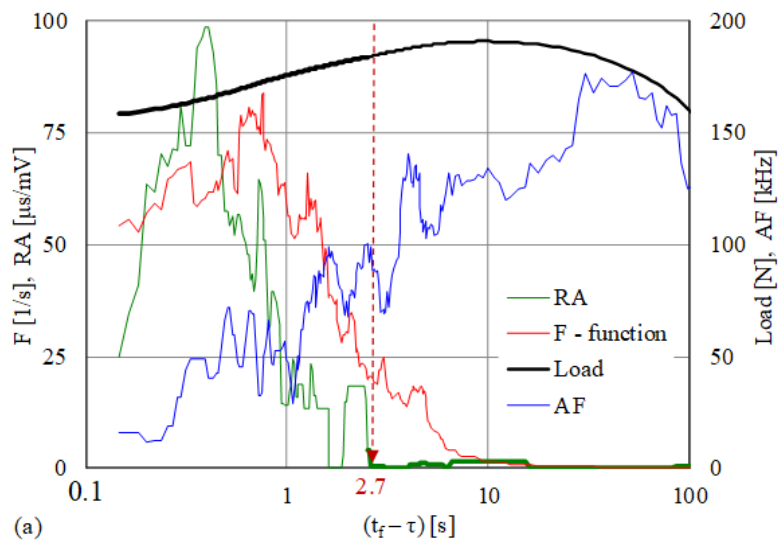


**Εικ. 4.38:** Η συμπεριφορά της  $F$ -function σε συνάρτηση με την παράμετρο  $(t_f - t)$  για διάφορες τιμές του  $N$  [112].

Η αριθμητική τιμή του  $N$  είναι μία αυθαίρετη επιλογή. Η επιλογή εξαρτάται από τη συγκεκριμένη δοκιμή και τον συνολικό αριθμό των χτύπων που καταγράφηκαν καθ' όλη τη διάρκεια της δοκιμής. Όσο μεγαλύτερος είναι ο συνολικός αριθμός των χτύπων, τόσο υψηλότερη είναι η τιμή του  $N$  που μπορεί να υιοθετηθεί χωρίς να σκιάζει τις κρίσιμες λεπτομέρειες της ανάλυσης. Η τιμή του  $N$  αντικατοπτρίζει κατά κάποιο τρόπο την «ευαισθησία» της ανάλυσης μέσω της  $F$  function.

Η ακριβής αριθμητική τιμή που αποδίδεται στο  $N$  δεν επηρεάζει σημαντικά τα αποτελέσματα της ανάλυσης (υποθέτοντας ότι το  $N$  είναι ένα σχετικά μικρό κλάσμα του συνολικού αριθμού των χτύπων που καταγράφηκαν).

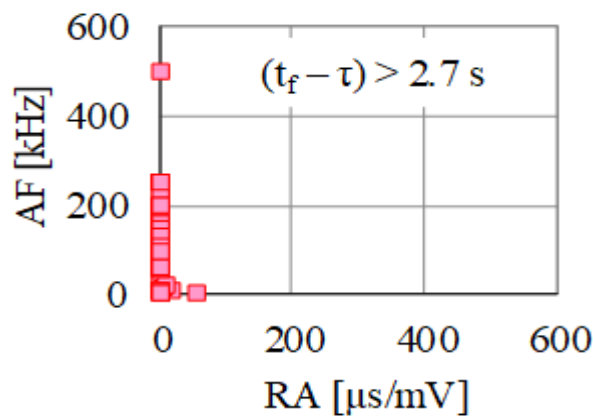
Η μείωση της τιμής του  $N$  οδηγεί σε ισχυρές τοπικές διακυμάνσεις, ενώ η αύξηση της τιμής του  $N$  οδηγεί σε ομαλότερες καμπύλες.



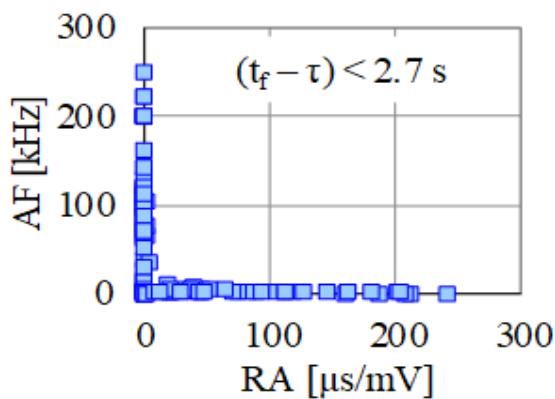
**Εικ. 4.39:** Η συμπεριφορά της  $F$ -function, της  $RA$ , της  $AF$  και του εφαρμοζόμενου φορτίου σε συνάρτηση με την παράμετρο  $(t_f - t)$  [112].

Είναι εξαιρετικά σημαντικό να τονισθεί ότι η συνάρτηση  $F$  αρχίζει να αυξάνεται τη χρονική στιγμή  $(t_f - t) = 10s$ , δηλαδή ακριβώς την στιγμή κατά

την οποία το PSC παρουσιάζει ολικό μέγιστο. Η RA αρχίζει να αυξάνει απότομα την χρονική στιγμή  $(t_f - \tau) = 2.7s$ .



**Εικ. 4.40:** Η σχέση μεταξύ RA και AF για  $(t_f - \tau) > 2.7s$  [112].



**Εικ. 4.41:** Η σχέση μεταξύ RA και AF για  $(t_f - \tau) < 2.7s$  [112].

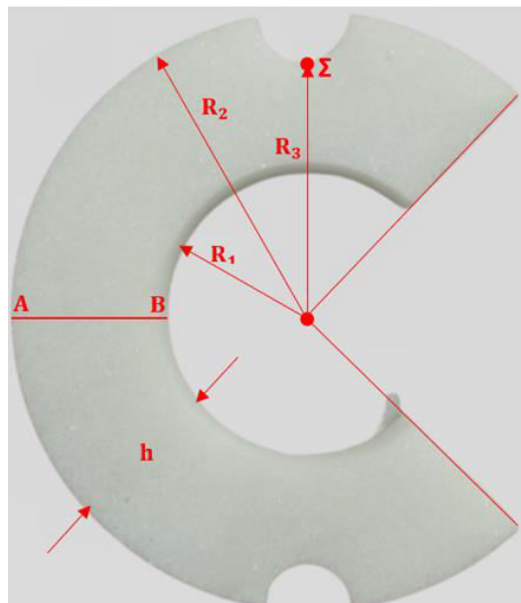
Επίσης, παρατηρήθηκε δραστική αλλαγή της σχέσης μεταξύ RA και AF παρατηρείται την σταθερή χρονική στιγμή  $(t_f - \tau) = 2.7s$  κατά την οποία η RA αρχίζει να αυξάνει απότομα, υποδεικνύοντας ότι την συγκεκριμένη στιγμή αμέσως ο μηχανισμός αστοχίας αλλάζει από μικροθραύση τύπου-I σε μικροθραύση μεικτού τύπου.

## 5<sup>ο</sup> ΚΕΦΑΛΑΙΟ

### ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΛΥΣΗΣ ΚΑΙ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

#### 5.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Από την λήψη των πρωτογενών δεδομένων και την επεξεργασία τους καθώς και από την θεωρητική λύση προκύπτουν γραφήματα που αποτελούν πηγές εξαγωγής διαφόρων ιδιαίτερα χρήσιμων συμπερασμάτων. Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του πλαισίου φόρτισης μπορούμε να συγκρίνουμε σύμφωνα με την αναλυτική λύση την κατακόρυφη μετατόπιση του σημείου  $\Sigma$  που φαίνεται στην **Εικ. 5.1** και να αποφανθούμε πώς η μεταβολή ορισμένων παραμέτρων (όπως το μέτρο ελαστικότητας, το πάχος, ο λόγος  $\rho=R_1/R_2$ , και η εκκεντρότητα ( $c$ )) μπορούν να επηρεάσουν την πειραματική διαδικασία.



**Εικ. 5.1:** Η θέση του σημείου  $\Sigma$ .

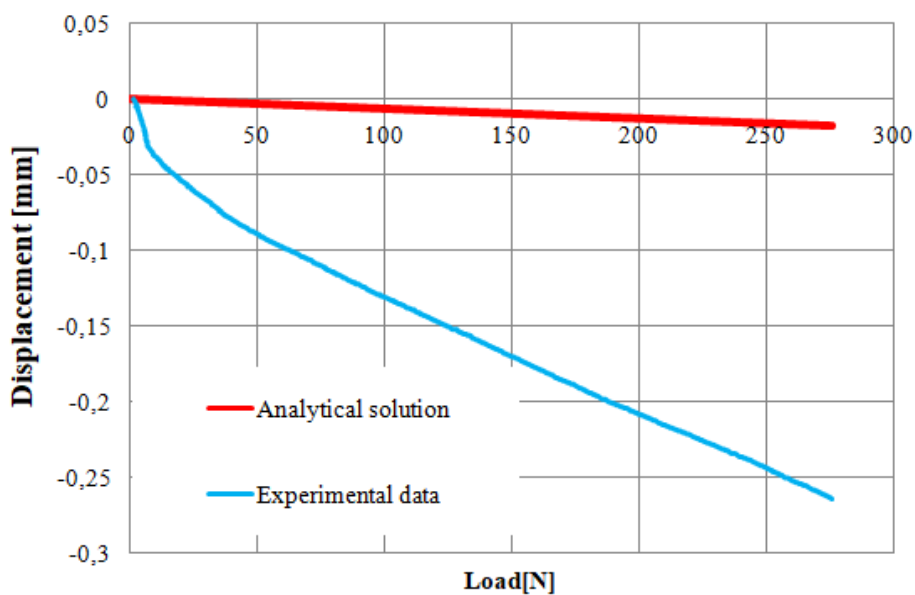
## 5.2 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΛΥΣΗΣ ΚΑΙ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΜΗΧΑΝΗΣ

Κατασκευάζουμε τις γραφικές παραστάσεις της κατακόρυφης μετατόπισης του σημείου Σ που προκύπτει από την πειραματική διαδικασία και της μετατόπισης που προκύπτει από την αναλυτική λύση συναρτήσει του φορτίου που εφαρμόζεται στο δοκίμιο. Ακολουθεί ο πίνακας με τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των δοκιμίων που θα χρησιμοποιήσουμε.

Δοκίμιο	R <sub>1</sub> (cm)	R <sub>2</sub> (cm)	R <sub>3</sub> (cm)	c (cm)	h (cm)
0-2	5.100	2.650	4.400	0	1.340
0-3	5.075	2.625	4.275	0	1.205
1-1	5.020	2.600	4.500	0.6	1.143
1-2	5.020	2.600	4.400	0.7	1.276

*Πιν. 5.1: Τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των δοκιμίων.*

Επειδή, το εύρος τιμών του μέτρου ελαστικότητας του Διονυσιακού μαρμάρου είναι αρκετά μεγάλο θεωρούμε ενδεικτικά ότι  $E = 62.5 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.25$ .

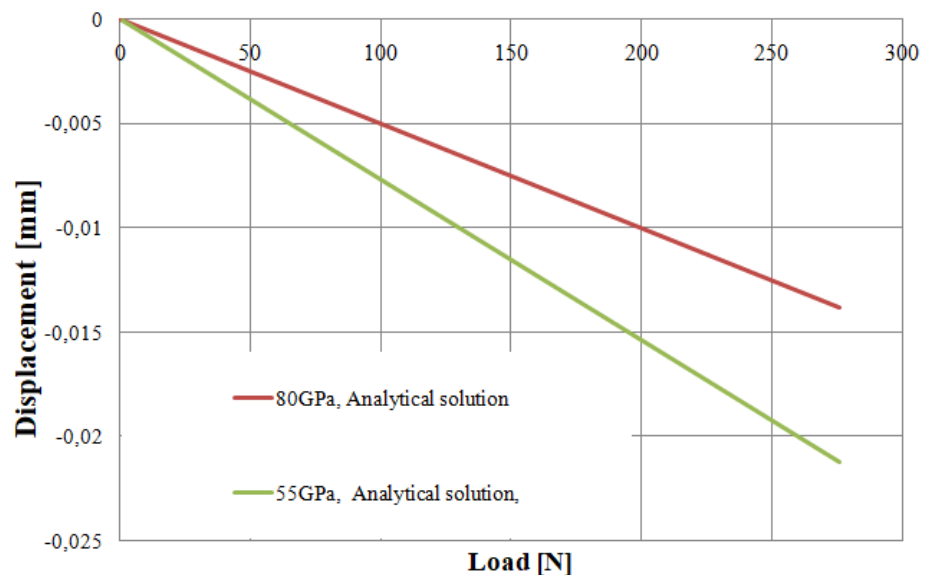


*Εικ. 5.2: Διάγραμμα μετατόπισης-φορτίου με δεδομένα πειράματος και αναλυτικής λύσης (δοκίμιο 0-2).*

Παρατηρούμε ότι υπάρχει σημαντική απόκλιση των αποτελεσμάτων της πειραματικής διαδικασίας από τα αποτελέσματα της αναλυτικής λύσης.



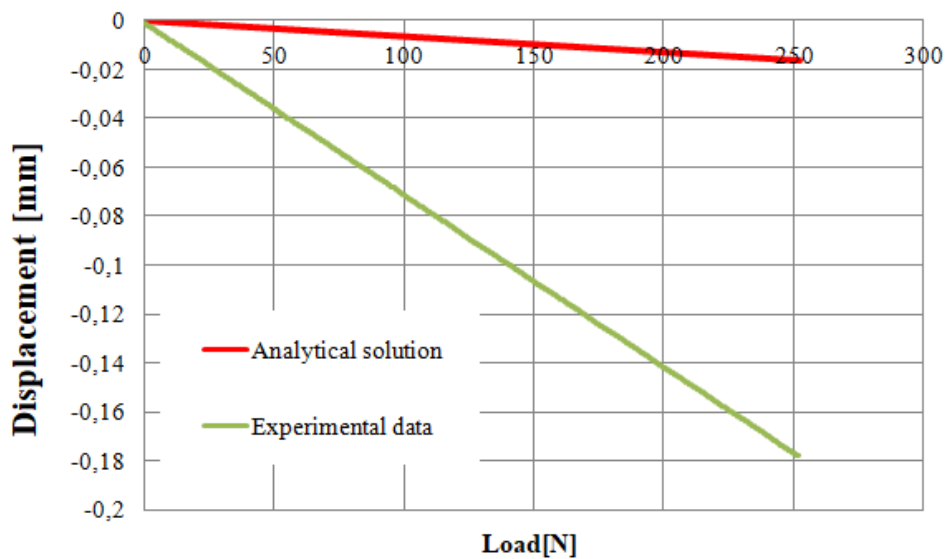
Λαμβάνοντας υπόψη την ανισοτροπία που χαρακτηρίζει την μηχανική συμπεριφορά του Διονυσιακού μαρμάρου αφού υπάρχουν τρεις διευθύνσεις ανισοτροπίας: (i) η ισχυρή με  $E=84.5$  GPa και  $\nu=0.26$ , (ii) η ενδιάμεση με  $E=79.5$  GPa και  $\nu=0.26$  και (iii) η ασθενής με  $E=50$  GPa και  $\nu=0.11$ , συνάγεται ότι πρέπει να ελέγξουμε την μεταβολή της κατακόρυφης μετατόπισης για διάφορες τιμές του  $E$ . Θα κατασκευάσουμε το διάγραμμα μετατόπισης – φορτίου για τα αποτελέσματα της αναλυτικής λύσης παρουσία και απουσία τριβής για μέτρα ελαστικότητας 55 GPa και 80 GPa.



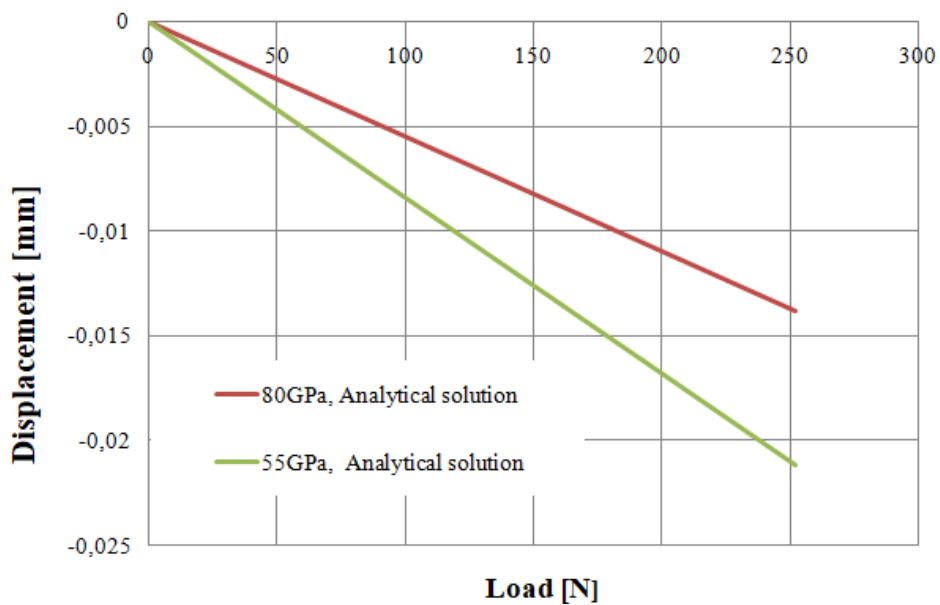
**Εικ. 5.3:** Διάγραμμα μετατόπισης–φορτίου με δεδομένα αναλυτικής λύσης για  $E=55$  GPa και  $E=80$  GPa (δοκίμιο 0-2).

Για  $E=55$  GPa οι κατακόρυφες μετατοπίσεις της αναλυτικής λύσης παρουσιάζουν μία βελτίωση όχι όμως σε βαθμό ώστε να προσεγγίσουν τα πειραματικά αποτελέσματα.

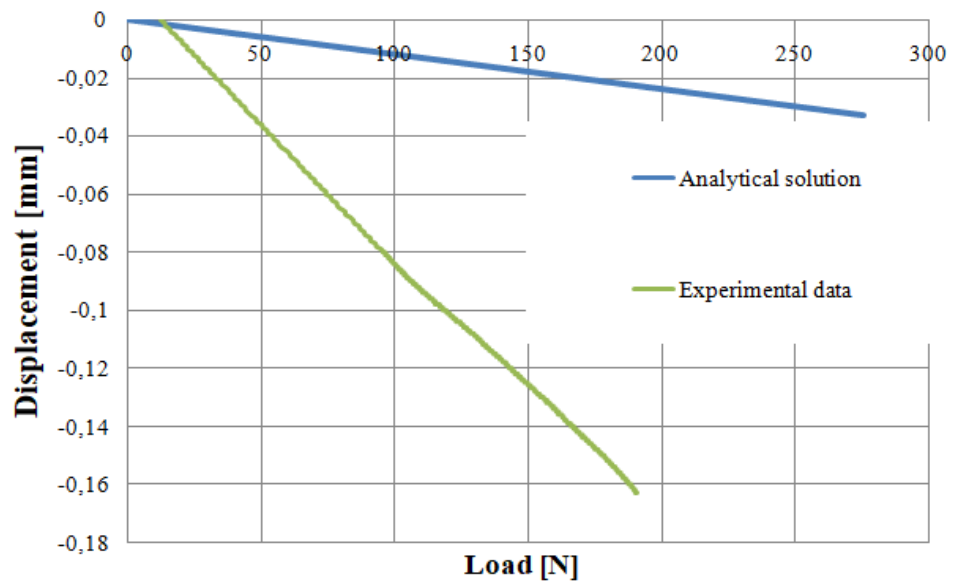
Θα ακολουθήσει η ίδια διαδικασία και για τα υπόλοιπα δοκίμια.



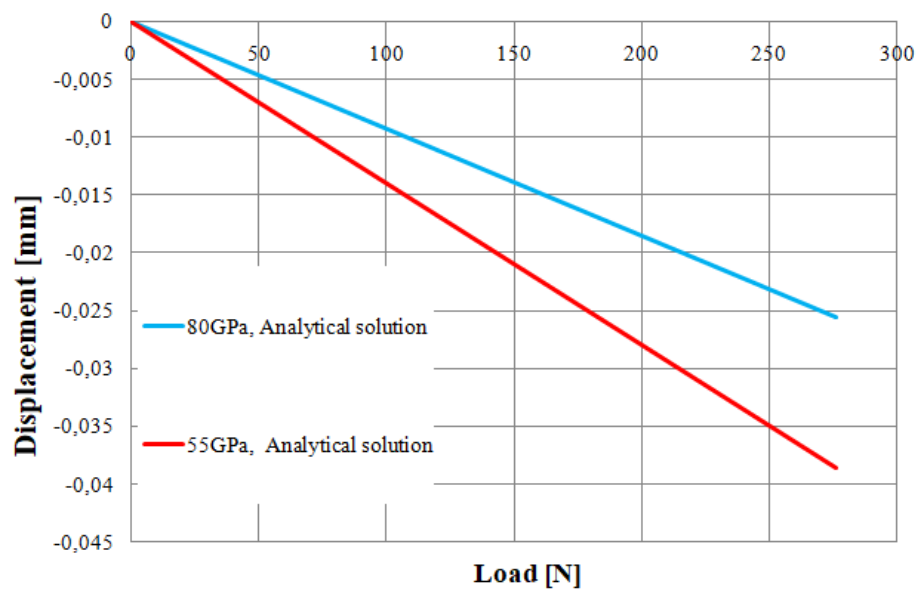
*Εικ. 5.4: Διάγραμμα μετατόπισης–φορτίου με δεδομένα πειράματος και αναλυτικής λύσης (δοκίμιο 0-3).*



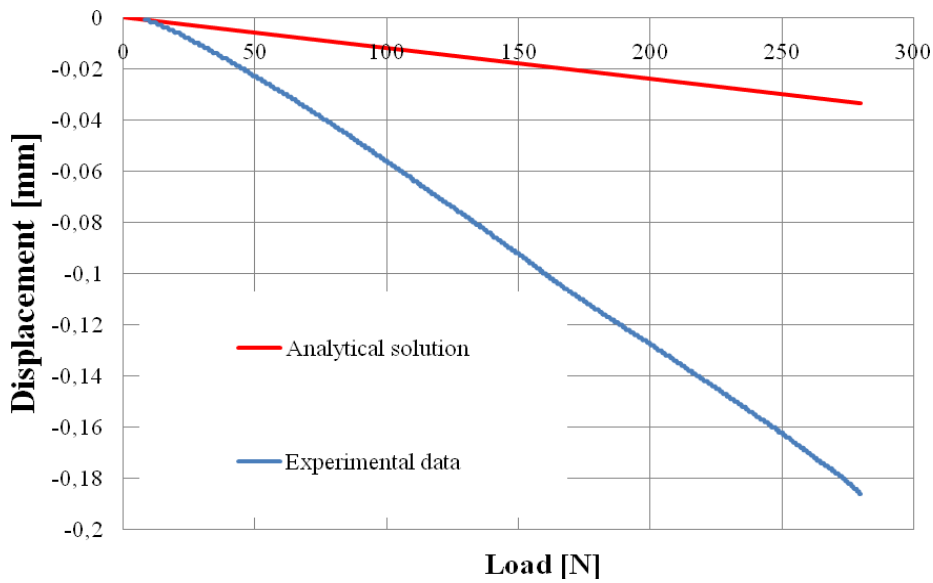
*Εικ. 5.5: Διάγραμμα μετατόπισης–φορτίου με δεδομένα αναλυτικής λύσης για  $E=55GPa$  και  $E=80GPa$  (δοκίμιο 0-3).*



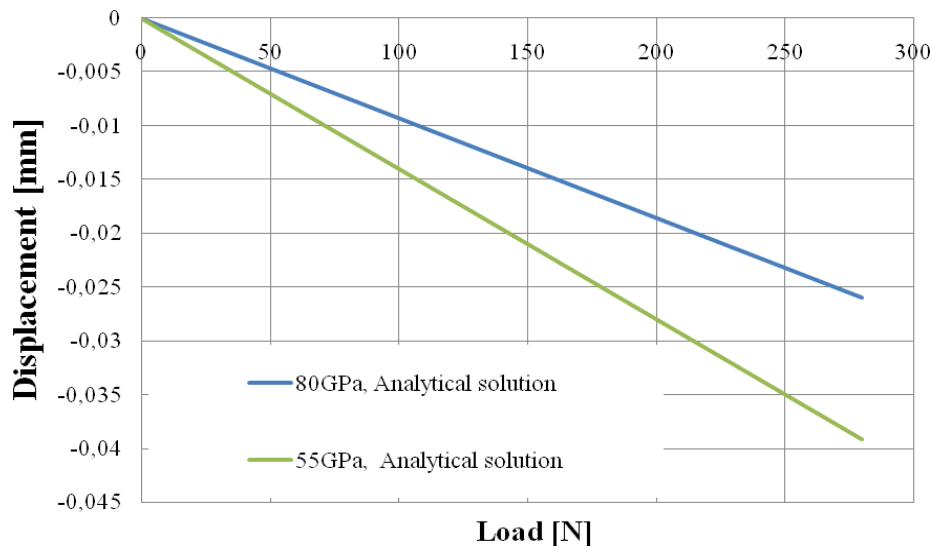
*Εικ. 5.6: Διάγραμμα μετατόπισης–φορτίου με δεδομένα πειράματος και αναλυτικής λύσης (δοκίμιο 1-1).*



*Εικ. 5.7: Διάγραμμα μετατόπισης–φορτίου με δεδομένα αναλυτικής λύσης για  $E=55GPa$  και  $E=80GPa$  (δοκίμιο 1-1).*



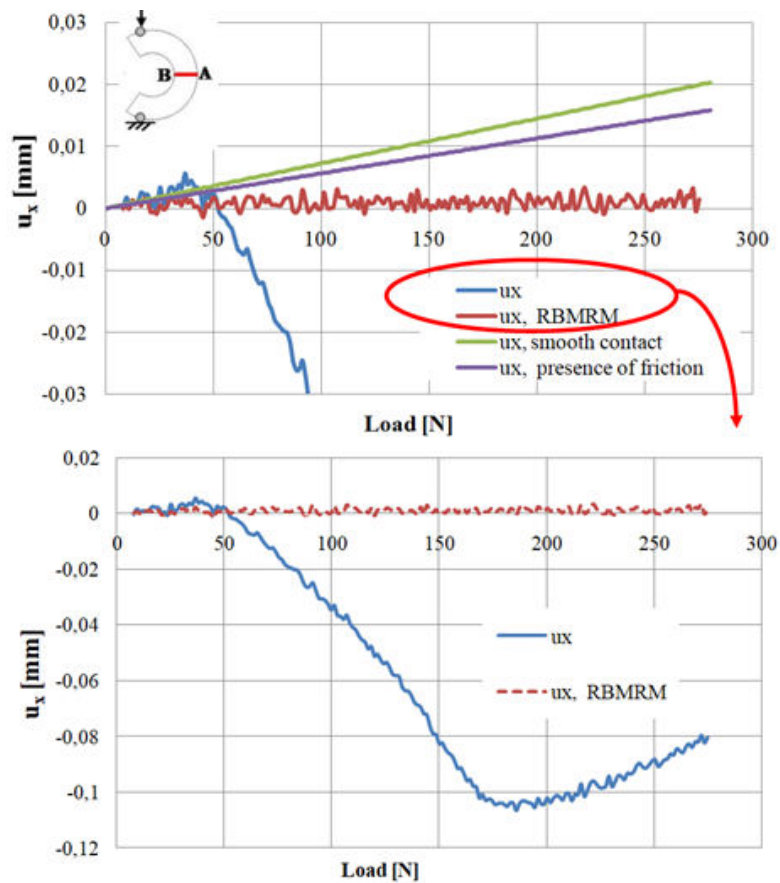
**Εικ. 5.8:** Διάγραμμα μετατόπισης–φορτίου με δεδομένα πειράματος και αναλυτικής λύσης (δοκίμιο 1-2).



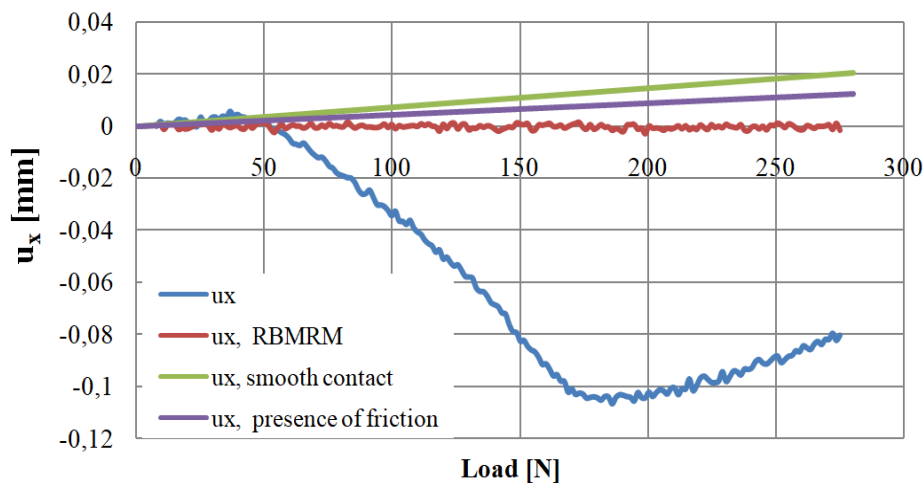
**Εικ. 5.9:** Διάγραμμα μετατόπισης–φορτίου με δεδομένα αναλυτικής λύσης για  $E=55GPa$  και  $E=80GPa$  (δοκίμιο 1-2).

### 5.3 ΣΥΚΡΙΣΗ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΛΥΣΗΣ ΚΑΙ ΤΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ DIC

Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα της τεχνικής DIC, σε συνδυασμό με τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την αναλυτική λύση κατασκευάζουμε τα διαγράμματα της οριζόντιας μετατόπισης συναρτήσει του φορτίου για τα ακραία σημεία B ( $R_1,0$ ) και A( $R_2,0$ ).



*Εικ. 5.10: Διάγραμμα οριζόντιας μετατόπισης-φορτίου για το σημείο A (δοκίμιο 1-2).*



**Εικ. 5.11:** Διάγραμμα οριζόντιας μετατόπισης-φορτίου για το σημείο B (δοκίμιο 1-2).

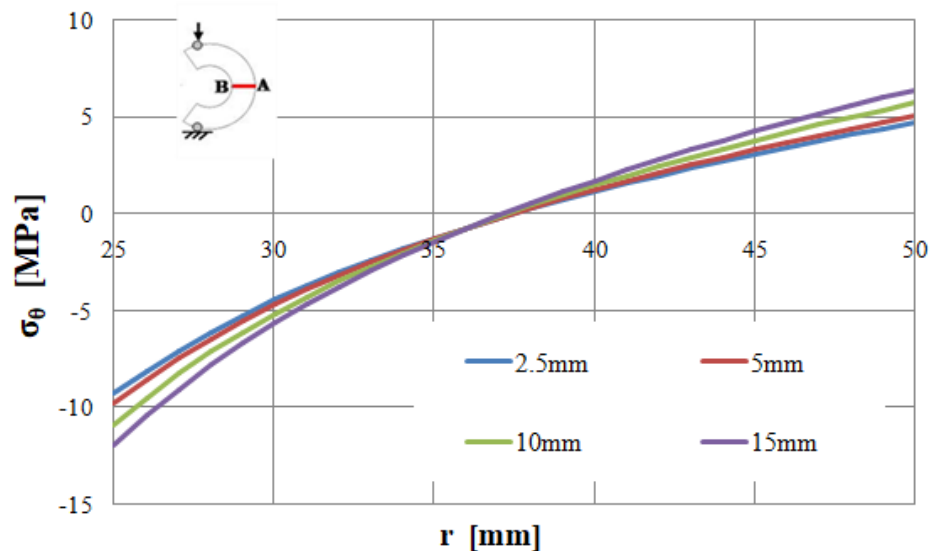
Παρατηρούμε ότι για την περίπτωση των αποτελεσμάτων της μεθόδου DIC δεν υπάρχει συμφωνία με τα αποτελέσματα της αναλυτικής λύσης παρουσία και απουσία τριβής.

Συνολικά όμως, τα αποτελέσματα είναι λογικά λαμβάνοντας υπόψη τα σφάλματα των καμερών και το γεγονός ότι το μάρμαρο είναι ψαθυρό υλικό και οι μετατοπίσεις είναι πολύ μικρές, συνεπώς, είναι δύσκολη η ακριβής καταγραφή τους. Άλλη μία παράμετρος που επηρεάζει την καταγραφή των καμερών είναι η στροφή του δοκιμίου κατά την διάρκεια της πειραματικής διαδικασίας.

## 5.4 Η ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΤΑΣΕΩΝ ΚΑΙ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ

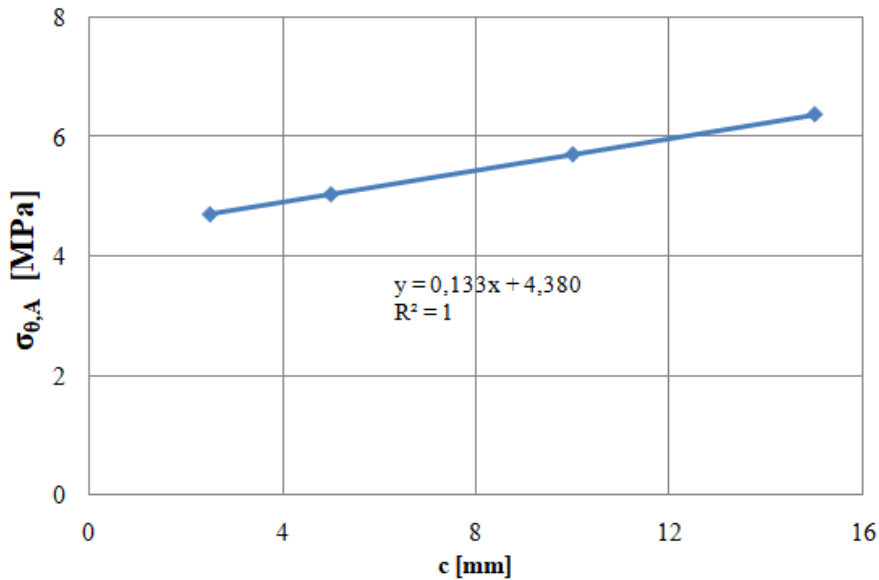
### 5.4.1 Η ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΤΟΥ ΤΑΣΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

Από τις σχέσεις (2.41)–(2.42) παρατηρούμε ότι το πεδίο των τάσεων επηρεάζεται από την μεταβολή του φορτίου ( $P$ ) που επιβάλλεται στο δοκίμιο, και τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του δοκιμίου, δηλαδή, το πάχος ( $2h$ ), την εκκεντρότητα ( $c$ ) και τον λόγο των ακτίνων  $\rho = R_2/R_1$ .

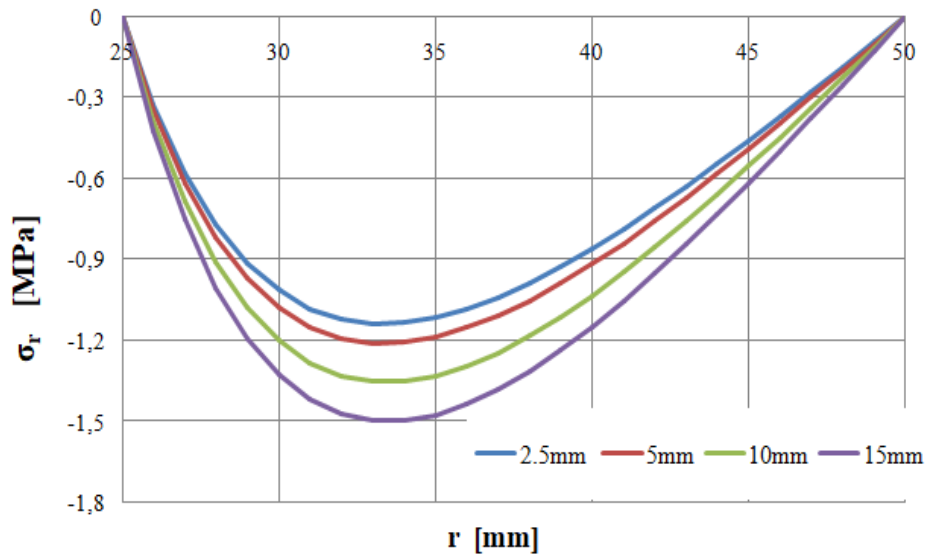


Εικ. 5.12: Η μεταβολή της επαπτομενικής τάσης  $\sigma_\theta$  κατά μήκος της γραμμής  $AB$  για διάφορες τιμές της εκκεντρότητας  $c$ .

Η τάση  $\sigma_\theta$  αυξάνεται κατ' απόλυτη τιμή καθώς αυξάνεται η εκκεντρότητα ( $c$ ). Όλες οι καμπύλες τέμνονται στο ίδιο σημείο. Προκειμένου να μελετήσουμε την διακύμανση της  $\sigma_\theta$  κατά μήκος της  $AB$  σχεδιάζουμε το διάγραμμα  $\sigma_\theta - c$  για  $2.5\text{mm} < c < 15\text{mm}$ . Συμπεραίνουμε ότι αύξηση στις τιμές της εκκεντρότητας οδηγεί σε ταυτόχρονη αύξηση του μέτρου της μέγιστης εφελκυστικής τάσης που αναπτύσσεται (σημείο  $A$ ).



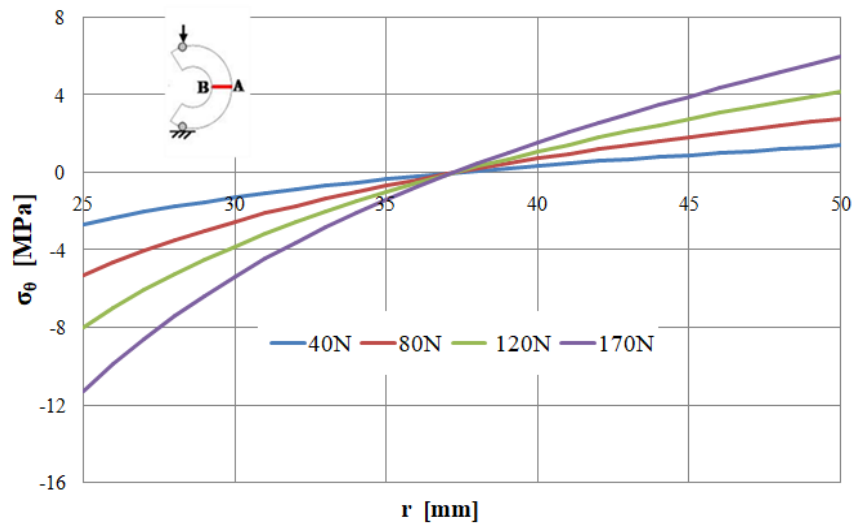
**Εικ. 5.13:** Η εξάρτηση της μέγιστης εφαλκυστικής τάσης από την εκκεντρότητα  $c$ .



**Εικ. 5.14:** Η μεταβολή της ακτινικής τάσης  $\sigma_r$  κατά μήκος της γραμμής  $AB$  για διάφορες τιμές της εκκεντρότητας  $c$ .

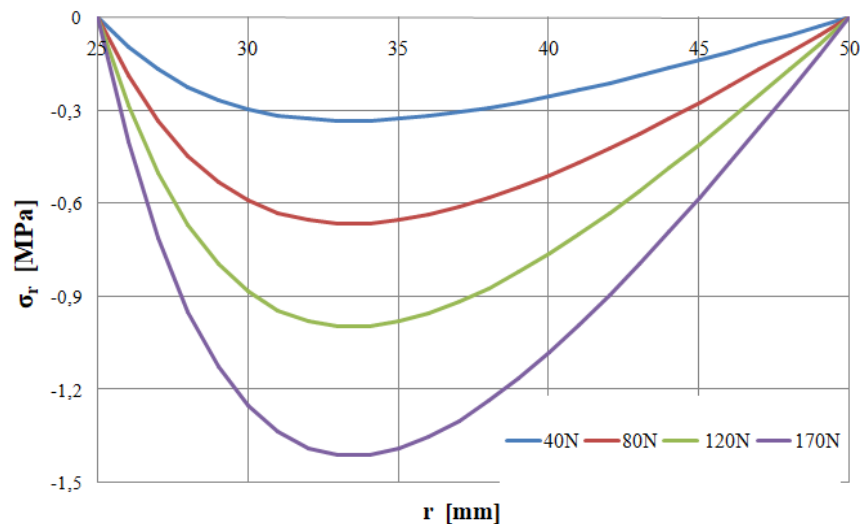
Καθώς αυξάνεται η εκκεντρότητα, αυξάνεται κατ' απόλυτη τιμή και η  $\sigma_r$ . Όλες οι καμπύλες εμφανίζουν ελάχιστο τουλάχιστον στο ένα τρίτο του  $AB$ .





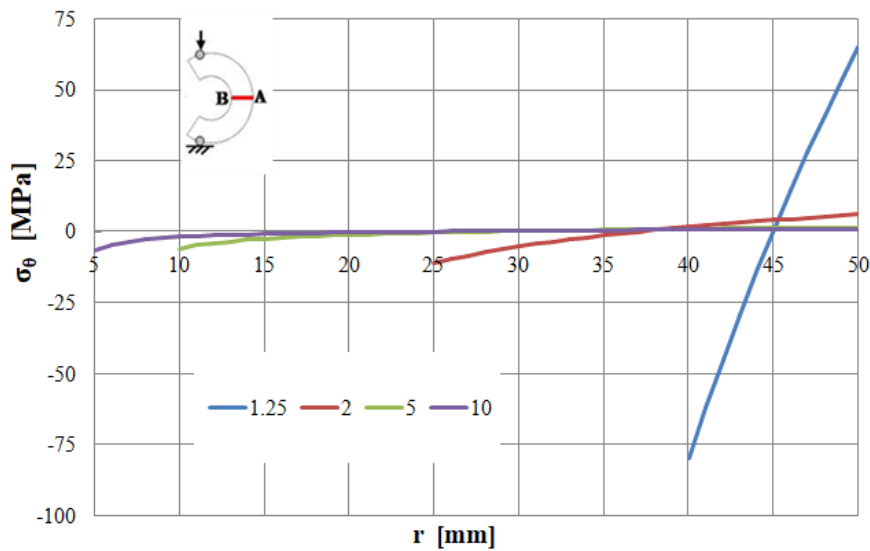
**Εικ. 5.15:** Η μεταβολή της εφαπτομενικής τάσης  $\sigma_\theta$  κατά μήκος της γραμμής AB για διάφορες τιμές του φορτίου  $P$ .

Καθώς αυξάνεται το φορτίο ( $P$ ), αυξάνεται και η  $\sigma_\theta$ . Όλες οι καμπύλες τέμνονται στο ίδιο σημείο.



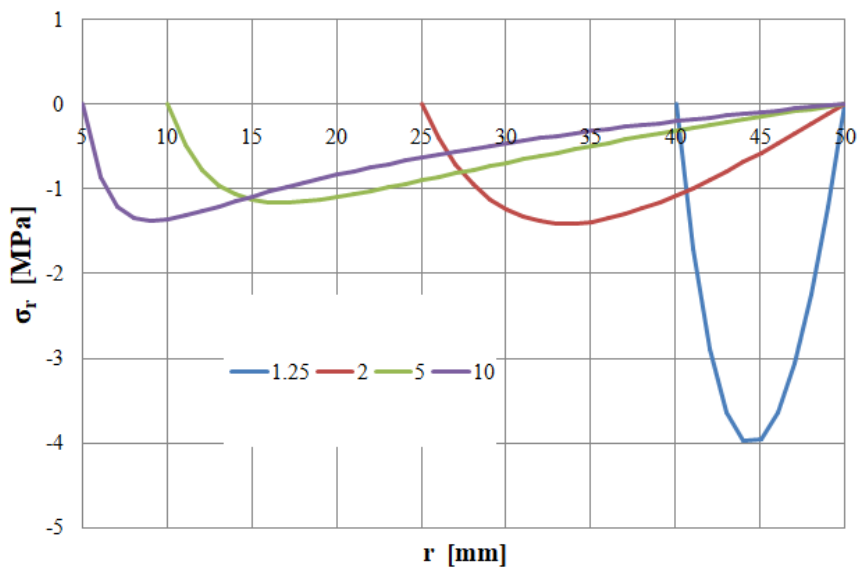
**Εικ. 5.16:** Η μεταβολή της ακτινικής τάσης  $\sigma_r$  κατά μήκος της γραμμής AB για διάφορες τιμές του φορτίου  $P$ .

Καθώς αυξάνεται το φορτίο ( $P$ ), αυξάνεται κατ' απόλυτη τιμή και η  $\sigma_r$ . Όλες οι καμπύλες εμφανίζουν ελάχιστο τουλάχιστον στο ένα τρίτο του AB.



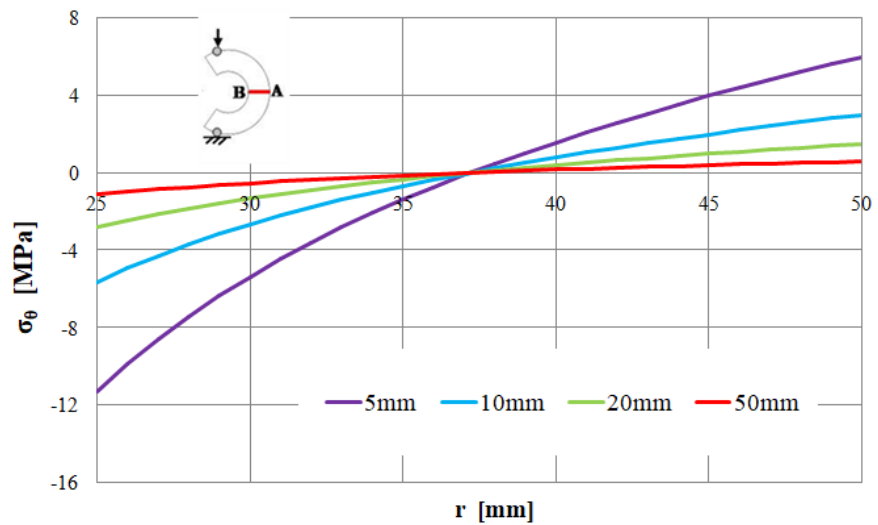
**Εικ. 5.17:** Η μεταβολή της εφαπτομενικής τάσης  $\sigma_\theta$  κατά μήκος της γραμμής AB για διάφορες τιμές του λόγου  $\rho$ .

Αυξάνοντας τον λόγο  $\rho$ , δηλαδή αυξάνοντας το πλάτος του ημιδακτυλίου ο λόγος  $\sigma_\theta (R_1,0)/\sigma_\theta (R_2,0)$  αυξάνεται κατ' απόλυτη τιμή υποδεικνύοντας ότι προκειμένου να διασφαλιστεί η θραύση λόγω εφελκυσμού στο σημείο A δείγματα με μεγαλύτερο πλάτος δεν πρέπει να επιλέγονται.



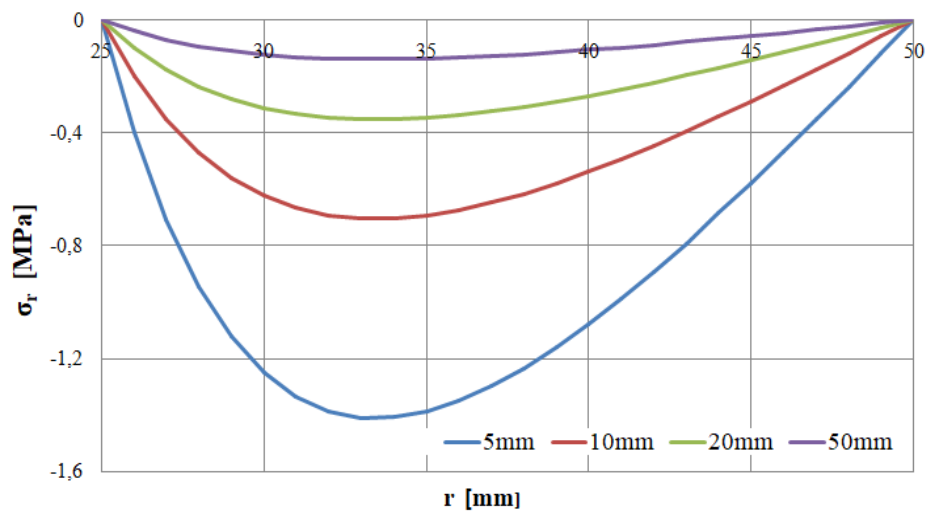
**Εικ. 5.18:** Η μεταβολή της ακτινικής τάσης  $\sigma_r$  κατά μήκος της γραμμής AB για διάφορες τιμές του λόγου  $\rho$ .

Καθώς ο λόγος  $\rho$  αυξάνεται, η ελάχιστη  $\sigma_r$  μετατοπίζεται προς τα αριστερά, δηλαδή προς την αρχή. Η μεταβολή αυτή των ελάχιστων δεν είναι μονοτονική.



**Εικ. 5.19:** Η μεταβολή της εφαπτομενικής τάσης  $\sigma_\theta$  κατά μήκος της γραμμής AB για διάφορες τιμές του πάχους  $2h$ .

Καθώς αυξάνεται το  $h$  και δεδομένου ότι το φορτίο παραμένει σταθερό, η  $\sigma_\theta$  μειώνεται. Όλες οι καμπύλες τέμνονται μεταξύ τους στο ίδιο σημείο.

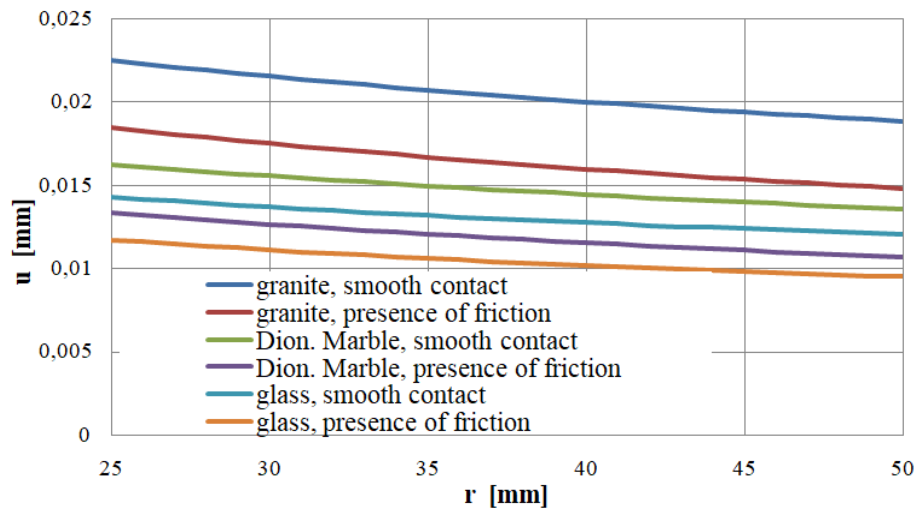


**Εικ. 5.20:** Η μεταβολή της ακτινικής τάσης  $\sigma_r$  κατά μήκος της γραμμής AB για διάφορες τιμές του πάχους  $2h$ .

Καθώς αυξάνεται το πάχος ( $h$ ), για σταθερό φορτίο η  $\sigma_r$  μειώνεται. Όλες οι καμπύλες εμφανίζουν ελάχιστο στο ίδιο σημείο που βρίσκεται στο ένα τρίτο του  $AB$ .

#### 5.4.2 Η ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΤΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ

Στην περίπτωση των μετατοπίσεων, θα παρατηρήσουμε ότι εκτός από τις παραμέτρους που αναφέρθηκαν στην παράγραφο για την μεταβολή του τασικού πεδίου, και η φύση του υλικού των δοκιμίων προκαλεί μεταβολή στην οριζόντια μετατόπιση.



*Εικ. 5.21: Η μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u$  κατά μήκος της γραμμής  $AB$  για συγκεκριμένα υλικά.*

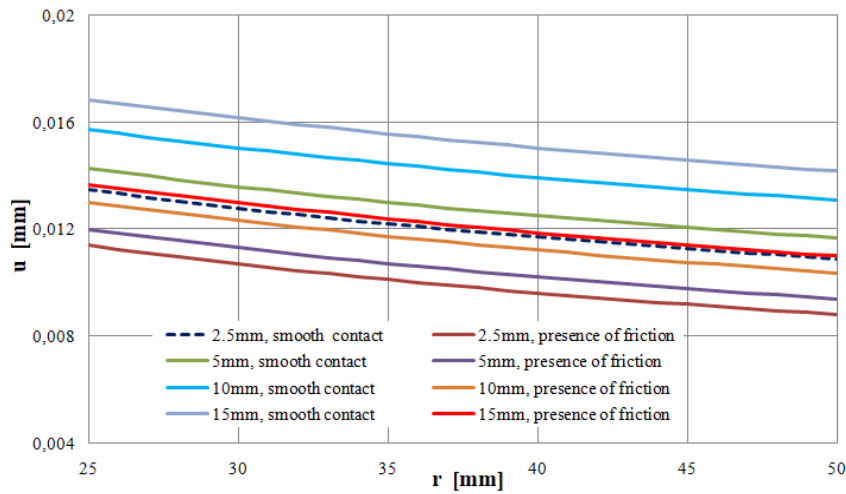
**Granite:  $E=45\text{GPa}$ ,  $\nu=0.23$**

**Dionysos marble:  $E=62.5\text{GPa}$ ,  $\nu=0.25$**

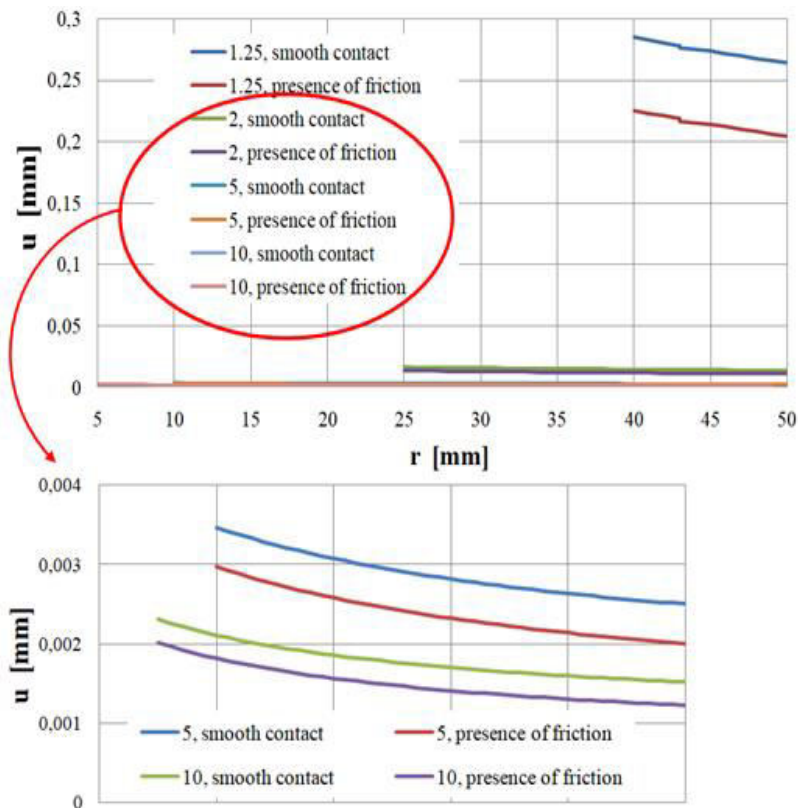
**Glass:  $E=70\text{GPa}$ ,  $\nu=0.15$**

Παρατηρούμε το προφανές, ότι καθώς η μετατόπιση  $u$  αυξάνεται, οι τιμές του μέτρου ελαστικότητας  $E$  μειώνονται. Επιπλέον, η ύπαρξη τριβής συνεπάγεται μικρότερες μετατοπίσεις  $u$ .

Για την μεταβολή της εκκεντρότητας παρατηρούμε ότι οι τιμές της  $u$  αυξάνονται καθώς αυξάνεται η εκκεντρότητα. Η παρουσία τριβής μειώνει τις αντίστοιχες τιμές της  $u$ .

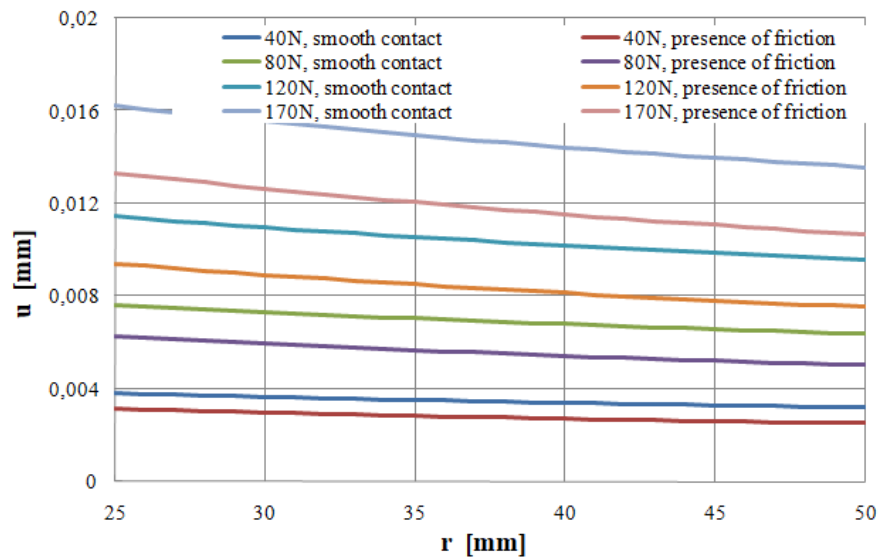


Εικ. 5.22: Η μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u$  κατά μήκος της γραμμής  $AB$  για διάφορες τιμές της εκκεντρότητας  $c$ .



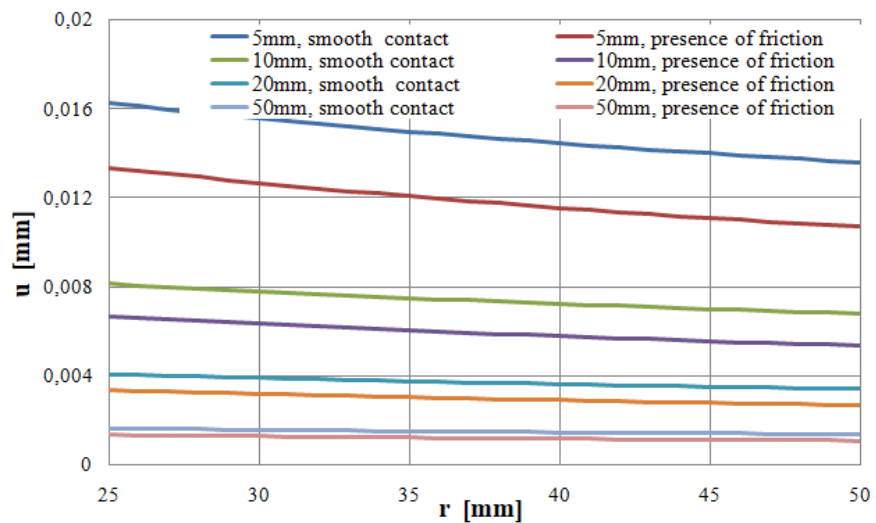
Εικ. 5.23: Η μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u$  κατά μήκος της γραμμής  $AB$  για διάφορες τιμές του λόγου  $\rho$ .

Όπως φαίνεται, καθώς ο λόγος  $\rho$  αυξάνεται, οι τιμές της  $u$  μειώνονται. Παρουσία τριβής οι αντίστοιχες τιμές της  $u$  μειώνονται.



**Εικ. 5.24:** Η μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u$  κατά μήκος της γραμμής  $AB$  για διάφορες τιμές του φορτίου  $P$ .

Αυξάνοντας τις τιμές του φορτίου  $P$ , οι τιμές  $u$  αυξάνονται.



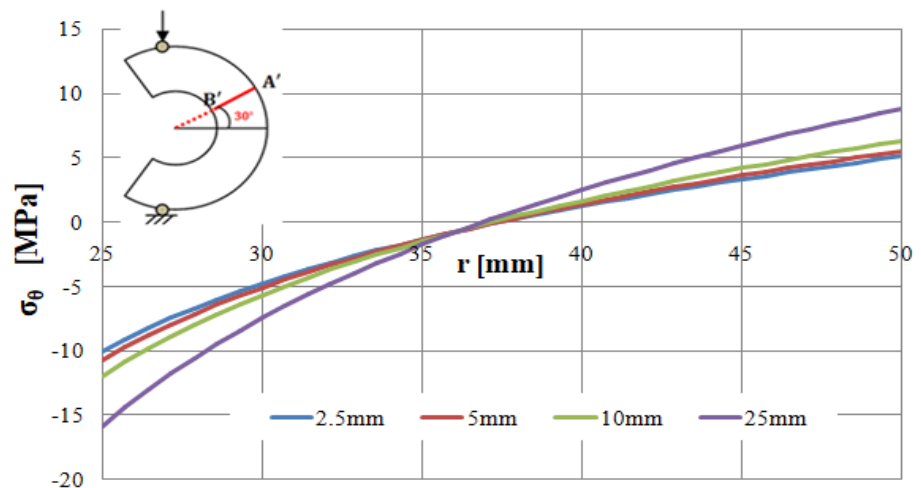
**Εικ. 5.25:** Η μεταβολή της οριζόντιας μετατόπισης  $u$  κατά μήκος της γραμμής  $AB$  για διάφορες τιμές του πάχους  $2h$ .

Μειώνοντας το πάχος ( $2h$ ) του ημιδακτυλίου και διατηρώντας το φορτίο  $P$  σταθερό, οι τιμές  $u$  αυξάνονται. Απουσία τριβής στην περιοχή επαφής οι τιμές  $u$  κατά μήκος του  $AB$  είναι υψηλότερες.

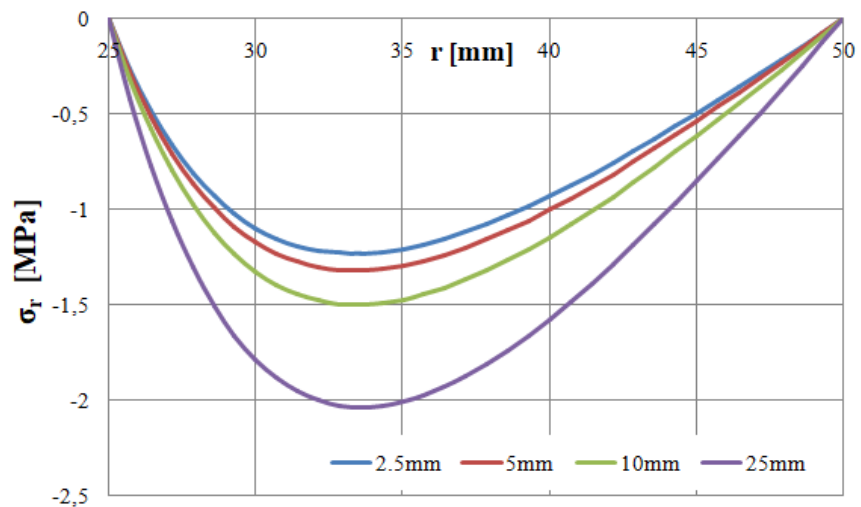


### 5.4.3 Η ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΠΕΔΙΟΥ ΤΑΣΕΩΝ ΚΑΙ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ ΓΙΑ $\theta=30^\circ$

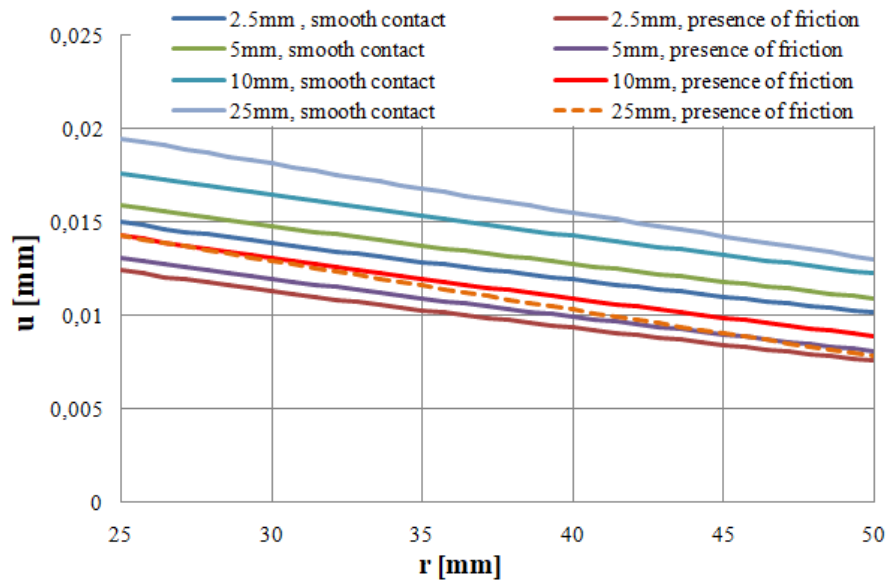
Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η συμπεριφορά των τάσεων, ακτινικής και εφαπτομενικής και της ακτινικής μετατόπισης κατά μήκος της ακτίνας  $r \in [25,50]$ . Εργαζόμαστε με τον ίδιο ακριβώς τρόπο όπως με την γωνία  $\theta=0^\circ$ .



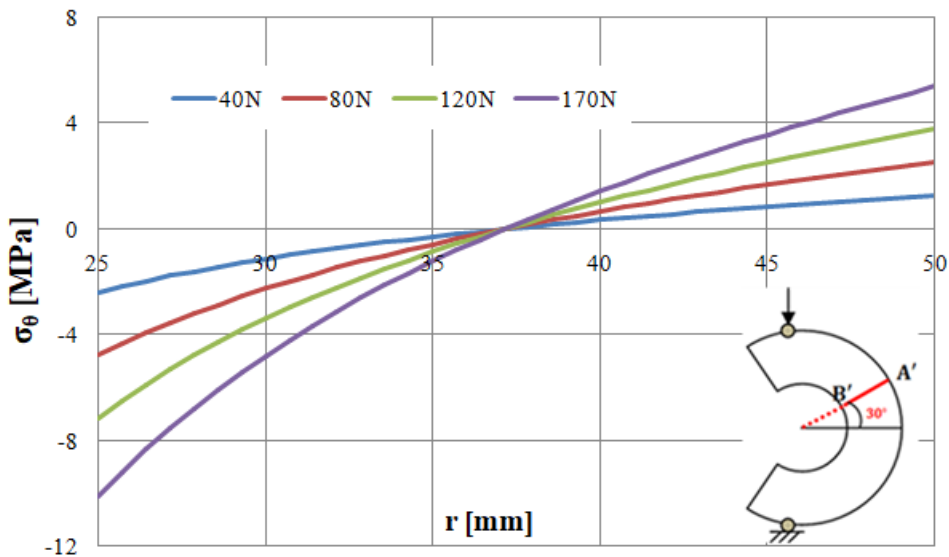
Εικ. 5.26: Η μεταβολή της εφαπτομενικής τάσης  $\sigma_\theta$  κατά μήκος της γραμμής A'B' για διάφορες τιμές της εκκεντρότητας  $c$ .



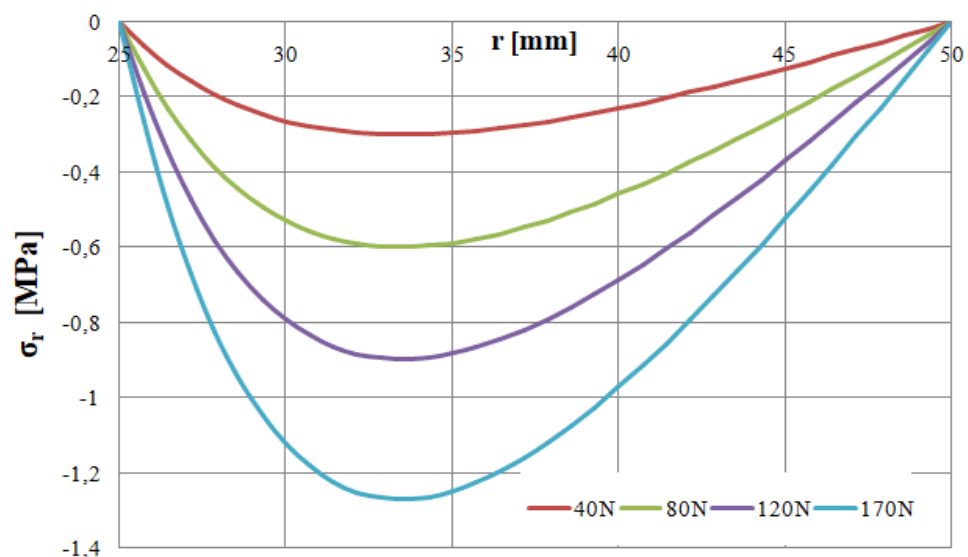
Εικ. 5.27: Η μεταβολή της ακτινικής τάσης  $\sigma_r$  κατά μήκος της γραμμής A'B' για διάφορες τιμές της εκκεντρότητας  $c$ .



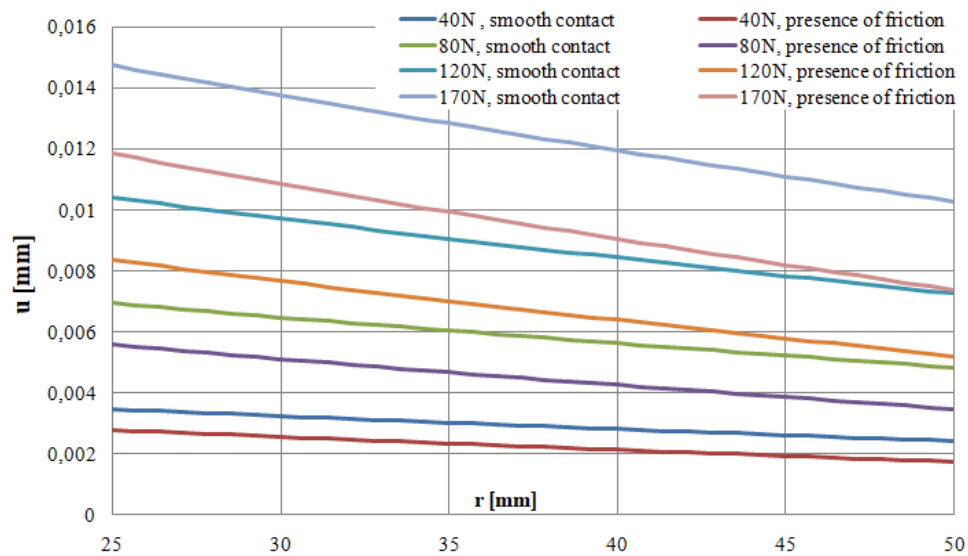
Εικ. 5.28: Η μεταβολή της ακτινικής μετατόπισης  $u$  κατά μήκος της γραμμής  $A'B'$  για διάφορες τιμές της εκκεντρότητας  $c$ .



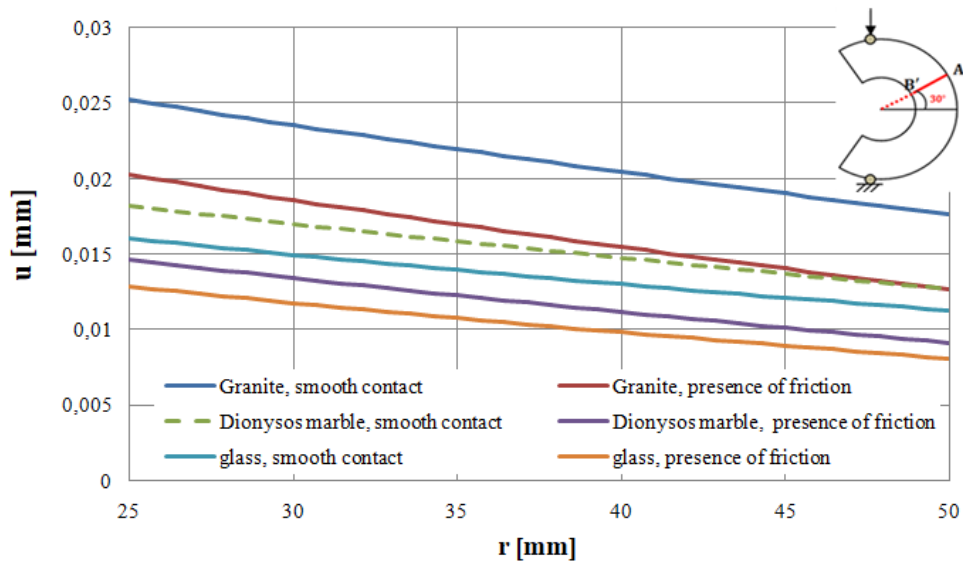
Εικ. 5.29: Η μεταβολή της εφαπτομενικής τάσης  $\sigma_\theta$  κατά μήκος της γραμμής  $A'B'$  για διάφορες τιμές του φορτίου  $P$ .



**Εικ. 5.30:** Η μεταβολή της ακτινικής τάσης  $\sigma_r$  κατά μήκος της γραμμής  $A'B'$  για διάφορες τιμές του φορτίου  $P$ .



**Εικ. 5.31:** Η μεταβολή της ακτινικής μετατόπισης  $u$  κατά μήκος της γραμμής  $A'B'$  για διάφορες τιμές του φορτίου  $P$ .

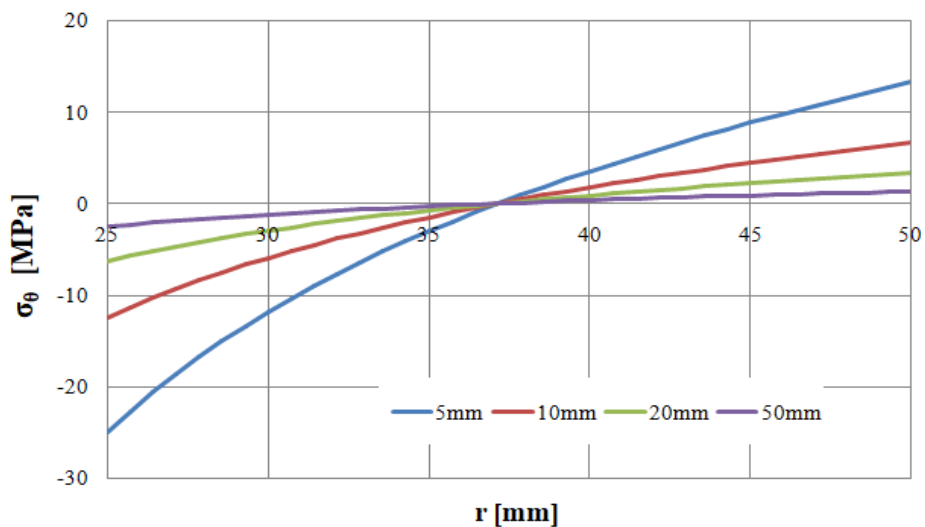


Εικ. 5.32: Η μεταβολή της ακτινικής μετατόπισης  $u$  κατά μήκος της γραμμής  $A'B'$  για συγκεκριμένα υλικά.

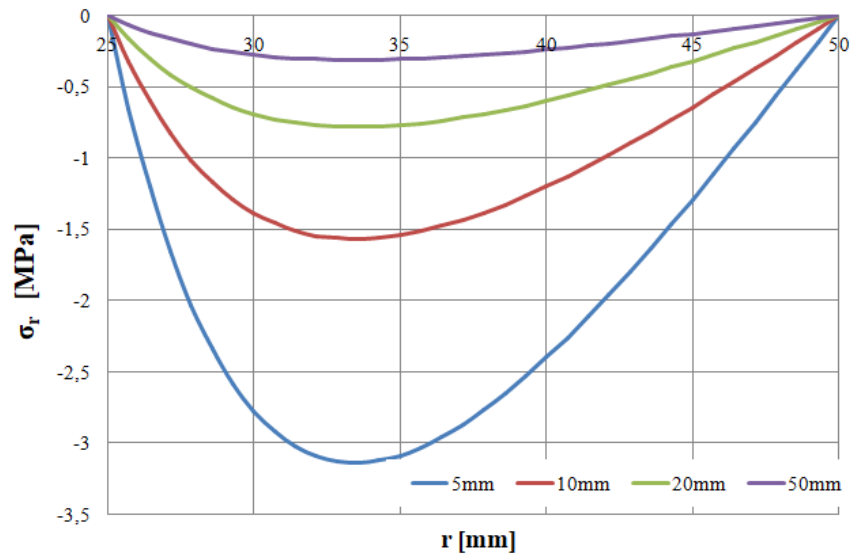
Granite:  $E=45\text{GPa}$ ,  $\nu=0.23$

Dionysos marble:  $E=62.5\text{GPa}$ ,  $\nu=0.25$

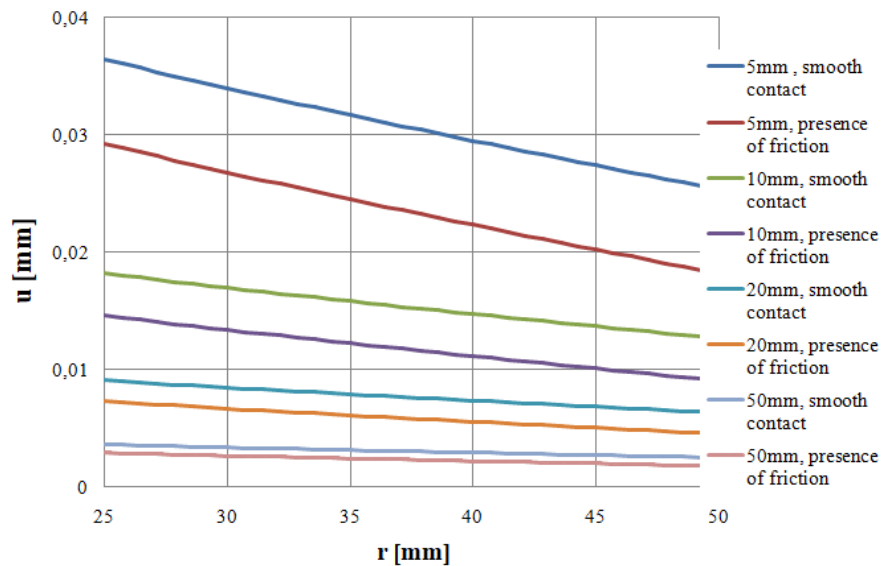
Glass:  $E=70\text{GPa}$ ,  $\nu=0.15$



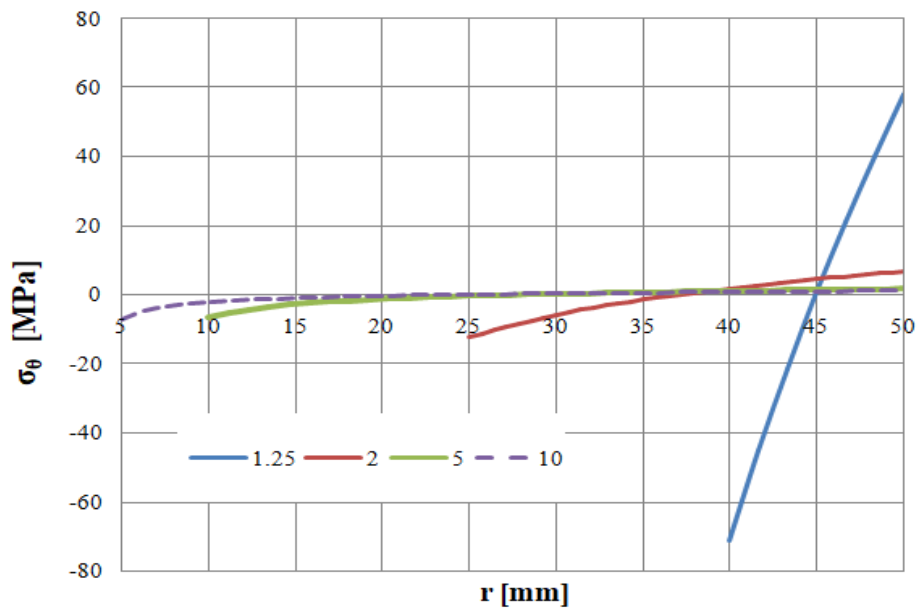
Εικ. 5.33: Η μεταβολή της εφαπτομενικής τάσης  $\sigma_\theta$  κατά μήκος της γραμμής  $A'B'$  για διάφορες τιμές του πάχους  $2h$ .



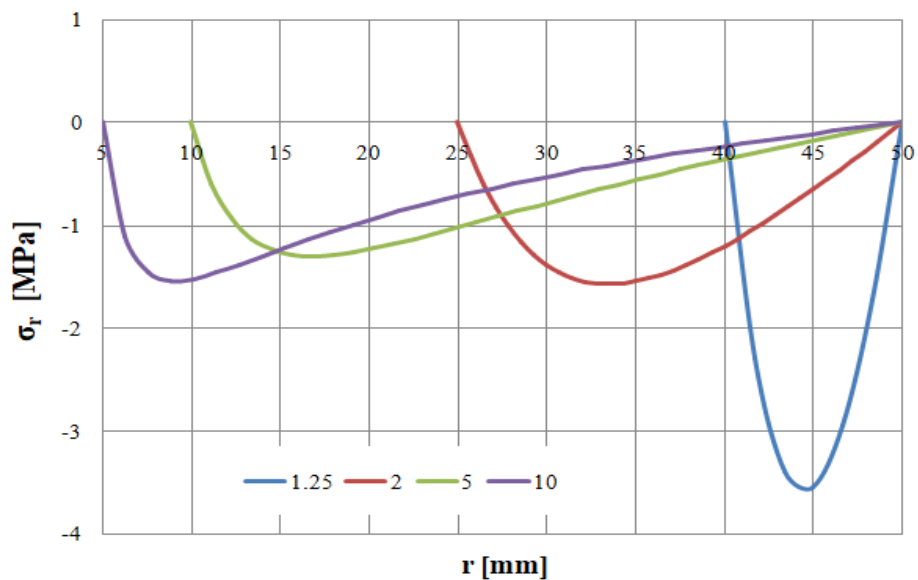
**Εικ. 5.34 :** Η μεταβολή της ακτινικής τάσης  $\sigma_r$  κατά μήκος της γραμμής  $A'B'$  για διάφορες τιμές του πάχους  $2h$ .



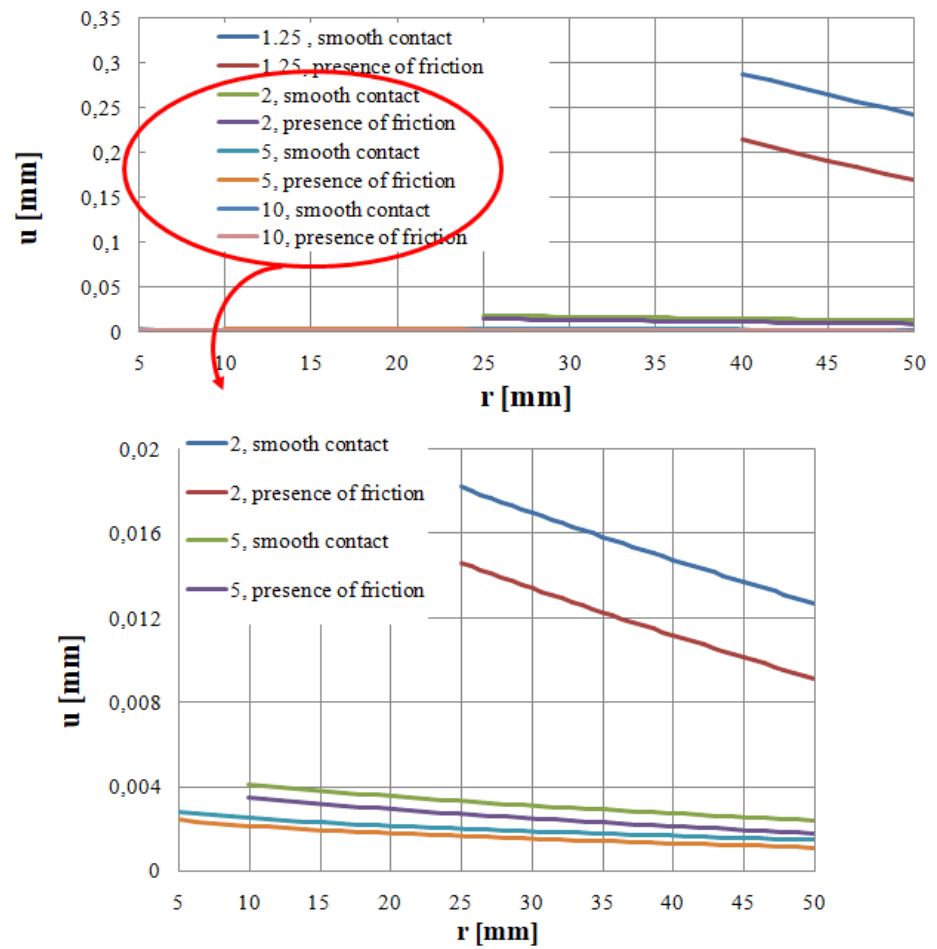
**Εικ. 5.35:** Η μεταβολή της ακτινικής μετατόπισης  $u$  κατά μήκος της γραμμής  $A'B'$  για διάφορες τιμές του πάχους  $2h$ .



**Εικ. 5.36:** Η μεταβολή της εφαπτομενικής τάσης  $\sigma_\theta$  κατά μήκος της γραμμής  $A'B'$  για διάφορες τιμές του λόγου  $\rho$ .



**Εικ. 5.37:** Η μεταβολή της ακτινικής τάσης  $\sigma_r$  κατά μήκος της γραμμής  $A'B'$  για διάφορες τιμές του λόγου  $\rho$ .

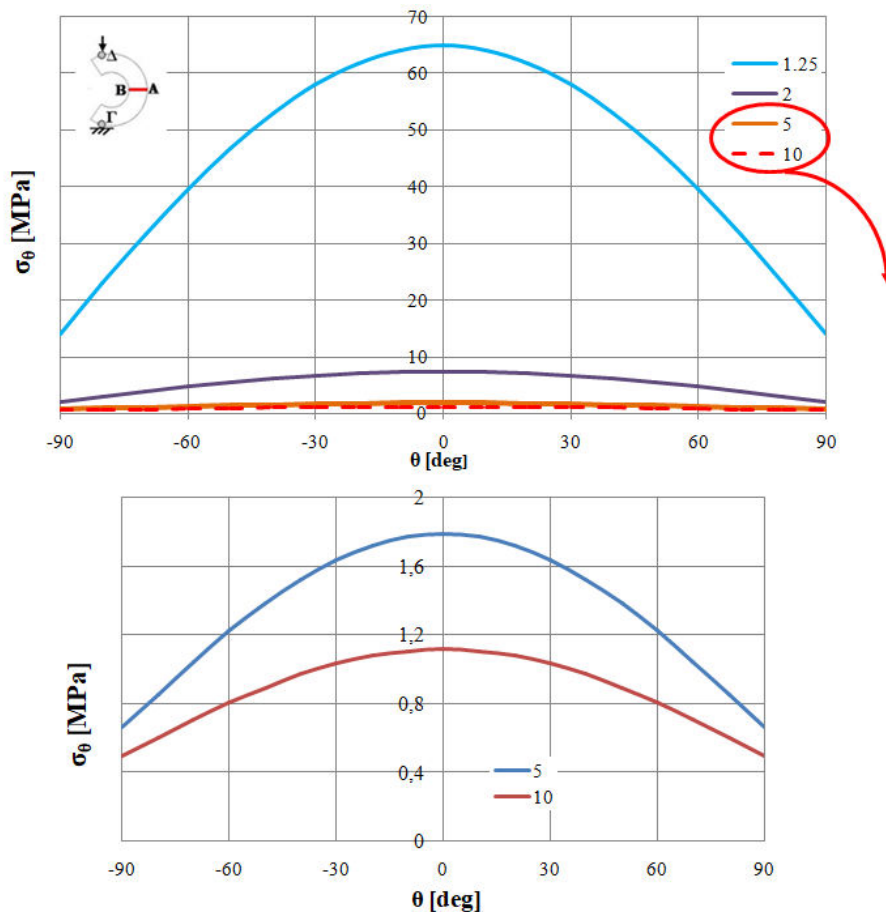


**Εικ. 5.38:** Η μεταβολή της ακτινικής μετατόπισης  $u$  κατά μήκος της γραμμής  $A'B'$  για διάφορες τιμές του λόγου  $\rho$ .

Τα πεδία τάσεων και μετατοπίσεων παρουσιάζουν παρόμοιες μεταβολές με τα αντίστοιχα για  $\theta=0^\circ$ .

**5.5 Η ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΤΗΣ ΣΥΝΙΣΤΩΣΑΣ  $\sigma_\theta$  ΓΙΑ  $R=R_1$  ΚΑΙ  $R=R_2$  ΚΑΘΩΣ ΜΕΤΑΒΑΛΛΕΤΑΙ Η ΓΩΝΙΑ  $\theta$ .**

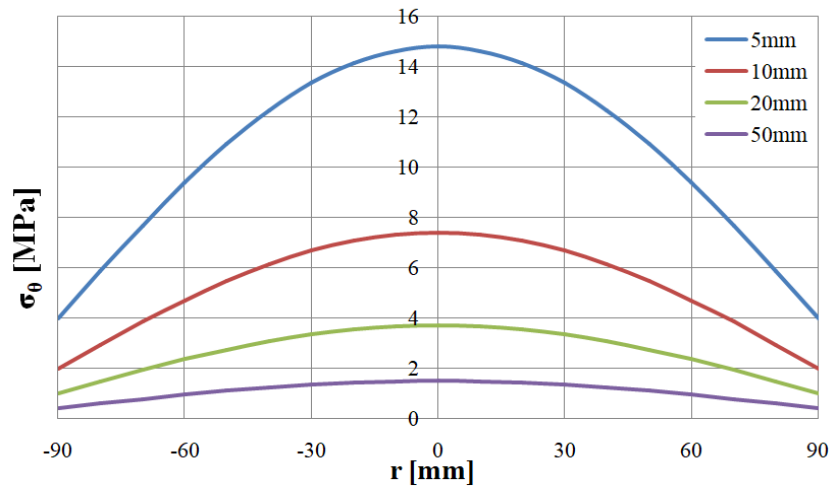
Για το σημείο A( $R_2, 0$ ) αύξηση του λόγου  $\rho$  οδηγεί σε μείωση της  $\sigma_\theta$ . Για δεδομένο  $\rho$  καθώς αυξάνεται η τιμή της γωνίας  $\theta$  μειώνεται η  $\sigma_\theta$ .



**Εικ. 5.39:** Η κατανομή της εφαπτομενικής τάσης κατά μήκος της εξωτερικής περιμέτρου για διαφορετικές τιμές του λόγου  $\rho$ .

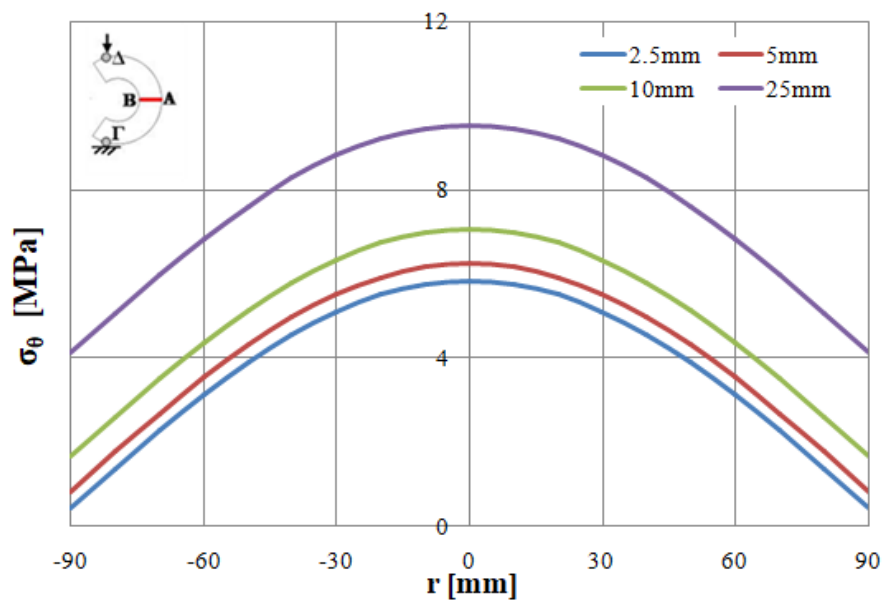
Για το σημείο A( $R_2, 0$ ) καθώς αυξάνεται το πάχος  $2h$  μειώνεται και η  $\sigma_\theta$ . Αύξηση της γωνίας  $\theta$  συνεπάγεται μείωση της  $\sigma_\theta$  για συγκεκριμένη τιμή του λόγου  $\rho$ .





Εικ. 5.40: Η κατανομή της εφαπτομενικής τάσης κατά μήκος της εξωτερικής περιμέτρου για διαφορετικές τιμές του πάχους  $2h$ .

Για το σημείο  $A(R_2, 0)$  αύξηση της εκκεντρότητας  $c$  οδηγεί σε αύξηση της  $\sigma_\theta$ , ενώ για συγκεκριμένη τιμή της  $c$  η αύξηση της γωνίας  $\theta$  έπεται μείωση της  $\sigma_\theta$ .



Εικ. 5.41: Η κατανομή της εφαπτομενικής τάσης κατά μήκος της εξωτερικής περιμέτρου για διαφορετικές τιμές της εκκεντρότητας  $c$ .

## 6° ΚΕΦΑΛΑΙΟ

### ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

#### 6.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

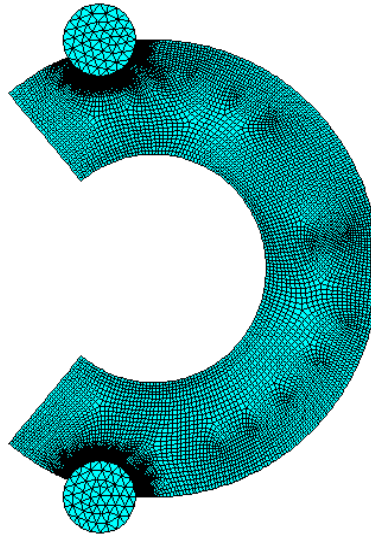
Στο κεφάλαιο αυτό, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα από την αριθμητική επίλυση επίπεδου δείγματος CSR με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Σκοπός είναι η σύγκριση τα αριθμητικής μεθόδου έναντι της αναλυτικής λύσης και η επικύρωση της τελευταίας. Για τον λόγο αυτό πραγματοποιείται παραμετρικός έλεγχος μεταβάλλοντας τον λόγο  $\rho$ , την εκκεντρότητα  $c$  και τα είδη του φορτίου που εφαρμόζονται (παραβολοειδές, ημιτονοειδές) προκειμένου να μελετηθεί η μεταβολή του τασικού πεδίου και του πεδίου μετατοπίσεων.

Η μοντελοποίηση έγινε ως εξής: θεωρήθηκε δοκίμιο εσωτερικής ακτίνας  $R_1=25\text{mm}$  και εξωτερικής  $R_2=50\text{mm}$  πάχους  $2h=10\text{mm}$ . Κατασκευάστηκαν δυο κυλινδρικές ράβδοι και τοποθετήθηκαν στις “αυλακώσεις” (ίδιας διαμέτρου με αυτή των ράβδων) σε απόσταση  $c=12\text{mm}$  από τον άξονα  $y$  (*Εικ. 6.1* ή *Εικ. 6.2*). Κατά την διάρκεια της παραμετρικής μελέτης επιβάλλεται κατακόρυφη μετατόπιση προς τα κάτω του άνω κυλίνδρου του οποίου περιορίζουμε την οριζόντια μετακίνηση. Όσον αφορά τον κάτω κύλινδρο επιβάλλεται περιορισμός τόσο της οριζόντιας όσο και της κατακόρυφης μετατόπισης. Οι μηχανικές ιδιότητες που αποδίδονται στο υλικό του δοκίμιου είναι αυτές του Διονυσιακού μαρμάρου, ήτοι  $E=62.5\text{ GPa}$ ,  $\nu=0.25$ , ενώ οι δυο κύλινδροι “κατασκευάστηκαν” από χάλυβα με  $E=210\text{ GPa}$ ,  $\nu=0.3$ . Το μάρμαρο θεωρήθηκε ισότροπο-γραμμικώς ελαστικό.



*Εικ. 6.1: Το 3D αριθμητικό προσομοίωμα*

Παρόλα αυτά, το πρόβλημα μελετήθηκε στις δυο διαστάσεις (**Εικ. 6.2**). Η επίλυση έγινε με την χρήση τετράπλευρα κόμβων, δόθηκε ιδιαίτερη προσοχή στο πλέγμα των στοιχείων και στην τοπική πύκνωση του κανάβου, πιο συγκεκριμένα για την ορθότερη διακριτοποίηση πραγματοποιήθηκε πύκνωση στην επαφή CSR–κυλίνδρων. Για τους κυλίνδρους χρησιμοποιήθηκαν τριγωνικά στοιχεία 8 κόμβων. Επιπλέον, η προσομοίωση της διεπιφάνειας μεταξύ κυλίνδρων και δοκιμίων επιτεύχθηκε με την χρήση στοιχείων επαφής (contact elements).



**Εικ. 6.2:** Το 2D αριθμητικό προσομοίωμα

## 6.2 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

Το 1956 σε δημοσίευση των Turner, Clough, Martin και Topp γίνεται για πρώτη φορά παρουσίαση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων. Μερικά στοιχεία της είχαν παρουσιαστεί από τους Courant et. al (1943), Hrenikoff (1941), McHenry (1943) κ.λ.π. Ο Έλληνας μηχανικός Argyris το 1950 δίνει μια άμεση προσέγγιση με βάση την αρχή του δυνατού έργου. Μαζί με τους συνεργάτες του αναπτύσσουν μία μεθοδολογία για την επίλυση πολύπλοκων προβλημάτων με την χρήση υπολογιστικών τεχνικών [113].

Με την πάροδο των χρόνων η μέθοδος παρουσιάζει σημαντική εξέλιξη που οφείλεται στην ραγδαία εξέλιξη της επιστήμης των υπολογιστών. Η συμβολή της είναι σημαντική στην επίλυση πολύπλοκων προβλημάτων που δεν επιδέχονταν αναλυτικές λύσεις. Η αναλυτική επίλυση ενός προβλήματος προϋποθέτει την ανάπτυξη κατάλληλου μαθηματικού μοντέλου που αποδίδει τις υπό μελέτη παραμέτρους σε οποιοδήποτε στοιχείο του σώματος που αναλύεται και μπορεί να εφαρμοστεί μόνο σε υπεραπλουστευμένα μοντέλα. Στην περίπτωση μοντέλων με περίπλοκη γεωμετρία ή σύνθετες συνοριακές συνθήκες είναι επιτακτική η ανάγκη της χρήσης αριθμητικής μεθόδου όπως η μέθοδος των Π.Σ.Τ.

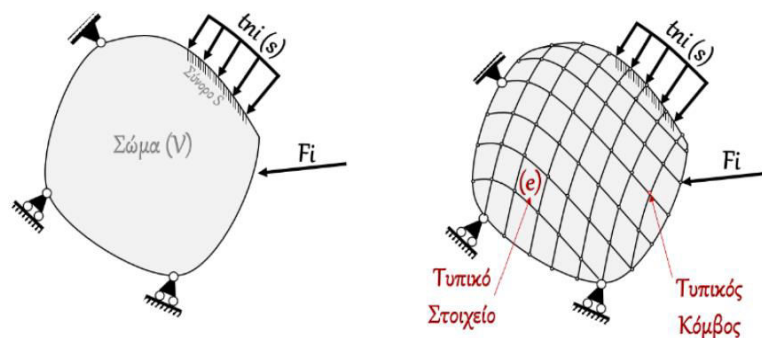
### 6.2.1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

Θεωρούμε την κατασκευή της **Εικ.6.3** για την οποία πρέπει να προσδιορισθεί μια μεταβλητή όπως η τάση ή η παραμόρφωση. Αρχικά, διαιρείται η κατασκευή σε μικρότερα τμήματα που καλούνται στοιχεία (elements) και επειδή έχουν πεπερασμένο μέγεθος χαρακτηρίζονται ως πεπερασμένα στοιχεία (finite elements). Τα στοιχεία συνδέονται μεταξύ τους με την βοήθεια διακριτών σημείων των κόμβων (nodes). Η διαδικασία αυτή καλείται διακριτοποίηση. Σε κάθε κόμβο αντιστοιχεί και μία κομβική παραμετρος. Οι κομβικές παράμετροι είναι μετατοπίσεις με την γενικευμένη έννοια (μετατοπίσεις και οι παράγωγοί τους).

Σε διδιάστατο πρόβλημα, θεωρείται ότι σε κάθε κόμβο αντιστοιχούν δυο βαθμοί ελευθερίας (οριζόντια και κατακόρυφη μετατόπιση), ενώ οι βαθμοί ελευθερίας κάθε στοιχείου είναι οι διπλάσιοι από αυτούς των κόμβων.

Εξαιρείται η περίπτωση των δοκών που προστίθεται και άλλη μία κομβική παράμετρος η στροφή του κόμβου περί τον άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδο του προβλήματος. Στην περίπτωση αυτή οι βαθμοί ελευθερίας είναι τριπλάσιοι από το πλήθος των κόμβων. Αφού προσδιορισθεί και το μητρώο-στήλη (διπλάσιοι από το πλήθος των κόμβων) των δυνάμεων που αποτελείται από τις κομβικές δυνάμεις και το μητρώο δυσκαμψίας διαμορφώνεται το τελικό σύστημα:

$$\{K\} * \{U\} = \{F\}$$



Εικ. 6.3: Διακριτοποίηση κατασκευής σε πεπερασμένα στοιχεία [114].

Από την εφαρμογή της αρχής των δυνατών έργων σε διδιάστατο πρόβλημα προκύπτει ότι το μητρώο δυσκαμψίας του στοιχείου δίνεται από την σχέση:

$$k^e = \iint t * B^T * D * B dA$$

Με,

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \text{ το μητρώο ιδιοτήτων του υλικού, που ικανοποιεί την}$$

σχέση  $\sigma = D\varepsilon$ . Επιπλέον, B, το μητρώο παραμορφώσεως που προκύπτει από τις ανηγμένες παραμορφώσεις.

## 6.2.2 ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗΣ [113]

Η ανάλυση ενός προβλήματος με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων σε κάποιο λογισμικό περιλαμβάνει τα τρία ακόλουθα βήματα:

- i. Προ – επεξεργαστής (pre-processor): Με βάση το φυσικό πρόβλημα κατασκευάζεται το αντίστοιχο προσομοίωμα. Το στάδιο αυτό περιλαμβάνει την διακριτοποίηση της γεωμετρίας, την επιλογή κατάλληλων στοιχείων, και τον καθορισμό των μηχανικών και φυσικών ιδιοτήτων των υλικών και της συμπεριφοράς της κατασκευής κατά την φόρτιση (γραμμικώς ελαστική, ανελαστική κ.λ.π). Τέλος, προσδιορίζονται τα είδη φόρτισης και οι συνοριακές συνθήκες που αφορούν την συμπεριφορά των μελών της κατασκευής.
- ii. Ανάλυση (Analysis): Πραγματοποιούνται οι απαραίτητοι υπολογισμοί ώστε να σχηματισθούν τα μητρώα στιβαρότητας  $\{K\}$  και μάζας  $\{M\}$  (εξαρτάται από το είδος της ανάλυσης). Εφαρμόζονται οι συνοριακές συνθήκες και οι φορτίσεις και μορφώνεται η τελική μητρική εξίσωση ισορροπίας του συστήματος. Συνεπώς, προκύπτουν αποτελέσματα για τις τάσεις, τις μετατοπίσεις και τις παραμορφώσεις.
- iii. Μετα-επεξεργαστής (post-processor): Πραγματοποιείται η επεξεργασία των αποτελεσμάτων για να περιγραφούν σε γραφικό περιβάλλον σε χρωματική κλίμακα ή να εξαχθούν οι τιμές των τάσεων και μετατοπίσεων για περαιτέρω επεξεργασία. Με τον τρόπο αυτό δίνεται η δυνατότητα ώστε να επιτευχθεί έλεγχος της εγκυρότητας και της ορθότητας των αποτελεσμάτων των υπολογισμών και να προκύψουν συμπεράσματα για την βελτίωση της λύσης.

### 6.2.3 ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗΣ [115]

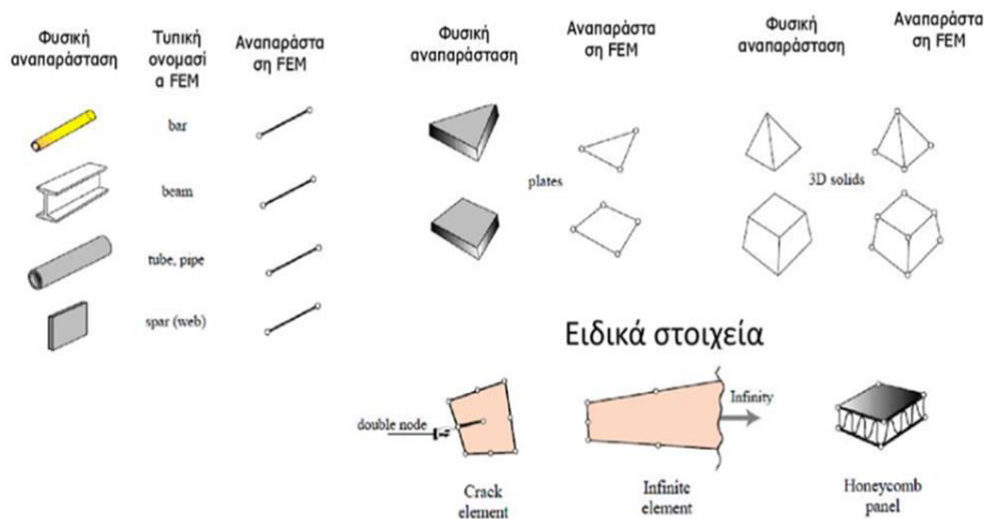
Προκειμένου να αποφευχθούν σφάλματα κατά την επίλυση ενός προβλήματος πρέπει να ακολουθηθούν κάποιοι γενικοί κανόνες κατά την μοντελοποίηση που αφορούν :

- Την γεωμετρία,
- Την επιλογή κατάλληλων στοιχείων,
- Το πλέγμα

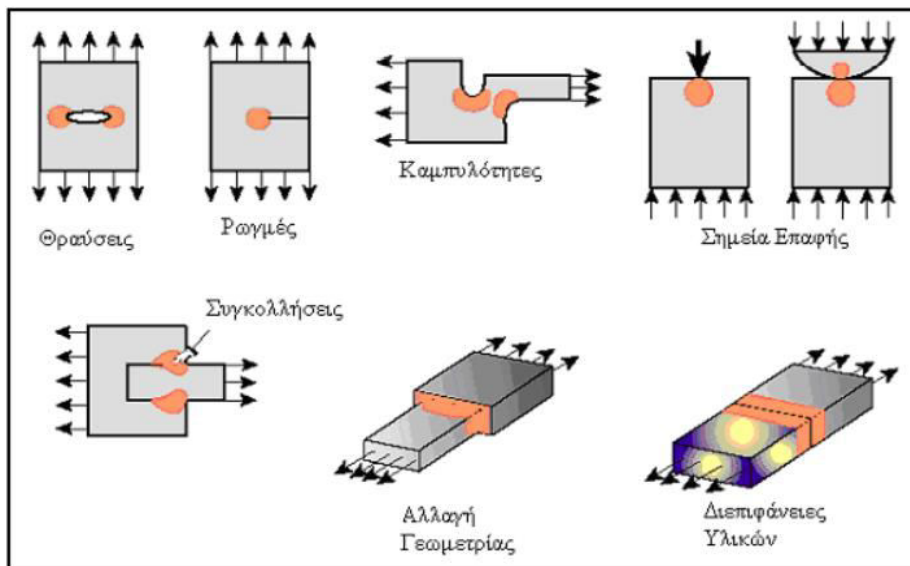
Στην γεωμετρία πρέπει να εστιάζεται η προσοχή στην σωστή απλοποίησή της. Σχετικά με την επιλογή στοιχείων, σε διδιάστατα προβλήματα, παρότι τα τριγωνικά στοιχεία είναι βολικότερα ως προς την προσέγγιση της γεωμετρίας, μειονεκτούν ως προς την ακρίβεια σε σχέση με τα τετράπλευρα. Άρα, είναι επιθυμητή η χρήση τετράπλευρων .

Για τα τρισδιάστατα προβλήματα τα τετράεδρα οδηγούν σε λανθασμένο υπολογισμό των τάσεων αν και ο υπολογισμός των παραμορφώσεων είναι σωστός. Στην κατηγορία αυτή των προβλημάτων είναι επιθυμητό να χρησιμοποιούνται ορθογώνια παραλληλεπίπεδα ή πλάγια παραλληλεπίπεδα.

Τέλος, για το πλέγμα κρίνεται απαραίτητο να χρησιμοποιείται όσο πιο «αραιό» είναι εφικτό το οποίο να προσφέρει παράλληλα ικανοποιητική ακρίβεια. Υπάρχουν όμως, περιπτώσεις στις οποίες είναι αναγκαία η χρήση πυκνότερου πλέγματος, όπως, είναι οι περιοχές που εμφανίζονται υψηλές τάσεις, καμπυλότητα ή έντονες αλλαγές της γεωμετρίας (στην περίπτωση μας η γραμμή ΑΒ και τα σημεία επαφής δοκιμίου – κυλίνδρων αντίστοιχα) και στις περιοχές που ασκούνται εξωτερικά φορτία ή υπάρχουν στηρίξεις.



Εικ. 6.4: Είδη στοιχείων [115].



Εικ. 6.5: Περιπτώσεις που χρησιμοποιείται 'πυκνό' πλέγμα [115].

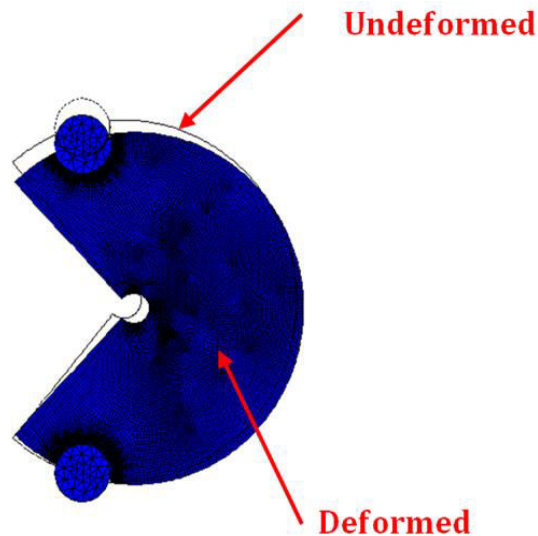


### 6.3 ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΜΑΤΟΣ

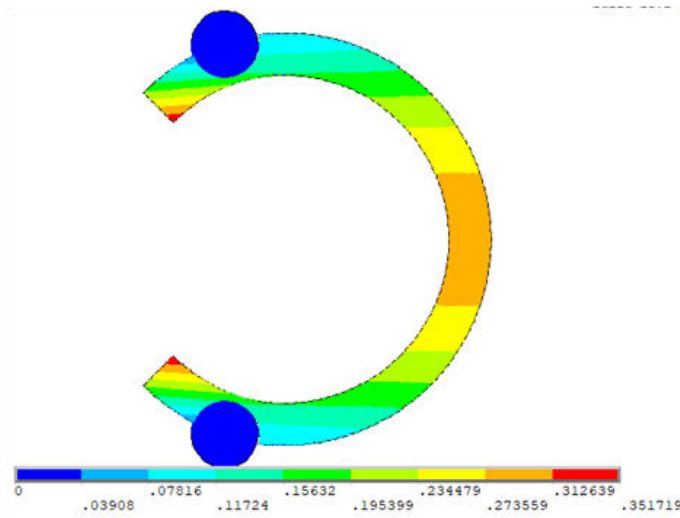
Το αριθμητικό προσομοίωμα μας δίνει την δυνατότητα να προσδιορίσουμε το τασικό πεδίο και το πεδίο μετατοπίσεων μεταβάλλοντας τις παραμέτρους όπως για παράδειγμα τον λόγο των ακτίνων ( $\rho$ ), την εκκεντρότητα ( $c$ ) και τον τρόπο φόρτισης (επιβολή μετατόπισης, παραβολοειδές φορτίο, ημιτονοειδές φορτίο). Επειδή, το προσομοίωμα είναι διδιάστατο δεν θα ασχοληθούμε με την μεταβολή του πάχους, αλλά μόνο θα συγκρίνουμε τις τάσεις και τις οριζόντιες μετατοπίσεις στα κρίσιμα σημεία A και B υπό συνθήκες plane strain και plane stress.

#### 6.3.1 ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΤΟΥ ΛΟΓΟΥ $\rho$

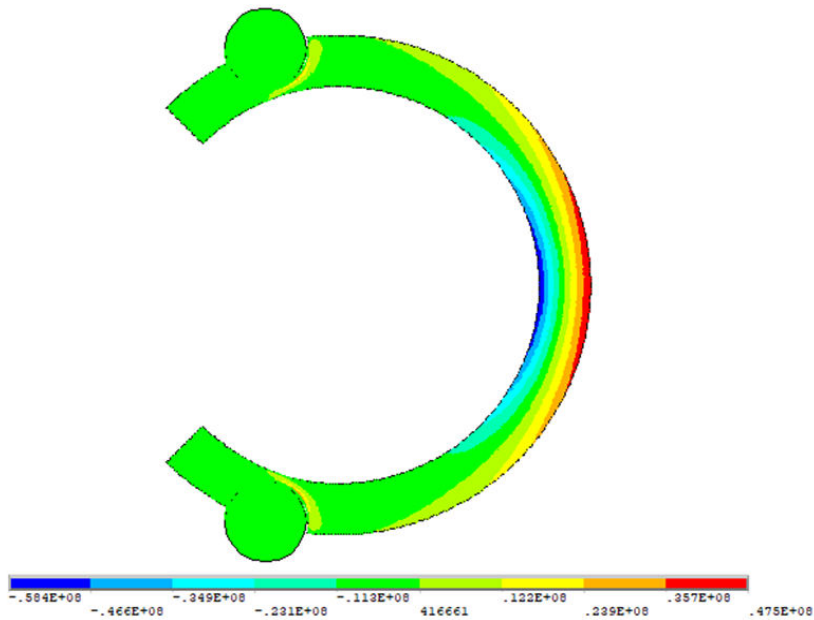
Στην παράγραφο αυτή θα μελετηθεί ο σημαντικός ρόλος της εσωτερικής ακτίνας  $R_2$  στο τασικό πεδίο και στο πεδίο μετατοπίσεων. Από τα διαγράμματα που ακολουθούν θα παρατηρήσουμε ότι όσο αυξάνεται η εσωτερική ακτίνα τόσο αυξάνεται κατ' απόλυτη τιμή και η μέγιστη τάση που αναπτύσσεται.



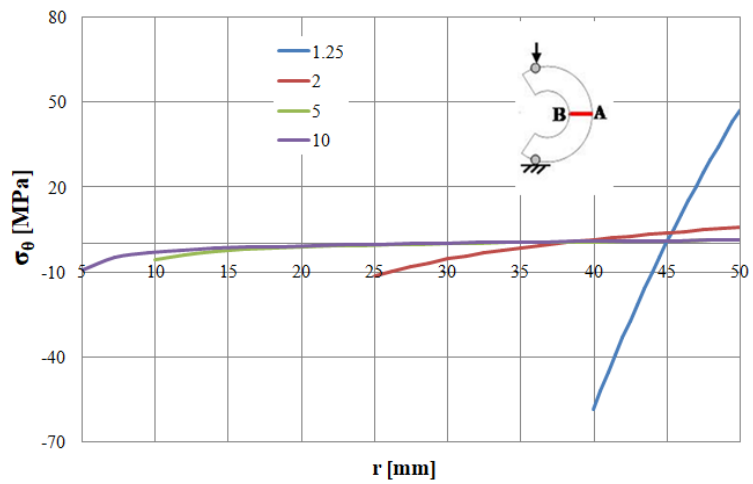
*Εικ. 6.6: Η παραμορφωμένη και απαραμόρφωτη μορφή του δοκιμίου για  $\rho=10$ .*



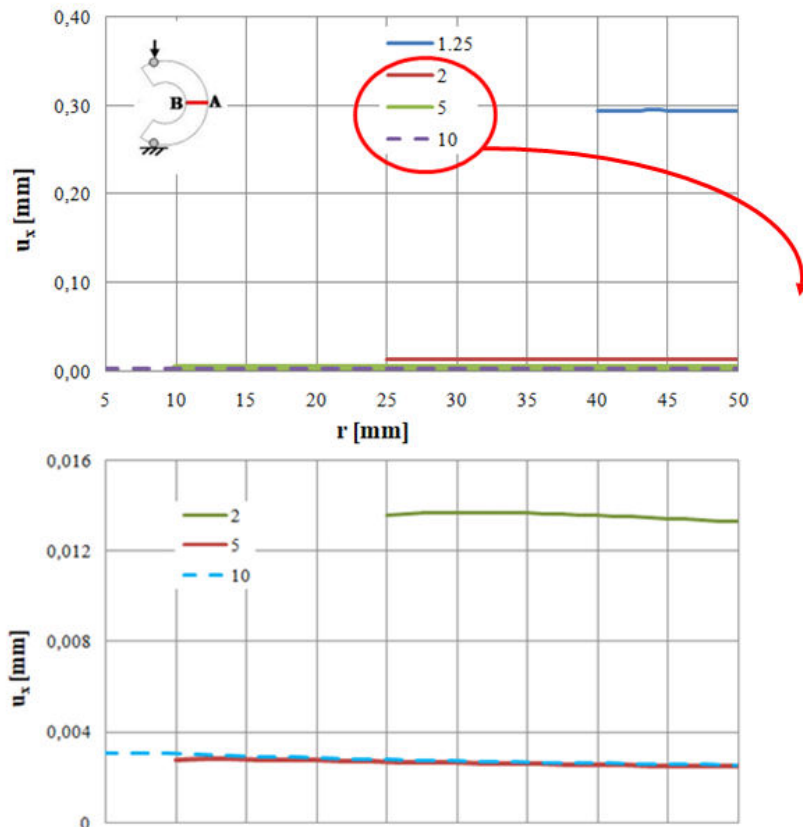
*Εικ. 6.7: Χρωματοκλίμακα για την οριζόντια μετατόπιση  $u$  για  $\rho=1.25$ .*



*Εικ. 6.8: Χρωματοκλίμακα για την τάση  $\sigma_y$  για  $\rho=1.25$ .*



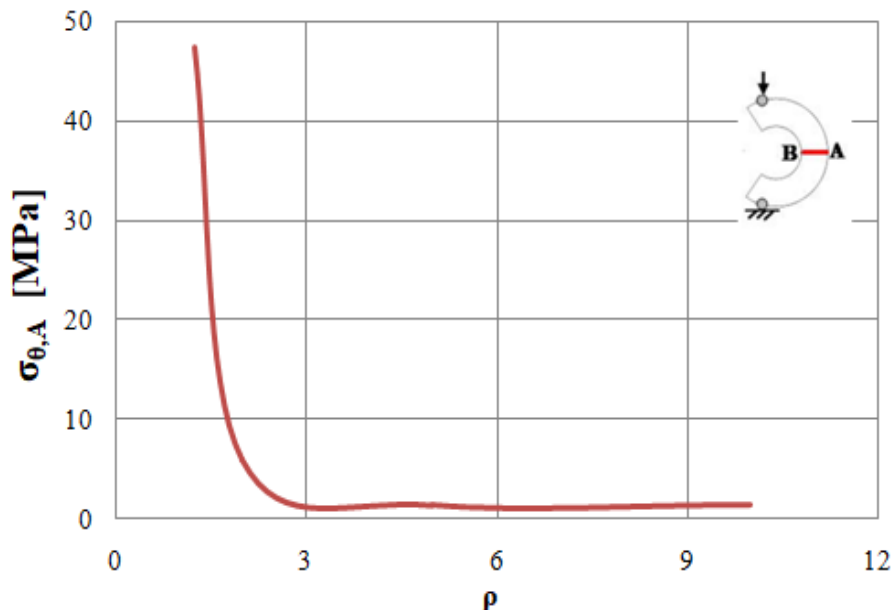
**Εικ. 6.9:** Διάγραμμα  $\sigma_\theta - r$ , για μεταβλητό  $\rho$  κατά μήκος της γραμμής AB.



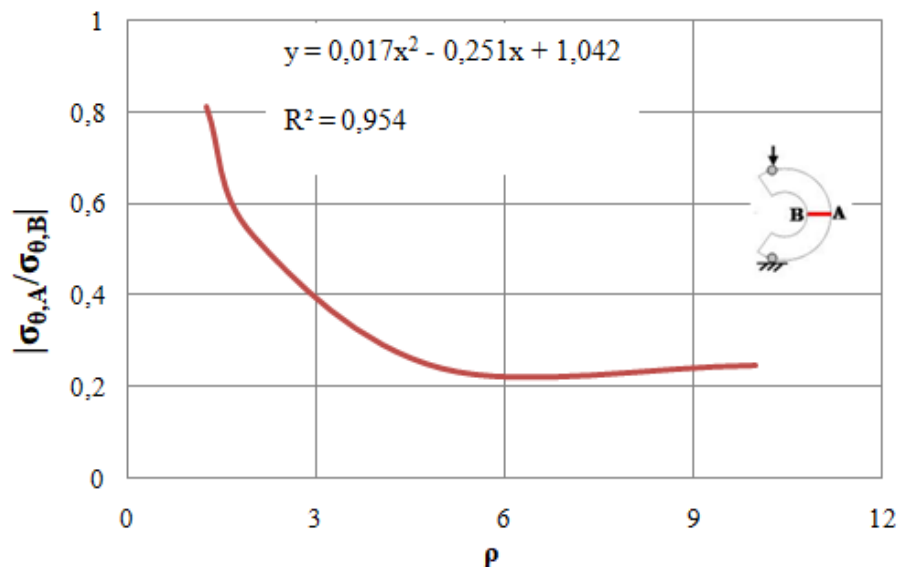
**Εικ. 6.10:** Διάγραμμα  $u_x - r$  για μεταβλητό  $\rho$  κατά μήκος της γραμμής AB.

Στα ακόλουθα γραφήματα  $(\sigma_{\theta,A}-\rho)$ ,  $(|\sigma_{\theta,A}/\sigma_{\theta,B}|-\rho)$  παρατηρείται πόσο κρίσιμος είναι ο ρόλος της εσωτερικής ακτίνας του δοκιμίου CSR. Από το γράφημα  $\sigma_{\theta,A}-\rho$  μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η μέγιστη τάση εφελκυσμού που αναπτύσσεται στο κρίσιμο σημείο A μειώνεται σταδιακά μέχρι την τιμή  $\rho=3$ , ενώ για τιμές που υπερβαίνουν την  $\rho=3$ , η συγκεκριμένη τάση τείνει να σταθεροποιηθεί στην τιμή  $\sigma_{\theta,A} \cong 1.35 \text{ MPa}$ . Από το γράφημα  $(|\sigma_{\theta,A}/\sigma_{\theta,B}|-\rho)$  παρατηρούμε την εξάρτηση του λόγου της μέγιστης εφελκυστικής στο σημείο A προς την μέγιστη θλιπτική στο σημείο B από τον λόγο των ακτίνων  $\rho$ . Περιγράφεται σε αρκετά ικανοποιητικό βαθμό η σχέση μεταξύ του λόγου των μέγιστων τάσεων και του λόγου ακτίνων από την σχέση:

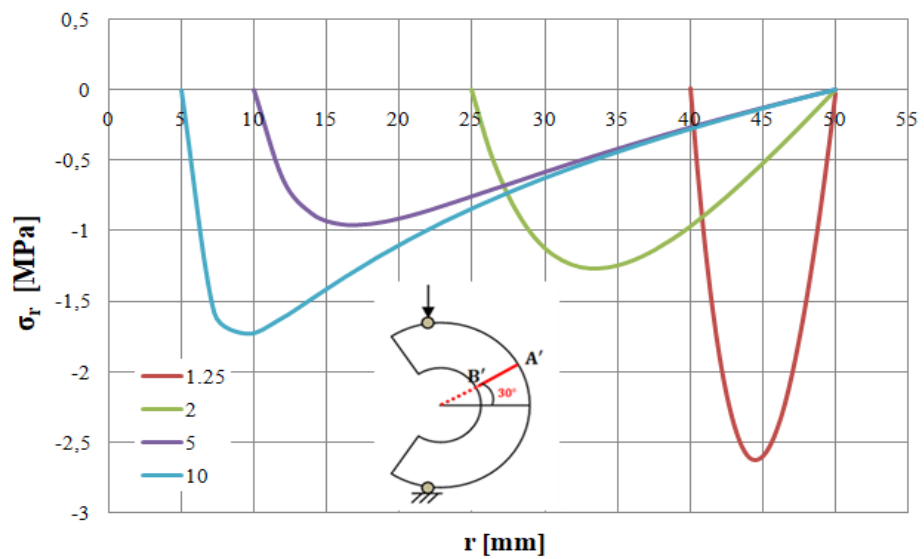
$$y = 0.017x^2 - 0.251 + 1.042.$$



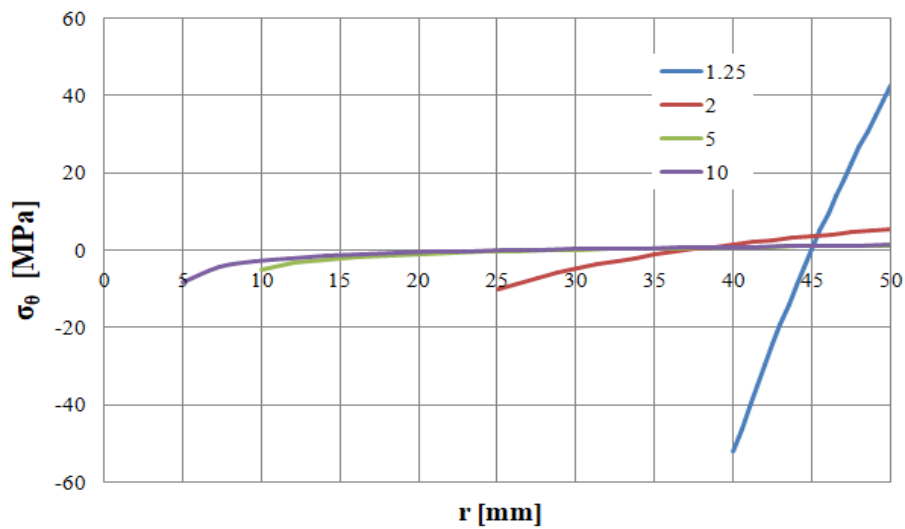
*Εικ. 6.11: Η εξάρτηση της μέγιστης εφελκυστικής τάσης από τις τιμές του λόγου  $\rho$ .*



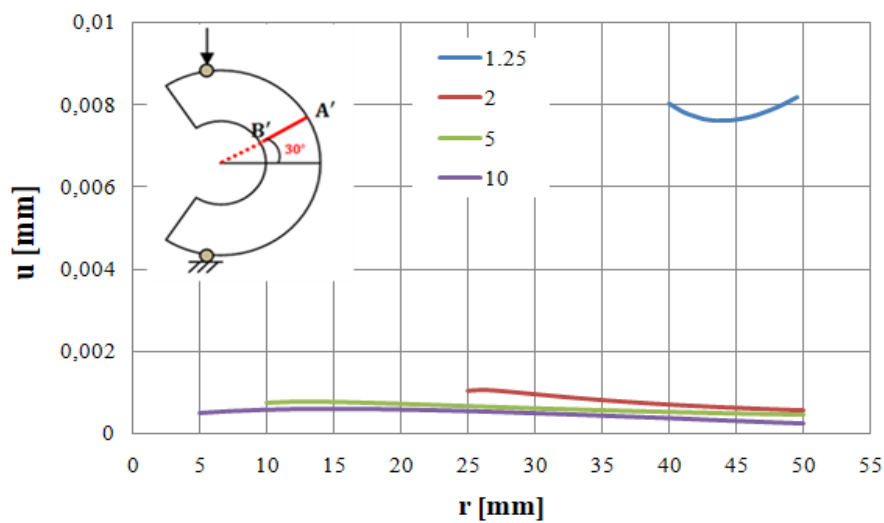
**Εικ. 6.12:** Η συμπεριφορά του λόγου της μέγιστης εφαλκυστικής τάσης προς την μέγιστη θλιπτική για διάφορες τιμές του λόγου  $\rho$ .



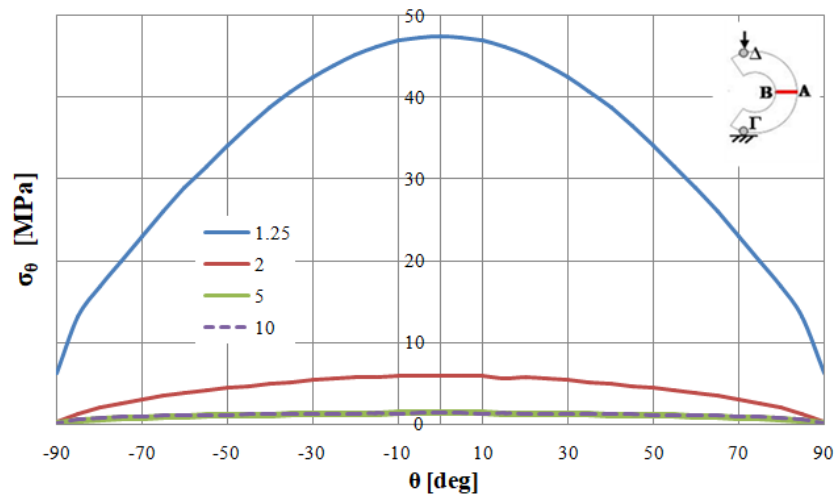
**Εικ. 6.13:** Η μεταβολή της ακτινικής τάσης κατά μήκος της  $A'B'$ , για διάφορες τιμές του λόγου  $\rho$ .



**Εικ. 6.14:** Η μεταβολή της εφαπτομενικής τάσης κατά μήκος της  $A'B'$ , για διάφορες τιμές του λόγου  $\rho$ .



**Εικ. 6.15:** Η μεταβολή της μετατόπισης κατά μήκος της  $A'B'$ , για διάφορες τιμές του λόγου  $\rho$ .

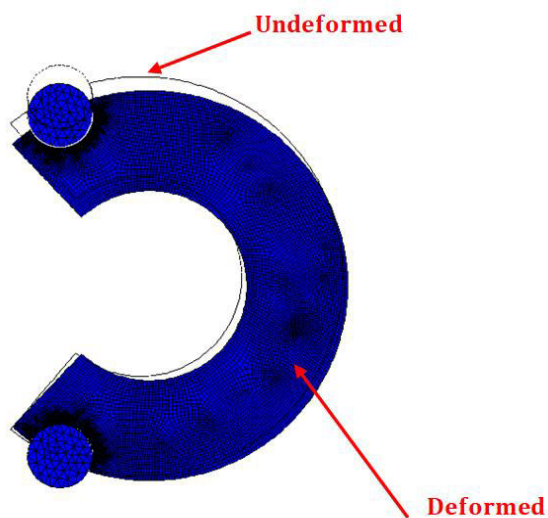


**Εικ. 6.16:** Η κατανομή της εφαπτομενικής τάσης κατά μήκος της εξωτερικής περιμέτρου για διαφορετικές τιμές του  $\rho$ .

Παρατηρούμε από την πολική κατανομή της εγκάρσιας τάση  $\sigma_\theta$  ότι κατά μήκος της εξωτερικής περιμέτρου ΓΑΔ του CSR, δεν αναπτύσσονται θλιπτικές τάσεις αλλά μόνο εφελκυστικές. Συμπεραίνουμε ακόμα, ότι τα σημεία που μηδενίζεται η εγκάρσια τάση εξαρτώνται από την γωνία  $\theta$ .

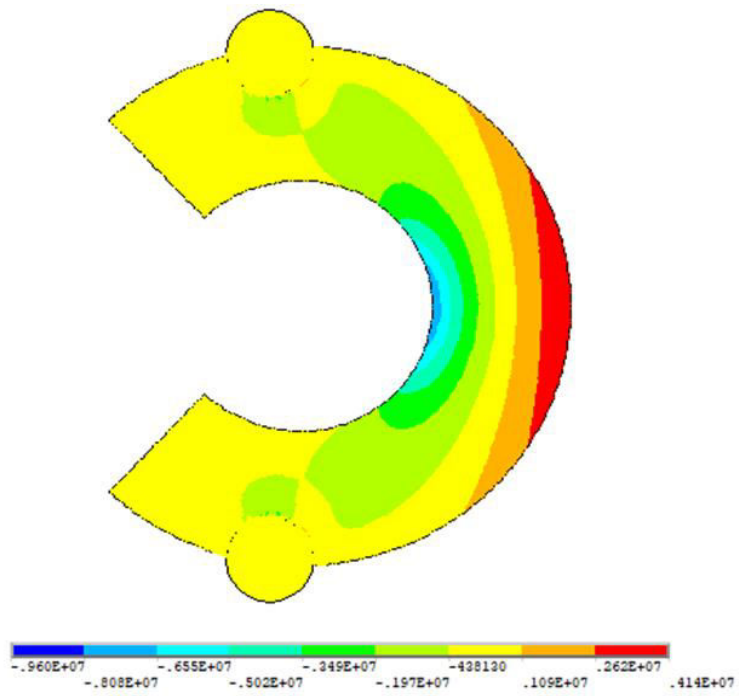
### 6.3.2 ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΤΗΣ ΕΚΚΕΝΤΡΟΤΗΤΑΣ $c$

Η επόμενη παράμετρος που θα μελετήσουμε είναι η εκκεντρότητα. Για κάθε τιμή της  $c$  υπολογίζουμε με την βοήθεια της αναλυτικής λύσης την κατάλληλη μετατόπιση που πρέπει να εφαρμοστεί. Ακολουθεί η μελέτη τη μεταβολής της τάσης  $\sigma_\theta$  και της μετατόπισης  $u_x$  κατά μήκος της κρίσιμης γραμμής AB για  $2.5 \text{ mm} < c < 25 \text{ mm}$ . Επιπλέον, μελετάται η συμπεριφορά των τάσεων  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  και της μετατόπισης  $u_r$  για  $\theta=60^\circ$  και της τάσης  $\sigma_\theta$  για την εξωτερική περίμετρο του δοκιμίου, δηλαδή για  $-90^\circ < \theta < 90^\circ$ . Προκύπτει το συμπέρασμα ότι καθώς αυξάνονται οι τιμές της  $c$  αυξάνεται και το μέτρο της μέγιστης εφελκυστικής τάσης που αναπτύσσεται στο σημείο A.

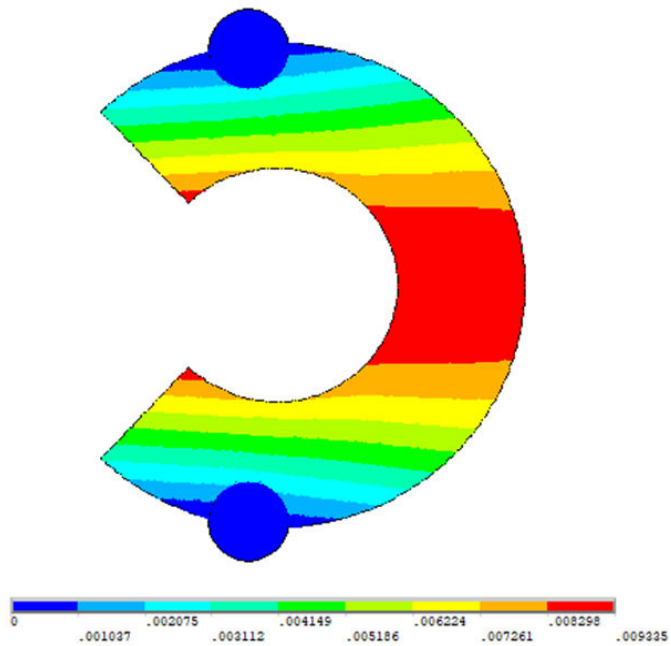


*Εικ. 6.17: Η παραμορφωμένη και απαραμόρφωτη μορφή του δοκιμίου για  $c=25 \text{ mm}$ .*

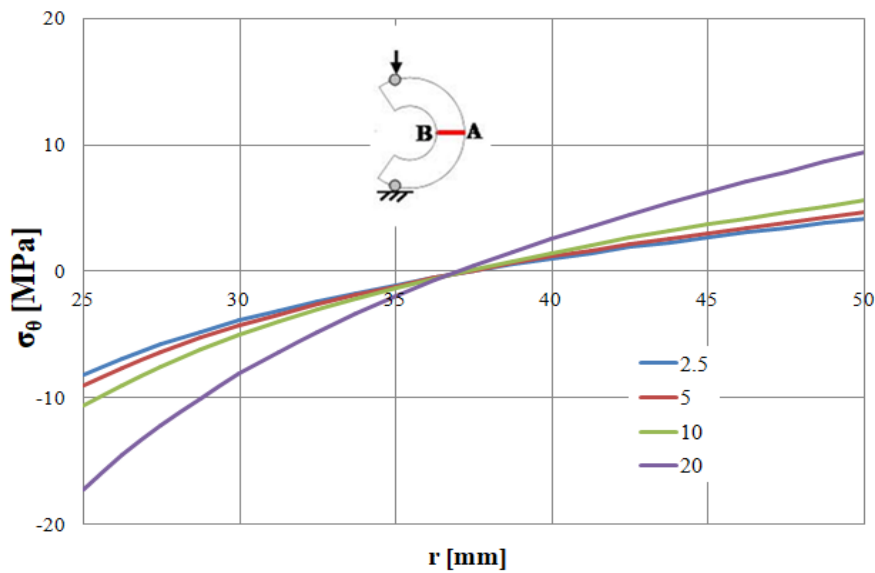




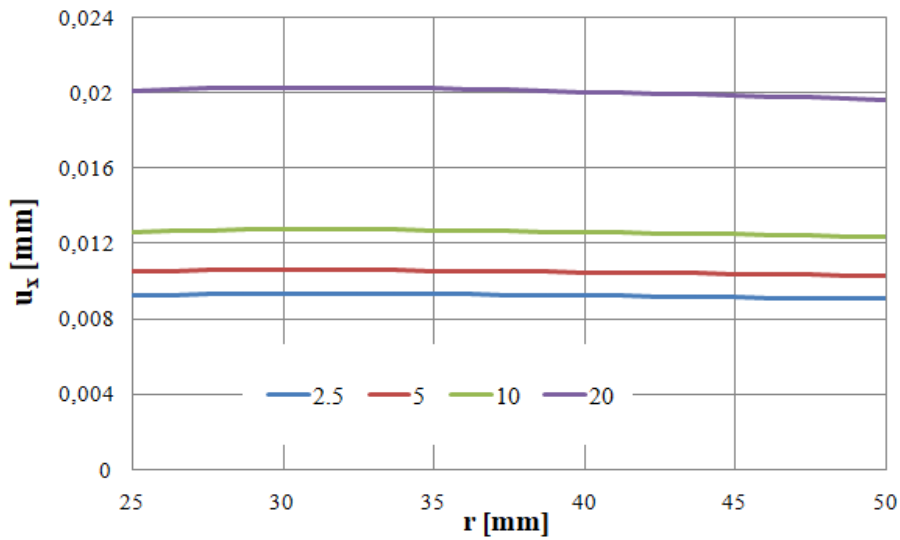
*Εικ. 6.18: Χρωματοκλίμακα για την τάση  $\sigma_y$  για  $c=2.5mm$ .*



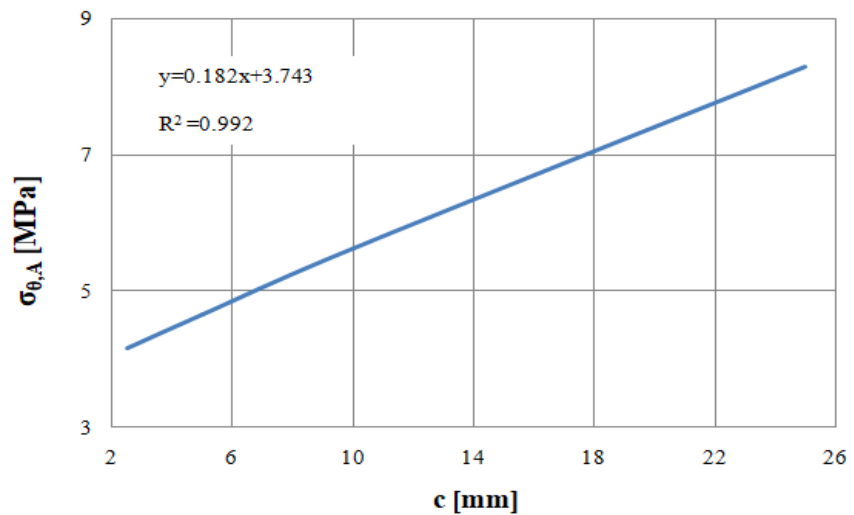
*Εικ. 6.19: Χρωματοκλίμακα για την οριζόντια μετατόπιση  $u$  για  $c=2.5mm$ .*



Εικ. 6.20: Διάγραμμα  $\sigma_\theta - r$  κατά μήκος της γραμμής AB για διάφορες τιμές της εκκεντρότητας  $c$ .

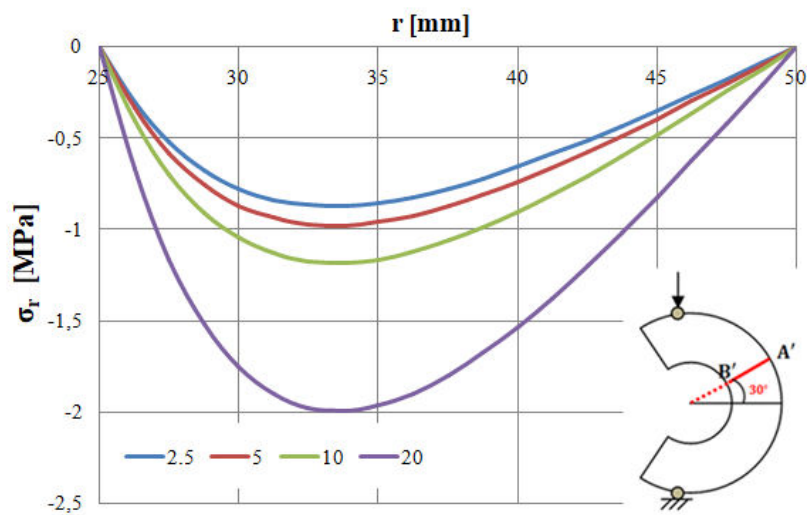


Εικ. 6.21: Διάγραμμα  $u_x - r$  κατά μήκος της γραμμής AB για διάφορες τιμές της εκκεντρότητας  $c$ .

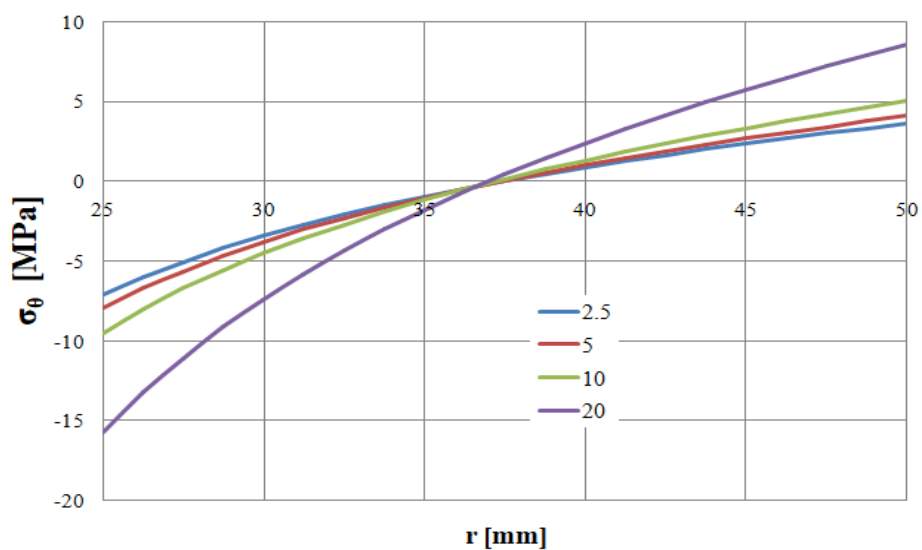


**Εικ. 6.22:** Η εξάρτηση της μέγιστης εφαλκυστικής τάσης από τις τιμές της εκκεντρότητας  $c$ .

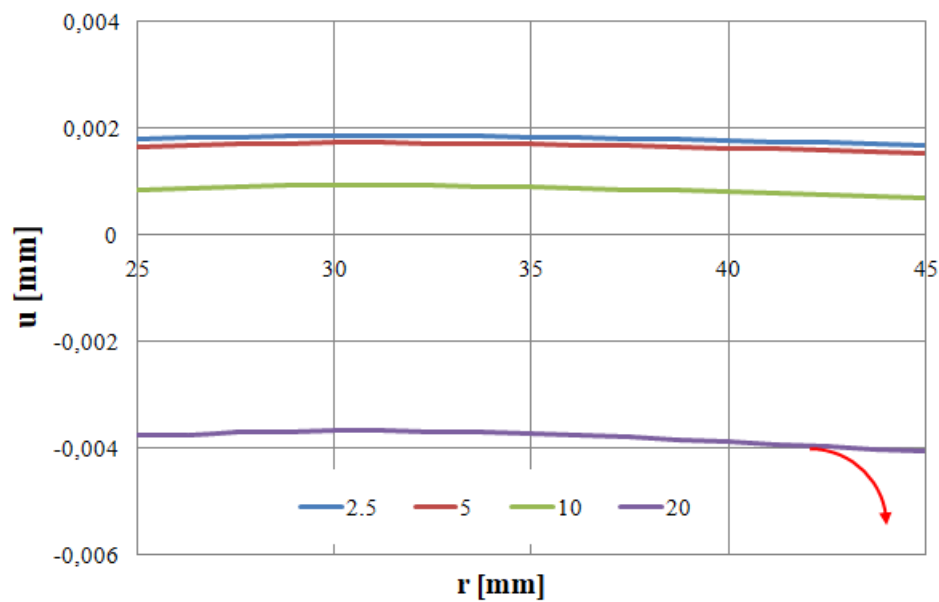
Περιγράφεται σε αρκετά ικανοποιητικό βαθμό η σχέση μεταξύ του λόγου των μέγιστων τάσεων και της εκκεντρότητας  $c$  από την σχέση:  
 $y = 0.182x + 3.743$ .



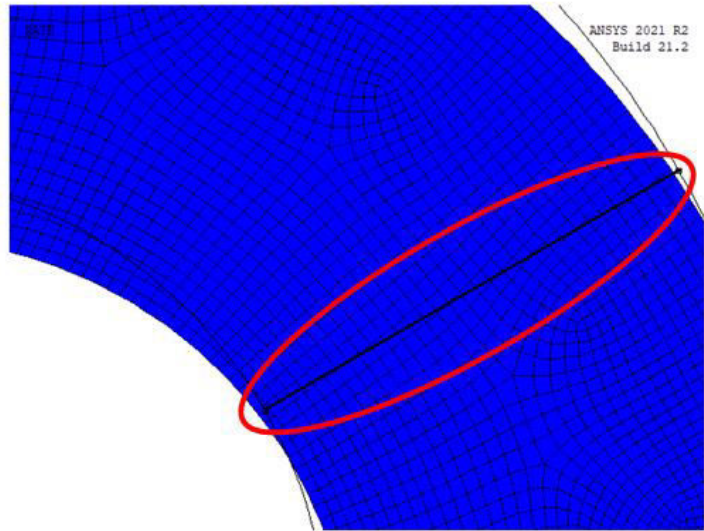
**Εικ. 6.23:** Η μεταβολή της ακτινικής τάσης κατά μήκος της  $A'B'$ , για διάφορες τιμές της εκκεντρότητας  $c$ .



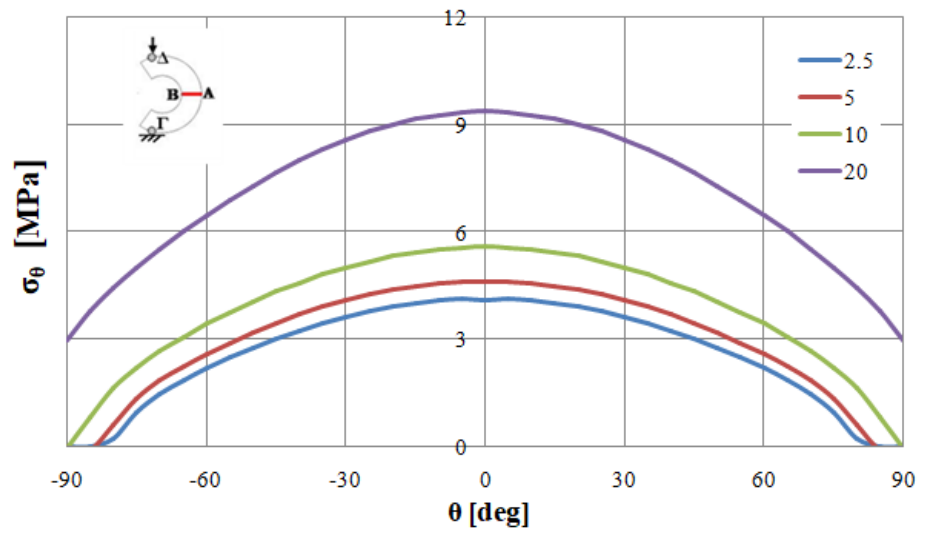
**Εικ. 6.24:** Η μεταβολή της εφαπτομενικής τάσης κατά μήκος της Α'Β', για διάφορες τιμές της εκκεντρότητας  $c$ .



**Εικ. 6.25:** Η μεταβολή της μετατόπισης κατά μήκος της Α'Β', για διάφορες τιμές της εκκεντρότητας  $c$ .



*Εικ. 6.26: Η παραμορφωμένη κατάσταση στην γειτονική περιοχή της γραμμής A'B'.*

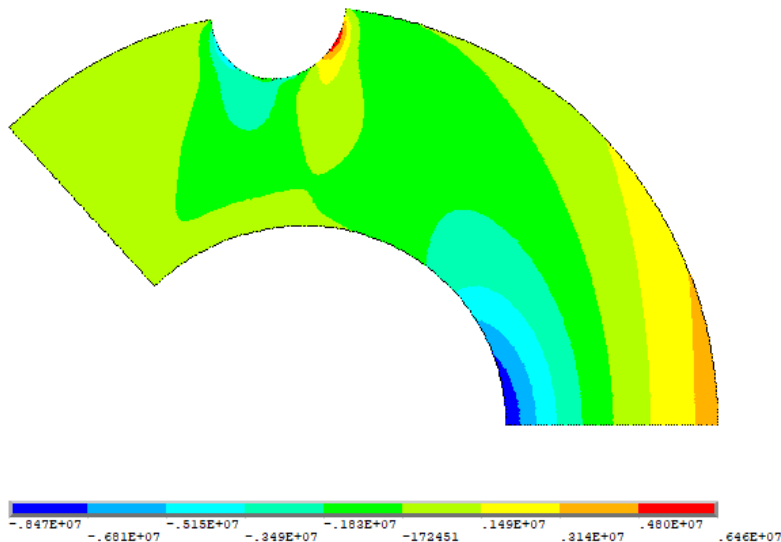


*Εικ. 6.27: Η κατανομή της επαπτομενικής τάσης κατά μήκος της εξωτερικής περιμέτρου για διάφορες τιμές της c.*

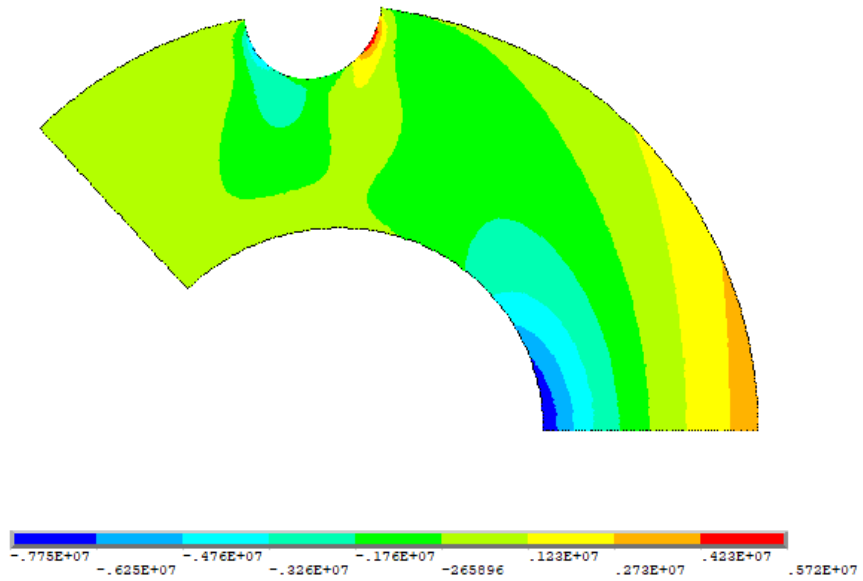
### 6.3.3 ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΤΗΣ ΦΟΡΤΙΣΗΣ

Το 2011 οι Markides, Kourkoulis [52], μελετούν το τασικό πεδίο που αναπτύσσεται στον Βραζιλιανό δίσκο υπό συνθήκες που προσεγγίζουν αυτές της πειραματικής δοκιμής που προτείνει η ISRM. Η αναλυτική λύση που προέκυψε από την μελέτη τους εφαρμόστηκε για τέσσερα είδη φορτίων, παραβολοειδές, ημιτονοειδές, ομοιόμορφα κατανεμημένο, και συγκεντρωμένη δύναμη. Υπό την υπόθεση της Γραμμικής Ελαστικότητας αγνοώντας την τριβή, στην επαφή δίσκου–αρπάγης οδηγήθηκαν στο συμπέρασμα ότι τα αποτελέσματα για την ημιτονοειδή και παραβολική φόρτιση είναι πιο ρεαλιστικά σε σχέση με τα άλλα δυο είδη.

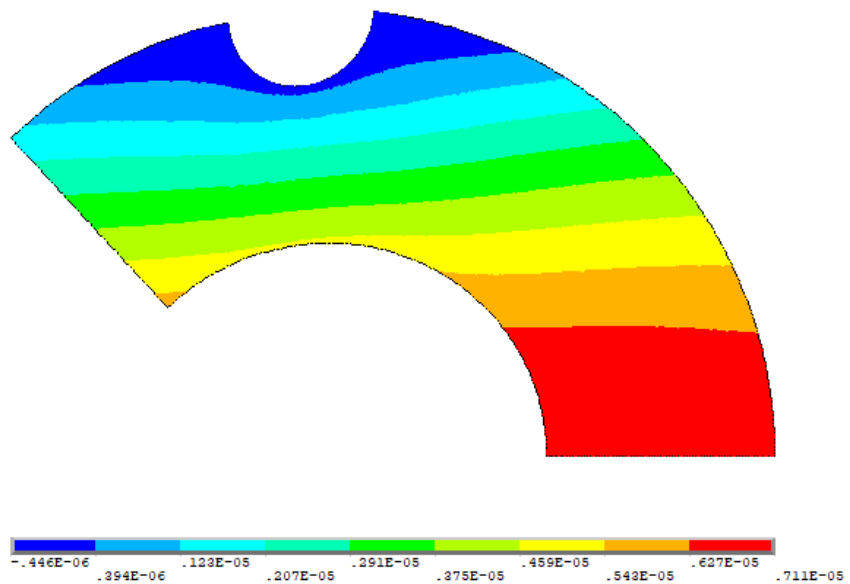
Στην παράγραφο αυτή γίνεται μια προσπάθεια να εφαρμοστούν τα δυο αυτά είδη φόρτισης και να μελετηθεί το τασικό πεδίο στην περίπτωση του CSR. Να σημειωθεί ότι το δοκίμιο χωρίστηκε σε δυο ίσα τμήματα και χρησιμοποιήθηκε ένα από αυτά και εφαρμόζοντας τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες.



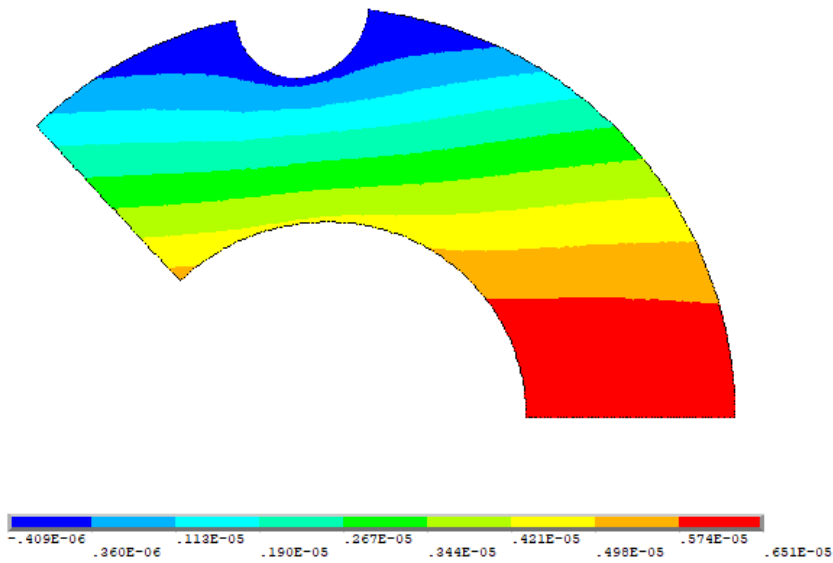
**Εικ. 6.28:** Χρωματοκλίμακα για την τάση  $\sigma_y$  για παραβολική κατανομή φορτίου.



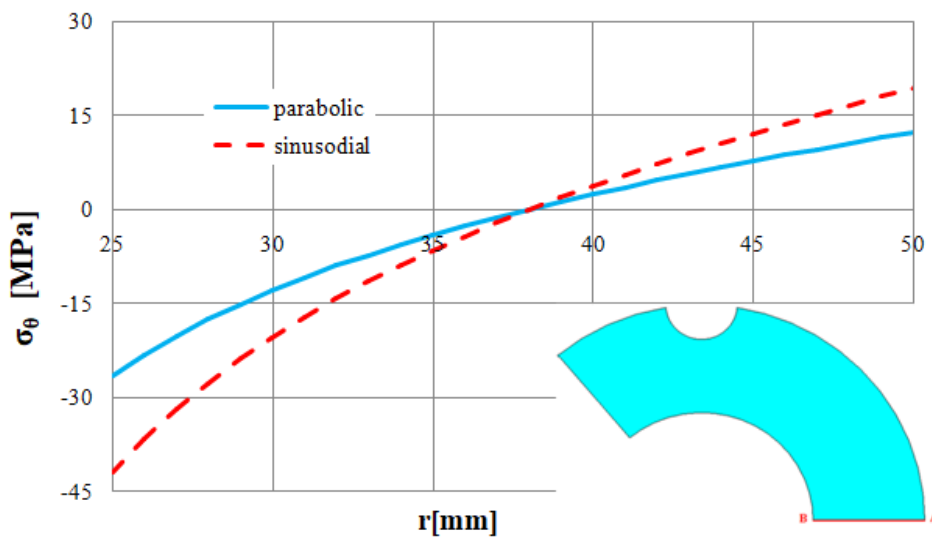
*Εικ. 6.29: Χρωματοκλίμακα για την τάση  $\sigma_y$  για ημιτονοειδή κατανομή φορτίου.*



*Εικ. 6.30: Χρωματοκλίμακα για την οριζόντια μετατόπιση  $u$  για παραβολική κατανομή φορτίου.*



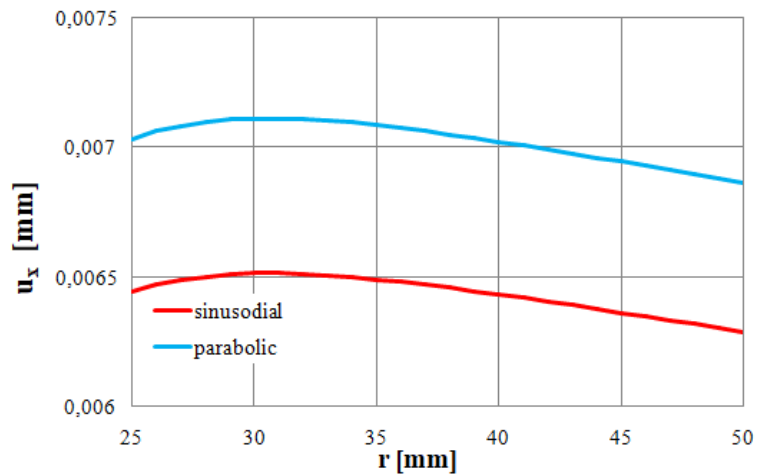
**Εικ. 6.31:** Χρωματοκλίμακα για την οριζόντια μετατόπιση  $u$  για ημιτονοειδή κατανομή φορτίου.



**Εικ. 6.32:** Διάγραμμα  $\sigma_{\theta} - r$  κατά μήκος της γραμμής  $AB$  για τα δυο είδη φόρτισης.

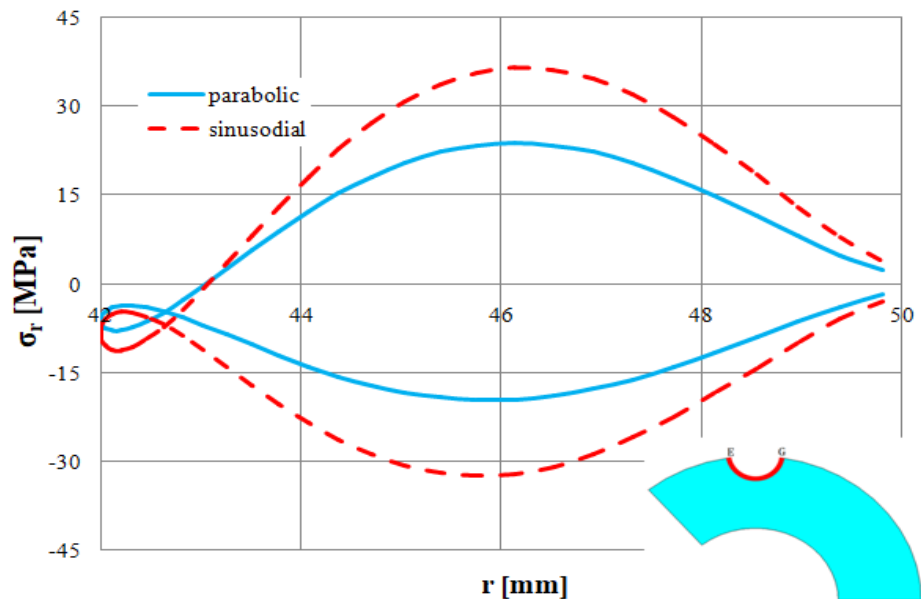


Παρατηρείται ότι η παραβολική και η ημιτονοειδής φόρτιση εμφανίζουν διαφοροποιήσεις που μεγιστοποιούνται στα σύνορα του δοκιμίου.



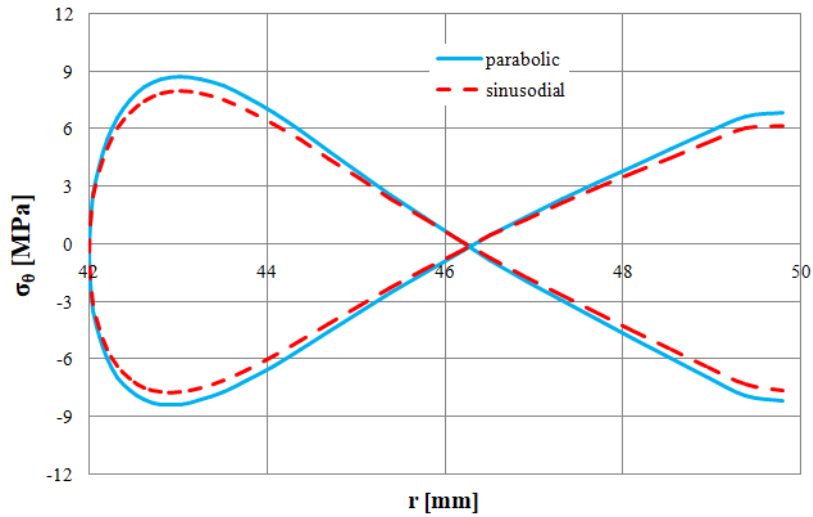
**Εικ. 6.33:** Διάγραμμα  $u_x - r$  κατά μήκος της γραμμής AB για τα δυο είδη φόρτισης.

Οι διαφοροποιήσεις είναι σχετικά μικρές και δεν υπερβαίνουν το  $5 \cdot 10^{-4}$ .



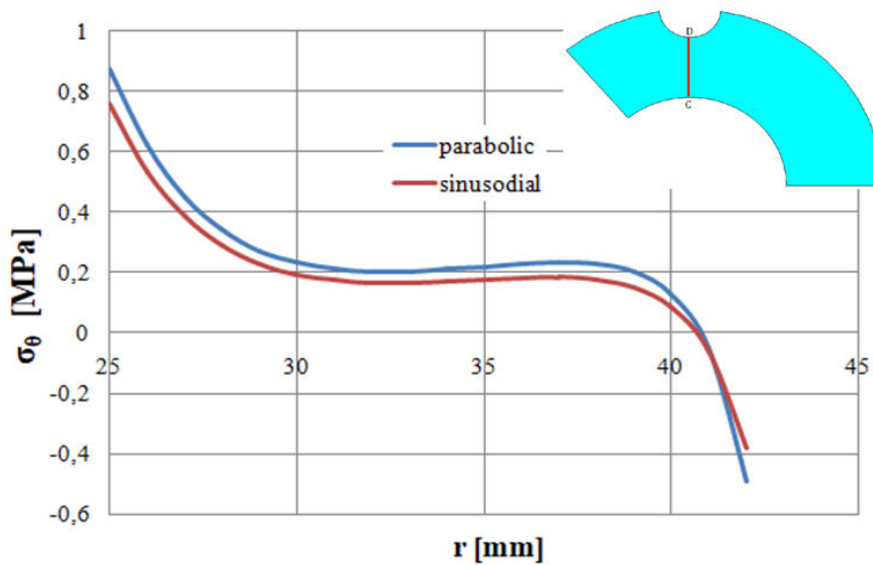
**Εικ. 6.34:** Η μεταβολή της ακτινικής τάσης κατά μήκος της καμπύλης EG.

Οι διαφορές είναι μόνο ποσοτικές, υπάρχει ποιοτική ταύτιση.

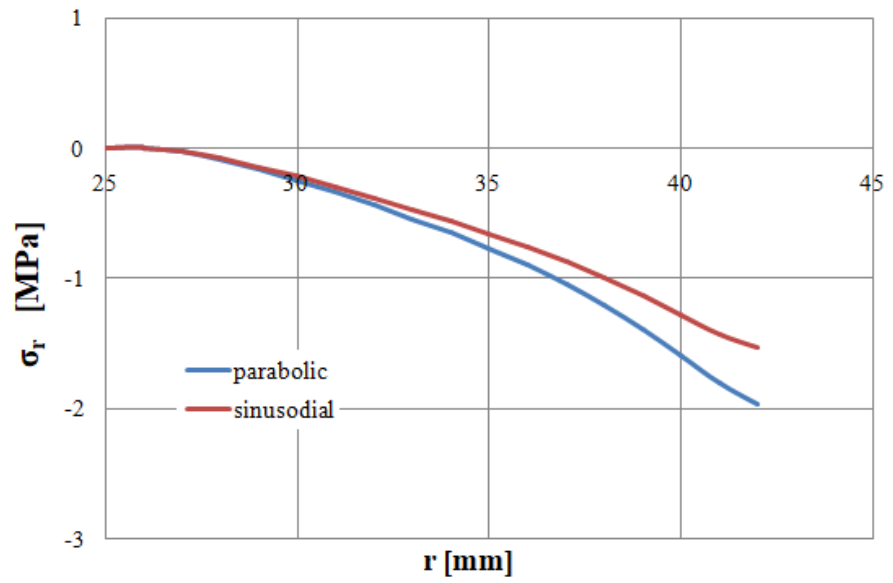


**Εικ. 6.35:** Η μεταβολή της εφαπτομενικής τάσης κατά μήκος της καμπύλης EG.

Οι προκύπτουσες καμπύλες παραβολικής και ημιτονοειδούς φόρτισης είναι αρκετά κοντά, επιβεβαιώνοντας έτσι τα αποτελέσματα της ανάλυσης κατά Markides – Kourkoulis.



**Εικ. 6.36:** Η μεταβολή της εφαπτομενικής τάσης κατά μήκος της γραμμής CD.



*Εικ. 6.37: Η μεταβολή της ακτινικής τάσης κατά μήκος της γραμμής CD.*

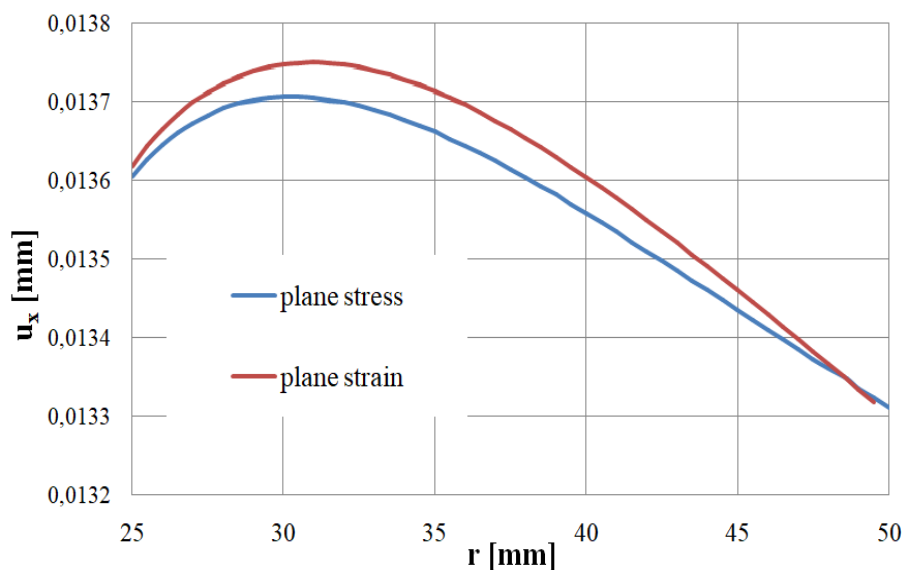
#### 6.4 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΤΟΥ ΤΑΣΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΚΑΙ ΤΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΩΝ ΓΙΑ PLANE STRAIN ΚΑΙ PLANE STRESS

Τα δοκίμια που χρησιμοποιήθηκαν στο συγκεκριμένο πειραματικό πρωτόκολλο είχαν πάχος περίπου 12 mm. Δεν μπορούν να θεωρηθούν ούτε λεπτά (plane stress), ούτε παχέα. Υποθέτοντας συνθήκη 2D-plane stress και 2D-plane strain κατασκευάζουμε το διάγραμμα της μεταβολής της οριζόντιας μετατόπισης  $u_x$  και της εγκάρσιας τάσης  $\sigma_\theta$  κατά μήκος της γραμμής AB.

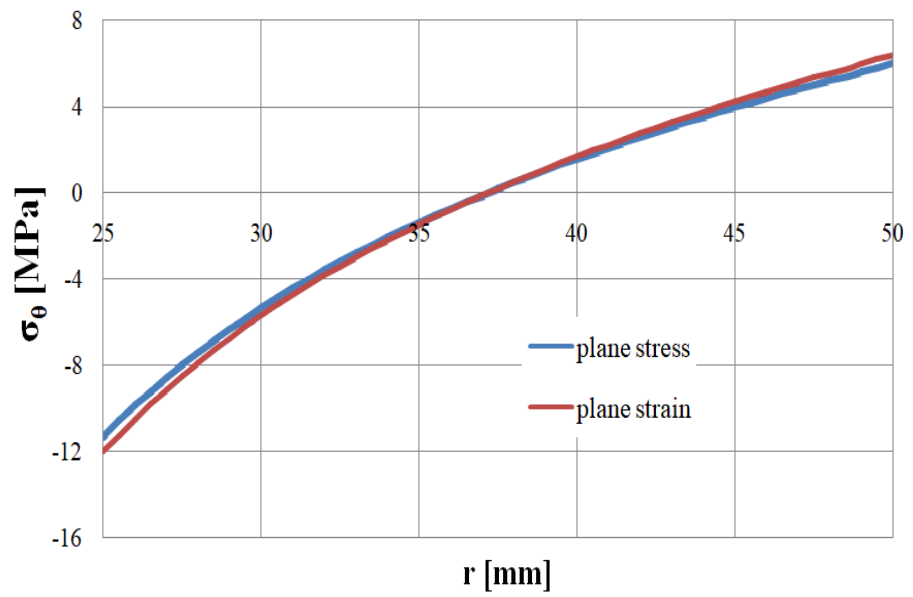
Παρατηρούμε ότι, η μέγιστη τάση εφελκυσμού (σημείο A) είναι για plane stress 5.98 MPa ενώ για plane strain είναι 6.38 MPa, οπότε η διαφορά τους δεν είναι ιδιαίτερα σημαντική. Σχετικά με το σημείο B η μέγιστη θλιπτική τάση για plane stress είναι 11.28 MPa ενώ για plane strain είναι 12.03 MPa.

Όσον αφορά την οριζόντια μετατόπιση η διαφορά των δυο συνθηκών δεν είναι σταθερή, αρχικά είναι μικρή, αυξάνεται σταδιακά μέχρι  $r \cong 31\text{mm}$  και ύστερα μειώνεται μέχρι  $r=50\text{mm}$ .

Συμπεραίνουμε και από τα δυο γραφήματα ότι το πάχος των δοκιμίων παίζει ρόλο και πρέπει να λαμβάνεται υπόψη.



**Εικ. 6.38:** Διάγραμμα  $u_x - r$  κατά μήκος της γραμμής AB για plane stress και plane strain.



**Εικ. 6.39:** Διάγραμμα  $\sigma_{\theta} - r$  κατά μήκος της γραμμής  $AB$  για *plane stress* και *plane strain*.

## ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην εργασία αυτή μελετήθηκε μία εναλλακτική πρόταση για τον προσδιορισμό της εφελκυστικής αντοχής των ψαθυρών υλικών.

Το κίνητρο της εργασίας προέκυψε από την ευρέως αποδεκτή παραδοχή ότι ο υφιστάμενος εναλλακτικός τρόπος ήτοι το πείραμα του Βραζιλιανού δίσκου πέραν των όποιων πλεονεκτημάτων (σε σχέση με το πείραμα του άμεσου μονοαξονικού εφελκυσμού), χαρακτηρίζεται και από μακρά σειρά υπό διερεύνηση ζητημάτων τα οποία καθιστούν συχνά τα αποτελέσματα της δοκιμής μη αποδεκτά.

Το κυριότερο εκ των ως άνω ζητημάτων αναφέρεται στο γεγονός ότι το τασικό πεδίο στο κέντρο του Βραζιλιανού δίσκου (σημείο το οποίο παρέχει την εφελκυστική αντοχή) είναι πολυαξονικό και ως εκ τούτου ο τανυστής των τάσεων στο συγκεκριμένο σημείο περιλαμβάνει πέραν της εφελκυστικής συνιστώσας και αντίστοιχη θλιπτική.

Στην προσπάθεια θεραπείας του συγκεκριμένου προβλήματος αναζητείται στην διεθνή βιβλιογραφία εναλλακτική γεωμετρία η οποία στο κρίσιμο σημείο (έναρξης της θραύσεως) θα χαρακτηρίζεται από μονοαξονικό εφελκυστικό τασικό πεδίο.

Η γεωμετρία του CSR που μελετήθηκε στην παρούσα εργασία επιλέχθηκε ακριβώς διότι τόσο αναλυτικά όσο και η αριθμητικά αποδεικνύεται ότι εκπληροί την ως άνω απαίτηση.

Στηριζόμενοι επομένως, στη προσφάτως εισαχθήσα αναλυτική επίλυση επιχειρήσαμε την αξιολόγηση της πρότασης αυτής, την επικύρωση του αναλυτικού μοντέλου και την εξαντλητική παραμετρική διερεύνηση σειράς παραγόντων που επηρεάζουν το τασικό πεδίο και το πεδίο μετατοπίσεων.

Η εργασία πέραν της κριτικής θεώρησης της υφιστάμενης αναλυτικής λύσης εισήγαγε αριθμητικό μοντέλο με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, μέσω των οποίων επετεύχθει η παραμετρική ανάλυση και παράλληλα υλοποίησε πειραματικό πρωτόκολλο, χρησιμοποιώντας σειρά καινοτόμων

τεχνικών, τα δεδομένα των οποίων επέτρεψαν αξιολόγηση–επικύρωση αμφοτέρων των αναλυτικών και υπολογιστικών λύσεων.

Η εργασία κατέδειξε συνοπτικώς ότι:

- Υπάρχουν αποκλίσεις μεταξύ των αναλυτικών και πειραματικών δεδομένων ιδιαίτερα όταν χρησιμοποιούνται αυτούσια τα πρωτογενή δεδομένα από το πλαίσιο φόρτισης.
- Υπάρχει διασπορά των πειραματικών αποτελεσμάτων που μπορεί να εξηγηθεί λαμβάνοντας υπόψη το ανισότροπο και ανομοιογενές του υλικού των δοκιμίων.
- Εκ των παραμέτρων των οποίων η επίδραση διερευνήθηκε σημαντικότερος είναι ο λόγος των ακτίνων  $\rho$ . Από την μελέτη της επίδρασης του λόγου  $\rho$ , στην μεταβολή της  $\sigma_{\theta}$  κατά μήκος της κρίσιμης γραμμής AB προέκυψε το συμπέρασμα ότι προκειμένου να εξασφαλιστεί η θραύση στο κρίσιμο σημείο ( $R_{\text{εξωτερική}}, 0$ ) πρέπει να αποφεύγονται δοκίμια με μικρό λόγο  $\rho$ . Επιπλέον, προέκυψε ότι η μεταβολή της ακτινικής τάσης  $\sigma_r$  δεν είναι μονότονη.
- Εξίσου σημαντικό είναι το γεγονός ότι οι πειραματικές τεχνικές των ακουστικών εκπομπών και των ηλεκτρικών ρευμάτων βρίσκονται σε ικανοποιητική συμφωνία με τα μηχανικά μεγέθη και επιπλέον εμφανίζουν χαρακτηριστικά τα οποία μπορούν να θεωρηθούν ως σήματα εισόδου του συστήματος (δοκιμίου) σε κρίσιμη κατάσταση (επικείμενης θραύσης).

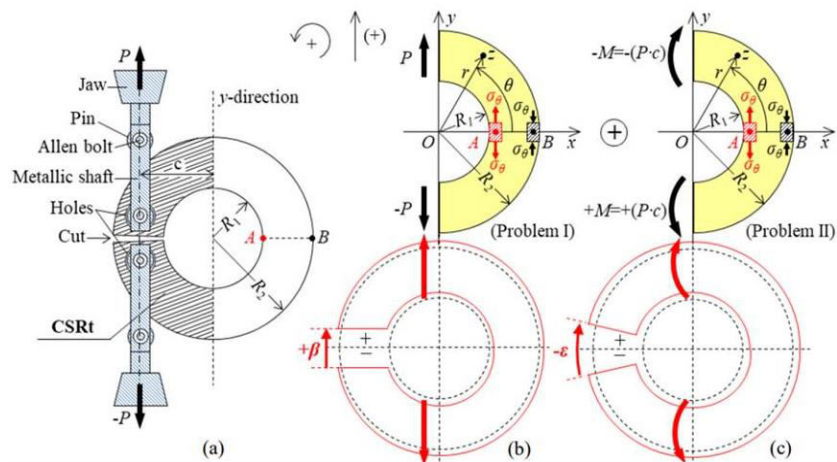
## ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

Από την εργασία κατεδείχθει ότι πέραν των όποιων ιδιαίτερα θετικών για το CSR πείραμα στοιχείων παραμένουν ανοικτά προς περαιτέρω διερεύνηση μακρά σειρά ερωτημάτων και πιο συγκεκριμένα απατείται:

- Συμπληρωματικός αριθμός πειραματικών πρωτοκόλλων με δοκίμια από «πιο φιλικά υλικά» ήτοι από υλικά ομοιογενή και ισότροπα ώστε να καταστεί εφικτή η ελάττωση της διασποράς των αποτελεσμάτων.
- Απαιτείται περαιτέρω αξιολόγηση των αποτελεσμάτων των ακουστικών εκπομπών και των ηλεκτρικών ρευμάτων στην κατεύθυνση της συγκριτικής μελέτης των σημάτων εισόδου σε κρίσιμη κατάσταση αλλά και της δυνατότητας παροχής ποσοτικών στοιχείων τα οποία θα μπορούν να δίνουν σαφή ένδειξη για τον βαθμό εσωτερικής βλάβης (internal damage) στο δοκίμιο.
- Όσον αφορά το αριθμητικό μοντέλο, είναι σκόπιμη η ανάπτυξη του και στην 3<sup>η</sup> διάσταση ώστε να διερευνηθεί με ακρίβεια ο ρόλος του πάχους των δοκιμίων.
- Αξιολόγηση των πειραματικών δεδομένων AE με την βοήθεια της F function και της παραμέτρου time-to-failure ( $t_f-t$ ) ώστε να υπάρξει πληρέστερη εικόνα των μηχανισμών που ενεργοποιούνται στα τελευταία πριν την θραύση στάδια της φόρτισης.
- Τα δεδομένα που προέκυψαν από την παρούσα διπλωματική μπορούν να βελτιωθούν. Σε θεωρητικό επίπεδο αποδεικνύεται ότι το φορτίο θραύσης για την CSR<sub>c</sub> διαδικασία είναι 6 φορές μικρότερο από αυτό του πειράματος του Βραζιλιανού δίσκου ενώ για το CSR<sub>t</sub> είναι 11 φορές μικρότερο (3 και 5.5 φορές αντίστοιχα μικρότερο από το CR test), μειώνοντας σημαντικά την πιθανότητα πρόωμης θραύσης στα σημεία επαφής δοκιμίου-αρπάγης. Εκτός από το ενδιαφέρον που παρουσιάζει η μεγάλη αυτή διαφορά στο φορτίο θραύσης, αξιοσημείωτο είναι και το γεγονός ότι η απόλυτη τιμή της κρίσιμης τάσης λόγω εφελκυσμού υπερβαίνει συνεχώς την αντίστοιχη λόγω θλίψης ( $|\sigma_t^{crit}| > |\sigma_c^{crit}|$ ).

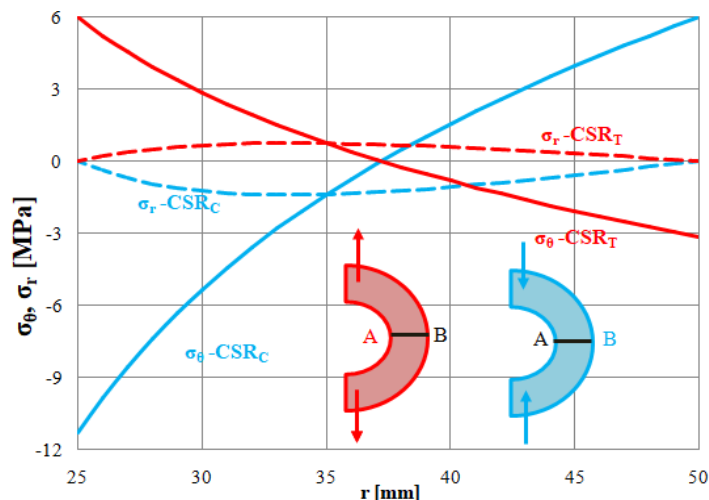


Ακολουθεί η πειραματική και θεωρητική διάταξη του προτεινόμενου δοκιμίου για την τεχνική CSR<sub>t</sub>.



**Εικ. 1:** (a) CSR, (b) Πρόβλημα I: CSR υπό διαμητικές δυνάμεις εξαιτίας της ασυνέχειας  $+\beta$ ,  
(c) Πρόβλημα II: κάμψη του CSR λόγω της  $-\epsilon$  ασυνέχειας.

Υποθέτοντας ότι το δοκίμιο αποτελείται από Διονυσιακό Μάρμαρο με εφελκυστική αντοχή ίση με 6 MPa, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι για το ίδιο δοκίμιο το φορτίο θραύσης στην περίπτωση του εφελκυσμού (στο κρίσιμο σημείο A) είναι 63 N ενώ στην περίπτωση της θλίψης (στο κρίσιμο σημείο B) είναι 170 N.



**Εικ. 2:** Η μεταβολή των τάσεων κατά μήκος της γραμμής AB, για τα πειράματα CSR<sub>c</sub> και CSR.

## **ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ**

- [1] Griffith A. A., (1924), Proc. First Int.Congr. App. Mech, pp. 53-63.
- [2] Fairhurst C., (1964), On the validity of the ‘Brazilian’ test for brittle materials. Int. J. Rock Mech. Min. Sci. Geomech Abstr 1(4): 535-546.
- [3] Inglis C. E. , (1913), Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners, Proc. Inst. Naval Arch.55, 219-230.
- [4] Orowan, E. 1949. Fracture and strength of solids. Rep. Progr. Phys. 12, 185-232.
- [5] Carneiro FLLB (1943), A new method to determine the tensile strength of concrete. In: Paper presented at the Proceedings of the 5<sup>th</sup> meeting of the Brazilian Association for Technical Rules (‘‘Associacao Brasileira de Normas Tecnicas –ABNT’’), 3d. Section.
- [6] Akazawa, T., (1943), New test method for evaluating internal stress due to compression of concrete (the splitting tension test) (Part 1). J. Japan Soc. Civil Eng.29:777-787.
- [7] Hobbs D. W. (1964), The tensile strength of rocks, Int.J. Rock Mech. Min. Sci. 1, 385-396 .
- [8] Hondros, G., (1959), The evaluation of Poisson’s ratio and the modulus of materials of a low tensile resistance by the Brazilian (indirect tensile) test with particular reference to concrete. Aust. J. Appl. Sci. 10, 243–268.
- [9] Colback, P.S.B. (1966) An analysis of brittle fracture initiation and propagation in the Brzilian test. Proc. First Intl. Cong. On Rock Mech. Min. Lisbon, September 1966.
- [10] Hooper JA., (1971), The failure of glass cylinders in diametral compression. J. Mech. Phys. Solids 19(4): 179-200.

- [11] Barla G., Innaurato N., (1973), Indirect tensile testing of anisotropic rocks. *Rock Mech.* 5(4):215-230.
- [12] Kirsch G.,(1898), Die Theorie der Elastizität und die Bedürfnisse der Festigkeitslehre. *Zeit. Ver. Deut. Ing. d.*, 42, 797-807.
- [13] Timpe, A. (1905), Probleme der Spannungsverteilung in Ebenen Systemen, Einfach Gelöst mit Hilfe der Airyschen Function. *Zeitschrift für Mathematik und Physik* 52, 348-383
- [14] Timoshenko SP, Goodier JN ,(1951), *Theory of elasticity*, 2<sup>nd</sup>edn. Engineering societies monographs. McGraw-Hill, New York.
- [15] Filon LNG (1924), The stresses in a circular ring. *Selected engineering papers*, vol 12. The Institution, London. Institution of Civil Engineers (Great Britain).
- [16] M. M. Frocht (1948) , “Photoelasticity, Vol. 1,” Wiley, New York, pp. 144-149.
- [17] Ripperger E. A. and Davids N.,( 1947), Critical stresses in a circular ring. *Trans. Am. Soc. Civil Engrs.*, 2308: 619-635.
- [18] Assur A. (1958), Composition of sea ice and its tensile strength. (In *Arctic sea ice*. 'Vashington, D.C., p . 106-38. (LU.S.] Nationa l Academy of Sciences- National Research Council Publication 598.))
- [19] Stevenson A. C.,(1945), *Proc. Roy. Soc. Lond. A*,184, 129-79.
- [20] Jaeger J.C., (1962), *Elasticity Fracture and Flow*, 2<sup>nd</sup> edn (London : Methuen)
- [21] Hobbs D. W. (1965), An assessment of a technique for determining the tensile strength of rock, *Br. J. appl. Phys.* 16, 259-268 .
- [22] Berenbaum R. , Brodie I., (1959), Measurement of the tensile strength of brittle materials, *Brit. J.Appl. Phys.*, 10: 281-287.

- [23] Jaeger J. C. and Hoskins E. R., (1966), Stresses and failure in rings of rock loaded in diametral tension or compression. *Brit. J. Appl Phys.*, 17: 685-692.
- [24] Addinall E. and Hackett P., (1965), Rock in tension. A problem in strata control. *Civil Eng. (N.Y.)*, 60: 1056-1058.
- [25] Hudson J. A., (1969), Tensile strength and the ring test. *Intern. J. Rock Mech. Mining Sci*, 6: 91-97.
- [26] Hudson JA, Brown ET, Rummel F (1972) The controlled failure of rock discs and rings loaded in diametral compression. *Int J Rock Mech Min Sci Geomech Abstr* 9(2):241–248.
- [27] R.A. and Kennedy R. A, (1967), strength studies of sea ice - effect of load rate on ring tensile strength, naval civil engineering laboratory technical report r545, p. 1-25.
- [28] Mellor M, Hawkes I (1971) Measurement of tensile strength by diametral compression of discs and annuli. *Eng Geol* 5(3):173– 225.
- [29] Tokovyy YV, Hung KM, Ma CC (2010) Determination of stresses and displacements in a thin annular disk subjected to diametral compression. *J Math Sci* 165(3):342–354
- [30] Diyeen Li, Ngai Yuen Wong (2012) The Brazilian disc test for rock mechanics applications:review and new insights,*Rock Mechanics and Rock Engineering* 46(2), doi: [10.1007/s00603-012-0257-7](https://doi.org/10.1007/s00603-012-0257-7).
- [31] ISRM, (1978), Suggested methods for determining tensile strength of rock materials. *Int J Rock Mech Min Sci Geomech Abstr* 15(3): 99-103.
- [32] Ch. F. Markides, S. K. Kourkoulis (2012), The Stress Field in a Standardized Brazilian Disc: The Influence of the Loading Type Acting on the Actual Contact Length, *Rock Mechanics and Rock Engineering*.

- [33] Lajtai, EZ. (1980): Tensile strength and its anisotropy measured by point and line-loading of sandstone. *Eng Geol*, 15(3–4), 163–171.
- [34] Sundaram PN., Corales J. M., (1980), Brazilian tensile strength of rocks with different elastic properties in tension and compression, *Intt. J. Rock Mech. Min.Sci. Geomech Abstr.* 17(2):131-133.
- [35] Pandey P., Singh DP., (1989), Deformation of a rock in different tensile tests, *Eng Geol* 22(3) : 281-292.
- [36] Newmann DA., Benett DG., (1990), The effect of specimen size and stress rate for the Brazilian test -a statistical analysis, *Rock Mech Roch Eng* 23(2): 123-134
- [37] Andreev GE., (1991a), Areview of the Brazilian test for rock tensile strength determination. PartI: calculation formula *Min Sci Technol* 13(3):445- 456.
- [38] Andreev GE., (1991b), Areview of the Brazilian test for rock tensile strength determination. PartII: calculation formula *Min Sci Technol* 13(3):457- 465. from an interface in a Brazilian test specimen, *Int J Rock Mech Min Sci Geomech Abstr* 31(6): 581-596.
- [39] Malan DF, Napier JAL, Watson BP (1994) Propagation of fractures from an interface in a Brazilian test specimen. *Int J Rock Mech Min Sci Geomech Abstr* 31(6):581–596.
- [40] Chen C.S., Pan E., Amadei B., (1998), Determinatio of deformability and tensile strength of anisotropic rock using Brazilian tests, *Int J Rock Mech Min Sci*, 35(1), 43-61.
- [41] Exadaktylos G. E, Kaklis K. N., (2001), Applications of an explicit solution for the transversely isotropic circular disc compressed diametrically , *Int J Rock Mech Min Sci* 38(2), 227-243.
- [42] Lavrov, A., Vervoort, A., Wevers, M. and Napier, J.A.L. (2002): Experimental and numerical study of the Kaiser effect in cyclic Brazilian tests with disk rotation. *Int J Rock Mech Min Sci*, 39(3), 287–302.

- [43] Yue, Z.Q., Chen, S. and Tham, L.G. (2003): Finite element modeling of geomaterials using digital image processing. *Comput Geotech* 30(5), 375–397.
- [44] Yu ,Y., Yin, J. and Zhong, Z. (2006): Shape effects in the Brazilian tensile strength test and a 3D FEM correction. *Int J Rock Mech Min Sci*, 43(4), 623–627.
- [45] Ye J, Wu FQ, Sun JZ (2009) Estimation of the tensile elastic modulus using Brazilian disc by applying diametrically opposed concentrated loads. *Int J Rock Mech Min Sci* 46(3):568–576.
- [46] Wang, Q.Z., Jia, X.M., Kou, S.Q., Zhang, Z.X. and Lindqvist P.A. (2004): The flattened Brazilian disc specimen used for testing elastic modulus, tensile strength and fracture toughness of brittle rocks: analytical and numerical results. *Int J Rock Mech Min Sci* 41(2):245–253.
- [47] Lanaro F., Sato T., Stephansson O., (2009), Microcrack modelling of Brazilian tensile tests with the boundary element method, *Int J Rock Mech Min Sci* 46(3):450–461.
- [48] Tavallali, A. and Vervoort, A. (2010a) Effect of layer orientation on the failure of layered sandstone under Brazilian test conditions. *Int J Rock Mech Min Sci*, 47(2), 313–322.
- [49] Tavallali, A. and Vervoort, A. (2010b): Failure of layered sandstone under Brazilian test conditions: effect of micro-scale parameters on macro-scale behaviour. *Rock Mech Rock Eng*, 43(5), 641–653.
- [50] Markides C.F., Pazis, D.N. and Kourkoulis, S.K. (2011):The Brazilian disc non – uniform distribution of radial pressure and friction. *Int J Rock Mech Min Sci*, 47–55.
- [51] KOLOSOV, G. V., MUSKHELISHVILI N. N,[1] On the equilibrium of elastic circular discs. 29. Vol. XII (1915) pp. 39-55. 320, 328.
- [52] Markides C.F. and Kourkoulis, S.K. (2012): The stress field in a standardized brazilian disc: the influence of the loading type acting on the actual contact length. *Rock Mech Rock Eng*, 45(2), 145–158.

- [53] Markides CF, Pasiou ED, Kourkoulis SK. A preliminary study on the potentialities of the circular semi-ring test. *Procedia Struct Integrity*. 2018;9:108-115.
- [54] Kourkoulis SK, Pasiou ED, Markides CF. Analytical and numerical study of the stress field in a circular semi-ring under combined diametral compression and bending. *Frattura ed Integrità Strutturale*. 2019;13(47):247-265.
- [55] Zhou, Z., Li, X., Zou, Y., Jiang, Y. and Guonan, L. G. (2014): Dynamic Brazilian Tests of Granite Under Coupled Static and Dynamic Loads, *Rock Mech Rock Eng*, 47, 495–505.
- [56] Lavrov, A. and Vervoort A. (2002): Theoretical treatment of tangential loading effects on the Brazilian test stress distribution. *Int J Rock Mech Min Sci*, 39(2), 275–283.
- [57] Markides ChF, Pazis DN, Kourkoulis SK (2012) The Brazilian disc under non-uniform distribution of radial pressure and friction. *Int J Rock Mech Mining Sci* 50:47–55.
- [58] S.P. Timoshenko, J.N. Goodier **Theory of elasticity** (3rd ed), McGraw-Hill, New York, USA (1970).
- [59] Markides ChF, Pazis DN, Kourkoulis SK (2011) The influence of friction on the stress field of the Brazilian tensile test. *Rock Mech Rock Eng* 44:113–119.
- [60] Kourkoulis S.K., Markides Ch.F., Hemsley J.A. Frictional Stresses at the Disc-Jaw Interface During the Standardized Execution of the Brazilian Disc Test *Acta Mech*, 224 (2) (2013), pp. 255-268.
- [61] Muskhelishvili NI. *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*. Groningen, The Netherlands: Noordhoff; 1963.
- [62] Markides ChF, Stavropoulou M, Pasiou ED, Kourkoulis SK. Enlightening the role of critical parameters for the determination of the tensile strength by means of the Circular Semi Ring test, 1st Virtual Conference on Structural Integrity - VCSII, 2020, to appear in *Procedia Structural Integrity*, 2020.

- [63] Yanagidani T, Sano O, Terada M, Ito I (1978) The observation of cracks propagating in diametrically-compressed rock discs. *Int J Rock Mech Min Sci Geomech Abstr* 15(5):225–235
- [64] Van De Steen B, Vervoort A, Napier JAL (2005) Observed and simulated fracture pattern in diametrically loaded discs of rock material. *Int J Fract* 131(1):35–52
- [65] Zhu WC, Tang CA (2006) Numerical simulation of Brazilian disk rock failure under static and dynamic loading. *Int J Rock Mech Min Sci* 43(2):236–252.
- [66] Cai M, Kaiser PK (2004) Numerical simulation of the Brazilian test and the tensile strength of anisotropic rocks and rocks with preexistin
- [67] Markides C.F. and Kourkoulis, S.K. (2014):Stresses and Displacements in an Elliptically Perforated Circular Disc Under Radial Pressure, *Engineering Transactions* 62(2):131-169.
- [68] Golovin Kh.S. 1882. [One of the problems of elastic body statics]. In: *Izvestiya Sankt-Peterburgskogo prakticheskogo Tekhnologicheskogo instituta. 1880–1881 gg.* [Proceedings of the St. Petersburg practical Institute of Technology. Years 1880–1881]. St. Petersburg:410 p.
- [69] Volterra, V., 1907. Sur l' équilibre des corps élastiques multiplement connexes. *Annales scientifiques de l' École Normale Supérieure.* 24, 401–517.
- [70] Love, A.E.H., 1927. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity.* Cambridge University Press
- [71] Kolosov G. V. (1931), Sur une application des formules de M. Schwarz, de M. Villat et de M. Dini au probleme plan de l'elasticite. 14. Vol. 193 p. 389. 218, 320.
- [72] Mikhlín S. G, (1934), Certain cases of the plane problem of the theory of elasticity for nonhomogeneous media. 10. Vol. II, no .. 1. pp. 82-90. 218, 397, 420 .



- [73] T. C. Chu, W. F. Ranson, M. A. Sutton and W. H. Peters, Application of Digital-Image-Correlation Techniques to Experimental Mechanics, *Experimental Mechanics*, Vol. 25, pp. 232-244, 1985.
- [74] M. A. Sutton, W. J. Walters, W. H. Peters, W. F. Ranson and S. R. McNeill, Determination of Displacements Using an Improved Digital Correlation Method, *Image and Vision Computing*, Vol. 1 (3), Butterworth & Co (Publishers) Ltd., 1983
- [75] A. Mendelson, *Plasticity: Theory and Application*, Krieger Publishing Company Malabar, Florida, USA.
- [76] Γεωργίου Δ, Καρανίκα Μ. (2016) Μελέτη τεχνικών οστεοσύνθεσης καταγμάτων πυέλου με τη βοήθεια της τεχνικής «Συσχέτιση Ψηφιακών Εικόνων» (Digital Image Correlation – D.I.C.), (Διπλωματική εργασία). Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο. Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών, Τομέας Μηχανικής.
- [77] Zhang, D. Zhang, X. Cheng, G. Compression strain measurement by digital speckle correlation. *Experimental Mechanics*, 1999, 39 (1), 62-65.
- [78] Lu, H., Yeh, C. and Wyatt, K. Experimental evaluation of solder joint thermal strain in a CSP using digital speckle correlation, 1998, *Thermomechanical Phenomena in Electronic Systems -Proceedings of the Intersociety Conference*, IEEE, Piscataway, NJ, USA, 98CH36208, 241-245.
- [79] Skarżyński, E. Syroka and J. Tejchman, Measurements and Calculations of the Width of the Fracture Process Zones on the Surface of Notched Concrete Beams, *Strain*, Vol. 47, e319-e332, 2011.
- [80] Z. M. Wua, H. Rong, J. J. Zheng, F. Xu and W. Dong, An Experimental Investigation on the FPZ Properties in Concrete Using Digital Image Correlation Technique, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 78, pp. 2978-2990, 2011.

- [81] L. C. S. Nunes and J. M. L. Reis, Estimation of Crack-tip-opening Displacement and Crack Extension of Glass Fiber Reinforced Polymer Mortars Using Digital Image Correlation Method, *Materials and Design*, Vol. 33, pp. 248- 253, 2012.
- [82] Q. Lin and J. F. Labuz, Fracture of Sandstone Characterized by Digital Image Correlation, *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*, Vol. 60, pp. 235-245, 2013.
- [83] A. Stirling, D. J. Simpson and C. T. Davie, The Application of Digital Image Correlation to Brazilian Testing of Sandstone, *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*, Vol. 60, pp. 1-11, 2013.
- [84] F. Fahy, *Sound and Structural Vibration Radiation, Transmission and Response*, Academic Press INC. London, 1985.
- [85] P.P.Gillis and M. A. Hamstad, *Some Fundamental Aspects of the Theory of Acoustic Emission*, Elsevier, 1973.
- [86] A.G. Evans, *Acoustic Emission Sources in Brittle Solids – Fundamental of Acoustic Emission*, 1978.
- [87] A. Rotem and E. Altus, *Fracture Mode and Acoustic Emission of Composite Materials, Testing and Evaluation*, Vol. 1, pp. 33-40, 1979.
- [88] *Acoustic Emission Testing, Basics for Research - Applications in Civil Engineering*, C. U. Grosse and M. Ohtsu (Eds.), Springer, 2008.
- [89] Ahmad Zaki, Hwa Kian Chai, Dimitrios G. Aggelis, Ninel Alver, *Non-destructive evaluation for corrosion monitoring in concrete: A review and capability of acoustic emission technique*, 2015.
- [90] L. Obert and W. Duvall, *Use of Subaudible Noise for Prediction of Rock Bursts - Part II*, U.S. Bureau of Mines, RI 3654, 1942.
- [91] J. Kaiser, *Untersuchungen uber das Auftreten Gerauschen beim Zugversuch*, PhD Thesis, Technische Hochschule, Munich, 1950.

- [92] D. Lockner, The Role of Acoustic Emission in the Study of Rock Fracture, *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts*, Vol. 30 (7), pp. 883-899, 1993.
- [93] L. M. Suarez del Rio and J. Norin, Bending tests and acoustic emission for heated Avesta-gneiss, *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts*, Vol. 22 (1), pp. 47-50, 1985
- [94] T. Hashida and H. Takahashi, Significance of AE crack monitoring in fracture toughness evaluation and non-linear rock fracture mechanics, *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts*, Vol. 30 (1), pp. 47-60, 1993.
- [95] J. F. Labuz and L. Biolzi, Characteristic strength of quasi-brittle materials, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 35 (31-32), pp. 4191- 4203, 1998.
- [96] Z.P.Bazant, Z. P. and G. Pijaudier-Cabot, Measurement of characteristic length of nonlocal continuum, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE115, pp. 755-767, 1989.
- [97] J. C. Anderson and K. D. Leaver, *Materials Science*, Nelson, 1969.
- [98] Ε. Δ. Πάσιου, Σύνδεση δομικών μελών αρχαίων μνημείων με χρήση μεταλλικών ενισχύσεων και κατάλληλων κονιαμάτων : Πειραματικές και καινοτόμες τεχνικές και αριθμητική προσομοίωση, Διδακτορική διατριβή.
- [99] Β. Θ. Ζασπάλης, Σημειώσεις “Επιστήμης και Τεχνολογίας Υλικών Ι” για το “Τμήμα Χημικών Μηχανικών” του ΑΠΘ.
- [100] Π. Ματζινός, Σημειώσεις “Τεχνολογίας Υλικών Οχημάτων”, Α.Τ.Ε.Ι. Θεσσαλονίκης
- [101] <https://www.slideserve.com/vivien/dislocations>
- [102] F. Vallianatos and A. Tzanis, Electric Current Generation Associated with the Deformation Rate of a Solid: Preseismic and coseismic

signals, *Physics and Chemistry of the Earth*, Vol. 23, pp. 933-938, 1998

- [103] Shuhong Dai , Xiaoli Liu , and Kumar Nawnit , Experimental Study on the Fracture Process Zone Characteristics in Concrete Utilizing DIC and AE Methods, 2019.
- [104] A. V. Byakov, S. V. Panin, V. V. Grenke, I. V. Shakirov and S. A. Yussif, Study of Localized Strain at micro-, meso- and macrolevels in AA2024 Alloy by Data of Acoustic Emission, Surface Strain Mapping and Strain Gauging, *Procedia Engineering*, Vol. 1, pp. 71-71, 2009.
- [105] C. Stergiopoulos, I. Stavrakas, G. Hloupis, D. Triantis and F. Vallianatos, Electrical and Acoustic Emissions in Cement Mortar Beams Subjected to Mechanical Loading up to Fracture, *Engineering Failure Analysis*, Vol. 35, pp. 454-461, 2013
- [106] C. Stergiopoulos, I. Stavrakas, G. Hloupis, A. Kyriazopoulos and D. Triantis, Acoustic Emission and Electrical Signal Recordings during Three Point Bending Tests on Cement Mortar Samples, 5th International Conference on NDT of HSNT- IC MINDT 2013, 20-22 May 2013, Athens, Greece, 2013.
- [107] C. Stergiopoulos, I. Stavrakas, G. Hloupis, A. Kyriazopoulos, D. Triantis, C. Anastasiadis and J. Stonham, Monitoring Acoustic Emissions and Electrical Signals During Three-Point Bending Tests Performed on Cement Mortar Specimens, VIII International Conference on Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures FraMCoS-8, J. G. M. Van Mier, G. Ruiz, C. Andrade, R. C. Yu and X. X. Zhang (Eds), 11-14 March 2013, Toledo, Spain, 2013.
- [108] I. Stavrakas, G. Hloupis, D. Triantis and F. Vallianatos, Concurrent Recordings of Electrical Current Emissions and Acoustic Emissions Detected from Marble Specimens Subjected to Mechanical Stress up to Fracture, *Geophysical Research Abstracts*, Vol. 14, EGU2012-8194, 2012, EGU General Assembly 2012.
- [109] D. Triantis, I. Stavrakas, G. Hloupis, K. Ninos and F. Vallianatos,

Acoustic and Electrical Signal Emission Recordings when Marble Specimens are Subjected to Compressional Mechanical Stress, Geophysical Research Abstracts, Vol. 15, EGU2013-11507, 2013, EGU General Assembly 2013.

- [110] Ι. Βαρδουλάκης, Σ. Κουρκουλής, Γ. Εξαδάκτυλος και Ά. Ροζάκης, Μηχανικές Ιδιότητες και Συμβατότητα Φυσικών Δομικών Λίθων στα Αρχαία Μνημεία: το Διονυσιακό Μάρμαρο, Διεπιστημονική Ημερίδα: «Ο δομικός λίθος στα μνημεία», ICOMOS-ΙΓΜΕ, Αθήνα, 9 Νοεμβρίου 2001.
- [111] Hardy H.R.Jr., 2003. "Acoustic Emission/Microseismic Activity, Principles, Techniques and Geotechnical Applications", Vol. 1, the Pennsylvania State University, University Park, Pennsylvania, USA, A.A. Balkema Publishers, 2003.
- [112] S.K.Kourkoulis, (2020), 1<sup>st</sup> Mediterranean Conference on Fracture and Structural Integrity, MedFract1., Athens, Greece.
- [113] Προβατίδης Γ. Χριστόφορος, (2015), ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ, Εκδόσεις Τζιόλα.
- [114] Κωνσταντίνος – Ιάσων Υψηλάντης, (2019), Η Μέθοδος της Ομογενοποίησης στο Πρόβλημα Βελτιστοποίησης Τοπολογίας, Μεταπτυχιακή Διατριβή.
- [115] Α. Θεοδουλίδης, Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων, <https://slideplayer.gr/slide/16255278/>