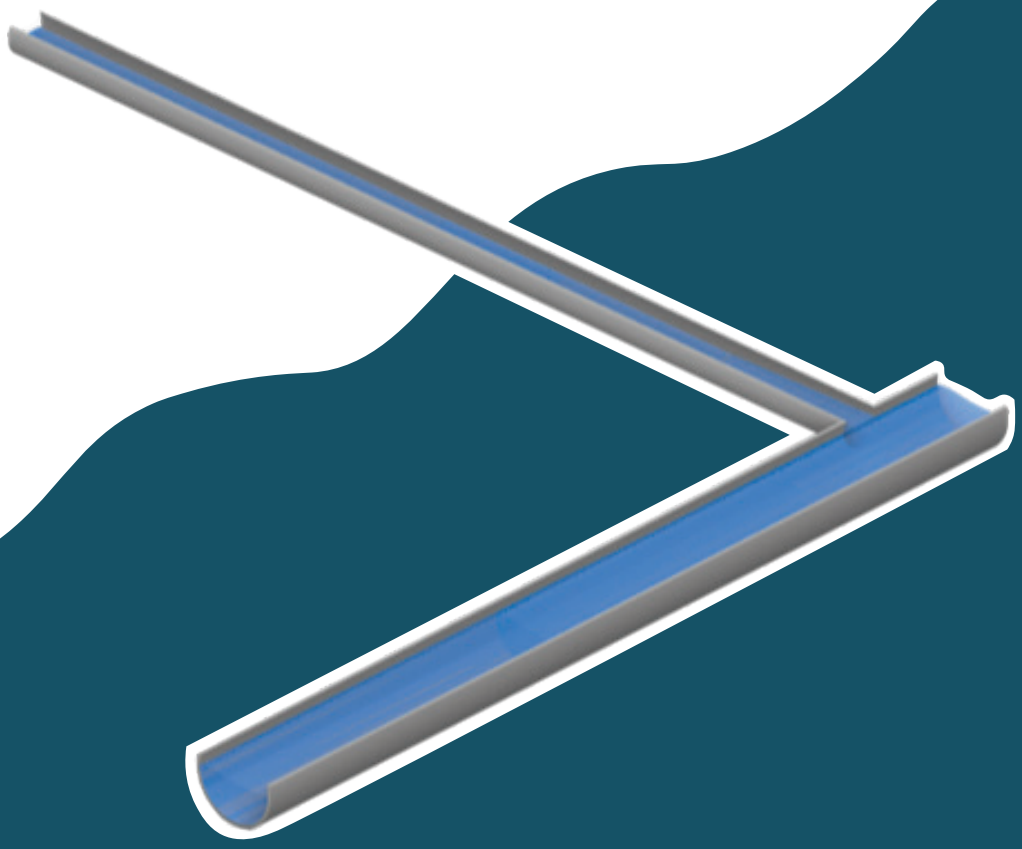
ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ | ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΚΟΥΤΣΟΣ
ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: Π. ΠΑΠΑΝΙΚΟΛΑΟΥ, ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΕΜΠ

ΔΙΟΔΕΥΣΗ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΚΥΜΑΤΟΣ ΣΕ ΣΥΜΒΟΛΗ ΑΝΟΙΧΤΩΝ ΑΓΩΓΩΝ ΥΠΟΚΡΙΣΙΜΗΣ ΚΛΙΣΗΣ



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΥΔΑΤΙΝΩΝ ΠΟΡΩΝ & ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ

ΑΘΗΝΑ ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 2021

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΥΔΑΤΙΚΩΝ ΠΟΡΩΝ & ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ

Διπλωματική εργασία

ΔΙΟΔΕΥΣΗ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ ΚΥΜΑΤΟΣ ΣΕ ΣΥΜΒΟΛΗ ΑΝΟΙΧΤΩΝ ΑΓΩΓΩΝ ΥΠΟΚΡΙΣΙΜΗΣ ΚΛΙΣΗΣ

ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΚΟΥΤΣΟΣ

Επιβλέπων: Π. Παπανικολάου, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Νοέμβριος 2021

Ελπίζω στους σεισμούς που μέλλονται για να 'ρθουν,
να μην αφήσω τη Βιρτζίνιά μου απ' την πίκρα να μου σβήσει.

Μπ. Μπρεχτ

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στο πλαίσιο του προγράμματος σπουδών της Σχολής Πολιτικών Μηχανικών του ΕΜΠ, στον Τομέα Υδατικών Πόρων και Περιβάλλοντος και αντικείμενο αυτής είναι η διάδοση δυναμικού κύματος σε κάθετα συμβαλλόμενο αγωγό υποκρίσιμης κλίσης.

Ευχαριστώ θερμά τον επιβλέποντα κ. Παναγιώτη Παπανικολάου, Καθηγητή ΕΜΠ, που με τις εξειδικευμένες στο αντικείμενο γνώσεις του, την μεθοδικότητά και την αναλυτική του σκέψη με καθοδήγησε ώστε να ξεπεράσω τις δυσκολίες που μου προέκυψαν. Επιπλέον, τον ευχαριστώ για τον πολύτιμο χρόνο που αφιέρωσε μέσω τηλεδιασκέψεων σε κάθε στάδιο υλοποίησης της παρούσας διπλωματικής σε μια πρωτοφανή, με πολλές δυσκολίες περίοδο.

Επιπλέον, ευχαριστώ ιδιαίτερα τον υποψήφιο Διδάκτορα κ. Ευγένιο Ρετσίνη για τον χρόνο που αφιέρωσε, καθώς και για την συνεχόμενη βοήθεια που μου προσέφερε καθ΄ όλη την διάρκεια της διπλωματικής μου εργασίας.

Ακόμη θα ήθελα να αφιερώσω την παρούσα διπλωματική εργασία σε όλους τους φίλους μου, εντός και εκτός ακαδημαϊκών πλαισίων, για την πολύτιμη στήριξη που μου προσέφεραν τόσο σε ψυχολογικό όσο και σε ακαδημαϊκό επίπεδο. Συγκεκριμένα όμως, θέλω να ευχαριστήσω τον παιδικό μου φίλο Νίκο που πέρα από την αέναη στήριξη του, με βοήθησε παρέχοντας μου τον υπολογιστή του, ώστε να μπορέσω να περατώσω το τελευταίο στάδιο των προπτυχιακών σπουδών μου. Ιδιαίτερα όμως την αφιερώνω στους γονείς μου Πλούταρχο και Ιωάννα, καθώς και στα αδέρφια μου Μανώλη, Πόπη και Σεραφείμ που χωρίς τις συμβουλές τους, την στήριξή τους και την αγάπη τους δεν θα τα είχα καταφέρει.

Γεώργιος Κουτσός
Αθήνα,
Οκτώβριος 2021

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ i
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ ii
ΠΕΡΙΛΗΨΗ iv
ABSTRACT vi
1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ 1
1.1 Γενικά στοιχεία 1
1.2 Αντικείμενο της εργασίας 1
1.3 Διάρθρωση εργασίας 2
2 ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΟΝΙΜΗΣ ΡΟΗΣ – ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΗ ΑΝΑΛΥΣΗ 3
2.1 Εξίσωση συνέχειας 3
2.2 Εξίσωση ορμής (Ποσότητας της κίνησης) – Διάγραμμα ειδικής δύναμης 4
2.3 Εξίσωση ενέργειας – Διάγραμμα ειδικής ενέργειας 5
2.4 Βαθμιαία μεταβαλλόμενη ροή 6
2.5 Συμβολή αγωγών 8
3 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ 11
3.1. Γενικά 11
4 ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΗ ΜΟΝΙΜΗΣ ΡΟΗΣ 12
4.1 Εξισώσεις Saint-Venant 12
4.2 Αριθμητικές μέθοδοι επίλυσης μη μόνιμης ροής 13
4.2.1 Μέθοδος πεπερασμένων διαφορών – Ρητό σχήμα υπολογισμού 14
4.2.2 Μέθοδος χαρακτηριστικών καμπυλών 18
4.2.2.1 Φυσική σημασία χαρακτηριστικών καμπυλών 20
4.2.2.2 Σχήμα καθορισμένων διαστημάτων 21
4.3 Αρχικές και Συνοριακές Συνθήκες 23
5 ΕΦΑΡΜΟΓΗ 25
5.1 Γεωμετρία διατομής 26
5.2 Αρχικές συνθήκες 27
5.3 Συνοριακές συνθήκες 28
5.4 Χρονική και Χωρική διακριτοποίηση 31
5.5 Ρητό σχήμα υπολογισμού 32

5.6 Μέθοδος χαρακτηριστικών καμπυλών 35
5.7 Ειδική δύναμη και αρχικές συνθήκες 41
6 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ 45
6.1 Δευτερεύοντας αγωγός 45
6.1.1 Ορθογωνικός αγωγός 45
6.1.1.1 Ρητό σχήμα υπολογισμού 45
6.1.1.2 Μέθοδος χαρακτηριστικών καμπυλών 49
6.1.2 Κυκλικός αγωγός 53
6.1.2.1 Ρητό σχήμα υπολογισμού 53
6.1.2.1 Μέθοδος χαρακτηριστικών καμπυλών 57
6.1.3 Σύγκριση μεθόδων 61
6.2 Πρωτεύοντας αγωγός 68
6.2.1 Ορθογωνικός αγωγός 69
6.2.2 Κυκλικός αγωγός 76
6.3 Συμβολή αγωγών 83
6.3.1 Ορθογωνικός αγωγός 84
6.3.2 Κυκλικός αγωγός 86
6.4 Συμπεράσματα 89
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ 91
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α 93
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β 115

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Οι ροές που παρατηρούνται στην φύση σχεδόν πάντα μεταβάλλουν τα χαρακτηριστικά τους στον χώρο και στον χρόνο. Η μεταβολή αυτή, μπορεί να οφείλεται είτε σε φυσικές διεργασίες (αλλαγή κλίσης πυθμένα, γεωμετρίας αγωγού κ. α.) είτε σε ανθρώπινες παρεμβάσεις (άνοιγμα θυροφράγματος), είτε ακόμα και σε ατυχήματα (κατάρρευση φράγματος). Ο πολιτικός μηχανικός καλείται να μελετήσει τα έργα που απαιτούνται ώστε οι απαιτούμενοι όγκοι νερού να συλλέγονται, να μεταφέρονται και να διατίθενται με ασφάλεια. Είναι λοιπόν σημαντικό, ο μηχανικός και όχι μόνο, να μπορεί να μελετήσει τα χαρακτηριστικά της ροής υπό μη μόνιμες συνθήκες.

Οι μέθοδοι ανάλυσης της μη μόνιμης ροής χωρίζονται σε δύο κατηγορίες την υδραυλική και την υδρολογική. Η υδραυλική μέθοδος στηρίζεται στις εξισώσεις συνέχειας, ποσότητας κίνησης και ενέργειας. Οι εξισώσεις αυτές ονομάζονται εξισώσεις Saint Venant. Επειδή η αναλυτική επίλυση αυτών των εξισώσεων είναι σχεδόν αδύνατο να επιτευχθεί, χρησιμοποιούνται αριθμητικές επιλύσεις. Τα αριθμητικά σχήματα που χρησιμοποιούνται για τον σκοπό αυτό, μπορούν να προσεγγίσουν τις αναλυτικές λύσεις των εξισώσεων Saint Venant και να δώσουν μια αξιόπιστη εικόνα των χαρακτηριστικών της μη μόνιμης ροής. Δύο μέθοδοι επίλυσης των εξισώσεων Saint Venant που είναι ευρέως χρησιμοποιούμενες από τους μελετητές είναι η ρητή μέθοδος επίλυσης και η μέθοδος των χαρακτηριστικών καμπυλών, κάνοντας χρήση πεπερασμένων διαφορών. Τα αριθμητικά σχήματα που προκύπτουν από τις δύο αυτές μεθόδους και χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα εργασία είναι το ρητό σχήμα του Lax (Lax Diffusive Scheme) και το σχήμα καθορισμένων διαστημάτων του Hartree (Hartree Scheme).

Στην παρούσα εργασία εξετάζεται η διόδευση κύματος σε πρισματικό αγωγό κυκλικής και ορθογωνικής διατομής, ο οποίος συμβάλει κάθετα με αγωγό αντίστοιχης γεωμετρίας. Η ανάλυση της μη μόνιμης ροής έγινε και με τα δύο αριθμητικά σχήματα (Lax – Hartree) και εξήχθησαν συμπεράσματα για την ακρίβεια των αποτελεσμάτων που αυτά δίνουν, αφού συγκρίθηκαν με τα αντίστοιχα αποτελέσματα που προκύπτουν από το ευρέως χρησιμοποιούμενο πρόγραμμα HECRAS. Παρόλη την ευρεία χρήση τους λόγω της υπολογιστικής ευκολίας τους, και στα δύο σχήματα υπάρχουν προβλήματα ευστάθειας. Ο έλεγχος ευστάθειας γίνεται με την ικανοποίηση του κριτηρίου Courant σε κάθε θέση υπολογισμού των χαρακτηριστικών της ροής.

Συγκεκριμένα, σε δευτερεύοντα αγωγό γίνεται διάδοση κύματος που προκύπτει από εισαγόμενο γνωστό υδρογράφημα στην είσοδο του αγωγού. Η διάδοση γίνεται για διάφορες χρονικές και χωρικές διακριτοποιήσεις και για τα δύο αριθμητικά σχήματα. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν συγκρίνονται με τα αποτελέσματα του προγράμματος HECRAS και εξάγονται συμπεράσματα ξεχωριστά για την ευστάθεια των αριθμητικών σχημάτων αλλά και για την ακρίβεια αυτών. Στην συνέχεια, μελετήθηκε η συμπεριφορά της ροής στην συμβολή των αγωγών και το πως αυτή διαταράσσεται ανάλογα με το μέτρο της ειδικής δύναμης ανάντη και κατάντη του συμβαλλόμενου πρωτεύοντα αγωγού. Τέλος, γίνεται διάδοση του

νέου κύματος στον πρωτεύοντα αγωγό, που προκύπτει από το υδρογράφημα εξόδου του δευτερεύοντα αγωγού.

ABSTRACT

Flows observed in nature almost always have varying flow properties in space and time. This variability can be due either to natural processes (change in bed slope, change in cross section, etc.), human intervention (gate operation) or even accidents (dam break). The civil engineer is called upon to study the projects required so that the required volumes of water can be collected, transported and disposed of safely. It is therefore important that the engineer is able to study the characteristics of flow under unsteady conditions.

Unsteady flow analysis methods are divided into two categories, hydrological and hydraulic. The hydraulic method is based on the equations of energy and momentum. These equations are called Saint Venant equations. As the analytical solution of these equations is almost impossible to achieve, numerical solutions are being used instead. The numerical schemes used for this purpose, can effectively approach the analytical solutions of the Saint Venant equations and give a reliable outcome of the characteristics of unsteady flow. Two numerical schemes, that are widely used in order to solve the Saint Venant equations are the Lax Diffusive Scheme and the Hartree Scheme method. The former is based on the explicit solution of the Saint Venant equations using finite differences, while the latter is based on the mathematical technique of characteristic curves.

The present work examines the wave conduction in a prismatic conductor of circular and rectangular cross-section which contributes vertically with a conductor of corresponding geometry. The unsteady flow analysis was completed using with both numerical schemes (Lax - Hartree) and conclusions were drawn on the accuracy of the results produced, after comparison with the corresponding results obtained from the widely used HECRAS program. Despite their widespread use due to their computational ease, both schemes present stability problems. The stability test is performed by satisfying the Courant criterion in all calculation positions on the computation grid.

Specifically, a known hydrograph is applied at the inlet of a secondary channel causing wave propagation in it. The propagation is solved for various temporal and spatial discretization for both numerical schemes. The results obtained are compared with the results of the HECRAS program and separate conclusions are drawn regarding the stability and accuracy of the numerical schemes. Next, the flow characteristics at the junction of the channel was studied as well as how it is disturbed in correlation to the intensity of the specific force upstream and downstream of the contracting primary channel. Finally, the new wave that results from the output hydrograph of the secondary channel is propagated in the primary canal.

1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Γενικά στοιχεία

Η ροή του νερού σε φυσικούς αγωγούς (ρεύματα, χείμαρροι και ποταμοί) και σε τεχνητούς αγωγούς (υπόνομοι, διώρυγες και τάφροι) πραγματοποιείται με την εμφάνιση ελεύθερης επιφάνειας και αποτελεί βασικό αντικείμενο του υδραυλικού μηχανικού. Η ροή στις περιπτώσεις αυτές γίνεται σε χώρο που ορίζεται απ΄τα στερεά όρια του αγωγού και από την ελεύθερη επιφάνεια του νερού. Στην ελεύθερη επιφάνεια πρέπει να πληρείται η γνωστή οριακή συνθήκη, ότι η πίεση ισούται με την ατμοσφαιρική. Η διαστασιολόγηση των αγωγών για τις παροχές σχεδιασμού των έργων συνιστά το κύριο μέλημα του υδραυλικού μηχανικού (Νουτσόπουλος κ.ά.,2010).

Οι ροές που παρατηρούνται στους ανοιχτούς αγωγούς, γενικά χαρακτηρίζονται ως μη μόνιμες καθώς τα χαρακτηριστικά της ροής μεταβάλλονται συναρτήσει του χρόνου. Χαρακτηριστικές περιπτώσεις όπου παρατηρείται ροή υπό συνθήκες μη μόνιμες είναι σε αγωγούς ομβρίων, ρέματα και ποτάμια στην διάρκεια ενός πλημμυρικού φαινομένου και σε αγωγούς ομβρίων και αποχετεύσεων κατά την διάρκεια καταιγίδας. Τέλος, παρατηρείται και σε πιο ειδικές περιπτώσεις όπως το άνοιγμα ή κλείσιμο ενός θυροφράγματος, σε εκβολές και κόλπους κατά την διάρκεια ενός παλιρροιακού φαινομένου κ.α. (Chaudhry, 2008).

Οι αγωγοί πρέπει να σχεδιάζονται κατάλληλα ώστε να εξασφαλίζεται η συλλογή, η μεταφορά καθώς και η διάθεση του απαιτούμενου όγκου νερού. Οι αγωγοί ομβρίων σχεδιάζονται ώστε να μπορούν να μεταφέρουν, με την μέγιστη επιτρεπτή χωρητικότητα τους την μέγιστη παροχή σχεδιασμού για δεδομένη περίοδο επαναφοράς. Η ανάλυση, λοιπόν, της μη μόνιμης ροής στους αγωγούς ομβρίων είναι σημαντική για τον γενικότερο σχεδιασμό των αγωγών αυτών και των επιπρόσθετων έργων που απαιτούνται.

Ο ακριβής προσδιορισμός των χαρακτηριστικών ενός πλημμυρικού κύματος επιτυγχάνεται με χρήση των εξισώσεων μη μόνιμης ροής. Οι εξισώσεις αυτές είναι γνωστές ως εξισώσεις Saint-Venant και προκύπτουν από τις σχέσεις ενέργειας και ορμής. Οι εξισώσεις αυτές χαρακτηρίζονται για την πολυπλοκότητα τους και η αναλυτική λύση τους δεν είναι εφικτή. Για το λόγο αυτό, χρησιμοποιούνται αριθμητικές μέθοδοι για την επίλυση των εξισώσεων αυτών. Οι περισσότερες αριθμητικές μέθοδοι μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε μεθόδους πεπερασμένων στοιχείων και μεθόδους πεπερασμένων διαφορών (Akan, 2006).

1.2 Αντικείμενο της εργασίας

Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετήθηκαν η διάδοση δυναμικού κύματος σε πρισματικό αγωγό και η μετέπειτα διάδοση αυτού σε κάθετα συμβαλλόμενο αντίστοιχης γεωμετρίας, πρισματικό αγωγό. Για τον σκοπό αυτό αναπτύχθηκε κατάλληλος κώδικας που προγραμματίστηκε στην γλώσσα προγραμματισμού MATLAB όπου επιλύονται οι εξισώσεις St.-Venant με χρήση ρητού σχήματος υπολογισμού καθώς επίσης και με την μέθοδο των

χαρακτηριστικών καμπυλών. Η επίλυση γίνεται ξεχωριστά για ορθογωνικό και κυκλικό αγωγό χρησιμοποιώντας και τις δύο μεθόδους με διάφορες παραλλαγές στα χαρακτηριστικά της ροής αλλά και στα χαρακτηριστικά του υπολογιστικού κανάβου.
Αρχικά γίνεται σύγκριση των δύο αριθμητικών μεθόδων για την διάδοση του κύματος στον πρώτο πρισματικό αγωγό. Στην συνέχεια μελετάται η ροή, ανάντη και κατάντη συμβαλλόμενου αγωγού καθώς και η διάδοση του νέου κύματος σε αυτόν. Τα χαρακτηριστικά της ροής που προκύπτουν κατά την επίλυση με τις δύο αριθμητικές μεθόδους ελέγχονται με τα αποτελέσματα που προκύπτουν από το λογισμικό HECRAS. Επιπλέον, εξετάζεται αν η ροή στην συμβολή διαταράσσεται και σε ποιες περιπτώσεις η παροχή περνάει αδιατάρακτη. Σε περίπτωση που η ροή διαταράσσεται, γίνεται ανάλυση για το πώς μεταβάλλεται το ανάντη βάθος ροής στον συμβαλλόμενο αγωγό.

1.3 Διάρθρωση εργασίας

Στην παρούσα διπλωματική εργασία, εκτός του παρόντος κεφαλαίου όπου παρουσιάζονται εισαγωγικές έννοιες και η βασική ιδέα μελέτης, περιέχονται ακόμα πέντε κεφάλαια και δύο παραρτήματα.

Στο 2ο κεφάλαιο γίνεται εκτενής αναφορά των χαρακτηριστικών της μόνιμης ροής. Περιγράφονται κατά σειρά η εξίσωση συνέχειας, ποσότητας κίνησης και ενέργειας. Επιπλέον γίνεται αναφορά στην ειδική ενέργεια και ορμή καθώς, στην βαθμιαία μεταβαλλόμενη ροή καθώς και στην ροή σε συμβαλλόμενους αγωγούς.

Στο 3ο κεφάλαιο παρουσιάζεται η βιβλιογραφική ανασκόπηση όσον αφορά την μη μόνιμη ροή με έμφαση στις αριθμητικές μεθόδους επίλυσης των χαρακτηριστικών των ροών.

Στο 4ο κεφάλαιο γίνεται εκτενής ανάλυση της μη μόνιμης ροής και παρουσιάζονται τα αριθμητικά σχήματα της ρητής επίλυσης και της μεθόδου των χαρακτηριστικών καμπυλών.

Στο 5ο κεφάλαιο περιγράφεται η επίλυση της μη μόνιμης ροής με χρήση του λογισμικού MATLAB, για τις ανάγκες της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Στο 6ο και τελευταίο κεφάλαιο συνοψίζονται τα αποτελέσματα και γίνεται προσπάθεια εξαγωγής συμπερασμάτων από αυτά.

Τέλος, στο Παράρτημα Α παρατίθενται τα παραγόμενα υδρογραφήματα καθώς και τα βάθη ροής που προέκυψαν από την επίλυση της μη μόνιμης ροής για ένα σύνολο περιπτώσεων και στο Παράρτημα Β παρουσιάζεται ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση της ροής.

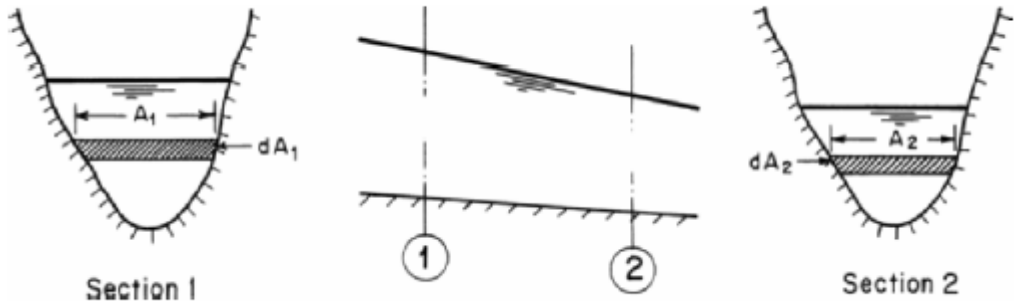
2 ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΟΝΙΜΗΣ ΡΟΗΣ – ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Η μόνιμη ροή με ελεύθερη επιφάνεια σε έναν ανοιχτό αγωγό περιγράφεται από τις εξισώσεις της διατήρησης της μάζας, της ορμής και της ενέργειας. Η πίεση στην ελεύθερη επιφάνεια του αγωγού είναι σταθερή και ίση με την ατμοσφαιρική. Η κινητήρια δύναμη του ρευστού είναι ένας συνδυασμός της πίεσης και της βαρύτητας. Οι βασικοί παράμετροι, σε οποιαδήποτε υδραυλική μελέτη, είναι τα χαρακτηριστικά του ρευστού (πυκνότητα και ιξώδες), η γεωμετρία του αγωγού (διατομή και κλίση πυθμένα) και τα χαρακτηριστικά της ροής (ταχύτητα και βάθος ροής) (Chanson, 2004).

Στο παρόν κεφάλαιο γίνεται ανάλυση της ροής σε ανοιχτούς αγωγούς σε μόνιμες συνθήκες, οπού δηλαδή τα χαρακτηριστικά της ροής παραμένουν αμετάβλητα στον χρόνο ως προς την κύρια συνιστώσα της. Παρατίθενται οι βασικές έννοιες ανάλυσης της ροής καθώς και οι βασικές μαθηματικές σχέσεις που την διέπουν, όπως αυτές παρουσιάζονται στις σημειώσεις του κ. Παπανικολάου. Η ανάλυση της ροής, γίνεται σε μία διάσταση, επιλέγοντας κάποιο (ολοκληρωματικό) όγκο αναφοράς και εφαρμόζοντας τους νόμους της ρευστομηχανικής.

2.1 Εξίσωση συνέχειας

Θεωρώντας δύο διατομές, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.1, και εκφράζοντας την μάζα του ρευστού σε αυτές έχουμε:
Ο ρυθμός εισρεόμενης μάζας στην διατομή ισούται με $\rho_1 u_1 dA_1$
Ο ρυθμός εισρεόμενης μάζας στην διατομή ισούται με $\rho_2 u_2 dA_2$



Σχήμα 2.1: Διαφορετικές τομές σε τυχαίας διατομής αγωγό (ΠΗΓΗ: Chaudhry, 2008)

Σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της μάζας ο ρυθμός της εισρεόμενης μάζας στην διατομή 1 πρέπει να ισούται με αυτό της διατομής 2. Συνεπώς έχουμε,

$$\int \rho_1 u_1 dA_1 = \int \rho_2 u_2 d$$

Επειδή όπως προαναφέρθηκε, το ρευστό θεωρείται ασυμπίεστο ισχύει ότι $\rho_1 = \rho_2$. Επομένως, καταλήγουμε στην σχέση:

$$V1\int dA1 = V2\int dA2$$

$$V1A1 = V2A2$$

$$Q1 = Q2 \tag{2.1}$$

Όπου,

ρ η πυκνότητα του ρευστού,
V η μέση ταχύτητα του νερού στη διατομής,
A το εμβαδόν της υγρής διατομής και
Q η παροχή του νερού στη διατομή.

2.2 Εξίσωση ορμής (Ποσότητας της κίνησης) – Διάγραμμα ειδικής δύναμης

Η εξίσωση της ορμής σε ανοικτή διώρυγα ανάμεσα σε δύο γειτονικές διατομές μεταξύ των οποίων η παροχή είναι σταθερή γράφεται:

$$F_{\mu x} + F_{\tau x} + F_{gx} = \rho Q(V_2 - V_1) \tag{2.2}$$

Η δύναμη που ασκείται στο υγρό και προέρχεται από την υδροστατική πίεση είναι:

$$F_{\mu x} = \rho g \bar{y} A \tag{2.3}$$

Όπου,

$\bar{y}$ είναι η απόσταση του κέντρου βάρους της υγρής διατομής και
A το εμβαδόν της υγρής διατομής.

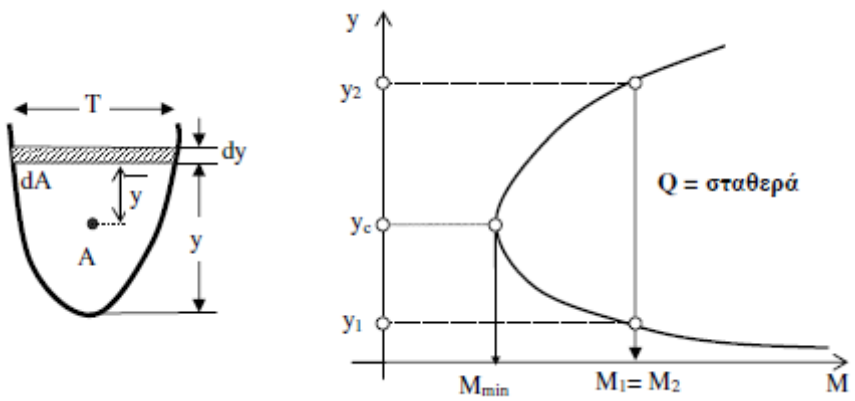
Τελικώς, η εξίσωση της ορμής γράφεται:

$$\frac{F_{\tau x}}{g} + \frac{F_{\tau x}}{g} + \left(\frac{Q^2}{gA_1} + \bar{y}_1 A_1\right) - \left(\frac{Q^2}{gA_2} + \bar{y}_2 A_2\right) = 0 \tag{2.4}$$

Η εξίσωση της ορμής για οριζόντιο πυθμένα ($g_\chi = 0$) και αμελώντας τις τριβές ($F_\tau = 0$) γράφεται:

$$\left(\frac{Q^2}{gA_1} + \bar{y}_1 A_1\right) - \left(\frac{Q^2}{gA_2} + \bar{y}_2 A_2\right) = 0 \quad \text{ή} \quad M_1 = M_2 \tag{2.5}$$

Από την παραπάνω σχέση για δεδομένη παροχή Q και μεταβάλλοντας το βάθος ροής προκύπτει το διάγραμμα της ειδικής δύναμης (Σχήμα 2.3).



Σχήμα 2.2: Διάγραμμα ειδικής δύναμης (ΠΗΓΗ: Σημειώσεις Παπανικολάου, 2017)

Αντίστοιχα με το διάγραμμα της ειδικής ενέργειας παρατηρείται ότι, η ειδική δύναμη λαμβάνει την ελάχιστη τιμή της όταν η ροή χαρακτηρίζεται ως κρίσιμη.

2.3 Εξίσωση ενέργειας – Διάγραμμα ειδικής ενέργειας

Η εξίσωση ενέργειας σε έναν ανοικτό αγωγό με μικρή σχετικά κλίση πυθμένα γράφεται:

$$H = z + y\,\alpha\frac{V^2}{2g} \tag{2.6}$$

Όπου,

H το ύψος ενέργειας,
z το υψόμετρο πυθμένα από το επίπεδο αναφοράς,
y το κατακόρυφο βάθος ροής,
V η μέση ταχύτητα του νερού στη διατομή,
α διορθωτικός συντελεστής λόγω ανομοιομορφίας της κατανομής της ταχύτητας και
g η επιτάχυνση της βαρύτητας.

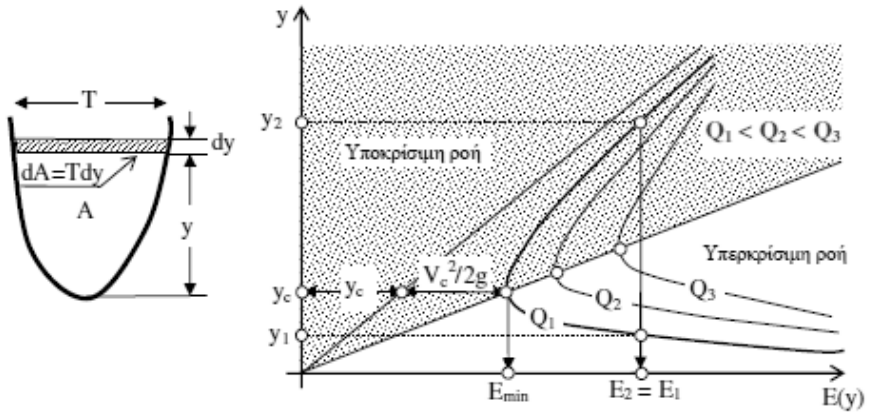
Όριζουμε σαν ειδική ενέργεια E μίας διατομής:

$$E = y + \alpha\frac{V^2}{2g} \tag{2.7}$$

Από την εξίσωση συνέχειας (2.1) και θεωρώντας έναν πρισματικό ανοικτό αγωγό με δεδομένη διατομή και παροχή, η εξίσωση της ειδικής ενέργειας σαν συνάρτηση του βάθους ροής είναι της μορφής:

$$E = E(y) = y + \alpha\frac{Q^2}{2gA^2(y)} = y + a\frac{Q^2}{2gA^2} \tag{2.8}$$

Από την παραπάνω σχέση, προκύπτει το διάγραμμα της ειδικής ενέργειας για σταθερή παροχή και μεταβαλλόμενο βάθος ροής όπως φαίνεται στο σχήμα 2.2.



Σχήμα 2.3: Διάγραμμα Ειδικής ενέργειας (ΠΗΓΗ: Σημειώσεις Παπανικολάου, 2017)

Άπο το διάγραμμα της ειδικής ενέργειας προκύπτει ότι η ειδική ενέργεια γίνεται ελάχιστη όταν η ροή είναι υπό κρίσιμες συνθήκες και ισχύει:

$$E_{min} = y_c + \frac{V^2}{2g} = y_c + \frac{gD_c}{2g} = y_c + \frac{D_c}{2} \tag{2.9}$$

Όπου,

y_c το κρίσιμο βάθος και

D_c το υδραυλικό βάθος που αντιστοιχεί στην κρίσιμη ροή.

2.4 Βαθμιαία μεταβαλλόμενη ροή

Στα προηγούμενα υποκεφάλαια έγινε θεωρητική ανάλυση της μόνιμης ροής, όπου το βάθος ροής παραμένει σταθερό κατά μήκος του αγωγού. Τέτοιες ροές όμως, παρατηρούνται μόνο σε μεγάλου μήκους πρισματικούς αγωγούς. Σε φυσικά υδατορεύματα ή τεχνητές διώρυγες υπάρχουν αλλαγές στην διατομή και στην κλίση πυθμένα με συνέπεια να παρατηρείται βαθμιαία μεταβολή στο βάθος ροής τους (Chaudhry, 2008).

Για την μελέτη αυτών των ροών θεωρούνται οι εξής παραδοχές:

1. Η καμπύλωση της ελεύθερης επιφάνειας είναι μικρή και η ροή θεωρείται πρακτικά παράλληλη σε κάθε διατομή.
2. Θεωρούμε ότι η κλίση της γραμμής ενέργειας S_f μπορεί να υπολογιστεί από την εξίσωση ισορροπίας δυνάμεων της ομοιόμορφης ροής για δεδομένο βάθος της ροής από την σχέση Manning.
3. Η κατά μήκος κλίση του πυθμένα είναι μικρή.
4. Ο συντελεστής τραχύτητας n είναι ανεξάρτητος από το βάθος ροής και σταθερός καθ΄ όλο το μήκος του αγωγού.

Διαφορίζοντας την εξίσωση ενέργειας (2.6) προκύπτει:

$$\frac{dH}{dx} = \frac{dz}{dx} + \frac{dy}{dx} + \frac{d\left(\alpha\frac{V^2}{2g}\right)}{dx} \tag{2.10}$$

Όπου,

H το ύψος ενέργειας,
z το υψόμετρο πυθμένα,
y το βάθος ροής,
V η ταχύτητα ροής του ρευστού,
α διορθωτικός συντελεστής και
g η επιτάχυνση της βαρύτητας.

Ορίζοντας και τις κλίσεις ενέργειας και πυθμένα αγωγού:

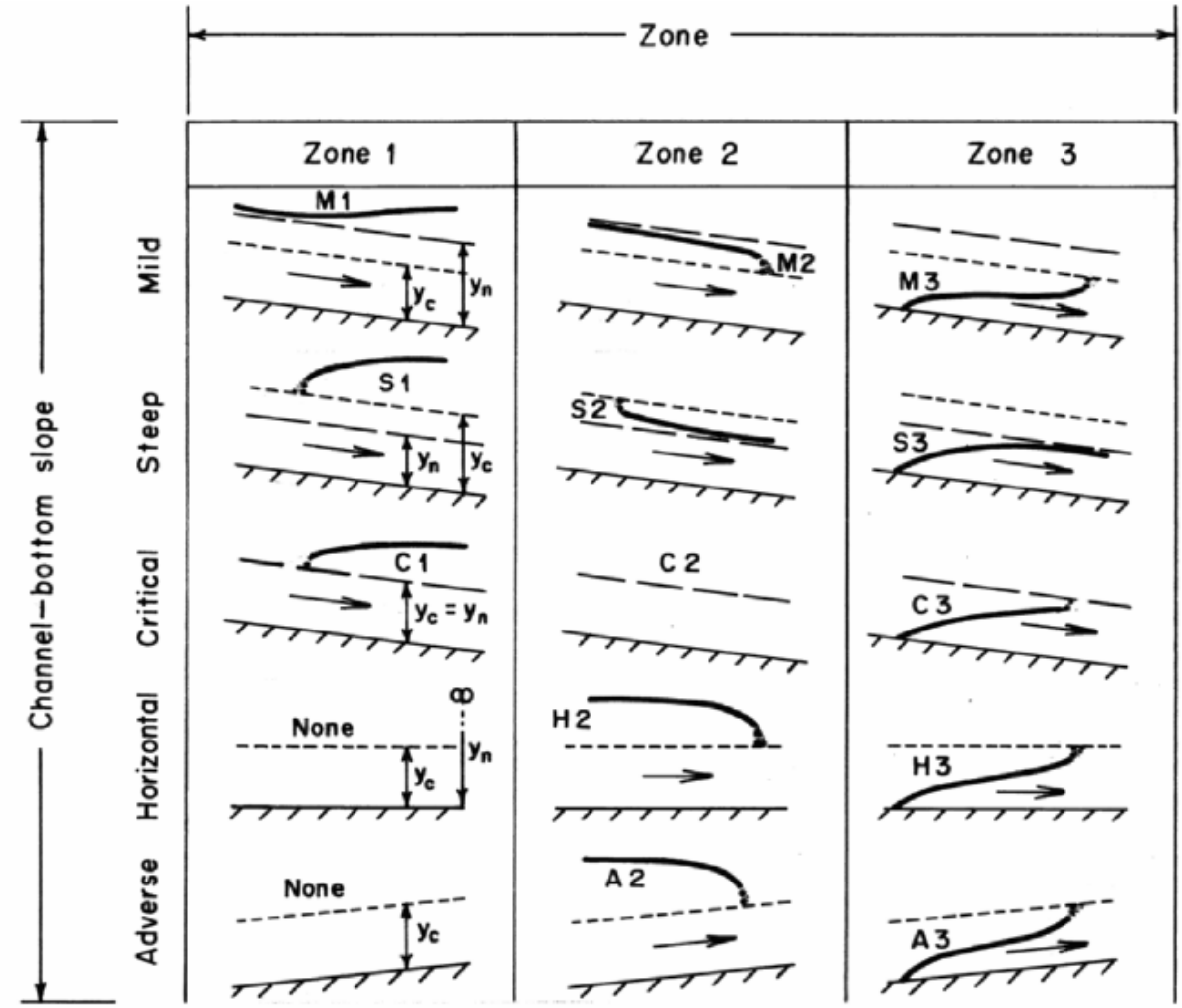
$$\frac{dH}{dx} = -S_f \text{ και } \frac{dz}{dx} = -S_0$$

προκύπτει η διαφορική εξίσωση της βαθμιαίας μεταβαλλόμενης ροής:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S_0 - S_f}{1 - Fr^2} \tag{2.11}$$

Όπου όταν $\frac{dy}{dx} = 0$ η ροή είναι ομοιόμορφη, όταν $\frac{dy}{dx} > 0$ υπάρχει ανύψωση της ροής και όταν $\frac{dy}{dx} < 0$ υπάρχει κατάπτωση της ροής.

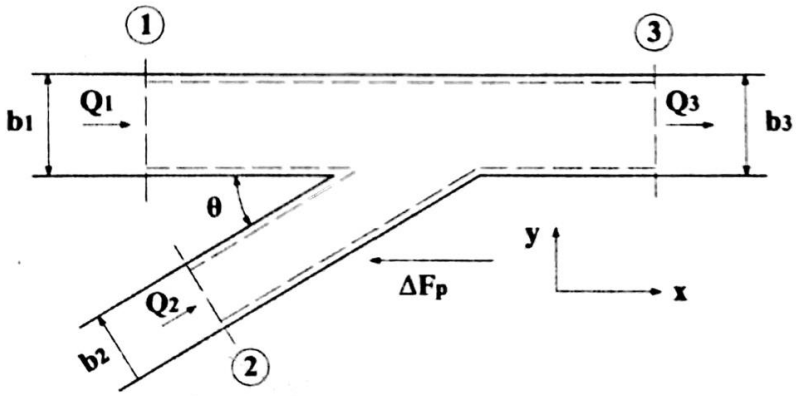
Από την παραπάνω σχέση (2.11) μπορούν να παραχθούν οι καμπύλες της ελεύθερης επιφάνειας (profiles) του αγωγού. Οι καμπύλες αυτές διαφέρουν ανάλογα με τον χαρακτηρισμό της ροής σε υποκρίσιμη, κρίσιμη και υπερκρίσιμη και διακρίνονται σε καμπύλες M, C, S αντίστοιχα. Επιπλέον, διακρίνονται καμπύλες και για ανάστροφη ροή καθώς και για ροή σε αγωγό μηδενικής κλίσης A, H αντίστοιχα. Στο παρακάτω σχήμα 2.4 φαίνονται οι καμπύλες για όλες τις περιπτώσεις βαθμιαίας μεταβαλλόμενης ροής.



Σχήμα 2.4: Μορφές καμπυλών ελεύθερης επιφάνειας για βαθμιαία μεταβαλλόμενη ροή (ΠΗΓΗ: Chaudhry, 2008).

2.5 Συμβολή αγωγών

Στις συμβολές ανοικτών αγωγών (Σχήμα 2.5) υπάρχει εν γένει σημαντική απώλεια ενέργειας και για το λόγο αυτό, η ανάλυση βασίζεται στην εξίσωση συνέχειας και κατά κανόνα στην εξίσωση ποσότητας κίνησης, σε κατάλληλα επιλεγμένο όγκο αναφοράς περί τη συμβολή.



Σχήμα 2.5: Συμβολή αγωγών (ΠΗΓΗ: Νουτσόπουλος κ.ά., 2010)

Αμελώντας τις τριβές και τη συνιστώσα της βαρύτητας στον όγκο αναφοράς του σχήματος 2.5 μεταξύ των διατομών 1, 2 και 3, η εξίσωση ποσότητας κίνησης κατά τον άξονα χ, ταυτιζόμενο με την κατεύθυνση της ροής στον κύριο αγωγό, γράφεται:

$$F_{p1} + F_{p2x} - F_{p3} - N_x = \rho(Q_3V_3 - Q_1V_1 - Q_2V_2) \tag{2.12}$$

Όπου,

F_{p2x} η δύναμη από υδροστατικές πιέσεις στις διατομές και

N_x η δύναμη από τα στερεά όρια.

Υποθέτοντας ότι κατά προσέγγιση είναι:

$$F_{p2x} = F_{p2}\cos\theta \approx \Delta F_p \approx N_x \tag{2.13}$$

Όπου,

ΔF_p η δύναμη λόγω διαφοράς πιέσεων στα τοιχώματα του συμβάλλοντος αγωγού.

Η εξίσωση (2.12) μπορεί να γραφτεί:

$$F_{p1} + \rho Q_1V_1 + \rho Q_2V_2\cos\theta = F_{p3} + \rho Q_3V_3 \tag{2.14}$$

και αντικαθιστώντας $V = Q/A$ προκύπτει:

$$\left(\frac{Q_1^2}{gA_1} + \bar{y}_1A_1\right) + \left(\frac{Q_2^2}{gA_2}cos\theta\right) = \left(\frac{Q_3^2}{gA_3} + \bar{y}_3A_3\right) \tag{2.15}$$

Όμως τα αθροίσματα $\left(\frac{Q_\iota^2}{gA_\iota} + \bar{y}_\iota A_\iota\right)$ παριστάνουν την ειδική δύναμη, ενώ ο όρος $\left(\frac{Q_2^2}{gA_2}\right)$ παριστά την ειδική δύναμη που οφείλεται μόνο στην ποσότητα κίνησης. Έτσι η εξίσωση (2.15) γράφεται:

$$M_1 + M_2{}' \cos\theta = M_3 \tag{2.16}$$

Όπου,

$\bar{y}$ η απόσταση του κέντρου βάρους της υγρής διατομής,
M η ειδική δύναμη και
M' η ειδική δύναμη που οφείλεται μόνο στην ποσότητα κίνησης.

Τέλος με βάση και την εξίσωση συνέχειας (2.1), που εδώ γράφεται:

$$\mathrm{Q}_1 + \mathrm{Q}_2 = \mathrm{Q}_3 \tag{2.17}$$

αν είναι γνωστές οι μορφές των διατομών και οι συνθήκες στους κατάντη αγωγούς, το σύστημα των εξισώσεων (2.16) και (2.17) επιτρέπει τον υπολογισμό των χαρακτηριστικών της ροής κατάντη της συμβολής.

Για να υπάρχει λύση στο πρόβλημα, θα πρέπει το άθροισμα $M_1 + M'_{2x}$ στο αριστερό μέλος της εξίσωσης (2.16), που εξαρτάται αποκλειστικά από τις συνθήκες στους συμβάλλοντες αγωγούς, να είναι μεγαλύτερο ή ίσο από την ελάχιστη τιμή $M_{3\kappa\rho}$, που αντιστοιχεί στο κρίσιμο βάθος στη διατομή κατάντη της συμβολής. Στην περίπτωση που ισχύει $M_1 + M'_{2x} < M_{3\kappa\rho}$, τότε η συμβολή δεν μπορεί να λειτουργήσει με τις δοθείσες συνθήκες και η ροή ανάντη της συμβολής διαταράσσεται.

Στην περίπτωση της κάθετης συμβολής των αγωγών, η ειδική δύναμη του συμβάλλοντος αγωγού μηδενίζεται. Όταν η ροή διαταράσσεται, τότε ανάντη της συμβολής αυξάνεται το βάθος ροής έτσι ώστε να ισχύει η σχέση (2.16). Έτσι, αφού υπολογίσουμε τα χαρακτηριστικά της ροής κατάντη της συμβολής και παρατηρήσουμε ότι η ροή διαταράσσεται, μπορούμε να υπολογίσουμε το βάθος ροής ανάντη της συμβολής.

3 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ

3.1. Γενικά

Δεδομένου ότι η επίλυση της μη μόνιμης ροής είναι αρκετά περίπλοκη και δεν μπορεί να επιλυθεί αλγεβρικά, οι μελετητές χρησιμοποιούν ποικίλες και διαφορετικές μεθόδους για να προσεγγίσουν τα χαρακτηριστικά της ροής. Μετά την ανάπτυξη των μερικών διαφορικών εξισώσεων της ορμής και της ενέργειας από τον Γάλλο μηχανικό Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant το 1871, έγιναν αρκετές μελέτες για την επίλυση αυτών με αριθμητικές μεθόδους. Οι αριθμητικές αυτές μέθοδοι μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε τρείς μεγάλες κατηγορίες, στα ρητά σχήματα (Explicit Methods), στις χαρακτηριστικές καμπύλες (Methods of Characteristic) και στα πεπλεγμένα σχήματα (Implicit Methods).

Αναφορικά οι Stoker 1957, Chow, 1959, Dronkers, 1964, Henderson, 1966, Strelkoff, 1969, Yen 1973, Liggett, 1975, Cunge, et al., 1980, Lai, 1986 και οι Abbott και Bansco, 1990 μελέτησαν ποικίλες και διαφορετικές αριθμητικές μεθόδους επίλυσης των εξισώσεων Saint Venant.

Οι J.J. Stoker, E. Isaacson και A. Troesch ανέπτυξαν και εφάρμοσαν μια αριθμητική μέθοδο επίλυσης πλυμμηρικών κυμάτων (Stoker 1953, Isaacson *et al*. 1954, 1956). Ακολούθησαν, στα τέλη της δεκαετίας του 1950, σημαντικές μελέτες πάνω στην αριθμητική επίλυση των μη μόνιμων ροών από τους A. Preissmann and J.A. Cunge. Τα αριθμητικά σχήματα που χρησιμοποιούνται για την επίλυση της ροής στην παρούσα εργασία είναι το ρητό σχήμα Lax Diffusive και το Hartree Scheme με χρήση χαρακτηριστικών καμπυλών. Το Lax Diffusive Scheme αναπτύχθηκε αρχικά από τον J. J. Stoker και μετέπειτα από τους J. Keller και P. Lax. Η τελική μορφή του ρητού αριθμητικού σχήματος επίλυσης της μη μόνιμης ροής, που καλείται σήμερα Lax Diffusive Scheme, αναπτύχθηκε από τους Liggett και Cunge (1975). Η μέθοδος των χαρακτηριστικών καμπυλών είναι μια μαθηματική τεχνική για την επίλυση συστημάτων διαφορικών εξισώσεων, όπως οι εξισώσεις Saint Venant. Η μαθηματική αυτή τεχνική επίλυσης μερικών διαφορικών εξισώσεων εφευρέθηκε από τον Γάλλο μαθηματικό Gaspard Monge και χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τον Βέλγο μηχανικό Junius Massau (1889, 1900) και μετέπειτα από τον Craya (1946) για την ανάλυση κυμάτων (surges) σε ανοιχτούς αγωγούς. Η μέθοδος των χαρακτηριστικών καμπυλών χρησιμοποιήθηκε για την ανάλυση πλημμυρικού κύματος από τους Isaacson et al., 1954. Τέλος, ο Hartree ανέλυσε την μέθοδο καθορισμένων διαστημάτων (Method of Specified Intervals) χρησιμοποιώντας την μαθηματική μέθοδο των χαρακτηριστικών καμπυλών και κάνοντας χρήση παρεμβολής για την εκτίμηση των μερικών διαφορικών εξισώσεων.

4 ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΗ ΜΟΝΙΜΗΣ ΡΟΗΣ

Στο κεφάλαιο 2 αναλύθηκε η μόνιμη ροή, δηλαδή η ροή στην οποία το βάθος ροής σε μια διατομή του αγωγού παραμένει αμετάβλητο στον χρόνο. Στις μη μόνιμες ροές στους ανοιχτούς αγωγούς, η ταχύτητα και το βάθος ροής μεταβάλλονται συναρτήσει του χρόνου και του χώρου (Chanson, 2004). Η μη μόνιμη ροή στους ανοικτούς αγωγούς πρακτικά εμφανίζεται σαν μετάδοση κυμάτων στην ελεύθερη επιφάνεια, που σε αντίθεση με τα θαλάσσια κύματα, χαρακτηρίζεται από μεταφορά μάζας (Νουτσόπουλος κ.ά., 2010).
Επειδή στη φύση οι ροές που παρατηρούνται μεταβάλλουν τα χαρακτηριστικά τους στον χρόνο, χαρακτηρίζονται ως μη μόνιμες. Αυτό μπορεί να οφείλεται σε φυσικές διεργασίες, σε ανθρώπινες παρεμβάσεις ή λόγω ατυχημάτων. Για την μελέτη της μη μόνιμης ροής χρησιμοποιούνται μερικές διαφορικές εξισώσεις όπου οι εξαρτώμενες μεταβλητές είναι συναρτήσει περισσοτέρων από μίας εξαρτημένης μεταβλητής (χρόνος και χώρος). Μια αναλυτική λύση των εξισώσεων αυτών δεν είναι εφικτή, πέρα από απλοποιημένες περιπτώσεις και για το λόγο αυτό, εφαρμόζονται αριθμητικές λύσεις (Chaudhry, 2008).

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο, περιγράφονται τα χαρακτηριστικά της μη μόνιμης ροής. Επιπλέον, γίνεται ανάλυση στην αριθμητική επίλυση των εξισώσεων που περιγράφουν την μη μόνιμη ροή. Συγκεκριμένα, περιγράφονται αναλυτικά οι δύο μέθοδοι επίλυσης της μη μόνιμης ροής, η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών με το ρητό σχήμα υπολογισμού (Lax Diffusive Shceme) και η μέθοδος των χαρακτηριστικών καμπυλών (Method of Characteristic), όπως αυτά περιγράφονται στον Akan, 2006 και στον Chaudhry, 2008 αντίστοιχα.

4.1 Εξισώσεις Saint-Venant

Η εξίσωση συνέχειας για μονοδιάστατη μη μόνιμη ροή σε ροή με ελεύθερη επιφάνεια γράφεται:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \tag{4.1}$$

Όπου:

A το εμβαδόν της διατομής,
Q η παροχή,
t ο χρόνος και
x η απόσταση στην διεύθυνση της ροής.

Αντίστοιχα η εξίσωση της ορμής γράφεται:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial(\beta QV)}{\partial x} + gA\frac{\partial y}{\partial x} + gAS_f - gAS_0 = 0 \tag{4.2}$$

Όπου,

B συντελεστής συνόρθωσης ποσότητας κίνησης,
V η μέση ταχύτητα ροής της διατομής,
g η επιτάχυνση της βαρύτητας,
y το βάθος ροής,
S_f η κλίση της γραμμής ενέργειας και
S_0 η κατά μήκος κλίση του πυθμένα του αγωγού.

Θεωρώντας ότι ο συντελεστής συνόρθωσης ποσότητας κίνησης ισούται με τη μονάδα ($\beta = 1$) για έναν πρισματικό αγωγό και λαμβάνοντας υπόψη ότι η μέση ταχύτητα ροής είναι ίση με V=Q/A, τότε η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial\left(\frac{Q^2}{A}\right)}{\partial x} + gA\frac{\partial y}{\partial x} + gAS_f - gAS_0 = 0 \tag{4.3}$$

Οι εξισώσεις (4.1) και (4.3) ονομάζονται εξισώσεις Saint-Venant και περιγράφουν την μονοδιάστατη ροή σε ανοικτό αγωγό και βασίζονται στις εξής παραδοχές.

i. Η ροή είναι μονοδιάστατη.
ii. Η κλίση του πυθμένα είναι μικρή και η κατανομή των πιέσεων είναι υδροστατική.
iii. Η αντίσταση στην ροή είναι ίδια με την μόνιμη ροή για το ίδιο βάθος και ταχύτητα.
iv. Η πυκνότητα του υγρού είναι σταθερή
v. Ο αγωγός έχει καθορισμένα όρια και η μεταφορά φερτών είναι μηδενική

Η κλίση της γραμμής ενέργειας προκύπτει από τη σχέση Manning και για μη μόνιμη ροή γράφεται:

$$S_f = \frac{V|V|n^2}{R^{4/3}} = \frac{Q|Q|n^2}{A^2R^{4/3}} \tag{4.4}$$

Όπου,

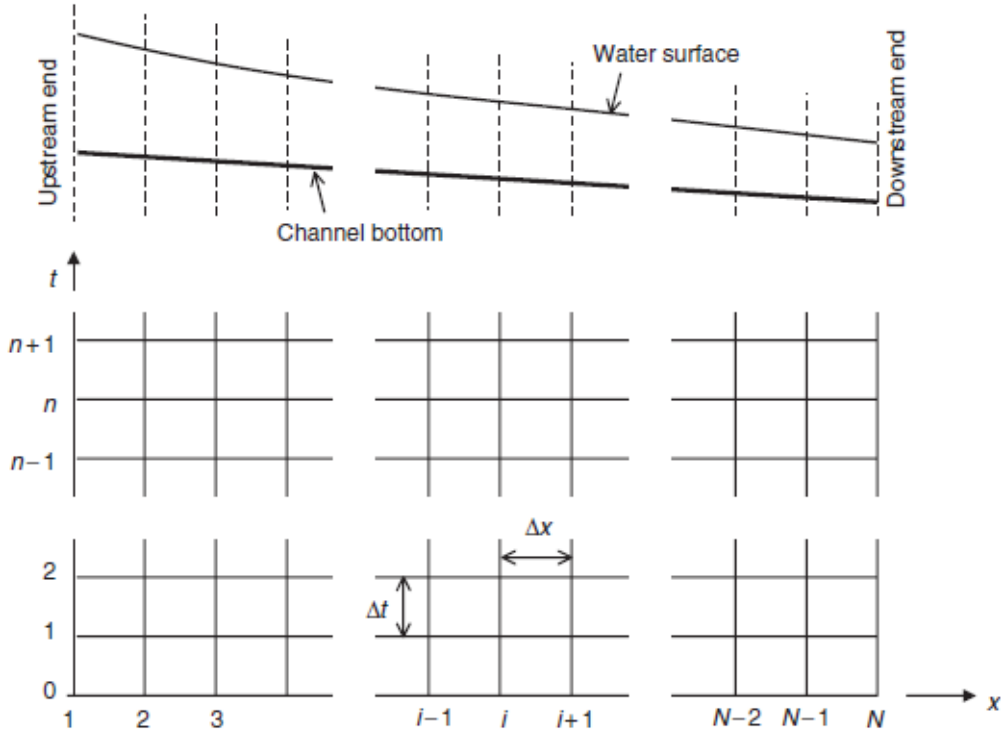
n ο συντελεστής τραχύτητας Manning και
R η υδραυλική ακτίνα.

4.2 Αριθμητικές μέθοδοι επίλυσης μη μόνιμης ροής

Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω η αναλυτική λύση των εξισώσεων Saint-Venant είναι ανέφικτη και επομένως χρησιμοποιούνται αριθμητικές μέθοδοι για τον σκοπό αυτό. Για την επίλυση των εξισώσεων Saint-Venant, με χρήση αριθμητικών μεθόδων, χρειάζεται ο καθορισμός μίας αρχικής συνθήκης και δύο συνοριακών συνθηκών. Η αρχική συνθήκη περιγράφεται απ΄ τον καθορισμό της αρχικής παροχής Q σε όλο τον αγωγό την χρονική στιγμή $t = 0$ και θεωρώντας ομοιόμορφη ροή.

4.2.1 Μέθοδος πεπερασμένων διαφορών – Ρητό σχήμα υπολογισμού

Για την εφαρμογή μίας αριθμητικής μεθόδου πρέπει αρχικά ο αγωγός να διακριτοποιηθεί σε έναν αριθμό μικρότερων τμημάτων όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.1 (χωρική διακριτοποίηση). Επίσης, διακριτοποιείται και η μεταβλητή του χρόνου (χρονική διακριτοποίηση), με αποτέλεσμα να προκύπτει ένας υπολογιστικός κάναβος στον οποίο οι κάθετες γραμμές αντιπροσωπεύουν τις θέσεις κατά μήκος του αγωγού και αντίστοιχα οι οριζόντιες γραμμές τις χρονικές στιγμές. Με τη βοήθεια αυτού του κανάβου, μπορούν στη συνέχεια να εκφραστούν οι διαφορικές εξισώσεις ως εξισώσεις πεπερασμένων διαφορών. Επισημαίνεται ότι οι αριθμητικές μέθοδοι αναζητούν λύσεις στους κόμβους όπου τέμνονται οι κάθετες και οριζόντιες γραμμές του κανάβου.



Σχήμα 4.1: Υπολογιστικό πλέγμα (Κάναβος) πεπερασμένων διαφορών (ΠΗΓΗ: Akan, 2006)

Στο Σχήμα 4.1 η οριζόντια γραμμή 0 αντιπροσωπεύει τη χρονική στιγμή μηδέν, στην οποία οι συνθήκες ροής είναι γνωστές σε όλους τους κόμβους από την αρχική συνθήκη. Επίσης, οι κάθετες γραμμές 1 και N αντιπροσωπεύουν το άνω και κάτω άκρο του αγωγού, αντίστοιχα. Στους κόμβους αυτών των γραμμών εφαρμόζονται οι συνοριακές συνθήκες. Γνωρίζοντας τις συνθήκες ροής τη χρονική στιγμή μηδέν ($t = 0$), το πρώτο βήμα υπολογισμών προσδιορίζει τις συνθήκες ροής στους κόμβους της οριζόντιας γραμμής 1, δηλαδή τη χρονική στιγμή $t = 1\,\Delta t$. Στη συνέχεια, προσδιορίζονται οι συνθήκες ροής στην οριζόντια γραμμή 2. Η ίδια διαδικασία επαναλαμβάνεται και για τα επόμενα χρονικά βήματα. Εν γένει, οι μεταβλητές της ροής, Q_i^{n+1} και , y_i^{n+1} στο χρονικό βήμα υπολογίζονται με βάση τις αντίστοιχες μεταβλητές Q_i^n και , y_i^n του προηγούμενου χρονικού βήματος, n, όπου $i = 1,2,\dots,N$. Σημειώνεται ότι

στις παραπάνω μεταβλητές ο κάτω δείκτης δηλώνει το χωρικό βήμα και αντίστοιχα ο άνω δείκτης το χρονικό.

Οι μερικές διαφορικές εξισώσεις Saint Venant μπορούν να εκφραστούν υπό τη μορφή πεπερασμένων διαφορών, χρησιμοποιώντας τα αναπτύγματα σειρών Taylor. Κάνοντας όμως αυτή τη μετατροπή προκύπτουν κάποια αριθμητικά σφάλματα, λόγω αποκοπής όρων από τα αναπτύγματα των σειρών Taylor. Τα αριθμητικά σφάλματα σχετίζονται με το μέγεθος που επιλέγεται για τα χωρικά και χρονικά διαστήματα, όπως επίσης και από την ίδια τη μετατροπή του συνεχούς πεδίου ορισμού της χωρικής και χρονικής μεταβλητής σε ένα διακριτό πεδίο ορισμού, που δημιουργείται από τον υπολογιστικό κάναβο.

Για να είναι αποδεκτές οι λύσεις που θα προκύψουν από την αριθμητική μέθοδο, πρέπει η μέθοδος να έχει συνοχή, ευστάθεια, και να συγκλίνει σε κάποια αριθμητικά αποτελέσματα. Μία αριθμητική μέθοδος έχει συνοχή όταν οι εξισώσεις πεπερασμένων διαφορών προσεγγίζουν τις διαφορικές εξισώσεις, καθώς τα χωρικά και χρονικά διαστήματα τείνουν στο μηδέν ($\Delta x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0$). Ευσταθής χαρακτηρίζεται η αριθμητική μέθοδος όταν τα σφάλματα που προκύπτουν από τις στρογγυλοποιήσεις και την αποκοπή όρων δεν συσσωρεύονται σε τέτοιο βαθμό που να καθιστούν αδύνατη τη σύγκλιση της μεθόδου. Τέλος, η αριθμητική μέθοδος συγκλίνει όταν τα αποτελέσματα της μεθόδου προσεγγίζουν τις πραγματικές λύσεις των διαφορικών εξισώσεων καθώς πυκνώνει η χωρική και χρονική διακριτοποίηση.

Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, κατά την αριθμητική επίλυση αναζητούνται σε κάθε χρονική στιγμή $n+1$, οι άγνωστοι Q_i^{n+1} και y_i^{n+1} για $i = 1, \dots, N$, με γνωστά τα αντίστοιχα μεγέθη της προηγούμενης χρονικής στιγμής n, δηλαδή τα Q_i και y_i για $i = 1, \dots, N$. Στα ρητά αριθμητικά σχήματα οι συνθήκες ροής σε κάθε κόμβο του υπολογιστικού πλέγματος προκύπτουν από την επίλυση μη πεπλεγμένων αλγεβρικών εξισώσεων. Όμως, για την επίλυση τους πρέπει πρώτα να εκτιμηθούν οι όροι των εξισώσεων στις οποίες βασίζεται το αριθμητικό σχήμα, δηλαδή οι όροι των εξισώσεων Saint-Venant. Για το σκοπό αυτό μπορούν να χρησιμοποιηθούν τα αναπτύγματα σειρών Taylor:

$$\frac{\partial A}{\partial t} \approx \frac{A_i^{n+1} - \left(\frac{(A_{i+1}^n + A_{i-1}^n)}{2}\right)}{\Delta t} \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} \approx \frac{Q_i^{n+1} - \left(\frac{(Q_{i+1}^n + Q_{i-1}^n)}{2}\right)}{\Delta t} \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \approx \frac{Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n}{2\Delta x} \tag{4.7}$$

$$\frac{\partial\left({Q^2}/{A}\right)}{\partial x} \approx \frac{\left[\left(Q_{i+1}^n\right)^2 / A_{i+1}^n\right] - \left[\left(Q_{i-1}^n\right)^2 / A_{i-1}^n\right]}{2\Delta x} \tag{4.8}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} \approx \frac{y_{i+1}^{n} - y_{i-1}^{n}}{2\Delta x} \tag{4.9}$$

$$A \approx \frac{A_{i+1}^{n} + A_{i-1}^{n}}{2} \tag{4.10}$$

$$AS_f = \frac{A_{i+1}^{n} S_{f_{i+1}}^{n} + A_{i-1}^{n} S_{f_{i-1}}^{n}}{2} \tag{4.11}$$

Αντικαθιστώντας τς παραπάνω σχέσεις στις εξισώσεις (4.1) και (4.3) και λύνοντας ως προς τους αγνώστους Q_i^{n+1} και A_i^{n+1}, προκύπτει η τελική έκφραση των εξισώσεων που καλούνται να υπολογιστούν από το ρητό αριθμητικό σχήμα:

$$A_i^{n+1} = \frac{A_{i+1}^{n} + A_{i-1}^{n}}{2} - \frac{\Delta t\left(Q_{i+1}^{n} - Q_{i-1}^{n}\right)}{2\Delta x} \tag{4.12}$$

$$Q_i^{n+1} = \frac{\left(Q_{i+1}^{n} + Q_{i-1}^{n}\right)}{2} - \Delta t \frac{\left[\frac{\left(Q_{i+1}^{n}\right)^2}{A_{i+1}^{n}}\right] - \left[\frac{\left(Q_{i-1}^{n}\right)^2}{A_{i-1}^{n}}\right]}{2\Delta x} - g\Delta t \frac{\left(A_{i+1}^{n} + A_{i-1}^{n}\right)}{2}\left(\frac{y_{i+1}^{n} - y_{i-1}^{n}}{2\Delta x} - S_0\right) - g\Delta t \frac{A_{i+1}^{n} S_{f_{i+1}}^{n} + A_{i-1}^{n} S_{f_{i-1}}^{n}}{2} \tag{4.13}$$

Έχοντας υπολογίσει το εμβαδόν της υγρής διατομής A_i^{n+1}, μπορεί να προσδιοριστεί στη συνέχεια το βάθος ροής y_i^{n+1} από τη γεωμετρία της διατομής. Για τον υπολογισμό των κλίσεων της γραμμής ενέργειας $S_{f_i}^{n+1}$, τη χρονική στιγμή $t = n$ για $i = 1, \dots, N$, χρησιμοποιείται η σχέση του Manning με τη μορφή της εξίσωσης (4.4), με γνωστά τα μεγέθη Q_i^{n+1} και y_i^{n+1}. Τονίζεται ότι οι σχέσεις (4.12) και (4.13) μπορούν να χρησιμοποιηθούν μόνο για την εύρεση των αγνώστων μεταβλητών στους ενδιάμεσους χωρικούς κόμβους. Στους συνοριακούς κόμβους ακολουθείται μία διαφορετική προσέγγιση για την εκτίμηση των μερικών παραγώγων των εξισώσεων Saint-Venant.

Συγκεκριμένα στην είσοδο του αγωγού, δηλαδή για $i = 1$, θα είναι:

$$\frac{\partial A}{\partial x} \approx \frac{A_i^{n+1} - A_i^{n}}{\Delta t} = \frac{A_1^{n+1} - A_1^{n}}{\Delta t} \tag{4.14}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \approx \frac{Q_{i+1}^{n} - Q_i^{n}}{\Delta x} = \frac{Q_2^{n} - Q_1^{n}}{\Delta x} \tag{4.15}$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση συνέχειας (4.1) τους παραπάνω όρους και λύνοντας ως προς τον άγνωστο A_1^{n+1}, έχουμε:

$$A_1^{n+1} = A_1^n - \frac{\Delta t(Q_2^n - Q_1^n)}{\Delta x} \tag{4.16}$$

Όσον αφορά την παροχή στην είσοδο του αγωγού Q_1^{n+1}, λαμβάνεται απευθείας από τη συνοριακή συνθήκη (υδρογράφημα εισόδου).

Αντίστοιχα, στην έξοδο του αγωγού, δηλαδή για $i = N$, οι μερικές παράγωγοι εκτιμώνται ως εξής:

$$\frac{\partial A}{\partial x} \approx \frac{A_i^{n+1} - A_i^n}{\Delta t} = \frac{A_N^{n+1} - A_N^n}{\Delta t} \tag{4.17}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \approx \frac{Q_{i+1}^n - Q_i^n}{\Delta x} = \frac{Q_N^n - Q_{N-1}^n}{\Delta x} \tag{4.18}$$

και αντικαθιστώντας στην εξίσωση συνέχειας (4.1) προκύπτει ότι:

$$A_N^{n+1} = A_N^n - \frac{\Delta t(Q_N^n - Q_{N-1}^n)}{\Delta x} \tag{4.19}$$

Έχοντας ορίσει ως κατάντη συνοριακή συνθήκη η ροή να είναι ομοιόμορφη ($S_f = S_0$), η παροχή εξόδου, Q_N^{n+1}μπορεί να υπολογιστεί από την σχέση του Manning:

$$Q_N^{n+1} = \frac{A_N^{n+1}}{n}\left(\frac{A_N^{n+1}}{P_N^{n+1}}\right)^{2/3} S_0{}^{1/2} \tag{4.20}$$

Το ρητό αριθμητικό σχήμα που περιγράφηκε ονομάζεται και σχήμα διάχυσης του Lax (Lax diffusive scheme), το οποίο για να είναι ευσταθές πρέπει να ικανοποιείται το κριτήριο Courant σε όλους τους κόμβους του υπολογιστικού κανάβου, δηλαδή να ισχύει:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{|V \pm c|} \tag{4.21}$$

Ή αλλιώς εκφράζοντας ως προς τον αριθμό Courant:

$$C_n = \frac{|V_i^n| \pm c_i^n}{\Delta x/\Delta t} \leq 1 \text{ για } i = 1, \ldots, N \tag{4.22}$$

Όπου,

C_n ο αριθμός Courant,

c η ταχύτητα διάδοσης κύματος ίση με $c = \sqrt{(gD)}$ και

D το υδραυλικό βάθος της διατομής.

Από την σχέση (4.21) προκύπτει ότι η χρονική διακριτοποίηση εξαρτάται από τη χωρική διακριτοποίηση, τη μέση ταχύτητα ροής καθώς και την ταχύτητα του κύματος, οι οποίες κυμαίνονται συναρτήσει του βάθους ροής. Όμως, επειδή το βάθος ροής μπορεί να διαφοροποιηθεί σημαντικά κατά τη διάρκεια των υπολογισμών, μπορεί να χρειαστεί να μειωθεί το χρονικό διάστημα Δt, για να είναι ευσταθές το αριθμητικό σχήμα.

4.2.2 Μέθοδος χαρακτηριστικών καμπυλών

Μια ευρέως διαδεδομένη μέθοδος υπολογισμού των χαρακτηριστικών της ροής είναι η μέθοδος των χαρακτηριστικών καμπυλών. Η μέθοδος αυτή είναι χρήσιμη για την κατανόηση της διάδοσης ενός κύματος και για την ανάπτυξη των συνοριακών συνθηκών στην επίλυση της μη μόνιμης ροής με αριθμητικά σχήματα.

Οι εξισώσεις συνέχειας (4.1) και ποσότητας κίνησης (4.3) γράφονται στην μορφή:

$$\frac{\partial y}{\partial t} + D_h \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial y}{\partial x} = 0 \tag{4.23}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial y}{\partial x} = g\left(S_0 - S_f\right) \tag{4.24}$$

Όπου,

V η μέση ταχύτητα ροής,
y το βάθος ροής,
D_h το υδραυλικό βάθος,
S_0 η κλίση πυθμένα και
S_f η κλίση γραμμής ενέργειας.

Με κατάλληλους μαθηματικούς χειρισμούς στις παραπάνω εξισώσεις καταλήγουμε στις σχέσεις:

$$\frac{DV}{Dt} + \frac{g}{c}\frac{Dy}{Dt} = g\left(S_0 - S_f\right) \tag{4.25}$$

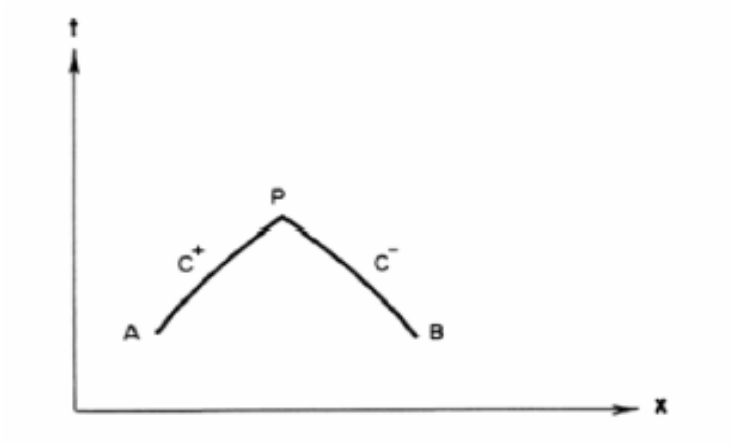
$$\frac{dx}{dt} = V + c \tag{4.26}$$

Και παρομοίως,

$$\frac{DV}{Dt} - \frac{g}{c}\frac{Dy}{Dt} = g\left(S_0 - S_f\right) \tag{4.27}$$

$$\frac{dx}{dt} = V - c \tag{4.28}$$

Επισημαίνεται, ότι η σχέση (4.25) ισχύει αν και μόνο αν ικανοποιείται η σχέση (4.26) και αντίστοιχα, η σχέση (4.27) ισχύει αν ικανοποιείται η (4.28). Οι σχέσεις (4.26) και (4.28) εκφράζουν δύο οικογένειες χαρακτηριστικών καμπυλών, τις θετικές χαρακτηριστικές καμπύλες C^+ και τις αρνητικές χαρακτηριστικές C^- - αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.2. Οι εξισώσεις (4.25) και (4.27) ονομάζονται εξισώσεις συμβατότητας. Σκοπός αυτών των μαθηματικών τροποποιήσεων, των εξισώσεων Saint-Venant, είναι η απαλοιφή της ανεξάρτητης μεταβλητής x από τις αρχικές εξισώσεις και η μετατροπή της στις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις.



Σχήμα 4.2: Θετικές και αρνητικές χαρακτηριστικές καμπύλη (ΠΗΓΗ: Chaudhry, 2008).

Παρόλο που οι εξισώσεις Saint-Venant ισχύουν για κάθε χρονική και χωρική στιγμή και θέση, οι εξισώσεις (4.25) και (4.27) ισχύουν μόνο κατά μήκος των χαρακτηριστικών καμπυλών.

Πολλαπλασιάζοντας με dt και ολοκληρώνοντας τις σχέσεις κατά μήκος των χαρακτηριστικών AP και PB, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.2, προκύπτουν οι τελικές εξισώσεις επίλυσης της ροής στο πεδίο x, t.

$$V_P - V_A + \left(\frac{g}{c}\right)_A (y_P - y_A) = g\left(S_0 - S_f\right)_A (t_P - t_A) \tag{4.29}$$

και

$$V_P - V_B - \left(\frac{g}{c}\right)_B (y_P - y_B) = g\left(S_0 - S_f\right)_B (t_P - t_B) \tag{4.30}$$

Οι παραπάνω σχέσεις μπορούν να γραφτούν:

$$V_P = C_P - C_A y_P \tag{4.31}$$

$$V_P = C_n + C_B y_P \tag{4.32}$$

Όπου,

$$C_P = V_A + C_A y_A + g\left(S_0 - S_f\right)_A (t_P - t_A) \tag{4.33}$$

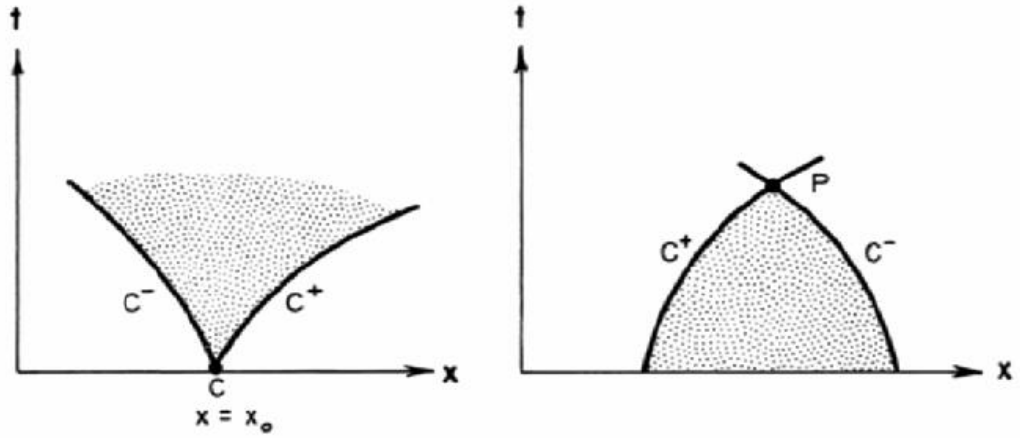
$$C_n = V_B - C_B y_B + g\left(S_0 - S_f\right)_B (t_P - t_B) \tag{4.34}$$

$$C = \frac{g}{c} \tag{4.35}$$

Σημειώνεται, ότι το C_P και το C_n παίρνουν σταθερή τιμή στο χρονικο διάστημα $(t_P - t_A)$ και $(t_P - t_B)$.
Με βάση τις παραπάνω σχέσεις, αν γνωρίζουμε την ταχύτητα ροής V και το βάθος ροής στα σημεία A και B μπορούμε να τα υπολογίσουμε τα αντίστοιχα μεγέθη και για το σημείο P.

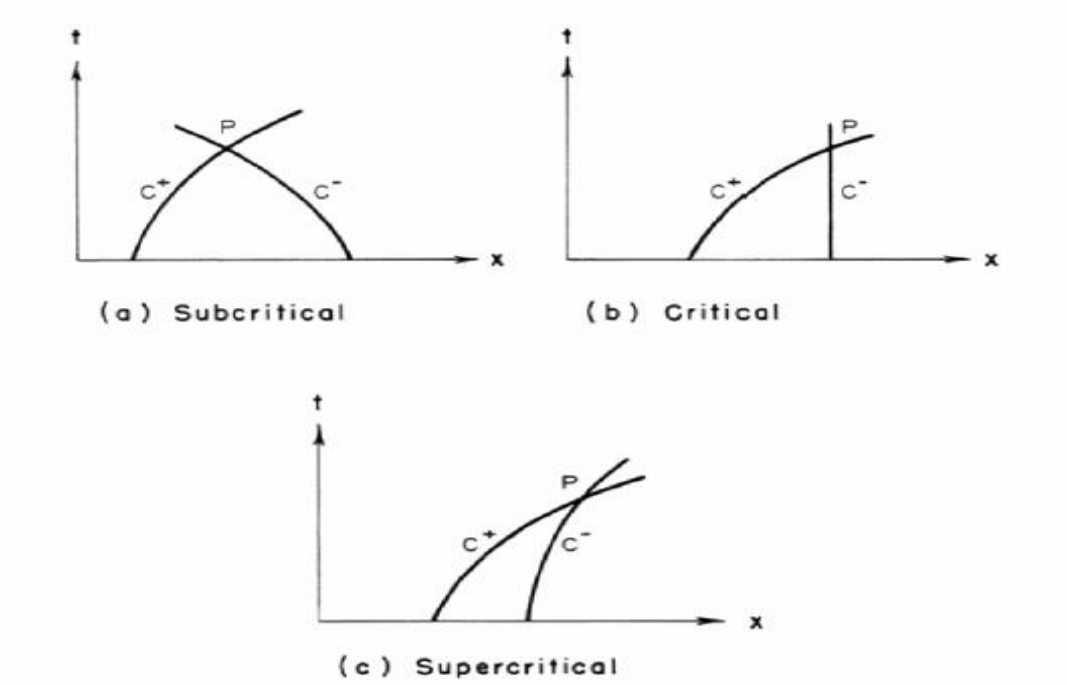
4.2.2.1 Φυσική σημασία χαρακτηριστικών καμπυλών

Προηγουμένως, καθορίστηκαν οι χαρακτηριστικές καμπύλες και πως αυτές μπορούν να σχεδιαστούν στο πεδίο x, t από τις σχέσεις (4.24) και (4.26). Υποθέτοντας μια μικρή διαταραχή σε μία ροή, αυτή μπορεί να διαδοθεί και στις δύο διευθύνσεις σε περίπτωση υποκρίσιμης ροής και μόνο κατάντη σε περίπτωση κρίσιμης. Το μέτρο της ταχύτητας διάδοσης με την οποία η διαταραχή διαδίδεται είναι ίσο με $V \pm c$. Σχεδιάζοντας την διάδοση της διαταραχής στο πεδίο x, t και υποθέτοντας ότι η διαταραχή λαμβάνει χώρα την χρονικη στιγμή $t = 0$ στην θέση $x = x_0$ στο σημείο C, η διαταραχή επηρεάζει την γραμμοσκιασμένη περιοχή, όπως αυτή φαίνεται στο σχήμα 4.3. Αυτή η περιοχή ονομάζεται ζώνη επιρροής. Η καμπύλη που αναφέρεται στην κατάντη διάδοση της διαταραχής ορίζεται από την θετική χαρακτηριστική καμπύλη και αντίστοιχα για την ανάντη, η αρνητική χαρακτηριστική καμπύλη. Οποιοδήποτε σημείο εκτός της ζώνης επιρροής δεν επηρεάζεται από την διάδοση της διαταραχής. Σχεδιάζοντας τις χαρακτηριστικές καμπύλες που τέμνουν το σημείο P ορίζεται η γραμμοσκιασμένη περιοχή η οποία επηρεάζει την ροή στο σημείο P. Αυτή η περιοχή ονομάζεται ζώνη εξάρτησης.



Σχήμα 4.3: Ζώνη επιρροής και ζώνη εξάρτησης (ΠΗΓΗ: Chaudhry, 2008).

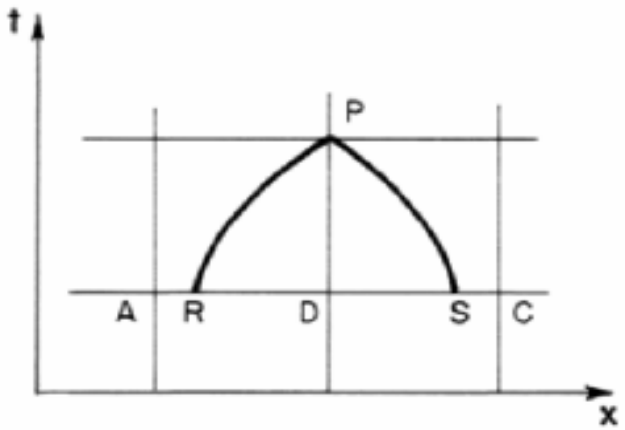
Αν η ροή είναι υποκρίσιμη, τότε οι κατευθύνσεις τών χαρακτηριστικών καμπυλών είναι και προς τα ανάντη και προς τα κατάντη. Αν η ροή είναι κρίσιμη, τότε η κατεύθυνση της μίας χαρακτηριστικής θα είναι κάθετη στο πεδίο και της άλλης χαρακτηριστικής θα είναι προς τα κατάντη. Τέλος, σε υπερκρίσιμες ροές και οι δύο χαρακτηριστικές έχουν κατεύθυνση προς τα κατάντη. Το σχήμα 4.4 δείχνει τις κατευθύνσεις των χαρακτηριστικών για διαφορετικές ροές.



Σχήμα 4.4: Χαρακτηριστικές καμπύλες για (α) Υποκρίσιμη, (β) κρίσιμη και (γ) υπερκρίσιμη ροή (ΠΗΓΗ: Chaudhry, 2008).

4.2.2.2 Σχήμα καθορισμένων διαστημάτων

Σχεδιάζοντας τις χαρακτηριστικές καμπύλες για δεδομένο πλέγμα, παρατηρούμε ότι αυτές δεν τέμνουν τους ήδη καθορισμένους κόμβους του κανάβου. Για παράδειγμα, οι χαρακτηριστικές καμπύλες του σχήματος 4.4, που περνούν από το σημείο P δεν περνάνε από τα προκαθορισμένα σημεία του πλέγματος A και C, αλλά από τα σημεία R και S.



Σχήμα 4.4: Χαρακτηριστικές καμπύλες στο πεδίο υπολογισμού (ΠΗΓΗ: Chaudhry, 2008).

Όμως, για τον υπολογισμό των συνθηκών ροής στο σημείο P είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε τις συνθήκες ροής στα σημεία R και S. Τα χαρακτηριστικά της ροής σε αυτά τα σημεία μπορεί να καθοριστούν με παρεμβολή από τα σημεία A και C, όπου οι συνθήκες ροής είναι γνωστές. Κάνοντας χρήση γραμμικής παρεμβολής, προκύπτει η σχέση:

$$\frac{V_C-V_R}{V_C-V_A}=\frac{x_C-x_R}{x_C-x_A}=\frac{x_P-x_R}{x_C-x_A}=\frac{(V_R-c_R)\Delta t}{\Delta x} \tag{4.36}$$

Όπου για υποκρίσιμες ροές, οι συνθήκες ροής στα σημεία R και S εκφράζονται από τις σχέσεις:

$$V_R=\frac{V_C-\frac{\Delta t}{\Delta x}(c_A V_C-c_C V_A)}{1+(V_C-V_A+c_C-c_A)\frac{\Delta t}{\Delta x}} \tag{4.37}$$

$$c_R=\frac{c_C-V_R\frac{\Delta t}{\Delta x}(c_C-c_A)}{1+(c_C-c_A)\frac{\Delta t}{\Delta x}} \tag{4.38}$$

$$y_R=y_C-\frac{\Delta t}{\Delta x}(V_R+c_R)(y_C-y_A) \tag{4.39}$$

$$V_S=\frac{V_C-\frac{\Delta t}{\Delta x}(c_B V_C-c_C V_B)}{1-(V_C-V_B-c_C+c_B)\frac{\Delta t}{\Delta x}} \tag{4.40}$$

$$c_S=\frac{c_C+V_S\frac{\Delta t}{\Delta x}(c_C-c_B)}{1+(c_C-c_B)\frac{\Delta t}{\Delta x}} \tag{4.41}$$

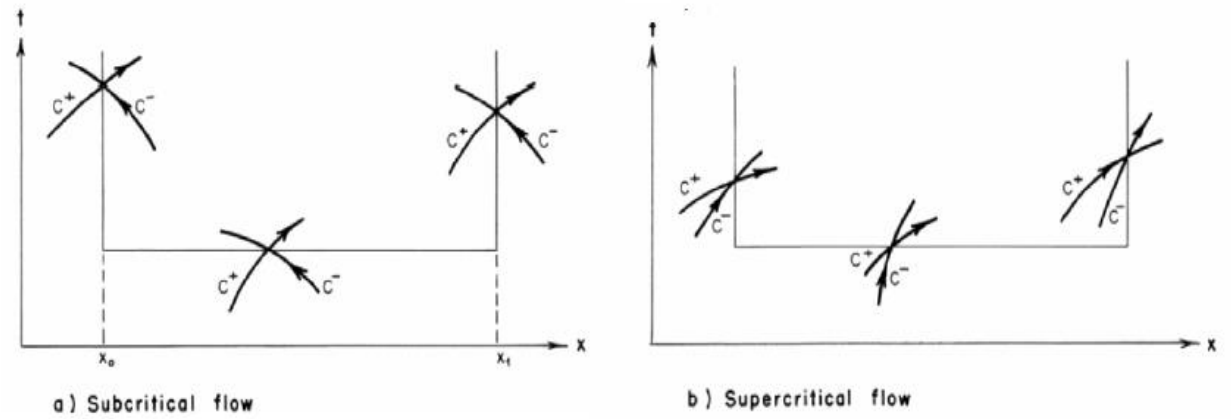
$$y_S=y_C+\frac{\Delta t}{\Delta x}(V_S-c_S)(y_C-y_B) \tag{4.42}$$

Μπορεί να γίνει και χρήση μεγαλύτερης ακρίβειας μεθόδων παρεμβολής, ωστόσο δεν υπάρχει σημαντική βελτίωση των αποτελεσμάτων.

Από τις σχέσεις (4.31) και (4.32) λαμβάνοντας υπόψην τις συνθήκες ροής στα σημεία R και S, που προκύπτουν από τις παραπάνω σχέσεις, μπορεί να επιλυθεί η ροή σε όλο το πεδίο x, t

4.3 Αρχικές και Συνοριακές Συνθήκες

Στην επίλυση των ροών σε μη μόνιμες συνθήκες, συνήθως ξεκινάμε τους υπολογισμούς για δεδομένη χρονική στιγμή ($t = 0$). Οι συνθήκες ροής την δεδομένη αυτή στιγμή, ονομάζονται αρχικές συνθήκες. Δεδομένου ότι τα όρια σε όλα τα συστήματα είναι καθορισμένα, πρέπει να ορίσουμε κάποιες συγκεκριμένες συνθήκες σε αυτά. Αυτές οι συνθήκες ροής ονομάζονται συνοριακές συνθήκες. Στην σχήμα 4.5, παρατηρείται ότι σε οποιοδήποτε σημείο του πεδίου, όπου τέμνονται οι θετικές και αρνητικές χαρακτηριστικές, η ταχύτητα και το βάθος ροής καθορίζονται απο τις σχέσεις (4.26) και (4.28).
Έτσι, μπορούμε να καθορίσουμε την ταχύτητα και το βάθος ροής στο υπολογιστικό πεδίο από τις αρχικές συνθήκες. Όμως, στα ακραία σημεία του υπολογιστικού πεδίου μπορούμε να καθορίσουμε ή το βάθος ή την ταχύτητα ροής ή μια σχέση μεταξύ τους. Επομένως, χρειάζεται να καθοριστεί μια συνοριακή συνθήκη σε κάθε όριο του υπολογιστικού πεδίου. Στο ανάντη όριο χρειάζεται μια συνοριακή συνθήκη για υποκρίσιμη ροή και δύο για υπερκρίσιμη. Αντίστοιχα και για το κατάντη όριο του πλέγματος χρειάζεται μία συνθήκη για υποκρίσιμη ροή και καμία για υπερκρίσιμη. Η διαφορά στον αριθμό των συνοριακών συνθηκών στην υποκρίσιμη και υπερκρίσιμη ροή προκύπτει από τον σχεδιασμό των χαρακτηριστικών στα όρια του πλέγματος για κάθε ροή χωριστά, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.5.



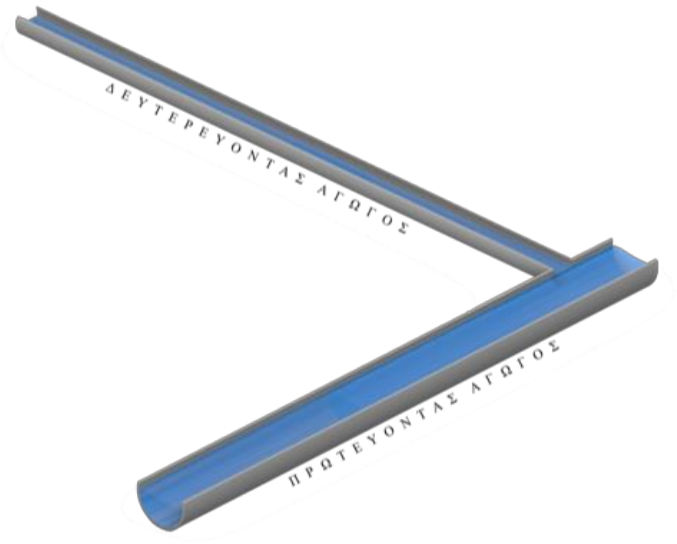
Σχήμα 4.5: Συνοριακές συνθήκες για (α) υποκρίσιμη και (β) υπερκρίσιμη ροή (ΠΗΓΗ: Chaudhry, 2008).

Παρατηρούμε λοιπόν, ότι στην υποκρίσιμη ροή στα όρια του πλέγματος για να προσδιοριστούν η ταχύτητα και το βάθος ροής χρειάζεται μία επιπλέον συνθήκη, καθώς στα ανάντη και στα κατάντη η θετική και αρνητική χαρακτηριστική καμπύλη είναι εκτός

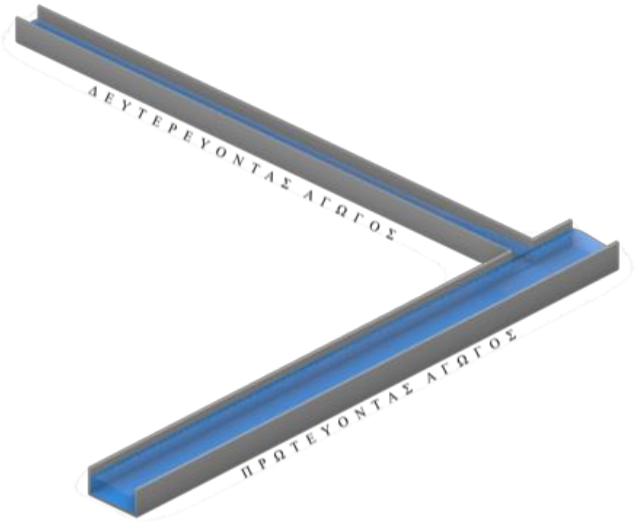
υπολογιστικού πλέγματος, αντίστοιχα. Όμοια για την υπερκρίσιμη ροή, παρατηρείται ότι ανάντη και οι δύο καμπύλες είναι εκτός πλέγματος, ενώ κατάντη δεν είναι καμία. Επομένως, για τον υπολογισμό των χαρακτηριστικών χρειάζονται δύο συνθήκες ανάντη και καμία κατάντη.

5 ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Η μελέτη της διόδευσης του κύματος γίνεται για εισαγόμενο υδρογράφημα στην διατομή εισόδου του δευτερεύοντα αγωγού. Στην συνέχεια, εξάγεται το υδρογράφημα στην διατομή εξόδου του δευτερεύοντα αγωγού, το οποίο αποτελεί το υδρογράφημα εισόδου στον κάθετα συμβαλλόμενο πρωτεύοντα αγωγό. Όπου με το παραγόμενο υδρογράφημα, γίνεται διόδευση κύματος στον πρωτεύοντα αγωγό και μελέτη στην συμπεριφορά της ροής στην συμβολή (Εικόνα 5.1 – 5.2).



Εικόνα 5.1: Κάθετη συμβολή κυκλικών αγωγών.



Εικόνα 5.2: Κάθετη συμβολή ορθογωνικών αγωγών.

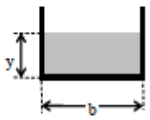
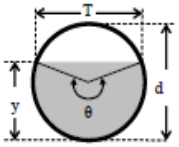
Στο κεφάλαιο 4, έγινε ανάλυση της μη μόνιμης ροής και το πώς αυτή μπορεί να επιλυθεί με τα αριθμητικά σχήματα ρητού υπολογισμού και με την μέθοδο χαρακτηριστικών καμπυλών. Στο παρόν κεφάλαιο γίνεται ανάλυση του κώδικα για συγκεκριμένες συνθήκες γεωμετρίας, αρχικών και συνοριακών συνθηκών καθώς επίσης και του υπολογιστικού πλέγματος που χρησιμοποιήθηκε.

Αρχικά, έγινε διάδοση κύματος στον δευτερεύοντα αγωγό για δεδομένο υδρογράφημα εισόδου και με τις δυο μεθόδους (Ρητό σχήμα – Χαρακτηριστικές καμπύλες). Στην συνέχεια, τα αποτελέσματα συγκρίθηκαν με τα αντίστοιχα που προκύπτουν από το πρόγραμμα HECRAS. Αφού εξήχθησαν συμπεράσματα για τις δύο μεθόδους κατά την σύγκριση, έγινε διάδοση του δεύτερου κύματος στον πρωτεύοντα αγωγό με χρήση των χαρακτηριστικών καμπυλών, όπου και τα αποτελέσματα αυτά συγκρίθηκαν με τα αντίστοιχα του HECRAS. Τέλος, μελετήθηκε η συμπεριφορά της ροής στην συμβολή για διάφορες αρχικές παροχές του πρωτεύοντα αγωγού και βρέθηκαν τα βάθη ροής ακριβώς ανάντη της συμβολής. Οι κώδικες αναπτύχθηκαν στην γλώσσα MATLAB και οι επεξεργασία των αποτελεσμάτων έγινε με το λογισμικό Microsoft Excel.

Σημειώνεται ότι, για την διακριτοποίηση του δευτερεύοντα αγωγού χρησιμοποιούνται οι δείκτες i και n ενώ για τον πρωτεύοντα οι δείκτες j και m όπου i, j χωρικοί κόμβοι και n, m οι χρονικοί κόμβοι του υπολογιστικού πλέγματος.

5.1 Γεωμετρία διατομής

Ο κώδικας αναπτύχθηκε για πρισματικό αγωγό με ορθογωνική και κυκλική διατομή. Οι σχέσεις υπολογισμού των γεωμετρικών στοιχείων, δηλαδή του εμβαδού της υγρής διατομής A, της βρεχόμενης περιμέτρου P, του πλάτους της υγρής διατομής T, της υδραυλικής ακτίνας R και του υδραυλικού βάθος D, φαίνονται στον πινακα 5.1 και για τους δύο αγωγούς.

Διατομή	A	P	T	R	D	$\bar{y}$ και y
	by	$b+2y$	b	$\frac{by}{b+2y}$	y	$\frac{y}{2}$
	$\frac{(\theta-\sin\theta)}{8}d^2$	$\frac{\theta}{2}d$	$d\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ ή $2\sqrt{y(d-y)}$	$\left(1-\frac{\sin\theta}{\theta}\right)\frac{d}{4}$	$\frac{(\theta-\sin\theta)}{8\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}d$	$y=[1-\cos(\theta/2)]\frac{d}{2}$ $\frac{2d(\sin(\theta/2))^3}{3(\theta-\sin\theta)}-\frac{d}{2}\cos(\theta/2)$

Πίνακας 5.1: Γεωμετρικά στοιχεία ορθογωνικής και κυκλικής διατομής (ΠΗΓΗ: Σημειώσεις Π. Παπανικολάου, 2017)

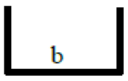
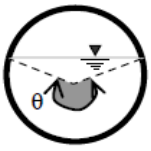
Για τον ορθογωνικό δευτερεύοντα αγωγό ορίσθηκε πλάτος ίσο με $5m$ και για τον πρωτεύοντα πλάτος ίσο με $10m$. Αντίστοιχα για τον κυκλικό αγωγό ορίσθηκε διάμετρος ίση με $0.6m$ στον δευτερεύοντα αγωγό και για τον πρωτεύοντα $1.2m$ (Πίνακας 5.2).

Αγωγός		Μήκος (m)	Διάμετρος (m)	Πλάτος (m)	Κλίση	Συντελεστής Manning (n)
Ορθογωνικός	Δευτερεύοντας	10000	-	5	0.0010	0.025
	Πρωτεύοντας	20000	-	10	0.0010	0.025
Κυκλικός	Δευτερεύοντας	2000	0.6	-	0.0015	0.020
	Πρωτεύοντας	2000	1.2	-	0.0015	0.020

Πίνακας 5.2: Βασικά γεωμετρικά χαρακτηριστικά ορθογωνικού και κυκλικού αγωγού.

5.2 Αρχικές συνθήκες

Για να μπορέσει να επιλυθεί η μη μόνιμη ροή, είναι απαραίτητο να ορίσουμε τις αρχικές συνθήκες της ροής σε όλο το μήκος του αγωγού. Ορίζοντας την παροχή την χρονική στιγμή $t = 0\,s$ και θεωρώντας ομοιόμορφη ροή, υπολογίζουμε το ομοιόμορφο βάθος ροής με τις σχέσεις του πίνακα 5.3, για τον ορθογωνικό και τον κυκλικό αγωγό αντίστοιχα σε όλο το πεδίο υπολογισμού.

Διατομή	Κρίσιμο βάθος	Ομοιόμορφο βάθος
	$y_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{b^2 g}} = \left(\frac{q^2}{g}\right)^{1/3}$	$y = \frac{1}{b}\left[\frac{Qn}{J^{1/2}}(b+2y)^{2/3}\right]^{3/5}$
	$\theta = \sin\theta + \frac{8}{d^{5/3}}\left[\frac{Q^2\sin(\theta/2)}{g}\right]^{1/3}$ $y_c = \frac{d}{2}[1-\cos(\theta/2)]$	$\theta = \left[\frac{Qn}{J^{1/2}}\frac{\theta^{2/3}}{(d/2)^{8/3}}\right]^{3/5} + \frac{\sin\theta}{2} + \frac{\theta}{2}$ $y = \frac{d}{2}[1-\cos(\theta/2)]$

Πίνακας 5.3: Σχέσεις υπολογισμού κρίσιμου και ομοιόμορφου βάθους ροής για ορθογωνικό και κυκλικό αγωγό (ΠΗΓΗ: Σημειώσεις Π.Παπανικολάου, 2017).

Οι αρχικές παροχές ορίζονται ξεχωριστά για τον πρωτεύοντα και δευτερεύοντα αγωγό.Η αρχική παροχή του δευτερεύοντα αγωγού είναι ίση με $Q = 0.025\,m^3/s$ και $Q = 20\,m^3/s$ για τον κυκλικό και ορθογωνικό πρισματικό αγωγό αντίστοιχα. Οι παροχές που μελετήθηκαν για τον πρωτεύοντα αγωγό ποικίλουν και για τις δύο γεωμετρίες των αγωγών, όπως φαίνεται αναλυτικά στον πίνακα 5.4.

Αγωγός		Παροχή (m^3/s)	Βάθος ροής (m)	Εμβαδόν υγρής διατομής (m^2)	Βρεχόμενη περίμετρος (m)	Πλάτος υγρής διατομή (m)	Υδραυλική ακτίνα (m)	Υδραυλικό βάθος (m)
Ορθογωνικός	Δευτερεύοντας	20	2.67	13.35	15.34	5	1.29	2.67
	Πρωτεύοντας	50	2.71	27.1	15.42	10	1.757	2.71
		80	3.79	37.9	17.58	10	2.156	3.79
		100	4.46	44.6	18.92	10	2.357	4.46
		120	5.11	51.1	20.22	10	2.527	5.11
Κυκλικός	Δευτερεύοντας	0.025	0.16	0.06	0.66	0.53	0.09	0.12
	Πρωτεύοντας	0.1	0.26	0.18	1.16	0.99	0.155	0.18
		0.2	0.37	0.29	1.41	1.11	0.209	0.27
		0.3	0.46	0.39	1.59	1.16	0.247	0.34
		0.6	0.68	0.66	2.04	1.19	0.323	0.55

Πίνακας 5.4: Αρχικές συνθήκες για τους ορθογωνικούς και κυκλικούς αγωγούς.

5.3 Συνοριακές συνθήκες

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, για να είναι εφικτή η επίλυση της μη μόνιμης ροής με χρήση αριθμητικών μεθόδων χρειάζεται να οριστούν δύο συνοριακές συνθήκες, μία ανάντη και μία κατάντη του αγωγού σε υποκρίσιμες ροές. Οι κλίσεις των αγωγών εξασφαλίζουν υποκρίσιμη ροή στους αγωγούς και ορίστηκαν $S_0 = 0.001$ για τον δευτερεύοντα και πρωτεύοντα ορθογωνικό αγωγό και $S_0 = 0.0015$ και για τους κυκλικούς αγωγούς, αντίστοιχα.

Ως ανάντη συνοριακή συνθήκη ορίστηκε υδρογράφημα εισόδου, που δημιουργήθηκε σύμφωνα με την σχέση:

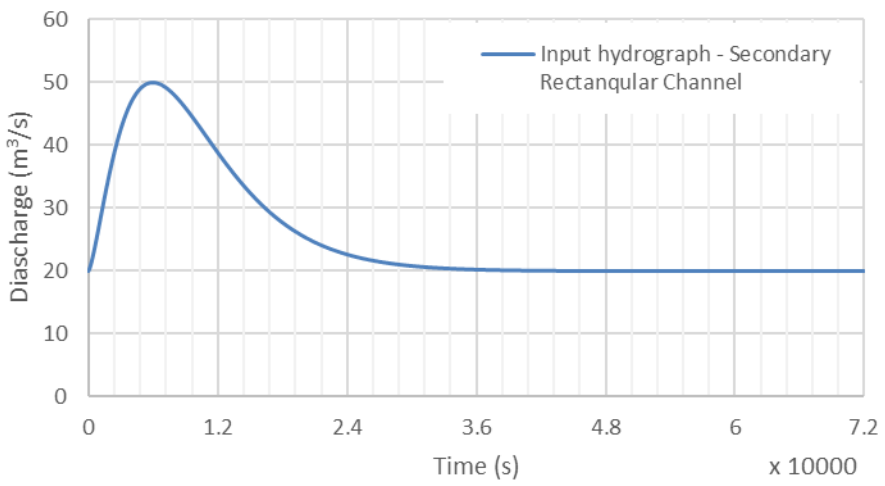
$$Q_1(t) = Q_{min} + (Q_{max} - Q_{min}) \left[\left(\frac{t}{t_{max}} \right) e^{\left(1 - \frac{t}{t_{max}}\right)} \right]^{1.5} \tag{5.1}$$

Όπου,

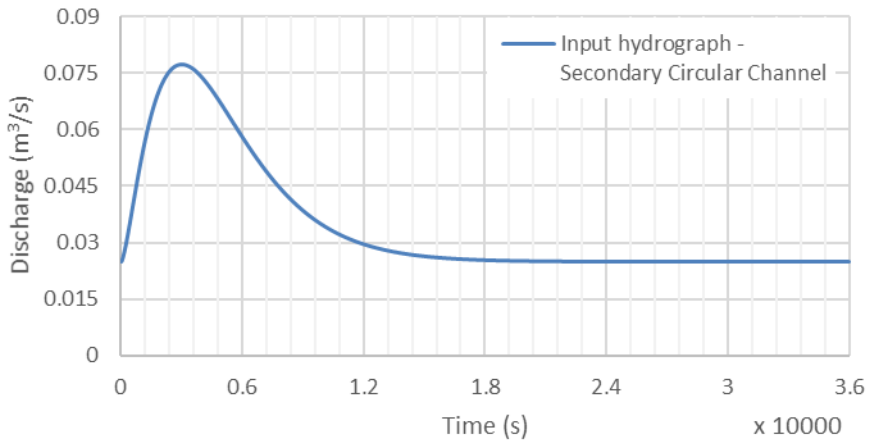
Q_{min} η βασική απορροή,
Q_{max} η παροχή αιχμής και
t_{max} η χρονική στιγμή που πραγματοποιείται η αιχμή της πλημμύρας στην είσοδο του αγωγού.

Σημειώνεται ότι στην βιβλιογραφία (Fenton, 2010) ο εκθέτης στην εξίσωση (5.1), ορίζεται ίσος με την τιμή 5. Για την δημιουργία υδρογραφημάτων με πιο ήπια αποτόνωση, τροποποιήθηκε στην τιμή 1.5. Για τον δευτερεύοντα ορθογωνικό αγωγό (Σχήμα 5.1) ορίστηκε η παροχή αιχμής $Q_{max} = 50\, m^3/s$ και ο χρόνος πραγμάτωσης αιχμής $t_{max} = 6000\, s$. Για τον δευτερεύοντα κυκλικό αγωγό (Σχήμα 5.2) ορίστηκε παροχή αιχμής Q_{max}

τέτοια ώστε η πλήρωση του αγωγού να είναι ίση με $y/D = 0.5$ και ο χρόνος πραγμάτωσης αιχμής, ορίστηκε για $t_{max} = 3000\ sec$.



Σχήμα 5.1: Υδρογράφημα εισόδου δευτερεύοντα ορθογωνικού αγωγού.



Σχήμα 5.2: Υδρογράφημα εισόδου δευτερεύοντα κυκλικού αγωγού.

Όσον αφορά το υδρογράφημα εισόδου του πρωτεύοντα αγωγού, αυτό εξαρτάται από το υδρογράφημα εξόδου του δευτερεύοντα αγωγού και υπολογίζεται από την εξίσωση συνέχειας (2.1):

$$Q_{3_1}^{\ m} = Q_{2_N}^{\ n} + Q_{1_0} \tag{5.2}$$

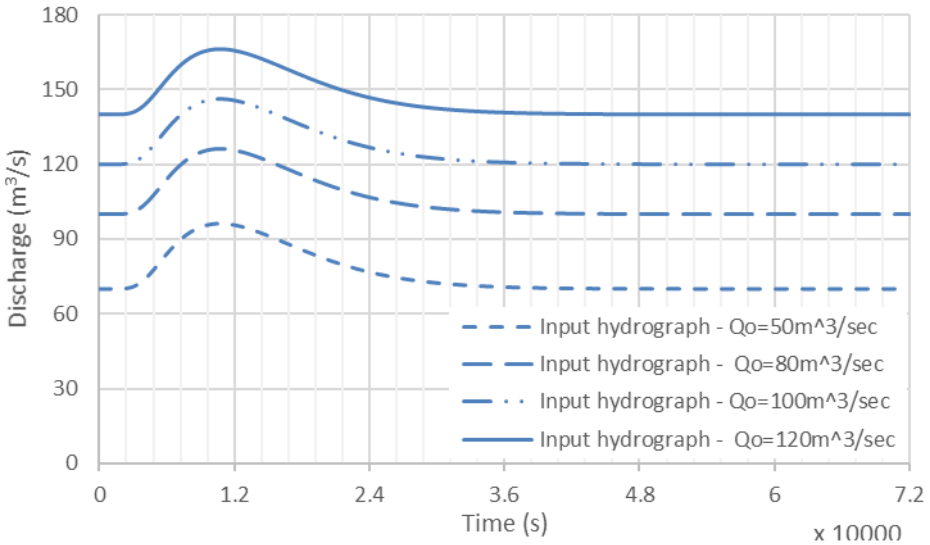
Όπου,

$Q_{3_1}^{\ m}$ η παροχή ανάντη της συμβολής του πρωτεύοντα αγωγού,

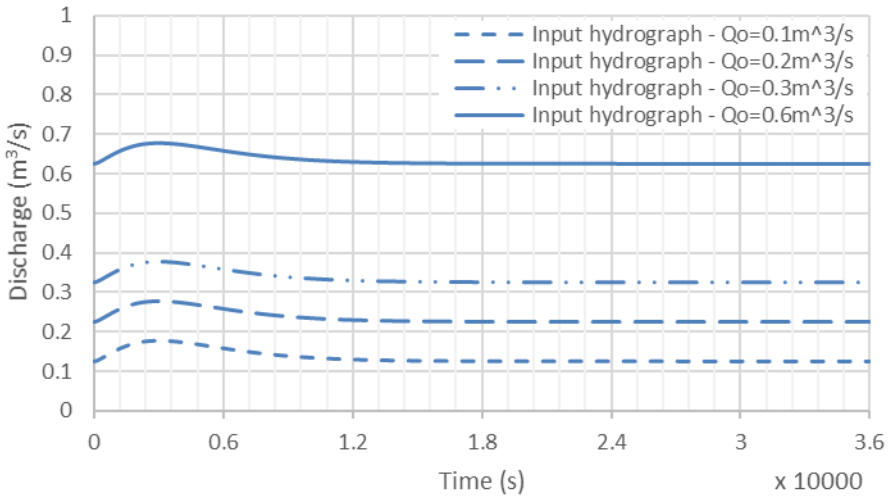
Q_N^n η παροχή εξόδου του δευτερεύοντα αγωγού και

Q_{1_0} η αρχική παροχή του πρωτεύοντα αγωγού.

Τα υδρογραφήματα εισόδου στον πρωτεύοντα αγωγό ποικίλουν ανάλογα με την αρχική παροχή του αγωγού που επιλέγεται (Σχήμα 5.3-5.4).



Σχήμα 5.3: Υδρογραφήματα εισόδου πρωτεύοντα ορθογωνικού αγωγού για διάφορες αρχικές παροχές.



Σχήμα 5.4: Υδρογραφήματα εισόδου πρωτεύοντα κυκλικού αγωγού για διάφορες αρχικές παροχές.

Ως κατάντη συνοριακή συνθήκη ορίστηκε ομοιόμορφη ροή στην έξοδο και για τους δύο αγωγούς. Η θεώρηση αυτή έγινε με βάση ότι, οι αγωγοί έχουν αρκετό μήκος ώστε να μπορέσει η ροή να βρεθεί σε ομοιόμορφες συνθήκες. Η εξαγόμενη σχέση που προκύπτει απ΄ αυτή την θεώρηση είναι:

$$S_f = S_0 \tag{5.3}$$

όπου,

S_f η κλίση της γραμμής ενέργειας και

S_0 η κλίση του πυθμένα του αγωγού.

5.4 Χρονική και Χωρική διακριτοποίηση

Για την επίλυση της μη μόνιμης ροής με αριθμητικά σχήματα είναι απαραίτητο να γίνει διακριτοποίηση των ανεξάρτητων μεταβλητών, δηλαδή του χρόνου t και του χώρου x. Ο καθορισμός της διακριτοποίησης που επιλέγεται, συμβάλει καθοριστικά στην επίλυση της ροής, καθώς τα ζητούμενα μεγέθη υπολογίζονται στους κόμβους του κανάβου που δημιουργούνται από αυτή. Επιπλέον, η επιλογή κανάβου καθορίζει και την ευστάθεια της λύσης, καθώς το χωρικό (Δx) και το χρονικό (Δt) βήμα επηρεάζουν τον αριθμό Courant, όπως προκύπτει από την σχέση (4.22). Για την ανάλυση της ροής χρησιμοποιήθηκαν διαφορετικά υπολογιστικά πλέγματα και η επιλογή τους έγινε με κύρια κριτήρια τον αριθμό Courant, την ποσοστιαία απόκλιση των όγκων ολοκλήρωσης ως προς τον αρχικό όγκο νερού καθώς και την ποσότητα $\Delta x^2/\Delta t$. Στους παρακάτω πίνακες παρουσιάζονται τα υπολογιστικά πλέγματα που χρησιμοποιήθηκαν για την αριθμητική επίλυση της ροής για τον ορθογωνικό και κυκλικό αγωγό αντίστοιχα.

Ορθογωνικός αγωγός	Χρονική διακριτοποίηση (nt)	Χωρική διακριτοποίηση (nx)	Χρονικό βήμα $\Delta t\ (s)$	Χωρικό βήμα $\Delta x\ (m)$
Δευτερεύοντας αγωγός	7200	30	10	344.8
		50		204.1
		80		126.6
	14400	80	5	126.6
		100		101.0
		130		77.5
	36000	130	2	77.5
		200		50.3
		300		33.4
Πρωτεύοντας αγωγός	7200	80	10	253.1
	14400	130	5	203.5
	36000	200	2	149.6

Πίνακας 5.5: Χρονική και χωρική διακριτοποίηση ορθογωνικού αγωγού.

Κυκλικός αγωγός	Χρονική διακριτοποίηση (nt)	Χωρική διακριτοποίηση (nx)	Χρονικό βήμα $\Delta t\ (s)$	Χωρικό βήμα $\Delta x\ (m)$
Δευτερεύοντας	3600	30	10	69.0
		50		40.8
		80		25.3
	7200	80	5	25.3
		140		14.4
		180		11.2
	18000	180	2	11.2
		300		6.7
Πρωτεύοντας	3600	50	10	40.8
	7200	80	5	25.3
	18000	180	2	11.2

Πίνακας 5.6: Χρονική και χωρική διακριτοποίηση κυκλικού αγωγού.

Οι υπολογιστικοί κάναβοι που προκύπτουν από τις παραπάνω χωρικές και χρονικές διακριτοποιήσεις, χρησιμοποιήθηκαν για την αριθμητική επίλυση της μη μόνιμης ροής και για το ρητό σχήμα αλλά και για την μέθοδο των χαρακτηριστικών καμπυλών.

5.5 Ρητό σχήμα υπολογισμού

Μετατρέποντας τις μερικές διαφορικές εξισώσεις Saint-Venant σε εξισώσεις πεπερασμένων διαφορών, όπως αναλύεται στο 4ο κεφάλαιο καταλήγουμε στην τελική μορφή του σχήματος του Lax. Όπου, οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι η απόσταση x και ο χρόνος t και οι εξαρτημένες μεταβλητές είναι η παροχή Q και το εμβαδόν της υγρής διατομής A.

Οι εξισώσεις που προκύπτουν , για να καθοριστούν οι εξαρτημένες μεταβλητές, διαφοροποιούνται ανάλογα με τη διατομή i, ως εξής:

i. Διατομή εισόδου ($i = 1$):
Το εμβαδόν της υγρής διατομής προκύπτει από την σχέση:

$$A_1^{n+1} = A_1^n - \frac{\Delta t(Q_2^n - Q_1^n)}{\Delta x} \tag{5.4}$$

Ενώ η παροχή Q καθορίζεται από το υδρογράφημα εισόδου που αποτελεί ανάντη συνοριακή συνθήκη.

ii. Ενδιάμεσες διατομές ($i = 2, \dots, N-1$):
Το εμβαδόν της υγρής διατομής και η αντίστοιχη παροχή προκύπτουν σε κάθε ενδιάμεση διατομή από τις σχέσεις:

$$A_i^{n+1} = \frac{A_{i+1}^n + A_{i-1}^n}{2} - \frac{\Delta t\left(Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n\right)}{2\Delta x} \tag{5.5}$$

$$Q_i^{n+1} = \frac{\left(Q_{i+1}^n + Q_{i-1}^n\right)}{2} - \Delta t\,\frac{\left[\left(Q_{i+1}^n\right)^2/A_{i+1}^n\right] - \left[\left(Q_{i-1}^n\right)^2/A_{i-1}^n\right]}{2\Delta x} - g\Delta t\,\frac{\left(A_{i+1}^n + A_{i-1}^n\right)}{2}\left(\frac{y_{i+1}^n - y_{i-1}^n}{2\Delta x} - S_0\right) - g\Delta t\,\frac{A_{i+1}^n {S_f}_{i+1}^n + A_{i-1}^n {S_f}_{i-1}^n}{2} \tag{5.6}$$

iii. Διατομή εξόδου ($i = N$):
Το εμβαδόν της υγρής διατομής προκύπτει από την σχέση:

$$A_N^{n+1} = A_N^n - \frac{\Delta t\left(Q_N^n - Q_{N-1}^n\right)}{\Delta x} \tag{5.7}$$

Ενώ η παροχή Q προκύπτει από την εξίσωση Manning έχοντας ορίσει κατάντη συνοριακή συνθήκη ομοιόμορφη ροή, δηλαδή $S_f = S_0$.

$$Q_N^{n+1} = \frac{A_N^{n+1}}{n}\left(\frac{A_N^{n+1}}{P_N^{n+1}}\right)^{2/3} {S_0}^{1/2} \tag{5.8}$$

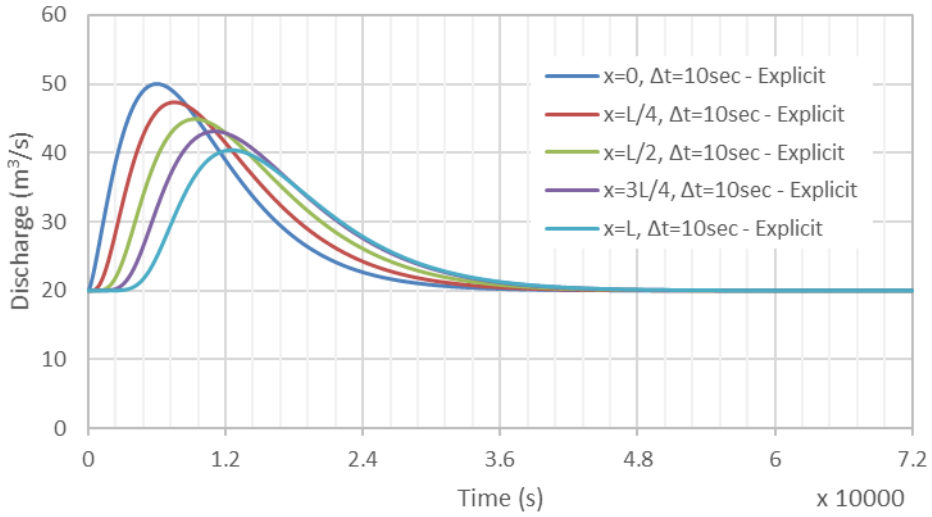
Η κλίση της γραμμής ενέργειας στην διατομή εισόδου και στις ενδιάμεσες διατομές, προκύπτει από την σχέση Manning:

$$S_f = \frac{Q_i^n \left|Q_i^n\right| n^2}{\left(A_i^n\right)^2 \left(R_i^n\right)^{4/3}} \tag{5.9}$$

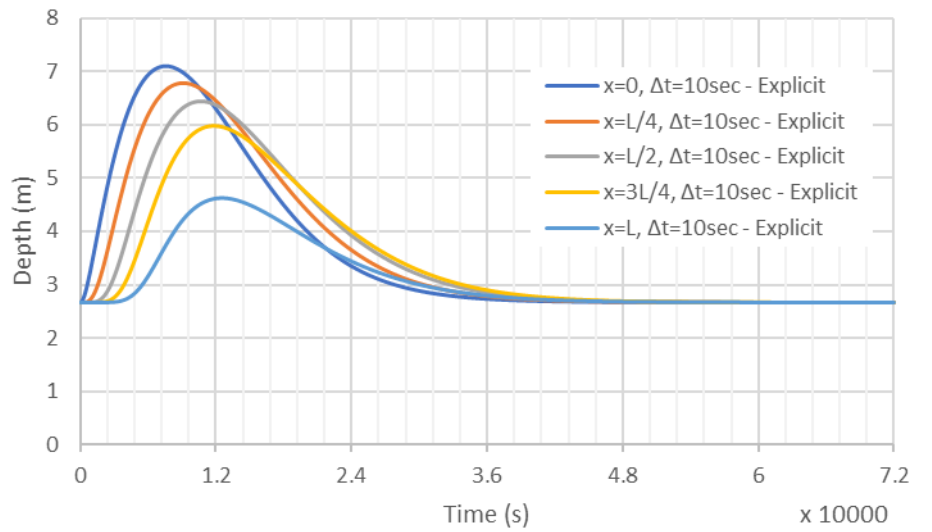
ενώ για την διατομή εξόδου είναι καθορισμένη από την συνοριακή συνθήκη και είναι ίση με την κλίση του πυθμένα του αγωγού.

Σημειώνεται, ότι στην εξίσωση του Manning το n συμβολίζει την τραχύτητα του αγωγού. Ενώ στις εξισώσεις του ρητού σχήματος ο δείκτης n εκφράζει τον άξονα του χρόνου και ο δείκτης i τον άξονα του χώρου.
Για την ευστάθεια του σχήματος σε κάθε διατομή $i = 1, \dots, N$ έγινε έλεγχος με το κριτήριο Courant, σύμφωνα με την σχέση:

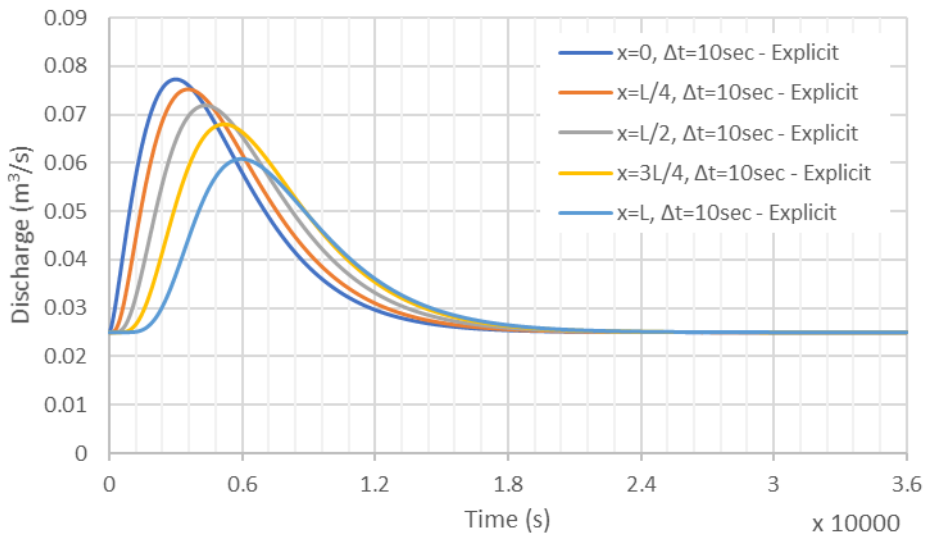
$$C_n = \frac{\left|V_i^n\right| \pm \sqrt{gD_i^n}}{\Delta x/\Delta t} \leq 1 \tag{5.10}$$



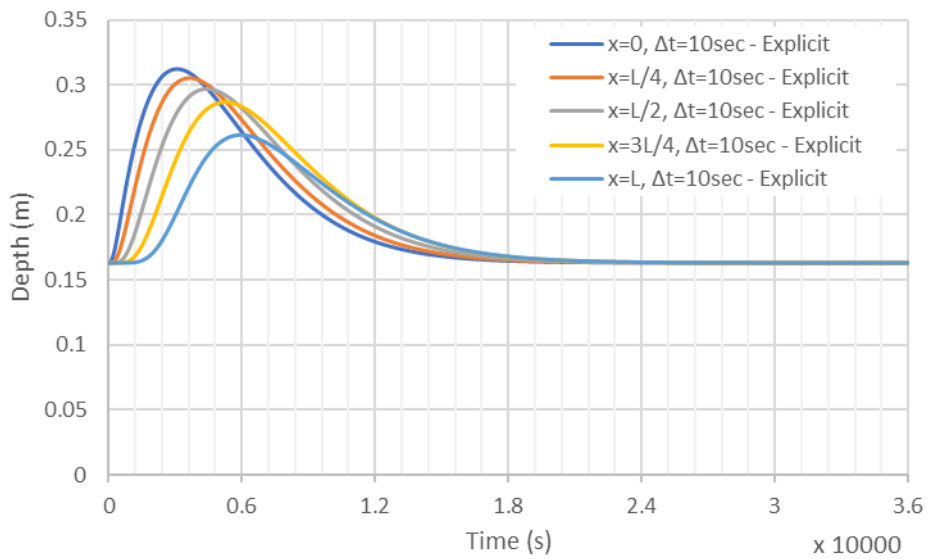
Σχήμα 5.5: Υδρογραφήματα ανά $L/4$ του ορθογωνικού δευτερεύοντα αγωγού που προκύπτουν από το ρητό σχήμα επίλυσης.



Σχήμα 5.6: Βάθη ροής ανά $L/4$ του ορθογωνικού δευτερεύοντα αγωγού που προκύπτουν από το ρητό σχήμα επίλυσης.



Σχήμα 5.7: Υδρογραφήματα ανά $L/4$ του κυκλικού δευτερεύοντα αγωγού που προκύπτουν με το ρητό σχήμα επίλυσης.



Σχήμα 5.8: Βάθη ροής ανά $L/4$ του κυκλικού δευτερεύοντα αγωγού που προκύπτουν με το ρητό σχήμα επίλυσης.

5.6 Μέθοδος χαρακτηριστικών καμπυλών

Μετατρέποντας τις μερικές διαφορικές εξισώσεις Saint-Venant σε εξισώσεις πεπερασμένων διαφορών, όπως αναλύεται στο 4ο κεφάλαιο καταλήγουμε στις τελικές μορφές εξισώσεων που επιλύουν την μη μόνιμη ροή με την μέθοδο των χαρακτηριστικών καμπυλών. Οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι η απόσταση x και ο χρόνος t, ενώ οι εξαρτημένες μεταβλητές είναι η ταχύτητα V και το βάθος ροής y.

Υπενθυμίζεται ότι, σε κάθε υπολογιστικό κόμβο του πλέγματος γίνεται γραμμική παρεμβολή ώστε να προσδιοριστούν τα μεγέθη $V_S, y_{S,}, c_{S,}$για την αρνητική χαρακτηριστική καμπύλη και τα μεγέθη $V_R, y_{R,}, c_{R,}$για την θετική χαρακτηριστική καμπύλη, από τις σχέσεις (4.37) έως (4.42).

Οι εξισώσεις που προκύπτουν, για να καθοριστούν οι εξαρτημένες μεταβλητές, διαφοροποιούνται ανάλογα με τη διατομή i, ως εξής:

$$V_P = C_P - C_R y_P \tag{5.11}$$

$$V_P = C_n + C_S y_P \tag{5.12}$$

όπου,

$$C_P = V_R + \frac{g}{c_R} y_R + g\left(S_0 - S_f\right)_R \Delta t \tag{5.13}$$

$$C_n = V_S - \frac{g}{c_S} y_S + g\left(S_0 - S_f\right)_S \Delta t \tag{5.14}$$

και

$$C_R = \frac{g}{c_R} \tag{5.15}$$

$$C_s = \frac{g}{c_S} \tag{5.16}$$

i. Διατομή εισόδου ($i = 1$):
Λύνοντας την αρνητική χαρακτηριστική καμπύλη C^- προκύπτει:

$$V_1^{n+1} = C_n + \frac{g}{c_s} y_1^{n+1} \tag{5.17}$$

όπου,

$$C_n = V_S - \frac{g}{c_S} y_S + g\left(S_0 - S_f\right)_S \Delta t \tag{5.18}$$

Για την εύρεση των V_S, y_S και c_S γίνεται γραμμική παρεμβολή, όπου προκύπτουν οι σχέσεις:

$$V_S = \frac{V_1^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(c_2^n V_1^n - c_1^n V_2^n)}{1 - (V_1^n - V_2^n - c_1^n + c_2^n)\frac{\Delta t}{\Delta x}} \tag{5.19}$$

$$c_S = \frac{c_1^n + V_S \frac{\Delta t}{\Delta x}(c_1^n - c_2^n)}{1 + (c_1^n - c_2^n)\frac{\Delta t}{\Delta x}} \tag{5.20}$$

$$y_S = y_1^n + \frac{\Delta t}{\Delta x}(V_S - c_S)(y_1^n - y_2^n) \tag{5.21}$$

Έτσι, από την εξίσωση (5-17), γνωρίζοντας την παροχή, από την συνοριακή συνθήκη (υδρογράφημα εισόδου) και αντικαθιστώντας $V_1^{n+1} = Q_1^{n+1}/A_1^{n+1}$, μπορεί να βρεθεί το βάθος ροής y_1^{n+1} στην διατομή εισόδου. Γνωρίζοντας την παροχή Q_1^{n+1} και το βάθος ροής y_1^{n+1} προσδιορίζεται η δεύτερη εξαρτημένη μεταβλητή, V_1^{n+1}.

ii. Ενδιάμεσες διατομές ($i = 2, \dots, N-1$).
Λύνοντας την θετική C^+ και την αρνητική C^- χαρακτηριστική καμπύλη προκύπτουν δύο εξισώσεις:

$$V_i^{n+1} = C_P - \frac{g}{c_R} y_i^{n+1} \tag{5.22}$$

$$V_i^{n+1} = C_n + \frac{g}{c_s} y_i^{n+1} \tag{5.23}$$

όπου,

$$C_P = V_R + \frac{g}{c_R} y_R + g\left(S_0 - S_f\right)_R \Delta t \tag{5.24}$$

$$C_n = V_S - \frac{g}{c_S} y_S + g\left(S_0 - S_f\right)_S \Delta t \tag{5.25}$$

Για την εύρεση των V_R, y_R, c_R και V_S, y_S, c_S γίνεται γραμμική παρεμβολή, όπου προκύπτουν οι σχέσεις:

$$V_R = \frac{V_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(c_{i-1}^n V_i^n - c_i^n V_{i-1}^n\right)}{1 + \left(V_i^n - V_{i-1}^n + c_i^n - c_{i-1}^n\right)\frac{\Delta t}{\Delta x}} \tag{5.26}$$

$$c_R = \frac{c_i^n - V_R \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(c_i^n - c_{i-1}^n\right)}{1 + \left(c_i^n - c_{i-1}^n\right)\frac{\Delta t}{\Delta x}} \tag{5.27}$$

$$y_R = y_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x}(V_R + c_R)(y_i^n - y_{i-1}^n) \tag{5.28}$$

και

$$V_S = \frac{V_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(c_{i+1}^n V_i^n - c_i^n V_{i+1}^n\right)}{1 - \left(V_i^n - V_{i+1}^n - c_i^n + c_{i+1}^n\right)\frac{\Delta t}{\Delta x}} \tag{5.29}$$

$$c_S = \frac{c_i^n + V_S \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(c_i^n - c_{i+1}^n\right)}{1 + \left(c_i^n - c_{i+1}^n\right)\frac{\Delta t}{\Delta x}} \tag{5.30}$$

$$y_S = y_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x}(V_S - c_S)(y_i^n - y_{i+1}^n) \tag{5.31}$$

Από το σύστημα εξισώσεων (5.22) και (5.23) υπολογίζονται οι εξαρτημένες μεταβλητές V_i^{n+1} και y_i^{n+1} σε όλους τους ενδιάμεσους κόμβους στο πεδίο υπολογισμού.

iii. Διατομή εξόδου ($i = N$)
Επιλύοντας την θετική χαρακτηριστική καμπύλη C^+ προκύπτει:

$$V_N^{n+1} = C_P - \frac{g}{c_R} y_N^{n+1} \tag{5.32}$$

όπου,

$$C_P = V_R + \frac{g}{c_R} y_R + g\left(S_0 - S_f\right)_R \Delta t \tag{5.33}$$

Για την εύρεση των V_R, y_R, c_R γίνεται γραμμική παρεμβολή, όπου προκύπτουν οι σχέσεις:

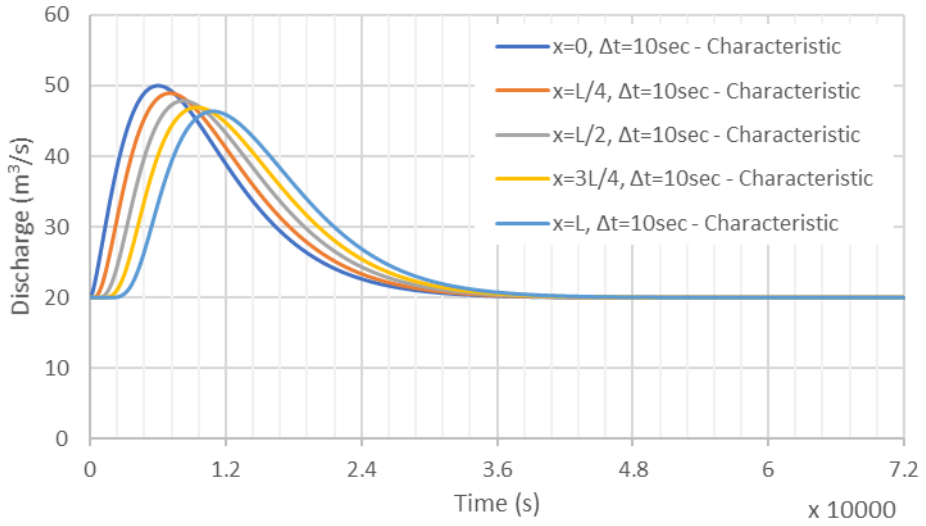
$$V_R = \frac{V_N^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(c_{N-1}^n V_N^n - c_N^n V_{N-1}^n)}{1 + (V_N^n - V_{N-1}^n + c_N^n - c_{N-1}^n)\frac{\Delta t}{\Delta x}} \tag{5.34}$$

$$c_R = \frac{c_N^n - V_R \frac{\Delta t}{\Delta x}(c_N^n - c_{N-1}^n)}{1 + (c_N^n - c_{N-1}^n)\frac{\Delta t}{\Delta x}} \tag{5.35}$$

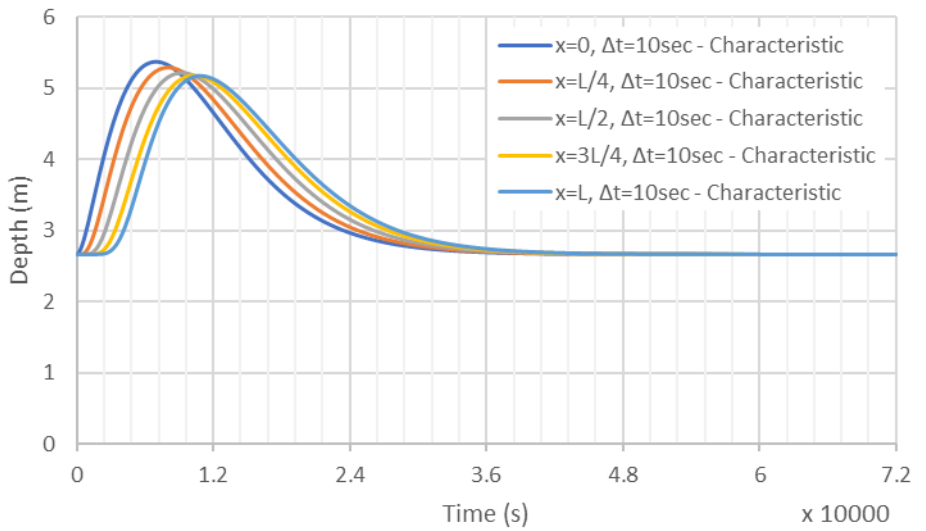
$$y_R = y_N^n + \frac{\Delta t}{\Delta x}(V_R + c_R)(y_N^n - y_{N-1}^n) \tag{5.36}$$

Γνωρίζοντας την συνοριακή συνθήκη (ομοιόμορφη ροή) και αντικαθιστώντας από την σχέση του Manning $V_N^{n+1} = \frac{1}{n}(R_N^{n+1})^{2/3} S_0^{1/2}$ στην σχέση (5.32), υπολογίζεται το βάθος ροής y_N^{n+1} και στην συνέχεια η ταχύτητα ροής V_N^{n+1} στην διατομή εξόδου, $i = N$.

Η κλίση της γραμμής ενέργειας σε κάθε διατομή, υπολογίζεται από την σχέση του Manning και η ευστάθεια της μεθόδου ελέγχεται με το κριτήριο Courant χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (5.9) και (5.10) , όπως και στο ρητό σχήμα του Lax.

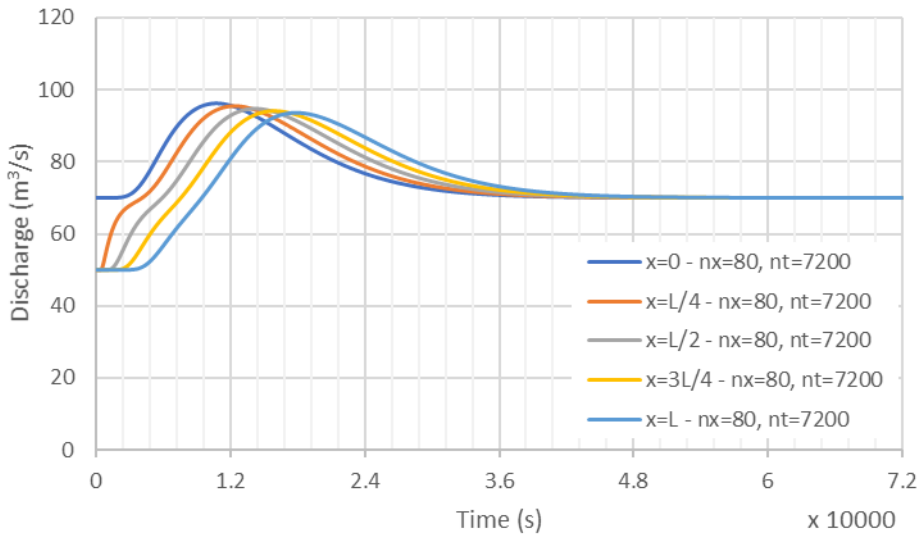


Σχήμα 5.9: Υδρογραφήματα ανά $L/4$ του ορθογωνικού δευτερεύοντα αγωγού που προκύπτουν με την μέθοδο των χαρακτηριστικών καμπυλών.

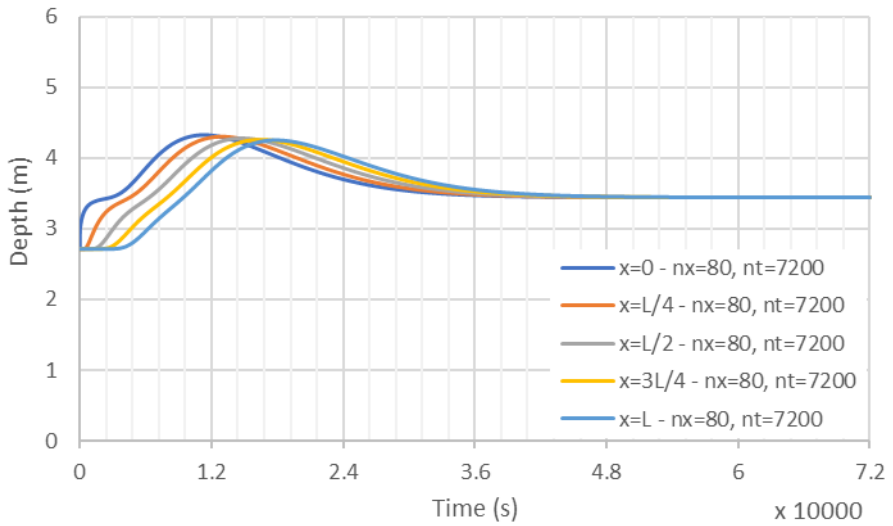


Σχήμα 5.10: Βάθη ροής ανά $L/4$ του ορθογωνικού δευτερεύοντα αγωγού που προκύπτουν με την μέθοδο των χαρακτηριστικών καμπυλών.

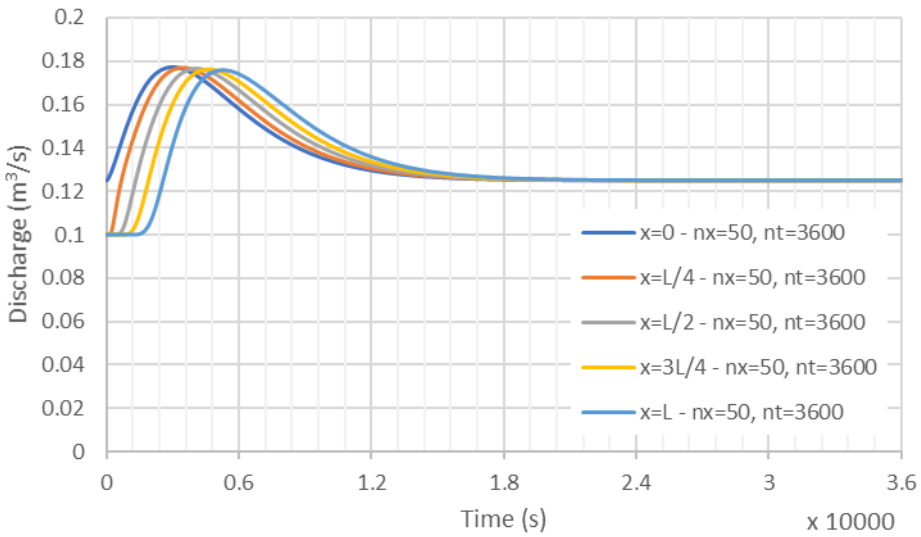
Με αντικατάσταση των δεικτών i, n σε j και m αντίστοιχα προκύπτει η επίλυση των χαρακτηριστικών της ροής για τον πρωτεύοντα αγωγό.



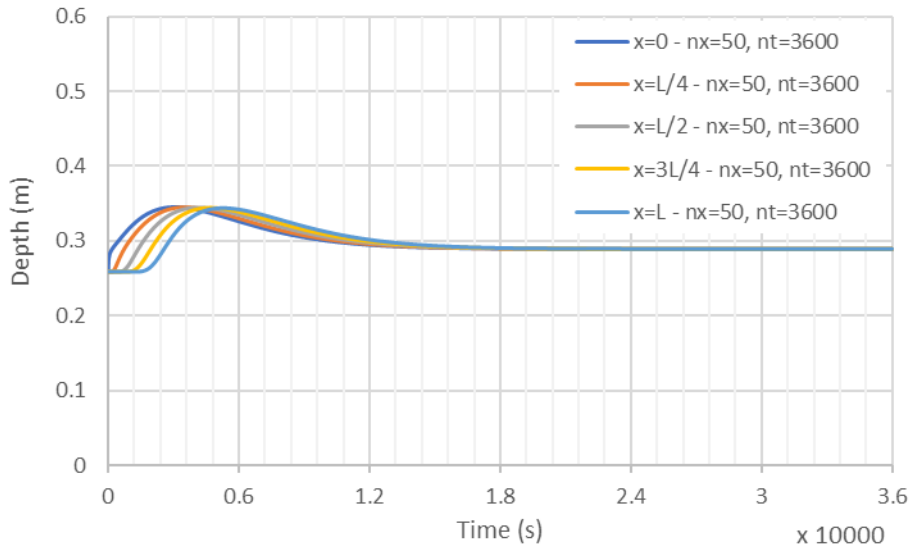
Σχήμα 5.11: Υδρογραφήματα ανά $L/4$ του ορθογωνικού πρωτεύοντα αγωγού για αρχική παροχή $Q_{0_1} = 50\, {}^{m^3}/_{sec}$ που προκύπτουν με την μέθοδο των χαρακτηριστικών καμπυλών.



Σχήμα 5.12: Βάθη ροής ανά $L/4$ του ορθογωνικού πρωτεύοντα αγωγού για αρχική παροχή $Q_{0_1} = 50\, {}^{m^3}/_{sec}$ που προκύπτουν με την μέθοδο των χαρακτηριστικών καμπυλών.



Σχήμα 5.13: Υδρογραφήματα ανά $L/4$ του κυκλικού πρωτεύοντα αγωγού για αρχική παροχή $Q_{0_1} = 0.1\, {}^{m^3}/_{sec}$ που προκύπτουν με την μέθοδο των χαρακτηριστικών καμπυλών.



Σχήμα 5.14: Βάθη ροής ανά $L/4$ του κυκλικού πρωτεύοντα αγωγού για αρχική παροχή $Q_{0_1} = 0.1\, {}^{m^3}/_{sec}$ που προκύπτουν με την μέθοδο των χαρακτηριστικών καμπυλών.

5.7 Ειδική δύναμη και αρχικές συνθήκες

Γνωρίζοντας ότι η συμβολή του δευτερεύοντα με τον πρωτεύοντα αγωγό γίνεται κάθετα, η ειδική ενέργεια του δευτερεύοντα αγωγού μηδενίζεται, καθώς από την σχέση (2.16) για $\cos(90°) = 0$ ισχύει $M_1 = M_3$, για διαταρασσόμενη, στην συμβολή ροή. Επομένως, η μελέτη των ειδικών δυνάμεων γίνεται για τον πρωτεύοντα αγωγό ανάντη και κατάντη της συμβολής. Ανάντη της συμβολής, η ειδική δύναμη παραμένει σταθερή καθ΄ όλη την διάρκεια του φαινομένου και εξαρτάται μόνο από τις αρχικές συνθήκες αυτού. Αντίθετα, κατάντη της

συμβολής, η ειδική δύναμη μεταβάλλεται στον χρόνο καθώς τα χαρακτηριστικά της ροής εξαρτώνται από το υδρογράφημα εξόδου του δευτερεύοντα αγωγού.

Ανάντη της συμβολής η ειδική δύναμη υπολογίζεται σύμφωνα με την σχέση:

$$M_1 = \left(\frac{Q_{1_0}^2}{gA_{1_0}} + \bar{y}_{1_0}A_{1_0}\right) \tag{5.37}$$

όπου,

$\bar{y}_{1_0}$ η απόσταση του κέντρου βάρους της υγρής διατομής από τον πυθμένα,
Q_{1_0} η αρχική παροχή του πρωτεύοντα αγωγού και
A_{1_0} το εμβαδόν της υγρής διατομής του πρωτεύοντα αγωγού.

Κατάντη της συμβολής, $j = 1$ η ειδική δύναμη υπολογίζεται σύμφωνα με την σχέση:

$$M_{3_1}{}^m = \left(\frac{\left(Q_{3_i}{}^n + Q_{1_0}\right)^2}{gA_{3_1}{}^m} + \bar{y}_{3_1}{}^m A_{3_1}{}^m\right)$$

με βάση την εξίσωση συνέχειας (5.2) η σχέση γράφεται:

$$M_{3_1}{}^m = \left(\frac{\left(Q_{3_1}{}^m\right)^2}{gA_{3_1}{}^m} + \bar{y}_{3_1}{}^m A_{3_1}{}^m\right) \tag{5.38}$$

όπου,

m ο χρονικός κόμβος υπολογισμού στον πρωτεύοντα αγωγό,
$Q_{3_1}{}^m$ η παροχή του πρωτεύοντα αγωγού κατάντη της συμβολής,
$\bar{y}_{3_1}{}^m$ η απόσταση του κέντρου βάρους της υγρής διατομής και
$A_{3_1}{}^m$ το εμβαδόν της υγρής διατομής.

Για τον έλεγχο της ροής ελέγχεται αν η ειδική δύναμη ανάντη της συμβολής M_1 είναι ίση ή μεγαλύτερη από την ελάχιστη ειδική δύναμη που προκύπτει για βάθος ροής ίσο με το κρίσιμο. Επομένως, για γνωστή παροχή $Q_{3_1}{}^m$ ανάντη της συμβολής υπολογίζεται από τις σχέσεις του πίνακα 5.3 το y_{cr} και στην συνέχεια η ελάχιστη ειδική δύναμη από την σχέση:

$$M_{cr} = \left(\frac{\left(Q_{3_1}{}^m\right)^2}{gA_{cr}} + \bar{y}_{cr}A_{cr}\right) \tag{5.39}$$

Διακρίνονται δύο περιπτώσεις:

i. $M_1 \geq M_{cr}$

Η ροή ανάντη της συμβολής περνάει αδιατάρακτη. Το βάθος ροής ανάντη της συμβολής δεν μεταβάλλεται και ισούται με το ομοιόμορφο βάθος ροής για την αρχική παροχή του πρωτεύοντα αγωγού Q_{1_0}.

ii. $M_1 < M_{cr}$

Η ροή ανάντη της συμβολής διαταράσσεται. Για να μπορέσει να γίνει η εισροή της παροχής εξόδου του δευτερεύοντα αγωγού στον πρωτεύοντα αγωγό θα πρέπει να αυξηθεί το ανάντη της συμβολής βάθος ροής, ώστε να ισχύει $M_1 = M_3$.

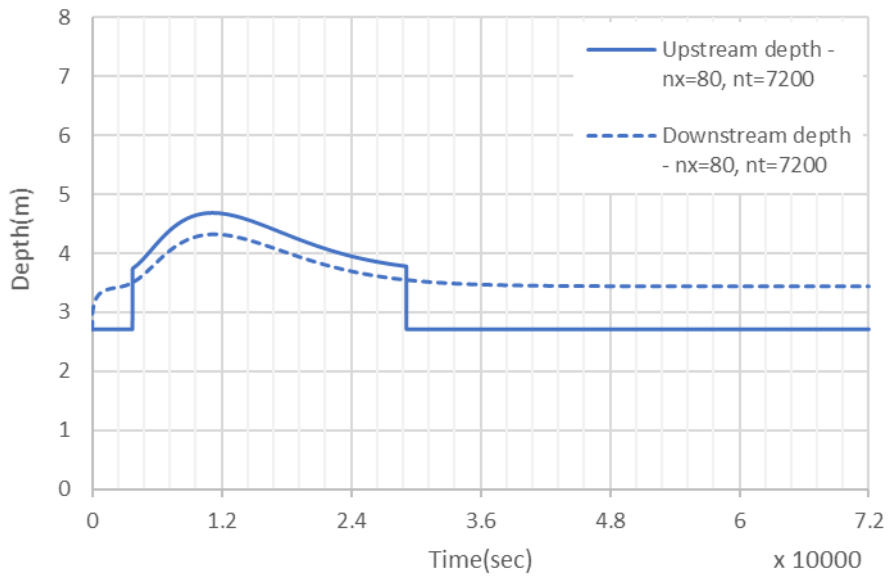
Υπολογίζεται το νέο ανάντη βάθος ροής στην συμβολή σύμφωνα με την πεπλεγμένη σχέση:

$$\left(\frac{Q_{1_0}^2}{gA_{1_u}} + \bar{y}_{1_u}A_{1_u}\right) = \left(\frac{\left(Q_{3_1}^m\right)^2}{gA_{3_1}^m} + \bar{y}_{3_1}^m A_{3_1}^m\right) \tag{5.40}$$

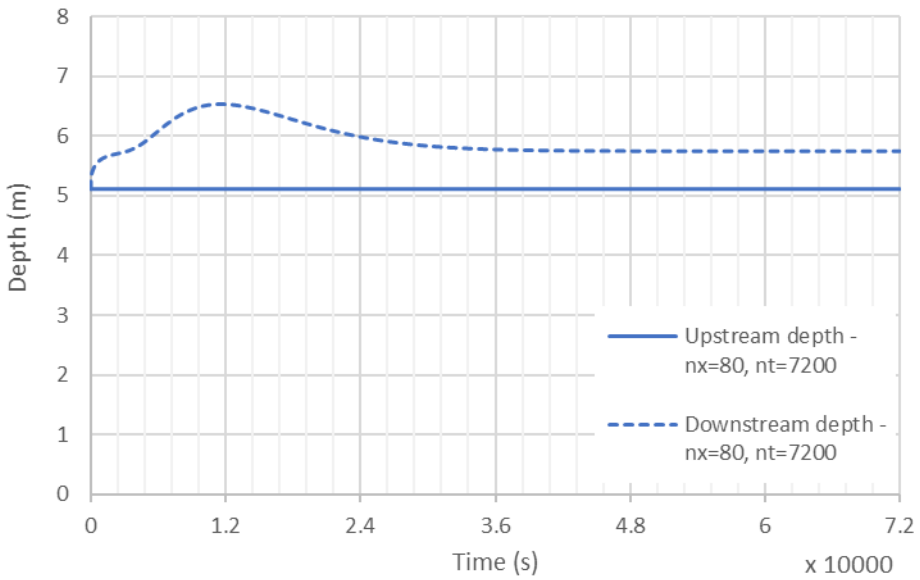
όπου,

$\bar{y}_{1_u}$ η απόσταση του κέντρου βάρους της υγρής διατομής ανάντη της συμβολης για την διαταρασσόμενη ροή και

A_{1_u} το εμβαδόν της υγρής διατομής ανάντη της συμβολης για την διαταρασσόμενη ροή.



Σχήμα 5.15: Βάθη ροής ανάντη και κατάντη της συμβολής σε διαταρασσόμενη ροή για αρχική παροχή πρωτεύοντα αγωγού $Q_{0_1} = 50\, {}^{m^3}/_{s}$.



Σχήμα 5.16: Βάθη ροής ανάντη και κατάντη της συμβολής σε αδιατάρακτη ροή για αρχική παροχή πρωτεύοντα αγωγού $Q_{0_1} = 120\, {}^{m^3}/_{s}$.

Επισημαίνεται, ότι στην περίπτωση που η ροή διαταράσσεται και υπάρχει αύξηση του βάθους ανάντη της συμβολής, τότε υπάρχει διάδοση κύματος προς τα ανάντη του πρωτεύοντα αγωγού (negative surge). Η επίλυση της ροής αυτής γίνεται για μεταβολή βάθους Δy, ακριβώς ανάντη της συμβολής και για σταθερή παροχή σε κάθε θέση x του αγωγού ανάντη της συμβολής.

6 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζονται όλες οι επιλύσεις της μη μόνιμης ροής που έγιναν με χρήση του λογισμικού MATLAB, καθώς και η μελέτη της ροής στην συμβολή των αγωγών. Συγκεκριμένα, παρουσιάζονται τα υδρογραφήματα καθώς και τα βάθη ροής για κάθε υπολογιστικό πλέγμα και για τις δύο μεθόδους στον δευτερεύοντα και πρωτεύοντα αγωγό. Επιπλέον, γίνεται σύγκριση των μεθόδων με τα αντίστοιχα αποτελέσματα που προκύπτουν από το πρόγραμμα HECRAS. Επισημαίνεται ότι μετά την σύγκριση των δύο μεθόδων όσον αφορά τα αποτελέσματα της επίλυσης της ροής για τον δευτερεύοντα αγωγό, επιλέχθηκε η ροή στον πρωτεύοντα να επιλυθεί μόνο με την μέθοδο των χαρακτηριστικών καμπυλών. Η επίλυση της ροής του πρωτεύοντα αγωγού συγκρίνεται και αυτή με την επίλυση που προέκυψε από το πρόγραμμα HECRAS. Τέλος, παρουσιάζεται η επίλυση της ροής ανάντη της συμβολής για την περίπτωση διαταρασσόμενης ροής.

6.1 Δευτερεύοντας αγωγός

Για τον δευτερεύοντα αγωγό, αφού επιλέχθηκαν τα σταθερά γεωμετρικά στοιχεία, εισήχθη υδρογράφημα στην διατομή εισόδου. Στην συνέχεια έγινε διάδοση του κύματος με την μέθοδο του ρητού σχήματος και την μέθοδο των χαρακτηριστικών καμπυλών. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν συγκρίθηκαν με τα αποτελέσματα που προκύπτουν από το πρόγραμμα HECRAS και εξήχθησαν συμπεράσματα για τις δύο αυτές μεθόδους.

6.1.1 Ορθογωνικός αγωγός

6.1.1.1 Ρητό σχήμα υπολογισμού

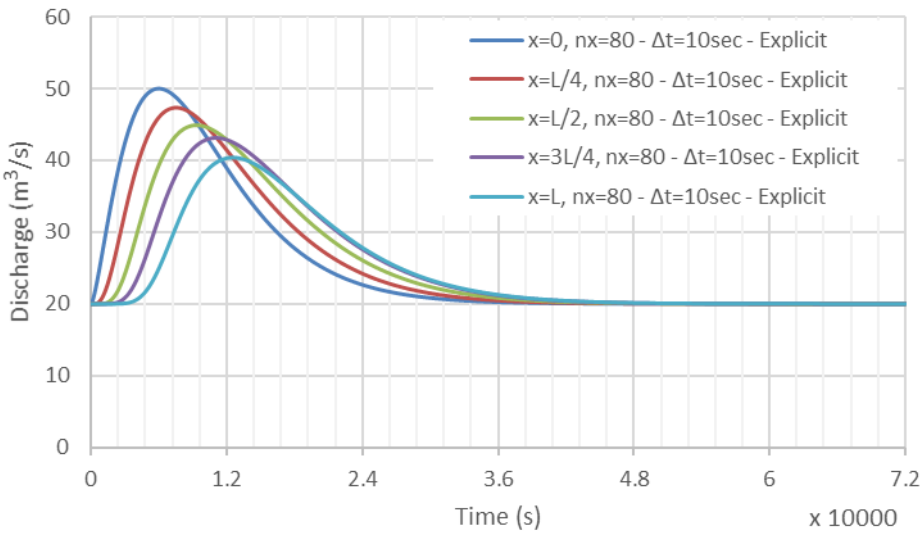
Για την επίλυση της μη μόνιμης ροής με χρήση ρητού σχήματος χρησιμοποιήθηκαν διαφορετικά υπολογιστικά πλέγματα, ώστε να γίνει εφικτή η εξαγωγή συμπερασμάτων για την διακριτοποίηση που επιλέγεται. Τα κύρια κριτήρια για την επιλογή του υπολογιστικού πλέγματος είναι ο αριθμός Courant, το σφάλμα της ποσοστιαίας απόκλισης των όγκων ολοκλήρωσης ως προς τον αρχικό όγκο νερού στην διατομή εισόδου και τέλος η ποσότητα $\Delta x^2/_{\Delta t}$ (Πίνακας 6.1).

Ορθογωνικός δευτερεύοντας αγωγός (Ρητό Σχήμα Υπολογισμού)

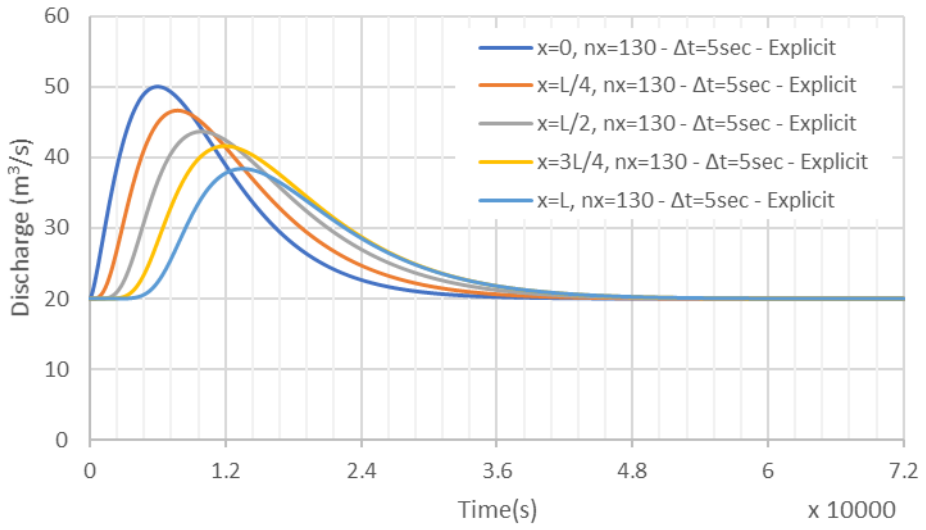
nx	$\Delta x\ (m)$	nt	$\Delta t\ (s)$	Δx^2/Δt	$maxCn$	Σφάλμα (%)
30	344.8		10	11889	0.272	5.43
50	204.1	7200	10	4164.4	0.467	4.67
80	126.6		10	1602.1	0.769	3.53
80	126.6		5	3204.4	0.384	5.82
100	101	14400	5	2040.5	0.488	5.16
130	77.5		5	1201.8	0.648	4.39
130	77.5		2	3004.5	0.259	8.09
200	50.3	36000	2	1262.6	0.414	6.57
300	33.4		2	559.3	0.645	5.21

Πίνακας 6.1: Υπολογιστικά πλέγματα για την επίλυση της ροής στον δευτερεύοντα ορθογωνικό αγωγό με χρήση ρητού σχήματος.

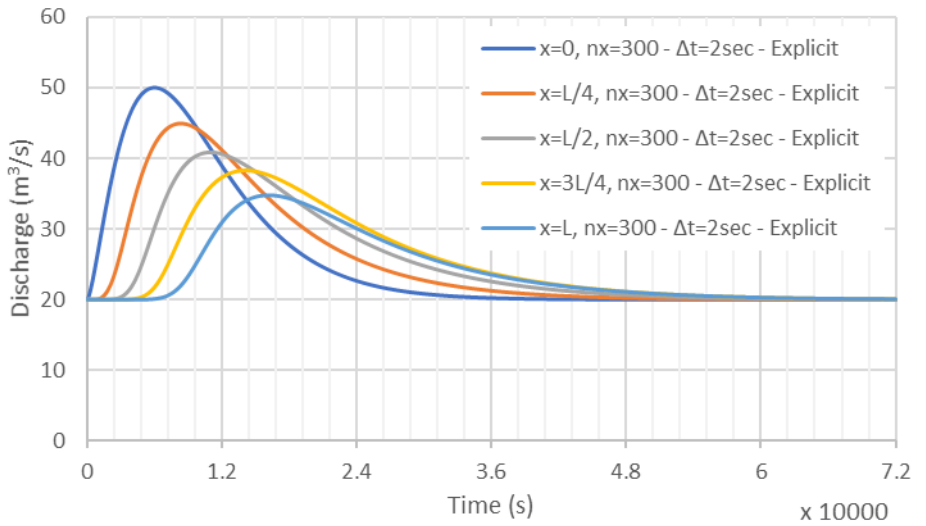
Παρακάτω παρουσιάζονται τα υδρογραφήματα στις διατομές $x = 0$, $x = {}^{L}/_{4}$, $x = {}^{L}/_{2}$, $x = {}^{3L}/_{4}$, $x = L$, όπου για κάθε Δt παρουσιάζεται η λύση με την βέλτιστη χωρική διακριτοποίηση, δηλαδή για $\Delta t = 10s$ $nx = 80$, για $\Delta t = 5s$ $nx = 130$ και για $\Delta t = 2s$ $nx = 300$. Επιπλέον, παρουσιάζονται για τις θέσεις $x = {}^{L}/_{2}$ και $x = L$ τα υδρογραφήματα και τα βάθη ροής που προκύπτουν για διάφορα πλέγματα. Τέλος, παρουσιάζονται για τις θέσεις $x = {}^{L}/_{2}$ και $x = L$ τα αντίστοιχα υδρογραφήματα και τα βάθη ροής που προκύπτουν από το λογισμικό HECRAS.



(α)

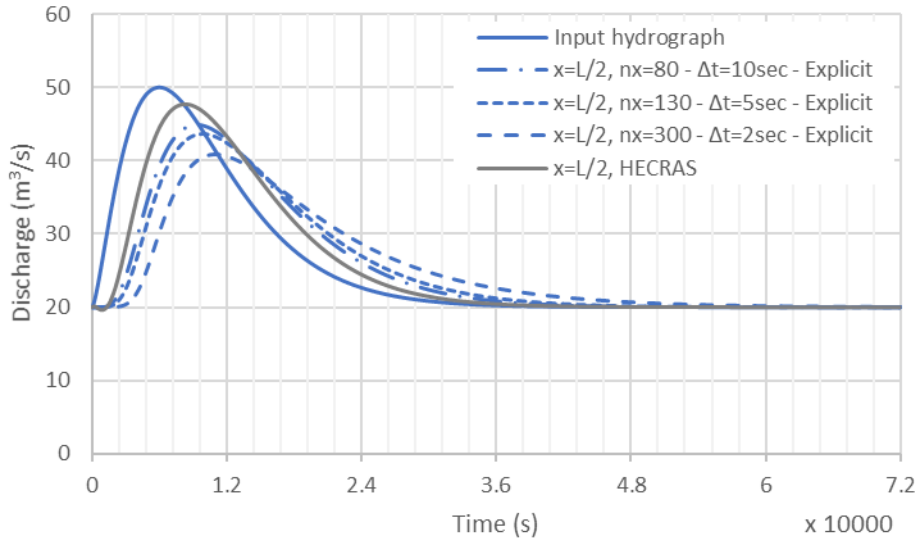


(β)

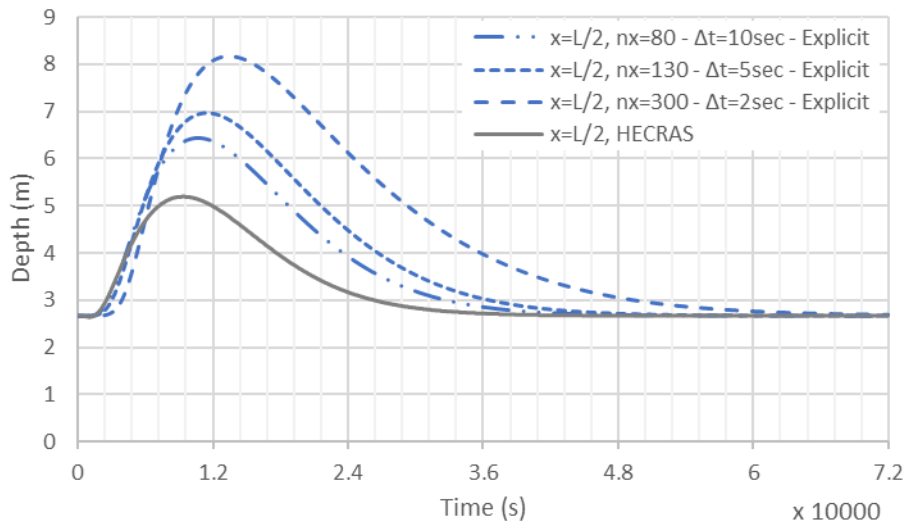


(γ)

Σχήμα 6.1: Υδρογραφήματα ανά $L/4$ του ορθογωνικού δευτερεύοντα αγωγού που προκύπτουν με το ρητό σχήμα υπολογισμού για (α) $\Delta t = 10s$, (β) $\Delta t = 5s$ και (γ) $\Delta t = 2s$ και για χωρικούς κόμβους όπου προκύπτουν τα μικρότερα σφάλματα, όπως αυτά φαίνονται στον πίνακα 6.1.

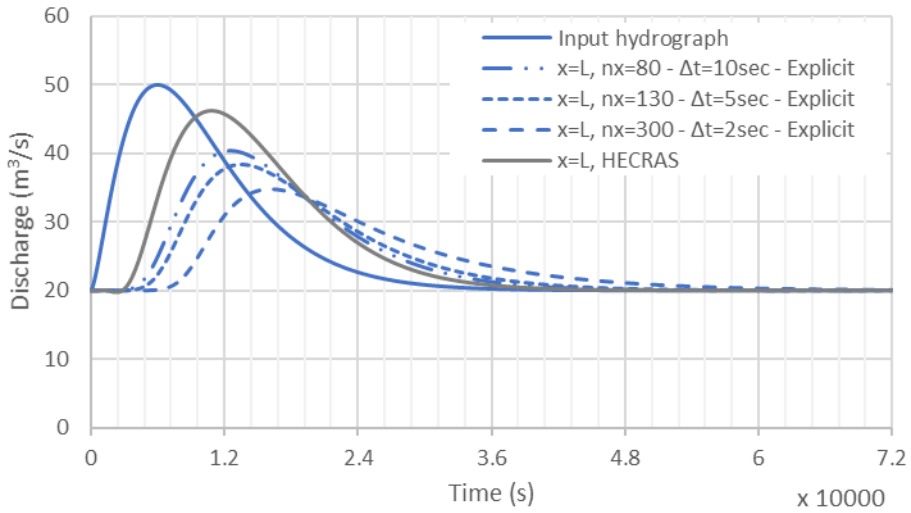


(α)

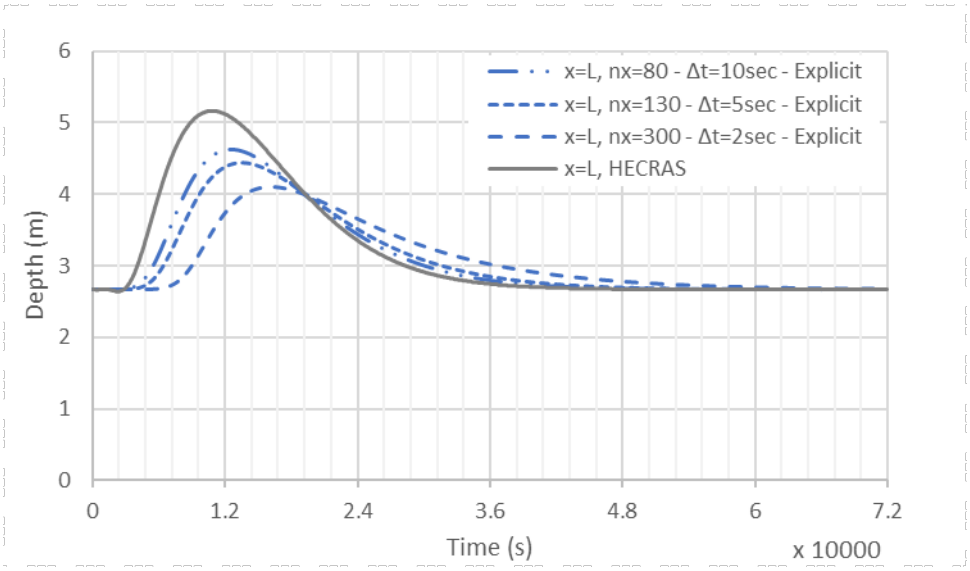


(β)

Σχήμα 6.2: Υδρογραφήματα (α) και βάθη ροής (β) που προκύπτουν από το ρητό σχήμα υπολογισμού στην θέση $x = L/2$ του αγωγού για διάφορα υπολογιστικά πλέγματα και το αντίστοιχο υδρογράφημα και βάθη ροής που προκύπτουν από το λογισμικό HECRAS.



(α)



(β)

Σχήμα 6.3: Υδρογραφήματα (α) και βάθη ροής (β) που προκύπτουν από το ρητό σχήμα υπολογισμού στην θέση $x = L$ του αγωγού για διάφορα υπολογιστικά πλέγματα και το αντίστοιχο υδρογράφημα και βάθη ροής που προκύπτουν από το λογισμικό HECRAS.

6.1.1.2 Μέθοδος χαρακτηριστικών καμπυλών

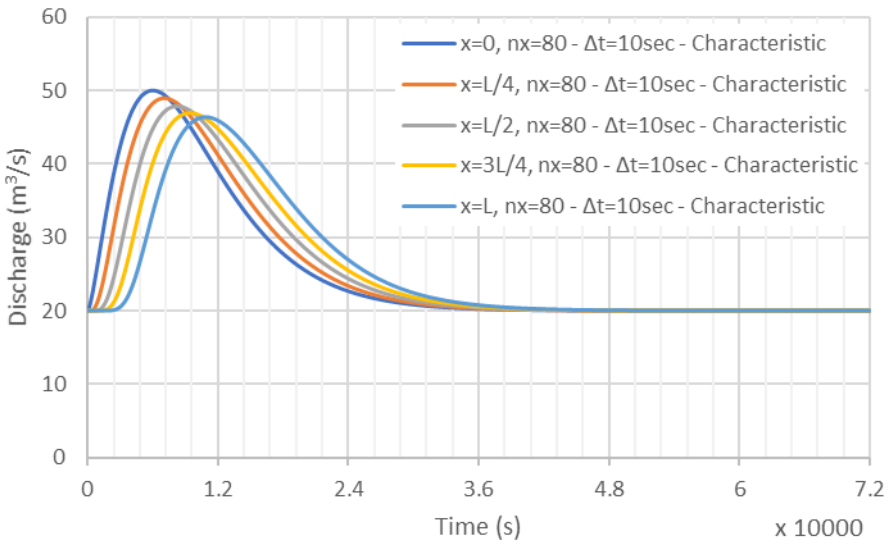
Για την επίλυση της μη μόνιμης ροής με χρήση της μεθόδου των χαρακτηριστικών καμπυλών χρησιμοποιήθηκαν τα ίδια υπολογιστικά πλέγματα, όπως και στην επίλυση με χρήση ρητού σχήματος, ώστε να γίνει εφικτή η εξαγωγή συμπερασμάτων κατά την σύγκριση των δύο μεθόδων (Πίνακας 6.2).

Ορθογωνικός δευτερεύοντας αγωγός (Μέθοδος Χαρακτηριστικών Καμπυλών)

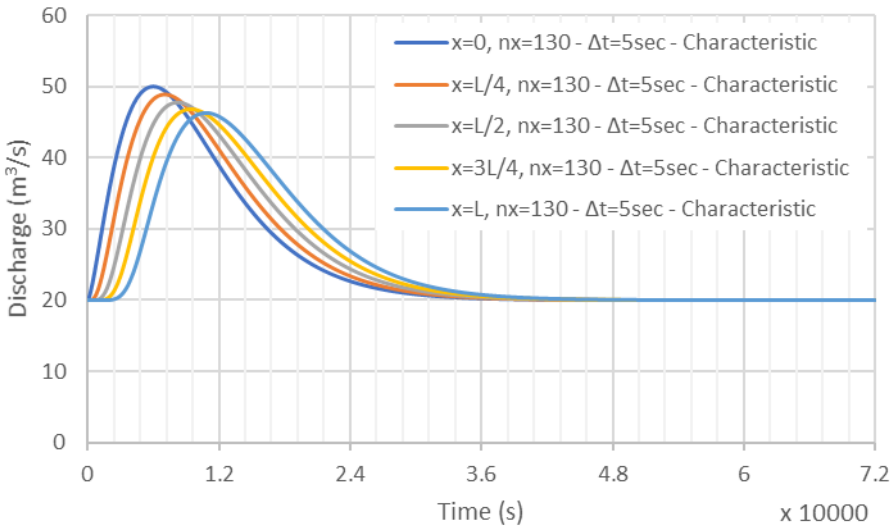
nx	$\Delta x\ (m)$	nt	$\Delta t\ (s)$	Δx^2/Δt	$maxCn$	Σφάλμα (%)
30	344.8		10	11889	0.157	0.020
50	204.1	7200	10	4164.4	0.447	0.010
80	126.6		10	1602.1	0.72	0.030
80	126.6		5	3204.4	0.36	0.002
100	101	14400	5	2040.5	0.451	0.006
130	77.5		5	1201.8	0.588	0.011
130	77.5		2	3004.5	0.235	0.005
200	50.3	36000	2	1262.6	0.363	0.002
300	33.4		2	559.3	0.545	0.005

Πίνακας 6.2: Υπολογιστικά πλέγματα για την επίλυση της ροής στον δευτερεύοντα ορθογωνικό αγωγό με χρήση της μεθόδου των χαρακτηριστικών καμπυλών.

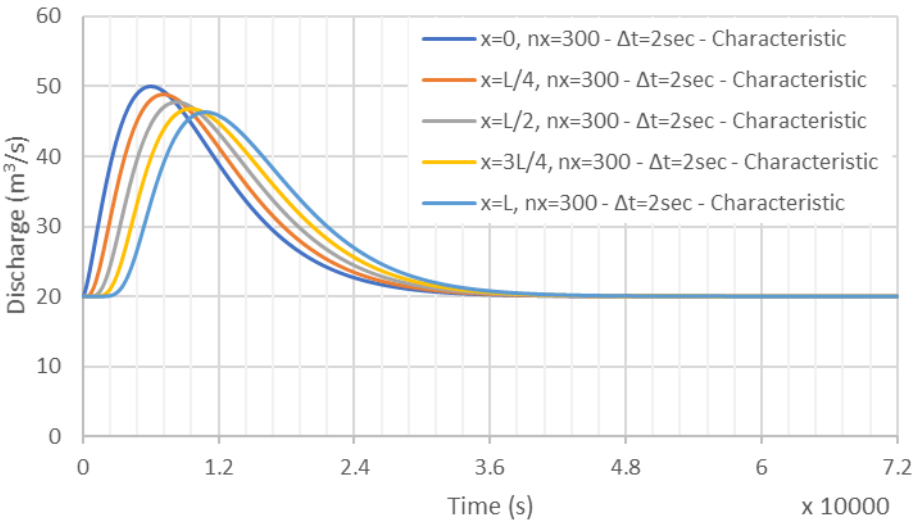
Παρακάτω παρουσιάζονται τα υδρογραφήματα που προκύπτουν με την μέθοδο των χαρακτηριστικών καμπυλών στις διατομές $x = 0$, $x = {}^{L}/_{4}$, $x = {}^{L}/_{2}$, $x = {}^{3L}/_{4}$, $x = L$ για το αντίστοιχο υπολογιστικό πλέγμα με αυτό του ρητού σχήματος. Επιπλέον, παρουσιάζονται για τις θέσεις $x = {}^{L}/_{2}$ και $x = L$ τα υδρογραφήματα και τα βάθη ροής που προκύπτουν για διάφορα πλέγματα. Τέλος, παρουσιάζονται για τις θέσεις $x = {}^{L}/_{2}$ και $x = L$ τα αντίστοιχα υδρογραφήματα και τα βάθη ροής που προκύπτουν από το λογισμικό HECRAS.



(α)

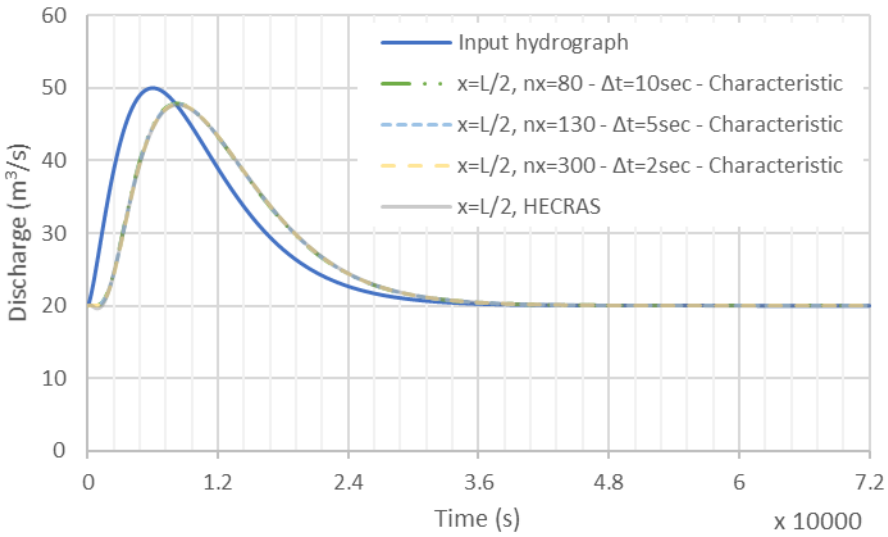


(β)

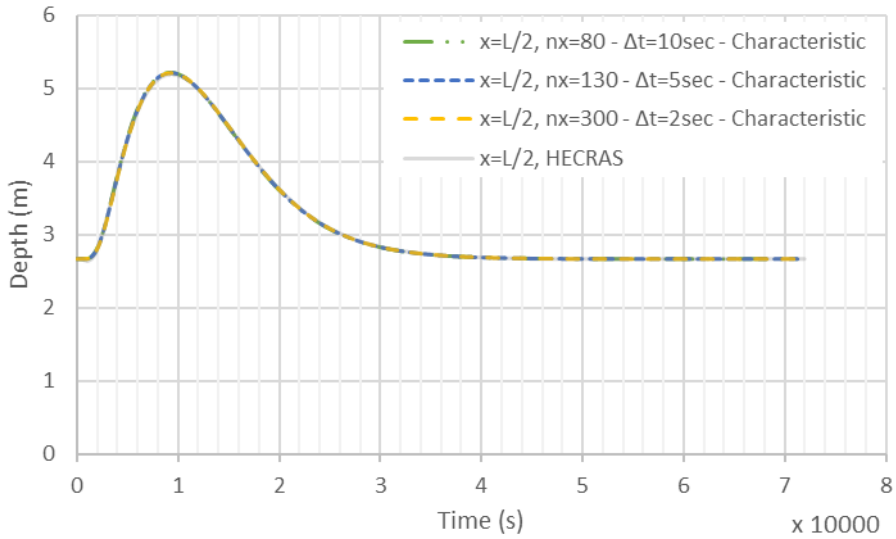


(γ)

Σχήμα 6.4: Υδρογραφήματα ανά $L/4$ του ορθογωνικού δευτερεύοντα αγωγού που προκύπτουν με την μέθοδο των χαρακτηριστικών καμπυλών για (α) $\Delta t = 10s$, (β) $\Delta t = 5s$ και (γ) $\Delta t = 2s$ και για χωρικούς κόμβους $nx = 80$, $nx = 130$ και $nx = 300$ αντίστοιχα.

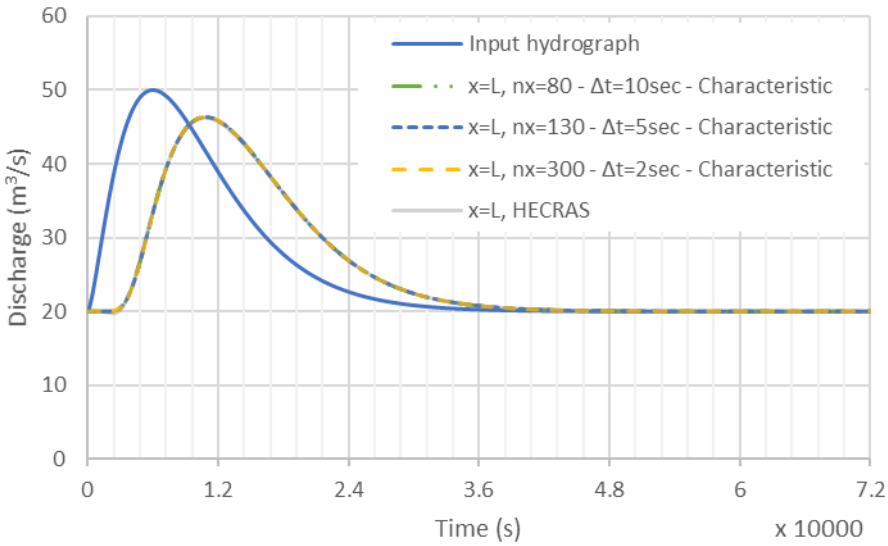


(α)

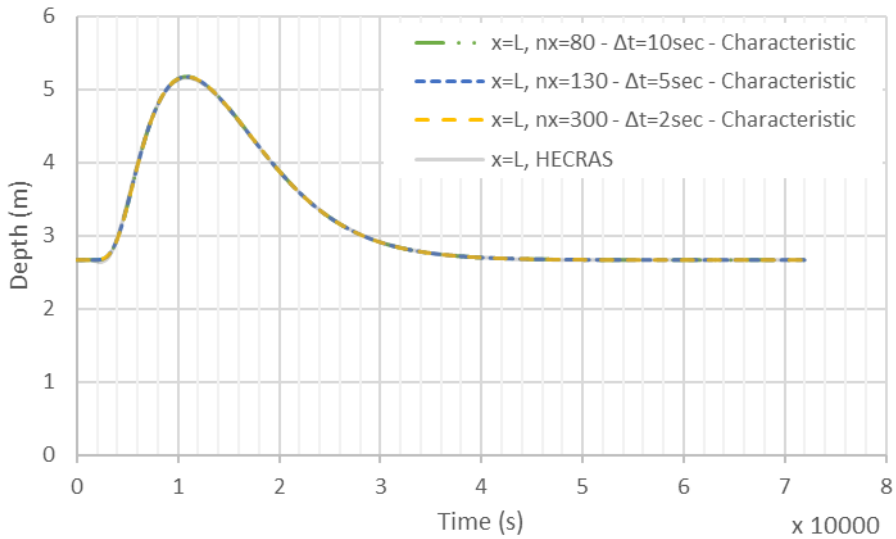


(β)

Σχήμα 6.5: Υδρογραφήματα (α) και βάθη ροής (β) που προκύπτουν από το ρητό σχήμα υπολογισμού στην θέση $x = L/2$ του αγωγού για διάφορα υπολογιστικά πλέγματα και το αντίστοιχο υδρογράφημα και τα βάθη ροής που προκύπτουν από το λογισμικό HECRAS.



(α)



Σχήμα 6.6: Υδρογραφήματα (α) και βάθη ροής (β) που προκύπτουν από την μέθοδο των χαρακτηριστικών καμπυλών στην θέση $x = L$ του αγωγού για διάφορα υπολογιστικά πλέγματα και το αντίστοιχο υδρογράφημα και τα βάθη ροής που προκύπτουν από το λογισμικό HECRAS.

6.1.2 Κυκλικός αγωγός

6.1.2.1 Ρητό σχήμα υπολογισμού

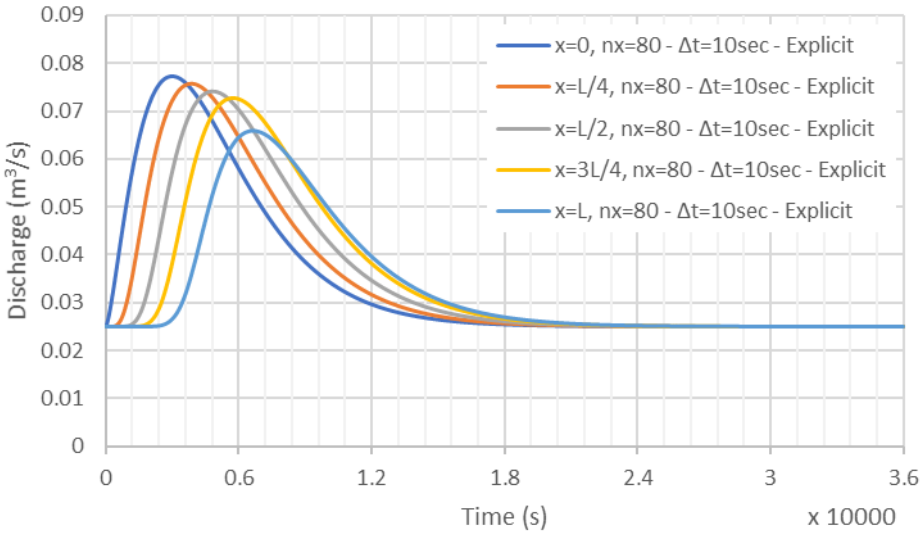
Όπως στον ορθογωνικό αγωγό, έτσι και στην επίλυση της ροής στον κυκλικό αγωγό χρησιμοποιήθηκαν διάφορα υπολογιστικά πλέγματα (Πίνακας 6.3).

Κυκλικός δευτερεύοντας αγωγός (Ρητό σχήμα υπολογισμού)

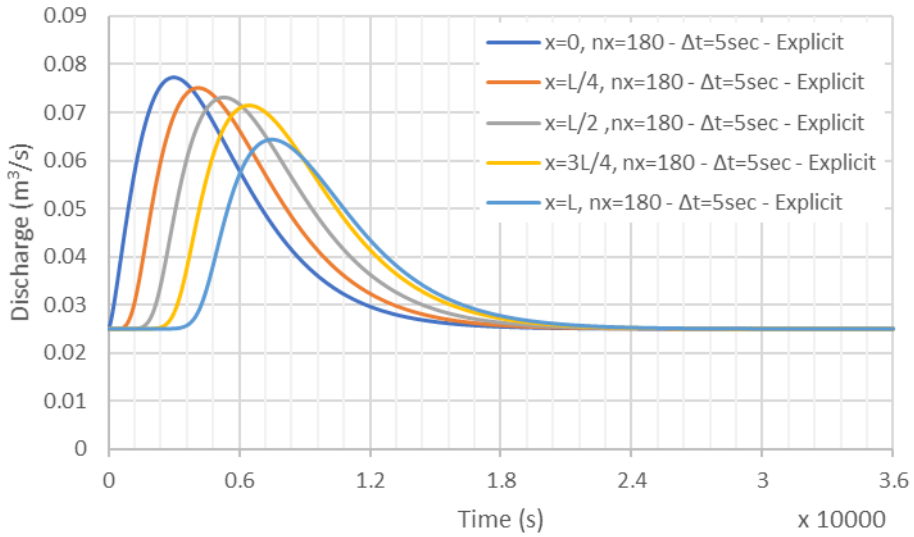
nx	$\Delta x\ (m)$	nt	$\Delta t\ (s)$	Δx^2/Δt	$maxCn$	Σφάλμα (%)	max $(\frac{y}{D_o})$
30	69		10	475.5	0.302	5.70	0.5203
50	40.8	3600	10	166.6	0.512	4.92	0.5318
80	25.3		10	64.1	0.831	4.02	0.5507
80	25.3		5	128.2	0.416	6.41	0.5507
140	14.4	7200	5	41.4	0.744	4.97	0.5879
180	11.2		5	25.0	0.971	4.31	0.612
180	11.2	18000	2	62.4	0.388	8.16	0.6114
300	6.7		2	22.4	0.679	6.31	0.6803

Πίνακας 6.3: Υπολογιστικά πλέγματα για την επίλυση της ροής στον δευτερεύοντα κυκλικό αγωγό με χρήση του ρητού σχήματος.

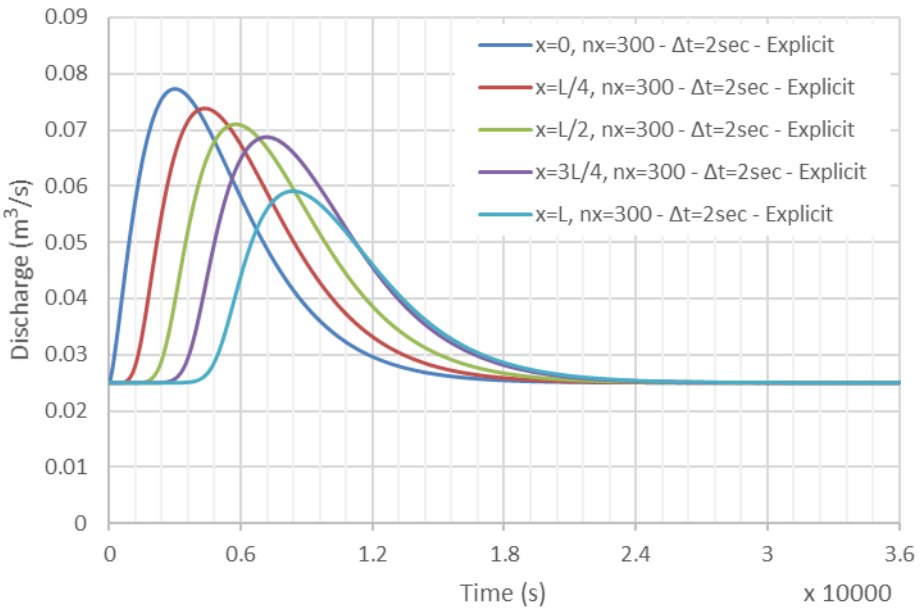
Παρακάτω παρουσιάζονται τα υδρογραφήματα στις διατομές $x = 0$, $x = {}^{L}/_{4}$, $x = {}^{L}/_{2}$, $x = {}^{3L}/_{4}$, $x = L$, όπου για κάθε Δt παρουσιάζεται η λύση με την βέλτιστη χωρική διακριτοποίηση, δηλαδή για $\Delta t = 10s$ $nx = 80$, για $\Delta t = 5s$ $nx = 180$ και για $\Delta t = 2s$ $nx = 300$. Επιπλέον, παρουσιάζονται για τις θέσεις $x = {}^{L}/_{2}$ και $x = L$ τα υδρογραφήματα και τα βάθη ροής που προκύπτουν για διάφορα πλέγματα. Τέλος, παρουσιάζονται για τις θέσεις $x = {}^{L}/_{2}$ και $x = L$ το αντίστοιχο υδρογράφημα και τα βάθη ροής που προκύπτουν από το λογισμικό HECRAS.



(α)

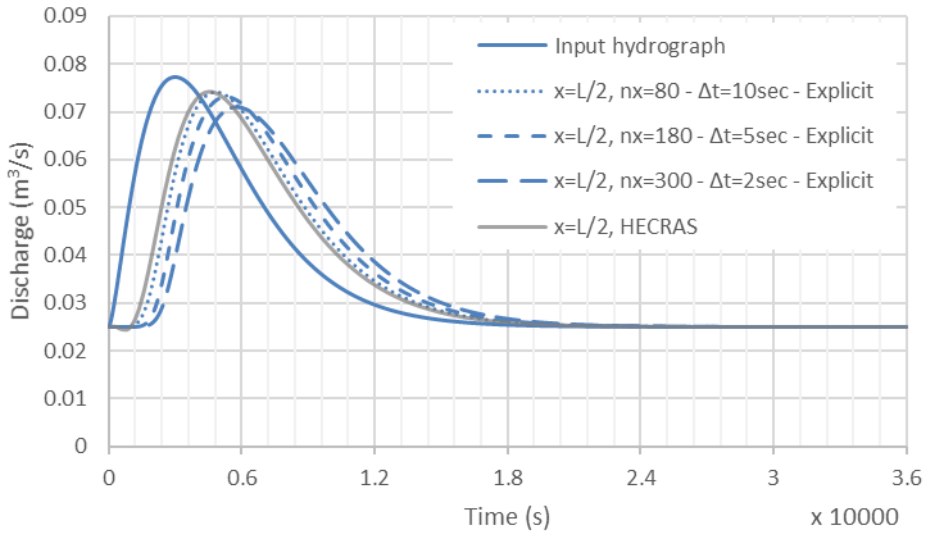


(β)

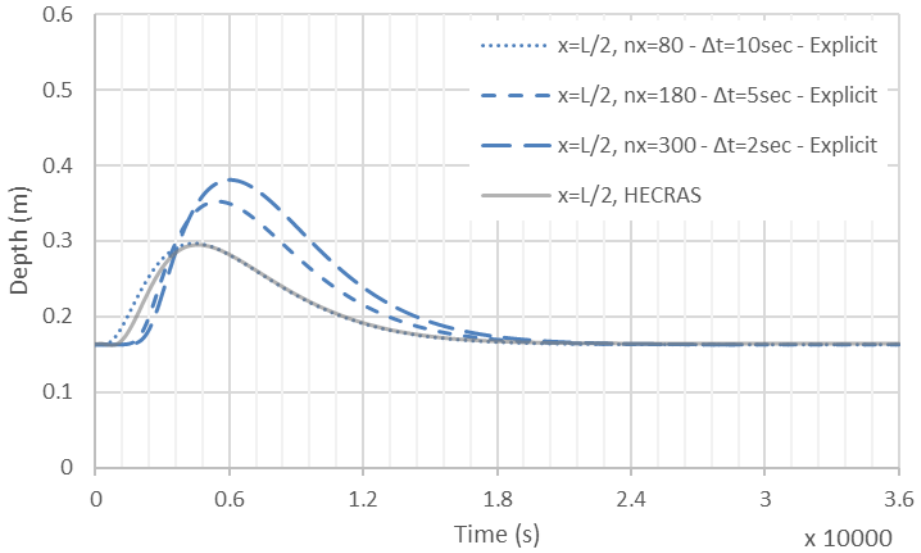


(γ)

Σχήμα 6.7: Υδρογραφήματα ανά $L/4$ του κυκλικού δευτερεύοντα αγωγού που προκύπτουν με το ρητό σχήμα υπολογισμού για (α) $\Delta t = 10s$, (β) $\Delta t = 5s$ και (γ) $\Delta t = 2s$ και για χωρικούς κόμβους όπου προκύπτουν τα μικρότερα σφάλματα, όπως αυτά φαίνονται στον πίνακα 6.3.

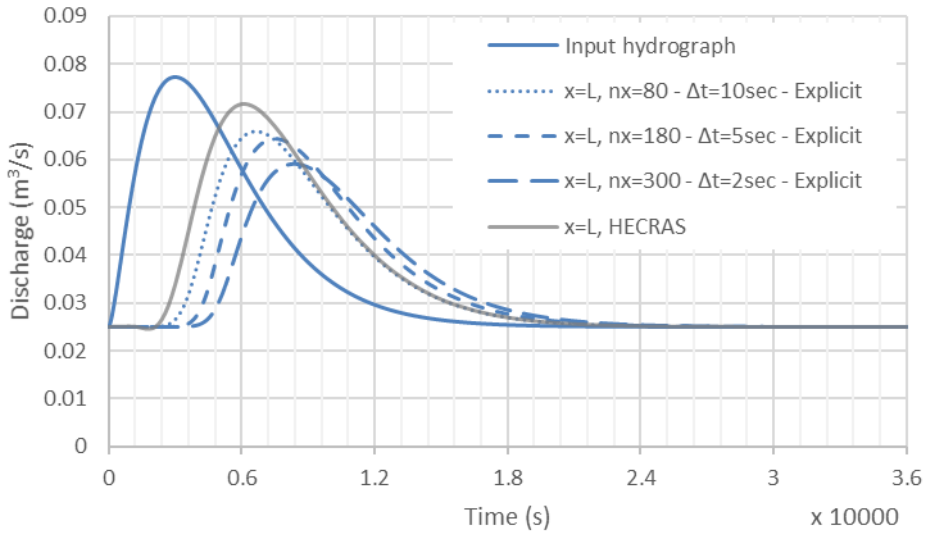


(α)

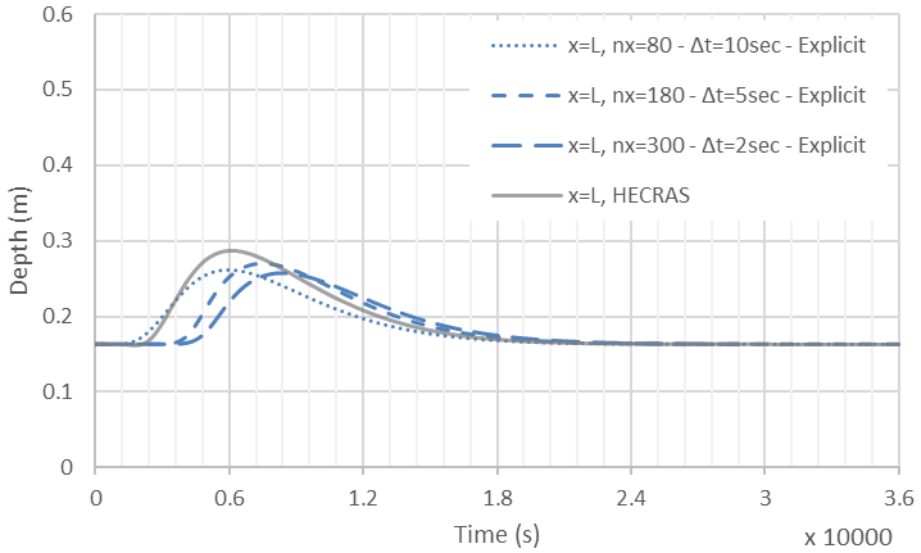


(β)

Σχήμα 6.8: Υδρογραφήματα (α) και βάθη ροής (β) που προκύπτουν από το ρητό σχήμα υπολογισμού στην θέση $x = L/2$ του αγωγού για διάφορα υπολογιστικά πλέγματα και το αντίστοιχο υδρογράφημα και τα βάθη ροής που προκύπτουν από το λογισμικό HECRAS.



(α)



(β)

Σχήμα 6.9: Υδρογραφήματα (α) και βάθη ροής (β) που προκύπτουν από το ρητό σχήμα υπολογισμού στην θέση $x = L$ του αγωγού για διάφορα υπολογιστικά πλέγματα και το αντίστοιχο υδρογράφημα και τα βάθη ροής που προκύπτουν από το λογισμικό HECRAS.

6.1.2.1 Μέθοδος χαρακτηριστικών καμπυλών

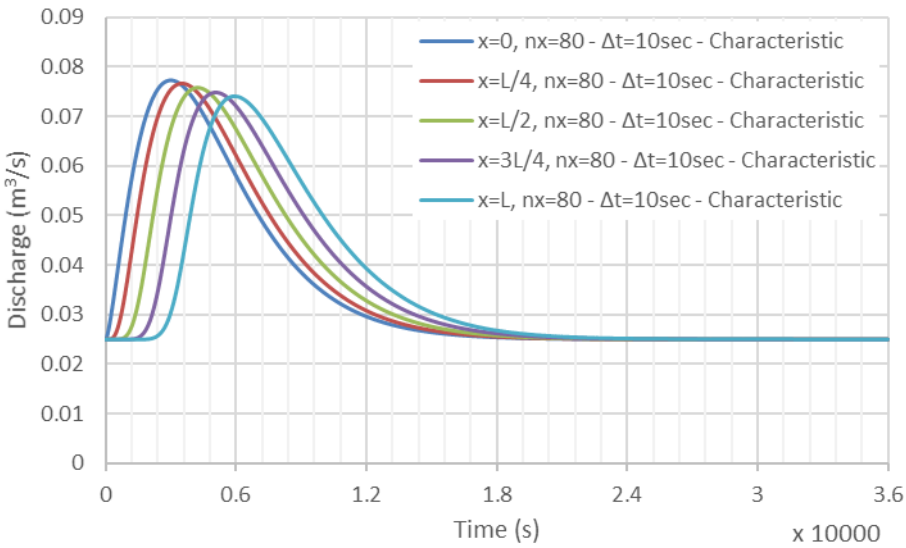
Για την επίλυση της μη μόνιμης ροής, στον κυκλικό δευτερεύοντα αγωγό, με χρήση της μεθόδου των χαρακτηριστικών καμπυλών χρησιμοποιήθηκαν τα ίδια υπολογιστικά πλέγματα, όπως και στην επίλυση με χρήση ρητού σχήματος (Πίνακας 6.4).

Κυκλικός δευτερεύοντας αγωγός (Μέθοδος Χαρακτηριστικών Καμπυλών)

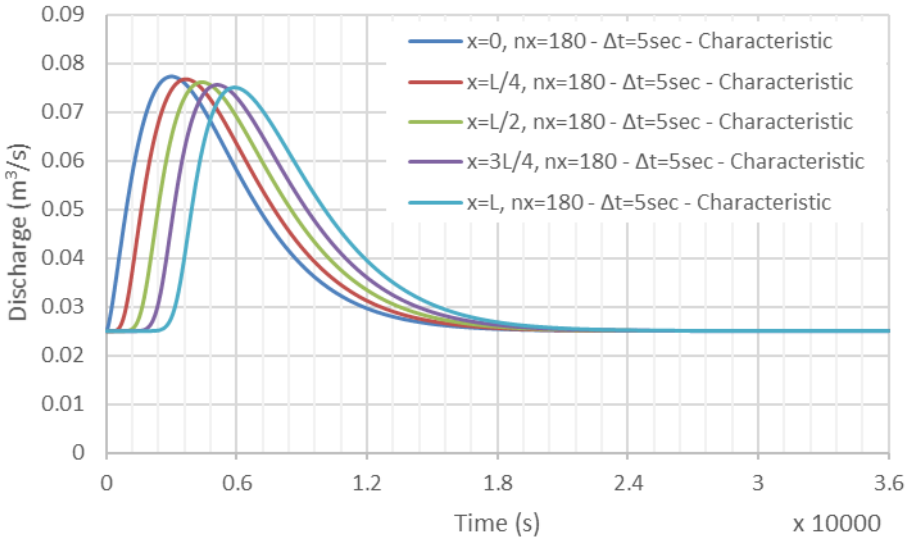
nx	$\Delta x\ (m)$	nt	$\Delta t\ (s)$	Δx^2/Δt	$maxCn$	Σφάλμα (%)	max $(\frac{y}{D_o})$
30	69		10	475.5	0.300	0.07	0.4995
50	40.8	3600	10	166.6	0.507	0.04	0.4996
80	25.3		10	64.1	0.817	0.11	0.4996
80	25.3		5	128.2	0.408	0.01	0.4995
140	14.4	7200	5	41.4	0.718	0.05	0.4996
180	11.2		5	25.0	0.925	0.07	0.4996
180	11.2		2	62.4	0.370	0.01	0.4996
300	6.7	18000	2	22.4	0.618	0.02	0.4996
400	5		2	12.6	0.825	0.03	0.4996

Πίνακας 6.4: Υπολογιστικά πλέγματα για την επίλυση της ροής στον δευτερεύοντα κυκλικό αγωγό με χρήση της μεθόδου των χαρακτηριστικών καμπυλών.

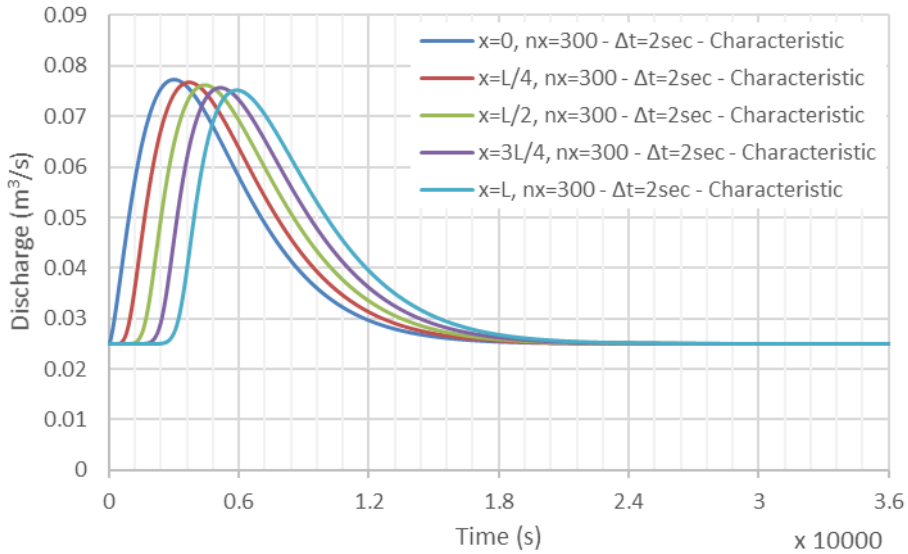
Παρακάτω παρουσιάζονται τα υδρογραφήματα που προκύπτουν με την μέθοδο των χαρακτηριστικών καμπυλών στις διατομές $x = 0$, $x = {}^{L}/_{4}$, $x = {}^{L}/_{2}$, $x = {}^{3L}/_{4}$, $x = L$ για το αντίστοιχο υπολογιστικό πλέγμα με αυτό του ρητού σχήματος. Επιπλέον, παρουσιάζονται για τις θέσεις $x = {}^{L}/_{2}$ και $x = L$ τα υδρογραφήματα και τα βάθη ροής που προκύπτουν για διάφορα πλέγματα. Τέλος, παρουσιάζονται για τις θέσεις $x = {}^{L}/_{2}$ και $x = L$ τα αντίστοιχα υδρογραφήματα και τα βάθη ροής που προκύπτουν από το λογισμικό HECRAS.



(α)

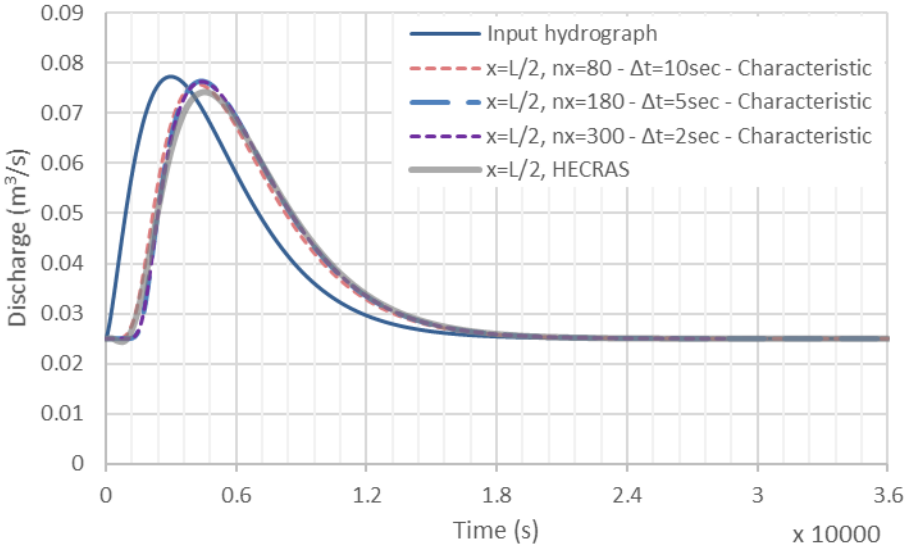


(β)

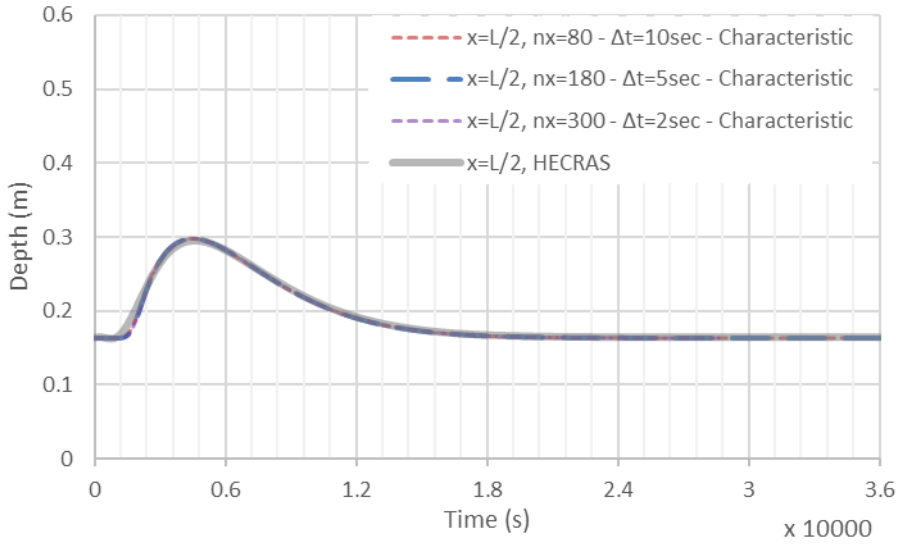


(γ)

Σχήμα 6.10: Υδρογραφήματα ανά $L/4$ του ορθογωνικού δευτερεύοντα αγωγού που προκύπτουν με την μέθοδο των χαρακτηριστικών καμπυλών για (α) $\Delta t = 10s$, (β) $\Delta t = 5s$ και (γ) $\Delta t = 2s$ και για χωρικούς κόμβους $nx = 80$, $nx = 180$ και $nx = 300$ αντίστοιχα.

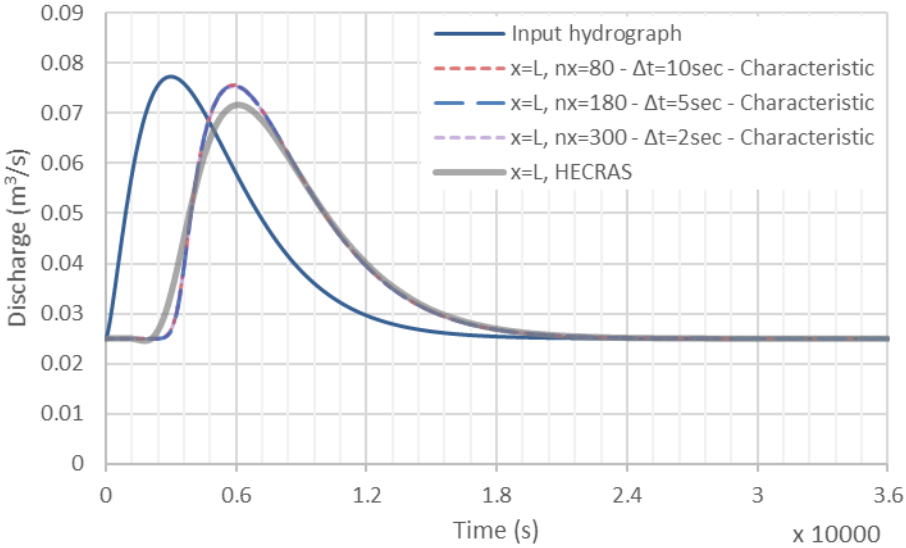


(α)

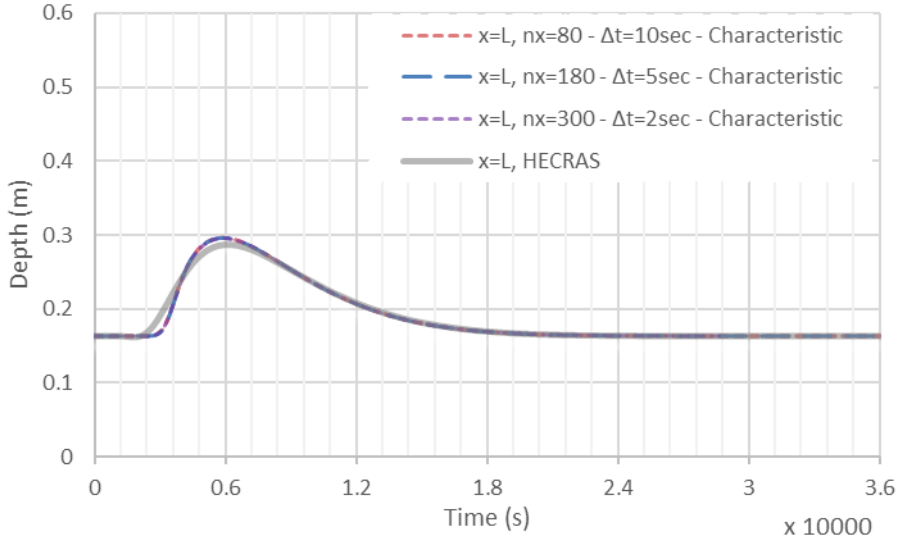


(β)

Σχήμα 6.11: Υδρογραφήματα (α) και βάθη ροής (β) που προκύπτουν από την μέθοδο χαρακτηριστικών καμπυλών στην θέση $x = L/2$ του κυκλικού αγωγού για διάφορα υπολογιστικά πλέγματα και το αντίστοιχο υδρογράφημα και τα βάθη ροής που προκύπτουν από το λογισμικό HECRAS.



(α)



(β)

Σχήμα 6.12: Υδρογραφήματα (α) και βάθη ροής (β) που προκύπτουν από την μέθοδο χαρακτηριστικών καμπυλών στην θέση $x = L$ του κυκλικού αγωγού για διάφορα υπολογιστικά πλέγματα και το αντίστοιχο υδρογράφημα και τα βάθη ροής που προκύπτουν από το λογισμικό HECRAS.

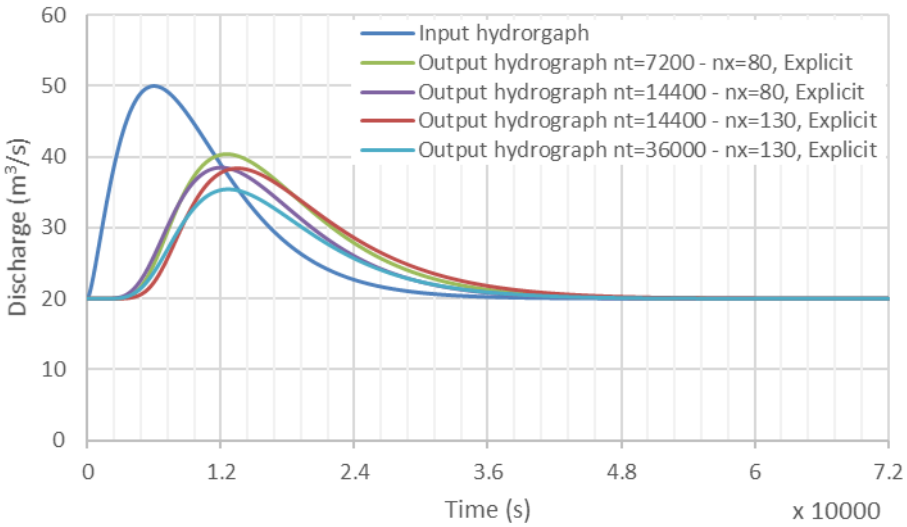
6.1.3 Σύγκριση μεθόδων

Αρχικά, παρατηρείται ότι κατά την επίλυση της μη μόνιμης ροής στον δευτερεύοντα ορθογωνικό για τις δύο μεθόδους, το ρητό σχήμα επίλυσης παρουσιάζει μεγαλύτερα σφάλματα ποσοστιαίας ολοκλήρωσης όγκου ως προς τον αρχικό όγκο νερού στην διατομή εισόδου, έναντι της επίλυσης με την μέθοδο των χαρακτηριστικών καμπυλών. Συγκεκριμένα για το ρητό σχήμα επίλυσης στον ορθογωνικό δευτερεύοντα αγωγό, τα μέγιστα σφάλματα που προκύπτουν για τα υπολογιστικά πλέγματα $nx = 80 - nt = 7200$, $nx = 130 - nt = 14400$ και $nx = 300 - nt = 36000$ είναι 3,53%, 4,39% και 5,21%, με τα αντίστοιχα της

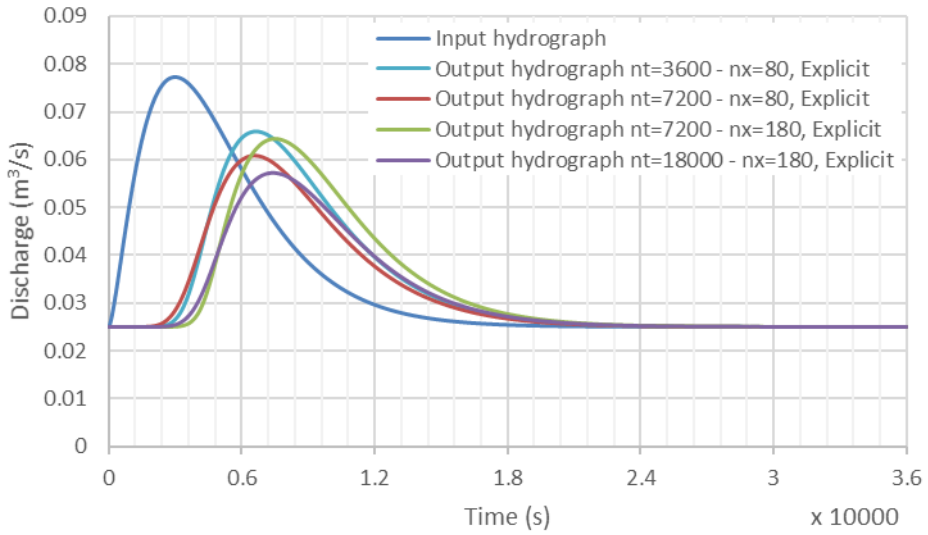
μεθόδου των χαρακτηριστικών καμπυλών να μην ξεπερνούν την τιμή 0.03% για όλα τα πλέγματα υπολογισμού. Αντίστοιχα για τον κυκλικό δευτερεύοντα αγωγό, τα μέγιστα σφάλματα που προκύπτουν για τα υπολογιστικά πλέγματα $nx = 80 - nt = 3600$, $nx = 180 - nt = 7200$ και $nx = 300 - nt = 18000$ είναι 4,02%, 4,31% και 6,31%, με τα αντίστοιχα της μεθόδου των χαρακτηριστικών καμπυλών να μην ξεπερνούν την τιμή 0.11% για όλα τα πλέγματα υπολογισμού.

Επιπλέον, στο ρητό σχήμα υπολογισμού παρατηρείται εξάρτηση της επίλυσης της ροής με το υπολογιστικό πλέγμα που επιλέγεται. Όπως φαίνεται και στα παρακάτω σχήματα, τα υδρογραφήματα εξόδου που προκύπτουν για τον ορθογωνικό και κυκλικό αγωγό διαφοροποιούνται αρκετά όταν αλλάζει το υπολογιστικό πλέγμα.

Τέλος, στον κυκλικό αγωγό παρατηρείται ότι η μέγιστη πλήρωση του αγωγού παραμένει σταθερή και προσεγγίζει την τιμή 0.5 (Πίνακας 6.4) σε κάθε υπολογιστικό πλέγμα για την μέθοδο των χαρακτηριστικών καμπυλών, ενώ το ρητό σχήμα επίλυσης δίνει διαφορετικές τιμές για την μέγιστη πλήρωση του αγωγού, η οποία φτάνει έως την τιμή 0.68 (Πίνακας 6.3).

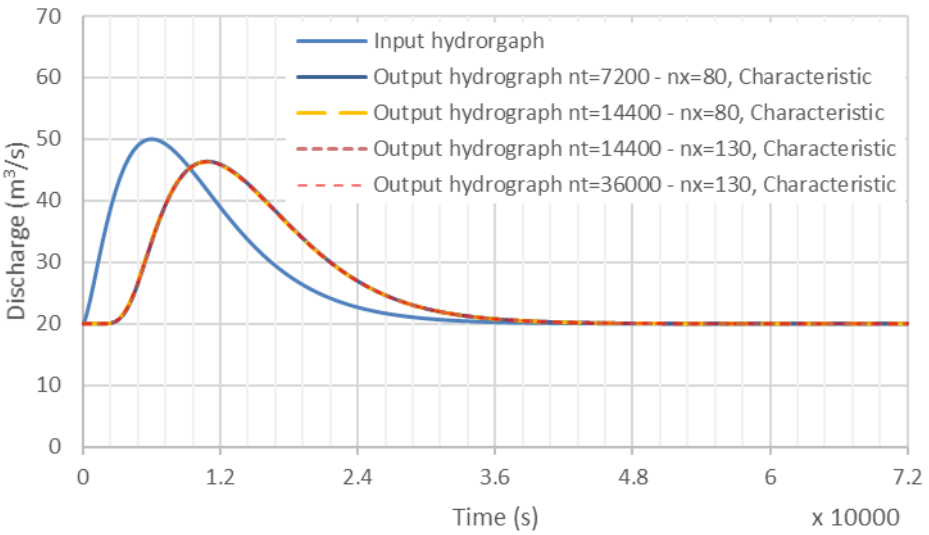


Σχήμα 6.13: Υδρογραφήματα εξόδου ορθογωνικού δευτερεύοντα αγωγού που προκύπτουν με την ρητή μέθοδο επίλυσης για διαφορετική χρονική και χωρική διακριτοποίηση.

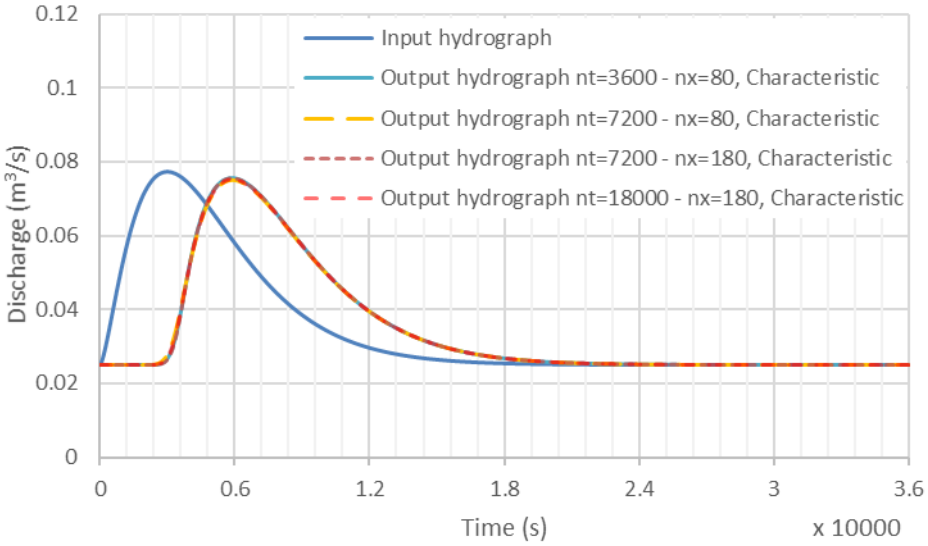


Σχήμα 6.14: Υδρογραφήματα εξόδου κυκλικού δευτερεύοντα αγωγού που προκύπτουν με την ρητή μέθοδο επίλυσης για διαφορετική χρονική και χωρική διακριτοποίηση.

Αντίθετα, στην επίλυση της μη μόνιμης ροής στον δευτερεύοντα αγωγό με την μέθοδο των χαρακτηριστικών καμπυλών παρατηρείται ότι τα υδρογραφήματα εξόδου ταυτίζονται ανεξαρτήτως του υπολογιστικού πλέγματος και για τις δύο γεωμετρίες του αγωγού (Σχήμα 6.15 – Σχήμα 6.16).

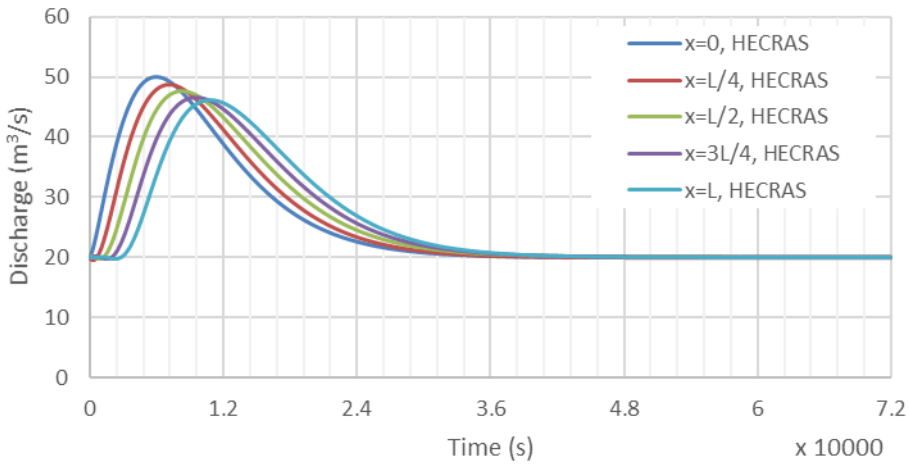


Σχήμα 6.15: Υδρογραφήματα εξόδου ορθογωνικού δευτερεύοντα αγωγού που προκύπτουν με την μέθοδο των χαρακτηριστικών καμπυλών για διαφορετική χρονική και χωρική διακριτοποίηση.

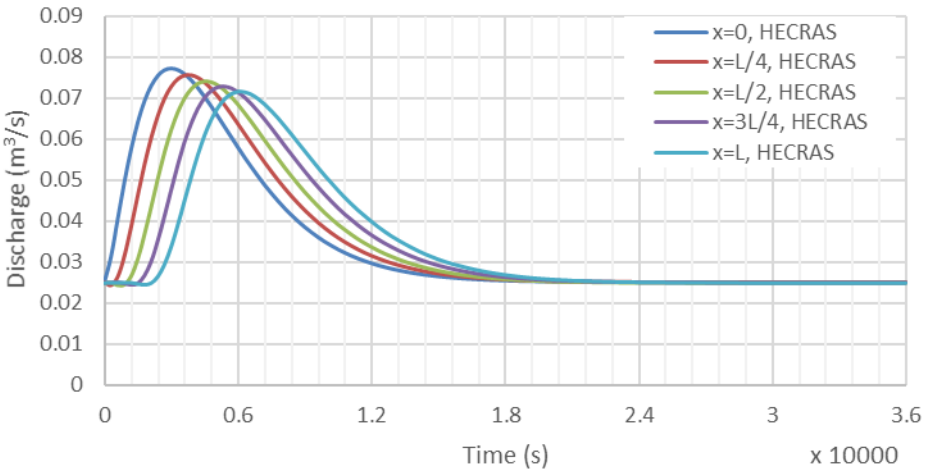


Σχήμα 6.16: Υδρογραφήματα εξόδου κυκλικού δευτερεύοντα αγωγού που προκύπτουν με την μέθοδο των χαρακτηριστικών καμπυλών για διαφορετική χρονική και χωρική διακριτοποίηση.

Τέλος, παρατηρούμε ότι κατά την σύγκριση των δύο μεθόδων με τα αντίστοιχα αποτελέσματα που προκύπτουν από το λογισμικό HECRAS (Σχήμα 6.17), η μέθοδος των χαρακτηριστικών καμπυλών δίνει σχεδόν πανομοιότυπα αποτελέσματα όσον αφορά τον ορθογωνικό αγωγό και ικανοποιητικά αποτελέσματα για τον κυκλικό δευτερεύοντα αγωγό. Αντίθετα, το ρητό σχήμα υπολογισμού στον ορθογωνικό αγωγό υποεκτιμά την παροχή στις θέσεις ελέγχου $x = {}^{L}/_{2}$ $και$ L, ένω υπερεκτιμά το βάθος ροής στην θέση $x = L/2$ και το υποεκτιμά στην θέση $x = L$ (Σχήμα 6.18 - 6.19). Στον κυκλικό αγωγό υπερεκτιμά το βάθος ροής στην διατομή $x = L/2$ και υποεκτιμά την παροχή και το βάθος ροής στην διατομή εξόδου $x = L$ (Σχήμα 6.20 - 6.21).

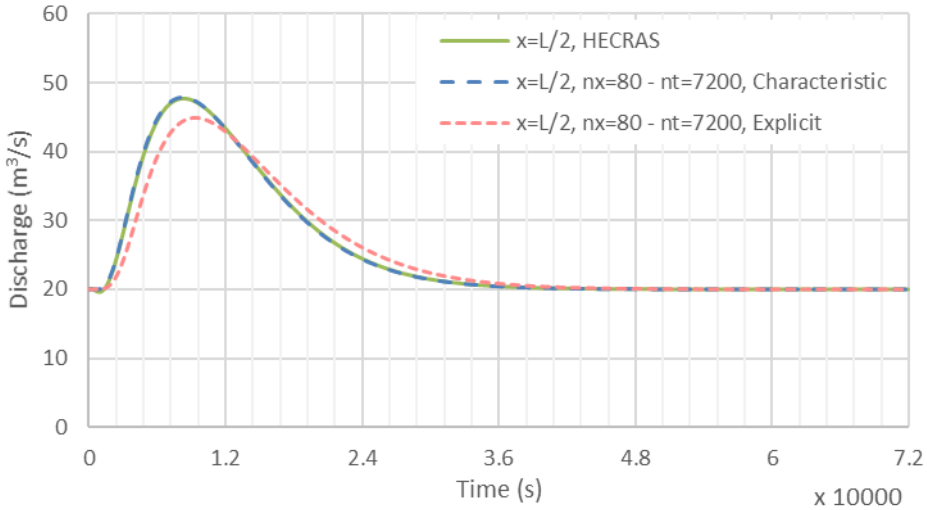


(α)

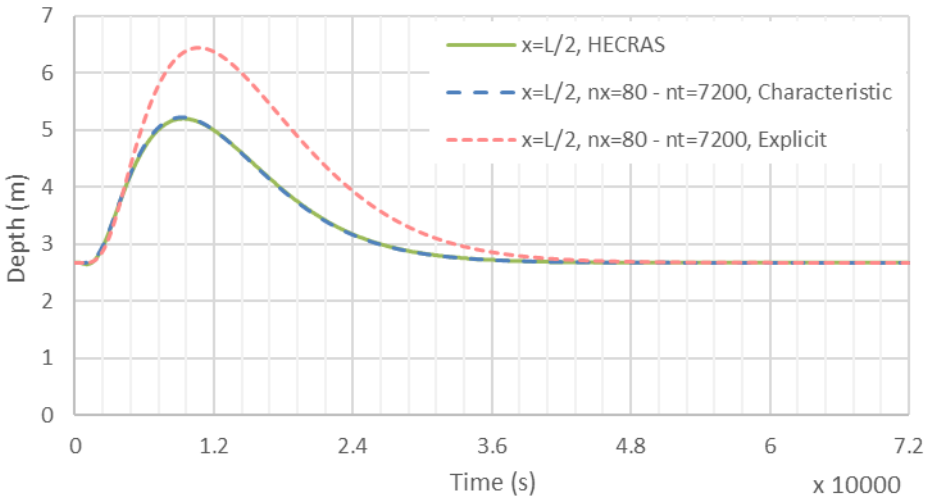


(β)

Σχήμα 6.17: Υδρογραφήματα ορθογωνικού (α) και κυκλικού (β) δευτερεύοντα αγωγού στις διατομές ελέγχου που προκύπτουν από το πρόγραμμα HECRAS

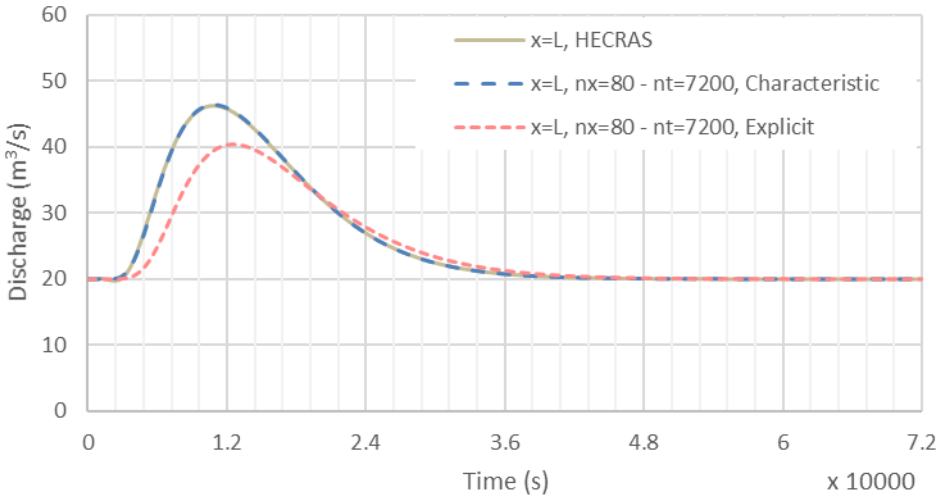


(α)

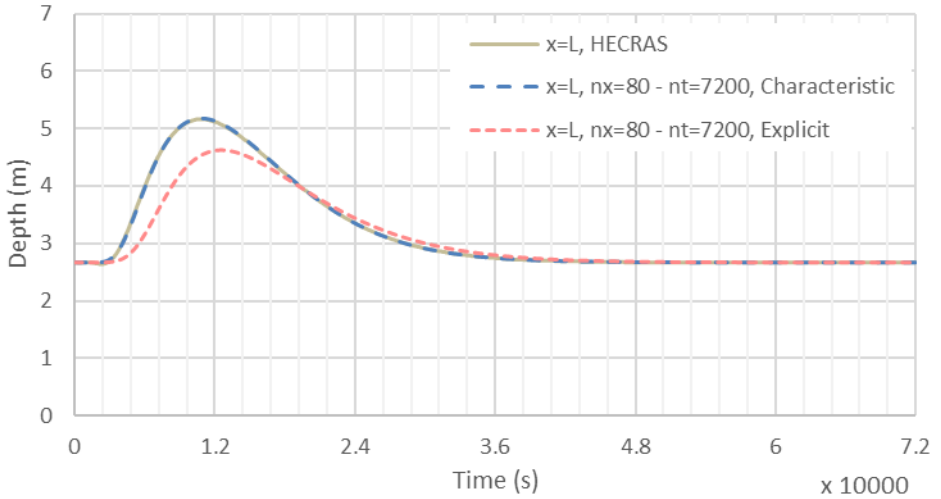


(β)

Σχήμα 6.18: Υδρογραφήματα (α) και βάθη ροής (β) που προκύπτουν από την επίλυση της ροής με το πρόγραμμα HECRAS, την μέθοδο των χαρακτηριστικών καμπυλών και το ρητό σχήμα υπολογισμού στην θέση $x = L/2$ του δευτερεύοντα ορθογωνικού αγωγού.

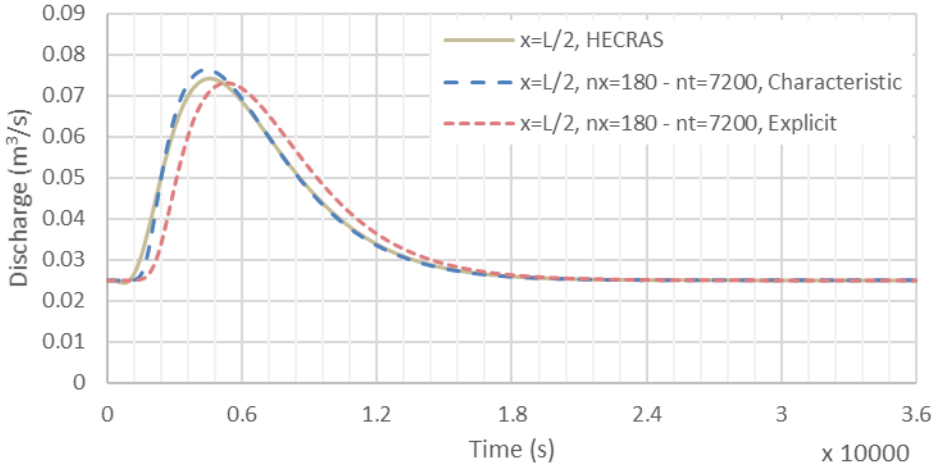


(α)

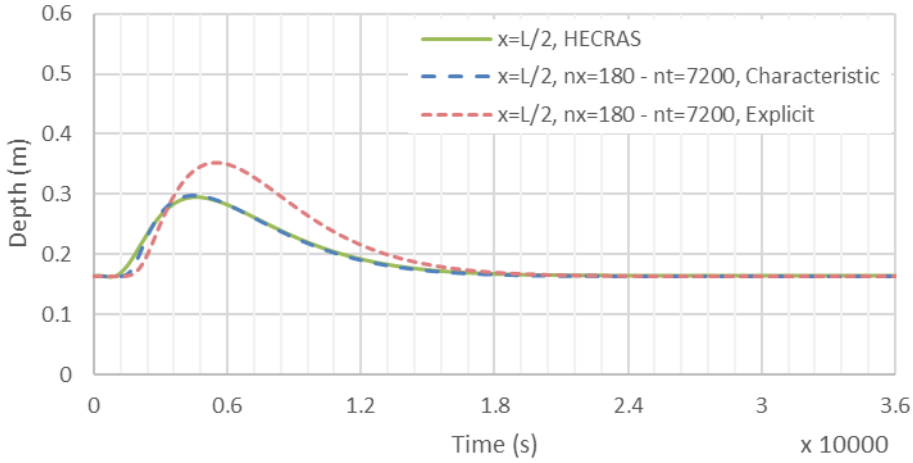


(β)

Σχήμα 6.19: : Υδρογραφήματα (α) και βάθη ροής (β) που προκύπτουν από την επίλυση της ροής με το πρόγραμμα HECRAS, την μέθοδο των χαρακτηριστικών καμπυλών και το ρητό σχήμα υπολογισμού στην θέση $x = L$ του δευτερεύοντα ορθογωνικού αγωγού.

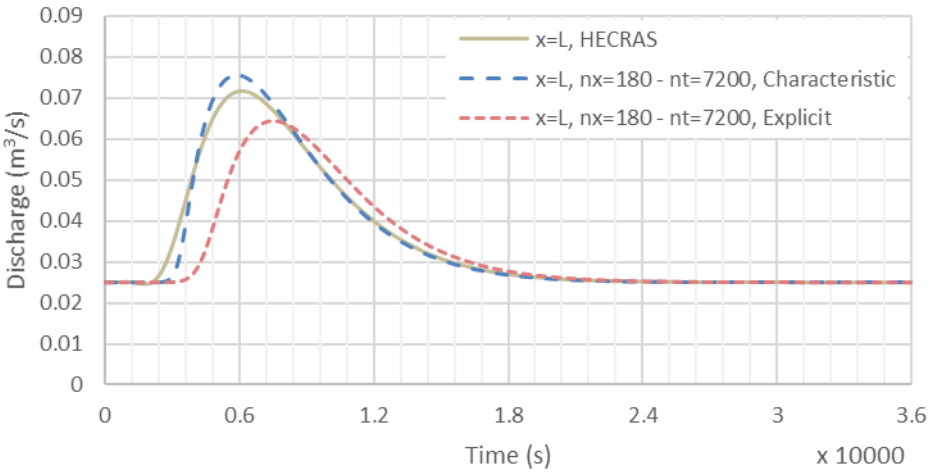


(α)

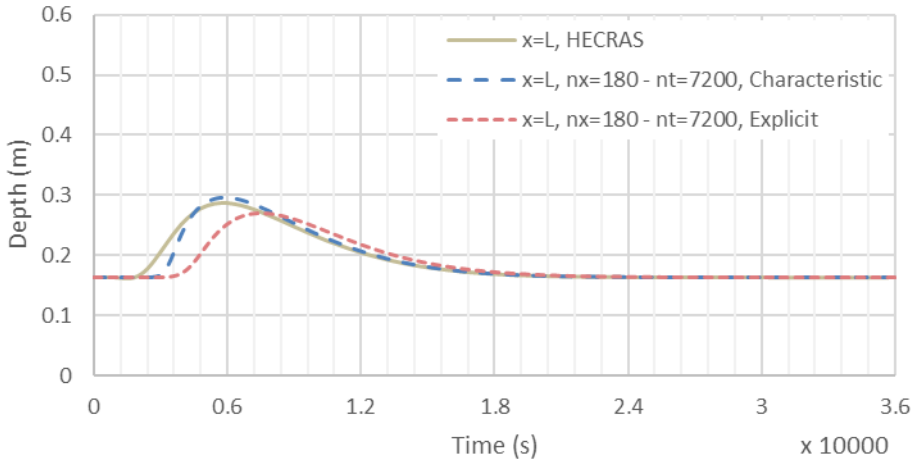


(β)

Σχήμα 6.20: Υδρογραφήματα (α) και βάθη ροής (β) που προκύπτουν από την επίλυση της ροής με το πρόγραμμα HECRAS, την μέθοδο των χαρακτηριστικών καμπυλών και το ρητό σχήμα υπολογισμού στην θέση $x = L/2$ του δευτερεύοντα κυκλικού αγωγού.



(α)



(β)

Σχήμα 6.21: Υδρογραφήματα (α) και βάθη ροής (β) που προκύπτουν από την επίλυση της ροής με το πρόγραμμα HECRAS, την μέθοδο των χαρακτηριστικών καμπυλών και το ρητό σχήμα υπολογισμού στην θέση $x = L$ του δευτερεύοντα κυκλικού αγωγού.

Συμπερασματικά, καταλήγουμε ότι η μέθοδος των χαρακτηριστικών καμπυλών επιλύει την μη μόνιμη ροή ικανοποιητικά και για τις δύο γεωμετρίες του δευτερεύοντα αγωγού, με τα παραγώμενα αποτελέσματα να προσεγγίζουν σε μεγάλο βαθμό τα αντίστοιχα που προκύπτουν από το πρόγραμμα HECRAS. Αντίθετα, οι λύσεις που προκύπτουν από το συγκεκριμένο ρητό σχήμα που αναπτύχθηκε δεν μπορούν να γίνουν αποδεκτές, καθώς τα αποτελέσματα διαφοροποιούνται αρκετά από τα αντίστοιχα του HECRAS. Επιπλέον, παρατηρείται ότι η μέθοδος του ρητού σχήματος δεν συγκλίνει, καθώς τα αποτελέσματα της μεθόδου δεν προσεγγίζουν τα αντίστοιχα του HECRAS όταν η χωρική και χρονική διακριτοποίηση πυκνώνει.

6.2 Πρωτεύοντας αγωγός

Με βάση τα αποτελέσματα από την λύση της μη μόνιμης ροής στον δευτερεύοντα αγωγό προκύπτει, όπως φαίνεται και στο προηγούμενο υποκεφάλαιο 6.1, ότι η μέθοδος των χαρακτηριστικών καμπυλών επιλύει την ροή αποτελεσματικά, σε αντίθεση με το ρητό σχήμα που δεν μπορεί να αποδώσει ικανοποιητικά αποτελέσματα. Συνεπώς, για τον πρωτεύοντα αγωγό η ροή επιλύεται με την μέθοδο των χαρακτηριστικών καμπυλών και τα αποτελέσματα ελέγχονται με τα αντίστοιχα που προκύπτουν από το πρόγραμμα HECRAS.

Τα υδρογραφήματα εξόδου $i = N$, που προέκυψαν από την επίλυση της ροής στον πρωτεύοντα αγωγό εισήχθησαν ως υδρογραφήματα εισόδου $j = 1$ στον πρωτεύοντα αγωγό, αθροίζοντας την αρχική παροχή του. Επειδή στον πρωτεύοντα αγωγό εξετάζεται η συμπεριφορά της ροής στην συμβολή και το κρίσιμο μέγεθος είναι η ειδική δύναμη (ορμή) ανάντη και κατάντη, η διάδοση του νέου κύματος έγινε για τέσσερις διαφορετικές αρχικές παροχές για κάθε μία απ΄τις δύο γεωμετρίες του αγωγού. Η επίλυση της ροής γίνεται για τρείς

διαφορετικούς υπολογιστικούς κανάβους για κάθε διαφορετική αρχική παροχή του πρωτεύοντα αγωγού.

6.2.1 Ορθογωνικός αγωγός

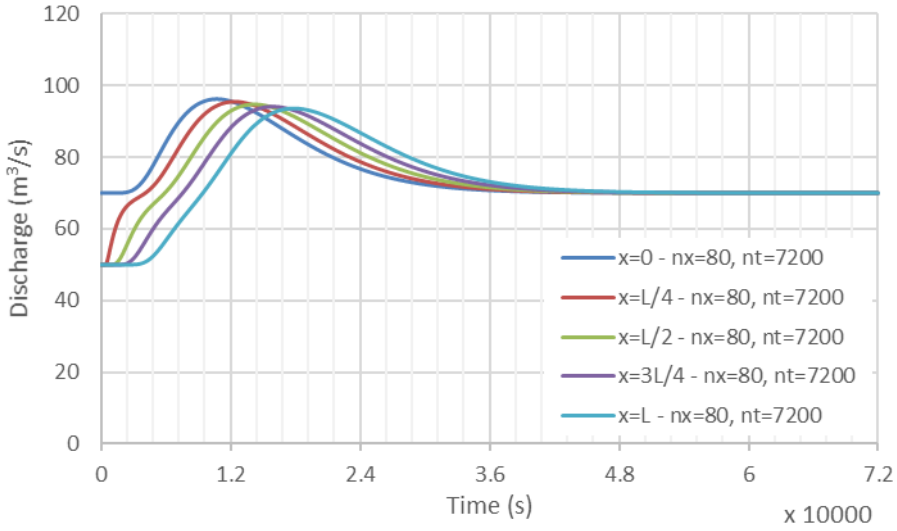
Οι διαφορετικές αρχικές παροχές του ορθογωνικού πρωτεύοντα αγωγού είναι $Q_{0_1} = 50, 80, 100\ και\ 120\ {}^{m^3}/_{s}$. Στον πίνακα 6.5 παρουσιάζονται, μαζι με τις αρχικές παροχές, τα υπολογιστικά πλέγματα, η ποσότητα $\frac{\Delta x^2}{\Delta t}$, ο μέγιστος αριθμός Courant ($maxCn$) και η ποσοστιαία απόκλιση των όγκων ολοκλήρωσης ως προς τον όγκο στην διατομή εισόδου (Σφάλμα (%)).

Ορθογωνικός πρωτεύοντας αγωγός

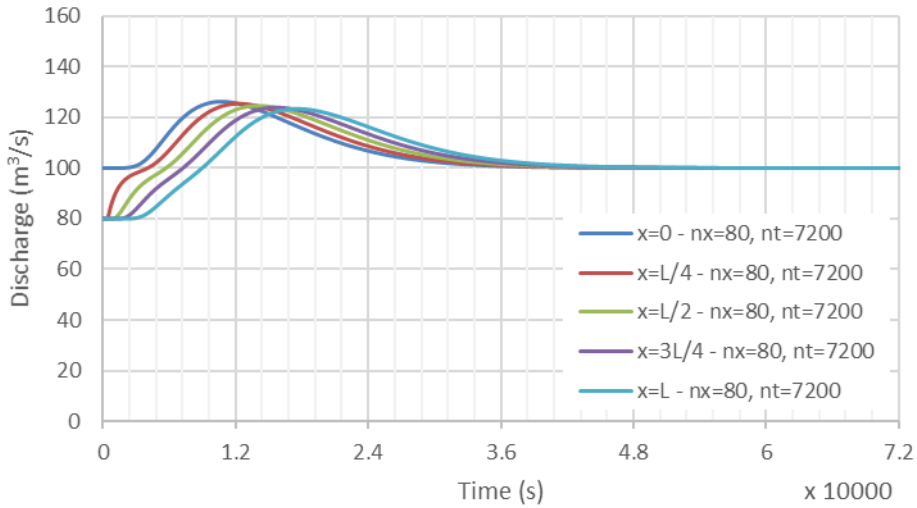
Q_{0_1} (${}^{m^3}/_{s}$)	nx	nt	$\Delta x\ (m)$	$\Delta t\ (s)$	Δx^2/Δt	$maxCn$	Σφάλμα (%)
50	80	7200	253.2	10	6408.3	0.345	2.670
	130	14400	155.0	5	4081.6	0.303	2.676
	200	36000	100.5	2	2237.0	0.261	2.681
80	80	7200	253.2	10	6408.3	0.378	1.762
	130	14400	155.0	5	4081.6	0.333	1.765
	200	36000	100.5	2	2237.0	0.286	1.769
100	80	7200	253.2	10	6408.3	0.398	1.430
	130	14400	155.0	5	4081.6	0.350	1.433
	200	36000	100.5	2	2237.0	0.301	1.435
120	80	7200	253.2	10	6408.3	0.416	1.203
	130	14400	155.0	5	4081.6	0.366	1.206
	200	36000	100.5	2	2237.0	0.315	1.208

Πίνακας 6.5: Υπολογιστικά πλέγματα για την επίλυση της ροής στον πρωτεύοντα ορθογωνικό αγωγό.

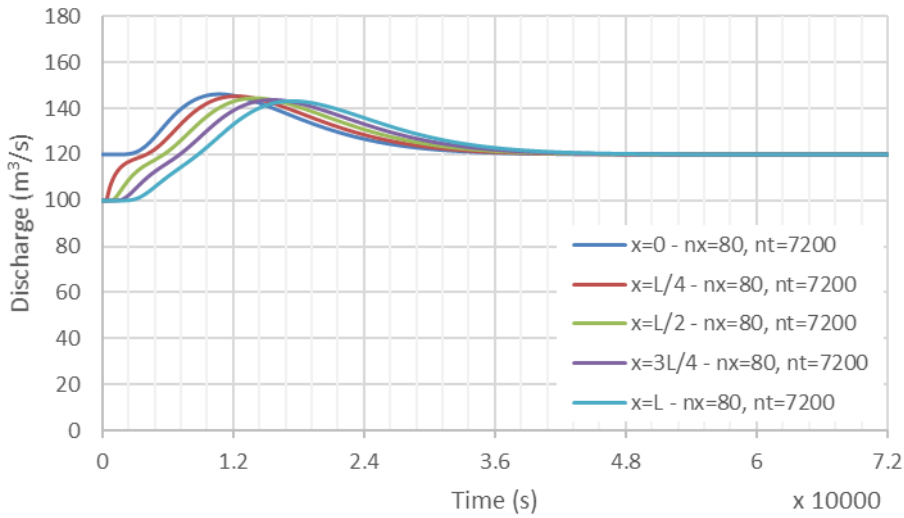
Παρακάτω, παρουσιάζονται τα υδρογραφήμα στις διατομές ελέγχου $x = 0, L/4, L/2, 3L/4,$ και L για όλες τις αρχικές παροχές του πρωτεύοντα ορθογωνικού αγωγού (Σχήμα 6.22). Επιπλέον, παρουσιάζεται η σύγκριση των υδρογραφημάτων στο μέσο $L/2$ και στο πέρας L του αγωγού, για διάφορους υπολογιστικούς κανάβους (Σχήμα 6.23). Τέλος, συγκρίνονται τα αποτελέσματα που προκύπτουν από το πρόγραμμα HECRAS με αυτά της μεθόδου των χαρακτηριστικών καμπυλών, στις διατομές $x = L/2$ και $x = L$ και για όλες τις αρχικές παροχές του αγωγού (Σχήμα 6.24– 6.25).


120
100
80
60
40
20
0
Discharge (m³/s)
0
1.2
2.4
3.6
4.8
6
7.2
Time (s)
x 10000
x=0 - nx=80, nt=7200
x=L/4 - nx=80, nt=7200
x=L/2 - nx=80, nt=7200
x=3L/4 - nx=80, nt=7200
x=L - nx=80, nt=7200

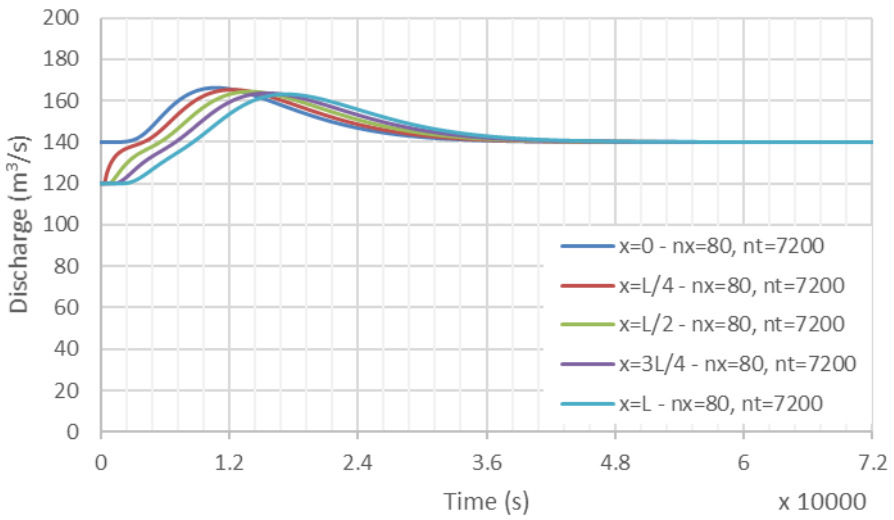
(α)


160
140
120
100
80
60
40
20
0
Discharge (m³/s)
0
1.2
2.4
3.6
4.8
6
7.2
Time (s)
x 10000
x=0 - nx=80, nt=7200
x=L/4 - nx=80, nt=7200
x=L/2 - nx=80, nt=7200
x=3L/4 - nx=80, nt=7200
x=L - nx=80, nt=7200

(β)

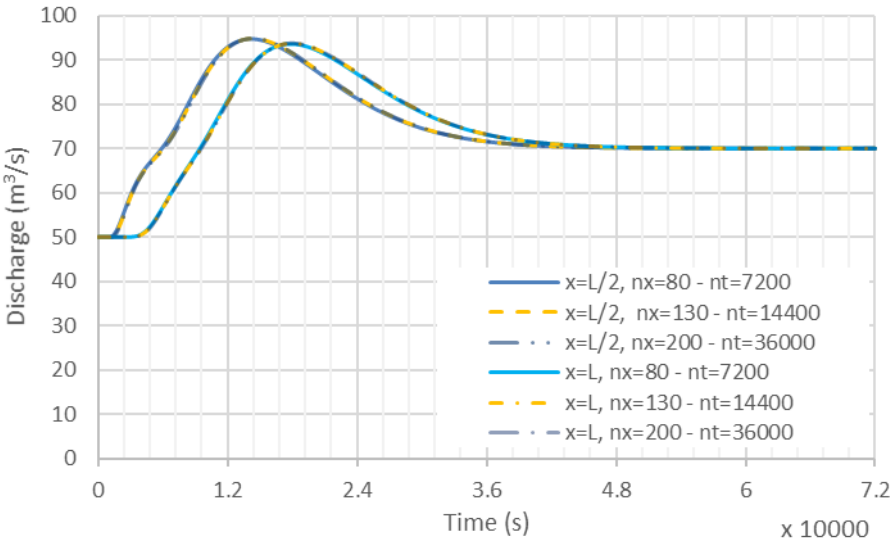

180
160
140
120
100
80
60
40
20
0
Discharge (m³/s)
0
1.2
2.4
3.6
4.8
6
7.2
Time (s)
x 10000
x=0 - nx=80, nt=7200
x=L/4 - nx=80, nt=7200
x=L/2 - nx=80, nt=7200
x=3L/4 - nx=80, nt=7200
x=L - nx=80, nt=7200

(γ)

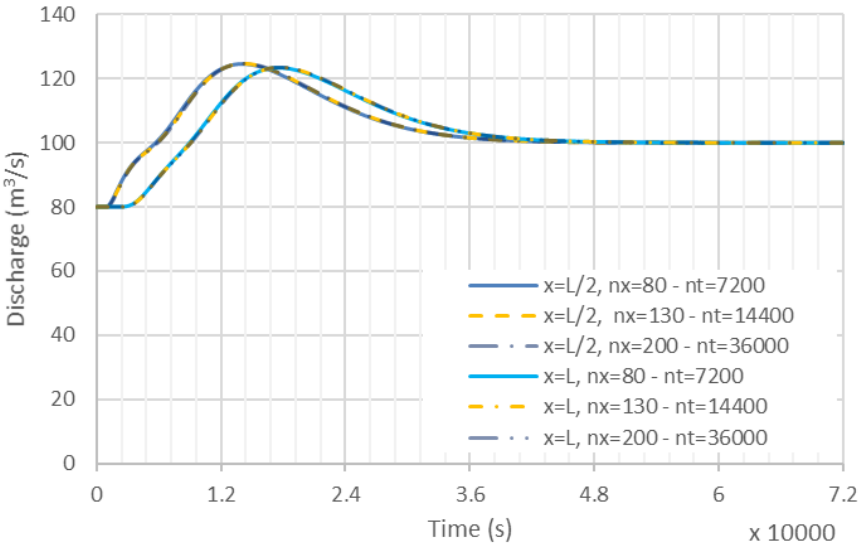


(δ)

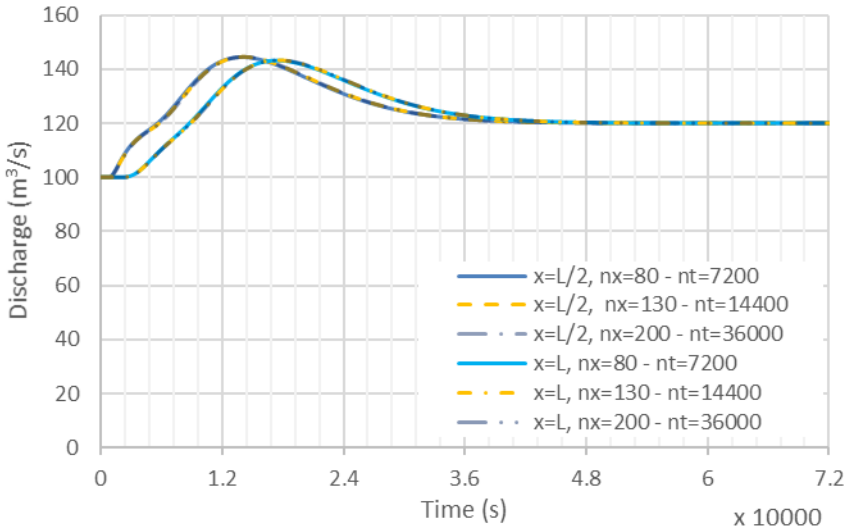
Σχήμα 6.22: Υδρογραφήματα πρωτεύοντα ορθογωνικού αγωγού στις διατομές ελέγχου $x = 0, L/4, L/2, 3L/4$, και L, για αρχικές παροχές (α) $Q_{0_1} = 50\frac{m^3}{s}$ (β) $Q_{0_1} = 80\frac{m^3}{s}$ (γ) $Q_{0_1} = 100\frac{m^3}{s}$ (δ) $Q_{0_1} = 120\frac{m^3}{s}$.



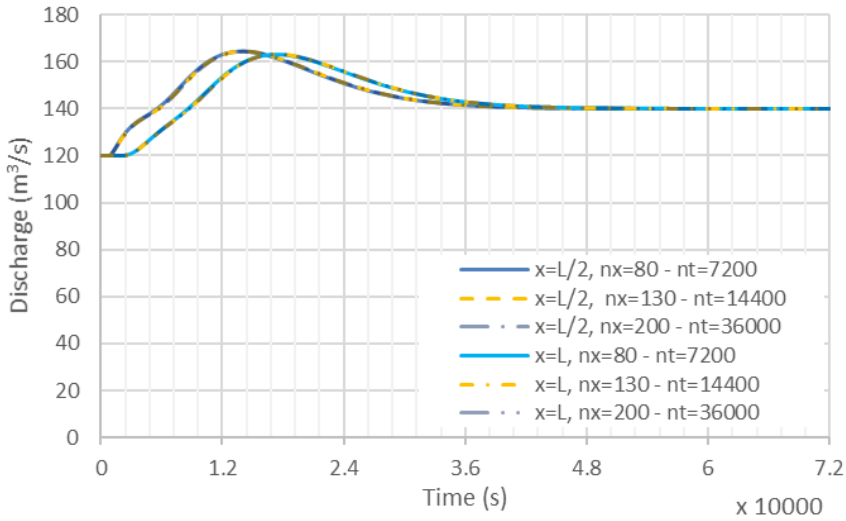
(α)


Discharge (m³/s)
Time (s)
x 10000
x=L/2, nx=80 - nt=7200
x=L/2, nx=130 - nt=14400
x=L/2, nx=200 - nt=36000
x=L, nx=80 - nt=7200
x=L, nx=130 - nt=14400
x=L, nx=200 - nt=36000

(β)


Discharge (m³/s)
Time (s)
x 10000
x=L/2, nx=80 - nt=7200
x=L/2, nx=130 - nt=14400
x=L/2, nx=200 - nt=36000
x=L, nx=80 - nt=7200
x=L, nx=130 - nt=14400
x=L, nx=200 - nt=36000

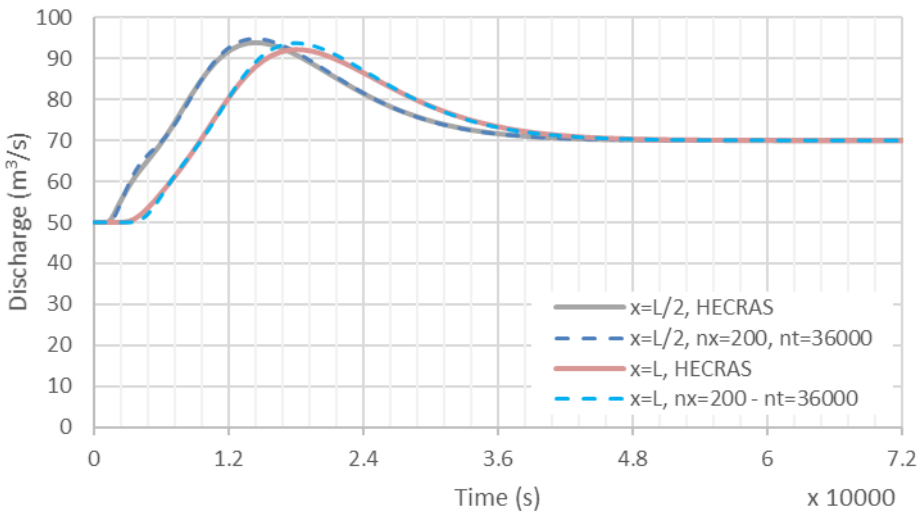
(γ)


Discharge (m³/s)
Time (s)
x 10000
x=L/2, nx=80 - nt=7200
x=L/2, nx=130 - nt=14400
x=L/2, nx=200 - nt=36000
x=L, nx=80 - nt=7200
x=L, nx=130 - nt=14400
x=L, nx=200 - nt=36000

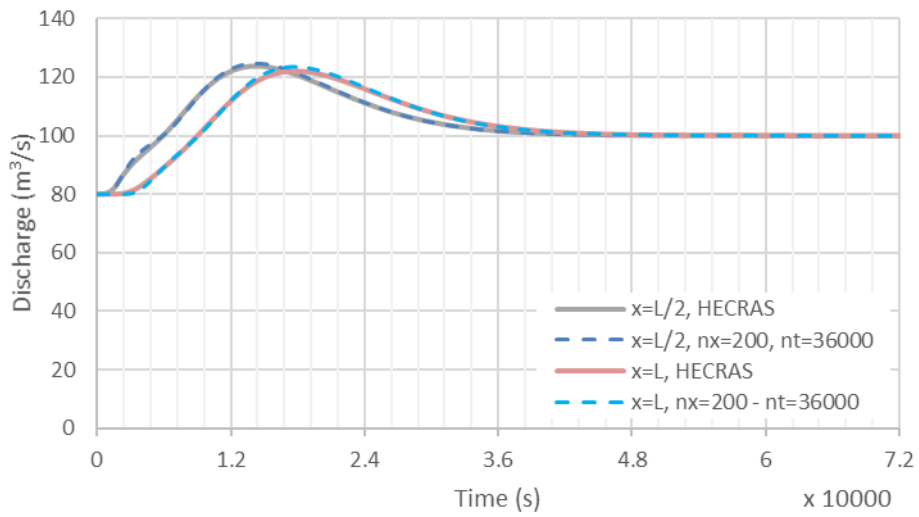
(δ)

Σχήμα 6.23: Υδρογραφήματα πρωτεύοντα ορθογωνικού αγωγού που προκύπτουν για διάφορα υπολογιστικά πλέγματα, στις διατομές ελέγχου $x = L/2$ και L για αρχικές παροχές (α) $Q_{0_1} = 50\frac{m^3}{s}$ (β) $Q_{0_1} = 80\frac{m^3}{s}$ (γ) $Q_{0_1} = 100\frac{m^3}{s}$ (δ) $Q_{0_1} = 120\frac{m^3}{s}$.

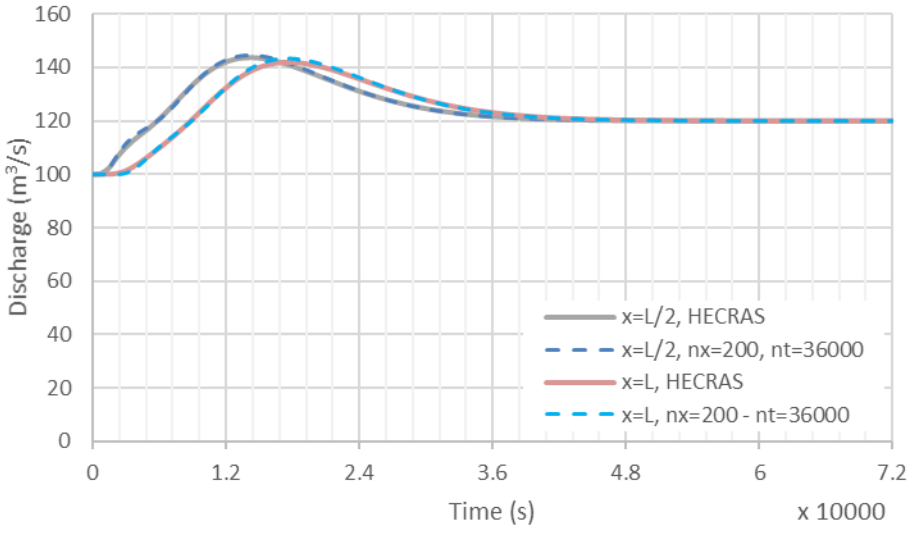
Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η επίλυση της ροής στον πρωτεύοντα ορθογωνικό αγωγό είναι ανεξάρτητη του πλέγματος, με τα αντίστοιχα σφάλματα που προκύπτουν (Πίνακας 6.5) να μην υπερβαίνουν το 3% και να κρίνονται ως ικανοποιητικά.



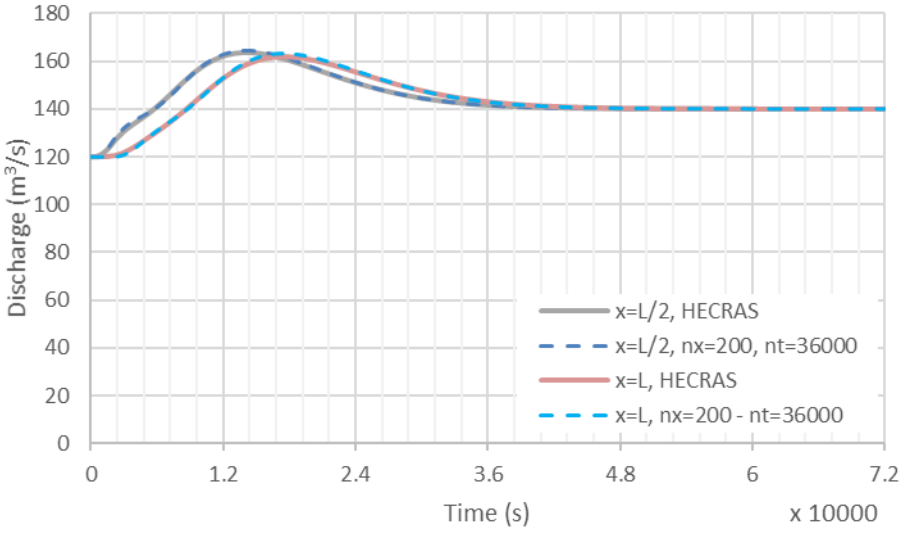
(α)



(β)

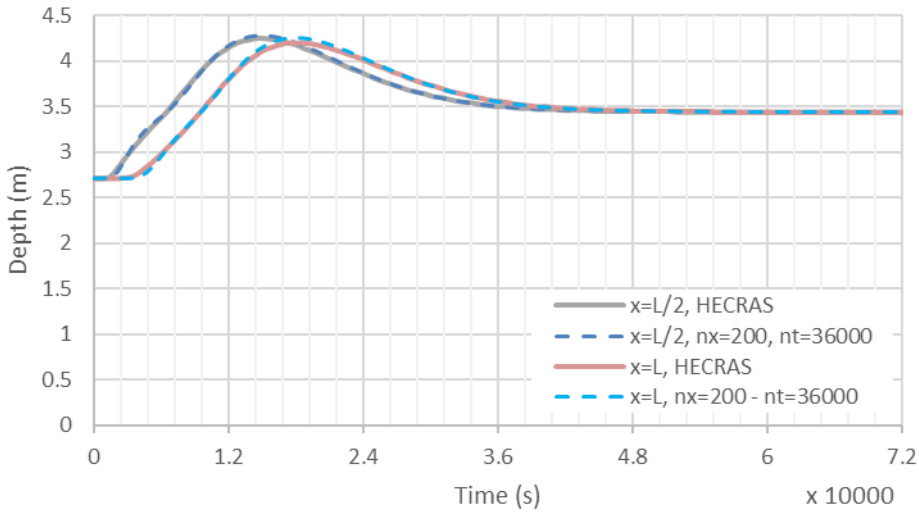


(γ)

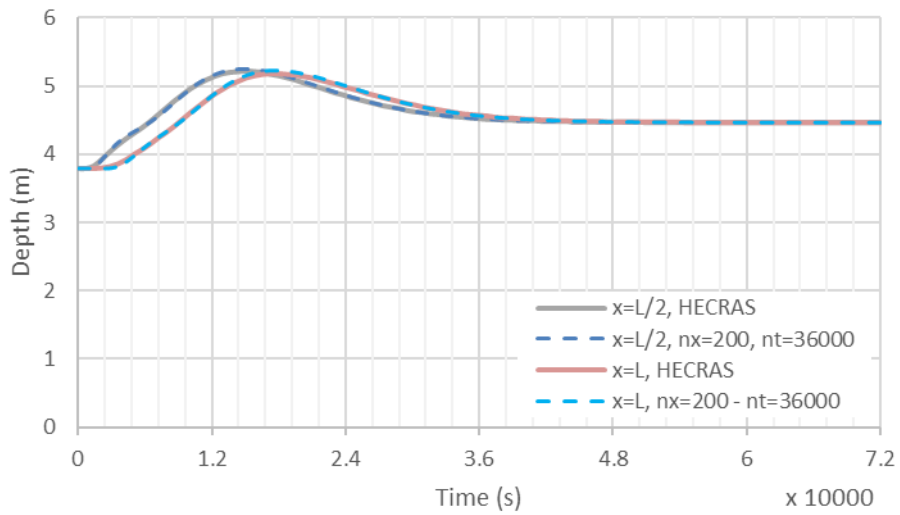


(δ)

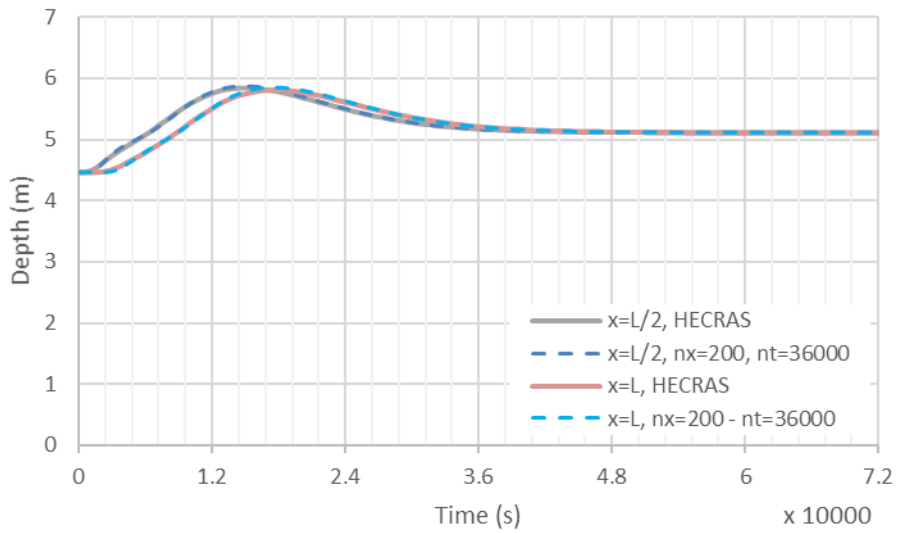
Σχήμα 6.24: Υδρογραφήματα πρωτεύοντα ορθογωνικού αγωγού, στις θέσεις $x = L/2$ και $x = L$ που προκύπτουν από την μέθοδο των χαρακτηριστικών καμπυλών και το πρόγραμμα HECRAS, για αρχικές παροχές (α) $Q_{0_1} = 50\frac{m^3}{s}$ (β) $Q_{0_1} = 80\frac{m^3}{s}$ (γ) $Q_{0_1} = 100\frac{m^3}{s}$ (δ) $Q_{0_1} = 120\frac{m^3}{s}$.


4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
Depth (m)
0
1.2
2.4
3.6
4.8
6
7.2
Time (s)
x 10000
x=L/2, HECRAS
x=L/2, nx=200, nt=36000
x=L, HECRAS
x=L, nx=200 - nt=36000

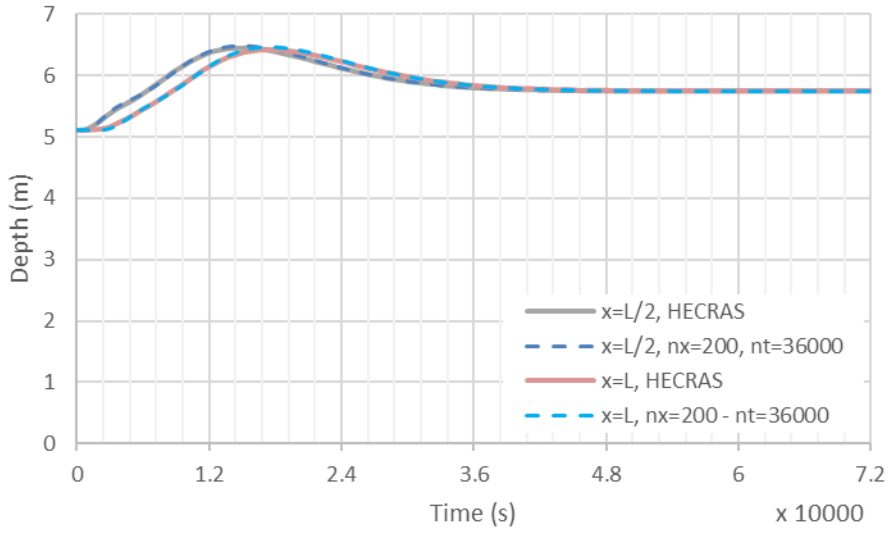
(α)


6
5
4
3
2
1
0
Depth (m)
0
1.2
2.4
3.6
4.8
6
7.2
Time (s)
x 10000
x=L/2, HECRAS
x=L/2, nx=200, nt=36000
x=L, HECRAS
x=L, nx=200 - nt=36000

(β)


7
6
5
4
3
2
1
0
Depth (m)
0
1.2
2.4
3.6
4.8
6
7.2
Time (s)
x 10000
x=L/2, HECRAS
x=L/2, nx=200, nt=36000
x=L, HECRAS
x=L, nx=200 - nt=36000

(γ)



(δ)

Σχήμα 6.25: Βάθη ροής πρωτεύοντα ορθογωνικού αγωγού, στις θέσεις $x = L/2$ και $x = L$ που προκύπτουν από την μέθοδο των χαρακτηριστικών καμπυλών και το πρόγραμμα HECRAS, για αρχικές παροχές (α) $Q_{0_1} = 50\frac{m^3}{s}$ (β) $Q_{0_1} = 80\frac{m^3}{s}$ (γ) $Q_{0_1} = 100\frac{m^3}{s}$ (δ) $Q_{0_1} = 120\frac{m^3}{s}$.

Παρατηρούμε ότι η διάδοση του κύματος στον πρωτεύοντα ορθογωνικό αγωγό επιλύεται ικανοποιητικά από την μέθοδο των χαρακτηριστικών καμπυλών και για τα τέσσερα υδρογραφήματα εισόδου, καθώς τα αντίστοιχα αποτελέσματα ταυτίζονται ικανοποιητικά στις διατομές ελέγχου.

6.2.2 Κυκλικός αγωγός

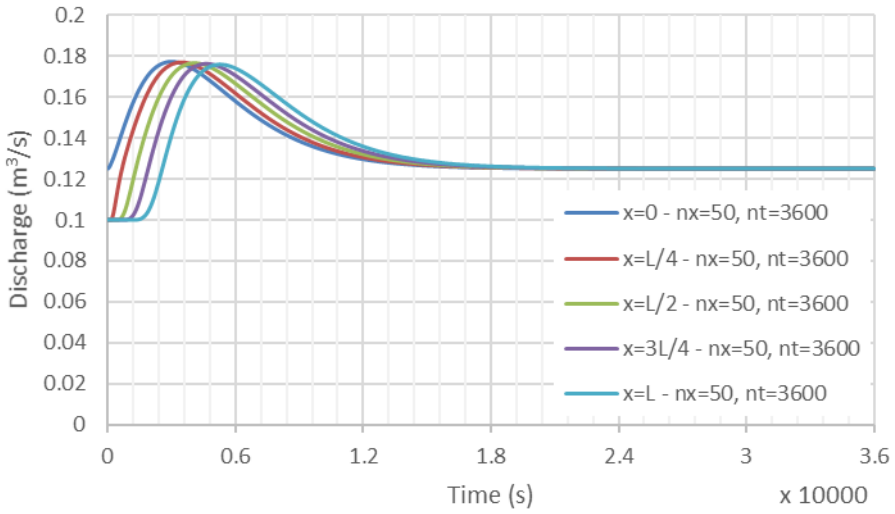
Οι διαφορετικές αρχικές παροχές του ορθογωνικού πρωτεύοντα αγωγού είναι $Q_{0_1} = 0.1, 0.2, 0.3$ *και* $0.6\ {}^{m^3}/_{s}$. Στον πίνακα 6.6 παρουσιάζονται, μαζι με τις αρχικές παροχές, τα υπολογιστικά πλέγματα, η ποσότητα Δx^2/Δt, ο μέγιστος αριθμός Courant ($maxCn$), η ποσοστιαία απόκλιση των όγκων ολοκλήρωσης ως προς τον όγκο στην διατομή εισόδου (Σφάλμα (%)) και η μέγιστη πλήρωση του αγωγού $max(y/Do)$.

Κυκλικός πρωτεύοντας αγωγός

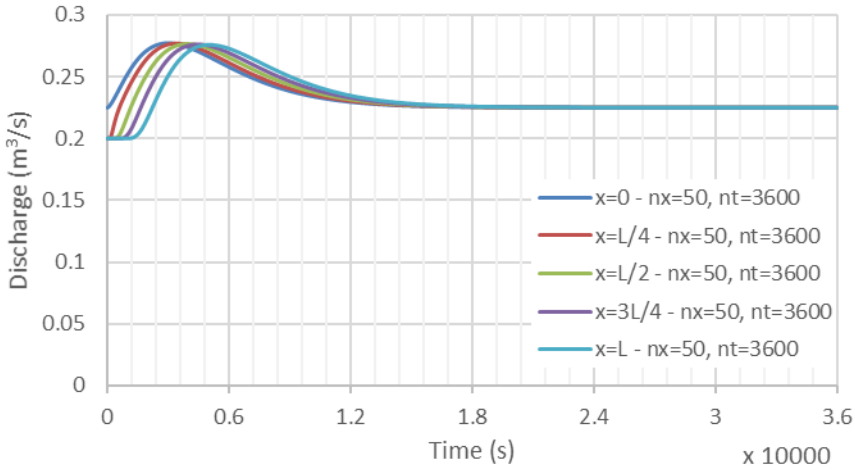
Q_{0_1}	nx	nt	$\Delta x\ (m)$	$\Delta t\ (s)$	Δx^2/Δt	$maxCn$	Σφάλμα (%)	$max(y/Do)$
	50	3600	40.80	10	166.6	0.544	1.24	0.288
0.1	80	7200	28.60	5	81.6	0.549	1.25	0.288
	200	18000	22.47	2	50.5	0.441	1.25	0.288
	50	3600	69.00	10	166.6	0.618	0.59	0.364
0.2	80	7200	40.80	5	81.6	0.625	0.59	0.364
	200	18000	25.30	2	50.5	0.502	0.59	0.364
	50	3600	69.00	10	166.6	0.679	0.38	0.430
0.3	80	7200	40.80	5	81.6	0.686	0.38	0.430
	200	18000	25.30	2	50.5	0.552	0.38	0.430
	50	3600	69.00	10	166.6	0.833	0.18	0.611
0.6	80	7200	40.80	5	28.3	0.841	0.17	0.611
	200	18000	25.30	2	50.5	0.676	0.17	0.611

Πίνακας 6.6: Υπολογιστικά πλέγματα για την επίλυση της ροής στον πρωτεύοντα ορθογωνικό αγωγό.

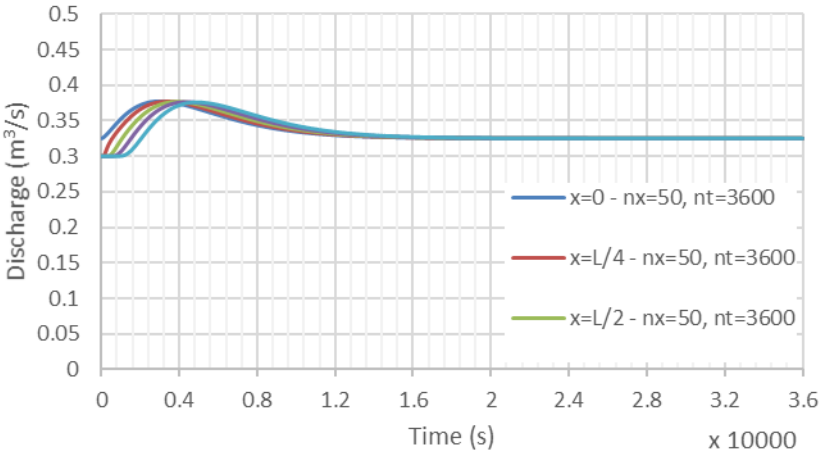
Παρακάτω, παρουσιάζονται τα υδρογραφήματα στις διατομές ελέγχου $x = 0, L/4, L/2, 3L/4,$ και L για όλες τις αρχικές παροχές του πρωτεύοντα ορθογωνικού αγωγού (Σχήμα 6.26). Επιπλέον, παρουσιάζεται η σύγκριση των υδρογραφημάτων στο μέσο $L/2$ και στο πέρας L του αγωγού, για τους διάφορους υπολογιστικούς κανάβους (Σχήμα 6.27). Τέλος, γίνεται σύγκριση των υδρογραφημάτων και των βαθών ροής στις διατομές ελέγχου $x = L/2$ και $x = L$, με τα αποτελέσματα που προκύπτουν από το πρόγραμμα HECRAS και τα αντίστοιχα της μεθόδου των χαρακτηριστικών καμπυλών (Σχήμα 6.28 – 6.29).



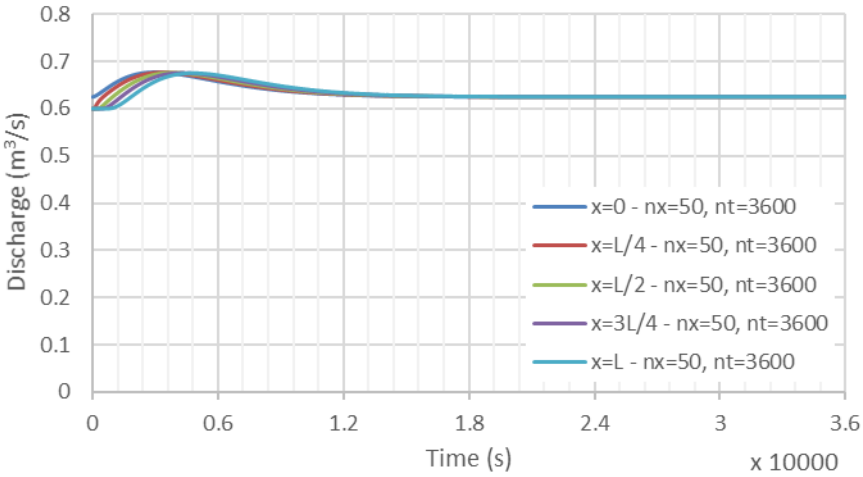
(α)



(β)

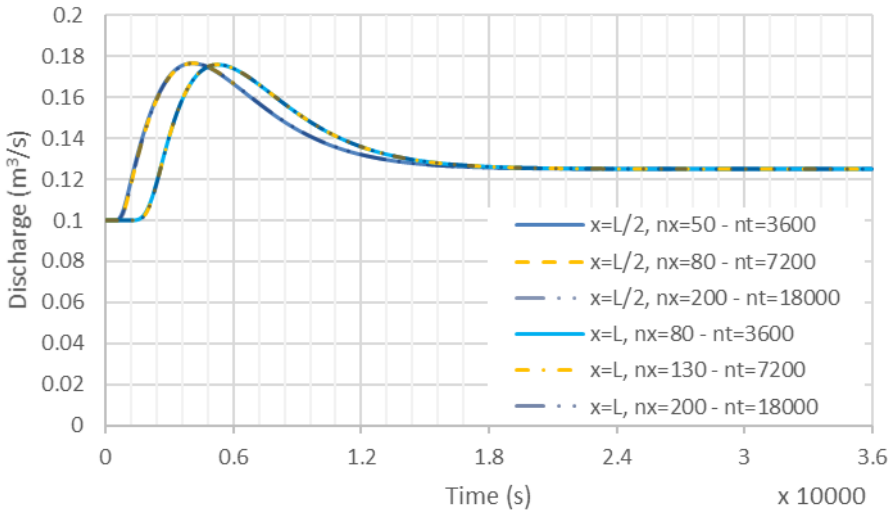


(γ)

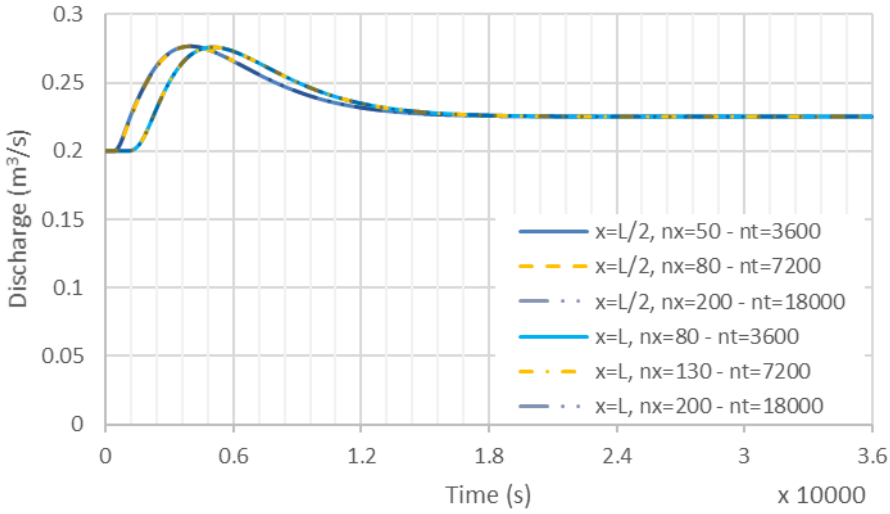


(δ)

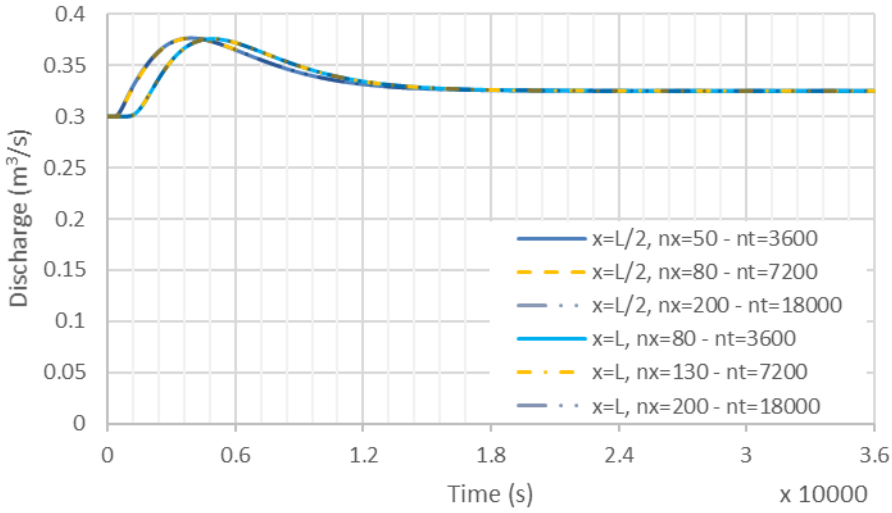
Σχήμα 6.26: Υδρογραφήματα πρωτεύοντα κυκλικού αγωγού στις διατομές ελέγχου $x = 0, L/4, L/2, 3L/4$, και L για αρχικές παροχές (α) $Q_{0_1} = 0{,}1\frac{m^3}{s}$ (β) $Q_{0_1} = 0{,}2\frac{m^3}{s}$ (γ) $Q_{0_1} = 0{,}3\frac{m^3}{s}$ (δ) $Q_{0_1} = 0{,}6\frac{m^3}{s}$.


0.2
0.18
0.16
0.14
0.12
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
Discharge (m³/s)
0
0.6
1.2
1.8
2.4
3
3.6
Time (s)
x 10000
x=L/2, nx=50 - nt=3600
x=L/2, nx=80 - nt=7200
x=L/2, nx=200 - nt=18000
x=L, nx=80 - nt=3600
x=L, nx=130 - nt=7200
x=L, nx=200 - nt=18000

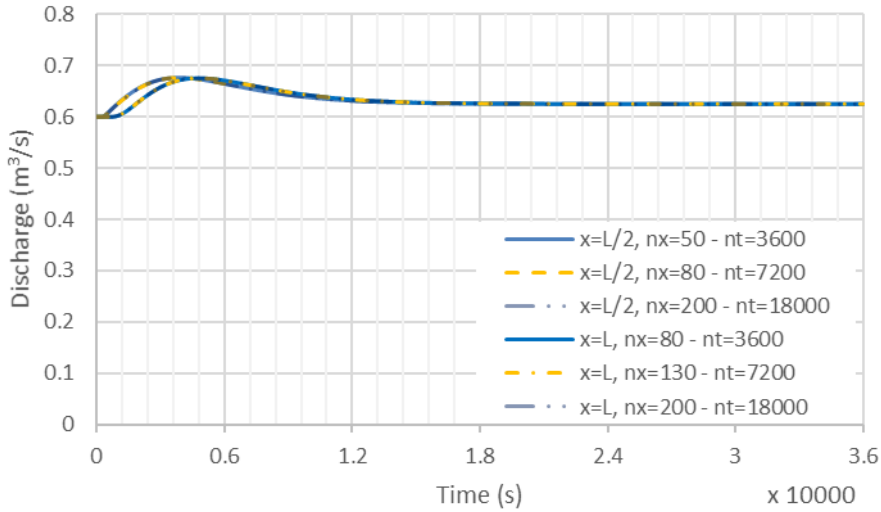
(α)


0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
Discharge (m³/s)
0
0.6
1.2
1.8
2.4
3
3.6
Time (s)
x 10000
x=L/2, nx=50 - nt=3600
x=L/2, nx=80 - nt=7200
x=L/2, nx=200 - nt=18000
x=L, nx=80 - nt=3600
x=L, nx=130 - nt=7200
x=L, nx=200 - nt=18000

(β)



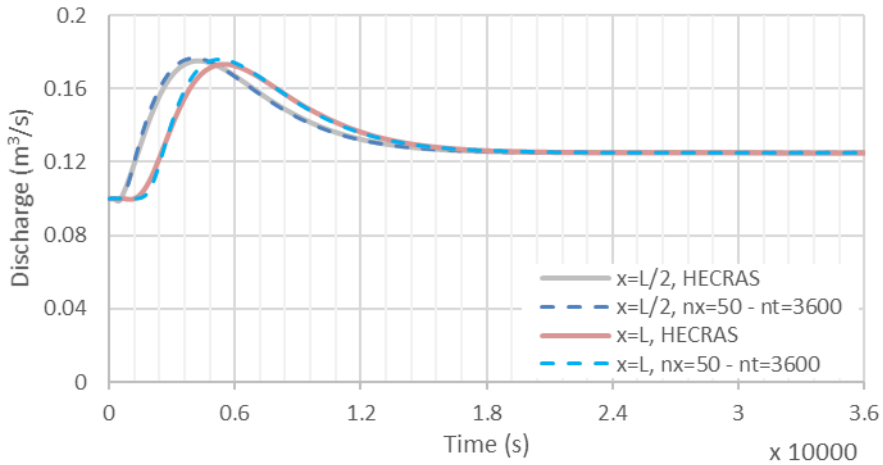
(γ)



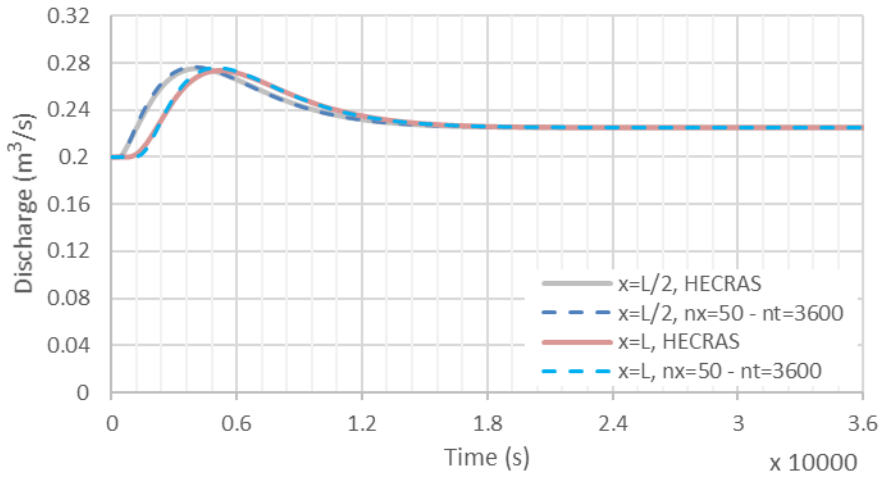
(δ)

Σχήμα 6.27: Υδρογραφήματα πρωτεύοντα κυκλικού αγωγού που προκύπτουν, για διάφορα υπολογιστικά πλέγματα, στις διατομές ελέγχου $x = L/2$ και L για αρχικές παροχές (α) $Q_{0_1} = 0.1\frac{m^3}{s}$ (β) $Q_{0_1} = 0.2\frac{m^3}{s}$ (γ) $Q_{0_1} = 0.3\frac{m^3}{s}$ (δ) $Q_{0_1} = 0.6\frac{m^3}{s}$.

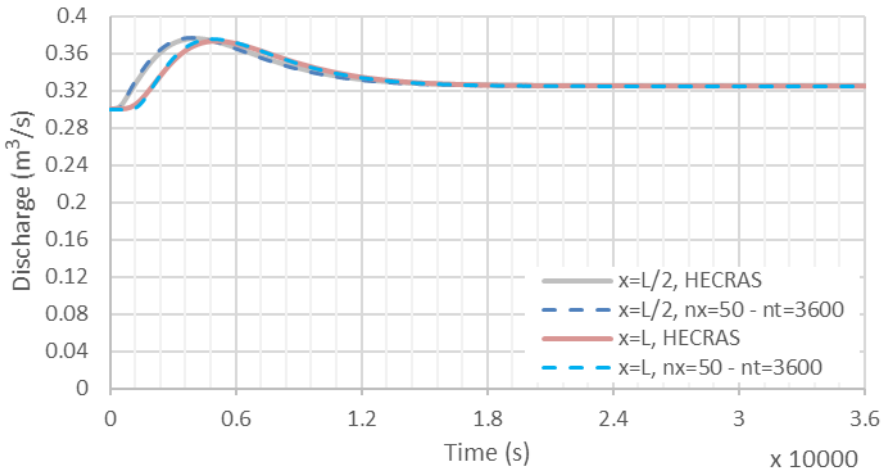
Αντίστοιχα με τον πρωτεύοντα ορθογωνικό αγωγό, παρατηρούμε ότι η επίλυση της ροής στον πρωτεύοντα ορθογωνικό αγωγό είναι ανεξάρτητη του πλέγματος, με τα αντίστοιχα σφάλματα που προκύπτουν (Πίνακας 6.6) να μην υπερβαίνουν το 3% και να κρίνονται ως ικανοποιητικά.



(α)

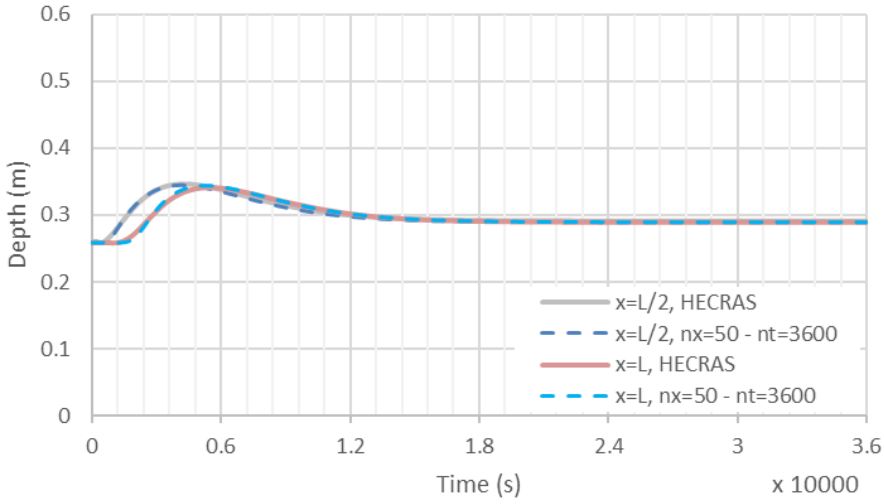


(β)

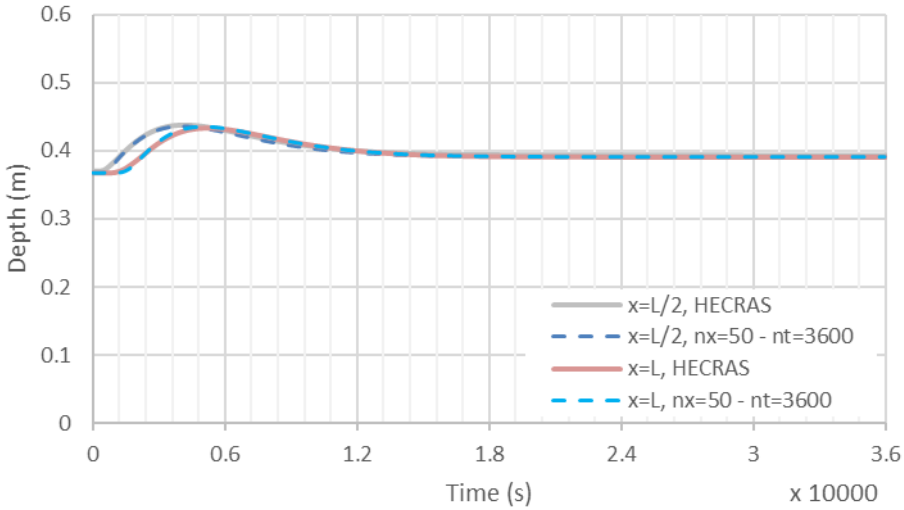


(γ)

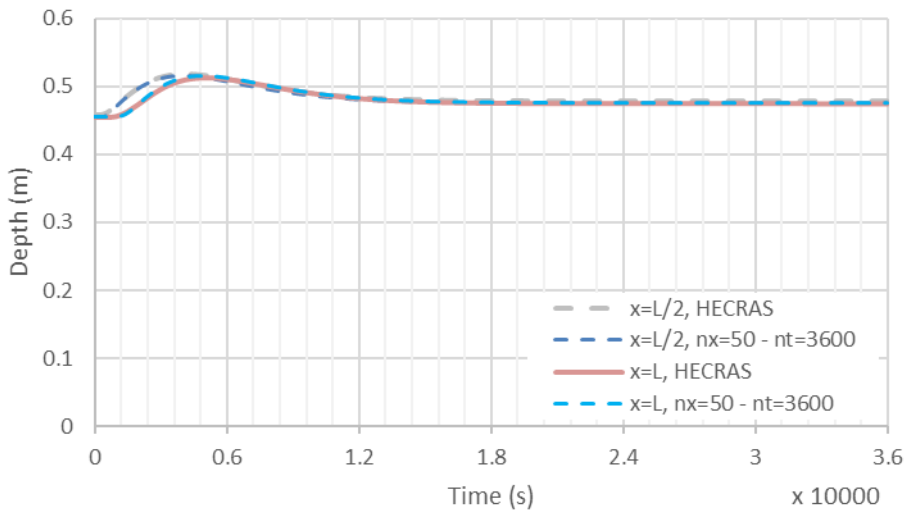
Σχήμα 6.28: Υδρογραφήματα πρωτεύοντα κυκλικού αγωγού, στις θέσεις $x = L/2$ και $x = L$ που προκύπτουν από την μέθοδο των χαρακτηριστικών καμπυλών και το πρόγραμμα HECRAS, για αρχικές παροχές (α) $Q_{0_1} = 0{,}1\frac{m^3}{s}$ (β) $Q_{0_1} = 0{,}2\frac{m^3}{s}$ (γ) $Q_{0_1} = 0{,}3\frac{m^3}{s}$.


0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
Depth (m)
0
0.6
1.2
1.8
2.4
3
3.6
Time (s)
x 10000
x=L/2, HECRAS
x=L/2, nx=50 - nt=3600
x=L, HECRAS
x=L, nx=50 - nt=3600

(α)


0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
Depth (m)
0
0.6
1.2
1.8
2.4
3
3.6
Time (s)
x 10000
x=L/2, HECRAS
x=L/2, nx=50 - nt=3600
x=L, HECRAS
x=L, nx=50 - nt=3600

(β)



(γ)

Σχήμα 6.29: Βάθη ροής πρωτεύοντα κυκλικού αγωγού στις θέσεις $x = L/2$ και $x = L$, που προκύπτουν από την μέθοδο των χαρακτηριστικών καμπυλών και το πρόγραμμα HECRAS, για αρχικές παροχές (α) $Q_{0_1} = 0{,}1\frac{m^3}{s}$ (β) $Q_{0_1} = 0{,}2\frac{m^3}{s}$ (γ) $Q_{0_1} = 0{,}3\frac{m^3}{s}$.

Επισημαίνεται ότι λόγω γεωμετρικών δυσκολιών, η προσομοίωση του κυκλικού αγωγού στο πρόγραμμα HECRAS έγινε θεωρώντας ημικυκλικό αγωγό ίδιας διαμέτρου με την αντίστοιχη που μελετάται. Επομένως, δεν ήταν εφικτή η επίλυση της ροής για παροχές όπου προκύπτει μέγιστη πλήρωση του αγωγού μεγαλύτερη από την τιμή 0.5. Συνεπώς, η επίλυση της μη μόνιμης ροής για αρχική παροχή πρωτεύοντα κυκλικού ίση με $0{,}6\frac{m^3}{s}$ δεν μπόρεσε να γίνει με το πρόγραμμα HECRAS, καθώς όπως προκύπτει από την επίλυση με την μέθοδο χαρακτηριστικών καμπυλών, η μέγιστη πλήρωση του αγωγού είναι 0.611.

Για την επίλυση της μη μόνιμης ροής στον κυκλικό πρωτεύοντα αγωγό με την μέθοδο των χαρακτηριστικών καμπυλών προκύπτουν τα ίδια συμπεράσματα με αυτά στον ορθογωνικό. Η μέθοδος είναι ανεξάρτητη του υπολογιστικού κανάβου και δίνει αξιόπιστα αποτελέσματα, που προσεγγίζουν ικανοποιητικά τα αντίστοιχα αποτελέσματα που προκύπτουν από το πρόγραμμα HECRAS.

6.3 Συμβολή αγωγών

Η μελέτη της ροής στην συμβολή γίνεται για τέσσερις διαφορετικές αρχικές παροχές και για τις δύο γεωμετρίες αγωγών. Η διαταραχή της ροής ελέγχεται με το κριτήριο της ειδικής δύναμης $M_1 \geq M_{cr}$ και σε περίπτωση που δεν ικανοποιείται, το βάθος ροής ανάντη της συμβολής αυξάνεται, ώστε η ειδική δύναμη ανάντη να ισούται με την ειδική δύναμη κατάντη $M_1 = M_3$, όπως αναλύεται στο κεφάλαιο 5.7.

6.3.1 Ορθογωνικός αγωγός

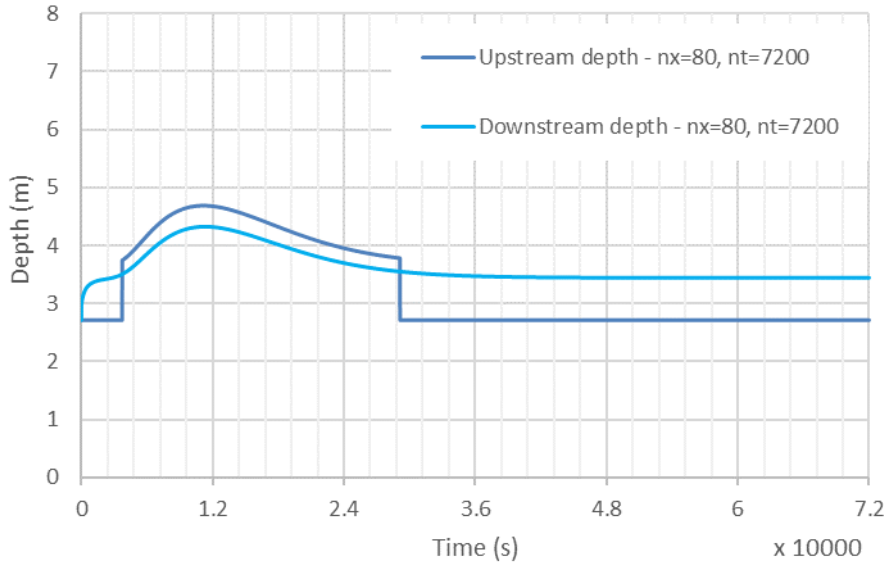
Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται η μέγιστη ελάχιστη ειδική ενέργεια κατάντη του αγωγού που προκύπτει για κάθε συνδυασμό παροχής και βάθους ροής, όπως αυτά προέκυψαν κατά την επίλυση της ροής με την μέθοδο των χαρακτηριστικών καμπυλών.

Ορθογωνικός πρωτεύοντας αγωγός

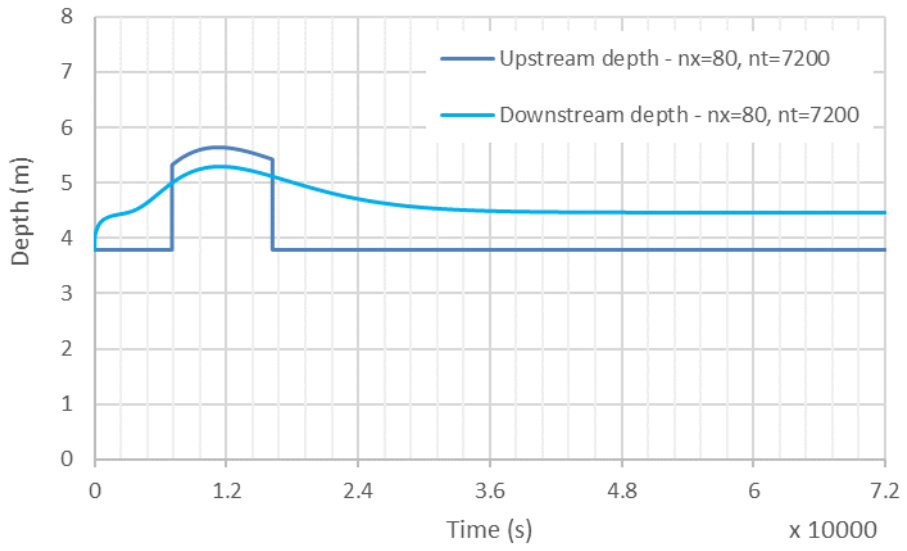
Q_{0_1}	$\Delta x\ (m)$	$\Delta t\ (s)$	M_{cr}	M_1
50	253.2	10	67.0	46.2
	155.0	5	67.1	46.2
	100.0	2	67.1	46.2
80	253.2	10	96.2	89.0
	155.0	5	96.3	89.0
	100.0	2	96.3	89.0
100	253.2	10	117.0	122.4
	155.0	5	117.1	122.4
	100.0	2	117.1	122.4
120	253.2	10	138.8	159.4
	155.0	5	138.9	159.4
	100.0	2	138.9	159.4

Πίνακας 6.7: Μέγιστη ελάχιστη ειδική ενέργεια κατάντη της συμβολής και ειδική ενέργεια ανάντη της συμβολής του ορθογωνικού πρωτεύοντα αγωγού, για διάφορες αρχικές παροχές.

Παρατηρούμε ότι για τις αρχικές παροχές $Q_{0_1} = 50\ και\ 80\ \frac{m^3}{s}$ η παροχή δεν μπορεί να περάσει με τις δοθείσες συνθήκες, με αποτέλεσμα η ροή να διαταράσσεται και να παρουσιάζεται αύξηση του βάθους ροής στα ανάντη της συμβολής (Σχήμα 6.30).



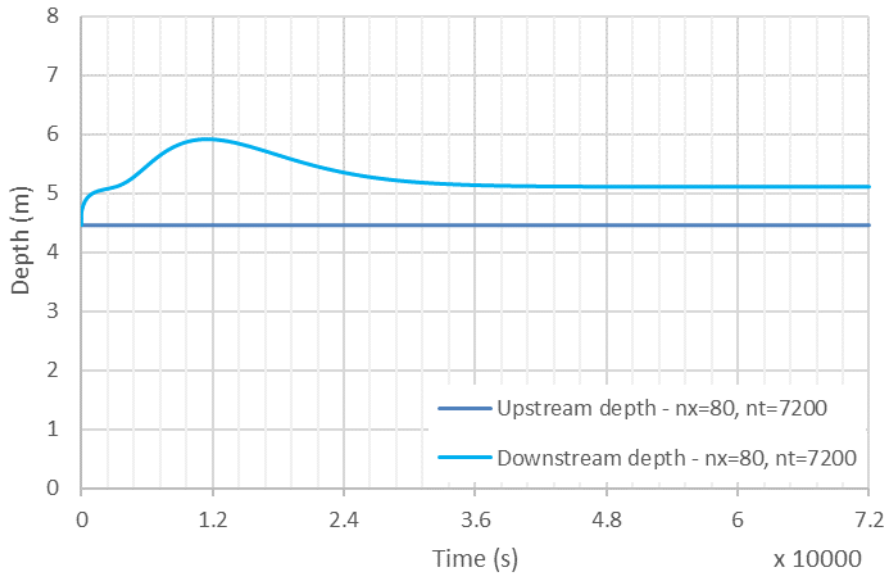
(α)



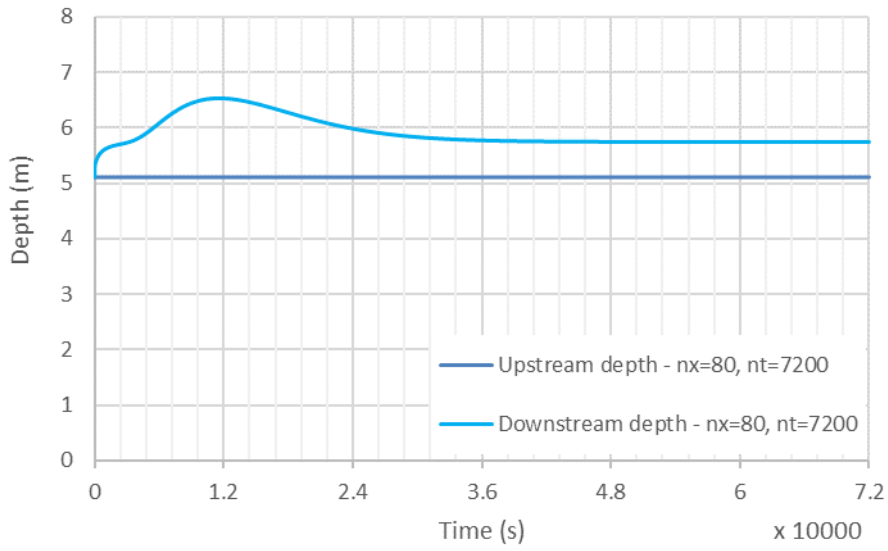
(β)

Σχήμα 6.30: Βάθη ροής ανάντη και κατάντη της συμβολής, για αρχικές παροχές ορθογωνικού πρωτεύοντα αγωγού $(\alpha)\ Q_{0_1} = 50\frac{m^3}{s}$ $\kappa\alpha\iota$ $(\beta)\ Q_{0_1} = 80\ \frac{m^3}{s}$.

Αντίθετα, η μέγιστη ελάχιστη ειδική δύναμη για τις παροχές $Q_{0_1} = 100$ $\kappa\alpha\iota$ $120\ \frac{m^3}{s}$ είναι μικρότερη σε μέτρο από την ειδική δύναμη ανάντη. Επομένως, ικανοποιείται το κριτήριο της ειδικής δύναμης και η παροχή περνάει από τον δευτερεύοντα στον πρωτεύοντα ορθογωνικό αγωγό, με την ροή να παραμένει αδιατάρακτη (Σχήμα 6.31).



(α)



(β)

Σχήμα 6.31: Βάθη ροής ανάντη και κατάντη της συμβολής, για αρχικές παροχές ορθογωνικού πρωτεύοντα αγωγού $(\alpha)\ Q_{0_1} = 100\frac{m^3}{s}$ $\kappa\alpha\iota$ $(\beta)\ Q_{0_1} = 120\ \frac{m^3}{s}$.

6.3.2 Κυκλικός αγωγός

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται η μέγιστη ελάχιστη ειδική ενέργεια κατάντη του αγωγού που προκύπτει για κάθε συνδυασμό παροχής και βάθους ροής, όπως αυτά προέκυψαν κατά την επίλυση της ροής με την μέθοδο των χαρακτηριστικών καμπυλών.

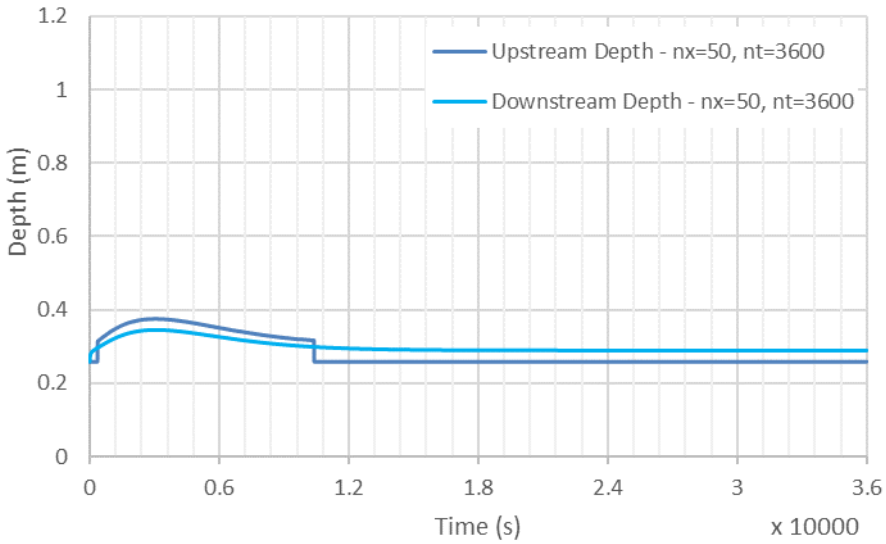
Κυκλικός πρωτεύοντας αγωγός

Q_{0_1}	$\Delta x\ (m)$	$\Delta t\ (s)$	M_{cr}	M_1
0.01	40.8	10	0.0353	0.0246
	25.3	5	0.0353	0.0246
	10.0	2	0.0353	0.0246
0.02	40.8	10	0.0621	0.0584
	25.3	5	0.0621	0.0584
	10.0	2	0.0621	0.0584
0.03	40.8	10	0.0917	0.098
	25.3	5	0.0917	0.098
	10.0	2	0.0917	0.098
0.06	40.8	10	0.1932	0.2474
	25.3	5	0.1932	0.2474
	10.0	2	0.1932	0.2474

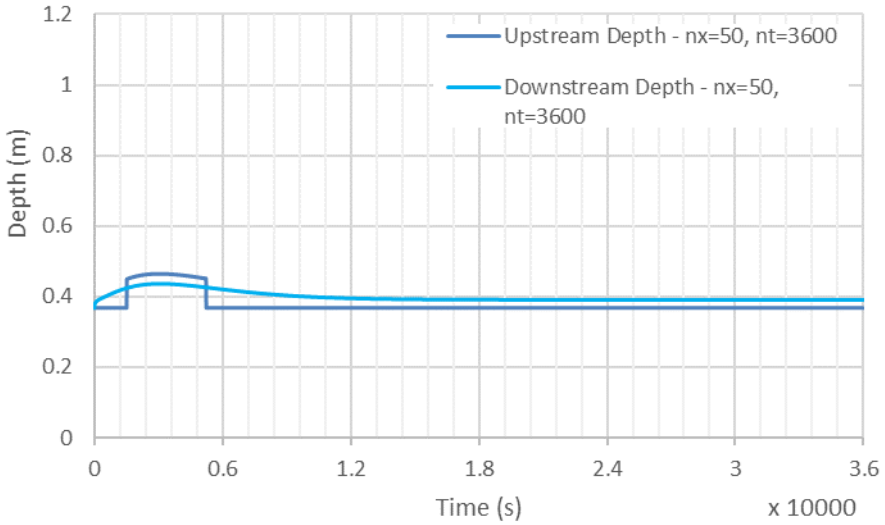
Πίνακας 6.8: Μέγιστη ελάχιστη ειδική ενέργεια κατάντη της συμβολής και ειδική ενέργεια ανάντη της συμβολής του κυκλικού πρωτεύοντα αγωγού, για διάφορες αρχικές παροχές.

.

Παρατηρούμε ότι για τις αρχικές παροχές $Q_{0_1} = 0{,}1\ \kappa\alpha\iota\ 0{,}2\ \frac{m^3}{s}$ η παροχή δεν μπορεί να περάσει με τις δοθείσες συνθήκες, με αποτέλεσμα η ροή να διαταράσσεται και να παρουσιάζεται αύξηση του βάθους ροής στα ανάντη της συμβολής (Σχήμα 6.32).



(α)

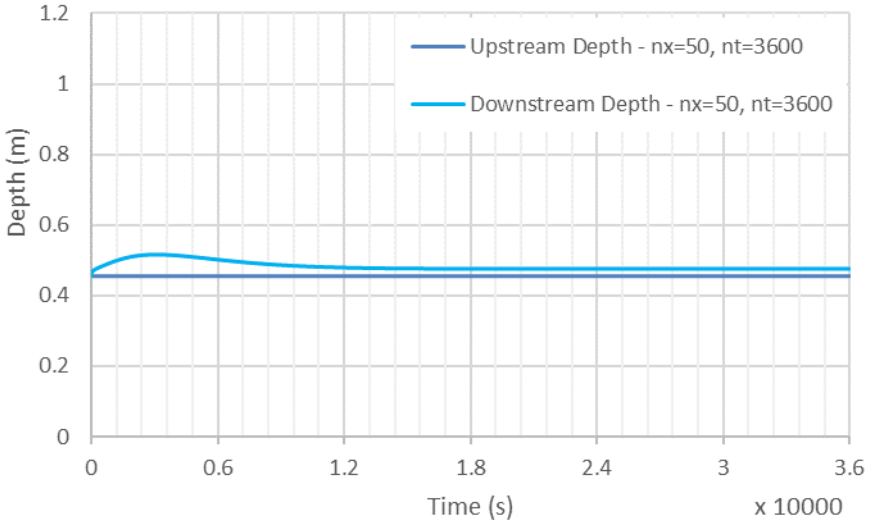


(β)

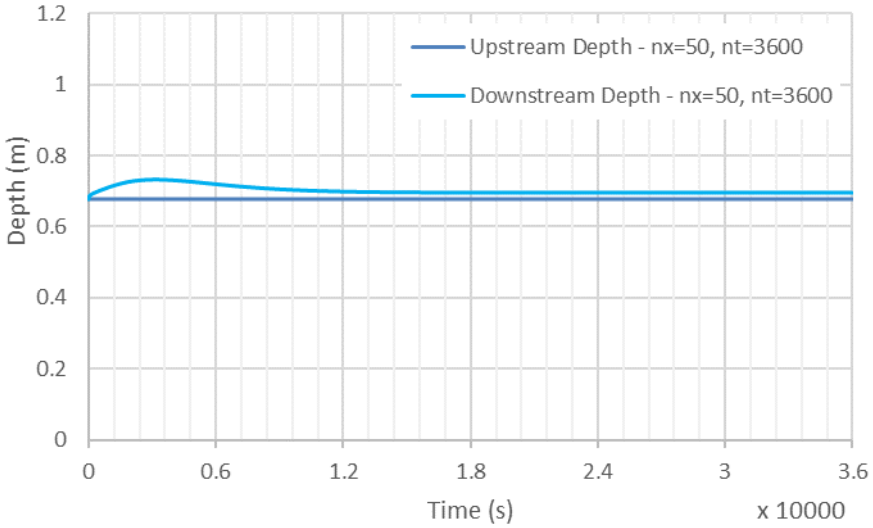
Σχήμα 6.32: Βάθη ροής ανάντη και κατάντη της συμβολής, για αρχικές παροχές κυκλικού πρωτεύοντα αγωγού $(\alpha)\ Q_{0_1} = 0{,}1\frac{m^3}{s}\ \kappa\alpha\iota\ (\beta)\ Q_{0_1} = 0{,}2\ \frac{m^3}{s}$.

Αντίθετα, η μέγιστη ελάχιστη ειδική δύναμη για τις παροχές $Q_{0_1} = 0{,}3\ \kappa\alpha\iota\ 0{,}6\ \frac{m^3}{s}$ είναι μικρότερη σε μέτρο από την ειδική δύναμη ανάντη. Επομένως, ικανοποιείται το κριτήριο της

ειδικής δύναμης και η παροχή περνάει από τον δευτερεύοντα στον πρωτεύοντα κυκλικό αγωγό, με την ροή να παραμένει αδιατάρακτη (Σχήμα 6.33).



(α)



(β)

Σχήμα 6.33: Βάθη ροής ανάντη και κατάντη της συμβολής, για αρχικές παροχές κυκλικού πρωτεύοντα αγωγού $(\alpha)\ Q_{0_1} = 0{,}3\frac{m^3}{s}$ $\kappa\alpha\iota\ (\beta)\ Q_{0_1} = 0{,}6\ \frac{m^3}{s}$.

6.4 Συμπεράσματα

Τα κυριότερα συμπεράσματα που προέκυψαν από την επίλυση της μη μόνιμης ροής στον δευτερεύοντα αγωγό είναι:

Ρητό σχήμα επίλυσης

- Το ρητό σχήμα παρουσιάζει μεγάλα σφάλματα, μεγαλύτερα του 3%, με το μέγιστο σφάλμα να φτάνει την τιμή 8.09% και για τις δύο γεωμετρίες του δευτερεύοντα αγωγού.
- Οι λύσεις που δίνει το σχήμα δεν είναι ανεξάρτητες του πλέγματος.
- Το σχήμα δεν μπορεί να χαρακτηριστεί ως ευσταθές, καθώς οι λύσεις δεν προσεγγίζουν τις πραγματικές όσο πυκνώνει το υπολογιστικό πλέγμα.
- Το σχήμα δεν παράγει πιο ακριβή αποτελέσματα όσο ο όρος Δx^2/Δt παίρνει μικρότερες τιμές.
- Στην διατομή ελέγχου $x = L/2$ παρατηρούμε ότι το ρητό σχήμα και για τις δύο γεωμετρίες αγωγών υποεκτιμά την παροχή και υπερεκτιμά το βάθος ροής, ενώ στην διατομή ελέγχου $x = L$ υποεκτιμά και τα δύο μεγέθη (Σχήμα 6.18 – 6.21).
- Τέλος, η επίλυση της μη μόνιμης ροής με το ρητό σχήμα που κατασκευάστηκε, κρίνεται ως μη αξιόπιστη καθώς τα αποτελέσματα που δίνει για πλήθος διαφορετικών διακριτοποιήσεων απέχουν από τα αντίστοιχα που δίνει το πρόγραμμα HECRAS.

Μέθοδος χαρακτηριστικών καμπυλών

- Η μέθοδος των χαρακτηριστικών καμπυλών παρουσιάζει ελάχιστα σφάλματα με το μέγιστο να αγγίζει την τιμή 0.01% και για τις δύο γεωμετρίες του δευτερεύοντα αγωγού.
- Οι λύσεις που δίνει η μέθοδος είναι ανεξάρτητες του πλέγματος.
- Στις διατομές ελέγχου $x = L/2$ και $x = L$, η μέθοδος δίνει αποτελέσματα τα οποία ταυτίζονται με αυτά που δίνει το HECRAS για τον ορθογωνικό αγωγό και τα προσεγγίζουν σε μεγάλο βαθμό στον κυκλικό αγωγό.
- Τέλος, η επίλυση της μη μόνιμης ροής με την μέθοδο χαρακτηριστικών καμπυλών κρίνεται ως αξιόπιστη, καθώς τα αποτελέσματα που δίνει για πλήθος διαφορετικών διακριτοποιήσεων ταυτίζονται με τα αντίστοιχα του HECRAS.

Τα κυριότερα συμπεράσματα που προέκυψαν από την επίλυση της μη μόνιμης ροής στον πρωτεύοντα αγωγό είναι:

- Η μέθοδος των χαρακτηριστικών καμπυλών παρουσιάζει ικανοποιητικά σφάλματα μικρότερα του 3%, με το μεγαλύτερο να παίρνει τιμή 1.25% στον κυκλικό αγωγό και 2.68% στον ορθογωνικό.
- Τα αποτελέσματα που η μέθοδος δίνει ταυτίζονται με τα αντίστοιχα του HECRAS.

Τέλος, όσον αφορά την επίλυση της ροής στην συμβολή προκύπτει:

- Η ροή διαταράσσεται και παρουσιάζει ανύψωση στα ανάντη της συμβολής, στην περίπτωση που η ειδική δύναμη ανάντη της συμβολής είναι μικρότερη από την ειδική δύναμη κατάντη της συμβολής.
- Η συμβολή μπορεί να λειτουργήσει ομαλά χωρίς να διαταράσσεται η ροή, στην περίπτωση που η ειδική δύναμη ανάντη της συμβολής είναι μεγαλύτερη από την ελάχιστη ειδική δύναμη κατάντη αυτής.
- Τέλος, στην περίπτωση που η ροή διαταράσσεται, η ανάντη της συμβολής μεταβολή του βάθους ροής Δy είναι ικανή να δημιουργήσει κύμα με κατεύθυνση αντίθετη προς αυτήν της ροής.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Διεθνείς

Akan, O., *Open Channel Hydraulics*, First Edition, Elsevier Butterworth-Heinemann, 2006.

Bruner, G., *HEC-RAS River Analysis System. User's Manual. Version 6.0*, US Army Corps of Engineers, Institute for Water Resources, Hydrologic Engineering Center, 2021.

Bridge, S., PhD Thesis, *A study of Unsteady Flow Wave Attenuation in Partially Filed Pipe Networks,* Brunel University, Department of Mechanical Engineering, 1984.

Chanson, H., *Environmental Hydraulics of Open Channel Flows*, Elsevier Butterworth-Heinemann, Oxford, UK, 2004.

Chaudhry, H., *Open-Channel Flow*, Second Edition, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, Springer, 2008.

Chow, V. T., *Open-Channel Hydraulics*, McGraw-Hill Book Co., New York, NY, 1959.

Fenton, J., *Computational Hydraulics*, TU Wien, Institut für Wasserbau und Ingenieurhydrologie, Wien, 2010.

Henderson, F. M., *Open Channel Flow*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1966.

Krvavica, N., Travas, V., *A comparison of method of characteristic and preissmann scheme for flood propagation modeling with 1D Saint-Venant equations*, 2015.

Retsinis, E., Daskalaki, E., Papanikolaou, P., *Hydraulic and hydrologic Analysis of Unsteady Flow in Prismatic Open Channel*, National Technical University of Athens, 2018.

Sevuk, A. S,. Yen, B. C,. Peterson G. E,. *Illinois storm sewer system simulation model user's manual*, University of Illinois Department of Computer Sciences, 1973.

Szymkiewicz, R., *Numerical Modeling in Open Channel Hydraulics*, Springer, 2010.

Ελληνικές

Μπαλτάς, Ε., Διαδικτυακές σημειώσεις, *Εκτίμηση πλημμυρικού πεδίου με υδραυλική προσομοίωση σε περιβάλλον HECRAS 2D*, 2021.

Νουτσόπουλος, Γ., Γ. Χριστοδούλου και Τ. Παπαθανασιάδης, *Υδραυλική Ανοικτών Αγωγών*, Έκδοση 2, Fountas, Αθήνα, 2010.

Παπανικολάου, Π. Ν., *Στοιχεία Μόνιμης Ροής σε Αγωγούς με Ελεύθερη Επιφάνεια*, Έκδοση 5, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα, 2017.

Παπανικολάου, Π. Ν., Κουτσογιάννης, Δ,. Στάμου, Α., *Οδηγίες για την παρουσίαση πανεπιστημιακών εργασιών στον Τομέα Υδατικών Πόρων & Περιβάλλοντος*, Αθήνα 2012.

Ρετσίνης, Ε., Διαδικτυακές σημειώσεις, *Μη μόνιμη ροή σε πρισματικούς αγωγούς*, 2020.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

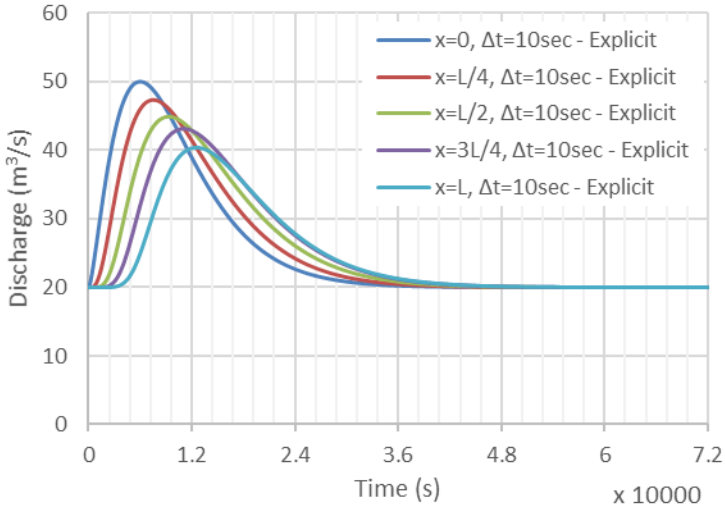
Στους παρακάτω πίνακες Α και Β περιγράφονται οι διαφορετικοί τρόποι επίλυσης της μη μόνιμης ροής στον δευτερεύοντα αγωγό με τα δύο αριθμητικά σχήματα (Explicit, Characteristic) και για τις δύο γεωμετρίες αγωγών. Στην συνέχεια, παρατίθενται τα διαγράμματα παροχής – χρόνου και βάθους ροής – χρόνου στις θέσεις ελέγχου $x = 0, L/4, L/2, 3L/4$ και L. Επιπλέον, παρατίθενται τα αντίστοιχα γραφήματα που προέκυψαν από την επίλυση της μη μόνιμης ροής και για τις δύο γεωμετρίες του δευτερεύοντα αγωγού από το πρόγραμμα HECRAS.

Πίνακας Α: Δευτερεύοντας Ορθογωνικός Αγωγός

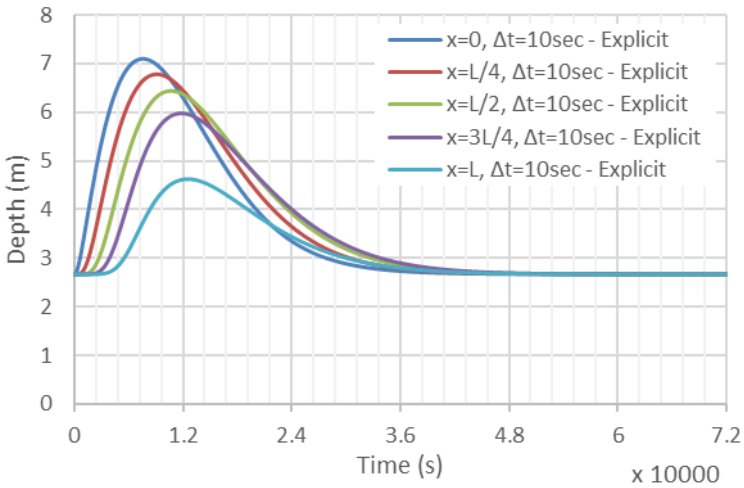
Αριθμητικό σχήμα	nx	nt	$\Delta x\ (m)$	$\Delta t\ (s)$	Cn	Σφάλμα (%)	Σχήμα
Explicit	80	7200	126.6	10	0.769	3.53	A.1.1
Characteristic					0.720	4.93	A.2.1
Explicit	130	14400	77.5	5	0.648	5.21	A.1.2
Characteristic					0.588	0.03	A.2.2
Explicit	300	36000	33.4	2	0.645	0.01	A.1.3
Characteristic					0.545	0.01	A.2.3
Hecras	-	-	-	-	-	-	A.0.0

Πίνακας Β: Δευτερεύοντας Κυκλικός Αγωγός

Αριθμητικό σχήμα	nx	nt	$\Delta x\ (m)$	$\Delta t\ (s)$	Cn	max $(\frac{y}{D_0})$	Σφάλμα (%)	Σχήμα
Explicit	80	3600	25.3	10	0.831	0.551	4.02	B.1.1
Characteristic					0.817	0.500	0.11	B.2.2
Explicit	180	7200	11.2	5	0.971	0.612	4.31	B.1.2
Characteristic					0.925	0.500	0.07	B.2.2
Explicit	300	18000	6.7	2	0.679	0.680	6.31	B.1.3
Characteristic					0.618	0.500	0.02	B.2.3
Hecras	-	-	-	-	-	-	-	B.0.0

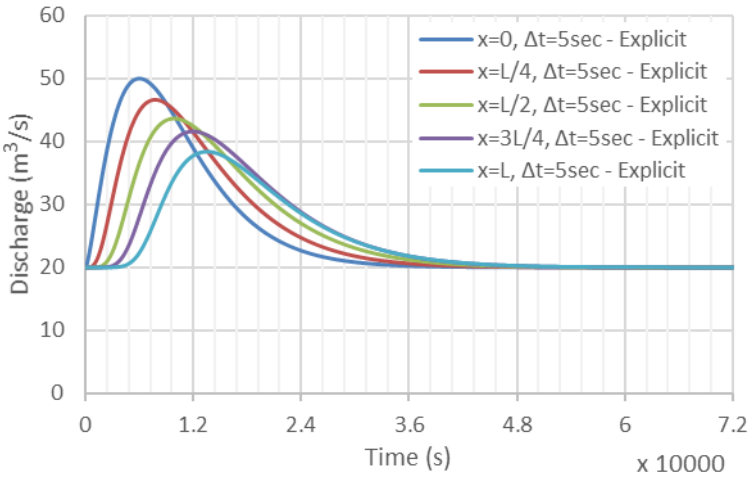


(α)

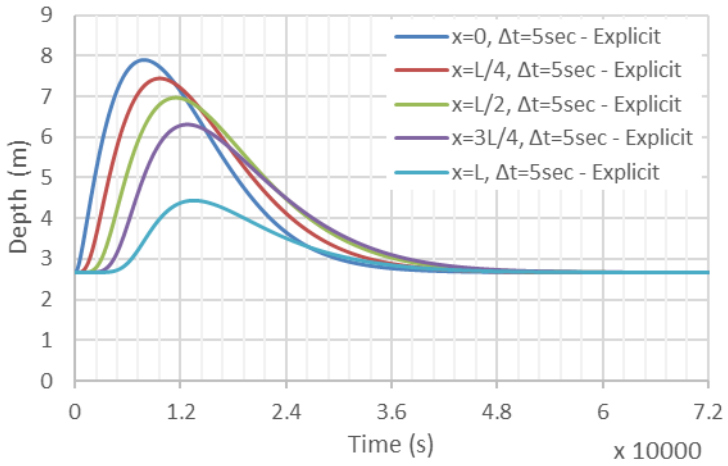


(β)

Σχήμα Α.1.1: Υδρογραφήματα (α) και βάθη ροής (β) στις διατομές ελέγχου στον δευτερεύοντα ορθογωνικό αγωγό που προκύπτουν με το ρητό σχήμα υπολογισμού για χωρικούς και χρονικούς κόμβους $nx = 80$ $nt = 7200$ αντίστοιχα.

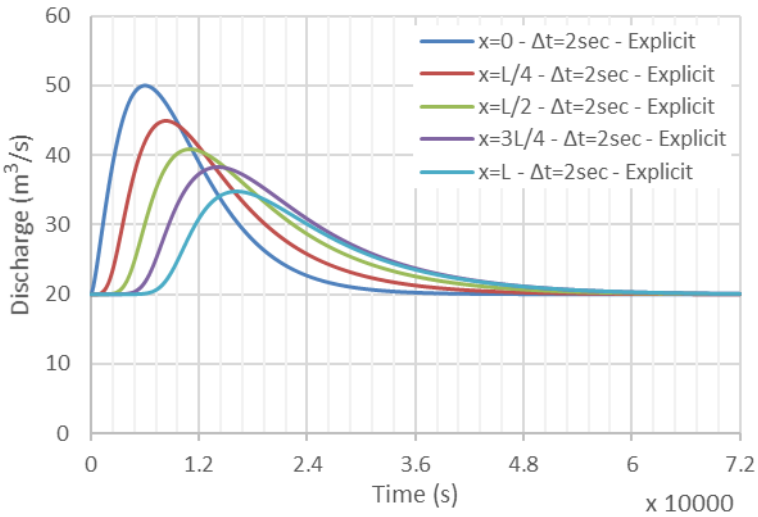


(α)

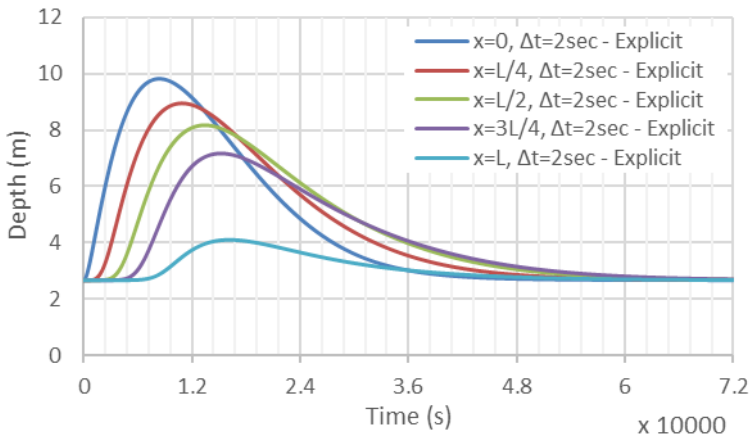


(β)

Σχήμα Α.1.2: Υδρογραφήματα (α) και βάθη ροής (β) στις διατομές ελέγχου στον δευτερεύοντα ορθογωνικό αγωγό που προκύπτουν με το ρητό σχήμα υπολογισμού για χωρικούς και χρονικούς κόμβους $nx = 130$ $nt = 14400$ αντίστοιχα.

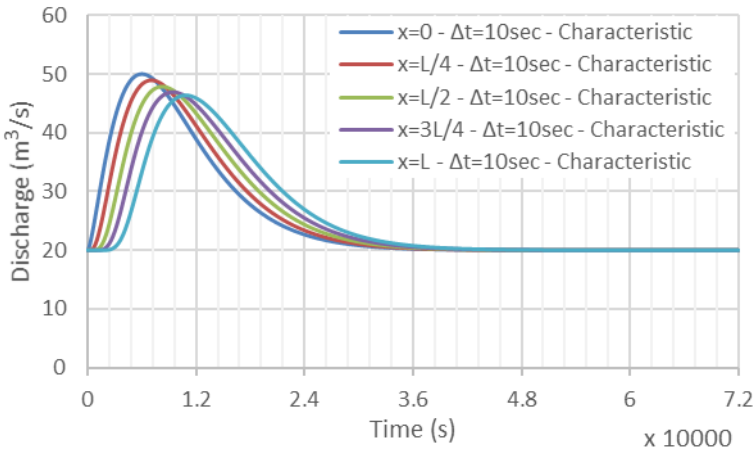


(α)

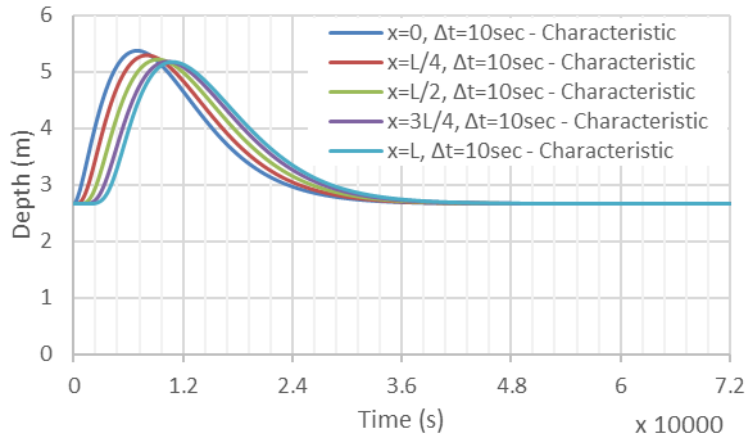


(β)

Σχήμα Α.1.3: Υδρογραφήματα (α) και βάθη ροής (β) στις διατομές ελέγχου στον δευτερεύοντα ορθογωνικό αγωγό που προκύπτουν με το ρητό σχήμα υπολογισμού για χωρικούς και χρονικούς κόμβους $nx = 300$ $nt = 36000$ αντίστοιχα.

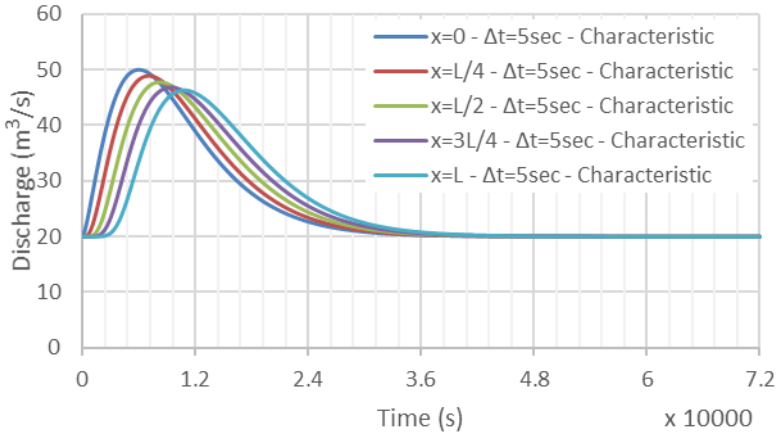


(α)

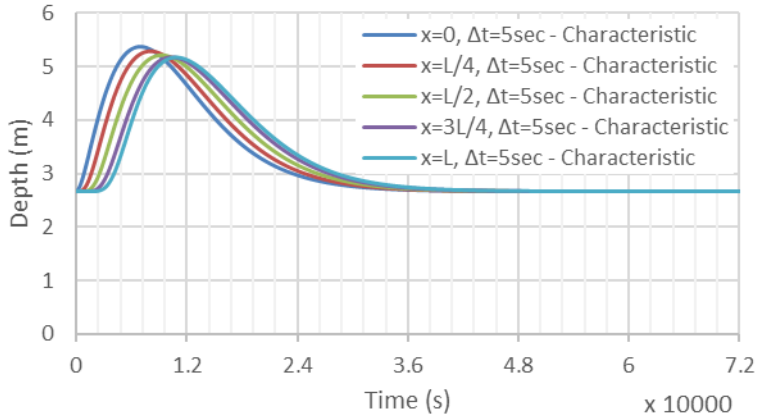


(β)

Σχήμα Α.2.1: Υδρογραφήματα (α) και βάθη ροής (β) στις διατομές ελέγχου στον δευτερεύοντα ορθογωνικό αγωγό που προκύπτουν με την μέθοδο χαρακτηριστικών καμπυλών, για χωρικούς και χρονικούς κόμβους, $nx = 80$ $nt = 7200$ αντίστοιχα.

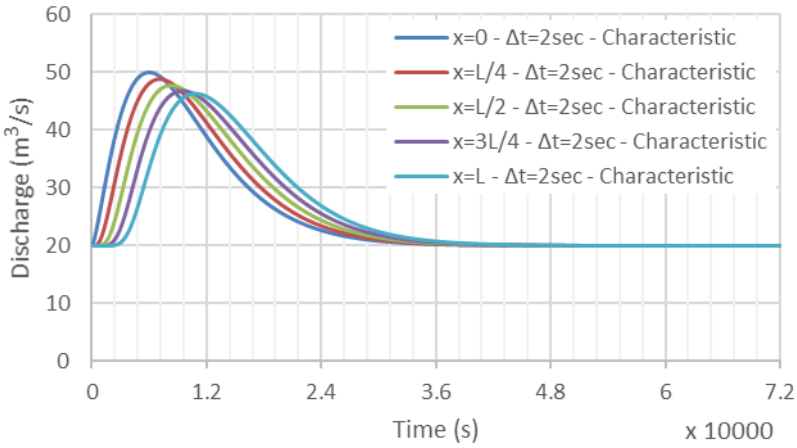


(α)

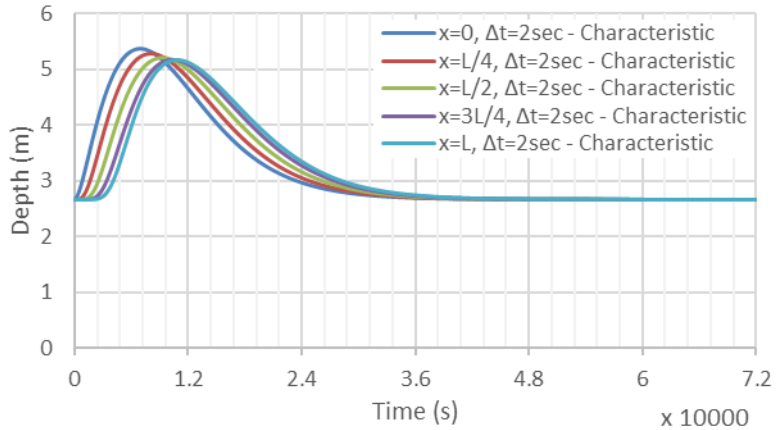


(β)

Σχήμα Α.2.2: Υδρογραφήματα (α) και βάθη ροής (β) στις διατομές ελέγχου στον δευτερεύοντα ορθογωνικό αγωγό που προκύπτουν με την μέθοδο χαρακτηριστικών καμπυλών, για χωρικούς και χρονικούς κόμβους $nx = 130$ $nt = 14400$ αντίστοιχα.

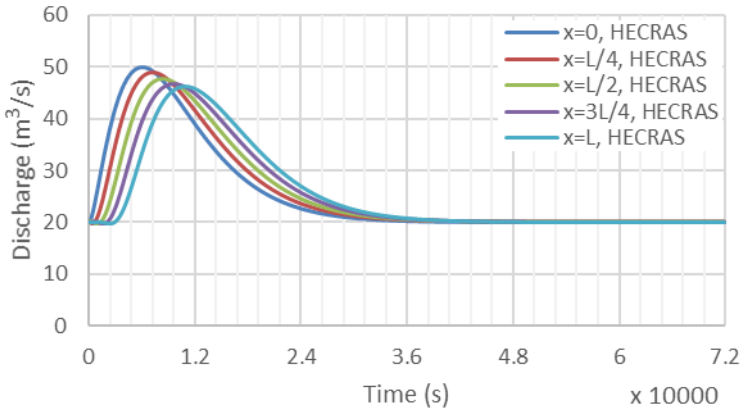


(α)

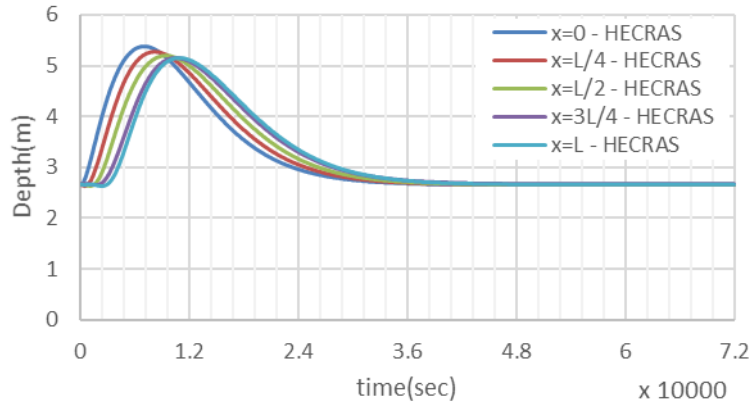


(β)

Σχήμα Α.2.3: Υδρογραφήματα (α) και βάθη ροής (β) στις διατομές ελέγχου στον δευτερεύοντα ορθογωνικό αγωγό που προκύπτουν με την μέθοδο χαρακτηριστικών καμπυλών, για χωρικούς και χρονικούς κόμβους $nx = 300$ $nt = 36000$ αντίστοιχα.

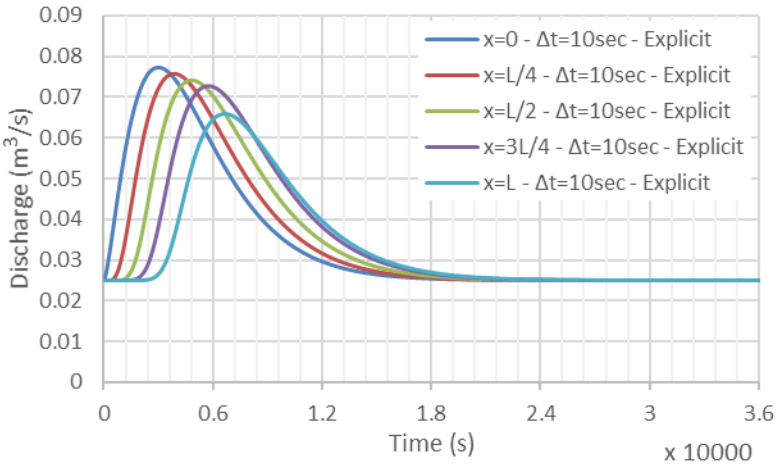


(α)

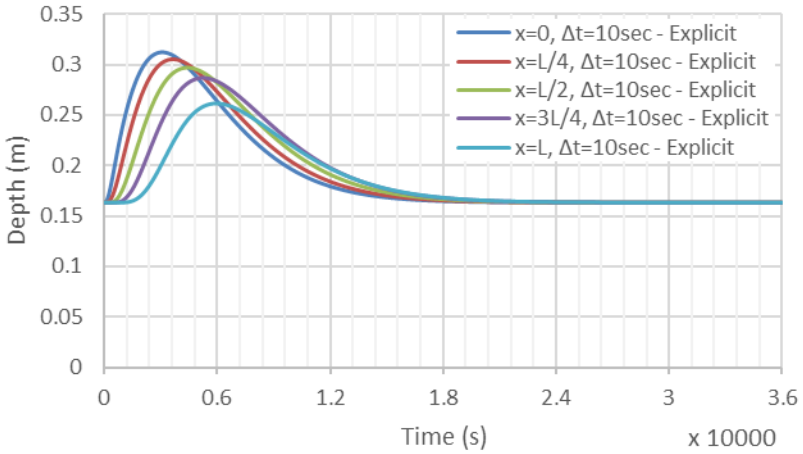


(β)

Σχήμα Α.0.0: Υδρογραφήματα (α) και βάθη ροής (β) στις διατομές ελέγχου στον δευτερεύοντα ορθογωνικό αγωγό που προκύπτουν με το πρόγραμμα HECRAS.

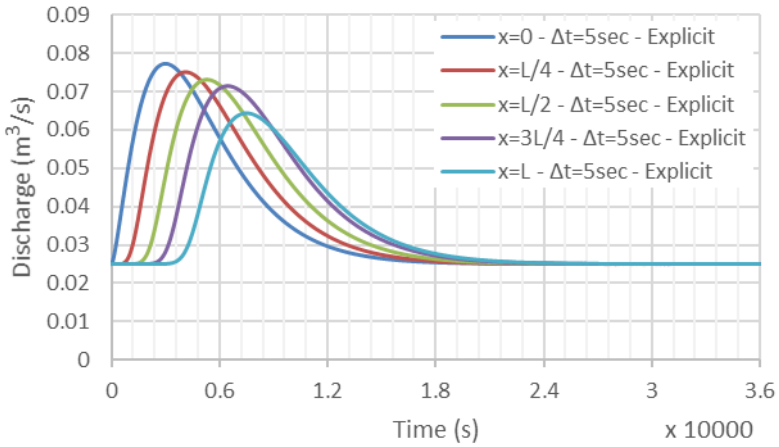


(α)

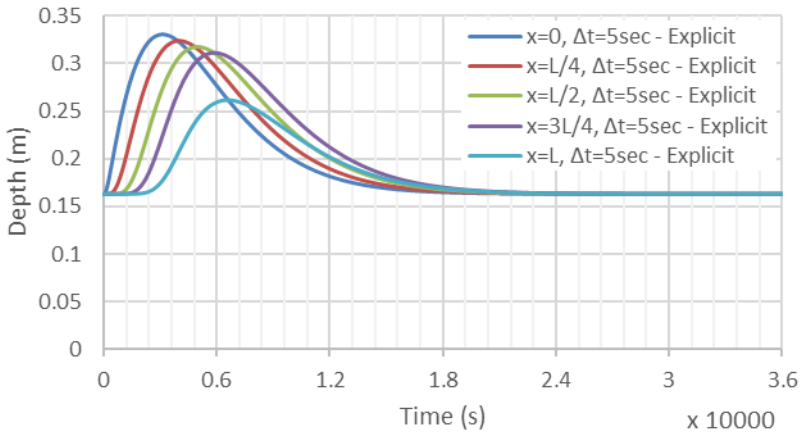


(β)

Σχήμα Β.1.1: Υδρογραφήματα (α) και βάθη ροής (β) στις διατομές ελέγχου στον δευτερεύοντα κυκλικό αγωγό που προκύπτουν με το ρητό σχήμα υπολογισμού για χωρικούς και χρονικούς κόμβους $nx = 80$ $nt = 3600$ αντίστοιχα.

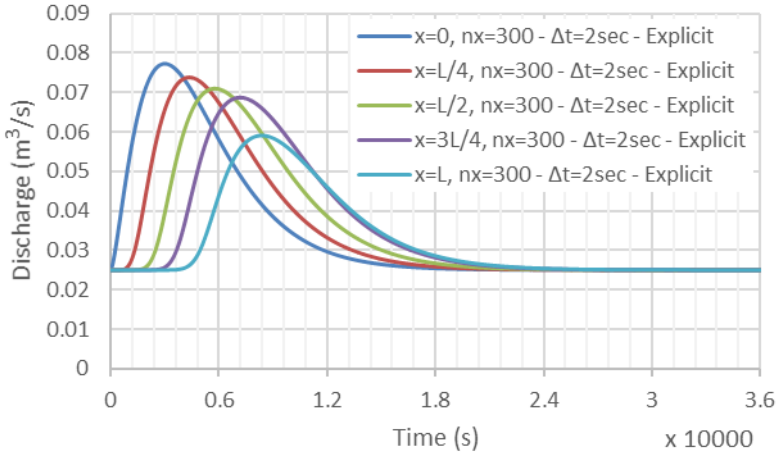


(α)

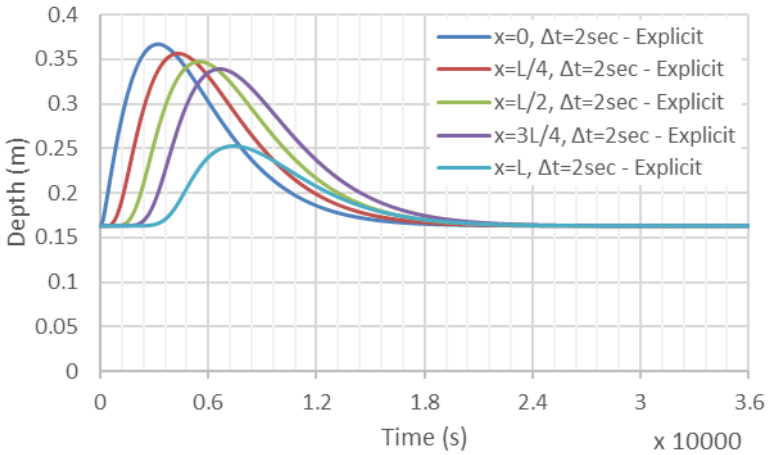


(β)

Σχήμα Β.1.2: Υδρογραφήματα (α) και βάθη ροής (β) στις διατομές ελέγχου στον δευτερεύοντα κυκλικό αγωγό που προκύπτουν με το ρητό σχήμα υπολογισμού για χωρικούς και χρονικούς κόμβους $nx = 180$ $nt = 7200$ αντίστοιχα.

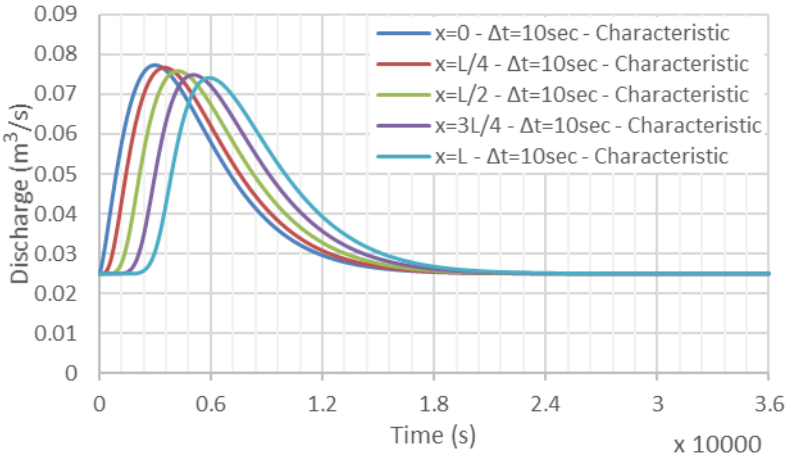


(α)

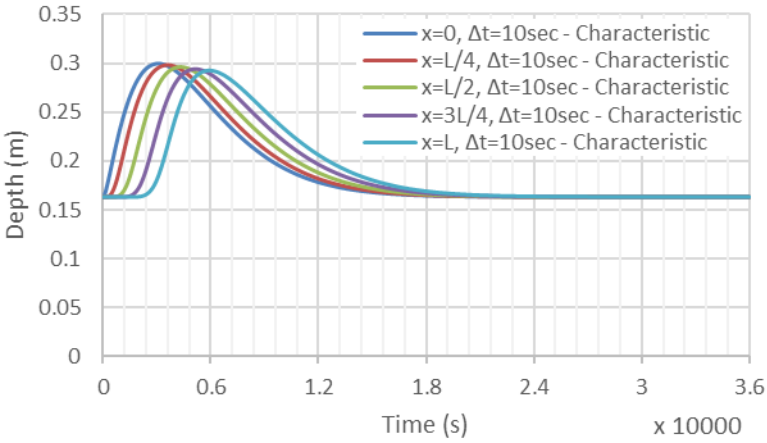


(β)

Σχήμα Β.1.3: Υδρογραφήματα (α) και βάθη ροής (β) στις διατομές ελέγχου στον δευτερεύοντα κυκλικό αγωγό που προκύπτουν με το ρητό σχήμα υπολογισμού για χωρικούς και χρονικούς κόμβους $nx = 300$ $nt = 18000$ αντίστοιχα.

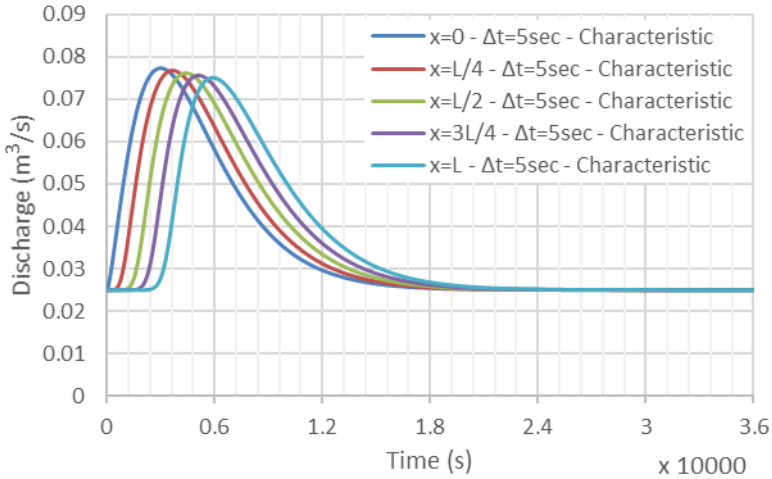


(α)

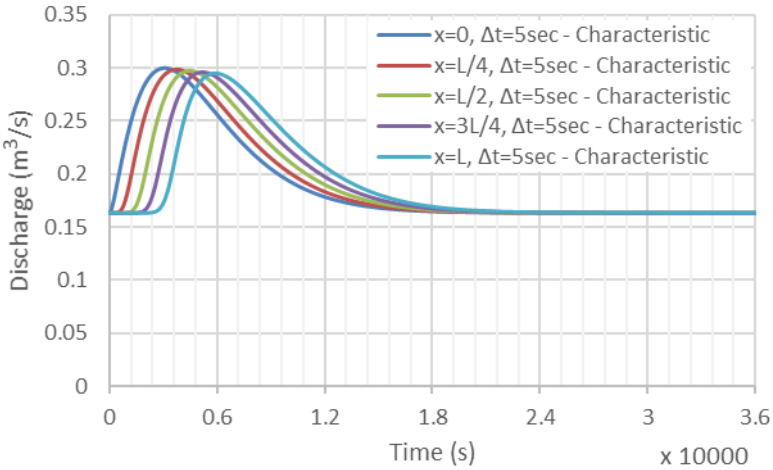


(β)

Σχήμα Β.2.1: Υδρογραφήματα (α) και βάθη ροής (β) στις διατομές ελέγχου στον δευτερεύοντα κυκλικό αγωγό που προκύπτουν με την μέθοδο των χαρακτηριστικών καμπυλών για χωρικούς και χρονικούς κόμβους $nx = 80$ $nt = 3600$ αντίστοιχα.

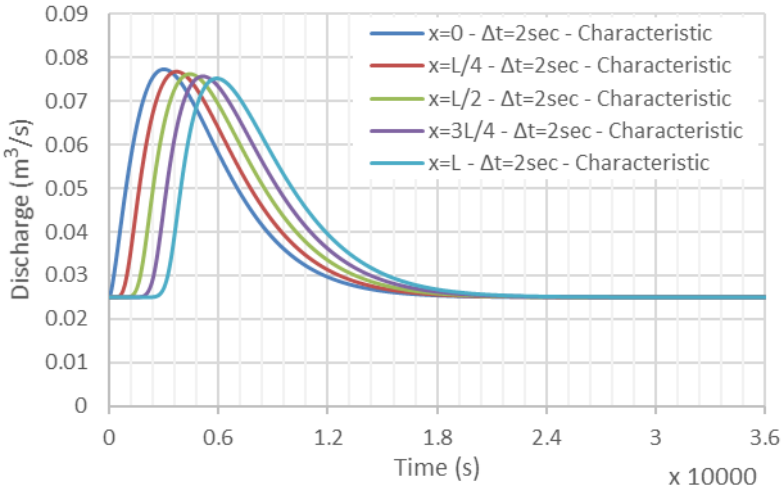


(α)

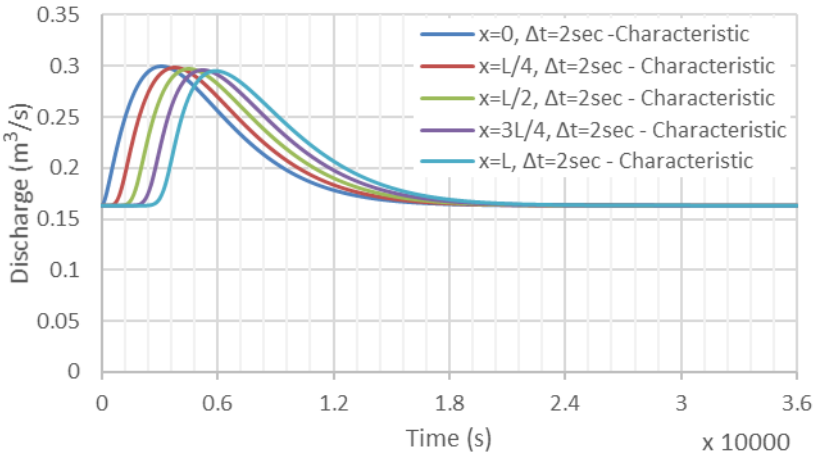


(β)

Σχήμα Β.2.2: Υδρογραφήματα (α) και βάθη ροής (β) στις διατομές ελέγχου στον δευτερεύοντα κυκλικό αγωγό που προκύπτουν με την μέθοδο των χαρακτηριστικών καμπυλών για χωρικούς και χρονικούς κόμβους $nx = 180$ $nt = 7200$ αντίστοιχα.

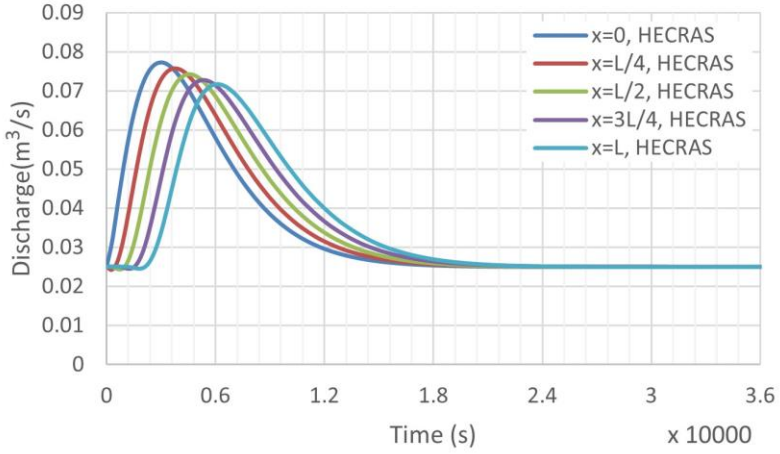


(α)

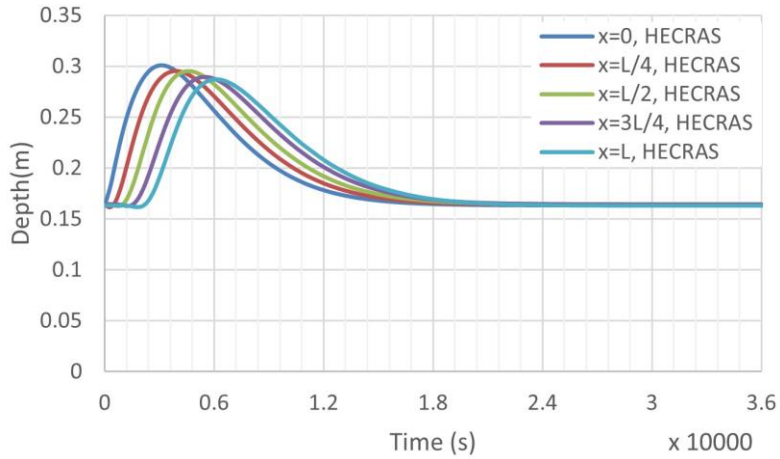


(β)

Σχήμα Β.2.3: Υδρογραφήματα (α) και βάθη ροής (β) στις διατομές ελέγχου στον δευτερεύοντα κυκλικό αγωγό που προκύπτουν με την μέθοδο των χαρακτηριστικών καμπυλών για χωρικούς και χρονικούς κόμβους $nx = 300$ $nt = 18000$ αντίστοιχα.



(α)



(β)

Σχήμα Β.0.0: Υδρογραφήματα (α) και βάθη ροής (β) στις διατομές ελέγχου στον δευτερεύοντα κυκλικό αγωγό που προκύπτουν με το πρόγραμμα HECRAS.

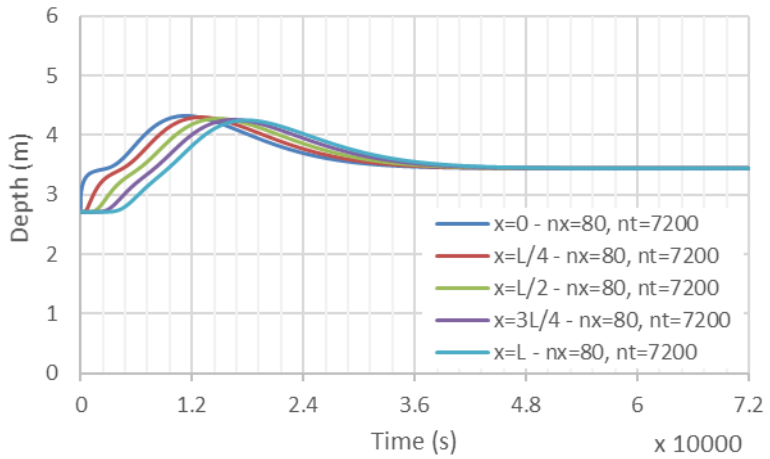
Στους παρακάτω πίνακες Γ και Δ περιγράφονται οι διαφορετικοί τρόποι επίλυσης της μη μόνιμης ροής στον πρωτεύοντα αγωγό με την μέθοδο των χαρακτηριστικών καμπυλών (Characteristic) και για τις δύο γεωμετρίες αγωγών. Στην συνέχεια, παρατίθενται τα διαγράμματα βάθους ροής – χρόνου στις θέσεις ελέγχου $x = 0, L/4, L/2, 3L/4$ και L. Επιπλέον, παρατίθενται τα αντίστοιχα γραφήματα που προέκυψαν από την επίλυση της μη μόνιμης ροής και για τις δύο γεωμετρίες του πρωτεύοντα αγωγού με το πρόγραμμα HECRAS.

Πίνακας Γ: Πρωτεύοντας Ορθογωνικός Αγωγός

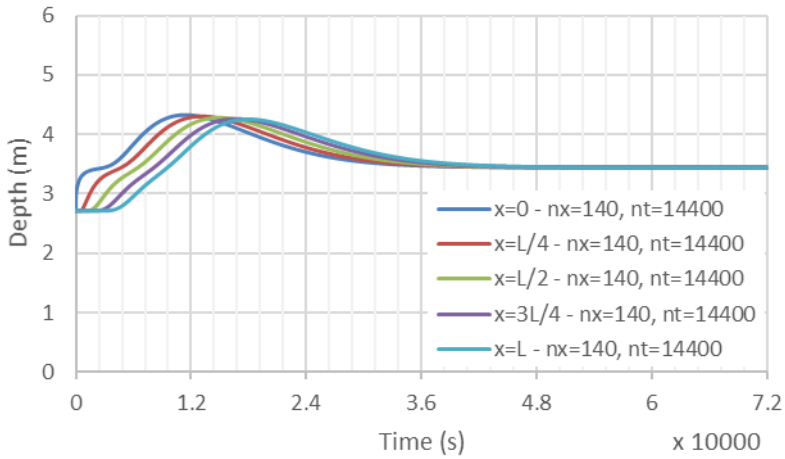
Q_{0_1} ($\frac{m^3}{s}$)	nx	nt	Δx (m)	Δt (s)	Cn	Σφάλμα (%)	Σχήμα
50	80	7200	253.2	10	0.345	2.67	Γ.1
	140	14400	143.9	5	0.304	2.68	
	200	36000	100.5	2	0.261	2.68	
80	80	7200	253.2	10	0.379	1.76	Γ.2
	140	14400	143.9	5	0.333	1.77	
	200	36000	100.5	2	0.287	1.77	
100	80	7200	253.2	10	0.399	1.43	Γ.3
	140	14400	143.9	5	0.351	1.43	
	200	36000	100.5	2	0.302	1.44	
120	80	7200	253.2	10	0.417	1.20	Γ.4
	140	14400	143.9	5	0.367	1.21	
	200	36000	100.5	2	0.316	1.21	
Hecras	-	-	-	-	-	-	Γ.0

Πίνακας Δ: Πρωτεύοντας Κυκλικός Αγωγός

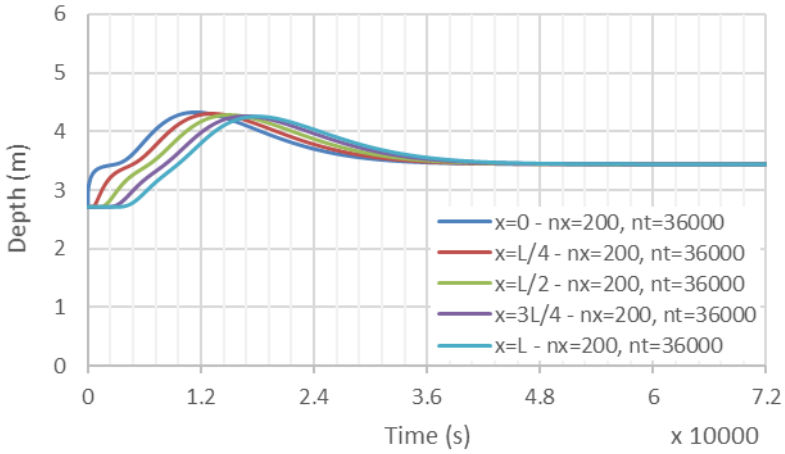
Q_{0_1} ($\frac{m^3}{s}$)	nx	nt	Δx (m)	Δt (s)	Cn	max ($\frac{y}{D_0}$)	Σφάλμα (%)	Σχήμα
0.1	50	3600	40.8	10	0.544	0.288	1.24	Δ.1
	80	7200	25.3	5	0.549	0.288	1.25	
	200	18000	10.1	2	0.441	0.288	1.25	
0.2	50	3600	40.8	10	0.618	0.364	0.59	Δ.2
	80	7200	25.3	5	0.625	0.364	0.59	
	200	18000	10.1	2	0.502	0.364	0.59	
0.3	50	3600	40.8	10	0.679	0.430	0.38	Δ.3
	80	7200	25.3	5	0.686	0.430	0.38	
	200	18000	10.1	2	0.552	0.430	0.98	
0.6	50	3600	40.8	10	0.833	0.611	0.18	Δ.4
	80	7200	25.3	5	0.841	0.611	0.17	
	200	18000	10.1	2	0.676	0.611	0.17	
Hecras	-	-	-	-	-	-	-	Δ.0.0



(α)

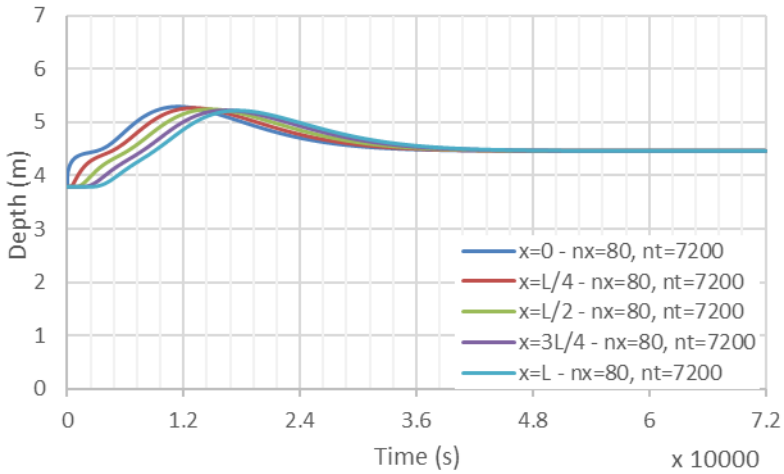


(β)

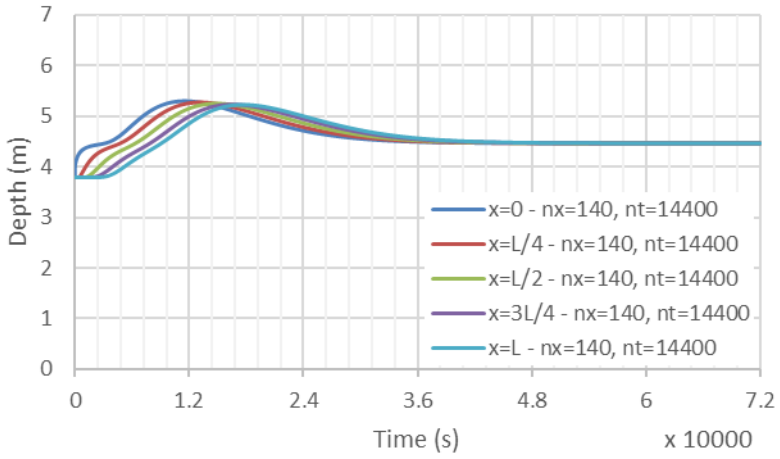


(γ)

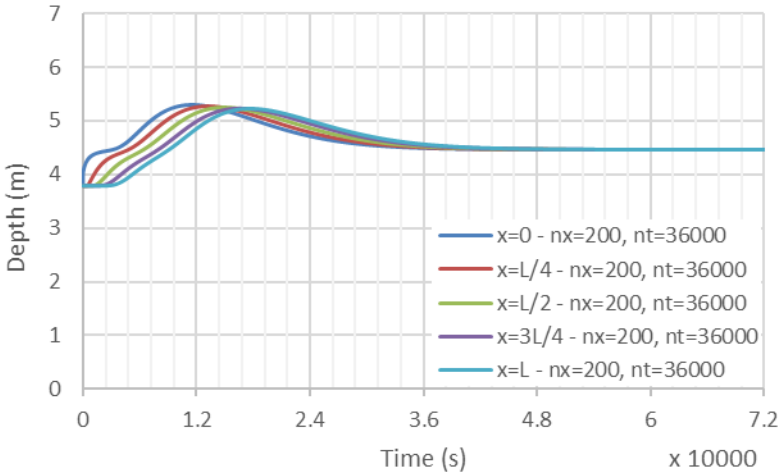
Σχήμα Γ.1: Βάθη ροής στις διατομές ελέγχου του πρωτεύοντα ορθογωνικού αγωγού, με αρχική παροχή $Q_{0_1} = 50\ \frac{m^3}{s}$, για διάφορες χωρικές και χρονικές διακριτοποιήσεις.



(α)

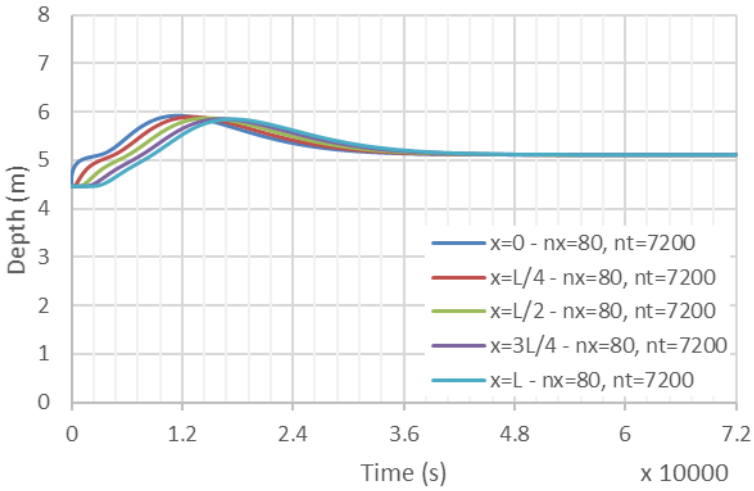


(β)

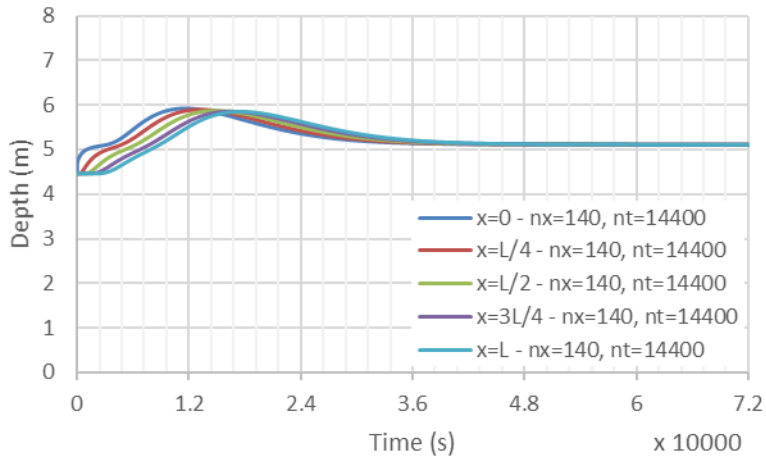


(γ)

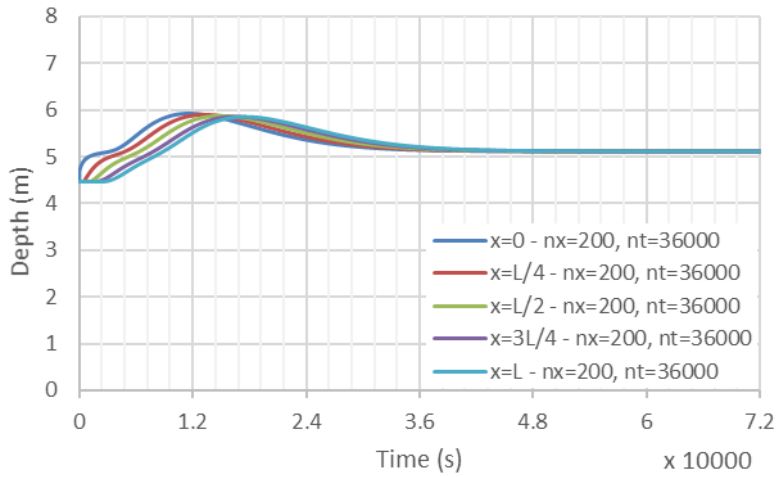
Σχήμα Γ.2: Βάθη ροής στις διατομές ελέγχου του πρωτεύοντα ορθογωνικού αγωγού, με αρχική παροχή $Q_{0_1} = 80\ \frac{m^3}{s}$, για διάφορες χωρικές και χρονικές διακριτοποιήσεις.



(α)

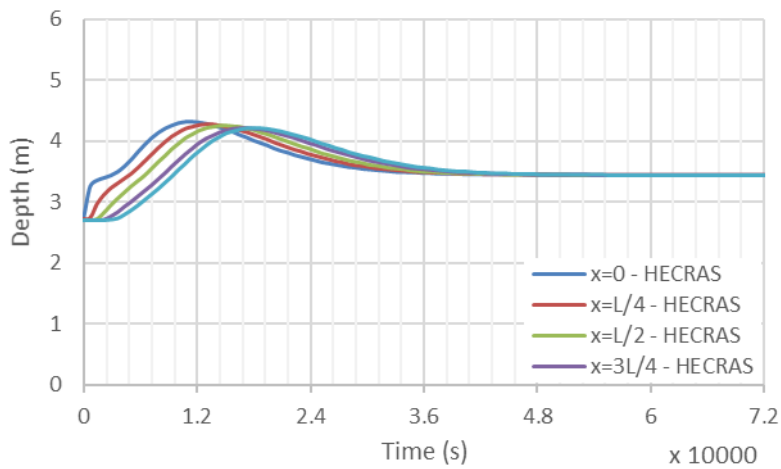


(β)

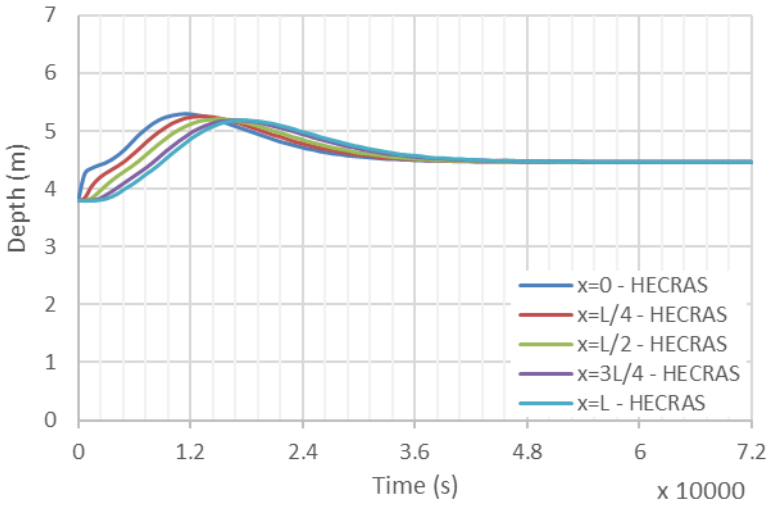


(γ)

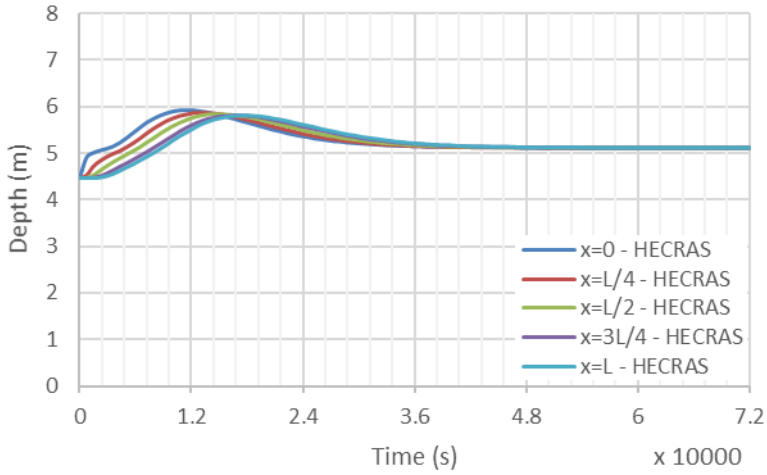
Σχήμα Γ.3: Βάθη ροής στις διατομές ελέγχου του πρωτεύοντα ορθογωνικού αγωγού, με αρχική παροχή $Q_{0_1} = 100\ \frac{m^3}{s}$, για διάφορες χωρικές και χρονικές διακριτοποιήσεις.



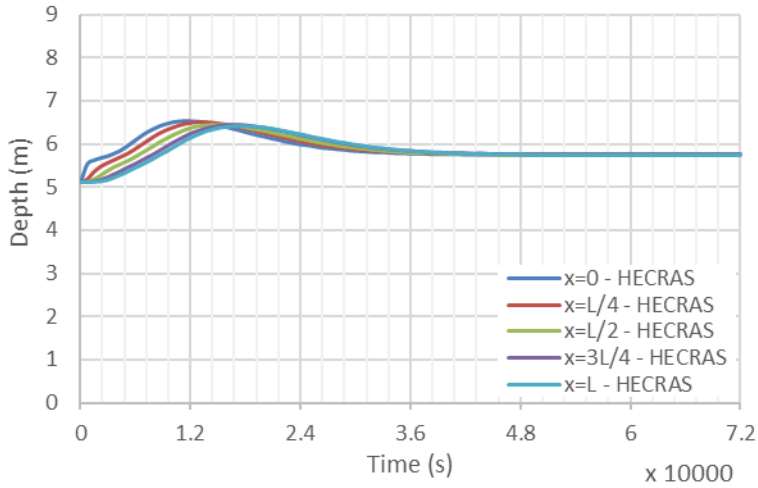
(α)


Depth (m)
Time (s)
x 10000
x=0 - HECRAS
x=L/4 - HECRAS
x=L/2 - HECRAS
x=3L/4 - HECRAS
x=L - HECRAS

(β)

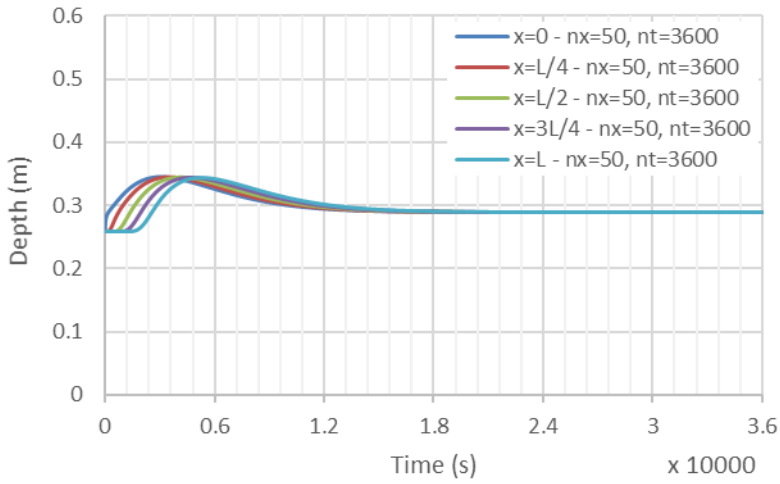

Depth (m)
Time (s)
x 10000
x=0 - HECRAS
x=L/4 - HECRAS
x=L/2 - HECRAS
x=3L/4 - HECRAS
x=L - HECRAS

(γ)

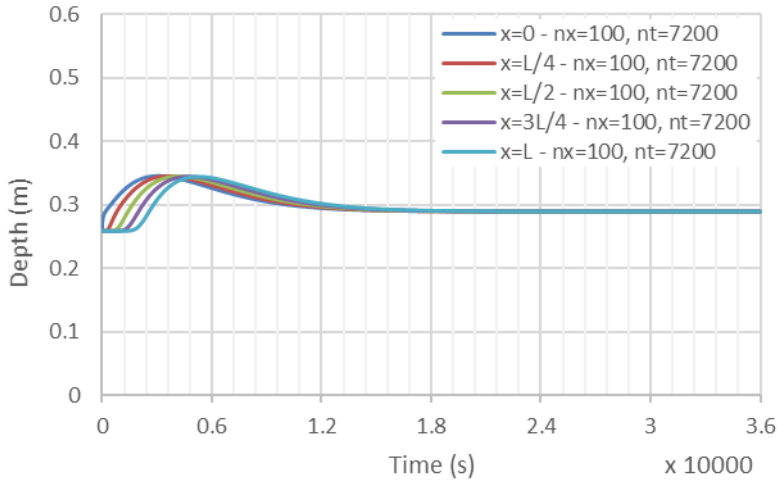

Depth (m)
Time (s)
x 10000
x=0 - HECRAS
x=L/4 - HECRAS
x=L/2 - HECRAS
x=3L/4 - HECRAS
x=L - HECRAS

(δ)

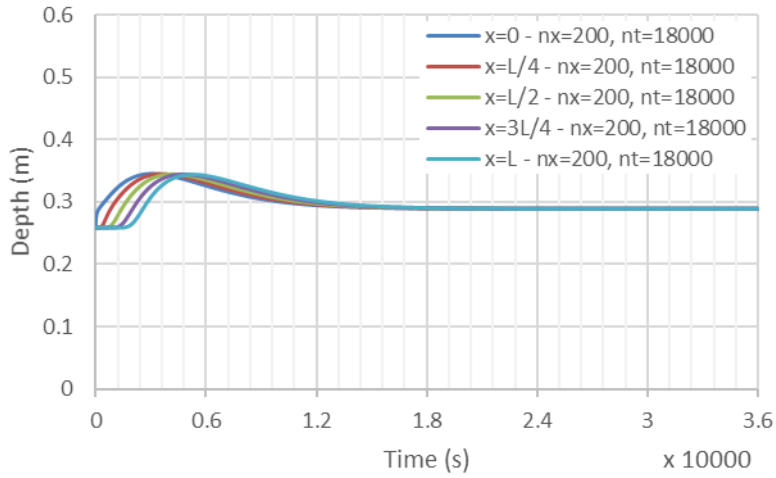
Σχήμα Γ.0: Βάθη ροής στις διατομές ελέγχου του πρωτεύοντα ορθογωνικού αγωγού, με αρχική παροχή (α) $Q_{0_1} = 50\ \frac{m^3}{s}$ (β) $Q_{0_1} = 80\ \frac{m^3}{s}$ (γ) $Q_{0_1} = 100\ \frac{m^3}{s}$ και (δ) $Q_{0_1} = 120\ \frac{m^3}{s}$, που προκύπτουν από το πρόγραμμα HECRAS.



(α)

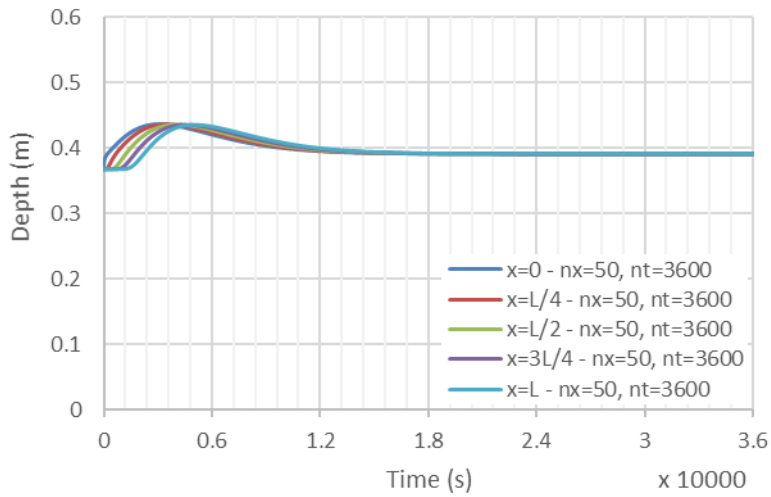


(β)

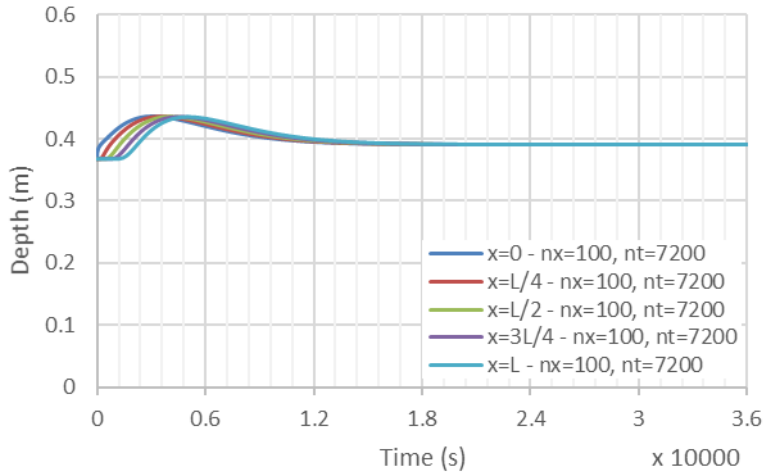


(γ)

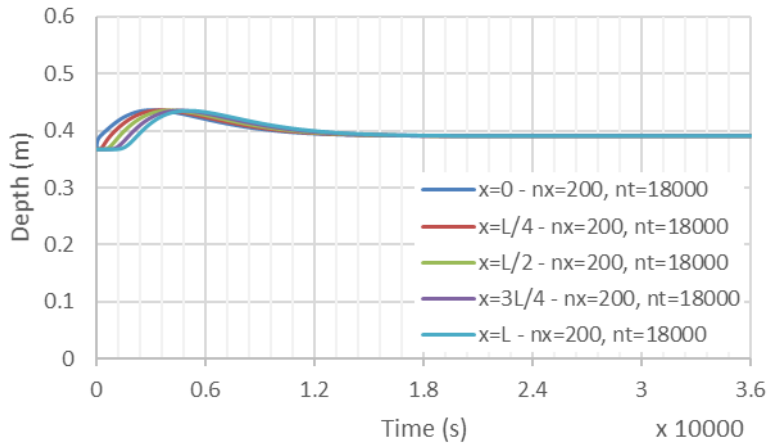
Σχήμα Δ.1: Βάθη ροής στις διατομές ελέγχου του πρωτεύοντα κυκλικού αγωγού, με αρχική παροχή $Q_{0_1} = 0{,}1\ \frac{m^3}{s}$, για διάφορες χωρικές και χρονικές διακριτοποιήσεις.



(α)

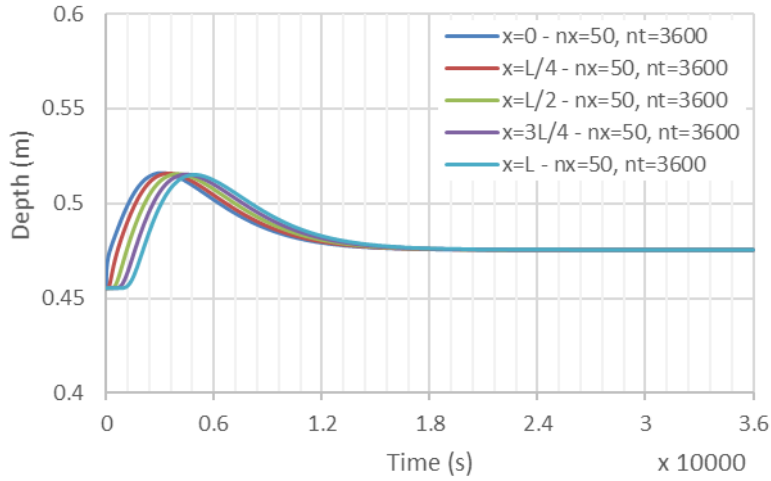


(β)

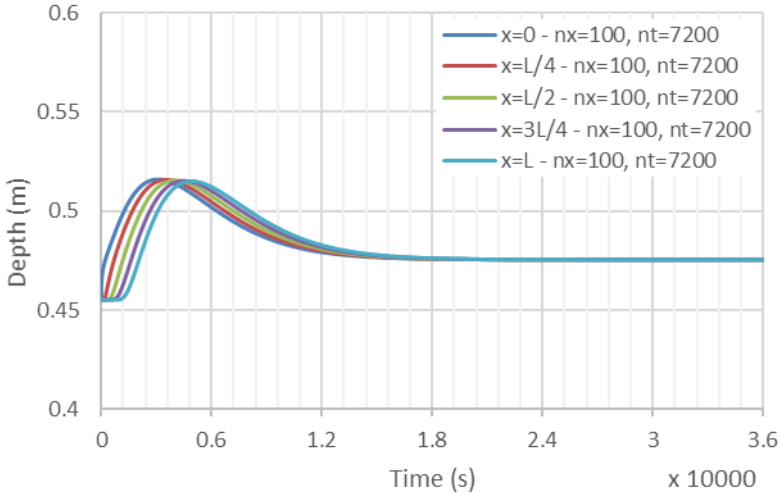


(γ)

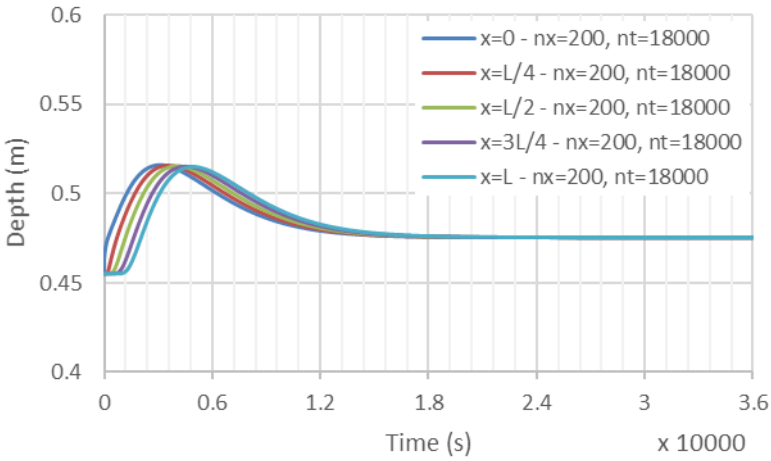
Σχήμα Δ.2: Βάθη ροής στις διατομές ελέγχου του πρωτεύοντα κυκλικού αγωγού, με αρχική παροχή $Q_{0_1} = 0{,}2\ \frac{m^3}{s}$, για διάφορες χωρικές και χρονικές διακριτοποιήσεις.



(α)

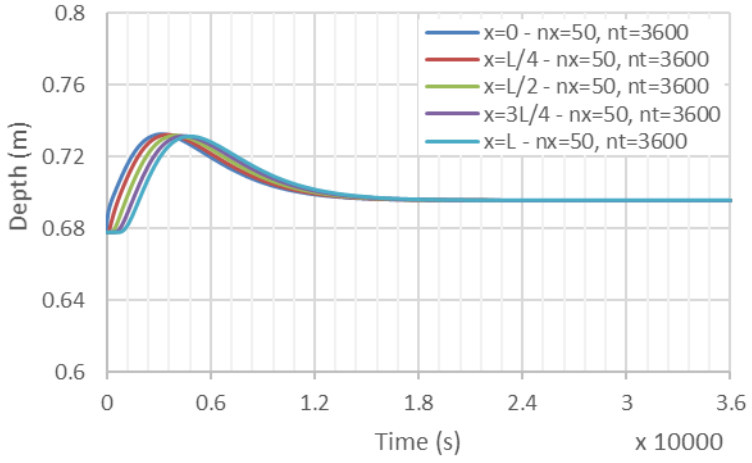


(β)

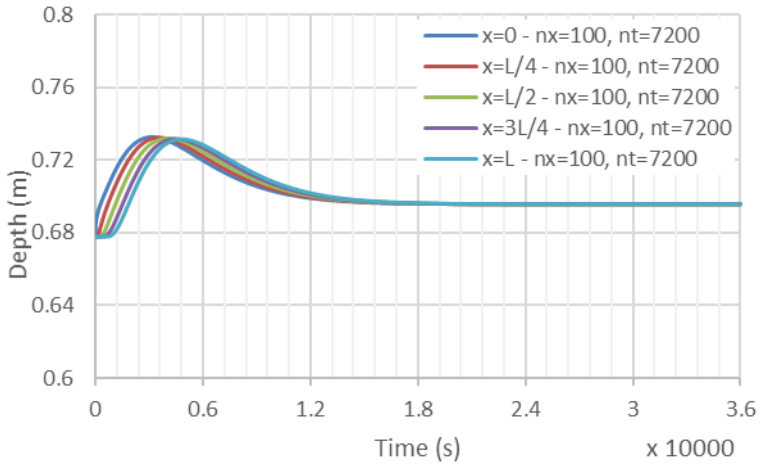


(γ)

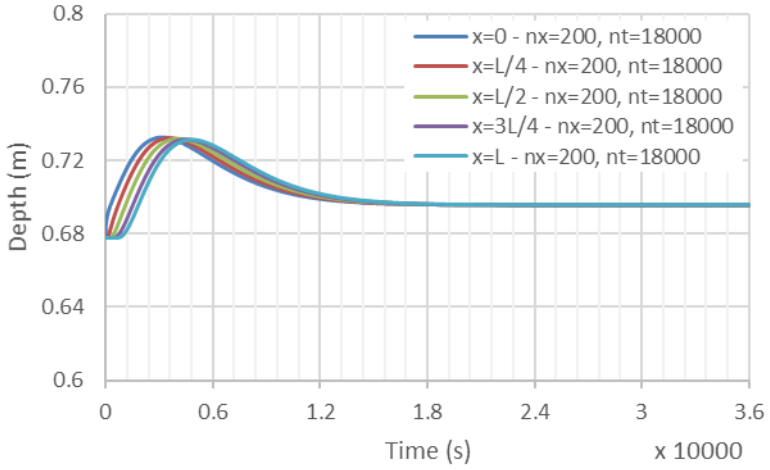
Σχήμα Δ.3: Βάθη ροής στις διατομές ελέγχου του πρωτεύοντα κυκλικού αγωγού, με αρχική παροχή $Q_{0_1} = 0{,}3\ \frac{m^3}{s}$, για διάφορες χωρικές και χρονικές διακριτοποιήσεις.



(α)

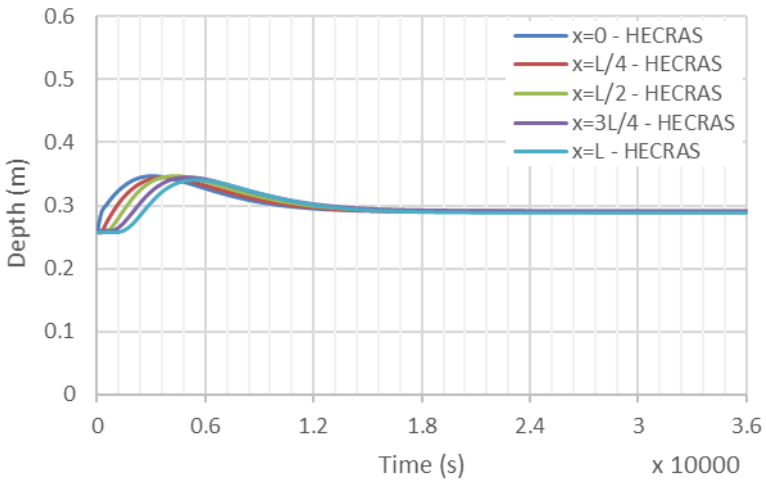


(β)

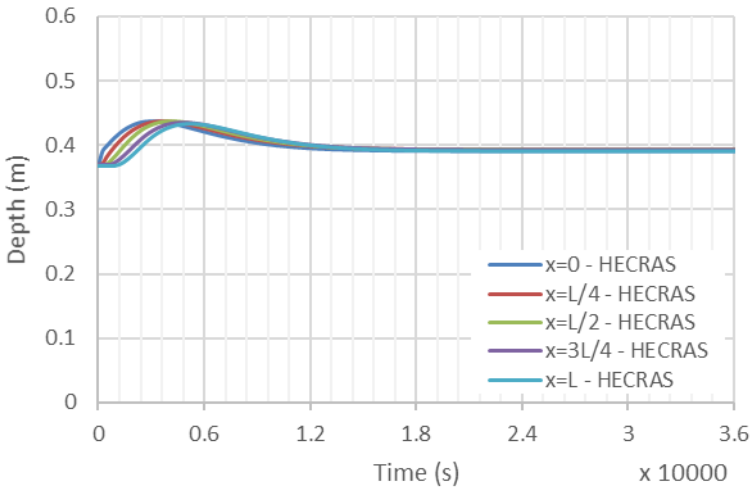


(γ)

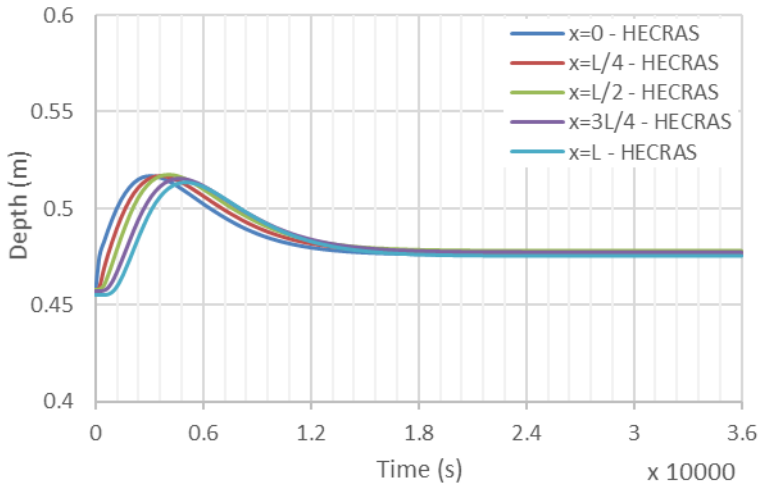
Σχήμα Δ.4: Βάθη ροής στις διατομές ελέγχου του πρωτεύοντα κυκλικού αγωγού, με αρχική παροχή $Q_{0_1} = 0{,}6\ \frac{m^3}{s}$, για διάφορες χωρικές και χρονικές διακριτοποιήσεις.



(α)



(β)



(γ)

Σχήμα Δ.0: Βάθη ροής στις διατομές ελέγχου του πρωτεύοντα ορθογωνικού αγωγού, με αρχική παροχή (α) $Q_{0_1} = 0{,}1\ \frac{m^3}{s}$ (β) $Q_{0_1} = 0{,}2\ \frac{m^3}{s}$ και (γ) $Q_{0_1} = 0{,}3\ \frac{m^3}{s}$, που προκύπτουν από το πρόγραμμα HECRAS.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

Παρακάτω δίνονται οι κώδικες (Scripts) που καλούνται για την επίλυση της μη μόνιμης ροής, για τον δευτερεύοντα και πρωτεύοντα αγωγό, στο λογισμικό MATLAB (Πίνακας Α).

Πίνακας Α: Κώδικες στη γλώσσα Matlab R2018a.

Αγωγός	Script	Μέθοδος Επίλυσης
Δευτερεύοντας Κυκλικός	A.1.1 A.1.2	Explicit Characteristic
Δευτερεύοντας Ορθογωνικός	A.2.1 A.2.2	Explicit Characteristic
Πρωτεύοντας Κυκλικός	B.1	Characteristic
Πρωτεύοντας Ορθογωνικός	B.2	Characteristic

Script A.1.1

```
%-----Secondary_circular_channel_Explicit Method-----%
clc; clear ;
%-------Inputs--------
n=0.020;
g=9.81;
Jo=0.0015;
Do=0.6;
Qo=0.025;
a=pi/10:pi/10000:2*pi;
[~,k]=min(abs(((Qo.*n./sqrt(Jo)).*a.^(2/3)./((Do./2).^(8./3)))
.^(3/5)+sin(a)./2+a./2-a));
thetao=a(k);
yo=(Do./2)*(1-cos(thetao/2));
Ao=(thetao-sin(thetao))*Do^2/8;
Vo=Qo/Ao;
%-----mapping----%
nx=80; %space nodes
nt=3600; %time nodes
T=36000; %time (sec)
L=2000; %channel length
Dx=L/(nx-1); %distance between space nodes
Dt=T/(nt-1); % time space between time nodes
%-----matrices------%
A=zeros(nx,nt); Q=zeros(nx,nt); Je=zeros(nx,nt);
D=zeros(nx,nt); P=zeros(nx,nt); V=zeros(nx,nt);
y=zeros(nx,nt); R=zeros(nx,nt); theta=zeros(nx,nt);
Cn1=zeros(nx,nt); Cn2=zeros(nx,nt);
Q(:,:)=Qo;
A(:,:)=Ao;
```

```
V(:,:)=Vo;
Je(:,:)=Jo;
y(:,:)=yo;
D(:,:)=2*Ao/(thetao*Do);
R(:,:)=(1-sin(thetao)/thetao)*Do/4;
theta(:,:)=thetao;
P(:,:)=thetao*Do/2;
%----input_hydrograph-----%
%for maxQ=>(y/Do)=0,5 Fenton for exponential=1.5
th_in=2*acos(0);
A_in=(Do^2/8)*(th_in-sin(th_in));
P_in=th_in*Do/2;
R_in=A_in/P_in;
maxQ=(A_in*R_in^(2/3)*Jo^(1/2))/n;
tmax=3000; t=0:T/(nt-1):T;
Q(1,:)=Qo+(maxQ-Qo).*((t./tmax).*exp(1-t./tmax)).^1.5;
%-----Model Computations-----%
for j=1:1:nt-1
   for i=1:1:nx
    if i==1
           A(i,j+1)=A(i,j)-(Dt/Dx)*(Q(i+1,j)-Q(i,j));
           [~,m]=min(abs(A(i,j+1)-(a-sin(a))*(Do^2/8)));
           theta(i,j+1)=a(m);
           y(i,j+1)=(Do/2)*(1-cos(theta(i,j+1)/2));
           V(i,j+1)=Q(i,j+1)/A(i,j+1);
           P(i,j+1)=theta(i,j+1)*Do/2;
           R(i,j+1)=A(i,j+1)/P(i,j+1);

Je(i,j+1)=(Q(i,j+1)*abs(Q(i,j+1))*n^2)/(A(i,j+1)^2*R(i,j+1)^(4
/3));
           D(i,j+1)=(Do/8)*(theta(i,j+1)-
sin(theta(i,j+1)))/(sin(theta(i,j+1)/2));

Cn1(i,j+1)=Dt*(abs((Q(i,j+1)/A(i,j+1)))+sqrt(g*D(i,j+1)))/Dx;
           Cn2(i,j+1)=Dt*(abs((Q(i,j+1)/A(i,j+1)))-
sqrt(g*D(i,j+1)))/Dx;
             if Cn1(i,j)>1  ||  Cn2(i,j)>1 %Courant Criteria
             disp('unstable_solution')
             end

    elseif  i<nx
           A(i,j+1)=(A(i+1,j)+A(i-1,j))/2-
(Dt/(2*Dx))*(Q(i+1,j)-Q(i-1,j));
           Q(i,j+1)=(Q(i+1,j)+Q(i-1,j))/2-
(Dt/(2*Dx))*(Q(i+1,j)^2/A(i+1,j)-Q(i-1,1)^2/A(i-1,j))-
(g*Dt)*((A(i+1,j)+A(i-1,j))/2)*((y(i+1,j)-y(i-1,j))/(2*Dx)-
Jo)-(g*Dt)*(A(i-1,j)*Je(i-1,j)+A(i+1,j)*Je(i+1,j))/2;
           V(i,j+1)=Q(i,j+1)/A(i,j+1);
           [~,m]=min(abs(a-sin(a)-8.*A(i,j+1)./Do.^2));
           theta(i,j+1)=a(m);
           y(i,j+1)=Do/2*(1-cos(theta(i,j+1)/2));
```

```
            P(i,j+1)=theta(i,j+1)*Do/2;
            R(i,j+1)=A(i,j+1)/P(i,j+1);

Je(i,j+1)=(Q(i,j+1)*abs(Q(i,j+1))*n^2)/(A(i,j+1)^2*R(i,j+1)^(4
/3));
            D(i,j+1)=(Do/8)*(theta(i,j+1)-
sin(theta(i,j+1)))/(sin(theta(i,j+1)/2));

Cn1(i,j+1)=Dt*(abs((Q(i,j+1)/A(i,j+1)))+sqrt(g*D(i,j+1)))/Dx;
            Cn2(i,j+1)=Dt*(abs((Q(i,j+1)/A(i,j+1)))-
sqrt(g*D(i,j+1)))/Dx;
              if Cn1(i,j)>1  ||  Cn2(i,j)>1 %Courant Criteria
              disp('unstable_solution')
              end

    elseif i==nx
        A(i,j+1)=A(i,j)-(Dt/Dx)*(Q(i,j)-Q(i-1,j));
        [~,m]=min(abs(A(i,j+1)-(a-sin(a))*(Do^2/8)));
        theta(i,j+1)=a(m);
        y(i,j+1)=Do/2*(1-cos(theta(i,j+1)/2));
        P(i,j+1)=theta(i,j+1)*Do/2;
        R(i,j+1)=A(i,j+1)/P(i,j+1);
        Q(i,j+1)=(A(i,j+1)/n)*R(i,j+1)^(2/3)*Jo^(1/2);
        V(i,j+1)=Q(i,j+1)/A(i,j+1);
        D(i,j+1)=(Do/8)*(theta(i,j+1)-
sin(theta(i,j+1)))/(sin(theta(i,j+1)/2));

Cn1(i,j+1)=Dt*(abs((Q(i,j+1)/A(i,j+1)))+sqrt(g*D(i,j+1)))/Dx;
        Cn2(i,j+1)=Dt*(abs((Q(i,j+1)/A(i,j+1)))-
sqrt(g*D(i,j+1)))/Dx;
              if Cn1(i,j)>1  ||  Cn2(i,j)>1 %Courant Criteria
              disp('unstable_solution')
              end
    end
   end
end
%--------Mass_check--------
Tr=zeros(nx,0);Smass=zeros(nx,0);
for i=1:1:nx
Tr(i)=trapz(1:1:nt,Q(i,:));
Smass(i)=100*(Tr(1)-Tr(i))/Tr(1);
end
%--------plots--------
t=0:Dt:T;
f1=figure;
plot(t,y(1,:))
hold on
plot(t,y(round(L/(4*Dx)-1),:))
plot(t,y(round(L/(2*Dx)-1),:))
plot(t,y(round(3*L/(4*Dx)-1),:))
plot(t,y(nx,:))
```

```
axis ([0 T 0 max(max(y(:,:)))+yo]);
title ('Depth-time different intersections')
xlabel ('time(sec)')
ylabel ('Depth(m)')
grid on
hold off
legend({'x=0','x=L/4','x=L/2','x=3L/2','x=L'},'Location','nort
heast')
f2=figure;
plot(t,Q(1,:))
hold on
plot(t,Q(round(L/(4*Dx)-1),:))
plot(t,Q(round(L/(2*Dx)-1),:))
plot(t,Q(round(3*L/(4*Dx)-1),:))
plot(t,Q(nx,:))
axis ([0 T 0 max(max(Q(:,:)))+Qo]);
title ('Discharge-time different intersections')
xlabel ('time(sec)')
ylabel ('discharge(m^3/sec)')
grid on
hold off
legend({'x=0','x=L/4','x=L/2','x=3L/2','x=L'},'Location','nort
heast')
```

Script A.1.2

```
%-----Secondary_circular_channel_Method_of_Characteristics----
%
clc; clear ;
%-------Inputs--------
n=0.020;
g=9.81;
jo=0.0015;
Do=0.6;
Qo=0.025;
a=pi/100:pi/10000:2*pi;
[~,k]=min(abs(((Qo.*n./sqrt(jo)).*a.^(2/3)./((Do./2).^(8./3)))
.^(3/5)+sin(a)./2+a./2-a));
thetao=a(k);
yo=(Do/2)*(1-cos(thetao/2));
Ao=(thetao-sin(thetao))*Do^2/8;
Po=thetao*Do/2;
To=sin(thetao/2)*Do;
Vo=Qo/Ao;
%-----mapping----%
nx=80; %space nodes
nt=3600; %time nodes
T_sum=36000; %time (sec)
L=2000; %channel length
Dx=L/(nx-1); %distance between space nodes
```

```
Dt=T_sum/(nt-1); % time space between time nodes
%-----matrices------%
A=zeros(nx,nt); Q=zeros(nx,nt);
Je=zeros(nx,nt);P=zeros(nx,nt); D=zeros(nx,nt);
T=zeros(nx,nt); V=zeros(nx,nt);
y=zeros(nx,nt); R=zeros(nx,nt); theta=zeros(nx,nt);
Cn1=zeros(nx,nt); Cn2=zeros(nx,nt); C=zeros(nx,nt);
Q(:,:)=Qo;
A(:,:)=(thetao-sin(thetao))*Do^2/8;
V(:,:)=Vo;
Je(:,:)=jo;
y(:,:)=yo;
P(:,:)=Po;
R(:,:)=Ao/Po;
theta(:,:)=thetao;
T(:,:)=To;
D(:,:)=Ao/To;
C(:,:)=sqrt(g*Do);
%----input_hydrograph-----%
%for maxQ =>(y/Do)=0,5 Fenton for exponential=1.5
th_in=2*acos(0);
A_in=(Do^2/8)*(th_in-sin(th_in));
P_in=th_in*Do/2;
R_in=A_in/P_in;
maxQ=(A_in*R_in^(2/3)*jo^(1/2))/n;
tmax=3000; t=0:T_sum/(nt-1):T_sum;
Q(1,:)=Qo+(maxQ-Qo).*((t./tmax).*exp(1-t./tmax)).^1.5;
%-------------------------------------------------------
th=Dt/Dx;
%-----Model Computations-----%
for j=1:1:nt-1
   for i=1:1:nx
    if i==1
           %---Linear_Interpolation------
           Vs=(V(i,j)-th*(V(i,j)*C(i+1,j)-
V(i+1,j)*C(i,j)))/(1-th*(V(i,j)-C(i,j)-V(i+1,j)+C(i+1,j)));
           Cs=(C(i,j)+th*Vs*(C(i,j)-C(i+1,j)))/(1+th*(C(i,j)-
C(i+1,j)));
           ys=y(i,j)+th*(Vs-Cs)*(y(i,j)-y(i+1,j));
           thetas=2*acos(1-2*ys/Do);
           Ss=n^2*Vs*abs(Vs)*((1-sin(thetas)/thetas)*Do/4)^(-
4/3);
           Cn=Vs-(g/Cs)*ys+g*Dt*(jo-Ss);
           %-----------------------------
           [~,k]=min(abs((Q(i,j+1)./((a-sin(a)).*Do^2/8))-Cn-
(g/Cs).*(Do/2).*(1-cos(a./2))));
           theta(i,j+1)=a(k);
           y(i,j+1)=(Do/2)*(1-cos(theta(i,j+1)/2));
           V(i,j+1)=Cn+(g/Cs)*y(i,j+1);
           A(i,j+1)=(theta(i,j+1)-sin(theta(i,j+1)))*Do^2/8;
           P(i,j+1)=theta(i,j+1)*Do/2;
```

```
            R(i,j+1)=A(i,j+1)/P(i,j+1);
            T(i,j+1)=sin(theta(i,j+1)/2)*Do;

Je(i,j+1)=(Q(i,j+1)*abs(Q(i,j+1))*n^2)/(A(i,j+1)^2*R(i,j+1)^(4
/3));
            D(i,j+1)=A(i,j+1)/T(i,j+1);
            C(i,j+1)=sqrt(g*D(i,j+1));
            Cn1(i,j+1)=Dt*(abs(V(i,j+1))+C(i,j+1))/Dx;
            Cn2(i,j+1)=Dt*(abs(V(i,j+1))-C(i,j+1))/Dx;
              if Cn1(i,j)>1  ||  Cn2(i,j)>1 %Courant Criteria
              disp('unstable_solution')
              end

    elseif  i<nx
          %---Linear_Interpolation------
          Vr=(V(i,j)+th*(V(i-1,j)*C(i,j)-V(i,j)*C(i-
1,j)))/(1+th*(V(i,j)-C(i-1,j)-V(i-1,j)+C(i,j)));
          Cr=(C(i,j)-th*Vr*(C(i,j)-C(i-1,j)))/(1+th*(C(i,j)-
C(i-1,j)));
          yr=y(i,j)-th*(Vr+Cr)*(y(i,j)-y(i-1,j));
          thetar=2*acos(1-2*yr/Do);
          Sr=n^2*Vr^2*((1-sin(thetar)/thetar)*Do/4)^(-4/3);
          Cp=Vr+(g/Cr)*yr+g*Dt*(jo-Sr);
          Vs=(V(i,j)-th*(V(i,j)*C(i+1,j)-V(i+1,j)*C(i,j)))/(1-
th*(V(i,j)-C(i,j)-V(i+1,j)+C(i+1,j)));
          Cs=(C(i,j)+th*Vs*(C(i,j)-C(i+1,j)))/(1+th*(C(i,j)-
C(i+1,j)));
          ys=y(i,j)+th*(Vs-Cs)*(y(i,j)-y(i+1,j));
          thetas=2*acos(1-2*ys/Do);
          Ss=n^2*Vs*abs(Vs)*((1-sin(thetas)/thetas)*Do/4)^(-
4/3);
          Cn=Vs-(g/Cs)*ys+g*Dt*(jo-Ss);
          %-----------------------------
           y(i,j+1)=(Cp-Cn)/((g/Cs)+(g/Cr));
           V(i,j+1)=Cp-(g/Cr)*y(i,j+1);
           theta(i,j+1)=2*acos(1-2*y(i,j+1)/Do);
           A(i,j+1)=(theta(i,j+1)-sin(theta(i,j+1)))*Do^2/8;
           P(i,j+1)=theta(i,j+1)*Do/2;
           Q(i,j+1)=V(i,j+1)*A(i,j+1);
           R(i,j+1)=A(i,j+1)/P(i,j+1);
           T(i,j+1)=sin(theta(i,j+1)/2)*Do;

Je(i,j+1)=(Q(i,j+1)*abs(Q(i,j+1))*n^2)/(A(i,j+1)^2*R(i,j+1)^(4
/3));
            D(i,j+1)=A(i,j+1)/T(i,j+1);
            C(i,j+1)=sqrt(g*D(i,j+1));
            Cn1(i,j+1)=Dt*(abs(V(i,j+1))+C(i,j+1))/Dx;
            Cn2(i,j+1)=Dt*(abs(V(i,j+1))-C(i,j+1))/Dx;
              if Cn1(i,j)>1  ||  Cn2(i,j)>1 %Courant Criteria
              disp('unstable_solution')
              end
```

```
    elseif i==nx
          %---Linear_Interpolation------
          Vr=(V(i,j)+th*(V(i-1,j)*C(i,j)-V(i,j)*C(i-
1,j)))/(1+th*(V(i,j)-C(i-1,j)-V(i-1,j)+C(i,j)));
          Cr=(C(i,j)-th*Vr*(C(i,j)-C(i-1,j)))/(1+th*(C(i,j)-
C(i-1,j)));
          yr=y(i,j)-th*(Vr+Cr)*(y(i,j)-y(i-1,j));
          thetar=2*acos(1-2*yr/Do);
          Sr=n^2*Vr^2*((1-sin(thetar)/thetar)*Do/4)^(-4/3);
          Cp=Vr+(g/Cr)*yr+g*Dt*(jo-Sr);
          %-----------------------------
          [~,k]=min(abs((jo.^(1./2)./n).*((1-
sin(a)./a).*Do./4).^(2./3)-Cp+(g./Cr).*(1-cos(a./2)).*Do./2));
          theta(i,j+1)=a(k);
          y(i,j+1)=Do/2*(1-cos(theta(i,j+1)/2));
          V(i,j+1)=Cp-(g/Cr)*y(i,j+1);
          A(i,j+1)=(theta(i,j+1)-sin(theta(i,j+1)))*Do^2/8;
          P(i,j+1)=theta(i,j+1)*Do/2;
          Q(i,j+1)=V(i,j+1)*A(i,j+1);
          R(i,j+1)=A(i,j+1)/P(i,j+1);
          T(i,j+1)=sin(theta(i,j+1)/2)*Do;
          D(i,j+1)=A(i,j+1)/T(i,j+1);
          C(i,j+1)=sqrt(g*D(i,j+1));
          Cn1(i,j+1)=Dt*(abs(V(i,j+1))+C(i,j+1))/Dx;
          Cn2(i,j+1)=Dt*(abs(V(i,j+1))-C(i,j+1))/Dx;
             if Cn1(i,j)>1  ||  Cn2(i,j)>1 %Courant Criteria
             disp('unstable_solution')
             end
    end
   end
end
%--------Mass_check--------
Tr=zeros(nx,0);Smass=zeros(nx,0);
for i=1:1:nx
Tr(i)=trapz(1:1:nt,Q(i,:));
Smass(i)=100*(Tr(1)-Tr(i))/Tr(1);
end
t=0:Dt:T_sum;
%--------plots--------
f1=figure;
plot(t,y(1,:))
hold on
plot(t,y(round(L/(4*Dx)-1),:))
plot(t,y(round(L/(2*Dx)-1),:))
plot(t,y(round(3*L/(4*Dx)-1),:))
plot(t,y(nx,:))
axis ([0 T_sum 0 max(max(y(:,:)))+yo]);
title ('Depth-time different intersections')
xlabel ('time(sec)')
ylabel ('Depth(m)')
```

```
grid on
hold off
legend({'x=0','x=L/4','x=L/2','x=3L/2','x=L'},'Location','nort
heast')
f2=figure;
plot(t,Q(1,:))
hold on
plot(t,Q(round(L/(4*Dx)-1),:))
plot(t,Q(round(L/(2*Dx)-1),:))
plot(t,Q(round(3*L/(4*Dx)-1),:))
plot(t,Q(nx,:))
axis ([0 T_sum 0 max(max(Q(:,:)))+Qo]);
title ('Discharge-time different intersections')
xlabel ('time(sec)')
ylabel ('discharge(m^3/sec)')
grid on
hold off
legend({'x=0','x=L/4','x=L/2','x=3L/2','x=L'},'Location','nort
heast')
dlmwrite('outputhydrCirc10sec.txt',Q(nx,:),'delimiter','\t','p
recision',10)% Save output hydrograph
```

Script A.2.1

```
%-----Secondary_rectangular_channel-Explicit_Method-----%
clc; clear ;
%-------Inputs--------
b=5;
jo=0.001;
n=0.025;
g=9.81;
Qo=20;
y=0:0.001:30;
[~,k]=min(abs((b.*y).*((b.*y)./(b+2.*y)).^(2/3)-n*Qo/(jo^(1/2))));
yo=y(k);
Ao=b*yo;
Vo=Qo/Ao;
Ro=((b*yo)/(b+2*yo));
%-----mapping----%
nx=80; %space nodes
nt=7200; %time nodes
T=72000; %time (sec)
L=10000; %channel length
Dx=L/(nx-1); %distance between space nodes
Dt=T/(nt-1); % time space between time nodes
%-----matrices------%
A=zeros(nx,nt); Q=zeros(nx,nt); Je=zeros(nx,nt);  V=zeros(nx,nt);
y=zeros(nx,nt); Cn1=zeros(nx,nt);R=zeros(nx,nt);Cn2=zeros(nx,nt);
Q(:,:)=Qo;
A(:,:)=Ao;
Je(:,:)=jo;
y(:,:)=yo;
R(:,:)=Ro;
```

```
V(:,:)=Vo;
%----input_hydrograph-----%
% 'Fenton' for exponential=1.5
tmax=6000; Qmax=50; t=0:Dt:T;
Q(1,:)=Qo+(Qmax-Qo).*((t./tmax).*exp(1-t./tmax)).^1.5;
%-----Model Computations-----%
for j=1:1:nt-1
    for i=1:1:nx
         if i==1
           A(i,j+1)=A(i,j)-(Dt/Dx)*(Q(i+1,j)-Q(i,j));
           y(i,j+1)=A(i,j+1)/b;
           R(i,j+1)=b*y(i,j+1)/(b+2*y(i,j+1));
           V(i,j+1)=Q(i,j+1)/A(i,j+1);
           Je(i,j+1)=(V(i,j+1)*abs(V(i,j+1))*n^2)/(R(i,j+1)^(4/3));

Cn1(i,j+1)=Dt*(abs((Q(i,j+1)/A(i,j+1)))+sqrt(g*y(i,j+1)))/Dx;
           Cn2(i,j+1)=Dt*(abs((Q(i,j+1)/A(i,j+1)))-
sqrt(g*y(i,j+1)))/Dx;
             if Cn1(i,j)>1  ||  Cn2(i,j)>1 %---Courant_criteria
             disp('unstable_solution')
             end

       elseif  i<nx
           A(i,j+1)=(A(i+1,j)+A(i-1,j))/2-(Dt/(2*Dx))*(Q(i+1,j)-Q(i-
1,j));
           Q(i,j+1)=(Q(i+1,j)+Q(i-1,j))/2-
(Dt/(2*Dx))*(Q(i+1,j)^2/A(i+1,j)-Q(i-1,1)^2/A(i-1,j))-
(g*Dt)*((A(i+1,j)+A(i-1,j))/2)*((y(i+1,j)-y(i-1,j))/(2*Dx)-jo)-
(g*Dt)*(A(i-1,j)*Je(i-1,j)+A(i+1,j)*Je(i+1,j))/2;
           V(i,j+1)=Q(i,j+1)/A(i,j+1);
           y(i,j+1)=A(i,j+1)/b;
           R(i,j+1)=b*y(i,j+1)/(b+2*y(i,j+1));
           Je(i,j+1)=(V(i,j+1)*abs(V(i,j+1))*n^2)/(R(i,j+1)^(4/3));

Cn1(i,j+1)=Dt*(abs((Q(i,j+1)/A(i,j+1)))+sqrt(g*y(i,j+1)))/Dx;
           Cn2(i,j+1)=Dt*(abs((Q(i,j+1)/A(i,j+1)))-
sqrt(g*y(i,j+1)))/Dx;
           if Cn1(i,j)>1  ||  Cn2(i,j)>1%---Courant_criteria
           disp('unstable_solution')
           end

       elseif i==nx
           Je(i,j+1)=jo;
           A(i,j+1)=A(i,j)-(Dt/Dx)*(Q(i,j)-Q(i-1,j));
           y(i,j+1)=A(i,j+1)/b;
           R(i,j+1)=b*y(i,j+1)/(b+2*y(i,j+1));
           Q(i,j+1)=(A(i,j+1)/n)*R(i,j+1)^(2/3)*jo^(1/2);
           V(i,j+1)=Q(i,j+1)/A(i,j+1);

Cn1(i,j+1)=Dt*(abs((Q(i,j+1)/A(i,j+1)))+sqrt(g*y(i,j+1)))/Dx;
           Cn2(i,j+1)=Dt*(abs((Q(i,j+1)/A(i,j+1)))-
sqrt(g*y(i,j+1)))/Dx;
           if Cn1(i,j)>1  ||  Cn2(i,j)>1 %---Courant_criteria
           disp('unstable_solution')
           end
        end
```

```
   end
end
%--------Mass_check--------
Tr=zeros(nx,1);Smass=zeros(nx,1);
for i=1:1:nx
Tr(i)=trapz(1:1:nt,Q(i,1:1:nt));
Smass(i)=100*(Tr(1)-Tr(i))/Tr(1);
end
t=0:Dt:T;
%--------plots--------
f1=figure;
plot(t,y(1,:))
hold on
plot(t,y(round(L/(4*Dx)-1),:))
plot(t,y(round(L/(2*Dx)-1),:))
plot(t,y(round(3*L/(4*Dx)-1),:))
plot(t,y(nx,:))
axis ([0 T 0 max(max(y(:,:)))]);
title ('Depth-time different intersections')
xlabel ('time(sec)')
ylabel ('Depth(m)')
grid on
hold off
legend({'x=0','x=L/4','x=L/2','x=3L/2','x=L'},'Location','northeast'
)
f2=figure;
plot(t,Q(1,:))
hold on
plot(t,Q(round(L/(4*Dx)-1),:))
plot(t,Q(round(L/(2*Dx)-1),:))
plot(t,Q(round(3*L/(4*Dx)-1),:))
plot(t,Q(nx,:))
axis ([0 T 0 max(max(Q(:,:)))]);
title ('Discharge-time different intersections')
xlabel ('time(sec)')
ylabel ('discharge(m^3/sec)')
grid on
hold off
legend({'x=0','x=L/4','x=L/2','x=3L/2','x=L'},'Location','northeast'
)
```

Script A.2.2

```
%-----Secondary_rectangular_channel_Method of Characteristic-----%
clc; clear ;
%-------Inputs--------
b=5;
jo=0.001;
n=0.025;
g=9.81;
Qo=20;
a=0:0.001:5;
[~,k]=min(abs((b.*a).*((b.*a)./(b+2.*a)).^(2/3)-n*Qo/(jo^(1/2))));
yo=a(k);
Ao=b*yo;
```

```
Vo=Qo/Ao;
Co=sqrt(g*yo);
Ro=((b*yo)/(b+2*yo));
%-----mapping----%
nx=80; %space nodes
nt=7200; %time nodes
T=72000; %time (sec)
L=10000; %channel length
Dx=L/(nx-1); %distance between space nodes
Dt=T/(nt-1); % time space between time nodes
%-----matrices------%
A=zeros(nx,nt); Q=zeros(nx,nt); Je=zeros(nx,nt); V=
zeros(nx,nt);C=zeros(nx,nt);
y=zeros(nx,nt); Cn1=zeros(nx,nt);R=zeros(nx,nt);Cn2=zeros(nx,nt);
D=zeros(nx,nt);
Q(:,:)=Qo;
A(:,:)=Ao;
Je(:,:)=jo;
y(:,:)=yo;
D(:,:)=yo; %Hydraulic depth
R(:,:)=Ro; %Hydraulic radius
V(:,:)=Vo;
C(:,:)=Co;
%----input_hydrograph-----%
% Fenton' for exponential=1.5
tmax=6000; Qmax=50; t=0:T/(nt-1):T;
Q(1,:)=Qo+(Qmax-Qo).*((t./tmax).*exp(1-t./tmax)).^1.5;
%-----Model Computations-----%
th=Dt/Dx;
a=yo:0.0001:15;
for j=1:1:nt-1
    for i=1:1:nx
      if i==1
         %---Linear_Interpolation------
         Vs=(V(i,j)-th*(V(i,j)*C(i+1,j)-V(i+1,j)*C(i,j)))/(1-
th*(V(i,j)-C(i,j)-V(i+1,j)+C(i+1,j)));
         Cs=(C(i,j)+th*Vs*(C(i,j)-C(i+1,j)))/(1+th*(C(i,j)-
C(i+1,j)));
         ys=y(i,j)+th*(Vs-Cs)*(y(i,j)-y(i+1,j));
         Ss=n^2*Vs*abs(Vs)/(b*ys/(b+2*ys))^(4/3);
         Cn=Vs-(g/Cs)*ys+g*Dt*(jo-Ss);
         %-----------------------------
         [~,k]=min(abs(((Q(i,j+1)./(a.*b))-Cn-(g/Cs).*a)));
         y(i,j+1)=a(k);
         V(i,j+1)=Cn+(g/Cs)*y(i,j+1);
         C(i,j+1)=sqrt(g*y(i,j+1));
         A(i,j+1)=b*y(i,j+1);
         R(i,j+1)=b*y(i,j+1)/(b+2*y(i,j+1));

Je(i,j+1)=(Q(i,j+1)*abs(Q(i,j+1))*n^2)/(A(i,j+1)^2*R(i,j+1)^(4/3));
         Cn1(i,j+1)=Dt*(abs((V(i,j+1)))+C(i,j+1))/Dx;
         Cn2(i,j+1)=Dt*(abs((V(i,j+1)))-C(i,j+1))/Dx;

           if Cn1(i,j)>1  ||  Cn2(i,j)>1 %Courant_criteria
           disp('unstable_solution')
           end
```

```
      elseif i<nx
         %---Linear_Interpolation------
         Vr=(V(i,j)+th*(V(i-1,j)*C(i,j)-V(i,j)*C(i-
1,j)))/(1+th*(V(i,j)-C(i-1,j)-V(i-1,j)+C(i,j)));
         Cr=(C(i,j)-th*Vr*(C(i,j)-C(i-1,j)))/(1+th*(C(i,j)-C(i-
1,j)));
         yr=y(i,j)-th*(Vr+Cr)*(y(i,j)-y(i-1,j));
         Sr=n^2*Vr*abs(Vr)/(b*yr/(b+2*yr))^(4/3);
         Cp=Vr+(g/Cr)*yr+g*Dt*(jo-Sr);
         Vs=(V(i,j)-th*(V(i,j)*C(i+1,j)-V(i+1,j)*C(i,j)))/(1-
th*(V(i,j)-C(i,j)-V(i+1,j)+C(i+1,j)));
         Cs=(C(i,j)+th*Vs*(C(i,j)-C(i+1,j)))/(1+th*(C(i,j)-
C(i+1,j)));
         ys=y(i,j)+th*(Vs-Cs)*(y(i,j)-y(i+1,j));
         Ss=n^2*Vs*abs(Vs)/(b*ys/(b+2*ys))^(4/3);
         Cn=Vs-(g/Cs)*ys+g*Dt*(jo-Ss);
         %------------------------------
         y(i,j+1)=(Cp-Cn)/((g/Cr)+(g/Cs));
         V(i,j+1)=Cp-(g/Cr)*y(i,j+1);
         C(i,j+1)=sqrt(g*y(i,j+1));
         A(i,j+1)=b*y(i,j+1);
         Q(i,j+1)=V(i,j+1)*A(i,j+1);
         R(i,j+1)=b*y(i,j+1)/(b+2*y(i,j+1));

Je(i,j+1)=(Q(i,j+1)*abs(Q(i,j+1))*n^2)/(A(i,j+1)^2*R(i,j+1)^(4/3));
         Cn1(i,j+1)=Dt*(abs((V(i,j+1)))+C(i,j+1))/Dx;
         Cn2(i,j+1)=Dt*(abs((V(i,j+1)))-C(i,j+1))/Dx;
           if Cn1(i,j)>1  ||  Cn2(i,j)>1 %Courant_criteria
           disp('unstable_solution')
           end

      elseif i==nx
          %---Linear_Interpolation------
         Vr=(V(i,j)+th*(V(i-1,j)*C(i,j)-V(i,j)*C(i-
1,j)))/(1+th*(V(i,j)-C(i-1,j)-V(i-1,j)+C(i,j)));
         Cr=(C(i,j)-th*Vr*(C(i,j)-C(i-1,j)))/(1+th*(C(i,j)-C(i-
1,j)));
         yr=y(i,j)-th*(Vr+Cr)*(y(i,j)-y(i-1,j));
         Sr=n^2*Vr*abs(Vr)/(b*yr/(b+2*yr))^(4/3);
         Cp=Vr+(g/Cr)*yr+g*Dt*(jo-Sr);
         %------------------------------
         [~,k]=min(abs((jo^(1/2)/n).*(b.*a./(b+2.*a)).^(2/3)-
Cp+(g./Cr).*a));
         y(i,j+1)=a(k);
         V(i,j+1)=Cp-(g/Cr)*y(i,j+1);
         C(i,j+1)=sqrt(g*y(i,j+1));
         A(i,j+1)=b*y(i,j+1);
         Q(i,j+1)=V(i,j+1)*A(i,j+1);
         R(i,j+1)=b*y(i,j+1)/(b+2*y(i,j+1));
         Je(i,j+1)=jo;
         Cn1(i,j+1)=Dt*(abs((V(i,j+1)))+C(i,j+1))/Dx;
         Cn2(i,j+1)=Dt*(abs((V(i,j+1)))-C(i,j+1))/Dx;
           if Cn1(i,j)>1  ||  Cn2(i,j)>1 %Courant_criteria
           disp('unstable_solution')
           end
```

```
      end
    end
end
%--------Mass_check--------
Tr=zeros(nx,0);Smass=zeros(nx,0);
for i=1:1:nx
Tr(i)=trapz(1:1:nt,Q(i,1:1:nt));
Smass(i)=100*(Tr(1)-Tr(i))/Tr(1);
end
t=0:Dt:T;
%--------plots--------
f1=figure;
plot(t,y(1,:))
hold on
plot(t,y(round(L/(4*Dx)-1),:))
plot(t,y(round(L/(2*Dx)-1),:))
plot(t,y(round(3*L/(4*Dx)-1),:))
plot(t,y(nx,:))
axis ([0 T 0 max(max(y(:,:)))+yo]);
title ('Depth-time different intersections')
xlabel ('time(sec)')
ylabel ('Depth(m)')
grid on
hold off
legend({'x=0','x=L/4','x=L/2','x=3L/2','x=L'},'Location','northeast'
)
f2=figure;
plot(t,Q(1,:))
hold on
plot(t,Q(round(L/(4*Dx)-1),:))
plot(t,Q(round(L/(2*Dx)-1),:))
plot(t,Q(round(3*L/(4*Dx)-1),:))
plot(t,Q(nx,:))
axis ([0 T 0 max(max(Q(:,:)))+Qo]);
title ('Discharge-time different intersections')
xlabel ('time(sec)')
ylabel ('discharge(m^3/sec)')
grid on
hold off
legend({'x=0','x=L/4','x=L/2','x=3L/2','x=L'},'Location','northeast'
)
dlmwrite('outputhydr10sec.txt',Q(nx,:),'delimiter','\t','precision',
10) % Save output hydrograph
```

Script B.1

```
%------Primary_Circular_Channel-------------
clc; clear;
nt=3600;
Qo=0.025;
%-------Inputs--------
n=0.020;
g=9.81;
```

```
jo=0.0015;
Do=1.2;
Qo1=0.1;
a=pi/100:pi/10000:2*pi;
[~,k]=min(abs(((Qo1.*n./sqrt(jo)).*a.^(2/3)./((Do./2).^(8./3))
).^(3/5)+sin(a)./2+a./2-a));
thetao=a(k);
yo=(Do/2)*(1-cos(thetao/2));
Ao=(thetao-sin(thetao))*Do^2/8;
Po=thetao*Do/2;
To=sin(thetao/2)*Do;
Vo=Qo1/Ao;
%-----mapping----%
nx1=50; %space nodes
nt1=3600; %time nodes
T1=36000; %time (sec)
L1=2000; %channel length
Dx=L1/(nx1-1); %distance between space nodes
Dt=T1/(nt1-1); % time space between time nodes
%-----matrices------
A=zeros(nx1,nt1); Q=zeros(nx1,nt1);
Je=zeros(nx1,nt1);P=zeros(nx1,nt1); D=zeros(nx1,nt1);
T=zeros(nx1,nt1); V=zeros(nx1,nt1);
y=zeros(nx1,nt1); R=zeros(nx1,nt1); theta=zeros(nx1,nt1);
Cn1=zeros(nx1,nt1); Cn2=zeros(nx1,nt1); C=zeros(nx1,nt1);
Q(:,:)=Qo1;
A(:,:)=(thetao-sin(thetao))*Do^2/8;
V(:,:)=(Qo1)/Ao;
Je(:,:)=jo;
y(:,:)=yo;
R(:,:)=(1-sin(thetao)/thetao)*Do/4;
theta(:,:)=thetao;
T(:,:)=sin(thetao/2)*Do;
D(:,:)=A(1,1)/T(1,1);
C(:,:)=sqrt(g*D(1,1));
%----input_hydrograph-----%
fileID = fopen('outputhydrCirc10sec.txt','r'); %output
hydrograph of secondary circular channel
Q_input = fscanf(fileID,'%f');
Q_input=Q_input.';
Q(1,1:1:nt)=Q_input+Qo1;
Q(1,nt+1:1:nt1)=Qo1+Qo;
fclose(fileID);
%-----Model Computations-----%
th=Dt/Dx;
for j=1:1:nt1-1
   for i=1:1:nx1
    if i==1
           %---Linear_Interpolation------
           Vs=(V(i,j)-th*(V(i,j)*C(i+1,j)-
V(i+1,j)*C(i,j)))/(1-th*(V(i,j)-C(i,j)-V(i+1,j)+C(i+1,j)));
```

```
            Cs=(C(i,j)+th*Vs*(C(i,j)-C(i+1,j)))/(1+th*(C(i,j)-
C(i+1,j)));
            ys=y(i,j)+th*(Vs-Cs)*(y(i,j)-y(i+1,j));
            thetas=2*acos(1-2*ys/Do);
            Ss=n^2*Vs*abs(Vs)*((1-sin(thetas)/thetas)*Do/4)^(-
4/3);
            Cn=Vs-(g/Cs)*ys+g*Dt*(jo-Ss);
            %----------------------------
            [~,k]=min(abs((Q(i,j+1)./((a-sin(a)).*Do^2/8))-Cn-
(g/Cs).*(Do/2).*(1-cos(a./2))));
            theta(i,j+1)=a(k);
            y(i,j+1)=(Do/2)*(1-cos(theta(i,j+1)/2));
            V(i,j+1)=Cn+(g/Cs)*y(i,j+1);
            A(i,j+1)=(theta(i,j+1)-sin(theta(i,j+1)))*Do^2/8;
            P(i,j+1)=theta(i,j+1)*Do/2;
            R(i,j+1)=A(i,j+1)/P(i,j+1);
            T(i,j+1)=sin(theta(i,j+1)/2)*Do;

Je(i,j+1)=(Q(i,j+1)*abs(Q(i,j+1))*n^2)/(A(i,j+1)^2*R(i,j+1)^(4
/3));
            D(i,j+1)=A(i,j+1)/T(i,j+1);
            C(i,j+1)=sqrt(g*D(i,j+1));
            Cn1(i,j+1)=Dt*(abs(V(i,j+1))+C(i,j+1))/Dx;
            Cn2(i,j+1)=Dt*(abs(V(i,j+1))-C(i,j+1))/Dx;
              if Cn1(i,j)>1  ||  Cn2(i,j)>1
              disp('unstable_solution')
              end
    elseif  i<nx1
          %---Linear_Interpolation------
          Vr=(V(i,j)+th*(V(i-1,j)*C(i,j)-V(i,j)*C(i-
1,j)))/(1+th*(V(i,j)-C(i-1,j)-V(i-1,j)+C(i,j)));
          Cr=(C(i,j)-th*Vr*(C(i,j)-C(i-1,j)))/(1+th*(C(i,j)-
C(i-1,j)));
          yr=y(i,j)-th*(Vr+Cr)*(y(i,j)-y(i-1,j));
          thetar=2*acos(1-2*yr/Do);
          Sr=n^2*Vr^2*((1-sin(thetar)/thetar)*Do/4)^(-4/3);
          Cp=Vr+(g/Cr)*yr+g*Dt*(jo-Sr);
          Vs=(V(i,j)-th*(V(i,j)*C(i+1,j)-V(i+1,j)*C(i,j)))/(1-
th*(V(i,j)-C(i,j)-V(i+1,j)+C(i+1,j)));
          Cs=(C(i,j)+th*Vs*(C(i,j)-C(i+1,j)))/(1+th*(C(i,j)-
C(i+1,j)));
          ys=y(i,j)+th*(Vs-Cs)*(y(i,j)-y(i+1,j));
          thetas=2*acos(1-2*ys/Do);
          Ss=n^2*Vs*abs(Vs)*((1-sin(thetas)/thetas)*Do/4)^(-
4/3);
          Cn=Vs-(g/Cs)*ys+g*Dt*(jo-Ss);
         %----------------------------
          y(i,j+1)=(Cp-Cn)/((g/Cs)+(g/Cr));
          V(i,j+1)=Cp-(g/Cr)*y(i,j+1);
          theta(i,j+1)=2*acos(1-2*y(i,j+1)/Do);
          A(i,j+1)=(theta(i,j+1)-sin(theta(i,j+1)))*Do^2/8;
```

```
            P(i,j+1)=theta(i,j+1)*Do/2;
            Q(i,j+1)=V(i,j+1)*A(i,j+1);
            R(i,j+1)=A(i,j+1)/P(i,j+1);
            T(i,j+1)=sin(theta(i,j+1)/2)*Do;

Je(i,j+1)=(Q(i,j+1)*abs(Q(i,j+1))*n^2)/(A(i,j+1)^2*R(i,j+1)^(4
/3));
            D(i,j+1)=A(i,j+1)/T(i,j+1);
            C(i,j+1)=sqrt(g*D(i,j+1));
            Cn1(i,j+1)=Dt*(abs(V(i,j+1))+C(i,j+1))/Dx;
            Cn2(i,j+1)=Dt*(abs(V(i,j+1))-C(i,j+1))/Dx;
               if Cn1(i,j)>1  ||  Cn2(i,j)>1 %Courant Criteria
               disp('unstable_solution')
               end
     elseif i==nx1
            %---Linear_Interpolation------
            Vr=(V(i,j)+th*(V(i-1,j)*C(i,j)-V(i,j)*C(i-
1,j)))/(1+th*(V(i,j)-C(i-1,j)-V(i-1,j)+C(i,j)));
            Cr=(C(i,j)-th*Vr*(C(i,j)-C(i-1,j)))/(1+th*(C(i,j)-
C(i-1,j)));
            yr=y(i,j)-th*(Vr+Cr)*(y(i,j)-y(i-1,j));
            thetar=2*acos(1-2*yr/Do);
            Sr=n^2*Vr^2*((1-sin(thetar)/thetar)*Do/4)^(-4/3);
            Cp=Vr+(g/Cr)*yr+g*Dt*(jo-Sr);
            %-----------------------------
            [~,k]=min(abs((jo.^(1./2)./n).*((1-
sin(a)./a).*Do./4).^(2./3)-Cp+(g./Cr).*(1-cos(a./2)).*Do./2));
            theta(i,j+1)=a(k);
            y(i,j+1)=Do/2*(1-cos(theta(i,j+1)/2));
            V(i,j+1)=Cp-(g/Cr)*y(i,j+1);
            A(i,j+1)=(theta(i,j+1)-sin(theta(i,j+1)))*Do^2/8;
            P(i,j+1)=theta(i,j+1)*Do/2;
            Q(i,j+1)=V(i,j+1)*A(i,j+1);
            R(i,j+1)=A(i,j+1)/P(i,j+1);
            T(i,j+1)=sin(theta(i,j+1)/2)*Do;
            D(i,j+1)=A(i,j+1)/T(i,j+1);
            C(i,j+1)=sqrt(g*D(i,j+1));
            Cn1(i,j+1)=Dt*(abs(V(i,j+1))+C(i,j+1))/Dx;
            Cn2(i,j+1)=Dt*(abs(V(i,j+1))-C(i,j+1))/Dx;
               if Cn1(i,j)>1  ||  Cn2(i,j)>1 %Courant Criteria
               disp('unstable_solution')
               end
     end
    end
end
%--------Mass_check--------
Tr1=zeros(nx1,0);Smass1=zeros(nx1,0);
for i=1:1:nx1
Tr1(i)=trapz(1:1:nt1,Q(i,:));
Smass1(i)=100*(Tr1(1)-Tr1(i))/Tr1(1);
end
```

```
%-------Special_Force------
thetacr=zeros(1,nt1);
ycr=zeros(1,nt1);
y_cen_cr=zeros(1,nt1);
a=pi/1000:pi/1000:2*pi;
for j=1:1:nt1
[~,k]=min(abs(-
a+sin(a)+(8/Do^(5/3)).*(Q(1,j).^2.*sin(a./2)./g).^(1/3)));
thetacr(1,j)=a(k);
ycr(1,j)=(Do/2).*(1-cos(thetacr(1,j)./2));
y_cen_cr(1,j)=2*Do*(sin(thetacr(1,j)/2))^3./(3*(thetacr(1,j)-
sin(thetacr(1,j))))-Do*cos(thetacr(1,j)/2)/2;
end
y_cen1=2*Do*(sin(thetao/2))^3/(3*(thetao-sin(thetao)))-
Do*cos(thetao/2)/2;
y_cen3=2.*Do.*(sin(theta(1,:)./2)).^3./(3.*(theta(1,:)-
sin(theta(1,:))))-Do.*cos(theta(1,:)./2)./2;
M1=y_cen1*(thetao-sin(thetao))*Do^2/8+Qo1^2/(g*(thetao-
sin(thetao))*Do^2/8);
M3=y_cen3.*A(1,:)+Q(1,:).^2./(g.*A(1,:));
Mcr=y_cen_cr.*(thetacr-
sin(thetacr)).*Do^2./8+Q(1,:).^2./(g.*(thetacr-
sin(thetacr)).*Do.^2./8);
%--------Juction------
y_upstream=zeros(1,nt1);
theta_upstream=zeros(1,nt1);
a=thetao:pi/1000:pi*2;
for j=1:1:nt1
    if M1<Mcr(1,j)
        ycen_a=2.*Do.*(sin(a./2)).^3./(3.*(a-sin(a)))-
Do.*cos(a./2)./2;
        [~,k]=min(abs(((ycen_a.*(Do.^2/8).*(a-
sin(a))+Qo1.^2./(g.*(a-sin(a)).*Do.^2./8)-M3(1,j)))));
        theta_upstream(1,j)=a(k);
        y_upstream(1,j)=(Do/2)*(1-cos(theta_upstream(1,j)/2));
    elseif M1>Mcr(1,j)
        y_upstream(1,j)=yo;
    end
end
%----------plots----------
t=0:Dt:T1;
f1=figure;
plot(t,y_upstream(1,:))
hold on
plot(t,y(1,:))
axis([0 T1 0 max(max(y))+yo])
legend({'Upstream Depth','Downstream
Depth'},'Location','northeast')
title ('Upstream-Downstream Depth')
xlabel ('time(sec)')
ylabel ('Depth(m)')
```

```
grid on
hold off
f2=figure;
plot(t,y(1,:))
hold on
plot(t,y(round(L1/(4*Dx)-1),:))
plot(t,y(round(L1/(2*Dx)-1),:))
plot(t,y(round(3*L1/(4*Dx)-1),:))
plot(t,y(nx1,:))
axis ([0 T1 0 max(max(y(:,:)))+yo]);
title ('Depth-time different intersections')
xlabel ('time(sec)')
ylabel ('Depth(m)')
grid on
hold off
legend({'x=0','x=L/4','x=L/2','x=3L/2','x=L'},'Location','nort
heast')
f3=figure;
plot(t,Q(1,:))
hold on
plot(t,Q(round(L1/(4*Dx)-1),:))
plot(t,Q(round(L1/(2*Dx)-1),:))
plot(t,Q(round(3*L1/(4*Dx)-1),:))
plot(t,Q(nx1,:))
axis ([0 T1 0 max(max(Q(:,:)))+Qo1]);
title ('Discharge-time different intersections')
xlabel ('time(sec)')
ylabel ('discharge(m^3/sec)')
grid on
hold off
legend({'x=0','x=L/4','x=L/2','x=3L/2','x=L'},'Location','nort
heast')
```

Script B.2

```
%------Primary_Rectanqular_Channel-------------
clc; clear;
nt=7200;
Qo=20;
%-------Inputs--------
b=10;
jo=0.001;
n=0.025;
g=9.81;
Qo1=50;
a=0:0.001:10;
[~,k]=min(abs((b.*a).*((b.*a)./(b+2.*a)).^(2/3)-
n*Qo1/(jo^(1/2))));
yo=a(k);
Ao=b*yo;
```

```
Vo=Qo1/Ao;
Co=sqrt(g*yo);
Ro=((b*yo)/(b+2*yo));
clear R1 R  i k
%-----mapping----%
nx1=50; %space nodes
nt1=7200; %time nodes
T1=72000; %time (sec)
L1=20000; %channel length
Dx=L1/(nx1-1); %distance between space nodes
Dt=T1/(nt1-1); % time space between time nodes

%-----matrices------%
A=zeros(nx1,nt1); Q=zeros(nx1,nt1); Je=zeros(nx1,nt1); V=
zeros(nx1,nt1);C=zeros(nx1,nt1);
y=zeros(nx1,nt1);
Cn1=zeros(nx1,nt1);R=zeros(nx1,nt1);Cn2=zeros(nx1,nt1);
D=zeros(nx1,nt1);
Q(:,:)=Qo1;
A(:,:)=Ao;
Je(:,:)=jo;
y(:,:)=yo;
D(:,:)=yo; %ydrauliko bathos
R(:,:)=Ro; %ydraulikh aktina
V(:,:)=Vo;
C(:,:)=Co;

%----input_hydrograph-----%
fileID = fopen('outputhydr10sec.txt','r'); %output hydrograph
of secondary rectanqular channel
Q_input = fscanf(fileID,'%f');
Q_input=Q_input.';
Q(1,1:1:nt)=Q_input+Qo1;
Q(1,nt+1:1:nt1)=Qo+Qo1;
fclose(fileID);
%-----Model Computations-----%
th=Dt/Dx;
a=yo:0.0001:15;
for j=1:1:nt1-1
    for i=1:1:nx1
      if i==1
         %---Linear_Interpolation------
         Vs=(V(i,j)-th*(V(i,j)*C(i+1,j)-V(i+1,j)*C(i,j)))/(1-
th*(V(i,j)-C(i,j)-V(i+1,j)+C(i+1,j)));
         Cs=(C(i,j)+th*Vs*(C(i,j)-C(i+1,j)))/(1+th*(C(i,j)-
C(i+1,j)));
         ys=y(i,j)+th*(Vs-Cs)*(y(i,j)-y(i+1,j));
         Ss=n^2*Vs*abs(Vs)/(b*ys/(b+2*ys))^(4/3);
         Cn=Vs-(g/Cs)*ys+g*Dt*(jo-Ss);
         %-----------------------------
         [~,k]=min(abs(((Q(i,j+1)./(a.*b))-Cn-(g/Cs).*a)));
```

```
          y(i,j+1)=a(k);
          V(i,j+1)=Cn+(g/Cs)*y(i,j+1);
          C(i,j+1)=sqrt(g*y(i,j+1));
          A(i,j+1)=b*y(i,j+1);
          R(i,j+1)=b*y(i,j+1)/(b+2*y(i,j+1));

Je(i,j+1)=(Q(i,j+1)*abs(Q(i,j+1))*n^2)/(A(i,j+1)^2*R(i,j+1)^(4
/3));
          Cn1(i,j+1)=Dt*(abs((V(i,j+1)))+C(i,j+1))/Dx;
          Cn2(i,j+1)=Dt*(abs((V(i,j+1)))-C(i,j+1))/Dx;
            if Cn1(i,j)>1  ||  Cn2(i,j)>1 %Courant Criteria
            disp('unstable_solution')
            end

      elseif i<nx1
          %---Linear_Interpolation------
          Vr=(V(i,j)+th*(V(i-1,j)*C(i,j)-V(i,j)*C(i-
1,j)))/(1+th*(V(i,j)-C(i-1,j)-V(i-1,j)+C(i,j)));
          Cr=(C(i,j)-th*Vr*(C(i,j)-C(i-1,j)))/(1+th*(C(i,j)-
C(i-1,j)));
          yr=y(i,j)-th*(Vr+Cr)*(y(i,j)-y(i-1,j));
          Sr=n^2*Vr*abs(Vr)/(b*yr/(b+2*yr))^(4/3);
          Cp=Vr+(g/Cr)*yr+g*Dt*(jo-Sr);
          Vs=(V(i,j)-th*(V(i,j)*C(i+1,j)-V(i+1,j)*C(i,j)))/(1-
th*(V(i,j)-C(i,j)-V(i+1,j)+C(i+1,j)));
          Cs=(C(i,j)+th*Vs*(C(i,j)-C(i+1,j)))/(1+th*(C(i,j)-
C(i+1,j)));
          ys=y(i,j)+th*(Vs-Cs)*(y(i,j)-y(i+1,j));
          Ss=n^2*Vs*abs(Vs)/(b*ys/(b+2*ys))^(4/3);
          Cn=Vs-(g/Cs)*ys+g*Dt*(jo-Ss);
          %-----------------------------
          y(i,j+1)=(Cp-Cn)/((g/Cr)+(g/Cs));
          V(i,j+1)=Cp-(g/Cr)*y(i,j+1);
          C(i,j+1)=sqrt(g*y(i,j+1));
          A(i,j+1)=b*y(i,j+1);
          Q(i,j+1)=V(i,j+1)*A(i,j+1);
          R(i,j+1)=b*y(i,j+1)/(b+2*y(i,j+1));

Je(i,j+1)=(Q(i,j+1)*abs(Q(i,j+1))*n^2)/(A(i,j+1)^2*R(i,j+1)^(4
/3));
          Cn1(i,j+1)=Dt*(abs((V(i,j+1)))+C(i,j+1))/Dx;
          Cn2(i,j+1)=Dt*(abs((V(i,j+1)))-C(i,j+1))/Dx;
            if Cn1(i,j)>1  ||  Cn2(i,j)>1 %Courant Criteria
            disp('unstable_solution')
            end
      elseif i==nx1
          %---Linear_Interpolation------
          Vr=(V(i,j)+th*(V(i-1,j)*C(i,j)-V(i,j)*C(i-
1,j)))/(1+th*(V(i,j)-C(i-1,j)-V(i-1,j)+C(i,j)));
          Cr=(C(i,j)-th*Vr*(C(i,j)-C(i-1,j)))/(1+th*(C(i,j)-
C(i-1,j)));
```

```
            yr=y(i,j)-th*(Vr+Cr)*(y(i,j)-y(i-1,j));
            Sr=n^2*Vr*abs(Vr)/(b*yr/(b+2*yr))^(4/3);
            Cp=Vr+(g/Cr)*yr+g*Dt*(jo-Sr);
            %-------------------------------
            [~,k]=min(abs((jo^(1/2)/n).*(b.*a./(b+2.*a)).^(2/3)-
Cp+(g./Cr).*a));
            y(i,j+1)=a(k);
            V(i,j+1)=Cp-(g/Cr)*y(i,j+1);
            C(i,j+1)=sqrt(g*y(i,j+1));
            A(i,j+1)=b*y(i,j+1);
            Q(i,j+1)=V(i,j+1)*A(i,j+1);
            R(i,j+1)=b*y(i,j+1)/(b+2*y(i,j+1));
            Je(i,j+1)=jo;
            Cn1(i,j+1)=Dt*(abs((V(i,j+1)))+C(i,j+1))/Dx;
            Cn2(i,j+1)=Dt*(abs((V(i,j+1)))-C(i,j+1))/Dx;
              if Cn1(i,j)>1  ||  Cn2(i,j)>1 %Courant Criteria
              disp('unstable_solution')
              end
        end
      end
end
Tr1=zeros(nx1,0);Smass1=zeros(nx1,0);
for i=1:1:nx1
Tr1(i)=trapz(1:1:nt1,Q(i,:));
Smass1(i)=100*(Tr1(1)-Tr1(i))/Tr1(1);
end
%----Special_Force----
M1=(1/2)*b*yo^2+Qo1^2/(g*b*yo);
M3=(1/2).*b.*y(1,:).^2+Q(1,:).^2./(g.*b.*y(1,:));
ycr=((Q(1,:)./b).^2.*(1./g)).^(1/3);
Mcr=(3/2)*b.*ycr.^2;
y_upstream=zeros(1,nt1);
%--------Juction------
a=min(ycr(1,:)):0.0001:25;
for j=1:1:nt1
    if M1<Mcr(1,j)
        [~,k]=min(abs(((1/2).*b.*a.^2+Qo1.^2./(g.*b.*a)-
M3(1,j))));
        y_upstream(1,j)=a(k);
    elseif M1>Mcr(1,j)
        y_upstream(1,j)=yo;
    end
end
t=0:Dt:T1;
%--------plots--------
f1=figure;
plot(t,y_upstream(1,:))
hold on
plot(t,y(1,:))
axis([0 T1 0 max(max(y))+yo])
```

```
legend({'Upstream Depth','Downstream
Depth'},'Location','northeast')
title ('Upstream-Downstream Depth')
xlabel ('time(sec)')
ylabel ('Depth(m)')
grid on
hold off
f2=figure;
plot(t,y(1,:))
hold on
plot(t,y(round(L1/(4*Dx)-1),:))
plot(t,y(round(L1/(2*Dx)-1),:))
plot(t,y(round(3*L1/(4*Dx)-1),:))
plot(t,y(nx1,:))
axis ([0 T1 0 max(max(y(:,:)))+yo]);
title ('Depth-time different intersections')
xlabel ('time(sec)')
ylabel ('Depth(m)')
grid on
hold off
legend({'x=0','x=L/4','x=L/2','x=3L/2','x=L'},'Location','nort
heast')
f3=figure;
plot(t,Q(1,:))
hold on
plot(t,Q(round(L1/(4*Dx)-1),:))
plot(t,Q(round(L1/(2*Dx)-1),:))
plot(t,Q(round(3*L1/(4*Dx)-1),:))
plot(t,Q(nx1,:))
axis ([0 T1 0 max(max(Q(:,:)))+Qo1]);
title ('Discharge-time different intersections')
xlabel ('time(sec)')
ylabel ('discharge(m^3/sec)')
grid on
hold off
legend({'x=0','x=L/4','x=L/2','x=3L/2','x=L'},'Location','nort
heast')
```